

მეთოდური მითითებანი თეორიული მუშაობის ამოცანების ამოსახსნად

(ღ ი ნ ა მ ი კ ა)

პროფ. ი. ვორონკოვის წრეაქციით
თარგმანი მეექვსე რუსული გამოცემიდან

სსრ კავშირის უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების
სამინისტროს მიერ დაშვებული დამზარე სახელმძღვანელოდ
1 უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტთათვის.

წერტილის დინამიკა

თ ა ვ ი

წერტილის დინამიკის ორი ძირითადი ამოცანა

§ 1. ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დინამიკის ფორმული ჩვენება

დინამიკაში შეისწავლება მექანიკური სისტემების მოძრაობა მათზე მოქმედ ძალებზე დამოკიდებულებით. მექანიკის უმარტივეს ობიექტს წარმოადგენს ნივთიერი წერტილი — სხეული, რომლის განზომილება მოცემული ამოცანის ამოხსნის დროს შეიძლება უგულებელყოთ.

თუ ნივთიერი წერტილის მდებარეობასა და მოძრაობაზე არ არის დადებული არავითარი შეზღუდვა, მაშინ წერტილს ეწოდება თავისუფალი, საწინააღმდეგო შემთხვევაში საქმე გვაქვს არათავისუფალი წერტილის მოძრაობასთან. ნივთიერი წერტილის მდებარეობასა და მოძრაობაზე გარკვეული შეზღუდვის დამდებ პირობებს ამ წერტილზე დადებული ბმები ეწოდება. ნივთიერი სხეული, რომლის საშუალებითაც ხორციელდება მოცემულ ნივთიერ წერტილზე დადებული ბმა, მოქმედებს ამ წერტილზე გარკვეული ძალით, რომელსაც ამ ბმის რეაქცია ეწოდება.

ქმედების და უკუქმედების კანონის თანახმად, ძალა, რომლითაც ნივთიერი წერტილი მოქმედებს ბმის განმარტულიებელ სხეულზე, მოდულით ამ ბმის რეაქციის ტოლია და მიმართულებით საწინააღმდეგო.

დინამიკის მეორე და მესამე კანონების საფუძველზე გვაქვს

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad (108)$$

სადაც m არის ნივთიერი წერტილის მასა; \vec{a} — მისი აჩქარება და \vec{F} — ამ წერტილზე მოდებული ყველა ძალის ტოლქმედი, ბმის რეაქციის ჩათვლით (არათავისუფალი წერტილის შემთხვევაში).

ერთეულთა სავსეთმორისი სისტემაში მასის ერთეული იზომება კილოგრამობით, ძალა — ნიუტონობით. ჩვეულებრივად სხეულის მასას პოულობენ, როგორც ნიუტონობით გამოსახული ამ სხეულის წონის ფარდობას სიმძიმის ძალის $g = 9,81$ მ/წმ² აჩქარებასთან, ე. ი.

$$m = \frac{P}{g}. \quad (109)$$

(108) ვექტორული ტოლობის ნებისმიერი საკოორდინატო სისტე-

მის ლერქებზე დაგვეგმილებით მიიღება ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები ამ სისტემაში.

დეკარტის მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში გვექნება:

$$m\ddot{x}=X; m\ddot{y}=Y; m\ddot{z}=Z, \quad (110)$$

სადაც x, y, z — წერტილის კოორდინატებია, ხოლო X, Y, Z — მოქმედი ძალის (ტოლქმედის) გვეგმილები სათანადო ლერქებზე. არათავისუფალი წერტილის შემთხვევაში ამ განტოლებებს უნდა დაეუმატოთ ბმის განტოლებები.

თუ წერტილი მოძრაობს წრფივად და თუ ამ წრფეს x ლერქად მივიღებთ, მაშინ გვექნება

$$m\ddot{x}=X. \quad (111)$$

ბუნებრივი ლერქების სისტემაში გვაქვს:

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\tau}; \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n; \quad O = F_b, \quad (112)$$

სადაც v არის წერტილის სიჩქარე; ρ — ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი; F_{τ}, F_n, F_b — მოქმედი ძალის გვეგმილები სათანადო ტრაექტორიის მხებზე, მთავარ ნორმალსა და ბინორმალზე;

უკანასკნელ (112) განტოლებებს ეწოდება ნივთიერი წერტილის მოძრაობის ეილერის, ანუ ბუნებრივი განტოლებები.

თუ ვისარგებლებთ (108) და (110) განტოლებებით, შეიძლება ამოვხსნათ წერტილის დინამიკის ორი ძირითადი ამოცანა.

§ 3. წარბილის დინამიკის კირველი ძირითადი ამოცანა

ეს ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ ნივთიერი წერტილის მოცემული მოძრაობის და ცნობილი მასის საშუალებით საჭიროა ამ წერტილზე მოქმედი ძალის განსაზღვრა, ანუ თუ ნივთიერ წერტილზე მოქმედებს რამდენიმე ძალა — ერთ-ერთი მათგანის განსაზღვრა.

ამ ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება წერტილის აჩქარების განსაზღვრამდე, რომელიც იმ შემთხვევაში, როცა წერტილის მოძრაობა მოცემულია, ადვილად განისაზღვრება კინემატიკის წესების გამოყენებით.

ამ პარაგრაფის ამოცანები მოძრავი წერტილის ტრაექტორიის მიხედვით შეიძლება დაიყოს შემდეგ ორ ძირითად ტიპად:

I. ამოცანები, რომლებიც წერტილის წრფივ მოძრაობას გამოსახვენ.

II. ამოცანები, რომლებიც წერტილის მრუდწირულ მოძრაობას გამოსახვენ.

I ტიპის ამოცანები

ამ ტიპის ამოცანები, რომლებშიც განხილულია წერტილის წრფივი მოძრაობა, ამოიხსნება (111) განტოლების საშუალებით; ისინი შეიძლება გამოიყოს ორ ჯგუფად.

პირველი ჯგუფი

ამოცანები, რომლებშიც მოძრავ ნივთიერ წერტილზე მოდებულია ერთი საძიებელი ძალა.

მაგალითი 98: $m=400$ გ მასის მქონე ნივთიერი წერტილი Ox ღერძის გასწვრივ ასრულებს პარბოლიულ რხევას $x=20 \sin \frac{\pi}{2} t$, კანონით (x — გამოსახულია სმ-ობით, t — წმ-ობით). იპოვეთ წერტილზე მოქმედი ძალა, როგორც x -ის ფუნქცია.

ამოხსნა. ვპოულობთ წერტილის აჩქარების გეგმილს Ox ღერძზე

$$a_x = \ddot{x} = -5\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t \quad \frac{\text{სმ}}{\text{წმ}^2}.$$

შემდეგ ვპოულობთ მოქმედი ძალის გეგმილს იმავე ღერძზე

$$X = m a_x = -400 \cdot 5\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t = -2000\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t.$$

მაგრამ $\sin \frac{\pi}{2} t = \frac{x}{20}$, ამიტომ $X = -100\pi^2 x$ დინ.

რადგანაც ძალის გეგმილი Ox ღერძზე და მოძრავი წერტილის x კოორდინატი ნიშნით ერთმანეთის საწინააღმდეგოა, ამიტომ საძიებელი ძალა მიმართულია Ox ღერძის გასწვრივ კოორდინატა O სათავისაკენ. მოდულით ეს ძალა უდრის $986 |x|$, ე. ი. O სათავიდან მოძრავ წერტილამდე მანძილის პროპორციულია.

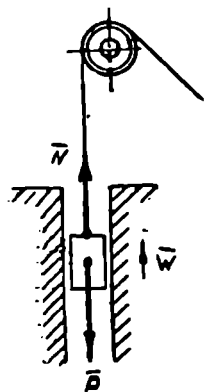
მეორე ჯგუფი

მეორე ჯგუფს ეკუთვნის ის ამოცანები, რომლებშიც მოძრავ ნივთიერ წერტილზე მოდებულია რამდენიმე ძალა, რომელთაგან საძიებელია ერთი. ამ ჯგუფს უნდა მივაკუთვნოთ ისეთი ამოცანები, რომლებშიც მოითხოვება ბმის უცნობი რეაქციის განსაზღვრა, რითაც ხასიათდება არათავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობა.

მაგალითი 99. P წონის გალი იწევა R რადიუსის დოლზე დახვეწილი ბაგირის საშუალებით. დოლი ბრუნავს უძრავი ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო კანონით

$$\varphi = \frac{a}{2}(e^{at} + e^{-at}) = ach(at).$$

განსაზღვრეთ ბაგირის დაკიმულობა, როგორც აწევის h სიმაღლის ფუნქცია (ნახ. 139).



ნახ. 139.

ამოხსნა. დოლის φ კუთხეზე მობრუნებით გალი იწევა $h=R\varphi$ სიმაღლეზე. ბაგირის დაკიმულობის ძალა აღენიშნოთ T -თი:

გალზე მოქმედებს ორი ძალა: ბაგირის T დაკიმულობა და გალის P წონა, ამასთანავე $T > P$, რადგან გალის აჩქარება მიმართულია ზემოთ. ამ ძალების ტოლქმედი $F = T - P$. (108) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$m\omega = T - P,$$

$$\text{საიდანაც } T = P + m\omega = P + \frac{P}{g}\omega = P\left(1 + \frac{\omega}{g}\right).$$

გალის ω აჩქარება განისაზღვრება ფორმულით

$$\omega = \frac{d^2h}{dt^2} = R \frac{d^2\varphi}{dt^2} = R \frac{a^2}{2}(e^{at} + e^{-at}) = R \frac{a^2}{2}ch(at),$$

$$\text{ანუ } \omega = a^2h.$$

$$\text{შეშასაღამე, } T = P\left(\frac{\omega^2h}{g} + 1\right).$$

II ტიპის ამოცანები

ამ ტიპის ამოცანები, რომლებშიც განიხილება ნივთიერი წერტილის მრუდწირული მოძრაობა, შეიძლება გამოიყოს ისეთივე ორ ჯგუფად, როგორც პირველი ტიპის ამოცანები, სახელდობრ:

პირველი ჯგუფი

ამოცანები, რომლებშიც ნივთიერ წერტილზე მოდებულება ერთი ძალა; საჭიროა განისაზღვროს ეს ძალა.

თუ ამასთანავე წერტილის მოძრაობა მოცემულია დეკარტის კოორდინატებში:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t). \quad (113)$$

სადაც x, y, z არის წერტილის კოორდინატები, t — დრო, მაშინ (110)

ვანტოლების საფუძველზე ვპოულობთ საძიებელი ძალის გეგმილებს სამ საკოორდინატო ღერძებზე:

$$X = \ddot{m}x = mf_1''(t); \quad Y = m\ddot{y} = mf_2''(t); \quad Z = \ddot{m}z = mf_3''(t). \quad (114)$$

შემდეგ საჭიროა მოქმედი ძალის მოდულის და მიმართულების კოსინუსების განსაზღვრა ფორმულებით:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}; \quad (115)$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{F}; \quad \cos \beta = \frac{Y}{F}; \quad \cos \gamma = \frac{Z}{F}. \quad (116)$$

მაგალითი 100. $m = 0,5$ კგ მასის ნივთიერი წერტილი ასრულებს მოძრაობას

$$x = 2t^2 + 1; \quad y = t^2 - 1; \quad z = t^3 - 1$$

ვანტოლებების მიხედვით, ამასთანავე წერტილის კოორდინატები გამოსახულია მეტრობით, დრო წამობით. განსაზღვრეთ წერტილზე მოქმედი ძალის სიდიდე და მიმართულება $t = 1$ წმ მომენტში.

ამოხსნა 1. ვპოულობთ მოცემული წერტილის სიჩქარის გეგმილებს საკოორდინატო ღერძებზე:

$$\dot{x} = 4t; \quad \dot{y} = 2t; \quad \dot{z} = 3t^2.$$

2. ვპოულობთ წერტილის აჩქარების გეგმილებს საკოორდინატო ღერძებზე:

$$\ddot{x} = 4; \quad \ddot{y} = 2; \quad \ddot{z} = 6t = 6 \quad (t = 1).$$

3. (114) განტოლებების საფუძველზე ვპოულობთ ძალის გეგმილებს საკოორდინატო ღერძებზე:

$$X = \ddot{m}x = 2; \quad Y = m\ddot{y} = 1; \quad Z = \ddot{m}z = 3.$$

4. (115) და (116) ფორმულებით ვპოულობთ ძალის მოდულს და მიმართულების კოსინუსებს:

$$F = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3,74 \text{ ნ};$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3,74} = 0,5334; \quad \cos \beta = \frac{1}{3,74} = 0,267; \quad \cos \gamma = \frac{3}{3,74} = 0,804.$$

საიდანაც $\alpha = 57^\circ 41'$; $\beta = 74^\circ 30'$; $\gamma = 36^\circ 42'$.

თუ წერტილის მოძრაობა მოცემულია ბუნებრივი ვანტოლებებით, ე. ი. მოცემულია წერტილის ტრაექტორია და ამ ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის $s = f(t)$ კანონი, მაშინ (112) განტოლებების საშუალებით ვპოულობთ საძიებელი F ძალის გეგმილებს ბუნებრივ ღერძებ-

ზე, ხოლო შემდეგ ამ გეგმილებით გამოვიანგარიშებთ მის მოდულს.
მაგალითი 101. $m=2$ კგ მასის მქონე ნივთიერი წერტილი $s=$

$=12 \sin \frac{t}{2}$ კანონით შემოსწერს მრუდწირულ ტრაექტორიას (s — გამოსახულია მეტრობით, t — წმ-ობით), მოცემულ მომენტში იგი იკავებს M მდებარეობას და მას აქვს $v=3$ მ/წმ სიჩქარე, ამასთანავე ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი M წერტილში უდრის 6 მ. თოვით ამ მომენტში ნივთიერ წერტილზე მოქმედი ძალა.

ამ ოხსნა. ეპოულობთ წერტილის სიჩქარეს და მისი აჩქარების გეგმილებს ტრაექტორიის მხებზე და მთავარ ნორმალზე:

$$v = \frac{ds}{dt} = 6 \cos \frac{t}{2}; \quad w_{\tau} = \frac{dv}{dt} = -3 \sin \frac{t}{2}; \quad w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{6}.$$

პირობის თანახმად, მოცემულ t მომენტში გვაქვს $v=3$ მ/წმ, ამიტომ $6 \cos \frac{t}{2} = 3$, საიდანაც $\cos \frac{t}{2} = \frac{1}{2}$ და $\frac{t}{2} = \frac{\pi}{3}$, ანუ $t = \frac{2\pi}{3}$ წმ.

მაშასადამე, ამ მომენტში

$$w_{\tau} = -3 \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}; \quad w_n = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

ახლა (112) განტოლების საფუძველზე ეპოულობთ საძიებელი ძალის გეგმილებს მხებზე და მთავარ ნორმალზე:

$$F_{\tau} = m w_{\tau} = -3\sqrt{3}; \quad F_n = m w_n = 3.$$

აქედან საძიებელი ძალა

$$F = \sqrt{F_{\tau}^2 + F_n^2} = 6 \text{ ნ.}$$

მეორე ჯგუფი

ამოცანები, რომლებშიაც მოძრავ ნივთიერ წერტილზე მოდებულია რამდენიმე ძალა და მათ შორის ერთი საძიებელია.

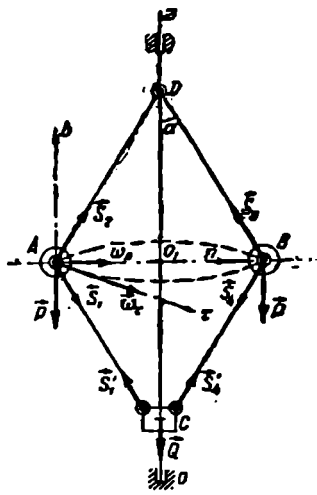
ამ ჯგუფში, ისევე როგორც I ტიპის მეორე ჯგუფის ამოცანებში, ხშირად გვხვდება ისეთი ამოცანები, სადაც საჭიროა არათავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დროს ბმის უცნობი რეაქციის განსაზღვრა.

მაგალითი 102. ცენტრიდანული რეგულატორი შედგება თითოეული P წონის ორი A და B ბურთულისაგან, Q წონის C ქუროსაგან და ოთხი ერთნაირი $AC=BC=DA=DB=l$ სიგრძის, ბოლოებით სა-

ხსრულად შეერთებული, უწონო ღეროსაგან. რეგულატორი ბრუნავს ვერტიკალური უძრავი z ღერძის გარშემო.

განსაზღვრეთ ძალები ღეროებში და რეგულატორის კუთხური სიჩქარე, თუ თითოეული ღეროს მიერ ვერტიკალთან შედგენილ კუთხეს აქვს მოცემული მუდმივი α მნიშვნელობა (ნახ. 140).

ამოხსნა. განვიხილოთ A ბურთულის მოძრაობა. მივიღოთ იგი ნივთიერ წერტილად, რომელიც აღწერს პორიზონტალურ სიბრტყეში მდებარე წრეწირს, რომლის ცენტრი O წერტილია და რადიუსი R -ის ტოლია. ბურთულაზე მოდებულია სამი ძალა: P წონა და AD და AC ღეროების რეაქციის \vec{S}_1 და \vec{S}_2 ძალები, რომლებიც საძიებელი ძალების ტოლია და ღეროების გასწვრივაა მიმართული. გამოვიყენებთ რა ნივთიერი წერტილის მოძრაობის განტოლებებს ბუნებრივი სახით, ე. ი. (112) განტოლებებს, დავაგვიგმილოთ ბურთულაზე მოდებულთ ყველა ძალა τ , n და b ბუნებრივ ღერძებზე, რომლებიც (140) ნახაზზეა ნაჩვენები, მივიღებთ:



ნახ. 140.

$$m \frac{dv}{dt} = 0, \quad /$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = (S_1 + S_2) \sin \alpha,$$

$$0 = (S_2 - S_1) \cos \alpha - P,$$

ანუ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $v = \omega R = \omega l \sin \alpha$, მაშინ ვღებულობთ:

$$m l \sin \alpha \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

$$m l \sin \alpha \cdot \omega^2 = (S_1 + S_2) \sin \alpha,$$

$$0 = (S_2 - S_1) \cos \alpha - P.$$

მაშასადამე,

$$S_1 + S_2 = \frac{P}{g} l \omega^2, \quad \omega = \text{const},$$

$$S_2 - S_1 = \frac{P}{\cos \alpha} \dots$$

ანალოგიურ ტოლობებს აკმაყოფილებენ B ბურთულაზე მოქმედი BD და BC ღეროების S_3 და S_4 რეაქციები, ამასთანავე $S_2 = S_3$, $S_1 = S_4$.

ახლა განვიხილოთ C ქურო, რომელზეც მოდებულია \vec{Q} წონა და \vec{S}_1 და \vec{S}_4 ძალების ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული CA და CB ღეროების S_1 და S_4 რეაქციები. რადგან, როცა $\alpha = \text{const}$, ქურო არ გადაადგილდება z ღერძზე, ამიტომ C ქუროზე მოდებული ძალების z ღერძზე გეგმილთა ჯამი უდრის ნულს, ე. ი. $Q - (S_1 + S_4) \cos \alpha = 0$.

ამრიგად, S_1 , S_2 და ω უცნობების განსაზღვრისათვის მივიღეთ შემდეგი სამი განტოლება:

$$1) S_1 + S_2 = \frac{P}{g} \omega^2;$$

$$2) S_2 - S_1 = \frac{P}{\cos \alpha};$$

$$3) Q = 2 S_1 \cos \alpha.$$

ამ განტოლებების ამოხსნით ვღებულობთ:

$$S_1 = \frac{Q}{2 \cos \alpha}, \quad S_2 = \frac{Q + 2P}{2 \cos \alpha}, \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \cdot \frac{Q + P}{P \cos \alpha};$$

მაგალითი 103. m მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს Oxy სიბრტყეში წინააღმდეგობის გარეშე O ცენტრისაკენ მიზიდულობის ძალის მოქმედებით, რომელიც უდრის $\vec{F} = -k^2 m \vec{r}$, სადაც $k = \text{const}$, ხოლო \vec{r} — ამ წერტილის რადიუსვექტორია, იპოვეთ გარემოს წინააღმდეგობის F_1 ძალა, როგორც სიჩქარის ფუნქცია, თუ ცნობილია წერტილის მოძრაობის განტოლებები:

$$x = ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha),$$

$$y = be^{-nt} \sin(k_1 t + \beta);$$

ამასთანავე $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

ამოხსნა. 1. ვპოულობთ მოძრავი წერტილის სიჩქარის და აჩქარების გეგმილებს Ox ღერძზე:

$$v_x = \dot{x} = ae^{-nt} [k_1 \cos(k_1 t + \alpha) - n \sin(k_1 t + \alpha)];$$

$$w_x = \ddot{x} = ae^{-nt} [(n^2 - k_1^2) \sin(k_1 t + \alpha) - 2nk_1 \cos(k_1 t + \alpha)];$$

რადგან

$$n^2 - k_1^2 = 2n^2 - k^2,$$

ამიტომ

$$w_x = -k^2 a e^{-n t} \sin(k_1 t + \alpha) - 2 a n e^{-n t} [k_1 \cos(k_1 t + \alpha) - n \sin(k_1 t + \alpha)] = -k^2 x - 2n v_x.$$

(96) განტოლებების საფუძველზე გვაქვს

$$m w_x = X = F_x + F_{1x}.$$

შაგრამ

$$F_x = -k^2 m r_x = -k^2 m x,$$

ამიტომ

$$m w_x = -k^2 m x + F_{1x},$$

ანუ

$$-m k^2 x - 2 m n v_x = -k^2 m x + F_{1x},$$

საიდანაც

$$F_{1x} = -2 m n v_x.$$

ანალოგიურად ვპოულობთ

$$F_{1y} = -2 m n v_y.$$

მაშასადამე, საძიებელი ძალა $\vec{F}_1 = -2 m n \vec{v}$, ე. ი. გარემოს წინააღმდეგობის ძალა წერტილის სიჩქარის პროპორციულია და ამ სიჩქარის საწინააღმდეგოდაა მიმართული.

ამოცანათა კლასიფიკაცია*

ტ ბ რ ი ლ ი 14

| ჩ ბ უ შ ი | ამოცანათა ტიპები | |
|--|--|--|
| | წრფივი მოძრაობა | მრუდწირული მოძრაობა |
| 1-ელი (მოდრე წერტილზე მოღებული ერთი ძალა) | ამოცანები 26.13(649)— 26.15(651) | ამოცანები 26.8(652) 2.8(652) 26.36(672) 26.37(673) |
| მე-2 (მოდრე წერტილზე მოღებული რამდენიმე ძალა) | ამოცანები 26.1(637), 26.2(638), 26.4(640), 26.12(648), 26.17(653), 26.19(655), 26.22(658), 26.23(659), 26.25(661), 26.26(662) | ამოცანები 26.8(644), 26.10(646) 26.20(656), 26.27(663) 26.28(664), 26.33(669) 26.34(670), 26.35(671) |

* ამოცანათა ნომრები მიითვებულია მეშჩერსკის კრებულიდან, 1973 წ. და შემდგომი გამოცემისა.

§ 8. წერტილის დინამიკის მეორე ძირითადი ამოცანა

ეს ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ მოძრავ ნივთიერ წერტილზე მოქმედი მოცემული ძალების, ამ წერტილის მასის და მოძრაობის საწყისი პირობების (საწყისი მდებარეობისა და საწყისი სიჩქარის) საშუალებით განვსაზღვროთ ამ წერტილის მოძრაობა. ამ ამოცანის ამოხსნისათვის საჭიროა:

- 1) დავადგინოთ, თუ რა ძალები მოქმედებენ ნივთიერ წერტილზე;
- 2) შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები (110) ან (112) სახით;
- 3) მოვახდინოთ ამ განტოლებების ინტეგრირება;
- 4) განვსაზღვროთ ამ განტოლებების ინტეგრალებში შემავალი ნებისმიერი მუდმივები მოძრაობის საწყისი პირობების საშუალებით.

თუ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრირება დაიყვანება კვადრატურამდე, როგორც ქვემოთ მოყვანილ მაგალითებში, მაშინ ამ კვადრატურებს გამოვთვლით სათანადო საზღვრებში, ე. ი. გამოვთვლით განსაზღვრულ ინტეგრალებს. ამასთანავე ინტეგრირების ქვედა ზღვარი განისაზღვრება წერტილის მოძრაობის საწყისი პირობებით. მაშინ აღარ იქნება საჭირო ნებისმიერი მუდმივების განსაზღვრის აუცილებლობა.

შევნიშნოთ, რომ ი. მეშჩერსკის კრებულში მოთავსებული წერტილის დინამიკის მეორე ძირითადი ამოცანის შესაბამის თითქმის ყველა ამოცანაში ვხვდებით ორი ტიპის დიფერენციალურ განტოლებებს ან განცალკევებულ ცვლადებიან განტოლებებს, ან მუდმივკოეფიციენტებიან მეორე რიგის წრფივ განტოლებებს.

ამ პარაგრაფის ამოცანები შეიძლება გავყოთ შემდეგ სამ ძირითად ტიპად:

I. ამოცანები, რომლებიც ეკუთვნიან თავისუფალი ნივთიერი წერტილის წრფივ მოძრაობას.

II. ამოცანები, რომლებიც ეკუთვნიან თავისუფალი ნივთიერი წერტილის მრუდწირულ მოძრაობას.

III. ამოცანები, რომლებიც ეკუთვნიან არათავისუფალი ნივთიერი წერტილის მრუდწირულ მოძრაობას.

I ტიპის ამოცანები

ამ ტიპის ამოცანები, რომლებშიც განიხილება წერტილის წრფივი მოძრაობა, შეიძლება გავყოთ ორ ჯგუფად.

პირველი ჯგუფი

ამოცანები, რომლებშიც მოცემულ ნივთიერ წერტილზე მოდებული ძალების ტოლქმედი მუდმივია.

თუ წერტილის წრფივ მოძრაობის ტრაექტორიას მივიღებთ x ღერძად, მაშინ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება მიიღებს სახეს

$$m\ddot{x} = X = \text{const},$$

საიდანაც

$$\ddot{x} = \frac{X}{m} = \text{const}.$$

რადგან წერტილის წრფივი მოძრაობის დროს $w = \dot{x}$, ამიტომ $w = \text{const}$, ე. ი. წერტილის მოძრაობა თანაბარცვლადია. თანაბარცვლადი მოძრაობის დროს, კინემატიკიდან ცნობილი ფორმულის თანახმად, წერტილის მიერ გავლილი გზისათვის გვექნება

$$s = x - x_0 = v_0 t + \frac{w t^2}{2},$$

სადაც v_0 — წერტილის საწყისი სიჩქარეა. აქედან

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{X}{m} \cdot \frac{t^2}{2}. \quad (117)$$

ეს განტოლება გამოსახავს წერტილის წრფივი მოძრაობის კანონს მუდმივი ძალის მოქმედებით.

თუ ამოცანაში საჭიროა v სიჩქარის განსაზღვრა როგორც x მანძილის ფუნქცია, მაშინ (108) განტოლების მარცხენა მხარეს მივიყვანოთ შემდეგ სახემდე

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx},$$

ამიტომ (111) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{X}{m} = \text{const},$$

საიდანაც

$$\int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x \frac{X}{m} dx,$$

ანუ

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \frac{X}{m} (x - x_0),$$

ე. ი.

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2X}{m} (x - x_0). \quad (118)$$

მაგალითი 104. $m=0,5$ კგ მასის მქონე ნივთიერი წერტილი მოძრაობს მუდმივი $F=10$ ნ ძალის მოქმედებით. საწყის მომენტში წერტილის სიჩქარე უდრის $v_0=2$ მ/წმ. განსაზღვრეთ წერტილის სიჩქარე იმ მომენტში, როცა იგი გაივლის $s=5$ მ მანძილს.

ამოხსნა. რადგან წერტილის სიჩქარე უნდა იყოს განსაზღვრული როგორც მანძილის ფუნქცია, ამიტომ (118) ფორმულით გვაქვს

$$v^2 = v_0^2 + 2 \frac{X}{m} (x - x_0),$$

ე. ი.

$$v^2 = 4 + 2 \cdot \frac{10}{0,5} \cdot 5 = 204,$$

საიდანაც

$$v = 14,28 \text{ მ/წმ.}$$

მ ე ო რ ე ჯ გ უ ფ ი

ამოცანები, რომლებშიც ერთ ნივთიერ წერტილზე მოდებული ყველა ძალის ტოლქმედი წარმოადგენს f დროის ფუნქციას.

ამ შემთხვევაში მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$m\ddot{x} = X = f(t).$$

რადგან $\dot{x} = v_x = v$, ამიტომ ვლებულობთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას

$$m \frac{dv}{dt} = f(t),$$

ანუ

$$mdv = f(t)dt.$$

ამ განტოლების სათანადო საზღვრებში ინტეგრირებით ვლებულობთ

$$mv - mv_0 = \int_0^t f(t)dt,$$

საიდანაც

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t f(t) dt. \quad (119)$$

პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ x -ს, როგორც t დროის ფუნქციას, ე. ი. განვსაზღვრავთ წერტილის მოძრაობის განტოლებას.

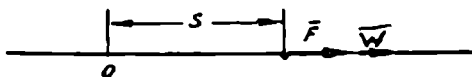
მაგალითი 105. წრფივად მოძრავ ნივთიერ წერტილზე მოქმედებს \vec{F} ძალა, რომელიც თანაბრად მცირდება დროში და T წამის გავლის შემდეგ ნულად იქცევა. როგორ სიჩქარეს მიაღწევს წერტილი T წამის გავლის შემდეგ და რა მანძილს გაივლის წერტილი ამ დროში, თუ საწყის მომენტში ($t=0$) წერტილის სიჩქარე უდრის ნულს, ხოლო მისი აჩქარება უდრის \vec{w}_0 -ს (ნახ. 141).

ამოხსნა. რადგან ნივთიერ წერტილზე მოქმედი ძალა დროის მსვლელობასთან ერთად მცირდება თანაბრად, ამიტომ $F = F_0 - at$, ამასთანავე $a = \text{const}$.

საწყის მომენტში წერტილის აჩქარება უდრის w_0 , ამიტომ $F_0 = mw_0$; გარდა ამისა, როცა $t = T$, პირობის თანახმად $F = 0$, ამიტომ

$$F_0 - aT = mw_0 - aT = 0; \text{ აქედან } a = \frac{mw_0}{T}$$

$$\text{და } F = mw_0 - \frac{mw_0}{T} \cdot t = mw_0 \left(1 - \frac{t}{T} \right).$$



ნახ. 141.

მაშასადამე, წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება (111) ტოლობის თანახმად ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$m \frac{dv}{dt} = F = mw_0 \left(1 - \frac{t}{T} \right), \text{ ანუ } dv = w_0 \left(1 - \frac{t}{T} \right) dt.$$

ამ განტოლების ინტეგრირებით $v_0 = 0$ -დან v -მდე და 0-დან t -მდე საზღვრებში ვღებულობთ

$$v = w_0 \left(t - \frac{t^2}{2T} \right).$$

რადგან $v = \frac{dx}{dt}$, ამიტომ $\frac{dx}{dt} = w_0 \left(t - \frac{t^2}{2T} \right)$, საიდანაც

$$dx = w_0 \left(t - \frac{t^2}{2T} \right) dt.$$

ამ განტოლების ინტეგრირებით 0-დან x -მდე და 0-დან t -მდე საზღვრებში, ვპოულობთ

$$x = \omega_0 \int_0^t t dt - \frac{\omega_0}{2T} \int_0^t t^2 dt = \frac{\omega_0 T^2}{2} \left(1 - \frac{t}{3T}\right).$$

ღროს T მომენტისათვის v_1 სიჩქარის და გავლილი x_1 გზის განსაზღვრისათვის საკმარისია წინა ტოლობებში მივიღოთ, რომ t უდრის T , წმ. მაშინ გვექნება

$$v_1 = \omega_0 \frac{T}{2} \quad \text{და} \quad x_1 = \frac{\omega_0 T^2}{3}.$$

მ ე ს ა მ ე ჯ გ უ ფ ი

ამოცანები, რომლებშიც მოცემულ ნივთიერ წერტილზე მოდებული ძალების ტოლქმედი წარმოადგენს ამ წერტილის კოორდინატის ფუნქციას. ამ შემთხვევაში წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$m\ddot{x} = X = f(x),$$

ანუ

$$m \frac{dv}{dt} = f(x).$$

ემ განტოლება რომ დაიყვანოთ განცალკებად ცვლადებიან განტოლებამდე, გარდაექმნათ მარცხენა მხარე

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

მაშინ

$$mv \frac{dv}{dx} = f(x),$$

ანუ

$$mv dv = f(x) dx. \quad (120)$$

ამ განტოლების სათანადო საზღვრებში ინტეგრირებით ვღებულობთ

$$\frac{mv^2 - mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^x f(x) dx. \quad (120')$$

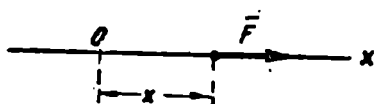
აქედან ვსაზღვრავთ v -ს, როგორც x მანძილის ფუნქციას, ე. ი.

$$v = \frac{dx}{dt} = \varphi(x),$$

ანუ ცვლადთა განცალკევების შემდეგ მივიღებთ $\frac{dx}{\varphi(x)} = dt$ და ამ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრირებით მივიღებთ x და t -ს შორის დამოკიდებულებას.

თუ $f(x)$ არის x ცვლადის წრფივი ფუნქცია, მაშინ (111) განტოლება — მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებაა. ამიტომ ამ განტოლების ამოსახსნელად შეიძლება ვისარგებლოთ ასეთი სახის დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრირების ზოგადი თეორიით, ე. ი. შევადგინოთ სათანადო მახასიათებელი განტოლება, ვიპოვოთ მისი ფესვები და შემდეგ დავეწეროთ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ზოგად ამონახსნაში შემაჯავლი ორი ნებისმიერი მუდმივი განისაზღვრება წერტილის მოძრაობის მოცემული საწყისი პირობებიდან.

მაგალითი 108. m მასის M ნივთიერი წერტილი მოძრაობს წრფივად Ox ღერძზე. წერტილი განიზიდება უძრავი O ცენტრიდან m მასის და x მანძილის პროპორციული \vec{F} ძალით, ამასთანავე პროპორციულობის



ნახ. 142.

კოეფიციენტი უდრის $k=4$. იპოვეთ წერტილის მოძრაობის კანონი, თუ მისი საწყისი მანძილი O ცენტრიდან $x_0=5$ მ-ია, ხოლო საწყისი სიჩქარე $v_0=2$ მ/წმ (ნახ. 142).

ამოხსნა. პირველი ხერხი. ამოცანის პირობის თანახმად $F=kmx$, ამიტომ მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$m\ddot{x} = kmx,$$

ანუ

$$\ddot{x} = 4x,$$

რადგან მოცემულ შემთხვევაში $f(x) = 4mx$, ამიტომ (120) ფორმულით გვაქვს

$$v dv = 4 x dx,$$

საიდანაც

$$\int_{v_0}^v v dv = 4 \int_{x_0}^x x dx = 2(x^2 - x_0^2),$$

ანუ

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = 2(x^2 - x_0^2),$$

ე. ო.

$$v = \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x^2 - 24}$$

ღა

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 24}} = 2dt,$$

აქედან

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 24}} = 2t,$$

ე. ო.

$$\ln|x + \sqrt{x^2 - 24}| \Big|_{x_0}^x = 2t,$$

ანუ

$$2t = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 24}}{6} \right|.$$

მაშასადამე,

$$x + \sqrt{x^2 - 24} = 6 e^{2t},$$

აქედან ვპოულობთ

$$x^2 - 24 = (6 e^{2t} - x)^2,$$

საიდანაც

$$x = \frac{3e^{4t} + 2}{e^{2t}},$$

ანუ

$$x = 3 e^{2t} + 2 e^{-2t}.$$

მეორე ხერხი. რადგან მოცემულ შემთხვევაში $f(x) = 4mx$ წარმოადგენს x -ის წრფივ ფუნქციას, ამიტომ დიფერენციალური განტოლება (120) წარმოადგენს მეორე რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას მუდმივი კოეფიციენტებით.

ამ განტოლების ამოხსნისათვის ვისარგებლოთ მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრირების თეორიით.

შევადგინოთ სათანადო მახასიათებელი განტოლება: $\mu^2 - 4 = 0$. ვიპოვოთ მისი ფესვები: $\mu_1 = 2$ და $\mu_2 = -2$.

მაშასადამე, ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}.$$

C_1 და C_2 მუდმივებს განვსაზღვრავთ მოძრაობის საწყისი პირობებით. ამასთანავე ჯერ ვიპოვიოთ წერტილის სიჩქარეს უკანასკნელი განტოლების t -თი გაწარმოებით, გვექნება

$$v = \frac{dx}{dt} = 2 C_1 e^{2t} - 2 C_2 e^{-2t}.$$

საწყის მომენტში, როცა $t=0$ პირობის თანახმად გვაქვს $x_0=5$ და $v_0=2$. მაშასადამე,

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 5, \\ 2 C_1 - 2 C_2 &= 2; \end{aligned}$$

საიდანაც

$$C_1 = 3, \quad C_2 = 2;$$

ამგვარად,

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t}.$$

მ ე ო თ ხ ე ჯ გ უ ფ ი

ამოცანები, რომლებშიც მოცემულ ნივთიერ წერტილზე მოდებულ იყვება ძალის ტოლქმედი დამოკიდებულია ამ წერტილის სიჩქარეზე, რასაც ადგილი აქვს წინაღობის გარემოში წერტილის მოძრაობის დროს.

ამ შემთხვევაში მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$m \frac{dv}{dt} = f(v),$$

ანუ ცვლადების განცალკევების შემდეგ

$$\frac{m dv}{f(v)} = dt.$$

აქედან

$$m \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)} = \int_0^t dt = t. \quad (121)$$

თუ მოვახდენთ ინტეგრირებას და შემდეგ მიღებულ განტოლებას ამოვხსნით v -ს მიმართ, ვღებულობთ წერტილის v სიჩქარეს, როგორც t დროის ფუნქციას, ე. ო.

$$v = \frac{dx}{dt} = \Psi(t);$$

მაშასადამე,

$$dx = \Psi(t) dt$$

და

$$x - x_0 = \int_0^t \Psi(t) dt. \quad (122)$$

ეს განტოლება გამოსახავს წერტილის მოძრაობის საძიებელ განტოლებას. თუ ამოცანაში საჭიროა v სიჩქარის განსაზღვრა x მანძილის ფუნქციის სახით, მაშინ (108) განტოლების მარცხენა მხარეს გარდავქმნით

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

მაშინ (109) განტოლება მიიღებს სახეს

$$mv \frac{dv}{dx} = f(v),$$

ანუ ცვლადების განცალკევების შემდეგ

$$\frac{mvdv}{f(v)} = dx,$$

საიდანაც

$$x - x_0 = \int_{v_0}^v \frac{mvdv}{f(v)}. \quad (123)$$

მაგალითი 107. $m = 0,1$ კგ მასის მქონე ნიეთიერი წერტილი მოძრაობს წრფივად $F = 0,3$ ნ მუდმივი ძალის მოქმედებით. მოძრაობა წარმოებს გარემოში, რომლის წინააღობის ძალა სიჩქარის ფუნქციაა:

$$R = 0,2v + 0,1v^2,$$

სადაც v წერტილის სიჩქარეა. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის კანონი, თუ წერტილის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია (ნახ. 143).

ამოხსნა. გამოვსახოთ ნახაზზე წერტილზე მოქმედი ძალები. \vec{F} ძალა მიმართულია წერტილის მოძრაობის მიმართულების გასწვრივ. \vec{R} ძალა კი სიჩქარის საწინააღმდეგოდ. (111) ფორმულის თანახმად წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება მიიღებს სახეს

$$0,1 \ddot{x} = 0,3 - 0,2v - 0,1v^2.$$

რადგან მოცემულ შემთხვევაში წერტილზე მოდებული ყველა ძალის ტოლქმედი წარმოადგენს სიჩქარის ფუნქციას, ე. ი.

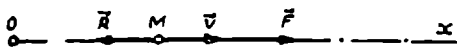
$$f(v) = 0,3 - 0,1v^2 - 0,2v,$$

ამიტომ (121) ფორმულით გვაქვს

$$t = \int_{v_0}^v \frac{dv}{3-2v-v^2} = \int_{v_0}^v \frac{dv}{4-(1+v)^2}$$

საიდანაც

$$t = \frac{1}{4} \ln \frac{3+v}{3(1-v)}$$



ნახ. 143.

ამ განტოლებიდან ვპოულობთ v -ს

$$v = \frac{e^{4t} - 1}{e^{4t} + \frac{1}{3}}$$

შემდეგ ვსარგებლობთ (122) განტოლებით და ვსაზღვრავთ წერტილის საძებნ მოძრაობის კანონს

$$x - x_0 = \int_0^t \frac{e^{4t} - 1}{e^{4t} + \frac{1}{3}} dt$$

ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად მოვახდინოთ ცვლადების შეცვლა

$$e^{4t} = z,$$

მაშინ

$$dz = 4z dt$$

და

$$\int_0^t \frac{e^{4t} - 1}{e^{4t} + \frac{1}{3}} dt = \int_1^z \frac{z-1}{z + \frac{1}{3}} \cdot \frac{dz}{4z} = \frac{1}{4} \left\{ -12t + 4 \ln \frac{3e^{4t} + 1}{4} \right\}$$

მაშასადამე,

$$x - x_0 = -3t + \ln \frac{3e^{4t} + 1}{4}$$

II ტიპის ამოცანები

ამ ტიპის ამოცანები, რომლებშიც განხილულია თავისუფალი ნივთიერი წერტილის მრუდწირული მოძრაობა, შეიძლება აგრეთვე დაეყოს ოთხ ჯგუფად.

ამოცანები, რომლებშიც ნივთიერი წერტილის მოძრაობა წარმოებს მუდმივი ძალის მოქმედებით.

მაგალითი 108. ყუმბარის საწყისი სიჩქარე უდრის $v_0=490$ მ/წმ. კოორდინატთა სათავიდან პორიზონტისადმი რა α კუთხით უნდა გაეტყორცნოთ ეს ყუმბარა, იმისათვის, რომ იგი მოხვდეს წერტილში, რომლის კოორდინატებია $y=700$ მ, $z=680$ მ? პაერის წინააღმდეგობას უგულებელვყოფთ.

ამოხსნა. z ღერძი მიემართოთ ვერტიკალის გასწვრივ ზემოთ, ხოლო y ღერძი პორიზონტზე ისე, რომ ყუმბარის საწყისი სიჩქარე იმყოფებოდეს Ozy სიბრტყეში. მაშინ, როგორც ცნობილია (იხ. მაგალითად, ი. ვორონკოვის თეორიული მექანიკის კურსი, § 100), ყუმბარა იმოძრაეებს ვერტიკალურ zOy სიბრტყეში, ამასთანავე მისი მოძრაობის განტოლებებს აქვს სახე

$$y = v_0 t \cos \alpha, \quad z = v_0 t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2}.$$

აქედან t -ს გამორიცხვით ვღებულობთ ტრაექტორიის განტოლებას (პარაბოლა)

$$z = y \operatorname{tg} \alpha - \frac{g y^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

ანუ, თუ $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ -ს შევცვლით $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ -თი, ვღებულობთ

$$z = y \operatorname{tg} \alpha - \frac{g y^2}{2 v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

ჩავსვათ აქ $y=700$; $z=680$; $g=9,8$; $v_0=490$
მნიშვნელობები, მივიღებთ

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - 70 \operatorname{tg} \alpha + 69 = 0.$$

თუ ამ კვადრატულ განტოლებას ამოვხსნით $\operatorname{tg} \alpha$ -ს მიმართ, ვპოულობთ

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = 69,$$

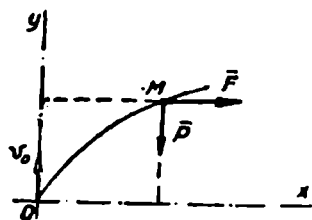
საიდანაც

$$\alpha_1 = 45^\circ; \quad \alpha_2 \approx 89^\circ.$$

მაგალითი 109. m მასის მქონე M ნაწილაკი, რომელიც ატარებს უარყოფითი ელექტრონის e მუხტს, შედის პორიზონტალური მიმართულების მქონე მუდმივი E დაძაბულობის ერთგვაროვან ელექტრულ ველში, ვერტიკალური \vec{s}_0 სიჩქარით. განსაზღვრეთ ნაწილაკის შემდგომი მოძრაობა თუ ცნობილია, რომ ელექტრულ ველში მასზე მოქმედებს

ძალა $F = eE$, რომელიც მიმართულია ველის დაძაბულობის საწინააღმდეგოდ და მხედველობაში ვიღებთ სიმძიმის P ძალის მოქმედებას (ნახ. 144).

ამოხსნა. კოორდინატთა O სათავედ ავირჩიოთ ნაწილაკის საწყისი მდებარეობა, x ღერძი მიემართოს კორიზონტალურად, ველის დაძაბულობის მიმართულების საწინააღმდეგოდ, ხოლო y ღერძი ვერტიკალურად ზემოთ (ნახ. 144). მაშინ \vec{P} და \vec{F} ძალების ტოლქმედის გეგმილები x და y ღერძებზე სათანადოდ ტოლია:



ნახ. 144.

$$X = F = eE = \text{const}, \quad Y = -P - mg = \text{const}.$$

(110) განტოლებების თანახმად, ნაწილაკის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს ექნება სახე

$$m\ddot{x} = eE;$$

$$m\ddot{y} = -mg,$$

ანუ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{eE}{m}; \quad \frac{dy}{dt} = -g.$$

აქედან

$$dx = \frac{eE}{m} dt; \quad dy = -g dt.$$

ამ განტოლებების სათანადო ზღვრებში ინტეგრირებით ვღებულობთ

$$x - x_0 = \int_0^t \frac{eE}{m} dt = \frac{eE}{m} t; \quad y - y_0 = - \int_0^t g dt = -gt.$$

მაგრამ $x_0 = v_{0x} = 0$ და $y_0 = v_{0y} = v_0$, ამიტომ

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{eE}{m} t, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = v_0 - gt,$$

ანუ

$$dx = \frac{eE}{m} t dt, \quad dy = (v_0 - gt) dt.$$

აქედან ინტეგრირებით ვღებულობთ

$$x - x_0 = \frac{eE}{m} \int_0^t t dt = \frac{eE}{2m} t^2.$$

$$y - y_0 = v_0 \int_0^t dt - g \int_0^t t dt = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

რადგან საწყის მომენტში ნაწილაკი იმყოფება კოორდინატთა სათავში, ამიტომ $x_0 = y_0 = 0$ და, მაშასადამე,

$$x = \frac{eE}{2m} t^2,$$

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

ამ განტოლებებით განისაზღვრება M ნაწილაკის მოძრაობა.

მკითხველს საშუალება ეძლევა დაამტკიცოს, რომ ნაწილაკის სიჩქარის გეგმილი \vec{F} და \vec{P} ძალების ტოლქმედისადმი მართობულად გატარებულ წრფეზე უცვლელი რჩება

მეორე ჯგუფი

ამოცანებში, რომლებშიც ნივთიერ წერტილზე მოდებული ყველა ძალის ტოლქმედი და, მაშასადამე, მისი გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე, წარმოადგენენ დროის ფუნქციებს. ამ შემთხვევაში

$$X = f_1(t); \quad Y = f_2(t); \quad Z = f_3(t).$$

ამასთანავე $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ ფუნქციები ცნობილია. მაშინ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს აქვს სახე:

$$m\ddot{x} = f_1(t), \quad m\ddot{y} = f_2(t), \quad m\ddot{z} = f_3(t).$$

ამ განტოლებიდან თითოეული შეიძლება იყოს ინტეგრირებული ცალ-ცალკე იმავე ხერხით, როგორც I ტიპის მეორე ჯგუფის ამოცანებში.

მესამე ჯგუფი

ამოცანები, რომლებშიც მოცემულ ნივთიერ წერტილზე მოდებული ყველა ძალის ტოლქმედი დამოკიდებულია ამ წერტილის მდებარეობაზე, ე. ი. წარმოადგენს მისი კოორდინატების ფუნქციას. ასეთი შემთხვევა ჩვენ გვაქვს; მაგალითად, მაშინ, როცა ნივთიერი წერტილი მიიზიდება მოცემული უძრავი ცენტრისაკენ ან განიზიდება მისგან ძალით, რომელიც დამოკიდებულია ამ ცენტრიდან წერტილის დაშორების მანძილზე.

მაგალითი 110. m მასის ნივთიერი წერტილი განიზიდება უძრავი O წერტილიდან $\vec{F} = c\vec{r}$ ძალით, სადაც \vec{r} არის M წერტილის დაშორება O ცენტრიდან, ხოლო c — მუდმივი კოეფიციენტი. საწყის მომენტში

მანძილი $r_0 = OM_0 = a$, ხოლო წერტილის \vec{v}_0 სიჩქარე \vec{OM}_0 მიმართულების მართობულია. იპოვეთ M წერტილის მოძრაობის კანონი და მისი ტრაექტორია (ნახ. 145).

ამოხსნა. მივიღოთ O ცენტრი კოორდინატთა სათავედ, x ღერძი მიემართოს OM_0 -ის გასწვრივ ისე, როგორც ეს 145-ე ნახაზზეა ნაჩვენები. რადგან $\vec{F} = c\vec{r}$, ამიტომ ამ ვექტორული ტოლობის ორივე მხარის Ox და Oy ღერძებზე დაგეგმილებით და იმის მხედველობაში მიღებით, რომ $r_x = x$, $r_y = y$, სადაც x და y — მოძრაი წერტილის კოორდინატებია, ვღებულობთ

$$F_x = cx, \quad F_y = cy.$$

M წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები, (110) განტოლებების თანახმად, ღებულობენ სახეს:

$$m\ddot{x} = cx$$

$$m\ddot{y} = cy,$$

ანუ, თუ მივიღებთ, რომ $\frac{c}{m} = k^2$.

$$\ddot{x} - k^2x = 0,$$

$$\ddot{y} - k^2y = 0.$$

ამ წრფივი განტოლებიდან თითოეული შეიძლება გავაინტეგრიროთ ცალ-ცალკე, ამისათვის შევადგინოთ მახასიათებელ განტოლებას $u^2 - k^2 = 0$ და ვიპოვიოთ მის ფესვებს:

$$u_1 = k, \quad u_2 = -k.$$

მაშასადამე, წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების ზოგადი ამოხსნა იქნება

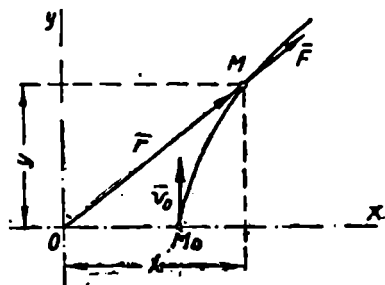
$$x = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt},$$

$$y = c_3 e^{kt} + c_4 e^{-kt};$$

აქედან

$$\dot{x} = k(c_1 e^{kt} - c_2 e^{-kt}),$$

$$\dot{y} = k(c_3 e^{kt} - c_4 e^{-kt}).$$



ნახ. 145.

დარჩა c_1, c_2, c_3, c_4 მუდმივების განსაზღვრა. როცა $t=0$, გვაქვს $x_0=a; y_0=0; v_{0x}=\dot{x}_0=0; v_{0y}=\dot{y}_0=v_0$.

წინა განტოლებებში ამ მნიშვნელობების ჩასმით ვღებულობთ:

$$\begin{aligned}x_0 &= C_1 + C_2 = a; & \dot{x}_0 &= k(C_1 - C_2) = 0; \\y_0 &= C_3 + C_4 = 0; & \dot{y}_0 &= k(C_3 - C_4) = v_0.\end{aligned}$$

აქედან ვპოულობთ

$$C_1 = C_2 = \frac{a}{2}; \quad C_3 = -C_4 = \frac{v_0}{2k}.$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned}x &= \frac{a}{2}(e^{kt} + e^{-kt}), \\y &= \frac{v_0}{2k}(e^{kt} - e^{-kt}).\end{aligned}$$

ამ განტოლებებით განისაზღვრება M წერტილის მოძრაობა. მისი ტრაექტორიის განსაზღვრისათვის საკმარისია ამ განტოლებებიდან t პარამეტრის გამორიცხვა. ამისათვის მივიღოთ, რომ $\frac{\dot{y}_0}{k} = b$ და წინა განტოლებები გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}\frac{x}{a} &= \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} = ch(kt); \\ \frac{y}{b} &= \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2} = sh(kt).\end{aligned}$$

თუ ამ განტოლებებს ავიყვანთ კვადრატში და პირველიდან გამოვაკლებთ მეორეს, მივიღებთ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

M წერტილის ტრაექტორიაა ჰიპერბოლა.

მ ე ო თ ხ ე ჯ გ უ ფ ი

ამოცანები, რომლებშიც განიხილება ნივთიერი წერტილის მოძრაობა წინალობის მქონე გარემოში ნებისმიერი (მუდმივი ან ცვლადი) მოცემული ძალის მოქმედებით; ამასთანავე გარემოს წინალობის ძალა დამოკიდებულია ნივთიერი წერტილის სიჩქარეზე.

მაგალითი 111. $m=0,1$ კგ მასის M წერტილი მოძრაობს უძრავი O

ცენტრისაკენ მიზიდულობის ძალის მოქმედებით, რომელიც ამ ცენტრიდან წერტილამდე მანძილის პროპორციულია, ამასთანავე პროპორციულობის კოეფიციენტი $c=0,6$ ნ/სმ. მოძრაობა ხდება გარემოში, რომლის წინაღობა სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია, ამასთანავე პროპორციულობის კოეფიციენტი $\mu=0,5 \frac{\text{ნ}\cdot\text{წმ}}{\text{გ}}$. საწყისი პირობებია:

$$x_0=0, \quad y_0=30 \text{ მ}, \quad v_{0x}=x_0=20 \text{ მ/წმ}, \quad v_{0y}=y_0=10 \text{ მ/წმ}.$$

იპოვეთ წერტილის მოძრაობის კინემატიკური განტოლებები (ნახ. 146).

ამოხსნა. O ცენტრისაკენ M წერტილის მიმზიდველი ძალა აღენიშნოთ F -ით, ხოლო M წერტილის სიჩქარის საწინააღმდეგოდ მიმართული გარემოს წინაღობის ძალა F' -ით. მაშინ $\vec{F} = -c\vec{r}$ და $\vec{F}' = -\mu\vec{v}$.

აღენიშნოთ α და β -თი სათანადოდ M წერტილის \vec{r} რადიუს-ვექტორის და \vec{v} სიჩქარის მიერ x ღერძთან შედგენილი კუთხეები და შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები დეკარტის კოორდინატებში:

$$m\ddot{x} = X = -F \cos\alpha - F' \cos\beta = -cr \cos\alpha - \mu v \cos\beta;$$

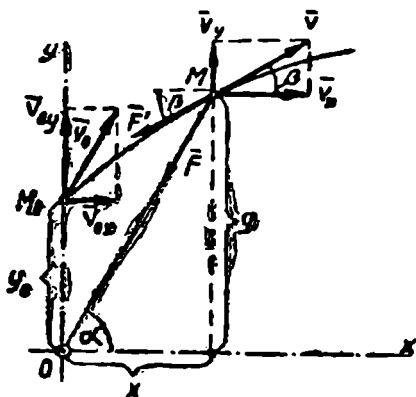
$$m\ddot{y} = Y = -F \sin\alpha - F' \sin\beta = -cr \sin\alpha - \mu v \sin\beta,$$

ანუ რიცხვითი მნიშვნელობების ჩასმის შემდეგ

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = 0;$$

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 0.$$

ამოცანის შემდგომი ამოხსნა დამოკიდებულია მიღებული დიფერენციალური განტოლებების სახეზე. მოცემულ შემთხვევაში გვაქვს ურთიერთდამოუკიდებელი მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებები, მათი ამოხსნისათვის შეიძლება ვისარგებლოთ მათემატიკის კურსიდან ცნობილი ასეთი განტოლებების ინტეგრირების თეო-



ნახ. 146.

რიით. შევადგინოთ პირველი განტოლების შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება

$$u^2 + 5u + 6 = 0,$$

აქედან

$$u_1 = -2; \quad u_2 = -3.$$

მაშასადამე, მოცემული დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამოხსნა გამოისახება შემდეგნაირად

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}.$$

ზუსტად ანალოგიურად მეორე დიფერენციალური განტოლებისათვის ვღებულობთ

$$y = c_3 e^{-2t} + c_4 e^{-3t}.$$

აქედან

$$\dot{x} = -2 C_1 e^{-2t} - 3 C_2 e^{-3t}, \quad \dot{y} = -2 C_3 e^{-2t} - 3 C_4 e^{-3t}$$

თუ x , y , \dot{x} და \dot{y} -ის მიღებულ გამოსახულებებში ჩავსვამთ მოცემულ საწყის პირობებს $t_0 = 0$; $x_0 = 0$, $y_0 = 30$; $\dot{x}_0 = 20$; $\dot{y}_0 = 10$, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2; & 20 &= -2 C_1 - 3 C_2, \\ 30 &= C_3 + C_4; & 10 &= -2 C_3 - 3 C_4. \end{aligned}$$

აქედან

$$C_1 = 20; \quad C_2 = -20; \quad C_3 = 100; \quad C_4 = -70.$$

ამგვარად, საბოლოოდ ვღებულობთ წერტილის მოძრაობის შემდეგ კინემატიკურ განტოლებებს:

$$x = 20(e^{-2t} - e^{-3t}); \quad y = 10(10e^{-2t} - 7e^{-3t}).$$

III ტიპის ამოცანები

ამ ტიპის ამოცანები, რომლებშიც განიხილება არათავისუფალი ნივთიერი წერტილის მრუდწირული მოძრაობა, შეიძლება გაიყოს ორ ჯგუფად.

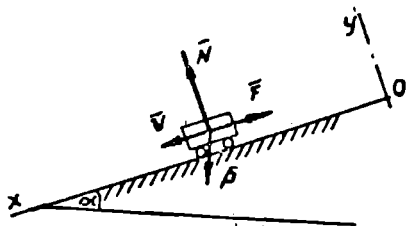
პირველი ჯგუფი

ამოცანები, რომლებშიც განიხილება უძრავ წირზე არათავისუფალი წერტილის მოძრაობა.

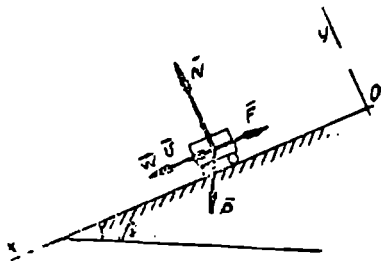
ამ შემთხვევაში, რადგანაც წერტილის ტრაექტორია ცნობილია, უფრო მარტივია ვისარგებლოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენცია-

ლური განტოლებებით ბუნებრივი (112) სახით, ამასთანავე უნდა გავითვალისწინოთ ბმის რეაქციები — ნორმალური რეაქცია და ხახუნის ძალა (თუ ხახუნს ვიღებთ მხედველობაში).

მაგალითი 112. ცნობილია, რომ α კუთხის დაქანების მქონე რკინიგზის წრფე უბანზე ვაგონი გარკვეული საწყისი სიჩქარის მიღების შემდეგ, მოძრაობს დაქანების გასწვრივ ქვემოთ თანაბრად.



ნახ. 147.



ნახ. 148.

მივიღოთ, რომ მოძრაობისადმი წინაღობა პროპორციულია ბორბლების რელსებზე ნორმალური წნევისა და განვსაზღვროთ, ამ ვაგონის მოძრაობის კანონი, თუ იგი იმოდრავებს ქვემოთ საწყისი სიჩქარის გარეშე $\beta > \alpha$ დაქანების კუთხის მქონე გზის წრფე უბანზე (ნახ. 147 და ნახ. 148).

ამოხსნა. ვაგონი ასრულებს გადატანით მოძრაობას \vec{P} წონის, \vec{N} ნორმალური რეაქციის და სიბრტყის გასწვრივ ზემოთ, ვაგონის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ მიმართული წინააღმდეგობის \vec{F} ძალის მოქმედებით.

ჯერ განვიხილოთ ვაგონის თანაბარი მოძრაობა α დახრის კუთხის მქონე გზაზე. (110) განტოლების თანახმად გვექნება:

$$m\ddot{x} = mg \sin\alpha - F;$$

$$m\ddot{y} = mg \cos\alpha - N.$$

რადგან ვაგონი მოძრაობს წრფივად და თანაბრად, ამიტომ $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$ და მაშინ $N = mg \cos\alpha$ და $F = mg \sin\alpha$. ამოცანის პირობის თანახმად

$$F = fN,$$

სადაც f — წინააღმდეგობის კოეფიციენტი; მაშასადამე, $mg \sin\alpha = f mg \cos\alpha$, საიდანაც $f = \tan\alpha$.

ახლა განვიხილოთ მეორე შემთხვევა, როცა ვაგონი მოძრაობს β დახრის კუთხის მქონე გზის უბანზე.

წინას ანალოგიურად (110) განტოლებების თანახმად გვექნება (იხ. ნახ. 148):

$$m\ddot{x} = mg \sin\beta - F,$$

$$m\ddot{y} = -mg \cos\beta + N = 0.$$

რადგან ვაგონის x აჩქარება x ღერძის პარალელურია (ნახ. 148), ამიტომ $\ddot{y} = \ddot{y}' = 0$, ხოლო $N = mg \cos\beta$ და $F = fmg \cos\beta$, მაშასადამე, $m\ddot{x} = mg \sin\beta - fmg \cos\beta$, ანუ f -ის მნიშვნელობის ჩასმით და m -ზე შეკვეცით ვღებულობთ

$$\ddot{x} = g(\sin\beta - tg\alpha \cdot \cos\beta),$$

ანუ

$$\ddot{x} = \frac{g}{\cos\alpha} \cdot \sin(\beta - \alpha) = \text{const.}$$

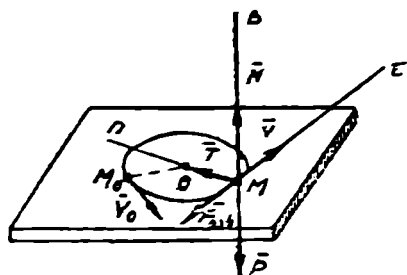
მაშასადამე, ვაგონი მოძრაობს მუდმივი $w = \frac{g}{\cos\alpha} \cdot \sin(\beta - \alpha)$ აჩქარებით, ამიტომ უსაწყისო სიჩქარით თანაბრაჩქარებული მოძრაობის დროს გავლილი გზის ფორმულით ვღებულობთ

$$x = \frac{wt^2}{2} = \frac{gt^2}{2\cos\alpha} \sin(\beta - \alpha).$$

ეს არის ვაგონის საძიებელი მოძრაობის კანონი.

მაგალითი 113. მაგილის პორცელანოვანი ზედაპირზე მდებარე $P =$

$= 1,96$ ნ წონის ნივთიერი წერტილი მიბმულია უძრავ O წერტილთან $l = 35$ სმ სიგრძის ძაფით. დადგინებული ძაფის მიმართულების მართობულად წერტილს მინიჭებული აქვს $v_0 = 4,9$ მ/წმ საწყისი სიჩქარე, რის შემდეგ წერტილი ზედაპირზე შემოწერს წრეწირს (ნახ. 149). იპოვეთ წერტილის სიჩქარე და ძაფის დაჭიმულობა მოძრაობის დაწყებიდან 1 წმ შემდეგ, თუ ხახუნის კოეფიციენტი უდრის $f = 0,25$.



რაობის დაწყებიდან 1 წმ შემდეგ, თუ ხახუნის კოეფიციენტი უდრის $f = 0,25$.

ამოხსნა. მოცემულ ნივთიერ წერტილზე მოდებულია: წონა \vec{P} , მაგიდის ნორმალური რეაქცია \vec{N} , ხახუნის ძალა $F_{\text{ხახ}} = fN$ და ძაფის დაჭიმულობა \vec{T} .

შევედგინოთ წერტილის მოძრაობის განტოლებები ეილერის ფორმით (მხებზე, ნორმალზე და ბინორმალზე გეგმილებში):

$$m \frac{dv}{dt} = -F_{\text{ხახ}} = -fN; \quad \frac{mv^2}{\rho} = T; \quad 0 = N - P.$$

ბოლო განტოლებიდან $N = P = mg$; მაშასადამე, $m \frac{dv}{dt} = -fmg$,

საიდანაც $dv = -fgdt$, ხოლო $v = -fgt + C$.

რადგან, როცა $t=0$; $v=v_0$, ამიტომ $C=v_0$ და $v=v_0 - fgt$. როცა $t=1$ და ამოცანის რიცხვითი მონაცემების დროს გვექნება $v=4,9 - 0,25 \cdot 9,8 = 2,45$ მ/წმ.

ეილერის მეორე განტოლებიდან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\rho = l = 0,35$ მ, ვპოულობთ ძაფის დაჭიმულობას $t=1$ წმ მომენტში

$$T = \frac{mv^2}{l} = \frac{Pv^2}{gl} = \frac{1,96 \cdot 2,45^2}{0,35 \cdot 9,8} = 3,43 \text{ ნ.}$$

მეორე ჯგუფი

მეორე ჯგუფს ეკუთვნის ამოცანები, რომლებშიც განიხილება წერტილის მრუდწირული მოძრაობა მოცემულ უძრავ ზედაპირზე.

ამ ამოცანებში საჭიროა წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების შედგენა დეკარტის კოორდინატებში. ამასთანავე უნდა გავითვალისწინოთ, მოძრავ წერტილზე მოდებული ყველა ძალის \vec{F} ტოლქმედის გარდა, ზედაპირის ნორმალური \vec{N} რეაქცია და ხახუნის $\vec{F}_{\text{ხახ}}$ ძალა. ამიტომ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს აქვს სახე:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= E_x + N_x + F_x^{\text{ხახ}}; \\ m\ddot{y} &= F_y + N_y + F_y^{\text{ხახ}}; \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z + F_z^{\text{ხახ}}. \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

თუ ამ განტოლებებს დაეუმატებთ კულონის განტოლებას

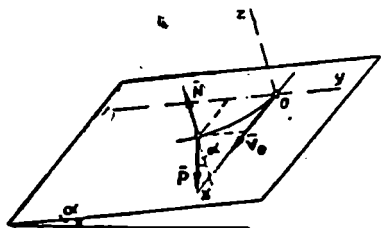
$$F_{\text{ხახ}} = fN,$$

სადაც f — ხახუნის კოეფიციენტი, და ბმის განტოლებას, ე. ი. იმ ზე-

დაპირის განტოლებას $\varphi(x, y, z) = 0$, რომელზედაც გადაადგილება წერტილი, მაშინ მივიღებთ ხუთი განტოლების სისტემას, საიდანაც შეიძლება ყველა ხუთი x, y, z, N და $F_{\text{ხ}}$ სიდიდის განსაზღვრა. თუ ხაზი არ არსებობს, მაშინ, (124) განტოლების მარჯვენა მხრიდან უკანასკნელი წევრები, ცხადია, ქრებიან.

მაგალითი 114. α კუთხით დახრილ გლუვ სიბრტყეზე, საკუთარი P წონის მოქმედებით მოძრაობს ნივთიერი M წერტილი; მისი საწყისი

პოზიციონტალური \vec{s}_0 სიჩქარე ამ სიბრტყის უდიდესი დაქანების ხაზის მართობულია. განსაზღვრეთ ამ წერტილის მოძრაობა და ტრაექტორია, აგრეთვე დახრილი სიბრტყის რეაქცია (ნახ. 150).



ნახ. 150.

ამოხსნა. ავირჩიოთ კოორდინატთა სათავე ნივთიერი წერტილის საწყის მდებარეობაში, ხოლო x და y ღერძები დახრილ სიბრტყეში მდებარე, ამასთანავე x ღერძი — პოზიციონტალურია, y ღერძი კი — უდიდესი დაქანების ხაზის პარალელურია; z ღერძი მივმართოთ ამ დახრილი სიბრტყის ნორმალის გასწვრივ, რადგან M წერტილზე მოქმედებს ვერტიკალურად ქვემოთ მიმართული სიმძიმის \vec{P} ძალა და დახრილი სიბრტყის მართობული ამ სიბრტყის \vec{N} რეაქცია, ამიტომ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები ჩაიწერება ასე:

$$m\ddot{x} = X = 0;$$

$$m\ddot{y} = Y = -P \sin \alpha = -mg \sin \alpha;$$

$$m\ddot{z} = Z = N - P \cos \alpha.$$

რადგან M წერტილი მოძრაობს xOy სიბრტყეში, ამიტომ $z = 0$ (ბმის განტოლება) და, მაშასადამე, $\dot{z} = \ddot{z} = 0$, ამიტომ $N - P \cos \alpha = 0$, საიდანაც $N = P \cos \alpha$.

დარჩა პირველი ორი განტოლების ინტეგრირება, რომლებიც ასე გადაიწერება:

$$\frac{dx}{dt} = 0;$$

$$\frac{dy}{dt} = -g \sin \alpha.$$

შათი ინტეგრირებით მივიღებთ

$$\dot{x} = \text{const} = \dot{x}_0; \quad \dot{y} = \dot{y}_0 = -gt \sin \alpha,$$

მაგრამ

$$\dot{x}_0 = v_{0x} = v_0, \quad \dot{y}_0 = v_{0y} = 0$$

და ამიტომ

$$x = \frac{dx}{dt} = v_0; \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -gt \sin \alpha.$$

აქედან ინტეგრირებით და მხედველობაში იმის მიღებით, რომ $x_0 = y_0 = 0$, ვპოულობთ

$$x = v_0 t, \quad y = -\frac{gt^2}{2} \sin \alpha.$$

ამ განტოლებებით განისაზღვრება M წერტილის მდებარეობა დახრილ სიბრტყეზე.

აქედან t პარამეტრის გამორიცხვით ვღებულობთ ამ წერტილის ტრაექტორიას

$$y = -\frac{g \sin \alpha}{2v_0^2} x^2.$$

ეს არის Ox ღერძის ზემოთ განლაგებული პარაბოლა.

ახლა ვნახოთ, როგორ შეიძლება ამ ამოცანის ამოხსნა, თუ მხედველობაში მივიღებთ დახრილ სიბრტყესა და ნივთიერ წერტილს შორის ხახუნის ძალას. ეს ძალა $F_{\text{ხხ}} = fN$, სადაც f — ხახუნის კოეფიციენტი.

ცხადია, M წერტილის მოძრაობის მესამე (რომელიც z ღერძს ეკუთვნის) დიფერენციალური განტოლება უცვლელი რჩება და ამიტომ $N = P \cos \alpha$, მაშასადამე, $F_{\text{ხხ}} = fP \cos \alpha = \text{const}$, რადგან ხახუნის ძალა მიმართულია \vec{v} სიჩქარის მიმართულების საწინააღმდეგოდ, ამიტომ

$$\vec{F}_{\text{ხხ}} = -fP \cos \alpha \cdot \frac{\vec{v}}{v};$$

საიდანაც

$$F_{\text{ხხ}x} = -fP \cos \alpha \cdot \frac{v_x}{v} = -fP \cos \alpha \cdot \frac{\dot{x}}{v};$$

$$F_{\text{ხხ}y} = -fP \cos \alpha \cdot \frac{v_y}{v} = -fP \cos \alpha \cdot \frac{\dot{y}}{v}.$$

ჰ. ტ. აიზენბერგი და სხვ.

მაშასადამე, M წერტილის xOy სიბრტყეში მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს, m -ზე შეყვეცის შემდეგ, აქვს სახე:

$$\ddot{x} = -fg \cos \alpha \cdot \frac{x}{y}; \quad \ddot{y} = -g \sin \alpha - fg \cos \alpha \cdot \frac{y}{x}.$$

ამ დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრირება შეიძლება შევასრულოთ 'მიახლოებითი მეთოდების გამოყენებით.

მაგალითი 115. m მასის მძიმე ნივთიერი ნაწილაკი მოძრაობს $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ წრიული ცილინდრის შიგა არაგლუვ ზედაპირზე. ნაწილაკსა და ცილინდრს შორის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის k -ს, საწყის მომენტში ნაწილაკი იმყოფება Ox ღერძზე და ღებულობს Ox ღერძის მართობულად მიმართულ და xOy სიბრტყესთან α კუთხით

დახრილ v_0 საწყის სიჩქარეს. შეადგინეთ ნაწილაკის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები და განსაზღვრეთ მისი წნევა ბმაზე. მოახდინეთ მიღებული განტოლებების ინტეგრირება გლუვი ზედაპირის შემთხვევაში ($k=0$) (ნახ. 151).

ამოხსნა. $M(x, y, z)$ ნაწილაკი მოძრაობს სამი ძალის მოქმედებით: ვერტიკალურად ქვემოთ მიმართული \vec{P} წონისა, ცილინდრის ზედაპირს შიგა ნორმალის გასწვრივ მიმართული \vec{N} ნორმალური რეაქციის ძალისა და \vec{S} სიჩქარის ვექტორის საწინააღმდეგოდ მიმართული ხახუნის $\vec{F}_{\text{ხახუნ}}$ ძალის მოქმედებით. ვიპოვოთ ამ ძალების გეგმილები თითოეულ საკოორდინატო ღერძზე:

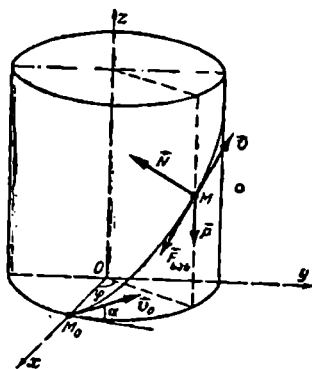
$P_x = P_y = 0; P_z = -mg; N_z = 0; N_x = -N \cos \varphi; N_y = -N \sin \varphi,$ სადაც φ — კუთხეა, რომელსაც M წერტილის რადიუს-ვექტორის გეგმილი xOy სიბრტყეზე ადგენს Ox ღერძთან.

რადგან $\cos \varphi = \frac{x}{R}, \sin \varphi = \frac{y}{R},$ ამიტომ

$$N_x = -N \frac{x}{R}, \quad N_y = -N \frac{y}{R}.$$

შემდეგ გვაქვს

$$\vec{F}_{\text{ხახუნ}} = -kN \frac{\vec{v}}{v},$$



ნახ. 151.

სადაც $\frac{\vec{v}}{v}$ — სიჩქარის მიმართულება.

აქედან

$$F_x^{ab} = -kN \frac{v_x}{v} = -kN \frac{\dot{x}}{v},$$

$$F_y^{ab} = -kN \frac{v_y}{v} = -kN \frac{\dot{y}}{v} = -kN \frac{\dot{y}}{v},$$

$$F_z^{ab} = -kN \frac{v_z}{v} = -kN \frac{\dot{z}}{v}.$$

მაშასადამე, (124) განტოლებები მიიღებენ სახეს:

$$1) m\ddot{x} = -N \frac{\dot{x}}{R} - kN \frac{\dot{x}}{v};$$

$$2) m\ddot{y} = -N \frac{\dot{y}}{R} - kN \frac{\dot{y}}{v}; \quad (ა)$$

$$3) m\ddot{z} = -kN \frac{\dot{z}}{v} - mg.$$

თუ ამ განტოლებებთან გავაერთიანებთ ბმის განტოლებას

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad (ბ)$$

მივიღებთ ოთხ x , y , z და N -უცნობიან ოთხ განტოლებათა სისტემას. ბმის განტოლება გავადიფერენციალოთ ორჯერ, მივიღებთ:

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0, \quad (გ)$$

$$\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0. \quad (დ)$$

გავამრავლოთ (ა) განტოლებიდან პირველი x -ზე, მეორე კი y -ზე და შევკრიბოთ

$$m(x\ddot{x} + y\ddot{y}) = -NR - \frac{k}{v} N(x\dot{x} + y\dot{y}). \quad (ე)$$

(ბ) და (გ) განტოლებების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$N = -\frac{m}{R} (x\ddot{x} + y\ddot{y}),$$

ანუ

$$N = \frac{m}{R} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (ვ)$$

(ა) განტოლებაში N -ის მიღებული მნიშვნელობის ჩასმით მივიღებთ

არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომელიც შეიცავს მოძრავი წერტილის x , y , z კოორდინატებს და აგრეთვე მათი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებს დროით.

რადგან ასეთი სისტემის ამოხსნა წარმოადგენს რთულ მათემატიკურ ამოცანას, ამიტომ განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როდესაც ცილინდრის ზედაპირი გლუვია.

მაშინ (ა) სისტემა ლებულობს სახეს:

$$1) m\ddot{x} = -N \frac{x}{R};$$

$$2) m\ddot{y} = -N \frac{y}{R}; \quad (ა)$$

$$3) m\ddot{z} = -mg.$$

პირველი ორი განტოლებიდან \ddot{N} ძალის გამორიცხვის მიზნით გავყოთ წევრ-წევრად პირველი განტოლება მეორეზე, მივიღებთ

$$\frac{\ddot{x}}{y} = \frac{x}{y},$$

საიდანაც

$$\ddot{x}y - \ddot{y}x = 0,$$

მაგრამ

$$\ddot{x}y - \ddot{y}x = \frac{d}{dt}(\dot{x}y - \dot{y}x) = 0,$$

აქედან

$$\dot{x}y - \dot{y}x = \text{const.}$$

რადგან

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi,$$

ამიტომ

$$\dot{x}y - \dot{y}x = -R^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

მაშასადამე,

$$\dot{\varphi} = \text{const} = \dot{C}_1.$$

C_1 მუდმივს განესაზღვრავთ მოძრაობის საწყისი პირობებიდან:

$$t_0 = 0, \quad x_0 = R, \quad y_0 = z_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = v_0 \cos \alpha,$$

$$\dot{z}_0 = v_0 \sin \alpha, \quad C_1 = \dot{\varphi}_0 = \frac{v_0 \cos \alpha}{R},$$

აქედან

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_0 \cos \alpha}{R}, \quad \int_{\varphi_0=0}^{\varphi} d\varphi = \frac{v_0 \cos \alpha}{R} \int_0^t dt,$$

ანუ

$$\varphi = \frac{v_0 \cos \alpha}{R} t.$$

ამგვარად,

$$x = R \cos \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{R} t \right); \quad y = R \sin \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{R} t \right).$$

(ა) სისტემის მესამე განტოლების ინტეგრირებით და ინტეგრირების ნებისმიერი მუდმივის განსაზღვრის შემდეგ ვლებულობთ

$$Z = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha.$$

მიღებული x და y მნიშვნელობების (3) ტოლობაში ჩასმით მივიღებთ

$$N = \frac{m}{R} (x^2 + y^2) = mR\varphi^2 = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{R}.$$

ტრილი 15

ამოცანათა კლასიფიკაცია

| ამოცანების ტიპი | | | |
|-----------------|--|--|--|
| ჩანუ | I (ნივთიერი წერტილის წრფივი მოძრაობა) | II. (თავისუფალი ნივთიერი წერტილის მრუდწირული მოძრაობა) | III (არათავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობა) |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1. | წერტილის მოძრაობა მუდმივი ძალის მოქმედებით (ამოცანები 27.1(674), 27.2(675), 27.5(678), 27.6(679), 27.7(682), 27.8(686)). | წერტილის მოძრაობა მუდმივი ძალის მოქმედებით (ამოცანები 27.41(709) -27.51(719)). | წერტილი მოძრაობს მოცემულ წირზე (ამოცანები 31.24(820), 31.25(821)). |
| 2. | წერტილის მოძრაობა დროზე დამოკიდებული ძალის მოქმედებით (ამოცანები 27.30(698), 27.31(701), 27.32(702), 27.33(694)). | წერტილის მოძრაობა დროზე დამოკიდებული ძალის მოქმედებით (ამოცანები 27.63(731)). | წერტილი მოძრაობს მოცემულ ზედაპირზე (ამოცანები 26.6(642), 26.7(643), 26.10(646), 26.22(658), 31.20(816), 31.23(819), 31.26(822)). |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|----|--|---|---|
| 3. | წერტილის მოძრაობა მის კოორდინატებზე დამოკიდებული ძალის მოქმედებით (ამოცანები 27.34 (699), 27.35(700)). | წერტილის მოძრაობა მის მდებარეობაზე დამოკიდებული ძალის მოქმედებით (ამოცანები 27.56 (724), 27.60(728)). | |
| 4. | წერტილის მოძრაობა სინქარზე დამოკიდებული ძალით (ამოცანები 27.9 (780), 27.11(683), 27.13 (685), 27.20(693), 27.21 (695)—27.23(697), 27.24 (706)—27.26(708)). | წერტილის მოძრაობა წინალობიან გარემოში (ამოცანები 27.52(720)—27.54(722), 27.62(730)). | |

თავი II

ნივთიერი წერტილის რხევითი მოძრაობა

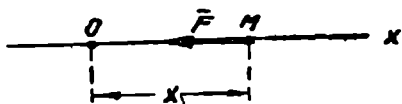
ამოცანები, რომლებიც ეკუთვნიან ამ თავს, შეიძლება დაეყოფნა სამ ძირითად ტიპად:

1. ჰარმონიული თავისუფალი რხევა.
2. მიღვევადი რხევა;
3. იძულებითი რხევა: ა) წინალობის არსებობის დროს (ამოცანები (32.78) — (32.84) — (853) — (860); ბ) წინალობის გარეშე (ამოცანები (32.88) — (32.92) — (854) — (861)).

§ 1. თავისუფალი რხევა

(ამოცანები 32.1—32.50 (825—842))

ვთქვათ, m მასის M ნივთიერი წერტილი მოძრაობს წრფივად მისი უძრავი O ცენტრისაკენ მიზიდულობის \vec{F} ძალის მოქმედებით, რომელიც O ცენტრიდან მოძრავ წერტილამდე მანძილის პროპორციულია. მაშასადამე, $F = c \cdot OM$, სადა c — პროპორციულობის მუდმივი კოეფიციენტია. \vec{F} ძალას ვუწოდოთ აღმდგენი ძალა. თუ M



ნახ. 152.

წერტილის წრფივ ტრაექტორიას მივიღებთ x ღერძად და თუ მოვათავსებთ კოორდინატთა სათავეს O წერტილში (ნახ. 152), მაშინ M წერტილის მოძრაობის განტოლება დაიწერება შემდეგნაირად

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx,$$

სადაც x — წერტილის აბსცისაა, ან $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m} x = 0$,

თუ $\frac{c}{m}$ აღვნიშნავთ k^2 -ით, მივიღებთ

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0. \quad (125)$$

ეს არის მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება, რადგანაც მახასიათებელი $u^2 + k^2 = 0$ განტოლების ფესვები წარმოსახვითია, ამიტომ ამ დიფერენციალური განტოლების ზოგად ინტეგრალს აქვს შემდეგი სახე

$$x = A \cdot \cos kt + B \cdot \sin kt, \quad (126)$$

სადაც A და B — ნებისმიერი მუდმივებია, რომლებიც განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობებიდან.

თუ ცნობილია, რომ როცა $t=0$, მაშინ $x=x_0$, $v=v_0$, გვექნება $A = x_0$ და $B = \frac{v_0}{k}$, მაშასადამე,

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (127)$$

(125) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირადაც

$$x = a \sin(kt + \alpha), \quad (128)$$

სადაც a და α — მუდმივებია, რომლებიც განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობებიდან შემდეგი ფორმულების საშუალებით:

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} && \text{— რხევის ამპლიტუდა} \\ \alpha &= \arctg \frac{kx_0}{v_0} && \text{— საწყისი ფაზა.} \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

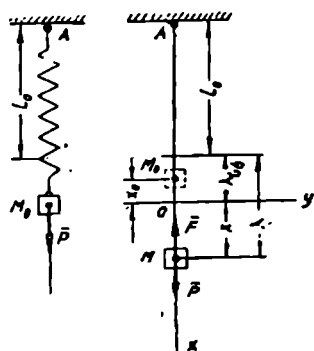
(128) განტოლება წარმოადგენს წრიული (ციკლური) k სიხშირის ჰარმონიული რხევის განტოლებას.

ამ რხევის პერიოდი განისაზღვრება ფორმულით

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (130)$$

მაგალითი 118. $P=20$ ნ წონის ტვირთი ჩამოკიდებულია ზამბარაზე, რომელიც ბუნებრივ მდგომარეობაში $l_0=40$ სმ სიგრძისაა.

ამ ტვირთის მოქმედების ქვეშ მყოფი ზამბარის სტატიკური დაგრძელება უდრის 4 სმ. ტვირთი მოყვანილია M_0 მდებარეობაში და გაშვებულია უსაწყისო სიჩქარით.



ნახ. 153.

განსაზღვრეთ ტვირთის რხევის პერიოდი და ზამბარის უდიდესი, დაჭიმულობა, თუ $AM_0=42$ სმ (ნახ. 153).

ამოხსნა. x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვემოთ, კოორდინატთა O სათავე ავარჩიოთ ტვირთის წონასწორობის მდებარეობაში, ე. ი. იმ მდებარეობაში, რომელშიც ტვირთის წონა და ზამბარის რეაქცია აწონასწორებენ ერთმანეთს.

ტვირთის წონასწორობის მდებარეობის შესაბამისი სტატიკური დაგრძელება აღვნიშნოთ $\lambda_{\text{სტ}}$, ხოლო ტვირთის M მდებარეობის შესაბამისი ზამბარის დაგრძელება λ -თი, მაშინ

$$\lambda = \lambda_{\text{სტ}} + x.$$

რადგანაც ზამბარის რეაქცია მისი დაგრძელების პროპორციულია, ამიტომ

$$F = c\lambda = c(\lambda_{\text{სტ}} + x),$$

სადაც c — პროპორციულობის მუდმივი კოეფიციენტია, რომელსაც ეწოდება ზამბარის სიხისტე.

წონასწორობის მდებარეობაში F ძალის მოდული უდრის ტვირთის

$$\text{წონას და ამიტომ } c \lambda_{\text{სტ}} = F_{\text{სტ}} = P, \text{ საიდანაც } c = \frac{P}{\lambda_{\text{სტ}}} = \frac{20}{4} = 5 \frac{\text{ნ}}{\text{სმ}}.$$

ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება შემდეგია.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = P - F \quad \text{ანუ} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = P - c(\lambda_{\text{სტ}} + x)$$

$$\text{მაგრამ } P = c\lambda_{\text{სტ}}, \text{ ამიტომ } m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx,$$

$$\text{ანუ } \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \text{ სადაც } k^2 = \frac{c}{m}.$$

მივიღეთ თავისუფალი ჰარმონიული რხევის დიფერენციალური განტოლება (125).

აქედან გამომდინარეობს, რომ ზამბარაზე ჩამოკიდებული ტვირთი ასრულებს ჰარმონიულ რხევას კოორდინატა სათავეს მახლობლად, ე. ი. წონასწორობის მდებარეობის მახლობლად. ამ რხევის პერიოდს მოვნახავთ (130) ფორმულით

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$$

მაგრამ $m = \frac{P}{g}$ და $c = \frac{P}{\lambda_{სტ}}$, ამიტომ

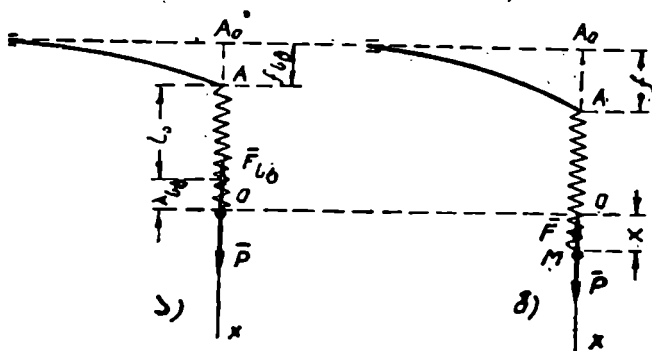
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{სტ}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{4}{981}} \approx 0,4 \text{ წმ.}$$

რხევის ამპლიტუდა განისაზღვრება (129) ფორმულით

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}$$

ამოცანის პირობიდან $x_0 = -2$ სმ და $v_0 = 0$, ამიტომ $a = 2$ სმ. მაშასადამე, $\lambda_{max} = \lambda_{სტ} + a = 6$ სმ და $F_{max} = c \lambda_{max} = 5 \cdot 6 = 30$ ნ.

მაგალითი 117. დრეკადი ჰორიზონტალური, ერთი ბოლოთი უძრავად დამაგრებული კოჭის თავისუფალ A ბოლოზე, ზამბარაზე ჩამოკიდებულია P წონის ტვირთი. კოჭის დრეკადი ძალა ჩაღუნვის f ისრის



ნახ. 154.

პროპორციულია, ხოლო ზამბარის დაჭიმულობის ძალა მისი λ დაგრძელების პროპორციული, ამასთანავე კოჭის სიხისტე უდრის $c_1 = -s$, ხოლო ზამბარის სიხისტე კი $c_2 = s$. კოჭისა და ზამბარის მასის უგულებელყოფით განსაზღვრეთ ტვირთის რხევის პერიოდი (ნახ. 154 ა, ბ).

ამოხსნა. ისევე, როგორც წინა ამოცანაში, x ღერძი მივმარ

თით ვერტიკალურად ქვემოთ, ხოლო კოორდინატთა სათავე O მოვითავსოთ ტვირთის წონასწორობის მდებარეობაში. თუ კოქის სტატიკურ ჩაღუნვას, ე. ი. მის ჩაღუნვას ტვირთის წონასწორობის დროს აღვნიშნავთ $f_{\text{სტ}}$ -ით, ზამბარის ბუნებრივ სიგრძეს l_0 -ით, ხოლო მის სტატიკურ დაგრძელებას $\lambda_{\text{სტ}}$ -ით, მაშინ $A_0A = f_{\text{სტ}}$ და $AO = l_0 + \lambda_{\text{სტ}}$ (ნახ. 154, ა).

კოქის ჩაღუნვა l მომენტში, როდესაც ტვირთი დაიკავებს M მდებარეობას, აღვნიშნოთ f -ით, ზამბარის სიგრძე ამ მომენტში, როგორც ეს ნახაზიდან ჩანს, ტოლია

$$l = AM = A_0M - A_0A = A_0O + OM - A_0A = f_{\text{სტ}} + l_0 + \lambda_{\text{სტ}} + x - f.$$

შაშასადამე, ზამბარის დაგრძელება $\lambda = l - l_0 = x - f + f_{\text{სტ}} + \lambda_{\text{სტ}}$.

M ტვირთზე მოდებულია ორი ძალა: P წონა და ზამბარის F რეაქცია, ამასთანავე, $F = c_2\lambda$. თუ ზამბარის მასას უგულებელვყოფთ, მაშინ ზამბარის დაკიმულობის ძალები მის ბოლოებში ერთმანეთის ტოლი იქნება; მაშასადამე, კოქის A ბოლოზე მოდებულია $c_2\lambda$ -ს ტოლი ძალა. მეორე მხრივ, თუ კოქის მასას უგულებელვყოფთ, მაშინ A წერტილში მასზე მოდებული ზამბარის რეაქცია იქნება c_1f -ს ტოლი,

და ამიტომ $c_1f = c_2\lambda$. აქედან $f = \frac{c_2}{c_1}\lambda$ და, მაშასადამე,

$$\lambda = x - \frac{c_2}{c_1}\lambda + f_{\text{სტ}} + \lambda_{\text{სტ}} \quad \text{ანუ} \quad \frac{c_1 + c_2}{c_1}\lambda = x + f_{\text{სტ}} + \lambda_{\text{სტ}}$$

ტვირთის წონასწორობის მდებარეობაში გვაქვს

$c_2\lambda_{\text{სტ}} = c_1f_{\text{სტ}} = P$, საიდანაც $f_{\text{სტ}} = \frac{P}{c_1}$ და $\lambda_{\text{სტ}} = \frac{P}{c_2}$, და ამიტომ

$$\frac{c_1 + c_2}{c_1}\lambda = x + P \left(\frac{c}{c_1} + \frac{c}{c_2} \right) = x + \frac{c_1 + c_2}{c_1 \cdot c_2} P.$$

აქედან

$$\lambda = \frac{c_1}{c_1 + c_2} x + \frac{P}{c_2}.$$

x ლერძის გასწვრივ ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას ექნება სახეა

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = P - F = P - c_2\lambda;$$

ანუ λ -ს მნიშვნელობის ჩასმის შემდეგ $m \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} x$,

$$\text{ანუ } \frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0, \quad \text{სადაც } k^2 = \frac{c_1c_2}{m(c_1+c_2)}.$$

ეს არის k სიხშირის პარმონიული რხევის დიფერენციალური განტოლება (125).

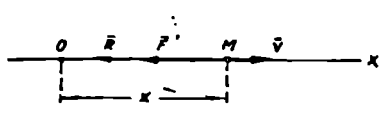
აქედან გამომდინარეობს, რომ ტვირთის რხევის საძიებელი პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m(c_1+c_2)}{c_1c_2}}, \quad \text{ანუ } T = 2\pi \sqrt{\frac{P \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)}{g}} = \\ = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{\text{ს}} + l_{\text{ს}}}{g}}.$$

§ 2. მიღწევალი რხევა

(ამოცანები 32.51 — 32.74; (843—852))

თუ m მასის M ნივთიერი წერტილი მოძრაობს Ox ღერძის გასწვრივ უძრავი O ცენტრისაკენ მიზიდულობის აღმდგენელი F ძალის მოქმედებით წინააღობის მქონე გარემოში, მაშინ ამ წერტილზე \vec{F} ძალის გარდა მოქმედებს აგრეთვე წინააღობის \vec{R} ძალა, რომელიც M წერტილის \vec{v} სიჩქარის პროპორციულია, ე. წ.



ნახ. 155.

$\vec{R} = -\mu\vec{v}$, სადაც μ — პროპორციულობის მუდმივი კოეფიციენტი (ნახ. 155), მაშინ $R_x = -\mu v_x = -\mu \frac{dx}{dt}$ და აღმდგენელი ძალის მოქმედებით წინააღობის მქონე გარემოში წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\frac{c}{m} = k^2$ და $\frac{\mu}{m} = 2n$, მაშინ გვექნება

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x + 2n \frac{dx}{dt} = 0. \quad (131)$$

თუ $k > n$, მაშინ წერტილის მოძრაობა რხევითია და ამ განტოლების ზოგად ამოხსნას აქვს სახე

$$x = e^{-nt}(A \cos k_1 t + B \sin k_1 t) = e^{-nt} \cdot a \sin(k_1 t + \alpha), \quad (132)$$

სადაც $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

A და B (ანუ a და α) მუდმივები საწყისი v_0 სიჩქარის და საწყისი x_0 კოორდინატის საშუალებით განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$\left. \begin{aligned} A &= x_0, & B &= \frac{v_0 + nx_0}{k_1}, \\ \text{ანუ} & & a &= \frac{1}{k_1} \sqrt{k_1^2 \cdot x_0^2 + (v_0 + nx_0)^2}, \\ & & \alpha &= \arctg \frac{k_1 x_0}{v_0 + nx_0}. \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

(131) განტოლება წარმოადგენს მიღვეადი რხევის განტოლებას. მიღვეადი რხევის პერიოდი განისაზღვრება ფორმულით

$$T = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (134)$$

დროის მომენტები, რომლებშიც წერტილი მიიღებს მაქსიმალურ გადახრას, კოორდინატთა სათავიდან (წონასწორობის მდებარეობიდან) შეადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას, $\frac{T}{2}$ ნახევარპერიოდის ტოლი სხვაობით. მიღვეადი რხევის ამპლიტუდა ადგენს კლებად გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის მნიშვნელს ეწოდება მიღვეადი რხევის დეკრემენტი და აღინიშნება D ასოთი, ამასთანავე

$$D = e^{-\frac{\pi n}{k_1}} = e^{-\frac{nT}{2}}. \quad (135)$$

$\ln D$ სიდიდეს ლოგარითმული დეკრემენტი ეწოდება.

მაგალითი 118. ნივთიერი წერტილი ასრულებს წრფივ რხევას წინააღობის მქონე გარემოში, ამ წერტილიდან უძრავ O ცენტრამდე მანძილის პროპორციული ძალის მოქმედებით. გარემოს წინააღობის ძალის სიდიდე წერტილის სიჩქარის პროპორციულია. საწყის მომენტში $x = 0$ და $v_0 = 1$ მ/წმ. ვიცით, რომ რხევის პერიოდი უდრის $T = 2$ წმ, ხოლო მიღვეადი რხევის დეკრემენტი $D = \frac{1}{2}$, ვიპოვოთ წერტილის მოძრაობის კანონი (ნახ. 156).

ამოხსნა. კოორდინატთა სათავე ავირჩიოთ უძრავ O ცენტრში,

x ღერძი მივმართოთ წერტილის წრფევი ტრაექტორიის გასწვრივ, O ცენტრისაკენ მიზიდულობის ძალა აღენიშნოთ \vec{F} -ით, ხოლო გარემოს წინაღობის ძალა \vec{R} -ით, მაშინ $F_x = -cx$, $R_x = -\mu \frac{dx}{dt}$, სადაც c და μ

მუდმივი კოეფიციენტებია; წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე



ნახ. 156.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2x = 0,$$

სადაც $2n = \frac{\mu}{m}$ და $k^2 = \frac{c}{m}$, ხოლო m — წერტილის მასაა.

ამ განტოლების ამოხსნას მოენახავთ (132) და (133) ფორმულებით

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos k_1 t + \frac{v_0 + n x_0}{k_1} \sin k_1 t \right).$$

თუ ჩავსვამთ x_0 და v_0 მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$x = e^{-nt} \frac{1}{k_1} \sin k_1 t.$$

k_1 და n მუდმივების მოსაძებნად ვისარგებლოთ (134) და (135) ფორ-

მულებით $T = \frac{2\pi}{k_1} = 2$ წმ და $D = e^{-\frac{nT}{2}} = \frac{1}{2}$.

აქედან $k_1 = \pi$ და $e^{-n} = \frac{1}{2}$, ანუ $n = \ln 2$.

წერტილის მოძრაობის კანონი ლებულობს შემდეგ სახეს

$$x = \frac{e^{-t \ln 2} \sin \pi t}{\pi}, \text{ მაგრამ } e^{-t \ln 2} = 2^{-t}$$

და ამიტომ $x = \frac{2^{-t} \sin \pi t}{\pi}$.

§ 3. იმპულსიური რხევა

(ამოცანები: 32.75 — 32.101 (853—861))

თუ x ღერძის გასწვრივ მოძრავ M ნივთიერ წერტილზე გარდა x მანძილის პროპორციული \vec{F} ძალისა, და v სიჩქარის პროპორციული

გარემოს წინაღობის \vec{R} ძალისა, მოქმედებს კიდევ რომელიმე პერიოდულად ცვალებადი F' ძალა, რომელსაც ჩვენ ვუწოდებთ შემაშფოთებელ ძალას (ნახ. 156), მაშინ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ჩაიწერება ასე

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + cx = F'.$$

ვთქვათ, შემაშფოთებელი ძალა იცვლება $F' = H \sin(pt + \beta)$ კანონით. მაშინ, თუ დაუშვებთ $\frac{H}{m} = h$ და შევინარჩუნებთ წინა პარაგრაფის აღნიშვნებს, მივიღებთ

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = h \sin(pt + \beta). \quad (136)$$

როცა $k > n$, ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$x = ae^{-nt} \sin(kt + \alpha) + b \sin(pt + \beta + \gamma), \quad (137)$$

სადაც

$$b = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \quad \operatorname{tg} \gamma = -\frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (138)$$

(137) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი წევრი წარმოადგენს მიღევად რხევას; ხოლო მეორე — ეგრეთწოდებულ იძულებით რხევას. a და α მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობებიდან. თუ $k^2 > 2n^2$, მაშინ, როცა

$$p = \sqrt{k^2 - 2n^2} \quad (139)$$

იძულებითი რხევის ამპლიტუდა აღწევს მაქსიმუმს, რომელიც უდრის

$$b_{\max} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (140)$$

წინაღობის უქონლობის დროს $R=0$ და, მაშასადამე, $n=0$: წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ლებულობს შემდეგ სახეს

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = h \cdot \sin(pt + \beta). \quad (141)$$

თუ (137) და (138) ტოლობებში ჩავთვლით, რომ $n=0$, მივიღებთ მის ზოგად ამონახსნს

$$x = a \cdot \sin(kt + \alpha) + b \sin(pt + \beta), \quad (142)$$

სადაც $b = \frac{h}{k^2 - p^2}$, როცა $k \neq p$.

უკანასკნელი ტოლობის პირველი წევრი წარმოადგენს თავისუფალ რხევას, ხოლო მეორე წევრი — იძულებით რხევას.

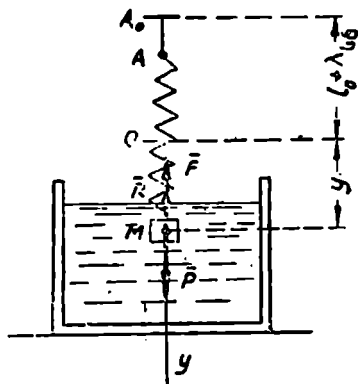
თუ თავისუფალი და იძულებითი რხევების სიხშირეები ემთხვევა ერთმანეთს, ე. ი. თუ $p = k$, მაშინ ადგილი აქვს რეზონანსის მოვლენას; (141) განტოლების ამონახსნი ამ შემთხვევაში წარმოადგენილი იქნება შემდეგნაირად

$$x = a \sin(kt + \alpha) - \frac{ht'}{2p} \cos(pt + \beta). \quad (143)$$

ამ შემთხვევაში იძულებითი რხევის ამპლიტუდა t -ს ზრდასთან ერთად უსასრულოდ იზრდება.

მაგალითი 110. სითხეში ჩაშვებული $P=49$ ნ წონის ტვირთი ჩამოკიდებულია ზამბარაზე, რომლის სტატიკური დაგრძელება ამ სხეულის წონის მოქმედებით უდრის 1 სმ.

ზამბარის თავისუფალი A ბოლო ასრულებს ვერტიკალურ რხევას უძრავი A_0 წერტილის მახლობლად $y = A_0 A = 0,05 \sin 5\pi t$ კანონით, ამასთანავე y_{A_0} — გამოსახულია მეტრობით, t — წამობით. ტვირთის მოძრაობისადმი სითხის წინააღმდეგობა მისი v სიჩქარის პროპორციულია და $\nu = 1$ მ/წმ სიჩქარის დროს უდრის 15,7 ნ. იპოვეთ იძულებითი რხევის ამპლიტუდა (ნახ. 157).



ნახ. 157.

ამოხსნა. მოვთავსოთ კოორდინატა O სათავე სხეულის წონასწორობის მდებარეობაში. ამათავე ვეულისხმობთ, რომ ზამბარის

A ბოლო დამაგრებულია A_0 წერტილში; მაშინ $A_0 O = l_0 + \lambda_{st}$, სადაც l_0 — არადეფორმირებული ზამბარის სიგრძეა, ხოლო λ_{st} — მისი სტატიკური დაგრძელება. y ღერბი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვემოთ. რომელიმე t მომენტში, როცა სხეული იკავებს M მდებარეობას, ზამბარის სიგრძე ტოლი იქნება $l = l_0 + \lambda_{st} + y - A_0 A$, ხოლო მისი დაგრძელება იქნება $\lambda = l - l_0 = \lambda_{st} + y - A_0 A = \lambda_{st} + y - 0,05 \sin 5\pi t$.

თუ ზამბარის სიხისტეს აღნიშნავთ c -თი, მაშინ ზამბარის რეაქცია

$$F = c\lambda = c\lambda_{\text{სტ}} + cy - 0,05 c \sin 5\pi t, \quad \text{მაგრამ } c\lambda_{\text{სტ}} = P,$$

$$\text{და ამიტომ } F = P + cy - 0,05 c \sin 5\pi t.$$

სითხის წინაღობის ქალა უდრის $\vec{R} = -\mu\vec{v}$, სადაც μ — პროპორციულობის კოეფიციენტი, ხოლო \vec{v} — სხეულის სიჩქარე.

სხეულის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება იქნება

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = P - F - \mu \frac{dy}{dt} = -cy + 0,05 c \sin 5\pi t - \mu \frac{dy}{dt},$$

$$\text{ანუ } \frac{d^2 y}{dt^2} + 2n \frac{dy}{dt} + k^2 y = h \sin 5\pi t, \quad \text{სადაც}$$

$$2n = \frac{\mu}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{0,05c}{m} = 0,05 k^2.$$

ეს არის (136) დიფერენციალური განტოლება, რომელშიც უნდა იყოს მიღებული, რომ $p = 5\pi$ და $\beta = 0$. ამიტომ იძულებითი რხევის საძიებელ ამპლიტუდას ვპოულობთ (138) ფორმულით

$$b = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \frac{0,05 k^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}};$$

მრიცხველის და მნიშვნელის k^2 -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$b = \frac{0,05}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{n^2}{k^2} \frac{p^2}{k^2}}}.$$

ჩავსვათ აქ შემავალი სიდიდეების რიცხვითი მნიშვნელობები

$$m = \frac{p}{g} = \frac{49}{9,8} = 5 \text{ კგ}; \quad \mu = 15,7 \frac{\text{გ წმ}}{\text{გ}}; \quad n = \frac{\mu}{2m} = 1,57;$$

$$c = \frac{P}{\lambda_{\text{სტ}}} = \frac{49}{0,01} = 4900 \frac{\text{გ}}{\text{მ}}; \quad k^2 = \frac{c}{m} = 980;$$

$$p = 5\pi; \quad \frac{p^2}{k^2} = \frac{25\pi^2}{980} = \frac{1}{4}.$$

მაშასადამე,
$$b = \frac{0,05}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{(1,57)^2}{980}}} \approx 6,7 \text{ სმ.}$$

მაგალითი 120. α დახრის კუთხის მქონე სიბრტყეზე დაყენებული ვიბრაციული ცხავის მერხევი მასა (ნახ. 158, ა) მოიყვანება მოძრაობაში მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის B ცოცისთან შეერთებული, ერთნაირი c ნ/მ სიხისტის მქონე, ორი ზამბარის საშუალებით. AB ბარბაცის l სიგრძე საგრძნობლად აღემატება OA მრუდმხარას r სიგრძეს, ისე რომ $\frac{r}{l}$ შეფარდების პირველი და უფრო მაღალი ხარისხები შეიძლება

უგულებელვყოთ, ე. ი. შეიძლება იყოს მიღებული, რომ B ცოცისა მოძრაობის კანონი ემთხვევა მრუდმხარას A თითის x ლერძზე A' გეგმილის მოძრაობის კანონს. ცხავის წონა უდრის G ნ. განსაზღვრეთ ცხავის იძულებითი რხევა, ხახუნზე დანაკარგების უგულებელყოფით თუ მრუდმხარა ბრუნავს კანონით $\dot{\varphi} = \omega t$. მრუდმხარას ერთ წუთში ბრუნთა რა რაოდენობისათვის ექნება ადგილი რეზონანსს.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ ცოცის საშუალო მდებარეობა (როცა $\varphi = 0$) B_0 -ით, ცოცის გადაადგილება ამ მდებარეობიდან x_B -თი, მაშინ გვექნება

$$x_B = B_0B \approx OA' = r \sin\varphi = r \sin\omega t.$$

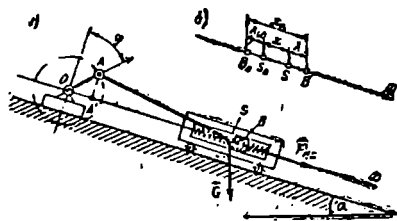
ცხავის სიმძიმის ცენტრის x გადაადგილება ავთვალთ იმ S_0 მდებარეობიდან, რომელშიც იგი იქნებოდა ცოცის საშუალო მდებარეობაში ყოფნის დროს, იმ შემთხვევაში, თუ სისტემა რჩება უძრავ მდგომარეობაში. ცხადია,

$$B_0S_0 = \lambda_{S_0} = \frac{G \sin\alpha}{2c},$$

ე. ი. B_0S_0 — ამძრავი ზამბარის სტატიკური დეფორმაციაა, რომელიც გამოწვეულია დახრილი სიბრტყის გასწვრივ მიმართული ცხავის წონის შემდგენით. აქედან ზამბარების დეფორმაცია (იხ. ნახ. 158, ბ, სადაც ცოცისა და ცხავის გადაადგილებები ნაჩვენებია გადიდებულ მასშტაბში) გამოისახება შემდეგნაირად

$$\lambda = x_B - x - \lambda_{S_0}$$

4. ტ. აიზენბერგი და სხვ.



ნახ. 158.

და ამიტომ x ღერძზე დრეკადი ძალის გეგმილი განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$X_{ღრძ} = 2c\lambda = 2c(x_B - x - \lambda_{\text{სტ}}).$$

აქედან ვლებულობთ ცხადის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\begin{aligned} \frac{G}{g} \ddot{x} &= X_{ღრძ} + X_{წინის} = 2c(x_B - x - \lambda_{\text{სტ}}) + G \sin \alpha = \\ &= 2cx_B - 2cx = 2cr \sin \omega t - 2cx, \end{aligned}$$

ანუ

$$\ddot{x} + \frac{2cg}{G}x = \frac{2cg}{G}r \sin \omega t.$$

თუ შევიტანთ აღნიშვნებს

$$\frac{2cg}{G} = k^2 \quad \text{და} \quad \frac{2cg}{G}r = h$$

მივიღებთ $\ddot{x} + k^2x = h \sin \omega t$,

აქედან (141) განტოლების თანახმად ვლებულობთ

$$x = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t = \frac{r}{1 - \left(\frac{\omega}{k}\right)^2} \sin \omega t.$$

რეზონანსს აღვილი ექნება, როცა $\omega = \omega_{კრიტ} = k$, საიდანაც

$$\begin{aligned} n_{კრიტ} &= \frac{30\omega_{კრიტ}}{\pi} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{2cg}{G}} = 30 \sqrt{\frac{2cg}{\pi^2 G}} = 300 \sqrt{\frac{2c}{G}} = \\ &= 424 \sqrt{\frac{c}{G}}. \end{aligned}$$

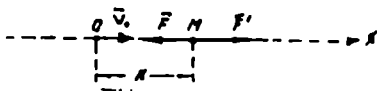
მაგალითი 121. წრფივად მოძრავი $m = 50$ კგ მასის წერტილი მიიზიდება უძრავი O ცენტრისაკენ, ამ ცენტრიდან წერტილამდე მანძილის პროპორციული \vec{F} ძალით, ამასთანავე პროპორციულობის კოეფიციენტი უდრის $c = 200$ ნ/მ. გარდა ამისა, წერტილზე მოქმედებს შემაშფოთებელი $F' = 2\sin 2t$ ნიუტონებში გამოსახული ძალა. იპოვეთ წერტილის მოძრაობის კანონი, თუ საწყის მომენტში $x = x_0 = 0$, $v = v_0 = 1$ სმ/წმ და შემაშფოთებელი ძალა \vec{F}' მოძრაობის დასაწყისში (როცა $t < \frac{\pi}{2}$) გეზით ემთხვევა საწყის სიჩქარეს (ნახ. 159).

ამოხსნა. კოორდინატა სათავე მოვათავსოთ O ცენტრში და Ox ღერძი მივმართოთ წერტილის ტრაექტორიის გასწვრივ და შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება

$$50 \ddot{x} = -200x + 2 \sin 2t,$$

ანუ

$$\ddot{x} + 4x = 0,04 \sin 2t,$$



ნახ. 159.

ე. ი. ვლებულობთ (141) სახის დიფერენციალურ განტოლებას, რომელშიც

$$k^2 = 4, \quad h = 0,04, \quad p = 2, \quad \beta = 0.$$

რადგან თავისუფალი რხევის და იძულებითი რხევის სიხშირეები ემთხვევიან ერთმანეთს ($k = p = 2$), ამიტომ ადგილი აქვს რეზონანსის მოვლენას და, მაშასადამე, წერტილის მოძრაობის კანონი განისაზღვრება (143) განტოლებით

$$x = a \sin(kt + \alpha) - \frac{ht}{2k} \cos(kt + \beta) = a \sin(2t + \alpha) - 0,01t \cos 2t,$$

საიდანაც

$$v = \dot{x} = 2a \cos(2t + \alpha) + 0,02t \sin 2t - 0,01 \cos 2t.$$

საწყისი პირობებით სარგებლობისას ($t_0 = 0, x_0 = 0; v_0 = 1$ სმ/წმ $= 0,01$ მ/წმ), ვლებულობთ

$$x_0 = a \sin \alpha = 0;$$

$$v_0 = 2a \cos \alpha - 0,01 = 0,01.$$

მაშასადამე,

$$\alpha = 0, \quad a = \frac{0,02}{2} = 0,01.$$

ამგვარად,

$$x = 0,01(\sin 2t - t \cos 2t).$$

ნივთიერი წერტილის დინამიკის ძირითადი თეორემები და
დალაგების პრინციპი

§ 1. თეორემა მოძრაობის რაოდენობის შესახებ

ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის შესახებ თეორემა შეიძლება ჩამოყალიბებული იყოს ვექტორული ან სკალარული სახით.

ვექტორული ფორმით მოძრაობის რაოდენობის შესახებ თეორემა შეიძლება გამოვსახოთ ორი ხერხით:

ა) ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის დიფერენციალური ამ წერტილზე მოქმედი ძალის ელემენტარულ იმპულსს

$$d(m\vec{v}) = \vec{F}dt = d\vec{S}; \quad (144)$$

ბ) ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება დროის რომელიმე სასრულ $t-t_0$ შუალედში უდრის მოქმედი ძალის სრულ იმპულსს დროის იმავე შუალედში

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_{t_0}^t \vec{F}dt = \vec{S}. \quad (145)$$

მოძრაობის რაოდენობის შესახებ თეორემის სკალარულ გამოხატვას დიფერენციალურ ან სასრულ ფორმაში ვლებულობთ (144) ან (145) ვექტორული ტოლობის უძრავ საკოორდინატო სისტემის ლერძებზე დაგეგმილებით

$$\left. \begin{aligned} d(mv_x) &= Xdt = dS_x; \\ d(mv_y) &= Ydt = dS_y; \\ d(mv_z) &= Zdt = dS_z. \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

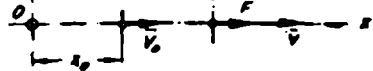
$$mv_x - mv_{0x} = \int_0^t Xdt = S_x;$$

$$mv_y - mv_{0y} = \int_0^t Ydt = S_y; \quad (147)$$

$$mv_z - mv_{0z} = \int_0^t Zdt = S_z$$

ნივთიერი წერტილის წრფივი მოძრაობის შემთხვევაში, ამ წრფის x ღერძად მიღებით, გვექნება (ნახ. 160):

$$d(mv) = X dt, \quad (148)$$



ნახ. 160.

$$mv - mv_0 = \int_0^t X dt, \quad (149)$$

სადაც v — სიჩქარის ალგებრული მნიშვნელობაა, ხოლო $X = +F$ ან $X = -F$ ძალის მიმართულების მიხედვით. ამასთანავე F წერტილზე მოდებული ყველა ძალის ტოლქმედი. ამ პარაგრაფის ამოცანები შეიძლება გავყოთ სამ ძირითად ტიპად:

1. ამოცანები, რომლებიც ეკუთვნიან წერტილის წრფივ მოძრაობას და რომლებშიც მოთხოვნილია წერტილის სიჩქარის ან მოძრაობის დროის განსაზღვრა.

2. ამოცანები, რომლებიც ეკუთვნიან წერტილის მრუდწირულ მოძრაობას, რომლებშიც მოითხოვება წერტილის სიჩქარის ან მოძრაობის დროის განსაზღვრა.

3. ამოცანები, რომლებშიც ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მოცემული ნამატით საჭიროა მასზე მოქმედი ძალის იზულის განსაზღვრა.

I ტიპის ამოცანები

ამ ტიპის ამოცანები შეგვიძლია გავყოთ სამ ჯგუფად:

1) ამოცანები, რომლებშიც ნივთიერ წერტილზე მოდებული ძალა (ან ყველა მოდებული ძალის ტოლქმედი) მუდმივია.

2) ამოცანები, რომლებშიც ნივთიერ წერტილზე მოდებული ძალა (ან ყველა მოდებული ძალის ტოლქმედი) დროის ფუნქციაა.

3) ამოცანები, რომლებშიც ნივთიერ წერტილზე მოდებული ძალა (ან ყველა მოდებული ძალის ტოლქმედი) ამ წერტილის სიჩქარის ფუნქციაა.

პირველი ჯგუფი

წერტილის მოძრაობა ხდება მუდმივი ძალის მოქმედებით, ე. ი. $X = \pm F = \text{const.}$ ამ შემთხვევაში თეორემა მოძრაობის რაოდენობის შესახებ შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სასრულ ან ინტეგრალურ (149) ფორმაში, ამასთანავე დროის ათვლა შეიძლება დაეწყოს ნულოდან

$$mv - mv_0 = \int_{t_0=0}^t X dt = Xt = \pm Ft. \quad (150)$$

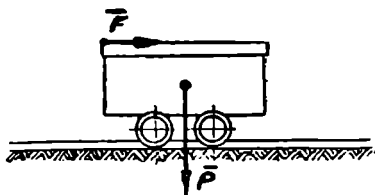
აქედან სამი v , F და t სიდიდისაგან ერთ-ერთი ადვილად განისაზღვრება, თუ ორი დანარჩენი იქნება მოცემული.

წერტილის წრფივი მოძრაობის დროს მოძრაობის რაოდენობის შესახებ თეორემის გამოყენებისას ხელსაყრელია x ლერძი მივმართოთ წერტილის საწყისი სიჩქარის მიმართულებით, ხოლო თუ საწყისი სიჩქარე უდრის ნულს, მაშინ — წერტილზე მოქმედი ძალის მიმართულებით.

მაგალითი 122. ვაგონეტი, რომლის წონა სასარგებლო დატვირთვით უდრის $P=8500$ ნ, წრფივ გზაზე მოძრაობის დროს განიცდის წინაღობას, რომლის სიდიდე ყველა ვერტიკალური დატვირთვის $0,01$ -ს შეადგენს. მუშა აწევება ვაგონეტს $F=170$ ნ ძალით (ნახ. 161).

რა ხნის განმავლობაში მიანიჭებს მუშა ვაგონეტს $v=0,6$ მ/წმ სიჩქარეს?

ამოხსნა. ვაგონეტზე მოქმედებს: 1) სიმძიმის ვერტიკალური $P=8500$ ნ ძალა; 2) რელსების ნორმალური N რეაქცია; 3) ჰორიზონტალური $F=170$ ნ ძალა, რომლითაც მუშა აწევება ვაგონეტს; 4) წინაღობის ჰორიზონტალური ძალა $F'=0,01P$.



ნახ. 161.

მოცემულ ამოცანაში საქმე გვაქვს არა ნივთიერ წერტილთან, არამედ სხეულთა სისტემასთან (ვაგონეტის ძარა, სასარგებლო დატვირთვა, წყვილთვალის), რომლებიც გარკვეული წესითაა ერთმანეთთან შეერთებული. წყვილთვალის ბრუნვითი მოძრაობის

უგულებელყოფით შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ამ სისტემის ყველა ნაწილი ვაგონეტის ძარასთან ერთად მოძრაობს გადატანითად. ამასთანავე შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ვაგონეტის მასა თავმოყრილია მისი სიმძიმის ცენტრში და სიმძიმის ცენტრზე მოდებულია ვაგონეტზე მოქმედი ყველა ძალის ტოლქმედი (ამ დაშვების მართებულობა მტკიცდება სისტემის დინამიკაში).

ამგვარად, მოცემული სისტემის მოძრაობის შესახებ ამოცანა დაიყვანება ნივთიერი წერტილის (ვაგონეტის სიმძიმის ცენტრის) $\vec{R} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}'$ ძალის მოქმედებით მოძრაობის ამოცანამდე.

თუ \vec{R} ძალის გეგმილს ვაგონეტის მოძრაობის მიმართულებაზე აღვიშნავთ X -ით, გვექნება

$$X = F - F' = F - 0,01P = 170 - 85 = 85 \text{ ნ} = \text{const.}$$

ახლა გამოვიყენოთ თეორემა მოძრაობის რაოდენობის შესახებ

$$mv - mv_0 = Xt,$$

საიდანაც, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $v_0 = 0$ და $m = \frac{P}{g}$, გვაქვს

$$t = \frac{mv}{X} = \frac{Pv}{gX} = \frac{8500 \cdot 0,6}{9,8 \cdot 85} = 6,1 \text{ წმ.}$$

მეორე ჯგუფი

წერტილი მოძრაობს ძალის მოქმედებით, რომელიც წარმოადგენს დროის ფუნქციას, ე. ი. $X = f(t)$. ამ შემთხვევაშიც თეორემას მოძრაობის რაოდენობის შესახებ იყენებენ აგრეთვე სასრული სახით, მაგრამ დროის ათვლა აქ არ შეიძლება ყოველთვის დავიწყოთ ნულიდან. ზოგად შემთხვევაში გვაქვს

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^t f(t) dt = \varphi(t), \quad (151)$$

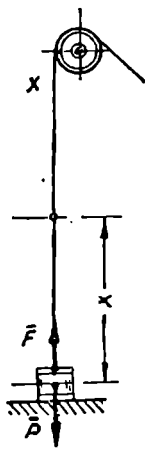
აქედან ვპოულობთ სიჩქარეს

$$v = v_0 + \frac{1}{m} \varphi(t). \quad (152)$$

თუ ამოცანაში მოითხოვება დროის განსაზღვრა, მაშინ ეს განტოლება უნდა ამოიხსნას t -ს მიმართ. თუკი საძიებელია წერტილის მოძრაობის კანონი, მაშინ უნდა მოვახდინოთ ამ განტოლების ინტეგრირება v სიჩქარის $\frac{dx}{dt}$ -ითი შეცვლით.

მაგალითი 123. პორიზონტალურ სიბრტყეში უძრავ მდგომარეობაში მყოფ $P = 20$ ნ წონის სხეულზე მოქმედებს ვერტიკალური F ძალა, რომელიც იზრდება ნულიდან დროის პროპორციულად, ამასთანავე, პროპორციულობის კოეფიციენტი უდრის 2 ნ/წმ (ნახ. 162). F ძალის მოქმედების დაწყებიდან რა ხნის შემდეგ დაიწყებს სხეული მოძრაობას? იპოვეთ ამ მოძრაობის კანონი.

ამოხსნა. სანამ სხეული იმყოფება უძრავ მდგომარეობაში, მასზე მოდებულია სამი ძალა: სიმძიმის ძალა $P = 20$ ნ, ძალა $F = 2t$ და AB სიბრტყის ნორმალური რეაქცია N . მოძრაობის საწყის მომენტში N ძალა, ცხადია, ნულად იქცევა და ამ მომენტიდან სხეულზე მოქმედებს მარტო ორი F და P ძალა: მოძრაობის დაწყებიდან სხეულზე მოდებული, ძალების ტოლქმედის გეგმილი x ღერძზე, რომლის გასწვრივ იმოძრაეებს სხეულის სიმძიმის ცენტრი, გამოისახება შემდეგნაირად



ნახ. 162.

$$X = F - P = 2t - 20 = 2(t - 10).$$

X -ის ამ გამოსახულებას აზრი აქვს მარტო $t = 10$ წმ მომენტიდან, როცა შამოდრავებელი F ძალა გახდება სიმძიმის ძალის ტოლი, რადგან აქამდე სხეულზე მოქმედებს აგრეთვე მესამე ძალა \vec{N} .

რადგან მოცემულ შემთხვევაში $X = f(t)$, ამიტომ ამოცანის ამოსახსნელად შეიძლება გამოვიყენოთ თეორემა მოძრაობის რაოდენობის შესახებ სასრული სახით. თუ მხედველობაში ვიქონიებთ, რომ $\dot{m} = \frac{P}{d} = \frac{20}{9,8} = \frac{10}{4,9}$ და $v_0 = 0$, მივიღებთ:

$$\frac{10}{4,9}v = \int_{10}^t X dt = \int_{10}^t 2(t-10) dt = \left| (t-10)^2 \right|_{10}^t = (t-10)^2,$$

$$\text{საიდანაც } v = 0,49(t-10)^2,$$

$$\text{მაგრამ } v = \frac{dx}{dt}, \text{ მაშასადამე, } dx = 0,49(t-10)^2 dt,$$

თუ ავირჩევთ კოორდინატთა სათავეს სხეულის სიმძიმის ცენტრის საწყის მდებარეობაში, ე. ი. თუ ვიგულისხმებთ, რომ $x_0 = 0$, მივიღებთ

$$x = \int_{10}^t 0,49(t-10)^2 dt = 0,49 \cdot \left| \frac{(t-10)^3}{3} \right|_{10}^t = 0,163(t-10)^3.$$

მაშასადამე, მოძრაობა იწყება F ძალის მოქმედების დასაწყისიდან 10 წმ შემდეგ, ამასთანავე $x = 0,163(t-10)^3$. შევნიშნოთ, რომ მიღებულ განტოლებას აზრი აქვს მხოლოდ $t = 10$ წმ მომენტიდან.

მ. ე. ს. ა. მ. ე. გ. უ. ფ. ი.

წერტილი მოძრაობს სიჩქარეზე დამოკიდებული ძალის მოქმედებით, ე. ი. $X = f(v)$. ამ შემთხვევაში თეორემა მოძრაობის რაოდენობის შესახებ უნდა გამოვიყენოთ დიფერენციალური (148) ფორმით

$$d(mv) = X dt = f(v) dt,$$

ანუ

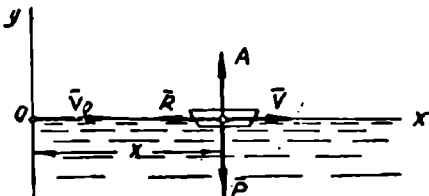
$$m \frac{dv}{f(v)} = dt,$$

აქედან ვპოულობთ დროს

$$t = m \int_{v_0}^v \frac{dv}{f(v)} = m\Phi(v).$$

თუ ამოცანაში საჭიროა სიჩქარის განსაზღვრა, მაშინ ეს განტოლება ამოხსნილი უნდა იყოს სიჩქარის მიმართ.

მაგალითი 124. იმ მომენტში, როცა ძრავიანი გემის სიჩქარე უდრის v_0 -ს, ძრავა გამოირთვება. გემი მოძრაობს და განიცდის წყლის წინააღმდეგობას, რომლის სიდიდე სიჩქარის პროპორციულია, ამასთანავე პროპორციულობის კოეფიციენტი უდრის r -ს. გემის მასა უდრის m -ს, რა დროის განმავლობაში შექცირდება გემის სიჩქარე ორჯერ (ნახ. 163)?



ნახ. 163.

ამოხსნა. გემის P წონა გაწონასწორებულია არქიმედეს A ძალით. პორიზონტალური მიმართულებით მოქმედებს მარტო ერთი — წყლის წინააღმდეგობის \vec{R} ძალა, რომელიც მიმართულია გემის სიჩქარის მიმართულების საწინააღმდეგოდ. თუ x ღერძს მივმართავთ მოძრაობის მიმართულებით, მაშინ გვექნება $X = -\eta v$, ე. ი. X წარმოადგენს v სიჩქარის ფუნქციას, ამიტომ გამოვიყენოთ თეორემა მოძრაობის რაოდენობის შესახებ დიფერენციალური (148) ფორმით

$$d(mv) = X dt = -\eta v dt.$$

ცვლადთა განცალკევებით ვღებულობთ

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\eta}{m} dt.$$

ახლა გავაინტეგრავთ სათანადო ზღვრებში

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{\eta}{m} \int_0^t dt.$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\left[\ln v \right]_{v_0}^v = -\frac{\eta}{m} t,$$

ანუ

$$\ln v - \ln v_0 = -\frac{\eta}{m} t$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{\mu}{m} t.$$

აქედან ვპოულობთ

$$t = -\frac{m}{\mu} \ln \frac{v}{v_0} = \frac{\mu}{m} \ln \frac{v_0}{v} = \frac{m}{\mu} \ln \frac{v_0}{0,5v_0} = \frac{m}{\mu} \ln 2.$$

II ტიპის ამოცანები

ამ ტიპის ამოცანები, რომლებშიც განიხილება წერტილის მრუდწირული მოძრაობა და საჭიროა ამ წერტილის სიჩქარის ან მოძრაობის დროის განსაზღვრა, შეიძლება გაიყოს იგივე სამ ჯგუფად, როგორც პირველი ტიპის ამოცანები:

- 1) მოძრაობა ხდება მუდმივი ძალის მოქმედებით;
- 2) მოძრაობა ხდება დროზე დამოკიდებული ძალის მოქმედებით;
- 3) მოძრაობა ხდება მუდმივი ძალის მოქმედებით ისეთ გარემოში, რომლის წინაღობა სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია.

ამ სამ შემთხვევაში თეორემა მოძრაობის რაოდენობის შესახებ გვაძლევს მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების პირველ ინტეგრალს. პირველ და მეორე შემთხვევაში, ე. ი. როცა ძალა მუდმივია ან წარმოადგენს დროის ფუნქციას, თეორემა გამოიყენება (147) განტოლებებით გამოსახული სასრული ფორმულით. (147) განტოლებებიდან ძალის მოცემული გეგმილებით ვპოულობთ სიჩქარის გეგმილებს საკოორდინატო ღერძებზე. მესამე შემთხვევაში თეორემა გამოიყენება დიფერენციალურ ფორმაში.

პირველი ჯგუფი

რადგან ამ შემთხვევაში ძალა $\vec{F} = \text{const}$, ამიტომ მისი გეგმილებიც საკოორდინატო x , y , z ღერძებზე მუდმივია. ამის გამო თეორემა მოძრაობის რაოდენობის შესახებ შეიძლება გამოყენებულ იქნეს სასრული (147) ფორმით.

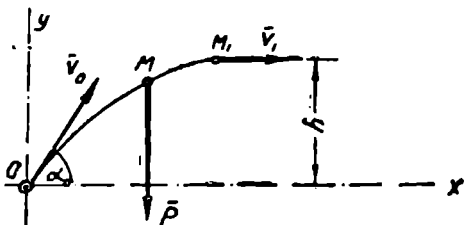
მაშასადამე, გვექნება:

$$mv_x - mv_{0x} = Xt; \quad mv_y - mv_{0y} = Yt; \quad mv_z - mv_{0z} = Zt.$$

ამ განტოლებებიდან განისაზღვრება სიჩქარის გეგმილები და შემდეგ \vec{v} სიჩქარეც და, პირიქით, რომელიმე ღერძზე სიჩქარის გეგმილის ცოდნით შეიძლება განვსაზღვროთ დრო.

მაგალითი 125. მოძრაობის რაოდენობის შესახებ თეორემის გამოყენებით განსაზღვრეთ დრო, რომლის გასვლის შემდეგ პორიზონტთან α_0 კუთხით და v_0 სიწყისი სიჩქარით ატყორცნილი სხეული მიაღწევს მაქსიმალურ სიმაღლეს (ნახ. 164).

ამოხსნა. საკორდინატო ღერძები განეალაგოთ მოძრაობის სიბრტყეში, ამასთანავე x ღერძი მიემართოს პორიზონტალურად, ხოლო y ღერძი — ვერტიკალურად ზემოთ. შევადგინოთ განტოლება, რომელიც გამოსახავს y ღერძზე მოძრაობის რაოდენობის გეგმილის ცვლილებას.



ნახ. 164.

$$mv_{1y} - mv_{0y} = S_y = - \int_0^{t_1} P dt = - mg \int_0^{t_1} dt = - mgt_1.$$

მაგრამ $v_{1y} = 0$ (უმალეს წერტილში სხეულის სიჩქარე პორიზონტალურია) და $v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0$, ამიტომ $t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$.

მეორე ჯგუფი

ამ შემთხვევაში \vec{F} ძალა და, მაშასადამე, მისი გეგმილები საკორდინატო ღერძებზე წარმოადგენენ დროის ცნობილ ფუნქციებს, ე. ი.

$$X = f_1(t); \quad Y = f_2(t); \quad Z = f_3(t).$$

თეორემა მოძრაობის რაოდენობის შესახებ აქ გამოიყენება სასრული (147) ფორმით.

ინტეგრირების შემდეგ ამ განტოლებებიდან ვსაზღვრავთ სიჩქარის გეგმილებს და შემდეგ სიჩქარეს.

მაგალითი 126. $m = 2$ კგ მასის ნიუთიერ წერტილზე მოქმედებს ძალა, რომლის გეგმილები საკორდინატო ღერძებზე ტოლია:

$$\begin{aligned} X &= 6 \cos 2t; \\ Y &= 6 \sin 2t; \\ Z &= -6 \sin 2t; \end{aligned}$$

(ძალა გამოსახულია ნ-ობით, t დრო წმ-ობით). განსაზღვრეთ წერტი-

ლის \vec{s}_2 სიჩქარე $t_2 = \pi = 3,14$ წმ მომენტში, თუ $t_1 = \frac{\pi}{2}$ წმ მომენტში

მისი სიჩქარე \vec{s}_1 მოდულით ტოლია 2 მ/წმ და საკოორდინატო x , y , z ღერძებთან სათანადოდ ადგენს 30° , 60° და 90° ტოლ კუთხეებს.

ამოხსნა. რადგან ძალის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე წარმოადგენენ დროის ფუნქციებს, ამიტომ თეორემა მოძრაობის რაოდენობის შესახებ შეგვიძლია გამოვიყენოთ სასრული (147) ფორმით, ამისათვის წინასწარ გამოვთვალოთ მოქმედი ძალის იმპულსის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე დროის t_1 -დან t_2 -მდე შუალედში:

$$S_x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} X dt = 6 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(2t) dt = 3[\sin 2t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0;$$

$$S_y = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Y dt = 6 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(2t) dt = -3[\cos 2t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -6 \text{ ნ/წმ.}$$

რადგან Z განსხვავდება Y -დან მარტო ნიშნით, ამიტომ $S_z = 6$ ნ/წმ. შემდეგ (147) განტოლებების საფუძველზე ვღებულობთ:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = S_x = 0;$$

$$mv_{2y} - mv_{1y} = S_y = -6;$$

$$mv_{2z} - mv_{1z} = S_z = 6.$$

აქედან, როცა $m = 2$, ვპოულობთ საძიებელი სიჩქარის გეგმილებს:

$$v_{2x} = v_{1x};$$

$$v_{2y} = v_{1y} - 3;$$

$$v_{2z} = v_{1z} + 3.$$

რადგან

$$v_{1x} = v_1 \cos 30^\circ = \sqrt{3};$$

$$v_{1y} = v_1 \cdot \cos 60^\circ = 1;$$

$$v_{1z} = v_1 \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

ამიტომ

$$v_{2x} = \sqrt{3};$$

$$v_{2y} = -2;$$

$$v_{2z} = 3.$$

მაშასადამე,

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ მ/წმ.}$$

თუ v_2 ვექტორის მიერ x, y, z ღერძებთან შედგენილ კუთხეებს სათანადოდ აღვნიშნავთ α, β, γ -თი, მაშინ

$$\cos \alpha = \frac{v_{2x}}{v_2} = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,4330;$$

$$\cos \beta = \frac{v_{2y}}{v_2} = -0,5;$$

$$\cos \gamma = \frac{v_{2z}}{v_2} = 0,75.$$

აქედან

$$\alpha = 64^\circ 30'; \quad \beta = 120^\circ; \quad \gamma = 48^\circ 30'.$$

მესამე რეზიუმე

ამ შემთხვევაში ძალის გვეგმილი თითოეულ საკოორდინატო ღერძზე წარმოადგენს იმავე ღერძზე სიჩქარის გვეგმილის წრფივ ფუნქციას და თეორემა მოძრაობის რაოდენობის გვეგმილის შესახებ გამოიყენება დიფერენციალური (146) ფორმით.

(146) განტოლებების ინტეგრირებამდე საჭიროა ცვლადთა განცალკევება, რისთვისაც საჭიროა შესაბამისად ამ განტოლებების X, Y და Z -ზე გაყოფა. შემდგომი ამოხსნა ანალოგიურია სიჩქარეზე დამოკიდებული ძალის მოქმედებით წერტილის წრფივი მოძრაობის განტოლების ამოხსნისა.

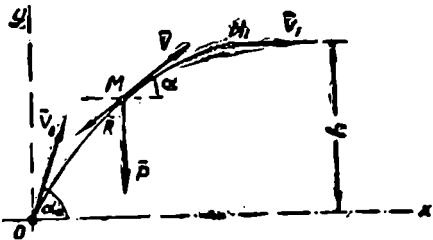
მაგალითი 127. ამოხსენით მაგალითი 125, ჰაერის წინააღობის მხედველობაში მიღებით, თუ მისი სიდიდე გამოისახება ფორმულით

$$R = kP \cdot v,$$

სადაც k არის მუდმივი კოეფიციენტი; P — სხეულის წონა, ხოლო v — მისი სიჩქარე (ნახ. 165).

ამოხსნა. კოორდინატთა ღერძები განვალაგოთ ისევე, როგორც 125 მაგალითში (იხ. ნახ. 164). რადგან სხეულზე მოქმედებს ძალა, რომელიც წარმოადგენს სიჩქარის ფუნქციას, ამიტომ თეორემა მოძრაობის რაოდენობის y ღერძზე გვეგმილის შესახებ გამოიყენებოთ დიფერენციალური ფორმით

$$d(mv_y) = Y dt;$$



ნახ. 165.

მაგრამ

$$Y = -P - R \sin \alpha = -P(1 + k \sin \alpha) = -P(1 + k v_y).$$

მაშასადამე,

$$m dv_y = -mg(1 + k v_y) dt;$$

აქედან

$$dt = - \frac{dv_y}{g(1 + k v_y)}.$$

თუ მხედველობაში ვიქონიებთ, რომ v_y იცვლება $v_0 \sin \alpha_0$ -დან ნულამდე ზღვრებში, ვღებულობთ

$$t_1 = - \int_{v_0 \sin \alpha_0}^0 \frac{dv_y}{g(1 + k v_y)} = \frac{1}{kg} \left[\ln(1 + k v_y) \right]_0^{v_0 \sin \alpha_0} = \\ = \frac{1}{kg} \ln(1 + k v_0 \sin \alpha_0).$$

III ტიპის ამოცანები

ამ ტიპის ამოცანებში ცნობილია წერტილის მოძრაობის რაოდენობა საწყის და საბოლოო მომენტში და; მაშასადამე, მისი გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე. ძალის საძიებელი იმპულსის გეგმილები განისაზღვრება (147) ფორმულებით, ე. ი.

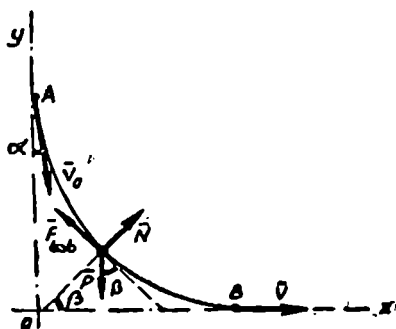
$$S_x = m v_x - m v_{0x};$$

$$S_y = m v_y - m v_{0y};$$

$$S_z = m v_z - m v_{0z}.$$

ამ გეგმილებით განისაზღვრება იმპულსის მოდული და მიმართულება.

მაგალითი 128. ნივთიერი M წერტილი თავისი წონის მოქმედებით მოძრაობს ვერტიკალურ xOy სიბრტყეში მოთავსებულ არაგლუვ მრუდწირულ ღარში. ხახუნის კუთხე უდრის φ -ს, როცა წერტილი იკავებს A მდებარეობას. მისი საწყისი სიჩქარე მოდულით უდრის v_0 -ს და ვერტიკალურ Oy ღერძთან ადგენს α კუთხეს. წერტილის საბოლოო სიჩქარე B წერტილში მოდულით უდრის v -ს და მიმართულია ჰორიზონტალური Ox ღერძის გასწვრივ. იპოვეთ ღარის ნორმალური \vec{N} რეაქ-



ნახ. 166.

ციის იმპულსი t დროის იმ შუალედში, რომლის განმავლობაში M წერტილი გადაადგილდება A მდებარეობიდან B -ში (ნახ. 166).

ამოხსნა. თეორემა ნიუთონის წერტილის მოძრაობის რაოდენობის შესახებ გამოვიყენოთ (147) ფორმით:

$$m(v_x - v_{0x}) = \int_0^t X dt;$$

$$m(v_y - v_{0y}) = \int_0^t Y dt.$$

აქ X -ით და Y -ით აღნიშნულია M წერტილზე მოდებული ყველა ძალის, ე. ი. P , N და ხახუნის $F_{\text{ხხ}}$ -ის ტოლქმედის გეგმილები x და y ღერძებზე. ამიტომ

$$X = P_x + N_x + F_{\text{ხხ}x} = N_x + F_{\text{ხხ}x};$$

$$Y = P_y + N_y + F_{\text{ხხ}y} = -P + N_y + F_{\text{ხხ}y}.$$

გარდა ამისა, გვაქვს: $F_{\text{ხხ}} = fN$, სადაც f ხახუნის კოეფიციენტია; $f = \tan \varphi$; $v_x = v$; $v_y = 0$; $v_{0x} = v_0 \sin \alpha$; $v_{0y} = -v_0 \cos \alpha$.

თუ \vec{N} ძალის მიერ x ღერძთან შედგენილ კუთხეს აღვნიშნავთ β -თი, მაშინ

$$N_x = N \cos \beta; \quad N_y = N \sin \beta;$$

$$F_{\text{ხხ}x} = -F_{\text{ხხ}} \sin \beta = -fN \sin \beta = -fN_y;$$

$$F_{\text{ხხ}y} = F_{\text{ხხ}} \cos \beta = fN \cos \beta = fN_x.$$

მაშასადამე, (147) განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$m(v - v_0 \sin \alpha) = \int_0^t N_x dt - f \int_0^t N_y dt;$$

$$mv_0 \cos \alpha = \int_0^t N_y dt + f \int_0^t N_x dt - Pt.$$

$$\text{რადგან } \int_0^t N_x dt = S_x \quad \text{და} \quad \int_0^t N_y dt = S_y,$$

სადაც S_x , S_y -ით აღნიშნულია \vec{N} ძალის საძიებელი \vec{S} იმპულსის გეგმილები x და y ღერძებზე, ამიტომ

$$S_x - fS_y = m(v - v_0 \sin \alpha),$$

$$fS_x + S_y = mv_0 \cos \alpha + Pt = m(v_0 \cos \alpha + gt).$$

ამ ორი განტოლებიდან შეიძლება განგვესაზღვრა S_x და S_y და ამ

გეგმილებით გამოიანგარიშება S იმპულსი. მაგრამ უფრო მარტივია ავიყვანოთ ეს განტოლებები კვადრატში და შევკრიბოთ. მაშინ მივიღებთ

$$(1+f^2)(S_x^2+S_y^2)=m^2[(v-s_0\sin\alpha)^2+(gt+s_0\cos\alpha)^2]$$

აქედან, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ

$$S_x^2+S_y^2=S^2 \text{ და } 1+f^2=1+tg^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi},$$

ვპოულობთ:

$$S=m\cos\varphi\sqrt{(v-s_0\sin\alpha)^2+(gt+s_0\cos\alpha)^2}=\frac{P\cos\varphi}{g}\sqrt{(v-s_0\sin\alpha)^2+(gt+s_0\cos\alpha)^2}.$$

ცხრილი 16

ამოცანათა კლასიფიკაცია

| ტიპები | ჩვეუფი | | |
|--|---|---|---|
| | 1-ელი | მე-2 | მე-3 |
| I წერტილის წრფი- ვი მოძრაობის დროს სიჩქარის ან დროის განსაზღვრა | მუდმივი ძალა (ამოცანები 28.1(733), 28.2(734), 28.5(737), 28.11(743)) | დროზე დამო- კიდებული ძალა (ამოცანები 27.33(694), 27.30(698)). | სიჩქარეზე დამოკი- ვებული ძალა (ამო- ცანები 27.14(687), 27.18(691), 27.22(696)) |
| II წერტილის მრუდწი- რული მოძრაობის დროს სიჩქარის ან დროის განსაზღვრა | მუდმივი ძალა | დროზე დამოკი- დებული ძალა | წერტილის მოძრაობა წინაღობის მქონე არეში |
| III ძალის ან მისი იმ- პულსის განსაზღვრა მოძრაობის რაოდე- ნობის წამატის სა- შუალებით | | | |
| (ამოცანები 28.3(735), 28.6(738), 28.7(739), 28.9(741), 28.17(749), 28.12(744)). | | | |

ნივთიერი წერტილის $\vec{m}\vec{v}$ მოძრაობის რაოდენობის მომენტი რაიმე O წერტილის მიმართ უდრის მოძრავი წერტილის \vec{r} რადიუს-ვექტორის და $\vec{m}\vec{v}$ მოძრაობის რაოდენობის ვექტორულ ნამრავლს, ე. ი.

$$\vec{M}_O(\vec{mv}) = \vec{r} \times \vec{mv}. \quad (153)$$

ცხადია, მოძრაობის რაოდენობის მომენტის მოდული უდრის

$$|\vec{M}_O(\vec{mv})| = mvh, \quad (154)$$

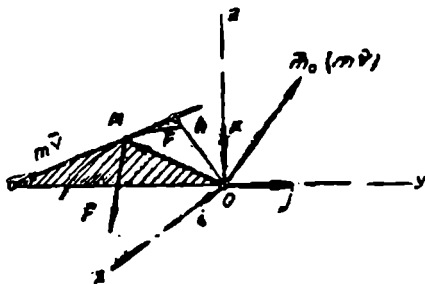
სადაც h — \vec{v} ვექტორის მხარია O წერტილის მიმართ (ნახ. 167).

თუ დავაგეგმილებთ (153) ვექტორულ ტოლობას O წერტილზე გამავალ საკოორდინატო ღერძებზე, მივიღებთ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ფორმულებს ამ ღერძების მიმართ

$$\begin{aligned} \text{მომ}_x(\vec{mv}) &= m(yz' - zy'); \\ \text{მომ}_y(\vec{mv}) &= m(zx' - xz'); \\ \text{მომ}_z(\vec{mv}) &= m(xy' - yx'). \end{aligned} \quad (155)$$

ვექტორული ფორმით თეორემა მოძრაობის რაოდენობის მომენტის შესახებ გამოისახება შემდეგნაირად: რომელიმე უძრავი O ცენტრის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის წარმოებულ დროით უდრის მოქმედი ძალის მომენტს იმავე ცენტრის მიმართ, ე. ი.

$$\frac{d}{dt} \vec{M}_O(\vec{mv}) = \vec{M}_O(\vec{F}). \quad (156)$$



ნახ. 167.

O ცენტრზე გამავალი რომელიმე საკოორდინატო ღერძზე (156) ვექტორული ტოლობის დაგეგმილებით ვღებულობთ განტოლებას, რომელიც გამოსახავს იმავე თეორემას სკალარული ფორმით

$$\frac{d}{dt} \text{მომ}_x(\vec{mv}) = \text{მომ}_x(\vec{F}), \quad (157)$$

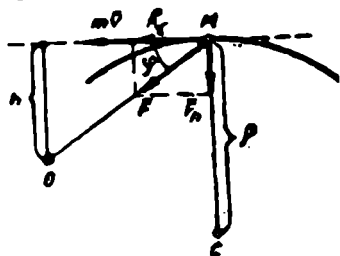
ე. ი. რომელიმე უძრავი ღერძის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის წარმოებულ დროით უდრის მოქმედი ძალის მომენტს იმავე ღერძის მიმართ, ე. ი.

რის მოქმედი ძალის მომენტს იმავე ღერძის მიმართ. ამ თეორემას აქვს დიდი მნიშვნელობა ცენტრალური ძალის მოქმედებით წერტილის მოძრაობაზე ამოცანების ამოხსნის დროს; ცენტრალური ძალა ეწოდება ისეთ ძალას, რომლის ფუძე ყოველთვის გადის ერთსა და იმავე უძრავ წერტილზე, რომელსაც ეწოდება ამ ძალის ცენტრი. თუ ნივთიერი წერტილი მოძრაობს O წერტილში ცენტრის მქონე ცენტრალური \vec{F} ძალის მოქმედებით, მაშინ

$$\frac{d}{dt} \text{მომ}_0(m\vec{v}) = \text{მომ}_0(\vec{F}) = 0,$$

და, მაშასადამე, $\text{მომ}_0(\vec{m}\vec{v}) = \text{const.}$

ამგვარად, მოძრაობის რაოდენობის მომენტი, როგორც მოდულით, ასევე მიმართულებით რჩება მუდმივი. აქედან გამომდინარეობს, რომ ცენტრალური ძალის მოქმედებით წერტილი აღწერს ბრტყელ წირს, რომელიც მდებარეობს ძალის ცენტრში გამავალ სიბრტყეში.



ნახ. 158.

თუ ცნობილია წერტილის მიერ ცენტრალური ძალის მოქმედებით აღწერილი ტრაექტორია, მაშინ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის შესახებ თეორემის გამოყენებით შეიძლება განვსაზღვროთ ეს ძალა, როგორც მოძრავი წერტილიდან ძალის ცენტრამდე r მანძილის ფუნქცია.

რადგან ძალის ცენტრის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის მომენტი

რჩება უცვლელი, ამიტომ, თუ $m\vec{v}$ ვექტორის მხარს ძალის ცენტრის მიმართ აღვნიშნავთ h -ით, მივიღებთ

$$vh = \text{const.} \quad (158)$$

ამ მუდმივის განსაზღვრისათვის ცნობილი უნდა იყოს წერტილის სიჩქარე ტრაექტორიის რომელიმე წერტილში, მეორე მხრივ, გვაქვს (ნახ. 158).

$$F_n = F \sin \varphi = \frac{mv^2}{\rho},$$

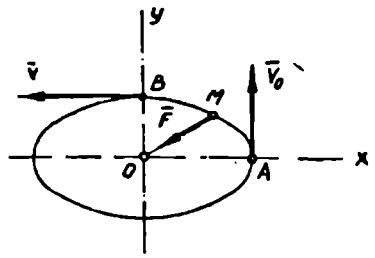
სადაც ρ — ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსია, ხოლო φ — წერტილის რადიუს-ვექტორსა და ამ წერტილში გამავალ მხებს შორის კუთხე. აქედან

$$F = \frac{mv^2}{r \sin \varphi} \quad (159)$$

ამგვარად, გვაქვს ორი (158) და (159) განტოლება ორი v და F , უცნობით; ამ განტოლებებში შემავალი დანარჩენი h , ρ და φ სიდიდეები წარმოადგენენ მოცემული ტრაექტორიის ელემენტებს და ამიტომ ადვილად განისაზღვრებიან.

ამგვარად, შეიძლება ვიპოვოთ v და F , როგორც r -ის ფუნქციები.

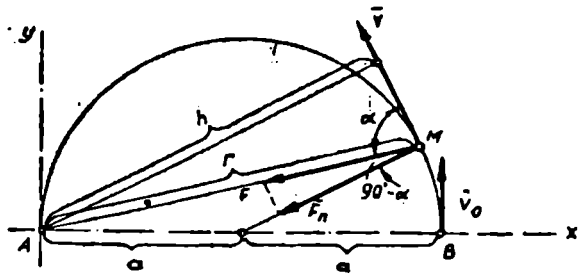
მაგალითი 129. M წერტილი ცენტრალური \vec{F} ძალის მოქმედებით აღწერს ელიფსს (ნახ. 169.) სიჩქარე A წვეროში უღრის \vec{v}_0 -ს, იპოვეთ \vec{v} სიჩქარე B წვეროში, თუ $OA = a$ და $OB = b$.



ნახ. 169.

ამ ოხსნა. რადგან ამ შემთხვევაში მომ₀(\vec{mv}) = const, ამიტომ $mvb = mv_0a$, საიდანაც $v = \frac{a}{b}v_0$.

მაგალითი 130. m მასის M წერტილი აღწერს a რადიუსის წრე, ხაზს და მიიზიდება ამ წრეხაზის A წერტილით (ნახ. 170). საწყის მომენტში წერტილი იმყოფება B მდებარეობაში და მას აქვს v_0 სიჩქარე. განსაზღვრეთ წერტილის v სიჩქარე და მიიზიდულობის F ძალა, როგორც r რადიუს-ვექტორის ფუნქცია.



ნახ. 170.

ამ ოხსნა. რადგან მომ_A(\vec{F}) = 0, ამიტომ მომ_A(\vec{mv}) = const = მომ_A(\vec{mv}_0),

მაშასადამე,

$$mvh = mv_0 2a;$$

საიდანაც $v = v_0 \frac{2a}{h}$.

მაგრამ ნახაზიდან გვაქვს:

$$r = 2a \cos(90^\circ - \alpha) = 2a \sin \alpha,$$

საიდანაც $\sin \alpha = \frac{r}{2a}$, ამიტომ $h = r \sin \alpha = \frac{r^2}{2a}$ და,

მაშასადამე,

$$v = \frac{4a^2 v_0}{r^2}.$$

F ძალას ვპოულობთ (159) განტოლების გამოყენებით

$$F_n = F \sin \alpha = \frac{mv^2}{\rho} = \frac{mv^2}{a},$$

აქედან

$$F = \frac{mv^2}{a \cdot \sin \alpha} = \frac{m}{a} \frac{16a^4 v_0^2}{r^4} \frac{2a}{r} = \frac{32ma^4 v_0^2}{r^5}.$$

§ 8. მუშაობა და სიმძლავრე

ძალის dA მუშაობა უსასრულო მცირე ds გადაადგილებაზე, ეგრეთ წოდებული ელემენტარული მუშაობა, გამოისახება ტოლობით

$$dA = F \cos \alpha \cdot ds = F_{\tau} \cdot ds; \quad (160)$$

სადაც $ds = \vec{MM}_1$ ხოლო α — F ძალასა და მისი მოდების წერტილის \vec{r} სიჩქარეს შორის კუთხე (ნახ. 171) ან შემდეგი სკალარული ნამრავლის სახით,

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (161)$$

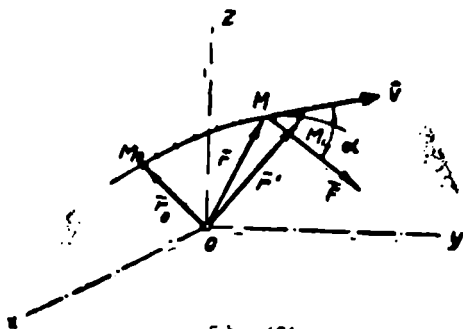
სადაც $d\vec{r} = \vec{v} dt$ არის ძალის მოდების წერტილის რადიუს-ვექტორის დიფერენციალი.

თუ გამოვსახავთ ამ სკალარულ ნამრავლს \vec{F} და $d\vec{r}$ ვექტორების, საკოორდინატო ღერძებზე გეგმილების საშუალებით, მივიღებთ ელემენტარული მუშაობის ანალიზურ გამოსახვას

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz, \quad (162)$$

სიდაც X, Y, Z -- ძალის გეგმილება საკოორდინატო ღერძებზე, ხოლო dx, dy, dz -- ძალის მოდების წერტილის კოორდინატების უსასრულოდ მცირე ცვლილებები (დიფერენციალები) ამ წერტილის ელემენტარული გადაადგილების დროს.

თუ \vec{F} ძალა მოდებულია უძრავი z ღერძის გარშემო მბრუნავ მყარ სხეულზე, მაშინ



ნახ. 171.

$$dA = \text{მომ}_z(\vec{F}) \cdot d\varphi, \quad (163)$$

სიდაც $d\varphi$ -- ღერძის გარშემო სხეულის მობრუნების ელემენტარული კუთხეა.

თუ სხეულზე, რომელსაც გააჩნია ბრუნვის უძრავი Oz ღერძი, მოდებულია \vec{m} მომენტის მქონე წყვილძალა, მაშინ ამ წყვილძალის ელემენტარული მუშაობა გამოისახება შემდეგნაირად

$$dA = m_z d\varphi,$$

სიდაც m_z -- წყვილძალის ვექტორული მომენტის გეგმილია Oz ღერძზე.

განსაკუთრებულ ინტერესს წარმოადგენს ის შემთხვევა, როცა ძალა არის წერტილის კოორდინატების ფუნქცია და, გარდა ამისა,

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}, \quad (164)$$

ამ შემთხვევაში არსებობს წერტილის კოორდინატთა ისეთი ფუნქცია $U = U(x, y, z)$, რომლის კერძო წარმოებულები კოორდინატებით უდრის ძალის გეგმილებს სათანადო საკოორდინატო ღერძზე, ე. ი.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z. \quad (165)$$

ასეთ ფუნქციას ეწოდება ძალთა ფუნქცია, ანუ პოტენციური ფუნქცია. მაშასადამე, თუ არსებობს ძალთა ფუნქცია, მაშინ

$$dA = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU, \quad (166)$$

ე. ი. ძალის ელემენტარული მუშაობა უდრის ძალ-
თა ფუნქციის სრულ დიფერენციალს. სიერცის შემო-
საზღვრულ ან შემოუსაზღვრელ ნაწილს, რომელშიც აღმოჩნდება ძალ-
თა ფუნქციის მქონე ძალის მოქმედება, ეწოდება ძალთა პოტენ-
ციური ველი. ძალთა პოტენციური ველის იმ წერტილთა
გეომეტრიულ ადგილს, რომლებშიც ძალთა ფუნქცია ინარჩუნებს მუდ-
მივ მნიშვნელობას, ეკვიპოტენციური ზედაპირი, ან უ-
დონის ზედაპირი ეწოდება.

სასრულ გზაზე \vec{F} ძალის \vec{A} მუშაობა განისაზღვრება როგორც
ელემენტარულ მუშაობათა ჯამის ზღვარი და გამოისახება მრუდწი-
რული ინტეგრალის სახით, რომელიც აღებულია ტრეპქტორიის M_0M
რკალის გასწვრივ M_0 წერტილიდან M წერტილამდე

$$A = \int_{(M_0)}^{(M)} F \cos \alpha ds = \int_{(M_0)}^{(M)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(M_0)}^{(M)} (X dx + Y dy + Z dz). \quad (167)$$

თუ $F \cos \alpha$ ნამრავლი გამოისახება ძალის მოდების წერტილის რკა-
ლური s კოორდინატის ცნობილი ფუნქციით, მაშინ s სიდიდე წარმო-
ადგენს ინტეგრირების ცვლადს და მუშაობის გამოსაანგარიშებელი
ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$A = \int_{s_0}^s F \cos \alpha \cdot ds = \int_{s_0}^s F_z ds, \quad (168)$$

სადაც s_0 და s — ძალის მოდების M_0 და M წერტილების მდებარეო-
ბის შესაბამისი რკალური კოორდინატებია, ხოლო F_z — ძალის გეგ-
მილი ამ წერტილის ტრეპქტორიის მხებზე.

თუ მოდულით მუდმივი ძალა იმ წრფესთან, რომელს გასწვრივ
მოძრაობს მისი მოდების წერტილი, ადგენს მუდმივ α კუთხეს, მაშინ

$$A = F \sigma \cos \alpha. \quad (169)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა M წერტილი მოძრაობს წრფეზე, ამ
წრფის გასწვრივ, მოძრაობის მიმართულებით ან მოძრაობის საწინა-
აღმდეგოდ მიმართული მუდმივი F ძალის მოქმედებით, მაშინ სათანა-
ოდ გვექნება:

$$A = +F \sigma \quad \text{ან} \quad A = -F \sigma, \quad (170)$$

სადაც σ — წერტილის მიერ გავლილი გზაა.

თუ უძრავი ღერძის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრა-
ობის დროს მასზე მოდებული ძალის მომენტი წარმოადგენს სხეულის
მობრუნების φ კუთხის ფუნქციას, ე. ი.

$$\text{მომ}_e(\vec{F}) = \int(\varphi),$$

მაშინ
$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \text{მომ}_z(\vec{F}) d\varphi. \quad (171)$$

ანალოგიურად განისაზღვრება (\vec{P}, \vec{Q}) წვეილძალის მუშაობა

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \text{მომ}_z(\vec{P}, \vec{Q}) d\varphi. \quad (172)$$

პოტენციური ფუნქციის მქონე ძალის მუშაობა სასრულ გადაადგილებაზე გამოისახება გზის ბოლო და საწყის წერტილებში ამ ფუნქციის მნიშვნელობების სხვაობით

$$A = \int_{(M_0)}^{(M)} dU = U - U_0, \quad (173)$$

ე. ი. ამ შემთხვევაში ძალის მუშაობა არ არის დამოკიდებული იმ მრუდზე, რომელზედაც გადაადგილება M წერტილი, არამედ დამოკიდებულია მისი საწყის და ბოლო მდებარეობაზე. პოტენციურ ველში ნივთიერი წერტილის მოძრაობის შესწავლის დროს ძალიან დიდი მნიშვნელობა აქვს პოტენციური ენერჯიის ცნებას. ნივთიერი წერტილის პოტენციური ენერჯია წარმოადგენს ენერჯიის განსაკუთრებულ სახეს, რომელიც აქვს პოტენციურ ველში მყოფ წერტილს. პოტენციური Π ენერჯია უდრის იმ მუშაობას, რომელსაც შეასრულებს ველის ძალა მისი მოდების წერტილის $M(x, y, z)$ მდებარეობიდან საწყის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ მდებარეობაში გადაადგილებას დროს, ე. ი.

$$\Pi = U_0 - U; \quad (174)$$

საიდანაც
$$d\Pi = -dU = -dA. \quad (175)$$

პოტენციური ენერჯიის საშუალებით ძალის მუშაობა სასრულ გზაზე გამოისახება შემდეგნაირად

$$A = \Pi_0 - \Pi. \quad (176)$$

თუ წერტილზე მოდებულია რამდენიმე ძალა, მაშინ ამ ძალთა სისტემის ტოლქმედის მუშაობა რაიმე გადაადგილებაზე უდრის შემადგენელი ძალების მუშაობათა ჯამს იმავე გზაზე.

ერთეულთა ტექნიკურ სისტემაში მუშაობა იზომება კილოგრამო-

მეტრობით (კგმ). ერთეულთა საერთაშორისო სისტემაში მუშაობის ერთეულად მიღებულია 1 ჯოული = 1 ნმ = 0,102 კგმ.

N სიმძლავრე ახასიათებს მუშაობის შესრულების სიჩქარეს და ზოგად შემთხვევაში განისაზღვრება როგორც მუშაობის პირველი რივის წარმოებულ დროით

$$N = \frac{dA}{dt} = F \cos \alpha \cdot v = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (177)$$

ე. ი. სიმძლავრე უდრის ძალის ვექტორის და სიჩქარის ვექტორის სკალარულ ნამრავს.

თუ A მუშაობა სრულდება თანაბრად, მაშინ სიმძლავრე განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$N = \frac{A}{t}, \quad (178)$$

სადაც t არის დრო, რომლის განმავლობაში შესრულებულია მუშაობა.

ამგვარად, ამ კერძო შემთხვევაში სიმძლავრე რიცხობრივად უდრის დროის ერთეულში შესრულებულ მუშაობას.

უძრავი Z ღერძის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის დროს

$$N = M_z \cdot \omega, \quad (179)$$

სადაც $M_z = \sum_{k=1}^n \text{მომ}_z(\vec{F}_k)$ არის სხეულზე მოდებული ძალების ნაკრები

მომენტი ბრუნვის Z ღერძის მიმართ, ხოლო ω — სხეულის კუთხური სიჩქარე.

ერთეულთა ტექნიკურ სისტემაში სიმძლავრე იზომება კგმ/წმ-ობით, ანუ ცხენის ძალებში, ამასთანავე

$$1 \text{ ცხ } d. = 75 \text{ კგმ/წმ.}$$

ერთეულთა ტექნიკურ სისტემაში სიმძლავრე იზომება კგმ/წმ-ობით,

$$1 \text{ ვატი} = 1 \text{ ჯოული/წმ, ანუ } 1 \text{ კვტ} = 1000 \text{ ვტ} = 102 \text{ კგმ/წმ.}$$

მუშაობის და სიმძლავრის განსაზღვრაზე ამოცანების ამოხსნის დროს ხშირად გვხვდება მარგი ქმედების კოეფიციენტი სცნება. მარგი ქმედების კოეფიციენტი η ეწოდება სასარგებლო მუშაობის ან სიმძლავრის*) ფარდობას მამოძრავებელი ძალების მუშაობასთან ან სიმძლავრესთან

$$\eta = \frac{A_{\text{სასარგ.}}}{A_{\text{მამოძრ.}}} = \frac{N_{\text{სასარგ.}}}{N_{\text{მამოძრ.}}}, \quad (180)$$

რადგან წინააღმდეგობების გამო $A_{\text{სასარგ.}} \leq A_{\text{მამოძრ.}}$, ამიტომ $\eta \leq 1$.

*) თუ სიმძლავრე განისაზღვრება (178) ფორმულით.

მუშაობის გამოთვლის დროს უნდა განვასხვავოთ შემდეგი შემთხვევები.

1. წრფივი მოძრაობა მუდმივი ძალის მოქმედებით. ამ ტიპის ამოცანებში გამოიყენება (169) და (170) ფორმულები (ამოცანები 29.2 (756), 29.8(762)).

2. წრფივი მოძრაობა ისეთი ძალის მოქმედებით, რომლის გეგმილი წრფივი ტრაექტორიის მიმართულებაზე წარმოადგენს მანძილის ფუნქციას — ამ წრფეზე აღებული უძრავი ცენტრიდან წერტილამდე. (ამოცანა 29.14 (768)); ასეთი ტიპის ამოცანებში გამოიყენება (167) ფორმულა, რომელიც, თუ x ღერძს მიემართავთ წერტილის ტრაექტორიის გასწვრივ, ლებულობს სახეს

$$A = \int_{x_0}^x X dx. \quad (181)$$

3. მრუდწირული მოძრაობა მოდულით და გეზით მუდმივი ძალის მოქმედებით; ამ შემთხვევაში შეიძლება (167) ფორმულის გამოყენება.

4. მრუდწირული მოძრაობა იმ ძალის მოქმედებით, რომელიც წარმოადგენს ძალის მოდების წერტილის კოორდინატების ფუნქციას.

აქ მუშაობის განსაზღვრა დაიყვანება (167) ფორმულით მრუდწირული ინტეგრალის გამოთვლაზე. თუ განსახილველ შემთხვევაში არსებობს ძალთა ფუნქცია, მაშინ მუშაობა განისაზღვრება (173) ან (176) ფორმულებით.

5. მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობა მუდმივი მომენტის ან სხეულის მობრუნების კუთხეზე დამოკიდებული მომენტის მოქმედებით; ამ შემთხვევაში მუშაობის გამოსაანგარიშებლად გამოიყენება (171) ფორმულა.

სიმძლავრის გამოსაანგარიშებლად მოძრაობის სახეზე დამოკიდებულებით ვსარგებლობთ ან (177) ფორმულით, თუ ადგილი აქვს ძალის მოდების წერტილის წრფივ ან მრუდწირულ მოძრაობას (ამოცანები 29.6(760), 29.10(764)), ან (179) ფორმულით — მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის შემთხვევაში (ამოცანები 29.11(765), 29.17(771), 29.18(772)). საშუალო სიმძლავრე შეიძლება განვსაზღვროთ (178) ფორმულით.

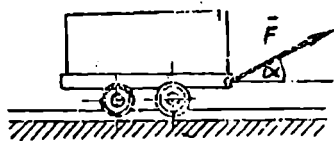
მაგალითი 181. საწვეის გასწვრივ, რომლის საშუალებითაც ეწევიან ან ვაგონეტს ჰორიზონტალურ გზაზე, მოქმედებს $F=250$ ნ ძალა (ნახ. 179). საწვეი ჰორიზონტთან ადგენს $\alpha=32^\circ$ კუთხეს. განსაზღვრეთ F

ძალის მიერ $\sigma = 200$ მ გზაზე შესრულებული მუშაობა.

ამოხსნა. აქ მუშაობა განისაზღვრება (169) ფორმულით

$$A = F\sigma \cos \alpha = 250 \cdot 200 \cdot 0,848 = 4240 \text{ ჯოული.}$$

მაგალითი 132. $P = 20$ ნ წონის სხეულს ჰორიზონტალური ძალის საშუალებით გადაადგილებენ ჰორიზონტალური იატაკის გასწვრივ



ნახ. 172.

$\sigma = 6$ მ მანძილზე. განსაზღვრეთ ხახუნის ძალის მიერ ამ დროს შესრულებული მუშაობა, თუ სხეულის ზედაპირს და იატაკს შორის ხახუნის კოეფიციენტი $f = 0,35$.

ამოხსნა. კულონის კანონის თანახმად, ხახუნის ძალა $F_{\text{ხახ}} = fN$,

სადაც N — სხეულის ნორმალური წნევაა იატაკზე, ამასთანავე მოცემულ შემთხვევაში $N = P = 20$ ნ. რადგან ხახუნის ძალა მიმართულია მოძრაობის მიმართულების საწინააღმდეგოდ, ამიტომ ამ ძალის მუშაობა უარყოფითია

$$A_{\text{ხახ}} = -fP\sigma = -0,35 \cdot 20 \cdot 6 = -42 \text{ ჯოული.}$$

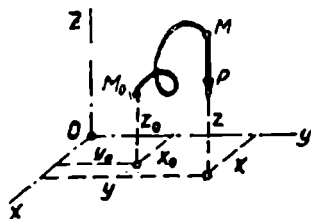
მაგალითი 133. იპოვეთ სიმძიმის ძალის მუშაობა ნივთიერი წერტილის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ მდებარეობიდან $M(x, y, z)$ მდებარეობაში გადასვლის დროს, აგრეთვე გარითვალეთ წერტილის პოტენციური ენერგია M მდებარეობაში (ნახ. 173).

ამოხსნა. მივმართოთ z ღერძი ვერტიკალურად ზემოთ; გვექნება

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -P,$$

სადაც P — სხეულის წონაა. მაშასადამე, (162) ფორმულით გვექნება

$$dA = -Pdz,$$



ნახ. 173.

საიდანაც

$$A = - \int_{z_0}^z Pdz = -P(z - z_0) = P(z_0 - z). \quad (182)$$

ე.ი. სიმძიმის ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა უდრის ნივთიერი წერტილის წონის და მისი საწყის და ბოლო მდებარეობაში სიმალღეების სხვაობის ნამრავლს, ამასთანავე ამ სიმალღეების

ათვლას დება ნებისმიერად არჩეული პორიზონტალური სიბრტყიდან.

წერტილის პოტენციურ ენერგიას განსაზღვრავთ (175) ფორმულის საფუძველზე

$$d\Pi = -dA = Pdz. \quad (173)$$

აქედან $\Pi = Pz + C,$

სადა C — ინტეგრირების ნებისმიერი მუდმივაა*).

მაგალითი 134. გაკიმული ძელის ბოლოზე ჩამოკიდებულია M ტვირთი. განსაზღვრეთ ამ ძელის ღრეკადი ძალის მუშაობა ტვირთის M_0 მდებარეობიდან M მდებარეობაში გადაადგილებაზე, თუ არადეფორმირებული ძელის სიგრძე უდრის l_0 -ს; განსაზღვრეთ აგრეთვე წერტილის პოტენციური ენერგია M მდებარეობაში (ნახ. 174).

ამოხსნა. აღვნიშნოთ ძელის ღრეკადი ძალა F -ით და მივმართოთ x ღერძი ვერტიკალურად ქვემოთ, გვექნება $F_x = -cx$, სადა x — ძელის დაგრძელება, ხოლო c — მისი სიხისტე. მაშასადამე,

$$dA = Xdx = -cxdx,$$

$$A = - \int_{x_0}^x cxdx = -\frac{c}{2}(x^2 - x_0^2), \quad (184)$$

$$d\Pi = -dA = cxdx.$$

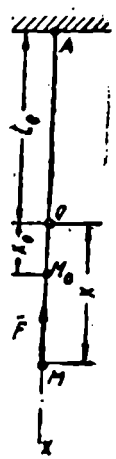
აქედან

$$\Pi = \frac{c}{2}x^2 + C. \quad (185)$$

მაგალითი 135. ნივთიერ წერტილზე მოქმედებს ძალა, რომლის გვერდები საკოორდინატო ღერძებზე გამოისახება შემდეგნაირად:

$$X = 2x + y; \quad Y = x + z^2; \quad Z = 2yz + 1$$

განსაზღვრეთ ამ ძალის მუშაობა წერტილის $M_0(1;2;3)$ მდებარეობი-



ნახ. 174.

* საერთოდ პოტენციური ენერგია განისაზღვრება ნებისმიერი მუდმივის სიხუსტით. პოტენციური ენერგიის გამოსახულებებში ნებისმიერი მუდმივი შეიძლება უგულებელყოფილი იყოს, რადგან ამოცანების ამოხსნის დროს საქმე ეკავება პოტენციური ენერგიის დიფერენციალთან, ანუ წარმოებულთან ან კიდევ წერტილის ან სისტემის ორი სხვადასხვა მდებარეობისათვის პოტენციური ენერგიის მნიშვნელობათა სხვაობასთან.

დან $M_1(2;3;4)$ მდებარეობაში გადაადგილებაზე, თუ ძალა მოცემუ-
ლია ნ-ობით, კოორდინატები სმ-ობით.

ამოხსნა. უპირველესად გამოვარკვიოთ არსებობს თუ არა მო-
ცემულ შემთხვევაში ძალთა ფუნქცია; ამისათვის ვპოულობთ კერძო
წარმოებულს:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = 2z; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = 2z;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial X}{\partial z} = 0.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$; $\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$; $\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$,

ე. ი. (164) პირობა დაკუთლია და ძალთა ფუნქცია არსებობს. ამ ფუნ-
ქციის სრული დიფერენციალი უდრის ელემენტარულ მუშაობას, ე. ი.
 $dU = dA$. ელემენტარულ მუშაობას ესაზღვრავთ ფორმულით
 $dA = Xdx + Ydy + Zdz$, ანუ X , Y , Z მნიშვნელობების ჩასმით

$$dA = (2x + y)dx + (x + z^2)dy + (2yz + 1)dz = \\ = 2xdx + ydx + xdy + z^2dy + 2yzdz + dz.$$

ეს გამოსახულება ნამდვილად წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს,

$$dA = d(x^2) + d(xy) + d(yz^2) + dz = d(x^2 + xy + yz^2 + z).$$

ამგვარად,

$$dU = d(x^2 + xy + yz^2 + z).$$

აქედან

$$U = x^2 + xy + yz^2 + z + C.$$

M_0 და M წერტილებში U
ფუნქციის მნიშვნელობებია

$$U_0 = 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3^2 + 3 + C = 24 + C, \\ U_1 = 2^2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4^2 + 4 + C = 62 + \\ + C.$$

მაშასადამე, საძიებელი მუშაობა

$$A = U_1 - U_0 = 62 - 24 = 38 \text{ ნ.სმ.}$$

მაგალითი 188. განსაზღვრეთ ცენტრალური ძალის მუშაობა, თუ
ძალის მოდული წარმოადგენს ნივთიერი წერტილიდან ამ ძალის ცენ-
ტრამდე მანძილის ფუნქციას, ე. ი. $F = f(r)$ (ნახ. 175).

ამოხსნა. მოცემულ შემთხვევაში F ძალის მიმართული უდრის $\pm \frac{r}{r}$ -ს. ამასთანავე ნიშანი (+ ან -) აირჩევა იმასთან დამოკიდებულებით, განიზიდება თუ მიიზიდება M წერტილი ძალის ცენტრისაკენ.

ამგვარად, ძალის \vec{F} ვექტორი გამოისახება შემდეგნაირად.

$$\vec{F} = \pm f(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

(161) ფორმულით სარგებლობისას

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pm f(r) \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r},$$

მაგრამ $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$, მაშასადამე, $\vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr$,
საიდანაც

$$dA = \pm \frac{f(r)r dr}{r} = \pm f(r) dr,$$

ე. ი. ელემენტარული მუშაობა წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს და, მაშასადამე, არსებობს ძალთა ფუნქცია, ამასთანავე

$$dU = dA = \pm f(r) dr;$$

აქედან

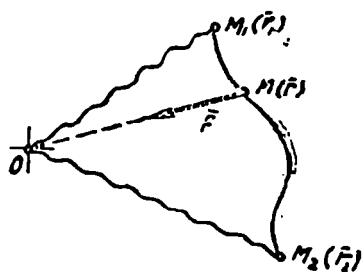
$$U = \pm \int f(r) dr.$$

ამგვარად, მოცემულ შემთხვევაში გვაქვს ზოგადი ფორმულა, რომლის საშუალებით ძალთა ფუნქცია ადვილად განისაზღვრება, როგორც ძალის მოდების წერტილის რადიუს-ვექტორის ფუნქცია, და შემდეგ გამოითვლება ძალის მუშაობა წერტილის $M_0(\vec{r}_0)$ მდებარეობიდან $M(\vec{r})$ მდებარეობაში გადასვლისას,

$$A = U - U_0 = U(r) - U(r_0) = \pm \int_{r_0}^r f(r) dr. \quad (186)$$

მაგალითი 187. ზამბარის ერთი ბოლო სახსრით დამაგრებულია O წერტილში, ხოლო მის მეორე ბოლოზე დამაგრებულია ბურთულა, გაუქიძავი ზამბარის სიგრძეა l_0 , მისი სიხისტე — c . ბურთულას გადა-

ადგილებზე M_1 მდებარეობიდან M_2 მდებარეობაში, ამასთანავე ზამ-



ნახ. 176.

ბარა მუდამ გავიშულია და არ იღუნება. განსაზღვრეთ ზამბარის დრეკადი ძალის მუშაობა, თუ $OM_1 = r_1$ და $OM_2 = r_2$ (ნახ. 176).

ამოხსნა. ზამბარის დრეკადი ძალის მოდული ამ შემთხვევაში გამოისახება შემდეგნაირად

$$F = c(r - l_0) = f(r).$$

მაშასადამე, შეიძლება ვისარგებლოთ (186) ფორმულით

$$A = - \int_{r_1}^{r_2} c(r - l_0) dr = \left[\frac{c(r - l_0)^2}{2} \right]_{r_2}^{r_1} = \frac{c}{2} [(r_1 - l_0)^2 - (r_2 - l_0)^2]$$

ინტეგრალის წინ დგას მინუს ნიშანი იმიტომ, რომ ძალა მიიზიდავს ბურთულას O ცენტრისაკენ.

მაგალითი 138. R რადიუსის თვალი უსრიალოდ გორავს. პორიზონტალურ რელსზე. იპოვეთ გორვის ხახუნის მუშაობა თვლის ცენტრის s მანძილზე გადაადგილების დროს, თუ თვლის ღერძზე ვერტიკალური დატვირთვა უდრის P -ს და გორვის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის f_s -ს (ნახ. 177).

ამოხსნა. გორვის ხახუნი წარმოიშობა, როგორც ცნობილია, თვლის და რელსის დეფორმაციის შედეგად. გორვის ხახუნის წყვილძალის მომენტი კულონის კანონის თანახმად

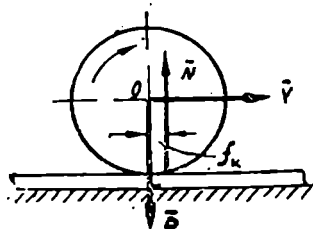
$$L_s = \int_s N = \int_s P$$

რადგან ეს წყვილძალა ცდილობს მოაბრუნოს თვალი მისი ბრუნვის მიმართუ-

ლების საწინააღმდეგოდ, ამიტომ გორვის ხახუნის მუშაობა იქნება უარყოფითი და უდრის მუდმივი L_s მომენტის და თვლის მობრუნების φ კუთხის ნამრავლს (172 ფორმულით) ე. ი.

$$A = -L_s \cdot \varphi = - \int_s P \varphi.$$

თვლის უსრიალო გორვის დროს გეჟებს $S = R\varphi$, მაშასადამე,



ნახ. 177.

$$A = - \int_0^{\varphi} \frac{P}{r} s.$$

მაგალითი 139. *l* სიგრძის ლილვის ერთი ბოლო ხისტად ჩამაგრებულია. მეორე თავისუფალ ბოლოზე მოდებულია მბრუნავი მომენტი, რომელიც აიძულებს ლილვს განიცადოს გრების დეფორმაცია. განსაზღვრეთ ლილვში წარმოშობილი დრეკადი ძალების მუშაობა, თუ დრეკადი ძალების ნაკრები მომენტი გრების კუთხის პროპორციულია, ამასთანავე პროპორციულობის კოეფიციენტი (ლილვის სიხის-ტის კოეფიციენტი გრებისას) უდრის c -ს. განსაზღვრეთ აგრეთვე გრების კუთხეზე დამოკიდებული ლილვის პოტენციური ენერჯია (ნახ. 178).

ამოხსნა. დრეკადი ძალების მომენტი გამოისახება ფორმულით

$$L_{\text{გრ}} = - c\varphi.$$

აქედან (172) ფორმულის საფუძველზე გვაქვს

$$dA = dU = - c\varphi d\varphi.$$

მაშასადამე,

$$A = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} c\varphi d\varphi = - \frac{c}{2} (\varphi^2 - \varphi_0^2).$$

პოტენციური ენერჯიისათვის გვაქვს

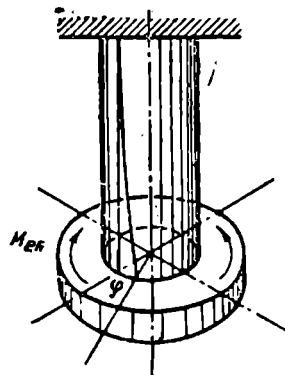
$$d\Pi = - dU = c\varphi d\varphi$$

და ამიტომ

$$\Pi = \frac{c\varphi^2}{2} + c.$$

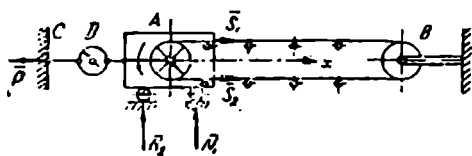
მაგალითი 140. კონვეიერის ლენტის შტოების S_1 და S_2 დაჭიმულობის განსაზღვრისათვის კონვეიერის ამძრავი დაყენებულია საგორავებზე და ამძრავსა და უძრავ C დგარს შორის ჩართულია D დინამომეტრი.

განსაზღვრეთ S_1 და S_2 დაჭიმულობანი, თუ დინამომეტრის ჩვენე-



ნახ. 178.

ბა უდრის P -ს ნიუტონებში. ამძრავი დოლის დიამეტრია d , ამძრავის ელექტროძრავას მომხმარებელი სიმძლავრე უდრის N -ს და ამძრავის დოლი ასრულებს n ბრუნს წუთში (ნახ. 179).



ნახ. 179.

ამოხსნა. ამძრავზე მოქმედი ძალების წონასწორობის განხილვით და საყრდენ სიბრტყეს შორის ხახუნის უგულებელყოფით მივიღებთ

$$\Sigma X = S_1 + S_2 - P = 0,$$

საიდანაც

$$S_1 + S_2 = P. \quad (a)$$

რადგან ამძრავის დოლი ბრუნავს თანაბრად, ამიტომ ძრავას ლილვზე მბრუნავი მომენტი, ცხადია, განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$L_{\text{ზგ}} = S_1 \frac{d}{2} - S_2 \frac{d}{2} = (S_1 - S_2) \frac{d}{2},$$

მაგრამ (179) ფორმულის საფუძველზე ძრავას სიმძლავრე

$$N = L_{\text{ზგ}} \omega = \frac{\pi n}{30} L_{\text{ზგ}}.$$

ქედან

$$L_{\text{ზგ}} = \frac{10N}{n}$$

და, მაშასადამე,

$$S_1 - S_2 = \frac{10N}{n} \frac{2}{d}. \quad (b)$$

(a) და (b) განტოლებათა სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ

$$S_1 = \frac{P}{2} + 10 \frac{N}{nd},$$

$$S_2 = \frac{P}{2} - 10 \frac{N}{nd}.$$

მაგალითი 141. იპოვეთ მანქანის სიმძლავრე, რომელიც $P = 9000$ ნ წონის უროს წუთში 100-ჯერ აწევს $h = 0,6$ მ სიმაღლეზე, თუ მარკი ქმედების კოეფიციენტი $\eta = 0,8$.

ამოხსნა. ეპოულობთ. სასარგებლო მუშაობას 1 წუთის განმავლობაში

$$A_{\text{სასარგ.}} = P \cdot h \cdot 100 = 9000 \cdot 100 \cdot 0,6 = 540000 \text{ ჯოული.}$$

აქლა ვიპოვით სასარგებლო სიმძლავრეს (178) ფორმულით

$$N_{\text{სასარგ.}} = \frac{A_{\text{სასარგ.}}}{t} = \frac{540000}{60} = 9000 \text{ ვატი} = 9 \text{ კვტ.}$$

შემდეგ ვისარგებლოთ (180) ფორმულით და განვსაზღვროთ ძრავას საბიებელი სიმძლავრე

$$N = \frac{N_{\text{სასარგ.}}}{\eta} = \frac{9}{0,8} = 11,25 \text{ კვტ.}$$

ამ პარაგრაფის ამოცანათა კლასიფიკაცია მოყვანილია მე-17 ცხრილში.

ცხრილი 17

ამოცანათა კლასიფიკაცია

| ტიპი | | |
|---|---|--|
| 1 (წრფივი მოძრაობა) | 2 (მრუდწირული მოძრაობა) | 3 (უძრავი ღერძის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობა) |
| 1 მოქმედი ძალა მუდმივია ($F = \text{const}$). ამოცანები 29.2(756)—29.10(764), 29.12(766) | მოქმედი ძალა მუდმივია ($F = \text{const}$) | მბრუნავი მომენტი მუდმივია. ამოცანები 29.1(755), 29.11(765), 29.13(767), 29.17(771), 29.18(772). |
| 2 მოქმედი ძალა დამოკიდებულია ძალის მოღებვის წერტილის მდებარეობაზე $[F = f(x)]$ ამოცანები 29.14(768), 30.21(790) (პოტენციური ენერჯიის გამოთვლა) 29.15(769), 30.15(784) | მოქმედი ძალა დამოკიდებულია ძალის მოღებვის წერტილის კოორდინატებზე $[F = F(x, y, z)]$ ამოცანები 29.16(770), 30.19(788). (მუშაობის გამოანგარიშება) | მბრუნავი მომენტი დამოკიდებულია სხეულის მობრუნების კუთხეზე |

§ 4. თეორემა ნივთიერი წარბილის კინეტიკური ენერჯიის შესახებ

ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერჯია გამოისახება ამ წერტილის მასისა და მისი სიჩქარის კვადრატის ნამრავლის ნახევრით.

ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერჯიის შესახებ თეორემა შემდეგაა გამოისახული იყოს სამი ხერხით:

$$1) \quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F \cos \alpha ds = dA \quad (187)$$

ე.ი. ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერჯიის დიფერენციალი უდრის ამ წერტილზე მოქმედი ძალის ელემენტარულ მუშაობას

$$2) \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{dA}{dt} = N, \quad (188)$$

ე.ი. ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერჯიის წარმოებულის დროით უდრის ამ წერტილზე მოქმედი ძალის სიმძლავრეს

$$3) \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{(M_0)}^{(M)} F \cos \alpha ds, \quad (189)$$

ე.ი. ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერჯიის ნამატი სასრულ M_0M გზაზე უდრის ამ წერტილზე მოქმედი ძალის მიერ შესრულებულ მუშაობას იმავე გზაზე.

თუ წერტილზე მოქმედებს რამდენიმე ძალა, მაშინ (187) — (189) განტოლებების მარჯვენა მხარეებში შედის ამ ძალების ტოლქმედის მუშაობა ან სიმძლავრე, რომელიც უდრის ყველა შემადგენელი ძალის მუშაობის ან სიმძლავრის ჯამს.

წერტილის წრფივი მოძრაობის შემთხვევაში ამ წრფის გასწვრივ x ღერძს თუ მივმართავთ, მივიღებთ:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = X dx \quad (190)$$

$$\text{და} \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^x X dx, \quad (191)$$

სადაც $X = \pm F$, რადგან ამ შემთხვევაში წერტილზე მოდებული ყველა ძალის ტოლქმედი მიმართულია x ღერძის გასწვრივ.

ნივთიერი წერტილის არათავისუფალი მოძრაობის შემთხვევაში, კინეტიკური ენერჯიის თეორემის გამოყენების დროს, მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ შემდეგი: თუ წერტილზე დადებულია იდეალური სტაციონარული ბმა (წერტილი მოძრაობს აბსოლუტურად გლუვ ზედაპირზე ან წირზე), მაშინ ბმის რეაქცია განტოლებებში არ შევა, რადგან ეს რეაქცია მიმართულია წერტილის ტრანეკტორიის ნორმალის გასწვრივ და მაშასადამე, მისი მუშაობა უდრის ნულს. თუ მხედვე-

ლობაში გვაქვს ხახუნი, მაშინ კინეტიკური ენერგიის განტოლებაში შევა ხახუნის მუშაობა ან სიმძლავრე.

ამ პარაგრაფის ამოცანები შეიძლება დაიყოს ორ ძირითად ტიპად:

1. ამოცანები წერტილის წრფივი მოძრაობის დროს კინეტიკური ენერგიის გამოყენებაზე.

2. ამოცანები წერტილის მრუდწირული მოძრაობის დროს კინეტიკური ენერგიის გამოყენებაზე.

გარდა ამისა, ამოცანები, რომლებიც ეკუთვნიან პირველ ტიპს, შეიძლება დაიყოს სამ ჯგუფად:

1) წერტილზე მოქმედი ძალა (ან რამდენიმე ძალის ტოლქმედი) მუდმივია, ე. ი. $X = \text{const}$, სადაც X -ით აღნიშნულია ძალის (ან ტოლქმედის) გეგმილი წერტილის წრფივი ტრანეპტორიის გასწვრივ მიმართულ x ღერძზე;

2) წერტილზე მოქმედი ძალა (ან ტოლქმედი) წარმოადგენს მანძილის (ან წერტილის აბსცისას) ფუნქციას, ე. ი.

$$X = f(x).$$

3) წერტილზე მოქმედი ძალა (ან ტოლქმედი) არის ამ წერტილის სიჩქარის ფუნქცია, ე. ი.

$$X = f(v).$$

ამოცანები, რომლებიც ეკუთვნიან მეორე ტიპს, შეიძლება დავყოთ ორ ჯგუფად:

1) წერტილზე მოქმედი ძალა (ან ტოლქმედი) მუდმივია როგორც მოდულით, ასევე მიმართულებით (მაგალითად, სიმძიმის ძალა);

2) წერტილზე მოქმედი ძალა (ან ტოლქმედი) არის ამ წერტილის მდებარეობის ფუნქცია (ან წერტილის კოორდინატების ფუნქცია).

1 ტიპის ამოცანები

პირველი ჯგუფი

წერტილი მოძრაობს წრფივად მუდმივი ძალის მოქმედებით

ამ შემთხვევაში $F = \text{const}$ და კინეტიკური ენერგიის განტოლება ლებულობს სახეს

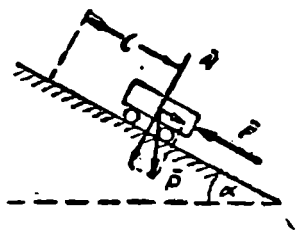
$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \pm F\sigma,$$

სადაც σ — წერტილის მიერ გავლილი გზაა.

ამ განტოლებებიდან განისაზღვრება v სიჩქარე, თუ ცნობილია,

გავლილი გზა ან პირიქით, მოცემული v სიჩქარით განისაზღვრება გავლილი σ გზა.

მაგალითი 142. ვაგონეტი მოძრაობს თვითგორვით ქვევით ჰორიზონტთან α კუთხით დახრილ სიბრტყეზე (ნახ. 180). განსაზღვრეთ ვაგონეტის სიჩქარე გზის ბოლოში, რომლის სიგრძე უდრის l -ს; ვაგონეტის საწყისი სიჩქარე $v_0=0$, მოძრაობისადმი საერთო წინაღობის კოეფიციენტი უდრის f -ს.



ნახ. 180.

ამოხსნა. ვაგონეტზე მოქმედებს: $P = mg \sin \alpha$ სიმძიმის ძალა, დახრილი სიბრტყის N ნორმალური რეაქცია და მოძრაობისადმი წინაღობის ძალა $F = fN \cdot l$ სიგრძის გზაზე კინეტიკური ენერჯის თეორემის გამოყენებით, ვლებულობთ

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_P + A_F;$$

მაგრამ

$$v_0 = 0, \quad A_P = mgh = mgl \sin \alpha; \quad A_F = -Fl = -fNl.$$

დახრილ სიბრტყეზე ვაგონეტის ნორმალური წნევის განსაზღვრისათვის ვაგონეტის P წონას ვშლით ორ, დახრილი სიბრტყის გასწვრივ და მის მართობულად მიმართულ მდგენლებად.

უკანასკნელი მდგენელი განსაზღვრავს ნორმალურ წნევას სიბრტყეზე, რომელიც ამ სიბრტყის ნორმალური რეაქციის ტოლია.

მაშასადამე, $N = mg \cos \alpha$ და $A_F = -fmg \cos \alpha \cdot l$.

ამგვარად, კინეტიკური ენერჯის განტოლება ღებულობს სახეს

$$\frac{mv^2}{2} = mgl \sin \alpha - fmg l \cos \alpha = mgl (\sin \alpha - f \cos \alpha),$$

საიდანაც

$$v = \sqrt{2gl(\sin \alpha - f \cos \alpha)}.$$

უნდა აღვნიშნოთ, რომ ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნის დროს თუ ორემა კინეტიკური ენერჯის შესახებ შეიძლება კომბინირებული, იყოს მოძრაობის რაოდენობის თეორემასთან. ეს შეეხება ამოცანებს, რომლებშიც განიხილება წერტილის მოძრაობა მუდმივი ძალის მოქმედებით (ამოცანები 27.5(678), 30,6(775); 30.7(776); 30.10(779)), ან სიჩქარეზე დამოკიდებული ძალის მოქმედებით (ამოცანები 27.14(687);

27.16(689); 27.20(693); 27.22(696)). ამასთანავე საჭიროა წერტილის მოძრაობის დროის და გადაადგილების განსაზღვრა.

მოძრაობის დროის განსაზღვრისათვის საჭიროა მოძრაობის რაოდენობის თეორემის, ხოლო გზის განსაზღვრისათვის — კინეტიკური ენერჯის თეორემის გამოყენება.

მაგალითი 143. ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე მდებარე P წონის სხეულს მიანიჭეს ჰორიზონტალური საწყისი v_0 სიჩქარე. რა დროში და რა მანძილზე გაჩერდება სხეული, თუ სიბრტყეზე სხეულის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის f -ს?

ამოხსნა. რადგან ამოცანაში უნდა განვსაზღვროთ მოძრაობის დრო და სხეულის მიერ გაჩერებამდე გავლილი მანძილი, ამიტომ ამ ამოცანის ამოხსნის დროს უნდა ვისარგებლოთ როგორც მოძრაობის, რაოდენობის, ასევე კინეტიკური ენერჯის შესახებ თეორემებით. ვინაიდან გაჩერების მომენტში სხეულის სიჩქარე უდრის ნულს, ამიტომ მოძრაობის რაოდენობის თეორემის გამოყენებით ვლებულობთ

$$-mv_0 = -F_{\text{ხახ}} t,$$

საიდანაც
$$t = \frac{mv_0}{F_{\text{ხახ}}} = \frac{Fv_0}{gF_{\text{ხახ}}}.$$

კულონის კანონის თანახმად $F_{\text{ხახ}} = |N|$, ამასთანავე მოცემულ შემთხვევაში $N = P$ მაშასადამე $t = \frac{v_0}{fg}$.

შემდეგ, კინეტიკური ენერჯის თეორემის გამოყენებით, მივიღებთ

$$-\frac{Pv_0^2}{2g} = -F_{\text{ხახ}} \cdot \sigma,$$

სადაც σ — წერტილის მიერ გაჩერებამდე გავლილი გზაა. აქედან ვპოულობთ

$$\sigma = \frac{Pv_0^2}{2gF_{\text{ხახ}}} = \frac{v_0^2}{2fg}.$$

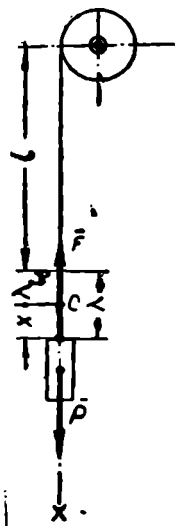
მეორე ჯგუფი

წერტილი მოძრაობს წრფივად იმ ძალის მოქმედებით, რომელიც წარმოადგენს წერტილის აბსცისას ფუნქციას

ამ შემთხვევაში $X = f(x)$, მაშასადამე, (191) ფორმულით ვვაქვს,

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^x f(x) dx;$$

ეს განტოლება, რომელიც ამყარებს v და x -ს შორის დამოკიდებულებას, გვაძლევს x -ის სიდიდის განსაზღვრის საშუალებას, თუ ცნობილია v სიჩქარე და, პირიქით, v -ს განსაზღვრის საშუალებას, თუ ცნობილია x .



ნახ. 181.

მაგალითი 144. P წონის გალია s_0 სიჩქარით თანაბრად ეშვება ბაგირზე. უცებ ბაგირის ზემო ბოლო ჩამაგრდება. განსაზღვრეთ ბაგირის უდიდესი დაგრძელება ჩამაგრების შემდეგ, თუ მისი სტატიკური დაგრძელება გალიის P წონის მოქმედებით უდრის $\lambda_{სტ}$ -ს (ნახ. 181).

ამოხსნა. გალიაზე მოქმედებს ორი ძალა: სიმძიმის P ძალა და ბაგირის $F = c\lambda$ დრეკადი ძალა, სადა c — ბაგირის სიხისტეა, ხოლო λ — მისი დაგრძელება. სანამ გალია ეშვება თანაბრად, ბაგირის დაგრძელება უდრის სტატიკურ დაგრძელებას ($\lambda = \lambda_{სტ}$) და P ძალა წონასწორდება ბაგირის დრეკადი ძალით, ე. ი.

$$F_{სტ} = c\lambda_{სტ} = P,$$

საიდანაც

$$c = \frac{P}{\lambda_{სტ}},$$

და, მაშასადამე,

$$F = \frac{P}{\lambda_{სტ}} \cdot \lambda.$$

ბაგირის ჩამაგრების მომენტში გალიის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემის სათავედ და x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვემოთ.

ბაგირის ჩამაგრების შემდეგ, რადგან ბაგირს აქვს დეფორმაციის საშუალება, გალია განაგრძობს დაშვებას. იმ მომენტში, როცა ბაგირის დაგრძელება მიაღწევს მაქსიმალურ სიდიდეს, გალიის სიჩქარე, ნულის ტოლი ხდება. გალიაზე მოდებული ძალების ტოლქმედის გეგმილი x ღერძზე აღვნიშნოთ X -ით და მხედველობაში მივიღოთ, რომ $\lambda = \lambda_{სტ} + x$, გვექნება

$$X = P - F = P - \frac{P}{\lambda_{სტ}} \lambda = P - \frac{P}{\lambda_{სტ}} (x + \lambda_{სტ}) = - \frac{P}{\lambda_{სტ}} x.$$

კინეტიკური ენერჯიის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^x X dx = -\frac{P}{\lambda_{\text{სტ}}} \int_{x_0}^x x dx = -\frac{P}{2\lambda_{\text{სტ}}} x^2.$$

მაგრამ, როცა $x = x_{\text{max}}$, გალიის v სიჩქარე უდრის ნულს და ამიტომ

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{P}{2\lambda_{\text{სტ}}} x_{\text{max}}^2,$$

საიდანაც

$$x_{\text{max}}^2 = \frac{mv_0^2}{P} \lambda_{\text{სტ}} = \frac{v_0^2}{g} \lambda_{\text{სტ}} \text{ და } x_{\text{max}} = v_0 \sqrt{\frac{\lambda_{\text{სტ}}}{g}}.$$

მაშასადამე,

$$\lambda_{\text{max}} = \lambda_{\text{სტ}} + x_{\text{max}} = \lambda_{\text{სტ}} + v_0 \sqrt{\frac{\lambda_{\text{სტ}}}{g}}.$$

მესამე ჯგუფი

წერტილი მოძრაობს წრფივად იმ ძალის მოქმედებით, რომელიც წარმოადგენს ამ წერტილის სიჩქარის ფუნქციას

ამ შემთხვევაში $X = f(v)$ და, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, თორემას კინეტიკური ენერჯიის შესახებ იყენებენ დიფერენციალურ რი ფორმით

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = X dx = f(v) dx.$$

აქ ინტეგრირებამდე საჭიროა ცვლადთა განცალკევება, რაც გვაძლევს

$$m \frac{v dv}{f(v)} = dx, \text{ აქედან } m \int_{v_0}^v \frac{v dv}{f(v)} = x - x_0.$$

ინტეგრირების შესრულების შემდეგ მიღებული განტოლების ამოხსნით x -ს მიმართ მივიღებთ წერტილის v სიჩქარეს, როგორც x -ის ფუნქციას, ე. ი. $v = \Phi(x)$. თუ ამოცანაში მოითხოვება წერტილის წრფივი მოძრაობის კანონის განსაზღვრა, მაშინ x -ს ვცვლით $\frac{dx}{dt}$ -ით

და ვღებულობთ $\frac{dx}{dt} = \Phi(x)$, ანუ ცვლადთა განცალკევების შემდეგ

$$\frac{dx}{\Phi(x)} = dt; \text{ აქედან}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\Phi(x)} = \int_0^t dt = t.$$

ეს განტოლება ამყარებს დამოკიდებულებას x -სა და t -ს შორის, ე. ი. გვაძლევს ნივთიერი წერტილის მოძრაობის საძიებელ კანონს.

იმ შემთხვევაში, როცა ნივთიერ წერტილზე მოქმედი ძალა დამოკიდებულია ამ წერტილის სიჩქარეზე, წერტილის მოძრაობის კანონი შეიძლება განვსაზღვროთ უფრო მარტივად მოძრაობის რაოდენობის და კინეტიკური ენერჯიის შესახებ თეორემების გამოყენებით.

თუ $X=f(v)$, მაშინ მოძრაობის რაოდენობის თეორემის დიფერენციალური ფორმით გამოყენებისას ვღებულობთ*

$$\frac{m dv}{f(v)} = dt.$$

აქედან ინტეგრირებით მივიღებთ

$$\varphi(v) = t - t_0 \quad (ა)$$

შემდეგ, კინეტიკური ენერჯიის თეორემის დიფერენციალური ფორმით გამოყენებისას, მივიღებთ

$$\frac{m v dv}{f(v)} = dx,$$

აქედან ინტეგრირებით ვღებულობთ

$$\psi(v) = x - x_0. \quad (ბ)$$

(ა) და (ბ) განტოლებებიდან v ცვლადის გამორიცხვით ვპოულობთ დამოკიდებულებას x კოორდინატსა და t დროს შორის, ე. ი. ვპოულობთ მოძრაობის საძიებელ კანონს.

მაგალითი 145. იმ მომენტში, როდესაც მოტორიანი გემის სიჩქარე უდრის v_0 -ს, გამორთავენ მოტორს. წყლის წინაღობის ძალა განისაზღვრება ემპირიული ფორმულით $R = \alpha v + \beta v^2$, სადაც α და β მუდმივებია. გემის მასა უდრის m -ს. იპოვეთ მანძილი, რომელსაც გაივლის გემი მოტორის გამორთვის მომენტიდან გაჩერებამდე.

ამოხსნა. მივმართოთ x ღერძი მოძრაობის მიმართულების გასწვრივ. კოორდინატთა სათავე მოვათავსოთ იმ წერტილში, რომელშიც იმყოფებოდა გემის სიმძიმის ცენტრი მოტორის გამორთვის მომენტში. გემზე შიდადებული წყლის წინაღობის ძალის გეგმილი x ღერძზე უდრის

* ახ. ამ თავის § 1.

$$X = -(\alpha v + \beta v^2).$$

რადგან ეს ძალა წარმოადგენს სიჩქარის ფუნქციას, ამიტომ ვიყენებთ თეორემას კინეტიკური ენერჯის შესახებ დიფერენციალური ფორმით

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = X dx = -(\alpha + \beta v) v dx.$$

ცვლადთა განცალკევების შემდეგ მივიღებთ

$$-\frac{m dv}{\alpha + \beta v} = dx.$$

აღვნიშნოთ გემის მიერ გავლილი მანძილი σ -თი და მივიღოთ მხედველობაში, რომ ამ გზის დასაწყისში გემის სიჩქარე უდრის v_0 -ს, ხოლო ბოლოში ნულის ტოლია, მაშინ

$$\int_0^\sigma dx = -m \int_{v_0}^0 \frac{dv}{\alpha + \beta v} = m \int_0^{v_0} \frac{dv}{\alpha + \beta v} = \frac{m}{\beta} \left[\ln(\alpha + \beta v) \right]_0^{v_0} =$$

$$= \frac{m}{\beta} \ln \frac{\alpha + \beta v_0}{\alpha},$$

საიდანაც

$$\sigma = \frac{m}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} v_0 \right).$$

მაგალითი 146. m მასის ნივთიერი წერტილი საწყისი v_0 სიჩქარის მიღებისას მოძრაობს აბსოლუტურად გლუვ პორიზონტალურ სიბრტყეზე და განიცდის გარემოს წინააღობას, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით $R = km\sqrt{v}$, სადაც v — წერტილის სიჩქარეა. იპოვეთ წერტილის მოძრაობის კანონი.

ამოხსნა. განვიხილოთ ამ ამოცანის ამოხსნა მოძრაობის რაოდენობის და კინეტიკური ენერჯის შესახებ თეორემების ერთობლივი გამოყენების საშუალებით.

თუ წერტილის საწყის მდებარეობას მივიღებთ კოორდინატთა სისტემის სათავედ და თუ მივმართავთ x ღერძს წერტილის მოძრაობის მიმართულებით, ვიპოვით

$$X = -R = -km\sqrt{v}.$$

გამოვიყენოთ მოძრაობის რაოდენობის და კინეტიკური ენერჯის შესახებ თეორემები დიფერენციალური ფორმით, გვექნება

$$d(mv) = X dt - km \sqrt{v} dt$$

და

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = X dx = -km \sqrt{v} dx,$$

ანუ ცვლადთა განცალკევებით და m -ზე შეკვეცით

$$\frac{dv}{\sqrt{v}} = -k dt \quad \text{და} \quad \sqrt{v} dv = -k dx.$$

ამ განტოლებებს თუ გავაინტეგრალებთ, მივიღებთ

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{v}} = -k \int_0^t dt; \quad \int_{v_0}^v \sqrt{v} dv = -k \int_0^x dx$$

აქედან

$$\sqrt{v} - \sqrt{v_0} = -\frac{kt}{2} \quad (ა')$$

და

$$v^{3/2} - v_0^{3/2} = -\frac{3kx}{2}. \quad (ბ')$$

x -სა და t -ს შორის დამოკიდებულების მოსაძებნად საკმარისია (ა') და (ბ') განტოლებებიდან v პარამეტრის გამორიცხვა. (ა') განტოლებიდან გვექნება

$$\sqrt{v} = v^{1/2} = \sqrt{v_0} - \frac{kt}{2}.$$

ამ მნიშვნელობის (ბ') განტოლებაში ჩასმით ვღებულობთ

$$x = \frac{2}{3k} \left(v_0^{3/2} - v^{3/2} \right) = \frac{2}{3k} \left[v_0 \sqrt{v_0} - \left(\sqrt{v_0} - \frac{kt}{2} \right)^3 \right].$$

ეს განტოლება, რომელიც გამოსახავს x -ს, როგორც t დროის ფუნქციას, არის წერტილის მოძრაობის საძიებელი კანონი.

(ა') და (ბ') განტოლებებიდან შეიძლება ვიპოვოთ T დრო, რომლის განმავლობაშიც მოძრაობდა წერტილი გაჩერებამდე და ამ დროის განმავლობაში მის მიერ გავლილი σ გზა. (ა') და (ბ') ტოლობებში თუ მივიღებთ, რომ $v=0$, ვღებულობთ

$$T = \frac{2}{k} \sqrt{v_0}; \quad \sigma = \frac{2}{3k} v_0^{3/2} = \frac{2}{3k} v_0 \sqrt{v_0}.$$

II ტიპის ამოცანები

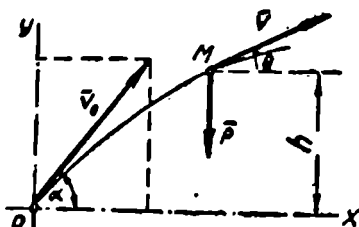
პირველი ჯგუფი

წერტილის მრუდწირული მოძრაობა მუდმივი ძალის მოქმედებით,

ასეთი მუდმივი ძალა ჩვეულებრივად წარმოადგენს სიმძიმის ძალას, ე. ი. ნივთიერი წერტილის P წონას. ამიტომ ძალის მუშაობა, განისაზღვრება ფორმულით $A = -P(z - z_0)$, იმ პირობით, რომ z ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად ზემოთ. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში კინეტიკური ენერჯიის შესახებ თეორემის გამოყენებით ვღებულობთ შემდეგ განტოლებას

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -P(z - z_0).$$

მაგალითი 147. მოცემული მომენტისათვის განსაზღვრეთ ჰორიზონტთან α კუთხით და v_0 საწყისი სიჩქარით გატყორცნილი M სხეულის ასვლის h სიმაღლე, თუ ამ მომენტში ცნობილია ის θ კუთხე, რომელსაც \vec{v} სიჩქარე ადგენს ჰორიზონტალურ ღერძთან. ჰაერის წინააღმდეგობას უგულებელვყოფთ (ნახ. 182).



ნახ. 182.

ამოხსნა. რადგან სხეულზე მოქმედი სიმძიმის \vec{P} ძალა ვერტიკალურია, ამიტომ სიჩქარის გეგმილი ჰორიზონტალურ x ღერძზე რჩება მუდმივი და თავისი საწყისი მნიშვნელობის ტოლია, ე. ი. $v_x = \text{const} = v_0 \cos \alpha$. მეორე მხრივ, $v_x = v \cos \theta$ და ამიტომ $v_0 \cos \alpha = v \cos \theta$ და

$$v = \frac{v_0 \cos \alpha}{\cos \theta}.$$

OM გზის უბანზე კინეტიკური ენერჯიის თეორემის სასრული სახით გამოყენებისას ვღებულობთ

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_P = -Ph = mgh.$$

აქედან

$$h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(v_0^2 - \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \theta} \right) = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \theta} \right).$$

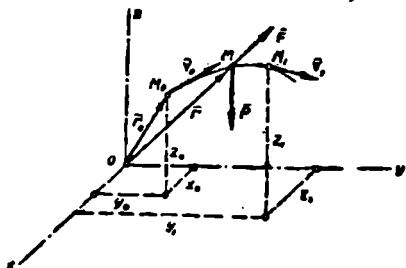
წერტილი ასრულებს მრუდწირულ მოძრაობას ამ წერტილის მდებარეობაზე დამოკიდებული ძალის მოქმედებით

ამ ჯგუფის ამოცანებში კინეტიკური ენერჯიის თეორემა გამოიყენება ჩვეულებრივად იმ შემთხვევებში, როდესაც ნივთიერ წერტილზე მოქმედი ძალისათვის არსებობს ძალთა ფუნქცია. მაშინ მუშაობა გამოითვლება (173) ფორმულით.

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A = U - U_0.$$

მაგალითი 148. სიმძიმის ძალის ველში მყოფი $m=90$ გ მასის მქონე ნივთიერი ნაწილაკი განიზილება უძრავი O ცენტრიდან ძალით, რომელიც ამ ნაწილაკიდან ცენტრამდე მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია (ნახ. 183).



ნახ. 183.

ნაწილაკი იმყოფება $M_0(x_0=1$ სმ; $y_0=2$ სმ; $z_0=2$ სმ) მდებარეობაში და აქვს სიჩქარე $v_0=28\sqrt{5}$ სმ/წმ, რომელიც ისეა მიმართული, რომ ნაწილაკი შემდგომი მოძრაობის დროს გადის $M_1(x_1=2$ სმ; $y_1=4$ სმ; $z_1=4$ სმ) წერტილში.

განსაზღვრეთ ნაწილაკის სიჩქარე M_1 წერტილში, თუ ცნობილია, რომ განმზიდი ძალის სიდიდე იმ მომენტში, როცა ნაწილაკი იმყოფება m_0 წერტილში, უდრის $0,03$ ნ.

ამოხსნა. ნაწილაკზე მოქმედებს ორი ძალა: სიმძიმის ძალა $P=mg$ და განმზიდი ძალა. $F=\frac{k}{r^2}$, სადაც r არის OM მანძილი.

განესაზღვროთ k კოეფიციენტი. საწყის მომენტში, ამოცანის პირობის თანახმად $F=F_0=0,03$ ნ და $r^2=r_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2=9\cdot 10^{-6}$ მ².

მაშასადამე, $k=F_0 r_0^2=0,03\cdot 9\cdot 10^{-6}=27\cdot 10^{-9}$ ნ·მ².

გამოვიყენოთ კინეტიკური ენერჯიის თეორემა გზის M_0M_1 უბანზე

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_P + A_F,$$

მაგრამ (182) და (184) ფორმულების თანახმად გვაქვს

$$A_p = -P(z_1 - z_0) = -mg(z_1 - z_0);$$

$$A_E \int_{r_0}^r \frac{k}{r^2} dr = k \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_0}^r = k \left(-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} \right) \frac{k(r_1 - r_0)}{r_1 r_0},$$

ძაშასადამე,

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mg(z_1 - z_0) + \frac{k(r_1 - r_0)}{r_1 r_0},$$

გარდა ამისა,

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ სმ}; \quad r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = 6 \text{ სმ}.$$

აქედან

$$v_1^2 = v_0^2 - 2g(z_1 - z_0) + \frac{2k(r_1 - r_0)}{mr_1 r_0} =$$

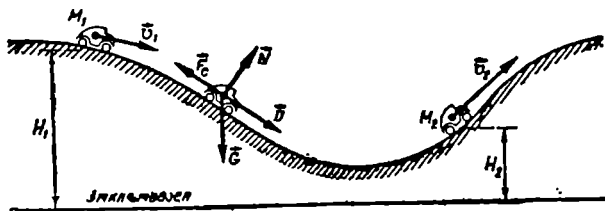
$$= (28\sqrt{5})^2 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 9,8 \cdot 0,02 + \frac{2 \cdot 27 \cdot 10^{-6} (0,06 - 0,03)}{0,09 \cdot 0,03 \cdot 0,06} = 0,01$$

და $v = \sqrt{0,01} = 0,1 \frac{\text{მ}}{\sqrt{\text{წმ}}}$,

მესამე ჯგუფი 1

წერტილის მოძრაობა წინაღობის ძალის არსებობის შემთხვევაში

მაგალითი 140. G წონის ავტომობილი, რომლის სიჩქარე M_1 მდე; პარეობაში არის \vec{v}_1 (ნახ. 184), იწყებს ამ მდებარეობიდან მოძრაობას თვითგორვით და M_2 მდებარეობაში მას აქვს \vec{v}_2 სიჩქარე, ამის შემდეგ ჩაირთვება ძრავა. განსაზღვრეთ M_1, M_2 უბანზე ავტომობილის მოძრაობისადმი წინაღობის ძალების ჯამური მუშაობა და აგრეთვე ავტომობილის სიმძიმის ცენტრზე დაყვანილი მოძრაობისადმი წინაღობის ძალების საშუალო მნიშვნელობა. H_1 და H_2 სიმაღლე მოცემულია.



ნახ. 184.

ამოხსნა. თუ გამოვიყენებთ გზის M_1M_2 უბანზე კინეტიკურ ენერჯის შესახებ თეორემას სასრული ფორმით, მივიღებთ

$$\frac{G}{g}(v_2^2 - v_1^2) = G(H_1 - H_2) - A_x,$$

სადაც A_x — ავტომობილის მოძრაობის დროს წინაღობის ძალების მიერ შესრულებული ჯამური მუშაობის აბსოლუტური სიდიდეა. აქედან

$$A_x = G(H_1 - H_2) - \frac{G}{g}(v_2^2 - v_1^2).$$

M_1M_2 უბანზე მოძრაობისადმი ჯამური წინაღობის საშუალო მნიშვნელობა

$$F_x^{\text{სა}} = \frac{A_x}{s} = \frac{G}{s} \left[H_1 - H_2 - \frac{1}{g}(v_2^2 - v_1^2) \right],$$

სადაც s — M_1M_2 უბნის სიგრძეა.

ცხრილი 18

ამოცანათა კლასიფიკაცია

| ტიპი | ამოცანათა ჯგუფი | | |
|----------------------------------|---|--|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| I. წერტილის წრფივი მოძრაობა | მუდმივი ძალა (ამოცანები 30.4(773), 30.5(774), 30.8(777) — 30.12(781), 31.8(805)). | წერტილის მდებარეობაზე დამოკიდებული ძალა (ამოცანები 30.16(785) — 30.18(787), 30.24(793) — 30.27(796)) | სიჩქარეზე დამოკიდებული ძალა (ამოცანები 27.14(687), — 27.16(689); 27.14(687), 27.16(689), 27.20(693), 27.21(695), 27.22(696); 30.13(782)). |
| II. წერტილის მრუდწრფივი მოძრაობა | მუდმივი ძალა (ამოცანა 30.14(783)). | წერტილის მდებარეობაზე დამოკიდებული ძალა (ამოცანა 30.19(783)). | წერტილის მოძრაობის წინაღობის ძალების არსებობისას. |

§ 5. ღალამზარის პრინციპი ნივთიერი წარმოქმნისათვის

არათავისუფალი ნივთიერი წერტილის მოძრაობის ვექტორულ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N}_1$$

სადაც \vec{F} არის წერტილზე მოქმედი მოცემული (აქტიური) ძალა, ხოლო \vec{N} — ბმის რეაქცია (ნახ. 185).

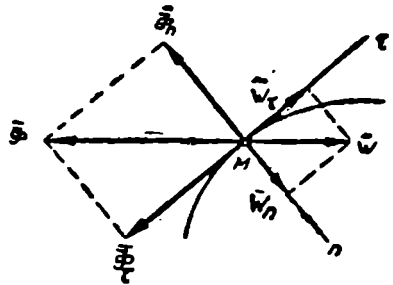
ეს განტოლება შეიძლება გადაიწეროს შემდეგნაირად

$$\vec{F} + \vec{N} + (-m\vec{w}) = 0. \quad (192)$$

(192) განტოლების ბოლო წევრი წარმოადგენს ძალას, რომელიც მოდულთ უდრის წერტილის m მასის და მისი \vec{w} აჩქარების, ნამრავლს და მიმართულია ამ აჩქარების საწინააღმდეგოდ. ამ ძალას ეწოდება ინერციის ძალა და აღინიშნება $\vec{\Phi}$ -ით, ე. ი.



ნახ. 185.



ნახ. 186.

$$\vec{\Phi} = -m\vec{w}. \quad (193)$$

ამ აღნიშვნით სარგებლობისას (192) განტოლებას წარმოვიდგენთ შემდეგი სახით

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0, \quad (194)$$

ე. ი. ნივთიერ წერტილზე მოქმედი მოცემული ძალა, ბმების რეაქციის ძალა და ინერციის ძალა მოძრაობის ყოველი მომენტისათვის გააწონასწორდებიან (დალამბერის პრინციპი).

ამგვარად, ინერციის ძალა შეიძლება ავრთვე განვმარტოთ, როგორც ისეთი ძალა, რომელიც, თუ ნივთიერ წერტილზე იქნება მოდებული, გააწონასწორებს ამ წერტილზე მოქმედ ყველა მოცემულ და რეაქციის ძალებს.

(194) ტოლობის საფუძველზე ინერციის ძალის გვემიღები კოორდინატთა ღერძებზე გამოისახება შემდეგნაირად:

$$\Phi_x = -m\ddot{x}; \quad \Phi_y = -m\ddot{y}; \quad \Phi_z = -m\ddot{z}. \quad (195)$$

ნივთიერი წერტილის მრუდწირული მოძრაობისას ინერციის ძალა შეიძლება ორი მდგენელისაგან, რომლებსაგანაც ერთი მიმართულია კრისტოროის მხების გასწვრივ, ხოლო მეორე — მთავარი ნორმალის

გასწვრივ (ნახ. 186). პირველ მდგენელს ეწოდება მხები, ანუ ტანგენციალური ინერციის ძალა და აღინიშნება $\vec{\Phi}$ -ით, ხოლო მეორეს ეწოდება ნორმალური ინერციის ძალა, ანუ ცენტრიდანული ძალა და აღინიშნება $\vec{\Phi}_n$ -ით, ამასთანავე

$$\vec{\Phi}_\tau = -m\vec{w}_\tau, \quad \vec{\Phi}_n = -m\vec{w}_n. \quad (196)$$

ტანგენციალური და ნორმალური ინერციის ძალების მოდულებისათვის გვაქვს შემდეგი გამოსახულებები:

$$|\Phi_\tau| = m \left| \frac{dv}{dt} \right|, \quad |\Phi_n| = \frac{mv^2}{\rho}. \quad (197)$$

თუ წერტილი ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას R რადიუსის წრეწირზე ω კუთხური სიჩქარით და ε კუთხური აჩქარებით, მაშინ ტანგენციალური და ნორმალური ინერციის ძალების მოდულები გამოისახება შემდეგნაირად:

$$|\vec{\Phi}_\tau| = mR|\varepsilon|, \quad |\vec{\Phi}_n| = mR\omega^2. \quad (198)$$

ტანგენციალური და ნორმალური ინერციის ძალები შესაბამისად მიმართულია წერტილის ტანგენციალური და ნორმალური აჩქარების საწინააღმდეგოდ.

ამოცანები, რომლებიც ამ პარაგრაფს ეკუთვნიან, შეიძლება დავეყოთ სამ ტიპად.

- I. ნივთიერი წერტილი მოძრაობს წრფივად;
- II. ნივთიერი წერტილი ასრულებს თანაბარ მრუდწირულ მოძრაობას.
- III. ნივთიერი წერტილი ასრულებს არათანაბარ მრუდწირულ მოძრაობას.

I ტიპის ამოცანები

არათავისუფალი ნივთიერი წერტილის წრფივი მოძრაობა.

(ამოცანები 26. I(637)—26. 4(640), 26. II(647)—26.13(649)).

ამ შემთხვევაში ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი $\rho = \infty$ და, შესაბამისად, $\Phi_n = \frac{mv^2}{\rho} = 0$, ამიტომ ინერციის ძალა შედგება მხოლოდ

ერთი ტანგენციალური მდგენელისაგან, ე. ი. $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_\tau$

მაგალითი 150. P წონის სხეული მოცემული \vec{w} აჩქარებით მოძრაობს წრფივად პორიზონტალურ სიბრტყეზე. სხეულზე მოქმედებს კო-

რიზონტთან α კუთხით დახრილი \vec{F} ძალა. განსაზღვრეთ ამ ძალის მოძული. თუ მოძრავ სხეულსა და სიბრტყეს შორის ხახუნის კოეფიციენტი უდრის f -ს (ნახ. 187).

ამოხსნა. 187-ე ნახაზზე ნაჩვენებია სხეულზე მოქმედი ძალები: \vec{P} წონა, \vec{F} ძალა, სიბრტყის ნორმალური \vec{N} რეაქცია და ხახუნის $\vec{F}_{ხახ}$ ძალა. თუ სხეულზე მოვდებთ \vec{x} აჩქარების საწინააღმდეგოდ მიმართულ ინერციის $\vec{\Phi}$ ძალას, მაშინ კოორდინატა ღერძების ნახაზზე ნაჩვენები მდებარეობის მიხედვით მივიღებთ წონასწორობის შემდეგ ორ განტოლებას

$$\sum X = F \cos \alpha - fN - \Phi = 0$$

$$\sum Y = F \sin \alpha - P + N = 0,$$

ამასთანავე, $\Phi = m\omega = \frac{P}{g} \omega$.

ამ განტოლებების ამოხსნის შედეგად ვპოულობთ

$$F = \frac{P \left(f + \frac{\omega}{g} \right)}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = \frac{fg + \omega}{g(\cos \alpha + f \sin \alpha)} P.$$

II ტიპის ამოცანები

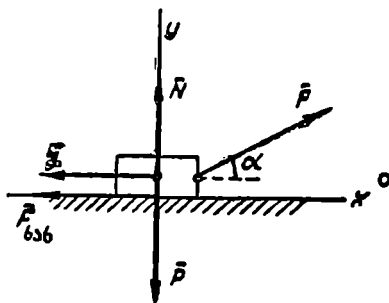
არათავისუფალი ნივთიერი წერტილის თანაბარი მრუდწირული მოძრაობა

(ამოცანები 26.10(646), 26.64(670))

თუ ნივთიერი წერტილი მოძრაობს რომელიმე მრუდზე მუდმივი სიჩქარით ($v = \text{const}$), მაშინ წერტილის ტანგენციალური აჩქარება $\omega_c = \frac{dv}{dt} = 0$, ამიტომ ინერციის ძალა შედგება მარტო ერთი ნორმალური

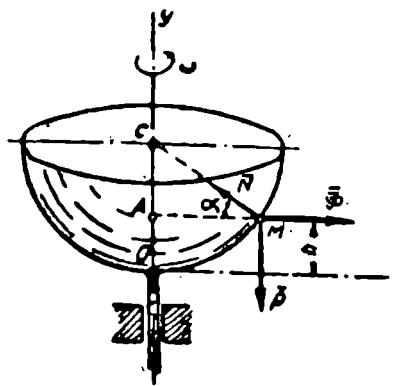
მდგენელისაგან, ე. ი. $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_n$.

მაგალითი 151. $R = 2$ მ რადიუსის ღრუ ნახევარსფერო თანაბრად ბრუნავს თავისი ვერტიკალურად მდებარე სიმეტრიის ღერძის გარშემო. ტ. ახენბერგი და სხვ.



ნახ. 187.

მო და ასრულებს 30 ბრ/წუთში. ნახევარსფეროს. შიგნით იმყოფება $P=2$ ნ წონის ბურთულა. იპოვეთ ნახევარსფეროს მიმართ ბურთულის წონასწორობის მდგომარეობის შესაბამისი h სიმაღლე და ნახევარსფეროს ნორმალური \vec{N} რეაქცია ბურთულის ამ მდგომარეობისას (ნახ. 188).



ნახ. 188.

ამოხსნა. სამი ძალა — ბურთულას წონა, ნახევარსფეროს ნორმალური რეაქცია და ინერციის $\vec{\Phi}$ ძალა — გაწონასწორებულია.

თუ განვალაგებთ კოორდინატთა ღერძებს ისე, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები, და α -თი აღვნიშნავთ \vec{N} ძალის მიერ პორიზონტთან შექმნილ კუთხეს, მივიღებთ წონასწორობის შემდეგ განტოლებებს:

$$\Sigma X = \Phi - N \cos \alpha = 0;$$

$$\Sigma Y = N \sin \alpha - P = 0.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\Phi = \Phi_n = m \cdot AM \cdot \omega^2 = mR \cos \alpha \cdot \omega^2$. მაშინ ეს განტოლებები შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$N \cos \alpha = mR \cos \alpha \cdot \omega^2, \quad N \sin \alpha = P.$$

პირველი განტოლებიდან ვპოულობთ

$$N = mR \omega^2 = \frac{P}{g} R \omega^2, \quad \text{მაგრამ } \omega = \frac{\pi n}{30} = \pi' / \sqrt{3};$$

მაშასადამე,

$$N = \frac{P}{g} R \pi^2 = \frac{2}{9,81} \cdot 2 \cdot 9,86 \approx 4 \text{ ნ.}$$

მეორე განტოლებიდან ვღებულობთ

$$\sin \alpha = \frac{P}{N} = \frac{Pg}{PR \pi^2} = \frac{2}{R \pi^2} = \frac{9,81}{2 \cdot 9,86} = \frac{1}{2},$$

საიდანაც $\alpha = 30^\circ$. შემდეგ CA სამკუთხედიდან გვექნება

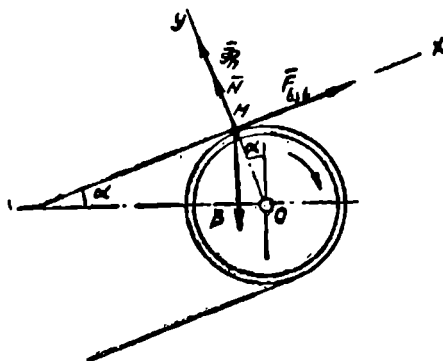
$$CA = R \sin \alpha = 1 \text{ მ,}$$

და, მაშასადამე,

$$h = OA = OC - CA = 2 - 1 = 1 \text{ მ.}$$

მაგალითი 152. კონვეიერის ლენტის ჰორიზონტთან დახრილია α კუთხით. განსაზღვრეთ ლენტის ის მინიმალური სიჩქარე, რომლის დროსაც ლენტის მიერ მზიდი მადნის ნაწილაკი სცილდება ლენტს ლენტის დოლზე მიწყდომის ადგილზე, თუ დოლის რადიუსი R -ს (ნახ. 189).

ამოხსნა. ნაწილაკზე, რომელიც მოცემულ მომენტში იმყოფება ლენტის დოლზე მიწყდომის წერტილზე, მოქმედებენ: \vec{P} წონა, დოლის ნორმალური \vec{N} . რეაქცია და ხახუნის $\vec{F}_{\text{ხა}}$ ძალა. ნაწილაკზე მოვდოთ ინერციის ნორმალური



ნახ. 189.

Φ_n ძალა და შევადგინოთ ამის შემდეგ მიღებული ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლება, რისთვისაც დავაგეგმილოთ ეს ძალები ლენტის ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ მიმართულ y ღერძზე

$$\Sigma Y = \Phi_n + N - P \cos \alpha = 0,$$

მაგრამ $\Phi_n = \frac{mv^2}{R}$, ამიტომ $N = P \cos \alpha - \frac{Pv^2}{gR}$.

ლენტის დოლზე მიწყდომის წერტილში ნაწილაკი სცილდება ლენტის ზედაპირს, თუ $N = 0$. ამიტომ ლენტის მინიმალური სიჩქარე, რომლის დროსაც ხდება ნაწილაკის ლენტიდან მოცილება, განისაზღვრება განტოლებიდან

$$P \cos \alpha - \frac{Pv^2}{gR} = 0,$$

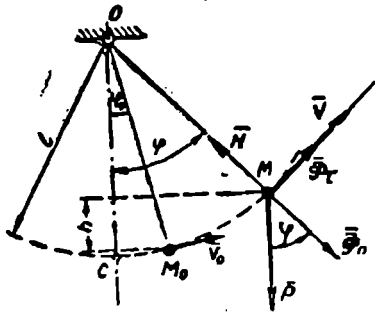
საიდანაც

$$v = \sqrt{gR \cos \alpha}.$$

არათვისუფალი ნივთიერი წერტილის არათანაბარი მრუდწირული მოძრაობა

(ამოცანები 31.5(802), 31.6(803), 31.20(816) — 31.24(820), 31.26(822))

ამ შემთხვევაში ამოცანის დასაძებრის პრინციპით ამოხსნისას, მოძრაე ნივთიერ წერტილზე მოდებული უნდა იყოს ინერციის ორე ძალა: მხები $\vec{\Phi}_\tau$ და ნორმალური $\vec{\Phi}_n$. ამასთანავე წონასწორობის გან-



ნახ. 190.

ტოლებები უნდა იყოს შედგენილი ისეთნაირად, რომ თითოეულ განტოლებაში შევიდეს ინერციის ამ ძალებიდან მარტო ერთ-ერთი ძალა. ამისათვის, კოორდინატთა ღერძები უნდა იყოს მიმართული მოძრაე წერტილის ტრანეკტორიის მხების და მთავარი ნორმალის გასწვრივ.

ნორმალური ინერციის ძალის გამოსახულებაში შედის v^2 . თუ

მოცემულ ამოცანაში წერტილის სიჩქარე უცნობია, მაშინ მისი განსაზღვრისათვის უბრაელეს შემთხვევაში ყველაზე მარტივია ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერჯიის შესახებ თეორემის გამოყენება.

მაგალითი 15მ. l სიგრძის და \vec{P} წონის მათემატიკური ქანქარა ვაჟ დაწეს წონასწორობის მდებარეობიდან φ_0 კუთხით და მიანიჭეს ძაფის მართობულად ზემოთ მიმართული \vec{v}_0 საწყისი სიჩქარე. იპოვეთ ქანქარას ძაფის დაკიმულობა მის მძერ ვერტიკალთან შედგენილ φ კუთხეზე დამოკიდებულებით (ნახ. 190).

ამოხსნა. ოთხი ძალა—ქანქარას P წონა, ძაფის \vec{N} რეაქცია, ინერციის მხები $\vec{\Phi}_\tau$ და ნორმალური $\vec{\Phi}_n$ ძალები დასაძებრის პრინციპის თანახმად გაწონასწორებული უნდა იყოს. ამიტომ ამ ძალების ქანქარას ტრანეკტორიის ნორმალზე (MO რადიუსის მიმართულებაზე) დაგეგმილებით ვლებულობთ

$$N - P \cos \varphi - \Phi_n = 0.$$

რადგანაც $\Phi_n = \frac{mv^2}{\rho} = \frac{mv^2}{l}$, ამიტომ წინამდებარე განტოლებიდან ვპოულობთ

$$N = P \cos \varphi + \frac{mv^2}{l}$$

ქანქარას n სიჩქარის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ გზის M_0M უბანზე კინეტიკური ენერჯიის თეორემა

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_p = -Ph.$$

აქედან

$$mv^2 = mv_0^2 - 2Ph = l \left(\frac{v_0^2}{g} - 2h \right)$$

და, მაშასადამე,

$$N = P \cos \varphi + \frac{P}{l} \left(\frac{v_0^2}{g} - 2h \right) = P \left(\cos \varphi + \frac{v_0^2}{lg} - \frac{2h}{l} \right).$$

მაგრამ

$$h = l \cos \varphi_0 - l \cos \varphi = l (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$$

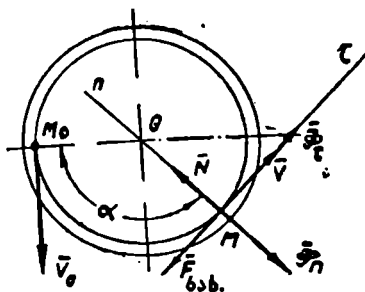
და ამიტომ

$$N = P \left(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0 + \frac{v_0^2}{lg} \right).$$

მაგალითი 154. ნიეთიერი წერტილი იმყოფება R რადიუსის უძრავი ცილინდრის შიგნით. საწყის მომენტში წერტილი იკავებს M_0 მდებარეობას და ღებულობს ვერტიკალურ \vec{v}_0 სიჩქარეს. ნაწილაკის, ცილინდრის ზედაპირზე ხახუნის კოეფიციენტი უდრის f -ს.

იპოვეთ დამოკიდებულება ნაწილაკის v სიჩქარესა და მისი ცილინდრის შიგნით მდებარეობის განმსაზღვრელ α კუთხეს შორის. სიმძიმის ძალის მოქმედებას უგულებელვყოფთ (ნახ. 191).

ამოხსნა. ნაწილაკზე მოქ-



ნახ. 191.

მედებს: ცილინდრის ნორმალური რეაქცია \vec{N} და ხახუნის ძალა $\vec{F}_{\text{ხახ.}}$ დალაშქრების პრინციპის გამოყენებით მოვლოთ ამ ნაწილაკზე მხებში $\vec{\Phi}_z$ და ნორმალური $\vec{\Phi}_n$ ინერციის ძალები.

ამ ძალების ნორმალზე გეგმილთა ჯამს თუ გავუტოლებთ ნულს, მივიღებთ

$$N - \Phi_n = 0,$$

ანუ

$$N = \Phi_n = \frac{mv^2}{R}$$

კულონის კანონის თანახმად

$$F_{\text{სახ}} = fN = f \frac{mv^2}{R}$$

შემდეგ გამოვიყენებთ კინეტიკური ენერჯიის თეორემას დიფერენციალური ფორმით

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -F_{\text{სახ}} ds,$$

აქედან თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $ds = R d\alpha$, გვექნება

$$mv dv = -\frac{mv^2}{R} d\alpha, \quad \text{ანუ} \quad \frac{dv}{v} = -f d\alpha,$$

მოვახდინოთ ინტეგრირება, მივიღებთ

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -f \int_0^\alpha d\alpha, \quad \text{ანუ} \quad \ln \frac{v}{v_0} = -f\alpha.$$

საიდანაც

$$v = v_0 e^{-f\alpha}.$$

სისტემის დინამიკა

თავი IV.

სისტემის დინამიკის ზოგადი თეორემა

§ 1. სისტემის მოძრაობის რაოდენობის და მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემა

სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ეწოდება ამ სისტემის ყველა ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის გეომეტრიულ ჯამს, ე. ი.

$$\vec{K} = \sum m\vec{v},$$

(199)

სადაც \vec{K} — სისტემის მოძრაობის რაოდენობა; აქედან ვიღებთ მოძრაობის რაოდენობის გეგმილებს კოორდინატა ღერძებზე:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \sum m v_x = \sum m \frac{dx}{dt} = \sum m \dot{x}; \\ K_y &= \sum m v_y = \sum m \frac{dy}{dt} = \sum m \dot{y}; \\ K_z &= \sum m v_z = \sum m \frac{dz}{dt} = \sum m \dot{z}. \end{aligned} \right\}$$

სისტემის მოძრაობის რაოდენობის თეორემა მდგომარეობს შემდეგში:

სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ვექტორული წარმომადგენელი დროით უდრის ამ სისტემაზე მოდებული ყველა გარე ძალის ნაკრებ ვექტორს, ე. ი.

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R}^{(a)} = \sum \vec{F}^{(a)}, \quad (201)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ მოცემულ უძრავ ღერძზე სისტემის მოძრაობის რაოდენობის გეგმილის წარმომადგენელი დროით უდრის გარე ძალების ნაკრები ვექტორის გეგმილს იმავე ღერძზე, ე. ი.

$$\frac{dK_x}{dt} = R_x^{(a)} = \sum X^{(a)};$$

$$\frac{dK_y}{dt} = R_y^{(a)} = \sum Y^{(a)},$$

$$\frac{dK_z}{dt} = R_z^{(a)} = \sum Z^{(a)} \quad (202)$$

სისტემის მასათა ცენტრი ეწოდება ისეთ გეომეტრიულ C წერტილს; რომლის კოორდინატები განისაზღვრებიან ფორმულებით:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum m x}{M}; \\ y_c &= \frac{\sum m y}{M}; \\ z_c &= \frac{\sum m z}{M}. \end{aligned} \right\} \quad (203)$$

სადაც M — მოცემული სისტემის მასა, ამასთანავე $M = \sum m$, ხოლო x, y, z — ამ სისტემის ნივთიერი წერტილების კოორდინატებია.

(203) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ მყარი სხეულის მასა ცენტრის და სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა ერთმანეთს ემთხვევა.

თუ მოცემული სისტემა შედგება რამდენიმე, მაგალითად, სამი სხეულისაგან, მაშინ, თუ ამ სხეულების მასებს აღვნიშნავთ M_1, M_2, M_3 -ით. ხოლო მათ მასათა ცენტრს (სიმძიმის ცენტრს) C_1, C_2, C_3 -ით, გვექნება:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{M_1 x_{c_1} + M_2 x_{c_2} + M_3 x_{c_3}}{M}, \\ y_c &= \frac{M_1 y_{c_1} + M_2 y_{c_2} + M_3 y_{c_3}}{M}, \\ z_c &= \frac{M_1 z_{c_1} + M_2 z_{c_2} + M_3 z_{c_3}}{M}, \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

თუ დავეუშვებთ, რომ მთელი სისტემის მასა თავმოყრილია მასათა ცენტრში, მაშინ სისტემის მოძრაობის რაოდენობა უდრის მისი მასათა ცენტრის (სიმძიმის ცენტრის) მოძრაობის რაოდენობას. მაშასადამე, თუ სისტემის მასათა ცენტრის სიჩქარეს აღვნიშნავთ v_c -ით, მაშინ გვექნება

$$\vec{K} = M \vec{v}_c; \quad (205)$$

აქედან

$$\left. \begin{aligned} K_x &= M v_{c_x} = M \dot{x}_c; \\ K_y &= M v_{c_y} = M \dot{y}_c; \\ K_z &= M v_{c_z} = M \dot{z}_c. \end{aligned} \right\} \quad (205')$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ მასათა C ცენტრის აჩქარება $\vec{w}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt}$,

მაშინ (201) და (205) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$M \vec{w}_c = \vec{R}^{(a)} = \Sigma \vec{F}^{(a)}, \quad (206)$$

აქედან

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_c &= R_x^{(a)} = \Sigma X^{(a)}; \\ M \ddot{y}_c &= R_y^{(a)} = \Sigma Y^{(a)}; \\ M \ddot{z}_c &= R_z^{(a)} = \Sigma Z^{(a)}. \end{aligned} \right\} \quad (206')$$

(206) განტოლება წარმოადგენს სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას და გამოსახავს ამ ცენტრის მოძრაობის შესახებ შემდეგ თეორემას: სისტემის მასათა ცენტრი მოძრაობს ისე, როგორც ნივთიერი წერტილი, რომელშიც თავმოყრილია მთელი სისტემის მასა და რომელზეც მოდებულია ამ სისტემაზე მოქმედი ყველა გარე ძალა.

შედეგი. თუ გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ან მისი გეგმილი მოცემულ უძრავ ღერძზე ნულივტოლია, მაშინ სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ან მისი გეგმილი ამ ღერძზე რჩება უცვლელი. ე.ი.

$$1) \text{ თუ } \vec{R}(\omega) = \sum \vec{F}(\omega) = 0,$$

$$\text{მაშინ } \vec{K} = \sum m\vec{v} = M\vec{v}_c = \text{const.} \quad (207)$$

$$2) \text{ თუ } R_x(\omega) = \sum X(\omega) = 0,$$

$$\text{მაშინ } K_x = \sum mv_x = Mv_{cx} = \text{const.} \quad (207')$$

ამოცანები, რომლებიც ამ პარაგრაფს ეკუთვნიან, შეიძლება დავუყოს სამ ძირითად ტიპად:

1. ამოცანები სისტემის მოძრაობის რაოდენობის გამოთვლაზე (ამოცანები 36.3(966) — 36.7(969)).

2. ამოცანები, რომლებშიც ადგილი აქვს სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ან მოცემულ უძრავ ღერძზე მისი გეგმილის შენახვის კაუნონს, ე.ი. გამოიყენება (207) ან (207') ტოლობა (ამოცანები 35.17, (951) — 35.22 (957), 36.8(970) — 36.12(974)).

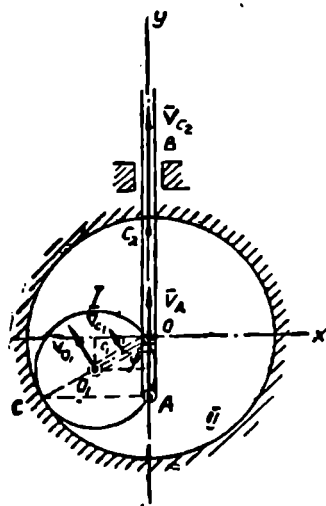
III. ამოცანები სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ან მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ თეორემის გამოყენებაზე ბმის რეაქციების განსასაზღვრავად (ამოცანები 35.6(958) — 35.11(963), 36.3(975) — 36.18(980)).

I ტიპის ამოცანები

ამ ტიპის ამოცანები შეიძლება ამოიხსნას ორი ხერხით: (199) და (200) ფორმულების ან (205) და (206) ფორმულების დახმარებით.

მაგალითი 155. 192-ე ნახაზზე გამოსახულ მექანიზმში P_1 წონის, $OO_1 = r$ მრუდმხარა ბრუნავს ვერტიკალურ სიბრტყეში უძრავი O

ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური ω სიჩქარით და მოძრაობაში მო-
ყვას P წონის r -რადიუსიანი I ბორბალი, რომელიც უსრიალოდ გო-
რავს უძრავ $2r$ -რადიუსიან II ბორბალ-
ზე; I ბორბლის სიმძიმის ცენტრი იმყო-
ფება O_1 წერტილში. P_2 წონის წრფივი
 AB ღერო, რომელიც I ბორბალთან A
სახსრით არის შეერთებული, ვერტიკა-
ლურ მიმართველებში მოძრაობს გა-
დატანით. იპოვეთ ამ სისტემის მოძრა-
ობის რაოდენობის ჭეგმილები კოორ-
დინატთა x და y ღერძებზე (ნახ. 192).



ნახ. 192.

ამოხსნა. პირველი ხერ-
ხი. მოცემული სისტემა შედგება სამი-
სხეულისაგან: OO_1 მრუდმხარასაგან,
მოძრავი I ბორბლისა და AB ღეროსა-
გან, ამიტომ $\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \vec{K}_3$, სადაც
 $\vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3$ მრუდმხარას, I ბორბლის
და AB ღეროს მოძრაობის რაოდენო-
ბაა.

ამ სხეულებიდან თითოეულისათვის ცალ-ცალკე (205) ფორმულის
გამოყენების საფუძველზე გვექნება:

$$\vec{K} = \frac{P_1}{g} \vec{v}_{C_1} + \frac{P_2}{g} \vec{v}_{C_2} + \frac{P}{g} \vec{v}_{O_1}. \quad (1)$$

აქ $\vec{v}_{C_1}, \vec{v}_{C_2}, \vec{v}_{O_1}$ შესაბამისად O_1, C_1 (მრუდმხარას სიმძიმის ცენ-
ტრის) და C_2 (ღეროს სიმძიმის ცენტრის) წერტილების სიჩქარეებია.

რადგან O_1 და C_1 წერტილები ეკუთვნიან O ღერძის გარშემო მბრუ-
ნავ მრუდმხარას, ამიტომ \vec{v}_{C_1} და \vec{v}_{O_1} ვექტორები OO_1 -ის მართობია
და მოდულით უდრის: $v_{C_1} = \frac{r}{2}\omega$ და $v_{O_1} = r\omega$.

ვინაიდან AB ღერო მოძრაობს გადატანით, ამიტომ $\vec{v}_{C_2} = \vec{v}_A$,
ამასთანავე \vec{v}_A ვექტორი მიმართულია AB -ს გასწვრივ.

რომ ვიპოვოთ A წერტილის სიჩქარე, რომელიც I ბორბალს ეკუ-
თვნის, უნდა შევნიშნოთ, რომ ამ ბორბლის ბრუნვის მყისი ცენტრი
მდებარეობს I და II ბორბლების შეხების წერტილში. მაშასადამე,

$$\frac{v_A}{v_{O_1}} = \frac{AC}{O_1C} = \frac{2r \sin \phi}{r} = 2 \sin \phi,$$

სადაც $\varphi = \omega t$ - მრუდმხარას მობრუნების კუთხეა; აქედან,

$$v_A = v_o \cdot 2 \sin \varphi = 2r\omega \sin(\omega t) = 0.$$

ახლა (ა) ტოლობიდან ვპოულობთ მოცემული სისტემის მოძრაობის რაოდენობის საძებნ გეგმილებს:

$$K_x = -\frac{P_1}{g} v_{C_1} \cos \varphi - \frac{P}{g} v_{O_1} \cdot \cos \varphi = -\frac{r\omega \cos \varphi}{g} \left(\frac{P_1}{g} + P \right) =$$

$$= -\frac{r\omega \cos \omega t}{2g} (P_1 + 2P);$$

$$K_y = \frac{P_1}{g} v_{C_1} \sin \varphi + \frac{P}{g} v_{O_1} \sin \varphi + \frac{P_2}{g} v_A = \frac{P_1}{g} \frac{r}{2} \omega \cdot \sin \omega t +$$

$$+ \frac{P}{g} r \omega \cdot \sin \omega t + \frac{2P_2}{g} r \omega \cdot \sin \omega t = \frac{r \omega \cdot \sin \omega t}{2g} \cdot (P_1 + 2P + 4P_2).$$

მეორე ხერხი. (204) ფორმულის საფუძველზე ვაქვს,

$$Mx_c = \frac{P_1}{g} x_{C_1} + \frac{P_2}{g} x_{C_2} + \frac{P}{g} x_{O_1}; \quad My_{C_1} = \frac{P_1}{g} y_{C_1} + \frac{P_2}{g} y_{C_2} + \frac{P}{g} y_{O_1},$$

სადაც M არის მთელი მოცემული სისტემის მასა, რომელიც სამი სხეულისაგან შედგება, ხოლო C — ამ სისტემის მასათა ცენტრი. (192) ნახიდან ვპოულობთ,

$$x_{C_1} = -OC_1 \cdot \sin \varphi = -\frac{r}{2} \sin \omega t, \quad x_{C_2} = 0,$$

$$y_{C_1} = -OC_1 \cdot \cos \varphi = -\frac{r}{2} \cos \omega t, \quad y_{C_2} = AC_2 - OA = l - 2r \cos \omega t,$$

სადაც

$$l = AC_2 = \text{const};$$

$$x_{O_1} = -OO_1 \cdot \sin \varphi = -r \cdot \sin \omega t;$$

$$y_{O_1} = -OO_1 \cdot \cos \varphi = -r \cos \omega t.$$

მაშასადამე,

$$Mx_o = -\frac{P_1}{g} \frac{r}{2} \cdot \sin \omega t - \frac{P}{g} r \cdot \sin \omega t = -\frac{r \cdot \sin \omega t}{2g} (P_1 + 2P),$$

$$My_c = -\frac{P_1}{g} \frac{r}{2} \cos \omega t - \frac{P}{g} r \cdot \cos \omega t + \frac{P_2}{g} (l - 2r \cdot \cos \omega t) =$$

$$= -\frac{r \cdot \cos \omega t}{2g} (P_1 + 2P + 4P_2) + \frac{P_2}{g} l.$$

აქედან (205') ფორმულის საფუძველზე ვღებულობთ,

$$K_x = M\dot{x}_c = \frac{-r\omega \cdot \cos\omega t}{2g} (P_1 + 2P),$$

$$K_y = M\dot{y}_c = \frac{r\omega \cdot \sin\omega t}{2g} (P_1 + 2P + 4P_2).$$

II ტიპის ამოცანები

მეორე ტიპის ამოცანებს ეკუთვნის ის ამოცანები, რომლებშიც ყველა გარე ძალის გეგმილთა ჯამი მოცემულ უძრავ ღერძზე, მაგალითად x ღერძზე, ყოველთვის ნულის ტოლია.

ამ შემთხვევაში (იხ. 207 ტოლობა) გვაქვს $K_x = \sum m v_{cx} = \text{const}$. მაშასადამე, თუ \vec{K}_0 -ით აღვნიშნავთ სისტემის მოძრაობის რაოდენობას საწყის მომენტში (როცა $t=0$), მაშინ $K_x = K_0$, ანუ

$$\sum m v_x = \sum m v_{0x}. \quad (208)$$

თუ საწყის მომენტში სისტემა უძრავია, ე. ი. მისი ყველა წერტილის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია, ამ შემთხვევაში $K_{0x} = 0$ და, მაშასადამე,

$$\sum m v_x = 0. \quad (209)$$

ვინაიდან $K_x = M v_{cx}$ (იხ. 205' ტოლობა), ამიტომ, როცა $K_x = \text{const}$, გვექნება:

$$v_{cx} = (v_{cx})_{t=0}$$

თუ საწყის მომენტში სისტემის მასათა ცენტრის სიჩქარე ნულის ტოლია, მაშინ $(v_{cx})_{t=0} = 0$ და, მაშასადამე, $v_{cx} = 0$ ან $\frac{dx_c}{dt} = 0$, აქედან:

$$x_c = \text{const} = x_{c0}, \quad (210)$$

ე. ი. განსახილველ შემთხვევაში სისტემის მასათა ცენტრის აბსცისა მუდმივია.

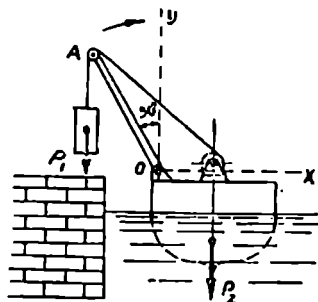
მეორე ტიპის ამოცანები შეიძლება ამოიხსნას ორი ხერხით:

- 1) (208) და (209) ტოლობების საფუძველზე ან,
- 2) (210) ტოლობის გამოყენებით.

მაგალითი 156. განსაზღვრეთ მცურავი ამწის გადაადგილება, რომელიც ეწევა $P=20$ კნ წონის ტვირთს, ამწის ისრის 30° -იანი კუთხით მობრუნებისას ვერტიკალურ მდებარეობამდე. ამწის წონაა

$P_2 = 200$ კნ. ისრის სიგრძეა $OA = 8$ მ. წყლის წინააღმდეგობა უგულებელყავით (ნახ. 193).

ამოხსნა. პირველი ხერხი. მოცემულ ამოცანაში ჩვენ გვაქვს ორი სხეულისაგან შედგენილი სისტემა: მცურავი ამწე და ტვირთი; ამ სისტემაზე მოდებულ გარე ძალებს წარმოადგენენ ამწის P_2 წონა, ტვირთის P_1 წონა და წყლის ვერტიკალური წნევა, რომელიც მიმართულია, ქვევიდან ზევით (არქიმედის ძალა). რადგან ყველა ეს გარე ძალა ვერტიკალურია, ამიტომ მათი გეგმილების ჯამი ჰორიზონტალურ x ღერძზე ნულის ტოლია.



ნახ. 193.

გარდა ამისა, საწყის მომენტში სისტემა უძრავია, ამიტომ, თუ გამოვიყენებთ (209) ტოლობას, მივიღებთ

$$\frac{P_1}{g} v_{1x} + \frac{P_2}{g} v_{2x} = 0,$$

სადაც v_{1x} და v_{2x} — ტვირთისა და მცურავი ამწის აბსოლუტური სიჩქარეების გეგმილებია x ღერძზე. თუ v_{1x} და v_{2x} შევცვლით $\frac{dx_1}{dt}$ და $\frac{dx_2}{dt}$ -თი, სადაც x_1 და x_2 შესაბამისად აღნიშნავენ ტვირთის და ამწის სიმძიმის ცენტრის აბსცისებს, მაშინ გვექნება

$$\frac{P_1}{g} \frac{dx_1}{dt} + \frac{P_2}{g} \frac{dx_2}{dt} = 0,$$

ანუ ინტეგრირებით,

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 = \text{const} = P_1 x_{01} + P_2 x_{02},$$

სადაც x_{01} და x_{02} — ტვირთის და ამწის სიმძიმის ცენტრის აბსცისებია საწყის მომენტში, ამასთანავე, როგორც ნახაზიდან ჩანს

$$x_{01} = -OA \cdot \sin 30^\circ = -4.$$

იმ მომენტში, როდესაც ისარი დაიკავებს ვერტიკალურ მდებარეობას, ტვირთის x_1 აბსცისა ტოლი იქნება ამწის s გადაადგილებისა, მაშასადამე, ამ მომენტში გვექნება

$$P_1 s + P_2 x_2 = -4P_1 + P_2 x_{02},$$

ან

$$P_1 s + P_2 (x_2 - x_{02}) = -4P_1.$$

ვინაიდან

$$x_2 - x_{02} = S,$$

ამიტომ

$$(P_1 + P_2)s = -4P_1,$$

საიდანაც ვპოულობთ

$$s = -\frac{4P_1}{P_1 + P_2} = -\frac{4}{11} = -0,36 \text{ მ.}$$

მინუს ნიშანი მიგვითითებს იმაზე, რომ ამწე გადაადგილდება მარცხნივ.

შეორე ხერხი. თუ გამოვიყენებთ (210) ტოლობას, მივიღებთ $x_c = \text{const}$, სადაც x_c მოცემული სისტემის (ტვირთის და ამწის) მასათა ცენტრის (სიმძიმის ცენტრის) აბსცისაა.

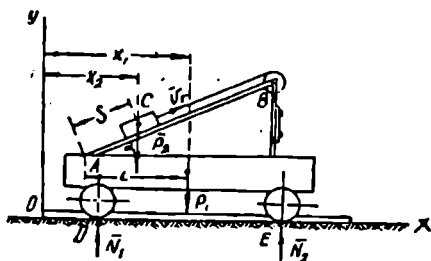
მაგრამ

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{P_1x_1 + P_2x_2}{P_1 + P_2},$$

და ამიტომ

$$P_1x_1 + P_2x_2 = \text{const.}$$

შესაბამისად, ჩვენ გვაქვს იგივე განტოლება, რომელიც მივიღეთ ზევით, ამოცანის პირველი ხერხით ამოხსნის დროს. ამ განტოლებიდან, ისევე როგორც პირველი ხერხით ამოხსნისას, ვპოულობთ ამწის საძიებელ გადაადგილებას.



ნახ. 194.

მაგალითი 157. P_1 წონის ჰორიზონტალურ ბაქანზე დადგმულია დახრილი AB სიბრტყე, რომელიც ჰორიზონტალურ კმნის α კუთხეს (ნახ. 194). ამ დახრილ სიბრტყეზე ქალამბურის საშუალებით წევენ P_2 წონის C ტვირთს ისე, რომ

$$AC \text{ მანძილი იცვლება } s = \frac{1}{2} a l^2$$

კანონით. საწყის მომენტში მთელი სისტემა იმყოფება წონასწორობის მდგომარეობაში.

განსაზღვრეთ სიჩქარე, რომლითაც მოძრაობს ბაქანი; ბაქნის მოძრაობის შემფერხებელი წინააღმდეგობანი უგულებელყავით.

ამოხსნა. პირველი ხერხი. მოცემულ ამოცანაში ჩვენ გვაქვს ორი სხეულისაგან შედგენილი სისტემა: ბაქანი და C ტვირთი;

ამ სისტემაზე მოდებული გარე ძალები არიან ბაქნის \vec{P}_1 წონა, ტერითის \vec{P}_2 წონა და D და E წერტილებში რელსების ნორმალური \vec{N}_1 და \vec{N}_2 რეაქციები. რადგანაც ყველა ეს ძალა ვერტიკალურია, ამიტომ ჰორიზონტალურ x ღერძზე მათი გეგმილების ჯამი უდრის ნულს, ე. ი. $\sum x^{(a)} = 0$; ამიტომ, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ საწყის მომენტში სისტემა უძრავია და თუ გამოვიყენებთ (209) ტოლობას, მაშინ, ისე როგორც წინა ამოცანაში, მივიღებთ

$$\frac{P_1}{g} v_{1x} + \frac{P_2}{g} v_{2x} = 0,$$

სადაც V_{1x} და V_{2x} ბაქნის და ტერითის სიჩქარეების გეგმილებაა x ღერძზე. |

თუ ბაქნის გადატანით მოძრაობას მივიღებთ წარმტან მოძრაობად, მაშინ ტერითის ფარდობითი მოძრაობა იქნება მისი გადაადგილება დახრილი AB სიბრტყის გასწვრივ. მაშასადამე, ტერითის ფარდობითი სიჩქარის $\vec{v}_{\text{ფ}}$ ვექტორი მიმართულია AB -ს პარალელურად და მოდულით უდრის,

$$v_{\text{ფ}} = \frac{ds}{dt} = at.$$

ტერითის წარმტანი სიჩქარის $\vec{v}_{\text{წ}}$ ვექტორი უდრის ბაქნის \vec{v}_1 სიჩქარეს, რომელიც x ღერძის პარალელურია და ამიტომ,

$$v_{\text{ფთ}} = v_{1x} = v_1.$$

სიჩქარეთა შეკრების თეორემის საფუძველზე გვექნება,

$$v_{2x} = v_{\text{ფთ}} + v_{\text{ფკ}} = v_1 + at \cdot \cos \alpha;$$

ამიტომ, წინა ტოლობა გადაიწერება ასე,

$$\frac{P_1}{g} v_1 + \frac{P_2}{g} (v_1 + at \cdot \cos \alpha) = 0;$$

აქედან ვღებულობთ

$$v_1 = - \frac{P_2}{P_1 + P_2} at \cdot \cos \alpha.$$

მიწის ნიშანი იმაზე მიგვიითობებს, რომ ბაქანი გადაადგილდება მარცხნივ.

მ ე ო რ ე ხ ე რ ხ ი. მოცემული სისტემის მასათა ცენტრის აბსცი-
სა

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2},$$

სადაც x_1 და x_2 —ბაქნის და ტვირთის სიმძიმის ცენტრების აბსცისებია. მაშასადამე, (210) ტოლობის საფუძველზე გვექნება $P_1 x_1 + P_2 x_2 = \text{const}$. მაგრამ, როგორც ნახაზიდან ჩანს, $x_2 = x_1 - l + s \cdot \cos \alpha$ და ამიტომ

$$P_1 x_1 + P_2 (x_1 - l + s \cdot \cos \alpha) = \text{const}.$$

თუ ამ ტოლობას გავაწარმოებთ t -თი, მივიღებთ,

$$P_1 \frac{dx_1}{dt} + P_2 \left(\frac{dx_1}{dt} + \frac{ds}{dt} \cdot \cos \alpha \right) = 0,$$

ახ

$$(P_1 + P_2) \frac{dx_1}{dt} = -P_2 \cdot a l \cdot \cos \alpha,$$

აქედან

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 = -\frac{P_2}{P_1 + P_2} a l \cos \alpha.$$

III ტიპის ამოცანები

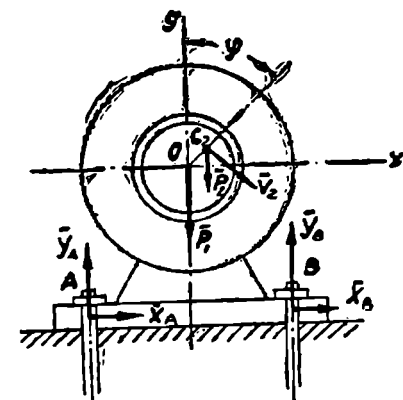
მესამე ტიპის ამოცანები, რომლებშიც მოითხოვება ბმის რეაქციების განსაზღვრა, შესაძლოა აგრეთვე ამოიხსნას ორი ხერხით:

1) სისტემის მოძრაობის რაოდენობის თეორემით ((202) განტოლებით).

2) მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემით ((206) განტოლებით).

მაგალითი 158. P_1 წონის მქონე მობილი საძირკველზე მიმაგრებულია ჰანჯიკებით. მობილის წონა უდრის P_2 -ს, ხოლო მისი სიმძიმის C_2 ცენტრი გადაწეულია ბრუნვის ღერძიდან $OC_2 = e$ მანძილით. როტორი ბრუნავს

$\varphi = \frac{\pi t^2}{2}$ კანონით. განსაზღვრეთ



ნახ. 195.

მობილის ვერტიკალური წნევა საძირკველზე და ყველა ჰანჯიკში წარმოქმნილი ჰორიზონტალური ძალები $l=1$ წმ მომენტში (ნახ. 195).

ამოხსნა. პირველი ხერხი. მოცემულ ამოცანაში გვაქვს

ორი სხეულისაგან შედგენილი სისტემა: მოტორის კორპუსი და როტორი.

ამ სისტემაზე მოდებული გარე ძალებით მოტორის წონა, როტორის წონა და ქანკიკების რეაქციები.

A და B წერტილებში ვერტიკალური რეაქციები აღვნიშნოთ Y_A და Y_B -თი, ხოლო ჰორიზონტალური რეაქციები X_A და X_B -თი.

თუ მოტორის და როტორის მოძრაობის რაოდენობას აღვნიშნავთ \vec{K}_1 და \vec{K}_2 -ით, მაშინ მოცემული სისტემის მოძრაობის რაოდენობა უდრის $\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2$. რადგან მოტორი უძრავია, ამიტომ $K_1 = 0$ და, მაშასადამე, $\vec{K} = \vec{K}_2$.

როტორის მოძრაობის რაოდენობას ვპოულობთ (205) ფორმულით, ე. ი. $\vec{K}_2 = \frac{P_2}{g} \vec{v}_2$, სადაც $\vec{v}_2 = C_2$ წერტილის სიჩქარეა. მაშასადამე, $\vec{K} = \frac{P_2}{g} \vec{v}_2$. აქედან ვპოულობთ, მოცემული სისტემის მოძრაობის რაოდენობის გეგმილებს კოორდინატთა ღერძებზე,

$$K_x = \frac{P_2}{g} v_{2x}, \quad K_y = \frac{P_2}{g} v_{2y}.$$

თუ ახლა გამოვიყენებთ თეორემას სისტემის მოძრაობის რაოდენობის შესახებ ((202) განტოლებას), მივიღებთ

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum X^{(a)}, \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum Y^{(a)}$$

ან

$$\frac{P_2}{g} \frac{dv_{2x}}{dt} = X_A + X_B, \quad \frac{P_2}{g} \frac{dv_{2y}}{dt} = Y_A + Y_B - (P_1 + P_2). \quad (a)$$

როტორის C_2 სიმძიმის ცენტრის სიჩქარე OC_2 რადიუსის მართობია და მოდულით უდრის $v_2 = OC_2 \cdot \omega = e\omega$, სადაც $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \pi t$ — როტორის კუთხური სიჩქარეა. მაშასადამე,

$$v_{2x} = v_2 \cos \varphi = e\omega \cdot \cos \varphi.$$

$$v_{2y} = -v_2 \sin \varphi = -e\omega \cdot \sin \varphi.$$

ამიტომ (a) განტოლებები იღებენ შემდეგ სახეს:

8. ტ. აიზენბერგი და სხვ.

$$X_A + X_B = \frac{eP_2}{g} \frac{d}{dt} (\omega \cdot \cos\varphi) = \frac{eP_2}{g} \left(\frac{d\omega}{dt} \cos\varphi - \omega \cdot \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) = \\ = \frac{eP_2}{g} \cdot \left(\frac{d\omega}{dt} \cos\varphi - \omega^2 \cdot \sin\varphi \right);$$

$$Y_A + Y_B = P_1 + P_2 - \frac{eP_2}{g} \cdot \frac{d(\omega \sin\varphi)}{dt} = P_1 + P_2 - \\ - \frac{eP_2}{g} \left(\frac{d\omega}{dt} \sin\varphi + \omega \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) = P_1 + P_2 - \\ - \frac{eP_2}{g} \cdot \left(\frac{d\omega}{dt} \sin\varphi + \omega^2 \cos\varphi \right).$$

$t=1$ წმ მომენტში გვაქვს

$$\varphi = \frac{\pi t^2}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \sin\varphi = 1, \quad \cos\varphi = 0, \quad \omega = \pi t = \pi; \quad \frac{d\omega}{dt} = \pi;$$

ამიტომ ამ მომენტში

$$X_A + X_B = - \frac{eP_2}{g} \pi^2;$$

$$Y_A + Y_B = P_1 + P_2 - \frac{eP_2}{g} \frac{d\omega}{dt} = P_1 + P_2 - e\pi \frac{P_2}{g}.$$

ამგვარად, $t=1$ წმ მომენტში სრული ვერტიკალური წნევა საძირკველზე უდრის $P_1 + P_2 - e\pi \frac{P_2}{g}$, ხოლო ყველა ქანკიკზე მოსული

საერთო ჰორიზონტალური ძალები უდრის $\frac{eP_2}{g} \pi^2$ -ს.

შეორეხერხი. თუ გამოვიყენებთ თეორემას სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ ((206) განტოლებას), გვექნება:

$$M\ddot{x}_C = X_A + X_B, \quad M\ddot{y}_C = Y_A + Y_B - P_1 - P_2,$$

სადაც x_C და y_C — მოცემული სისტემის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია. ეს სისტემა შედგება მოტორის კორპუსისაგან, სიმძიმის ცენტრით O წერტილში და როტორისაგან, სიმძიმის ცენტრით C_2 წერტილში. (204) ფორმულის საშუალებით ვპოულობთ.

$$Mx_C = \frac{P_1}{g} x_0 + \frac{P_2}{g} x_{C_2} \quad \text{და} \quad My_C = \frac{P_1}{g} y_0 + \frac{P_2}{g} y_{C_2}$$

მაგრამ

$$x_0 = y_0 = 0, \quad x_{C_2} = OC_2 \cdot \sin\varphi = e \sin\varphi;$$

$$y_{C_2} = OC_2 \cdot \cos\varphi = e \cos\varphi;$$

ამიტომ

$$Mx_c = \frac{P_2}{g} e \sin \varphi, \quad My_c = \frac{P_2}{g} e \cos \varphi.$$

აქედან

$$M\dot{x}_c = \frac{P_2}{g} e \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{P_2}{g} e \omega \cdot \cos \varphi$$

$$M\dot{y}_c = -\frac{P_2}{g} e \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{P_2}{g} e \omega \sin \varphi;$$

$$M\ddot{x}_c = \frac{eP_2}{g} \cdot \frac{d}{dt} (\omega \cdot \cos \varphi), \quad M\ddot{y}_c = -\frac{eP_2}{g} \cdot \frac{d}{dt} (\omega \cdot \sin \varphi).$$

მაშასადამე,

$$X_A + X_B = \frac{eP_2}{g} \frac{d}{dt} (\omega \cos \varphi), \quad Y_A + Y_B = P_1 + P_2 - \frac{eP_2}{g} \frac{d}{dt} (\omega \sin \varphi).$$

ამრიგად, მივიღეთ იგივე განტოლება, რაც პირველი ხერხით ამოხსნი-
სას. ამ განტოლებებიდან, ისევე, როგორც ზემოთაა მითითებული, მი-
ვიღებთ იგივე შედეგს.

§ 2. თეორემა სისტემის კინეტიკური მომენტის შესახებ

სისტემის ყველა ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის
ნაკრებ მომენტს მოცემული წერტილის ან მოცემული ღერძის მი-
მართ ეწოდება სისტემის კინეტიკური მომენტი ამ
ცენტრის ან ღერძის მიმართ.

მაშასადამე, თუ კინეტიკურ მომენტს O წერტილის (კოორდინატ-
თა სათავეს) მიმართ აღვნიშნავთ \vec{L}_0 -ით, ხოლო სისტემის კინეტიკურ
მომენტებს კოორდინატთა ღერძების მიმართ L_x, L_y, L_z -ით, მაშინ
გვექნება:

$$\vec{L}_0 = \sum \text{მომ}_0(\vec{mv}), \quad (211)$$

$$\left. \begin{aligned} L_x &= \sum \text{მომ}_x(mv) = \sum (y \cdot mv_z - z \cdot mv_y) = \sum m(yz - zy); \\ L_y &= \sum \text{მომ}_y(mv) = \sum (z \cdot mv_x - x \cdot mv_z) = \sum m(zx - xz); \\ L_z &= \sum \text{მომ}_z(mv) = \sum (x \cdot mv_y - y \cdot mv_x) = \sum m(xy - yx). \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

თეორემა სისტემის კინეტიკური მომენტის შესახებ მდგომარეობს
შემდეგში:

მოცემული უძრავი ცენტრის ან მოცემული
უძრავი ღერძის მიმართ სისტემის კინეტიკური
მომენტის წარმოებული დროით უღრის იმავე.

ცენტრის ან იმავე ღერძის მიმართ ამ სისტემაზე, მოდებული ყველა გარე ძალის ნაკრებ მომენტს, ე. ი.

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0^{(a)} = \Sigma \text{ მომ}_0(\vec{F}^{(a)}). \quad (213)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= M_x^{(a)} = \Sigma \text{ მომ}_x(\vec{F}^{(a)}), \\ \frac{dL_y}{dt} &= M_y^{(a)} = \Sigma \text{ მომ}_y(\vec{F}^{(a)}), \\ \frac{dL_z}{dt} &= M_z^{(a)} = \Sigma \text{ მომ}_z(\vec{F}^{(a)}) \end{aligned} \right\} \quad (214)$$

შედეგი. თუ უძრავი O ცენტრის ან მოცემული უძრავი Z ღერძის მიმართ ყველა გარე ძალის ნაკრებზე მომენტი უდრის ნულს, მაშინ ამ ცენტრის ან ამ ღერძის მიმართ სისტემის კინეტიკური მომენტი რჩება უცვლელი, ე. ი.

1) თუ $\vec{M}_0^{(a)} = 0$, მაშინ $\vec{L}_0 = \text{const}$ (215)

2) თუ $M_z^{(a)} = 0$, მაშინ $L_z = \text{const}$. (216)

მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის დროს ნებისმიერი Z ღერძის მიმართ მისი კინეტიკური მომენტი უდრის იმავე ღერძის მიმართ ამ სხეულის მასათა ცენტრის მოძრაობის რაოდენობის მომენტს, იმ დაშვებით, რომ ამ ცენტრში თავმოყრილია სხეულის მთელი M მასა, ე. ი.

$$L_z = \text{მომ}_z(Mv_c). \quad (217)$$

თუ მყარი სხეული ბრუნავს Z ღერძის გარშემო კუთხური ω სიჩქარით, მაშინ ამ ღერძის მიმართ მისი კინეტიკური მომენტი უდრის ბრუნვის ღერძის მიმართ ამ სხეულის ინერციის მომენტის ნამრავლს, კუთხურ სიჩქარეზე, ე. ი.

$$L_z = I_z \cdot \omega. \quad (218)$$

ამასთანავე, მოცემული Z ღერძის მიმართ სხეულის ინერციის მომენტი ეწოდება სხეულის ყოველზე ელემენტარული ნაწილაკის მასისა და ამ ღერძიდან მათი დაშორების მანძილის კვადრატის ნამრავლთა, ჯამს, ე. ი.

$$I_z = \Sigma mr^2, \quad (219)$$

სადაც m — ელემენტარული ნაწილაკის მასაა, ხოლო r — Z ღერძამდე მისი დაშორება.

თუ მყარი სხეული მოძრაობს მოცემული უძრავი სიბრტყის პარალელურად, მაშინ ამ სიბრტყის ნაართობულ ნებისმიერი Z ღერძის მიმართ მისი კინეტიკური მომენტი უდრის Z ღერძის მიმართ ამ სხეულის მასათა C ცენტრის მოძრაობის რაოდენობის მომენტს იმ დაშვებით, რომ ამ ცენტრში თავმოყრილია სხეულის მთელი M მასა პლუს CZ' ღერძის მიმართ სხეულის კინეტიკური მომენტი ამ ღერძის გარშემო მისი ბრუნვითი მოძრაობის დროს; ამასთანავე CZ' ღერძის გარშემო მისი სხეულის მასათა ცენტრში და პარალელურია Z ღერძისა, ე. ი.

$$L_z = \text{მომ}_z(Mvc) + I_{CZ'} \cdot \omega. \quad (220)$$

აქ $I_{CZ'}$ — სხეულის ინერციის მომენტია CZ' ღერძის მიმართ, ω — სხეულის კუთხური სიჩქარის ალგებრული მნიშვნელობა (დადებითი, თუ სხეული CZ' ღერძის გარშემო ბრუნავს საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ, და უარყოფითი წინააღმდეგ შემთხვევაში). (214) და (218) ტოლობებიდან ვლებულობთ უძრავი Z ღერძის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \Sigma \text{მომ}_z(F), \quad (221)$$

სადაც $\frac{d\omega}{dt} = \epsilon$ — სხეულის კუთხური აჩქარება.

ამოცანები, რომლებიც ამ პარაგრაფს ეკუთვნიან, შეიძლება დავყოთ შემდეგ ხუთ ძირითად ტიპად:

- I. ამოცანები სისტემის კინეტიკური მომენტის გამოთვლაზე.
- II. ამოცანები, რომლებშიც ადგილი აქვთ უძრავი ცენტრის ან უძრავი ღერძის მიმართ სისტემის კინეტიკური მომენტის შენახვას. ე. ი. სრულდება (215) ან (216) ტოლობა.
- III. ამოცანები, რომლებიც ეხებიან მყარი სხეულის ბრუნვას უძრავი ღერძის გარშემო.
- IV. ამოცანები, რომლებიც ეკუთვნიან გრეხით რხევებს.
- V. ამოცანები გიროსკოპული რეაქციების განსაზღვრაზე იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე გიროსკოპები.

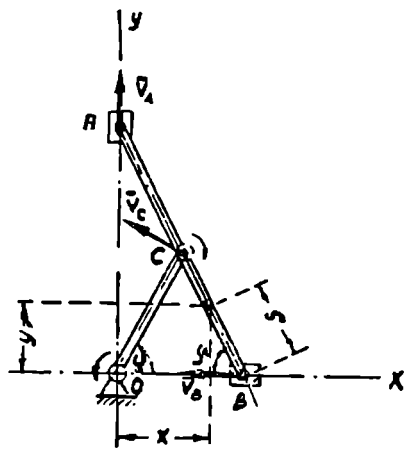
I ტიპის ამოცანები

ამ ტიპის ამოცანები შეიძლება ამოიხსნას ზოგადი (211) ან (212) ფორმულების დახმარებით.

მყარი სხეულის კინეტიკური მომენტი საჭიროა გამოითვალოს

სხეულის მოძრაობის სახისაგან დამოკიდებულებით (217), (218) ან (220) ფორმულებით.

მაგალითი 159. ელიფსოგრაფის მექანიზმი შედგება ორი, თითოეული P წონის A და B ცოცისაგან, P წონის OC მრუდმხარა, რასა და $2P$ წონის AB სახაზავისაგან. OC მრუდმხარა ბრუნავს ნახაზის სიბრტყისადმი მართობულ Oz ღერძის გარშემო კუთხური ω სიჩქარით.



ნახ. 196.

იპოვეთ ამ სისტემის კინეტიკური მომენტი Oz ღერძის მიმართ, თუ AB სახაზავს და OC მრუდმხარას განვიხილავთ, როგორც თხელ ღეროებს, ხოლო A და B ცოციებს — როგორც ნივთიერ წერტილებს, თუ $OC = AC = CB = L$ (ნახ. 196).

ამოხსნა. პირველი ხერხი. მოცემული მექანიზმი შედგება ოთხი სხეულისაგან, OC მრუდმხარასაგან, AB სახაზავისა და A , და B ცოციებისაგან, და ამიტომ საძებნი კინეტიკური მომენტი

$$L_z = L_z^{(1)} + L_z^{(2)} + L_z^{(3)} + L_z^{(4)},$$

სადაც $L_z^{(1)}$, $L_z^{(2)}$, $L_z^{(3)}$, $L_z^{(4)}$ — შესაბამისად აღნიშნავენ მრუდმხარას, სახაზავის და A და B ცოციების კინეტიკურ მომენტს z ღერძის მიმართ. OC მრუდმხარას კინეტიკურ მომენტს ვპოულობთ (218) ფორმულით $L_z^{(1)} = I_z^{(1)} \cdot \omega$, სადაც $I_z^{(1)}$ — მრუდმხარას ინერციის მომენტი z ღერძის მიმართ და უდრის $I_z^{(1)} = \frac{M_1 l^2}{3} = \frac{P}{g} \cdot \frac{l^2}{3}$; მაშასადამე,

$$L_z^{(1)} = \frac{P}{3g} l^2 \omega.$$

რადგანაც A და B ცოციების სიჩქარეები მიმართულია შესაბამისად Ox და Oy ღერძების გასწვრივ და, მაშასადამე, კვეთენ Oz ღერძს, ამიტომ $L_z^{(3)} = L_z^{(4)} = 0$.

ინისათვის, რომ გამოვთვალოთ სახაზავის კინეტიკური $L_z^{(2)}$ მო-

შენტი, საჭიროა გამოვიყენოთ (212) ფორმულის უკანასკნელი ტოლობა.

დავანაწილოთ AB ღერო უსასრულოდ მცირე ელემენტებად (ნივთიერ ნაწილაკებად); ასეთი ელემენტის მასა აღვნიშნოთ m -ით, ხოლო მისი კოორდინატები x და y -ით. მაშინ: $x = (2l-s)\cos\varphi$, $y = s \cdot \sin\varphi$, სადაც s არის განსახილავი ელემენტის დაშორების მანძილი B წერტილიდან. აქედან

$$\dot{x} = -(2l-s) \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi} = -(2l-s) \sin\varphi \cdot \omega; \quad \dot{y} = s \cdot \cos\varphi \cdot \omega.$$

მაშასადამე, ელემენტის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი z ღერძის მიმართ უდრის

$$\text{მომ}_z(\vec{m}\dot{\vec{v}}) = m(xy\dot{y} - yx\dot{x}) = m[(2l-s)s \cdot \omega \cdot \cos^2\varphi + (2l-s) \cdot s \cdot \omega \cdot \sin^2\varphi] = m(2l-s) \cdot s \cdot \omega.$$

ამიტომაც

$$L_z^{(2)} = \Sigma m(xy\dot{y} - yx\dot{x}) = \Sigma m(2l-s) \cdot s \cdot \omega = \omega(2l\Sigma ms - \Sigma ms^2);$$

მაგრამ

$$\Sigma ms = M_2 s_c = \frac{2P}{g} l,$$

ხოლო Σms^2 არის AB ღეროს ინერციის მომენტი B წერტილის მიმართ, რომელიც უდრის

$$M_2 \cdot \frac{AB^2}{3} = \frac{8P}{3g} \cdot l^2.$$

მაშასადამე,

$$L_z^{(2)} = \omega \left(\frac{4P}{g} l^2 - \frac{8P}{3g} l^2 \right) = \frac{4P}{3g} l^2 \omega.$$

ამგვარად, მექანიზმის საძიებელი კინეტიკური მომენტი

$$L_z = \frac{P}{3g} l^2 \omega + \frac{4P}{3g} l^2 \omega = \frac{5P}{3g} l^2 \omega.$$

მეორეხეობით. რადგანაც AB ღეროს მოძრაობა ბრტყელბრუნვითია, ამიტომ მისი კინეტიკური მომენტი z ღერძის მიმართ მართივად გამოითვლება (220) ფორმულის გამოყენებით

$$L_z^{(2)} = \text{მომ}_z(M_2 \vec{v}_c) + I_c^{(2)} \omega;$$

აქ $I_c^{(2)}$ არის AB ღეროს ინერციის მომენტი იმ ღერძის მიმართ (C , წერტილის მიმართ), რომელიც გადის ღეროს სიმძიმის ცენტრზე და

მართობია xOy სიბრტყისა, ხოლო ω_1 — ამ ღერძის გარშემო (C წერტილის გარშემო) ღეროს ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა. მაშასადამე,

$$I_c^{(2)} = M_2 \frac{AB^2}{12} = \frac{M_2 l^2}{3}.$$

რადგანაც AB ღერო C წერტილის გარშემო ბრუნავს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, ამიტომ $\omega_1 = -\frac{d\varphi}{dt} = -\omega$, ვინაიდან C წერტილი ეკუთვნის OC მრუდმხარას, ამიტომ მისი \vec{v}_c სიჩქარე OC -ს, მართობია და $v_c = l\omega$, ამიტომაც მომ $_z$ ($M_2 v_c$) = $M_2 l^2 \omega$. მაშასადამე,

$$L_z^{(2)} = M_2 l^2 \omega - \frac{M_2 l^2 \omega}{3} = \frac{2}{3} M_2 l^2 \omega = \frac{4P}{3g} l^2 \omega$$

და

$$L_z = L_z^{(1)} + L_z^{(2)} = \frac{P}{3g} l^2 \omega + \frac{4P}{3g} l^2 \omega = \frac{5P}{3g} l^2 \omega.$$

II ტიპის ამოცანები.

მეორე ტიპის ამოცანებს, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ეკუთვნიან ისეთი ამოცანები, რომლებშიც სისტემაზე მოქმედი ყველა გარე ძალის მომენტების ჯამი მოცემული უძრავი ღერძის, მაგალითად, z ღერძის მიმართ, ყოველთვის ნულის ტოლია. ამ შემთხვევაში (იხ. (216) ტოლობა) გვაქვს $L_z = \Sigma$ მომ $_z$ ($m\vec{v}$) = const . მაშასადამე, თუ საწყის $t=0$ მომენტში z ღერძის მიმართ სისტემის კინეტიკურ მომენტს აღვნიშნავთ $L_z^{(0)}$ -ით, მაშინ განსახილველ შემთხვევაში გვაქნება:

$$L_z = L_z^{(0)} \text{ ან } \Sigma \text{ მომ}_z(\vec{m}\vec{v}) = \Sigma \text{ მომ}_z(\vec{m}\vec{v}_0), \quad (222)$$

თუ საწყის მომენტში სისტემა უძრავია, მაშინ მისი ყველა წერტილის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია, მაშასადამე, $L_z^{(0)} = 0$, და ამ შემთხვევაში

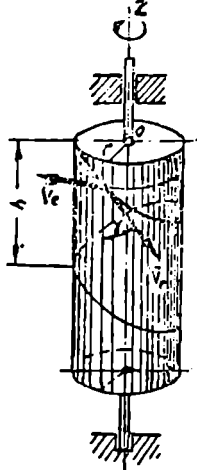
$$L_z = \Sigma \text{ მომ}_z(\vec{m}\vec{v}) = 0, \quad (222')$$

მეორე ტიპის ამოცანების ამოხსნის დროს საჭიროა შევადგინოთ (222) ან (222') განტოლება და განვსაზღვროთ მისგან ის სიდიდე, რომლის მოძებნაც ამოცანაშია მოთხოვნილი.

მაგალითი 100. z -რადიუსიან და M მასის მქონე წრიულ ერთგვაროვან ცილინდრის ზედაპირზე, რომელსაც შეუძლია ხახუნის გარეშე,

ბრუნვა უძრავი ვერტიკალური z ღერძის გარშემო, ფორმის არხი. ამ არხში იმყოფება m მასის მქონე თიერი წერტილი). რომელიღაც მომენტში, როცა სისტემა უძრავია, ბურთულა იწყებს მოძრაობას ხრახნწირის გასწვრივ სიმძიმის ძალის გავლენით, ხოლო ცილინდრი ამასთანავე იწყებს ბრუნვას z ღერძის გარშემო საწინააღმდეგო მიმართულებით. რა კუთხით შემობრუნდება ცილინდრი იმ დროის განმავლობაში, სანამ ბურთულა დაეშვება ხრახნწირის H ბიჯის ტოლ მანძილზე? (ნახ. 197).

აქვს ხრახნწირის ბურთულა (ნივ.



ნახ. 197.

ამოხსნა. ცილინდრისა და ბურთულასაგან შედგენილი მოცემული სისტემის გარე ძალებს წარმოადგენს მათი წონები და იმ დამაგრების წერტილების რეაქციები, რომლებზეც გადის ცილინდრის ბრუნვის z ღერძი. რადგანაც ამ ძალების მომენტი z ღერძის მიმართ ნულის ტოლია და რადგანაც საწყის მომენტში სისტემა უძრავია, ამიტომ ადგილი აქვს (222') განტოლებას, ე. ი. $L_z = 0$, სადაც L_z არის მოცემული სისტემის კინეტიკური მომენტი z ღერძის მიმართ. სწორედ ამ განტოლებებით ვისარგებლებთ ამოცანის ამოსახსნელად.

შბრუნავი ცილინდრის კინეტიკური მომენტი ბრუნვის z ღერძის მიმართ უდრის $-I_z \omega = -\frac{Mr^2}{2} \cdot \omega$, სადაც ω არის ცილინდრის კუთხური სიჩქარე (მინუს ნიშანს ვიღებთ იმიტომ, რომ თუ ვუყურებთ z ღერძს დადებითი ბოლოდან, ცილინდრი ბრუნავს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით).

თუ ბურთულას ფარდობით სიჩქარეს, რომელიც ხრახნწირის მხებზე გასწვრივია მიმართული, აღვნიშნავთ \vec{v}_B -ით, ხოლო ამ სიჩქარის მუდმივ კუთხეს z ღერძთან φ -თი, მაშინ ფარდობითი სიჩქარის პორიზონტალური მდგენელი, რომელიც მიმართულია ცილინდრის მხების გასწვრივ, მოდულით უდრის $v_B \cdot \sin \varphi$ -ს. ბურთულას წარმტანი \vec{v}_B სიჩქარე (z ღერძის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის სიჩქარე) მიმართულია ფარდობითი სიჩქარის პორიზონტალური მდგენელის საწინააღმდეგოდ და მოდულით უდრის $r\omega$ -ს. ამიტომ ბურთულას აბსოლუტური სიჩქარის პორიზონტალური მდგენელი უდრის

$$v_B \cdot \sin \varphi - r\omega,$$

ზოლო ბურთულას მოძრაობის რადენობის მომენტი z ღერძის მიმართ, უდრის

$$m(v_{\theta} \cdot \sin\gamma - r\omega)r,$$

მაშასადამე,

$$L_z = -\frac{Mr^2\omega}{2} + mr(v_{\theta} \cdot \sin\gamma - r\omega);$$

რადგანაც $L_z = 0$, ამიტომ,

$$-\frac{Mr^2\omega}{2} + m(v_{\theta} \cdot \sin\gamma - r\omega)r = 0,$$

ანუ

$$\left(\frac{M}{2} + m\right)r\omega = mv_{\theta} \cdot \sin\gamma. \quad (a)$$

თუ ცილინდრის მობრუნების კუთხეს აღვნიშნავთ φ -ით, მაშინ

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt};$$

ბურთულას აბსოლუტური სიჩქარის v_z გეგმილი z ღერძზე, ცხადია, უდრის $v_{\theta} \cdot \cos\gamma$ და ამიტომ

$$\frac{dz}{dt} = v_z = -v_{\theta} \cos\gamma$$

და

$$v_r \sin\gamma = v_{\theta} \cos\gamma \cdot \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\gamma \cdot \frac{dz}{dt}.$$

მაშასადამე, (a) განტოლება ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$\left(\frac{M}{2} + m\right)r \frac{d\varphi}{dt} = -m \cdot \operatorname{tg}\gamma \cdot \frac{dz}{dt},$$

ანუ

$$\left(\frac{M}{2} + m\right)r d\varphi = -m \operatorname{tg}\gamma \cdot dz.$$

თუ მოვახდენთ ამ განტოლების ინტეგრირებას და მხედველობაში მივიღებთ, რომ საწყის მომენტში $\varphi_0 = 0$ და $z_0 = 0$, მივიღებთ,

$$\left(\frac{M}{2} + m\right)r\varphi = -m \operatorname{tg}\gamma \cdot z.$$

თუ ამოცანის პირობის თანახმად დავუშვებთ, რომ $z = -h$, მაშინ ვპოულობთ ცილინდრის მობრუნების კუთხეს,

$$\varphi = \frac{m \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot h}{\left(\frac{M}{2} + m\right) r}$$

რადგანაც ხრახნწირის დახრის γ კუთხეს და მის H ბიჯს შორის არსებობს დამოკიდებულება $\operatorname{tg} \gamma = \frac{2\pi r}{h}$, ამიტომ $\varphi = \frac{2\pi m}{\frac{M}{2} + m}$.

თუ, მაგალითად, $M = 6m$, მაშინ ცილინდრი მობრუნდება 90° -ით.

III ტიპის ამოცანები

მბრუნავ მყარ სხეულზე მოდებული გარე ძალების მიხედვით შეესაბამება ტიპის ამოცანები შეიძლება დავყოთ სამ ჯგუფად.

1. სხეულზე მოდებული ძალების ნაკრები მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ არის მუდმივი სიდიდე.

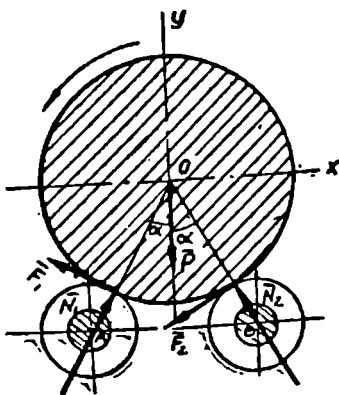
2. სხეულზე მოდებული ძალების ნაკრები მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ დამოკიდებულია სხეულის კუთხურ სიჩქარეზე. ამ შემთხვევას ადგილი აქვს წინააღმდეგობის მქონე გარემოში სხეულის ბრუნვის დროს.

3. სხეულზე მოდებული ძალების ნაკრები მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ არის სხეულის მობრუნების φ კუთხის ფუნქცია, როგორც, მაგალითად, ამას ადგილი აქვს ფიზიკური ქანქარას შემთხვევაში.

პირველი ჯგუფი

ამ ამოცანების ამოსახსნელად საჭიროა შევადგინოთ და შემდეგ გავაინტეგრიროთ მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ((221) განტოლება).

მაგალითი 161. r -რადიუსიანი მასიური ცილინდრი, რომელიც დადგმულია ცილინდრულ A და B გორგოლაკებზე ისე, როგორც ეს 198-ე ნახაზზეა ნაჩვენები, თავისი პორიზონტალური O ღერძის გარშემო ბრუნავს ამ კუთხური სიჩქარით. რომელიც მომენტში გორგოლაკები დამუხრუჭდებიან. ამის შემდეგ რა დროის განმავლობაში გაჩერდება ცილინდრი, თუ ხახუნის კოეფიციენტი ცილინდრსა და გორგოლაკებს



ნახ. 198.

შორის უდრის f -ს, ხოლო $\angle AOB = 2\alpha$?

ამოხსნა. მბრუნავ ცილინდრზე მოდებულ გარე ძალებს წარმოადგენენ მისი \vec{P} წონა, გორგოლაკების \vec{N}_1 და \vec{N}_2 ნორმალური რეაქციები და ცილინდრსა და გორგოლაკებს შორის \vec{F}_1 და \vec{F}_2 ხახუნის ძალები, ამასთანავე $F_1 = fN_1$ და $F_2 = fN_2$. რადგანაც \vec{P} , \vec{N}_1 და \vec{N}_2 ძალების მომენტები ცილინდრის ბრუნვის O ღერძის მიმართ ნულის ტოლია, ამიტომ ამ ღერძის მიმართ გარე ძალების ნაკრები მომენტი უდრის $M_0 = -F_1 r - F_2 r = -fr(N_1 + N_2)$. ამისათვის ცილინდრის ბრუნვით, მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = -fr(N_1 + N_2).$$

მოსაძებნი დარჩა N_1 და N_2 ძალები; ამისათვის, თუ გამოვიყენებთ თეორემას სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის შესახებ, შევადგენთ ცილინდრის სიმძიმის O ცენტრის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$M\ddot{y}_c = \Sigma Y(\alpha) = -P + (N_1 + N_2)\cos\alpha - F_2 \cdot \sin\alpha + F_1 \cdot \sin\alpha;$$

$$M\ddot{x}_c = \Sigma X(\alpha) = N_1 \sin\alpha - N_2 \cdot \sin\alpha - F_2 \cos\alpha - F_1 \cos\alpha.$$

ენიანიდან O წერტილში უძრავია, ამიტომ $\ddot{x}_c = \ddot{y}_c = 0$ და ამიტომ

$$\left. \begin{aligned} (N_1 - N_2) \cdot \sin\alpha - f(N_1 + N_2) \cdot \cos\alpha &= 0, \\ (N_1 + N_2) \cdot \cos\alpha + f(N_1 - N_2) \cdot \sin\alpha &= 0. \end{aligned} \right\}$$

თუ ამ განტოლებებრიდან გამოვრიცხავთ $N_1 - N_2$ სხვაობას, მივიღებთ

$$N_1 + N_2 = \frac{P}{(1+f^2)\cos\alpha}$$

და, მაშასადამე,

$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{frP}{(1+f^2) \cdot \cos\alpha}.$$

მაგრამ ცილინდრისათვის $I_0 = \frac{P}{g} \cdot \frac{r^2}{2}$ და ამიტომ

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2gf}{(1+f^2)r \cos\alpha} = \text{const.}$$

ამ განტოლების ინტეგრირებით მივიღებთ

$$\omega - \omega_0 = - \frac{2gf}{(1+f^2)r \cos \alpha} \cdot t.$$

რადგან ცილინდრის გაჩერების მომენტში $\omega = 0$, ამიტომ საძიებელი დრო

$$t = \frac{(1+f^2) \cdot r \cdot \cos \alpha \cdot \omega_0}{2gf}.$$

მ ე ო რ ე ჯ გ უ ფ ი

ამ ამოცანებში მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრირების დროს საჭიროა გამოვიყენოთ ცვლადთა განცალკევების მეთოდი.

მაგალითი 162. დიდი მქნევარების სწრაფი დამუხრუჭებისათვის იყენებენ ელექტრულ მუხრუჭებს, რომლებიც შედგებიან ერთმანეთისადმი დიამეტრულად საწინააღმდეგო მდებარე ორი პოლუსისაგან, რომლებზეც დახვეული გრავნილი იკვებება მუდმივი დენით. ფუკოს დენები, რომლებიც ინდუცირდება მქნევარას. მასაში, პოლუსის მახლობლად მქნევარას მოძრაობისას ქმნიან დამუხრუჭებელ M_1 მომენტს, რომელიც პროპორციულია v სიჩქარისა მქნევარას ფერსოზე; $M_1 = kv$, სადაც k კოეფიციენტია, დამოკიდებული მაგნიტურ ნაკადზე და მქნევარას ზომაზე. საკისრებში ხახუნის M_2 მომენტი შეიძლება პუდმივად ჩავთვალოთ; მქნევარას რადიუსი უდრის r -ს, მისი ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ უდრის I -ს. ვიპოვოთ, რა დროის შემდეგ გაჩერდება მქნევარა, რომელიც ბრუნავდა ω_0 კუთხური სიჩქარით?

ამოხსნა. მქნევარაზე მოდებული გარე ძალების ნაკრები მომენტი მისი ბრუნვის ღერძის მიმართ

$$M = -(M_1 + M_2) = -(kv + M_2)$$

და ამიტომ, თუ მქნევარასათვის შევადგენთ (221) განტოლებას, გვექნება

$$I \frac{d\omega}{dt} = -(kv + M_2),$$

ან, თუ v -ს შევცვლით $r\omega$ -თი,

$$I \frac{d\omega}{dt} = -(kr\omega + M_2).$$

თუ აქ ცვლადებს განვაცალკევებთ, მივიღებთ

$$\frac{I d\omega}{M_2 + kr\omega} = -dt;$$

აქედან ინტეგრირებით ვღებულობთ,

$$\frac{I}{kr} [\ln(M_2 + kr\omega)]_{\omega_0}^0 = -t,$$

ანუ

$$t = \frac{I}{kr} \ln \frac{M_2 + kr\omega_0}{M_2} = \frac{I}{kr} \cdot \ln \left(1 + \frac{kr}{M_2} \omega_0 \right).$$

მესამე ჯგუფი,

ამ ამოცანებში მბრუნვე მყარ სხეულზე მოღებული გარე ძალები; არიან ამ სხეულის მობრუნების ფ კუთხის ფუნქციები, ე. ი. $M = f(\varphi)$; თუ (221) განტოლებაში ω კუთხურ სიჩქარეს შევცვლით $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ -ით, მაშინ ეს განტოლება ლებულობს შემდეგ სახეს;

$$I\ddot{\varphi} = M = f(\varphi),$$

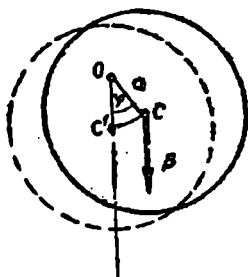
მესამე ჯგუფის ამოცანების ამოხსნის დროს საჭიროა ამ განტოლების ინტეგრირება.

მაგალითი 163. r -რადიუსიანი ერთგვაროვანი წრიული დისკო ასრულებს რხევას დისკოს სიბრტყის პერპენდიკულარულ და O წერტილზე გამავალ უძრავი პორიზონტალური ღერძის გარშემო. ამასთანავე O წერტილის დაშორება დისკოს სიმძიმის C ცენტრიდან არის $\frac{r}{2}$.

იპოვეთ დისკოს მოძრაობის კანონი მცირე რხევების შემთხვევაში,

აგრეთვე ამ მცირე რხევათა პერიოდი: საწყის მომენტში წონასწორობის მდგომარეობიდან დისკოს გადახრის ფ კუთხე უდრის φ_0 -ს, ხოლო მისი საწყისი კუთხური სიჩქარე უდრის ნულს (ნახ. 199).

ამოხსნა. მოცემულ ამოცანაში გვაქვს ფიზიკური ქანქარა. თუ ქანქარას წონას აღვნიშნავთ P -თი, ხოლო OC მანძილს a -თი, მაშინ მომენტი $M = -aP \sin \varphi$ და ამიტომ ქანქარას ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენცია-



ნახ. 199.

ლურ განტოლებას შემდეგი სახე აქვს

$$I_0 \ddot{\varphi} = -aP \sin \varphi,$$

მცირე რხევების დროს შეიძლება დავუშვათ, რომ $\sin \varphi \approx \varphi$. მაშინ მივიღებთ ქანქარას მცირე რხევების დიფერენციალურ განტოლებას

$$I_0 \ddot{\varphi} + aP \varphi = 0, \text{ ანუ } \ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \text{ სადაც } k^2 = \frac{aP}{I_0}.$$

ეს არის პარამონიული რხევის დიფერენციალური განტოლება; მის ზოგად ამოხსნას შემდეგი სახე აქვს:

$$\varphi = C_1 \cdot \sin(kt) + C_2 \cdot \cos(kt).$$

აქედან

$$\dot{\varphi} = kC_1 \cos(kt) - kC_2 \sin(kt),$$

რადგანაც პირობის თანახმად საწყის მომენტში $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$, ანუ ტომ წინა განტოლებიდან, თუ მასში დავუშვებთ, რომ $t = 0$, მივიღებთ: $C_2 = \varphi_0$, $C_1 = 0$. მაშასადამე, $\varphi = \varphi_0 \cdot \cos kt$.

ეს განტოლება გამოსახავს ქანქარას მოძრაობის საძიებელ კანონს მცირე რხევის დროს. ამ რხევათა პერიოდი უდრის

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{aP}}, \text{ მოცემულ ამოცანაში } a = \frac{r}{2}; \text{ დისკოს ინერციის}$$

მომენტს შოვნახავთ პარალელური ღერძების მიმართ ინერციის მომენტის თეორემის გამოყენებით

$$I_0 = I_c + M \cdot OC^2 = \frac{Mr^2}{2} + M \frac{r^2}{4} = \frac{3}{4} Mr^2 = \frac{3P}{4g} r^2;$$

ამიტომ

$$K = \sqrt{\frac{2g}{3r}}, \quad \varphi = \varphi_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{3r}} t\right), \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{3r}{2g}}.$$

თუ ამ ფორმულებიდან უკანასკნელს შევადარებთ მათემატიკური ქანქარას პერიოდს $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, სადაც l ქანქარას ძაფის სიგრძეა, ვნახავთ, რომ განსახილველი ფიზიკური ქანქარას ხსენებული სიგრძე უდრის $l = \frac{3}{2} r$.

IV ტიპის ამოცანები

ამ ტიპის ამოცანები, რომლებიც ეხებიან გრეხით რხევებს, შეიძლება დავყოთ სამ ჯგუფად:

1. თავისუფალი გრეხითი რხევები;

2. მიღვეადი გრეხეთი რხევები;

3. იძულებითი გრეხითი რხევები;

ყველა ამ ამოცანის ამოხსნის დროს საჭიროა შევადგინოთ მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება (221), (ა შემდეგ ეს განტოლება გავაინტეგრიროთ.

პ ი რ ვ ე ლ ი ჯ გ უ ფ ი

ამ ჯგუფის ამოცანებში სხეულზე მოდებული მომენტი პროპორციულია დკუთხისა, რომელიც განსაზღვრავს მბრუნავი სხეულის მდებარეობას და აქვს საწინააღმდეგო ნიშანი, ე. ი. $M = -c\varphi$, სადაც c — პროპორციულობის კოეფიციენტი. მაშასადამე, (221) განტოლება იღებს შემდეგ სახეს:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\varphi = 0, \text{ ანუ } \ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \text{ სადაც } k^2 = \frac{c}{I}.$$

ეს არის ჰარმონიული რხევის დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამოხსნაც განხილულია მეორე თავში.

(127) და (130) ფორმულებით ვპოულობთ.

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(kt) + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin(kt),$$

ანუ

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{c}{I}} t\right) + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{I}} t\right).$$

ამ ჰარმონიული რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}.$$

მ ე ო რ ე ჯ გ უ ფ ი

ამ ჯგუფის ამოცანებში მბრუნავ სხეულზე $M = -c\varphi$ მომენტის, ვარდა მოდებულია აგრეთვე წინააღმდეგობის მომენტი, რომელიც სხეულის კუთხური სიჩქარის პროპორციულია, ე. ი. $M_1 = -\mu\dot{\varphi}$, სადაც μ — პროპორციულობის კოეფიციენტი.

ამიტომ (221) განტოლებას აქვს შემდეგი სახე,

$$I\ddot{\varphi} = -c\varphi - \mu\dot{\varphi},$$

ანუ

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{I}\varphi + \frac{\mu}{I}\dot{\varphi} = 0,$$

ე. ი. $\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0$, სადაც $2n = \frac{\mu}{I}$ და $k^2 = \frac{c}{I}$.

ეს არის მიღვეალი რხევის დიფერენციალური განტოლება (როცა $k > n$), რომლის ამოხსნასაც ვპოულობთ (132) ან (133) ფორმულებით

$$\varphi = ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \alpha),$$

ანუ

$$\begin{aligned} \varphi &= ae^{-\frac{\mu}{2I}t} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{c}{I} - \frac{\mu^2}{4I^2}}t + \alpha\right) = \\ &= a \cdot e^{-\frac{\mu}{2I}t} \cdot \sin\left(\frac{1}{2I}\sqrt{4Ic - \mu^2} \cdot t + \alpha\right). \end{aligned}$$

ამ მიღვეალი რხევის პერიოდი (იხ. 134 ფორმულა).

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{4\pi I}{\sqrt{4Ic - \mu^2}}$$

a და α მუდმივები განისაზღვრებიან სხეულის მოძრაობის საწყისი პირობებით (საწყისი ფი კუთხით და საწყისი ფი კუთხური სიჩქარით).

მ ე ს ა მ ე ჯ გ უ ფ ი

ამ ამოცანებში მბრუნავ სხეულზე $M = -c\varphi$ და $M_1 = \mu\dot{\varphi}$ მომენტების გარდა მოდებულება M_2 მომენტი, რომელიც გამოსაზღვრულია დროის პერიოდულ ფუნქციებში, ე. ი. იცვლება დროსთან ერთად, მაგალითად, პარამონიული კანონით (სინუსის ან კოსინუსის კანონით);

თუ $M_2 = H \sin(\rho t)$, სადაც H და ρ მუდმივი სიდიდეებია, მაშინ (182) განტოლებას ექნება შემდეგი სახე;

$$I\ddot{\varphi} + \mu\dot{\varphi} + c\varphi = H \sin(\rho t),$$

ანუ

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = h \sin(\rho t),$$

სადაც $2n = \frac{\mu}{I}$, $k^2 = \frac{c}{I}$ და $h = \frac{H}{I}$.

ეს არის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება, რომლის მარჯვენა მხარე ნულისაგან განსხვავდება. ასეთი განტოლების ინტეგრირება განხილულია I თავის მე-3 პარაგრაფში. მის ზოგად ამოხსნას შემდეგი სახე აქვს;

9. ტ. აიზენბერგი და სხვ.

$$\varphi = ae^{-n'l} \cdot \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \alpha) + b \cdot \sin(\rho l + \beta),$$

ანუ

$$\varphi = a \cdot e^{-\frac{\mu}{2l} t} \cdot \sin\left(\frac{1}{2l} \sqrt{4lc - \mu^2} \cdot t + \alpha\right) + b \sin(\rho l + \beta),$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარის მეორე წევრი გამოსახავს იძულებით გრეხით რხევას. ამ იძულებითი რხევის b ამპლიტუდა და საწყისი β ფაზა II თავის მე-3 პარაგრაფში აღნიშნულის თანახმად განისაზღვრება ფორმულებით;

$$b = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \rho^2)^2 + 4n^2\rho^2}} = \frac{H}{I \sqrt{\left(\frac{c}{l} - \rho^2\right)^2 + \frac{\mu^2}{l^2} \rho^2}} = \frac{H}{\sqrt{(c - l\rho^2)^2 + \mu^2\rho^2}},$$

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{2n\rho}{k^2 - \rho^2} = -\frac{\mu\rho}{l\left(\frac{c}{l} - \rho^2\right)} = -\frac{\mu\rho}{c - l\rho^2}.$$

a და α მუდმივები განისაზღვრებიან სხეულის ბრუნვითი და მოძრაობის საწყისი პირობებით.

როცა $P = k = \sqrt{\frac{c}{l}}$, ე. ი. თავისუფალი პარმონიული და იძულებითი რხევის სიხშირის ტოლობის დროს, გვაქვს რეზონანსის მოვლენა. იძულებითი რხევის ამპლიტუდა ამ შემთხვევაში,

$$b_{\text{რეზ}} = \frac{H}{\mu\rho} = \frac{H}{\mu k} = \frac{H}{\mu} \sqrt{\frac{l}{c}}.$$

წინააღმდეგობის მომენტის არარსებობის დროს საჭიროა წინა განტოლებებში და ფორმულებში დაეუშვათ $\mu = n = 0$; მაშინ გრეხით რხევის დიფერენციალურ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე $l\ddot{\varphi} + c\varphi = H \cdot \sin(\rho t)$, ხოლო მისი ზოგადი ამოხსნა იქნება,

$$\varphi = a \cdot \sin(kt + \alpha) + b \sin(\rho t),$$

ანუ

$$\varphi = a \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{c}{l}} \cdot t + \alpha\right) + b \cdot \sin(\rho t).$$

იძულებითი გრეხითი რხევის ამპლიტუდა განისაზღვრება ფორმულით

$$b = \frac{H}{c - l\rho^2}.$$

როცა $p = \sqrt{\frac{c}{I}}$, ე. ი. რეზონანსის შემთხვევაში

წინააღმდეგობის გარეშე, წინა დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამოხსნას (სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის კანონი) აქვს შემდეგი სახე

$$\varphi = a \cdot \sin(kt + \alpha) - \frac{H}{2Ik} \cdot t \cdot \cos(kt),$$

ანუ

$$\varphi = a \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{c}{I}} \cdot t + \alpha\right) - \frac{H}{2I} \sqrt{\frac{I}{c}} \cdot t \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{c}{I}} t\right).$$

a და α მუდმივები, როგორც წინა შემთხვევაში (წინააღმდეგობის არსებობის დროს), განისაზღვრებიან სხეულის მოძრაობის საწყისი პირობებით.

მაგალითი 164. სითხის სიბლანტის კოეფიციენტის განსასაზღვრავად აკვირდებიან დრეკად ვერტიკალურ მავთულზე დაკიდებული დისკოს რხევას სითხეში. დისკოზე მოდებულია $M' \cdot \sin(pt)$ ($M' = \text{const}$); ცვლადი მომენტი, რომლის დროსაც ადგილი აქვს რეზონანსის მოვლენას. სითხეში დისკოს მოძრაობის წინააღმდეგობის მომენტი უდრის $\mu'S\omega$ -ს, სადაც μ' — სითხის სიბლანტის კოეფიციენტი, S — დისკოს ზედა და ქვედა ფუძეების ფართობთა ჯამი, ω — მისი კუთხურ რი სიჩქარე.

განსაზღვრეთ სითხის სიბლანტის μ' კოეფიციენტი, თუ დისკოს იძულებითი რხევის ამპლიტუდა რეზონანსის შემთხვევაში უდრის φ -ს.

ამოხსნა. ვერტიკალური ღერძის გარშემო მბრუნავ დისკოზე მოდებულია M მომენტი იმ დრეკადი ძალისა, რომელიც წარმოიშვა მავთულის φ კუთხით დაგრებისას და პროპორციულია ამ კუთხისა. სითხის წინააღმდეგობის $M_1 = \mu'S\omega$ მომენტი და ცვლადი $M_2 = M' \sin pt$ მომენტი; ამიტომ მოცემულ შემთხვევაში გვაქვს.

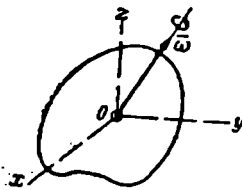
$$\mu = \mu'S, \quad H = M'$$

რადგანაც ამოცანის პირობის თანახმად მოცემული p სიხშირის დროს ადგილი აქვს რეზონანსს, ამასთანავე დისკოს იძულებითი გრუნვით რხევის ამპლიტუდა უდრის φ -ს, ამიტომ ზემოთხსენებული ფორ-

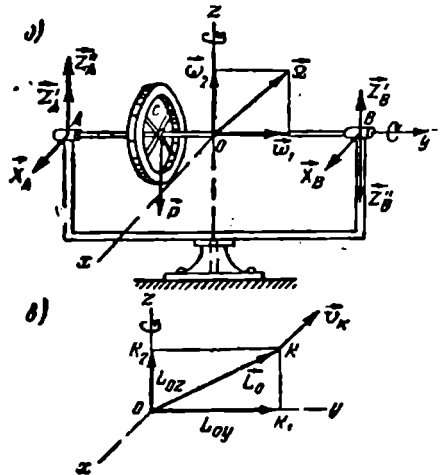
$$\begin{aligned} \text{მულის საფუძველზე } b_{\text{რეზ.}} &= \frac{N}{\mu p}, \text{ ვიპოვოთ } \varphi' = \frac{M'}{\mu'Sp}, \text{ საიდანაც } \mu' = \\ &= \frac{M'}{\varphi'Sp}. \end{aligned}$$

V ტიპის ამოცანები

წარმოვიდგინოთ მოძრავი მყარი სხეული, რომლის ერთი O წერტილი უძრავად არის ჩამაგრებული, მაგალითად, სფერული სახსრის საშუალებით (ნახ. 200). როგორც კინემატიკიდან არის ცნობილი, ყოველ ადებულ მომენტში ასეთი სხეული ბრუნავს რომელიმე განსაზღვრული მყისი ღერძის გარშემო, რომელიც გადის უძრავ O წერტილზე. სხეულის მყისი კუთხური სიჩქარის ვექტორი, რომელიც მიმართულია



ნახ. 200.



ნახ. 201.

ბრუნვის მყისი ღერძის გასწვრივ, აღვნიშნოთ $\vec{\omega}$ -თი, ხოლო მისი გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე, რომელთა სათავე მოთავსებულია O წერტილში, აღვნიშნოთ ω_x , ω_y , ω_z -ით. ვიპოვოთ ამ სხეულის კინეტიკური მომენტი x ღერძის მიმართ.

თუ დავანაწილებთ სხეულს ელემენტარულ ნაწილაკებად და გამოვიყენებთ (212) ფორმულას, გვექნება

$$L_x = \sum m v^2 = \sum m (y^2 \omega_z^2 - z^2 \omega_y^2).$$

სადაც m — ელემენტარული ნაწილაკის მასაა, y და z მისი კოორდინატები, ხოლო v_y , v_z — ნაწილაკის სიჩქარის გეგმილები y და z ღერძებზე.

მბრუნავი მყარი სხეულის წერტილის \vec{v} სიჩქარის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე განისაზღვრებიან ეილერის კინემატიკური ფორმულებით:*)

$$v_x = \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y; \quad v_y = \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z; \quad v_z = \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x.$$

* ამ ფორმულების გამოყენების ხერხი შეგიძლიათ ნახოთ პროფ. ა. გიორგიძის წიგნში „თეორიული მექანიკის კურსი“.

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} L_x &= \sum m(\omega_x y^2 - \omega_y xy - \omega_z xz + \omega_x z^2) = \\ &= \omega \sum m(y^2 + z^2) - \omega_y \sum mxy - \omega_z \sum mxz, \end{aligned}$$

ანუ

$$L_x = I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z,$$

სადაც $I_x = \sum m(y^2 + z^2)$ არის სხეულის ინერციის მომენტი x ღერძის მიმართ, $I_{xy} = \sum mxy$ და $I_{xz} = \sum mxz$ — სხეულის ცენტრიდანული ინერციის მომენტები.

თუ საკოორდინატო x, y, z ღერძებს მიემართავთ მოცემული სხეულის O წერტილის ინერციის მთავარი ღერძების გასწვრივ, მაშინ $I_{xy} = I_{xz} = 0$ და ამიტომ, ამ შემთხვევაში,

$$L_x = I_x \omega_x.$$

ანალოგიურად ვიპოვით, რომ ამ პირობებში სხეულის კინეტიკური მომენტი y და z ღერძების მიმართ იქნება

$$L_y = I_y \omega_y; \quad L_z = I_z \omega_z.$$

დავუშვათ, რომ მყარი სხეული, რომელსაც აქვს AB ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის ფორმა, მაგალითად, თვალი ან ტორი, თანაბრად ბრუნავს ამ AB ღერძის გარშემო $\vec{\omega}_1$ კუთხური სიჩქარით; ამავე დროს ეს პორიზონტალური AB ღერძი თანაბრად ბრუნავს უძრავი ვერტიკალური ღერძის გარშემო $\vec{\omega}_2$ კუთხური სიჩქარით, საჭიროა განვსაზღვროთ რეაქციები A და B საკისრებში, რომლებიც AB ღერძის პერპენდიკულარულნი არიან, თუ სხეულის წონაა P , და $AC = l_1$, $CB = l_2$, $AB = l_1 + l_2 = l$, ამასთანავე C მოცემული სხეულის სიმძიმის ცენტრია (ნახ. 201, ა და ბ). ასეთი სხეული წარმოადგენს ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე გიროსკოპს.

$\vec{\omega}_1$ კუთხური სიჩქარით AB ღერძის გარშემო ბრუნვას ეწოდება გიროსკოპის საკუთრივი ბრუნვა, ხოლო $\vec{\omega}_2$ კუთხური სიჩქარით z ღერძის გარშემო ბრუნვას ეწოდება პრეცესიული ბრუნვა, ანუ გიროსკოპის პრეცესია, ბრუნვის ღერძების გადაკვეთის O წერტილი მივიღოთ კოორდინატთა სათავედ და მივმართოთ საკოორდინატო ღერძები ისე, როგორც 201 ა ნახაზზეა ნაჩვენები. A და B საკისრების პორიზონტალური რეაქციები, რომლებიც x ღერძის პარალელურნი არიან, აღვნიშნოთ \vec{X}_A და \vec{X}_B -თი, საკისრების ვერტიკალური სტატიკური რეაქციები, რომლებიც განსაზღვრულნი არიან მხოლოდ გიროსკოპის P წონით, აღვნიშნოთ \vec{Z}'_A და \vec{Z}'_B -ით, ამასთანავე, ცხა-

და, $Z'_A = \frac{Pl_2}{l}$, $Z'_B = \frac{Pl_1}{l}$, ხოლო დინამიკური ვერტიკალური რეაქციები აღნიშნოთ Z''_A და Z''_B -ით.

ვიპოვოთ გიროსკოპის კინეტიკური L_0 მომენტი უძრავი O წერტილის მიმართ. თუ შევკრებთ $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ ვექტორებს, მივიღებთ გიროსკოპის აბსოლუტურ მყის კუთხურ $\vec{\Omega}$ სიჩქარეს (იხ. ტოლობა (107)). რადგანაც გიროსკოპი არის y ღერძის გარშემო მბრუნავი, სხეული, ამიტომ ეს ღერძი და მისდამი პერპენდიკულარული x და z ღერძები არიან გიროსკოპის ინერციის. მთავარი ღერძები O წერტილში და ამიტომ, როგორც ზემოთ იყო მითითებული, გიროსკოპის კინეტიკური მომენტი ამ ღერძების მიმართ იქნება:

$$L_x = I_x \Omega_x, \quad L_y = I_y \Omega_y, \quad L_z = I_z \Omega_z,$$

ანუ, ვინაიდან $\Omega_x = 0$, $\Omega_y = \omega_1$, $\Omega_z = \omega_2$, ამიტომ

$$L_x = 0, \quad L_y = I_y \omega_1, \quad L_z = I_z \omega_2.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ L , L_y , L_z — \vec{L}_0 ვექტორის გეგმილება საკოორდინატო ღერძებზე, მაშინ ნაპოვნი გეგმილებით ვაგებთ $OK = \vec{L}_0$ ვექტორს (ნახ. 201 ბ). თუ ახლა გამოვიყენებთ უძრავი O წერტილის მიმართ სისტემის კინეტიკური მომენტის თეორემას (იხ. 213 განტოლებას), გვექნება

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}'_0.$$

ვინაიდან $\frac{dL_0}{dt}$ წარმოებული არის K წერტილის \vec{V}_K სიჩქარე, ამიტომ

$$\vec{V}_K = \vec{M}'_0 \quad (223)$$

ეს ტოლობა გამოსახავს რეზალის თეორემას, ე. ი. ს ი ჩ ქ ა რ ე, რ ო მ-ლითაც გადაადგილდება უძრავი O წერტილიდან მიმართ სისტემის კინეტიკური მომენტის გამომსახველი ვექტორის ბოლო, ტოლია იმავე წერტილის მიმართ ამ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტისა.

რადგანაც $L_y = \text{const}$ და $L_z = \text{const}$, ამიტომ OK ვექტორი აღწერს წრიულ კონუსს z ღერძის გარშემო $\vec{\omega}_2$ კუთხური სიჩქარით ω_2 .

ბრუნვისას. აქედან გამომდინარეობს, რომ \vec{K} წერტილის ბრუნვითი სიჩქარე \vec{v}_k მიმართულია x ღერძის პარალელურად, როგორც ნაჩვენებია 201, ბ ნახაზზე და მოდულით უდრის,

$$v_k = \omega_2 \cdot K_2 K = \omega_2 L_y = I_y \omega_1 \cdot \omega_2.$$

თუ შემდეგ გამოვიყენებთ სისტემის სიმძიმის ცენტრის მოძრაობის თეორემის (იხ. 206 განტოლება), გვექნება:

$$M \vec{\omega}_c = \vec{R}^{(s)},$$

სადაც $\vec{R}^{(s)}$ გარე ძალების ნაქრები ვექტორია, რომლებსაც მოცემულ ამოცანაში წარმოადგენენ P წონა და A და B საკისრების საძებნი რეაქციები. თუ ამ ვექტორულ ტოლობას და (223) ტოლობას დავიგვეგმილებთ x და z ღერძებზე და მხედველობაში მივიღებთ, რომ \vec{P} , \vec{Z}'_A და \vec{Z}'_B ძალები ერთმანეთს აწონასწორებენ, მივიღებთ ოთხ განტოლებას:

$$1) M \omega_{cx} = R_x^{(s)} = X_A + X_B;$$

$$2) M \omega_{cz} = R_z^{(s)} = Z'_A - Z'_B;$$

$$3) v_{kx} = M_{Ox}^{(s)} = -Z'_A \cdot AO - Z'_B \cdot OB;$$

$$4) v_{kz} = M_{Oz}^{(s)} = X_A \cdot AO - X_B \cdot OB.$$

რადგანაც \vec{v}_k სიჩქარე პარალელურია x ღერძის, ხოლო C წერტილის ცენტრისკენული აჩქარება მიმართულია y ღერძის გასწვრივ (C_y დან O -კენ), ამიტომ

$$v_{kx} = -I_y \omega_1 \omega_2, \quad v_{kz} = 0, \quad \omega_{cx} = \omega_{cz} = 0.$$

წინა განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს

$$X_A + X_B = 0, \quad Z'_A - Z'_B = 0, \quad Z'_A \cdot AO + Z'_B \cdot OB = I_y \omega_1 \cdot \omega_2$$

$$X_A \cdot AO - X_B \cdot OB = 0.$$

ამ განტოლებებიდან ვპოულობთ

$$X_A = X_B = 0, \quad Z'_A = Z'_B = \frac{I_y \cdot \omega_1 \cdot \omega_2}{l}.$$

რადგანაც დინამიკური რეაქციები Z'_A და Z'_B მოდულით ტოლია და ერთმანეთის საწინააღმდეგოდაა მიმართული, ამიტომ აღგენენ წყვილ-ძალას $I_y \cdot \omega_1 \cdot \omega_2$ მომენტით, რომელსაც ეწოდება გიროსკოპული მომენტი. მაშასადამე თუ ამ მომენტს აღვნიშნავთ M_s -ით, გვექნება

$$M_s = I_y \omega_1 \omega_2. \quad (224)$$

ეს წყვილძალა მდებარეობს სიბრტყეში, რომელშიც მოთავსებულია $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ ვექტორები. თუ მხედველობაში მივიღებთ \vec{s}_x , $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ ვექტორების მიმართულელებს, მივიღებთ ვექტორულ ტოლობას

$$\vec{s}_x = \vec{M}_y = I_y \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1. \quad (224')$$

Z'_A და Z'_B რეაქციებისა და აგრეთვე გიროსკოპული მომენტის წარმოქმნა განპირობებულია გიროსკოპის საკუთრივი ბრუნვის AB ღერძის მიმართულების შეცვლით, რომელსაც ეწოდება გიროსკოპული ეფექტი.

მაგალითი 165. ტურბინა, რომლის ლილვი პარალელურია გემის გრძივი ღერძისა, აკეთებს 300 ბრუნს წუთში; მბრუნავი ნაწილების წონა უდრის 200 კნ-ს, ხოლო მათი ინერციის რადიუსი ტურბინის ბრუნვის ღერძის მიმართ უდრის 1,5 მ-ს. განსაზღვრეთ გიროსკოპული წნევა საკისრებზე, როცა მათა შორის მანძილია $l=6$ მ, თუ გემი ბრუნდება ვერტიკალური ღერძის გარშემო 15° -ით წამში.

ამოხსნა. თუ გემის ვერტიკალური z ღერძის გარშემო ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს აღვნიშნავთ ω_2 -ით, ხოლო ტურბინის ჰორიზონტალური y ღერძის გარშემო ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს ω_1 -ით, გვექნება

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot 300}{30} = 10\pi \frac{1}{\text{წმ}}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi \cdot 15}{360} = \frac{\pi}{12} \frac{1}{\text{წმ}}.$$

(224) ფორმულით ვეძებთ გიროსკოპულ მომენტს,

$$M_y = I_y \omega_1 \omega_2,$$

მაგრამ

$$I_y = \frac{P}{g} r_{\text{ჩ}}^2,$$

სადაც P — ტურბინის მბრუნავი ნაწილების წონაა და $r_{\text{ჩ}}$ — მათი ინერციის რადიუსი; ამიტომ

$$M_y = \frac{P}{g} r_{\text{ჩ}}^2 \omega_1 \omega_2 = \frac{200\,000}{9,8} \cdot 2,25 \cdot \frac{10}{12} \cdot \pi^2 = 375\,000 \text{ ნმ},$$

საქმები გიროსკოპული წნევები ქმნიან წყვილძალას, რომელიც მდებარეობს ვერტიკალურ სიბრტყეში; ამასთანავე ამ წყვილძალის მომენტია M_y , ხოლო მისი მხარია l ; მაშასადამე, თითოეულ საკისრში ვერტიკალური გიროსკოპული წნევა უდრის

$$\frac{M_y}{l} = \frac{375\,000}{6} = 62\,500 \text{ ნ}.$$

მაგალითი 166. ვერტიკალური OO_1 ლილვის ბოლოსთან სახსრით,

შეერთებულია ჰორიზონტალური OC ღერო, რომელზეც თავისუფლად ჩამოცმულია მასიური ცილინდრული საგორავი (რბია), OO_1 ლილვის ვერტიკალური z ღერძის გარშემო ბრუნვის დროს რბია დაგორავს. სრიალის გარეშე ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე, რომელზეც აწკობენ ფხვიერ მასალას (ნახ. 202, ა და ბ). განსაზღვრეთ გიროსკოპული რეაქციები O და A წერტილებში, აგრეთვე ძაბვა OC ღეროში, თუ მოცემულია რბიას P წონა, $OC=l$ სიგრძე, რბიას R რადიუსი და ლილვის კუთხური სიჩქარე $\omega = \text{const.}$;

ამოხსნა. OC ღერძის გარშემო რბიას საკუთრივი ბრუნვის, კუთხური სიჩქარე აღენიშნათ ω_1 -ით. რადაგანაც რბიას გორვა ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე ხდება სრიალის გარეშე, A წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლია; ამიტომ რბიას ბრუნვის მყისი ღერძი გადის O და A წერტილებზე, ხოლო მისი აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე $\vec{\omega}$ მიმართულია OA წრფის გასწვრივ, ამასთანავე $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}$.

თუ ავაგებთ კუთხური სიჩქარის პარალელოგრამს, მსგავსი OAC და Oac სამკუთხედებიდან გვაქვს $\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{AC}{OC} = \frac{R}{l}$, საიდანაც $\omega_1 = \omega \frac{l}{R}$.

ახლა (224) ფორმულით ვპოულობთ გიროსკოპულ მომენტს:

$$M_\delta = I_y \omega_1 \omega.$$

თუ რბიას განვიხილავთ, როგორც ერთგვაროვან ცილინდრს, გვაქვს

$$I_y = \frac{PR^2}{2g}$$

და, მაშასადამე,

$$M_\delta = \frac{PR^2}{2g} \cdot \omega^2 \cdot \frac{l}{R} = \frac{PR\omega^2 l}{2g}.$$

გიროსკოპული \vec{Z}_0 და \vec{Z}_A რეაქციები O და A წერტილებში ქმნიან წყვილძალას, რომლის მომენტია M_δ და (224') ფორმულის თანახმად მიმართულია x ღერძის გასწვრივ, როგორც მითითებულია 202, ა ნახაზზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ, პირველ ყოვლისა, \vec{Z}_A და \vec{Z}_0 -ს აქვთ 202, ა ნახაზზე მითითებული მიმართულება და მეორე,

$$Z_A = Z_0 = \frac{M_\delta}{l} = \frac{PR}{2g} \omega^2.$$

მაშასადამე, რბიას სრული წნევა ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე A წერტილში ტოლია ორი ძალის ჯამისა: P წონისა და გიროსკოპული წნევისა, რომელიც უდრის Z_A -ს, ე. ი.

ამოცანების კლასიფიკაცია

| ამოცანების ტიპები | | | | |
|--|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ამოცანები სისტემის კონტრუქციის გამოთვლაზე (ამოცანა 37. 1(981)) | ამოცანები, რომლებშიც აღმოჩენილია სტრუქტურული მომენტის შეზღუდვა (ამოცანები 37.49—37.57 982—289) | ამოცანები რომლებიც ეხებათ მყარი სხეულის ბრუნვის უძრავი ღერძის გარშემო | ამოცანები, რომლებიც ეხებიან გრებით რხევებს | ამოცანები გარსკობული რეაქციების გამოცანები (ამოცანები 40. 3(1029)—40. 8(1035), 40. 12(1039)). |
| 1 | სხეულზე მოდებული გარე ძალების ნაკრები. მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ. მუდმივი სილიდა (ამოცანები 37. 4(990)—37. 6 (992)). | სხეულზე მოდებული გარე ძალების ნაკრები მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ. დამოკიდებულია კუთხურ სინჯარზე (ამოცანები 37. 7 (993)—37. 14(999)). | თავისუფალი გრებით რხევა (ამოცანები 37. 15 (1014)—37. 18 (1017), 37. 25(1022), 37. 40 (1023)). | |
| 2 | სხეულზე მოდებული გარე ძალების ნაკრები მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ. დამოკიდებულია კუთხურ სინჯარზე (ამოცანები 37. 7 (993)—37. 14(999)). | სხეულზე მოდებული გარე ძალების ნაკრები მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ. დამოკიდებულია კუთხურ სინჯარზე (ამოცანები 37. 7 (993)—37. 14(999)). | მიღებული გრებით რხევა (ამოცანები 37. 20 (1019)—37. 21(1020),1025). | |
| 3 | სხეულზე მოდებული გარე ძალების ნაკრები მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ. დამოკიდებულია კუთხურ სინჯარზე (ამოცანები 37. 7 (993)—37. 14(999)). | სხეულზე მოდებული გარე ძალების ნაკრები მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ. დამოკიდებულია კუთხურ სინჯარზე (ამოცანები 37. 7 (993)—37. 14(999)). | მიღებული გრებით რხევა (ამოცანები 37. 24(1021), 37. 41(1024)). | |

$$P + \frac{PR}{2g}\omega^2 = P\left(1 + \frac{R\omega^2}{2g}\right).$$

რბიას სიმძიმის C ცენტრის ცენტრისკენული აჩქარება მიმართულია y ღერძის გასწვრივ C -დან O -კენ და მოდულით უდრის $w_c = l\omega^2$. ამიტომ, თუ გამოვიყენებთ თეორემას სისტემის სიმძიმის ცენტრის მოძრაობის შესახებ, მივიღებთ

$$\frac{P}{g}w_{cy} = Y_0,$$

სადაც Y_0 — O წერტილის რეაქციაა y ღერძის მიმართულებით. აქედან

$$Y_0 = \frac{P}{g}l\omega^2.$$

გამჭიმავი ძალვა OC ღეროში, ცხადია, ტოლია ამ Y_0 რეაქციისა.

§ 3. თეორემა სისხამის კინეტიკური ენერჯიის ცვლილების შესახებ

სისტემის კინეტიკური ენერჯია, ანუ ცოცხალი ძალა ეწოდება, ამ სისტემის ყველა ნივთიერი წერტილის ცოცხალი ძალის ჯამს, ე. ი.

$$T = \sum \frac{mv^2}{2} \quad (225)$$

სადაც T — სისტემის კინეტიკური ენერჯიაა, ხოლო m და v იმ ნივთიერი წერტილის მასა და სიჩქარე, რომელიც მოცემულ სისტემას ეკუთვნის.

თეორემა სისტემის კინეტიკური ენერჯიის ცვლილების შესახებ შეიძლება გამოვსახოთ სამი სახით

$$1) dT = \sum dA, \quad (226)$$

ე. ი. სისტემის კინეტიკური ენერჯიის დიფერენციალი უდრის ამ სისტემაზე მოქმედ ყველა გარე და შიგა ძალის ელემენტარულ მუშაობათა ჯამს:

$$2) \frac{dT}{dt} = \sum N, \quad (227)$$

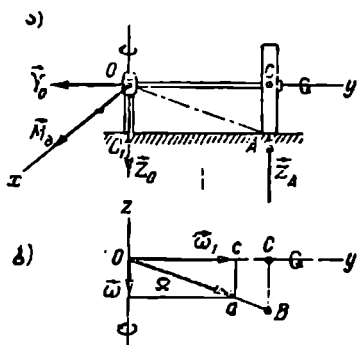
ე. ი. სისტემის კინეტიკური ენერჯიის წარმოებულ დროით უდრის ამ სისტემაზე მოქმედი ყველა გარე და შიგა ძალის სიმძლავრეს;

$$3) T - T_0 = \sum A, \quad (228)$$

ე. ი. სისტემის ერთიადგილიდან მეორეზე გადა-

ადგილების დროს მისი კინეტიკური ენერჯი-
ურის ამ სისტემაზე მოქმედ ყველა გარე და შიგ
ძალის მუშაობათა ჯამს ამ გადაადგილებზე.

(226) ტოლობა სისტემის კინეტიკური ენერჯიის ცვლილების თე-
ორემას გამოსახავს დიფერენციალური ფორმით, ხოლო (228) ტოლობა
იმვე თეორემას გამოსახავს სასრული ფორმით. (227) ტოლობა გამო-
სახავს თეორემას სისტემის კინეტიკურ ენერჯიასა და ამ სისტემაზე
მოქმედი ძალების სიმძლავრეს შორის დამოკიდებულების შესახებ.
მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ მხოლოდ იმ შემთხვევაში, რო-
ცა გვაქვს უცვლელი სისტემა (აბსოლუტურად მყარი სხეული), სის-
ტემის ნებისმიერი გადაადგილების დროს ყველა შიგა ძალის მუშაო-
ბის ჯამი ნულის ტოლია.



ნახ. 203.

ამიტომ მხოლოდ ამ შემთხვე-
ვაში სისტემის კინეტიკური ენერ-
ჯიის ცვლილების შესახებ თეო-
რემის გამოყენების დროს შიგა
ძალები არ მონაწილეობენ.

ხახუნის გარეშე სტაციონარუ-
ლი ბმების შემთხვევაში ბმების
რეაქციები არავითარ მუშაობას
არ ასრულებენ (რეაქციების მუ-
შაობათა ჯამი სისტემის გადაად-
გილების დროს ნულის ტოლია).
ამიტომ, ამ შემთხვევაში ბმის რე-
აქციები არ შედიან არც ერთ
(226)—(228) ტოლობაში.

მოცემულ სისტემაზე მოქმედი ძალების მუშაობის და სიმძლავრის
გამოანგარიშების დროს საჭიროა ვისარგებლოთ III თავის მე-3 პა-
რაგრაფში მოყვანილი ფორმულებითა და მითითებებით.

ამოცანები, რომლებიც ამ პარაგრაფს ეკუთვნის, შეიძლება გავ-
ყოთ შემდეგ ორ ძირითად ტიპად:

I. ამოცანები სისტემის კინეტიკური ენერჯიის გამოთვლაზე.

II. ამოცანები ერთი სხეულის ან რამდენიმე სხეულისაგან შედგე-
ნილი სისტემის კინეტიკური ენერჯიის ცვლილების თეორემის გამო-
ყენებაზე.

I ტიპის ამოცანები

ამ ტიპის ამოცანების ამოხსნის დროს მხედველობაში უნდა ვი-
ქონიოთ შემდეგი:

ა) თუ სხეული, რომელიც მოცემულ სისტემას ეკუთვნის, მოძ-
რაობს გადატანით, მაშინ მისი კინეტიკური ენერჯია

$$T = M \frac{v_c^2}{2}, \quad (229)$$

სადაც M არის სხეულის მასა, ხოლო v_c — მისი სიმძიმის ცენტრის სიჩქარე (ან მისი ნებისმიერი სხვა წერტილის სიჩქარე, რადგანაც სხეულის გადატანითი მოძრაობის დროს მისი ყველა წერტილის სიჩქარე ტოლია);

ბ) თუ სხეული ბრუნავს მოცემული ღერძის გარშემო, მაშინ მისი კინეტიკური ენერჯია გამოითვლება ფორმულით

$$T = I \frac{\omega^2}{2}, \quad (230)$$

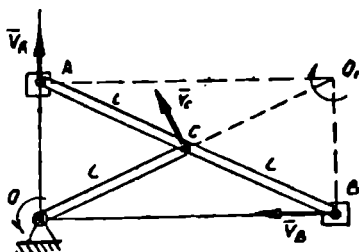
სადაც I არის სხეულის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ, ω — მისი კუთხური სიჩქარე;

გ) თუ სისტემაში შემავალი სხეული ასრულებს ბრტყელპარალელურ მოძრაობას, ამ შემთხვევაში მისი კინეტიკური ენერჯია გამოითვლება ფორმულით

$$T = M \frac{v_c^2}{2} + I_c \frac{\omega^2}{2}, \quad (231)$$

სადაც M არის სხეულის მასა, v_c — სხეულის სიმძიმის ცენტრის სიჩქარე, ω — მისი კუთხური სიჩქარე. I_c — სხეულის ინერციის მომენტი იმ ღერძის მიმართ, რომელიც სხეულის სიმძიმის ცენტრზე გადის და პერპენდიკულარულია უძრავი სიბრტყისა, რომლის პარალელურადაც ეს სხეული გადაადგილდება (ამოცანები 38. 6 (1045); 38. 7 (1046)).

მაგალითი 167. გამოთვალეთ იმ ელიფსოგრაფის მექანიზმის კინეტიკური ენერჯია, რომელიც შედგება უძრავი O ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით მბრუნავი P წონის OC მრუდმხარასაგან, რომელსაც მოძრაობაში მოჰყავს A და B ცოციის მქონე AB სახაზავი, ამასთანავე $OC = AC = CB = L$.



ნახ. 203.

სახაზავის წონა უდრის $2P$ -ს, ხოლო A და B ცოციების წონა ტოლია $Q_1 = Q_2 = Q$ (ნახ. 203).

ამოხსნა. რადგანაც მოცემული სისტემა შედგება ოთხი სხეულისაგან, ამიტომ (225) ფორმულების თანახმად მისი კინეტიკური ენერჯია

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

სადაც T_1 არის მრუდმხარას კინეტიკური ენერგია, T_2 — AB სახაზავის კინეტიკური ენერგია, ხოლო T_3 და T_4 აღნიშნავენ შესაბამისად A და B ცოციების კინეტიკურ ენერგიას. მრუდმხარას კინეტიკურ ენერგიას ვპოულობთ (230) ფორმულით

$$T_1 = I_0 \frac{\omega^2}{2} = \frac{Pl}{3g} \cdot \frac{\omega^2}{2} = \frac{Pl^2}{6g} \omega^2.$$

ვინაიდან AB სახაზავის მოძრაობა არის ბრტყელპარალელური, ამიტომ (231) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$T_2 = \frac{2P}{g} \cdot \frac{v_c^2}{2} + I_c \cdot \frac{\omega_1^2}{2},$$

$$\text{სადაც } v_c = l\omega \text{ და } I_c = \frac{2P}{g} \cdot \frac{(2l)^2}{12} = \frac{2P}{3g} l^2.$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ სახაზავის ω_1 კუთხური სიჩქარე, საჭიროა ავაგოთ ბრუნვის მყისი O_1 ცენტრი, მაშინ

$$\omega_1 = \frac{v_c}{CO_1} = \frac{l\omega}{l} = \omega$$

და, მაშასადამე,

$$T_2 = \frac{2P}{3g} l^2 \cdot \frac{\omega^2}{2} + \frac{2P}{g} \frac{l^2 \omega^2}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Pl^2 \omega^2}{g}.$$

ახლა ვპოულობთ A და B წერტილების სიჩქარეებს:

$$v_A = O_1 A \cdot \omega_1 = O_1 A \cdot \omega$$

და

$$v_B = O_1 B \cdot \omega_1 = O_1 B \cdot \omega.$$

აქედან (229) ფორმულით ვპოულობთ:

$$T_3 = \frac{Q}{g} \cdot \frac{v_A^2}{2} = \frac{Q}{2g} \cdot O_1 A^2 \cdot \omega^2,$$

$$T_4 = \frac{Q}{g} \cdot \frac{v_B^2}{2} = \frac{Q}{2g} \cdot O_1 B^2 \cdot \omega^2$$

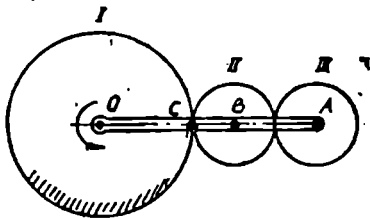
და, მაშასადამე,

$$\begin{aligned} T_3 + T_4 &= \frac{Q}{2g} \omega^2 (O_1 A^2 + O_1 B^2) = \frac{Q}{2g} \omega^2 \cdot AB^2 = \\ &= \frac{Q \cdot 4l^2}{2g} \omega^2 = \frac{2Q}{g} \cdot l^2 \omega^2. \end{aligned}$$

ამგვარად,

$$T = \frac{Pl^2\omega^2}{6g} + \frac{4Pl^2\omega^2}{3g} + \frac{2Ql\omega^2}{g} = \frac{l^2\omega^2}{2g}(3P + 4Q).$$

მაგალითი 168. პლანეტური მექანიზმი, რომელიც ღერძით აერთებს I, II და III კბილანა ბორბლებს, მოძრაობაში მოდის OA მრუდმხარაით, r_1 -რადიუსიანი I ბორბალი უძრავია; მრუდმხარა ბრუნავს უძრავი O ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით. II და III ბორბლებიდან თითოეულის რადიუსი უდრის r -ს, ხოლო თითოეულის წონაა P , მრუდმხარას წონა კი უდრის Q -ს, გამოთვალეთ მექანიზმის კინეტიკური ენერგია, თუ ჩავთვლით, რომ ბორბლები ერთგვაროვანი დისკოებია, ხოლო მრუდმხარა — ერთგვაროვანი თხელი ღეროა, როცა $r_1 = 2r$ (ნახ. 204).



ნახ. 204.

ამოხსნა. მოცემული სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

სადაც T_1 , T_2 , T_3 — შესაბამისად აღნიშნავენ მრუდმხარასა და II და III ბორბლების კინეტიკურ ენერგიას. (230) ფორმულიდან ვპოულობთ

$$T_1 = \frac{l_0\omega^2}{2} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{OA^2}{3} \cdot \frac{\omega^2}{2} = \frac{25Q}{6g} r^2\omega^2.$$

II და III ბორბლების კინეტიკურ ენერგიას ვითვლით (231) ფორმულით

$$T_2 = \frac{P}{g} \frac{v_B^2}{2} + \frac{I_B\omega_2^2}{2};$$

$$T_3 = \frac{P}{g} \cdot \frac{v_A^2}{2} + \frac{I_A\omega_3^2}{2},$$

სადაც I_B და I_A — II და III ბორბლის ინერციის მომენტია შესაბამისად B და A წერტილებზე გამავალი და ნახაზის სიბრტყისადმი მართობი ღერძების მიმართ, ხოლო ω_2 და ω_3 — ამ ბორბლების აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე, რადგანაც A და B წერტილები ეკუთვნიან მრუდმხარას, ამიტომ

$$v_A = OA\omega = 5r\omega \text{ და } v_B = OB \cdot \omega = 3r\omega.$$

გარდა ამისა,

$$I_A = \frac{P}{2g} r^2 \quad \text{და} \quad I_B = \frac{P}{2g} r^2.$$

რადგან I ბორბალი უძრავია, ამიტომ II ბორბალზე მდებარე C წერტილის სიჩქარე უდრის ნულს, ე. ი. C წერტილი II ბორბლისათვის წარმოადგენს ბრუნვის მყის ცენტრს.

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$v_B = CB \cdot \omega_2 = r\omega_2 \quad \text{და} \quad \omega_2 = \frac{v_B}{r} = \frac{3r\omega}{r} = 3\omega.$$

ბრუნვის პარალელური ღერძების შემთხვევაში კუთხურ სიჩქარე-თა შეკრების თეორემის თანახმად II ბორბლის ფარდობითი კუთხური სიჩქარე (მრულმხარას მიმართ)

$$\omega_2' = \omega_2 - \omega = 3\omega - \omega = 2\omega.$$

ვინაიდან II და III ბორბლებს რადიუსები ტოლი აქვთ და იმყოფებიან გარე მოღებაში, ამიტომ მათი ფარდობითი კუთხური სიჩქარეები სიდიდით ტოლია და ნიშნით საწინააღმდეგო, ე. ი.

$$\omega_3' = -\omega_2' = -2\omega.$$

ამიტომ, იმავე თეორემის თანახმად, III ბორბლის აბსოლუტური კუთხური სიჩქარე

$$\omega_3 = \omega_3' + \omega = -\omega.$$

მაშასადამე,

$$T_2 = \frac{P}{2g} 9r^2\omega^2 + \frac{Pr^2}{2g} \cdot \frac{9\omega^2}{2} = \frac{27}{4g} r^2\omega^2,$$

$$T_3 = \frac{P}{2g} \cdot 25r^2\omega^2 + \frac{Pr^2}{2g} \cdot \frac{\omega^2}{2} = \frac{51P}{4g} \cdot r^2\omega^2$$

და

$$\begin{aligned} T &= \frac{25Q}{6g} r^2\omega^2 + \frac{27}{4g} Pr^2\omega^2 + \frac{51}{4g} Pr^2\omega^2 = \\ &= \frac{25Q}{6g} r^2\omega^2 + \frac{39P}{2g} r^2\omega^2 = \frac{25Q + 117P}{6g} r^2\omega^2. \end{aligned}$$

II ტიპის ამოცანები

ამ ტიპის ამოცანები შეიძლება დავეყოთ შემდეგ სამ ჯგუფად:

1. ამოცანები, რომლებიც ამოიხსნება (228) განტოლების დახმარებით, ე. ი. სასრული ფორმის კინეტიკური ენერჯიის ცვლილების თეორემის საფუძველზე.

(228) განტოლება უნდა გამოვიყენოთ იმ შემთხვევაში, როცა სისტემაზე მოქმედი მოცემული ძალები ან მუდმივია (მოდულით და მიმართულებით), ან მათთვის არსებობს ძალთა ფუნქცია, ხოლო ამოცანაში ცნობილი და საძიებელი მექანიკური სიდიდეები, ამ ძალების გარდა, მხოლოდ მოცემულ სისტემაში შემავალი სხეულის სიჩქარეებია (წრფივი ან კუთხური) და გადაადგილებები (გადატანითი ან კუთხური);

2. ამოცანები, რომლებიც ამოიხსნება (226) განტოლების საფუძველზე, ე. ი. დიფერენციალური ფორმის კინეტიკური ენერჯის ცვლილების თეორემის საფუძველზე.

(226) განტოლება უნდა გამოვიყენოთ იმ შემთხვევაში, როცა სისტემაზე მოქმედი მოცემული ცვლადი ძალები (ან ძალა) დამოკიდებულია სიჩქარეზე, ხოლო ამოცანაში ცნობილი და საძიებელი მექანიკური სიდიდეები იგივეა, რაც წინა შემთხვევაში.

ამ შემთხვევაში (226) განტოლების ინტეგრირების დროს საჭიროა, პირველ ყოვლისა, მოვახდინოთ ცვლათა განცალკევება.

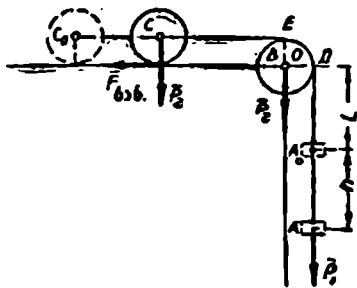
3. ამოცანები, რომლებიც ამოიხსნებიან (227) განტოლების დახმარებით, ე. ი. სისტემის კინეტიკურ ენერჯიასა და ამ სისტემაზე მოქმედი ძალების სიმძლავრეს შორის დამოკიდებულების თეორემის საფუძველზე. (227) განტოლება უნდა გამოვიყენოთ იმ შემთხვევაში, როცა საჭიროა ვიპოვოთ (ან პირიქით, მოცემულია) სხეულის აჩქარება — წრფივი (სხეულის გადატანითი მოძრაობის დროს) ან კუთხური (ბრუნვითი მოძრაობის დროს).

პ ი რ ვ ე ლ ი ჯ გ უ ფ ი

მაგალითი 160. P_1 წონის A ტვირთი დაკიდებულია Q წონის და L სიგრძის ერთგვაროვან უჭიმარ ბაგირზე.

ბაგირი გადაკიდებულია ნაწახის სიბრტყისადმი მართობულ O ღერძის გარშემო მბრუნავ B ბლოკზე.

ბაგირის მეორე ბოლო მიმაგრებულია C საგორავის ღერძზე, რომელიც უსრიალოდ გორავს უძრავ პორიზონტალურ სიბრტყეზე. B ბლოკი და C საგორავი ერთგვაროვანი წრიული ცილინდრებია თითოეული r რადიუსით და P_2 წონით. C საგორავის გორვის ხახუნის კოეფიციენტი პორიზონტალურ სიბრტყესთან უდრის f_k -ს. საწყის მომენტში, რო-



ნახ. 205.

ცა სისტემა იმყოფებოდა წონასწორობაში, B ბლკიდან გადმოშვე-
რილი იყო თოკის l სიგრძის ნაწილი. განსაზღვრეთ A ტვირთის სიჩქა-
რე მის ვერტიკალურ h გადაადგილებაზე დამოკიდებულებით (ნახ.
205).

ამოხსნა. რადგანაც მოცემულ ამოცანაში ცნობილი სიდიდეებია
ტვირთის h გადაადგილება და მუდმივი \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{Q} ძალები, ხოლო
შთხვნილია ტვირთის v სიჩქარის განსაზღვრა, ამიტომ საჭიროა გა-
მოვიყენოთ (228) განტოლება, რომელიც გამოსახავს თეორემას კი-
ნეტიკური ენერჯიის ცვლილების შესახებ სასრული სახით

$$T - T_0 = \Sigma A.$$

მოცემული სისტემის კინეტიკური ენერჯია

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

სადაც T_1 , T_2 , T_3 , T_4 — შესაბამისად აღნიშნავენ A ტვირთის, B ბლო-
კის, C საგორავის და ბაგირის კინეტიკურ ენერჯიას. რადგანაც ბაგირის
ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე უდრის ტვირთის v სიჩქარეს, რომე-
ლიც გადატანით მოძრაობს, ამიტომ (229) ფორმულით ვპოულობთ:

$$T_1 = \frac{P_1}{g} \frac{v^2}{2}, \quad T_4 = \frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{2}.$$

მბრუნავი ბლოკის კინეტიკურ ენერჯიას ვპოულობთ (230). ფორ-
მულით

$$T_2 = \frac{I_0 \omega^2}{2}, \text{ სადაც } I_0 = \frac{P_2 r^2}{2g} \text{ და } \omega = \frac{v}{r} \text{ (ბლოკის კუთხური}$$

სიჩქარეა); მაშასადამე, $T_2 = \frac{P_2 v^2}{4g}$.

რადგანაც C საგორავის მოძრაობა ბრტყელპარალელურია, ამიტომ
(231) ფორმულით გვაქვს $T_3 = \frac{P_2}{g} \cdot \frac{v_c^2}{2} + I_c \cdot \frac{\omega_1^2}{2}$,

სადაც $I_c = \frac{P_2 r^2}{2g}$, ხოლო ω_1 არის საგორავის კუთხური სიჩქარე.

რადგანაც საგორავი სრიალის გარეშე გორავს, ამიტომ უძრავ სიბ-
რტყესთან მისი შეხების წერტილის სიჩქარე უდრის ნულს, ე. ი. ეს წე-
რტილი წარმოადგენს საგორავის ბრუნვის მყის ცენტრს.

აქედან გამოძინარეობს, რომ $v_c = r\omega_1$, ამიტომ

$$T_3 = \frac{P_2}{2g} \cdot v_c^2 + \frac{P_2}{4g} \cdot v_c^2 = \frac{3P_2 v_c^2}{4g} = \frac{3}{4} \frac{P_2}{g} \cdot v^2.$$

მაშასადამე,

$$T = \frac{P_1}{2g} v^2 + \frac{Q}{2g} v^2 + \frac{P_2}{4g} v^2 + \frac{3P_2}{4g} v^2 = \frac{v^2}{2g} (P_1 + Q + 2P_2).$$

საწყის მომენტში სისტემა უძრავ მდგომარეობაში იყო, ამიტომაც $T_0 = 0$.

ახლა გამოვთვალოთ მოცემულ სისტემაზე მოდებული ყველა ძალის მიერ A ტიერტის h მანძილზე გადაადგილებისას შესრულებული მუშაობათა ჯამი.

ცხადია, \vec{P}_1 ძალის მუშაობა უდრის $A_1 = P_1 \cdot h$. ყოველი \vec{P}_2 ძალის მუშაობა უდრის ნულს, რადგანაც O წერტილი უძრავია, ხოლო C წერტილი გადაადგილდება პორიზონტალურად. გორვის ხახუნის წყვილძალის მომენტი უდრის $f_k P_2$ -ს, ხოლო ამ წყვილძალის მუშაობა, III თავის მე-3 პარაგრაფში ნათქვამის თანახმად, ტოლი იქნება წყვილძალის მომენტის ნამრავლისა საგორავის მობრუნების φ კუთხეზე, აღებული მინუს ნიშნით, რადგანაც გორვის ხახუნის წყვილძალის მომენტის მიმართულება საგორავის ბრუნვის საწინააღმდეგოდაა მიმართული, მაშასადამე,

$$A_k = -f_k \cdot P_2 \cdot \varphi.$$

რადგანაც საგორავის ω_1 კუთხური სიჩქარე ტოლია B ბლოკის ω კუთხური სიჩქარისა, ამიტომ საგორავის მობრუნების φ კუთხე უდრის ბლოკის მობრუნების კუთხეს, ე. ი. $\varphi = \frac{h}{r}$, ამიტომ

$$A_k = -f_k P_2 \frac{h}{r}.$$

საგორავის უსრიალოდ გორვის შემთხვევაში, სრიალის ხახუნის $\vec{F}_{ახ}$ ძალის მუშაობა ნულის ტოლი იქნება, რადგანაც ამ ძალის მოდების წერტილის სიჩქარე უდრის ნულს.

რადგან III თავის მე-3 პარაგრაფში აღნიშნულის თანახმად სიმძიმის ძალის მუშაობა უდრის სხეულის წონის ნამრავლს მისი სიმძიმის ცენტრის ვერტიკალურ გადაადგილებაზე, თანაც თუ შევადარებთ ბაგირის საწყის $C_0 E D A_0$ მდებარეობას, მის საბოლოო $C E D A$ მდებარეობასთან, ადვილად შევამჩნევთ, რომ ბაგირის წონის A_2 მუშაობა

ტოლია მისი $C_0 C = h$ ნაწილის წონის (რომელიც უდრის $\frac{Q}{L} h$ -ს) ნამრავლს ამ $C_0 C$ ნაწილის და ბაგირის $A_0 A$ ნაწილის სიმძიმის ცენტრთა

სიმაღლეების სხვაობაზე, ე. ი. $r + l + \frac{h}{2}$ -ზე. ამიტომ

$$A_2 = \frac{h}{L} \left(r + l + \frac{h}{2} \right) Q.$$

მაშასადამე,

$$\Sigma A = A_1 + A_2 + A_3 = P_1 h - f_k P_2 \frac{h}{r} + \frac{h}{L} \left(r + l + \frac{h}{2} \right) Q.$$

თუ მუშაობათა ჯამის და T კინეტიკური ენერჯიის ნაპოვნ მნიშვნელობებს (228) განტოლებაში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\frac{v^2}{2g} (P_1 + Q + 2P_2) = h \left[P_1 + \frac{Q}{L} \left(r + l + \frac{h}{2} \right) - \frac{f_k}{r} P_2 \right].$$

აქედან ვპოულობთ ტვირთის საძიებელ სიჩქარეს

$$v = \sqrt{\frac{2gh \left[P_1 + \frac{Q}{L} \left(r + l + \frac{h}{2} \right) - \frac{f_k}{r} P_2 \right]}{P_1 + Q + 2P_2}}.$$

მ ე ო რ ე ჯ გ უ ზ ი

მაგალითი 170. $ABCD$ მართკუთხა ფირფიტა, რომლის გვერდებია a და b , ხოლო წონა P , საწყისი ω_0 კუთხური სიჩქარით ბრუნავს ვერტიკალური z ღერძის გარშემო. ამასთანავე ფირფიტის ყოველი ელემენტი განიცდის ჰაერის წინააღმდეგობას, რომლის მიმართულეობაც ფირფიტის სიბრტყის მართობია, ხოლო სიდიდე პირდაპირპროპორციულია ელემენტის ფართობისა და მისი v სიჩქარის კვადრატისა; პროპორციულობის კოეფიციენტი უდრის μ -ს. რამდენ ბრუნს გააკეთებს ფირფიტა იმ მომენტამდე, სანამ მისი კუთხური სიჩქარე გახდება საწყისზე ორჯერ ნაკლები (ნახ. 206).

ამოხსნა. რადგანაც ფირფიტაზე მოდებული წინაღობის ძალები დამოკიდებულნი არიან სიჩქარეზე, ამიტომ ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა ვისარგებლოთ (226) განტოლებით

$$dT = \Sigma dA.$$

რადგანაც ფირფიტა ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო, ამიტომ მის კინეტიკურ ენერჯიას ვეძებთ (230) ფორმულით

$$T = I_z \frac{\omega^2}{2}, \text{ საიდანაც } dT = I_z \omega d\omega.$$

ცხადია, სიმძიმის \vec{P} ძალის მუშაობა ნულის ტოლია, რადგანაც ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის სიმაღლე არ შეცვლილა.

წინაღობის ძალების მიერ შესრულებულ მუშაობათა გამოსათვლე-

ლად გამოვიყენოთ მბრუნავ მყარ სხეულზე მოდებული ძალების მუშაობის ფორმულა (იხ. თავი III, §3)

$$\Sigma dA = M_z d\varphi,$$

სადაც M_z არის სხეულზე მოდებული ყველა ძალის მომენტების ჯამი ბრუნვის ღერძის მიმართ, ხოლო $d\varphi$ — სხეულის მობრუნების ელემენტარული კუთხე. M_z -ის გამოსათვლელად ფირფიტა დავყოთ ელემენტარულ მართკუთხედებად, რომლის გვერდები იქნებიან b და dx . მაშინ ასეთ მართკუთხედზე მოდებული წინაღობის ძალა

$$dF = \mu s^2 b dx = \mu b (\omega x)^2 dx$$

და

$$\text{მომ}_z(dF) = -x dF = -\mu b \omega^2 x^3 dx;$$

მაშასადამე,

$$M_z = \Sigma \text{მომ}_z(dF), \text{ ანუ } M_z = -\mu b \omega^2 \int_0^a x^3 dx = -\frac{1}{4} \mu b a^4 \omega^2$$

და

$$\Sigma dA = -\frac{1}{4} \mu b a^4 \omega^2 d\varphi.$$

მაშასადამე, (226) განტოლება მიიღებს სახეს

$$I_z \omega d\omega = -\frac{1}{4} \mu b a^4 \omega^2 d\varphi,$$

ანუ

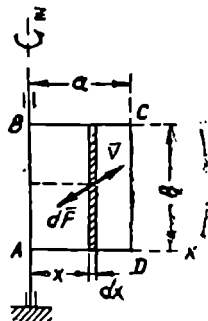
$$I_z d\omega = -\frac{1}{4} \mu b a^4 \omega d\varphi.$$

ცვლადთა განცალკევებით მივიღებთ

$$I_z \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{1}{4} \mu b a^4 d\varphi.$$

აქედან ინტეგრირებით გვექნება

$$I_z \int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\mu b a^4}{4} \varphi, \text{ ანუ } I_z \left[\ln \omega \right]_{\frac{\omega_0}{2}}^{\omega_0} = \frac{\mu b a^4}{4} \varphi,$$



ნახ. 206.

საიდანაც ვპოულობთ ფირფიტის მობრუნების კუთხეს $\varphi = \frac{4I_z \ln 2}{\mu b a^4}$

თუ მხედველობაში მივიღებთ $ABCD$ ფირფიტის ზემომოთითებულ დაყოფას ელემენტარულ მართკუთხედებად, მაშინ ფირფიტის ინერციის I_z მომენტი ასე წარმოიდგინება

$$I_z = \sum m x^2,$$

სადაც m — ელემენტარული (დაშტრიხული) მართკუთხედის მასაა. თუ ფირფიტის მასას აღვნიშნავთ M -ით, მაშინ ფართობის ერთეულზე მოსული მასა იქნება $\frac{M}{ab}$, ამიტომ

$$m = \frac{M}{ab} \cdot b dx = \frac{M}{a} dx$$

და

$$I_z = \int_0^a \frac{M}{a} x^2 dx = \frac{M}{a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{M a^2}{3} = \frac{P}{3g} a^2.$$

მაშასადამე,

$$\varphi = \frac{4P \ln 2}{3g \mu b a^2}.$$

თუ ამ φ კუთხეს გავყოფთ 2π -ზე, მივიღებთ ფირფიტის ბრუნთა საძიებელ რიცხვს, რომელიც უდრის $\frac{2P \ln 2}{3\pi g \mu b a^2}$.

მ ე ს ა მ ე ჯ გ უ ფ ი

მაგალითი 171. მართკუთხა ფირფიტას, a და b გვერდებით, შეუძლია ხახუნის გარეშე ბრუნვა ვერტიკალური AB ღერძის გარშემო, რომელიც გადის მის შუაში და b გვერდის პარალელურია. ღერძის ბოლოზე ჩამოცმულია r -რადიუსიანი C ბორბალი, რომელზედაც დახვეულია დრეკადი უჭიმარი ძაფი; ძაფის მეორე ბოლო გადაკიდებულია D ბლოკზე და მასზე მიბმულია P წონის ტვირთი, რომელიც აბრუნებს ფირფიტას.

ბორბლის და ბლოკის მასა უგულებელვყოთ და ვიპოვოთ ტვირთის აჩქარება, თუ ფირფიტის წონა უდრის Q -ს და მოძრაობას არავითარი წინააღმდეგობა არა აქვს (ნახ. 207).

ამოხსნა. რადგანაც მოთხოვნილია ტვირთის აჩქარების განსაზ-

ღერა, ამიტომ ამ ამოცანის ამოსახსნელად ვისარგებლოთ (227) განტოლებით

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma N.$$

მოცემული სისტემის კინეტიკური ენერგია, რომელიც შედგება უძრავი Z ღერძის გარშემო მბრუნავი ფირფიტისა და გადატანით მოძრავი ტვირთისაგან, უდრის

$$T = I_z \frac{\omega^2}{2} + \frac{P}{2g} v^2,$$

სადაც I_z არის ფირფიტის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ, ω — მისი კუთხური სიჩქარე და v — ტვირთის სიჩქარე. რადგანაც ძაფი უკიმარია, ამიტომ ტვირთის სიჩქარე უდრის ლილვის წრიულ სიჩქარეს, ე. ი. $v = r\omega$ და, მაშასადამე,

$$T = I_z \frac{v^2}{2r^2} + \frac{P}{2g} v^2.$$

მართკუთხა ფირფიტის ინერციის მომენტის ცოდნისას მისი b -ს ტოლი გვერდის მიმართ, რომელიც წინა მაგალითშია ნაპოვნი, თუ გამოვიყენებთ ორი პარალელური ღერძის მიმართ ინერციის მომენტების თეორემას, გვექნება

$$\frac{Q}{g} \cdot \frac{a^2}{3} = I_z + \frac{Q}{g} \cdot \frac{a^2}{4},$$

საიდანაც

$$I_z = \frac{Qa^2}{12g},$$

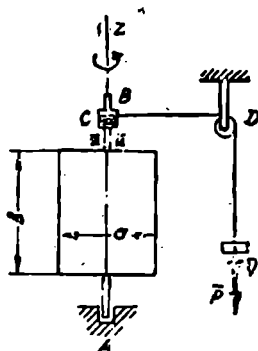
ამიტომ

$$T = \frac{Q}{g} \frac{v^2}{2r^2} \frac{a^2}{12} + \frac{Pv^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{Qa^2}{12r^2} + P \right)$$

და

$$\frac{dT}{dt} = \frac{v}{g} \left(\frac{Qa^2}{12r^2} + P \right) \frac{dv}{dt}.$$

ტვირთის გადაადგილების დროს მუშაობას შეასრულებს მხოლოდ \vec{P} ძალა (ტვირთის წონა), რადგანაც წინაღობას უგულებელვყოფთ.



ნახ. 207.

ვინაიდან \vec{P} ძალა და ტვირთის \vec{v} სიჩქარე მიმართულია ერთი წრფის გასწვრივ და ერთ მხარეს, ამიტომ სიმძლავრე განისაზღვრება (177) ფორმულით (იხ. თავი 111, § 3)

$$N = P v.$$

თუ სიმძლავრის და $\frac{dT}{dt}$ წარმოებულის ნაპოვნ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (227) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\frac{v}{g} \left(\frac{Qa^2}{12r^2} + P \right) \frac{dv}{dt} = P \cdot v,$$

აქედან

$$\omega = \frac{dv}{dt} = \frac{12r^2 P}{Qa^2 + 12r^2 P} \cdot g = \text{const.}$$

მაშასადამე, ტვირთის მოძრაობა თანაბარაჩქარებულია.

§ 4. კომპინირებული ამოცანები

ამ ამოცანებში მოგვიხდება ერთობლივად გამოვიყენოთ სისტემის დინამიკის ის ორი თეორემა, რომლებიც განხილულია წინა პარაგრაფში. მაგალითად, მოძრაობის რაოდენობის და სისტემის კინეტიკური მომენტის თეორემები ან კინეტიკური ენერჯიის ცვლილების და სისტემის მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემები.

მაგალითი 172. უძრავი O ღერძის გარშემო მბრუნავ საფეხურებიან P_3 წონის ლილვზე დახვეულია თოკი, რომლის ბოლოებზე მიბმულია P_1 და P_2 წონის A და B ტვირთი. დავუშვათ, რომ ამ სისტემაზე მოქმედებს მხოლოდ სიმძიმის ძალები და წინალობა უგულებელყოფილია; ვიპოვოთ ტვირთების აჩქარებანი და რეაქცია O წერტილში.

R და r რადიუსები და O ღერძის მიმართ ლილვის ინერციის რადიუსი r_0 ცნობილია (ნახ. 208).

ამოხსნა. რადგანაც ამ ამოცანაში მოითხოვება ტვირთის აჩქარების განსაზღვრა, ამიტომ გამოვიყენოთ (227) განტოლება, პირველად (229) და (230) ფორმულებით გამოვთვალოთ T კინეტიკური ენერჯია სისტემისა, რომელიც შედგება გადატანით მოძრავი ორი ტვირთისა და უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი ლილვისაგან

$$T = \frac{P_1}{2g} v_1^2 + \frac{P_2}{2g} v_2^2 + I_0 \frac{\omega^2}{2}.$$

სადაც v_1 და v_2 არის A და B ტვირთების სიჩქარეები, I_0 — ლილვის

ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ, ω — მისი კუთხური სიჩქარე, მაგრამ

$$v_1 = R\omega, \quad v_2 = r\omega, \quad I_0 = \frac{P_3}{g} r_{\text{წვ}}^2,$$

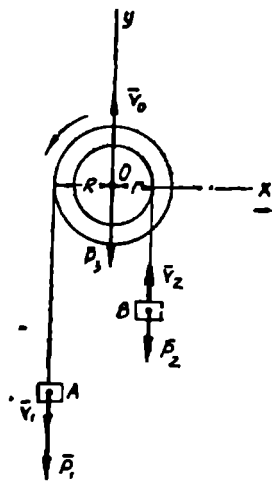
ამიტომაც

$$T = \frac{P_1}{2g} R^2 \omega^2 + \frac{P_2}{2g} r^2 \omega^2 + \frac{P_3}{2g} r_{\text{წვ}}^2 \omega^2 = \\ = \frac{\omega^2}{2g} (P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{\text{წვ}}^2),$$

აქედან

$$\frac{dT}{dt} = (P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{\text{წვ}}^2) \frac{\omega}{g} \epsilon,$$

სადაც $\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$ — ლილვის კუთხური აჩქარებაა.



ნახ. 208.

რადგანაც B ტვირთი აიწვევა, ხოლო A ტვირთი ეშვება, ამიტომ სისტემაზე მოქმედ ძალთა სიმძლავრე

$$N = P_1 v_1 - P_2 v_2 = (P_1 R - P_2 r) \omega.$$

მაშასადამე, (227) განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{\omega}{g} (P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{\text{წვ}}^2) \epsilon = \omega (P_1 R - P_2 r),$$

საიდანაც

$$\epsilon = \frac{P_1 R - P_2 r}{P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{\text{წვ}}^2} \cdot g.$$

ტვირთების საძიებელი აჩქარებანი იქნება

$$\omega_1 = R\epsilon = \frac{Rg(P_1 R - P_2 r)}{P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{\text{წვ}}^2} \quad \text{და} \quad \omega_2 = r\epsilon = \frac{rg(P_1 R - P_2 r)}{P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{\text{წვ}}^2}.$$

O წერტილში რეაქციის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ თეორემა სისტემის მოძრაობის ჩაოდნობის ($\vec{K} - s$) გეგმილებისა უძრავ ღერძებზე. (იხ. ამ თავის § 1). თუ კოორდინატა x და y ღერძებს ავირჩევთ ისე, როგორც ნახაზზეა, მაშინ ამ თეორემის საფუძველზე გვექნება:

$$\frac{dK_x}{dt} = \Sigma X^{(s)} = X_0; \quad \frac{dK_y}{dt} = \Sigma Y^{(s)} = Y_0 - P_1 - P_2 - P_3,$$

სადაც X_0 , Y_0 — საძიებელი რეაქციის გეგმილებია კოორდინატთა ღერძებზე. თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ A და B ტვირთების სიჩქარეები y ღერძის პარალელურია და ლილვის მოძრაობის რაოდენობა ნულს უდრის, რადგანაც მისი სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ბრუნვის ღერძზე, ვიპოვიტ

$$K_x = 0, \quad K_y = -\frac{P_1}{g} v_1 - \frac{P_2}{g} v_2.$$

ამ განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$X_0 = 0;$$

$$\begin{aligned} Y_0 = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{P_1}{g} \frac{dv_1}{dt} + \frac{P_2}{g} \frac{dv_2}{dt} &= P_1 + P_2 + P_3 - \frac{P_1}{g} \omega_1 + \frac{P_2}{g} \omega_2 = \\ &= P_1 + P_2 + P_3 - \frac{(P_1 R - P_2 r)^2}{P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{\text{სფ}}^2}. \end{aligned}$$

ლილვის კუთხური სიჩქარე შეიძლება გადავსაზღვრა აგრეთვე სისტემის კინეტიკური მომენტის თეორემითაც. თუ ამ თეორემას გამოვიყენებთ O ღერძის მიმართ, გვექნება

$$\frac{dL_0}{dt} = \Sigma m_0 \vec{r}^{(s)} \cdot \vec{F}^{(s)} = m_0 P_1 \vec{r}_1 + m_0 P_2 \vec{r}_2 = P_1 R - P_2 r, \quad (a)$$

(გარე \vec{P}_3 ძალისა და O წერტილის რეაქციის ძალის მომენტი ლილვის ბრუნვის ღერძის მიმართ, ცხადია, ნულის ტოლია). მოცემული სისტემის კინეტიკური L_0 მომენტი O ღერძის მიმართ უდრის ლილვისა და ორივე ტვირთის კინეტიკური მომენტების ჯამს იმავე ღერძის მიმართ. მაშასადამე,

$$\begin{aligned} L_0 = I_0 \omega + \frac{P_1}{g} R^2 \omega + \frac{P_2}{g} r^2 \omega &= \frac{P_3}{g} r_{\text{სფ}}^2 \omega + \frac{P_1}{g} R^2 \omega + \frac{P_2}{g} r^2 \omega = \\ &= (P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{\text{სფ}}^2) \cdot \frac{\omega}{g}. \end{aligned}$$

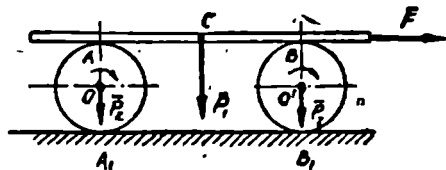
ამიტომ, (a) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{\text{სფ}}^2}{g} \cdot \frac{d\omega}{dt} = P_1 R - P_2 r;$$

აქედან

$$\frac{d\omega}{dt} = e = \frac{P_1 R - P_2 r}{P_1 R^2 + P_2 r^2 + P_3 r_{\text{სფ}}^2} \cdot g.$$

მაგალითი 178. P_1 წონის დაფა მდებარეობს ორ ცილინდრულ საგორავეზე, რომელთაგან თითოეულის რადიუსია r , ხოლო წონა P_2 . მთელი სისტემა მოძრაობს დაფაზე მოდებული მოცემული ჰორიზონტალური \vec{F} ძალის მოქმედებით. ამასთანავე ვუშვებთ, რომ საგორავეები უსასრულოდ გორავენ და დაფის სიჩქარე უდრის საგორავის სიჩქარეს A წერტილში. იპოვეთ დაფის აჩქარება და ხახუნის საერთო ძალა A და B წერტილებში (ნახ. 209).



ნახ. 209.

ამოხსნა. დაფის \vec{x} აჩქარების განსასაზღვრავად, ისევე როგორც წინა ამოცანაში, ვისარგებლოთ (227) განტოლებით

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma N.$$

რადგანაც დაფა მოძრაობს გადატანით, ხოლო საგორავეების მოძრაობა ბრტყელპარალელურია, ამიტომ მოცემული სისტემის კინეტიკურ ენერჯიას ვპოულობთ (229) და (231) ფორმულებით

$$T = \frac{P_1}{g} \frac{v^2}{2} + 2 \left[I_0 \frac{\omega^2}{2} + \frac{P_2}{g} \frac{v_0^2}{2} \right].$$

სადაც v არის დაფის სიჩქარე, v_0 — საგორავის სიმძიმის ცენტრის სიჩქარე, ω — საგორავის კუთხური სიჩქარე, ხოლო I_0 — მისი ინერციის მომენტი ნახაზის სიბრტყის მართობული O ღერძის მიმართ.

რადგანაც საგორავი უსრიალოდ გორავს, ამიტომ A_1 წერტილი არის მისი ბრუნვის მყისი ცენტრი. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$v_A = 2r\omega, \quad v_0 = r\omega \quad \text{და} \quad v_0 = \frac{v_A}{2} = \frac{v}{2}.$$

ამის გარდა,

$$I_0 = \frac{P_2}{2g} r^2,$$

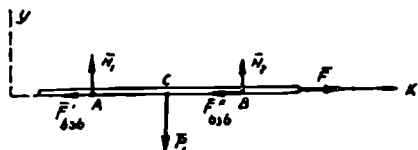
ამიტომ

$$T = \frac{P_1}{2g} v^2 + 2 \left[\frac{P_2}{2g} \frac{v^2}{4} + \frac{P_2}{4g} v^2 \right] = \frac{P_1 + \frac{3}{2}P_2}{2g} v^2.$$

აქედან

$$\frac{dT}{dt} = \left(P_1 + \frac{3}{2}P_2 \right) \cdot \frac{v}{g} \frac{dv}{dt} = \left(P_1 + \frac{3}{2}P_2 \right) v - g$$

რადგანაც \vec{P}_1 და \vec{P}_2 ძალები მართობულია მათი მოდების წერტილების სიჩქარეებისა, ხოლო საგორავსა და საყრდენ სიბრტყეს შორის ხახუნის ძალები მოდებულია A_1 და B_1 წერტილებში, რომელთა სიჩქარე ნულის ტოლია. ამიტომაც თითოეული ამ ძალის მუშაობა ნულის



ნახ. 210.

ტოლია. დაფასა და საგორავს შორის A და B წერტილებზე მოდებული ხახუნის შიგა ძალების მიერ შესრულებული მუშაობაც ნულის ტოლია, რადგანაც დაფა არ მისრიალებს საგორავეებზე,

ამიტომ მუშაობას ასრულებს მხოლოდ F ძალა. რომლის სიმძლავრე

$$N = F \cdot u.$$

მაშასადამე, (227) განტოლება იღებს სახეს

$$\left(P_1 + \frac{3}{4}P_2\right) \frac{v}{g} \omega = Fu,$$

საიდანაც

$$\omega = \frac{4gF}{4P_1 + 3P_2}.$$

რომ ეიპოვოთ დაფის A და B წერტილებზე მოდებული ხახუნის $\vec{F}'_{ახ}$ და $\vec{F}''_{ახ}$ ძალების ტოლქმედი $\vec{F}_{ახ}$, განვიხილოთ ცალკე დაფის მოძრაობა და შევადგინოთ მისი სიმძიმის C ცენტრის მოძრაობის განტოლებები:

$$\frac{P_1}{g} \omega_x = F - F_{ახ}, \quad \frac{P_1}{g} \omega_y = N_1 + N_2 - P_1,$$

სადაც N_1 და N_2 — დაფის A და B წერტილებში მოდებული საგორავის ნორმალური რეაქციებია (ნახ. 210).

მაგრამ $\omega_x = \omega$ და $\omega_y = 0$, ამიტომ

$$F_{ახ} = F - \frac{P_1}{g} \omega = F - \frac{4P_1 F}{4P_1 + 3P_2} = \frac{3P_2 F}{4P_1 + 3P_2}, \quad N_1 + N_2 = P_1.$$

თუ აღვნიშნავთ დაფასა და საგორავს შორის ხახუნის კოეფიციენტს f -ით, მაშინ $F'_{ახ} \leq fN_1$ და $F''_{ახ} \leq fN_2$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$F_{ახ} = F'_{ახ} + F''_{ახ} \leq f(N_1 + N_2),$$

ანუ

$$\frac{3P_2F}{4P_1+3P_2} \left\langle IP_1, \longleftrightarrow \text{მ. ი. } l \right\rangle \frac{3P_2F}{P_1(4P_1+3P_2)}$$

ასეთ პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს ხახუნის კოეფიციენტი, რათა დაფამ არ ისრიალოს საგორაეებზე.

ცხრილი 20

ამოცანების კლასიფიკაცია

| ჩბუფი | ამოცანების ტიპები | |
|-------|---|--|
| | 1 | 2 |
| 1 | ამოცანები კინეტიკური ენერჯიის გამოთვლაზე (ამოცანები 38.1 (1040)–38.9(1048)) | ამოცანები ერთი ან რამდენიმე სხეულისაგან შედგენილი სისტემის კინეტიკური ენერჯიის ცვლილების შესახებ თეორემის გამოყენებაზე. |
| 1-ელი | — | ამოცანები, რომლებიც ამოიხსნებიან სასრული სახით კინეტიკური ენერჯიის ცვლილების შესახებ თეორემის გამოყენებით (ამოცანები 38.13 (1053)–38.37(1074)) |
| მე-2 | — | ამოცანები, რომლებიც ამოიხსნებიან ზიფერენციალური სახით კინეტიკური ენერჯიის ცვლილების შესახებ თეორემის გამოყენებით |
| მე-3 | — | ამოცანები, რომლებიც ამოიხსნებიან სისტემის კინეტიკური ენერჯიისა და სისტემაზე მოქმედი ძალების სიმძლავრეს შორის დამოკიდებულების გამომსახველი თეორემის დახმარებით (ამოცანები 47,6 (932) — 47.9(934) 47.13 (940) — 47.15(942) (1091)) |

თ ა 3 0 v

დალაშგარის პრინციპი და შესაძლო გადა-
ადგილებების პრინციპი

§ 1. დალაშგარის პრინციპი ნიშთიარ წარტილთა სისტემისათვის

თუ მოძრავი სისტემის ყოველ ნივთიერ წერტილს მოედებთ ამ წერტილის ინერჯიის ძალას, მაშინ ყველა ეს ინერჯიის ძალა გააწონასწორებს განსახილველ სისტემაზე მოდებულ მოცემულ ძალებს და

ბმის რეაქციებს. სწორედ ამაში მდგომარეობს დალამბერის პრინციპი სისტემისათვის.

მაშასადამე, თუ n ნივთიერი წერტილისაგან შემდგარი მექანიკური სისტემის k -ურ წერტილზე მოდებულ მოცემულ ძალას აღვნიშნავთ \vec{F}_k -თი. იმავე წერტილზე მოდებული რეაქციის ძალას \vec{N}_k -თი და ამ წერტილის ინერციის ძალას $\vec{\Phi}_k$ -თი, მაშინ გვექნება:

$$\vec{F}_k + \vec{N}_k + \vec{\Phi}_k = 0, \quad (k=1,2,3,\dots,n), \quad (232)$$

ამასთანავე

$$\vec{\Phi}_k = -m_k \vec{a}_k, \quad (233)$$

ე. ი. ნივთიერი წერტილის ინერციის ძალა მოდებული უდრის ამ წერტილის მასისა და მისი აჩქარების ნამრავლს და მიმართულია ამ აჩქარების საწინააღმდეგოდ.

აქედან გამომდინარეობს, რომ მოცემული ძალების, ბმის რეაქციების და ინერციის ძალების სისტემა აკმაყოფილებს სტატიკის განტოლებებს, ე. ი. ნებისმიერ ღერძზე ყველა ამ ძალის გეგმილების ჯამი და მათი მომენტების ჯამი ნებისმიერი წერტილის ან ნებისმიერი ღერძის მიმართ ნულის ტოლია.

მაშასადამე, დალამბერის პრინციპი გვაძლევს სისტემის დინამიკის ამოცანის ამოხსნისათვის საჭირო განტოლების შედგენის ზოგად წესს; ამასთანავე ამ განტოლებებს აქვთ იგივე ფორმა, რაც სტატიკის განტოლებებს. ეს წესი განსაკუთრებით სასარგებლოა იმ ამოცანების ამოხსნის დროს, სადაც მოთხოვნილია ბმის დინამიკური რეაქციების განსაზღვრა, ე. ი. რეაქციები რომლებიც წარმოიშობიან სისტემის მოძრაობისას.

ამოცანები, რომლებიც ამ პარაგრაფს ეკუთვნიან, შეიძლება დავყოთ ორ ძირითად ტიპად

I. ამოცანები, რომლებშიც სისტემის ყველა სხეულზე მოდებული ძალები (მოცემული ძალები და ბმის რეაქციები) და მათი გამაწონასწორებელი ინერციის ძალები მდებარეობენ ერთ სიბრტყეში.

II. ამოცანები, რომლებშიც მოცემული ძალები, ბმის რეაქციები და მათი გამაწონასწორებელი ინერციის ძალები შეადგენდნენ სივრცით ძალთა სისტემას.

I ტიპის ამოცანები.

რადგანაც ამ ტიპის ამოცანებში გვაქვს წონასწორობაში მყოფი ძალთა ბრტყელი სისტემა (მოცემული ძალები, ბმის რეაქციები და ინერციის ძალები), ამიტომ გამოვიყენოთ ბრტყელი სტატიკის სამი

განტოლება: ორი განტოლება გეგმილებისა და ერთი განტოლება მომენტებისა.

კერძო შემთხვევაში ამ განტოლებებიდან გვაქვს მხოლოდ ორი განტოლება გეგმილებისა (თავმოყრილი ძალების შემთხვევაში), ან ერთი განტოლება გეგმილებისა და ერთი განტოლება მომენტებისა (პარალელური ძალების შემთხვევაში).

თუ ამოცანაში გვაქვს ერთი ან რამდენიმე სხეულისაგან შედგენილი სისტემა, მაშინ მოგვიხდება ამ სისტემის დანაწევრება და თითოეული სხეულისათვის ცალკე წონასწორობის განტოლებების შედგენა, ზუსტად ისევე, როგორც ამას ვაკეთებთ სტატიკაში.

I ტიპის ამოცანები შეიძლება დავეოთ სამ ჯგუფად:

პირველი ჯგუფი

ამ ჯგუფს მიეკუთვნება ამოცანები, რომლებშიც სისტემაში შემავალი სხეულები (ან ერთი სხეული) მუშაობენ გადატანით.

ამ ამოცანების დალამბერის პრინციპით ამოხსნისას მოძრავი სხეულის ყოველ ნივთიერ ნაწილაკში უნდა მოვდოთ ამ ნაწილაკის ინერციის ძალა. რადგანაც სხეულის გადატანითი მოძრაობის დროს მის ყოველ წერტილს აქვს ერთი და იგივე \vec{a} აჩქარება, ამიტომ ამ შემთხვევაში სხეულის ნივთიერი ნაწილაკების ინერციის ძალები იქნებიან ამ ნაწილაკების მასების პროპორციული, პარალელურები და მიმართულნი ერთ მხარეს (\vec{a} აჩქარების საწინააღმდეგოდ); ამიტომ ყველა ეს ინერციის ძალა მიიყვანება ერთ ტოლქმედ ძალამდე, რომელიც სხეულის სიმძიმის ცენტრშია მოდებული.

$$\vec{\Phi} = -\sum m \vec{a} = -\rho \sum m = -M \vec{a};$$

აქ M აღნიშნავს სხეულის მასას.

მაშასადამე, გადატანით მოძრავი სხეულის ინერციის ძალა მოდულით უდრის ამ სხეულის მასისა და მისი აჩქარების ნამრავლს, მიმართულია ამ აჩქარების საწინააღმდეგოდ და მოდებულია სხეულის სიმძიმის ცენტრში.

მას შემდეგ, რაც გადატანით მოძრავი ყოველი სხეულის სიმძიმის ცენტრში მოვდებთ ამ სხეულის ინერციის ძალას, დალამბერის პრინციპის თანახმად, მოცემული სისტემა იქნება წონასწორობაში. ამიტომ საჭიროა ამ სისტემისათვის შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები და მათი ამოხსნით ვიპოვოთ ის უცნობი სიდიდეები, რომლებიც საჭიროა განვსაზღვროთ მოცემულ ამოცანაში.

ჩვეულებრივად ამ ამოცანებში საძიებელი სიდიდეებია სხეულის აჩქარება და ბმის რეაქცია.

მაგალითი 174. უძრავი O ღერძის გარშემო მბრუნავ ბლოკზე გადაკიდებული უქიმარი თოკით შეერთებულია P და Q წონის ორი A და B ტვირთი, რომლებსაც შეუძლიათ სრიალი უძრავი პრიზმის წახნაგებზე, ამასთანავე ხახუნის კოეფიციენტი უდრის f -ს. იპოვეთ \vec{w} აჩქარება, რომლებითაც გადაადგილდებიან ტვირთები და აგრეთვე ძაფის დაჭიმულობა, თუ α და β კუთხეები ცნობილია (ნახ. 211).

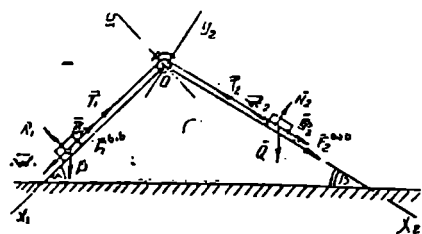
ამოხსნა. თითოეული A და B ტვირთებიდან მოძრაობს გადატანით და წრფივად. ვთქვათ, A ტვირთი ეშვება \vec{w}_1 აჩქარებით. რადგანაც A და B ტვირთები დაკავშირებულია უქიმარი ძაფით, ამიტომ B ტვირთი აიწევა \vec{w}_2 აჩქარებით, რომელიც მოდულით \vec{w}_1 -ის ტოლია, ე. ი.

$$w_1 = w_2 = w.$$

დალამბერის პრინციპის გამოყენებით, მოვდოთ A ტვირთს ამ ტვირთის ინერციის ძალა, რომელიც მოდულით უდრის $\Phi_1 = \frac{P}{g} w$ და მიმართულია \vec{w}_1 აჩქარების საწინააღმდეგოდ, ხოლო B ტვირთს ინერციის ძალა, რომელიც მოდულით უდრის $\Phi_2 = \frac{Q}{g} w$ და მიმართულია \vec{w}_2 აჩქარების საწინააღმდეგოდ.

მაშინ დალამბერის პრინციპის თანახმად მოცემული სისტემა იქნება წონასწორობაში.

ეს სისტემა დავანაწევროთ, ე. ი. ძაფი გადავჭრათ და თითოეული ტვირთისათვის ცალკე შევადგინოთ წონასწორობის ორი განტოლება. ამისათვის დავა-



ნახ. 211.

გვემიღოთ A ტვირთზე მოდებული ყველა ძალა, ე. ი. $\vec{P}_1, \vec{N}_1, \vec{F}_{1(ახ)}, \vec{\phi}_1, \vec{T}_1$ ძალები Ox_1 და Oy_1 ღერძებზე, ხოლო B ტვირთზე მოდებული ძალები, ე. ი. $\vec{Q}, \vec{N}_2, \vec{F}_{2(ახ)}, \vec{\phi}_2, \vec{T}_2$ ძალები Ox_2 და Oy_2 ღერძებზე, აქ \vec{N}_1 და \vec{N}_2 აღნიშნავენ პრიზმის წახნაგების ნორმა-

ღურ რეაქციებს, $\vec{F}_1^{(ახ)}$ და $\vec{F}_2^{(ახ)}$ — ხახუნის ძალებია, ხოლო \vec{T}_1 და \vec{T}_2 ძაფის რეაქციები (დაკეცილობის ძალები), რომლებიც შესაბამისად A და B ტვირთებზეა მოდებული. ამასთანავე $T_1 = T_2 = T$.
 მაშინ გვექნება:

A ტვირთისათვის:

$$\begin{aligned} P \sin \alpha - F_1^{(ახ)} - \Phi_1 - T &= 0, \\ N_1 - P \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

B ტვირთისათვის:

$$\begin{aligned} Q \sin \beta + F_2^{(ახ)} + \Phi_2 - T &= 0, \\ N_2 - Q \cos \beta &= 0. \end{aligned}$$

მეორე და მეოთხე განტოლებებიდან ვპოულობთ:

$$N_1 = P \cos \alpha, \quad N_2 = Q \cos \beta.$$

შაშასადამე,

$$\begin{aligned} F_1^{(ახ)} &= f N_1 = f P \cos \alpha, \\ F_2^{(ახ)} &= f N_2 = f Q \cos \beta. \end{aligned}$$

თუ ხახუნის ძალისა და ინერციის ძალის მნიშვნელობებს ჩავსვამთ პირველ და მესამე განტოლებებში, მივიღებთ:

$$\frac{P}{g} \omega + T = P \cdot \sin \alpha + f P \cos \alpha = P(\sin \alpha + f \cos \alpha),$$

$$T - \frac{Q}{g} \omega = Q \sin \beta + f Q \cos \beta = Q(\sin \beta + f \cos \beta).$$

აქედან ვპოულობთ

$$\omega = \frac{P(\sin \alpha + f \cos \alpha) - Q(\sin \beta + f \cos \beta)}{P + Q} g$$

და

$$\begin{aligned} T &= \frac{P \cdot Q [\sin \alpha + \sin \beta + f(\cos \alpha - \cos \beta)]}{P + Q} = \\ &= \frac{2PQ}{P + Q} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + f \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right). \end{aligned}$$

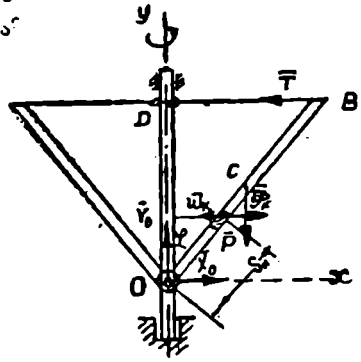
მეორე ჯგუფი

ამ ჯგუფს ეკუთვნის ამოცანები. რომლებშიც სისტემაში შემავალ სხეულებს (ან ერთ სხეულს) აქვთ ბრუნვითი მოძრაობა უძრავი ღერძის გარშემო.

ასეთი სხეულის ყოველი წერტილის აჩქარება უდრის მხევი და

არმალური (ცენტრისკენული) აჩქარებების გეომეტრიულ ჯამს. ამის შესაბამისად, დალაშქრის პრინციპით ამოცანის ამოხსნისას საჭიროა აჩქარუნავი სხეულის ყოველ ნივთიერ ნაწილაც მოვდოთ ნაწილაკის ცრეის ორი ძალა: 1) ინერციის მხები ძალა, რომელიც მოდულით კიდებტ ნაწილაკის მასისა და მისი მხები აჩქარების ნამრავლს და ამ B ტვირის საწინააღმდეგოდაა მიმართული და 2) ინერციის ნორმალური

ზე. ა.
რომ
მურ



ნახ. 212.

ძალა (ცენტრიდანული ძალა), რომელიც მოდულით ტოლია ნაწილაკის მასისა და მისი ნორმალური აჩქარების ნამრავლის და მიმართულია ამ აჩქარების წინააღმდეგ.

ამ ჯგუფის ამოცანების ამოხსნის დანარჩენი მეთოდი იგივეა, რაც პირველი ჯგუფის ამოცანებისა. თუ სხეული თანაბრად ბრუნავს, მაშინ აჩქარების მხები მდგენელი და; მაშასადამე, სხეულის ყველა ნაწილაკის ინერციის მხე-

ბი ძალებიც ნულის ტოლია.

მაგალითი 175. ორი ერთგვაროვანი OA და OB ღერო. თითოეული P წონის, ბოლოებით, O სახსრის საშუალებით, მიმაგრებულია ვერტიკალურ OD ღეროზე, ხოლო მათი A და B ბოლოები დაბმულია უქიშარი პორიზონტალური ძაფით ამ ღეროს D წერტილში. AOB -სამკუთხედს აბრუნებენ OD ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური ω სიჩქარით. იპოვეთ ძაფების T დაკვიპულობა და OB ღეროზე მოდებული O სახსრის რეაქცია, თუ $OA = OB = a$ და $\angle DOB = \varphi$ (ნახ. 212).

ამოხსნა. OD ღერძის გარშემო თანაბრად მბრუნავ OB ღეროზე მოდებულია მოცემული \vec{P} ძალა, O სახსრის \vec{X}_0 და \vec{Y}_0 რეაქცია და ძაფის T რეაქცია. გამოვიყენოთ დალაშქრის პრინციპი. ამისათვის დაეყოთ OB ღერო უსასრულო მცირე ელემენტებად და თითოეულ ასეთ ელემენტს მოვდოთ ინერციის $\vec{\Phi}_k$ ძალა, რომელიც მისი $\vec{\omega}_k$ აჩქარების საწინააღმდეგოდაა მიმართული და მოდულით უდრის $\Phi_k = m_k \omega_k^2$, სადაც m_k — ელემენტის მასაა.

თუ განსახილველი ელემენტი O წერტილიდან დაშორებულია s_k მანძილით, მაშინ $\omega_k = r_k \omega^2 = S_k \sin \varphi \cdot \omega^2$ და, მაშასადამე,

$$\vec{\Phi}_k = m_k \omega^2 s_k \cdot \sin\varphi.$$

დალამბერის პრინციპის თანახმად, \vec{P} ძალა, რეაქციის \vec{X}_0 , ძალები და ინერციის $\vec{\Phi}_k$ ძალები, მოდებული OB ღეროს თითოეულ ელემენტზე ურთიერთს აწონასწორებენ. ამიტომ გვექნება წრის სიმბოლის სამი განტოლება:

x ღერძზე გეგმილთა განტოლება

$$X_0 - T + \sum \Phi_k = 0,$$

y ღერძზე გეგმილთა განტოლება

$$Y_0 - P = 0$$

და O წერტილის მიმართ მომენტთა განტოლება

$$-P \cdot \frac{a}{2} \sin\varphi + T a \cos\varphi - \sum \Phi_k s_k \cos\varphi = 0.$$

გამოეთვალათ ამ განტოლებებში შემავალი ჯამები:

$$\sum \Phi_k = \sum m_k \omega^2 s_k \sin\varphi = \omega^2 \sin\varphi \sum m_k s_k,$$

$$\sum \Phi_k s_k \cos\varphi = \sum m_k \omega^2 s_k^2 \sin\varphi \cos\varphi = \omega^2 \sin\varphi \cos\varphi \sum m_k s_k^2.$$

მაგრამ სიმძიმის C ცენტრის კოორდინატის (203) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$\sum m_k s_k = M s_c = \frac{P}{g} \frac{a}{z},$$

ხოლო

$$\sum m_k s_k^2 = I_0 = \frac{M a^2}{3} = \frac{P a^2}{3g},$$

სადაც I_0 არის OB ღეროს ინერციის მომენტი O წერტილის მიმართ. ამიტომ წონასწორობის განტოლებები ლებულობენ შემდეგ სახეს:

$$X_0 - T + \frac{P a}{2g} \omega^2 \sin\varphi = 0,$$

$$Y_0 - P = 0,$$

$$-P \frac{a}{2} \sin\varphi + T a \cos\varphi - \frac{P a^2 \omega^2}{3g} \sin\varphi \cos\varphi = 0.$$

ამ განტოლებების ამოხსნისას მივიღებთ:

$$Y_0 = P,$$

$$T = \frac{P}{2} \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{2a\omega^2}{3g} \sin \varphi \right)$$

$$X_0 = T - \frac{Pa}{2g} \omega^2 \sin \varphi = \frac{P}{2} \left(\operatorname{tg} \varphi - \frac{a\omega^2}{3g} \sin \varphi \right)$$

B ტვირ

მესამე ჯგუფი

ჯგუფს ეკუთვნიან ისეთი ამოცანები, რომლებშიც სისტემაში რომელიმე ზოგიერთ სხეულს აქვს ბრუნვითი მოძრაობა, ხოლო დანარჩენი მოძრაობენ გადატანით.

ამ ჯგუფის ამოცანების ამოხსნის მეთოდი დალამბერის პრინციპის საფუძველზე არსებითად არაფრით არ განსხვავდება პირველი ორი

ჯგუფის ამოცანების ამოხსნის მეთოდისაგან. მხოლოდ ამ შემთხვევაში, გვაქვს როგორც გადატანით მოძრაობა, ისე მბრუნავი სხეულები.

მაგალითი 176. ამწის R -რადიუსიან ბორბალზე მოდებულია მბრუნავი M მომენტი. ტვირთების წონა უდრის P_1 და P_2 -ს. განსაზღვრეთ ბორბლის კუთხური აჩქარება და ბაგირის AC და BD ნაწილების დაჭიმულობა, თუ ბორბალს ჩავთვლით P_3 წონის ერთგვაროვან წრიულ ცილინდრად და ბაგირის წონას და წინაღობებს უგულებელვუყოფთ (ნახ. 213, ა და ბ).

ამოხსნა. დალამბერის პრინციპით ამოცანების ამოხსნისას ტვირთებს მოვდოთ ინერციის ძალები, რომლებიც სიდიდებით ტოლია,

$$\Phi_1 = \frac{P_1}{g} \omega_1, \quad \Phi_2 = \frac{P_2}{g} \omega_2$$

და მიმართულებით არიან ამ ტვირთების $\vec{\omega}_1$ და $\vec{\omega}_2$ აჩქარებების საწინააღმდეგოდ, ამასთანავე $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. გარდა ამისა, საჭიროა ბორბლის ყოველ ნივთიერ ნაწილს მოვდოთ ინერციის ძალა. რადგანაც ყოველი ასეთი ნივთიერი ნაწილაკის აჩქარება შედგება მხები $\vec{\omega}_\tau$ აჩქარებისა და ნორმალური $\vec{\omega}_n$ აჩქარებათა ჯამისაგან, ამიტომ ამ ნივთიერი ნაწილაკის ინერციის ძალა წარმოადგენს შემდეგი ორი ძალის ტოლ-

ქმედს: ინერციის მხები $\vec{\Phi}_r$ ძალა, რომელიც მიმართულია \vec{w}_r ბის საწინააღმდეგოდ, და ინერციის ნორმალური (ცენტრიდას) $\vec{\Phi}_n$ ძალა, რომელიც მიმართულია \vec{w}_n აჩქარების საწინააღმდეგო ნივთიერი ნაწილაკის მასას აღვნიშნავთ m -ით, ხოლო მის დ. და B ბრუნვის ღერძიდან r -ით, მაშინ

$$\Phi_r = m w_r = m r \varepsilon, \quad \Phi_n = m w_n = m r \omega^2.$$

სადაც ω და ε — ბორბლის კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება. მას შემდეგ, რაც ჩვენ მოვდებთ ყველა ამ ინერციის ძალას, შეგძლია დალაშქვრის პრინციპის თანახმად მოცემული სისტემა განვიხილოთ, როგორც წონასწორობაში მყოფი. მაშასადამე, ამ სისტემაზე მოდებული ყველა გარე და ინერციის ძალების ნაკრები მომენტი O წერტილის მიმართ იქნება ნულის ტოლი. ამიტომ, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ P_3 ძალის ცენტრიდანული ძალის და O წერტილის რეაქციის ძალის მომენტი O წერტილის მიმართ უდრის ნულს, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

$$M + R \cdot P_1 - R P_2 - R \Phi_1 - R \Phi_2 - \Sigma r \Phi_r = 0,$$

ანუ

$$M - R(P_2 - P_1) - R(P_1 + P_2) \frac{w}{g} - \Sigma m r^2 \varepsilon = 0.$$

AC და BD ბაგირების დაჭიმულობის ძალები ამ განტოლებაში არ შედიან, რადგანაც მოცემული სისტემისათვის ეს ძალები წარმოადგენენ შიგა ძალებს.

მაგრამ

$$\Sigma m r^2 \varepsilon = \varepsilon \Sigma m r^2 = I_0 \varepsilon,$$

სადაც I_0 არის ბორბლის ინერციის მომენტი O ღერძის მიმართ, ამასთანავე ერთგვაროვანი წრიული ცილინდრისათვის $I_0 = \frac{P_3}{2g} R^2$. ამიტომ წინა განტოლება მიიღებს სახეს

$$R(P_1 + P_2) \frac{w}{g} + \frac{P_3}{2g} R^2 \varepsilon = M - R(P_2 - P_1).$$

რადგანაც $w = R\varepsilon$, ამიტომ ამ განტოლებიდან ვპოულობთ

$$w = \frac{M - R(P_2 - P_1)}{R(P_1 + P_2 + 0,5P_3)} g$$

და

$$\varepsilon = \frac{w}{R} = \frac{M - R(P_2 - P_1)}{R^2(P_1 + P_2 + 0,5P_3)} g.$$

BD ბაგირის დაჭიმულობის განსასაზღვრავად დავანაწევრებთ სისტე-
მას და განვიხილავთ ცალკე მარჯვენა ტვირთს, რომელზედაც მოდებუ-

ნა \vec{P}_2 ძალა, ინერციის $\vec{\Phi}_2$ ძალა და ბაგირის \vec{T}_2 რეაქცია (ნახ. 213 ბ).
კიდებუდანაც ეს ძალები წონასწორდებიან, ამიტომ

$$B \text{ ტვირთის } T - P_2 - \Phi_2 = 0,$$

ზეიანაც

რომ

მურ

$$T_2 = P_2 + \Phi_2 = P_2 + \frac{P_2}{g} w = P_2 \left(1 + \frac{w}{g} \right) =$$

$$= P_2 \left[1 + \frac{M - R(P_2 - P_1)}{R(P_1 + P_2 + 0,5P_3)} \right] = \frac{P_2 [M + R(2P_1 + 0,5P_3)]}{R(P_1 + P_2 + 0,5P_3)}.$$

შემდეგ, თუ ცალკე განვიხილავთ მარცხენა ტვირთის წონასწორობას, ებოვიტ AC ბაგირის დაჭიმულობას

$$T_1 = \frac{P_1 [R(2P_2 + 0,5P_3) - M]}{R(P_1 + P_2 + 0,5P_3)}.$$

II ტიპის ამოცანები

ამ ტიპს ეკუთვნის ამოცანები, რომლებშიც მოცემული ძალები, ბმის რეაქციები და ინერციის ძალები ქმნიან სივრცით ძალთა სისტემას. ეს ამოცანები შეიძლება დავეოთ ორ ჯგუფად.

პირველი ჯგუფი

ამ ჯგუფს ეკუთვნის ამოცანები, რომლებშიც მოითხოვება ღერძის ორი ჩამაგრების წერტილის რეაქციების განსაზღვრა, როდესაც წერტილოვანი მასა ბრუნავს ამ ღერძის გარშემო.

ამ ჯგუფის ამოცანების ამოხსნა ანალოგიურია I ტიპის მეორე ჯგუფის ამოცანების ამოხსნისა, მხოლოდ აქ გვიხდება ზოგად შემთხვევაში შევადგინოთ სივრცითი სტატიკის წონასწორობის ექვსი განტოლება.

მეორე ჯგუფი

ამ ჯგუფს ეკუთვნის ამოცანები, რომლებშიც მოითხოვება განვსაზღვროთ მყარი სხეულის ორი ჩამაგრებული წერტილის (ორი საკისრის ან საკისრის და საქუსლის) რეაქცია, რომლებიც წარმოიქმნებიან ამ ჩამაგრების წერტილებზე გამავალი უძრავი ღერძის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვის დროს.

დალაშქრის პრინციპით ამ ამოცანების ამოხსნის დროს საჭიროა

დავანაწილოთ მბრუნავი მყარი სხეული ელემენტარულ ნივთიე. |
 წილაკებად და ყოველ ასეთ ნაწილაკზე მოვდოთ ამ ნაწილაკის მ. |
 და ნორმალური ინერციის ძალები. რადგანაც დალაშქრების პრინციპ. |
 თანახმად ყველა ეს ინერციის ძალა წონასწორდება სხეულზე მძი ა. |
 ბული ძალებით და ჩამაგრების წერტილების რეაქციებით, ამიტან სიმ- |
 ზოგადოდ გვექნება წონასწორობის ექვსი ცნობილი განტოლენ. და B |
 ტიკიდან (სამი გეგმილის განტოლება და სამი მომენტის განტოლ |
 ამ განტოლებებში შევლენ, პირველ ყოვლისა, არჩეული კოორდი. |
 თა სამი ღერძიდან თითოეულ ღერძზე ინერციის ყველა ძალის გეგ |
 ლთა ჯამი, ანუ, რაც იგივეა, ინერციის ძალთა ნაკრები ვექტორის გ. |
 გმილი თითოეულ ამ ღერძზე, და მეორე მხრივ, ყოველი საკოორდინა- |
 ტო ღერძის მიმართ ინერციის ყველა ძალის მომენტთა ჯამი, ანუ, რაც |
 იგივეა, ყველა ამ ღერძის მიმართ ინერციის ძალების ნაკრები მომენ- |
 ტი. თუ სხეულის ბრუნვის ღერძს მივიღებთ z ღერძად, მაშინ საკოო- |
 რდინატო ღერძების მიმართ ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორის გე- |
 გმილები იქმნებიან (იხ. მაგალითად, И. М. Воронков, «Курс теорети- |
 ческой механики“., §139.)

$$\left. \begin{aligned} R_x^{(n\epsilon)} &= M(x_c \omega^2 + y_c \epsilon), \\ R_y^{(n\epsilon)} &= M(y_c \omega^2 - x_c \epsilon), \\ R_z^{(n\epsilon)} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (234)$$

ზოლო კოორდინატთა ღერძების მიმართ ინერციის ძალთა ნაკრები მო-
 მენტი გამოისახება ასე:

$$\left. \begin{aligned} M_x^{(n\epsilon)} &= I_{zx} \epsilon - I_{yz} \omega^2, \\ M_y^{(n\epsilon)} &= I_{yz} \epsilon + I_{zx} \omega^2, \\ M_z^{(n\epsilon)} &= -I_z \epsilon. \end{aligned} \right\} \quad (235)$$

ამ ფორმულებში M არის სხეულის მასა, ω და ϵ — შესაბამისად
 აღნიშნავენ სხეულის კუთხურ სიჩქარესა და კუთხურ აჩქარებას, x_c
 და y_c — სხეულის სიმძიმის C ცენტრის კოორდინატებია I_{zx} და I_{zy}
 სხეულის ცენტრიდანული ინერციის მომენტები, I_z — სხეულის
 ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ.

აღვნიშნოთ ზოგიერთი კერძო შემთხვევა:

1. სხეული ბრუნავს თანაბრად, მაშინ $\omega = \text{const}$ და $\epsilon = 0$;
2. სხეულის სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ბრუნვის ღერძზე, მა-
 შინ $x_c = y_c = 0$ და, მაშასადამე, $R_x^{(n\epsilon)} = R_y^{(n\epsilon)} = R_z^{(n\epsilon)} = 0$. (236)

ამ შემთხვევაში ინერციის ყველა ძალა დაიყვანება ერთ წყვილძალამ-

დვ, რომლის ვექტორული მომენტის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე განისაზღვრება (235) ფორმულით.

3. კოორდინატთა სიბრტყე წარმოადგენს სხეულის სიმეტრიის სიბრტყეს. მაშინ სხეულის სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ამ სიბრტყეში ბრუნვის z ღერძი, როგორც სიმეტრიის სიბრტყის მართობული წარმოადგენს სხეულის ინერციის მთავარ ღერძს O წერტილში ამიტომ $I_{yz} = I_{zx} = 0$. თუ ამასთანავე $e = 0$, მაშინ

$$M_x^{(n6)} = M_y^{(n6)} = M_z^{(n6)} = 0$$

$$R_x^{(n6)} = Mx_c \omega^2, \quad R_y^{(n6)} = My_c \omega^2, \quad R_z^{(n6)} = 0. \quad (237)$$

ამ შემთხვევაში ინერციის ყველა ძალა დაიყვანება ერთ ტოლქმედამდე, რომელიც უდრის $\vec{R}^{(n6)} = M\omega^2 \vec{r}_c$, სადაც \vec{r}_c — C წერტილის რადიუს-ვექტორია, ე. ი. დაიყვანება ერთ ძალამდე. რომელიც ტოლია სიმძიმის ცენტრის ცენტრიდანული ძალისა, იმ დაშვებით, რომ ამ ცენტრში თავმოყრილია მთელი სხეულის მასა; ამასთანავე ამ $\vec{R}^{(n6)}$ ტოლქმედის ფუძე გადის სხეულის სიმძიმის ცენტრზე.

4. თუ z ღერძი წარმოადგენს სხეულის ინერციის მთავარ ცენტრალურ ღერძს და თუ ამასთანავე სხეული თანაბრად ბრუნავს, მაშინ

$$e = 0, \quad x_c = y_c = 0 \quad \text{და} \quad I_{yz} = I_{zx} = 0$$

და ამიტომაც

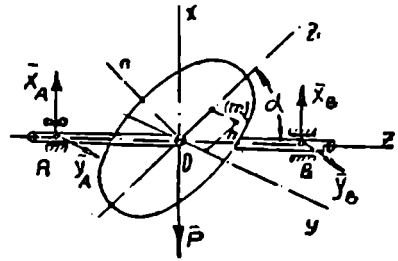
$$R_x^{(n6)} = R_y^{(n6)} = R_z^{(n6)} = 0 \quad \text{და} \quad M_x^{(n6)} = M_y^{(n6)} = M_z^{(n6)} = 0,$$

ე. ი. ინერციის ძალთა სისტემა წარმოადგენს ამ შემთხვევაში გაწონასწორებულ სისტემას. მაშასადამე, დალამბერის პრინციპის საფუძველზე შედგენილ ზევით მითითებულ წონასწორობის განტოლებებში ინერციის ძალები არ შევლენ. ეს განტოლებები დაემთხვევიან სტატიკის განტოლებებს, რომლებსაც ადგილი აქვთ მოცემული ძალების მოქმედებით სხეულის წონასწორობის დროს. ამიტომ ჩამაგრების წერტილების საძიებნი რეაქციები ამ შემთხვევაში უდრის სტატიკურ რეაქციებს.

დალამბერის პრინციპით ამ ჯგუფის ამოცანების ამოხსნის დროს მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ ბრუნვის z ღერძის მიმართ მომენტების განტოლებაში ჩამაგრების წერტილების საძიებელი რეაქციები არ შევლენ, რადგან მათი მომენტები ამ ღერძის მიმართ ნულის ტოლია. ამიტომ ეს წერტილები განისაზღვრებიან წონასწორობის დანარჩენი ხუთი განტოლებიდან. თუ მოცემულ ამოცანაში, როგორც ეს არაიშვიათად ხდება, მოთხოვნილია მხოლოდ ბრუნვის z ღერძის მართობი რეაქციების განსაზღვრა, მაშინ საკმარისია შევადგინოთ წონას-

წორობის ოთხი განტოლება (ორი განტოლება x და y ღერძებზე გეგმილებისა და ორი განტოლება ამავე ღერძების მიმართ მომენტებისა).

მაგალითი 177. R რადიუსისა და P წონის ერთგვაროვანი თხელი დისკო დაცმულია პორიზონტალურ ლილვზე ლილვის ღერძისადმი α კუთხით და ხისტად დამაგრებულია ლილვთან, ამასთანავე დისკოს სიმძიმის O ცენტრი მდებარეობს ლილვის ღერძზე. განსაზღვრეთ A და B საკისრების რეაქციები, თუ ლილვი ბრუნავს მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით და $AO = OB = a$. ლილვის წონა და ხახუნი საკისრებში შეიძლება უგულვებლევყოთ (ნახ. 214).



ნახ. 214.

ამოხსნა. თითოეული საკისრის რეაქცია მართობია ლილვის ბრუნვის ღერძისა და უდრის ორი ძალის გეომეტრიულ ჯამს: ლილვის \vec{P} წონის მიერ გამოწვეულ სტატიკური რეაქციისა, და ინერციული რეაქციისა, რომელიც წარმოიშობა დისკოს ბრუნვის დროს და განპირობებულია მბრუნავი დისკოს ნივთიერი ნაწილაკების ინერციის გამოვლინებით.

ცხადია, თითოეული სტატიკური რეაქცია უდრის $\frac{P}{2}$ და მიმართულია ვერტიკალურად ზევით. ინერციული რეაქციების განსასაზღვრავად გამოვიყენოთ დალამბერის პრინციპი. A წერტილზე მოდებული ინერციული რეაქციის მდგენელები კოორდინატთა x და y ღერძების მიმართ აღვნიშნოთ \vec{X}_A და \vec{Y}_A -თი, ხოლო B წერტილში მოდებული ინერციული რეაქციის მდგენელები \vec{X}_B და \vec{Y}_B -თი, ამასთანავე x ღერძი მდებარეობს ერთ სიბრტყეში ლილვის ბრუნვის ღერძთან და დისკოს სიბრტყის On ნორმალთან, ხოლო y ღერძი მდებარეობს დისკოს სიბრტყეში. z ღერძი მივმართოთ ლილვის ბრუნვის ღერძის გასწვრივ. x და y ღერძები დაკავშირებულია დისკოსთან და მასთან ერთად ბრუნავენ. დისკოს Oz_1 დიამეტრი მდებარეობს xOy სიბრტყეში და, მაშასადამე, მართობია y ღერძისა.

რადგანაც \vec{P} ძალა წონასწორდება საკისრების სტატიკური რეაქციებით, ამიტომ, დალამბერის პრინციპის თანახმად, დისკოს ნივთიერი ნაწილაკების ინერციის ძალები გაწონასწორებული იქნებიან \vec{X}_A , \vec{Y}_A

\vec{X}_B, \vec{Y}_B ინერციული რეაქციებით.

ამიტომ გვექნება წონასწორობის შემდეგი ოთხი განტოლება:

$$x \text{ ლერძზე გეგმილების განტოლება } R_B^{(n6)} X_A + X_B = 0,$$

$$y \text{ ლერძზე გეგმილების განტოლება } R_B^{(n6)} + Y_A + Y_B = 0,$$

$$x \text{ ლერძის მიმართ მომენტების განტოლება } M_x^{(n6)} + aY_A - aY_B = 0,$$

$$y \text{ ლერძის მიმართ მომენტების განტოლება } M_y^{(n6)} - aX_A + aY_B = 0.$$

ამ განტოლებებში, როგორც ზემოთ იყო მითითებული, $R_B^{(n6)}$ და $R_B^{(n6)}$ — აღნიშნავენ დისკოს ნივთიერი ნაწილაკების ინერციის ძალების ნაკრები ვექტორის გეგმილებს x და y ლერძებზე, ხოლო $M_x^{(n6)}$ და $M_y^{(n6)}$ — ამავე ძალების ნაკრებ მომენტებს იმავე ლერძების მიმართ. რადგანაც მოცემულ ამოცანაში დისკოს სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ბრუნვის z ლერძზე და $\omega = \text{const}$, ამიტომ $x_0 = y_0 = 0$ და $\dot{x} = 0$, ხოლო (234) და (235) ფორმულებიდან გვექნება:

$$R_B^{(n6)} = R_B^{(n6)} = 0, \quad M_x^{(n6)} = -I_{yz}\omega^2, \quad M_y^{(n6)} = I_{zx}\omega^2.$$

გარდა ამისა, რადგანაც დისკოს დიამეტრის გასწვრივ მიმართული ლერძი არის დისკოს სიმეტრიის ლერძი, ამიტომ c გი არის მისი ინერციის მთავარი ცენტრალური ლერძი და გვექნება $I_{yz} = 0$.

მაშასადამე, წინა განტოლებები ლებულობენ სახეს:

$$X_A + X_B = 0,$$

$$Y_A + Y_B = 0,$$

$$a(Y_A - Y_B) = 0,$$

$$a(X_A - X_B) = I_{zx}\omega^2.$$

ამ განტოლებებიდან ვპოულობთ:

$$Y_A = Y_B = 0, \quad X_A = I_z \frac{\omega^2}{2a}, \quad X_B = -I_z \frac{\omega^2}{2a}.$$

განსასაზღვრავი დარჩა ინერციის ცენტრიდანული I_{zx} მომენტი. თუ განვიხილავთ დისკოს ნივთიერ ნაწილაკს m მასით, მაშინ როგორც ეს 215 ნახაზიდან ჩანს, ამ ნაწილაკის კოორდინატები იქნება

$$x = h \cdot \sin \alpha, \quad z = h \cos \alpha,$$

სადაც h — ამ ნაწილაკის მანძილია y ლერძამდე. მაშასადამე,

$$I_{zx} = \sum m h^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \sum m h^2,$$

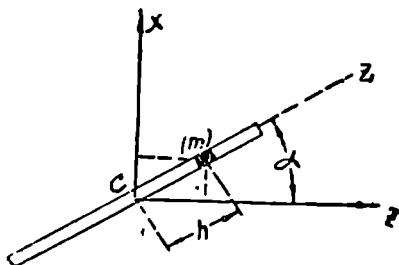
მაგრამ $\sum m h^2$ არის დისკოს ინერციის მომენტი y ლერძის მიმართ (დიამეტრის მიმართ), რომელიც უდრის $\frac{MR^2}{4}$ -ს.

ამიტომაც $I_{zx} = \frac{MR^2}{8} \sin 2\alpha$. მაშასადამე, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$Y_A = Y_B = 0, \quad X_A = \frac{MR^2}{16a} \omega^2 \sin 2\alpha = \frac{PR^2}{16ag} \omega^2 \sin 2\alpha = -X_B.$$

აქედან ვხედავთ, რომ საკისრების ინერციული რეაქციები x ღერძის პარალელურია; მაშასადამე, ეს რეაქციები მუდმივი სიდიდის შენარჩუნებისას განუწყვეტელი იცვლიან თავიანთ მიმართულებას, რადგანაც x ღერძი ბრუნავს დისკოსთან ერთად. X_B -მაღის უარყოფითი მნიშვნელობა მიგვითითებს იმაზე, რომ ამ ძალას აქვს 214-ე ნახაზზე არჩეული მიმართულების საწინააღმდეგო მიმართულება და ამიტომაც \vec{X}_A და \vec{X}_B რეაქციები ქმნიან წყვილძალას, რომელიც მდებარეობს ბრუნვის ღერძზე და დისკოს სიბრტყის Oz ნორმალზე გამავალ სიბრტყეში.

მაგალითი 178. A წერტილში საკისრით, ხოლო B წერტილში საქუსლით ჩამაგრებულ ვერტიკალურ ღერძთან ხისტადაა შეერთებული ამ ღერძისადმი მართობული L სიგრძის და P_1 წონის წვრილი DE ღერო და P_2 წონის წრიული ერთგვაროვანი ცილინდრი. რომლის მსახველი AB ღერძის პარალელურია. ამასთანავე ცილინდრი ჩასმულია ექსცენტრულად ისე, რომ მისი სიმძიმის C_2 ცენტრი იმყოფება AB ღერძიდან $OC_2 = a$ მანძილით.



ნახ. 215.

ცილინდრი და ღერო AB ღერძის გარშემო ბრუნავს მოცემული $\omega = \cos nt$ კუთხური სიჩქარით. იპოვეთ A საკისრის და B საქუსლის რეაქცია, თუ $BE = l, EO = AO = \frac{l}{2}$ და $OC_2 \perp ED$ (ნახ.216.).

ამოხსნა. გავავლოთ ცილინდრთან უცვლელად დაკავშირებული კოორდინატთა სისტემა ისე, როგორც ეს მითითებულია 216-ე ნახაზზე, ე. ი. z ღერძი მიემართოთ ბრუნვის BA ღერძის გასწვრივ, y ღერძი OC_2 წრფის გასწვრივ და x ღერძი ED ღეროს პარალელურად.

A საკისრის რეაქციის მდგენელები x და y ღერძებზე აღვნიშნოთ \vec{X}_A და \vec{Y}_A -ით, ხოლო B საქუსლის რეაქციის მდგენელები კოორდინატთა ღერძებზე \vec{X}_B, \vec{X}_B და \vec{Z}_B -თი.

დალამბერის პრინციპის გამოყენებისათვის დავეყოთ DE ღერო უსასრულო მცირე ელემენტებად და თითოეულ ასეთ ელემენტს მოვდოთ შესაბამისი ინერციის ძალა.

რადგანაც $\omega = \text{const}$, ამიტომ $\varepsilon = 0$ და, მაშასადამე, ღერონ ყველა ელემენტის შხები ინერციის ძალები უდრის ნულს, ხოლო მათი ნორმალური ინერციის ძალები (ცენტრიდანული ძალები) მიმართულია ღეროს გასწვრივ ბრუნვის ღერძიდან.

ამ ცენტრიდანული ძალების ტოლქმედს ექნება ისეთივე მიმართულება და მოდულით უდრის

$$\Phi_1 = \sum m x \omega^2 = \omega^2 \sum m x.$$

სადაც m — ელემენტის მასაა, ხოლო x — მანძილი ელემენტიდან

ბრუნვის ღერძამდე. მაგრამ $\sum m x = M_1 x_{c_1} = \frac{P_1}{g} x_{c_1}$, სადაც x_{c_1} არის ღეროს სიმძიმის C_1 ცენტრის დაშორება AB ღერძიდან, რომელიც უდრის $\frac{l}{2}$, ამიტომ

$$\Phi_1 = \frac{P_1}{2g} l \omega^2.$$

რადგანაც xOy სიბრტყე ცილინდრისათვის სიმეტრიის სიბრტყეა და ცილინდრი ბრუნავს თანაბრად, ამიტომ, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ცილინდრის ნივთიერი ნაწილაკების ინერციის ძალები დაიყვანებიან ამ შემთხვევაში ერთ Φ_2 ტოლქმედამდე, რომელიც უდრის ცილინდრის სიმძიმის C_2 ცენტრის ცენტრიდანულ ძალას იმ დაშვებით, რომ ამ ცენტრში თავმოყრილია მთელი ცილინდრის მასა. მაშასადამე,

$$\Phi_2 = M_2 \cdot y_{c_2} \cdot \omega^2 = \frac{P_2}{g} a \omega^2; \quad \Phi_2 \text{ ძალა მოდებულია } C_2 \text{ წერტილში და}$$

მიმართულია OC_2 -ს გასწვრივ, ე. ი. y ღერძის გასწვრივ.

დალამბერის პრინციპის თანახმად, მოცემული P_1 და \vec{P}_2 ძალები, რეაქციის $\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B, \vec{X}_A, \vec{Y}_A$ ძალები და ინერციის Φ_1, Φ_2 ძალები

ნაახ. 216.

ერთმანეთს აწონასწორებენ; ამიტომ ძალთა ამ სისტემისათვის შეგვიძლია შევადგინოთ წონასწორობის შემდეგი ხუთი განტოლება (სამი განტოლება x , y , z ღერძზე გეგმილებისა და ორი განტოლება x და y ღერძების მიმართ მომენტებისა):

$$X_A + X_B + \Phi_1 = 0; \quad Y_A + Y_B + \Phi_2 = 0;$$

$$Z_A - P_1 - P_2 = 0;$$

$$-P_2 \cdot a - Y_A \cdot \frac{l}{2} + \frac{3}{2} Y_B \cdot l = 0;$$

$$P_1 \cdot \frac{l}{2} - \Phi_1 \cdot \frac{l}{2} + X_A \cdot \frac{l}{2} - \frac{3}{2} X_A \cdot l = 0;$$

ანუ

$$X_A + X_B = -\frac{P_1}{2g} l \omega^2; \quad Y_A + Y_B = -\frac{P_2}{g} a \omega^2;$$

$$Z_A = P_1 + P_2;$$

$$Y_A - 3Y_B = -2P_2 \frac{a}{l}; \quad X_A - 3X_B = \frac{P_1}{2g} l \omega^2 - P_1.$$

ამ განტოლებებიდან ვპოულობთ:

$$X_B = \frac{P_1}{4} \left(1 - \frac{l \omega^2}{g}\right); \quad X_A = -\frac{P_1}{4} \left(1 + \frac{l \omega^2}{g}\right);$$

$$Z_A = P_1 + P_2;$$

$$Y_B = \frac{\varphi P_2}{4} \left(\frac{2}{l} - \frac{\omega^2}{g}\right); \quad Y_A = -\frac{a P_2}{l} \left(\frac{2}{l} + \frac{3 \omega^2}{g}\right).$$

§ 2. შესაძლო (ვირბუალური) გადაადგილებათა კრინიკაი

თუ ნივთიერ წერტილთა სისტემაზე დადებულია ესა თუ ის ბმები, მაშინ ასეთი სისტემისათვის ყოველი გადაადგილება არ იქნება შესაძლებელი თუ ამასთანავე ბმები არ არიან დამოკიდებული დროზე, ე. ი. თუ ბმების განტოლებაში დრო ცხადად არ შედის, მაშინ ასეთ ბმებს ეწოდებათ სტაციონარული, წინააღმდეგ შემთხვევაში ბმებს ეწოდებათ არასტაციონარული. შემდგომში მხედველობაში გვექნება მხოლოდ სტაციონარული ბმები.

მოცემული სისტემის შესაძლო ვირტუალური გადაადგილება ეწოდება ამ სისტემის ნივთიერი წერტილების ნებისმიერ უსასრულო მცე-

რე გადაადგილებათა ერთობლიობას, რომელთა დროსაც მოცემულ სისტემაზე დადებული ბმები არ ირღვევიან.

სისტემის A წერტილის შესაძლო $\delta \vec{s}_A$ გადაადგილების გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე აღინიშნებიან δx_A , δy_A , δz_A -თი და თავის მხრივ წარმოადგენენ ამ წერტილის კოორდინატების ცვლილებას მისი შესაძლო გადაადგილების დროს, რომლებსაც ეწოდებათ ამ წერტილის კოორდინატების ვარიაციები.

თუ n ნივთიერი წერტილისგან შედგენილ სისტემაზე დადებულია შემდეგი სახის s სტაციონარული ბმა

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0; \quad (238)$$

$$(i = 1, 2, \dots, s).$$

მაშინ სისტემის წერტილთა $3n$ კოორდინატებიდან ნებისმიერი არიან მხოლოდ $3n - s$, ხოლო დანარჩენი s კოორდინატი შეიძლება გამოვსახოთ, როგორც ამ ნებისმიერი კოორდინატების ფუნქცია წინა s განტოლებიდან. სიდიდეს

$$k = 3n - s, \quad (239)$$

ე. ი. სისტემის წერტილების დამოუკიდებელი კოორდინატების რიცხვს ეწოდება. ამ სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი.

თუ სისტემაზე დადებული ბმების რეაქციების ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი სისტემის ნებისმიერ შესაძლო გადაადგილების დროს უდრის ნულს, მაშინ ასეთ ბმებს ეწოდებათ სრულყოფილი (იდეალური). სრულყოფილი ბმების მქონე სისტემის წონასწორობის აუცილებელ და საკმარის პირობას გვაძლევს შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი, რომელიც შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება: იმისათვის, რომ სრულყოფილი ბმების მქონე სისტემის განსახილველი მდებარეობა იყოს ამ სისტემის წონასწორობის მდებარეობა, აუცილებელი და საკმარისია, რომ სისტემაზე მოქმედი ყველა მოცემული (აქტიური) ძალის ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი ამ მდებარეობიდან ყოველ ნებისმიერ შესაძლო გადაადგილებაზე უდრიდეს ნულს.

მაშასადამე, სისტემის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა გამოისახება განტოლებით

$$\sum \delta A = \sum F \cos \alpha \cdot \delta s = 0. \quad (240)$$

თუ ვისარგებლებთ ელემენტარული მუშაობის ანალიზური გამოსა-

ხულებით, მივიღებთ სტატიკის ზოგად განტოლებას შემდეგი სახით

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0. \quad (241)$$

ამოცანები, რომლებიც ამ პარაგრაფს ეკუთვნის, შეიძლება დავყოთ სამ ტიპად:

I. ამოცანები, რომლებშიც სისტემის წონასწორობის მოცემული მდებარეობის დროს მოითხოვება სისტემაზე მოქმედი ძალების განსაზღვრა, ან ძალებს შორის დამოკიდებულების პოვნა.

II. ამოცანები, რომლებშიც სისტემაზე მოქმედი მოცემული ძალებისათვის მოითხოვება ამ სისტემის წონასწორობის მდებარეობის განსაზღვრა.

III. ამოცანები შესაძლო გადაადგილების პრინციპის გამოყენებაზე ბმის რეაქციების განსაზღვრავად.

ამასთანავე, მხედველობაში უნდა გვქონდეს, რომ თითოეულ ამ ტიპში შეიძლება განვიხილოთ სისტემა ერთი ან რამდენიმე თავისუფლების ხარისხით.

I ტიპის ამოცანები

(ამოცანები 46.1 (903) — 46.5(908), 46.8(911) — 46.18 (921))

მაგალითი 179. ორი უწონადი AB და BC ღერო შეერთებულია B სახსრით, რომელშიც მოდებულია ქვევით მიმართული ვერტიკალური \vec{Q} ძალა. C ბოლო სახსრით არის ჩამაგრებული კედელში, ხოლო A ბოლო სახსრით არის შეერთებული ცოციასთან, რომელსაც შეუძლია ხახუნის გარეშე სრიალი იატაკზე. როგორი ჰირიზონტალური \vec{P} ძალა უნდა მოვდოთ ცოციას, რომ მოცემული α და β კუთხეებისათვის სისტემა იმყოფებოდეს წონასწორობაში (ნახ. 217)?

ამოხსნა. თუ ცოცია მიკრულია იატაკზე, მაშინ განსახილველ სისტემას აქვს ერთი თავისუფლების ხარისხი, რადგანაც სისტემის განმსაზღვრელ ორ $B(x_B, y_B)$ და $A(x_A, y_A)$ წერტილზე დადებულია სამი ბმა:

$$x_B^2 + y_B^2 - b^2 = 0, \quad (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - a^2 = 0, \\ y_A - c = 0. *)$$

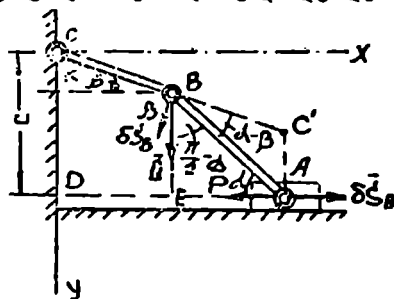
ამიტომ მოცემული სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი

$$h = 2n - s = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

*) ეს განტოლებები გამოსახვენ შემდეგ პირობებს: ა) მანძილი $BC = b = \text{const}$,
ბ) მანძილი $AB = a = \text{const}$ და გ) მანძილი A წერტილიდან x ღერძამდე, ე. ი. $DC = c = \text{const}$.

თუ გამოვიყენებთ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპს, ამოცანა შეიძლება ამოვხსნათ ორი ხერხით.

პირველი ხერხი. მივიანიჭოთ სისტემას შესაძლო გადაადგილება. A წერტილისათვის შესაძლო $\vec{\delta s}_A$ გადაადგილება მიმართულია x ღერძის პარალელურად, ხოლო B წერტილის შესაძლო გადაადგილება $\vec{\delta s}_B$ მიმართულია იმ ტრაექტორიის (C ცენტრის მქონე წრეხაზის) მხების გასწვრივ, რომელიც შეუძლია აღწეროს B წერტილმა, ე. ი. BC ღეროს მართობულად. შემდეგ, თუ ვისარგებლებთ ელემენტარული მუშაობის ძირითადი გამოსახულებით, შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის საფუძველზე გვექნება (იხ. (240) განტოლება)



ნახ. 217.

$$\Sigma \delta A = -P \delta s_A - Q \delta s_B \cos \beta = 0.$$

აქედან

$$P = \frac{s_B}{s_A} Q \cos \beta.$$

საჭიროა ვიპოვოთ დამოკიდებულება δs_B და δs_A -ს შორის. რადგანაც სისტემის შესაძლო გადაადგილების დროს მანძილი B და A წერტილებს შორის უცვლელი რჩება, ამიტომ ამ წერტილების შესაძლო გადაადგილებათა გეგმილი მათ შემაერთებელ BA წრფეზე ერთმანეთის ტოლია.

$$\text{გეგმ}_{BA}(\vec{\delta s}_B) = \text{გეგმ}_{BA}(\vec{\delta s}_A),$$

ე. ი.

$$\delta s_B \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) = \delta s_A \cdot \cos \alpha,$$

ანუ

$$\delta s_B \cdot \sin(\alpha - \beta) = \delta s_A \cdot \cos \alpha,$$

საიდანაც

$$\frac{\delta s_B}{\delta s_A} = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

მაშასადამე,

$$P = Q \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

δs_A და δs_B -ს შორის დამოკიდებულება შეიძლება გვეპოვნა აგრეთვე AB ღეროს ბრუნვის მყისი C' ცენტრის აგებით, რომელიც მდებარეობს A და B წერტილებიდან $\vec{\delta s}_A$ და $\vec{\delta s}_B$ ვექტორებისადმი აღმართული პერპენდიკულარების გადაკვეთაზე (იხ. ნახ. 217). მაშინ A და B წერტილების შესაძლო გადაადგილებანი, ისევე როგორც მათი შესაძლო სიჩქარეები, პროპორციული არიან AB რგოლის ბრუნვის მყისი ცენტრიდან ამ წერტილების დაშორების მანძილებისა. მაშასადამე,

$$\frac{\delta s_B}{\delta s_A} = \frac{C'B}{C'A}$$

მაგრამ $AC'B$ სამკუთხედიდან სინუსების თეორემის გამოყენებით გვაქვს

$$\frac{C'B}{C'A} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)},$$

ამიტომაც

$$\frac{\delta s_B}{\delta s_A} = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$$

მეორე ხერხი. მივანიჭებთ რა სისტემას შესაძლო გადაადგილებას და ვისარგებლებთ ელემენტარული მუშაობის ანალიზური გამოსახულებით, გვექნება (იხ. (241) განტოლება)

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y) = P_x \delta x_A + P_y \delta y_A + Q_x \delta x_B + Q_y \delta y_B = -P\delta x_A + Q\delta y_B = 0.$$

ახლა საჭიროა ვიპოვოთ დამოკიდებულება δy_B და δx_A ვარიაციებსა და A და B წერტილების კოორდინატებს შორის.

ამიტომ y_B და x_A კოორდინატებს გამოვსახავთ α და β კუთხეებით

$$y_B = b \cdot \sin \beta; \quad x_A = DE + EA = b \cos \beta + a \cos \alpha.$$

სისტემის უსასრულო მცირე შესაძლო გადაადგილების დროს α და B კუთხეები იღვწენ უსასრულო მცირე $\delta \alpha$ და $\delta \beta$ ნამატებს. ხოლო x_A და y_B კოორდინატები, რომლებიც წარმოადგენენ ამ კუთხეების ფუნქციებს, მიიღებენ δx_A და δy_B ნამატებს. თუ ვისარგებლებთ იმით, რომ ფუნქციის ნამატი არგუმენტის უსასრულო მცირე ნამატის დროს შეიძლება შეიცვალოს მისი დიფერენციალით, წინა ტალობიდან გვექნება

$$\delta y_B = b \cos \beta \delta \beta; \quad \delta x_A = -b \sin \beta \delta \beta - a \sin \alpha \delta \alpha.$$

თუ δx_A და δy_B -ს მნიშვნელობებს ჩავსვამთ სისტემის წონასწორობის პირობებში, მივიღებთ

$$bP \sin \beta \delta \beta + aP \sin \alpha \delta \alpha + bQ \cos \beta \delta \beta = 0.$$

მაშასადამე, A და B წერტილების ვარიაციები გამოვსახეთ α და β კუთხეების ვარიაციებით. დამოკიდებულება $\delta \alpha$ და $\delta \beta$ ვარიაციებს შორის ადვილი დასამყარებელია, თუ გამოვალთ იმ მოსაზრებიდან, რომ

$$CD = CK + KD = c = \text{const}$$

ანუ

$$b \sin \beta + a \sin \alpha = c = \text{const.}$$

ამ განტოლების ვარირებით მივიღებთ

$$a \cos \alpha \delta \alpha + b \cos \beta \delta \beta = 0, \quad \text{საიდანაც } \delta \alpha = -\frac{b \cos \beta}{a \cos \alpha} \delta \beta.$$

თუ $\delta \alpha$ -ს ამ მნიშვნელობას შევიტანთ წინა განტოლებაში, რომელიც გამოსახავს სისტემის წონასწორობას, მივიღებთ

$$bP \sin \beta \delta \beta - bP \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha} \delta \beta + bQ \cos \beta \cdot \delta \beta = 0,$$

ანუ

$$b [P \sin(\beta - \alpha) + Q \cos \beta \cdot \cos \alpha] \delta \beta = 0$$

და, მაშასადამე,

$$P \sin(\beta - \alpha) + Q \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta = 0.$$

აქედან

$$P = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)} Q.$$

II ტიპის ამოცანები

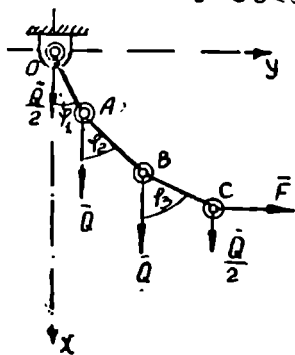
[ამოცანები 46.6(909), 46. 7(910)]

მაგალითი 180. ერთნაირი Q წონის სამი ღერო ერთმანეთთან შეერთებულია სახსრით. პირველ ღეროს შეუძლია ბრუნვა უძრავი S სახსრის გარშემო, ხოლო მესამე ღეროს თავისუფალ ბოლოზე მოდებულია პორიზონტალური F ძალა, რომელიც ვერტიკალურ სიბრტყეში წონასწორობაში აკაეებს მთელ სისტემას.

ამასთანავე ღეროები ვერტიკალთან ადგენენ კუთხეებს, რომ-

ლებიც შესაბამისად უდრის φ_1 , φ_2 , φ_3 -ს. განსაზღვრეთ ეს კუთხეები, თუ $F=Q$ (ნახ. 218).

ამოხსნა. მივიღოთ O სახსრის ცენტრი კოორდინატთა სისტემის სათავედ და საკოორდინატო ღერძები მივმართოთ ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია 218-ე ნახაზზე. მოცემული სისტემის A , B და C წერტილების ექვს კოორდინატზე დადებულია სამი პირობა ($OA = \text{const}$, $AB = \text{const}$, $BC = \text{const}$): მამასადამე, სისტემას აქვს $k=2n-s=2 \cdot 3 - 3 = 3$ თავისუფლების ხარისხი.



ნახ. 218.

ამის შესაბამისად, მოცემული სისტემის მდებარეობა განსაზღვრება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი სამი პარამეტრით, სამი კუთხით — φ_1 , φ_2 და φ_3 -ით.

თითოეული ღეროს წონა შეიძლება დავშალოთ მის ბოლოებზე მოდებულ ორ მდგენელად; მაშინ მივიღებთ 218-ე ნახაზზე მითითებულ ძალთა სისტემას. თუ ვისარგებლებთ ელემენტარული მუშაობის ანალიზური გამოსახულებით, ამ სისტემის წონასწორობის პირობა შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი სახით

$$Q \cdot \delta x_A + Q \delta x_B + \frac{Q}{2} \delta x_C + F \delta y_C = 0.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ამოცანის პირობის თანახმად $F=Q$ და მოვახდენთ შეკვეცას, გვექნება

$$\delta x_A + \delta x_B + \frac{1}{2} \delta x_C + \delta y_C = 0.$$

$OA = a$, $AB = b$ და $BC = c$ აღნიშვნების შემოღების შემდეგ შევიძლია A , B , და C წერტილების კოორდინატები გამოვსახოთ საძიებელი φ_1 , φ_2 , φ_3 კუთხეების საშუალებით:

$$x_A = a \cos \varphi_1, \quad x_B = a \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_2; \quad x_C = a \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_2 + c \cos \varphi_3; \\ y_C = a \sin \varphi_1 + b \sin \varphi_2 + c \sin \varphi_3.$$

აქედან ვპოულობთ ამ წერტილების კოორდინატების ვარიაციების გამოსახულებას φ_1 , φ_2 , φ_3 კუთხეების ვარიაციების საშუალებით:

$$\delta x_A = -a \sin \varphi_1 \delta \varphi_1; \quad \delta x_B = -a \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 - b \sin \varphi_2 \delta \varphi_2; \\ \delta x_C = -a \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 - b \sin \varphi_2 \delta \varphi_2 - c \sin \varphi_3 \delta \varphi_3; \\ \delta y_C = a \cos \varphi_1 \delta \varphi_1 + b \cos \varphi_2 \delta \varphi_2 + c \cos \varphi_3 \delta \varphi_3.$$

კოორდინატების ვარიაციების მიღებული მნიშვნელობების ჩას-
მით სისტემის წონასწორობის პირობების გამომსახველ განტოლ-
ებებში და $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_3$ -ის შემცველ წევრთა დაჭგუფებით მივიღებთ

$$a(\cos\varphi_1 - 2,5\sin\varphi_1)\delta\varphi_1 + b(\cos\varphi_2 - 1,5\sin\varphi_2)\delta\varphi_2 + \\ + c(\cos\varphi_3 - 0,5\sin\varphi_3)\delta\varphi_3 = 0.$$

ამ ტოლობას ადგილი უნდა ჰქონდეს მოცემული სისტემის ყო-
ველი შესაძლო გადაადგილებისას, ე. ი. $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ და $\delta\varphi_3$ ვარიაციების
ნებისმიერი მნიშვნელობის დროს, ხოლო, რადგანაც ეს ვარიაციები
ერთმანეთზე არაა დამოკიდებული და ყოველ მათგანს შეუძლია
ჰქონდეს ნებისმიერი მნიშვნელობა, ამიტომ ეს შეიძლება მხოლოდ
იმ პირობით, რომ ყოველ ამ ვარიაციასთან მდგომი კოეფიციენტი
იყოს ნულის ტოლი, ე. ი.

$$\cos\varphi_1 - 2,5 \sin\varphi_1 = 0,$$

$$\cos\varphi_2 - 1,5 \sin\varphi_2 = 0,$$

$$\cos\varphi_3 - 0,5 \sin\varphi_3 = 0,$$

ანუ

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 0,4; \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = 0.6667; \quad \operatorname{tg}\varphi_3 = 2$$

აქედან ვპოულობთ:

$$\varphi_1 = 21^\circ 48'; \quad \varphi_2 = 33^\circ 40'; \quad \varphi_3 = 64^\circ 25'.$$

III ტიპის ამოცანები

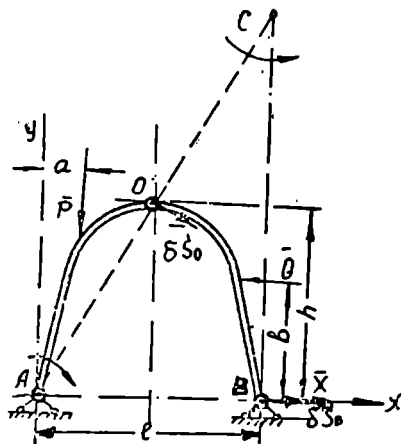
(ამოცანები 46.19(922) — 46.28(924))

მაგალითი 181. სამსახსროვანი თალი არასიმეტრიულად დატვირ-
თულია \vec{P} და \vec{Q} ძალებით (ნახ. 219). იპოვეთ B სახსრის რეაქციის
პორიზონტალური მდგენელი ნახაზზე მითითებული ზომებით.

ამოხსნა. B სახსრის რეაქციის პორიზონტალური მდგენელი
აღვნიშნოთ X -ით. ამ რეაქციის მოსაძებნად საჭიროა უძრავი სახს-
როვანი β საყრდენი შევცვალოთ საგორავი საყრდენით ისე, რომ B
წერტილს შეეძლოს გადაადგილება პორიზონტალური მიმართულე-
ბით. მივანიჭოთ ახლა ამ წერტილს შესაძლო პორიზონტალური δs_B
გადაადგილება. მაშინ OA ნახევართალი უძრავი A წერტილის გარ-
შემო მობრუნდება რაღაც ელემენტარული $\delta\varphi_A$ კუთხით. ამასთანავე.

O წერტილი მიიღებს შესაძლო δs_O გადაადგილებას, რომელიც მი-
მართული იქნება O წერტილის მიერ შემოწერილი წრეწირის მხე-

შის გასწვრივ, ე. ი. AO -ს მართობულად. ვიცით რა B და O წერტი-



ნახ. 219.

ლების δS_B და δS_O შესაძლო გადაადგილებების მიმართულებანი, ვპოულობთ BO ნახევარბრუნვის მყისი C ცენტრს, როგორც O და B წერტილებში δS_O და δS_B ვექტორების მართობულად აღმართული პერპენდიკულარების გადაკვეთის წერტილს. მაშინ BO ნახევარბრუნვის გადაადგილება შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც C ცენტრის გარშემო რაღაც ელემენტარული $\delta \varphi$ კუთხით მობრუნება.

შესაძლო გადაადგილების პრინციპის საფუძველზე ვვაქვს

$$\Sigma \delta A = \delta A_x + \delta A_Q + \delta A_P = 0.$$

თუ გამოვთვლით თითოეული \vec{P} , \vec{Q} , \vec{X} ძალის მუშაობას, როგორც ბრუნვის ცენტრის მიმართ ამ ძალის მომენტის ნამრავლს მობრუნების კუთხეზე (იხ. ფორმულა 163), მივიღებთ

$$\delta A_x = |\text{მომ}_c \vec{X}| \cdot \delta \varphi_c = X \cdot 2h \cdot \delta \varphi_c,$$

$$\delta A_Q = -|\text{მომ}_c \vec{Q}| \cdot \delta \varphi_c = -Q(2h - b) \cdot \delta \varphi_c^*),$$

$$\delta A_P = |\text{მომ}_A \vec{P}| \cdot \delta \varphi_A = P \cdot a \cdot \delta \varphi_A.$$

მაშასადამე, მივიღებთ განტოლებას

$$X \cdot 2h \cdot \delta \varphi_c - Q(2h - b) \cdot \delta \varphi_c + Pa \delta \varphi_A = 0$$

საიდანაც

$$X = \frac{Q(2h - b)}{2h} - \frac{Pa}{2h} \frac{\delta \varphi_A}{\delta \varphi_c}.$$

რადგანაც O წერტილი ერთდროულად ეკუთვნის ორივე OA და OB ნახევარბრუნვას, ამიტომ

*) \vec{Q} ძალის მუშაობა უარყოფითია, რადგანაც \vec{Q} ძალა მიმართულია C ცენტრის მიმართ საათის ისრის მიმართულებით, ხოლო BO ნახევარბრუნვა ამ ცენტრის გარშემო ხდება საათის ისრის საწინააღმდეგოდ.

$$\delta s_o = AO \cdot \delta \varphi_A = OC \cdot \delta \varphi_c.$$

მაგრამ $OA = OC$ და ამიტომ

$$\delta \varphi_A = \delta \varphi_c,$$

და, მაშასადამე,

$$X = \frac{1}{2h} [Q(2h - a) - Pa].$$

§ 8. დინამიკის ზოგადი განოლება

(დალამბერ-ლაგრანჟის განტოლება)

თუ მოძრავი სისტემისათვის ერთდროულად გამოვიყენებთ დალამბერის პრინციპს და შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპს, შემდეგ დასკვნამდე მივალთ: სისტემის მოძრაობისას, რომელიც განიცდის იდეალურ ბმას, სისტემაზე მოქმედი ყველა მოცემული ძალის და სისტემის ნივთიერი წერტილების ინერციის ძალების ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი ყოველ ადებულ მომენტში სისტემის ნებისმიერ შესაძლო გადაადგილებაზე ნულის ტოლია.

ეს შედეგი გამოისახება ერთ-ერთი შემდეგი განტოლებით

$$\Sigma(\vec{F} + \vec{\Phi}) \vec{\delta r} = 0, \quad (242)$$

ანუ, რადგანაც $\vec{\Phi} = -m\vec{w}$,

$$\Sigma(\vec{F} - m\vec{w}) \vec{\delta r} = 0, \quad (243)$$

ანუ კოორდინატებში.

$$\left[\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0. \quad (244)$$

(242) ან (243), ანუ (244) განტოლებას ეწოდება დინამიკის ზოგადი განტოლება (დალამბერ-ლაგრანჟის განტოლება).

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ორი ტიპის ამოცანებს:

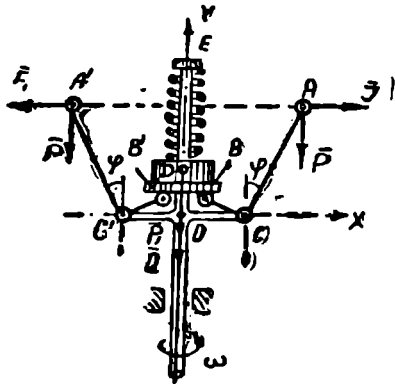
I. ამოცანები, რომლებშიც მოითხოვება სისტემის ფარდობითი წონასწორობის პირობების დადგენა.

II. ამოცანები, რომლებშიც მოითხოვება სისტემის წერტილების აჩქარებათა განსაზღვრა.

თითოეულ ამ ტიპის ამოცანაში შეიძლება განხილულ იქნეს ერთი ან რამდენიმე თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემა.

(ამოცანები 47.1(925)—47.4(929), 47.16(935) — 47.19(939).

მაგალითი 182. ცენტრიდანული რეგულატორი (ნახ. 220) შედგება ორი A და A' ბირთვისაგან თითოეული P წონისა, რომელთა ზომებიც შეიძლება უგულებელვყოთ.



ნახ. 220.

ბირთვები დამაგრებულია ძუბლოვან მართკუთხა ბერკეტების A და A' ბოლოებზე, რომელთაც რეგულატორის ღერძთან უძრავად შეერთებულ $C'OC$ კადონზე აქვთ სახსროვანი C და C' საყრდენები. P_1 წონის D ქურო ქვევით იწნეხება ზამბარით, ხოლო მეორე მხრივ შეკავებულია რეგულატორის ბერკეტების B და B' გორგოლაქებით. განსაზღვრეთ ზამბარის c სიხისტე, თუ მოცემული მუდმივი კუთხური ω სიჩქარის დროს CA

და $C'A'$ ღეროების ვერტიკალიდან გადახრის კუთხე უდრის φ -ს, მოცემულია მანძილები: $OE=l$, $AC=A'C'=a$, $CB=C'B'=b$, $OC=OC'=e$ და არადეფორმირებული ზამბარის სიგრძე $l_0 > l$. ქუროს სიმაღლე უდრის h -ს.

ამოხსნა. კოორდინატთა ღერძები ავიღოთ ისე, როგორც ეს მითითებულია 220-ე ნახაზზე. სისტემაზე მოქმედი მოცემული ძალებია ბირთვებისა და ქუროს წონა და ზამბარის დრეკადობის ძალა $Q=c\lambda$, სადაც λ — ზამბარის (კუმშვის) დეფორმაციაა. ამას გარდა, A და A' წერტილებში მოვდოთ ცენტრიდანული ინერციის $\Phi = \Phi_1 = \frac{P}{g} R\omega^2$ ძალები, სადაც R არის მანძილი თითოეული

ბურთულას ცენტრიდან ბრუნვის y ღერძამდე. დალაშქერ-ლაგრანჯის განტოლების საფუძველზე ყველა ამ ძალის მუშაობათა ჯამი სისტემის ნებისმიერ შესაძლო გადაადგილებაზე უდრის ნულს. მაშასადამე, თუ ვისარგებლებთ ელემენტარული მუშაობის ანალიზური გამოსახულებით, გვექნება

$$\Phi \delta x_A - \Phi_1 \delta x_{A'} - P \delta y_A - P \delta y_{A'} - (P_1 + Q) \delta y_D = 0.$$

მაგრამ

$$x_A = -x_{A'} = e + a \sin \varphi, \quad y_A = y_{A'} = a \cos \varphi, \quad y_D = b \sin \varphi + \frac{h}{2},$$

საიდანაც

$$\delta x_A = -\delta x_{A'} = a \cos \varphi \delta \varphi, \quad \delta y_A = \delta y_{A'} = -a \sin \varphi \delta \varphi, \\ \delta y_D = b \cos \varphi \delta \varphi.$$

გარდა ამისა, $R = x_A = e + a \sin \varphi$ და, მაშასადამე, $\Phi = \Phi_1 = \frac{P}{g} R \omega^2 =$
 $= \frac{P}{g} (e + a \sin \varphi) \omega^2$ ე. ი. დალამბერ-ლანგრანჟის განტოლება მიიღებს
 სახეს

$$\left[2 \frac{P}{g} (e + a \sin \varphi) \omega^2 a \cos \varphi + 2 P a \sin \varphi - (P_1 + Q) b \cos \varphi \right] \delta y = 0.$$

აქედან, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\delta \varphi \neq 0$, ვპოულობთ

$$b Q \cos \varphi = 2 P a \left(\frac{e + a \sin \varphi}{g} \omega^2 \cos \varphi + \sin \varphi \right) - b P_1 \cos \varphi;$$

მაშასადამე,

$$Q = 2 P \frac{a}{b} \left(\frac{e + a \sin \varphi}{g} \omega^2 + \operatorname{tg} \varphi \right) - P_1.$$

Q -ს განსაზღვრის შემდეგ ადვილი საპოვნელია ზამბარის c სიხისტეც. მართლაც, ზამბარის დეფორმაცია $\lambda = l_0 - (l - h - b \sin \varphi)$ და ამიტომ

$$c = \frac{Q}{\lambda} = \frac{Q}{l_0 - l + h + b \sin \varphi}.$$

II ტიპის ამოცანები

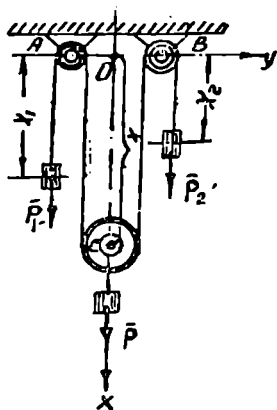
(ამოცანები 47.5(930); 47.20(943)–47.27.(948))

მაგალითი 182. უძრავი ღერძების მქონე A და B ბლოკებზე გადაკიდებულია ზონარი, რომელიც აკაეებს მოძრავ C ბლოკს; ზონარის ნაწილები, რომლებიც ბლოკებზე არ მდებარეობენ, ვერტიკალურია. C ბლოკი დატვირთულია $P = 40$ ნ წონის საწონით, ხოლო ზონარის ბოლოებზე მიმაგრებულია $P_1 = 20$ ნ და $P_2 = 30$ ნ წონის ტვირთები. განსაზღვრეთ სამივე ტვირთის აჩქარება, თუ უგულებელყოფთ ბლოკის და ზონარის მასას და ხახუნს ღერძებში (ნახ. 221).

ამოხსნა. თუ კოორდინატთა ღერძებს ისე განვალაგებთ, როგორც ეს 221-ე ნახაზზეა მითითებული, შეგვიძლია გამოვიყენოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება (244) ფორმით, რომელიც მოცემულ შემთხვევაში იღებს სახეს

$$\left(P - \frac{P}{g}w\right)\delta x + \left(P_1 - \frac{P_1}{g}w_1\right)\delta x_1 + \left(P_2 - \frac{P_2}{g}w_2\right)\delta x_2 = 0.$$

სადაც w , w_1 , w_2 — აღნიშნავენ ტვირთების საძიებელ აჩქარებებს. თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ზონრის სიგრძე მუდმივია, ცხადია, გვექნება



ნახ. 221.

$$x_1 + 2x + x_2 = \text{const.}$$

მაშასადამე, სამი კოორდინატი x_1 , x_2 და x , რომლებიც განსაზღვრავენ მოცემული სისტემის მდებარეობას (იგულისხმება, რომ ყველა ტვირთი გადაადგილდება სწორხაზოვნად), დაკავშირებული არიან ერთი პირობით; მაშასადამე, მოცემულ სისტემას აქვს თავისუფლების ორი ხარისხი. თუ მოვახდენთ წინა განტოლებების ვარიაციას, ეიპოვიით დამოკიდებულებას სამი ტვირთის კოორდინატების ვარიაციებს შორის.

$$\delta x_1 + 2\delta x + \delta x_2 = 0;$$

აქედან

$$\delta x = -\frac{1}{2}(\delta x_1 + \delta x_2).$$

თუ δx -ის მნიშვნელობას ჩავსვამთ დალამბერ-ლანგრანჟის განტოლებაში და ფრჩხილებს გარეთ გამოვიტანთ δx_1 და δx_2 თანამამრავლებს, მივიღებთ

$$\left(P_1 - \frac{P_1}{g}w_1 - \frac{P}{2} + \frac{P}{2g}w\right)\delta x_1 + \left(P_2 - \frac{P_2}{g}w_2 - \frac{P}{2} + \frac{P}{2g}w\right)\delta x_2 = 0.$$

ამ განტოლებას ადგილი აქვს δx_1 და δx_2 ვარიაციების ნებისმიერი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი მნიშვნელობის დროს, ხოლო ეს შესაძლებელია მხოლოდ იმ პირობით, რომ ყოველი ამ ვარიაციის წინ მდგომი კოეფიციენტი ნული იყოს. მაშასადამე, უნდა გვექონდეს

$$\frac{P}{2g}w - \frac{P_1}{g}w_1 = \frac{P}{2} - P_1, \quad \frac{P}{2g}w - \frac{P_2}{g}w_2 = \frac{P}{2} - P_2,$$

ანუ, თუ ჩავსვამთ წონების მოცემული რიცხვით მნიშვნელობებს,

$$w - w_1 = 0, \quad 2w - 3w_2 = -g.$$

აქედან

$$w_1 = w \quad \text{და} \quad w_2 = \frac{2}{3}w + \frac{g}{3}.$$

რომ მივიღოთ მესამე განტოლება სამი საძიებელი აჩქარების განსასაზღვრავად გავაწარმოთ ორჯერ t -თი განტოლება $x_1 + 2x + x_2 = \text{const}$; გვექნება

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} = 0, \quad \text{ანუ} \quad w_1 + 2w + w_2 = 0,$$

თუ აქ ჩავსვამთ w_1 და w_2 -ის მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$w + 2w + \frac{2}{3}w + \frac{g}{3} = 0.$$

აქედან ვპოულობთ

$$w = -\frac{g}{11},$$

და მაშასადამე,

$$w_1 = -\frac{g}{11}, \quad w_2 = -\frac{2}{33}g + \frac{g}{3} = \frac{3}{11}g.$$

w და w_1 აჩქარებათა უარყოფითი მნიშვნელობანი იმაზე მიგვითითებს, რომ მათი მიმართულებანი ემთხვევიან x ღერძის უარყოფით მიმართულებებს, ე. ი. ეს აჩქარებები მიმართულია ზემოთ.

§ 4. ლაგრანჟის II ვარიუს განზოგადება

სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები განზოგადებულ კოორდინატებში

მექანიკური სისტემის განზოგადებულ კოორდინატებში. ეწოდებათ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელ პარამეტრებს, რომელთა საშუალებითაც ყოველ მოცემულ მომენტში შეიძლება განვსაზღვროთ ამ სისტემის მდებარეობა და, მაშასადამე, შეიძლება გამოვსახოთ მისი ყველა წერტილის დეკარტეს კოორდინატები.

ამგვარად, თუ აღენიშნავენ k განზოგადებულ კოორდინატებს q_1, q_2, \dots, q_k -თი, მაშინ სისტემის ყოველი ნივთიერი M_i (x_i, y_i, z_i) წერტილის დეკარტეს კოორდინატი შეიძლება გამოვსახოთ როგორც q_1, q_2, \dots, q_k პარამეტრებისა და t დროის ფუნქცია, ე. ი.

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t). \end{aligned} \right\} (i=1, 2, \dots, n). \quad (245)$$

თუ სისტემაზე დადებული ბმები სტაციონარულია, მაშინ ამ განტოლებების მარჯვენა მხარეში t დრო არ შევა. დამოუკიდებელ გან-

ზოგადებულ კოორდინატთა k რიცხვი უდრის მოცემული სისტემის თავისუფლების ხარისხს.

მოცემული მექანიკური სისტემის განზოგადებულ კოორდინატთა რიცხვის, ე. ი. თავისუფლების ხარისხის რიცხვის შესაბამისად გვექნება ლაგრანჟის II გვარის k განტოლება:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{di}{dq_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= Q_k, \end{aligned} \right\} \quad (246)$$

სადაც $T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$ — სისტემის კინეტიკური ენერგია. $Q_1, Q_2,$

Q_k — ეგრეთ წოდებული განზოგადებული ძალებია, რომლებიც განისაზღვრებიან ფორმულებით:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right), \\ Q_k &= \sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right). \end{aligned} \right\} \quad (247)$$

განზოგადებული კოორდინატების წარმოებულებს დროით $q_1, q_2,$

q_k განზოგადებული სიჩქარეები ეწოდება.

ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები წარმოადგენენ მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას უცნობი q_1, q_2, \dots, q_k ფუნქციების მიმართ.

ამისათვის, რომ ეს განტოლებები შევადგინოთ, საჭიროა სისტემის კინეტიკური ენერგია T გამოვსახოთ განზოგადებული კოორდინატების და განზოგადებული სიჩქარეების საშუალებით. რაც შეეხება განზოგადებულ ძალებს, ისინი შეიძლება გამოვთვალოთ ერთ-ერთი შემდეგი ხერხით:

ა) უშუალოდ (247) ფორმულით;

ბ) რომ ვიპოვოთ განზოგადებული q_j კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული Q_j ძალა, საჭიროა მოცემულ მექანიკურ სისტემას მივანიჭოთ ისეთი შესაძლო გადაადგილება, რომლის დროსაც შეიცვლება მხოლოდ ერთი q_j კოორდინატი, ხოლო დანარჩენი განზოგადებული კოორდინატები რჩებიან უცვლელნი; შემდეგ კვლავ მოცე-

რული ძალისათვის ამ გადაადგილებაზე შევადგინოთ ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი $\sum_{i=1}^n \delta A_{ji}$ და გავყოთ ეს ჯამი δq_j ვარიაციაზე, ე. ი.

$$Q_j = \frac{\sum_{i=1}^n \delta A_{ji}}{\delta q_j} \quad (j=1, 2, \dots, k). \quad (248)$$

გ) კერძო შემთხვევებში, თუ სისტემა განიცდის პოტენციალის მქონე ძალთა მოქმედებას, მაშინ განზოგადებული ძალები განისაზღვრებიან ფორმულით

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (249)$$

სადაც U —ძალთა ფუნქციაა, ხოლო Π —სისტემის პოტენციური ენერგია, ე. ი. განზოგადებული ძალა უდრის ძალთა ფუნქციის კერძო წარმოებულს შესაბამისი განზოგადებული კოორდინატით ან სისტემის პოტენციური ენერგიის კერძო წარმოებულს შესაბამისი განზოგადებული კოორდინატით, აღებული მინუს ნიშნით.

განზოგადებული ძალების (249) ფორმულით გამოთვლის დროს აუცილებელია წინასწარ ძალთა ფუნქცია ან სისტემის პოტენციური ენერგია გამოვსახოთ ამ სისტემის განზოგადებული კოორდინატებით.

თუ გავაინტეგრირებთ ლაგრანჟის განტოლებათა სისტემას, ეიპოვით განზოგადებულ q_1, q_2, \dots, q_k კოორდინატებს, როგორც l დროის და $2k$ ნებისმიერი C_1, C_2, \dots, C_{2k} მუდმივების ფუნქციებს, რომელი მუდმივებიც განისაზღვრებიან სისტემის მოძრაობის საწყისი პირობებით.

ამოცანები ლაგრანჟის განტოლებების გამოყენებაზე უმეტეს შემთხვევაში შეიძლება მივაკუთვნოთ ერთ-ერთს შემდეგი ტიპებიდან:

I. ამოცანები, რომლებშიც მოითხოვება მხოლოდ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებების შედგენა.

II. ამოცანები, რომლებშიც მოითხოვება წრფივი ან კუთხური აჩქარების განსაზღვრა.

III. ამოცანები, რომლებიც ეხებათ სისტემის მცირე რხევებს.

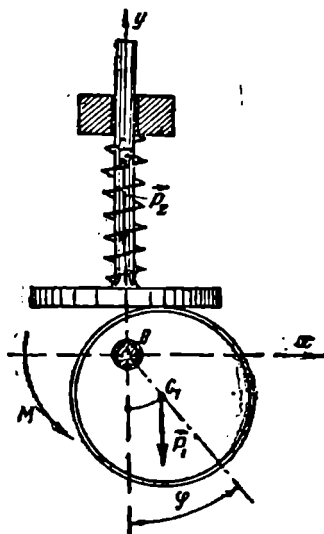
თითოეული ამ ტიპის ამოცანები შეიძლება დაიყოს ორ ჯგუფად იმის მიხედვით, მოცემულ ამოცანაში სისტემა განიხილება ერთი, თუ ერთზე მეტი თავისუფლების ხარისხით.

I ტიპის ამოცანები

პირველი ჯგუფი

(ამოცანები 48.8(1190), 48.11(1193), 48.12(1194), 48.14(1196), 48.15(1197), 48.12(1201), 48.21(1203) — 48.23(1205))

მაგალითი 184. მუშტა, რომელსაც აქვს R -რადიუსიანი მრგვალი-ეკსცენტრიკის ფორმა, ბრუნავს O ღერძის გარშემო წყვილძალით, რომლის მომენტია M (ნახ. 222). მუშტას წონა არის P_1 და მისი სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს გეომეტრიულ C_1 ცენტრში, ამასთანავე $OC_1 = e$; მუშტას ინერციის რადიუსი O ღერძის მიმართ უდრის k -ს. მუშტაზე საბიძგებელა თევზის მიმკერი ზამბარის სიხისტეა c და საბიძგებელას უდაბლეს მდებარეობაში ($\varphi = 0$) ზამბარა შეკუმშულია λ_0 სიდიდით. მიიღეთ მუშტას მობრუნების φ კუთხე განზოგადებულ კოორდინატად და შეადგინეთ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება. ხახუნი უგულვებლყავით. საბიძგებელას წონაა P_2 .



ნახ. 222.

ამოხსნა. სისტემის მოძრაობა განისაზღვრება ერთი განტოლებით

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \quad (a)$$

სისტემის T კინეტიკური ენერჯია წარმოადგენს მუშტას T_1 კინეტიკური ენერჯიის და საბიძგებელას T_2 კინეტიკური ენერჯიების ჯამს, ამასთანავე,

$$T_1 = \frac{I_0 \omega^2}{2} = \frac{P_1}{g} k^2 \frac{\varphi^2}{2}; \quad T_2 = \frac{P_2}{g} \frac{y_2^2}{2}.$$

გარდა ამისა,

$$\left. \begin{aligned} y_{C_1} = y_1 = -OC_1 \cos \varphi; &= -e \cos \varphi; \\ y_{C_2} = y_2 = R - e \cos \varphi + \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\dot{y}_2 = e \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}$, გვექნება:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1}{g} k^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{P_2}{g} e^2 \frac{\sin^2 \varphi}{2} \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2g} (P_1 k^2 + P_2 e^2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{g} (P_1 k^2 + P_2 e^2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{1}{g} (P_1 k^2 + P_2 e^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + \frac{1}{g} P_2 e^2 \sin 2\varphi \cdot \dot{\varphi}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2g} P_2 e^2 \sin 2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2. \quad (3)$$

გადავიღეთ განზოგადებული ფ კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული ძალის განსაზღვრაზე. მამოძრავებელი M მომენტის გარდა სისტემაზე მოქმედებენ მუშტას და საბიძგებელას P_1 და P_2 წონები, აგრეთვე ზამზარის ღრეკადობის P ძალა. ეს უკანასკნელი მიმართულია ვერტიკალურად ქვევით და მოდულით განისაზღვრება ასე

$$P = c(\lambda_0 + e - e \cos \varphi).$$

ვახდენთ ფ კუთხის ვარირებას და ვსაზღვრავთ სისტემაზე მოქმედი აქტიური ძალების შესაძლო მუშაობათა ჯამს

$$\sum \delta A = M \delta \varphi - P_1 \cdot \delta y_1 - P_2 \delta y_2 - P \cdot \delta y_2.$$

მაგრამ (ბ) ტოლობის საფუძველზე გვაქვს:

$$\delta y_1 = e \sin \varphi \cdot \delta \varphi; \quad \delta y_2 = e \cdot \sin \varphi \cdot \delta \varphi.$$

მაშასადამე,

$$\sum \delta A = M \delta \varphi - [P_1 + P_2 + c(\lambda_0 + e - e \cos \varphi)] e \sin \varphi \delta \varphi.$$

აქედან ვპოულობთ განზოგადებულ ფ კოორდინატის შესაბამისი სისტემის განზოგადებულ ძალას

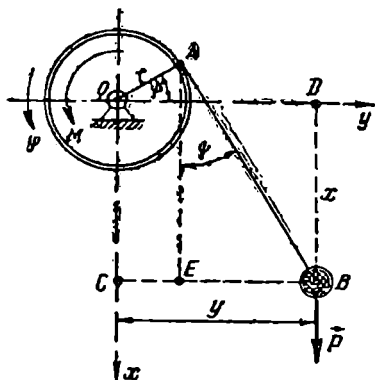
$$Q = \frac{\sum \delta A}{\delta \varphi} = M - [P_1 + P_2 + c(\lambda_0 + e - e \cos \varphi)] e \cdot \sin \varphi \quad (4)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (2), (3), და (4) ტოლობებს, (ა) განტოლება შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ

$$(P_1 k^2 + P_2 e^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + 0,5 P_2 e^2 \sin 2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + [P_1 + P_2 + c(\lambda_0 + e - e \cos \varphi)] e g \sin \varphi = Mg.$$

(ამოცანები 48.28(1210), 48.30(1213), 48.31(1214), 48.37(1218), 48.40(1221)).

მაგალითი 185. r -რადიუსიან ბორბალზე დახვეულია ძაფი, რომლის ბოლოში დაკიდებულია წერტილოვანი ტვირთი, წონით $P = mg$, სადაც m — ტვირთის მასაა (ნახ. 223). ბორბალზე მოდებულია მამრუნებელი M მომენტი, რომლის დახმარებითაც ეს ტვირთი აიწევა ზევით და ამასთანავე იგი ქანაობს ვერტიკალურ სიბრტყეში. შეადგინეთ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება, თუ ბორბლის ინერციის მომენტი მისი ღერძის მიმართ ტოლია I_0 -ის და ძაფის დაკიდებული ნაწილის სიგრძე მის ვერტიკალურ მდებარეობაში საწყის მომენტში უდრის l_0 -ს.



ნახ. 223.

ბორბლის მობრუნების φ კუთხე და ვერტიკალიდან ძაფის გადახრის Ψ კუთხე. მაშინ სისტემის მოძრაობა განისაზღვრება განტოლებებით

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_{\varphi}; \\ \frac{\partial T}{\partial l} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \Psi} &= Q_{\Psi}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

მანძილი ტვირთის დაკიდების B წერტილიდან ბორბალზე ძაფის სწრაფობის A წერტილამდე განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$l = BA = l_0 - r\varphi + r\Psi.$$

აქედან ვპოულობთ B წერტილის კოორდინატებს;

$$\left. \begin{aligned} x &= l \cos \Psi - r \sin \Psi = (l_0 - r\varphi + r\Psi) \cos \Psi - r \sin \Psi; \\ y &= l \sin \Psi + r \cos \Psi + (l_0 - r\varphi + r\Psi) \sin \Psi + r \cos \Psi. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია წარმოადგენს ბორბლის და ტვირთის კინეტიკური ენერგიების ჯამს

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

მაგრამ (ბ) ტოლობის საფუძველზე

$$\dot{x} = -r\dot{\varphi} \cos \Psi - (l_0 - r\varphi + r\Psi) \sin \Psi \cdot \dot{\Psi};$$

$$\dot{y} = -r\dot{\varphi} \sin \Psi + (l_0 - r\varphi + r\Psi) \cos \Psi \cdot \dot{\Psi}.$$

მაშასადამე,

$$T = \frac{I_0}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} [r^2 \dot{\varphi}^2 + (l_0 - r\varphi + r\Psi)^2 \dot{\Psi}^2].$$

ეწარმოთ მოქმედებანი, რომლებიც მითითებულია (ა) განტოლებებით:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= I_0 \dot{\varphi} + m r^2 \dot{\varphi} = (I_0 + m r^2) \dot{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= (I_0 + m r^2) \ddot{\varphi}, \\ \frac{\partial T}{\partial \Psi} &= -m r (l_0 - r\varphi + r\Psi) \dot{\Psi}^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}} &= m (l_0 - r\varphi + r\Psi)^2 \dot{\Psi}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}} \right) &= m r (l_0 - r\varphi + r\Psi)^2 \ddot{\Psi} \pm 2 m r (l_0 - r\varphi + r\Psi) (\dot{\Psi} - \dot{\varphi}) \dot{\Psi}; \\ \frac{\Psi}{\partial T} &= m r (l_0 - r\varphi + r\Psi) \dot{\Psi}^2; \end{aligned} \quad (4)$$

მოვახდინოთ φ და Ψ კოორდინატების ვარირება, ვიპოვიოთ სისტემაზე მოქმედი ძალების შესაძლო მუშაობათა ჯამს

$$\Sigma \delta A = M \delta \varphi + P \delta x,$$

მაგრამ (ბ) განტოლების საფუძველზე გვაქვს

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial x}{\partial \Psi} \delta \Psi = -r \cos \Psi \delta \varphi - (l_0 - \varphi + r\Psi) \sin \Psi \cdot \delta \Psi.$$

ამგვარად,

$$\Sigma \delta A = (M - P r \cos \Psi) \delta \varphi - P (l_0 - r\varphi + r\Psi) \sin \Psi \delta \Psi.$$

შესაძლო მუშაობებში განზოგადებული კოორდინატების $\delta \varphi$ და $\delta \Psi$ ვარიაციების კოეფიციენტები არიან სწორედ სისტემის განზოგადებული ძალები

$$\left. \begin{aligned} Q_\varphi &= M - P \cos \Psi; \\ Q_\psi &= -P(l_0 - r\varphi + r\Psi \sin \psi) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (გ), (დ) და (ე) ტოლობებს, მაშინ (ა) განტოლება შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$(l_0 + mr^2)\varphi + mr(l_0 - r\varphi + r\Psi)\Psi^2 = M - P \cos \Psi;$$

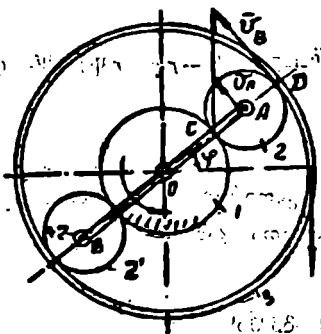
$$(l_0 - r\varphi + r\Psi)\ddot{\Psi} + r(\Psi - 2\varphi)\dot{\Psi} = -g \sin \Psi.$$

II ტიპის ამოცანები

(ა) **კეპლერის ბუფი** — თუ გვინდა, რომელიმე

(ამოცანები 48.1(1179), 48.2(1180), 48.4(1182) — 48.7(1189))

მაგალითი 180. *AB* სატარე, რომელიც წარმოადგენს $2l$ სიგრძისა და m მასის ერთგვაროვან წვრილ ღეროს, ბრუნავს უძრავ კბილანას O ღერძის გარშემო მასზე მოდებული M მომენტის მოქმედებით და მოძრაობაში მოჰყავს სატარზე თავისუფლად ჩამოკმული ორი ერთნაირი $m_2 = m$ მასის და r რადიუსის 2 და 2' კბილანები, რომლებიც დაგორავენ მათთან ჩაბმაში მყოფ უძრავ კბილანაზე და მოძრაობაში მოჰყავთ კბილანა ბორბალი 3, რომლის მასაა $m_3 = \frac{5}{3}m$.



3 ბორბლის წრეწირზე მოდებული

ღერა წინაღობის P ძალა განსაზღვრეთ სატარის კუთხური $\dot{\varphi}$ აჩქარება, თუ 2 და 2' კბილანები წარმოადგენენ მთლიან ერთგვაროვან ω დისკებს ხოლო 3 ბორბლის მასა თანაბარაა განაწილებული მის წრეწარზე (ნახ. 224).

ნახ. 224.

შედეგად მივიღებთ $\dot{\varphi} = \frac{P}{M} \frac{1}{1 + \frac{m}{M} \frac{r^2}{l^2} + \frac{m}{M} \frac{r^2}{l^2} + \frac{m_3}{M} \frac{r^2}{l^2}}$ ვინისაზღვრება ერთი — პარამეტრით — სატარის მობრუნების φ კუთხით, რომელსაც ვიღებთ განზოგადებულ კოორდინატად. ამის შესაბამისად ამ ამოცანაში გვექნება ერთი განტოლება $(\Psi + \varphi - \alpha)\ddot{\Psi} - \varphi \dot{\Psi}^2 = -g \sin \Psi$.

შედეგად მივიღებთ $\dot{\varphi} = \frac{P}{M} \frac{1}{1 + \frac{m}{M} \frac{r^2}{l^2} + \frac{m}{M} \frac{r^2}{l^2} + \frac{m_3}{M} \frac{r^2}{l^2}}$ ვინისაზღვრება ერთი — პარამეტრით — სატარის მობრუნების φ კუთხით, რომელსაც ვიღებთ განზოგადებულ კოორდინატად. ამის შესაბამისად ამ ამოცანაში გვექნება ერთი განტოლება $(\Psi + \varphi - \alpha)\ddot{\Psi} - \varphi \dot{\Psi}^2 = -g \sin \Psi$.

სატარის კინეტიკური ენერჯიის — $T_{\text{სტ}}$, ორი ბორბნალი კბილანას კინეტიკური ენერჯიის — $2T_2$ და $3T_3$ ბორბლის კინეტიკური ენერჯიის ჯამს

$$T = T_{\text{სტ}} + 2T_2 + T_3 = \frac{I\omega^2}{2} + 2\left(\frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2}\right) + \frac{I_3 \omega_3^2}{2}$$

სადაც l და l_3 — სატარისა და 3 ბორბლის ინერციის მომენტებია O ღერძის მიმართ; ხოლო l_2 — 2 კბილანას ინერციის მომენტია ბრუნვის A ღერძის მიმართ.

2 კბილანას ω_2 და 3 კბილანას ω_3 კუთხურ სიჩქარეებს, აგრეთვე A წერტილის ხაზოვან სიჩქარეს გამოვსახოთ სატარის კუთხური სიჩქარით $\omega = \varphi$, რომელიც მოცემულ შემთხვევაში წარმოადგენს განზოგადებულ სიჩქარეს:

$$v_A = \omega \cdot OA = 2\omega l; \quad \omega_2 = \frac{v_A}{CA} = \frac{\omega l}{r}$$

(2 კბილანას ბრუნვის მყისი ცენტრი მდებარეობს ამ კბილანასა და უძრავი 1 კბილანას ჩაბმის C წერტილში); ω_3 -ის განსასაზღვრავად ეპოულობთ 2 კბილანას და 3 ბორბლის ჩაბმის D წერტილის სიჩქარეს

$$v_D = 2v_A = 2\omega l$$

მაშასადამე,

$$\omega_3 = \frac{v_D}{OD} = \frac{2\omega l}{l+r}$$

ახლა ვითვლით ინერციის მომენტებს:

$$I = \frac{m(AB)^2}{12} = \frac{m \cdot 4l^2}{12} = \frac{ml^2}{3}; \quad I_2 = \frac{m_2 r^2}{2} = \frac{mr^2}{2};$$

$$I_3 = m_3 \cdot OD^2 = \frac{5}{3} m(l+r)^2.$$

ამგვარად, სისტემის კინეტიკური ენერჯიისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას

$$\begin{aligned} T &= \frac{ml^2}{6} \omega^2 \pm m\omega^2 l^2 + \frac{mr^2}{2} \frac{\omega^2 l^2}{r^2} + \frac{5}{6} m(l+r)^2 \cdot \frac{4\omega^2 l^2}{(l+r)^2} = \\ &= \frac{ml^2 \omega^2}{6} \pm m\omega^2 l^2 + \frac{ml^2 \omega^2}{2} + \frac{10}{3} ml^2 \omega^2 = 5\omega^2 l^2 m = 5l^2 \dot{\varphi}^2 m. \end{aligned}$$

აქედან ეპოულობთ

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 10l^2 m \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 10ml^2 \ddot{\varphi} = 10ml^2 \varepsilon,$$

სადაც ε არის სატარის კუთხური აჩქარება; $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$, რადგანაც T არ არის დამოკიდებული φ -ზე.

ახლა განვსაზღვროთ განზოგადებული ძალა.

სატარის ელემენტარული $\delta\varphi$ კუთხით მობრუნების დროს მოცემულ სისტემაზე მოქმედი ძალების მუშაობათა ჯამი

$$\Sigma \delta A = M \delta \varphi - P(l+r) \delta \varphi$$

სადაც $\delta\varphi_3$ არის 3 ბორბლის მობრუნების კუთხე. მაგრამ დამოკიდებულება φ და φ_3 კუთხეებს შორის ცხადია ისეთივეა, როგორც სატარისა და 3 ბორბლის კუთხურ სიჩქარეებს შორის. მაშასადამე,

$$\delta\varphi_3 = \frac{2l}{l+r} \delta\varphi.$$

ამიტომ

$$\Sigma \delta A = M \delta \varphi - P(l+r) \frac{2l}{l+r} \delta \varphi = (M - 2Pl) \delta \varphi;$$

აქედან

$$Q = \frac{\Sigma \delta A}{\delta \varphi} = M - 2Pl.$$

თუ ჩავსვამთ განზოგადებული ძალებისა და $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right)$ და $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$

წარმოებულების ნაბოენ მნიშვნელობებს ლაგრანჟის განტოლებაში, მივიღებთ

$$10ml^2 \varepsilon = M - 2Pl,$$

საიდანაც

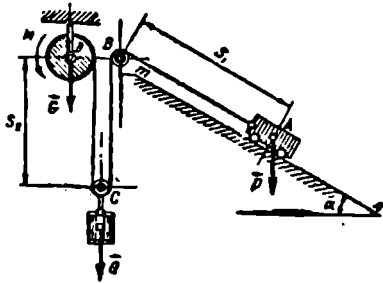
$$\varepsilon = \frac{M - 2Pl}{10ml^2}.$$

მეორე ჯგუფი

(ამოცანები 47.20(943) — 47.25(947), 43.4(1114, 1120))

მაგალითი 187. უწონი და უჭიმარი ძაფი, რომელიც დახვეულია $R=10$ სმ რადიუსის და $G=20$ ნ წონის ერგვაროვან ცილინდრულ

დოლზე, შემოვლებულია მოძრავ C ბლოკზე, უძრავ B ბლოკზე და მიემართება პორიზონტისადმი $\alpha=30^\circ$ კუთხით დახრილ mn სიბრტყის პარალელურად (ნახ. 225). ძაღის თავისუფალ ბოლოზე მიბმულია



ნახ. 225

$P=40$ ნ წონის ტვირთი, რომელსაც შეუძლია ხახუნის გარეშე გადაადგილდეს mn სიბრტყეზე, ხოლო მოძრავ ბლოკზე დაკიდებულია $Q=20$ ნ წონის ტვირთი. განსაზღვრეთ ტვირთის აჩქარება, თუ დოლზე მოდებულია წყვილძალა $M=1$ ნმ მომენტი და მიმართულია ისე, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები, B და C ბლოკების მასები უგულებელყავით.

ამოხსნა. სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. სისტემის განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ s_1 და s_2 მანძილები (ნახ. 225). მაშინ სისტემის მოძრაობა განისაზღვრება განტოლებებით:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial s_1} &= Q_1; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial s_2} &= Q_2. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

თუ D დოლის მობრუნების კუთხეს აღვნიშნავთ φ -თი, გვექნება

$$s_1 + s_2 + R\varphi = L = \text{const}. \quad (b)$$

შევადგინოთ სისტემის კინეტიკური ენერჯიის გამოსახულება

$$T = \frac{P}{g} \frac{\dot{s}_1^2}{2} + \frac{Q}{g} \frac{\dot{s}_2^2}{2} + \frac{GR^2}{2g} \frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

(ბ) ტოლობის საფუძველზე

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{R}(\dot{s}_1 + 2\dot{s}_2).$$

მაშასადამე,

$$T = \frac{1}{2g} [Ps_1^2 + Qs_2^2 + 0,5G(s_1 + 2s_2)^2].$$

შევასრულოთ (ა) განტოლებებში მითითებული მოქმედებები:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} = \frac{1}{g} [P\dot{s}_1 + 0,5G(\dot{s}_1 + 2\dot{s}_2)];$$

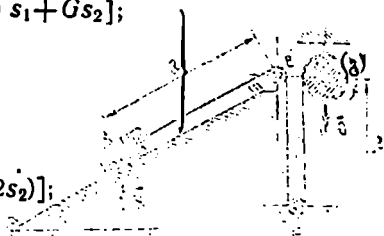
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} \right) = \frac{1}{g} [(P + 0,5G)\ddot{s}_1 + G\ddot{s}_2];$$

$$\frac{\partial T}{\partial s_1} = 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} = \frac{1}{g} [Q\dot{s}_2 + G(\dot{s}_1 + 2\dot{s}_2)];$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} \right) = \frac{1}{g} [G\ddot{s}_1 + (Q + 2G)\ddot{s}_2];$$

$$\frac{\partial T}{\partial s_2} = 0.$$



(ა)

თუ მოვახდენთ სისტემის განზოგადებული კოორდინატების ვარიირებას, ვიპოვით სისტემაზე მოქმედი ძალების შესაძლო მუშაობათა ჯამს

$$\Sigma \delta A = P \sin \alpha \delta s_1 + Q \delta s_2 + M \delta \varphi,$$

მაგრამ (ბ) ტოლობის საფუძველზე

$$\delta \varphi = -\frac{1}{R} (\delta s_1 + 2\delta s_2).$$

მაშასადამე,

$$\Sigma \delta A = \left(P \sin \alpha - \frac{M}{R} \right) \delta s_1 + \left(Q - 2 \frac{M}{R} \right) \delta s_2.$$

აქედან განვსაზღვრავთ განზოგადებულ ძალებს:

$$Q_1 = P \sin \alpha - \frac{M}{R},$$

$$Q_2 = Q - 2 \frac{M}{R}. \quad (ე)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (ვ), (დ) და (ე) ტოლობებს, (ა) განტოლება შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$(P + 0,5G)\ddot{s}_1 + G\ddot{s}_2 = \left(P \sin \alpha - \frac{M}{R} \right) g;$$

$$G\ddot{s}_1 + (Q + 2G)\ddot{s}_2 = \left(Q - 2 \frac{M}{R} \right) g.$$

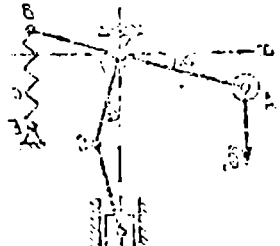
ჩვესვით აქ რიცხვითი მნიშვნელობანი გვექნება:

$$5s_1 + 2s_2 = g;$$

$$s_1 + 3s_2 = 0.$$

აქედან

$$s_1 = \frac{3}{23}g, \quad s_2 = -\frac{1}{13}g.$$



ამოცანები III ტიპის ამოცანები

ამ ტიპის ამოცანებში განიხილება ერთი (პირველი ჯგუფი) ან ორი (მეორე ჯგუფი) თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის მცირე რხევები მდგრადი წონასწორობის მდგომარეობის მახლობლობაში. ამ ამოცანებში მდგრადი წონასწორობის მდგომარეობა უნდა მივიღოთ განზოგადებული კოორდინატების ათელის საწყისად და შემდეგ ვისარგებლოთ ლაგრანჟის განტოლებებით და შევადგინოთ სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები.

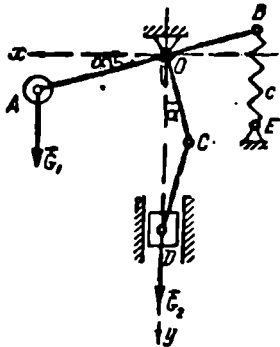
ეს განტოლებები მიიღებინან, ზოგადად რომ ვთქვათ, არაწრფივები. მაგრამ, თუ წინასწარ ცნობილია, რომ განზოგადებული კოორდინატები და განზოგადებული სიჩქარეები წარმოადგენენ მცირე სიდიდეებს, მაშინ მდებარე განტოლებები შეიძლება გავაწრფივოთ. გაწრფივებული განტოლებები მიიღებინან მოკეშული არაწრფივი განტოლებებიდან იმ წევრების უკუვადებით, რომლებიც შეიცავენ განზოგადებული კოორდინატების და სიჩქარეების კვადრატებს და უფრო მაღალი რიგის ხარისხებს. მაგალითად, α კოორდინატის მცირე მნიშვნელობის დროს შეიძლება დაუშვათ $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$. წევრები, რომლებიც შეიცავენ α^2 , α^2 , $\alpha\dot{\alpha}$ -ს, საჭიროა უკუვადოთ.

სივრცის ირრველითა და უფრო

ამოცანები III ტიპის (1243) - 53, 5 (1247) - 11

მაგალითი 188. შეადგინეთ 226-ე ნახაზზე ნაჩვენები სისტემის მცირე რხევების დიფერენციალური განტოლება მისი წონასწორობის მდგომარეობის მახლობლობაში და გამოკეთოთ რხევების სპერიოდი, თუ ცნობილია A და D ტვირთების m_1 და m_2 მასებანი, BE ხაზბარის სიხისტე და ღეროების სიგრძეები $OA = l_1$, $OB = OC = CD = l_2$. ზამბარის და ღეროების მასები, აგრეთვე A ტვირთის ზომები შეიძლება უგულებელყოთ. AB ღეროს პორიზონტალურად დებაკეობისას A

ტვირთის წონა გაწონასწორებულია ზამბარის დრეკადობის ძალით. წონასწორობის მდგომარეობიდან სისტემის მცირე გადახრისას შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ზამბარა რჩება ვერტიკალური.



ნახ. 226.

ამოხსნა. ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე მოცემული სისტემის განზოგადებულ კოორდინატად მივიღოთ ჰორიზონტალიდან AB ღეროს გადახრის α კუთხე, რომელიც აითვლება x ღერძიდან საათის ისრის საწინააღმდეგოდ, მაშინ გვაქვს ლაგრანჟის განტოლება:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q.$$

გამოვითვლით სისტემის კინეტიკურ ენერგიას

$$T = \frac{m_1 v_A^2}{2} + \frac{m_2 v_D^2}{2},$$

სადაც v_A და v_D — A და D ტვირთების სიჩქარეებია, მაგრამ

$$v_A = l_1 \dot{\alpha} \text{ და } v_D = \dot{y}_D = \frac{d}{dt} (2l_2 \cos \alpha) = -2l_2 \sin \alpha \cdot \dot{\alpha},$$

ამიტომ

$$T = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + 4m_2 l_2^2 \sin^2 \alpha) \dot{\alpha}^2.$$

სისტემის მცირე რხევების შემთხვევაში შეიძლება უკუვავადლოთ მე-4 რიგის მცირე წევრი $\sin^2 \alpha \cdot \dot{\alpha}^2$. მაშინ $T = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\alpha}^2$.

გამოვითვლით სისტემის პოტენციურ ენერგიას

$$\begin{aligned} \Pi = m_1 g (h - y_A) + m_2 g (h - y_D) + \frac{c \lambda^2}{2} &= m_1 g (h - l_1 \sin \alpha) + \\ + m_2 g (h - 2l_2 \cos \alpha) + \frac{c \lambda^2}{2}, \end{aligned}$$

სადაც h არის O წერტილის სიმაღლე დედამიწის ზედაპირიდან, λ — ზამბარის დაგრძელება, ამასთანავე

$$\lambda = \lambda_{\text{სტ}} + l_2 \sin \alpha,$$

სადაც $\lambda_{\text{სტ}}$ — ზამბარის სტატიკური დაგრძელებაა სისტემის წონასწორობის მდგომარეობისათვის.

მაშასადამე,

$$\Pi = (m_1 + m_2)gh - m_1gl_1\sin\alpha - 2m_2gl_2\cos\alpha + \frac{c}{2}(\lambda_{\text{სფ}} + l_2\sin\alpha)^2.$$

ახლა ვპოულობთ

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = m_1 l_1^2 \ddot{\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = m_1 l_1^2 \ddot{\alpha}, \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0.$$

გამოვითვლით განზოგადებულ ძალას, როგორც პოტენციური ენერჯიის კერძო წარმოებულს განზოგადებული კოორდინატით, აღებულს შებრუნებული ნიშნით

$$Q = - \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = m_1 g l_1 \cos\alpha - 2m_2 g l_2 \sin\alpha - c(\lambda_{\text{სფ}} + l_2 \sin\alpha) l_2 \cos\alpha.$$

ჩადგანაც სისტემის წონასწორობის მდგომარეობაში AB ბერკეტზე მოდებული ძალების (A ტვირთის წონა და ზამბარის დრეკადი ძალის) O ცენტრის მიმართ მომენტების ჯამი ნულის ტოლია, ამიტომ $m_1 g l_1 = c \lambda_{\text{სფ}} l_2$ და გვექნება

$$Q = - (2m_2 g l_2 + c l_2 \cos\alpha) \sin\alpha = - l_2 (2m_2 g + c l_2 \cos\alpha) \sin\alpha.$$

სისტემის მცირე რხევების დროს წონასწორობის მდგომარეობის შახლობლობაში α კუთხის სიმცირის გამო შეიძლება დაეუშვათ

$$\sin\alpha \approx \alpha \quad \text{და} \quad \cos\alpha \approx 1,$$

მაშინ

$$Q = - l_2 (2m_2 g + c l_2) \alpha.$$

თუ ჩაესვამთ $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right)$, $\frac{\partial T}{\partial \alpha}$ წარმოებულების და განზოგადებული

Q ძალის მნიშვნელობებს ლაგრანჯის განტოლებაში, მივიღებთ მოცემული სისტემის მცირე რხევების დიფერენციალურ განტოლებას

$$m_1 l_1^2 \ddot{\alpha} + l_2 (2m_2 g + c l_2) \alpha = 0,$$

ანუ

$$\ddot{\alpha} + k^2 \alpha = 0,$$

სადაც

$$k^2 = \frac{l_2 (2m_2 g + c l_2)}{m_1 l_1^2}.$$

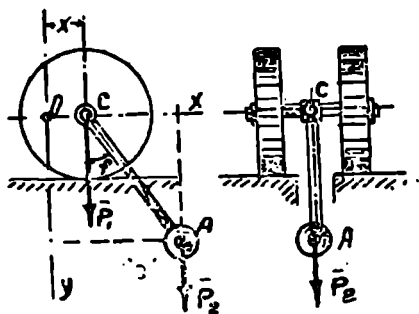
მივიღეთ ჰარმონიული რხევის დიფერენციალური განტოლება წრიული k სიხშირით. ამ რხევის პერიოდია

$$\frac{2\pi}{k} = 2\pi l_1 \sqrt{\frac{m}{l_2(2m_2g + cl_2)}}$$

მეორე ჯგუფი

(ამოცანები 48.38(1219), 54.4(1301), 54.8(1303))

მაგალითი 180. ორი ერთგვაროვანი მთლიანი ცილინდრი, საერთო წონით P_1 , რომლებიც ხისტადაა დამაგრებული ღერძზე, რომლის სისქე და მასა შეიძლება უგულვებელყოთ. ქმნიან ჰორიზონტალურ



ნახ. 227.

საყრდენებზე დაყრდნობილ წვეილთვალს (ნახ. 227). იმავე ღერძზე თავისუფლადაა ჩამოცმული l -სიგრძის წვრილი ღერო, რომლის ბოლოზე მოთავსებულია P_2 წონის წერტილოვანი A ტვირთი, განსაზღვრეთ ამ სისტემის მოძრაობა, თუ ღეროს მასას უგულვებელყოფთ და დაეუშვათ, რომ CA ქანქარას გადახრა ვერტიკალიდან საკმაოდ მცირეა, C კენამ-

ში ხახუნი არ არსებობს და ცილინდრები საყრდენებზე გორაკენ სრიალის გარეშე (ნახ. 227).

ამოხსნა. მოცემულ შემთხვევაში გვაქვს ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემა. კოორდინატთა სისტემას ისე ვარჩევთ, როგორც ეს მითითებულია 227-ე ნახაზზე. განზოგადებულ კოორდინატად ვიღებთ C წერტილის x აბცისს და ვერტიკალიდან CA ღეროს გადახრის φ კუთხეს. ამის შესაბამისად ამ ამოცანაში გვაქვს ლაგრანჯის ორი განტოლება:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

თუ ცილინდრების საერთო მასას m_1 -ით აღვნიშნავთ, ხოლო A ტვირთის მასას m_2 -ით. გამოვთვლით სისტემის კინეტიკურ ენერჯიას, რომელიც წარმოადგენს ცილინდრების T_1 კინეტიკური ენერჯიისა და A ტვირთის T_2 კინეტიკური ენერჯიის ჯამს. ამასთანავე

$$T_1 = \frac{m_1 v^2}{2} + I_c \frac{\omega^2}{2} \quad \text{და} \quad T_2 = \frac{m_2 v^2}{2},$$

სადაც v_c და $v_A - C$ და A წერტილების სიჩქარეებია.

ω — ცილინდრების კუთხური სიჩქარე, ხოლო I_c — ცილინდრების ინერციის მომენტი C წერტილზე გამავალი ბრუნვის ღერძის მიმართ. მაშასადამე,

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1 v_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2} + \frac{m_2 v_A^2}{2}.$$

ამასთანავე

$$v_c = \dot{x}, \quad I_c = \frac{m_1 R^2}{2} \quad \text{და} \quad \omega = \frac{v_c}{R} = \frac{\dot{x}}{R},$$

სადაც R არის ცილინდრის რადიუსი.

A წერტილის სიჩქარის გამოსათვლელად, მისი დეკარტეს კოორდინატები x_A და y_A გამოვსახოთ არჩეული განზოგადებული კოორდინატებით:

$$\begin{cases} x_A = x + l \sin \varphi, & y_A = l \cos \varphi, \end{cases}$$

აქედან

$$\dot{x} = \dot{x} + l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = -l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi},$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} v_A^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{x} + l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi})^2 + l^2 \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = \\ &= \dot{x}^2 + l^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + 2 \dot{x} \dot{\varphi} l \cos \varphi + l^2 \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 = \dot{x}^2 + l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + 2 \dot{x} \dot{\varphi} l \cos \varphi. \end{aligned}$$

ახლა ვიღებთ

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2} m_1 R^2 \frac{\dot{x}^2}{2R^2} + \frac{m^2}{2} (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2 \dot{x} \dot{\varphi} l \cos \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} [(1,5m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_2 l (l \dot{\varphi}^2 + 2 \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi)]. \end{aligned}$$

აქედან

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (1,5m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (1,5m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi); \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = m_2 l (l \dot{\varphi} + \dot{x} \cos \varphi); \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m_2 l (l \ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi - \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = -m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi.$$

განზოგადებულ Q_x და Q_φ ძალებს ეპოულობთ ზოგადი (247) ფორმულებით. თუ შევნიშნავთ, რომ

$$P_{1x} \approx P_{2x} = 0, \quad P_{1y} = P_1, \quad P_{2y} = P_2, \\ y_c = 0 \quad \text{და} \quad y_A = l \cos \varphi,$$

ამ ფორმულების საფუძველზე მივიღებთ

$$Q_x = P_1 \frac{\partial y_c}{\partial x} + P_2 \frac{\partial y_A}{\partial x} = 0,$$

$$Q_\varphi = P_1 \frac{\partial y_c}{\partial \varphi} + P_2 \frac{\partial y_A}{\partial \varphi} = -P_2 l \sin \varphi = -m_2 g l \sin \varphi.$$

რადგანაც მოცემულ ამოცანაში სისტემა იმყოფება სიმძიმის ძალის მოქმედების ქვეშ, რომლისთვისაც არსებობს ძალთა ფუნქცია, ამიტომ განზოგადებული ძალები შეიძლება აგრეთვე განგვესაზღვრა (249) ფორმულითაც. \vec{P}_1 და \vec{P}_2 ძალებისათვის ძალთა ფუნქციას აქვს სახე

$$U = P_1 y_c + P_2 y_A = P_2 l \cos \varphi.$$

მაშასადამე,

$$Q_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad Q_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -P_2 l \sin \varphi = m_2 g l \sin \varphi.$$

ასე რომ, ლაგრანჟის განტოლებები ლებულობენ სახეს

$$(1,5m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = 0,$$

$$l\ddot{\varphi} + x\ddot{\varphi} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0.$$

რადგანაც ამოცანის პირობის თანახმად CA ქანქარას გადახრა ვერტიკალიდან საკმაოდ მცირეა (ე. ი. φ კოორდინატი და მისი დროით წარმოებული საკმაოდ მცირე სიდიდეებს წარმოადგენენ), ამიტომ სისტემის მოძრაობის ზუსტი დიფერენციალური განტოლებები შეიძლება შეიცვალოს უფრო მარტივი მიახლოებითი განტოლებებით, თუ დაეუშვებთ, რომ $\sin \varphi \approx \varphi$ და $\cos \varphi \approx 1$. გარდა ამისა, ნამრაველი $\varphi^2 \sin \varphi$ წარმოადგენს უფრო მაღალი რიგის მცირე სიდიდეს, ვიდრე დანარჩენი წევრები; ამიტომ შეიძლება დავუშვათ $\varphi^2 \sin \varphi \approx 0$; მაშინ მივიღებთ ლაგრანჟის მიახლოებით განტოლებებს:

$$(1,5m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} = 0, \quad (a)$$

$$\ddot{x} + l \ddot{\varphi} + g \varphi = 0. \quad (b)$$

(ა) განტოლებიდან გვაქვს

$$\ddot{x} = -\frac{m_2 l}{1,5m_1 + m_2} \ddot{\varphi}.$$

ამ გამოსახულების პირველი ინტეგრირება გვაძლევს

$$\dot{x} = -\frac{m_2 l}{1,5m_1 + m_2} \dot{\varphi} + C_1.$$

მეორედ ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ

$$x = -\frac{m_2 l}{1,5m_1 + m_2} \varphi + C_1 t + C_2.$$

ფ ფუნქციის განსასაზღვრავად (ა) და (ბ) განტოლებიდან გამოვრიცხავთ x -ს:

$$-\frac{m_2 l}{1,5m_1 + m_2} \ddot{\varphi} + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0,$$

ანუ

$$1,5m_1 l \ddot{\varphi} + (1,5m_1 + m_2) g \varphi = 0,$$

ანუ

$$\ddot{\varphi} + \left(1 + \frac{2m_2}{3m_1}\right) \frac{g}{l} \varphi = 0,$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\left(1 + \frac{2m_2}{3m_1}\right) \frac{g}{l} = k^2,$$

გვექნება

$$\varphi + k^2 \varphi = 0.$$

ამ განტოლების ზოგადი ამოხსნა იქნება

$$\varphi = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt,$$

საიდანაც

$$\dot{\varphi} = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt.$$

მაშასადამე,

$$x = C_1 t + C_2 - \frac{m_2 l}{1,5m_1 + m_2} (C_3 \cos kt + C_4 \sin kt).$$

მიღებული განტოლებები, რომლებიც გამოსახავენ x და φ კოორდინატებს, როგორც t დროის ფუნქციას, სწორედ განსაზღვრავენ განსახილავი სისტემის მოძრაობას. რაც შეეხება ნებისმიერ C_1 , C_2 , C_3 და C_4 მუდმივებს, ისინი განისაზღვრებიან სისტემის მოძრაობის საწყისი პირობებით. საწყის მომენტში, როცა $t=0$, გვაქვს:

$$x_0 = -\frac{m_2 l}{1,5m_1 + m_2} \varphi_0 + C_2; \quad \dot{x}_0 = -\frac{m_2 l}{1,5m_1 + m_2} \dot{\varphi}_0 + C_1;$$

$$\varphi_0 = C_3; \quad \dot{\varphi}_0 = k C_4.$$

ეთქვათ,

$$x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \varphi_0 \neq 0, \quad \dot{\varphi}_0 = 0,$$

მაშინ

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{m_2 l}{1,5m_1 + m_2} \varphi_0, \quad C_3 = \varphi_0, \quad C_4 = 0$$

და, მაშასადამე,

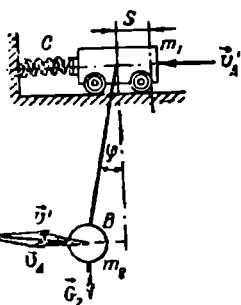
$$\varphi = \varphi_0 \cos kt,$$

$$x = \frac{m_2 l \varphi_0}{1,5m_1 + m_2} (1 - \cos kt),$$

სადაც

$$k = \sqrt{\left(1 - \frac{2m_2}{3m_1}\right) \frac{g}{l}} = \sqrt{\left(1 + \frac{2P_2}{3P_1}\right) \frac{g}{l}}.$$

მაგალითი 190. $m_1 = 22000$ კგ მასის ამწის ურიკა (ნახ. 228) $v_0 = 1$ მ/წმ სიჩქარით წააწყდა ღრეკად ბუფერს, რომლის სიხისტვა $c = 8700$ ნ/სმ. ურიკას სიმძიმის A ცენტრში $l = 14$ მ სიგრძის ბაგირზე დაკიდებულია $m_2 = 20400$ კგ მასის B ტვირთი. ბაგირის მასა უგულვ-



ნახ. 228.

ბელყავით და განსაზღვრეთ ურიკასა და ტვირთის მოძრაობა საბჭუნთან ურიკის შეხების შემდეგ.

ამოხსნა. ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე მოცემული სისტემის განზოგადებულ კოორდინატებად მივიღოთ ურიკას s გადაადგილება საბჭუნთან მისი შეხების მომენტიდან და ვერტიკალიდან ბაგირის გადახრის φ კუთხე, რომელიც საწყის მომენტში ნულის ტოლია. თუ

ტვირთს განვიხილავთ, როგორც ნივთიერ წერტილს, მაშინ სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{m_1 v_A^2}{2} + \frac{m_2 v_B^2}{2},$$

სადაც ურიკის სიჩქარეა $v_A = \dot{s}$, ხოლო ტვირთის v_B სიჩქარე გეომეტ-

რიული ჯამია წარმტანი \vec{v}_A სიჩქარისა და ფარდობითი $v' = l\dot{\varphi}$ სიჩქარისა (ურჩიკის მიმართ) და მიმართულია AB -ს მართობულად. ამიტომ

$$v_B^2 = v_A^2 + v'^2 + 2v_A v' \cos\varphi = s^2 + l^2\dot{\varphi}^2 \pm 2sl\dot{\varphi}\cos\varphi$$

და, მაშასადამე,

$$T = (m_1 + m_2) \frac{\dot{s}^2}{2} + \frac{m^2}{2} (l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}s\cos\varphi).$$

ვინაიდან ზამბარის შეკუმშვა უდრის s -ს, ამიტომ მოცემული სისტემის პოტენციური ენერგია

$$\Pi = \frac{cs^2}{2} + m_2gl(1 - \cos\varphi).$$

აქედან

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2l\dot{\varphi}s\sin\varphi, \quad \frac{dT}{d\varphi} = m_2(l^2\dot{\varphi} + l\dot{s}\cos\varphi),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m_2l(\dot{\varphi} + \ddot{s}\cos\varphi - \dot{s}\dot{\varphi}\sin\varphi), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = m_2gl\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = (m_1 + m_2)\dot{s} + m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = (m_1 + m_2)\ddot{s} + m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi - m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial s} = cs.$$

თუ ახლა მოცემული სისტემისათვის შევადგენთ ლაგრანჟის ორ განტოლებას, მივიღებთ:

$$(m_1 + m_2)\ddot{s} + m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi + cs = m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi;$$

$$\ddot{s}\cos\varphi + l\dot{\varphi} + g\sin\varphi = 0.$$

ჩავთვალოთ, რომ ვერტიკალიდან ბაგირის გადახრის φ კუთხე და კუთხური $\dot{\varphi}$ სიჩქარე ადებულ მომენტში რჩებიან მცირენი, მაშინ მიღებული განტოლებები შეიძლება შევცვალოთ მიახლოებითი განტოლებებით, თუ დაეუშვებთ $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$ და უკუვაგდებთ $\dot{\varphi}^2$ -ის შემცველ წევრს. მაშინ მივიღებთ შემდეგ ორ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{s} + m_2l\ddot{\varphi} + cs &= 0; \\ \ddot{s} + L\ddot{\varphi} + g\varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

სადაც $m = m_1 + m_2$.

(ა) განტოლებების კერძო ამოხსნებს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$s = A_1 \sin(kt + \alpha) \quad \text{და} \quad \varphi = A_2 \sin(kt + \alpha).$$

თუ ამ გამოსახულებებს და მათ მეორე რიგის წარმოებულებს ჩავსვამთ (ა) განტოლებებში და ამ განტოლებებს შევკვეცთ $\sin(kt + \alpha)$ -ზე, მივიღებთ

$$(c - mk^2)A_1 - m_2 lk^2 A_2 = 0; \quad -k^2 A_1 + (g - lk^2)A_2 = 0,$$

ანუ

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{c - mk^2}{m_2 lk^2} = \frac{k^2}{g - lk^2} = \lambda.$$

აქედან მივიღებთ სიხშირეთა შემდეგ განტოლებას

$$(c - mk^2)(g - lk^2) - m_2 lk^4 = 0.$$

გამარტივების შემდეგ ეს განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს.

$$k^4 - \frac{mg + cl}{m_1 l} k^2 + \frac{cg}{m_0 l} = 0,$$

ანუ

$$k^4 - pk^2 + q = 0,$$

სადაც

$$p = \frac{mg + cl}{m_1 l} = 40,4 \quad \text{და} \quad q = \frac{cg}{m_1 l} = 27,9.$$

თუ ამოვხსნით სიხშირეთა განტოლებას, მივიღებთ

$$k_1^2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{და} \quad k_2^2 = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

საიდანაც

$$k_1 \approx 0,8 \text{ წმ}^{-1} \quad \text{და} \quad k_2 \approx 6,3 \text{ წმ}^{-1}.$$

მაშასადამე, ამპლიტუდათა შეფარდებისათვის მივიღებთ ორ მნიშვნელობას:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{c - mk_1^2}{m_2 lk_1^2} = \frac{k_1^2}{g - lk_1^2} = 0,76 \quad \text{და} \quad \lambda_2 = \frac{c - mk_2^2}{m_2 lk_2^2} = \\ &= \frac{k_2^2}{g - lk_2^2} = -0,07. \end{aligned}$$

თუ აღვნიშნავთ პირველი k_1 სიხშირის შესაბამის ამპლიტულებს

$A_1^{(1)}$ და $A_2^{(1)}$ -ით, ხოლო მეორე k_2 სიხშირის შესაბამის ამპლიტუდებს.

$A_1^{(2)}$ და $A_2^{(2)}$ -ით, გვექნება $A_2^{(1)} = \lambda_1 A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)} = \lambda_2 A_1^{(2)}$.

ამგვარად, მივიღებთ (ა) განტოლების კერძო ამოხსნების ორ სისტემას. პირველი სისტემა:

$$\begin{aligned} s^{(1)} &= A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) & \text{და} \\ \varphi^{(1)} &= A_2^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) = \lambda_1 A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1), \end{aligned}$$

მეორე სისტემა

$$\begin{aligned} s^{(2)} &= A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2) & \text{და} \\ \varphi^{(2)} &= A_2^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2) = \lambda_2 A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2), \end{aligned}$$

სადაც α_1 და α_2 — k_1 და k_2 სიხშირების შესაბამისი საწყისი ფაზებია.

კერძო ამოხსნების პირველი სისტემა შეესაბამება განსახილველი მექანიკური სისტემის ეგრეთ წოდებულ პირველ მთავარ რხევას, კერძო ამოხსნების მეორე სისტემა შეესაბამება მეორე მთავარ რხევას.

საწყისი (ა) დიფერენციალური განტოლებების წრფივობის გამო, ამ განტოლებების ზოგადი ამოხსნა წარმოადგენს კერძო ამოხსნების ჯამს, ე. ი.:

$$\left. \begin{aligned} s &= s^{(1)} + s^{(2)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2); \\ \varphi &= \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} = \lambda_1 A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + \lambda_2 A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

ამ განტოლებებში $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, α_1 და α_2 ნებისმიერი მუდმივებია, რომლებიც განისაზღვრებიან სისტემის მოძრაობის საწყისი პირობებით.

(ბ) განტოლება გავაწარმოთ t დროით, გვექნება

$$\left. \begin{aligned} \dot{s} &= A_1^{(1)} k_1 \cos(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} k_2 \cos(k_2 t + \alpha_2); \\ \dot{\varphi} &= \lambda_1 A_1^{(1)} k_1 \cos(k_1 t + \alpha_1) + \lambda_2 A_1^{(2)} k_2 \cos(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

განსახილველ მაგალითში $s_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{s}_0 = v_0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, როცა $t = 0$. ჩავსვათ ეს მნიშვნელობანი (ბ) და (გ) განტოლებებში, მივიღებთ

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A_1^{(1)} \sin \alpha_1 + A_1^{(2)} \sin \alpha_2; & 0 &= \lambda_1 A_1^{(1)} \sin \alpha_1 + \lambda_2 A_1^{(2)} \sin \alpha_2; \\ v_0 &= A_1^{(1)} k_1 \cos \alpha_1 + A_1^{(2)} k_2 \cos \alpha_2; & 0 &= A_1^{(1)} \lambda_1 k_1 \cos \alpha_1 + A_1^{(2)} \lambda_2 k_2 \cos \alpha_2. \end{aligned} \right.$$

ამ განტოლებებიდან ვპოულობთ:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad A_1^{(1)} = \frac{v_0 \lambda_2}{k_1 (\lambda_2 - \lambda_1)} = 0, 11;$$

$$A_1^{(2)} = - \frac{v_0 \lambda_1}{k_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} = 0, 14.$$

მაშასადამე,

$$s = 0,11\sin 0,8t + 0,14\sin 6,3t;$$

ბ.

$$\varphi = 0,08\sin 0,8t - 0,01\sin 6,3t.$$

განვიხილოთ კიდევ ამოხსნის მეორე ხერხი მეორე რიგის ორი წრფივი დიფერენციალური განტოლებისაგან შემდგარი (ა) სისტემისა:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{s} + m_2l\ddot{\varphi} + cs &= 0, \\ \ddot{s} + l\ddot{\varphi} + g\varphi &= 0. \end{aligned} \right\}$$

ამ სისტემის თითოეული განტოლების თანამიმდევრობითი გაწარმოების გზით ვპოულობთ:

$$\left. \begin{aligned} m\frac{d^3s}{dt^3} + m_2l\frac{d^3\varphi}{dt^3} + c\frac{ds}{dt} &= 0; \\ \frac{d^3s}{dt^3} + l\frac{d^3\varphi}{dt^3} + g\frac{d\varphi}{dt} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (დ)$$

$$\left. \begin{aligned} m\frac{d^4s}{dt^4} + m_2l\frac{d^4\varphi}{dt^4} + c\frac{d^2s}{dt^2} &= 0; \\ \frac{d^4s}{dt^4} + l\frac{d^4\varphi}{dt^4} + g\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (ე)$$

ამ ექვსი განტოლებიდან ჯერ გამოვირიცხოთ განზოგადებული კოორდინატი φ და მისი წარმოებულები, ხოლო შემდეგ s კოორდინატი და მისი წარმოებულები, მივიღებთ ორ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელ მეოთხე რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4s}{dt^4} + \frac{mg + cl}{m_1l} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{cg}{m_1l}s &= 0, \\ \frac{d^4\varphi}{dt^4} + \frac{mg + cl}{m_1l} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{cg}{m_1l}\varphi &= 0, \end{aligned} \right\}$$

ანუ, თუ კიდევ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $\frac{mg + cl}{m_1l} = p$, $\frac{cg}{m_1l} = q$,

გვექნება

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4s}{dt^4} + P\frac{d^2s}{dt^2} + qs &= 0, \\ \frac{d^4\varphi}{dt^4} + P\frac{d^2\varphi}{dt^2} + q\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

შევადგინოთ ამ სისტემის თითოეული განტოლების შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება. ამ განტოლების ფესვები ტოლია

$$u_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} = \pm ik_1;$$

$$u_{3,4} = \pm \sqrt{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} = \pm ik_2.$$

მაშასადამე, (3) განტოლების ამოხსნას აქვს სახე

$$\left. \begin{aligned} s &= C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t + C_3 \cos k_2 t + C_4 \sin k_2 t; \\ \varphi &= C'_1 \cos k_1 t + C'_2 \sin k_1 t + C'_3 \cos k_2 t + C'_4 \sin k_2 t, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

სადაც $C_1, C_2, C_3, C_4, C'_1, C'_2, C'_3, C'_4$ — ნებისმიერი მუდმივებია. გადავიდეთ ამ მუდმივების განსაზღვრაზე, რისთვისაც ვისარგებლოთ მოძრაობის საწყისი პირობებით. თუ (ა) და (ბ) განტოლებებში დაეუშვებთ $t=0$ და მხედველობაში მივიღებთ, რომ ამოცანის პირობის თანახმად $s_0 = \varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = 0, s_0 = s_0$, გვექნება

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{s}_0 + m_2\ddot{\varphi}_0 &= 0, \\ \ddot{s}_0 + l\ddot{\varphi}_0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (ა)$$

$$\left. \begin{aligned} m\dot{s}_0 + m_2\dot{\varphi}_0 + c s_0 &= 0, \\ \dot{s} + l\dot{\varphi}_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (ბ)$$

თუ ამოვხსნით თითოეულ ამ სისტემას ცალ-ცალკე, მივიღებთ

$$\ddot{s}_0 = \ddot{\varphi}_0 = 0, \quad \dot{s}_0 = -\frac{c s_0}{m_1}, \quad \dot{\varphi}_0 = \frac{c s_0}{l m_1}.$$

C_4 მუდმივები. ამისათვის (6) განტოლებების პირველიდან გამოვთვალოთ წარმოებულები $\dot{s}, \ddot{s}, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$

ახლა განვსაზღვროთ c_1, c_2, c_3 ,

$$\left. \begin{aligned} \dot{s} &= -C_1 k_1 \sin k_1 t + C_2 k_1 \cos k_1 t - C_3 k_2 \sin k_2 t + C_4 k_2 \cos k_2 t, \\ \ddot{s} &= -C_1 k_1^2 \cos k_1 t - C_2 k_1^2 \sin k_1 t - C_3 k_2^2 \cos k_2 t - C_4 k_2^2 \sin k_2 t, \\ \dot{\varphi} &= C_1 k_1^3 \sin k_1 t - C_2 k_1^3 \cos k_1 t - C_3 k_2^3 \sin k_2 t - C_4 k_2^3 \cos k_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

თუ ამ ტოლობებში და (6) განტოლებების პირველში დაეუშვებთ $t=0$,

მივიღებთ C_1, C_2, C_3, C_4 უცნობების მიმართ შემდეგი ოთხი განტოლების სისტემას:

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= C_1 + C_3 = 0, \\ \dot{s}_0 &= C_2 k_1 + C_4 k_2 = v_0, \\ \ddot{s}_0 &= -C_1 k_1^2 - C_3 k_2^2 = 0, \\ \dddot{s}_0 &= -C_2 k_1^3 - C_4 k_2^3 = -\frac{c v_0}{m_1}. \end{aligned} \right\}$$

თუ ამოვხსნით ერთობლივად პირველ და მესამე განტოლებებს, მივიღებთ $C_1 = C_3 = 0$. მეორე და მეოთხე განტოლებებიდან გვაქვს

$$C_2 = \frac{v_0 - C_4 k_2}{k_1} \text{ და } C_4(k_2^3 - k_2 k_1^2) = v_0 \left(\frac{c}{m_1} - k_1^2 \right).$$

საიდანაც

$$C_4 = \frac{v_0}{k_2(k_2^2 - k_1^2)} \left(\frac{c}{m_1} - k_1^2 \right), \quad C_2 = \frac{-v_0}{k_1(k_2^2 - k_1^2)} \left(\frac{c}{m_1} - k_2^2 \right).$$

ამგვარად,

$$s = \frac{v_0}{k_2^2 - k_1^2} \left\{ \frac{1}{k_2} \left(\frac{c}{m_1} - k_1^2 \right) \sin k_2 t - \frac{1}{k_1} \left(\frac{c}{m_1} - k_2^2 \right) \sin k_1 t \right\}.$$

ანალოგიურად, C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 მუდმივების განსასაზღვრავად მივიღებთ ოთხი განტოლების შემდეგ სისტემას:

$$\left. \begin{aligned} C'_1 + C'_3 &= 0, \\ C'_2 k_1 + C'_4 k_3 &= 0, \\ -C'_1 k_1^2 - C'_3 k_2^2 &= 0, \\ -C'_2 k_1^3 - C'_4 k_2^3 &= \frac{c v_0}{l m_1}. \end{aligned} \right\}$$

აქედან ვპოულობთ

$$C'_1 = C'_3 = 0, \quad C'_2 = \frac{c v_0}{l m_1 (k_2^2 - k_1^2)} \cdot \frac{1}{k_1}, \quad C'_4 = -\frac{c v_0}{l m_1 (k_2^2 - k_1^2)} \cdot \frac{1}{k_2}.$$

$$\text{და, მაშასადამე, } \varphi = \frac{c v_0}{l m_1 (k_2^2 - k_1^2)} \left\{ \frac{1}{k_1} \sin k_1 t - \frac{1}{k_2} \sin k_2 t \right\}.$$

თუ მიღებულ განტოლებებში ჩავსვამთ რიცხვით მონაცემებს, მივაღწეოთ წინა შედეგებამდე.

ლიბერატურა

Н. Н. Бухгольц, И. М. Воронков, А. П. Миннаков, Сборник задач по теоретической механике. М., Гостехиздат, 1949.

Н. А. Бражинченко, В. Л. Кан, Б. Л. Минберг, В. И. Морозов, Г. Н. Ушакова. Сборник задач по теоретической механике. М., Высшая школа, 1974.

И. М. Воронков. Курс теоретической механики. М., Гостехтеоретиздат, 1957 и последующие издания.

Е. Л. Николаи. Теоретическая механика, ч. I и II. М., Гостехтеоретиздат, 1957 и последующие издания.

Л. Г. Лойцианский и А. И. Лурье. Курс теоретической механики, ч. I и II. М., Гостехтеоретиздат, 1954, 1957 и последующие издания.

В. М. Осецкий. Сборник задач по теоретической механике. Динамика. Под редакцией проф. И. М. Воронкова. М., 1962.

С. М. Тарг. Краткий курс теоретической механики. М., Физматгиз, 1958.

А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. Курс теоретической механики, ч. I, М., Высшая школа, 1962.

А. А. Яблонский. Курс теоретической механики: ч. II, М., Высшая школа, 1962.

ა. გორგიძე. თეორიული მექანიკის კურსი. წიგნი II. დინამიკა, განათლება, 1972.

ა. გორგიძე. ა. შარანგია, თეორიული მექანიკის მოკლე კურსი. განათლება, 1979.

ა. შარანგია. თეორიული მექანიკის პრაქტიკუმი. განათლება. 1964.

ბ. მახვილაძე, გ. შელია, თეორიული მექანიკის პრაქტიკუმი. 1979.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

III ნაწილი

დ ი ნ ა მ ი კ ა

ა) წერტილის დინამიკა

| | | |
|-----------|---|-----|
| თავი I. | წერტილის დინამიკის ორი ძირითადი ამოცანა | 3 |
| | § 1. ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები | 3 |
| | § 2. წერტილის დინამიკის პირველი ძირითადი ამოცანა | 4 |
| | § 3. წერტილის დინამიკის მეორე ძირითადი ამოცანა | 12 |
| თავი II. | ნივთიერი წერტილის რხევითი მოძრაობა | 38 |
| | § 1. თავისუფალი რხევა | 38 |
| | § 2. მიღვედი რხევა | 43 |
| | § 3. იძულებითი რხევა | 45 |
| თავი III. | წერტილის დინამიკის ზოგადი თეორემები და დალამბერის პრინციპი | 52 |
| | § 1. თეორემა მოძრაობის რაოდენობის შესახებ | 52 |
| | § 2. თეორემა მოძრაობის რაოდენობის მომენტის შესახებ | 65 |
| | § 3. მუშაობა და სიმძლავრე | 68 |
| | § 4. თეორემა ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერჯის შესახებ | 81 |
| | § 5. დალამბერის პრინციპი ნივთიერი წერტილისათვის | 94 |
| | ბ) სისტემის დინამიკა | |
| თავი IV. | სისტემის დინამიკის ზოგადი თეორემები. | 102 |
| | § 1. სისტემის მოძრაობის რაოდენობის და მასათა ცენტრის მოძრაობის თეორემები | 102 |
| | § 2. თეორემა სისტემის კინეტიკური მომენტის შესახებ | 115 |
| | § 3. თეორემა სისტემის კინეტიკური ენერჯის ცვლილების შესახებ | 139 |
| | § 4. კომბინირებული ამოცანები | 152 |
| თავი V. | დალამბერის პრინციპი და შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი | 157 |
| | § 1. დალამბერის პრინციპი ნივთიერ წერტილთა სისტემისათვის | 157 |
| | § 2. შესაძლო (ვირტუალური) გადაადგილების პრინციპი | 174 |
| | § 3. დინამიკის ზოგადი განტოლება (დალამბერ-ლაგრანჟის განტოლება) | 183 |
| | § 4. ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლება (სისტემის მოძრაობის განტოლებები განზოგადებულ კოორდინატებში) | 187 |
| | ლიტერატურა | 213 |

ИБ № 1364

მთარგმნელები: ვ. მეცუბოვი; ნ. ნახვილაძე
რედაქტორი ი. გოგუაძე.
მხატვრული რედაქტორი თ. შესხი
ტექნიკური რედაქტორი მ. ოსიტაშვილი
კორექტორი ე. გაფრინდაშვილი

გადაეცა წარმოებას 15.6.81 წ. ხელმოწერილია დასაბუქლად 25.12.82 წ. ქალაქის.
ზომა 60×90^{1/16}. საბუქლი ქალაქი № 2. პირობითი ნაბუქლი თაბახი 13,5. სააღ-
რიცხვო საგამომცემლო თაბახი 9,53.
ტირაჟი 3.000 შუკვ. № 5533

ფასი 45 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი, მარჯანიშვილის ქ. № 5.
Издательство «Ганатлеба», ул. Маджанишвили, № 5.
1982

საქართველოს სსრ გამომცემლობათა, პოლიგრაფიისა და წიგნის ეპრობის საქმეთა.
სახელმწიფო კომიტეტის ქუთაისის პოლიგრაფიული საწარმოო გაერთიანება.

ქ. ქუთაისი, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 33.

Кутаисское полиграфическое производственное объединение
Государственного комитета по делам издательств, полиграфии и
книжной торговли Грузинской ССР,
г. Кутаиси, пр. И. Чавчавадзе, 33.