გელა ყიფიანი, ბიძინა აბესაძე,
გოჩა ბაძგარაძე, ედიშერ მაჩაიძე,
ბადრი ჭურჭელაური

თეორიული მექანიკა

ნივთიერი წერტილის დინამიკა

კონსპექტი

ტომი 3

გელა ყიფიანი, ბიძინა აბესაძე, გოჩა ბაძგარაძე, ედიშერ მაჩაიძე, ბადრი ჭურჭელაური

თეორიული მექანიკა

ნივთიერი წერტილის დინამიკა

ტომი 3

გამომცემლობა „უნივერსალი"
თბილისი 2023

უაკ 531 (076.5)(075.8)

სახელმძღვანელო შეიცავს ნივთიერი წერტილის დინამიკის ტიპიურ ამოცანებს ამოხსნებით, რომლებიც აღებულია ი. ვ. მეშჩერსკის საკმაოდ გავრცელებული ამოცანათა კრებულიდან (§ 26- 33). ყოველი პარაგრაფის დასაწყისში მოყვანილია ძირითადი დებულებები და მეთოდური მითითებები, რომლებიც გამოიყენება ამოცანების ამოხსნისას. ამოხსნები მოცემულია დაწვრილებითი ახსნა-განმარტებებით.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ წინამდებარე კრებულში დინამიკის ამოცანების ამოხსნების პროცესში ინტენსიურადაა გამოყენებული უმაღლესი მათემატიკის ისეთი ფუნდამენტური საკითხები, როგორიცაა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, წრფივი დიფერენციალური განტოლებები და სხვ. უმაღლესი მათემატიკიდან ამ საკითხების ცოდნის გარეშე შეუძლებელია ამოცანების ამოხსნების პროცესის სრულყოფილად გაცნობიერება.

სახელმძღვანელო გათვალისწინებულია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლებისა და უნივერსიტეტების საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტების სტუდენტებისა და მასწავლებლებისათვის, აგრეთვე, თეორიული მექანიკის დამოუკიდებლად შემსწავლელთათვის.

წიგნი იბეჭდება (ააიპ) "განათლებისა და მეცნიერების პროგრესი"-ს ხელშეწყობით.

*პროფესორ **გელა ყიფიანის** საერთო რედაქციით.*

რეცენზენტები: პროფესორი **გიორგი ჯაიანი**
პროფესორი **ტარიელ კვიციანი**
პროფესორი **ომარ კიკვიძე**
პროფესორი **თამაზ ობგაძე**

გამომცემლობა „უნივერსალი", 2023

თბილისი, 0186, ა. პოლიტკოვსკაიას №4, ☎: 5(99) 17 22 30; 5(99) 33 52 02
E-mail: universal505@ymail.com; gamomcemlobauniversali@gmail.com

ISBN 978-9941-33-543-3,
ISBN 978-9941-33-546-4

წინასიტყვაობა

თეორიული მექანიკა არის მეცნიერების დარგი, რომელიც სწავლობს ნივთიერი სხეულების მექანიკურ მოძრაობას და ადგენს ამ მოძრაობის ზოგად კანონებს.

თეორიული მექანიკა თავისი საფუძვლებიდანვე მჭიდროდ არის დაკავშირებული ტექნიკასთან. იგი იქმნებოდა და ვითარდებოდა ტექნიკის განვითარებასთან ერთად. ტექნიკის განვითარება სულ ახალ-ახალ ამოცანებს აყენებდა მექანიკის წინაშე, რაც ხელს უწყობდა თვით მექანიკის განვითარებას. თავის მხრივ, მექანიკაც დიდ ზეგავლენას ახდენდა და ხელს უწყობდა ტექნიკურ პროგრესს.

თეორიული მექანიკა არის ერთ-ერთი ის ფუნდამენტური საგანი, რომელზეც დაფუძნებულია თანამედროვე ტექნიკის ყველა დარგი.

თეორიულ მექანიკას ერთ-ერთი წამყვანი ადგილი უკავია და წარმოადგენს თეორიულ ბაზას ისეთი ტექნიკური საგნებისათვის, როფორიცაა მასალათა გამძლეობა, მექანიზმებისა და მანქანების თეორია, დრეკადობისა და პლასტიკურობის თეორია, სამშენებლო მექანიკა, ჰიდროაერომექანიკა და მრავალი სხვ.

როგორც ყოველ მეცნერებას, თეორიულ მექანიკასაც კვლევის საფუძვლად უდევს დაკვირვება, ცდა, პრაქტიკა. თეორიულ მექანიკაში ფართოდ გამოიყენება მათემატიკური მეთოდები, აბსტრაქტული (განყენებული) ცნებები, მოვლენათა მოდელები, ლოგიკის კანონები.

თეორიულ მექანიკაში შემოღებული თითქმის ყველა საწყისი ცნება არსებითად წარმოადგენს გარკვეულ აბსტრაქციას ან მოდელს. მათი შემოღებისას გათვალისწინებულია ის ძირითადი, განმსაზღვრელი, რაც არსებითია განსახილველ მექანიკურ მოძრაობაში. ასე, მაგალითად, რეალური ნივთიერი სხეულის მაგივრად მექანიკაში განიხილავენ მის ისეთ აბსტრაქტულ მოდელს, როგორიცაა ნივთიერი წერტილი, აბსოლუტურად მყარი სხეული და სხვ. მხოლოდ ასეთ მოდელებზე აგებული მექანიკისათვის შეიძლება შემუშავდეს ის მეთოდები, რომლებიც საშუალებას იძლევიან შევისწავლოთ რეალური ობიექტების მოძრაობა. შემდეგ მიღებული თეორიული შედეგები მოწმდება ცდით, პრაქტიკით.

თეორიული მექანიკის საკითხები ცნობილია უძველესი დროიდან. ჯერ კიდევ არისტოტელე (IV ს. ჩვ. ერ-დე) იცნობდა თეორიული მექანიკის ზოგიერთ კანონს. მასვე ეკუთვნის საგნის სახელწოდების - „მექანიკის" – შემოღებაც. მექანიკის კანონების დასადგენად მათემატიკური კანონების გამოყენებას ყველაზე ადრე ბერძენმა *არქიმედემ* (287-212 ჩვ. ერ-დე) მიმართა. მექანიკის სწრაფი განვითარება იწყება აღორძინების ხანაში. იგი დაკავშირებულია იტალიელ *ლეონარდო და ვინჩის* (1452- 1519), პოლონელი *ნიკოლოზ კოპერნიკის* (1473-1543), გერმანელი *იოჰან კეპლერის* (1571-1630) და სხვათა სახელებთან. ამ მეცნიერების მიერ მიღებულმა შედეგებმა მოამზადეს საფუძველი მექანიკის, როგორც მეცნიერების, შემდგომი წინსვლისათვის. დინამიკის, როგორც მეცნიერების, შექმნაში დიდი წვლილი მიუძღვის იტალიელ მეცნიერს *გალილეო გალილეის* (1564-1642). კლასიკური მექანიკის საფუძვლები ჩამოაყალიბა და სისტემატურად დაამუშავა ინგლისელმა მეცნიერმა *ისააკ ნიუტონმა* (1643-1727), რომელმაც თავის წიგნში „ნატურალური ფილოსოფიის მათემატიკური საწყისები" მოგვცა კლასიკური მექანიკის ძირითადი კანონები.

XVIII ს-ის თეორიული მექანიკის განვითარება ხასიათდება ორი ძირითადი თვისებით: *პირველია* მისი მათემატიზაცია: მექანიკის ყველა კანონი და ძირითადი დებულება გამოჰყავდათ მათემატიკური ანალიზის მეთოდით. *ჟოზეფ-ლუი ლაგრანჟი* (1736- 1813) იმასაც კი ამტკიცებდა, რომ მისი მექანიკა წარმოადგენს მათემატიკური ანალიზის ახალ თავს. *მეორეც*, ძირითადი დებულებები ფიზიკურად არ ზუსტდებოდა: რა არის ძალა – განუსაზღვრელი რჩებოდა, გარს უვლიდნენ ამ ცნებას; ზმები ჩათვლილი იყო იდეალურად; საყრდენი ზედაპირები – ხახუნის გარეშე; ღერო და თოკი – უწონადი.

მექანიკის საკითხების შესწავლა ანალიზური მეთოდების გამოყენებით დაიწყო შვეიცარიელმა *ლეონარდ ეილერმა* (1707- 1783). მექანიკის შემდგომ განვითარებაში დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა ფრანგი მეცნიერების *ჟან ლეონ დალამბერის* (1717-1783) ნაშრომს

„ტრაქტატი დინამიკაში" და *ლუი ლაგრანჟის* ნაშრომს „ანალიზური მექნიკა".

განსაკუთრებით აღსანიშნავია ლაგრანჟის ნაშრომი გადმოცემის ორიგინალობითა და მეთოდების ერთიანობით. ამ ნაშრომის შესავალში *ლაგრანჟი წერს: „უკვე არსებობს მრავალი ტრაქტატი მექანიკაში, მაგრამ ჩემი ტრაქტატი სრულიად ახალია. მე მიზნად დავისახე მექანიკის თეორია და მასთან დკავშირებული ამოცანების ამოხსნის მეთოდები მივიყვანო საერთო ფორმულებზე, რომლის მარტივი გაფართოება იძლევა ყველა იმ ფორმულას, რომელიც საჭიროა თითოეული ამოცანის ამოსახსნელად".* ლაგრანჟმა შექმნა ანალიზური მექანიკის მწყობრი სისტემა.

უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში თეორიული მექანიკა ტექნიკური საგნების უშუალო დასაყრდენია. ამავე დროს ცნობილია, რომ თავისი სპეციფიკურობის და სირთულეების გამო ზოგადად თეორიული მექანიკის, განსაკუთრებით კი მისი პრაქტიკული ნაწილის შესწავლა საკმაოდ რთულია; რამდენადაც ამ საგნის თეორემების დაზეპირება შესაძლებელია, იმდენად ძნელია მათი გამოყენება პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად.

ამას ემატება უმაღლეს სასწავლებლებში სასწავლო კურსისათვის გამოყოფილი საათების რაოდენობის სიმცირე. ამ სიძნელეთა გადალახვა შესალებელია, თუ შეიქმნება მექანიკაში ამოხსნილი ამოცანებით ისეთი ტიპის სახელმძღვანელო, რომელიც შუალედური და დამაკავშირებელი იქნება საგნის თეორიულ კურსსა და ამოცანათა კრებულს შორის და რომელიც დაეხმარება დაინტერესებულ პირებს თეორიული მექანიკის ამოცანების ამოხსნის მეთოდების გამომუშავებაში.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ წინამდებარე კრებულში დინამიკის ამოცანების ამოხსნების პროცესში ინტენსიურადაა გამოყენებული უმაღლესი მათემატიკის ისეთი ფუნდამენტური საკითხები, როგორიცაა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენ- ციალური განტოლებები და სხვ. უმაღლესი მათემატიკიდან ამ საკითხების ცოდნის გარეშე შეუძლებელია ამოცანების ამოხსნების პროცესის სრულყოფილად გაცნობიერება.

თეორიული მექანიკის შესასწავლად დიდი მნიშვნელობა აქვს სტუდენტების მიერ თეორიის საკითხებთან ერთად პრაქტიკული ამოცანების დამოუკიდებლად ამოხსნის დაუფლებას. სწორედ ამ ამოცანას ემსახურება ამ კრებულში შეტანილი მეთოდური მითითებები.

წინამდებარე კრებულში წარმოდგენილია ამოცანები, რომლებიც საკმაოდ ასახავენ უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში თანამედროვე სასწავლო პროგრამებით გათვალისწინებუილ თემატიკას. ყოველ თემაზე კრებულში მოყვანილია ამოცანის დაწვრილებითი ამოხსნა საჭირო მეთოდური მითითებებით.

ყოველი თემის დასაწყისში მოკლედ ჩამოყალიბებულია თეორიის ძირითადი საკითხები და მოცემულია შესაბამისი ფორმულები. მოცანის გარჩევამდე და ამოხსნის დაწყებამდე საჭიროა სტუდენტმა აუცილებლად შეისწავლოს თეორიული კურსის შესაბამისი საკითხები, ვინაიდან ამ კრებულში მოყვანილი მოკლე თეორიული ცნობები ვერ შეცვლიან თეორიულ სახელმძღვანელოს. სასურველია ამოცანების ამოხსნა წარმოებდეს რეკომენდებული მიმდევრობით და გათვალიწინებული იქნეს შესაბამისი მეთოდური მითითებები.

უკანასკნელ ათწლეულებში მნიშვნელოვნად გაიზარდა ამოხსნილი ამოცანების კრებულების გამოცემათა რაოდენობა ფიზიკაში, მათემატიკაში და მექანიკაში უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის. ეს განპირობებულია ბაზის შექმნის აუცილებლობაზე დამოუკიდებელი მუშაობისას გრაფიკული გაანგარიშებისა და საკონტროლო სამუშაოებისათვის დროის შემცირების გამო. მექანიკის მრავალი დარგის ამოცანა, რომელთა ამოხსნა მოითხოვს დიდი დროის დახარჯვას, არ შეიძლება დეტალური განხილვის გარეშე საჭირო ხარისხით დამუშავდეს პრაქტიკულ მეცადინეობაზე, რის შედეგადაც შეუძლებელი ხდება თეორიული მექანიკისა და მთლიანად მისი ცალკეული განყოფილებების რთული მასალის ათვისება

დინამიკა წარმოადგენს თეორიული მექანიკის ყველაზე უფრო რთულ ნაწილს. ნივთიერი წერტილის დინამიკას აქვს პირველსაწყისი მნიშვნელობა ნიუტონის ვექტორული დინამიკის გასაგებად,

ვინაიდან მასში თვალსაჩინოდ განიხილება მექანიკის ძირითადი თეორემების გამოყენება. მყარი სხეულის მექანიკა, მისი მოდელები, პრინციპები, კანონები წარმოადგენენ ყველა მიმართულების ინჟინრების მომზადების ფუნდამენტს, განსაკუთრებით მანქანათმშენებლობის, ხელსაწყოთმშე- ნებლობის, სამშენებლო და ენერგეტიკის სპეციალისტებისათვის. მოცემული განყოფილების ამოცანები უმეტესწილად შეესაბამებიან იმ ამოცანებს, რომლების ამოხსნაც უხდებათ ინჟინრებს მათი პრაქტიკული მოღვაწეობისას. სასწავლო მასალის ათვისების ხარისხი უშუალოდ დამოკიდებულია ამოხსნილი ამოცანების რაოდენობაზე და მრავალსახეობაზე.

ი.ვ. მეშჩერსკის ამოცანათა კრებული წარმოადგენს საკმაოდ ცნობილ დამხმარე სასწავლო სახელმძღვნელოს თეორიულ მექანიკაში, რომელმაც გაუძლო ათეულობით გამოცემას მსოფლიოს მრავალ ქვეყანაში, რომლებიც დღესაც ფართოდ გამოიყენება ტექნიკური განხრის უმაღლეს სასწავლო დაწესებულებებში. ამ კრებულის პირველი დამხმარე სახელმძღვანელო ამოხსნილი ამოცანებით გამოცემული იქნა 1963 წელს გერმანიაში (H. Neuber, Losungen zur Aufgabensammlung Mestscherski, 1963, DVW, 465 S.). თუმცა შემდგომ კრებული მრავალჯერ ხელახლა გამოიცა, ამასთანავე ის სწორდებოდა და ივსებოდა.

შემოთავაზებულ დამხმარე სახელმძღვანელოში მოცემულია ყველა ამოცანის ამოხსნა ი. ვ. მეშჩერსკის კრებულის „დინამიკის" განყოფილებიდან (Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике/ И. В. Мещерский, 36-е изд., испр. М.: Наука, 1986). აგრეთვე ქართულ ენაზე თარგმნილი: ი.ვ. მეშჩერსკი, „თეორიული მექანიკის ამოცანათა კრებული", თბილისი, 1963. წინამდებარე დამხმარე სახელმძღვანელოს პირველი ნაწილი შეიცავს „ნივთიერი წერტილის დინამიკის" **IX** თავის ამოცანებს (§ 26-33). ამოცანების ამოხსნა მოყვანილია დაწვრილებითი ახსნა-განმარტებით, რაც განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. ყოველი პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულია ძირითადი თეორიული დებულებები და მეთოდური მითითებები დაწვრილები-

თი ახსნა-განმარტებით. როგორც წესი, ამოხსნას თან სდევს ნახაზი, რომელზეც მითითებულია მოქმედი ძალა, სიჩქარე, აჩქარება.

აღსანიშნავია, ავტორთა ჯგუფის სხვადასხვა უნივერსიტეტებში „თეორიული მექანიკის" კურსის სწავლების დიდი გამოცდილება. ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში, ნ. მუსხელიშვილის სახელობის ქუთაისის პოლიტექნიკურ ინსტიტუტში, ა. წერეთლის სახელობის ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, ი. გოგებაშვილი სახელობის თელავის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტში, დავით აღმაშენებლის სახელობის საქართველოს ეროვნული თავდაცვის აკადემიაში, საქართველოს აგრარულ უნივესრიტეტში, ბათუმის სახელმწიფო საზღვაო აკადემიაში, მ. ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, ლენინგრადის სამშენებლო საინჟინრო ინსტიტუტში, ნ. ბაუმანის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო ტექნიკურ უნივერსიტეტში, სანკტ-პეტერბურგის სახელმწიფო არქიტექტურულ-სამშენებლო უნივერსიტეტში, ვლადიმირის სახელმწიფო უნივერსიტეტში.

ავტორები მადლიერების გრძნობით არიან გამსჭვალულნი რეცენზენტების: ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკის კათედრის გამგეს, ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის დირექტორს, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორს, პროფესორ **გიორგი ჯაიანს**, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის საინჟინრო მექანიკისა და მშენებლობის ტექნიკური ექსპერტიზის დეპარტამენტის უფროსს, პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორს, ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორს პროფესორ **ტარიელ კვიციანს**, ა. წერეთლის სახელობის ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამოყენებითი მექანიკის დეპარტამენტის უფროსს, ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორს, პროფესორ **ომარ კიკვიძეს,** საქართველოს ეროვნული უნივერსიტეტის პროფესორს ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორს, **თამაზ ობგაძეს**. რომელთა საქმიანმა შენიშვნებმა და მითითებებმა სრულყო წიგნი.

ავტორები აგრეთვე მადლიერნი არიან ქალბატონ **თინათინ მაღრაძის,** გამომცემლობა „უნივერსალი"-ს დირექტორის ბატონ

გოჩა ხარებავას ხელმძღვანელობით, რომელთა თავდაუზოგავი შრომის შედეგად სრულყოფილ იქნა სახელმძღვანელო. შემოთავაზებული დამხმარე სახელმძღვანელო დაგეხმარებათ პრაქტიკული მეცადინეობის ჩატარების მეთოდიკის სრულყოფაში. პროფესორს შეუძლია შესთავაზოს სტუდენტებს გარკვეულ თემაზე პრაქტიკული მეცადინეობისათვის მზადებისას დამოუკიდებლად გაეცნოს ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნას, ხოლო შემდეგ მეცადინეობის პროცესში ამოხსნას ანალოგიური ამოცანები.

წინამდებარე სახელმძღვანელო კრებული ავტორთა პირველი მოკრძალებული ცდაა. ამიტომ, მკითხველის ყოველი საფუძვლიანი შენიშვნა და წინადადება მადლიერებით იქნება გათვალისწინებული ავტორებისაგან.

რედაქტორი პროფესორი გელა ყიფიანი
E-Mail: gelakip@gmail.com; g.kipiani@gtu.ge
☎ 599106263, 591801188

IX. ᲜᲘᲕᲗᲘᲔᲠᲘ ᲬᲔᲠᲢᲘᲚᲘᲡ ᲓᲘᲜᲐᲛᲘᲙᲐ

შესავალი

დინამიკა – თეორიული მექანიკის ნაწილი, რომელშიც შეისწავლება ნივთიერი წერტილის (სხეულის) მოძრაობა მასზე მოდებული ძალების მოქმედებისას.

ნივთიერი წერტილი – ნ ი ვ თ ი ე რ ი წ ე რ ტ ი ლ ი ეწოდება სხეულს, რომელსაც გააჩნია მასა და რომლის განზომილებები მოცემულ შემთხვევაში შეიძლება უგულებელვყოთ. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობისას, როგორი განზომილებისაც არ უნდა იყოს, იგი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნივთიერი წერტილი, რადგანაც ამ შემთხვევაში სხეულის ყველა წერტილისათვის ტრაექტორია, სიჩქარეები და აჩქარებები ერთნაირია.

სხეულის მასა – ეს არის სიდიდე, რომელიც დამოკიდებულია მოცემულ სხეულში მოთავსებული ნივთიერების რაოდენობაზე და განსაზღვრავს მის ინერტიულობის ზომას წარმტანი (წინსვლითი) მოძრაობისას.

განვიხილოთ ნივთიერი წერტილის დინამიკის კანონები რომლებიც ცნობილია როგორც გალილეი-ნიუტონის კანონები.

პირველი კანონი (ინერციის კანონი):

გარეშე ზემოქმედებისაგან თავისუფალი (იზოლირებული) ნივთიერი წერტილი ინარჩუნებს თავის უძრავ მდგომარეობას ან მოძრაობს წრფივად და თანაბრად მანამდის, სანამ ამ მდგომარეობიდან არ გამოიყვანს მასზე მოდებული ძალები.

ეს კანონი 1638 წ-ს დაადგინა გ. გალილეიმ.

ინერციის კანონი ასეც გამოითქმის: *იზოლირებული ნივთიერი წერტილი ან უძრავია, ან მოძრაობს წრფივად და თანაბრად.*

წერტილის მოძრაობას ძალების გარეშე, ან ძალთა გაწონასწორებული სისტემის მოქმედებით, ეწოდება **ინერციული მოძრაობა.**

მეორე კანონი (დინამიკის ძირითადი კანონი):

ნივთიერ წერტილზე მოქმედი ძალა მას ანიჭებს აჩქარებას, რომელსაც ძალის მიმართულება აქვს და სიდიდით ძალის მოდულის პროპორციულია.

მათემატიკურად ეს კანონი ვექტორული სახით ასე ჩაიწერება:

$$m\vec{a} = \vec{F}\ . \qquad \text{(IX.1)}$$

ეს ტოლობა სამართლიანია სკალარულადაც:

$$m\ a\ =\ F.$$

მეორე კანონი ი. ნიუტონმა დაადგინა.

დინამიკის როგორც პირველი, ასევე მეორე კანონი სრულდება (ანუ ადგილი აქვს) მხოლოდ ათვლის ინერციული სისტემის მიმართ, რომელიც პირობითად მიღებულია უძრავ სისტემად.

მესამე კანონი (ქმედებისა და უკუქმედების ტოლობა):

ყოველი ორი ნივთიერი წერტილი (სხეული) ერთმანეთზე მოქმედებენ ძალებით, რომლებიც სიდიდით ტოლნი არიან, მდებარეობენ ერთ წრფეზე და ურთიერთსაწინააღმდეგოდ არიან მიმართულნი.

ორი ნივთიერი სხეულის ურთიერთმოქმედების ამ კანონს განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს მექანიკური სისტემის დინამიკაში. ამიტომ, ეს კანონი ასეც შეიძლება ჩამოყალიბდეს: *ერთი სხეულის მეორე სხეულზე ყოველგვარ მოქმედებას შეესაბამება სიდიდით ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული უკუქმედება.*

მეოთხე კანონი (ძალების მოქმედების დამოუკიდებლობის კანონი): *თუ ნივთიერ წერტილზე ერთდროულად მოქმედებს რამდენიმე ძალა, მაშინ ამ წერტილის აჩქარება ტოლია იმ აჩქარებათა გეომეტრიული ჯამისა, რომელსაც ეს წერტილი იღებს თითოეული ამ ძალის მოქმედებით ცალ-ცალკე.*

ვინაიდან წერტილზე ერთდროულად მოქმედი რამდენიმე ძალა შეიძლება შევცვალოთ ერთი ტოლქმედი ძალით $\vec{R} = \Sigma \vec{F}_k$, ამიტომ, ეს კანონი შეიძლება ჩაიწეროს ასეთი სახით

$$m\vec{a} = \vec{R} = \Sigma \vec{F}_k. \qquad \text{(IX.2)}$$

დინამიკის ამოცანების ამოხსნისას მნიშვნელოვანია დავიცვათ ძირითადი მექანიკური სიდიდეების განზომილებები, ისეთი, როგორიცა სიგრძე, დრო, მასა და ძალა.

ჩვეულებრივ იყენებენ СИ ერთეულებს, რომლებშიც მექანიკური სიდიდეების ძირითადი ერთეულებია: მეტრი (მ), კილოგრამი (კგ) და წამი (წმ). ძალის განზომილებად მიღებულია წარმოებული ერთეული – ნიუტონი (ნ). ერთი ნ ძალა – ეს არის ძალა, რომელიც 1 კგ მასის სხეულს ანიჭებს 1 მ/წმ^2 აჩქარებას; 1 ნ = 1 კგ·მ/წმ^2.

თუ (IX.1) ან (IX.2) განტოლებას ჩავწერთ დეკარტის 0xyz კოორდიონატთა ღერძებზე ან ბუნებრივ სამწახნაგას ღერძებზე (მთავარი ნორმალის n, მხებისა τ და ბინორმალის b) გეგმილებში, მივიღებთ შემდეგ სკალარულ განტოლებებს:

კოორდინატთა x, y, z ღერძებზე დაგეგმილებისას:

$$\begin{aligned} m a_x &= mx'' = \Sigma F_{kx}, \\ m a_y &= my'' = \Sigma F_{ky}, \qquad \text{(IX.3)} \\ m a_z &= mz'' = \Sigma F_{kz}. \end{aligned}$$

კოორდინატთა n, τ, b ღერძებზე დაგეგმილებისას:

$$\begin{aligned} m a_n &= m\frac{v^2}{\rho} = \Sigma F_{kn}, \\ m a_\tau &= m\frac{dv}{dt} = \Sigma F_{k\tau}, \qquad \text{(IX.4)} \\ m a_b &= m \cdot 0 = \Sigma F_{kb}. \end{aligned}$$

(IX.3) და (IX.4) განტოლებების ანალიზის შედეგად, შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ *ნივთიერი წერტილის დინამიკის ორი ძირითადი ამოცანა*:

პირველი (ძირითადი) ამოცანა – *ვიცით რა წერტილის მასა და მოძრაობის კანონი, განვსაზღვროთ წერტილზე მოქმედი ძალა*;

მეორე (შებრუნებული) ამოცანა – *ვიცით რა წერტილზე მოქმედი ძალა, მასა და მოძრაობის საწყისი პირობები, განვსაზღვროთ წერტილის მოძრაობის კანონი ან სხვა რომელიმე კინემატიკური მახასიათებელი.*

ამ ტიპის ამოცანები შესაბამისად განხილულია §26 და §27 პარაგრაფებში.

26. ძალის განსაზღვრა მოცემული მოძრაობით

მეთოდური მითითებანი ამოცანების ამოსახსნელად

ამ ტიპის ამოცანებში ჩვეულებრივ მოცემულია ან აჩქარება, ან წერტილის მოძრაობის კანონი, რომლის შესაბამისადაც შეიძლება განისაზღვროს აჩქარება.

მაგალითად, თუ წერტილის მოძრაობა მოცემულია დეკარტის კოორდინატებში, ანუ $x = f_1(t)$, $y=f_2(t)$ და $z=f_3(t)$, მაშინ განისაზღვრება აჩქარების გაგმილები კოორდინატთა ღერძებზე:

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad y''=\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad z''=\frac{d^2z}{dt^2},$$

ხოლო, შემდეგ – ძალის გეგმილები ამავე ღერძებზე:

$$F_x=mx'',\ F_y=my'',\ F_z=mz''. \qquad (26.1)$$

ძალის სიდიდე განისაზღვრება ფორმულით

$$F = \sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}\ . \qquad (26.2)$$

თუ წერტილი ასრულებს მრუდწირულ მოძრაობას და ცნობილია მოძრაობის კანონი $s = f(t)$, წერტილის ტრაექტორია და მისი სიმრუდის რადიუსი, მაშინ მოხერხებულია (IX.4) განტოლებებით სარგებლობა, ხოლო აჩქარების გეგმილები ამ ღერძებზე განისაზღვრება ფორმულებით:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \ \text{- მხები აჩქარება,}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho} \ \text{- ნორმალური აჩქარება,}$$

სადაც, ρ - ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსია.

აჩქარების გეგმილი ბინორმალზე ნულის ტოლია $a_b = 0$.

ძალის გეგმილები τ და n ღერძებზე ასეთია:

$$F_\tau = m\frac{dv}{dt},$$

$$F_n = m\frac{v^2}{\rho}. \qquad (26.3)$$

ძალის სიდიდე განისაზღვრება ფორმულით

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}\ . \qquad (26.4)$$

ასევე შეგვიძლია განვსაზღვროთ წერტილის აჩქარება, თუ მოცემულია მოძრაობის დრო t, წერტილის მიერ განვლილი გზა s, ან საბოლოო სიჩქარე თანაბარი მოძრაობისას.

წრფივი მოძრაობის შემთხვევაში

$$a_{\tau} = a, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{\infty} = 0,$$

ხოლო, ვინაიდან $s = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$.

$$v = v_0 + at \qquad (26.5)$$

ამიტომ, იმ პირობით, თუ საწყისი სიჩქარე $v_0 = 0$, აჩქარება შეიძლება გამოითვალოს ფორმულით

$$a = \frac{v} {t} \qquad a = \frac{2s}{t^2}, \qquad (26.6)$$

უმრავლეს ამოცანებში წერტილის მოძრაობა არათავისუფალია, ამიტომ მათი ამოხსნისას აუცილებელია ბმისაგან განთავისუფლების პრინციპის შესაბამისად უკუვაგდოთ წერტილზე დადებული ბმა და იგი შევცვალოთ ბმის რეაქციით და განვიხილოთ წერტილი, როგორც თავისუფალი.

მაშინ, დინამიკის მეორე კანონი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k^a + \vec{N}, \qquad (26.7)$$

სადაც $\sum \vec{F}_k^a$ – წერტილზე მოქმედი აქტიური ძალების ჯამია; $\vec{N}$ - ბმის რეაქცია.

თუ ამ განტოლებას ჩავწერთ დეკარტის კოორდინატთა სისტემის ან ბუნებრივ კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე გაგმილებში, მაშინ შეიძლება განვსაზღვროთ N ძალა.

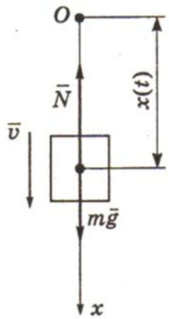
ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანამიმდევრობა:

1. განვსაზღვრავთ მოძრაობის ობიექტს, ე.ი. რომელი სხეულის ან წერტილის მოძრაობაა განსახილველი.
2. ავირჩიოთ სისტემის ღერძები. ამასთანავე ღერძები (ან ღერძი) მივმართოთ სხეულის მოძრაობის მხარეს.
3. ნახაზზე გამოვსახოთ მოძრაობის ობიექტი ათვლის არჩეულ სისტემაში შუალედურ მდებარეობაში და სხეულზე მოქმედი ყველა ძალა, რეაქციის ძალის ჩათვლით.
4. ჩავწეროთ დინამიკის მეორე კანონი ვექტორული სახით და არჩეულ ღერძებზე (ან ერთ ღერძზე) გეგმილებში.
5. ზემოთ მოყვანილი მითითებების შესაბამისად განვსაზღვროთ სხეულის (წერტილის) მოძრაობის აჩქარება, თუ იგი არ არის მოცემული.
6. ვიპოვოთ საძებნი სიდიდეები ზოგადი სახით, ხოლო შემდეგ ჩავსვათ რიცხვითი მნიშვნელობანი.

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 26. 1

შახტში თანაბარაჩქარებულად ეშვება 280 კგ მასის ლიფტი. პირველ 10 წ-ში გადის 35 მ-ს. განსაზღვრეთ ბაგირის დაჭიმულობა, რომელზეც ლიფტია დაკიდებული.



ა მ ო ხ ს ნ ა: რადგანაც ლიფტი ასრულებს წრფივ მოძრაობას, ამიტომ x ღერძი მივმართოთ მოძრაობის მიმართულებით (ათვლის საწყისია 0 წერტილი). გამოვსახოთ ლიფტი შუალედურ მდებარეობაში და გამოვსახოთ ნახაზზე მასზე მოქმედი ძალები: m$\vec{g}$ – სიმძიმის ძალა, $\vec{N}$ – ბაგირის დაჭიმულობა. ჩავწეროთ მოძრაობის განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - N. \qquad (1)$$

(1) ფორმულიდან

$$N = m\,(g - x''). \quad (2)$$

რადგანაც ლიფტი მოძრაობს წრფივად და თანაბარაჩქარებულად, შეიძლება ჩავწეროთ

$$s = \frac{at^2}{2} \qquad a = \frac{2s}{t^2}\ ,$$

სადაც $s = x,\quad a = x''$.

ჩავსვათ (2) ფორმულაში x″-ის გამოსახულება და განვსაზღვროთ ბაგირის დაჭიმულობა

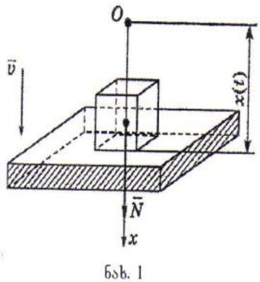
$$N = m\,(g - \frac{2s}{t^2}) = 280 \cdot (9{,}8 - \frac{2\cdot 35}{10^2}) = 2548 \ (\text{ნ}).$$

პ ა ს უ ხ ი: 2548 ნ.

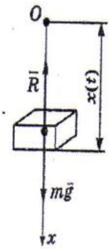
ამოცანა 26. 2

ჰორიზონტალური ბაქანი, რომელზეც დევს 1,02 კგ მასის ტვირთი ვერტიკალურად ეშვება ქვევით 4 მ/წმ^2 აჩქარებით. განსაზღვრეთ წნევის ძალა, რომელსაც ტვირთი ახდენს ბაქანზე მათი ერთდროული დაშვებისას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნახ.1 ნაჩვენებია ბაქანის მოძრაობა ტვირთთან ერთად, ნახ. 2 – ტვირთის მოძრაობა და მასზე მოქმედი ძალები: m$\vec{g}$ – სიმძიმის ძალა, $\vec{R}$ – საყრდენის რეაქცია. ამასთანავე, საყრდენის $\vec{R}$ რეაქცია რიცხობრივად ტოლია ტვირთის - ბაქანზე წნევისა და მიმართულია მის



ნახ. 1



ნახ. 2

საწინააღმდეგოდ, ე.ი. $\vec{R} = -\vec{N}$. მივიღოთ ტვირთი ნივთიერ წერტილად, მაშინ შეიძლება ჩავწეროთ x ღერძზე გეგმილებში

$$ma = mg - R. \qquad (1)$$

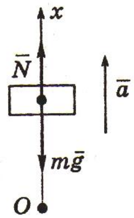
აქედან

$$R = m(g - a) \quad 1{,}02(9{,}80 - 4{,}00) = 5{,}92 \ (\text{ნ}).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი: 5,92 ნ</u>.

ამოცანა 26. 3

მაგიდაზე მდებარე 3 კგ მასის სხეულს გამოაბეს ძაფი, რომლის მეორე ბოლო დამაგრებულია A წერტილში. როგორი აჩქარება უნდა მივანიჭოთ A წერტილს, რომ მისი ზევით ვერტიკალურად აწევისას ძაფი გაწყდეს, თუ იგი წყდება T=42 ნ დაჭიმვისას?



ა მ ო ხ ს ნ ა. ნახაზზე გამოვსახოთ სხეულზე მოქმედი ძალები: $m\vec{g}$ – სიმძიმის ძალა, $\vec{N}$ – ძაფის რეაქცია. ჩავწეროთ სხეულის მოძრაობის განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$ma = N - mg. \qquad (1)$$

ვინაიდან ძაფი წყდება როცა N=T, ამიტომ (1) ფორმულიდან გვექნება

$$a = \frac{T}{m} - g = \frac{42{,}0}{3{,}0} - 9{,}8 = 4{,}2 \ (\text{მ/წმ}^2).$$

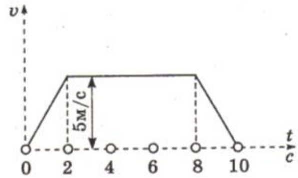
<u>პ ა ს უ ხ ი: 4,2 მ/წმ^2.</u>

ამოცანა 26. 4

ლიფტის კაბინის აწევის სიჩქარის გრაფიკს აქვს ნახაზზე გამოსახული სახე. კაბინის მასაა 480 კგ. განსაზღვრეთ ბაგირის T_1,T_2,T_3 დაჭიმულობა, რომელიც შეესაბამება კაბინის მდებარეობას დროის სამი შუალედის განმავლობაში: 1) t = 0–დან t = 2 წმ-დე; 2) t = 2–დან t =8 წმ-დე; 3) t = 8-დან t = 10 წმ-მდე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნახაზზე გამოვსახოთ ლიფტის კაბინაზე მოქმედი ძალები: m$\vec{g}$ – სიმძიმის ძალა, $\vec{T}$ – ბაგირის დაჭიმულობის ძალა. ჩავწეროთ ლიფტის კაბინის მოძრაობის განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$ma = T - mg \quad \mapsto \quad T = m(g + a).$$



სიჩქარეთა გრაფიკის მიხედვით, გვექნება:

1) $0 \le t \le 2$ მოძრაობა თანაბარაჩქარებულია,

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ (მ/წმ}^2\text{)}.$$

მაშასადამე $T_1 = 480(9{,}8 + 2{,}5) = 5904$ (N);

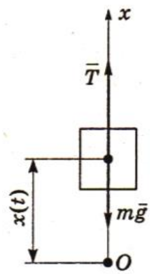
2) $2 \le t \le 8$ მოძრაობა თანაბარია - $a = 0$.

$T_2 = 480 \cdot 9{,}8 = 4704$ (N);

3) $8 \le t \le 10$ მოძრაობა თანაბარშენელებულია,

$$a = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{0 - 5}{10 - 8} = -2{,}5 \text{ (მ/წმ}^2\text{)}.$$

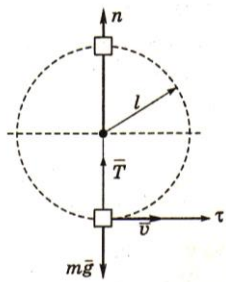
მაშასადამე $T_3 = 480(9{,}8 - 2{,}5) = 3504$ (N);



<u>**პასუხი:** $T_1 = 5904$ N; $T_2 = 4704$ N; $T_3 = 3504$ N;</u>

ამოცანა 26. 5

1 მ სიგრძის ძაფზე მიბმული 0,3 კგ მასის ქვა ვერტიკალურ სიბრტყეში აღწერს წრეწირს. განსაზღვრეთ ქვის უმცირესი კუთხური სიჩქარე ω, რომლის დროსაც მოხდება ძაფის გაწყვეტა, თუ წყვეტისადმი მისი წინაღობა 9 ნ-ის ტოლია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგანაც ძაფის დაჭიმულობა, რომელზეც დაკიდებულია ქვა, უდიდესი იქნება ქვედა მდგომარეობაში, ამიტომ ქვაზე მოქმედი ძალები ნახაზზე გამოვსახოთ ამ მდგომარეობაში:

სიმძიმის ძალა – m$\vec{g}$, ძაფის დაჭიმულობა - $\vec{T}$. ჩავწეროთ დინამიკის მეორე კანონი ვექტორული სახით:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$

და დავაგეგმილოთ იგი n ღერძზე:

$$m\frac{v^2}{\rho} = m\omega^2 l = - mg + T .$$

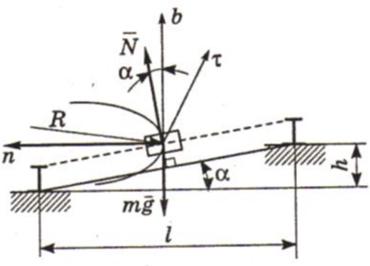
ჩავთვალოთ, რომ T -ს მნიშვნელობა ტოლია ძაფის წყვეტისადმი წინაღობის დასაშვები მნიშვნელობისა, მაშინ ძაფის ბრუნვის უმცირესი კუთხური ω სიჩქარე, როდესაც მოხდება მისი გაწყვეტა, იქნება

$$\omega_{მინ} = \sqrt{\frac{T - mg}{ml}} = \sqrt{\frac{9{,}0 - 0{,}3 \cdot 9{,}8}{0{,}3 \cdot 1{,}0}} = 4{,}494 \text{ (რად/წმ).}$$

პ ა ს უ ხ ი: $\omega_{მინ}$ = 4,494 რად/წმ.

ამოცანა 26. 6

რკინიგზის მრუდწირულ უბანზე გარე რელსს ამაღლებენ შიგა რელსთან შედარებით იმისათვის, რომ მოძრავი მატარებლის დაწოლა (წნეა) რელსებზე მიმართული იყოს რკინიგზის ვაკისის პერპენდიკულარული. განსაზღვრეთ გარე რელსის შიგა რელსთან ამაღლების h სიდიდე შემდეგი მონაცემებისას: გზის მომრგვალების რადიუსია 400 მ, მატერებლის სიჩქარე 10 მ/წმ, რელსებს შორის მანძილია 1,6 მ.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავთვალოთ, რომ მომრგვალების რადიუსი შეეფარდება გზის ღერძულა ხაზს. ავირჩიოთ კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემის ღერძები (n, τ, b) ისე, რომ მიმხები სიბრტყე (τ, n) იყოს ჰორიზონტალური. ნახაზზე გამოვსახოთ მატარებელზე მოქმედი ძალები: m$\vec{g}$ - სიმძიმის ძალა, $\vec{N}$ - გზის ვაკისის ნორმალური რეაქცია, რომელიც აბსოლუტური სიდიდით ტოლია ვაკისის სიბრტყეზე მატარებლის დაწოლისა (წნევისა) და მიმართულია მის მართობულად. მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები ჩავწეროთ არჩეული სისტემის ღერძებზე გაგმილებში:

$$m a_n = m\frac{v^2}{R} = N \sin\alpha;$$

$$m\,a_{\tau} = m\frac{dv}{dt} = 0 \;\mapsto\; v = \text{const};$$

$$m\,a_{b} = 0 = N\cos\alpha - mg \;\mapsto\; N = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

მაშინ

$$m\frac{v^2}{R} = mg\,\text{tg}\alpha,$$

სადაც R – მომრგვალების რადიუსია; $\text{tg}\alpha = \frac{h}{l}$.

ამის გათვალისწინებით

$$h = \frac{lv^2}{Rg} = \frac{1{,}6\cdot 10^2}{400\cdot 9{,}8} = 0{,}041\ (\text{მ}) = 4{,}1\ (\text{სმ}).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> h= 4,1 სმ.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 26. 7

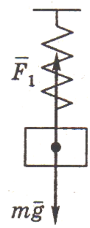
მატარებლის ვაგონში, რომელიც მიდიოდა ჯერ წრფივ, ხოლო შემდეგ მომრგვალებულ გზაზე 20 მ/წმ სიჩქარით, ახდენენ გარკვეული ტვირთის აწონვას ზამბარებიანი სასწორით; სასწორი პიორველ შემთხვევაში აჩვენებდა 50 ნ-ს, ხოლო მომრგვალებაზე 51 ნ-ს. განსაზღვრეთ გზის მომრგვალებს რადიუსი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მატარებლის წრფივ გზაზე მოძრაობისას (ნახ. 1) ასაწონი ტვირთისათვის გვექნება

$$0 = F_1 - mg,$$

საიდანაც

$$mg = F_1 \qquad (1)$$

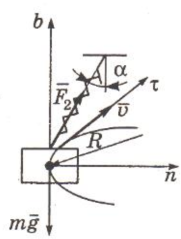


ნახ. 1

მომრგვალებულ გზაზე მატარებლის მოძრაობისას ავირჩიოთ კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემა და მის n, და b ღერძებზე დავაგეგმილოთ ტვირთზე მოქმედი ძალები (ნახ.2). დინამიკის მეორე კანონის შესაბამისად მივიღებთ:

$$m\frac{v^2}{R} = F_2\sin\alpha, \qquad (2)$$

$$0 = F_2\cos\alpha - mg. \qquad (3)$$



(1) და (3) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$\text{Cos}\alpha = \frac{mg}{F_2} = \frac{F_1}{F_2}$$

მაშინ ნახ. 2

$$F_2 \sin\alpha = F_2\sqrt{1-\cos^2\alpha} = F_2\sqrt{1-\frac{F_1^2}{F_2^2}} = \sqrt{F_2^2 - F_1^2}\ .$$

შემდეგ, (2) ფორმულიდან განვსაზღვრავთ გზის მომრგვალების R რადიუსს:

$$R = \frac{F_1}{\sqrt{F_2^2 - F_1^2}}\frac{v^2}{g} = \frac{50}{\sqrt{51^2 - 50^2}}\frac{20^2}{9{,}8} = 203 \ (\text{მ})\ .$$

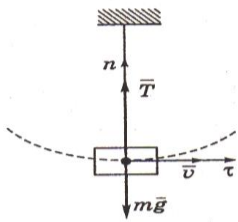
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 203 მ.

ამოცანა 26. 8

1 მ სიგრძის ძაფის ბოლოში დაკიდებულია 0,2 კგ მასის საწონი; ბიძგის შედეგად საწონმა მიიღო 5 მ/წმ ჰორიზონტალური სიჩქარე. განსაზღვრეთ ძაფის დაჭიმულობა უშუალოდ ბიძგის შემდეგ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. საწონზე მოქმედებენ სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$ და ძაფის დაჭიმულობის ძალა $\vec{T}$. ნიუტონის მეორე კანონი ჩავწეროთ ვექტორული სახით

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}\ .$$



დავაგეგმილოთ იგი n ღერძზე:

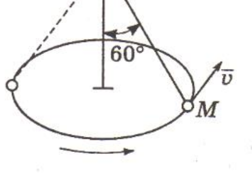
$$m\frac{v^2}{l} = T - mg\ .$$

აქედან განისაზღვრება ძაფის დაჭიმულობა

$$T = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right) = 0{,}2\ \left(9{,}8 + \frac{5^2}{1}\right) = 6{,}96\ (\text{ნ})$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 6,96 ნ.

ამოცანა 26. 9



0,102 კგ მასის M ტვირთი, რომელიც ჰკიდია უძრავ 0 წერტილში დამაგრებული 30 სმ სიგრძის ძაფის ბოლოში, თავის მხრივ წარმოადგენს კონუსურ ქანქარას, ე. ი. შემოწერს

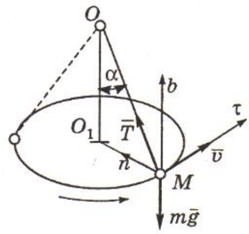
წრეწირს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, ამასთანავე ძაფი ვერტიკალთან ადგენს 60^0 კუთხეს. განსაზღვრეთ ტვირთის v სიჩქარე და ძაფის T დაჭიმულობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნივთიერ M წერტილზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა m$\vec{g}$ და ძაფის დაჭიმულობის ძალა $\vec{T}$. შევადგინოთ M წერტილის მოძრაობის განტოლებები ბუნებრივ ღერძებზე გეგმილებში.

იმის გათვალისწინებით, რომ

$$a_\tau = \frac{dv}{dt},\quad a_n = \frac{v^2}{\rho},\quad a_b = 0,$$

მივიღებთ $$m\frac{dv}{dt} = 0, \qquad (1)$$



$$m\frac{v^2}{\rho} = T\sin\alpha, \qquad (2)$$

$$0 = T\cos\alpha - mg. \qquad (3)$$

(1) ფორმულის თანახმად v=const.

(3) ფორმულიდან განვსაზღვრავთ ძაფის დაჭიმულობას

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{0{,}102\cdot 9{,}8}{\cos 60^0} = 2 \text{ (ნ)}.$$

(2) ფორმულაში ჩავსვათ T-ს და R=l sinα გამოსახულებები, მივიღებთ

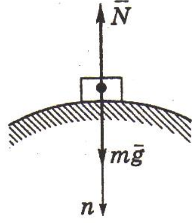
$$m\frac{v^2}{l\sin\alpha} = \frac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

ქედან განისაზღვრება ტვირთის სიჩქარე

$$v = \sin\alpha\sqrt{\frac{gl}{\cos\alpha}} = \sin 60^0\sqrt{\frac{9{,}8\cdot 0{,}3}{\cos 60^0}} = 2{,}1 \text{ (მ/წმ)}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 2,1 მ/წმ; T=2 ნ.

ამოცანა 26. 10



100 კგ მასის ავტომანქანა მოძრაობს ამოზნექილ ხიდზე v=10 მ/წმ სიჩქარით. ხიდის შუაში სიმრუდის რადიუსია ρ=50 მ. განსაზღვრეთ ავტომანქანის ხიდზე დაწოლის ძალა მისი ხიდის შუაში გავლის მომენტისათვის.

ამოხსნა. განვიხილოთ ავტომანქანა, როგორც ნივთიერი წერტილი, რომელზეც მოქმედებს სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$ და ხიდის მხრიდან ნორმალური რეაქცია $\vec{N}$ (იხ. ნახაზი). დინამიკის მეორე კანონი ჩავწეროთ n ღერძზე გეგმილებში:

$$m\frac{v^2}{\rho} = mg - N.$$

საიდანაც

$$N = mg - m\frac{v^2}{\rho} = 1000(9,8 - 102/50) = 7800 \text{ (ნ)}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 7800 ნ.

ამოცანა 26. 11

ამწეს კაბინაში ხდება სხეულის აწონა ზამბარებიანი სასწორით. კაბინის თანაბარი მოძრაობისას ზამბარიანი სასწორის ჩვენება 50 ნ-ის ტოლია, აჩქარებული მოძრაობისას – 51 ნ. განსაზღვრეთ კაბინის აჩქარება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. კაბინის თანაბარი მოძრაობისას ზამბარიანი სასწორი აჩვენებს სხეულის წონას, ე. ი.

$$0 = N - mg,$$

სადაც N – სასწორის ჩვენებაა.

თანაბარაჩქარებული მოძრაობისას (იხ. ნახაზი) სხეულზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, ხოლო სასწორის მაჩვენებელია N_1. დინამიკის მეორე კანონის თანახმად

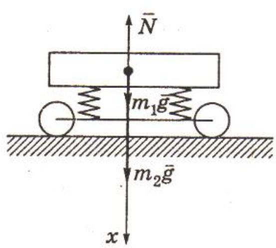
$$\mathbf{m}a = N_1 - mg.$$

აქედან

$$a = \frac{N_1 - mg}{m} = \frac{(51-50)9,8}{50} = 0,196 \text{ (მ/წმ}^2\text{)}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 0,196 მ/წმ^2.

ამოცანა 26. 12



ტრამვაის ვაგონის ძარის მასაა 10 000 კგ. საზიდარის მასა ბორბლებთან ერთად 1000 კგ. განსაზღვრეთ ვაგონის უდიდესი და უმცირესი დაწოლა (წნევა) რელსებზე გზის ჰორიზონტალურ წრფივ უბანზე, თუ სვლისას ძარა რესორებზე

ასრულებს ვერტიკალურ ჰარმონიულ რხევას $x = 0{,}02\sin 10t$ მ კანონით.

ამოხსნა. ჩავთვალოთ ტრამვაის ვაგონის ძარა ნივთიერ წერტილად და ნახაზზე გამოვსახოთ მასზე მოქმედი ძალები: ძარის სიმძიმის ძალა – $m_1\vec{g}$, საზიდარის სიმძიმის – $m_2\vec{g}$, საყრდენი ზედაპირის რეაქცია - $\vec{N}$. ძარის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$m_1 x'' = m_1 g + m_2 g - N,$$

სადაც $x'' = -2\sin 10t$ – ძარის მოძრაობის აჩქარებაა; m_1 – ძარის მასაა; m_2 – საზიდარის მასა.

განტოლებიდან

$$N = m_1 g + m_2 g - m_1 x'' = (10\,000 + 100)9.8 + 2\cdot 10\,000\sin 10t.$$

მაქსიმალური წნევა იქნება $\sin 10t$ –ს უდიდესი მნიშვნელობისათვის, ე. ი. როცა $\sin 10t = 1$:

$$N_{მაქს} = 10\,000(1{,}1\cdot 9{,}8 + 2) = 12{,}78\cdot 10^4 \text{ (ნ)},$$

უმცირესი წნევა იქნება $\sin 10t$ –ს უმცირესი მნიშვნელობისათვის, ე. ი. როცა $\sin 10t = -1$:

$$N_{მინ} = 10\,000(1{,}1\cdot 9{,}8 - 2) = 8{,}78\cdot 10^4 \text{ (ნ)}.$$

__პ ა ს უ ხ ი :__ $N_{მაქს} = 12{,}78\cdot 10^4$ ნ; $N_{მინ} = 8{,}78\cdot 10^4$ ნ.

ამოცანა 26. 13

შიგა წვის ძრავის დგუში ასრულებს ჰორიზონტალურ რხევით მოძრაობას $x = r\left(\cos\omega t + \frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right)$ სმ კანონით, სადაც r – მრუდმხარას სიგრძეა, l – ბარბაცას სიგრძე, ω – მუდმივი სიდიდე-ლილვის კუთხური სიჩქარე. განსაზღვრეთ დგუშზე მოქმედი ძალის უდიდესი მნიშვნელობა, თუ მისი მასაა M.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგანაც ცნობილია დგუშის მოძრაობის კანონი და მისი მასა მოცემულია, ამიტომ დგუშზე მოქმედი ძალა განვსაზღვროთ ნიუტონის კანონით

$$P = M x'',$$

სადაც M – დგუშის მასაა, x'' - აჩქარება, $x'' = -r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right)$.

მაშინ $P = -M r\,\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right)$.

დგუშზე მოქმედი ძალების უდიდესი მნიშვნელობა იქნება, როცა $\omega t = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$

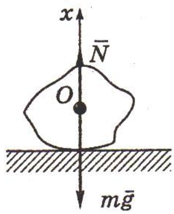
$$P = - M r \omega^2 \left(1 + \frac{r}{l}\right).$$

პ ა ს უ ხ ი: $P = - Mr\omega^2 \left(1+ \frac{r}{l}\right)$.

ამოცანა 26. 14

მადანგამამდიდრებელი ცხრილის ცხავი ასრულებს ვერტიკალურ ჰარმონიულ რხევას $a = 5$ სმ ამპლიტუდით. განსაზღვრეთ ცხავის რხევის უმცირესი სიხშირე k, რომლის დროსაც მასზე მდებარე მადნის ნამსხვრევები მას მოსცილდებიან და ზევით ავარდებიან.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მადნის ნამსხვრევზე მოქმედებენ სიმძიმის ძალა – $m\vec{g}$, ცხავის ნორმალური რეაქცია - $\vec{N}$. დინამიკის მეორე კანონი ჩავწეროთ ვექტორული სახით:



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

და დავაგეგმილოთ x ღერძზე.

$$m x'' = - mg + N.$$

რადგანაც ცხავი ასრულებს ჰარმონიულ, ამიტომ

$$x = a \sin(kt + \alpha),$$

$$x'' = - a k^2 \sin(kt + \alpha) = - k^2 x.$$

როდესაც ნამსხვრევი ცხავს მოსცილდება, N = 0. ამიტომ

$$- m k^2 x = - mg.$$

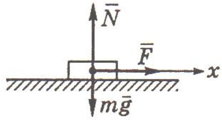
მცირესი სიხშირე იქნება:

$$k = \sqrt{\frac{g}{x_{max}}} = \sqrt{\frac{g}{a}} = \sqrt{\frac{980}{5}} = 14 \text{ (რად/წმ).}$$

პ ა ს უ ხ ი: k = 14 რად/წმ.

ამოცანა 26. 15

2,04 კგ მასის სხეული ასრულებს ჰორიზონტალურ წრფივ რხევით მოძრაობას $x = 10 \sin\frac{\pi t}{2}$ მ კანონით. განსაზღვრეთ სხეულზე მოქმედი ძალის დამოკიდებულება x კოორდინატზე, აგრეთვე ამ ძალის მაქსიმალური სიდიდე.



ა მ ო ხ ს ნ ა. $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით სხეულის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ჩავწეროთ x ღერძზე გეგმილის სახით:

$$F = m\,x'' = -\,m\,\frac{10\pi^2}{4}\sin\frac{\pi t}{2} = -\frac{\pi^2}{4}\,x \cdot 2{,}04 = -\,5{,}033x,$$

სადაც $x'' = -\dfrac{10\pi^2}{4}\sin\dfrac{\pi t}{2}$.

$\vec{F}$ ძალის უდიდესი მნიშვნელობა იქნება:

$$F_{max} = 5{,}033\,|x_{max}| = 5{,}033 \cdot 1 = 50{,}33 \text{ (ნ)}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $F = -\,5{,}033$ ნ; $F_{max} = 50{,}33$ ნ.

ამოცანა 26. 16

0,2 კგ მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს კანონით:

$$x = 3\cos 2\pi t \text{ სმ}, \quad y = 4\sin \pi t \text{ სმ} \text{ (t წამ.)}.$$

განსაზღვრეთ წერტილზე მოქმედი ძალა მის კოორდინატებზე დამოკიდებულებით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. $\vec{P}$ ძალის მოქმედებით ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ჩავწეროთ საკოორდინატო x და y ღერძებზე გეგმილებში:

$$P_x = m\,x'' = -m\,\frac{3\cdot 4\pi^2}{100}\cos 2\pi t = -\frac{4\cdot 3{,}14^2}{100}\cdot 0{,}2\,x = -0{,}0789x \text{ (ნ)},$$

სადაც $x'' = -\dfrac{3\cdot 4\pi^2}{100}\cos 2\pi t$ მ/წმ ^{2};

$$P_y = m\,y'' = -m\,\frac{4\pi^2}{100}\sin \pi t = -\frac{3{,}14^2}{100}\cdot 0{,}2\,y = -0{,}0197y \text{ (ნ)},$$

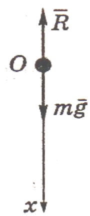
სადაც $y'' = -\dfrac{4\pi^2}{100}\sin \pi t$ მ/წმ ^{2}.

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $P_x = -0{,}0789x$ ნ; $P_y = -0{,}0197y$ ნ.

ამოცანა 26. 17

100 გ მასის ბურთულა ვარდება სიმძიმის ძალის გავლენით და ამასთანავე განიცდის ჰაერის წინაღობას. ბურთულა მოძრაობს კანონით

$$x = 4{,}9t - 2{,}45\,(1 - e^{-2t})$$



სადაც x - მეტრებშია, t – წამებში, 0x ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად ქვევით. განსაზღვრეთ ჰაერის წინაღობის ძალა R და გამოსახეთ ის, როგორც ბურთულის სიჩქარის ფუნქცია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნახაზზე გამოვსახოთ ბურთულაზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის ძალა – m$\vec{g}$, ჰაერის წინაღობის ძალა - $\vec{R}$.

ბურთულის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ჩავწეროთ x ღერძზ ეგეგმილის სახით;

$$m x'' = mg – R,$$

სადაც $x''= 9{,}8\, e^{-2t}$ - აჩქარების გეგმილია x ღერძზე.

აქედან

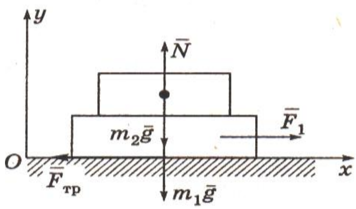
$$R,= mg– mx''=mg(1- e^{-2t}) = 0{,}1\cdot 9{,}8(1 - e^{-2t}) = 0{,}98 (1 - e^{-2t}) = 0{,}2\, v \ (ნ),$$

სადაც $v = x' = 4{,}9 (1- e^{-2t})$ - ბურთულის სიჩქარეა.

პ ა ს უ ხ ი: $R = 0{,}98 (1 - e^{-2t}) = 0{,}2\, v$ ნ .

ამოცანა 26. 18

სარანდი ჩარხის მაგიდის მასაა 700 კგ, დასამუშავებელი დეტალის მასა 300 კგ, სვლის სიჩქარე v = 0,5 მ/წმ, გაქანების დრო t=0,5 წმ. განსაზღვრეთ ძალა, რომელიც აუცილებელია გაქანებისათვის (მოძრაობა ჩათვალეთ თანაბარაჩქარებული) და შემდგომ, მაგიდის თანაბარი მოძრაობისათვის, თუ გაქანებისას ხახუნის კოეფიციენტია f_1 = 0,14, ხოლო თანაბარი მოძრაობისას f_2 = 0,07.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ავირჩიოთ კოორდინატთა 0xy სისტემა და ნახაზზე ვაჩვენოთ ყველა ის ძალა, რომელიც მოქმედებს სარანდი ჩარხის მაგიდაზე დეტალთან ერთად.

ჩავწეროთ სარანდი ჩარხის მაგიდის თანაბარაჩქარებული მოძრაობის განტოლება x ღერძე გეგმილებში:

$$(m_1 + m_2)\, a = F_1 – F_{ხახ} = F_1 –(m_1 + m_2)f_1g, , \qquad (1)$$

სადაც m_1 – მაგიდის მასაა; m_2 - დასამუშავებელი დეტაილს მასა; a - მაგიდის აჩქარება, $a = \dfrac{v}{t} = 1$ მ/წმ²; F_1– მაგიდის აჩქარებისათვის საჭირო ძალა; f_1 -ხახუნის კოეფიციენტი, $f_1 = 0{,}14$; $F_{ხახ}$ - ხახუნის ძალა, $F_{Tp} = f_1 N = f_1g(m_1 + m_2)g$.

მაშინ, (1) განტოლებიდან

$$F_1 = (m_1 + m_2) (a + f_1g) = 1000 (1 + 0{,}14 \cdot 9{,}8) = 2372 \text{ (ნ)}.$$

თანაბარი მოძრაობისას $a = 0$, მაშასადამე

$$F_2 = (m_1 + m_2)\ f_2 g) = 1000 \cdot 0{,}07 \cdot 9{,}8 = 686\ (\text{ნ}).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $F_1 = 2372$ ნ , $F_2 = 686$ ნ .

ამოცანა 26. 19

700 კგ მასის დატვირთული ვაგონეტი ეშვება $\alpha=15^0$ დახრილობის საბაგირო რკინიგზაზე $v=1{,}6$ მ/წმ სიჩქარით. განსაზღვრეთ ბაგირის დაჭიმულობა ვაგონეტის თანაბარი დაშვებისას და დამუხრუჭებისას. დამუხრუჭების დრო t=4 წმ-ს. მოძრაობის წინაღობის საერთო კოეფიციენტია f = 0,015. დამუხრუჭებისას ვაგონეტი მოძრაობს თანაბარშენელებულად.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) განვიხილოთ ვაგონეტის თანაბარი დაშვების შემთხვევა, როცა $a=0$.

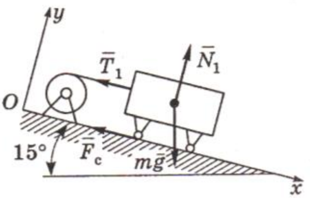
მივმართოთ x ღერძი ვაგონეტის მოძრაობის მიმართულებით და ვაჩვენოთ ვაგონეტზე მოქმედი ძალები (ნახ. 1). სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, ბაგირის დაჭიმულობის ძალა $\vec{T}_1$. წინაღობის ძალა $\vec{F}_c$, საყრდენის რეაქცია $\vec{N}_1$.ჩავწეროთ ვაგონეტის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx''=\Sigma F_{kx},=mg\sin15^0-T_1-F_c, \quad (1)$$

სადაც $x''= a = 0$; $F_c = f\,N_1 = f\,mg\cos15^0$. მაშინ (1) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$0 = mg\sin15^0 - T_1 - f\,mg\cos15^0,$$

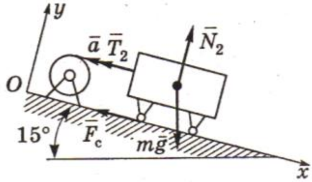
საიდანაც განისაზღვრება ბაგირის დაჭიმულობა



ნახ. 1

$$T_1= mg(\sin15^0-f\cos15^0)=700\cdot9{,}8(0{,}258-0{,}015\cdot0{,}966)=1676\ (\text{ნ}).$$

2) განვიხილოთ ბაგირის დაჭიმულობა ვაგონეტის დამუხრუჭებისას. ვაჩვენოთ ამ შემთხვევაში ვაგონეტზე მოქმედი ძალები (ნახ. 2). სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, ბაგირის დაჭიმულობის ძალა $\vec{T}_2$. წინაღობის ძალა $\vec{F}_c$, საყრდენის რეაქცია $\vec{N}_2$.



ნახ. .2

ჩავწეროთ ვაგონეტის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Sigma F_{kx}, = mg \sin 15^0 - T_1 - F_c, \quad (2)$$

სადაც x'' - ვაგონეტის აჩქარებაა.

ვაგონეტის აჩქარება განვსზღვროთ ფორმულით:

$$v_k = v_0 + a t,$$

ვინაიდან ვაგონეტი ჩერდება, მოძრაობის საბოლოო სიჩქარე $v_k = 0$, ხოლო v_0 - ვაგონეტის დამუხრუჭების პროცესის საწყისი სიჩქარეა, ანუ ვაგონეტის თანაბარი მოძრაობის სიჩქარე, ე. ი. $v_0 = v$. მიტომ

$a = -\dfrac{v_0}{t} = -\dfrac{v}{t}$. აქ ნიშანი მინუსი მიგვითითებს, რომ მოძრაობა შენელებულია ე. ი. აჩქარების ვექტორი $\vec{a}$ მიმართულია ვაგონეტის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ.

ეს ნიშნავს, რომ $\quad x'' = -\dfrac{v}{t},$

მაშინ (2) განტოლება მიიღებს სახეს

$$-m\frac{v}{t} = mg \sin 15^0 - f \cos 15^0 - T_2 .$$

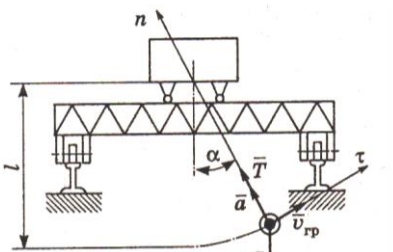
აქედან

$$T_2 = mg(\sin 15^0 - f \cos 15^0) + m\frac{v}{t} = mg(\sin 15^0 - f \cos 15^0 + \frac{v}{gt}) =$$

$$700 \cdot 9{,}8\,(0{,}258 - 0{,}015 \cdot 0{,}966 + \frac{1{,}6}{9{,}8 \cdot 4}) = 1956 \text{ (n).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $T_1 = 1676$ ნ; $T_2 = 1956$ ნ.

ამოცანა 26. 20



1000 კგ მასის ტვირთი ურიკასთან ერთად გადაადგილდება ჰორიზონტალური ხიდური ამწის გასწვრივ v=1 მ/წმ სიჩქარით. მანძილი ტვირთის სიმძიმის ცენტრიდან დაკიდვის წერტილამდის არის l=5 მ. ურიკის უეცარი გაჩერების შედეგად ტვირთი ინერციით განაგრძობს მოძრაობას და იწყებს რხევას დაკიდვის წერტილი

მახლობლობაში. განსაზღვრეთ ბაგირის უდიდესი დაჭიმულობა ტვირთის რხევისას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ურიკის უეცარი გაჩერების შედეგად ტვირთი ინერციით განაგრძობს მოძრაობას რაღაც v_1 სიჩქარით l რადიუსის წრეწირის რკალზე. განვიხილოთ ტვირთი, როგორც ნივთიერი წერტილი ნებისმიერ მდებარეობაში, რომელიც განისაზღვრება ბაგირის გადახრის α კუთხით და ავირჩიოთ კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემის n და τ ღერძი.

ნახაზზე გამოვსახოთ ტვირთზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის ძალა m$\vec{g}$, ბაგირის დაჭიმულობის ძალა $\vec{T}$. შევადგინოთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება n ღერძზე გეგმილებში:

$$m a_n = \Sigma F_{kn} = T - mg\cos\alpha, \qquad (1)$$

სადაც $a_n = \dfrac{v_t^2}{l}$ - ნორმალური აჩქარებაა.

(1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$m\frac{v_t^2}{l} = T - mg\cos\alpha,$$

საიდანა $$T = m\frac{v_t^2}{l} + mg\cos\alpha.$$

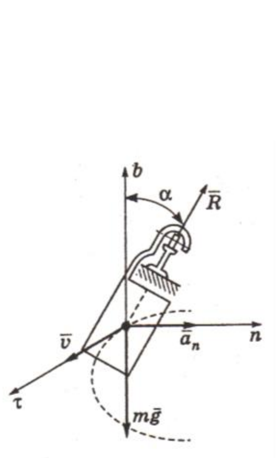
დაჭიმულობის T ძალა მაქსიმალურ მნიშვნელობას იღებს როცა α=0, მაშინ $v_t = v$, ამიტომ

$$T = m\frac{v^2}{l} + mg\cos 0 = m\left(\frac{v^2}{l} + g\cos 0\right) = 100\left(\frac{1^2}{5} + 9{,}8\right) = 10\,000\ (n).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> T = 10 000 n.

ამოცანა 26. 21

1500 კგ მასის ვაგონი მოძრაობს კიდული გზის r =30 მ-ის რადიუსის მომრგვალებაზე v =10 მ/წმ სიჩქარით. განსაზღვრეთ ვერტიკალიდან ვაგონის გადახრის α კუთხე და მისი რელსზე დაწოლის N ძალა.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ნახაზზე გამოსახულია ვაგონი ნებისმიერ მდგომარეობაში. გამოვსახოთ მასზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის ძალა m$\vec{g}$, რელსის რეაქციის ძალა $\vec{R}$. ავირჩიოთ კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემა. ჩავწეროთ

ვაგონის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები ამ სისტემის ღერძებზე გეგმილებში:

$$m\,a_n = m\frac{v^2}{r} = \Sigma F_{kn} = R\sin\alpha,$$

$$m\,a_\tau = m\frac{dv}{dt} = \Sigma F_{k\tau} = 0,$$

$$m\,a_b = m\cdot 0 = \Sigma F_{kb} = R\cos\alpha - mg\,,$$

სადაც $a_n = \dfrac{v^2}{r}$; $a_\tau = 0$.

ვინაიდან $a_\tau = \Sigma F_{k\tau} = 0$, ამიტომ, v=const; ამასთანავე, a_b=0, ვინაიდან ვერტიკალური მიმართულებით მოძრაობა არ არსებობს. მაშინ

$$m\frac{v^2}{r} = \Sigma F_{kn} = R\sin\alpha\,, \qquad (1)$$

$$0 = R\cos\alpha - mg\,. \qquad (2)$$

(2) განტოლებიდან

$$R = \frac{mg}{\cos\alpha}\,. \qquad (3)$$

(3) გამოსახულება ჩავსვათ (2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$m\frac{v^2}{r}\quad l = \frac{mg}{\cos\alpha}\sin\alpha = mg\,tg\alpha\,.$$

აქედან $$tg\alpha = \frac{mv^2}{mgr} = \frac{v^2}{gr} = \frac{10^2}{9{,}8\cdot 30} = 0{,}3401,$$

$$\alpha = arctg0{,}3401 = 18^0 47'\,.$$

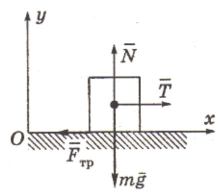
რელსის რეაქციის ძალა გამოვთვალოთ (3) ფორმულით:

$$R = \frac{1500\cdot 9{,}8}{\cos 18^0 47'} = 15527 \text{ ნ.}$$

ვინაიდან $N = |R|$, ამიტომ, $N = 15527$ ნ.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\alpha = 18^0 47'$. $N = 15527$ ნ.

ამოცანა 26. 22



მატარებლის მასა ლოკომოტივის გარეშე არის $2\cdot 10^5$ კგ. ჰორიზონტალურ გზაზე თანაბარაჩქარებული მოძრაობისას, მოძრაობის დაწყებიდან 60 წმ-ის შემდეგ მიიღო 15 მ/წმ სიჩქარე. ხახუნის ძალა

ტოლია მატარებლის წონის 0,005. განსაზღვრეთ გაქანების პერიოდში მატარებელსა და ლოკომოტივს შორის გამწევის დაჭიმულობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გაქანების პერიოდში განვიხილოთ ლოკომოტივი, როგორც ნივთიერი წერტილი, რომელზეც მოქმედებენ ძალები (იხ. ნახ): სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, მატარებელსა და ლოკომოტივს შორის გამწევის $\vec{T}$ დაჭიმულობა, ხახუნის ძალა $\vec{F}_{Tp}$. მივმართოთ x ღერძი ლოკომოტივის მოძრაობის მიმართულებით და ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = T - F_{Tp} ,$$

ანუ

$$x'' = T - 0{,}005\ mg . \qquad (1)$$

ლოკომოტივის აჩქარება შეიძლება გამოვთვალოთ გაქანების პერიოდში თანაბარაჩქარებული მოძრაობის პირობიდან:

$$v = v_0 + a t \quad , \quad \text{საიდანაც} \quad a = \frac{v}{t} .$$

ვინაიდან $x'' = a$, ამიტომ (1) გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$m\frac{v}{t} = T - 0{,}005\ mg .$$

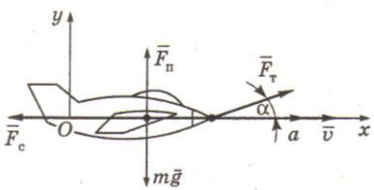
აქედან

$$T = m\frac{v}{t} + 0{,}005\ mg = m\left(\frac{v}{t} + 0{,}005\ g\right) = 2\cdot10^5\left(\frac{15}{60} + 0{,}005\cdot9{,}8\right) = 59\ 800\ (\text{ნ}).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი :</u> 59 800 ნ.

ამოცანა 26. 23

2000 კგ მასის სპორტული თვითმფრინავი მიფრინავს ჰორიზონტალურად 5 მ/წმ^2 აჩქარებით და აღებულ მომენტში აქვს 200 მ/წმ სიჩქარე. ქარის წინაღობა არის სიჩქარის კვადრატის პროპორციული და 1 მ/წმ სიჩქარის დროს უდრის 0,5 ნ. ჩათვალეთ, რომ წინაღობის ძალა მიმართულია სიჩქარის საწინააღმდეგოდ და გამოთვალეთ ხრახნის წევის ძალა, თუ იგი ფრენის მიმართულებასთან ადგენს 10^0 კუთხეს. ასევე, განსაზღვრეთ ამწევი ძალის სიდიდე აღებულ მომენტში.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავთვალოთ თვითმფრინავი ნივთიერ წერტილად და ნახაზზე გამოვსახოთ მასზე მოქმედი ძალები ჰორიზონტალური ფრენის დროს: სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, ამწევი ძალა $\vec{F}$ n , წინაღობის ძალა $\vec{F}$ c, წევის ძალა $\vec{F}$ $_T$. ავირჩიოთ კოორდინატთა 0xy სისტემა და ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები x და y ღერძებზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Sigma F_{kx} = F_T \cos\alpha - F_c, \qquad (1)$$

$$my'' = \Sigma F_{ky} = F_n + F_T \sin\alpha - mg, \qquad (2)$$

სადაც $x'' = a$, $y''= 0$.

მაშინ (1) და (2) განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$m a = F_T \cos\alpha - F_c = F_T \cos\alpha - 0{,}5 v^2, \qquad (3)$$

$$0 = F_n + F_T \sin\alpha - mg, \qquad (4)$$

(3) განტოლებიდან განისაზღვრება წევის ძალა:

$$F_T = \frac{ma + 0{,}5v^2}{\cos\alpha} = \frac{2000\cdot 5 + 0{,}5\cdot 200^2}{\cos 10^0} = 30463 \text{ (ნ)},$$

(4) განტოლებიდან განისაზღვრება ამწევი ძალა:

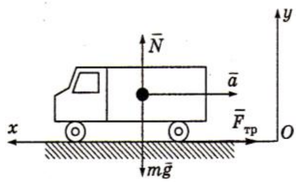
$$F_n = mg\ F_n - F_T \sin 10^0 = 2000\cdot 9{,}8 - 30463\cdot 0{,}174 = 14310 \text{ (ნ)}$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> წევის ძალა F_T=30 463 ნ, ამწევი ძალა F_n =14 310 ნ.

ამოცანა 26. 24

6000 კგ მასის სატვირთო ავტომანქანა შედის ბორანზე 6 მ/წმ სიჩქარით. ბორანზე შესვლის მომენტიდანვე ავტომანქანამ დაიწყო დამუხრუჭება და 10 მ-ის გავლის შემდეგ გაჩერდა. მანქანის მოძრაობა ჩათვალეთ თანაბარშენელებულად. ბორანი ნაპირზე დაბმულია ორი ბაგირით. განსაზღვრეთ თითოეული ბაგირის დაჭიმულობა. ამოცანის ამოხსნისას ბორანის მასა და აჩქარება უგულებელყავით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ავტომანქანის თანაბარშენელებული მოძრაობა ბორანზე. გამოვსახოთ ავტომანქანაზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, ნორმალური რეაქცია $\vec{N}$, ხახუნის ძალა $\vec{F}_{Tp}$. (ნახ. 1).



ნახ. 1

გავითვალისწინოთ ავტომანქანის წრფივი მოძრაობა და x ღერძი მივმართოთ მოძრაობის მხარეს. ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Sigma F_{kx} = - F_{Tp},$$

სადაც $x'' = a$.

ავტომანქანის მოძრაობა თანაბარშენელებულია. წერტილის კინეტიკური ენერგიეს ნაზრდის თეორიის თანახმად

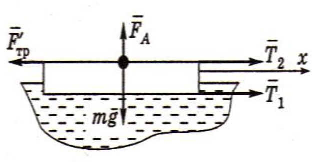
$$\frac{1}{2}mv_k^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = A = mas\ ;$$

აქედან $v_k^2 - v_0^2 = 2as$,

საიდანაც $a = \dfrac{v_k^2 - v_0^2}{2s} = -\dfrac{6^2}{2\cdot 10} = -1{,}8$ (მ/წმ²),

ე.ი. აჩქარების ვექტორი $\vec{a}$ მიმართულია ავტომანქანის მოძრაობის საპირისპიროდ.

მაშინ $F_{Tp} = -mx'' = -6000\cdot(-1{,}8) = 10\,800$ (ნ).



ნახ. 2

ახლა განვიხილოთ ბორანის წონასწორობა, რომელზეც მოქმედებენ ძალები: ავტომანქანის სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, არქიმედის ძალა $\vec{F}_A$, შეჭიდების ძალა $\vec{F}'_{Tp}$ ($|\vec{F}'_{Tp}| = |\vec{F}_{Tp}|$), ბაგირების $\vec{T}_1$ და $\vec{T}_2$ დაჭიმულობა, რომლებიც სიდიდით ტოლნი არიან (ნახ. 2). ბაგირების დაჭიმულობის გამოთვლისათვის გამოვიყენოთ ბორანის წონასწორობის განტოლებები:

$$\Sigma F_{kx} = 0,$$

$$T_1 + T_2 - F'_{Tp} = 2T - F'_{Tp} = 0,$$

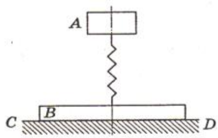
ვინაიდან $T_1 = T_2$.

აქედან

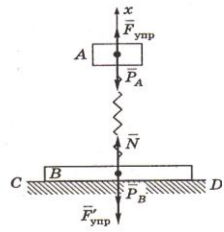
$$T = T_1 = T_2 = \frac{1}{2}F'_{Tp} = \frac{10800}{2} = 5400\ (ნ).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> თითოეული ბაგირის დაჭიმულობა 5400 ნ.

ამოცანა 26. 25



A და B ტვირთი, წონით P_A=20ნ და P_B= 40ნ ერთმანეთთან შეერთებულია ზამბარით, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები. A ტვირთი ვერტიკალური მიმართულებით ასრულებს თავისუფალ რხევას 1 სმ ამპლიტუდით და 0,25 წმ პერიოდით. განსაზღვრეთ ის უდიდესი და უმცირესი ძალა, რომლითაც A და B ტვირთი აწვება საყრდენ CD ზედაპირს.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ A ტვირთის წრფივი რხევა, რომელზეც მოქმედებს სიმძიმის ძალა $\vec{P}_A$ და ზამბარის დრეკადობის ძალა $\vec{F}_{დრ}$ .x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ზევით (იხ. ნახაზი) და ჩავწეროთ A ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ამ ღერძზე გეგმილებში:

$$m_A x'' = \Sigma F_{kx} = F_{yp} - P_A.$$

აქედან

$$F_{yp} = P_A \left(\frac{x''}{g} + 1 \right). \qquad (1)$$

ვინაიდან ამოცანის პირობაში ნათქვამია, რომ ტვირთის რხევა თავისუფალია, ამიტომ, მისი მოძრაობის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$x = a \sin kt,$$

სადაც k - რხევის ციკლური სიხშირეა, $k = \frac{2\pi}{T}$.

მაშინ $$x = a \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right). \qquad (2)$$

გავაწარმოოთ (2) გამოსახულება ორჯერ, მივიღებთ

$$x' = \frac{2a\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right),$$

$$x'' = -\frac{4a\pi^2}{T^2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right).$$

x''-ის ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (1) ფორმულაში:

$$F_{yp} = P_A \left[1 - \frac{4a\pi^2}{gT^2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)\right].$$

F_{yp} –ის მაქსიმალური მნიშვნელობა იქნება, როცა

$\sin(\frac{2\pi}{T}t)$ = - 1, ხოლო მინიმალური, როცა $\sin(\frac{2\pi}{T}t)$ = 1.

ამიტომ,

$$F_{max} = P_A\,(1 + \frac{4a\pi^2}{gT^2}) = 20\,(1 + \frac{4\cdot 0{,}01\cdot 3{,}14^2}{9{,}8\cdot 0{,}25^2}) = 32{,}8 \text{ (ნ)},$$

$$F_{min} = P_A\,(1 - \frac{4a\pi^2}{gT^2}) = 20\,(1 - \frac{4\cdot 0{,}01\cdot 3{,}14^2}{9{,}8\cdot 0{,}25^2}) = 7{,}2 \text{ (ნ)}.$$

საყრდენ CD ზედაპირზე ტვირთის დაწოლის ძალის განსასაზღვრავად განვიხილოთ მისი წონასწორობა სიმძიმის $\vec{P}_B$ ძალის, დრეკადობის $\vec{F}'_{დრ} = \vec{F}_{დრ}$ ძალისა და ზედაპირის რეაქციის $\vec{N}$ ძალა:

$$\Sigma F_{kx} = 0, \qquad N - P_B - F'_{დრ} = 0,$$

საიდანაც $N = P_B + F'_{დრ}$.

ვინაიდან $F'_{yp} = |F_{yp}|$, ამიტომ

$$N_{max} = P_B + F_{max} = 40 + 32{,}8 = 72{,}8 \text{ (n)},$$

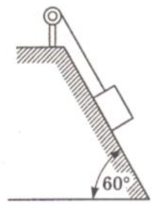
$$N_{min} = P_B + F_{min} = 40 + 7{,}2 = 47{,}2 \text{ (n)}.$$

B ტვირთის დაწოლის ძალა სიდიდით ტოლია საყრდენი ზედაპირისრეაქციის ძალისა, ე. ი.

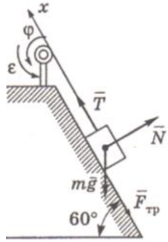
$$R_{max} = 72{,}8 \text{ ნ}, \quad R_{min} = 47{,}2 \text{ ნ}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> R_{max} = 72,8 ნ, R_{min} = 47,2 ნ.

ამოცანა 26. 26



m=600 კგ მასის ტვირთი ჯალამბარის დახმარებით აიწევა ჰორიზონტისადმი α = 60⁰ კუთხით დახრილ სიბრტყეზე (იხ. ნახაზი). ტვირთის ზედაპირთან შეხების კოეფიციენტი f =0,2 ტოლია. 0,2 მ რადიუსის ჯალამბარი ბრუნავს $\varphi = 0{,}4t^3$ კანონით. იპოვეთ ბაგირის დაჭიმულობა, როგორც დროის ფუნქცია და ამ დაჭიმულობის მნიშვნელობა აწევის დაწყებიდან 2 წმ-ის შემდეგ.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ტვირთის წრფივი მოძრაობა სიბრტყეზე ზევით. ნახაზზე გამოვსახოთ ტვირთზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, ზედაპირის რეაქცია $\vec{N}$, ხახუნის ძალა $\vec{F}_{Tp}$, ბაგირის დაჭიმულობის ძალა $\vec{T}$. x ღერძი მივმართოთ ტვირთის მოძრაობის

მიმართულებით და ჩავწეროთ მისი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ამ ღერძზე გეგმილებში:

$$mx''=\Sigma F_{kx}=T-mg\sin60^0-F_{Tp}\ , \qquad (1)$$

სადაც

$$F_{Tp} = f\,N= fmg\cos60^0; \quad x'' \text{ - აჩქარებაა.}$$

აჩქარება განისაზღვრება ფორმულით $x'' = R\,\varepsilon$,

სადაც R – ჯალამბარის რადიუსია;

$$\varepsilon = \varphi'' = (0{,}4\ t^3)'' = 2{,}4t\,.$$

მაშინ $x'' = 0{,}2\cdot0{,}48\ t$.

ბაგირის დაჭიმულობის ძალა განისაზღვრება (1) განტოლებიდან:

$$T = mx'' + mg\sin60^0 + F_{yp} = 0{,}48m + mg\sin60^0 + +f\,mg\cos60^0 =$$

$$= mg\,(\frac{0{,}48}{g} + \sin60^0 + f\cos60^0) =$$

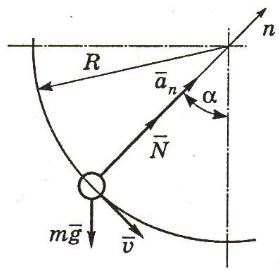
$$= 600\cdot9{,}8(\frac{0{,}48}{9{,}8}t + 0.866+0{,}2\cdot0{,}5) = 288t + 5680\ (\text{ნ}).$$

მოძრაობის დაწყებიდან 2 წმ-ის შემდეგ

$$T = 288\cdot2 + 5680 = 6256\ (\text{ნ}).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $T=288t+5680$ კნ; როცა $t=2$ წმ, $T = 6256$ კნ.

ამოცანა 26. 27



თვითმფრინავმა, დახრილი პიკირებისას, მიაღწია 300 მ/წმ სიჩქარეს, რის შემდეგაც მფრინავმა დაიწყო პიკირებიდან გამოსვლა ვერტიკალურ სიბრტყეში, რისთვისაც შემოწერა R=600 მ რადიუსის წრეწირის რკალი. მფრინავის მასაა 80 კგ. რა უდიდესი ძალით აწვება მფრინავი სავარძელს?

ა მ ო ხ ს ნ ა. თვითმფრინავის რკალზე მოძრაობის ნებისმიერ მომენტში მფრინავი განვიხილოთ, როგორც ნივთიერი წერტილი. ნახაზზე გამოვსახოთ მასზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, სავარძლის რეაქცია $\vec{N}$. ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება მთავარ ნორმალზე გეგმილებში:

$$m\,a_n = \Sigma F_{kn} = N - mg\cos\alpha\ ,$$

სადაც α არის კუთხე, რომელიც განსაზღვრავს თვითმფრინავის გადახრის სიდიდეს ვერტიკალური მდგომარეობიდან; a_n - ნორმალური აჩქარებაა, $a_n = \dfrac{v^2}{R}$.

სავარძლის რეაქცია ასე გამოისახება

$$N = m\,a_n + mg\cos\alpha = m\left(\frac{v^2}{R} + g\cos\alpha\right).$$

N მაქსიმალურ მნიშვნელობას იღებს, როცა $\cos\alpha = 1$, ე. ი. $\alpha = 0$.

$$N_{\text{მაქს}} = m\left(\frac{v^2}{R} + g\right) = 80\left(\frac{300^2}{600} + 9{,}8\right) = 12\ 784 \quad (\text{ნ}).$$

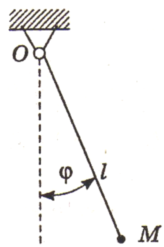
უდიდესი ძალა, რომლითაც მფრინავი აწვება სავარძელს

$$|\vec{F}_{\text{მაქს}}| = |\vec{N}_{\text{მაქს}}| = 12\ 784 \ \text{ნ}.$$

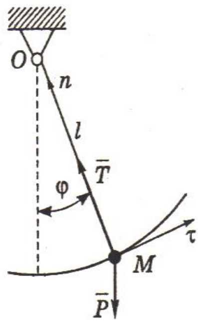
პ ა ს უ ხ ი: 12 784 ნ.

ამოცანა 26. 28

10 ნ მასის M ტვირთი კიდია l = 2 მ სიგრძის გვარლზე და გვარლთან ერთად ასრულებს რხევას $\varphi = \dfrac{\pi}{6}\sin 2\pi t$ განტოლებით, სადაც φ არის ვერტიკალიდან გვარლის გადახრის კუთხე რადიანებში; t – დრო წამებში. განსაზღვრეთ გვარლის T_1 და T_2 დაჭიმულობა ტვირთის ზედა და ქვედა მდებარეობაში.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ M ტვირთის მოძრაობა სიმძიმის $\vec{P}$ ძალისა და ბმის $\vec{T}$ რეაქციის მოქმედებით. მოძრავ ტვირთთან დავაკავშიროთ კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემა (იხ. ნახაზი) და ჩავწეროთ დინამიკის ძირითადი განტოლება n ღერძზე გეგმილებში: $m\,a_n = \Sigma F_{kn}$,



სადაც $a_n = \dfrac{v^2}{l}$; $\Sigma F_{kn} = T - P\cos\varphi$.

მაშინ $$m\frac{v^2}{l} = T - P\cos\varphi. \qquad (1)$$

ტვირთი ზედა მდგომარეობას მიაღწევს მაშინ, როცა $\sin 2\pi t_1 = 1$. ამიტომ, $t_1 = \dfrac{1}{4}$ წმ. მაშინ $\varphi = \varphi_1 = \dfrac{\pi}{6}$.

ვიპოვოთ ტვირთის სიჩქარე. ვინაიდან M ტვირთის მოძრაობის ტრაექტორია არის l რადიუსის წრეწირი, ამიტომ მისი სიჩქარე

$$v = l\,\varphi', \qquad (2)$$

სადაც $\varphi' = \dfrac{\pi^2}{3}\cos 2\pi t$.

როცა $t_1 = \dfrac{1}{4}$, მივიღებთ, რომ $\varphi' = 0$, მაშასადამე $v_1 = 0$. მაშინ (1) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს $T - P\cos\varphi_1 = 0$.

აქედან $$T_1 = P\cos\varphi_1 = 10\cos\frac{\pi}{6} = 8{,}65 \ (\text{ნ}).$$

ტვირთის ქვედა მდებარეობაში $\varphi = \varphi_2 = 0$, ე. ი. $\sin 2\pi t_2 = 0$. ამიტომ, $t_2 = \dfrac{1}{2}$ წმ. მაშინ $\varphi' = \varphi'_2 = -\dfrac{\pi^2}{3}$ რად/წმ.

(2) ფორმულიდან ვიპოვით $v_2 = -\dfrac{\pi^2}{3}$ და ეს გამოსახულება (1) განტოლებაში ჩავსვათ: $m\left(-\dfrac{\pi^2}{3}\right)^2 \cdot l = T_2 - P\cos 0^0$.

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $m = \dfrac{p}{g}$, გვექნება

$$T_2 = \frac{p}{g}\left(-\frac{\pi^2}{3}\right)^2 \cdot l + P = \frac{10\pi^4}{9{,}8\cdot 9}\cdot 2 + 10 = 32{,}1 \ (\text{ნ})$$

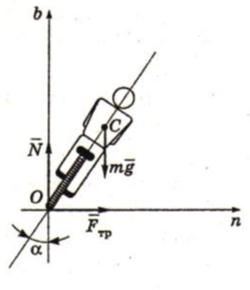
<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $T_1 = 8{,}65$ ნ. $T_2 = 32{,}1$ ნ.

ამოცანა 26. 29

ველოსიპედისტი შემოწერს 10 მ რადიუსის რკალს 5 მ/წმ სიჩქარით. იპოვეთ ველოსიპედის შუალედური სიბრტყის ვერტიკალიდან გადახრის კუთხე, აგრეთვე ველოსიპედის საბურავების გზის ვაკისთან შეხების ის უმცირესი კოეფიციენტი, როდესაც უზრუნველყოფილი იქნება ველოსიპედის მდგრადობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ველოსიპედისტის მოძრაობა, რომელზეც მოქმედებენ სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, ზედაპირის ნორმალური რეაქცია $\vec{N}$ და ხახუნის ძალა $\vec{F}_{\text{ур}}$ (იხ. ნახაზი).

ველოსიპედისტთან დავაკავშიროთ კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემის n და b ღერძები და ამ ღერძებზე გეგმილებში ჩავწეროთ წერტილის დინამიკის ძირითადი განტოლება:



$$m\, a_n = \Sigma F_{kn} = F_{Tp}\,, \qquad (1)$$

$$0 = -\, mg + N\ .(2)$$

(2) განტოლებიდან $N = mg\ .$ (3)

ვინაიდან ნორმალური აჩქარება $a_n = \dfrac{v^2}{R}$,

ხოლო მინიმალური ხახუნის ძალა

$$F_{Tp} = f_{მინ}\, N = f_{მინ}\; mg\,,$$

ამიტომ (1) გამოსახულება მიიღებს ასეთ სახეს

$$m\,\frac{v^2}{R} = f_{მინ}\; mg\,,$$

სადაც R - სიმრუდის რადიუსია.

აქედან $f_{მინ} = \dfrac{v^2}{Rg} = \dfrac{5^2}{10\cdot 9{,}8} = 0{,}255.$

ველოსიპედის შუალედური სიბრტყის ვერტიკალიდან გადახრის α კუთხე უნდა იყოს ხახუნის φ კუთხის ტოლი, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებიდან

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\,\varphi = f_{მინ}\,, \qquad \alpha = \mathrm{arctg}0{,}255 = 14^0 20'\ .$$

ან კიდევ, წონასწორობის განტოლებიდან

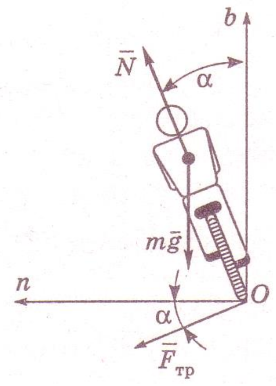
$$\sum მომ_c\,(\vec{F}_k) = 0 \leftrightarrow N\cdot 0C\cdot \sin\alpha = f_{მინ} N\cdot\ OC\cdot \cos\alpha \leftrightarrow\ \mathrm{tg}\,\alpha = f_{მინ}\ .$$

პ ა ს უ ხ ი: $14^0 20'$; 0,255 .

ამოცანა 26. 30

ველოსიპედის ტრეკს გზის მომრუდებულ უბნებზე აქვს ვირაჟები, რომელთა პროფილები განივ კვეთაში წარმოადგენენ ჰორიზონტისადმი დახრილ წრფეს ისე, რომ მომრუდებულ უბანებზე ტრეკის გარე ნაპირი შიდაზე მაღალია. როგორი უმცირესი და როგორი უდიდესი სიჩქარით შეიძლება ვირაჟის გავლა, რომლის რადიუსია R და ჰორიზონტისადმი დახრის კუთხე α, თუ რეზინის საბურავის ტრეკის გრუნტთან შეხების კოეფიციენტია f .

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ველოსიპედისტის მოძრაობა, რომელზეც მოქმედებენ სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, ზედაპირის ნორმალური რეაქცია $\vec{N}$ და ხახუნის ძალა $\vec{F}_{Tp}$. ეს ძალები გამოვსახოთ ნახაზზე (ხახუნის ძალა ნაჩვენებია იმ შემთხვევისათვის, როცა სიჩქარე მაქსიმალურია). .



ველოსიპედისტთან დავაკავშიროთ კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემის n და b ღერძები და ამ ღერძებზე გეგმილებში ჩავწეროთ წერტილის დინამიკის ძირითადი განტოლება:

$$m a_n = m\frac{v^2}{R} = N\sin\alpha + F_{Tp}\cos\alpha \qquad (1)$$

$$m a_b = 0 = N\cos\alpha - F_{Tp}\sin\alpha - mg\,, \qquad (2)$$

სადაც, ხახუნის ძალა $F_{Tp} = fN$.

(2) განტოლებიდან გვექნება

$$N(1 - f\,tg\alpha) = \frac{mg}{\cos\alpha}\,,$$

$$N = \frac{mg}{(1 - f tg\alpha)\cos\alpha}\,.$$

ეს გამოსახულება ჩავსვათ (1) ფორმულაში

$$m\frac{v^2}{R} = N(\sin\alpha + f\cos\alpha) = \frac{mg(tg\alpha + f)}{(1 - f tg\alpha)}$$

აქედან

$$v^2 = \frac{gR(tg\alpha + f)}{(1 - f tg\alpha)}\,,$$

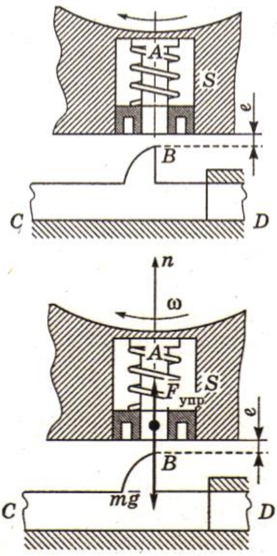
$$v = v_{max} = \sqrt{\frac{gR(tg\alpha + f)}{1 - f tg\alpha}}\,.$$

მინიმალური სიჩქარით მოძრაობისას ხახუნის ძალა მიმართული იქნება საწინააღმდეგო მხარეს და (1) განტოლებაში შევა „ - “ ნიშნით. მაშინ გვექნება

$$v = v_{min} = \sqrt{\frac{gR(tg\alpha - f)}{1 + f tg\alpha}}\,.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $v_{min} = \sqrt{\frac{gR(tg\alpha - f)}{1 + f tg\alpha}}$; $v_{max} = \sqrt{\frac{gR(tg\alpha + f)}{1 - f tg\alpha}}$.

ამოცანა 26. 31



მქნევარას გაწყვეტით გამოწვეული უბედური შემთხვევის თავიდან ასაცილებლად, აგებენ შემდეგ მოწყობილობას. მქნევარას ფერსოზე თავსდება A სხეული, რომელიც მის შიგნით შეკავებულია S ზამბარით; როდესაც მქნევარას სიჩქარე აღწევს ზღვრულ სიდიდეს, A სხეული თავისი ბოლოთი წამოედება CD ურდულის B შვერილს, რომელიც კეტავს მანქანაში ორთქლის მიწოდებას. ვთქვათ A სხეულის მასა არის 1,5 კგ, მანძილი e მქნევარადან B შვერილამდე 2,5 სმ-ს ტოლია, მქნევარას ზღვრული კუთხური სიჩქარეა 120 ბრ/წთ. განსაზღვრეთ ზამბარის ზღვრული სიხისტის კოეფიციენტი c (ე. ი. იმ ძალის სიდიოდე, რომლის მოქმედებისას ზამბარა 1 სმ შეიკუმშება), იმ დაშვებით, რომ A სხეულის მასა თავმოყრილია წერტილში, რომლის დაშორება მქნევარას ბრუნვის ღერძიდან ნახაზზე გამოსახულ მდგომარეობაში l=147,5 სმ-ს ტოლია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ A სხეულის მოძრაობა სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალისა და ზამბარის დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალის მოქმედებით. გამოვსახოთ ეს ძალები ნახაზზე. A სხეულთან დავაკავშიროთ კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემის n ღერძი და ამ ღერძზე გეგმილებში ჩავწეროთ წერტილის დინამიკის ძირითადი განტოლება:

$$m\,a_n = F_{yp} - mg,$$

სადაც

$$a_n = \frac{v^2}{l+e},\ v = \omega(l+e) = \frac{\pi n}{30}(l+e);\ F_{YP} = c(\lambda_{სტ}+e),$$

$$c\,\lambda_{სტ} = mg.$$

მაშინ

$$\frac{mv^2}{l+e} = ce,$$

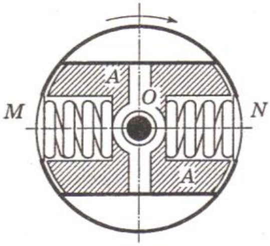
საიდანაც

$$c = \frac{mv^2}{(l+e)e} = \frac{m\omega^2(l+e)}{e} = \frac{\pi^2 n^2 m(l+e)}{30^2 e} =$$

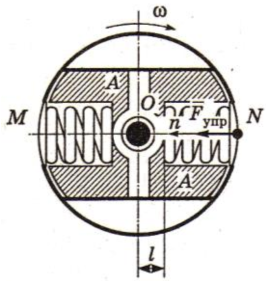
$$= \frac{3{,}14^2\cdot 120^2\cdot 1{,}5(1{,}475+0{,}025)}{900\cdot 0{,}025} = 14198\ (ნ/მ)$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 14198 ნ/მ.

ამოცანა 26. 32



რეგულატორში მოთავსებულია 30 კგ მასის საწონები A, რომელთაც შეუძლიათ სრიალი ჰორიზონტალური MN წრფის გასწვრივ; ეს საწონები შეერთებულია ზამბარებით M და N წერტილებთან. საწონების სიმძიმის ცენტრები ემთხვევიან ზამბარების ბოლოებს. არადაძაბულ მდგომარეობაში თითოეული ზამბარის ბოლოდან მანძილი ნახაზის სიბრტყის მართობულ 0 ღერძამდის არის 5 სმ; ზამბარის სიგრძის 1 სმ-ით ცვლილებას იწვევს 200 ნ ძალა. განსაზღვრეთ l მანძილი საწონების სიმძიმის ცენტრებიდან 0 ღერძამდის, როდესაც რეგულატორი, 0 ღერძის გარშემო თანაბარი ბრუნვისას აკეთებს 120 ბრ/წთ.



ა მ ო ხ ს ნ ა. A საწონებზე მოქმედებს დრეკადობის ძალა $\vec{F}_{yp}$. ეს ძალა მივმართოთ n ღერძის გასწვრივ (იხ. ნახაზი). ამ ღერძზე გეგმილებში ჩავწეროთ წერტილის დინამიკის ძირითადი განტოლება:

$$m\, a_n = F_{yp}, \qquad (1)$$

სადაც

$$a_n = \omega^2 l, \quad \omega = \frac{\pi n}{30} = 4\pi; \quad F_{დრ} = c\,(l - l_0),$$

აქ l_0 და l არიან მანძილები 0 ღერძიდან საწონების სიმძიმის ცენტრამდის, შესაბამისად ზამბარების არადაძაბული და დაძაბული მდგომარეობისათვის.

(1) განტოლებაში ჩავსვათ $F_{დრ}$ –ის მნიშვნელობა. მივიღებთ

$$16\,\pi^2 m l = c\,(l - l_0),$$

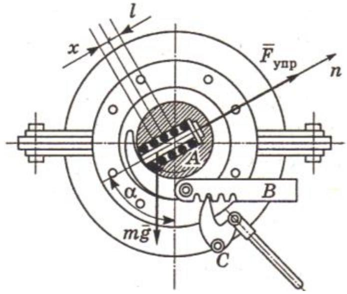
აქედან

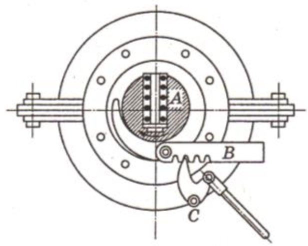
$$l = \frac{c l_0}{c - 16 m\pi^2} = \frac{200000 \cdot 0{,}05}{20000 - 16\cdot 30\cdot 3{,}14^2} = 0{,}0655 \text{ (მ)}$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 6,55 სმ.

ამოცანა 26. 33

ორთქლის ტურბინის დამცველი ამომრთველი შედგება m=0,225 კგ მასის A თითისაგან, რომელიც მოთავსებულია ტურბინის ლილვის წინა ნაწილში ღერძის პერპენდიკულარულად გაბურღულ ხვრელში და შიგნით მომჭიმავი ზამბარისგან. ტურბინის ბრუნვის ნორმალური n=1500 ბრ/წთ სიჩქარის დროს, თითის სიმძიმის ცენტრი ლილვის ბრუნვის ღერძიდან დაშორებულიოა l=8,5 მმ მანძილით. ბრუნვათა რიცხვის 10%-ით გაზრდისას თითი გადალახავს ზამბარის რეაქციას, გადადის თავის ნორმალურ მდებარეობიდან x = 4,5 მმ მანძილით, წამოედება B ბერკეტის ბოლოს და გაანთავისუფლებს C სასხლეტს, რომელიც დაკავშირებულია ბერკეტების სისტემით ზამბარასთან, და ხურავს ტურბინის ორთქლის განმანაწილებელი მექანიზმის სარქველს. განსაზღვრეთ A სხეულის დამჭერი ზამბარის სიხისტე, ე. ი. ძალა, რომელიც აუცილებელია მისი 1 სმ-ით შეკუმშვისათვის, ჩათვალეთ, რომ ზამბარის რეაქცია მისი შეკუმშვის პროპორციულია.





ა მ ო ხ ს ნ ა. ნახაზზე ვაჩვენოთ A თითზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა და ზამბარის დრეკადი ძალა $\vec{F}_{yp}$. A სხეულთან დავაკავშიროთ კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემის n ღერძი და ამ ღერძზე გეგმილებში ჩავწეროთ წერტილის დინამიკის ძირითადი განტოლება:

$$m\,a_1 = m\omega_1^2 l = F_{1yp} - mg\cos\alpha,$$

სადაც $a_1 = \omega_1^2 l$.

თითის x მანძილზე გადაადგილებისას

$$m\,a_2 = m\omega_2^2 l = F_{2yp} - mg\cos\alpha,$$

სადაც $a_2 = \omega_2^2 (l + x)$.

ამ შემთხვევაში, ზამბარებში წარმოქმნილი დრეკადი ძალები იქნება:

$$F_{1yp} = m\omega_1^2 l + mg\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$F_{2yp} = m\omega_2^2 (l + x) + mg\cos\alpha. \qquad (2)$$

ზამბარების სიხისტეს განვსაზღვრავთ შემდეგი პირობიდან

$$F_{2yp} - F_{1yp} = cx. \qquad (3)$$

ჩავსვათ (1) და (2) გამოსახულებები (3) განტოლებაში და ამოვხსნათ იგი c-ს მიმართ:

$$c = \frac{m\omega_2^2(l+x) - m\omega_1^2 l}{x}.$$

სადაც $\omega_1 = \dfrac{\pi n_1}{30}$, $\omega_2 = \dfrac{\pi n_2}{30}$.

ბრუნვათა რიცხვის 10% პროცენტით გაზრდისას $n_2 = n_1 + 0,1n_1 = 1,1\ n_1$,

ამიტომ $\omega_2 = \dfrac{1,1\pi n_1}{30}$.

მაშინ $$c = \frac{m\pi^2 n_1^2(0,21l + 1,21x)}{30^2 x} =$$

$$= \frac{0,225\cdot 3,14^2\cdot 1500^2(0,21\cdot 0,0085 + 1,21\cdot 0,0045)}{900\cdot 0,0045} = 0,892 \quad (\text{ნ/მ})$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> c = 89,2 ნ/სმ.

ამოცანა 26. 34

m მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს ელიფსზე $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\cdot$ წერტილის აჩქარება y ღერძის პარალელურია. როცა t = 0, მაშინ წერტილის კოორდინატებია x=0, y=b, და წერტილის საწყისი სიჩქარეა v_0. განსაზღვრეთ ძალა, რომელიც მოქმედებს წერტილზე მისი მოძრაობისას ტრაექტორიის ყოველ წერტილში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. წერტილის მოძრაობის განტოლებიდან განვსაზღვროთ y: $$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (1)$$

მხედველობაში მივიღოთ, რომ $\dfrac{dx}{dt} = v_0$, საიდანაც x = v_0t. ჩავსვათ x-ის მნიშვნელობა (1) გამოსახულებაში:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2}. \qquad (2)$$

(2) გამოსახულება გავაწარმოოთ ორჯერ დროთი:

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2}\right) = -\frac{bv_0^2 t}{a\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2}};$$

$$y'' = \frac{d}{dt}\left(-\frac{bv_0^2 t}{a\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2}}\right) = -\frac{bv_0^2 a\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2} + bv_0^2 ta\frac{tv_0^2}{\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2}}}{a^2(a^2 - v_0^2 t^2)} =$$

$$= -\frac{bv_0^2 a^3}{a^2(a^2 - v_0^2 t^2)\sqrt{a^2 - v_0^2 t^2}} = -\frac{bv_0^2 a^3}{a^2 \frac{a^2}{b^2} y^2 \cdot \frac{a}{b} y} = -\frac{b^4 v_0^2}{a^2 y^3}.$$

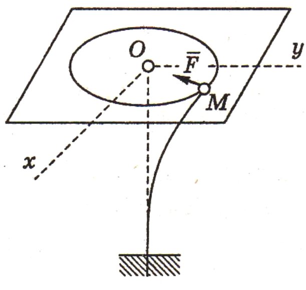
რადგანაც წერტილს აქვს $a = y''$ აჩქარება, ამიტომ

$$F_y = ma = my'' = -\frac{mb^4 v_0^2}{a^2 y^3}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $F_y = -\dfrac{mb^4 v_0^2}{a^2 y^3}$.

ამოცანა 26. 35

m მასის ბურთულა დამაგრებულია ვერტიკალურ დრეკად ღეროზე, რომელიც ქვედა ბოლოთი ჩაჭედებულია უძრავ დგარზე. ღეროს მცირე გადახრისას მის ვერტიკალურ წონასწორობის მდგომარეობიდან, შეიძლება მიახლოებით ჩავთვალოთ, რომ ბურთულის ცენტრი მოძრაობს ჰორიზონტალურ 0xy სიბრტყეში, რომელიც გადის ბურთულის ცანტრის ზედა წონასწორობის მდგომარეობაში. განსაზღვრეთ ძალის ცვლილების კანონი, რომლითაც დრეკადი გაღუნული ღერო მოქმედებს ბურთულაზე, თუ თავის წონასწორობის მდგომარეობიდან გამოყვანილი, რომელიც მიღებულია კოორდინატთა სათავედ, ბურთულა მოძრაობს თანახმად განტოლებებისა $x = a \cos kt$, $y = b \sin kt$, სადაც a, b, k – მუდმივი სიდიდეებია.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ჩავწეროთ წერტილის დინამიკის ძირითადი განტოლება x და y ღერძებზე გეგმილებში:

$mx'' = F_x$, (1)

$my'' = F_y$. (2)

ვიპოვოთ x და y –ს მეორე წარმოებულები:

$x'' = -\, a\, k^2 \cos kt$, (3)

$y'' = -\, b\, k^2 \sin kt$. 4)

(3) და (4) გამოსახულებები ჩავსვათ (1) და (2) განტოლებებში:

$F_x = -\, m\, a\, k^2 \cos kt$,

$F_y = -\, m\, b\, k^2 \sin kt$,

აქედან

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2\sqrt{a^2\cos^2 kt + b^2\sin^2 kt} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r,$$

სადაც $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $F = mk^2 r$, სადაც $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

27. მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები

მეთოდური მითითებანი ამოცანების ამოსახსნელად

ამ პარაგრაფის ამოცანები მიეკუთვნება მეორე ტიპის ამოცანებს, როდესაც ხდება ნივთიერი წერტილის დინამიკის მეორე ძირითადი ამოცანების ამოხსნა, რომლის არსია წერტილის მოძრაობის კანონის განსაზღვრა მოცემული ძალით, მასით და მოძრაობის საწყისი პირობებით.

მოძრაობის საწყისი პირობები – ეს არის მოძრაობის დაწყების მომენტში წერტილის მდებარეობა და სიჩქარე, ე. ი. თუ მოძრაობა განიხილება დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში, როცა $t=0$ მოცემული უნდა იყოს წერტილის კოორდინატები: x_0, y_0, z_0, და საწყისი სიჩქარის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე: x'_0, y'_0, z'_0.

ასეთი ამოცანების ამოხსნა დაიყვანება მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების შედგენასა და მათ ამოხსნაზე, ასევე მიღებული შედეგების ანალიზზე.

ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების შედგენის დროს იყენებენ დინამიკის მეორე კანონს.

მიღებული განტოლებების ამოხსნა ხდება ან უშუალო ინტეგრებით, ან დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით.

(IX.3) და (IX.4) განტოლებები წარმოადგენენ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს შესაბამისად კოორდინატთა დეკარტის და ბუნებრივი სისტემის ღერძებზე. (IX.4) დიფერენციალურ განტოლებებს იყენებენ წერტილის მრუდწირული მოძრაობისას, თუ ცნობილია წერტილის ტრაექტორია და მისი სიმრუდის რადიუსი, მაგალითად წრეწირზე მოძრაობისას.

თუ მოძრაობა წრფივია, მაშინ ადგენენ ერთ დიფერენციალურ განტოლებას იმ ღერძზე გეგმილებში, რომელიც მიმართულია მოძრაობის მხარეს.

სიბრტყეზე მრუდწირული მოძრაობისას ადგენენ ორ დიფერენცი - ალურ განტოლებას x და y ღერძებზე გეგმილებში. ვინაიდან, წერტილზე მოქმედი ძალები შეიძლება იყვნენ, როგორც მუდმივი, ასევე ცვლადები, დამოკიდებული t დროზე, $\vec{v}$ სიჩქარეზე და წერტილის $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორზე, ამიტომ $\vec{F}=\vec{F}(\vec{v})$ და $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$ ძალების კოორდინატთა ღერძებზე დაგეგმილებისას მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ

$$F_x = |\vec{F}(\vec{v})| \cos(\vec{v},\wedge \vec{i}\,),$$

$$F_y = |\vec{F}(\vec{v})| \cos(\vec{v},\wedge \vec{j}\,), \qquad (27.1)$$

სადაც $$\cos(\vec{v},\wedge \vec{i}\,) = \frac{v_x}{v} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

$$\cos(\vec{v},\wedge\vec{j}) = \frac{v_y}{v} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} .$$

დაუშვათ $\vec{F} = -k\vec{v}$. მაშინ

$$F_x = -k\,v\,\frac{v_x}{v} = -k\,v_x = -k\,x' ,$$

$$F_y = -k\,v\,\frac{v_y}{v} = -k\,v_y = -k\,y' . \qquad (27.2)$$

(27.2) ფორმულიდან ჩანს, რომ თუ $\vec{F}$ ძალა პროპორციულია სიჩქარის კვადრატის, ან ნებისმიერი, ერთის არატოლი ხარისხისა, მაშინ ძალის გეგმილი ღერძზე დამოკიდებული იქნება ორ ცვლადზე - x' და y'.

მაგალითად, თუ წერტილზე მოქმედებს სიჩქარის კვადრატის პროპორციული წინაღობის ძალა, მაშინ

$$F_x = -k\,v^2\frac{v_x}{v} = -k\,v\,v_x = -k\,x'\sqrt{x'^2+y'^2} ,$$

$$F_y = -k\,v^2\frac{v_y}{v} = -k\,v\,v_y = -k\,y'\sqrt{x'^2+y'^2} . \qquad (27.3)$$

თუმცა, მოძრაობის დიფერენციალური განტოლების ანალიზური ამოხსნის მიღება დეკარტის კოორდინატთა სისტემის ღერძებში, რომელშიც შევლენ F_x ან F_y (27. 3) გამოსახულების სახით, შეუძლებელია; მაგალითად, ჰორიზონტისადმი რაიმე კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა.

თუ სხეულის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს ჩავწერთ კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემის ღერძებში, მაშინ, ამ შემთხვევაში შეიძლება ვიპოვოთ ანალიზური დამოკიდებულება სიჩქარისა წერტილის ტრაექტორიისადმი მხების დახრის კუთხესთან. შემდეგ შევადგენთ ანალიზურ დამოკიდებულებას x და y კოორდინატებსა და ტრაექტორიაზე მოძრაობის t დროსთან, მაგრამ ეს დაკავშირებულია მნიშვნელოვან მათემატიკურ სირთულეებთან.

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ ძალისათვის კოორდინატთა ღერძებზე გეგმილები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$F_x = |\vec{F}(\vec{r})|\cos(\vec{r},\wedge\vec{i}) ,$$

$$F_y = |\vec{F}(\vec{r})|\cos(\vec{r},\wedge\vec{j}) , \qquad (27.4)$$

სადაც $$\cos(\vec{r},\wedge\vec{i}) = \frac{r_x}{r} = \frac{x}{r} ,$$

$$\cos(\vec{r},\wedge\vec{j}) = \frac{r_y}{r} = \frac{y}{r}. \qquad (27.4)$$

x და y - რადიუს-ვექტორის გეგმილებია კოორდინატთა ღერძებზე.

თუ წერტილზე მოქმედებს რაიმე უძრავი ცენტრიდან უკუმბიძგები ძალა $\vec{F} = k^2 m\vec{r}$, მაშინ

$$F_x = \left|\vec{F}\right| \cos(\vec{r},\wedge\vec{i}) = k^2 mr\ \frac{x}{r} = k^2 m\,x$$

$$F_y = \left|\vec{F}\right| \cos(\vec{r},\wedge\vec{j}) = k^2 mr\ \frac{y}{r} = k^2 m\,y. \qquad (27.5)$$

ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანამიმდევრობა:

1. ავირჩიოთ ათვლის სისტემა, კოორდინატთა ღერძების სათავე შევუთავსოთ წერტილის საწყის მდებარეობას და ღერძები მივმართოთ წერტილის მოძრაობის მხარეს.
2. გამოვსახოთ მოძრავი წერტილის ნებისმიერი მდებარეობა, მაგრამ ისე, რომ $x > 0$, $v_x > 0$ და ა. შ.
3. ნახაზზე გამოვსახოთ წერტილზე მოქმედი აქტიური ძალები და ბმის რეაქცია, თუ წერტილი არათავისუფალია.
4. ზოგადი სახით ჩავწეროთ დიფერენციალური განტოლებები (განტოლება), გამოვთვალოთ კოორდინატთა ღერძებზე ან ღერძე (წრფივი მოძრაობის დროს) ყველა ძალის გეგმილების ჯამი და ჩავსვათ დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა მხარეს. ამასთანავე, აუცილებელია ყველა ცვლადი ძალა გამოვსახოთ იმ სიდიდეებში (t, x, ან v_x), რომლებზეც ისინია დამოკიდებული.
5. დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრება ხდება იმ მეთოდებით, რომლებიც ცნობილია უმაღლესი მათემატიკის კურსიდან და დამოკიდებულია მიღებული განტოლების მარჯვენა მხარის სახეზე.

თუ განტოლებაში არაუმეტეს ორი ცვლადია, მაშინ შეიძლება ის გავაინტეგროთ ცვლადთა განცალების მეთოდით. ამასთანავე, მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება აუცილებელია წარმოვადგინოთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების სახით, თუ შემოვიღებთ შეცვლას, მაგალითად $x'' = \dfrac{dx'}{dt}$ ან $x'' = \dfrac{dv_x}{dt}$ და ა. შ.

მაშინ, ნაცვლად განტოლებისა

$$mx'' = \sum F_{kx},$$

მივიღებთ განტოლებას

$$m\frac{dv_x}{dt} = \sum F_{kx}. \qquad (27.\ 6)$$

თუ (27. 6) განტოლების მარჯვენა მხარე შეიცავს რაიმე მუდმივ ძალას, ან v_x სიჩქარეზე დამოკიდებულ ძალას, მაშინ განტო;ლების მარჯვენა მხარე უნდა ჩავთვალოთ v_x-ს ფუნქციად, ე.ი. $\sum F_{kx} = F_x(v_x)$.

ცვლადთა განცალების შემდეგ (27. 6) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\frac{dv_x}{F_x(v_x)} = \frac{dt}{m}. \qquad (27.\ 7)$$

(27.7) განტოლების ინტეგრირებით, ვიპოვით $v_x = f_1(t, C_1)$. შემდეგ v_x-ს წარმოვადგენთ ასეთი სახით

$$v_x = \frac{dx}{dt} = f_1(t, C_1),$$

კვლავ განვაცალებთ ცვლადებს და ვაინტეგრებთ, მივიღებთ

$$x = f(t, C_1, C_2),$$

სადაც C_1, C_2 - ინტეგრების მუდმივებია.

ინტეგრირების მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით. (27. 7) განტოლების ამოხსნა საშუალებას იძლევა აგრეთვე ვიპოვოთ t დრო, რომლის განმავლობაშც იცვლება ნივთიერი წერტილის მოძრაობის სიჩქარე v_0-დან v-მდე, ამიტომ (27. 6) განტოლებაში მოვახდენთ ცვლადთა შემდეგ შეცვლას:

$$m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{dv_x}{dt}\cdot\frac{dx}{dx} = mv_x\frac{dv_x}{dx}. \qquad (27.\ 8)$$

ასეთივე შეცვლას შემოვიღებთ იმ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრირებისას, რომლის მარჯვენა მხარე შეიცავს ძალას, რომელიც დამოკიდედებულია x კოორდინატზე ნებისმიერ ხარისხში.

ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლების ცვლადთა განცალების მეთოდით ამოხსნისას ინტეგრირების მუდმივების შემოტანის მაგივრად შეიძლება ტოლობის ორივე მხარეს ავიღოთ განსაზღვრული ინტეგრალი ინტეგრირების შესაბამისი საზღვრებით.

ზოგჯერ, მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა მოსახერხებელია დიფერენციალური განტოლებების თეორიის გამოყენებით.

6. დიფერენციალური განტოლების ამოხსნისას, აუცილებელია შესრულდეს შესაბამისი გარდაქმნები და მივიღოთ საძებნი სიდიდეების ზოგადი სახის გამოსახულება. შემდეგ საჭიროა შევამოწმოთ მიღებული შედეგის სამართლიანობა განზომილებათა დათვლით.

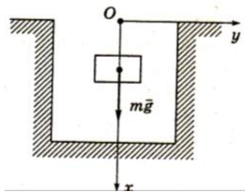
წრფივი მოძრაობა

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 27. 1

შახტში ვარდება ქვა საწყისი სიჩქარის გარეშე. შახტის ძირზე ქვის დაცემი ხმა გაისმა მისი ვარდნის დაწყების მომენტიდან 6,5 წმ-ს შემდეგ. ხმის სიჩქარეა 330 მ/წმ. გაიგეთ შახტის სიღრმე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ ქვა ნივთიერ წერტილად და შევადგინოთ სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალის მოქმედებით მისი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):



$$mx'' = mg,$$

ანუ

$$x'' = g\,.$$

ამ გამოსახულების ორჯერ ინტეგრირებით მივიღებთ

$$x = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2\,.$$

ინტეგრების მუდმივებს განვსაზღვრავთ მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0$, მაშინ $x_0=0$, $x'_0 = 0$. ამიტომ $C_1=0$, $C_2 = 0$.

მაშასადამე, ქვის მოძრაობის კანონია

$$x = \frac{gt^2}{2}\,.$$

ქვის დაცემის მომენტისათვის $x = h$, $t = t_1$, ე. ი.

$$h = \frac{gt_1^2}{2}, \qquad (1)$$

სადაც h შახტის სიღრმეა, t_1 – ქვის ვარდნის დრო.

მეორეს მხრივ

$$h = v_ბ t_2\,,$$

სადაც $v_ბ$ - ბგერის სიჩქარეა, t_2 – შახტის ძირზე ქვის დაცემით გამოწვეული ბგერის მიერ განვლილი დრო.

რადგანაც საერთო დრო $t_{სრ} = t_1 + t_2$, ამიტომ $t_2 = t_{სრ} - t_1$. მაშინ

$$\frac{gt_1^2}{2} = v_ბ\,(t_{სრ} - t_1) \Rightarrow t_1^2 + \frac{2v_b}{g}t_1 - \frac{2v_b t_c}{g} = 0$$

თუ ამ კვადრატულ განტოლებას ამოვხსნით t_1–ის მიმართ, მივიღებთ

$$t_1 = -\frac{v_b}{g} + \sqrt{\frac{v_b^2}{g^2} + \frac{2v_b t_c}{g}}\ .$$

შევიტანოთ t_1-ს ეს მნიშვნელობა (1) ფორმულაში, მივიღებთ

$$h = \frac{g}{2}\left(\sqrt{\frac{v_b^2}{g^2} + \frac{2v_b t_c}{g}} - \frac{v_b}{g}\right)^2 = \frac{9,8}{2}\left(\sqrt{\frac{330^2}{9,8^2} + \frac{2\cdot 330\cdot 6,5}{9,8}} - \frac{330}{9,8}\right)^2 = 175\ \text{მ.}$$

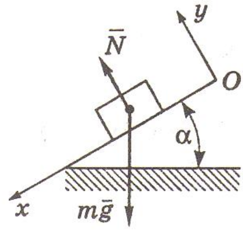
<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 175 მ.

ამოცანა 27. 2

მძიმე სხეული ეშვება ჰორიზონტისადმი 30^0 კუთხით დახრილ გლუვ სიბრტყეზე. განსაზღვრეთ, რა დროში გაივლის სხეული 9,6 მ მანძილს, თუ საწყის მომენტში მისი სიჩქარე იყო 2 მ/წმ.

<u>**ა მ ო ხ ს ნ ა**</u>. მივიღოთ მძიმე სხეული ნივთიერ წერტილად და შევადგინოთ მისი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$mx'' = mg\sin\alpha\,.$$



ანუ $$x'' = g\sin\alpha.$$

ამ გამოსახულების ინტეგრირებით მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0$, მაშინ $x_0=0$, $x'_0 = v_0$. მივიღებთ $x' = g\,t\sin\alpha$.

$$x = \frac{gt^2}{2}\sin\alpha + v_0 t\,.$$

ანუ $$t^2 + \frac{2v_0 t}{g\sin\alpha} - \frac{2x}{g\sin\alpha} = 0\cdot$$

ამოვხსნათ ეს კვადრატული განტოლება და გამოვთვალოთ დრო, რომლის განმავლობაშიც სხეული გაივლის 9,6 მ მანძილს:

$$t = \frac{v_0}{g\sin\alpha}\left(\sqrt{1 + \frac{2xg\sin\alpha}{v_0^2}} - 1\right) = \frac{2}{9,8\cdot 0,5}\left(\sqrt{1 + \frac{2\cdot 9,6\cdot 9,8\cdot 0,5}{2^2}} - 1\right) = 1,61\ \text{(წმ).}$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:** 1, 61 წმ.</u>

ამოცანა 27. 3

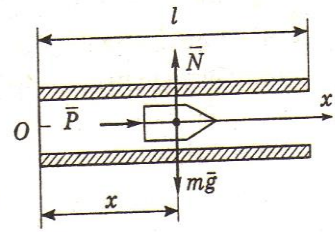
ქვემეხიდან გასროლისას ჭურვი გამოვარდება ჰორიზონტალური სიჩქარით 570 მ/წმ. ჭურვის მასაა 6 კგ. რა სიდიდისაა დენთის გაზის საშუალო წნევა, თუ ჭურვი ქვემეხის შიგნით გადის 2 მ? რა დროის განმავლობაში მოძრაობს ჭურვი ქვემეხის ლულაში, თუ ჩავთვლით, რომ გაზის წნევა მუდმივია?

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. მივიღოთ ჭურვი ნივთიერ წერტილად, შევადგინოთ მისი ლულაში მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$mx'' = P,$$

სადაც P=const – დენთის გაზის საშუალო წნევაა.

ამ განტოლების ინტეგრირებით მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0$, მაშინ $x_0=0$, $x'_0=0$. მივიღებთ



$$x' = \frac{P}{m}t,$$

$$x = P\frac{t^2}{2m}.$$

ჭურვის გამოვარდნის მომენტში

$x' = v = 570$ მ/წმ, $x = l = 2$მ.

ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{p}{m}t, \\ l &= P\frac{t^2}{2m} \end{aligned}\right\}$$

აქედან $P = \frac{mv}{t}$, $l = \frac{vt}{2}$.

მაშინ $P = \frac{6\cdot 570}{0{,}007} = 4{,}88\cdot 10^5$ (ნ),

$$t = \frac{2l}{v} = \frac{2\cdot 2}{570} = 0{,}007 \text{ (წმ)}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $P = 4{,}88\cdot 10^5$ ნ; $t = 0{,}007$ წმ.

ამოცანა 27. 4

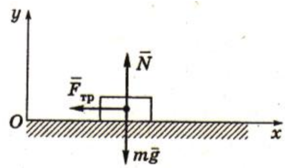
m მასის სხეულმა მიღებული ბიძგის შედეგად არაგლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე 5 წმ-ში გაიარა s = 24,5 მ მანძილი და გაჩერდა. განსაზღვრეთ ხახუნის კოეფიციენტი f .

<u>**ა მ ო ხ ს ნ ა**</u>. მივიღოთ სხეული ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ მისი მოძრაობა მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალით, ხახუნის $\vec{F}_ხ$ ძალით და ნორმალური $\vec{N}$ რეაქციით (იხ. ნახაზი).

მივმართოთ x ღერძი სხეულის მოძრაობის მიმართულებით და შევადგინოთ მისი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები x და y ღერძებზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$mx'' = \Sigma F_{kx}, = - F_ხ ,$$
$$my'' = \Sigma F_{ky}, = N - mg .$$

ვინაიდან $y''= 0$, ამიტომ $N = mg$, მაშინ $F_ხ = fN = f\, mg$.



მაშასადამე $mx'' = - f\, mg$,

$x'' = - f\, g$,

ანუ $$\frac{dv}{dt} = - f\, g .$$

ცვლადთა განცალებისა და სათანადო საზღვრებში ინტეგრირების შედეგად გვექნება

$$\int_v^0 dv = -fg\int_0^t dt, \quad \Rightarrow \quad -v = -fgt \quad , \text{ ანუ } \quad \frac{dx}{dt} = fgt .$$

აქედან $$\int_0^s dx = fg\int_0^t tdt ,$$

მივიღებთ $$s = fg\frac{t^2}{2} ,$$

საიდანაც $$f = \frac{2s}{gt^2} = \frac{24{,}5\cdot 2}{9{,}8\cdot 25} = 0{,}2 .$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> f = 0,2.

ამოცანა 27. 5

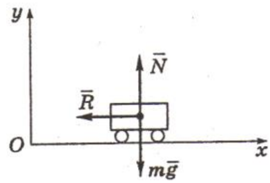
რა დროში და რა მანძილზე შეიძლება ტრამვაის ვაგონის გაჩერება მუხრუჭით, თუ იგი მიდიოდა ჰორიზონტალურ გზაზე 10 მ/წმ სიჩქარით, დამუხრუჭებისას, მოძრაობისადმი განვითარებული წინაღობა შეადგენს ვაგონის წონის 0,3.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ ტრამვაის ვაგონი ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ მისი მოძრაობა მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალით, წინაღობის $\vec{R}$ ძალით და ნორმალური $\vec{N}$ რეაქციით (იხ. ნახაზი).

მივმართოთ x ღერძი ტრამვაის მოძრაობის მიმართულებით და ჩავწეროთ ვაგონის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში: $mx'' = \Sigma F_{kx}, = -R$,

$mx'' = -0{,}3\, mg,$

$x'' = -0{,}3\, g$.



შევცვალოთ $x'' = \dfrac{dv}{dt}$, განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ შესაბამის საზღვრებში: $\int_{v_0}^{v} dv = -0{,}3g\int_0^t dt$,

აქედან $$v - v_0 = -0{,}3gt. \qquad (1)$$

ვინაიდან, გზის ბოლოს სიჩქარე $v = 0,$ ამიტომ

$$t = \frac{v_0}{0{,}3g} = \frac{10}{0{,}3\cdot 9{,}8} = 3{,}4 \text{ (წმ).}$$

შევცვალოთ $v = \dfrac{dx}{dt}$, მაშინ (1) გამოსახულებიდან მივიღებთ

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - 0{,}3gt.$$

ცვლადთა განცალებისა და სათანადო საზღვრებში ინტეგრირების შედეგად გვექნება $\int_0^s dx = \int_0^{3,4} v_0 dt - \int_0^{3,4} 0{,}3gtdt$.

$$s = v_0 t\Big|_0^{3,4} - 0{,}3g\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^{3,4} = 10\cdot 3.4 - 0.3\cdot 9{,}8\cdot\frac{3{,}4^2}{2} = 17 \text{ (მ)}$$

პ ა ს უ ხ ი: t = 3,4 წმ; s = 17 მ.

ამოცანა 27. 6

საგორავის წინაღობა პირველი მიახლოებით ჩათვალეთ მუდმივად და განსაზღვრეთ საველე ქვემეხის ლულის გადაგორების ხანგრძლივობა, თუ გადაგორების საწყისი სიჩქარეა 10 მ/წმ, ხოლო გადაგორების საშუალო სიგრძეა 1 მ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ საგორავი ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ მისი მოძრაობა მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალით, წინაღობის $\vec{F}_c$ ძალით და ნორმალური $\vec{N}$ რეაქციით (იხ. ნახაზი).

მივმართოთ x ღერძი მოძრაობის მიმართულებით და ჩავწეროთ საგორავის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Sigma F_{kx} = -F_c , \qquad (1)$$

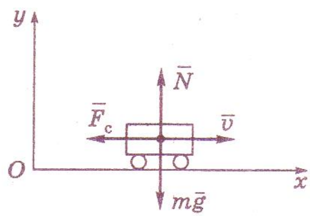
სადაც $F_c = const.$

შევცვალოთ $x'' = \dfrac{dv}{dt}$, მაშინ (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{F_c}{m}.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ შესაბამის საზღვრებში:

$$\int_{v_0}^{v} dv = -\frac{F_c}{m}\int_0^t dt,$$



აქედან

$$v = v_0 - \frac{F_c}{m}t.$$

ვინაიდან $v = \dfrac{dx}{dt}$, გვექნება

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - \frac{F_c}{m}t.$$

ცვლადთა განცალებისა და სათანადო საზღვრებში ინტეგრირების შედეგად გვექნება

$$\int_0^s dx = \int_0^t v_0 dt - \frac{F_c}{m}\int_0^t t dt,$$

საიდანაც

$$s = v_0 t - \frac{F_c t^2}{2m}.$$

როცა $v_0 = 10$ მ/წმ, გადაგორების სიგრძეა $s = 1$ მ, ე. ი.

$1 = 10\,t - 5\,t.$ აქედან $t = 0{,}2$ წმ.

პ ა ს უ ხ ი: 0,2 წმ.

ამოცანა 27. 7

მძიმე წერტილი ადის ჰორიზონტისადმი α = 30^0 კუთხით დახრილ არაგლუვ სიბრტყეზე. საწყის მომენტში წერტილის სიჩქარე იყო v_0 =15 მ/წმ. ხახუნის კოეფიციენტი f = 0,1. რა მანძილს გაივლის წერტილი გაჩერებამდე? რა დროში გაივლის წერტილი ამ მანძილს?

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ მძიმე M წერტილის მოძრაობა მასზე მოქმედი სიმძიმის m$\vec{g}$ ძალით, ხახუნის $\vec{F}_c$ ძალით და ნორმალური $\vec{N}$ რეაქციით (იხ. ნახაზი).

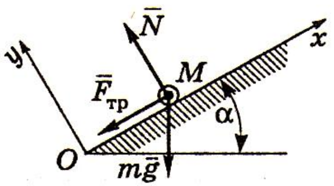
შევადგინოთ M წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები x და y ღერძებზე გეგმილებში და მივმართოთ x ღერძი სხეულის მოძრაობის მიმართულებით (იხ. ნახაზი):

$$mx'' = \Sigma F_{kx} = - mg\sin\alpha - F_ხ, \quad (1)$$

$$my'' = \Sigma F_{ky} = N - mg\cos\alpha. \quad (2)$$

ვინაიდან y″= 0, ამიტომ (2) განტოლებიდან

$$N = mg\cos\alpha.$$



მაშინ $F_ხ = fN = f\, mg\cos\alpha$

და (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$mx'' = - mg\sin\alpha - f\, mg\cos\alpha,$$

ანუ $\dfrac{dv}{dt} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)$. (3)

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ (3) შესაბამის საზღვრებში:

$$\int_{v_0}^{v} dv = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\int_0^t dt,$$

აქედან $$v - v_0 = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t.$$

ვინაიდან $v = 0$, და v_0 =15 მ/წმ.

ამიტომ $$t = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = \frac{15}{9{,}8(0{,}5 + 0{,}0866)} = 2{,}61 \text{ (წმ)}.$$

განვლილი მანძილის განსაზღვრისათვის (3) ასე ჩავწეროთ

$$\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ x ცვლადით შესაბამის საზღვრებში:

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\int_0^s dx.$$

რადგანაც $v = 0$, ამიტომ მივიღებთ

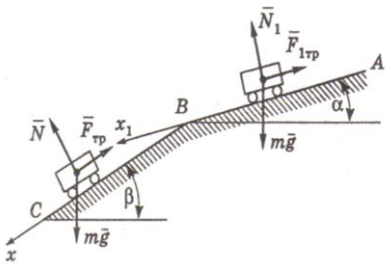
$$-\frac{v_0^2}{2} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)s.$$

აქედან $s=\frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha+f\cos\alpha)}=\frac{15^2}{2\cdot 9,8(0,5+0,0866)}=19,57$ (მ)

<u>პ ა ს უ ხ ი: **s** = 19,57 მ; t =2,61 წმ.</u>

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 27. 8

წრფივ რკინიგზაზე, რომელიც დახრილია $\alpha=10^0$ კუთხით, ვაგონი მიგორავს მუდმივი სიჩქარით. ჩათვალეთ ხახუნის წინაღობა ნორმალური წნევის პროპორციულად და განსაზღვრეთ ვაგონის აჩქარება და სიჩქარე მოძრაობის დაწყებიდან 20 წმ-ს შემდეგ, თუ მან მოძრაობა დაიწყო საწყისი სიჩქარის გარეშე $\beta=15^0$ გრადუსით დახრილ გზაზე. განსაზღვრეთ აგრეთვე, რა მანძილი გაიარა ვაგონმა ამ დროში.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. მივიღოთ ვაგონი ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ მისი მოძრაობა გზის AB უბანზე მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec g$ ძალით, ხახუნის $\vec F_{1x}$ ძალით და საყრდენის ნორმალური $\vec N_1$ რეაქციით (იხ. ნახაზი).

მივმართოთ x_1 ღერძი ვაგონის მოძრაობის მიმართულებით და ჩავწეროთ ვაგონის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x_1 ღერძზე გეგმილებში: $mx_1'' = \Sigma F_{kx1}$,

ანუ $m g\sin\alpha - f mg\cos\alpha = 0$, (1)

რადგანაც ამოცანის პირობის თანახმად გზის AB უბანზე $x_1'' = 0$.

(1) განტოლებიდან $f=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha$

შემდეგ შევადგინოთ გზის BC უბანზე ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec g$ ძალით, ხახუნის $\vec F_{Tp}$ ძალით და საყრდენის ნორმალური $\vec N$ რეაქციით x ღერძზე გეგმილებში

$$mx'' = \Sigma F_{kx},$$

ანუ

$$x'' = g(\sin\beta - f\cos\beta),$$

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin\beta - f\cos\beta). \qquad (2)$$

აჩქარება $a = \dfrac{dv}{dt}$, ამიტომ (2) ფორმულის თანახმად

$$a = g(\sin\beta - f\cos\beta) = g(\sin\beta - \mathrm{tg}\,\alpha\cos\beta) =$$

$$= g\frac{\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha} = g\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha} =$$

$$= 9{,}8\frac{\sin 5^0}{\cos 10^0} = 9{,}8\frac{0{,}0872}{0{,}9848} = o{,}867 \text{ (მ/წმ}^2\text{)}.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ (2) განტოლება შესაბამის საზღვრებში: $v_0 = 0$, t =20 წმ,

$$\int_{v_0}^{v} dv = g(\sin\beta - f\cos\beta\int_0^t dt,$$

აქედან

$$v = g(\sin\beta - \mathrm{tg}\,\alpha\cos\beta)t = g\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}t = 0{,}867\cdot 20 = 17{,}35 \text{ (მ/წმ)}.$$

განვლილი მანძილის გამოსათვლელად მოვახდინოთ ჩასმა $v = \dfrac{dx}{dt}$,

მაშინ $$\frac{dx}{dt} = g(\sin\beta - \mathrm{tg}\,\alpha\cos\beta)t.$$

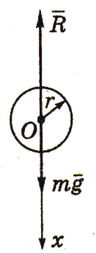
განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ:

$$\int_0^s dx = g(\sin\beta - \mathrm{tg}\,\alpha\cos\beta)\int_0^t t\,dt.$$

ქედან $s = g(\sin\beta - \mathrm{tg}\,\alpha\cos\beta)\dfrac{t^2}{2} = g\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}\dfrac{t^2}{2} = 0{,}867\cdot\dfrac{20^2}{2} = 173{,}5$ (m).

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $a = g\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}$ =0,867 მ/წმ^2; v = 17,35 მ/წმ; S=173,5 მ.

ამოცანა 27. 9



იპოვეთ 10 კგ მასის r = 8 სმ რადიუსის ბურთულას ვარდნის უდიდესი სიჩქარე, თუ ჩავთვლით, რომ ჰაერის წინაღობა $R = k\sigma v^2$, სადაც v - მოძრაობის სიჩქარეა, σ – სხეულის მოძრაობის მართობულ სიბრტყეზე სხეულის გეგმილის ფართობი, k – რიცხვითი კოეფიციენტი,

დამოკიდებული სხეულის ფორმაზე და ბურთულისათვის მისი მნიშვნელობაა 0,24 ნ· წმ^2/მ^4 .

ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ ბურთულა ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ მისი მოძრაობა მასზე მოქმედი სიმძიმის m$\vec{g}$ ძალით და წინაღობის $\vec{R}$ ძალით (იხ. ნახაზი). მივმართოთ x ღერძი წერტილის მოძრაობის მიმართულებით, ე.ი. ვერტიკალურად ქვემოთ და ჩავწეროთ მისი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx_1'' = \Sigma F_{kx} ,$$

ანუ

$$mx'' = m g – R = mg - k \sigma v^2 ,$$

შემოვიღოთ შეცვლა $x'' = \dfrac{dv}{dt}$,

მაშინ $$m \frac{dv}{dt} = mg - k \sigma v^2 .$$

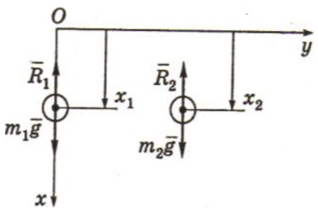
როდესაც $\dfrac{dv}{dt} = 0$ (სიჩქარისათვის ექსტრემუმის პირობა) მივიღებთ

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{mg}{k\sigma}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 9{,}8}{0{,}24 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}08^2}} = 142{,}5 \text{ (მ/წმ)}$$

პ ა ს უ ხ ი: $v_{\max}$ = 142,5 მ/წმ.

ამოცანა 27. 10

ორი გეომეტრიულად ტოლი და ერთგვაროვანი ბურთულა დამზადებულია სხვადასხვა მასალისგან. ბურთულების მასალების სიმკვრივე შესაბამისად არის Y_1 და Y_2. ორივე ბურთულა ჰაერში ვარდება. ჩათვალეთ გარემოს წინაღობა სიჩქარის კვადრატის პროპორციული და განსაზღვრეთ ბურთულების მაქსიმალურ სიჩქარეთა ფარდობა.



ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ ბურთულები ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ თითოეულის მოძრაობა მასზე მოქმედი სიმძიმის m$_1\vec{g}_1$ და m$_2\vec{g}_2$ ძალებით და წინაღობის $R_1 = \alpha v_1^2$ და $R_2 = \alpha v_2^2$ ძალით (იხ. ნახაზი). მივმართოთ x ღერძი ვერტიკალურად ქვემოთ და ჩავწეროთ

ბურთულების მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები x ღერძზე გეგმილებში:

პირველი ბურთულისათვის

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = m_1 g - R_1 ,$$

სადაც $$m_1 g = \gamma_1 g \frac{4\pi}{3} r^3, \quad R_1 = \alpha v_1^2 \;;$$

მეორე ბურთულასათვის

$$m_2 \frac{dv_2}{dt} = m_2 g - R_2 , \tag{2}$$

სადაც $$m_2 g = \gamma_2 g \frac{4\pi}{3} r^3, \quad R_2 = \alpha v_2^2 .$$

როცა $\frac{dv_1}{dt} = 0$ და $\frac{dv_2}{dt} = 0$ (სიჩქარისათვის ექსტრემუმის პირობა) (1) და (2) განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს

$$0 = \gamma_1 g \frac{4\pi}{3} r^3 - \alpha v_{1\max}^2 ,$$

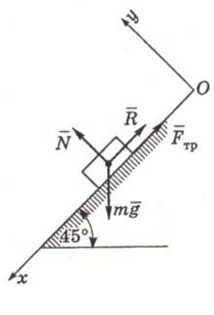
$$0 = \gamma_2 g \frac{4\pi}{3} r^3 - \alpha v_{2\max}^2 .$$

აქედან $$\frac{v_{1\max}}{v_{2\max}} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} .$$

პ ა ს უ ხ ი: $$\frac{v_{1\max}}{v_{2\max}} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} .$$

ამოცანა 27. 11

90 კგ მასის მოთხილამურე 45^0–ით დახრილ ფერდობზე ჩქაროსნული დაშვებისას მისრიალებდა ჯოხების გამოუყენებლად. თხილამურების თოვლზე ხახუნის კოეფიციენტი f = 0,1. მოთხილამურის მოძრაობისას ჰაერის წინაღობა პროპორციულია მოთხილამურის სიჩქარის კვადრატისა და 1 მ/წმ სიჩქარის დროს 0,635 ნ-ის ტოლია. რა უდიდესი სიჩქარის განვითარება შეუძლია მოთხილამურეს? რამდენად გაიზრდება



მაქსიმალური სიჩქარე, თუ მოთხილამურე საცხის გაუმჯობესების შედეგად ხახუნის კოეფიციენტს შეამცირებს 0,05 –დე?

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. მივიღოთ მოთხილამურე ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ მისი მოძრაობა მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალით . ხახუნის $\vec{F}_{Tp}$ ძალით, ჰაერის წინაღობის $\vec{R}$ ძალით და ნორმალური რეაქციით $\vec{N}$. მივმართოთ x ღერძი მოთხილამურის მოძრაობის მიმართულებით, ე. ი. ფერდობზე ქვემოთ (იხ. ნახაზი) და ჩავწეროთ მოთხილამურის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Sigma F_{kx} ,$$

ანუ

$$m\frac{dv}{dt} = m\,g\sin45^0 - R - F_{Tp} , \qquad (1)$$

სადაც $R = 0{,}635v^2$;

$$F_{Tp} = f\,N. \qquad (2)$$

ჩავწეროთ მოთხილამურის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება y ღერძზე გეგმილებში:

$$my'' = N - mg\cos\alpha .$$

ვინაიდან $y'' = 0$, მივიღებთ

$$0 = N - mg\cos\alpha,$$

$$N = mg\cos\alpha,$$

(2) ფორმულის თანახმად

$$F_{Tp} = f\,mg\cos\alpha. \qquad (3)$$

(3)–ის გათვალისწინებით (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$m\frac{dv}{dt} = m\,g\sin45^0 - 0{,}635v^2 - f\,mg\cos45^o.$$

როდესაც $\frac{dv}{dt} = 0$ (სიჩქარისათვის ექსტრემუმის პირობა), მივიღებთ

$$v_{1\max} = \sqrt{\frac{mg(1-f_1)\cos45^0}{0{,}635}} = \sqrt{\frac{90\cdot9{,}8(1-0{,}1)\cdot0{,}7071}{0{,}635}} = \sqrt{883{,}8} = 29{,}73\text{(მ/წმ)},$$

$$v_{2\max} = \sqrt{\frac{mg(1-f_2)\cos45^0}{0{,}635}} = \sqrt{\frac{90\cdot9{,}8(1-0{,}05)\cdot0{,}7071}{0{,}635}} = \sqrt{932{,}9} = 30{,}55\text{(მ/წმ)}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $v_{1\max} = 29{,}73$ მ/წმ;

სიჩქარე გაიზრდება $v_{2\max} = 30{,}55$ მ/წმ – დე.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 27. 9

იპოვეთ 10 კგ მასის r = 8 სმ რადიუსის ბურთულას ვარდნის უდიდესი სიჩქარე, თუ ჩავთვლით, რომ ჰაერის წინაღობა $R=k\sigma v^2$, სადაც v - მოძრაობის სიჩქარეა, σ – სხეულის მოძრაობის მართობულ სიბრტყეზე სხეულის გეგმილის ფართობი, k – რიცხვითი კოეფიციენტი, დამოკიდებული სხეულის ფორმაზე და ბურთულისათვის მისი მნიშვნელობაა 0,24 ნ· წმ²/მ⁴ .

ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ ბურთულა ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ მისი მოძრაობა მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალით და წინაღობის $\vec{R}$ ძალით (იხ. ნახაზი). მივმართოთ x ღერძი წერტილის მოძრაობის მიმართულებით, ე.ი. ვერტიკალურად ქვემოთ და ჩავწეროთ მისი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx_1'' = \Sigma F_{kx} ,$$

ანუ

$$mx'' = m g – R = mg - k \sigma v^2 ,$$

შემოვიღოთ შეცვლა $x'' = \dfrac{dv}{dt}$,

მაშინ $$m \frac{dv}{dt} = mg - k \sigma v^2 .$$

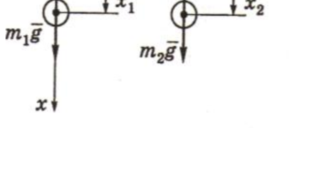
როდესაც $\dfrac{dv}{dt} = 0$ (სიჩქარისათვის ექსტრემუმის პირობა) მივიღებთ

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{mg}{k\sigma}} = \sqrt{\frac{10\cdot 9{,}8}{0{,}24\cdot 3{,}14\cdot 0{,}08^2}} = 142{,}5 \ \text{(მ/წმ)}$$

პ ა ს უ ხ ი: $v_{\max}$ = 142,5 მ/წმ.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 27. 10

ორი გეომეტრიულად ტოლი და ერთგვაროვანი ბურთულა დამზადებულია სხვადასხვა მასალისგან. ბურთულების მასალების სიმკვრივე შესაბამისად არის γ_1 და γ_2. ორივე ბურთულა ჰაერში ვარდება. ჩათვალეთ გარემოს წინაღობა სიჩქარის კვადრატის პროპორციული და განსაზღვრეთ ბურთულების მაქსიმალურ სიჩქარეთა ფარდობა.



ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ ბურთულები ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ თითოეულის მოძრაობა მასზე მოქმედი სიმძიმის $m_1\vec{g}_1$ და $m_2\vec{g}_2$ ძალებით და წინაღობის $R_1 = \alpha v_1^2$ და $R_2 = \alpha v_2^2$ ძალით (იხ. ნახაზი). მივმართოთ x ღერძი ვერტიკალურად ქვემოთ და ჩავწეროთ ბურთულების მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები x ღერძზე გეგმილებში:

პირველი ბურთულისათვის

$$m_1\frac{dv_1}{dt} = m_1 g - R_1,$$

სადაც $$m_1 g = \gamma_1 g\frac{4\pi}{3}r^3, \quad R_1 = \alpha v_1^2 \;;$$

მეორე ბურთულასათვის

$$m_2\frac{dv_2}{dt} = m_2 g - R_2, \qquad (2)$$

სადაც $$m_2 g = \gamma_2 g\frac{4\pi}{3}r^3, \quad R_2 = \alpha v_2^2 .$$

როცა $\frac{dv_1}{dt} = 0$ და $\frac{dv_2}{dt} = 0$ (სიჩქარისათვის ექსტრემუმის პირობა) (1) და (2) განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს

$$0 = \gamma_1 g\frac{4\pi}{3}r^3 - \alpha v_{1\max}^2,$$

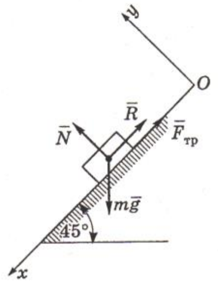
$$0 = \gamma_2 g\frac{4\pi}{3}r^3 - \alpha v_{2\max}^2 .$$

აქედან $$\frac{v_{1\max}}{v_{2\max}} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} .$$

პ ა ს უ ხ ი: $$\frac{v_{1\max}}{v_{2\max}} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} .$$

ამოცანა 27. 11

90 კგ მასის მოთხილამურე 45^0–ით დახრილ ფერდობზე ჩქაროსნული დაშვებისას მისრიალებდა ჯოხების გამოუყენებლად. თხილამურების თოვლზე ხახუნის კოეფიციენტი f = 0,1. მოთხილამურის მოძრაობისას ჰაერის წინაღობა პროპორციულია მოთხილამურის სიჩქარის კვადრატისა და 1 მ/წმ სიჩქარის დროს 0,635 ნ-ის ტოლია. რა უდიდესი სიჩქარის განვითარება შეუძლია მოთხილამურეს? რამდენად გაიზრდება მაქსიმალური სიჩქარე, თუ მოთხილამურე საცხის გაუმჯობესების შედეგად ხახუნის კოეფიციენტს შეამცირებს 0,05 –დე?



ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ მოთხილამურე ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ მისი მოძრაობა მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალით . ხახუნის $\vec{F}_{Tp}$ ძალით, ჰაერის წინაღობის $\vec{R}$ ძალით და ნორმალური რეაქციით $\vec{N}$. მივმართოთ x ღერძი მოთხილამურის მოძრაობის მიმართულებით, ე. ი. ფერდობზე ქვემოთ (იხ. ნახაზი) და ჩავწეროთ მოთხილამურის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Sigma F_{kx} ,$$

ანუ

$$m\frac{dv}{dt} = m\,g\sin45^0 - R - F_{Tp} , \qquad (1)$$

სადაც $R = 0{,}635v^2$;

$$F_{Tp} = f\,N. \qquad (2)$$

ჩავწეროთ მოთხილამურის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება y ღერძზე გეგმილებში:

$$my'' = N - mg\cos\alpha .$$

ვინაიდან $y'' = 0$, მივიღებთ

$$0 = N - mg\cos\alpha,$$

$$N = mg\cos\alpha,$$

(2) ფორმულის თანახმად

$$F_{Tp} = f\,mg\cos\alpha. \qquad (3)$$

(3)–ის გათვალისწინებით (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$m\frac{dv}{dt} = m\,g\sin45^0 - 0{,}635v^2 - f\,mg\cos45^{\circ}.$$

როდესაც $\frac{dv}{dt} = 0$ (სიჩქარისათვის ექსტრემუმის პირობა), მივიღებთ

$$v_{1\max} = \sqrt{\frac{mg(1-f_1)\cos 45^0}{0{,}635}} = \sqrt{\frac{90\cdot 9{,}8(1-0{,}1)\cdot 0{,}7071}{0{,}635}} = \sqrt{883{,}8} = 29{,}73 \text{(მ/წმ)},$$

$$v_{2\max} = \sqrt{\frac{mg(1-f_2)\cos 45^0}{0{,}635}} = \sqrt{\frac{90\cdot 9{,}8(1-0{,}05)\cdot 0{,}7071}{0{,}635}} = \sqrt{932{,}9} = 30{,}55 \text{(მ/წმ)}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $v_{1\max} = 29{,}73$ მ/წმ;

სიჩქარე გაიზრდება $v_{2\max} = 30{,}55$ მ/წმ – დე.

ამოცანა 27. 12

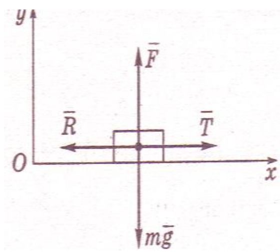
გემს მოძრაობისას უხდება წყლის წინაღობის გადალახვა, რომელიც სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია და 1 მ/წმ სიჩქარით მოძრაობისას 1200 ნ-ს ტოლია. ხრახნის ბჯენის ძალა მიმართულია მოძრაობის სიჩქარისკენ და იცვლება T = $12{\cdot}10^5 \cdot (1 - \frac{v}{33})$ ნ კანონით, სადაც v - გემის სიჩქარეა, გამოსახული მ/წმ-ში. განსაზღვრეთ უდიდესი სიჩქარე, რომლის განვითარებაც შეუძლია გემს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ გემი ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ მისი მოძრაობა, მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალით, წყლის წინაღობის $\vec{R}$ ძალით, ხრახნის საბჯენის $\vec{T}$ ძალით და ამომგდები $\vec{F}$ ძალით (იხ. ნახაზი).

მივმართოთ x ღერძი გემის მოძრაობის მიმართულებით, და ჩავწეროთ გემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Sigma F_{kx}\,,$$

ანუ
$$m\frac{dv}{dt} = T - R,$$



სადაც $R = \mu v^2$, $\mu = 1200$ ნ·წმ²/მ² .

მაშინ $m\frac{dv}{dt} = 12{\cdot}10^5\,(1 - \frac{v}{33}) - 1200v^2$.

აქედან, როდესაც $\frac{dv}{dt} = 0$ (სიჩქარისათვის ექსტრემუმის პირობა) მივიღებთ $v_{\max}^2 + 30{,}3v_{\max} - 1000 = 0,$

$$v_{\max} = -15{,}15 + \sqrt{229{,}57 + 1000} = 20 \text{ (მ/წმ)}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $v_{max} = 20$ მ/წმ;

ამოცანა 27. 13

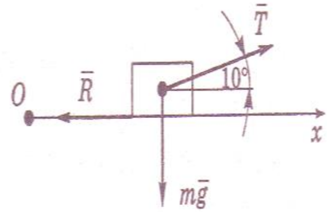
თვითმფრინავი მიფრინავს ჰორიზონტალურად. ჰაერის წინაღობის ძალა სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია და 1 მ/წმ სიჩქარით მოძრაობისას 0,5 ნ-ს ტოლია. წევის ძალა მუდმივია, 30760 ნ-ს ტოლია და ფრენის მიმართულებასთან ადგენს 10^0 კუთხეს. განსაზღვრეთ თვითმფრინავის უდიდესი სიჩქარე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ თვითმფრინავი ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ მისი მოძრაობა მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალით, წინაღობის $\vec{R}$ ძალით, წევის $\vec{T}$ ძალით (იხ. ნახაზი).

მივმართოთ x ღერძი თვითმფრინავის მოძრაობის მიმართულებით, და ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Sigma F_{kx} ,$$

ანუ $$m\frac{dv}{dt} = T\cos 10^0 - R,$$



სადაც $R = \mu v^2$, $\mu = 0,5$ ნ·წმ²/მ² .

მაშინ $$m\frac{dv}{dt} = 30\ 760\cos 10^0 - 0,5v^2 .$$

აქედან, როდესაც $\frac{dv}{dt} = 0$

(სიჩქარისათვის ექსტრემუმის პირობა)

$$0 = 30\ 760\ 10^0 - 0,5v_{max}^2 .$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{30760\cdot 0,9848}{0,5}} = 246 \text{ (მ/წმ).}$$

პ ა ს უ ხ ი: $v_{max} = 246$ მ/წმ;

ამოცანა 27. 14

10^4 კგ მასის თვითმფრინავი თხილამურებით ეშვება მიწის ჰორიზონტალურ ველზე. მფრინავს თვითმფრინავი მიჰყავს ზედაპირთან დაჯდომის მომენტში ვერტიკალური სიჩქარისა და ვერტიკალური აჩქარების გარეშე. თვითმფრინავის შუბლის წინააღმდეგობის ძალა სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია და 1 მ/წმ სიჩქარით მოძრაობისას

10 ნ-ს ტოლია. ამწევი ძალა სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია და 1 მ/წმ სიჩქარით მოძრაობისას 30 ნ-ს ტოლია. განსაზღვრეთ თვითმფრინავის გაჩერებამდე გარბენის მანძილი და დრო, თუ ხახუნის კოეფიციენტია f =0,1.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ თვითმფრინავი ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ მისი მოძრაობა მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალით, წინაღობის $\vec{R}$ ძალით, ხახუნის $\vec{F}_{Tp}$ ძალით, ამწევი $\vec{Q}$ ძალით და ნორმალური $\vec{N}$ რეაქციით (იხ. ნახაზი). ამ შემთხვევაში

$$R = \mu v^2,$$

სადაც μ = 10 ნ·წმ²/მ²; $F_{Tp} = f N$; $Q=\delta v^2$, სადაც δ =30 ნ·წმ²/მ².

ჩავწეროთ თვითმფრინავის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x და y ღერძებზე გეგმილებში:

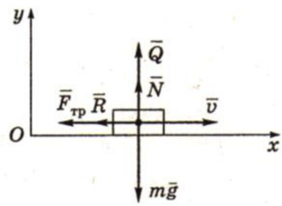
$$mx'' = - R - F_{Tp} \qquad (1)$$

$$my'' = N + Q - mg. \qquad (2)$$

(2) განტოლებიდან

$$0 = N + Q - mg.$$

$$N = mg - Q = mg - 30v^2.$$



მაშინ

$$F_{Tp} = f N = f\,(mg - 30v^2).$$

(1) გსნტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$m\frac{dv}{dt} = -10v^2 - f\,(mg - 30v^2). \qquad (3)$$

დედამიწაზე დაჯდომის სიჩქარეს განვსაზღვრავთ პირობიდან N = 0, მაშინ

$$mg - 30v_0^2 = 0, \quad v^2 = \frac{mg}{30}.$$

თვითმფრინავის გაჩერებამდე გარბენის მანძილის მოსაძებნათ (3) განტოლება ასე ჩავწეროთ:

$$m\frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx} = m\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = m\frac{vdv}{dx} = -10v^2 - f\,(mg - 30v^2);$$

ამ გამოსახულებაში განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ შესაბამის საზღვრებში:

$$\int_{v_0}^{0}\frac{vdv}{\frac{7v^2}{m}+0{,}1g} = -\int_0^s dx,$$

მივიღებთ $S = \frac{1\cdot 10^4}{2\cdot 7}\ln(1+\frac{7}{3}) = 860$ (მ).

თვითმფრინავის გაჩერებამდე გარბენის დროის მოსაძებნათ ვაინტეგროთ (3) განტოლება.

$$\int_{v_0}^{0}\frac{dv}{\frac{7v^2}{m}+0{,}1g} = -\int_{0}^{T} dt\,,$$

საიდანაც $$T=\frac{m}{7\sqrt{\frac{0{,}1mg}{7}}}arctgv_0\sqrt{\frac{7}{0.1mg}}=\frac{1\cdot 10^4}{7\sqrt{1400}}arctg\sqrt{\frac{7}{3}}=37{,}8$$

__პ ა ს უ ხ ი:__ S = 860 მ; T = 37,8 წმ.

ამოცანა 27. 15

თვითმფრინავი იწყებს პიკირებას საწყისი ვერტიკალური სიჩქარის გარეშე. ჰაერის წინაღობის ძალა სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია. განსაზღვრეთ დამოკიდებულება აღებულ მომენტში ვერტიკალურ სიჩქარესა, განვლილ მანძილსა და პიკირების მაქსიმალურ სიჩქარეს შორის.

__ა მ ო ხ ს ნ ა__. მივიღოთ თვითმფრინავი ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ მისი მოძრაობა მასზე მოქმედი სიმძიმის m$\vec{g}$ ძალით და წინაღობის $\vec{R}$ ძალით. (იხ. ნახაზი). მივმართოთ x ღერძი თვითმფრინავის პიკირების მიმართულებით, და ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Sigma F_{kx}\,,$$

ანუ $$m\frac{dv}{dt} = mg - R,$$

სადაც R = αv^2.

როდესაც $\frac{dv}{dt}=0$ (სიჩქარისათვის ექსტრემუმის პირობა)

$$v_{\max}=\frac{mg}{\alpha}\,,$$

საიდანაც $$\alpha=\frac{mg}{v_{\max}}\,.$$

ვისარგებლოთ ჩასმით

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dt}\,\frac{dx}{dx}=\frac{dx}{dt}\,\frac{dv}{dx}=\frac{vdv}{dx}\,,$$

მივიღებთ $m\dfrac{vdv}{dx}$ = mg - αv^2 .

განვაცალოთ ცვლადები $\dfrac{mvdv}{mg-\alpha v^2}=dx$

და ვაინტეგროთ: $-\dfrac{m}{2\alpha}\ln(mg-\alpha v^2)$ = x+C. (1)

ინტეგრების მუდმივი C განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა t = 0 x = 0, v = 0. მაშინ C = $\dfrac{m}{2\alpha}\ln mg$ და (1) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$x=-\frac{m}{2\alpha}\ln(mg-\alpha v^2)+\frac{m}{2\alpha}\ln mg=-\frac{m}{2\alpha}\ln\frac{mg-\alpha v^2}{mg},$$

$$\ln\frac{mg-\alpha v^2}{mg}=-\frac{2\alpha x}{m}=-\frac{2gx}{v_{\max}},$$

$$\frac{mg-\alpha v^2}{mg}=e^{-\frac{2\alpha x}{m}}. \qquad (2)$$

როცა x = s, (2) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\alpha v^2=mg(1-e^{-\frac{2gs}{v_{\max}^2}}),$$

$$v=v_{\max}\sqrt{1-e^{-\frac{2gs}{v_{\max}^2}}},$$

სასდაც $v_{\max}=\dfrac{mg}{\alpha}$.

პ ა ს უ ხ ი: $v=v_{\max}\sqrt{1-e^{-\frac{2gs}{v_{\max}^2}}}$.

ამოცანა 27. 16

როგორ H სიმაღლეზე და რა T დროში ავა P წონის სხეული, რომელიც ასროლილია ვერტიკალურად ზევით v_0 სიჩქარით, თუ ჰაერის წინაღობა შეიძლება გამოვსახოთ ფორმულით k^2Pv^2, სადაც v - სხეულის სიჩქარის სიდიდეა?

ა მო ხ ს ნ ა. მივიღოთ სხეული ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ მისი მოძრაობა მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალით და ჰაერის წინაღობის $\vec{R}$ ძალით. მივმართოთ x ღერძი სხეულის მოძრაობის მიმართულებით, ე. ი. ვერტიკალურად ზევით (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Sigma F_{kx},$$

ანუ

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - k^2 mgv^2,$$

საიდანაც $\dfrac{dv}{dt} = -g(1+k^2v^2)$, (1)

(1) განტოლებაში განვაცალოთ ცვლადები :

$$\frac{dv}{1+k^2v^2} = -gdt,$$

ვაინტეგროთ, მივიღებთ $\dfrac{1}{k}arctgkv = -gt + C_1$ (2)

ინტეგრების მუდმივი C_1 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$ $v = v_0$. მაშინ, (2) –დან მივიღებთ, რომ $C_1 = \dfrac{1}{k}arctgkv_0$.

როცა $v = 0$, მაშინ წერტილი იმყოფება უმაღლეს მდებარეობაში და სვლის დრო

$$T = \frac{C_1}{g} = \frac{arctggkv_0}{kg}.$$

C_1 – ის მნიშვნელობა შევიტანოთ (2) განტოლებაში:

$$\frac{1}{k}arctgkv = -gt + \frac{1}{k}arctgkv_0,$$

საიდანაც

$$arctgkv = -kgt + arctgkv_0,$$

$$tg(arctgkv) = tg(-kgt + arctgkv_0).$$

მაშინ $$kv = k\frac{ds}{dt} = \frac{\sin(-kgt + arctgkv_0)}{\cos(-kgt + arctgkv_0)}.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ, მივიღებთ

$$ks = \frac{1}{kg}\ln\cos(-kgt + arctgkv_0) + C_2. \qquad (3)$$

ინტეგრების მუდმივი C_2 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$ $s = 0$. მაშინ, (3) –დან მივიღებთ, რომ

$$C_2 = -\frac{1}{kg}\ln\cos(arctgkv_0).$$

შევიტანოთ C_2 –ს მნიშვნელობა (3) გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$s = \frac{1}{k^2 g}\ln\frac{\cos(-kgt + arctgkv_0)}{\cos(arctgkv_0)},$$

სადაც $\cos(arctgkv_0) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + tg^2(arctgkv_0)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + k^2 v_0^2}}.$

როცა $t = T$, მაშინ

$$s = H = \frac{1}{k^2 g}\ln\sqrt{1 + k^2 v_0^2} = \frac{\ln(1 + k^2 v_0^2)}{2k^2 g}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ასვლის სიმაღლის განსაზღვრისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ჩასმა, როგორც 27.15 ამოცანაში:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = \frac{vdv}{dx} = -g(1 - k^2v^2).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $H = \dfrac{\ln(1 + k^2 v_0^2)}{2k^2 g}; \quad T = \dfrac{arctgkv_0}{kg}.$

ამოცანა 27. 17

2 კგ მასის სხეული ასროლილი ვერტიკალურად ზევით 20 მ/წმ სიჩქარით, განიცდის ჰაერის წინაღობას, რომელიც v მ/წმ სიჩქარის დროს არის $0{,}4v$ ნ-ის ტოილი. განსაზღვრეთ, რამდენი წმ-ს შემდეგ სხეული მიაღწევს უმაღლეს მდებარეობას.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. მივიღოთ სხეული ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ მისი მოძრაობა მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალით და ჰაერის წინაღობის $\vec{R}$ ძალით. მივმართოთ x ღერძი სხეულის მოძრაობის მიმართულებით, ე. ი. ვერტიკალურად ზევით (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ სხეულის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Sigma F_{kx},$$

ანუ

$$m\,x'' = -\,mg - R,$$

$$mx'' = -\,0{,}4\left(\frac{mg}{0{,}4} + x'\right),$$

$$x'' = -\,\frac{0{,}4}{m}\left(\frac{mg}{0{,}4} + x'\right),$$

შევცვალოთ $x'' = \dfrac{dx'}{dt}$ და განვაცალოთ ცვლადები, მივიღებთ

$$\frac{dx'}{\dfrac{mg}{0{,}4} + x'} = -\frac{0{,}4}{m}\,dt\,.$$

ვაინტეგროთ ეს განტოლება და მხედველობში მივიღოთ, რომ უმაღლეს მდებარეობაში სიჩქარე ნულის ტოლია ($v = x' = 0$):

$$\int_{v_0}^{0} \frac{dx'}{\dfrac{mg}{0{,}4} + x'} = -\frac{0{,}4}{m}\int_0^T dt\,,$$

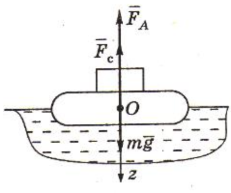
საიდანაც $$\ln\frac{mg}{o{,}4} - \ln\left(\frac{mg}{0{,}4} + v_0\right) = -\frac{0{,}4}{m}T,$$

$$\ln\frac{\dfrac{mg}{0{,}4} + v_0}{\dfrac{mg}{0{,}4}} = \ln\left(1 + \frac{0{,}4v_0}{mg}\right) = \frac{0{,}4}{m}T\,.$$

აქედან $$T = \frac{m}{0{,}4}\ln\left(1 + \frac{0{,}4v_0}{mg}\right) = \frac{2}{0{,}4}\ln\left(1 + \frac{0{,}4\cdot 20}{2\cdot 9{,}8}\right) = 1{,}71 \text{ წმ.}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 1,71 წმ.

ამოცანა 27. 18



წყალქვეშა ნავმა, რომელიც უძრავად იდგა ზედაპირზე, მიიღო მცირე უარყოფითი ტივტივადობა p და დაიწყო სიღრმეში ჩაძირვა გადატანითი მოძრაობით. წყლის წინააღმდეგობა მცირე უარყოფითი ტივტივადობისას შეიძლება მივიღოთ ჩაძირვის სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციული და kSv-ს ტოლი, სადაც k –

პროპორციულობის კოეფიციენტია; S- ნავის ჰორიზონტალური პროექციის ფართობი; v - ჩაძირვის სიჩქარის სიდიდე. ნავის მასაა M. განსაზღვრეთ ჩაძირვის სიჩქარე v, თუ, როცა $t = 0$, სიჩქარე $v_0 = 0$.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ წყალქვეშა ნავის მოძრაობა ჩაძირვისას. მასზე მოქმედებს სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, წყლის წინაღობის $\vec{F}_c$ ძალა და არქიმედის $\vec{F}_A$ ძალა. მივმართოთ z ღერძი ნავის მოძრაობის მიმართულებით, ე. ი. ვერტიკალურად ქვევით (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ ნავის გადატანითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება z ღერძზე გეგმილებში:

$$mz'' = \Sigma F_{kz},$$

ანუ

$$m z'' = mg - F_A - F_c,$$

სადაც $mg - F_A = p$ - ნავის უარყოფითი ტივტივადობაა.

მაშინ

$$m z'' = p - F_c = p - kSv = p - kSz'.$$

გარდაქმნის შემდეგ

$$z'' = -\frac{kS}{m}\left(-\frac{p}{kS} + z'\right).$$

შევცვალოთ: $z'' = \dfrac{dz'}{dt}$ და განვაცალოთ ცვლადები:

$$\frac{dz'}{z' - \frac{p}{kS}} = -\frac{kS}{m}dt.$$

ამ გამოსახულების ინტეგრებით მივიღებთ

$$\ln\left(z' - \frac{p}{kS}\right) = -\frac{kS}{m}t + C_1. \qquad (1)$$

ინტეგრების მუდმივი C_1 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$ $v_0 = z' = 0$. მაშინ, (1) –დან მივიღებთ, რომ

$$\ln\left(-\frac{p}{kS}\right) = 0 + C_1, \quad C_1 = \ln\left(-\frac{p}{kS}\right).$$

შევიტანოთ C_1-ის მნიშვნელობა (1) ფორმულაში

$$\ln\left(z' - \frac{p}{kS}\right) = -\frac{kS}{m}t + \ln\left(-\frac{p}{kS}\right)$$

ანუ $$\ln\frac{z' - \frac{p}{kS}}{-\frac{p}{kS}} = \ln(1 - z'\frac{kS}{p}) = -\frac{kS}{m}t .$$

ამ გამოსახულების პოტენცირებით მივიღებთ

$$1 - z'\frac{kS}{p} = e^{-\frac{kS}{m}t}$$

საიდანაც $$z' = \frac{p}{kS}(1 - e^{-\frac{kS}{m}t}) = v ,$$

სადაც m = M.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $$v = z' = \frac{p}{kS}(1 - e^{-\frac{kS}{m}t}) .$$

ამოცანა 27. 19

წინა ამოცანის პირობებით განსაზღვრეთ ჩაძირული ნავის მიერ T დროში განვლილი მანძილი.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. 27. 18 ამოცანის ამოხსნისას მივიღეთ

$$z' = \frac{p}{kS}(1 - e^{-\frac{kS}{m}t}).$$

შევცვალოთ: $z' = \frac{dz}{dt}$ და განვაცალოთ ცვლადები:

$$dz = \frac{p}{kS}(1 - e^{-\frac{kS}{m}t})dt .$$

ამ გამოსახულების ინტეგრებით მივიღებთ

$$z = \frac{p}{kS}(t + \frac{m}{kS}\, e^{-\frac{kS}{m}t}) + C . \qquad (1)$$

ინტეგრების მუდმივი C განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა t = 0 $z_0 = 0$. მაშინ, (1) –დან მივიღებთ,

$$0 = \frac{p}{kS}(0 + \frac{m}{kS}) + C,$$

აქედან

$$C = -\frac{pm}{k^2S^2}.$$

თუ შევიტანთ C-ს მნიშვნელობას, მაშინ, როცა t=T, მივიღებთ:

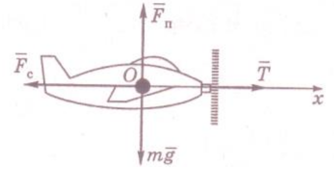
$$z = \frac{p}{kS}\ (T + \frac{m}{kS}\ e^{-\frac{kS}{m}T})\ - \frac{pm}{k^2S^2}\ = \frac{p}{kS}\ [T - \frac{m}{kS}(1 - e^{-\frac{kS}{m}T})],$$

სადაც m = M.

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $$z = \frac{p}{kS}\ [T - \frac{M}{kS}\ (1 - e^{-\frac{kS}{M}T})].$$

ამოცანა 27. 20

როგორი უნდა იყოს თვითმფრინავის ჰორიზონტალური ფრენისას ხრახნის მუდმივი წევა T, რომ s მეტრის გაფრენის შემდეგ თვითმფრინავმა გაზარდოს სიჩქარე v_0 მ/წმ–დან v_1 მ/წმ–მდე. ხრახნის წევა მიმართულია ფრენის სიჩქარისკენ. ფრონტალური (შუბლა) წინაღობის ძალა მიმართულია სიჩქარის მიმართულების საწინააღმდეგოდ, სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია და α ნ-ს ტოლია 1 მ/წმ სიჩქარის დროს. თვითმფრინავის მასაა M კგ.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ თვითმფრინავის მოძრაობა ჰორიზონტალური ფრენისას ხრახნის მუდმივი წევის $\vec{T}$ ძალის, ფრონტალური წინაღბის $\vec{F}_c$ ძალის, სიმძიმის m$\vec{g}$ ძალისა და ამწევი $\vec{F}_p$ ძალის მოქმედებით. მივმართოთ x ღერძი მოძრაობის მიმართულებით. კოორდინატთა სისტემის სათავე შევუთავსოთ თვითმფრინავის საწყის მდებარეობას (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ თვითმფრინავის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = T - F_c,$$

ანუ

$$mx'' = T - \alpha v^2 = T - \alpha x'^2.$$

აქედან

$$x'' = -\frac{\alpha}{m}(x'^2 - \frac{T}{\alpha}).$$

მოვახდინოთ ჩასმა:

$$x'' = \frac{dx'}{dt}\frac{ds}{ds} = x'\frac{dx'}{ds},$$

ცვლადთა განცალებით მივიღებთ

$$\frac{x'dx'}{x'^2 - \frac{T}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{m}ds.$$

ვაინტეგროთ ეს გამოსახულება:

$$\int_{v_0}^{v_1} \frac{2x'dx'}{2(x'^2 - \frac{T}{\alpha})} = -\frac{\alpha}{m}\int_0^s ds$$

მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\ln(x'^2 - \frac{T}{\alpha})\Big|_{v_0}^{v_1} = -\frac{\alpha}{m}s\Big|_0^s,$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{v_1^2 - \frac{T}{\alpha}}{v_0^2 - \frac{T}{\alpha}} = -\frac{\alpha}{m}s,$$

ანუ

$$\frac{1}{2}\ln\frac{v_0^2 - \frac{T}{\alpha}}{v_1^2 - \frac{T}{\alpha}} = \frac{\alpha}{m}s.$$

ამ გამოსახულებია პოტენცირებით მივიღებთ

$$\frac{v_0^2 - \frac{T}{\alpha}}{v_1^2 - \frac{T}{\alpha}} = e^{\frac{2\alpha s}{m}}, \qquad v_0^2 - \frac{T}{\alpha} = v_1^2 e^{\frac{2\alpha s}{m}} - \frac{T}{\alpha}e^{\frac{2\alpha s}{m}},$$

$$v_0^2 - v_1^2 e^{\frac{2\alpha s}{m}} = \frac{T}{\alpha}(1 - e^{\frac{2\alpha s}{m}}).$$

საიდანაც

$$T=\frac{\alpha(v_0^2-v_1^2e^{\frac{2\alpha s}{m}})}{1-e^{\frac{2\alpha s}{m}}},$$

სადაც m = M.

პ ა ს უ ხ ი : $$T=\frac{\alpha(v_0^2-v_1^2e^{\frac{2\alpha s}{m}})}{1-e^{\frac{2\alpha s}{m}}}$$ ნ.

ამოცანა 27. 21

10^7კგ მასის გემი მოძრაობს 16 მ/წმ სიჩქარით. წყლის წინააღმდეგობა გემის სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია და უდრის $3\cdot10^5$ ნ, როცა სიჩქარეა 1 მ/წმ. რა მანძილს გაივლის გემი, სანამ მისი სიჩქარე 4 მ/წმ გახდება? რა დროში გაივლის გემი ამ მანძილს?

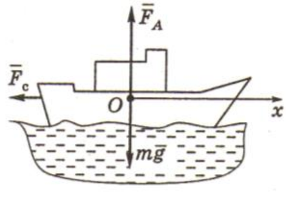
ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ გემის მოძრაობა მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალის, წყლის წინაღობის $\vec{F}_c$ ძალის და ამომგდები $\vec{F}_ა$ ძალის მოქმედებით. მივმართოთ x ღერძი გემის მოძრაობის მიმართულებით (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ გემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mz'' = \Sigma F_{kx},$$

ანუ $$m x'' = -F_c = -3\cdot10^5 v^2 = -3\cdot10^5 x'^2 . \qquad (1)$$

შევცვალოთ: $x''=\frac{dx'}{dt}$, მაშინ (1) განტოლება ასე ჩაიწერება

$$m\frac{dx'}{dt}=-3\cdot10^5 x'^2 .$$



ანუ $$\frac{dx'}{x'^2}=-3\cdot\frac{10^5}{1\cdot10^7}dt=-3\cdot10^{-2}dt.$$

ამ გამოსახულების ინტეგრებით მივიღებ

$$-\frac{1}{x'}=-3\cdot10^{-2}t+C_1. \qquad (2)$$

ინტეგრების მუდმივი C_1 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t=0$ $x_0'=v_0=16$. მაშინ, (2) –დან მივიღებთ,

$$-\frac{1}{16}=0+C_1, \quad \text{ე. ი.} \quad C_1=-\frac{1}{16}.$$

ჩავსვათ (2) –ში $$-\frac{1}{x'} = -3\cdot10^{-2}t - \frac{1}{16},$$

ანუ $$\frac{1}{x'} = 3\cdot10^{-2}t + \frac{1}{16} = \frac{48\cdot10^{-2}t+1}{16}.$$

ამ გამოსახულებიდან $$x' = \frac{16}{48\cdot10^{-2}t+1} = \frac{1}{3\cdot10^{-2}(t+2{,}08)}. \quad (3)$$

შევცვალოთ: $x' = \frac{dx}{dt}$ და განვაცალოთ ცვლადები, მივიღებთ

$$dx = \frac{dt}{3\cdot10^{-2}(t+2{,}08)}.$$

ვაინტეგროთ ეს გამოსახულება:

$$x = \frac{\ln(t+2{,}08)}{3\cdot10^{-2}} + C_2. \qquad (4)$$

ინტეგრების მუდმივი C_2 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$ $x_0 = 0$ (რადგანაც x ღერძის სათავე მოთავსებულია გემის საწყის მდებარეობაში), მაშინ, (4) –დან მივიღებთ:

$$0 = \frac{\ln 2{,}08)}{3\cdot10^{-2}} + C_2, \qquad C_2 = -\frac{\ln 2{,}08}{3\cdot10^{-2}}.$$

შევიტანოთ C_2 –ს მნიშვნელიობა (4) ფორმულაში, მივიღებთ

$$x = \frac{\ln(t+2{,}08)}{3\cdot10^{-2}} - \frac{\ln 2{,}08}{3\cdot10^{-2}} = -\frac{1}{3\cdot10^{-2}}\ln\frac{t+2{,}08}{2{,}08} = \frac{\ln(\frac{t}{2{,}08}+1)}{3\cdot10^{-2}}. \qquad (5)$$

განვსაზღვროთ გემის მოძრაობის დრო, სანამ მიაღწევს $v_k = 4$ მ/წმ სიჩქარეს. როცა $t = T$ $x' = v_k$, მაშინ, (3) ფორმულის თანახმად

$$4 = \frac{1}{3\cdot10^{-2}(T+2{,}08)}.$$

ქედან $$T = \frac{1}{4\cdot3\cdot10^{-2}} - 2{,}08 = 6{,}25 \text{ (წმ)}.$$

T დროში განვლილ $x = s$ მანძილს ვიპოვით (5) ფორმულიდან:

$$s = \frac{\ln(\frac{6{,}25}{2{,}08}+1)}{3\cdot10^{-2}} = 46{,}2 \text{ (მ)}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი :**</u> $s = 46{,}2$ მ. $T = 6{,}25$ წმ

ამოცანა 27. 22

სხეული ვარდება სივრცეში უსაწყისო სიჩქარით. ჰაერის წინაღობა $R = k^2Pv^2$, სადაც v-სხეულის სიჩქარის სიდიდეა, P–სხეულის წონა. როგორი იქნება სხეულის სიჩქარე მოძრაობის დაწყებიდან t დროის გასვლის შემდეგ? როგორია სიჩქარის ზღვრული სიდიდე?

მ ო ხ ს

დიფერენციალური განტოლება z ღერძზე გეგმილებში:

$$mz'' = \Sigma F_{kz},$$

ანუ

$$mz'' = mg - R = mg \ - k^2mgv^2 = mg(1-k^2v^2)\ mg(1-k^2z'^2).$$

შევცვალოთ: $z'' = \dfrac{dz'}{dt}$, და განვაცალოთ ცვლადები:

$$\frac{dz'}{1-k^2z'^2} = \frac{mg}{m}dt = gdt.$$

ვაინტეგროთ ეს გამოსახულება:

$$\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{1+kz'}{1-kz'}\right| = gt + C\cdot$$

ინტეგრების მუდმივი C განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$ $z'_0 = v_0 = 0$; $\dfrac{1}{2k}\cdot 0 = 0 + C$, ე. ი. C=0. მაშინ

$$\ln\left|\frac{1+kz'}{1-kz'}\right| = 2kgt, \qquad \frac{1+kz'}{1-kz'} = e^{2kgt},$$

საიდანაც

$$v = z' = \frac{1}{k}\frac{e^{2kgt}-1}{e^{2kgt}+1} = \frac{1}{k}\frac{e^{kgt}-e^{-kgt}}{e^{kgt}+e^{-kgt}}.$$

განვსაზღვროთ სიჩქარის ზღვრუილი v_∞ მნიშვნელობა. ამიტომ მოვახდინოთ გარდაქმნა:

$$z' = \frac{1}{k}\frac{e^{2kgt}-1}{e^{2kgt}+1} = \frac{1}{k}\frac{1}{1+\frac{1}{e^{2kgt}}} - \frac{1}{k}\frac{1}{e^{2kgt}+1}\cdot$$

$$\lim_{t\to\infty} z' = \frac{1}{k}\frac{1}{1+\frac{1}{\lim\limits_{t\to\infty} e^{2kgt}}} - \frac{1}{k}\frac{1}{\lim\limits_{t\to\infty} e^{2kgt}+1} = \frac{1}{k}\frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} - \frac{1}{k}\frac{1}{\infty+1} = \frac{1}{k} \quad .$$

მაშასადამე $\quad v_\infty = \dfrac{1}{k}.$

ანუ, ექსტრემუმის პირობიდან: $v = v_\infty$, როცა $\dfrac{dv}{dt} = 0$. მაშინ

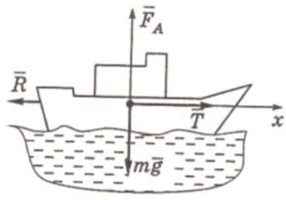
$$mg(1 - k^2 v_\infty{}^2) = 0 \Rightarrow v_\infty = \frac{1}{k}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $v = \dfrac{1}{k}\dfrac{e^{2kgt} - e^{-kgt}}{e^{2kgt} + e^{-kgt}}$. $\quad v_\infty = \dfrac{1}{k}$.

ამოცანა 27. 23

$1{,}5{\cdot}10^6$ კგ მასის გემი გადალახავს წყლის წინაღობას, რომელიც $R = \alpha v^2$ ნ ტოლია, სადაც v - გემის სიჩქარეა მ/წმ-ში, ხოლო α არის 1200 –ის ტოლი მუდმივი კოეფიციენტი. ხრახნის საყრდენის ძალა მიმართულია მოძრაობის სიჩქარის მხარეს და იცვლება $T = 1{,}2 \cdot 10^6 (1 - v/33)$ ნ კანონით. განსაზღვრეთ გემის სიჩქარე დამოკიდებული დროზე, თუ საწყისი სიჩქარე v_0 მ/წმ-ს ტოლია.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ გემის მოძრაობა მასზე წევის $\vec{T}$ ძალის, სიმძიმის m$\vec{g}$ ძალის, წყლის წინაღობის $\vec{R}$ ძალის და ამომგდები $\vec{F}_A$ ძალის მოქმედებით. მივმართოთ x ღერძი გემის მოძრაობის მიმართულებით (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ გემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:



$$mx'' = \Sigma F_{kz} = T - R,$$

ანუ $\quad m x'' = 1{,}2{\cdot}10^6 \left(1 - \dfrac{v}{33}\right) - \alpha v^2$.

აქედან

$$x'' = \frac{1}{m}\left[1{,}2{\cdot}10^6 \left(1 - \frac{x'}{33}\right) - \alpha x'^2\right] = \frac{1}{1{,}5\cdot 10^6}\left[1{,}2\cdot 10^6\left(1 - \frac{x'}{33}\right) - 1200x'^2\right] =$$

$$= -0{,}8\,(0{,}001\,x'^2 + 0{,}03\,x' - 1).$$

შევცვალოთ: $\quad x'' = \dfrac{dx'}{dt}$, და განვაცალოთ ცვლადები:

$$\frac{dx'}{0{,}001x'^2 + 0{,}03x' - 1} = 0{,}8dt\,\cdot$$

ვაინტეგროთ ეს გამოსახულება:

$$\frac{1}{\sqrt{0{,}03^2+4\cdot 0{,}001\cdot 1}}\ln\left|\frac{2\cdot 0{,}001x'+0{,}03-\sqrt{0{,}03^2+4\cdot 0{,}001\cdot 1}}{2\cdot 0{,}001x'+0{,}03+\sqrt{0{,}03^2+4\cdot 0{,}001\cdot 1}}\right|=-0{,}8t+C\cdot$$

ამ გამოსახულების მარცხენა მხარის გარდაქმნით მივიღებთ

$$14{,}28\ \ln\left|\frac{0{,}002x'-0{,}04}{0{,}002x'+0{,}1}\right| = -\,0{,}8t + C. \qquad (1)$$

ინტეგრების მუდმივი C განვსაზღვროთ (1) ფორმულით და გავითვალისწინოთ მოძრაობის საწყისი პირობები: როცა $t = 0$, $x'_0 = v_0$; მაშინ

$$14{,}28\ \ln\left|\frac{0{,}002v_0-0{,}04}{0{,}002v_0+0{,}1}\right| = C.$$

C-ს ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (1) ფორმულაში:

$$14{,}28\ln\frac{\left|\dfrac{0{,}002x'-0{,}04}{0{,}002x'+0{,}1}\right|}{\left|\dfrac{0{,}002v_0-0{,}04}{0{,}002v_0+0{,}1}\right|}=-0{,}8t$$

ანუ

$$\frac{0{,}002x'+0{,}1}{0{,}002x'-0{,}04}=\frac{0{,}002v_0+0{,}1}{0{,}002v_0-0{,}04}e^{0{,}056t}$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ 0,002 –ზე:

$$\frac{x'+50}{x'-20}=\frac{v_0+50}{v_0-20}e^{0{,}056t}.$$

აქედან

$$x'=\frac{50v_0-1000+20(v_0+50)e^{0{,}056t}}{(v_0+50)e^{0{,}056t}-v_0+20}=\frac{70v_0-20(v_0+50)+20(v_0+50)e^{0{,}056t}}{(v_0+50)e^{0{,}056t}-(v_0+50)+70}=$$

$$=\frac{70v_0+20(v_0+50)(e^{0{,}056t}-1)}{70+(v_0+50)(e^{0{,}056t}-1)}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $v=\dfrac{70v_0+20(v_0+50)(e^{0{,}056t}-1)}{70+(v_0+50)(e^{0{,}056t}-1)}.$

ამოცანა 27. 24

წინა ამოცანაში იპოვეთ სიჩქარეზე დამოკიდებული განვლილი გზა.

<u>**ა მ ო ხ ს ნ ა**</u>. ამოცანა 27. 23 პირობის თანახმად

$x'' = -0,8\,(0,001\,x'^2 + 0,03\,x' - 1) = -0,0008(x'^2 + 30\,x' - 1000)$

ანუ

$$x'' = v' = -0,0008(v^2 + 30\,v - 1000).$$

შევცვალოთ: $v' = \dfrac{vdv}{dx}$, მაშინ

$$\frac{vdv}{v^2 + 30v - 100} = -0,0008dx,$$

ანუ გარდაქმნის შემდეგ

$$\frac{vdv}{(v+15)^2 - 1225} = \frac{vdv}{(v+15)^2 - 35^2} = -0,0008dx \cdot \qquad (1)$$

შემოვიღოთ ახალი ცვლადი: $v + 15 = z$, მაშინ $v = z - 15, \quad dv = dz$;
(1) გამოსახულება ასე გამოისახება:

$$\frac{(z-15)dz}{z^2 - 35^2} = \frac{zdz}{z^2 - 35^2} - \frac{15dz}{z^2 - 35^2} = -0,0008dx \cdot$$

ამ განტოლების მარცხენა მხარე ვაინტეგროთ ცალ-ცალკე:

$$\int \frac{zdz}{z^2 - 35^2} = \frac{1}{2}\ln(z^2 - 35^2);$$

$$\int \frac{15dz}{z^2 - 35^2} = \frac{15}{70}\ln\frac{z-35}{z+35}.$$

მაშინ

$$\int \frac{vdv}{(v+15)^2 - 35^2} = \frac{1}{2}\ln(z^2 - 35^2) - \frac{15}{70}\ln\frac{z-35}{z+35} = -0,0008x + C$$

აგრამ, რადგანაც $z = v + 15$, ამიტომ

$$\frac{1}{2}\ln(z-35) + \frac{1}{2}\ln(z+35) - \frac{15}{70}\ln(z-35) + \frac{15}{70}\ln(z+35) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(v+15-35) + \frac{1}{2}\ln(v+15+35) - \frac{15}{70}\ln(v+15-35) + \frac{15}{70}\ln(v+15+35) =$$

$$= \frac{2}{7}\ln(v-20) + \frac{5}{7}\ln(v+50) = -0,0008x + C.$$

ინტეგრების მუდმივი C განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$ $x_0 = 0$, $v = v_0$; მაშინ

$$C = \frac{2}{7}\ln(v_0 - 20) + \frac{5}{7}\ln(v_0 + 50).$$

მაშინ

$$0{,}0008x = \frac{2}{7}[\ln(v_0 - 20) - \ln(v - 20)] + \frac{5}{7}[\ln(v_0 + 50) - \ln(v + 50)] =$$

$$= \frac{2}{7}\ln\frac{v_0 - 20}{v - 20} + \frac{5}{7}\ln\frac{v_0 + 50}{v + 50}.$$

აქედან

$$x = \frac{2}{0{,}0008 \cdot 7}\ln\frac{v_0 - 20}{v - 20} + \frac{5}{0{,}0008 \cdot 7}\ln\frac{v_0 + 50}{v + 50} =$$

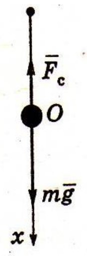
$$= 357\ln\frac{v_0 - 20}{v - 20} + 893\ln\frac{v_0 + 50}{v + 50}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $x = 357\ln\frac{v_0 - 20}{v - 20} + 893\ln\frac{v_0 + 50}{v + 50}$ მ.

ამოცანა 27. 27

იპოვეთ m მასის ნივთიერი წერტილის მოძრაობის განტოლება, რომელიც საწყისი სიჩქარის გარეშე ვარდება დედამიწაზე. ჰაერის წინაღობა სიჩქარის კვადრატის პროპორციულია. პროპორციულობის კოეფიციენტი k-ს ტოლია.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ დედამიწაზე ვარდნილი ნივთიერი წერტილის მოძრაობა, რომელზეც მოქმედებს სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა და წინაღობის $F_c = kv^2$ ძალა. მივმართოთ x ღერძი წერტილის მოძრაობის მიმართულებით, ე. ი. ვერტიკალურად ქვევით. ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:



$$mx'' = \Sigma F_{kx} = mg - kv^2 = mg - kx'^2,$$

ანუ

$$x'' = g - \frac{k}{m}x'^2 = \frac{k}{m}(-x'^2 + \frac{mg}{k}).$$

ვინაიდან $x'' = \dfrac{dx'}{dt}$, ამიტომ

$$\frac{dx'}{-x'^2 + \dfrac{gm}{k}} = \frac{k}{m}\,\mathrm{dt}.$$

ამ ტოლობის ინტეგრეფით მივიღებთ:

$$\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{gm}{k}}}\ln\frac{x' + \sqrt{\dfrac{gm}{k}}}{-x' + \sqrt{\dfrac{gm}{k}}} = \frac{k}{m}t + C_1 .$$

ინტეგრების მუდმივი C_1 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$ $x' = 0$; ამიტომ $C_1 = 0$. მაშინ

$$\ln\frac{\sqrt{\dfrac{gm}{k}} + x'}{\sqrt{\dfrac{gm}{k}} - x'} = 2\sqrt{\frac{gm}{k}}\,\frac{k}{m}t = 2\sqrt{\frac{gk}{m}}t,$$

$$x' = \sqrt{\frac{gm}{k}}\,\frac{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}} + 1}.$$

ვიპოვოთ წერტილის მოძრაობის განტოლება. მოვახდინოთ ჩასმა: $x' = \dfrac{dx}{dt}$, მაშინ

$$dx = \sqrt{\frac{gm}{k}}\,\frac{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}} + 1}\,\mathrm{dt} = \sqrt{\frac{gm}{k}}\left(\frac{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}}}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}} + 1}dt - \frac{dt}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}} + 1}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{gm}{k}}\left(\frac{e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}}}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}} + 1}dt - \frac{e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}}dt}{e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}} + 1}\right).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$2\sqrt{\frac{gk}{m}} = a, \qquad \sqrt{\frac{gm}{k}} = b.$$

მივიღებთ $$dx = b\left(\frac{e^{at}}{e^{at}+1}dt - \frac{e^{-at}}{e^{-at}+1}dt \right).$$

შემოვიღოთ ახალი აღნიშვნები: $e^{at}+1 = y, \quad ae^{at}dt = dy$.

$e^{-at}+1 = z, \quad -ae^{-at}dt = dz$. მაშინ

$$dx = b\left(\frac{dy}{ay} + \frac{dz}{az} \right) = \frac{b}{a}\left(\frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} \right).$$

ვაინტეგროთ ეს გამოსახულება:

$$x = \frac{b}{a}\left(\ln y + \ln z\right) + C_2 = \frac{b}{a}\left[\ln(e^{at}+1) + \ln(e^{-at}+1)\right] + C_2 .$$

ინტეგრების მუდმივი C_2 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$ $x_0 = 0$; $0 = \frac{b}{a}2\ln 2 + C_2$ ამიტომ $C_2 = -\frac{2b}{a}\ln 2$.

მაშინ $$x = \frac{b}{a}\left[\ln(e^{at}+1) + \ln(e^{-at}+1) - 2\ln 2\right] = \frac{b}{a}\ln\frac{(e^{at}+1)(e^{-at}+1)}{4} =$$

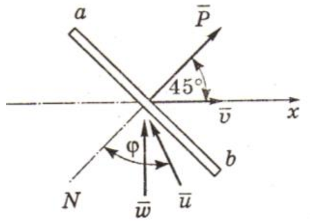
$$= \frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}}{2\sqrt{\frac{gk}{m}}}\ln\left[\frac{\left(e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}+1\right)\left(e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}+1\right)}{4e^{2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}} \right] = \frac{m}{k}\ln\frac{e^{\sqrt{\frac{gk}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{2}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\mathbf{x} = \frac{m}{k}\ln ch\sqrt{\frac{gk}{m}}t$. ($ch$ - ჰიპერბოლური კოსინუსი).

ამოცანა 27. 28

ბუერი (იალქნიანი მარხილი), რომელიც მგზავრთან ერთად იწონის Q =1962 ნ-ს, წრფივად მოძრაობს გლუვ ჰორიზონტალურ ყინულის ზედაპირზე, იალქანზე ქარის დაწოლის შედეგად; იალქნის ab სიბრტყე მოძრაობის მიმართულებასთან ადგენს 45^0 კუთხეს. ქარის აბსოლუტური $\vec{w}$ სიჩქარე მიმართულია მოძრაობის მართობულად. ქარის წნევის $\vec{P}$ ძალის სიდიდე გამოსახულია ნიუტონის ფორმულით: $p = kSu^2\cos^2\varphi$, სადაც φ არის კუთხე, რომელსაც ფარდობითი $\vec{u}$ სიჩქარე ადგენს იალქნის $\vec{N}$ მართობთან, იალქნის ფართობი S =5 მ^2, k = 0,113 – ცდისეული კოეფიციენტია. წნევის $\vec{P}$ ძალა მიმართულია ab სიბრტყის მართობულად. ხახუნი უგულებელყავით და იპოვეთ: 1) რა უდიდესი

v_{max} სიჩქარე შეიძლება მიიღოს ბუერმა; 2) როგორ α კუთხეს შეადგენს ამ სიჩქარის დროს ანძაზე მოთავსებული ფლუგერი იალქნის სიბრტყესთან; 3) რა x_1 მანძილი უნდა გაიაროს ბუერმა იმისათვის, რომ შეიძინოს $v = \frac{2}{3} w$ სიჩქარე, თუ მისი საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ბუერის მოძრაობა, რომელზეც მოქმედებს ქარის წნევის $\vec{P}$ ძალა. მივმართოთ x ღერძი ბუერის მოძრაობის მიმართულებით (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Sigma F_{kx} = P\cos 45^0,$$

ანუ, ამოცანის მოცემულობების გათვალისწინებით

$$mx'' = kSu^2\cos^2\varphi\,\cos 45^0.$$

განვიხილოთ ჰაერის ნაკადის მოძრაობა, როგორც რთული: $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, ანუ იალქნის ნორმალზე გეგმილებში $w_n = u_n + v_n$, საიდანაც

$$u_n = u\cos\varphi = w_n - v_n = (w - v)\cos 45^0 = (w - x')\cos 45^0.$$

მაშინ

$$mx'' = kS(w - x')^2\cos^3 45^0.$$

ვინაიდან $x'' = \frac{dx'}{dt}$, განვაცალოთ ცვლადები:

$$\frac{dx'}{(w - x')^2} = \frac{kS}{m}\cos^3 45^0\,dt.$$

შემოვიღოთ ახალი ცვლადი: $w - x' = z, \quad -dx' = dz$, მაშინ

$$\frac{-dz}{z^2} = \frac{kS}{m}\cos^3 45^0\,dt.$$

ვაინტეგროთ ეს გამოსახულება, მივიღებთ

$$\frac{1}{z} = \frac{kS}{m}t\cos^3 45^0 + C_1.$$

ინტეგრების მუდმივი C_1 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$ $x' = 0$; ამიტომ $C_1 = \frac{1}{w}$. მაშინ

$$\frac{1}{w-x'}-\frac{1}{w}=\frac{x'}{(w-x')w}=\frac{kS}{m}t\cos^3 45^0. \qquad (1)$$

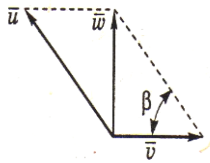
შემოვიღოთ აღნიშვნა: $a=\frac{kS}{m}\cos^3 45^0$; (1) ასე ჩაიწერება:

$$x'=\frac{w^2at}{1+wat}. \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ ბუერის მაქსიმალური სიჩქარე:

$$v_{\max}=x'_{\max}=\lim_{t\to\infty}\frac{w^2at}{1+wat}=\lim_{t\to\infty}\frac{w}{\frac{1}{wat}+1}=\frac{w}{\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{wat}+1}=\frac{w}{1}=w.$$

$x'_{\max}$ დროს ვიპოვოთ ქარის ფარდობითი სიჩქარის მიმართულება.



ვინაიდან $w=v_{\max}=x'_{\max}$, ამიტომ $\beta=45^0$.

ეს ნიშნავს, რომ $\vec{u}$ მიმართულია იალქნის გასწვრივ და $\alpha=0$.

ვაინტეგროთ (2) ტოლობა:

$$\int dx=\int\frac{w^2at}{1+wat}dt+C_2.$$

$$x=w\int\frac{t+\frac{1}{wa}-\frac{1}{wa}}{\frac{1}{wa}+t}dt+C_2=w\left(\int dt-\frac{1}{wa}\int\frac{dt}{\frac{1}{wa}+t}\right)+C_2=$$

$$=wt-\frac{1}{a}\ln\left(\frac{1}{wa}+t\right)+C_2.$$

ინტეგრების მუდმივი C_2 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t=0$, $x_0=0$; ამიტომ $C_2=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{wa}$. მაშინ

$$x=wt-\frac{1}{a}\ln(1+wat)=wt-\frac{1}{a}\ln(1+w\frac{kS}{m}t\cos^3 45^0). \qquad (3)$$

განვსაზღვროთ T დრო, როდესაც ბუერის სიჩქარე იქნება $v=x'=\frac{2}{3}w$. (1) ფორმულის თანახმად

$$\frac{\frac{2}{3}w}{\left(w-\frac{2}{3}w\right)}=\frac{kS}{m}T\cos^3 45^0.$$

აქედან $$T=\frac{2m}{wkS\cos^3 45^0}.$$

(3) ფორმულიდან განვსაზღვროთ T დროში ბურის მიერ განვლილი x_1 მანძილი:

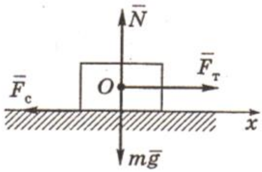
$$x_1=w\frac{2m}{wkS\cos^3 45^o}-\frac{1}{\frac{kS}{m}\cos^3 45^o}\ln\left(1+w\frac{kS}{m}\cos^3 45^o\frac{2m}{wkS\cos^3 45^o}\right)=$$

$$=\frac{m}{kS\cos^3 45^o}(2-\ln 3)=\frac{1962}{9{,}8\cdot 0{,}113\cdot 5(\frac{\sqrt{2}}{2})^3}(2-\ln 3)=900$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 1) $v_{\max}=w$; 2) $\alpha=0^o$; 3) $x_1=900$ მ.

ამოცანა 27. 29

ტრამვაის წამყვანი რეოსტატის თანდთანობითი გამორთვით ზრდის სავაგონო ძრავის სიძლიერეს ისე, რომ წევის ძალა იზრდება ნულიდან დროის პროპორციულად და ყოველი წამის განმავლობაში იმატებს 1200 ნ-ს. იპოვეთ ვაგონის მიერ განვლილი მანძილის დამოკიდებულება მოძრაობის დროზე შემდეგი მონაცემების მიხედვით: ვაგონის მასაა 10000 კგ, ხახუნის წინაღობა მუდმივია და ვაგონის წონის 0,02 შეადგენს, ხოლო საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ ტრამვაის მოძრაობა, რომელზეც მოქმედებს სიმძიმის m$\vec{g}$ ძალა, წევის ძალა $\vec{F}_T$, წინაღობის $\vec{F}_c$ ძალა და გზის ნორმალური რეაქცია $\vec{N}$. მივმართოთ x ღერძი ტრამვაის მოძრაობის მიმართულებით (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Sigma F_{kx} = F_T - F_c ,$$

ანუ, ამოცანის პირობების მიხედვით

$$mx'' = 1200t - 0{,}02\ mg,$$

საიდანაც $x'' = \frac{1200}{m}t - 0{,}02g.$

შევცვალოთ: $x'' = \frac{dx'}{dt}$ და განვაცალოთ ცვლადები, მივიღებთ

$dx' = (\frac{1200}{m}t - 0{,}02g)$dt=$(\frac{1200}{10000}t - 0{,}02g)$dt=0,12(t– 1,635)dt.

ვინაიდან მოძრაობა იწყება იმ მომენტში, როცა $F_T > F_c$, ე. ი. როცა $t > \frac{0{,}02mg}{1200} = 1{,}635$, ამიტომ, შემოვიღოთ ახალი ცვლადი:

$t_1 = t - 1{,}635$, $dt_1 = dt$. მაშინ

$$dx' = 0{,}12\, t_1\, dt_1.$$

ეს გამოსახულება ორჯერ ვაინტეგროთ:

$$x' = 0{,}12\frac{t_1^2}{2} + C_1.$$

$$x = 0{,}06 \cdot \frac{t_1^3}{3} + C_1 t_1 + C_2.$$

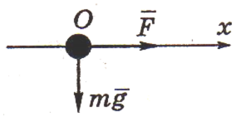
ინტეგრების მუდმივები C_1 და C_2 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t_1 = 0$, $x_0 = 0$, $x_0' = 0$. ამიტომ C_1=0, C_2=0. მაშინ $s = x = 0{,}02t_1^3 = 0{,}02(t - 1{,}635)^3.$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: მოძრაობა დაიწყება დენის ჩართვიდან 1,635 წმ-ის შემდეგ; მოძრაობის კანონია $s = 0{,}02(t - 1{,}635)^3$ მ.

ამოცანა 27. 30

1 კგ მასის სხეული მოძრაობს ცვლადი F =10(1-t) ნ ძალის მოქმედებით, სადაც t – დროა წამებში. რამდენი წამის შემდეგ გაჩერდება სხეული, თუ სხეულის საწყისი სიჩქარე $v_0 = 20$ მ/წმ და ძალა ემთხვევა სხეულის სიჩქარის მიმართულებას? რა მანძილს გაივლის სხეული გაჩერებამდე.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. სხეული მივიღოთ ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ მისი მოძრაობა $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით. მივმართოთ x ღერძი სხეულის მოძრაობის მიმართულებით, კოორდინატთა სათავე შევუთავსოთ სხეულის საწყისი მდებარეობის 0 წერტილს (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური



განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Sigma F_{kx} = F = 10(1-t)\,.$$

აქედან

$$x'' = \frac{10}{m}(1-t) = 10\,(1-t).$$

ეს გამოსახულება ორჯერ ვაინტეგროთ:

$$x' = 10\left(t - \frac{t^2}{2}\right) + C_1\,. \qquad (1)$$

$$x = 10\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right) + C_1 t + C_2\,. \qquad (2)$$

ინტეგრების მუდმივები C_1 და C_2 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა t = 0, $x_0 = 0$, $x'_0 = v_0 = 20$ მ/წმ. ამიტომ $C_1 = 20$, $C_2 = 0$. ჩავსვათ C_1 და C_2 მნიშვნელობები (1) და (2) გამოსახულებებში:

$$x' = 10\left(t - \frac{t^2}{2}\right) + 20$$

(3)

$$x = 10\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right) + 20t\,. \qquad (4)$$

გაჩერებამდე სხეულის მოძრაობის დროს გასაგებად სიჩქარე გაუტოლოთ ნულს $x' = 0$, მაშინ, როცა t = T განტოლება (3) ასეთ სახეს მიიღებს

$$0 = 10\left(T - \frac{T^2}{2}\right) + 20, \quad \text{ანუ} \quad T^2 - 2T - 4 = 0\,.$$

ამ კვადრატული განტოლების ამოხსნით მივიღებთ

$$T = 1 + \sqrt{5} = 3{,}236 \text{ (წმ)}$$

გაჩერებამდე განვლილი მანძილი გამოითვლება (4) ფორმულით; როცა t = T x=s:

$$s = 10\left(\frac{T^2}{2} - \frac{T^3}{6}\right) + 20T = 10\left(\frac{3{,}236^2}{2} - \frac{3{,}236^3}{6}\right) + 20 \cdot 3{,}236 = 60{,}6 \text{ (მ)}.$$

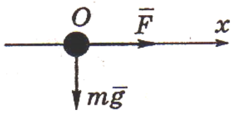
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: t = 3,236 წმ. $s = 60{,}6$ მ.

ამოცანა 27. 31

m მასის ნივთიერი წერტილი ასრულებს წრფივ მოძრაობას ძალის მოქმედებით, რომელიც იცვლება $F = F_0 \cos\omega t$ კანონით, სადაც F_0 და ω მუდმივი სიდიდეებია. საწყის მომენტში წერტილს ჰქონდა $x_0' = v_0$ სიჩქარე. იპოვეთ წერტილის მოძრაობის განტოლება.

<u>ამოხსნა</u>. განვიხილოთ ნივთიერი წერტილის წრფივი მოძრაობა $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით. მივმართოთ x ღერძი წერტილის მოძრაობის მიმართულებით, კოორდინატთა სათავე შევუთავსოთ წერტილის საწყისი მდებარეობის 0 წერტილს (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Sigma F_{kx} = F = F_0 \cos\omega t$$



აქედან $$x'' = \frac{F_0}{m} \cos\omega t.$$

შევცვალოთ: $x'' = \dfrac{dx'}{dt}$, შემდეგ განვაცალოთ ცვლადები, მივიღებთ

$$dx' = \frac{F_0}{m} \cos\omega t \, dt.$$

ვაინტეგროთ ეს გამოსახულება:

$$x' = \frac{F_0}{m\omega} \sin\omega t + C_1.$$

ახლა შევცვალოთ: $x' = \dfrac{dx}{dt}$ და განვაცალოთ ცვლადები, მივიღებთ

$$dx = (\frac{F_0}{m\omega} \sin\omega t + C_1)\, dt.$$

ვაინტეგროთ ეს გამოსახულება:

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos\omega t + C_1 t + + C_2. \qquad (1)$$

ინტეგრების მუდმივები C_1 და C_2 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა t = 0, $x_0 = 0$, $x_0' = v_0$ (კოორდინატთა სათავე შეთავსებულია წერტილის საწყის

მდებარეობასთან) ამიტომ, ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ:

$$v_0 = \frac{F_0}{m\omega}\sin 0^o + C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = v_0\,,$$

$$0 = -\frac{F_0}{m\omega^2}\cos 0^o + C_1\cdot 0 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = \frac{F_0}{m\omega^2}\,.$$

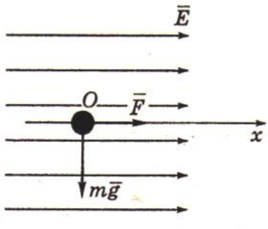
C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (1) ფორმულაში, მივიღებთ

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t + v_0 t + \frac{F_0}{m\omega^2} = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t) + v_0 t\,.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $x = \dfrac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t) + v_0 t\,.$

ამოცანა 27. 32

ელექტრობის e მუხტის გადამტანი m მასის ნაწილაკი იმყოფება ცვლად E = Asinkt (A და k – მოცემული მუდმივებია) დაძაბულობის ერთგვაროვან ელექტრულ ველში. განსაზღვრეთ ნაწილაკის მოძრაობა, თუ ცნობილია, რომ ელექტრულ ველში ნაწილაკზე მოქმედებს $\vec{F} = e\vec{E}$ ძალა, რომელიც მიმართულია $\vec{E}$ დაძაბულობის მხარეს. სიმძიმის ძალის გავლენა უგულებელყავით. ნაწილაკის საწყისი მდებარეობა მიიღეთ კოორდინატთა სათავედ; ნაწილაკის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ ელექტრული ნაწილაკის წრფივი მოძრაობა ერთგვაროვან ელექტრულ ველში $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით.

მივმართოთ x ღერძი დაძაბულობის ძალხაზების გასწვრივ. ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Sigma F_{kx} = F$$

ანუ, ამოცანის მონაცემების თანახმად

$$mx'' = eE = eA\sin kt\,.$$

აქედან

$$x'' = \frac{eA}{m} \sin kt.$$

შევცვალოთ: $x'' = \frac{dx'}{dt}$, შემდეგ განვაცალოთ ცვლადები, მივიღებთ

$$dx' = \frac{eA}{m} \sin kt\, dt.$$

ვაინტეგროთ ეს გამოსახულება:

$$x' = -\frac{eA}{mk} \cos kt + C_1.$$

ისევ შევცვალოთ: $x' = \frac{dx}{dt}$ და განვაცალოთ ცვლადები, მივიღებთ

$$dx = (-\frac{eA}{mk} \cos kt + C_1)\, dt.$$

ვაინტეგროთ ეს გამოსახულება:

$$x = -\frac{eA}{mk^2} \sin kt + C_1 t ++ C_2. \qquad (1)$$

ინტეგრების მუდმივები C_1 და C_2 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა t = 0, x_0 =0, $x_0' = v_0$ = 0. ამიტომ, ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ:

$$0 = -\frac{eA}{mk} \cos 0 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{eA}{mk},$$

$$0 = -\frac{eA}{mk^2} \sin 0^{o} + C_1 \cdot 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (1) ფორმულაში, მივიღებთ მოძრაობის განტოლებას

$$x = -\frac{eA}{mk^2} \sin kt + \frac{eA}{mk} t = \frac{eA}{mk} (t - \frac{\sin kt}{k}).$$

პ ა ს უ ხ ი : $x = \frac{eA}{mk} (t - \frac{\sin kt}{k}).$

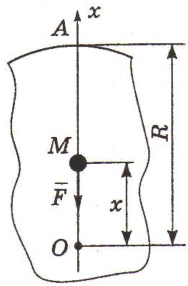
ამოცანა 27. 33

განსაზღვრეთ მძიმე ბურთულას მოძრაობა წარმოსახვითი წრფივი არხის გასწვრივ, რომელიც გადის დედამიწის ცენტრზე, თუ მივიღებთ, რომ მიზიდულობის ძალა დედამიწის შიგნით პროპორციულია დედამიწის ცენტრიდან მოძრავი წერტილის დაშორების მანძილისა და მიმართულია ამ ცენტრისაკენ. ბურთულა არხში ჩაშვებულია დედამიწის ზედაპირიდან საწყისი სიჩქარის გარეშე. აჩვენეთ აგრეთვე ბურთულის სიჩქარე დედამიწის ცენტრზე გავლისას და ამ ცენტრამდე მოძრაობის დრო. დედამიწის რადიუსი $R = 6{,}37\cdot 10^6$ მ-ის ტოლია; მიზიდულობის ძალის აჩქარება დედამიწის ზედაპირზე მიიღეთ $g = 9{,}8$ მ/წმ² –ის ტოლი.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. მოძრაობისას ბურთულაზე მოქმედებს მიზიდულობის ძალა $\vec{F}$, რომელიც დედამიწის ზედაპირზე უდრის

$$F = \alpha R = mg \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{mg}{R}.$$

მივმართოთ x ღერძი წარმოსახვითი წრფივი არხის გასწვრივ, კოორდინატთა ღერძის სათავე შევუთავსოთ დედამიწის 0 ცენტრს (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ მოძრაობის განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:



$$mx'' = -F = -\alpha x$$

ანუ, $\alpha -$ს მნიშვნელობის თანახმად

$$mx'' = -\frac{mg}{R}x. \qquad (1)$$

აქედან $$x'' + \frac{g}{R}x = 0. \qquad (2)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\frac{g}{R} = k^2$. მაშინ (2) მიიღებს ასეთ სახეს

$$x'' + k^2 x = 0.$$

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნით მივიღებთ

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \qquad (3)$$

გავაწარმოოთ (3) გამოსახულება დროთი

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (4)$$

საწყისი პირობების თანახმად: როცა $t = 0$, $x_0 = R$, $x_0' = 0$.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობებისათვის:

(3) ფორმულიდან: $x = x_0 = R = C_1$;

(4) ფორმულიდან: $x_0' = 0 = C_2 k \Rightarrow C_2 = 0$.

მაშინ, (3) და (4) ფორმულები მიიღებენ ასეთ სახეს:

$$x = R\cos kt, \qquad x' = -Rk\sin kt.$$

ანუ
$$x = R\cos\sqrt{\frac{g}{R}}t, \tag{5}$$

$$x' = -Rk\sin\sqrt{\frac{g}{R}}t. \tag{6}$$

ვიპოვოთ ბურთულას მიერ დედამიწის ცენტრზე გავლის T დრო, როცა $x = 0$: $x = 0 = \cos\sqrt{\frac{g}{R}}t,$ $\sqrt{\frac{g}{R}}T = \frac{\pi}{2}$.

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} = \frac{3{,}14}{2}\sqrt{\frac{6{,}37\cdot 10^6}{9{,}8}} = 1266{,}4 \text{ წმ.}$$

შევიტანოთ T –ს მნიშვნელობა (6) ფორმულაში, მივიღებთ

$$v = x' = -\sqrt{gR}\sin\frac{\pi}{2} = \left|-\sqrt{gR}\right| = \left|-\sqrt{9{,}8\cdot 6{,}37\cdot 10^6}\right| = 7{,}9\cdot 10^3 \text{ მ/წმ.}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: მანძილი ბურთულიდან დედამიწის ცენტრამდის იცვლება შემდეგი კანონით $x = R\cos\sqrt{\frac{g}{R}}t$; $v = 7{,}9\cdot 10^3$ მ/წმ;

$$T = 1266{,}4 \text{ წმ} = 21{,}1 \text{ წთ.}$$

ამოცანა 27. 34

სხეული ვარდება დედამიწაზე h სიმაღლიდან საწყისი სიჩქარის გარეშე. ჰაერის წინაღობა უგულებელყავით, ხოლო დედამიწის მიზიდულობის ძალა ჩათვალეთ დედამიწის ცენტრიდან სხეულის დაშორების მანძილის კვადრატის უკუპროპორციული. იპოვეთ T დრო, რომლის გავლის შემდეგ სხეული მიაღწევს დედამიწის ზედაპირს. რა v სიჩქარეს იძენს იგი ამ დროში? დედამიწის რადიუსია R; სიმძიმის ძალის აჩქარება დედამიწის ზედაპირთან არის g.

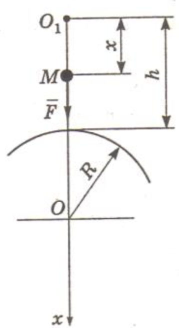
<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ვარდნისას M სხეულზე მოქმედებს მიზიდულობის ძალა $\vec{F}$.

გავავლოთ x ღერძი 0_1 წერტილიდან (დედამიწიდან h სიმაღლეზე) სხეულის მოძრაობის მიმართულებით და შეუთავსოთ კოორდინატთა 0 სათავე დედამიწის ცენტრს (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$\mathrm{m}x'' = \frac{k}{(R+h-x)^2},$$

სადაც k – პროპორციულობის კოეფიციენტია, რომელსაც ვპოულობთ იმ პირობიდან, რომ დედამიწის ზედაპირზე მიზიდულობის ძალა ტოლია სხეულის სიმძიმის ძალისა, ე. ი. $\frac{k}{R^2} = mg$, საიდანაც $k = mgR^2$.

მაშინ $$x'' = \frac{gR^2}{(R+h-x)^2}. \qquad (2)$$



შევცვალოთ: $x'' = \frac{x'dx'}{dx}$, შემდეგ განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ, მივიღებთ

$$\frac{x'dx'}{dx} = \frac{gR^2}{(R+h-x)^2},$$

$$\frac{x'^2}{2} = \frac{gR^2}{R+h-x} + C_1.$$

ინტეგრების მუდმივი C_1 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $x = 0$, $x' = 0$, ამიტომ, $C_1 = -\frac{gR^2}{R+h}$. მაშინ

$$\frac{x'^2}{2} = gR^2\left(\frac{1}{R+h-x} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{gR^2x}{(R+h-x)(R+h)}.$$

აქედან განვსაზღვრავთ სიჩქარეს

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}\sqrt{\frac{x}{R+h-x}}. \qquad (1)$$

როცა $x = h$

$$v = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}\sqrt{\frac{h}{R+h-h.}} = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}.$$

სხეულის ვარდნის დროის განსაზღვრისათვის (1) გამოსახულებაში განვაცალოთ ცვლადები:

$$\sqrt{\frac{R+h-x}{x}}dx = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}dt.$$

ვაინტეგროთ ეს გამოსახულება, მივიღებთ

$$\int \sqrt{\frac{R+h-x}{x}}dx=\int\frac{\sqrt{R+h-x}\sqrt{R+h-x}}{\sqrt{x}\sqrt{R+h-x}}dx=\int\frac{(R+h-x)dx}{\sqrt{(R+h)x-x^2}}=$$

$$=\int\frac{[2(R+h)-2x]dx}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}}=\int\frac{(R+h-2x)dx}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}}+\int\frac{(R+h)dx}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}}. \quad (2)$$

შემოვიღოთ ახალი ცვლადი: $\sqrt{(R+h)x-x^2}=u$, მაშინ

$$du=\frac{(R+h-2x)dx}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}}.$$

გამოვთვალოთ (2) გამოსახულების პირველი ინტეგრალი:

$$\int\frac{(R+h-2x)dx}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}}=\int du=\sqrt{(R+h)x-x^2}.$$

(2) გამოსახულების ინტეგრალი შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\int\frac{(R+h)dx}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}}=\frac{R+h}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(R+h)x-x^2}}.$$

ეს არის ცხრილის ინტეგრალი

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\arcsin\frac{x-a}{a}, \quad \text{სადაც} \quad a=\frac{R+h}{2}$$

მაშინ $$\int\frac{(R+h)dx}{2\sqrt{(R+h)x-x^2}}=\arcsin\frac{x-\left(\frac{R+h}{2}\right)}{\frac{R+h}{2}}.$$

ასე, რომ

$$\int \sqrt{\frac{R+h-x}{x}}dx=\sqrt{(R+h)x-x^2}+\frac{R+h}{2}\arcsin\frac{x-\left(\frac{R+h}{2}\right)}{\frac{R+h}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}t+C_2. \quad (3)$$

ინტეგრების მუდმივი C_2 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t=0$ $x_0=0$, ამიტომ, (3) ფორმულის თანახმად

$$C_2 = \frac{R+h}{2}\arcsin(-1) = -\frac{R+h}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

ჩავსვათ C_2–ს მნიშვნელობა (3) ფორმულაში, საიდანაც

$$t = \sqrt{\frac{R+h}{2gR^2}}\left\{\sqrt{(R+h)x - x^2} + \frac{R+h}{2}\left[\arcsin\frac{x-(\frac{R+h}{2})}{\frac{R+h}{2}} + \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

ვინაიდან $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,

ხოლო $\arcsin(-x) = -\arcsin x$,

ამიტომ

$$\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{x-(\frac{R+h}{2})}{\frac{R+h}{2}} = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left[-\frac{-x+(\frac{R+h}{2})}{\frac{R+h}{2}}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arcsin\left[\frac{-x+(\frac{R+h}{2})}{\frac{R+h}{2}}\right] = \arccos\frac{R+h-2x}{R+h}.$$

მაშასადამე,

$$t = \sqrt{\frac{R+h}{2gR^2}}\left\{\sqrt{(R+h)x - x^2} + \frac{R+h}{2}\left[\arccos\frac{R+h-2x}{R+h}\right]\right\}.$$

საიდანაც, როცა $x = h$, მივიღებთ

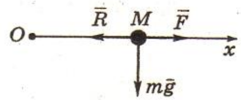
$$T = \sqrt{\frac{R+h}{2gR^2}}\left(\sqrt{Rh} + \frac{R+h}{2}\arccos\frac{R-h}{R+h}\right).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $v = \sqrt{\frac{2ghR}{R+h}}$; $T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left(\sqrt{Rh} + \frac{R+h}{2}\arccos\frac{R-h}{R+h}\right).$

ამოცანა 27. 35

m მასის ნივთიერი წერტილი განიზიდება ცენტრიდან მანძილის პროპორციული ძალით (პროპორციულობის კოეფიციენტია mk_2). გარემოს წინაღობა მოძრაობის სიჩქარის პროპორციულია (პროპორციულობის კოეფიციენტია $2mk_1$). საწყის მომენტში წერტილი იმყოფებოდა ცენტრიდან a მანძილზე, და მისი სიჩქარე ამ მომენტში ნულის ტოლია. იპოვეთ წერტილის მოძრაობის კანონი.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. M წერტილი მოძრაობს განმზიდავი $\vec{F}$ ძალის და გარემოს წინაღობის $\vec{R}$ ძალის მოქმედებით. მივმართოთ x ღერძი ნივთიერი წერტილის მოძრაობის მიმართულებით, კოორდინატთა სათავე შეუთავსოთ წერტილის საწყისი მდებარეობის 0 წერტილს (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში: $mx'' = F - R$, ანუ, ამოცანის მონაცემების თანახმად



$$mx'' = mk_2 x - 2mk_1 x'.$$

აქედან $$x'' + 2k_1 x' - k_2 x = 0. \qquad (1)$$

ამოვხსნათ (1) დიფერენციალური განტოლება. ამისათვის შევადგინოთ მისი მახასიათებელი განტოლება

$$\lambda^2 + 2k_1\lambda - k_2 = 0 \qquad (2)$$

(2) მახასიათებელი განტოლების ფესვები ნამდვილი და განსხვავებულია: $\lambda_{1,2} = -k_{1,2} \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\lambda_1 = -\alpha = -k_1 - \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$;

$$\lambda_2 = \beta = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} - k_1.$$

მაშინ, (1) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამოხსნას აქვს ასეთი სახე $$x = C_1 e^{-\alpha t} + C_2 e^{\beta t} \qquad (3)$$

გავაწარმოოთ (3) გამოსახულება დროთი:

$$x' = -\alpha C_1 e^{-\alpha t} + C_2 \beta e^{\beta t}. \qquad (4)$$

ინტეგრების მუდმივები C_1 და C_2 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$ $x_0 = a$, $v_0 = 0$ ამიტომ, (3) და (4) ფორმულების თანახმად: (3) ფორმულიდან $x = x_0 = a = C_1 + C_2$;

(4) ფორმულიდან $x_0' = v_0 = 0 = -\alpha C_1 + \beta C_2$.

მაშინ $$C_1 = a - C_2; \quad C_1 = \frac{\beta}{\alpha} C_2 .$$

აქედან $$C_2 = \frac{a\alpha}{\alpha+\beta}, \quad C_1 = \frac{a\beta}{\alpha+\beta} .$$

ჩავსვათ C_1 და C_2 მნიშვნელობები (3) გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$x = \frac{a\beta}{\alpha+\beta} e^{-\alpha t} + \frac{a\alpha}{\alpha+\beta} e^{\beta t} = \frac{a}{\alpha+\beta} (\beta e^{-\alpha t} + \alpha e^{\beta t}) .$$

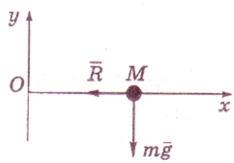
__პ ა ს უ ხ ი__: $x = \frac{a}{\alpha+\beta} (\beta e^{-\alpha t} + \alpha e^{\beta t})$, სადაც

$$\alpha = k_1 + \sqrt{k_1^2 + k_2^2} , \qquad \beta = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} - k_1$$

ამოცანა 27. 36

m მასის ნივთიერი წერტილი იწყებს წრფივ მოძრაობას (x ღერძის გასწვრივ) საწყისი სიჩქარის გარეშე $x = \beta$ მდგომარეობიდან კოორდინატთა სათავისკენ მიზიდულობის ძალის მოქმედებით, რომელიც იცვლება $R = \alpha / x^2$ კანონით. იპოვეთ დროის მომენტი, როდესაც წერტილი აღმოჩნდება $x_1 = \beta / 2$ მდებარეობაში. განსაზღვრეთ წერტილის სიჩქარე ამ მდებარეობაში.

__ა მ ო ხ ს ნ ა__. ავირჩიოთ კოორდინატთა 0xy სისტემა. M წერტილი მოძრაობს მიზიდულობის $\vec{R}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:



$$mx'' = -R = -\frac{\alpha}{x^2} . \qquad (1)$$

შევცვალოთ: $x'' = \frac{x'dx'}{dx}$, ჩავსვათ (1) ფორმულაში, მივიღებთ

$$\frac{mx'dx'}{dx} = -\frac{\alpha}{x^2} .$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ, მივიღებთ

$$\int mx'dx' = -\int \frac{\alpha dx}{x^2},$$

$$m\frac{x'^2}{2} = \frac{\alpha}{x} + C_1. \qquad (2)$$

ინტეგრების მუდმივა C_1 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა t = 0 $x_0 = \beta$, $x'_0 = 0$ ამიტომ, (2) ფორმულის $C_1 = -\dfrac{\alpha}{\beta}$. ჩავსვათ C_1-ის მნიშვნელობები (2) გამოსახულებაში,

მივიღებთ $$m\frac{x'^2}{2} = \frac{\alpha}{x} - \frac{\alpha}{\beta}.$$

საიდანაც $$x'_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{\alpha}{x} - \frac{\alpha}{\beta}\right)};$$

$$x'_1 = -\sqrt{\frac{2\alpha}{m}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\beta}\right)} \qquad (3)$$

სადაც x' არის სიჩქარის გეგმილი x ღერძზე, ამასთანავე $x' < 0$.

შევცვალოთ $x' = \dfrac{dx}{dt}$, განვაცალოთ ცვლადები:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{\beta}}} = -\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}dt.$$

ვაინტეგროთ ეს გამოსახულება; ტოლობის მარცხენა მხარის ინტეგრალი გამოვთვალოთ მისი დაყვანით ცხრილის ინტეგრალზე (მსგავსი ახსნა იხ. 27. 34 ამოცანის ამოხსნაში):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{\beta}}} = \sqrt{\beta}\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{\beta - x}} = \sqrt{\beta}\int\frac{xdx}{\sqrt{\beta x - x^2}} = -\frac{\sqrt{\beta}}{2}\int\frac{(\beta - 2x - \beta)dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{\beta}}{2}\int\frac{(\beta - 2x)dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} + \frac{\beta\sqrt{\beta}}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \left(x - \frac{\beta}{2}\right)^2}}.$$

ამ გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ

$$-\sqrt{\beta}\sqrt{\beta x - x^2} + \beta\frac{\sqrt{\beta}}{2}\arcsin(x - \frac{\beta}{2})\frac{2}{\beta} + C_2 = -t\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}. \qquad (4)$$

ინტეგრების მუდმივი C_2 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა t = 0 $x=\beta$, ამიტომ, (4) ფორმულიდან

$$C_2=-\frac{\beta\sqrt{\beta}}{2}\frac{\pi}{2}.$$

ჩავსვათ C_2-ის ეს მნიშვნელობა (4) გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$t=\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\left[\sqrt{\beta}\sqrt{\beta x-x^2}+\beta\frac{\sqrt{\beta}}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{2x-\beta}{\beta}\right)\right].$$

როცა $x_1=\dfrac{\beta}{2}$

$$t_1=\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\left(\frac{\beta^{3/2}}{2}+\frac{\pi}{2}\frac{\beta^{3/2}}{2}\right)=\frac{\beta^{3/2}}{2}\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\left(1+\frac{\pi}{2}\right).$$

მაშინ, (3) ფორმულის თანახმად

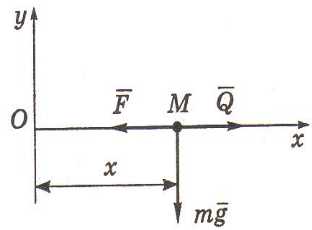
$$v_1=\sqrt{\frac{2\alpha}{m}\left(\frac{2}{\beta}-\frac{1}{\beta}\right)}=\sqrt{\frac{2\alpha}{m\beta}}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $t_1=\dfrac{\beta^{3/2}}{2\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{m}{\alpha}}\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right);\quad v_1=\sqrt{\dfrac{2\alpha}{m\beta}}$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: $\int\frac{x}{\beta-x}dx$ შეიძლება დავიყვანოთ ცხრილის ორ ინტეგრალზე, თუ გავნთავისუფლდებით ფესვისაგან შემდეგი აღნიშვნით $\dfrac{x}{\beta-x}=z^2$, საიდანაც $x=\dfrac{\beta z^2}{1+z^2}$, $\quad dx=\dfrac{2\beta z dz}{(1+z^2)^2}$.

ამოცანა 27. 37

m მასის ნივთიერი წერტილი იწყებს წრფივ მოძრაობას საწყისი სიჩქარის გარეშე $x_0=a$ მდგომარეობიდან, რომელზეც მოქმედებენ მიზიდულობის ძალა, რომელიც კოორდინატთა სათავიდან მანძილის პროპორციულია $F_x=-c_1mx$ და განზიდვის (უკუმბიძგი) ძალა, რომელიც მანძიოლის კუბის პროპორციულია: $Q_x=c_2mx^3$.



c_1, c_2, a-ს როგორი თანაფარდობისას მიაღწევს წერტილი კოორდინატთა სათავეს და გაჩერდება?

<u>ა მო ხ ს ნ ა</u>. M წერტილის მოძრაობისას მასზე მოქმედებს მიზიდულობის ძალა $\vec{F}$ და განზიდვის ძალა $\vec{Q}$. მივმართოთ x ღერძი წერტილის მოძრაობის მხარეს (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = Q_x + F_x$$

ანუ, ამოცანის მოცემულობების თანახმად

$$mx'' = c_2 mx^3 - c_1 mx.$$

ქედან $$x'' = c_2 x^3 - c_1 x.$$

შევცვალოთ: $x'' = \dfrac{x'dx'}{dx}$, მაშინ

$$\frac{x'dx'}{dx} = c_2 x^3 - c_1 x.$$

ამ გამოსახულებაში განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ, მივიღებთ

$$\int x'dx' = \int (c_2 x^3 - c_1 x)dx,$$

$$\frac{x'^2}{2} = c_2\frac{x^4}{4} - c_1\frac{x^2}{2} + A \qquad (2)$$

ინტეგრების მუდმივი A განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა t = 0 $x_0 = a$, $x'_0 = 0$ ამიტომ, (2) ფორმულის

თანახმად $$A = \frac{c_1\alpha^2}{2} - \frac{c_2 a^4}{4}.$$

ჩავსვათ A-ს მნიშვნელობა (2) განტოლებაში,

$$\frac{x'^2}{2} = c_2\frac{x^4}{4} - c_1\frac{x^2}{2} + \frac{c_1\alpha^2}{2} - \frac{c_2 a^4}{4}. \qquad (3)$$

როცა t = t_1 $x_1 = 0$, $x'_1 = 0$ ამიტომ, (3) განტოლებს მიიღებს ასწეთ

სახეს $$\frac{c_1\alpha^2}{2} - \frac{c_2 a^4}{4} = 0.$$

ქედან $\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{a^2}{2}$ ანუ $c_1 = \dfrac{c_2 a^2}{2}$.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $c_1 = \dfrac{c_2 a^2}{2}$.

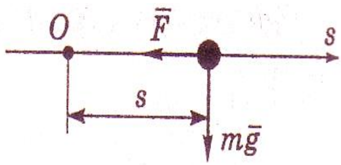
ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 27. 38

სხეულის მოძრაობისას არაერთგვაროვან გარემოში წინაღობის ძალა იცვლება $F = -\dfrac{2v^2}{3+s}$ ნ კანონით, სადაც v - სხეულის სიჩქარეა მ/წმ-ში, ხოლო s – განვლილი მანძილი მეტრებში. განსაზღვრეთ განვლილი მანძილი, როგორც დროის ფუნქცია, თუ საწყისი სიჩქარეა $v_0 = 5$ მ/წმ.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ სხეულის მოძრაობა გარემოს წინაღობის $\vec{F}$ ძალის და სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალის მოქმედებით. $0s$ ღერძი მივმართოთ სხეულის მოძრაობის მხარეს (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება s ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = -F = -\frac{2v^2}{3+s}. \qquad (1)$$

შევცვალოთ:



$$s'' = \frac{ds'}{dt}\frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt}\frac{ds'}{ds} = s'\frac{ds'}{ds} = v\frac{dv}{ds}.$$

მაშინ (1) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$\frac{mvdv}{ds} = -\frac{2v^2}{3+s}, \qquad (2)$$

სადაც $m = 1$.

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ (2) გამოსახულება,

$$\int\frac{dv}{2v} = \int -\frac{ds}{3+s},$$

მივიღებთ $$\frac{1}{2}\ln v = -\ln(3+s) + \ln C_1.$$

აქედან $$v = \left(\frac{C_1}{3+s}\right)^2. \qquad (3)$$

მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა t = 0 $s_0 = 0$, $s_0' = v_0$

ამიტომ, (3) ფორმულიდან $v_0 = \dfrac{C_1^2}{9}$, აქედან $C_1^2 = 9v_0 = 45$. მაშინ (3)გამოსახულება მიოიღებს ასსეტ სახეს

$$v = \frac{45}{(3+s)^2}.$$

ვინაიდან $v = \dfrac{ds}{dt}$, ამიტომ $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{45}{(3+s)^2}$. (4)

(4) გამოსახულებაში განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ,

$$\int (3+s)^2 ds = \int 45 dt,$$

მივიღებთ: $\dfrac{(3+s)^3}{3} = 45t + C_2$. (5)

მოძრაობის საწყისი პირობების ჩასმით (5) ფორმულიდან ვიპოვით

$$3^2 = 9 = C_2,$$

მაშინ (5) ასეთი სახე აქვს

$$\frac{(3+s)^3}{3} = 45t + 9,$$

საიდანაც $s = \sqrt[3]{27 \cdot 5t + 27} - 3 = 3(\sqrt[3]{5t+1} - 1)$,

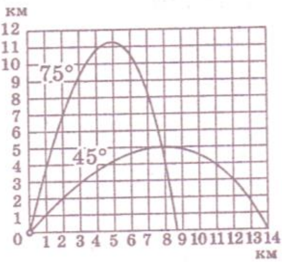
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $s = 3(\sqrt[3]{5t+1} - 1)$ მ.

მრუდწირული მოძრაობა

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 27. 39

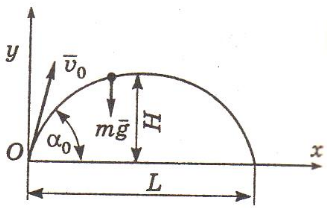
საზღვაო ქვემეხი ისვრის 18 კგ მასის ჭურვს v_0 =700 მ/წმ სიჩქარით. ჰაერში ჭურვის ნამდვილი ტრაექტორია გამოსახულია ნახაზზე ორ შემთხვევაში: 1) როდესაც კუთხე ქვემეხის ღერძსა და ჰორიზონტს შორის კუთხე შეადგენს 45^0 და 2) ეს კუთხე 75^0-ის ტოლია. თითოეულისათვის ორივე შემთხვევაში განსაზღვრეთ, რამდენი კილომეტრით გაიზრდებოდა ფრენის სიმაღლე და სიშორე, თუ ჭურვი არ განიცდის ჰაერის წინაღობას.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ ჭურვის მოძრაობა სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალის მოქმედებით გარემოს წინაღობის გარეშე. ვაჩვენოთ იგი კოორდინატთა 0xy სისტემაში ნებისმიერ მდებარეობაში (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ მოძრაობის ძირითადი განტოლებები არჩეულ ღერძებზე გეგმილებში

$$m x''=0. \qquad (1)$$

$$m y'' = - mg. \qquad (2)$$



ამოვხსნათ (1) დიფერენციალური განტოლება:

$$x' = C_1. \qquad (3)$$

შევცვალოთ: $x' = \frac{dx}{dt}$. განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ:

$$\int dx = \int C_1 dt,$$

მივიღებთ: $$x = C_1 t + C_2. \qquad (4)$$

ინტეგრების მუდმივები C_1 და C_2 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა t = 0, $x_0 = 0$, $x_0' = v_0 \cos\alpha_0$ ამიტომ, (3) და (4) განტოლებებიდან: $x_0 = 0 = C_2$; $x_0' = v_0 \cos\alpha_0 = C_1$.

მაშინ $$x = v_0 t \cos\alpha_0, \qquad (5)$$

$$x' = v_0 \cos\alpha_0 . \qquad 6)$$

ამოვხსნათ (2) დიფერენციალური განტოლება:

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = -\, g.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ:

$$\int dy' = \int -g dt ,$$

მივიღებთ: $$y' = -gt + C_3 . \qquad (7)$$

შევცვალოთ: $y' = \dfrac{dy}{dt}$. განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ:

$$\int dy = \int (-gt + C_3) dt ,$$

მივიღებთ: $$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4 . \qquad (8)$$

ინტეგრების მუდმივები C_3 და C_4 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$ $y_0 = 0$, $y_0' = v_0 \sin\alpha_0$, ამიტომ, (7) და (8) განტოლებებიდან: $y_0 = 0 = C_4; \quad y_0' = v_0 \sin\alpha_0 = C_3$.

მაშინ $$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha_0 , \qquad (9)$$

$$y' = -gt + v_0 \sin\alpha_0 . \qquad (10)$$

(9)-დან ვიპოვით დროს, როდესაც ჭურვი დაეცემა დედამიწაზე, ე.ი. $y = 0$:

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha_0}{g} . \qquad (11)$$

(11) გამოსახულება ჩავსვათ (5) ფორმულაში და განვსაზღვროთ ჭურვის ფრენის სიშორე:

$$x = \frac{2v_0^2 \sin\alpha_o \cos\alpha_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} . \qquad (12)$$

ვიპოვოთ ჭურვის ასვლის მაქსიმალური სიმაღლე. ამ შემთხვევაში (10) ფორმულის თანახმად

$$y' = 0 = -gt_1 + v_0 \sin\alpha_0 ,$$

საიდანაც $$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g} .$$

ჩავსვათ t_1 -ის ეს მნიშვნელობა (9) ფორმულაში, მივიღებთ

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g}. \tag{13}$$

(12) და (13) ფორმულებიდან განვსაზღვროთ L და H, როცა $\alpha_1 = 45^0$ და $\alpha_2 = 75^0$:

$$L_{\alpha_1} = \frac{700^2 \cdot \sin 90^0}{9{,}8} = 50000 \text{ (მ)},$$

$$L_{\alpha_2} = \frac{700^2 \cdot \sin 150^0}{9{,}8} = 25000 \text{ (მ)},$$

$$H_{\alpha_1} = \frac{700^2 \cdot \sin^2 45^0}{2 \cdot 9{,}8} = 12500 \text{ (მ)},$$

$$H_{\alpha_2} = \frac{700^2 \cdot \sin^2 75^0}{2 \cdot 9{,}8} = 23300 \text{ (მ)}.$$

ვიპოვოთ სიმაღლის გადიდება, თუ $H_{\alpha_1}^h = 5000$ მ, $H_{\alpha_2}^h = 11300$ მ (აღებულია ამოცანის პირობაში მოცემული გრაფიკიდან):

$$\Delta H_{\alpha_1} = H_{\alpha_1} - H_{\alpha_1}^h = 12500 - 5000 = 7500 \text{ მ} = 7{,}5 \text{ კმ},$$

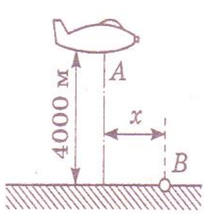
$$\Delta H_{\alpha_2} = H_{\alpha_2} - H_{\alpha_2}^h = 23300 - 11300 = 12000 \text{ მ} = 12 \text{ კმ}.$$

ვიპოვოთ ფრენის სიშორის გადიდება, თუ $H_{\alpha_1}^h = 5000$მ, $H_{\alpha_2}^h = 11300$მ (აღებულია ამოცანის პირობაში მოცემული გრაფიკიდან):

$$\Delta L_{\alpha_1} = L_{\alpha_1} - L_{\alpha_1}^h = 50000 - 13500 = 36500 \text{ მ} = 36{,}5 \text{ კმ},$$

$$\Delta L_{\alpha_2} = L_{\alpha_2} - L_{\alpha_2}^h = 25000 - 8300 = 16700 \text{ მ} = 16{,}7 \text{ კმ}.$$

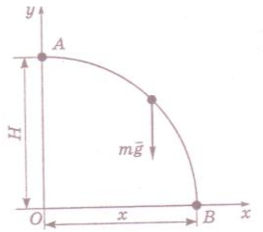
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: სიმაღლის გაზრდა: 1) 7,5 კმ. 2) 12 კმ.
მანძილის გაზრდა: 1)36,5 კმ. 2) 16,7 კმ.



ამოცანა 27. 40

თვითმფრინავი A მიფრინავს დედამიწის ზედაპირიდან 4000 მ სიმაღლეზე ჰორიზონტალური 140 მ/წმ სიჩქარით. ჰორიზონტალურ წრფეზე მდებარე მოცემულ B წერტილამდე რა x მანძილზე უნდა იქნეს თვითმფრინავიდან საწყისი ფარდობითი სიჩქარის გარეშე რაიმე ტვირთის ჩამოგდება, რომ იგი დაეცეს ამ წერტილში. ჰაერის წინაღობა უგულებელყავით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ტვირთის მოძრაობა სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალის მოქმედებით გარემოს წინაღობის გარეშე. ავირჩიოთ კოორდინატთა 0xy სისტემა. y ღერძი გავავლოთ A წერტილში, რომელშოც ტვირთმა დატოვა თვითმფრინავი H სიმაღლეზე. ნახაზზე ნაჩვენებია ტვირთის ნებისმიერი მდებარეობა. ჩავწეროთ მოძრაობის ძირითადი განტოლებები არჩეულ ღერძებზე გეგმილებში:



$$m x'' = 0. \quad (1)$$

$$m y'' = - mg. \quad (2)$$

ამოვხსნათ (1) დიფერენციალური განტოლება:

$$x' = C_1. \quad (3)$$

შევცვალოთ: $x' = \dfrac{dx}{dt}$. (3) განტოლებაში განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ:

$$\int dx = \int C_1 dt,$$

მივიღებთ: $$x = C_1 t + C_2. \quad (4)$$

ინტეგრების მუდმივები C_1 და C_2 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$ $x_0 = 0$, $x_0' = 140$ მ/წმ ამიტომ, (3) და (4) განტოლებებიდან: $x_0 = 0 = C_2$; $x_0' = 140 = C_1$.

მაშინ $$x = 140t, \quad (5)$$

$$x' = 140. \quad (6)$$

ამოვხსნათ (2) დიფერენციალური განტოლება:

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = - g.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ:

$$\int dy' = \int -g dt\,,$$

მივიღებთ: $$y' = -gt + C_3\,. \tag{7}$$

შევცვალოთ: $y' = \dfrac{dy}{dt}$. განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ:

$$\int dy = \int (-gt + C_3) dt\,,$$

მივიღებთ: $$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4\,. \tag{8}$$

ინტეგრების მუდმივები C_3 და C_4 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$ $y_0 = H = 4000$ მ, $y'_0 = 0$ ამიტომ, (7) და (8) განტოლებებიდან: $y_0 = H = C_4$; $y'_0 = 0 = C_3$.

მაშინ $$y = -\frac{gt^2}{2} + H\,, \tag{9}$$

$$y' = -gt\,. \tag{10}$$

(9)-დან ვიპოვით t_1 დროს, როდესაც ტვირთი დაეცემა დედამიწაზე, ე.ი. $y = 0$:

$$0 = -\frac{gt_1^2}{2} + H\,,$$

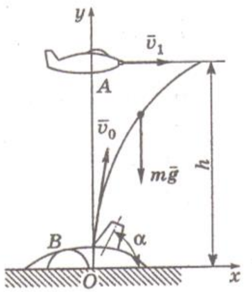
$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}\,.$$

ეს ჩავსვათ (5) ფორმულაში და განვსაზღვროთ ჭურვის ფრენის სიშორე:

$$x = 140\sqrt{\frac{2H}{g}} = 140\sqrt{\frac{2 \cdot 4000}{9{,}8}} = 4000 \text{ მ.}$$

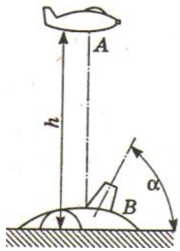
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $x = 4000$ მ.

ამოცანა 27. 41



თვითმფრინავი A მიფრინავს დედამიწის ზედაპირიდან h სიმაღლეზე ჰორიზონტალური v_1 სიჩქარით. B ქვემეხიდან მოხდა გასროლა თვითმფრინავის მიმართულებით იმ მომენტში, როდესაც თვითმფრინავი იმყოფებოდა ქვემეხთან ერთ ვერიკალზე. იპოვეთ: 1) რა პირობას უნდა

აკმაყოფილებდეს ჭურვის საწყისი v_0 სიჩქარე, რომ ის მოხვდეს თვითმფრინავს, და 2) ჰორიზონტისადმი როგორი α კუთხით უნდა მოხდეს გასროლა. ჰაერის წინაღობა უგულებელყავით.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ავირჩიოთ კოორდინატთა 0xy სისტემა. ნახაზზე გამოვსახოთ სიბრტყეზე ჭურვი ნებისმიერ მდებარეობაში და მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა. ჩავწეროთ მოძრაობის ძირითადი განტოლებები არჩეულ ღერძებზე გეგმილებში:

$$m x'' = 0. \qquad (1)$$

$$m y'' = -mg. \qquad (2)$$

ამოვხსნათ (1) დიფერენციალური განტოლება:

$$x' = \frac{dx}{dt} = C_1 . \qquad (3)$$

(3) განტოლებაში განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ:

$$\int dx = \int C_1 dt ,$$

მივიღებთ: $$x = C_1 t + C_2 . \qquad (4)$$

ინტეგრების მუდმივები C_1 და C_2 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$ $x_0 = 0$, $x_0' = v_0 \cos\alpha_0$ ამიტომ, (3) და (4) განტოლებებიდან: $x_0 = 0 = C_2$; $x_0' = C_1 = v_0 \cos\alpha_0$.

მაშინ (3) და (4) განტოლებები მიიღებენ ასეთ სახეს:

$$x' = v_0 \cos\alpha_0 , \qquad (5)$$

$$x = v_0 t \cos\alpha_0 . \qquad (6)$$

ამოვხსნათ (2) დიფერენციალური განტოლება, იგი ასე ჩავწეროთ

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = -g.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ:

$$\int dy' = \int -g dt ,$$

მივიღებთ: $$y' = -gt + C_3 . \qquad (7)$$

შევცვალოთ: $y' = \dfrac{dy}{dt}$. განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ:

$$\int dy = \int (-gt + C_3)dt\,,$$

მივიღებთ: $$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4\,. \tag{8}$$

ინტეგრების მუდმივები C_3 და C_4 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$ $y_0' = v_0 \sin\alpha_0$, $y_0 = 0$. ამიტომ, (7) და (8) განტოლებებიდან: $y_0' = v_0 \sin\alpha_0 = C_3$, $y_0 = 0 = C_4$;

მაშინ (7) და (8) განტოლებები მიიღებენ ასეთ სახეს:

$$y' = -gt + v_0 \sin\alpha_0\,. \tag{9}$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha_0\,, \tag{10}$$

ჩავწეროთ თვითმფრინავის მოძრაობის განტოლება:

$$x_1 = v_1 t\,,$$

$$y_1 = h\,.$$

ჭურვი რომ მოხვდეს თვითმფრინავს, უნდა შესრულდეს პირობა:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad t_1 = t\,.$$

მაშინ (6) განტოლების გათვალისწინებით

$$v_0 t \cos\alpha_0 = v_1 t\,,$$

საიდანაც $$\cos\alpha_0 = \frac{v_1}{v_0}\,.$$

ჭურვის ფრენის დროს ვიპოვით (10) განტოლებიდან, თუ მივიღებთ, რომ $y = h$. მაშინ

$$h = v_0 t \sin\alpha_0 - \frac{gt^2}{2}\,,$$

საიდანაც $$t = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0 - 2hg}{g^2}}\,.$$

თვითმფრინავზე ჭურვის მოხვედრა იმ შემთხვევაში შეიძლება, როცა

$$v_0^2 \sin^2\alpha_0 - 2hg > 0\,.$$

ვინაიდან $$\sin^2\alpha_0 = 1 - \cos^2\alpha_0 = 1 - \frac{v_1^2}{v_0^2}\,,$$

ამიტომ მოხვედრის პირობა ასე ჩავწეროთ

$$v_0^2(1-\frac{v_1^2}{v_0^2})-2hg>0.$$

აქედან $v_0^2-v_1^2-2hg>0$, ანუ $v_0^2 \geq v_1^2+2gh$.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 1) $v_0^2 \geq v_1^2+2gh$; 2) $\cos\alpha_0=\frac{v_1}{v_0}$.

ამოცანა 27. 42

ჭურვის ტყორცნის უდიდესი ჰორიზონტალური მანძილია L. განსაზღვრეთ მისი ტყორცნის ჰორიზონტალური l მანძილი $\alpha=30^0$ კუთხით გასროლისას და ტრაექტორიის h სიმაღლე ამ შემთხვევაში. ჰაერის წინაღობა უგულებელყავით.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ვისარგებლოთ 27. 39 ამოცანის ამოხსნის (12) და (13) ფორმულებით:

$$x=\frac{v_0^2\sin 2\alpha_0}{g}. \quad (1)$$

$$y_{\max}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha_0}{2g}. \quad (2)$$

ჭურვის ფრენის უდიდესი სიშორე მიიღწევა, როცა $\sin 2\alpha_0=1$, ანუ, როდესაც გასროლის კუთხე $\alpha_0=45^0$:

$$L=\frac{v_0^2\cdot\sin 90^0}{g}=\frac{v_0^2}{g}, \quad (3)$$

როცა $\alpha_0=30^0$, $$l=\frac{v_0^2\cdot\sin 60^0}{g}=\frac{\sqrt{3}v_0^2}{2g}. \quad (4)$$

(4) ტოლობიდან (3)-ს გათვალისწინებით

$$l=\frac{\sqrt{3}}{2}L.$$

როცა $\alpha_0=30^0$, მაშინ (2) განტოლებიდან ვიპოვით ჭურვის ტრაექტორიის h სიმაღლეს:

$$y_{\max} = h = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2 30^0 = \frac{L}{2}\cdot 0{,}5^2 = \frac{L}{8}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $l = \frac{\sqrt{3}}{2}L$; $h = \frac{L}{8}$.

ამოცანა 27. 43

ჭურვის α კუთხით ტყორცნის უდიდესი ჰორიზონტალური მანძილია l_α. განსაზღვრეთ მისი ტყორცნის ჰორიზონტალური მანძილი $\alpha/2$ კუთხით გასროლისას. ჰაერის წინაღობა უგულებელყავით.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ვისარგებლოთ 27. 39 ამოცანის ამოხსნის (12) ფორმულით:

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}.$$

განსახილველ შემთხვევაში $x = l_\alpha$, $\alpha_0 = \alpha$. მაშინ ეს ფორმულა ასეთ სახეს იღებს:

$$l_\alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (1)$$

როდესაც $\alpha_0 = \frac{\alpha}{2}$, ჰორიზონტალური ტყორცნის სიშორეა

$$l_{\alpha/2} = \frac{v_0^2 \sin\alpha}{g}. \qquad (2)$$

(2) გამოსახულება გავყოთ (1) გამოსახულებაზე, მივიღებთ

$$\frac{l_{\alpha/2}}{l_\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha},$$

საიდანაც
$$l_{\alpha/2} = \frac{l_\alpha}{2\cos\alpha}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $l_{\alpha/2} = \frac{l_\alpha}{2\cos\alpha}$.

ამოცანა 27. 44

განსაზღვრეთ ჰორიზონტისადმი ქვემეხის ლულის დახრის კუთხე, თუ მიზანი აღმოჩენილია 32 კმ მანძილზე, ხოლო ჭურვის საწყისი სიჩქარეა $v_0 = 600$ მ/წმ. ჰაერის წინაღობა უგულებელყავით.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ვისარგებლოთ 27. 39 ამოცანის ამოხსნის (12) ფორმულით:

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}.$$

ჭურვის მიზანში მოხვედრის შემთხვევაში (იხ. 27. 39 ამოცანის ამოხსნის ნახაზი)

$$x = L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g},$$

სადაც $L = 32000$ მ.

აქედან

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{Lg}{v_0^2} = \frac{32000 \cdot 9{,}8}{600^2} = 0{,}872.$$

ეს ნიშნავს, რომ

$$2\alpha_{01} = 60^0 36', \ \alpha_{01} = 30^0 18'.$$

$$\alpha_{02} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{01} = 59^0 42'.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\alpha_{01} = 30^0 18'$; $\alpha_{02} = 59^0 42'$.

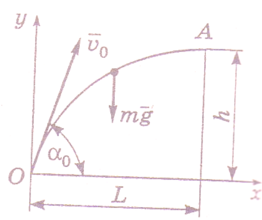
ამოცანა 27. 45

ამოხსენით წინა ამოცანა იმ შემთხვევისათვის, თუ მიზანი იმყოფება საარტილერიო პოზიციის დონედან 200 მ-ის სიმაღლეზე.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ვისარგებლოთ 27. 39 ამოცანის ამოხსნის (5) და (9) ფორმულებით:

$$x = v_0 t \cos\alpha_0. \qquad (1)$$

$$y = v_0 t \sin\alpha_0 - \frac{gt^2}{2}, \qquad (2)$$



(1) ფორმულიდან

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha_0}.$$

t-ს მნიშვნელობა ჩავსვათ (2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$y = xtg\alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}. \qquad (3)$$

(3) ფორმულიდან, იმის გათვალისწინებით, რომ $\frac{1}{\cos^2 \alpha_0} = 1 + tg^2\alpha_0$,

მივიღებთ $$y = xtg\alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + tg^2\alpha_0). \qquad (4)$$

საიდანაც $$tg^2\alpha_0 - \frac{2v_0^2}{gx} tg\alpha_0 + \frac{2v_0^2 y}{gx^2} + 1 = 0. \qquad (5)$$

(5) განტოლებაში შევიტანოთ რიცხვითი მნიშვნელობები:

$v_0 = 600$ მ/წმ; $x = 32000$მ; $y = 200$ მ.

მივიღებთ: $$tg^2\alpha_0 - 2{,}293 tg\alpha_0 + 1{,}014 = 0. \qquad (6)$$

ამოვხსნათ (6) კვადრატული განტოლება:

$$tg\alpha_1 = 0{,}598, \quad \alpha_1 = 30^0 51'.$$

$$tg\alpha_2 = 1{,}6956, \quad \alpha_2 = 59^0 31'.$$

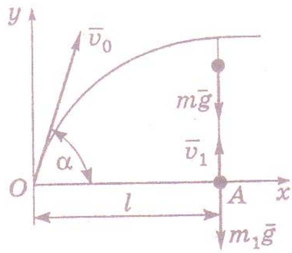
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\alpha_1 = 30^0 51'$; $\alpha_2 = 59^0 31'$.

ამოცანა 27. 46

0 წერტილში მდებარე ქვემეხიდან ჰორიზონტისადმი α კუთხით მოხდა ჭურვის გასროლა საწყისი v_0 სიჩქარით. ერთდროულად, ჰორიზონტალზე 0 წერტილიდან l მანძილით დაშორებული A წერტილიდან მოხდა ვერტიკალურად ზევით გასროლა. განსაზღვრეთ, როგორი საწყისი v_1 სიჩქარით უნდა მოხდეს ამ ჭურვის გასროლა, რომ ის შეეჯახოს პირველ ჭურვს, თუ სიჩქარე v_0 და A წერტილი მდებარეობენ ერთ ვერტიკალურ სიბრტყეში. ჰაერის წინაღობა უგულებელყავით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ 27. 39 ამოცანის ამოხსნის (9) ფორმულით. კოორდინატთა სათავესთან შეთავსებული წერტილიდან გასროლილი ჭურვისათვის

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$



ჩავწეროთ A წერტილიდან ვერტიკალურად ზევით მოძრავი ჭურვის მოძრაობის განტოლება y ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$m_1 y_1'' = -m_1 g.$$

აქედან

$$y_1'' = -g. \qquad (2)$$

ამოვხსნათ (2) განტოლება და გავითვალისწინოთ შეცვლა: $y'' = \dfrac{dy'}{dt}$. განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ:

$$\int dy_1' = \int -g dt,$$

მივიღებთ: $$y_1' = -gt + C_1. \qquad (3)$$

(3)-ში ჩავსვათ მოძრაობის საწყისი პირობები: როცა $t = 0$ $y_{01}' = v_1$, მივიღებთ

$$y_{01}' = v_1 = C_1.$$

მაშინ (3) ასეთ სახეს მიიღებს

$$y_1' = -gt + v_1. \qquad (4)$$

კვლავ მოვახდინოთ შეცვლა

$$y_1' = \frac{dy_1}{dt} = -gt + v_1.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ:

$$\int dy_1 = \int (-gt + v_1) dt,$$

მივიღებთ: $$y_1 = -\frac{gt^2}{2} + v_1 t + C_2. \qquad (5)$$

მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა $t = 0$ $y_{01} = 0$. ამიტომ,

$$C_2 = y_{01} = 0.$$

(5) გამოსახულებიდან $$y_1 = -\frac{gt^2}{2} + v_1 t. \qquad (6)$$

ერთდროულად გასროლილი ჭურვების შეჯახების პირობაა $y = y_1$. გაუტოლოთ (1) და (6) გამოსახულებები ერთმანეთს:

$$v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = -\frac{gt^2}{2} + v_1 t .$$

საიდან $v_1 = v_0 \sin\alpha$.

ამასთანავე, l მანძილი უფრო ნაკლები უნდა იყოს ვიდრე $\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $v_1 = v_0 \sin\alpha$ (დამოუკიდებლად l მანძილისა, როცა $l < \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$).

ამოცანა 27. 47

განსაზღვრეთ ნივთიერ წერტილთა მდებარეობის გეომეტრიული ადგილი t მომენტში, რომლებიც გასროლილნი არიან ვერტიკალურ სიბრტყეში ერთი წერტილიდან ერთი და იმავე საწყისი v_0 სიჩქარით ჰორიზონტისადმი ყველა შესაძლო კუთხით.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ვისარგებლოთ 27. 39 ამოცანის ამოხსნის (5) და (9) ფორმულებით:

$$x = v_0 t \cos\alpha_0 , \qquad (1)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} - v_0 t \sin\alpha_0 . \qquad (2)$$

ეს განტოლებები ასეთი სახით ჩავწეროთ:

$$\frac{x}{v_0 t} = \cos\alpha_0 \qquad (3)$$

$$\frac{\left(y + \frac{gt^2}{2}\right)}{v_0 t} = -\sin\alpha_0 \qquad (4)$$

(3) და (4) გამოსახულებები ავიყვანოთ კვადრატში და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\frac{x^2}{v_0^2 t^2} + \frac{\left(y + \dfrac{gt^2}{2}\right)^2}{v_0^2 t^2} = 1.$$

ანუ $x^2 + \left(y + \dfrac{gt^2}{2}\right)^2 = v_0^2 t^2$ - ეს არის წრეწირის განტოლება.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: წრეწირი $v_0 t$ რადიუსით, რომლის ცენტრი მდებარეობს გასროლის წერტილის ვერტიკალზე, ამ წერტილის ქვევით $gt^2/2$ მანძილზე.

ამოცანა 27. 48

განსაზღვრეთ ყველა პარაბოლური ტრაექტორიის ფოკუსების გეომეტრიული ადგილი, რომელიც შეესაბამება ერთი და იმავე საწყისი v_0 სიჩქარით და ჰორიზონტისადმი ყველა შესაძლო კუთხით გასროლას.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ავირჩიოთ კოორდინატთა 0xy სისტემა და ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები არჩეულ x და y ღერძებზე გეგმილებში:

$$m x'' = 0. \qquad (1)$$

$$m y'' = -mg. \qquad (2)$$

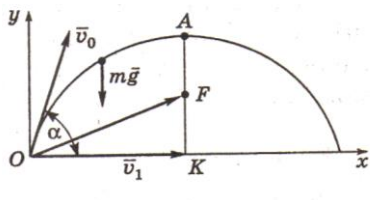
ეს განტოლებები ორჯერ ვაინტეგროთ დროთი, მივიღებ

$$x' = \frac{dx}{dt} = C_1. \qquad (3)$$

$$x = C_1 t + C_2. \qquad (4)$$

$$y' = -gt + C_3. \qquad (5)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4. \qquad (6)$$



ინტეგრების მუდმივები C_1 და C_2 განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან: როცა t = 0 $x_0 = 0$, y_0 = o, $x_0' = v_0 \cos\alpha$, $y_0' = v_0 \sin\alpha$, (3) – (6) განტოლებებში განვსაზვროთ ინტეგრების მუდმივები $x_0' = v_0 \cos\alpha = C_1$.

$$x_0 = 0 = C_2;$$

$$y'_0 = v_0 \sin\alpha = C_3,$$

$$y_0 = 0 = C_4;$$

მაშინ

$$x' = v_0 \cos\alpha, \quad (7)$$

$$x = v_0 t \cos\alpha. \quad (8)$$

$$y' = -gt + v_0 \sin\alpha. \quad (9)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha, \quad (10)$$

(8) ფორმულიდან

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}.$$

ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (10) განტოლებაში და ჩავწეროთ ტრაექტორიის განტოლება:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + xtg\alpha$$ - ეს პარაბოლის განტოლებაა. (11)

პარაბოლის წვერო - A წერტილია. ამ წერტილში

$$y' = 0 = -gt + v_0 \sin\alpha,$$

საიდანაც $t_1 = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$.

ჩავსვათ t_1-ს მნიშვნელობა (8) და (10) ფორმულებში:

$$x_A = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \quad (12)$$

$$y_A = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha.$$

პარაბოლის რადიუსი მდებარეობს AK წრფეზე (იხ. ნახაზი):

$$FK = y_A - \frac{P}{2},$$

სადაც P - ფოკალური პარამეტრია,

$$P=\frac{1}{2\left|-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right|}=\frac{v_0^2}{g}\cos^2\alpha\,.$$

მაშინ $FK=y_A-\frac{v_0^2}{2g}\cos^2\alpha=\frac{v_0^2}{2g}(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\,.$

ნახაზის თანახმად

$$0F^2=0K^2+FK^2=x^2+y^2\,,$$

$$0K=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}\,.$$

მაშინ

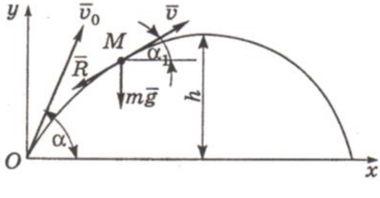
$$0F=\sqrt{\left(\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2+\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2}=\frac{v_0^2}{2g}\,.$$

ყველა პარაბოლური ტრაექტორიის ფოკუსების გეომეტრიული ადგილი, რომელიც შეესაბამება ერთი და იმავე საწყისი $v_0=const$ სიჩქარით და ჰორიზონტისადმი ყველა შესაძლო α კუთხით გასროლას, არის წრეწირი $\frac{v_0^2}{2g}$ რადიუსით.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $x^2+y^2=\frac{v_0^4}{4g^2}\,.$

ამოცანა 27. 49

P წონის სხეული, რომელიც გატყორცილია საწყისი v_0 სიჩქარით და ჰორიზონტისადმი α კუთხით მოძრაობს სიმძმის ძალისა და ჰაერის წინააღმდეგობის R ძალის მოქმედებით. განსაზღვრეთ სხეულის უდიდესი h სიმაღლე საწყისი მდებარეობის დონიდან, თუ წინაღობა სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია: $R=kPv\,.$



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ვაჩვენოთ ნებისმიერად არჩეულ M წერტილში სხეულზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის

ძალა $m\vec{g}$ და ჰაერის წინაღობის ძალა $\vec{R}$. შევადგინოთ სხეულის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება y ღერძზე გეგმილებში: m y'' = - mg – Rsinα$_1$,

სადაც sinα$_1$ = $\frac{v_y}{v}$; $R = kmgv$.

მაშინ $$y'' = -g(1+kv_y)\,. \quad (1)$$

შევცვალოთ: $$y' = v_y\left[y(t)\right] \Rightarrow y'' = \frac{dv_y}{dy}\frac{dy}{dt} = v_y\frac{dv_y}{dy}\,.$$

განვაცალოთ ცვლადები და (1) განტოლება ასე წარმოვადგინოთ

$$\frac{v_y dy}{1+kv_y} = -gdy \Rightarrow \frac{1}{k}\frac{1+kv_y}{1+kv_y} - \frac{1}{k}\frac{dv_y}{1+kv_y} = -gdy\cdot$$

ვაინტეგროთ: $$\frac{1}{k}\int_{v_0\sin\alpha}^{0} dv_y - \frac{1}{k^2}\int_{v_0\sin\alpha}^{0}\frac{d(1+kv_y)}{1+kv_y} = -g\int_0^h dy\cdot$$

აქ იგულისხმება, რომ სხეულის უმაღლესი მდებარეობის მიღწევისას $v_y = 0$:

$$\frac{1}{k}\,v_y\Big|_{v_0\sin\alpha}^{0} - \frac{1}{k^2}\ln(1+kv_y)\Big|_{v_0\sin\alpha}^{0} = -gy\Big|_0^h$$

მაშინ $$-\frac{1}{k}v_0\sin\alpha + \frac{1}{k^2}\ln(1+kv_0\sin\alpha) = -gh.$$

აქედან ვიპოვით უდიდეს სიმაღლეს

$$h = \frac{v_0\sin\alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2}\ln(1+kv_0\sin\alpha)\cdot$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $$h = \frac{v_0\sin\alpha}{gk} - \frac{1}{gk^2}\ln(1+kv_0\sin\alpha)\cdot$$

ამოცანა 27. 50

(27. 49) ამოცანის პირობებით იპოვეთ წერტილის მოძრაობის განტოლება.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ჩავწეროთ M წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში (იხ. 27. 49 ამოცანის ამოხსნისათვის ნახაზი):

$$m\,x'' = -R_x \Rightarrow \frac{mg}{g}x'' = -kmgx' \Rightarrow x'' = -kgx'\,.$$

y ღერძზე გეგმილებში მოძრაობის განტოლების გათვალისწინებით [იხ. 27. 49 ამოცანის ამოხსნის (1) ფორმულა], მივიღებთ დიფერენციალურ

განტოლებათა სისტემას, რომელიც აღწერს წერტილის მოძრაობას სიმძიმის ძალისა და წინაღობის ძალის მოქმედებით:

$$x'' = -kgx', \qquad (1)$$

$$y'' = -g(1+ky'). \qquad (2)$$

ამოვხსნათ (1) დიფერენციალური განტოლება. შევცვალოთ: $x' = v_x(t)$, მივიღებთ

$$\frac{dv_x}{dt} = -kgv_x.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ

$$\int_{v_0\cos\alpha}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -kg\int_0^t dt.$$

მივიღებთ

$$\ln v_x\Big|_{v_0 os\alpha}^{v_x} = -kgt\Big|_0^t \Rightarrow \ln\frac{v_x}{v_0\cos\alpha} = -kgt \Rightarrow v_x = v_0e^{-kgt}\cos\alpha.$$

შევცვალოთ $v_x = \dfrac{dx}{dt}$,

მაშინ
$$\frac{dx}{dt} = v_0e^{-kgt}\cos\alpha.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ ეს გამოსახულება

$$\int_{x_0=0}^{x} dx = v_0\cos\alpha\int_0^t e^{-kgt}dt.$$

აქედან

$$x = -\frac{v_0\cos\alpha}{kg}e^{-kgt}\Big|_0^t = \frac{v_0\cos\alpha}{kg}(1-e^{-kgt}).$$

ამოვხსნათ (2) განტოლება. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $y' = u(t)$, მაშინ

$$\frac{du}{dt} = -g(1+ku) \Rightarrow \frac{du}{1+ku} = -gdt.$$

ვაინტეგროთ:
$$\frac{1}{k}\int_{v_0\sin\alpha}^{u}\frac{d(1+ku)}{1+ku} = -g\int_0^t dt.$$

მივიღებთ
$$\frac{1}{k}\ln(1+ku)\Big|_{v_0\sin\alpha}^{u} = -gt\Big|_0^t.$$

აქედან $$\ln\frac{1+ku}{1+kv_0\sin\alpha}=-kgt,$$

$$u=-\frac{1}{k}+\left(\frac{1}{k}+v_0\sin\alpha\right)e^{-kgt}.$$

ვინაიდან $u=\dfrac{dy}{dt}$, განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ, მივიღებთ

$$\int_{y_0=0}^{y}dy=-\frac{1}{k}\int_0^t dt+\left(\frac{1}{k}+v_0\sin\alpha\right)\int_0^t e^{-kgt}dt.$$

აქედან $$y=-\frac{1}{kg}\left(\frac{1}{k}+v_0\sin\alpha\right)e^{-kgt}\Big|_0^t-\frac{1}{k}t\Big|_0^t=$$

$$=\frac{1}{kg}\left(\frac{1}{k}+v_0\sin\alpha\right)(1-e^{-kgt})-\frac{1}{k}t.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $x=\dfrac{v_0\cos\alpha}{kg}(1-e^{-kgt})$; $y=\dfrac{1}{kg}\left(\dfrac{1}{k}+v_0\sin\alpha\right)(1-e^{-kgt})-\dfrac{1}{k}t$.

ამოცანა 27. 51

(27. 49) ამოცანის პირობებით განსაზღვრეთ, ჰორიზონტალის გასწვრივ რა s მანძილზე მიაღწევს წერტილი უმაღლეს მდებარეობას.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვსაზღვროთ წერტილის h სიომღლეზე ასვლის დრო. 27.50 ამოცანის ამოხსნისას მოძრაობის (2) დიფერენციალური განტოლებიდან იმ პირობით, რომ ასვლის უმაღლეს წერტილში $v_y=0$, ვიპოვით

$$\frac{du}{dt}=-g(1+ku)\Rightarrow\frac{1}{k}\int_{v_0\sin\alpha}^{0}\frac{d(1+ku)}{1+ku}=-g\int_0^{t_1}dt\Rightarrow\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{k}\ln(1+ku)\Big|_{v_0\sin\alpha}^{0}=-gt\Big|_0^{t_1}\Rightarrow t_1=\frac{\ln(1+kv_0\sin\alpha)}{kg}.$$

27. 50 ამოცანის ამოხსნისას მივიღეთ

$$x(t)=\frac{v_0\cos\alpha}{kg}(1-e^{-kgt}).$$

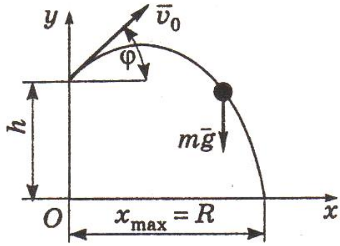
$$s = x(t=t_1) = \frac{v_0\cos\alpha}{kg}[1-e^{-\ln(1+kv_0\sin\alpha)}] = .$$

$$= \frac{v_0\cos\alpha}{kg}[1-\frac{1}{(1+kv_0\sin\alpha)}] = \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g(1+kv_0\sin\alpha)} = \frac{v_0^2\sin2\alpha}{2g(1+kv_0\sin\alpha)}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $s = \dfrac{v_0^2\sin2\alpha}{2g(1+kv_0\sin\alpha)}$

ამოცანა 27. 52

ვერტიკალურ მილში, რომელიც მოთავსებულია წრიული აუზის ცენტრში და დახშულია ზევიდან, მილის გვერდით ზედაპირზე 1 მ სიმაღლეზე გაკეთებულია ხვრელები, რომლებიდანაც გადმოედინება ჰორიზონტისადმი სხვადასხვა φ კუთხით ($\varphi< \pi/2$) დახრილი წყლის ჭავლი; ჭავლის საწყიოსი სიჩქარეა $v_0 = \sqrt{\dfrac{4g}{3\cos\varphi}}$ მ/წმ, სადაც g – სიმძიმის ძალის აჩქარებაა; მილის სიმაღლეა 1 მ. განსაზღვრეთ აუზის უმცირესი რადიუი R, რომლის დროსაც მილიდან გადმოდინებული წყალი ვარდება აუზში, როგორი მცირეც არ უნდა იყოს მისი კედლების სიმაღლე.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ავირჩიოთ კოორდინატთა $0xy$ სისტემა. შევადგინოთ სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი) გამოწვეული წყლის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x და y ღეძებზე გეგმილებში:

$$m\,x'' = 0 \Rightarrow x'' = 0,$$

$$m\,y'' = -mg \Rightarrow y'' = -g.$$

ეს განტოლებები ამოვხსნათ შემდეგი საწყისი პირობებით: $x_0 = 0$,

$x_0' = v_{0x} = v_o\cos\varphi$; $y_0 = 0$,

$y_0' = v_{0y} = v_o\sin\varphi.$

მაშინ

$$x' = v_o\cos\varphi;$$

$$y' = v_o\sin\varphi - gt.$$

აქედან

$$x = v_o t\cos\varphi; \qquad (1)$$

$$y = h + v_o t\sin\varphi - \frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

(1) ფორმულიდან

$$t = \frac{x}{v_0\cos\varphi}.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა (2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$y = h + xtg\varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\varphi}.$$

ამოცანის პირობის თანახმად $v_0^2 = \dfrac{4g}{3\cos\varphi}$, მაშინ

$$y = h + xtg\varphi - \frac{3x^2}{8\cos\varphi}. \qquad (3)$$

$r_{\min}$ შეიძლება ორი ხერხით განისაზღვროს.

<u>**1-ლი ხერხი.**</u> (3) ფორმულის გარდაქმნით მივიღებთ:

$$x\sin\varphi + (h-y)\cos\varphi = \frac{3}{8}x^2. \qquad (4)$$

მოვახდინოთ ჩასმა:

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2tg\frac{\varphi}{2}}{1+tg^2\frac{\varphi}{2}};$$

$$\cos\varphi = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}{1+tg^2\frac{\varphi}{2}}.$$

მაშინ (4) მიიღება ასეთ სახეს:

$$(h-y)\left(1-tg^2\frac{\varphi}{2}\right) + 2xtg\frac{\varphi}{2} = \frac{3}{8}x^2\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right),$$

ანუ

$$\left(\frac{3}{8}x^2 + h - y\right)tg^2\frac{\varphi}{2} - 2xtg\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{8}x^2 - h + y = 0.$$

ამოვხსნათ ეს კვადრატული განტოლება:

$$tg\frac{\varphi}{2}=\frac{x\pm\sqrt{x^2-\frac{9}{64}x^4+(h-y)^2}}{\frac{3}{8}x^2+h-y}\;.$$

$tg\dfrac{\varphi}{2}$ ნამდვილ მნიშვნელობას მიიღებს, როცა

$$x^2+(h-y)^2\geq\frac{9}{64}x^4\,;$$

$$\frac{9}{64}x^4=x^2+(h-y)^2$$ - პარაბოლის განტოლებაა.

როცა $y=0$ და $h=1$ მივიღებთ

$$\frac{9}{64}x^4-x^2-1=0\,.$$

აღვნიშნოთ $x^2=Z$ და ამოვხსნათ კვადრატული განტოლება:

$$\frac{9}{64}Z^2-Z-1=0\cdot$$

$$Z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+\frac{9}{16}}}{\frac{9}{32}}\,.$$

რადგანაც $Z=x^2\geq 0$, ამიტომ

$$Z=\frac{32}{9}\left(1+\frac{5}{4}\right)=8\cdot$$

მაშასადამე, $R=x_{\max}=\sqrt{Z}=\sqrt{8}=2{,}83$ (მ).

2-ე ხერხი. ვიპოვოთ პარაბოლის ოჯახთა მომვლების ამოხსნა, როგორც φ კუთხის ფუნქციას.

ვინაიდან (3) ფორმულის თანახმად $\dfrac{dy}{d\varphi}=0,$ ამიტომ

$$\frac{x}{\cos^2\varphi}-\frac{3x^2}{8}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}=0\,,$$

სადაც $\cos\varphi\neq 0$, ვნაიდან პირობის თანახმად $\varphi<\dfrac{\pi}{2}$.

მაშინ $\sin\varphi = \dfrac{8}{3x}$, $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$.

ჩავსვათ $\sin\varphi$ - ს ეს მნიშვნელობა (3) ფორმულაში იმ პირობით, რომ $x = x_{\max} = R,\quad y = 0, h = 1$. მივიღებთ

$$0 = 1 + \frac{R\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} - \frac{3}{8}R^2\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}},$$

$$0 = 1 + \frac{R\dfrac{8}{3R}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{8}{3R}\right)^2}} - \frac{3}{8}R^2\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{8}{3R}\right)^2}},$$

$$\sqrt{1-\frac{64}{9R^2}} = \frac{3}{8}R^2 - \frac{8}{3},$$

ანუ

$$\sqrt{1-\frac{64}{9R^2}} = \frac{3}{8}R^2\left(1-\frac{64}{9R^2}\right),$$

$$\frac{8}{3R^2} = \sqrt{1-\frac{64}{9R^2}},$$

$$\frac{8}{R} = \sqrt{9R^2-64},$$

$$9R^4 - 64R^2 - 64 = 0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $R^2 = Z$, მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას

$$9Z^2 - 64Z - 64 = 0,$$

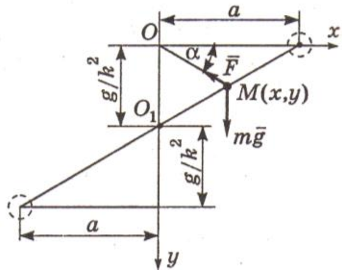
საიდანაც

$$Z = \frac{64+\sqrt{64^2+4\cdot 9\cdot 64}}{2\cdot 9} = 8,$$

მაშინ $R = \sqrt{Z} = \sqrt{8} = 2{,}83$ (მ)

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $R = 2{,}83$ მ.

ამოცანა 27. 53



განსაზღვრეთ m მასის ნივთიერი წერტილის მოძრაობა, რომელიც უძრავი 0 ცენტრისაკენ მიიზიდება მანძილის პირდაპირ პროპორციული ძალით. მოძრაობა ხდება სიცარიელეში; მიზიდულობის ძალა მანძილის ერთეულზე k^2m -ს ტოლია; $t=0$ მომენტში $x=a,\quad y=0,\quad x'=0,\quad y'=0$, ამასთანავე, $0y$ ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად ქვევით.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x და y ღეძებზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$\mathrm{m}\,x'' = -F\cos\alpha,$$

$$\mathrm{m}\,y'' = -F\sin\alpha + mg.$$

ვინაიდან $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$, $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$,

$F = k^2mr$, სადაც r - მანძილია წერტილიდან უძრავ ცენტრამდე, ამიტომ

$$\mathrm{m}\,x'' = -k^2mx,$$

$$\mathrm{m}\,y'' = -k^2mr\frac{y}{r} + mg,$$

ანუ
$$x'' + k^2x = 0, \qquad (1)$$

$$y'' + k^2y = g. \qquad (2)$$

(1) განტოლები ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt,$$

$$x' = -C_1k\sin kt + C_2k\cos kt.$$

გამომდინარე საწყისი პირობებიდან: $t=0 \quad x=a, \quad x'=0$, ვიპოვით ინტეგრების მუდმივებს: $C_1 = a, C_2 = 0$. მაშინ

$$x = a\cos kt. \qquad (3)$$

(2) განტოლების ამოხსნას ვეძებთ ასეთი სახით $y = \bar{y} + y^*$, სადაც $\bar{y} = C_3\cos kt + C_4\sin kt$ - არის (2) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნა, ხოლო $y^* = A -$ კერძო ამოხსნა.

y^* ჩავსვათ (2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$k^2 A = g \Rightarrow \quad A = \frac{g}{k^2}.$$

მაშასადამე, $$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt + \frac{g}{k^2},$$

$$y' = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt.$$

ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით: $t = 0 \quad y = 0, \quad y' = 0$, ვიპოვით ინტეგრების მუდმივებს: $C_3 = -\frac{g}{k^2}, \quad C_4 = 0$ მაშინ

$$y = \frac{g}{k^2}(1 - \cos kt).$$

(4)

(3) განტოლებიდან $\cos kt = \frac{x}{a};$ ჩავსვათ ეს გამოსახულება (4) ტოლობაში; მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას:

$$y = \frac{g}{k^2} - \frac{g}{k^2 a} x \quad - \text{ წრფე,}$$

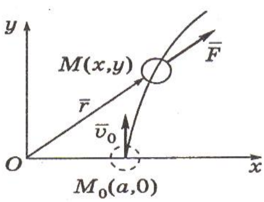
სადაც $|x| \le a,$ ვინაიდან $|\cos kt| \le 1$.

__პ ა ს უ ხ ი__: ჰარმონიული რხევითი მოძრაობა: $x = a \cos kt$.

$y = \frac{g}{k^2} - \frac{g}{k^2 a} x$, $|x| \le a$ წრფეზე მონაკვეთი $y = \frac{g}{k^2}(1 - \cos kt)$.

ამოცანა 27. 54

განსაზღვრეთ m მასის ნივთიერი წერტილის მოძრაობა, რომელიც უძრავი 0 ცენტრიდან განიზიდება ძალით, რომელიც იცვლება $\vec{F} = k^2 m\vec{r}$ კანონით, სადაც $\vec{r}$ – წერტილის რადიუს-ვექტორია. საწყის მომენტში წერტილი იმყოფებოდა $M_0(a,0)$ მდებარეობაში და გააჩნდა y ღერძის პარალელური v_0 სიჩქარე. განსაზღვრეთ წერტილის ტრაექტორია.



__ა მ ო ხ ს ნ ა__. ავირჩიოთ კოორდინატთა 0xy სისტემა. ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x და y ღეძებზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$m x'' = k^2 m x,$$

$$\text{m}\, y'' = k^2 my ,$$

ანუ $$x'' - k^2 x = 0 , \qquad (1)$$

$$y'' - k^2 y = 0 . \qquad (2)$$

(1) განტოლები ამოხსნას ასეთი სახე აქვს $x = C_1 chkt + C_2 shkt$,

$$x' = C_1 kshkt + C_2 kchkt .$$

სადაც $chkt = \dfrac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}$ - ჰიპერბოლური კოსინუსია,

$shkt = \dfrac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$ - ჰიპერბოლური სინუსია.

გამომდინარე საწყისი პირობებიდან: $t = 0 \quad x = a, \quad x' = 0$, ვიპოვით ინტეგრების მუდმივებს: $C_1 = a$, $C_2 = 0$. მაშინ

$$x = achkt . \qquad (3)$$

ანალოგიურად

$$y = C_3 chkt + C_4 shkt ,$$

$$y' = C_3 kshkt + C_4 kchkt .$$

ინტეგრების მუდმივებს: $C_3 = 0$, $C_4 k = v_0$ მაშინ

$$y = \frac{v_0}{k} shkt . \qquad (4)$$

(3) და (4) ტოლობებიდან: $chkt = \dfrac{x}{a}$, $shkt = \dfrac{ky}{v_0}$.

ვისარგებლოთ ტოლობით

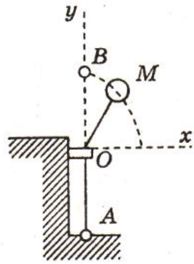
$$ch^2 kt - sh^2 kt = 1 ,$$

მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას კოორდინატებში:

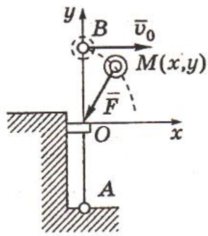
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{ky}{v_0}\right)^2 = 1$$ - ჰიპერბოლის განტოლება.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{ky}{v_0}\right)^2 = 1$ (ჰიპერბოლა).

ამოცანა 27. 55



A წერტილში ჩამაგრებული დრეკადი ძაფი გადის უძრავ გლუვ 0 რგოლში; მის თავისუფალ ბოლოზე მიმაგრებულია m მასის M ბურთულა. დაუჭიმავი ძაფის სიგრძეა $l = A0$; ძაფის 1 მ დაგრძელებისათვის საჭიროა k^2m-ს ტოლი ძალის მოდება. იმისათვის, რათა AB წრფის გასწვრივ ძაფი ისე გაიჭიმოს, რომ მისი სიგრძე ორჯერ გაიზარდოს, ბურთულას მიანიჭეს AB წრფის მართობულად $\vec{v}_0$ სიჩქარე. სიმიმის ძალის მოქმედება უგულებელყავით და განსაზღვრეთ ბურთულას ტრაექტორია; ჩათვალეთ, რომ ძაფის დაჭიმულობა მისი დაგრძელების პროპორციულია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ავირჩიოთ კოორდინატთა 0xy სისტემა. შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x და y ღერძებზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$\mathrm{m}\, x'' = -k^2 m x,$$

$$\mathrm{m}\, y'' = -k^2 m y,$$

ანუ
$$x'' + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

$$y'' + k^2 y = 0. \qquad (2)$$

(1) განტოლები ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით: $t = 0 \quad x = 0, \quad x_0' = v_0$, ვიპოვით ინტეგრების მუდმივებს: $C_1 = 0, \quad kC_2 = v_o$ მაშინ

$$x = \frac{v_o}{k} \sin kt \cdot \qquad (3)$$

ანალოგიური სახე აქვს (2) განტოლების ამოხსნას

$$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt,$$

$$y' = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt.$$

საწყისი პირობების თანახმად: $t = 0 \quad y_o = l, \quad y_0' = 0$, ვიპოვით ინტეგრების მუდმივებს: ინტეგრების მუდმივებს: $C_3 = l$, $C_4 k = 0$ მაშინ

$$y = l \cos kt \;. \qquad (4)$$

(3) და (4) ტოლობებიდან: $\sin kt = \frac{kx}{v_0}$, $\cos kt = \frac{y}{l}$, .

თუ ვისარგებლოთ ტოლობით

$$\sin^2 kt + \cos^2 kt = 1,$$

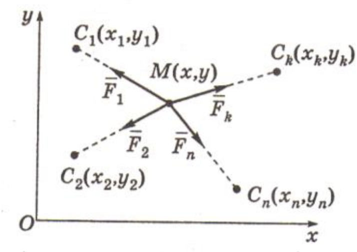
მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას კოორდინატებში:

$$\left(\frac{kx}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{l}\right)^2 = 1$$ - ელიფსის განტოლება.

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: ელიფსი $\frac{k^2x^2}{v_o^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$.

ამოცანა 27. 56

m მასის M წერტილი მიიზიდება n უძრავი $C_1, C_2, ..., C_n$ ცენტრებისაკენ მანძილის პროპორციული ძალებით; M წერტილის მიზიდულობის ძალა C_i $(i = 1,2,...,n)$ ცენტრისაკენ $k_i m \cdot \overline{MC_i}$ ნ-ის ტოლია; M წერტილი და მიზიდულობის ცენტრები 0xy სიბრტყეში მდებარეობენ. განსაზღვრეთ M წერტილის ტრაექტორია, თუ როცა $t = 0$: $x = x_0, y = y_0$, $x' = 0, y' = v_0$. სიმიმის ძალის მოქმედება უგულებელყავით.



<u>**ა მ ო ხ ს ნ ა**</u>. ავირჩიოთ კოორდინატთა 0xy სისტემა. შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x და y ღერძებზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$\mathrm{m}\, x'' = -\sum_{i=1}^{n} mk_i (x - x_i),$$

$$\mathrm{m}\, y'' = -\sum_{i=1}^{n} mk_i (y - y_i),$$

ანუ

$$x'' + \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)x = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i, \qquad (1)$$

$$y'' + \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right) y = \sum_{i=1}^{n} k_i y_i \quad . \quad (2)$$

(1) განტოლები ამოხსნას ასეთი სახე აქვს: $x = \bar{x} + x*$,
სადაც $\bar{x} = C_1 \cos\sqrt{k}t + C_2 \sin\sqrt{k}t$ - არის (1) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნა, ხოლო

$$x* = a \Rightarrow a = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i}$$ - კერძო ამოხსნა.

მაშასადამე,
$$x = C_1 \cos\sqrt{k}t + C_2 \sin\sqrt{k}t + a,$$
$$x' = -C_1\sqrt{k} \sin\sqrt{k}t + C_2\sqrt{k} \cos\sqrt{k}t,$$

სადაც $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$, $a = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} k_i x_i$.

ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით: $t = 0 \quad x = x_0, \quad x' = 0$, ვიპოვით ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივებს:

$$x_0 = C_1 + a \Rightarrow C_1 = x_0 - a;$$
$$0 = C_2\sqrt{k} \Rightarrow C_2 = 0.$$

შედეგად მივიღებთ:

$$x = (x_0 - a)\cos\sqrt{k}t + a. \qquad (3)$$

ანალოგიური სახე აქვს (2) განტოლების ამოხსნას

$$y = C_3 \cos\sqrt{k}t + C_4 \sin\sqrt{k}t + b;,$$
$$y' = -C_3\sqrt{k} \sin kt + C_4\sqrt{k} \cos kt,$$

სადაც $b = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} k_i y_i$

საწყისი პირობების თანახმად: $t = 0 \quad y = y_0 \quad y' = v_0$. ვიპოვით ინტეგრების C_3 და C_4 მუდმივებს:

$$y_0 = C_3 + b \Rightarrow C_3 = y_0 - b;$$
$$v_0 = C_4\sqrt{k} \Rightarrow C_4 = \frac{v_0}{\sqrt{k}}.$$

შედეგად მივიღებთ:

$$y = (y_0 - b)\cos\sqrt{k}t + \frac{v_0}{\sqrt{k}}\sin\sqrt{k}t + b. \qquad (4)$$

(3) და (4) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\cos\sqrt{k}t = \frac{x-a}{x_0 - a},$$

$$\sin\sqrt{k}t = \left[(y-b) + \frac{x-a}{x_0-a}(b-y_0)\right]\frac{\sqrt{k}}{v_0}.$$

ვისარგებლოთ ტოლობით

$$\cos^2\sqrt{k}t + \sin^2\sqrt{k}t = 1,$$

მივიღებთ M წერტილის ტრაექტორიის განტოლებას კოორდინატებში:

$$\left(\frac{x-a}{x_0-a}\right)^2 + \left[(y-b) + \frac{x-a}{x_0-a}(b-y_0)\right]^2 \frac{k}{v_0^2} = 1$$

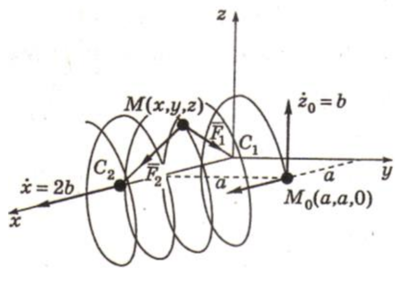
ელიფსის განტოლება.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\left(\frac{x-a}{x_0-a}\right)^2 + \left[(y-b) + \frac{x-a}{x_0-a}(b-y_0)\right]^2 \frac{k}{v_0^2} = 1$-ელიფსი.

სადაც $a = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} k_i x_i$; $b = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} k_i y_i$; $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$.

ამოცანა 27. 57

m მასის M წერტილი მიიზიდება ორი C_1 და C_2 ცენტრებისაკენ მანძილების პროპორციული ძალებით: $km \cdot \overline{MC_1}$ და $km \cdot \overline{MC_2}$; C_1 ცენტრი უძრავია და იმყოფება კოორდინატთა სათავეში, C_2 ცენტრი თანაბრად მოძრაობს $0x$ ღერძზე ისე, რომ $x_2 = 2(a+bt)$. იპოვეთ M წერტილის ტრაექტორია, თუ მივიჩნევთ, რომ $t=0$ მომენტისათვის წერტილი იმყოფება xy სიბრტყეში და მისი კოორდინატებია $x = y = a$, ხოლო, სიჩქარის გეგმილებია $x' = z' = b$, $y' = 0$.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ავირჩიოთ კოორდინატთა 0xyz სისტემა და ამ სისტემის ღერძებზე გეგმილებში შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალების მოქმედებით, რომლებიც მიმართულნი არიან C_1 და C_2 ცენტრებისკენ.

$$m x'' = km(x_2 - x) - kmx,$$

$$m y'' = -2kmy,$$

$$m z'' = -2kmz.$$

ეს განტოლებები ასეთი სახით ჩავწეროთ

$$x'' + 2kx = 2k(a+bt), \qquad (1)$$

$$y'' + 2ky = 0, \qquad (2)$$

$$z'' + 2kz = 0. \qquad (3)$$

(1) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა ასეთი სახით წარმოვადგინოთ: $x = \bar{x} + x*$,

სადაც $\bar{x} = C_1 \cos\sqrt{2k}t + C_2 \sin\sqrt{2k}t$; $x* = A + Bt$.

$x*$ ჩავსვათ (1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$2k(A+Bt) = 2k(a+bt),$$

საიდანაც $A = a, B = b,$ ე. ი. $x^* = a + bt$. მაშინ

$$x = C_1 \cos\sqrt{2k}t + C_2 \sin\sqrt{2k}t + a + bt, \qquad (4)$$

$$x' = -C_1\sqrt{2k}\sin\sqrt{2k}t + C_2\sqrt{2k}\cos\sqrt{2k}t + b$$

C_1 და C_2 მუდმივების განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით: $t = 0$ $x_0 = a,$ $x_0' = b$:

$$a = C_1 + a \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$b = C_2\sqrt{2k} + b \Rightarrow C_2 = 0.$$

შედეგად მივიღებთ:

$$x = a + bt. \qquad (5)$$

ანალოგიური სახით ვეძებთ (2) და (3) განტოლებების ამოხსნას

$$y = C_3 \cos\sqrt{2k}t + C_4 \sin\sqrt{2k}t,,$$

$$y' = -C_3\sqrt{2k}\sin\sqrt{2k}t + C_4\sqrt{2k}\cos\sqrt{2k}t,$$

ვინაიდან $C_3 = a$ და $C_4 = 0$, ამიტომ:

$$y = a\cos\sqrt{2k}t. \qquad (6)$$

ასევე $z = C_5 \cos\sqrt{2k}t + C_6 \sin\sqrt{2k}t,,$

$$z' = -C_5\sqrt{2k}\sin\sqrt{2k}t + C_6\sqrt{2k}\cos\sqrt{2k}t,$$

ვინაიდან $C_5 = 0$ და $C_6 = \dfrac{b}{\sqrt{2k}}$, ამიტომ:

$$z = \frac{b}{\sqrt{2k}}\sin\sqrt{2k}t\,. \qquad (7)$$

(6) და (7) განტოლებებიდან

$$\cos\sqrt{2k}t = \frac{y}{a}, \qquad \sin\sqrt{2k}t = \frac{z\sqrt{2k}}{b}.$$

მიღებული გამოსახულებების ორივე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში და შევკრიბოთ. ამასთანავე, ვისარგებლოთ ტოლობით

$$\cos^2\sqrt{2k}t + \sin^2\sqrt{2k}t = 1,$$

მივიღებთ M წერტილის ტრაექტორიის განტოლებას კოორდინატებში:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{2kz^2}{b^2} = 1 \qquad \text{- ელიფსური ცილინდრი.,}$$

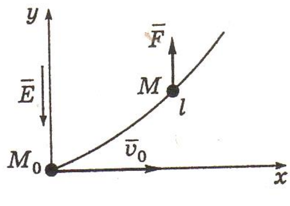
(6) და (7) განტოლებებიდან ვიპოვით პერიოდს:

$$\sqrt{2k}(t+T) = \sqrt{2k}t + 2\pi \Rightarrow T = \pi\sqrt{\frac{2}{k}}\,,$$

$$x_0' = b \Rightarrow x_h = x_0'T = \pi b\sqrt{\frac{2}{k}} \quad \text{- ხრახნული წირის ბიჯი.}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: ელიფსურ ცილინდრზე მდებარე ხრახნული წირი, რომლის ღერძია 0x, ხოლო განტოლებას აქვს ასეთი სახე $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{2kz^2}{b^2} = 1$; ხრახნის ბიჯია $\pi b\sqrt{\dfrac{2}{k}}$.

ამოცანა 27. 58



m მასის ნაწილაკი, რომელიც ატარებს ელექტრობის უარყოფით e მუხტს, შედის $\vec{E}$ ძაბვის ერთგვაროვან ელექტრულ ველში v_0 სიჩქარით, ველის დაძაბულობის მიმართულების მართობულად. განსაზღვრეთ ნაწილაკის შემდგომი მოძრაობის ტრაექტორია, თუ ვიცით, რომ ელექტრულ ველში მასზე მოქმედებს $\vec{F} = e\vec{E}$ ძალა, მიმართული $\vec{E}$

ძაბვის მიმართულების საწინააღმდეგოდ. სიმძიმის ძალების მოქმედება უგულებელყავით.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ავირჩიოთ კოორდინატთა 0xy სისტემა სათავით M_0 წერტილში. შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება $\vec{F} = e\vec{E}$ ძალის მოქმედებით x და y ღეძებზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$\mathrm{m}\, x'' = 0,$$

$$\mathrm{m}\, y'' = Ee,$$

ანუ

$$x'' = 0, \qquad (1)$$

$$y'' = \frac{Ee}{m}. \qquad (2)$$

(1) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 t + C_2,$$

$$x' = C_1 .$$

მუდმივების განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით: $t = 0$, $x_0 = 0$, $x_0' = v_0$; მივიღებთ $C_1 = v_0$ და $C_2 = 0$.

მაშინ $$x = v_0 t . \qquad (3)$$

ამოვხსნათ (2) განტოლება. ვინაიდან $y'' = \dfrac{dy'}{dt}$, (2) განტოლებიდან ცვლადთა განცალებით მივიღებთ

$$dy' = \frac{Ee}{m}\, dt .$$

ვისარგებლოთ განსაზღვრული ინტეგრალით:

$$\int_{y'(0)=0}^{y'} dy' = \frac{Ee}{m}\int_0^t dt \;\Rightarrow\; y' - y'(0) = \frac{Ee}{m}\, t\Big|_0^t \;\Rightarrow\; y' = \frac{Ee}{m}\,\mathrm{t}.$$

შევცვალოთ: $y' = \dfrac{dy}{dt}$, განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ :

$$\int_{y(0)}^{y} dy = \frac{Ee}{m}\int_0^t t\,dt$$

აქედან $$y = \frac{Ee}{2m} t^2 . \qquad (4)$$

(3) განტოლებიდან $t=\dfrac{x}{v_0}$. ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (4) ფორმულაში, მივიღებთ ნაწილაკის ტრაექტორიის განტოლებას კოორდინატებში:

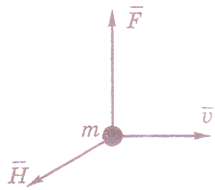
$$y=\frac{eE}{2mv_0^2}x^2 \qquad - \text{ პარაბოლა.}$$

თუ პარაბოლის განტოლებას ჩავწერთ კანონიკური სახით $x^2=2py$, მაშინ მისი პარამეტრი $p=\dfrac{mv_0^2}{eE}$.

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: პარაბოლა, რომლის პარამეტრია $\dfrac{mv_0^2}{eE}$.

ამოცანა 27. 59

m მასის ნაწილაკი, რომელიც ატარებს ელექტრობის უარყოფით e მუხტს, შედის $\vec{H}$ ძაბვის ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში v_0 სიჩქარით, ველის დაძაბულობის მიმართულების მართობულად. განსაზღვრეთ ნაწილაკის შემდგომი მოძრაობის ტრაექტორია, თუ ვიცით, რომ ელექტრულ ველში მასზე მოქმედებს $\vec{F}=-e(\vec{v}\times\vec{H})$ ძალა.



ამოხსნისას უკეთესია ისარგებლოთ წერტილის მოძრაობის განტოლების გეგმილებით ტრაექტორიის მხებზე და მთავარ ნორმალიზე.

<u>**ა მ ო ხ ს ნ ა**</u>. ავირჩიოთ დეკარტის კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ 0xy სიბრტყე ემთხვეოდეს $mn\tau$ სიბრტყეს, ხოლო z ღერძი იყოს ამ სიბრტყის მართობული. მაშინ

$$\vec{F}=-e(\vec{v}\times\vec{H})=-e\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x' & y' & z'\\ H_x & H_y & H_z\end{vmatrix},$$

სადაც $\vec{i},\vec{j},\vec{k}-x,y,z$ ღერძების ორტებია; $H_x=H, H_y=0, H_z=0.$

აქედან განვსაზღვრავთ

$$F_x=-eHy',$$

$$F_y=-eHx',$$

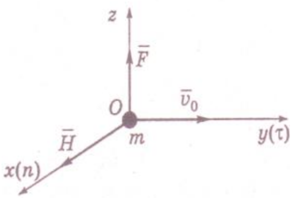
$$F_z = 0\,.$$

მაშინ, ნაწილაკის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს x, y, z ღერძებზე გეგმილებში ასეთი სახე აქვთ:

$$mx'' = -eHy'\,,$$

$$my'' = eHx'\,,$$

$$mz'' = 0\,,$$



ანუ

$$x'' + k^2 y' = 0\,, \qquad (1)$$

$$y'' - k^2 x' = 0\,, \qquad (2)$$

$$z'' = 0\,, \qquad (3)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{eH}{m}$.

(1) განტოლება ასე ჩავწეროთ

$$x'' = \frac{dx'}{dt} = -k^2 \frac{dy}{dt}\,,$$

მაშინ

$$x' = -k^2 y + C_1\,.$$

ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით: $t = 0$: $x_0' = v_0$; $y_0 = 0$, ამიტომ $C_1 = v_0$. მაშინ

$$x' = v_0 - k^2 y\,. \qquad (4)$$

(4) მნიშვნელობა ჩავსვათ (2) განტოლებაში:

$$y'' - k^2 (v_0 - k^2 y) = 0\,,$$

ანუ

$$y'' + k^4\, y = k^2 v_0. \qquad (5)$$

არაერთგვაროვანი (5) განტოლების ამოხსნა ვეძებოთ ასეთი სახით

$$y = \bar{y} + y^*,$$

სადაც $\bar{y}$ − ერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნაა,

$$\bar{y} = C_2 \sin k^2 t + C_3 \cos k^2 t\,.$$

(5) განტოლების კერძო ამოხსნაა $y^* = C_4$; $k^4 C_4 = k^2 v_0$.

აქედან $C_4 = \dfrac{v_0}{k^2}$.

მაშინ (2) განტოლების სრულ ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$y = C_2 \sin k^2 t + C_3 \cos k^2 t + \frac{v_0}{k^2}. \qquad (6)$$

ინტეგრების C_2 და C_3 მუდმივების განსაზღვრისათვის (6) გამოსახულება დრით გავაწარმოოთ:

$$y' = C_2 k^2 \cos k^2 t - C_3 k^2 \sin k^2 t. \qquad (7)$$

მოძრაობის საწყისი პირობებიდან გამომდინარე: $t = 0$: $y_0 = 0$; $y_0' = 0$, (6) და (7) განტოლებებიდან მივიღებთ $C_2 = 0,$ $C_3 = -\frac{v_0}{k^2}$.

მაშინ, ნაწილაკის y ღერძის გასწვრივ მოძრაობის განტოლება იქნება

$$y = \frac{v_0}{k^2}(1 - \cos k^2 t). \qquad (8)$$

გავაწარმოოთ (8) განტოლება დროთი და მიღებული გამოსახულება ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$y' = v_0 \sin k^2 t, \qquad (9)$$

$$x'' = -k^2\, v_0 \sin k^2 t. \qquad (10)$$

შევცვალოთ $x'' = \frac{dx'}{dt}$, განვაცალოთ ცვლადები (10) განტოლებაში და ვაინტეგროთ:

$$dx' = -k^2\, v_0 \sin k^2 t\; dt,$$

$$x' = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos k^2 t + C_4. \qquad (11)$$

განვაცალოთ ცვლადები (11) განტოლებაში და ვაინტეგროთ:

$$dx = v_0 \cos k^2 t dt + C_4 dt.$$

$$x = \frac{v_0}{k^2} \sin k^2 t + C_4 t + C_5. \qquad (12)$$

ვისარგებლოთ მოძრაობის საწყისი პირობებით: $t = 0$: $x_0 = 0$, $x_0' = v_0$; ამიტომ, (11) და (12) განტოლებებიოდან $C_4 = 0, C_5 = 0$. მაშინ, ნაწილაკის x ღერძის გასწვრივ მოძრაობის განტოლება იქნება

$$x = \frac{v_0}{k^2} \sin k^2 t. \qquad (13)$$

(3) განტოლების ინტეგრებისას, თუ გავითვალისწინებთ საწყის პირობებს $t = 0$: $z_0 = 0$, $z_0' = v_0$, მივიღებთ $z = 0$, ე.ი. ნაწილაკი იმოძრავებს 0xy სიბრტყეში.

ვიპოვოთ ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექტორიის განტოლება კოორდინატებში; ამისათვის, (8) და (13) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ $\cos k^2 t$ და $\sin k^2 t$:

$$-\cos k^2 t = \frac{k^2}{v_0}\left(y - \frac{v_0}{k^2}\right), \quad \sin k^2 t = \frac{k^2 x}{v_0}.$$

ამ გამოსახულებების კვადრსტში აყვანითა და შეკრებით მივიღებთ:

$$\frac{k^4 x^2}{v_0^2} + \frac{k^4}{v_0^2}\left(y - \frac{v_0}{k^2}\right)^2 = 1,$$

ანუ

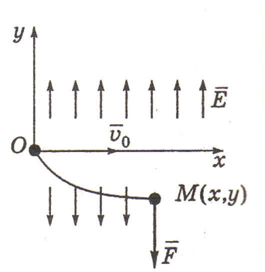
$$x^2 + \left(y - \frac{v_0}{k^2}\right)^2 = \frac{v_0^2}{k^4}.$$

ეს არის $R = \dfrac{v_0}{k^2} = \dfrac{mv_0}{eH}$ რადიუსის წრეწირი 0xy სიბრტყეში, რომლის ცენტრი გადაწეულია y ღერძის დადებითი მიმართულებით R მანძილით.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: წრეწირი, რადიუსით $R = \dfrac{mv_0}{eH}$.

ამოცანა 27. 60

განსაზღვრეთ m მასის ნაწილაკის მოძრაობის ტრაექტორია, რომელიც ატარებს ელექტრობის e მუხტს, თუ ნაწილაკი შევიდა ცვლადი $E = A\cos kt$ (A და $k-$ მოცემული მუდმივებია) ძაბვის ერთგვაროვან ელექტრულ ველში $\vec{v}_0$ სიჩქარით, ველის დაძაბულობის მიმართულების მართობულად; ელექტრულ ველში ნაწილაკზე მოქმედებს $\vec{F} = -e\vec{E}$ ძალა. სიმძიმის ძალების მოქმედება უგულებელყავით.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ავირჩიოთ დეკარტის კოორდინატთა 0xy სისტემა (კოორდინატთა სათავე - 0 წერტილი შეუთავსოთ ნაწილაკის საწყის მდებარეობას). შევადგინოთ M ნაწილაკის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით x და y ღეძებზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$\mathrm{m}\, x'' = 0,$$

$$\mathrm{m}\, y'' = -eA\cos kt,$$

ანუ

$$x'' = 0, \qquad (1)$$

$$y'' = \frac{eA}{m}\cos kt. \qquad (2)$$

(1) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x' = C_1,$$

$$x = C_1 t + C_2,$$

საწყისი პირობებიდან გამომდინარე: $t = 0$, $x_0 = 0$, $x_0' = v_0$; ინტეგრების მუდმივები: $C_1 = v_0$ და $C_2 = 0$. მაშინ

$$x = v_0 t. \qquad (3)$$

ამოვხსნათ (2) განტოლება: ვინაიდან $y'' = \frac{dy'}{dt}$.

განვაცალოთ ცვლადები

$$dy' = \frac{Ee}{m}\, dt$$

და ვისარგებლოთ განსაზღვრული ინტეგრალით:

$$\int_{y'(0)=0}^{y'} dy' = -\frac{eA}{m}\int_0^t \cos kt\,dt \quad \Rightarrow y' - y'(0) = \frac{-eA}{mk}\sin kt.$$

$$y' = \frac{-eA}{mk}\sin kt.$$

შევცვალოთ: $y' = \frac{dy}{dt}$, განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ :

$$\int_{y(0)}^{y} dy = \frac{-eA}{mk}\int_0^t \sin kt\,dt.$$

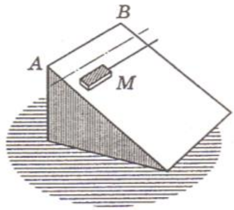
აქედან $$y = -\frac{eA}{mk^2}(1 - \cos kt). \qquad (4)$$

(3) განტოლებიდან $t = \frac{x}{v_0}$. ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (4) ფორმულაში, მივიღებთ ნაწილაკის ტრაექტორიის განტოლებას კოორდინატებში:

$$y = -\frac{eA}{mk^2}(1 - \cos\frac{kx}{v_0}).$$

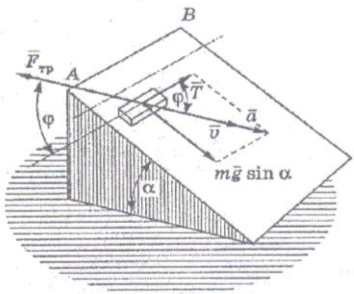
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $y = -\frac{eA}{mk^2}(1 - \cos\frac{kx}{v_0})$, სადაც y ღერძი მიმართულია ველის დაძაბულობის მხარეს, კოორდინატთა სათავე ემთხვევა ველში ნაწილაკის საწყის მდებარეობას.

ამოცანა 27. 61



არაგლუვ დახრილ სიბრტყეზე მოძრაობს მძიმე M სხეული, რომელიც მუდმივად განიზიდება ძაფის საშუალებით ჰორიზონტალური მიმართულებით AB წრფის პარალელურად. გარკვეული მომენტიდან სხეულის მოძრაობა ხდება წრფივი და თანაბარი, ამასთანავე, სიჩქარის ორი ურთიერთ მართობული მდგენელიდან ის, რომელიც მიმართულია AB წრფის პარალელურად, უდრის 12 მ/წმ. განსაზღვრეთ სიჩქარის მეორე v_1 მდგენელი, აგრეთვე ძაფის T დაჭიმულობა შემდეგი მონაცემებისათვის: სიბრტყის დახრა $tg\alpha = 1/30$, ხახუნის კოეფიციენტი $f = 0{,}1$, სხეულის მასა 30კგ.

<u>ა м о х с н а</u>. არსებობს ამოხსნის ორი ხერხი.



ნახ. 1

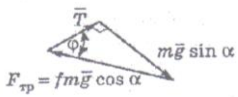
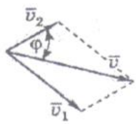


Рис. 2



ნახ. 3

პირველი ხერხი. ვინაიდან ნივთიერი წერტილი მოძრაობს დახრილ სიბრტყეზე წრფივად და თანაბრად, ამიტომ, მასზე მოქმედი სიბრტყეში

მდებარე ძალები $\vec{T}$, $m\vec{g}\sin\alpha$ და ხახუნის ძალა $\vec{F}_{Tp}$ (ნახ. 1) ქმნიან გაწონასწორებულ სისტემას.

ძალთა სამკუთხედიდან (ნახ. 2) ვიპოვით ძაფის დაჭიმულობას:

$$T=\sqrt{(fmg\cos\alpha)^2-(mg\sin\alpha)^2}=mg\sqrt{f^2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$

$$=mg\sqrt{\frac{f^2}{1+tg^2\alpha}-\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}}=mg\sqrt{\frac{f^2-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}}=30\cdot 9{,}8\sqrt{\frac{\frac{1}{100}-\frac{1}{900}}{1+\frac{1}{900}}}=27{,}7 \text{ (ნ).}$$

განვსაზღვროთ სიჩქარის მეორე შემადგენელი (ნახ. 3):

$$v_1=v_2tg\varphi=v_2\frac{mg\sin\alpha}{T}=v_2\sin\alpha\sqrt{\frac{1+tg^2\alpha}{f^2-tg^2\alpha}}=$$

$$=v_2\sqrt{\frac{tg^2\alpha}{f^2-tg^2\alpha}}=12\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{900}}{\frac{1}{100}-\frac{1}{900}}}=4{,}24 \text{ (მ/წმ).}$$

მეორე ხერხი. ჩავწეროთ სხეულის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x და y ღერძებზე გეგმილებში (ნახ. 4):

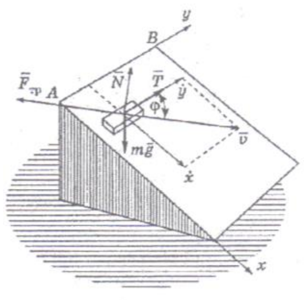
$$m\,x''=mg\sin\alpha-F\sin\varphi, \qquad (1)$$

$$m\,y''=T-F\cos\varphi, \qquad (2)$$

სადაც, ხახუნის ძალა $F_{Tp}=fN=fmg\cos\alpha$;

$$\sin\varphi=\frac{x'}{v}=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}};$$

$$\cos\varphi=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}.$$



ნახ. 4

(1) და (2) დიფერენციალური განტოლებები მიიღებენ ასეთ სახეს

$$x''=g\sin\alpha-fg\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\cos\alpha;, \qquad (3)$$

$$m\,y''=T-fmg\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\cos\alpha. \qquad (4)$$

ვინაიდან, გარკვეული მომენტიდან მოძრაობა წრფივი და თანაბარია, ამიტომ $x''=0$ და $y''=0$. მაშინ, (3) განტოლებიდან

$$tg\alpha=\frac{fx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

ანუ
$$tg^2\alpha=\frac{f^2x'^2}{x'^2+y'^2}\Rightarrow x'^2=\frac{y'^2tg^2\alpha}{f^2-tg^2\alpha},$$

სადაც $y'=12$ მ/წმ; $tg\alpha=1/30$; $f=0{,}1$.
ამის გათვალისწინებით

$$x'=v_1=\sqrt{\frac{144\cdot 1/900}{1/100-1/900}}=\ 4{,}24\ \ (\text{მ/წმ}).$$

ვინაიდან $y''=0$, ამიტომ (4) ფორმულიდან განვსაზღვრავთ ძაფის დაჭიმულობას:

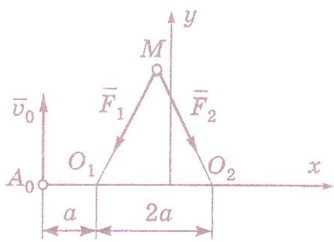
$$T=fmg\ \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\cos\alpha=\frac{0{,}1\cdot 30\cdot 9{,}8\cdot 12}{\sqrt{4{,}24^2+12^2}}\ \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=$$

$$=\frac{36\cdot 9{,}8}{\sqrt{17{,}98+144}}\ \frac{30}{\sqrt{901}}=27{,}7\quad (\text{ნ}).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $v_1=4{,}24$ სმ/წმ; T=27,7 ნ.

ამოცანა 27. 62

m მასის M წერტილი განიცდის ორი მიზიდულობის ძალის ზემოქმედებას, რომლებიც მიმართულნი არიან უძრავი 0_1 და 0_2 ცენტრებისაკენ (იხ. ნახაზი). ამ ძალების სიდიდე პროპორციულია 0_1 და 0_2 ცენტრებამდის მანძილისა. პროპორციულობის კოეფიციენტი ერთნაირია და c-ს ტოლია.



მოძრაობა იწყება A_0 წერტილიდან v_0 სიჩქარით, 0_10_2 ხაზის მართობულად. განსაზღვრეთ როგორ ტრაექტორიას აღწერს M წერტილი. იპოვეთ დროის მომენტი, როცა ის გადაკვეთს 0_10_2 ხაზის მიმართულებას და გამოთვალეთ მისი კოორდინატი დროის ამ მომენტში. მანძილი A_0 წერტილიდან y ღერძამდის $2a$-ს ტოლია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები x და y ღერძებზე გეგმილებში:

$$m\,x'' = -c[(x-a)+(x+a)],$$

$$m\,y'' = -c(y+y),$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

$$y'' + k^2 y = 0, \qquad (2)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{2c}{m}$.

(1) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა ასეთი სახისაა

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin kt$$

მაშინ

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

მოძრაობის საწყისი პირობებიდან გამომდინარე: $t = 0$: $x_0 = -2a$; $x_0' = 0$, მივიღებთ $C_1 = -2a$, $C_2 = 0$.

ინტეგრების მუდმივების ამ მნიშვნელობათა გათვალისწინებით (1) განტოლების ამოხსნა ასე ჩაიწერება:

$$x = -2a \cos kt. \qquad (3)$$

ანალოგიურად ამოვხსნით (2) განტოლებას:

$$y = C_3 \cos t + C_4 \sin kt$$

$$y' = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt.$$

მოძრაობის საწყისი პირობებიდან გამომდინარე: $t = 0$: $y_0 = 0$; $y_0' = v_0$, მივიღებთ $C_3 = 0$, $C_4 = \dfrac{v_0}{k}$.

ინტეგრების მუდმივების ამ მნიშვნელობათა გათვალისწინებით (2) განტოლების ამოხსნა ასე ჩაიწერება:

$$y = \frac{v_0}{k} \sin kt. \qquad (4)$$

(3) და (4) განტოლებებიდან

$$\cos kt = -\frac{x}{2a}, \qquad (5)$$

$$\sin kt = \frac{ky}{v_0}\,. \tag{6}$$

მიღებული გამოსახულებების ორივე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში და შევკრიბოთ. ამასთანავე, ვისარგებლოთ ტოლობით

$$\cos^2 kt + \sin^2 kt = 1\,,$$

მივიღებთ M წერტილის ტრაექტორიის განტოლებას კოორდინატებში:

$$\frac{y^2}{(2a)^2} + \frac{y^2}{(v_0/k)^2} = 1$$ - ელიფსის განტოლება.

სადაც $k = \sqrt{\dfrac{2c}{m}}\,.$

წერტილი გადაკვეთს $0_1 0_2$ ხაზს, ე.ი. x ღერძს, როცა $y = 0$. ამ შემთხვევაში (4) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sin kt = 0 \Rightarrow kt = m\pi \Rightarrow t = \frac{m\pi}{k}, \quad m = 0,1,2,3,\ldots\,.$$

თუ $m = 0$, მაშინ $t_0 = 0,\ x_0 = -2a\cos 0^0 = -2a\,,\quad y_0 = 0;$

თუ $m = 1$, მაშინ $t_1 = \dfrac{\pi}{k},\quad x_1 = -2a\cos\pi = 2a\,,\quad y_1 = 0;$

თუ $m = 2$, მაშინ $t_2 = \dfrac{2\pi}{k},\ x_2 = -2a\cos 2\pi = -2a\,,\ y_2 = 0$ და ა.შ.

მაშასადამე, როცა m ლუწია $x_m = -2a,\quad y_m = 0\,,$

როცა m კენტია $x_{m+1} = 2a,\quad y_{m+1} = 0\,.$

წერტილის ელიფსზემოძრაობისას, მისი გარშემოვლის პერიოდია

$$T = \frac{2\pi}{k}\,.$$

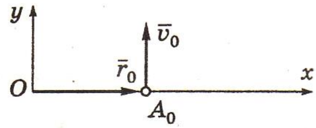
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: ელიფსი $\dfrac{y^2}{(2a)^2} + \dfrac{y^2}{(v_0/k)^2} = 1$, სადაც $k = \sqrt{\dfrac{2c}{m}}\,.$

$t_0 = 0,\ x_0 = -2a\,,\quad y_0 = 0;\quad t_1 = \pi/k,\ \ x_1 = 2a\,,\quad y_1 = 0;$

$t_2 = 2\pi/k,\ x_2 = -2a\,,\ y_1 = 0$ და ა.შ. დრო, რომელსაც წერტილი ანდომებს ელიფსის გარშემოწერას, $T = 2\pi/k\,.$

ამოცანა 27. 63

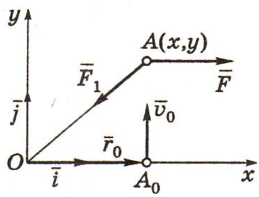
m მასის A წერტილზე, რომელიც მოძრაობას იწყებს $\vec{r}=\vec{r}_0$ მდებარეობიდან (სადაც $\vec{r}$ - წერტილის რადიუს-ვექტორია) $\vec{r}_0$-ის მართობი $\vec{v}_0$ სიჩქარით, მოქმედებს 0 ცენტრისკენ მიმართული მიზიდულობის ძალა, რომელიც მისგან დაშორებული მანძილის პროპორციულია. პროპორციულობის კოეფიციენტია mc_1. ამასთანავე, წერტილზე მოქმედებს მუდმივი ძალა $mc\vec{r}_0$. იპოვეთ წერტილის მოძრაობის განტოლება და ტრაექტორია. როგორი უნდა იყოს c_1/c შეფარდება, რათა მოძრაობის ტრაექტორიამ გაიაროს 0 ცენტრზე? როგორი სიჩქარით გაივლის წერტილი 0 ცენტრს?



ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები x და y ღერძებზე გეგმილებში:

$$m\,x''=-\vec{F}_1+\vec{F}\ ,$$

$$m\,y''=-\vec{F}_1$$



ანუ, ამოცანის პირობების გათვალისწინებით

$$m\,x''=-mc_1x+mcx_0\,,$$

$$m\,y''=-mc_1y\,.$$

აქედან

$$x''+c_1x=cx_0\,, \qquad (1)$$

$$y''+c_1y=0\,. \qquad (2)$$

(1) განტოლების ამოხსნას ვეძებთ ასეთი სახით

$$x=\bar{x}+x*,$$

სადაც $\bar{x}-$ ერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნაა,

$$\bar{x}=A_1\cos\sqrt{c_1}t+B_1\sin\sqrt{c_1}t\,.$$

$y*=D$ - (1) განტოლების კერძო ამოხსნაა და ამ განტოლებაში მისი ჩასმით მივიღებთ $D=\dfrac{c}{c_1}x_0$. მაშინ (1) განტოლების სრულ ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = A_1 \cos\sqrt{c_1}t + B_1 \sin\sqrt{c_1}t + \frac{c}{c_1}x_0,$$
$$x' = -A_1\sqrt{c_1}\sin\sqrt{c_1}t + B_1\sqrt{c_1}\cos\sqrt{c_1}t$$

მოძრაობის საწყისი პირობებიდან გამომდინარე: $t=0$: $x = x_0$; $x_0' = 0$, განვსაზღვრავთ მუდმივებს: $A_1 = x_0 - \frac{c}{c_1}x_0$, $B_1 = 0$.

მაშინ, (1) განტოლების ამოხსნა ასეთი სახისაა

$$x = x_0(1-\frac{c}{c_1})\cos\sqrt{c_1}t + \frac{c}{c_1}x_0. \qquad (3)$$

ანალოგიურად ამოვხსნით (2) განტოლებასაც:

$$y = A_3 \cos\sqrt{c_1}t + B_3 \sin\sqrt{c_1}t,$$
$$y' = -A_3\sqrt{c_1}\sin\sqrt{c_1}t + B_3\sqrt{c_1}\cos\sqrt{c_1}t.$$

მოძრაობის საწყისი პირობებიდან გამომდინარე: $t=0$: $y_0 = 0$; $y_0' = v_0$, განვსაზღვრავთ ინტეგრების მუდმივებს: $A_3 = 0$, $B_3 = \frac{v_0}{\sqrt{c_1}}$.

მაშინ, (2) განტოლების ამოხსნა ასეთი სახისაა

$$y = \frac{v_0}{\sqrt{c_1}}\sin\sqrt{c_1}t. \qquad (4)$$

გავამრავლოთ (3) და (4) გამოსახულებები შესაბამისად $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ვექტორებზე, შევკრიბოთ ისინი და თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას $\vec{r}_0 = x_0\vec{i}$, მივიღებთ მოძრაობის განტყოლებას ვექტორული სახით:

$$\vec{r} = \frac{c}{c_1}\vec{r}_0 + \frac{\vec{v}_0}{\sqrt{c_1}}\sin\sqrt{c_1}t + \vec{r}_0(1-\frac{c}{c_1})\cos\sqrt{c_1}t.$$

ვინაიდან $|x_0| = |r_0|$, ამიტომ (3) განტოლებიდან

$$\cos\sqrt{c_1}t = \frac{x - \frac{c}{c_1}r_0}{r_0\left(1-\frac{c}{c_1}\right)},$$

(4) განტოლებიდან

$$\sin\sqrt{c_1}t = \frac{y\sqrt{c_1}}{v_0}.$$

მიღებული გამოსახულებების ორივე მხარე ავიყვანოთ კვადრატში და შევკრიბოთ. ამასთანავე, ვისარგებლოთ ტოლობით

$$\cos^2\sqrt{c_1}t + \sin^2\sqrt{c_1}t = 1,$$

მივიღებთ M წერტილის ტრაექტორიის განტოლებას კოორდინატებში:

$$\left[\frac{x - \frac{c}{c_1}r_0}{r_0\left(1 - \frac{c}{c_1}\right)}\right]^2 + \left(\frac{y\sqrt{c_1}}{v_0}\right)^2 = 1 \quad \text{- ელიფსის განტოლება.} \qquad (5)$$

A წერტილის ტრაექტორია 0 ცენტრზე გაივლის, თუ კოორდინატები x=0 და y=0 დააკმაყოფილებენ (5) განტოლებას, რომელიც ამ შემთხვევაში ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\frac{c}{c_1}r_0 = r_0\left(1 - \frac{c}{c_1}\right).$$

აქედან მივიღებთ

$$\frac{c_1}{c} = 2.$$

A წერტილი 0 ცენტრზე გაივლის დროის იმ მომენტში, როცა $y = 0$, ანუ

$$\sin\sqrt{c_1}t = 0 \Rightarrow t\sqrt{c_1} = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{\sqrt{c_1}},$$

ხოლო მისი სიჩქარე ტოლია

$$v_{y0} = y'\left(t = \frac{\pi}{\sqrt{c_1}}\right) = v_0\cos\left(\sqrt{c_1}\,\frac{\pi}{\sqrt{c_1}}\right) = -v_0,$$

$$v_{x0} = x'\left(t = \frac{\pi}{\sqrt{c_1}}\right) = -x_0(1 - \frac{c}{c_1})\sqrt{c_1}\sin\left(\sqrt{c_1}\,\frac{\pi}{\sqrt{c_1}}\right) = 0.$$

მაშასადამე, $\vec{v}_0 = v_{x0}\vec{i} + v_{y0}\vec{j} = -v_0\vec{j} = -\vec{v}_0$.

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: 1) $\vec{r} = \frac{c}{c_1}\vec{r}_0 + \frac{\vec{v}_0}{\sqrt{c_1}}\sin\sqrt{c_1}t + \vec{r}_0(1 - \frac{c}{c_1})\cos\sqrt{c_1}t$;

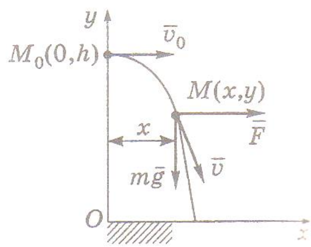
2) ეიფსი $\left[\dfrac{x-\dfrac{c}{c_1}r_0}{r_0\left(1-\dfrac{c}{c_1}\right)}\right]^2+\left(\dfrac{y\sqrt{c_1}}{v_0}\right)^2=1$;

3) A წერტილის 0 ცენტრზე გაივლის, თუ $\dfrac{c_1}{c}=2$;

4) A წერტილი 0 ცენტრზე გაივლის $v_0=-v_0$ სიჩქარით დროის $t=\dfrac{\pi}{\sqrt{c_1}}$ მომენტში.

ამოცანა 27. 64

m მასის მძიმე წერტილი ვარდება იმ მდებარეობიდან, რომელიც განისაზღვრება კოორდინატებით: როცა $t=0,\quad x_0=0,\quad y_0=h$. მასზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა (y ღერძის პარალელური) და y ღერძიდან უკუმგდები ძალა, რომელიც ამ ღერძიდან მანძილის პროპორციულია (პროპორციულობის კოეფიციენტია c). წერტილის საწყისი სიჩქარის გგმილები კოორდინატთა ღერძებზე $v_x=v_0$, $v_y=0$. განსაზღვრეთ წერტილის ტრაექტორია, აგრეთვე x ღერძის გადაკვეთის დროის t_1 მომენტი.



ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ M წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები x და y ღერძებზე გეგმილებში:

$$\mathrm{m}\,x''=F\,,$$
$$\mathrm{m}\,y''=-mg\,,$$

ანუ, ამოცანის პირობების გათვალისწინებით

$$\mathrm{m}\,x''=-cx\,,$$
$$\mathrm{m}\,y''=-mg\,.$$

აქედან $$x''-k^2x=0\,, \qquad (1)$$

$$y'' = -g \,. \qquad (2)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

(1) განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 chkt + C_2 shkt,$$

სადაც $chkt = \dfrac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}$ - ჰიპერბოლური კოსინუსია,

$shkt = \dfrac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$ - ჰიპერბოლური სინუსია.

მაშინ $$x' = C_1 kshkt + C_2 kchkt\,.$$

მოძრაობის საწყისი პირობებიდან გამომდინარე: $t = 0$: $x_0 = 0$; $x_0' = v_0$,

განვსაზღვრავთ ინტეგრების მუდმივებს: $C_1 = 0$, $C_2 = \dfrac{v_0}{k}$.

მაშინ, (1) განტოლების ამოხსნა ასეთი სახისაა

$$x = \frac{v_0}{k} shkt\,. \qquad (3)$$

(2) განტოლების თანმიმდევრული ინტეგრებით ვიპოვით მის ამოხსნას:

$$\int_{y'(0)}^{y'} dy' = -g\int_0^t dt \Rightarrow y'\Big|_{y'(0)}^{y'} = -gt\Big|_0^t \Rightarrow y' = -gt \Rightarrow \int_{y(0)}^{y} dy = -g\int_0^t tdt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\Big|_{y(0)}^{y} = -g\frac{t^2}{2}\Big|_0^t \Rightarrow y - y(0) = -g\frac{t^2}{2}\, y = h - g\frac{t^2}{2}\,.$$

აქედან $$t = \sqrt{\frac{2(h-y)}{g}}\,. \qquad (4)$$

ჩავსვათ t-ს მიღებული მნიშვნელობა (3) განტოლებაში, მივიღებთ M წერტილის ტრაექტორიის განტოლებას კოორდინატებში:

$$x = \frac{v_0}{k} shk\sqrt{\frac{2}{g}(h-y)}\,\cdot$$

სადაც $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

წერტილის x ღერძთან გადაკვეთის t_1 მომენტში $y = 0$, მაშინ (4) ფორმულის თანახმად

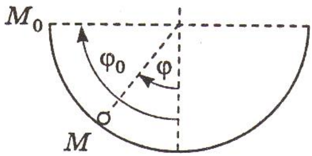
$$t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot$$

პ ა ს უ ხ ი: ტრაექტორია $x=\frac{v_0}{k}shk\sqrt{\frac{2}{g}(h-y)}$,სადაც $k=\sqrt{\frac{c}{m}}$, $t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

ამოცანა 27. 65

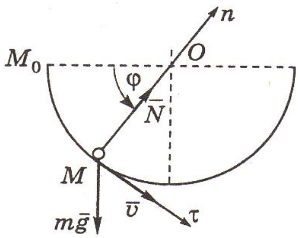
m მასის M წერტილი სიმძიმის ძალის მოქმედებით მოძრაობს r რადიუსის დამრეცი ცილინდრის შიგა გლუვ ზედაპირზე. საწყის მომენტში კუთხე $\varphi_0=\pi/2$, ხოლო წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლია. განსაზღვრეთ M წერტილის სიჩქარე და ცილინდრის ზედაპირის რეაქცია $\varphi=30^0$ კუთხისათვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ M წერტილის მოძრაობის განტოლება სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალისა და ნორმალური $\vec{N}$ რეაქციის ძალის(იხ. ნახაზი) მოქმედებით n და τ ღერძებზე გეგმილებში:



$$m\frac{v^2}{r}=N-mg\sin\varphi,$$

$$m\frac{dv}{dt}=mg\cos\varphi,$$



ანუ $$N=m\left(\frac{v^2}{r}+g\sin\varphi\right), \qquad (1)$$

$$\frac{dv}{dt}=g\cos\varphi. \qquad (2)$$

თუ ჩავთვლით, რომ (2) განტოლებაში $v=v(\varphi)$, შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\omega\frac{dv}{d\varphi}=\frac{vdv}{rd\varphi}.$$

მაშინ (2) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$\frac{vdv}{rd\varphi}=g\cos\varphi.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ, ვიპოვით M წერტილის სიჩქარეს:

$$\int_o^v v dv = rg\int_0^{\pi/3}\cos\varphi d\varphi \Rightarrow \left.\frac{v^2}{2}\right|_0^v = rg\sin\varphi\Big|_0^{\pi/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}gr \Rightarrow v = \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{gr}\,.$$

(1) განტოლებიდან, როცა $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, მივიღებთ

$$T = N = m\left(\frac{\sqrt{3}gr}{r} + \frac{\sqrt{3}}{2}g\right) = mg\left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}mg\,.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $v = \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{gr}$; $T = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}mg$.

28. ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემა. ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების თეორემა.

მეთოდური მითითებანი ამოცანების ამოსახსნელად

მოძრაობის რაოდენობა არის მექანიკური მოძრაობის ერთ-ერთი საზომი, ანუ წერტილის მოძრაობის ერთ-ერთი დინამიკური მახასიათებელი და წარმოადგენს ვექტორულ სიდიოდეს, რომელიც ტოლია წერტილის მასისა და მისი სიჩქარის ვექტორის ნამრავლისა:

$$\vec{K} = m\vec{v}\,. \tag{28.1}$$

ძალის მოქმედების მახასიათებელი ამ შემთხვევაში არის ძალის იმპულსი. განასხვავებენ ძალის ელემენტარულ იმპულსს და ძალის იმპულსს დროის სასრულ შუალედში.

ძალის ელემენტარული იმპულსი ეწოდება უსასრულოდ მცირე ვექტორულ სიდიდეს $d\vec{S}$, რომელიც ტოლია ძალის ვექტორისა და ძალის მოქმედების დროის უსასრულოდ მცირე dt შუალედის ნამრავლისა:

$$d\vec{S} = \vec{F}dt. \tag{28.2}$$

ნებისმიერი $\vec{F}$ ძალის $\vec{S}$ იმპულსი t დროის რაიმე სასრულ შუალედში გამოითვლება, როგორც შესაბამისი ელემენტარული იმპულსების ინტეგრალური ჯამი:

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F}dt. \tag{28.3}$$

თუ ძალა მუდმივია, მაშინ ძალის იმპულსი დროის სასრულ შუალედში მოქმედებისას წარმოადგენს ვექტორულ გამოსახულებას:

$$\vec{S} = \vec{F}t.$$

ძალის იმპულსის მოდული (სიდიდე) ამ შემთხვევაში წარმოიდგინება იმავე ფორმულით $S = Ft,$ სადაც S, F არიან $\vec{S}$ და $\vec{F}$ ვექტორების მოდულები.

ზოგად შემთხვევაში, *ძალის იმპულსის სიდიდე* შეიძლება განისაზღვროს მისი გეგმილებით საკოორდინატო ღერძებზე:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}\,, \tag{28.4}$$

სადაც $S_x = \int_0^t F_x dt$; $S_y = \int_0^t F_y dt$; $S_z = \int_0^t F_z dt$.

(28.4) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ძალის იმპულსი შეიძლება გამოვთვალოთ მუდმივი ძალისათვის ან, დროზე დამოკიდებული ძალისათვის. სხვა ცვლადი ძალებისათვის იმპულსის გამოსათვლელად საჭიროა ვიცოდეთ ამ ძალების მოქმედებით წერტილის მოძრაობის კანონი, ე. ი. განტოლებები

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

წერტილზე მოქმედი ძალების იმპულსი შეიძლება გამოვთვალოთ სხვა გზითაც, რომელიც ეფუძნება ***ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემას:***

ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება დროის რაიმე შუელედში ტოლია წერტილზე მოქმედი ყველა ძალის იმპულსების გეომეტრიული ჯამისა დროის იმავე შუალედში.

ინტეგრალური ფორმით ეს ასე ჩაიწერება:

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \sum \vec{S}_k . \qquad (28.5)$$

ამოცანების ამოხსნისას ვექტორული (28.5) განტოლების ნაცვლად იყენებენ სკალარული ფორმის განტოლებებს:

$$\left.\begin{aligned} mv_x - mv_{0x} &= \sum S_{kx}, \\ mv_y - mv_{0y} &= \sum S_{ky}, \\ mv_z - mv_{0z} &= \sum S_{kz}. \end{aligned}\right\} \qquad (28.6)$$

(28.6) ფორმულიდან გამომდინარე, თუ ვიცით მოქმედი ძალები და დრო, შეიძლება ვიპოვოთ სიჩქარე, რომელსაც შეიძენს ნივთიერი წერტილი, ან, თუ ცნობილია საწყისი და საბოლოო სიჩქარე, განვსაზღვრავთ წერტილზე მოქმედი ძალის იმპულსს.

მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემა შეიძლება ჩავწეროთ დიფერენციალური ფორმით:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \qquad (28.7)$$

ან, დეკარტის კოორდინატთა ღერძებზე გეგმილებში:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(mv_x)}{dt} &= F_x, \\ \frac{d(mv_y)}{dt} &= F_y, \\ \frac{d(mv_z)}{dt} &= F_z. \end{aligned}\right\} \qquad (28.7')$$

(28.7) განტოლება წარმოადგენს სხვა არაფერს, გარდა ნივთიერი წერტილის დინამიკის მეორე კანონს, ხოლო (28.7′) განტოლება – ეს არის ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები.

ამოცანების ამოხსნისას მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემის დიფერენციალური ფორმით გამოყენება საჭიროა იმ შემთხვევაში, როდესაც წერტილზე მოქმედებენ მუდმივი და ცვლადი ძალები.

ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანამიმდევრობა:

1. ამოცანის პირობის მონაცემებით განვსაზღვროთ, ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემის როგორი ფორმით ჩაწერაა უმჯობესი (ან, უფრო მისაღები).
2. ავირჩიოთ კოორდინატთა ღერძები (ან, ერთი ღერძი წრფივი მოძრაობისას), მივმართოთ ისინი წერტილის (სხეულის) მოძრაობის მხარეს.
3. ნახაზზე მიუთითოთ მოძრავი წერტილი ნებისმიერ მდებარეობაში და მასზე მოქმედი ყველა აქტიური ძალა და ბმის რეაქციის ძალა, თუ წერტილი არათავისუფალია.
4. ჩავწეროთ ზოგადი სახით (შეიძლება სკალარული ფორმით) მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემა მოქმედი ძალების გათვალისწინებით.
5. ამოვხსნათ მიღებული (დიფერენციალური ან ალგებრული) განტოლებები და განვსაზღვროთ საძებნი სიდიდეები ზოგადი სახით.
6. ჩავატაროთ გამოთვლა, ყურედღება მივაქციოთ ყველა სიდიდის განზომილებას.

ამ პარაგრაფის ამოცანათა ნაწილი ამოიხსნება მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების თეორემის და მისი შედეგების გამოყენებით.

ანსხვავებენ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტს რაიმე ცენტრის (წერტილის) და ღერძის მიმართ.

ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი რაიმე 0 ***ცენტრის მიმართ*** ეწოდება სკალარულ სიდიდეს, აღებულს პლუს ან მინუს ნიშნით და ტოლია მოძრაობის რაოდენობის mv სიდიდის ნამრავლისა ამ ცენტრიდან უმოკლეს h მანძილზე იმ წრფემდე, რომლის გასწვრივაც მინართულია $m\vec{v}$ ვექტორი, ე.ი.

$$l_0 = \pm mvh, \qquad (28.8)$$

სადაც h - მართობია, დაშვებული 0 წერტილიდან $m\vec{v}$ ვექტორის მოქმედების წრფეზე.

მოძრაობის რაოდენობის მომენტი 0 ცენტრის მიმართ შეიძლება წარმოვადგინოთ $\vec{l}_0$ ვექტორის სახით, რომელიც მართობია სიბრტყისა, რომელშიც განლაგებულია ვექტორი $m\vec{v}$ და ვექტორი $\vec{r}$, რომელიც გავლებულია 0 ცენტრიდან $m\vec{v}$ ვექტორის საწყისამდე, და მიმართულია იმ მხარეს, საიდანაც ჩანს $m\vec{v}$ ვექტორის მცდელობა შემოაბრუნოს თავისი მხარი საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მხარეს. ეს ვექტორი შეიძლება წარმოვადგინოთ ვექტორული ნამრავლის სახით:

$$\vec{l}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}\,. \qquad (28.9)$$

მოძრაობის რაოდენობის მომენტი რაიმე z ღერძის მიმართ სკალარული სიდიდეა l_z :

$$l_z = \pm m v_{xy} h \,, \qquad (28.10)$$

სადაც mv_{xy} არის $m\vec{v}$ ვექტორის გეგმილი xy სიბრტყეზე, რომელიც z ღერძის მართობულია; h არის z ღერძისა და xy სიბრტყის გადაკვეთის წერტილიდან დაშვებული მართობი იმ წრფეზე, რომლის გასწვრივაც მიმართულია $m\vec{v}$ ვექტორის გეგმილი.

(28.10) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი z ღერძის მიმართ ნულის ტოლია, თუ $m\vec{v}$ ვექტორი პარალელურია ამ ღერძის ან კვეთს მას.

ცენტრის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების თეორემა (მომენტთა თეორემა) :

რაიმე ცენტრის მიმართ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ვექტორული მომენტის წარმოებული დროთი გეომეტრიულად ტოლია წერტილზე მოქმედი ძალის მომენტისა იმავე ცენტრის მიმართ:

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{F}) \,. \qquad (28.11)$$

შედეგი 1. *თუ წერტილზე მოდებული ძალების ტოლქმედის ფუძე ყოველთვის გადის უძრავ ცენტრზე, მაშინ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი ამ ცენტრის მიმართ რჩება მუდმივი.*

ამას დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს იმ შემთხვევაში თუ მოძრაობა ხდება ცენტრალური ძალის მოქმედებით.

ცენტრალური ძალა ეწოდება ძალას, რომლის ფუძე მიძრაობის მთელი დროის განმავლობაში გადის რაიმე ცენტრზე, ხოლო ამ ძალის მოდული (სიდიდე) დამოკიდებულია ამ ცენტრსა და ძალის მოდების წერტილს შორის მანძილზე.

რადგანაც ამ შემთხვევაში $M_0(\vec{F}) = 0,$ ამიტომ $l_0 = mvh = const,$

ანუ $vh = const$, სადაც $v = \dfrac{ds}{dt}$. მაშინ

$$\frac{hds}{dt} = \frac{2d\sigma}{dt} \,,$$

სადაც $d\sigma$ - იმ სამკუთხედის ფართობია, რომელსაც ქმნიან 0 ცენტრიდან გავლებული რადიუსები ტრაექტორიის ds მონაკვეთის თავსა და ბოლოსთან.

სიდიდეს $\dfrac{d\sigma}{dt}$ ეწოდება ***წერტილის სექტორული სიჩქარე***. ის განსაზღვრავს სიჩქარეს, რომლითაც იზრდება ფართობი, რომელიც

აღწერილია 0 ცენტრიდან მოძრავ წერტილამდის გავლებული $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორით:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} vh, \qquad (28.12)$$

სადაც h არის 0 ცენტრიდან სიჩქარის $\vec{v}$ ვექტორზე დაშვებული მართობი.

მაშასადამე, ცენტრალური ძალის მოქმესდებით წერტილი მოძრაობს ბრტყელ წირზე მუდმივი სექტორული სიჩქარით, ე.ი. ისე, რომ წერტილის რადიუს-ვექტორი დროის ნებისმიერ ტოლ შუალედში აღწერს ტოლ ფართობს.

ეს არის ფართობთა კანონი, რომელსაც აქვს დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა მზის გარშემო პლანეტების მოძრაობის, ან თანამგზავრების პლანეტების გარშემო მოძრაობის შესასწავლად.

ზოგიერთი ამოცანა, რომელშიც განიხილება წერტილის მოძრაობა ცენტრალური ძალის მოქმედებით, ამოიხსნება ***ბინეს ფორმულის*** გამოყენებით, რომელიც ზოგადი სახით გამოსახავს ცენტრალურ F ძალას:

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right], \qquad (28.13)$$

სადაც c - წერტილის გაორმაგებული სექტორული სიჩქარეა; $\vec{r}$ - რადიუსია, გავლებული უძრავი ცენტრიდან მოძრავ წერტილამდის.

***ღერძის მიმართ მომენტის თეორემა*:**

რაიმე ღერძის მიმართ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის წარმოებული დროთი ტოლია წერტილზე მოქმედი ძალის მომენტისა იმავე ღერძის მიმართ:

$$\frac{dl_z}{dt} = M_z(\vec{F}). \qquad (28.14)$$

შედეგი 2. თუ წერტილზე მოქმედი ძალის მომენტი რაიმე ღერძის მიმართ ნულის ტოლია, მაშინ, იმავე ღერძის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის მომენტი რჩება მუდმივი სიდიდე.

ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანამიმდევრობა მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების თეორემის გამოყენების შემთხვევაში:

1. ნახაზზე ვაჩვენოთ მოძრავი წერტილი (სხეული) ნებისმიერ მდებარეობაში და მასზე მოქმედი ყველა აქტიური ძალა და ბმის რეაქციის ძალა, თუ წერტილი არათავისუფალია, და მოძრაობის რაოდენობის ვექტორები (ან ვექტორი).

2. განვსაზღვროთ ძალთა მომენტები ღერძის ან ცენტრის მიმართ იმის მიხედვით, რის გარშემო ბრუნავს წერტილი.

3. 1 ან 2 შედეგის შედეგის შესრულების შემთხვევაში ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი საწყის და საბოლოო მდებარეობაში და მათი გატოლებით, განვსაზღვროთ საძებნი სიდიდე.

4. ცენტრალური ძალის მოქმედებით წერტილის მოძრაობისას რაიმე ცენტრის გარშემო, გამოვიყენოთ ბინეს ფორმულა ან, მსოფლიო მიზიდულობის ფორმულები.

5. ჩავატაროთ გამოთვლა, გავითვალისწინოთ გამოსახულებაში შემავალი ყველა სიდიდის განზომილება.

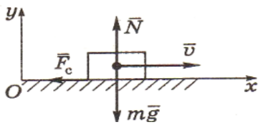
ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 28. 1

რკინიგზის მატარებელი მოძრაობს ჰორიზონტალური და წრფივი გზის უბანზე. დამუხრუჭებისას ვითარდება წინაღობის ძალა, რომელიც მატარებლის წონის 0,1 ტოლია. დამუხრუჭების დაწყების მომენტისათვის მატარებლის სიჩქარე იყო 20 მ/წმ. იპოვეთ დამუხრუჭების დრო და დამუხრუჭების გზა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოძრავი მატარებელი, როგორც ნივთიერი წერტილი, რომელზეც მოქმედებენ: სიმძიმის m$\vec{g}$ ძალა, წინაღობის $\vec{F}_c$ ძალა და ნორმალური $\vec{N}$ რეაქცია (იხ. ნახაზი). მივმართოთ x ღერძი მატარებლის მოძრაობის მიმართულებით.

მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემის თანახმად ჩავწეროთ განტოლება



$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \sum \vec{S}_k ,$$

ან x ღერძზე გეგმილებში

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum S_{kx} = -F_c t. \qquad (1)$$

ვინაიდან $t_0 = 0,$ ხოლო $v_{1x} = v_0$, $v_{2x} = x'$, ამიტომ (1) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$x' - v_0 = -\frac{F_c}{m}t = -\frac{0{,}1mgt}{m} = -0{,}1gt. \qquad (2)$$

აქედან მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$x' = v_0 - 0{,}1gt. \qquad (3)$$

ვაინტეგროთ (3) განტოლება:

$$x = v_0 t - 0{,}1g\frac{t^2}{2} + C.$$

ინტეგრების მუდმივს ვიპოვით საწყისი პირობებიდან: როცა

$t_0 = 0 \quad x_0 = 0; C = 0.$

მაშასადამე $$x = v_0 t - 0{,}1g\frac{t^2}{2}. \qquad (4)$$

ვიპოვოთ დამუხრუჭების დრო T. როცა $t = T \quad x' = 0,$ მაშინ (2) ფორმულის თანახმად

$$0 = v_0 - 0{,}1gT,$$

საიდანაც $$T = \frac{v_0}{0{,}1g} = \frac{20}{0{,}1 \cdot 9{,}8} = 20{,}4 \text{ (წმ).}$$

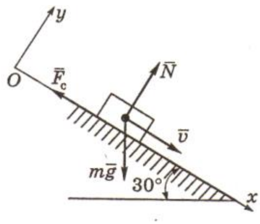
განვსაზღვროთ დამუხრუჭების გზა: როცა $t = T = 20{,}4$ წმ, $x = L$, მაშინ (4) ფორმულის თანახმად

$$L = T\left(v_0 - 0{,}1g\frac{T}{2}\right) = 20{,}4\left(20 - 0{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{20{,}4}{2}\right) = 204 \text{ (მ).}$$

პ ა ს უ ხ ი: 20,4 წმ; 204 მ.

ამოცანა 28. 2

ჰორიზონტისადმი $\alpha = 30^0$ კუთხით დახრილ არაგლუვ სიბრტყეზე საწყისი სიჩქარის გარეშე ეშვება მძიმე სხეული. განსაზღვრეთ, რა T დროში გაივლის სხეული $l = 39{,}2$ მ სიგრძის გზას, თუ ხახუნის კოეფიციენტი $f = 0{,}2$.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოძრავი სხეული, როგორც ნივთიერი წერტილი, რომელზეც მოქმედებენ: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, ხახუნის $\vec{F}_c$ ძალა და ნორმალური $\vec{N}$ რეაქცია. მივმართოთ x ღერძი სხეულის მოძრაობის მიმართულებით, ე. ი. ქვევით, დახრილი სიბრტყის გასწვრივ (იხ. ნახაზი).

მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემის თანახმად ჩავწეროთ განტოლება

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \sum \vec{S}_k ,$$

ან x ღერძზე გეგმილებში

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum S_{kx} = (mg\sin\alpha - F_c)t$$

ვინაიდან $t_0 = 0,$ ხოლო $v_{1x} = v_0 = 0$, $v_{2x} = x'$, ამიტომ განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$mx' = (mg\sin\alpha - F_c)t .$$

რადგანაც $F_c = Nf = fmg\cos\alpha$, ამიტომ

$$x' = \frac{mg}{m}(\sin\alpha - f\cos\alpha)t = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t\,.$$

ამ გამოსახულების ინტეგრებით მივიღებთ

$$x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + C\,.$$

ინტეგრების C მუდმივს ვიპოვით საწყისი პირობებიდან: როცა $t_0 = 0 \quad x_0 = 0; C = 0.$ მაშინ

$$x = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2}\,. \qquad (1)$$

ვიპოვოთ მოძრაობის დრო $T.$ როცა $t = T \quad x = l,$ მაშინ (1) ფორმულის თანახმად

$$l = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{T^2}{2}\,,$$

საიდანაც

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{2\cdot 39{,}2}{9{,}8(0{,}5 - 0{,}2\cdot 0{,}866)}} = 5 \quad (\text{წმ})$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $T = 5$ წმ.

ამოცანა 28. 3

$4\cdot 10^5$ კგ მასის მატარებელი ადის აღმართზე $i = tg\alpha = 0{,}006$, (სადაც α არის აღმართის კუთხე) 15 მ/წმ სიჩქარით. მატარებლის მოძრაობისას ხახუნის კოეფიციენტი (ჯამური წინააღმდეგობის კოეფიციენტი) 0,005 ტოლია. მატარებლის აღმართზე ასვლის დაწყებიდან 50 წმ-ს შემდეგ მისი სიჩქარე ეცემა 12,5 მ/წმ-დე. იპოვეთ თბომავლის წევის ძალა.

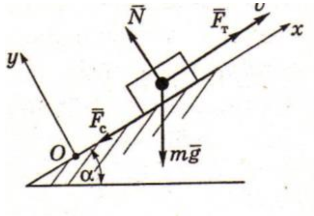
<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ მოძრავი მატარებელი, როგორც ნივთიერი წერტილი, რომელზეც მოქმედებენ: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, წინაღობის $\vec{F}_c$ ძალა, წევის $\vec{F}_T$ ძალა და ნორმალური $\vec{N}$ რეაქცია. მივმართოთ x ღერძი სხეულის მოძრაობის მიმართულებით. (იხ. ნახაზი).

მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემის თანახმად ჩავწეროთ განტოლება ვექტორული სახით

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \sum \vec{S}_k\,,$$

ან x ღერძზე გეგმილებში:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum S_{kx} = (F_T - F_c - mg\sin\alpha)T$$



ვინაიდან $v_{1x} = v_1$, $v_{2x} = v_2$, ამიტომ

$$F_T = \frac{m}{T}(v_2 - v_1) + F_c + mg\sin\alpha,$$

სადაც $F_c = Nf = fmg\cos\alpha$ ამიტომ

$$F_T = m\left[\frac{v_2 - v_1}{T} + g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right]. \qquad (1)$$

პირობის თანახმად $tg\alpha = 0{,}006$, ამიტომ $\alpha = 0{,}343^0$, ხოლო $\sin\alpha = 0{,}006$, მაშინ $\cos\alpha = 1$.

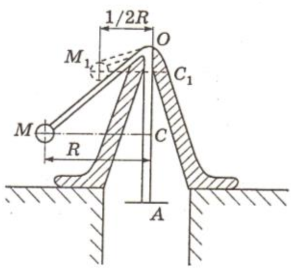
ჩავსვათ საწყისი მონაცემები (1) ფორმულაში და ვიპოვით

$$F_T = 4\cdot 10^5\left[\frac{12{,}5 - 15{,}0}{50} + 9{,}8(0{,}006 + 0{,}005\cdot 1)\right] = 23120 \text{ (ნ)}.$$

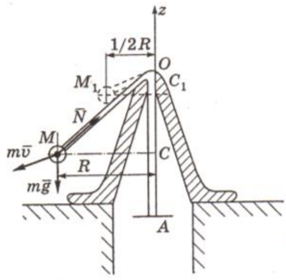
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 23 120 ნ

ამოცანა 28. 4

M საწონი მიბმულია უჭიმადი MOA ძაფის ბოლოზე, რომლის OA ნაწილი გატარებულია ვერტიკალური მილის შიგნით; საწონი მოძრაობს მილის ღერძის გარშემო MC=R რადიუსის წრეწირზე და აკეთებს 120 ბრუნს წუთში. მილში ძაფის OA ნაწილის ნელა შეწევით ამოკლებენ ძაფის გარე ნაწილს OM_1 სიგრძემდე, რომლის დროსაც საწონი აღწერს R/2 რადიუსის წრეწირს. წუთში რამდენ ბრუნს აკეთებს საწონი ამ წრეწირზე?



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ საწონის მოძრაობა. მასზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$ და ძაფის რეაქციის ძალა $\vec{N}$. გავავლოთ z ღერძი ვერტიკალურად ზემოთ (იხ. ნახაზი)



ჩავწეროთ განტოლება, რომელიც გამოსახავს ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების თეორემას z ღერძის მიმართ

$$\frac{dl_z}{dt} = \sum M,$$

რადგანაც $\sum M = 0,$ ამიტომ $l_z = const.$

საწყის მომენტში

$$l_z = mv \cdot MC = m\omega R \cdot R = m\frac{\pi n}{30}R^2,$$

ხოლო, საბოლოო მომენტში

$$l_{z1} = mv_1 \cdot M_1C_1 = m\omega_1\frac{R}{2}\cdot\frac{R}{2} = m\frac{\pi n_1}{30}\frac{R^2}{4}.$$

თუ $l_z = const,$ მაშინ $l_z = l_{z1}$, ამიტომ

$$m\frac{\pi n}{30}R^2 = m\frac{\pi n_1}{30}\frac{R^2}{4} \Rightarrow n_1 = 4n = 4\cdot 120 = 480 \text{ (ბრ/წთ)}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 480ბრ/წთ.

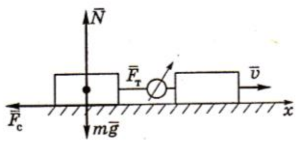
ამოცანა 28. 5

დატვირთული რკინიგზის შემადგენლობის მასის განსაზღვრისათვის თბომავალსა და ვაგონებს შორის დგამენ დინამომეტრს. 2 წუთის განმავლობაში დინამომეტრის საშუალო ჩვენება აღმოჩნდა 10^6 ნ. იმავე დროში შემადგენლობამ განავითარა 16 მ/წმ სიჩქარე (დასაწყისში შემადგენლობა უძრავად იდგა). განსაზღვრეთ შემადგენლობის მასა, თუ ხახუნის კოეფიციენტი $f = 0{,}02.$.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ მოძრავი შემადგენელობა, როგორც m მასის ნივთიერი წერტილი, რომელზეც მოქმედებს სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, წინაღობის ძალა $\vec{F}_c$, წევის ძალა $\vec{F}_T$ და ნორმალური რეაქცია $\vec{N}$. მივმართოთ x ღერძი შემადგენლობის მოძრაობის მხარეს (იხ. ნახაზი)

ჩავწეროთ განტოლება, რომელიც გამოსახავს ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემას:

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \sum\vec{S}_k,$$



ან x ღერძზე გეგმილებში

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum S_{kx} = (F_T - F_c)t.$$

ვინაიდან $v_{1x} = v_1 = 0,$ $v_{2x} = v_2$,

ამიტომ $mv_2 = F_Tt - F_ct$,

სადაც $F_c = fN = mgf$. მაშინ

$$mv_2 = F_Tt - mgft.$$

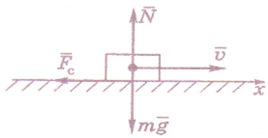
ქიდან $m = \dfrac{F_T t}{v_2 + gft} = \dfrac{120 \cdot 10^6}{16 + 9{,}8 \cdot 0{,}02 \cdot 120} = 3{,}036 \cdot 10^6$ (კგ).

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 3036 ტ.

ამოცანა 28. 6

როგორი უნდა იყოს დამუხრუჭებული ავტომანქანის ბორბლების გზასთან შეხების ხახუნის კოეფიციენტი f, თუ $v = 20$ მ/წმ სიჩქარით მოძრაობისას იგი გაჩერდა დამუხრუჭების დაწყებიდან 6 წმ-ს შემდეგ.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ მოძრავი ავტომანქანა, როგორც m მასის ნივთიერი წერტილი, რომელზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, წინაღობის ძალა $\vec{F}_c$ და ნორმალური რეაქცია $\vec{N}$. მივმართოთ x ღერძი ავტომანქანის მოძრაობის მხარეს (იხ. ნახაზი).



ჩავწეროთ განტოლება, რომელიც გამოსახავს ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემას:

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \sum \vec{S}_k ,$$

ან x ღერძზე გეგმილებში

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum S_{kx} = -F_c t .$$

ვინაიდან $v_{1x} = v_1,\ v_{2x} = v_2 = 0$, ხოლო $F_c = fN = mgf$, ამიტომ

$$v_1 = gft .$$

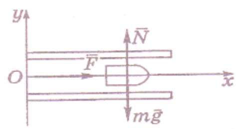
აქედან განისაზღვრება ხახუნის კოეფიციენტი

$$f = \frac{v_1}{gt} = \frac{20}{9{,}8 \cdot 6} = 0{,}34 .$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $f = 0{,}34$.

ამოცანა 28. 7

20 გრ მასის ტყვია შაშხანის ლულას გაივლის t=0,00095 წამში და ლულიდან გამოვარდება $v = 650$ მ/წმ სიჩქარით. განსაზღვრეთ ტყვიის გამომგდები გაზის იდეალური წნევის საშუალო სიდიდე, თუ ლულის არხის განიკვეთის ფართობი $\sigma = 150$ მმ².



ა მ ო ხ ს ნ ა. ტყვიაზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, დენთის გაზის წნევის ძალა $\vec{F}$ და ნორმალური რეაქცია $\vec{N}$ (იხ. ნახაზი).

ჩავწეროთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემა x ღერძზე გეგმილებში

$$mv - mv_0 = Ft. \qquad (1)$$

სადაც $v_0 = 0$, ხოლო $F_c = q\sigma$, q – გაზის წნევის საშუალო სიდიდე. მაშინ (1) განტოლება ასეთ სახეს იღებს

$$mv = q\sigma t,$$

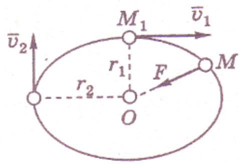
საიდანაც განისაზღვრება გაზის საშუალო წნევა

$$q = \frac{mv}{\sigma t} = \frac{0,020\cdot 650\cdot 10^6}{150\cdot 0,00095} = 9,12\cdot 10^4 \text{ (კნ/მ}^2\text{)}.$$

პ ა ს უ ხ ი: საშუალო წნევა $9,12\cdot 10^4$ ნ/მმ².

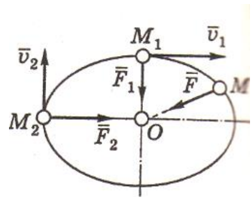
ამოცანა 28. 8

M წერტილი მოძრაობს უძრავი O ცენტრის გარშემო ამ ცენტრისკენ მიზიდულობის ძალის მოქმედებით. იპოვეთ ცენტრიდან უდიდეს მანძილით დაშორებული წერტილის სიჩქარე v_2, თუ მისგან ყველაზე ახლოს მდებარე წერტილის სიჩქარე $v_1 = 30$ სმ/წმ, ხოლო r_2 ხუთჯერ მეტია r_1-ზე.



ა მ ო ხ ს ნ ა. M წერტილის მოძრაობისას უძრავი ცენტრის გარშემო მასზე მოქმედებს მიზიდულობის ძალა $\vec{F}$. ნახაზზე ვაჩვენოთ წერტილი M_1 – ტრაექტორიაზე O ცენტრიდან ყველაზე ახლოს მდებარე წერტილი, და M_2 – მისგან უდიდეს მანძილზე დაშორებული წერტილი.

ჩავწეროთ განტოლება, რომელიც გამოსახავს ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების თეორემას O ცენტრის მიმართ:



$$\frac{dl_0}{dt} = M_0 = 0,$$

ამიტომ $l_0 = const.$ ე. ი.

$$l_{01} = l_{02}; \qquad (1)$$

$$l_{01} = mv_1r_1, \quad l_{02} = mv_2r_2. \qquad (2)$$

(2) გამოსახულება ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$v_1r_1 = v_2r_2,$$

სადაც $r_2 = 5r_1$.

აქედან განვსაზღვრავთ წერტილის სიჩქარეს M_2 მდებარეობაში:

$$v_2 = \frac{v_1r_1}{r_2} = \frac{30}{5} = 6 \text{ (სმ/წმ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $v_2 = 6$ სმ/წმ.

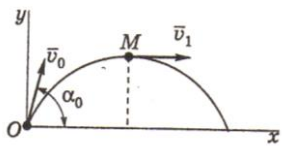
ამოცანა 28. 9

იპოვეთ ყუმბარაზე მოქმედი ძალების ტოლქმედის იმპულსი იმ დროში, როდესაც ყუმბარა საწყისი 0 მებარეობიდან გადადის უმაღლეს M მდებარეობაში. მცემულია: $v_0 = 500$ მ/წმ; $\alpha_0 = 60^0; v_1 = 200$ მ/წმ; ყუმბარის მასა 100 კგ.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. გამოვიყენოთ თეორემა, რომელიც გამოსახავს ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილებას x და y ღეძებზე გეგმილებში:

$$mv_x - mv_{0x} = S_x, \qquad (1)$$

$$mv_y - mv_{0y} = S_y. \qquad (2)$$



აქ $\quad v_x = v_1, \quad v_{0x} = v_0 \cos 60^0$;

$$v_y = 0, \quad v_{0y} = v_0 \sin 60^0.$$

შევიტანოთ ეს გამოსახულებები (1) და (2) განტოლებებში, მივიღებთ

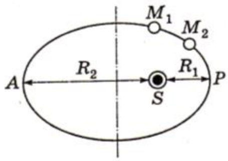
$$S_x = m(v_1 - v_0 \cos 60^0) = 100(200 - 500 \cdot 0{,}5) = -5000 \text{ (ნ•წმ).}$$

$$S_y = -mv_{0y} = -mv_0 \sin 60^0 = -100 \cdot 500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -43300 \text{ (ნ•წმ).}$$

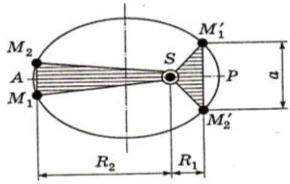
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: ტოლქმედის იმპულსის გეგმილებია $S_x = -5000$ნ•წმ;

$S_y = -43300$ნ•წმ.

ამოცანა 28. 10



ორი, M_1 და M_2 ასტეროიდი აღწერენ ერთი და იგივე ელიფსს, რომლის S ფოკუსში იმყოფება მზე. მათ შორის მანძილი იმდენად მცირეა, რომ ელიფსის M_1 M_2 რკალი შეიძლება ჩავთვალოთ წრფის მონაკვეთად. ცნობილია, რომ $M_1 M_2$ რკალის სიგრძე იყო a-ს ტოლი, როცა მისი შუაგული იმყოფებოდა P პერიჰელიუმში. თუ დავუშვებთ, რომ ასტეროიდები მოძრაობენ ტოილ სექტორული სიჩქარეებით, განსაზღვრეთ M_1 M_2 რკალის სიგრძე, როდესაც მისი შუაგული გაივლის A აფელიუმზე, თუ ცნობილია რომ $SP=R_1$ და $SA=R_2$.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ასტეროიდის სექტორული სიჩქარე პროპორციულია $M_1'SM_2'$ და M_1SM_2 სამკუთხედების ფართობებისა (იხ. ნახაზი). შესაბამისი ფართობების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{1}{2}R_1 a = \frac{1}{2}R_2(M_1{}^{\cup}M_2).$$

აქედან

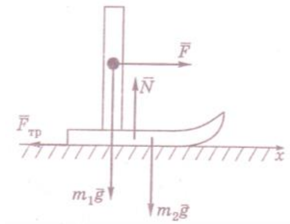
$$(M_1{}^{\cup}M_2) = \frac{aR_1}{R_2}$$

პ ა ს უ ხ ი: $M_1M_2 = \dfrac{R_1}{R_2}a$.

ამოცანა 28. 11

40 კგ მასის ბავშვი დგას სპორტული მარხილის თავკავზე, რომლის მასაა 20კგ და ყოველ წამში აკეთებს 20 ნ•წმ ინტენსივობის ბიძგს. იპოვეთ სიჩქარე, რომელსაც შეიძენს მარხილი 15 წამში, თუ ხახუნის კოეფიციენტი $f=0{,}01$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მარხილზე მოქმედებს ბავშვის სიმძიმის ძალა $m_1\vec{g}$, მარხილის სიმძიმის ძალა $m_2\vec{g}$, ხახუნის ძალა $\vec{F}_{Tp}$, ბიძგის ძალა $\vec{F}$ და საყრდენის ნორმალური რეაქცია $\vec{N}$ (იხ. ნახაზი).



ჩავწეროთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემა x ღერძზე გეგმილებში

$$mv - mv_0 = (F - F_{Tp})t.$$

სადაც $v_0 = 0$; $m = m_1 + m_2$; ბიძგის ძალა $F = \frac{S}{\Delta t} = \frac{20}{1} = 20$ ნ,

$F_{Tp} = fN$.

მაშინ

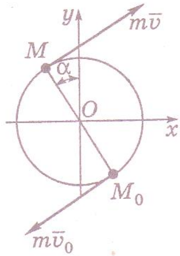
$$(m_1 + m_2)v = \left[F - f(m_1 g + m_2 g)\right]t,$$

საიდანაც ვიპოვით მარხილის სიჩქარეს

$$v = \frac{F - fg(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}t = \frac{20 - 0{,}01 \cdot 9{,}8 \cdot (40 + 20)}{40 + 20} \cdot 15 = 3{,}53 \text{ (მ/წმ).}$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $v = 3{,}53$ მ/წმ.

ამოცანა 28. 12



წერტილი ასრულებს თანაბარ მოძრაობას წრეწირზე $v = 0.2$ მ/წმ სიჩქარით და ერთ სრულ ბრუნს აკეთებს $T = 4$ წამში. იპოვეთ წერტილზე მოქმედი ძალების იმპულსი S, დროის ერთ ნახევარპერიოდში, თუ წერტილის მასა $m = 5$ კგ. განსაზღვრეთ F ძალის საშუალო მნიშვნელობა.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. გამოვიყენოთ თეორემა ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების შესახებ და ჩავწეროთ ძალის იმპულსი x და y ღერძებზე გეგმილებში:

$$S_x = mv_x - mv_{0x},$$

$$S_y = mv_y - mv_{0y}.$$

ვინაიდან $v_0 = v$, ამიტომ

$$S_x = m(v\cos\alpha + v\cos\alpha) = 2mv\cos\alpha,$$

$$S_y = m(v\sin\alpha + v\sin\alpha) = 2mv\sin\alpha.$$

მაშინ

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = 2mv\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 2mv = 2 \cdot 5 \cdot 0{,}2 = 2 \text{ (ნ•წმ).}$$

თუ ჩავთვლით, რომ $\vec{F}$ ძალის საშუალო მნიშვნელობა მუდმივია, მისი გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე იქნებიან

$$F_x = \frac{S_x}{t} = \frac{2mv\cos\alpha}{t},$$

$$F_y = \frac{S_y}{t} = \frac{2mv\sin\alpha}{t}.$$

მაშინ

$$F=\sqrt{F_x^{\,2}+F_y^{\,2}}=\frac{2mv}{t}\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{2mv}{t}=\frac{2\cdot 5\cdot 0{,}2}{2}=1\ (\text{ნ}).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $S=2$ ნ•წმ; $F=1$ ნ.

ამოცანა 28. 13

ორი მათემატიკური ქანქარა, რომლებიც დაკიდებულნი არიან l_1 და $l_2\ (l_1>l_2)$ სიგრძის ძაფებზე, ასრულებენ ერთნაირი ამპლიტუდების რხევებს. ორივე ქანქარამ თავისი უდიდესი გადახრის მდგომარეობიდან ერთდროულად დაიწყო მოძრაობა ერთი მიმართულებით. იპოვეთ პირობა, რომელიც უნდა დააკმაყოფილონ l_1 და l_2 სიგრძემ იმისათვის, რომ დროის გარკვეული შუალედის შემდეგ ქანქარები ერთდროულად დაუბრუნდნენ თავის წონასწორობის მდგომარეობას. განსაზღვრეთ T დროის უმცირესი შუალედი.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ქანქარებს თავის საწყის მდგომარეობაში დაბრუნება შეუძლიათ იმ პირობით, როცა ტოლია მათი მთელი ჯერადი პერიოდები:

$$T=kT_2=nT_1.$$

ე. ი. როცა

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{k}{n}. \qquad (1)$$

მათემატიკური ქანქარების პეიოდებია

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}},\quad T_2=2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}. \qquad (2)$$

(2) ფორმულის გათვალისწინებით (1) ასეთ სახეს მიიღებს

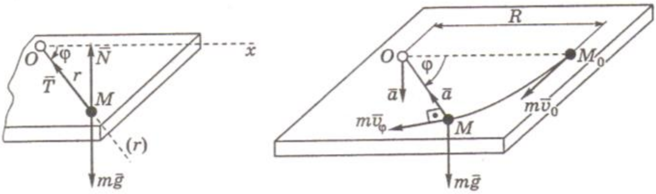
$$\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}=\frac{k}{n}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}=\frac{k}{n}$, სადაც k,n - მთელი რიცხვებია და წილადი $\frac{k}{n}$ უკვეცია; $T=kT_2=nT_1$.

ამოცანა 28. 14

უჭიმად ძაფზე მიბმული m მასის ბურთულა სრიალებს გლუვ

ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე; ძაფის მეორე ბოლოს მუდმივი a სიჩქარით ეწევიან სიბრტყეში გაკეთებულ ხვრელში. განსაზღვრეთ ბურთულას მოძრაობა და ძაფის T დაჭიმულობა, თუ ცნობილია, რომ საწყის მომენტში ძაფი მდებარეობს წრფეზე. მანძილი ბურთულასა და ხვრელს შორის R-ის ტოლია, ხოლო ბურთულას საწყისი სიჩქარის გეგმილი ძაფის მიმართულების მართობზე v_0-ს ტოლია.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. M წერტილში ბურთულაზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, რომელიც გაწონასწორებულია სიბრტყის ნორმალური $\vec{N}$ რეაქციით, და ძაფის დაჭიმულობის ძალა $\vec{T}$, რომელიც გადის O წერტილში (ნახ. 1). ეს ნიშნავს, რომ ყველა მოქმედი ძალის მომენტის ჯამი O წერტილის მიმართ ნულის ტოლია და მოძრაობის რაოდენობის მომენტი ამ წერტილის მიმართ, მომენტთა თეორემის მე-2 შედეგის თანახმად არ იცვლება. ამიტომ (იხ. ნახ. 2)

$$l_{01} = l_{02}\,,$$

სადაც l_{01}, l_{02} - ბურთულას მოძრაობის რაოდენობის მომენტია O ცენტრის მიმართ შესაბამისად M_0 და M წერტილებში: $l_{01} = mv_0R\,, l_{02} = mv_\varphi r$.

მაშასადამე

$$mv_0R = mv_\varphi r\,.$$

აქედან
$$v_\varphi = \frac{v_0R}{r}\,, \tag{1}$$

სადაც v_φ - სიჩქარის ტრანსვერსალური (განივი) მდგენელია..=

ძაფის $0M = r$ (ნახ. 1) სიგრძე დროის განმავლობაში იცვლება. რადგანაც ბურთულას სიჩქარის გეგმილი v_r რადიანულ (r) მიმართულებაზე ტოლია ხვრელში ძაფის ჩაწევის სიჩქარისა, ამიტომ

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -a \Rightarrow \int_R^r dr = -a\int_0^t dt \Rightarrow r\Big|_R^r = -at\Big|_0^t \Rightarrow r = R - at\,. \tag{2}$$

ჩავწეროთ დინამიკის ძირითადი განტოლება რადიანულ მიმართულებაზე გეგმილებში

$$m(r'' - r\varphi'^2) = -T,$$

სადაც $\varphi' = \dfrac{v_\varphi}{r} = \dfrac{v_0 R}{r^2}$.

თუ ვისარგებლებთ (1) და (2) გამოსახულებებით, იმის გათვალისწინებით, რომ $r'' = 0$, ვიპოვით ძაფის დაჭიმულობას

$$T = mr\varphi'^2 = \frac{m(R-at)v_0^2R^2}{(R-at)^4} = \frac{mv_0^2R^2}{(R-at)^3}$$

და ბურთულას მოძრაობის განტოლებას

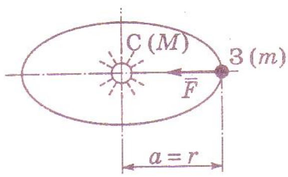
$$\varphi = v_0 R\int_0^t \frac{dt}{(R-at)^2} = -\frac{v_0R}{a}\int_0^t \frac{d(R-at)}{(R-at)^2} = \frac{v_0R}{a}\left.\frac{1}{R-at}\right|_0^t =$$

$$= \frac{v_0R}{a}\left(\frac{1}{R-at} - \frac{1}{R}\right) = \frac{v_0 t}{R-at}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: პოლარულ კოორდინატებში (თუ მივიღებთ ხვრელს კოორდინატთა სათავედ და კუთხე φ-ს ნულის ტოლად):

$$r = R - at; \quad \varphi = \frac{v_0 t}{R-at}; \quad T = \frac{mv_0^2R^2}{(R-at)^3}.$$

ამოცანა 28. 15



განსაზღვრეთ მზის მასა M, თუ გვაქვს მონაცემები: დედამიწის რადიუსი $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ მ, საშუალო სიმკვრივე 5,5 ტ/მ³, დედამიწის ორბიტის დიდი ნახევარღერძი $a = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ მ, დედამიწის მზის გარშემოვლის დრო $T = 365{,}25$ დღე-ღამე. მსოფლიოს მიზიდულობის ძალას ორ მასას შორის, რომელთა წონებია 1 კგ, 1მ მანძილზე ვთვლით $\dfrac{gR^2}{m}$ ნ-ს ტოლს, სადაც m – დედამიწის მასაა; კეპლერის კანონიდან

გამომდინარეობს, რომ მზის მიერ დედამიწის მიზიდულობის ძალა $\dfrac{4\pi^2 a^3 m}{T^2 r^2}$-ს ტოლია, სადაც r - დედამიწიდან მზემდე მანძილია.

<u>**ა მ ო ხ ს ნ ა**</u>. იმ მომენტში, როცა დედამიწა იმყოფება მზიდან დიდი ნახევარღერძის მანძილზე (იხ. ნახაზი), კეპლერის კანონის თანახმად მზის მიერ დედამიწის მიზიდულობის ძალა

$$F = \frac{4\pi^2 am}{T^2}, \qquad (1)$$

სადაც $m = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho$ - დედამიწის მასაა, ρ - საშუალო სიმკვრივე.

ნიუტონის ფორმულის თანახმად დედამიწასა და მზეს შორის მიზიდულობის ძალა

$$F = \frac{R^2 g}{m}\frac{Mm}{a^2}. \qquad (2)$$

(1) და (2) ფორმულების მარჯვენა მხარეების გატოლებით მივიღებთ

$$\frac{4\pi^2 am}{T^2} = \frac{R^2 g}{m}\frac{Mm}{a^2},$$

საიდანაც მზის მასა

$$M = \frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2 R^2 g} = \frac{16\pi^3 a^3 R\rho}{3T^2 g} =$$

$$= \frac{16\cdot 3{,}14^3\cdot(1{,}49\cdot 10^{11})^3\cdot 6{,}37\cdot 10^6\cdot 5{,}5\cdot 10^3}{3\cdot(365{,}25\cdot 24\cdot 3600)^2\cdot 9{,}8} = 1{,}966\cdot 10^{30} \text{ (კგ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $M = 1{,}966\cdot 10^{30}$ კგ.

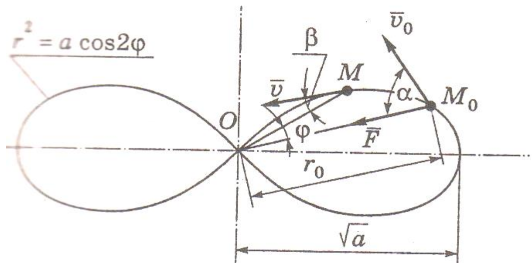
ამოცანა 28. 16

m მასის წერტილი, რომელზეც მოქმედებს ცენტრალური $\vec{F}$ ძალა, აღწერს ლემნისკატას $r^2 = a\cos 2\varphi$, სადაც a მუდმივი სიდიდეა, r - მანძილი წერტილიდან ძალთა ცენტრამდის; საწყის მომენტში $r = r_0$, წერტილის სიჩქარე v_0-ს ტოლია და ადგენს α კუთხეს წრფესთან, რომელიც აერთებს წერტილს ძალთა ცენტრთან. განსაზღვრეთ $\vec{F}$ ძალის სიდიდე, თუ ვიცით, რომ ის დამოკიდებულია მხოლოდ r მანძილზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ ბინეს ფორმულით, ვინაიდან წერტილი მოძრაობს ცენტრალური $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი):

$$F=-\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\varphi^2}+\frac{1}{r}\right), \qquad (1)$$

სადაც $c=r^2\varphi'$ - წერტილის გაორკეცებული სექტორული სიჩქარეა.



რადგანაც წერტილზე მოქმედებს ცენტრალური ძალა $\vec{F}$, ამიტომ მის მიერ შექმნილი მომენტი O ცენტრის მიმართ ნულის ტოლია და მაშინ, მოძრაობის რაოდენობის მომენტი (კოორდინატთა პოლარულ სისტემაში – სექტორული სიჩქარე) ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას, ე. ი.

$$mrv\sin\beta=mr_0v_0\sin\alpha \Rightarrow rv\sin\beta=r_0v_0\sin\alpha .$$

ვინაიდან

$$rv\sin\beta=rv_\varphi=r\cdot r\varphi'=r^2\varphi',$$

ამიტომ

$$c=r^2\varphi'=r_0v_0\sin\alpha . \qquad (2)$$

შემდეგ, ვინაიდან $r=\sqrt{a}(\cos2\varphi)^{1/2}$, ვიპოვით

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{\cos2\varphi}} \Rightarrow \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}=\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sin2\varphi}{(\cos2\varphi)^{3/2}};$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{2(\cos2\varphi)^{5/2}+3\sin^2 2\varphi(\cos2\varphi)^{1/2}}{\cos^3 2\varphi}=\frac{1}{r}(2+3tg^2 2\varphi)\cdot \qquad (3)$$

მიზიდულობის F ძალას განვსაზღვრავთ (1) ფორმულით, სადაც გათვალისწინებულია (2), (3) გამოსახულებები და $a^2\cos^2 2\varphi = r^4$ ტოლობა:

$$F = \frac{mr_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{r^3}(2+3tg^2 2\varphi+1) = \frac{3mr_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{r^3}(1+tg^2 2\varphi) =$$

$$= \frac{3mr_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{r^3\cos^2 2\varphi} = \frac{3ma^2}{r^7} r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha \cdot$$

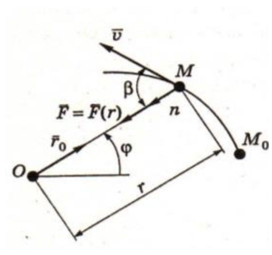
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: მიზიდულობის ძალა $F = \dfrac{3ma^2}{r^7} r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha \cdot$

ამოცანა 28. 17

m მასის M წერტილი მოძრაობს უძრავი 0 ცენტრის მახლობლობაში F ძალის გავლენით, რომელიც გამოდის ამ ცენტრიდან და დამოკიდებულია $M0 = r$ მანძილზე. ვიცით, რომ წერტილის სიჩქარე $v = a/r$, სადაც a - მუდმივი სიდიდეა. იპოვეთ $\vec{F}$ ძალის სიდიდე და წერტილის ტრაექტორია.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ვინაიდან წერტილი მოძრაობს ცენტრალური F ძალის მოქმედებით, ამიტომ

$$M_0(F) = 0 \Rightarrow l_0 = const.$$



მაშინ, მოძრაობის რაოდენობის მომენტი M_0 მდებარეობაში

$$mv_\varphi \cdot r = mr\cdot r\varphi' = mr^2\varphi' = mh = const.$$

აქედან $$\varphi' = \frac{h}{r^2}, \qquad (1)$$

სადაც h - გაორმაგებული სექტორული სიჩქარეა. მაშინ

$$v^2 = r'^2 + r^2\varphi'^2 .$$

ვინაიდან, პირობის თანახმად $v = \dfrac{a}{r}$, ამიტომ

$$r'^2 + r^2\varphi'^2 = \frac{a^2}{r^2}. \qquad (2)$$

(1) ტოლობის გათვალიწინებით (2) ფორმულიდან მივიღებთ

$$r'^2 = \frac{a^2 - h^2}{r^2}. \qquad (3)$$

(3) გამოსახულება გავაწარმოოთ დროთი:

$$2r'r'' = 2\frac{h^2 - a^2}{r^3} \cdot r',$$

აქედან $$r'' = \frac{h^2 - a^2}{r^3}. \qquad (4)$$

დინამიკის ძირითად კანონს $\vec{r}_0$ რადიუს-ვექტორისა და n ნორმალის მიმართულებაზე გეგმილებში ასეთი სახე აქვს:

$$F_{r_0} = m(r'' - r\varphi'^2) \Rightarrow F = F_n = m(r\varphi'^2 - r'').$$

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვავთ (1) და (4) გამოსახულებებს, ვიპოვით მიზიდულობის ძალას:

$$F = m\left(r\frac{h^2}{r^4} - \frac{h^2 - a^2}{r^3}\right) = \frac{ma^2}{r^3}.$$

M წერტილის ტრაექტორიის განსაზღვრისათვის (3) განტოლებიდან

$$r' = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{r}.$$

ანუ, იმის გათვალისწინებით, რომ $r' = \dfrac{dr}{dt}$,

$$rdr = \sqrt{a^2 - h^2}\,dt.$$

ვინაიდან $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{dt}$, ამიტომ (1) გამოსახულებიდან

$$dt = \frac{r^2}{h}d\varphi. \qquad \text{მაშინ}$$

$$\frac{h}{\sqrt{a^2 - h^2}}rdr = r^2 d\varphi \Rightarrow \frac{h}{\sqrt{a^2 - h^2}}\int\frac{dr}{r} = \int d\varphi \Rightarrow \frac{h}{\sqrt{a^2 - h^2}}\ln r = \varphi,$$

- ეს არის ლოგარითმული სპირალი.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: მიზიდულობის ძალა $F = ma^2 / r^3$;

ტრაექტორია - ლოგარითმული სპირალი.

ამოცანა 28. 18

განსაზღვრეთ 1 კგ მასის წერტილის მოძრაობა მიზიდულობის ცენტრალური ძალის მოქმედებით, რომელიც მიზიდულობის ცენტრიდან წერტილის დაშორების მანძილის კუბის უკუპროპორციულია, თუ ცნობილია, რომ 1 მ მანძილზე ძალა 1 ნ-ს ტოლია. საწყის მომენტში მიზიდულობის

ცენტრიდან წერტილი დაშორებულია 2 მ მანძილით, სიჩქარე $v_0 = 0{,}5$ მ/წმ და ცენტრიდან წერტილის მიმართულებით გავლებულ წრფესთან ადგენს 45^0 კუთხეს.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ვინაიდან წერტილი მოძრაობს მიზიდულობის ცენტრალური $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით, ვისარგებლოთ ბინეს ფორმულით,:

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right),$$

ამოცანის მოცემულობის გათვალისწინებით ჩავწეროთ

$$-\frac{1}{r^3} = -\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right).$$

აქედან

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{rc^2}, \qquad (1)$$

სადაც c - წერტილის გაორკეცებული სექტორული სიჩქარეა, $c = r^2\varphi' = const$.

დროის საწყის მომენტში, როცა $r = 2$

$$\varphi' = \frac{v_0 \cos 45^0}{r} = \frac{0{,}5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ (რად/წმ)}.$$

$$c = 2^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

მაშინ, (1) დიფერენციალური განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} = 0.$$

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ვეძებთ შემდეგი სახით

$$\frac{1}{r} = Ae^{\varphi} + Be^{-\varphi}, \qquad (2)$$

სადაც A და B - ნებისმიერი მუდმივებია.

გავაწარმოვოთ ეს გამოსახულება დროთი, მივიღებთ

$$\frac{r'}{r^2} = (Ae^{\varphi} - Be^{-\varphi})\varphi' . \qquad (3)$$

A და B მუდმივებს ვიპოვით (2) და (3) ფორმულებიდან საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $\varphi = 0 \quad r = 0, \quad \varphi' = \frac{\sqrt{2}}{8}$,

$r' = v_0 \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, მაშინ $A + B = \frac{1}{2}$, $A - B = -\frac{1}{2}$, აქედან $A = 0, B = \frac{1}{2}$.

A და B-ს მნიშვნელობები ჩავსვათ (2) გამოსახულებაში:

$$\frac{1}{r} = \frac{e^{-\varphi}}{2},$$

ანუ $r = 2e^{\varphi}$ - წერტილის ტრაექტორიის განტოლებაა.

სექტორული სიჩქარის მუდმივობის პირობიდან, როცა $r = 2e^{\varphi}$, მივიღებთ, რომ

$$4e^{2\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

აქედან, ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ

$$2e^{2\varphi} = \frac{t}{\sqrt{2}} + C_1 . \qquad (4)$$

საწყისი პირობებიდან: $t = 0 \quad \varphi = 0$, ვიპოვით ინტეგრების $C_1 = 2$ მუდმივს. C_1-ს მნიშვნელობის ჩასმით (4) ფორმულაში და იმის გათვალისწინებით, რომ

$$e^{2\varphi} = \frac{r^2}{4},$$

საბოლოოდ მივიღებთ $r^2 = 4 + t\sqrt{2}$.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $r^2 = 4 + t\sqrt{2}$; $\quad r = 2e^{\varphi}$.

ამოცანა 28. 19

1 კგ მასის M ნაწილაკი მიიზიდება უძრავი O ცენტრისაკენ ძალით, რომელიც მათ შორის მანძილის მეხუთე ხარისხის უკუპროპორციულია. ეს

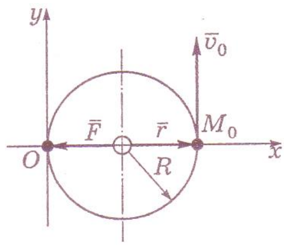
არის 8 ნ ტოლი ძალა 1 მ მანძილზე. საწყის მომენტში მიზიდულობის ცენტრიდან ნაწილაკი დაშორებულია $OM_0=2$ მ მანძილით და აქვს OM_0 –ს მართობული და 0,5 მ/წმ სიჩქარე. განსაზღვრეთ ნაწილაკის ტრაექტორია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვინაიდან წერტილი მოძრაობს მიზიდულობის ცენტრალური $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით ვისარგებლოთ ბინეს ფორმულით,:

$$F=-\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\varphi^2}+\frac{1}{r}\right).$$

ამოცანის მოცემულობის გათვალისწინებით ჩავწეროთ:

$$F=\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\varphi^2}+\frac{1}{r}\right)=\frac{8}{r^5}.$$



რადგანაც გაორკეცებული სექტორული სიჩქარე

$$c=r^2\varphi'=4\cdot\frac{0,5}{2}=1,$$

სადაც $\varphi'=\dfrac{v_0}{r}$.

მივიჩნიოთ, რომ $p=\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{1}{r}\right)$. ვაინტეგროთ

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}=-\frac{r'}{r^2\varphi'},$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{dp}{d\varphi}=p\frac{dp}{d\left(\frac{1}{r}\right)},$$

$$p\frac{dp}{d\left(\frac{1}{r}\right)}=\frac{8}{r^3}=\frac{1}{r},$$

$$\frac{p^2}{2}=\frac{2}{r^4}-\frac{1}{2r^2}+C_1. \qquad (1)$$

ინტეგრირების C_1 მუდმივს ვიპოვით საწყისი პირობებიდან: $t = 0 \quad \varphi = 0$, $r = 2, r' = 0, \varphi' = \dfrac{0{,}5}{2} = \dfrac{1}{4}$, მაშინ

$$0 = \frac{2}{16} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + C_1 \Rightarrow C_1 = 0,$$

.

(1) ფორმულიდან

$$p = \sqrt{\frac{4}{r^4} - \frac{1}{r^2}},$$

მაშინ

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{r^2}\sqrt{4 - r^2}.$$

ამ გამოსახულებაში განვაცალოთ ცვლადები და გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{dr}{\sqrt{4 - r^2}} = d\varphi,$$

ინტეგრების შედეგად

$$\arccos\frac{r}{2} = \varphi + C_2.$$

ინტეგრების C_2 მუდმივს ვიპოვით საწყისი პირობებიდან: $\varphi = 0$, $r = 2$; $C_2 = \arccos 1 = 0$.

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა (2) ფორმულაში, მივიღებთ

$$r = 2\cos\varphi.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: 1 მ რადიუსის წრეწირი, რომლის ცენტრი მდებარეობს OM_0 ხაზზე მიზიდულობის ცენტრიდან 1 მ მანძილზე.

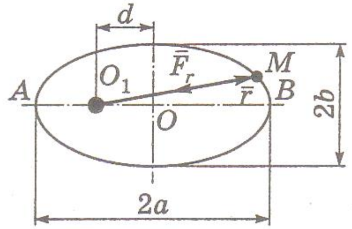
ამოცანა 28. 20

0,2 კგ მასის M წერტილი მოძრაობს მიზიდულობის ძალით უძრავი 0 ცენტრისკენ ნიუტონის მიზიდულობის კანონით და 50 წმ-ს განმავლობაში აღწერს სრულ ელიფსს 0,1 მ და 0,08 მ ნახევარღერძებით. განსაზღვრეთ ამ მოძრაობისას მიზიდულობის $\vec{F}$ ძალის უდიდესი და უმცირესი სიდიდე.

<u>**ა მ ო ხ ს ნ ა**</u>. ამოცანის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ ბინეს ფორმულით შემდეგი სახით

$$F = -\frac{mc^2}{p}\left(\frac{1}{r^2}\right), \qquad (1)$$

სადაც c – წერტილის გაორმაგებული სექტორული სიჩქარეა; F_r -მიზიდულობის ძალა; $p = \frac{b^2}{a}$, სადაც b, a - ელიფსის შესაბამისი მცირე და დიდი ნახევარღერძებია; r - მანძილი ელიფსის ფოკუსიდან M წერტილამდის.



ნახაზიდან $0_1 0 = d = \sqrt{a^2 - b^2}$.

პირობის თანახმად $a = 0{,}1$მ, $b = 0{,}08$მ; მაშინ $d = 0{,}06$მ, $0_1 A = 0{,}04$მ, $0_1 B = 0{,}16$ მ.

განვსაზღვროთ M წერტილის გაორმაგებული სექტორული სიჩქარე

$$c = \frac{2\pi ab}{T},$$

სადაც T – მოძრაობის პერიოდია.

ჩავსვათ მიღებული სიდიდეები (1) ფპრმულაში, მოვიღებთ

$$F_{\max} = \frac{c^2 ma}{b^2((a-d)^2} = \left(\frac{2\pi ab}{T}\right)^2 \frac{ma}{b^2(a-d)^2} = \frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2(a-d)^2} =$$

$$= \frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}2}{50^2(0{,}10-0{,}06)^2} = 1{,}97\cdot 10^{-3} \text{ (ნ).}$$

$$F_{\min} = \frac{4\pi^2 a^3 m}{T^2(a+d)^2} = \frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}2}{50^2(0{,}10+0{,}06)^2} = 1{,}23\cdot 10^{-4} \text{ (ნ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $F_{\max} = 1{,}97\cdot 10^{-3}$ ნ; $F_{\min} = 1{,}23\cdot 10^{-4}$ ნ.

ამოცანა 28. 21

მათემატიკურ ქანქარას, რომლის თითოეული გაქანება გრძელდება ერთი წამი, ეწოდება წამიერი ქანქარა და გამოიყენება დროის ასათვლელად. იპოვეთ ამ ქანქარის l სიგრძე, თუ ჩათვლით, რომ სიმძიმის ძალის აჩქარება 9,81 სმ/წმ²-ს ტოლია. რა დროს აჩვენებს ეს ქანქარა მთვარეზე, სადაც სიმძიმის ძალის აჩქარება 6-ჯერ ნაკლებია ვიდრე დედამიწაზე? რა l_1 სიგრძე უნდა ჰქონდეს მთვარის წამიერ ქანქარას?

ა მ ო ხ ს ნ ა. მათემატიკური ქანქარის ერთ გაქანებას შეესაბამება ნახევარპერიოდი

$$\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1,$$

აქედან
$$l = \frac{g}{\pi^2} = \frac{981}{3{,}14^2} = 99{,}4 \text{ (სმ.)}.$$

მთვარეზე ნახევარპერიოდი

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{6l}{g}} = \sqrt{6} = 2{,}45 \text{ (წმ)},$$

ხოლო ქანქარის სიგრძე უნდა იყოს 6-ჯერ ნაკლები, ე.ი.

$$l_1 = \frac{l}{6} = \frac{99{,}4}{6} = 16{,}56 \text{ (სმ)}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $l = 99{,}4$ სმ; $T_1 = 2{,}45$ წმ; $l_1 = 16{,}56$ სმ.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 28. 22

დედამიწის ზოგიერთ წერტილში წამიერი მათემატიკური ქანქარა დროს სწორად აღრიცხავს. შემდგომ, სხვა ადგილას გადატანისას, ის ჩამორჩება დღე-ღამეში T წამით. განსაზღვრეთ წამიერი ქანქარის სიმძიმის ძალის აჩქარება ახალ მდებარეობაში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. პირობის თანახმად დროის სწორად აღრიცვისას მათემატიკური ქანქარის ნახევარპერიოდი

$$T_0 = \pi\sqrt{\frac{l}{g_0}} = 1 \text{ წმ},$$

აქედან
$$l = \frac{g_0}{\pi^2}.$$

დედამიწის სხვა წერტილში ქანქარის ჩამორჩენისას

$$T_0 + \frac{T}{24 \cdot 3600} = \pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}, \tag{1}$$

სადაც g_1 - სხვა წერტილში სიმძიმის ძალის აჩქარებაა.

გარდავქმნათ (1) ფორმულა:

$$T_0 + \frac{T}{86400} = \sqrt{\frac{g_0}{g_1}}.$$

ვინაიდან პირობის თანახმად $T_0 = 1$, ამიტომ

$$1+\frac{T}{86400}=\sqrt{\frac{g_0}{g_1}}\,.$$

აქედან

$$\sqrt{g_1}=\sqrt{g_0}\,\frac{1}{1+\frac{T}{86400}}=\sqrt{g_0}\left(1-\frac{T}{86400}+\frac{T^2}{86400^2}-\ldots\right)\approx\sqrt{g_0}\left(1-\frac{T}{86400}\right).$$

ვინაიდან მცირეა $\frac{T^2}{86400^2}$ გამოსახულება, შემოვისაზღვროთ $\frac{1}{1+\frac{T}{86400}}$ ფუნქციის ხარისხოვან მწკრივად გაშლისას პირველი ორი წევრით. მაშინ $g_1=g_0\left(1-\frac{T}{86400}\right)^2$.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $g_1=g_0\left(1-\frac{T}{86400}\right)^2$, აქ g_0 - სიმძიმის ძალის აჩქარებაა ქანქარას პირველსაწყის მდებარეობაში.

29. მუშაობა და სიმძლავრე

მეთოდური მითითებანი ამოცანების ამოსახსნელად

ძალის მუშაობა არის თეორიული მექანიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ცნება და თავის მხრივ წარმოადგენს ძალის ქმედების ერთ ისეთ მახასიათებელს, რომელსაც იგი იწვევს სხეულზე მისი რაიმე გადაადგილებისას. ამასთანავე, მუშაობა ახასიათებს ძალის იმ მოქმედებას, რომელიც განისაზღვრება მოძრავი წერტილის სიჩქარის სიდიდის ცვლილებით.

საზოგადოდ, ანსხვავებენ ძალის ელემენტარულ მუშაობას და ძალის მუშაობას სასრულ გადაადგილებაზე.

ძალის ელემენტარული მუშაობა – ეს არის უსასრულოდ მცირე სკალარული სიდიდე, რომელიც ტოლია ძალის ვექტორისა და ამ ძალის მოდების წერტილის უსასრულოდ მცირე გადაადგილების ვექტორის სკალარული ნამრავლისა:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad , \qquad (29.\ 1)$$

სადაც $d\vec{r}$ - ძალის მოდების წერტილის რადიუს-ვექტორის ნაზრდია იმ ჰოდოგრაფზე, რომელიც ამ წერტილის ტრაექტორიას წარმოადგენს.

წერტილის ელემენტარული ds გადაადგილება ტრაექტორიაზე $\left|d\vec{r}\right|$ -ს ტოლია მათი სიმცირის გამო, ამიტომ შეიძლება ჩავწეროთ

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F ds \cos(\vec{F}^{\frown}, \tau) \quad . \qquad (29.\ 2)$$

ნამრავლი $F\cos(\vec{F}^{\frown}, \tau)$ წარმოადგენს ძალის გეგმილს წერტილის გადაადგილების მიმართულებაზე (მრუდწირული ტრაექტორიისას ამ ტრაექტორიის მხებ ღერძზე, ე. ი. τ ღერძზე). მაშინ

$$dA = F_\tau ds . \qquad (29.\ 3)$$

მაშასადამე, ძალის ელემენტარული მუშაობა ტოლია ძალის სიდიდის ნამრავლისა ელემენტარულ ds გადაადგილებაზე და იმ კუთხის კოსინუსზე, რომელსაც ადგენს ძალის მიმართულება გადაადგილების მიმართულებასთან [იხ. ფორმულა (29. 2)], ან ტოლია გადაადგილების მიმართულებაზე ძალის გეგმილის ნამრავლისა ელემენტარულ ds გადაადგილებაზე [იხ. ფორმულა (29. 3).

ამასთანავე, თუ

$$dA > 0, \text{ მაშინ } \quad \angle(\vec{F}, \tau) < \frac{\pi}{2} ;$$

$$dA = 0, \text{ მაშინ } \quad \angle(\vec{F}, \tau) = \frac{\pi}{2} ;$$

$$dA < 0, \text{ მაშინ } \quad \angle(\vec{F}, \tau) > \frac{\pi}{2}.$$

თუ (29. 1) ფორმულაში $\vec{F}$ ძალასა და $d\vec{r}$ გადაადგილებას წარმოვადგენთ დეკარტის კოორდინატთა ღერძებზე მათ გეგმილებში, ე. ი.

$$\vec{F} = \vec{i} F_x + \vec{j} F_y + \vec{k} F_z,$$

$$d\vec{r} = \vec{i}\, dx + \vec{j}\, dy + \vec{k}\, dz,$$

მაშინ, ძალის ელემენტარული მუშაობა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ

, $$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (29.\ 4)$$

მას ეწოდება ***ელემენტარული მუშაობის ანალიზური გამოსახვა.***

თუ ძალები მოდებულია მყარ სხეულზე, რომელიც ასრულებს წარმტან მოძრაობას, მაშინ ყველა ძალის ელემენტარული მუშაობა

$$dA = \vec{R}^e \cdot d\vec{r} = R^e ds \cos(\vec{R}^{\frown}, \tau), \qquad ,$$

ანუ

$$dA = R^e_\tau ds \qquad , \qquad (29.\ 5)$$

სადაც $\vec{R}^e$ - გარე ძალების მთავარი (ნაკრები) ვექტორია, $\vec{R}^e = \sum \vec{F}^e_k$; $\vec{R}^e = \sum \vec{F}^e_{k\tau}$ - მთავარი (ნაკრები) ვექტორის გეგმილი გადაადგილების მიმართულებაზე, რომელიც ამ მიმართულებაზე ყველა ძალის გეგმილების ჯამის ტოლია.

უძრავი ღერძის (მაგალითად, z ღერძის) გარშემო ბრუნვითი მოძრაობისას

$$dA = M^e_z d\varphi = \sum M_z(\vec{F}^e_k) d\varphi \qquad (29.\ 6)$$

სადაც $M^e_z = \sum M_z(\vec{F}^e_k)$ - ყველა გარეძალის მთავარი (ნაკრები) მომენტია ბრუნვის ღერძის მიმართ; $d\varphi$ - სხეულის მობრუნების ელემენტარული კუთხე.

ამასთანავე, მყარი სხეულის ნებიმიერი მოძრაობისას, მასზე მოქმედი შიგა ძალების მუშაობათა ჯამი ნულის ტოლია.

ძალის მუშაობა ნებისმიერ სასრულ s გადაადგილებაზე გამოითვლება, როგორც შესაბამის ელემენტარულ მუშაობათა ინტეგრალური ჯამი:

$$A_s = \int_s F ds \cos(\vec{F}, \overset{\frown}{\ } \tau). \qquad (29.\ 7)$$

თუ ძალა მუდმივია, ხოლო მისი მოდების წერტილი წრფივად გადაადგილდება, მაშინ მუშაობა ნებისმიერ სასრულ გადაადგილებაზე გამოითვლება ფორმულით

$$A = Fds\cos(\vec{F}\,\widehat{}\,,\tau)\,. \qquad (29.\ 8)$$

(29. 7) და (29. 8) ფორმულები შეიძლება გამოვიყენოთ გადატანითად მოძრავ მყარ სხეულზე მოდებული ძალების მუშაობის გამოსათვლელადაც, სადაც $F\cos(\vec{F}\,\widehat{}\,,\tau)$-ს მაგივრად უნდა ავიღოთ მოძრაობის მიმართულებაზე ძალების გეგმილების ჯამი.

სხეულის ბრუნვითი მოძრაობისას, მასზე მოდებული ძალების მუშაობა სასრულ გადაადგილებაზე

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z^e d\varphi\,. \qquad (29.\ 9)$$

თუ გარე ძალების მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ მუდმივია, მაშინ

$$A = M_z^e(\varphi - \varphi_0) = \sum M_z^e \varphi_{\text{ბრ}}, \qquad (29.\ 10)$$

სადაც $\varphi_{\text{ბრ}} = \varphi - \varphi_0$ - სხეულის მობრუნების სასრული კუთხეა.

ამ პარაგრაფის ამოცანების და სხვა პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნისას, სადაც იყენებთ კინეტიკური ენერგიეს ცვლილების თეორემას თეორემას, ყველაზე ხშირად მოგიხდებათ სიმძიმის ძალების, დრეკადობის ძალების და მბრუნავ სხეულზე მოდებული ძალების მუშაობათა განსაზღვრა.

სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A = \pm Gh = \pm mgh, \qquad (29.\ 11)$$

დრეკადობის ძალების მუშაობა

$$A = -\frac{c}{2}(\lambda^2 - \lambda_0^2), \qquad (29.\ 12),$$

სადაც λ_0, λ - შესაბამისად, დეფორმაციის საწყისი და საბოლოო მნიშვნელობებია (ზამბარის გაჭიმვა ან, დრეკადი კოჭის ჩაღუნვა).

ამასთანავე, მხედველობაში უნდა გქონდეთ, რომ თუ ძალისა და წერტილის (სხეულის) გადაადგილების მიმართულებები ემთხვევა, მაშინ ძალის მუშაობა დადებითია, თუ ეს მიმართულებები ურთიერთსაწინააღმდეგოა – უარყოფითია.

ძალის სიმძლავრე – დროის ერთეულში შესრულებული მუშაობა. ძალის სიმძლავრეს აღნიშნავენ N-ით:

$$N = \frac{A}{t}, \qquad (29.\ 13)$$

სადაც A - ძალის მიერ t დროში სასრულო მანძილზე თანაბრად შესრულებული მუშაობა.

უფრო ზოგად შემთხვევაში

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{Fds\cos(\vec{F}, \overset{\frown}{\ } \tau)}{dt} = Fv\cos(\vec{F} \overset{\frown}{\ }, \vec{v}), \qquad (29.\ 14)$$

ანუ
$$N = F_\tau v. \qquad (29.\ 14')$$

(29. 6) და (29. 14) ფორმულების გათვალისწინებით, უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავ მყარ სხეულზე მოდებული ძალების სიმძლავრე

$$N = \frac{M_z^e d\varphi}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e)\omega, \qquad (29.\ 15)$$

სადაც ω - სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა, რად/წმ.

სიმძლავრის ნაწილი ანუ, შესრულებული მუშაობის ნაწილი შეიძლება დაიხარჯოს მავნე წინააღმდეგობის გადასალახავად. ამ მოვლენის შესაფასებლად შემოაქვთ ცნება „მარგი ქმედების კოეფიციენტი" (მქკ), რომელსაც აღნიშნავენ η ასოთი.

მარგი ქმედების კოეფიციენტი – ეს არის შესრულებული სასარგებლო $A_{სას}$ მუშაობის შეფარდება მთლიანად დახარჯულ $A_{დახ}$ მუშაობასთან:

$$\eta = \frac{A_{sas}}{A_{dax}}. \qquad (29.\ 16)$$

სიმძლავრის გათვლისას, მაგალითად, რაიმე ძრავის მქკ-ს გათვალისწინებით (29. 13) და (29. 16) ფორმულების საფუძველზე შეიძლება ვისარგებლოთ ფორმულით

$$N = \frac{A_{dax}}{t} = \frac{A_{sas}}{\eta t}. \qquad (29.\ 17)$$

ამოცანების ამოხსნისას მნიშვნელოვანია დავიცვათ ფიზიკურ სიდიდეთა განზომილება შესაბამისად ერთეულთა არჩეულ სისტემაში.

მუშაობის განზომილების ერთეულთა საერთაშორისო სისტემაში СИ – ჯოული (1ჯ=1ნ·მ), მკგწმ სისტემაში – 1 კგმ.

სიმძლავრის განზომილების ***ერთეულთა საერთაშორისო სისტემაში*** СИ – ვატი (1ვტ =1 ჯ/წმ), ***მკგწმ სისტემაში*** – 1 კგ·მ./წმ, 75 კგ·მ/წმ = 1 ცხ. ძ. (ერთი ცხენის ძალა).

დავამყაროთ დამოკიდებულება 1 ცხ. ძ. და 1კვტ –ს შორის:

1 კვტ = 1000 ვტ = 1000 ჯ/წმ = 1000 ნ·მ/წმ, რადგანაც 1 კგ= 9,8 ნ, ამიტომ 1 კვტ = 1000/9,8 = 102 კგ·მ/წმ.

მაშინ 1 კვტ = 102/75 = 1,36 ცხ. ძ.

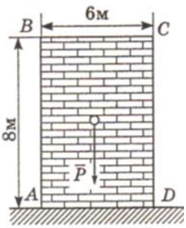
ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანამიმდევრობა:

1. ნახაზზე ვაჩვენოთ სხეულზე მოქმედი ძალები.
2. ზოგადი სახით ჩავწეროთ ფორმულები საძებნი სიდიდეების გამოსათვლელად, შემდეგ ვიპოვოთ ამ სიდიდეების განმსაზღვრელი ზოგადი სახის გამოსახულება.

3. შევასრულოთ გამოთვლები, შევამოწმოთ ამ გამოსახულებაში შემავალი სიდიდეების განზომილება.

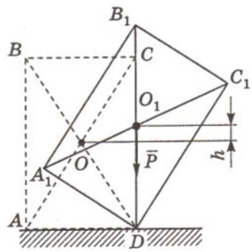
ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 29. 1



4000 კგ მასის ABCD ბეტონის ბლოკის ზომები მითითებულია ნახაზზე. განსაზღვრეთ მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს ამ ბლოკის D წიბოს გარშემო გადასაყირავებლად.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ბლოკი რომ გადავაყირაოთ, საკმარისია მისი შემობრუნება არამდგრადი წონასწორობის მდგომარეობამდე, როდესაც DB დიაგონალი დაიკავებს ვერტიკალურ მდგომარეობას (იხ. ნახაზი). ამისათვის საჭიროა შევასრულოთ სიმძიმის $\vec{P}$ ძალის მუშაობის ტოლი სამუშაო, ამ ძალის მოდების 0 წერტილის გადაადგილება 0_1 მდებარეობაში h სიმაღლეზე:



$$h = 0_1 D - \frac{AB}{2}.$$

ნახაზიდან $0_1 D = \dfrac{B_1 D}{2}$,

$$B_1 D = \sqrt{A_1 B_1^2 + A_1 D^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ მ.}$$

მაშინ $h = 5 - 4 = 1$ მ.

გამოვთვალოთ ბლოკის გადასაყირავებლად საჭირო მუშაობა:

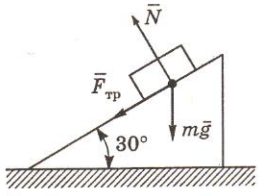
$$A = \left| -mgh = \left| -4000 \cdot 9{,}8 \cdot 1 \right| \right| = 39240 \text{ (ჯ)}.$$

პ ა ს უ ხ ი: 39,24 კჯ.

ამოცანა 29. 2

გამოთვალეთ უმცირესი მუშაობა, რომელიც უნდა დაიხარჯოს იმისათვის, რომ 2 ტ მასის სხეული ავიტანოთ ჰორიზონტისადმი 30^0 კუთხით დახრილ სიბრტყეზე 5 მ მანძილზე. ხახუნის კოეფიციენტია 0,5.

ა მ ო ხ ს ნ ა. უმცირესი მუშაობა ტოლია სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალისა და ხახუნის $\vec{F}_T$ ძალის მუშაობათა ჯამისა (იხ. ნახაზი):



$$A = \left| -mgh - F_T \frac{h}{\sin 30^0} \right|.$$

გამოვთვალოთ ხახუნის ძალა

$$F_T = fN = fmg\cos 30^0,$$

სადაც N - საყრდენის რეაქციაა, $N = mg\cos 30^0$.

მაშინ, უმცირესი მუშაობა

$$A = \left| -mgh - fmghctg30^0 \right| = \left| mgh(-1 - fctg30^0 \right| =$$

$$= 2000 \cdot 9{,}8 \cdot 5(-1 - 0{,}5 \cdot 1{,}73) = 183000(\text{ჯ}) = 183 \ (\text{კჯ}).$$

პ ა ს უ ხ ი: 183 კჯ.

ამოცანა 29. 3

იმისათვის, რომ 3 მ სიმაღლეზე აიტანონ 5000 მ^3 წყალი, დადგეს 2 ცხ. ძ. ტოლი ძრავის ტუმბო. რა დროა საჭირო სამუშაოს შესასრულებლად, თუ ტუმბოს მარგი ქმედების კოეფიციენტია 0,8?

მარგი ქმედების კოეფიციენტი ეწოდება სასარგებლო მუშაობის, ამ შემთხვევაში წყლის ასატანად დახარჯული მუშაობის შეფარდებას მამოძრავებელი ძალის მოშაობასთან, რომელიც უნდა იყოს სასარგებლო მუშაობაზე მეტი მავნე წინააღმდეგობების შედეგად.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აუცილებელი სიმძლავრეა $N = \dfrac{A_{dax}}{t}$,

სადაც A_{dax} - მთლიანი დახარჯული მუშაობაა.

ტუმბოს მქკ

$$\eta = \frac{A_{sas}}{A_{dax}} \Rightarrow A_{dax} = \frac{A_{sas}}{\eta} = \frac{mgh}{\eta}.$$

ტუმბოს მიერ ატანილი წყლის მასა

$$m = \rho V,$$

სადაც ρ - წყლის სიმკვრივეა, $\rho = 1000$ კგ/მ^3; V - წყლის მოცულობა.

მაშინ $$N = \frac{mgh}{\eta t} = \frac{\rho V g h}{\eta t}.$$

აქედან $$t = \frac{\rho V g h}{\eta N}.$$

ამოცანის პირობაში N მოცემულია ცხენის ძალაში, 1 ცხ.ძ=735ვტ. ამის გათვალისწინებით

$$t = \frac{1000 \cdot 5000 \cdot 9{,}8 \cdot 3}{0{,}8 \cdot 2 \cdot 735} = 125000 \text{წმ} = 34 \text{ სთ } 43 \text{ წთ } 20 \text{ წმ.}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> t = 34 სთ 43 წთ 20 წმ.

ამოცანა 29. 4

რა სიდიდისაა მანქანის სიმძლავრე, რომელმაც წუთში 84-ჯერ ასწია 200 კგ მასის ურო 0,75 მეტრის სიმაღლეზე, თუ მანქანის მარგი ქმედების კოეფიციენტია 0,7.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. აუცილებელი სიმძლავრეა $N = \dfrac{A_{dax}}{t}$,

სადაც A_{dax} - მთლიანი დახარჯული მუშაობაა.

$$A_{dax} = \frac{A_{sas}}{\eta} = \frac{84mgh}{\eta}.$$

მაშინ

$$N = \frac{84mgh}{\eta t} = \frac{84 \cdot 200 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}75}{0{,}7 \cdot 60} = 2940 \text{ (ვტ)}$$

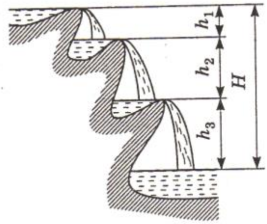
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 2,94 კვტ

ამოცანა 29. 5

გამოთვალეთ სამი წყალვარდნილის საერთო სიმძლავრე, რომლებიც თანმიმდევრობით არიან განლაგებული ერთ მდინარეზე. წყლის ვარდნის სიმაღლეა: პირველ წყალვარდნილთან - 12 მ, მეორესთან – 12,8 მ, მესამესთან - 15 მ. წყლის საშუალო ხარჯი მდინარეში – 75,4 მ³/წმ.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. წყალვარდნილთა საერთო სიმაღლეა (იხ. ნახაზი)

$$H = h_1 + h_2 + h_3 = 12{,}0 + 12{,}8 + 15{,}0 = 39{,}8 \text{ (მ).}$$



განვსაზღვროთ Δt დროში გამავალი წყლის წონა:

$$G = mg = V\rho g = V_x \Delta t \rho g,$$

სადაც V -წყლის მოცულობაა, $V = V_x \Delta t$, $V_x = 75{,}4$ მ³/წმ – წყლის ხარჯი მდინარეში; $\rho = 1 \cdot 10^3$ კგ/მ³ - წყლის სიმკვრივე. მაშინ მუშაობა $A = GH$.

საძებნი სიმძლავრე

$$N = \frac{A}{\Delta t} = \frac{GH}{\Delta t} = V_x \rho g H = 75{,}4 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 39{,}8 = 29{,}4 \cdot 10^6 \text{ (ვტ)} = 29{,}4 \text{ (მვტ)}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 29,4 მვტ.

ამოცანა 29. 6

გამოთვალეთ ტურბოგენერატორის სიმძლავრე ტრამვაის ქსელის სადგურში, თუ ხაზზე ვაგონების რაოდენობა არის 45, თითოეული ვაგონის მასაა 10 ტ, ხახუნის წინაღობა ვაგონის წონის 0,02–ს ტოლია, ვაგონის საშუალო სიჩქარეა 3,3 მ/წმ და ქსელში დანაკარგი 5%.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ერთი ვაგონის მიერ მოხმარებული სიმძლავრე მოდის ხახუნის ძალების გადასალახავად და ქსელში დანაკარგის გათვალისწინებით არის $N_1 = \frac{100}{100-5} F_x v$.

ვინაიდან $F_x = fmg$, ამიტომ $N_1 = 1{,}05 fmgv$.

მაშინ, ჯამური სიმძლავრე

$$N = nN_1 = \frac{n}{0{,}95} fmgv = \frac{45}{0{,}95} \cdot 0{,}02 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 3{,}3 =$$

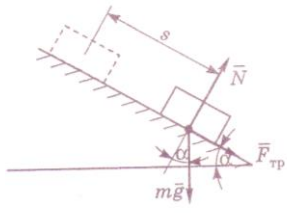
$$= 306{,}4 \cdot 10^3 \text{ (ვტ)} = 306{,}4 \text{ (კვტ)}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 306,4 კვტ.

ამოცანა 29. 7

გამოთვალეთ მუშაობა, რომელიც შესრულდება 20 კგ ტვირთის ასატანად ჰორიზონტისადმი 30^0 კუთხითდახრილ სიბრტყეზე 6 მ მანძილზე. ხახუნის კოეფიციენტია 0,01.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ტვირთის ასატანად დახარჯული მუშაობა სიდიდით ტოლია სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალისა და ხახუნის $\vec{F}_x$ ძალის მუშაობისა (იხ. ნახაზი). საყრდენის რეაქციის $\vec{N}$ ძალა



მუშაობას არ ასრულებს, რადგანაც ის მიმართულია გადაადგილების მართობულად. ამგვარად

$$A=\left|A(\vec{F}_x)+A(m\vec{g})\right|=\left|-F_x s-mgs\sin\alpha\right|=$$

$$=fNs+mgs\sin\alpha=mgs(f\cos\alpha+\sin\alpha),$$

სადაც $N=mg\cos\alpha;\quad \alpha=30^0$.

გამოვთვალოთ მუშაობა

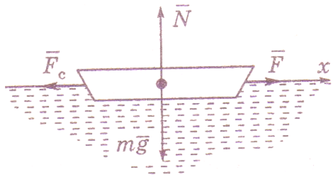
$$A=20\cdot 9{,}8\cdot 6\cdot(0{,}01\cdot 0{,}866+0{,}5)=598\ (\text{ჯ}).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 598 ჯ.

ამოცანა 29. 8

როდესაც ტურბომავალი მიდის 15 კვანძის სიჩქარით, მისი ტურბინა ანვითარებს 3800 კვტ სიმძლავრეს. განსაზღვრეთ ტურბომავალის მოძრაობაზე წყლის წინაღობის ძალა, თუ ცნობილია, რომ ტურბინისა და ხრახნის მარგი ქმედების კოეფიციენტი 0,41 ტოლია და 1 კვანძი =0,5144 მ/წმ.

<u>**ა მ ო ხ ს ნ ა**</u>. ტურბომავალის წრფივი თანაბარი მოძრაობისას მასზე მოქმედი ძალები გაწონასწორებულია და ამიტომ ტურბინების მიერ განვითარებული სიმძლავრე **მქკ**–ს გათვალისწინებით მოდის წყლის წინაღობის $\vec{F}_c$ ძალის გადალახვაზე (იხ. ნახაზი):



$$\eta N=F_c v, \qquad (1)$$

სადაც η - მქკ; N - სიმძლავრე; v - ტურბომავალის სიჩქარე.

(1) ფორმულიდან

$$F_c=\frac{\eta N}{v}=\frac{0{,}41\cdot 3800\cdot 10^3}{15\cdot 0{,}5144}=201{,}9\cdot 10^3\ (\text{ნ})=201{,}9\ (\text{კნ}).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 201,9 კნ.

ამოცანა 29. 9

განსაზღვრეთ შიგაწვის ძრავის სიმძლავრე, თუ მთელი სვლის განმავლობაში დგუშზე საშუალო წნევა 1 სმ^2-ზე 49 ნ-ს ტოლია, დგუშის სვლის სიგრძეა 40 სმ, დგუშის ფართობი 300 სმ^2, მუშა სვლის რაოდენობაა წუთში 120 და მარგი ქმედების კოეფიციენტი 0,9.

<u>**ა მ ო ხ ს ნ ა**</u>. შიგაწვის ძრავის სიმძლავრე **მქკ** –ს გათვალისწინებით გამოვითვალოთ ფორმულით

$$N = \eta P v,$$

სადაც η - ძრავის მქკ; $P = qF$ - დგუშზე წნევის ძალა, q - დგუშზე საშუალო წნევა, F - დგუშის ფართობი; v - დგუშის სიჩქარე.

გამოვთვალოთ დგუშის წნევის ძალა და სიჩქარე:

$$P = 49 \cdot 300 = 14700 \text{ (ნ)}.$$

$$v = 0{,}4 \cdot \frac{120}{60} = 0{,}8 \text{ (მ/წმ)}.$$

მაშინ

$$N = 0{,}9 \cdot 14700 \cdot 0{,}8 = 10584 \text{ (ვტ)} = 10{,}6 \text{ (კვტ)}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 10,6 კვტ.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 29. 10

0,6 მ დიამეტრიც სახეხი წრე აკეთებს 120 ბრ/წთ. საჭირო სიმძლავრეა 1,2 კვტ. სახეხი წრის დეტალთან ხახუნის კოეფიციენტია 0,2. რა ძალით აწვება სახეხი წრე დეტალს?

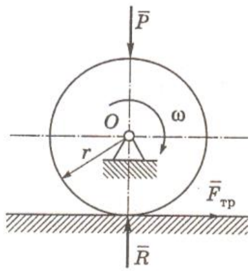
<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ხეხვის პროცესში სიმძლავრე იხარჯება სახეხი წრის ბრუნვისას ხახუნის ძალის წინაღობის გადალახვაზე (იხ. ნახაზი) და ტოლია

$$N = M_0(\vec{F}_x)\omega,$$

სადაც $M_0(\vec{F}_x) = F_x r = Rfr = Pfr$,

R - საყრდენის ნორმალური რეაქციაა;

$\omega = \dfrac{\pi n}{30}$. მაშინ $N = Pfr\dfrac{\pi n}{30}$.



აქედან

$$P = \frac{30N}{\pi r f n} = \frac{30 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 120} = 1591{,}5 \quad \text{(ნ)}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 1591,5 ნ.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 29. 11

განსაზღვრეთ გრძივ-სარანდი დაზგის ძრავის სიმძლავრე, თუ მუშა სვლის სიგრძეა 2 მ, მისი ხანგრძლივობა 10 წმ, ჭრის ძალა 11,76 კნ, დაზგის მარგი ქმედების კოეფიციენტი 0,8 . ჩათვალეთ, რომ მოძრაობა თანაბარია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გრძივ-სარანდი დაზგის ძრავის სიმძლავრეს გამოვთვლით ფორმულით

$$N=\frac{Pv}{\eta},$$

სადაც η - ძრავის მქკ; P ჭრის ძალა; v - ჭრის სიჩქარე. რადგანაც მოძრაობა თანაბარია, ამიტომ $v=\frac{s}{t}=\frac{2}{10}=0{,}2$ მ/წმ.

მაშინ

$$N=\frac{11{,}76\cdot 0{,}2}{0{,}8}=2{,}94 \text{ (კვტ).}$$

პ ა ს უ ხ ი: $2{,}94$ კვტ.

ამოცანა 29. 12

დრეკადი ზამბარის ბოლოში დაკიდებულია M მასის ტვირთი. ზამბარის 1 მ-ზე გაჭიმვისათვის უნდა მოვდოთ c ნ ძალა. შეადგინეთ გამოსახულება ტვირთის სრული მექანიკური ენერგიისა ზამბარაზე. მოძრაობა მიიჩნიეთ x ღერძის გასწვრივ, რომელიც გავლებულია ტვირთის ზამბარაზე წონასწორობის მდგომარეობიდან ვერტიკალურად ქვემოთ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ტვირთის სრული მექანიკური ენერგია E ზამბარაზე ტოლია ტვირთის კინეტიკური T_1, პოტენციური Π_1 ენერგიისა და ზამბარის პოტენციური Π_2 ენერგიის ჯამი (Π_1 და Π_2 ენერგიების ნულოვანი დონედ მიღებულია ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობა): $E=T_1+\Pi_1+\Pi_2$.

ვინაიდან

$$T_1=\frac{Mx'^2}{2},$$

$$\Pi_1=-Mgx,$$

$$\Pi_2=-\int_x^0 cx\,dx=\frac{cx^2}{2},$$

ამიტომ

$$E=\frac{Mx'^2}{2}+\frac{cx^2}{2}-Mgx.$$

პ ა ს უ ხ ი: $E=\frac{1}{2}Mx'^2+\frac{1}{2}cx^2-Mgx.$

ამოცანა 29. 13

ჰორიზონტალურ გზაზე 20 კმ მანძილზე თხილამურებით სვლისას მოთხილამურის სიმძიმის ცენტრი ასრულებს ჰარმონიულ რხევას 8 სმ ამპლიტუდით და T=4 წმ პერიოდით; მოთხილამურის მასა 80 კგ, ხოლო თხილამურების თოვლთან ხახუნის კოეფიციენტი f =0,05. განსაზღვრეთ მოთხილამურის მუშაობა სვლის დროს, თუ მთელი მანძილი მან გაიარა 1 საათსა და 30 წუთში, აგრეთვე მოთხილამურის საშუალო სიმძლავრე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: ჩთვალეთ, რომ დამუხრუჭების მუშაობა მოთხილამურის სიმძიმის ცენტრის დაშვებისას შეადენს იმავე სიმაღლეზე აწევის მუშაობის 0,4.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ ხახუნის ძალი გადასალახი მუშაობა:

$$A(\vec{F}_{Tp}) = \left| - F_{Tp} s \right|,$$

სადაც $F_{Tp} = mgf$.

მაშინ $$A(\vec{F}_{Tp}) = mgfs = 80 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}05 \cdot 20000 = 784 \text{ (კჯ)}.$$

განვსაზღვროთ სიმძიმის ძალის მუშაობა $A(m\vec{g})$. 1,5 სთ-ს განმავლობაში მოთხილამურის სიმძიმის ცენტრმა შეასრულა $k = \dfrac{t}{T} = \dfrac{5400}{4} = 1350$ რხევის ციკლი; ვინაიდან დამუხრუჭების მუშაობა სიმძიმის ცენტრის დაშვებისას შეადენს იმავე სიმაღლეზე აწევის მუშაობის 0,4, ამიტომ სიმძიმის ძალის მუშაობა ერთი ციკლისას

$$A'(m\vec{g}) = 1{,}4mg \cdot 2a,$$

სადაც a - რხევის ამპლიტუდაა.

სიმძიმის ძალის მუშაობა მთელი მოძრაობის განმავლობაში

$$A(m\vec{g}) = kA'(m\vec{g}) = 1{,}4kmg \cdot 2a = 1350 \cdot 1{,}4 \cdot 80 \cdot 9{,}8 \cdot 2 \cdot 0{,}08 = 237 \text{ (კჯ)}.$$

მაშინ, მოთხილამურის მიერ შესრულებული მუშაობა მთელ მანძილზე,

$$A = A(\vec{F}_{Tp}) + A(m\vec{g}) = 784 + 237 = 1021 \text{ (კჯ)},$$

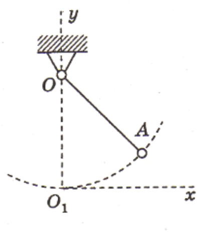
ხოლო, საშუალო სიმძლავრე

$$N = \frac{A}{t} = \frac{1021}{1{,}5 \cdot 3600} = 189{,}1 \text{ (ვტ)}.$$

__პ ა ს უ ხ ი__: $A = 1021$ კჯ; $N = 189{,}1$ ვტ.

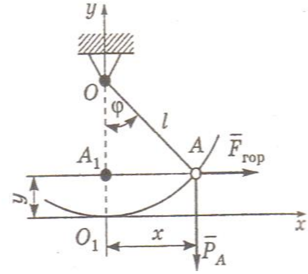
ამოცანა 29. 14

P წონის და l სიგრძის მათემატიკური A ქანქარა ჰორიზონტალური Px/l ძალის მოქმედებით ავიდა y სიმაღლეზე. გამოთვალეთ ქანქარას პოტენციური ენერგია ორი ხერხით: 1)



როგორც სიმძიმის ძალის მუშაობა, 2) როგორც მუშაობა, რომელსაც ასრულებს Px/l ძალა, და მიუთითეთ, რა პირობებში მივყევართ ორივე ხერხს ერთი და იგვე შედეგამდე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) გამოვთვალოთ ქანქარას პოტენციური ენერგია A მდებარეობაში, როგორც სიმძიმის $\vec{P}$ ძალის მუშაობა:



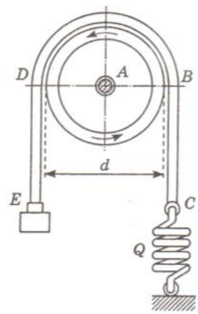
$$\Pi(\vec{P}_A) = P_A y = Py .$$

2) გამოვთვალოთ ქანქარას პოტენციური ენერგია, როგორც $\frac{Px}{l} \mapsto \vec{F}_{гор}$ ძალის მუშაობა (იხ. ნახაზი):

$$\Pi(\vec{F}_{гор}) = \int_0^x F_{гор} dx = \int_0^x \frac{Px}{l} dx = \frac{Px^2}{2l} .$$

ორივე ხერხს მივყევართ ერთ შედეგამდე თუ $Py = \frac{Px^2}{2l}$,

ე. ი. როცა $y = \frac{x^2}{2l}$, ანუ $2yl = x^2$.



ნახაზის მიხედვით $y = l - l\cos\varphi$,

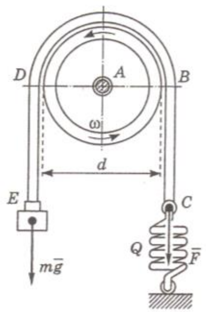
სადაც $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{l}\right)^2}$.

მაშინ

$$y = l\left(1-\sqrt{\frac{l^2-x^2}{l^2}}\right) \Rightarrow (y-l)^2 = \left(-l\sqrt{\frac{l^2-x^2}{l^2}}\right)^2 \Rightarrow 2yl = x^2$$

.

ორივე შედეგს ექნება ერთი მნიშვნელობა, თუ ამ ფორმულაში უგულუბელვყოფთ y^2-ს.



პ ა ს უ ხ ი: 1) Py; 2) $\frac{1}{2}\frac{Px}{l}$. ორივე შედეგი ერთნაირია, თუ

შეიძლება y^2 უგულუბელვყოთ.

ამოცანა 29. 15

ძრავის სიმძლავრის გასაზომად მის A ბორბალზე ჩამოცმულია ლენტი ხის ხუნდებით. ლენტის მარჯვენა BC შტო შეკავებულია ზამბარიანი Q სასწორით, ხოლო მარცხენა DE შტო დაჭიმულიაა ტვირთით. განსაზღვრეთ ძრავის სიმძლავრე, თუ თანაბარი ბრუნვისას ის ასრულებს 120 ბრ/წთ; ამასთანავე, ზამბარიანი სასწორი აჩვენებს ლენტის მარჯვენა შტოს დაჭიმულობას 39,24 ნ; ტვირთის მასაა 1 კგ, ბორბალის დიამეტრიც $d = 63{,}6$ სმ. ლენტის BC და DE შტოების დაჭიმულობებს შორის სხვაობა ბორბალის დამუხრუჭების ძალის ტოლია. განსაზღვრეთ ამ ძალის მუშაობა 1 წმ-ში.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ვიპოვოთ ძალის სიდიდე, რომელიც ამუხრუჭებს ბორბალს (იხ. ნახაზი):

$$F_c = F - mg = 39{,}24 - 1 \cdot 9{,}8 = 29{,}4 \text{ (ნ)}.$$

განვსაზღვროთ ძრავის სიმძლავრე:

$$N = F_c v,$$

სადაც v - ბორბალის ფერსოს წერტილის სიჩქარეა,

$$v = \omega \frac{d}{2} = \frac{\pi n}{30}\frac{d}{2} = \frac{\pi d n}{60}.$$

მაშინ $$N = F_c \frac{\pi d n}{60} = \frac{29{,}4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}636 \cdot 120}{60} = 117{,}5 \text{ (ვტ)}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. N-ის მიღებული გამოსახულება შეიძლება სხვა სახითაც წარმოვადგინოთ $N = M_c \omega$, სადაც $M_c = F_c \frac{d}{2}$ - ბორბალის ბრუნვისადმი წინაღობის ძალის მომენტია; $\omega = \frac{\pi n}{30}$ - ბორბალის კუთხური სიჩქარეა.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 117,5 ვტ.

ამოცანა 29. 16

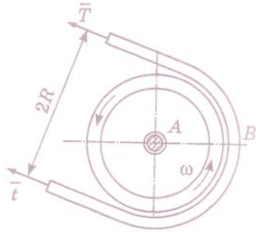
ღვედის საშუალებით გადაეცემა 14,71 კვტ სიმძლავრე. ღვედის ბორბალის რადიუსია 0,5 მ, ბორბალის კუთხურ სიჩქარეს შეესაბამება 150 ბრ/წთ. დაუშვათ, რომ ღვედის წამყვანი შტოს დაჭიმულობა T ორჯერ მეტია ამყოლი შტოს t დაჭიმულობაზე და გამოთვალეთ T და t დაჭიმულობა.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ღვედური გადამცემის გადაცემის სიმძლავრეა

$$N = M_B \omega,$$

სადაც M_B -მბრუნავი მომენტია (იხ. ნახაზი),

$M_B = (T - t)R = (2t - t)R = tR$, ω - ბორბალის კუთხური სიჩქარეა $\omega = \frac{\pi n}{30}$. მაშინ $N = \frac{tR\pi n}{30}$.



აქედან, ღვედის ამყოლი შტოს დაჭიმულობა

$$t = \frac{30N}{\pi n R} = \frac{30 \cdot 14{,}71 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 150 \cdot 0{,}5} = 1873 \text{ (ნ).}$$

ხოლო, ღვედის წამყვანი შტოს დაჭიმულობა

$$T = 2t = 2 \cdot 1873 = 3746 \text{ (ნ).}$$

პ ა ს უ ხ ი: $t = 1873$ ნ; $T = 3746$ ნ.

30. ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა

მეთოდური მითითებანი ამოცანების ამოსახსნელად

ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგია – მექანიკური მოძრაობის ერთ-ერთი საზომია. ეს არის სკალარული სიდიდე, რომელიც წერტილის მასისა და მისი მოძრაობის სიჩქარის კვადრატის ნამრავლის ნახევარის ტოლია, ე. ი. $\frac{mv^2}{2}$. ძალის მოქმედების დამახასიათებელი ამ შემთხვევაში არის ძალის მუშაობა.

ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ამყარებს კავშირს წერტილის კინეტიკურ ენერგიასა და ამ წერტილზე მოქმედი ძალის მუშაობას შორის. ანსხვავებენ ამ თეორემის ჩაწერის ორ ფორმას – დიფერენციალურს და ინტეგრალურს (ანუ სასრულს).

დიფერენციალური ფომა:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA, \tag{30.1}$$

ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიეს დიფერენციალი ტოლია მასზე მოქმედი ძალის ელემენტარული მუშაობისა.

ინტეგრალური ფომა:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k), \tag{30.2}$$

ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიეს ცვლილება რაიმე გადაადგილებაზე ტოლია წერტილზე მოქმედი ძალების მუშაობათა ჯამისა იმავე გადაადგილებაზე.

ამოცანების ამოხსნისას თეორემა დიფერენციალური ფორმით გამოიყენება, როცა წერტილზე მოქმედებენ ცვლადი ძალები, და კერძოდ, ძალები რომლებიც დამოკიდებულნი არიან გადაადგიებაზე ან სიჩქარეზე. ამ შემთხვევაში, (30.1) განტოლება შეიძლება დაყვანილი იქნეს წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებაზე განცალებადი ცვლადებით.

თუ წერტილზე მოქმედებს მხოლოდ გადაადგილებაზე დამოკიდებული ცვლადი ძალა, მაშინ ჩავწერთ ელემენტარული მუშაობის გამოსახულებას, შემდეგ ვაინტეგრებთ და განვსაზღვრავთ ძალის მუშაობას სასრულ გადაადგილებაზე, შეიძლება დიფერენციალური ფორმიდან გადავიდეთ ინტეგრალურზე, ე. ი. გამოვიყენოთ (30.2) განტოლება.

ძალთა მუშაობის გამოთვლა განხილულია § 29 –ში.

ამ პარაგრაფის ამოცანების ნაწილი შეიძლება ამოიხსნას ***მექანიკური ენერგიის შენახვის კანონის*** გამოყენებით, რომელიც შემდეგი ფორმით ყალიბდება:

პოტენციურ ძალთა ველში ნივთიერი წერტილის ნებისმიერ მდგომარეობაში წერტილის კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების ჯამი მუდმივი სიდიდეა.

ამ კანონის თანახმად

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = const. \tag{30.3}$$

ძალთა ველი ეწოდება სივრცის ნაწილს, რომლის ყოველ წერტილში ნივთიერ წერტილზე მოქმედებენ ძალები, რომლებიც დამოკიდებულნი არიან წერტილის კოორდინატებზე და დროზე. ***ძალთა ველს*** ეწოდება ***სტაციონარული***, თუ ძალები არ არიან დამოლიდებული დროზე.

სტაციონარულ ძალთა ველს ეწოდება ***პოტენციური***, თუ წერტილზე მოქმედი ძალების მუშაობა არ არის დამოკიდებული წერტილის ტრაექტორიაზე. ასეთ ძალთა ველს ქმნიან სიმძიმის ძალები, დრეკადი ძალები, მიზიდულობის (გრავიტაციის) ძალები.

ნივთიერი წერტილის პოტენციური ენერგია – ეს არის წონასწორობის ენერგია. ის წარმოადგენს მუშაობას, რომელსაც ახორციელებენ პოტენციური ძალები წერტილის გადაადგილებისას მოცემული მდებარეობიდან რომელიმე ნულოვან მდებარეობაში (ნულოვან დონეზე).

პოტენციურ ძალთა ველში ძალის გეგმილები დეკარტის კოორდინატთა ღერძებზე განისაზღვრებიან ფორმულებით:

$$F_x = -\frac{d\Pi}{dx}, \quad F_y = -\frac{d\Pi}{dy}, \quad F_z = -\frac{d\Pi}{dz}, \tag{30.4}$$

სადაც Π - წერტილის პოტენციური ენერგიაა.

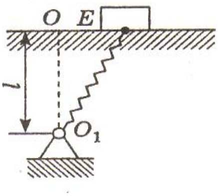
ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანამიმდევრობა:

1. განსაზღვრეთ, როგორი ფორმით არის საჭირო ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის გამოყენება და ჩაწერეთ შესაბამისად (30.1) ან (30.2) ფორმულა.
2. ნახაზზე გამოსახეთ მოძრავი წერტილი (სხეული) ნებისმიერ მდებარეობაში და აჩვენეთ მასზე მოქმედი ყველა ძალა, მათ შორის ბმის რეაქციის ძალები, თუ სხეული არათავისუფალია.
3. განსაზღვრეთ წერტილის საწყისი v_0 და საბოლოო v სიჩქარე (შესაძლებელია, სიჩქარეებიდან ერთ-ერთი ან ორივე იყოს ნულის ტოილ).
4. ზოგადი სახით განსაზღვრეთ წერტილზე მოქმედი ყველა ძალის მუშაობა (ელემენტარული ან სასრულ გადაადგილებაზე).
5. (30.1) ან (30.2) ტოლობებით სარგებლობისას შეადგინეთ განტოლება და იპოვეთ უცნობი სიდიდეები ზოგადი სახით.
6. შეასრულეთ გამოთვლები. ამასთანავე ყურადღება მიაქციეთ, რომ ყველა სიდიდეს ჰქონდეს ერთეულთა ერთი და იმავე სისტემის განზომილება.

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 30. 1

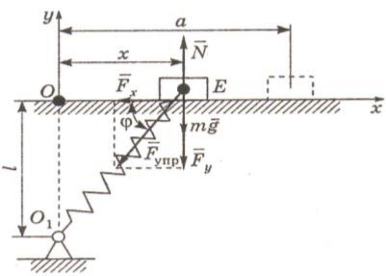
m მასის E სხეული იმყოფება გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. სხეულზე მიმაგრებულია c სიხისტის ზამბარა, რომლის მეორე ბოლო მიმაგრებულია 0_1 ბურთულაზე. არადეფორმირებული ზამბარის სიგძეა l_0; $00_1 = l.$ საწყის მომენტში E სხეული გადახრილია წონასწორობის 0 მდებარეობიდან სასრულ $0E = a$ მანძილით და გაშვებულია უსაწყისო სიჩქარით. განსაზღვრეთ სხეულის სიჩქარე წონასწორობის მდებარეობის გავლის მომენტში.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის თანახმად

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k). \qquad (1)$$

ვთვლით, რომ ზამბარა E სხეულზე „დაჭიმულია" მიმაგრებული, ე. ი. $l_0 < l.$ ამ შემთხვევაში მდგრადი წონასწორობის მდგომარეობას წარმოადგენს კოორდინატთა 0 სათავე და დრეკადი $\vec{F}_{up}$ ძალის x ღერძზე გეგმილისათვის მივიღებთ (იხ. ნახაზი):



$$F_x = -F_{up}\cos\varphi = -c(\sqrt{l^2 + x^2} - l_0)\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}.$$

დრეკადი $\vec{F}_{up}$ ძალის ვერტიკალური F_y მდგენელი, სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა და ნორმალური რეაქცია $\vec{N}$ გადაადგილების მართობულები არიან და მათი მუშაობა ნულის ტოლია.

გამოვთვალოთ დრეკადი ძალის მუშაობა:

$$A(\vec{F}_{up}) = A(\vec{F}_x) = -c\int_a^0 \left(\sqrt{l^2 + x^2} - l_0\right)\frac{xdx}{\sqrt{l^2 + x^2}} =$$

$$= -c\int_a^0 xdx + \frac{cl_0}{2}\int_a^0 \frac{d(l^2+x^2)}{\sqrt{l^2+x^2}} = -\frac{cx^2}{2}\bigg|_a^0 + cl_0\sqrt{l^2+x^2}\ \Big|_a^0 =$$

$$= c\left[\frac{a^2}{2} + l_0(l - \sqrt{l^2+a^2})\right]. \qquad (2)$$

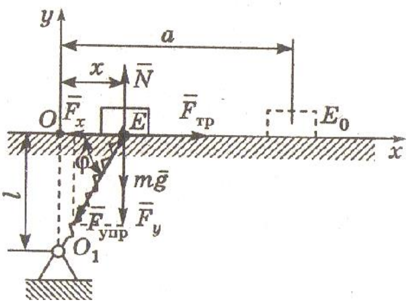
(2) გამოსახულება ჩავსვათ (1) განტოლებაში, და იმის გათვალისწინებით, რომ $v_0 = 0$, ვიპოვით სხეულის სიჩქარეს წონასწორობის მდებარეობის გავლის მომენტში:

$$v = \sqrt{\frac{2c}{m}\left[\frac{a^2}{2} + l_0(l - \sqrt{l^2+a^2})\right]}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $v = \sqrt{\frac{2c}{m}\left[\frac{a^2}{2} + l_0(l - \sqrt{l^2+a^2})\right]}$

ამოცანა 30. 2

წინა ამოცანის პირობებში განსაზღვრეთ E სხეულის სიჩქარე წონასწორობის 0 მდებარეობის გავლის მომენტში, თუ დავუშვებთ, რომ სიბრტყე მქისეა (ხორკლიანია) და სრიალის ხახუნის კოეფიციენტია f.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის თანახმად

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k). \quad (1)$$

მუშაობას ასრულებს დრეკადი $\vec{F}_{up}$ ძალა (იხ. 30.1 ამოცანის ამოხსნა) და ხახუნის ძალა $\vec{F}_{Tr}$ (იხ. ნახაზი).

ვიპოვოთ ხახუნის ძალა:

$$F_{Tr} = fN = f(mg + F_y) = f(mg + F_{yp}\sin\varphi) =$$

$$= fmg + fc(\sqrt{l^2+x^2} - l_0)\cdot\frac{l}{\sqrt{l^2+x^2}} = f(mg + cl) - \frac{fcl_0 l}{\sqrt{l^2+x^2}}.$$

გამოვთვალოთ ხახუნის ძალის მუშაობა:

$$A(\vec{F}_{Tr}) = f(mg+cl)\int_a^0 dx - fcl_0 l\int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{l^2+x^2}} = f(mg+cl)x\Big|_a^0 -$$

$$-fcl_0 l\ln(x+\sqrt{l^2+x^2})\Big|_a^0 = -f(mg+cl)a - fcl_0 l\left[\ln l - \ln(a+\sqrt{l^2+a^2})\right] =$$

$$= -f\left[(mg+cl)a + cl_0 l\ln\frac{l}{a+\sqrt{l^2+a^2}}\right]. \qquad (2)$$

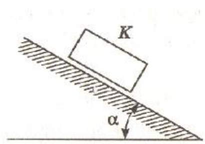
(1) განტოლებაში ჩავსვათ $v_0 = 0$, (2) გამოსახულება და დრეკადი ძალის მუშაობის მნიშვნელობა [იხ. 30. 1 ამოცანის ამოხსნის (2) ფორმულა], და ვიპოვით E სხეულის სიჩქარეს სრიალის ხახუნის გათვალისწინებით:

$$v^2 = \frac{2c}{m}\left[\frac{a^2}{2} + l_0(l-\sqrt{l^2+a^2})\right] - \frac{2f}{m}\left[(mg+cl)a + cl_0 l\ln\frac{l}{a+\sqrt{l^2+a^2}}\right].$$

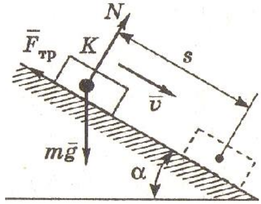
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>:

$$v^2 = \frac{2c}{m}\left[\frac{a^2}{2} + l_0(l-\sqrt{l^2+a^2})\right] - \frac{2f}{m}\left[(mg+cl)a + cl_0 l\ln\frac{l}{a+\sqrt{l^2+a^2}}\right].$$

ამოცანა 30. 3



K სხეული უძრავად იმყოფება ჰორიზონტისადმი α კუთხით დახრილ არაგლუვ (მქისე) სიბრტყეზე. f_0 − წონასწორობის ხახუნის კოეფიციენტია, $f_0 > tg\alpha$. გარკვეულ მომენტში სხეულს მიანიჭეს სიბრტყის გასწვრივ ქვევით მიმართული საწყისი $\vec{v}_0$ სიჩქარე. განსაზღვრეთ სხეულის მიერ განვლილი s გზა გაჩერებამდე, თუ მოძრაობისას ხახუნის კოეფიციენტია f.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის თანახმად

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k) \qquad (1)$$

მუშაობას ასრულებს სიმძიმის ძალა და ხახუნის ძალა (იხ. ნახაზი). მაშასადამე

$$\sum A(\vec{F}_k) = A(m\vec{g}) - A(\vec{F}_{Tp}) = mgh - F_{Tp}s =$$

$$= mgs\sin\alpha - fNs = mgs(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

სადაც $h = mg\sin\alpha; \quad N = mg\cos\alpha$.

იმის გათვალისწინებით, რომ $v = 0$, (1) ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს

$$-\frac{mv_0^2}{2} = mgs(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

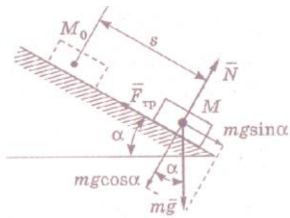
აქედან განვსაზღვრავთ გზას, რომელსაც სხეული გაივლის გაჩერებამდე:

$$s = \frac{v_0^2}{2g(f\cos\alpha - \sin\alpha)}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $s = \dfrac{v_0^2}{2g(f\cos\alpha - \sin\alpha)}$.

ამოცანა 30. 4

ჰორიზონტისადმი 30^0 კუთხით დახრილ სიბრტყეზე საწყისი სიჩქარის გარეშე ეშვება მძიმე ხეული; ხახუნის კოეფიციენტია 0,1. როგორი სიჩქარე ექნება სხეულს მოძრაობის დაწყებიდან 2 მ გავლის შემდეგ?



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის თანახმად

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k). \qquad (1)$$

სადაც $v_0 = 0$.

მუშაობას ასრულებს სიმძიმის ძალა და ხახუნის ძალა (იხ. ნახაზი).

მაშასადამე

$$\sum A(\vec{F}_k) = A(m\vec{g}) - A(\vec{F}_T) =$$

$$= smg\sin\alpha - sfmg\cos\alpha = mgs(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

(1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$\frac{mv^2}{2} = mgs(\sin\alpha - f\cos\alpha),$$

სადაც $\alpha = 30^0$.

აქედან სხეულის სიჩქარე

$v = \sqrt{2gs(\sin 30^0 - f\cos 30^0)} = \sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 2\cdot(0{,}5-0{,}1\cdot 0{,}866)} = 4{,}02$ (მ/წმ)

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 4,02 მ/წმ.

ამოცანა 30. 5

24 კგ მასის ჭურვი ქვემეხის ლულიდან გამოვარდება 500 მ/წმ სიჩქარით. ქვემეხის ლულის სიგრძეა 2 მ. როგორია ჭურვზე გაზის წნევის საშუალო სიდიდე?

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის თანახმად

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k). \qquad (1)$$

სადაც, გასროლამდე ლულაში ჭურვის სიჩქარე $v_0 = 0$.

ჩავთვალოთ, რომ მუშაობას ასრულებს მხოლოდ ჭურვზე გაზის წნევის ძალა, ამასთანავე, სანამ ჭურვი მოძრაობს ლულაში, გაზის წნევის საშუალო სიდიდე P_{cp} რჩება მუდმივი. მაშინ, (1) -დან

$$\frac{mv^2}{2} = P_c l.$$

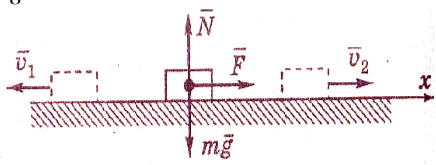
აქედან $$P_{cp} = \frac{mv^2}{2l} = \frac{24\cdot 500^2}{2\cdot 2} = 1500 \text{ (კნ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 1500 კნ.

ამოცანა 30. 6

3 კგ მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს ჰორიზონტალურ წრფეზე მარცხნივ 5 მ/წმ სიჩქარით. წერტილს მოსდეს მარჯვენივ მიმართული მუდმივი ძალა. ძალის მოქმედება შეწყდა 30 წმ-ს შემდეგ, და მაშინ წერტილის სიჩქარე აღმოჩნდა 55 მ/წმ და მიმართული მარჯვენივ. იპოვეთ ეს ძალა და მის მიერ შესრულებული მუშაობა.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემის თანახმად x ღერძზე



გეგმილებში გვექნება (იხ. ნახაზი)

$$mv_{2x} - mv_{1x} = F_x t.$$

(1)

ვინაიდან $v_{1x} = -v_1$, $v_{2x} = v_2$, $F_x = F$, ამიტომ, (1) ფორმულიდან მივიღებთ

$$F = m\frac{v_1 + v_2}{t} = 3 \cdot \frac{5+55}{30} = 6 \text{ (ნ).}$$

$\vec{F}$ ძალის მუშაობას გამოვთვლით კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით:

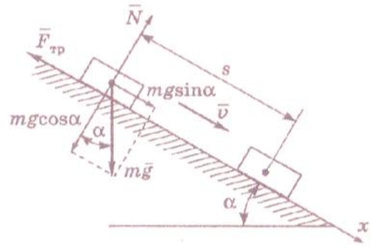
$$A(\vec{F}) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{3}{2}[55^2 - (-5)^2] = 4{,}5 \text{ (კჯ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $F = 6$ ნ. $A = 4{,}5$ კჯ.

ამოცანა 30. 7

სადგურთან მიახლოებისას მატარებელი მიდის 10 მ/წმ სიჩქარით დახრილ გზაზე; დახრის კუთხეა $\alpha = 0{,}008$ რადიანს. გარკვეულ მომენტში მემანქანე იწყებს მატარებლის დამუხრუჭებას. ღერძებში ხახუნის წინაღობა შეადგენს მატარებლის წონის 0,1. განსაზღვრეთ, დამუხრუჭების დაწყებიდან რა მანძილზე და რა დროში გაჩერდება მატარებელი. მივიღოთ, რომ $\sin\alpha = \alpha$.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. გადატანითი მოძრაობისას მატარებელი შეიძლება მივიღოთ ნივთიერ წერტილად. ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემის თანახმად x ღერძზე გეგმილებში გვექნება



$$mv_{1x} - mv_{0x} = \int_0^t F_x dt$$

ანუ
$$mv_1 - mv_0 = \int_0^{t_1} (mg\sin\alpha - F_T)dt =$$

$$= (mg\sin\alpha - F_T)t_1, \qquad (1)$$

სადაც $F_x = mg\cos\alpha$ (იხ. ნახაზი).

იმის გათვალისწინებით, რომ პირობის თანახმად $v_1 = 0,$ ხოლო $F_T = 0{,}1mg$, (1) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს

$$-v_0 = g(\sin\alpha - 0{,}1)t_1 .$$

რადგანაც მივიღეთ, რომ $\sin\alpha = \alpha$, ამიტომ

$$t_1 = \frac{v_0}{g(0{,}1-\sin\alpha)} = \frac{10}{9{,}8(0.1-0{,}008)} = 11{,}08 \text{ (წმ).}$$

კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის თანახმად

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k), \qquad (2)$$

სადაც $v_1 = 0$;

$$\sum A(\vec{F}_k) = mgs\sin\alpha - F_T s = mgs\sin\alpha - 0{,}1mgs = mgs(\alpha - 0{,}1).$$

მაშინ (2) განტოლებიდან $-\dfrac{v_0^2}{2} = gs(\alpha - 0{,}1)$.

აქედან $s = \dfrac{v_0^2}{2g(0{,}1-\alpha)} = \dfrac{10^2}{2\cdot 9{,}8\cdot(0{,}1-0{,}008)} = 55{,}3$ მ.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 55,3 მ; 11,08 წმ.

ამოცანა 30. 8

200 ტ მასის მატარებელი მიდის გზის ჰორიზონტალურ უბანზე 0,2 მ/წმ^2 აჩქარებით. ღერძებში ხახუნის წინაღობა შეადგენს მატარებლის წონის 0,01 და ითვლება სიჩქარეზე დამოუკიდებელი. განსაზღვრეთ t=10 წმ მომენტში თბომავლის მიერ განვითარებული სიმძლავრე, თუ საწყის მომენტში მატარებლის სიჩქარე იყო 18 მ/წმ.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა დიფერენციალური სახით:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA .$$

თბომავლის სიმძლავრე

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mva ,$$

სადაც a - აჩქარებაა.

როცა $t=t_1=10$ წმ

$$N_1 = mv_1 a_1 ,$$

სადაც $v_1 = v_0 + at_1 = 18 + 0{,}2\cdot 10 = 20$ (მ/წმ),

$$a_1 = a + \mu g = 0{,}2 + 0{,}01 \cdot 9{,}8 = 0{,}298 \text{ (მ/წმ}^2\text{)}.$$

ამიტომ

$$N_1 = 200 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 0{,}298 = 1192 \text{ (კვტ)}.$$

სიმძლავრის გამოსათვლელად ადვილია ვისარგებლოთ ფორმულით

$$N_1 = Fv_1,$$

სადაც F - თბომავლის წევის ძალაა. წევის ძალა შეიძლება ვიპოვოთ განტოლებიდან

$$ma = F - F_{Tp} \Rightarrow F = ma + F_{Tp} = ma + \mu mg = m(a + \mu g).$$

მაშინ

$$N_1 = m(a + \mu g)v_1 = 200 \cdot 10^3 (0{,}2 + 0{,}01 \cdot 9{,}8) \cdot 20 = 1192 \text{ (კვტ)}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თბომავლის წევის ძალა F შეიძლება ვიპოვოთ აგრეთვე ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის ინტეგრალური ფორმის გამოყენებით:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = (F - F_{TP})s.$$

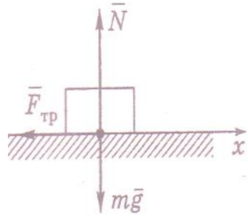
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 1192 კვტ.

ამოცანა 30. 9

ძელი იწყებს მოძრაობას არაგლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე საწყისი v_0 სიჩქარით და სრულ გაჩერებამდე გადის s მანძილს. განსაზღვრეთ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი, ჩათვალეთ, რომ ხახუნის ძალა ნორმალური წნევის პროპორციულია.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური სახით:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k).$$



ვინაიდან $v = 0$, ხოლო მუშაობას ასრულებს მხოლოდ ხახუნის ძალა (იხ. ნახაზი), ამიტომ

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -mgfs.$$

აქედან ხახუნის კოეფიციენტი $f = \dfrac{v_0^2}{2gs}$.

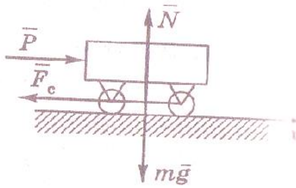
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $f = \dfrac{v_0^2}{2gs}$.

ამოცანა 30. 10

6 ტ მასის რკინიგზის ბაქანი მოძრაობისას განიცდის ღერძებში ხახუნის წინაღობას, რომელიც ტოლია მატარებლის წონის 0,0025. მუშა მიაწვა უძრავ ბაქანს 250 ნ ძალით და გააგორა ის ჰორიზონტალურ და წრფივ გზაზე. 20 მ მანძილის გავლის შემდეგ მიუშვა ბაქანი თვითონ ეგორავა. უგულებელყავით ჰაერის წინაღობა და ბორბლების რელსებთან ხახუნი, და გამოთვალეთ ბაქანის უდიდესი სიჩქარე მოძრაობისას, აგრეთვე გაჩერებამდე მის მიერ განვლილი მანძილი.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური სახით

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A(\vec{F}_k). \qquad (1)$$



ბაქანის მიერ განლილი მთელი გზა გავყოთ ორ უბნად: პირველზე – s_1, მოქმედებენ წინაღობის $\vec{F}_c$ ძალა და $\vec{P}$ ძალა, რომლითაც მუშა აწვებოდა ბაქანს (იხ. ნახაზი). ვინაიდან $v_0=0,\ \ v=v_{\max}$, ამიტომ (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს $\frac{mv_{\max}^2}{2}=(P-F_c)s_1$.

აქედან

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{2(P-F_c)s_1}{m}}=\sqrt{\frac{2(250-0{,}0025\cdot 6\cdot 10^3\cdot 9{,}8)20}{6\cdot 10^3}}=0{,}82 \text{ (მ/წმ).}$$

მეორე – s_2 უბანზე, როცა ბაქანი თვითონ მიგორავს, მასზე მოქმედებს მხოლოდ წინაღობის ძალა, ხოლო ბაქანი მოძრაობს გაჩერებამდე. მიტომ (1) განტოლებას აქვს ასეთი სახე

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=-F_c s_2,$$

სადაც $v_2=0;\ \ v_1=v_{\max};\ \ F_c=0{,}0025mg$.

მაშინ $s_2=\frac{v_{\max}^2}{2\cdot 0{,}0025g}=\frac{0{,}82^2}{2\cdot 9{,}8\cdot 2{,}5\cdot 10^{-3}}=14$ (მ).

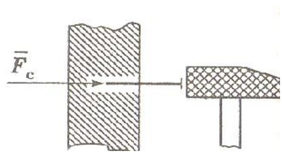
ბაქანის მიერ განვლილი მთელი გზა გაჩერებამდე:

$s = s_1 + s_2 = 24 + 14 = 34$ (მ).

პასუხი: $v_{\max}=0{,}82$ მ/წმ; $s = 34$ მ.

ამოცანა 30. 11

ლურსმანს არჭობენ კედელში, რომელიც უწევს წინააღმდეგობას 700 ნ. ჩაქუჩის ყოველი დარტყმისას ლურსმანი კედელში შედის $l = 0{,}15$ სმ მანძილზე. განსაზღვრეთ ჩაქუჩის მასა, თუ ლურსმანის თავზე ყოველი დარტყმისას მას აქვს $v = 1{,}25$ მ/წმ სიჩქარე.



ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური სახით

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k).$$

ვინაიდან მუშაობას ასრულებს მხოლოდ წინაღობის ძალა, ხოლო $v = 0$, ამიტომ

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -F_c l.$$

აქედან, ჩაქუჩის მასა

$$m = \frac{2F_c l}{v_0^2} = \frac{2 \cdot 700 \cdot 0{,}15 \cdot 10^{-2}}{1{,}25^2} = 1{,}344 \text{ (კგ)}.$$

პ ა ს უ ხ ი: 1,344 კგ.

ამოცანა 30. 12

დედამიწაზე ჩამოვარდნილი 39 კგ მასის მეტეორიტი ნიადაგში ჩაეფლო 1,875 მ მანძილზე. გამოთვლილია, რომ მეტეორიტის დაცემის ადგილას ნიადაგი მასში შეღწეულ სხეულს უწევს $5 \cdot 10^5$ ნ წინააღმდეგობას. რა სიჩქარით მიაღწია მეტეორიტმა დედამიწის ზედაპირს? რა სიმაღლიდან უნდა ჩამოვარდნილიყო იგი საწყისი სიჩქარის გარეშე, რომ მიეღწია ამ სიჩქარისათვის? ჩათვალეთ სიმძიმის ძალა მუდმივად და ჰაერის წინაღობა უგულებელყავით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის ინტეგრალური სახიდან გამომდინარე, მეტეორიტის ნიადაგში შეღწევიდან გაჩერებამდე მონაკვეთზე ჩავწეროთ

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -F_c s + mgs \cdot \qquad (1)$$

აქ v_0 - მეტეორიტის სითქარეა მიწაზე დაცემის მომენტში; F_c - გრუნტის წინაღობის ძალა, $5 \cdot 10^5$ ნ; $m\vec{g}$ - მეტეორიტის სიმძიმის ძალა; s – მეტეორიტის ნიადაგში ჩასვლის სიღრმე.

მაშინ, (1) ფორმულიდან

$$v_0=\sqrt{\frac{2(F_c-mg)s}{m}}=\sqrt{\frac{2(5\cdot10^5-39\cdot9{,}8)\cdot1{,}875}{39}}=219{,}2{,}26 \text{ (მ/წმ).}$$

თუ უგულებელვყოფთ სიმძიმის ძალას მისი სიმცირის გამო, მაშინ

$$v_0=\sqrt{\frac{2F_cs}{m}}=\sqrt{\frac{10^6\cdot1{,}875}{39}}=219{,}2{,}26 \text{ (მ/წმ).}$$

თავისუფალი ვარდნის ფორმულიდან გამომდინარე განვსაზღვრავთ სიმაღლეს, რომლიდანაც უნდა ჩამოვარდეს მეტეორიტი:

$$H=\frac{v_0^2}{2g}=\frac{48074{,}95}{2\cdot9{,}8}=2452{,}8 \text{ (მ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $v_0=219{,}3$ მ/წმ. $H=2453$ მ.

ამოცანა 30. 13

500 ტ მასის არადამუხრუჭებული მატარებელი, რომელიც მოძრაობს გამორთული ძრავით, განიცდის წინაღობას $R=(7650+500v)$ ნ, სადაც v - სიჩქარეა მ/წმ–ში. ვიცით მატარებლის საწყისი სიჩქარე $v_0=15$ მ/წმ, განსაზღვრეთ, რა მანძილს გაივლის მატარებელი გაჩერებამდე.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა დიფერენციალური სახით

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=dA,$$

ანუ

$$mvdv=-Rds,$$

სადაც R –წინაღობის ძალაა.

აქედან

$$ds=-\frac{mvdv}{R}.$$

გავაინტეგროთ ეს გამოსახულება და გავითვალისწინოთ ამოცანის მონაცემები $R=(7650+500v)$; $m=500\cdot10^3$,

$$\int_0^s ds=-\int_{v_0}^0\frac{500\cdot10^3vdv}{7650+500v}=-1\cdot10^3\int_{v_0}^0\frac{vdv}{15{,}3+v}=-10^3\int_{v_0}^0\frac{[(15{,}3+v)-15{,}3]dv}{15{,}3+v}=$$

$$=-10^3\left[\int_{v_0}^0dv-\int_{v_0}^0\frac{15{,}3dv}{15{,}3+v}\right]=-10^3\left[-v_0-15{,}3\ln(15{,}3+v)\Big|_{v_0}^0\right]=$$

$$=-10^3\{-v_0-15{,}3[In15{,}3-In(15{,}3+v_0)]\}=10^3\left(v_0-15{,}3In\frac{15{,}3+v_0}{15{,}3}\right).$$

მაშინ

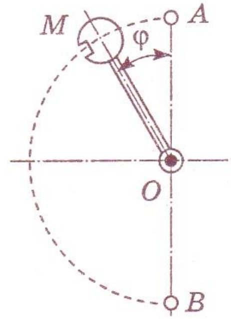
$$s=10^3\left[15-15{,}3In\left(1+\frac{15}{15{,}3}\right)\right]=4{,}5 \text{ (კმ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 4,5 კმ.

ამოცანა 30. 14

მასალათა დარტყმითი გამოცდის დანადგარის მთავარ ნაწილს შეადგენს ღეროზე მიმაგრებული ფოლადის მძიმე სხმული M, რომელსაც თითქმის ხახუნის გარეშე შეუძლია ბრუნვა უძრავი ჰორისონტალური 0 ღერძის გარშემო. ღეროს მასა უგულებელვყოთ და M სხმული განვიხილოთ, როგორც ნივთიერი წერტილი, რომლისთვისაც მანძილი 0M=0,981 მ. განსაზღვრეთ ამ წერტილის სიჩქარე ქვედა B მდებარეობაში, თუ ისვარდება ზედა A მდებარეობიდან უმნიშვნელოდ მცირე საწყისი სიჩქარით.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური სახით



$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A(\vec{F}_k). \qquad (1)$$

სადაც $v_0=0;\ \sum A(\vec{F}_k)=mgh$.

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$\frac{mv^2}{2}=mgh,.$$

სადაც $h=2R=2\cdot 0M=1{,}962$ მ. ამიტომ

$$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 1{,}962}=6{,}2 \text{ (მ/წმ)}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $v=6{,}2$ მ/წმ.

ამოცანა 30. 15

დაწერეთ დრეკადი რესორის პოტენციური ენერგიის გამოსახულება, თუ ის 1 სმ-ით ჩაიღუნება 4 კნ დატვირთვისას, უშვებთ, რომ ჩაღუნვა x იზრდება დატვირთვის პირდაპირ პროპორციულად.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რესორის პოტენციური ენერგია გამოვთვალოთ ფორმულით

$$\Pi = \frac{cx^2}{2} + C,$$

სადაც c – რესორის სიხისტეა; C – მუდმივია, რომელიც ახასიათებს პოტენციური ენერგიის საწყის მნიშვნელობას.

ამოცანის პირობის თანახმად

$c = 4$ კნ/სმ = 400 კნ/მ;

მაშინ, თუ x მეტრებშია

$$\Pi = 200\cdot10^3 x^2 + C,$$

თუ x სანტიმეტრებშია

$$\Pi = \frac{200\cdot10^3}{1\cdot10^4}x^2 + C = 20x^2 + C \text{ (ჯ).}$$

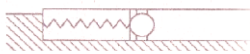
პ ა ს უ ხ ი: $\Pi = (20x^2 + C)$ ჯ. როცა x სანტიმეტრებშია.

ამოცანა 30. 16

ზანბარას თავისუფალ მდგომარეობაში აქვა 20 სმ სიგრძე. მისი სიგრძის 1 სმ-თ დაგრძელებისათვის საჭიროა 1,96 ნ ძალა. როგორი v სიჩქარით გამოვარდება მილიდან 30გ მასის ბურთულა, თუ ზამბარა იყო შეკუმშული 10 სმ სიგრძით? მილი მდებარეობს ჰორიზონტალურად.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური სახით

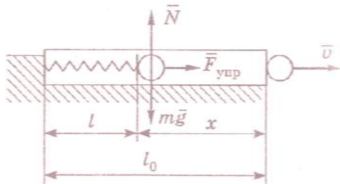
$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k).$$



მუშაობას x გადაადგილებაზე ასრულებს მხოლოდ დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა, ხოლო $v_0 = 0$; .

მაშინ

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{cx^2}{2},$$



სადაც $x = l_0 - l = 0{,}1$ მ; c –ზამბარის სიხისტეა, c = 196 ნ/მ. მაშინ

$$v = x\sqrt{\frac{c}{m}} = (l_0 - l)\sqrt{\frac{c}{m}} = 0{,}1\sqrt{\frac{196}{0{,}03}} = 8{,}08 \text{ (მ/წმ)}$$

პ ა ს უ ხ ი: $v = 8{,}08$ მ/წმ

ამოცანა 30. 17

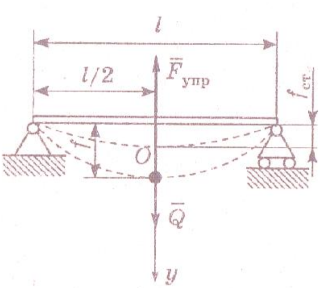
ძელის შუაში Q ტვირთის მოქმედებისას, მისი სტატიკური ჩაღუნვა უდრის 2 მმ-ს. ძელის მასა უგულებელყავით და გაიგეთ ძელის უდიდესი ჩაღუნვა ორ შემთხვევაში: 1) როცა Q ტვირთი ძევს არაჩაღუნულ ძელზე და გაშვებულია საწყისი სიჩქარის გარეშე; 2) როცა Q ტვირთი ეცემა არაჩაღუნული ძელის შუაში 10 სმ სიმაღლიდან საწყისი სიჩქარის გარეშე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ამოცანის ამოხსნის დროს გაითვალისწინეთ, რომ ტვირთზე ძელის მხრიდან მოქმედი ძალა მისი ჩაღუნვის პროპორციულია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. **1)** განვიხილოთ ტვირთის მოძრაობა, როცა იგი ძევს არაჩაღუნულ ძელზე და გაშვებულია საწყისი სიჩქარის გარეშე; ძელზე მოქმედებს ტვირთის სიმძიმის ძალა $\vec{Q}$ და დრეკადობის ძალა $\vec{F}_{yp}$. გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური სახით

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A(\vec{F}_k)=Qf-\int_0^f F_{yp}\,dy. \qquad (1)$$

სადაც $F_{yp}=cy$.



ვინაიდან $v_0=0$ და $v=0$, ამიტომ (1) ფორმულის თანახმად

$$Qf=\int_0^f cy\,dy=\left.\frac{cy^2}{2}\right|_0^f=\frac{cf^2}{2}.$$

აქედან $f=\dfrac{2Q}{c}.$

ვინაიდან წონასწორობის მდებარეობაში $cf_{cT}=Q$, ამიტომ $\dfrac{Q}{c}=f_{cT}$,

მაშინ $f=2f_{cT}=2\cdot 0{,}002=0{,}004$ (მ) $=4$ (მმ).

2) განვსაზღვროთ სიჩქარე, რომლითაც ტვირთი ეცემა ძელს:

$$\frac{m(v')^2}{2}-\frac{m(v'_0)^2}{2}=\sum A(\vec{F}_k)=QH,$$

სადაც H - სიმაღლეა, რომლითაც ტვირთი ეცემა ძელს; $v'_0=0.$

აქედან $v'=\sqrt{\dfrac{2QH}{m}}=\sqrt{2gH}.$

განვიხილოთ ტვირთის მოძრაობა დრეკად ძელზე:

$$\frac{m(v'')^2}{2}-\frac{m(v''_0)^2}{2}=\sum A(\vec{F}_k)=Qf-\frac{cf^2}{2}, \qquad (2)$$

სადაც $v''=0$, $v''_0=v'=\sqrt{2gH}$.

ამ მნიშვნელობთა ჩასმით (2) ფორმულაში მივიღებთ

$$-\frac{m}{2}\cdot 2gH=Qf-\frac{cf^2}{2},$$

$$-QH=Qf-\frac{cf^2}{2},$$

ანუ

$$f^2-\frac{2Q}{c}f-\frac{2QH}{c}=0,$$

$$f^2-2f_{cT}f-2f_{cT}H=0.$$

აქედან

$$f_{1,2}=f_{cT}\pm\sqrt{f_{cT}^2+2f_{cT}H}=0{,}002\pm\sqrt{0{,}002^2+2\cdot 0{,}002\cdot 0{,}1}=0{,}002\pm 0{,}0201,$$

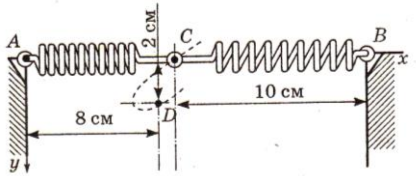
ვინაიდან $f>0$, ამიტომ

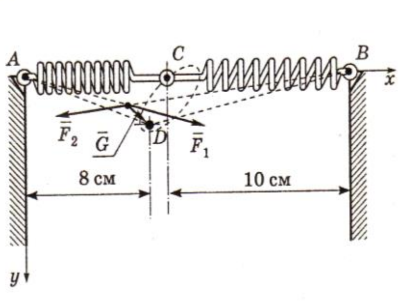
$$f=0{,}002+0{,}0201=0{,}0221(\text{მ})=22{,}1\ (\text{მმ}).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 1) 4 მმ; 2) 22,1 მმ.

ამოცანა 30. 18

ორი დაუძაბავი AC და BC ზამბარა რომელიც მოთავსებულია ჰორიზონტალურ Ax წრფეზე, სახსრებით მიმაგრებულია უძრავ A და B წერტილებში, ხოლო C წერტილში – 2 კგ მასის საწონზე. ზამბარა AC იკუმშება 20 ნ ძალით 1 სმ-ით, ხოლო CB ზამბარა იჭიმება 40 ნ ძალით 1 სმ-ით. მანძილი $AC=BC=10$ სმ. C საწონს მიანიჭეს 2 მ/წმ სიჩქარე ისეთი მიმართულებით, რომ შემდგომი მოძრაობისას ის გაივლის D წერტილზე, რომლის კოორდინატებია $x_D=8$ სმ, $y_D=2$ სმ, თუ სათავე აღებულია A წერტილში და საკოორდინატო ღერძები მიმართულია ისე, როგორც ნაჩვენებია ნახაზზე.





განსაზღვრეთ საწონის სიჩქარე D წერტილზე გავლის მომენტში, რომელიც მდებარეობს ვერტიკალურ xy სიბრტყეში.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ C საწონის მოძრაობა სიმძიმის $\vec{G}$ ძალისა და ზამბარების დრეკადობის $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი). გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა საწონის საწყისი მდებარეობიდან D წერტილში გადაადგილებაზე:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k) = A(\vec{G}) + A(\vec{F}_1) + A(\vec{F}_2),$$

სადაც $A(G) = 0{,}02mg; \quad A(\vec{F}_1) = -c_1\dfrac{\lambda_1^2}{2}; \quad A(\vec{F}_2) = -c_2\dfrac{\lambda_2^2}{2}.$

მაშინ $$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + 0{,}02mg - \frac{1}{2}(c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2).$$

აქედან $$v = \sqrt{v_0^2 + 0{,}04g - \frac{1}{m}(c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2)} \qquad (1)$$

სადაც $c_1 = \dfrac{P_1}{l_1} = \dfrac{20}{0{,}01} = 2000$ (ნ/მ);

$$c_2 = \frac{P_2}{l_2} = \frac{40}{0{,}01} = 4000 \text{(ნ/მ}$$

$$\lambda_1 = AC - AD = 0{,}10 - \sqrt{0{,}08^2 + 0{,}02^2} = 0{,}0175 \text{ (მ);}$$

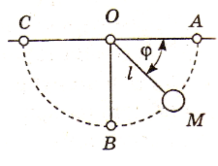
$$\lambda_2 = BD - BC = \sqrt{0{,}12^2 + 0{,}02^2} - 0{,}10 = 0{,}0216 \text{ (მ).}$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (1) ფორმულაში, გამოვთვლით საწონის სიჩქარეს:

$$v = \sqrt{2^2 + 9{,}8\cdot 0{,}04 - \frac{1}{2}(2000\cdot 0{,}0175^2 + 4000\cdot 0{,}0216^2)} = 1{,}77 \text{ (მ/წმ).}$$

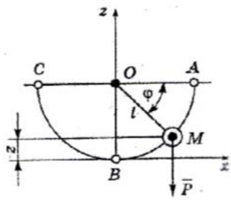
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $v = 1{,}77$ მ/წმ.

ამოცანა 30. 19



P წონის M ტვირთი, რომელიც l სიგრძის უჭიმად ძაფზეა დაკიდებულია 0 წერტილში, ვერტიკალურ სიბრტყეში საწყისი სიჩქარის გარეშე იწყებს მოძრაობას A წერტილიდან; წინაღობის არ არსებობისას M ტვირთი აღწევს C მდებარეობას,

სადაც მისი სიჩქარე გახდება ნული. მიიღეთ, რომ M ტვირთის სიმძიმის ძალის გათვალისწინებით B წერტილში პოტენციური ენერგია ნულის ტოლია, და ააგეთ φ კუთხეზე დამოკიდებულებით კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების, ასევე მათი ჯამის ცვალებადობის გრაფიკი. ძაფის მასა უგულებელყავით.



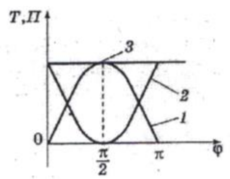
ნახ. 1

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ ტვირთის კინეტიკური ენერგია M მდებარეობაში (ნახ. 1):

$$T = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k) = A(\vec{P}) = Pl\sin\varphi .$$

ვინაიდან $v_0 = 0,$ ამიტომ

$$T = \frac{mv^2}{2} = Pl\sin\varphi$$ - სინუსოიდის განტოლებაა (ნახ. 2, I მრუდი).



ნახ. 2

განვსაზღვროთ ტვირთის პოტენციური ენერგია M მდებარეობაში:

$$\varPi = Pz = P(OB - l\sin\varphi) = Pl(1-\sin\varphi)$$ - სინუსოიდის განტოლებაა (ნახ. 2; მრუდი 2).

ვიპოვოთ ტვირთის კინეტიკური და პოტენციური ენერგია ჯამი:

$T + \varPi = Pl\sin\varphi + Pl(1-\sin\varphi) = pl$ - წრფის განტოლება ნახ. 2. ხაზი 3).

პ ა ს უ ხ ი: ორი სინუსოიდი და წრფე, რომელთა განტოლებებია:

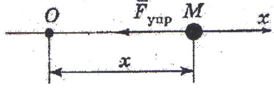
$$T = Pl\sin\varphi , \quad \varPi = Pl(1-\sin\varphi) , \quad T + \varPi = pl .$$

ამოცანა 30. 20

m მასის ნივთიერი წერტილი დრეკადი აღმდგენი ძალის მოქმედებით 0x წრფის გასწვრივ ასრულებს ჰარმონიულ რხევას შემდეგი კანონით: $x = a\sin(kt+\beta)$. წინაღობები უგულებელყავით და ააგეთ მოძრავი წერტილის კინეტიკური T ენერგიისა და პოტენციური Π ენერგიის ცვლიების გრაფიკები x კოორდინატზე დამოკიდებულებით; საწყის მომენტში Π=0.

ა მ ო ხ ს ნ ა. წერტილის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{mv^2}{2},$$



ნახ. 1

სადაც $v = x' = ka\cos(kt+\beta),$

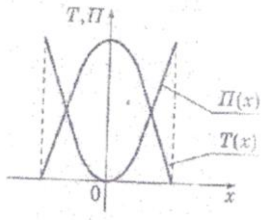
$$v^2 = k^2a^2\cos^2(kt+\beta) = k^2a^2[1-\sin^2(kt+\beta)] = k^2(a^2 - x^2).$$

მაშინ

$$T = \frac{mk^2}{2}(a^2 - x^2).$$

განვსაზღვროთ წერტილის პოტენციური ენერგია M მდებარეობაში (ნახ. 1):

$$П = A_{M0}(\vec{F}_{yp}) = \frac{cx^2}{2},$$



ნახ. 2

სადაც $A_{M0}(\vec{F}_{yp}) -$ აღმდგენი ძალის მუშაობაა წერტილის გადაადგილებაზე M მდებარეობიდან ნულოვან მდებარეობამდე;

$$\vec{F}_{yp} = -cx, \quad c = k^2 m.$$

მაშინ $\quad П = \dfrac{k^2 m x^2}{2}$.

ავაგოთ T და П ენერგიების ცვლიების გრაფიკები x კოორდინატზე დამოკიდებულებით – პარაბოლები (ნახ.2).

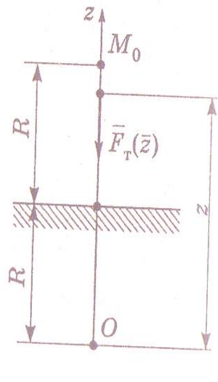
<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: ორივე გრაფიკი – პარაბოლაა, რომელთა განტოლებებია

$$T = \frac{mk^2}{2}(a^2 - x^2). \qquad П = \frac{k^2 m x^2}{2}$$

ამოცანა 30. 21

სიდიდით და მიმართულებით მუდმივი როგორი ვერტიკალური ძალა უნდა მოვდოთ ნივთიერ წერტილს, რომ დედამიწის რადიუსის ტოლი სიმაღლიდან დედამიწაზე ჩამოვარდნილ წერტილს, ამ ძალამ მიანიჭოს ისეთივე სიჩქარე, როგორსაც დედამიწის მიზიდულობის ძალა, რომე;ლიც წერტილიდან დედამიწის ცენტრამდე მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია

<u>**ა მ ო ხ ს ნ ა**</u>. განვიხილოთ მიზიდულობის $\vec{F}_T$ ძალის მოქმედებით ნივთიერი წერტილის ვარდნა დედამიწაზე (იხ. ნახაზი). ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის საფუძველზე, იმის გათვალისწინებით, რომ $v_0 = 0$,



გვექნება: $\quad \dfrac{mv^2}{2} = A(\vec{F}_T),$

სადაც $$A(\vec{F}_T)=\int_{2R}^{R}F_T dz=-\int_{2R}^{R}\frac{km}{z^2}dz=km\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{2R}\right)=\frac{km}{2R}.$$

მაშინ $$\frac{mv^2}{2}=\frac{km}{2R},$$

$$v^2=\frac{k}{R}. \qquad (1)$$

განვიხილოთ ნივთიერი წერტილის ვარდნა საძებნი მუდმივი $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით

$$\frac{mv^2}{2}=A(\vec{F}),$$

სადაც $A(\vec{F})=FR$. აქედან

$$v^2=\frac{2FR}{m}. \qquad (2)$$

(1) და (2) გამოსახულებების გატოლებით (v^2-თვის), მივიღებთ:

$$\frac{k}{R}=\frac{2FR}{m},$$

აქედან $$F=\frac{km}{2R^2}.$$

რადგანაც დედამიწის ზედაპირზე

$$mg=F=\frac{km}{R^2}\Rightarrow \quad g=\frac{k}{R^2},$$

ამიტომ $$F=\frac{km}{2R^2}=\frac{gm}{2}=\frac{P}{2}$$

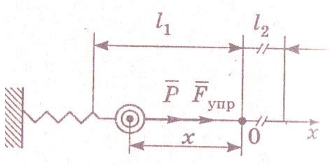
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $P/2$, სადაც P - წერტილის წონაა დედამიწის ზედაპირზე.

ამოცანა 30. 22

ჰორიზონტალური ზამბარა, რომლის ბოლოშიც მიმაგრებულია ნივთიერი წერტილი, შეკუმშულია P ძალით და იმყოფება წონასწორობაში. უეცრად P ძალა იცვლის მიმართულებას პირდაპირ საწინააღმდეგოდ. ზამბარის მასა უგულებელყავით და განსაზღვრეთ, ამ

შემთხვევაში მიღებული უდიდესი დაჭიმულობა l_2 რამდენჯერ მეტია პირველსაწყის l_1 შეკუმშვაზე.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობა მას შემდეგ, რაც $\vec{P}$ ძალამ მიმართულება შეიცვალა (იხ. ნახაზი). გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით:



$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k) = A(\vec{P}) + A(\vec{F}_{yp})$$

ვინაიდან $v = 0$, $v_0 = 0$, ამიტომ $A(\vec{P}) + A(\vec{F}_{yp}) = 0$,

სადაც $A(\vec{P}) = P(l_1 + l_2)$;

$$A(\vec{F}_{yp}) = -\int_{l_1}^{l_2} cx dx = -\frac{cx^2}{2}\Bigg|_{l_1}^{l_2} = -\frac{c}{2}(l_2^2 - l_1^2) = \frac{c}{2}(l_1^2 - l_2^2),$$

სადაც c - ზამბარის სიხისტეა.

მაშინ

$$P(l_1 + l_2) + \frac{c}{2}(l_1^2 - l_2^2) = P(l_1 + l_2) + \frac{c}{2}(l_1 - l_2)(l_1 + l_2) = 0.$$

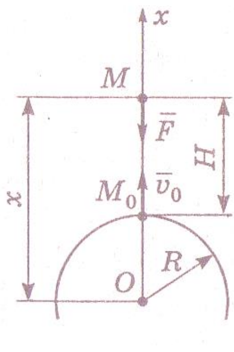
$(l_1 + l_2) \neq 0$ გამოსახულებაზე შეკვეცის შემდეგ

$$\frac{2P}{c} + (l_1 - l_2) = 0 \Rightarrow \frac{2P}{cl_1} + 1 - \frac{l_2}{l_1} = 0 \Rightarrow \frac{l_2}{l_1} = 1 + \frac{2P}{cl_1}.$$

ვინაიდან $l_1 = \dfrac{P}{c}$, ამიტომ $\dfrac{l_2}{l_1} = 1 + \dfrac{2Pc}{cP} = 3$.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\dfrac{l_2}{l_1} = 3$.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 30. 23



დედამიწის ზედაპირიდან ვერტიკალურად ზევით გასროლილია სხეული საწყისი v_0 სიჩქარით. განსაზღვრეთ სხეულის ასვლის H სიმაღლე, ამასთანავე, მხედველობაში მიიღეთ, რომ სიმძიმის ძალა იცვლება დედამიწის ცენტრიდან

დაშორების მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულად; ჰაერის წინაღობა უგულებელყავით. დედამიწის რადიუსი $R = 6370$ კმ, $v_0 = 1$ კმ/წმ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k)$$

სადაც $v = 0$, $F = \alpha x^{-2}$.

დედამიწის ზედაპირზე $x = R$ (იხ. ნახაზი):

$$F = \frac{\alpha}{R^2} = mg \Rightarrow \alpha = mgR^2.$$

მუშაობას ასრულებს მხოლოდ $\vec{F}$ ძალა:

$$A(\vec{F}) = \int F dx = -\int_R^{R+H} \frac{mgR^2}{x^2} dx = \frac{mgR^2}{x} \Big|_R^{R+H} =$$

$$= mgR^2\left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R}\right) = -\frac{mgRH}{R+H}.$$

გაუტოლოთ კინეტიკური ენერგია მუშაობას, მივიღებთ

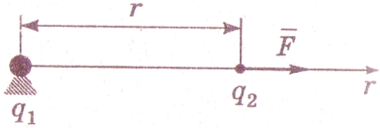
$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mgRH}{R+H} \Rightarrow v_0^2 R + v_0^2 H = 2gRH.$$

აქედან $H = \dfrac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2} = \dfrac{6370 \cdot 1^2}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-3} \cdot 6370 - 1^2} = 51{,}38$ (კმ)

პ ა ს უ ხ ი: $H = \dfrac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2} = 51{,}38$ კმ.

ამოცანა 30. 24

ორი ნაწილაკი დამუხტულია დადებითი ელექტრობით, პირველი ნაწილაკის მუხტი $q_1 = 100$, მეორე ნაწილაკის მუხტი $q_2 = 0{,}1q_1$; პირველი ნაწილაკი რჩება უძრავი, ხოლო მეორე მოძრაობს პირველი ნაწილაკისაგან უკუგდების ძალების მოქმედებით. მეორე ნაწილაკის მასა 1 კგ ტოლია, საწყისი მანძილი პირველი ნაწილაკიდან 5 მ ტოლია, ხოლო საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია. განსაზღვრეთ მოძრავი მუხტის სიჩქარის ზედა ზღვარი, თუ მხედველობაში მიიღებთ მხოლოდ უკუგდების



ერთი ძალის მოქმედებას $F = q_1 q_2 / r^2$, სადაც r - მუხტებს შორის მანძილია.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. q_2 ნაწილაკი მოძრაობს უკუგდების ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი). მეორე ნაწილაკისათვის გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით

$$\frac{m_2 v^2}{2} - \frac{m_2 v_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}), \qquad (1)$$

სადაც $v_0 = 0$, $m_2 = 1$ კგ.

ვიპოვოთ $\vec{F}$ ძალის მუშაობა

$$A(\vec{F}) = \int_5^r \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = -\frac{q_1 q_2}{r}\bigg|_5^r = -\frac{q_1 q_2}{r} + \frac{q_1 q_2}{5}.$$

მაშინ, (1) ფორმულიდან მივიღებთ

$$v^2 = \frac{2}{5} q_1 q_2 - \frac{2}{r} q_1 q_2 = \frac{2}{5} q_1 q_2 \left(1 - \frac{5}{r}\right).$$

ნაწილაკის სიჩქარე მაქსიმალური იქნება, როცა $r = \infty$, ე. ი. როცა $\frac{5}{r}$ გახდება ნულის ტოლი. მაშასადამე

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{5} q_1 q_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 10}{5}} = 20 \quad (\text{მ/წმ})$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 20 მ/წმ.

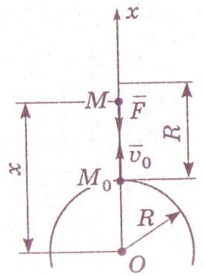
ამოცანა 30. 25

განსაზღვრეთ v_0 სიჩქარე, რომელიც უნდა მივანიჭოთ დედამიწის ზედაპირზე მდებარე სხეულს იმისათვის, რომ ის ავიდეს ვერტიკალურად ზევით დედამიწის რადიუსის ტოლ სიმაღლეზე; ამასთანავე, მხედველობაში მიიღეთ მხოლოდ დედამიწის მიზიდულობის ძალა, რომელიც იცვლება დედამიწის ცენტრიდან სხეულის დაშორების მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულად; დედამიწის რადიუსი არის $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ მ, დედამიწის ზედაპირზე სიმძიმის ძალის აჩქარებ არის 9,8 მ/წმ².

ამოხსნა. გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა, გავითვალისწინოთ, რომ სხეულზე მოქმედებს მხოლოდ მიზიდულობის ძალა (იხ. ნახაზი)

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}),$$

ანუ, ვინაიდან $v = 0$,



$$-\frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}). \qquad (1)$$

ამოცანის პირობის თანახმად მიზიდულობის ძალა $F = \dfrac{\alpha}{x^2}$ დედამიწის ზედაპირზე $F = mg = \dfrac{\alpha}{R^2}$,

საიდანაც $\alpha = mgR^2$.

მაშინ
$$F = \frac{mgR^2}{x^2}.$$

განვსაზღვროთ მიზიდულობის ძალის მუშაობა

$$A(\vec{F}) = \int F dx = -\int_R^{2R} \frac{mgR^2}{x^2} dx = \frac{mgR^2}{x} \Big|_R^{2R} = -\frac{mgR}{2}.$$

მაშინ, (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mgR}{2}.$$

აქედან $v_0 = \sqrt{gR} = \sqrt{6{,}37 \cdot 10^6 \cdot 9{,}8} = 7900$ (მ/წმ).

პასუხი: 7,9 კმ/წმ.

ამოცანა 30. 26

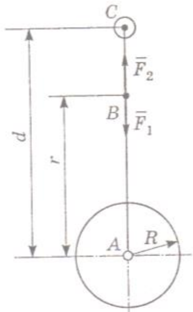
განსაზღვრეთ. როგორი v_0 სიჩქარით უნდა გავისროლოთ დედამიწის ზედაპირიდან მთვარის მიმართულებით ჭურვი, რომ მან მიაღწიოს წერტილს, სადაც დედამიწისა და მთვარის მიზიდულობის ძალები ტოლია, და ამ წერტილში დარჩა წონასწორობაში. დედამიწისა და მთვარის მოძრაობა, ასევე ჰაერის წინაღობა უგულებელყავით. დედამიწის ზედაპირზე სიმძიმის ძალის აჩქარებ არის 9,8 მ/წმ². მთვარისა და

დედამიწისა მასების შეფარდება $m:M=1:80;$ მათ შორის მანძილი $d=60R$, სადაც $R=6000$კმ (დედამიწის რადიუსია)

კოეფიციენტი f, რომელიც შედის მსოფლიო მიზიდულობის ძალის სიდიდის ფორმულაში, განისაზღვრება განტოლებიდან

$$mg=mf\left[\frac{M}{R^2}-\frac{m}{(d-R)^2}\right].$$

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვსაზღვროთ დედამიწისა - F_1 და მთვარის -F_2 მიერ ჭურვის მიზიდულობის ძალები:



$$F_1=f\,\frac{m_1M}{r^2},\; F_2=f\,\frac{m_1m}{(d-r)^2}, \quad (1)$$

სადაც m_1 - ჭურვის მასაა; f - გრავიტაციული მუდმივა. ვთქვათ B წერტილში $F_1=F_2$ (იხ. ნახაზი), მაშინ

$$\frac{M}{r^2}=\frac{m}{(d-r)^2},$$

სიდანაც $$r_{1,2}=\frac{d}{M-m}(M\pm\sqrt{Mm})=\frac{d\sqrt{M}}{\sqrt{M}\pm\sqrt{m}.} \qquad (2)$$

(2) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ შესაძლოა r-ის ორი მნიშვნელობა (ორი ფესვი), მაგრამ, რადგანაც წერტილი, რომელშიც ჭურვი იმყოფება წონასწორობაში, ერთადერთია, ამიტომ საჭიროა განვსაზღვროთ, რომელ პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს r-ის მნიშვნელობა.

(2) ფორმულა ასეთი სახით ჩავწეროთ

$$\frac{r}{d}=\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M}\pm\sqrt{m}}.$$

ვინაიდან $\frac{r}{d}<1$, ამიტომ, ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე ნაკლებია ერთზე, როცა $\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}$.

გამოსახულება $\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M}-\sqrt{m}}>1$, ამიტომ ეს ფესვი უნდა უკუვაგდოთ. ასე, რომ

$$r = \frac{d\sqrt{M}}{\sqrt{M} + \sqrt{m}} \quad . \qquad (2')$$

დედამიწიდან მთვარის მიმართულებით მოძრაობისას ჭურვზე მოქმედებს ძალა $F = F_1 - F_2$.

(1) გამოსახულების გათვალისწონებით

$$F = m_1 f\left[\frac{M}{r^2} - \frac{m}{(d-r)^2}\right] \qquad (3)$$

დედამიწის ზედაპირზე $F = m_1 g$, $r = R$. მაშინ (3) ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს

$$m_1 g = m_1 f\left[\frac{M}{R^2} - \frac{m}{(d-R)^2}\right],$$

საიდანაც $$f = \frac{g}{\dfrac{M}{R^2} - \dfrac{m}{(d-R)^2}} \qquad (4)$$

ჭურვის მოძრაობისათვის გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით:

$$\frac{m_1 v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k),$$

ვინაიდან B მდებარეობაში ჭურვი იმყოფება წონასწორობაში, ამიტომ $v = 0$. მაშასადამე

$$-\frac{m_1 v_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k). \qquad (5)$$

ვიპოვოთ მიზიდულობის F_1 და F_2 ძალების მუშაობები:

$$A(\vec{F}_1) = -\int_R^r f\,\frac{m_1 M}{r^2} dr = -\frac{f m_1 M}{r}\Big|_R^r = -f m_1\left(\frac{M}{r} - \frac{M}{R}\right),$$

$$A(\vec{F}_2) = -\int_R^r f\,\frac{m_1 m}{(d-r)^2} dr = -\frac{f m_1 m}{d-r}\Big|_R^r = -f m_1\left(\frac{m}{d-r} - \frac{m}{d-R}\right).$$

ამ ძალების მუშაობათა ჯამი იქნება

$$\sum A(\vec{F}_k) = \sum A(\vec{F}_1) + \sum A(\vec{F}_2) = -f m_1\left(\frac{M}{R} - \frac{m}{d-r} - \frac{M}{r} + \frac{m}{d-R}\right). \qquad (6)$$

(6) გამოსახულება ჩავსვათ (5) ფორმულაში, მივიღებთ

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} = fm_1\left(\frac{M}{R} - \frac{m}{d-r} - \frac{M}{r} + \frac{m}{d-R}\right). \qquad (7)$$

აქედან, (4) გამოსახულების გათვალისწინებით

$$v_0^2 = 2g\,\frac{\dfrac{M}{R} + \dfrac{m}{d-R} - \dfrac{m}{d-r} - \dfrac{M}{r}}{\dfrac{M}{R^2} - \dfrac{m}{(d-R)^2}}. \qquad (8)$$

(2) ფორმულის თანახმად

$$\frac{M}{r} + \frac{m}{d-R} = \frac{M(d-R)+mr}{r(d-R)} = \frac{M\left(d - \dfrac{d(\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right) + \dfrac{d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}}{\dfrac{d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\left(d - \dfrac{d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)} =$$

$$= \frac{M\dfrac{d\sqrt{M}+d\sqrt{m}-d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}} + m\dfrac{d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}}{\dfrac{d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\,\dfrac{d\sqrt{M}+d\sqrt{m}-d\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}} = \frac{d(M\sqrt{m}+m\sqrt{M})(\sqrt{M}+\sqrt{m})}{d^2\sqrt{Mm}} =$$

$$= \frac{M\sqrt{Mm}+mM+Mm+m\sqrt{Mm}}{d\sqrt{Mm}} = \frac{\sqrt{Mm}(M+m)+2Mm}{d\sqrt{Mm}} =$$

$$= \frac{M+m}{d} + \frac{2Mm}{d\sqrt{Mm}} = \frac{M+2\sqrt{Mm}+m}{d} = \frac{(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{d}.$$

ეს გამოსახულება ჩავსვათ (8) ფორმულაში და გარდავქმნათ:

$$v_0^2 = 2g\,\frac{\dfrac{M}{R} + \dfrac{m}{d-R} - \dfrac{(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{d}}{\dfrac{M}{R^2} - \dfrac{m}{(d-R)^2}} = 2g\,\frac{\left[\dfrac{M}{R} + \dfrac{m}{d-R} - \dfrac{(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{d}\right]R^2(d-R)^2}{M(d-R)^2 - mR^2} =$$

$$= 2g\,\frac{\left[M(d-R)+mR\right]R(d-R) - \dfrac{(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{d}R^2(d-R)^2}{M(d-R)^2 - R^2 m} =$$

$$=\frac{2gR(d-R)}{d}\cdot\frac{Md^2-MRd+mRd-(M+2\sqrt{Mm}+m)(Rd-R^2)}{M(d-R)^2-mR^2}=$$

$$=\frac{2gR(d-R)}{d}\cdot\frac{Md^2-2MRd+MR^2-2\sqrt{Mm}R(d-R)+mR^2}{M(d-R)^2-mR^2}=$$

$$=\frac{2gR(d-R)}{d}\cdot\frac{\left[\sqrt{M}(d-R)-\sqrt{m}R\right]^2}{[\sqrt{M}(d-R)-\sqrt{m}R][\sqrt{M}(d-R)+\sqrt{m}R]}=$$

$$=\frac{2gR(d-R)}{d}\cdot\frac{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R)-R}{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R)+R}\,. \qquad (9)$$

გამოვთვალოთ v_0^2 -ს მნიშვნელობა (9) ფორმულიდან:

$$v_0^2=\frac{2gR\cdot 59R}{60R}\cdot\frac{\sqrt{80}\cdot 59R-R}{\sqrt{80}\cdot 59R+R}=\frac{59}{30}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha}gR,$$

სადაც $\alpha=\dfrac{1}{59\sqrt{80}}=0{,}002.$

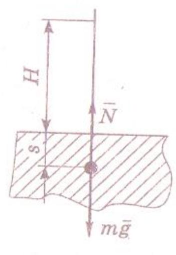
ჭურვის სიჩქარე იქნება:

$$v_0=\sqrt{\frac{59}{30}\cdot\frac{0{,}998}{1{,}002}\cdot 9{,}8\cdot 10^{-3}\cdot 610^3}=10{,}75 \text{ (კმ/წმ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $v_0^2=\dfrac{2gR(d-R)}{d}\cdot\dfrac{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R)-R}{\sqrt{\frac{M}{m}}(d-R)+R}$; ანუ, v_0 =10,75 კმ/წმ.

ამოცანა 30. 27

გრუნტი იტკეპნება 60 კგ მასის და 12 დმ^2 განიკვეთის ხელის კუტით, რომელიც ვარდება 1 მ სიმაღლიდან. ბოლო დარტყმაზე კუტი ეფლობა მიწაში 1 სმ სიღრმეზე, ამასთანავე, კუტის მოძრაობისადმი გრუნტის წინაღობა შეიძლება მუდმივად ჩაითვალოს. როგორ უდიდეს დატვირთვას გაუძლებს გრუნტი, თუ არ დაუშვებს დაწევას? დასაშვებია, რომ დატკეპნილ



გრუნტს შეუძლია დაწევის გარეშე გაუძლოს დატვირთვას, რომელიც არ აჭარბებს იმ წინაღობას, რომელსაც ხვდება კუტი გრუნტში ჩაღრმავებისას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნახაზზე ნაჩვენებია ტვირთის საბოლოო მდებარეობა, როცა მოქმედებს სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$ და დატკეპნლი გრუნტის წინაღობის ძალა $\vec{N}$. გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k) = A(m\vec{g}) + A(\vec{N}),$$

ანუ

$$0 = A(m\vec{g}) + A(\vec{N}), \qquad (1)$$

ვინაიდან $v = v_0 = 0$.

გამოვთვალოთ ამ ძალების მუშაობა. სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A(m\vec{g}) = mg(H+s),$$

სადაც, H - კუტის ვარდნის სიმაღლეა; s – კუტის გრუნტში შეღწევის სიღრმე.

გრუნტის წინაღობის ძალის მუშაობა

$$A(\vec{N}) = -Ns.$$

მაშინ, (1) განტოლებიდან

$$mg(H+s) - Ns = 0.$$

აქედან

$$N = \frac{mg(H+s)}{s} = \frac{60 \cdot 9{,}8(1+0{,}001)}{0{,}01} = 58388 \text{ (ნ).}$$

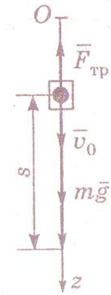
უიდესი დატვირთვა [σ], რომელსაც გაუძლებს გრუნტი დაწევის გარეშე:

$$[\sigma] = \frac{N}{S} = \frac{59388}{0{,}12} = 494900, \quad \Pi a$$

სადაც S – სატკეპნი კუტის განივი კვეთის ფართობია.

პ ა ს უ ხ ი: 494,9 $k\Pi a$

ამოცანა 30. 28



შახტში ლიფტი ქვევით მოძრაობს $v_0 = 12$ მ/წმ სიჩქარით. ლიფტის მასაა 6 ტ. ლიფტის შემაკავებელი ბაგირის გაწყვეტის შემთხვევაში დამცავმა პარაშუტმა როგორი ხახუნის ძალა უნდა განავითაროს ლიფტსა და შახტის კედლებს შორის, რომ ლიფტი გააჩეროს s=10 მ

მანძილის გავლის განმავლობაში? ჩათვალეთ, რომ ხახუნის ძალა მუდმივია.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ბაგირის გაწყვეტის შემთხვევაში ლიფტი მოძრაობს სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალისა და ხახუნის $\vec{F}_{Tp}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი).

გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k) = A(m\vec{g}) + A(\vec{F}_{Tp}), \qquad (1)$$

სადაც $v = 0$; $A(\vec{F}_{Tp}) = -F_{Tp}s$; $A(m\vec{g}) = mgs,$

$$\frac{mv_0^2}{2} = F_{Tp}s - mgs.$$

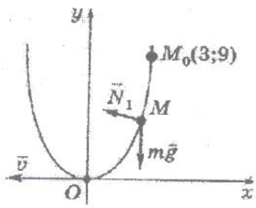
აქედან, ხახუნის ძალა

$$F_{Tp} = \frac{mv_0^2}{2s} + mg = \frac{6000\cdot 12^2}{2\cdot 10} + 6000\cdot 9{,}8 = 102000 \text{ (ნ)}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $F_{Tp} = m(\frac{v_0^2}{2s} + g) = 102$ კნ.

ამოცანა 30. 29

200 გ მასის რგოლი მისრიალებს ქვევით მავთულის რგოლზე, რომელსაც აქვს $y=x^2$ პარაბოლის ფორმა. რგოლმა მოძრაობა დაიწყო x=3 მ, y=9 მ წერტილიდან ნულოვანი საწყისი სიჩქარით. განსაზღვრეთ რგოლის სიჩქარე და მავთულის მხრიდან რგოლზე მოქმედი ძალა პარაბოლის ქვედა წერტილში გავლის მომენტში.

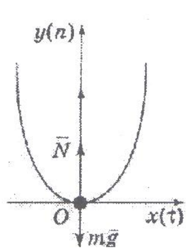


ნახ. 1

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. გამოვსახოთ რგოლზე მოქმედი ძალები ნებისმიერად არჩეულ M წერტილში: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა და მავთულის მხრიდან რეაქციის $\vec{N}_1$ ძალა (იხ. ნახაზი).

გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(\vec{F}_k) = A(m\vec{g}) + A(\vec{N}_1), \qquad (1)$$



ნახ. 2

სადაც $v_0 = 0$; $A(m\vec{g}) = mgy$; $A(\vec{N}_1) = 0$,

რადგანაც N_1 ძალა გადაადგილების მართობულია.

მაშინ (1) განტოლებიდან

$$v_1^2 = 2gy,$$

საიდანაც $v_1 = \sqrt{2gy} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 9} = 13{,}28$ (მ/წმ).

ტრაექტორიის უმდაბლეს წერტილში რგოლზე მავთულის წნევის განსაზღვრისათვის შევადგინოთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება მთავარ ნორმალიზე გეგმილებში (ნახ. 2). რგოლზე 0 წერტილში მოქმედებენ სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა და ბმის რეაქციის $\vec{N}$ ძალა:

$$ma_n = N - mg, \qquad (2)$$

სადაც $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$; ρ - ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსია.

სიმრუდის რადიუსი განისაზღვრება მათემატიკიდან ცნობილი ფორმულით [2]:

$$\rho = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|}.$$

პირობის თანახმად $y = x^2$, მაშინ $y' = 2x$; $y'' = 2$. ვინაიდან O წერტილში $x = 0$, ამიტომ $y' = 0$, ხოლო $\rho = 0{,}5$. მაშასადამე, $a_n = 2v^2$ და ფორმულა (2) მიიღებს ასეთ სახეს

$$2mv^2 = N - mg,$$

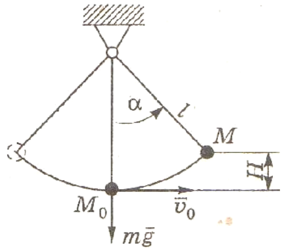
საიდანაც $N = 2mv^2 + mg = 0{,}2(2 \cdot 13{,}28^2 + 9{,}8) = 72{,}5$ (ნ).

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $v_1 = 13{,}28$ მ/წმ; $N = 72{,}5$ ნ.

ამოცანა 30. 30

წონასწორობაში მყოფ l სიგრძის მათემატიკურ ქანქარას მიანიჭეს ჰორიზონტალურად მიმართული საწყისი $\vec{v}_0$ სიჩქარე. განსაზღვრეთ იმ რკალის სიგრძე, რომელსაც ის შემოწერს ერთი პერიოდის განმავლობაში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვერტიკალიდან ქანქარას უდიდესი გადახრის კუთხის (იხ. ნახაზი) განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით:



$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\sum A(\vec{F}_k)=A(m\vec{g}), \quad (1)$$

სადაც $v=0$;

$$A(m\vec{g})=-mgH=-l(1-\cos\alpha)mg.$$

მაშინ, (1) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს

$$\frac{v_0^2}{2}=l(1-\cos\alpha)g.$$

საიდანაც

$$\cos\alpha=1-\frac{v_0^2}{2gl}, \qquad \alpha=\arccos(1-\frac{v_0^2}{2gl}).$$

α კუთხის შესაბამისი რკალის სიგრძეა $M_0^{\cup}M=l\alpha$.

ერთი პერიოდის განმავლობაში ქანქარა აღწერა რკალს, რომლის სიგრძეა

$$s=4\ M_0^{\cup}M=4l\alpha=4l\arccos(1-\frac{v_0^2}{2gl}).$$

პ ა ს უ ხ ი: $s=4l\arccos(1-\dfrac{v_0^2}{2gl})$.

31. შერეული ამოცანები

მეთოდური მითითებანი ამოცანების ამოსახსნელად

ამ პარაგრაფის ამოცანებში განიხილება არათავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობა. მოძრავ წერტილზე დადებული ბმების სახით გამოყენებულია ბრტყელი, ცილინდრული, კონუსური და სფერული ზედაპირები, ბრტყელი მრუდი ხაზები, უწონადი ღეროები, უჭიმადი ძაფები. ასეთი ამოცანების ამოსახსნელად შეიძლება გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით და ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები.

დინამიკის ძირითად კანონს არათავისუფალი ნივთიერი წერტილისათვის, და მაშასადამე, მისი მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებასაც იგივე სახე აქვს, როგორიც თავისუფალი წერტილისათვის, მაგრამ ამასთანავე წერტილზე მოქმედ აქტიურ ძალებს საჭიროა ბმისაგან განთავისუფლების პრონციპის შესაბამისად დაემატოს ბმის რეაქციის ძალები.

თუმცა ზოგჯერ, დინამიკის პირველი და მეორე ძირითადი ამოცანების ამოხსნისას ბმის რეაქციის ძალები წინასწარ უცნობია და აუცილებელია ისინი დამატებით განვსაზღვროთ ბმების მოცემული განტოლებების მიხედვით.

ამიტომ, **დინამიკის მეორე ძირითადი ამოცანა** არათავისუფალი ნივთიერი წერტილისათვის შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ:

მოცემული აქტიური ძალების, წერტილის მასის, მოძრაობის საწყისი პირობებისა და წერტილზე დადებული ბმებით განვსაზღვროთ ამ წერტილის მოძრაობა და ბმის რეაქციის ძალები.

დინამიკის მეორე კანონი არათავისუფალი ნივთიერი წერტილისათვის ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k^a + \vec{N}\ , \qquad (31.1)$$

სადაც $\vec{N}$ - ბმის რეაქციების ტოლქმედია.

მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების შესადგენად შეიძლება ვისარგებლოთ დეკარტის ან ბუნებრივი სისტემის ღერძებით.

მაგალითად, წერტილის მოძრაობისას ზედაპირზე, რომლის განტოლებაა

$$f(x, y, z) = 0\ ,$$

სადაც x, y, z - წერტილის კოორდინატებია, მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში ასეთი სახე აქვთ:

$$mx'' = \sum F_{kx} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\ ,$$

$$my'' = \sum F_{ky} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad (31.2)$$

$$mz'' = \sum F_{kz} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}.$$

(31. 2) განტოლებებში λ- ლაგრანჟის განუსაზღვრელი მამრავლია.

$$\lambda = \frac{N}{\Delta f},$$

სადაც $$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

(31. 2) განტოლებას ეწოდება *არათავისუფალი ნივთიერი წერტილისათვის ლაგრანჟის პირველი გვარის დიფერენციალური განტოლება.*

(31. 2) განტოლებებიდან და ბმის $f(x, y, z) = 0$ განტოლებიდან შეიძლება ვიპოვოთ ოთხი უცნობი – წერტილის კოორდინატები: $x, y, z,$ და ლაგრანჟის განუსაზღვრელი მამრავლი λ - როგორც დროისა და ინტეგრების ნებისმიერი მუდმივების ფუნქცია. λ-ს ცნობილი მნიშვნელობისათვის ბმის ნორმალური რეაქცია

$$N = \lambda \Delta f.$$

წერტილის მოძრაობისას მისი ტრაექტორია მოცემულია, როგორც ორი $f_1(x, y, z) = 0$ და $f_2(x, y, z) = 0$ ზედაპირის თანაკვეთა. ამ შემთხვევაში ნორმალური რეაქცია

$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2,$$

სადაც $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ - ზედაპირების ნორმალური რეაქციებია.

ამ შემთხვევაში, (31. 2) განტოლებაში შედის ლაგრანჟის ორი მამრავლი: $\lambda_1 = \frac{N_1}{\Delta f_1}$, $\lambda_2 = \frac{N_2}{\Delta f_2}$ ანუ, უფრო სწორად, ორი შესაკრები, რომლებიც ამ თანამამრავლებს შეიცავენ.

როდესაც წერტილი მოძრაობს არაგლუვ ზედაპირზე ან წირზე, აუცილებელია გავითვალისწინოთ ხახუნის მაქსიმალური ძალა, რომელიც მიმართულია სიჩქარის ვექტორის მიმართულების საწინააღმდეგოდ, რასაც ლაგრანჟის ფორმის დიფერენციალური განტოლებების შედგენისას მივყავართ საკმაოდ დიდ და რთულ განტოლებებამდე, რომელთა ამოხსნა პრაქტიკულად შეუძლებელია.

ამიტომ, ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნისას უფრო მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ ეილერის ფორმის არათავისუფალი

ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები, რომლებიც თავის მხრივ წარმოადგენენ (31.1) ვექტორული ტოლობის გეგმილებს ბუნებრივ ღერძებზე – მხებზე, მთავარ ნორმალზე და ბინორმალზე. მაგალითად, გლუვ წირზე წერტილის მოძრაობისას ამ განტოლებებს ასეთი სახე აქვთ

$$\left.\begin{aligned} m\frac{ds}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} = \sum F_{k\tau}^{a}, \\ m\frac{s^2}{\rho} = m\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho} = \sum F_{kn}^{a} + N_n, \\ 0 = \sum F_{kb}^{a} + N_b. \end{aligned}\right\} \qquad (31.\ 3)$$

(31. 3) განტოლებების ამოხსნისას τ ღერძზე მოძრაობის განტოლება შეიძლება არ ვაინტეგროთ, არამედ უკეთესია გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით იმ პირობით, რომ წერტილზე მოქმედებენ მხოლოდ მუდმივი ძალები.

ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანამიმდევრობა:

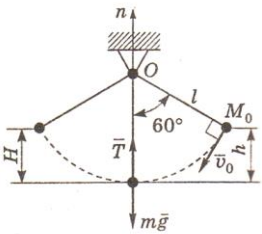
1. ავირჩიოთ ათვლის სისტემა (ღერძების სისტემა)
2. გამოვსახოთ მოძრავი წერტილი (სხეული) ნებისმიერ მდებარეობაში.
3. ვაჩვენოთ წერტილზე მოქმედი ყველა ძალა, ბმის რეაქციების ჩათვლით.
4. შევადგინოთ მოძრაობის აუცილებელი დიფერენციალური განტოლებები არჩეულ ღერძებზე გეგმილებში. მრუდწირული მოძრაობის შემთხვევაში ვისარგებლოთ ეილერის ფორმის განტოლებებით. მრუდზე მოძრაობისას სიჩქარის განსაზღვრისათვის მხებზე მოძრაობის განტოლების მაგივრად გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური ფორმით, ხოლო ნორმალური რეაქციის განსაზღვრისათვის – განტოლება მთავარ ნორმალზე გეგმილებში.
5. გავაინტეგროთ მიღებული დიფერენციალური განროლებები და მოძრაობის საწყისი პირობების მიხედვით განვსაზღვროთ ინტეგრების მუდმივები.
6. იპოვეთ საძებნი სიდიდეები ზოგადი სახით და დარწმუნდით შედეგის სისწორეში. შეასრულეთ გამოთვლები. ამასთანავე ყურადღება მიაქციეთ, რომ ყველა სიდიდეს ჰქონდეს ერთეულთა ერთი და იმავე სისტემის განზომილება.

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 31. 1

უძრავ 0 წერტილზე დამაგრებული 0,5 მ სიგრძის ძაფზე დაკიდებულია 1 კგ მასის ტვირთი. საწყის მომენტში ტვირთი გადახრილია ვერტიკალიდან 60^0 კუთხით, და მას მიანიჭეს ვერტიკალურ სიბრტყეში ძაფის მართობულად ქვევით მიმართული v_0 = 2,1 მ/წმ სიჩქარე. განსაზღვრეთ ძაფის დაჭიმულობა უმდაბლეს მდებარეობაში და ამ მდებარეობიდან ვერტიკალური მიმართულებით სიმაღლე, რომელზეც ავა ტვითი.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. არათავისუფალი ნივთიერი წერტილისათვის ჩავწეროთ დინამიკის მეორე კანონი



$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k^a + \vec{N} ,$$

სადაც N - ძაფის დაჭიმულობაა, ე. ი. $N = T$ (იხ. ნახაზი).

დავაგეგმილოთ ეს განტოლება მთავარ n ნორმალიზე, მივიღებთ

$$\frac{mv^2}{l} = -mg + T,$$

საიდანაც $$T = \frac{mv^2}{l} + mg . \qquad (1)$$

სიჩქარის კვადრატს ვიპოვით კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის გამოყენებით

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgh ,$$

სადაც $h = l - l\cos 60^0 = 0,5l$;

მაშინ $$v^2 = v_0^2 + 2gh = v_0^2 + gl .$$

შევიტანოთ v^2 მნიშვნელობა (1) ფორმულაში და გამოვთვალოთ ძაფის დაჭიმულობა:

$$T = \frac{m}{l}(v_0^2 + gl) + mg = \frac{mv_0^2}{l} + 2mg = \frac{2,1^2}{0,5} + 2 \cdot 9,8 = 28,4 \text{ (ნ).}$$

H სიმაღლე, რომელზეც ტვირთი ავა, გამოითვლება პირობიდან, რომ ზედა მდებარეობაში კინეტიკური ენერგია ნულის ტოლია; როცა $T_1 = 0$, მაშინ

$$T_1 - T_0 = -mgH\,,$$

$$T_0 = \frac{m(v_0^2 + gl)}{2}\,.$$

აქედან

$$H = \frac{v_0^2 + gl}{2g} = \frac{(2{,}1)^2 + 9{,}8 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 9{,}8} = 0{,}475 \text{ (მ)}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>:   28,4 ნ;   47,5 სმ.

ამოცანა 31. 2

შეინარჩუნეთ წინა ამოცანის პირობები, გარდა v_0 სიჩქარის სიდიდისა, და განსაზღვრეთ, როგორი საწყისი v_0 სიჩქარის სიდიდის დროს ტვირთი გაივლის მთლიან წრეს.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ვისარგებლოთ 31.1 ამოცანის ამოხსნით

$$H = \frac{v_0^2 + gl}{2g}\,,$$

აქ $H = 2l.$

ამიტომ $$v_0^2 = 3gl\,, \qquad v_0 = \sqrt{3gl}\,,$$

სადაც v_0 არის საწყისი სიჩქარე, რომლის დროსაც ტვირთი ავა წრეწირის უმაღლეს წერტილში, მაგრამ არ შემოწერს მთლიან წრეწირს.

ტვირთმა რომ შემოწეროს სრული წრეწირი, მაშინ ძაფის დაჭიმულობა მის ბოლო წერტილში უნდა იყოს ნულის ტოლი, ე. ი. 31.1 ამოცანის ამოხსნის (1) ფორმულის თანახმად $\dfrac{mv^2}{l} = mg$.

კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის საფუძველზე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}(v_0^2 + gl) = -2mgl\,,$$

ანუ

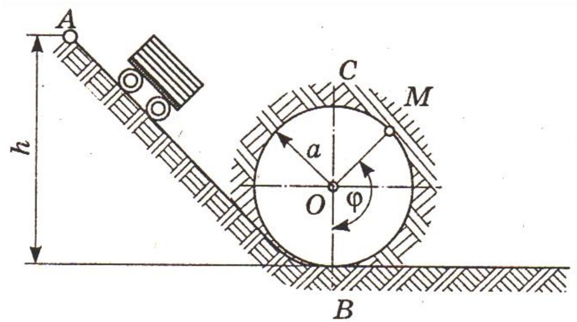
$$\frac{gl}{2} - \frac{1}{2}(v_0^2 + gl) = -2gl\,.$$

აქედან $$v_0^2 = 4gl\,; \qquad v_0 = 2\sqrt{gl} = \sqrt{9{,}8 \cdot 0{,}5} = 4{,}43 \text{ (მ/წმ).}$$

პ ა ს უ ხ ი: $v_0 >$ 4,43 მ/წმ.

ამოცანა 31. 3

AB გზაზე დაგებულ ლიანდაგზე, რომელიც შემდეგ ქმნის a რადიუსის წრიული რგოლის სახის BC მარყუჟს, მოგორავს m მასის ვაგონეტი. როგორი h სიმაღლიდან უნდა დაეშვას ვაგონეტი საწყისი სიჩქარის გარეშე, რომ მან შეძლოს გაიაროს რგოლის მთლიანი წრეწირი მისგან მოცილების გარეშე? განსაზღვრეთ რგოლზე ვაგონეტის N წნევა M წერტილში, რომლისთვისაც $\angle MOB = \varphi$.



ა მ ო ხ ს ნ ა. წრეწირის ზედა C წერტილში რეაქცია უნდა იყოს ნულზე მეტი ან ნულის ტოლი, ე. ი. უნდა შესრულდეს პირობა

$$N = \frac{mv^2}{a} - mg = 0.$$

ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის საფუძველზე ვაგონეტის A მდებარეობიდან C-ში გადაადგილებისას

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg(h - 2a), \quad (1)$$

სადაც $v_0 = 0$; $v^2 = ag$.

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$\frac{a}{2} = h - 2a.$$

აქედან $h \ge 2,5a$.

ნებისმიერი φ კუთხისათვის N წნევის განსასაზღვრავად ჩავწეროთ ეილერის განტოლება და კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა შემდეგი სახით

$$N = \frac{mv^2}{a} + mg\cos\varphi,$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg(h - a + a\cos\varphi),$$

საიდანაც, როცა $v_0 = 0$, განვსაზღვრავთ

$$N = \frac{mv^2}{a} + mg\cos\varphi = \frac{mg}{a}(2h - 2a + 2a\cos\varphi) + mg\cos\varphi =$$

$$= mg\left(\frac{2h}{a} - 2 + 3\cos\varphi\right).$$

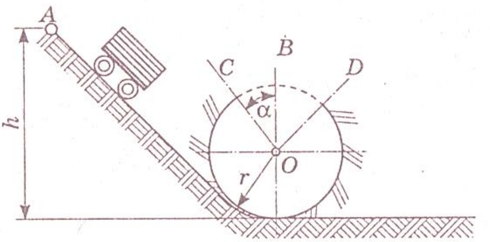
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $h \ge 2,5a; \quad N = mg\left(\frac{2h}{a} - 2 + 3\cos\varphi\right).$

ამოცანა 31. 4

გზა, რომლის A წერტილიდან დაშვებისას მოძრაობს ვაგონეტი, ქმნის r რადიუსის ღია მარყუჟს, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები; $\angle B0C = \angle B0D = \alpha$. იპოვეთ, როგორი h სიმაღლიდან უნდა დაეშვას ვაგონეტი საწყისი სიჩქარის გარეშე, რომ მან შეძლოს გაიაროს მთლიანი

მარყუჟი, აგრეთვე α კუთხის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც h სიმაღლე უმცირესია.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: DC უბანზე ვაგონეტის სიმძიმის ცენტრი ასრულებს პარაბოლურ მოძრაობას.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ღია წრეწირის ზედა C წერტილში უნდა შესრულდეს ტოლობა

$$\frac{mv^2}{r}\cos\alpha = mg\,.$$

(რეაქციის მართობული მდგენელის ნულთან ტოლობა). ამიტომ, ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის საფუძველზე ჩავწერთ

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2} = mg[h-r(1+\cos\alpha)],$$

სადაც $v_0 = 0$.

აქედან $$h = r(1+\cos\alpha)+\frac{r}{2\cos\alpha} = r\left(1+\cos\alpha+\frac{1}{2\cos\alpha}\right).$$

გამოვიკვლიოთ h-ის ცვლილება, როგორც α-ს ფუნქცია ექსტრემუმზე და განვსაზღვროთ $h_{\min}$:

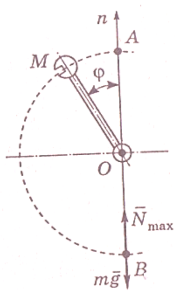
$$\frac{dh}{d\alpha} = r\left(-\sin\alpha+\frac{\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}\right) = 0.$$

$$\frac{d^2h}{d\alpha^2} = r\left(-\cos\alpha+\frac{\cos^3\alpha+2\cos\alpha\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}\right).$$

მაშასადამე, $h = h_{\max}$ როცა $\alpha = 0$, $h = h_{\min}$, როცა $\alpha = 45^0$.

პ ა ს უ ხ ი: $h = r\left(1+\cos\alpha+\dfrac{1}{2\cos\alpha}\right)$; $h_{\min}$, როცა $\alpha = 45^0$.

ამოცანა 31. 5



$M = 20$ კგ მასის ფოლადის მძიმე სხმული მიმაგრებულია ღეროზე, რომელსაც შეუძლია ხახუნის გარეშე ბრუნვა უძრავი 0 ღერძის გარშემო. სხმული ვარდება ზედა A მდებარეობიდან უმნიშვნელოდ მცირე საწყისი სიჩქარით. ღეროს მასა უგულებელყავით და განსაზღვრეთ ღერძზე უდიდესი წნევა. (იხ. 30.14 ამოცანის ნახაზი).

ა მ ო ხ ს ნ ა. ღერძზე უდიდესი წნევა იქნება ფოლადის სხმულის ქვედა მდებარეობაში, ე. ი. B წერტილში (იხ. ნახაზი).

ჩავწეროთ დინამიკის მეორე კანონი არათავისუფალი ნივთიერი წერტილისათვის

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k^a + \vec{N} .$$

დავაგეგმილოთ ეს განტოლება მთავარ n ნორმალიზე და გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა სხმულის A მდებარეობიდან B მდებარეობაში გადაადგილებისას, მივიღებთ

$$N_{\max} = mg + \frac{mv^2}{R},$$

სადაც $v^2 = 2gh = 4gR$.

მაშინ $N_{\max} = mg + 4mg = 5mg = 5 \cdot 20 \cdot 9{,}8 = 980$ (ნ).

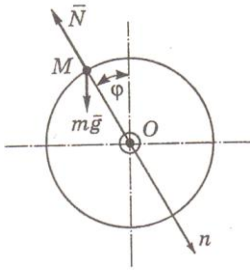
პ ა ს უ ხ ი: 980 ნ.

ამოცანა 31. 6

ვერტიკალთან რა კუთხეს ადგენს მბრუნავი ღერძი (წინა ამოცანაში) იმ მომენტში, როცა ღერძზე წნევა ნულის ტოლია?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნორმალის გასწვრივ მოძრაობის განტოლების საფუძველზე (იხ. ნახაზი) ჩავწეროთ

$$\frac{mv^2}{R} = -N + mg\cos\varphi . \qquad (1)$$



ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის თანახმად

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1-\cos\varphi) . \qquad (2)$$

(2) გამოსახულების გათვალისწინებით (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$-N + mg\cos\varphi = 2mg(1-\cos\varphi).$$

აქედან

$$N = mg\cos\varphi - 2mg(1-\cos\varphi) = mg(3\cos\varphi - 2) .$$

მაშასადამე, როცა $N = 0$, $\cos\varphi = \frac{2}{3}$, $\varphi = \arccos\frac{2}{3}$.

პ ა ს უ ხ ი: $\varphi = \arccos\frac{2}{3}$.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 31. 7

70 კგ მასის პარაშუტისტი გადმოხტა თვითმფრინავიდან და 100 მ ფრენის შემდეგ გახსნა პარაშუტი. იპოვეთ ღვედების დაჭიმულობის ძალა, რომლებითაც ადამიანი ჰკიდია პარაშუტზე, თუ პარაშუტის გახსნის მომენტიდან პირველი ხუთი წამის განმავლობაში, პარაშუტისტის სიჩქარე შემცირდა 4,3 მ/წმ-დე. ჰაერის წინაღობა ადამიანის მოძრაობაზე უგულებელყავით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ შენელება პარაშუტისტის ვარდნისას:

$$a = \frac{v_0 - v}{t} = \frac{44{,}3 - 4{,}3}{5} = 8 \text{ (მ/წმ}^2\text{)},$$

ვინაიდან $v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{200g} = 44{,}3$ (მ/წმ).

ღვედების დაჭიმულობა

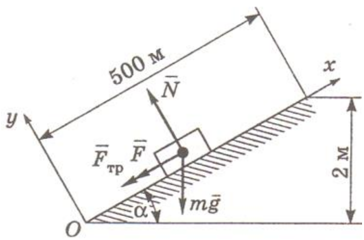
$$N = mg + ma = 70(9{,}8 + 8{,}0) = 1246 \text{ (ნ)}.$$

პ ა ს უ ხ ი: 1246 ნ.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 31. 8

2 მ სიმაღლის ფერდობზე მდგარ სადგურამდე 500 მ-თ ადრე 12 მ/წმ სიჩქარით მოძრავი მატარებლის მემანქანემ დაკეტა ორთქლი და დაიწყო დამუხრუჭება. როგორი სიდიდის უნდა იყოს დამუხრუჭებისას წინაღობა, რომელიც ითვლება მუდმივად, რომ მატარებელი გაჩერდეს სადგურთან, თუ მატარებლის მასაა 1000 ტ, ხოლო ხახუნის წინაღობა 20 კნ?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნახაზზე გამოვსახოთ მატარებელზე მოქმედი ძალები ნებისმიერ მდგომარეობაში: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, წინაღობის $\vec{F}$ ძალა დამუხრუჭებისას, ხახუნის $\vec{F}_{Tp}$ ძალა, ზედაპირის ნორმალური $\vec{N}$ რეაქცია.



ვისარგებლოთ კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით, გვექნება

$$-\frac{mv^2}{2} = -(F + F_{Tp} + mg\sin\alpha)s,$$

სადაც s – დამუხრუჭების გზაა.

აქედან ვიპოვით დამუხრუჭებისას წინაღობის $\vec{F}$ ძალას

$$F = \frac{mv^2}{2s} - F_{Tp} - mg\sin\alpha, \qquad (1)$$

სადაც $F_{Tp} = 20$ კნ; $\sin\alpha = \frac{2}{500} = 4\cdot10^{-3}$; $m = 1\cdot10^6$ კგ; $s = 500$მ;

$g = 9{,}8$ მ/წმ².

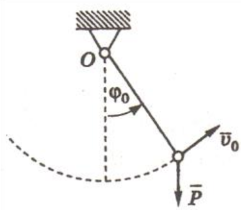
ეს მონაცემები ჩავსვათ (1) ფორმულაში და განვსაზღვროთ წინაღობის ძალა

$$F = \frac{1\cdot10^6\cdot12^2}{2\cdot500} - 20\cdot10^3 - 1\cdot10^6\cdot9{,}8\cdot4\cdot10^{-3} = 84{,}8 \text{ (კნ)}.$$

პ ა ს უ ხ ი: 84,8 კნ.

ამოცანა 31. 9

m მასის მძიმე სხმული მიმაგრებულია l სიგრძის ღეროზე, რომელსაც შეუძლია ხახუნის გარეშე ბრუნვა უძრავი 0 ღერძის გარშემო და გადახრილია ვერტიკალიდან φ_0 კუთხით. ამ საწყისი მდებარეობიდან სხმულს მიანიჭეს საწყისი $\vec{v}_0$ სიჩქარე (იხ. ნახაზი). განსაზღვრეთ ღეროში ძალვა, როგორც ვერტიკალიდან ღეროს გადახრის კუთხის ფუნქცია. ღეროს მასა უგულებელყავით.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ ეილერის განტოლება ნორმალზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი)

$$\frac{mv^2}{l} = -mg\cos\varphi + N. \qquad (1)$$

კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემის თანახმად

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^{\ 2}}{2} = mgl(\cos\varphi_0 - \cos\varphi).$$

აქედან

$$v^2 = v_0^2 - 2gl(\cos\varphi_0 - \cos\varphi).$$

ეს გამოსახულება ჩავსვათ (1) განტოლებაში

$$\frac{mv^2}{l} - 2mg(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) = -mg\cos\varphi + N,$$

საიდანაც $$N = mg\cos\varphi + \frac{mv_0^{\ 2}}{l} - 2mg(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) =$$

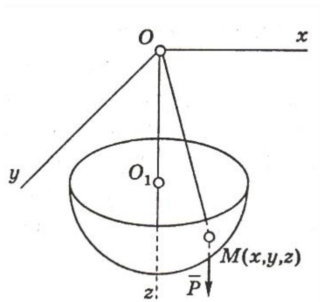
$$= 3mg\cos\varphi - 2mg\cos\varphi_0 + \frac{mv_0^{\ 2}}{l}.$$

როცა $N > 0$, ღერო გაჭიმულია, როცა $N < 0$ - შეკუმშულია.

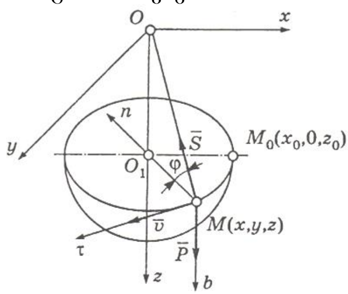
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $N = 3mg\cos\varphi + 2mg\cos\varphi_0 + \frac{mv_0^{\ 2}}{l}$. თუ $N > 0$, ღერო

გაჭიმულია; თუ $N < 0$ - ღერო შეკუმშულია.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 31. 10



სფერული ქანქარა შედგება ერთი ბოლოთი უძრავ 0 წერტოლში ჩამაგრებული l სიგრძის $0M$ ძაფისა და მეორე ბოლოში მიმაგრებული P წონის M წერტილისგან. M წერტილი წონასწორობის მდგომარეობიდან გადახარეს ისე, რომ მისი კოორდინატები გახდა: როცა $t = 0$ $x = x_{0,} y = 0$ და მას მიანიჭეს საწყისი სიჩქარე: $x_0' = 0,$ $y_0' = v_0$, $z_0' = 0$. განსაზღვრეთ, საწყისი პირობების როგორი თანაფარდობების დროს შემოწერს M წერტილი წრეწირს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში და როგორი იქნება M წერტილის ამ წრეწირზე გარშემოვლის დრო.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. M წერტილი მოძრაობს სფერულ ზედაპირზე სიმძიმის $\vec{P}$ ძალისა და ძაფის $\vec{S}$ დაჭიმულობის მოქმედებით (იხ. ნახაზი). წერტილმა რომ შემოწეროს

წრეწირი ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, მისი მძრაობა უნდა ექვემდებარებოდეს ბუნებრივ კოორდინატთა ღერძებზე გეგმილებში განტოლებებს:

$$ma_n = \sum F_{kn} = S\cos\varphi,$$

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau} = 0,$$

$$ma_b = \sum F_{kb} = P - S\sin\varphi,$$

სადაც $a_n = \dfrac{v^2}{0_1M}$; $a_b = 0.$

მაშინ
$$m\frac{v^2}{0_1M} = S\cos\varphi, \qquad (1)$$

$$a_\tau = 0, \qquad (2)$$

$$0 = P - S\sin\varphi. \qquad (3)$$

(2) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ $v = const = v_0$.

(3) განტოლების თანახმად $P = S\sin\varphi$.

რადგანაც M წერტილი მოძრაობს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, ამიტომ $\varphi = const$, $\sin\varphi = const,$ $\cos\varphi = const.$

მაშინ, (1) განტოლებიდან, როცა $\cos\varphi = const$ და $v = const$ მივიღებთ, რომ $0_1M = const = x_0$.

$\Delta 00_1M$ - დან განვსაზღვროთ

$$\sin\varphi = \frac{0_10}{0M} = \frac{0_10}{\sqrt{(00_1)^2 + (0_1M)^2}} = \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + x_0^2}},$$

ან
$$\cos\varphi = \frac{0_1M}{0M} = \frac{x_0}{\sqrt{z_0^2 + x_0^2}}.$$

ამ მნიშვნელობების გათვალისწინებით (1) და (3) განტოლებები მიიღებენ ასეთ სახეს

$$m\frac{v_0^{\,2}}{x_0} = S\,\frac{x_0}{\sqrt{z_0^2 + x_0^2}}, \qquad (4)$$

$$S = P\frac{\sqrt{z_0^2 + x_0^2}}{z_0}. \qquad (5)$$

(5) გამოსახულება ჩავსვათ (4) განტოლებაში:

$$m\frac{v_0^{\ 2}}{x_0} = P\frac{\sqrt{z_0^2 + x_0^2}}{z_0}\ \frac{x_0}{\sqrt{z_0^2 + x_0^2}} = P\frac{x_0}{z_0}.$$

აქედან $\quad v_0 = x_0\sqrt{\dfrac{g}{z_0}}$.

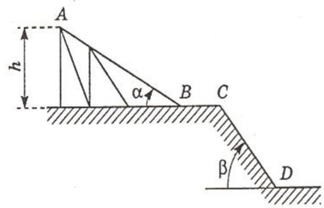
განვსაზღვროთ წერტილის მიერ წრეწირის გარშემოვლის დრო:

$$T = \frac{2\pi\cdot 0_1M}{v_0} = \frac{2\pi x_0}{x_0\sqrt{g/z_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{z_0}{g}}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\quad v_0 = x_0\sqrt{\dfrac{g}{z_0}}$; $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{z_0}{g}}$.

ამოცანა 31. 11

მოთხილამურე ტრამპლინიდან გადახტომისას ეშვება AB ესტაკადაზე, რომელიც ჰორიზონტისადმი დახრილია $\alpha = 30^0$ კუთხით. ტრამპლინიდან მოწყვეტის წინ იგი გადის მცირე ჰორიზონტალურ BC ბაქანს, რომლის სიგრძეს გამოთვლისას უგულებელვყოფთ. მოწყვეტის მომენტში მოთხილამურე ბიძგით თავის თავს ანიჭებს სიჩქარის ვერტიკალურ მდგენელს $v_y = 1$ მ/წმ. ესტაკადის სიმაღლეა $h = 9$ მ. თხილამურების თოვლთან ხახუნის კოეფიციენტია $f = 0{,}08$, მიწაზე დაშვების CD ხაზი ჰორიზონტთან ადგენს $\beta = 45^0$ კუთხეს. განსაზღვრეთ მოთხილამურის ფრენის l მანძილი. ჰაერის წინაღობა უგულებელყავით.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ მოთხილამურის მოძრაობა AB უბანზე, სადაც მასზე მოქმედებენ სიმძიმის $\vec{G}$, წინაღობის $\vec{F}_c$ და

რეაქციის $\vec{N}$ ძალები (იხ. ნახაზი). გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

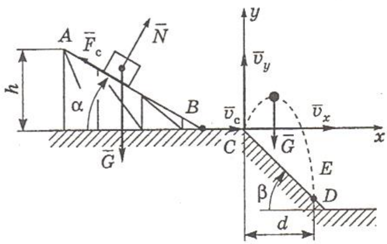
$$\frac{mv_2^{\,2}}{2} - \frac{mv_1^{\,2}}{2} = Gh - F_c \cdot AB, .$$

სადაც $v_1 = 0; G = mg; \quad F_c = fN = fG\cos\alpha$; $\quad AB = 2h$.

მაშინ $$\frac{mv_2^{\,2}}{2} = mgh(1 - 2f\cos\alpha),$$

$$v_2 = \sqrt{2gh(1-2f\cos\alpha} = \sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 9(1-2\cdot 0{,}08\cdot 0{,}87} = 12{,}33 \text{ (მ/წმ).}$$

განვიხილოთ მოთხილამურის ფრენა CE ტრაექტორიაზე, რომელიც ხდება მხოლოდ სიმძიმის $\vec{G}$ ძალის მოქმედებით. ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x და y ღერძებზე გეგმილებში:



$$mx'' = \sum F_{kx} = 0,$$

$$my'' = \sum F_{ky} = -G,$$

ანუ

$$x'' = 0,$$

$$y'' = -g.$$

ამ განტოლებების ინტეგრებით მივიღებთ

$$x' = C_1, \qquad x = C_1 t + C_2;$$

$$y' = -gt + C_3, \quad y = -g\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

ინტეგრების მუდმივები განვსაზღვროთ საწყისი პირობებით: $t = 0, x_0 = 0, y_0 = 0, x_0' = v_x, y_0' = v_y$, მაშინ

$C_1 = v_x, C_2 = 0, C_3 = v_y, C_4 = 0.$ შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები x და y გამოსახულებებში:

$$x = v_x t, \qquad (1)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_y t. \qquad (2)$$

(1) ფორმულიდან $t = \dfrac{x}{v_x}$. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (2) ფორმულაში, მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას

$$y = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_x^2} + \frac{v_y}{v_x}x. \qquad (3)$$

მოთხილამურის მიწაზე დაშვების მომენტისათვის
$x = d, y = -d; \beta = 45^0$,
მაშინ (3) განტოლებიდან

$$-d = -\frac{g}{2}\frac{d^2}{v_x^2} + \frac{v_y}{v_x}d,$$

ანუ
$$1 = \frac{g}{2}\frac{d}{v_x^2} - \frac{v_y}{v_x}.$$

აქედან $d = \dfrac{2\left(1+\dfrac{v_y}{v_x}\right)v_x^2}{g} = \dfrac{2\left(1+\dfrac{1}{12,33}\right)\cdot 12,33^2}{\;} = 33,54$ (მ).

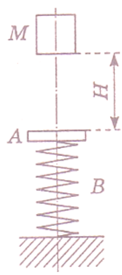
ვიპოვოთ მოთხილამურის ფრენის სიშორე

$$l = CE = d\sqrt{2} = 33,54\cdot 1,41 = 47,4 \quad (\text{მ}).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $l = 47,4$ მ.

ამოცანა 31. 12

P მასის M ტვირთი უსაწყისო სიჩქარით ვარდება H სიმაღლიდან A ფილაზე, რომელიც დევს სპირალურ B ზამბარაზე. ჩამოვარდნილი M ტვირთის მოქმედების გამო ზამბარა შეიკუმშა h სიდიდით. მხედველობაში არ მივიღოთ ფილის წონა და წინააღმდეგობები, გამოვთვალოთ ზამბარის h მანძილზე შეკუმშვის T დრო და ზამბარის დრეკადი ძალის იმპულსი T დროში.



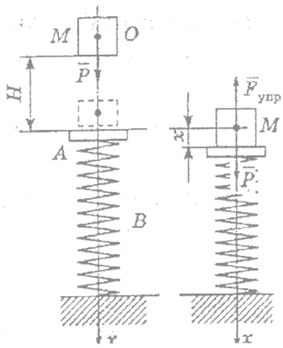
<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ M ტვირთის ვარდნა სიმძიმის ძალის ქმედებით A ფილაზე (ნახ. 1). ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = P.$$

ვინაიდან $P = mg$, ამიტომ

$$x'' = g\ .$$

ვაინტეგროთ ეს გამოსახულება ორჯერ:



ნახ. 1 ნახ. 2

$$x' = gt\,, \qquad x = g\frac{t^2}{2}\,.$$

აქედან განვსაზღვრავთ ტვირთის ვარდნის T_n დროს

$$T_n = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

და სიჩქარეს

$$v = \sqrt{2gH}\ .$$

განვიხილოთ M ტვირთის მოძრაობა ფილასთან ერთად სიმძიმის $\vec{P}$ ძალისა და ზამბარის დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალის ქმედებით (ნახ. 2). ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \sum F_{kx} = P - F_{yp}\,, \qquad (1)$$

სადაც $F_{yp} = cx,$ c - ზამბარის სიხისტეა; $P = mg.$

(1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$x'' = g - \frac{cx}{m}\,,$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = g\,, \qquad (2)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

(2) განტოლების ამოხსნას ვეძებთ ასეთი სახით

$$x = \bar{x} + x^*\,,$$

სადაც $\bar{x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt;\quad x^* = A = \dfrac{mg}{c}$.

მაშინ $$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + + \frac{mg}{c}\,, \qquad (3)$$

$$x' = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt\,. \qquad (4)$$

საწყისი პირობებიდან გამომდინარე, (3) და (4) ფორმულებიდან განვსაზღვრავთ ინტეგრების მუდმივებს: $t = 0$, $x_0' = v = \sqrt{2gH}$, $x_0 = 0$;

$$C_1 = -\frac{mg}{c}, \quad C_2 = \frac{\sqrt{2gH}}{k}.$$

C_1 და C_2 მნიშვნელობები ჩავსვათ (3) ფორმულაში, მივიღებთ

$$x = -\frac{mg}{c}\cos kt + \frac{\sqrt{2gH}}{k}\sin kt + \frac{mg}{c}, \qquad (5)$$

აქ k - ტვირთის თავისუფალი რხევის წრიული სიხშირეა.

(5) განტოლება შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$x = a\sin(kt+\alpha) + \frac{mg}{c}, \qquad (6)$$

სადაც $a = \sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + \frac{2gH}{k^2}}$; $tg\alpha = -\frac{mg}{c}\frac{k}{\sqrt{2gH}}$; $\sin\alpha = -\frac{mg}{c}\frac{1}{a}$.

ზამბარის სიხისტეს განვსაზღვრავთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემით ტვირთის ფილასთან შეხების მომენტიდან მის გაჩერებამდე გადაადგილებაზე ზამბარის მაქსიმალურ შეკუმშვამდე:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \sum A_k = A(\vec{P}) + A(\vec{F}_{yp}),$$

სადაც $A(\vec{P}) = P(H+h)$; $A(\vec{F}_{yp}) = -\frac{ch^2}{2}$; $v_2 = 0$; $v_1 = 0$.

მაშინ $$0 = P(H+h) - \frac{ch^2}{2}.$$

აქედან $$c = \frac{2P(H+h)}{h^2}.$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{\sqrt{2g(H+h)}}{h}.$$

$$tg\alpha = -\frac{mgk}{c\sqrt{2gH}} = -\frac{gk}{k^2\sqrt{2gH}} = -\frac{hg}{\sqrt{2g(h+H)}\sqrt{2gH}} = -\frac{h}{2\sqrt{H(H+h)}}.$$

თანახმად (6) განტოლებისა, ზამბარის შეკუმშვა იქნება უდიდესი, როცა

$x = x_{\max}$, ე. ი. როცა $\sin(kt+\alpha)=1$, $kt+\alpha=\frac{\pi}{2}$.

აქედან ვიპოვით ზამბარის შეკუმშვის T დროს:

$$T=\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

ზამბარის დრეკადი ძალის S იმპულსის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ ტვირთის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემა მისი მოძრაობის მთელი დროის განმავლობაში:

$$mv_{2x}-mv_{1x}=\sum S_{kx}=S_x(\vec{P})-S_x(\vec{F}_{yp}),$$

სადაც $S_x(\vec{P})=P(T_n+T)$.

ვნაიდან $v_2=0$, $v_1=0$, ამიტომ

$$S=P(T_n+T)=P\left[\sqrt{\frac{2H}{g}}+T\right]$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $T=\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; $S=P\left[\sqrt{\frac{2H}{g}}+T\right]$, სადაც

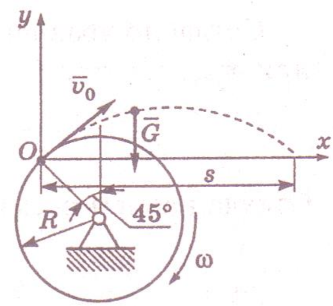
$tg\alpha=-\frac{h}{2\sqrt{H(H+h)}}$,

$$k=\frac{\sqrt{2g(H+h)}}{h}.$$

ამოცანა 31. 13

მქნევარას გაწყვეტისას კატასტროფის ადგილიდან ყველაზე დაშორებული მისი ერთ-ერთი ნაწილი აღმოჩნდა პირველსაწყისი მდებარეობიდან $s=280$ მ მანძილზე. მითითებული ნაწილის მოძრაობისას პირველსაწყისი მდებარეობიდან ბოლომდე, რომელიც იმავე ჰორიზონტალურ სიბრტყეში მდებარეობს, ჰაერის წინააღმდეგობა უგულებელყავით და იპოვეთ მქნევარას კუთხური სიჩქარის შესაძლო უმცირესი მნიშვნელობა კატასტროფის მომენტში, თუ მქნევარას რადიუსი $R=1{,}75$ მ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცნობილია, რომ სხეულის ფრენის სიშორე უდიდესია, თუ სხეული გატყორცნილია ჰორიზონტისადმი 45^0 კუთხით. ეს პირობა უზრუნველყოფს სხეულის ფრენის მოთხოვნილ სიშორეს მქნევარას კუთხური სიჩქარის უმცირესი სიდიდის დროს, ვინაიდან, $v_0 = \omega R$.



განვიხილოთ მქნევარას ნაწილის მოძრაობა ფრენისას სიმძიმის $\vec{G}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი). შევადგინოთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x და y ღერძებზე გეგმილებში:

$$mx'' = \sum F_{kx} = 0,$$

$$my'' = \sum F_{ky} = -G,$$

ანუ, ვინაიდან $G = mg$, გვექნება

$$x'' = 0,$$

$$y'' = -g.$$

ამ განტოლებების ინტეგრებით მივიღებთ

$$x' = C_1, \quad x = C_1 t + C_2;$$

$$y' = -gt + C_3, \quad y = -g\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

ინტეგრების მუდმივები განვსაზღვროთ საწყისი პირობებით: $t = 0, x_0 = 0, y_0 = 0, x_0' = v_0 \cos 45^0, y_0' = v_0 \sin 45^0$, მაშინ $C_1 = v_0 \cos 45^0, C_2 = 0, C_3 = v_0 \sin 45^0, C_4 = 0.$ შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები x და y გამოსახულებებში:

$$x = v_0 t \cos 45^0, \tag{1}$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin 45^0. \tag{2}$$

მქნევარას ნაწილის დაცემის მომენტისათვის: $t = T$, $x = s$, $y = 0$;

მაშასადამე, (2) გსნტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$0 = -\frac{gT^2}{2} + v_0 T \sin 45^0,$$

საიდანაც $$T = \frac{2v_0}{g}\sin 45^0 .$$

ეს გამოსახულება ჩავსვათ (1) ფორმულაში და იმის გათვალისწინებით, რომ $x = s$, მივიღებთ

$$s = v_0 T\cos 45^0 = \frac{2v_0^2 \sin 45^0 \cos 45^0}{g} = \frac{v_0^2}{g} .$$

აქედან $$v_0 = \sqrt{sg} ,$$

მაგრამ, ვინაიდან $v_0 = \omega R$, ამიტომ

$$\omega R = \sqrt{sg} .$$

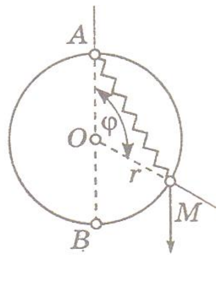
აქედან $$\omega = \frac{\sqrt{sg}}{R} = \frac{\sqrt{289\cdot 9,8}}{1,75} = 30 \text{ (რად/წმ).}$$

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30\cdot 30}{3,14} = 286 \text{ (ბრ/წთ)}$$

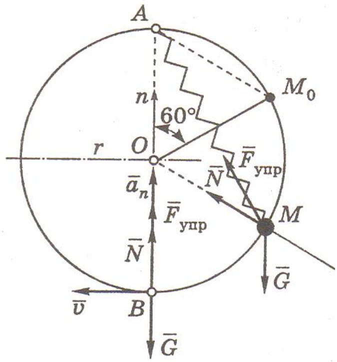
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $n = 286$ ბრ/წთ, ანუ $\omega = 30$ რად/წმ.

ამოცანა 31. 14

M ტვირთი, რომელიც ზამბარაზე დაკიდებულია ვერტიკალურ სიბრტყეში მდებარე წრიული რგოლის ზედა A წერტილში, ვარდება რგოლის გასწვრივ სრიალით ხახუნის გარეშე. განსაზღვრეთ, როგორი უნდა იყოს ზამბარის სიხისტე იმისათვის, რომ ტვირთის წნევა რგოლზე ქვედა B წერტილში იყოს ნულის ტოლი შემდეგი მონაცემებით: რგოლის რადიუსია 20 სმ, ტვირთის მასა 5 კგ, ტვირთის საწყის მდებარეობაში მანძილი $AM = 20$ სმ და ზამბარას აქვს ნატურალური სიგრძე; ტვირთის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია; ზამბარის მასა უგულებელყავით.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ტვირთის მოძრაობა რგოლზე სიმძიმის $\vec{G}$ ძალის, ზამბარის დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალისა და საყრდენის რეაქციის $\vec{N}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი). შევადგინოთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება B წერტილში n ნორმალზე გეგმილებში:



$$ma_n = \sum F_{kn} = F_{yp} + N - G,$$

ანუ $$\frac{mv^2}{r} = F_{yp} + N - G. \quad (1)$$

როცა $N = 0$, მაშინ

$$\frac{mv^2}{r} = F_{yp} - G,$$

სადაც $F_{yp} = c\lambda = c(AB - l_0) = c(2r - l_0)$.

მაშინ $$\frac{mv^2}{r} = c(2r - l_0) - G,$$

ანუ $$mv^2 = cr(2r - l_0) - Gr. \quad (2)$$

გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ინტეგრალური სახით

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0{}^2}{2} = \sum A_k = A(\vec{G}) + A(\vec{F}_{yp}).$$

სადაც $A(\vec{G}) = = G(r + r\cos 60^0)$; $A(\vec{F}_{yp}) = -c\frac{\lambda^2}{2;}$; $v_0 = 0$.

მაშინ $$\frac{mv^2}{2} = G(r + r\cos 60^0) - c\frac{(2r - l_0)^2}{2},$$

ანუ $$mv^2 = 2G(r + r\cos 60^0) - c(2r - l_0)^2. \quad (3)$$

რადგანაც (2) და (3) გამოსახულებების მარცხენა მხარეები ტოლია, ამიტომ, გაუტოლოთ მათი მარჯვენა მხარეებიც, მივიღებთ

$$cr(2r - l_0) - Gr = 2G(r + r\cos 60^0) - c(2r - l_0)^2,$$

ანუ

$$c(2r - l_0)[r + (2r - l_0)] = Gr[1 + 2(1 + \cos 60^0)].$$

საიდანაც განისაზღვრება ზამბარის სიხისტე

$$c = \frac{Gr[1+2(1+\cos 60^0)]}{(2r-l_0)[r+(2r-l_0)]} = \frac{5\cdot 9{,}8\cdot[1+2(1+0{,}5)]}{(0{,}4-0{,}2)[0{,}2+(0{,}4-0{,}2)]} =$$

$$= 490 \text{ (ნ/მ)} = 4{,}9 \text{ (ნ/სმ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: ზამბარა უნდა დაგრძელდეს 1 სმ-თ, როცა მასზე მოქმედებს

4,9 ნ-ს ტოლი ძალა.

ამოცანა 31. 15

განსაზღვრეთ M ტვირთის წნევა რგოლზე ქვედა B წერტილში (იხ. წინა ამოცანის ნახაზი) შემდეგი მონაცემების დროს: რგოლის რადიუსია 20 სმ, ტვირთის მასა 7 კგ, ტვირთის საწყის მდებარეობაში მანძილი $AM = 20$ სმ. ამასთანავე, ზამბარა გაჭიმულია და მისი სიგრძე ორჯერ მეტია ნატურალურ სიგრძეზე, რომელიც 10 სმ-ს ტოლია; ზამბარის სიხისტე ისეთია, რომ ის 1 სმ-თ გრძელდება 4,9 ნ ძალით მოქმედებისას; ტვირთის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია; ზამბარის მასა უგულებელყავით.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ტვირთის სიჩქარე B წერტილში გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა (იხ. 31. 14 ამოცანის ამოხსნის ნახაზი):

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m{v_0}^2}{2} = \sum A_k = A(\vec{G}) + A(\vec{F}_{yp}) \, .$$

სადაც $A(\vec{G}) = = G(r + r\cos 60^0)$; $A(\vec{F}_{yp}) = -c\dfrac{\lambda^2-\lambda_0^2}{2;}$;

$v_0 = 0$. მაშინ

$$\frac{mv^2}{2} = 1{,}5Gr - \frac{c}{2}[(AB-l_0)^2 - (AM_0 - l_0)^2],$$

სადაც $AB = 2r, AM_0 = r;$ M_0 - ტვირთის საწყისი მდებარეობაა, ხოლო $\Delta AOM -$ ტოლგვერდაა.

აქედან, იმის გათვალისწინებით, რომ $G = mg$, განვსაზღვროთ

$$v = \sqrt{3gr - \frac{c}{m}[(2r-l_0)^2 - (r_0 - l_0)^2]} =$$

$$= \sqrt{3\cdot 9{,}8\cdot 0{,}2-\frac{490}{7}[(0{,}4-0{,}1)^2-(0{,}2-0{,}1)^2]} = 0{,}529 \quad (\text{ნ/წმ}).$$

განვსაზღვროთ რგოლზე ტვირთის წნევის ძალა. შევადგინოთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება n ნორმალზე გეგმილებში:

$$ma_n = \sum F_{kn} = F_{yp} + N - G\,,$$

ანუ
$$\frac{mv^2}{r} = F_{yp} + N - G\,. \qquad (1)$$

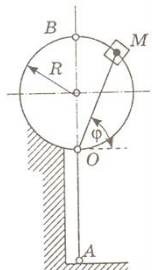
აქედან
$$N = \frac{mv^2}{r} + G - F_{yp} = \frac{mv^2}{r} + mg - c(2r - l_0) =$$

$$= \frac{7\cdot 0{,}529^2}{0{,}2} + 7\cdot 9{,}8 - 490(0{,}4-0{,}1) = -68{,}6 \quad (\text{ნ}).$$

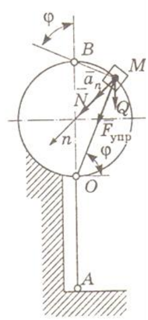
ნიშანი მინუსი გვიჩვენებს, რომ $\vec{N}$ რეაქციას ნამდვილად აქვს ნახაზზე ნაჩვენების საპირისპირო მიმართულება. მაშასადამე, ტვირთის წნევის ძალა, რომელიც არის $\vec{N}$ -ს საპირისპირო მიმართულების, მიმართული იქნება ზევით.

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: წნევა მიმართულია ზევით და 68,6 ნ-ს ტოლია.

ამოცანა 31. 16



Q წონის მძიმე გლუვ M რგოლს ხახუნის გარეშე შეუძლია სრიალი ვერტიკალურ სიბრტყეში მდებარე R სმ რადიუსის წრიულ რკალზე. რგოლზე მიბმულია დრეკადი MOA ძაფი, რომელიც გადის გლუვ უძრავ O რგოლში და დამაგრებულია A წერტილში. ჩათვალეთ, რომ როცა M რგოლი იმყოფება O წერტილში, მაშინ ძაფის დაჭიმულობა ნულის ტოლია და ძაფის 1 სმ-თ დაჭიმვისათვის საჭიროა მოვდოთ c ძალა. საწყის მომენტში რგოლი იმყოფება B წერტილში არამდგრად წონასწორობის მდგომარეობაში და უმნიშვნელოდ მცირე ბიძგის შედეგად იწყებს წრეწირზე სრიალს. განსაზღვრეთ ტვირთის N წნევა რგოლზე.



<u>**ა მ ო ხ ს ნ ა**</u>. განვიხილოთ რგოლის მოძრაობა წრეზე სიმძიმის $\vec{Q}$ ძალის, ძაფის დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალისა და რეაქციის $\vec{N}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი).

შევადგინოთ M რგოლის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება n ნორმალზე გეგმილებში:

$$ma_n = \sum F_{kn} = N + F_{yp}\cos(90^0 - \varphi) + Q\cos(180^0 - 2\varphi),$$

სადაც $a_n = \dfrac{v^2}{R}$; $F_{yp} = 2cR\sin\varphi$.

მაშინ $$\frac{mv^2}{R} = 2cR\sin^2\varphi - Q\cos 2\varphi + N,$$

ანუ $$mv^2 = 2cR^2\sin^2\varphi - QR\cos 2\varphi + NR. \quad (1)$$

გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა რგოლის გადაადგილებისას B წერტილიდან M წერტილში:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k = A(\vec{Q}) + A(\vec{F}_{yp}) + A(\vec{N}).$$

სადაც $A(\vec{N}) = 0$ $v_0 = 0$.

მაშინ

$$\frac{mv^2}{2} = 2QR\cos^2\varphi + \frac{c}{2}(\lambda^2 - \lambda_0^2) = 2QR\cos^2\varphi + \frac{c}{2}(4R^2 - 4R^2\sin^2\varphi) =$$

$$= 2QR\cos^2\varphi + 2cR^2\cos^2\varphi,$$

ანუ $$mv^2 = 4QR\cos^2\varphi + 4cR^2\cos^2\varphi. \quad (2)$$

რადგანაც (1) და (2) გამოსახულებების მარცხენა მხარეები ტოლია, ამიტომ, გაუტოლოთ მათი მარჯვენა მხარეებიც, მივიღებთ

$$2cR^2\sin^2\varphi - QR\cos 2\varphi + NR = 4QR\cos^2\varphi + 4cR^2\cos^2\varphi.$$

აქედან განვსაზღვრავთ წნევას

$$N = -2cR\sin^2\varphi + 4cR\cos^2\varphi + Q\cos 2\varphi + 4Q\cos^2\varphi =$$

$$= -6cR\sin^2\varphi + 4cR + Q\cos 2\varphi + 4Q - 4Q\sin^2\varphi$$

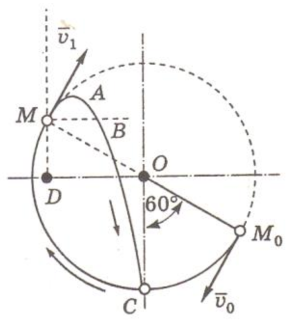
$$= 2Q + cR + 3(cR + Q)\cos 2\varphi.$$

რგოლის წრეწირზე წნევის ძალა $\vec{N}_d = -\vec{N}$.

პ ა ს უ ხ ი: $N = 2Q + cR + 3(cR + Q)\cos 2\varphi$; წნევა მიმართულია გარეთ,

როცა $N > 0$, შიგნით, როცა $N < 0$.

ამოცანა 31. 17

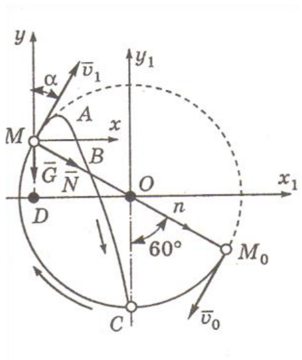


ტვირთი დაკიდულია უძრავ 0 წერტილზე 0,5 მ სიგრძის ძაფით. საწყის M_0 მდებარეობაში ტვირთი გადახრილია ვერტიკალიდან 60^0 კუთხით და მას მიანიჭეს ვერტიკალურ სიბრტყეში ძაფის პერპენდიკულარული $v_0 = 3{,}5$ მ/წმ სიდიდის სიჩქარე.

1) იპოვეთ ტვირთის ის M მდებარეობა, რომელშიც ძაფის დაჭიმულობა იქნება ნულის ტოლი, და განსაზღვრეთ ტვირთის v_1 სიჩქარე ამ მდებარეობაში.

2) განსაზღვრეთ ტვირთის შემდგომი მოძრაობის ტრაექტორია იმ მომენტამდე, როდესაც ძაფი კვლავ იქნება დაჭიმული, და ის დრო, რომლის განმავლობაშიც წერტილი გაივლიდა ამ ტრაექტორიას.

ა მ ო ხ ს ნ ა.



1) რომ ვიპოვოთ M მდებარეობა, რომელშიც ძაფის დაჭიმულობა $N = 0$ (იხ. ნახაზი), გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k = A(\vec{G}) =$$

$$= -mg(OM_0 \cos 60^0 + MD),$$

სადაც $G = mg;\quad OM_0 = R$.

მაშინ

$$v_1^2 - v_0^2 = -2g(R\cos 60^0 + MD) \qquad (1)$$

შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება n ნორმალზე გეგმილებში:

$$ma_n = \sum F_{kn} = G\sin\alpha + N = mg\sin\alpha + N,$$

სადაც $a_n = \dfrac{mv_1^2}{R};\quad \sin\alpha = \dfrac{MD}{R};\quad N = 0.$

მაშინ

$$\frac{mv_1^2}{R} = mg\frac{MD}{R}. \qquad (2)$$

გამოვსახოთ (1) და (2) ფორმულებიდან v_1^2:

$$v_1^2 = v_0^2 - 2g(R\cos 60^0 + MD), \qquad (3)$$

$$v_1^2 = g \cdot MD. \qquad (4)$$

აქედან

$$g \cdot MD = v_0^2 - 2gR\cos 60^0 - 2g \cdot MD.$$

$$MD = \frac{v_0^2 - 2gR\cos 60^0}{3g} = \frac{3{,}5^2 - 2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{3 \cdot 9{,}8} = 0{,}25 \text{ მ.}$$

მაშინ, (4) ფორმულის თანახმად

$$v_1 = \sqrt{g \cdot MD} = \sqrt{9{,}8 \cdot 0{,}25} = 1{,}565 \text{ (მ/წმ)}$$

2) განვიხილოთ ტვირთის შემდგომი მოძრაობა სიმძიმის $\vec{G}$ ძალის მოქმედებით. შევადგინოთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x და y ღერძებზე გეგმილებში:

$$mx'' = \sum F_{kx} = 0,$$

$$my'' = \sum F_{ky} = -G,$$

სადაც $G = mg$. მაშინ

$$x'' = 0,$$

$$y'' = -g.$$

ეს დიფერენციალური განტოლებები ორჯერ ვაინტეგროთ

$$x' = C_1, \quad x = C_1 t + C_2; \qquad (5)$$

$$y' = -gt + C_3, \quad y = -g\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4. \qquad (6)$$

ინტეგრების მუდმივები განვსაზღვროთ საწყისი პირობებით:

$t = 0, x_0 = 0, y_0 = 0,$

$$x_0' = v_1 \sin\alpha = v_1 \sin 30^0 = \frac{\sqrt{g}}{2} \cdot 0{,}5 = \frac{\sqrt{g}}{4,},$$

$$y_0' = v_1 \cos\alpha = v_1 \cos 30^0 = \frac{\sqrt{g}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3g}}{4}.$$

მაშასადანე, $C_1 = \dfrac{\sqrt{g}}{4}$, $C_2 = 0, C_3 = \dfrac{\sqrt{3g}}{4}$, $C_4 = 0.$

(5) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$x = \frac{\sqrt{g}}{4} t \,.$$

აქედან

$$t = \frac{4x}{\sqrt{g}} \,.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (6) ფორმულაში და გავითვალისწინოთ C_3 და C_4 მუდმივების მნიშვნელობები, მივიღებთ

$$y = -\frac{g}{2}\frac{16x^2}{g} + \frac{\sqrt{3g}}{4}\frac{4x}{\sqrt{g}} = x\sqrt{3} - 8x^2 \,.$$

ეს არის ტვირთის მოძრაობის MAB ტრაექტორიის განტოლება, ე. ი პარაბოლის განტოლება.

ახლა განვსაზღვროთ T დრო, რომლის განმავლობაში $MABC$ პარაბოლაზე მოძრავი ტვირთი აღმოჩნდება წრეწირის C წერტილში (იხ. ნახაზი).

შევადგინოთ ტვირთის მოძრაობის განტოლებები Ox_1y_1 ღერძებზე:

$$x_1 = x - OD = x - R\cos\alpha = \frac{\sqrt{g}}{4} t - R\frac{\sqrt{3}}{2} \,,$$

$$y_1 = y + MD = -\frac{g}{2} t^2 + \frac{\sqrt{3g}}{4} t + \frac{R}{2} \,.$$

ვინაიდან დროის ბოლო მომენტში

$$x_1^2(T) + y_1^2(T) = R^2 \,,$$

ამიტომ

$$\left(\frac{\sqrt{g}}{4} T - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{gT^2}{2} + \frac{\sqrt{3g}T}{4} + \frac{R}{2}\right)^2 = R^2 \cdot$$

გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{g}{16} T^2 - \frac{R\sqrt{3g}}{4} T + \frac{3R^2}{4} + \frac{g^2}{4} T^4 + \frac{3g}{16} T^2 + \frac{R^2}{4} -$$

$$-\frac{\sqrt{3g}}{4}gT^3+\frac{R\sqrt{3g}}{4}T-\frac{gR}{2}T^2=R^2$$

ანუ $$gT-\sqrt{3g}=0.$$

აქედან $$T=\sqrt{\frac{3}{g}}=\sqrt{\frac{3}{9,8}}=0,55 \text{ (წმ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>:

1) M მდგომარეობა იმყოფება 0 წერტილის ჰორიზონტალის ზევით

$MD=0,25$ მ მანძილზე; $v_1=156,5$ სმ/წმ.

2) $MABC$ პარაბოლა, რომლის განტოლებასაც Mx და My

ღერძების მიმართ აქვს შემდეგი სახე $y=x\sqrt{3}-8x^2$; ტვირთი

ამ პარაბოლას აღწერს $0,55$ წმ-ს განმავლობაში.

ამოცანა 31. 18

მათემატიკური ქანქარა დაყენებულია თვითმფრინავში, რომელიც მიფრინავს 10 კმ სიმაღლეზე. რა ნაწილით უნდა შემცირდეს ქანქარის ძაფის სგრძე, რომ ქანქარის მცირე რხევების პერიოდი ამ სიმაღლეზე დარჩეს უცვლელი? სიმძიმის ძალა ჩათვალეთ დედამიწის ცენტრამდე მანძილის კვადრატის უკუპროპორციული.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. მათემატიკური ქანქარის მცირე რხევების პერიოდი დედამიწის ზედაპირზე

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

$H=10$ კმ სიმაღლეზე $$T_1=2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g_1}}.$$

ვინაიდან $T_1=T$, ამიტომ

$$2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g_1}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Rightarrow\frac{g}{g_1}=\frac{l}{l_1}.$$

რადგანაც

$$g_H = g\left(\frac{R}{R+H}\right)^2,$$

ამიტომ

$$\frac{g}{g_H} = \frac{l}{l_1} = \left(\frac{R+H}{R}\right)^2, \qquad (1)$$

სადაც $g_H = g_1$; $R = 6370$ კმ – დედამიწის რადიუსია.

ვთქვათ $l_1 = l - \Delta$,

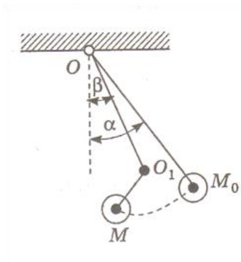
სადაც Δ - სიდიდე, რომლითაც უნდა შევამციროთ ქანქარის სიგრძე. მაშინ, (1) ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს

$$\frac{l}{l-\Delta} = \left(1+\frac{H}{R}\right)^2 .$$

აქედან
$$\frac{\Delta}{l} = 1 - \frac{1}{\left(1+\dfrac{H}{R}\right)^2} = 1 - \frac{1}{\left(1+\dfrac{1\cdot 10^4}{637\cdot 10^4}\right)^2} = 1{,}00313.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\Delta = 0{,}00313l$, აქ l - ძაფის სიგრძე დედამიწის ზედაპირზე.

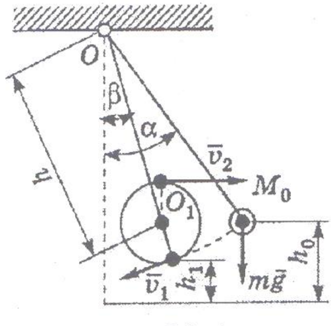
ამოცანა 31. 19



უძრავ O წერტილში l სიგრძის OM ძაფის საშუალებით დაკიდებულია m მასის M ტვირთი. საწყის მომენტში OM ძაფი ვერტიკალთან ადგენს α კუთხეს და M ტვირთის სიჩქარე ნულის ტოლია. შემდგომი მოძრაობისას ძაფს ხვდება წვრილი მავთული O_1, რომლის მიმართულება ტვირთის მოძრაობის სიბრტყის მართობულია, ხოლო მდებარეობა განისაზღვრება პოლარული კოორდინატებით: $h = OO_1$ და β. განსაზღვრეთ α კუთხის უმცირესი მნიშვნელობა რომლის დროსაც OM ძაფი მავთულთან შეხვედრის შემდეგ მასზე დაეხვევა, ამასთანავე ძაფის დაჭიმულობის ცვლილება მავთულთან შეხვედრის მომენტში. მავთულის სისქე უგულებელყავით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ძაფის მავთულთან შეხვედრის მომენტისათვის ტვირთის სიჩქარის განსასაზღვრად (ნახ.1) გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა იმის გათვალისწინებით, რომ $v_0 = 0$. მაშინ

$$\frac{mv_1^2}{2} = mg(h_0 - h_1), \qquad (1)$$



ნახ. 1

სადაც $h_0 = l(1-\cos\alpha); \quad h_1 = l(1-\cos\beta)$.

h_0 და h_1-ს მნიშვნელობათა გათვალისწინებით (1) ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს

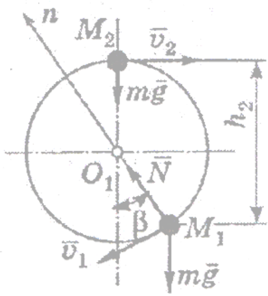
$$\frac{v_1^2}{2} = gl(\cos\beta - \cos\alpha)$$

საიდანაც

$$v_1^2 = 2gl(\cos\beta - \cos\alpha). \qquad (2)$$

საკიდარი ძაფის მავთულთან შეხვედრის შემდეგ ტვირთი შემოწერს წრეწირს (ნახ. 2), რადიუსით

$$r = l - h = l\left(1 - \frac{h}{l}\right).$$



ნახ. 2

ტვირთის უმცირეს v_2 სიჩქარეს, რომლითაც ძაფი დაეხვევა მავთულს, ვიპოვით ტვირთის მოძრაობის განტოლებით ბუნებრივი სისტემის n ღერძზე გეგმილებში; გავითვალისწინოთ, რომ ძაფის რეაქცია ნულის ტოლია,

$$\frac{mv_2^2}{r} = mg.$$

(3)

აქედან $v_2^2 = gr$.

M ტვირთისათვის გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$\frac{mv_2{}^2}{2} - \frac{mv_1{}^2}{2} = -mgh_2,$$

სადაც $h_2 = r + r\cos\beta = r(1+\cos\beta)$.

მაშინ, (2) გამოსახულების გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$v_2^2 = gr = v_1^2 - 2gr(1+\cos\beta).$$

r -ს მნიშვნელობის გათვალისწინებით

$$2gl(\cos\beta - \cos\alpha) - 2gl\left(1-\frac{h}{l}\right)\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right) = 0 .$$

აქედან $$\cos\alpha = \frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right) - \frac{3}{2}, \qquad (4)$$

$$\alpha = \arccos\left[\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right) - \frac{3}{2}\right].$$

ჩავსვათ (4) გამოსახულება (2) ფორმულაში:

$$v_1^2 = 2gl(\cos\beta + \frac{3}{2})\left(\frac{l-h}{l}\right) = 2g\left(\cos\beta + \frac{3}{2}\right)(l-h).$$

შემდეგ განვსაზღვროთ ძაფის დაჭიმულობა ძაფის მავთულთან შეხვდრის მომენტში, როცა $\vec{N} = N_1$ (ნახ. 2). ამისათვის შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ბუნებრივ n ღერძზე გეგმილებში:

$$\frac{mv_1^{\,2}}{l} = N_1 - mg\cos\beta \Rightarrow N_1 = \frac{mv_1^2}{l} + mg\cos\beta .$$

შევადგინოთ ისეთივე განტოლება იმ მომენტისათვის, როცა ძაფი დაეხვევა მავთულზე, ე. ი. როცა $\vec{N} = N_2$

$$\frac{mv_1^{\,2}}{r} = N_2 - mg\cos\beta \Rightarrow N_2 = \frac{mv_1^2}{r} + mg\cos\beta .$$

ახლა ვიპოვოთ ძაფის დაჭიმულობის ცვლილება მის მავთულთან შეხვედრის მომენტში:

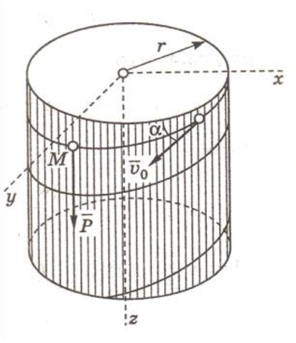
$$\Delta N = N_2 - N_1 = mv_1^2\left(\frac{1}{l-h} - \frac{1}{l}\right),$$

ანუ $$\Delta N = 2mg\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $\alpha = \arccos\left[\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right) - \frac{3}{2}\right]$; ძაფის დაჭიმულობა გაიზრდება $2mg\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right)$ სიდიდით.

ამოცანა 31. 20

m მასის მძიმე M წერტილი მოძრაობს r რადიუსის წრიული ცილინდრის შიგა ზედაპირზე. ჩათვალეთ, რომ ცილინდრის ზედაპირი აბსოლუტურად გლუვია და ცილინდრის ღერძი ვერტიკალურია. განსაზღვრეთ წერტილის წნევა ცილინდრზე. წერტილის საწყისი სიჩქარე სიდიდით v_0-ს ტოლია და ჰორიზონტთან ადგენს α კუთხეს.

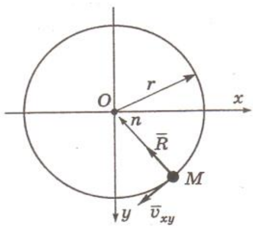


ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ბუნებრივ n ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$ma_n = R,$$

აქ $a_n = \dfrac{v_{xy}^2}{r}$, $v_{xy} = v_0 \cos\alpha$; $R -$ ცილინდრის ზედაპირის რეაქციაა.

მაშინ $$R = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{r},$$



ხოლო, ცილინდრზე წერტილის წნევის ძალა

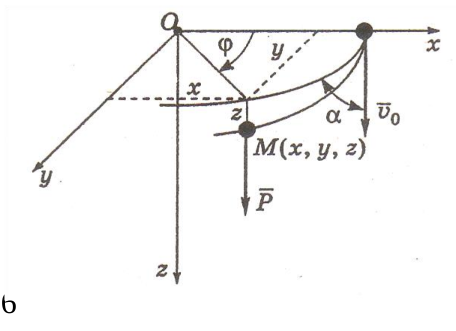
$$N = R = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{r}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $N = \dfrac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{r}$

ამოცანა 31. 21

წინა ამოცანაში შეადგინეთ წერტილის მოძრაობის განტოლება, თუ საწყის მომენტში წერტილი მდებარეობდა x ღერძზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ M წერტილის x და y კოორდინატები ნებისმიერ მომენტში (იხ. ნახაზი):



$$x = r\cos\varphi, \qquad (1)$$

$$y = r\sin\varphi. \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ φ კუთხის ცვლილება:

$$\varphi = \omega t.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$v_{xy} = \omega r = v_0 \cos\alpha,$$

მივიღებთ
$$\varphi = \frac{v_0 \cos\alpha}{r} t.$$

მაშინ (1) და (2) განტოლებები მიიღებენ ასეთ სახეს

$$x = r\cos\left(\frac{v_0 \cos\alpha}{r}\right),$$

$$y = r\sin\left(\frac{v_0 \cos\alpha}{r}\right).$$

z კოორდინატის განსაზღვრისათვის ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება z ღერძზე გეგმილებში:

$$mz'' = P,$$

ანუ, ვინაიდან $P = mg$

$$z'' = \frac{dz'}{dt} = g, \qquad (3)$$

(3) გამოსახულებაში განვაცალოთ ცვლადები და ორჯერ გავაინტეგროთ:

$$z' = gt + C_1, \qquad (4)$$

$$z = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2. \qquad (5)$$

საწყისი პირობების თანახმად: $t = 0, \quad z_0 = 0, z_0' = v_0 \sin\alpha$. მაშინ (4) და (5) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$z_0' = v_0 \sin\alpha = C_1$$

$$z_0 = 0 = C_2.$$

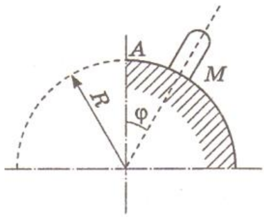
ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (5) ფორმულაში:

$$z = \frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha \cdot$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $x = r\cos\left(\frac{v_0\cos\alpha}{r}\right)$; $y = r\sin\left(\frac{v_0\cos\alpha}{r}\right)$;

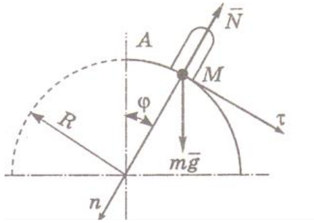
$z = \frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha \cdot$

ამოცანა 31. 22



M ქვამ, რომელიც მდებარეობს R რადიუსის გლუვი ზედაპირის ნახევარსფეროს გუმბათის A მწვერვალზე, მიიღო საწყისი ჰორიზონტალური სიჩქარე $\vec{v}_0$. რომელ ადგილას დატოვებს ქვა გუმბათს? $\vec{v}_0$-ის როგორი მნიშვნელობებისათვის ჩამოვარდება ქვა გუმბათიდან საწყის მომენტში? გუმბათზე ქვის მოძრაობისადმი წინაღობა უგულებელყავით.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ქვაზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$ და ზედაპირის რეაქცია $\vec{N}$ (იხ. ნახაზი). მოძრავ ქვასთან დავაკავშიროთ ბუნებრივი ღერძები n და τ. შევადგინოთ ქვის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ბუნებრივ n ღერძზე გეგმილებში:



$$ma_n = mg\cos\varphi - N, \qquad (1)$$

აქ $a_n = \frac{v^2}{R}$.

გუმბათიდან ქვის მოწყვეტის მომენტში $N = 0$, ამიტომ (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$v^2 = gR\cos\varphi. \qquad (2)$$

ქვის სიჩქარის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$\frac{mv_2^{\,2}}{2} - \frac{mv_1^{\,2}}{2} = mgR(1-\cos\varphi),$$

ანუ $$v^2 = v_0^2 + 2gR(1-\cos\varphi)\,. \qquad (3)$$

ჩავსვათ (3) გამოსახულება (2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$v_0^2 + 2gR(1-\cos\varphi) = gR\cos\varphi\,.$$

აქედან $$v_0^2 + 2gR = 3gR\cos\varphi\,,$$

$$\cos\varphi = \left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right),$$

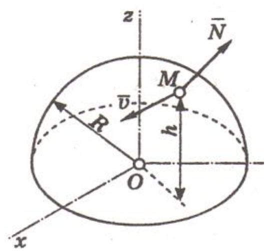
$$\varphi = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right).$$

(2) ფორმულიდან ვიპოვით v_0-ს მნიშვნელობას, როდესაც საწყის მომენტში ქვა მოსცილდება გუმბათს. ამასთანავე $\varphi = 0$. მაშინ $v_0 \geq \sqrt{gR}$.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\varphi = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right)$; $\quad v_0 \geq \sqrt{gR}$.

ამოცანა 31. 23

m მასის M წერტილი მოძრაობს R რადიუსის გლუვი ზედაპირის ნახევარსფეროს გუმბათზე. ჩათვალეთ, რომ წერტილზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა, რომელიც z ღერძის პარალელურია, და ვიცით, რომ საწყის მომენტში წერტილს ჰქონდა v_0 სიჩქარე და იმყოფებოდა გუმბათის ძირიდან h_0 სიმაღლეზე. განსაზღვრეთ წერტილის წნევა გუმბათზე, როცა ის იქნება გუმბათის ძირიდან h სიმაღლეზე.

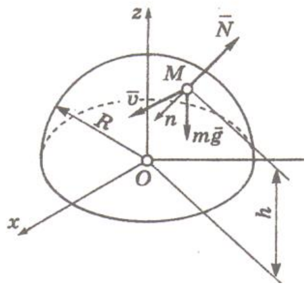


<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. წერტილი მოძრაობს გლუვი ზედაპირის ნახევარსფეროზე.

მასზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$ და ზედაპირის რეაქცია $\vec{N}$ (იხ. ნახაზი). სხეულთან დავაკავშიროთ ბუნებრივი ღერძები n და τ. შევადგინოთ სხეულის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ბუნებრივ n ღერძზე გეგმილებში:

$$ma_n = mg\cos\varphi - N, \qquad (1)$$

სადაც $a_n = \dfrac{v^2}{R}$.



აქედან $$N = mg\cos\varphi - \frac{mv^2}{R}. \qquad (2)$$

M წერტილის სიჩქარის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg(h_0 - h)$$

ანუ $$mv^2 = mv_0^2 + 2mg(h_0 - h). \qquad (3)$$

ჩავსვათ (3) გამოსახულება (2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$N = mg\cos\varphi - [mv_0^2 + 2mg(h_0 - h)]\frac{1}{R}.$$

ვინაიდან $\cos\varphi = \dfrac{h}{R}$, ამიტომ

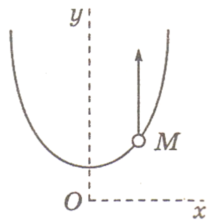
$$N = \frac{mgh}{R} - [mv_0^2 + 2mg(h_0 - h)]\frac{1}{R} = \frac{mg}{R}\left(3h - 2h_0 - \frac{v_0^2}{g}\right).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $N = \dfrac{mg}{R}\left(3h - 2h_0 - \dfrac{v_0^2}{g}\right)$.

ამოცანა 31. 24

m მასის M წერტილი მოძრაობს ჯაჭვწირზე

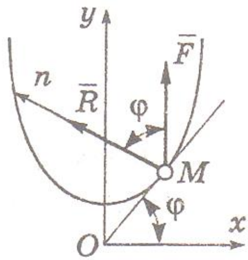
$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) = ach\frac{x}{a},$$



რომელზეც მოქმედებს $0y$ ღერძის პარალელური და kmy-ის ტოლი უკუგდების ძალა. $t = 0$ მომენტში $x = 1$ მ, $x' = 1$მ/წმ. განსაზღვრეთ წერტილის N წნევა წირზე და წერტილის მოძრაობა, როცა $k = 1$

რად/წმ² და $a=1$მ (სიმძიმის ძალას უგულებელვყოფთ). ჯაჭვწირის სიმრუდის რადიუსი y^2/a ტოლია.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. დავაკავშიროთ მოძრავ M წერტილთან ბუნებრივი n ღერძი (იხ. ნახაზი) და შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ამ ღერძზე გეგმილებში:



$$ma_n = \frac{mv^2}{\rho} = \sum F_{kn},$$

სადაც $\sum F_{kn} = R + F\cos\varphi$; $F = kmy$;

$$v^2 = x'^2 + y'^2, \ \rho = \frac{y^2}{a}. \qquad (1)$$

მაშინ $$\frac{mv^2}{\rho} = R + kmy\cos\varphi,$$

საიდანაც $$R = \frac{mv^2}{\rho} - kmy\cos\varphi, \qquad (2)$$

აქ $$\cos\varphi = \frac{x'}{v}. \qquad (3)$$

x' -ს განსაზღვრისათვის შევადგინოთ M წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \sum F_{kx} = 0.$$

ვაინტეგროთ ეს ტოლობა ორჯერ, მივიღებთ

$$x' = C_1 = const, \qquad (4)$$

$$x = C_1 t + C_2. \qquad (5)$$

საწყისი პირობების თანახმად: $t = 0, \quad x_0 = 1; x_0' = 1$. მაშინ (4) ფორმულიდან : $x_0 = 1 = C_1$ და (5) ფორმულიდან: $x_0' = 1 = C_2$.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (4) და (5) ფორმულებში; მივიღებთ:

$$x' = 1, \quad x = t + 1.$$

ვიპოვოთ M წერტილის სიჩქარის გეგმილი y ღერძზე:

$$y' = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y_1 x', \qquad (6)$$

სადაც $\quad y_1 = sh\dfrac{x}{a}$.

მაშინ $$y' = x' sh\frac{x}{a} \ ,$$

$$v = x'\sqrt{1 + sh^2\frac{x}{a}}\ . \qquad (7)$$

ჩავსვათ (1), (3), (7) გამოსახულებები (2) ფორმულაში:

$$R = \frac{mx'^2\left(1+sh^2\frac{x}{a}\right)a}{y^2} - \frac{kmyx'}{x'^2\sqrt{1+sh^2\frac{x}{a}}} =$$

$$\frac{mx'^2\left(1+sh^2\frac{x}{a}\right)}{ach^2\frac{x}{a}} - \frac{akmch\frac{x}{a}}{\sqrt{1+sh^2\frac{x}{a}}}\ .$$

გავითვალისწინოთ, რომ $1 + sh^2\dfrac{x}{a} = ch^2\dfrac{x}{a}$ და მივიღებთ

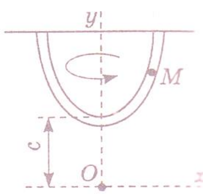
$$R = \frac{mx'^2}{a} - kma. \qquad (8)$$

ჩავსვათ (8) გამოსახულებაში ამოცანაში მოცემული სიდიდეები და მივიღებთ, რომ $R = 0$.

წირის M წერტილში წნევის $\vec{N}$ ძალა ბმის რეაქციის ტოლია, ე. ი. $N = R = 0$.

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $N = 0; \quad x = (t+1)$ მ.

ამოცანა 31. 25



როგორი ბრტყელი წირით უნდა მოიღუნოს მილაკი, რათა მასში ნებისმიერ ადგილას მოთავსებული ბურთულა მილაკის მიმართ დარჩეს წონასწორობაში, თუ მილაკი ბრუნავს Oy ღერძის გარშემო მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით?

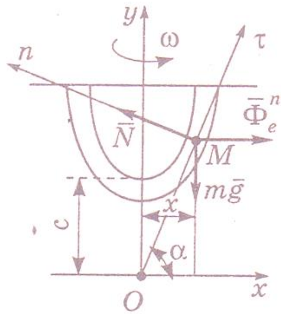
<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. M წერტილთან დავაკავშიროთ მოძრავი τ ღერძი (იხ. ნახაზი) და ჩავწეროთ ფარდობითი მოძრაობის განტოლება

ამ ღერძზე გეგმილებში; გავითვალისწინოთ, რომ $\Phi_e^n = m\omega^2 x$ და $\vec{N} \perp \tau$:

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = -mg\sin\alpha + \Phi_e^n \cos\alpha\,, \qquad (1)$$

ამოცანის პირობის თანახმად მილაკის მიმართ ბურთულა უნდა დარჩეს წონასწორობაში, მაშასადამე

$$a_r^\tau = \frac{dv_r}{dt} = 0.$$



მაშინ (1) განტოლება ასე ჩაიწერება

$$m\omega^2 x\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0\,,$$

ანუ
$$tg\alpha = \frac{\omega^2 x}{g}\,.$$

ვინაიდან $tg\alpha = \dfrac{dy}{dx}$, ამიტომ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}\,.$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ

$$\int dy = \int \frac{\omega^2}{g} x dx.$$

მივიღებთ
$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + C\,. \qquad (2)$$

საწყის მომენტში $x_0 = 0$, მაშინ (2) ფორმულის თანახმად: $C = y_0 = c$.

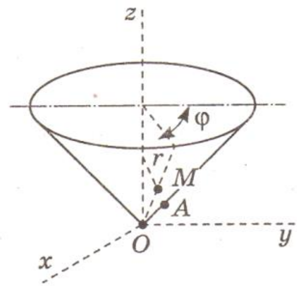
ინტეგრების მუდმივის ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (2) ფორმულაში:

$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + c \quad \text{- პარაბოლა.}$$

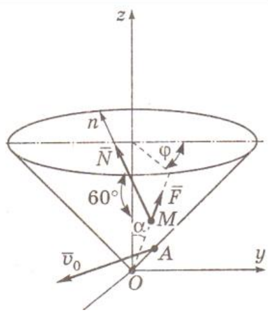
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: პარაბოლაზე $y = \dfrac{\omega^2 x^2}{2g} + c$.

ამოცანა 31. 26

გლუვი ზედაპირის წრიულ კონუსზე, რომლის გაშლილობის კუთხეა $2\alpha = 90^0$, მოძრაობს $m=1$კგ მასის M წერტილი 0 წვეროდან უკუმგდები ძალის მოქმედებით, რომელიც OM მანძილის პროპორციულია: $F = c \cdot OM$ ნ, სადაც $c=1$ ნ/მ. საწყის მომენტში M წერტილი მდებარეობდა A წერტილში, მანძილი $OA = a = 2$ მ. საწყისი სიჩქარე $v_0 = 2$ მ/წმ და მიმართულია კონუსის ფუძის პარალელურად. განსაზღვრეთ M წერტილის მოძრაობა (სიმძიმის ძალა უგულებელყავით).



მ ი თ ი თ ე ბ ა: M წერტილის მდებარეობას განვსაზღვრავთ z კოორდინატით და პოლარლი r და φ კოორდინატებით სიბრტყეში, რომელიც Oz ღერძის მართობულია. კონუსის ზედაპირის განტოლებაა $r^2 - z^2 = 0.$



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ნახაზზე ვაჩვენოთ M წერტილი ნებისმიერ მდებარეობაში და მასზე მოქმედი ძალები: $F = c \cdot OM$ ძალა და ნორმალური რეაქცია $\vec{N}$. შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება პოლარულ r და φ ღერძზე გეგმილებში:

$$m(r'' - r\varphi'^2) = F_r + N_r = F\sin\alpha - N\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$m(r\varphi'' + 2r'\varphi') = F_\varphi + N_\varphi = 0.$$

ეს განტოლება შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\varphi') = 0. \qquad (2)$$

(2) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$r^2\varphi' = A = const. \qquad (3)$$

როცა $t = 0 : r = r_0 = a\sin\alpha = 2\sin 45^0 = \sqrt{2}$; $r_0\varphi_0' = v_0$. მაშინ

$$A = r_0(r_0\varphi_o') = r_0 v_0 = 2\sqrt{2}. \qquad (4)$$

რადგანაც $r^2\varphi' = const$, ამიტომ

$$r^2\varphi' = r_0^2\varphi_0' = r_0 v_0 = 2\sqrt{2}\,. \qquad (5)$$

M წერტილისათვის შევადგინოთ დინამიკის ძირითადი განტოლაბა n ღერძზე გეგმილებში:

$$m\frac{v^2}{r}\cos\alpha = N,$$

სადაც $v^2 = r^2\varphi'^2$; $N-$ ნორმალური რეაქციაა. მაშინ

$$N = mr\varphi'^2\cos\alpha\,. \qquad (6)$$

(6) გამოსახულება ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$m(r'' - r\varphi'^2) = c\cdot 0M\sin\alpha - mr\varphi'^2\cos^2\alpha = c\frac{r}{\sin\alpha}\sin\alpha - mr\varphi'^2\cos^2 45^0$$

. (7)

(7) გამოსახულების გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ

$$mr'' - mr\varphi'^2 - cr + \frac{1}{2}mr\varphi'^2 = 0,$$

ანუ $$r'' - \frac{c}{m}r - \frac{1}{2}r\varphi'^2 = 0\,. \qquad (8)$$

(3) გამოსახულების გათვალისწინებით (8) განტოლება ასეთი სახით წარმოვადგინოთ $$r'' - \frac{c}{m}r - \frac{1}{2}\frac{A^2}{r^3} = 0\,.$$

(9)

(9) განტილება გავამრავლოთ r'-ზე:

$$r'r'' - \frac{c}{m}rr' - \frac{1}{2}\frac{A^2 r'}{r^3} = 0\,. \qquad (10)$$

შემოვიღოთ შეცვლა:

$$r'r'' = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r'^2), \qquad rr' = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2),$$

$$\frac{r'}{2r^3} = \frac{r'r}{2r^4} = \frac{1}{4r^4}\frac{d}{dt}(r^2)\,.$$

აღვნიშნოთ: $r^2 = x$, $r'^2 = x'$.

ამის გათვალისწინებით (10) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{1}{2}\frac{dx'}{dt}-\frac{1}{2}\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}-\frac{1}{4}\frac{A^2}{x^2}\frac{dx}{dt}=0. \qquad (11)$$

(11) განტოლება გავამრავლოთ dt-ზე და ვაინტეგროთ, მივიღებთ

$$\frac{1}{2}x'-\frac{1}{2}\frac{c}{m}x+\frac{1}{4}\frac{A^2}{x}=C_1.$$

ანუ
$$\frac{1}{2}r'^2-\frac{1}{2}\frac{c}{m}r^2+\frac{1}{4}\frac{A^2}{r^2}=C_1. \qquad (12)$$

ინტეგრების C_1 მუდმივი განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: $t=0, r_0'=0,\ r_0=a\sin\alpha=\sqrt{2}$ მ;

$A=2\sqrt{2}$ მ²/წმ.

ვინაიდან $\frac{c}{m}=1$, ამიტომ (12) ფორმულიდან $C_1=0$. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (12) განტოლებაში, მივიღებთ

$$r'^2=\frac{c}{m}r^2-\frac{1}{2}\frac{A^2}{r^2}. \qquad (13)$$

გავამრავლოთ (9) განტოლება r-ზე:

$$r''r-\frac{c}{m}r^2-\frac{1}{2}\frac{A^2}{r^2}=0$$

საიდანაც
$$r''r=\frac{c}{m}r^2+\frac{A^2}{2r^2}. \qquad (14)$$

შევკრიბოთ (13) და (14) ტოლობები, მივიღებთ

$$r'^2+r''r=\frac{2c}{m}r^2. \qquad (15)$$

შემოვიღოთ შეცვლა: $(r'^2+r''r)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(r^2)$, სადაც $r^2=x$.

მაშინ (15) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2c}{m}x,$$

ანუ
$$x''-k^2x=0, \qquad (16)$$

სადაც $k^2 = \frac{4c}{m} = 4, \quad k = 2.$

ერთგვაროვანი დიფერენციალური (16) განტოლების ზოგად ამოხსნას აქვს ასეთი სახე

$$x = C_2 e^{kt} + C_3 e^{-kt},$$

ანუ, შემოღებული აღნიშვნების გათვალისწინებით

$$r^2 = C_2 e^{kt} + C_3 e^{-kt}. \qquad (17)$$

გავაწარმოვოთ (17) გამოსახულება დროთი:

$$\frac{d}{dt}(r^2) = 2rr' = kC_2 e^{kt} - kC_3 e^{-kt}. \qquad (18)$$

მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით (17) და (18) ფორმულებიდან განვსაზღვროთ C_2 და C_3 მუდმივები: როცა $t = 0, r_0 = a\frac{\sqrt{2}}{2}, r_0' = 0$. მივიღებთ

$$\frac{1}{2}a^2 = C_2 + C_3, \quad 0 = C_2 - C_3 \Rightarrow C_2 = C_3 = C,$$

ანუ

$$C = \frac{a^2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ (მ}^2\text{)}.$$

ჩავსვათ ინტეგრების მუდმივების მნიშვნელობები (17) განტოლებაში:

$$r^2 = e^{2t} + e^{-2t}.$$

შემდეგ, (5) ფორმულიდან

$$\varphi' = \frac{2\sqrt{2}}{r^2} = \frac{2\sqrt{2}}{e^{2t} + e^{-2t}} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

ამ გამოსახულებაში განვაცალოთ ცვლადები

$$d\varphi = \frac{2\sqrt{2}dt}{e^{2t} + e^{-2t}} = \frac{\sqrt{2}de^{2t}}{e^{4t} + 1}.$$

ამ გამოსახულების ინტეგრებით მივიღებთ

$$\varphi = \sqrt{2}arctge^{2t} + C_4. \qquad (19)$$

აქ ჩავსვათ საწყისი პირობები: $t = 0, \varphi_0 = 0$; ინტეგრების მუდმივის განსაზღვრისათვის მივიღებთ:

$$0 = \sqrt{2}arctge^{0} + C_4,$$

$$C_4 = -\sqrt{2}arctg1 = -\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ (19) ფორმულაში, მივიღებთ

$$\varphi = \sqrt{2}\left(arctge^{2t} - \frac{\pi}{4} \right).$$

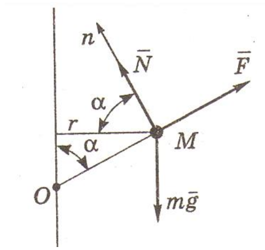
საიდანაც $$tg\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) = e^{2t}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $r^2 = e^{2t} + e^{-2t}$; $tg\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) = e^{2t}$

ამოცანა 31. 27

წინა ამოცანის პირობებში, ჩათვალეთ, რომ კონუსის ღერძი მიმართულია ზევით, გაითვალისწინეთ სიმძიმის ძალა და განსაზღვრეთ წერტილის წნევა კონუსის ზედაპირზე.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. მოძრავ წერტილთან დავაკავშიროთ ბუნებრივი ღერძი n (იხ. ნახაზი) და M წერტილისათვის შევადგინოთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება n ღერძზე გეგმილებში:



$$ma_n = \sum F_{kn}, \qquad (1)$$

სადაც $a_n = \frac{v^2 \cos\alpha}{r}$; $r = OM \cdot \sin\alpha$;

$$\sum F_{kn} = N - mg\sin\alpha.$$

(1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{mv_0^2 \cos\alpha}{OM \cdot \sin\alpha} = N - mg\sin\alpha.$$

აქედან განისაზღვრება ნორმალური რეაქცია

$$N = m\sin\alpha\left(g + \frac{v_0^2 \cos\alpha}{OM \cdot \sin^2\alpha} \right) = m\sin\alpha\left(g + \frac{v^2 \sin 2\alpha}{2 \cdot OM \cdot \sin^3\alpha} \right) =$$

$$= m\sin\alpha\left(g + \frac{(OM)^2 \cdot v^2 \sin 2\alpha}{2r^3} \right).$$

გავითვალისწინოთ, რომ $r^2\varphi' = r_0^2\varphi_0' = r_0 v_0 = const$ [იხ. 31. 26 ამოცანის ამოხსნა, ფორმულა (5)], ანუ

$$r(r\varphi') = r_0(r_0\varphi_0') \Rightarrow rv = r_0 v_0 .$$

ვინაიდან $r = OM \cdot \sin\alpha$, $r_0 = a \cdot \sin\alpha$, ამიტომ

$$OM \cdot v\sin\alpha = av_0 \sin\alpha \Rightarrow OM \cdot v = av_0$$

მაშინ
$$N = m\sin\alpha\left(g + \frac{a^2 v_0^2 \sin 2\alpha}{2r^3}\right).$$

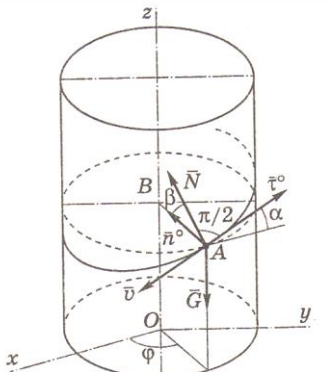
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $N = m\sin\alpha\left(g + \frac{a^2 v_0^2 \sin 2\alpha}{2r^3}\right).$

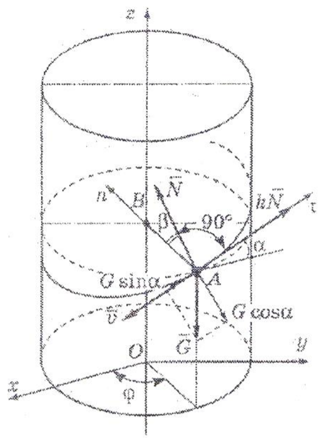
ამოცანა 31. 28

ნივთიერი A წერტილი სიმძიმის ძალის მოქმედებით მოძრაობს მქისე (ხორკლიან) ხრახნულ ზედაპირზე, რომლის Oz ღერძი ვერტიკალურია. ზედაპირის განტოლებაა $z = a\varphi + f(r);$ წერტილის ზედაპირთან ხახუნის კოეფიციენტია k. იპოვეთ პირობა, რომლის დროსაც წერტილის მოძრაობა ხდება ღერძიდან მუდმივი $AB = r_0$ მანძილით, ე. ი. მოძრაობს ხრახნულ წირზე, აგრეთვე იპოვეთ ამ მოძრაობის სიჩქარე, ჩათვალეთ, რომ $a = const.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა: ამოცანის ამოსახსნელად მიზანშეწონილია ისარგებლოთ ბუნებრივ კოორდინატთა ღერძებით და მოძრაობის განტოლება დააგეგმილეთ A წერტილში ხრახნული წირის მხებზე, მთავარ ნორმალიზე და ბინორმალზე.

ნახაზზე, კუთხე ხრახნული ზედაპირის $\vec{N}$ რეაქციის ნორმალურ მდგენელსა და მთავარი ნორმალის $\vec{n}^o$ ორტს შორის აღნიშნულია β ასოთი.





ნახ. 1

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. როცა $r = r_0 = const$ (ნახ.1) ხრახნული წირის განტოლებიდან $z = a\varphi + f(r)$ ვიპოვით ხრახნული წირის ბიჯს (ნახ. 2):

$$h = 2\pi a .$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $b = 2\pi r_0$, ნახ. 2-დან მივიღებთ

$$tg\alpha = \frac{h}{b} = \frac{a}{r_0}.$$

A წერტილის მოძრაობის განტოლების გეგმილებს მხებზე, ნორმალიზე და ბინორმალზე ასეთი სახეები აქვთ:

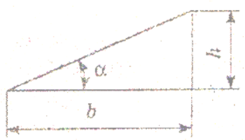
$$m\frac{dv}{dt} = G\sin\alpha - kN, \qquad (1)$$

$$\frac{mv_{\varphi}^2}{r_0} = N\cos\beta, \qquad (2)$$

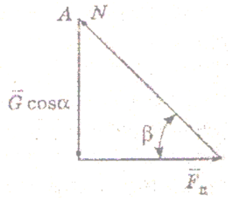
$$G\cos\alpha = N\sin\beta. \qquad (3)$$

გავითვალისწინოთ, რომ $v_{\varphi} = v\cos\alpha; G = mg$. (2) და (3) განტოლებებიდან მივიღებთ

$tg\beta =$ · . (4)



ნახ. 2



ნახ. 3

$z = a\varphi + f(r)$

განტოლებით მოცემულ ზედაპირთა გეომეტრიიდან გამომდინარეობს, რომ $tg\beta = \dfrac{1}{f'(r_0)\cos\alpha}$. მაშინ (4) გამოსახულება ასეთ სახეს მიიღებს $v = \sqrt{gr_0 f'(r_0)}$.

წერტილის მოძრაობა ხდება სიმძიმის $\vec{G}$ ძალისა და ზედაპირის $\vec{N}$ რეაქციის მოქმედებით, რომელთა მომენტები z ღერძის მიმართ ნულის ტოლია, მაშასადამე, $L_{0z} = L_z$. გარდა ამისა, ამოცანის პირობის თანახმად A წერტილი z ღერძიდან დაშორებულია მუდმივი მანძილით. ეს ნიშნავს, რომ

$$mv_0 r_0 \cos\alpha = mvr_0\cos\alpha \Rightarrow v = v_0 = const,$$

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$G\sin\alpha = kN. \qquad (5)$$

გავყოთ (5) განტოლება (3) განტოლებაზე, მივიღებთ

$$tg\alpha - \frac{k}{\sin\beta} = 0.$$

გამოვიყენოთ შეცვლა

$$\frac{1}{\sin\beta} = \sqrt{1+ctg^2\beta} = \sqrt{1+\frac{1}{tg^2\beta}} = \sqrt{1+f'^2(r_0)\cos^2\alpha},$$

ხრახნულ წირზე A წერტილის მოძრაობის პირობა არის

$$tg\alpha - k\sqrt{1+f'^2(r_0)\cos^2\alpha} = 0$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: ხრახნულ წირზე A წერტილის მოძრაობის პირობა არის

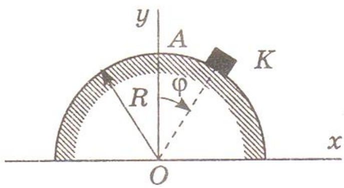
$$tg\alpha - k\sqrt{1+f'^2(r_0)\cos^2\alpha} = 0,$$ სადაც

$tg\alpha = a/r_0$;

მოძრაობის სიჩქარე $v = \sqrt{gr_0 f'(r_0)}$.

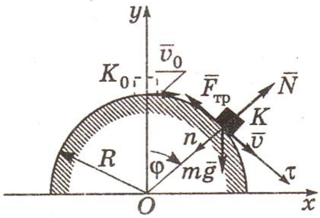
ამოცანა 31. 29

სხეული K, რომლის განზომილებები შეიძლება უგულებელვყოთ, დგას R რადიუსის უძრავი ნახევარცილინდრის მქისე ზედაპირის უმაღლეს A წერტილში. როგორი საწყისი ჰორიზონტალური და ცილინდრის მხების მიმართულების მქონე v_0 სიჩქარე უნდა მივანიჭოთ K სხეულს, რათა ის მოძრაობის დაწყების შემდეგ გაჩერდეს ცილინდრის ზედაპირზე, თუ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი მოძრაობისას და წონასწორობისას ერთნაირია და f-ს ტოლია.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. K სხეულის მოძრაობის განტოლებას n ღერძზე გეგმილებში ასეთი სახე აქვს (იხ. ნახაზი)

$$\frac{mv^2}{2} = mg\cos\varphi - N.$$



აქედან

$$N = m\left(g\cos\varphi - \frac{v^2}{R}\right). \qquad (1)$$

ახლა ჩავწეროთ K სხეულის მოძრაობის განტოლებას τ ღერძზე გეგმილებში:

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\varphi - F_{Tp},$$

სადაც $F_{Tp} = fN = fm(g\cos\varphi - \frac{v^2}{R})$.

მაშინ
$$\frac{dv}{dt} - f\frac{v^2}{R} = g(\sin\varphi - f\cos\varphi). \qquad (2)$$

K სხეულის ზღვრული წონასწორობა შესაძლებელია იმ შემთხვევაში, თუ

$$mg\sin\varphi_0 = fmg\cos\varphi_0 .$$

საიდანაც ზღვრული წონასწორობის კუთხე $\varphi_0 = arctgf$.

(2) განტოლებაში განვახორციელოთ ცვლადების შეცვლა:

$v = R\omega,$ სადაც $\omega = \omega(\varphi)$. $\frac{dv}{dt} = R\omega\frac{d\omega}{d\varphi}$, მივიღებთ

$$\omega\frac{d\omega}{d\varphi} - f\omega^2 = \frac{g}{R}(\sin\varphi - f\cos\varphi).$$

შევცვალოთ $u = \omega^2$, მაშინ (2) განტოლებას ასეთი სახე აქვს:

$$\frac{du}{d\varphi} - 2fu = \frac{2g}{R}(\sin\varphi - f\cos\varphi). \qquad (3)$$

ეს არის არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება.

ვიპოვოთ ამ განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნა:

$$\frac{du}{d\varphi} - 2fu = 0 \Rightarrow \frac{du}{d\varphi} = 2fu \Rightarrow \frac{du}{u} = 2fd\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln u = 2f\varphi + \ln C \Rightarrow \ln\frac{u}{C} = 2f\varphi.$$

აქედან
$$u = Ce^{2f\varphi}.$$

(3) განტოლების კერძო ამოხსნას $u^* = C(\varphi)e^{2f\varphi}$ ვეძებთ მუდმივის ვარიაციის მეთოდით:

$$\frac{du^*}{d\varphi} = \frac{dC}{d\varphi}e^{2f\varphi} + 2fCe^{2f\varphi}.$$

ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ (3) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\frac{dC}{d\varphi}e^{2f\varphi} + 2fCe^{2f\varphi} - 2fCe^{2f\varphi} = \frac{2g}{R}(\sin\varphi - f\cos\varphi). \tag{4}$$

გავაინტეგროთ (4) გამოსახულება:

$$\int dC = \frac{2g}{R}\int(\sin\varphi - f\cos\varphi)e^{-2f\varphi}d\varphi.$$

ცალკე გამოვთვალოთ:

$$\int e^{-2f\varphi}\sin\varphi d\varphi = -\frac{1}{2f}\int\sin\varphi de^{-2f\varphi} = -\frac{1}{2f}e^{-2f\varphi}\sin\varphi + \frac{1}{2f}\int e^{-2f\varphi}\cos\varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2f}e^{-2f\varphi}\sin\varphi - \frac{1}{4f}\int\cos\varphi de^{-2f\varphi} = -\frac{1}{2f}e^{-2f\varphi}\sin\varphi - \frac{1}{4f}e^{-2f\varphi}\cos\varphi =$$

$$= -\frac{1}{4f^2}\int e^{-2f\varphi}\sin\varphi d\varphi \Rightarrow$$

$$\int e^{-2f\varphi}\sin\varphi d\varphi = -\frac{2f}{1+4f^2}e^{-2f\varphi}\sin\varphi - \frac{1}{1+4f^2}e^{-2f\varphi}\cos\varphi.$$

ანალოგიური გამოთვლებით მივიღებთ:

$$\int e^{-2f\varphi}\cos\varphi d\varphi = -\frac{2f}{1+4f^2}e^{-2f\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{1+4f^2}e^{-2f\varphi}\sin\varphi.$$

საბოლოო შედეგად მივიღებთ:

$$C = \frac{2g}{R(1+4f^2)}(-2f\sin\varphi - \cos\varphi + 2f^2\cos\varphi - f\sin\varphi)e^{-2f\varphi},$$

ანუ

$$u^* = \frac{2g}{R(1+4f^2)}(-3f\sin\varphi - \cos\varphi + 2f^2\cos\varphi)e^{-2f\varphi}.$$

მაშინ, იმ პირობით, რომ $u = \dfrac{v^2}{R^2}$, მივიღებთ

$$v^2 = C_1 e^{2f\varphi} - \frac{2gR}{1+4f^2}(3f\sin\varphi + \cos\varphi - 2f^2\cos\varphi). \qquad (5)$$

ვინაიდან, როცა $\varphi = \varphi_0 = arctgf$ და $\sin\varphi_0 = \dfrac{f}{\sqrt{1+f^2}}$,

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}, \quad \text{მაშინ} \quad v = 0,$$

ამიტომ $$C_1 = \frac{2gR}{1+4f^2}\sqrt{1+f^2}e^{-2f\varphi_0}.$$

ჩავსვათ C_1 მნიშვნელობა (5) განტოლებაში

$$v^2 = \frac{2gR}{1+4f^2}[\sqrt{1+f^2}e^{2f(\varphi-\varphi_0)}) - (3f\sin\varphi + \cos\varphi - 2f^2\cos\varphi)].$$

რადგანაც მოძრაობა იწყება $\varphi = 0$ მდგომარეობიდან, ამიტომ

$$v_0 \le \sqrt{\frac{2gR}{1+4f^2}\left[\sqrt{1+f^2}e^{-2f\varphi_0} - (1-2f^2)\right]}.$$

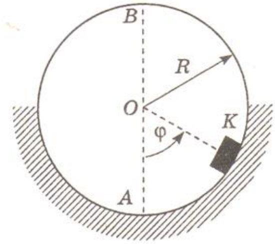
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $v_0 \le \sqrt{\dfrac{2gR}{1+4f^2}\left[\sqrt{1+f^2}e^{-2f\varphi_0} - (1-2f^2)\right]}$, სადაც $\varphi_0 = arctgf$.

ამოცანა 31. 30

სხეული K, რომლის განზომილებები შეიძლება უგულებელვყოთ, დგას R რადიუსის უძრავი ცილინდრის შიგა მქისე ზედაპირის უმდაბლეს A წერტილში. როგორი საწყისი ჰორიზონტალური და ცილინდრის მხების მიმართულების მქონე v_0 სიჩქარე უნდა მივანიჭოთ K სხეულს, რათა მან მიაღწიოს ცილინდრის ზედა B წერტილს? სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი f-ს ტოლია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ AKB უბანზე K სხეულის მოძრაობის განტოლება τ და n ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi - F_{Tp}, \qquad (1)$$



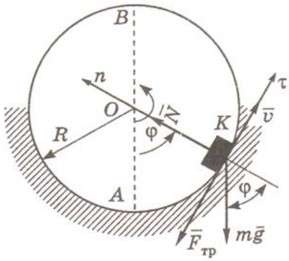
$$\frac{mv^2}{R} = N - mg\cos\varphi. \qquad (2)$$

(2) განტოლებიდან

$$N = m\left(g\cos\varphi + \frac{v^2}{R}\right).$$

მაშინ, (1) განტოლებიდან

$$F_{Tp} = fN = fm(g\cos\varphi + \frac{v^2}{R}).$$



ჩავსვათ ეს გამოსახულება (1) განტოლებაში და მივიღებთ სხეულის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{dv}{dt} + f\frac{v^2}{R} = -g(\sin\varphi + f\cos\varphi).$$

მოვახდინოთ შეცვლა

$$v = v(\varphi) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{vdv}{Rd\varphi},$$

აქ $\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{v}{R}$.

მივიღებთ $$v\frac{dv}{d\varphi} + fv^2 = -gR(\sin\varphi + f\cos\varphi).$$

აღვნიშნოთ $u = v^2$; ზედა განტოლება ასე ჩაიწერება

$$\frac{du}{d\varphi} + 2fu = -2gR(\sin\varphi + f\cos\varphi). \qquad (3)$$

ეს არის არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება.

მისი ამოხსნა ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$u = u_1 + u_2$$

სადაც u_1 არის ამ განტოლების შესაბამისი $\frac{du}{d\varphi}+2fu=0$ ერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნა, ხოლო u_2 არის (3) განტოლების კერძო ამოხსნა.

ვიპოვოთ ერთგვაროვანი ამოცანის ამოხსნა:

$$\frac{du_1}{d\varphi}=2fu_1 \Rightarrow \frac{du}{u_1}=-2fd\varphi$$

$$\Rightarrow \ln u_1=-2f\varphi+\ln C \Rightarrow \ln\frac{u_1}{C}=-2f\varphi.$$

აქედან $$u_1=Ce^{-2f\varphi}.$$

(3) განტოლების კერძო ამოხსნას ვეძებთ მუდმივის ვარიაციის მეთოდით:

$$u_2=C(\varphi)e^{-2f\varphi} \Rightarrow \frac{du_2}{d\varphi}=\frac{dC}{d\varphi}e^{-2f\varphi}-2fCe^{-2f\varphi}.$$

ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ (3) განტოლებაში და $C(\varphi)$-თვის მივიღებთ $\frac{dC}{d\varphi}e^{-2f\varphi}-2fCe^{-2f\varphi}+2fCe^{-2f\varphi}=-2gR$ $(\sin\varphi+f\cos\varphi)$.

გავაინტეგროთ ეს გამოსახულება:

$$\int dC=-2gR\int(\sin\varphi+f\cos\varphi)e^{-2f\varphi}d\varphi.$$

ანალოგიურად 31. 29 ამოცანის ამოხსნისა, გამოთვლებით მივიღებთ:

$$\int e^{2f\varphi}\sin\varphi d\varphi=\frac{2f}{1+4f^2}e^{2f\varphi}\sin\varphi-\frac{1}{1+4f^2}e^{2f\varphi}\cos\varphi;$$

$$\int e^{2f\varphi}\cos\varphi d\varphi=\frac{2f}{1+4f^2}e^{2f\varphi}\cos\varphi+\frac{1}{1+4f^2}e^{2f\varphi}\sin\varphi.$$

მაშინ მივიღებთ:

$$C=\frac{2gR}{1+4f^2}(-3f\sin\varphi+\cos\varphi-2f^2\cos\varphi)e^{-2f\varphi},$$

საბოლოოდ, სიჩქარის ცვლილების კანონი მიიღებს ასეთ სახეს

$$v^2=C_1e^{-2f\varphi}+\frac{2gR}{1+4f^2}[-3f\sin\varphi+(1-2f^2)\cos\varphi].$$

(4)

თუ დავუშვებთ, რომ $v=0$ როცა $\varphi=\pi$,

ამიტომ $$C_1=\frac{2gR}{1+4f^2}(1-2f^2)e^{2f\pi}.$$

ჩავსვათ C_1 მნიშვნელობა (4) განტოლებაში და როცა $\varphi=0$

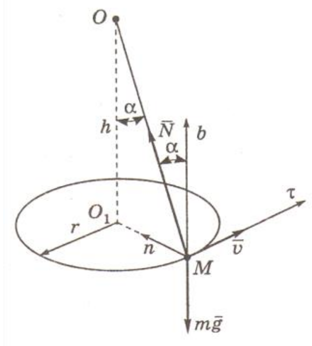
$$v_0\ge\sqrt{\frac{2gR}{1+4f^2}(1-2f^2)(e^{2f\pi}+1)}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $v_0\ge\sqrt{\frac{gR}{1+4f^2}\left[2(1-2f^2)+3e^{2f\pi}\right]}$, სადაც $\varphi_0=arctgf$.

ამოცანა 31. 31

ძაფზე დაკიდებული ბურთულა ჰორიზონტალურ სიბრტყეში აღწერს წრეწირს და ქმნის კონუსურ ქანქარას. განსაზღვრეთ კონუსის სიმაღლე, თუ ბურთულა ასრულებს 20 ბრუნვას წუთში.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ ბურთულას მოძრაობა სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალის და ძაფის რეაქციის $\vec{N}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი).



ჩავწეროთ ბურთულას მოძრაობის განტოლება ბუნებრივ τ, n, b ღერძზე გეგმილებში:

$$m\frac{dv}{dt}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{r}=N\sin\alpha, \qquad (2)$$

$$mb''=N\cos\alpha-mg. \qquad (3)$$

(1) განტოლებიდან $v=const$, მაშინ $b''=0$, და (3) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$N\cos\alpha=mg,$$

საიდანაც $$N=\frac{mg}{\cos\alpha}. \qquad (4)$$

ჩავსვათ (4) გამოსახულება (2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$v^2=grtg\alpha. \qquad (5)$$

რადგანაც $tg\alpha = \dfrac{r}{h}; v = \omega r = \dfrac{\pi n}{30} r$, ამიტომ (5) ფორმულიან

$$\frac{\pi^2 n^2}{900} r^2 = \frac{g r^2}{h} .$$

აქედან

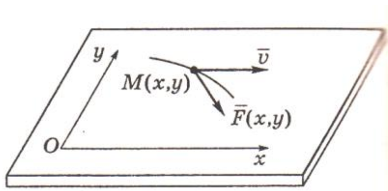
$$h = \frac{900g}{\pi^2 n^2} = \frac{900 \cdot 9{,}8}{3{,}14^2 \cdot 20^2} = 2{,}25 \text{ (მ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $h = 2{,}25$ მ.

ამოცანა 31. 32

ერთეული მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, რომელზეც მოქმედებს ძალთა ველი $\Pi = x^2 + xy + y^2$ პოტენციალით. საწყის მომენტში წერტილს აქვს კოორდინატები $x = 3$ სმ, $y = 4$ სმ და სიჩქარე 10 სმ, რომელიც x ღერძის დადებითი მიმართულების პარალელურია. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობა.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ჩავწეროთ პოტენციურ ველში მოთავსებული ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x და y ღერძებზე გეგმილებში:



$$mx'' = -\frac{d\Pi}{dx} ,$$

$$my'' = -\frac{d\Pi}{dy} ,$$

ანუ $$x'' + 2x + y = 0 , \qquad (1)$$

$$y'' + 2y + x = 0 . \qquad (2)$$

განტოლების შედგენისას გათვალისწინებულია, რომ $m = 1, \quad F_x = -\dfrac{d\Pi}{dx}, \quad F_y = -\dfrac{d\Pi}{dy}$.

მოძრაობის საწყისი პირობები:

$$x_0 = 3 \text{ სმ}, \quad x_0' = 10 \text{ სმ/წმ}. \tag{3}$$

$$y_0 = 4 \text{ სმ}, \quad y_0' = 0. \tag{4}$$

(1) და (2) დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნები ვეძებოთ ასეთი სახით: $x = Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t}$,

$$y = Ae^{\lambda t} - Be^{\mu t}.$$

მაშინ, ეს განტოლებები მიიღებენ ასეთ სახეს

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + 2Ae^{\lambda t} + B\mu^2 e^{\mu t} + 2Be^{\mu t} + Ae^{\lambda t} - Be^{\mu t} = 0,$$

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + 2Ae^{\lambda t} - B\mu^2 e^{\mu t} - 2Be^{\mu t} + Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t} = 0.$$

საიდანაც $\begin{cases} \lambda^2 + 3 = 0, \\ \mu^2 + 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{3}i; \lambda_2 = -\sqrt{3}i; \\ \mu_1 = i; \mu_2 = -i. \end{cases}$

ამიტომ, (1) და (2) დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნები მიიღებენ ასეთ სახეს:

$$x = A_1 \cos\sqrt{3}t + A_2 \sin\sqrt{3}t + B_1 \cos t + B_2 \sin t, \tag{5}$$

$$y = A_1 \cos\sqrt{3}t + A_2 \sin\sqrt{3}t - B_1 \cos t - B_2 \sin t. \tag{6}$$

გავაწარმოოთ ეს გამოსახულებები დროთი:

$$x' = -\sqrt{3}A_1 \sin\sqrt{3}t + \sqrt{3}A_2 \cos\sqrt{3}t - B_1 \sin t + B_2 \cos t,$$

$$y' = -\sqrt{3}A_1 \sin\sqrt{3}t + \sqrt{3}A_2 \cos\sqrt{3}t + B_1 \sin t - B_2 \cos t.$$

მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით [იხ. (3), (4) ფორმულები] მივიღებთ

$$\begin{aligned} 3 &= A_1 + B_1, \\ 4 &= A_1 - B_1, \\ 10 &= \sqrt{3}A_2 + B_2, \\ 0 &= \sqrt{3}A_2 - B_2. \end{aligned} \tag{7}$$

განტოლებათა (7) სისტემის ამოხსნით მივიღებთ: $A_1 = 3{,}5,$

$$B_1 = -0{,}5, \quad A_2 = \frac{5\sqrt{3}}{3}, \quad B_2 = 5.$$

მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (5) და (6) განტოლებებში:

$$x = 3{,}5\cos\sqrt{3}t + \frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}t - 0{,}5\cos t + 5\sin t,$$

$$y = 3{,}5\cos\sqrt{3}t + \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}t + 0{,}5\cos t - 5\sin t.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $$x = 3{,}5\cos\sqrt{3}t + \frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}t - 0{,}5\cos t + 5\sin t,$$

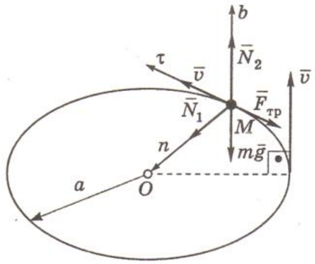
$$y = 3{,}5\cos\sqrt{3}t + \frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}t + 0{,}5\cos t - 5\sin t.$$

ამოცანა 31. 33

a რადიუსის მავთულის ჰორიზონტალურ წრეწირზე ჩამოცმული მცირე რგოლს მიანიჭეს საწყისი v_0 სიჩქარე. მავ თულთან რგოლის ხახუნის კოეფიციენტია f. განსაზღვრეთ, რა დროის შემდეგ გაჩერდება რგოლი.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ M რგოლის მოძრაობა, რომელზეც მოქმედებენ სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, ხახუნის ძალა $\vec{F}_{Tp}$ და მავთულის წრეწირის $\vec{N}_1$ და $\vec{N}_2$ რეაქციები (იხ. ნახაზი).

ჩავწეროთ რგოლის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ბუნებრივ τ, n, b ღერძზე გეგმილებში:



$$m\frac{dv}{dt} = -f\sqrt{N_1^2 + N_2^2}, \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{a} = N_1, \qquad (2)$$

$$mg = N_2, \qquad (3)$$

სადაც $f\sqrt{N_1^2 + N_2^2} = F_{Tp}$.

(2) და (3) გამოსახულებები ჩავსვათ (1) განტოლებაში

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{f}{a}\sqrt{v^4 + a^2 g^2}.$$

განვაცალოთ ცვლადები, ვაინტეგროთ და განვსაზღვროთ დრო, რომლის შემდეგაც რგოლი გაჩერდება:

$$-\frac{a}{f}\int_{v_0}^{0}\frac{dv}{\sqrt{v^4 + a^2 g^2}} = \int_0^t dt,$$

$$t=\frac{a}{f}\int_0^{v_0}\frac{dv}{\sqrt{v^4+a^2g^2}}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $$t=\frac{a}{f}\int_0^{v_0}\frac{dv}{\sqrt{v^4+a^2g^2}}.$$

ამოცანა 31. 34

2 კგ მასის ნივთიერი წერტილი მიიზიდება უძრავი ცენტრისკენ $\vec{F}=(-8x\vec{i}-8y\vec{j}-2z\vec{k})$ ნ ძალით. წერტილის საწყისი მდებარეობა განისაზღვრება კოორდინატებით: $x=4$ სმ, $y=2$ სმ, $z=4$ სმ. საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის განტოლება და მისი ტრაექტორია.

<u>**ა მ ო ხ ს ნ ა**</u>. ჩავწეროთ წერტილის დინამიკის ძირითადი განტოლება ვექტორული სახით:

$$m\vec{r}''=\vec{F}. \qquad (1)$$

დეკარტის კოორდინატთა $0xyz$ სისტემაში:

$$\vec{r}''=x''\vec{i}+y''\vec{j}+z''\vec{k}. \qquad (2)$$

ამოცანის პირობის თანახმად

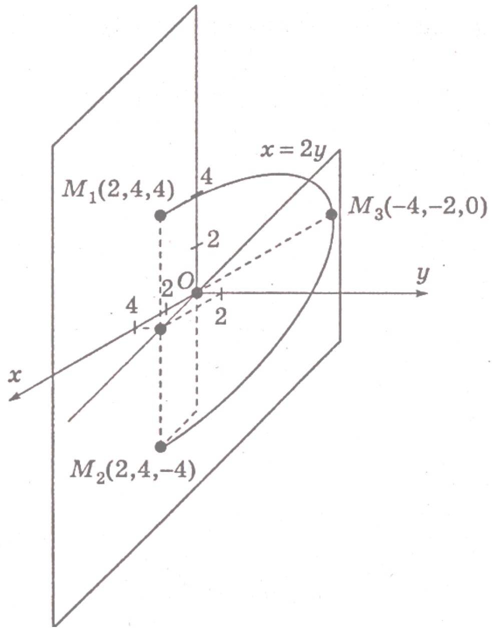
$$\vec{F}=(-8x\vec{i}-8y\vec{j}-2z\vec{k}). \qquad (3)$$

ჩავსვათ (2) და (3) გამოსახულებები (1) განტოლებაში და ჩავწეროთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x, y, z ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$mx''=-8x,$$
$$my''=-8y,$$
$$mz''=-2z,$$

ანუ, რადგანაც $m=2$

$$x''+4x=0, \qquad (4)$$
$$y''+4y=0, \qquad (5)$$
$$z''+z=0. \qquad (6)$$



(4) – (6) განტოლებების ამოხსნებს აქვთ ასეთი სახე:

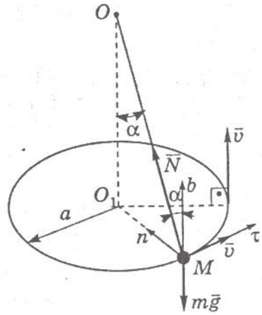
$$x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t, \qquad x' = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \sin 2t,$$

$$y = C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t,$$

$$y' = -2C_3 \sin 2t + 2C_4 \sin 2t,$$

$$z = C_5 \cos t + C_6 \sin t,$$

$$z' = -C_5 \sin t + C_6 \sin t,$$



ინტეგრების მუდმივებს განვსაზღვრავთ საწყისი პირობების ჩასმით:

$$x_0 = 4, x_0' = 0, y_0 = 2, y_0' = 0, z_0 = 4, z_0' = 0;$$

მივიღებთ:

$$C_1 = 4\,, \quad C_2 = 0\,, \quad C_3 = 2\,, \quad C_4 = 0\,,$$

$$C_5 = 4\,, \quad C_6 = 0\,.$$

მაშინ
$$x = 4\cos 2t, \tag{7}$$

$$y = 2\cos 2t\,, \tag{8}$$

$$z = 4\cos t\,. \qquad (9)$$

(7) – (9) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ t პარამეტრი, რისთვისაც ვისარგებლოთ ფორმულით

$$\cos 2t = 2\cos t - 1.$$

(7) და (9) ფორმულებიდან $x = \dfrac{z^2}{2} - 4,$

(8) და (9) ფორმულებიდან $y = \dfrac{z^2}{4} - 4,$

(7) და (8) ფორმულებიდან $x = 2y\,.$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $x = 4\cos 2t, \quad y = 2\cos 2t\,, \quad z = 4\cos t\,.$ ტრაექტორია – ორი

პარაბოლური ცილინდრის $x = \dfrac{z^2}{2} - 4$ და $y = \dfrac{z^2}{4} - 4$ გადაკვეთის ხაზი. ეს

არის $x = 2y$ სიბრტყეში მდებარე პარაბოლა. ტრაექტორიაზე მოძრაობა

ხორციელდება მონაკვეთზე $x = 4$ სმ, $y = 2$ სმ, $z = 4$ სმ წერტილიდან

$x = 4$ სმ, $y = 2$ სმ, $z = -4$ სმ წერტილამდე

ამოცანა 31. 35

l სიგრძის კონუსური ქანქარა ჰორიზონტალურ სიბრტყეში აღწერს a რადიუსის წრეწირს. იპოვეთ კონუსური ქანქარას შემობრუნების პერიოდი.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ჩავწეროთ ქანქარას მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ბუნებრივ τ, n, b ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$m\frac{dv}{dt} = 0,, \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{a} = N\sin\alpha\,, \qquad (2)$$

$$ma_b = N\cos\alpha - mg\,. \qquad (3)$$

(1) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $v = const;$ ვინაიდან $a_b = 0$, ამიტომ (3) განტოლებიდან $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$.

ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$v^2 = agtg\alpha . \qquad (4)$$

$\Delta OO_1M -$დან განვსაზღვროთ $tg\alpha = \dfrac{O_1M}{O_1O} = \dfrac{a}{\sqrt{l^2 - a^2}}$.

მაშინ (4) ფორმულიდან $$v = a\frac{\sqrt{g}}{\sqrt[4]{l^2 - a^2}} . \qquad (5)$$

რადგანაც $v = const$, ამიტომ

$$2\pi a = vT$$

ანუ, (5) გამოსახულების გათვალისწინებით

$$2\pi a = \frac{a\sqrt{g}}{\sqrt[4]{l^2 - a^2}}T ,$$

სადაც T - ერთი შემობრუნების დროა (პერიოდია).

აქედან $$T = \frac{2\pi\sqrt[4]{l^2 - a^2}}{\sqrt{g}} .$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $T = \dfrac{2\pi\sqrt[4]{l^2 - a^2}}{\sqrt{g}}$.

32. რხევითი მოძრაობა

მეთოდური მითითებანი ამოცანების ამოსახსნელად

ნივთიერი წერტილის ***რხევითი მოძრაობა*** ეწოდება ისეთ მოძრაობას, რო
მლის დროსაც წერტილი შენაცვლებით მოძრაობს ორ საპირისპირო მიმართულებით. იმისათვის, რომ წერტილმა განახორციელოს ასეთი მოძრაობა, აუცილებელია აღმდგენი ძალის არსებობა, რომელიც წერტილს დააბრუნებდა წონასწორობის მდგომარეობაში, თუ ის გამოყვანილია ამ მდგომარეობიდან. ასეთ ძალას წარმოადგენს დრეკადი ბმის ძალა – ზამბარა, ბაგირი, ღვედი და მათი მსგავსი საგნები ან სხვა ძალები, მაგალითად სიმძიმის ძალა მათემატიკური ქანქარას რხევისას.

დრეკადი ბმების აღმდგენ ძალას ეწოდება ***დრეკადი ძალა*** და აღინიშნება $\vec{F}_{ynp}$ ასოთი. დრეკადი ძალის სიდიდე, ჰუკის კანონის გამოყენების საზღვრებში, პროპორციულია დეფორმაციისა, ანუ წერტილის წონასწორობის მდგომარეობიდან x გადახრისა, და მიმართულია ამ მდგომარეობისკენ. ამიტომ, დრეკადი ძალის გგმილი Ox ღერძზე, რომელიც მიმართულია წერტილის გადახრის მხარეს (ღერძის სათავე შეთავსებულია წონასწორობის მდგომარეობასთან)

$$F_{ynpx} = -cx, \tag{32.1}$$

სადაც $c-$ დრეკადი ბმის სიხისტის კოეფიციენტია.

თუ წერტილის მოძრაობისას მასზე დრეკადი ძალების გარდა მოქმედებს რომელიმე მუდმივი ძალა, მაგალითად სიმძიმის ძალა, რომლის მიმართულება ემთხვევა დრეკადი ბმის (ზამბარის) მიმართულებას, მაშინ სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში ზამბარა უკვე დაჭიმულია f_{cT} სიდიდით, ხოლო დრეკადი ძალის გეგმილი Ox ღერძზე, რომლის სათავე წონასწორობის მდგომარეობაშია, ამ შემთხვევაში იღებს შემდეგ სახეს

$$F_{ynpx} = -c(f_{cT} + x). \tag{32.2}$$

მთელ რიგ შემთხვევებში წერტილზე მოქმედებენ აგრეთვე წინაღობის $\vec{R}$ ძალა და შემაშფოთებელი ძალა $\vec{Q}$.

ამ ძალების ცვლილების კანონი შეიძლება იყოს ნებისმიერი, თუმცა უდიდეს ინტერესს იწვევს შემთხვევა, როდესაც მოძრაობა ხდება ბლანტ (თხევად) გარემოში, ხოლო წინაღობის ძალა წერტილის სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია და მიმართულია წერტილის სიჩქარის საპირისპიროდ:

$$\vec{R} = -\alpha\vec{v},$$

სადაც α - წინაღობის კოეფიციენტია.

შემაშფოთებელი ძალა იცვლება ჰარმონიული კანონით

$$Q = Q_0 \sin(pt + \delta),$$

სადაც Q_0 - ძალის (ამპლიტუდის) უდიდესი მნიშვნელობაა; p - სიხშირე;

$(pt + \delta)$ - შემაშფოთებელი ძალის ფაზა, δ - შემაშფოთებელი ძალის საწყისი ფაზა.

ამ პარაგრაფის ზოგიერთ ამოცანაში წინაღობის ძალას წარმოადგენს მშრალი ხახუნის ძალა

$$F_{Tp} = fN,$$

სადაც f - სრიალის ხახუნის კოეფიციენტია; N - მქისე ზედაპირის ნორმალური რეაქცია.

თავისუფალი რხევები. ეს რხევები წარმოიშობიან წერტილზე დრეკადი ძალების და ზოგიერთი მუდმივი ძალის მოქმედებისას, გარდა მოძრაობისადმი წინაღობის ძალებისა (ხახუნის ძალებისა).

თუ კოორდინატთა სათავედ არჩეულია წონასწორობის მდგომარეობა, მაშინ მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$mx'' = -cx,$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = 0, \qquad (32.3)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$, k - რხევის ციკლური (წრიული) სიხშირე.

(32.3) განტოლება წარმოადგენს მეორე რიგის ერთგვაროვან მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ზოგადი ამოხსნა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \qquad (32.4)$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობებით: როცა $t = 0, x = x_0, x' = x'_0.$ თუ გავაწარმოებთ (32.4) განტოლებას დროთი და მიღებულ გამოსახულებაში და (32.4) განტოლებაში ჩავსვამთ საწყის პირობებს, ვიპოვით

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{x'_0}{k}.$$

(32.3) განტოლება ამპლიტუდის ფორმით ასეთია

$$x = a\sin(kt + \delta), \qquad (32.5)$$

სადაც δ - საწყისი ფაზაა.

(32.5) ფორმულიდან ჩანს, რომ წერტილის გადახრა წონასწორობის მდგომარეობიდან ემორჩილება ჰარმონიულ (სინუსოიდალურ)

კანონს, ამიტომ ასეთ მოძრაობას ეწოდება ***ჰარმონიული.*** წერტილის მაქსიმალურ გადახრას წონასწორობის მდგომარეობიდან ეწოდება ***რხევის ამპლიტუდა***:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{k^2}} \ . \qquad (32.6)$$

რხევის პერიოდი – ერთი სრული რხევის დრო:

$$T = \frac{2\pi}{k}\sqrt{\frac{m}{c}} \ . \qquad (32.7)$$

თუ რხევა ხდება ერთმანეთთან გარკვეული სახით შეერთებული დრეკადი ბმების ერთობლიობით, მაშინ რხევის პერიოდი განისაზღვრება (32.7) ფორმულით, მაგრამ c სიხისტის ნაცვლად უნდა ჩაისვას დრეკადი ბმების ექვივალენტური $c_{экВ}$ სიხისტე, ე. ი. ერთი ისეთი დრეკადი ბმის სიხისტე, რომელიც უნდა იყოს ყველა ბმის სიხისტის ექვივალენტური.

თუ ზამბარის სიხისტე უცნობია, მაგრამ ცნობილია მისი სტატიკური დეფორმაცია f_{cT}, მაშინ რხევის ციკლური სიხშირე k და რხევის პერიოდი T, განისაზღვრებიან ფორმულებით

$$k = \sqrt{\frac{g}{f_{cT}}} \ ,$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{f_{cT}}{g}} \ , \qquad (32.8)$$

რაც გამომდინარეობს წონასწორობის მდგომარეობაში დრეკადი ძალისა და სიმძიმის ძალის ტოლობიდან, ე. ი.

$$cf_{cT} = mg \Rightarrow \frac{c}{m} = \frac{g}{f_{cT}} = k^2 .$$

წინაღობის გავლენა თავისუფალ რხევაზე. იმ შემთხვევაში, როცა წერტილი მოძრაობს ბლანტ გარემოში, მასზე, დრეკადობის ძალისა და რაიმე მუდმივი ძალის გარდა მოქმედებს გარემოს წინაღობის ძალა $\vec{R} = -\alpha\vec{v}$. მაშინ, წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას x ღერძზე გეგმილებში, როცა კოორდინატთა სათავე არჩეულია სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში, ასეთი სახე აქვს

$$mx'' = -cx - \alpha x' .$$

(32.9)

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\frac{c}{m} = k^2 , \qquad \frac{\alpha}{m} = 2n ,$$

მაშინ, (32.9) განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ მეორე რიგის ერთგვაროვან მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლების სახით

$$x'' + 2nx' + k^2 x = 0, \tag{32.10}$$

სადაც n - რხევის მილევის კოეფიციენტია.

(32.10) განტოლების შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება ასეთი სახისაა

$$z^2 + 2nz + k^2 = 0. \tag{32.11}$$

(32.11) განტოლების ფესვებია

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \tag{32.12}$$

(32.12) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ შესაძლოა სამი შემთხვევა: $n < k$, $n > k$, $n = k$.

1. როცა $n < k$, მაშინ (32.11) მახასიათებელი განტოლების ფესვები კომპლექსურია:

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{-(k^2 - n^2)} = -n \pm ik_1, \tag{32.12'}$$

სადაც $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

ამ შემთხვევაში (32.10) განტოლების ზოგად ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_2 t). \tag{32.13}$$

შემოვიღოთ შეცვლა: $C_1 = a\sin\alpha$, $C_2 = a\cos\alpha$. მაშინ (32.13) გამოსახულება ამპლიტუდური ფორმით ასე წარმოდგება:

$$x = ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha). \tag{32.14}$$

გავაწარმოოთ (32.13) გამოსახულება დროთი:

$$x' = -ne^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + e^{-nt}(-C_1 k_1 \sin k_1 t + C_2 k_2 \cos k_2 t).$$

ამ გამოსახულებაში და (32.13) განტოლებაში ჩავსვათ მოძრაობის საწყისი პირობები: როცა $t = 0, x = x_0, x' = x'_0$, და განვსაზღვრავთ ინტეგრების მუდმივებს:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{x'_0 + nx_0}{k_1} = \frac{x'_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

(32.14) ფორმულის თანახმად, როცა $\sin(k_1 t + \alpha) = 1$, მაშინ წერტილის გადახრა მაქსიმალურია:

$$x_{\max} = ae^{-nt},$$

ყველა სხვა გადახრა განიზომება სინუსის კანონით და დროთა განმავლობაში მცირდება. ვინაიდან ფუნქცია $\sin(k_1 t+\alpha)$ - პერიოდულია, ამიტომ წერტილის მოძრაობა რხევითი ხასიათისაა, მაგრამ რხევათა მანძილი (გაქანება) მცირდება, ე. ი. აღებულ შემთხვევაში წერტილი ასრულებს ***მილევად რხევას.***

მილევადი რხევის ამპლიტუდა

$$A_{amp}=ae^{-nt} \tag{32.15}$$

დროის განმავლობაში მცირდება.

როცა $t=0$

$$A_{amp}=a=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=\sqrt{x_0^2+\frac{(x_0'+nx_0)^2}{k_1^2}}=A_0$$

,

სადაც A_0 - ამპლიტუდის საწყისი მნიშვნელობაა.

მილევად რხევის პერიოდი წარმოადგენს დროის შუალედს წერტილის მიერ ერთი და იმავე მიმართულებით წონასწორობის მდგომარეობის ორ მიმდევრობით გავლას შორის:

$$T_1=\frac{2\pi}{k_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}. \tag{32.16}$$

დავადგინოთ მილევადი რხევის ამპლიტუდის ცვლილების კანონი. ვთქვათ $A_1=ae^{-nt_1}$, მაშინ, როცა $t_2=t_1+\frac{T_1}{2}$,

$$A_2=ae^{-n(t_1+\frac{T_1}{2})}=ae^{-nt_1}e^{-\frac{nT_1}{2}}=A_1e^{-\frac{nT_1}{2}},$$

როცა $t_3=t_2+\frac{T_1}{2}$, მაშინ

$$A_3=ae^{-n(t_2+\frac{T_1}{2})}=ae^{-nt_1}e^{-\frac{2nT_1}{2}}=A_1e^{-\frac{2nT_1}{2}},$$

მაშასადამე

$$A_m=A_1e^{-\frac{nT_1}{2}(m-1)}. \tag{32.17}$$

(32.17) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ მილევადი რხევის ამპლიტუდის ცვლილება ხდება კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის კანონით, რომლის მნიშვნელი $q=e^{-\frac{nT_1}{2}}$, რადგანაც გეომეტრიული პროგრესიის ნებისმიერი წევრი $a_m=a_1q^{m-1}$.

რხევათა თეორიაში $e^{-\frac{nT_1}{2}}$ სიდიდეს ეწოდება **რხევის დეკრემენტი** და აღინიშნება D ასოთი

$$D = e^{-\frac{nT_1}{2}}.$$

რხევის დეკრემენტი გვიჩვენებს, რამდენჯერ მცირდება მომდევნო რხევის ამპლიტუდა წინასთან შედარებით, თუ ამპლიტუდებს დავითვლით ნახევარპერიოდების შემდეგ. თუ ამპლიტუდებს დავითვლით პერიოდების შემდეგ, მაშინ $D = e^{-nT_1}$.

თუ წერტილმა შეასრულა N რხევა, მაშინ

$m = 2N + 1$ - ამპლიტუდების რიცხვი ნახევარპერიოდიის შემდეგ,

$m = N + 1$ - ამპლიტუდების რიცხვი პერიოდიის შემდეგ.

მაგალითად, თუ $N = 4$, მაშინ ამპლიტუდების რიცხვი ნახევარ- პერიოდიის შემდეგ უდრის 9. დაუშვათ $\frac{n}{k} = 0{,}05.$ აუცილებელია განვსაზღვროთ, რამდენჯერ შემცირდა A_9 ამპლიტუდე A_1-თან შედარებით. ამისათვის გამოვიყენოთ (32.17) ფორმულა, მივიღებთ

$$A_9 = A_1 e^{-\frac{nT_1}{2}8} \Rightarrow \frac{A_9}{A_1} = e^{-4nT_1} = e^{-4n\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-n^2}}} = e^{\frac{-8\pi}{\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2-1}}} \cong e^{-0,4\pi} = 0{,}285..$$

მაშინ $$\frac{A_1}{A_9} = \frac{1}{0{,}285} = 3{,}5.$$

თუ მოცემულია შეფარდება $\frac{A_1}{A_9} = z$, მაშინ შეიძლება განვსაზღვროთ

$\ln D$- რხევის ლოგარითმული დეკრემენტი:

$$\ln z = \frac{nT_1}{2} \cdot 8 \Rightarrow \frac{nT_1}{2} = \frac{\ln z}{8} = \left|\ln D\right| .$$

მილევადი რხევის საწყისი ფაზა α განისაზღვრება ფორმულით

$$\alpha = arctg\frac{C_1}{C_2} arctg\frac{x_0\sqrt{k^2-n^2}}{x_0' + nx_0} . \qquad (32.18)$$

2. როცა $n > k$, მაშინ მახასიათებელი განტოლების (32.12) ფესვები ნამდვილია და სხვადასხვა:

$$z_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}, \quad z_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}.$$

ამ შემთხვევაში (32.10) განტოლების ზოგად ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t} = e^{-nt}\left(C_1 e^{\sqrt{n^2-k^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2}t}\right).$$

(32.19)

3. როცა $n = k$, მაშინ მახასიათებელი განტოლების (32.12) ფესვები ნამდვილია და ტოლი:

$$z_1 = z_2 = -n$$

ამ შემთხვევაში (32.10) განტოლების ზოგად ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t). \qquad (32.20)$$

(32.19) და (32.20) განტოლებები აღწერენ რაღაც მილევად აპერიოდულ, ანუ, არარხევით მოძრაობას.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0, x = x_0, x' = x'_0$.

წერტილზე სრიალის (მშრალი) ხახუნის ძალის მოქმედებისას მქისე ზედაპირზე წერტილის (ტვირთის) მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$mx'' + cx = \pm fN. \qquad (32.21)$$

იძულებითი რხევა. ასეთი რხევა წარმოიქმნება წერტილის მოძრაობისას აღმდგენი და შემაშფოთებელი ძალების, აგრეთვე რომელიმე მუდმივი ძალის და გარემოს წინაღობის ძალის მოქმედებისას. შესაძლოა აგრეთვე კინემატიკური აღგზნების შემთხვევაც.

თუ შემაშფოთებელი ძალა ჰარმონიულია, ხოლო გარემოს წინაღობის ძალა სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციული, მაშინ მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას x ღერძზე გეგმილებში ასეთი სახე აქვს

$$mx'' = -cx - \alpha x' + Q_0 \sin(pt + \delta). \qquad (32.22)$$

თუ აღვნიშნავთ: $\dfrac{c}{m} = k^2$, $\dfrac{\alpha}{m} = 2n$, $\dfrac{Q_0}{m} = h$, მაშინ (32.2) განტოლება შეიძლება წარმოვადგინოთ მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის არაერთგვაროვანი დიფერენციალურ განტოლების სახით

$$mx'' + 2nx' + k^2 x = h\sin(pt + \delta), \qquad (32.23)$$

რომელიც წარმოადგენს ***ნივთიერი წერტილის იძულებითი რხევის განტოლებას წინააღმდეგობის გათვალისწინებით.***

(32.23) განტოლების ამოხსნა

$$x = \bar{x} + x^*$$

წარმოადგენს შესაბამისი ერთგვაროვანი (32.10) განტოლების ზოგადი - $\bar{x}$ ამოხსნისა და (32.23) განტოლების კერძო - x^* ამოხსნის ჯამს.

ზოგადი - $\bar{x}$ ამოხსნა დამოკიდებულია n და k შეფარდებაზე. თუ $n < k$, მაშინ ამოხსნა შეიძლება იყოს (32.13) ან (32.14) სახით, თუ $n > k$, მაშინ (32.19) სახით, თუ $n = k,$ მაშინ (32.20) სახით. ამ გამოსახულებებში e^{-nt} თანამამრავლი მიუთითებს იმაზე, რომ მოძრაობა სწრაფად მიილევა, ამიტომ, რხევები აღიწერებიან კერძო x^* ამოხსნით, რომელიც არსებითად t-ს დიდი მნიშვნელობისათვის წარმოადგენს (32.23) დიფერენციალური განტოლების სრულ ამოხსნას.

კერძო x^* ამოხსნა დამოკიდებულია (32.23) არაერთგვაროვანი განტოლების მარჯვენა მხარის სახეზე, ე. ი.

$$x^* = A_c \sin(pt + \delta - \varepsilon), \qquad (32.24)$$

სადაც A_c - იძულებითი რხევის ამპლიტუდაა წინაღობის გათვალისწინებით

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}; \qquad (32.25)$$

ε - შემაშფოთებელი ძალის ან იძულებითი რხევის ფაზის ძვრის სიდიდეა,

$$tg\varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}, \quad 0 \le \varepsilon \le \pi. \qquad (32.26)$$

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ რეზონანსის შემთხვევაში, როცა $k = p$, იძულებითი რხევის ამპლიტუდას აქვს სასრული მნიშვნელობა

$$A_{pez} = \frac{h}{2np} = \frac{h}{2nk}, \qquad (32.27)$$

ხოლო $\varepsilon = \dfrac{\pi}{2}$, რაც გამომდინარეობს (32.26) ფორმულიდან.

თუმცა, რეზონანსული ამპლიტუდა არ წარმოადგენს მაქსიმალურს. არსებობს შემაშფოთებელი ძალის ისეთი სიხშირე, რომლის დროსაც ამპლიტუდას აქვს მაქსიმალური მნიშვნელობა. ამ სიხშირის განსაზღვრისათვის საჭიროა ექსტრემუმზე გამოვიკვლიოთ (32.25) გამოსახულება, საიდანაც ვიპოვით

$$p = \sqrt{k^2 - 2n^2}. \qquad (32.28)$$

მაშინ, (32.25) ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს

$$A_{\max} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{h}{2nk\sqrt{1-\left(\frac{n}{k}\right)^2}} \quad . \qquad (32.29)$$

თუ შევადარებთ (32.27) და (32..29) გამოსახულებებს, მივიღებთ

$$A_{\max} = \frac{A_{pez}}{\sqrt{1-\left(\frac{n}{k}\right)^2}}, \qquad (32.30)$$

ამგვარად, თუ ბლანტი გარემოს წინაღობა უმნიშვნელოა (მაგალითად, $\frac{n}{k} = 0{,}05)$, მაშინ $A_{\max} = A_{pez}$,

ე. ი. ამპლიტუდის მაქსიმალური მნიშვნელობა რეზონანსულის ტოლია.

თუ წინაღობას უგულებელვყოფთ, მაშინ (32.23), (32.25) და (32.26) ფორმულებში $n = 0$. (32.23) გამოსახულება ასეთ სახეს მიიღებს

$$mx'' + k^2 x = h\sin(pt + \delta), \qquad (32.31)$$

-- ეს არის ***იძულებითი რხევის დიფერენციალური განტოლება უწინაღო გარემოში.***

(32.31) განტოლების ამოხსნა შიძლება წარმოვადგინოთ იმავე სახით

$$x = \bar{x} + x^*,$$

სადაც, $\bar{x}$ აღიწერება (32.4) ან (32.5) განტოლებებით, ხოლო x^* შეიძლება მივიღოთ (32.24) განტოლებიდან იმ პირობით, რომ $k \neq p$:

$$x^* = \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta - \varepsilon).$$

(32.32)

ამასთანავე, თუ $p < k$ (მცირე სიხშირის იძულებითი რხევა), მაშინ ფაზის ძვრის სიდიდე $\varepsilon = 0$, თუ $p > k$ (დიდი სიხშირის იძულებითი რხევა), მაშინ ფაზის ძვრის სიდიდე $\varepsilon = \pi$, ხოლო იძულებითი რხევის ამპლიტუდა $A_B = \frac{h}{k^2 - p^2}$. (32.33)

მაშასადამე, როცა $p > k$

$$x^* = \frac{h}{p^2 - k^2}\sin(pt + \delta - \pi). \qquad (32.34)$$

ამგვარადე, თუ აუცილებელია განვსაზღვროთ მხოლოდ იძულებითი რხევა, მაშინ საჭიროა მხედველობაში მივიღოთ მხოლოდ კერძო - x^* ამოხსნა. სრული რხევის განსაზღვრისას წინაღობის გათვალისწინებით ან მის გარეშე, საჭიროა ვიპოვოთ სრული ამოხსნა $x = \bar{x} + x^*$.

(32.27), (32.32) და (32.33) გამოსახულებებიდან გამომდინარეობს, რომ როცა $n = 0$, ან $p = k$, მაშინ იძულებითი რხევის ამპლიტუდა უსასრულობის ტოლია. მაშინ (32.31) განტოლების კერძო x^* ამოხსნა არ შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს (32.32) ან (32.34) ფორმულების სახით. ამიტომ, რეზონანსის შემთხვევაში კერძო x^* ამოხსნას ეძებენ შემდეგი სახით

$$x^* = Bt\cos(kt + \delta). \qquad (32.25)$$

მათემატიკური გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ, რომ $B = -\dfrac{h}{2k}$. მაშინ, (32.35) გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$x^* = -\frac{h}{2k}t\cos(kt + \delta) = \frac{h}{2k}t\sin(kt + \delta - \frac{\pi}{2}),$$

(32.36)

ე. ი. რეზონანსის დროს $\varepsilon = \dfrac{\pi}{2}$.

იძულებითი რხევების თეორიაში მნიშვნელოვანია ***დინამიურობის*** η ***კოეფიციენტის*** ცნება, რომელიც წარმოადგენს იძულებითი რხევის A ამპლიტუდის შეფარდებას გარკვეულ მაქსიმალური შემაშფოთებელი ძალის მოქმედებით გამოწვეულ A_0 გადახრის (დრეკადი ბმის მანძილის) სტატიკურ მნიშვნელობასთან, ე. ი.

$$\eta = \frac{A}{A_0},$$

სადაც
$$A_0 = \frac{Q_0}{c} = \frac{hm}{c} = \frac{h}{k^2}. \qquad (32.37)$$

A_0-ს მნიშვნელობა შეიძლება მივიღოთ (32.25) გამოსახულებიდან, თუ მივიღებთ $p = 0$, ეს არის x^*-ს (32.24) ამოხსნის კერძო შემთხვევა, როცა $p = 0$ და $\delta = \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon$.

მაშინ, იძულებითი რხევის დინამიურობის კოეფიციენტი წინაღობის გათვალისწინებისას, როცა $A = A_c$,

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{p}{k}\right)^2\right]^2 + \frac{4n^2 p^2}{k^4}}}, \tag{32.38}$$

წინაღობის გაუთვალისწინებლად ($A = A_B$), როცა $p < k$

$$\eta = \frac{1}{1-\left(\frac{p}{k}\right)^2}, \tag{32.39}$$

როცა $p > k$

$$\eta = \frac{1}{\left(\frac{p}{k}\right)^2 - 1}. \tag{32.40}$$

ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანამიმდევრობა:

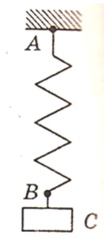
1. გავავლოთ საკოორდინატო ღერძი, რომლის სათავე შევუთავსოთ ნივთიერი წერტილის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობას. ღერძი მივმართოთ წერტილის გადაადგილების მხარეს.
2. განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობები
3. გამოვსახოთ წერტილი (სხეული) ნებისმიერ მდებარეობაში.
4. ვაჩვენოთ ნახაზზე ნივთიერ წერტილზე მოქმედი ყველა ძალა.
5. შევადგინოთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება არჩეულ ღერძზე გეგმილებში.
6. ამოვხსნათ მიღებული დიფერენციალური განტოლება.
7. მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით განვსაზღვროთ ინტეგრების მუდმივები.
8. იძულებითი რხევის შემთხვევაში ვიპოვოთ დიფერენციალური განტოლების მხოლოდ კერძო x^* ამოხსნა.

თავისუფალი რხევები

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 32.1

ერთი ბოლოთი A წერტილში ჩამაგრებული AB ზამბარა ისეთია, რომ მისი 1 მ დაგრძელებისათვის საჭიროა სტატიკური დატვირთვისათვის B წერტილში მოვდოთ 19,6 ნ ძალა. გარკვეულ მომენტში არადეფორმი- რებული ზამბარის ქვედა B ბოლოში დაკიდეს 0,1 კგ მასის C საწონი და გაუშვეს საწყისი სიჩქარის გარეშე. ზამბარის მასა უგულებელყავით, ჩაწერეთ საწონის შემდგომი მოძრაობის განტოლება და მიუთითეთ რხევის ამპლიტუდა და პერიოდი; საკოორდინატო ღერძი გაავლეთ საწონის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან ვერტიკალურად ქვევით.



__ა მ ო ხ ს ნ ა__. განვიხილოთ საწონის რხევა სიმძიმის $\vec{G}$ ძალისა და დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალის მოქმედებით. x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით სათავით O წერტილში საწონის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან. გამოვსახოთ ტვირთი ნებისმიერ M მდებარეობაში, რომელიც განსაზღვრულია x კოორდინატით.

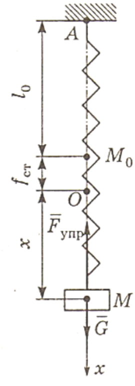
ჩავწეროთ საწონის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \sum F_{kx} = G - F_{yp} \,,$$

სადაც $F_{yp} = c \cdot \Delta$, $\Delta = f_{cT} + x$ - ზამბარის დეფორმაციაა. მაშინ

$$mx'' = G - c\,(f_{cT} + x) = G - cf_{cT} - cx$$

.



რადგანაც სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$G = F_{yp}\,(0) = c\Delta_0 = cf_{cT} \,,$$

ამიტომ

$$mx'' = -cx$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = 0 \,,$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

ამ ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

(1)

(1) გამოსახულება გავაწარმოოთ დროთი:

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (2)$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობებით: როცა $t = 0, x_0 = -f_{cT} = -\dfrac{G}{c}, x_0' = v_0 = 0$.

(1) ფორმულიდან $C_1 = x_0 = -\dfrac{G}{c}$, (2) ფორმულიდან $C_2 = 0$.

ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ (1) ფორმულაში, მივიღებთ

$$x = -\frac{G}{c}\cos kt, \qquad (3)$$

სადაც $G = mg$.

გამოვთვალოთ ზამბარის სიხისტე

$$c = \frac{p}{l} = \frac{19,6}{1} = 19,6 \text{ (ნ/მ)},$$

და წრიული სიხშირე $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{19,6}{0,1}} = 14$ (რად/წმ).

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები (3) ფორმულაში და დავწეროთ საწონის მოძრაობის განტოლება

$$x = -\frac{0,1 \cdot 9,8}{19,6}\cos 14t = -0,05\cos 14t \text{ (მ)}.$$

გამოვთვალოთ პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{14} = 0,45 \text{ (წმ)}$$

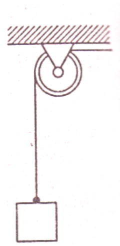
და საწონის რხევის ამპლიტუდა

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{k^2}} = \sqrt{0,05^2 + 0} = 0,05 \text{ (მ)}.$$

პასუხი: $x = -0,05\cos 14t$ მ; $T = 0,45$ წმ; $a = 5$ სმ.

ამოცანა 32.2

$M = 2$ ტ მასის ტვირთის $v = 5$ მ/წმ სიჩქარით თანაბარი დაშვებისას ბლოკის გარსაკრში ბაგირის გაჭედვის გამო მოხდა ბაგირის იმ ზედა ბოლოს უეცარი შეჩერება, რომლითაც ეშვება ტვირთი. ბაგირის მასა უგულებელყავით და განსაზღვრეთ მისი უდიდესი დაჭიმულობა ტვირთის შემდგომი რხევისას, თუ ბაგირის სიხისტის კოეფიციენტია $4 \cdot 10^6$ ნ/მ.



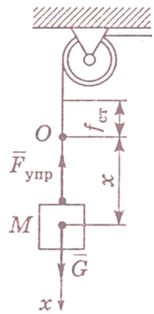
<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. ტვირთი ირხევა სიმძიმის $\vec{G}$ ძალისა და დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალის მოქმედებით. x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით სათავით O წერტილში ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან. გამოვსახოთ ტვირთი ნებისმიერ M მდებარეობაში, რომელიც განსაზღვრულია x კოორდინატით.

ჩავწეროთ საწონის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \sum F_{kx} = G - F_{yp}, \qquad (1)$$

სადაც $F_{yp} = c \cdot \Delta$, $\Delta = f_{cT} + x$ - ბაგირის დეფორმაციაა. მაშინ (1) განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$mx'' = G - c\,(f_{cT} + x) = G - cf_{cT} - cx.$$



რადგანაც სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$G = F_{yp}\,(0) = c\Delta_0 = cf_{cT},$$

ამიტომ

$$mx'' = -cx$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = 0,$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

ამ ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \qquad (2)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობებით: როცა $t=0, x_0=0$. ვინაიდან რხევითი მოძრაობა იწყება სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან $x_0'=v_0$. მაშინ

$C_1=0, \quad C_2=\dfrac{v_0}{k}$, ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ (2) ფორმულაში, მივიღებთ $x=\dfrac{v_0}{k}\sin kt$,

ეს განტოლება წარმოვადგინოთ ასეთი სახით

$$x=a\sin(kt+\alpha),$$

სადაც

$$a=\sqrt{x_0^2+\frac{x_0'^2}{k^2}}=\frac{v_0}{k}, \quad tg\alpha=\frac{kx_0}{x_0'}=\frac{k\cdot 0}{v_0}=0\Rightarrow\alpha=0.$$

მაშინ

$$x''=-ak^2\sin kt=-v_0k\sin kt.$$

(1) განტოლებიდან განვსაზვროთ დრეკადობის ძალა, ე. ი. ბაგირის დაჭიმულობა

$$F_{yp}=G-mx''=m(g-x'').$$

ეს ძალა მაქსიმალურია, როცა x'' იღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას

$x''=-ak^2$ და მიმართულია ზემოთ, ე. ი. როცა $\sin(kt+\alpha)=1$.

მაშასადამე, ბაგირის უდიდესი დაჭიმულობა

$$F_{\max}=m(g+ak^2)=m(g+v_0k)=m\left(g+v_0\sqrt{\frac{c}{m}}\right)=$$

$$=2\left(9{,}8+5\sqrt{\frac{4\cdot 10^6}{2\cdot 10^3}}\right)=466{,}8 \text{ (კნ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 466,8 კნ.

ამოცანა 32.3

წინა ამოცანაში განსაზღვრეთ ბაგირის უდიდესი დაჭიმულობა, თუ ტვირთსა და ბაგირს შორის მოთავსებულია დრეკადი ზამბარა, რომლის სიხისტის კოეფიციენტია $c_1 = 4 \cdot 10^5$ ნ/მ.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. მოცემულ შემთხვევაში ტვირთი ირხევა ორ მიმდევრობით შეერთებულ დრეკად ელემენტზე, რომელთა სიხისტეებია c_1 და c_2. შევცვალოთ ეს ელემენტები მათი ექვივალენტური სიხისტის ერთი c_{ekB} ელემენტით:

$$\Delta_{ekB} = \Delta_1 + \Delta_2 ,$$

სადაც $\Delta_{ekB}, \Delta_1, \Delta_2$ - არიან შესაბამისად ეკვივალენტური, პირველი და მეორე დრეკადი ელემენტის დეფორმაციები.

ვინაიდან $\Delta = \dfrac{F_{yp}}{c}$, ამიტომ

$$\frac{F_{yp}}{c_{ekv}} = \frac{F_{yp(1)}}{c_1} + \frac{F_{yp(2)}}{c_2} , \qquad (1)$$

სადაც $F_{yp}, F_{yp(1)}, F_{yp(2)}$ - შესაბამისად ეკვივალენტური, პირველი და მეორე დრეკადი ელემენტების დრეკადობის ძალებია.

მიმდევრობითი შეერთებისას ელემენტების დრეკადობის ძალები ტოლია, ე. ი. $F_{yp} = F_{yp(1)} = F_{yp(2)}$.

მაშინ (1) ფორმულის თანახმად

$$\frac{1}{c_{ekv}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} .$$

აქედან

$$c_{ekv} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = \frac{4 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^5}{4 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5} = 36{,}36 \cdot 10^4 \ \text{(ნ/მ)}.$$

შემდგომ განვიხილავთ ტვირთის რხევას c_{ekv} სიხისტის დრეკად ელემენტზე (იხ. 32.2 ამოცანის ამოხსნის ნახაზი). ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = G - F_{yp} = G - c_{ekv} \cdot \Delta = G - c_{ekv} f_{cT} - c_{ekv} x.$$

რადგანაც სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$G = F_{yp}(0) = c_{ekv} f_{cT} ,$$

ამიტომ $$mx'' = -c_{ekv} x$$

ანუ $$x'' + k^2 x = 0,$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c_{ekv}}{m}$.

თუ მოვახდენთ 32.2 ამოცანის ამოხსნაში მოყვანილ ანალოგიურ გარდაქმნებს, მივიღებთ, რომ ბაგირის უდიდესი დაჭიმულობა

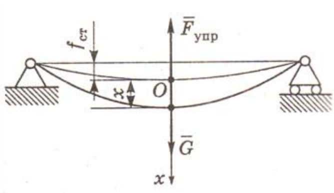
$$F_{\max} = m(g + ak^2) = m(g + v_0 k) = m\left(g + v_0\sqrt{\frac{c_{ekv}}{m}}\right) =$$

$$= 2\left(9{,}8 + 5\sqrt{\frac{36{,}36 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^3}}\right) = 154{,}4 \text{ (კნ)}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 154,4 კნ.

ამოცანა 32.4

Q ტვირთი საწყისი სიჩქარის გარეშე ვარდება $h = 1$ მ სიმაღლიდან და ეცემა დრეკადი ჰორიზონტალური ძელის შუაში; ძელის ბოლოები ჩამაგრებულია. ჩაწერეთ ძელზე ტვირთის შემდგომი მოძრაობის განტოლება. საკოორდინატო ღერძი გაავლეთ ძელზე ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან ვერტიკალურად ქვევით, თუ მოცემული დატვირთვისას ძელის სტატიკური ჩაღუნვა მის შუაში 0,5 სმ-ს ტოლია; ძელის მასა უგულებელყავით.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. განვიხილოთ ტვირთის რხევა დრეკადი ძელის შუაში სიმძიმის $\vec{G}$ ძალისა და დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი). x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით სათავით O წერტილში ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან. გამოვსახოთ ტვირთი ნებისმიერ მდებარეობაში, რომელიც განსაზღვრულია x კოორდინატით.

ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \sum F_{kx} = G - F_{yp}, \tag{1}$$

სადაც $G = mg$; $F_{yp} = c \cdot \Delta$; ძელის ჩაღუნვა $\Delta = f_{cT} + x$, მაშინ

$$mx'' = mg - c(f_{cT} + x) = mg - cf_{cT} - cx .$$

რადგანაც სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$mg = F_{yp}(0) = cf_{cT} , \qquad (2)$$

ამიტომ (1) განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$mx'' = -cx$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = 0 ,$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

ამ ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt . \qquad (3)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt .$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობებით: როცა $t = 0, x_0 = -f_{cT}, x_0' = v_0$.

განვსაზღვროთ v_0 სიჩქარე, რომლითაც ტვირთი ეცემა ძელზე. ვარდნილი ტვირთისათვის გამოვიყენოთ კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა, მივიღებთ

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m(v_0')^2}{2} = \sum A_k = A(\vec{G}) = mgh .$$

ვინაიდან $v_0' = 0,$ ამიტომ

$$v = v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 1} = 4{,}43 \quad \text{(მ/წმ).}$$

განვსაზღვროთ ინტეგრირების მუდმივები C_1 და C_2:

$C_1 = -f_{cT}$, $C_2 = \dfrac{v_0}{k}$. ჩავსვათ C_1 და C_2 მნიშვნელობები (3) ფორმულაში:

$$x = -f_{cT} \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt = -f_{cT} \cos \sqrt{\frac{c}{m}} t + v_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \sin \sqrt{\frac{c}{m}} t .$$

(2) ფორმულიდან $c = \dfrac{mg}{f_{cT}}$.

ამიტომ, (3) ფორმულის თანახმად ტვირთის მოძრაობის განტოლება ასეთი იქნება (x მეტრებშია)

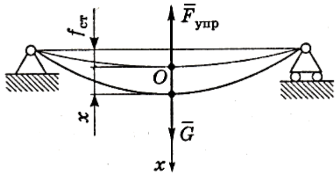
$$x=-f_{cT}\cos\sqrt{\frac{g}{f_{cT}}}t+v_0\sqrt{\frac{f_{cT}}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{f_{cT}}}t=-0{,}005\cos\sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}005}}t+$$

$$+4{,}43\sqrt{\frac{0.005}{9{,}8}}\sin\sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}005}}t=-0{,}005\cos 44{,}3t+0{,}1\sin 44{,}3t$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $x=(-0{,}005\cos 44{,}3t+0{,}1\sin 44{,}3t)$ სმ.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 32.5

ვაგონის ყოველ რესორზე მოდის P ნ დატვირთვა; ამ დატვირთვის დროს წონასწორობისას რესორი ჩაიღუნება 5 სმ. განსაზღვრეთ ვაგონის რესორებზე საკუთარი რხევის T პერიოდი. რესორის დრეკადი წინაღობა მისი ჩაღუნვის ისარის პროპორციულია.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. დაუშვებთ, რომ ვაგონის რესორებს გააჩნიათ ერთნაირი c სიხისტე და ყოველ რესორზე მოდის ერთნაირი P დატვირთვა, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ვაგონის რხევა იდენტურია (იგივეა) რაც P წონის ტვირთის რხევა ერთ რესორზე. ნახაზზე გამოვსახოთ ტვირთი ნებისმიერ მდებარეობაში, რომელიც განსაზღვრულია x კოორდინატით. $0x$ ღერძი მივმართოთ სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან ვერტიკალურად ქვევით. ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx''=G-F_{yp}, \qquad (1)$$

სადაც $G=mg$; $F_{yp}=c\cdot\Delta$; რესორის დეფორმაცია $\Delta=f_{cT}+x$.

სტატიკური წონასწორონის მდგომარეობაში

$$mg=F_{yp}(0)=cf_{cT},$$

ამიტომ (1) განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$mx''=-cx$$

ანუ

$$x''+k^2x=0, \qquad (2)$$

სადაც $k^2=\frac{c}{m}$.

მიღებული (2) დიფერენციალური განტოლება აღწერს თავისუფალ რხევას. ტვირთის რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}\ .$$

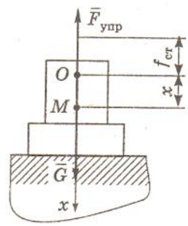
რესორის c სიხისტე განისაზღვრება სტატკური წონასწორობის პირობიდან $cf_{cT} = mg \Rightarrow c = \dfrac{mg}{f_{cT}}$.

ვაგონის საკუთარი რხევის პერიოდი ასეთია

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{f_{cT}}{g}} = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}05}{9{,}8}} = 0{,}45 \text{ (წმ).}$$

პ ა ს უ ხ ი: $T = 0{,}45$ წმ.

ამოცანა 32.6



განსაზღვრეთ დრეკად გრუნტზე დადგმული მანქანის საძირკველის თავისუფალი რხევის პერიოდი, თუ საძირკველის მასა მანქანასთან ერთად არის $M = 90$ ტ, საძირკველის ძირის ფართობი $S = 15$ მ², გრუნტის სიხისტის კოეფიციენტი $c = \lambda S,$ სადაც $\lambda = 30$ ნ/სმ³ – ეგრეთ წოდებული გრუნტის კუთრი სიხისტე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დრეკად გრუნტზე დადგმული მანქანის საძირკველის თავისუფალი რხევა სიმძიმის $\vec{G}$ ძალისა და დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი). x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით სათავით O წერტილში ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან. გამოვსახოთ მერხევი ტვირთი ნებისმიერ M მდებარეობაში და ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = G - F_{yp}\,, \qquad (1)$$

სადაც $G = mg;$ $F_{yp} = c\cdot\Delta$; გრუნტის დეფორმაცია $\Delta = f_{cT} + x$,

მაშინ $$mx'' = mg - c(\,f_{cT} + x) = mg - cf_{cT} - cx$$
.

რადგანაც სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$mg = F_{yp}\ (0) = cf_{cT}\ ,$$

ამიტომ (1) განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$mx'' = -cx$$

ანუ $$x'' + k^2 x = 0\ ,$$

ეს არის თავისუფალი რხევის დიფერენციალური განტოლება, რომლის პერიოდი $$T = \frac{2\pi}{k}$$

სადაც $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ - წრიული სიხშირეა, $c = \lambda S$.

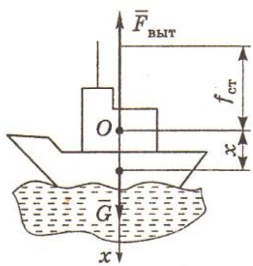
მაშასადამე, მანქანის საძირკველის თავისუფალი რხევის პერიოდი

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\lambda S}} = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{90000}{30 \cdot 15 \cdot 10^6}} = 0{,}089 \text{ (წმ).}$$

პ ა ს უ ხ ი: $T = 0{,}089$ წმ.

ამოცანა 32.7

განსაზღვრეთ წყნარ წყალზე გემის თავისუფალი ვერტიკალური რხევის პერიოდი, თუ გემის მასაა M ტ, მისი ჰორიზონტალური გეგმილის ფართობი S მ². წყლის სიმკვრივე $\rho = 1$ ტ/მ². წყლის სიბლანტით განპირობებული ძალები უგულებელყავით.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ წყალზე გემის რხევა სიმძიმის $\vec{G}$ ძალისა და ამომგდები $\vec{F}_{BT}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი). x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით სათავით O წერტილში გემის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან.

ჩავწეროთ გემის რხევითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$Mx'' = G - F_{BT}\ , \tag{1}$$

სადაც $G = Mg;$ $F_{BT} = V\rho g$, V -გემის მიერ დაკავებული (გამოძევებული) წყლის მოცულობაა $V = S(f_{cT} + x).$,

მაშინ

$$Mx'' = G - (f_{cT} + x)\rho g S = G - \rho g S f_{cT} - x\rho g S.$$

რადგანაც გემის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$G = F_{BT}\ (0) = \rho g S f_{cT}\ ,$$

ამიტომ (1) განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$Mx'' = -\rho g S x$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = 0\,,$$

ეს არის თავისუფალი რხევის განტოლება, სადაც $k^2 = \dfrac{\rho g S}{M.}$

გემის ვერტიკალური რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\rho g S}}\ .$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{\rho g S}}$ წმ.

ამოცანა 32.8

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ გემის მოძრაობის განტოლება, თუ ის წყალში ჩაუშვეს საწყისი ვერტიკალური სიჩქარის გარეშე.

<u>**ა მ ო ხ ს ნ ა**</u>. წინა, 32.7 ამოცანაში მიღებული მოძრაობის დიფერენციალური

$$x'' + k^2 x = 0$$

განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt\,. \qquad (1)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt\,.$$

სადაც $k^2 = \dfrac{\rho g S}{M}$.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობებით: როცა $t = 0, x_0 = -f_{cT} = -\dfrac{G}{\rho g S} = -\dfrac{M}{\rho S}$. ვინაიდან რხევითი მოძრაობა იწყება სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან $x_0' = 0$. მაშინ,

$C_1 = -\dfrac{M}{\rho S}$, $C_2 = 0$, ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ (1) ფორმულაში, მივიღებთ გემის მოძრაობის განტოლებას:

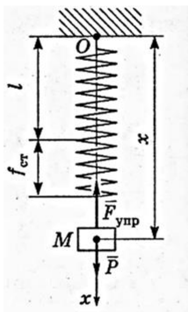
$$x = -\frac{M}{\rho S}\cos\left(\sqrt{\frac{\rho g S}{M}}t\right).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $x = -\dfrac{M}{\rho S}\cos\left(\sqrt{\dfrac{\rho g S}{M}}t\right)$ მ.

ამოცანა 32.9

P ნ წონის ტვირთი დრეკადი ძაფით კიდია უძრავ წერტილში. წონასწორობის მდგომარეობიდან გამოყვანილი ტვირთი იწყებს რხევით მოძრაობას. ძაფის x სიგრძე გამოსახეთ დროის ფუნქციაში და იპოვეთ, რომელ პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს ძაფის საწყისი x_0 სიგრძე, რომ ტვირთის მოძრაობის დროს ძაფი რჩებოდეს დაჭიმული. ძაფის დაჭიმულობა დაგრძელების პროპორციულია; ძაფის სიგრძე დაუჭიმავ მდგომარეობაში l-ს ტოლია; q ნ-ს ტოლი სტატიკური დატვირთვის მოქმედებით ძაფი 1 სმ-თ გრძელდება. ტვირთის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია.

<u>ა მ ო ხ ს ნ ა.</u> განვიხილოთ ტვირთის რხევა სიმძიმის $\vec{P}$ ძალისა და დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი). x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით, კოორდინატთა სათავით დაკიდვის O წერტილში. გამოვსახოთ ტვირთი ნებისმიერ M მდებარეობაში, რომელიც განსაზღვრულია x კოორდინატით. ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:



$$mx'' = P - F_{yp},$$

სადაც $P = mg$; $F_{yp} = c\cdot\Delta$; Δ - ზამბარის დეფორმაცია, $\Delta = x - l$.

მაშინ $mx'' = P - c(x-l) = .P + cl - cx$,

ანუ
$$x'' + \frac{c}{m}x = g + \frac{c}{m}l, \qquad (1)$$
სადაც $c = q$ - ზამბარის სიხისტეა.

აღვნიშნოთ $\frac{c}{m} = \frac{q}{m} = \frac{qg}{P} = k^2$.

მაშინ (1) განტოლება ასე ჩაიწერება
$$x'' + k^2 x = g + k^2 l\,. \qquad (2)$$

არაერთგვაროვანი დიფერენცალური (2) განტოლების ამოხსნა ასეთი სახით ვეძებოთ
$$x = \bar{x} + x^*,$$
სადაც $\bar{x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt; \qquad x^* = A = const$.

ვიპოვოთ კერძო ამოხსნა მისი ჩასმით (2) განტოლებაში:
$$k^2 A = g + k^2 l \Rightarrow A = \frac{g}{k^2} + l = \frac{P}{q} + l.$$
მაშასადამე,
$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{p}{q} + l\,, \qquad (3)$$
$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt\,. \qquad (4)$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან (3) და (4) ფორმულებიდან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0, x = x_0$, $x' = x'_0 = 0$. მაშინ
$$C_1 = x_0 - l - \frac{P}{q}, \qquad C_2 = 0\,.$$
ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ (3) ფორმულაში, მივიღებთ
$$x = \left(x_0 - l - \frac{P}{q}\right)\cos kt + \frac{p}{q} + l = l + \frac{P}{q} + \left(x_0 - l - \frac{P}{q}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}t\right).$$

ვიპოვოთ, x_0-ს რუმელი მნიშვნელობისათვის იქნება ძაფი ყოველთვის დაჭიმული, ე. ი. $x \geq l$.
$$l + \frac{P}{q} + \left(x_0 - l - \frac{P}{q}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}t\right) \geq l$$

ანუ
$$\frac{P}{q}+\left(x_0-l-\frac{P}{q}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}t\right)\ge 0\cdot \qquad (5)$$

რადგანაც (5) უტოლობაში $\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}t\right)$ ღებულობა ექსტრემალურ მნიშვნელობას ± 1, ამიტომ განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) თუ $\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}t\right)=1$, მაშინ

$$\frac{P}{q}+\left(x_0-l-\frac{P}{q}\right)\ge 0, \qquad x_0\ge l;$$

2) თუ $\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}t\right)=-1,$, მაშინ

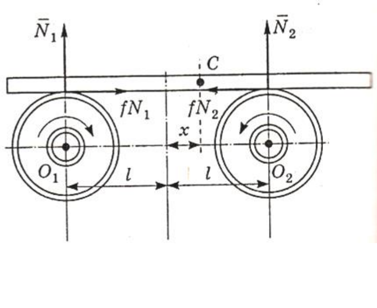
$$\frac{P}{q}-\left(x_0-l-\frac{P}{q}\right)\ge 0, \qquad x_0\le l+\frac{2P}{q}\cdot$$

მაშასადამე, $$l\le x_0\le l+\frac{2P}{q}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $x=l+\frac{P}{q}+\left(x_0-l-\frac{P}{q}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}t\right); \quad l\le x_0\le l+\frac{2P}{q}\cdot$

ამოცანა 32.10

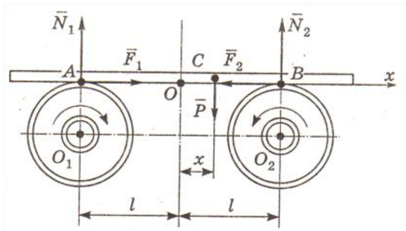
ნახაზზე მითითებულია ორი ურთიერთ საწინააღმდეგო მხარეს მბრუნავი ერთნაირი რადიუსის ცილინდრული ბორბალი, რომლებზეც თავისუფლად დევს ერთგვაროვანი ღერო. ბორბლების 0_1 და 0_2 ცენტრი მდებარეობს ჰორიზონტალურ $0_1 0_2$ წრფეზე; მანძილი $0_1 0_2=2l$; ღერო მოძრაობაში მოდის ხახუნის ძალებით, რომლებიც ვითარდებიან ბორბლებთან მისი შეხების წერტილებში; ეს ძალები ღეროს ბორბალზე წნევის პროპორციულია, ამასთანავე, პროპორციულობის კოეფიციენტი (ხახუნის



კოეფიციენტი) f -ს ტოლია.

1) განსაზღვრეთ ღეროს მოძრაობა მას შემდეგ, როცა ჩვენ მას გადავწევთ სიმეტრიის მდებარეობიდან x_0 მანძილით, როცა $v_0 = 0$.

2) განსაზღვრეთ ხახუნის f კოეფიციენტი, თუ ვიცით, რომ ღეროს რხევის პერიოდი, როცა $l = 25$ სმ, არის $T = 2$ წმ.



<u>ა მ ო ხ ს ნ ა</u>. 1) განვიხილოთ ღეროს ჰორიზონტალური მოძრაობა სიმძიმის $\vec{P}$ ძალის, ხახუნის $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალების და რეაქციის $\vec{N}_1$ და $\vec{N}_2$ ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი). x ღერძი მივმართოთ ჰორიზონტალურად მარჯვნივ, კოორდინატთა სათავით O წერტილში.

ჩავწეროთ ღეროს მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:
$$mx'' = F_1 - F_2, \qquad (1)$$
სადაც $F_1 = N_1 f$; $F_2 = N_2 f$.

გამოვსახოთ N_1 და N_2 ძალები სიმძიმის ძალის საშუალებით და გავითვალისწინოთ ღეროს x გადაადგილება. შევადგინოთ ღეროზე მოქმედი ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები:
$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0, \qquad 2lN_2 - P(l+x) = 0;$$
$$\sum M_B(\vec{F}_k) = 0, \qquad P(l-x) - 2lN_1 = 0.$$
აქედან
$$N_2 = P\frac{l+x}{2l} = \frac{P}{2} + \frac{P}{2l}x, \qquad N_1 = P\frac{l-x}{2l} = \frac{P}{2} - \frac{P}{2l}x.$$
მაშინ
$$F_1 = f\left(\frac{P}{2} - \frac{P}{2l}x\right), \qquad F_2 = f\left(\frac{P}{2} + \frac{P}{2l}x\right),$$
(1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს
$$mx'' = -\frac{fP}{l}x,$$

ან, იმის გათვალისწინებით, რომ $P = mg$

$$x'' + k^2 x = 0, \qquad (2)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{fg}{l}$.

(2) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (3)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0, x = x_0$, $x' = v_0 = 0$.

მაშინ $C_1 = x_0$, $C_2 = 0$.

ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ (3) ფორმულაში, მივიღებთ

$$x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{qg}{P}}t\right).$$

2) განვსაზღვროთ ხახუნის კოეფიციენტი f. ვინაიდან თავისუფალი რხევის პერიოდი

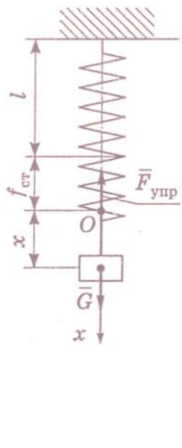
$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{fg}{l}}},$$

ამიტომ

$$f = \frac{4\pi^2 l}{gT^2} = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}25}{9{,}8 \cdot 2^2} = 0{,}25.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 1) $x = x_0 \cos\left(\sqrt{\dfrac{qg}{P}}t\right)$; 2) $f = \dfrac{4\pi^2 l}{gT^2} = 0{,}25$.

ამოცანა 32.11



ერთი და იგივე ზამბარაზე დაკიდეს ჯერ P წონის ტვირთი, მეორედ კი $3P$ წონის ტვირთი. განსაზღვრეთ, რამდენჯერ შეიცვლება რხევის პერიოდი. ვიცით რა ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი c, აგრეთვე საწყისი პირობები (ტვირთებს კიდებდნენ დაუჭიმავი ზამბარის ბოლოში და უშვებდნენ საწყისი

სიჩქარის გარეშე), იპოვეთ ტვირთების მოძრაობის განტოლებები.

<u>**ა მ ო ხ ს ნ ა.**</u> განვიხილოთ რხევა სიმძიმის $\vec{G}$ ძალისა და დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი). x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით სათავით O წერტილში ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან.

ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = G - F_{yp},$$

სადაც $G = mg$; $F_{yp} = c \cdot \Delta$; ზამბარის დეფორმაცია $\Delta = f_{cT} + x$,

მაშინ $$mx'' = G - c\,(f_{cT} + x). \qquad (1)$$

რადგანაც სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$G = F_{yp}\,(0) = cf_{cT},$$

ამიტომ (1) განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$mx'' = -cx$$

ანუ $$x'' + k^2 x = 0,$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,,$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0, x_0 = -f_{cT}$, $x_0' = 0$.

მაშინ $$C_1 = -f_{cT} = -\frac{G}{c}, \qquad C_2 = 0.$$

ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ (3) ფორმულაში, მივიღებთ

$$x = -\frac{G}{c}\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right).$$

აქედან $G = P$ წონის ტვირთისათვის

$$x_1 = -\frac{P}{c}\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{P}}t\right),$$

ხოლო, $G = 3P$ წონის ტვირთისათვის

$$x_2 = -\frac{3P}{c}\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{3P}}t\right),$$

ვინაიდან თავისუფალი რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k},$$

ამიტომ $$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{3P}{cg}}}{2\pi\sqrt{\frac{P}{cg}}} = \sqrt{3}$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{3}$; $x_1 = -\frac{P}{c}\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{P}}t\right)$; $x_2 = -\frac{3P}{c}\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{3P}}t\right)$

.

ამოცანა 32.12

$c = 2$ კნ/მ სიხისტის ზამბარას დასაწყისში მიაბეს 6 კგ მასის ტვირთი, შემდეგ კი იგი შეცვალეს ორჯერ მეტი მასის ტვირთით. განსაზღვრეთ ტვირთების რხევის სიხშირე და პერიოდი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცნობილია, რომ ზამბარაზე დაკიდებული სხეულები ასრულებენ ჰარმონიულ რხევებს. ამ რხევების სიხშირე და პერიოდია

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \qquad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

გამოვთვალოთ $m_1 = 6$ კგ და $m_2 = 12$ მასების ტვირთებისათვის რხევის სიხშირეები

$$k_1 = \sqrt{\frac{c}{m_1}} = \sqrt{\frac{2000}{6}} = 18{,}26 \text{ (რად/წმ)},$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{c}{m_2}} = \sqrt{\frac{2000}{12}} = 12{,}9 \text{ (რად/წმ)}.$$

რხევის პერიოდებია

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{c}} = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{6}{2000}} = 0{,}344 \text{ (წმ)}$$

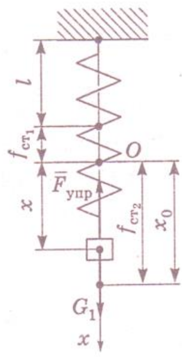
$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{c}} = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{12}{2000}} = 0{,}49 \text{ (წმ)}$$

<u>პასუხი</u>: $k_1 = 18{,}26$ რად/წმ; $k_2 = 12{,}9$ რად/წმ;
$T_1 = 0{,}344$ წმ; $T = 0{,}49$ წმ.

ამოცანა 32.13

ზამბარაზე, რომლის სიხისტის კოეფიციენტია $c = 19{,}6$ ნ/მ, დაკიდეს ორი ტვირთი, რომელთა მასებია $m_1 = 0{,}5$ კგ და $m_2 = 0{,}8$ კგ. სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში სისტემა იყო უძრავი, როდესაც მოხსნეს m_2 ტვირთი. დარჩენილი ტვირთისათვის იპოვეთ მოძრაობის განტოლება, სიხშირე, წრიული სიხშირე და რხევის პერიოდი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ m_1 ტვირთის რხევა სიმძიმის $\vec{G}_1$ ძალისა და დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი). x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით სათავით O წერტილში m_1 ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან. გამოვსახოთ ტვირთი ნებისმიერ მდებარეობაში, რომელიც განსაზღვრულია x კოორდინატით.



ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$m_1 x'' = G_1 - F_{yp}\,,$$

სადაც $F_{yp} = c\,(f_{cT_1} + x)$.

მაშინ $$m_1 x'' = G_1 - c\,(f_{cT_1} + x) = -cx\,,$$

ანუ, რადგანაც სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$G_1 = F_{yp}\,(0) = cf_{cT}\,,$$

ამიტომ განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$m_1 x'' = -cx$$

ანუ $$x'' + k^2 x = 0\,,$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m_1}$.

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით:

როცა $t = 0, x_0 = f_{cT_2} = \dfrac{G_2}{c} = \dfrac{m_2 g}{c}$, $x_0' = 0$. მაშინ $C_1 = \dfrac{m_2 g}{c}$, $C_2 = 0$.

ტვირთის მოძრაობის განტოლება იქნება

$$x = \frac{m_2 g}{c}\cos kt = \frac{0{,}8\cdot 9{,}8}{19{,}6}\cos\left(\sqrt{\frac{19{,}6}{0{,}5}}t\right) = 0{,}4\cos 6{,}26t\cdot$$

ვიპოვოთ წრიული სიხშირე

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_1}} = \sqrt{\frac{19{,}6}{0{,}5}} = 6{,}26 \text{ რად/წმ.}$$

რხევის პერიოდი $T = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\cdot 3{,}14}{6{,}26} = 1$ (წმ),

რხევის სიხშირე $f = \dfrac{1}{T} = 1$ (ჰც).

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $x = 0{,}4\cos 6{,}26t$ მ. $f = 1$ ჰც. $k = 6{,}26$ რად/წმ. $T = 1$ წმ.

ამოცანა 32.14

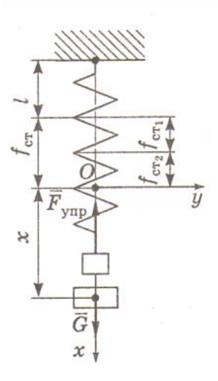
ზამბარაზე დაკიდებული $m_1 = 2$ კგ მასის ტვირთი იმყოფება წონასწორობაში. ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტია $c = 98$ ნ/მ. გარკვეულ მომენტში m_1 ტვირთს დაუმატეს $m_2 = 0{,}8$ კგ ტვირთი. განსაზღვრეთ ორი ტვირთის მოძრაობის განტოლება და რხევის პერიოდი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ $m = m_1 + m_2$ მასის ორი ტვირთის რხევა სიმძიმის $\vec{G}$ ძალისა და დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი). x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად

ქვევით სათავით O წერტილში ორი ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან.

ჩავწეროთ ტვირთების მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = G - F_{yp}, \qquad (1)$$



სადაც $F_{yp} = c\,(f_{cT} + x)$,

მაშინ

$$mx'' = G - c\,(f_{cT_1} + x) = -cx$$

რადგანაც ტვირთების სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$G = F_{yp}\,(0) = cf_{cT},$$

ამიტომ (1) განტოლებას ასეთი სახე აქვს

ანუ $$x'' + k^2 x = 0,$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (2)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (3)$$

მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0, x_0 = -f_{cT_2} = -\dfrac{G_2}{c} = -\dfrac{m_2 g}{c}$, $x_0' = 0$. მაშინ (2) და (3) ფორმულებიდან $C_1 = -\dfrac{m_2 g}{c}$, $C_2 = 0$.

ტვირთის მოძრაობის განტოლება იქნება

$$x = -\frac{m_2 g}{c}\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t = -\frac{0{,}8 \cdot 9{,}8}{98}\cos\left(\sqrt{\frac{98}{2+0{,}8}}t\right) = -0{,}08\cos 5{,}916t.$$

ვიპოვოთ რხევის პერიოდი $T = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2 \cdot 3{,}14}{5{,}916} = 1{,}062$ (წმ),

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $x = -0{,}08\cos 5{,}916t$ მ. $T = 1{,}062$ წმ.

ამოცანა 32.15

4 კგ მასის ტვირთი ჯერ დაკიდეს $c_1 = 2$ კნ/მ სიხისტის ზამბარაზე, შემდეგ $c_2 = 4$ კნ/მ სიხისტის ზამბარაზე. იპოვეთ ამ ორივე შემთხვევაში ტვირთების რხევების სიხშირეების შეფარდება და პერიოდების შეფარდება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ზამბარაზე დაკიდებული ტვირთი ასრულებს ჰარმონიულ რხევას, რომლის წრიული სიხშირე და პერიოდია

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \qquad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

მაშასადამე, c_1 სიხისტის ზამბარისათვის

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}, \qquad T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c_1}},$$

ხოლო, c_2 სიხისტის ზამბარისათვის

$$k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}, \qquad T_2 = \frac{2\pi}{k_2} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c_2}}.$$

ამიტომ, ტვირთების რხევების წრიული სიხშირეების შეფარდება

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\sqrt{\frac{c_1}{m}}}{\sqrt{\frac{c_2}{m}}} = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071,$$

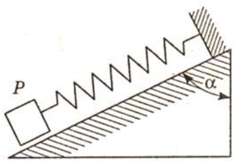
ხოლო, პერიოდების შეფარდება

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{c_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{c_2}}} = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} = \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2} = 1{,}4142$$

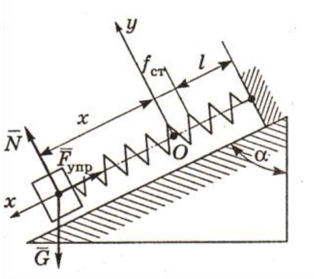
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071;$ $\quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{2} = 1{,}4142.$

ამოცანა 32.16

m მასის სხეული დევს ვერტიკალისადმი α კუთხით დახრილ სიბრტყეზე. სხეულზე მიმაგრებულია დახრილი სიბრტყის პარალელური c სიხისტის ზამბარა. იპოვეთ სხეულის მოძრაობის განტოლება, თუ საწყის მომენტში იგი მიმაგრებული იყო დაუჭიმავ ზამბარის ბოლოში და მას მიანიჭეს საწყისი $\vec{v}_0$ სიჩქარე დახრილ სიბრტყეზე ქვევით. კოორდინატთა სათავედ აირჩიეთ სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობა.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ m მასის ტვირთის რხევა. ნახაზზე გამოვსახოთ ტვირთზე მოქმედი სიმძიმის $\vec{G}$ ძალა, დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალა და საყრდენის $\vec{N}$ რეაქცია. x ღერძი მივმართოთ დახრილი სიბრტყის პარალელურად ტვირთის სტატიკური წონასწორობის O მდგომარეობიდან ზამბარის დაგრძელების მხარეს.



ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = G\cos\alpha - F_{yp},$$

სადაც $F_{yp} = c\,(f_{cT} + x)$.

მაშინ
$$mx'' = G\cos\alpha - c\,(f_{cT_1} + x) = -cx,$$
(1)

რადგანაც სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$G\cos\alpha = F_{yp}\,(0) = cf_{cT},$$

ამიტომ, (1) განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$m_1 x'' = -cx$$

ანუ
$$x'' + k^2 x = 0, \tag{2}$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m_1}$.

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt, \tag{3}$$

$$x' = -C_1 k\sin kt + C_2 k\cos kt. \tag{4}$$

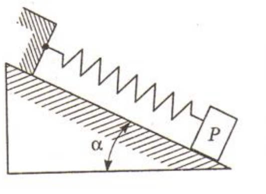
ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t=0, x_0=-f_{cT}=-\dfrac{G\cos\alpha}{c}=-\dfrac{mg\cos\alpha}{c}$; $x_0'=v_0$. მაშინ (3) და (4) ფორმულებიდან $C_1=-\dfrac{mg}{c}\cos\alpha,\quad v_0=kC_2\Rightarrow C_2=\dfrac{v_0}{k}$.

ტვირთის მოძრაობის (3) განტოლება იქნება

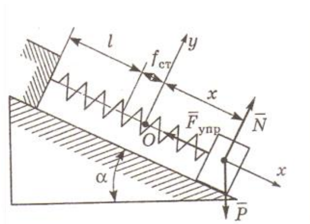
$$x=-\frac{mg\cos\alpha}{c}\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt\cdot$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $x=\dfrac{v_0}{k}\sin kt-\dfrac{mg\cos\alpha}{c}\cos kt$, სადაც $k=\sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

ამოცანა 32.17



ჰორიზონტისადმი α კუთხით დახრილ გლუვ სიბრტყეზე დევს ზამბარაზე მიმაგრებული P წონის ტვირთი. ზამბარის სტატიკური დაგრძელება f-ს ტოლია. განსაზღვრეთ ტვირთის რხევა, თუ საწყის მომენტში ზამბარა გაჭიმულია დაუძაბავი მდგომარეობიდან $3f$-ს ტოლი სიგრძით, და ზამბარა გაშვებული იყო საწყისი სიჩქარის გარეშე.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ტვირთის რხევა მასზე სიმძიმის $\vec{P}$ ძალის, დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალისა და საყრდენის $\vec{N}$ რეაქციის მოქმედებით. x ღერძი მივმართოთ დახრილი სიბრტყის პარალელურად ტვირთის სტატიკური წონასწორობის O მდგომარეობიდან ზამბარის მოძრაობის მხარეს.

ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx''=P\sin\alpha-F_{yp},$$

სადაც $F_{yp}=c\,(f_{cT}+x)$.

ვინაიდან სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$P\sin\alpha=F_{yp}\,(0)=cf_{cT},$$

მაშინ $$mx''=P\sin\alpha-c\,(f_{cT_1}+x)=-cx, \qquad (1)$$

ამიტომ (1) განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$mx'' = -cx$$

ანუ
$$x'' + k^2 x = 0, \tag{2}$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{3}$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{4}$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0, x_0 = 2 f_{cT}$; $v_0 = 0$. მაშინ (3) და (4) ფორმულებიდან $C_1 = 2f$, $C_2 = 0$.

ტვირთის მოძრაობის (3) განტოლება იქნება

$$x = 2f \cos kt = 2f \cos\left(\sqrt{\frac{g \sin\alpha}{f}} t\right).$$

აქ $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{g \sin\alpha}{f}}$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $x = 2f \cos\left(\sqrt{\dfrac{g \sin\alpha}{f}} t\right).$

ამოცანა 32.18

ზამბარას ბოლოში დამაგრებული $M = 12$ კგ მასის სხეული ასრულებს ჰარმონიულ რხევას. წამმზომით დადგენილია, რომ 45 წმ-ს განმავლობაში სხეულმა შეასრულა 100 სრული რხევა. ამის შემდეგ ზამბარის ბოლოში დამატებით მიამაგრეს $M_1 = 6$ კგ ტვირთი. განსაზღვრეთ ზამბარაზე ორი ტვირთის რხევის პერიოდი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჰარმონიული რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}},$$

სადაც k - წრიული სიხირეა; c - ზამბარის სიხისტეა

M მასის ტვირთის რხევის პერიოდი

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{2\pi}{\sqrt{c}}\sqrt{M} \; . \qquad (1)$$

$M + M_1$ მასის ტვირთისათვის

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M+M_1}{c}} = \frac{2\pi}{\sqrt{c}}\sqrt{M+M_1} \; . \qquad (2)$$

(1) ფორმულის თანახმად

$$\frac{2\pi}{\sqrt{c}} = \frac{T}{\sqrt{M}} \; .$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (2) ფორმულაში, მივიღებთ

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{c}}\sqrt{M+M_1} = \frac{T}{\sqrt{M}}\;\sqrt{M+M_1} = T\sqrt{\frac{M+M_1}{M}} \; .$$

(3)

ამოცანის პირობის მონაცემების მიხედვით M მასის ტვირთის რხევის T პერიოდის გამოთვლის შედეგად მივიღებთ

$$T = \frac{45}{100} = 0{,}45 \;\; (\text{წმ}).$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად

$$T_1 = 0{,}45\sqrt{\frac{12+6}{12}} = 0{,}55 \;\; (\text{წმ}).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $T_1 = T\sqrt{\dfrac{M+M_1}{M}} = 0{,}55$ წმ.

ამოცანა 32.19

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ M ტვირთისა და $M + M_1$ ტვირთების მოძრაობის განტოლებები, თუ ორივე შემთხვევაში ტვირთები დაკიდებული იყო დაუჭიმავი ზამბარის ბოლოზე (იხ. ნახაზი).

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ტვირთების რხევა მასზე სიმძიმის $\vec{G}$ ძალისა და დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალის მოქმედებით. x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით ტვირთის სტატიკური წონასწორობის O მდგომარეობიდან

ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = G - F_{yp},$$

სადაც $F_{yp} = c\,(f_{cT} + x)$.

მაშინ
$$mx'' = G - cf_{cT_1} - cx, \qquad (1)$$

ვინაიდან სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$G = F_{yp}\,(0) = cf_{cT},$$

ამიტომ (1) განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$mx'' = -cx$$

ანუ
$$x'' + k^2 x = 0, \qquad (2)$$

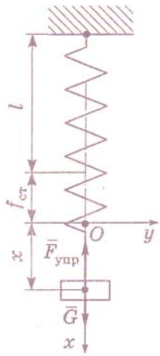
სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (3)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (4)$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0, x_0 = -f_{cT}$; $x_0' = v_0 = 0$. მაშინ (3) და (4) ფორმულებიდან $C_1 = -f_{cT}$, $0 = kC_2 \Rightarrow C_2 = 0.$



ტვირთის მოძრაობის (3) განტოლება იქნება

$$x = -f_{cT}\cos kt$$

აქ k-წრიული სიხშირეა, $k = \dfrac{2\pi}{T}$; f_{cT} - ზამბარას სტატიკური დეფორმაცია.

სტატიკური დეფორმაცია

$$f_{cT} = \frac{G}{c} = \frac{g}{k^2} = \frac{gT^2}{4\pi^2},$$

სადაც c - ზამბარას სიხისტეა, $c = k^2 m$.

მაშინ
$$x = -\frac{gT^2}{4\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \qquad (5)$$

32.18 ამოცანის ამოხსნაში მიღებული $T = 0{,}45$ მნიშვნელობის გათვალისწინებით M მასის ტვირთისათვის (5) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$x=\frac{-9{,}8\cdot 0{,}45^2}{4\cdot 3{,}14^2}\cos\left(\frac{2\cdot 3{,}14}{0{,}45}t\right)=-0{,}05\cos 14t \text{ (მ).}$$

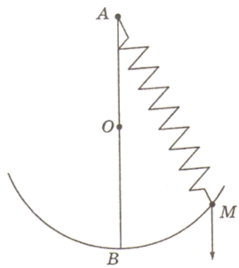
$M+M_1$ მასის ტვირთისათვის რხევის პერიოდი $T=0{,}55$ და (5) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$x_1=\frac{-9{,}8\cdot 0{,}55^2}{4\cdot 3{,}14^2}\cos\left(\frac{2\cdot 3{,}14}{0{,}55}t\right)=-0{,}07\cos 11{,}4t \text{ (მ)}$$

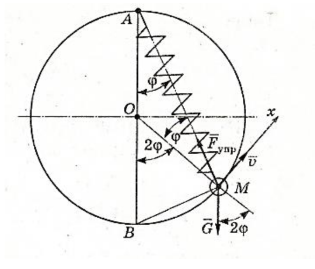
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: 1) $x=-0{,}05\cos 14t$ მ.; 2) $x=-0{,}07\cos 11{,}4t$ მ,

სადაც x და x_1 აითვლებიან თითოეული შესაბამისად ორი სტატიკური მდგომარეობიდან.

ამოცანა 32.20



უძრავ A წერტილში დამაგრებული ზამბარას ბოლოზე დაკიდებული M ტვირთი ხახუნის გარეშე სრიალებს ვერტიკალურ სიბრტყეში მდებარე $AB=l$ დიამეტრის მქონე წრეწირის რკალზე და ასრულებს მცირე ჰარმონიულ რხევას; ზამბარას ბუნებრივი სიგრძეა a; ზამბარას სიხისტე ისეთია, რომ M ტვირთის წონის ტოლი ძალის მოქმედებისას იგი იღებს b-ს ტოლ დაგრძელებას. განსაზღვრეთ რხევის T პერიოდი იმ შემთხვევაში, როცა $l=a+b$; ზამბარას წონა უგულებელყავით და ჩათვალეთ, რომ რხევის დროს იგი რჩება დაჭიმული.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ M ტვირთის რხევა ვერტიკალურ სიბრტყეში სიმძიმის $\vec{G}$ ძალისა და დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი).

შევადგინოთ M ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში, რომელიც მიმართულია წრეწირის მხების გასწვრივ:

$$mx''=\sum F_{kx}=F_{yp}\sin\varphi-G\sin 2\varphi, \qquad (1)$$

სადაც $F_{yp} = c\Delta$. $\Delta = AM - a = (a+b)\cos\varphi - a$ - ზამბარას დეფორმაციაა.

მაშინ $F_{yp} = c\left[(a+b)\cos\varphi - a\right]$,

ხოლო (1) განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$mx'' = c\left[(a+b)\cos\varphi - a\right]\sin\varphi - G\sin 2\varphi. \qquad (2)$$

ვინაიდან $v' = x''$,

$$v = \omega \cdot OM = (2\varphi)' \cdot OM = 2\varphi' \cdot OM = 2\varphi' \cdot \frac{l}{2} = l\varphi',$$

ამიტომ $x'' = l\varphi''$.

ამის გათვალისწინებით (2) განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$ml\varphi'' = c\left[(a+b)\cos\varphi - a\right]\sin\varphi - G\sin 2\varphi.$$

φ კუთხის სიმცირის გამო, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = \varphi$, მაშინ

$$ml\varphi'' = c\left[(a+b) - a\right]\varphi - 2\varphi G = cb\varphi - 2G\varphi. \qquad (3)$$

პირობის თანახმად $l = a + b$, ე. ი. B წერტილში ტვირთი იკავებს სტატიკური წონასწორობის მდებარეობას, რომელშიც

$$F_{yp}(0) = c\Delta_0 = cb = G \Rightarrow c = \frac{G}{b}.$$

ამიტომ, შეიძლება (3) გამოსახულება ასეთი სახით ჩავწეროთ

$$ml\varphi'' = \frac{G}{b} \cdot b\varphi - 2G\varphi = -G\varphi$$

ანუ $$\varphi'' + k^2\varphi = 0,$$

სადაც, $k^2 = \dfrac{g}{l}$.

ეს დიფერენციალური განტოლება აღწერს ჰარმონიულ რხევას წრიული სიხშირით $k = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ და პერიოდით

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 32.21

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ M ტვირთის მოძრაობის განტოლება, თუ საწყის მომენტში $\angle BAM = \varphi_0$ და M წერტილს მიანიჭეს მხების გასწვრივ ქვევით მიმართული საწყისი სიჩქარე $\vec{v}_0$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თანახმად 32.20 ამოცანის ამოხსნის შედეგად M ტვირთის მოძრაობის განტოლება ასეთი სახისაა

$$\varphi'' + k^2\varphi = 0,$$

სადაც, $k^2 = \dfrac{g}{l}$.

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

(1)

$$\varphi' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

(2)

C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0, \varphi = \varphi_0$; $v = v_0 \Rightarrow \varphi_0' = -\dfrac{v_0}{l}$, ვინაიდან $\vec{v}_0$ მიმართულია φ კუთხის ზრდის საპირისპირო მხარეს;

$$C_1 = \varphi_0, \; C_2 = -\frac{v_0}{\sqrt{g}}.$$

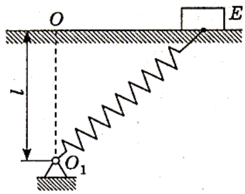
ტვირთის მოძრაობის (1) განტოლება ასეთი იქნება

$$\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t - \frac{v_0}{\sqrt{gl}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\dfrac{g}{l}}t - \dfrac{v_0}{\sqrt{gl}}\sin\sqrt{\dfrac{g}{l}}t$.

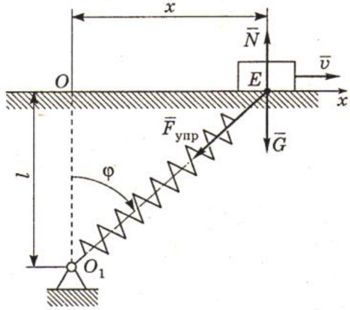
ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 32.22

m მასის E სხეული დევს გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. სხეულზე მიმაგრებულია c სიხისტის ზამბარა, რომლის მეორე ბოლო მიმაგრებულია 0_1 სახსარზე.



არადეფორმირებული ზამბარის სიგრძეა l_0; სხეულის წონასწორობის მდებარეობაში ზამბარას აქვს სასრული წინასწარი მოსაჭიმი $F_0 = c(l - l_0),$ სადაც $l = 00_1$. გაითვალისწინეთ ზამბარის დრეკადი ძალის ჰორიზონტალური მდგენელის მხოლოდ წრფივი წევრები სხეულის წონასწორობის მდგომარეობიდან გადახრასთან შეფარდებით და განსაზღვრეთ სხეულის მცირე რხევების პერიოდი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ E ტვირთის მცირე რხევა სიმძიმის $\vec{G}$ ძალის, სიბრტყის რეაქციის $\vec{N}$ ძალისა და დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი). x ღერძი მივმართოთ სიბრტყის გასწვრივ ტვირთის სტატიკური წონასწორობის O მდგომარეობიდან მისი მოძრაობის მხარეს.



შევადგინოთ E ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \sum F_{kx} = -F_{yp}\sin\varphi\,, \qquad (1)$$

სადაც $F_{yp} = c\Delta$. Δ - ზამბარას დეფორმაციაა $\Delta = 0_1E - l_0$,

$$0_1E = \frac{l}{\cos\varphi}\,.$$

მაშინ $F_{yp} = c\left(\dfrac{l}{\cos\varphi} - l_0\right)$.

φ კუთხის სიმცირის გამო, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ

$$\cos\varphi = 1,\ \sin\varphi = tg\varphi = \frac{x}{l}\,.$$

მაშინ (1) განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$mx'' = -c(l - l_0)\frac{x}{l}\,. \qquad (2)$$

ამოცანის პირობის თანახმად

$$F_0 = c(l - l_0) \Rightarrow c = -\frac{F_0}{l - l_0}\,.$$

ამის გათვალისწინებით (2) განტოლება ასე ჩავწეროთ

$$mx'' = -\frac{F_0}{l-l_0}(l-l_0)\frac{x}{l} = -\frac{F_0}{l}x,$$

ანუ $$x'' + k^2 x = 0,$$

სადაც, $k^2 = \dfrac{F_o}{lm}$.

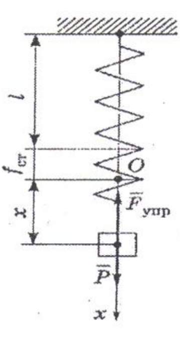
ეს დიფერენციალური განტოლება აღწერს ჰარმონიულ რხევას წრიული სიხშირით $k = \sqrt{\dfrac{F_0}{lm}}$ და პერიოდით $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{lm}{F_0}}$.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{lm}{F_o}}$.

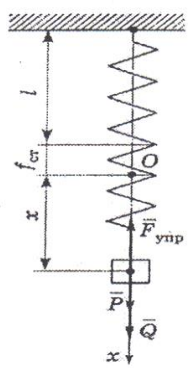
ამოცანა 32.23

m მასის ნივთიერი წერტილი მიმაგრებულია c სიხისტის დაუჭიმავი ზამბარას ბოლოზე და გაშვებულია ქვევით მიმართული საწყისი v_0 სიჩქარით. იპოვეთ წერტილის რხევის განტოლება და პერიოდი, თუ დროის იმ მომენტში, როცა წერტილი იმყოფებოდა უკიდურეს ქვედა მდგომარეობაში მასზე მოსდეს ქვევით მიმართული ძალა $Q = const.$

კოორდინატთა სათავედ აირჩიეთ სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობა, ე. ი. დაუჭიმავი ზამბარის ბოლოდან P/c მანძილზე.



ნახ. 1



ნახ. 2

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ წერტილის მოძრაობა იმ მომენტიდან, როცა ის დაკიდეს დაუჭიმავ ზამბარაზე, უკიდურეს ქვედა მდებარეობამდე (ნახ. 1). წერტილზე მოქმედებენ სიმძიმის $\vec{P}$ ძალა და

დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალა. x ღერძის სათავე შევუთავსოთ სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობას და მივმართოთ ქვევით.

ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \sum F_{kx} = P - F_{yp} \qquad (1)$$

სადაც $F_{yp} = c\Delta$. $\Delta = f_{cT} + x$ - ზამბარას დეფორმაციაა.

მაშინ (1) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$mx'' = P - c\, f_{cT} - cx\,, \qquad (2)$$

ვინაიდან სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$F_{yp}\,(0) = cf_{cT} = P\,,$$

ამიტომ (2) განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$mx'' = -cx$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = 0\,, \qquad (3)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt\,, \qquad (4)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt\,. \qquad (5)$$

C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0, x_0 = -f_{cT} = -\dfrac{P}{c} = -\dfrac{mg}{c}$; $x_0' = v_0$. მაშინ $C_1 = -\dfrac{mg}{c}$,

$$v_0 = kC_2 \Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{k}$$

ტვირთის მოძრაობის (4) განტოლება იქნება

$$x = -\frac{mg}{c}\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt\,.$$

რხევის ამპლიტუდა

$$a = \sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2}\,.$$

განვიხილოთ წერტილის შემდგომი მოძრაობა იმის შემდეგ, როცა მას მოსდეს $\vec{Q}$ ძალა (ნახ. 2).

წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება (კოორდინატთა სათავე და ღერძი – იგივეა) x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \sum F_{kx} = Q + P - F_{yp} = Q + P - c(f_{cT} + x) = Q - cx,$$

ანუ
$$x'' + k^2 x = \frac{Q}{m}, \qquad (6)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

არაერთგვაროვანი დიფერენცალური (6) განტოლების ამოხსნა ასეთი სახით ვეძებოთ

$$x = \bar{x} + x^*,$$

სადაც $\bar{x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$; $\quad x^* = A$.

(6) განტოლებიდან

$$k^2 A = \frac{Q}{m} \Rightarrow A = \frac{Q}{c}$$

მაშასადამე,
$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{Q}{c}, \qquad (7)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (8)$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან (7) და (8) ფორმულებიდან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა

$$t = 0, x_0 = a = \sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2}; \qquad x_0' = 0.$$

მაშინ
$$\sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2} = C_1 + \frac{Q}{c} \Rightarrow C_1 = \sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2} - \frac{Q}{c}$$

$$0 = kC_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

C_1 და C_2 მნიშვნელობები შევიტანოთ (7) ფორმულაში და ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის განტოლება მას შემდეგ, როდესაც მასზე მოსდეს Q ძალა:

$$x = \left[\sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2} - \frac{Q}{c}\right] \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t\right) + \frac{Q}{c}.$$

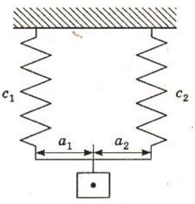
რხევის პერიოდი $T = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{c}{m}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}}$.

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>: $x = \left[\sqrt{\left(\dfrac{mg}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{v_0}{k}\right)^2} - \dfrac{Q}{c}\right]\cos\left(\sqrt{\dfrac{c}{m}}t\right) + \dfrac{Q}{c}$, სადაც t აითვლება დროის იმ მომენტიდან, როდესაც Q ძალამ დაიწყო მოქმედება; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}}$.

ამოცანა 32.24

განსაზღვრეთ m მასის ტვირთის თავისუფალი რხევის პერიოდი, რომელიც მიმაგრებულია ორ პარალელურად ჩართულ c_1 და c_2 სიხისტის კოეფიციენტების მქონე ზამბარების ბოლოზე, თუ ტვირთი მოთავსებულია ისე, რომ ორივე c_1 და c_2 სიხისტის კოეფიციენტების მქონე ზამბარების დაგრძელებები ერთნაირია; ასევე, განსაზღვრეთ იმ ერთი ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტი, რომელიც ტოლფასია (ეკვივალენტურია) მოცემული ორმაგი ზამბარისა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ტვირთის მოძრაობა ორ პარალელურ ზამბარაზე. x ღერძის O სათავე შევუთავსოთ სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობას და მივმართოთ ქვევით.



ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \sum F_{kx} = P - F_{yp1} - F_{yp2}$$

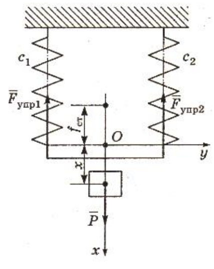
ანუ

$$mx'' = P - c_1(f_{cT} + x) - c_2(f_{cT} + x), \quad (1)$$

სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$P = c_1 f_{cT} + c_2 f_{cT} ,$$

ამიტომ (1) განტოლებას ასეთი სახე აქვს



$$mx'' = -c_1 x - c_2 x = -(c_1 + c_2)x$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = 0 ,$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c_1 + c_2}{m}$.

რხევის პერიოდი $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c_1 + c_2}}$.

ეკვივალენტურ ზამბარას უნდა ჰქონდეს სიხისტე

$$c = c_1 + c_2 \ .$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c_1 + c_2}}$; $c = c_1 + c_2$;

ტვირთის მდებარეობა ისეთია, რომ $a_1 / a_2 = c_2 / c_1$.

ამოცანა 32.25

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ ტვირთის მოძრაობის განტოლება, თუ ის დაკიდეს დაუჭიმავ ზამბარაზე და მას მიანიჭეს საწყისი სიჩქარე v_0, მიმართული ზემოთ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. წინა 32.24 ამოცანაში მიღებული დიფერენციალური განტოლების

$$x'' + k^2 x = 0,$$

ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (1)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (2)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c_1 + c_2}{m}$.

მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0, x_0 = -f_{cT} = -\dfrac{P}{c_1 + c_2}$; $x_0' = -v_0$. მაშინ $C_1 = -\dfrac{P}{c_1 + c_2}$,

$$-v_0 = kC_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{v_0}{k} = -v_0\sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}},$$

სადაც $P = mg$.

C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები შევიტანოთ (1) განტოლებაში,

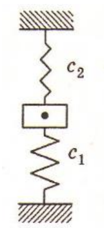
მივიღებთ ტვირთის მოძრაობის განტოლებას

$$x = -\frac{mg}{c_1 + c_2}\cos\left(\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}t\right) - v_0\sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}}\sin\left(\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}t\right).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>

$$x = -\frac{mg}{c_1 + c_2}\cos\left(\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}t\right) - v_0\sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}}\sin\left(\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}t\right).$$

ამოცანა 32.26



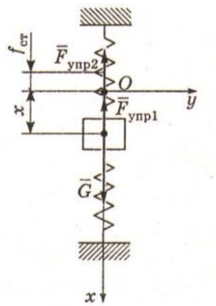
განსაზღვრეთ m მასის ტვირთის თავისუფალი რხევის პერიოდი, რომელიც ჩაჭერილია ორ სხვადასხვა c_1 და c_2 სიხისტის კოეფიციენტების მქონე ზამბარებს შორის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. კოორდინატთა სათავე შევუთავსოთ ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობას და x ღერძი მივმართოთ მისი გადაადგილების მხარეს.

ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \sum F_{kx} = G - F_{yp1} - F_{yp2}$$

,



სადაც $F_{yp1} = c_1(f_{cT} + x)$, $F_{yp2} = c_2(f_{cT} + x)$.

მაშინ

$$mx'' = G - c_1(f_{cT} + x) - c_2(f_{cT} + x), \qquad (1)$$

რადგანაც, სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$G = F_{yp1}(0) + F_{yp2}(0) = c_1 f_{cT} + c_2 f_{cT},$$

ამიტომ (1) განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$mx'' = -c_1 x - c_2 x = -(c_1 + c_2)x$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = 0,$$

სადაც

$$k^2 = \frac{c_1 + c_2}{m}.$$

ეს არის ჰარმონიული რხევის დიფერენციალური განტოლება წრიული სიხშირით

$$k = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} \, .$$

რხევის პერიოდი $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}} \, .$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}}$;

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 32..27

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ ტვირთის მოძრაობის განტოლება, თუ წონასწორობის მდგომარეობაში მას მიანიჭეს ქვემოთ მიმართული v_0 სიჩქარე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამოვხსნათ დიფერენციალური განტოლება

$$x'' + k^2 x = 0 \, .$$

ამ განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \, , \qquad (1)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt \, . \qquad (2)$$

სადაც $k = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$ - წრიული სიხშირეა.

C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0, x_0 = 0$; $x_0' = v_0$.

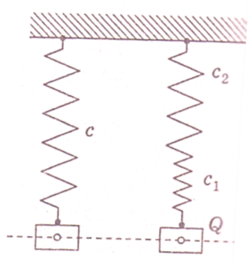
მაშინ $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{v_0}{k}$. C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები შევიტანოთ (1) განტოლებაში, მივიღებთ ტვირთის მოძრაობის განტოლებას

$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt = v_0 \sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}} \sin\left(\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} t\right) .$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $x = v_0 \sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}} \sin\left(\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} t\right) .$

ამოცანა 32.28

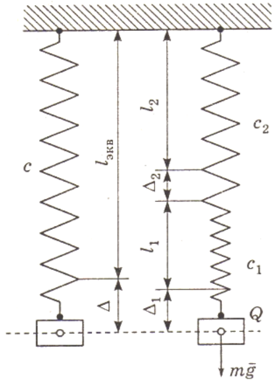
განსაზღვრეთ მიმდევრობით ჩართული ორი სხვადასხვა c_1 და c_2 სიხისტის კოეფიციენტების მქონე ზამბარების ეკვივალენტური ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი c, აგრეთვე აჩვენეთ მითითებულ ორმაგ ზამბარაზე დაკიდებული m მასის ტვირთის რხევის პერიოდი.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიპოვოთ ეკვივალენტური ზამბარას c სიხისტე (იხ. ნახაზი), და გავითვალისწინოთ, რომ

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 ,$$

სადაც Δ - ეკვივალენტური ზამბარას დაგრძელებაა; $\Delta_1 = mg / c_1$, $\Delta_2 = mg / c_2$ - შესაბამისად პირველი და მეორე ზამბარას დაგრძელებებია.



მაშინ
$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} ,$$

ანუ
$$c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} . \qquad (1)$$

თავისუფალი რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k} ,$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

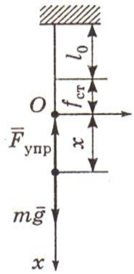
(1) გამოსახულების გათვალისწინებით

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(c_1 + c_2)}{c_1 c_2}} .$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $c = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$; $\qquad T = 2\pi \sqrt{\dfrac{m(c_1 + c_2)}{c_1 c_2}}$.

ამოცანა 32..29

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ ტვირთის მოძრაობის განტოლება, თუ საწყის მომენტში ის იმყოფებოდა წონასწორობის მდგომარეობიდან დაბლა x_0 მანძილზე და მას მიანიჭეს ზევით მიმართული $\vec{v}_0$ სიჩქარე.



ა მ ო ხ ს ნ ა. კოორდინატთა სათავე შევუთავსოთ სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობას და x ღერძი მივმართოთ წონასწორობის მდგომარეობიდან ტვირთის გადაადგილების მხარეს. ტვირთზე მოქმედებენ სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა და დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალა (იხ. ნახაზი).

ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - F_{yp}$$

სადაც $F_{yp} = c\ (f_{cT} + x)$, $c = \dfrac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$ (იხ. 32.28 ამოცანის ამოხსნა).

სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$mg = cf_{cT}\ ,$$

ამიტომ

$$mx'' = -cx$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = 0\,, \qquad (1)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt\,, \qquad (2)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt\,. \qquad (3)$$

(2) და (3) გამოსახულებებიდან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0, x = x_0$; $x'_0 = -v_0$. მაშინ $x = x_0 = C_1$,

$$x' = x'_0 = -v_0 = kC_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{v_0}{k}$$

C_1 და C_2 მნიშვნელობები შევიტანოთ (2) ფორმულაში და ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის განტოლება

$$x = x_0 \cos kt - \frac{v_0}{k}\sin kt \,.$$

ანუ, k-ს მნიშვნელობის გათვალისწინებით

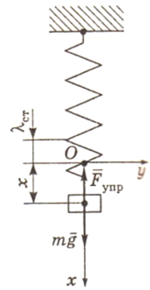
$$x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{c_1c_2}{m(c_1+c_2)}}t\right) - v_0\sqrt{\frac{m(c_1+c_2)}{c_1c_2}}\sin\left(\sqrt{\frac{c_1c_2}{m(c_1+c_2)}}t\right).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი**</u>:

$$x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{c_1c_2}{m(c_1+c_2)}}t\right) - v_0\sqrt{\frac{m(c_1+c_2)}{c_1c_2}}\sin\left(\sqrt{\frac{c_1c_2}{m(c_1+c_2)}}t\right).$$

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 32..30

განსაზღვრეთ მიმდევრობით ჩართული ორი სხვადასხვა $c_1 = 9{,}8$ ნ/სმ და $c_2 = 29{,}4$ ნ/სმ სიხისტის კოეფიციენტების მქონე ზამბარების ეკვივალენტური ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი c. იპოვეთ მითითებულ შედგენილ ზამბარაზე დაკიდებული $m = 5$ კგ მასის ტვირთის რხევის პერიოდი, ამპლიტუდა და მოძრაობის განტოლება, თუ საწყის მომენტში ტვირთი სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან გადაწეული იქნა 5 სმ-თ ქვემოთ და მას მიანიჭეს საწყისი სიჩქარე 49 სმ/წმ, მიმართული ასევე ქვევით.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიპოვოთ მიმდევრობით შეერთებული ორი ზამბარას ეკვივალენტური ზამბარას c სიხისტე (იხ. ნახაზი), და გავითვალისწინოთ, რომ

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 \,,$$

სადაც Δ - ეკვივალენტური ზამბარას დეფორმეციაა;
Δ_1, Δ_2 - შესაბამისად პირველი და მეორე ზამბარას დაგრძელებებია.

ჰუკის კანონის თანახმად

$$\Delta = \frac{mg}{c}, \quad \Delta_1 = \frac{mg}{c_1}, \quad \Delta_2 = \frac{mg}{c_2} \,.$$

მაშინ
$$\frac{mg}{c} = \frac{mg}{c_1} + \frac{mg}{c_2} \,,$$

აქედან
$$c = \frac{c_1c_2}{c_1+c_2} = \frac{9{,}8 \cdot 29{,}4}{9{,}8 + 29{,}\cdot 4} = 7{,}35 \text{ (ნ/სმ)} = 735 \text{(ნ/მ)}.$$

შევადგინოთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში. კოორდინატთა სათავე

შეუთავსოთ ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობას და x ღერძი მივმართოთ წონასწორობის მდგომარეობიდან ტვირთის გადაადგილების მხარეს (იხ. ნახაზი). ტვირთზე მოქმედებენ სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა და დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალა.

$$mx'' = mg - F_{yp} \qquad (1)$$

სადაც $F_{yp} = c\ (f_{cT} + x)$.

ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$mx'' = mg - c\ f_{cT} - cx. \qquad (2)$$

სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$mg = cf_{cT},$$

ამიტომ (2) განტოლება მიიღებს ასსეტ სახეს

$$mx'' = -cx, \qquad (3)$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = 0, \qquad (4)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = 12{,}13$ (რად/წმ) – წრიული სიხშირე.

(4) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (5)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (6)$$

(5) და (6) გამოსახულებებიდან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0, x_0 = 5$ სმ; $x_0' = v_0 = 49$ სმ/წმ.

მაშინ

$$x_0 = C_1 = 5; \quad x_0' = kC_2 \Rightarrow C_2 = \frac{x_0'}{k} = 4{,}04..$$

C_1 და C_2 მნიშვნელობები შევიტანოთ (2) ფორმულაში და ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის განტოლება

$$x = 5\cos 12{,}13t + 4{,}04 \sin 12{,}13t.$$

ვიპოვოთ რხევის პერიოდი და ამპლიტუდა:

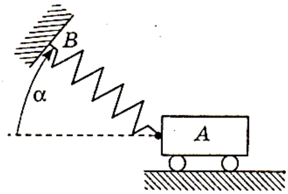
$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{12{,}13} = 0{,}517 \text{ (წმ)},$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{k^2}} = \sqrt{5^2 + 4{,}04^2} = 6{,}43 \text{ (სმ)}.$$

.<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $c=\dfrac{c_1c_2}{c_1+c_2}=7{,}35$ ნ/სმ; $T=0{,}517$ წმ; $a=6{,}43$ სმ;

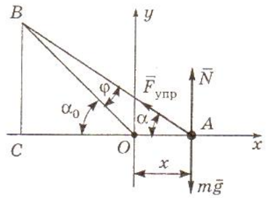
$$x=5\cos 12{,}13t+4{,}04\sin 12{,}13t \text{ სმ.}$$

ამოცანა 32..31



m მასის A სხეულს შეუძლია გადაადგილება ჰორიზონტალურ სწორ ხაზზე. სხეულზე მიმაგრებულია c სიხისტის ზამბარა. ზამბარას მეორე ბოლო დამაგრებულია უძრავ B წერტილში. როცა კუთხე $\alpha=\alpha_0$ - ზამბარა არადეფორმირებულია. განსაზღვრეთ სხეულის მცირე რხევის სიხშირე და პერიოდი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. კოორდინატთა $0xy$ სისტემის სათავედ ავირჩიოთ სხეულის მდებარეობა, როცა ზამბარა არადეფორმირებულია. გადავწიოთ სხეული x ღერძის დადებითი მიმართულების მხარეს და ნახაზზე გამოვსახოთ სხეულზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალა და საყრდენის $\vec{N}$ რეაქცია.



შევადგინოთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx''=-F_{yp}\cos\alpha\ . \qquad (1)$$

ვიპოვოთ დრეკადობის ძალა:

$$F_{yp}=c\Delta l=cx\cos\alpha,$$

სადაც

$\Delta l=l_0\cos\varphi+x\cos\alpha-l_0=x\cos\alpha$, ვინაიდან $\cos\varphi\approx 1$, $OB=l_0$.

მაშინ, (1) განტოლება ასეთ სახეს მიიღებს

$$x''=-\frac{c\cdot\cos^2\alpha}{m}x, \quad \text{ანუ} \quad x''+k^2x=0,$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c \cdot \cos^2 \alpha}{m}$.

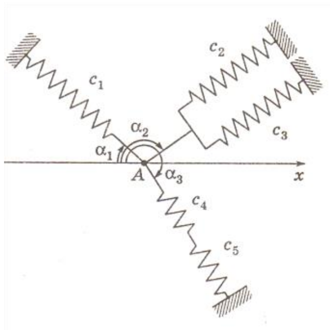
რადგანაც ვიხილავთ მცირე რხევას, ამიტომ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $\cos\alpha = \cos\alpha_0$, ამიტომ

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}\cos^2 \alpha_0}\,, \qquad T = \frac{2\pi}{k} = \sqrt{\frac{m}{c \cdot \cos^2 \alpha_0}}\ .$$

.<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}\cos^2 \alpha_0}$; $T = \dfrac{2\pi}{k} = \sqrt{\dfrac{m}{c \cdot \cos^2 \alpha_0}}$

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 32..32

m მასის A წერტილზე მიმაგრებულია ზამბარები ისე, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები. საწყის მდებარეობაში წერტილი იმყოფება წონასწორობაში და ყველა ზამბარა დაუჭიმავია. განსაზღვრეთ ამ ზამბარების ეკვივალენტური ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი წერტილის მცირე რხევისას აბსოლუტურად გლუვ მიმმართველ x ღერძის გასწვრივ და თავისუფალი რხევის სიხშირე.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ c_2 და c_3 სიხისტისზამბარების ეკვივალენტური ზამბარის c_{23} სიხისტე და c_4 და c_5 სიხისტის ზამბარების ეკვივალენტური ზამბარის c_{45} სიხისტე:

$$c_{23} = c_2 + c_3\,,$$

$$c_{45} = \frac{c_4 c_5}{c_4 + c_5}\,.$$

კოორდინატთა სისტემის სათავე ავირჩიოთ სხეულის წონასწორობის მდებარეობაში, როცა ზამბარა არადეფორმირებულია. გადავწიოთ A წერტილი x ღერძის დადებითი მიმართულების მხარეს და ნახაზზე გამოვსახოთ მასზე მოქმედი ძალები ნებისმიერ A_1 მდებარეობაში: c_1 ზამბარის დრეკადობის $\vec{F}_1$ ძალა, c_4 და c_5 ზამბარების დრეკადობის $\vec{F}_{45}$ ძალა, c_2 და c_3 ზამბარების დრეკადობის $\vec{F}_{23}$ ძალა.

განვსაზღვროთ ყოველი ზამბარის დრეკადობის ძალის გეგმილი x ღერძზე:

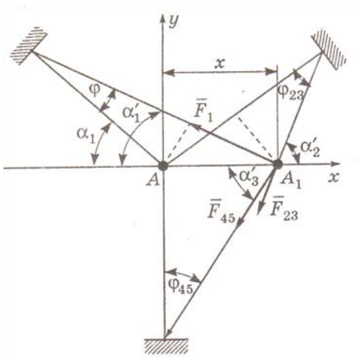
$$F_{1x} = -F_1 \cos\alpha'_1,$$
$$F_{23x} = -F_{23} \cos\alpha'_2,$$
$$F_{45x} = -F_{45} \cos\alpha'_3,$$

სადაც $F_1 = c_1 \Delta l_1$; $F_{23} = c_{23} \Delta l_2$; $F_{45} = c_{45} \Delta l_3$.

ვიპოვოთ თითოეული ზამბარას დეფორმაცია:

$$\Delta l_1 = l_{01} \cos\varphi + x\cos\alpha'_1 - l_{01},$$
$$\Delta l_2 = l_{02} \cos\varphi_{23} + x\cos\alpha'_2 - l_{02},$$
$$\Delta l_3 = l_{03} \cos\varphi_{45} + x\cos\alpha'_3 - l_{03}.$$

φ_1, φ_{23} და φ_{45} კუთხეების სიმცირის გამო ვთვლით, რომ მათი კოსინუსები ერთის ტოლია. ამიტომ



$$\Delta l_1 = x\cos\alpha'_1,$$
$$\Delta l_2 = x\cos\alpha'_2,$$
$$\Delta l_3 = x\cos\alpha'_3.$$

ამ მნიშვნელობათა გათვალისწინებით მივიღებთ

$$F_{1x} = -c_1 x \cos^2\alpha'_1,$$
$$F_{23x} = -c_{23} x \cos^2\alpha'_2,$$
$$F_{45x} = -c_{45} x \cos^2\alpha'_3.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $F_x = -cx$, c - ეკვივალენტური ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტია. მაშინ

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x},$$

ანუ
$$c = c_1 \cos^2\alpha'_1 + c_{23} \cos^2\alpha'_2 + c_{45} \cos^2\alpha'_3.$$

ვინაიდან რხევა არის მცირე, ამიტომ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ

$\cos\alpha'_1 = \cos\alpha_1$, $\cos\alpha'_2 = \cos\alpha_2$, $\cos\alpha'_3 = \cos\alpha_3$. ამიტომ, ეკვივალენტური ზამბარების სიხისტეების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$c = c_1 \cos^2\alpha_1 + (c_2 + c_3)\cos^2\alpha_2 + \frac{c_4 c_5}{c_4 + c_5} \cos^2\alpha_3.$$

შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = F_x = -cx\,.$$

ანუ $$x'' + k^2 x = 0\,,$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

<u>პ ას უ ხ ი</u>: $c = c_1\cos^2\alpha_1 + (c_2 + c_3)\cos^2\alpha_2 + \dfrac{c_4 c_5}{c_4 + c_5}\cos^2\alpha_3$;

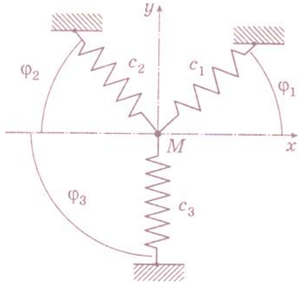
$k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

ამოცანა 32..33

განსაზღვრეთ იმ ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი, რომელიც ეკვივალენტურია ნახაზზე ნაჩვენები სამი ზამბარისა, როდესაც M წერტილის რხევა ხდება აბსოლუტურად გლუვ მიმმართველ x ღერძის გასწვრივ. იგივე ამოცანა ამოხსენით იმ შემთხვევისათვის, როცა მიმმართველი მდრბარეობს y ღერძის გასწვრივ. განსაზღვრეთ ამ რხევების სიხშირე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. კოორდინატთა $0xy$ სისტემის სათავედ ავირჩიოთ წერტილის მდებარეობა, როცა ზამბარები არადეფორმირებულია. განვიხილოთ წერტილის მოძრაობა x ღერძის გასწვრივ. გადავწიოთ M წერტილი x ღერძის დადებითი მიმართულებით (ნახ.1). გამოვსახოთ წერტილზე მოქმედი დრეკადობის ძალები: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ და $\vec{F}_3$.

განვსაზღვროთ ყოველი ზამბარის დრეკადობის ძალის გეგმილი x ღერძზე:



$$F_{1x} = -F_1\cos\alpha_1'\,,$$

$$F_{2x} = -F_2\cos\alpha_2'\,,$$

$$F_{3x} = -F_3\cos\alpha_3'\,,$$

სადაც $F_1 = c_1\Delta l_1$; $F_2 = c_2\Delta l_2$;

$F_3 = c_3\Delta l_3$.

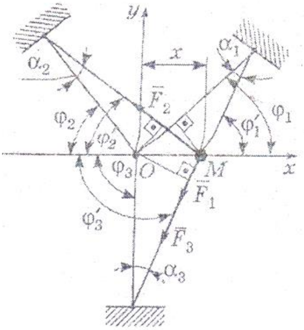
ვიპოვოთ თითოეული ზამბარას დეფორმაცი

$$\Delta l_1 = l_{01}\cos\alpha_1 + x\cos\varphi_1' - l_{01}\,,$$

$$\Delta l_2 = l_{02}\cos\alpha_2 + x\cos\varphi_2' - l_{02},$$

$$\Delta l_3 = l_{03}\cos\alpha_3 + x\cos\varphi_3' - l_{03},$$

.



ნახ. 1

φ_1, φ_{23} და φ_{45} კუთხეების სიმცირის გამო ვთვლით, რომ მათი კოსინუსები ერთის ტოლია:

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \cos\alpha_3 = 1,$$

ამიტომ
$$\Delta l_1 = x\cos\varphi_1',$$
$$\Delta l_2 = x\cos\varphi_2',$$
$$\Delta l_3 = x\cos\varphi_3'.$$

ამ მნიშვნელობათა გათვალისწინებით მივიღებთ

$$F_{1x} = -c_1 x\cos^2\varphi_1',$$
$$F_{2x} = -c_2 x\cos^2\varphi_2',$$
$$F_{3x} = -c_3 x\cos^2\varphi_3'.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $F_x = -c_x x$, c_x - სამივე ზამბარას ეკვივალენტური ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტია. მაშინ

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x},$$

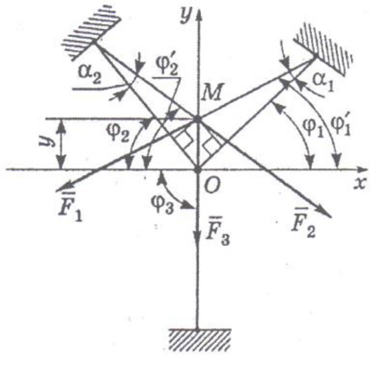
ანუ
$$c_x x = (c_1\cos^2\varphi_1' + c_2\cos^2\varphi_2' + c_3\cos^2\varphi_3')x,$$
$$c_x = c_1\cos^2\varphi_1' + c_2\cos^2\varphi_2' + c_3\cos^2\varphi_3'. \qquad (1)$$

შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = F_x = -c_x x.$$

ანუ
$$x'' + k_x^2 x = 0,$$

სადაც $k_x^2 = \dfrac{c_x}{m}$, $\quad k_x = \sqrt{\dfrac{c_x}{m}}$.



ნახ. 2

ახლა განვიხილოთ M წერტილის მოძრაობა y ღერძის დადებითი მიმართულებით (ნახ. 2). განვსაზღვროთ ყოველი ზამბარის დრეკადობის ძალის გეგმილი y ღერძზე:

$$F_{1y} = -F_1 \sin\varphi_1',$$
$$F_{2y} = -F_2 \sin\varphi_2',$$
$$F_{3y} = -F_3,$$

სადაც $F_1 = c_1\Delta l_1$; $F_2 = c_2\Delta l_2$; $F_3 = c_3\Delta l_3$.

ვიპოვოთ თითოეული ზამბარას დეფორმაცია:

$$\Delta l_1 = l_{01} - l_{01}\cos\alpha_1 - y\sin\varphi_1',$$
$$\Delta l_2 = l_{02} - l_{02}\cos\alpha_2 - y\sin\varphi_2',$$
$$\Delta l_3 = y.$$

α_1 და α_2 კუთხეების სიმცირის გამო ვთვლით, რომ მათი კოსინუსები ერთის ტოლია: $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = 1$,

ამიტომ
$$\Delta l_1 = \left| -y\sin\varphi_1' \right|,$$
$$\Delta l_2 = \left| -y\sin\varphi_2' \right|,$$
$$\Delta l_3 = y.$$

ამ მნიშვნელობათა გათვალისწინებით მივიღებთ

$$F_{1y} = -c_1 y\sin^2\varphi_1',$$
$$F_{2y} = -c_2 y\sin^2\varphi_2',$$
$$F_{3y} = -c_3 y.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $F_y = -c_y y,$ c_x - სამივე ზამბარას ეკვივალენტური ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტია. მაშინ

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y},$$

ანუ
$$c_y y = (c_1\sin^2\varphi_1' + c_2\sin^2\varphi_2' + c_3\sin^2\varphi_3')y,$$
$$c_y = c_1\sin^2\varphi_1' + c_2\sin^2\varphi_2' + c_3\sin^2\varphi_3'. \qquad (2)$$

შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება y ღერძზე გეგმილებში:

$$my'' = F_y = -c_y y,$$

ანუ
$$y'' + k_y^2 y = 0,$$

სადაც $k_y^2 = \dfrac{c_y}{m}, \quad k_y = \sqrt{\dfrac{c_y}{m}}$.

ვინაიდან რხევა არის მცირე, ამიტომ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ

$$\cos\varphi_1' = \cos\varphi_1, \quad \cos\varphi_2' = \cos\varphi_2, \quad \cos\varphi_3' = \cos\varphi_3 .$$

$\sin\varphi_1' = \sin\varphi_1, \quad \sin\varphi_2' = \sin\varphi_2,$ ამიტომ, ეკვივალენტური ზამბარენის სიხისტეების გათვალისწინებით (1) და (2) მიიღებენ ასეთ სახეს

$$c_x = c_1\cos^2\varphi_1 + c_2\cos^2\varphi_2 ,$$

$$c_y = c_1\sin^2\varphi_1 + c_2\sin^2\varphi_2 + c_3 .$$

პასუხი: $c_x = c_1\cos^2\varphi_1 + c_2\cos^2\varphi_2 , \qquad k_x = \sqrt{c_x / m}$;

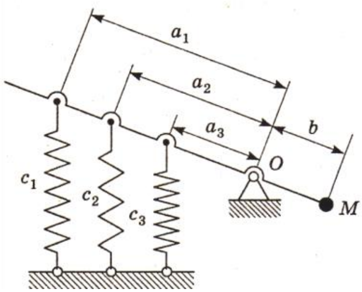
$c_y = c_1\sin^2\varphi_1 + c_2\sin^2\varphi_2 + c_3 .$; $\quad k_x = \sqrt{c_y / m}$;

საწყის მდებარეობაში ზამბარები არ არიან დაძაბული და

M წერტილი იმყოფება წონასწორობაში.

ამოცანა 32.34

განსაზღვრეთ იმ ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი, რომელიც ეკვივალენტურია ნახაზზე ნაჩვენები სამი ზამბარისა, როდესაც m მასის M ტვირთი მიმაგრებულია ღეროზე, რომლის მასა შეგვიძლია უგულებელვყოთ. ღერო სახსრით არის ჩამაგრებული 0 წერტილში და სამი ვერტიკალური ზამბარით დამაგრებულია საძირკველზე. ზამბარების სიხისტის კოეფიციენტებია c_1, c_2, c_3. ზამბარები მიმაგრებულია ღეროზე სახსრიდან a_1, a_2, a_3 მანძილებზე. M ტვირთი მიმაგრებულია ღეროზე სახსრიდან b მანძილებზე. წონასწორობის მდგომარეობაში ღერო ჰორიზონტალურია. ეკვივალენტური ზამბარა ღეროზე მაგრდება სახსრიდან b მანძილებზე. იპოვეთ ტვირთის მცირე რხევების სიხშირე.



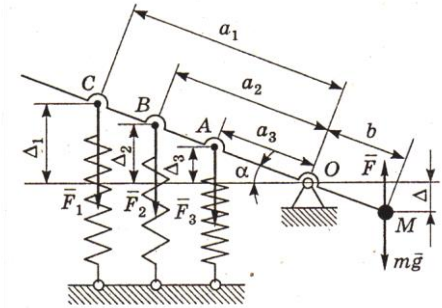
ა მ ო ხ ს ნ ა. წონასწორობის მდგომარეობაში, როცა ღერო ჰორიზონტალურია,

$$mgb = F_1a_1 + F_2a_2 + F_3a_3\,, \qquad (1)$$

სადაც $F_1 = c_1\Delta_1;\quad F_2 = c_2\Delta_2;\quad F_3 = c_3\Delta_3\,.$

ზამბარის დრეკადობის ძალა, რომელიც ტვირთს უნდა მიუერთოდ

$$F = c\Delta = mg\ ,$$



სადაც c - ეკვივალენტური ზამბარის დრეკადობის კოეფიციენტია.

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\Delta_1 = \Delta\frac{a_1}{b}\,,$$

$$\Delta_2 = \Delta\frac{a_2}{b}\,,$$

$$\Delta_3 = \Delta\frac{a_3}{b}\,.$$

სადაც Δ - ეკვივალენტური ზამბარის დეფორმაციაა. მაშინ

$$F_1 = c_1\,\frac{a_1\Delta}{b}\,,$$

$$F_2 = c_2\,\frac{a_2\Delta}{b}\,, \qquad (2)$$

$$F_3 = c_3\,\frac{a_3\Delta}{b}\,.$$

ამის გათვალისწინებით (1) მიიღებს ასეთ სახეს

$$mgb = cb\Delta = c_1\Delta\frac{a_1^2}{b} + ,c_2\Delta\frac{a_2^2}{b} + c_3\,\frac{a_3^2}{b}\,,$$

$$c = \frac{c_1a_1^2 + c_2a_2^2 + c_3a_3^2}{b^2}$$

ტვირთის რხევის სიხშირე

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c_1a_1^2 + c_2a_2^2 + c_3a_3^2}{mb^2}}\,.$$

პ ას უ ხ ი: $c = \dfrac{c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2}{b^2}$; $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

ამოცანა 32.35

ხრახნული ზამბარა შედგება n უბნისაგან, რომელთა სიხისტის კოეფიციენტებია შესაბამისად c_1, c_2, . . .c_n. განსაზღვრეთ მოცემულის ეკვივალენტური ერთგვაროვანი ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტი და m მასის წრტილის თავისუფალი რხევის პერიოდი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ხრახნული ზამბარა შედგება მიმდევრობით შეერთებული სხვადასხვა სიხისტის n უბნისაგან. ამიტომ, ეკვივალენტური ზამბარას დეფორმაცია ტოლია მისი ყველა უბნის დეფორმაციის ჯამისა:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \ ,$$

სადაც $\Delta_i = \dfrac{mg}{c_i}$.

მაშინ, ეკვივალენტური ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტი

$$\frac{1}{c} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \ ,$$

ანუ

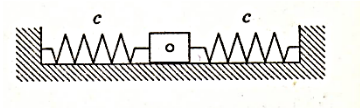
$$c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}} \ .$$

m წერტილის რხევის პერიოდი $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}}$

პ ას უ ხ ი: $c = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}}$; $T = \dfrac{2\pi}{k}$; $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

ამოცანა 32.36

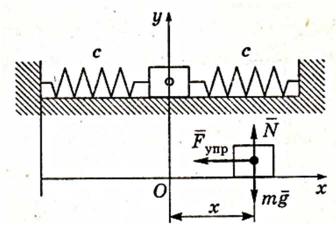
აბსოლუტურად გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე მდებარე 10 კგ მასის ტვირთი ჩაჭერილია ერთნაირი $c = 19{,}6$ ნ/სმ სიხისტის ორ ზამბარას შორის. გარკვეულ მომენტში წონასწორობის მდგომარეობაში მყოფი ტვირთი გადაწიეს 4 სმ-თ მარჯვნივ და გაუშვეს საწყისი სიჩქარის გარეშე. იპოვეთ ტვირთის მოძრაობის განტოლება, რხევის პერიოდი, აგრეთვე მაქსიმალური სიჩქარე.



ა მ ო ხ ს ნ ა. როდესაც ზამბარა ჩაჭერილია ორ ზამბარას შორის, ეს ტოლფასია ეკვივალენტური ზამბარის მოქმედებისა, რომლის სახისტის კოფიციენტი

$$c_{ekv} = c_1 + c_2 = 2c = 39{,}2 \quad \text{(ნ/სმ).}$$

ავირჩიოთ კოორდინატთა $0xy$ სისტემის სათავე ტვირთის წონასწორობის მდგომარეობაში. გადავწიოთ ტვირთი წონასწორობის მდგომარეობიდან x ღერძის დადებითი მიმართულების მხარეს; ნახაზზე გამოვსახოთ ტვირთზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა და საყრდენის $\vec{N}$ რეაქცია.



ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = -F_{yp}, \qquad (1)$$

სადაც $F_{yp} = c_{ekv}\, x$.

მაშინ (1) განტოლება ასე შეიძლება ჩავწეროთ

$$x'' + k^2 x = 0, \qquad (2)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c_{ekv}}{m}$, $\quad k = \sqrt{\dfrac{c_{ekv}}{m}} = \sqrt{\dfrac{39{,}2 \cdot 10^2}{10}} = 19{,}8$ (რად/წმ)

(2) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (3)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (4)$$

(3) და (4) გამოსახულებებიდან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: როცა $t = 0, x = x_0 = 4$ სმ; $x_0' = 0$.

მაშინ $C_1 = 4$, $\quad C_2 = 0$.

(3) გამოსახულება ასე ჩაიწერება

$$x = 4\cos 19{,}8t\,.$$

რხევის პერიოდი $T = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\cdot 3{,}14}{19{,}8} = 0{,}317$ (წმ).

ტვირთის მაქსიმალური სიჩქარის განსაზღვრისათვის ვისაეგებლოთ (4) გამოსახულებით:

$$x' = -4\cdot 19{,}8\sin 19{,}8t = -79{,}2\sin 19{,}8t\,.$$

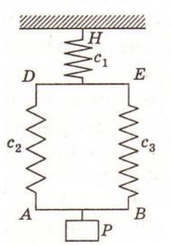
სიჩქარე მაქსიმალურ მნიშვნელობა მიაღწევს, როცა $\sin 19{,}8t = -1$.

ამიტომ $x'_{\max} = 79{,}2$ (სმ/წმ).

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $x = 4\cos 19{,}8t$ სმ; $T = 0{,}317$ წმ; $x'_{\max} = 79{,}2$ სმ/წმ.

ამოცანა 32.37

m მასის P ტვირთი მიმაგრებულია AB ღეროზე, რომელიც ორი, c_2 და c_3 სიხისტის კოეფიციენტებიანი ზამბარით შეერთებუილია DE ღეროსთან. ეს უკანასკნელი მიმაგრებულია ჭერის H წერტილში ზამბარით, რომელის სიხისტის კოეფიციენტია c_1. რხევის დროს AB და DE ღეროები რჩებიან ჰორიზონტალური. განსაზღვრეთ ერთი ეკვივალენტური ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტი, როცა P ტვირთი იმავე სიშირის რხევას შეასრულებს. იპოვეთ ტვირთის თავისუფალი რხევის პერიოდი. ღეროების მასა უგულებელყავით



ა მ ო ხ ს ნ ა. შევცვალოთ c_2 და c_3 სიხისტის კოეფიციენტის მქონე ორი ზამბარა ერთი ეკვივალენტური ზამბარით, რომლის სიხისტის კოეფიციენტია $c' = c_2 + c_3$.

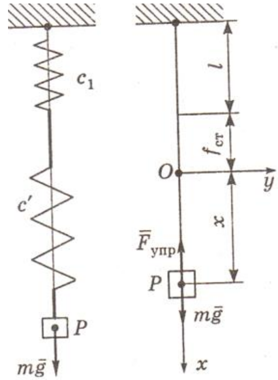
შემდეგ, მიმდევრობით შეერთებული (ნახ. 1) c' და c_1 სიხისტის კოეფიციენტების მქონე ზამბარები შევცვალოთ ეკვივალენტური ზამბარით, რომლისთვისაც $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{c_1} + \dfrac{1}{c'}$,

სადაც c - ეკვივალენტური ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტია.

აქედან, c'-ს მნიშვნელობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$c = \frac{c_1 c'}{c_1 + c'} = \frac{c_1(c_2 + c_3)}{c_1 + c_2 + c_3}\,.$$

ახლა განვიხილოთ ტვირთის მოძრაობა ერთ ზამბარაზე, რომელიც სამი მოცემული ზამბარას ეკვივალენტურია (ნახ..2); l-არადეფორმირებული ზამბარას სიგრძეა, f_{cT} - ზამბარას დეფორმაცია, რომლის დროსაც ტვირთი იმყოფება სტატიკურ წონასწორობაში.



ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემის სათავე ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში. x ღერძი მივმართოთ წონასწორობის მდგომარეობიდან ტვირთის გადაადგილების მხარეს; ნახაზზე გამოვსახოთ P ტვირთზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა და დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა .

ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \sum F_{kx} = mg - F_{yp},$$

სადაც $\quad F_{yp} = c(f_{cT} + x).$

მაშინ
$$mx'' = mg - cf_{cT} - cx. \tag{1}$$

სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში $mg = cf_{cT}$.

ამიტომ (1) განტოლება შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$x'' + k^2 x = 0, \tag{2}$$

სადაც $\quad k^2 = \dfrac{c}{m}.$

(2) განტოლება არის ჰარმონიული რხევის დიფერენციალური განტოლება.

რხევის წრიული სიხშირე

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c_1(c_2 + c_3)}{(c_1 + c_2 + c_3)m}}.$$

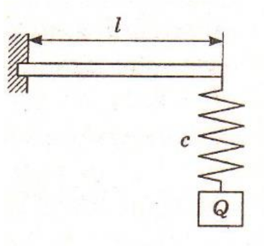
რხევის ამპლიტუდე

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{(c_1 + c_2 + c_3)m}{c_1(c_2 + c_3)}}.$$

.<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $\quad c = \dfrac{c_1(c_2 + c_3)}{c_1 + c_2 + c_3}; \quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(c_1 + c_2 + c_3)m}{c_1(c_2 + c_3)}}.$

ამოცანა 32.38

განსაზღვრეთ l სიგრძის დრეკადი კონსოლის ბოლოზე დაკიდებული m მასის Q ტვირთის რხევის საკუთარი სიხშირე. ტვირთის შემკავებელი ზამბარის სიხისტეა c. კონსოლის ბოლოზე სიხისტე განისაზღვრება ფორმულით $c = 3EI/l^3$ (E - დრეკადობის მოდულია, I - ინერციის მომენტი). კონსოლის მასა უგულებელყავით.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ტვირთის რხევის საკუთარი სიხშირე

$$k = \sqrt{\frac{c_{ekv}}{m}}, \tag{1}$$

სადაც c_{ekv} - ზამბარისა და კონსოლის ბოლოს ეკვივალენტური სიხისტეა.

c სიხისტის ზამბარა დაკიდებული c_1 სიხისტის დრეკადი კონსოლის ბოლოზე, შეიძლება ჩავთვალოთ მიმდევრობით შეერთებულ ზამბარებად, ამიტომ

$$\frac{1}{c_{ekv}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c},$$

სადაც $c_1 = \dfrac{3EI}{l^3}$.

აქედან
$$c_{ekv} = \frac{c_1 c}{c_1 + c} = \frac{3EIc}{l^3\left(c + \dfrac{3EI}{l^3}\right)},$$

ანუ, გარდაქმნის შემდეგ

$$c_{ekv} = \frac{3EIc}{cl^3 + 3EI}. \tag{2}$$

ჩავსვათ (2) გამოსახულება (1) ფორმულაში

$$k = \sqrt{\frac{3EIc}{m(cl^3 + 3EI)}}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $k = \sqrt{\dfrac{3EIc}{m(cl^3 + 3EI)}}$.

ამოცანა 32.39

$c = 20$ ნ/სმ სიხისტის დრეკადი ძელის შუაში მდებარე $M = 10$ კგ მასის ტვირთის რხევის ამპლიტუდა არის 2 სმ. განსაზღვრეთ ტვირთის საწყისი სიჩქარე, თუ დროის საწყის $t = 0$ მომენტში ტვირთი იმყოფებოდა წონასწორობის მდგომარეობაში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ტვირთის ჰარმონიული რხევის ამპლიტუდა

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{k^2}} \, .$$

აქედან
$$v_0 = x_0' = k\sqrt{a^2 - x_0^2} \, , \qquad (1)$$

სადაც k - რხევის წრიული სიხშირეა

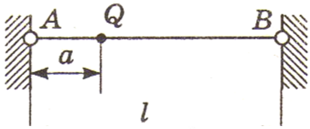
$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 10}{10}} = 14{,}14 \text{ (რად/წმ).}$$

თუ კოორდინატთა სისტემის სათავედ ავირჩევთ წონასწორობის მდგომარეობას, მივიღებთ რომ $x_0 = 0$. მაშინ (1) ფორმულის თანახმად

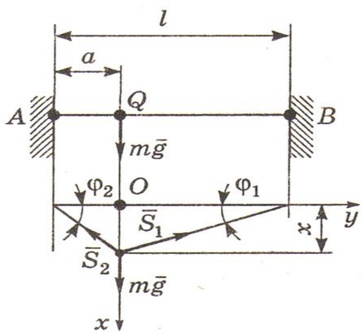
$$v_0 = ka = 14{,}14 \cdot 2 = 28{,}3 \text{ (სმ/წმ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $v_0 = 28{,}3$ სმ/წმ.

ამოცანა 32.40



m მასის Q ტვირთი დამაგრებულია ჰორიზონტალურად დაჭიმულ $AB = l$ სიგრძის გვარლით. ტვირთის მცირე ვერტიკალური რხევისას გვარლის S დაჭიმულობა შეიძლება ჩაითვალოს მუდმივად. განსაზღვრეთ ტვირთის თავისუფალი რხევის სიხშირე, თუ გვარლის A ბოლოდან ტვირთი დაშორებულია a მანძილით.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ტვირთის მოძრაობა სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალის, გვარლის $\vec{S}_1$ და $\vec{S}_2$

დაჭიმულობის ძალების მოქმედებით.

ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = -S_1 \sin\varphi_1 - S_2 \sin\varphi_2 . \qquad (1)$$

ჩავთვალოთ, რომ ტვირთის ვერტიკალური მცირე რხევების დროს $S_2 = S_1 = S$, მაშინ

$$tg\varphi_1 = \sin\varphi_1 = \varphi_1 = \frac{x}{l-a},$$

$$tg\varphi_2 = \sin\varphi_2 = \varphi_2 = \frac{x}{a},$$

ამიტომ (1) განტოლებას ასეთი სახე აქვს

$$mx'' = -S\frac{x}{l-a} - S\frac{x}{a} = -\frac{S}{a}\frac{l}{l-a}x$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = 0,$$

სადაც $k^2 = \dfrac{Sl}{ma(l-a)}$.

აქედან, ტვირთის თავისუფალი რხევის სიხშირე

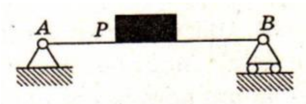
$$k = \sqrt{\frac{Sl}{ma(l-a)}}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $k = \sqrt{\dfrac{Sl}{ma(l-a)}}$ რად/წმ.

ამოცანა 32.41

490,5 ნ წონის ტვირთი დევს AB ძელის შუაში. ძელის განივი კვეთის ინერციის მომენტი I =80 სმ^4. განსაზღვრეთ ძელის l სიგრძე იმ პირობიდან, რომ ძელზე ტვირთის თავისუფალი რხევის პერიოდი იყოს $T = 1$ წმ-ს ტოლი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ძელის სტატიკური ჩაღუნვა განისაზღვრება ფორმულით $f = \dfrac{Pl^3}{48EI}$, სადაც დრეკადობის მოდული $E = 2{,}05 \cdot 10^{11}$ ნ/მ^2.



ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგანაც ვიცით თავისუფალი რხევის პერიოდი, განვსაზღვროთ ტვირთის საკუთრივი რხევების სიხშირე

$$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{1} = 6{,}28 \text{ (რად/წმ).} \qquad (1)$$

ვინაიდან სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში $cf = mg$, ამიტომ $\frac{c}{m} = \frac{g}{f} = k^2 \Rightarrow k^2 f = g.$

f -ს მნიშვნელობის გათვალისწინებით ჩავწეროთ

$$k^2 \frac{Pl^3}{48EI} = g\,.$$

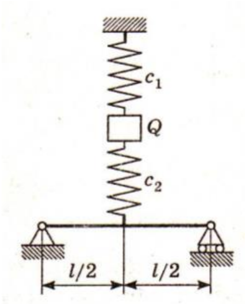
აქედან განისაზღვრება ძელის სიგრძე

$$l = \sqrt[3]{\frac{48gEI}{k^2 P}} = \sqrt[3]{\frac{48 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}05 \cdot 10^{11} \cdot 8 \cdot 10^{-7}}{6{,}28^2 \cdot 490{,}5}} = 15{,}9 \qquad \text{(მ)}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $l = 15{,}9$ მ.

ამოცანა 32.42

m მასის Q ტვირთი ჩაჭერილია ორ ვერტიკალურ ზამბარას შორის, რომელთა სიხისტის კოეფიციენტია c_1 და c_2. პირველი ზამბარის ზედა ბოლო უძრავად არის ჩამაგრებული, ხოლო მეორე ზამბარის ქვედა ბოლო დამაგრებულია ძელის შუაში. განსაზღვრეთ ძელის l სიგრძე ისე, რომ ტვირთის რხევის პერიოდი იყოს T -ს ტოლი. ძელის განივი კვეთის ინერციის მომენტია I, ხოლო დრეკადობის მოდულია E.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ძელის c_0 სიხისტე განვსაზღვროთ ფორმულით

$$c_0 = \frac{48EI}{l^3}\,.$$

ვინაიდან c_2 ზამბარა და ძელი შეადგენენ მიმდევრობით შეერთებულ ელემენტებს, ამიტომ მათი ეკვივალენტური c' სიხისტე ასე გამოითვლება

$$c' = \frac{c_2 c_0}{c_2 + c_0} = \frac{48 c_2 EI}{c_2 l^3 + 48EI} .$$

მაშასადამე, მთელი სისტემის სიხისტის $c_{\text{ეკვ}}$ კოეფიციენტი

$$c_{\text{ეკვ}} = c_1 + c' = c_1 + \frac{48 c_2 EI}{c_2 l^3 + 48EI} = \frac{48 c_2 EI + c_1 (c_2 l^3 + 48EI)}{c_2 l^3 + 48EI} .$$

ტვირთის საკუთრივი რხევის სიხშირე $k = \sqrt{\frac{c_{ekv}}{m}}$,

$$k^2 = \frac{c_{ekv}}{m} = \frac{48 c_2 EI + c_1 (c_2 l^3 + 48EI)}{(c_2 l^3 + 48EI) m} .$$

აქედან $$l^3 = \frac{48EI (c_2 + c_1 - mk^2)}{c_2 (mk^2 - c_1)} ,$$

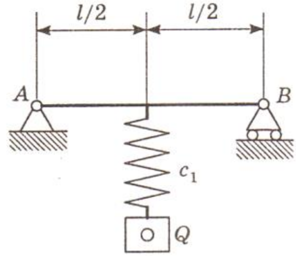
სადაც $$k^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} .$$

მაშინ, ძელის სიგრძე

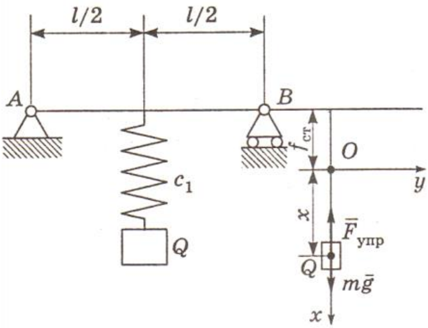
$$l = \sqrt[3]{\frac{48EI (c_2 + c_1 - \frac{4\pi^2 m}{T^2})}{c_2 \left(\frac{4\pi^2 m}{T^2} - c_1 \right)}} .$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $$l = \sqrt[3]{\frac{48EI (c_2 + c_1 - \frac{4\pi^2 m}{T^2})}{c_2 \left(\frac{4\pi^2 m}{T^2} - c_1 \right)}} .$$

ამოცანა 32.43



იპოვეთ c_1 სიხისტის კოეფიციენტის ზამბარაზე დაკიდებული m მასის Q ტვირთის მოძრაობის განტოლება და რხევის პერიოდი, თუ ზამბარა მიმაგრებულია l სიგრძის ძელის შუაში. ძელის სიხისტე ღუნვაზე არის EI . საწყის მომენტში ტვირთი იმყოფებოდა სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში და მას მიანიჭეს ქვევით მიმართული სიჩქარე $\vec{v}_0$.



ა მ ო ხ ს ნ ა. კოორდინატთა 0xy სისტემის სათავედ ავირჩიოთ სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობა. გადავაადგილოთ ტვირთი x ღერძის დადებითი მიმართულებით და ვაჩვენოთ მასზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა და დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა (იხ. ნახაზი).

ჩავწეროთ Q ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - F_{yp}\,, \qquad (1)$$

სადაც $F_{yp} = c_{ekv}\,(f_{\text{სტ}} + x)$.

მაშინ, (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$mx'' = mg - c_{ekv}\, f_{\text{სტ.}} - c_{ekv}\,x\,. \qquad (2)$$

სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$mg = c_{ekv}\, f_{\text{სტ.}}.$$

მაშასადამე, (2) ფორმულის თანახმად ტვირთის მოძრაობის განტოლებაა

$$mx'' = -c_{ekv}\,x\,,$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = 0\,, \qquad (3)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c_{ekv}}{m}$.

ზამბარა და დრეკადი ძელი შეერთებულია მიმდევრობით, ამიტომ

$$c_{ekv} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = \frac{48EIc_1}{c_1 l^3 + 48EI}, \qquad (4)$$

სადაც c_2 - ძელის სიხისტის კოეფიციენტია, $c_2 = \dfrac{48EI}{l^3}$.

(3) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (5)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (6)$$

(5) და (6) ფორმულებში ჩავსვათ საწყისი პირობები: $t = 0, x_0 = 0, x'_0 = v_0$, მივიღებთ:

$$x_0 = 0 = C_1, x'_0 = v_0 = C_2 k \Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{k}.$$

მუდმივების ამ მნიშვნელობათა გათვალისწინებით (5)–დან მივიღებთ ტვირთის მოძრაობის განტოლებას:

$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt. \qquad (7)$$

(4) ფორმულის გათვალისწინებით ვიპოვით ტვირთის რხევების სიხშირეს:

$$k = \sqrt{\frac{c_{ekv}}{m}} = \sqrt{\frac{48EIc_1}{m(c_1 l^3 + 48EI)}}.$$

მაშინ, (7) ფორმულის თანახმად

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m(c_1 l^3 + 48EI)}{48EIc_1}} \sin \sqrt{\frac{48EIc_1}{m(c_1 l^3 + 48EI)}} t.$$

ტვირთის რხევის პერიოდია

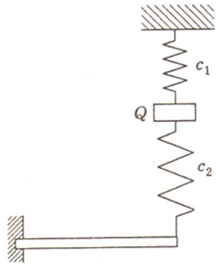
$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m(c_1 l^3 + 48EI)}{48EIc_1}}..$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = v_0 \sqrt{\dfrac{m(c_1 l^3 + 48EI)}{48EIc_1}} \sin \sqrt{\dfrac{48EIc_1}{m(c_1 l^3 + 48EI)}} t$;

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(c_1 l^3 + 48EI)}{48EIc_1}}.$$

ამოცანა 32.44

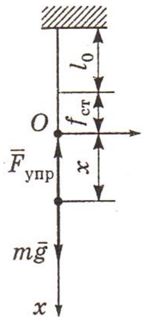
Q წონის ტვირთი ჩაჭერილია ორ ვერტიკალურ ზამბაას შორის, რომელთა სიხისტის კოეფიციენტია c_1 და c_2. პირველი ზამბარის ზედა ბოლო უძრავად არის ჩამაგრებული, ხოლო მეორე ზაგმბარის ქვედა ბოლო დამაგრებულია ძელის თავისუფალ ბოლოზე, რომელიც მეორე ბოლოთი ჩაჭედილია კედელში. ცნობილია, რომ კედელში ჩაჭედებული ძელის თავისუფალ ბოლოზე მოდებული $\vec{P}$ ძალის მოქმედებით განიცდის ჩაღუნვას



$$f = \frac{Pl^3}{48EI},$$

სადაც EI - ძელის მოცემული სიხისტეა ჩაღუნვისას. განსაზღვრეთ ძელის l სიგრძე ისე, რომ ტვირთის რხევის პერიოდი იყოს T-ს ტოლი. იპოვეთ ტვირთის მოძრაობის განტოლება, თუ საწყის მომენტში ის დაკიდებულია დაუჭიმავი ზამბარების ბოლოში და გაშვებული იქნა საწყისი სიჩქარის გარეშე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. კოორდინატთა 0xy სისტემის სათავედ ავირჩიოთ ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობა, სადაც



$$mg = c_{ekv}\ f_{\text{სტ.}}.$$

სადაც c_{ekv} - დრეკადი ბმის სიხისტის კოეფიციენტია, რომელიც ყველა დანარჩენი ბმის ეკვივალენტურია.

გადავაადგილოთ ტვირთი x ღერძის დადებითი მიმართულებით და ნახაზზე ვაჩვენოთ მასზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა და დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა.

ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - F_{yp},$$

სადაც $F_{yp} = c_{ekv}\,(f_{\text{სტ}} + x)$.

მაშინ

$$mx'' = mg - c_{ekv}\ f_{\text{სტ.}} - c_{ekv}\,x.$$

აქედან

$$mx'' = -c_{ekv}\,x,$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = 0 \quad , \tag{1}$$

სადაც $k^2 = \frac{c_{ekv}}{m} = c_{ekv}\frac{g}{Q}$.

ვიპოვოთ c_{ekv} იმის გათვალისწინებით, რომ დრეკადი ძელი და c_2 სიხისტის კოეფიციენტის მქონე ზამბარა შეერთებულია მიმდევრობით, ხოლო ტვირთი ჩაჭედილია მათსა და c_1 სიხისტის კოეფიციენტის მქონე ზამბარას შორის:

$$c_{ekv} = c_1 + c, \tag{2}$$

სადაც $c = \frac{c_1 c_3}{c_1 + c_3}$, $c_3 = \frac{3EI}{l^3}$ - ძელის სიხისტის კოეფიციენტია.

მაშინ

$$c = \frac{3EIc_2}{c_2 l^3 + 3EI}. \tag{3}$$

(3) გამოსახულება ჩავსვათ (2) ფორმულაში, მივიღებთ

$$c_{ekv} = c_1 + \frac{3EIc_2}{c_2 l^3 + 3EI}.$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$k^2 = \frac{c_{ekv}}{m} = c_{ekv}\frac{g}{Q} = \frac{g}{Q}\left(c_1 + \frac{3EIc_2}{c_2 l^3 + 3EI}\right) = \frac{g[c_1 c_2 l^3 + 3EI(c_1 + c_2)]}{Q(c_2 l^3 + 3EI)}.$$

აქედან განისაზღვრება ძელის სიგრძე

$$l = \sqrt[3]{\frac{3EI\left(c_2 + c_1 - \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{Q}{g}\right)}{c_2\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{Q}{g} - c_1\right)}}.$$

(1) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \tag{4}$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{5}$$

(4) და (5) ფორმულებში ჩავსვათ საწყისი პირობები $t=0$, $x_0=-f_{cT}$, $x_0'=v_0=0$, მივიღებთ: $x_0=-f_{cT}=C_1$, $x_0'=0=C_2k\Rightarrow C_2=0$.

მუდმივების ამ მნიშვნელობათა გათვალისწინებით (4)–დან მივიღებთ ტვირთის მოძრაობის განტოლებას:

$$x=-f_{\text{სტ}}\cdot\cos kt,$$

სადაც

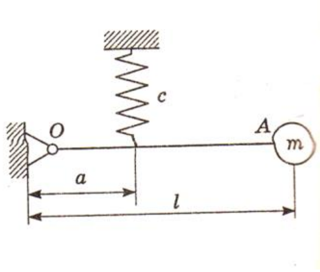
$$f_{\text{სტ}}=\frac{Q(c_2l^3+3EI)}{c_1c_2l^3+3EI(c_1+c_2)},\quad k=\sqrt{\frac{[c_1c_2l^3+3(c_1+c_2)EI]g}{(c_2l^3+3EI)Q}}.$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $$l=\sqrt[3]{\frac{3EI\left(c_2+c_1-\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{Q}{g}\right)}{c_2\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{Q}{g}-c_1\right)}};$$

$$x=-\frac{Q(c_2l^3+3EI)}{c_1c_2l^3+3EI(c_1+c_2)}\cdot\cos\sqrt{\frac{[c_1c_2l^3+3(c_1+c_2)EI]g}{(c_2l^3+3EI)Q}}t.$$

ამოცანა 32.45

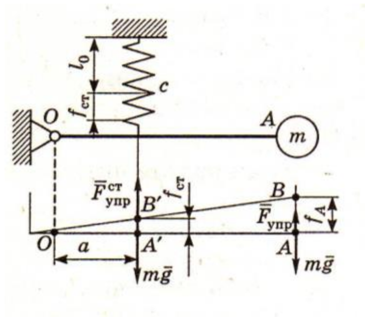
l სიგრძის 0A ღეროს ბოლოში დაკიდებულია m მასის ტვირთი. ღეროს შეუძლია შემობრუნება 0 ღერძის გარშემო. 0 ღერძიდან a მანძილზე ღეროზე მიმაგრებულია c სიხისტის კოეფიციენტის ზამბარა. განსაზღვრეთ ტვირთის რხევის საკუთრივი სიხშირე, თუ 0A ღეროს წონასწორობის მდგომარეობაში უკავია ჰორიზონტალური მდებარეობა. ღეროს მასა უგულებელყავით.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ტვირთის რხევის საკუთრივი სიხშირე

$$k=\sqrt{\frac{c_{ekv}}{m}},\qquad (1)$$

სადაც c_{ekv} - A წერტილში დამაგრებული ეკვივალენტური ზამბარას სიხისტეა.



ΔOAB და $\Delta OA'B'$ სამკუთხედების მსგავსებიდან (იხ. ნახაზი) გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{f_{cT}}{f_A} = \frac{a}{l}.$$

სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში

$$F_{yp}^{cT} a = mgl = F_{ypA} l.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ

$$F_{yp}^{cT} = cf_{cT},$$

$$F_{ypA} = c_{ekv} f_A,$$

მივიღებთ $$cf_{cT} a = c_{ekv} f_A l .$$

აქედან $$c_{ekv} = \frac{cf_{cT} a}{lf_A} = \frac{ca^2}{l^2} .$$

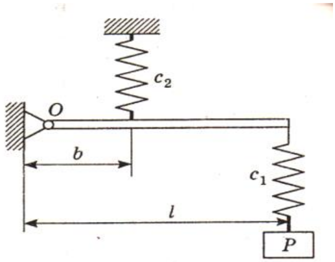
(1) ფორმულის თანახმად

$$k = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{c}{m}} .$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $k = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{c}{m}}$ რად/წმ.

ამოცანა 32.46

l სიგრძის ღეროს ბოლოში c_1 სიხისტის კოეფიციენტის ზამბარაზე დაკიდებულია m მასის P ტვირთი. ღეროს შეუძლია შემობრუნება O ღერძის გარშემო. ღეროს შემკავებელი c_2 სიხისტის კოეფიციენტის ზამბარა დაყენებულია O წერტილიდან b მანძილზე. განსაზღვრეთ P ტვირთის რხევის საკუთრივი სიხშირე. ღეროს მასა უგულებელყავით.



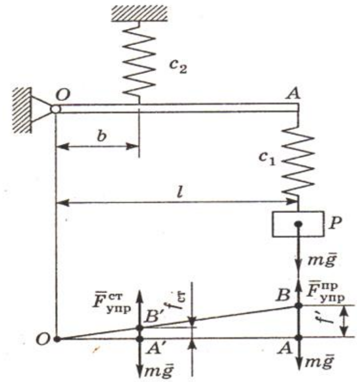
ა მ ო ხ ს ნ ა. გადავიტანოთ c_2 სიხისტის კოეფიციენტის ზამბარა A წერტილში და განვსაზღვროთ დაყვანილი ზამბარის სიხისტის $c_{\text{пр}}$ კოეფიციენტი გამომდინარე იმ პირობიდან, რომ

$$F_{\text{уп}}^{\text{ст}} b = F_{\text{уп}}^{\text{пр}} l, \qquad (1)$$

სადაც $F_{\text{уп}}^{\text{ст}} = c_2 f_{\text{ст}}$

- მე-2 ზამბარას დრეკადობის ძალაა სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში; $F_{\text{уп}}^{\text{пр}} = c_{\text{пр}} f'$ - A წერტილში დაყვანილი მე-2 ზამბარას დრეკადობის ძალა.

მაშინ (1) პირობა ასე ჩაიწერება



$$c_2 f_{\text{ст}} b$$

$F_{\text{уп}}^{\text{пр}} = c_{\text{пр}} f' l$.

აქედან

$$c_{\text{пр}} = c_2 \frac{f_{\text{ст}} b}{f' l}.$$

(2)

ΔOAB და $\Delta OA'B'$ სამკუთხედების მსგავსებიდან (იხ. ნახაზი) გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{f_{\text{ст}}}{f'} = \frac{b}{l}.$$

(2) გამოსახულება მიიღებს ასეთ სახეს

$$c_{пр} = \frac{c_2 b^2}{l^2}.$$

მაშასადამე, A წერტილში გვაქვს ორი, მიმდევრობით შეერთებული, c_1 და $c_{пр}$ სიხიტის კოეფიციენტის მქონე ზამბარა.

ვიპოვოთ ეკვივალენტური ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტი

$$c_{ekv} = \frac{c_1 c_{пр}}{c_1 + c_{пр}} = \frac{c_1 c_2}{\left(c_1 \frac{l^2}{b^2} + c_2\right)}$$

და ტვირთის რხევის საკუთრივი სიხშირე

$$k = \sqrt{\frac{c_{ekv}}{m}} = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{m\left(c_1 \frac{l^2}{b^2} + c_2\right)}}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $k = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{m\left(c_1 \frac{l^2}{b^2} + c_2\right)}}$ რად/წმ.

ამოცანა 32.47

დედამიწის ზდაპირზე მოცემულ ადგილას სიმძიმის ძალის აჩქარების განსაზღვრისათვის ტარდება ორი ცდა. ზამბარას ბოლოში ათავსებენ P_1 ტვირთს და ზომავენ ზამბარას l_1 სტატიკურ დაგრძელებას. შემდეგ ამავე ზამბარას ბოლოში კიდებენ სხვა P_2 ტვირთს და კვლავ ზომავენ ზამბარა l_2 სტატიკურ დაგრძელებას. ამის შემდეგ იმეორებენ ორივე ცდას, აიძულებენ ორივე ტვირთს რიგრიგობით შეასრულონ თავისუფალი რხევები, და ამასთანავე ზომავენ რხევების T_1 და T_2 პერიოდებს. მეორე ცდას ატარებენ იმისათვის, რომ გაითვალისწინონ თვით ზამბარას მასის გავლენა, თვლიან, რომ ტვირთის მოძრაობისას ეს გავლენა ეკვივალენტურია რხევადი მასისათვის რაღაც დამატებითი მასის მიმატებისა. ამ ცდების მონაცემების მიხედვით იპოვეთ სიმძიმის ძალის აჩქარების განმსაზღვრელი ფორმულა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. P_1 ტვირთის რხევის პერიოდი

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi\sqrt{l_1}}{\sqrt{g}}, \qquad (1)$$

სადაც $k_1 = \sqrt{\dfrac{g}{f_{cT}}} = \sqrt{\dfrac{g}{l_1}}$.

P_2 ტვირთის რხევის პერიოდი

$$T_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{2\pi\sqrt{l_2}}{\sqrt{g}}, \qquad (2)$$

სადაც $k_2 = \sqrt{\dfrac{g}{l_2}}$.

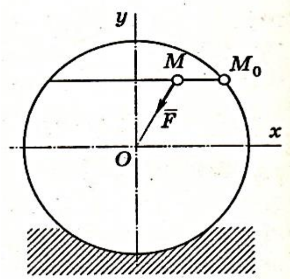
(1) და (2) გამოსახულებები ავიყვანოთ კვადრატში და ვიპოვოთ სხვაობა $T_1^2 - T_2^2 = \dfrac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{g}$.

აქედან მივიღებთ სიმძიმის ძალის აჩქარების საანგარიშო ფორმულას

$$g = \frac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $g = \dfrac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}$.

ამოცანა 32.48



ვერტიკალურად განთავსებული წრის ქორდის გასწვრივ (კილოში) ხახუნის გარეშე მიზიდულობის $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით მოძრაობს 2 კგ მასის M წერტილი, სადაც ძალა სიდიდით O ცანტრამდის მანძილის პროპორციულია, ამასთანავე პროპორციულობის კოეფიციენტია 98 ნ/მ. წრის ცენტრიდან ქორდამდე მანძილია 20 სმ,

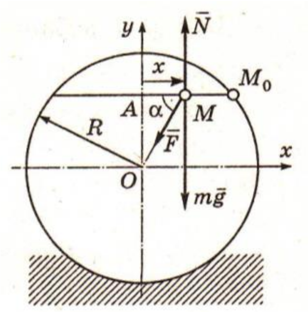
წრეწირის რადიუსია 40 სმ. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის კანონი, თუ საწყის მომენტში ის იმყოფებოდა მარჯვენა განაპირა M_0 მდებარეობაში და გაშვებულია საწყისი სიჩქარის გარეშე. რა სიჩქარით გაივლის წერტილი ქორდის შუაში?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნახაზზე გამოვსახოთ წერტილი შუალედურ მდებარეობაში და ვაჩვენოთ მასზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, მიზიდულობის $\vec{F}$ ძალა და საყრდენის $\vec{N}$ რეაქცია.

ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = -F\cos\alpha,$$

სადაც $F = \mu \cdot OM$, μ- პროპორციულობის კოეფიციენტია; $\cos\alpha = \dfrac{x}{OM}$.



მაშინ, (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$mx'' = -\mu x.$$

მაშასადამე, წერტილის მოძრაობის განტოლებაა

$$x'' + k^2 x = 0\ , \qquad (1)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{\mu}{m} = \dfrac{98}{2} = 49,$. $k = 7$ რად/წმ.

(1) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (2)$$

(2)-ს გაწარმოებით მივიღებთ

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (3)$$

ინტეგრების მუდმივები განვსაზღვროთ (2) და (3) ფორმულებში საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0, x_0' = 0$, (2)-დან მივიღებთ: $C_1 = x = x_0 = AM_0 = \sqrt{R^2 - AO^2} = \sqrt{40^2 - 20^2} = 34{,}6$ (სმ).

(3)-დან მივიღებთ:

$$x' = x_0' = C_2 k \Rightarrow C_2 = 0.$$

მუდმივების ამ მნიშვნელობათა გათვალისწინებით (2)–დან მივიღებთ წერტილის მოძრაობის განტოლებას:

$$x = 34{,}6\cos 7t \text{ სმ.}$$

(3) ფორმულის თანახმად წერტილის სიჩქარეა

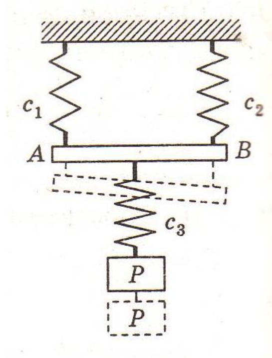
$$x' = -242\sin 7t \text{ სმ/წმ.}$$

ქორდის შუაში წერტილის გავლისას $x=0$, ამიტომ

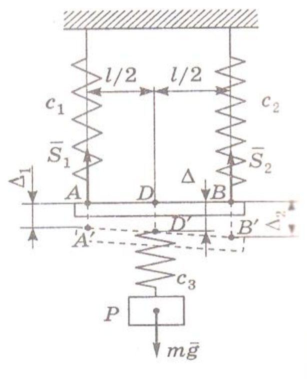
$$x' = \pm 242 \text{ სმ/წმ.}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = 34{,}6\cos 7t$ სმ. $x' = \pm 242$ სმ/წმ.

ამოცანა 32.49



ღეროზე, რომლის მასა უგულებელყოფილია, მიმაგრებულია სამი ზამბარა. ღეროს ბოლოებზე დამაგრებული c_1 და c_2 სიხისტის ორი ზამბარით შეკავებულია ღერო. c_3 სიხისტის მესამე ზამბარა ღეროს შუაშია დამაგრებული და მასზე დაკიდებულია m მასის P ტვირთი. განსაზღვრეთ ტვირთის რხევის საკუთრივი სიხშირე.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ვიპოვოთ A და B ზამბარების დამაგრების წერტილებში წარმოქმნილი S_1 და S_2 ძალები

$$S_1 = S_2 = \frac{mg}{2}. \qquad (1)$$

მაშინ, თითოეული ზამბარას დაგრძელება იქნება

$$\Delta_1 = \frac{mg}{2c_1}, \quad \Delta_2 = \frac{mg}{2c_2}. \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ მესამე ზამბარას დაკიდების D წერტილის გადაადგილება

$$\Delta = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} = \frac{mg}{4}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right).$$

(3)

D' წერტილში მოვათავსოთ დაყვანილი c სიხისტის ზამბარა:

$$c = \frac{mg}{\Delta},$$

საიდანაც

$$\Delta = \frac{mg}{c} . \qquad (4) .$$

ჩავსვათ (4) გამოსახულება (3) ფორმულაში, მივიღებთ

$$c = \frac{4c_1c_2}{c_1 + c_2} .$$

მაშასადამე, D წერტილში გვაქვს ორი მიმდევრობით შეერთებული c და c_3 სიხისტის კოეფიციენტის მქონე ზამბარა. შევცვალოთ ისინი ეკვივალენტური ზამბარით და ვიპოვოთ ამ ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტი c_{ecv} :

$$c_{ecv} = \frac{c\, c_3}{c + c_3} = \frac{4c_1c_2c_3}{4c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3} ,$$

აგრეთვე ტვირთის რხევის საკუთრივი სუიხშირე

$$k = \sqrt{\frac{c_{ecv}}{m}} = \sqrt{\frac{4c_1c_2c_3}{m(4c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3)}} .$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $k = \sqrt{\dfrac{4c_1c_2c_3}{m(4c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3)}}$ რად/წმ.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 32.50

10 კგ მასის ტვირთი, რომელიც მიმაგრებულია c =1,96 კნ/მ სიხიტის კოეფიციენტის ზამბარაზე, ასრულებს რხევას. ზამბარას მასა უგულებელყავით და განსაზღვრეთ ტვირთისა და ზამბარას სრული მექანიკური ენერგია, ააგეთ დრეკადი ძალის გადაადგილებაზე დამოკიდებულების გრაფიკი და აჩვენეთ მასზე ზამბარას პოტენციური ენეერგია. მიიღეთ სტატიკური წონასწორობის მდებარეობა პოტენციური ენერგიის ათვლის სათავედ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველი სისტემის სრული მექანიკური ენერგია E არის

$$E = T + \Pi , \qquad (1)$$

სადაც T - ტვირთის კინეტიკური ენერგიაა; Π - ზამბარას პოტენციური ენერგია.

ტვირთის მოძრაობისას

$$T = \frac{mx'^2}{2} ,$$

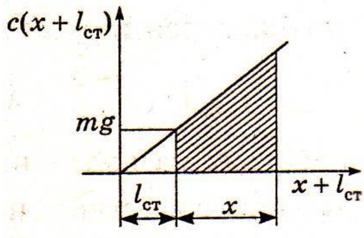
$$\Pi = A(F_{yp}) = \int_0^x F_{yp} \quad dx = \int_0^x cxdx = \frac{cx^2}{2} .$$

მაშინ, ამოცანის პირობების გათვალისწინებით (1) ფორმულის თანახმად

$$E = \frac{mx'^2}{2} + \frac{cx^2}{2} = 5x'^2 + 980x^2 .$$

ვინაიდან $F_{yp} = c(x + l_{cT})$,

ამიტომ, დრეკადი ძალის გადაადგილებაზე დამოკიდებულების გრაფიკი არის წრფე (იხ. ნახაზი პასუხში). პოტენციური ენერგიის ათვლის სათავედ აღებულია სტატიკური წონასწორობის მდებარეობა, ამიტომ, ზამბარას პოტენციური ენერგია ტოლია ტრაპეციის ფართობის (იხ. ნახაზი), რომელიც შემოსაზღვრულია აბსცისის ღერძის l_{cT} და $x + l_{cT}$ კოორდინატებით.



<u>პ ა ს უ ხ ი:</u>

$$E = \frac{mx'^2}{2} + \frac{cx^2}{2} = (5x'^2 + 980x^2)$$

ჯ, სადაც x – მ-ში, x' - მ/წმ-ა. ნახაზზე დაშტრიხული ფართობი ზამბარას პოტენციური ენერგიის ტოლია.

ამოცანა 32.51

m მასის ნივთიერი წერტილი იმყოფება

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot k(x^2 + 4y^2 + 16z^2)$$

პოტენციალის მქონე ძალის მოქმედების ველში. დაამტკიცეთ, რომ წერტილის მოძრაობისას ნებისმიერი (არანულოვანი) საწყისი მდებარეობიდან გარკვეული დროის შემდეგ წერტილი კვლავ მივა ამავე მდებარეობაში. განსაზღვრეთ ეს დრო. იქნება თუ არა დაბრუნებისას სიჩქარე საწყისი სიჩქარის ტოლი?

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ ძალის გეგმილები დეკარტის კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -kx;$$

$$F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -4ky;$$

$$F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -16kz.$$

ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = -kx,$$

ანუ

$$x'' + \beta^2 x = 0 \quad , \qquad (1)$$

სადაც $\beta^2 = \frac{k}{m}, \quad \beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

(1) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$x = C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t, \qquad (2)$$

(2)-ს გაწარმოებით მივიღებთ

$$x' = -C_1\beta \sin\beta t + C_2\beta \cos\beta t. \qquad (3)$$

ინტეგრების მუდმივები განვსაზღვროთ (2) და (3) ფორმულებში საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0, x_0 > 0, x_0' > 0$, (2) და (3) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$C_1 = x_0; x_0' = C_2\beta. \quad C_2 = \frac{x_0'}{\beta} = x_0'\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

მუდმივების ამ მნიშვნელობათა გათვალისწინებით (2) და (3) ასეთ სახეს მიიღებენ:

$$x = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + x_0'\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t, \qquad (4)$$

$$x' = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + x_0'\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t. \qquad (5)$$

ვიპოვოთ x ღერძის გასწვრივ წერტილის რხევის პერიოდი:

$$T_x = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება y ღერძზე გეგმილებში:

$$my'' = -4ky,$$

ანუ

$$y'' + \alpha^2 x = 0, \qquad (6)$$

სადაც $\alpha^2 = \dfrac{4k}{m}, \quad \alpha = 2\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

(6) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$y = C_3 \cos\alpha t + C_4 \sin\alpha t, \qquad (7)$$

(2)-ს გაწარმოებით მივიღებთ

$$y' = -C_3\alpha \sin\alpha t + C_4\alpha \cos\alpha t. \qquad (8)$$

ინტეგრების მუდმივები განვსაზღვროთ (7) და (8) ფორმულებში საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0, y_0 > 0, y_0' > 0$; (7) და (8) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$C_3 = y_0; y_0' = C_4\alpha$. $\quad C_4 = \dfrac{y_0'}{\alpha} = \dfrac{y_0'}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

მუდმივების ამ მნიშვნელობათა გათვალისწინებით (2) და (3) ასეთ სახეს მიიღებენ:

$$y = y_0 \cos(2\sqrt{\frac{k}{m}}t) + \frac{y_0'}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\sin(2\sqrt{\frac{k}{m}}t), \qquad (9)$$

$$y' = -2y_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(2\sqrt{\frac{k}{m}}t) + y_0' \cos(2\sqrt{\frac{k}{m}}t). \qquad (10)$$

ვიპოვოთ y ღერძის გასწვრივ წერტილის რხევის პერიოდი:

$$T_y = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება z ღერძზე გეგმილებში:

$$mz'' = -16kz,$$

ანუ

$$z'' + \gamma^2 z = 0, \qquad (11)$$

სადაც $\gamma^2 = \dfrac{16k}{m}, \quad \gamma = 4\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

(11) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$z = C_5 \cos\gamma t + C_6 \sin\gamma t\,, \qquad (12)$$

(12)-ს გაწარმოებით მივიღებთ

$$z' = -\gamma C_5 \sin\gamma t + \gamma C_6 \cos\gamma t. \qquad (13)$$

ინტეგრების მუდმივები განვსაზღვროთ (12) და (13) ფორმულებში საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0, z_0 > 0, z_0' > 0$; (12) და (13) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$C_5 = z_0 ; z_0' = C_6 \gamma . \quad C_6 = \frac{z_0'}{\gamma} = \frac{z_0'}{4}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

მუდმივების ამ მნიშვნელობათა გათვალისწინებით (12) და (13) ასეთ სახეს მიიღებენ:

$$z = z_0 \cos(4\sqrt{\frac{k}{m}}t) + \frac{z_0'}{4}\sqrt{\frac{m}{k}}\sin(4\sqrt{\frac{k}{m}}t)\,, \qquad (14)$$

$$z' = -4z_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(4\sqrt{\frac{k}{m}}t) + z_0' \cos(4\sqrt{\frac{k}{m}}t)\,. \qquad (15)$$

ვიპოვოთ z ღერძის გასწვრივ წერტილის რხევის პერიოდი:

$$T_z = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{2\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

ვინაიდან

$$T_x = 2T_y = 4T_z\,,$$

ამიტომ, $t_{\min} = T_x$ დროის შემდეგ წერტილი უნდა დაბრუნდეს საწყის მდებარეობაში. ჩავსვათ $t = T_x$ მნიშვნელობა (4), (9) და (14) ფორმულებში, შესაბამისად მივიღებთ:

$$x = x_0 \cos 2\pi + x_0'\sqrt{\frac{m}{k}}\sin 2\pi = x_0\,,$$

$$y = y_0 \cos 4\pi + \frac{y_0'}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\sin 4\pi = y_0\,,$$

$$z = z_0 \cos 8\pi + \frac{z_0'}{4}\sqrt{\frac{m}{k}}\sin 8\pi = z_0\,.$$

მაშასადამე $$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

ნივთიერი წერტილის სიჩქარეს $t = T_x = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ მომენტში განვსაზღვროთ (5), (10), (15) ფორმულებიდან:

$$x' = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin 2\pi + x_0' \cos 2\pi = x_0',$$

$$y' = -2y_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin 4\pi + y_0' \cos 4\pi = y_0',$$

$$z' = -4z_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin 8\pi + z_0' \cos 8\pi = z_0'.$$

მაშასადამე, $T_x = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ დროის შუალედის შემდეგ წერტილს ექნება სიჩქარე, რომელიც მისი საწყისი მნიშვნელობის ტოლია.

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. წერტილის სიჩქარე დროის T შუალედის შემდეგ გახდება მისი საწყისი მნიშვნელობის ტოლი.

ამოცანა 32.52

m მასის ნივთიერი წერტილი იმყოფება

$$\Pi = \frac{1}{2}\cdot k(x^2 + 2y^2 + 5z^2)$$

პოტენციალის მქონე ძალის მოქმედების ველში. ამ შემთხვევაში, გარკვეული დროის შემდეგ წერტილი დაბრუნდება თუ არა საწყის მდებარეობაში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ ძალის გეგმილები დეკარტის კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -kx;$$

$$F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -2ky;$$

$$F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -5kz.$$

ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = -kx,$$

ანუ

$$x'' + \beta^2 x = 0 \quad , \qquad (1)$$

სადაც $\beta^2 = \dfrac{k}{m}, \quad \beta = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

(1) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$x = C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t\,, \qquad (2)$$

(2)-ს გაწარმოებით მივიღებთ

$$x' = -C_1\beta \sin\beta t + C_2\beta \cos\beta t. \qquad (3)$$

ინტეგრების მუდმივები განვსაზღვროთ (2) და (3) ფორმულებში საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0, x_0 > 0, x_0' > 0$, (2) და (3) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$C_1 = x_0; x_0' = C_2\beta. \quad C_2 = \frac{x_0'}{\beta} = x_0'\sqrt{\frac{m}{k}}\ .$$

მუდმივების ამ მნიშვნელობათა გათვალისწინებით (2) და (3) ასეთ სახეს მიიღებენ:

$$x = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + x_0'\sqrt{\frac{m}{k}} \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t\,, \qquad (4)$$

$$x' = -x_0\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + x_0' \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\,. \qquad (5)$$

ვიპოვოთ x ღერძის გასწვრივ წერტილის რხევის პერიოდი:

$$T_x = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ .$$

ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება y ღერძზე გეგმილებში:

$$my'' = -2ky,$$

ანუ

$$y'' + \alpha^2 x = 0 \quad , \qquad (6)$$

სადაც $\alpha^2 = \dfrac{2k}{m}, \quad \alpha = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$.

(6) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$y = C_3 \cos \alpha t + C_4 \sin \alpha t, \qquad (7)$$

(2)-ს გაწარმოებით მივიღებთ

$$y' = -C_3 \alpha \sin \alpha t + C_4 \alpha \cos \alpha t. \qquad (8)$$

ინტეგრების მუდმივები განვსაზღვროთ (7) და (8) ფორმულებში საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0, y_0 > 0, y_0' > 0$; (7) და (8) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$C_3 = y_0; y_0' = C_4 \alpha, \quad C_4 = \frac{y_0'}{\alpha} = y_0' \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

მუდმივების ამ მნიშვნელობათა გათვალისწინებით (2) და (3) ასეთ სახეს მიიღებენ:

$$y = y_0 \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t\right) + y_0' \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t\right), \qquad (9)$$

$$y' = -y_0 \sqrt{\frac{2k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t\right) + y_0' \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t\right). \qquad (10)$$

ვიპოვოთ y ღერძის გასწვრივ წერტილის რხევის პერიოდი:

$$T_y = \frac{2\pi}{\alpha} = \pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება z ღერძზე გეგმილებში:

$$mz'' = -5kz,$$

ანუ

$$z'' + \gamma^2 z = 0, \qquad (11)$$

სადაც $\gamma^2 = \frac{5k}{m}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{5k}{m}}.$

(11) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$z = C_5 \cos \gamma t + C_6 \sin \gamma t, \qquad (12)$$

(12)-ს გაწარმოებით მივიღებთ

$$z' = -\gamma C_5 \sin \gamma t + \gamma C_6 \cos \gamma t. \qquad (13)$$

ინტეგრების მუდმივები განვსაზღვროთ (12) და (13) ფორმულებში საწყისი პირობების გამოყენებით:

$t = 0, z_0 > 0, z_0' > 0$; (12) და (13) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$C_5 = z_0; z_0' = C_6\gamma. \quad C_6 = \frac{z_0'}{\gamma} = z_0'\sqrt{\frac{m}{5k}}.$$

მუდმივების ამ მნიშვნელობათა გათვალისწინებით (12) და (13) ასეთ სახეს მიიღებენ:

$$z = z_0 \cos(\sqrt{\frac{5k}{m}}t) + z_0'\sqrt{\frac{m}{5k}}\sin(\sqrt{\frac{5k}{m}}t), \tag{14}$$

$$z' = -z_0\sqrt{\frac{5k}{m}}\sin(\sqrt{\frac{5k}{m}}t) + z_0'\cos(\sqrt{\frac{5k}{m}}t). \tag{15}$$

ვიპოვოთ z ღერძის გასწვრივ წერტილის რხევის პერიოდი:

$$T_z = \frac{2\pi}{\gamma} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{5k}}.$$

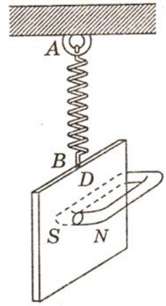
ვინაიდან T_y და T_z არ წარმოადგენენ T_x-ს ჯერადებს, ამიტომ არ შეიძლება მიუთითოთ დროის მომენტზე, როცა ყველა სამივე კოორდინატი მიიღებს საწყის მნიშვნელობას.

პ ა ს უ ხ ი: არ შეიძლება მიუთითოთ დროის მომენტზე, როცა ყველა სამივე კოორდინატი მიიღებს საწყის მნიშვნელობას. წერტილი სამი რხევითი მოძრაობის შეკრების პროცესში არ დაბრუნდება საწყის მდებარეობაში.

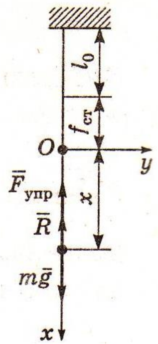
ᲬᲘᲜᲐᲦᲝᲑᲘᲡ ᲒᲐᲕᲚᲔᲜᲐ ᲗᲐᲕᲘᲡᲣᲤᲐᲚ ᲠᲮᲔᲕᲔᲑᲖᲔ

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲔᲑᲘ ᲓᲐ ᲐᲛᲝᲮᲡᲜᲔᲑᲘ

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 32.53



უძრავ A წერტილში დამაგრებულ AB ზამბარაზე დაკიდებული 100 გრ მასის D ფირფიტა მოძრაობს მაგნიტურ პოლუსებს შორის. გრიგალური დენის შედეგად მოძრაობა მუხრუჭდება სიჩქარის პროპორციული ძალით. მოძრაობისადმი წინაღობის ძალა $kv\Phi^2$ ნ-ს ტოლია, სადაც $k=0{,}001$, v - სიჩქარეა მ/წმ-ში, Φ - მაგნიტური ნაკადი N და S პოლუსებს შორის. საწყის მომენტში ფირფიტის სიჩქარე ნულის ტოლია და ზამბარა დაუჭიმავია. მისი დაგრძელება 1 მ-ზე მიიღება B წერტილში მოდებული 19,6 ნ ძალის სტატიკური მოქმედებისას. განსაზღვრეთ ფირფიტის მოძრაობა იმ შემთხვევაში, როცა $\Phi=10\sqrt{5}$ ვბ (ვებერი – მაგნიტური ნაკადის ერთეული).



ა მ ო ხ ს ნ ა. კოორდინატთა Oxy სისტემის სათავედ ავირჩიოთ ფირფიტის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში. გადავწიოთ ფირფიტა x ღერძის დადებითი მიმართულებით. გამოვსახოთ ნახაზზე ფირფიტაზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, დრეკადობის ძალა $\vec{F}_{упр}$, წინაღობის ძალა $\vec{R}$.

ჩავწეროთ ფირფიტის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx''=mg-R-F_{упр},$$

სადაც $R=\alpha x'$, $\alpha=k\Phi^2=0{,}001(10\sqrt{5})^2=0{,}5;$

$$F_{упр}=c(f_{cT}+x).$$

სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში $mg=cf_{cT}$. მაშინ

$$mx''=mg-cf_{cT}-cx-\alpha x',$$

ანუ

$$x''+2nx'+k^2x=0, \qquad (1)$$

სადაც $2n=\dfrac{\alpha}{m}; k^2=\dfrac{c}{m}$.

ვიპოვოთ $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{19{,}6}{0{,}1}} = 14$ (რად/წმ), $n = 2{,}5$ (რად/წმ). მივიღეთ, რომ $k > n$ - მცირე წინაღობის შემთხვევა.
(1) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}t). \qquad (2)$$

(2) გამოსახულება დროთი გავაწარმოოთ:

$$x' = -ne^{-nt}(C_1 \cos\sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - n^2}t) +$$
$$+ e^{-nt}(-C_1\sqrt{k^2 - n^2} \sin\sqrt{k^2 - n^2}t + C_2\sqrt{k^2 - n^2} \cos\sqrt{k^2 - n^2}t).$$
(3)

(2) და (3) გამოსახულებებში ჩავსვათ მოძრაობის საწყისი პირობები:

$t = 0, x_0 = -f_{cT}; x_0' = 0$. მივიღებთ: $x_0 = C_1 = -f_{cT} = -\frac{mg}{c} = -0{,}05$ (მ); $x_0' = 0 = -nC_1 + \sqrt{k^2 - n^2}C_2$,

საიდანაც $C_2 = \frac{nC_1}{\sqrt{k^2 - n^2}} = -0{,}00907$ (მ).

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (2) ფორმულაში, მივიღებთ

$$x = -e^{-2{,}5t}(0{,}05\cos 13{,}77t + 0{,}00907\sin 13{,}77t) \text{ (მ)}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = -e^{-2{,}5t}(0{,}05\cos 13{,}77t + 0{,}00907\sin 13{,}77t)$ მ, სადაც x ღერძი მიმართულია ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობიდან ქვევით.

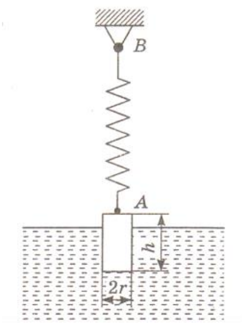
ამოცანა 32.54

განსაზღვრეთ D ფირფიტის მოძრაობა წინა ამოცანის პირობებით იმ შემთხვევაში, როცა მაგნიტური ნაკადი $\Phi = 100$ ვბ (ვებერი – მაგნიტური ნაკადის ერთეული).

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ 32.53 ამოცანის ამოხსნისას

მიღებული ფირფიტის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებით

$$x'' + 2nx' + k^2 x = 0\,, \qquad (1)$$



სადაც $2n = \dfrac{\alpha}{m}$; $\alpha = 0{,}001 \cdot 10^2 = 10$;

$k^2 = \dfrac{c}{m}$

განვსაზღვროთ $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{19{,}6}{0{,}1}} = 14$

(რად/წმ), $n = \dfrac{10}{2 \cdot 0{,}1} = 50$ (რად/წმ). მივიღეთ, რომ $k < n$ - დიდი წინაღობის შემთხვევა. ამიტომ (1) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-98t}\,. \qquad (2)$$

(2) გამოსახულება დროთი გავაწარმოოთ:

$$x' = -2C_1 e^{-2t} - 98C_2 e^{-98t}\,. \qquad (3)$$

(2) და (3) გამოსახულებებში ჩავსვათ მოძრაობის საწყისი პირობები: $t = 0,$ $x_0 = -f_{cT} = -\dfrac{mg}{c} = -0{,}05$ (მ); $x'_0 = 0$, მივიღებთ $x_0 = -f_{cT} = C_1 + C_2$, $x'_0 = 0 = -2C_1 - 98C_2$, საიდანაც $C_1 = -0{,}051$ მ, $C_2 = -0{,}001$ მ.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (2) ფორმულაში, საბოლოოდ მივიღებთ

$$x = -0{,}051 e^{-2t} + 0{,}001 e^{-98t}\,.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = -0{,}051 e^{-2t} + 0{,}001 e^{-98t}$.

ამოცანა 32.55

r რადიუსის და h სიმაღლის P წონის ცილინდრი ჩამოკიდებულია AB ზამბარაზე, რომლის ზედა B ბოლო დამაგრებულია; ცილინდრი ჩაშვებულია წყალში. წონასწორობის მდგომარეობაში ცილინდრი თავისი სიმაღლის ნახევრად ჩაძირულია

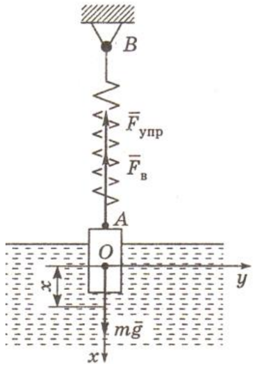
წყალში. დროის საწყის მომენტში ცილინდრი თავისი სიმაღლის 2/3–ით იყო ჩაძირული და შემდეგ საწყისი სიჩქარის გარეშე ამოძრავდა ვერტიკალური წრფის გასწვრივ. ჩათვალეთ ზამბარას სიხისტე c-ს ტოილ და დაუშვით, რომ წყლის მოქმედება დაიყვანება დამატებით არქიმედის ძალაზე. განსაზღვრეთ ცილინდრის მოძრაობა წონასწორობის მდებარეობის მიმართ. წყლის კუთრი წონა ჩათვალეთ γ-ს ტოლი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიღოთ კოორდინატთა Oxy სისტემა სათავით ცილინდრის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში. გამოვსახოთ ნახაზზე ცილინდრზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, ზამბარას დრეკადობის ძალა $\vec{F}_{упр}$, არქიმედის ამომგდები ძალა $\vec{F}_B$.

ჩავწეროთ ცილინდრის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - F_{упр} - F_B, \qquad (1)$$

სადაც $F_{упр} = c(f_{cT} + x)$. $F_B = \gamma\pi r^2\left(\frac{1}{2}h + x\right)$.



$\left(\frac{1}{2}h + x\right)$ - ცალინდრის წყალში ჩაძირული ნაწილის სიმაღლე.

სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში $x = 0$. მაშინ

$$F_{упр}(0) + F_B(0) = mg,$$

ანუ

$$cf_{cT} + \gamma\pi r^2\frac{h}{2} = mg.$$

აქედან

$$f_{cT} = \frac{1}{c}\left(mg - \gamma\pi r^2\frac{h}{2}\right).$$

მაშინ

$$F_{упр} = mg - \gamma\pi r^2\frac{h}{2} + cx.$$

(1) განტოლებაში შევიტანოთ $F_{упр}$ და F_B მნიშვნელობები და გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ

$$mx'' = -cx - \gamma\pi r^2 x,$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = 0, \tag{2}$$

სადაც $$k^2 = \frac{c+\gamma\pi r^2}{m} = \frac{g}{P}(c+\gamma\pi r^2).$$

(2) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt, \tag{3}$$

$$x' = -C_1 k\sin kt + C_2 k\cos kt. \tag{4}$$

ინტეგრების მუდმივები განვსაზღვროთ საწყისი პირობების გამოყენებით: როცა $t=0,\quad x_0 = \left(\frac{2}{3}h - \frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{6}h$, $x_0' = 0$. (3) და (4) ფორმულებიდან მივიღებთ: $C_1 = \frac{1}{6}h,\ \ C_2 = 0$.

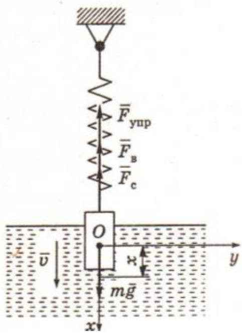
ინტეგრების მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (3) ფორმულაში და ჩავწეროთ ცილინდრის მოძრაობის განტოლება:

$$x = \frac{1}{6}h\cos kt.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = \frac{1}{6}h\cos kt$, სადაც $k^2 = \frac{g}{P}(c+\gamma\pi r^2)$.

ამოცანა 32.56

წინა ამოცანაში განსაზღვრეთ ცილინდრის რხევითი მოძრაობა, თუ წყლის წინაღობა სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია და αv-ს ტოლია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავთვალოთ, რომ წყლის წინაღობის ძალა $\vec F_c$ მიმართულია სიჩქარის საწინააღმდეგოდ (იხ. ნახაზი), შევადგინოთ ცილინდრის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - F_{упр} - F_B - F_c, \tag{1}$$

სადაც $F_{упр} = c(f_{cT} + x)$ - დრეკადობის ძალაა;

$F_B = \gamma\pi r^2 \left(\frac{h}{2} + x\right)$ - არქიმედის ამომგდები ძალა; F_c - წყლის წინაღობის ძალა.

f_{CT}-ს სიდიდის განსაზღვრისათვის ჩავწეროთ სტატიკური წონასწორობის პირობა:

$$cf_{cT} + \gamma\pi r^2 \frac{h}{2} = mg \Rightarrow f_{cT} = \frac{1}{c}\,(mg - \gamma\pi r^2 \frac{h}{2}).$$

მაშინ

$$F_{упр} = mg - \gamma\pi r^2 \frac{h}{2} + cx.$$

(1) განტოლებაში შევიტანოთ f_C, $F_{упр}$ და F_B მნიშვნელობები და გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ

$$mx'' = -cx - \gamma\pi r^2 x - \alpha x',$$

ანუ

$$x'' + 2nx' + k^2 x = 0, \qquad (2)$$

სადაც $n = \frac{\alpha}{2m}$; $k^2 = \frac{c}{m} + \gamma\frac{\pi r^2}{m}$.

იმ პირობიდან, რომ $k > n$, ანუ

$$k_1^2 = k^2 - n^2 = \left(\frac{c}{m} + \gamma\frac{\pi r^2}{m}\right) - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 > 0$$

ცილინდრის მოძრაობა იქნება რხევითი. მაშინ, (2) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$x = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \beta), \qquad (3)$$

სადაც $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$; A, β - ნებისმიერი მუდმივებია.

(3) გამოსახულება დროთი გავაწარმოოთ:

$$x' = -Ane^{-nt}\sin(k_1 t + \beta) + Ak_1 e^{-nt}\cos(k_1 t + \beta). \qquad (4)$$

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0,$ $x_0 = \left(\frac{2}{3}h - \frac{1}{2}h\right) = \frac{h}{6}$, $x_0' = 0$. (3) და (4) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$\frac{h}{6} = A\sin\beta, \qquad (5)$$

$$\frac{nh}{6k_1} = A\cos\beta\,. \qquad (6)$$

(5) და (6) გამოსახულებებიდან

$$tg\beta = \frac{k_1}{n} = \frac{\sqrt{k^2 - n^2}}{n}$$

(5) და (6) გამოსახულებები ავიყვანოთ კვადრატში და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$A = \frac{h}{6}\sqrt{1+\frac{n^2}{k_1^2}} = \frac{h}{6}\sqrt{\frac{k_1^2+n^2}{k_1^2}} = \frac{h}{6}\sqrt{\frac{k^2}{k\ \ -n^2}}\,. \qquad (7)$$

(7) გამოსახულება ჩავსვათ (3) ფორმულაში და ჩავწეროთ ცილინდრის რხევითი მოძრაობის განტოლებას:

$$x = \frac{h}{6}\sqrt{\frac{k^2}{k^2-n^2}}e^{-nt}\sin(\sqrt{k^2-n^2}t+\beta).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> ცილინდრის მოძრაობა იქნება რხევითი, თუ .

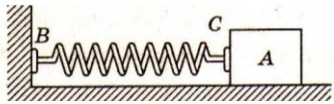
$$\left(\frac{c}{m}+\gamma\frac{\pi r^2}{m}\right)-\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 > 0\,.$$

მაშინ $x = \frac{h}{6}\sqrt{\frac{k^2}{k^2-n^2}}e^{-nt}\sin(\sqrt{k^2-n^2}t+\beta)$,

სადაც $n = \frac{\alpha}{2m}$; $k^2 = \frac{c+\gamma\pi r^2}{m}$; $tg\beta = \frac{k_1}{n} = \frac{\sqrt{k^2-n^2}}{n}$;

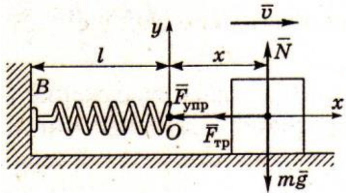
$m = \frac{P}{g}$.

ამოცანა 32.57



0,5 კგ მასის A სხეული დევს არაგლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე და შეერთებულია უძრავი B წერტილის მქონე ზამბარასთან, რომლის BC ღერძი ჰორიზონტალურია. სხეულის სიბრტყესთან ხახუნის კოეფიციენტია 0,2; ზამბარა ისეთია, რომ მისი 1 სმ-თ დაგრძელებისათვის საჭიროა 2,45 ნ ძალა. A სხეული B წერტილიდან გადაწეულია ისე, რომ ზამბარა გაჭიმულია 3 სმ-თ და შემდეგ გაშვებულია საწყისი სიჩქარის გარეშე. იპოვეთ: 1) გაქანებათა რიცხვი, რომელსაც შეასრულებს A სხეული, 2) გაქანების სიდიდე, 3) ყოველი მათგანის T ხანგრძლივობა.

სხეული გაჩერდება იმ მდებარეობაში, სადაც მისი სიჩქარე ნულის ტოლია, ზამბარას დრეკადობის ძალა გაუტოლდება ხახუნის ძალას, ან მასზე ნაკლებია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ჰორიზონტალური მიმართულებით x ღერძის გასწვრივ სხეულის მოძრაობისას (იხ. ნახაზი) მასზე იმოქმედებენ დრეკადობის ძალა $\vec{F}_{\text{упр}}$ და ხახუნის ძალა $\vec{F}_{TP}$, x ღეძის მართობული ურთიერთგამაწონასწორებელი $\vec{N}$ და $m\vec{g}$ ძალები. ხახუნის ძალა ყოველთვის სიჩქარის საწინააღმდეგოდაა მიმართული.

განვიხილოთ A სხეულის რხევის თანმიმდევრობითი ეტაპები, დაწყებული t=0 მომენტიდან, როცა

$$x_0 > 0\,, \quad x_0' = 0\,. \qquad (1)$$

მოძრაობა დაიწყება, თუ $c|x_0| > fmg$.

ჩავწეროთ სხეულის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = F_{\text{упр}} - F_{TP}\,,$$

სადაც $F_{\text{упр}} = cx$; $F_{TP} = fN = fmg$.

მაშინ

$$mx'' = -cx - fmg\,,$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = fg \qquad (2)$$

სადაც $\quad k^2 = \dfrac{c}{m}$.

(2) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$x = \bar{x} + x*,$$

სადაც

$$\bar{x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad x^* = A = \frac{fg}{k^2}.$$

მაშინ

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{fg}{k^2} \tag{3}$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{4}$$

საწყისი (1) პირობების გამოყენებით: (3) და (4) ფორმულებიდან მივიღებთ: $C_1 = x_0 - \dfrac{fg}{k^2}$, $\quad C_2 = 0$.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (3) და (4) ფორმულებში, მივიღებთ:

$$x = \frac{fg}{k^2} + \left(x_0 - \frac{fg}{k^2}\right)\cos kt, \tag{5}$$

$$x' = -k\left(x_0 - \frac{fg}{k^2}\right)\sin kt.$$

თუ $x_0' < 0$, მაშინ $\sin kt > 0$, ამიტომ $0 < t < \dfrac{\pi}{k}$. როცა

$$t = t_1 = \frac{\pi}{k}: \; x_1' = 0, \quad x_1 = -x_0 + 2\frac{fg}{k^2}.$$

მოძრაობა გრძელდება, სანამ სრულდება უტოლობა

$$c|x_1| > fmg$$

ანუ

$$\left|-x_0 + 2\frac{fg}{k^2}\right| > \frac{fg}{k^2},$$

რადგანაც $\quad \dfrac{mg}{c} = \dfrac{g}{k^2}$.

ამ შემთხვევაში $x_1 < 0$ და სხეულის მოძრაობის განტოლებას ასეთი სახე აქვს:

$$mx'' = -cx - fmg\,,$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = fg\,, \qquad (6)$$

ამასთანავე, საწყისი პირობებია: $t = t_1 \quad x = x_1\,,\ x_1' = 0\,.$ (7)

ანალოგიურად, როცა $t_1 \le t \le t_2$, მივიღებთ

$$x = -\frac{fg}{k^2} + \left(x_1 + \frac{fg}{k^2}\right)\cos k(t - t_1)\,,$$

ანუ, თუ შევიტანთ t_1 და x_1 მნიშვნელობებს:

$$x = -\frac{fg}{k^2} - \left(\frac{3fg}{k^2} - x_0\right)\cos kt\,.$$

თუ $t_2 = \dfrac{2\pi}{k}$ მომენტში $x' = 0$, მაშინ

$$x_2 = -x_0 - \frac{4fg}{k^2}\,.$$

მოძრაობა არ შეწყდება თუ $\left|x_2\right| > \dfrac{fg}{k^2}$ და ა. შ.

მაშასადამე, წონასწორობის მდებარეობიდან აბსოლუტური მნიშვნელობით მაქსიმალური მიმდევრობითი გადახრები მოხდება მაშინ, როცა:

$$x_0\,,\ x_1 = -x_0 + \frac{2fg}{k^2}\,,\ x_2 = -x_0 - \frac{4fg}{k^2}\,,\ x_3 = -x_0 + \frac{6fg}{k^2}\,,\ \ldots$$

,

$$x_n = (-1)^n\left(x_0 - \frac{2nfg}{k^2}\right), \qquad (8)$$

ხოლო, სხეულიოს გაჩერების მათი შესაბამისი მომენტებია:

$$t = 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \ldots, \frac{n\pi}{k}\,.$$

თუ $\left|x_n\right| < \dfrac{fg}{k^2}$, მაშინ მოძრაობა შეჩერდება.

სხეულის რხევის პერიოდია

$$T^* = t_n - t_{n-2} = \frac{2\pi}{k}\,,$$

ე. ი. ტოლია რხევის პერიოდისა, როცა არ არსებობენ ხახუნის ძალები. მოცემულ შემთხვევაში

$$c = \frac{2{,}45}{0{,}01} = 245 \text{ (ნ/მ)},$$

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{245}{0{,}5} = 490 \text{ (რად/წმ}^2\text{)},$$

$$\frac{fg}{k^2} = \frac{0{,}2 \cdot 9{,}8 \cdot 10^2}{490} = 0{,}4 \text{ (სმ)}.$$

ვიპოვით:

1) A სხეულის მიერ შესრულებულ გაქანებათა n რიცხვს:

$$x_0 - \frac{2nfg}{k^2} < \frac{fg}{k^2} \Rightarrow 2n+1 = \frac{x_0 fk^2}{g} \Rightarrow 2n+1 = \frac{3}{0{,}4} \Rightarrow n_{\min} = 3{,}25. \text{ ე.ი. } n = 4;$$

2) გაქანებათა სიდიდე:

$$A_1 = |x_0| + |x_1| = 3{,}0 + |-3{,}0 + 2 \cdot 0{,}4| = 3{,}0 + 2{,}2 = 5{,}2 \text{ (სმ)},$$

$$A_2 = |x_1| + |x_2| = 2{,}2 + |3{,}0 - 4 \cdot 0{,}4| = 2{,}2 + 1{,}4 = 3{,}6 \text{ (სმ)},$$

$$A_3 = |x_2| + |x_3| = 1{,}4 + |-3{,}0 + 6 \cdot 0{,}4| = 1{,}4 + 0{,}6 = 2{,}0 \text{ (სმ)},$$

$$A_4 = |x_3| = |3{,}0 - 8{,}0 \cdot 0{,}4| = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4 \text{ (სმ)};$$

3) ერთი გაქანების ხანგრძლივობა

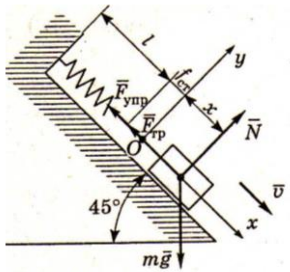
$$T = \frac{\pi}{k} = \frac{3{,}14}{22{,}14} = 0{,}14 \text{ (წმ)}.$$

__პ ა ს უ ხ ი:__ 1) 4 გაქანება; 2) 5,2 სმ, 3,6 სმ, 2 სმ, 0,4 სმ. 3) T=0,14 წმ.

ამოცანა 32.58

არაგლუვ დახრილ სიბრტყეზე მდებარე M=20 კგ მასის ტვირთი მიამაგრეს დაუჭიმავ ზამბარაზე და მას მიანიჭეს ქვევით მიმართული საწყისი $v_0 = 0{,}5$ მ/წმ სიჩქარე. სხეულის სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი $f = 0{,}08$; ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტი $c = 20$ ნ/სმ. დახრილი სიბრტყე ჰორიზონტთან ქმნის $\alpha = 45^0$ კუთხეს. განსაზღვრეთ: 1) რხევის პერიოდი, 2) ტვირთის მიერ წონასწორობის მდგომარეობიდან მაქსიმალურ გადახრათა რიცხვი, 3) ამ გადახრათა სიდიდე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. კოორდინატთა Oxy სისტემის სათავე შევუთავსოთ ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობას (იხ. ნახაზი). ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ჩავწეროთ x ღერძზე გეგმილებში:



$$mx'' = mg\sin 45^0 - F_{упр} \pm F_{TP},$$

სადაც $F_{упр} = c(f_{cT} + x)$;

$$F_{TP} = fN = fmg\cos 45^0.$$

სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში

$$mg\sin 45^0 = cf_{cT}.$$

მაშინ

$$mx'' = -cx \pm fmg\cos 45^0,$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = \pm fg\cos 45^0. \qquad (1)$$

სხეულის ქვევით მოძრაობისას (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$x'' + k^2 x = -fg\cos 45^0. \qquad (2)$$

(2) განტოლების ამოხსნაა

$$x = A_1 \sin(kt - \beta) - \frac{fg}{k^2}\cos 45^0. \qquad (3)$$

$$x' = A_1 k\cos(kt - \beta), \qquad (4)$$

სადაც A_1 - რხევის ამპლიტუდაა.

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t=0,\quad x_0=-f_{cT}$, $x_0'=v_0$,
(3) და (4) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$-f_{cT}=A_1\sin\beta_1-\frac{fg}{k^2}\cos 45^0\Rightarrow\frac{-fg}{k^2}\cos 45^0+f_{cT}=A_1\sin\beta_1 .$$

$$v_0=A_1k\cos\beta_1\Rightarrow\frac{v_0}{k}=A_1\cos\beta_1 .$$

აქედან

$$A_1=\sqrt{\left(-\frac{fg}{k^2}\cos 45^0+f_{cT}\right)^2+\left(\frac{v_0}{k}\right)^2} ,$$

$$tg\beta_1=\frac{-fg\cos 45^0+k^2f_{cT}}{kv_0} .$$

გაჩერების მომენტში $x'=0$, მაშასადამე,

$$\cos(kt_1-\beta_1)=0\Rightarrow kt_1-\beta_1=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t_1=\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{2}+\beta_1\right),$$

$$x_1=A_1\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta_1-\beta_1\right)-\frac{fg}{k^2}\cos 45^0=A_1-\frac{fg}{k^2}\cos 45^0 .$$

გამოვთვალოთ რხევათა სიხშირე

$$k^2=\frac{c}{m}=\frac{2000}{20}=100,\qquad k=10 \text{ რად/წმ},$$

და გამოვიანგარიშოთ x_1 :

$$f_{cT}-\frac{fg}{k^2}\cos 45^0=\frac{mg\sin 45^0}{c}-\frac{fg}{k^2}\cos 45^0=$$

$$=\frac{g}{k^2}(\sin 45^0-f\cos 45^0)=\frac{g}{\sqrt{2}k^2}(1-f)=\frac{980\cdot 0{,}92}{1{,}414\cdot 100}=6{,}38 \text{ (სმ)};$$

$$\frac{v_0}{k}=\frac{50}{10}=5 \text{ (სმ)};$$

$$A_1=\sqrt{6{,}38^2+5^2}=8{,}1 \text{ (სმ)};$$

$$\frac{fg}{k^2}\cos 45^0=\frac{0{,}08\cdot 980\cdot 0{,}707}{100}=0{,}55 \text{ (სმ)},$$

$$x_1=8{,}10-0{,}55=7{,}55 \text{ (სმ)}.$$

როდესაც სხეული მოძრაობს დახრილ სიბრტყეზე ზევით, მაშინ

(1) დიფერენციალური განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$x'' + k^2 x = fg\cos 45^0 \qquad (5)$$

იმ პირობით, რომ $cx_1 > mg(\sin 45^0 + f\cos 45^0)$.

მაშინ, (5) განტოლების ამოხსნაა

$$x = A_2 \sin[k(t - t_1) - \beta_2] + \frac{fg}{k^2}\cos 45^0,$$

$$x' = A_2 k\cos[k(t - t_1) - \beta_2].$$

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = t_1, \quad x_1 = 7{,}55, \quad x_1' = 0$,

მივიღებთ: $$x_1 = -A_2 \sin\beta_2 + \frac{fg\cos 45^0}{k^2},$$

$$0 = A_2 k\cos\beta_2,$$

საიდანაც: $$A_2 = \frac{fg\cos 45^0}{k^2} - x_1, \quad \beta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

გაჩერების მომენტში $t = t_2$ და $x_2' = 0$, მაშასადამე

$$\cos[k(t_2 - t_1) - \beta_2] = \sin k(t_2 - t_1) = 0,$$

$$k(t_2 - t_1) = \pi \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{\pi}{k}.$$

მაშინ $$x_2 = A_2 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{fg}{k^2}\cos 45^0 = \frac{2fg}{k^2}\cos 45^0 - x_1 =$$

$$= 2\cdot 0{,}55 - 7{,}55 = -6{,}45 \text{ (სმ)}.$$

n-ური რხევისათვის მივიღებთ ემპირიულ ფორმულას:

$$x_{n-1} = (-)^{n-1}[-\frac{2(n-1)fg}{k^2}\cos 45^0 + x_1], \qquad (6)$$

$n = 1,2,3,\ldots$

1) ვიპოვოთ რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\cdot 3{,}14}{10} = 0{,}628 \text{ (წმ)}.$$

2) ვინაიდან ერთი გაქანების შემდეგ ამპლიტუდა მცირდება 1,10 სმ-თ, ხოლო „უძრაობის არეს" აქვს 0,55 სმ რადიუსი, ამიტომ

7,55-1,1(n-1) < 0,55,

საიდანაც $$n = \frac{7{,}55 - 0{,}55}{1{,}10} + 1 = 7\,.$$

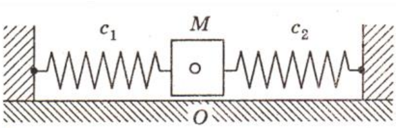
3) (6) ფორმულით განვსაზღვროთ უკანასკნელი (n=7) გადახრა

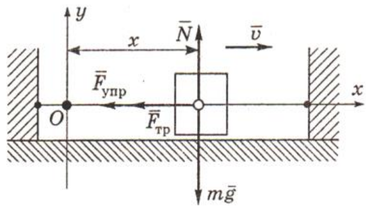
$$x_7 = (-)^7[x_1 - \frac{2(7-1)fg}{k^2}] = 7{,}55 - 6{,}60 = 0{,}95 \text{ (სმ).}$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 1) $T = 0{,}628$ წმ; 2) 7 გადახრა; 3) 7,55 სმ; 6,45 სმ; 5,35 სმ; 4,25 სმ; 3,15 სმ; 2,05 სმ; 0,95 სმ.

ამოცანა 32.59

M=0,5 კგ მასის სხეული ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე ასრულებს რხევით მოძრაობას სხეულზე ერთი ბოლოთი მიმაგრებული ორი ერთნაირი ზამბარის მოქმედებით, რომელთა მეორე ბოლოები დამაგრედბულია უძრავ დგარზე; ზამბარების ღერძები მდებარეობენ ერთ ჰორიზონტალურ წრფეზე. ზამბარების სიხისტის კოეფიციენტებია $c_1 = c_2 = 1{,}225$ ნ/სმ, სხეულის მოძრაობისას ხახუნის კოეფიციენტია $f = 0{,}2$, უძრაობისას $f_0 = 0.25$. საწყის მომენტში სხეული შუა 0 მდებარეობიდან გადაწეული იყო მარჯვნივ $x_0 = 3$ სმ მდებარეობაში და გაშვებული უსაწყისო სიჩქარით. იპოვეთ: 1) სხეულის შესაძლო წონასწორობის არე – „უძრაობის არე", 2) სხეულის გაქანებების სიდიდე, 3) მისი გაქანებების რიცხვი, 4) თითოეული მათგანის ხანგრძლივობა, 5) სხეულის მდებარეობა რხევის შემდეგ.





ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ ეკვივალენტური ზამბარის სიხისტის $c_{\text{эли}}$ კოეფიციენტი

$$c_{ekv} = c_1 + c_2\,.$$

ორი ზამბარის ერთი ეკვივალენტური ზამბარით შეცვლის შემდეგ ეს ამოცანა ანალოგიურია 32.57 ამოცანისა, ამიტომ, ვისარგებლოთ მისი ამოხსნის შედეგებით.

სხეულის მოძრაობის დიფარენციალურ განტოლებას x ღერძზე გეგმილებში ასეთი სახე აქვს [იხ. 32.57 ამოცანის ამოხსნა, (2) ფორმულა]:

$$x'' + k^2 x = fg$$

სადაც $k^2 = \frac{c_{ekv}}{m} = \frac{245}{0,5} = 490$ (რად/წმ²).

1) ვიპოვოთ „უძრაობის არე". წონასწორობის მდგომარეობაში

$$\frac{f_0 g}{k^2} = \frac{0,25 \cdot 9,80}{490} = 0,5 \text{ (სმ)},$$

მაშასადამე,

- 0,5 სმ < x < 0,5 სმ – ეს არის „უძრაობის არე".

2) განვსაზღვროთ აბსოლუტური მნიშვნელობით სხეულის მაქსიმალური მიმდევრობითი გადახრები წონასწორობის მდებარეობიდან 32.57 ამოცანის ამოხსნაში (8) ფორმულით:

$$x_0 = 3,0 \text{ სმ},$$

$$x_1 = -x_0 + \frac{2fg}{k^2} = -3 + 2 \cdot 0,4 = -2,2 \text{ სმ},$$

$$x_2 = x_0 - \frac{4fg}{k^2} = 3 - 4 \cdot 0,4 = 1,4 \text{ სმ},$$

$$x_3 = -x_0 + \frac{6fg}{k^2} = -3 + 6 \cdot 0,4 = -0,6 \text{ (სმ)},$$

$$x_4 = x_0 - \frac{8fg}{k^2} = 3 - 8 \cdot 0,4 = -2, \text{ (სმ)}.$$

ვიპოვოთ რხევის ამპლიტუდები:

$$A_1 = |x_0| + |x_1| = 3,0 + 2,2 = 5,2 \text{ (სმ)},$$

$$A_2 = |x_1| + |x_2| = 2,2 + |3,0 - 4 \cdot 0,4| = 2,2 + 1,4 = 3,6 \text{ (სმ)},$$

$$A_3 = |x_2| + |x_3| = 1,4 + |-3,0 + 6 \cdot 0,4| = 1,4 + 0,6 = 2,0 \text{ (სმ)},$$

$$A_4 = |x_3| - |x_4| = 0,6 - 0,2 = 0,4 \text{ (სმ)}.$$

3) გაქანებათა რიცხვი ოთხის ტოლია (იხ. 32.57 ამოცანის ამოხსნა).

4) ერთი გაქანების ხანგრძლივობა

$$T = \frac{\pi}{k} = \frac{3,14}{22,14} = 0,14 \text{ (წმ)}.$$

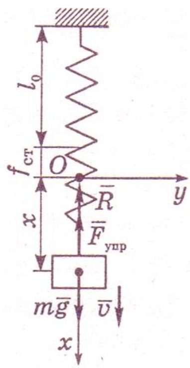
5) გაჩერების შემდეგ სხეულის კოორდინატი $x = x_4 = -0,2$ (სმ).

პ ა ს უ ხ ი: 1) - 0,5 სმ < x < 0,5 სმ; 2) 5,2 სმ, 3,6 სმ, 2 სმ, 0,4 სმ.
3) 4 გაქანება; 4) T=0,14 წმ. 5) $x = -0,2$ სმ.

ამოცანა 32.60

c სიხისტის ზამბარაზე დაკიდებული m მასის სხეული წინაღობის R ძალის გავლენით, რომელიც სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია $(R = \alpha v)$ ასრულებს მილევად რხევას. განსაზღვრეთ, მილევადი რხევის T პერიოდი რამდენჯერ მეტია არამილევადი რხევის T_0 პერიოდზე, თუ შეფარდება $n/k = 0,1$ $[k^2 = c/m,\ \ n = \alpha/(2m)]$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. კოორდინატთა Oxy სისტემის სათავე შეუთავსოთ სხეულის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობას. ნახაზზე ვაჩვენოთ სხეულზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, დრეკადობის ძალა $\vec{F}_{ypr}$, წინაღობის ძალა $\vec{R}$.



ტვირთის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება ჩავწეროთ x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - F_{упр} - R, \qquad (1)$$

ანუ

$$mx'' = mg - c(f_{cT} + x) - \alpha x',$$

სადაც $$f_{cT} = \frac{mg}{c}.$$

მაშინ $$mx'' = mg - cx - mg - \alpha x'.$$

გარდაქმნის შემდეგ (1) განტოლება ასე ჩავწეროთ

$$x'' + 2nx' + k^2 x = 0, \qquad (2)$$

სადაც $n = \dfrac{\alpha}{2m}; k^2 = \dfrac{c}{m}$.

როცა $k > n$, მაშინ (2) განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t),$$

სადაც $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ - რხევის წრიული სიხშირეა.

მილევადი რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k_1},$$

არამილევადი რხევის პერიოდი

$$T_0 = \frac{2\pi}{k}.$$

მაშინ

$$\frac{T}{T_0} = \frac{k}{k_1} = \frac{k}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{k^2}}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 = 1{,}005 \cdot$$

აქედან $T = 1{,}005 T_0$.

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $T = 1{,}005 T_0$.

ამოცანა 32.61

წინა ამოცანის პირობებში განსაზღვრეთ, რამდენი სრული რხევის შემდეგ შემცირდება ამპლიტუდა ასჯერ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ერთი სრული რხევისას ამპლიტუდე შემცირდება e^{nT} – ჯერ. თუ ამპლიტუდა შემცირდა 100-ჯერ, მაშინ

$$A_m = A_1 e^{-NnT_1} = A_1 / 100.$$

აქედან

$$e^{-NnT_1} = 1 \cdot 10^{-2}. \qquad (1)$$

(1) ტოლობის გალოგარითმებით მივიღებთ

$$NnT_1 = \ln 100$$

ანუ

$$N = \frac{\ln 100}{nT_1}, \qquad (2)$$

სადაც

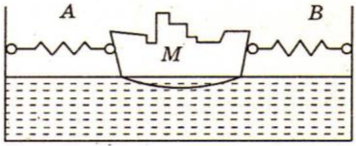
$$nT_1 = n\frac{2\pi}{k_1} = 2\pi \frac{n}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 1}} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{\sqrt{10^2 - 1}} = 0{,}63.$$ ეს

მნიშვნელობა ჩავსვათ (2) ფორმულაში

$$N = \frac{\ln 100}{0{,}63} \approx 7{,}5.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 7,5 სრული რხევის შემდეგ.

ამოცანა 32.62



გემის მოდელის საკმაოდ მცირე სიჩქარით მოძრაობისადმი წყლის წინაღობის განსაზღვრისათვის M მოდელი გაუშვეს ჭურჭელში საცურაოდ, რომელის ცხვირი და კიჩო მიაბეს ორი ერთნაირი A და B ზამბარით, რომელთა დაჭიმულობის ძალები მათი დაგრძელების პროპორციულია. დაკვირვების შედეგებმა აჩვენა, რომ მოდელის გადახრა წონასწორობის მდებარეობიდან ყოველი გაქანების შემდეგ მცირდება და შეადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის მნიშვნელი 0,9 ტოლია, ხოლო ყოველი გაქანების ხანგრძლივობა $T = 0{,}5$ წმ. განსაზღვრეთ მოდელის მასის ყოველ კილოგრამზე მოსული წყლის წინაღობის R ძალა მისი სიჩქარის 1 მ/წმ-ს დროს, თუ დაუშვებთ, რომ წყლის წინაღობა მისი სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ერთი სრული რხევისას ამპლიტუდა შემცირდება 0,9-ჯერ, ე. ი.

$$A_1 = A_0 e^{-nT} = 0{,}9 A_0$$

აქედან

$$e^{-nT} = 0{,}9 = \left(\frac{10}{9}\right)^{-1}.$$

ამ ტოლობის გალოგარითმებით მივიღებთ

$$nT = \ln\frac{10}{9}$$

ანუ

$$n = \frac{1}{T}\ln\frac{10}{9}. \qquad (1)$$

მეორეს მხრივ

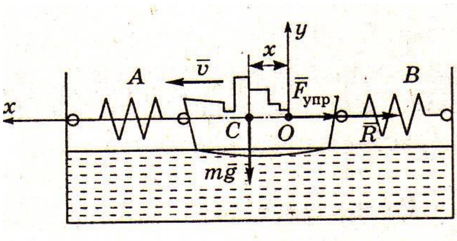
$$R = \alpha v = 2nmv.$$

როცა $m=1$ კგ და $v=1$ მ/წმ, (1) გამოსახულების თანახმად

$$R=2n=\frac{2}{T}\ln\frac{10}{9}=\frac{2}{0{,}5}\ln\frac{10}{9}=0{,}42 \text{ (ნ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $R=0{,}42$ ნ.

ამოცანა 32.63



წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ მოდელის მოძრაობის განტოლება, თუ საწყის მომენტში A ზამბარა იყო გაჭიმული, ხოლო B ზამბარა შეკუმშული $\Delta l=4$ სმ სიდიდით და მოდელი გაშვებული იყო საწყისი სიჩქარის გარეშე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოდელის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება ჩავწეროთ x ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$mx''=F_{упр}-R,$$

სადაც $F_{упр}=-cx; R=\alpha v=\alpha x'$.

მაშინ

$$mx''=-\alpha x'-cx,$$

ანუ

$$x''+2nx'+k^2x=0, \qquad (1)$$

სადაც $n=\dfrac{\alpha}{2m}; k^2=\dfrac{c}{m}$.

როცა $k>n$, მაშინ (1) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x=e^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t), \qquad (2)$$

სადაც $k_1=\sqrt{k^2-n^2}$ - რხევის წრიული სიხშირეა.

გავაწარმოოთ (2) გამოსახულება დროთი, მივიღებთ

$$x'=-ne^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t)+e^{-nt}(-C_1k_1\sin k_1t+C_2k_1\cos k_1t).$$
(3)

გამოვიყენოთ მოძრაობის საწყისი პირობები: $t=0, x_0=\Delta l=4$ სმ,

$x_0' = 0$; (2) და (3) ფორმულებიდან ვიპოვით: $C_1 = 4, C_2 = \dfrac{4n}{k_1}$.

მოცემულ შემთხვევაში [იხ. 32.62 ამოცანის ამოხსნა (1) ფორმულა]

$$n = \frac{1}{T}\ln\frac{10}{9} = 0{,}21 \text{ (რად/წმ).}$$

მაშინ, რადგანაც $T_1 = 2T$,

$$k_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{3{,}14}{0{,}5} = 6{,}28 \text{ (რად/წმ).}$$

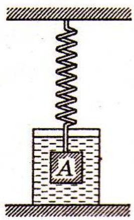
$$C_2 = \frac{4 \cdot 0{,}21}{6{,}28} = 0{,}134 \text{ (სმ).}$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობა ჩავსვათ (2) ფორმულაში დაჩავწეროთ მოდელის მოძრაობის განტოლება

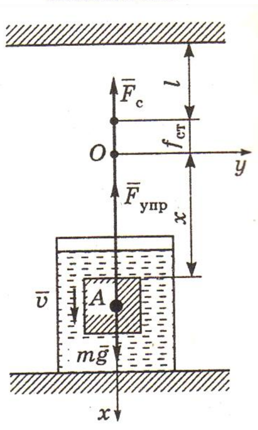
$$x = e^{-0{,}21t}(4\cos 6{,}28t + 0{,}134\sin 6{,}28t).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = e^{-0{,}21t}(4\cos 6{,}28t + 0{,}134\sin 6{,}28t)$ სმ.

ამოცანა 32.64



სითხის სიბლანტის განსაზღვრისათვის კულონმა გამოიყენა შემდეგი მეთოდი: ზამბარაზე დაკიდა თხელი ფირფიტა A და აიძულა იგი შეესრულებინა რხევა ჯერ ჰაერში და შემდეგ იმ სითხეში, რომლის სიბლანტის გაზომვა იყო საჭირო, ამასთანავე, ადგენდა ერთი გაქანების ხანგრძლობას: T_1 - პირველ შემთხვევაში და T_2 - მეორე შემთხვევაში. ფირფიტასა და სითხეს შორის ხახუნის ძალა შეიძლება გამოისახოს ფორმულით $2S\mu v$, სადაც $2S$ - ფირფიტის ზედაპირია, v - მისი სიჩქარე, μ - სიბლანტის კოეფიციენტი. ფირფიტასა და ჰაერს შორის ხახუნი უგულებელყავით და განსაზღვრეთ μ ცდით მიღებული T_1 და T_2 სიდიდეებით, თუ ფირფიტის მასა m-ს ტოლია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ამომგდები ძალა უგულებელყავით და განვიხილოთ ფირფიტის

მოძრაობა სითხეში მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალით, დრეკადობის $\vec{F}_{ypr}$ ძალით და წინაღობის $\vec{F}_c$ ძალით.

ფირფიტის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება ჩავწეროთ X ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - F_{упр} - F_c,$$

ანუ

$$mx'' = mg - c(f_{cT} + x) - \alpha v.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $v = x'$, $f_{cT} = \dfrac{mg}{c}$. მივიღებთ

$$mx'' = mg - c\frac{mg}{c} - mg - \alpha x'.$$

ანუ $$x'' + 2nx' + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

სადაც n- მილევადობის კოეფიციენტია, $n = \dfrac{\alpha}{2m} = \dfrac{2S\mu}{2m} = \dfrac{S\mu}{m}; k^2 = \dfrac{c}{m}$.

(1) განტოლება – მილევადი რხევის დიფერენციალური განტოლებაა.

თუ ფირფიტა მოძრაობს ჰაერში, მაშინ $n = 0$ და (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$x'' + k^2 x = 0.$$

მილევადობის კოეფიციენტის გამოსახულებიდან ვიპოვით სითხის სიბლანტის კოეფიციენტს

$$\mu = \frac{mn}{S} = \frac{m}{S}\sqrt{k^2 - k_1^2},$$

სადაც $n = \sqrt{k^2 - k_1^2}$.

ვინაიდან

$$k_1 = \frac{2\pi}{2T_2} = \frac{\pi}{T_2},$$

$$k = \frac{2\pi}{2T_1} = \frac{\pi}{T_1},$$

მიტომ

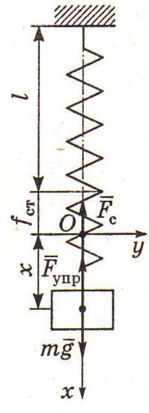
$$\mu = \frac{\pi m}{S}\sqrt{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}} = \frac{\pi m}{ST_1T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2}\ .$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\mu = \dfrac{\pi m}{ST_1T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2}\ .$

ამოცანა 32.65

5 კგ მასის სხეული ჩამოკიდებულია ზამბარაზე, რომლის სიხისტის კოეფიციენტია 2 კნ/მ. გარემოს წინაღობა სიჩქარის პროპორციულია. ოთხი რხევის შემდეგ ამპლიტუდა 12-ჯერ შემცირდა. განსაზღვრეთ რხევის პერიოდი და ლოგარითმული დეკრემენტი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. კოორდინატთა Oxy სისტემის სათავე შეუთავსოთ სხეულის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობას. ნახაზზე ვაჩვენოთ სხეულზე მოქმედი ძალები ნებისმიერ მდებარეობაში: სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, ზამბარის დრეკადობის ძალა $\vec{F}_{ypr}$, გარემოს წინაღობის ძალა $\vec{F}_c$.



ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ჩავწეროთ x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - F_{упр} - F_c .$$

იმის გათვალისწინებით, რომ

$$F_{ypr} = c(f_{cT} + x),\ f_{cT} = \frac{mg}{c}.\ F_c = \alpha x' ,$$

განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$mx'' = mg - c\frac{mg}{c} - mg - \alpha x' .$$

ანუ $$x'' + 2nx' + k^2 x = 0 ,$$
(1)

სადაც $n = \dfrac{\alpha}{2m}$ - მილევადობის კოეფიციენტია, $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ - თავისუფალი რხევის სიხშირეა.

ვიპოვოთ $$k = \sqrt{\frac{2\cdot 10^3}{5}} = 20$$ (რად/წმ).

რადგანაც მოძრაობა მილევადია და რხევითი ხასიათისაა $(k > n)$ ამიტომ

$$A_9 = A_1 e^{-8\frac{nT}{2}},$$

სადაც გათვალისწინებულია, რომ ოთხი რხევა შეესაბამება რვა გაქანებას.

ამოცანის პირობის თანახმად $A_9 = \dfrac{1}{12} A_1$, მაშინ

$$\frac{1}{12} A_1 = A_1 e^{-8\frac{nT}{2}}.$$

გავალოგარითმოთ ეს გამოსახულება, მივიღებთ

$$8\lambda = \ln 12,$$

სადაც λ - რხევის ლოგარითმული დეკრემენტია.

აქედან

$$\lambda = \frac{nT}{2} = \frac{1}{8}\ln 12 = 0{,}3106.$$

მეორეს მხრივ, მილევადობის კოეფიციენტი

$$n = \frac{2\lambda}{T}.$$

მაშინ

$$k_1^2 = k^2 - n^2 \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = k^2 - \frac{4\lambda^2}{T^2} \Rightarrow T = \frac{2}{k}\sqrt{\pi^2 + \lambda^2} =$$

$$= \frac{2}{20}\sqrt{3{,}14^2 + 0{,}316^2} = 0{,}316 \text{ (წმ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $T = 0{,}316$ წმ; $\lambda = \dfrac{nT}{2} = 0{,}3106.$

ამოცანა 32.66

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ სხეულის მოძრაობის განტოლება, თუ იგი დაკიდეს გაუჭიმავი ზამბარის ბოლოზე და გაუშვეს საწყისი სიჩქარის გარეშე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ტვირთის მოძრაობა აღიწერება 32.65 ამოცანის ამოხსნისას მიღებული დიფერენციალური განტოლებით:

$$x'' + 2nx' + k^2 x = 0 . \qquad (1)$$

აგრეთვე, გამოთვლილი იყო, რომ $k = 20$ (რად/წმ),

$$n = \frac{2\lambda}{T} = \frac{2 \cdot 0{,}3016}{0{,}316} = 1{,}97$$ (რად/წმ), ე. ი. $n < k.$

(1) განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \qquad (2)$$

სადაც $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{20^2 - 1{,}97^2} = 19{,}9$.

გავაწარმოოთ (2) გამოსახულება დროთი, მივიღებთ

$$x' = -ne^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + e^{-nt}(-C_1 k_1 \sin k_1 t + C_2 k_1 \cos k_1 t) . \qquad (3)$$

მოძრაობის საწყისი პირობები:ს თანახმად $t = 0, x_0 = -f_{cT}$, $x_0' = 0$; (2) და (3) ფორმულებიდან ვიპოვით:

$$C_1 = -\frac{mg}{c} = -\frac{5 \cdot 980}{2000} = -2{,}45 \text{ (სმ)}.$$

$$0 = -nC_1 + C_2 k_1 ,$$

მაშინ
$$C_2 = \frac{nC_1}{k_1} = \frac{1{,}97(-2{,}45)}{19{,}9} = -0{,}242 \text{ (სმ)}.$$

.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობა ჩავსვათ (2) ფორმულაში დაჩავწეროთ მოდელის მოძრაობის განტოლება

$$x = e^{-1{,}97t}(-2{,}45 \cos 19{,}9t + 0{,}242 \sin 19{,}9t) .$$

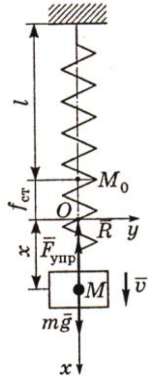
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = e^{-1{,}97t}(-2{,}45 \cos 19{,}9t + 0{,}242 \sin 19{,}9t)$ სმ.

ამოცანა 32.67

6 კგ მასის სხეული, რომელიც ჩამოკიდებულია ზამბარაზე, წინაღობის გარეშე ირხევა $T = 0{,}4\pi$ წმ პერიოდით, ხოლო, თუ მოქმედებს სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციული წინაღობა, მაშინ $T = 0{,}5\pi$ წმ პერიოდით. იპოვეთ წინაღობის ძალის $R = -\alpha v$ გამოსახულებაში პროპორციულობის კოეფიციენტი α და განსაზღვრეთ სხეულის მოძრაობა, თუ საწყის მომენტში ზამბარა წონასწორობის მდგომარეობიდან გაჭიმული იყო 4 სმ-თ და სხეული

მიშვებული იყო თავის ნებაზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება სხეულზე სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალის, ზამბარის დრეკადობის $\vec{F}_{ypr}$ ძალის და წინაღობის $\vec{R}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი) x ღერძზე გეგმილებში:



$$mx'' = mg - F_{y\pi p} - R,$$

ანუ $$mx'' = mg - c(f_{cT} + x) - \alpha v\ ,$$

სადაც $$f_{cT} = \frac{mg}{c};\ \ v = x'.$$

მაშინ
$$mx'' = mg - mg - cx - \alpha x'.$$

ანუ $$x'' + 2nx' + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

სადაც $n = \frac{\alpha}{2m}$ - მილევადობის კოეფიციენტია, $k^2 = \frac{c}{m}$ - თავისუფალი რხევის სიხშირეა.

(1) განტოლება – ეს არის მილევადი რხევის დიფერენციალური განტოლება.

თუ $R = 0$, მაშინ მილევადობის კოეფიციენტი $n = 0$ და (1) განტოლება ასეთი სახისაა

$$x'' + k^2 x = 0. \qquad (2)$$

(2) განტოლება – ჰარმონიული რხევის დიფერენციალური განტოლებაა.

ამოცანის პირობის მიხედვით წინაღობის არ არსებობის შემთხვევაში

$$T = \frac{2\pi}{k} = 0{,}4\pi\,,$$

საიდანაც

$$k = \frac{2\pi}{0{,}4\pi} = 5 \text{ (რად/წმ).}$$

წინაღობის მოქმედებისას

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 0{,}5\pi\,,$$

საიდანაც

$$k_1 = \frac{2\pi}{0{,}5\pi} = 4 \text{ (რად/წმ) .}$$

მეორეს მხრივ

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} \Rightarrow n = \sqrt{k^2 - k_1^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

(რად/წმ).

ვიცით n-ს მნიშვნელობა, ვიპოვით α კოეფიციენტს:

$$\alpha = 2mn = 2 \cdot 6 \cdot 3 = 36 \text{ (ნ·წმ/მ).}$$

(1) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას აქვს ასეთი სახე

$$x = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha), \tag{3}$$

$$x' = -Ane^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha) + Ak_1 e^{-nt}\cos(k_1 t + \alpha). \tag{4}$$

გამოვიყენოთ მოძრაობის საწყისი პირობები: $t = 0, x_0 = 4$ სმ, $x_0' = 0$; მაშინ, (3) და (4) ფორმულებიდან

$$4 = A\sin\alpha, \tag{5}$$

$$\frac{4n}{k_1} = A\cos\alpha. \tag{6}$$

(5) და (6) განტოლებები ავიყვანოთ კვადრატში და შევკრიბოთ; ვინაიდან $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, მივიღებთ

$$A = 4\sqrt{1 + \frac{n^2}{k_1^2}} = 4\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4^2}\right)} = 5 \text{ (სმ) .}$$

გავყოთ (5) განტოლება (6) განტოლებაზე, მივიღებთ

$$tg\alpha = \frac{k_1}{n} = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = arctg\frac{4}{3}.$$

ჩავსვათ A და α-ს მნიშვნელობები (3) ფორმულაში, მივიღებთ სხეულის მოძრაობის გაბტოლებას

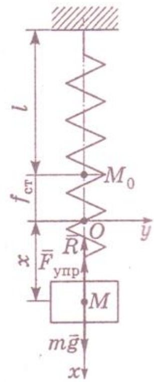
$$x = 5e^{-3t}\sin(4t + arctg\frac{4}{3}).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\alpha = 36$ (ნ·წმ/მ); $x = 5e^{-3t}\sin(4t + arctg\frac{4}{3})$ სმ.

ამოცანა 32.68

1,96 კგ მასის სხეული ჩამოკიდებულია ზამბარაზე, რომელიც 4,9 ნ ძალის მოქმედებით იჭიმება 10 სმ-ზე; მოძრაობისას სხეული განიცდის სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულ წინაღობას, რომელიც 1 მ/წმ სიჩქარის დროს 19,6 ნ-ს ტოლია. საწყის მომენტში ზამბარა წონასწორობის მდგომარეობიდან გაჭიმული იყო 5 სმ-თ და სხეულმა დაიწყო მოძრაობა საწყისი სიჩქარის გარეშე. იპოვეთ ამ მოძრაობის კანონი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგიოთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება სხეულზე სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალის, ზამბარის დრეკადობის $\vec{F}_{ypr}$ ძალის და წინაღობის $\vec{R}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი) x ღერძზე გეგმილებში (კოორდინატთა სათავე - წონასწორობის მდგომარეობაში):



$$mx'' = mg - F_{упр} - R,$$

სადაც $\quad F_{ypr} = c(f_{cT} + x); \quad R = \alpha x'$.

მაშინ

$$mx'' = mg - c(f_{cT} + x) - \alpha v \ ,$$

ვინაიდან $\quad f_{cT} = \dfrac{mg}{c}, \quad$ ამიტომ

$$mx'' = -cx - \alpha x'.$$

ანუ
$$x'' + 2nx' + k^2 x = 0\,, \qquad (1)$$

სადაც $2n = \dfrac{\alpha}{m}$ - მილევადობის კოეფიციენტია, $k^2 = \dfrac{c}{m}$ - თავისუფალი რხევის სიხშირეა.

გამოვთვალოთ (1) დიფერენციალური განტოლებით ასახული რხევითი სისტემის პარამეტრები:

$$F_{ypr} = c\Delta l \Rightarrow c = \frac{F_{ypr}}{\Delta l} = \frac{4{,}9}{0{,}1} = 49 \ \text{(ნ/მ);}$$

$$R = \alpha v \Rightarrow \alpha = \frac{R}{v} = \frac{19{,}6}{1} = 19{,}6 \ \text{(ნ/მ);}$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{49}{1{,}96}} = 5 \ \text{(რად/წმ);}$$

$$n=\frac{\alpha}{2m}=\frac{19{,}6}{2\cdot 1{,}96}=5 \text{ (რად/წმ).}$$

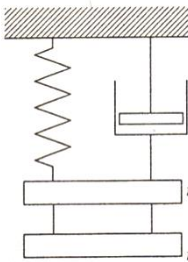
ვინაიდან $k=n$, ამიტომ, (1) განტოლების ამოხსნას აქვს ასეთი სახე
$$x=e^{-nt}(C_1t+C_2), \qquad (2)$$
$$x'=-ne^{-nt}(C_1t+C_2)+C_1e^{-nt}. \qquad (3)$$

მოძრაობის საწყისი პირობების თანხმად: $t=0, x_0=5$ სმ, $v_0=0$; მაშინ, (2) და (3) ფორმულებიდან
$$5=C_2,$$
$$0=-5C_2+C_1 \Rightarrow C_1=5C_2=25.$$

ჩავსვათ C_1 და C_2-ს მნიშვნელობები (2) ფორმულაში, მივიღებთ სხეულის მოძრაობის გაზტოლებას
$$x=5e^{-5t}(5t+1).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x=5e^{-5t}(5t+1)$.

ამოცანა 32.69

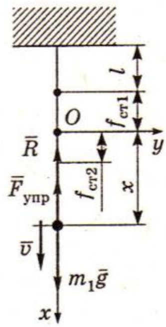


$m_1=2$ კგ და $m_2=3$ კგ მასის სხეულები წონასწორობის მდგომარეობაში ჩამოკიდებულია $c=392$ ნ/მ სიხისტის კოეფიციენტის ზამბარაზე. ზეთოვანი დემპფერი იწვევს წინაღობის ძალას, რომელიც სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია და $R=-\alpha v$-ს ტოლია, სადაც $\alpha=98$ ნ.წმ/მ. m_2 ტვირთი მოხსნეს. ამის შემდეგ იპოვეთ m_1 ტვირთის მოძრაობის განტოლება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგიოთ დარჩენილი m_1 მასის ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება სხეულზე სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალის, ზამბარის დრეკადობის $\vec{F}_{ypr}$ ძალის და წინაღობის $\vec{R}$ ძალის მოქმედებით (იხ. ნახაზი) x ღერძზე გეგმილებში:
$$m_1x''=m_1g-F_{упр}-R,$$

სადაც $\qquad F_{ypr} = c(f_{cT} + x); \qquad f_{cT} = \dfrac{m_1 g}{c}.$

$R = \alpha v = \alpha x'$.



მაშინ $\qquad m_1 x'' = m_1 g - c\,\dfrac{m_1 g}{c} - cx - \alpha x'$,

ანუ

$$x'' + 2nx' + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

სადაც

$n = \dfrac{\alpha}{2m_1} = \dfrac{98}{2\cdot 2} = 24{,}5$ (რად/წმ); $\; k^2 = \dfrac{c}{m_1}$,

$k = \sqrt{\dfrac{c}{m_1}} = \sqrt{\dfrac{392}{2}} = 14$ (რად/წმ).

$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$ სახის მახასიათებელი განტოლების ფესვებია

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -24{,}5 \pm \sqrt{\frac{49^2}{4} - 14^2} = -24{,}5 \pm 3{,}5\sqrt{33}\,.$$

აქედან $\qquad \lambda_1 = -24{,}5 + 3{,}5\sqrt{33} = -4{,}4$ (რად/წმ),

$\qquad \lambda_2 = -24{,}5 - 3{,}5\sqrt{33} = -44{,}6$ (რად/წმ).

(1) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (2)$$

$$x' = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \qquad (3)$$

საწყისი პირობების თანხმად:

$t = 0, x_0 = f_{cT} = \dfrac{m_2 g}{c} = \dfrac{3\cdot 980}{392} = 7{,}5$ სმ,

$x_0' = 0$; მაშინ, (2) და (3) ფორმულებიდან

$$7{,}5 = C_1 + C_2,$$
$$0 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2.$$

აქედან

$$C_1 = \frac{7{,}5\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{7{,}5\cdot(-44{,}6)}{-44{,}6 - (-4{,}4)} = 8{,}32 \text{ (სმ)},$$

$$C_2 = \frac{7,5\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{7,5\cdot(-4,4)}{-44,6-(-4,4)} = -0,82 \text{ (სმ).}$$

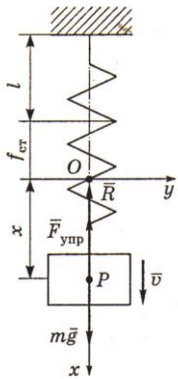
ჩავსვათ C_1 და C_2-ს მნიშვნელობები (2) ფორმულაში, მივიღებთ სხეულის მოძრაობის გაბტოლებას

$$x = 8,32e^{-4,4t} - 0,82e^{-44,6t}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = 8,32e^{-4,4t} - 0,82e^{-44,6t}$ სმ.

ამოცანა 32.70

P წონის ტვირთის მოქმედებით ზამბარას სტატიკური დაგრძელება f-ს ტოლია. ტვირთის რხევისას მასზე მოქმედებს გარემოს წინაღობის ძალა, რომელიც სიჩქარის პროპორციულია. განსაზღვრეთ წინაღობის α კოეფიციენტის უმცირესი მნიშვნელობა, რომლის დროსაც მოძრაობის პროცესი აპერიოდულია. იპოვეთ მილევადი რხევის პერიოდი, თუ წინაღობის კოეფიციენტი მიღებულ მნიშვნელობაზე ნაკლებია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგიოთ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება (იხ. ამოცანა 32.69 და ნახაზი) x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - F_{упр} - R,$$

სადაც $F_{ypr} = c(f + x);\ \ R = \alpha v = \alpha x'$.

მაშინ

$$mx'' = mg - c(f_{cT} + x) - \alpha v,$$

ვინაიდან $f = f_{cT} = \dfrac{mg}{c}$, $v = x'$, ამიტომ

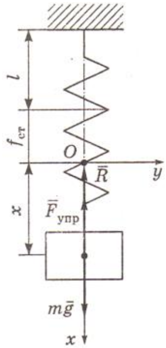
$$mx'' = -cx - \alpha x'.$$

ანუ
$$x'' + 2nx' + k^2x = 0, \tag{1}$$

სადაც $n = \dfrac{\alpha}{2m}$, $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

რადგანაც $c = \dfrac{mg}{f}$, ამიტომ

$$k = \sqrt{\frac{mg}{mf}} = \sqrt{\frac{g}{f}} \,.$$



წინაღობის α კოეფიციენტის უმცირეს მნიშვნელობას, რომლის დროსაც მოძრაობის პროცესი აპერიოდული იქნება, განვსაზღვრავთ ტოლობიდან $k = n$, ანუ

$$\sqrt{\frac{g}{f}} = \frac{\alpha}{2m},$$

საიდანაც
$$\alpha = 2m\sqrt{\frac{g}{f}} = \frac{2P}{g\sqrt{\frac{f}{g}}} = \frac{2P}{\sqrt{gf}} \,.$$

როცა $\dfrac{\alpha}{2m} < \sqrt{\dfrac{g}{f}}$, ანუ $\alpha < \dfrac{2P}{\sqrt{gf}}$, ტვირთის მოძრაობა იქნება რხევითი.

მაშინ
$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{\frac{g}{f} - \frac{\alpha^2}{4m^2}},$$

ხოლო რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{f} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}} \cdot$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\alpha = \dfrac{2P}{\sqrt{gf}}$ · როცა $\alpha < \dfrac{2P}{\sqrt{gf}}$ მოძრაობა იქნება რხევითი პერიოდით $T = \dfrac{2\pi}{k_1} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{f} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}}$ ·

ამოცანა 32.71

ზამბარაზე ჩამოკიდებული 100 გრ მასის ტვირთი მოძრაობს

სითხეში. ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტი $c = 19{,}6$ ნ/მ. მოძრაობისას ტვირთი განიცდის სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციული ძალის წინაღობას $R = \alpha v$, სადაც $\alpha = 3{,}5$ ნ.წმ/მ. იპოვეთ ამ მოძრაობის განტოლება, თუ საწყის მომენტში ტვირთი სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან გადაადგილებული იყო $x_0 = 1$ სმ-ით და გაშვებული იყო საწყისი სიჩქარის გარეშე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. კოორდინატთა Oxy სისტემის სათავედ ავირჩიოთ ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში და x ღერძი მივართოთ ამ მდგომარეობიდან ტვირთის გადაადგილების მხარეს (იხ. ნახაზი).

ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - R - F_{упр},$$

სადაც $F_{упр} = c(f_{cT} + x)$. $f_{cT} = \dfrac{mg}{c}$; $R = \alpha v = \alpha x'$.

მაშინ

$$mx'' = -cx - \alpha x',$$

ანუ

$$x'' + 2nx' + k^2 x = 0, \qquad (1)$$

სადაც $n = \dfrac{\alpha}{2m} = \dfrac{3{,}5}{2 \cdot 0{,}1} = 17{,}5; k^2 = \dfrac{c}{m}$.

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{19{,}6}{0{,}1}} = 14 \text{ (რად/წმ)},$$

ვინაიდან $n > k$ - მოძრაობა აპერიოდული ხასიათისაა და (1) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამოხსნას ასეთი სახე აქვს:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (2)$$

$$x' = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \qquad (3)$$

სადაც λ_1 და λ_2 შესაბამისი მახასიათებელი $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$ განტოლების ფესვებია,

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -17{,}5 \pm \sqrt{17{,}5^2 - 14^2} = -17{,}5 \pm 10{,}5.$$

აქედან $\lambda_1 = -17{,}5 + 10{,}5 = -7$ (რად/წმ),

$\lambda_2 = -17{,}5 - 10{,}5 = -28$ (რად/წმ).

საწყისი პირობების თანხმად: $t = 0, x_0 = 1$სმ, $x_0' = 0$; მაშინ, (2) და

(3) ფორმულებიდან

$$C_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1\cdot(-28)}{-28-(-7)} = 1{,}33 \text{ (სმ)},$$

$$C_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{1\cdot(-7)}{-28-(-7)} = -0{,}33 \text{ (სმ)}.$$

ჩავსვათ C_1 და C_2-ს მნიშვნელობები (2) ფორმულაში, მივიღებთ სხეულის მოძრაობის გაბტოლებას

$$x = 1{,}33e^{-7t} - 0{,}33e^{-28t}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = 1{,}33e^{-7t} - 0{,}33e^{-28t}$ სმ.

ამოცანა 32.72

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ ტვირთის მოძრაობის განტოლება და ააგეთ გადაადგილების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი, თუ საწყის მომენტში ტვირთი სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან გადაადგილებული იყო $x_0 = 1$ სმ-თ და მას მიანიჭეს გადაადგილების საწინააღმდეგო მიმართულების საწყისი სიჩქარე 50 სმ/წმ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. წინა 32.71 ამოცანის ამოხსნის თანახმად ტვირთის მოძრაობის დიფარენციალურ განტოლებას

$$x'' + 2nx' + k^2x = 0,$$

ასეთი ამოხსნა აქვს

$$x = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}, \qquad (1)$$

$$x' = C_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}. \qquad (2)$$

სადაც $\lambda_1 = -7$ (რად/წმ), $\lambda_2 = -28$ (რად/წმ).

საწყისი პირობების თანხმად: $t = 0, x_0 = 1$სმ, $x_0' = -50$ სმ/წმ; მაშინ, (1) და (2) ფორმულებიდან მივიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ -50 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2. \end{cases}$$

აქედან

$$C_1 = \frac{1\cdot\lambda_2 + 50}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1\cdot(-28)+50}{-28-(-7)} = -1 \text{ (სმ)},$$

$$C_2 = \frac{1 \cdot \lambda_1 + 50}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{1 \cdot (-7) + 50}{-28 - (-7)} = 2 \text{ (სმ).}$$

ჩავსვათ C_1 და C_2-ს მნიშვნელობები (1) ფორმულაში, მივიღებთ სხეულის მოძრაობის განტოლებას

$$x = -e^{-7t} + 2e^{-28t}\,. \qquad (3)$$

ტვირთის x გადაადგილების t დროზე დამოკიდებულების გრაფიკის ასაგებად გამოვთვალოთ (3) ფუნქციის მნიშვნელობები მახასიათებელ წერტილებში:

1) $t_0 = 0$, $x = 1$ (სმ);

2) $x = 0 \Rightarrow e^{-21t} = 0{,}5 \Rightarrow e^{-21t} = 2^{-1} \Rightarrow t_1 = \dfrac{\ln 2}{21} = 0{,}033$ (წმ);

3) მინიმუმის წერტილში

$$x' = 7e^{-7t} - 56e^{-28t} = 0 \Rightarrow e^{-21t} = 2^{-3} \Rightarrow t_2 = \frac{\ln 2}{7} = 0{,}099$$

(წმ);

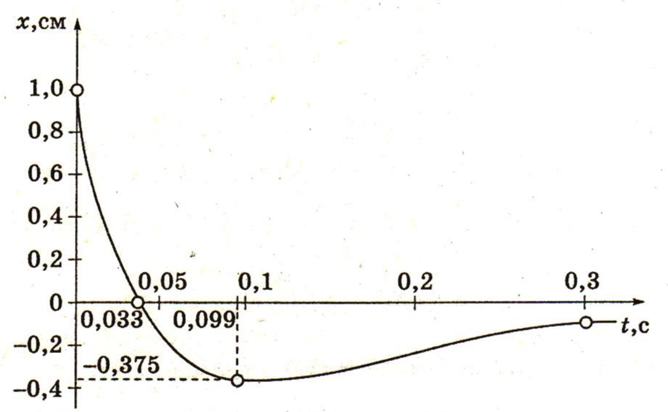
ვინაიდან

$$x''\big|_{t=t_2} = -49e^{-7t_2} + 56 \cdot 28e^{-28t_2} = -49e^{-\ln 2} + 1568e^{-4\ln 2} = -\frac{49}{2} + \frac{1568}{16} = 73{,}5 > 0,$$

ამიტომ $x_{\min} = x\big|_{t=t_2} = -e^{-\ln 2} + 2e^{-4\ln 2} = -\dfrac{1}{2} + 2 \cdot \dfrac{1}{16} = -0{,}375$ (სმ).

t-ს ზრდასთან ერთად x გადაადგილება მიისწრაფის ნულისკენ [(3) ფუნქციის გრაფიკი იხ. პასუხში].

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = -e^{-7t} + 2e^{-28t}$ სმ.



ამო
ცანა
32.73

32.71 ამოცანის პირობებში საწყის მომენტში ტვირთი წონასწორობის მდგომარეობიდან გადაადგილებული იყო $x_0 = 5$ სმ-ით და იმავე მიმართულებით მას მიანიჭეს საწყისი სიჩქარე $v_0 = 100$ სმ/წმ. იპოვეთ ტვირთის მოძრაობის განტოლება და ააგეთ გადაადგილების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. წინა 32.71 ამოცანის ამოხსნის თანახმად ტვირთის მოძრაობის დიფარენციალურ განტოლებას

$$x'' + 2nx' + k^2 x = 0,$$

ასეთი ამოხსნა აქვს

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (1)$$

$$x' = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \qquad (2)$$

სადაც $\lambda_1 = -7$ (რად/წმ), $\lambda_2 = -28$ (რად/წმ).

საწყისი პირობების თანხმად: $t = 0, x_0 = 5$ სმ, $x_0' = 100$ სმ/წმ; მაშინ, (1) და (2) ფორმულებიდან მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2, \\ 100 = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2. \end{cases}$$

აქედან $$C_1 = \frac{5\lambda_2 - 100}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{5(-28) - 100}{-28 - (-7)} = 11{,}4 \text{ (სმ)},$$

$$C_2 = \frac{5\lambda_1 - 100}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{5(-7) - 100}{-7 - (-28)} = -6{,}4 \text{ (სმ)}.$$

ჩავსვათ C_1 და C_2-ს მნიშვნელობები (1) ფორმულაში, მივიღებთ სხეულის მოძრაობის გაბტოლებას

$$x = 11{,}4e^{-7t} + 6{,}4e^{-28t}. \qquad (3)$$

ტვირთის x გადაადგილების t დროზე დამოკიდებულების გრაფიკის ასაგებად გამოვთვალოთ (3) ფუნქციის მნიშვნელობები მახასიათებელ წერტილებში:

$$t_0 = 0, \quad x = 11{,}4 - 6{,}4 = 5 \text{ (სმ)};$$

ვიპოვოთ ექსტრემალური წერტილები:

$$x' = -11{,}4 \cdot 7e^{-7t} + 6{,}4 \cdot 28e^{-28t} = 0;$$

აქედან $$e^{-21t} = \frac{11{,}4}{4 \cdot 6{,}4} = \left(\frac{128}{57}\right)^{-1};$$

$$t = t_1 = \frac{1}{21}\ln\frac{128}{57} = 0{,}0385 \text{ (წმ);}$$

ვინაიდან

$$x''\big|_{t=t_1} = 11{,}4\cdot 7^2 e^{-7t_1} - 6{,}4\cdot 28^2 e^{-28t_1} = \frac{11{,}4\cdot 49}{4}\sqrt[3]{28{,}5} - \frac{6{,}4\cdot 784}{4\cdot 128}\sqrt[3]{28{,}5} < 0$$

. მაშასადამე, $t = t_1$ წერტილში გვაქვს მაქსიმუმი

$$x_1 = \frac{11{,}4}{4}\sqrt[3]{28{,}5} - \frac{6{,}4\cdot 784}{4\cdot 128}\sqrt[3]{28{,}5} = \left(\frac{11{,}4}{4} - \frac{6{,}4\cdot 784}{4\cdot 128}\right)\cdot 3{,}055 = 6{,}53 \text{ (სმ).}$$

$$x'' = 11{,}4\cdot 7^2 e^{-7t_1} - 6{,}4\cdot 28^2 e^{-28t_1} = 0,$$

საიდანაც $$e^{-21t} = \frac{11{,}4}{4\cdot 16} = \left(\frac{512}{57}\right)^{-1},$$

$$t = t_2 = \frac{1}{21}\ln\frac{512}{57} = 0{,}1$$

- გადაღუნვის წერტილი, რომელშიც

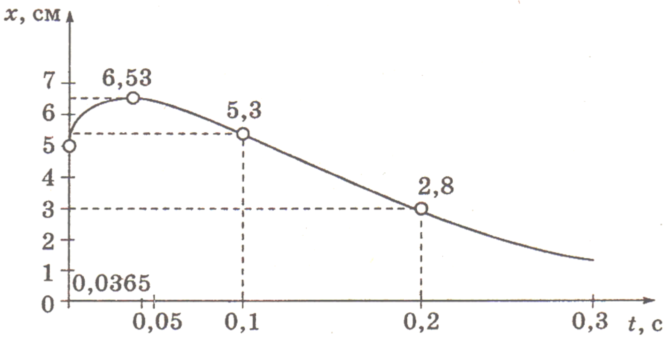
$$x_2 = 11{,}4\cdot e^{-0{,}7} - 6{,}4\cdot e^{-2{,}8} = 5{,}3 \text{ (სმ).}$$

როცა $t = t_3 = 0{,}2$

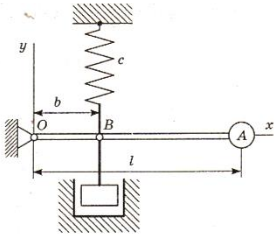
$$x_3 = 11{,}4\cdot e^{-1{,}4} - 6{,}4\cdot e^{-5{,}6_1} = 2{,}8 \text{ (სმ).}$$

t-ს ზრდასთან ერთად $x(t)$ ფუნქცია მიისწრაფის ნულისკენ. [(3) ფუნქციის გრაფიკი იხ. პასუხში].

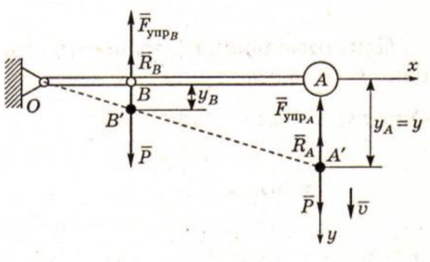
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = 11{,}4e^{-7t} - 6{,}4e^{-28t}$ სმ.



ამოცანა 32.74



შეადგინეთ P წონის A წერტილის მცირე რხევის დიფერენციალური განტოლება, რომელიც მოთავსებულია 0 წერტილში სახსროვნად ჩამაგრებული ღეროს ბოლოში; ჩათვალეთ, რომ გარემოს წინაღობის ძალა სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია, პროპორციულობის α კოეფიციენტით, და განსაზღვრეთ მილევადი რხევის სიხშირე. ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტია c, ღეროს სიგრძე l, მანძილი $0B=b.$ ღეროს მასა უგულებელყავით. წონასწორობის მდგომარეობაში ღერო ჰორიზონტალურია. α კოეფიციენტის რომელი მნიშვნელობისათვის გახდება მოძრაობა აპერიოდული.



ა მ ო ხ ს ნ ა. შევცვალოთ B წერტილში ზამბარა და დემპფერის წინაღობის ძალა მათი ეკვივალენტური A წერტილში მოთავსებული ზამბარითა და დემპფერის წინაღობის ძალით (იხ. ნახაზი). ამასთანავე

$$F_{ypB}b=F_{ypA}l \Rightarrow cy_Bb=c_{ekv}y_Al\ .$$

აქედან $$c_{ekv}=c\frac{y_Bb}{y_Al}=c\frac{b^2}{l^2}$$

ვინაიდან $\dfrac{y_B}{y_A}=\dfrac{b}{l}$.

ანალოგიურად $$R_Bb=R_Al \Rightarrow \alpha v_Bb=\alpha_{ekB}v_Al\ .$$

აქედან $$\alpha_{ekB}=\alpha\frac{b}{l}\frac{v_B}{v_A}=\alpha\frac{b^2}{l^2}$$

ვინაიდან $\dfrac{v_B}{v_A}=\dfrac{b}{l}$.

ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება y ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი):

$$my'' = P - R_A - F_{ypA},$$

სადაც F_{yPA} - A წერტილზე დაყვანილი დრეკადობის ძალაა [$F_{yPA} = c_{ekB}(f_{cT} + y)$]; R_A - A წერტილზე დაყვანილი წინაღობის ძალაა $(R = \alpha_{ekB} y')$,

ანუ
$$my'' = P - c_{ekB}(f_{cT} + y) - \alpha_{ekB} y'.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $c_{ekB} f_{cT} = P = mg$, მივიღებთ

$$\frac{P}{g} y'' + \alpha \frac{b^2}{l^2} y' + c \frac{b^2}{l^2} y = 0, \qquad (1)$$

ანუ
$$y'' + 2ny' + k^2 y = 0,$$

სადაც $n = \dfrac{\alpha b^2 g}{2Pl^2}; k^2 = \dfrac{cb^2 g}{Pl^2}$.

გამოვთვალოთ მილევადი რხევის სიხშირე k_1:

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{\frac{cb^2 g}{Pl^2} - \frac{\alpha^2 b^4 g^2}{4P^2 l^2}} = \frac{b}{l}\sqrt{\frac{cg}{P} - \left(\frac{\alpha bg}{2Pl}\right)^2}.$$

მოძრაობა აპერიოდული იქნება, თუ $n \geq k$, ე. ი.

$$\frac{\alpha b^2 g}{2Pl^2} \geq \sqrt{\frac{cb^2 g}{Pl^2}},$$

ანუ
$$\frac{\alpha b^2 g}{2Pl^2} \geq \frac{b}{l}\sqrt{\frac{cg}{P}},$$

საიდანაც
$$\alpha \geq \frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\dfrac{P}{g} y'' + \alpha \dfrac{b^2}{l^2} y' + c \dfrac{b^2}{l^2} y = 0$; $\alpha \geq \dfrac{2l}{b}\sqrt{\dfrac{cP}{g}}$;

$$k_1 = \frac{b}{l}\sqrt{\frac{cg}{P} - \left(\frac{\alpha bg}{2Pl}\right)^2} \text{ რად/წმ.}$$

ამოცანა 32.75

ზამბარაზე დაკიდებული 20 კგ მასის ტვირთის რხევისას შეამჩნიეს, რომ 10 სრული რხევის შემდეგ უდიდესი გადახრა ორჯერ შემცირდა. ტვირთმა 10 სრული რხევა შეასრულა 9 წამში. როგორი სიდიდისაა წინაღობის α კოეფიციენტი (გარემოს წინაღობის ძალა სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია) და როგორია სიხისტის c ცოეფიციენტი?

ა მ ო ხ ს ნ ა. ერთი სრული რხევა შედგება ორი გაქანებისაგან, მაქსიმალური გადახრა თითოეული გაქანებისას მცირდება გეომეტრიული პროგრესიით, რომლის მნიშვნელია $e^{-\frac{n\tau_1}{2}}$, მაშასადამე, სრული რხევისას ამპლიტუდა მცირდება $e^{-n\tau_1}$ - ჯერ, მაშინ

$$A_{11} = A_1 e^{-10n\tau_1}.$$

ამოცანის პირობის თანახმად

$$A_{11} = \frac{A_1}{2}.$$

აქედან

$$e^{-10n\tau_1} = 2^{-1},$$

$$n\tau_1 = \frac{\ln 2}{10}.$$

ვინაიდან $\tau_1 = \frac{9}{10}$, ამიტომ $n = \frac{\ln 2}{9}$.

რადგანაც მილევადობის კოეფიციენტი $n = \frac{\alpha}{2m}$, ამიტომ წინაღობის კოეფიციენტი

$$\alpha = 2mn = 2 \cdot 20 \cdot \frac{\ln 2}{9} = 3{,}08 \text{ (ნ. წმ/მ).}$$

განვსაზღვროთ სიხისტის კოეფიციენტი. მილევადი რხევის k_1 სიხშირე

$$k_1^2 = k^2 - n^2.$$

აქედან

$$k^2 = k_1^2 + n^2 = \left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)^2 + \left(\frac{\ln 2}{10\tau_1}\right)^2 = \frac{1}{\tau_1^2}[(2\pi)^2 + (0{,}1\ln 2)^2 =$$

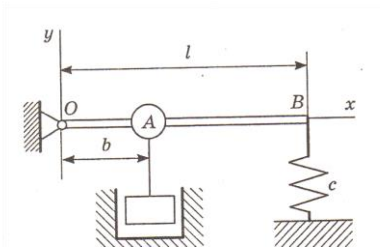
$$= \frac{100}{81}(6{,}28^2 + 0{,}069^2) = 48{,}74 .$$

ვინაიდან $k^2 = \dfrac{c}{m}$, ამიტომ

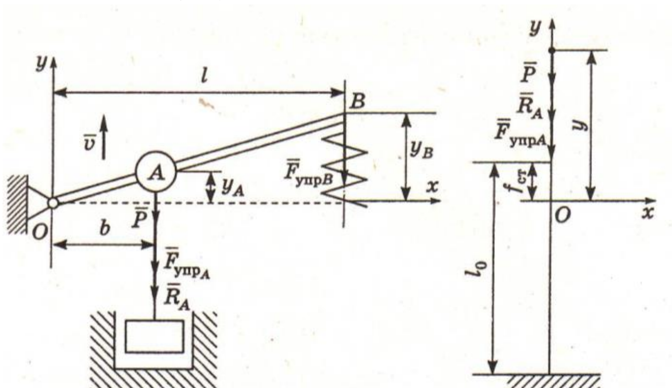
$$c = k^2 m = 48{,}74 \cdot 20 = 974{,}8 \text{ (ნ/მ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\alpha = 3{,}08$ ნ.წმ/მ; $c = 974{,}8$ ნ/მ.

ამოცანა 32.76



შეადგინეთ P წონის A წერტილის მცირე რხევის დიფერენციალური განტოლება და განსაზღვრეთ მილევადი რხევის სიხშირე. ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტია c, მანძილი $0A = b$, $0B = l$. გარემოს წინაღობის ძალა სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია, პროპორციულობის α კოეფიციენტით. 0 წერტილში სახსროვნად ჩამაგრებული $0B$ ღეროს მასა უგულებელყავით. წონასწორობის მდგომარეობაში ღერო ჰორიზონტალურია. α კოეფიციენტის რომელი მნიშვნელობისათვის გახდება მოძრაობა აპერიოდული.



ა მ ო ხ ს ნ ა. გადავიტანოთ ზამბარა B წერტილიდან A წერტილში (ნახ. 1) და ვისარგებლოთ დამოკიდებულებით

$$F_{ypB}l = F_{ypA}b$$

ანუ $$cy_B l = c_{ekv} y_A b$$

ვინაიდან $\dfrac{y_B}{y_A} = \dfrac{l}{b}$, მივიღებთ

$$c_{ekv} = c\frac{l^2}{b^2},$$

ჩავწეროთ A წერტილის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება y ღერძზე გეგმილებში (ნახ. 2):

$$my'' = -P - R_A - F_{ypA},$$

სადაც F_{yPA} - A წერტილზე დაყვანილი დრეკადობის ძალაა $F_{yPA} = c = y - f_{cT}$; R_A - A წერტილზე დაყვანილი წინაღობის ძალაა - $R = \alpha y'$,

ანუ $$my'' = P - c_{ekB}(y - f_{cT}) - \alpha y'.$$

სადაც $f_{cT} = \dfrac{mg}{c}$.

განტოლებაში ჩასმისა და გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ A წერტილის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება

$$\frac{P}{g}y'' + \alpha y' + c\frac{l^2}{b^2}y = 0,$$

ანუ $$y'' + 2ny' + k^2 y = 0, \qquad (1)$$

სადაც $n = \dfrac{\alpha}{2m} = \dfrac{\alpha g}{2P}; k^2 = \dfrac{cl^2 g}{Pb^2}$.

გამოვთვალოთ მილევადი რხევის სიხშირე k_1:

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{\frac{cl^2 g}{Pb^2} - \frac{\alpha^2 g^2}{4P^2}}.$$

მოძრაობა აპერიოდული იქნება, თუ $n \geq k$, ე. ი. როცა

$$\frac{\alpha g}{2P} \ge \sqrt{\frac{c\ l^2 g}{b^2 P}}\ ,$$

ანუ
$$\frac{\alpha g}{2P} \ge \frac{l}{b}\sqrt{\frac{cg}{P}}\ ,$$

საიდანაც
$$\alpha \ge \frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}\ .$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\frac{P}{g}y'' + \alpha y' + c\frac{l^2}{b^2}y = 0$; $\alpha \ge \frac{2l}{b}\sqrt{\frac{cP}{g}}$;

$$k_1 = \sqrt{\frac{cl^2 g}{Pb^2} - \frac{\alpha^2 g^2}{4P^2}}\ \text{რად/წმ.}$$

ამოცანა 32.77

20 ნ/მ სიხისტის ზამბარას ბოლოზე დაკიდებული 5 კგ მასის ტვირთი მოთავსებულია ბლანტ გარემოში. ამ შემთხვევაში მისი რხევის პერიოდი 10 წმ-ს ტოლია. განსაზღვრეთ დემპფირების მუდმივა, რხევის ლოგარითმული დეკრემენტი და თავისუფალი რხევის პერიოდი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ თავისუფალი ჰარმონიული რხევის k სიხშირე:

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{20}{5} = 4$$

საიდანაც

$$k = \sqrt{4} = 2\ \text{(რად/წმ).}$$

გამოვთვალოთ მილევადი რხევის k_1 სიხშირე:

$$k_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\cdot 3{,}14}{10} = 0{,}628\ \text{(რად/წმ).}$$

ვიპოვოთ მილევადობის კოეფიციენტი:

$$n = \sqrt{k^2 - k_1^2} = \sqrt{2^2 - 0{,}628^2} = 1{,}9$$

(რად/წმ).

ვინაიდან $k > n$, ამიტომ მოძრაობა იქნება რხევითი და

მილევადი. განვსაზღვროთ დემპფირების კოეფიციენტი:

$$\alpha = 2mn = 2 \cdot 5 \cdot 1{,}9 = 19 \quad (\text{ნ} \cdot \text{წმ/მ}).$$

გამოვთვალოთ ლოგარითმული დეკრემსნტი

$$\lambda = \frac{nT}{2} = \frac{1{,}9 \cdot 10}{2} = 9{,}5$$

და თავისუფალი რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{2} = 3{,}14 \quad (\text{წმ}).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $\alpha = 19$ ნ · წმ/მ; $\lambda = \dfrac{nT}{2} = 9{,}5$; $T = 3{,}14$ წმ.

იძულებითი რხევები

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 32.78

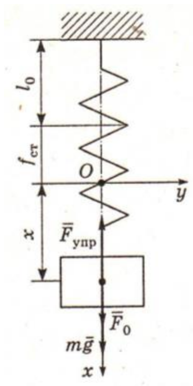
.

იპოვეთ m მასის ნივთიერი წერტილის წრფივი მოძრაობის განტოლება, რომელზეც მოქმედებს აღმდგენი ძალა $Q=-cx$ და მუდმივი ძალა F_0. საწყის მომენტში $t=0,$ $x_0=0$, $x_0'=0$. აგრეთვე იპოვეთ რხევის პერიოდი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნივთიერ წერტილზე მოქმედებს აღმდგენი ძალა, რომელიც ემორჩილება ჰუკის კანონს, რაც ნიშნავს, რომ ეს მექანიკური სისტემა შეიცავს დრეკად ელემენტს (ზამბარას), ხოლო წერტილის მოძრაობა რხევითი ხასიათისაა. ნახაზზე გამოვსახოთ m მასის ნივთიერ წერტილზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, ზამბარის დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა და წინაღობის $\vec{F}_0$ ძალა. ავირჩიოთ კოორდინატთა Oxy სისტემა სათავით წერტილის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში.

ჩავწეროთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx''=mg-F_{yp}+F_0,$$



სადაც $\quad F_{yp}=cf_{cT}+Q; \quad f_{cT}=\dfrac{mg}{c}.$

მაშინ, მოძრაობის განტოლებას აქვს ასეთი სახე

$$mx''=mg-c\frac{mg}{c}-cx+F_0,$$

ანუ

$$x''+k^2x=\frac{F_0}{m}, \qquad (1)$$

სადაც $\quad k^2=\dfrac{c}{m}, \quad k=\sqrt{\dfrac{c}{m}}$ - ჰარმონიული რხევის სიხშირეა.

(1) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ასეთი სახით ვეძებთ:

$$x = \bar{x} + x*,$$

სადაც $\bar{x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ - შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნაა; $x^* = A$ - კერძო ამოხსნა.

(1) განტოლებაში x^* ჩასმით მივიღებთ

$$Ak^2 = \frac{F_0}{m} \Rightarrow A = \frac{F_0}{mk^2}.$$

შედეგად, (1) განტოლების ამოხნა მიიღებს ასეთ სახეს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{F_0}{mk^2} \qquad (2)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \qquad (3)$$

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_0' = 0$, (2) და (3) ფორმულებიდან მივიღებთ: $C_1 = -\dfrac{F_0}{mk^2}$; $C_2 = 0$.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (2) ფორმულაში და ვინაიდან $mk^2 = c$, მივიღებთ წერტილის მოძრაობის განტოლებას

$$x = \frac{F_0}{c}(1 - \cos kt).$$

რხევის პერიოდი $T = \dfrac{2\pi}{k}$.

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = \dfrac{F_0}{c}(1 - \cos kt)$, სადაც $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$; $T = \dfrac{2\pi}{k}$.

ამოცანა 32.79

.

იპოვეთ m მასის ნივთიერი წერტილის წრფივი მოძრაობის განტოლება, რომელზეც მოქმედებს აღმდგენი ძალა $Q = -cx$ და $F = \alpha t$ ძალა. საწყის მომენტში წერტილი იმყოფება სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში და მისი სიჩქარე ნულის ტოლია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ 32.78 ამოცანის ამოხსნის სქემა იმის გათვალისწინებით, რომ $F_0 = \alpha t$ და ამ შემთხვევაში მივიღებთ იძულებითი რხევის დიფერენციალურ განტოლებას

$$x'' + k^2 x = \frac{\alpha t}{m} \qquad (1)$$

(1) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ვეძებთ როგორც ერთგვაროვანი $\bar{x}$ და კერძო x^* ამოხსნების ჯამს, ე.ი. ასეთი სახე აქვს:

$$x = \bar{x} + x*,$$

სადაც
$$\bar{x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt; \quad x^* = At .$$

(1) განტოლებაში x^* ჩასმით მივიღებთ

$$Ak^2 = \frac{\alpha}{m},$$

საიდანაც

$$A = \frac{\alpha}{mk^2} .$$

მაშინ

$$x^* = \frac{\alpha t}{mk^2}$$

და (1) დიფერენციალური განტოლების ამოხნა მიიღებს ასეთ სახეს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{\alpha t}{mk^2} \qquad (2)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{\alpha}{mk^2} . \qquad (3)$$

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_0' = 0$, (2) და (3) ფორმულებიდან მივიღებთ: $C_1 = 0; \; C_2 = -\frac{\alpha}{mk^3}$.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (2) ფორმულაში და მივიღებთ წერტილის მოძრაობის განტოლებას

$$x = \frac{\alpha}{mk^3}(kt - \sin kt).$$

სადაც $k=\sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x=\dfrac{\alpha}{mk^3}(kt-\sin kt)$, სადაც $k=\sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

ამოცანა 32.80

იპოვეთ m მასის ნივთიერი წერტილის წრფივი მოძრაობის განტოლება, რომელზეც მოქმედებს აღმდგენი ძალა $Q=-cx$ და $F=F_0e^{-\alpha t}$ ძალა, თუ საწყის მომენტში წერტილი იმყოფება სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ 32.78 ამოცანის ამოხსნის სქემა იმის გათვალისწინებით, რომ F_0 ძალის ადგილას მოდებულია $F=F_0e^{-\alpha t}$ ძალა. ამ შემთხვევაში მივიღებთ იძულებითი რხევის დიფერენციალურ განტოლებას

$$x''+k^2x=\frac{F_0}{m}\,e^{-\alpha t} \qquad (1)$$

სადაც $k^2=\dfrac{c}{m}$, $k=\sqrt{\dfrac{c}{m}}$ - ჰარმონიული რხევის სიხშირეა.

(1) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ვეძებთ როგორც ერთგვაროვანი $\bar{x}$ და კერძო x^* ამოხსნების ჯამს, ე.ი. ასეთი სახე აქვს:

$$x=\bar{x}+x*,$$

სადაც $\bar{x}=C_1\cos kt+C_2\sin kt$,

კერძო ამოხსნა დამოკიდებულია (1) გნტოლების მარჯვენა მხარის სახეზე, ე.ი. $x^*=A\,e^{-\alpha t}$.

(1) განტოლებაში x^* ჩასმით მივიღებთ

$$A\alpha^2e^{-\alpha t}+Ak^2e^{-\alpha t}=\frac{F_0}{m}e^{-\alpha t}\Rightarrow A=\frac{F_0}{m(k^2+\alpha^2)}.$$

მაშინ $$x^* = \frac{F_0}{m(k^2+\alpha^2)} e^{-\alpha t}$$

და (1) დიფერენციალური განტოლების ამოხნა მიიღებს ასეთ სახეს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{F_0}{m(k^2+\alpha^2)} e^{-\alpha t}, \qquad (2)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{\alpha F_0}{m(k^2+\alpha^2)} e^{-\alpha t}. \qquad (3)$$

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0,\quad x_0 = 0,\quad x_0' = 0$, (2) და (3) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$C_1 = -\frac{F_0}{m(k^2+\alpha^2)};$$

$$C_2 = \frac{\alpha F_0}{m(k^2+\alpha^2)k}.$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (2) ფორმულაში და მივიღებთ წერტილის მოძრაობის განტოლებას

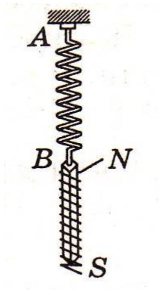
$$x = \frac{F_0}{m(k^2+\alpha^2)}\left(e^{-\alpha t} - \cos kt + \frac{\alpha}{k}\sin kt\right).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $$x = \frac{F_0}{m(k^2+\alpha^2)}\left(e^{-\alpha t} - \cos kt + \frac{\alpha}{k}\sin kt\right),$$

სადაც $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

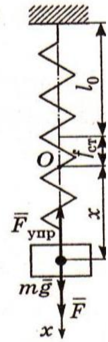
ამოცანა 32.81

.



$c = 19{,}6$ ნ/მ სიხისტის ზამბარაზე დაკიდებულია 100 გრ მასის მაგნიტური ღერო. მაგნიტის ბოლო გადის კოჭში, რომელშიც გადის ცვლადი დენი $i = 20\sin 8\pi t$ ამპერი. დენი გადის $t = 0$ მომენტიდან და შეიზიდავს ღეროს სოლენოიდში; ამ მომენტამდის მაგნიტური ღერო უძრავად ეკიდა ზამბარაზე. მაგნიტსა და კოჭს შორის ურთიერთმოქმედების ძალა განისაზღვრება ტოლობით $F = 0{,}016\pi i$ ნ. განსაზღვრეთ მაგნიტის იძულებითი რხევა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ ღერო ნივთიერ წერტილად და ვაჩვენოთ ნახაზზე მასზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, მაგნიტისა და კოჭის ურთიერთქმედების $\vec{F}$ ძალა, აღმდგენი $\vec{F}_{yp}$ ძალა.



ჩავწეროთ მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - F_{yp} + F\,, \qquad (1)$$

სადაც $F_{yp} = c(f_{cT} + x);$ ვინაიდან $f_{cT} = \dfrac{mg}{c}$,

ამიტომ, $.F_{yp} = mg + cx$.

ამოცანის პირობის გათვალისწინებით განვსაზღვროთ მაგნიტისა და კოჭის ურთიერთმოქმედების ძალა

$$F = 0{,}016\pi i = 0{,}016\pi \cdot 20\sin 8\pi t = 0{,}32\pi \sin 8\pi t = \sin 8\pi t\,.$$

(1) განტოლებაში შევიტანოთ $F_{y\pi p}$ და F მნიშვნელობები, მივიღებთ

$$mx'' = mg - mg - cx + \sin 8\pi t\,,$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = h\sin pt \qquad (2)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{19{,}6}{0{,}1}} = 14$ (რად/წმ); $h = \dfrac{1}{m} = 10$ მ/წმ²; $p = 8\pi$.

(2) განტოლება – ეს არის იძულებითი რხევის

დიფერენციალური განტოლება წინაღობის გაუთვალისწინებლად.

(2) დიფერენციალური განტოლების კერძო ამოხსნა განისაზღვრება მისი მარჯვენა ნაწილით:

$$x = x^* = A\sin pt\,.$$

მისი მეორე წარმოებული

$$x''^* = -Ap^2 \sin pt$$

(2) განტოლებაში x^* და x''^* გამოსახულებების ჩასმით მივიღებთ

$$-Ap^2 \sin pt + k^2 A\sin pt = h\sin pt\,,$$

საიდანაც $$A = \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{1000}{14^2 - 64\cdot 3{,}14^2} = -2{,}3 \text{ (სმ).}$$

მაშინ $$x = -2{,}3\sin 8\pi t\,.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = -2{,}3\sin 8\pi t$ სმ.

ამოცანა 32.82

.

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ მაგნიტური ღეროს მოძრაობის განტოლება, თუ იგი ჩამოკიდეს გაუჭიმავი ზამბარას ბოლოში და გაუშვეს საწყისი სიჩქარის გარეშე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ რხევის არაერთგვაროვანი დიფარენციალური განტოლებ ზოგადი ამოხსნა, რომელიც მიღებულია 32.81 ამოცანის ამოხსნისას (იხ (1) ფორმულა) შემდეგი სახით :

$$x = \bar{x} + x*,$$

სადაც $\bar{x} = C_1\cos kt + C_2 \sin kt$, $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{19{,}6}{0{,}1}} = 14$ (რად/წმ) – მაგნიტური ღეროს საკუთრივი რხევის სიხშირეა; $x* = -2{,}3\sin 8\pi t$ - კერძო ამოხსნაა, მიღებული 32.81 ამოცანის ამოხსნისას.

მაშინ $$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt - 2{,}3\sin 8\pi t\,. \qquad (1)$$

გავაწარმოოთ (1) გამოსახულება დროთი

$$x' = (-C_1\sin kt + C_2\cos kt)k - 2{,}3\cdot 8\pi\cos 8\pi t\,. \qquad (2)$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობების საპოვნელად გამოვიყენოთ მოძრაობის საწყისი პირობები: როცა $t = 0,$

$$x_0 = -f_{cT} = -\frac{mg}{c} = -\frac{0{,}1\cdot 9{,}8}{19{,}6} = -5 \text{ (სმ)}, \quad x_0' = 0,$$

(1) და (2) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$C_1 = -5 \text{ სმ};$$

$$C_2 = \frac{2{,}3\cdot 8\pi}{14} = 4{,}13 \text{ (სმ)}.$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (1) ფორმულაში და მივიღებთ მაგნიტური ღეროს მოძრაობის განტოლებას

$$x = -5\cos 14t + 4{,}13\sin 14t - 2{,}3\sin 8\pi t.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = -5\cos 14t + 4{,}13\sin 14t - 2{,}3\sin 8\pi t$ სმ.

ამოცანა 32.83

.

32.81 ამოცანის პირობებში იპოვეთ მაგნიტური ღეროს მოძრაობის განტოლება, თუ მას სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში მიანიჭეს საწყისი სიჩქარე $v_0 = 5$ მ/წმ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ ამოცანის ამოხსნა ანალოგიურია 32.82 ამოცანის ამოხსნისაგან განსხვავდება მხოლოდ საწყისი პირობებით: $t = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_0' = 5$ სმ/წმ.

ჩავწეროთ მაგნიტური ღეროს მოძრაობის განტოლებ, რომელიც მიღებულია 32.82 ამოცანის ამოხსნისას:

$$x = C_1\cos 14t + C_2\sin 14t - 2{,}3\sin 8\pi t. \qquad (1)$$

$$x' = 14(-C_1\sin 14t + C_2\cos 14t)k - 2{,}3\cdot 8\pi\cos 8\pi t. \qquad (2)$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობების საპოვნელად გამოვიყენოთ მოძრაობის საწყისი პირობები და, მივიღებთ (1) და (2) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$C_1 = 0 \text{ სმ}; \qquad C_2 = \frac{5 + 2{,}3\cdot 8\pi}{14} = 4{,}486 \text{ (სმ)}.$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (1) ფორმულაში და მივიღებთ მაგნიტური ღეროს მოძრაობის განტოლებას

$$x = 4{,}486\sin 14t - 2{,}3\sin 8\pi t \text{ სმ}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $x = 4{,}486\sin 14t - 2{,}3\sin 8\pi t$ სმ.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 32.84

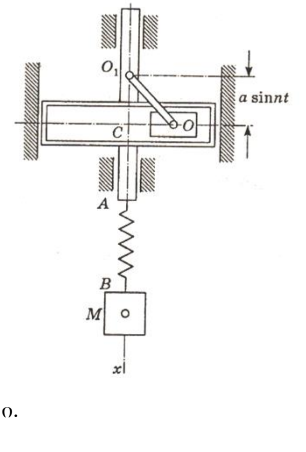
იპოვეთ AB ზამბარაზე დაკიდებული 400 გრ მასის M საწონის იძულებითი რხევები, თუ ზამბარას ზედა ბოლო ვერტიკალურ წრფეზე ასრულებს ჰარმონიულ რხევას ამპლიტუდით a და n სიხშირით: $0_1C = a\sin nt$ სმ. მოცემულია $a = 2$ სმ, $n = 7$ რად/წმ; 39,2 ნ ძალის მოქმედებით ზამბარა 1 მ-თ გრძელდება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ ნივთიერი M წერტილის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - F_{yp},$$

სადაც mg- სიმძიმის ძალაა, F_{yp} - აღმდგენი ძალა,

$F_{yp} = c(f_{cT} + x - a\sin nt)$, $f_{cT} + x - a\sin nt$ - ზამბარას დეფორმაცია.



მაშინ, გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ

$$mx'' + cx = ca\sin nt,$$

ანუ $$x'' + k^2x = h\sin nt \qquad (1)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m} = \dfrac{39{,}2}{0{,}4} = 98$;

$$h = \frac{ca}{m} = \frac{39{,}2 \cdot 0{,}02}{0{,}4} = 196 \text{ (სმ)}; \quad p = n.$$

(1) განტოლება არის იძულებითი რხევის დიფარენციალური განტოლება წინაღობის გაუთვალისწინებლად. ამ განტოლების კერძო ამოხსნა განისაზღვრება მისი მარჯვენა ნაწილით, ე. ი.

$$x = x^* = A\sin nt.$$

მისი მეორე წარმოებული

$$x''^* = -An^2 \sin pt$$

(1) განტოლებაში x^* და x''^* გამოსახულებების ჩასმით მივიღებთ

$$A = \frac{h}{(k^2 - n^2)} \text{ (სმ).}$$

მაშინ, იძულებითი რხევის განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

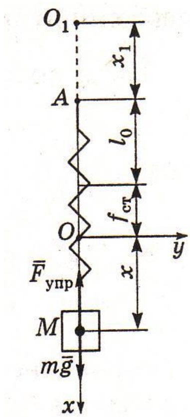
$$x = \frac{h\sin nt}{k^2 - n^2}$$

ანუ, h, k და n-ს მნიშვნელობათა ჩასმის შემდეგ

$$x = 4\sin 7t\,.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = 4\sin 7t$ სმ.

ამოცანა 32.85



იპოვეთ AB ზამბარაზე დაკიდებული M საწონის მოძრაობა (იხ. ამოცანა 32.84), თუ ზამბარას ზედა A ბოლო ვერტიკალურ წრფეზე ასრულებს ჰარმონიულ რხევას ამპლიტუდით a და წრიული k სიხშირით; ზამბარას სტატიკური დაგრძელება საწონის მოქმედებით δ-ს ტოლია. საწყის მომენტში A წერტილს უკავია თავის საშუალო მდებარეობა, ხოლო M საწონი იმყოფება წონასწორობაში; საწონის საწყისი მდებარეობა მიიღეთ კოორდინატთა სათავედ, ხოლო $0x$ ღერძი მიმართეთ ვერტიკალურად ქვევით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ M საწონის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება (იხ. ნახაზი) x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - F_{yp}\,,$$

სადაც $F_{yp} = c(f_{cT} + x - x_1), \;\; x_1 = a\sin kt.$

მაშინ, გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ

$$mx'' = mg - cx - cf_{cT} + cx_1\,,$$

ანუ

$$x'' + \omega^2 x = h\sin kt\,, \qquad (1)$$

სადაც ω- რხევის საკუთრივი სიხშირეა $\omega^2 = \dfrac{c}{m} = \dfrac{g}{\delta}$; $c -$

ზამბარას სიხისტეა, $c=\dfrac{mg}{\delta}$, $\delta-$ ზამბარას სტატიკური დაგრძელებაა; $h=\dfrac{ca}{m}$;

$k-$შემაშფოთებელი ძალის სიხშირე.

(1) განტოლება არის იძულებითი რხევების დიფარენციალური განტოლება გარემოს წინაღობის გაუთვალისწინებლად.

არაერთგვაროვანი (1) განტოლების ზოგად ამოხსნას ვეძებთ შემდეგი სახით

$$x=C_1\cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t+\frac{h}{\frac{g}{\delta}-k^2}\sin kt, \tag{2}$$

$$x'=\sqrt{\frac{g}{\delta}}(-C_1\cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t)+\frac{hk}{\frac{g}{\delta}-k^2}\cos kt. \tag{3}$$

საწყისი პირობებიდან გამომდინარე: $t=0,\quad x_0=0,\quad x_0'=0$, ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივებისათვის მივიღებთ:

$$C_1=0\qquad C_2=\frac{hk}{\sqrt{\frac{g}{\delta}}\left(\frac{g}{\delta}-k^2\right)}=\frac{agk\sqrt{\delta}}{\sqrt{g}(g-\delta k^2)},$$

სადაც $h=\dfrac{ac}{m}=\dfrac{ag}{\delta}$.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (2) ფორმულაში, მივიღებთ საწონის მოძრაობის განტოლებას

$$x=\frac{ag}{\delta k^2-g}\left[-\sin kt+k\sqrt{\frac{\delta}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t\right],$$

სადაც $k\neq\sqrt{\dfrac{g}{\delta}}$.

რეზონანსის შემთხვევაში, ე. ი. როცა $k=\sqrt{\frac{g}{\delta}}$, (1)

განტოლების ამოხსნას ვეძებთ შემდეგი სახით

$$x=C_1\cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t-\frac{ht}{2k}\cos kt, \qquad (4)$$

$$x'=\sqrt{\frac{g}{\delta}}(-C_1\cos\sqrt{\frac{g}{\delta}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t)-\frac{h}{2k}\cos kt+\frac{ht}{2}\sin kt. \qquad (5)$$

საწყისი პირობებიდან გამომდინარე (4) და (5) ფორმულებიდან ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივებისათვის მივიღებთ:

$$C_1=0, \qquad C_2=\sqrt{\frac{\delta}{g}}\frac{ag}{2\delta\sqrt{\frac{g}{\delta}}}=\frac{a}{2}.$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები (4) ფორმულაში, მივიღებთ საწონის მოძრაობის განტოლებას

$$x=\frac{a}{2}\left[\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t-\sqrt{\frac{g}{\delta}}t\cos kt\right],$$

სადაც $k=\sqrt{\frac{g}{\delta}}$.

<u>**პასუხი:**</u> $x=\frac{ag}{\delta k^2-g}\left[k\sqrt{\frac{\delta}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t-\sin kt\right]$, როცა $k>\sqrt{\frac{g}{\delta}}$ ან $k<\sqrt{\frac{g}{\delta}}$;

$$x=\frac{a}{2}\left[\sin\sqrt{\frac{g}{\delta}}t-\sqrt{\frac{g}{\delta}}t\cos kt\right], \text{ როცა } k=\sqrt{\frac{g}{\delta}}$$

ამოცანა 32.86

დატვირთული საბარგო ვაგონის რესორის სტატიკური ჩაღუნვა $\Delta l_{cT}=5$ სმ. განსაზღვრეთ ვაგონის მოძრაობის კრიტიკული

სიჩქარე, როდესაც იწყება ვაგონის „გრძივი ქანაობა”, თუ რელსების პირაპირზე ვაგონი განიცდის ბიძგებს, რომელიც იწვევს რელსებზე ვაგონის იძულებით რხევას; რელსის სიგრძე $L=12$ მ.

. **ა მ ო ხ ს ნ ა**. ვაგონის „გრძივი ქანაობა” წარმოიქმნება რეზონანსის დროს, ე. ი. როცა ერთი რელსის გავლის დრო რხევის პერიოდის ტოლია

$$\frac{L}{v}=\frac{2\pi}{k},$$

სადაც $L-$ რელსის სიგრძეა, $v-$ ვაგონის სიჩქარე.

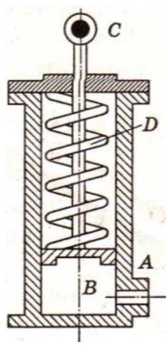
განვსაზღვროთ კრიტიკული სიჩქარე

$$v=\frac{Lk}{2\pi}=\frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta l_{cT}}}=\frac{12}{6{,}28}\sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}05}}=26{,}75 \text{ (მ/წმ) } = 96 \text{ (კმ/სთ)}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $v=96$ კმ/სთ.

ამოცანა 32.87

მანქანის ინდიკატორი შედგება A ცილინდრისგან, რომელშიც დადის D ზამბარაზე დამაგრებული B დგუში. დგუშზე მიერთებულია BC ღერო, რომელზეც დამაგრებულია საწერი წკირი C. დავუშვით, რომ ორთქლის წნევა, რომელიც გამოსახულია პასკალში, იცვლება თანახმად ფორმულისა $p=10^5\left(4+3\sin\frac{2\pi t}{T}\right)$, სადაც T - ლილვის ერთი ბრუნვის დროა, და განსაზღვრეთ C წკირის იძულებითი რხევის ამპლიტუდა, თუ ლილვი ასრულებს 180 ბრ/წთ, შემდეგი მონაცემებისას: ინდიკატორის დგუშის ფართობი $\sigma=4$ სმ², ინდიკატორის მოძრავი ნაწილის მასაა 1 კგ, 29,4 ნ ძალის მოქმედებისას ზამბარა 1 სმ-თ იკუმშება.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ამოცანის პირობის თანახმად შემაშფოთებელი ძალა

$$Q=p\sigma=10^5\left(4+3\sin\frac{2\pi t}{T}\right)\sigma.$$

იძულებითი რხევის განტოლებას აქვს ასეთი სახე

$$x''+k^2x=h\sin\omega t.$$

იძულებითი რხევის ამპლიტუდა

$$a = \frac{h}{k^2 - \omega^2},$$

სადაც $h = \frac{H}{m}$, $H = 3 \cdot 10^5 \sigma$, $\sigma = 4 \cdot 10^{-4}$ მ2,

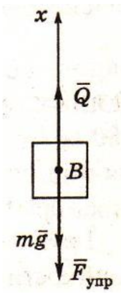
$$h = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{1} = 120 \text{ (მ/წმ}^2\text{)};$$

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{2940}{1} = 2940; \quad \omega = \frac{180\pi}{30} = 6\pi .$$

მაშინ $$a = \frac{120}{2940 - 36 \cdot 3{,}14^2} 0{,}0464 \text{ (მ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $a = 4{,}64$ სმ.

ამოცანა 32.88



წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ C წკირის მოძრაობის განტოლება, თუ საწყის მომენტში სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში სისტემა უძრავი იყო.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ B დგუში ნივთიერ წერტილად და განვიხილოთ მისი მოძრაობა (იხ. ნახაზი) სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალის, დრეკადი $\vec{F}_{yp}$ ძალის და შემაშფოთებელი $\vec{Q}$ ძალის მოქმედებით.

ჩავწეროთ დგუშის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = -mg - F_{yp} + Q, \qquad (1)$$

სადაც $F_{yp} = c(f_{cT} + x)$; $Q = p\sigma = 10^5 \left(4 + 3\sin\frac{2\pi t}{T}\right)\sigma$.

მაშინ,

$$mx'' = -mg - cx - cf_{cT} + 4 \cdot 10^5 \sigma + 3 \cdot 10^5 \sigma \sin\frac{2\pi t}{T}.$$

დროის საწყის მომენტში $Q_0 = 4 \cdot 10^5 \sigma$, ხოლო სტატიკური

წონასწორობის მდგომარეობაში

$$-mg - cf_{cT} + Q_0 = 0.$$

ამის შედეგად (1) დიფერენციალური განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$mx'' + cx = 3\cdot 10^5 \sigma \sin\frac{2\pi t}{T},$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = h\sin\omega t \qquad (2)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m} = 2940,\quad k = 54{,}22$ (რად/წმ); $\quad h = \dfrac{3\cdot 10^5\sigma}{m} = 120$ მ/წმ². $\omega = 6\pi.$

(2) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ვეძებთ შემდეგი სახით

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + a\sin\omega t,$$

სადაც $a = 4{,}64$ სმ (იხ. 32.87 ამოცანის ამოხსნა).

მაშინ

$$x = C_1\cos 54{,}22t + C_2\sin 54{,}22t + 4{,}64\sin 6\pi t t, \qquad (3)$$

$$x' = 54{,}22(-C_1\sin 54{,}22t + C_2\cos 54{,}22t) + 4{,}64\cdot 6\pi\cos 6\pi t.$$

(4)

მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით: $t = 0,$ $x_0 = 0,\quad x_0' = 0$; (3) და (4) ფორმულებიდან მივიღებთ: $C_1 = 0,$ $C_2 = -1{,}61$ (სმ).

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (3) ფორმულაში და მივიღებთ მოძრაობის განტოლებას

$$x = -1{,}61\sin 54{,}22t + 4{,}64\sin 6\pi t.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = -1{,}61\sin 54{,}22t + 4{,}64\sin 6\pi t$ სმ.

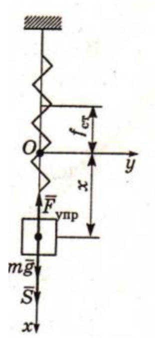
ამოცანა 32.89

.

9,8 ნ/სმ სიხისტის კოეფიციენტის ზამბარაზე დაკიდებული m=200 გრ მასის ტვირთი განიცდის $S = H\sin pt$ ძალის ზემოქმედებას, სადაც $H = 20$ ნ, $p = 50$ რად/წმ; საწყის მომენტში $x_0 = 2$ სმ, $v_0 = 10$ სმ/წმ. კოორდინატთა სისტემის სათავედ არჩეულია სტატიკური წონასწორობის მდებარეობა.

იპოვეთ ტვირთის მოძრაობის განტოლება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნახაზზე გამოვსახოთ ტვირთზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა და შემაშფოთებელი $\vec{S}$ ძალა.



ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - F_{yp} + S,$$

სადაც $F_{yp} = c(f_{cT} + x); \quad S = H\sin pt$.

მაშინ, რადგანაც სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში $mg = cf_{cT}$

$$mx'' = mg - cx - cf_{cT} + H\sin pt$$

ანუ

$$mx'' + cx = H\sin pt \qquad (1)$$

ამოცანის მონაცემების გათვალისწინებით (1) განტოლება ასე ჩავწეროთ

$$0{,}2x'' + 980x = 20\sin 50t.$$

ანუ

$$x'' + k^2x = h\sin pt \qquad (2)$$

სადაც $k^2 = 4900, \quad k = 70$ (რად/წმ); $h = 100$ მ/წმ²; $p = 50$ რად/წმ.

(2) განტოლება – ეს არის იძულებითი რხევის დიფერენციალური განტოლება წინაღობის გაუთვალისწინებლად.

იძულებითი რხევის ამპლიტუდა

$$a = \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{100}{4900 - 2500} = 4{,}17 \text{ (სმ).}$$

(2) განტოლების ზოგად ამოხსნას ვეძებთ შემდეგი სახით

$$x = C_1\cos 70t + C_2\sin 70t + 4{,}17\sin 50t, \qquad (3)$$

$$x' = 70(-C_1\sin 70t + C_2\cos 70t) + 4{,}17\cdot 50\cos 50t. \qquad (4)$$

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0, \quad x_0 = 2$ სმ, $x_0' = 10$ სმ/წმ. (3) და (4) ფორმულებიდან მივიღებთ: $C_1 = 2$ სმ; $C_2 = -2{,}83$ სმ.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (3) ფორმულაში, მივიღებთ ტვირთის მოძრაობის განტოლება:

$$x = 2\cos 70t - 2{,}83\sin 70t + 4{,}17\sin 50t\,.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = 2\cos 70t - 2{,}83\sin 70t + 4{,}17\sin 50t$ სმ.

ამოცანა 32.90

წინა ამოცანის პირობებში შეიცვალა შემაშფოთებელი ძალის სიხშირე $p = 70$ რად/წმ. იპოვეთ ტვირთის მოძრაობის განტოლება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. როდესაც შემაშფოთებელი ძალის სიხშირე $p = 70$ რად/წმ, წარმოიშობა რეზონანსი. რეზონანსის შემთხვევაში $p = k$ და იძულებითი რხევის განტოლება იღებს ასეთ სახეს:

$$x'' + k^2 x = h\sin pt \qquad (1)$$

ამ განტოლების ამოხსნას ვეძებთ ასეთი სახით:

$$x = \bar{x} + x*,$$

სადაც x^* - კერძო ამოხსნაა.

რეზონანსის შემთხვევაში

$$x^* = -\frac{ht}{2p}\cos pt$$

ანუ, ამოცანის მოცემულობების გათვალისწინებით $h = 100$ მ/წმ², $p = 70$ რად/წმ,

$$x^* = -\frac{100t}{2\cdot 70}\cos 70t = -71{,}428t\cos 70t\,.$$

მაშინ, (1) განტოლების ზოგად ამოხსნას ჩავწერთ შემდეგი სახით

$$x = C_1\cos 70t + C_2\sin 70t - 71{,}428t\cos 70t\,,$$

(2)

$$x' = 70(-C_1\sin 70t + C_2\cos 70t) - 71{,}428\cos 70t + 71{,}428\cdot 70t\sin 70t\,.$$

(3)

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0,\quad x_0 = 2$ სმ, $x_0' = 10$ სმ/წმ. (2) და (3) ფორმულებიდან მივიღებთ: $C_1 = 2$ სმ; $C_2 = -1{,}16$ სმ.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (3) ფორმულაში, მივიღებთ ტვირთის მოძრაობის განტოლება:

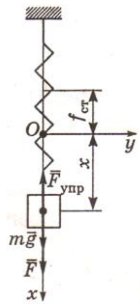
$$x = 2\cos 70t - 1{,}16\sin 70t - 71{,}4t\cos 70t\,.$$

პ ა ს უ ხ ი: $x = 2\cos 70t - 1{,}16\sin 70t - 71{,}4t\cos 70t$ სმ.

ამოცანა 32.91

24 კგ მასის ტვირთი დაკიდებულია 392 ნ/მ სიხისტის ზამბარაზე. ტვირთზე მოქმედებას იწყებს $F = 156{,}8\sin 4t$ ნ ძალა. განსაზღვრეთ ტვირთის მოძრაობის კანონი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნახაზზე გამოვსახოთ m მასის ტვირთზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა და შემაშფოთებელი $\vec{F}$ ძალა.



ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k \,,$$

$$mx'' = mg - F_{yp} + F \,,$$

სადაც $F_{yp} = c(f_{cT} + x);\ F = H\sin pt$, $H = 156{,}8$ ნ; $p = 4$ რად/წმ.

მაშინ

$$mx'' = mg - cx - cf_{cT} + H\sin pt \,. \qquad (1)$$

ვინაიდან სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში $mg = cf_{cT}$, ამიტომ (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$mx'' + cx = H\sin pt$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = h\sin pt \qquad (2)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m} = 16,\quad k = 4$ (რად/წმ); $\quad h = \dfrac{H}{m} = 6{,}4$.

ვინაიდან $p = k = 4$ რად/წმ, ამიტომ შეიმჩნევა რეზონანსი. ამიტომ
(2) განტოლების ზოგად ამოხსნას ვეძებთ შემდეგი სახით

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt - \frac{ht\cos kt}{2k} \,, \qquad (3)$$

$$x' = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt) - \frac{h}{2k}\cos kt + \frac{h}{2k} kt \sin kt \,. \qquad (4)$$

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0, \quad x_0 = 0$ სმ, $x'_0 = 0$ სმ/წმ. (3) და (4) ფორმულებიდან მივიღებთ: $C_1 = 0$; $C_2 = 0{,}2$.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (3) ფორმულაში, მივიღებთ ტვირთის მოძრაობის განტოლებას:

$$x = 0{,}2\sin 4t - 0{,}8\cos 4t \,.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = 0{,}2\sin 4t - 0{,}8\cos 4t$.

ამოცანა 32.92

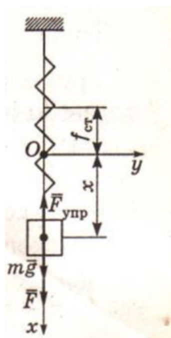
24,5 კგ მასის ტვირთი დაკიდებულია 392 ნ/მ სიხისტის ზამბარაზე. განსაზღვრეთ ტვირთის მოძრაობის კანონი, თუ მასზე მოქმედებას იწყებს $F = 39{,}2\cos 6t$ ნ ძალა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ნახაზზე გამოვსახოთ ტვირთზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა და შემაშფოთებელი $\vec{F}$ ძალა. კოორდინატთა $0xy$ სისტემის სათავე ავირჩიოთ სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში.

ჩავწეროთ ტვირთის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k \,,$$

$$mx'' = mg - F_{yp} + F \,,$$



სადაც $F_{yp} = c(f_{cT} + x);\; F = 39{,}2\cos 6t$,

მაშინ

$$mx'' = mg - cx - cf_{cT} + \; 39{,}2\cos 6t \,.$$

ვინაიდან სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში $mg = cf_{cT}$, ამიტომ ამოცანის მონაცემების გათვალისწინებით განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$24{,}5x'' + 392x = 39{,}2\cos 6t \,,$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = h\sin pt$$

სადაც $k^2 = \frac{c}{m} = \frac{392}{24,5} = 16,$ $k = 4$ (რად/წმ); $h = \frac{39,2}{24,5} = 1,6$; $p = 6$.

განტოლების ზოგად ამოხსნას ვეძებთ შემდეგი სახით

$$x = \bar{x} + x*,$$

სადაც x^* - კერძო ამოხსნაა.

მოცემულ შემთხვევაში

$$\bar{x} = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t$$

$$x^* = -\frac{1,6}{16-36} \cos 6t = -0,08 \cos 6t.$$

მაშინ, (1) განტოლების ზოგად ამოხსნას ჩავწერთ შემდეგი სახით

$$x = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t - 0,08 \cos 6t,$$

$$x' = 4(-C_1 \sin 4t + C_2 \cos 4t) + 0,08 \cdot 6 \sin 6t.$$

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0,\ x_0 = 0, x_0' = 0$.

$C_1 = 0,08$ სმ; $C_2 = 0$.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ x-ს გამოსახულებაში, მივიღებთ ტვირთის მოძრაობის განტოლებას:

$$x = 0,08(\cos 4t - \cos 6t) = 16 \sin t \sin 5t.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = 16 \sin t \sin 5t.$ რხევა ატარებს დაცემის (ძგერის) ხასიათს.

ამოცანა 32.93

ზამბარაზე დაკიდებული ტვირთი მოძრაობს ისე, რომ მისი მოძრაობა აღიწერება დიფერენციალური განტოლებით

$$mx'' + cx = 5 \cos \omega t + 2 \cos 3\omega t.$$

იპოვეთ ტვირთის მოძრაობის კანონი, თუ საწყის მომენტში მისი გადაადგილება და სიჩქარე ნულის ტოლი იყო, აგრეთვე განსაზღვრეთ ω-ს როგორი მნიშვნელობისათვის დადგება რეზონანსი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ტვირთის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლებს ზოგად ამოხსნას ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{5\cos\omega t}{c - m\omega^2} + \frac{2\cos 3\omega t}{c - 9m\omega^2}, \qquad (1)$$

$$x' = \sqrt{\frac{c}{m}}(-C_1 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + C_2 \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t) - \frac{5\omega \sin\omega t}{c - m\omega^2} + \frac{6\omega \sin 3\omega t}{c - 9m\omega^2}. \qquad (2)$$

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0,\quad x_0 = 0,\quad x_0' = 0$. (1) და (2) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$C_1 + \frac{5}{c - m\omega^2} + \frac{2}{c - 9m\omega^2} = 0,$$

$$C_1 = \frac{47m\omega^2 - 7c}{(c - m\omega^2)(c - 9m\omega^2}\,;$$

$$C_2 = 0\,.$$

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (1) ფორმულაში, მივიღებთ ტვირთის მოძრაობის კანონს:

$$x = \frac{(47m\omega^2 - 7c)\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t}{(c - m\omega^2)(c - 9m\omega^2)} + \frac{5\cos\omega t}{c - m\omega^2} + \frac{2\cos 3\omega t}{c - 9m\omega^2}$$

.

რეზონანსი დადგება ორ შემთხვევაში: როცა $c - 9m\omega^2 = 0$ და $c - m\omega^2 = 0$, ე. ი. როცა

$$\omega_1 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{c}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{c}{m}}\,.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = \dfrac{(47m\omega^2 - 7c)\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t}{(c - m\omega^2)(c - 9m\omega^2)} + \dfrac{5\cos\omega t}{c - m\omega^2} + \dfrac{2\cos 3\omega t}{c - 9m\omega^2}$.

რეზონანსი დადგება ორ შემთხვევაში: $\omega_1 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{c}{m}}$ და $\omega_2 = \sqrt{\frac{c}{m}}$

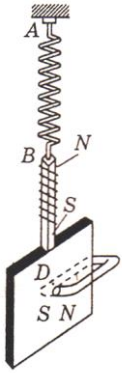
წინაღობის გავლენა იძულებით რხევებზე

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 32.94

.

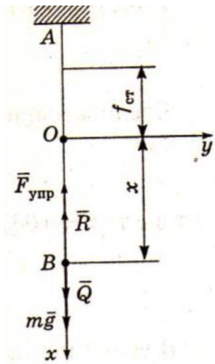
$c = 19{,}6$ ნ/მ სიხისტის ზამბარაზე დაკიდებულია სოლენოიდში გამავალი 50 გრ მასის მაგნიტური ღერო და მაგნიტის პოლუსებს შორის გამავალი 50 გრ სპილენძის ფირფიტა. სოლენოიდში გადის $i = 20\sin 8\pi t$ ამპერი დენი, რომელიც ანვითარებს მაგნიტურ ღეროსთან ურთიერთმოქმედების $F = 0{,}016\pi i$ ნ ძალას. გრიგალისებური დენების შედეგად სპილენძის ფირფიტის დამუხრუჭების ძალა $kv\Phi^2$-ს ტოლია, სადაც $k = 0{,}001$, $\Phi = 10\sqrt{5}$ B და v- ფირფიტის სიჩქარე მ/წმ-ში. განსაზღვრეთ ფირფიტის იძულებითი რხევები.



ა მ ო ხ ს ნ ა. კოორდინატთა $0xy$ სისტემის სათავედ ავირჩიოთ სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში. მაგნიტური ღერო და სპილენძის ფირფიტა ჩავთვალოთ ნივთიერ წერტილად. ნახაზზე გამოვსახოთ მასზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა, შემაშფოთებელი $\vec{Q}$ ძალა და დამუხრუჭების $\vec{R}$ ძალა.

ჩავწეროთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - F_{yp} - R + Q,$$



სადაც $F_{yp} = c(f_{cT} + x);\ R = kv\Phi^2;$

$Q = 0{,}016\pi t.$

მაშინ

$$mx'' = mg - cx - cf_{cT} - kv\Phi^2 + 0{,}016\pi t.$$

ვინაიდან სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში $mg = cf_{cT}$,

ამიტომ $\quad mx'' + cx + kv\Phi^2 = 0{,}016\pi t. \qquad (1)$

შევიტანოთ (1) განტოლებაში ამოცანის მონაცემები $\quad 0{,}1x'' + 19{,}6x +$

$$0{,}001\cdot 500x' = 0{,}016\pi t\cdot 20\sin 8\pi t,$$

ანუ ზოგადი სახით

$$x'' + 2nx' + k^2x = h\sin pt\ ,\qquad (2)$$

სადაც $k^2 = 196;$ $n = 25;$ $h = 3{,}2\pi;$ $p = 8\pi$.

(2) განტოლება – ეს არის იძულებითი რხევის განტოლება.

ფირფიტის იძულებით რხევას განვსაზღვრავთ განტოლებით

$$x^* = A_c\sin(pt+\beta) = \frac{h\sin(pt+\beta)}{\sqrt{(p^2-k^2)^2+4n^2p^2}},$$

სადაც A_c - იძულებითი რხევის ამპლიტუდაა წინაღობის გათვალისწინებით; β - ფაზის გადაწევა.

განვსაზღვროთ ამპლიტუდა

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(p^2-k^2)^2+4n^2p^2}} = \frac{3{,}2\pi}{\sqrt{(64\pi^2-196)^2+4\cdot 2{,}5^2\cdot 64\cdot 3{,}14^2}} = 0{,}022$$

და იძულებითი რხევის ფაზის გადანაცვლება

$$tg\beta = \frac{2np}{p^2-k^2} = 0{,}288,\qquad \beta = 0{,}089\pi.$$

β კუთხე მდებარეობს მესამე მეოთხედში, ამიტომ

$$\beta = -\pi + 0{,}089\pi = -0{,}91\pi.$$

მაშასადამე, იძულებითი რხევის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$x = 0{,}022\sin(8\pi t - 0{,}91\pi).$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x = 0{,}022\sin(8\pi t - 0{,}91\pi)$ მ.

ამოცანა 32.95

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ ფირფიტის მოძრაობის განტოლება, თუ იგი მაგნიტურ ღეროსთან ერთად დაკიდეს დაუჭიმავი ზამბარას ბოლოში და მას მიანიჭეს ქვევით მიმართული საწყისი 5 სმ/წმ სიჩქარე.

ა მ ო ხ ს ა. ჩავწეროთ იძულებითი რხევის განტოლების ზოგადი ამოხსნა, რომელიც მიღებულია 32.94 ამოცანაში შემდეგი სახით

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + A_c \sin(8\pi t - 0{,}91\pi), \qquad (1)$$

$$x' = k_1 e^{-nt}(-C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) - ne^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) +$$
$$+ A_c \cdot 8\pi \cos(8\pi t - 0{,}91\pi),$$

სადაც $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{196 - 2{,}5^2} = 13{,}77$ (რად/წმ).

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0, \quad x_0' = 5$ სმ/წმ.

$x_0 = -\dfrac{mg}{c} = -\dfrac{0{,}1 \cdot 9{,}8}{19{,}6} = -0{,}05$ (მ) $= -5$ სმ, ინტეგრების მუდმივებისათვის მივიღებთ: $C_1 = -5 + 2{,}2 \cdot 0{,}28 = -4{,}39$ (სმ); $C_2 = 3{,}42$.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (1) ფორმულაში, მივიღებთ ფირფიტის მოძრაობის განტოლებას:

$$x = e^{-2{,}5t}(-4{,}39 \cos 13{,}77t + 3{,}42 \sin 13{,}77t) + 2{,}2 \sin(8\pi t - 0{,}91\pi).$$

<u>პასუხი:</u>

$x = e^{-2{,}5t}(-4{,}39 \cos 13{,}77t + 3{,}42 \sin 13{,}77t) + 2{,}2 \sin(8\pi t - 0{,}91\pi)$ სმ.

ამოცანა 32.96

$m = 2$ კგ მასის ნივთიერი წერტილი დაკიდებულია 4 კნ/მ სიხისტის ზამბარაზე. წერტილზე მოქმედებს შემაშფოთებელი ძალა $S = 120 \sin(pt + \delta)$ ნ და მოძრაობისადმი წინაღობის ძალა, რომელიც სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია და $R = 0{,}5\sqrt{mc}v$ ნ-ს ტოლია. რას ყდრის იძულებითი რხევის ამპლიტუდის A_{max} უდიდესი მნიშვნელობა? როგორი p სიხშირისათვის მიაღწევს იძულებითი რხევის ამპლიტუდა უდიდეს მნიშვნელობას?

ა მ ო ხ ს ნ ა. იძულებითი რხევის ამპლიტუდა უდიდეს მნიშვნელობას მიაღწევს როცა $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$. მაშინ

$$A_{max} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

ამოცანის მონაცემების მიხედვით გამოვთვალოთ:

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{4\cdot 10^3}{2} = 2\cdot 10^3,$$

$$n = \frac{0{,}5\sqrt{mc}}{2m} = \frac{0{,}5\sqrt{2\cdot 4\cdot 10^3}}{2\cdot 2} = 11{,}18 \text{ (რად/წმ)},$$

$$h = \frac{120}{2} = 60 \text{ (მ/წმ}^2\text{)};$$

მაშინ $$A_{\max} = \frac{60}{2\cdot 11{,}8\cdot\sqrt{2\cdot 10^3 - (11{,}18)^2}} = 0{,}062 \text{ (მ)} = 6{,}2 \text{ (სმ)}.$$

განვსაზღვროთ p სიხშირე, როდესაც მიიღწევა ამპლიტუდის ეს მნიშვნელობა: $$p = \sqrt{2\cdot 10^3 - 250} = 41{,}83 \text{ (რად/წმ)}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $A_{\max} = 6{,}2$ სმ; $p = 41{,}83$ რად/წმ.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 32.97

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ წერტილის მოძრაობის განტოლება, თუ საწყის მომენტში მისი მდებარეობა და სიჩქარე იყო: $x_0 = 2$ სმ, $v_0 = 3$ სმ/წმ. შემაშფოთებელი ძალის სიხშირე $p = 30$ რად/წმ; შემაშფოთებელი ძალის საწყისი ფაზა $\delta = 0$. კოორდინატთა სათავე არჩეულია სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში.

ა მ ო ხ ს ა. ჩავწეროთ იძულებითი რხევის განტოლების ზოგადი ამოხსნა გარემოს წინაღობის გათვალისწინებით ზოგადი სახით

$$x = e^{-nt}(C_1\cos k_1 t + C_2\sin k_1 t) + A_c\sin(pt+\beta),$$

სადაც

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(p^2-k^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{60}{\sqrt{(2000-900)^2 + 4\cdot 125\cdot 900}} = 4{,}66 \text{ (სმ)},$$

$$tg\beta = \frac{2np}{p^2-k^2} = -0{,}6098,$$

$$\beta = -31{,}4^0 = -0{,}174\pi;$$

$$k_1 = \sqrt{k^2-n^2} = \sqrt{2\cdot 10^3 - (11{,}18)^2} = 43{,}3$$

(რად/წმ).

მაშასადამე

$$x = e^{-11{,}18t}(C_1\cos 43{,}3t + C_2\sin 43{,}3t) + 4{,}66\sin(30t - 0{,}174\pi)\,, \qquad (1)$$

$$x' = -11{,}8e^{-11{,}8t}(C_1\cos 43{,}3t + C_2\sin 43{,}3t) +$$
$$+ 43{,}3e^{-11{,}8t}(-C_1\cos 43{,}3t + C_2\sin 43{,}3t) + + 4{,}66\cdot 30\cos(30t - 0{,}174\pi)\,,$$

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0,$ $x_0 = 2$ სმ, $x_0' = 3$ სმ/წმ. ინტეგრების მუდმივებისათვის მივიღებთ: $C_1 = 4{,}422$, $C_2 = -1{,}547$.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (1) ფორმულაში, მივიღებთ ფირფიტის მოძრაობის განტოლებას:

$$x = e^{-11{,}18t}(4{,}422\cos 43{,}3t - 1{,}547\sin 43{,}3t) + 4{,}66\sin(30t - 0{,}174\pi)\,.$$

პასუხი:

$x = e^{-11{,}18t}(4{,}422\cos 43{,}3t - 1{,}547\sin 43{,}3t) + 4{,}66\sin(30t - 0{,}174\pi)$ სმ.

ამოცანა 32.98

3 კგ მასის ნივთიერი წერტილი დაკიდებულია $c = 117{,}6$ ნ/მ სიხისტის კოეფიციენტის ზამბარაზე. წერტილზე მოქმედებს შემაშფოთებელი ძალა $F = H\sin(6{,}26t + \beta)$ ნ და მოძრაობისადმი გარემოს ბლანტი წინაღობის ძალა $\vec{R} = -\alpha\vec{v}$ (R - ნიუტონებშია). როგორ შეიცვლება წერტილის იძულებითი რხევის ამპლიტუდა, თუ ტემპერატურის ცვლილების შედეგად გარემოს სიბლანტე (კოეფიციენტი α) გაიზრდება 3-ჯერ?

ა მ ო ხ ს ნ ა. რხევის ამპლიტუდა გარემოს წინაღობის არსებობისას

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(p^2 - k^2)^2 + 4n^2p^2}}\,, \qquad (1)$$

სადაც n - მილევის კოეფიციენტია, $n = \dfrac{\alpha}{2m}$.

ამოცანის მონაცემების მიხედვით

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{117{,}6}{3} = 39{,}2, \qquad k = \sqrt{39{,}2} = 6{,}26 \text{ (რად/წმ)}.$$

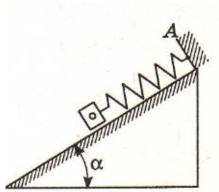
ვინაიდან $p = k$, ამიტომ (1) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$A_c = \frac{h}{2np}\,.$$

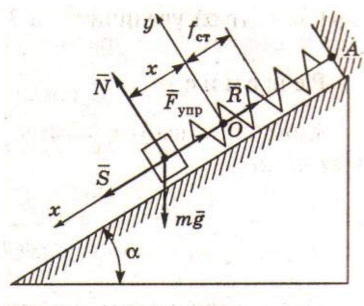
ცხადია, რომ გარემოს წინაღობის მახასიათებელი n-ის 3-ჯერ გადიდებისას რხევის ამპლიტუდა შემცირდება 3-ჯერ.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> იძულებითი რხევის ამპლიტუდა შემცირდება სამჯერ.

ამოცანა 32.99



2 კგ მასის სხეული, რომელიც ზამბარით მიმაგრებულია უძრავ A წერტილზე, მოძრაობს ჰორიზონტისადმი α კუთხით დახრილ გლუვ სიბრტყეზე. მასზე მოქმედებს შემაშფოთებელი ძალა $S=180\sin 10t$ ნ და სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციული წინაღობის ძალა $\vec{R}=-29{,}4\vec{v}$ (R- ნიუტონებშია). ზამბარას სიხისტის კოეფიციენტი $c=5$ კნ/მ. საწყის მომენტში სხეული იყო უძრავი სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში. იპოვეთ სხეულის მოძრაობის განტოლება, თავისუფალი T და იძულებითი T_1 რხევების პერიოდები, იძულებითი რხევის ფაზის გადანაცვლება და შემაშფოთებელი ძალა.



ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ სხეული ნივთიერ წერტილად და ნახაზზე ვაჩვენოთ მასზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, ზამბარის დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა, შემაშფოთებელი ძალა $\vec{S}$ და წინაღობის $\vec{R}$ ძალა.

ჩავწეროთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx''=mg\sin\alpha-F_{yp}+S-R,$$

სადაც $F_{yp}=c(x+f_{cT});\quad R=\alpha v,\quad \alpha=29{,}4;$

$S=H\sin pt,\quad H=180,\ p=10.$

მაშინ, მოძრაობის განტოლებას აქვს ასეთი სახე

$$mx'' = mg\sin\alpha - cx - cf_{cT} - \alpha v + H\sin pt\,.$$

სტატიკური წონასწორობისას $mg\sin\alpha = cf_{cT}$, მაშინ

$$mx'' + \alpha v + cx = H\sin pt$$

ანუ

$$x'' + 2nx' + k^2 x = h\sin pt\,. \qquad (1)$$

სადაც $n = \dfrac{\alpha}{2m} = 7{,}35$; $k^2 = \dfrac{c}{m} = 2500$; $h = \dfrac{H}{m}$.

განვსაზღვროთ იძულებითი რხევის ამპლიტუდა

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(p^2 - k^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{90}{\sqrt{(2500-100)^2 + 4\cdot 54\cdot 100}} = 0{,}0374$$

(მ)=3,74(სმ),

და ფაზის ძვრა

$$tg\beta = \frac{2np}{p^2 - k^2} = \frac{2\cdot 7{,}35\cdot 10}{100 - 2500} = -0{,}061.$$

აქედან $$\beta = \varepsilon = -3^0 30'.$$

ვიპოვოთ თავისუფალი (T) და იძულებითი (T_1) რხევების პერიოდები:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\cdot 3{,}14}{49{,}46} = 0{,}127 \text{ (წმ)},$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{p} = \frac{6{,}28}{10} = 0{,}628 \text{ (წმ)}.$$

(1) განტოლების ზოგად ამოხსნას აქვს ასეთი სახე

$$x = e^{-nt}(C_1\cos k_1t + C_2\sin k_1t) + A_c\sin(pt+\beta),$$

$$x' = -ne^{-nt}(C_1\cos k_1t + C_2\sin k_1t) +$$
$$k_1e^{-nt}(-C_1\sin k_1t + C_2\cos k_1t) +$$
$$+ A_c p\cos(pt+\beta).$$

სადაც $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = 49{,}46$ (რად/წმ).

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0,\ x_0 = 0$, $x_0' = 0$.

ინტეგრების მუდმივებისათვის მივიღებთ: $C_1 = 0{,}228$ სმ, $C_2 = -0{,}72$ სმ.

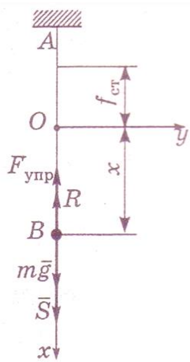
ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობების ჩასმით (1) ფორმულაში, მივიღებთ სხეულის მოძრაობის განტოლებას:

$$x = e^{-7{,}35t}(0{,}228\cos 49{,}46t - 0{,}72\sin 49{,}46t) + 3{,}74\sin(10t - 3^0 30').$$

<u>**პასუხი:**</u> $x = e^{-7{,}35t}(0{,}228\cos 49{,}46t - 0{,}72\sin 49{,}46t) + 3{,}74\sin(10t - 3^0 30').$

$$T = 0{,}127 \text{ წმ}; \quad T_1 = 0{,}628 \text{ წმ}; \quad \varepsilon = -3^0 30'.$$

ამოცანა 32.100



0,4 კგ მასის სხეულზე, რომელიც დაკიდებულია $c = 4$ კნ/მ სიხისტის კოეფიციენტის ზამბარაზე, მოქმედებს შემაშფოთებელი ძალა $S = 40\sin 50t$ ნ და მოძრაობისადმი გარემოს წინაღობის ძალა $\vec{R} = -\alpha\vec{v}$, სადაც $\alpha = 25$ ნ•წმ/მ, $v-$ სხეულის სიჩქარე (v- მ/წმ). საწყის მომენტში სხეული იყო უძრავი სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში. იპოვეთ სხეულის მოძრაობის განტოლება და განსაზღვრეთ შემაშფოთებელი ძალის სიხშირის მნიშვნელობა, რომლის დროსაც იძულებითი რხევის ამპლიტუდა იქნება მაქსიმალური.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ სხეული ნივთიერ B წერტილად და ნახაზზე ვაჩვენოთ მასზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, ზამბარის დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა, შემაშფოთებელი ძალა $\vec{S}$ და გარემოს წინაღობის $\vec{R}$ ძალა.

შევადგინოთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - F_{yp} + S - R, \qquad \text{სადაც}$$

$$F_{yp} = c(x + f_{cT});\ R = \alpha v = \alpha x';$$

$$S = H\sin pt, \quad H = 40,\ p = 50.$$

ამიტომ, მოძრაობის განტოლებას აქვს ასეთი სახე

$$mx'' = mg - cx - cf_{cT} - \alpha x' + H\sin pt.$$

სტატიკური წონასწორობისას $mg = cf_{cT}$, მაშინ

$$x'' + 2nx' + k^2 x = H\sin pt. \qquad (1)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m} = 1 \cdot 10^4$ რად/წმ²; $n = \dfrac{\alpha}{2m} = 31{,}25$ რად/წმ;

$h = \dfrac{H}{m} = 100$.

განვსაზღვროთ იძულებითი რხევის ამპლიტუდა

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(p^2 - k^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{90}{\sqrt{(1 \cdot 10^4 - 2{,}5 \cdot 10^3)^2 + 4 \cdot 976{,}6 \cdot 2500}} = 0{,}0123$$

(მ)=3,74(სმ),

$$tg\beta = \frac{2np}{p^2 - k^2} = \frac{2 \cdot 31{,}5 \cdot 50}{2500 - 1 \cdot 10^4} = -0{,}42, \quad \beta = -22^0 36'.$$

(1) განტოლების ზოგად ამოხსნას აქვს ასეთი სახე

$$x = ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha)) + A_c \sin(pt + \beta),$$

$$x' = -ane^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha) + ak_1 e^{-nt}\cos(k_1 t + \alpha)$$
$$+ A_c p\cos(pt + \beta).$$

სადაც $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{1 \cdot 10^4 - (31{,}25)^2} = 95$ (რად/წმ).

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0,\ x_0 = 0$, $x_0' = 0$.

მაშინ $a = 0{,}647$, $\sin\alpha = 0{,}73$, $\alpha = -46^0 55'$

a და α-ს მნიშვნელობების ჩასმით (1) განტოლების ამოხსნა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$x = 0{,}64e^{-31{,}25t}\sin(95t - 46^0 55') + 1{,}23\sin(50t - 22^0 36').$$

ვიპოვოთ რხევის p სიხშირე, რომლის დროსაც მიიღწევა იძულებითი რხევის ამპლიტუდის მაქსიმუმი და $A_{c_{\max}}$-ის მნიშვნელობა:

$$p = \sqrt{k^2 - 2n^2} = \sqrt{1 \cdot 10^4 - 2(31{,}25)^2} = 89{,}7 \text{ (რად/წმ).}$$

$$A_{c_{\max}} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{100}{62{,}5 \cdot 95} = 0{,}01684 \text{ (მ)} = 1{,}684 \text{ (სმ).}$$

<u>პასუხი:</u> 1) $x = 0{,}64e^{-31{,}25t}\sin(95t - 46^0 55') + 1{,}23\sin(50t - 22^0 36')$ სმ;

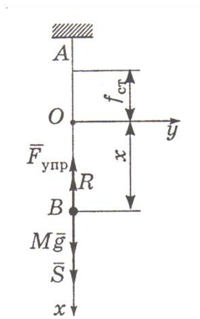
2) იძულებითი რხევის ამპლიტუდა იქნება მაქსიმალური, როცა

$p = 89{,}7$ რად/წმ და $1{,}684$ სმ-ს ტოლია.

ამოცანა 32.101

M კგ მასის სხეულზე, რომელიც დაკიდებულია c ნ/მ სიხისტის კოეფიციენტის ზამბარაზე, მოქმედებს შემაშფოთებელი ძალა $S = H\sin pt$ ნ და მოძრაობისადმი გარემოს წინაღობის ძალა $\vec{R} = -\alpha\vec{v}$ (R - ნიუტონებშია), სადაც $\vec{v}$ სხეულის სიჩქარეა. საწყის მომენტში სხეული იყო უძრავი სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში. იპოვეთ სხეულის მოძრაობის განტოლება თუ $c > \alpha^2/(4M)$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ სხეული ნივთიერ წერტილად და ნახაზზე ვაჩვენოთ მასზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $M\vec{g}$ ძალა, ზამბარის დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა, შემაშფოთებელი ძალა $\vec{S}$ და გარემოს წინაღობის $\vec{R}$ ძალა.



შევადგინოთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$Mx'' = Mg - F_{yp} + S - R,$$

სადაც $F_{yp} = c(x + f_{cT});\ R = \alpha v = \alpha x';\ S = H\sin pt$

ამიტომ, მოძრაობის განტოლებას აქვს ასეთი სახ

$$Mx'' = Mg - cx - cf_{cT} - \alpha x' + H\sin pt.$$

სტატიკური წონასწორობისას $mg = cf_{cT}$, მაშინ

$$Mx'' + cx + \alpha x' = H\sin pt,$$

ანუ

$$x'' + 2nx' + k^2x = H\sin pt. \qquad (1)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{M};\quad n = \dfrac{\alpha}{2M};\quad h = \dfrac{H}{M}.$

როცა $c > \dfrac{\alpha^2}{4M}$, (1) განტოლების ზოგად ამოხსნას ვეძებთ ასეთი სახით $x = \bar{x} + x*$,

სადაც

$$\bar{x} = e^{-nt}(C_1\cos k_1t + C_2\sin k_1t);\quad x* = A\cos pt + B\sin pt$$

.

მაშინ

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + A\cos pt + B\sin pt .$$

(2)

$$x' = -ne^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) +$$
$$k_1 e^{-nt}(-C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) +$$
$$+ p(-A\sin pt + B\cos pt) .$$

ვიპოვოთ არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამოხსნის A და B კოეფიციენტებკი

$$x* = A\cos pt + B\sin pt = \frac{h(k^2 - p^2)\sin pt - 2nph\cos pt}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2},$$

გამოვიყენოთ საწყისი პირობები: $t = 0,\ x_0 = 0,\ x_0' = 0$.

მაშინ
$$C_1 = \frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2},$$

$$C_2 = \frac{ph(2n^2 + p^2 - k^2)}{\sqrt{k^2 - n^2}\,[(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2]} .$$

ჩავსვათ C_1 და C_2 მუდმივების და A და B კოეფიციენტების მნიშვნელობები (2) განტოლებაში, მივიღებთ სხეულის მოძრაობის განტოლებას საბოლოო სახით:

$$x = \frac{phe^{-nt}}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}\left[2n\cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \frac{2n^2 + p^2 - k^2}{\sqrt{k^2 - n^2}}\sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t\right] +$$
$$\frac{h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}[(k^2 - p^2)\sin pt - 2np\cos pt] .$$

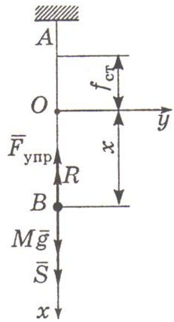
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u>

$$x = \frac{phe^{-nt}}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}\left[2n\cos\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \frac{2n^2 + p^2 - k^2}{\sqrt{k^2 - n^2}}\sin\sqrt{k^2 - n^2}\,t\right] +$$
$$\frac{h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}[(k^2 - p^2)\sin pt - 2np\cos pt]$$

სადაც $h = \dfrac{H}{M}$; $k^2 = \dfrac{c}{M}$; $n = \dfrac{\alpha}{2M}$.

ამოცანა 32.102

6კგ მასის სხეულზე, რომელიც დაკიდებულია $c = 17,64$ კნ/მ სიხისტის კოეფიციენტის ზამბარაზე, მოქმედებს შემაშფოთებელი ძალა $S = P_0 \sin\omega t$ ნ. მოძრაობისადმი სითხის წინაღობა სიჩქარის პროპორციულია. როგორი უნდა იყოს ბლანტი სითხის წინაღობის α კოეფიციენტი, რომ იძულებითი რხევის მაქსიმალური ამპლიტუდა ტოლი იყოს ზამბარას სტატიკური დაგრძელების გასამკეცებული მნიშვნელობისა? რას უდრის დარღვევის (აშლის) კოეფიციენტი Z (იძულებითი რხევის წრიული სიხშირის ფარდობა თავისუფალი რხევის წრიულ სიხშირესთან)? იპოვეთ იძულებითი რხევის და შემაშფოთებელი ძალის ფაზის გადანაცვლება.



ა მ ო ხ ს ნ ა. მივიღოთ სხეული ნივთიერ წერტილად, შევადგინოთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფარენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში, თუ მასზე მოდებულია (იხ. ნახაზი): სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, ზამბარის დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა, შემაშფოთებელი $\vec{S}$ ძალა და გარემოს წინაღობის $\vec{R}$ ძალა.

შევადგინოთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = mg - F_{yp} + S - R,$$

სადაც $F_{yp} = c(x + f_{cT})$; $R = \alpha v = \alpha x'$; $S = P_0 \sin\omega t$.

ამიტომ, მოძრაობის განტოლებას აქვს ასეთი სახე

$$mx'' = mg - cx - cf_{cT} - \alpha x' + P_0 \sin\omega t.$$

სტატიკური წონასწორობისას $mg = cf_{cT}$, მაშინ

$$mx'' + \alpha x' + cx = P_0 \sin\omega t,$$

ანუ

$$x'' + 2nx' + k^2 x = h\sin\omega t.$$

მაქსიმალური ამპლიტუდა $A_{c_{\max}}$ განვსაზღვროთ ფორმულით

$$A_{c_{\max}} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}},$$

სადაც $n=\dfrac{\alpha}{2m}$; $h=\dfrac{P_0}{m}$; $k^2=\dfrac{c}{m}=\dfrac{17{,}64\cdot 10^3}{6}=2{,}94\cdot 10^3$.

ამოცანის პირობის თანახმად $A_{c_{\max}}=3f_{cT}$, მაშინ წინაღობის კოეფიციენტი $\alpha=110$ ნ•წმ/მ.

ვიპოვოთ მილევის კოეფიციენტი

$$n=\frac{\alpha}{2m}=\frac{110}{2\cdot 6}=9{,}17$$

და დარღვევის (აშლის) კოეფიციენტი

$$z=\frac{\sqrt{k^2-2n^2}}{k}=\frac{\sqrt{2{,}94\cdot 10^3-2\cdot 9{,}17^2}}{\sqrt{2{,}94\cdot 10^3}}=0{,}97.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $z=\dfrac{p}{k}$, განვსაზღვროთ შემაშფოთებელი ძალის სიხშირე

$$p=zk=0{,}97\cdot\sqrt{2{,}94\cdot 10^3}=52{,}6 \text{ (რად/წმ)}$$

და გამოვთვალოთ იძულებითი რხევის და შემაშფოთებელი ძალის ფაზის გადანაცვლება

$$tg\beta=\frac{2np}{p^2-k^2}=\frac{2\cdot 9{,}17\cdot 52{,}6}{2771{,}9-2940}=-5{,}74,$$

$$\beta=-80^0 7', \quad \varepsilon=80^0 7'.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\alpha=110$ ნ•წმ/მ; $z=0{,}97$; $\varepsilon=80^0 7'$.

ამოცანა 32.103

0,1კგ მასის სხეულზე, რომელიც დაკიდებულია $c=5$ კნ/მ სიხისტის კოეფიციენტის ზამბარაზე, მოქმედებს შემაშფოთებელი ძალა $S=H\sin pt$, სადაც $H=100$ ნ, $p=100$ რად/წმ, და მოძრაობისადმი წინაღობის ძალა $R=\beta v$, სადაც $\beta=50$ ნ•წმ/მ. დაწერეთ იძულებითი რხევის განტოლება და განსაზღვრეთ p სიხშირის მნიშვნელობა, როდესაც იძულებითი რხევის ამპლიტუდა იქნება მაქსიმალური.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ სხეულის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში: (იხ. 32.101 ამოცანის ამოხსნა):

$$mx'' + \beta x' + cx = H\sin pt ,$$

ანუ
$$x'' + 2nx' + k^2 x = h\sin pt, \qquad (1)$$

სადაც $n = \frac{\beta}{2m} = \frac{50}{2 \cdot 0,1} = 250$ (რად/წმ); $k^2 = \frac{c}{m} = 5 \cdot 10^4$; $h = \frac{H}{m} = 1 \cdot 10^3$.

(1) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამოხსნაა

$$x^* = A_c \sin(pt - \varepsilon)$$

ანუ
$$x^* = A_c (\sin pt \cos\varepsilon - \cos pt \sin\varepsilon) . \qquad (2)$$

სადაც A_c - იძულებითი რხევის ამოლიტუდაა; ε - შემაშფოთებელი ძალის ფაზის გადანაცვლების სიდიდე.

ამოცანის მონაცემების გათვალისწინებით გამოვთვალოთ A_c და ε :

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{1 \cdot 10^3}{\sqrt{(5 \cdot 10^4 - 1 \cdot 10^4)^2 + 4 \cdot 250^2 \cdot 10^4}} = 0,0156$$

(მ)=

=1,56 (სმ);

$$tg\varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2} = \frac{2 \cdot 250 \cdot 10^2}{5 \cdot 10^4 - 1 \cdot 10^4} = 1,25,$$

მაშინ $\varepsilon = 51^0 20'$, $\cos\varepsilon = 0,625,$ $\sin\varepsilon = 0,781$.

ეს მნიშვნელობები ჩავსვათ (2) გამოსახულებაში:

$$x^* = 1,56(0,625\sin pt - 0,781\cos pt) ,$$

ანუ
$$x^* = 0,98\sin 100t - 1,22\cos 100t ,$$

სადაც $x^* = x_2$.

ვინ\იდან $A_{c_{\max}}$ შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $k^2 - 2n^2 > 0,$ ამიტომ შევამოწმოთ ეს შესაძლებლობა. მოცემულ შემთხვევაში

$$k^2 - 2n^2 = 5 \cdot 10^4 - 2 \cdot 250^2 = 50000 - 125000 << 0 .$$

მაშასადამე, ამპლიტუდის მაქსიმუმი არ არსებობს.

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x_2 = 0,98\sin 100t - 1,22\cos 100t$ სმ.

ამპლიტუდის მაქსიმუმი არ არსებობს, ვინაიდან $n > \frac{k}{\sqrt{2}}$.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 32.104

წინა ამოცანის პირობებში განსაზღვრეთ იძულებითი რხევის და შემაშფოთებელი ძალის ფაზის გადანაცვლება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. იძულებითი რხევის და შემაშფოთებელი ძალის ε ფაზის გადანაცვლების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულით

$$tg\beta = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

ვისარგებლოთ 32.103 ამოცანის ამოხსნისას მიღებული მნიშვნელო- ბებით $n = 250$ (რად/წმ); $k^2 = 5 \cdot 10^4$, მაშინ

$$tg\varepsilon = \frac{500 \cdot 100}{5 \cdot 10^4 - 100^2} = 1{,}25.$$

$$\varepsilon = arctg1{,}25 = 51^0 20'.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\varepsilon = arctg1{,}25 = 51^0 20'$

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 32.105

0,2კგ მასის სხეული დაკიდებულია $c = 19{,}6$ კნ/მ სიხისტის კოეფიციენტის ზამბარაზე. სხეულზე მოქმედებს შემაშფოთებელი $S = 0{,}2\sin 14t$ ნ ძალა და მოძრაობისადმი წინაღობის $R = 49v$ ნ ძალა.
განსაზღვრერთ იძულებითი რხევის და შემაშფოთებელი ძალის ფაზის გადანაცვლება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შევადგინოთ სხეულის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში: (იხ. 32.101 ამოცანის ამოხსნა, (1) ფორმულა):

$$x'' + 2nx' + k^2 x = h \sin pt. \qquad (1)$$

ამოცანის მონაცემების გათვალისწინებით გამოვთვალოთ:

$$n = \frac{\alpha}{2m} = \frac{49}{2 \cdot 0{,}2} = 122{,}5 \text{ (რად/წმ)},$$

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{19{,}6}{0{,}2} = 98 \text{ (რად/წმ)},$$

$$h = \frac{H}{m} = \frac{0,2}{0,2} = 1.$$

განსაზღვრეთ იძულებითი რხევის და შემაშფოთებელი ძალის ფაზის გადანაცვლება

$$tg\varepsilon = \frac{2np}{p^2 - k^2} = \frac{245 \cdot 14}{98 - 196} = -35. \qquad \varepsilon = 91^0 38'.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\varepsilon = 91^0 38'$.

ამოცანა 32.106

წინა ამოცანის პირობებში იპოვეთ c_1 სიხისტის კოეფიციენტის ახალი ზამბარა, რომლითაც უნდა შევცვალოთ მოცემული ზამბარა, რათა
იძულებითი რხევის და შემაშფოთებელი ძალის ფაზის გადანაცვლება გახდეს $\pi/2$ -ს ტოლი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. იძულებითი რხევის და შემაშფოთებელი ძალის ε ფაზის გადანაცვლება განისაზღვრება ფორმულით

$$tg\varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

რადგანაც პირობის თანახმად $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, ამიტომ $tg\varepsilon = \infty$ და,

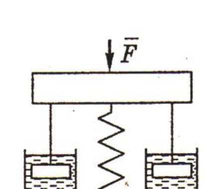
მაშასადამე $p = k$. მაშინ $k^2 = 14^2 = \frac{c_1}{m}$.

აქედან $c_1 = 196 \cdot 0,2 = 39,2$ (ნ/მ).

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $c_1 = 39,2$ ნ/მ.

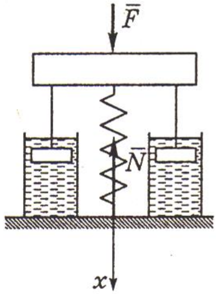
ამოცანა 32.107

იმისათვის, რომ შემცირდეს m მასის სხეულზე შემაშფოთებელი $F = F_0 \sin(pt + \delta)$ ძალის მოქმედება, აყენებენ ზამბარიან ამორტიზატორს თხევადი დემპფერით. ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტია c. ჩათვალეთ, რომ წინაღობის ძალა სიჩქარის პირველი ხარისხის



პროპორციულია ($F_c = \alpha v$). იპოვეთ მთელი სისტემის მაქსიმალური დინამიური წნევა ფუნდამენტზე დამყარებული რხევის დროს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. დამყარებული მოძრაობის დროს ადგილი ექნება მხოლოდ იძულებით რხევას, რომლის განტოლებას აქვს ასეთი სახე



$$x = A_c \sin(pt + \delta - \varepsilon),$$

(1)

A_c - იძულებითი რხევის ამპლიტუდაა,

$$A_c = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}},$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$; $n = \dfrac{\alpha}{2m}$; $h = \dfrac{F_0}{m}$.

ვინაიდან

$$\sin(pt + \delta - \varepsilon) = \sin(pt + \delta)\cos\varepsilon - \cos(pt + \delta)\sin\varepsilon,$$

სადაც

$$\cos\varepsilon = \frac{k^2 - p^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \ \sin\varepsilon = \frac{2np}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}},$$

ამიტომ, (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$x = \frac{h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}[(k^2 - p^2)\sin(pt + \delta) - 2np\cos(pt + \delta)],$$

$$x'' = \frac{hp^2}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}[-(k^2 - p^2)\sin(pt + \delta) + 2np\cos(pt + \delta)].$$

სხეულის რხევის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში (იხ. ნახაზი) ასეთია

$$mx'' = F - N.$$

აქედან, იმის გათვალისწინებით, რომ $F_0 = mh$, მივიღებთ

$$N = F - mx'' = F_0(\sin(pt + \delta) +$$

$$+ \frac{F_0 p^2[(k^2 - p^2)\sin(pt + \delta) - 2pn\cos(pt + \delta)]}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2},$$

ანუ

$$N = a(\sin(pt + \delta) + b\cos(pt + \delta),$$

სადაც

$$a = F_0\left[1+\frac{p^2(k^2-p^2)}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\right];\;\; b = F_0\left[-\frac{2np^3}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\right];$$

დინამიური წნევის მაქსიმალური მნიშვნელობა

$$N_{\max} = \sqrt{a^2+b^2}$$

ანუ

$$N_{\max} = F_0\sqrt{\left[1+\frac{p^2(k^2-p^2)}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\right]^2+\frac{4n^2p^6}{\left[(k^2-p^2)^2+4n^2p^2\right]^2}} =$$

$$= \frac{F_0}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}$$

$$\sqrt{\left[(k^2-p^2)^2+4n^2p^2+p^2(k^2-p^2)\right]^2+4n^2p^6} =$$

$$= \frac{F_0}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}\;\;\sqrt{\left[k^4-p^2k^2+4n^2p^2\right]^2+4n^2p^6} =$$

$$= F_0\sqrt{\frac{k^4+4n^2p^2}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}\;,$$

ვინაიდან ფესვქვეშა გამოსახულება

$$(k^2-p^2k^2+4n^2p^2)^2+4n^2p^6$$

უნაშთოდ იყოფა $[(k^2-p^2)^2+4n^2p^2]$ - ზე.

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $N_{\max} = F_0\sqrt{\dfrac{k^4+4n^2p^2}{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}$, სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$;

$n = \dfrac{\alpha}{2m}$.

33. ფარდობითი მოძრაობა

მეთოდური მითითებანი ამოცანების ამოსახსნელად

ნივთიერი წერტილის ფარდობითი მოძრაობა ეწოდება წერტილის მოძრაობას კოორდინატთა მოძრავი სისტემის მიმართ. საზოგადოდ, კოორდინატთა ასეთ სისტემას შეუძლია იმოძრაოს ნებისმიერად და ამიტომ არაინერციულია. კოორდინატთა ამ სისტემაში დინამიკის მეორე კანონი ზოგადი სახით მიუღებელია.

რადგანაც წერტილის რთული მოძრაობისას აბსოლუტური აჩქარება განისაზღვრება კორიოლისის თეორემით,

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \,, \tag{33.1}$$

სადაც $\vec{a}_r, \vec{a}_e, \vec{a}_c$ - შესაბამისად, წერტილის ფარდობითი, წარმტანი და კორიოლისის აჩქარებებია.

დინამიკის მეორე კანონს კოორდინატთა მოძრავ სისტემაში აქვს ასეთი სახე

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_k + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c \,, \tag{33.2}$$

სადაც $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$ - ნივთიერი წერტილის წარმტანი ინერციის ძალაა; $\vec{\Phi}_c = -m\vec{a}_c = -2m(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r)$ - კორიოლისის ინერციის ძალა.

(33.2) განტოლება გამოსახავს დინამიკის მეორე კანონს ნივთიერი წერტილის ფარდობითი მოძრაობისას. ამ განტოლების დაგეგმილებით კოორდინატთა მოძრავი (მაგალითად $0xyz$) სისტემის ღერძებზე, მივიღებთ ნივთიერი წერტილის ფარდობითი მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს ამ ღერძებზე გეგმილებში:

$$\begin{aligned} mx'' &= \sum F_{kx} + \Phi_{ex} + \Phi_{cx} \,, \\ my'' &= \sum F_{ky} + \Phi_{ey} + \Phi_{cy} \,, \\ mz'' &= \sum F_{kz} + \Phi_{ez} + \Phi_{cz} \,. \end{aligned} \tag{33.3}$$

(33.2) განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ ბუნებრივ ღერძებზე გეგმილებშიც, კერძოდ, მრუდწირული მოძრაობისას მხებზე და მთავარ ნორმალიზე, როდესაც წერტილის ტრაექტორია ცნობილია, მაგალითად, მათემატიკური ქანქარას მოძრაობის კვლევისას.

ამგვარად, კოორდინატთა მოძრავ სისტემაში წერტილის მოძრაობაზე ამოცანების ამოხსნისას ნივთიერი წერტილის

ფარდობითი მოძრაობისათვის მექანიკის ყველა განტოლება დ თეორემა ისევე შედგება, როგორც აბსოლუტური მოძრაობის განტოლებები, თუ წერტილზე მოქმედ ძალებს დაუმატებთ წარმტანი ინერციის ძალას და კორიოლისის ინერციის ძალას.

თუ წერტილი კოორდინატთა მოძრავ სისტემაში უძრავია, ე. ი. ფარდობითი სიჩქარე $\vec{v}_r = 0$ და ფარდობითი აჩქარება $\vec{a}_r = 0$, მაშასადამე, აგრეთვე $\vec{\Phi}_c = 0$, მაშინ (33.2) ტოლობა მიიღებს ასეთ სახეს

$$\sum \vec{F}_k + \vec{\Phi}_c = 0, \qquad (33.4)$$

(33.4) განტოლება არის წერტილის ფარდობითი წონასწორობის (უძრაობის) განტოლება.

დედამიწის ზედაპირზე მდებარე წერტილზე (სხეულზე) მოქმედებს დედამიწის ცენტრისკენ მიზიდულობის $\vec{P}$ ძალა, ზედაპირის ნორმალური რეაქცია $\vec{N}$ და ცენტრისკენული ინერციის $\vec{\Phi}_c^u$ ძალა. $\vec{P}$ და $\vec{\Phi}_c^u$ განაპირობებენ წნევას დედამიწის ზედაპირზე, ხოლო მათი ჯამი წარმოადგენს სიმძიმის $\vec{G}$ ძალას, ე. ი.

$$\vec{G} = \vec{P} + \vec{\Phi}_c^u .$$

ამიტომ, სტატიკის ამოცანების ამოხსნისას, თუ მივიღებთ დედამიწასთან დაკავშირებულ კოორდინატთა სისტემას უძრავად, დედამიწის ბრუნვასთან დაკავშირებული არავითარი შესწორება არ არის საჭირო.

დედამიწის ზედაპირზე ან დედამიწის მახლობლად სხეულის რაიმე ფარდობითი $\vec{v}_r$ სიჩქარით მოძრაობისას მასზე მოქმედებს კორიოლისის ინერციის ძალა, რომელიც ჩრდილოეთ ნახევარსფეროში სხეულის მოძრაობისას ცდილობს გადახაროს იგი მოძრაობის მიმართულებიდან მარჯვნივ. ამით აიხსნება რელსზე მატარებლის გვერდითი წნევა, მდინარეთა მარჯვენა ნაპირის გამორეცხვა, მუდმივი მიმართულების ქარებისა და ზღვის დინებების გადახრა. დედამიწის ბრუნვის შედეგად თავისუფლად ვარდნილი სხეულის ვერტიკალიდან აღმოსავლეთით გადახრა.

ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანამიმდევრობა:

1. ავირჩიოთ მოძრავი სისტემა დეკარტის ან ბუნებრივი ღერძებით.
2. კოორდინატთა არჩეულ სისტემაში გამოვსახოთ ნივთიერი წერტილი ნებისმიერ მდებარეობაში.
3. ჩავწეროთ წარმტანი აჩქარებისა და კორიოლისის აჩქარების გამოსახულება და ნახაზზე ვაჩვენოთ ამ აჩქარებების

ვექტორები.

4. ნახაზზე გამოვსახოთ სხეულზე მოქმედი ყველა ძალა, ბმის რეაქციის ძალის ჩათვლით თუ წერტილი არათავისუფალია, აგრეთვე წარმტანი და კორიოლისის ინერციის ძალები.

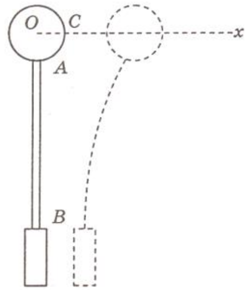
5. კოორდინატთა არჩეულ სისტემაში შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის საჭირო დიფერენციალური განტოლებები.

. 6. განვსაზღვროთ მოძრაობის საწყისი პირობები.

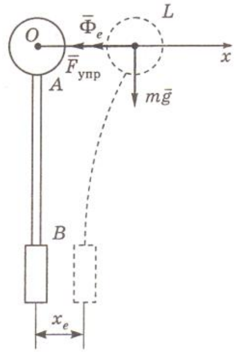
7. ვაინტეგროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები და მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით განვსაზღვროთ საძებნი სიდიდეები ზოგადი სახით.

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 33. 1



ვერტიკალური დრეკადი AB ღეროს A ბოლოზე მიმაგრებულია 2,5 კგ მასის C ტვირთი. წონასწორობის მდგომარეობიდან გამოყვანის შემდეგ C ტვირთი ასრულებს ჰარმონიულ რხევებს იმ ძალის გავლენით, რომელიც წონასწორობის მდგომარეობიდან მანძილის პროპორციულია. AB ღერო ისეთია, რომ A ბოლოს 1 სმ გადაადგილებისათვის საჭიროა 1 ნ ძალის მოდება. იპოვეთ C ტვირთის იძულებითი რხევის ამპლიტუდა იმ შემთხვევაში, როცა ღეროს ჩამაგრების B წერტილი ჰორიზონტალური წრფის გასწვრივ ასრულებს ჰარმონიულ რხევებს 1 მმ ამპლიტუდით და 1,1 წმ პერიოდით.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ნახაზზე ვაჩვენოთ ტვირთზე მოდებული ძალები: სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, ღეროს დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა, წარმტანი ინერციის $\vec{\Phi}_e$ ძალა.

შევადგინოთ C ტვირთის ფარდობითი მოძრაობის ძირითადი განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = -F_{yp} - \Phi_e, \qquad (1)$$

სადაც $F_{yp} = cx$; $\Phi_e = mx_e''$, $x_e = A_B \sin \omega t$ - ღეროს ჩამაგრების წერტილის ჰარმონიული რხევების განტოლებაა,

რომელთა რხევების ამპლიტუდაა $A_B = 1$ მმ.

ვიპოვოთ x_e -ს მეორე წარმოებული დროთი

$$x_e'' = -A_B\omega^2 \sin\omega t,$$

სადაც $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\cdot 3{,}14}{1{,}1} = 5{,}7$ (რად/წმ).

მაშინ $$\Phi_e = -mA_B\omega^2 \sin\omega t.$$

ჩავსვათ F_{yp} და Φ_e (1) განტოლებაში, მივიღებთ

$$mx'' = -cx + mA_B\omega^2 \sin\omega t,$$

ანუ $$x'' + k^2x = h\sin\omega t, \qquad (2)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m} = \dfrac{100}{2{,}5} = 40$; $h = A_B\omega^2$.

(2) არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამოხსნაა

$$x = \bar{x} + x*,$$

სადაც $\bar{x}$ - ერთგვაროვანი $x'' + k^2x = 0$ განტოლების ზოგადი ამოხსნაა $\bar{x} = C_1\cos kt + C_2\sin kt$; x^* - (2) განტოლების კერძო ამოხსნაა $$x^* = B\sin\omega t, \qquad (3)$$

$$x''^* = -B\omega^2\sin\omega t. \qquad (4)$$

ჩავსვათ (3) და (4) მნიშვნელობები (2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$-B\omega^2\sin\omega t + Bk^2\sin\omega t = h\sin\omega t.$$

აქედან $$B = \frac{A_B\omega^2}{k^2 - \omega^2}.$$

მაშინ (2) განტოლების ზოგადი ამოხსნაა

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{A_B\omega^2}{k^2-\omega^2}\sin\omega t. \qquad (5)$$

(5) გამოსახულებაში ბოლო შესაკრები აღწერს C წერტილის იძულებით რხევას ფარდობით მოძრაობაში, რომლის ამპლიტუდა

$$A_{\text{ფ}} = \frac{A_B\omega^2}{k^2-\omega^2} = \frac{1\cdot 5{,}7^2}{40 - 32{,}49} \approx 4{,}42 \text{ (მმ).}$$

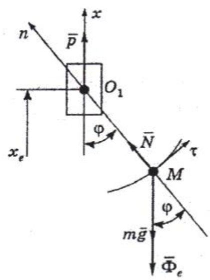
მაშინ იძულებით რხევის საერთო ამპლიტუდა

$$A_{\text{იძ}} = A_{\text{ფ}} + A_B = 4{,}42 + 1{,}00 = 5{,}42 \text{ (მმ).}$$

პ ა ს უ ხ ი: 5,42 მმ.

ამოცანა 33. 2

l სიგრძის მათემატიკური ქანქარას დაკიდების წერტილი მოძრაობს ვერტიკალზე თანაბარაჩქარებულად. განსაზღვრეთ ქანქარას მცირე რხევების პერიოდი T ორ შემთხვევაში: 1) როდესაც დაკიდების წერტილის აჩქარება მიმართულია ზევით და აქვს ნებისმიერი p სიდიდე; 2) როდესაც ეს აჩქარება მიმართულია ქვევით და მისი სიდიდე $p<g$.



ნახ. 1

ა მ ო ხ ს ნ ა.

1) ქანქარას მოძრაობა რთულია: დაკიდების წერტილის მოძრაობა – წარმტანია, ხოლო ქანქარას რხევა – ფარდობითი. ნახ. 1-ზე ვაჩვენოთ ქანქარაზე მოდებული ძალები: წარმტანი ინერციის $\vec{\Phi}_e$ ძალა, სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, ძაფის $\vec{N}$ რეაქცია.

შევადგინოთ ფარდობითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ბუნებრივ τ ღერძზე გეგმილებში, როდესაც დაკიდების წერტილის p აჩქარება მიმართულია ზევით:

$$ma_r^\tau = -(mg\sin\varphi + \Phi_e \sin\varphi), \qquad (1)$$

სადაც $\Phi_e = ma_e = mp$, ვინაიდან $a_e = p$.

(1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$ma_r^\tau = -mg\sin\varphi + mp\sin\varphi, \qquad (2)$$

სადაც $a_r^\tau = l\varphi''$; $\sin\varphi = \varphi$.

მაშინ (2) განტოლება ასე ჩაიწერება

$$l\varphi'' = -(g+p)\varphi, \qquad (3)$$

ანუ

$$\varphi'' + k^2\varphi = 0, \qquad (4)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{g+p}{l}$.

ქანქარას რხევის პერიოდი $T = \dfrac{2\pi}{k}$.

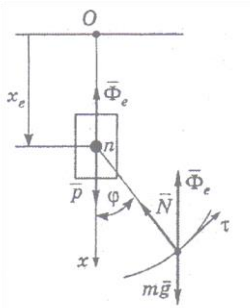
ჩავსვათ $k=\sqrt{\dfrac{g+p}{l}}$ მნიშვნელობა და მივიღებთ

$$T=\frac{2\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g+p}}.$$

2) განვიხილოთ ქანქარას მოძრაობა როდესაც დაკიდების წერტილი მოძრაობს ქვევით $p<g$ აჩქარებით. ნახ. 2-ზე ვაჩვენოთ ქანქარაზე მოდებული ძალები: წარმტანი ინერციის $\vec{\Phi}_e$ ძალა, სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა, ძაფის $\vec{N}$ რეაქცია.

შევადგინოთ ფარდობითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ბუნებრივ τ ღერძზე გეგმილებში

$$ma_r^\tau=-mg\sin\varphi+\Phi_e\sin\varphi, \quad (5)$$



ნახ. 2

სადაც $a_r^\tau=l\varphi''$; $\Phi_e=ma_e=mp$,

ვინაიდან $a_e=p$.

მაშინ (5) განტოლება ასე ჩაიწერება

$$l\varphi''=-(g-p)\varphi,$$

ანუ

$$\varphi''+k^2\varphi=0,$$

სადაც $k^2=\dfrac{g-p}{l}$.

ამ შემთხვევაში $k=\sqrt{\dfrac{g-p}{l}}$, ხოლო,

რხევის პერიოდი

$$T=\frac{2\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g-p}}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 1) $T=\dfrac{2\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g+p}}$; 2) $T=\dfrac{2\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g-p}}$.

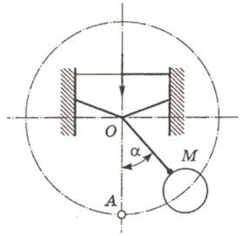
ამოცანა 33. 3

l სიგრძის $0M$ მათემატიკური ქანქარა საწყის მომენტში წონასწორობის $0A$ მდებარეობიდან გადახრილია α კუთხით და აქვს ნულის ტოლი სიჩქარე; მისი დაკიდვის წერტილს ამ მომენტში

აგრეთვე აქვს ნულის ტოლი სიჩქარე, ხოლო შემდეგ ეშვება მუდმივი $p \geq g$ აჩქარებით. განსაზღვრეთ წრეწირის s რკალი, რომელსაც აღწერს M წერტილი 0 წერტილის გარშემო ფარდობითი მოძრაობისას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ქანქარას მოძრაობა რთულია: დაკიდების წერტილის მოძრაობა – წარმტანია, ხოლო ქანქარას რხევა – ფარდობითი. ქანქარასთან დავაკავშიროთ ბუნებრივი ღერძები $(n$ და $\tau)$ და შევადგინოთ ფარდობითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ბუნებრივ τ ღერძზე გეგმილებში,

$$ma_r^\tau = -mg\sin\varphi + \Phi_e \sin\varphi, \qquad (1)$$



სადაც $a_r^\tau = l\varphi''$, $\Phi_e = mx_e'' = mp$.

(1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

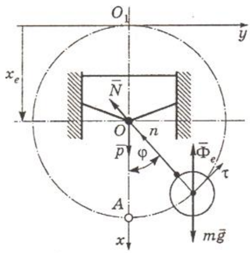
მაშინ (2) განტოლება ასე ჩაიწერება

$$l\varphi'' = -(g-p)\varphi, \qquad (2)$$

ანუ, ვინაიდან

$$\varphi'' = \varphi' \frac{d\varphi'}{d\varphi},$$

(2) ასე ჩაიწერება



$$\varphi' d\varphi' = -\frac{g-p}{l}\sin\varphi d\varphi. \qquad (3)$$

მოვახდინოთ (3) გამოსახულების ინტეგრება, მივიღებთ

$$\frac{\varphi'^2}{2} = \frac{g-p}{l}\cos\varphi + C_1. \qquad (4)$$

ვინაიდან საწყის მომენტში $\varphi_0 = \alpha$, $\varphi_0' = 0$,

ამიტომ $$C_1 = -\frac{g-p}{l}\cos\alpha.$$

(4) გამოსახულება მიიღებს ასეთ სახეს

$$\frac{\varphi'^2}{2} = \frac{g-p}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha). \qquad (5)$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა, ვინაიდან ამოცანის პირობაში მოცემულია, რომ $p \geq g$.

1) როდესაც $p = g$, მაშინ (5) ფორმულიდან მივიღებთ

$\cos\varphi - \cos\alpha = 0$, ანუ $\cos\varphi = \cos\alpha$.

მაშასადამე, $\varphi = 0$, ე.ი. ქანქარას გადახრის კუთხე არ იცვლება და საწყისი გადახრის კუთხის ტოლია. მაშინ $s = 0$.

2) როდესაც $p > g$, მაშინ (5) ფორმულიდან

$$\varphi'^2 = \frac{2(g-p)}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha). \qquad (6)$$

ვინაიდან α კუთხის შესაბამის მდებარეობაში ქანქარას აქვს ნულის ტოლი კუთხური სიჩქარე, ამიტომ, (6) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$\cos\varphi - \cos\alpha = 0$, $\cos\varphi = \cos\alpha$, ანუ $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$.

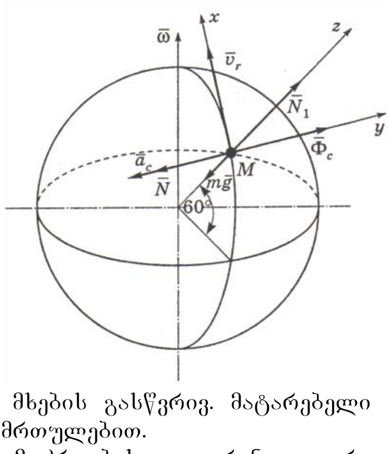
მაშასადამე, $\varphi = 2\pi - \alpha$, მაშინ $\Delta\varphi = \varphi - \alpha = 2(\pi - \alpha)$.

ამიტომ $s = l\Delta\varphi = 2l(\pi - \alpha)$.

პასუხი: 1) $p = g$, $s = 0$; 2) $p > g$, $s = 2l(\pi - \alpha)$.

ამოცანა 33. 4

2000 ტ მასის რკინიგზის მატარებელი მიდის 15 მ/წმ სიჩქარით ლიანდაგზე, რომელიც დაგებულია მერიდიანზე სამხრეთიდან ჩრდილოეთით. 1) განსაზღვრეთ მატარებლის რელსებზე გვერდითი დაწოლა, თუ აღებულ მომენტში ის გადაკვეთს ჩრდილოეთის განედის 60^0. 2) განსაზღვრეთ მატარებლის რელსებზე გვერდითი დაწოლა, თუ იმავე ადგილზე იგი მოძრაობს ჩრდილოეთიდან სამხრეთისაკენ.



ამოხსნა. მატარებელთან დავაკავშიროთ კოორდინატთა $Mxyz$ სისტემა (იხ. ნახაზი), სადაც y ღერძი სალიანდაგო გზის მართობულია და მიმართულია დედამიწის ზედაპირის მხების გასწვრივ. მატარებელი მიდის სამხრეთიდან ჩრდილოეთის მიმართულებით.

შევადგინოთ ფარდობითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება y ღერძზე გეგმილებში და გავითვალისწინოთ კორიოლისის ინერციის $\vec{\Phi}_c$ ძალა და ლიანდაგისის $\vec{N}$ რეაქცია.

სხვა ძალების გეგმილები ნულის ტოლია.

მაშინ, ვინაიდან მატარებლის გადაადგილება y ღერძის გასწვრივ არ ხდება

$$my'' = \Phi_c - N = 0, \qquad (1)$$

კორიოლისის ინერციის ძალა

$$\Phi_c = 2m\omega v_e \sin(\omega \hat{} v_r),$$

სადაც ω - დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა,

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60}; \; (\omega \hat{} v_r) = 60^0.$$

(1) განტოლებიდან

$$N = \Phi_c = 2m\omega v_e \sin(\omega \hat{} v_r) = 2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 060} \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3778{,}7$$

(ნ).

წნევის ძალა Q ლიანდაგის N რეაქციის ტოლია, ე. ი. $Q = N = 3778{,}7$ ნ.

1) სამხრეთიდან ჩრდილოეთისკენ მოძრაობისას მატარებელი აწვება მარჯვენა აღმოსავლეთ რელსს, თუ ვიხედებით მოძრაობის მიმართულებით;

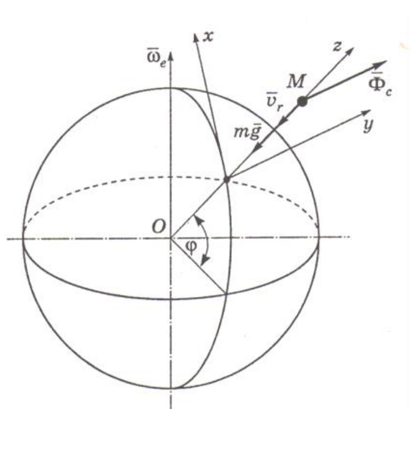
2) ჩრდილოეთიდან სანხრეთისკენ მოძრაობისას მატარებელი აწვება მარჯვენა დასავლეთ რელსს, კორიოლისის ინერციის ძალის მიმართულების შეცვლის გამო.

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 1) $3778{,}7$ ნ მარჯვენა აღმოსავლეთ რელსზე;

2) $3778{,}7$ ნ მარჯვენა დასავლეთ რელსზე.

ამოცანა 33. 5

ნივთიერი წერტილი თავისუფლად ვარდება დედამიწის ზედაპირის ჩრდილოეთ ნახევარსფეროზე 500 მ სიმაღლიდან. მხედველობაში მიიღეთ დედამიწის ბრუნვა თავისი ღერძის გარშემო, ამასთანავე უგულებელყავით ჰაერის წინააღმდეგობა, და განსაზღვრეთ, დაცემისას რამდენად გადაიხრება წერტილი აღმოსავლეთით. ადგილის გეოგრაფიული განედი 60^0-ს ტოლია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. დედამიწის ზედაპირის მახლობლობაში წერტილის თავისუფალი ვარდნის დროს (იხ. ნახაზი) მასზე მოქმედებს მიზიდულობის ძალა $\vec{P}$, წარმტანი ინერციის ძალა $\vec{\Phi}_e$ და კორიოლისის ინერციის ძალა $\vec{\Phi}_c$.

ფარდობითი მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახე აქვს

$$m\vec{a}_r = \vec{P} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c, \qquad (1)$$

ანუ, ვინაიდან

$$\vec{P} + \vec{\Phi}_e = m\vec{g} \ ,$$

ამიტომ

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{\Phi}_c. \qquad (2)$$

(2) გამოსახულების გეგმილები დეკარტის კოორდინატთა ღერძებზე:

$$mx'' = 0, \qquad (3)$$

$$my'' = \Phi_c, \qquad (4)$$

$$mz'' = -mg. \qquad (5)$$

ვიპოვოთ კორიოლისის ინერციის ძალა

$$\Phi_c = 2m\omega_e v_r \sin(\omega_e \,^\wedge v_r),$$

სადაც ω_e - დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა; $\sin(\omega_e \,^\wedge v_r) = \cos\varphi$; $(\omega \,^\wedge v_r) = 90^0 + \varphi$.

მაშინ

$$\Phi_c = 2m\omega_e v_r \cos\varphi,$$

ხოლო (3) – (5) განტოლებები ასე ჩაიწერებიან:

$$x'' = 0, \qquad (6)$$

$$y'' = 2m\omega_e v_r \cos\varphi, \qquad (7)$$

$$z'' = -g. \qquad (8)$$

ამოვხსნათ (8) დიფერენციალური განტოლება:

$$z' = -gt + C_1, \qquad (9)$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2. \qquad (10)$$

ჩავსვათ (9) და (10) გამოსახულებებში საწყისი პირობები: $t = 0,$

$z_0 = H, \quad z_0' = 0$ და მივიღებთ $C_1 = 0$, $\quad C_2 = H$; მაშინ

$$z' = -gt, \tag{11}$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + H. \tag{12}$$

მივიღოთ, რომ $v_r = |z'| = gt$ და ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (7) განტოლებაში

$$y'' = 2\omega_e gt \cos\varphi. \tag{13}$$

ვაინტეგროთ (13) განტოლება ორჯერ, მივიღებთ

$$y' = \omega_e gt^2 \cos\varphi + C_3, \tag{14}$$

$$y = \frac{1}{3}\,\omega_e gt^3 \cos\varphi + C_3 t + C_4. \tag{15}$$

ჩავსვათ (14) და (15) გამოსახულებებში საწყისი პირობები: $t = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_0' = 0$ და მივიღებთ $C_3 = 0$, $C_4 = 0$. მაშინ (14) და (15) გამოსახულებები ასე გამოისახებიან

$$y' = \omega_e gt^2 \cos\varphi, \tag{16}$$

$$y = \frac{1}{3}\,\omega_e gt^3 \cos\varphi. \tag{17}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ წერტილის დედამიწაზე დაცემის მომენტში $z = 0$, მაშინ (12) ფორმულიდან

$$0 = -\frac{gt^2}{2} + H,$$

აქედან, წერტილის ვარდნის დრო

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (17) განტოლებაში და იმის გათვალისწინებით, რომ $\omega_e = \dfrac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60}$, ვიპოვით, წერტილი რამდენათ გადაიხარა აღმოსავლეთით

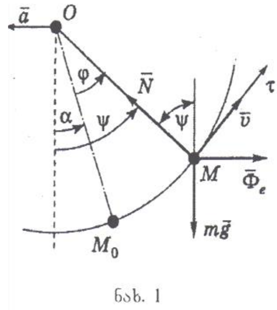
$$y = \frac{1}{3}\,\omega_e g\left(\sqrt{\frac{2g}{H}}\right)^3 \cos\varphi = \frac{1}{3}\frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \cdot 9{,}8\left(\sqrt{\frac{1000}{9{,}8}}\right)^3 \cos 60^0 = 0{,}12 \text{ (მ).}$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 12 სანტიმეტრით.

ამოცანა 33. 6

ჰორიზონტალურ წრფივ ლიანდაგზე მოძრავ ვაგონში ქანქარა ასრულებს მცირე ჰარმონიულ რხევას, ამასთანავე, მისი საშუალო მდებარეობა რჩება ვერტიკალიდან 6^0 კუთხით გადაზრილი.

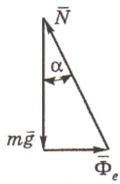
1) განსაზღვრეთ ვაგონის აჩქარება a. 2) იპოვეთ ქანქარას რხევის პერიოდების სხვაობა: T - უძრავი ვაგონის შემთხვევაში და T_1 - აღებულ შემთხვევაში.



ნახ. 1

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) ვაჩვენოთ (ნახ. 1) ქანქარაზე მოქმედი ძალები მოძრავ ვაგონში: სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, ძაფის რეაქცია $\vec{N}$, წარმტანი ინერციის ძალა $\vec{\Phi}_e$, $\Phi_e = ma$, სადაც a- ვაგონის აჩქარებაა.

წონასწორობისა მდებარეობაში, რომელიც განისაზღვრება $\alpha = 6^0$ კუთხით, $m\vec{g}$, $\vec{N}$, $\vec{\Phi}_e$ ძალები ქმნიან გაწონასწორებულ სისტემას (ნახ.2), საიდანაც გამომდინარეობს, რომ



$$\Phi_e = mgtg\alpha ,$$

ანუ

$$ma = mgtg\alpha ,$$

საიდანაც

$$a = gtg\alpha = gtg6^0 = 9{,}8 \cdot 0{,}1051 = 1{,}03$$

(მ/წმ²).

2) ქანქარას ფარდობითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებას τ ღერძზე გეგმილებში შემდეგი სახე აქვს

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\psi + ma\cos\psi ,$$

სადაც $v = l\varphi'$, $\frac{dv}{dt} = l\varphi''$; $a = gtg\alpha$; $\psi = \alpha + \varphi$.

გარდავქმნათ მოცემული განტოლების მარჯვენა მხარე:

$$-mg\sin\psi + mgtg\alpha\cos\psi = -\sin\psi + tg\alpha\cos\psi =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}[\sin(\alpha+\varphi)\cos\alpha - \sin\alpha\cos(\alpha+\varphi)] = -\frac{\sin\varphi}{\cos\alpha} = -\frac{\varphi}{\cos\alpha}$$

.

შედეგად, განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\varphi'' + k^2\varphi = 0\,,$$

სადაც $k^2 = \dfrac{g}{l\cos\alpha}$.

მაშინ, მოძრავ ვაგონში ქანქარას რხევის პერიოდი

$$T_1 = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} = T\sqrt{\cos\alpha}\,,$$

სადაც $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ - უძრავ ვაგონში ქანქარას რხევის პერიოდია.

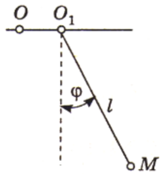
ქედან

$$T - T_1 = (1-\sqrt{\cos\alpha})T = (1-\sqrt{\cos 6^0})T = 0{,}0028T$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> 1) $a = 1{,}03$ მ/წმ²; 2) $T - T_1 = 0{,}0028T$.

ამოცანა 33. 7

l სიგრძის მათემატიკური ქანქარას დაკიდების 0_1 წერტილი ასრულებს წრფივ ჰარმონიულ რხევას უძრავი 0 წერტილის მახლობლობაში: $00_1 = a\sin pt.$ განსაზღვრეთ ქანქარას მცირე რხევები, თუ ჩათვლით, რომ ნულოვანი მომენტისათვის, $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$.



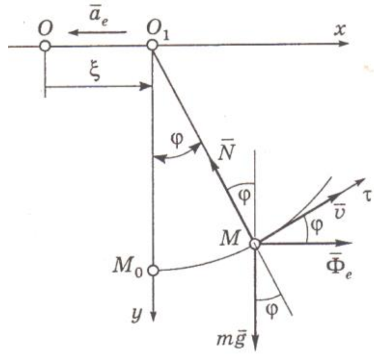
ა მ ო ხ ს ნ ა. ნახაზზე ვაჩვენოთ ქანქარაზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის ძალა $m\vec{g}$, ძაფის რეაქცია $\vec{N}$, წარმტანი ინერციის ძალა $\vec{\Phi}_e$.

ამ შემთხვევაში ფარდობითი მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას ბუნებრივ τ ღერძზე გეგმილებში

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi + \Phi_e\cos\varphi,$$

სადაც $v = l\varphi'$, $\dfrac{dv}{dt} = l\varphi''$; $|\Phi_e| = m\xi'' = map^2\sin pt$.

გარდაქმნის შემდეგ, თუ ჩავთვლით, რომ $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = \varphi$, მოცემული განტოლება ასე ჩაიწერება:



$$l\varphi'' = ap^2 \sin pt - g\varphi$$

ნუ

$$\varphi'' + k^2\varphi = h\sin pt\,, \qquad (1)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{g}{l}$, $h = \dfrac{ap^2}{l}$.

(1) განტოლება აღწერს იძულებით რეხევას, ხოლო მის ამოხსნას აქვს ასეთი სახე

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt\,, \qquad (2)$$

$$\varphi' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2}\cos pt\,. \qquad (3)$$

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_0' = 0$, (2) და (3) ფორმულებიდან მივიღებთ: $C_1 = 0$ $C_2 = -\dfrac{hp}{k(k^2 - p^2)}$.

მაშინ, (2) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\varphi = \frac{ap^2}{l(k^2 - p^2)}\left(\sin pt - \frac{p}{k}\sin kt\right),$$

სადაც $k = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$; $p \neq k$.

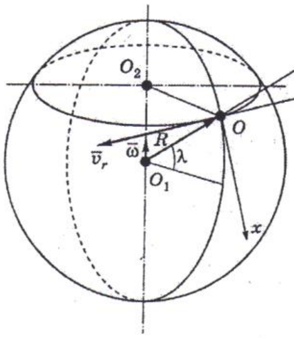
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $\varphi = \dfrac{ap^2}{l(k^2 - p^2)}\left(\sin pt - \dfrac{p}{k}\sin kt\right)$, $k = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

ამოცანა 33. 8

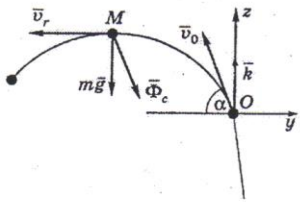
λ განედზე მდებარე წერტილი გასროლილია დასავლეთის

მიმართულებით ჰორიზონტისადმი α კუთხით საწყისი v_0 სიჩქარით. განსაზღვრეთ წერტილის ფრენის დრო და მანძილი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიღოთ დეკარტის კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 1), გავავლოთ x და y ღერძები შესაბამისად მერიდიანის მხების გასწვრივ სამხრეთით და პარალელის გასწვრივ აღმოსავლეთით, z ღერძი ბუნებრივი ვერტიკალის გასწვრივ.



ნახ. 1



ნახ. 2

ამ შემთხვევაში წერტილის ფარდობითი მოძრაობა მოხდება სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალის და კორიოლისის ინერციის $\vec{\Phi}_c$ ძალის მომედებით (ნახ. 2).

მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებას შემდეგი სახე აქვს

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{\Phi},$$

ანუ

$$\vec{a}_r = \vec{g} - 2\left(\vec{\omega} \times v_r\right). \qquad (1)$$

შევადგინოთ ამ განტოლებაში შემავალი ვექტორების x, y, z ღერძებზე გეგმილებისა და საწყისი პირობების ცხრილი:

ღერძი	$\bar{a}_r$	$\bar{g}$	$\bar{\omega}$	$\bar{v}_r$	t	$\bar{r}_0$	$\dot{\bar{r}}_0$
x	$\ddot{x}$	0	$-\omega\cos\lambda$	$\dot{x}$	0	0	0
y	$\ddot{y}$	0	0	$\dot{y}$	0	0	$-v_0\cos\alpha$
z	$\ddot{z}$	$-g$	$\omega\sin\lambda$	$\dot{z}$	0	0	$v_0\sin\alpha$

გარდა ამისა, ვიპოვოთ

$$\vec{\omega}\times\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\omega\cos\lambda & 0 & \omega\sin\lambda \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} =$$

$$= -\vec{i}\,y'\omega\sin\lambda + \vec{j}\,\omega(x'\sin\lambda + z'\cos\lambda) - \vec{k}\,\omega y'\cos\lambda .$$

მაშინ (1) განტოლება საკოორდინატო ღერძებზე გეგმილებში:

$$x'' = 2\omega y'\sin\lambda ,$$

$$y'' = -2\omega x'\sin\lambda - 2\omega z'\cos\lambda ,$$

$$z'' = -g + 2\omega y'\cos\lambda .$$

ვაინტეგროთ ეს განტოლებები დროთი, მივიღებთ

$$x' = 2\omega y\sin\lambda + C_1 ,$$

$$y' = -2\omega x\sin\lambda - 2\omega z\cos\lambda + C_2 ,$$

$$z' = -gt + 2\omega y\cos\lambda + C_3 .$$

საწყისი პირობის გათვალისწინებით (იხ. ცხრილის ბოლო სამი სვეტი) მივიღებთ: $C_1 = 0$, $C_2 = -v_0\cos\alpha$, $C_3 = v_0\sin\alpha$.

მაშინ ჩავწეროთ

$$x' = 2\omega y\sin\lambda , \qquad (2)$$

$$y' = -2\omega x\sin\lambda - 2\omega z\cos\lambda - v_0\cos\alpha , \qquad (3)$$

$$z' = -gt + 2\omega y\cos\lambda + v_0\sin\alpha . \qquad (4)$$

(2) ფორმულიდან

$$y = \frac{x'}{2\omega\sin\lambda} .$$

ეს გამოსახულება ჩავსვათ (4) ფორმულაში, მივიღებთ

$$z' = -gt + \frac{x'}{tg\lambda} + v_0\sin\alpha . \qquad (5)$$

ვაინტეგროთ (5) გამოსახულება საწყისი პირობების გათვალისწინებით:

$$z = -\frac{gt^2}{2} + \frac{x}{tg\lambda} + v_0 t\sin\alpha . \qquad (6)$$

ჩავსვათ z -ს მიღებული მნიშვნელობა, აგრეთვე

გამოსახულება $y' = \dfrac{x''}{2\omega \sin\lambda}$

(3) ფორმულაში, მივიღებთ

$$x'' + 4\omega^2 x = 4\omega^2\left(\frac{gt^2}{2} - v_0 t\sin\alpha\right)\sin\lambda\cos\lambda - 2\omega v_0\sin\lambda\cos\alpha$$

.

თუ უგულებელვყოფთ ω^2-ს, მისი სიმცირის გამო ωv_0-თან შედარებით, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$x'' = -2\omega v_0 \sin\lambda\cos\alpha\ . \qquad (7)$$

ამოვხსნათ (7) განტოლება და გავითვალისწინოთ საწყისი პირობები: $x_0 = 0$, $x_0' = 0$, მივიღებთ

$$x = -(\omega v_0 \sin\lambda\cos\alpha)t^2\ .$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (6) განტოლებაში და, ჩავთვალოთ წერტილის დედამიწაზე დაცემის მომენტში $z = 0$, მაშინ

$$0 = -\frac{gt^2}{2} + \frac{\omega v_0 t^2\sin\lambda\cos\alpha}{tg\lambda} + v_0 t\sin\alpha\ ,$$

აქედან, წერტილის ფრენის დრო $T = t$

$$T = \frac{2v_0\sin\alpha}{g + 2\omega v_0\cos\lambda\cos\alpha} \approx \frac{2v_0\sin\alpha}{g}\left(1 - \frac{2\omega v_0\cos\lambda\cos\alpha}{g}\right),$$

სადაც გათვალისწინებულია, რომ ω - მცირე სიდიდეა (დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე).

$y = y(t)$ დამოკიდებულების განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ (7) განტოლების ინტეგრებით

$$x' = -(2\omega v_0 \sin\lambda\cos\alpha)t\ .$$

ამ გამოსახულების ჩასმით (2) განტოლებაში მივიღებთ

$$y = -v_0 t\cos\alpha\ .$$

მაშინ, წერტილის ფრენის L სიშორისათვის მივიღებთ

$$L = y(t) = \frac{-v_0^2\sin 2\alpha}{g} + \frac{4v_0^3\omega\cos\lambda\sin\alpha\cos^2\alpha}{g^2}\ .$$

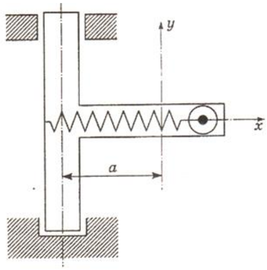
პ ა ს უ ხ ი:

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g + 2\omega v_0 \cos\lambda \cos\alpha} \approx \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\left(1 - \frac{2\omega v_0 \cos\lambda \cos\alpha}{g}\right).$$

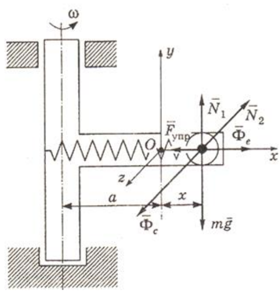
$$L = \frac{-v_0^2 \sin 2\alpha}{g} + \frac{4v_0^3 \omega \cos\lambda \sin\alpha \cos^2\alpha}{g^2},$$

სადაც ω - დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა.

ამოცანა 33. 9



m მასის ბურთულა, რომელიც მიმაგრებულია c სიხისტის კოეფიციენტის ჰორიზონტალური ზამბარას ბოლოზე, იმყოფება წონასწორობის მდგომარეობაში მილში ვერტიკალური ღერძიდან a მანძილზე. განსაზღვრეთ ბურთულას ფარდობითი მოძრაობა, თუ მილი, რომელიც ღერძთან ადგენს მართ კუთხეს, იწყებს ბრუნვას ვერტიკალური ღერძის გარშემო მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით



ა მ ო ხ ს ნ ა. ბურთულას ფარდობითი მოძრაობისას x ღერძის გასწვრივ (იხ. ნახაზი) მასზე მოქმედებენ ზამბარის დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა და წარმტანი ინერციის ძალა $\vec{\Phi}_e$. ბურთულის სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა და კორიოლისის ინერციის ძალა $\vec{\Phi}_c$ არიან x ღერძის მართობულები და გაწონასწორებულნი არიან შესაბამისად მილის კედლების $\vec{N}_1$ და $\vec{N}_2$ რეაქციის ძალებით.

შევადგინოთ ბურთულას მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = .-F_{yp} + \Phi_e, \qquad (1)$$

სადაც $F_{yp} = cx$;

$$\Phi_e = ma_e^n = m(a+x)\omega^2 .$$

მაშინ, (1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$x'' + (k^2 - \omega^2)x = a\omega^2 , \qquad (2)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$.

1. თუ $k^2 > \omega^2$, მაშნ (2) განტოლება აღწერს ნივთიერი წერტილის თავისუფალ რხევას და მის ამოხსნას აქვს ასეთი სახე

$$x = \bar{x} + x*,$$

სადაც

$\bar{x} = C_1 \cos\sqrt{k^2 - \omega^2}t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - \omega^2}t$ - ერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნაა; x^* - კერძო ამოხსნაა, $x^* = A$.

x^* ჩავსვათ (2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$A = \frac{a\omega^2}{k^2 - \omega^2} .$$

მაშასადამე

$$x = C_1 \cos\sqrt{k^2 - \omega^2}t + C_2 \sin\sqrt{k^2 - \omega^2}t + \frac{a\omega^2}{k^2 - \omega^2} . \qquad (3)$$

$$x' = -C_1\sqrt{k^2 - \omega^2} \sin\sqrt{k^2 - \omega^2}t + C_2\sqrt{k^2 - \omega^2} \cos\sqrt{k^2 - \omega^2}t . \qquad (4)$$

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0,\quad x_0 = 0 ,\quad x_0' = 0$.

$C_1 = -\dfrac{a\omega^2}{k^2 - \omega^2}$ სმ; $C_2 = 0$.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობები ჩავსვათ (3) ფორმულაში, მივიღებთ

$$x = \frac{a\omega^2}{k^2 - \omega^2}\left(1 - \cos\sqrt{k^2 - \omega^2}t\right).$$

თუ გამოვიყენებთ იგივეობას

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

მაშინ, (როცა $\alpha = \sqrt{k^2 - \omega^2}t$) მივიღებთ

$$x = \frac{2a\omega^2}{k^2 - \omega^2}\sin^2\frac{\sqrt{k^2 - \omega^2}t}{2}.$$

2. თუ $k^2 < \omega^2$, მაშნ (2) განტოლება ასე ჩავწეროთ

$$x'' + (\omega^2 - k^2)x = a\omega^2 , \qquad (5)$$

(5) განტოლების ამოხსნას აქვს ასეთი სახე

$$x = \bar{x} + x*,$$

სადაც $\bar{x} = C_1 ch\sqrt{\omega^2 - k^2}t + C_2 sh\sqrt{\omega^2 - k^2}t$;

$chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ - ჰიპერბოლური კოსინუსია,

$shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ - ჰიპერბოლური სინუსია;

$$x^* = -\frac{a\omega^2}{\omega^2 - k^2} .$$

მაშინ $x = C_1 ch\sqrt{\omega^2 - k^2}t + C_2 sh\sqrt{\omega^2 - k^2}t - \dfrac{a\omega^2}{\omega^2 - k^2}$, (6)

$$x' = C_1\sqrt{\omega^2 - k^2}sh\sqrt{\omega^2 - k^2}t + C_2\sqrt{\omega^2 - k^2}ch\sqrt{\omega^2 - k^2}t .$$

საწყისი პირობების გამოყენებით მივიღებთ: $C_1 = \dfrac{a\omega^2}{\omega^2 - k^2}$, $C_2 = 0$.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობების გათვალისწინებით (6) განტოლებიდან მივიღებთ

$$x = \frac{a\omega^2}{\omega^2 - k^2}(ch\sqrt{\omega^2 - k^2}t - 1) .$$

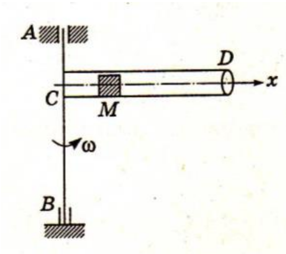
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> კოორდინატთა სისტემაში, რომლის სათავე ემთხვევა ბურთულას წონასწორობის წერტილს

$x = \dfrac{2a\omega^2}{k^2 - \omega^2}\sin^2\dfrac{\sqrt{k^2 - \omega^2}t}{2}$, როცა $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} > \omega;$

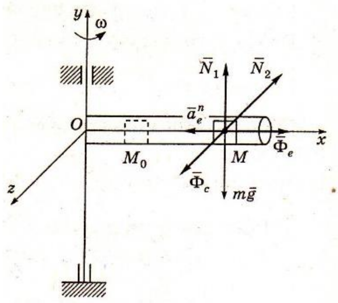
$x = \dfrac{a\omega^2}{\omega^2 - k^2}(ch\sqrt{\omega^2 - k^2}t - 1)$, როცა $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} < \omega.$

ამოცანა 33. 10

ჰორიზონტალური CD მილაკი თანაბრად ბრუნავს ვერტიკალური AB ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით. მილაკის შიგნით იმყოფება M სხეული. განსაზღვრეთ სხეულის სიჩქარე მილაკის მიმართ მისი გამოვარდნის მომენტში, თუ საწყის მომენტში $v = 0$, $x = x_0$. მილაკის სიგრძეა L. Xახუნი უგულებელყავით.



ა მ ო ხ ს ნ ა. მილაკში M სხეულის ფარდობითი მოძრაობისას (იხ. ნახაზი) მასზე მოქმედი სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალა და კორიოლისის ინერციის $\vec{\Phi}_c$ ძალა x ღერძის მართობულები არიან და შესაბამისად გაწონასწორებულნი არიან მილაკის კედლების N_1 და N_2 რეაქციებით. ასე, რომ x ღერძის გასწვრივ მოქმედებს მხოლოდ წარმტანი ინერციის ძალა $\Phi_e = ma_e^n$, რომელიც წარმტანი ნორმალური $\vec{a}_e^n$ აჩქარების საპირისპიროდაა მიმართული.



M სხეულის ფარდობითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = ma_e^n.$$

ანუ, ვინაიდან $a_e^n = \omega^2 x$,

$$x'' = \omega^2 x. \qquad (1)$$

თუ ჩავთვლით, რომ $x' = v(x)$, მივიღებთ

$$x'' = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}.$$

(1) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს

$$vdv = \omega^2 xdx. \qquad (2)$$

მოვახდინოთ (2) გამოსახულების ინტეგრება საწყისი პირობების გათვალისწინებით

$$\int_0^v v dv = \omega^2 \int_{x_0}^L x dx$$

და მივიღებთ

$$\left.\frac{v^2}{2}\right|_0^v = \omega^2 \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_0}^L \Rightarrow v = \sqrt{L^2 - x_0^2}\,\omega$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> $v = \sqrt{L^2 - x_0^2}\,\omega$.

ამოცანა 33. 11

წინა ამოცანის პირობებში განსაზღვრეთ მილაკში სხეულის მოძრაობის დრო.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 33. 10 ამოცანის ამოხსნის თანახმად სხეულის მოძრაობა აღიწერება განტოლებით

$$x'' = \omega^2 x. \tag{1}$$

ჩავთვლით, რომ $x' = v(x)$, მაშინ (1) განტოლება მიიყვანება ასეთ სახემდე

$$v = \omega\sqrt{x^2 - x_0^2}.$$

რადგანაც $$v = \frac{dx}{dt},$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ:

$$\int_{x_0}^{L} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x_0^2}} = \omega \int_0^T dt,$$

მივიღებთ

$$\left.\ln(x + \sqrt{x^2 - x_0^2}\right|_{x_0}^{L} = \left.\omega t\right|_0^T$$

$$\ln(L + \sqrt{L^2 - x_0^2}) - \ln x_0 = \omega T. \tag{2}$$

ვინაიდან

$$\ln(L + \sqrt{L^2 - x_0^2}) - \ln x_0 = \ln\frac{L + \sqrt{L^2 - x_0^2}}{x_0},$$

ამიტომ, (2) ფორმულიდან მივიღებთ

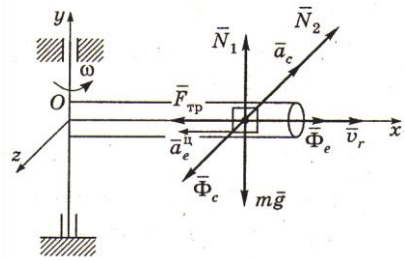
$$T=\frac{1}{\omega}\ln\frac{L+\sqrt{L^2-x_0^2}}{x_0}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $T=\frac{1}{\omega}\ln\frac{L+\sqrt{L^2-x_0^2}}{x_0}.$

ამოცანა 33. 12

33.10 ამოცანის პირობებში შეადგინეთ მილაკში სხეულის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება, თუ სხეულსა და მილაკს შორის სრიალის ხახუნის კოეფიციენტია f.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მილაკში სხეულის მოძრაობა (იხ. ნახაზი) მასზე სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალის, ხახუნის $\vec{F}_{Tp}$ ძალის და ნორმალური $\vec{N}$ რეაქციის მოქმედებით, სადაც $\vec{N}=\vec{N}_1+\vec{N}_2$.



შევადგინოთ სხეულის ფარდობითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx''=.\Phi_e-F_{Tp},$$

სადაც $\Phi_e=ma_e=m\omega^2x$; $F_{Tp}=fN=f\sqrt{N_1^2+N_2^2}$

მაშინ,

$$mx''=m\omega^2x-f\sqrt{N_1^2+N_2^2}\,. \qquad (1)$$

N_1 და N_2 რეაქციების განსაზღვრისათვის ჩავწეროთ სხეულის მოძრაობის განტოლება y და z ღერძებზე გეგმილებში:

$$my''=N_1-mg, \qquad (2)$$

$$mz''=\Phi_c-N_2, \qquad (3)$$

სადაც Φ_c - კორიოლისის ინერციის ძალაა, $\Phi_c=ma_c=2m\omega x'$
.

ვინაიდან y და z ღერძების გასწვრივ მოძრაობა არა ხდება, ამიტომ $y''=z''=0.$ მაშინ (2) და (3) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$N_1 = mg\,,$$
$$N_2 = 2m\omega x'\,.$$

რადგანაც ვიცით ნორმალური რეაქციის მდგენელები, ამიტომ

$$N = \sqrt{(mg)^2 + (2m\omega x')^2} = m\sqrt{g^2 + 4\omega^2 x'^2}\;.$$

საბოლოოდ, (1) დიფერენციალურ განტოლებას ასეთი სახე აქვს:

$$x'' = \omega^2 x - f\sqrt{g^2 + 4\omega^2 x'^2}\,,$$

თუ წერტილი მოძრაობს მარჯვნივ, ე. ი. $x' > 0$;

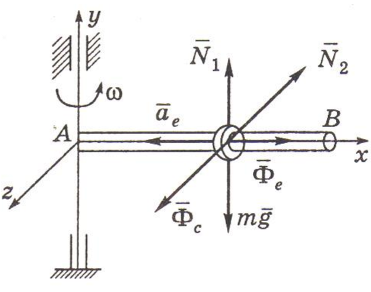
$$x'' = \omega^2 x + f\sqrt{g^2 + 4\omega^2 x'^2}\,,$$

თუ წერტილი მოძრაობს მარცხნივ, ე. ი. $x' < 0$.

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $x'' = \omega^2 x \pm f\sqrt{g^2 + 4\omega^2 x'^2}$; ზედა ნიშანს შეესაბამება $x' < 0$, ქვედას $x' > 0$.

ამოცანა 33. 13

რგოლი მოძრაობს გლუვ AB ღეროზე, რომელიც თანაბრად ბრუნავს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში A ბოლოში გამავალ ვერტიკალური ღერძის გარშემო და აკეთებს წამში ერთ ბრუნს; ღეროს სიგრძეა 1 მ; $t = 0$ მომენტში რგოლი იმყოფებოდა A ბოლოდან 60 სმ მანძილზე და ქონდა ნულის ტოლი სიჩქარე. განსაზღვრეთ t_1 მომენტი, როცა რგოლი მოსცილდება ღეროს.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ რგოლის მოძრაობა (იხ. ნახაზი) მასზე სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალის და ნორმალური $\vec{N}$ რეაქციის მოქმედებით, სადაც $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$.

შევადგინოთ რგოლის ფარდობითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Phi_e,$$

სადაც Φ_e - წარმტანი ინერციის ძალაა, $\Phi_e = ma_e = mx\omega^2$.

მაშინ $$mx'' = mx\omega^2$$

ანუ $$x'' = x\omega^2. \qquad (1)$$

მოვახდინოთ შეცვლა

$$x'' = \frac{dx'}{dx} \cdot \frac{dx}{dx} = x' \frac{dx'}{dx}$$

და (1) ასე გადავწეროთ

$$x' \frac{dx'}{dx} = \omega^2 x\,;$$

განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ

$$\frac{x'^2}{2} = \omega^2 \frac{x^2}{2} + C_1. \qquad (2)$$

საწყისი პირობების გათვალისწინებით: $x_0 = l_0, x'_0 = 0$, ვიპოვით

$$C_1 = -\frac{\omega^2 l_0^2}{2}.$$

ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (2) განტოლებაში, მივიღებთ

$$x' = \omega\sqrt{x^2 - l_o^2}$$

ანუ, ვინაიდან $x' = \dfrac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{x^2 - l_o^2}\,.$$

ამ გამოსახულებაში განვაცალო ცვლადები

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - l_0^2}} = \omega dt$$

და ვაინტეგროთ: $$\ln(x + \sqrt{x^2 - l_0^2}) = \omega t + C_2. \qquad (3)$$

საწყისი პირობების გამომდინარე: $t = 0,\ x_0 = l_0$, ვიპოვით $C_2 = \ln l_0$.

C_2-ს ეს მნიშვნელობა ჩავსვათ (3) განტოლებაში, საიდანაც

$$t=\frac{1}{\omega}\ln\frac{x+\sqrt{x^2-l_0^2}}{l_0}.$$

ღეროდან რგოლის მოცილების t_1 მომენტში $x=l$, მაშასადამე

$$t_1=\frac{1}{\omega}\ln\frac{l+\sqrt{l^2-l_0^2}}{l_0}.$$

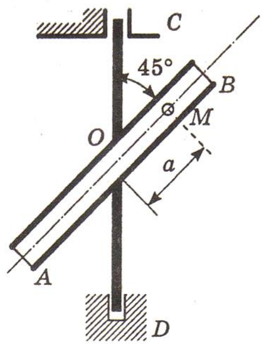
ამოცანის მონაცემების გათვალისწინებით: $\omega=2\pi$ რად/წმ, $l=1$ მ, $l_0=0{,}6$ მ, გავიანგარიშებთ

$$t_1=\frac{1}{2\pi}\ln 3=0{,}175 \text{ (წმ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $t_1=\dfrac{\ln 3}{2\pi}=0{,}175$ წმ.

ამოცანა 33. 14

AB მილაკი მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით ბრუნავს ვერტიკალური CD ღერძის გარშემო, რომელთანაც იგი ადგენს უცვლელ 45^0 კუთხეს (იხ. ნახაზი). მილაკში მოთავსებულია მძიმე M ბურთულა. განსაზღვრეთ ამ ბურთულას მოძრაობა მილაკის მიმართ, თუ საწყის მომენტშიე მისი სიჩქარე ნულის ტოლია და საწყისი დაშორება 0 წერტილიდან a-ს ტოლია. ხახუნი უგულებელყავით.



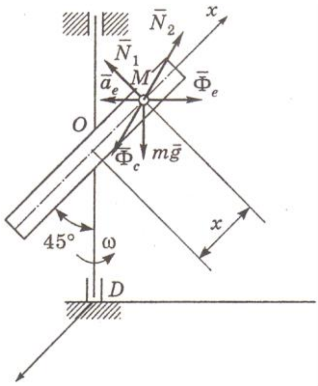
ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მძიმე ბურთულას მოძრაობა (იხ. ნახაზი) მასზე სიმძიმის $m\vec{g}$ ძალის და ნორმალური $\vec{N}$ რეაქციის მოქმედებით, სადაც $\vec{N}=\vec{N}_1+\vec{N}_2$.

შევადგინოთ ბურთულას ფარდობითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = \Phi_e \cos 45^0 - mg\cos 45^0, \qquad (1)$$

სადაც $\vec{\Phi}_e$ - წარმტანი ინერციის ძალაა,

$$\Phi_e = \Phi_e^{ц} = mx\omega^2 \cos 45^0.$$



მაშინ, (1) განტოლება გარდაქმნის შემდეგ მიიღებს ასეთ სახეს

$$x'' - \frac{\omega^2}{2}x = -g\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (2)$$

ამ განტოლების მახასიათებელი განტოლების

$$r^2 - \frac{\omega^2}{2} = 0$$

ამოხსნა ასეთია

$$r_{1,2} = \pm\frac{\omega\sqrt{2}}{2}.$$

ამიტომ, (2) განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = \bar{x} + x^*,$$

სადაც $\bar{x} = C_1 e^{\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t} + C_2 e^{-\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t}$; $\quad x^* = \dfrac{g\sqrt{2}}{\omega^2}$.

მაშინ $\quad x = C_1 e^{\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t} + C_2 e^{-\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t} + \dfrac{g\sqrt{2}}{\omega^2}. \qquad (3)$

$$x' = \frac{\omega\sqrt{2}}{2}\left(C_1 e^{\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t} - C_2 e^{-\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t}\right).$$

საწყისი პირობებიდან გამომდინარე: $t = 0,\ x = a, x' = 0$,

ვიპოვით ინტეგრების მუდმივებს $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}\left(a - \dfrac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)$.

ეს მნიშვნელობები ჩავსვათ (3) განტოლებაში, მივიღებთ ბურთულას მოძრაობის განტოლებას

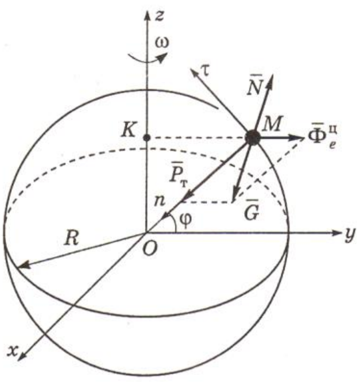
$$x = OM = \frac{1}{2}\left(a - \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)\left(e^{\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t} + e^{-\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t}\right) + \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $OM = \frac{1}{2}\left(a - \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}\right)\left(e^{\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t} + e^{-\frac{\omega\sqrt{2}}{2}t}\right) + \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2}$.

ამოცანა 33. 15

განსაზღვრეთ, როგორ იცვლება დედამიწის თავისი ღერძის გარშემო ბრუნვის შედეგად სიმძიმის ძალის აჩქარება φ ადგილის განედზე დამოკიდებულებით. დედამიწის რადიუსი $R = 6370$ კმ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დედამიწის ზედაპირზე ნივთიერი M წერტილის ფარდობითი წონასწორობის მდგომარეობა. ფარდობითი წონასწორობის პირობა გამოისახება ტოლობით



$$\vec{P}_T + \vec{N} + \Phi_e^u = 0,$$

სადაც $\vec{P}_T$ - დედამიწის მიზიდულობის ძალაა, მიმართული მისი ცენტრისკენ, $\vec{\Phi}_e^u$ - წარმტანი ინერციის ძალა რომელიც დედამიწის თანაბარი ბრუნვის შედეგად წარმოადგენს ცენტრისკენულ ინერციის ძალას, $\vec{\Phi}_e^u$ $= m|MK|\omega_c^2 = m\omega^2 R\cos\varphi.$

ცხადია (იხ. ნახაზი), რომ წერტილის მოქმედება საყრდენზე $\vec{G} = -\vec{N}$, ამასთანავე

$$\vec{G} = \vec{P}_T + \vec{\Phi}_e^u \quad . \qquad (1)$$

სიმძიმის $\vec{G}$ ძალის მიმართულება განსაზღვრავს დედამიწის მოცემულ წერტილში ვერტიკალის მიმართულებას. დავაგეგმილოთ (1) ვექტორული ტოლობა n და τ ღერძებზე:

$$G_n = P_T - \Phi_e^u \cos\varphi,$$

$$G_\tau = \Phi_e^u \sin\varphi.$$

მაშინ

$$G = mg_1 = \sqrt{(P_T - \Phi_e \cos\varphi)^2 + (\Phi_e \sin\varphi)^2} \ ,$$

სადაც g_1 - სიმძიმის ძალის აჩქარებაა ნებისმიერ განედზე;
φ - გეოგრაფიული განედი.

უგულებელვყოთ $(\Phi_e \sin\varphi)^2$ შესაკრები ω^4-ს მნიშვნელობის სიმცირის გამო და მივიღებთ

$$mg_1 = P_T - \Phi_e \cos\varphi = P_T - mR\omega^2 \cos^2\varphi .$$

აქედან

$$g_1 = \frac{P_T}{m} - R\omega^2 \cos^2\varphi = g - R\omega^2 \cos^2\varphi$$

$$= g\left(1 - \frac{R\omega^2 \cos^2\varphi}{g}\right),$$

სადაც g - სიმძიმის ძალის აჩქარებაა პოლუსზე.

დედამიწის რადიუსისა და პოლუსზე სიმძიმის ძალის აჩქარების
მნიშვნელობის გათვალისწინებით ვიპოვით

$$g_1 = 9{,}81\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{289}\right).$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> თუ უგულებელვყოთ ω^4 წევრს მისი მნიშვნელობის სიმცირის გამო, მაშინ

$$g_1 = g\left(1 - \frac{R\omega^2 \cos^2\varphi}{g}\right) \text{ ანუ } g_1 = 9{,}81\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{289}\right),$$

სადაც g - სიმძიმის ძალის აჩქარებაა პოლუსზე, φ - ადგილის გეოგრაფიული განედი.

ამოცანა 33. 16

რამდენჯერ უნდა გაიზარდოს დედამიწის თავისი ღერძის გარშემო ბრუნვის კუთხური სიჩქარე, რათა დედამიწის ზედაპირზე ეკვატორზე მდებარე მძიმე წერტილს წონა არა ჰქონდეს. დედამიწის რადიუსი $R = 6370$ კმ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 33.15 ამოცანის ამოხსნისას მიღებული შედეგების საფუძველზე, ეკვატორზე, სადაც $\varphi = 0, \ \cos\varphi = 1$

$$g_1 = g - R\omega^2 .$$

დედამიწაზე უწონადობისას $g_1 = 0$, მაშინ

$$\omega_з^2 = \frac{g}{R} .$$

რადგანაც დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე $\omega_0 = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600}$, ამიტომ

$$\frac{\omega_з}{\omega_0} = \sqrt{\frac{9,81}{6370 \cdot 10^3}} \cdot \frac{24 \cdot 3600}{2\pi} = \frac{1,24 \cdot 3,6 \cdot 24}{2 \cdot 3,14} = 17$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> 17-ჯერ

ამოცანა 33. 17

საარტილერიო ჭურვი მოძრაობს დაფენილი ტრაექტორიით (ე. ი. ტრაექტორიით, რომელიც მიახლოებით შეიძლება ჩაითვალოს ჰორიზონტალურ წრფედ). ჭურვის ჰორიზონტალური სიჩქარე მოძრაობის დროს არის $v_0 = 900$ მ/წმ. ჭურვმა უნდა დააზიანოს სამიზნე, რომელიც გასროლის ადგილიდან დაშორებულია 18 კმ მანძილით. ჰაერის წინაღობა უგულებელყავით და განსაზღვრეთ, დედამიწის ბრუნვის შედეგად ჭურვი რამდენად გადაიხრება სამიზნესაგან. გასროლა ხდება ჩრდილოეთის განედის $\lambda = 60^0$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. კუთხე მხებ Π სიბრტყესა და დედამიწის ღერძს შორის (იხ. ნახაზი) $\lambda = 60^0$. მაშასადამე, მერიდიანის გასწვრივ გავლებული წრფე მდებარეობს მითითებულ მხებ სიბრტყეში, რომელიც ასევე დედამიწის ღერძთან ადგენს 60^0 კუთხეს.

შევადგინოთ ჭურვის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება y ღერძზე გეგმილებში:

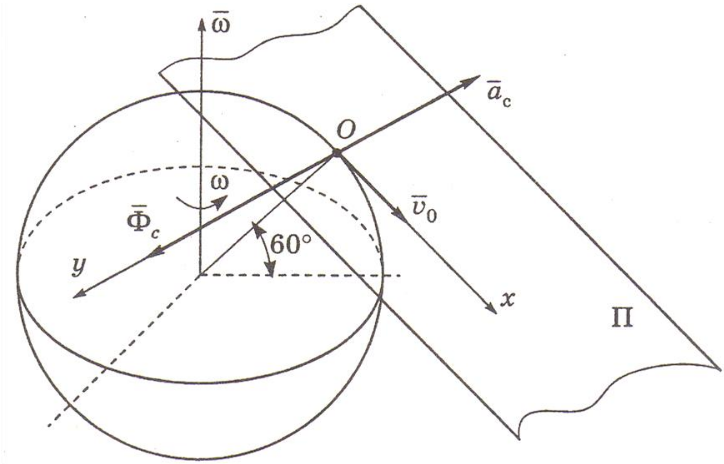
$$my'' = \Phi_c ,$$

სადაც Φ_c - კორიოლისის ინერციის ძალაა, $\Phi_e = 2m\omega\, v_0 \sin\lambda$.

მაშინ, $$y'' = 2\omega\, v_0 \sin\lambda .$$

შევცვალოთ $y'' = \dfrac{dy'}{dt}$, განვაცალოთ ცვლადები, ვაინტეგროთ და მივიღებთ $$y' = 2\omega\, v_0 t \sin\lambda + C_1 .$$

საწყისი პირობებიდან გამომდინარე: $t = 0,\ y' = 0$, ვიპოვით $C_1 = 0$, მაშასადამე $y' = 2\omega\, v_0 t \sin\lambda$.



შევცვალოთ $y' = \dfrac{dy}{dt}$, განვაცალოთ ცვლადები, ვაინტეგროთ და მივიღებთ $$y = \omega\, v_0 t^2 \sin\lambda + C_2 .$$

საწყისი პირობებიდან გამომდინარე: $t = 0,\ y = 0$, ვიპოვით $C_2 = 0$, მაშასადამე $y = \omega\, v_0 t^2 \sin\lambda$.

განვსაზღვროთ მიზნამდე ჭურვის ფრენის დრო

$$t = \frac{l}{v_0} = \frac{18\cdot 10^3}{9\cdot 10^2} = 20 \text{ (წმ).}$$

გამოვთვალოთ გადახრა

$$y = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 900\cdot 20^2\cdot\sqrt{3}}{24\cdot 3600\cdot 2} = 22{,}7 \text{ (მ).}$$

პ ა ს უ ხ ი: ჭურვი გადაიხრება მარჯვნივ (თუ მას ვუყურებთ ზევიდან სიჩქარის პერპენდიკულარულად)

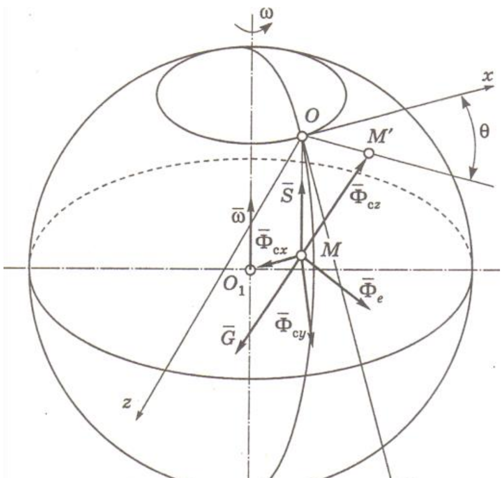
$$y = \omega\ v_0 t^2 \sin\lambda = 22{,}7\text{ მ}$$ მანძილით, დამოუკიდებლად გასროლის მიმართულებისა.

ამოცანა 33. 18

ჩრდილოეთ-სამხრეთ სიბრტყეში მოთავსებული გრძელ ძაფზე დაკიდებული ქანქარა იღებს მცირე საწყის სიჩქარეს. ჩათვალეთ ქანქარას გადახრა ძაფის სიგრძესთან შედარებით და მხედველობაში მიიღეთ დედამიწის ბრუნვა ღერძის გარშემო, იპოვეთ დრო, რომლის გასვლის შემდეგ ქანქარას რხევის სიბრტყე დაემთხვევა დასავლეთ-აღმოსავლეთ სიბრტყეს. ქანქარა მდებარეობს ჩრდილოეთის განედის 60^0-ზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ქანქარა ასრულებს რთულ მოძრაობას: წარმტანი – დედამიწასთან ერთად ბრუნავს $\vec{\omega}$ კუთხური სიჩქარით და ფარდობითს – რხევას მოძრავ კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემაში.

ქანქარას ფარდობითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლების შესადგენათ ნახაზზე ვაჩვენოთ ქანქარაზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $\vec{G}$ ძალა, ძაფის დაჭიმულობის $\vec{S}$ ძალა, კორიოლისის ინერციის ძალის მდგენელები $\vec{\Phi}_{cx}, \vec{\Phi}_{cy}, \vec{\Phi}_{cz}$, წარმტანი ინერციის $\vec{\Phi}_e$ ძალა. ვინაიდან დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე ω მცირეა, შეიძლება მივიღოთ, რომ $\vec{\Phi}_e \approx 0$.



ქანქარას მოძრაობის განტოლებებს კოორდინატთა მოძრავი სისტემის ღერძებზე გეგმილებში აქვთ ასეთი სახე

$$\left.\begin{aligned} mx'' &= -S\frac{x}{L} - 2m\omega(y'\sin\varphi - z'\cos\varphi, \\ my'' &= -S\frac{y}{L} + 2m\omega x'\sin\varphi, \\ mz'' &= -S\frac{z}{L} + mg - 2m\omega x'\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

სადაც L - ქანქარას სიგრძეა; φ - გეოგრაფიული განედი, $\varphi = 60^0$.

ქანქარას მცირე რხევისას შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ

$$z = L = const, \quad S = G = mg.$$

მაშინ, (1) სისტემის პირველი ორი განტოლება მიიღებენ შემდეგ სახეს

$$\left.\begin{aligned} x'' &= -g\frac{x}{L} - 2\omega y'\sin\varphi, \\ y'' &= -g\frac{y}{L} + 2\omega x'\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

გავამრავლოთ (2) სისტემის პირველი განტოლება $-y$-ზე, მეორე განტოლება x-ზე, შევკრიბოთ და მივიღებთ

$$xy'' - yx'' = 2\omega(yy' + xx')\sin\varphi,$$

ანუ

$$\frac{d}{dt}(xy' - yx') = 2\omega\sin\varphi\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right). \qquad (3)$$

ახლა გადავიდეთ პოლარულ კოორდინატებზე: $OM' = R$ და θ, მაშინ

$$x = R\cos\theta,$$
$$y = R\sin\theta,$$
$$xy' - yx' = R^2\frac{d\theta}{dt},$$
$$x^2 + y^2 = R^2.$$

მაშასადამე, (3) განტოლება ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$\frac{d}{dt}\left(R^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \omega\frac{d}{dt}(R^2)\sin\varphi. \qquad (4)$$

ვაინტეგროთ (4) განტოლება:

$$R^2\frac{d\theta}{dt}=R^2\omega\sin\varphi+C_1.$$

რადგანაც საწყის მომენტში $t=0,\ R=0$, $v\neq 0$, ამიტომ $C_1=0$. მაშინ

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega\sin\varphi. \qquad (5)$$

(5) განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ

$$\theta=\omega t\sin\varphi+C_2.$$

საწყის მომენტში $t=0,\ \theta=0$, ამიტომ $C_2=0$. მაშინ

$$\theta=\omega t\sin\varphi. \qquad (6)$$

(6) განტოლება განსაზღვრავს ქანქარას რხევის სიბრტყის ბრუნვის კანონს $\omega\sin\varphi$ კუთხური სიჩქარით.

ამგვრად, ქანქარას რხევის სიბრტყე

$$t=\frac{\frac{\pi}{2}}{\omega\sin\varphi}=\frac{\pi}{2\omega\sin\varphi}$$

დროში შემობრუნდება $\frac{\pi}{2}$ კუთხით.

ვინაიდან $\omega=\frac{2\pi}{24}$ რად/სთ, ამიტომ

$$T=t=\frac{6}{\sin 60^0}=\frac{12}{\sqrt{3}}=6{,}93\,(\text{სთ}).$$

თუ გავითვალისინებთ ქანქარას რხევის სიბრტყის მიმართულების ცვლილების პერიოდულობას

$$T=6{,}93(1+2k)=13{,}86(0{,}5+k)$$

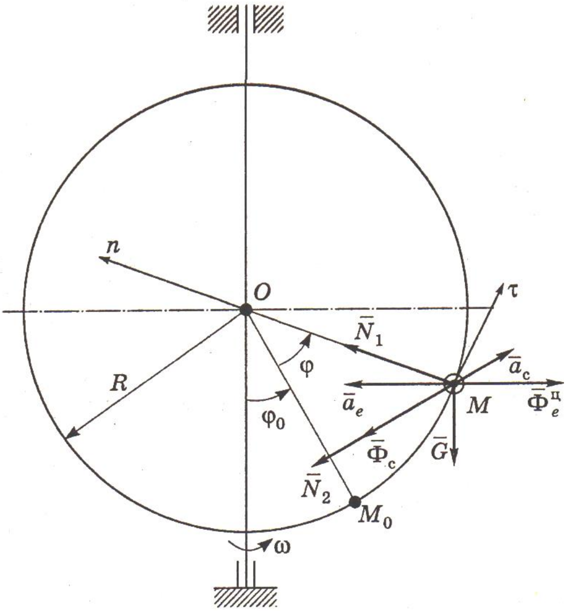
სადაც $k=1,2,3,\ldots$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $t=13{,}86(0{,}5+k)$ საათი, სადაც $k=1,2,3,\ldots$

ამოცანა 33. 19

მძიმე წერტილს შეუძლია ხახუნის გარეშე მოძრაობა ვერტიკალურ მავთულის რგოლზე, რომელიც მუდმივი კუთხური ω

სიჩქარით ბრუნავს თავისი ვერტიკალური დიამეტრის გარშემო. რგოლის რადიუსია R. იპოვეთ წერტილის წონასწორობის მდებარეობა და განსაზღვრეთ, როგორ იმოძრავებს წერტილი, თუ წონასწორობის მდებარეობაში იგი იღებს მცირე v_0 სიჩქარეს მხების გასწვრივ ზევით.



ა მ ო ხ ს ნ ა. M წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას: ფარდობითი - გადაადგილება რგოლზე და წარმტანი – ბრუნვა რგოლთან ერთად. M_0 მდებარეობაში, რომელიც განისაზღვრება φ_0 კუთხით, წერტილი იმყოფება წონასწორობაში. M-ით აღვნიშნოთ წერტილის ნებისმიერი მდებარეობა, რომელსაც შეესაბამება გადახრის $\varphi_0+\varphi$ კუთხე. წერტილის ფარდობითი მოძრაობის განტოლების შესადგენათ ნახაზზე ვაჩვენოთ მასზე მოქმედი ძალები: სიმძიმის $\vec{G}$ ძალა, რეაქციის $\vec{N}_1$ და $\vec{N}_2$ ძალები, კორიოლისის ინერციის ძალა $\vec{\Phi}_c$, წარმტანი ინერციის $\vec{\Phi}_e^u$ ძალა.

ამასთანავე

$$\vec{\Phi}_c=-m\vec{a}_c,$$

$$\vec{\Phi}_e^u = -m\vec{a}_e = -m\vec{a}_e^u,$$

ხოლო, $\vec{a}_c$, $\vec{\Phi}_c$, $\vec{N}_2$ ვექტორები რგოლის სიბრტყის მართობულებია.

ჩავწეროთ წერტილის ფარდობითი მოძრაობის განტოლება:

$$m\vec{a}_r = \vec{G} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{\Phi}_c + \vec{\Phi}_e^u.$$

დავაგეგმილოთ ეს განტოლება τ ღერძზე:

$$ma_r^\tau = -G\sin(\varphi_0 + \varphi) + \Phi_e^u \cos(\varphi_0 + \varphi),$$

სადაც $G = mg;\quad \Phi_e^u = m\omega^2 R\sin(\varphi_0 + \varphi)$.

მაშინ

$$ma_r^\tau = -mg\sin(\varphi_0 + \varphi) + m\omega^2 R\sin(\varphi_0 + \varphi)\cos(\varphi_0 + \varphi). \qquad (1)$$

ვიპოვოთ წერტილის წონასწორობის მდებარეობა, ე. ი. კუთხე φ_0. ამ მდებარეობაში $a_r^\tau = 0$, $\varphi = 0$. მაშასადამე, (1) განტოლებას აქვს ასეთი სახე

$$0 = -mg\sin\varphi_0 + m\omega^2 R\sin\varphi_0\cos\varphi_0.$$

აქედან

$$\cos\varphi_0 = \frac{g}{\omega^2 R}, \qquad (2)$$

$$\varphi_0 = \arccos\frac{g}{\omega^2 R}.$$

განვსაზღვროთ წერტილის შემდგომი მოძრაობა, თუ M_0 მდებარეობაში მას მიანიჭეს $\vec{v}_0$ სიჩქარე. (1) განტოლებაში ჩავსვათ $a_r^\tau = R\varphi''$, მივიღებთ

$$mR\varphi'' = -mg(\sin\varphi_0\cos\varphi + \cos\varphi_0\sin\varphi) +$$

$$+ m\omega^2 R(\sin\varphi_0\cos\varphi + \cos\varphi_0\sin\varphi)(\cos\varphi_0\cos\varphi - \sin\varphi_0\sin\varphi).$$

(3)

გარდავქმნათ (3) განტოლება. φ კუთხის სიმცირის გამო, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = \varphi$, აგრეთვე, შეიძლება უარვყოთ განტოლების წევრები, რომლებიც შეიცავენ $\sin^2\varphi$-ს, რადგანაც $\sin^2\varphi \approx \varphi^2 \approx 0$. გარდა ამისა, (2) ფორმულის თანახმად

$$g = \omega^2 R\cos\varphi_0.$$

გარდაქმნის შედეგად (3) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$R\varphi'' = -\omega^2 R\varphi \sin^2 \varphi_0$$

ანუ

$$\varphi'' + \omega^2 \varphi \sin^2 \varphi_0 = 0. \qquad (4)$$

ვინაიდან $\cos\varphi_0 = \dfrac{g}{\omega^2 R}$ [იხ. (2) ფორმულა], ამიტომ

$$\sin^2 \varphi_0 = 1 - \cos^2 \varphi_0 = 1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2} = \frac{\omega^4 R^2 - g^2}{\omega^4 R^2}.$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (4) ფორმულაში, მივიღებთ

$$\varphi'' + \frac{\omega^4 R^2 - g^2}{\omega^2 R^2}\varphi = 0$$

ანუ

$$\varphi'' + k^2 \varphi = 0 \;, \qquad (5)$$

სადაც $k = \dfrac{\sqrt{\omega^4 R^2 - g^2}}{\omega R}$.

(5) განტოლების ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (6)$$

$$\varphi' = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt.$$

საწყისი პირობებიდან გამომდინარე: $t = 0,\ \varphi_0 = 0\,,\ \varphi_0' = \dfrac{v_0}{R}$

ვიპოვით $C_1 = 0,\ C_2 = \dfrac{v_0}{Rk}$.

ეს მნიშვნელობები ჩავსვათ (6) ფორმულაში და მივიღებთ წერტილის მოძრაობის განტოლებას:

$$\varphi = \frac{v_0}{Rk}\sin kt.$$

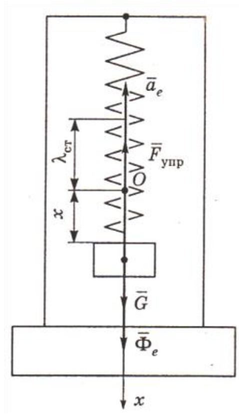
<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> წონასწორობის მდგომარეობა შეესაბამება $\varphi_0 = \arccos\dfrac{g}{\omega^2 R}$ კუთხეს, რომელიც ათვლილია წრეზე წერტილის ქვედა მდებარეობიდან. წერტილი, რომელმაც მიიღო მცირე $\vec{v}_0$ სიჩქარე, შეასრულებს მცირე რხევებს წონასწორობის მახლობლობაში თანახმად განტოლებისა

$$\varphi = \frac{v_0}{Rk}\sin kt, \quad \text{სადაც} \quad k = \frac{\sqrt{\omega^4 R^2 - g^2}}{\omega R}.$$

ამოცანა 33. 20

ზამბარიანი ვიბროგადამწოდი გამოიყენება მატარებლის ვერტიკალური აჩქარების გასაზომად, რომლის ვერტიკალური რხევის წრიული სიხშირე 10 რად/წმ -ს ტოლია. ხელსაწყოს ბაზა შეადგენს ერთ მთლიანს მატარებლის ერთ-ერთი ვაგონის კორპუსთან. ხელსაწყოს ბაზაზე მაგრდება $c = 17,64$ კნ/მ სიხისტის კოეფიციენტის მქონე ზამბარა. ზამბარაზე მიმაგრებულია $m = 1,75$ კგ მასის ტვირთი. ხელსაწყოს ჩანაწერის მიხედვით ვიბროგადამწოდის ტვირთის ფარდობითი მოძრაობის ამპლიტუდა 0,125 სმ-ს ტოლია. იპოვეთ მატარებლის მაქსიმალური ვერტიკალური აჩქარება. როგორია მატარებლის ვიბრაციის ამპლიტუდა?

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ტვირთის ფარდობითი მოძრაობა (იხ. ნახაზი) რომელზეც მოქმედებენ: სიმძიმის $\vec{G}$ ძალა, ზამბარას დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა, წარმტანი ინერციის $\vec{\Phi}_e$ ძალა, რომელიც განისაზღვრება ვაგონის ვერტიკალური რხევით, $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$. მივმართოთ x ღერძი ქვევით ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობიდან, მაშინ $F_{yp} = c(\lambda_{cT} + x)$.



მატარებლის ვერტიკალური გადაადგილება თავის მხრივ წარმოადგენს წარმტან მოძრაობას და აღიწერება განტოლებით

$$\xi = b\sin pt.$$

მაშინ $$a_e = \xi'' = -bp^2 \sin pt,$$

$$\Phi_e = ma_e = -mbp^2 \sin pt.$$

შევადგინოთ ტვირთის ფარდობითი მოძრაობის

დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = G - F_{yp} + \Phi_e,$$

ანუ
$$mx'' = G - c(\lambda_{cT} + x) - mbp^2 \sin pt. \qquad (1)$$

ვინაიდან ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში $G = c\lambda_{cT}$, ამიტომ (1) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$mx'' = -cx - mbp^2 \sin pt,$$

ანუ
$$x'' + k^2 x = h \sin pt, \qquad (2)$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$; $h = -bp^2$.

(2) განტოლება - ეს არის იძულებითი რხევის განტოლება. ამ არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამოხსნას ასეთი სახე აქვს

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt, \qquad (3)$$

$$x' = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt.$$

საწყისი პირობების გამოყენებით: $t = 0,\ \ x_0 = 0, x_0' = 0$,

მივიღებთ: $C_1 = 0 \quad C_2 = -\dfrac{hp}{k(k^2 - p^2)}$.

მაშინ, (3) ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ

$$x = \frac{hp^2}{k(k^2 - p^2)} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

ტვირთის ფარდობითი მოძრაობის a ამპლიტუდა

$$a = \left| \frac{h}{k^2 - p^2} \right| = \frac{bp^2}{k^2 - p^2},$$

სადაც b - მატარებლის ვერტიკალური რხევების ამპლიტუდაა;

$k^2 = \dfrac{c}{m} = \dfrac{17640}{1{,}75} = 10080; \quad p = 10$ რად/წმ.

საიდანაც

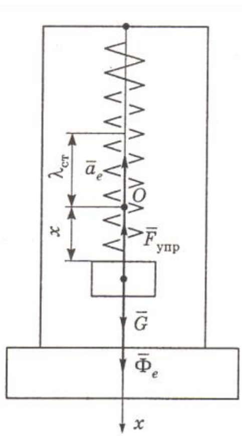
$$b=\frac{a(k^2-p^2)}{p^2}=\frac{0,125(10080-100)}{100}=12,47 \text{ (სმ).}$$

მატარებლის მაქსიმალური ვერტიკალური აჩქარება

$$a_{\max}=bp^2=12,47\cdot 10^2=1247 \text{ (სმ/წმ}^2\text{).}$$

<u>**პ ა ს უ ხ ი:**</u> მატარებლის მაქსიმალური ვერტიკალური აჩქარება $a_{\max}=1247$ სმ/წმ². მატარებლის ვერტიკალური რხევის ამპლიტუდა $b=12,47$ სმ.

ამოცანა 33. 21



ვიბრომეტრი გამოიყენება მანქანის ერთ-ერთი ნაწილის ვერტიკალური რხევის განსაზღვრისათვის. ხელსაწყოს მოძრავ სისტემაში დემპფერი არ არსებობს. ვიბრომეტრის გადამწოდის (მასიური ტვირთის) ფარდობითი გადაწევა 0,005 სმ-ს ტოლია. ვიბრომეტრის რხევის საკუთარი სიხშირე 6 ჰერცის ტოლია. მანქანის მოვიბრირე ნაწლის რხევის სიხშირე – 2 ჰერცია. რას უდრის რხევის ამპლიტუდა, მაქსიმალური სიჩქარე და მანქანის მოვიბრირე ნაწლის მაქსიმალური აჩქარება?

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ გადამწოდის მასიური ტვირთის ფარდობითი მოძრაობა (იხ. ნახაზი) რომელზეც მოქმედებენ: სიმძიმის $\vec{G}$ ძალა, ზამბარას დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალა, წარმტანი ინერციის $\vec{\Phi}_e$ ძალა, $\vec{\Phi}_e=-m\vec{a}_e$. მივმართოთ x ღერძი ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობიდან ქვევით, მაშინ $F_{yp}=c(\lambda_{cT}+x)$.

მანქანის მოვიბრირე ნაწილის ვერტიკალური გადაადგილება აღიწერება განტოლებით

$$\xi=b\sin pt.$$

მაშინ $$a_e=\xi''=-bp^2\sin pt,$$

$$\Phi_e = ma_e = -mbp^2 \sin pt.$$

შევადგინოთ ტვირთის ფარდობითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = G - c(\lambda_{cT} + x) - mbp^2 \sin pt. \qquad (1)$$

ვინაიდან ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში $G = c\lambda_{cT}$, ამიტომ (1) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$mx'' = -cx - mbp^2 \sin pt,$$

ანუ

$$x'' + k^2 x = h \sin pt,$$

სადაც $k^2 = \frac{c}{m}$; $h = -bp^2$.

ეს დიფერენციალური განტოლება აღწერს ნივთიერი წერტილის იძულებით რხევას. იძულებითი რხევის ამპლიტუდა ფარდობითი მოძრაობის დროს განისაზღვრება ფორმულით

$$a = \left|\frac{h}{k^2 - p^2}\right| = \frac{bp^2}{k^2 - p^2}$$

სადაც b - მანქანის ვიბრირებადი ნაწილის რხევის ამპლიტუდაა, აქედან

$$b = \frac{a(k^2 - p^2)}{p^2}.$$

ვიბრომეტრის გადამწოდის საკუთრივი რხევის პერიოდი

$$T_D = \frac{1}{f_D} = \frac{2\pi}{k},$$

საიდანაც

$$k = 2\pi f_D.$$

წარმტანი რხევის პერიოდი, ე. ი. მანქანის ვიბრირებადი ნაწილის პერიოდი

$$T_M = \frac{1}{f_M} = \frac{2\pi}{p},$$

საიდანაც

$$p = 2\pi f_M.$$

მაშასადამე,

$$b = \frac{a[(2\pi f_D)^2 - (2\pi f_M)^2]}{(2\pi f_M)^2} = \frac{a(f_D^2 - f_M^2)}{f_M^2} = \frac{0{,}005(6^2 - 2^2)}{2^2} = 0{,}04$$

(სმ).

წარმტანი სიჩქარე

$$v_e = \xi' = bp\cos pt.$$

ვიბრირებადი ნაწილიოს მაქსიმალური სიჩქარე მაშინ იქნება, როცა $\cos pt = 1$, ე. ი.

$$v_{e\max} = bp = 2b\pi f_M = 2\cdot 0{,}04\cdot 3{,}14 = 0{,}5 \text{ (სმ/წმ).}$$

წარმტანი აჩქარება

$$a_e = \xi'' = -bp^2 \sin pt$$

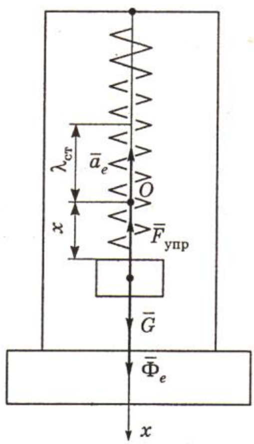
მაქსიმალური მაშინ იქნება, როცა $\sin pt = -1$, ე. ი.

$$a_{e\max} = bp^2 = b(2\pi f_M)^2 = 0{,}0004(2\cdot 3{,}14\cdot 2)^2 = 0{,}631$$

(მ/წმ^2).

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> რხევის ამპლიტუდა $b = 0{,}04$ სმ; მაქსიმალური სიჩქარე $v_{e\max} = 0{,}5$ სმ/წმ; მაქსიმალური აჩქარება $a_{e\max} = 6{,}316$ სმ/წმ^2.

ამოცანა 33. 22



ყუთის შიგნით, $c = 0{,}88$ კნ სიხისტის კოეფიციენტის მქონე ვერტიკალურ ზამბარაზე დაკიდებულია $m = 1{,}75$ მასის ტვირთი. ყუთი დგას ვერტიკალური მიმართულებით ვიბრირებად მაგიდაზე. მაგიდის რხევის განტოლებაა $x = 0{,}225\sin 3t$ სმ. იპოვეთ ტვირთის რხევის აბსოლუტური ამპლიტუდა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ტვირთის ფარდობითი მოძრაობა (იხ. ნახაზი) ხდება მასზე სიმძიმის $\vec{G}$ ძალის, ზამბარას დრეკადობის $\vec{F}_{yp}$ ძალის და წარმტანი ინერციის $\vec{\Phi}_e$

ძალის მოქმედებით; $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$. მივმართოთ x ღერძი ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობიდან ქვევით, მაშინ $F_{yp} = c(\lambda_{cT} + x)$.

მაგიდის ვერტიკალური გადაადგილება აღიწერება განტოლებით

$$\xi = b\sin pt.$$

მაშინ

$$a_e = \xi'' = -bp^2 \sin pt,$$

$$\Phi_e = ma_e = -mbp^2 \sin pt,$$

სადაც $p = 3$ რად/წმ, $b = 0{,}225$ სმ.

შევადგინოთ ტვირთის ფარდობითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება x ღერძზე გეგმილებში:

$$mx'' = G - F_{yp} + \Phi_e.$$

ვინაიდან ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში $G = c\lambda_{cT}$, ამიტომ

$$mx'' = - \ cx - mbp^2 \sin pt,$$

ანუ
$$x'' + k^2 x = h\sin pt,$$

სადაც $k^2 = \dfrac{c}{m}$; $h = -bp^2$.

ეს დიფერენციალური განტოლება აღწერს ნივთიერი წერტილის იძულებით რხევებს, რომელთა ამპლიტუდა განისაზღვრება ფორმულით

$$a = \left|\frac{h}{k^2 - p^2}\right| = \frac{bp^2}{k^2 - p^2} = \frac{0{,}00225 \cdot 3^2}{\frac{880}{1{,}75} - 3^2} = 0{,}00004 \text{ (მ)} = 0{,}004$$

(სმ).

რადგანაც ტვირთი ასრულებს რთულ მოძრაობას, $.a$ - ფარდობითი მოძრაობის ამპლიტუდაა, b - წარმტანი მოძრაობის ამპლიტუდაა, ამიტომ ტვირთის რხევის აბსოლუტური ამპლიტუდა

$$A = a + b = 0{,}004 + 0{,}225 = 0{,}229 \text{ (სმ).}$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $A = 0{,}229$ სმ.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. კვიციანი ტ. თეორიული მექანიკის კურსი, დინამიკა, საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, .2019 წ, გვ. 474
2. გორჯოლაძე ი., ყიფიანი გ., ბუქსიანიძე ა. თეორიული მექანიკის კურსი, დინამიკა, გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, 2008, 542 გვ.
3. Теоретическая механика, Динамика, Практикум: учеб. Пособие В. 2ч Ч.1 Динамика матерыальнной точки, В. А. Акимов [и др.]: под. Обш. Ред. Проф. А. В. Чигарева и доц. И И. Горбача. – Минск. Новое издание: М. ЦУПЛ. 2010, 528 с.
4. გორგიძე ა. თეორიული მექანიკის კურსი, წიგნი II, დინამიკა, გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, 1997, 561 გვ.
5. ვეკუა ნ. თეორიული მექანიკა, ნაწილი II, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1970, 366 გვ.
6. Мещерский И.В. – Сборник задач по теоретической механике. (И.В. Мещерский. 36-е изд. Испр. М. Наука, 1986. 448 с.).
7. Айзенберг Т.В., Воронков М.И., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике, “Высшая школа”, Москва, 1982, 390 с.
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах, том II, динамика, Москва, “Наука”,1985, 558 с.
9. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики, том II, Москва, “Наука”, 1985, 495 с.
10. Кабальский М.М., Кривошей В.Д., Савицкий Н.И., Чаиковский Т.Н. Типовые задачи по теоретической механике и методы их решения. Киев, 1985, 512 с.
11. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. “Высшая школа”, Москва, 1995, 366 с.

12. Яблонский А.А. Курс теоретической механики, часть II, динамика, “Высшая школа”, Москва, 1984.-423 с.
13. Bedford A., Fowler W. Engineering Mechanics, Prentice Hall, Inc. USA, 2002.-580 p.
14. Hibbeler R.C. Engineering Mechanics: Statics and Dynamics, Prentice Hall, Inc. USA, 2004.-688p.
15. Neuber H. Losungen zur aufgabensammlung mestscherski. Veb Deutcher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.- 464 p.
16. Romano A. Classical Mechanics With Mathematica, Springer, 2012. - 520 p.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

გელა ყიფიანი, ბიძინა აბესაძე,
გოჩა ბაძგარაძე, ედიშერ მაჩაიძე,
ბადრი ჭურჭელაური

თეორიული

მექანიკა

ნივთიერი წერტილის დინამიკა

ტომი 3

ტექნიკური რედაქტორი: ბიძინა აბესაძე
კომპიუტერული უზრუნველყოფა: ეთერი
ზარიძე დამკაბადონებელი: ნანა დუმბაძე
ყდის დიზაინერი: ირაკლი უშვერიძე

გადაეცა წარმოებას 2.03.2023წ.
ხელმოწერილია დასაბეჭდად 17.03.2023წ.
ტირაჟი 100 ეგზემპლარი

გამომცემლობა „უნივერსალი"
თბილისი, 0186, ა. პოლიტკოვსკაიას №4. ☎: 5(99) 17 22 30; 5(99) 33 52 02
E-mail: universal505@ymail.com; gamomcemlobauniversali@gmail.com

გელა ყიფიანი – მექანიკოსი-მათემატიკოსი, დაამთავრა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი, მექანიკის სპეციალობით. ტექნიკის მეცნიერებათა კანდიდატი (1986 წ.), ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი (1997 წ.), საქართველოს მეცნიერებისა და ტექნიკის დარგის სახელმწიფო პრემიის ლაურეატი (2004 წ.), საქართველოს დამსახურებულიმშენებელი (2019 წ.), საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის პროფესორი.

ბიძინა აბუსაძე – ინჟინერ-მექანიკოსი, ფიზიკოსი. დაამთავრა საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტი, სპეციალობით: თვითმფრინავთმშენებლობა (2005 წ.). დაამთავრა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, სპეციალობით ფიზიკა (2009 წ.), დოქტორის აკადემიური ხარისხი მექანიკის ინჟინერიასა და ტექნოლოგიაში (2019 წ.). გამოქვეყნებული აქვს 20 სამეცნიერო ნაშრომი. საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი

გოჩა ბაძგარაძე – მექანიკოსი-მათემატიკოსი, დაამთავრა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი, მექანიკის სპეციალობით. ინჟინერიის დოქტორის აკადემიური ხარისხი მშენებლობაში (2022 წ.). გამოქვეყნებული აქვს 20 სამეცნიერონაშრომი.

ედიშერ მაჩაიძე – დაამთავრა საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტის სამშენებლო ფაკულტეტი, ტექნიკის მეცნიერებათა კანდიდატი (1991 წ.), ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი (2005 წ.). გამოქვეყნებული აქვს 70-ზე მეტი სამეცნიერო ნაშრომი. მათ შორის 2 მონოგრაფიისა და 2 სახელმძღვანელოს თანაავტორი.

ბადრი ქურქულაური – საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტი. ტექნიკის მეცნიერებათა კანდიდატი (2001 წ.), დოქტორის აკადემიური ხარისხი მექანიკის ინჟინერიაში (2006 წ.). გამოქვეყნებული აქვს 50 სამეცნიერონაშრომი. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის საინჟინრო მექსნიკის და მშენებლობის ტექნიკური ექსპერტიზის დეპარტამენტის ასოცირებული პროფესორი.

ISBN 978-9941-33-546-4