გელა ყიფიანი, ნოდარ მარდალეიშვილი,
მაყვალა ბექირიშვილი, ზაზა ჯანგიძე

თეორიული მექანიკა

ანალიზური მექანიკა

პრაქტიკული

ტომი 5

გელა ყიფიანი, ნოდარ მარდალეიშვილი,
მაყვალა ბექირიშვილი, ზაზა ჯანგიძე

თეორიული მექანიკა

ანალიზური მექანიკა

ტომი 5

გამომცემლობა „უნივერსალი"
თბილისი 2023

უაკ 531 (076.5)(075.8)

სახელმძღვანელო შეიცავს ანალიზური მექნიკის ტიპიურ ამოცანებს ამოხსნებით, რომლებიც აღებულია ი. ვ. მეშჩერსკის საკმაოდ გავრცელებული ამოცანათა კრებულიდან. ყოველი პარაგრაფის დასაწყისში მოყვანილია ძირითადი დებულებები და მეთოდური მითითებები, რომლებიც გამოიყენება ამოცანების ამოხსნისას. ამოხსნები მოცემულია დაწვრილებითი ახსნა-განმარტებებით.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ წინამდებარე კრებულში ანალიზური მექანიკის ამოცანების ამოხსნების პროცესში ინტენსიურადაა გამოყენებული უმაღლესი მათემატიკის ისეთი ფუნდამენტური საკითხები, როგორიცაა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, წრფივი დიფერენციალური განტოლებები და სხვ. უმაღლესი მათემატიკიდან ამ საკითხების ცოდნის გარეშე შეუძლებელია ამოცანების ამოხსნების პროცესის სრულყოფილად გაცნობიერება.

სახელმძღვანელო გათვალისწინებულია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლებისა და უნივერსიტეტების საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტების სტუდენტებისა და მასწავლებლებისათვის, აგრეთვე, თეორიული მექანიკის დამოუკიდებლად შემსწავლელთათვის.

წიგნი იბეჭდება (ააიპ) “განათლებისა და მეცნიერების პროგრესი“-ს ხელშეწყობით.

*პროფესორ **გელა ყიფიანის** საერთო რედაქციით.*

რეცენზენტები: პროფესორი **გიორგი ჯაიანი**
პროფესორი **ტარიელ კვიციანი**
პროფესორი **ომარ კიკვიძე**
პროფესორი **თამაზ ობგაძე**

გამომცემლობა „უნივერსალი“, 2023

თბილისი, 0186, ა. პოლიტკოვსკაიას №4, ☎: 5(99) 17 22 30; 5(99) 33 52 02
E-mail: universal505@ymail.com; gamomcemlobauniversali@gmail.com

ISBN 978-9941-33-543-3 (ყველა ტომისთვის)
ISBN 978-9941-33-592-1 (V ტომისთვის)

ᲬᲘᲜᲐᲡᲘᲢᲧᲕᲐᲝᲑᲐ

თეორიული მექანიკა არის მეცნიერების დარგი, რომელიც სწავლობს ნივთიერი სხეულების მექანიკურ მოძრაობას და ადგენს ამ მოძრაობის ზოგად კანონებს.

თეორიული მექანიკა თავისი საფუძვლებიდანვე მჭიდროდ არის დაკავშირებული ტექნიკასთან. იგი იქმნებოდა და ვითარდებოდა ტექნიკის განვითარებასთან ერთად. ტექნიკის განვითარება სულ ახალ-ახალ ამოცანებს აყენებდა მექანიკის წინაშე, რაც ხელს უწყობდა თვით მექანიკის განვითარებას. თავის მხრივ, მექანიკაც დიდ ზეგავლენას ახდენდა და ხელს უწყობდა ტექნიკურ პროგრესს.

თეორიული მექანიკა არის ერთ-ერთი ის ფუნდამენტური საგანი, რომელზეც დაფუძნებულია თანამედროვე ტექნიკის ყველა დარგი.

თეორიულ მექანიკას ერთ-ერთი წამყვანი ადგილი უკავია და წარმოადგენს თეორიულ ბაზას ისეთი ტექნიკური საგნებისათვის, როფორიცაა მასალათა გამძლეობა, მექანიზმებისა და მანქანების თეორია, დრეკადობისა და პლასტიკურობის თეორია, სამშენებლო მექანიკა, ჰიდროაერომექანიკა და მრავალი სხვ.

როგორც ყოველ მეცნერებას, თეორიულ მექანიკასაც კვლევის საფუძვლად უდევს დაკვირვება, ცდა, პრაქტიკა. თეორიულ მექანიკაში ფართოდ გამოიყენება მათემატიკური მეთოდები, აბსტრაქტული (განყენებული) ცნებები, მოვლენათა მოდელები, ლოგიკის კანონები.

თეორიულ მექანიკაში შემოღებული თითქმის ყველა საწყისი ცნება არსებითად წარმოადგენს გარკვეულ აბსტრაქციას ან მოდელს. მათი შემოღებისას გათვალისწინებულია ის ძირითადი, განმსაზღვრელი, რაც არსებითია განსახილველ მექანიკურ მოძრაობაში. ასე, მაგალითად, რეალური ნივთიერი სხეულის მაგივრად მექანიკაში განიხილავენ მის ისეთ აბსტრაქტულ მოდელს, როგორიცაა ნივთიერი წერტილი, აბსოლუტურად მყარი სხეული და სხვ. მხოლოდ ასეთ მოდელებზე აგებული მექანიკისათვის შეიძლება შემუშავდეს ის მეთოდები, რომლებიც სა-

შუალებას იძლევიან შევისწავლოთ რეალური ობიექტების მოძრაობა. შემდეგ მიღებული თეორიული შედეგები მოწმდება ცდით, პრაქტიკით.

თეორიული მექანიკის საკითხები ცნობილია უძველესი დროიდან.

ჯერ კიდევ არისტოტელე (IV ს. ჩვ. ერ-დე) იცნობდა თეორიული მექანიკის ზოგიერთ კანონს. მასვე ეკუთვნის საგნის სახელწოდების – „მექანიკის“ – შემოღებაც. მექანიკის კანონების დასადგენად მათემატიკური კანონების გამოყენებას ყველაზე ადრე ბერძენმა *არქიმედემ* (287-212 ჩვ. ერ-დე) მიმართა. მექანიკის სწრაფი განვითარება იწყება აღორძინების ხანაში. იგი დაკავშირებულია იტალიელ *ლეონარდო და ვინჩის* (1452-1519), პოლონელი *ნიკოლოზ კოპერნიკის* (1473-1543), გერმანელი *იოჰან კეპლერის* (1571-1630) და სხვათა სახელებთან. ამ მეცნიერების მიერ მიღებულმა შედეგებმა მოამზადეს საფუძველი მექანიკის, როგორც მეცნიერების, შემდგომი წინსვლისათვის. დინამიკის, როგორც მეცნიერების, შექმნაში დიდი წვლილი მიუძღვის იტალიელ მეცნიერს *გალილეო გალილეის* (1564-1642). კლასიკური მექანიკის საფუძვლები ჩამოაყალიბა და სისტემატურად დაამუშავა ინგლისელმა მეცნიერმა *ისააკ ნიუტონმა* (1643-1727), რომელმაც თავის წიგნში „ნატურალური ფილოსოფიის მათემატიკური საწყისები“ მოგვცა კლასიკური მექანიკის ძირითადი კანონები.

XVIII ს-ის თეორიული მექანიკის განვითარება ხასიათდება ორი ძირითადი თვისებით: *პირველია* მისი მათემატიზაცია: მექანიკის ყველა კანონი და ძირითადი დებულება გამოჰყავდათ მათემატიკური ანალიზის მეთოდით. *ჟოზეფ-ლუი ლაგრანჟი* (1736-1813) იმასაც კი ამტკიცებდა, რომ მისი მექანიკა წარმოადგენს მათემატიკური ანალიზის ახალ თავს. *მეორეც*, ძირითადი დებულებები ფიზიკურად არ ზუსტდებოდა: რა არის ძალა – განუსაზღვრელი რჩებოდა, გარს უვლიდნენ ამ ცნებას; ბმები ჩათვლილი იყო იდეალურად; საყრდენი ზედაპირები – ხახუნის გარეშე; ღერო და თოკი – უწონადი.

მექანიკის საკითხების შესწავლა ანალიზური მეთოდების გამოყენებით დაიწყო შვეიცარიელმა *ლეონარდ ეილერმა* (1707-

1783). მექანიკის შემდგომ განვითარებაში დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა ფრანგი მეცნიერების *ჟან ლერონ დალამბერის* (1717-1783) ნაშრომს „ტრაქტატი დინამიკაში" და *ლუი ლაგრანჟის* ნაშრომს „ანალიზური მექნიკა".

განსაკუთრებით აღსანიშნავია ლაგრანჟის ნაშრომი გადმოცემის ორიგინალობითა და მეთოდების ერთიანობით. ამ ნაშრომის შესავალში *ლაგრანჟი წერს: „უკვე არსებობს მრავალი ტრაქტატი მექანიკაში, მაგრამ ჩემი ტრაქტატი სრულიად ახალია. მე მიზნად დავისახე მექანიკის თეორია და მასთან დაკავშირებული ამოცანების ამოხსნის მეთოდები მივიყვანო საერთო ფორმულებზე, რომლის მარტივი გაფართოება იძლევა ყველა იმ ფორმულას, რომელიც საჭიროა თითოეული ამოცანის ამოსახსნელად".* ლაგრანჟმა შექმნა ანალიზური მექანიკის მწყობრი სისტემა.

უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში თეორიული მექანიკა ტექნიკური საგნების უშუალო დასაყრდენია. ამავე დროს ცნობილია, რომ თავისი სპეციფიკურობის და სირთულეების გამო ზოგადად თეორიული მექანიკის, განსაკუთრებით კი მისი პრაქტიკული ნაწილის შესწავლა საკმაოდ რთულია; რამდენადაც ამ საგნის თეორემების დაზეპირება შესაძლებელია, იმდენად ძნელია მათი გამოყენება პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად.

ამას ემატება უმაღლეს სასწავლებლებში სასწავლო კურსისათვის გამოყოფილი საათების რაოდენობის სიმცირე. ამ სიძნელეთა გადალახვა შესალებელია, თუ შეიქმნება მექანიკაში ამოხსნილი ამოცანებით ისეთი ტიპის სახელმძღვანელო, რომელიც შუალედური და დამაკავშირებელი იქნება საგნის თეორიულ კურსსა და ამოცანათა კრებულს შორის და რომელიც დაეხმარება დაინტერესებულ პირებს თეორიული მექანიკის ამოცანების ამოხსნის მეთოდების გამომუშავებაში.

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ წინამდებარე კრებულში დინამიკის ამოცანების ამოხსნების პროცესში ინტენსიურადაა გამოყენებული უმაღლესი მათემატიკის ისეთი ფუნდამენტური საკითხები, როგორიცაა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენ- ცი-

ალური განტოლებები და სხვ. უმაღლესი მათემატიკიდან ამ საკითხების ცოდნის გარეშე შეუძლებელია ამოცანების ამოხსნების პროცესის სრულყოფილად გაცნობიერება.

თეორიული მექანიკის შესასწავლად დიდი მნიშვნელობა აქვს სტუდენტების მიერ თეორიის საკითხებთან ერთად პრაქტიკული ამოცანების დამოუკიდებლად ამოხსნის დაუფლებას. სწორედ ამ ამოცანას ემსახურება ამ კრებულში შეტანილი მეთოდური მითითებები.

წინამდებარე კრებულში წარმოდგენილია ამოცანები, რომლებიც საკმაოდ ასახავენ უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში თანამედროვე სასწავლო პროგრამებით გათვალისწინებულ თემატიკას. ყოველ თემაზე კრებულში მოყვანილია ამოცანის დაწვრილებითი ამოხსნა საჭირო მეთოდური მითითებებით.

ყოველი თემის დასაწყისში მოკლედ ჩამოყალიბებულია თეორიის ძირითადი საკითხები და მოცემულია შესაბამისი ფორმულები. მოცანის გარჩევამდე და ამოხსნის დაწყებამდე საჭიროა სტუდენტმა აუცილებლად შეისწავლოს თეორიული კურსის შესაბამისი საკითხები, ვინაიდან ამ კრებულში მოყვანილი მოკლე თეორიული ცნობები ვერ შეცვლიან თეორიულ სახელმძღვანელოს. სასურველია ამოცანების ამოხსნა წარმოებდეს რეკომენდებული მიმდევრობით და გათვალიწინებული იქნეს შესაბამისი მეთოდური მითითებები.

უკანასკნელ ათწლეულებში მნიშვნელოვნად გაიზარდა ამოხსნილი ამოცანების კრებულების გამოცემათა რაოდენობა ფიზიკაში, მათემატიკაში და მექანიკაში უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის. ეს განპირობებულია ბაზის შექმნის აუცილებლობაზე დამოუკიდებელი მუშაობისას გრაფიკული გაანგარიშებისა და საკონტროლო სამუშაოებისათვის დროის შემცირების გამო. მექანიკის მრავალი დარგის ამოცანა, რომელთა ამოხსნა მოითხოვს დიდი დროის დახარჯვას, არ შეიძლება დეტალური განხილვის გარეშე საჭირო ხარისხით დამუშავდეს პრაქტიკულ მეცადინეობაზე, რის შედეგადაც შეუძლებელი ხდება თეორიული მექანიკისა და მთლიანად მისი ცალკეული განყოფილებების რთული მასალის ათვისება

დინამიკა წარმოადგენს თეორიული მექანიკის ყველაზე უფრო რთულ ნაწილს. ნივთიერი წერტილის დინამიკას აქვს პირველსაწყისი მნიშვნელობა ნიუტონის ვექტორული დინამიკის გასაგებად, ვინაიდან მასში თვალსაჩინოდ განიხილება მექანიკის ძირითადი თეორემების გამოყენება. მყარი სხეულის მექანიკა, მისი მოდელები, პრინციპები, კანონები წარმოადგენენ ყველა მიმართულების ინჟინრების მომზადების ფუნდამენტს, განსაკუთრებით მანქანათმშენებლობის, ხელსაწყოთმშე-ნებლობის, სამშენებლო და ენერგეტიკის სპეციალისტებისათვის. მოცემული განყოფილების ამოცანები უმეტესწილად შეესაბამებიან იმ ამოცანებს, რომლების ამოხსნაც უხდებათ ინჟინრებს მათი პრაქტიკული მოღვაწეობისას. სასწავლო მასალის ათვისების ხარისხი უშუალოდ დამოკიდებულია ამოხსნილი ამოცანების რაოდენობაზე და მრავალსახეობაზე.

ი.ვ. მეშჩერსკის ამოცანათა კრებული წარმოადგენს საკმაოდ ცნობილ დამხმარე სასწავლო სახელმძღვნელოს თეორიულ მექანიკაში, რომელმაც გაუძლო ათეულობით გამოცემას მსოფლიოს მრავალ ქვეყანაში, რომლებიც დღესაც ფართოდ გამოიყენება ტექნიკური განხრის უმაღლეს სასწავლო დაწესებულებებში. ამ კრებულის პირველი დამხმარე სახელმძღვანელო ამოხსნილი ამოცანებით გამოცემული იქნა 1963 წელს გერმანიაში (H. Neuber, Losungen zur Aufgabensammlung Mestscherski, 1963, DVW, 465 S.). თუმცა შემდგომ კრებული მრავალჯერ ხელახლა გამოიცა, ამასთანავე ის სწორდებოდა და ივსებოდა.

შემოთავაზებულ დამხმარე სახელმძღვანელოში მოცემულია ყველა ამოცანის ამოხსნა ი. ვ. მეშჩერსკის კრებულის „დინამიკის“ განყოფილებიდან (Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике/ И. В. Мещерский, 36-е изд., испр. М.: Наука, 1986). აგრეთვე ქართულ ენაზე თარგმნილი: ი.ვ. მეშჩერსკი, „თეორიული მექანიკის ამოცანათა კრებული”, თბილისი, 1963.

წინამდებარე დამხმარე სახელმძღვანელო შეიცავს „ანალიზური მექანიკის“ XI თავის ამოცანებს. ამოცანების ამოხსნა მოყვანილია დაწვრილებითი ახსნა-განმარტებით, რაც განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. ყოველი

პარაგრაფის დასაწყისში მოცემულია ძირითადი თეორიული დებულებები და მეთოდური მითითებები დაწვრილებითი ახსნა-განმარტებით. როგორც წესი, ამოხსნას თან სდევს ნახაზი, რომელზეც მითითებულია მოქმედი ძალა, სიჩქარე, აჩქარება.

აღსანიშნავია, ავტორთა ჯგუფის სხვადასხვა უნივერსიტეტებში „თეორიული მექანიკის" კურსის სწავლების დიდი გამოცდილება. ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში, ნ. მუსხელიშვილის სახელობის ქუთაისის პოლიტექნიკურ ინსტიტუტში, ა. წერეთლის სახელობის ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, ი. გოგებაშვილი სახელობის თელავის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტში, დავით აღმაშენებლის სახელობის საქართველოს ეროვნული თავდაცვის აკადემიაში, საქართველოს აგრარულ უნივესრიტეტში, ბათუმის სახელმწიფო საზღვაო აკადემიაში, მ. ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, ლენინგრადის სამშენებლო საინჟინრო ინსტიტუტში, ნ. ბაუმანის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო ტექნიკურ უნივერსიტეტში, სანკტ-პეტერბურგის სახელმწიფო არქიტექტურულ-სამშენებლო უნივერსიტეტში, ვლადიმირის სახლმწიფო უნივერსიტეტში.

ავტორები მადლიერების გრძნობით არიან გამსჭვალულნი რეცენზენტების: ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკის კათედრის გამგეს, ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის დირექტორს, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორს, პროფესორ **გიორგი ჯაინს**, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის საინჟინრო მექანიკისა და მშენებლობის ტექნიკური ექსპერტიზის დეპარტამენტის უფროსს, პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორს, ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორს პროფესორ **ტარიელ კვიციანს**, ა. წერეთლის სახელობის ქუთაისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამოყენებითი მექანიკის დეპარტამენტის უფროსს, ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორს, პროფრსორ **ომარ კიკვიძეს,** საქართველოს ეროვნული უნივერსიტეტის პროფესორს ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორს, **თამაზ ობგაძეს**. რომელთა საქმიანმა შენიშვნებმა და მითითებებმა სრულყო წიგნი.

ავტორები აგრეთვე მადლიერნი არიან ქალბატონ **თინათინ მაღრაძის,** გამომცემლობა „უნივერსალი“-ს დირექტორის ბატონ **გოჩა ხარებავას** ხელმძღვანელობით, რომელთა თავდაუზოგავი შრომის შედეგად სრულყოფილ იქნა სახელმძღვანელო. შემოთავაზებული დამხმარე სახელმძღვანელო დაგეხმარებათ პრაქტიკული მეცადინეობის ჩატარების მეთოდიკის სრულყოფაში. პროფესორს შეუძლია შესთავაზოს სტუდენტებს გარკვეულ თემაზე პრაქტიკული მეცადინეობისათვის მზადებისას დამოუკიდებლად გაეცნოს ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნას, ხოლო შემდეგ მეცადინეობის პროცესში ამოხსნას ანალოგიური ამოცანები.

წინამდებარე სახელმძღვანელო კრებული ავტორთა პირველი მოკრძალებული ცდაა. ამიტომ, მკითხველის ყოველი საფუძვლიანი შენიშვნა და წინადადება მადლიერებით იქნება გათვალისწინებული ავტორებისაგან.

რედაქტორი პროფესორი გელა ყიფიანი
E-Mail: gelakip@gmail.com; g.kipiani@gtu.ge
☎ 599106263, 591801188

XI. ანალიზური მექანიკა

ანალიზური მექანიკა- მექანიკის ნაწილია, რომელშიც შეისწავლება მექანიკური სისტემების მოძრაობა ან წონასწორობა ნებისმიერი მექანიკური სისტემებისათვის გამოყენებადი ზოგადი ანალიზური მეთოდების საშუალებით. ამასთან, მიიღება ერთი და იგივე სტრუქტურის მოძრაობის ან წონასწორობის განტოლებები მექანიკური სისტემის სახისაგან დამოუკიდებლად. ანალიზური მეთოდების უპირატესობა მდგომარეობს იმაში, რომ მათ ახასიათებთ გამოკვეთილი ზოგადობა, ე. ი. გამოიყენება სხვადასხვა სახის მექანიკური სისტემების მოძრაობის ან წონასწორობის გამოსაკვლევად ძალების მოქმედებით. ეს მიიღწევა ისეთი განზოგადებული ცნებების შემოღებით, როგორებიცაა განზოგადებული კოორდინატები, განზოგადებული სიჩქარეები და განზოგადებული ძალები, აგრეთვე, შესაძლო (ვირტუალური) და ნამდვილი გადაადგილების, ძალის შესაძლო მუშაობის, ბმების, მათ შორის იდეალურის, ცნებების შემოღებით.

ანალიზური მექანიკის მეთოდები ეფუძნება დინამიკის და კინემატიკის მთელი რიგის აქსიომების და თეორიული დებულებების გამოყენებას. ესენია: კინეტიკური და პოტენციური ენერგია, ძალის მუშაობა, ინერციის ძალა, მყარი სხეულის და მისი წერტილების კინემატიკური მახასიათებლები და სხვა.

ანალიზური მექანიკის მეთოდებით ამოხსნისას შესაძლებელია წონასწორობის განტოლებების ან მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების შედგენა ისე, რომ არ შემოვიღოთ ბმის რეაქციები.

ანალიზურ მექანიკას საფუძვლად უდევს მექანიკის ზოგადი პრინციპები, რომელთაგან ანალიზური მეთოდებით მიიღება მოძრაობის ან წონასწორობის განტოლებები.

მექანიკის პრინციპები წარმოადგენენ დებულებებს, რომლებიდანაც როგორც შედეგი გამომდინარეობს სხვა კერძო დებულებები. როგორც აქსიომები, ისინიც ის საწყისებია, რომლებიც საფუძვლად უდევს შემდგომ თეორიულ აგებებს, დამტკიცებებს და შედეგებს. მაგრამ აქსიომებისაგან განსხვავებით ისინი არ არიან ცხადი დებულებები და რიგ შემთხვევებში საჭიროებენ მკაცრ მათემატიკურ დამტკიცებებს.

განვიხილოთ დებულებები, რომლებიც ხშირად გვხვდებიან ამოცანების ანალიზური მექანიკის მეთოდებით ამოხსნისას.

ანალიზური მექანიკაში **ბმები** ეწოდება ნებისნიერ შეზღუდვებს, რომლებსაც ადებენ მექანიკური სისტემის წერტილების მოძრაობებს. ასეთი შეზღედვები შეიძლება იყოს არა მარტო სხეულები, არამედ რაიმე კინემატიკური პირობებიც. ამიტომ ეს შეზღუდვები (ზედაპირები, წირები, კინემტიკური პირობები) შეიძლება ჩაიწეროს განტოლებების ან უტოლობების სახით.

ბმებს, რომელთა განტოლებები შეიცავენ მხოლოდ წერტილის კოორდინატებს, ე.ი. შეზღუდვები ედება მხოლოდ წერტილის კოორდინატებს, ეწოდებათ **გეომეტრიული ბმები**.

ბმებს, რომლებიც შეზღუდვებს ადებენ არა მხოლოდ წერტილების კოორდინატებს, არამედ მათ სიჩქარეეებსაც, **დიფერენციალური ბმები** ეწოდებათ.

ყველა გეომეტრიულ ბმას და იმ დიფერენციალურ ბმებს, რომელთა განტოლებების ინტეგრირება შესაძლებელია, ეწოდებათ **ჰოლონომიური ბმები.**

დიფერენციალურ ბმებს, რომელთა განტოლებების ინტეგრირება შეუძლებელია, **არაჰოლონომიური ბმები** ეწოდება.

გეომეტრიულ და დიფერენციალურ ბმებს, რომელთა განტოლებებში დროს ცხადად არ შედის, **სტაციონალური** ეწოდება. ბმებს, რომელთა განტოლებებში დრო ცხადად შედის, ე.ი. ისინი იცვლებიან დროში, **არასტაციონალური** ეწოდება.

ბმებს, რომლებიც ზღუდავენ წერტილის მოძრაობას ორი ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებით, ეწოდებათ **ორმხრივი ან დამჭერი ბმები.** ასეთი ბმები აღიწერებიან განტოლებებით. ბმებს, რომლებიც ზღუდავენ წერტილის მოძრაობას ერთი მიმართულებით, ეწოდებათ **ცალმხრივი ან არადამჭერი ბმები** და ყოველთვის აღიწერებიან უტოლობებით.

წერტილის **შესაძლო ან ვირტუალური გადაადგილება** ეწოდება ისეთ უსასრულო მცირე (ელემენტარულ) გადაადგილებას, რომელიც შეიძლება მიიღოს წერტილმა დროის მოცემულ მომენტში დაკავებული მდებარეობიდან და, ამასთან ერთად, არ არღვევს წერტილზე დადებულ ბმებს. მექანიკური სისტემის **შესაძლო ან ვირტუალური გადაადგილება** ეწოდება ისეთი ელემენტარული გადაადგილებების ერთობლიობას, რომლებიც შეიძლება მიიღოს წერტილებმა დროის მოცემულ მომენტში დაკავებული მდებარეობიდან და, ამასთან ერთად, სისტემაზე დადებულ ბმებს არ არღვევს.

ნამდვილი გადაადგილება-ეს არის მექანიკური სისტემის წერტილების ისეთი ელემენტარული გადაადგილებები, რომლებიც არ არღვევენ ბმებს (უშვებენ ბმები), მაგრამ ხორციელდება მოძრაობის საწყისი პირობებით და მასზე მოქმედი ძალთა სისტემის გათვალიწინებით.

თუ წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორით, მაშინ შესაძლო გადაადგილება აღინიშნება $\delta\vec{r}$ −ით, ხოლო ნამდვილი – $d\vec{r}$ −ით.

ზემოთ ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ სტაციონალური ბმების შემთხვევაში სისტემის წერტილების ნამდვილი გადაადგილება ემთხვევა ერთ-ერთ შესაძლო გადაადგილებას. თუ ბმა არასტაციონალურია, მაშინ ნამდვილი გადაადგილება მოცემული ბმის გათვალისწინებით იქნება სხვა, ე.ი. ამ შემთხვევაში ნამდვილი გადაადგილება არ ემთხვევა არცერთ შესაძლო გადაადგილებას, რომლებიც დაშვებული იქნება ბმებით.

$\vec{F}$ შესაძლო მუშაობა ეწოდება δA ელემენტარულ მუშაობას ამ ძალის მოდების წერტილის $\delta\vec{r}$ შესაძლო გადაადგილებაზე, ე.ი.

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = F\delta r cos\left(\widehat{\vec{F},\delta\vec{r}}\right).$$

თუ $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით სხეული ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას, აშინ ამ ძალის შესაძლო მუშაობა

$$\delta A = \pm M_z(\vec{F})\delta\varphi,$$

სადაც $M_z(\vec{F})$ ძალის მომენტია ბრუნვის ღერძის მიმართ; $\delta\varphi -$ სხეულის შესაძლო კუთხური გადაადგილებაა.

მექანიკური სისტემის წერტილებზე მოდებული ძალების შესაძლო მუშაობა

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k.$$

ბმისაგან განთავისფლების პრინციპის თანახმად არათავისუფალი მექანიკური სისტემა შეიძლება გავხადოთ თავისუფალი, თუ აზრობრივ უკუვაგდებთ ბმებს და მათ მოქმედებას შევცვლით ბმების რეაქციებით. ვისარგებლოთ შესაძლო მუშაობის განმარტებით და შემოვიღოთ იდეალური ბმების შემდეგი განმარტება:

ბმებს ეწოდება **იდეალური**, თუ მათი რეაქციის ძალების ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი ყოველ შესაძლო გადაადგილებაზე უდრის ნულს, ე.ი.

$$\delta A^R = \sum_{k=1}^{n} \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{n} \left|\vec{R}_k\right| \cdot |\delta\vec{r}_k| cos\left(\widehat{\vec{R}_k, \delta\vec{r}_k}\right) = 0.$$

*ი*დეალური, როგორც წესი, არის ბმები ხახუნის გარეშე. ამ შემთხვევაში ბმის რეაქციის ძალები და ამ ძალების მოდების წერტილების შესაძლო გადაადგილებები ურთიერთმართობულია. თუ ბმები არის ხახუნით, მაშინ ხაოიანი ზედაპირის სრულ რეაქციას შლიან ორ მდგენელად: ზედაპირის მართობ ნორმალურ მდგენელად და მხებ მდგენელად-ხახუნის ძალად., რომლის მუშაობა შესაძლო გადაადგილებაზე არ უდრის ნულს. მაგრამ ანალიზურ მექანიკაში ასეთ ბმას პირობითად თვლიან იდეალურად, მაგრამ ხახუნის ძალას მიაკუთნებენ მოცემულ ძალებს.

მექანიკური სისტემის ნებისმიერი წერტილის მდებარეობა არჩეულ კოორდინატთა სისტემაში განისაზღვრება ან $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორით, ან (x, y, z) დეკარტის კოორდინატებით. n წერტილისაგან \შემდგარი მექანიკური სისტემისათვის აუცილებელია $3n$ კოორდინატი, რომელთა შორის შეიძლება იყოს დამოკიდებული კოორდინატებიც. ამიტომ მექანიკური სისტემის წერტილების მდებარეობის განსაზღვრისათვის უფრო მოსახერხებელია განზოგადებული კოორდინატების გამოყენება.

განზოგადებული კოორდინატები- ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი სიდიდეებია, რომლებიც ცალსახად განსაზღვრავენ მექანიკური სისტემის მდებარეობას.

განზოგადებულ კოორდინატებად შეიძლება აივირჩიოთ სისტემაში შემავალი სხეულების კუთხური ან წრფივი გადაადგილებები. განზოგადებული კოორდინატები ზოგადად არინიშნება $q -$თი..

განზოგადებული კოორდინატის დროით წარმოებულს **განზოგადებული** სიჩქარე ეწოდება., ე.ი.

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt}.$$

მექანიკური სისტემის **თავისუფლების ხარისხის რიცხვი**, რომელიც ემორჩილება ჰოლონომიურ ბმებს, უდრის განზოგადებული კოორდინატების

რიცხვს. ზოგჯერ მექანიკური სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვს უწოდებენ დამოუკიდებელი შესაძლო გადაადგილებების რიცხვს, რომლებიც შეიძლება მიენიჭოს მის წერტილებს დროის ფიქსირებულ მომენტში.

ამიტომ, თუ n წერტილისაგან \შემდგარ მექანიკურ სისტემას აქვს ერთი თავისუფალების ხარისხი, მაშინ ყველა წერტილის შესაძლო გადაადგილებები იქნება ერთმანეთზე დამოკიდებულები. ანალიზური მექანიკის მეთოდებით ამოცანების ამოხსნისას ყველა ეს გადაადგილება უნდა გამოისახოს რომელიმე ერთი გადაადგილებით.

დეკარტის კოორდინატები შეიძლება გამოვსახოს განზოგადებული კოორდინატებით, ე.ი. დეკარტის კოორდინატები წარმოადგენენ განზოგადებული კორდინატების ფუნქციებს.

თუ მექანიკურ სისტემას აქვს S თავისუფლების ხარისხი, მაშინ $\mathrm{k}-$ ური წერტილის რადიუს-ვექტორი არის S განზოგადებული კოორდინატის და t დროის ფუნქცია, ე.ი.

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_{2,}, \cdots, q_S, t)$$

ასეთი წერტილის ნამდვილი გადაადგილება ხასიათდება რადიუს-ვექტორის ნაზრდით, რომელიც მეორე რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდის სიზუსტით განისაზღვრება როგორც სრული დიფერენციალი და მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$d\vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} dq_2 + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_S} dq_S + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} dt.$$

ნამდვილისაგან განსხვავებით, შესაძლო გადაადგილება წარმოადგენს წერტილის რადიუს-ვექტორის უსასრულოდ მცირე ნაზრდს, რომელიც გამოწვეულია ფიქსირებული t დროისაგან დამოუკიდებლად.

ასეთი სახის $\mathrm{k}-$ ური წერტილის რადიუს-ვექტორის უსასრულოდ მცირე ნაზრდს ეწოდება **ვარიაცია.** იგი ასე აღინიშნება:

$$\delta\vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_S} \delta q_S.$$

ეს გამოსახულება შეიძლება ასეც ჩაიწეროს:

$$\delta\vec{r}_k = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_{j.}$$

განზოგადებული კოორდინატების ცნების შემოღება საშუალებას გვაძლევს მექანიკურ სისტემაზე მოდებული ძალების შესაძლო მუშაობა გამოვსახოთ ამ კოორდინატებში. ამისათვის შესაძლო მუშაობა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\delta\mathrm{A} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \vec{\mathrm{F}}_\mathrm{k} \cdot \delta\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{k}. = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \vec{\mathrm{F}}_\mathrm{k} \cdot \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{S} \left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \vec{\mathrm{F}}_\mathrm{k} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{S} Q_j \delta q_j,$$

სადაც

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$$

განზოგადებული ძალაა; δq_j j – ური განზოგადებული კოორდინატის ვარიაცია.

მიღებული გამოსახულება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{S} Q_j \delta q_j = Q_1 \delta q_1 + Q_{2,} \delta q_2 + \cdots + Q_S \delta q_S,$$

სადაც $Q_1, Q_{2,}, \cdots, Q_S$ არის $q_1, q_{2,}, \cdots, q_S$ განზოგადებული კოორდინატების შესაბამისი განზოგადებული ძალები;

ამგვარად, **განზოგადებული ძალა** ეწოდება მექანიკურ სისტემაზე მოდებული ძალების შესაძლო მუშაობის გამოსახულებაში შესაბამის განზოგადებული კოორდინატის ვარიაციის კოეფიციენტს.

რომელიმე განზოგადებული კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული ძალის გამოსათვლელად აუცილებელია დანარჩენი განზოგადებული კოორდინატები ჩავთვალოთ მუდმივად. მაშინ მათი ვარიაცია იქნება ნული, გარდა იმ განზოგადებული კოორდინატისა, რომლის შესაბამისი განზოგადებული ძალაც გამოითვლება.

განვსაზღვროთ მექანიკურ სისტემაზე მოდებული ძალების შესაძლო მუშაობა და გავყოთ ეს გამოსახულება ერთ-ერთი განზოგადებული კოორდინატის ვარიაციაზე, მივიღებთ ამ განზოგადებული კოორდინატის შესაბამის განზოგადებულ ძალას:

$$Q_j = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \delta A_k\right)_j}{\delta q_k}, \quad j = 1, \cdots, S.$$

კონსერვატული ძალების განზოგადებული ძალა

$$Q_j = \frac{\partial \Pi}{\partial q_k}, \quad j = 1, \cdots, S.$$

სადაც Π სისტემის პოტენციური ენერგიაა.

უნდა აღინიშნოს, რომ განზოგადებული ძალის განზომილება დამოკიდებულია იმაზე, თუ რომელი გადაადგილება-კუთხური თუ წრფივი, იქნება აღებული განზოგადებულ კოორდინატად. განზოგადებული ძალის განზომილება შეესაბამება: ა) ძალის მომენტის განზომილებას, თუ განზოგადებულ კოორდინატად აღებულია კუთხური გადაადგილება, ბ) ძალის განზომილებას, თუ განზოგადებულ კოორდინატად აღებულია წრფივი გადაადგილება.

§46. შესაძლო გადაადგილების პრინციპი

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

შესაძლო გადაადგილების პრინციპი (ლაგრანჟის პრინციპი) გამოსახავს არათავისუფალი მექანიკური სისტემის წონასწორობის პირობებს: თუ მექანიკური სისტემა ემორჩილება სტაციონალურ, დამჭერ და იდეალურ ბმებს, მაშინ სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია სისტემაზე უშუალოდ მოდებული ძალების ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი ყოველ შესაძლო გადაადგილებაზე ნულის ტოლი იყოს, იმ პირობით, რომ საწყის მომენტში სისტემა იყო წონასწორობაში.

პრინციპის ზოგად ანალიზურ გამოსახულებას აქვს სახე:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a = 0.$$

ეს გამოსახულება შეგვიძლია ჩავწეროთ როგორც ვექტორული

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k. \qquad (46.1)$$

ისე სკალარული ფორმით:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k \right).$$

შესაძლო გადაადგილების პრინციპის გამოყენებით ამოცანების ამოხსნისას (46.1) განტოლებას წერენ სახით:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^{n} \left|\vec{F}_k\right| \cdot |\delta \vec{r}_k| cos\left(\widehat{\vec{F}_k, \delta \vec{r}_k}\right) = 0. \qquad (46.2)$$

თუ (46.2) გამოსახულებას გავაწარმოებთ დროით, მივიღებთ:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \left|\vec{F}_k\right| \cdot |\vec{v}_k| cos\left(\widehat{\vec{F}_k, \vec{v}_k}\right) = 0. \qquad (46.3)$$

ეს ტოლობა წარმოადგენს შესაძლო სიჩქარეთა პრინციპს, უფრო ზუსტად, **შესაძლო სიმძლავრეების** პრინციპს

ზოგადი სახით (46.3) გამოსახულება შეიძლება ასეც ჩაიწეროს:

$$\sum_{k=1}^{n} N_k^a = 0,$$

ე.ი. სისტემაზე მოდებული ძალების შესაძლო სიმძლავრეთა ჯამი უდრის ნულს.

თუ შესაძლო გადაადგილებად აღებულია კუთხური გადაადგილება, მაშინ (46.2) და (46.3) გამოსახულებებში ძალების ნაცვლად შედის ამ ძალების მომენტები ბრუნვის ღერძის მიმართ, ხოლო (46.3) გამოსახულებაში წრფივი v სიჩქარის ნაცვლად- სხეულის ბრუნვის ω კუთხური სიჩქარე.

შესაძლო გადაადგილების პრინციპი ადგენს მექანიკური სისტემის წონასწორობის ზოგად პირობას, ამასთან, არ არის საჭირო სისტემის ცალკეული ნაწილების წონასწორობის განხილვა, ხოლო იდეალური ბმების შემთხვევაში საშუალებას გვაძლევს არ განვიხილოთ უცნობი რეაქციის ძალები.

თუ მოითხოვება რომელიმე ბმის შესაბამისი რეაქციის ძალის განსაზღვრა, მაშინ უნდა ვისარგებლოთ ბმისაგან განთავისუფლების პრინციპით, უკუვაგდოთ ბმა და მისი მოქმედება შევცვალოთ შესაბამისი რეაქციის ძალით. წონასწორობის განტოლების შედგენისას მოცემულ ძალებს დაემატება რეაქციის ძალებიც.. მყარ სხეულთა სისტემის წონასწორობის შესახებ ამოცანების ამოხსნის ასეთი მეთოდი არის მეტად ეფექტური, რადგან საძიებელი რეაქციის ძალა განისაზღვრება უშუალოდ შედგენილი წონასწორობის განტოლებიდან. ამასთან ერთად, სტატიკის ჩვეულებრივი მეთოდებით უნდა შედგეს წონასწორობის განტოლებათა სისტემა, რომლის ამოხსნის შედეგად განისაზღვრება საძიებელი ძალები.

შესაძლო გადაადგილების პრინციპი განზოგადებულ ძალებში ჩაიწერება სახით:

$$\sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = 0,$$

მაშინ მექანიკური სისტემის წონასწორობისას განზოგადებული ძალა

$$Q_j = 0, j = 1, \cdots, s.$$

წონასწორობის განტოლებების რიცხვი შეესაბამება მექანიკური სისტემის თავისუფლების ხარისხს და მათი შედგენის პრინციპი განზოგადებული ძალების განსაზღვრის ანალოგიურია.

ამ პარაგრაფის პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანმიმდევრობა:

1. ავირჩიოთ წონასწორობის ობიექტი;
2. არაიდეალური ბმების არსებობის შემთხვევაში შესაბამისი ხახუნის ძალები მივაკუთვნოთ მოცემულ აქტიურ ძალებს, რომლის შემდეგ ბმები განვიხილოთ როგორც იდეალური;
3. ვაჩვენოთ ნახაზზე აქტიური ძალები, მათ შორის არაიდეალური ბმების ხახუნის ძალები;.
4. განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის თავისუფლების ხარისხი. ამოცანის ამოხსნის შემდეგი გზა დამოკიდებულია იმაზე, თუ რამდენი თავისუფლების ხარისხი აქვს სისტემას.

ა)ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემისათვის:

5. მივანიჭოთ წერტილთა სისტემის ერთ-ერთ წერტილს ან სხეულთა სისტემის ერთ-ერთ სხეულს შესაძლო გადაადგილება და გამოვსახოთ ძალების მოდების წერტილების შესაძლო გადაადგილებები მისი საშუალებით. ვაჩვენოთ ნახაზზე ყველა შესაძლო გადაადგილება;
6. ჩავწეროთ სისტემაზე მოდებული ყველა ძალის მუშაობათა ჯამი შესაბამის შესაძლო გადაადგილებაზე და ეს ჯამი გავუტოლოთ ნულს;

თუ წონასწორობის განტოლებები შედგენილია შესაძლო სიჩქარეების ან შესაძლო სიმძლავრეების სახით, მაშინ უნდა დამყარდეს კავშირი ძალების მოდების წერტილების წირით სიჩქარეებსა და სხეულების კუთხურ სიჩქარეებს შორის და გამოვსახოთ ისინი ერთი რომელიმე სიჩქარით. ამასთან ძალების მოდების წერტილების წირითი სიჩქარეები და სხეულების კუთხური სიჩქარეები უნდა გამოვსახოთ ნახაზზე;

7. ამოვხსნათ წონასწორობის განტოლებები და განვსაზღვროთ საძიებელი სიდიდე;

ბ) რამდენიმე თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის შემთხვევაში:

5. ავირჩიოთ სისტემის წერტილების დამოუკიდებელი შესაძლო გადაადგილებები, რომელთა რაოდენობა შეესაბამება სისტემის თავისუფლების ხარისხს;

6. მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება, რომელიც შეესაბამება სისტემის თავისუფლების ხარისხს, ამასთან ჩავთვალოთ, რომ შესაძლო გადაადგილებები, რომლებიც შეესაბამება სისტემის დანარჩენ თავისუფლების ხარისხს, უდრის ნულს. ძალების მოდების წერტილების შესაძლო გადაადგილებები გამოვსახოთ სისტემის ერთი შესაძლო გადაადგილებით;

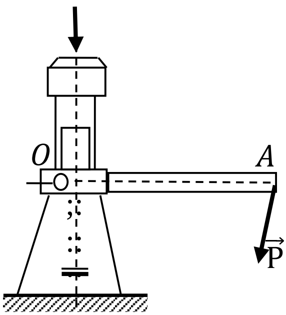
7. ჩავწეროთ მექანიკური სისტემის წონასწორობის განტოლებები შესაძლო მუშაობათა ჯამის სახით და გავუტოლოთ ეს ჯამი ნულს;

8. თანმიმდევრულად შევასრულოთ მე-6 და მე-7 პუნქტებში მითითებული მოქმედებები თითოეული დამოუკიდებლი შესაძლო გადაადგილებისათვის, შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებათა სისტემა დამოუკიდებელი შესაძლო გადაადგილებათა რიცხვის მიხედვით.

9. ამოვხსნათ მიღებული განტოლებათა სისტემა და განვსაზღვროთ საძიებელი სიდიდეები.

ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 46.1



Q ტვირთი აიწევა დომკრატის საშუალებით, რომელიც მოძრაობაში მოდის $OA=$ 0,6 მ სახელურით. სახელურის ბოლოზე მის მართობულად მოდებული $P=$ 160ნ ძალა. Q განსაზღვრეთ ტვირთის სიდიდე, თუ დომკრატის ხრახნის ბიჯი $h=$ 12მმ.

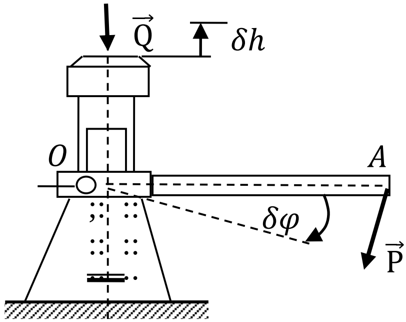
ამოხსნა. გამოვიყენოთ შესაძლო გადაადგილების პრინციპი:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = 0. \qquad (1)$$

სისტემას მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება δh და $\delta\varphi$ (იხ. ნახაზი). მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$-Q\delta h + Pl\delta\varphi = 0. \qquad (2)$$

გამოვსახოთ δh სიდიდე $\delta\varphi$ –ით. დომკრატის სახელურის მობრუნება 2π კუთხით შეესაბამება დომკრატის ხრახნის გადაადგილებას ხრახნის ბიჯით –h, ე.ი.



$$\frac{h}{2\pi} = \frac{\delta h}{\delta\varphi}$$

ან

$$\delta h = \frac{h}{2\pi}\delta\varphi.$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (2) განტოლებაში:

$$-Q\frac{h}{2\pi}\delta\varphi + Pl\delta\varphi = 0$$

ან

$$\left(-Q\frac{h}{2\pi} + Pl\right)\delta\varphi = 0.$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0$, ამიტომ

$$-Q\frac{h}{2\pi} + Pl = 0.$$

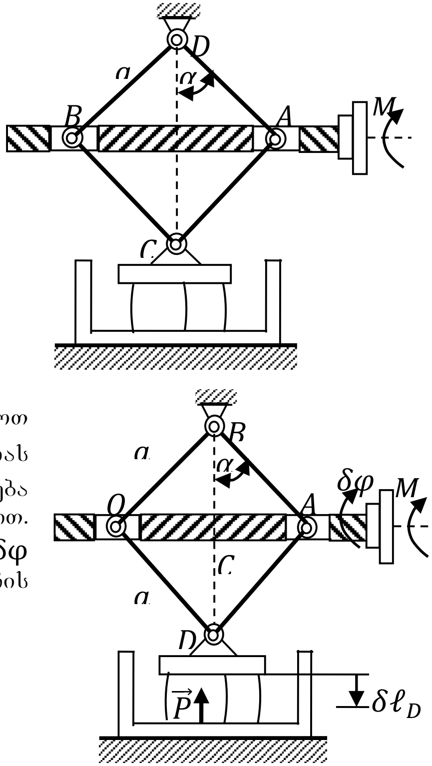
აქედან

$$Q = \frac{Pl \cdot 2\pi}{h} = \frac{160 \cdot 0{,}6 \cdot 2 \cdot 3{,}14}{0{,}012} = 52200(ნ) = 52{,}2(კნ).$$

<u>*პ ა ს უ ხ ი:*</u> *$Q = 52{,}2$კნ.*

ამოცანა 46.2

მუხლა წნეხის მქნევარაზე მოქმედებს M მომენტის წყვილძალა; მქნევარას ღერძს ბოლოებზე აქვს h ბიჯის საწინააღმდეგო მიმართულების ხრახნები და გადის ორ ქანჩზე, რომლებიც სახსროვნად მიმაგრებულია a გვერდის ღეროვანი რომბის ორ წვეროსთან; რომბის ზედა წვერო ჩამაგრებულია უძრავად, ქვედა მიმაგრებულია წნეხის ჰორიზონტალურ ფილაზე. განსაზღვრეთ საგანზე წნეხის წნევის P ძალა იმ მომენტში, როცა რომბის წვეროსთან მდებარე კუთხე უდრის 2α −ს.



ნახ.1

ა მ ო ხ ს ნ ა. მქნევარას მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება $\delta\varphi$. მქნევარას მობრუნებას 2π კუთხით შეესაბამება ქანჩის გადაადგილება ხრახნის ბიჯით. ამიტომ მქნევარას მობრუნებას $\delta\varphi$ კუთხით შეესაბამება ქანჩის გადაადგილება δs −ით (იხ. ნახ. 1), ე.ი.

$$\frac{h}{2\pi} = \frac{\delta s}{\delta\varphi}$$

ან

$$\delta s = \frac{h}{2\pi}\delta\varphi.$$

ACB და AKL სამკუთხედების (ნახ.2) მსგავსებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$tg\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{\delta l_A}{\delta s}.$$

აქედან

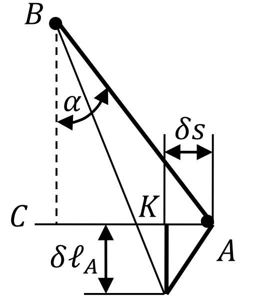
$$\delta l_A = \delta s tg\alpha$$

D წერტილის გადაადგილება

$$\delta l_D = 2\delta l_A = \delta s tg\alpha,$$

საიდანაც

$$\delta l_D = \frac{h\delta\varphi}{\pi} tg\alpha.$$



ნახ.2

შესაძლო გადაადგილების პრინციპის თანახმად:

$$M\delta\varphi - P\delta l_D = 0.$$

ან

$$M\delta\varphi - P\frac{h\delta\varphi}{\pi}tg\alpha = 0.$$

აქედან

$$\delta\varphi\left(M - \frac{Ph}{\pi}tg\alpha\right) = 0.$$

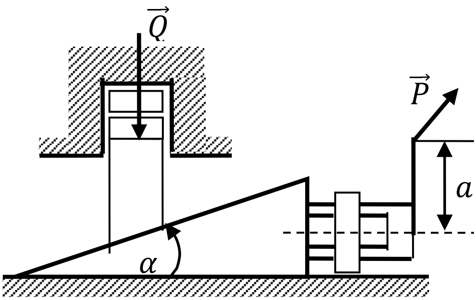
რადგან $\delta\varphi \neq 0$, ამიტომ

$$P = \frac{M\pi}{htg\alpha} = \pi\frac{M}{h}ctg\alpha.$$

პ ა ს უ ხ ი: $P = \frac{M\pi}{htg\alpha} = \pi\frac{M}{h}ctg\alpha.$

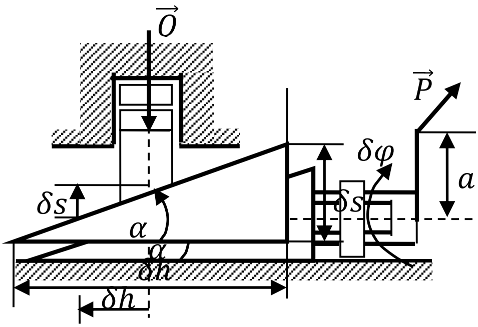
ამოცანა 46.3

იპოვეთ დამოკიდებულება P და Q ძალებს შორის სოლიან წნეხში, თუ ძალა მოდებულია a სიგრძის სახელურის ბოლოზე, სახელურისა და ხრახნის ღერძის მართობულად. ხრახ\ნის ბიჯი არის h. სოლის წვეროსთან მდებარე კუთხე არის α.



ა მ ო ხ ს ნ ა. სისტემას მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილებები δh და δs (ნახ.1). მაშინ:

$$\delta s = \delta htg\alpha.$$



ნახ.1

ნახ.2.

ხრახნის მობრუნებას 2π კუთხით შეესაბამება სოლის გადაადგილება ბიჯით:

$$\frac{h}{2\pi} = \frac{\delta h}{\delta\varphi}$$

ან

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{h}\delta h.$$

შესაძლო გადაადგილების პრინციპის თანახმად:

$$Pa\delta\varphi - Q\delta s = 0$$

ან

$$Pa\frac{2\pi}{h}\delta h - Q\delta h tg\alpha, = 0,$$

$$\delta h\left(Pa\frac{2\pi}{h} - Qtg\alpha\right) = 0.$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0,$ ამიტომ

$$Pa\frac{2\pi}{h} - Qtg\alpha = 0$$

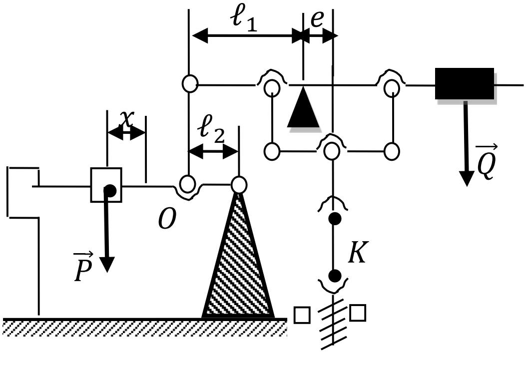
აქედან

$$Q = P\frac{2\pi a}{htg\alpha}.$$

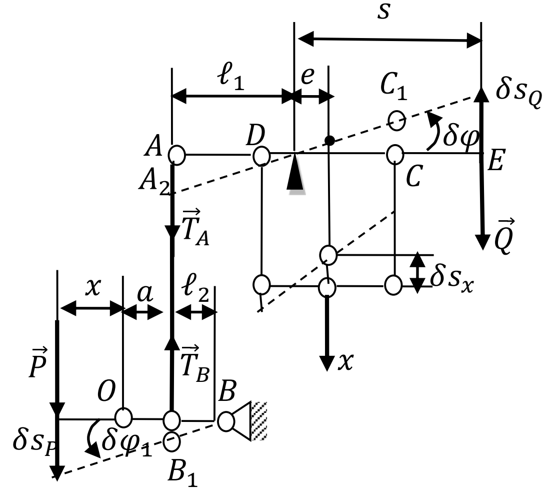
__პ ა ს უ ხ ი:__ $Q = P\frac{2\pi a}{htg\alpha}.$

ამოცანა 46.4

ნახაზი წარმოადგენს გაჭიმვაზე ნიმუშის გამოსაცდელი მანქანის სქემას. განსაზღვრეთ დამოკიდებულება K ნიმუშის X ძალვასა და ნულოვანი O წერტილიდან P ტვირთამდე მანძილს შორის, თუ Q ტვირთის საშუალებით მანქანა გაწონასწორებულია ისე, რომ P ტვირთის ნულოვანი მდებარეობიდან და K ნიმუშის დაუძაბავი მდგომარეობის დროს ყველა ბერკეტი ჰორიზონტალურია. მოცემულია l_1, l_2 და e მანძილები..



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ $\vec{Q}$ ძალის სიდიდე, რომელიც წონასწორებს P ტვირთის წონას, როდესაც ყველა ბერკეტი ჰორიზონტალურია (იხ. ნახაზი).



აღვნიშნოთ: $De = s,\ OB = a.$ მაშინ

$$P(a + l_2) - T_B l_2 = 0,$$
$$T_A l_1 - Qs = 0.$$

მაგრამ

$$T_A = T_B = T,$$

მაშასადამე,

$$T = \frac{P(a + l_2)}{l_2} = \frac{Qs}{l_1}.$$

აქედან

$$Q = \frac{Pl_1(a + l_2)}{sl_2}. \qquad (1)$$

(1) მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილებები და ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილების პრინციპი:

$$P\delta s_P - X\delta s_x - Q\delta s_Q = 0. \qquad (2)$$

ყველა გადაადგილება გამოვსახოთ $\delta\varphi$ კუთხური გადაადგილებით:

$$\delta s_x = CC_1 = e\delta\varphi,$$
$$\delta s_Q = s\delta\varphi,$$
$$BB_1 = AA_1 = l_1\delta\varphi = l_2\delta\varphi_1$$

ან

$$\delta\varphi_1 = \frac{l_1}{l_2}\delta\varphi.$$

მაშინ

$$\delta s_P = (x + a + l_2)\delta\varphi_1 = (x + a + l_2)\frac{l_1}{l_2}\delta\varphi.$$

ჩავსვათ $\delta s_x, \delta s_P,\ \delta s_Q$ მნიშვნელობები *(2) განტოლებაში:*

$$(x + a + l_2)\frac{l_1}{l_2}\delta\varphi - Xe\delta\varphi - Qs\delta\varphi = 0$$

ან

$$\delta\varphi\left[(x + a + l_2)\frac{l_1}{l_2} - Xe - Qs\right] = 0.$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0,$ ამიტომ

$$(x + a + l_2)\frac{l_1}{l_2} - Xe - Qs = 0.$$

ჩავსვათ (1) გამოსახულებ მიღებულ განტოლებაში:

$$(x+a+l_2)\frac{l_1}{l_2} - Xe - \frac{Pl_1(a+l_2)}{l_2} = 0.$$

აქედან

$$Pxl_1 - Xel_2 = 0,$$

სადაც $P = Mg$.

მაშინ

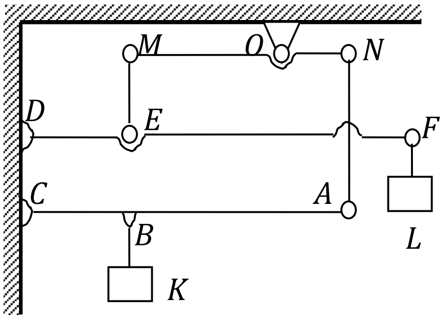
$$X = \frac{Pxl_1}{el_2} = Mg\frac{xl_1}{el_2}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $X = Mg\frac{xl_1}{el_2}$.

ამოცანა 46.5

K და L ტვირთები, შეერთებული ბერკეტების სისტემით, რომელიც ნახაზზეა ნაჩვენები, წონასწორობაშია. განსაზღვრეთ დამოკიდებულება ტვირთების წონებს შორის, თუ მოცემულია:

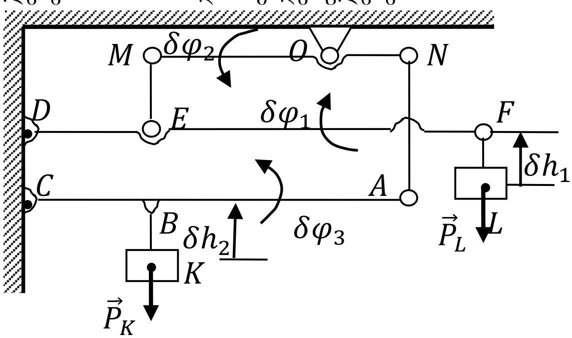
$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{10}, \quad \frac{ON}{OM} = \frac{1}{3}, \quad \frac{DE}{DF} = \frac{1}{10}$$



ა მ ო ხ ს ნ ა. სისტემას მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილებები (იხ. ნახაზი). და ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილების პრინციპი:

$$P_L\delta h_1 - P_K\delta h_2 = 0.$$

ვიპოვოთ გადაადდგილებებს შორის დამოკიდებულებები:



$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta h_1}{DF},$$

$$\delta s_E = \delta\varphi_1 \cdot DE,$$

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_E}{OM},$$

$$\delta s_N = ON \cdot \delta\varphi_2,$$

$$\delta s_A = ON \cdot \delta\varphi_2 = AC \cdot \delta\varphi_3,$$

$$\delta\varphi_3 = \frac{ON}{AC} \cdot \delta\varphi_2,$$

$$\delta h_2 = BC \cdot \delta\varphi_3 = \frac{BC \cdot ON}{AC} \cdot \delta\varphi_2 = \frac{BC \cdot ON \cdot DE \cdot \delta h_1}{AC \cdot OM \cdot DF} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10}\delta h_1 = \frac{\delta h_1}{300}.$$

მიღებული გამოსახულება ჩავსვათ (1) ფორმულაში

$$P_L \delta h_1 - P_K \frac{\delta h_1}{300} = 0$$

ან

$$\delta h_1 \left(P_L - \frac{P_K}{300} \right) = 0.$$

რადგან $\delta h_1 \neq 0$, *ამიტომ*

$$P_L - \frac{P_K}{300} = 0.$$

აქედან

$$P_L = \frac{P_K}{300}$$

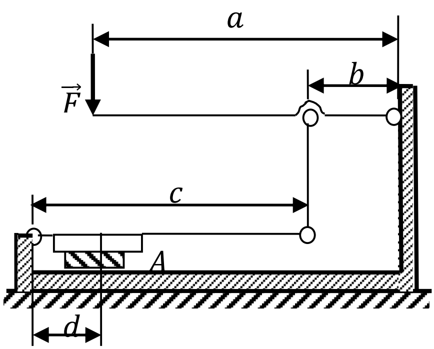
ან, რაც იგივეა

$$m_L = \frac{m_K}{300}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $m_L = \frac{BC \cdot ON \cdot DE}{AC \cdot OM \cdot DF} m_K = \frac{m_K}{300}.$

ამოცანა 46.6

განვსაზღვროთ იმ $\vec{Q}$ ძალის სიდიდე, რომელიც კუმშავს A ნიმუშს ბერკეტიან წნეხში, რომელიც გამოსახულია ნახაზზე. მოცემული*ა:* $F = 100\,ნ$; $a = 60\,სმ$; $b = 10\,სმ$; $c = 60\,სმ$; $d = 20\,სმ$.

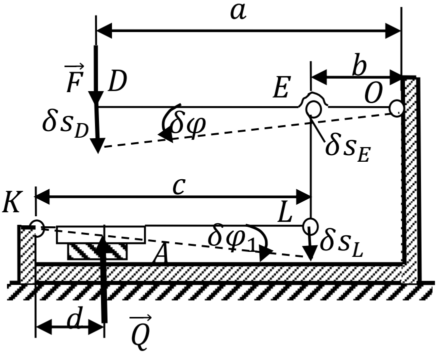


ა მ ო ხ ს ნ ა. ბერკეტიანი წნეხის მექანიზმი იდეალური ბმებით იმყოფება წონასწორობაში $\vec{F}$ და $\vec{Q}$ აქტიური ძალების მოქმედებით (იხ. ნახაზი). ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ შესაძლო გადაადგილების პრინციპი:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = 0.$$

მივანიჭოთ სისტემას $\delta\varphi_1$ კუთხური შესაძლო გადაადგილება. მაშინ ბოლო განტოლება მიიღებს სახეს:

$$Fa \cdot \delta\varphi - Qd\delta\varphi_1 = 0. \qquad (1)$$



გამოვსახოთ $\delta\varphi_1$ კუთხური შესაძლო გადაადგილება $\delta\varphi$ –ით. EL ასრულებს მყის გადატანით მოძრაობას და $\delta s_E = \delta s_L$, მაგრამ $\delta s_E = b \cdot \delta\varphi$, $\delta s_L = c \cdot \delta\varphi_1$. მაშინ

$$\delta\varphi_{1.} = \frac{b}{c}\,\delta\varphi,$$

ხოლო (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$Fa \cdot \delta\varphi - Qd\frac{b}{c}\,\delta\varphi = 0,$$

$$\delta\varphi\left(Fa - Qd\frac{b}{c}\right) = 0.$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0$, ამიტომ

$$Fa - Qd\frac{b}{c} = 0,$$

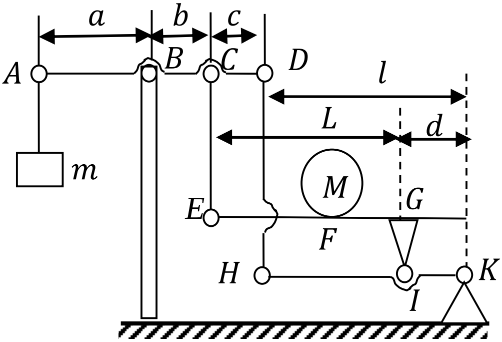
აქედან

$$Q = F\frac{ac}{bd} = 100 \cdot \frac{60 \cdot 60}{10 \cdot 20} = 1800(\text{ნ})$$

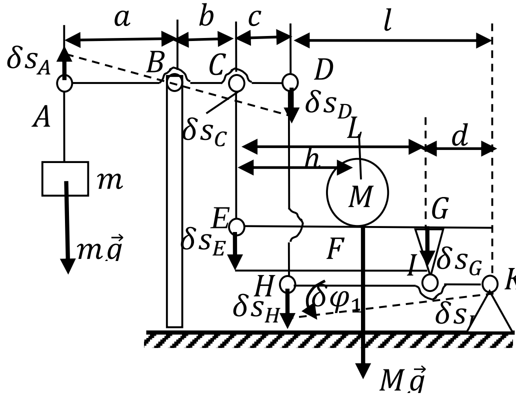
<u>*პ ა ს უ ხ ი:*</u> $Q = 1800$*ნ.*

ამოცანა 46.7

ბაქნის F წერტილში მოთავსებულია M მასის ტვირთი. სიგრძე $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $IK = d$; ბაქნის სიგრძე $EG = L$. განსაზღვრეთ თანაფრდობა b, c, d და l სიდიდეებს შორის იმ შემთხვევაში, როცა M მასის ტვირთის გამაწონასწორ ებელი m მასის საწონი არ არის დამოკიდებული ბაქანზე მისი მდებარეობისაგან და იპოვეთ საწონის m მასა ამ შემთხვევაში.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ბაქნის წონასწორობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე აქტიური ძალები. მექანიზმი, რომელიც ემორჩილება იდეალურ ბმებს, იმყოფება წონასწორობაში ტვირთის $M\vec{g}$ და საწონის $m\vec{g}$ სიმძიმის ძალების მოქმედებით.



გამოვიყენოთ შესაძლო გადაადგილების პრინციპი:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = 0.$$

მივანიჭოთ AD რიჩაგს $\delta\varphi$ კუთხური შესაძლო გადაადგილება B წერტილის გარშემო საათის ბრუნვის მიმართულებით. ბაქანზე ტვირთის მდებარეობა გავლენას ვერ მოახდენს წონასწორობაზე, თუ ბაქანი შესარულებს გადატანით მოძრაობას, ე.ი. $\delta s_E = \delta s_G$.

გამოვსახოთ მექანიზმის ნაწილების შესაძლო გადაადგილებები $\delta\varphi$ –ით:

$$\delta s_D = (b + c)\delta\varphi, \;\; \delta s_C = b\delta\varphi, \qquad \delta s_C = \delta s_E;$$

$$\delta s_H = l\delta\varphi_1, \qquad \delta s_H = \delta s_D;$$

$$\delta s_I = d\delta\varphi_1; \;\; \delta s_I = \delta s_G = \frac{d}{l}\delta s_H = \frac{(b + c)d}{l}\delta\varphi.$$

ვიპოვოთ საძიებელი თანაფარდობა:

$$\delta s_G = \delta s_E$$

ან

$$b\delta\varphi = \frac{(b+c)d}{l}\delta\varphi.$$

მაშინ

$$\frac{l}{d} = \frac{b+c}{b}.$$

(1) ფორმულის თანახმად შევადგინოთ განტოლება:

$$-mg \cdot \delta s_C + Mg \cdot \delta s_E = 0$$

ან

$$-mga \cdot \delta\varphi + Mgb \cdot \delta\varphi = 0,$$

$$(Mb - ma) \cdot \delta\varphi = 0$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0,$ ამიტომ

$$Mb - ma = 0.$$

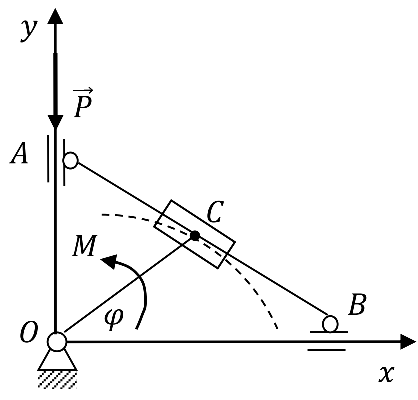
აქედან

$$m = \frac{b}{a}M.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{l}{d} = \frac{b+c}{b};\ m = \frac{b}{a}M.$

ამოცანა 46.8

ელიფსოგრაფის მექანიზმის A ცოციაზე მოდებულია P ძალა, რომელიც მიმართულია ცოციას მიმმართველის გასწვრივ OC მრუდმხარას ბრუნვის O ღერძისაკენ. როგორი მბრუნავი მომენტი უნდა მოვდოთ OC მრუდმხარაზე იმისათვის, რომ მექანიზმი იყოს წონასწორობაში, მაშინ, როდესაც OC მრუდმხარა B ცოციას მიმმართველთან



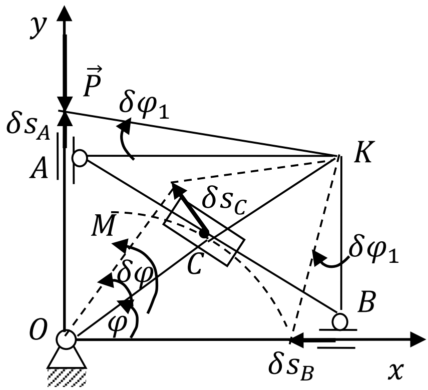
ადგენს φ კუთხეს? მექანიზმი მდებარეობს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, ამასთან $OC = AC = CB = l$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ელიფსოგრაფის წონასწორობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე აქტიური ძალები.

მექანიზმი, რომელიც ემორჩილება იდეალურ ბმებს, იმყოფება წონასწორობაში $\vec{P}$ ძალის და M მბრუნავი მომენტის მოქმედებით.

გამოვიყენოთ შესაძლო გადაადგილების პრინციპი:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = 0. \qquad (1)$$



მივანიჭოთ ელიფსოგრაფის $\delta\varphi$ კუთხური შესაძლო გადაადგილება O სახსრის გარშემო საათის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით. მაშინ C სახსარი მიიღებს შესაძლო გადაადგილებებს δs_E და δs_A. მექანიზმს აქვს ერთი თავისუფლების ხარისხი.

გამოვსახოთ მექანიზმის ნაწილების შესაძლო გადაადგილებები $\delta\varphi$ –ით:

$$\delta s_C = OC \cdot \delta\varphi = l \cdot \delta\varphi.$$

განვსაზღვროთ AB სახაზავის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი, რომელიც მდებარეობს K წერტილში:

$$\frac{\delta s_A}{AK} = \frac{\delta s_C}{CK} = \frac{\delta s_B}{BK} = \delta\varphi_1.$$

მაშინ $\delta s_A = 2lcos\varphi \cdot \delta\varphi_1 = 2lcos\varphi \cdot \delta\varphi$, რადგან

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta s_A}{l} = \frac{l \cdot \delta\varphi}{l} = \delta\varphi.$$

ჩავწერროთ (1) განტოლება სახით:

$$M \cdot \delta\varphi - P \cdot \delta s_A = 0$$

ან

$$M \cdot \delta\varphi - 2Plcos\varphi \cdot \delta s_A = 0,$$

$$(M - 2Plcos\varphi) \cdot \delta\varphi = 0\,.$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0$, ამიტომ

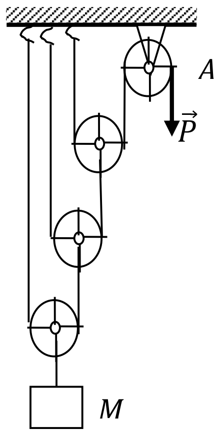
$$M - 2Plcos\varphi = 0$$

აქედან ვიპოვით მაბრუნებელ მომენტს

$$M = 2Plcos\varphi.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $M = 2Plcos\varphi.$

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 46.9



პოლიპასტი შედგება A უძრავი და n მოძრავი ბლოკისაგან. განსაზღვრეთ წონასწორობის შემთხვევაში ასაწევი Q ტვირთის ფარდობა იმ P ძალასთან, რომელიც მოდებულია უძრავი A ბლოკიდან გამოსული თოკის ბოლოზე.

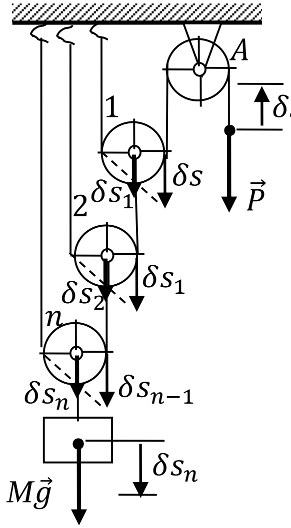
ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ პოლიპასტის წონასწორობა, რომელიც შედგება A უძრავი და n მოძრავი ბლოკებისაგან ვაჩვენოთ ნახაზზე აქტიური ძალები.

მექანიზმი, რომელიც ემორჩილება იდეალურ ბმებს, იმყოფება წონასწორობაში $\vec{P}$ ძალის და $M\vec{g}$ სიმძიმის ძალის მოქმედებით.

გამოვიყენოთ შესაძლო გადაადგილების პრინციპი:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = 0. \qquad (1)$$

მივანიჭოთ $\vec{P}$ ძალის მოდების წერტილს შესაძლო გადაადგილება ვერტიკალურად ზევით. მაშინ პირველი მოძრავი ბლოკის ცენტრი დაეშვება მანძილით, რომელიც $\vec{P}$ ძალის მოდების წერტილის გადაადგილების ნახევრის ტოლია:



$$\delta s_I = \frac{1}{2}\delta s.$$

ყოველი შემდეგი მოძრავი ბლოკის ცენტრი დაეშვება მანძილით, რომელიც წინა ბლოკის შესაძლო გადაადგილების ტოლია:, ე.ი.

$$\delta s_k = \frac{1}{2}\delta s_{k-1}.$$

მაშინ

$$\delta s_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta s.$$

ჩავწერროთ (1) განტოლება სახით:

$$-P \cdot \delta s + Mg \cdot \delta s_n = 0,$$

$$-P \cdot \delta s + Mg \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \delta s = 0.$$

$$\left[Mg \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - P\right] \cdot \delta s = 0.$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0$, ამიტომ

$$Mg \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - P = 0$$

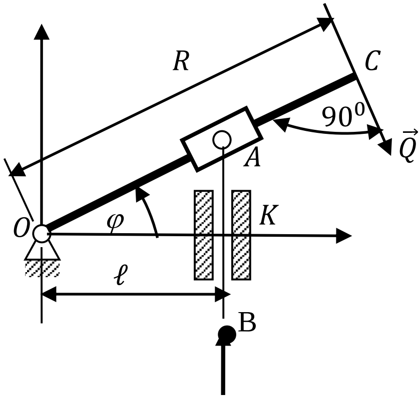
მაშასადამე,

$$\frac{Mg}{P} = 2^n.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{Mg}{P} = 2^n.$

ამოცანა 46.10

კულისურ მექანიზმში OC ბერკეტის ჰორიზონტალური O ღერძის გარშემო ქანაობისას A ცოცია გადაადგილდება OC მრუდმხარას გასწვრივ და მოძრაობაში მოჰყავს AB ღერო, რომელიც მოძრაობს ვერტიკალურ K მიმმართველებში. მოცემულია ზომები: $OC = R;\ OK = \ell$. როგორი Q ძალა უნდა მოვდოთ OC მრუდმხარას C წერტილზე მის მართობულად, რომ მან გააწონასწოროს AB ღეროს გასწვრივ ზევით მიმართული P ძალა?



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ კულისური მექანიზმის წონასწორობა, რომელიც შედგება OC ბერკეტის, A ცოციას და AB ღეროსაგან. ვაჩვენოთ ნახაზზე აქტიური ძალები.

მექანიზმი, რომელიც ემორჩილება იდეალურ ბმებს, იმყოფება წონასწორობაში $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ძალების მოქმედებით.

გამოვიყენოთ შესაძლო სიჩქარეების პრინციპი:

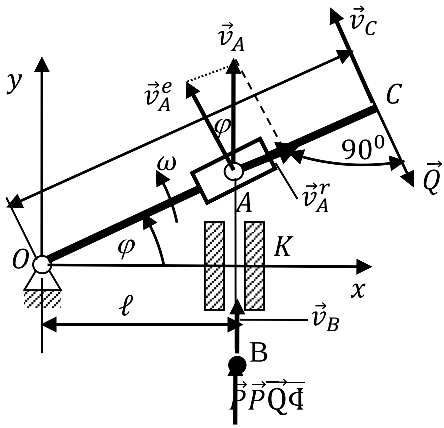
$$\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot v_k cos\left(\widehat{\vec{F}_k, \vec{v}_k}\right) = 0. \quad (1)$$

ვიპოვოთ ძალების მოდების წერტილის სიჩქარეები და გამოვსახოთ ისინი OC ბერკეტის ბრუნვის კუთხური სიჩქარით:

$$v_C = \omega \cdot OC = \omega R.$$

A ცოციას აბსოლუტური სიჩქარე, რომელიც ასრულებს რთულ მოძრაობას, უდრის

$$\overrightarrow{v_A} = \vec{v}_A^e + \vec{v}_A^r.$$



ავაგოთ სიჩქარეთა პარალელოგრამი, რომლიდანაც (იხ. ნახაზი) ვიპოვოთ ცოციას სიჩქარე გადატანით ბრუნვაში:

$$v_A^e = \omega \cdot OA = \frac{\ell\omega}{cos\varphi}$$

და ცოციას აბსოლუტური სიჩქარე

$$v_A = \frac{v_A^e}{cos\varphi} = \frac{\ell\omega}{cos^2\varphi}.$$

AB ღერო ასრულებს გადატანით მოძრაობას:

$$v_B = v_A = \frac{\ell\omega}{cos^2\varphi}.$$

ჩავწეროთ (1) განტოლება შემდეგი სახით:

$$Pv_B - Qv_C = 0.$$

ჩავსვათ მიღებულ ფორმულაში v_C და v_B სიჩქარეების გამოსახულებები:

$$P\frac{\ell\omega}{cos^2\varphi} - Q\omega R = 0.$$

აქედან

$$Q = \frac{P\ell}{Rcos^2\varphi}.$$

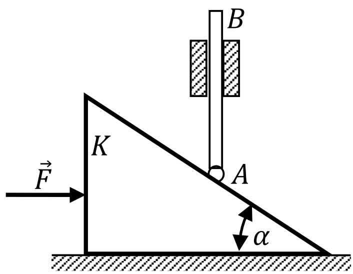
შენიშვნა. v_A სიჩქარის კინემატიკური გზით განსაზღვრის ნაცვლად შეიძლებოდა დაგვეწერა A წერტილის მოძრაობის განტოლება ვერტიკალის გასწვრივ და შემდეგ მოგვეხდინა მიღებული გამოსახულების ვარირება:

$$y_A = \ell\, tg\varphi \Longrightarrow \delta s_A = \delta y_A = \frac{\ell\delta\varphi}{cos^2\varphi} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow v_A = \frac{\delta s_A}{dt} = \frac{\ell\omega}{cos^2\varphi}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $Q = \frac{P\ell}{Rcos^2\varphi}.$

ამოცანა 46.11

M_1 მასის K მუშტა იმყოფება წონასწორობაში გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე და აკავებს ვერტიკალურ მიმმართველებში მდებარე M_2 მასის AB ღეროს. სისტემა წონასწორობაშია K მუშტაზე მოდებული $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით, რომელიც მიმართულია ჰორიზონტალურად მარჯვნივ. განსაზღვრეთ $\vec{F}$ ძალის სიდიდე, თუ



მუშტას გვერდითი ზედაპირი ჰორიზონტთან ადგენს α კუთხეს. იპოვეთ, აგრეთვე, $\vec{F}$ ძალის სიდიდის ცვლილების არე არაგლუვი ჰორიზონტალური სიბრტყის შემთხვევაში, თუ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი K მუშტასა და ჰორიზონტალურ სიბრტყეს შორის არის f.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ სისტემის წონასწორობა, რომელიც შედგება K მუშტასა და AB ღეროსაგან, როდესაც მუშტა იმყოფება წონასწორობაში გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე.

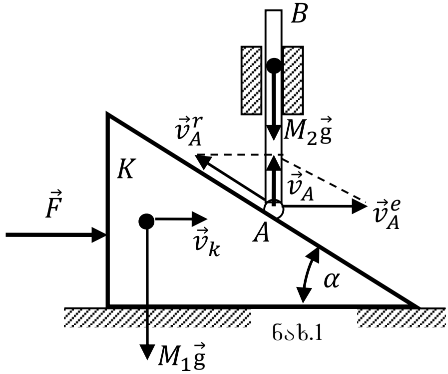
ვაჩვენოთ საანგარიშო სქემაზე აქტიური ძალები (ნახ.1).

სისტემა, რომელიც ემორჩილება იდეალურ ბმებს, იმყოფება წონასწორობაში $M_1\vec{g}$, $M_2\vec{g}$ და $\vec{F}$ ძალების მოქმედებით.

გამოვიყენოთ შესაძლო სიჩქარეების პრინციპი:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot v_k cos\left(\widehat{\vec{F}_k, \vec{v}_k}\right) = 0. (1)$$

ვიპოვოთ AB ღეროს სიჩქარე, გამოვსახოთ რა ის K მუშტას სიჩქარით. AB ღეროს ბოლო A წერტილის სიჩქარე დავშალოთ მდგენელებად:



ნახ.1

$$\vec{v}_A = \vec{v}_A^e + \vec{v}_A^r.$$

AB ღეროს ბოლო A წერტილის სიჩქარე გადატანით მოძრაობაში უდრის K მუშტას სიჩქარეს, ე.ი.

$$v_A^e = v_K.$$

ავაგოთ სიჩქარეთა პარალელოგრამი (იხ. ნახ. 1) და ვიპოვოთ AB ღეროს ბოლო A წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე:

$$v_A = v_A^e tg\alpha = v_K tg\alpha.$$

AB ღერო ასრულებს გადატანით მოძრაობას ზევით, მაშასადამე, მისი ყველა წერტილის სიჩქარე ერთი და იგივეა.

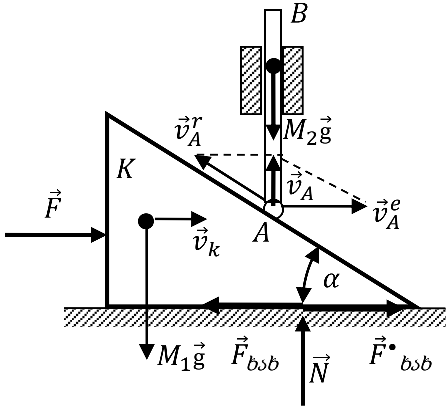
ჩავწეროთ (1) განტოლება შემდეგი სახით:

$$Fv_K - M_2 g v_A = 0$$

ან

$$Fv_K - M_2 g v_K tg\alpha = 0,$$

საიდანაც ვიპოვით საძიებელ ძალას:



ნახ.2

$$F = M_2 g tg\alpha.$$

განვიხილოთ იგივე სისტემის წონასწორობა მუშტასა და სიბრტყეს შორის ხახუნის ძალის გათვალისწინებით (ნახ.2)

განვსაზღვროთ ხახუნის ძალის სიდიდე:

$$F_{ხახ} = fN = (M_1 + M_2)gf.$$

ხახუნის ძალის მიმართულებას განვსაზღვრავთ, თუ ჩავთვლით, რომ იგი მიმართულია შესაძლო მოძრაობის საწინააღმდეგოდ.

ჩავწეროთ (1) განტოლება შემდეგი სახით:

$$Fv_K \pm F_{ხახ}v_K - M_2 g v_A = 0$$

ან

$$Fv_K \pm (M_1 + M_2)gfv_K tg\alpha - M_2 g v_K tg\alpha = 0.$$

ვიპოვოთ $\vec{F}$ ძალის სიდიდის ცვლილების არე:

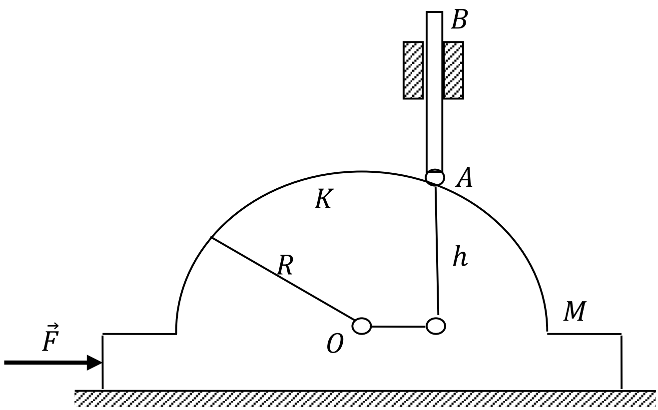
$$M_2 g tg\alpha + f(M_1 + M_2)g \geq F \geq M_2 g tg\alpha - f(M_1 + M_2)g.$$

პ ა ს უ ხ ი: $F = M_2 g tg\alpha;$

$$M_2 g tg\alpha + f(M_1 + M_2)g \geq F \geq M_2 g tg\alpha - f(M_1 + M_2)g.$$

ამოცანა 46.12

M_1 მასის და R რადიუსის წრიული K მუშტა დგას არაგლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. იგი A ბოლოთი ეხება ვერტიკალურ მიმმართველებში მდებარე M_2 მასის AB ღეროს სისტემა წონასწორობაშია K მუშტაზე მოდებული $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით, რომელიც მიმართულია ჰორიზონტალურად მარჯვნივ. ამასთან $AM = h$.



განსაზღვრეთ $\vec{F}$ ძალის სიდიდის ცვლილების არე, თუ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი K მუშტასა და ჰორიზონტალურ სიბრტყეს შორის არის f.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ სისტემის წონასწორობა, რომელიც შედგება K მუშტასა და AB ღეროსაგან, როდესაც მუშტა იმყოფება წონასწორობაში არაგლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე.

ვაჩვენოთ საანგარიშო სქემაზე აქტიური ძალები და ხახუნის ძალა.

გამოვიყენოთ შესაძლო სიჩქარეების პრინციპი:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot v_k cos\left(\widehat{\vec{F}_k, \vec{v}_k}\right) = 0. \qquad (1)$$

მივანიჭოთ K მუშტას $\vec{v}_K$ სიჩქარე $\vec{F}$ ძალის მოქმედების მიმართულებით. ვიპოვოთ AB ღეროს სიჩქარე, გამოვსახოთ რა ის K მუშტას სიჩქარით.

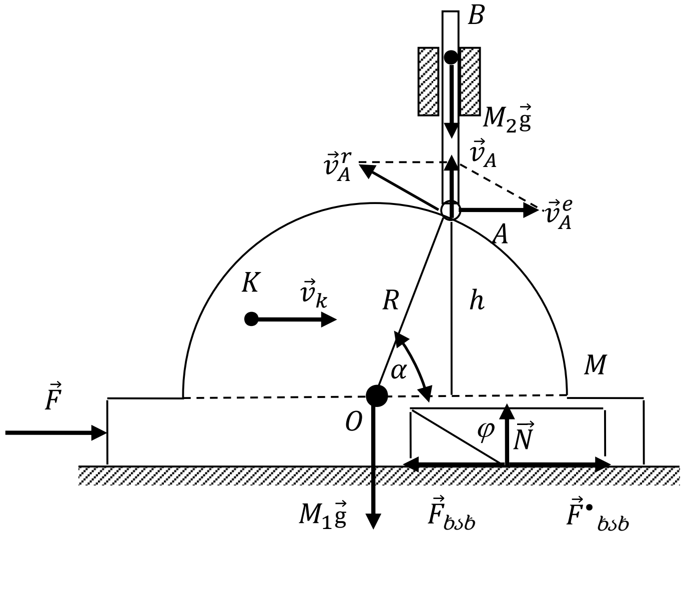
AB ღეროს ბოლო A წერტილის სიჩქარე დავშალოთ მდგენელებად:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_A^e + \vec{v}_A^r.$$

AB ღეროს ბოლო A წერტილის სიჩქარე გადატანით მოძრაობაში უდრის K მუშტას სიჩქარეს, ე.ი.

$$v_A^e = v_K.$$

ავაგოთ სიჩქარეთა პარალელოგრამი (იხ. ნახაზი) და ვიპოვოთ AB



ღეროს ბოლო A წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე:

$$v_A = v_A^e tg\alpha = v_K \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h}.$$

AB ღერო ასრულებს გადატანით მოძრაობას ზევით, მაშასადამე, მისი ყველა წერტილის სიჩქარე ერთი და იგივეა.

განვსაზღვროთ ხახუნის ძალის სიდიდე:

$$F_{ხახ} = fN = (M_1 + M_2)gf.$$

ხახუნის ძალის მიმართულებას განვსაზღვრავთ, თუ ჩავთვლით, რომ იგი მიმართულია შესაძლო მოძრაობის საწინააღმდეგოდ.
ჩავწეროთ (1) განტოლება შემდეგი სახით:

$$Fv_K \pm F_{ხახ}v_K - M_2gv_A = 0$$

ან

$$Fv_K \pm (M_1 + M_2)gfv_K - M_2gv_K\frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} = 0.$$

ვიპოვოთ $\vec{F}$ ძალის სიდიდის ცვლილების არე:

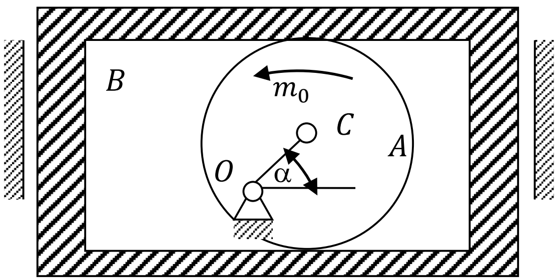
$$\frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h}M_2g - f(M_1 + M_2)g \le F \le \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h}M_2g + f(M_1 + M_2)g.$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$\frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h}M_2g - f(M_1 + M_2)g \le F \le \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h}M_2g + f(M_1 + M_2)g.$$

ამოცანა 46.13

M_1 მასის წრიული A ექსცენტრიკი ჩამოცმულია ჰორიზონტალურ O ღერძზე, რომელიც ნახაზის სიბრტყის მართობულია. . ექსცენტრიკი აკავებს M_2 მასის ჩარჩოს, რომელსაც გააჩნია ვერტიკალური მიმმართველები. ხახუნი უგულებელყოფილია. ექსცენტრისიტეტი $OC = a.$ იპოვეთ ექსცენტრიკზე მოდებული m_0 მომენტის სიდიდე, თუ სისტემის წონასწორობისას OC ჰორიზონტთან ადგენს α კუთხეს.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ სისტემის წონასწორობა, რომელიც შედგება A ექსცენტრიკისა და B ჩარჩოსაგან.

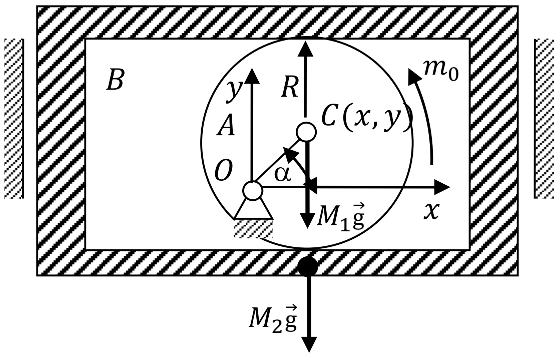
ვაჩვენოთ საანგარიშო სქემაზე აქტიური ძალები

. სისტემა, რომელიც ემორჩილება იდეალურ ბმებს, იმყოფება წონასწორობაში $M_1\vec{g}$, $M_2\vec{g}$ სიმძიმის ძალების და m_0 მომენტის მოქმედებით.

გამოვიყენოთ შესაძლო სგადაადგილების პრინციპი: დეკარტის საკოორდინატო ღერძებზე გეგმილებში

$$\sum_{k=1}^{n}\left(F_{kx}\delta X_k + F_{ky}\delta Y_k + F_{kz}\delta Z_k\right) = 0. \tag{1}$$

მივანიჭოთ A ექსცენტრიკს $\delta\alpha$ შესაძლო კუთხური გადაადგილება კუთხის ზრდის მიმართულებით. ჩავთვალოთ, რომ ექსცენტრიკის რადიუსია R.



A ექსცენტრიკის და B ჩარჩოს მასათა ცენტრის შესაძლო ვერტიკალური გადაადგილების განსასაზღვრავად ვიპოვოთ ვიპოვოთ მათი კოორდინატები, როგორც α კუთხის ფუნქცია:

$$Y_C = asin\alpha,$$

$$Y_B = asin\alpha + R.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ წერტილის შესაძლო გადაადგილება არის შესაბამისი კოორდინატის ვარიაცია, გვექნება:

$$\delta Y_C = acosa \cdot \delta\alpha,$$

$$\delta Y_B = acosa \cdot \delta\alpha.$$

ჩავწეროთ (1) განტოლება შემდეგი სახით:

$$m_0\delta\alpha - M_1gacosa \cdot \delta\alpha - M_2gacos \cdot \delta\alpha = 0$$

ან

$$[m_0 - (M_1 + M_2)gacos\alpha] \cdot \delta\alpha = 0.$$

რადგან $\delta\alpha \neq 0$, ამიტომ

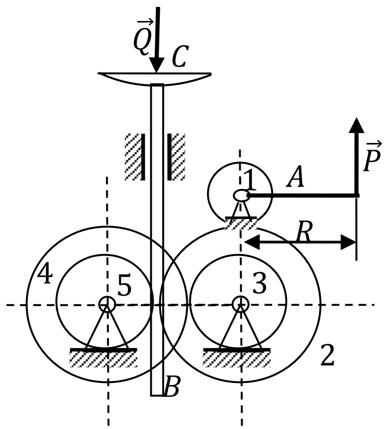
$$m_0 - (M_1 + M_2)gacos\alpha = 0.$$

აქედან

$$m_0 = (M_1 + M_2)gacos\alpha.$$

<u>*პ ა ს უ ხ ი:*</u> $m_0 = (M_1 + M_2)gacos\alpha.$

ამოცანა 46.14



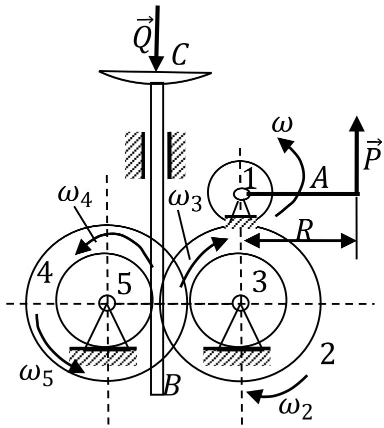
დომკრატის მექანიზმში R სიგრძის A სახელურის ბრუნვისას მოძრაობაში მოდის 1,2,3,4 და 5 კბილა თვლები, რომლებსაც მოძრაობაში მოჰყავს დომკრატის კბილანა B ლარტყა. როგორი ძალა უნდა მოვდოთ სახელურის ბოლოზე მის მართობულად, რომ დომკრატის წონასწორობისას C თეფშმა განახორციელოს 4,8კნ წნევა/ კბილა თვლების რადიუსები სათანადოდ ტოლია: $r_1 = 3$ *სმ,* $r_2 = 12$ *სმ,* $r_3 = 4$ *სმ,* $r_4 = 16$*სმ,* $r_1 = 3$ *სმ,* სახელურის რადიუსი $-R = 18$ *სმ.*

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დომკრატის წონასწორობა. ვაჩვენოთ საანგარიშო სქემაზე აქტიური ძალები. სისტემა, რომელიც ემორჩილება იდეალურ ბმებს, იმყოფება წონასწორობაში $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ძალების მოქმედებით.

გამოვიყენოთ შესაძლო სიჩქარეების პრინციპი:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot v_k cos\left(\widehat{\vec{F}_k, \vec{v}_k}\right) = 0. \qquad (1)$$

მივანიჭოთ A სახელურს ω კუთხური სიჩქარე საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ვიპოვოთ B ლარტყას v_B სიჩქარე, გამოვსახოთ რა ის A სახელურის ω კუთხური სიჩქარით:



$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega, \;\; \omega_3 = \omega_2;$$

$$\omega_4 = \frac{r_3}{r_4}\omega = \frac{r_1}{r_2}\frac{r_3}{r_4}\omega, \;\; \omega_5 = \omega_4;$$

$$v_B = \omega_5 r_5 = \frac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4}\omega.$$

ჩავწეროთ (1) განტოლება შემდეგი სახით:

$$PR\omega - Qv_B = 0$$

ან

$$PR\omega - Q\frac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4}\omega = 0.$$

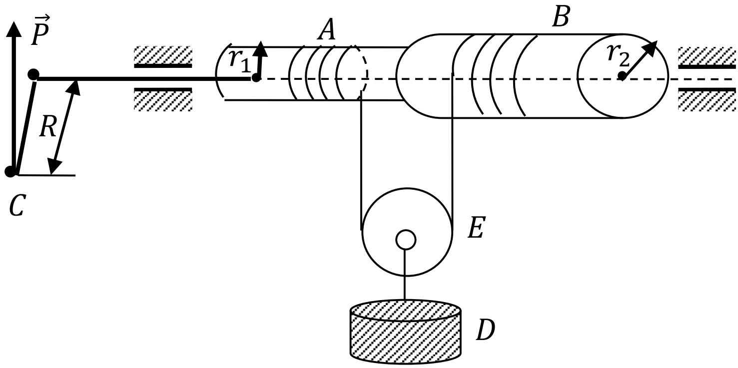
ამ ტოლობიდან ვიპოვით:

$$P = Q\frac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R} = 4800 \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 3}{12 \cdot 16 \cdot 18} = 50(ნ).$$

პ ა ს უ ხ ი: $P = Q\frac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R} = 50ნ.$

ამოცანა 46.15

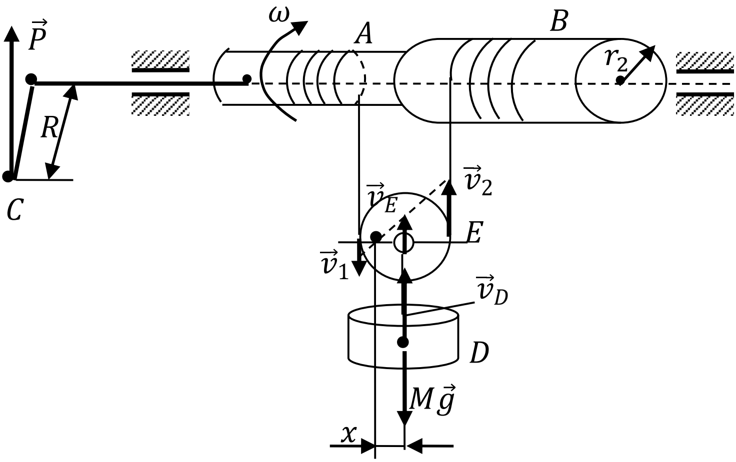
დიფერენციალური ჯალამბარი შედგება ორი ერთმანეთზე ხისტად მიმაგრებული A და B ლილვისაგან, რომლებიც მოძრაობაში მოდის R *სიგრძის* C სახელურის საშუალებით. ასაწევი M მასის D ტვირთი მიმაგრებულია მოძრავ E ბლოკზე, რომელზეც შემოვლებულია ბაგირი. C სახელურის ბრუნვისას ბაგირის მარცხენა შტო გადმოეხვევა r_1 რადიუსის A ლილვიდან r_2 რადიუსის B ლილვზე $(r_2 > r_1)$. როგორი P ძალა უნდა მოვდოთ სახელურის ბოლოზე მის მართობულად, რომ გაწონასწორდეს $M = 720_{კგ}$ მასის D ტვირთი? $r_1 = 10\,სმ,\; r_2 = 12\,სმ,$ $R = 60\,სმ.$



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ დიფერენციალური ჯალამბარი. ვაჩვენოთ ნახაზზე აქტიური ძალები. სისტემა, რომელიც ემორჩილება იდეალურ ბმებს, იმყოფება წონასწორობაში $M\vec{g}$ და $\vec{P}$ ძალების მოქმედებით.

გამოვიყენოთ შესაძლო სიჩქარეების პრინციპი:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot v_k cos\left(\widehat{\vec{F}_k, \vec{v}_k}\right) = 0. \qquad (1)$$



მივანიჭოთ C სახელურს და მასზე ხისტად მიმაგრებულ A და B ლილვებს ω კუთხური სიჩქარე. ვიპოვოთ მოძრავი E ბლოკის ცენტრის v_E სიჩქარე, რომელიც ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას:

$$\frac{v_1}{r-x} = \frac{v_E}{x} = \frac{v_2}{r+x},$$

$$v_E = \frac{v_2 - v_1}{2} = \frac{r_2 - r_1}{2}\omega.$$

D ტვირთის სიჩქარე

$$v_D = v_E = \frac{r_2 - r_1}{2}\omega.$$

ჩავწეროთ (1) განტოლება შემდეგი სახით:

$$PR\omega - Mgv_D = 0$$

ან

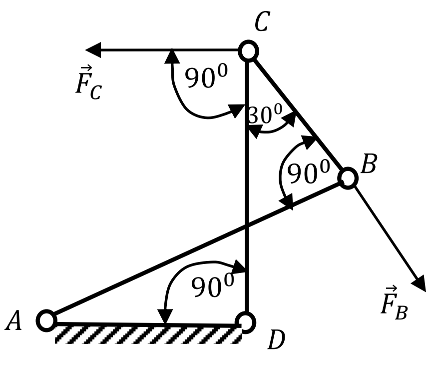
$$PR\omega - Mg\frac{r_2 - r_1}{2}\omega = 0.$$

აქედან

$$P = Mg\frac{r_2 - r_1}{2R} = 720 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{12 - 10}{2 \cdot 60} = 118(ნ).$$

პ ა ს უ ხ ი: $P = Mg\frac{r_2 - r_1}{2R} = 118(ნ)$.

ამოცანა 46.16

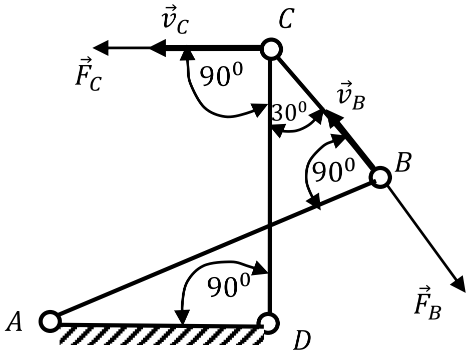


$ABCD$ ანტიპარალელოგრამში AB და CD ღეროები შეერთებულია B და C ცილინდრული სახსრებით, ხოლო A და D ცილინდრული სახსრებით მიმაგრებულია AD დგარზე. CD ღეროს C სახსარზე მოდებულია ჰორიზონტალური $\vec{F}_C$ ძალა.

განსაზღვრეთ იმ $\vec{F}_B$ ძალის სიდიდე, რომელიც მოდებულია B სახსარზე AB −ს მართობულად, თუ მექანიზმი წონასწორობაშია. მოცემულია: $AD = BC, AB = CD,$ $\angle ABC = \angle ADC = 90^0, = \angle DCB = 30^0.$

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ $ABCD$ ანტიპარალელოგრამი. ვაჩვენოთ ნახაზზე აქტიური ძალები. სისტემა, რომელიც ემორჩილება იდეალურ ბმებს, წონასწორობაშია $\vec{F}_C$ და $\vec{F}_B$ ძალების მოქმედებით.

გამოვიყენოთ შესაძლო სიჩქარეების პრინციპი:



$$\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot v_k cos\left(\widehat{\vec{F}_k, \vec{v}_k}\right) = 0. \qquad (1)$$

მივანიჭოთ C სახსარს $\vec{v}_C$ სიჩქარე, მაშინ B სახსარი მიიღებს $\vec{v}_B$ სიჩქარეს.

$\vec{v}_C$ *სიჩქარე* მიმართულია CD ღეროს მართობულად, $\vec{v}_B - AB$ ღეროს მართობული. CB ღერო ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას:

$$გეგ_{CB}^{\vec{v}_C} = გეგ_{CB}^{\vec{v}_B},$$

$$v_C cos60^0 = v_B.$$

ჩავწეროთ (1) განტოლება შემდეგი სახით:

$$F_C\, v_C - F_B v_B = 0,$$

$$F_C\, v_C - F_B v_C cos60^0 = 0.$$

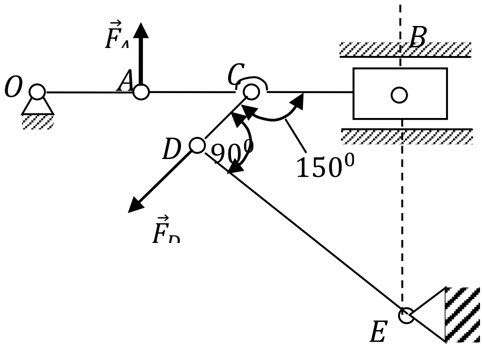
აქედან

$$F_B = \frac{F_C}{cos60^0} = 2F_C$$

პ ა ს უ ხ ი: $F_B = 2F_C$.

ამოცანა 46.17

OAB მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმი AB ბარბაცას შუა C წერტილში CD ღეროსთან შეერთებულია ცილინდრული სახსრით. CD და DE ღეროები შეერთებულია D ცილინდრული სახსრით. განსაზღვრეთ $\vec{F}_A$ და $\vec{F}_D$ ძალის სიდიდეებს შორის დამოკიდებულება ნახაზზე ნაჩვენები მექანიზმის წონასწორობისას, თუ ისინი სათანადოდ OA და CD ღეროების მართობებია.



მოცემულია: $\angle DBC = 150^0$, $\angle DCE = 90^0$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვიყენოთ შესაძლო სიჩქარეების პრინციპი:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot v_k cos\left(\widehat{\vec{F}_k, \vec{v}_k}\right) = 0.$$

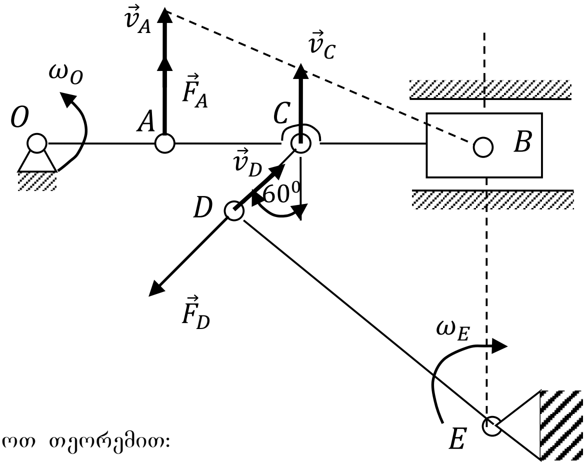
ჩავწეროთ განტოლება ამ შემთხვევისათვის

$$F_A v_A - F_D v_D = 0. \qquad (1)$$

ბრტყელო მოძრაობის კინემატიკიდან გამომდინარეობს, რომ მექანიზმის მოცემულ მდებარეობაში B წერტილი წარმოადგენს AB ბარბაცას სიჩქარეთა მყის ცენტრს.

მაშინ, როგორც ნახაზიდან ჩანს:

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{v_C}{v_A} = \frac{1}{2}\frac{BA}{BA} \Rightarrow v_C = \frac{1}{2} v_A.$$



ვისარგებლოთ თეორემით:

$$გეგ_{CD}^{\vec{v}_C} = გეგ_{CD}^{\vec{v}_D},$$

საიდანაც

$$v_C cos60^0 = v_D \Rightarrow v_D = \frac{1}{4} v_A.$$

ჩავსვათ მიღებული მნიშვნელობა (1) განტოლებაში:, მივიღებთ

$$\left(F_A - \frac{1}{4} F_D\right) v_A = 0.$$

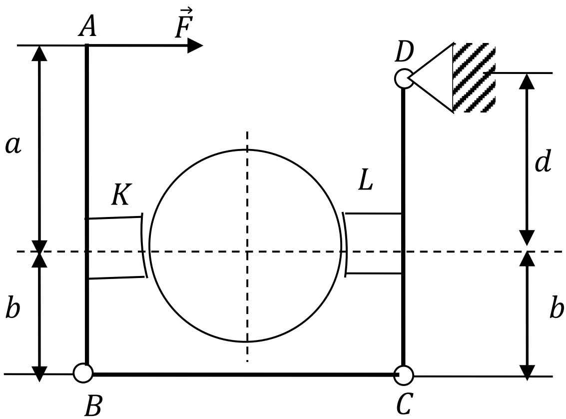
რადგან შესაძლო სიჩქარე $v_A \neq 0$, ამიტომ ნული ხდება ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახელება, ე.ი

$$F_D = 4\, F_A.$$

პ ა ს უ ხ ი: $F_D = 4\, F_A$.

ამოცანა 46.18

ტრამვაის ვაგონის ხუნდარტახიანი მუხრუჭი შედგება სამი AB, BC და CD საწევისაგან, რომლებიც ერთმანეთთან შეერთებულია B და C სახსრებით. $\vec{F}$ ჰორიზონტალური ძალის მოქმედებისას მუხრუჭის K და L ხუნდები, რომლებიც სათანადოდ მიმაგრებულია AB და CD საწევარზე, აწვებიან თვალს. განსაზღვრეთ თვალზე $\vec{N}_K$ და $\vec{N}_L$ ხუნდების წნევები. ზომები ნახაზზეა მოცემული. ვაგონი უძრავ მდგომარეობაშია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. თავდაპირველად გავათავისუფლოთ აზრობრივ L ხუნდი ბმისაგან და შევცვალოთ ის $\vec{N}_L$ რეაქციის ძალით (იხ. ნახაზი). ამასთან

მექანიზმის მარცხენა ნაწილს (AB ღეროს) შეექნება K წერტილის ირგვლივ ბრუნვის შესაძლებლობა.

შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის თანახმად გვაქვს:

$$F \cdot \delta s_A - N_L \cdot \delta s_L = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\delta s_A}{\delta s_B} = \frac{a}{b} \Longrightarrow \delta s_A = \frac{a}{b}\delta s_B.$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$\delta s_B = \delta s_C, \quad \frac{\delta s_C}{\delta s_L} = \frac{b+d}{d},$$

მაშინ

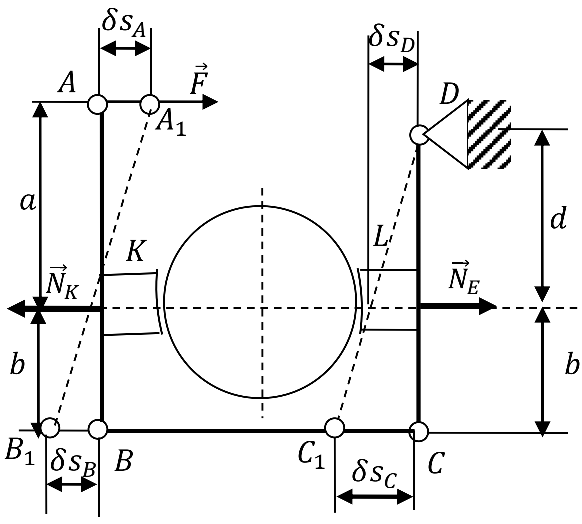
$$\delta s_A = \frac{a}{b}\frac{b+d}{d}\delta s_L.$$

ჩავსვათ მიღებული მნიშვნელობები (1) განტოლებაში:

$$\left(F\frac{a}{b}\frac{b+d}{d} - N_L\right)\delta s_L = 0.$$

რადგან $\delta s_L \neq 0,$ ამიტომ ნული ხდება ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახელება, ე.ი

$$N_L = F\frac{a}{b}\frac{b+d}{d}.$$



გავათავისუფლოთ აზრობრივ K ხუნდი ბმისაგან და შევცვალოთ ის $\vec{N}_K$ რეაქციის ძალით. შედეგად BC და CD ღეროები იქნებიან უძრავი, ხოლო AB ღერო იბრუნებს B წერტილის ირგვლივ.
შესაძლო გადაადგილების პრინციპი ამ შემთხვევაში ასე ჩაიწერება:

$$F \cdot \delta s_A - N_K \cdot \delta s_K = 0, \qquad (2)$$

კინემატიკიდან ცნობილია, რომ

$$\frac{\delta s_A}{\delta s_K} = \frac{a+b}{b} \Longrightarrow \delta s_A = \frac{a+b}{b} \delta s_K.$$

ჩავსვათ მიღებული მნიშვნელობები (2) განტოლებაში, მაშინ იგი მიიღებს სახეს:

$$\left(F\frac{a+b}{b} - N_K\right)\delta s_K = 0.$$

რადგან $\delta s_K \neq 0$, ამიტომ ნული ხდება ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახელება, ე.ი

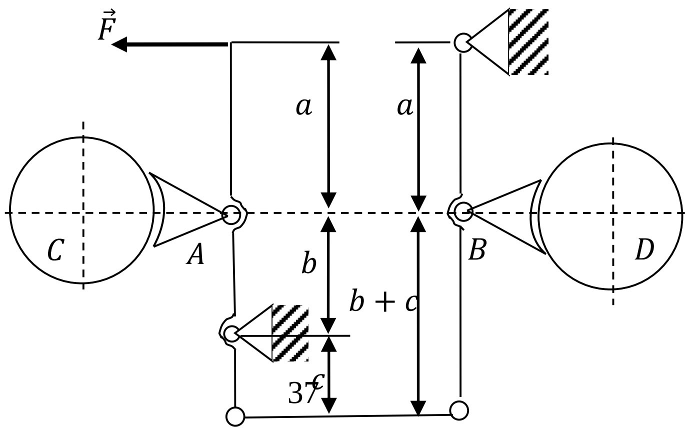
$$N_K = F\frac{a+b}{b}.$$

პ ა ს უ ხ ი:

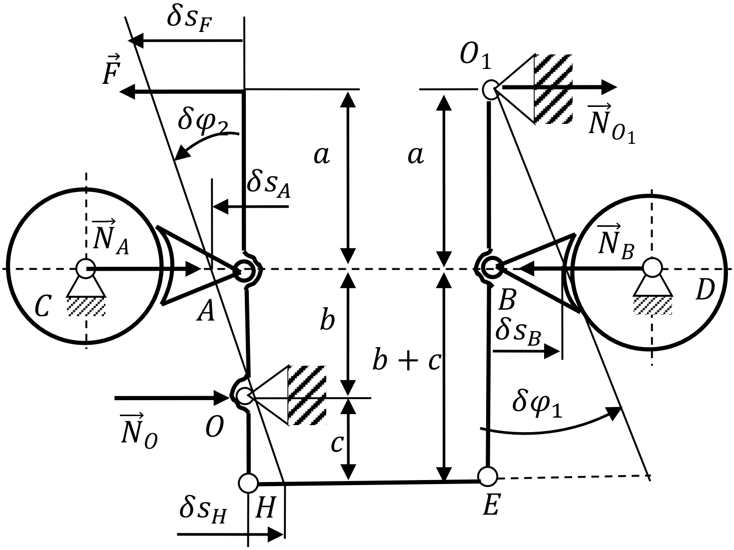
$$N_L = F\frac{a}{b}\frac{b+d}{d}; \quad N_K = F\frac{a+b}{b}.$$

ამოცანა 46.19

ნახაზზე გამოსახულია ტრამვაის ვაგონის ხუნდარტახიანი მუხრუჭის სქემა. იპოვეთ დამოკიდებულება a, b და c სიდიდეებს შორის, რომლის დროსაც F ძალის მოქმედებისას A და B ხუნდები თანაბარი სიდიდის ძალით აწვება C და D თვლების არტახებს. იპოვეთ აგრეთვე ამ ძალის სიდიდე. თვლები ჩათვლილია უძრავად.



ა მ ო ხ ს ნ ა. გავათავისუფლოთ აზრობრივ A და B ხუნდები



ბმებისაგან და შევცვალოთ ისინი შესაბამისი რეაქციის ძალებით. მივანიჭოთ ძალების მოდების წერტილებს შესაძლო გადაადგილებები (იხ. ნახაზი) და ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილების პრინციპის შესაბამისი განტოლება:

$$F \cdot \delta s_F - N_A \cdot \delta s_A - N_B \cdot \delta s_B = 0, \qquad (1)$$

სადაც

$$\delta s_F = (a+b)\delta\varphi; \;\; \delta s_A = b \cdot \delta\varphi.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\delta s_B = b \cdot \delta\varphi_1,$$

$$c \cdot \delta\varphi = (a+b+c) \cdot \delta\varphi_1,$$

$$\delta\varphi_1 = \frac{c}{a+b+c}\delta\varphi,$$

სადაც $\delta\varphi$, $\delta\varphi_1$ – შესაძლო მობრუნების კუთხეებია შესაბამისად O და O_1 სახსრების ირგვლივ..

მაშინ

$$\delta s_B = \frac{ca}{a+b+c}\delta\varphi$$

და (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$F\ \cdot (a+b)(a+b+c) - N_A \cdot b(a+b+c) - N_B \cdot ac = 0. \quad (2)$$

გავათავისუფლოთ აზრობრივ A ხუნდი ბმისაგან და შევცვალოთ ის $\vec{N}_A$ რეაქციის ძალით. და ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი ამ შემთხვევისათვის:

$$F\ \cdot \delta s_F - N_A \cdot \delta s_A = 0, \qquad (3)$$

რადგან

$$\frac{\delta s_F}{\delta s_A} = \frac{a+b}{b},$$

მაშინ

$$\delta s_F = \frac{a+b}{b}\delta s_A.$$

ჩავსვათ მიღებული გამოსახულება (3) განტოლებაში და გავითვალიწინოთ, რომ $\delta s_A \neq 0$, მაშინ

$$N_A = \frac{a+b}{b}F.$$

ანალოგიური გამოთვლები ჩავატაროთ B ხუნდისათვის:

$$F\ \cdot \delta s_F - N_B \cdot \delta s_B = 0, \qquad (4)$$

რადგან

$$\frac{\delta s_F}{\delta s_B} = \frac{a+b}{ac/(a+b+c)},$$

ამიტომ

$$\delta s_F = \frac{(a+b)(a+b+c)}{ac}\delta s_B.$$

ჩავსვათ მიღებული გამოსახულება (4) განტოლებაში და გავითვალიწინოთ, რომ $\delta s_B \neq 0$ *,* მაშინ

$$N_B = \frac{(a+b)(a+b+c)}{c}F$$

ამოცანის პირობის თანახმად $N_A = N_B,$ მაშასადამე,

$$\frac{a+b}{b} = \frac{(a+b)(a+b+c)}{ac}$$

ან, რაც იგივეა

$$\frac{a}{b}=\frac{a+b+c}{c}.$$

ამ გამოსახულებიდან ვღებულობთ:

$$ac=b(a+b+c).$$

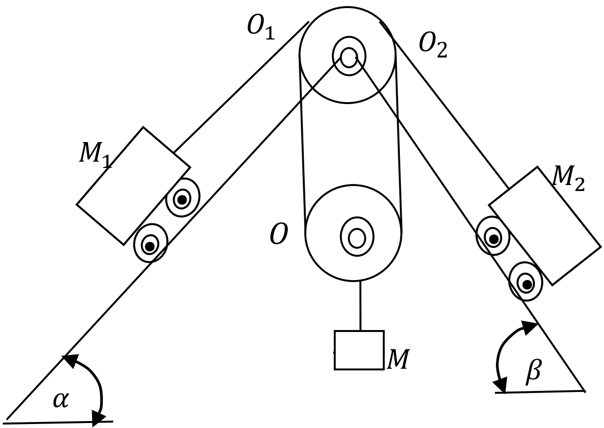
ჩავსვათ მიღებული გამოსახულებები (2) განტოლებაში და გავითვალიწინოთ, რომ $N_A=N_B=Q$, მაშინ მივიღებთ:

$$Q=F\frac{a+b}{2b}$$

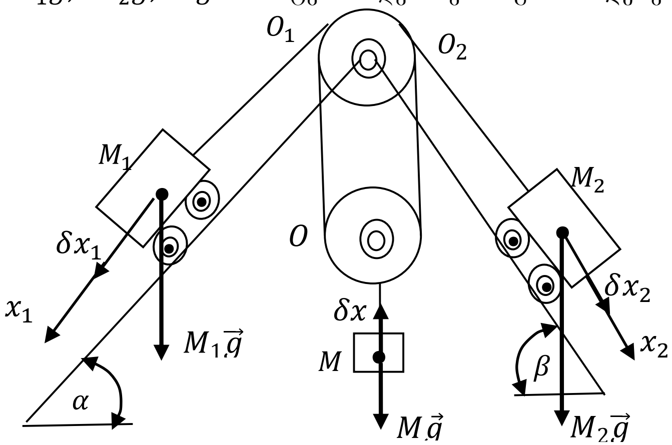
პ ა ს უ ხ ი: $\frac{a}{b}=\frac{a+b+c}{c}$; $Q=F\frac{a+b}{2b}$

ამოცანა 46.20

იპოვეთ ჰორიზონტთან α და β *კუთხეებით დახრილ სიბრტყეებზე* M მასის ტვირთის საშუალებით წონასწორობის მდებარეობაში შეკავებული ორი ტვირთის M_1 *და* M_2 მასები , თუ M_1 და M_2 ტვირთები მიმაგრებულია გვარლის ბოლოებზე, რომელიც გამოდის M_1 ტვირთიდან და გადადებულია ჰორიზონტალურ ღერძზე ჩამოცმულ O_1 ბლოკზე, რის შემდეგ იგი შემოხვეულია O მოძრავ ბლოკზე, რომელზეც დაკიდებულია M ტვირთი და, ბოლოს, იმავე ჰორიზონტალურ ღერძზე ჩამოცმულ O_2 ბლოკიდან მიდის M_2 ტვირთისაკენ. ხახუნი, ბლოკების და გვარლის მასები უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე მოცემულ სისტემაზე მოქმედი აქტიური ძალები: $M_1\vec{g}$, $M_2\vec{g}$, $M\vec{g}$. სისტემის მდებარეობა განისაზღვრება



ორი განზოგადებული კოორდინატით: $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$. მაშასადამე, სისტემის თავისუფლების ხარისხია ორი. მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება*:* $\delta x_1 \neq 0$ და $\delta x_2 = 0$. მაშინ M ტვირთის გადაადგილება იქნება:

$$\delta x = \frac{\delta x_1}{2}.$$

გამოვიყენოთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = 0.$$

ტვირთის გადაადგილების გათვალისწინებით ეს განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\delta A_1 = M_1 g sin\alpha \cdot \delta x_1 - Mg\frac{\delta x_1}{2} = \left(M_1 g sin\alpha - \frac{Mg}{2}\right)\delta x_1.$$

მაშინ $q_1 = x_1$ განზოგადებული კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული ძალა

$$Q_1 = M_1 g sin\alpha - \frac{Mg}{2}. \qquad (1)$$

ანალოგიურად, $\delta x_2 \neq 0$ და $\delta x_1 = 0$ შემთხვევისათვის მივიღებთ:

$$\delta x = \frac{\delta x_2}{2};$$

$$\delta A_2 = \left(M_2 g sin\beta - \frac{Mg}{2}\right)\delta x_2.$$

$q_2 = x_2$ განზოგადებული კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული ძალა

$$Q_2 = M_2 g sin\beta - \frac{Mg}{2}. \qquad (2)$$

ვისარგებლოთ სისტემის წონასწორობის პირობებით განზოგადებულ კოორდინატებში: $Q_1 = 0,\ Q_2 = 0,$ მაშინ (1) და (2) განტოლებებიდან მივიღებთ:

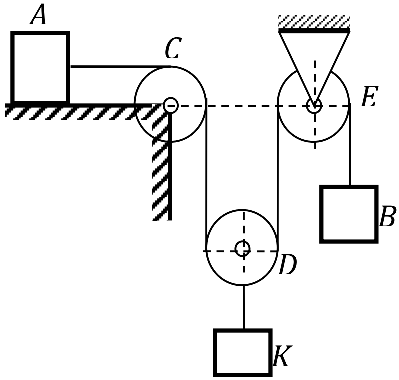
$$M_1 = \frac{M}{2sin\alpha},$$

$$M_2 = \frac{M}{2sin\beta}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $M_1 = \frac{M}{2sin\alpha};\ M_2 = \frac{M}{2sin\beta}.$

ამოცანა 46.21

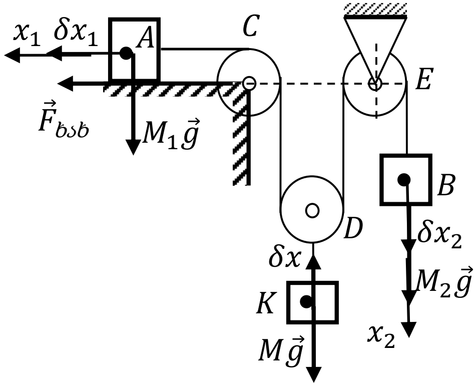
უჭიმარი და უწონი ძაფის ბოლოებზე მიბმულია ორი, ერთნაირი მასის A და B ტვირთი. A ტვირთისაგან ძაფი გადის ჰორიზონტალური სიბრტყის პარალელურად, შემოევლება უძრავ C ბლოკს, შემოწვდება მოძრავ D ბლოკს და შემდეგ შემოევლება უძრავ E ბლოკს, სადაც მის მეორე ბოლოზე მიბმულია B ტვირთი. მოძრავი D ბლოკის ღერძზე ჩამოკიდებულია M მასის K ტვირთი. განსაზღვრეთ A და B ტვირთების M_1 მასები და ჰორიზონტალური სიბრტყზე A ტვირთის სრიალის ხახუნის f კოეფიციენტი.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე მოცემულ სისტემაზე მოქმედი აქტიური ძალები: $M_1\vec{g},\ M_2\vec{g},\ M\vec{g}$ *და* $\vec{F}_{ხახ}$. *ს*ისტემის თავისუფლების ხარისხი უდრის ორს. მაშასადამე, სისტემის მდებარეობა განისაზღვრება ორი განზოგადებული კოორდინატით*:* $q_1 = x_1,\ q_2 = x_2.$

გამოვიყენოთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k = 0.$$



ვიპოვოთ q_1 და q_2 განზოგადებული კოორდინატების Q_1 და Q_2 განზოგადებული ძალები. Q_1 –ის საპოვნელად დავუშვათ, რომ $\delta x_1 \neq 0$ და $\delta x_2 = 0$.

მაშინ K ტვირთის სესაძლო გადაადგილება

$$\delta x = \frac{\delta x_1}{2},$$

ხოლო შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი ამ შემთხვევისათვის მიიღებს სახეს:

$$\delta A_1 = F_{ხახ}. \cdot \delta x_1 - Mg \cdot \delta x = \left(fM_1 g - \frac{1}{2}Mg\right)\delta x_1.$$

აქედან

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta x_1} = fM_1 g - \frac{Mg}{2}. \qquad (1)$$

Q_2 –ის საპოვნელად დავუშვათ, რომ $\delta x_2 \neq 0$ და $\delta x_1 = 0$.
მაშინ

$$\delta x = \frac{\delta x_2}{2},$$

$$\delta A_2 = M_1 g \cdot \delta x_2 - Mg \cdot \delta x = \left(M_1 g - \frac{1}{2}Mg\right)\delta x_2.$$

აქედან

$$Q_2 = \frac{\delta A_1}{\delta x_2} = M_1 g - \frac{1}{2}Mg. \qquad (2)$$

ვისარგებლოთ სისტემის წონასწორობის პირობებით განზოგადებულ კოორდინატებში: $Q_1 = 0,\ Q_2 = 0,$ მაშინ (1) და (2) განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$M_1 = \frac{M}{2}.$$

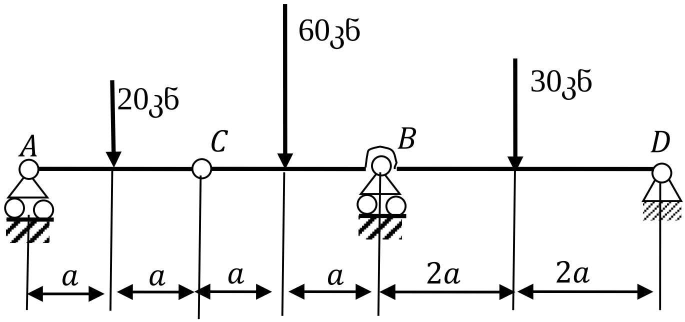
სრიალის ხახუნის fკოეფიციენტს ვიპოვით (1) განტოლებიდან:

$$f = \frac{M}{2M_1}.$$

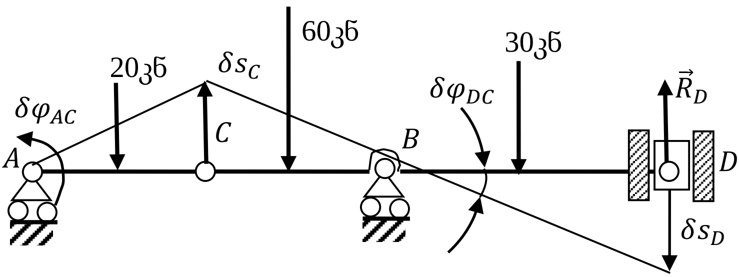
<u>*პ ა ს უ ხ ი:*</u> $M_1 = \frac{M}{2}; f = \frac{M}{2M_1}.$

ამოცანა 46.22

AD შედგენილი კოჭი, მოთავსებულია სამ საყრდენზე, შედგება ორი კოჭისაგან, რომლებიც სახსროვნად შეერთებულია C წერტილში. კოჭზე მოქმედებს სამი ვერტიკალური ძალა, რომლებიც უდრის 20კნ, 60კნ, 30კნ.. ზომები მოცემულია ნახაზზე. იპოვეთ A, B და D საყრდენთა რეაქციები.



ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს პარალელურ ძალთა სისტემა, ამიტომ D საყრდენზე გვექნება მხოლოდ ვერტიკალური მდგენელი. R_D რეაქციის ძალის განსასაზღვრავად მოძრავი ცილინდრული სახსარი შევცვალოთ ცოციათი (ნახ.1). მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება. ცოციას D წერტილში შეუძლია გადაადგილება ვერტიკალზე, ხოლო საყრდენს B წერტილში-ჰორიზონტალურად. CBD კოჭის ბრუნვის მყის ცენტრს ვიპოვით, თუ გავავლებთ D და B წერტილების გადაადგილებების მართობებს. მათი გადაკვეთის წერტილია B წერტილი. ამიტომ CBD კოჭი მყისიერად იბრუნებს B წერტილის გარშემო.



ნახ.1

ანალოგიურად ვიპოვოთ AC კოჭის ბრუნვის მყის ცენტრს, რომელიც მდებარეობს A წერტილში. ამიტომ AC კოჭი მყისიერად იბრუნებს A წერტილის გარშემო. ვიპოვოთ AC და CBD კოჭების მობრუნების კუთხეებს შორის თანაფარდობა:

$$\delta s_C = \delta\varphi_{AC}\cdot 2a = \delta\varphi_{DC}\cdot 2a \Longrightarrow \delta\varphi_{AC} = \delta\varphi_{DC} = \delta\varphi.$$

ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი:

$$-R_D 4a\cdot\delta\varphi + 30\cdot 2a\cdot\delta\varphi - 60\cdot a\cdot\delta\varphi - 20\cdot a\cdot\delta\varphi = 0$$

ან

$$(60a - 60a - 20a - 4aR_D)\cdot\delta\varphi = 0.$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0,$ ამიტომ

$$R_D = \frac{1}{4}(60 - 60 - 20) = -5(კნ).$$

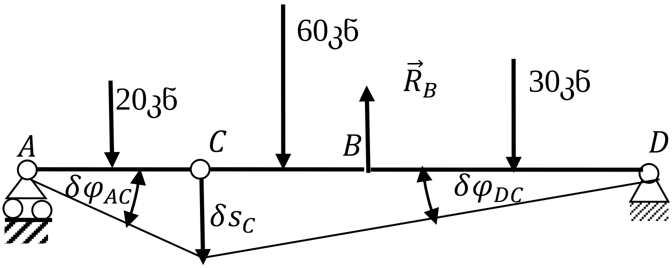
$\vec{R}_B$ რეაქციის ძალის განსასაზღვრავად აზრობრივ მოვაცილოთ B მოძრავი ცილინდრული სახსარი და მისი მოქმედება შევცვალოთ $\vec{R}_B$ რეაქციის ძალით (ნახ.2).

მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება, რომლის დროსაც CBD კოჭი მყისიერად იბრუნებს D საყრდენის გარშემო, ხოლო AC კოჭი$-A$ საყრდენის გარშემო, რომელიც წარმოადგენს ბრუნვის მყის ცენტრს.

ვიპოვოთ AC და CBD კოჭების მობრუნების კუთხეებს შორის თანაფარდობა:

$$\delta s_C = \delta\varphi_{AC}\cdot 2a = \delta\varphi_{DC}\cdot 6a \Longrightarrow \delta\varphi_{AC} = 3\delta\varphi_{DC}.$$

ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი:



ნახ.2

$$20 \cdot a \cdot \delta\varphi_{AC} + 60 \cdot 5a \cdot \delta\varphi_{DC} - R_B 4a \cdot \delta\varphi_{DC} + 30 \cdot 2a \cdot \delta\varphi_{DC} = 0$$

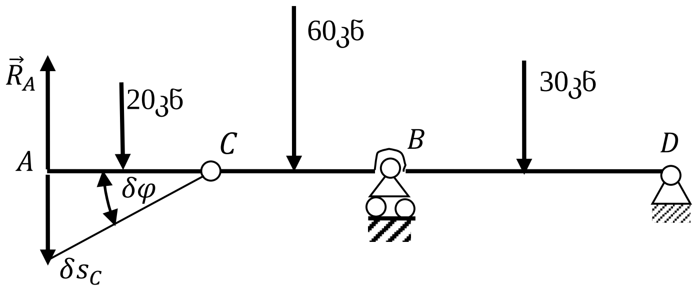
ან

$$(60a + 300a + 60a - 4aR_B) \cdot \delta\varphi_{DC} = 0.$$

რადგან $\delta\varphi_{DC} \neq 0,$ ამიტომ

$$R_D = \frac{1}{4}(60 + 60 + 300) = 105(კნ).$$

$\vec{R}_A$ რეაქციის ძალის განსასაზღვრავად აზრობრივ მოვაცილოთ A მოძრავი ცილინდრული სახსარი და მისი მოქმედება შევცვალოთ $\vec{R}_A$ რეაქციის ძალით (ნახ.3).



ნახ.3

მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება, რომლის დროსაც CBD კოჭი იქნება უძრავი, ხოლო AC კოჭი მყისიერად იბრუნებს C წერტილის გარშემო.

ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი:

$$R_B \cdot 2a \cdot \delta\varphi - 20 \cdot a \cdot \delta\varphi = 0.$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0,$ ამიტომ

$$R_A = \frac{20}{2} = 10(კნ).$$

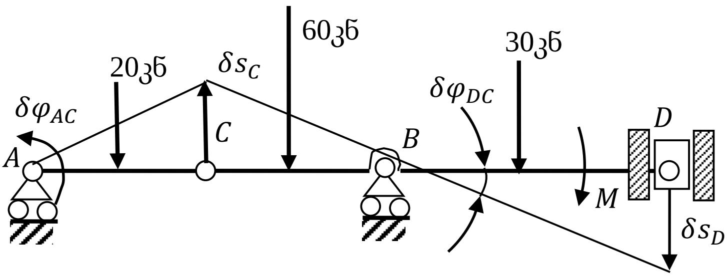
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> *R_A=10კნ; R_B=105კნ; $R_D = -5$კნ.*

ამოცანა 46.23

განსაზღვრეთ იმ წყვილძალის მომენტი, რომელიც უნდა მოვდოთ AD კოჭის BD უბანზე წინა ამოცანაში, რათა D საყრდენის რეაქციის ძალა ნულის ტოლი უნდა იყოს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოვდოთ AD კოჭის BD უბანზე მაბრუნი M მომენტი საათის ისრის მიმართულებით (იხ. ნახაზი). D საყრდენი შევცვალოთ ვერტიკალური ცოციათი. $\delta\varphi_{AC}$ და $\delta\varphi_{DC}$ მობრუნების კუთხეებს შორის თანაფარდობა ავიროთ 46.22 ამოცანის ამოხსნიდან:

$$\delta\varphi_{AC} = \delta\varphi_{DC} = \delta\varphi.$$



ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი იმის გათვალისწინებით, რომ D საყრდენის რეაქციის ძალა ნულის ტოლია:

$$-20a \cdot \delta\varphi - 60a \cdot \delta\varphi + 30 \cdot 2a \cdot \delta\varphi + M \cdot \delta\varphi = 0.$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0$, ამიტომ

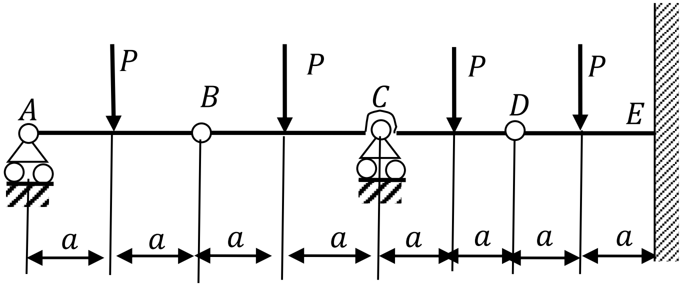
$$M = 20a + 60a - 60a = 20a.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $M = 20a$ *კნ·მ.*

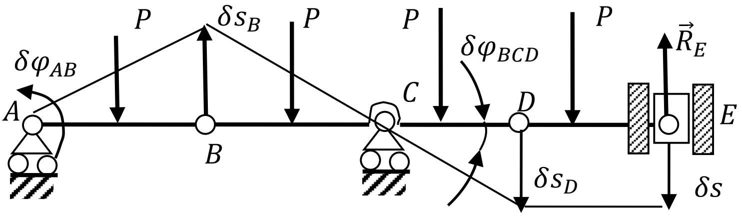
ამოცანა 46.24

ორ A და C საყრდენზე მდებარე შედგენილი კოჭი შედეგება AB, BD და DE კოჭისაგან, რომლებიც სახსრით შეერთებულია B და D წერტილებში. E კვეთში DE კოჭი ჩაჭედილია კედელში.

განსაზღვრეთ E კვეთში რეაქციის ძალის მდგენელი. კოჭებზე მოდებულია ოთხი ერთმანეთის ტოლი ვერტიკალური P ძალა. ზომები ნახაზზეა ნაჩვენები.



ა მ ო ხ ს ნ ა. $\vec{R}_E$ რეაქციის ძალის განსასაზღვრავად აზრობრივ შევცვილოთ E ხისტი ჩამაგრება ვერტიკალური ცოციათი (იხ. ნახაზი). მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება. მაშინ DE კოჭი შესრულებს გადატანით გადაადგილდებას, BDC კოჭი იბრუნებს ბრუნვის მყის ცენტრის ირგვლივ (C წერტილი), ხოლო AB კოჭი –A წერტილის ირგვლივ.



ვიპოვოთ AB და BCD კოჭების მობრუნების კუთხეებს შორის თანაფარდობები:

$$\delta s = \delta\varphi_{AB} \cdot 2a = \delta\varphi_{BCD} \cdot 2a \Longrightarrow \delta\varphi_{AB} = \delta\varphi_{BCD} = \delta\varphi.$$

მაშინ

$$\delta s = \delta s_D = 2a \cdot \delta\varphi.$$

ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი:

$$-P \cdot a \cdot \delta\varphi - P \cdot a \cdot \delta\varphi + P \cdot a \cdot \delta\varphi + P \cdot \delta s - R_E \cdot \delta s = 0$$

ან

$$\delta\varphi(-Pa - Pa + Pa + 2Pa - 2aR_E) = 0$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0,$ *ამიტომ*

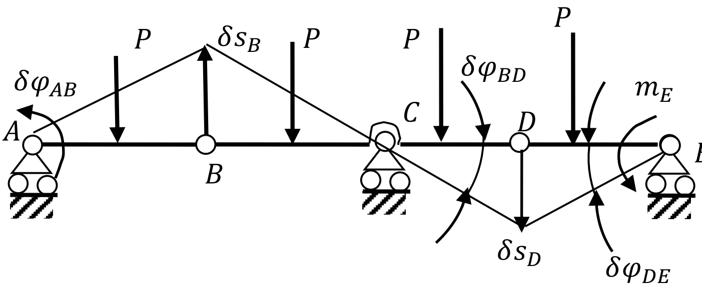
$$R_E = \frac{P}{2}.$$

__პ ა ს უ ხ ი:__ $R_E = 0{,}5P.$

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 46.25

განსაზღვრეთ იმ წყვილძალის m_E მომენტი, რომელიც წარმოიშობა წინა ამოცანაში განხილული DE კოჭის ჩამაგრების ადგილში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. m_E მომენტის განსასაზღვრავად აზრობრივ შევცვილოთ E ხისტი ჩამაგრება მოძრავი ცილინდრული სახსრით. მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება. მაშინ DE კოჭს შეეძლება ბრუნვა E წერტილის ირგვლივ და მობრუნდება $\delta\varphi_{DE}$ კუთხით (იხ. ნახაზი).



ვიპოვოთ BCD კოჭის ბრუნვის მყის ცენტრი, რომელიც მდებარეობს C და D წერტილების გადაადგილებების მართობების გადაკვეთის წერტილში, თუ გავითვალისწინებთ, რომ C წერტილს შეუძლია გადაადგილება ჰორიზონტალურად, ხოლო D წერტილს-ვერტიკალურად. მაშინ BCD კოჭი მობრუნდება $\delta\varphi_{BD}$ კუთხით C წერტილის ირგვლივ.

ანალოგიურად ვიპოვით, რომ AB კოჭი მობრუნდება $\delta\varphi_{AB}$ კუთხით A წერტილის ირგვლივ, რომელიც არის ბრუნვის მყისი ცენტრი.

განვსაზღვროთ თანაფარდობები $\delta\varphi_{DE}$, $\delta\varphi_{BD}$ და $\delta\varphi_{AB}$ სიდიდეებს შორის:

$$\delta s_D = \delta\varphi_{DE}\cdot 2a = \delta\varphi_{BD}\cdot 2a \Longrightarrow \delta\varphi_{DE} = \delta\varphi_{BD} = \delta\varphi;$$

$$\delta s_B = \delta\varphi_{BD}\cdot 2a = \delta\varphi_{AB}\cdot 2a \Longrightarrow \delta\varphi_{AB} = \delta\varphi_{BD} = \delta\varphi_{DE} = \delta\varphi.$$

ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი:

$$m_E\cdot\delta\varphi + P\cdot a\cdot\delta\varphi + P\cdot a\cdot\delta\varphi - P\cdot a\cdot\delta\varphi - P\cdot a\cdot\delta\varphi = 0$$

ან

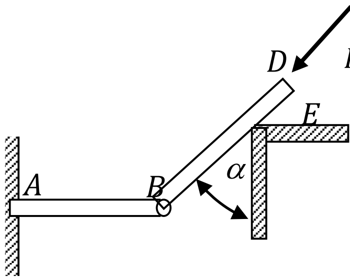
$$(m_E + Pa + Pa + Pa - Pa - Pa)\delta\varphi = 0.$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0$, ამიტომ

$$m_E + Pa + Pa + Pa - Pa - Pa = 0.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $m_E = 0.$

ამოცანა 46.26



AB და BD კოჭი ერთმანეთთან შეერთებულია ცილინდრული B სახსრით. ჰორიზონტალური AB კოჭი ჩაჭედილია A კვეთში ვერტიკალურ კედელში. BD კოჭი, რომელიც ეყრდნობა E შვერილს, ვერტიკალთან ადგენს α კუთხეს. . BD კოჭის გასწვრივ მოქმედებს $\vec{F}$ ძალა. განსაზღვრეთ A კვეთში რეაქციის ძალის ჰორიზონტალური მდგენელი. კოჭების მასები უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რეაქციის ძალის $\vec{R}_{Ax}$ ჰორიზონტალური მდგენელის განსასაზღვრავად აზრობრივ შევცვალოთ A ხისტი ჩამაგრება ჰორიზონტალური ცოციათი (იხ. ნახაზი). მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება. მაშინ AB კოჭი შესრულებს გადატანით გადაადგილდებას, BED კოჭი იბრუნებს ბრუნვის მყის ცენტრის ირგვლივ (C წერტილი), რომელშიც გადაიკვეთება B და E წერტილების შესაძლო გადაადგილებების მართობები. მაშინ $\delta s_D \perp DC$, ხოლო კუთხე δs_D − სა და $\vec{F}$ ძალას შორის უდრის α-ს. დავაგეგმილოთ B და D წერტილების შესაძლო გადაადგილებები BED წრფეზე,
მივიღებთ:

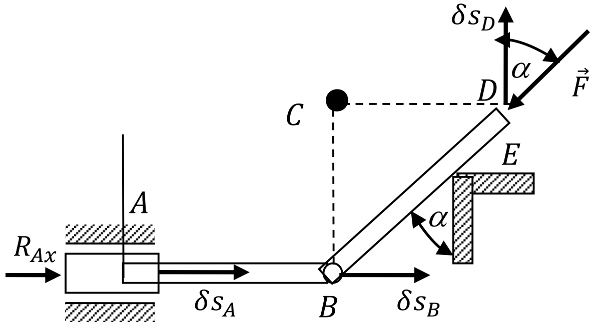
$$\delta s_D cos\alpha = \delta s_B sin\alpha$$

ან

$$\delta s_D = \delta s_B tg\alpha.$$

ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი:

$$R_{Ax} \cdot \delta s_A - F \cdot \delta s_D cos\alpha = 0, \qquad (1)$$



რადგან

$$\delta s_A = \delta s_B.$$

ჩავსვათ δs_D —ს მნიშვნელობა (1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$R_{Ax}\cdot \delta s_B - F\cdot \delta s_B tg\alpha cos\alpha = 0$$

ან

$$\delta s_B(R_{Ax} - F\cdot sin\alpha) = 0$$

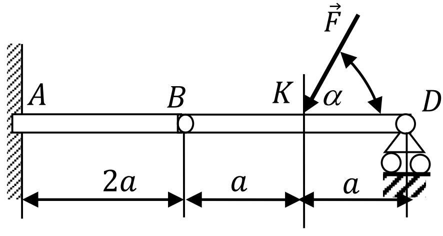
რადგან $\delta s_B \neq 0,$ ამიტომ

$$R_{Ax} - F\cdot sin\alpha = 0.$$

<u>*პ ა ს უ ხ ი:*</u> $R_{Ax} = F\cdot sin\alpha$

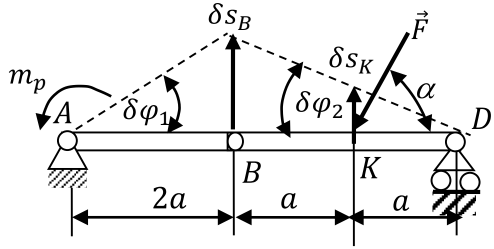
ამოცანა 46.27

ორი ჰორიზონტალური AB და BD კოჭი ერთმანეთთან შეერთებულია ცილინდრული B სახსრით. D საყრდენი დგას მოძრავ საგორავებზე, ხოლო A კვეთი ჩაჭედილია ვერტიკალურ კედელში. BD კოჭზე K ერტილში მოდებულია შეყურსული $\vec{F}$ ძალა, რომელიც ჰორიზონტთან ადგენს α კუთხეს. ზომები ნახაზზეა ნაჩვენები. განსაზღვრეთ A კვეთში რეაქციის ძალის მდგენელები და წყვილძალის m_p



რეაქტიული მომენტი, რომელიც წარმოიქმნება ამ კვეთში. კოჭების მასები უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ წყვილძალის m_p მომენტი. ამისათვის აზრობრივ შევცვილოთ A ხისტი ჩამაგრება ცილინდრული სახსრით (იხ. ნახ.1). მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება და ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი:



$$m_p \cdot \delta\varphi_1 - F sin\alpha \cdot \delta s_K = 0. \quad (1)$$

ნახ.1

გამოვსხოთ δs_K შესაძლო გადაადგილება მობრუნების კუთხით:

$$\delta s_K = a \cdot \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_{B.}}{2a} a = \frac{1}{2}\delta s_B = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \delta\varphi_1 = a \cdot \delta\varphi_1$$

და ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$m_p \cdot \delta\varphi_1 - F sin\alpha \cdot a \cdot \delta\varphi_1 = 0 \Longrightarrow m_p = aF sin\alpha.$$

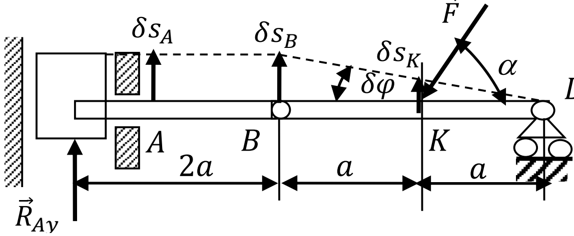
ხისტი ჩამაგრების რეაქციის ძალის $\vec{R}_{Ay}$ ვერტიკალური მდგენელის განსასაზღვრავად აზრობრივ შევცვალოთ A ხისტი ჩამაგრება ვერტიკალური ცოციათი და მოვდოთ რეაქციის ძალის $\vec{R}_{Ay}$ ვერტიკალური მდგენელი (იხ. ნახ. 2).

მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება და ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი:

$$R_{Ay} \cdot \delta s_A - F sin\alpha \cdot \delta s_K = 0,$$

სადაც

$$\delta s_K = a \cdot \delta\varphi = \frac{\delta s_{B.}}{2a} a = \frac{1}{2}\delta s_B = \frac{1}{2}\delta s_A.$$



ნახ. 2

მაშინ

$$R_{Ay} \cdot \delta s_A - F sin\alpha \cdot \frac{1}{2}\delta s_A = 0,$$

აქედან

$$R_{Ay} = \frac{F sin\alpha}{2}.$$

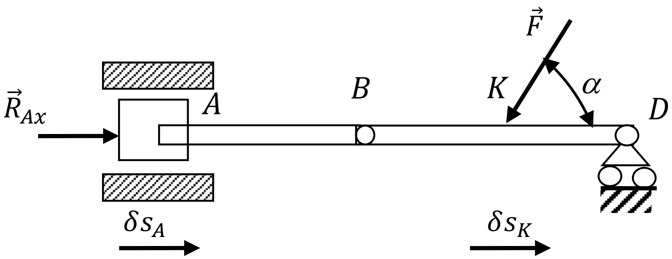
რეაქციის ძალის $\vec{R}_{Ax}$ ჰორიზონტალური მდგენელის განსასაზღვრავად აზრობრივ შევცვალოთ A ხისტი ჩამაგრება ჰორიზონტალური ცოციათი და მოვდოთ რეაქციის ძალის $\vec{R}_{Ax}$ ჰორიზონტალური მდგენელი (იხ. ნახ..3). მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება და ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი:

$$R_{Ax} \cdot \delta s_A - F cos\alpha \cdot \delta s_K = 0$$

სადაც $\delta s_A = \delta s_K$.

მაშინ

$$R_{Ax} = F cos\alpha \cdot$$

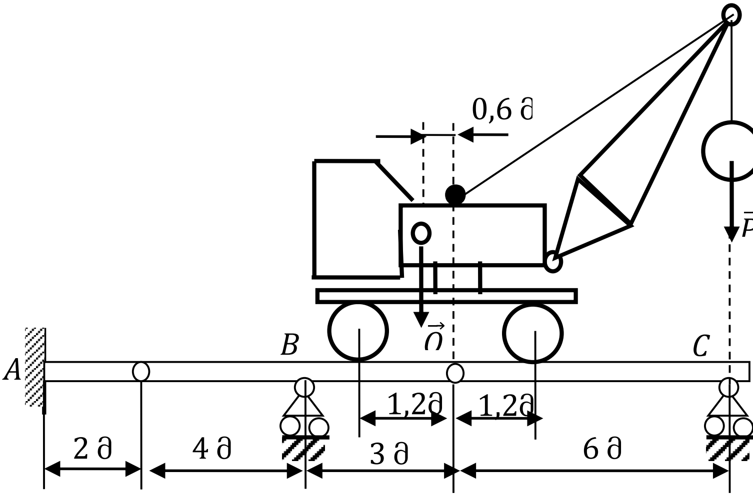


ნახ..3

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $R_{Ax} = F cos\alpha$; $R_{Ay} = \frac{F sin\alpha}{2}$; $m_p = aF sin\alpha$.

ამოცანა 46.28

რკინიგზის ამწე ეყრდნობა რელსებს, რომლებიც დამაგრებულია ორ ორმალიან ჰორიზონტალურ კოჭზე შუალედური სახსრებით. ამწე ეწევა P=30კნ ტვირთს, ამწეს სიმძიმის ძალა Q=160კნ განსაზღვრეთ ჩამაგრების რეაქტიული მომენტი ამწის ნახაზზე ნაჩვენებ მდებარეობაში.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ამწის წონასწორობა და განვსაზღვროთ ამწიც წნევა რელსებზე (ნახ.1):

$$\sum M_L = 0, \qquad -Q \cdot 0,6 + R_N \cdot 2,4 - P \cdot 7,2 = 0.$$

აქედან

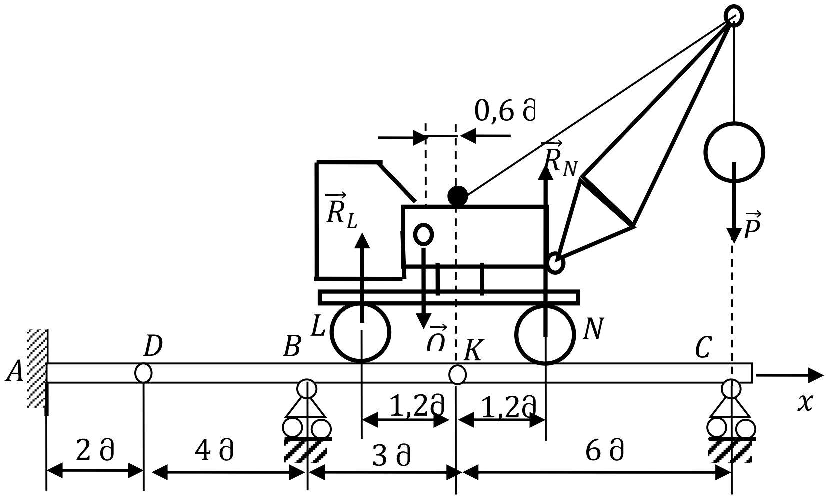
$$R_N = \frac{0,6Q + 7,2P}{2,4} = 0,25Q + 3p.$$

რადგან

$$\sum M_L = 0,$$

ამიტომ

$$-R_L \cdot 2,4 + Q \cdot 1,8 - P \cdot 4,8 = 0.$$

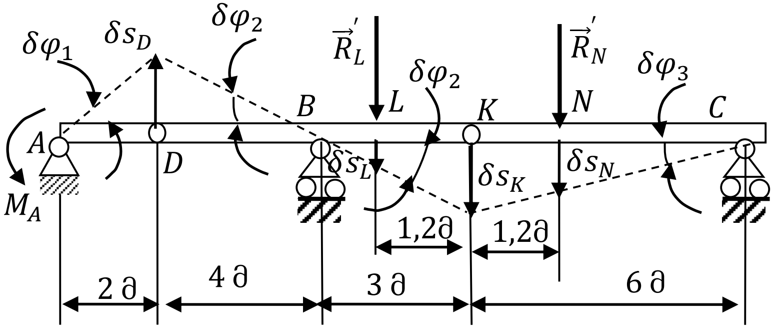


ნახ.1.

ამწის წნევის ძალა

$$\overrightarrow{R'}_N = -\vec{R}_N, \quad \overrightarrow{R'}_L = -\vec{R}_L.$$

ხისტ ჩამაგრებაში რეაქტიული წყვილძალის მომენტის განსასაზღვრავად ხისტი ჩამაგრება შევცვალოთ უძრავი ცილინდრული სახსრით და მოვდოთ M_A რეაქტიული მომენტი საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ.2).



ნახ.2

მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება და ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი:

$$M_A \cdot \delta\varphi_1 + R'_L \cdot \delta s_L + R'_N \cdot \delta s_N = 0.$$

გამოვსახოთ შესაძლო გადაადგილებები $\delta\varphi_1$ −ით, თუ გავითვალისწინებთ, რომ AD კოჭი ბრუნავს A წერტილის ირგვლივ, ხოლო DBK და KC კოჭები-

შესაბამისად B და C წერტილების ირგვლივ, რომლებიც ამ კოჭებისათვის წარმოადგენენ ბრუნვის მყის ცენტრებს.

$$\delta s_D = 2\delta\varphi_1,$$

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_D}{4} = \frac{\delta\varphi_1}{2},$$

$$\delta s_L = 1{,}8\delta\varphi_2 = 0.9\delta\varphi_1,$$

$$\delta s_K = 3\delta\varphi_2 = 1{,}5\delta\varphi_1,$$

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_K}{6} = \frac{1{,}5\delta\varphi_1}{6} = \frac{\delta\varphi_1}{4},$$

$$\delta s_N = 4{,}5\delta\varphi_3 = \frac{\delta\varphi_1}{4}\cdot 4{,}8 = 1{,}2\delta\varphi_1.$$

მაშინ

$$-M_A\cdot\delta\varphi_1 + 0{,}9R'_L\cdot\delta\varphi_1 + 1{,}2R'_N\cdot\delta\varphi_1 = 0.$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0,$ ამიტომ

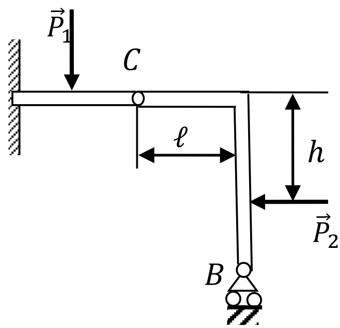
$$M_A = -0{,}9R'_L - 1{,}2R'_N = -0.9(0{,}75Q - 2P) - 1{,}2(0{,}25Q + 3P) =$$

$$-(0.975Q + 1{,}8P) = -0{,}975\cdot 160 - 1{,}8\cdot 30 = -210\text{კნ}$$

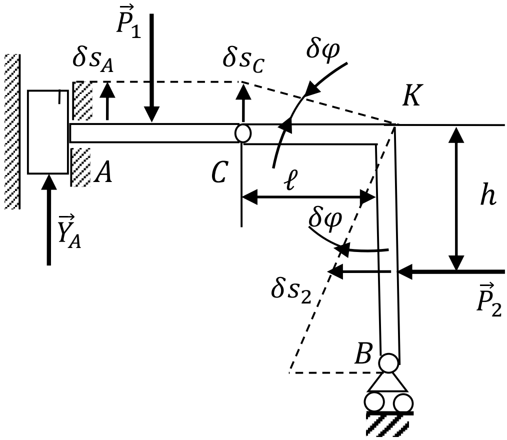
პ ა ს უ ხ ი: $M_A = 210$კნ.

ამოცანა 46.29

ბაქანის კარკასი შედგება Γ − სებრი ჩარჩოებისაგან, რომელთაც აქვთ შუალედური სახსარი. ჩარჩოების. ზედა ნაწილი ხისტადაა ჩამაგრებული ბეტონის კედელში, ხოლო ქვედა ეყრდნობა მოძრავ ცილინდრულ საყრდენს. განსაზრვრეთ ჩამაგრების ვერტიკალური რეაქცია $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ძალების მოქმედებისას.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ხისტი ჩამაგრების რეაქციის ძალის $\vec{Y}_A$ ვერტიკალური მდგენელის განსასაზღვრავად აზრობრივ შევცვალოთ A ხისტი ჩამაგრება ვერტიკალური ცოციათი და მოვდოთ რეაქციის ძალის $\vec{R}_{Ay}$ ვერტიკალური მდგენელი (იხ. ნახაზი).



მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება და ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი:

$$Y_A \cdot \delta s_A - P_1 \cdot \delta s_1 + P_2 \cdot \delta s_2 = 0. \qquad (1)$$

რადგან AC ღერო მოძრაობს გადატანით, ამიტომ $\delta s_A = \delta s_C = \delta s_1$.

BKC კოჭი ბრუნავს K წერტილის ირგვლივ, რომელიც ამ კოჭებისათვის წარმოადგენენ ბრუნვის მყის ცენტრს. მაშინ

$$\delta\varphi = \frac{\delta s_C}{\ell} = \frac{\delta s_A}{\ell},$$

$$\delta s_2 = h \cdot \delta\varphi = \frac{h}{\ell}\delta s_A.$$

ჩავსვათ δs_1 და δs_2 –ის მნიშვნელობები (1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$Y_A \cdot \delta s_A - P_1 \cdot \delta s_A + P_2 \cdot \frac{h}{\ell}\delta s_A = 0.$$

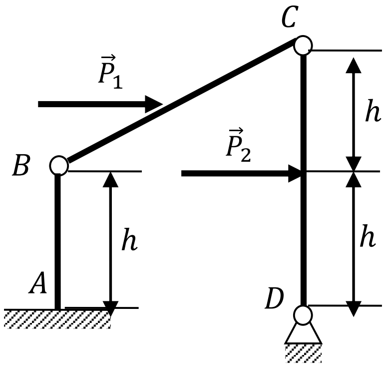
აქედან

$$Y_A = P_1 - P_2 \cdot \frac{h}{\ell}.$$

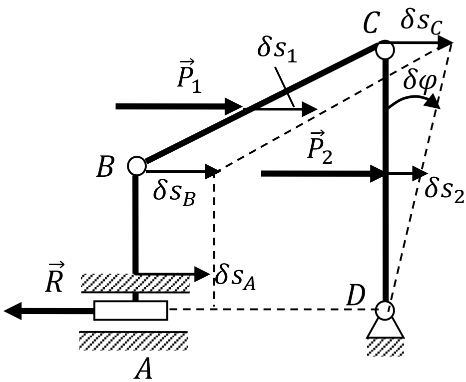
<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $Y_A = P_1 - P_2 \cdot \frac{h}{\ell}$.

ამოცანა 46.30

BC და CD ორი კოჭი ერთმანეთთან C სახსრითაა შეერთებული, ხოლო ცილინდრული B სახსრით ჩამაგრებულია ვერტიკალურ AB დგარზე, რომელიც ჩამაგრებულია A კვეთში, ცილინდრული D სახსრით კი შეერთებულია იატაკთან. კოჭებზე მოქმედებს $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ძალები. განსაზღვრეთ A კვეთში რეაქციის ძალის ცილინდრული მდგენელი ზომები ნახაზზეა ნაჩვენები.



ა მ ო ხ ს ნ ა. რეაქციის ძალის ჰორიზონტალური მდგენელის განსასაზღვრავად აზრობრივ შევცვალოთ A ხისტი ჩამაგრება ჰორიზონტალური ცოციათი და მოვდოთ რეაქციის ძალის R ჰორიზონტალური მდგენელი (იხ. ნახაზი). მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება და ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი:



$$R \cdot \delta s_A + P_1 \cdot \delta s_1 + P_2 \cdot \delta s_2 = 0 \qquad (1)$$

რადგან AB ღერო გადატანით მოძრაობას, ამიტომ

$$\delta s_A = \delta s_B.$$

BC ღერო ასრულებს მყის გადატანით მოძრაობას, მაშინ

$$\delta s_B = \delta s_1 = \delta s_C.$$

CD ღერო მობრუნდება D წერტილის ირგვლივ, ე.ი.:

$$\delta\varphi = \frac{\delta s_C}{2h} = \frac{\delta s_A}{2h},$$

$$\delta s_2 = h \cdot \delta\varphi = \frac{1}{2}\delta s_A.$$

ჩავსვათ δs_1 და δs_2 –ის მნიშვნელობები (1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$-R \cdot \delta s_A + P_1 \cdot \delta s_A + P_2 \cdot \frac{1}{2}\delta s_A = 0.$$

აქედან

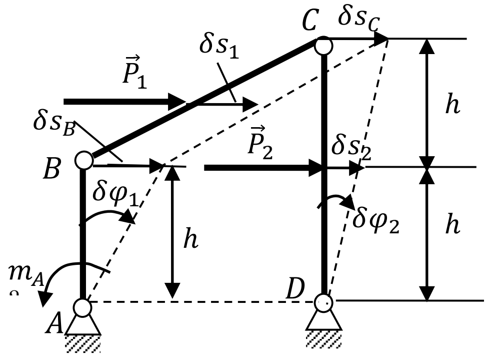
$$R = P_1 + \frac{1}{2}P_2.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $R = P_1 + \frac{1}{2}P_2$.

ამოცანა 46.31

განსაზღვრეთ იმ რეაქტიული წყვილძალის m_A მომენტი, რომელიც წარმოიშობა AB დგარის A ჩამაგრების ადგილას წინამდებარე ამოცანაში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. m_A რეაქტიული მომენტის განსასაზღვრავად აზრობრივ შევცვალოთ A ხისტი ჩამაგრება უძრავი ცილინდრული სახსრით და მოვდოთ რეაქტიული წყვილძალის m_A მომენტი (იხ. ნახაზი). .მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება და ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი:



$$-m_A \cdot \delta\varphi_1 + P_1 \cdot \delta s_1 + P_2 \cdot \delta s_2 = 0. \quad (1)$$

რადგან AB ღერო მობრუნდება A წერტილის ირგვლივ, ამიტომ

$$\delta s_A = h\delta\varphi_1.$$

BC ღერო ასრულებს მყის გადატანით მოძრაობას, ე.ი.

$$\delta s_{B.} = \delta s_{1.} = \delta s_C = h\delta\varphi_1.$$

CD ღერო მობრუნდება D წერტილის ირგვლივ, ე.ი.:

$$\delta s_2 = h \cdot \delta\varphi_2 = \frac{h \cdot \delta\varphi_1}{2},$$

და რადგან

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_C}{2h} = \frac{h \cdot \delta\varphi_1}{2h} = \frac{\delta\varphi_1}{h}.$$

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$-m_A \cdot \delta\varphi_1 + P_1 h \cdot \delta\varphi_1 + P_2 \cdot \frac{h \cdot \delta\varphi_1}{2} = 0.$$

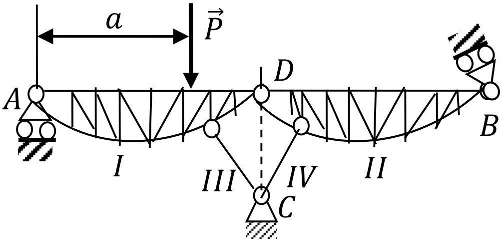
აქედან

$$m_A = \left(P_1 + \frac{1}{2}P_2\right)h.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $m_A = \left(P_1 + \frac{1}{2}P_2\right)h$.

ამოცანა 46.32

D სახსრით შეერთებული ორი I და II წამწე III და IV ღეროების საშუალებით მიმაგრებულია მიწაზე C სახსრით; A და B წერტილებში მათ აქვთ საყრდენები საგორავებზე. I წამწე დატვირთულია ერტიკალური P ძალით A საყრდენიდან a მანძილზე. იპოვეთ B საგორავის რეაქცია.



მ ი თ ი თ ე ბ ა. წინასწარ უნდა განისაზღვროს I და II წამწეების სიჩქარეთა მყისი C_1 და C_2 ცენტრები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. B საყრდენის რეაქციის ძალის განსასაზღვრავად მოვაცილოთ უძრავი ცილინდრული სახსარი და იგი შევცვალოთ რეაქციის ძალით $\vec{R}_B$ (იხ. ნახაზი). მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება. განვსაზღვროთ I და II წამწეების ბრუნვის მყისი ცენტრები: C_1 წერტილი I წამწისათვის და C_2 წერტილი II წამწისათვის. ჩავწეროთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი:

$$-M_{C_1}(\vec{P}) \cdot \delta\varphi_1 + M_{C_1}(\vec{R}_B) \cdot \delta\varphi_2 = 0.$$

რადგან D წერტილი საერთოა ორივე წამწისათვის, ამიტომ

$$\delta s_D = DC_1 \cdot \delta\varphi_1 = $$
$$= DC_2 \cdot \delta\varphi_2$$

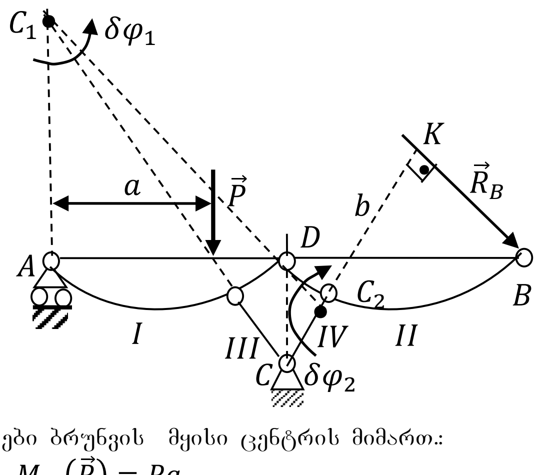
საიდანაც

$$\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1 \frac{DC_1}{DC_2}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$C_2K = b,$$

სადაც C_2K არის $\vec{R}_B$ რეაქციის ძალის მხარი C_2 ბრუნვის მყისი ცენტრის მიმართ.



მოცემული ძალების მომენტები ბრუნვის მყისი ცენტრის მიმართ.:

$$M_{C_1}(\vec{P}) = Pa,$$

$$M_{C_2}(\vec{R}_B) = R_B b.$$

მაშასადამე,

$$-Pa \cdot \delta\varphi_1 + R_B b \cdot \delta\varphi_1 \frac{DC_1}{DC_2} = 0.$$

რადგან $\delta\varphi_1 \neq 0$, ამიტომ

$$R_B = P\frac{a}{b}\frac{C_2D}{C_1D}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი</u>: $R_B = P\frac{a}{b}\frac{C_2D}{C_1D}$, სადაც b არის $\vec{R}_B$ რეაქციის ძალის მხარი C_2 მყისი ცენტრის მიმართ. $\vec{R}_B$ რეაქციის ძალა მიმართულია B საგორავის სრიალის სიბრტყის მართობულად მარცხნიდან მარჯვნივ ქვევით.

§47. დინამიკის ზოგადი განტოლება

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

დინამიკის ზოგადი განტოლება ან ლაგრანჟ-დალამბერის პრინციპი) გამოიყენება არათავისუფალი მექანიკური სისტემის მოძრაობის გამოსაკვლევად, რომლის შემადგენელი სხეულები ან წერტილები მოძრაობენ გარკვეული აჩქარებით.

დალამბერის პრინციპის თანახმად, თუ არათავისუფალი მექანიკური სისტემის წერტილებზე მოვდებთ აქტიურ ძალებს, რეაქციის ძალებს და ამ წერტილების ინერციის ძალებს, მაშინ მიღებული ძალთა სისტემა იქნება ნულის ექვივალენტური, ე.ი. ასეთი ძალთა სისტემის მოქმედებით მექანიკური სისტემა აზრობრივ იქნება წონასწორობაში. თუ ასეთი ძალთა სისტემისათვის გამოვიყენებთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპით (ლაგრანჟის პრინციპით) გამოსახულ წონასწორობის პირობებს, მაშინ მივიღებთ გაერთიალებულ ლაგრანჟ-დალამბერის პრინციპს: მექანიკური სისტემის მოძრაობისას, რომელიც ემორჩილება სტაციონალურ, დამჭერ და იდეალურ ბმებს, სისტემაზე უშუალოდ მოქმედი ძალებისა და ინერციის ძალების ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი ყოველ შესაძლო გადაადგილებაზე დროის ყოველ მომენტში უდრის ნულს.

ამ პრინციპის ზოგად ანალიზურ გამოსახულებას აქვს სახე:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{\Phi} = 0, \qquad (47.1)$$

სადაც $\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^a$, $\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^{\Phi}$- აქტიური და ინერციის ძალების შესაძლო მუშაობათა ჯამებია.
რადგან

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^a=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\cdot\delta\vec{r}_k,$$

ხოლო

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^{ინ}=\sum_{k=1}^{n}\vec{\Phi}_k\cdot\delta\vec{r}_k,$$

მაშინ (47.1) განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს ვექტორული სახით:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k+\vec{\Phi}_k\right)\cdot\delta\vec{r}_k=0 \qquad (47.2)$$

ან სკალარული სახით

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(F_{kx}+\Phi_{kx})\cdot\delta x_k+\left(F_{ky}+\Phi_{ky}\right)\cdot\delta y_k+(F_{kz}+\Phi_{kz})\cdot\delta z_k\right]=0 \qquad (47.3)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ მატერიალური წერტილის ინერციის ძალა $\vec{\Phi}_k=-m_k\vec{a}_k$, ხოლო მისი გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე:

$$\begin{cases}\Phi_{kx}=-m_k\ddot{x}_k,\\ \Phi_{ky}=-m_k\ddot{y}_k,\\ \Phi_{kz}=-m_k\ddot{z}_k,\end{cases}$$

მაშინ (47.2) და (47.3) განტოლებები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k-m_k\vec{a}_k\right)\cdot\delta\vec{r}_k=0 \qquad (47.2')$$

$$\sum_{k=1}^{n}\Big[(F_{kx}-m_k\ddot{x}_k)\cdot\delta x_k+\left(F_{ky}-m_k\ddot{y}_k\right)\cdot\delta y_k+$$
$$+(F_{kz}-m_k\ddot{z}_k)\cdot\delta z_k\Big]=0. \qquad (47.3')$$

თუ შესაძლო გადაადგილებად აღებულია კუთხური გადაადგილება მყარი სხეულის უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვისას, მაშინ განტოლების შედგენისას ძალების შესაძლო მუშაობები განისაზღვრება როგორც ამ ძალების მომენტების მუშაობები ბრუნვის ღერძის მიმართ.

დალამბერის პრონციპით ამოცანების ამოხსნის მეთოდურ მითითებებში (იხ. პარაგრაფი 41) მოყვანილია ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორის და ნაკრები მომენტის გამოსათვლელი ფორმულები მყარი სხეულის სხვადასხვა მოძრაობისას.

- გატანითი მოძრაობისას

$$\vec{\Phi}^* = -M\vec{a}_C, \quad \vec{M}_C^{\Phi} = 0, \qquad (47.4)$$

სადაც $\vec{a}_C -$ მასათა ცენტრის აჩქარებაა, $M -$ სხეულის მასა.

- მყარი სხეულის მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობისას:

$$\vec{\Phi}^* = 0, \ \vec{M}_{Cz}^{\Phi} = -J_{Cz}\vec{\varepsilon}, \qquad (47.5)$$

სადაც $\varepsilon -$ კუთხური აჩქარებაა, ხოლო $J_C -$ მყარი სხეულის ინერციის მომენტია მასათა ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ;

- მყარი სხეულის ბრტყელი მოძრაობისას:

$$\vec{\Phi}^* = -M\vec{a}_C, \ \vec{M}_{Cz}^{\Phi} = -J_{Cz}\vec{\varepsilon}, \qquad (47.6)$$

დინამიკის ზოგადი განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ განზოგადებულ ძალებში ან განზოგადებულ კოორდინატებში:

$$\sum_{j=1}^{s}\left(Q_j^a + Q_j^{\Phi}\right)\delta q_j = 0, = 1, \cdots, s, \qquad (47.7)$$

სადაც $.s -$ განზოგადებულ კოორდინატების რიცსვია, რომელიც უდრის სისტემის თავისუფლების რიცხვს; $Q_j^a -$აქტიური ძალების განზოგადებული ძალაა, $Q_j^{\Phi} -$ინერციის ძალების განზოგადებული ძალა.

ამ ძალების გამოთვლისათვის საჭირო ფორმულები მოყვანილია "ანლიზური მექანიკის" ნაწილის შესავალში.

ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანმიმდევრობა:

1. განსახილველ მექანიკურ სისტემაზე მოვდოთ აქტიური ძალები, მათ შორის ხახუნის ძალებიც, თუ ბმები არაიდელურია და სისტემაში შემავალი სხეულების ინერციის ძალები;

2. განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი;

ა)ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემისათვის:

3. მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება ერთ-ერთ წერტილს (ან სხეულს) და ნახაზზე ვაჩვენოთ ძალების მოდების წერტილების (ან სხეულების) შესაძლო გადაადგილებები;.

4. ჩავწეროთ აქტიური ძალების და ინერციის ძალების ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი ყველა შესაძლო გადაადგილებაზე და გავუტოლოთ ის ნულს;

5.გამოვსახოთ ძალების მოდების ყველა წერტილის შესაძლო გადაადგილება ერთ-ერთი წერტილის შესაძლო გადაადგილებით;

6. განვსაზღვროთ სისტემაში შემავალი სხეულების ინერციის ძალები და მათი მომენტები და გამოვსახოთ ისინი საძიებელი აჩქარებით;

7. ჩასვათ მიღებული თანაფარდობები შესაძლო მუშაობის განტოლებაში, რომლის ამოხსნის შედეგად განვსაზღვროთ საძიებელი სიდიდე.

ბ) რამდენიმე თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის შემთხვევაში

3. ავირჩიოთ სისტემის წერტილების დამოუკიდებელი შესაძლო გადაადგილებები, რომელთა რაოდენობა შეესაბამება სისტემის თავისუფლების ხარისხს;

4. მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება, რომელიც შეესაბამება სისტემის ერთ-ერთ თავისუფლების ხარისხს, ამასთან ჩავთვალოთ, რომ შესაძლო

გადაადგილებები, რომლებიც შეესაბამება სისტემის დანარჩენ თავისუფლების ხარისხს, უდრის ნულს. ძალების მოდების წერტილების შესაძლო გადაადგილებები გამოვსახოთ სისტემის ერთი შესაძლო გადაადგილებით;

5. ჩავწეროთ მექანიკური სისტემაზე მოდებული აქტიური და ინერციის ძალების შესაძლო მუშაობათა ჯამი და გავუტოლოთ ეს ჯამი ნულს;

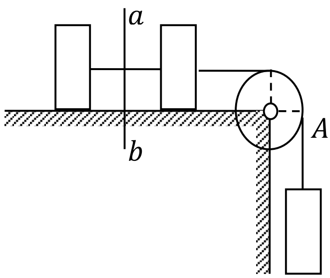
6. თანმიმდევრულად შევასრულოთ მე-4 და მე-5 პუნქტებში მითითებული მოქმედებები თითოეული დამოუკიდებლი შესაძლო გადაადგილებისათვის, შევადგინოთ განტოლებები, რომელთა რაოდენობა დამოუკიდებელი შესაძლო გადაადგილებათა რიცხვის ტოლია;

7. ამოვხსნათ მიღებული განტოლებათა სისტემა და განვსაზღვროთ საძიებელი სიდიდეები.

ამოცანები და ამოხსნები

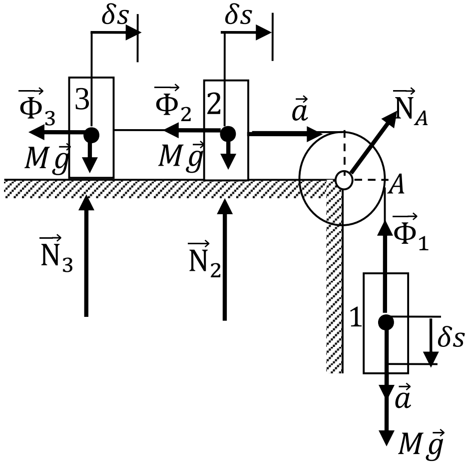
ამოცანა 47.1

სამი ერთნაირი M მასის ტვირთი შეერთებულია უჭიმარი უწონი ძაფით, რომელიც გადაკიდებულია უძრავ უწონ A ბლოკზე. ორი ტვირთი ძევს გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე, ხოლო მესამე ჩამოკიდებულია ვერტიკალურად. განსზღვრეთ სისტემის აჩქარება და ძაფის დაჭიმულობა ab კვეთში.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე მექანიკური სისტემის მოძრაობა, რომელიც შედგება ერთმანეთთან უჭიმარი უწონი ძაფით შეერთებული სამი ტვირთისაგან.

საანგარიშო სქემაზე (ნახ.1) ვაჩვენოთ აქტიური ძალები: ტვირთების სიმძიმის ძალები$-M\vec{g}$,ბმის რეაქციები $-\vec{N}$ და ინერციის ძალები $-\vec{\Phi}$. I ტვირთს მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება δs,იგივე გადაადგილებას მიიღებს2 და 3 ტვირთები. 1 ტვირთის a აჩქარება მიმართულია ქვევით, 2 და 3 ტვირთებიც იმოძრავებენ იგივე აჩქარებით. ტვირთების ინერციის ძალებია



$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = Ma. \qquad (1)$$ ნახ.1

შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება ტვირთების სისტემისათვის:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^\Phi = 0,$$

$$Mg\,\delta s - \quad \Phi_1\,\delta s - \quad \Phi_2\,\delta s - \quad \Phi_2\,\delta s = 0$$

ან

$$(Mg - 3Ma)\delta s = 0.$$

რადგან $\delta s \neq 0$, ამიტომ

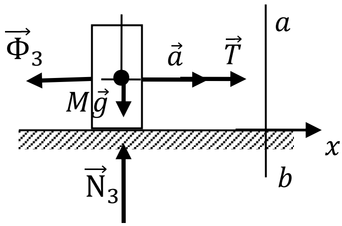
$$Mg - 3Ma = 0$$

აქედან ტვირთების აჩქარება

$$a = \frac{1}{3}g. \qquad (2)$$

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ ძაფის დაჭიმულობა ab კვეთში, ჩავწეროთ დალამბერის პრინციპი 3 ტვირთისათვის

შევადგინოთ 3 ტვირთისათვის საანგარიშო სქემა (ნახ.2). ვაჩვენოთ აქტიური ძალები: ტვირთების სიმძიმის ძალები$-M\vec{g}$, სიბრტყის რეაქციის ძალა$-\vec{N}_3$, ძაფის დაჭიმულობა $-\vec{T}$ და ინერციის ძალები $-\vec{\Phi}_3$.



ჩავწეროთ წონასწორობის განტოლება ჰორიზონტალურ Ox ღერძზე გეგმილებში:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad T - \Phi_3 = 0.$$

მაშინ (1) და (2) გამოსახულებების გათვალისწინებით

ნახ.2

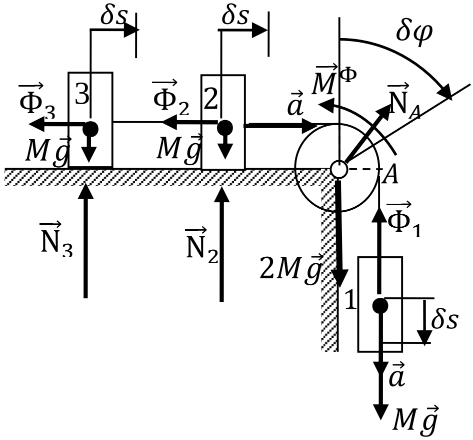
$$T = \Phi_3 = Ma = M\frac{1}{3}g = \frac{1}{3}Mg.$$

<u>*პ ა ს უ ხ ი:*</u> $a = \frac{1}{3}g; \;\; T = \frac{1}{3}Mg.$

ამოცანა 47.2

ამოხსენით წინა ამოცანა ბლოკის მასის გათვალისწინებით, თუ ტვირთების მოძრაობისას A ბლოკი ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო. ბლოკის-მთლიანი ერთგვაროვანი დისკოს მასა უდრის $2M$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული მექანიკური სისტემის მოძრაობა, საანგარიშო სქემაზე (ნახ.1)



ნახ.1

ვაჩვენოთ აქტიური ძალები: ტვირთების და ბლოკის სიმძიმის ძალები,, ბმის რეაქციები, ტვირთების ინერციის ძალები და A ბლოკის ინერციის ძალის მომენტი. სისტემის თავისუფლების ხარისხი უდრის ერთს. ჩავთვალოთ, რომ 1 ტვირთი მოძრაობს a აჩქარებით, მაშინ A ბლოკის კუთხური აჩქარება

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{r}},$$

(2) და (3) ტვირთების აჩქარებები სიდიდით ერთმანეთის ტოლია, ე.ი. $a_1 = a_2 = a_3 = a$.

ვიპოვოთ სისტემაში შემავალი სხეულების ინერციის ძალების და ბლოკის ინერციის ძალის მომენტის სიდიდეები:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = Ma. \qquad (1)$$

$$M^{\Phi} = J\varepsilon = \frac{2Mr^2}{2}\frac{a}{r} = Mra.$$

I ტვირთს მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება δs, იგივე გადაადგილებას მიიღებს დანარჩენი ორი ტვირთი. ამასთან A ბლოკის შესაზლო კუთხური გადაადგილება იქნება:

$$\delta\varphi = \frac{\delta s}{r}.$$

შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება განსახილველი სისტემისათვის ე.ი. გავუტოლოთ ნულს აქტიური ძალების და ინერციის ძალების ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი სისტემის შესაძლო გადაადგილებაზე:

$$Mg\ \delta s - M^{\Phi}\delta\varphi - \quad \Phi_1\,\delta s - \quad \Phi_2\,\delta s - \quad \Phi_2\,\delta s = 0.$$

ან

$$\left(Mg - M^{\Phi}\frac{1}{r} - \ \Phi_1\ - \ \Phi_2 - \ \Phi_2\right)\delta s = 0$$

რადგან $\delta s \neq 0$, ამიტომ

$$Mg - M^{\Phi}\frac{1}{r} - 3\Phi = 0$$

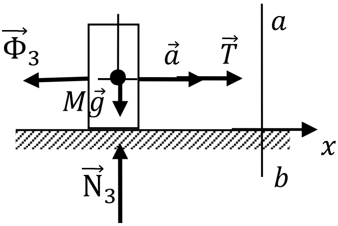
ან

$$Mg - Ma - 3Ma = 0$$

აქედან ტვირთების აჩქარება

$$a = \frac{1}{4}g. \qquad (2)$$

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ ძაფის დაჭიმულობა ab კვეთში, ჩავწეროთ დალამბერის პრინციპი 3 ტვირთისათვის დავხაზოთ 3 ტვირთისათვის საანგარიშო სქემა (ნახ.2). ვაჩვენოთ აქტიური ძალები: ტვირთების სიმძიმის ძალები$-M\vec{g}$, სიბრტყის რეაქციის ძალა$-\vec{N}_3$, ძაფის დაჭიმულობა $-\vec{T}$ და ინერციის ძალები $-\vec{\Phi}_3$.



ნახ.2

ჩავწეროთ წონასწორობის განტოლება ჰორიზონტალურ Ox ღერძზე ეგმილებში:

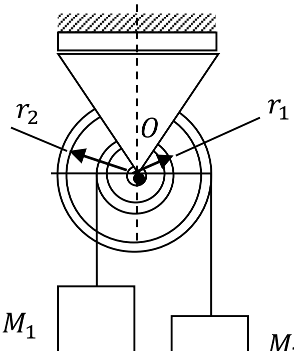
$$\sum F_{kx} = 0, \qquad T - \Phi_3 = 0.$$

მაშინ (1) და (2) გამოსახულებების გათვალისწინებით

$$T = \Phi_3 = Ma = M\frac{1}{4}g = \frac{1}{4}Mg.$$

პ ა ს უ ხ ი: $a = \frac{1}{4}g$; $T = \frac{1}{4}Mg$.

ამოცანა 47.3

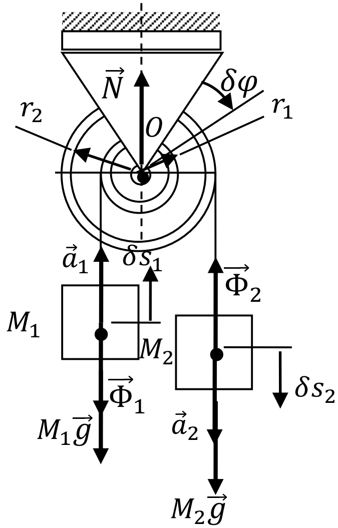


M_1 და M_2 მასის ორი ტვირთი ჩამოკიდებულია ორ ღუნვად და უჭიმარ ძაფზე, რომლებიც როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები, დახვეულია საერთო ღერძზე ჩამოცმულ r_1 და r_2 რადიუსის დოლებზე. ტვირთები მოძრაობს სიმძიმის ძალის მოქმედებით. განსაზღვრეთ დოლების კუთხური ε აჩქარება, თუ მათი მასა და ძაფისმასა უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული მექანიკური სისტემის მოძრაობა, რომლის თავისუფლების ხარისხი უდრის ერთს.

ვაჩვენოთ აქტიური ძალები: ტვირთების სიმძიმის ძალები,, აგრეთვე, ტვირთების ინერციის ძალები ჩავთვალოთ, რომ M_2 მასის ტვირთი მოძრაობს ქვევით. გამოვსახოთ ტვირთების აჩქარებები დოლის კუთხური აჩქარებით:

$$a_1 = \varepsilon r_1, \; a_2 = \varepsilon r_2.$$



ვიპოვოთ ტვირთების ინერციის ძალების სიდიდეები:

$$\Phi_1 = M_1 \, a_1 = M_1 \, r_1 \varepsilon,$$

$$\Phi_2 = M_2 \, a_2 = M_2 \, r_2 \varepsilon$$

დოლს მივანიჭოთ შესაძლო კუთხური გადაადგილება $\delta\varphi$, მაშინ M_1 ტვირთის შესაძლო გადაადგილება

$$\delta s_1 = r_1 \delta\varphi,$$

(1) ხოლო M_2 ტვირთის შესაძლო გადაადგილება

$$\delta s_2 = r_2 \delta\varphi, \qquad (2)$$

შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება განსახილველი სისტემისათვის ე.ი. გავუტოლოთ ნულს აქტიური ძალების და ინერციის ძალების ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი სისტემის შესაძლო გადაადგილებაზე:

$$M_2 g \;\delta s_2 - \Phi_2 \;\delta s_2 - \Phi_1 \;\delta s_1 - M_1 g \;\delta s_1 = 0$$

ან (1) და (2) ტოლობების გათვალისწინებით

$$M_2 g \; r_2 \delta\varphi - M_2 \, r_2 \varepsilon \;{}_2 \, \delta\varphi - M_1 g \; r_1 \delta\varphi - M_1 \, r_1 \varepsilon \; r_1 \, \delta\varphi = 0,$$

$$[(M_2 \; r_2 - M_1 \; r_1) g - (M_2 \, {r_2}^2 + M_1 \, {r_1}^{\,2}) \varepsilon] \, \delta\varphi = 0.$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0$, ამიტომ

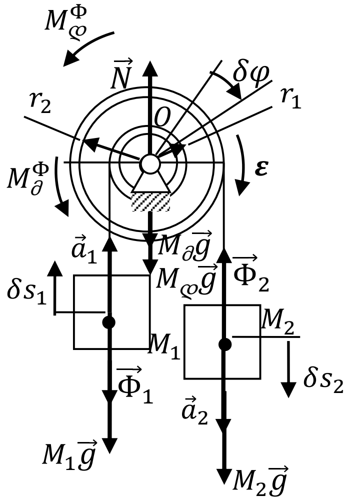
$$(M_2 \; r_2 - M_1 \; r_1) g - (M_2 \, {r_2}^2 + M_1 \, {r_1}^{\,2}) \varepsilon = 0.$$

აქედან დოლის კუთხური აჩქარება

$$\varepsilon = g \, \frac{M_2 \; r_2 - M_1 \; r_1}{M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2}.$$

<u>***პ ა ს უ ხ ი:***</u> $\varepsilon = g \, \frac{M_2 \; r_2 - M_1 \; r_1}{M_2 \, {r_2}^2 + M_1 \, {r_1}^{\,2}}.$

ამოცანა 47.4



წინა ამოცანის პირობებში განსაზღვრეთ კუთხური $\boldsymbol{\varepsilon}$ აჩქარება, თუ მხედველობაში მივიღებთ დოლების მასებს შემდეგი მონაცემების შემთხვევაში: $M_1 =$20კგ, $M_2 =$34კგ, $r_1 =$5სმ, $r_2 =$ 10სმ; დოლების მასებია: მცირესი-4კგ, დიდის-8კგ. დოლების მასა იგულისხმეთ თანაბრად განაწილებულად მათი გარე ზედაპირების გასწვრივ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული მექანიკური სისტემის მოძრაობა, რომლის თავისუფლების ხარისხი უდრის ერთს.

საანგარიშო სქემაზე (ნახ.1) ვაჩვენოთ აქტიური ძალები: ტვირთების და დოლების სიმძიმის ძალები,, ბმის რეაქციები, ტვირთების ინერციის ძალები და დოლების ინერციის ძალების მომენტები, ჩავთვალოთ რა, რომ ისინი მობრუნდებიან აჩქარებით საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით.

ვიპოვოთ ტვირთების ინერციის ძალების და მცირე და დიდი დოლების ინერციის ძალების მომენტების სიდიდეები:

ნახ.1

$$\Phi_1 = M_1 a_1 = M_1 r_1\varepsilon,$$

$$\Phi_2 = M_2 a_2 = M_2 r_2\varepsilon$$

$$M_{\partial}^{\Phi} = J_{\partial}\,\varepsilon = M_{\partial} r_1^2\varepsilon,$$

$$M_{\varphi}^{\Phi} = J_{\varphi}\,\varepsilon = M_{\varphi} r_2^2\varepsilon.$$

აზრობრივ გავაჩეროთ სისტემა, მივანიჭოთ დოლებს შესაძლო კუთხური გადაადგილება $\delta\varphi$ საათის ისრის ბრუნვის მიმართულებით, მაშინ M_1 ტვირთის შესაძლო გადაადგილება

$$\delta s_1 = r_1\delta\varphi, \qquad (1)$$

ხოლო M_2 ტვირთის შესაძლო გადაადგილება

$$\delta s_2 = r_2\delta\varphi, \qquad (2)$$

$$\delta s_2 = r_2\delta\varphi, \qquad (2)$$

შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება განსახილველი სისტემისათვის ე.ი. გავუტოლოთ ნულს აქტიური ძალების და ინერციის ძალების ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი სისტემის შესაძლო გადაადგილებაზე:

$$M_2 g\ \delta s_2 - \Phi_2\ \delta s_2 - M^{\Phi}_{\text{მ}}\delta\varphi - M^{\Phi}_{\text{დ}}\delta\varphi - \Phi_1\ \delta s_1 - M_1 g\ \delta s_1 = 0$$

ან (1) და (2) ტოლობების გათვალისწინებით

$$\left[(M_2 g\ r_2 - M_1\, g r_1) - \left(\Phi_1\, r_1 + \Phi_2\ r_2 + M^{\Phi}_{\text{მ}} + M^{\Phi}_{\text{დ}}\right)\right]\delta\varphi = 0.$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0,$ ამიტომ

$$(M_2\ r_2 - M_1\, r_1)g - \left(\mathrm{M}_1 r_1^2 + \mathrm{M}_2\, r_2^2 + M_{\text{მ}} r_1^2 + M_{\text{დ}} r_2^2\right)\varepsilon. = 0.$$

აქედან დოლის კუთხური აჩქარება

$$\varepsilon = \frac{(M_2\ r_2 - M_1\ r_1)g}{\mathrm{M}_1 r_1^2 + \mathrm{M}_2\, r_2^2 + M_{\text{მ}} r_1^2 + M_{\text{დ}} r_2^2} =$$

$$= \frac{(34 \cdot 0{,}1 - 20 \cdot 0{,}05) \cdot 9{,}81}{20 \cdot 0{,}05^2 + 34 \cdot 0{,}1^2 + 4 \cdot 0{,}05^2 + 8 \cdot 0{,}1^2} = 49\text{რად}/\text{წმ}^2).$$

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ ძაფის დაჭიმულობა, ჩავწეროთ დალამბერის პრინციპი 1 ტვირთისათვის M_1 ტვირთზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა$-M_1\vec{g}$, ძაფის დაჭიმულობა $-\vec{T}_1$ და ინერციის ძალა $-\vec{\Phi}_1$ (ნახ.2).

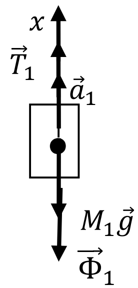
ჩავწეროთ წონასწორობის განტოლება ვერტიკალურ Ox ღერძზე გეგმილებში:

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad T_1 - M_1 g - \Phi_1 = 0.$$

მაშინ

$$T_1 = M_1 g + M_1\, a_1 = M_1(g + a_1) =$$

$$= M_1(g + r_1\varepsilon) = 20(9{,}81 + 0{,}05 \cdot 49) = 246(\text{ნ}).$$



ნახ.2

M_2 ტვირთზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა$-M_2\vec{g}$, ძაფის დაჭიმულობა $-\vec{T}_2$ და ინერციის ძალა $-\vec{\Phi}_2$ (ნახ.3).

ჩავწეროთ წონასწორობის განტოლება ვერტიკალურ Oy ღერძზე გეგმილებში:

$$\sum F_{ky} = 0, \qquad T_2 - M_2 g + \Phi_2 = 0.$$

მაშინ

$$T_2 = M_2 g - \Phi_2 = M_2 g - M_2\, a_2 = M_2(g - r_2\varepsilon) =$$

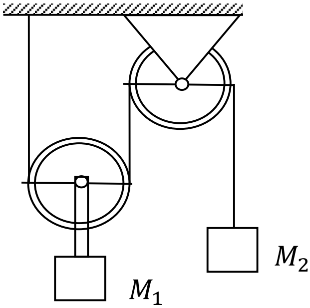
$$= 34(9{,}81 + 0{,}1 \cdot 49) = 167(\text{ნ}).$$

ნახ.3

<u>*პ ა ს უ ხ ი:*</u> $\varepsilon = 49\text{რად}/\text{წმ}^2;\ \ T_1 = 246\text{ნ};\qquad T_2 = 167\text{ნ}.$

ამოცანა 47.5

ნახაზზე ნაჩვენები ბლოკების სისტემაზე ჩამოკიდებულია ტვირთები: $M_1 =10$კგ მასის და $M_2 =8$კგ მასის. განსაზღვრეთ M_2 ტვირთის a_2 აჩქარება და ძაფის T დაჭიმულობა, თუ ბლოკების მასები უგულებელყოფილია.



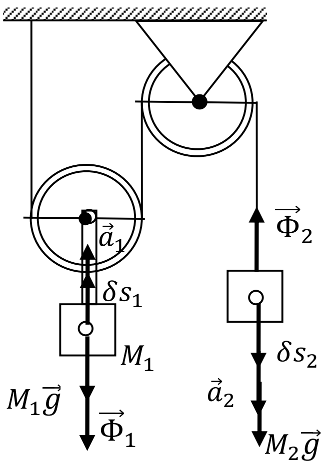
ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან M_1 და M_2 ტვირთები მოძრაობენ გადატანით, ამიტომ თუ მათზე მოვდებათ $M_1\vec{g}$ და $M_2\vec{g}$ სიმძიმის ძალებს და $\vec{\Phi}_1$ და $\vec{\Phi}_2$ ინერციის ძალებს (ნახ.1), მაშინ დალამბერის პრინციპის თანახმად მიღებული ძალთა სისტემა პირობითად შეგვიძლია ჩავთვალოთ გაწონასწორებულად.

ვიპოვოთ ტვირთების ინერციის ძალების სიდიდეები:

$$\Phi_1 = M_1\, a_1 = M_1\, r_1\varepsilon,$$

$$\Phi_2 = M_2\, a_2 = M_2\, r_2\varepsilon$$

მათ აქვთ $\vec{a}_1$ და $\vec{a}_2$ აჩქარებების საპირისპირო მიმართულებები.



მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება და შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{\Phi} = 0,$$

$$(M_2 g - \Phi_2)\, \delta s_2 + (M_1 g + \Phi_1)\, \delta s_1 = 0.$$

ჩავსვათ მიღებულ განტოლებაში შემდეგი თანაფარდობები

:

$$\Phi_2 = M_2\, a_2,$$

$$\Phi_1 = M_1\, a_1 = M_1 \frac{a_2}{2}, \qquad \delta s_2 = 2\, \delta s_1,$$

მივიღებთ:

$$\left(2M_2 g - M_2\, a_2 - M_1 g - \frac{1}{2} M_1\, a_2\right) \delta s_1 = 0.$$

რადგან $\delta s_1 \neq 0$, ამიტომ

$$2M_2 g - M_2\, a_2 - M_1 g - \frac{1}{2} M_1\, a_2 = 0.$$

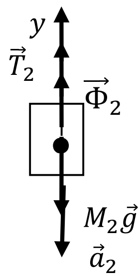
ნახ.1

აქედან M_2 ტვირთის აჩქარება

$$a_2 = \frac{4M_2 - 2M_1}{4M_2 + M_1} g =$$

$$= \frac{4 \cdot 8 - 2 \cdot 10}{4 \cdot 8 + 10} \cdot 9{,}8 = 2{,}8\left(\frac{\text{მ}}{\text{წმ}^2}\right)$$

განვსაზღვროთ ძაფის დაჭიმულობა. ამისათვის აზრობრივ გავჭრათ ძაფი მის მარჯვენა კიდურა ნაწილში და განვიხილოთ M_2 ტვირთის მოძრაობა. დალამბერის პრინციპის თანახმად ძალთა სისტემა, რომელის შედგება $M_2\vec{g}$ სიმძიმის ძალის, ძაფის T დაჭიმულობის და $\overrightarrow{\Phi}_2$ ინერციის ძალისაგან, ექვივალენტურია ნულის (ნახ.2), ჩავწეროთ წონასწორობის განტოლება ვერტიკალურ Oy ღერძზე გეგმილებში:



ნახ.2

$$\sum F_{ky} = 0, \qquad T_2 + M_2\, a_2 - M_2 g = 0.$$

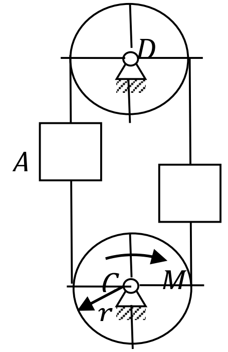
აქედან

$$T = M_2(g - a_2) = 8(9{,}8 - 2{,}8) = 56(\text{ნ}).$$

<u>*პ ა ს უ ხ ი:*</u> $a_2 = 2{,}8\,\text{მ}/\text{წმ}^2$; $T = 246\,\text{ნ}$.

ამოცანა 47.6

ამწე მანქანის C ბორბალზე მოდებულია M მაბრუნი მომენტი. განსაზღვრეთ ზევით ასაწევი M_1 მასის A ტვირთის აჩქარება, თუ B საპირწონეს მასა არის M_2, ხოლო r რადიუსისა და M_2 მასის C და D ბორბლები წარმოადგენს ერთგვაროვან ცილინდრებს. ღვედის მასა უგულებელყოფილია.



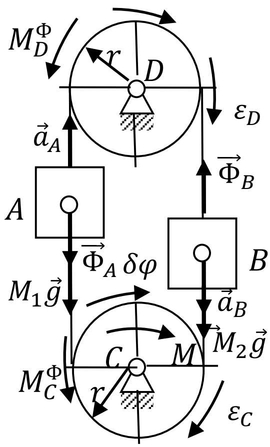
ამოხსნა. ქვედა C ბორბალზე მოდებული M მაბრუნი მომენტის, $M_1\vec{g}$ და $M_2\vec{g}$ სიმძიმის ძალების მოქმედებით A და B ტვირთები მოძრაობენ გადატანითად. ვიგულისხმოთ, რომ C და D ბორბლები ბრუნავენ აჩქარებით საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. ტვირთებზე მოვდოთ $\vec{\Phi}_A$ და $\vec{\Phi}_B$ ინერციის ძალები, ხოლო C და D ბორბლებზე- M_C^{Φ} და M_D^{Φ} ინერციის მომენტები, მივმართოთ რა ისინი შესაბამისი აჩქარებების საპირიპიროდ (იხ. ნახაზი).

მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება და შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{\Phi} = 0,$$

$$(M_2 g - \Phi_B) r\delta\varphi - (M_1 g + \Phi_A) r\delta\varphi +$$

$$+\left(M - M_C^{\Phi} - M_D^{\Phi}\right)\delta\varphi = 0.$$



ჩავსვათ მიღებულ განტოლებაში შემდეგი თანაფარდობები:

$$\Phi_A = M_1 a, \quad \Phi_B = M_2 a,$$

$$M_C^{\Phi} = J_C\, \varepsilon_C = \frac{1}{2} M_3 r^2 \frac{a}{r} = \frac{1}{2} M_3 r a,$$

$$M_D^{\Phi} = J_D\, \varepsilon_D = \frac{1}{2} M_3 r^2 \frac{a}{r} = \frac{1}{2} M_3 r a,$$

მივიღებთ:

$$[M + (M_2 - M_1) g r -$$

$$-(M_1 + M_2 + M_3) a r]\delta\varphi = 0.$$

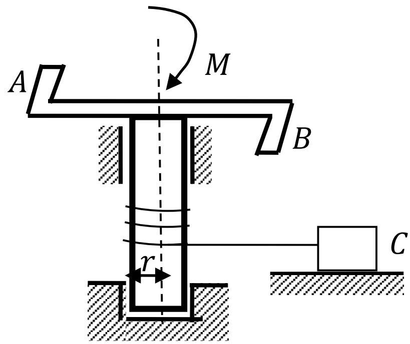
რადგან $\delta\varphi \neq 0,$ ამიტომ ნულის ტოლი იქნება კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება. აქედან

$$\boldsymbol{a} = \frac{M + (M_2 - M_1)gr}{(M_1 + M_2 + M_3)ar}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\boldsymbol{a} = \frac{M+(M_2-M_1)gr}{(M_1+M_2+M_3)ar}.$

ამოცანა 47.7

r რადიუსის კაბესტანის ლილვი მოძრაობაში მოდის მუდმივი მაბრუნი M მომენტით, რომელიც მოდებულია AB სახელურზე. განსაზღვრეთ m მასის C ტვირთის აჩქარება, თუ ორ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე ტვირთის სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი არის f. ბაგირის და კაბესტანის მასები უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ტვირთზე მოქმედ ძალებს: $m\vec{g}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{ხახ}$ და მაბრუნ M მომენტს უნდა დაემატოს $\vec{\Phi}$ ინერციის ძალა (იხ. ნახაზი).

მაშინ ძალთა სისტემა, რომელიც მოდებულია კაბესტანის ლილვზე და ტვირთზე, იქნება გაწონასწორებული. კაბესტანის ლილვს მივანიჭოთ შესაძლო კუთხური გადაადგილება $\delta\varphi$ და შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^\Phi = 0,$$

$$M\delta\varphi - (F_{ხახ} + \Phi)r\delta\varphi = 0, \quad (1)$$

სადაც

$\Phi = ma$; $F_{ხახ} = fmg$;

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

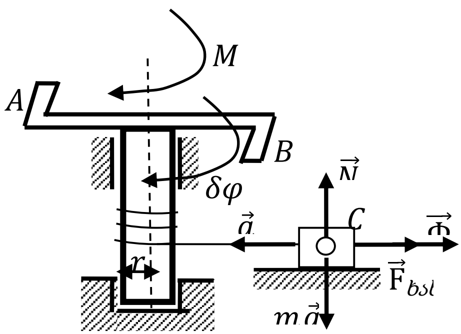
$(M - fmgr - mra)\delta\varphi = 0.$

რადგან $\delta\varphi \neq 0$, ამიტომ

$M - fmgr - mra = 0.$

აქედან C ტვირთის აჩქარება

$$a = \frac{M - fmgr}{mr}.$$

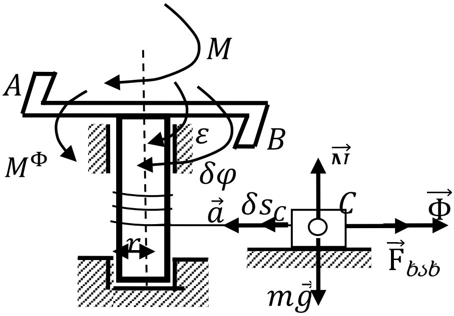


პ ა ს უ ხ ი: $a = \frac{M - fmgr}{mr}$

ამოცანა 47.8

ამოხსენით წინა ამოცანა კაბესტანის მასის გათვალისწინებით, რომლის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ უდრის J.

ა მ ო ხ ს ნ ა.



მექანიკური სისტემა პირობით იქნება წონასწორობაში, თუ მოქმედ ძალებს: $m\vec{g}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{ხახ}$ და მაბრუნ M მომენტს დაემატება ტვირთის $\vec{\Phi}$ ინერციის ძალა და კაბესტანის ინერციის ძალის მომენტი, რომელთა მიმართულებები შესაბამისი აჩქარებების საპირისპიროა.

კაბესტანის ლილვს მივანიჭოთ შესაძლო კუთხური გადაადგილება $\delta\varphi$ და შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{\Phi} = 0,$$

$$\left(M - M^{\Phi}\right)\delta\varphi - (F_{ხახ} + \Phi) r\delta\varphi = 0, \qquad (1)$$

სადაც $\Phi = ma$; $F_{ხახ} = fmg$; $M^{\Phi} = J\varepsilon = J\frac{a}{r}$; $r\delta\varphi = \delta\varphi_C -$ C ტვირთის შესაძლო გადაადგილებაა

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\left[M - fmgr - \left(\frac{J}{r} + mr\right)a\right]\delta\varphi = 0.$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0$, ამიტომ ნულის ტოლი იქნება კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება.

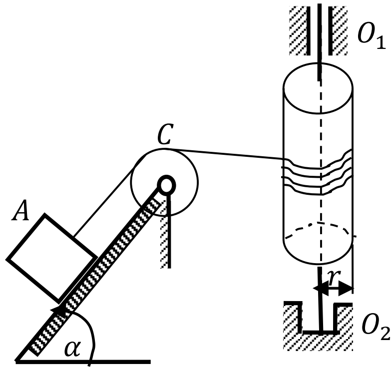
$$M - fmgr - \left(\frac{J}{\ } + mr\right)a = 0.$$

აქედან C ტვირთის აჩქარება

$$a = \frac{r(M - fmgr)}{J + mr^2}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $a = \frac{r(M-fmgr)}{J+mr^2}$

ამოცანა 47.9

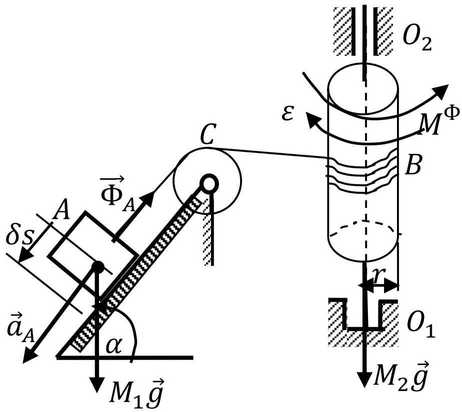


M_1 მასის A ტვირთს, რომელიც ეშვება ჰორიზონტთან α კუთხით დახრილ გლუვ სიბრტყეზე, უწონი და უწიმარი ძაფის საშუალებით ბრუნვაში მოჰყავს r რადიუსისა და M_2 მასის B დოლი. განსაზღვრეთ დოლის კუთხური აჩქარება, თუ დოლი წარმოადგენს ერთგვაროვან წრიულ ცილინდრს. უძრავი C ბლოკის მასა უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოვდოთ A ტვირთზე და B დოლზე $M_1\vec{g}$ და $M_2\vec{g}$ სიმძიმის ძალები, A ტვირთის ინერციის ძალა Φ_A და დოლის ინერციის ძალის მომენტი:

$$M^{\Phi} = J_z\varepsilon,$$

სადაც $J_z = \frac{M_2r^2}{2}$ – დოლის ინერციის მომენტია ბრუნვის ღერძის მიმართ.



A ტვირთის აჩქარება

$$a_A = r\varepsilon.$$

ტვირთს მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება δs, მაშინ დოლი შემობრუნდება კუთხით

$$\delta\varphi = \frac{\delta s}{r}.$$

ჩავწეროთ დინამიკის ზოგადი განტოლება;

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^\Phi = 0,$$

$$M_1 g\delta s \cdot sin\alpha - \Phi_A \delta s - M^\Phi \delta s = 0,$$

სადაც $\Phi_A = M_1 a_A = M_1 \mathrm{r}\varepsilon;\quad M^\Phi = J_z\varepsilon = \frac{M_2 r^2}{2}\varepsilon.$

მაშინ

$$M_1 gsin\alpha \cdot r\delta\varphi - M_1 \mathrm{r}\varepsilon \cdot r\delta\varphi - \frac{M_2 r^2}{2}\varepsilon\delta\varphi = 0.$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0,$ ამიტომ

$$M_1 gsin\alpha - M_1 \mathrm{r}\varepsilon - \frac{M_2}{2} r\varepsilon = 0.$$

აქედან

$$\varepsilon = \frac{2M_1 gsin\alpha}{r(2M_1 + M_2)}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\varepsilon = \frac{2M_1 gsin\alpha}{r(2M_1+M_2)}.$

ამოცანა 47.10

კაცი აწვება ურიკას $\vec{F}$ ჰორიზონტალური ძალის მოდებით. განსაზღვრეთ ურიკის ძარას აჩქარება, თუ ძარას მასაა M_1, M_2 −ოთხი თვლიდან თითოეულის მასა, r −თვლის რადიუსი; $f_გ$ − გორვის ხახუნის კოეფიციენტი. თვლები ჩათვალეთ რელსებზე უსრიალოდ მგორავ ერთგვაროვან წრიულ დისკოებად.

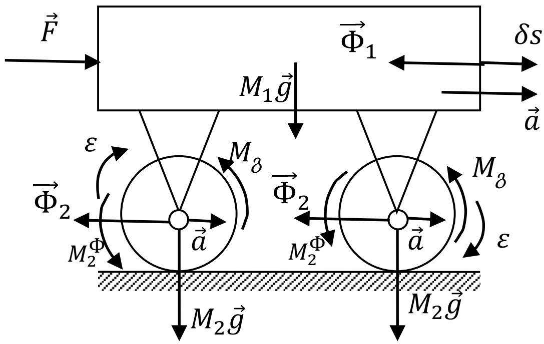
ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე ძარაზე მოდებული ძალები: ძარას სიმძიმის ძალა $-M_1\vec{g}$, თითოეული თვლის სიმძიმის ძალა $-M_2\vec{g}$, ძარას ინერციის ძალა $-\overrightarrow{\Phi}_1$, ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორი $-\overrightarrow{\Phi}_2$ და M_2^Φ ნაკრები მომენტი და თითოეული თვლის $M_გ$ გორვის წინააღმდეგობის მომენტი $-M_გ$.

ურიკას მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება δs. იგივე გადაადგილებას მიიღებს თითოეული თვლის ღერძი, შედეგად თვალი შემობრუნდება კუთხით

$$\delta\varphi = \frac{\delta s}{r}.$$

თუ ურიკას აჩქარებაა a, მაშინ თვლის კუთხური აჩქარება

$$\varepsilon = \frac{a}{r}.$$



ჩავწეროთ დინამიკის ზოგადი განტოლება;

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{\Phi} = 0,$$

$$F\delta s - 4M_{\text{გ}}\delta\varphi - \Phi_1\delta s - 4(\Phi_2\delta s + M^{\Phi}\delta\varphi) = 0, \qquad (1)$$

სადაც

$$M_{\text{გ}} = \left(\frac{M_1}{4} + M_2\right) g f_{\text{გ}};\ \Phi_1 = M_1 a;\ \ \Phi_2 = M_2 a;$$

$$M^{\Phi} = J\varepsilon = \frac{M_2 r^2}{2}\varepsilon = \frac{M_2 ra}{2}.$$

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$F\delta s - 4\left(\frac{M_1}{4} + M_2\right) g f_{\text{გ}} \frac{\delta s}{r} - \quad {}_1 a\delta s - 4\left(M_2 a + \frac{M_2 ra}{2}\frac{1}{r}\right)\delta s = 0.$$

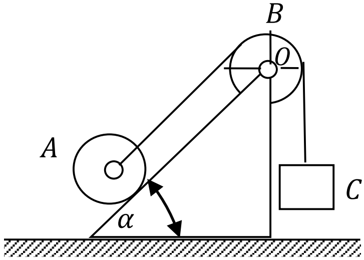
შევკვეცოთ $\delta s \neq 0$- ზე და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება $a -$ ს მიმართ:

$$F - \frac{f_{\text{გ}}}{r}(M_1 + 4M_2)g = a(M_1 + 6M_2),$$

$$a=\frac{F-\frac{f_{\text{ვ}}}{r}(M_1+4M_2)g}{M_1+6M_2}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $a=\frac{F-\frac{f_{\text{ვ}}}{r}(M_1+4M_2)g}{M_1+6M_2}.$

ამოცანა 47.11



M_1 მასის A საგორავს დახრილ სიბრტყეზე ქვევით უსრიალოდ გორვისას B ბლოკზე გადადებული უწონი და უწიმარი ძაფის საშუალებით ზევით მიაქვს M_2 მასის C ტვირთი. B ბლოკი ბრუნავს მისი სიბრტყის პერპენდიკულარული O ღერძის გარშემო. A საგორავი და B ბლოკი ერთგვაროვანი, ერთნაირი რადიუსისა და მასის წრიული დისკოებია. სიბრტყე ჰორიზონტთან დახრილია α კუთხით. განსაზღვრეთ საგორავის ღერძის აჩქარება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემაზე მოდებული აქტიური ძალები: სიმძიმის ძალები $M_1\vec{g}$ და $M_2\vec{g}$, აგრეთვე, A საგორავის ინერციის ძალა $-\vec{\Phi}_A$, C ტვირთის ინერციის ძალა $-\vec{\Phi}_C$ და A საგორავის და B ბლოკის ინერციის ძალების მომენტები M_A^{Φ} და M_B^{Φ} და გამოვსახოთ ისინი საგორავის ღერძის საძიებელი აჩქარებით:

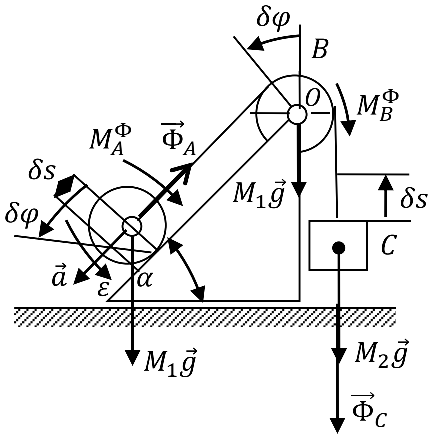
$$\Phi_A = M_1 a,$$

$$\Phi_C = M_2 a,$$

$$M_A^\Phi = M_B^\Phi = \frac{M_1 r^2}{2}\frac{a}{r} = \frac{M_1 ra}{2}.$$

სადაც $J = \frac{M_1 r^2}{2} -$ საგორავის (ბლოკის) ინერციის მომენტია მისი ღერძის მიმართ; საგორავის (ბლოკის) კუთხური აჩქარება

$$\varepsilon = \frac{a}{r}.$$



საგორავის ღერძს მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება δs, C ტვირთი მიიღებს იგივე გადაადგილებას, შედეგად საგორავი და ბლოკი შემობრუნდება კუთხით

$$\delta\varphi = \frac{\delta s}{r}.$$

ჩავწეროთ დინამიკის ზოგადი განტოლება;

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^\Phi = 0,$$

ან გაშლილი სახით

$$M_1 g sin\alpha \cdot \delta s - M_2 g \cdot \delta s - \Phi_A \delta s - M_A^\Phi \delta\varphi - M_B^\Phi \delta\varphi - \Phi_A \delta s = 0, \qquad (1)$$

ჩავსვათ (1) განტოლებაში ინერციის ძალების და სხეულების ინერციის ძალების მომენტები, მასინ ის მიირებს სახეს:

$$M_1 g sin\alpha \cdot \delta s - M_2 g \cdot \delta s - M_1 a \delta s - M_A^\Phi \delta\varphi - \frac{M_1 ra}{2}\frac{\delta s}{r} -$$

$$-\frac{M_1 ra}{2}\frac{\delta s}{r} - M_2 a \delta s = 0$$

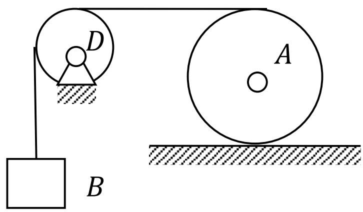
შევკვეცოთ $\delta s \neq 0$- ზე და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება $a -$ ს მიმართ:

$$(M_1 sin\alpha - M_2) g = a(2M_1 + M_2),$$

$$a = g\frac{M_1 sin\alpha - M_2}{2M_1 + M_2}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $a = g\frac{M_1 sin\alpha - M_2}{2M_1 + M_2}$.

ამოცანა 47.12



M_1 მასის B ტვირთს მოძრაობაში მოჰყავს M_2 მასის და r რადიუსის A ცილინდრული საგორავი მასზე დახვეული თასმის საშუალებით. განსაზღვრეთ ტვირთის აჩქარება, თუ გორვა ხდება უსრიალოდ და გორვის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის $f_გ$. D ბლოკის მასა უგულებელყოფილია.

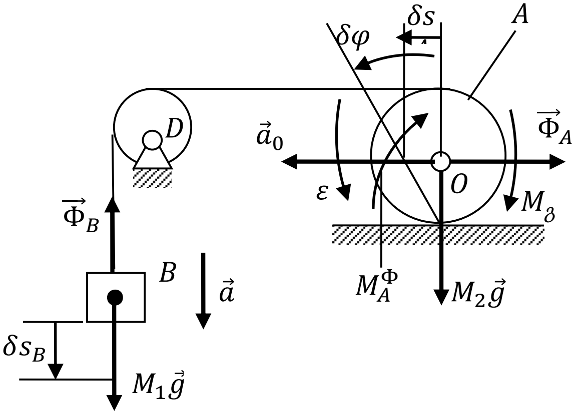
ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემაზე მოდებული ძალები: B ტვირთის და A საგორავის სიმძიმის ძალები- $M_1\vec{g}$ და $M_2\vec{g}$, საგორავის გორვის წინაღობის მომენტი $-M_გ$, A საგორავის ინერციის ძალა $-\overrightarrow{\Phi}_A$, B ტვირთის ინერციის ძალა $-\overrightarrow{\Phi}_C$ და A საგორავის ინერციის ძალის მომენტი M_A^{Φ} . ამ ძალების მოქმედებით სისტემა წონასწორობაშია.

მივანიჭოთ B ტვირთის შესაძლო გადაადგილება $\delta s_B = \delta s$. A საგორავის ღერძი გადაადგილდება მანძილით:

$$\delta s_0 = \frac{\delta s}{2},$$

შედეგად საგორავი შემობრუნდება კუთხით

$$\delta\varphi = \frac{\delta s_0}{r} = \frac{\delta s}{2r}.$$



ჩავწეროთ დინამიკის ზოგადი განტოლება;

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^a + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{\Phi} = 0,$$

ან გაშლილი სახით

$$M_1 g \cdot \delta s - M_ბ \cdot \delta\varphi - \Phi_B \delta s - \Phi_A \frac{\delta s}{2} - M_A^{\Phi} \delta\varphi = 0, \qquad (1)$$

განვსაზღვროთ საგორავის და ტვირთის ინერციის ძალები:

$$\Phi_B = M_1 a_B = M_1 a,$$

$$\Phi_A = M_2 a_O = M_2 \frac{a}{2},$$

საგორავის ინერციის ძალების მომენტი

$$M_A^{\Phi} = J_0 \varepsilon = \left| \begin{matrix} J_0 = \dfrac{M_2 r^2}{2} \\ \varepsilon = \dfrac{a_O}{2} = \dfrac{a}{2r} \end{matrix} \right| = \frac{M_2 r a}{4}$$

და გორვის წინაღობის მომენტი

$$M_ბ = M_2 g f_ბ.$$

მიღებული შედეგები: ჩავსვათ (1) განტოლებაში

$$M_1 g \cdot \delta s - M_2 g f_ბ \frac{\delta s}{2r} - M_1 a \delta s - M_2 \frac{a}{2} \frac{\delta s}{2} - \frac{M_2 a r}{4} \frac{\delta s}{2r} = 0.$$

შევკვეცოთ $\delta s \neq 0$- ზე და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება $a-$ ს მიმართ:

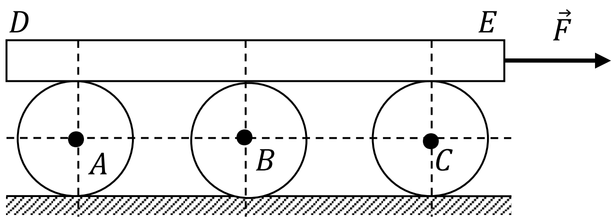
$$\left(M_1 - M_2\frac{f_\partial}{2r}\right)g = a\left(M_1 + \frac{3}{8}M_2\right),$$

$$a = 8g\frac{M_1 - M_2\frac{f_\partial}{2r}}{8M_1 + 3M_2}.$$

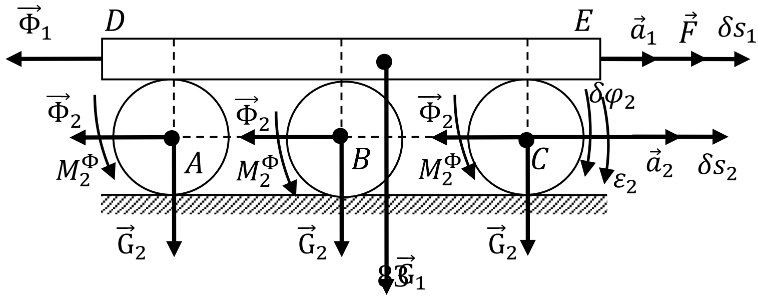
პ ა ს უ ხ ი: $a = 8g\frac{M_1 - M_2\frac{f_\partial}{2r}}{8M_1+3M_2}.$

ამოცანა 47.13

M_1 მასის DE ღერო ძევს M_2 მასის სამ ერთნაირ A, B და C საგორავზე. ღეროზე ჰორიზონტალურად მარჯვნივ მოდებულია $\vec{F}$ ძალა, რომელსაც მოძრაობაში მოჰყავს ძელი საგორავებთან ერთად. სრიალს ღეროსა და საგორავებს შორის და საგორავებს და ჰორიზონტალურ სიბრტყეს შორის ადგილი არა აქვს. იპოვეთ DE ღეროს აჩქარება, თუ საგორავები ერთგვაროვანი წრიული ცილინდრებია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემაზე მოდებული აქტიური ძალები: საგორავების სიმძიმის ძალები- $\vec{G}_2$, ღეროს სიმძიმის ძალა $\vec{G}_1$.



მოვდოთ ინერციის ძალები: DE ღერო ასრულებს გადატანით მოძრაობას და მისი ინერციის ძალა

$$\Phi_1 = M_1 a_1,$$

საგორავები ასრულებენ ბრტყელ მოძრაობას, მათი ინერციის ძალა

$$\Phi_2 = M_2 a_2,$$

ხოლო ინერციის ძალების მომენტი

$$M_2^{\Phi} = J_2 \varepsilon_2.$$

მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება δs_1 და შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება:

$$F\delta s_1 - \Phi_1 \cdot \delta s_1 - 3\Phi_2 \cdot \delta s_2 - 3M_2^{\Phi}\delta\varphi_2 = 0, \qquad (1)$$

ყველა შესაძლო გადაადგილება გამოვსახოთ δs_1–ით:

$$\delta s_2 = \frac{\delta s_1}{2}, \quad \delta\varphi = \frac{\delta s_1}{2r},$$

სადაც r –საგორავების რადიუსია.

განვსაზღვროთ ინერციის ძალები:

$$\Phi_1 = M_1 a_1,$$

$$\Phi_2 = M_2 a_2 = M_2 \frac{a_1}{2},$$

რადგან $a_2 = \frac{a_1}{2}$.

საგორავების ინერციის ძალების მომენტი

$$M_2^{\Phi} = J_2 \varepsilon_2,$$

სადაც $J_2 = \frac{M_2 r^2}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{a_1}{2r}$.

მაშინ

$$M_2^{\Phi} = \frac{M_2 r^2}{2}\frac{a_1}{2r} = \frac{M_2 r a_1}{4}.$$

მიღებული შედეგები ჩავსვათ (1) განტოლებაში

$$F\delta s_1 - M_1 a_1 \cdot \delta s_1 - 3M_2 \frac{a_1}{2}\frac{\delta s_1}{2} - 3\frac{M_2 r a_1}{4}\frac{\delta s_1}{2r} = 0,$$

აქედან

$$F = a_1\left(M_1 + \frac{3}{4}M_2 + \frac{3}{8}M_2\right) = \frac{a_1}{8}(8M_1 + 3M_2),$$

$$a_1 = \frac{8F}{8M_1 + 3M_2}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $a_1 = \frac{8F}{8M_1+3M_2}$.

ამოცანა 47.14

განსაზღვრეთ 47.5 ამოცანაში M_2 ტვირთის აჩქარება ბლოკების-ერთგვაროვანი მთლიანი დისკოების მასების მხედველობაში, თუ თითოეული მათგანის მასაა 4კგ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემაზე მოდებული აქტიური ძალები: ტვირთების სიმძიმის ძალები- $\vec{G}_1$ და $\vec{G}_2$, ბლოკების სიმძიმის ძალები $\vec{G}_3$ და $\vec{G}_4$. მოვდოთ, აგრეთვე, ინერციის ძალები. ტვირთები მოძრაობენ გადატანით. მათი ინერციის ძალები:

$$\Phi_1 = M_1 a_1,$$
$$\Phi_2 = M_2 a_2.$$

ბლოკი 3 ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო და მისი ინერციის ძალების მომენტი

$$M_3^\Phi = J_3\varepsilon_3.$$

ბლოკი 4 ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას, მისი ინერციის ძალა

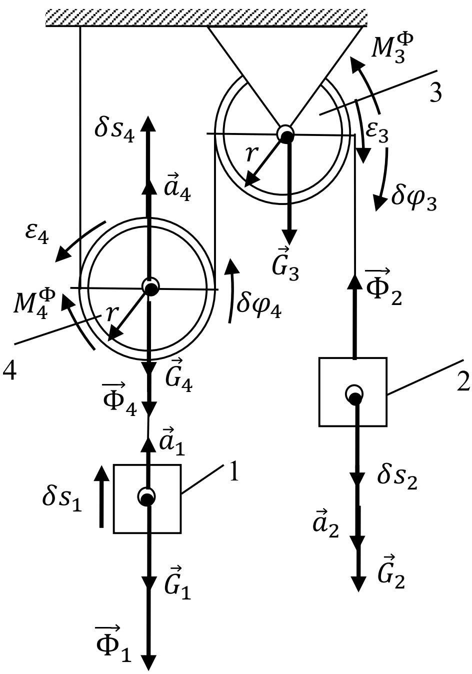
$$\Phi_4 = M_4 a_4,$$

ხოლო ინერციის ძალების მომენტი

$$M_4^\Phi = J_4\varepsilon_4.$$

მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება δs_1 და შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება:

$$\mathrm{G}_2\delta s_2 - \Phi_2 \cdot \delta s_2 - -M_3^\Phi\delta\varphi_3 - \Phi_4 \cdot \delta s_4 - -M_4^\Phi\delta\varphi_4 - -\Phi_1 \cdot \delta s_1 - -\mathrm{G}_1 \cdot \delta s_1 - \mathrm{G}_4 \cdot \delta s_4 = 0.(1)$$



ყველა შესაძლო გადაადგილება გამოვსახოთ მეორე ტვირთის δs_2 შესაძლო გადაადგილებით:

$$\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_2}{r},$$
$$\delta s_4 = \frac{\delta s_2}{2} = \delta s_1,$$
$$\delta\varphi_4 = \frac{\delta s_2}{2r},$$

სადაც r –3 და 4 ბლოკების რადიუსია.

გამოვსახოთ ყველა ინერციის ძალა და ინერციის ძალების მომენტები a_2 აჩქარებით. რადგან

$$J_3 = \frac{m_3 r^2}{2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{a_2}{r}, \quad a_4 = \frac{a_2}{2}, \; J_4 = \frac{m_4 r^2}{2}, \qquad \varepsilon_4 = \frac{a_2}{2r}, \; a_1 = \frac{a_2}{2},$$

ამიტომ

$$M_3^{\Phi} = \frac{m_3 r^2}{2}\frac{a_2}{r} = \frac{m_3 r a_2}{2};$$
$$\Phi_4 = m_4 \frac{a_2}{2};$$
$$M_4^{\Phi} = \frac{m_4 r^2}{2}\frac{a_2}{2r} = \frac{m_4 r a_2}{4};$$
$$\Phi_1 = m_1 \frac{a_2}{2}.$$

მიღებული შედეგები ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$m_2 g\delta s_2 - m_2 a_2 \delta s_2 - m_3 \frac{r a_2}{2}\frac{\delta s_2}{r} - m_4 \frac{a_2}{2}\frac{\delta s_2}{2} -$$
$$-m_4 g \frac{\delta s_2}{2} - m_1 g \frac{\delta s_2}{2} - m_1 \frac{a_2}{2}\frac{\delta s_2}{2} = 0.$$

მიღებული განტოლება შევკვეცოთ $\delta s \neq 0$- ზე და ჩავწეროთ იგი შემდეგი სახით:

$$m_2 g - m_4 \frac{g}{2} - m_1 \frac{g}{2} = a_2\left(m_2 + \frac{m_3}{2} + \frac{m_4}{4} + \frac{m_4}{8} + \frac{m_1}{4}\right)$$

ან

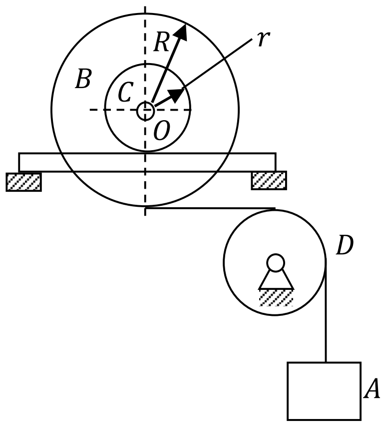
$$\frac{g}{2}(2m_2 - m_4 - m_1) = \frac{a_2}{8}(8m_2 + 3m_3 + 3m_4 + 2m_1).$$

აქედან

$$a_2 = \frac{4g(2m_2 - m_4 - m_1)}{8m_2 + 3m_3 + 3m_4 + 2m_1} = \frac{4 \cdot 9{,}8(2 \cdot 8 - 10 - 4)}{8 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 10} = 0{,}7\left(\frac{მ}{წმ^2}\right)$$

<u>*პ ა ს უ ხ ი:*</u> a_2=0,7 მ/წმ^2

ამოცანა 47.15



M_1 მასის A ტვირთი ქვევით დაშვებისას B ბორბალზე დახვეული და უძრავ B ბლოკზე გადაგდებული უწონი დაუწიმარი ძაფის საშუალებით აიძულებს C ლილვს იგოროს უსრიალოდ ჰორიზონტალურ რელსზე. R რადიუსის B ბორბალი ხისტად ჩამოცმულია r რადიუსის C ლილვზე; მათი საერთო მასა არის M_2, ხოლო ინერციის რადიუსი ნახაზის სიბრტყის მართობული O ღერძის მიმართ $-\rho$. იპოვეთ A ტვირთის აჩქარება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემაზე მოდებული აქტიური ძალები: ტვირთების სიმძიმის ძალები- $\vec{G}_1$ და $\vec{G}_2$. მოვდოთ, აგრეთვე, ინერციის ძალები. A ტვირთი მოძრაობს გადატანით. მასი ინერციის ძალა:

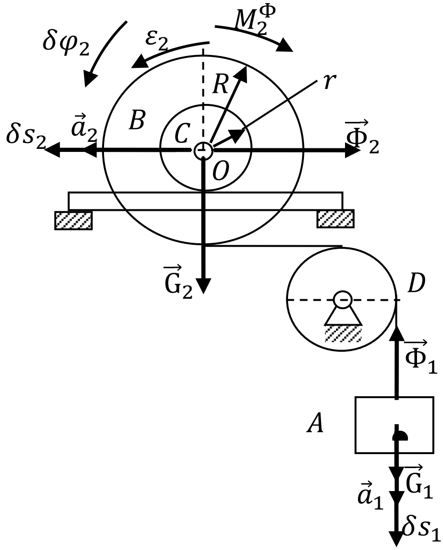
$$\Phi_1 = M_1 a_1.$$

ბლოკი 4 ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას, მისი ინერციის ძალა

$$\Phi_2 = M_2 a_2,$$

ხოლო ინერციის ძალების მომენტი

$$M_2^{\Phi} = J_2 \varepsilon_2.$$



მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება და შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება:

$$G_1 \cdot \delta s_1 - \Phi_1 \cdot \delta s_1 - \Phi_2 \cdot \delta s_2 - - M_2^{\Phi} \delta\varphi_2 = 0. \qquad (1)$$

ყველა შესაძლო გადაადგილება გამოვსახოთ A ტვირთის δs_1 შესაძლო გადაადგილებით:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_1}{R-r},$$

$$\delta \quad {}_2 = \delta s_1 \frac{r}{R-r}.$$

რადგან

$$a_2 = a_1 \frac{r}{R-r}, \; J_2 = M_2 \rho^2, \qquad \varepsilon_2 = \frac{a_1}{R-r},$$

ამიტომ

$$\Phi_2 = \frac{M_2 r}{R-r} a_1;$$

$$M_2^{\Phi} = M_2 \frac{\rho^2 a_1}{R-r}.$$

მიღებული შედეგები ჩავსვათ (1) განტოლებაში:

$$M_1 g \delta s_1 - M_1 a_1 \delta s_1 - M_2 \frac{a_1 r}{R-r} \frac{r}{R-r} \delta s_1 - M_2 \frac{\rho^2 a_1}{R-r} \frac{\delta s_1}{R-r} = 0$$

მიღებული განტოლება შევკვეცოთ $\delta s_1 \neq 0$- ზე და ჩავწეროთ იგი შემდეგი სახით:

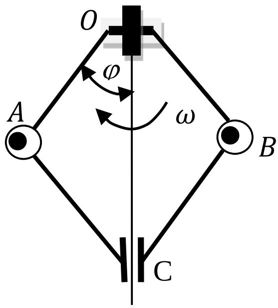
$$M_1 g = a_1 \left[M_1 + \frac{M_2}{(R-r)^2} (\rho^2 + r^2) \right],$$

აქედან

$$a_1 = \frac{M_1 g}{M_1 + \frac{M_2}{(R-r)^2} (\rho^2 + r^2)} = g \frac{M_1 (R-r)^2}{M_1 (R-r)^2 + M_2 (\rho^2 + r^2)}.$$

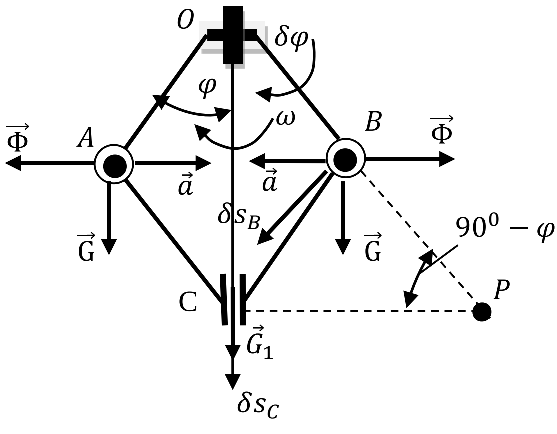
პ ა ს უ ხ ი: $a_1 = g \frac{M_1 (R-r)^2}{M_1 (R-r)^2 + M_2 (\rho^2 + r^2)}$.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 47.16



ცენტრიდანული რეგულატორი ვერტიკალური ღერძის გარშემო ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. განსაზღვრეთ OA და OB სახელურების ვერტიკალიდან გადახრის კუთხე, თუ მხედველობაში მივიღებთ თითოეული ბირთვის მასას M და C ქუროს M_1 მასა; ყველა ღეროს ერთნაირი ℓ სიგრძე აქვს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მოცემული სისტემის მოძრაობა. ვაჩვენოთ ნახაზზე სისტემაზე მოდებული აქტიური ძალები: ბირთვების სიმძიმის ძალები $\vec{G}$ და ქუროს სიმძიმის ძალა $\vec{G}_1$. მოვდოთ ბირთვებზე ინერციის ძალები:



$$\vec{\Phi} = -M\vec{a},$$

სადაც

$$a = a_{\text{ცენ}} = \omega^2 \ell sin\varphi.$$

C ქუროს აჩქარება უდრის ნულს, რადგან ის არ გადაადგილდება, ამიტომ მისი ინერციის ძალა უდრის ნულს. .

მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება და შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება.

$\vec{G}$ და $\vec{\Phi}$ ძალების შესაძლო მუშაობები განვსაზღვროთ როგორც ამ ძალების მომენტების ნამრავლი $\delta\varphi$ მობრუნების კუთხეზე:

$$2G\ell sin\varphi \cdot \delta\varphi - 2\Phi\ell cos\varphi \cdot \delta\varphi + G_1\delta s_C = 0. \qquad (1)$$

გამოვსახოთ C ქუროს δs_C შესაძლო გადაადგილება $\delta\varphi$ –ით:

$$\delta s_B = \ell\delta\varphi,$$

$$\delta s_C = \delta s_B \cdot \frac{CP}{BP}, \qquad (2)$$

სადაც

$$CP = OP \cdot sin\varphi = 2\ell sin\varphi,$$

$$BP = \ell,$$

მაშინ

$$\delta s_C = \ell\delta\varphi \cdot \frac{2\ell sin\varphi}{\ell} = 2\ell sin\varphi \cdot \delta\varphi.$$

ინერციის ძალა

$$\Phi = Ma,$$

სადაც

$$a = \omega^2\ell sin\varphi = 2\ell sin\varphi.$$

მაშინ

$$\Phi = M\omega^2\ell sin\varphi. \qquad (3)$$

ჩავსვათ (2) და (3) გამოსახულებები (1) განტოლებაში:

$$2Mg\ell sin\varphi \cdot \delta\varphi - 2M\omega^2\ell sin\varphi \cdot \ell cos\varphi \cdot \delta\varphi + 2M_1g\ell sin\varphi \cdot \delta\varphi = 0.$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$Mg - M\omega^2\ell cos\varphi + M_1g = 0,$$

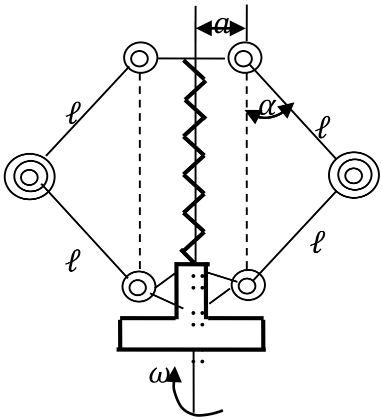
აქედან

$$cos\varphi = \frac{(M + M_1)g}{M\ell\omega^2}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $cos\varphi = \frac{(M+M_1)g}{M\ell\omega^2}$.

ამოცანა 47.17

ცენტრიდანული რეგულატორი ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. იპოვეთ დამოკიდებულება რეგულატორის ω კუთხურ სიჩქარესადა მისი ღერძების ვერტიკალიდან გადახრის α კუთხეს შორის, თუ მასის ქუროს აწვება c სიხისტისზამბარა და, როცა α=0, ზამბარა არადეფორმირებული მდგომარეობაშია და მიმაგრებულია ზედა ბოლოთი რეგულატორის ღერძზე; ბირთვების მასა არის M_2, ღეროს სიგრძე $-\ell$. ღეროების ჩამოკიდების ღერძები რეგულატორის ღერძიდან დაშორებულია a სმ მანძილით; ღეროებისა და ზამბარების მასები უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. მექანიკურ სისტემას აქვს ერთი თავისუფლების ხარისხი. გამოვიყენოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება შემდეგი სახით:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(F_{kx}+\Phi_{kx})\cdot\delta x_k+\left(F_{ky}+\Phi_{ky}\right)\cdot\delta y_k\right]=0 \tag{1}$$

სადაც $F_{kx},F_{ky}-$ აქტიური ძალების გეგმილებია საკოორდინატო ღერძებზე; $\Phi_{kx},\Phi_{ky}-$ ინერციის ძალების გეგმილებია საკოორდინატო ღერძებზე; $\delta x_k,\delta y_k-$კოორდინატების ვარიაციებია.

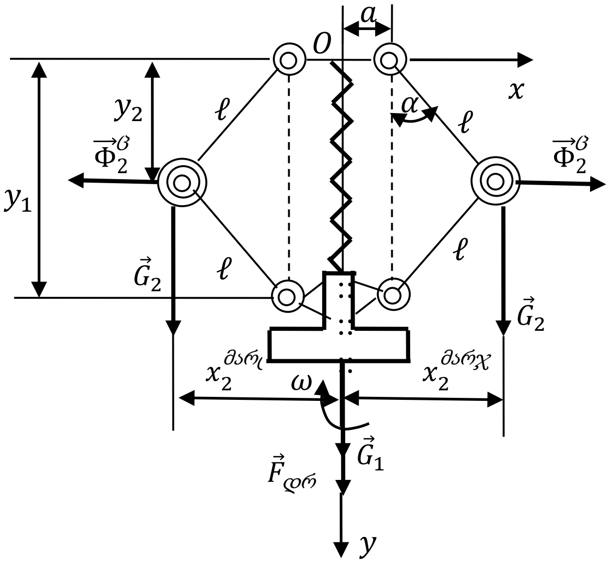
ვაჩვენოთ ნახაზზე აქტიური ძალები: ტვირთების სიმძიმის ძალები- $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2,\vec{F}_{დრ}$ და ბირთვების ცენტრიდანული ინერციის ძალები $\vec{\Phi}_2^{ც}$. .

ქუროს ინერციის ძალა უდრის ნულს, რადგან რეგულატორი ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით და ქურო არ გადაადგილდება.

ბირთვების ცენტრიდანული ინერციის ძალები

$$\Phi_2^{ც} = M_2(a + \ell sin\alpha)\omega^2.$$

ზამბარის დრეკადობის ძალა



$$F_{დრ} = c\lambda,$$

სადაც $\lambda = 2\ell(1 - cos\alpha)$.
მაშინ

$$F_{დრ} = 2c\ell(1 - cos\alpha).$$

კოორდინატთა სისტემის სათავე ავირჩიოთ O წერტილში და ძალების მოდების წერტილების კოორდინატები გამოვსახოთ α კუთხის საშუალებით:

$$\begin{cases} x_2^{მარჯ} = a + \ell sin\alpha, \quad y_1 = 2\ell cos\alpha, \\ x_2^{მარც} = -(a + \ell sin\alpha), \;\; y_2 = \ell cos\alpha. \end{cases}$$

მოვახდინოთ ამ ტოლობების ვარირება:

$$\begin{cases} \delta x_2^{მარჯ} = \ell cos\alpha \cdot \delta\alpha, \quad \delta y_1 = -2\ell sin\alpha \cdot \delta\alpha, \\ \delta x_2^{მარც} = -\ell cos\alpha \cdot \delta\alpha, \quad\quad \delta\, y_2 = -\ell sin\alpha \cdot \delta\alpha. \end{cases} \qquad (2)$$

(1) განტოლება ჩავწეროთ გაშლილი სახით:

$$G_1\delta y_1 + 2G_2\delta y_2 + \Phi_2^{ც} x_2^{მარჯ} - \Phi_2^{ც}\delta x_2^{მარც} + F_{დრ}\delta y_1 = 0$$

ან (2)-ის გათვალისწინებით

$$-2G_1\ell sin\alpha \cdot \delta\alpha - 2G_2\ell sin\alpha \cdot \delta\alpha + M_2(a + \ell sin\alpha)\omega^2\ell cos\alpha \cdot \delta\alpha -$$

$$-2c\ell(1-\cos\alpha)\cdot 2\ell\sin\alpha\cdot\delta\alpha=0.$$

ეს ტოლობა შევკვეცოთ $\delta s_1 \neq 0$- ზე და $2\ell -$ ზე, მივიღებთ:

$$-G_1\sin\alpha - G_2\sin\alpha + M_2(a+\ell\sin\alpha)\omega^2\cos\alpha -$$
$$-2c\ell(1-\cos\alpha)\sin\alpha = 0,$$

სადაც

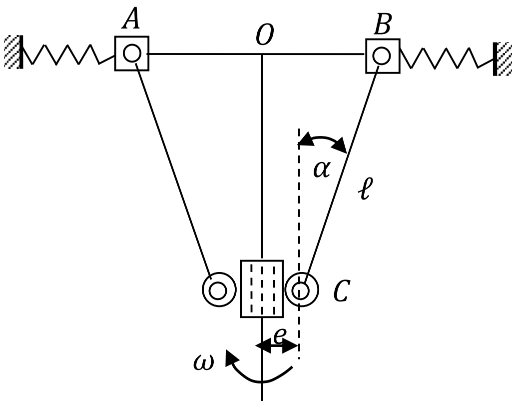
$$G_1 = M_1 g, \quad G_2 = M_2 g.$$

აქედან

$$\omega^2 = \frac{(M_1+M_2)g + 2c\ell(1-\cos\alpha)}{M_2(a+\ell\sin\alpha)}tg\alpha.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\omega^2 = \frac{(M_1+M_2)g+2c\ell(1-\cos\alpha)}{M_2(a+\ell\sin\alpha)}tg\alpha.$

ამოცანა 47.18



ცენტრიდანული ამბარული რეგულატორი შედგება $M_A = M_B = M$ მასის ორი A და B ტვირთისაგან, რომლებიც ჩამოცმულია რეგულატორის შპინდელთან მიმაგრებულ გლუვ ჰორიზონტალურ ღეროზე, M_1 მასის C ქუროსაგან, ℓ სიგრძის საწევებისა და ზამბარებისაგან, რომლებიც ტვირთებს აწვებიან ბრუნვის ღერძისკენ; საწევების სახსრების დაშორება შპინდელთან უდრის e –ს; ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტია c. განსაზღვრეთ რეგულატორის კუთხური სიჩქარე α გაშლის კუთხისათვის, თუ α_0 კუთხისათვის, სადაც $\alpha_0 < \alpha$, ზამბარები დაუძაბავ მდგომარეობაშია; ხახუნი და საწევების მასები უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მექანიკურ სისტემას აქვს ერთი თავისუფლების ხარისხი. გამოვიყენოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება შემდეგი სახით:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(F_{kx}+\Phi_{kx})\cdot\delta x_k + \left(F_{ky}+\Phi_{ky}\right)\cdot\delta y_k\right]=0 \qquad (1)$$

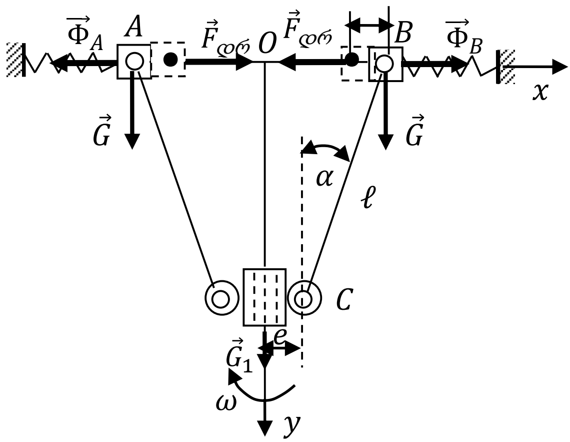
სადაც $F_{kx}, F_{ky} -$ აქტიური ძალების გეგმილებია საკოორდინატო ღერძებზე; $\Phi_{kx}, \Phi_{ky} -$ ინერციის ძალების გეგმილებია საკოორდინატო ღერძებზე; $\delta x_k, \delta y_k -$კოორდინატების ვარიაციებია.

ვაჩვენოთ ნახაზზე აქტიური ძალები: ტვირთების სიმძიმის ძალები-$\vec{G}$, $\vec{G}_1, \vec{F}_{დრ}$ და ბირთვების ცენტრიდანული ინერციის ძალები $\vec{\Phi}_A$ და $\vec{\Phi}_B$.

მოცემულ შემთხვევაში

$$\Phi_A = \Phi_B = M(a + \ell sin\alpha)\omega^2.$$

C ქუროს ინერციის ძალა უდრის ნულს, რადგან მექანიზმის მოცემულ მდებარეობაში ქურო არ გადაადგილდება და, მაშასადამე, მისი აჩქარება უდრის ნულს.



ზამბარის დრეკადობის ძალა

$$F_{დრ} = c\lambda,$$

სადაც $\lambda = \ell(sin\alpha - sin\alpha_0)$.

მაშინ

$$F_{დრ} = c\ell(sin\alpha - sin\alpha_0).$$

კოორდინატთა სისტემის სათავე ავირჩიოთ O წერტილში და ძალების მოდების წერტილების კოორდინატები გამოვსახოთ α კუთხის საშუალებით

$$x_B = e + \ell sin\alpha,$$
$$y_C = \ell cos\alpha,$$
$$x_A = -(e + \ell sin\alpha).$$

ამ დამოკიდებულებების ვარირებით, მივიღებთ:

$$\delta x_B = \ell cos\alpha \cdot \delta\alpha,$$
$$\delta y_C = -\ell sin\alpha \cdot \delta\alpha,$$
$$\delta x_A = -\ell cos\alpha \cdot \delta\alpha.$$

(1) განტოლება ჩავწეროთ გაშლილი სახით:

$$G_1\delta y_C + \Phi_B\delta x_B - \Phi_A\delta x_A - F_{დრ}\delta x_B + F_{დრ}\delta x_A = 0$$

ან

$$-G_1\ell sin\alpha\cdot\delta\alpha + 2M(e+\ell sin\alpha)\omega^2\ell cos\alpha\cdot\delta\alpha -$$
$$-2c\ell(sin\alpha - sin\alpha_0)\ell cos\alpha\cdot\delta\alpha = 0.$$

ეს ტოლობა შევკვეცოთ $\delta\alpha \neq 0 -$ ზე და $\ell -$ ზე, მივიღებთ:

$$-G_1 sin\alpha + 2M(e+\ell sin\alpha)\omega^2 cos\alpha -$$
$$-2c\ell(sin\alpha - sin\alpha_0)cos\alpha = 0.$$

აქედან

$$\omega^2 = \frac{G_1 sin\alpha + 2c\ell(sin\alpha - sin\alpha_0)cos\alpha}{2M(e+\ell sin\alpha)cos\alpha}.$$

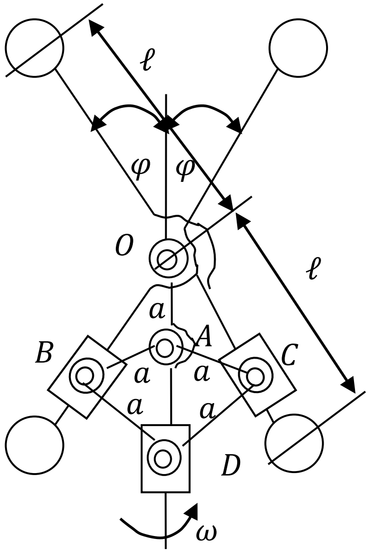
გავყოთ ეს გამოსახულება $cos\alpha -$ ზე და გავითვალისწინოთ, რომ $G_1 = M_1 g$, მაშინ

$$\omega = \sqrt{\frac{M_1 gtg\alpha + 2c\ell(sin\alpha - sin\alpha_0)}{2M(e+\ell sin\alpha)}}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\omega = \sqrt{\frac{M_1 gtg\alpha + 2c\ell(sin\alpha - sin\alpha_0)}{2M(e+\ell sin\alpha)}}$

ამოცანა 47.19

რეგულატორში ოთხი ერთნაირი M_1 მასის ტვირთი მიმაგრებულია ორი ერთნაირი 2ℓ სიგრძის ბერკეტზე, რომლებსაც შეუძლია ბრუნვა რეგულატორის სიბრტყეში შპინდელის O ბოლოს გარშემო და შპინდელის ღერძთან ქმნის ცვლად φ კუთხეს. A წერტილში, რომელშიც O ბოლოდან დაშორებულია $OA = a$ მანძილით, შპინდელთან სახსროვნად შეერთებულია a სიგრძის AB და AC ბერკეტები; ეს უკანასკნელი თავის მხრივ შეერთებულია a სიგრძის BD და CD ღეროებთან, რომლებსაც გადააქვთ D ქურო. B და C წერტილებში მოთავსებულია ცოციები, რომლებიც სრიალებენ ბერკეტების გასწვრივ. წუროს მასა უდრის M_2 –ს, რეგულატორი ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. იპოვეთ დამოკიდებულება φ კუთხესა და ω კუთხურ სიჩქარეს შორის რეგულატორის წონასწორობისას.



ა მ ო ხ ს ნ ა. მექანიკურ სისტემას აქვს ერთი თავისუფლების ხარისხი. გამოვიყენოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება შემდეგი სახით:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(F_{kx} + \Phi_{kx}) \cdot \delta x_k + \left(F_{ky} + \Phi_{ky}\right) \cdot \delta y_k\right] = 0 \qquad (1)$$

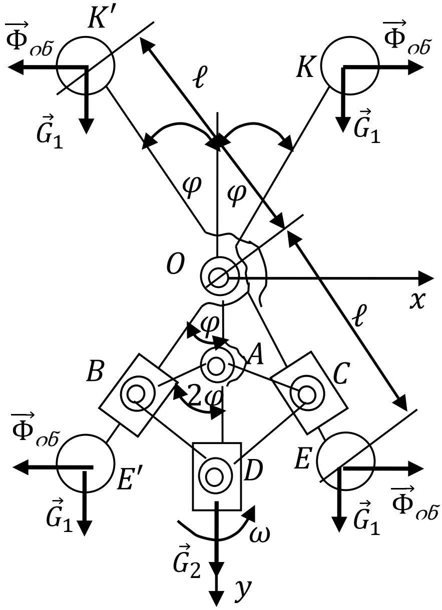
სადაც F_{kx}, F_{ky} – აქტიური ძალების გეგმილებია საკოორდინატო ღერძებზე; Φ_{kx}, Φ_{ky} – ინერციის ძალების გეგმილებია საკოორდინატო ღერძებზე; $\delta x_k, \delta y_k$ –კოორდინატების ვარიაციებია.

ვაჩვენოთ ნახაზზე აქტიური ძალები: ტვირთების სიმძიმის ძალები- $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ და ბირთვების ცენტრიდანული ინერციის ძალები $\overrightarrow{\Phi}_{o}$.

მოცემულ შემთხვევაში

$$\Phi_{ob} = M_1 \ell \omega^2. \qquad (2)$$

კოორდინატთა სისტემის სათავე ავირჩიოთ O წერტილში და E, K და E', K' ტვირთების კოორდინატები გამოვსახოთ φ კუთხის საშუალებით:



$$\begin{cases} x^{მარჯ} = \ell sin\varphi, \;\; x^{მარცხ} = -\ell sin\varphi, \\ y_E = y_{E'} = \ell cos\varphi, \quad y_K = y_{K'} = -\ell cos\varphi, \\ y_D = a + 2asin(90^0 - 2\varphi) = a + 2acos2\varphi. \end{cases}$$

ამ დამოკიდებულებების ვარირებით, მივიღებთ:

$$\begin{cases} \delta x^{მარჯ} = \ell cos\varphi \cdot \delta\varphi, \;\; \delta x^{მარცხ} = -\ell cos\varphi \cdot \delta\varphi, \\ \delta y_E = \delta y_{E'} = -\ell sin\varphi \cdot \delta\varphi, \;\; \delta y_K = \delta y_{K'} = \ell sin\varphi \cdot \delta\varphi, \\ \delta y_D = -4asin2\varphi \cdot \delta\varphi. \end{cases} \quad (3)$$

(1) განტოლება ჩავწეროთ გაშლილი სახით:

$$2G_1\delta y_K + 2G_1\delta y_E - G_2\delta y_D + \Phi_{ობ}\delta x^{მარჯ} - \Phi_{ობ}\delta x^{მარცხ} = 0$$

ან (2) და (3) გამოსახულებების გათვალისწინებით

$$2G_1\ell sin\varphi \cdot \delta\varphi - 2G_1\ell sin\varphi \cdot \delta\varphi + G_2(-4asin2\varphi \cdot \delta\varphi) +$$
$$+4M_1\ell\omega^2\ell sin\varphi cos\varphi \cdot \delta\varphi = 0.$$

გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$-4G_2asin2\varphi + 2M_1\ell^2\omega^2 sin2\varphi = 0,$$

რადგან $\delta\varphi \neq 0$.

მაშინ

$$\omega^2 = \frac{2G_2a}{M_1\ell^2} = \frac{2M_2ga}{M_1\ell^2},$$

აქედან

$$\omega = \sqrt{\frac{2M_2 ga}{M_1 \ell^2}}.$$

__პ ა ს უ ხ ი:__ რეგულატორის წონასწორობა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $\omega = \sqrt{\frac{2M_2 ga}{M_1 \ell^2}}$ და არ არის დამოკიდებული φ კუთხეზე.

48. ლაგრანჟის II გვარის განტოლებები

მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად.

ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები გამოიყვანება დინამიკის ზოგადი განტოლებიდან მისი გარდაქმნით განტოლებებში განზოგადებულ კოორდინატებში და მექანიკური სისტემისათვის, რომელიც ემორჩილება ჰოლონომიურ, იდეალურ და დამჭერ ბმებს, აქვს სახე:.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j^a, \quad j = 1,2,\cdots,s, \qquad (48.1)$$

სადაც $q_1,\cdots,q_j,\cdots q_s$ −განზოგადებული კოორდინატებია; $\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt},\cdots,\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt},\cdots \dot{q}_s = \frac{dq_s}{dt}$ −განზოგადებული სიჩქარეები; $s-$ მექანიკური სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი; $T-$ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია; $Q_1^a,\cdots,Q_j^a,\cdots,Q_s^a$ −აქტიური ძალების განზოგადებული ძალები.

კონსერვატული (პოტენციური) მექანიკური სისტემისათვის (48.1) განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1,2,\cdots,s. \qquad (48.2)$$

შემოვიღოთ ***ლაგრანჟის ფუნქცია*** (კინეტიკური პოტენციალი), რომელიც უდრის მექანიკური სისტემის კინეტიკური T და პოტენციური Π ენერგიების სხვაობას:

$$L = T - \Pi. \tag{48.3}$$

რადგან მექანიკური სისტემის პოტენციური Π ენერგია არ არის დამოკიდებული განზოგადებულ კოორდინატებზე, ამიტომ (48.2) განტოლება შეიძლება ასეც ჩავწეროთ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1,2,\cdots,s, \tag{48.4}$$

ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ მექანიკური სისტემის მოძრაობის გამოსაკვლევად. როგორც დინამიკის მეორე კანონი მატერიალური წერტილისათვის გამოიყენება მატერიალური წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების შედგენისას, ასევე ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები წარმოადგენს იმ მათემატიკურ აპარატს, რომლის გამოყენებით შესაძლებელია მექანიკური სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების შედგენა.
ამ პარაგრაფის ამოცანების ამოხსნის თანმიმდევრობა:

1. განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი;
2. ავირჩიოთ განზოგადებული კოორდინატები, რომელთა რიცხვი უდრის მექანიკური სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვს;
3. ჩავწეროთ (48.1) ფორმულის გამოყენებით ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები ყველა განზოგადებული კოორდინატისათვის;
4. განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია, გამოვსახოთ ის განზოგადებული სიჩქარეებით და განზოგადებული კოორდინატებით;
5. განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის კერძო წარმოებულები q_j განზოგადებული კოორდინატებით და $\dot{q}_j$ განზოგადებული სიჩქარეებით, ე.ი. $\dfrac{\partial T}{\partial q_j}$ და $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, აგრეთვე, დროით წარმოებულები $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)$;
6. განვსაზღვროთ აქტიური ძალების განზოგადებული ძალები [იხ. (XI.10) და (XI.11) ფორმულები];
7. ჩავსვათ წარმოებულების და განზოგადებული ძალების ნაპოვნი გამოსახულებები ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებში;
8. თუ მექანიკურ სისტემას აქვს რამდენიმე თავისუფლების ხარისხი, მაშინ მიიღება ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, ხოლო ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე მექანიკური სისტემისათვის მიიღება ერთი დიფერენციალური განტოლება. თითოეულ შემთხვევაში მათგან განისაზღვრება სხეულების საძიებელი წრფივი ან კუთხური სიჩქარეები, ან თუ შესაძლებელია განტოლებათა სისტემის (განტოლების) ინტეგრირება, მაშინ განისაზღვრება სხეულის მოძრაობის კანონი;
9. თუ მექანიკურ სისტემაზე მოქმედებს კონსერვატული ძალები, მაშინ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები ჩაიწერება (48.2) ან (48.4) სახით.

მექანიკურ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების შესადგენად აუცილებელია სისტემის *ლაგრანჟის ფუნქციის* განსაზღვრა და შესაბამისი წარმოებულების პოვნა: $\frac{\partial L}{\partial q_j}$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ და $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)$;
ან (48.2) გავაწარმოოთ სახით ჩაწერილი ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებში შემავალი კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების გამოსახულებები.

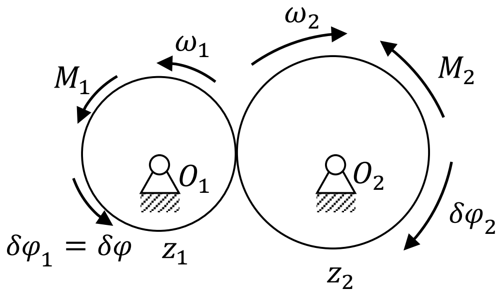
ამოცანები და ამოხსნები

ამოცანა 48.1

ორ ურთიერთმართობულ და გადამკვეთ ლილვს შორის ბრუნვათა გადაცემა ხორციელდება z_1 და z_2 კბილების მქონე ორი კბილა თვლის საშუალებით. ლილვების ინერციის მომენტები მათზე ჩამოცმული თვლებით სათანადოდა J_1 და J_2. განსაზღვრეთ პირველი ლილვის მოძრაობის კანონი, თუ მასზე მოქმედებს M_1 მაბრუნი მომენტი, ხოლო მეორე თვალზე- წინაღობის M_2 მომენტი. საყრდენში ხახუნი უგულებელყოფილია.

. ***ა მ ო ხ ს ნ ა.*** განსახილველ მექანიკური სისტემას აქვს ერთი თავისუფლების ხარისხი. მისი მოძრაობის განტოლების შესადგენად ვისარგებლოთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებით. განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ პირველი ლილვის მობრუნების კუთხე (იხ. ნახაზი): $q_1 = \varphi_1 = \varphi$.
მაშინ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \qquad (1)$$



განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2.$$

მოცემული მექანიკური სისტემისათვის

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi},$$

$$\omega_2 = \frac{z_1}{z_2}\dot{\varphi}, = i\dot{\varphi},$$

სადაც $i = \frac{z_1}{z_2}$.

მაშინ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგიის გამოსახულება ასეთ სახეს მიიღებს:

$$T = \frac{1}{2}(J_1 + i^2 J_2)\dot{\varphi}^2.$$

გამოვთვალოთ კინეტიკური ენერგიის კერძო წარმოებულები განზოგადებული კოორდინატით და განზოგადებული სიჩქარით, აგრეთვე, დროით წარმოებული:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (J_1 + i^2 J_2)\dot{\varphi}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = (J_1 + i^2 J_2)\ddot{\varphi}, \quad \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

გამოვთვალოთ Q_φ განზოგადებული ძალა. მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება, გავითვალისწინოთ, რომ $\delta\varphi_2 = i\,\delta\varphi$ და გამოვთვალოთ ელემენტარული მუშაობა:

$$\delta A = M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 = (M_1 - iM_2)\delta\varphi.$$

მაშინ

$$Q_\varphi = M_1 - iM_2 \qquad (3)$$

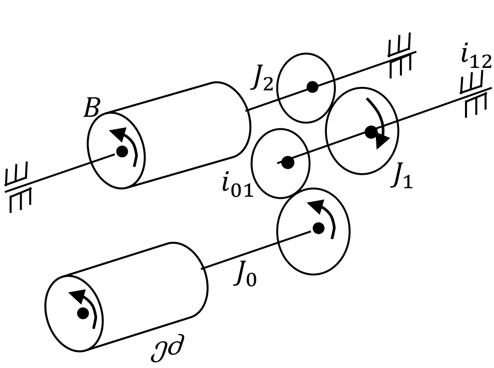
ჩავსვათ (2) და (3) გამოსახულებები (1) განტოლებაში და მივიღოთ პირველი ლილვის მოძრაობის განტოლება:

$$(J_1 + i^2 J_2)\ddot{\varphi} = M_1 - iM_2.$$

პ ა ს უ ხ ი: $(J_1 + i^2 J_2)\ddot{\varphi} = M_1 - iM_2.$

ამოცანა 48.2

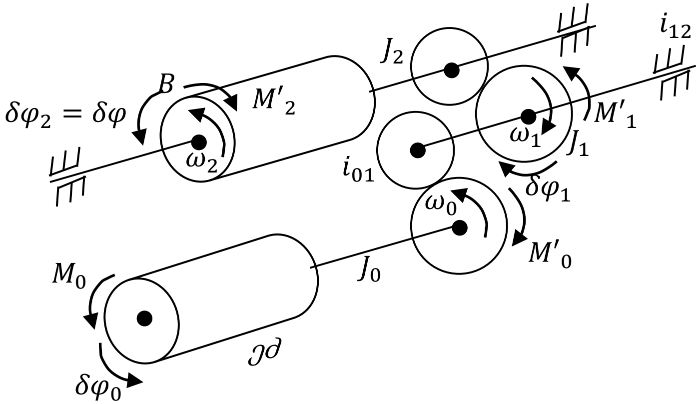
ცენტროფუგის B დოლი ბრუნვაში მოდის ელექტრული ძრავით ორსაფეხურიანი რედუქტორის საშუალებით. მოცემულია: ელექტრული ძრავის (ეძ) ინერციის მომენტი J_0, დოლის ინერციის მომენტი J_2, რედუქტორის შუალედური ლილვის ინერციის მომენტი J_1, რედუქტორის საფეხურების გადაცემათა რიცხვები i_{01} და i_{12}. ელექტრული ძრავის როტორზე მოდებულია M_0



მაბრუნი მომენტი და M_0' წინაღობის ძალების მომენტი, რედუქტორის ლილვზე და დოლზე შესაბამისად–M_1' და M_2' წინაღობის ძალების მომენტები. შეადგინეთ ცენტროფუგის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ მექანიკური სისტემას აქვს ერთი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ ცენტროფუგის B დოლის მობრუნების კუთხე $q_1 = \varphi_2 = \varphi$. ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \qquad (1)$$



განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია:

$$T = T_0 + T_1 + T_2 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2.$$

სადაც

$$T_0 = \frac{1}{2}J_0\omega_0^2;\; T_1 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2; T_2 = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2.$$

რადგან $\omega_2 = \dot{\varphi}$, $\omega_1 = i_{12}\dot{\varphi}$, $\omega_0 = i_{01}\omega_1$, მაშინ მივიღებთ:

$$T = \frac{1}{2}(J_0 i_{01}^2 i_{12}^2 + J_1 i_{12}^2 + J_2)\dot{\varphi}^2.$$

გამოვთვალოთ (1) განტოლებაში შემავალი წარმოებულები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = (J_0 i_{01}^2 i_{12}^2 + J_1 i_{12}^2 + J_2)\ddot{\varphi}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \qquad (2)$$

გამოვთვალოთ Q_φ განზოგადებული ძალა. ამისათვის გამოვთვალოთ ელემენტარული მუშაობა

$$\delta A = (M_0 - M_0')\delta\varphi_0 - M_1'\delta\varphi_1 - M_2'\delta\varphi =$$
$$= [(M_0 - M_0')i_{01}i_{12} - M_1' i_{12} - M_2']\delta\varphi,$$

სადაც $\delta\varphi_0 = i_{01}i_{12}\delta\varphi$; $\delta\varphi_1 = i_{12}\delta\varphi$ (კუთხური სიჩქარეების თანაფარდობების ანალოგიური)

მაშინ

$$Q_\varphi = (M_0 - M_0{}')i_{01}i_{12} - M_1' i_{12} - M_2'. \qquad (3)$$

ჩავსვათ (2) და (3) გამოსახულებები (1) განტოლებაში და მივიღოთ ცენტროფუგის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება:

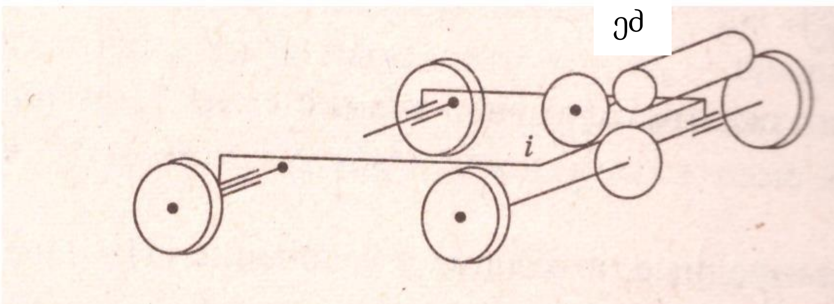
$$(J_0 i_{01}^2 i_{12}^2 + J_1 i_{12}^2 + J_2)\ddot{\varphi} \ = (M_0 - M_0{}')i_{01}i_{12} - M_1' i_{12} - M_2'$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$(J_0 i_{01}^2 i_{12}^2 + J_1 i_{12}^2 + J_2)\ddot{\varphi} \ = (M_0 - M_0{}')i_{01}i_{12} - M_1' i_{12} - M_2'$$

ᲙᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 48.3

ელექტომობილის ამძარავი შედგება ელექტრული ძრავის (ეძ) და ერთსაფეხურიანი რედუქტორისაგან i გადაცემის რიცხვით. შეადგინეთ ელექტომობილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება, თუ მოცემულია: ელექტრული ძრავის როტორის ინერციის მომენტი J_0, ერთნაირი r რადიუსის ოთხი თვლიდან თითოეულის ინერციის მომენტი J_1, ელექტომობილის მთლიანი მასა m, ელექტრული ძრავის M მაბრუნი მომენტი, წინაღობის ძალების მომენტი ელექტრული ძრავის ლილვზე M' და წინაღობის ჯამური ძალა $\vec{F}$.



ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემულ შემთხვევაში ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \qquad (1)$$

განზოგადებულ კოორდინატად მიღებულია ელექტომობილის გადატანითი გადაადგილება $q = x$(იხ. ნახაზი)

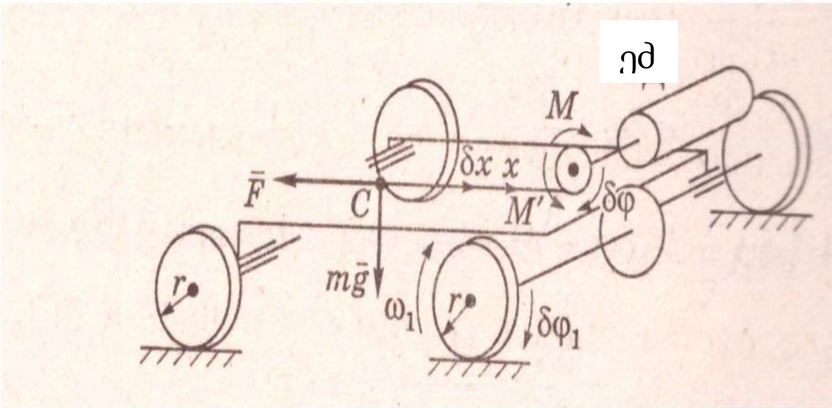
განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია:

$$T = T_0 + T_1 + T_2.$$

ელექტრული ძრავის კინეტიკური ენერგია:

$$T_0 = \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}J_0\left(\frac{\omega_1}{i}\right)^2 = \frac{1}{2}J_0\,\frac{\dot{x}^2}{i^2r^2}.$$

სადაც $\quad \omega_0 = \frac{\omega_1}{i}; \quad x = \omega_1 r \Rightarrow \omega_1 = \frac{\dot{x}}{r}.$



ოთხი თვლის კინეტიკური ენერგია ბრუნვით მოძრაობაში

$$T_1 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}4J_1\frac{\dot{x}^2}{r^2}.$$

ელექტრომობილის კინეტიკური ენერგია გადატანით მოძრაობაში ოთხი თვლის კინეტიკური ენერგიის გათვალისწინებით

$$T_2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

საბოლოოდ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = \left(m + \frac{4J_1}{r^2} + \frac{J_0}{i^2r^2}\right)\frac{\dot{x}^2}{2}.$$

გამოვთვალოთ (1) განტოლებაში შემავალი კინეტიკური ენერგიის წარმოებულები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \left(m + \frac{4J_1}{r^2} + \frac{J_0}{i^2r^2}\right)\ddot{x}; \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \qquad (2)$$

გამოვთვალოთ Q_x განზოგადებული ძალა. ამისათვის სისტემას მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება δx და გამოვთვალოთ ელემენტარული მუშაობა

$$\delta A = (M - M')\delta\varphi - F\delta x = \left(\frac{M - M'}{ir} - F\right)\delta x,$$

სადაც $\delta = \frac{\delta\varphi_1}{i}$, $\delta\varphi_1 = \frac{\delta x}{r} \Longrightarrow \delta\varphi = \frac{\delta x}{ir}$.

მაშინ

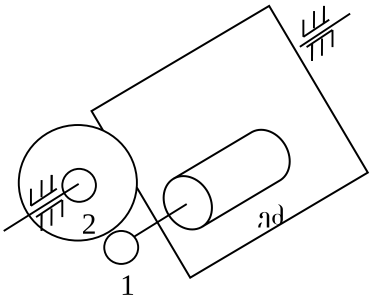
$$Q_x = \frac{\delta A}{\delta x} = \frac{M - M\prime}{ir} - F. \qquad (3)$$

ჩავსვათ (2) და (3) გამოსახულებები (1) განტოლებაში და მივიღოთ ელექტომობილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება:

$$\left(m + \frac{4J_1}{r^2} + \frac{J_0}{i^2 r^2}\right)\ddot{x} = \frac{M - M'}{ir} - F.$$

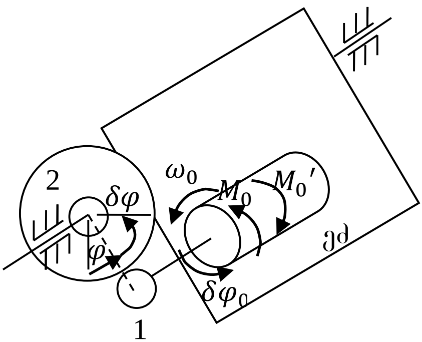
პ ა ს უ ხ ი: $\left(m + \frac{4J_1}{r^2} + \frac{J_0}{i^2 r^2}\right)\ddot{x} = \frac{M - M'}{ir} - F.$

ამოცანა 48.4



მასტაბილიზირებელი ამძრავის ელექტრული ძრავა დაყენებულია მბრუნავ ჩარჩოზე, რომლის მდებარეობა მოიცემა φ კუთხით. ელექტრული ძრავის I კბილანა გორავს უძრავ ფუძესთან დაკავშირებულ 2 კბილანა გარშემო. შეადგინეთ ჩარჩოს მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება, თუ მოცემულია: ელექტრული ძრავის როტორის ინერციის მომენტი J_0, ჩარჩოს ინერციის მომენტი ელექტრული ძრავასთან ერთად J_1, წყვილი კბილანას გადაცემათა რიცხვი i_{12},. ელექტრული ძრავის M_0 მაბრუნი მომენტი, ელექტრული ძრავის ლილვზე მოდებული წინაღობის ძალების მომენტი $M_0{}'$, ჩარჩოზე მოდებული ძალების მომენტი მისი ღერძის მიმართ$-M_1{}'$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ ჩარჩოს მობრუნების კუთხე $q = \varphi$ (იხ. ნახაზი) და ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება:



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \qquad (1)$$

განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია:

$$T = T_0 + T_1.$$

ელექტრული ძრავის კინეტიკური ენერგია:

$$T_0 = \frac{1}{2} J_0 \omega_0^2.$$

ჩარჩოს კინეტიკური ენერგია:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2.$$

მოცემულ შემთხვევაში $\omega_1 = \dot{\varphi}$ –საძიებელი განზოგადბული კუთხური სიჩქარეა. იმისათვის, რომ ω_0 გამოვსახოთ ω_1 –ით, ვისარგებლოთ ვილისის მეთოდით. მაშინ

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0 - \omega_1} = -i_{12},$$

სადაც $i_{12} = \frac{z_1}{z_2}$, $\omega_2 = 0$, რადგან 2 კბილანა არის უძრავი; მარჯვენა ნაწილში მინუს ნიშანი მიუთითებს გარე შეჭიდებაზე.

მაშინ

$$\omega_1 (1 + i_{12}) = \omega_0 i_{12}$$

ან

$$\omega_0 = \frac{1 + i_{12}}{i_{12}} \omega_1 = \left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right) \dot{\varphi}.$$

შედეგად მივიღებთ

$$T = \left[J_0 \left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right)^2 + J_1 \right] \frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

გამოვთვალოთ (1) განტოლებაში შემავალი კინეტიკური ენერგიის წარმოებულები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \left[J_0 \left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right)^2 + J_1 \right] \ddot{\varphi}; \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \qquad (2)$$

გამოვთვალოთ Q_φ განზოგადებული ძალა. ამისათვის სისტემას მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება $\delta\varphi$ და გამოვთვალოთ ელემენტარული მუშაობა

$$\delta A = (M_0 - M')\delta\varphi_0 - M_1' \delta\varphi.$$

რადგან

$$\frac{\delta\varphi_0}{\delta\varphi} = \frac{\omega_0}{\omega_1},$$

ამიტომ

$$\delta\varphi_0 = \left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right) \delta\varphi$$

მაშინ

$$\delta A = \left[(M_0 - M')\left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right) - M_1' \right] \delta\varphi,$$

ხოლო განზოგადებული ძალა

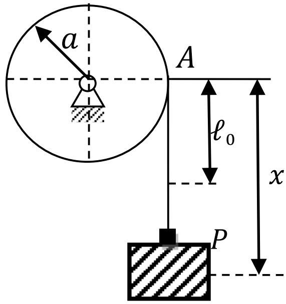
$$Q_\varphi = \frac{\delta A}{\delta\varphi} = (M_0 - M')\left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right) - M_1'. \qquad (3)$$

ჩავსვათ (2) და (3) გამოსახულებები (1) განტოლებაში და მივიღოთ ჩარჩოს მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება:

$$\left[J_0\left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right)^2 + J_1\right]\ddot{\varphi} = (M_0 - M')\left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right) - M_1'.$$

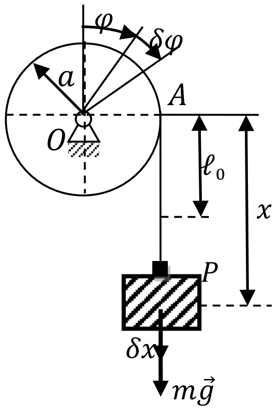
პ ა ს უ ხ ი: $\left[J_0\left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right)^2 + J_1\right]\ddot{\varphi} = (M_0 - M')\left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right) - M_1'.$

ამოცანა 48.5



განსაზღვრეთ m_1 მასის და ℓ სიგრძის გვარლზე ჩამოკიდებული m მასის P ტვირთის მოძრაობა; გვარლი დახვეულია a რადიუსისა და m_2 მასის დოლზე; ბრუნვის ღერძი ჰორიზონტალურია; ხახუნი უგულებელყოფილია, დოლის მასა იგულისხმეთ თანაბრად განაწილებულად მის ფერსოზე. საწყის მომენტში $t = 0$ სისტემა წონასწორობაშია; დოლზე გადმოკიდებულია გვარლის სიგრძეა ℓ_0.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ამოცანის ამოხსნის დროს დოლის ზომები გადმოკიდებული გვარლის სიგრძესთან შედარებით, უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ P ტვირთის გადაადგილება $q = x$ (იხ. ნახაზი)

განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია:

$$T = T_{გვ} + T_{დ} + T_{ტვ}.$$

გვარლის კინეტიკური ენერგია $T_{გვ}$ იმის გათვალისწინებით, რომ m_1 მასის გვარლის ყველა წერტილის (მათ შორის დოლზე მდებარე) სიჩქარეა $\dot{x}$, უდრის

$$T_{გვ} = \sum \Delta m_i \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{\dot{x}^2}{2}\sum \Delta m_i = \frac{m_1\dot{x}^2}{2}$$

რადგან დოლის მასა თანაბრადაა განაწილებული მის ფერსოზე, ამიტომ

$$J = m_2 a^2.$$

თუ გავითვალისწინებთ, აგრეთვე, თანაფარდობას $\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{a}$, მივიღებთ, რომ დოლის კინეტიკური ენერგია

$$T_{დ} = \frac{1}{2} m_2 a^2 \left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2.$$

P ტვირთის კინეტიკური ენერგია

$$T_{ტვ.} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

მაშასადამე,

$$T = (m + m_1 + m_2) \frac{\dot{x}^2}{2}. \tag{1}$$

ნულოვან პოტენციალურ დონედ მივიღოთ დოლის O ცენტრში გამავალი ჰორიზონტალური წრფე, დოლის ზომები გადმოკიდებული გვარლის სიგრძესთან შედარებით უგულებელვყოთ და განვსაზღვროთ გვარლის დაკიდებული ნაწილის და P ტვირთის პოტენციური ენერგია:

$$\Pi = -mgx - \frac{m_1 x}{\ell} g \frac{x}{2} = -mgx - \frac{m_1 g x^2}{2\ell}, \tag{2}$$

სადაც $\frac{m_1 x}{\ell} \mathrm{g} -$ გვარლის დაკიდებული ნაწილის სიმძიმის ძალაა; $\frac{x}{2} -$ გვარლის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატია; $\ell -$ გვარლის სიგრძეა.

შემოვიღოთ ლაგრანჟის ფუნქცია $L = T - \Pi$ და ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ დიფერენციალლურ განტოლებას:

$$(m + m_1 + m_2)\ddot{x} - \frac{m_1}{\ell} g x = mg. \tag{3}$$

(3) განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ სახით:

$$x = \overline{x} + x^*, \tag{4}$$

სადაც $\overline{x} -$ შესაბამისი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსენია, ხოლო $x^* -$არაერთგვაროვანის კერძო ამონახსენი.

უმაღლესი მათემატიკის კურსიდან ცნობილია, რომ

$$\overline{x} = C_1 chkt + C_2 shkt,$$

სადაც $k = \sqrt{\frac{m_1 g}{(m+m_1+m_2)\ell}}$; $chkt,\ shkt -$ შესაბამისად ჰიპერბოლური კოსინუსი და სინუსია.

კერძო ამონახსენს აქვს სახე

$$x^* = A.$$

ჩავსვათ x^* (3) განტოლებაში და ვიპოვოთ

$$x^* = -\frac{m\ell}{m_1}.$$

(4) ფორმულის თანახმად

$$x = C_1 chkt + C_2 shkt - \frac{m\ell}{m_1}.$$

გავაწარმოოთ ეს გამოსახულება დროით:

$$\dot{x} = C_1 kshkt + C_2 kchkt.$$

C_1 და C_2 მუდმივების საპოვნელად ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით: $t = 0,\ x(0) = \ell_0$, მივიღებთ:

$$\begin{cases} \ell_0 = C_1 - \dfrac{m\ell}{m_1}, \\ 0 = C_2 k. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \ell_0 + \dfrac{m\ell}{m_1}, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

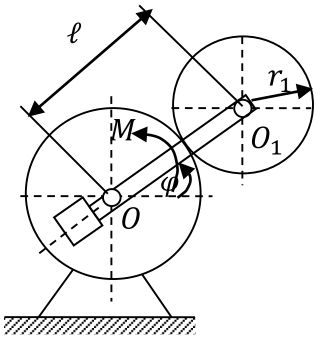
მაშასადამე, P ტვირთის მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე:

$$x = -\frac{m\ell}{m_1} + \left(\ell_0 + \frac{m\ell}{m_1}\right) ch\sqrt{\frac{m_1 g}{(m + m_1 + m_2)\ell}}\, t.$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$x = -\frac{m\ell}{m_1} + \left(\ell_0 + \frac{m\ell}{m_1}\right) ch\sqrt{\frac{m_1 g}{(m + m_1 + m_2)\ell}}\, t.$$

ამოცანა 48.6

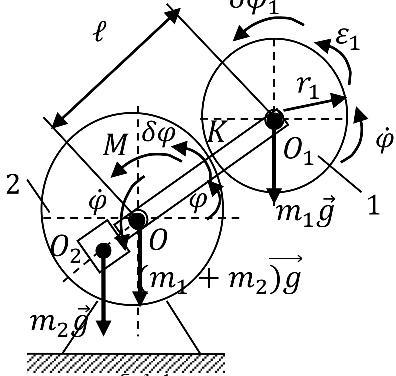


ეპიციკლურ მექანიზმში r_1 რადიუსის მოძრავი კბილანა ჩამოცმულია საპირწონეს მქონე მრუდმხარაზე და მასზე მოდებული M მომენტის მოქმედებით უძრავი კბილანას ღერძის გარშემო ბრუნავს. განსაზღვრეთ მრუდმხარას ბრუნვის კუთხური აჩქარება და კბილანების შეხების წერტილში წრიული S ძალვა, თუ კბილანების ღერძებს შორის მანძილი არის ℓ, მრუდმხარას ინერციის მომენტი საპირწონეთი ბრუნვის ღერძის მიმართ არის J_0, მოძრავი კბილანას მასა $-m_1$, კბილანას ინერციის მომენტი მისი ღერძის მიმართ$-J_1$. ხახუნი უგულებელყოფილია; კბილანასა და მრუდმხარას (საპირწონეთი) მასათა ცენტრები მდებარეობს მრუდმხარას ბრუნვის ღერძზე.

ამოხსნა. განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ მრუდმხარას მობრუნების კუთხე $q=\varphi$ და ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება მოცემული მექანიკური სისტემისათვის, რომლის თავისუფლების ხარისხი უდრის ერთს:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=Q^M,$$

სადაც $L=T-\Pi-$კინეტიკური პოტენციალია.



ნახ.1

განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია:

$$T=T_{მრ}+T_{კბ}.$$

მრუდმხარას კინეტიკური ენერგია

$$T_{მრ}=\frac{J_0\dot{\varphi}^2}{2}.$$

კბილანას კინეტიკური ენერგია

$$T_{კბ}=\frac{m_1 v_{01}^2}{2}+\frac{J_1\dot{\varphi}_1^2}{2}=\frac{m_1\ell^2\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{J_1\dot{\varphi}_1^2}{2}.$$

მაშინ

$$T=\frac{J_0\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{m_1\ell^2\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{J_1\dot{\varphi}_1^2}{2}.$$

დავამყაროთ კავშირი $\dot{\varphi}$ და $\dot{\varphi}_1$ სიდიდეებს შორის ვილისის მეთოდით:

$$\frac{\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}}=-\frac{r_1}{\ell-r_1},$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\dot{\varphi}_2=0,$ მივიღებთ

$$\dot{\varphi}_1=\frac{\ell}{r_1}\dot{\varphi}$$

შევნიშნოთ, რომ ეს თანაფარდობა შეიძლება მივიღოთ 1 კბილანას ბრტყელი მოძრაობის პირობიდან, რომელსაც სიჩქარეთა მყისი ცენტრი აქვს ბორბლების შეხების K წერტილში (ნახ.1). ჩავსვათ $\dot{\varphi}_1-$ს გამოსახულება კინეტიკური ენერგიის გამოსახულებაში, მაშინ მივიღებთ:

$$T = \left(J_0 + m_1\ell^2 + \frac{J_1\ell^2}{r_1^2}\right)\frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

ნულოვან პოტენციალურ დონედ მივიღოთ O ცენტრში გამავალი ჰორიზონტალური წრფე, მხედველობაში მივიღოთ, რომ კბილანასა და მრუდმხარას მასათა ცენტრები მდებარეობს იმავე წერტილში, მაშინ პოტენციური ენერგია:

$$\Pi = 0.$$

მაშასადამე,

$$L = T.$$

მაშინ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \left(J_0 + m_1\ell^2 + \frac{J_1\ell^2}{r_1^2}\right)\ddot{\varphi}.$$

გამოვთვალოთ Q^M არაპოტენციური განზოგადებული ძალა, რომელიც შეესაბამება მოდებულ გარე მომენტს. ამისათვის მექანიზმის ფიქსირებული მდგომარეობიდან მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება $\delta\varphi \neq 0$ და გამოვთვალოთ ელემენტარული მუშაობა

$$\delta A = M\delta\varphi.$$

მაშინ

$$Q^M = \frac{\delta A}{\delta \varphi} = M.$$

მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში, შემოვიღოთ აღნიშვნა $\ddot{\varphi} = \varepsilon$ და მივიღებთ:

$$\varepsilon = \frac{M}{J_0 + m_1\ell^2 + \frac{J_1\ell^2}{r_1^2}}.$$

ჩავწეროთ ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება ცალკე 1 კბილანასათვის (ნახ.2):

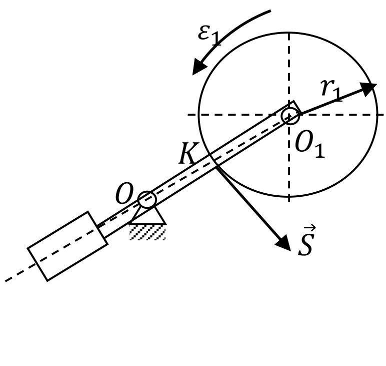
$$Sr_1 = J_1\ddot{\varphi}.$$

მაშინ

$$S = \frac{J_1\ell}{r_1^2}\varepsilon,$$

რადგან

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{\ell}{r_1}\ddot{\varphi} = \frac{\ell}{r_1}\varepsilon$$

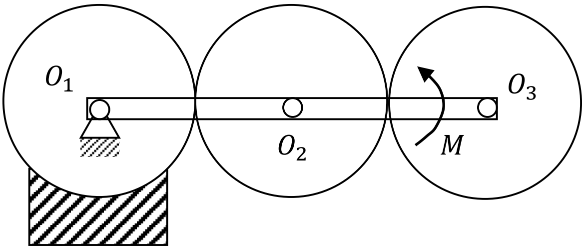


პ ა ს უ ხ ი:

$$\varepsilon = \frac{M}{J_0 + m_1\ell^2 + \dfrac{J_1\ell^2}{r_1^2}}, \qquad S = \frac{J_1\ell}{r_1^2}\,\varepsilon.$$

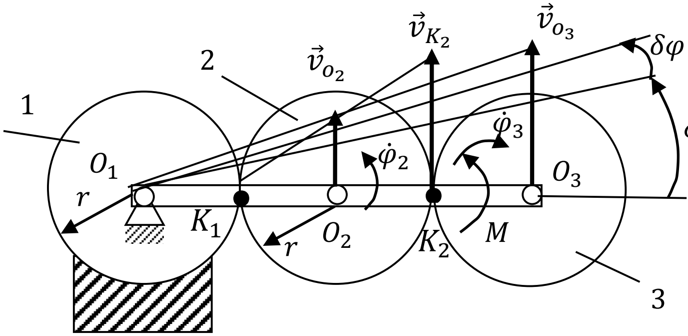
ამოცანა 48.7

პლანეტარულ მექანიზმში O_1 ღერძის თვალი უძრავია; O_1O_2 სახელურზე მოქმედებს M მაბრუნი მომენტი; მექანიზმი მოთავსებულია ჰორიზონტალურ სიბრტყეში. განსაზღვრეთ სახელურის კუთხური აჩქარება, თუ თვლები ჩათვლილია ერთგვაროვან, ერთნაირი m მასის და r რადიუსის დისკოებად და სახელურის მასა უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ პლანეტარული მექანიზმის O_1O_2 სახელურის მობრუნების კუთხე $q = \varphi$ (იხ. ნახაზი) და ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება მოცემული მექანიკური სისტემისათვის, რომლის თავისუფლების ხარისხი უდრის ერთს:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$



რადგან 1 თვალი უძ\რავია, ამიტომ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = T_2 + T_3.$$

2 თვლის კინეტიკური ენერგია:

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2v_{02}^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2}m_2v_{02}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_2r^2\left(\frac{v_{02}}{r}\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{4}m_2v_{02}^2 = \frac{3}{4}m(2r\dot{\varphi})^2 = 3mr^2\dot{\varphi}^2,$$

სადაც $m_2 = m$; $J_2 = \frac{1}{2}m_2r^2$., რადგან 2 თვალი ერთგვაროვანი დისკოა. $\dot{\varphi}_2 = \omega_2 = \frac{v_{02}}{r}$, რადგან K_1 წერტილი არის 2 თვლის სიჩქარეთა მყისი ცენტრი; $v_{02} = O_1O_2 \cdot \omega = 2r\dot{\varphi}$.

3 თვლის კინეტიკური ენერგია:

$$T_3 = \frac{1}{2}m_3v_{03}^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2 = \frac{1}{2}m_3v_{03}^2 = \frac{1}{2}m(4r\dot{\varphi})^2 = 8mr^2\dot{\varphi}^2,$$

სადაც $m_2 = m$; $v_{03} = O_1O_3 \cdot \omega = 4r\dot{\varphi}$.

რადგან

$$v_{K_2} = 2r\dot{\varphi}_2 = 2r \cdot 2\dot{\varphi} = 4r\dot{\varphi},$$

სადაც

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{v_{02}}{r} = \frac{2r\dot{\varphi}}{r} = 2\dot{\varphi}; v_{K_2} = v_{03} = 4r\dot{\varphi}.$$

მაშასადამე, 3 თვალი ასრულებს წრიულ გადატანით მოძრაობას და $\omega_3 = 0$.

შედეგად მივიღებთ

$$T = 3mr^2\dot{\varphi}^2 + 8mr^2\dot{\varphi}^2 = 11mr^2\dot{\varphi}^2$$

გამოვთვალოთ კინეტიკური ენერგიის წარმოებულები, რომლებიც შედიან ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში:
:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 22mr^2\ddot{\varphi}; \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

გამოვთვალოთ Q_φ განზოგადებული ძალა. ამისათვის სისტემას მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება $\delta\varphi$, გავითვალისწინოთ, რომ მექანიზმი მდებარეობს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში, ამიტომ სიმძიმის ძალები მუშაობას არ ასრულებენ. გამოვთვალოთ ელემენტარული მუშაობა

$$\delta A = M\delta\varphi.$$

მაშინ განზოგადებული ძალა

$$Q_\varphi = \frac{\delta A}{\delta\varphi} = M.$$

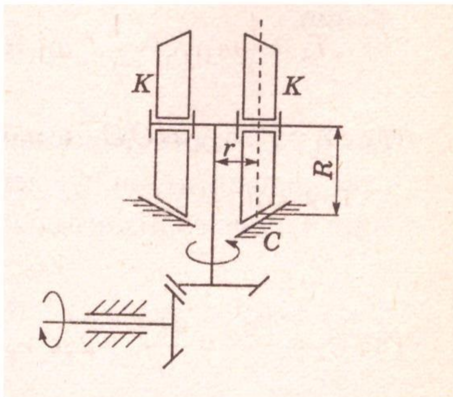
მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და მივიღებთ:

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon_1 = \frac{M}{22mr^2}.$$

<u>*პ ა ს უ ხ ი:*</u> $\varepsilon_1 = \frac{M}{22mr^2}.$

ამოცანა 48.8

K, K რბიები მოძრაობაში მოდის ძრავას ლილვის გადაცემის საშუალებით, რომლის სქემა ნაჩვენებია ნახაზზე. ერთი რბიის მასა არის 3ტ, საშუალო რადიუსი $R =$1მ, ბრუნვის რადიუსი $r =$ 0,5მ. იგულისხმება, რომ რბიას ბრუნვის მყისი ღერძი გადის ფერსოს შუა C წერტილზე. ძრავადან ვერტიკალურ O_1O ლილვზე კონუსური გადაცემის თვლების რადიუსების ფარდობა არის 2/3. რბიას ვთვლით R რადიუსის ერთგვაროვან დისკოდ და ყველა მოძრავი ნაწილის მასა, რბიას მასასთან შედარებით, უგულებელყოფილია.



გამოთვალეთ, როგორი მუდმივი მბრუნავი მომენტი უნდა მოვდოთ ძრავას ლილვზე, რომ ვერტიკალურ O_1O ლილვს მივანიჭოთ კუთხური სიჩქარე 120ბრ/წთ ძრავას გაშვების მომენტიდან 10 წამის შემდეგ. წინაღობის ძალები უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ M^* მბრუნავი მომენტი ვერტიკალურ ლილვზე გადაცემათა თანაფარდობის საშუალებით (იხ. ნახაზი):

$$\frac{M^*}{M} = \frac{r_3}{r_2} \Longrightarrow M^* = \frac{r_3}{r_2} M,$$

სადაც $M, M^* -$ მღუნავი მომენტებია შესაბამისად ჰორიზონტალურ და ვერტიკალურ ლილვზე; r_2 და $r_3 -$ 2 და 3 თვლების რადიუსებია.

განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ ვერტიკალური ლილვის მობრუნების კუთხე $q = \varphi$ (იხ. ნახაზი) და ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება მოცემული მექანიკური სისტემისათვის, რომლის თავისუფლების ხარისხი უდრის ერთს:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}.$$

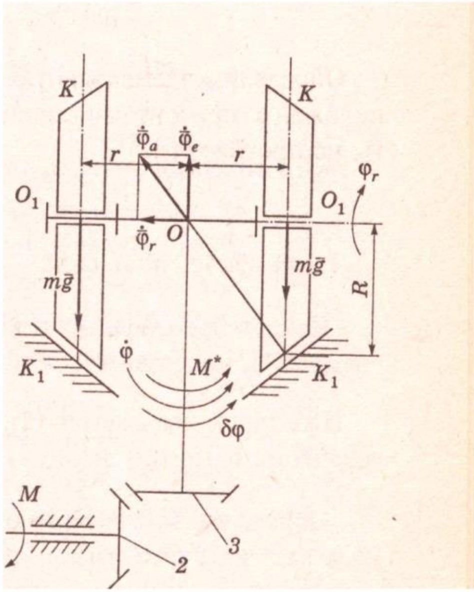
რბიას კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს სფერულ მოძრაობას,

$$T_1 = T_e + T_r,$$

სადაც $T_e, T_r -$ რბიას კინეტიკური ენერგიებია შესაბამისად ვერტიკალური ღერძის გარშემო წარმტან ბრუნვაში და ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო ფარდობით ბრუნვაში:

$$T_e = \left(\frac{mR^2}{4} + mr^2\right)\frac{\dot{\varphi}_e^2}{2};$$

$$T_r = \frac{mR^2}{2}\frac{\dot{\varphi}_r^2}{2}.$$



რადგან

$$\dot{\varphi}_e = \dot{\varphi},$$

$$\dot{\varphi}_r = \frac{v_{01}}{R} = \frac{\dot{\varphi}_e r}{R} = \frac{r\dot{\varphi}}{R},$$

ამიტომ

$$T_1 = \left(\frac{mR^2}{4} + mr^2\right)\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mR^2}{2}\frac{\dot{\varphi}^2 r^2}{2R^2} = \frac{m\dot{\varphi}^2}{4}\left(3r^2 + \frac{R^2}{2}\right).$$

ორი რბიას კინეტიკური ენერგია

$$T = 2T_1 = \frac{1}{2}m\left(3r^2 + \frac{R^2}{2}\right)\dot{\varphi}^2.$$

გამოვთვალოთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში შემავალი კინეტიკური ენერგიის წარმოებულები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\left(3r^2 + \frac{R^2}{2}\right)\ddot{\varphi}; \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

გამოვთვალოთ Q_φ განზოგადებული ძალა. ამისათვის სისტემას მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება $\delta\varphi$, გავითვალისწინოთ, რომ სიმძიმის ძალები მუშაობას არ ასრულებენ, ხოლო წინაღობის ძალები პირობის თანახმად უგულებელყოფილია. გამოვთვალოთ ელემენტარული მუშაობა

$$\delta A = M\delta\varphi.$$

მაშინ განზოგადებული ძალა

$$Q_\varphi = \frac{\delta A}{\delta \varphi} = M^* = \frac{3}{2}M.$$

მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და მივიღებთ:

$$\frac{2}{3}m\left(3r^2+\frac{R^2}{2}\right)\ddot{\varphi}=M$$

რადგან ძრავა ბრუნავს მუდმივი კუთხური აჩქარებით $\varepsilon=\ddot{\varphi}$, ამიტომ კინემატიკურ თანაფარდობას აქვს სახე:

$$\omega=\varepsilon t \Longrightarrow \varepsilon=\ddot{\varphi}=\frac{\omega}{t}=\frac{\pi n}{30t}=\frac{120\pi}{30\cdot 10}=0{,}4\pi.,$$

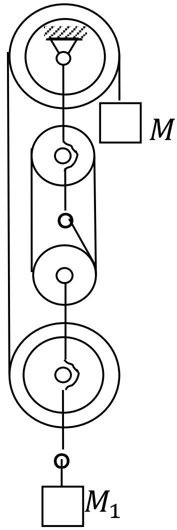
მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და გამოვთვალოთ მუდმივი მბრუნავი მომენტი:

$$M=\frac{0{,}8\pi m}{3}\left(3r^2+\frac{R^2}{2}\right)=\frac{0{,}8\cdot 3{,}14\cdot 3\cdot 10^3}{3}\left(3\cdot 0{,}5^2+\frac{1^2}{2}\right)=3140$$

პ ა ს უ ხ ი: 3140ნ·მ.

ამოცანა 48.9

101კგ მასის M ტვირთი პოლისპასტის საშუალებით ეზიდება ზევით M_1 ტვირთს, რომლის მასა მოძრავ სალტესთან ერთად არის 320კგ. დიდი ბლოკების მასაა 16კგ, ხოლო მცირე-8კგ. . დიდი ბლოკების რადიუსებია r, ხოლო მცირეებისა -r_1. განსაზღვრეთ M ტვირთის აჩქარება. ბლოკების ენერგიის განსაზღვრისას იგულისხმეთ, რომ მათი მასები თანაბრად განაწილებულია წრეწირის გასწვრივ.



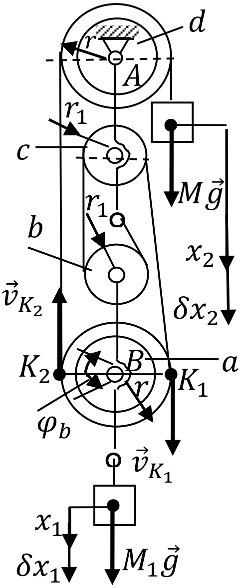
ა მ ო ხ ს ნ ა. განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ M ტვირთის გადააადგილება $q = x_2$ (იხ. ნახაზი) და ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება მოცემული მექანიკური სისტემისათვის, რომლის თავისუფლების ხარისხი უდრის ერთს:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q.$$

c და d ბლოკები ბრუნავენ უძრავი ღერძების ირგვლივ, M და M_1 ტვირთები მოძრაობენ გადატანითად, ხოლო a და b ბლოკები ასრულებენ ბრტყელ მოძრაობას, ამიტომ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{M\dot{x}_2^2}{2} + \frac{M_1\dot{x}_1^2}{2} + (m_d + m_b)\frac{\dot{x}_1^2}{2} + \frac{J_a\dot{\varphi}_a^2}{2} + \frac{J_b\dot{\varphi}_b^2}{2} + \frac{J_c\dot{\varphi}_c^2}{2} + \frac{J_d\dot{\varphi}_d^2}{2}.$$

აქ გათვალისწინებულია, რომ ხოლო a და b ბლოკების ცენტრების სიჩქარეები ტოლია, ე.ი. $v_a = v_b = \dot{x}_1$.



მეორეს მხრივ,

$$\dot{\varphi}_b = \frac{\dot{x}_1}{r_1}, v_{K_1} = \dot{\varphi}_b \cdot 2r_1 = 2\dot{x}_1;$$

$$v_a = \frac{v_{K_2} - v_{K_1}}{r} \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{\dot{x}_2 - 2\dot{x}_1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{\dot{x}_2}{4} \Rightarrow \dot{\varphi}_b = \frac{\dot{x}_2}{r};$$

$$\dot{\varphi}_a = \frac{v_{K_2} - v_a}{2} = \frac{3\dot{x}_2}{4r}, \quad \dot{\varphi}_c = \frac{2\dot{x}_1}{r_1} = \frac{2\dot{x}_2}{2r_1},$$

$$\dot{\varphi}_d = \frac{\dot{x}_2}{r}.$$

გარდა ამისა,

$$J_a = J_d = m_a r^2;$$

$$J_b = J_c = m_b r_1^2, \quad m_b = \frac{m_a}{2}.$$

მაშინ

$$T=\frac{\dot{x}_2^2}{2}\left(M+\frac{1}{16}M_1+\frac{3}{2}m_a\cdot\frac{1}{16}m_ar^2\cdot\frac{9}{16r^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{m_a}{2}r_1^2\cdot\frac{1}{16r_1^2}+\frac{m_a}{2}r_1^2\cdot\frac{1}{4r_1^2}+m_ar^2\cdot\frac{1}{r^2}\right)=$$

$$=\frac{\dot{x}_2^2}{2}\left[M+\frac{1}{16}M_1+m_a\left(\frac{3}{32}+\frac{9}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{8}+1\right)\right]=$$

$$=\frac{\dot{x}_2^2}{2}\left(M+\frac{1}{16}M_1+\frac{58}{32}m_a\right).$$

გამოვთვალოთ კინეტიკური ენერგიის წარმოებულები, რომლებიც შედიან ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და ჩავსვათ ისინი ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილში:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=\left(M+\frac{1}{16}M_1+\frac{58}{32}m_a\right)\ddot{x}_2$$

გამოვთვალოთ Q განზოგადებული ძალა. ამისათვის სისტემას მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება δx_2, და გამოვთვალოთ ელემენტარული მუშაობა

$$\delta A=Mg\delta x_2-(M_1+m_a+m_b)g\delta x_1=$$

$$=\left(-\frac{M_1+\frac{3}{2}m_a}{4}+M\right)g\delta x_2.$$

მაშინ განზოგადებული ძალა

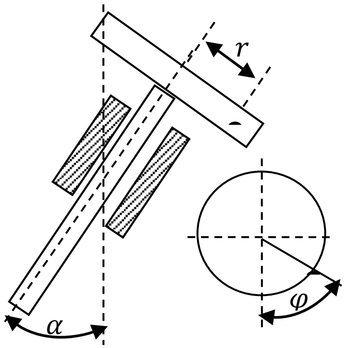
$$Q=\frac{\delta A}{\delta\varphi}=\left(-\frac{M_1}{4}-\frac{3}{8}m_a+M\right)g.$$

მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და განვსაზღვროთ M ტვირთის აჩქარება:

$$\ddot{x}_2=\frac{M-\frac{M_1}{4}-\frac{3}{8}m_a}{M+\frac{1}{16}M_1+\frac{58}{32}m_a}g=\frac{101-\frac{320}{4}-\frac{3}{8}\cdot16}{101+\frac{320}{16}-\frac{58}{32}\cdot16}g=0{,}1g.$$

პასუხი: $0{,}1g$.

ამოცანა 48.10

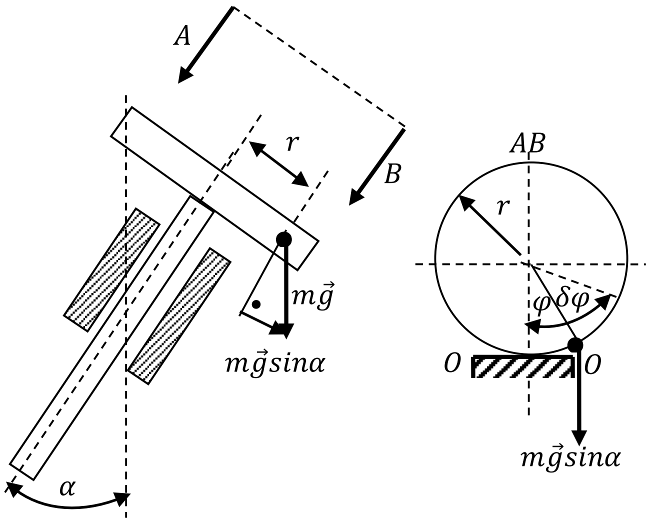


მანქანაში სტატიკური გაწონასწორების მიზნით საკისრები დახრილია ვერტიკალთან α კუთხით. ამ საკისრებში მოთავსებულ როტორს თავისი ღერძის მიმართ აქვს $J-$ს ტოლი ინერციის მომენტი, ამასთან იგი ატარებს ღერძიდან r მანძილზე გაუწონასწორებელ m მასას. დაწერეთ როტორის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება და განსაზღვრეთ წონასწორობის მახლობლობაში მცირე რხევების სიხშირე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ როტორის მობრუნების კუთხე $q=\varphi$ (იხ, ნახაზი) და ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება პოტენციალურ ძალტა ველში:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0,$$

სადაც $L=T-\Pi$ -ლაგრანჟის ფუნქციაა.



მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T=\frac{J\dot{\varphi}^2}{2}+mr^2\dot{\varphi}^2,$$

მექანიკური სისტემის პოტენციური ენერგია

$$\Pi = mgrsin\alpha(1-cos\varphi).$$

მაშინ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + mr^2\dot{\varphi}^2 - mgrsin\alpha(1-cos\varphi).$$

გამოვთვალოთ ლაგრანჟის ფუნქციის წარმოებულები, რომლებიც შედიან ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და ჩავსვათ ისინი ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილში, მივიღებთ:

$$(J+mr^2)\ddot{\varphi} + mgrsin\alpha sin\varphi = 0.$$

მცირე რხევების დროს $sin\varphi \approx \varphi.$ ამ პირობის გათვალისწინებით ბოლო განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,$$

სადაც $k = \sqrt{\frac{mgrsin\alpha}{J+mr^2}}$ – თავისუფალი რხევების წრიული სიხშირეა.

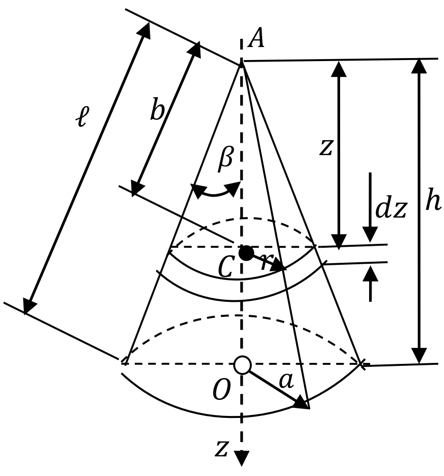
პ ა ს უ ხ ი: $(J+mr^2)\ddot{\varphi} + mgrsin\alpha sin\varphi = 0$ –სადაც φ – როტორის მობრუნების კუთხეა; $k = \sqrt{\frac{mgrsin\alpha}{J+mr^2}}$.

ამოცანა 48.11

ერთგვაროვანი კონუსი გორავს ჰორიზონტისადმი α კუთხით დახრილ ხაოიან სიბრტყეზე. კონუსის მსახველის სიგრძე უდრის ℓ-ს, გაშლის კუთხე –2β. შეადგინეთ კონუსის მოძრაობის განტოლება.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. განზოგადებულ კოორდინატად მიიღეთ θ კუთხე, რომელსაც შემხები მსახველი ადგენს უდიდესი დახრის სიბრტყის წრფესთან.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვსაზღვროთ კონუსის C სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა, ე.ი. AC, და შემოვიღოთ აღნიშვნა (ნახ.1):



ნახ.1

$$VS = \int_0^h \pi r^2 z dz$$

რადგან

$$\frac{r}{a} = \frac{z}{h},$$

ამიტომ

$$r = \frac{az}{h}. \qquad (1)$$

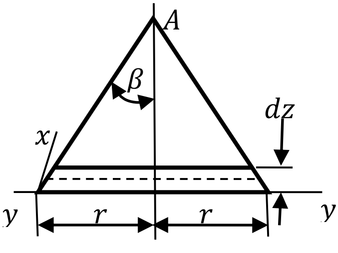
ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{1}{3}\pi a^2 hS = \pi \frac{a^2}{h^2}\frac{h^4}{4},$$

$$S = \frac{3}{4}h.$$

მაშინ

$$b = Scos\beta = \frac{3}{4}hcos\beta = \frac{3}{4}\ell cos^2\beta.$$



ნახ.2

განვსაზღვროთ კონუსის ინერციის მომენტი J_A მისი მსახველის მიმართ (ნახ.2). კონუსიდან გამოვყოთ ელემენტარული dm მასის დისკო. მისი ინერციის მომენტი იმ წრფის მიმართ, რომელიც ღერძებთან ადგენს $\beta\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ კუთხეს უდრის:

$$dJ_A = dJ_x cos^2\beta + dJ_y sin^2\beta$$

ან

$$dJ_A = \left(\frac{r^2dm}{2} + r^2dm\right)cos^2\beta + \frac{r^2}{4}dm \cdot sin^2\beta =$$

$$= \frac{r^2}{4}dm(6cos^2\beta + sin^2\beta) = \frac{r^2}{4}dm(1 + 5cos^2\beta). \qquad (2)$$

გავითვალიწინოთ, რომ

$$\frac{dm}{M} = \frac{\rho\pi r^2 dz}{\frac{1}{3}\rho\pi a^2 h} = \frac{3\left(\frac{qz}{h}\right)^2 dz}{a^2h} = \frac{3z^2dz}{h^3},$$

საიდანაც

$$dm = \frac{3M}{h^3}z^2dz,$$

სადაც $M -$ კონუსის მასაა.

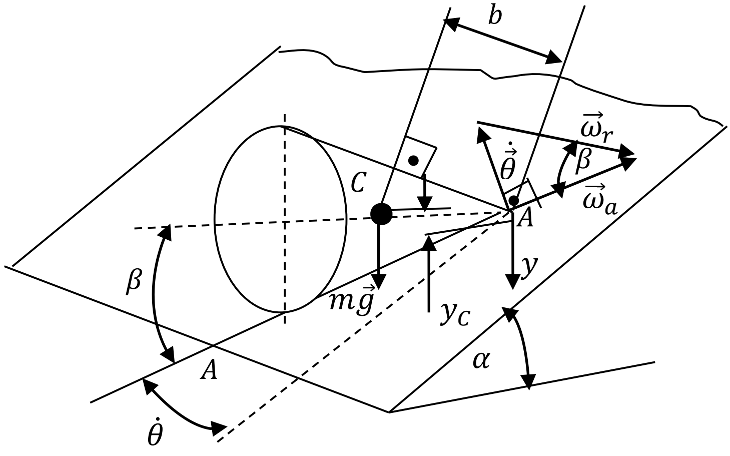
თუ მიღებულ შედეგებს გავითვალისწინებთ (2) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$J_A = \frac{3Ma^2}{h^5}(1 + 5cos^2\beta)\int_0^h z^4dz = \frac{3}{4}Ma^2\left(cos^2\beta + \frac{1}{5}\right) =$$

$$= \frac{3}{4}M\ell^2 sin^2\beta\left(cos^2\beta + \frac{1}{5}\right).$$

სიმძიმის ცენტრის კოორდინატი (ნახ.3)

$$y_C = bcos\theta ain\alpha = \frac{3}{4}\ \ell cos^2\beta cos\theta ain\alpha.$$



AA მყისი ღერძის ირგვლივ ბრუნვის კუთხური სიჩქარე:

$$\vec{\omega}_r + \vec{\dot{\theta}} = \vec{\omega}_a,$$
$$\vec{\omega}_a = \dot{\theta} ctg\beta = \dot{\theta}\,\frac{cos\beta}{sin\beta}.$$

განვსაზღვროთ ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L = T - \Pi = \frac{J_A\omega_a^2}{2} - Mgy_C = \frac{3}{4}M\ell^2 sin^2\beta\left(cos^2\beta + \frac{1}{5}\right)\times$$
$$\times\frac{\dot{\theta}^2 cos^2\beta}{2sin^2\beta} - \frac{3}{4}Mg\,\ell cos^2\beta cos\theta ain\alpha = \frac{3}{8}M\,\ell cos^2\beta\left(cos^2\beta + \frac{1}{5}\right)\dot{\theta}^2 -$$
$$-\frac{3}{4}Mg\,\ell cos^2\beta cos\theta ain\alpha.$$

ვიპოვოთ L ლაგრანჟის ფუნქციის წარმოებული θ განზოგადებული კოორდინატით და დროით წარმოებული და ჩავსვათ ისინი ლაგრანჟის განტოლებაში:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

და მივიღოთ კონუსის მოძრაობის განტოლება

$$\ell^2\left(cos^2\beta + \tfrac{1}{5}\right)\ddot{\theta} + g\,\ell sin\theta sin\alpha = 0$$

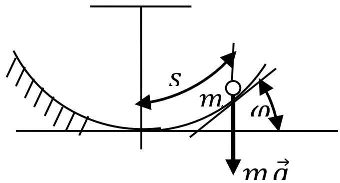
ან

$$\ddot{\theta} + \frac{gsin\alpha}{\ell\left(cos^2\beta + \frac{1}{5}\right)} sin\theta = 0.$$

<u>*პ ა ს უ ხ ი:*</u> $\ddot{\theta} + \frac{gsin\alpha}{\ell\left(cos^2\beta + \frac{1}{5}\right)} sin\theta = 0.$

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 48.12

m მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს სიმძიმის ძალის მოქმედებით ციკლოიდურ მიმმართველზე, მოცემული განტოლებით: $s = 4asin\varphi$, სადაც s არის O წერტილიდან ათვლილი რკალი, $\varphi -$ ხოლო ციკლოიდის მხების მიერ ჰორიზონტთან შედგენილი კუთხე. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობა.



ა მ ო ხ ს ნ ა. ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას ორი ხერხით.

პირველი ხერხი. განზოგადებულ კოორდინატად ავიღოთ s მრუდწირული კოორდინატი.

ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s.$$

წერტილის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{m\dot{s}^2}{2};$$

განზოგადებული ძალა

$$Q_s = \frac{\sum(\delta A)_s}{\delta s} = -\frac{mgsin\varphi \cdot \delta s}{\delta s} = -mgsin\varphi$$

კინეტიკური ენერგიის შესაბამისი არგუმენტებით გაწარმოების შედეგად და მიღებული შედეგების ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$m\ddot{s} = -mgsin\varphi, \quad (1)$$

გამოვიყენოთ თანაფარდობა

$$s = 4asin\varphi,$$

ვიპოვით

$$sin\varphi = \frac{s}{4a}. \quad (2)$$

ჩავსვათ (2) გამოსახულება (1) განტოლებაში და მარტივი გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ ჰარმონიული რხევების დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\ddot{s} + \frac{g}{4a}s = 0,$$

რომლის ამონახსენს აქვს სახე

$$s = Asin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}t + \varphi_0\right),$$

სადაც $A-$ რხევების ამპლიტუდაა; φ_0 −საწყისი ფაზა.

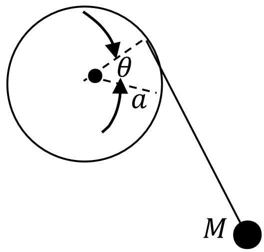
მეორე ხერხი. ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას ლარანჟის მეორე გვარის განტოლებების გამოყენების გარეშეც. შაკამრისია ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის განტოლება ციკლოდის მხებზე გეგმილებში, ე.ი.

$$m\ddot{s} = -mgsin\varphi.$$

პ ა ს უ ხ ი: $s = Asin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}t + \varphi_0\right)$, A და φ_0 ინტეგრების მუდმივებია.

ამოცანა 48.13

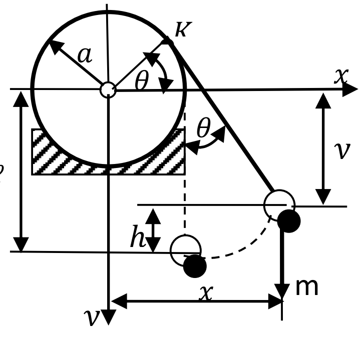
შეადგინეთ ქანქარას მოძრაობის განტოლება, თუ იგი შედგება m მასის ნივთიერი წერტილისაგან, რომელიც ჩამოკიდებულია უძრავ r რადიუსის ცილინდრზე შემოხვეული ძაფის საშუალებით. წონასწორობის მდებარეობაში გადმოკიდებული ძაფის სიგრძე არის ℓ. ძაფის მასა უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განზოგადებულ კოორდინატად ავიღოთ ქანქარას ვერტიკალიდან გადახრის θ კუთხე.

ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial A}{\partial \theta}. \qquad (1)$$



ქანქარას კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{mv^2}{2},$$

სადაც $v = (a + a\theta)\dot{\theta}$.
მაშინ

$$T = \frac{m(\ell + a\theta)^2\dot{\theta}^2}{2}$$

მუშაობა A, რომელიც იხარჯება ქანქარას გადახრაზე

$$A = -mgh,$$

რადგან

$$h = \ell - y = \ell + asin\theta - (\ell + a\theta)cos\theta,$$

ამიტომ

$$A = [(\ell + a\theta)cos\theta - (\ell + asin\theta)]mg.$$

ვიპოვოთ (1) განტოლებაში შემავალი წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = m(\ell + a\theta)^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial\theta} = ma(\ell + a\theta)\dot{\theta}^2;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right) = \left[(\ell + a\theta)^2\ddot{\theta} + 2a(\ell + a\theta)\dot{\theta}^2\right]m,$$

$$\frac{\partial A}{\partial\theta} = [-(\ell + a\theta)sin\theta + acos\theta - cos\theta]mg = -mg(\ell + a\theta)sin\theta.$$

წარმოებულების მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (1) განტოლებაში და მივიღებთ

$$(\ell + a\theta)^2\ddot{\theta} + 2a(\ell + a\theta)\dot{\theta}^2 - a(\ell + a\theta)\dot{\theta}^2 = -g(\ell + a\theta)sin\theta$$

ან $\ell + a\theta$ -ზე შეკვეცის შემდეგ

$$(\ell + a\theta)\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2 + gsin\theta = 0.$$

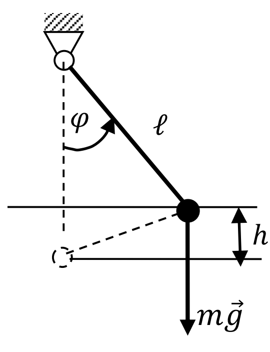
პ ა ს უ ხ ი: $(\ell + a\theta)\ddot{\theta} + a\dot{\theta}^2 + gsin\theta = 0,$ სადაც $\theta -$ ქანქარას ვერტიკალიდან გადახრის კუთხეა.

ამოცანა 48.14

შეადგინეთ იმ ქანქარას მოძრაობის განტოლება, რომელიც შედგება m მასის ნივთიერი წერტილისაგან; იგი ჩამოკიდებულია ძაფზე, რომლის სიგრძე იცვლება ნებისმიერი $\ell = \ell(t)$ კანონით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ ძაფის ვერტიკალიდან გადახრის კუთხე $q = \varphi$ (იხ. ნახაზი) და ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = \frac{\partial A}{\partial\varphi}. \qquad (1)$$



ქანქარას კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{m\ell^2\dot{\varphi}^2}{2}.$$

მუშაობა A, რომელიც იხარჯება ქანქარას გადახრაზე

$$A = -mgh = -mg\ell(1 - cos\varphi).$$

გამოვთვალოთ (1) განტოლებაში შემავალი კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\ell^2\ddot{\varphi} + 2m\ell\dot{\ell}\dot{\varphi};$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi} = -mg\ell sin\varphi.$$

ჩავსვათ მიღებული გამოსახულებები (1) განტოლებაში:

$$m\ell^2\ddot{\varphi} + 2m\ell\dot{\ell}\varphi = -mg\ell sin\varphi.$$

$m\ell^2$ –ზე შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ:

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{\ell}}{\ell}\dot{\varphi} + \frac{g}{\ell}sin\varphi = 0.$$

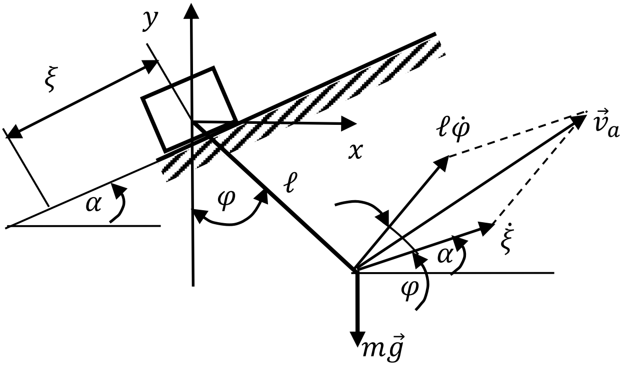
პ ა ს უ ხ ი: $\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{\ell}}{\ell}\dot{\varphi} + \frac{g}{\ell}sin\varphi = 0$, სადაც φ არის ძაფის ვერტიკალიდან გადახრის კუთხე.

ამოცანა 48.15

m მასის ნივთიერი წერტილისაგან შემდგარი ქანქარა ჩამოკიდებულია უჭიმარი ℓ სიგრძის ძაფზე, რომლის დაკიდების წერტილი მოძრაობს ჰორიზონტთან α კუთხით დახრილ წრფეზე $\xi = \xi_0(t)$ კანონით. შეადგინეთ ქანქარას მოძრაობის განტოლება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ ძაფის ვერტიკალიდან გადახრის კუთხე $q = \varphi$ (იხ. ნახაზი) და ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial A}{\partial \varphi}. \qquad (1)$$



ქანქარას აბსოლუტური სიჩქარე არის დაკიდების წერტილის წარმტანი სიჩქარისა და ქანქარას ფარდობითი სიჩქარეების ჯამი:

$$v_a^2 = v_x^2 + v_y^2 = \left(\ell\dot{\varphi}cos\varphi + \dot{\xi}cos\alpha\right)^2 + \left(\ell\dot{\varphi}sin\varphi + \dot{\xi}sin\alpha\right)^2 =$$
$$= \ell^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2 + 2\ell\dot{\varphi}\dot{\xi}\cos(\varphi - \alpha).$$

ქანქარას კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{mv_a^2}{2} = \frac{m}{2}\left[\ell^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2 + 2\ell\dot{\varphi}\dot{\xi}\cos(\varphi - \alpha)\right].$$

სიმძიმის ძალის მუშაობა:

$$A = -[mg\ell(1 - cos\varphi) + \xi sin\alpha].$$

გამოვთვალოთ (1) განტოლებაში შემავალი კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2\dot{\varphi} + m\ell\dot{\xi}\cos(\varphi - \alpha)\,;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\ell^2\ddot{\varphi} + m\ell\ddot{\xi}\cos(\varphi - \alpha) - m\ell\dot{\varphi}\dot{\xi}\sin(\varphi - \alpha)\,;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m\ell\dot{\varphi}\dot{\xi}\sin(\varphi - \alpha);$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi} = -mg\ell sin\varphi.$$

ჩავსვათ მიღებული გამოსახულებები (1) განტოლებაში: და მივიღოთ ქანქარას მოძრაობის განტოლება

$$m\left[\ell^2\ddot{\varphi} + \ell\ddot{\xi}\cos(\varphi - \alpha) - \ell\dot{\varphi}\dot{\xi}\sin(\varphi - \alpha) + \ell\dot{\varphi}\dot{\xi}\sin(\varphi - \alpha)\right] =$$
$$= -mg\ell sin\varphi$$

ან

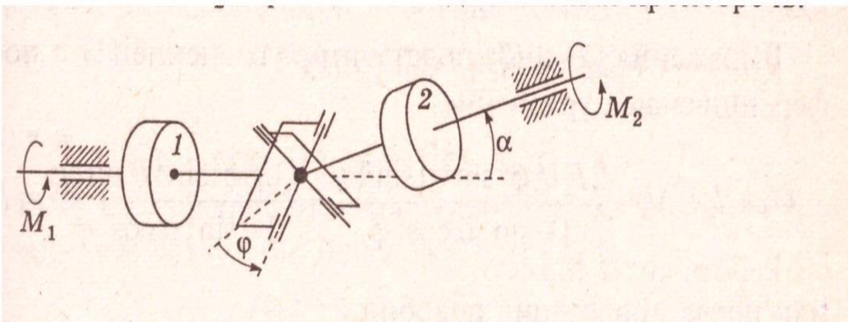
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}sin\varphi + \frac{\ddot{\xi}}{\ell}\cos(\varphi - \alpha) = 0.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} sin\varphi + \frac{\ddot{\xi}}{\ell}\cos(\varphi - \alpha) = 0.$

ამოცანა 48.16

ერთ სიბრტყეში მდებარე ორი ლილვი, რომლებიც ერთმანეთთან ქმნიან α კუთხეს, შეერთებულია კარდანის სახსრით. ილვების ინერციიის მომენტებია J_1 და J_2. შეადგინეთ პირველი ლილვის მოძრაობის განტოლება, თუ მასზე მოქმედებს მაბრუნი M_1 მომენტი, ხოლო მეორე ლილვზე-წინაღობის M_2 მომენტი. საკისრებში ხახუნი უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ პირველი ლილვის მობრუნების კუთხე $q = \varphi$ (იხ. ნახაზი) და ჩავწეროთ ლაგრანჟის



მეორე გვარის განტოლება :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \qquad (1)$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{J_1\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{J_2 i_{12}^2 \dot{\varphi}^2}{2},$$

სადაც $i_{12}^2 = \frac{cos\alpha}{1-sin^2\alpha cos^2\varphi}$ − ჰუკის სახსარის გადაცემათა თანაფარდობაა.

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიეს გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (J_1 + J_2 i_{12})\dot{\varphi};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{J_2 i_{12}^2 \dot{\varphi}^2 sin^2\alpha sin2\varphi}{1 - sin^2\alpha cos^2\varphi};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = (J_1 + J_2 i_{12})\ddot{\varphi} - \frac{2J_2 i_{12}^2 \dot{\varphi}^2 sin^2\alpha sin2\varphi}{1 - sin^2\alpha cos^2\varphi}.$$

გამოვთვალოთ Q_φ განზოგადებული ძალა. ამისათვის სისტემას მივანიჭოთ შესაძლო გადაადგილება $\delta\varphi$ და. გამოვთვალოთ ელემენტარული მუშაობა

$$\delta A = M_1\delta\varphi - M_2 i_{12}\delta\varphi.$$

მაშინ განზოგადებული ძალა

$$Q_\varphi = \frac{\delta A}{\delta\varphi} = M_1 - M_2 i_{12}.$$

მიღებული გამოსახულებები შევიტანოთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებებში და მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას

$$(J_1 + J_2 i_{12})\ddot{\varphi} - \frac{2J_2 i_{12}^2 \dot{\varphi}^2 sin^2\alpha sin2\varphi}{1 - sin^2\alpha cos^2\varphi} + \frac{J_2 i_{12}^2 \dot{\varphi}^2 sin^2\alpha sin2\varphi}{1 - sin^2\alpha cos^2\varphi} =$$

$$= M_1 - M_2 i_{12}$$

ან მსგავსი წევრების შეერთების შემდეგ

$$(J_1 + J_2 i_{12})\ddot{\varphi} + \frac{J_2 i_{12}^2 \dot{\varphi}^2 sin^2\alpha sin2\varphi}{1 - sin^2\alpha cos^2\varphi} = M_1 - M_2 i_{12}$$

და i_{12} გამოსახულების ჩასმის შემდეგ მივიღებთ:

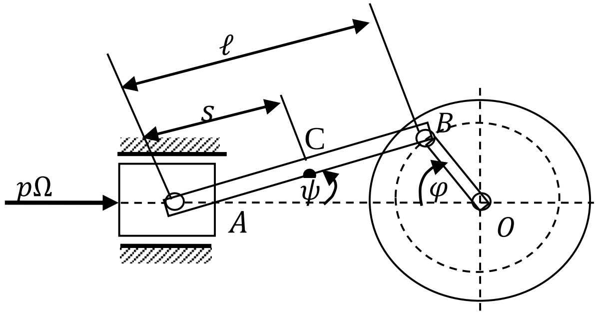
$$\left[J_1 + J_2\left(\frac{cos\alpha}{1 - sin^2\alpha cos^2\varphi}\right)^2\right]\ddot{\varphi} - \frac{J_2 sin^2\alpha cos^2\alpha sin2\varphi}{(1 - sin^2\alpha cos^2\varphi)^3}\dot{\varphi}^2 =$$
$$= M_1 - M_2\frac{cos\alpha}{1 - sin^2\alpha cos^2\varphi}.$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$\left[J_1 + J_2\left(\frac{cos\alpha}{1 - sin^2\alpha cos^2\varphi}\right)^2\right]\ddot{\varphi} - \frac{J_2 sin^2\alpha cos^2\alpha sin2\varphi}{(1 - sin^2\alpha cos^2\varphi)^3}\dot{\varphi}^2 =$$
$$= M_1 - M_2\frac{cos\alpha}{1 - sin^2\alpha cos^2\varphi}.$$

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 48.17

მრუდმხარა მექანიზმი შედგება m_1 მასის დგუშის, m_2 მასის ბარბაცას, OB მრუდმხარას, ლილვისა და მქნევარა თვლისაგან; ბარბაცას ინერციის მომენტი მისი მასათა C ცენტრის მიმართ არის J_2; OB მრუდმხარას მქნევარა თვლისა და ლილვის ინერციის მომენტი ღერძის მიმართ $-J_3$; $\Omega -$დგუშის



ფართობი; $p-$ დგუშზე მოქმედი წნევა $\ell-$ ბარბაცას სიგრძე; $s-$ მანძილი ბარბაცას მასათა ცენტრსა და C წერტილს შორის; $r - OB$ მრუდმხარას სიგრძე; $M-$ ლილვზე მოქმედი წინაღობათა მომენტი. შეადგინეთ მექანიზმის მოძრაობის განტოლება, თუ ბარბაცას მობრუნების ψ კუთხე იმდენად მცირეა, რომ $sin\psi = \psi$ და $cos\psi = 1$. განზოგადებულ კოორდინატად მიიღეთ მრუდმხარას მობრუნების φ კუთხე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ პირველი ლილვის მობრუნების კუთხე $q=\varphi$ (იხ. ნახაზი) და ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \qquad (1)$$

მექანიზმის კინეტიკური ენერგია

$$T = T_{\text{მრ}} + T_{\text{ბარ}} + T_{\text{ცოც}},$$

სადაც

$$T_{\text{მრ}} = J_3\frac{\dot{\varphi}^2}{2},$$

$$T_{\text{ბარ}} = \frac{m_2 v_A^2}{2} + \frac{m_2 v_{CA}^2}{2} + J_2\frac{\dot{\psi}^2}{2},$$

$$T_{\text{ცოც}} = \frac{m_1 v_A^2}{2};$$

$$v_A = v_B sin\varphi = r\dot{\varphi} sin\varphi, \quad \frac{r}{sin\psi} = \frac{\ell}{sin\varphi};$$

$$sin\psi = \frac{r}{\ell} sin\varphi, \qquad \dot{\psi} cos\psi = \frac{r}{\ell}\dot{\varphi} cos\varphi;$$

ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს $cos\psi = 1$, მაშინ

$$\dot{\psi} = \frac{r}{\ell}\dot{\varphi} cos\varphi, \ \ v_{CA} = s\dot{\psi} = \frac{sr}{\ell}\dot{\varphi} cos\varphi.$$

მაშინ

$$T = J_3\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + (m_1+m_2)\frac{r^2\dot{\varphi}^2}{2}sin^2\varphi + (J_2+m_2s^2)\frac{r^2}{\ell^2}\frac{\dot{\varphi}^2}{2}cos^2\varphi.$$

რადგან

$$\delta s_A = rsin\varphi \cdot \delta\varphi,$$

ამიტომ

$$Q_\varphi = \frac{(\sum\delta A_k)_\varphi}{\delta\varphi} = \frac{p\Omega\delta s_A - M\delta\varphi}{\delta\varphi} = -M + p\Omega rsin\varphi.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \left[J_3 + (m_1+m_2)r^2sin^2\varphi + (J_2+m_2s^2)\frac{r^2cos^2\varphi}{\ell^2}\right]\dot{\varphi}^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = \frac{(m_1+m_2)r^2\dot{\varphi}^2sin2\varphi}{2} - \frac{(J_2+m_2s^2)r^2\dot{\varphi}^2sin2\varphi}{2\ell^2};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \left[J_3 + (m_1+m_2)r^2sin^2\varphi + (J_2+m_2s^2)\frac{r^2cos^2\varphi}{\ell^2}\right]\ddot{\varphi} +$$
$$+\left[(m_1+m_2)r^2sin2\varphi - \frac{(J_2+m_2s^2)r^2sin2\varphi}{2\ell^2}\right]\dot{\varphi}^2.$$

ჩავსვათ მიღებული განტოლებები ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და მივიღებთ მექანიზმის მოძრაობის განტოლებას:

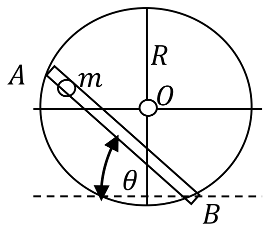
$$\left[(m_1+m_2)r^2sin^2\varphi + (J_2+m_2s^2)\frac{r^2cos^2\varphi}{\ell^2} + J_3\right]\ddot{\varphi} +$$
$$+\left[(m_1+m_2)r^2 - (J_2+m_2s^2)\left(\frac{r}{\ell}\right)^2\right]\dot{\varphi}^2sin\varphi cos\varphi =$$
$$= -M + p\Omega rsin\varphi.$$

პ ა ს უ ხ ი:

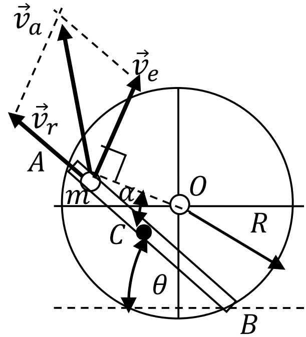
$$\left[(m_1+m_2)r^2sin^2\varphi + (J_2+m_2s^2)\frac{r^2cos^2\varphi}{\ell^2} + J_3\right]\ddot{\varphi} +$$
$$+\left[(m_1+m_2)r^2 - (J_2+m_2s^2)\left(\frac{r}{\ell}\right)^2\right]\dot{\varphi}^2sin\varphi cos\varphi =$$
$$= -M + p\Omega rsin\varphi.$$

ამოცანა 48.18

M მასის და $2a$ სიგრძის ერთგვაროვან ღეროზე, რომლის ბოლოები სრიალებს R რადიუსის გლუვ ჰორიზონტალურ წრეხაზზე, მოძრაობს m მასის ნივთიერი წერტილი v ფარდობითი სიჩქარით. განსაზღვრეთ მოძრაობის განტოლება. საწყის მომენტში ნივთიერი წერტილი მდებარეობს ღეროს სიმძიმის ცენტრში.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ ღეროს მობრუნების კუთხე $q = \theta$ (იხ. ნახაზი) და ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება:



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta . \qquad (1)$$

განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია:

$$T = \frac{mv_a^2}{2} + \frac{J_0 \dot{\theta}^2}{2},$$

სადაც

$$J_0 = \frac{Ma^2}{3} + M(R^2 - a^2).$$

აბსოლუტური სიჩქარე იპოვოთ კოსინუსების თეორემის გამოყენებით:

$$v_a^2 = v_r^2 + v_a^2 + 2v_e v_r cos\alpha,$$

სადაც

$$v_r = v_a, \qquad v_e = \dot{\theta}\sqrt{R^2 - a^2 + v_r^2 t^2} = \dot{\theta}\sqrt{R^2 - a^2 + v^2 t^2};$$

$$cos\alpha = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{\sqrt{R^2 - a^2 + v^2 t^2}}.$$

მაშინ

$$v_a^2 = v^2 + \dot{\theta}^2 (R^2 - a^2 + v^2 t^2) + 2v\dot{\theta}\sqrt{R^2 - a^2 + v^2 t^2} \times$$
$$\times \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{\sqrt{R^2 - a^2 + v^2 t^2}}.$$

მაშასადამე, მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{\dot{\theta}^2}{2} M\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right) + \frac{Mv^2}{2} + mv\dot{\theta}\sqrt{R^2 - a^2} +$$
$$+ \frac{m\dot{\theta}^2}{2}\left(R^2 - a^2 + v^2 t^2\right).$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} M\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right)\dot{\theta} \ + m(R^2 - a^2 + v^2t^2)\dot{\theta} \ + mv\sqrt{R^2 - a^2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

განზოგადებული ძალა $Q_\theta = 0$, რადგან მექანიკური სისტემა მდებარეობს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში და სიმძიმის ძალა მუშაობას არ ასრულებს. ამგვარად.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0$$

და (1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = C_1 = const.$$

შედეგად მივიღეთ დიფერენციალური განტოლება განტოლება განცალებადი ცვლადებით და რადგან

$$\dot{\theta} \ = \frac{d\theta}{dt},$$

ამიტომ

$$d\theta = \frac{\left(C_1 - mv\sqrt{R^2 - a^2}\right)dt}{M\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right) + m(R^2 - a^2 + v^2t^2)} =$$

$$= \frac{\left(C_1 - mv\sqrt{R^2 - a^2}\right)dt}{mv^2\left[\frac{\frac{M}{m}\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right) + R^2 - a^2}{v^2} + t^2\right]}.$$

ვაინტეგროთ ეს განტოლება, მივიღებთ:

$$\theta - \theta_0 = \frac{C_1 - mv\sqrt{R^2 - a^2}}{mv^2} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{v^2}{\frac{M}{m}\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right) + R^2 - a^2}}\, arctg \sqrt{\frac{v^2}{\frac{M}{m}\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right) + R^2 - a^2}}\, t =$$

$$= C \cdot arctg \frac{vt}{\sqrt{\frac{M}{m}\left(R^2 - \frac{2}{3}a^2\right) + R^2 - a^2}},$$

სადაც

$$C=\frac{C_1-mv\sqrt{R^2-a^2}}{mv^2}\sqrt{\frac{v^2}{\frac{M}{m}\left(R^2-\frac{2}{3}a^2\right)+R^2-a^2}}. \qquad (2)$$

ინტეგრების C_1 მუდმივი ვიპოვოთ საწყისი პირობებიდან: $t=0,\ \theta-\theta_0$:

$$C_1=m\left[R^2-a^2+\frac{M}{m}\left(R^2-\frac{2}{3}a^2\right)\right]\dot{\theta_0}+mv\sqrt{R^2-a^2}. \qquad (3)$$

ჩავსვათ (3) გამოსახულება (2)-ში და მივიღებთ:

$$C=\frac{m\left[R^2-a^2+\frac{M}{m}\left(R^2-\frac{2}{3}a^2\right)\right]\dot{\theta_0}}{mv^2}\sqrt{\frac{v^2}{R^2-a^2+\frac{M}{m}\left(R^2-\frac{2}{3}a^2\right)}}=$$

$$=\dot{\theta_0}\sqrt{\frac{R^2-a^2+\frac{M}{m}\left(R^2-\frac{2}{3}a^2\right)}{v^2}}.$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$\theta-\theta_0=C\cdot arctg\frac{vt}{\sqrt{\frac{M}{m}\left(R^2-\frac{2}{3}a^2\right)+R^2-a^2}},$$

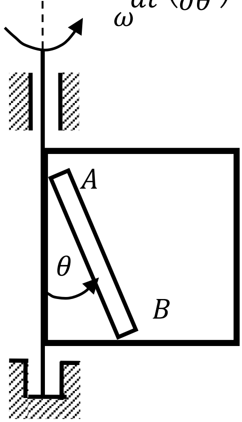
სადაც θ_0 და C ნებისმიერი მუდმივებია.

ამოცანა 48.19

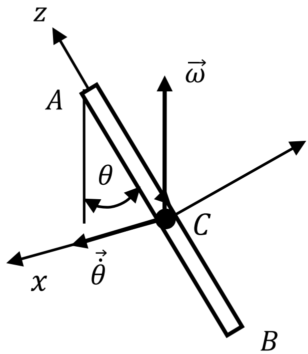
M მასის და $2a$ სიგრძის მძიმე ერთგვაროვანი ღეროს ბოლოები უხახუნოდ სრიალებს იმ ჩარჩოს ჰორიზონტალურ და ვერტიკალურ ღეროებზე, რომლებიც ვერტიკალური გვერდის გარშემო მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით ბრუნავს. შეადგინეთ ღეროს მოძრაობის განტოლება და განსაზღვრეთ ფარდობითი წონასწორობის მდებარეობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ ღეროს მობრუნების კუთხე $q = \theta$ (ნახ.1) და ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial A}{\partial \theta}.$$



ნახ.1



ნახ.2

განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია:

$$T = \frac{M}{2}\left(a^2\omega^2 sin^2\theta + a^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{(J_C \cdot \vec{\omega}_a) \cdot \vec{\omega}_a}{2},$$

სადაც

$$J_C = \begin{pmatrix} \frac{Ma^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ღეროს ინერციის ტენზორია $Oxyz$ საკოორდინატო ღერძებში (ნახ.2);

$$\vec{\omega}_a = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \omega sin\theta \\ \omega cos\theta \end{pmatrix}$$

აბსოლუტური კუთხური სიჩქარის ვექტორია $Oxyz$ საკოორდინატო ღერძებში;

$$J_C \cdot \vec{\omega}_a = \begin{pmatrix} \frac{Ma^2}{3} \quad \dot{\theta} \\ \frac{Ma^2}{3} \quad \omega sin\theta \end{pmatrix},$$

$$(J_C \cdot \vec{\omega}_a) \cdot \vec{\omega}_a = \frac{Ma^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{Ma^2}{3}\omega^2 sin^2\theta.$$

მაშინ

$$T = \frac{M}{2}(a^2\omega^2 sin^2\theta + a^2)\dot{\theta}^2 + \frac{Ma^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{Ma^2}{6}\omega^2 sin^2\theta =$$

$$= \frac{2M}{3}\left(a^2\omega^2 sin^2\theta + a^2\dot{\theta}^2\right).$$

ღეროს სიმძიმის ძალის მუშაობა

$$A = Mga(a - cos\theta).$$

ვიპოვოთ ღეროს კინეტიკური ენერგიის და სიმძიმის ძალის მუშაობის შესაბამისი წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3}Ma^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{4}{3}Ma^2\omega^2 sin\theta\, cos\theta;$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = Mga\, sin\theta.$$

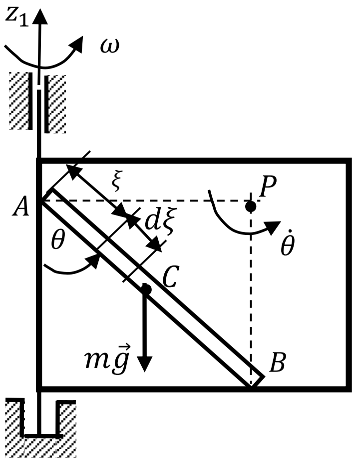
ჩავსვათ ეს შედეგები ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და მივიღებთ:

$$\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}Ma^2\omega^2 sin\theta\, cos\theta = Mga\, sin\theta$$

ან

$$\tfrac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta} - \tfrac{4}{3}Ma^2\omega^2 sin\theta\, cos\theta - Mga\, sin\theta = 0.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ღეროს კინეტიკური ენერგია შეიძლება განისაზღვროს სხვა გზითაც. კერძოდ, განვიხილოთ ღეროს მოძრაობა როგორც რთული: წარმტანი- ჩარჩოსათან ერთად ვერტიკალური z_1 ღერძის ირგვლივ ω კუთხური სიჩქარით და ფარდობითი- მყისი ბრუნვა P სიჩქარეთა მყისი ცენტრის ირგვლივ $\dot{\theta}$ კუთხური სიჩქარით (ნახ.3), ე.ი.



$$T = \frac{J_z \omega^2}{2} + \frac{J_p \dot{\theta}^2}{2},$$

სადაც

$$J_z = \int_0^{2a} \frac{M}{2a} d\xi \cdot \xi^2 sin^2\theta$$

$$= \frac{4}{3}Ma^2 sin^2\theta,$$

ნახ.3

$$J_p = J_C + M(PC)^2 = \frac{Ma^2}{3} + Ma^2 = \frac{4}{3}Ma^2.$$

მაშინ

$$T = \frac{4}{3}Ma^2 sin^2\theta \cdot \frac{\omega^2}{2} + \frac{4}{3}Ma^2 \cdot \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{2}{3}M\left(a^2\omega^2 sin^2\theta + a^2\dot{\theta}^2\right).$$

განზოგადებული Q ძალას გამოვთვლით ფორმულით:

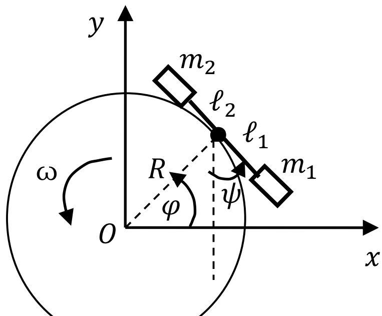
$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta},$$

სადაც $\Pi = mgacos\theta -$ღეროს პოტენციალური ენერგია ნებისმიერ მდებარეობაში.

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{4}{3}Ma^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}Ma^2\omega^2 sin\theta\, cos\theta - Mga\, sin\theta = 0,$ სადაც $\theta -$კუთხეა, რომლესაც ღერო ადგენს ვერტიკალთან. წონასწორობის მდებარეობაში $\theta = 0$ (არამდგრადი წონასწორობა)

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 48.20

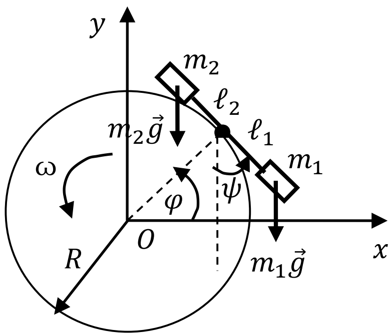
R რადიუსის ერთგვაროვანი დისკოსწრეწირზე სახსრით მიმაგრებულია ბერკეტი, რომელიც თავის ბოლოებით ატარებს შეყურსულ m_1 და m_2 მასებს. მასების ცენტრიდან დაშორება სათანადოდ არის ℓ_1 და ℓ_2. დისკო ბრუნავს ω კუთხური სიჩქარით მისი სიბრტყის მართობული ღერძის გარსემო. შეადგინეთ ბერკეტის მოძრაობის განტოლება და განსაზღვრეთ მისი ფარდობითი წონასწორობის



მდებარეობა. ბერკეტის ბრუნვის ღერძი დისკოდ ბრუნვის ღერძის პარალელურია. ბერკეტის მასა უგულებელყოფილია. ამოხსენით ამოცანა იმ დაშვებით, რომ დისკო ბრუნავს ვერტიკალურ სიბრტყეში (მიიღეთ მხედველობაში სიმძიმის ძალის მოქმედება)).

ა მ ო ხ ს ნ ა. განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ ბერკეტის მობრუნების კუთხე $q = \psi$ და ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = \frac{\partial A}{\partial \psi} \qquad (1)$$



განვსაზღვროთ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია (იხ. ნახაზი):

$$T = \frac{m_1}{2}\left(v_{1x}^2 + v_{1y}^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(v_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) =$$

$$= \frac{m_1}{2}\left[\left(-R\omega sin\varphi + \ell_1\dot{\psi}cos\psi\right)^2 + \left(R\omega cos\varphi + \ell_1\dot{\psi}sin\psi\right)^2\right] +$$

$$+ \frac{m_2}{2}\left[\left(-R\omega sin\varphi - \ell_2\dot{\psi}cos\psi\right)^2 + \left(R\omega cos\varphi - \ell_2\dot{\psi}sin\psi\right)^2\right] =$$

$$= \frac{(m_1 + m_2)R^2\omega^2}{2} + \frac{m_1\ell_1^2}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{m_2\ell_2^2}{2}\dot{\psi}^2 +$$

$$+ m_1 R\omega\ell_1\dot{\psi}\sin(\psi - \varphi) - m_2 R\omega\ell_2\dot{\psi}\sin(\psi - \varphi).$$

სიმძიმის ძალების მუშაობა იმ შემთხვევაში, როცა დისკო მდებარეობს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში (ბრუნვის ღერძი ვერტიკალურია) უდრის ნულს. ამიტომ

$$\frac{\partial A}{\partial \psi} = 0.$$

ვიპოვოთ (1) განტოლებაში შემავალი წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = (m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2)\dot{\psi} + R\omega(m_1\ell_1 - m_2\ell_2)\sin(\psi - \varphi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) = (m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2)\ddot{\psi} + R\omega(m_1\ell_1 - m_2\ell_2)\cos(\psi - \varphi)\left(\dot{\psi} - \dot{\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = R\omega(m_1\ell_1 - m_2\ell_2)\dot{\psi}\cos(\psi - \varphi).$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულებები (1) განტოლებაში და მივიღებთ ბერკეტის ვერტიკალური ღერძის ირგვლივ ბრუნვის განტოლებას:

$$(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2)\ddot{\psi} - R\omega^2(m_1\ell_1 - m_2\ell_2)\cos(\psi - \omega t) = 0.$$

როცა $m_1\ell_1 = m_2\ell_2$ ღერო მოძრაობს ინერციით, ე.ი. იმყოფება განურჩეველ ფარდობით წონასწორობაში.

როცა $\psi = \omega t \pm \frac{\pi}{2}$ გვაქვს მდებარეობა, რომლის დროსაც სიჩქარე აღწევს ექსტრემუმს. ამ შემთხვევაში ბერკეტი მიმართულია რადიუსის გასწვრივ.

იმ შემთხვევაში, როცა დისკო მდებარეობს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში (ბრუნვის ღერძი ვერტიკალურია) გათვალისწინებულია ტვირთების მასები. მაშინ სიმძიმის ძალების მუშაობა

$$A = m_2 g\ell_2(1-cos\psi) - m_1 g\ell_1(1-cos\psi).$$

განზოგადებული ძალა

$$Q = \frac{\partial A}{\partial \psi} = m_2 g\ell_2 sin\psi - m_1 g\ell_1 sin\psi.$$

ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო ბრუნვის დიფერენციალური განტოლებას აქვს სახე:

$$(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2)\ddot{\psi} - (m_1\ell_1 - m_2\ell_2)\,R\omega^2\cos(\psi-\omega t) =$$
$$= (m_2\ell_2 - m_1\ell_1)gsin\psi$$

ან

$$(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2)\ddot{\psi} - (m_1\ell_1 - m_2\ell_2)\,R\omega^2\cos(\psi-\omega t) +$$
$$+(m_1\ell_1 - m_2\ell_2)gsin\psi = 0.$$

რადგან, როცა $m_1\ell_1 \neq m_2\ell_2$ არ არსებობს $\dot{\psi}$ ფუნქციის ექსტრემუმი, ამიტომ ამ შემთხვევაში ბერკეტის ფარდობითი წონასწორობა არ არსებობს.

პ ა ს უ ხ ი: ვერტიკალური ღერძის გარშემო ბრუნვის დროს:

$$(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2)\ddot{\psi} - R\omega^2(m_1\ell_1 - m_2\ell_2)\cos(\psi-\omega t) = 0;$$

როცა $m_1\ell_1 = m_2$,. ბერკეტი განურჩველ ფარდობით წონასწორობაშია.

როცა $m_1\ell_1 \neq m_2$,. არსებობს ფარდობით წონასწორობის ორი მდებარეოაბა, როდესაც $\psi = \omega t \pm \frac{\pi}{2}$; ე.ი. ბერკეტი მიმართულია რადიუსის გასწვრივ.

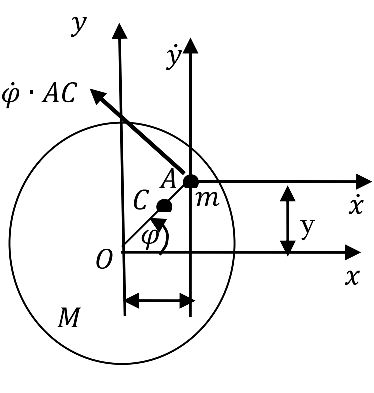
ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო ბრუნვის დროს

$$(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2)\ddot{\psi} - (m_1\ell_1 - m_2\ell_2)\,R\omega^2\cos(\psi-\omega t) +$$
$$+(m_1\ell_1 - m_2\ell_2)gsin\psi = 0.$$

როცა $m_1\ell_1 \neq m_2$,. ფარდობითი წონასწორობა შეუძლებელია.

ამოცანა 48.21

M მასის თხელ დისკოს თავისი სიბრტყით შეუძლია სრიალი უხახუნოდ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. დისკოზე, რომლის ზედაპირი მქისეა, მოძრაობს m მასის ნივთიერი წერტილი. წერტილის მოძრაობის განტოლებებს x და y დეკარტის კოორდინატებში იმ ფარდობითი სისტემის მიმართ, რომლის სათავე დისკოს ცენტრშია, აქვს ასეთი სახე: $x = x(t),\ y = y(t)$. დისკოს ინერციის მომენტი მისი ცენტრის მიმართ არის J. განსაზღვრეთ დისკოს კუთხური სიჩქარის ცვლილების კანონი. საწყის მომენტში დისკო უძრავია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ ბერკეტის მობრუნების კუთხე $q = \varphi$ და ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \qquad (1)$$

მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია, რომელიც შედგება დისკოსა და m მასის ნივთიერი წერტილისაგან (იხ. ნახაზი), უდრის სისტემის მასათა ცენტრთან ერთად მოძრაობის კინეტიკური ენერგიის და დისკოს და წერტილის მასათა ცენტრის მიმართ მოძრაობის კინეტიკური ენერგიების ჯამს.

მასათა ცენტრის მდებარეობა

$$OC = \frac{m\sqrt{x^2+y^2}}{M+m},$$

$$AC = OA - OC = \sqrt{x^2+y^2} - \frac{m\sqrt{x^2+y^2}}{M+m} = \frac{M\sqrt{x^2+y^2}}{M+m};$$

$\dot{x}, \dot{y}$ –წერტილის სიჩქარის გეგმილებიასაკოორდინატო ღერძებზე;
$\dot{\varphi} \cdot AC$ – წერტილის წარმტანი სიჩქარეა დისკოს ბრუნვისას მასათა ცენტრის მიმართ.

მაშინ მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = (M+m)\frac{v_C^2}{2} + \frac{J_C\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mv_a^2}{2},$$

სადაც v_C–მასათა ცენტრის სიჩქარეა, $v_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2};$ J_C –დისკოს ინერციის მომენტია მასათა ცენტრის მიმართ; v_a–წერტილის სიჩქარეა მასათა ცენტრის მიმართ, $v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2}$.

ჩავსვათ v_C და v_a სიჩქარეების გამოსახულებები კინეტიკური ენერგიის გამოსახულებაში და მივიღებთ:

$$T = (M+m)\frac{1}{2}(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + [J + M(OC)^2]\cdot\frac{\dot{\varphi}^2}{2} +$$

$$+\frac{m}{2}[(\dot{x} - \dot{\varphi}\cdot AC\cdot sin\varphi)^2 + (\dot{y} + \dot{\varphi}\cdot AC\cdot cos\varphi)^2],$$

სადაც $sin\varphi = \frac{y}{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\ cos\varphi = \frac{x}{OA} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

მაშინ

$$T = (M+m)\frac{1}{2}(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \left[J + \frac{Mm^2(x^2+y^2)}{M+m}\right]\cdot\frac{\dot{\varphi}^2}{2} +$$

$$+\frac{m}{2}\left[\left(\dot{x} - \dot{\varphi}\cdot\frac{M(x^2+y^2)}{M+m}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\dot{y} + \dot{\varphi}\cdot\frac{M(x^2+y^2)}{M+m}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}(M+m)(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{Mm^2(x^2+y^2)}{(M+m)^2}\frac{\dot{\varphi}^2}{2} +$$

$$+\frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{\varphi}y \cdot \frac{M}{M+m} + \frac{\dot{\varphi}^2 M^2 y^2}{(M+m)^2} + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}x \cdot \frac{M}{M+m} + \frac{x^2\dot{\varphi}^2 M^2}{(M+m)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(M+m)(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{Mm^2(x^2+y^2)}{(M+m)^2}\frac{\dot{\varphi}^2}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{mM^2\dot{\varphi}^2(x^2+y^2)}{(M+m)^2} + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{mM}{M+m}(\dot{y}x - \dot{x}y)\dot{\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2}(M+m)(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \left[J + \frac{Mm(x^2+y^2)}{(M+m)^2}\right]\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) +$$

$$+\frac{mM}{M+m}(\dot{y}x - \dot{x}y)\dot{\varphi}.$$

განზოგადებული ძალა $Q_\varphi = 0$, რადგან დისკო გადაადგილდება გლუვ ჰორიზონტალურ ზედაპირზე და სიმძიმის ძალის მუშაობა უდრის ნულს.

რადგან კინეტიკური ენერგია არ არის დამოკიდებული განზოგადებულ კოორდინატზე, ამიტომ

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

მაშინ (1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0$$

ან

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = const.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის წარმოებული, მაშინ ეს ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left[J + \frac{Mm^2(x^2+y^2)}{(M+m)^2}\right]\dot{\varphi} + \frac{mM}{M+m}(\dot{y}x - \dot{x}y) = C.$$

მიღებული ფორმულიდან განვსაზღვრავთ C მუდმივის მნიშვნელობას საწყისი პირობების გათვალისწინებით:

$$t = 0,\ \varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = 0, x = x_0, y = y_0, \dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0.$$

მაშინ

$$C = \frac{mM}{M+m}(\dot{y}_0 x_0 - \dot{x}_0 y_0).$$

ამის გათვალისწინებით დისკოს კუთხური სიჩქარის ცვლილების კანონი

$$\left[J + \frac{Mm(x^2+y^2)}{(M+m)^2}\right]\dot{\varphi} + \frac{mM}{M+m}(\dot{y}x - \dot{x}y) = \frac{mM}{M+m}(\dot{y}_0 x_0 - \dot{x}_0 y_0).$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$\left[J+\frac{Mm(x^2+y^2)}{(M+m)^2}\right]\dot{\varphi}+\frac{mM}{M+m}(\dot{y}x-\dot{x}y)=\frac{mM}{M+m}(\dot{y}_0x_0-\dot{x}_0y_0).$$

სადაც $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0 -$ წერტილის კოორდინატები და სიჩქარის გეგმილებია საწყის მომენტში.

ამოცანა 48.22

წინა ამოცანაში აღწერილი დისკოს R რადიუსიანი წრეწირის გასწვრივ მოძრაობს ნივთიერი წერტილი ფარდობითი $v=\alpha t$ სიჩქარით. იპოვეთ დისკოს მოძრაობის კანონი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის განტოლება წრეწირზე და მისი სიჩქარე დეკარტის კოორდინატებში:

$$x=R\cos\frac{\alpha t^2}{2R},\;\; y=R\sin\frac{\alpha t^2}{2R};$$

$$\dot{x}=-\alpha tR\sin\frac{\alpha t^2}{2R},\;\; \dot{y}=-\alpha tR\cos\frac{\alpha t^2}{2R},$$

სადაც $\frac{\alpha t^2}{2R}-$ წრეწირის რკალის სიგრძეა; $v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\alpha t.$

ამ გამოსახულების გათვალისწინებით 48.21 ამოცანის პასუხი ასე ჩავწეროთ:

$$\left[J+\frac{Mm(x^2+y^2)}{(M+m)^2}\right]\dot{\varphi}+\frac{mM}{M+m}\left(R\alpha t\cos^2\frac{\alpha t^2}{2R}+R\alpha t\sin^2\frac{\alpha t^2}{2R}\right)=0,$$

სადაც, როცა $t=0, \quad x_0=R, y_0=0, \dot{x}_0=0, \dot{y}_0=0.$

რადგან $\dot{\varphi}=\frac{d\varphi}{dt}$, ამიტომ განვაცალოთ ცვლადები და ვაინტეგროთ

$$\left[J+\frac{Mm(x^2+y^2)}{(M+m)^2}\right]d\varphi=-\frac{mM}{M+m}R\alpha t dt,$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $x^2+y^2=R^2$, მივიღებთ:

$$\varphi=-\frac{mMR\alpha t^2}{2[(M+m)J+MmR^2]}=\frac{\beta}{2R}t^2,$$

სადაც

$$\beta=-\frac{mMR^2\alpha}{(M+m)J+MmR^2}.$$

დისკოსთან ხისტად დამაგრებულ მოძრავ სისტემაში, რომლის სათავე დისკოს ცენტრშია, მასათა ცენტრის კოორდინატები

$$x_C = \frac{mx}{M+m} = \frac{mR}{M+m}\cos\frac{\alpha t^2}{2R};$$
$$y_C = \frac{my}{M+m} = \frac{mR}{M+m}\sin\frac{\alpha t^2}{2R}.$$

თუ შემოვიღებთ უძრავ კოორდინატთა სისტემას ათვლის სათავით მასათა ცენტრში, მაშინ სინუსის და კოსინუსის არგუმენტს დაემატება მობრუნების კუთხე და იცვლება ნიშანი, ე.ი.

$$\xi = -\frac{mR}{M+m}\cos\left(\frac{\alpha t^2}{2R} + \varphi\right),$$
$$\eta = -\frac{mR}{M+m}\sin\left(\frac{\alpha t^2}{2R} + \varphi\right),$$

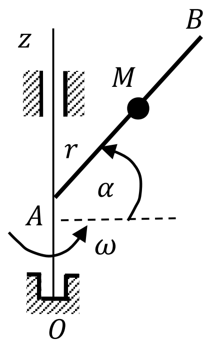
სადაც $\varphi = \frac{\beta}{2R}t^2$.

პ ა ს უ ხ ი: $\varphi = -\frac{mM}{2(M+m)}\frac{R\alpha}{J+\frac{Mm}{(M+m)^2}R^2}t^2 = \frac{\beta}{2R}t^2;$

$$\xi = -\frac{mR}{M+m}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2R}t^2\right), \qquad \eta = -\frac{mR}{M+m}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2R}t^2\right),$$

სადაც φ არის დისკოს მობრუნების კუთხე, ხოლო ξ და η დისკოს მასათა ცენტრის კოორდინატები იმ უძრავი სისტემის მიმართ, რომლის სათავე სისტემის ინერციის ცენტრშია.

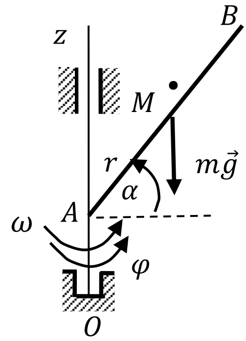
ამოცანა 48.23



M მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს სიმძიმის ძალის მოქმედებით იმ AB წრფეზე, რომელიც ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით უძრავი ვერტიკალური ღერძის ღერძის გარშემო. AB წრფე ჰორიზონტთან ქმნის α კუთხეს. იპოვეთ წერტილის მოძრაობის კანონი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ

ღეროს მობრუნების φ კუთხე და M წერტილის r გადაადგილება ღეროს გასწვრივ (იხ. ნახაზი). რადგან პირობის თანახმად აუცილებელია ვიპოვოთ ღეროს გასწვრივ წერტილის მოძრაობის კანონი, ამიტომ საკმარისი ვისარგებლოთ ერთი ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებით კონსერვატული სისტემისათვის:



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\partial \Pi}{\partial r}.$$

M წერტილის კინეტიკური ენერგია, რომელიც
სრულებს რთულ მოძრაობას

$$T = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mv_e^2}{2} = \frac{m\dot{r}^{\,2}}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2cos^2\alpha}{2},$$

რადგან $\dot{\varphi} = \omega$, მაშინ

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^{\,2} + r^2\omega^2cos^2\alpha).$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \frac{m}{2}2\dot{r} = m\dot{r},$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{m}{2}2r\omega^2cos^2\alpha = m\omega^2rcos^2\alpha,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}.$$

M წერტილის პოტენციური ენერგია

$$\Pi = mgrsin\alpha.$$

ამ გამოსახულების გაწარმოება გვაძლევს

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = mgsin\alpha.$$

მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში:

$$m\ddot{r} - m\omega^2rcos^2\alpha = -mgsin\alpha$$

ან

$$\ddot{r} - r\omega^2cos^2\alpha = -gsin\alpha.$$

ამოვხსნათ ეს მეორე რიგის არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება და მივიღებთ

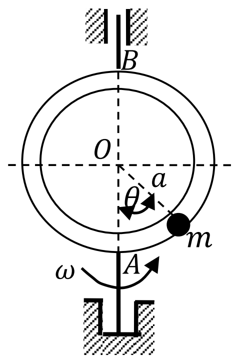
$$r = C_1 e^{\omega t cos\alpha} + C_2 e^{-\omega t cos\alpha} + \frac{g}{\omega^2}\frac{sin\alpha}{cos^2\alpha}.$$

<u>*პ ა ს უ ხ ი:*</u> $r = C_1 e^{\omega t cos\alpha} + C_2 e^{-\omega t cos\alpha} + \frac{g}{\omega^2}\frac{sin\alpha}{cos^2\alpha}.$

ამოცანა 48.24

m მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს a რადიუსის წრიულ ჩარჩოზე, რომელიც ვერტიკალური AB დიამეტრის გარშემო ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. შეადგინეთ წერტილის მოძრაობის განტოლება განსაზღვრეთ M მომენტი, რომელის საჭიროა მუდმივი კუთხური სიჩქარის შესანარჩუნებლად..

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ ჩარჩოს მობრუნების φ კუთხე და a რადიუსის ვერტიკალიდან გადახრის θ კუთხე (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta .$$

რადგან M წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას, ამიტომ მისი კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{ma^2\dot{\theta}^{\,2}}{2} + \frac{ma^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta}{2}$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიეს გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ma^2\dot{\varphi}sin^2\theta,$$

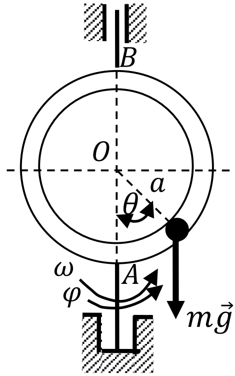
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ma^2\ddot{\varphi}sin^2\theta + 2ma^2\dot{\varphi}sin\theta cos\theta,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = ma^2\ddot{\theta},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = ma^2\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta.$$



მივანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება და განვსაზღვროთ განზოგადებული ძალები:

ა) დავუშვათ, რომ $\delta\varphi = 0,\ \delta\theta \neq 0,$ მაშინ

$$\delta A = -mgasin\theta \cdot \delta\theta \Longrightarrow Q_\theta = -mgasin\theta;$$

ბ) დავუშვათ, რომ $\delta\varphi \neq 0,\ \delta\theta = 0,$ მაშინ $\delta A = M \cdot \delta\varphi \Longrightarrow Q_\theta = M.$

წარმოებულების და განზოგადებული ძალების მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში:

$$ma^2\ddot{\varphi}sin^2\theta + 2ma^2\dot{\varphi}\dot{\theta}sin\theta cos\theta = M, \qquad (1)$$

$$a^2\ddot{\theta} - ma^2\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta == -mgasin\theta. \qquad (2)$$

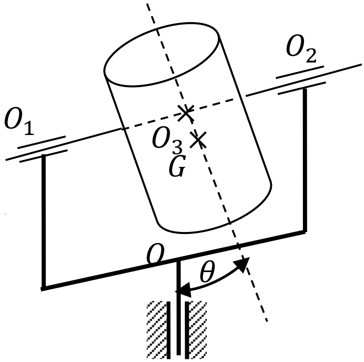
რადგან პირობის თანახმად $\dot{\varphi} = \omega = const,$ მაშინ $\ddot{\varphi} = 0,$ მაშასადამე, (1) და (2) განტოლებები მიღებს სახეს

$$2ma^2 sin\theta cos\theta \cdot \omega\dot{\theta} = M,$$

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{g}{a} - \omega^2 cos\theta\right) sin\theta = 0.$$

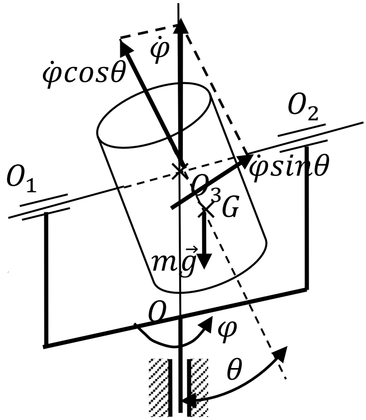
პ ა ს უ ხ ი: $\ddot{\theta} = \left(\frac{g}{a} - \omega^2 cos\theta\right) sin\theta = 0, M = 2ma^2 sin\theta cos\theta \cdot \omega\dot{\theta}.$

ამოცანა 48.25



m მასის სხეულს შეუძლია ბრუნვა ჰორიზონტალური O_1O_2 ღერძის გარშემო, რომელიც, თავის მხრივ, ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით ვერტიკალური OC ღერძის გარშემო. სხეულის მასათა G ცენტრი მდებარეობს O_1O_2 ღერძის პერპენდიკულარულ წრფეზე ℓ მანძილზე O_3 წერტილიდან. იმ დაშვებით, რომ O_1O_2 და O_3G ღერძები წარმოადგენენ სხეულის ინერციის მთავარ ღერძებს O_3 წერტილში, შეადგინეთ მოძრაობის განტოლება. სხეულის ინერციის მომენტები მთავარი ღერძების მიმართ არის A,B,C.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. ავირჩიოთ განზოგადებული კოორდინატები: $\varphi -$ ჩარჩოს მობრუნების კუთხე OC ღერძის გარშემო, $\theta - O_1O_2$ ღერძის გარშემო მობრუნების კუთხე (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება θ კოორდინატისათვის:



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta}=Q_\theta\ .$$

სხეულის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ბრუნავს გადამკვეთი ღერძების ირგვლივ

$$T=\frac{A\dot{\theta}^{\,2}}{2}+\frac{B\ \dot{\ }^{2}cos^2\theta}{2}+\frac{C\dot{\varphi}^2sin^2\theta}{2}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\dot{\varphi}=\omega$ და ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=A\dot{\theta}\ ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right)=A\ddot{\theta},$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta}=-B\omega^2sin\theta cos\theta+$$

$$+C\omega^2sin\theta cos\theta=\omega^2(C-B)sin\theta cos\theta.$$

სხეულის პოტენციური ენერგია

$$\Pi = -mg\ell cos\theta,$$

მაშინ

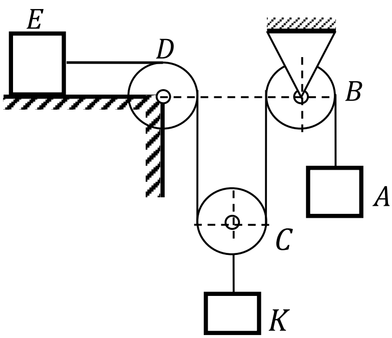
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = mg\ell sin\theta.$$

შევადგინოთ სხეულის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება:

$$A\ddot{\theta} + \omega^2(C - B)sin\theta cos\theta = -mg\ell sin\theta.$$

პ ა ს უ ხ ი: $A\ddot{\theta} + \omega^2(C - B)sin\theta cos\theta = -mg\ell sin\theta$, სადაც θ არის O_1O_2 ღერძის გარშემო მობრუნების კუთხე.

ამოცანა 48.26

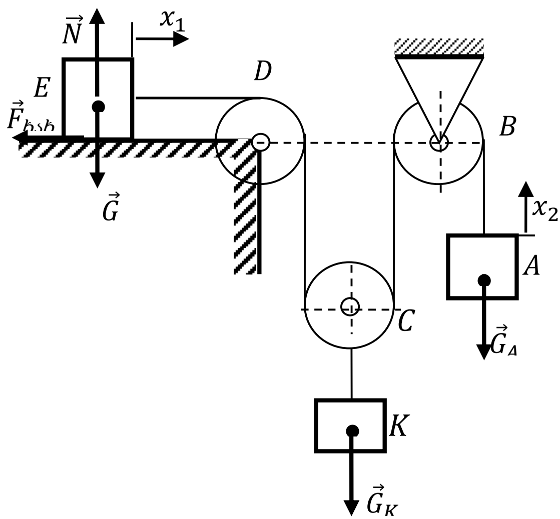


ერთგვაროვანი ძაფი, რომლის ბოლოზე მიბმულია m მასის A ტვირთი, გადაკიდებულია უძრავ B ბლოკზე და გარს უვლის მოძრავ C ბლოკს, ადის ზევით უძრავ D ბლოკზე და გადის ჰორიზონტალური სიბრტყის პარალელურად, სადაც მის ბოლოზე მიბმულია m მასის E ტვირთი. C ბლოკის ღერძზე მიმაგრებულია m_1 მასის K ტვირთი. E ტვირთის ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე სრიალის ხახუნის კოეფიციენტია f. რა პირობებში დაეშვება K ტვირთი ძირს, თუ ყველა ტვირთის საწყისი სიჩქარეები ნულის ტოლია? იპოვეთ K ტვირთის აჩქარება. ბლოკების და ძაფის მასები უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. ავირჩიოთ განზოგადებული კოორდინატები: $x_1 - E$ ტვირთის გადაადგილება, $x_2 - A$ ტვირთის გადაადგილება (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q_2.$$



სისტემის
კინეტიკური ენერგია

$$T = T_E + T_A + T_K = \frac{m_E v_E^2}{2} + \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{m_K v_K^2}{2} =$$

$$= \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_1}{2}\left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}[4m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2].$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \frac{1}{8}[8m\dot{x}_1 + 2m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)] = \frac{1}{4}[4m\dot{x}_1 + m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{1}{4}[4m\ddot{x}_1 + m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)],$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \frac{1}{8}[8m\dot{x}_2 + 2m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)] = \frac{1}{4}[4m\dot{x}_2 + m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{1}{4}[4m\ddot{x}_2 + m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)],$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0.$$

ვიპოვოთ Q_1 და Q_2 განზოგადებული ძალები.

ა) დავუშვათ, რომ $\delta x_1 \neq 0,\ \delta x_2 = 0,$ მაშინ

$$\delta A_1 = -F_{ხახ} \cdot \delta x_1 + G_K \frac{\delta x_1}{2} = \left(\frac{m_1 g}{2} - fmg\right)\delta x_1,$$

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta x_1} = \frac{m_1 g}{2} - fmg = \frac{g}{2}(m_1 - 2fm);$$

ბ) დავუშვათ, რომ $\delta x_2 \neq 0,\ \delta x_1 = 0,$ მაშინ

$$\delta A_2 = G_K \frac{\delta x_2}{2} - G_A \cdot \delta x_2 = \left(\frac{m_1 g}{2} - mg\right) \delta x_2,$$

$$Q_2 = \frac{\delta A_2}{\delta x_2} = \frac{m_1 g}{2} - mg = \frac{g}{2}(m_1 - 2m).$$

წარმოებულების და განზოგადებული ძალების მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში:

$$\frac{1}{4}[4m\ddot{x}_1 + m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)] = \frac{g}{2}(m_1 - 2fm),$$

$$\frac{1}{4}[4m\ddot{x}_2 + m_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)] = \frac{g}{2}(m_1 - 2m).$$

მიღებული განტოლებათა სისტემიდან გამოვრიცხოთ $\ddot{x}_1$ და ვიპოვოთ A ტვირთის აჩქარება:

$$\frac{m_1}{4m + m_1}\ddot{x}_2 - \frac{4m + m_1}{m_1}\ddot{x}_2 = 2g\left(\frac{m_1 - 2fm}{4m + m_1} - \frac{m_1 - 2m}{m_1}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \ddot{x}_2 = g\left[\frac{m_1(1 + f) - 4m}{2(m_1 + 2m)}\right];$$

E ტვირთის აჩქარება

$$\ddot{x}_1 = g\left[\frac{m_1(3 - f) - 4mf}{2(m_1 + 2m)}\right].$$

მაშინ K ტვირთის აჩქარება

$$w = \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2} = g\left[\frac{m_1(3 - f) - 4mf + m_1(1 + f) - 4m}{2 \cdot 2(m_1 + 2m)}\right] =$$

$$= g\frac{m_1 - m(1 + f)}{m_1 + 2m}.$$

K ტვირთი დაეშვება ქვევით ნულოვანი საწყისი სიჩქარით, თუ $w > 0,$ ე.ი

$$g\frac{m_1 - m(1 + f)}{m_1 + 2m} > 0$$

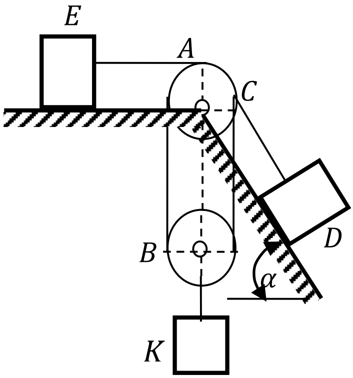
ან

$$m_1 > m(1 + f).$$

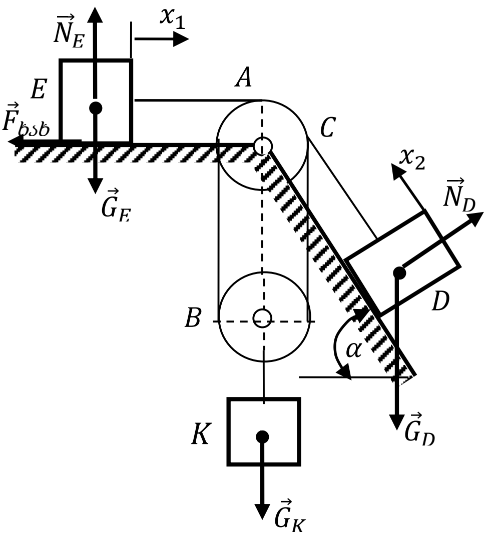
პ ა ს უ ხ ი: $m_1 > m(1 + f);\quad w = g\frac{m_1 - m(1+f)}{m_1 + 2m}.$

ამოცანა 48.27

ერთნაირი m მასის ორი D და E ტვირთი მიბმულია უჭიმარი და უწონი ძაფის ბოლოებზე. E ტვირთიდან გამოსული ეს ძაფი გადაკიდებულია უძრავ A ბლოკზე, შემდეგ შემოუვლის მოძრავ B ბლოკს, ბრუნდება ზევით უძრავი C ბლოკისაკენ, რომელსაც საერთო ღერძი აქვს A ბლოკთან, და გადის გლუვი დახრილი სიბრტყის პარალელურად, რომლის ბოლოზე მიბმულია D ტვირთი. სიბრტყე ჰორიზონტთან α კუთხითაა დახრილი. მოძრავ B ბლოკზე ჩამოკიდებულია m_1 მასის K ტვირთი. ტვირთის ჰორიზონტალურ სიბრტყზე სრიალის ხახუნის კოეფიციენტია f. ბლოკების მასა უგულებელყოფილია. განსაზღვრეთ, რა პირობებში დაეშვება K ტვირთი. იპოვეთ ამ ტვირთის აჩქარება. საწყის მომენტში ყველა ტვირთის სიჩქარე ნულის ტოლი იყო.



ა მ ო ხ ს ნ ა.



განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. ავირჩიოთ განზოგადებული კოორდინატები: $x_1 - E$ ტვირთის გადაადგილება, $x_2 - D$ ტვირთის გადაადგილება (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_1}=Q_1,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=Q_2.$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T=T_E+T_A+T_K=\frac{m_E v_E^2}{2}+\frac{m_A v_A^2}{2}+\frac{m_K v_K^2}{2}=$$
$$\frac{m\dot{x}_1^2}{2}+\frac{m\dot{x}_2^2}{2}+\frac{m_1}{2}\left(\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{2}\right)^2=\frac{1}{8}[4m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)+m_1(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2].$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=\frac{1}{8}[8m\dot{x}_1+2m_1(\dot{x}_1+\dot{x}_2)]=\frac{1}{4}[4m\dot{x}_1+m_1(\dot{x}_1+\dot{x}_2)],$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)=\frac{1}{4}[4m\ddot{x}_1+m_1(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)],$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}=\frac{1}{8}[8m\dot{x}_2+2m_1(\dot{x}_1+\dot{x}_2)]=\frac{1}{4}[4m\dot{x}_2+m_1(\dot{x}_1+\dot{x}_2)],$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)=\frac{1}{4}[4m\ddot{x}_2+m_1(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)],$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=\frac{\partial T}{\partial x_2}=0.$$

ვიპოვოთ Q_1 და Q_2 განზოგადებული ძალები.

ა) დავუშვათ, რომ $\delta x_1 \neq 0,\ \delta x_2 = 0,$ მაშინ

$$\delta A_1=-F_{ხახ}\cdot\delta x_1+G_K\frac{\delta x_1}{2}=\left(\frac{m_1 g}{2}-fmg\right)\delta x_1,$$
$$Q_1=\frac{\delta A_1}{\delta x_1}=\frac{m_1 g}{2}-fmg=\frac{g}{2}(m_1-2fm);$$

ბ) დავუშვათ, რომ $\delta x_2 \neq 0,\ \delta x_1 = 0,$ მაშინ

$$\delta A_2=G_K\frac{\delta x_2}{2}-G_A sin\alpha\cdot\delta x_2=\left(\frac{m_1 g}{2}-mgsin\alpha\right)\delta x_2,$$
$$Q_2=\frac{\delta A_2}{\delta x_2}=\frac{m_1 g}{2}-mg=\frac{g}{2}(m_1-2msin\alpha).$$

წარმოებულების და განზოგადებული ძალების მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში:

$$\frac{1}{4}[4m\ddot{x}_1+m_1(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)]=\frac{g}{2}(m_1-2fm),$$
$$\frac{1}{4}[4m\ddot{x}_2+m_1(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)]=\frac{g}{2}(m_1-2msin\alpha).$$

ამოვხსნათ განტოლებათა ეს სისტემა და ვიპოვოთ E და A ტვირთების აჩქარებები:

$$\ddot{x}_1 = g\frac{m_1(2 - f + sin\alpha) - 4mf}{2(m_1 + 2m)},$$

$$\ddot{x}_2 = g\frac{m_1(2 + f) - sin\alpha(4m + m_1)}{2(m_1 + 2m)};$$

K ტვირთის აჩქარება

$$w = \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2} =$$

$$= g\frac{m_1(2 + f) - sin\alpha(4m + m_1) + m_1(2 - f + sin\alpha) - 4mf}{4(m_1 + 2m)} =$$

$$= g\frac{m_1 - m(f + sin\alpha)}{m_1 + 2m}.$$

პირობა, რომლის დროსაც K ტვირთი დაეშვება ქვევით, $w > 0$, ე.ი როცა

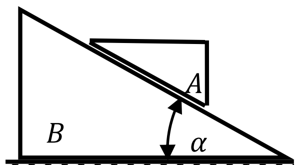
$$m_1 - m(f + sin\alpha) > 0$$

ან

$$m_1 > m(f + sin\alpha)$$

პ ა ს უ ხ ი: $m_1 > m(f + sin\alpha)$; $w = g\frac{m_1 - m(f+sin\alpha)}{m_1+2m}$.

ამოცანა 48.28



m მასის A პრიზმა სრიალებს m_1 მასის B პრიზმის გლუვ გვერდით წახნაგზე, რომელიც ჰორიზონტთან ქმნის α კუთხეს. განსაზღვრეთ B პრიზმის აჩქარება. B პრიზმასა და ჰორიზონტალურ სიბრტყეს შორის ხახუნი უგულებელყოფილია.

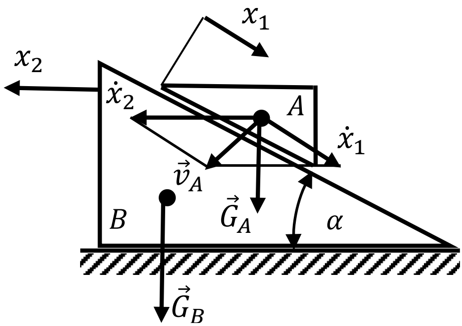
ა მ ო ხ ს ნ ა.

განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. ავირჩიოთ განზოგადებული კოორდინატები: $x_1 -$ A პრიზმის გადაადგილება დახრილ B პრიზმაზე, $x_2 -$ B პრიზმის გადაადგილება (იხ. ნახაზი).

ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_1}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x_1},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}.$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია



$$T=T_A+T_B=\frac{mv_A^2}{2}+\frac{m_1v_B^2}{2}=$$
$$=\frac{m_1\dot{x}_2^2}{2}+\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2-2\dot{x}_1\dot{x}_2cos\alpha).$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=m\dot{x}_1-m\dot{x}_2cos\alpha,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)=m\ddot{x}_1-m\ddot{x}_2cos\alpha,$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}=m\dot{x}_2+m_1\dot{x}_2-m\dot{x}_1cos\alpha,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)=m\ddot{x}_2+m_1\ddot{x}_2-m\ddot{x}_1cos\alpha,$$
$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=\frac{\partial T}{\partial x_2}=0.$$

სისტემის პოტენციური ენერგია

$$\Pi=-G_Ax_1sin\alpha=-mgx_1sin\alpha.$$

ვიპოვოთ პოტენციური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}=-mgsin\alpha,\quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_2}=0.$$

წარმოებულების მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$m\ddot{x}_1-m\ddot{x}_2cos\alpha=mgsin\alpha,$$

$$m\ddot{x}_2 - m_1\ddot{x}_2 - m\ddot{x}_1 cos\alpha = 0.$$

ამ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემიდან გამოვრიცხოთ $\ddot{x}_1$ და განვსაზღვროთ $\ddot{x}_2$:

$$-m\ddot{x}_2 cos\alpha + \ddot{x}_2 \frac{m + m_1}{cos\alpha} = mgsin\alpha$$

ან

$$m\ddot{x}_2(1 - cos^2\alpha) + m_1\ddot{x}_2 = mgsin\alpha cos\alpha.$$

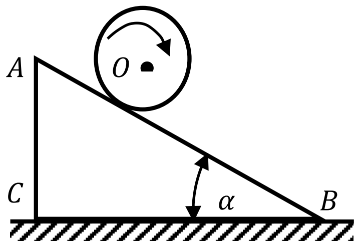
აქედან B პრიზმის აჩქარება

$$\ddot{x}_2 = w = g\frac{msin2\alpha}{2(m_1 + msin^2\alpha)}.$$

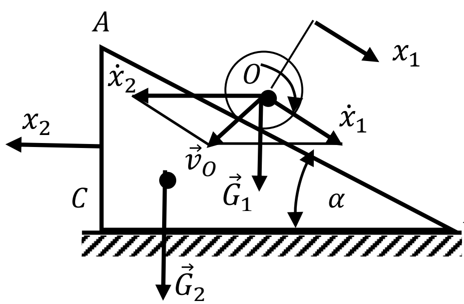
პ ა ს უ ხ ი: $w = g\frac{msin2\alpha}{2(m_1+msin^2\alpha)}$.

ამოცანა 48.29

გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყზე მოთავსებულია m მასის ABC პრიზმა, რომელსაც შეუძლია სრიალი უხახუნოდ ამ სიბრტყეზე; პრიზმის AB წახნაგზე უსრიალოდ გორავს m_1 მასის წრიული ცილინდრი. იპოვეთ პრიზმის აჩქარება.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. ავირჩიოთ განზოგადებული კოორდინატები: x_1 – ცილინდრის გადაადგილება პრიზმის დახრილ სიბრტყეზე, x_2 – B პრიზმის გადაადგილება (იხ. ნახაზი).



ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}.$$

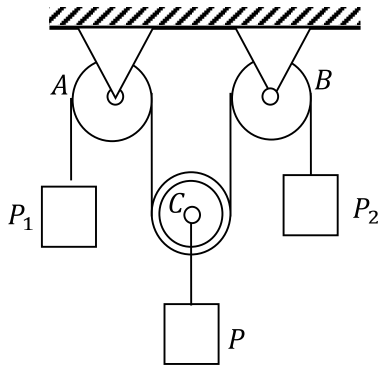
სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = T_1 + T_2 =$$

$$=\frac{m_1\dot{x}_1^2 sin^2\alpha}{2}+\frac{m_1(\dot{x}_1 cos\alpha-\dot{x}_2)^2}{2}+\frac{m_1\dot{x}_1^2}{2R^2}\frac{R^2}{2}+\frac{m\dot{x}_2^2}{2}=$$
$$=\frac{1{,}5m_1\dot{x}_1^2-2m_1\dot{x}_1\dot{x}_2 cos\alpha+m_1\dot{x}_2^2+m\dot{x}_2^2}{2}=$$
$$=\frac{3}{4}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}(m_1+m)\dot{x}_2^2-m_1\dot{x}_1\dot{x}_2 cos\alpha.$$
ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:
$$\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_1}=1{,}5m_1\dot{x}_1-m_1\dot{x}_2 cos\alpha,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_1}\right)=1{,}5m_1\ddot{x}_1-m_1\ddot{x}_2 cos\alpha,$$
$$\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_2}=m_1\dot{x}_2+m\dot{x}_2-m\dot{x}_1 cos\alpha,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_2}\right)=m_1\ddot{x}_2+m\ddot{x}_2-m_1\ddot{x}_1 cos\alpha,$$
$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=\frac{\partial T}{\partial x_2}=0.$$
სისტემის პოტენციური ენერგია
$$\Pi=-G_A x_1 sin\alpha=-m_1 g x_1 sin\alpha.$$
ვიპოვოთ პოტენციური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:
$$\frac{\partial\Pi}{\partial x_1}=-m_1 g sin\alpha,\quad \frac{\partial\Pi}{\partial x_2}=0.$$
წარმოებულების მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:
$$1{,}5m_1\ddot{x}_1-m_1\ddot{x}_2 cos\alpha=m_1 g sin\alpha,$$
$$m_1\ddot{x}_2+m\ddot{x}_2-m\ddot{x}_1 cos\alpha=0.$$
ამ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემიდან გამოვრიცხოთ $\ddot{x}_1$ და განვსაზღვროთ $\ddot{x}_2$:
$$\frac{-m_1\ddot{x}_2 cos\alpha}{1{,}5}+\ddot{x}_2\frac{m+m_1}{cos\alpha}=\frac{m_1 g sin\alpha}{1{,}5}.$$
აქედან პრიზმის აჩქარება
$$\ddot{x}_2=w=g\frac{m_1 sin2\alpha}{3(m_1+m)-2m_1 cos^2\alpha}.$$
პ ა ს უ ხ ი: პრიზმის აჩქარება მიმართულია მარცხნივ და ტოლია
$$w=\frac{m_1 sin2\alpha}{3(m_1+m)-2m_1 cos^2\alpha}g.$$

ამოცანა 48.30

უძრავი ღერძების მქონე A და B ბლოკებზე გადადებულია ზონარი, რომლითაც შეკავებულია მოძრავი C ბლოკი. ზონარის ნაწილები, რომლებიც არა ძევს ბლოკებზე, ვერტიკალურია. C ბლოკზე ჩამოკიდებულია $m = 4$ კგ მასის საწონი, ზონრის ბოლოებზე კი–$m_1 = 2$კგ და $m_2 = 3$კგ საწონები. იპოვეთ სამივე ტვირთის აჩქარებანი, თუ ბლოკებისა და ზონრების მასები და ღერძებში ხახუნი უგულებელყოფილია.



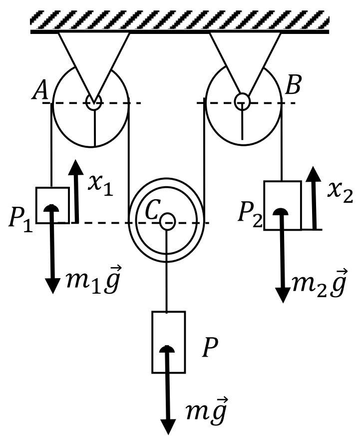
ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. ავირჩიოთ განზოგადებული კოორდინატები: x_1 – P_1 ტვირთის გადაადგილება, x_2 – P_2 ტვირთის გადაადგილება (იხ. ნახაზი).

ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}.$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} =$$
$$= \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + + m\frac{\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2}{4}\right).$$



ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + \frac{m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)}{4},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1 + \frac{m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)}{4},$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2 + \frac{m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)}{4},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2 + \frac{m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)}{4},$$
$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0.$$

სისტემის პოტენციური ენერგია

$$\Pi = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 - mg\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

ვიპოვოთ პოტენციური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = m_1 g - \frac{mg}{2} = \frac{g}{2}(2m_1 - m),$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = m_2 g - \frac{mg}{2} = \frac{g}{2}(2m_2 - m).$$

წარმოებულების მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$m_1\ddot{x}_1 + \frac{m}{4}(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -\frac{g}{2}(2m_1 - m),$$
$$m_2\ddot{x}_2 + \frac{m}{4}(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -\frac{g}{2}(2m_2 - m).$$

ან

$$\ddot{x}_1\left(m_1 + \frac{m}{4}\right) + \frac{m}{4}\ddot{x}_2 = -\frac{g}{2}(2m_1 - m), \qquad (1)$$

$$\ddot{x}_2\left(m_2 + \frac{m}{4}\right) + \frac{m}{4}\ddot{x}_1 = -\frac{g}{2}(2m_1 - m). \qquad (2)$$

ამ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემიდან განვსაზღვროთ $\ddot{x}_1$ და $\ddot{x}_2$. ამისათვის (1) განტოლება გავყოთ $m_1 + \frac{m}{4}$ –ზე, (2) კი- $\frac{m}{4}$– ზე და (1)-ს გამოვაკლოთ (2), მივიღებთ:

$$\ddot{x}_2\frac{\frac{m}{4}}{m_1 + \frac{m}{4}} - \ddot{x}_2\frac{m_2 + \frac{m}{4}}{\frac{m}{4}} = \frac{g}{2}\left(\frac{2m_1 - m}{m_1 + \frac{m}{4}} - \frac{2m_2 - m}{\frac{m}{4}}\right)$$

აქედან P_2 ტვირთის აჩქარება:

$$w_2 = \ddot{x}_2 = -g\frac{4m_1m_2 - 3mm_1 + mm_2}{4m_1m_2 + m(m_1 + m_2)} = -g\frac{4\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot 4\cdot 2 + 4\cdot 3}{4\cdot 2\cdot 3 + 4\cdot(2+3)}$$
$$= -\frac{3}{11}g.$$

P_1 ტვირთის აჩქარებას ვიპოვით (2) განტოლებიდან:

$$w_1 = \ddot{x}_1 = \frac{-\frac{g}{2}(2m_2 - m) - \ddot{x}_2\left(m_2 + \frac{m}{4}\right)}{\frac{m}{4}} = \frac{1}{11}g$$

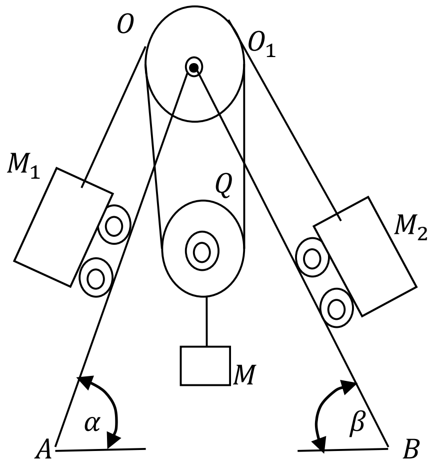
მაშინ P ტვირთის აჩქარება

$$w = \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2} = \frac{\frac{1}{11}g - \frac{3}{11}g}{2} = -\frac{1}{11}g.$$

ნიშანი მინუსი P_2 ტვირთის აჩქარების მნიშვნელობაში მიუთითებს, რომ ეს ტვირთი მოძრაობს ქვევით. რადგან მისი აჩქარება სიდიდით მეტია P_1 ტვირთის აჩქარებაზე, ამიტომ P ტვირთი იმოძრავებს ზევით.

პ ა ს უ ხ ი: $w = \frac{1}{11}g$(ზევით), $w_1 = \frac{1}{11}g$(ზევით), $w_2 = -\frac{3}{11}g$(ქვევით)

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 48.31



ერთნაირი m მასის M_1 და M_2 ტვირთები მოძრაობს ორ დახრილ OA და OB მიმმართველზე, რომლებიც ვერტიკალურ სიბრტყეში მდებარეობენ და ჰორიზონტთან α და β კუთხეებით არიან დახრილი; ამ ტვირთების შემაერთებელი ძაფი M_1 ტვირთიდან მიდის ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო მბრუნავ O ბლოკ ზედა შემდეგ შემოევლება მოძრავ Q თვალს, რომელზეც ჩამოკიდებულია m_1 მასის M ტვირთი და, ბოლოს, O ბლოკის ღერძზე ჩამოცმული O_1 ბლოკიდან მიდის M_2 ტვირთისაკენ. განსაზღვრეთ M ტვირთის w აჩქარება, თუ ხახუნი, ბლოკების, თვლის და ძაფის მასები უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. ავირჩიოთ განზოგადებული კოორდინატები: $x_1 - M_1$ ტვირთის გადაადგილება და $x_2 - M_2$ ტვირთის გადაადგილება შესაბამის დახრილ სიბრტყეებზე (იხ. ნახაზი).

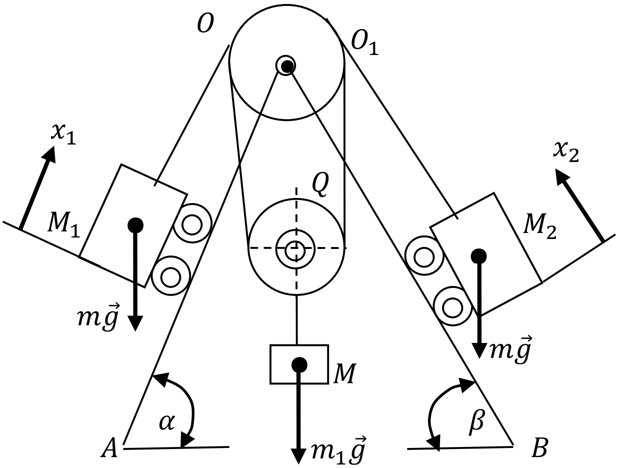
ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial x_2}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}.$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}+\frac{m_1v_3^2}{2}=$$
$$=\frac{m\dot{x}_1^2}{2}+\frac{m\dot{x}_2^2}{2}+\frac{m_1}{2}\left(\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{2}\right)^2.$$



ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}=m\dot{x}_1+m_1\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{4},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)=m\ddot{x}_1+m_1\frac{\ddot{x}_1+\ddot{x}_2}{4},$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}=m\dot{x}_2+m_1\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{4},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)=m\ddot{x}_2+m_1\frac{\ddot{x}_1+\ddot{x}_2}{4},$$
$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=\frac{\partial T}{\partial x_2}=0.$$

სისტემის პოტენციური ენერგია

$$\Pi = mgx_1sin\alpha + mgx_2sin\beta - m_1g\frac{x_1+x_2}{2}.$$

ვიპოვოთ პოტენციური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები განზოგადებული კოორდინატებით:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = mgsin\alpha - \frac{m_1 g}{2},$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = mgsin\beta - \frac{m_1 g}{2}.$$

წარმოებულების მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და მივიღებთ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$m\ddot{x}_1 + m_1 \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{4} = mgsin\alpha - \frac{m_1 g}{2},$$
$$m\ddot{x}_2 + m_1 \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{4} = mgsin\beta - \frac{m_1 g}{2}.$$

ან

$$\frac{m_1}{4}\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1\left(m + \frac{m_1}{4}\right) = -\frac{g}{2}(2msin\alpha - m_1),$$

$$\frac{m_1}{4}\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2\left(m + \frac{m_1}{4}\right) = -\frac{g}{2}(2msin\beta - m_1).$$

ამოვხსნათ დიფერენციალურ განტოლებათა ეს სისტემა $\ddot{x}_1$ და $\ddot{x}_2$ -ის მიმართ და განვსაზღვროთ M_1 და M_2 ტვირთების აჩქარებები:

$$\ddot{x}_2 = -\frac{g[4msin\beta + m_1(sin\beta - sin\alpha - 2)]}{2(2m + m_1)},$$

$$\ddot{x}_1 = -\frac{g[m_1(sin\beta - sin\alpha - 2) - 4msin\alpha]}{2(2m + m_1)}.$$

მაშინ M ტვირთის აჩქარება

$$w = \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2} =$$
$$= \frac{g[m_1(sin\beta - sin\alpha - 2) - 4msin\alpha] - g[4msin\beta + m_1(sin\beta - sin\alpha - 2)]}{2(2m + m_1)}$$

$$= g\frac{m_1 - m(sin\alpha + sin\beta)}{2m + m_1}.$$

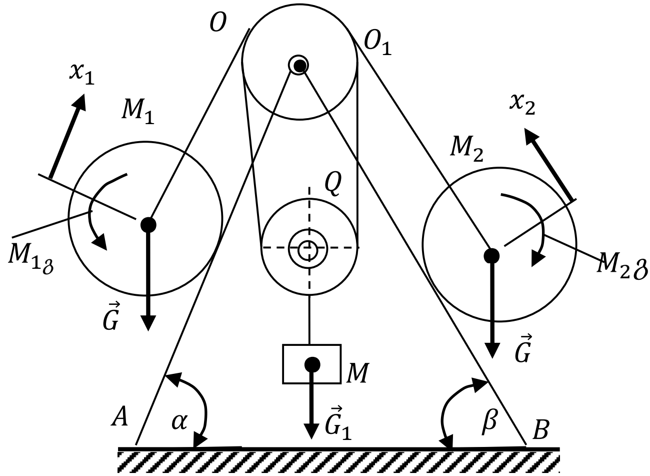
პ ა ს უ ხ ი:

$$w = g\frac{m_1 - m(sin\alpha + sin\beta)}{2m + m_1}.$$

ამოცანა 48.32

ამოხსენით წინა ამოცანა იმ პირობით, რომ M_1 და M_2 ტვირთები შეცვლილია ერთნაირი m მასის და r რადიუსის მქონე საგორავებით. დახრილ სიბრტყეზე საგორავების გორვის ხახუნის კოეფიციენტია $f_გ$. ძაფები მიმაგრებულია საგორავების ღერძზე

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. ავირჩიოთ განზოგადებული კოორდინატები: $x_1 -$ M_1 ტვირთის გადაადგილება და $x_2 - M_2$ ტვირთის გადაადგილება შესაბამის დახრილ სიბრტყეებზე (იხ. ნახაზი).



ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q_2.$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\frac{\dot{x}_1}{r}\right)^2 + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\frac{\dot{x}_2}{r}\right)^2 + \frac{m_1}{2}\left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{4}m\dot{x}_1^2 + \frac{3}{4}m\dot{x}_2^2 + \frac{m_1}{2}\left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}\right)^2.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \frac{3}{2}m\dot{x}_1 + m_1\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{4},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{3}{2}m\ddot{x}_1 + m_1\frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{4},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = \frac{3}{2}m\dot{x}_2 + m_1\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{4},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{3}{2}m\ddot{x}_2 + m_1\frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{4},$$
$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0.$$

ვიპოვოთ Q_1 და Q_2 განზოგადებული ძალები.

ა) დავუშვათ, რომ $\delta x_1 \neq 0,\ \delta x_2 = 0,$ მაშინ

$$\delta A_1 = -Gsin\alpha \cdot \delta x_1 - M_{1_\partial}\frac{\delta x_1}{r} + G_1\frac{\delta x_1}{2} =$$
$$= \left(-mgsin\alpha - mg\frac{f_\partial}{r}cos\alpha + \frac{1}{2}m_1 g\right)\delta x_1,$$
$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta x_1} = g\left(\frac{m_1}{2} - msin\alpha - m\frac{f_\partial}{r}cos\alpha\right);$$

ბ) დავუშვათ, რომ $\delta x_2 \neq 0,\ \delta x_1 = 0,$ მაშინ

$$\delta A_2 = Gsin\beta \cdot \delta x_2 - M_{2_\partial}\frac{\delta x_2}{r} + G_1\frac{\delta x_2}{2} =$$
$$= \left(-mgsin\beta - mg\frac{f_\partial}{r}cos\beta + \frac{1}{2}m_1 g\right)\delta x_2,$$
$$Q_2 = \frac{\delta A_2}{\delta x_2} = g\left(\frac{m_1}{2} - msin\beta - m\frac{f_\partial}{r}cos\beta\right).$$

წარმოებულების და განზოგადებული ძალების მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და მივიღებთ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_1 + m_1\frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{4} = g\left(\frac{m_1}{2} - msn\alpha - m\frac{f_\partial}{r}cos\alpha\right),$$
$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_2 + m_1\frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{4} = g\left(\frac{m_1}{2} - msin\beta - m\frac{f_\partial}{r}cos\beta\right)$$

ან

$$\ddot{x}_1\left(\frac{3}{2}m + \frac{m_1}{4}\right) + \frac{m_1}{4}\ddot{x}_2 = g\left(\frac{m_1}{2} - msin\alpha - m\frac{f_\partial}{r}cos\alpha\right),$$
$$\ddot{x}_2\left(\frac{3}{2}m + \frac{m_1}{4}\right) + \frac{m_1}{4}\ddot{x}_1 = g\left(\frac{m_1}{2} - msin\beta - m\frac{f_\partial}{r}cos\beta\right).$$

ამოვხსნათ დიფერენციალურ განტოლებათა ეს სისტემა $\ddot{x}_1$ და $\ddot{x}_2$ -ის მიმართ და განვსაზღვროთ M_1 და M_2 ტვირთების აჩქარებები:

$$\ddot{x}_2 =$$

$$= g\frac{3m_1 + m_1(sin\alpha - cos\beta) + m_1\frac{f_{\text{ბ}}}{r}(sin\alpha - cos\beta) - 6m\left(sin\beta + \frac{f_{\text{ბ}}}{r}cos\beta\right)}{3(3m - m_1)},$$

$$\ddot{x}_1 =$$

$$= g\frac{3m_1 + m_1(sin\beta - sin\alpha) + m_1\frac{f_{\text{ბ}}}{r}(cos\beta - cos\alpha) - 6m\left(sin\alpha + \frac{f_{\text{ბ}}}{r}cos\alpha\right)}{3(3m + m_1)}$$

მაშინ M ტვირთის აჩქარება

$$w = \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2} = g\frac{m_1 - m\left[sin\alpha + sin\beta + \frac{f_{\text{ბ}}}{r}(cos\alpha + cos\beta)\right]}{3m + m_1}.$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$w = g\frac{m_1 - m\left[sin\alpha + sin\beta + \frac{f_{\text{ბ}}}{r}(cos\alpha + cos\beta)\right]}{3m + m_1}.$$

ამოცანა 48.33

მოცემულია ორი ბლოკის სისტემა; A მოძრავი და B უძრავი ბლოკებით და სამი M_1, M_2 და M_3 ტვირთებით, რომლებიც ჩამოკიდებულია უჭიმარი ძაფების საშუალებით ისე, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები. ტვირთების მასები შესაბამისად უდრის m_1, m_2 და m_3. ამასთან $m_1 < m_2 + m_3$ და $m_2 \gtreqless m_3$. ბლოკების მასები უგულებელყოფილია. იპოვეთ m_1, m_2 და m_3 მასების როგორი თანაფარდობისას ეშვება M_1 ტვირთი, თუ ტვირთების საწყისი სიჩქარეები ნულის ტოლია (ნახ.1)

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. ავირჩიოთ განზოგადებული კოორდინატები:

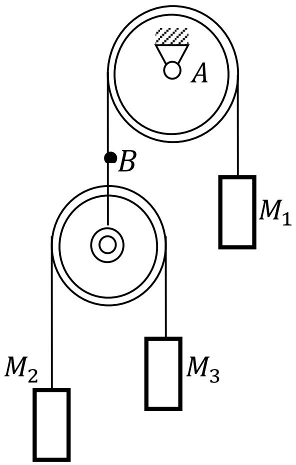
$x_1 - M_1$ ტვირთის გადაადგილება ქვევით, $x_2 - M_2$ ტვირთის გადაადგილება ზევით (იხ. ნახაზი).

ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

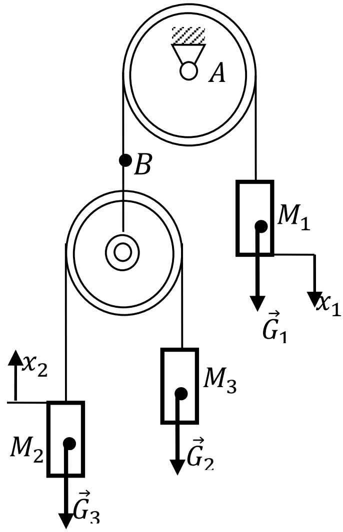
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}.$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია



ნახ.1



ნახ.2

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} =$$

$$= \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2}{2} + \frac{m_3(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2}{2}.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + m_2(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + m_3(\dot{x}_1 - \dot{x}_2),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1 + m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + m_3(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - m_3(\dot{x}_1 - \dot{x}_2),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) - m_3(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=\frac{\partial T}{\partial x_2}=0.$$

სისტემის პოტენციური ენერგია

$$\Pi=-G_1x_1+G_2(x_1+x_2)+G_3(x_1-x_2)=$$
$$=g[-m_1x_1+m_2(x_1+x_2)+m_3(x_1-x_2)].$$

ვიპოვოთ პოტენციური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები განზოგადებული კოორდინატებით:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}=g(m_2+m_3-m_1),$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}=g(m_2-m_3).$$

წარმოებულების მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და მივიღებთ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$m_1\ddot{x}_1+m_2(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)+m_3(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)=g(m_2+m_3-m_1)$$
$$m_2(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)-m_3(\ddot{x}_1-\ddot{x}_2)=g(m_2-m_3).$$

ამოვხსნათ დიფერენციალურ განტოლებათა ეს სისტემა და განვსაზღვროთ $\ddot{x}_1$:

$$\ddot{x}_1\left(\frac{m_1+m_2+m_3}{m_2-m_3}-\frac{m_2-m_3}{m_2+m_3}\right)=g\left(\frac{m_2+m_3-m_1}{m_2-m_3}-\frac{m_2-m_3}{m_2+m_3}\right),$$

აქედან M ტვირთის აჩქარება

$$\ddot{x}_1=g\frac{m_1m_2+m_1m_3-4m_2m_3}{4m_2m_3+m_1m_2+m_1m_3}.$$

M_1 ტვირთის აჩქარება მიმართულია ქვევით, თუ

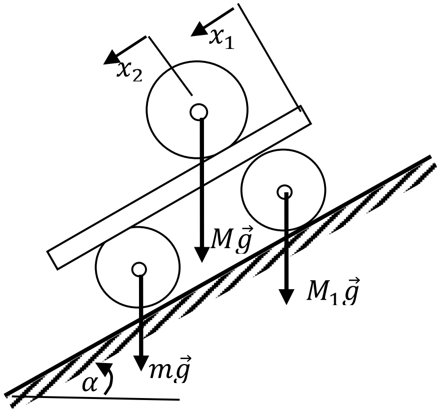
$$m_1m_2+m_1m_3-4m_2m_3>0,$$

ე.ი როცა

$$m_1>\frac{4m_2m_3}{m_2+m_3}.$$

პ ა ს უ ხ ი: უნდა იყოს $m_1>\frac{4m_2m_3}{m_2+m_3}$.

ამოცანა 48.34



იპოვეთ ურიკას აჩქარება, რომლის ბაქანზე უსრიალოდ გორავს წრიული ცილინდრი, თუ თვით ურიკა უსრიალოდ ჩამოგორდება ჰორიზონტისადმი α კუთხით დახრილ სიბრტყეზე. ურიკას ბაქანი დახრილი სიბრტყის პარალელურია. ურიკას მასა თვლების გარეშე არის M, ყველა თვლის მასა$-m$, ცილინდრის მასა $-M_1$. თვლები ჩათვალეთ ერთგვაროვან უწყვეტ დისკოებად.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. ავირჩიოთ განზოგადებული კოორდინატები: $x_1 -$ ურიკას გადაადგილება, $x_2 -$ ცილინდრის გადაადგილება (იხ. ნახაზი).

ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2}.$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{M\dot{x}_1^2}{2} + \frac{M_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{M_1 r^2}{2}\left(\frac{\dot{x}_2}{r}\right)^2 + \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\frac{\dot{x}_1}{r}\right)^2 =$$
$$= \frac{M\dot{x}_1^2}{2} + \frac{M_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2}{2} + \frac{M_1\dot{x}_2^2}{2} + \frac{3}{4}m\dot{x}_1^2.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = M\dot{x}_1 + M_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \frac{3}{2}m\dot{x}_1,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = M\ddot{x}_1 + M_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \frac{3}{2}m\ddot{x}_1,$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = M_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \frac{M\dot{x}_2}{2},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = M_1(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \frac{M\ddot{x}_2}{2},$$
$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0.$$

სისტემის პოტენციური ენერგია

$$\Pi = -Mgx_1 sin\alpha - mgx_1 sin\alpha - M_1 g(x_1 + x_2) sin\alpha$$

ვიპოვოთ პოტენციური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები განზოგადებული კოორდინატებით:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = -Mgsin\alpha - mgsin\alpha - M_1 gsin\alpha = -g(M + m + M_1)sin\alpha,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = -M_1 gsin\alpha.$$

წარმოებულების მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და მივიღებთ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\ddot{x}_1\left(M + \frac{3}{2}m + M_1\right) + M_1 \ddot{x}_{2=} g(M + m + M_1)sin\alpha, \qquad (1)$$

$$M_1 \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 \frac{3}{2} M_1 = M_1 gsin\alpha \qquad (2)$$

(2) განტოლებიდან

$$\ddot{x}_2 = \frac{M_1 gsin\alpha - M_1 \ddot{x}_1}{\frac{3}{2} M_1} = \frac{2}{3} gsin\alpha - \frac{2}{3} \ddot{x}_1.$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (1)-ში

$$\ddot{x}_1\left(M + \frac{3}{2}m + M_1\right) + \frac{2}{3} M_1 gsin\alpha - \frac{2}{3} M_1 \ddot{x}_1 = g(M + m + M_1)sin\alpha$$

ან

$$\ddot{x}_1\left(M + \frac{3}{2}m + \frac{1}{3}M_1\right) = gsin\alpha.\left(M + m + \frac{1}{3}M_1\right).$$

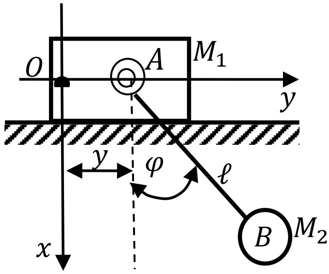
აქედან ურიკას აჩქარება

$$w = \ddot{x}_1 = g\frac{6M + 2M_1 + 6m}{6M + 2M_1 + 9m} sin\alpha.$$

პ ა ს უ ხ ი: $w = g\frac{6M+2M_1+6m}{6M+2M_1+9m} sin\alpha.$

ამოცანა 48.35

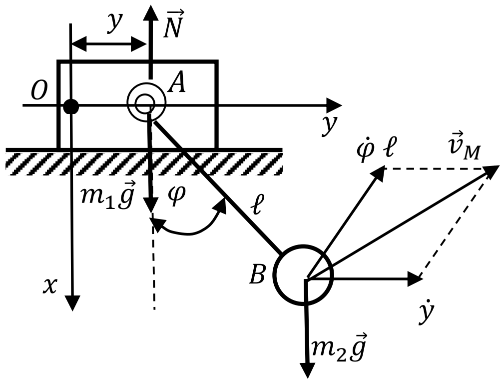
შეადგინეთ ელიფსური ქანქარას მოძრაობის განტოლება, თუ იგი შედგება ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე უხახუნოდ მოსრიალე m_1 მასის ცოციასა და m_2 მასის ბურთულასაგან, რომელიც შეერთებულია ცოციასთან ℓ სიგრძის AB ღეროს საშუალებით. ღეროს შეუძლია ბრუნვა ცოციასთან დაკავშირებული და ნახაზის სიბრტყის პერპენდიკულარული A ღერძის



გარშემო. ღეროს მასა უგულებელყოფილია. განსაზღვრეთ ელიფსური ქანქარას მცირე რხევების პერიოდი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. ავირჩიოთ განზოგადებული კოორდინატები: $y-$ ცოციას ჰორიზონტალური გადაადგილება, φ $-$ღეროს მობრუნების კუთხე (იხ. ნახაზი).
ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{\partial \Pi}{\partial y},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.$$



სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T=\frac{m_1\dot{y}^2}{2}+\frac{m_2\ell^2\dot{\varphi}^2 sin^2\varphi}{2}+\frac{m_2(\ell\dot{\varphi}cos\varphi+\dot{y})^2}{2}$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m_1\dot{y}+m_2(\ell\dot{\varphi}cos\varphi+\dot{y}),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)=m_1\ddot{y}-m_2\ell\dot{\varphi}^2 sin\varphi+m_2\ell\ddot{\varphi}cos\varphi+m_2\ddot{y},$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=m_2\ell^2\dot{\varphi}sin^2\varphi+m_2(\ell\dot{\varphi}cos\varphi+\dot{y})\ell cos\varphi=m_2\ell^2\dot{\varphi}+m_2\ell\dot{y}cos\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2\ell^2\ddot{\varphi} + m_2\ell\ddot{y}cos\varphi - m_2\ell\dot{y}\dot{\varphi}sin\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = m_2\ell\dot{\varphi}^2 sin\varphi cos\varphi - m_2(\ell\dot{\varphi}cos\varphi + \dot{y})\ell\dot{\varphi}sin\varphi = -m_2\ell\dot{y}\dot{\varphi}sin\varphi.$$

სისტემის პოტენციური ენერგია

$$\Pi = -m_2 g\ell cos\varphi$$

ვიპოვოთ პოტენციური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები განზოგადებული კოორდინატებით:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = m_2 g\ell sin\varphi.$$

წარმოებულების მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და მივიღებთ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს:

$$m_1\ddot{y} - m_2\ell\dot{\varphi}^2 sin\varphi + m_2\ell\ddot{\varphi}cos\varphi + m_2\ddot{y}=0,$$

$$m_2\ell^2\ddot{\varphi} + m_2\ell\ddot{y}cos\varphi - m_2\ell\dot{y}\dot{\varphi}sin\varphi + m_2\ell\dot{y}\dot{\varphi}sin\varphi = -m_2 g\ell sin\varphi.$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$\ddot{y}(m_1 + m_2) + m_2\ell(\ddot{\varphi}cos\varphi - \dot{\varphi}^2 sin\varphi) = 0$$

ან

$$\frac{d}{dt}[(m_1 + m_2)\dot{y} + m_2\ell\dot{\varphi}cos\varphi] = 0, \quad (1)$$

$$\ell\ddot{\varphi} + \ddot{y}cos\varphi + gsin\varphi = 0. \quad (2)$$

ელიფსური ქანქარას მცირე რხევების პერიოდის განსაზღვრისათვის დავუშვათ, რომ $sin\varphi \approx \varphi,\ cos\varphi \approx 1, \dot{\varphi}^2 sin\varphi = 0,$.მაშინ (1) და (2) განტოლებები მიიღებს სახეს:

$$\ddot{y}(m_1 + m_2) + m_2\ell\ddot{\varphi} = 0, \quad (3)$$

$$\ell\ddot{\varphi} + \ddot{y} + g\varphi = 0. \quad (4)$$

(3) განტოლებიდან განვსაზღვროთ $\ddot{y}$ და მისი მნიშვნელობა ჩავსვათ (4) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\ddot{y} = -\frac{m_2\ell}{m_1 + m_2}\ddot{\varphi},$$

$$\ell\ddot{\varphi} - \frac{m_2\ell}{m_1 + m_2}\ddot{\varphi} + g\varphi = 0$$

ან

$$\ddot{\varphi} - \frac{g(m_1 + m_2)}{m_1\ell}\varphi = 0.$$

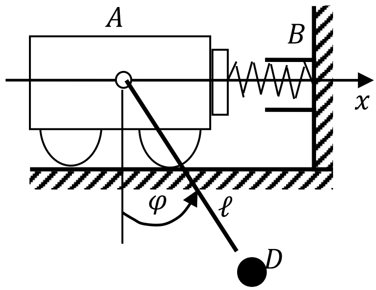
აქედან ვიპოვით ელიფსური ქანქარას მცირე რხევების პერიოდს

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}\frac{m_1}{m_1+m_2}}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{d}{dt}[(m_1+m_2)\dot{y}+m_2\ell\dot{\varphi}cos\varphi]=0,$

$$\ell\ddot{\varphi}+\ddot{y}cos\varphi+gsin\varphi=0, \qquad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}\frac{m_1}{m_1+m_2}}.$$

ამოცანა 48.36



ამწის A ურიკის დრეკად B საბჯენზე დაწოლისას იწყება უწონი ღეროთი დაკიდებული D ტვირთის რხევა. შეადგინეთ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები, თუ m_1 −ურიკის მასაა, m_2 −ტვირთის მასა, ℓ − ღეროს სიგრძე, c − საბჯენის ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი. თვლების მასა და წინაღობის ძალები უგულებელყოფილია. x ღერძის ათვლის წერტილად მიიღეთ დაუძაბავი ზამბარის მარცხენა წერტილი. განსაზღვრეთ ტვირთის მცირე რხევათა პერიოდი, როცა B საბჯენი არ არსებობს.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. უკუაგდეთ $\dot{\varphi}^2$ − ის შემცველი წევრი, ჩათვალეთ $sin\varphi \approx \varphi,\ cos\varphi \approx 1. c = 0.$

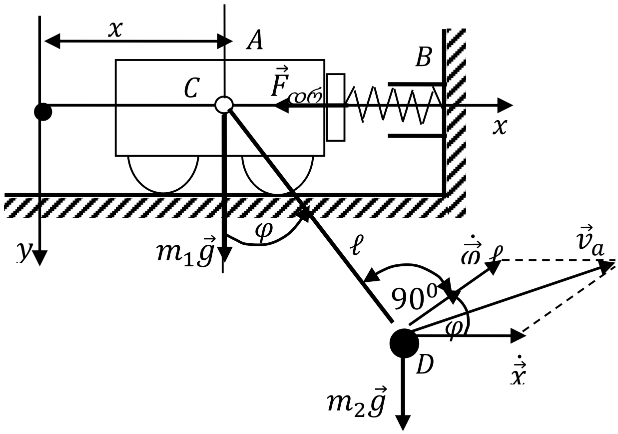
ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. ავირჩიოთ განზოგადებული კოორდინატები: x − ურიკის ჰორიზონტალური გადაადგილება, φ −ღეროს მობრუნების კუთხე (იხ. ნახაზი).

ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{\partial\Pi}{\partial y},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=-\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}.$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T=\frac{m_1\dot{x}^2}{2}+\frac{m_2\ell^2\dot{\varphi}^2sin^2\varphi}{2}+\frac{m_2}{2}(\ell\dot{\varphi}cos\varphi+\dot{x})^2$$



ვიპოვოთ

კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2\ell\dot{\varphi}cos\varphi,$$

$$\frac{d}{d}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2\ell\dot{\varphi}^2 sin\varphi + m_2\ell\ddot{\varphi}cos\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\ell^2\dot{\varphi}sin^2\varphi + m_2\ell^2\dot{\varphi}cos^2\varphi + m_2\dot{x}\ell cos\varphi =$$

$$= m_2\ell^2\dot{\varphi} + m_2\ell\dot{x}cos\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2\ell^2\ddot{\varphi} + m_2\ell\ddot{x}cos\varphi - m_2\ell\dot{x}\dot{\varphi}sin\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = m_2\ell\dot{\varphi}^2 sin\varphi cos\varphi - m_2(\ell\dot{\varphi}cos\varphi + \dot{x})\ell\dot{\varphi}sin\varphi = -m_2\ell\dot{y}\dot{\varphi}sin\varphi.$$

სისტემის პოტენციური ენერგია

$$\Pi = \frac{cx^2}{2} - m_2 g\ell cos\varphi.$$

ვიპოვოთ პოტენციური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები განზოგადებული კოორდინატებით:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = cx,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = m_2 g\ell sin\varphi.$$

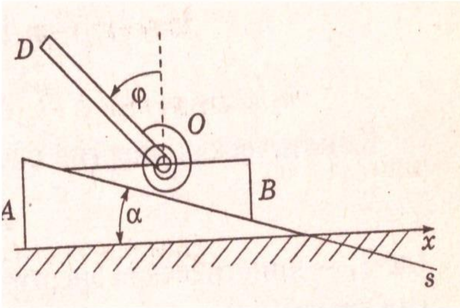
წარმოებულების მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და მივიღებთ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს:

$$(m_1+m_2)\ddot{x}-m_2\ell\dot{\varphi}^2 sin\varphi+m_2\ell\ddot{\varphi}cos\varphi=-cx,$$
$$m_2\ell^2\ddot{\varphi}+m_2\ell\ddot{x}cos\varphi-m_2\ell\dot{x}\dot{\varphi}sin\varphi+m_2\ell\dot{y}\dot{\varphi}sin\varphi=-m_2g\ell sin\varphi.$$
ან
$$(m_1+m_2)\ddot{x}+m_2\ell\dot{\varphi}^2 sin\varphi+m_2\ell\ddot{\varphi}cos\varphi=-cx, \qquad (1)$$
$$\ell\ddot{\varphi}+\ddot{x}cos\varphi+gsin\varphi=0. \qquad (2)$$
ელიფსური ქანქარას მცირე რხევების პერიოდის განსაზღვრისათვის დავუშვათ, რომ $sin\varphi\approx\varphi,\ cos\varphi\approx 1, \dot{\varphi}^2 sin\varphi=0, c=0.$.მაშინ (1) და (2) განტოლებები მიიღებს სახეს:
$$\ddot{x}(m_1+m_2)+m_2\ell\ddot{\varphi}=0, \qquad (3)$$
$$\ell\ddot{\varphi}+\ddot{x}=-g\varphi. \quad . \qquad (4)$$
(3) განტოლებიდან განვსაზღვროთ $\ddot{x}$:
$$\ddot{x}=-\frac{m_2\ell}{m_1+m_2}\ddot{\varphi},$$
ჩავსვათ ეს გამოსახულება (4) განტოლებაში, მივიღებთ
$$\ell\ddot{\varphi}-\frac{m_2\ell}{m_1+m_2}\ddot{\varphi}+g\varphi=0$$
ან
$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0.$$
სადაც $\frac{g(m_1+m_2)}{m_1\ell}=k^2$
აქედან ვიპოვით ელიფსური ქანქარას მცირე რხევების პერიოდს
$$\tau=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{m_1\ell}{(m_1+m_2)g}}.$$
პ ა ს უ ხ ი: $(m_1+m_2)\ddot{x}+m_2\ell\dot{\varphi}^2 sin\varphi+m_2\ell\ddot{\varphi}cos\varphi=-cx,$
$$\ell\ddot{\varphi}+\ddot{x}cos\varphi=-gsin\varphi, \qquad \tau=2\pi\sqrt{\frac{m_1\ell}{(m_1+m_2)g}}.$$

ამოცანა 48.37

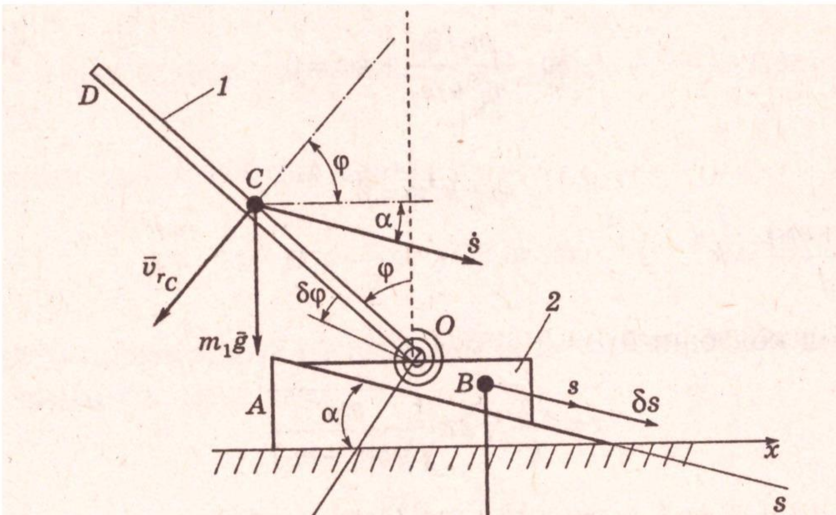
ჰორიზონტისადმი α კუთხით

დახრილ უძრავ A რიზმაზე სრიალებს m_2 მასის B პრიზმა. B პრიზმაზე O ცილინდრული სახსრისა და c სიხისტის სპირალური ზამბარის საშუალებით შეერთებულია წვრილი m_1 მასის და ℓ სიგრძის ერთგვაროვანი OD ღერო, რომელიც ასრულებს რხევებს O ღერძის გარშემო ნახაზის სიბრტყეში. B პრიზმისა და OD ღეროს მდებარეობა განისაზღვრება s და φ კორდინატების საშუალებოთ. შეადგინეთ იმ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები, რომლებიც შედგება B პრიზმისა და OD ღეროსაგან. წინაღობის ძალები უგულებელყოფილია. განსაზღვრეთ OD ღეროს მცირე რხევათა პერიოდი, თუ $m_1 g\ell cos^2\alpha < 2c.$



მ ი თ ი თ ე ბ ა. მიიღეთ $sin\varphi \approx \varphi$, $\cos(+\varphi) \approx cos\alpha - \varphi sin\alpha$ და უკუაგდეთ $\dot{\varphi}^2 -$ ისა და $\varphi \cdot \ddot{\varphi} -$ ის შემცველი წევრეები

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ ღეროს მობრუნების φ კუთხე და B პრიზმის გადაადგილება დახრილ სიბრტყეზე (იხ. ნახაზი).



ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_2 .$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = T_1 + T_2,$$

სადაც $T_1 -\ OD$ ღეროს კინეტიკური ენერგია, $T_2 -\ B$ პრიზმის კინეტიკური ენერგია.

ღეროს კინეტიკური ენერგია

$$T_1 = \frac{m_1 v_O^2}{2} + m_1 \vec{v}_O \cdot \vec{v}_{Cr} + T_r,$$

სადაც $v_O = \dot{s}$; $v_{Cr} = \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}$, $T_r = \frac{J_{Oz}\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{m_1\ell^2}{6}\dot{\varphi}^2$, რადგან $J_{Oz} = \frac{m_1\ell^2}{3}$;

$$\vec{v}_O \cdot \vec{v}_{Cr} = v_O v_{Cr} \cos(\vec{v}_O, \vec{v}_{Cr})\,;\ \cos(\vec{v}_O, \vec{v}_{Cr}) = -\cos(\alpha + \varphi).$$

მაშინ

$$T_1 = \frac{m_1 \dot{s}^2}{2} - \frac{m_1 \dot{s}\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha + \varphi)}{2} + \frac{m_1\ell^2}{6}\dot{\varphi}^2$$

ან კენიგის თეორემის თანახმად

$$T_1 = \frac{m_1 v_C^2}{2} + \frac{J_C\dot{\varphi}^2}{2},$$

სადაც $v_C^2 = \vec{v}_C \cdot \vec{v}_C = (\vec{v}_O + \vec{v}_{CO}) \cdot (\vec{v}_O + \vec{v}_{CO}) = v_O^2 +$

$$+2v_O v_{CO}\cos(180^0 - (\alpha + \varphi)) + v_{CO}^2\,;\ v_O = \dot{s};\ v_{CO} = \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\,;\ J_C = \frac{m_1\ell^2}{12}.$$

B პრიზმის კინეტიკური ენერგია.

$$T_2 = \frac{m_2\dot{s}^2}{2}.$$

მაშინ სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{(m_1 + m_2)\dot{s}^2}{2} - \frac{m_1\dot{s}\ell\dot{\varphi}\cos(\alpha + \varphi)}{2} + \frac{m_1\ell^2}{6}\dot{\varphi}^2.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = -\frac{m_1\dot{s}\ell\cos(\alpha + \varphi)}{2} + \frac{m_1\ell^2}{3}\dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = -\frac{m_1\ddot{s}\ell\cos(\alpha + \varphi)}{2} + \frac{m_1\dot{s}\ell\sin(\alpha + \varphi)}{2}\dot{\varphi} + \frac{m_1\ell^2}{3}\ddot{\varphi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}m_1\dot{s}\ell\,\dot{\varphi}\sin(\alpha + \varphi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = (m_1 + m_2)\dot{s} - \frac{m_1 \ell \dot{\varphi} \cos(\dot{\alpha} + \varphi)}{2},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{s} - \frac{1}{2} m_1 \ell \ddot{\varphi} \cos(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} m_1 \ell \dot{\varphi}^2\, \dot{\varphi} \sin(\dot{\alpha} + \varphi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0.$$

ვიპოვოთ Q_1 და Q_2 განზოგადებული ძალები.

ა) მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta\varphi \neq 0$, $\delta s = 0$, მაშინ

$$\delta A_1 = \frac{m_1 g \ell sin\varphi \cdot \delta\varphi}{2} - c\varphi \cdot \delta\varphi = Q_1 \delta\varphi,$$

აქედან

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta\varphi} = \frac{1}{2} m_1 g \ell \sin\dot{} \varphi - c\varphi.$$

ბ) მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta s \neq 0$, $\delta\varphi = 0$, მაშინ

$$\delta A_2 = m_1 g \sin\alpha\, \delta s + m_2 g \sin\alpha \cdot \delta s = (m_1 + m_2) g \sin\alpha\, \delta s = Q_2 \delta s,$$

აქედან

$$Q_2 = \frac{\delta A_2}{\delta s} = (m_1 + m_2) g \sin\alpha.$$

წარმოებულების და განზოგადებული ძალების მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში:

$$-\frac{1}{2} m_1 \ddot{s} \ell \cos(\dot{\alpha} + \varphi) + \frac{1}{2} m_1 \dot{s} \ell \dot{\varphi} \sin(\dot{\alpha} + \varphi) + \frac{m_1 \ell^2}{3} \ddot{\varphi} -$$
$$-\frac{1}{2} m_1 \dot{s} \ell\, \dot{\varphi} \sin(\dot{\alpha} + \varphi) = \frac{1}{2} m_1 g \ell \sin\dot{} \varphi - c\varphi,$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{s} - \frac{1}{2} m_1 \ell \ddot{\varphi} \cos(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} m_1 \ell \dot{\varphi}^2\, \dot{\varphi} \sin(\dot{\alpha} + \varphi) =$$
$$= (m_1 + m_2) g \sin\alpha.$$

ან

$$\frac{1}{3} m_1 \ell^2 \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} m_1 \ddot{s} \ell \cos(\dot{\alpha} + \varphi) = \frac{1}{2} m_1 g \ell \sin\dot{} \varphi - c\varphi, \qquad (1)$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{s} + \frac{1}{2} m_1 \ell \dot{\varphi}^2 \sin(\alpha + \varphi) - \frac{1}{2} m_1 \ddot{\varphi} \ell \cos(\dot{\alpha} + \varphi) =$$
$$= (m_1 + m_2) g \sin\alpha. \qquad (2)$$

ამოცანის პირობის თანახმად ჩავთვალოთ, რომ $sin\varphi \approx \varphi$, $\cos(+\varphi) \approx cos\alpha - \varphi sin\alpha$ და უკუვაგდოთ $\dot{\varphi}^2 -$ ისა და $\varphi \cdot \ddot{\varphi} -$ ის შემცველი წევრები, მაშინ (1) და (2) განტოლებები მიიღებს სახეს:

$$\frac{1}{3}m_1\ell^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}m_1\ddot{s}\ell(cos\alpha - \varphi sin\alpha) = \frac{1}{2}m_1 g\ell\varphi - c\varphi,$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{s} - \frac{1}{2}m_1\ddot{\varphi}\ell\,(\cos\alpha - \varphi sin\alpha) = (m_1 + m_2)g\sin\alpha\,.$$

ან

$$\frac{1}{3}m_1\ell^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}m_1\ddot{s}\ell cos\alpha + \frac{1}{2}m_1\ddot{s}\ell\varphi sin\alpha = \left(\frac{1}{2}m_1 g\ell - c\right)\varphi, \qquad (3)$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{s} - \frac{1}{2}m_1\ddot{\varphi}\ell\cos\alpha = (m_1 + m_2)g\sin\alpha\,. \qquad (4)$$

(4) განტოლებიდან განვსაზღვროთ $\ddot{s}$:

$$\ddot{s} = \frac{m_1\ddot{\varphi}\ell cos\alpha}{2(m_1 + m_2)} + g\sin\alpha,$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (3) განტოლებაში და მივიღებთ:

$$\frac{1}{3}m_1\ell^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}m_1\ell cos\alpha\left[\frac{m_1\ddot{\varphi}\ell cos\alpha}{2(m_1 + m_2)} + g\sin\alpha\right] +$$

$$+\frac{1}{2}m_1\ell\varphi sin\alpha\left[\frac{m_1\ddot{\varphi}\ell cos\alpha}{2(m_1 + m_2)} + g\sin\alpha\right] = \left(\frac{1}{2}m_1 g\ell - c\right)\varphi$$

ან

$$\frac{1}{3}m_1\ell^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{4}\frac{m_1^2\ell^2\ddot{\varphi}}{m_1 + m_2}cos^2\alpha - \frac{m_1 g\ell sin\alpha cos\alpha}{2} + \frac{m_1 g\ell sin^2\alpha}{2}\varphi =$$

$$= \left(\frac{1}{2}m_1 g\ell - c\right)\varphi.$$

გარდავქმნათ მიღებული გამოსახულება:

$$\ddot{\varphi}\left[\frac{1}{3}m_1\ell^2 - \frac{m_1^2\ell^2 cos^2\alpha}{4(m_1 + m_2)}\right] + \left(c - \frac{m_1 g\ell cos^2\alpha}{2}\right)\varphi = \frac{m_1 g\ell}{2}sin2\alpha,$$

$$\ddot{\varphi}\left[\frac{\ell^2(m_1^2 + 3m_1^2 sin^2\alpha + 4m_1 m_2)}{12(m_1 + m_2)}\right] + \frac{2c - m_1 g\ell cos^2\alpha}{2}\varphi =$$

$$= \frac{m_1 g\ell}{2}sin2\alpha,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{6(m_1 + m_2)(2c - m_1 g\ell cos^2\alpha)}{m_1\ell^2[m_1(1 + sin^2\alpha) + 4m_2]}\varphi = \frac{m_1 g\ell}{2}sin2\alpha.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$k^2 = \frac{6(m_1 + m_2)(2c - m_1 g\ell cos^2\alpha)}{m_1\ell^2[m_1(1 + sin^2\alpha) + 4m_2]}.$$

მაშინ ღეროს რხევის პერიოდი

$$\tau = \frac{2\pi}{k}$$

ან

$$\tau = 2\pi\ell\sqrt{\frac{m_1[m_1(1 + sin^2\alpha) + 4m_2]}{6(m_1 + m_2)(2c - m_1 g\ell cos^2\alpha)}}.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $(m_1 + m_2)\ddot{s} + \frac{1}{2}m_1\ell\dot{\varphi}^2\sin(\alpha + \varphi) - \frac{1}{2}m_1\ddot{\varphi}\ell\cos(\alpha + \varphi) =$

$$= (m_1 + m_2)g\sin\alpha,$$

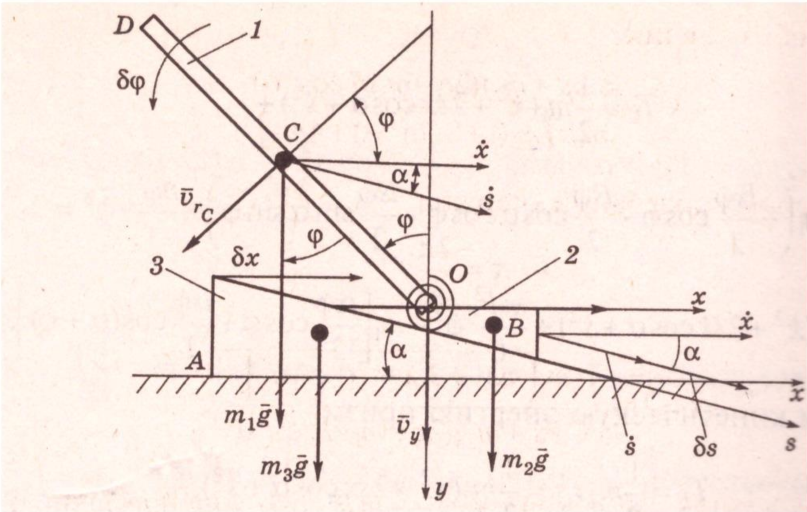
$$\frac{1}{3}m_1\ell^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}m_1\ddot{s}\ell\cos(\alpha + \varphi) = \frac{1}{2}m_1 g\ell\sin\varphi - c\varphi,$$

$$\tau = 2\pi\ell\sqrt{\frac{m_1[m_1(1 + sin^2\alpha) + 4m_2]}{6(m_1 + m_2)(2c - m_1 g\ell cos^2\alpha)}}.$$

ამოცანა 48.38

48.37 ამოცანა ამოხსენით იმ პირობით, რომ m_3 მასის A პრიზმა მოძრაობს ჰორიზონტალურ გლუვ სიბრტყეზე, ხოლო მისი მდებარეობა განისაზღვრება x კოორდინატით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს სამი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ ღეროს მობრუნების φ კუთხე და B პრიზმის გადაადგილება A პრიზმაზე, $x -$ A პრიზმის გადაადგილება ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ



ლაგრანჟის მეორე გვარის სამი განტოლება:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_2\,, \qquad (1)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_3.$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \qquad (2)$$

სადაც $T_1 - OD$ ღეროს კინეტიკური ენერგია, $T_2 - B$ პრიზმის კინეტიკური ენერგია, $T_3 - A$ პრიზმის კინეტიკური ენერგია.

განვსაზღვროთ ღეროს კინეტიკური ენერგია

$$T_1 = \frac{m_1 v_O^2}{2} + m_1 \vec{v}_O \cdot \vec{v}_{Cr} + T_r,$$

სადაც

$$\vec{v}_o = \vec{v}_x + \vec{v}_y, \quad v_x = \dot{x} + \dot{s}\cdot cos\alpha, \quad v_y = \dot{s}\cdot sin\alpha;$$
$$v_o^2 = (\dot{x} + \dot{s}\cdot cos\alpha)^2 + (\dot{s}\cdot sin\alpha)^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\cdot cos\alpha + \dot{s}^2;$$
$$v_{Cr} = \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}, \quad T_r = \frac{J_{Oz}\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{m_1\ell^2}{6}\dot{\varphi}^2,$$

რადგან

$$J_{Oz} = \frac{m_1\ell^2}{3};$$
$$\vec{v}_O \cdot \vec{v}_{Cr} = \left(\vec{v}_x + \vec{v}_y\right) \cdot \vec{v}_{Cr} = \vec{v}_x \cdot \vec{v}_{Cr} + \vec{v}_y \cdot \vec{v}_{Cr},$$

$$\vec{v}_x \cdot \vec{v}_{Cr} = v_x v_{Cr} \cos(180^0 - \varphi) = -v_x v_{Cr} \cos\varphi =$$
$$= -(\dot{x} + \dot{s} \cdot cos\alpha)\frac{\ell\dot{\varphi}}{2}\cos\varphi = -\frac{\ell\dot{x}\dot{\varphi}}{2}\cos\varphi - \frac{\ell\dot{s}\dot{\varphi}}{2}cos\alpha\cos\varphi,$$
$$\vec{v}_y \cdot \vec{v}_{Cr} = v_y v_{Cr} \cos(90^0 - \varphi) = \frac{\ell\dot{s}\dot{\varphi}}{2} sin\alpha \sin\varphi.$$

მაშინ

$$T_1 = \frac{m_1}{2}(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{s} \cdot cos\alpha + \dot{s}^2) + m_1\left(-\frac{\ell\dot{x}\dot{\varphi}}{2}\cos\varphi - \frac{\ell\dot{s}\dot{\varphi}}{2}cos\alpha\cos\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{\ell\dot{s}\dot{\varphi}}{2}sin\alpha\sin\varphi\right) + \frac{m_1\ell^2}{6}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{s} \cdot cos\alpha + \dot{s}^2) +$$
$$+ \frac{m_1\ell^2}{6}\dot{\varphi}^2 - m_1\left[\frac{\ell\dot{x}\dot{\varphi}}{2}\cos\varphi + \frac{\ell\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\cos(\alpha+\varphi)\right].$$

ვიპოვოთ პრიზმების კინეტიკური ენერგია.

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 v_O^2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{s} \cdot cos\alpha + \dot{s}^2),$$
$$T_3 = \frac{1}{2}m_3\dot{x}^2.$$

მაშინ სისტემის კინეტიკური ენერგია (2) ფორმულის თანახმად უდრის:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{s} \cdot cos\alpha + \dot{s}^2) +$$
$$+ \frac{m_1\ell^2}{6}\dot{\varphi}^2 - m_1\left[\frac{\ell\dot{x}\dot{\varphi}}{2}\cos\varphi + \frac{\ell\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\cos(\alpha+\varphi)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{s} \cdot cos\alpha + \dot{s}^2) + \frac{1}{2}m_3\dot{x}^2.$$

ვიპოვოთ (1) განტოლებაში შემავალი კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{m_1\ell^2}{3}\dot{\varphi} - m_1\left[\frac{\ell\dot{x}}{2}\cos\varphi + \frac{\ell\dot{s}}{2}\cos(\alpha+\varphi)\right],$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{m_1\ell^2}{3}\ddot{\varphi} - \frac{m_1\ell\ddot{x}}{2}\cos\varphi - \frac{m_1\ell\ddot{s}}{2}\cos(\alpha+\varphi) +$$
$$+ \frac{m_1\ell\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\sin(\alpha+\varphi) + \frac{m_1\ell\dot{x}\dot{\varphi}}{2}\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = \frac{m_1\ell\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\sin(\dot{\alpha}+\varphi) + \frac{m_1\ell\dot{x}\dot{\varphi}}{2};$$
$$\frac{\partial T}{\partial\dot{s}} = \frac{1}{2}m_1(2\dot{x}cos\alpha + 2\dot{s}) - \frac{m_1\ell\dot{\varphi}}{2}\cos(\alpha+\varphi) + m_2\dot{x}cos\alpha + 2\dot{s},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = m_1(2\ddot{x}cos\alpha + 2\ddot{s}) - \frac{m_1\ell}{2}[\ddot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi) - \dot{\varphi}^2\sin(\alpha+\varphi)] +$$
$$+m_2(\ddot{x}cos\alpha + \ddot{s});$$
$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0;$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_1\dot{x} + m_1\dot{s}\,cos\alpha - m_1\frac{\ell\dot{\varphi}}{2}\cos\varphi + m_2\dot{x} + m_2\dot{s}\,cos\alpha + m_3\dot{x},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} + (m_1 + m_2)\ddot{s}cos\alpha -$$
$$-\frac{m_1\ell}{2}[\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi],$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

ვიპოვოთ Q_1 , Q_2 და Q_3 განზოგადებული ძალები.

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta\varphi \neq 0$, $\delta x = \delta s = 0$ და განვსაზღვროთ შესაძლო მუშაობა

$$\delta A_1 = \frac{m_1 g\ell sin\varphi \cdot \delta\varphi}{2} - c\varphi \cdot \delta\varphi = Q_1\delta\varphi,$$

აქედან

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta\varphi} = \frac{1}{2}m_1 g\ell\sin\varphi - c\varphi.$$

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta s \neq 0$, $\delta x = \delta\varphi = 0$ და განვსაზღვროთ შესაძლო მუშაობა

$$\delta A_2 = m_1 g\sin\alpha\,\delta s + m_2 g\sin\alpha \cdot \delta s = (m_1 + m_2)g\sin\alpha\,\delta s = Q_2\delta s,$$

აქედან

$$Q_2 = \frac{\delta A_2}{\delta s} = (m_1 + m_2)g\sin\alpha.$$

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta x \neq 0$, $\delta s = \delta\varphi = 0$ და განვსაზღვროთ შესაძლო მუშაობა

$$\delta A_3 = 0 = Q_3\delta x,$$

აქედან

$$Q_3 = 0.$$

წარმოებულების და განზოგადებული ძალების მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში ((1) სისტემა):

$$\frac{m_1\ell^2}{3}\ddot{\varphi} - \frac{m_1\ell\ddot{x}}{2}\cos\varphi - \frac{m_1\ell\ddot{s}}{2}\cos(\alpha+\varphi) + \frac{m_1\ell\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\sin(\alpha+\varphi) +$$

$$+\frac{m_1\ell\dot{x}\dot{\varphi}}{2}\sin\varphi-\frac{m_1\ell\dot{s}\dot{\varphi}}{2}\sin(\dot{\alpha}+\varphi)-\frac{m_1\ell\dot{x}\dot{\varphi}}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}m_1g\ell\sin\varphi-c\varphi.$$

ან

$$\frac{m_1\ell^2}{3}\ddot{\varphi}-\frac{m_1\ell\ddot{x}}{2}\cos\varphi-\frac{m_1\ell\ddot{s}}{2}\cos(\alpha+\varphi)=\frac{1}{2}m_1g\ell\sin\varphi-c\varphi,$$

$$(m_1+m_2)\ddot{x}cos\alpha+(m_1+m_2)\ddot{s}+m_1\frac{\ell}{2}\dot{\varphi}^2\sin(\alpha+\varphi)-$$
$$-m_1\frac{\ell}{2}\ddot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi)=(m_1+m_2)g\sin\alpha,$$
$$(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+(m_1+m_2)\ddot{s}cos\alpha+$$
$$+\frac{m_1\ell}{2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi-\frac{m_1\ell}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi=0.$$

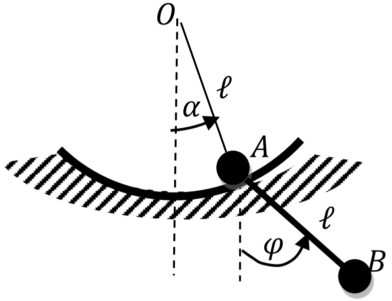
<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $(m_1+m_2+m_3)\ddot{x}+(m_1+m_2)\ddot{s}cos\alpha+$

$$+\frac{m_1\ell}{2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi-\frac{m_1\ell}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi=0,$$
$$(m_1+m_2)\ddot{x}cos\alpha+(m_1+m_2)\ddot{s}+m_1\frac{\ell}{2}\dot{\varphi}^2\sin(\alpha+\varphi)-$$
$$-m_1\frac{\ell}{2}\ddot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi)=(m_1+m_2)g\sin\alpha,$$
$$\frac{m_1\ell^2}{3}\ddot{\varphi}-\frac{m_1\ell\ddot{x}}{2}\cos\varphi-\frac{m_1\ell\ddot{s}}{2}\cos(\alpha+\varphi)=\frac{1}{2}m_1g\ell\sin\varphi-c\varphi.$$

ამოცანა 48.39

m_1 მასის A ნივთიერი წერტილი მოძრაობს ვერტიკალურ სიბრტყეში

ℓ რადიუსის ცილინდრის შიგა გლუვ ზედაპირზე. m_2 მასის B ნივთიერი წერტილს, შეერთებულს A ნივთიერ წერტილთან ℓ სიგრძის AB ღეროს საშუალებით, შეუძლია ვერტიკალურ სიბრტყეში რხევა ნახაზის სიბრტყის მართობული A ღერძის გარშემო. A და B წერტილების მდებარეობა განისაზღვრება ვერტიკალიდან ათვლილი α და φ კუთხეების საშუალებით. შეადგინეთ იმ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები, რომელიც შედგება AB უწონი ღეროთი შეერთებული A და B წერტილებისაგან. დაწერეთ მცირე რხევათა დიფერენციალური განტოლებები.



მ ი თ ი თ ე ბ ა. უკუაგდეთ $\dot{\varphi}^2 -$ ისა და $\dot{\alpha}^2 -$ ის შემცველი წევრები, ასევე იგულისხმეთ, რომ $\sin(\varphi-\alpha)\approx\varphi-\alpha$, $\cos(\varphi-\alpha)\approx 1$, $\sin\alpha\approx\alpha$, $\sin\varphi\approx\varphi$

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ α და φ კუთხეები. . ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის სამი განტოლება:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\alpha}=Q_\alpha\,, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi. \tag{2}$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T=T_1+T_2=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2} \tag{3}$$

ვიპოვოთ A და B წერტილების სიჩქარეები. ამისათვის ჩავწეროთ მათი კოორდინატები:

$$\begin{cases} x_1=\ell cos\alpha,\ y_1=\ell sin\alpha; \\ x_2=\ell cos\alpha+\ell cos\varphi,\ y_2=\ell sin\alpha+\ell sin\varphi. \end{cases} \tag{4}$$

გავაწარმოოთ (4) განტოლებები დროით:

$$\begin{cases} \dot{x}_1=-\ell\dot{\alpha}sin\alpha,\ \dot{y}_1=\ell\dot{\alpha}cos\alpha; \\ x_2=-\ell\dot{\alpha}sin\alpha-\ell\dot{\varphi}sin\varphi,\ y_2=\ell\dot{\alpha}cos\alpha+\ell\dot{\varphi}cos\varphi. \end{cases} \tag{5}$$

მაშინ

$$\begin{cases} v_1^2=\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2=\ell^2\dot{\alpha}^2, \\ v_2^2=\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2=\ell^2\dot{\alpha}^2+2\ell^2\dot{\alpha\dot{\varphi}}\cos(\varphi-\alpha)+\ell^2\dot{\varphi}^2. \end{cases} \tag{6}$$

ჩავსვათ (6) გამოსახულებები (3) ფორმულაში და განვსაზღვროთ სისტემის კინეტიკური ენერგია:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\ell^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2\ell^2\dot{\varphi}^2 + m_2\ell^2\dot{\alpha}\dot{\varphi}\cos(\varphi - \alpha).$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები განზოგადებული კოორდინატებით და დროით:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}} = (m_1 + m_2)\ell^2\dot{\alpha} + m_2\ell^2\dot{\varphi}\cos(\varphi - \alpha),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}}\right) = (m_1 + m_2)\ell^2\ddot{\alpha} + m_2\ell^2\ddot{\varphi}\cos(\varphi - \alpha) -$$

$$-m_2\ell^2\dot{\varphi}\,(\dot{\varphi} - \dot{\alpha})\sin(\varphi - \alpha),$$

$$\frac{\partial T}{\partial\alpha} = m_2\ell^2\dot{\varphi}\,\dot{\alpha}\sin(\varphi - \alpha)\,;$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = m_2\ell^2\dot{\varphi} + m_2\ell^2\dot{\alpha}\cos(\varphi - \alpha),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = m_2\ell^2\ddot{\alpha}\cos(\varphi - \alpha)\, m_2\ell^2\dot{\alpha}\,(\dot{\varphi} - \dot{\alpha})\sin(\varphi - \alpha) + m_2\ell^2\ddot{\varphi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = -m_2\ell^2\dot{\varphi}\,\dot{\alpha}\sin(\varphi - \alpha).$$

ვიპოვოთ Q_α და Q_φ განზოგადებული ძალები.

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta\alpha \neq 0$, $\delta\varphi = 0$ (ნახ.1), გავითვალისწინოთ, რომ AB ღერო ასრულებს გადატანით მოძრაობას (A და B წერტილების გადაადგილებები ერთნაირია) და განვსაზღვროთ შესაძლო მუშაობა:

$$\delta A_\alpha = -m_1 g\ell sin\alpha \cdot \delta\alpha -$$

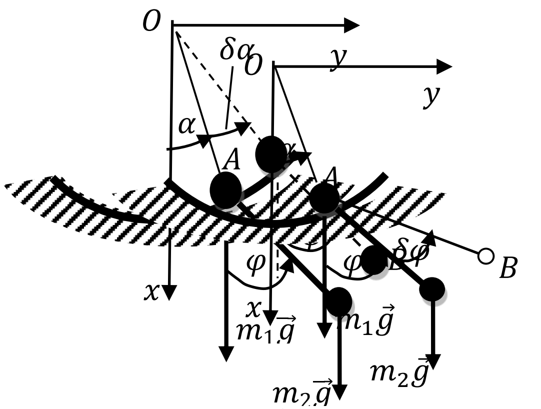
$$-m_2 g\ell sin\alpha \cdot \delta\alpha =$$

$$-(m_1 + m_2)g\ell sin\alpha \cdot \delta\alpha = Q_\alpha\delta\alpha$$

აქედან

$$Q_\alpha = \frac{\delta A_\alpha}{\delta\alpha} = -(m_1 + m_2)g\ell sin\alpha.$$

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta\varphi \neq 0$, $\delta\alpha = 0$ და განვსაზღვროთ შესაძლო მუშაობა (ნახ.2):



ნახ.2

$$\delta A_\varphi = -m_2 g\ell sin\varphi \cdot \delta\varphi = Q_\varphi \delta\varphi,$$

აქედან

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = -m_2 g\ell sin\varphi.$$

ჩავსვათ წარმოებულების და განზოგადებული ძალების გამოსახულებები (1) და (2) განტოლებებში:

$$(m_1+m_2)\ell^2\ddot{\alpha} + m_2\ell^2\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha) - m_2\ell^2\dot{\varphi}\,(\dot{\varphi}-\dot{\alpha})\sin(\varphi-\alpha) =$$
$$= -(m_1+m_2)g\ell sin\alpha,$$

$$m_2\ell^2\ddot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha) - m_2\ell^2\dot{\alpha}\,(\dot{\varphi}-\dot{\alpha})\sin(\varphi-\alpha) + m_2\ell^2\ddot{\varphi} -$$
$$-m_2\ell^2\dot{\varphi}\,\dot{\alpha}\sin(\varphi-\alpha) = -m_2 g\ell sin\varphi$$

ან

$$(m_1+m_2)\ell\ddot{\alpha} + m_2\ell\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha) - m_2\ell\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\alpha) =$$
$$= -(m_1+m_2)gsin\alpha, \qquad (7)$$
$$\ell\ddot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha) - \ell\dot{\alpha}^2\sin(\varphi-\alpha) + \ell\ddot{\varphi} = -g\ell sin\varphi.$$

ამოცანის პირობასი მითითების თანახმად იგულისხმეთ, რომ

$$\sin(\varphi-\alpha) \approx \varphi-\alpha,\ \cos(\varphi-\alpha) \approx 1,\ \sin\alpha \approx \alpha,\ \ \sin\varphi \approx \varphi$$

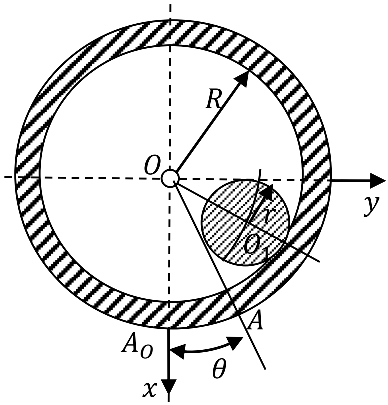
და უკუვაგდეთ $\dot{\varphi}^2 -$ ისა და $\dot{\alpha}^2 -$ ის შემცველი წევრეები, მაშინ (7) განტოლებები მიიღებს სახეს:

$$(m_1+m_2)\ell\ddot{\alpha}+m_2\ell\ddot{\varphi}==-(m_1+m_2)g\alpha,$$
$$\ell\ddot{\alpha}+\ell\ddot{\varphi}=-g\varphi.$$

<u>პ ა ს უ ხ ი:</u> $(m_1+m_2)\ell\ddot{\alpha}+m_2\ell\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\alpha)-m_2\ell\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\alpha)=$
$=-(m_1+m_2)gsin\alpha,$

$$\ell\ddot{\alpha}\cos(\varphi-\alpha)-\ell\dot{\alpha}^2\sin(\varphi-\alpha)+\ell\ddot{\varphi}=-g\ell sin\varphi;$$
$$(m_1+m_2)\ell\ddot{\alpha}+m_2\ell\ddot{\varphi}==-(m_1+m_2)g\alpha,\quad \ell\ddot{\alpha}+\ell\ddot{\varphi}=-g\varphi.$$

ამოცანა 48.40



m მასის და r რადიუსის მქისე ცილინდრი უსრიალოდ გორავს M მასის და R რადიუსის ღრუ ცილინდრის შიგა ზედაპირზე, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა ჰორიზონტალური O ღერძის გარშემო. ცილინდრების ინერციის მომენტები თავიანთი ღერძების მიმართ სათანადოდ არის $\frac{1}{2}mr^2$ და MR^2 . შეადგინეთ სისტემის მოძრაობის განტოლებები და იპოვეთ მათი პირველი ინტეგრალები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ θ და φ კუთხეები. ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის სამი განტოლება:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta}=-\frac{\partial\Pi}{\partial\theta}\,, \qquad (1)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}-\frac{\partial\Pi}{\partial}. \qquad (2)$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T=T_1+T_2 \qquad (3)$$

სადაც $T_1 -$ ღრუ ცილინდრის კინეტიკური ენერგიაა, ხოლო $T_2 -$ მცირე უწყვეტი ცილინდრის კინეტიკური ენერგია.

ვიპოვოთ ღრუ ცილინდრის კინეტიკური ენერგია:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{oz} \omega_1^2,$$

სადაც $J_{oz} = MR^2, \ \omega_1 = \dot{\theta}$.

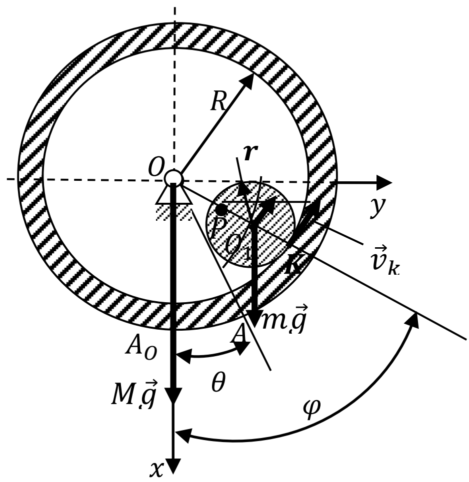
მაშინ

$$T_1 = \frac{MR^2 \dot{\theta}^2}{2}.$$

განვსაზღვროთ მცირე უწყვეტი ცილინდრის კინეტიკური ენერგია.

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_{O1}^2 + \frac{1}{2} J_{O1} \omega_2^2,$$

სადაც $v_{O1} = (r - r)\dot{\varphi}$; $J_{O1} = \frac{Mr^2}{2}$.



ω_2 კუთხური სიჩქარის განსაზღვრისათვის შემოვიღოთ მცირე უწყვეტი ცილინდრის მობრუნების α კუთხე, რომელსაც ვიპოვით შემდეგი გამოსახულებიდან:

$$\alpha r = \theta R - (R - r)\varphi.$$

გავაწამოოთ ეს გამოსახულება დროით:

$$\dot{\alpha} r = \dot{\theta} R - (R - r)\dot{\varphi},$$

აქედან

$$\omega_2 = \dot{\alpha} = \frac{1}{r}\left[\dot{\theta} R - (R - r)\dot{\varphi}\right] = \frac{\dot{\theta} R}{r} - \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\varphi}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ω_2 შეიძლება ასეც განისაზღვროს:

$$\omega_2 = \frac{v_K - v_{O1}}{r} = \frac{\dot{\theta} R - (R - r)\dot{\varphi}}{r} = \frac{v_{O1}}{P_{O1}},$$

სადაც P სიჩქარეთა მყისი ცენტრია.

მაშინ

$$T_2 = \frac{1}{2} m (R - r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} m r^2 \left[\frac{\dot{\theta} R}{r} - \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\varphi}\right]^2.$$

ჩავსვათ T_1 და T_2 −ის გამოსახულებები (3) ფორმულაში და მივიღებთ:

$$T = \frac{MR^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{1}{2} m (R - r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} m r^2 \left[\frac{\dot{\theta} R}{r} - \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\varphi}\right]^2.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = MR^2\dot{\theta} + \frac{mr^2}{2}\left[\dot{\theta}\frac{R}{r} - \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\varphi}\right]\frac{R}{r},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0.$$

სისტემის პოტენციური ენერგია

$$\Pi = -mg(R-r)cos\varphi$$

ვიპოვოთ პოტენციური ენერგიის გამოსახულების წარმოებული θ განზოგადებული კოორდინატით:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0,$$

რადგან სისტემის პოტენციური ენერგია არ არის დამოკიდებული θ განზოგადებული კოორდინატზე.

მაშინ (1) ფორმულის თანახმად

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0$$

ან

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = C_1.$$

ჩავსვათ წარმოებულის მიღებული მნიშვნელობა (1) ფორმულაში და მივიღებთ:

$$MR^2\dot{\theta} + \frac{mr^2}{2}\left[\dot{\theta}\frac{R}{r} - \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\varphi}\right]\frac{R}{r} = C_1.$$

ვიპოვოთ სხვა პირველი ინტეგრალი. ამისათვის ვისარგებლოთ გამოსახულებით:

$$T + \Pi = C_2,$$

რადგან ყველა ძალა პოტენციურია, ხოლო ბმები-ჰოლონომიური და სტაციონალური

მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{MR^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}mr^2\left[\frac{\dot{\theta}R}{r} - \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\varphi}\right]^2 -$$
$$-mg(R-r)cos\varphi = C_2$$

ან

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}m\left[(R-r)\dot{\varphi} - R\dot{\theta}\right]^2 -$$
$$-mg(R-r)cos\varphi = C_2.$$

პ ა ს უ ხ ი:

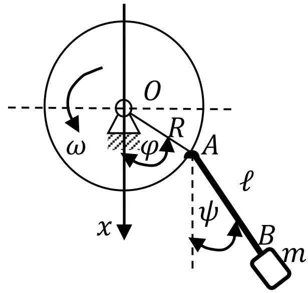
$$MR^2\dot{\theta} + \frac{mr^2}{2}\left[\dot{\theta}\frac{R}{r} - \left(\frac{R}{r} - 1\right)\dot{\varphi}\right]\frac{R}{r} = C_1.$$

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}m\big[(R-r)\dot{\varphi} - R\dot{\theta}\big]^2 -$$

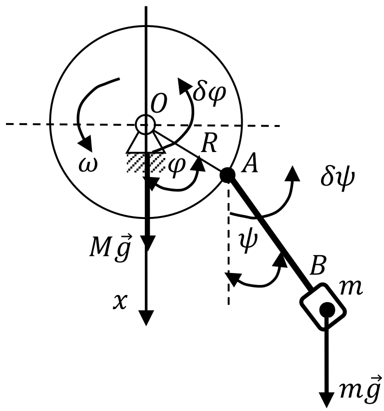
$-mg(R-r)cos\varphi = C_2,$ სადაც φ არის ცილინდრის ღერძების შემაერთებლი მონაკვეთის მობრუნების კუთხე, ხოლო $\theta -$ კუთხე გარე ცილინდრის მობრუნების კუთხე.

ამოცანა 48.41

M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვან დისკოს შეუძლია ბრუნვა თავისი ჰორიზონტალური O ღერძის გარშემო. დისკოზე ℓ სიგრძის AB ძაფით ჩამოკიდებულია m მასის ნივთიერი წერტილი შეადგინეთ სისტემის მოძრაობის განტოლება.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ: $\varphi -$ ერთგვაროვანი დისკოს მობრუნების კუთხე, $\psi - AB$ ძაფის ვერტიკალიდან გადახრის კუთხე. (იხ. ნახაზი).



ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_2. \qquad (2)$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = T_1 + T_2, \qquad (3)$$

სადაც $T_1 -$ დისკოს კინეტიკური ენერგიაა, ხოლო $T_2 - B$ წერტილის კინეტიკური ენერგია.

ვიპოვოთ დისკოს კინეტიკური ენერგია:

$$T_1 = \frac{J_{oz}\omega^2}{2},$$

სადაც $J_{oz} = \frac{MR^2}{2}, \;\; \omega = \dot{\varphi}.$

მაშინ

$$T_1 = \frac{MR^2\dot{\varphi}^2}{4}.$$

B წერტილის კინეტიკური ენერგია:

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_B^2. \qquad (4)$$

ვიპოვოთ v_B^2. ამისათვის ჩავწეროთ B წერტილის კოორდინატები:

$$x_B = Rcos\varphi + \ell cos\psi,\ \ y_B = Rsin\varphi + \ell sin\psi.$$

გავაწარმოოთ ეს გამოსახულება დროით:

$$\dot{x}_B = -R\dot{\varphi}sin\varphi - \ell\dot{\psi}sin\psi,\ \ \dot{y}_B = R\dot{\varphi}cos\varphi + \ell\dot{\psi}cos\psi.$$

მაშინ

$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 = \left(R\dot{\varphi}sin\varphi + \ell\dot{\psi}sin\psi\right)^2 + \left(R\dot{\varphi}cos\varphi + \ell\dot{\psi}cos\psi\right)^2.$$

ან

$$v_B^2 = R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\ell\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\psi) + \ell^2\dot{\psi}^2.$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (4) ფორმულაში და მივიღებთ:

$$T_2 = \frac{m[R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\ell\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\psi) + \ell^2\dot{\psi}^2]}{2}.$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{MR^2\dot{\varphi}^2}{4} + \frac{m[R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\ell\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\psi) + \ell^2\dot{\psi}^2]}{2}.$$

ან

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\dot{\varphi}^2 + R\ell\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos(\varphi-\psi) + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\psi}^2.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\dot{\varphi} + mR\ell\dot{\psi}\cos(\varphi-\psi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\ddot{\varphi} + mR\ell\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi) -$$

$$-mR\,\ell\dot{\psi}\left(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\right)\sin(\varphi-\psi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = -mR\,\ell\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi-\psi);$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = m\ell^2\,\dot{\psi} + m\,R\ell\dot{\varphi}\cos(\varphi-\psi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}\right) = m\ell^2\ddot{\psi} + m\,R\ell\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi) - mR\,\ell\dot{\varphi}\left(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\right)\sin(\varphi-\psi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial\psi} = mR\,\ell\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi-\psi);$$

ვიპოვოთ Q_1 და Q_2 განზოგადებული ძალები.

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta\varphi \neq 0$, $\delta\psi = 0$ და განვსაზღვროთ შესაძლო მუშაობა:

$$\delta A_1 = -mgRsin\varphi \cdot \delta\varphi = Q_1\delta\varphi$$

აქედან

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta\varphi} = -mgRsin\varphi.$$

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta\psi \neq 0$, $\delta\varphi = 0$ და განვსაზღვროთ შესაძლო მუშაობა (ნახ.2):

$$\delta A_2 = -mg\ell sin\psi \cdot \delta\psi = Q_2\psi,$$

აქედან

$$Q_2 = \frac{\delta A_2}{\delta\psi} = -mg\ell sin\psi.$$

ჩავსვათ კინეტიკური ენერგიის წარმოებულების და განზოგადებული ძალების გამოსახულებები (1) და (2) განტოლებებში და მივიღებთ სისტემის მოძრაობის განტოლებებს:

$$\left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\ddot{\varphi} + mR\ell\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi) - mR\,\ell\dot{\psi}\left(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\right)\sin(\varphi-\psi) -$$
$$-mR\,\ell\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi-\psi) = -mgRsin\varphi,$$
$$m\ell^2\ddot{\psi} + m\,R\ell\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi) - mR\,\ell\dot{\varphi}\left(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\right)\sin(\varphi-\psi) -$$
$$-mR\,\ell\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi-\psi) = -mg\ell sin\psi$$

ან

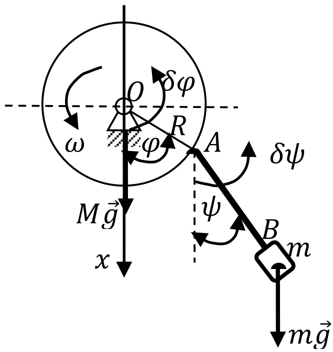
$$\left(\frac{M}{2} + m\right)R\ddot{\varphi} + m\ell\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi) + m\,\ell\sin(\varphi-\psi)\dot{\psi}^2 + mgsin\varphi = 0,$$
$$\ell\ddot{\psi} + R\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi) - R\sin(\varphi-\psi)\dot{\varphi}^2 + gsin\psi = 0.$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$\left(\frac{M}{2} + m\right)R\ddot{\varphi} + m\ell\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi) + m\,\ell\sin(\varphi-\psi)\dot{\psi}^2 + mgsin\varphi = 0,$$
$$\ell\ddot{\psi} + R\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi) - R\sin(\varphi-\psi)\dot{\varphi}^2 + gsin\psi = 0.$$

ამოცანა 48.42

წინა ამოცანაში აღწერილი სისტემის დისკო ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით. შეადგინეთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის განტოლება.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ: $\psi -$ AB ძაფის ვერტიკალიდან გადახრის კუთხე. $\varphi = \omega t -$ ერთგვაროვანი დისკოს მობრუნების კუთხე.

. ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_\psi\,, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi\,. \qquad (2)$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = \quad_1 + T_2, \qquad (3)$$

სადაც $T_1 -$ დისკოს კინეტიკური ენერგიაა, ხოლო $T_2 - B$ წერტილის კინეტიკური ენერგია.

ვიპოვოთ დისკოს კინეტიკური ენერგია:

$$T_1 = \frac{J_{oz}\omega^2}{2},$$

სადაც $J_{oz} = \frac{MR^2}{2}$.

მაშინ

$$T_1 = \frac{MR^2\dot{\varphi}^2}{4}.$$

B წერტილის კინეტიკური ენერგია:

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

ვიპოვოთ v_B^2. ამისათვის ჩავწეროთ B წერტილის კოორდინატები $\varphi = \omega t$ ტოლობის გათვალისწინებით:

$$x_B = R cos\omega t + \ell cos\psi,\; y_B = R sin\omega t + \ell sin\psi.$$

გავაწარმოოთ ეს გამოსახულება დროით:

$$\dot{x}_B = -R\omega sin\omega t - \ell\dot{\psi} sin\psi,\; \dot{y}_B = R\omega cos\omega t + \ell\dot{\psi} cos\psi.$$

მაშინ

$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 = \left(R\omega sin\omega t + \ell\dot{\psi} sin\psi\right)^2 + \left(R\dot{\varphi} cos\varphi + \ell\dot{\psi} cos\psi\right)^2 =$$
$$= R^2\omega^2 + 2R\ell\dot{\psi}\omega\cos(\omega t - \psi) + \ell^2\dot{\psi}^2.$$

მაშასადამე,:

$$T_2 = \frac{m[R^2\omega^2 + 2R\ell\dot{\psi}\omega\cos(\omega t - \psi) + \ell^2\dot{\psi}^2]}{2}.$$

მაშინ (3) ფორმულის თანახმად სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{MR^2\omega^2}{4} + \frac{m[R^2\omega^2 + 2R\ell\dot{\psi}\omega\cos(\omega t - \psi) + \ell^2\dot{\psi}^2]}{2}.$$

ან

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\omega^2 + R\ell\dot{\psi}\omega\cos(\omega t - \psi) + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\psi}^2.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = m\ell^2\,\dot{\psi} + m\,R\ell\omega\cos(\omega t - \psi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}\right) = m\ell^2\ddot{\psi} - m\,R\ell\omega\,(\omega - \dot{\psi})\sin(\varphi - \psi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial\psi} = mR\,\ell\omega\dot{\psi}\sin(\omega t - \psi).$$

ვიპოვოთ Q_ψ განზოგადებული ძალა.

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta\psi \neq 0$, $\delta\varphi = 0$ და განვსაზღვროთ შესაძლო მუშაობა (ნახ.2):

$$\delta A_\psi = -mg\ell sin\psi \cdot \delta\psi = Q_\psi\delta\psi,$$

აქედან

$$Q_\psi = \frac{\delta A_\psi}{\delta\psi} = -mg\ell sin\psi.$$

ჩავსვათ კინეტიკური ენერგიის წარმოებულების და განზოგადებული ძალების გამოსახულებები (1) განტოლებაში და მივიღებთ წერტილის მოძრაობის განტოლებას:

$$m\ell^2\ddot{\psi} - m\,R\ell\omega\,(\omega t - \psi)\sin(\omega t - \psi) - mR\,\ell\omega\dot{\psi}\sin(\omega t - \psi) =$$
$$= -mg\ell sin\psi$$

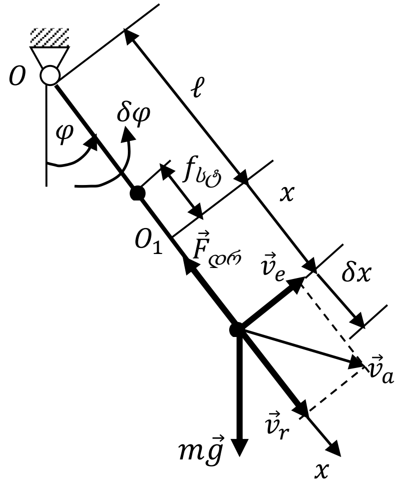
ან გამარტივების შემდეგ

$$\ddot{\psi} - \omega^2\,\frac{R}{\ell}\sin(\omega t - \psi) - \frac{g}{\ell}sin\psi = 0.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\ddot{\psi} - \omega^2\,\frac{R}{\ell}\sin(\omega t - \psi) - \frac{g}{\ell}sin\psi = 0.$

ამოცანა 48.43

შეადგინეთ m მასის მათემატიკური ქანქარას მოძრაობის განტოლება, თუ იგი ჩამოკიდებულია დრეკად ძაფზე; ძაფის სიგრძე წონასწორობის მდებარეობაში არის ℓ, მისი სიხისტე $-c$. განზოგადებულ კოორდინატად მიიღეთ ქანქარას ვერტიკალიდან გადახრის φ კუთხე და ძაფის ფარდიბითი z წაგრძელება.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ: $\varphi -$ქანქარას ვერტიკალიდან გადახრის კუთხე. $x -$ დრეკადი ძაფის წაგრძელება.

. ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x \,, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \,. \qquad (2)$$

ქანქარას კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{1}{2} m v_a^2.$$

რადგან ქანქარა ასრულებს რთულ მოძრაობას, ამიტომ

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r.$$

გავითვალისწინოთ, რომ $\vec{v}_e \perp \vec{v}_r$, ამიტომ

$$v_a^2 = v_e^2 + v_r^2,$$

სადაც $v_e^2 = (\ell + x)^2 \dot{\varphi}^2; \quad v_r^2 = \dot{x}^2.$

მაშინ

$$v_a^2 = (\ell + x)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2,$$

$$T = \frac{1}{2} m[\dot{x}^2 + (\ell + x)^2 \dot{\varphi}^2]$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m(\ell + x)\dot{\varphi}^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m(\ell + x)^2 \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m(\ell + x)^2\ddot{\varphi} + 2m(\ell + x)\dot{\varphi}\dot{x},$$
$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$
ვიპოვოთ განზოგადებული ძალები.

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta\varphi \neq 0$, $\delta x = 0$ და განვსაზღვროთ შესაძლო მუშაობა :
$$\delta A_\varphi = -mg(\ell + x)sin\varphi \cdot \delta\varphi = Q_\varphi \delta\varphi,$$
აქედან
$$Q_\varphi = \frac{A_\varphi}{\delta\varphi} = -mg(\ell + x)sin\varphi.$$
მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta x \neq 0$, $\delta\varphi = 0$ და განვსაზღვროთ შესაძლო მუშაობა :
$$\delta A_x = [mgcos\varphi - c(x_0 + x)]\delta x = Q_x \delta x,$$
აქედან
$$Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = mgcos\varphi - cx_0 - cx.$$
გავითვალისწინოთ, რომ წონასწორობის მდებარეობაში
$$cx_0 = mg,$$
მაშინ მივიღებთ
$$Q_x = [mg(1 - cos\varphi) + cx].$$
ჩავსვათ კინეტიკური ენერგიის წარმოებულების და განზოგადებული ძალების გამოსახულებები (1) და (2) განტოლებებში და მივიღებთ სისტემის მოძრაობის განტოლებებს:
$$m\ddot{x} - m(\ell + x)\dot{\varphi}^2 = -mg(1 - cos\varphi) - cx,$$
$$m(\ell + x)^2\ddot{\varphi} + 2m(\ell + x)\dot{\varphi}\dot{x} = -mg(\ell + x)sin\varphi$$
ან
$$\ddot{x} - (\ell + x)\dot{\varphi}^2 + \frac{c}{m}x + mg(1 - cos\varphi) = 0, \qquad (3)$$
$$(\ell + x)\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{x} + gsin\varphi = 0. \qquad (4)$$
გავითვალისწინოთ, რომ ფარდობითი წაგრძელება
$$z = \frac{x}{\ell},$$
მაშინ $\ell\dot{z} = \dot{x}$, $\ell\ddot{z} = \ddot{x}$. ჩავსვათ z და $\ddot{z}$ ის გამოსახულებები (3) და (4) განტოლებებში:
$$\ddot{z} - (1 + z)\dot{\varphi}^2 + \frac{c}{m}z + \frac{g}{\ell}(1 - cos\varphi) = 0,$$
$$(1 + z)\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{z} + \frac{g}{\ell}sin\varphi = 0.$$
რადგან განიხილება მცირე რხევები, ამიტომ ვთვლით, რომ
$$\dot{\varphi}^2 \approx 0, \qquad \dot{\varphi}\dot{z} \approx 0, \qquad cos\varphi \approx 1, \qquad sin\varphi \approx \varphi,$$

მაშინ მივიღებთ:

$$\ddot{z}+\frac{c}{m}z=0,$$
$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{\ell}\varphi=0.$$

ამოვხსნათ მიღებული დიფერენციალური განტოლებები:

$$z=A\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t+\alpha\right),$$

$$\varphi=B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t+\beta\right),$$

სადაც $A,\alpha,B,\beta-$ ნებისმიერი მუდმივებია.

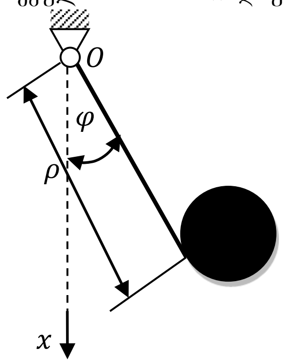
<u>*პ ა ს უ ხ ი:*</u> $\ddot{z}-(1+z)\dot{\varphi}^2+\frac{c}{m}z+\frac{g}{\ell}(1-\cos\varphi)=0;$

$$(1+z)\ddot{\varphi}+2\dot{\varphi}\dot{z}+\frac{g}{\ell}\sin\varphi=0;\ z=A\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t+\alpha\right);$$

$\varphi=B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t+\beta\right)$, სადაც $A,\alpha,B,\beta-$ ნებისმიერი მუდმივებია.

ამოცანა 48.44

წვრილი უჭიმარი ძაფის ერთი ბოლო დახვეულის R რადიუსის ერთგვაროვან ცილინდრზე, ხოლო მეორე ბოლო დამაგრებულია უძრავ O წერტილზე. ძაფის გაშლისას ცილინდრი მოძრაობს ქვევით. ერთდროულად ქანაობს დაკიდების წერტილზე გამავალი ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო. შეადგინეთ ცილინდრის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები, თუ ძაფის მასა უგულებელყოფილია.

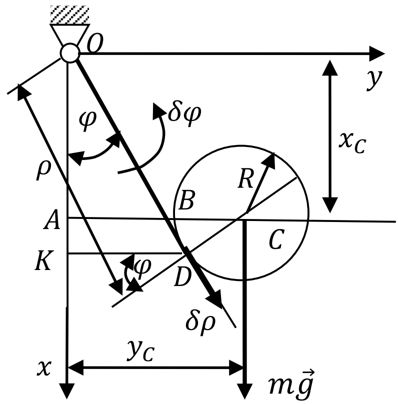


ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ: $\varphi-$ძაფის ვერტიკალიდან გადახრის კუთხე. $\rho-$ ძაფის წაგრძელება.

. ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_{\varphi}, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \rho}=Q_{\rho}\ . \qquad (2)$$



ვიპოვოთ სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T=\frac{mv_a^2}{2}+\frac{J_{Cz}\omega_a^2}{2}, \quad (3)$$

სადაც $J_{Cz}=\frac{mR^2}{2}$, $\omega_a=\frac{\dot{\rho}}{R}-\dot{\varphi}$ – ცილინდრის აბსოლუტური კუთხური სიჩქარეა; $v_a^2=\dot{x}_C^2+\dot{y}_C^2$ – ცილინდრის მასათა ცენტრის აბსოლუტური სიჩქარე.

განვსაზღვროთ ერთგვაროვან ცილინდრის მასათა ცენტრის (C წერტილი) კოორდინატები (იხ. ნახაზი):

$$x_C=OK-BD,\ \ y_C=AB+BC,$$

სადაც

$$OK=\rho cos\varphi, BD=Rsin\varphi, AB=KD=\rho sin\varphi, BC=Rcos\varphi.$$

მაშინ

$$x_C=\rho cos\varphi-Rsin\varphi,$$
$$y_C=\rho sin\varphi+Rcos\varphi.$$

ვიპოვოთ ამ გამოსახულებების წარმოებულები დროით:

$$\dot{x}_C=\dot{\rho}cos\varphi-\rho\dot{\varphi}sin\varphi-R\dot{\varphi}cos\varphi,$$
$$\dot{y}_C=\dot{\rho}sin\varphi+\ddot{\rho}cos\varphi-R\dot{\varphi}sin\varphi.$$

განვსაზღოთ ცილინდრის მასათა ცენტრის აბსოლუტური სიჩქარე:

$$v_a^2=(\dot{\rho}cos\varphi-\rho\dot{\varphi}sin\varphi-R\dot{\varphi}cos\varphi)^2+(\dot{\rho}sin\varphi+\ddot{\rho}cos\varphi-R\dot{\varphi}sin\varphi)^2$$
$$=\dot{\rho}^2cos^2\varphi+\rho^2\dot{\varphi}^2sin^2\varphi+R^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi-2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}cos\varphi sin\varphi-$$
$$-2R\dot{\rho}\dot{\varphi}cos^2\varphi+2R\rho\dot{\varphi}^2cos\varphi sin\varphi+\rho^2sin^2\varphi+\rho^2\dot{\varphi}^2cos^2\varphi+$$

$$+R^2\dot{\varphi}^2sin^2\varphi+2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}cos\varphi sin\varphi-2R\dot{\rho}\dot{\varphi}sin^2\varphi-2R\rho\dot{\varphi}^2cos\varphi sin\varphi$$

ან გამარტივების შემდეგ

$$v_a^2=(\dot{\rho}-R\dot{\varphi})^2+\rho^2\dot{\varphi}^2.$$

ჩავსვათ მიღებული მნიშვნელობები (3) ფორმულაში და მივიღებთ:

$$T=\frac{m}{2}[(\dot{\rho}-R\dot{\varphi})^2+\rho^2\dot{\varphi}^2]+\frac{1}{4}mR^2\left(\frac{\dot{\rho}}{R}-\dot{\varphi}\right)^2$$

ან

$$T=\frac{3}{4}m(\dot{\rho}-R\dot{\varphi})^2+\frac{1}{2}m\rho^2\dot{\varphi}^2.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=-\frac{3}{2}mR(\dot{\rho}-R\dot{\varphi})+m\rho^2\dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = -\frac{3}{2}mR(\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi}) + \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = \frac{3}{2}m(\dot{\rho} - R\dot{\varphi})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}\right) = \frac{3}{2}m(\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = m\rho^2\dot{\varphi}^2$$

ვიპოვოთ Q_φ და Q_ρ განზოგადებული ძალები.

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta\varphi \neq 0$, $\delta\rho = 0$ და განვსაზღვროთ შესაძლო მუშაობა :

$$\delta A_\varphi = -(mg\rho sin\varphi + mgRcos\varphi) \cdot \delta\varphi = Q_\varphi \delta\varphi,$$

აქედან

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = -mg\rho sin\varphi - mgRcos\varphi.$$

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta\rho \neq 0$, $\delta\varphi = 0$ და განვსაზღვროთ შესაძლო მუშაობა :

$$\delta A_\rho = mgcos\varphi\delta\rho = Q_\rho \delta\rho,$$

აქედან

$$Q_\rho = \frac{\delta A_\rho}{\delta\rho} = mgcos\varphi.$$

ჩავსვათ კინეტიკური ენერგიის წარმოებულების და განზოგადებული ძალების გამოსახულებები (1) და (2) განტოლებებში და მივიღებთ სისტემის მოძრაობის განტოლებებს:

$$-\frac{3}{2}mR(\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi}) + \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = -mg\rho sin\varphi - mgRcos\varphi$$

ან

$$-\frac{3}{2}R(\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi}) + \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = -gsin\varphi - gRcos\varphi \qquad (4)$$

$$\frac{3}{2}m(\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi}) - m\rho^2\dot{\varphi}^2 = mgcos\varphi$$

ან

$$\frac{3}{2}(\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi}) - \rho^2\dot{\varphi}^2 = gcos\varphi \qquad (5)$$

გავამრავლოთ (5) განტოლება R –ზე, შემდეგ შევკრიბოთ (4) განტოლებასთან, მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) - R\rho\dot{\varphi}^2 = -g\rho sin\varphi.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi} - \frac{2}{3}\rho\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3}gcos\varphi;$

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) - R\rho\dot{\varphi}^2 = -g\rho sin\varphi.$$

ამოცანა 48.45

გამოიყენეთ წინა ამოცანის პასუხები და შეადგინეთ ცილინდრის მცირე რხევათა დიფერენციალური განტოლებები, თუ მოძრაობა დაიწყო უძრავი მდგომარეობიდან და როცა $t = 0,\ \rho = \rho_0,\ \varphi = \varphi_0 \neq 0.$

ა მ ო ხ ს ნ ა. 48.44 ამოცანის ამოხსნისას მივიღეთ ცილინდრის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები:

$$\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi} - \frac{2}{3}\rho\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3}gcos\varphi, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) - R\rho\dot{\varphi}^2 = -g\rho sin\varphi. \quad (2)$$

ცილინდრის მცირე რხევებისას

$$\dot{\varphi}^2 \approx 0, \qquad cos\varphi \approx 1, \qquad sin\varphi \approx \varphi,$$

მაშინ (1) და (2) განტოლებები მიიღებს სახეს:

$$\ddot{\rho} - R\ddot{\varphi} = \frac{2}{3}g, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = -g\rho\varphi. \quad (4)$$

ვაინტეგროთ (3) განტოლება ორჯერ, მივიღებთ:

$$\dot{\rho} - R\dot{\varphi} = \frac{2}{3}gt + C_1, \quad (5)$$

$$\rho - R\varphi = \frac{1}{3}gt^2 + C_1t + C_2. \quad (6)$$

გავითვალისწინოთ საწყისი პირობები:

$$t = 0, \qquad \rho = \rho_0, \qquad \varphi = \varphi_0, \qquad \dot{\rho} = 0, \qquad \dot{\varphi} = 0$$

და ვიპოვოთ ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივები.

(5) ტოლობიდან მივიღებთ: $C_1 = 0,$ ხოლო (6) ტოლობიდან $-C_2 = \rho_0 - R\varphi_0.$

ჩავსავათ C_1 და C_2 მუდმივების მიღებული მნიშვნელობები (6) გამოსახულებაში:

$$\rho - R\varphi = \frac{1}{3}gt^2 - \rho_0 - R\varphi_0. \quad (7)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$F(t) = \frac{1}{3}gt^2 - \rho_0 - R\varphi_0.$$

მაშინ (7) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$\rho = R\varphi + F(t). \quad (8)$$

ჩავსვათ (8) გმოსახულება (4)-ში:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(R\varphi + F(t)\right)^2\dot{\varphi}\right] = -g\varphi[R\varphi + F(t)]$$

ან

$$\frac{d}{dt}[R^2\varphi^2 + 2R\varphi\dot{\varphi}F(t) + F^2(t)\dot{\varphi}] + g[R\varphi^2 + F(t)\varphi] = 0.$$

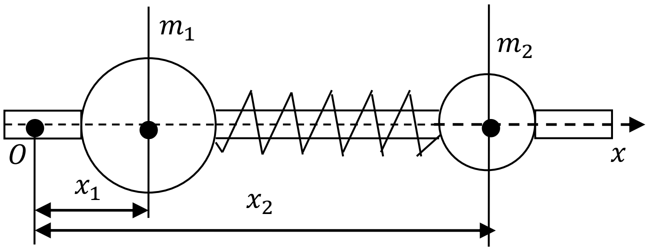
ამ განტოლებიდან $R\varphi^2,\ R^2\varphi^2,\ 2R\varphi\dot{\varphi}F(t)$ წევრების გამორიცხვით, მივიღებთ:

$$\frac{d}{dt}[F^2(t)\dot{\varphi}] + gF(t)\varphi = 0.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{d}{dt}[F^2(t)\dot{\varphi}] + gF(t)\varphi = 0,$ სადაც $F(t) = \frac{1}{3}gt^2 - \rho_0 - R\varphi_0.$

ამოცანა 48.46

განსაზღვრეთ გლუვ ჰორიზონტალურ ღერძზე (Ox ღერძი) ჩამოცმულია m_1 და m_2 მასათა სისტემის მოძრაობა, თუ მასები ერთმანეთთან დაკავშირებულია c სიხისტის ზამბარით და შეუძლიათ გადატანითი მოძრაობა ღერძის გასწვრივ; მასათა ცენტრებს შორის მანძილი დაუძაბავი ზამბარის შემთხვევაში არის ℓ. სისტემის საწყისი მდებარეობა, როცა $t = 0$, განისაზღვრება მასების სიჩქარეებისა და მასათა ცენტრის კოორდინატთა შემდეგი



მნიშვნელობებით:

$$x_1 = 0, \dot{x}_1 = u_0, x_2 = \ell, \dot{x}_2 = 0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. ავირჩიოთ განზოგადებული კოორდინატები: $x_1 -$ m_1 მასის გადაადგილება, $x_2 - m_2$ მასის გადაადგილება (იხ. ნახაზი). ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q_2.$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2}.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1,$$
$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0;$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2,$$
$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0.$$

იმისათვის რომ განვსაზღვროთ განზოგადებული ძალები, ვიპოვოთ სისტემის პოტენციური ენერგია

$$\Pi = \frac{1}{2}c(x_2 - x_1 - \ell)^2.$$

ვიპოვოთ პოტენციური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები განზოგადებული კოორდინატებით:

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = c(x_2 - x_1 - \ell),$$
$$Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = -c(x_2 - x_1 - \ell).$$

კინეტიკური ენერგიის წარმოებულების და განზოგადებული ძალების მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში და მივიღებთ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$m_1\ddot{x}_1 = c(x_2 - x_1 - \ell), \qquad (1)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -c(x_2 - x_1 - \ell). \qquad (2)$$

შევკრიბოთ (1) და (2) განტოლებები:

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0.$$

აქედან

$$\ddot{x}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\ddot{x}_1. \qquad (3)$$

ვაინტეგროთ ეს გამოსახულება ორჯერ:

$$\dot{x}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\dot{x}_1 + C_1, \qquad (4)$$
$$x_2 = -\frac{m_1}{m_2}x_1 + C_1 t + C_2. \qquad (5)$$

ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით:

$$t = 0, \qquad x_{10} = 0, \dot{x}_{10} = u_0, x_{20} = \ell, \dot{x}_{20} = 0$$

და (4) გამოსახულებიდან ვიპოვით

$$C_1 = \frac{m_1}{m_2} u_0,$$

(5) გამოსახულებიდან

$$C_{2.} = \ell.$$

მაშინ (5) ფორმულიდან გვაქვს:

$$x_2 = -\frac{m_1}{m_2} x_1 + \frac{m_1}{m_2} u_0 t + \ell. \tag{6}$$

ჩავსვათ (3) და (6) გამოსახულებები (2) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$m_2 \left(= -\frac{m_1}{m_2} \ddot{x}_1\right) = -c\left(-\frac{m_1}{m_2} x_1 + \frac{m_1}{m_2} u_0 t + \ell - x_1 - \ell\right)$$

ან

$$\ddot{x}_1 + c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) x_1 = \frac{c}{m_2} u_0 t.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$k^2 = c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}.$$

მაშინ

$$\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = \frac{c}{m_2} u_0 t. \tag{7}$$

ვიპოვოთ (7) განტოლების ამონახსნი:

$$x_1 = x^* + x^{**}, \tag{8}$$

სადაც x^* არის $\ddot{x}_1 + k^2 x_1 = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

$$x^* = C_3 coskt + C_4 sinkt,$$

x^{**} −(7) განტოლების კერძო ამონახსნი:

$$x^{**} = At.$$

ჩავსვათ x^{**} −ის მნიშვნელობა (7) განტოლებაში:

$$Ak^2 t = \frac{c}{m_2} u_0 t.$$

აქედან

$$A = \frac{cu_0}{m_2 k^2}.$$

მაშინ

$$x^{**} = \frac{cu_0 t}{m_2 k^2}.$$

ჩავსვათ x^* და x^{**} −ის მნიშვნელობები (8) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$x_1 = C_3 coskt + C_4 sinkt + \frac{cu_0 t}{m_2 k^2}.$$

აქედან

$$\dot{x}_1 = -C_3 k sinkt + C_4 k coskt + \frac{cu_0}{m_2 k^2}.$$

C_3 და C_4 მუდმივებს ვიპოვით საწყისი პირობების გათვალისწინებით:

$$t = 0, \qquad x_{10} = 0, \dot{x}_{10} = u_0.$$

გვაქვს

$$x_{10} = C_3 = 0;$$
$$\dot{x}_{10} = u_0 = C_4 k + \frac{cu_0}{m_2 k^2},$$
$$C_4 = \frac{u_0 m_2 k^2 - cu_0}{m_2 k^3}.$$

მაშინ

$$x_1 = \frac{u_0 m_2 k^2 - cu_0}{m_2 k^3} sinkt + \frac{cu_0 t}{m_2 k^2}$$

ან

$$x_1 = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 u_0 t + \frac{m_2 u_0}{k} sinkt\right).$$

ჩავსვათ მიღებული გამოსახულება (6) ფორმულაში და ვიპოვოთ m_2 მასის მოძრაობის კანონი:

$$x_2 = -\frac{m_1}{m_2}\left[\frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 u_0 t + \frac{m_2 u_0}{k} sinkt\right)\right] + \frac{m_1}{m_2} u_0 t + \ell.$$

ან

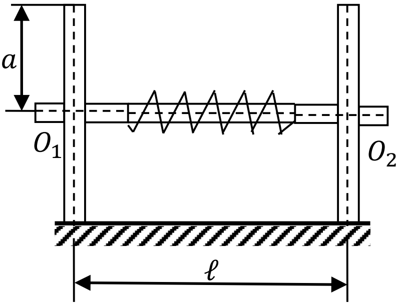
$$x_2 - \ell = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 u_0 t - \frac{m_1 u_0}{k} sinkt\right)$$

<u>*პ ა ს უ ხ ი:*</u> $x_1 = \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1 u_0 t + \frac{m_2 u_0}{k} sinkt\right);$

$$x_2 - \ell = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 u_0 t - \frac{m_1 u_0}{k} sinkt\right), k = \sqrt{c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}.$$

ამოცანა 48.47

ორი ერთნაირი a რადიუსის თვლისაგან შედგენილი სისტემა, რომელთაც დამოუკიდებლად შეუძლია ბრუნვა მათი ნორმალური საერთო ℓ სიგრძის O_1O_2 ღერძის გარშემო, გორავს ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. თვლები შეერთებულია c სიხისტის ზამბარით, რომელიც მუშაობს გრეხაზე, თითოეული თვლის მასა არის m , ინერციის მომენტები ბრუნვის ღერძის მიმართ



C , დიამეტრის მიმართ ინერციის მომენტი კი $-A$. შეადგინეთ სისტემის მოძრაობის განტოლება და დაადგინეთ მოძრაობა, რომელიც შეესაბამება საწყის პირობებს: $\varphi_1 = 0, \dot{\varphi}_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \dot{\varphi}_2 = \omega$ (φ_1 და φ_2 თვლების მობრუნების კუთხეებია). ღერძის მასა უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განსახილველ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ: φ_1 −1 თვლის მობრუნების კუთხე, $\varphi_2 -$ 2 თვლის მობრუნების კუთხე (ნახ. 1) .

ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარისგანტოლებები:

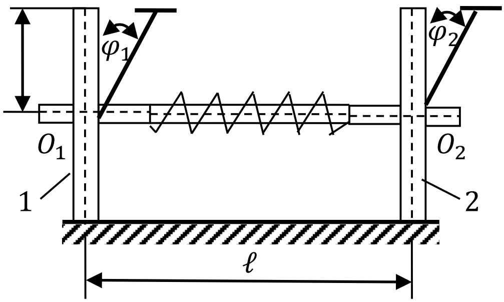
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = Q_2.$$

გავითვალისწინოთ, რომ

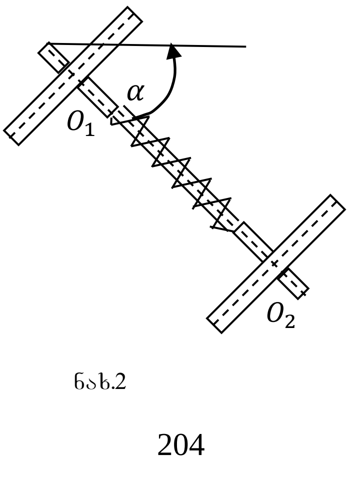
$$\dot{\alpha} = \frac{a}{\ell}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2),$$

სადაც $\dot{\alpha} -$ თვლის მობრუნების



ნახ.1

კუთხური სიჩქარეა დიამეტრის გარშემო(ნახ.2)



ნახ.2

ვიპოვოთ სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{C\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{C\dot{\varphi}_2^2}{2} + \frac{ma^2\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{ma^2\dot{\varphi}_2^2}{2} + 2A\frac{\dot{\alpha}^2}{2} =$$

$$= \frac{C\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{C\dot{\varphi}_2^2}{2} + \frac{ma^2\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{ma^2\dot{\varphi}_2^2}{2} + A\frac{a^2}{\ell^2}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = C\dot{\varphi}_1 + ma^2\dot{\varphi}_1 + \frac{2Aa^2}{\ell^2}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = C\ddot{\varphi}_1 + ma^2\ddot{\varphi}_1 + \frac{2Aa^2}{\ell^2}(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = C\dot{\varphi}_2 + ma^2\dot{\varphi}_2 + \frac{2Aa^2}{\ell^2}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = C\ddot{\varphi}_2 + ma^2\ddot{\varphi}_2 - \frac{2Aa^2}{\ell^2}(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = 0.$$

ვიპოვოთ განზოგადებული ძალები იმის გათვალისწინებით, რომ სისტემის პოტენციური ენერგია დამოკიდებულია მხოლოდ ზამბარის დრეკადობის ძალაზე:

$$\varPi = \frac{1}{2}c(\varphi_1 - \varphi_2)^2.$$

მაშინ

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = -c(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = c(\varphi_1 - \varphi_2).$$

კინეტიკური ენერგიის წარმოებულების და განზოგადებული ძალების მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებაში:

$$C\ddot{\varphi}_1 + ma^2\ddot{\varphi}_1 + \frac{2Aa^2}{\ell^2}(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) = -c(\varphi_1 - \varphi_2), \qquad (1)$$

$$C\ddot{\varphi}_2 + ma^2\ddot{\varphi}_2 - \frac{2Aa^2}{\ell^2}(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) = c(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (2)$$

შევკრიბოთ (1) და (2) განტოლებები, მივიღებთ:

$$C\ddot{\varphi}_1 + ma^2\ddot{\varphi}_1 + C\ddot{\varphi}_2 + ma^2\ddot{\varphi}_2 = 0$$

ან

$$\ddot{\varphi}_1 = -\ddot{\varphi}_2. \qquad (3)$$

ვაინტეგროთ (3) განტოლება ორჯერ:

$$\dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_2 + C_1, \qquad (4)$$

$$\varphi_1 = -\varphi_2 + C_1 t + C_2. \qquad (5)$$

ჩავსვათ (4) და (5) ტოლობებში საწყისი პირობები:

$$t = 0, \qquad \varphi_1 = 0, \dot{\varphi}_1 = 0\,, \qquad \varphi_2 = 0, \dot{\varphi}_2 = \omega$$

და განვსაზღვროთ ინტეგრების მუდმივები:

$$\dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_2 + C_1, \quad C_1 = \dot{\varphi}_2 = \omega$$

$$;\varphi_1 = -\varphi_2 + C_1 t + C_2, \quad C_2 = 0.$$

მაშინ (5) ფორმულის თანახმად

$$\varphi_1 = -\varphi_2 + \omega t. \qquad (6)$$

ჩავსვათ (3) და (6) გამოსახულებები (1) განტოლებაში:

$$C(-\ddot{\varphi}_2) + ma^2(-\ddot{\varphi}_2) + \frac{2Aa^2}{\ell^2}(-\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_2) = -c(-\varphi_2 + \omega t - \varphi_2)$$

ან გარდაქმნის შემდეგ

$$-\left(C + ma^2 + \frac{2Aa^2}{\ell^2}\right)\ddot{\varphi}_2 = 2c\varphi_2 - c\omega t. \qquad (7)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$k^2 = \frac{2c}{C + ma^2 + \frac{2Aa^2}{\ell^2}}.$$

მაშინ (7) განტოლება მიირებს სახეს

$$\ddot{\varphi}_2 + k^2\varphi_2 = \frac{1}{2}k^2\omega t. \qquad (8)$$

ვიპოვოთ (8) განტოლების ამონახსნი:

$$\varphi_2 = \varphi_2^* + \varphi_2^{**}, \qquad (9)$$

სადაც φ_2^* არის $\ddot{\varphi}_2 + k^2\varphi_2 = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსენი, ხოლო $\varphi_2^{**} - (9)$ განტოლების კერძო ამონახსნი, $\varphi_2^{**} = Bt$

ჩავსვათ φ_2^{**} (8) განტოლებაში და მივიღებთ:

$$B = \frac{1}{2}\omega.$$

მაშინ

$$\varphi_2^{**} = \frac{1}{2}\omega t.$$

ჩავსვათ φ_2^* და φ_2^{**} −ის მნიშვნელობები (9) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\varphi_2 = C_3 coskt + C_4 sinkt + \frac{1}{2}\omega t. \qquad (10)$$

გავაწრმოოთ (10) განტოლება დროით:

$$\dot{\varphi}_2 = -C_3 ksinkt + C_4 kcoskt + \frac{1}{2}\omega. \qquad (11)$$

ვისარგებლოთ საწყისი პირობებით და (10) და (11) გამოსახულებებიდან ვიპოვოთ ინტეგრების მუდმივები:

$$\varphi_2 = C_3 = 0;$$
$$\dot{\varphi}_2 = C_4 k + \frac{1}{2}\omega, \;\; C_4 = \frac{\omega}{2k}.$$

ჩავსვათ (10) გამოსახულებაში C_3 და C_4 ინტეგრების მუდმივების ნაპოვნი მნიშვნელობები და მივიღებთ 2 თვლის მოძრაობის კანონს:

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\Big(\omega t + \frac{\omega}{k} sinkt\Big).$$

ჩავსვათ მიღებული გამოსახულება (6) ტოლობაში და ვიპოვოთ 1 თვლის მოძარობის კანონი:

$$\varphi_1 = -\frac{\omega t}{2} - \frac{\omega}{2k} sinkt + \omega t = \frac{\omega t}{2} - \frac{\omega}{2k} sinkt$$

ან

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\Big(\omega t - \frac{\omega}{k} sinkt\Big).$$

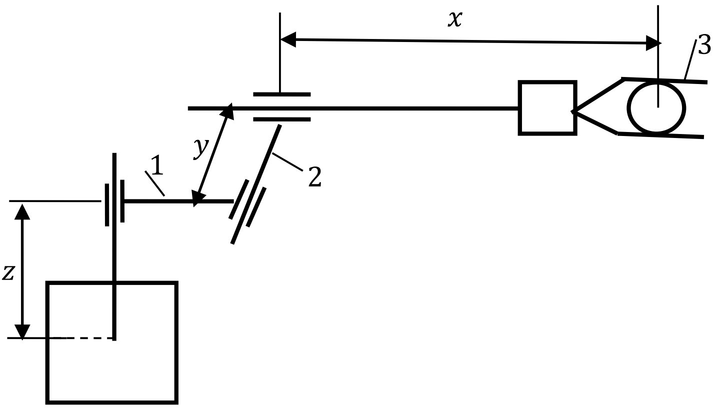
პ ა ს უ ხ ი: $\varphi_1 = \frac{1}{2}\Big(\omega t - \frac{\omega}{k} sinkt\Big)$; $\varphi_2 = \frac{1}{2}\Big(\omega t + \frac{\omega}{k} sinkt\Big)$,

$$k = \sqrt{\frac{2c}{C + ma^2 + \frac{2Aa^2}{\ell^2}}}.$$

ამოცანა 48.48

რობოტი-მანიპულიატორის მექანიზმი შედგება ვერტიკალური გადაადგილებისათვის განკუთვნილი სვეტისა, ჰორიზონტალური გადაადგილებისათვის განკუთვნილი მექანიზმისაგან, რომელიც შედგება 1 და 2 რგოლისაგან და ჰორიზონტალური სახელურისაგან წამვლებით 3.

მექანიზმის რგოლების მასებია m_1, m_2 და m_3. მამოძრავებელი ძალები, რომლებიც წარმოიქმნება გადატანით წყვილებში, სათანადოდ უდრის F_{01}, F_{12} და F_{23} . შეადგინეთ მექანიზმის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები. ხახუნი უგულებელყოფილია.



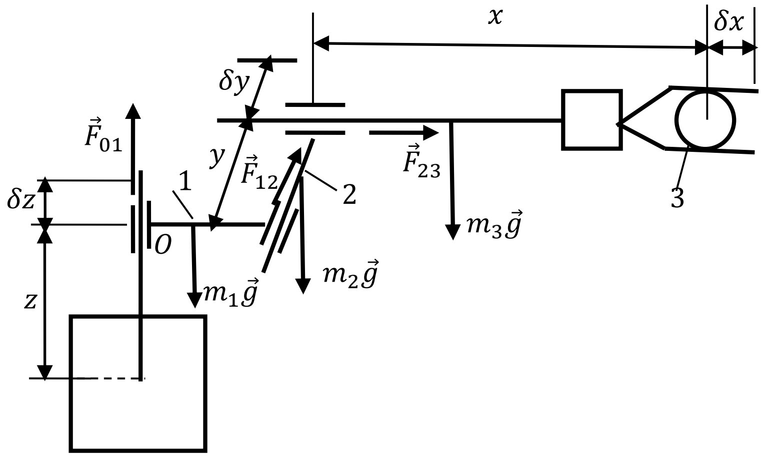
.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მანიპულიატორის მოძრაობა. მექანიზმს აქვს სამი თავისუფლების ხარისხი (იხ. ნახაზი). განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ: $q_1 -$ *1* რგოლის გადაადგილება დგანის მიმართ, და $q_2 -$ *2* რგოლის გადაადგილება *1* რგოლის მიმართ, $q_3 -$ *3* რგოლის გადაადგილება *2* რგოლის მიმართ ($q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = z$)

ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის სამი განტოლება:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial T}{\partial z} = Q_z,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y\,,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია



$$T = T_1 + T_2 + T_3, \qquad (2)$$

სადაც $T_1 -$ *1* რგოლის კინეტიკური ენერგია, $T_2 -$ *2* რგოლის კინეტიკური ენერგია, $T_3 -$ *3* რგოლის კინეტიკური ენერგია.

განვსაზღვროთ *1* რგოლის კინეტიკური ენერგია:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 \dot{z}^2}{2},$$

2 რგოლის კინეტიკური ენერგია:

$$T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2(\dot{z}^2 + \dot{y}^2)}{2}$$

და *3* რგოლის კინეტიკური ენერგია:

$$T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2} = \frac{m_3(\dot{z}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}^2)}{2}.$$

მაშინ (2) ფორმულის თანახმად

$$T = \frac{m_1 \dot{z}^2}{2} + \frac{m_2(\dot{z}^2 + \dot{y}^2)}{2} + \frac{m_3(\dot{z}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}^2)}{2}.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = (m_1 + m_2 + m_3)\dot{z}; \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{z}; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (m_2 + m_3)\dot{y}; \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = (m_2 + m_3)\ddot{y}; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_3\dot{x}; \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m_3\ddot{x}; \quad \frac{T}{\partial x} = 0.$$

ვიპოვოთ განზოგადებული ძალები.

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta z \neq 0,\ \delta y = 0, \delta x = 0$ და განვსაზღვროთ შესაძლო მუშაობა :

$$\delta A_z = F_{01}\delta z - m_1 g\delta z - m_2 g\delta z - m_3 g\delta z = Q_z \delta z,$$

აქედან

$$Q_z = \frac{\delta A_z}{\delta z} = \frac{F_{01}\delta z - m_1 g\delta z - m_2 g\delta z - m_3 g\delta z}{\delta z} = $$
$$= F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3)g.$$

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta y \neq 0,\ \delta z = 0, \delta x = 0$, მაშინ

$$Q_y = \frac{\delta A_y}{\delta y} = \frac{F_{12}\delta y}{\delta y} = F_{12},$$

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta x \neq 0,\ \delta z = 0, \delta y = 0$, მაშინ

$$Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = \frac{F_{23}\delta x}{\delta x} = F_{23}.$$

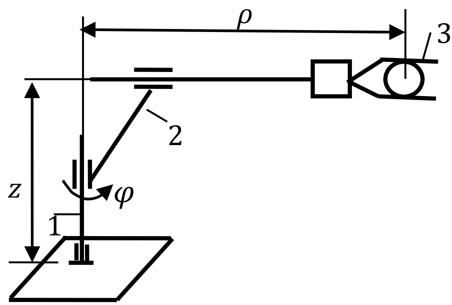
ჩავსვათ კინეტიკური ენერგიის წარმოებულების და განზოგადებული ძალების გამოსახულებები (1) განტოლებათა სისტემაში და მივიღებთ მექანიზმის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს:

$$m_3\ddot{x} = F_{23},$$
$$(m_2 + m_3)\ddot{y} = F_{12},$$
$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{z} = F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3)g.$$

__პ ა ს უ ხ ი:__ $m_3\ddot{x} = F_{23},\ (m_2 + m_3)\ddot{y} = F_{12},$
$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{z} = F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3)g.$

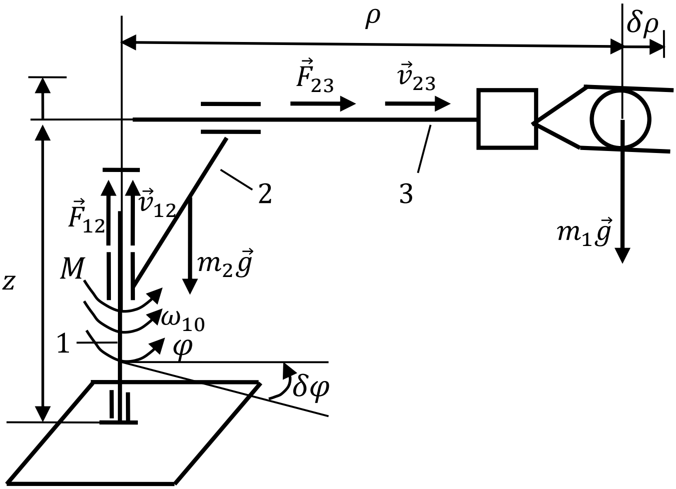
ამოცანა 48.49

რობოტი-მანიპულიატორის მექანიზმი შედგება საბრუნი 1 დგარისაგან, ვერტიკალური გადაადგილების 2 მოწყობილობის და მოძრავი სახელურისგან წამვლებით 3. 1 რგოლის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ არის J_1; 2 რგოლის მასა $-m_2$, ხოლო ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ $-J_2$; მოძრავი სახელურის მასა წამვლებით - m_3, მობრუნების ღერძიდან მასათა ცენტრამდე მანძილი $-\rho$, ინერციის მომენტი ცენტრალური ღერძის მიმართ $-J_3$; მობრუნების ღერძზე მოდებულია მაბრუნი M მომენტი, მამოძრავებელი ძალები, რომლებიც წარმოიქმნება გადატანით წყვილებში, სათანადოდ უდრის F_{12} და F_{23}.



შეადგინეთ მექანიზმის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები. ხახუნი უგულებელყოფილია.

ა მო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მანიპულიატორის მოძრაობა მასზე მოდებული ძალების მოქმედებით. მექანიზმს აქვს სამი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ: $\varphi -$ დგარის მობრუნების კუთხე, $\rho -$ *2-3* გადატანითი წყვილის ჰორიზონტალური გადაადგილება, $z -$ 1-*2* გადატანითი წყვილის ჰორიზონტალური გადაადგილება (იხ. ნახაზი).



ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის სამი განტოლება:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial T}{\partial z} = Q_{z}\,, \qquad (1)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \rho} = Q_{\rho}.$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \qquad (2)$$

სადაც $T_1 -$ *1* რგოლის (დგარის) კინეტიკური ენერგია, $T_2 -$ *2* რგოლის კინეტიკური ენერგია, $T_3 -$ *3* რგოლის კინეტიკური ენერგია.

განვსაზღვროთ *1* რგოლის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_{10}^2 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2,$$

2 რგოლის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს რთულ მოძრაობას- 1 რგოლთან ერთად ბრუნვა და: გადატანითი გადაადგილება 1 რგოლზე:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{21}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_1^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}^2,$$

და *3* რგოლის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს რთულ მოძრაობას- 1 რგოლთან ერთად ბრუნვა, ვერტიკალური გადატანითი გადაადგილება 2 რგოლთან ერთად და ჰორიზონტალური გადატანითი გადაადგილება 2 რგოლზე:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_{3a}^2 + \frac{1}{2} (J_3 + m_3 \rho^2) \omega_1^2 = \frac{1}{2} m_3 \sqrt{v_{21}^2 + v_{32}^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} (J_3 + m_3 \rho^2) \omega_1^2 = \frac{1}{2} m_3 (\dot{z}^2 + \dot{\rho}^2) + \frac{1}{2} (J_3 + m_3 \rho^2) \dot{\varphi}^2.$$

მაშინ (2) ფორმულის თანახმად

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{z}^2 + \dot{\rho}^2) + \frac{1}{2} (J_3 + m_3 \rho^2) \dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} (J_1 + J_2 + J_3 + m_3 \rho^2) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_3) \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{\rho}^2.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (J_1 + J_2 + J_3 + m_3 \rho^2) \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} [(J_1 + J_2 + J_3 + m_3 \rho^2) \dot{\varphi}],$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = (m_2 + m_3) \dot{z}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) = (m_2 + m_3) \ddot{z}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = m_3 \dot{\rho},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} \right) = m_3 \ddot{\rho}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = m_3 \rho \dot{\varphi}^2.$$

ვიპოვოთ განზოგადებული ძალები.

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta\varphi \neq 0,\ \delta y = 0, \delta x = 0$ და განვსაზღვროთ შესაძლო მუშაობა :

$$\delta A_\varphi = M \delta\varphi = Q_\varphi \delta\varphi$$

აქედან

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = \frac{M\delta\varphi}{\delta\varphi} = M,$$

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta z \neq 0,\ \delta\varphi = 0, \delta\rho = 0$, მაშინ

$$Q_z = \frac{\delta A_z}{\delta z} = \frac{-m_2 g\delta z - m_3 g\delta z + F_{12}\delta z}{\delta z} = F_{12} - (m_2 + m_3)g,$$

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta\rho \neq 0,\ \delta z = 0, \delta\varphi = 0$, მაშინ

$$Q_\rho = \frac{\delta A_\rho}{\delta\rho} = \frac{F_{23}\delta\rho}{\delta\rho} = F_{23}.$$

ჩავსვათ კინეტიკური ენერგიის წარმოებულების და განზოგადებული ძალების გამოსახულებები (1) განტოლებათა სისტემაში და მივიღებთ მექანიზმის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს:

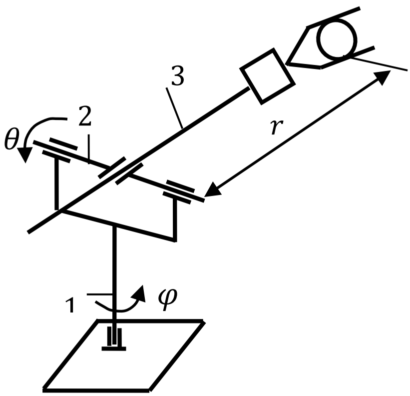
$$\frac{d}{dt}[(J_1 + J_2 + J_3 + m_3\rho^2)\dot\varphi] = M,$$
$$(m_2 + m_3)\ddot z = F_{12} - (m_2 + m_3)g,$$
$$m_3(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2) = F_{23}.$$

პ ა ს უ ხ ი: $\frac{d}{dt}[(J_1 + J_2 + J_3 + m_3\rho^2)\dot\varphi] = M,$

$$(m_2 + m_3)\ddot z = F_{12} - (m_2 + m_3)g, \qquad m_3(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2) = F_{23}.$$

ამოცანა 48.50

ვერტიკალურ დგარ 1-ს, რომელიც ეზიდება რობოტი-მანიპულიატორის სახელურს, შეუძლია მობრუნება φ კუთხით. სახელური წამვლებით მობრუნდება θ კუთხით და გადაადგილდება r მანძილზე. ვერტიკალური დგარ ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ არის J_1; 2 და 3 ჩათვალეთ ℓ_2 და ℓ_3 სიგრძის და m_2 და m_3 მასის ერთგვაროვან ღეროებად; გადასატანი ტვირთის მასა არის m. ვერტიკალურ ბრუნვის ღერძზე მოდებულია მაბრუნი M_φ მომენტი, ხოლო მეორე რგოლის ბრუნვის ღერძზე M_θ მომენტი. მამოძრავებელი ძალა, რომლებიც წარმოიქმნება გადატანით წყვილში, არის F_{23}. შეადგინეთ მექანიზმის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები. ხახუნი უგულებელყოფილია.



ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ მანიპულიატორის მოძრაობა მასზე მოდებული ძალების მოქმედებით. ვაჩვენოთ ნახაზზე მოქმედი ძალები: $m_2\vec{g}$ − 2 რგოლის

სიმძიმის ძალა, $m_3\vec{g}-$ 3 რგოლის სიმძიმის ძალა, $\vec{F}_{23}-$ მამოძრავებელი ძალა 2-3 გადატნით წყვილში, M_φ და M_θ მომენტები./ მექანიზმს აქვს სამი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ: $\varphi-$ მანიპულიატორის სახელურის მობრუნების კუთხე; $\theta-$ სახელური წამვლებით მობრუნების კუთხე; $r-$ სახელურის წამვლებით გადაადგილება (იხ. ნახაზი).

ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის სამი განტოლება:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_\varphi,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}=Q_\theta\ , \qquad (1)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial T}{\partial r}=Q_r.$$

რობოტი-მანიპულიატორის მექნიზმის კინეტიკური ენერგია

$$T=T_1+T_2+T_3, \qquad (2)$$

განვსაზღვროთ *1* დგარის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას:

$$T_1=\frac{1}{2}J_1\omega_1^2=\frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}^2.$$

2 რგოლის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას:

$$T_2=\frac{1}{2}J_2\omega_1^2=\frac{1}{2}\frac{m_2\ell_2^2}{12}\dot{\varphi}^2=\frac{m_2\ell_2^2}{24}\dot{\varphi}^2.$$

3 რგოლის კინეტიკური ენერგია, რომელიც ასრულებს რთულ მოძრაობას-1 დგართან ერთად ბრუნვა ვერტიკალური ღერძის გარშემო $\dot{\varphi}$ კუთხური

სიჩქარით, ბრუნვა ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო $\dot{\theta}$ კუთხური სიჩქარით 2 რგოლთან ერთადე და გადატანითი მოძრაობა 2-3 გადატანით წყვილში $\dot{r}$ სიჩქარით:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \dot{r}^{\,2} + \frac{1}{2} J_\theta\, \dot{\theta}^{\,2} + \frac{1}{2} J_\varphi\, \dot{\varphi}^2.$$

სადაც

$$J_\theta = J_{C_3} + m_3 \left(r - \frac{\ell_3}{2}\right)^2 = m_3 \left(r^2 - r\ell_3 + \frac{\ell_3^2}{3}\right);$$

$$J_\varphi = J_z sin^2\theta = \left[J_{C_3} + m_3 \left(r - \frac{\ell_3}{2}\right)^2\right] sin^2\theta =$$

$$= m_3 \left(r^2 - r\ell_3 + \frac{\ell_3^2}{3}\right) sin^2\theta.$$

მაშასადამე,

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \dot{r}^{\,2} + \frac{1}{2} m_3 \left(r^2 - \ell_3 + \frac{\ell_3^2}{3}\right) \dot{\theta}^{\,2} +$$

$$+ \frac{1}{2} m_3 \left(r^2 - r\ell_3 + \frac{\ell_3^2}{3}\right) \dot{\varphi}^2\, sin^2\theta.$$

ტვირთის კინეტიკური ენერგია, რომელიც 1 დგართან ერთად ბრუნავს ვერტიკალური ღერძის გარშემო და ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო 2 რგოლთან ერთადე , აგრეთვე, ასრულებს გადატანითი მოძრაობას 3 რგოლთან ერთად:

$$T_{ტვ} = \frac{1}{2} m\dot{r}^{\,2} + \frac{mr^2}{2}\, \dot{\theta}^{\,2} + \frac{1}{2} m\dot{r}^{\,2}\, \dot{\varphi}^2 sin^2\theta.$$

მაშინ რობოტი-მანიპულიატორის ნექნიზმის კინეტიკური ენერგია:

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{m_2 \ell_2^2}{24} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{r}^{\,2} + \frac{1}{2} m_3 \left(r^2 - r\ell_3 + \frac{\ell_3^2}{3}\right) \dot{\theta}^{\,2} +$$

$$+ \frac{1}{2} m_3 \left(r^2 - r\ell_3 + \frac{\ell_3^2}{3}\right) \dot{\varphi}^2\, sin^2\theta + \frac{1}{2} m\dot{r}^{\,2} + \frac{mr^2}{2}\, \dot{\theta}^{\,2} +$$

$$+ \frac{1}{2} m\dot{r}^{\,2}\, \dot{\varphi}^2 sin^2\theta = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{m_2 \ell_2^2}{24} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J(r) \dot{\theta}^{\,2} + \frac{1}{2} J(r) \dot{\varphi}^2\, sin^2\theta +$$

$$+ \frac{1}{2} (m_3 + m) \dot{r}^{\,2},$$

სადაც $J(r) = m_3 \left(r^2 - r\ell_3 + \frac{\ell_3^2}{3}\right) + mr^2.$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების კერძო წარმოებულები განზოგადებული სიჩქარეებით და კოორდინატებით:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left[J_1 + \frac{1}{12} m_2 \ell_2^2 + \frac{1}{2} J(r)\, sin^2\theta\right] \dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J(r)\dot{\theta}\,,$$
$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = J(r)\dot{\varphi}^2 \sin\theta\, cos\theta,$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = (m_3 + m)\dot{r}\,,$$
$$\frac{\partial T}{\partial r} = \left[m_3\left(r - \frac{\ell_3}{2}\right) + mr\right]\dot{\theta}^{\,2} + \left[m_3\left(r - \frac{\ell_3}{2}\right) + mr\right]\dot{\varphi}^2\, sin^2\theta,$$

აგრეთვე, განზოგადებული სიჩქარეებით კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულების დროით წარმოებულები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\left[\left(J_1 + \frac{1}{12}m_2\ell_2^2 + \frac{1}{2}J(r)\, sin^2\theta\right)\dot{\varphi}\right],$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left[J(r)\dot{\theta}\,\right],$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = (m_3 + m)\ddot{r}.$$

ვიპოვოთ განზოგადებული ძალები.

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta\varphi \neq 0,\ \delta\theta = 0, \delta r = 0$ და განვსაზღვროთ შესაძლო მუშაობა :

$$\delta A_\varphi = M_\varphi \delta\varphi = Q_\varphi \delta\varphi$$

აქედან

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = \frac{M_\varphi \delta\varphi}{\delta\varphi} = M_\varphi,$$

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta\theta \neq 0,\ \delta\varphi = 0,\ \delta r = 0$, მაშინ

$$Q_\theta = \frac{\delta A_\theta}{\delta\theta} = \frac{M_\theta\delta\theta - m_3 g\left(r - \frac{\ell_3}{2}\right)\sin\theta\cdot\delta\theta - mgr\sin\theta\cdot\delta\theta}{\delta\theta} =$$
$$= M_\theta - m_3 g\left(r - \frac{\ell_3}{2}\right)\sin\theta - mgr\sin\theta =$$
$$= M_\theta - \left[m_3\left(r - \frac{\ell_3}{2}\right) + mr\right]g\sin\theta,$$

მივანიჭოთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომ $\delta r \neq 0,\ \delta\theta = 0, \delta\varphi = 0$, მაშინ

$$Q_r = \frac{\delta A_r}{\delta r} = \frac{F_{23}\delta r - m_3 g cos\theta\cdot\delta r - mgr cos\theta\cdot\delta r}{\delta r} =$$
$$= F_{23} - (m_3 + m)g cos\theta\,.$$

ჩავსვათ კინეტიკური ენერგიის წარმოებულების და განზოგადებული ძალების გამოსახულებები (1) განტოლებათა სისტემაში და მივიღებთ მექანიზმის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(J_1+\frac{1}{12}m_2\ell_2^2+\frac{1}{2}J(r)\,sin^2\theta\right)\dot{\varphi}\right]=M_\varphi,$$

$$\frac{d}{dt}\left[J(r)\dot{\theta}\,\right]-J(r)\dot{\varphi}^2\sin\theta\,cos\theta=\,M_\theta-\left[m_3\left(r-\frac{\ell_3}{2}\right)+mr\right]g\sin\theta,$$

$$(m_3+m)\ddot{r}\,-\left[m_3\left(r-\frac{\ell_3}{2}\right)+mr\right]\left(\dot{\theta}^{\,2}+\dot{\varphi}^2\,sin^2\theta\right)=$$
$$=F_{23}-(m_3+m)gcos\theta\,.$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(J_1+\frac{1}{12}m_2\ell_2^2+\frac{1}{2}J(r)\,sin^2\theta\right)\dot{\varphi}\right]=M_\varphi,$$

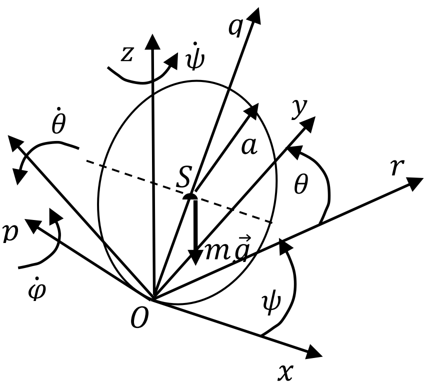
$$\frac{d}{dt}\left[J(r)\dot{\theta}\,\right]-J(r)\dot{\varphi}^2\sin\theta\,cos\theta=\,M_\theta-\left[m_3\left(r-\frac{\ell_3}{2}\right)+mr\right]g\sin\theta,$$

$$(m_3+m)\ddot{r}\,-\left[m_3\left(r-\frac{\ell_3}{2}\right)+mr\right]\left(\dot{\theta}^{\,2}+\dot{\varphi}^2\,sin^2\theta\right)=$$
$$=F_{23}-(m_3+m)gcos\theta.$$

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 48.51

M მასის და a რადიუსის თვალი უსრიალოდ გორავს ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. თვლის ინერციის მომენტი მისი მასათა ცენტრზე გამავალი თვლის სიბრტყის პერპენდიკულარული ღერძის მიმართ არის C. თვლის ინერციის მომენტი მისი დიამეტრის მიმართ $-A$. შეადგინეთ თვლის მოძრაობის განტოლება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ თვლის უსრიალოდ გორვა ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. და თვლის აბსოლუტური მოძრაობა $Oxyz$ უძრავი კოორდინატთა სისტემის მიმართ, რომლის სათავე თვლის სიბრტყესთან შეხების წერტილშია. ათვლის მოძრავი სისტემა $.p,q,r$ უძრავად დავაკავშიროთ თვალთან. მაშინ ეილერის კუთხეები დაახასიათებენ: φ კუთხე-თვლის მობრუნებას მისი სიბრტყის მართობი ღერძის გარშემო, θ კუთხე-თვლის



სიბრტყის დახრას ჰორიზონტისადმი, ψ კუთხე-ვერტიკალური სიბრტყის აზიმუტი, რომელიც შეიცავს თვლის დიამეტრს და გადის შეხების წერტილზე.

მაშინ S შეხების წერტილის კოორდინატები:

$$x_S = x + acos\theta\, sin\,\psi,$$
$$y_S = y - acos\theta\, cos\,\psi,$$
$$y_S = asin\theta.$$

ვიპოვოთ თვლის ცენტრის სიჩქარის გეგმილები დეკარტის საკოორდინატო სისტემის ღერძებზე:

$$\dot{x}_S = \dot{x} + a(\,\dot{\theta} sin\theta\, sin\,\psi + \dot{\psi} cos\theta cos\psi),$$
$$\dot{y}_S = \dot{y} + a(\dot{\theta} sin\theta\, sin\,\psi + \dot{\psi} cos\theta sin\psi),$$
$$y_S = a\dot{\theta} cos\theta.$$

განვსაზღვროთ თვლის ცენტრის სიჩქარე

$$|\vec{v}_S| = \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 + \dot{z}_S^2$$

ან

$$v_S^2 = \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 + \dot{z}_S^2,$$
$$v_S^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2a(-\dot{x}\,\dot{\theta} sin\theta\, sin\,\psi + \dot{x}\dot{\psi} cos\theta cos\psi +$$
$$+\dot{y}\,\dot{\theta} sin\theta\, cos\,\psi + \dot{y}\dot{\psi} cos\theta sin\psi) + a^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 cos^2\theta\right).$$

თვლის კუთხური სიჩქარის გეგმილები მოძრავ ღერძებზე:

$$\dot{p} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} cos\theta,$$
$$\dot{q} = \dot{\psi} sin\theta,$$
$$\dot{r} = -\dot{\theta}.$$

ვიპოვოთ ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L = T - \Pi = \frac{m}{2} v_S^2 + \frac{C}{2}\dot{p}^2 + \frac{A}{2}(\dot{q}^2 + \dot{r}^2) - mgz.$$

არაჰოლონომიური ბმებით დადებული პირობები:

$$\dot{x} - a\dot{\varphi} cos\psi = 0,$$
$$\dot{y} - a\dot{\varphi} sin\psi = 0.$$

მაშინ

$$L = \frac{m}{2}\left\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2a\left[\dot{\theta} sin\theta(\dot{y} cos\psi - \dot{x} sin\psi) +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\dot{\psi} cos\theta(\dot{x} cos\psi + \dot{y} sin\psi)\right] + a^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 cos^2\theta\right)\right\} + \frac{C}{2}\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi} cos\theta\right)^2 +$$
$$+\frac{A}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 sin^2\theta\right) - mgasin\theta.$$

ლაგრანჟის λ განუსაზღვრელი მამრავლები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \lambda_1,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \lambda_2,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \lambda_1(-acos\psi) + \lambda_2(asin\psi);$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

$L -$ის გამოსახულების ჩასმის შემდეგ მივიღებთ:

$$\lambda_1 = m\left[\dot{x} + a(\dot{\psi}cos\theta cos\psi - \dot{\theta}sin\theta\, sin\,\psi)\right],$$
$$\lambda_2 = m\left[\dot{y} + a(\dot{\psi}cos\theta sin\psi - \dot{\theta}sin\theta\, cos\,\psi)\right],$$
$$\frac{d}{dt}\left[C\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}cos\theta\right)\right] = -a(\lambda_1 cos\psi + \lambda_2 sin\psi,$$
$$ma\left[cos\theta(\dot{x}cos\psi + \dot{y}sin\psi) + a\dot{\psi}cos^2\theta\right] + Ccos\theta\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}cos\theta\right) +$$
$$+\frac{d}{dt}\left(A\dot{\psi}ins^2\theta\right) - ma\left[\dot{\psi}cos\theta\,(\dot{y}cos\psi - \dot{x}sin\psi) -\right.$$
$$\left.-\dot{\theta}sin\theta(\dot{x}cos\psi + \dot{y}sin\psi)\right] = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left[masin\theta(\dot{y}cos\psi + \dot{x}sin\psi) + (A + ma^2)\dot{\theta}\right] -$$
$$-ma\left[\dot{\theta}cos\theta(\dot{y}cos\psi - \dot{x}sin\psi) - \dot{\psi}sin\theta(\dot{x}cos\psi + \dot{y}sin\psi)\right] +$$
$$+ma^2\dot{\psi}^2 sin\theta cos\theta + C\dot{\psi}sin\theta\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}cos\theta\right) - A\dot{\psi}sin\theta cos\theta +$$
$$+mgacos\theta = 0.$$

ამოვხსანთ მიღებული განტოლებები იმ პირობით, რომ

$$\dot{y}cos\psi - \dot{x}sin\psi = 0,$$
$$\dot{x}cos\psi + \dot{y}sin\psi) = a\dot{\varphi},$$

და მივიღებთ თვლის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს:

$$(ma^2 + C)\frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}cos\theta\right) - ma^2\dot{\theta}\dot{\psi}sin\theta = 0,$$

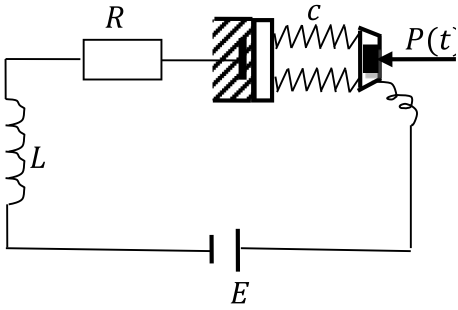
$$(A + ma^2)\ddot{\theta} + (ma^2 + C)\dot{\psi}sin\theta\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}cos\theta\right) - A\dot{\psi}^2 sin\theta cos\theta +$$
$$+mgacos\theta = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(A\dot{\psi}ins^2\theta\right) - C\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}cos\theta\right)\dot{\theta}sin\theta = 0.$$

პასუხი: $\frac{d}{dt}\left(A\dot{\psi}ins^2\theta\right) - C\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}cos\theta\right)\dot{\theta}sin\theta = 0,$

$(A + ma^2)\ddot{\theta} + (ma^2 + C)\dot{\psi}sin\theta\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}cos\theta\right) - A\dot{\psi}^2 sin\theta cos\theta +$
$+mgacos\theta = 0,\quad (ma^2 + C)\frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}cos\theta\right) - ma^2\dot{\theta}\dot{\psi}sin\theta = 0.$

ამოცანა 48.52

კონდენსატორული მიკროფონი შედგება მიმდევრობით შეერთებული თვითინდუქციის კოჭის, ომური წინაღობისა და კონდენსატორისაგან, რომლის ფირფიტები შეერთებულია საერთო c სიხისტიანი ორი ზამბარით. წრედი შეერთებულია მუდმივი ელექტრომამოძრავებელი E ძალის ელემენტთან, ხოლო კონდენსატორის ფირფიტაზე მოქმედებს ცვლადი $P(t)$ ძალა. კოჭის თვითინდუქციის კოეფიციენტი არის L, ომური წინაღობა $-R$, კონდენსატორის ტევადობა სისტემის წონასწორობისას $-C_0$, ფირფიტებს შორის მანძილი ამ მდებარეობისას $-a$, კონდენსატორის მოძრავი ფირფიტის მასა $-m$, შემოიღეთ მექანიკური და ელექტრული განზოგადებული კოორდინატები და შეადგინეთ სისტემის მოძრაობის განტოლება ლაგრანჟის ფორმით.



მ ი თ ი თ ე ბ ა: 1. კონდენსატორის პოტენციალური ენერგია $V=\frac{q^2}{2C}$ (C კონდენსატორის ტევადობაა, q –მუხტი მის შემონაფენებზე); ელექტროკინეტიკური ენერგია გამოითვლება ფორმულით: $T=\frac{1}{2}Li^2$ (L არის თვითინდუქციის კოეფიციენტი, $i=\frac{dq}{dt}$ დენის ძალა წრედში).

2. განზოგადებულ კოორდინატებად მიიღეთ კონდენსატორის q მუხტის ცვლილება და ზამბარის გადახრა წონასწორობის მდებარეობიდან, მაშინ მთლიანი მუხტი იქნება $q+q_0$, ხოლო მთლიანი გადახრა $x+x_0$, სადაც q_0 კონდენსატორის მუხტია, x_0- ზამბარის გადახრა ნეიტრალური მდებარეობიდან სისტემის წონასწორობის მდებარეობაში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ელექტრომექანიკურ სისტემას, რომელიც შედგება კონდენსატორული მიკროფონის და რხევითი კონტურისაგან, აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ: $x-$ კონდენსატორის ფირფიტის გადაადგილება, $q-$ ელექტრული წრედის მუხტის სიდიდე.

ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x\,, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q_q. \qquad (2)$$

ელექტრომექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია უდრის სისტემის მექანიკური ნაწილის T_1 კინეტიკური ენერგიის და ელექტრული წრედის T_2 ელექტროკინეტიკური ენერგიის ჯამს:

$$T = T_1 + T_2.$$

კონდენსატორული მიკროფონის მოძრავი ფირფიტა ასრულებს გადატანით მოძრაობას და მისი კინეტიკური ენერგია:

$$T_1 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2.$$

ელექტროკინეტიკური ენერგია

$$T_2 = \frac{1}{2} L\dot{q}^2.$$

მაშინ

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} L\dot{q}^2.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = L\dot{q}, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial q} = 0.$$

ვიპოვოთ მიღებული გამოსახულებების წარმოებულები დროით:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = L\ddot{q}.$$

განვსაზღვროთ განზოგადებული ძალები. ამისათვის, ვიპოვოთ პოტენციური ენერგიის გამოსახულება, რომელიც შედგება: $\Pi_{დრ}$ −კონდენსატორული მიკროფონის ზამბარის დრეკადი ძალების, $\Pi_{კონ}$ −კონდესატორის და $\Pi_{ემძ}$ − ელექტრომამოძრავებელი ძალის პოტენციური ენერგიების ჯამისაგან:

$$\Pi = \Pi_{დრ} + \Pi_{კონ} + \Pi_{ემძ},$$

სადაც

$$\Pi_{დრ} = \frac{c}{2}(x + x_0)^2; \Pi_{კონ} = \frac{(q + q_0)^2(a - x)}{2C_0 a};$$

$$\Pi_{ემძ} = -E^* q = -(E - R\dot{q})q.$$

მაშინ

$$\Pi = \frac{c}{2}(x + x_0)^2 + \frac{(q + q_0)^2(a - x)}{2C_0 a} - (E - R\dot{q})q.$$

$$Q_x = Q^{\Pi} + P(t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + P(t) = -c(x + x_0) + \frac{(q + q_0)^2}{2C_0 a} + P(t),$$

$$Q_q = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -\frac{(q + q_0)(a - x)}{2C_0 a} + E - R\dot{q}.$$

სისტემის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში

$$x_0 = \frac{Eq_0}{2C_0 a}, \; q_0 = EC_0. \tag{3}$$

ჩავსვათ კინეტიკური ენერგიის წარმოებულების და განზოგადებული ძალების გამოსახულებები (1) და (2) განტოლებათა სისტემაში და (3) ფორმულების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$m\ddot{x} + cx - \frac{E}{a}q - \frac{q^2}{2C_0 a} = P(t),$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} - \frac{E}{a}x + \frac{q}{C_0} - \frac{qx}{C_0 a} = 0.$$

პ ა ს უ ხ ი: $m\ddot{x} + cx - \frac{E}{a}q - \frac{q^2}{2C_0 a} = P(t)$,

$L\ddot{q} + R\dot{q} - \frac{E}{a}x + \frac{q}{C_0} - \frac{qx}{C_0 a} = 0.$

ამოცანა 48.53

განსაზღვრეთ წინა ამოცანაში აღწერილი კონდენსატორული მიკროფონის მცირე რხევათა სიხშირეები, თუ ელექტროწრედის წინაღობა უგულებელყოფილია.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვისარგებლოთ 48.52 ამოცანის ამოხსნის შედეგებით. ელექტრომექანიკური სისტემის პოტენციური ენერგია:

$$\Pi = \frac{c}{2}(x + x_0)^2 + \frac{(q + q_0)^2(a - x)}{2C_0 a} - (E - R\dot{q})q.$$

თუ ელექტროწრედის წინაღობა უგულებელყოფილია, მაშინ

$$\Pi = \frac{c}{2}(x + x_0)^2 + \frac{(q + q_0)^2(a - x)}{2C_0 a} - Eq.$$

განვსაზღვროთ განზოგადებული ძალები, გამოვრიცხოთ $P(t)$ ძალა:

$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -c(x + x_0) + \frac{(q + q_0)^2}{2C_0 a},$$

$$Q_q = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -\frac{(q + q_0)(a - x)}{2C_0 a} + E.$$

სისტემის სტატიკური წონასწორობის მდებარეობაში

$$cx_0 = \frac{Eq_0}{2a}, \ q_0 = EC_0. \quad (1)$$

მაშინ სისტემის მოძრაობის განტოლებები (იხ. 48.52 ამოცანის ამონახსნი):

$$m\ddot{x} + cx - \frac{E}{a}q = 0,$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} - \frac{E}{a}x = 0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$x = Asinkt, \;\; q = Bsinkt.$$

მაშინ სისტემის მოძრაობის განტოლებები მიიღებს სახეს:

$$A(c - mk^2) - B\frac{E}{a} = 0,$$

$$-A\frac{E}{a} + B\left(\frac{1}{C_0} - Lk^2\right) = 0.$$

ამოვხსნათ მიღებული განტოლებათა სისტემა k- ს მიმართ:

$$k^4 - k^2\left(\frac{c}{m} + \frac{1}{C_0 L}\right) = \frac{q_0^2}{a^2 C_0^2 mL} - \frac{c}{C_0 mL}.$$

ვიპოვოთ სისტემის მცირე რხევების სიხშირეები:

$$k_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{c}{m} + \frac{1}{C_0 L}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m} + \frac{1}{C_0 L}\right)^2 + 4\frac{q_0^2}{a^2 C_0^2 mL}}},$$

ან (1) გამოსახულებების გათვალისწინებით:

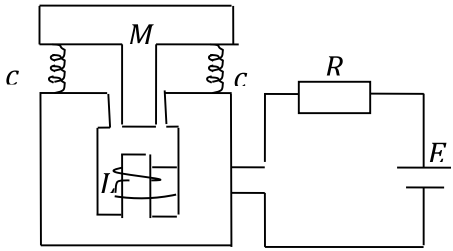
$$k_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{c}{m} + \frac{1}{C_0 L}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m} + \frac{1}{C_0 L}\right)^2 + 4\frac{E^2}{a^2 mL}}}.$$

პასუხი: $k_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{c}{m} + \frac{1}{C_0 L}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m} + \frac{1}{C_0 L}\right)^2 + 4\frac{E^2}{a^2 mL}}}.$

ამოცანა 48.54

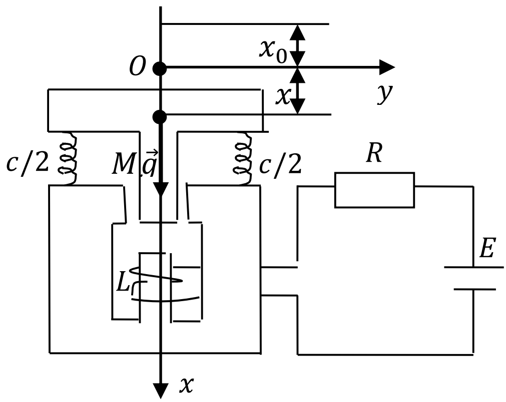
ნახაზზე გამოსხული სისტემა წარმოადგენს ელექტროდინამიკური

გადამწოდის პრინციპულ სქემას, რომელიც გამოიყენება მექანიკური რხევების ჩასაწერად. ღუზის მასა არის M, სიხისტე$-c$, კოჭის თვითინდუქციის კოეფიციენტი იცვლება მაგნიტურ გამტარში ჰაერის ღრეჩოს ცვლილების გამო $L = L(x)$, (x არის ღუზის ვერტიკალური გადაადგილება იმ მდებარეობიდან, როცა ზამბარა დაუძაბავია). კოჭზე შეერთებულია ელექტროწრედი, რომელიც შედგება მოცემული ელექტრომამოძრავებელი ძალის ელემენტებისაგან. წრედის ომური წინაღობაა R. სისტემის მოძრაობის განტოლება და განსაზღვრეთ მისი “წონასწორობის მდებარეობა”.



მ ი თ ი თ ე ბ ა: განზოგადებულ კოორდინატებად მიიღეთ ღუზის გადახრა და q მუხტი, რომელიც შეესაბამება $i = \frac{dq}{dt}$ დენს.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ელექტრომექანიკურ სისტემას, რომელიც შედგება გადატანით მოძრავი ღუზისა და ელექტრომაგნიტური მექანიზმისაგან, აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ: $x-$ ღუზის გადაადგილება, რომელიც განსაზღვრავს სისტემის მექანიკური ნაწილის წერტილების მდებარეობას, $q-$ განზოგადებული კოორდინატი, რომელიც აფიქსირებს ელექტრული წრედის მდგომარეობას (იხ. ნახაზი).



ჩავწეროთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x\,, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_q. \qquad (2)$$

ელექტრომექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია უდრის სისტემის მექანიკური ნაწილის T_1 კინეტიკური ენერგიის და ელექტრული წრედის T_2 ელექტროკინეტიკური ენერგიის ჯამს:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L\dot{q}^2.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების წარმოებულები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\dot{x},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x},$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = L(x)\dot{q},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = L\ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}\dot{q},$$
რადგან $L = L(x)$,
$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x}\dot{q}^2,$$
$$\frac{\partial T}{\partial} = 0.$$
ომის კანონის საფუძველზე ძაბვის დანაკარგის გათვალისწინებით ვიპოვით ელექტრომამოძრავებელ ძალას წრედში:
$$E^* = E - R\dot{q}.$$
განვსაზღვროთ განზოგადებული ძალები:
$$Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = \frac{Mg \cdot \delta x - cx \cdot \delta x}{\delta x} = Mg - cx,$$
$$Q_q = \frac{\delta A_q}{\delta q} = \frac{E^* \cdot \delta q}{\delta q} = E^* = E - R\dot{q}.$$
ჩავსვათ კინეტიკური ენერგიის წარმოებულების და განზოგადებული ძალების გამოსახულებები (1)და (2) განტოლებათა სისტემაში და მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებებს, რომლებიც აღწერენ ელექტრომექანიკური სისტემის მდგომარეობას:
$$M\ddot{x} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x}\dot{q}^2 + cx = Mg,$$
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}\dot{q} = E.$$
"წონასწორობის მდგომარეობაში" $\ddot{x} = 0, \dot{x} = 0, x = x_0,\ q = i_0$.
ამიტომ
$$cx_0 = Mg + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_0 i_0^2,$$
სადაც $Ri_0 = E$.

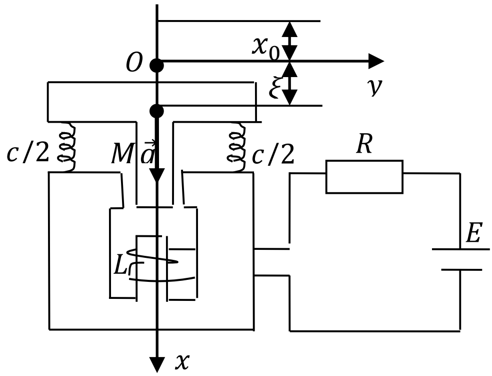
პ ა ს უ ხ ი: მოძრაობის განტოლებებია: $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial x}\dot{x}\dot{q} = E$;
$$M\ddot{x} - \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x}\dot{q}^2 + cx = Mg.$$
"წონასწორობის მდგომარეობაში" $\ddot{x} = 0, \dot{x} = 0, x = x_0,\ \dot{q} = i_0$.
სადაც $i_0 = \frac{E}{R}$; $cx_0 = Mg + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_0 i_0^2$.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 48.55

შეადგინეთ წინა ამოცანაში აღწერილი ელექტროდინამიკური გადამწოდის მცირე მოძრაობათა განტოლებები წონასწორობის მდებარეობის მახლობლობაში.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: განზოგადებულ კოორდინატებად მიიღეთ e მუხტის ცვლილება და წონასწორობის მდებარეობიდან ღუზის ვერტიკალური გადადგილების ξ მანძილი. $L(x)$ ფუნქცია დაშალეთ მწკრივად $L = L(x_0 + \xi) = L_0 + L_1\xi + \cdots$ და შეინარჩუნეთ პირველი ორი წევრი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ელექტრომექანიკურ სისტემას, რომელიც შედგება გადატანით მოძრავი ღუზისა და ელექტრომაგნიტური მექანიზმისაგან, აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ: $\xi -$ ღუზის გადაადგილება წონასწორობის მდებარეობიდან, რომელიც განსაზღვრავს სისტემის მექანიკური ნაწილის წერტილების მდებარეობას (იხ. ნახაზი), $q -$ განზოგადებული კოორდინატი, რომელიც აფიქსირებს ელექტრული წრედის მდგომარეობას.



ზამბარის წაგრძელება

$$x = x_0 + \xi,$$

სადაც x_0 −ზამბარის წაგრძელებაა წონასწორობის მდებარეობაში, როდესაც ელექტრულ წრედში გადის i_0 დენი.

მაშინ დენის მნიშვნელობა ელექტრულ წრედში ღუზის მოძრაობისას

$$\dot{q} = i_0 + \dot{e}.$$

ამ განზოგადებულ კოორდინატებს შეესაბამება ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = Q_\xi\,, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_q. \tag{2}$$

ელექტრომექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია უდრის სისტემის მექანიკური ნაწილის T_1 კინეტიკური ენერგიის და ელექტრული წრედის T_2 ელექტროკინეტიკური ენერგიის ჯამს:

$$T = T_1 + T_2,$$

სადაც

$$T_1 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2, \qquad T_2 = \frac{1}{2}L(x)\dot{q}^2$$

ამოცანის მითითების გათვალისწინებით:

$$T_1 = \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(L_0 + L_1\xi)\dot{q}^2.$$

მაშინ

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}L_0\dot{q}^2 + \frac{1}{2}L_1\xi\dot{q}^2.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების $\dot{x} = \frac{d}{dt}(x_0 + \xi) = \dot{\xi}$ და $\dot{q}$ განზოგადებული სიჩქარეებით კერძო წარმოებულების დროით წარმოებულები:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) = M\ddot{\xi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = L_0\ddot{q} + L_1\dot{\xi}\, i_0 + L_1\xi\ddot{q},$$

და კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების კერძო წარმოებულები განზოგადებული კოორდინატებით:

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2}L_1\dot{q}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0.$$

განვსაზღვროთ განზოგადებული ძალები:

$$Q_\xi = Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = Mg - c(x_0 + \xi),$$

$$Q_q = \frac{\delta A_q}{\delta q} = \frac{E^* \cdot \delta q}{\delta q} = E^* = E - R(i_0 + \dot{e}).$$

ჩავსვათ კინეტიკური ენერგიის წარმოებულების და განზოგადებული ძალების გამოსახულებები (1)და (2) განტოლებათა სისტემაში და მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებებს, რომლებიც აღწერენ ელექტრომექანიკური სისტემის მდგომარეობას:

$$M\ddot{\xi} - \frac{1}{2}L_1 i_0 \dot{e} = Mg - c(x_0 + \xi),$$

$$L_0\ddot{e} + L_1\dot{\xi}\, i_0 = E - R(i_0 + \dot{e})$$

ან

$$M\ddot{\xi} - \frac{1}{2}L_1 i_0^{\,\cdot} + cx_0 + c\xi = Mg,$$

(3)

$$L_0\ddot{e} + L_1\dot{\xi}\, i_0 + Ri_0 + R\dot{e} = E. \qquad (4)$$

რადგან ათვლის სათავე აღებულია წონასწორობის მდებარეობაში, ამიტომ

$$\ddot{x} = 0, \qquad x = x_0, \qquad i = \dot{q}_0 = i_0 = E/R.$$

მაშინ

$$E = i_0R, \qquad cx_0 = Mg + \frac{1}{2}L_1 i_0^2. \qquad (5)$$

ჩავსვათ (5) გამოსახულება მოძრაობის (3) და (4) დიფერენციალურ განტოლებებში და მივიღებთ:

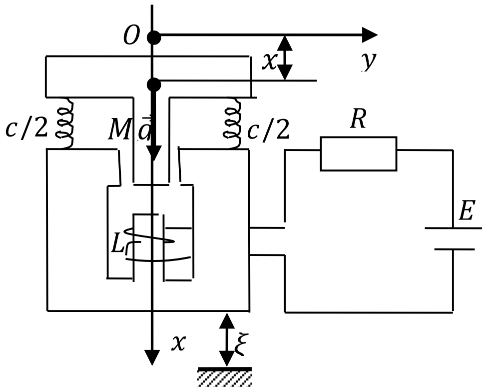
$$M\ddot{\xi} + c\xi - L_1 i_0\dot{e} = 0,$$
$$L_0\ddot{e} + R\dot{e} + L_1 i_0\dot{\xi} = 0.$$

პ ა ს უ ხ ი: $L_0\ddot{e} + R\dot{e} + L_1 i_0\dot{\xi} = 0;\quad M\ddot{\xi} + c\xi - L_1 i_0\dot{e} = 0.$

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 48.56

48.54 ამოცანაში აღწერილი ელექტროდინამიკური გადამწოდის ფუძე ასრულებს მცირე ვერტიკალურ რხევებს $\xi = \xi_0 sin\omega t$ კანონით. განსაზღვრეთ ღუზის მოძრაობის კანონი და დენის ძალა გადამწოდის წრედში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ელექტრომექანიკურ სისტემას, რომელიც შედგება გადატანით მოძრავი ღუზისა და ელექტრომაგნიტური მექანიზმისაგან, აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ: $x-$ ღუზის გადაადგილება, რომელიც განსაზღვრავს მის გადაადგილებას გადამწოდის კორპუსის მიმართ (იხ. ნახაზი), $q-$ განზოგადებული კოორდინატი, რომელიც აფიქსირებს ელექტრული წრედის მდგომარეობას.



ამ განზოგადებულ კოორდინატებს შეესაბამება ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_q\,, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x\,. \qquad (2)$$

მექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია:

$$T = T_1 + T_2,$$

სადაც

$$T_1 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2, \qquad T_2 = \frac{1}{2}L(x)\dot{q}^2.$$

მაშინ

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L(x)\dot{q}^2.$$

განვსაზღვროთ განზოგადებული ძალები:

$$Q_x = Mg - c(x_0 + x) + M\xi = Mg - cx_0 - cx + M\xi_0\omega^2 sin\omega t,$$
$$Q_q = E^* = E - R(i_0 + i).$$

48.55 ამოცანის ამონახსენის გათვალისწინებით ლაგრანჟის (1) და (2) განტოლებების საფუძველზე მივიღებთ:

$$L_0\ddot{i} + Ri + L_1 i_0\dot{x} = 0, \tag{3}$$
$$M\ddot{x} + cx - L_1 i_0 i = -M\xi_0\omega^2 sin\omega t. \tag{4}$$

შემოვიღოთ ჩასმა:

$$i = asin\omega t + bcos\omega t, \quad x = gsin\omega t + fcos\omega t.$$

გავაწარმოოთ ეს გამოსახულებები დროით და მიღებული შედეგები ჩავსვათ (3) და (4) განტოლებებში:

$$L_0\omega a + Rb + L_1 i_0\omega g = 0, \tag{5}$$
$$-L_0\omega a + Ra - L_1 i_0\omega f = 0, \tag{6}$$
$$(c - M\omega^2)f - L_1 i_0 b = 0, \tag{7}$$
$$(c - M\omega^2)g - L_1 i_0 a = M\xi_0\omega^2. \tag{8}$$

ამოვხსნათ (6) და (7) განტოლებები, მივიღებთ

$$\omega b[(c - M\omega^2)L_o + L_1^2 i_0^2] - R(c - M\omega^2)a = 0.$$

ამოვხსნათ (5) და (8) განტოლებები, მივიღებთ:

$$Rb(c - M\omega^2) + \omega\left[(c - M\omega^2)L_o + L_1^2 i_0^2\right]a = M\xi_0\omega^2 L_1 i_0\omega.$$

მაშინ

$$a = M\xi_0\omega^2 L_1 i_0\omega\frac{\omega[L_1^2 i_0^2 + L_0(c - M\omega^2)]}{\Delta},$$

$$b = M\xi_0\omega^2 L_1 i_0\omega\frac{R(c - M\omega^2)}{\Delta},$$

$$f = \frac{M\xi_0\omega^2 R L_1^2 i_0^2\omega}{\Delta},$$

$$g = -M\xi_0\omega^2\frac{L_1^2 i_0^2\, L_0\,\omega^2 + (R^2 + L_0^2\omega^2)(c - M\omega^2)}{\Delta},$$

სადაც

$$\Delta = R^2(c - M\omega^2)^2 + \omega^2[L_1^2 i_0^2 + L_0(c - M\omega^2)]^2.$$

ვიპოვოთ დენის მნიშვნელობა წრედში და ღუზის გადაადგილება:

$$i=\frac{M\xi_0\omega^3}{\Delta}L_1i_0\{R(c-M\omega^2)cos\omega t+\omega[L_1^2i_0^2+L_0(c-M\omega^2)]sin\omega t\},$$

$$x=\frac{M\xi_0\omega^3}{\Delta}\{\omega L_1^2i_0^2Rcos\omega t-[L_1^2i_0^2L_0\omega+$$

$$+(R^2+L_0^2\omega^2)(c-M\omega^2)]sin\omega t\}.$$

პ ა ს უ ხ ი:

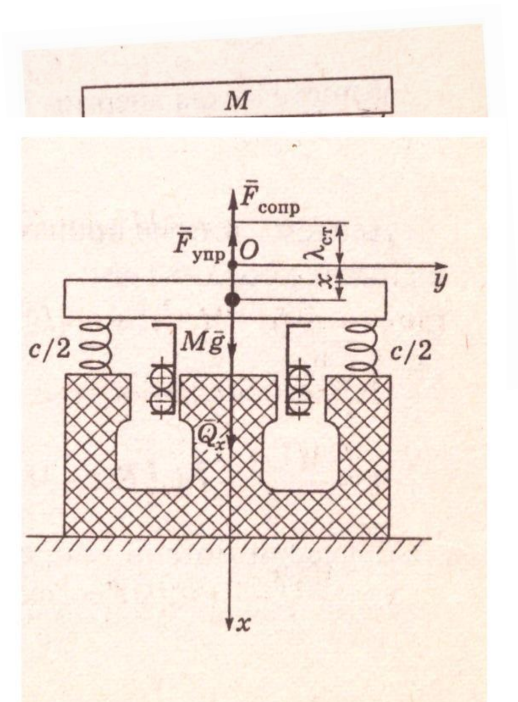
$$i=\frac{M\xi_0\omega^3}{\Delta}L_1i_0\{R(c-M\omega^2)cos\omega t+\omega[L_1^2i_0^2+L_0(c-M\omega^2)]sin\omega t\},$$

$$x=\frac{M\xi_0\omega^3}{\Delta}\{\omega L_1^2i_0^2Rcos\omega t-[L_1^2i_0^2L_0\omega+$$

$$+(R^2+L_0^2\omega^2)(c-M\omega^2)]sin\omega t\}.$$

ამოცანა 48.57

ელექტრომექანიკური მოძრავი სისტემა შედგება ცილინდრული მუდმივი მაგნიტისაგან A კონცენტრული პოლუსებით, რომელიც წარმოქმნის რადიალურ ველს და M მასის ღუზისაგან, რომელის ეყრდნობა c სიხისტის ზამბარას. ღუზა შეერთებულია n ხვიის მქონე მავთულიან კოჭასთან და მექანიკურ დემპფერთან, რომლის წინაღობა ღუზის სიჩქარის პროპორციულია (წინაღობის კოეფიციენტი β); კოჭას ხვიის საშუალო რადიუსი არის r; მისი თვითინდუქციის კოეფიციენტი $-L$; ომური წინაღობა$-R$, ხოლო მაგნიტურ ღრეჩოში მაგნიტური ინდუქცია $-B$; კოჭას მომჭერებზე



მოდებულია ცვლადი ძაბვა $V(t)$. შეადგინეთ სისტემის მოძრაობის განტოლება.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: კოჭას და მაგნიტის ურთიერთქმედების განზოგადებული ძალებია $Q_q = -2\pi rnB\dot{x}, Q_x = 2\pi rnB\dot{q}$ (Q_q არის ელექტროწრედში ინდუცირებული ელექტრომამოძრავებელი ძალა, ხოლო $Q_x -$ მაგნიტთან კოჭას ურთიერთქმედების ძალა).

ა მ ო ხ ს ნ ა. ელექტრომექანიკურ სისტემას, რომელიც შედგება გადატანით მოძრავი ღუზის, მუდმივი მაგნიტის და ელექტრომაგნიტური მექანიზმისაგან, აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ: $x -$ ღუზის გადაადგილება, რომელიც განსაზღვრავს მექანიზმის მოძრავი ნაწილის მდებარეობას, $q -$ განზოგადებული კოორდინატი, რომელიც აფიქსირებს ელექტრული წრედის მდგომარეობას.

ამ განზოგადებულ კოორდინატებს შეესაბამება ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x \,, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_q \,. \tag{2}$$

ელექტრომექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია უდრის სისტემის მექანიკური ნაწილის T_1 კინეტიკური ენერგიის და ელექტრული წრედის T_2 ელექტროკინეტიკური ენერგიის ჯამს:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L(x)\dot{q}^2.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების კერძო წარმოებულები $\dot{x}$ და $\dot{q}$ განზოგადებული სიჩქარეებით:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\dot{x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = L\dot{q},$$

გამოვთვალოთ მათი წარმოებულები დროით:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = L\ddot{q}.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების კერძო წარმოებულები x და განზოგადებული კოორდინატებით:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0.$$

ძაბვის დანაკარგის გათვალისწინებით ვიპოვით ელექტრომამოძრავებელ ძალას წრედში:

$$E^* = E - R\dot{q}.$$

განვსაზღვროთ განზოგადებული ძალები:

$$Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = \frac{Mg \cdot \delta x - F_{დრ} \cdot \delta x - F_{წინ} \cdot \delta x + Q_x^* \cdot \delta x}{\delta x} =$$

$$= Mg - F_{დრ} - F_{წინ} + Q_x^* = Mg - c(x + \lambda) - \beta\dot{x} + 2\pi rnB\dot{q},$$

$$Q_q = \frac{\delta A_q}{\delta q} = \frac{E^* \cdot \delta q - Q_q^* \cdot \delta q + V(t) \cdot \delta q}{\delta q} = E^* + V(t) - Q_q^* =$$

$$= E - R\dot{q} + V(t) - 2\pi rnB\dot{x}.$$

ჩავსვათ კინეტიკური ენერგიის წარმოებულების და განზოგადებული ძალების გამოსახულებები (1) და (2) განტოლებათა სისტემაში და მივიღებთ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს:

$$M\ddot{x} = Mg - c(x + \lambda) - \beta\dot{x} + 2\pi rnB\dot{q},$$
$$L\ddot{q} = E - R\dot{q} + V(t) - 2\pi rnB\dot{x}.$$

სისტემის "წონასწორობის მდგომარეობაში" $c\lambda = Mg,\ \dot{q} = i_0 = E/R.$

მაშინ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს ექნებათ სახე:

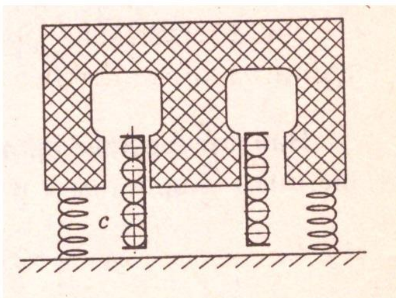
$$M\ddot{x} + cx + \beta\dot{x} - 2\pi rnBq \doteq 0,$$
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi rnB\dot{x} = V(t).$$

პ ა ს უ ხ ი:

$$M\ddot{x} + cx + \beta\dot{x} - 2\pi rnBq \doteq 0;\ L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi rnB\dot{x} = V(t).$$

ამოცანა 48.58

სეისმომეტრის ფუძეზე მიმაგრებულია მავთულის კოჭა, შემდგარი r რადიუსის n ხვიისაგან, რომელიც შეერთებულია ელექტრულ მარეგისტრირებელ სისტემასთან; ეს უკანასკნელი სქემატიზებულია L თვითინდუქციის კოეფიციენტიანი და R ომური წინაღობის წრედით. მაგნიტური გულარი წარმოქმნის მაგნიტურ ველს, რომელიც ხასიათდება ღრეჩოში B მაგნიტური ინდუქციით, და c სიხისტის ზამბარების საშუალებით ეყრდნობა



ფუძეს. გულარზე მოქმედებს აგრეთვე წინაღობის ძალა, რომელიც მისი სიჩქარის პროპორციულია; ამ სიჩქარეს იწვევს $\beta\dot{x}$ წინაღობის ძალის წარმომქმნელი დემფერი. შეადგინეთ განტოლებები, რომლებიც განსაზღვრავენ გულარის გადაადგილებებს და წრედში დენს, თუ სეისმომეტრის საფუძველი ასრულებს ვერტიკალურ მცირე რხევებს $\xi = \xi_0 sin\omega t$ კანონით.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: კოჭას და მაგნიტის ურთიერთქმედების განზოგადებული ძალები მოცემულია ფორმულებით: $Q_q = -2\pi rnB\dot{x}$, $Q_x = 2\pi rnB\dot{q}$

ა მ ო ხ ს ნ ა.

ელექტრომექანიკურ სისტემას, რომელიც შედგება გადატანით მოძრავი ღუზის, მუდმივი მაგნიტის და ელექტრომაგნიტური მექანიზმისაგან, აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ: $x -$ ღუზის გადაადგილება, რომელიც განსაზღვრავს მექანიზმის მოძრავი ნაწილის მდებარეობას, $q -$ განზოგადებული კოორდინატი, რომელიც აფიქსირებს ელექტრული წრედის მდგომარეობას.

ამ განზოგადებულ კოორდინატებს შეესაბამება ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x\,, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_q\,. \tag{2}$$

ელექტრომექანიკური სისტემის კინეტიკური ენერგია:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L(x)\dot{q}^2.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების კერძო წარმოებულები $\dot{x}$ და $\dot{q}$ განზოგადებული სიჩქარეებით:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\dot{x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = L\dot{q},$$

გამოვთვალოთ მათი წარმოებულები დროით:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = L\ddot{q}.$$

ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგიის გამოსახულების კერძო წარმოებულები x და q განზოგადებული კოორდინატებით:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0.$$

ძაბვის დანაკარგის გათვალისწინებით ვიპოვით ელექტრომამოძრავებელ ძალას წრედში:

$$E^* = E - R\dot{q}.$$

განვსაზღვროთ განზოგადებული ძალები:

$$Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = \frac{Mg \cdot \delta x - F_{დრ} \cdot \delta x - F_{წინ} \cdot \delta x + Q_x^* \cdot \delta x + \Phi_e \cdot \delta x}{\delta x} =$$

$$= Mg - F_{დრ} - F_{წინ} + Q_x^* + \Phi_e$$

$$= Mg - c(x + \lambda) - \beta\dot{x} + 2\pi rnB\dot{q} + M\ddot{\xi},$$

$$Q_q = \frac{\delta A_q}{\delta q} = \frac{E^* \cdot \delta q - Q_q^* \cdot \delta q}{\delta q} = E - R\dot{q} - 2\pi rnB\dot{x}.$$

ჩავსვათ კინეტიკური ენერგიის წარმოებულების და განზოგადებული ძალების გამოსახულებები (1) და (2) განტოლებათა სისტემაში და მივიღებთ განტოლებებს, რომლებიც განსაზღვრავენ გულარის გადაადგილებას და წრედში დენს:

$$M\ddot{x} = Mg - cx - c\lambda - M\xi_0\omega^2 sin\omega t - \beta\dot{x} - 2\pi rnB\dot{q}, \qquad (3)$$

$$L\ddot{q} = E - R\dot{q} - 2\pi rnB\dot{x}. \qquad (4)$$

სისტემის “წონასწორობის მდგომარეობაში” $c\lambda = Mg,\ \dot{q} = i_0 = E/R.$

მაშინ (3) და (4) განტოლებებს ექნებათ სახე:

$$M\ddot{x} + cx + \beta\dot{x} - 2\pi rnB\dot{q} = M\xi_0\omega^2 sin\omega t,$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi rnB\dot{x} = 0.$$

პ ა ს უ ხ ი: $M\ddot{x} + cx + \beta\dot{x} - 2\pi rnB\dot{q} = M\xi_0\omega^2 sin\omega t$;
$L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi rnB\dot{x} = 0.$

ლიტერატურა

1. კვიციანი ტ. თეორიული მექანიკის კურსი, დინამიკა, საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, .2019 წ, 474 გვ.
2. გორჯოლაძე ი., ყიფიანი გ., ბუქსიანიძე ა. თეორიული მექანიკის კურსი, დინამიკა, გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, 2008, 542 გვ.
3. Теоретическая механика, Динамика, Практикум: учеб. Пособие В. 2ч Ч.2 Динамика матерыальнной системы. Аналитическая механика, В. А. Акимов [и др.]: под. Обш. Ред. Проф. А. В. Чигарева и доц. И И. Горбача. – Минск. Новое издание: М. ЦУПЛ. 2010, 563 с.
4. გორგიძე ა. თეორიული მექანიკის კურსი, წიგნი II, დინამიკა, გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, 1997, 561 გვ.
5. ვეკუა ნ. თეორიული მექანიკა, ნაწილი II, თბილისის უნივერ-სიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1970, 366 გვ.
6. Мещерский И.В. – Сборник задач по теоретической механике.(И.В. Мещерский. 36-е изд. Испр. М. Наука, 1986. 448 с.).
7. Айзенберг Т.В., Воронков М.И., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике, “Высшая школа”, Москва, 1982, 390 с.
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах, том II, динамика, Москва, “Наука”,1985, 558 с.
9. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики, том II, Москва, “Наука”, 1985, 495 с.

10. Кабальский М.М., Кривошей В.Д., Савицкий Н.И., Чаиковский Т.Н. Типовые задачи по теоретической механике и методы их решения. Киев, 1985, 512 с.
11. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. “Высшая школа”, Москва, 1995, 366 с.
12. Яблонский А.А. Курс теоретической механики, часть II, динамика, “Высшая школа”, Москва, 1984.-423 с.
13. Bedford A., Fowler W. Engineering Mechanics, Prentice Hall, Inc. USA, 2002.-580 p.
14. Hibbeler R.C. Engineering Mechanics: Statics and Dynamics, Prentice Hall, Inc. USA, 2004.-688p.
15. Neuber H. Losungen zur aufgabensammlung mestscherski. Veb Deutcher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.- 464 p.
16. Romano A. Classical Mechanics With Mathematica, Springer, 2012. - 520 p.

გელა ყიფიანი, ნოდარ მარდალეიშვილი,
მაყვალა ბექირიშვილი, ზაზა ჯანგიძე

თეორიული მექანიკა

ანალიზური მექანიკა

ტომი
5

ტექნიკური რედაქტორი: ნოდარ მარდალეიშვილი
კომპიუტერული უზრუნველყოფა: ნანა დუმბაძე
დიზაინერი: ირაკლი უშვერიძე

გადაეცა წარმოებას 2.03.2023წ. ხელმოწერილია
დასაბეჭდად 17.03.2023წ. ტირაჟი 100 ეგზემპლარი

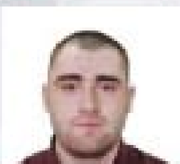
გამომცემლობა „უნივერსალი“

თბილისი, 0186, ა. პოლიტკოვსკაიას №4. ☎: 5(99) 17 22 30; 5(99) 33 52 02
E-mail: universal505@ymail.com; gamomcemlobauniversali@gmail.com

გელა ყიფიანი – მექანიკოსი-მათემატიკოსი, დაამთავრა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი, მექანიკის სპეციალობით. ტექნიკის მეცნიერებათა კანდიდატი (1986 წ.), ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი (1997 წ.), საქართველოს მეცნიერებისა და ტექნიკის დარგის სახელმწიფო პრემიის ლაურეატი (2004 წ.), საქართველოს დამსახურებული მშენებელი (2019 წ.), საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის პროფესორი.

ნოდარ მარდალეიშვილი – მექანიკოსი-მათემატიკოსი, დაამთავრა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი, მექანიკის სპეციალობით. ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი (1993 წ.), აკადემიური დოქტორი (2006 წ.). აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი.

მაყვალა ბექორიშვილი – დაამთავრა საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი. საინჟინრო მეცნიერებათა დოქტორი (2009 წ.), მისი სამეცნიერო მიმართულებაა სამშენებლო მექანიკა. გამოქვეყნებული აქვს 30 სამეცნიერო ნაშრომი, მათ სორის 2 სახელმძღვანელო და 1 მონოგრაფია. ბათუმის სახელმწიფო საზღვაო აკადემიის ასოცირებული პროფესორი.



ზაზა ჯანგიძე – დაამთავრა საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტი (ბაკალავრიატი 2018 წ.), (მაგისტრატურა 2020 წ.), დოქტორანტურა 2023 წ.) მიენიჭა ინჟინერის დოქტორის აკადემიური ხარისხი მშენებლობაში. გამოქვეყნებული აქვს 15 სამეცნიერო ნაშრომი.

ISBN 978-9941-33-582-1