თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

176

მათემატიკა • მექანიკა • ასტრონომია

თბილისი 1976

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
TBILISI UNIVERSITY PRESS

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
176

МАТЕМАТИКА • МЕХАНИКА • АСТРОНОМИЯ

MATHEMATICS • MECHANICS • ASTRONOMY

ТБИЛИСИ 1976 TBILISI

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

176

მათემატიკა • მექანიკა • ასტრონომია

თბილისი 1976

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები, 176, 1976
Труды Тбилисского университета, 176, 1976

ОБ ОБЪЕДИНЕНИЯХ КЛАССОВ ВЫЧЕТОВ

Н.Г.Когония

Работа посвящена выводу формулы числа классов вычетов объединения классов вычетов по попарно взаимно простым модулям. Эта формула находит разные применения, в частности, при исследовании некоторых неопределенных уравнений в теории цепных дробей.

Исходным пунктом нам служит одно тождество, относящееся к арифметике конечных множеств, точнее - к комбинаторному анализу (его, иногда, называют теоремой логики). Если условиться обозначить через $|E|$ число элементов любого конечного множества E, то оно формулируется следующим образом.

__Лемма.__ Каковы бы ни были конечные множества $E_1, E_2, \dots, E_n$, верно равенство

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1\le k_1<k_2<\dots<k_r\le n} |E_{k_1}\cap E_{k_2}\cap\dots\cap E_{k_r}|.$$

Хотя это равенство почти непосредственно очевидно, приведем, ради полноты изложения, его доказательство - проведем арифметический (комбинаторный) подсчет, подтверждающий интуицию.

Пусть A обозначает любой фиксированный элемент объединения, стоящего в левой части доказываемого равенства, пусть, далее, m обозначает число всех тех множеств среди множеств $E_1, E_2, \dots E_n$, которым принадлежит предмет A. Тогда в сумме $\sum_{k=1}^{n}|E_k|$ этот предмет (элемент) засчитывается $m=\binom{m}{1}$ раз, в сумме $\sum_{1\le k_1<k_2\le n}|E_{k_1}\cap E_{k_2}|$ - $\binom{m}{2}$ раз и т.д. Таким образом, во всей правой части доказываемого равенства этот элемент засчитывается

$$\binom{m}{1}-\binom{m}{2}+\binom{m}{3}-\dots+(-1)^{m-1}\binom{m}{m}=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}$$ раз.

Но эта сумма равна единице; в самом деле

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}=-\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\binom{m}{k}+1=-(1-1)^{m}+1=1;$$

это означает, что каждый элемент объединения привносит в сумму, стоящую в правой части равенства, одну единицу, чем и доказана верность леммы.

I. Пусть n - любое натуральное число $(n\geq 2), m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots, m_n$ - любые попарно взаимно простые натуральные числа $(m_k\geq 2)$; пусть, далее

$$M=m_1 m_2 \ldots m_k \ldots m_n,\quad M_k=\frac{M}{m_k},$$

тогда $(m_k, M_k)=1$, $m_k | M_i$ при $i\neq k$.

Из последних соотношений следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} M_k = M\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{m_k} \gtreqless M \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{m_k}\gtreqless 1. \tag{I.2}$$

Пусть a_k обозначает любое число из полной системы наименьших неотрицательных вычетов по модулю m_k

$$a_k=0,1,2,\ldots,m_k-1 \quad (k=1,2,\ldots n). \tag{I.3}$$

Рассмотрим соответствующий класс вычетов по модулю m_k

$$x\equiv a_k \pmod{m_k} \quad (k=1,2,3,\ldots,n) \tag{I.4}$$

и обозначим его, как множества целых чисел, через E_k

$$E_k=\{a_k+m_k q \mid q\in \mathbb{Z}\}. \tag{I.5}$$

Каждый класс E_k разбивается, в силу (I.1), на M_k классов вычетов по модулю M [1]

$$E_k=\bigcup_{x_k=0}^{M_k-1} E_{kx_k}, \text{ где } E_{kx_k}=\{a_k+m_k x_k+mq \mid q\in \mathbb{Z}\}. \tag{I.6}$$

Но каждый класс E_k можно в то же самое время рассматривать как множество, элементами которого служат классы E_{kx_k}

вычетов по модулю M, т.е.

$$E_k=\{E_{k0}, E_{k1}, \ldots E_{km_k-1}\}=\{E_{kx_k} | x_k=0,1,2,\ldots, M_k-1\}. \tag{I.7}$$

В силу (I.3) и (I.5), множество E_k (как множество целых чисел) является для любого фиксированного k ($k=1,2,\ldots,n$) одним из m_k классов вычетов по модулю m_k; отсюда следует, что число всех разных систем

$$(E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots E_n) \tag{I.8}$$

равно $m_1 \cdot m_2 \ldots m_k \ldots m_n = M$. Рассмотрим объединение всех множеств любой системы (I.8)

$$E=\bigcup_{k=1}^{n} E_k. \tag{I.9}$$

Очевидно, что число всех таких объединений тоже равно M. Для любого возможного набора (I.8) объединение (I.9) является вполне определенным множеством классов вычетов по модулю M, но для разных наборов (I.8) объединения (I.9) представляют собой, вообще говоря, разные множества классов вычетов по модулю M; поэтому возникает вопрос о числе классов вычетов, содержащихся в объединениях, точнее: одинаково ли это число для всех объединений и если да, то чему равно оно. Полный ответ на этот вопрос дает

<u>Теорема</u>. Число элементов объединения $\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ – число различных классов вычетов по модулю M, содержащихся в этом объединении, – равно $M[1-\prod_{k=1}^{n}(1-\frac{1}{m_k})]$, т.е.

$$T=|E|=\left|\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right|=\left|\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{x_k=0}^{m_k-1} E_{kx_k}\right|=M\left[1-\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{m_k}\right)\right]. \tag{I.10}$$

<u>Доказательство</u>. Так как имеет место равенство

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\sum_{1\le k_1<k_2<\ldots<k_r\le n}\frac{M}{m_{k_1}m_{k_2}\ldots m_{k_r}}=M\left[1-\Pi\left(1-\frac{1}{m_k}\right)\right],$$

то достаточно установить, что

$$\left|\bigcup_{k}^{n}E_k\right|=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\sum_{1\le k_1<k_2<\ldots<k_r\le n}\frac{M}{m_{k_1}m_{k_2}\ldots m_{k_r}}. \tag{I.II}$$

С этой целью применим приведенную в начале настоящей работы лемму, беря в качестве множеств E_k множества E_k классов вычетов по модулю M, определенные равенством (I.7). Тогда доказательство равенства (I.II) сводится к установлению следующего равенства

$$|E_1\cap E_2\cap\ldots\cap E_r|=\frac{M}{m_1m_2\ldots m_r}\quad(r=1,2,\ldots,n). \tag{I.I2}$$

В силу (I.7) каждый элемент пересечения $E_1\cap E_2\cap\ldots\cap E_r$ имеет вид

$$E_{1x_1}=E_{2x_2}=\cdots E_{rx_r}\quad(0\le x_k\le M_k-1,\ k=1,2,\ldots,r); \tag{I.I3}$$

в силу (I.6), последние равенства можно записать в виде следующей системы

$$m_1x_1+a_1=m_2x_2+a_2=m_rx_r+a_r\quad(0\le x_k\le M_k-1,\ k=1,2,\ldots r). \tag{I.I3$_I$}$$

Итак, задача сводится к определению числа всех решений $(x_1,x_2,\ldots x_r)$ линейной системы (I.I3$_I$). (I.I3$_I$) запишется в виде системы сравнений

$$x \equiv a_1 (\mathrm{mod}\, m_1);\ x \equiv a_2 (\mathrm{mod}\, m_2), \ldots, x \equiv a_r (\mathrm{mod}\, m_r) \tag{I.13$_2$}$$

Последняя система сравнений имеет, как известно, единственное решение по модулю $m_1 m_2 \ldots m_r$, т.е.

$$x \equiv x_0 (\mathrm{mod}\, m_1 m_2 \ldots m_r)\ (x_0 = 0, 1, 2, \ldots, m_1 m_2 \ldots m_r - 1), \tag{I.13$_3$}$$

откуда

$$x = \{x_0 + m_1 m_2 \ldots m_r q \mid q \in Z\}. \tag{I.13$_4$}$$

Для любого целого числа q система уравнений

$$m_1 x_1 + a_1 = m_2 x_2 + a_2 = \ldots = m_r x_r + a_r = \\ = x_0 + m_1 m_2 \ldots m_r q \tag{I.13$_5$}$$

имеет единственное решение

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r, q), \tag{I.13$_5$}$$

которое доставляет единственное решение

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r) \tag{I.13$_6$}$$

системы (I.13$_I$); вместе с тем очевидно, что разным значениям q соответствуют разные решения этой системы.

Итак, достаточно доказать, что среди всех решений системы (I.13$_I$) число всех решений, удовлетворяющих условиям

$$0 \le x_k \le M_k - 1,\ k = 1, 2, \ldots r, \tag{I.14}$$

равно $\frac{M}{m_1 m_2 \ldots m_r}$.

В самом деле, каждый класс (I.13$_4$) вычетов по модулю $m_1 m_2 \ldots m_r$ разбивается на $\frac{M}{m_1 m_2 \ldots m_r}$ классов вычетов по модулю

M ; все эти классы (по одному) получаются, если число q заставить пробегать полную систему наименьших неотрицательных вычетов по модулю $\dfrac{M}{m_1 m_2 \ldots m_2}$; итак, эти классы суть следующие:

$$x \equiv x_0 + m_1 m_2 \ldots m_2 q \pmod M$$
$$\left(0 \le q \le \frac{M}{m_1 m_2 \ldots m_2} - 1\right) \tag{I.15}$$

или

$$x = x_0 + m_1 m_2 \ldots m_2 q + tM \quad (t \in Z).$$

Достаточно показать, что любой класс (I.15) вычетов по модулю M содержит единственное число, доставляющее, как выше указано, единственное решение системы (I.13), удовлетворяющее условиям (I.14).

Так как решение ($x_1, x_2, \ldots, x_2$) системы ($\mathrm{I.13_I}$) однозначно определяется любым его компонентом (любым из чисел x_k), то достаточно рассмотреть уравнение

$$m_1 x_1 + a_1 = x_0 + m_1 m_2 \ldots m_2 q + tM; \tag{I.16}$$

ищется число решений последнего уравнения с условием $0 \le x_1 \le M_1 - 1$. Если $t \ne 0$, то решение уравнения (I.16) относительно x_1 лежит вне требуемых границ, если же $t = 0$, тогда уравнение (I.16) принимает вид

$$m_1 x_1 + a_1 = x_0 + m_1 m_2 \ldots m_2 q$$
$$\left(0 \le q \le \frac{M}{m_1 m_2 \ldots m_2} - 1\right). \tag{$\mathrm{I.16_I}$}$$

Решение последнего уравнения относительно x_1 - целое число, удовлетворяющее требуемым неравенствам.

В самом деле, в силу (I.3), ($\mathrm{I.13_3}$) и (I.15), имеем

$$0 \le x_0 + m_1 m_2 \ldots m_2 q \le m_1 m_2 \ldots m_2 - 1 + M + m_1 m_2 \ldots m_2 = M - 1,$$

откуда, в силу ($\mathrm{I.16_I}$), получаем

$$0 \le m_1 x_1 < M,\ 0 \le x_1 < \frac{M}{m_1} = M_1,\ 0 \le x_1 \le M_1 - 1.$$

Итак, каждый класс вычетов по модулю $\frac{M}{m_1 m_2 \dots m_r}$ дает единственное решение уравнения ($I.16_I$) и, следовательно, системы (I.I3), а разные классы вычетов по модулю $\frac{M}{m_1 m_2 \dots m_r}$ дают разные решения системы ($I.16_I$), откуда и следует, что число решений системы ($I.16_I$) равно $\frac{M}{m_1 m_2 \dots m_r}$ $(r=1,2,\dots,n)$. Теорема доказана.

В связи с решенной нами задачей возникают несколько новых задач, не лишенных, на наш взгляд, интереса.

I) Какова структура множества всех рациональных чисел, представимых в виде конечных сумм обратных величин попарно взаимно простых натуральных чисел;

2) Аналогичная задача для бесконечных сумм указанного выше вида;

3) Пусть $\{m_n\}_1^\infty$ - возрастающая последовательность попарно взаимно простых натуральных чисел $(m_n \ge 2)$, $M_n = m_1 m_2 \dots m_n$ $(n=1,2,\dots)$, $M_{nk} = \frac{M_n}{m_k}$ $(k=1,2,\dots,n)$; тогда для любого фиксированного $n\ (n \ge 2)$ можно рассмотреть решенную выше задачу; соответствующие объединения и число их элементов будут зависеть от n; для любого фиксированного n будем иметь

$$\left|E_{n1} \cup E_{n2} \cup \dots \cup E_{nn}\right| = M_n\left[1 - \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{m_k}\right)\right] = T_n .$$

Возникает задача об асимптотическом поведении этого числа T_n; ясно, что если $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{m_k}\right)$ сходится к некоторому числу $a\ (a \ne 0)$, то $\lim \frac{M_n}{T_n} = \frac{1}{1-a}$ $(0 < a < 1)$; если это произведение расходится (стремится к нулю), то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M_n}{T_n} = 1$ $(M_n \sim T_n)$.

Из доказанной теоремы получается

<u>Следствие</u>. Число классов объединения меньше M, т.е. объединение не исчерпывает всех классов вычетов по модулю M;

в самом деле

$$M-T=M-M\Big[1-\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{m_k}\Big)\Big]=\prod_{k=1}^{n}(m_k-1)>0.$$

(Поступило I.XII.1975)

Кафедра высшей математики
инженерно-экономического
факультета

ЛИТЕРАТУРА

I. И.М.Виноградов, Основы теории чисел, М., "Наука", 1972.

ვ.კოროხია

ნაშთთა კლასების გაერთიანებათა შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში დამტკიცებულია თეორემა წყვილ-წყვილად ურთიერთ მარტივი მოდულით აღებული ნაშთთა კლასების გაერთიანებათა ელემენტების რიცხვის შესახებ.

P.Kogonia

ON UNIFICATIONS OF CLASSES OF SUBTRACTIONS

Summary

The paper is devoted to the proof of the theorem on the number of classes of subtractions of unifications of the classes of subtractions taken in pairwise reciprocally simple modules.

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები, 176, 1976

Труды Тбилисского университета, 176, 1976

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ ТИПА $(-4, q, 1)$

Р.Ш.Гонгадзе

§ I. В /3/ получены формулы для числа представлений натуральных чисел квадратичными формами типа (-4, I7, I) в случае, когда представимое число взаимнопросто с I7. В настоящей статье способом, использованным в работе /2/, мы находим формулы для числа представлений любых натуральных чисел квадратичными формами типа $(-4, q, 1)$ при $q = 5, 7, 11$.

Следуя Э.Гекке /I/, пусть

$$Q(x)=Q(x_1, x_2, \ldots, x_f)=\sum_{1\le r\le s\le f} b_{rs} x_r x_s$$

- положительная квадратичная форма от f (f - четное) переменных с целыми коэффициентами b_{rs}; далее, пусть D - определитель квадратичной формы

$$2Q(x)=\sum_{r,s=1}^{f} a_{rs} x_r x_s \quad (a_{rs}=2b_{rs};\ a_{rs}=a_{sr}=b_{rs},\ r<s);$$

A_{rs} - алгебраические дополнения элементов a_{rs} в D; Δ, N и $\varepsilon(n)$, соответственно, обозначают дискриминант, ступень и характер формы $Q(x)$.

Пусть, наконец, $\mathcal{P}_\nu(x)=\mathcal{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_f)$ - шаровая функция ν - го порядка относительно квадратичной формы $Q(x)$.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими результатами Э.Гекке:

<u>Лемма I</u> (/I/, стр. 853). Среди однородных квадратичных полиномов

$$\varphi_{rs}=x_r x_s-\frac{1}{f}\frac{A_{rs}}{D}2Q(x) \quad (r,s=1,2,\ldots,f)$$

от f переменных имеется точно $\frac{f(f+1)}{2}-1$ линейно независимых образующих базис пространства шаровых функций второго порядка относительно квадратичной формы $Q(x)$.

<u>Лемма 2</u> (/I/, стр.855). f -кратный тэта-ряд

$$\vartheta(\tau, P_\nu(x), Q(x)) = \sum_{x_1, \ldots, x_f = -\infty}^{\infty} P_\nu(x)\, z^{Q(x)}$$

является параболической модулярной формой типа $\left(-\left(\frac{f}{2}+\nu\right), N, \mathcal{E}(d)\right)$

$$(z = \exp 2\pi i\tau,\ \operatorname{Im}\tau > 0).$$

Всюду в дальнейшем полагаем:

$$f = 4,\ \nu = 2.$$

<u>Лемма 3</u>. (/I/, стр.817 и 874). Пусть q - нечетное простое число, $\mathcal{F}$ - положительная примитивная квадратичная форма типа $(-k, q, 1)$. Тогда $2/k$, дискриминант формы $\mathcal{F}$ $\Delta(\mathcal{F}) = q^{2\ell}$, $(1 \leq \ell \leq \frac{k}{2}-1)$.

Далее, если $k > 2$, то квадратичной форме $\mathcal{F}$ соответствует ряд Эйзенштейна

$$E(\tau, \mathcal{F}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha\,\sigma_{k-1}(n)\, z^{n} + \beta\,\sigma_{k-1}(n)\, z^{qn}\right), \tag{I.1}$$

где

$$\alpha = \frac{i^k}{\rho_k}\,\frac{q^{k-\ell} - i^k}{q^k - 1}, \quad \beta = \frac{1}{\rho_k}\,\frac{q - i^k q^{k-\ell}}{q^k - 1} \tag{I.2}$$

$$\rho_k = (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{(k-1)!}{(2\pi)^k} \zeta(k), \quad \sigma_{k-1}(n) = \sum_{d/n} d^{k-1}. \tag{I.3}$$

Известно, что всякой квадратичной форме $\mathcal{F}$ соответствует тэта-ряд

$$\vartheta(\tau,\mathcal{F})=1+\sum_{n=1}^{\infty} r(n,\mathcal{F})\, z^n, \tag{I.4}$$

где $r(n,\mathcal{F})$ обозначает число представлений натурального числа n формой $\mathcal{F}$.

Лемма 4 (/I/, стр. 874-875). Пусть $2|k$, $k>2$, q - нечетное простое, $\mathcal{F}$ - положительная примитивная квадратичная форма типа $(-k, q, I)$. Тогда разность

$$\vartheta(\tau,\mathcal{F})-E(\tau,\mathcal{F})$$

будет параболической формой типа $(-k, q, I)$.

Лемма 5 (/I/, стр. 846). Если $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ имеют одну и ту же ступень N и характеры, соответственно, $\varepsilon_1(n)$ и $\varepsilon_2(n)$, то форма $Q=Q_1(x)+Q_2(x)$ будет иметь ступень N и характер $\varepsilon_1(n)\varepsilon_2(n)$.

Из (I.I) - (I.3), при $k=4$, следует

$$\rho_4=\frac{1}{240},\quad \alpha=240\,\frac{q^{4-\ell}-1}{q^4-1},\quad \beta=240\,\frac{q^4-q^{4-\ell}}{q^4-1},$$

$$E(\tau,\mathcal{F})=1+\frac{240}{q^4-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(q^{4-\ell}-1)\sigma_3(n)z^n+(q^4-q^{4-\ell})\sigma_3(n)z^{qn}\right\}. \tag{I.5}$$

§ 2. В настоящем параграфе рассматриваются квадратичные формы типа (-4, 5, I).

В работе /2/ показано, что форма

$$Q_1=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_4^2+x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_4+2x_3x_4 \tag{2.I}$$

является квадратичной формой типа (-2, 5, I) и что для нее Δ =

$D = 25$, $A_{11} = 20$. Следовательно, согласно лемме I, получаем

$$\varphi_{11} = x_1^2 - \frac{20}{4\cdot 25}\, 2Q_1 = x_1^2 - \frac{2}{5} Q_1 . \qquad (2.2)$$

Лемма 6. Тэта-ряд

$$\vartheta(\tau, \varphi_{11}, Q_1) = \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=Q_1} 5x_1^2 - 2n\Big) z^n = \frac{8}{5} z + \dots , \qquad (2.3)$$

где Q_1 и φ_{11} определены формулами (2.I) и (2.2), является базисом пространства параболических форм типа (-4, 5, I).

Доказательство. Проделывая простые вычисления при помощи решений уравнения (I.8) из /2/ (стр. I49), убеждаемся в справедливости разложения (2.3). Далее, так как тэта-ряд (2.3) тождественно не исчезает, то он линейно независим. Следовательно, согласно лемме 4, утверждаемое справедливо, ибо известно (/I/, стр. 899), что максимальное число линейно независимых параболических форм типа (-4, 5, I) равно I.

Теорема I. Пусть

$$\begin{aligned} F_1 = {} & x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + 2x_3x_4 + \\ & + x_5^2 + x_6^2 + 2x_7^2 + 2x_8^2 + x_5x_6 + x_5x_7 + x_5x_8 + x_6x_8 + 2x_7x_8 . \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Тогда

$$r(n, F_1) = \frac{120}{13}\sigma_3^*(n) + \frac{9}{26}\sum_{n=Q_1}(5x_1^2 - 2n),$$

где

$$\sigma_3^*(n) = \begin{cases} \sigma_3(n) & \text{при } 5 \nmid n, \\ \sigma_3(n) + 25\sigma_3\left(\frac{n}{5}\right) & \text{при } 5 \mid n \end{cases}$$

Доказательство. Согласно лемме 5, приняв во внимание (2.I), для F_1 получим: $k = 4$, $D = 25^2$, $\Delta = 5^4$, $\ell = 2$, $N = q =$

= 5, $\mathcal{E}(n)$ = I, т.е. $\mathcal{F}_1$ является примитивной квадратичной формой типа (–4, 5, I).

В работе /2/ показано, что

$$\vartheta(\tau,Q_1)=1+\sum_{n=1}^{\infty} r(n,Q_1)z^n=1+6z+\ldots$$

Таким образом, согласно (2.4) и (2.I), имеем

$$\vartheta(\tau,\mathcal{F}_1)=\vartheta^2(\tau,Q_1)=1+12z+\ldots \qquad (2.5)$$

Из (I.5), при q = 5 и ℓ = 2, следует

$$E(\tau,\mathcal{F}_1)=1+\frac{120}{13}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_3(n)z^n+25\sigma_3(n)z^{5n}\right)=1+\frac{120}{13}z+\ldots \qquad (2.6)$$

Согласно лемме 4, разность $\vartheta(\tau,\mathcal{F}_1)-E(\tau,\mathcal{F}_1)$ является параболической формой типа (–4, 5, I). Следовательно, согласно лемме 6, существует такое число c, что

$$\vartheta(\tau,\mathcal{F}_1)-E(\tau,\mathcal{F}_1)=c\,\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_2).$$

Приравнивая коэффициенты при z в обеих частях этого равенства и принимая во внимание (2.5), (2.6) и (2.3), получаем, что $c=\frac{45}{26}$. Таким образом, доказано тождество

$$\vartheta(\tau,\mathcal{F}_1)=E(\tau,\mathcal{F}_2)+\frac{45}{26}\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_2). \qquad (2.7)$$

Приравнивая коэффициенты при z^n в обеих частях тождества (2.7) и принимая во внимание (I.4), (2.6) и (2.3), получаем утверждаемое.

<u>Теорема 2</u>. П у с т ь

$$\mathcal{F}_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_4+$$
$$+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+x_5x_6+x_5x_7+x_6x_8. \qquad (2.8)$$

Т о г д а

$$r(n,\mathcal{F}_2)=\frac{20}{13}\sigma_3^*(n)-\frac{25}{26}\sum_{n=Q_1}(5x_1^2-2n),$$

г д е

$$\sigma_3^*(n)=\begin{cases}31\sigma_3(n) & \text{при } 5\nmid n,\\ 31\sigma_3(n)+125\sigma_3\left(\frac{n}{5}\right) & \text{при } 5\mid n.\end{cases}$$

Доказательство. В работе /2/ показано, что форма

$$\tilde{Q}_1=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_4 \tag{2.9}$$

является квадратичной формой типа $\left(-2,\ 5,\ \left(\frac{5}{n}\right)\right)$ и что для нее $\Delta = D = 25$. В работе /2/ также показано, что

$$\vartheta(\tau,\tilde{Q}_1)=1+20z+\ldots \tag{2.10}$$

Согласно лемме 5, приняв во внимание (2.9), для F_2 получим: $k=4$, $D=5^2$, $\Delta=5^2$, $N=q=5$, $l=1$, $\varepsilon(n)=1$, т.е. F_2 является примитивной квадратичной формой типа $(-4,\ 5,\ 1)$.

Согласно (2.8) и (2.10), имеем

$$\vartheta(\tau,F_2)=\vartheta^2(\tau,\tilde{Q}_1)=1+40z+\ldots \tag{2.11}$$

Из (1.5), при $q=5$ и $l=1$, следует

$$E(\tau,F_2)=1+\frac{20}{13}\sum_{n=1}^{\infty}\left(31\sigma_3(n)z^n+125\sigma_3(n)z^{5n}\right)=$$

$$=1+\frac{620}{13}z+\ldots \tag{2.12}$$

Далее, рассуждая так же, как и в теореме 1, получаем тождество

$$\vartheta(\tau,F_2)=E(\tau,F_2)-\frac{125}{26}\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_1),$$

откуда следует утверждаемое.

§ 3. В настоящем параграфе рассматриваются квадратичные формы типа $(-4,\ 7,\ 1)$.

В работе /2/ показано, что форма

$$Q_2=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_4^2+x_1x_3+x_2x_4 \tag{3.1}$$

является квадратичной формой типа (-2, 7, I) и что для нее: $\Delta = D = 49$, $A_{11} = 28$. Следовательно, согласно лемме 2, получаем

$$\varphi_{11} = x_1^2 - \frac{28}{4\cdot 49}\,2Q_2 = x_1^2 - \frac{2}{7}Q_2 \qquad (3.2)$$

Лемма 7. Тэта-ряд

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_2) = \frac{1}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=Q_2} 7x_1^2 - 2n\Big)z^n = \frac{6}{7}z + \dots, \qquad (3.3)$$

где Q_2 и φ_{11}, определены формулами (3.I) и (3.2), является базисом пространства параболических форм типа (-4, 7, I).

Доказательство. Проделывая простые вычисления при помощи решений уравнения (I.14) из /2/ (стр. I50), убеждаемся в справедливости разложения (3.3). Далее, так как тэта-ряд (3.3) тождественно не исчезает, то он линейно независим. Следовательно, согласно лемме 2, утверждаемое справедливо, ибо известно (/I/, стр. 899), что максимальное число линейно независимых параболических форм типа (-4, 7, I) равно I.

Теорема 3. Пусть

$$F_3 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_5^2 + x_6^2 + 2x_7^2 + 2x_8^2 + x_5x_7 + x_6x_8. \qquad (3.4)$$

Тогда

$$r(n,F_3) = \frac{24}{5}\sigma_3^*(n) + \frac{8}{15}\sum_{n=Q_2}(7x_1^2 - 2n),$$

где

$$\sigma_3^*(n) = \begin{cases} \sigma_3(n) & \text{при } 7 \nmid n, \\ \sigma_3(n) + 49\sigma_3\left(\frac{n}{7}\right) & \text{при } 7 \mid n. \end{cases}$$

Доказательство. Согласно лемме 5, приняв во внимание

(3.I), для $\mathcal{F}_3$ получим $k = 4$, $D = 49^2$, $\Delta = 7^4$, $\ell = 2$, $N = q = 7$, $\mathcal{E}(n) = 1$, т.е. $\mathcal{F}_3$ является примитивной квадратичной формой типа (-4, 7, I). В /2/ (стр. I58) показано, что

$$\vartheta(\tau, \mathcal{F}_3) = 1 + 4z + \ldots$$

Таким образом, согласно (3.4) и (3.I), имеем

$$\vartheta(\tau, \mathcal{F}_3) = \vartheta^2(\tau, Q_2) = 1 + 8z + \ldots \qquad (3.5)$$

Из (I.5), при $q = 7$ и $\ell = 2$, следует

$$E(\tau, \mathcal{F}_3) = 1 + \frac{24}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_3(n) z^n + 49\sigma_3(n) z^{7n}\right) = 1 + \frac{24}{5} z + \ldots \qquad (3.6)$$

Далее, рассуждая так же, как и в теореме I, получаем тождество

$$\vartheta(\tau, \mathcal{F}_3) = E(\tau, \mathcal{F}_3) + \frac{56}{15}\vartheta(\tau, \varphi_{11}, Q_2),$$

откуда следует утверждаемое.

§ 4. В настоящем параграфе рассматриваются квадратичные формы типа (-4, II, I).

Э.Гекке (/I/, стр. 90I) показал, что существуют три приведенные квадратичные формы дискриминанта I2I и ступени II:

$$Q_3 = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 + x_3^2 + x_3x_4 + x_4^2, \qquad (4.1)$$

$$\tilde{Q}_3 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - 2x_2x_4, \qquad (4.2)$$

$$Q_3^* = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + x_1x_3 + 4x_2x_3 + 3x_2x_4 + 7x_3x_4, \qquad (4.3)$$

и что

$$\vartheta(\tau, Q_3) = 1 + 4z + 4z^2 + \ldots, \qquad (4.4)$$

$$\vartheta(\tau, \tilde{Q}_3) = 1 + 0z + 12z^2 + \ldots, \qquad (4.5)$$

$$\vartheta(\tau, Q_3^*) = 1 + 6z + 0z^2 + \ldots \qquad (4.6)$$

Формы Q_3 и $\tilde{Q}_3$ являются квадратичными формами типа (-2, II, I); далее $\mathcal{D}$ = I2I, A_{11} = 66 в случае формы Q_3, и $\mathcal{D}$ = I2I, A_{11} = 44 в случае формы $\tilde{Q}_3$. Следовательно, согласно лемме I, получаем

$$\varphi_{11}=x_1^2-\frac{3}{11}Q_3\,,\quad \tilde{\varphi}_{11}=x_1^2-\frac{2}{11}\tilde{Q}_3\,. \tag{4.7}$$

<u>Лемма 8.</u> Система тэта-рядов

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_3)=\frac{1}{11}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=Q_3}(11x_1^2-3n)\Big)z^n=\frac{10}{11}z+\frac{20}{11}z^2+\ldots, \tag{4.8}$$

$$\vartheta(\tau,\tilde{\varphi}_{11},\tilde{Q}_3)=\frac{1}{11}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=\tilde{Q}_3}(11x_1^2-2n)\Big)z^n=-\frac{4}{11}z^2+\ldots, \tag{4.9}$$

где Q_3, $\tilde{Q}_3$, φ_{11} и $\tilde{\varphi}_{11}$ определены формулами (4.I), (4.2) и (4.7), является базисом пространства параболических форм типа (-4, II, I).

<u>Доказательство</u>. Проделывая простые вычисления, при помощи решений уравнений (I.23) и (I.25) из /2/ (стр. I52 и I53), убеждаемся в справедливости разложений (4.8) и (4.9). Далее, так как определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{10}{11} & \frac{20}{11} \\ 0 & -\frac{4}{11} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то тэта-ряды (4.8) и (4.9) линейно независимы. Следовательно, согласно лемме 8, утверждаемое справедливо, ибо известно (/I/, стр. 899), что максимальное число линейно независимых параболических форм типа (-4, II, I) равно 2.

Перейдем к нахождению формул для числа представлений чисел формами:

$$\begin{aligned} F_4=x_1^2+x_1x_2+3x_2^2+x_3^2+x_3x_4+3x_4^2+x_5^2+\\ +x_5x_6+3x_6^2+x_7^2+x_7x_8+3x_8^2, \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$F_5 = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 + x_3^2 + x_3x_4 + 3x_4^2 + 2x_5^2 + 2x_6^2 + 2x_7^2 + 2x_8^2 + 2x_5x_7 + x_5x_8 + x_6x_7 - 2x_6x_8,$$

$$F_6 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_5^2 + 2x_6^2 + 2x_7^2 + 2x_8^2 + 2x_5x_7 + x_5x_8 + x_6x_7 - 2x_6x_8,$$

$$F_7 = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 + x_3^2 + x_3x_4 + 3x_4^2 + x_5^2 + 4x_6^2 + 4x_7^2 + 4x_8^2 + x_5x_7 + 4x_6x_7 + 3x_6x_8 + 7x_7x_8,$$

$$F_8 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - 2x_2x_4 + x_5^2 + 4x_6^2 + 4x_7^2 + 4x_8^2 + x_5x_7 + 4x_6x_7 + 3x_6x_8 + 7x_7x_8,$$

$$F_9 = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + x_1x_3 + 4x_2x_3 + 3x_2x_4 + 7x_3x_4 + x_5^2 + 4x_6^2 + 4x_7^2 + 4x_8^2 + x_5x_7 + 4x_6x_7 + 3x_6x_8 + 7x_7x_8.$$

<u>Теорема 4.</u>

$$r(n, F_4) = \frac{120}{61}\sigma_3^*(n) + \frac{184}{305}\omega_1(n) + \frac{88}{61}\omega_2(n),$$

$$r(n, F_5) = \frac{120}{61}\sigma_3^*(n) + \frac{62}{305}\omega_1(n) + \frac{992}{671}\omega_2(n),$$

$$r(n, F_6) = \frac{120}{61}\sigma_3^*(n) + \frac{12}{61}\omega_1(n) + \frac{156}{61}\omega_2(n),$$

$$r(n, F_7) = \frac{120}{61}\sigma_3^*(n) + \frac{49}{61}\omega_1(n) + \frac{88}{61}\omega_2(n),$$

$$r(n, F_8) = \frac{120}{61}\sigma_3^*(n) + \frac{123}{305}\omega_1(n) + \frac{210}{61}\omega_2(n),$$

$$r(n,\mathcal{F}_9)=\frac{120}{61}\sigma_3^*(n)+\frac{306}{305}\omega_1(n)+\frac{27}{61}\omega_2(n),$$

где

$$\sigma_3^*(n)=\begin{cases}\sigma_3(n) & \text{при } 11\nmid n,\\ \sigma_3(n)+121\sigma_3\left(\frac{n}{11}\right) & \text{при } 11\mid n,\end{cases}$$

$$\omega_1(n)=\sum_{n=Q_3}11x_1^2-3n,\quad \omega_2(n)=\sum_{n=\tilde{Q}_3}11x_1^2-2n.$$

<u>Доказательство</u>. Согласно лемме 5, приняв во внимание (4.I), для $\mathcal{F}_4$ получим: $\kappa=4$, $\Delta=D=\mathrm{II}^4$, $\ell=2$, $N=q=\mathrm{II}$, $\mathcal{E}(n)=\mathrm{I}$, т.е. $\mathcal{F}_4$ является примитивной квадратичной формой типа (-4, II, I).

Согласно (4.IO), (4.I) и (4.4), имеем

$$\vartheta(\tau,\mathcal{F}_4)=\vartheta^2(\tau,Q_3)=1+8z+24z^2+\dots \tag{4.II}$$

Из (I.5) при $q=\mathrm{II}$ и $\ell=2$, следует

$$E=(\tau,\mathcal{F}_4)=1+\frac{120}{61}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)z^n+121\sigma_3(n)z^{11n}=$$

$$=1+\frac{120}{61}z+\frac{1080}{61}z^2+\dots \tag{4.I2}$$

Согласно лемме 4, разность $\vartheta(\tau,\mathcal{F}_4)-E(\tau,\mathcal{F}_4)$ является параболической формой типа (-4, II, I). Следовательно, в силу леммы 6, существуют такие числа c_1 и c_2, что

$$\vartheta(\tau,\mathcal{F}_4)-E(\tau,\mathcal{F}_4)=c_1\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_3)+c_2\vartheta(\tau,\tilde{\varphi}_{11},\tilde{Q}_3).$$

Приравнивая коэффициенты при z и z^2 в обеих частях этого равенства и принимая во внимание (4.8), (4.9), (4.II) и (4.I2), получаем $c_1=\frac{2024}{305}$, $c_2=\frac{968}{61}$. Таким образом, доказано тождество

$$\vartheta(\tau, F_4) = E(\tau, F_4) + \frac{2024}{305}\vartheta(\tau, \varphi_{11}, Q_3) + \frac{968}{61}\vartheta(\tau, \tilde{\varphi}_{11}, Q_3),$$

откуда следует формула для $r(n, F_4)$.

Аналогично выводятся формулы и для $r(n, F_i)\,(i = 5, 6, 7, 8, 9)$.

(Поступило II.VI.1975)

Кафедра
высшей математики
физического факультета

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Hecke, Mathematische Werke, Göttingen, 1959.

2. Г.А.Ломадзе, Труды Тбилисского математического института АН ГССР, 45, 1974, 146-161.

3. А.Сагинтаев, Известия АН Уз.ССР, 6, 1971, 31-34.

რ. ლონდაძე

რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ /-4, q, 1/ ტიპის კვადრატული ფორმებით

რეზიუმე

წინამდებარე ნაშრომში აგებულია /-4, q, 1/ ტიპის პარაბოლურ ფორმათა სივრცის ბაზისი, როცა q = 5, 7, 11. შემდეგ, ნაპოვნი პარაბოლური ფორმების საშუალებით მიღებულია ფორმულები ნატურალური რიცხვის წარმოდგენათა რაოდენობისათვის /-4, q, 1/ ტიპის ზოგიერთი კვადრატული ფორმით, როცა q = 5, 7, 11.

R.Gongadze

ON THE REPRESENTATION OF NUMBERS BY QUADRATIC FORMS OF TYPE (-4,q,1)

Summary

A basis of the space of cusp forms of type (-4,q,1) is constructed. Then formulae are given for the number of representations of integers by certain quadratic forms of type (-4, q, 1) when q=5,7,11.

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები, 176, 1976

Труды Тбилисского университета, 176, 1976

ОПИСАНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ РАДИКАЛОВ В СПЛЕТЕНИЯХ НАДНИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

А.С.Хехутаишвили

Приведем некоторые определения и обозначения, в основном из /I-4/. Если $\mathfrak{X}$ -произвольный класс групп, тогда $\widetilde{R}\mathfrak{X}$ - класс всех групп, которые порождаются своими субинвариантными $\mathfrak{X}$ -подгруппами, $R\mathfrak{X}$ - класс всех групп, которые порождаются всеми своими инвариантными $\mathfrak{X}$ -подгруппами, $\theta\mathfrak{X}$ - класс всех групп, являющихся гомоморфными образами групп из класса $\mathfrak{X}$, $I\mathfrak{X}$ - класс всех групп, являющихся нормальными делителями групп из класса $\mathfrak{X}$. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется специальным радикальным классом, если $\{\widetilde{R},\theta,I\}\mathfrak{X}=\mathfrak{X}$. Обозначим его через $\mathcal{F}=\{R,\theta,I\}$, $\mathcal{F}^*=\{\widetilde{R},\theta,I\}$. Класс беровских и наднильпотентных групп обозначим соответственно через $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^*$. Известно, что $\mathcal{F}\mathcal{B}=\mathcal{B}$ и $\mathcal{F}^*\mathcal{B}=\mathcal{B}^*$. Через S_G^* обозначим систему всех специальных радикалов группы G. Группы θ^* и $\overline{\theta^*}$ понимаются в смысле /I/.

<u>ТЕОРЕМА I</u>. Пусть A -наднильпотентная $\overline{\theta^*}$ - группа, B -наднильпотентная группа, $G=A\,wr\,B$,: тогда

$$S^*_G=\{A_0^B,\ A^B\lambda B_0,\ \text{где}\ A_0\in S^*_H,\ B_0\in S^*_B\}.$$

Доказательству теоремы предпошлем леммы. Группы A и B называются радикально-эквивалентными (обозначается $A\sim B$), если $\mathcal{F}^*[A]=\mathcal{F}^*[B]$.

<u>Лемма I.</u> Пусть $G=A\,wr\,B=A^B\lambda B$, A -произвольная группа, B обладает ло-

кально-конечной периодической частью, B_1 и B_2 - конечные p-группы в B. Тогда

$$A^B \lambda B_1 = A \overset{B}{wr} B_1 \sim A \overset{B}{wr} B_2 = A^B \lambda B_2 .$$

(Здесь B_1 и B_2 действуют в B правым регулярным образом /1/).

Пусть $B_0 = \{B_1, B_2\}$, B_0 - конечная подгруппа в B. Если X - некоторая система представителей смежных классов в B по B_0, то $A^B \lambda B_0 = (A^X)^{B_0} \lambda B_0) = A^X wr B_0$. Если $A^X = A_1$, то $A^B \lambda B_0 = A_1 wr B_0$. Рассматривая B_1 и B_2 как правые регулярные группы подстановок в B_0 и используя лемму 4 из /4/, имеем

$$A^B \lambda B_1 = (A^X)^{B_0} \lambda B_1 = A_1^{B_0} \lambda B_1 =$$
$$= A_1 \overset{B_0}{wr} B_1 \sim A_1 \overset{B_0}{wr} B_2 = A_1^{B_0} \lambda B_2 = A^B \lambda B_2 .$$

<u>Лемма 2</u>. Пусть $\mathfrak{X}$ - специальный радикальный класс групп, A и B - наднильпотентные группы, $G = A wr B$. Тогда, если $\mathfrak{X}(G) = A^B \lambda B_0$, то $B_0 \in S_B^*$.

<u>Доказательство</u>. Через $\mathcal{B}_\Lambda^*$, где Λ - некоторое множество простых чисел, будем обозначать класс всех наднильпотентных Λ-групп. Так как B - наднильпотентная группа, то специальными радикалами в ней могут быть только подгруппы вида $\mathcal{B}_\Lambda^*(B)$ и, кроме того (если B -непериодическая), сама группа B. Поэтому нам достаточно показать, что если в B_0 содержится циклическая подгруппа порядка p, то в B_0 содержатся все циклические p-подгруппы B, а если в B_0 содержится бесконечная циклическая подгруппа, то все бесконечные циклические подгруппы из B лежат в B_0.

Пусть B_1 -циклическая подгруппа порядка p из B_0 и B_2 -циклическая p -подгруппа группы B . Так как $B_1 \cong B_0$, то $A^B \lambda B_1 \cong A^B \lambda B_0 \in \mathfrak{X}$, откуда $A^B \lambda B_1 \in \mathfrak{X}$. Применяя лемму I, получаем, что $A^B \lambda B_1 \sim A^B \lambda B_2$, откуда $A^B \lambda B_2 \in \mathfrak{X}$. Так как $A^B \lambda B_2 \cong G$, а $\mathfrak{X}(G)$ порождается всеми субинвариантными $\mathfrak{X}$ -подгруппами G , то $A^B \lambda B_2 \subset A^B \lambda B_0$, т.е. $B_2 \subset B_0$.

Пусть теперь B_1 - бесконечная циклическая подгруппа из B_0 и B_2 -произвольная бесконечная циклическая подгруппа в B . Обозначим $B_3 = \{B_1, B_2\}$. Допустим вначале, что B_1 имеет конечный индекс в B_1 и пусть $\overline{B}_1$ - нормальный делитель конечного индекса в B_3 , принадлежащий B_1 . Учитывая изоморфизм $B_2\overline{B}_1/\overline{B}_1 \approx B_2/B_2 \cap \overline{B}_1$, видим, что $B_2 \cap B_1$ имеет конечный индекс в B_2 . Следовательно, $B_2 \cap \overline{B}_1 \neq \{e\}$, а значит указанное пересечение имеет конечный индекс и в B_3 . Отсюда следует, что вместе с B_1 и B_2 имеет конечный индекс в B_3 .

Пусть, далее, X - некоторая полная система представителей в B по B_3 , X_1 - соответствующая система в B_3 по B_1 и X_2 - в B_3 по B_2 , X_1 и X_2 - конечные множества. Теперь, используя леммы I и 4 из /4/, имеем

$$A^B \lambda B_3 = (A^X)^{B_3} \lambda B_3 = A_1 \,wr\, B_3, \text{ где } A_1 = A^X,$$

$$A^B \lambda B_1 = A_1^{B_3} \lambda B_1 = (A_1^{B_1})^{X_1} \lambda B_1 \sim (A_1^{B_1} \lambda B_1)^{X_1} \sim A_1 \,wr\, B_1.$$

Аналогично $A^B \lambda B_2 \sim A_1 \,wr\, B_2$. Теперь из $A_1 \,wr\, B_1 \cong A_1 \,wr\, B_2$ следует $A^B \lambda B_1 \sim A^B \lambda B_2$.

Так как обе эти подгруппы субинвариантны в $A \,wr\, B$, то вместе с $A^B \lambda B_1$ в $\mathfrak{X}(A \,wr\, B)$ лежит и $A^B \lambda B_2$. Но тогда $B_2 \subset B_1$. Пусть, далее, B_1 имеет в B_3 бесконечный индекс. Тогда, в силу сказанного выше и B_2 имеет бесконечный индекс в B_3 . Вводим, как и раньше, системы представителей смежных классов x, x_1 и x_3. Так как B_3 – счетная группа, то x_1 и x_2 счетны. Теперь имеем

$$A^B \lambda B_1 = (A^x)^{B_3} \lambda B_1 = A_1^{B_3} \lambda B_1 = (A_1^{x_1}) \, wr \, B_1,$$

$$A^B \lambda B_2 = (A^x)^{B_3} \lambda B_2 = A_1^{B_3} \lambda B_2 = (A_1^{x_2}) \, wr \, B_2.$$

Так как $A_1^{x_1} \approx A_1^{x_2}$ и $B_1 \approx B_2$, то $(A_1^{x_1}) \, wr \, B_1 \approx \approx A_1^{x_2} \, wr \, B_2$, а отсюда $A_1^B \lambda B_1 \approx A^B \lambda B_2$. Как и раньше, заключаем: $B_2 \subset B_0$. Итак, в B_0 лежит каждая бесконечная циклическая подгруппа из B. Если учтем лемму 6 из /4/, получим, что $B_0 = B$.

<u>Доказательство теоремы I</u>. Покажем сначала, что если $\mathfrak{X}(G)$ – специальный радикал в G, то $\mathfrak{X}(G)$ совпадает с одним из радикалов из формулировки теоремы. Если $\mathfrak{X}(A) = A_0 \angle A$, то по лемме I из /5/ $\mathfrak{X}(G) = \mathfrak{X}(A)^B = A_0^B$. Если же $\mathfrak{X}(A) = A$, то $\mathfrak{X}(G) \supset A^B$, откуда $\mathfrak{X}(G) = A^B \lambda B_0$, где $B_0 \subset B$. По лемме 2 $B_0 \in S_B^*$, что и требовалось доказать.

С другой стороны, покажем, что для произвольных подгрупп $A_0 \in S_A^*$, $B_0 \in S_B^*$ существуют специальные радикалы $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$, для которых $\mathfrak{X}_1(G) = A_0^B$, $\mathfrak{X}_2(G) = A^B \lambda B_0$.

Пусть $A_0 \subset A$. Тогда положим $\mathfrak{X}_1 = \mathcal{F}^*[A_0]([A_0])$ – есть класс подгрупп, состоящих из групп изоморфных A. Тогда $\mathfrak{X}_1(A \, wr \, B) = \mathfrak{X}_1(A)^B = A_0^B$ (см. /5/, лемма I).

Пусть $A_0 \angle A$. Тогда в качестве $\mathfrak{X}_1$ возьмем класс $\mathcal{B}^*$ всех наднильпотентных групп и покажем, что $\mathcal{B}^*(G) = A^B$. Ясно, что $A^B \subset \mathcal{B}^*(G)$, так как A – наднильпотентная группа. Пусть $\mathcal{B}^*(G) = A^B \lambda B_0$, где $B_0 = \{e\}$ ($\{e\}$ – единичная группа).

Пусть H – циклическая подгруппа в B_0. Так как $\mathcal{B}^*(G)$ – наднильпотентная группа, то $H \trianglelefteq \mathcal{B}^*(G)$. Но это эквивалентно тому, что H действует стабильно в A^B, что невозможно, так как $A-\theta^*$ =группа. Итак, $\mathcal{B}(G)=A^B$.

Пусть теперь $B_0\in S_B^*$, т.е. $B_0=\mathcal{X}_0(B)$ для некоторого специального радикала $\mathcal{X}_0$. Положим $\mathcal{X}_2=\mathcal{B}^*\mathcal{X}_0$. Тогда также является специальным радикальным классом. Покажем, что $\mathcal{X}_2(G)=A^B\lambda B_0$.

Выше было доказано, что $\mathcal{B}^*(G)=A^B$. Понятно, что $\mathcal{X}_2(G)\supset A^B\lambda\mathcal{X}_0(B)$, поэтому $\mathcal{B}^*(\mathcal{X}_2(G))=A^B$. Пусть $\mathcal{X}_2(G)=A^B\lambda B_0$ (По определению, произвольная группа M принадлежит произведению радикальных классов $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2$ тогда и только тогда, если $M/\mathcal{X}_1(M)\in\mathcal{X}_2$. Рассмотрим $\mathcal{X}_2(G)/\mathcal{B}^*(\mathcal{X}_2(G))=\mathcal{X}_2(G)/\mathcal{B}^*(G)=\mathcal{X}_0(B)=B_0$ т.е. $\mathcal{X}_2(G)=A^B\lambda B_0$.

Аналогично теореме I доказывается

<u>Теорема</u> 2. Пусть A -наднильпотентная θ^*-P =группа (т.е. $A\in\mathcal{B}_P^*$), B -наднильпотентная группа. Тогда
$$S_G^*=\{\{e\},A^B\lambda B_0,\ где\ B_0\in S_B^*,\ B_0\supset\mathcal{B}_P^*(B)\}.$$

В заключение приношу благодарность С.М.Вовси, который обратил мое внимание на эту задачу и дал полезные указания.

(Поступило 2.II.1975)

Батумский гос.пед.институт
им. Ш.Руставели

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.И.Плоткин, СМЖ, т.X, 1959, 1091-1108.
2. Ph. Hall, Cambr. Phil. Soc., 59, 1963, 531-553
3. K.W. Gruenberg, Ill. J. Math., 3, 1959, 151-168.
4. А.С.Хахутаишвили, Латвийский МЕ, № 9, 1971, 269-278.
5. С.М.Вовси, Труды Рижского алгебраического семинара, II, 1971, 14-18.

ა.ხახუტაიშვილი

სპეციალური რადიკალების აღწერა ზენილპოტენტური ჯგუფების გრეხილ ნამრავლებში

რეზიუმე

შრომაში აღწერილია პლოტკინის სპეციალური რადიკალები გრიუნბერგის ჯგუფების გრეხილ ნამრავლში.

A.Khakhutaishvili

DESCRIPTION OF THE SPECIAL RADICALS IN WREATH PRODUCTS OF THE OVERNII.POTENT GROUPS

Summary

All special radicals of Plotkin are described in wreath products of Gruenberg's groups.

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები, 176, 1976
Труды Тбилисского университета, 176, 1976

წრფივი განტოლების ერთი გარე სასაზღვრო ამოცანის შესახებ მოცე-მული გადაადგილებით

გ. ალექსანდრია

ვთქვათ Γ ლიაპუნოვის ტიპის შეკრული კონტურია, რომელიც კომპლექსურ სიბრტყეს ყოფს ორ ნაწილად, სასრულ D^+ და უსასრულო D^- არეებად. ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატთა სათავე D^+ არეშია მოთავსებული. $A(z)$-ით აღვნიშნოთ $D^+ \cup D^-$ სიბრტყეზე განსაზღვრული კომპლექსური $z=x+iy$ ცვლადის ჰელდერის აზრით უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში აკმაყოფილებს პირობას[1]

$$|A(z)| < \frac{B}{|z|^{1+\varepsilon}}, \quad B>0, \ \varepsilon>0.$$

განვიხილოთ კომპლექსური განტოლება

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = A\bar{U}. \qquad /1/$$

ამ განტოლების რეგულარულ ამონახსნს უწოდებენ განზოგადებულ ანალიზურ ფუნქციას[2].

$\alpha(t)$ იყოს Γ კონტურზე განსაზღვრული წარმოებადი ფუნქცია, რომელიც ამ კონტურს ასახავს თავის თავში მიმართულების შეცვლით. ვიგულისხმოთ, გარდა ამისა, რომ $\alpha'(t)$ განსხვავებულია ნულისაგან და აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას ყველგან Γ-ზე. $\alpha(t)$-ს შებრუნებული ფუნქცია აღვნიშნოთ $\beta(t)$-თი. განვიხილოთ ამოცანა:

ვიპოვოთ უსასრულობაში ქრობადი განზოგადებული ანალიზური

---

1 შეიძლება განხილულ იქნეს ის შემთხვევაც, როცა $A(z)$-ს გააჩნია პირველი გვარის წყვეტის წერტილებისა და წყვეტის წირების სასრული რაოდენობა /იხ. [1,2]/.

2 ნაშრომში გამოყენებული აღნიშვნებისა და ცნებების შესახებ /იხ. [1, 2, 3, 4]/.

$\varphi(z)$ და $\psi(z)$ ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობას

$$\varphi^-[\alpha(t_0)]=a(t_0)\psi^-(t_0)+b(t_0)\overline{\psi^-(t_0)}+c(t_0), \qquad /I/$$

სადაც $\varphi^-(t_0)$ და $\psi^-(t_0)$ აღნიშნავს სათანადო ფუნქციათა სასაზღვრო მნიშვნელობებს Γ -ზე D^- არიდან, ამასთან $a(t_0), b(t_0)$ და $c(t_0)$ Γ კონტურზე მოცემული ჰელდერის აზრით უწყვეტი ფუნქციებია.

გარდა ამისა ვიგულისხმოთ, რომ $a(t_0)$ განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო $\varphi^-(t)$ და $\psi^-(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობას ყველგან Γ -ზე.

ასეთი ტიპის ამოცანა განხილულია ჩვენ მიერ ნაშრომში [4].

წინამდებარე ნაშრომში კი, პროფ. ნ.პ.ვეკუას მეთოდის გამოყენებით /იხ. [5, 10] /, დამტკიცებულია ნეტერის ტიპის თეორემები. ამ თეორემების დამტკიცება I-ის ანალოგიური ამოცანებისათვის სხვა გზით მოყვანილია [2, 8] ნაშრომებში.

ერთგვაროვანი ამოცანის

$$\varphi^-[\alpha(t_0)]=a(t_0)\psi^-(t_0)+b(t_0)\overline{\psi^-(t_0)} \qquad /II/$$

გარე და შიგა მიკავშირებული ამოცანები შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება: ვიპოვოთ

$$\frac{\partial W}{\partial \bar z}=\overline{AW} \qquad /2/$$

განტოლების რეგულარული ამონახსნები $D^-(D^+)$ არეში, რომლებიც აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს

$$\xi^-(t_0)=a(t_0)\alpha'(t_0)\eta^-[\alpha(t_0)]+\overline{b(t_0)\alpha'(t_0)\,\overline{t_0'}\cdot\eta^-[\alpha(t_0)]}, \qquad /III/$$

$$\xi^+(t_0)=a(t_0)\alpha'(t_0)\eta^+[\alpha(t_0)]+\overline{b(t_0)\alpha'(t_0)\,\overline{t_0'}\cdot\eta^+[\alpha(t_0)]}. \qquad /IV/$$

/I/ ამოცანის ყოველი ამონახსნი წარმოიდგინება ფორმულებით

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\Omega_1(z,t)a[\beta(t)]\mu[\beta(t)]dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\Omega_2(z,t)\overline{a[\beta(t)]\mu[\beta(t)]}dt-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\Omega_1(z,t)b[\beta(t)]\overline{\mu[\beta(t)]}dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_2(z,t)\overline{b[\beta(t)]}\,\mu[\beta(t)]\overline{dt}-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,t)c[\beta(t)]dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_2(z,t)\overline{c[\beta(t)]dt}, \qquad /3/$$

$$\psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,t)\mu(t)dt+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_2(z,t)\overline{\mu(t)dt}. \qquad /4/$$

ჩავსვათ /3/ და /4/ /1/-ში, მივიღებთ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\{\Omega_1[\alpha(t_0),\alpha(t)]\alpha'(t)a(t)+\Omega_1(t_0,t)a(t_0)\}\mu(t)dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\{\Omega_1[\alpha(t_0),\alpha(t)]\alpha'(t)b(t)\overline{t'}-\overline{\Omega_1(t_0,t)}\,b(t_0)\}\overline{\mu(t)dt}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\{\Omega_2[\alpha(t_0),\alpha(t)]\overline{\alpha'(t)a(t)}+\Omega_2(t_0,t)a(t_0)\}\overline{\mu(t)dt}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\{\Omega_2[\alpha(t_0),\alpha(t)]\overline{\alpha'(t)b(t)}\,t'-\overline{\Omega_2(t_0,t)}\,b(t_0)\}\mu(t)dt=-H^+[\alpha(t_0)], \qquad /5/$$

სადაც $H^+(t_0)$ წარმოადგენს

$$H(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(z,t)c[\beta(t)]dt-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_2(z,t)\overline{c[\beta(t)]dt} \qquad /6/$$

ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობას D^+ არიდან Γ-ზე. /III და IV/ ამოცანების ყოველი ამონახსნი კი წარმოიდგინება შემდეგნაირად:

$$\xi(z)=\mp\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^*(z,t)[a(t)\nu(t)dt+\overline{b(t)\nu(t)dt}]-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_2^*(z,t)[\overline{a(t)\nu(t)dt}+b(t)\nu(t)dt]\Big\}, \qquad /7/$$

$$\eta(z)=\mp\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^*(z,t)\beta'(t)\nu[\beta(t)]dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_2^*(z,t)\overline{\beta'(t)\nu[\beta(t)]dt}\Big\}. \qquad /8/$$

თუ /7/ და /8/ ჩავსვამთ /III/ და /IV/-ში, მივიღებთ

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^*(t_0,t)a(t)\nu(t)dt - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_2^*(t_0,t)\overline{a(t)\nu(t)dt} +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^*(t_0,t)\overline{b(t)\nu(t)dt} - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_2^*(t_0,t)b(t)\nu(t)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^*[\alpha(t_0),\alpha(t)]\alpha'(t_0)a(t_0)\nu(t)dt - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_2^*[\alpha(t_0),\alpha(t)]\alpha'(t_0)a(t_0)\overline{\nu(t)dt} -$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \overline{\Omega_1^*[\alpha(t_0),\alpha(t)]\alpha'(t_0)b(t_0)}\,\overline{t_0'}\,\overline{\nu(t)dt} + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \overline{\Omega_2^*[\alpha(t_0),\alpha(t)]b(t_0)\alpha'(t_0)\,t_0'}\,\nu(t)dt = 0 \qquad /9/$$

განტოლებას, რომელიც /5/-ის მიკავშირებული ერთგვაროვანი განტოლებაა. /5/-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება აღვნიშნოთ /5_0/-ით, ხოლო /3_0/ და /4_0/-ით აღვნიშნოთ /II/-ის შესაბამისი ამოხსნები.

ცხადია, რომ თუ /5/-ის ამოხსნი წარმოადგენს D^+ არეში გან-საზღვრული განზოგადებული ანალიზური ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელო-ბას Γ-ზე, მაშინ სათანადო $\Psi(z)$ ფუნქცია აღმოჩნდება ნულის ტოლი D^- არეში, რის გამოც /5_0/ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამოხსნების რაოდენობა საზოგადოდ /II/ ამოცანის წრფივად დამოუკიდებელი ამოხსნე-ბის რაოდენობაზე მეტი იქნება.

ქვემოთ ჩვენ დავამტკიცებთ რამდენიმე ლემას, რომლებსაც არსე-ბითად გამოვიყენებთ ნეტერის თეორემების დასამტკიცებლად.

განვიხილოთ ინტეგრალური განტოლებები

$$a(t_0)\mu^+(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1[\alpha(t_0),\alpha(t)]\alpha'(t)a(t)\mu^+(t)dt -$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_2[\alpha(t_0),\alpha(t)]\overline{\alpha'(t)a(t)\mu^+(t)dt} + b(t_0)\overline{\mu^+(t_0)} +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1[\alpha(t_0),\alpha(t)]b(t)\alpha'(t)\overline{t'}\,\overline{\mu^+(t)dt} -$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_2[\alpha(t_0),\alpha(t)]\,\overline{b(t)\alpha'(t)}\,\bar{t}'\mu^+(t)dt=\mu^+(t_0)-\\
&-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1(t_0,t)\mu^+(t)dt+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_2(t_0,t)\overline{\mu^+(t)dt}, \qquad /10/
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a(t_0)\rho(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^*[\alpha(t_0),\alpha(t)]\alpha'(t_0)a(t_0)\rho(t)dt+\\
&+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_2^*[\alpha(t_0),\alpha(t)]\alpha'(t_0)a(t_0)\overline{\rho(t)dt}+\\
&+\overline{b(t_0)}\,\bar{t}_0'\,\overline{\rho(t_0)}+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \overline{\Omega_1^*[\alpha(t_0),\alpha(t)]b(t_0)\alpha'(t_0)}\cdot\bar{t}_0'\cdot\overline{\rho(t)dt}-\\
&-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \overline{\Omega_2^*[\alpha(t_0),\alpha(t)]b(t_0)\alpha'(t_0)}\,\bar{t}_0'\rho(t)dt=\\
&=\rho(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^*(t_0,t)\rho(t)dt-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_2^*(t_0,t)\overline{\rho(t)dt}, \qquad /11/
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a(t_0)\nu(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^*(t_0,t)a(t)\nu(t)dt+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_2^*(t_0,t)\overline{a(t)\nu(t)dt}+\\
&+\overline{b(t_0)}\,\bar{t}_0'\,\overline{\nu(t_0)}-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^*(t_0,t)\overline{b(t)\nu(t)dt}+\\
&+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_2^*(t_0,t)b(t)\nu(t)dt=\frac{\nu(t_0)}{\alpha'(t_0)}+\\
&+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^*[\alpha(t_0),\alpha(t)]\nu(t)dt-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_2^*[\alpha(t_0),\alpha(t)]\overline{\nu(t)dt}. \qquad /12/
\end{aligned}
$$

სამართლიანია შემდეგი ლემები:

ლემა 1. /12/ განტოლებას გააჩნია მხოლოდ

$$\nu(t)=\alpha'(t)\,\nu^+[\alpha(t)]$$

სახის ამონახსნები, სადაც $\nu^+(t)$ წარმოადგენს D^+ არეში განსაზღვრული განზოგადებული ანალიზური ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობას Γ-ზე.

ლემა II. /11/ განტოლების ამონახსნს შეუძლებელია ჰქონდეს

$$\rho(t)=\alpha'(t)\sigma^-[\alpha(t)]$$

სახე, სადაც $\sigma^-(t)$ წარმოადგენს უსასრულობაში ქრობადი და D^- არეში განსაზღვრული განზოგადებული ანალიზური ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობას Γ-ზე

ლემა III. /11/ და /12/ განტოლებებს აქვთ ერთი და იგივე რაოდენობა წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებისა.

ლემა IV. /10/ განტოლებას მხოლოდ ისეთ ამონახსნი გააჩნია, რომელიც D^+ არეში განსაზღვრული განზოგადებული ანალიზური ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობაა Γ-ზე.

I ლემის დამტკიცება. ვთქვათ $\nu(t)$ წარმოადგენს /12/ განტოლების რაიმე ამონახსნს. მაშინ /7/ და /8/ ტოლობების გამოყენებით /12/ მოგვცემს

$$\xi^-(t_0)=\eta^-[\alpha(t_0)]. \qquad /13/$$

ამ ამოცანას კი მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი აქვს /იხ. [6] /, რის გამოც გვექნება

$$\nu(t_0)=\alpha'(t_0)\sigma^+[\alpha(t_0)].$$

ამით ლემა 1 დამტკიცებულია.

ახლა ვთქვათ, რომ /11/ განტოლების ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$\rho(t_0)=\alpha'(t_0)\sigma^-[\alpha(t_0)].$$

მაშინ /11/ ასე გადაიწერება

$$\rho(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^*(t_0,t)\rho(t)dt-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \Omega_2^*(t_0,t)\overline{\rho(t)dt}=0.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\rho(t_0)=P^-(t_0)$ ანუ

$$\alpha'(t_0)\sigma^-[\alpha(t_0)]-P^-(t_0)=0. \qquad /14/$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ამ ამოცანას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი აქვს. მართლაც /14/ ამოცანის ყოველი ამონახსნი წარმოიდგინება ფორმულებით

$$P(z)=-\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^*(z,t)\rho(t)dt-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_2^*(z,t)\overline{\rho(t)dt}\right], \qquad /15/$$

$$\sigma(z)=-\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_1^*(z,t)\beta'(t)\rho[\beta(t)]dt-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Omega_2^*(z,t)\overline{\beta'(t)\rho[\beta(t)]dt}\right].$$

თუ ამათ ჩავსვამთ /14/-ში, მივიღებთ

$$M\rho=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\{\Omega_1^*[\alpha(t_0),\alpha(t)]\alpha'(t_0)+\Omega_1^*(t_0,t)\}\rho(t)dt-$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\{\Omega_2^*[\alpha(t_0),\alpha(t)]\alpha'(t_0)+\Omega_2^*(t_0,t)\}\overline{\rho(t)dt}=0. \qquad /16/$$

გავიხსენოთ, რომ

$$\Omega_1^*(z,t)=-\Omega_1(t,z),$$
$$\Omega_2^*(z,t)=\overline{\Omega_2(t,z)}$$

და დავწეროთ /16/-ის მიკავშირებული განტოლება

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\{\Omega_1[\alpha(t_0),\alpha(t)]\alpha'(t)\rho_1(t)dt-\Omega_2[\alpha(t_0),\alpha(t)]\overline{\alpha'(t)\rho_1(t)dt}\}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\left[\Omega_1(t_0,t)\rho_1(t)dt-\Omega_2(t_0,t)\overline{\rho_1(t)dt}\right]=0. \qquad /17/$$

ამ განტოლების $\rho_1(t)$ ამონახსნის საშუალებით ავაგოთ ფუნქციები

$$\psi_1(z)=-\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1(z,t)\rho_1[\beta(t)]dt-\frac{1}{2\pi i}\int\Omega_2(z,t)\overline{\rho_1[\beta(t)]dt}\right],$$

$$\psi_2(z)=-\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1(z,t)\rho_1(t)dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_2(z,t)\overline{\rho_1(t)dt}\right]. \qquad /18/$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს ფუნქციები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\psi_1^-[\alpha(t_0)]=\psi_2^-(t_0). \qquad /19/$$

ამ უკანასკნელ ამოცანას კი მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი აქვს. მეორე მხრივ, /19/ ამოცანის ყოველი ამონახსნი წარმოიდგინება /18/ სახით, სადაც $\rho_1(t)=\psi_2^-(t)$, ამასთან $\rho_1(t)$ იქნება /17/-ის ამონახსნიც, რის გამოც გვექნება

$$\rho_1(t)=0.$$

ამრიგად, /17/ განტოლებას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი გააჩნია, რადგან /16/ განტოლების ინდექსი ნულის ტოლია, მასაც მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნები ექნება. ეს კი გვარწმუნებს მეორე ლემის სამართლიანობაში.

გადავიდეთ III ლემის დამტკიცებაზე. ვთქვათ $P(t)$ არის /11/ განტოლების რაიმე ამონახსნი. შევადგინოთ ფუნქციები

$$\xi(z)=-P(z),$$
$$\eta(z)=-\sigma(z). \qquad /20/$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს ფუნქციები დააკმაყოფილებენ /IV/ ამოცანას. პირიქით, ვთქვათ $\xi(z)$ და $\eta(z)$ ფუნქციები /IV/ ამოცანის ამონახსნია. განვიხილოთ გამოსახულება

$$g(t_0)=\alpha'(t_0)\eta^+[\alpha(t_0)]-\xi^+(t_0). \qquad /21/$$

ეს უკანასკნელი გარკვეული სასაზღვრო ამოცანაა, რომელსაც $\xi(z)$ და $\eta(z)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ.

მეორე მხრივ, /21/ ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ /20/ სახით.

გვექნება

$$M\rho = g(t_0).$$

ამ განტოლებას კი, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, ერთადერთი ამონახსნი გააჩნია. ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ /IV/ ამოცანის ყოველი ამონახსნი წარმოიდგინება /20/ ფორმულით და, მაშასადამე, /IV/ და /II/-ს აქვს ერთი და იგივე რაოდენობა წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებისა.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ /12/ განტოლებასა და /IV/ ამოცანას ერთი და იგივე რაოდენობა წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები აქვთ. მართლაც, ვთქვათ $\nu(t)$ არის /12/ განტოლების ამონახსნი. I ლემის თანახმად

$$\nu(t)=\alpha'(t)\eta^{+}[\alpha(t)], \qquad /22/$$

რის გამოც /7/ და /8/ ფუნქციები იქნებიან /IV/ ამოცანის ამონახსნები.

ახლა ვთქვათ $\xi(z)$ და $\eta(z)$ წარმოადგენენ /IV/ ამოცანის ამონახსნს. განვიხილოთ ფუნქცია /22/.

ადვილი მისახვედრია, რომ /IV/ ამოცანის ყოველი ამონახსნი წარმოიდგინება /7/ და /8/ სახით, სადაც $\nu(t)$ იქნება /12/ განტოლების ამონახსნი.

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან გამომდინარეობს III ლემის სამართლიანობა.

IV ლემა მტკიცდება I ლემის ანალოგიურად.

სამართლიანია შემდეგი თეორემები:

თეორემა I. იმისათვის რომ /I/ ამოცანას გააჩნდეს უსასრულობაში ქრობადი ამონახსნები, აუცილებელი და საკმარისია, რომ /III/ ამოცანის ყოველი ამონახსნისათვის შესრულებული იყოს პირობა

$$\mathrm{Re}\int_{\Gamma}\alpha'(t)\eta^{-}[\alpha(t)]c(t)\,dt=0.$$

თეორემა 2. $l-l'=2\varkappa$ სადაც l და l' ნარმოადგე-ნენ /11/ და მისი მიკავშირებული /111/ ამოცანის წრფივად დამოუკიდებელ ამო-ხსნათა რაოდენობებს შესაბამისად, ხოლო $\varkappa=\mathrm{ind}\,a(t)$.

როგორც ცნობილია, /5/ განტოლების ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა შემდეგში მდგომარეობს:

$$\mathrm{Re}\int_{\Gamma}\nu(t_0)H^{+}[\alpha(t_0)]\,dt_0=0,$$

სადაც $\nu(t_0)$ არის /9/ განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი. თუ წინა ფორმულაში ჩავსვამთ $H^{+}[\alpha(t_0)]$ -ის მნიშვნელობას, მივიღებთ

$$0=\mathrm{Re}\Big\{\int_{\Gamma}\Big[\frac{c(t_0)}{2}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1[\alpha(t_0),\alpha(t)]c(t)\alpha'(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_2[\alpha(t_0),\alpha(t)]\overline{c(t)\alpha'(t)\,dt}\Big]\nu(t_0)\,dt_0\Big\}=$$

$$=\mathrm{Re}\Big\{\int_{\Gamma}\frac{c(t_0)\nu(t_0)}{2}dt_0-\int_{\Gamma}\alpha'(t_0)c(t_0)\,dt_0\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1[\alpha(t),\alpha(t_0)]\nu(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\overline{\alpha'(t_0)c(t_0)\,dt_0}\int_{\Gamma}\Omega_2[\alpha(t),\alpha(t_0)]\nu(t)\,dt\Big\}=$$

$$=\int_{\Gamma}c(t_0)\alpha'(t_0)\,dt_0\Big[\frac{\nu(t_0)}{2\alpha'(t_0)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1[\alpha(t),\alpha(t_0)]\nu(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\overline{\Omega_2[\alpha(t),\alpha(t_0)]\nu(t)\,dt}\Big]+$$

$$+\int_{\Gamma}\overline{c(t_0)\alpha'(t_0)\,dt_0}\Big[\overline{\frac{\nu(t_0)}{2\alpha'(t_0)}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\overline{\Omega_1[\alpha(t),\alpha(t_0)]\nu(t)\,dt}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_2[\alpha(t),\alpha(t_0)]\nu(t)\,dt\Big].$$

და გავითვალისწინებთ, რომ

$$\Omega_1(t,t_0) = -\Omega_1^*(t_0,t),$$
$$\Omega_2(t,t_0) = \overline{\Omega_2^*(t_0,t)},$$

მაშინ /8/ ფორმულის ძალით მივიღებთ

$$\int_\Gamma c(t_0)\alpha'(t_0)\eta^-[\alpha(t_0)]dt_0 + \int_\Gamma \overline{c(t_0)\alpha'(t_0)\eta^-[\alpha(t_0)]dt_0} = 0,$$

ანუ

$$Re\int_\Gamma c(t)\alpha'(t)\eta^-[\alpha(t)]dt = 0.$$

რაც ამტკიცებს პირველ თეორემას.

k -თი აღვნიშნოთ /5₀/ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების რაოდენობა, ხოლო k_1 -ით მისივე ისეთი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების რაოდენობა, რომლებიც D^+ -ში განსაზღვრულ განზოგადებულ ანალიზურ ფუნქციათა სასაზღვრო მნიშვნელობებს წარმოადგენენ Γ-ზე. გვექნება

$$k = l - k_1$$

IV ლემის თანახმად k_1 იქნება /10/ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების რაოდენობაც.

k' -თი აღვნიშნოთ /9/ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების რაოდენობა, ხოლო k_1' -ით მისივე ისეთი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების რაოდენობა, რომლებიც წარმოიდგინებიან შემდეგი სახით

$$\nu(t) = \alpha'(t)\nu^+[\alpha(t)].$$

გვექნება

$$k' = l' + k_1'.$$

I ლემის გამოყენებით ადვილად შემოწმდება, რომ k_1' იქნება /12/ განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების რაოდენობაც.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ /5₀/ განტოლების ინდექსი ნულის ტოლია, რის გამოც

$$k = k'.$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$l - l' = 2\varkappa,$$

სადაც

$$\varkappa = \operatorname{ind} a(t).$$

ამრიგად დამტკიცდა მეორე თეორემაც.

ანალოგიური თეორემების დამტკიცება შეიძლება რამდენიმე საძიებელი ფუნქციის შემთხვევაშიც.

(მიღებულია 10.XII.1975)

ფიზიკის ფაკულტეტის
მათემატიკის კათედრა

ლიტერატურა

1. И.Н.Векуа, Обобщенные аналитические функции. М., 1959.

2. Л.Г.Михайлов, ДАН СССР, т.112, № 1, 1957.

3. Ф.Д.Гахов, Краевые задачи. М., 1958.

4. Г.Н.Александрия, Сообщения АН ГССР, т. XXI, № 3, 1958.

5. Н.П.Векуа, Труды Тбилисского мат.института, т.XXXIУ, 1968.

6. Д.А.Квеселава, Труды Тбилисского мат.института, т.ХУI, 1948

7. Г.Ф.Манджавидзе, Сообщения АН ГССР, т.IУ, № 5, 1950.

8. Б.В.Боярский, Сообщения АН ГССР, т.XXXУI, 1960.

9. Л.Г.Михайлов, Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1963.

10. Н.И.Векуа, Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., 1972.

Г.Н. Александрия

ОБ ОДНОЙ ВНЕШНЕЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ С ЗАДАННЫМ СМЕЩЕНИЕМ

Р е з ю м е

Рассматривается следующая граничная задача: в бесконечной области D^- найти обобщенные аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ по граничному условию

$$\varphi^-[\alpha(t)]=a(t)\,\psi^-(t)+b(t)\overline{\psi^-(t)}+c(t),$$

где функции $a(t), b(t), c(t)$ и $\alpha(t)$ удовлетворяют известным условиям гладкости, причем $a(t)\neq 0$.

Задача такого типа изучена в работе [4]. В настоящей заметке, видоизменяя метод проф. Н.П.Векуа [5], доказываем теоремы, аналогичные теоремам Нетера.

G. Alexandria

ON AN EXTERNAL BOUNDARY PROBLEM OF LINEAR CONJUGATION WITH A GIVEN DISPLACEMENT

Summary

The paper considers the following problem: to find generalized functions $\varphi(z)$ and $\psi(z)$ in an infinite domain D^- with the boundary condition

$$\varphi^-[\alpha(t)] = a(t)\psi^-(t) + b(t)\overline{\psi^-(t)} + c(t)$$

where functions a(t), b(t), c(t), α(t) satisfy certain smoothness conditions and $a(t) \neq 0$.

The problem of this type was studied in [4]. Modifying N.P. Vekua's method [5], theorems analogous to those of Noether are proved.

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები, 176, 1976

Труды Тбилисского университета, 176, 1976

მაღალი რიგის აპროქსიმაციის სხვაობიანი სქემები მეორე რიგის ელიფსური ტიპის შერეულ წარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებისათვის

ი. აბულაძე

განვიხილოთ p-განზომილებიან მართკუთხა პარალელეპიპედში $\bar{G}=\{0\le x_\alpha\le l_\alpha, \alpha=1,2,\dots,p\}$ დირიხლეს ამოცანა მეორე რიგის ელიფსური ტიპის მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$Lu(x)=f(x),\quad x=(x_1,x_2,\dots,x_p)\in G, \qquad /1/$$

$$u(x)=\mu(x),\quad x\in\Gamma, \qquad /2/$$

სადაც

$$L\equiv\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+2\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}c_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j},$$

ხოლო Γ საზღვარია G არისა.

ქვემოთ აგებული იქნება სხვაობიანი სქემა, რომელიც ახდენს /1/-/2/ ამოცანის აპროქსიმაციას ბიჯის მიმართ მეოთხე რიგის სიზუსტით, როდესაც საძიებელი ამოხსნა $u(x)\in C^{(6)}(\bar{G})$.

ანალოგიური საკითხი, როცა $p=2$, განხილულია /1/-ში.

დავფაროთ G არე ისეთი მართკუთხა $\bar{\omega}_h$ ბადით, რომელიც თანაბარია ყოველი x_α კოორდინატის მიმართ

$$\bar{\omega}_h=\{x_i=(x_1^{(i_1)}=i_1h_1,\dots,x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h_\alpha,\dots,x_p^{(i_p)}=i_p h_p)\in\bar{G},$$

$$h_\alpha=\eta_\alpha h=l_\alpha/N_\alpha,\ i_\alpha=0,1,\dots,N_\alpha,\ \alpha=1,2,\dots,p\}.$$

$\bar{\omega}_h=\omega_h+\gamma_h$, სადაც ω_h-ით აღნიშნულია შიგა კვანძითი წერტილების სიმრავლე, ხოლო γ_h-ით-ბადის საზღვრითი წერტილების სიმრავლე.

დავუშვათ, რომ სხვაობიანი სქემის ასაგებად ვიყენებთ 3^p წერტილიან პარალელეპიპედური ტიპის შაბლონს. ასეთ შემთხვევაში სამართლიანია შემდეგი

თეორემა. თუ $\eta_i \neq \eta_j \ (i\neq j)$ ერთი მაინც $i,j=1,2,\dots,p$ წყვილისათვის, მაშინ არ შეიძლება აიგოს 3^p წერტილიანი სხვაობიანი განტოლება, რომლის აპროქსიმაციის რიგი იქნება 4-ის ტოლი h ბიჯის მიმართ.

ეს თეორემა მტკიცდება ისევე, როგორც თეორემა /2/ -დან.

ავაგოთ 3^p -წერტილიანი სხვაობიანი განტოლება, რომლის აპროქსიმაციის რიგი იქნება h^4. ამისათვის საკმარისია დავუშვათ, რომ

$$\eta_i=\eta_j=1 \quad (i,j=1,2,\dots,p).$$

განვიხილოთ შემდეგი სხვაობიანი სქემა

$$h^{-2}\sum_{n_1,\dots,n_p=-1}^{1} a_{n_1\dots n_p} u_{i_1+n_1\dots i_p+n_p}=\left(f(x)+\frac{h^2}{12}Lf(x)\right)_{x=\bar{x}}, \qquad /3/$$

$$\bar{x}=(i_1h,\dots,i_ph)\in\omega_h,\ i_\alpha=1,2,\dots,N_\alpha-1,\ \alpha=1,2,\dots,p; \qquad /4/$$
$$u(\bar{x})=\mu(\bar{x}),\ \bar{x}\in\gamma_h,$$

სადაც $a_{n_1 n_2\dots n_p}$ არის განუსაზღვრელი კოეფიციენტები. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$a^{(l,\dots,q)}_{n_l\dots n_q}\equiv a_{n_1 n_2\dots n_p},\quad n_s=0,\ s\neq l,\dots,q$$
$$a_0\equiv a_{00\dots 0}.$$

განვსაზღვროთ $a^{(l,\dots,q)}_{n_l\dots n_q}\ (n_1^2+n_2^2+\dots+n_p^2\leq 3)$ კოეფიციენტები შემდეგნაირად:

$$a_0=\frac{p^2-7p}{3}+\frac{2}{3}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{p}c_{ij}^2+\frac{1}{36}\sum_{\substack{i,j,k,m=1\\ i\neq j\neq k\neq m}}^{p}(c_{ij}c_{km}+c_{ik}c_{jm}+c_{im}c_{jk})+ \qquad /5_0/$$
$$+\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{p}S^{(i,j,k)}_{100}\left(1,-\frac{4}{3},\frac{1}{12}\right),$$

$$a_1^{(i)}=\frac{4-p}{3}-\frac{2}{3}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}c_{ij}^2-\frac{1}{18}\sum_{\substack{j,k,m=1\\ i\neq j\neq k\neq m}}^{p}(c_{ij}c_{km}+c_{ik}c_{jm}+c_{im}c_{jk})+ \qquad /5_i/$$
$$+\sum_{\substack{j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{p}S^{(i,j,k)}_{100}\left(1,2,-\frac{1}{6}\right),$$

$$a_{11}^{(i,j)}=\frac{1}{6}+\frac{5-p}{6}c_{ij}+\frac{1}{3}c_{ij}^2-\frac{1}{3}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{p}c_{ik}c_{jk}+\frac{1}{6}\sum_{\substack{k,m=1\\m\neq k\neq i,j}}^{p}(c_{ij}c_{km}+$$

$$+c_{ik}c_{jm}+c_{im}c_{jk})+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{p}S_{110}^{(i,j,k)}(1,-2,\tfrac{1}{2}), \qquad 15_2$$

$$a_{1-1}^{(i,j)}=\frac{1}{6}-\frac{5-p}{6}c_{ij}+\frac{1}{3}c_{ij}^2+\frac{1}{3}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{p}c_{ik}c_{jk}+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{p}S_{1-10}^{(i,j,k)}(0,-2,\tfrac{1}{2}),$$

$$a_{111}^{(i,j,k)}=\frac{1}{12}\left[c_{ij}+c_{ik}+c_{jk}+2(c_{ij}c_{ik}+c_{ij}c_{jk}+c_{ik}c_{jk})\right]-$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{\substack{m=1\\m\neq i,j,k}}^{p}(c_{ij}c_{km}+c_{ik}c_{jm}+c_{im}c_{jk})+S_{111}^{(i,j,k)}(1,1,-1), \qquad 15_3$$

$$a_{11-1}^{(i,j,k)}=\frac{1}{12}\left[c_{ij}-c_{ik}-c_{jk}+2(c_{ik}c_{jk}-c_{ij}c_{ik}-c_{ij}c_{jk})\right]+S_{11-1}^{(i,j,k)}(0,1,-1),$$

$$a_{1-11}^{(i,j,k)}=\frac{1}{12}\left[c_{ik}-c_{ij}-c_{jk}+2(c_{ij}c_{jk}-c_{ij}c_{ik}-c_{ik}c_{jk})\right]+S_{1-11}^{(i,j,k)}(0,1,-1),$$

$$a_{1-1-1}^{(i,j,k)}=\frac{1}{12}\left[c_{jk}-c_{ij}-c_{ik}+2(c_{ij}c_{ik}-c_{ij}c_{jk}-c_{ik}c_{jk})\right]+S_{1-1-1}^{(i,j,k)}(0,1,-1),$$

ხოლო $a_{1111}^{(i,j,k,m)}$ შემდეგნაირად არის:

$$a_{1111}^{(i,j,k,m)}=\frac{1}{3}(c_{ij}c_{km}+c_{ik}c_{jm}+c_{im}c_{jk})+S_{1111}^{(i,j,k,m)}, \qquad 15_4$$

სადაც

$$S_{1111}^{(i,j,k,m)}=\sum_{\substack{n_1,\dots,n_p=-1\\n_1^2+\dots+n_p^2=4}}^{1}n_in_jn_kn_m\frac{1+n_i}{2}\left(\frac{n_j+1}{2}\cdot\frac{n_k+1}{2}\cdot\frac{n_m+1}{2}-1\right)a_{n_1\dots n_p}-$$

$$-\sum_{\substack{n_1,\dots,n_p=-1\\n_1^2+\dots+n_p^2\geq 5}}^{1}n_in_jn_kn_m\frac{1+n_i}{2}a_{n_1\dots n_p},$$

$$S_{1\nu_1\nu_2}^{(i,j,k)}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=p\beta_2 b_{ijk}+\beta_3\sum_{\substack{m=1\\m\neq i,j,k}}^{p}\sum_{n_1,\dots,n_p=-1}^{1}n_in_jn_kn_m\frac{1+n_i}{2}\times$$

$$\times\left(\frac{n_j+\nu_1}{2^{\nu_1^2}}\cdot\frac{n_k+\nu_2}{2^{\nu_2^2}}n_m-\beta_1\right)a_{n_1n_2\dots n_p},$$

$$\rho=\begin{cases}0, & \text{როცა } p=2,\\ 1, & \text{როცა } p\geq 3.\end{cases}$$

$$c_{ij}=c_{ji}\ (i\neq j,\ i,j=1,2,\ldots,p),$$
$$i,j,k,m=1,2,\ldots,p,\quad i<j<k<m;$$
$$a_{n_1 n_2\ldots n_p}=a_{-n_1,-n_2\ldots -n_p}\ (n_\alpha=-1,0,1,\ \alpha=1,2,\ldots,p).$$

/5/ ფორმულების გათვალისწინებით /3/-/4/-სხვაობიანი სქემა b_{ijk} და $a_{n_1 n_2\ldots n_p}$ $(n_1^2+n_2^2+\ldots+n_p^2\geq 4)$ პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ახდენს /1/-/2/ ამოცანის აპროქსიმაციას, რომლის რიგი არის 4-ის ტოლი h-ბიჯის მიმართ.

განვიხილოთ $p=3$. ამ შემთხვევაში გვაქვს ერთი თავისუფალი პარამეტრი b_{123}. შევარჩიოთ იგი ისეთნაირად, რომ შესრულდეს შემდეგი პირობები

$$a_{111}\geq 0,\ a_{11-1}\geq 0,\ a_{1-11}\geq 0,\ a_{1-1-1}\geq 0,\ a_{110}\geq 0,\ a_{101}\geq 0,\ a_{011}\geq 0, \qquad /6/$$
$$a_{1-10}\geq 0,\ a_{10-1}\geq 0,\ a_{01-1}\geq 0,\ a_{100}\geq 0,\ a_{010}\geq 0,\ a_{001}\geq 0.$$

მაშინ /3/-/4/ სქემისათვის შესრულდება მაქსიმუმის პრინციპის პირობები და მაშასადამე სქემა იქნება თანაბრად კრებადი; ამასთან, სქემის სიზუსტის რიგი იქნება 4-ის ტოლი h-ბიჯის მიმართ.

მტკიცდება, რომ /6/ პირობები სრულდება, თუ, მაგალითად,

$$b_{123}=\frac{1}{32}\quad \text{და}\quad c_{12},c_{13},c_{23}\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right].$$

მიახლოებითი ანალიზისა და
გამოთვლითი ტექნიკის კათედრა

(მიღებულია 10.VII.1975)

ლიტერატურა

I. А.А.Самарский, Введение в теорию разностных схем. Изд-во "Наука", М., 1971.

2. В.В.Бадагадзе, Сообщ. АН Груз.ССР, 1963, 31, № 2.

И.О.Абуладзе

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Р е з ю м е

Рассматривается первая граничная задача в p-мерном параллелепипеде для дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа со смешанными производными. На 3^p-точечном шаблоне квадратной сетки построено многопараметрическое семейство разностных схем четвертого порядка аппроксимации. При $p=3$ указаны достаточные условия равномерной сходимости построенных схем.

I.Abuladze

HIGH-ORDER DIFFERENCE SCHEMES OF APPROXIMATION FOR SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ELLIPTIC TYPE WITH MIXED DERIVATIVES

Summary

The first boundary value problem is considered in the p-dimensional parallelepiped for a second-order elliptic differential equation with a mixed derivative. On the 3^p-point model of a square mesh a multiparametric family of difference schemes of a fourth-order approximation is constructed. When p=3 the sufficient conditions of uniform convergence of the constructed schemes are given.

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები, 176, 1976

Труды Тбилисского университета, 176, 1976

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТУРБУЛЕНТНОГО ТРЕНИЯ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Н.Н.Патарая

I. ВВЕДЕНИЕ

Проблема турбулентности является важнейшей проблемой гидродинамики, которая привлекает внимание ученых в течение последних восьмидесяти лет. Гаген первый на опытах с трубами изучал как ламинарную, так и турбулентную формы течений, однако, ему не удалось подметить общей закономерности. Осборн Рейнольдс показал, что переход ламинарного типа движения в турбулентный совершается тогда, когда безразмерная величина $\frac{ur}{\nu}$ (u – средняя скорость, r – радиус трубы, ν – кинематический коэффициент вязкости) переходит через некоторую границу, которая впоследствии была названа критическим числом Рейнольдса. Проблема турбулентности в настоящее время все еще далека от полного разрешения. Между тем, турбулентное течение жидкости в отличие от ламинарного является более естественной формой движения жидкости. Потоки рек и ветров отличаются от параллельно-струйных потоков жидкости. Осредненные гидродинамические величины таких потоков не подчиняются уравнениям Навье-Стокса для вязкой жидкости. Известно, что движения жидкой среды определяются посредством осредненных согласно кинетической теории материи величин, характеризующих хаотические движения огромного количества молекул. При этом полагается, что величины, характеризующие с макроскопической точки зрения микрочастицы, такие как давление, плотность, температура и компоненты скорости приблизительно удовлетворяют уравнениям Навье-Стокса. Это допущение не расходится с опытными данными при ламинарном режиме течения.

Однако при турбулентном режиме на осредненное движение налагаются турбулентные пульсации, которые, в основном, имеют случайный характер.

Рейнольдс предложил правило осреднения гидродинамических величин, которое можно выразить формулой:

$$\bar{f}_t(x,t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x,\tau)\,d\tau$$

Если воспользоваться вышеприведенным правилом осреднения, то уравнения Навье-Стокса можно привести к уравнениям Рейнольдса которые отличаются от уравнений Навье-Стокса наличием дополнительных аддитивных членов, именуемых напряжениями Рейнольдса и, в сущности, выражающих скорости турбулентного переноса импульса. Эти скорости превосходят молекулярный перенос, в силу чего и именуются скоростями молярного переноса.

Образуя тензор второго ранга в случае несжимаемой жидкости, эти турбулентные напряжения выражаются формулами:

$$\begin{aligned}&-\rho\overline{u'^2},\ -\rho\overline{u'v'},\ -\rho\overline{u'w'},\\ &-\rho\overline{u'v'},\ -\rho\overline{v'^2},\ -\rho\overline{v'w'},\ \ldots\ldots \qquad (1.1)\\ &-\rho\overline{w'u'},\ -\rho\overline{w'v'},\ -\rho\overline{w'^2}.\end{aligned}$$

При этом полагается

$$u=u'+\bar{u},\quad v=v'+\bar{v},\quad w=w'+\bar{w}$$

где u', v', w' -турбулентные пульсации компонентов вектора скорости; u , v , w - мгновенные значения тех же величин, ρ - плотность жидкости. Как известно, уравнения Рейнольдса имеют вид:

$$\frac{\partial\bar u}{\partial t}+\bar u\frac{\partial\bar u}{\partial x}+\bar v\frac{\partial\bar u}{\partial y}+\bar w\frac{\partial\bar u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar p}{\partial x}+\nu\Delta\bar u+\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'^2})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{u'v'})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{u'w'})\right\},\ \frac{\partial\bar v}{\partial t}+\bar u\frac{\partial\bar v}{\partial x}+\bar v\frac{\partial\bar v}{\partial y}+\bar w\frac{\partial\bar v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar p}{\partial y}+ \qquad (1.2)$$

$$+\nu\Delta\bar v+\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'v'})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'^2})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{v'w'})\right\},\ \frac{\partial\bar w}{\partial t}+\bar u\frac{\partial\bar w}{\partial x}+\bar v\frac{\partial\bar w}{\partial y}+\bar w\frac{\partial\bar w}{\partial z}=-$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar p}{\partial z}+\nu\Delta\bar w+\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'w'})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v'w'})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{w'^2})\right\},\ \frac{\partial\bar u}{\partial x}+\frac{\partial\bar v}{\partial y}+\frac{\partial\bar w}{\partial z}=0.$$

Система уравнений составлена на основе допущения, что мгновенные значения гидродинамических величин удовлетворяют обычным уравнениям Навье-Стокса. 4 уравнения не достаточны для определения I0 неизвестных, которые входят в (I.I), поэтому при изучении конкретных, практически важных движений прибегают к помощи дополнительных гипотез, правильный выбор которых и составляет основные трудности теории турбулентных движений жидкости. Такие гипотезы были введены Буссинеском, Прандтлем, Тейлором, Карманом и другими. Из них большое применение в практике нашла теория пути перемешивания Прандтля.

Утверждают, что причиной перехода ламинарного потока к турбулентному является неустойчивость ламинарного движения относительно возмущений при больших числах Рейнольдса. Согласно этой гипотезе, бесконечно малые возмущения, наложенные на ламинарный поток, возрастают экспоненциально.

Некоторые ученые утверждают, что переход от ламинарного движения к турбулентному можно реализоват и при малых числах Рейнольдса вследствие действия или возмущений конечной амплитуды или достаточно больших градиентов давления, направленных против движения. Опыты подтверждают правильность этих утверждений.

В данной работе мы ставим себе целью рассмотреть вопрос о происхождении турбулентности с физической точки зрения. Мы находим, что компоненты тензора   вязких направлений, выведенных на основании кинетической теории материи, нуждаются в пересмотре.

2. ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ К ГИДРОДИНАМИКЕ

Математической моделью движения реальной жидкости являются уравнения Навье-Стокса, однако надо уточнить смысл некоторых математических операций, фигурирующих в этих уравнениях и связанных с дискретным строением жидкого континиума. Математики, занимающиеся механикой сплошных сред, часто полагают, что дифференциалы координат и времени (dx, dy, dz, dt) можно рассматривать в смысле математики непрерывных функций. Однако кинетическая теория материи рассматривает среднюю длину свободного пробега молекулы газа $\overline{\lambda}$ (среднее расстояние между соударяющимися молекулами капельной жидкости $\overline{\delta}$) и среднюю скорость теплового (хаотического) движения молекул газа $\overline{c}$ (средняя скорость теплового колебания молекул капельной жидкости). $\frac{\overline{\lambda}}{\overline{c}}=\overline{\delta t}$ представляет собой среднее время между двумя последующими столкновениями молекул.

Рассматривать расстояния порядка $\overline{\lambda}$ или $\overline{\delta}$ с точки зрения гидромеханики и требовать соответствия опытных результатов с интегралами уравнения Навье-Стокса вряд ли имеет какой-либо смысл. Точно так же рассматривать промежутки времени, меньшие чем $\overline{\delta t}$ или сравниваемые с ним, не имеет смысла. Поэтому операции математики непрерывных функций надо применять к гидродинамике с большой осторожностью.

К сказанному следует еще добавить, что понятие средней длины свободного пробега молекул газа $\overline{\lambda}$ или среднее расстояние между молекулами капельной жидкости и их средняя скорость не могут полностью представить нам сложную картину молекулярных движений ввиду широкого диапазона изменения тепловых скоростей отдельных молекул, который дается формулой распределения Максвелла:

$$dn=\frac{4}{\sqrt{\pi}}n\frac{c^2}{c_B^2}e^{\frac{-c^2}{c_B^2}}\frac{dc}{c_B},$$

где c_B - наиболее вероятная скорость ($c_B=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$, где T - абсолютная температура, m - масса молекулы), c - средняя квадратичная скорость, n - количество всех молекул, а dn - число молекул, обладающих скоростями в пределах c и $c+dc$. Резюмируя вышеизложенное, мы в дальнейшем будем полагать, что под dx, dy, dz надо понимать длины, много раз превосходящие $\bar{\lambda}$ или $\bar{\delta}$. Такое допущение необходимо для того, чтобы устремить флуктуации рассматриваемых величин практически к нулю.

Точно так же под dt должны рассматривать промежутки времени, много раз превосходящие промежуток

$$\bar{\tau}=\frac{\bar{\delta}}{\bar{c}}=\frac{1}{\bar{\nu}},$$

где $\bar{\tau}$ - среднее время пребывания молекул у одних и тех же временных положений равновесия (время релаксации), $\bar{\delta}$ - среднее расстояние между двумя временными положениями равновесия, около которых молекула совершает тепловые колебания, $\bar{c}$ - средняя скорость поступательного движения молекулы капельной жидкости. Путь, пройденный в среднем за секунду — $\bar{c}=\frac{\bar{\delta}}{\bar{\tau}}=\bar{\delta}\bar{\nu}$, который фактически будет загзагообразным, чем и объясняется незначительность скорости диффузии в капельных жидкостях. $\bar{\nu}=\frac{1}{\bar{\tau}}$ показывает сколько раз в среднем за одну секунду молекула капельной (несжимаемой) жидкости меняет положение в пространстве на расстоянии $\bar{\delta}$.

Приведем в качестве примера порядки величин $\bar{\tau}$, $\bar{\delta}$ и $\bar{c}$ для воды при температуре $T \approx 300^0$. $\bar{\tau} \approx 10^{-11}$ сек. $\bar{\delta}$ = 3Å = 3.10^{-8}см. $\bar{c}=\frac{\bar{\delta}}{\bar{\tau}}\approx 3.10^3\frac{см}{сек}$ = 30 $\frac{м}{сек}$.

3. О НАПРЯЖЕНИЯХ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТРЕНИИ И КОМПОНЕНТАХ ТЕНЗОРА СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИИ ЖИДКОСТИ

Если в неподвижной жидкости мысленно проведем какую-нибудь поверхность, выделим на ней участок ds и подсчитаем число молекул, прошедших в среднем с обеих сторон через ds, получим

$$dn \approx \frac{1}{6} n\bar{c}\, ds\, dt, \tag{3.1}$$

где $\bar{c}$ - средняя скорость теплового движения, n - количество молекул в любой части жидкости или газа (постоянство концентрации м лекул). Умножив (3.1) на массу одной молекулы, получим массу, проникшую с каждой стороны через ds

$$dm \approx \frac{1}{6} \rho\bar{c}\, ds\, dt, \tag{3.2}$$

где ρ - плотность жидкости.

Единственная внутренняя сила, которая осуществляет равновесие газов и капельных жидкостей, есть градиент давления, равный нулю при отсутствии внешних сил (закон Паскаля). При движении жидкой среды характер взаимодействия частиц усложняется и взаимодействию частиц соответствует тензор напряжения (тензор вязких направлений).

При выводе формул для компонентов тензора скоростей деформации полагают, что при тепловом движении частиц несжимаемой жидкости массы, "проникшей" с каждой стороны через произвольную площадь ds, молекулы равны между собой. Из этого допущения вытекает пропорциональность "пронесенного" через ds импульса произведению массы сударяющихся молекул на значение градиента импульса в точках поверхности ds, помноженному на среднее расстояние поступательного движения молекул капельной жидкости $\bar{\delta}$ (на среднее расстояние $\bar{\lambda}$ для молекул газа).

В основу дальнейших рассуждений мы положим очевидное допущение, что молекулы жидкости между столкновениями двигаются со со скоростью, которая слагается из тепловой и макроскопической скоростей. При этом макроскопическая (общая для всех частиц) может меняться от точки к точке.

При изотермическом движении капельной жидкости среднее значение тепловой скорости можно полагать постоянным, что вытекает из огромного значения внутреннего давления, связанного с силами внутримолекулярного взаимодействия. Для воды, например, внутреннее давление имеет порядок 17 000 атмосфер, для ртути – 40 000 атмосфер.

Рассмотрим площадь ds, расположенную нормально к оси Oy. Пусть в точках этой площади составляющая по оси Oy вектора макроскопической скорости равна V_y, а составляющая по оси Ox той же скорости равна V_x. Соударяющиеся молекулы, двигаясь поступательно по оси Oy со скоростью $\bar{c}+v_y-\frac{\partial v_y}{\partial y}\bar{\delta}$ от площадки ds', расположенной на оси Oy в точке $y-\bar{\delta}$ параллельно ds, перенесут скорость, параллельную оси Ox $v_x-\frac{\partial v_x}{\partial y}\bar{\delta}$. Принимая, ради простоты, что $\frac{1}{6}$ всех молекул, вышедших из ds' двигается параллельно оси Oy, для параллельного оси Ox количества движения, перенесенного молекулами через ds за время dt, получим:

$$\frac{1}{6}mn\left(\bar{c}+v_y-\frac{\partial v_y}{\partial y}\bar{\delta}\right)\left(v_x-\frac{\partial v_x}{\partial y}\bar{\delta}\right)ds\,dt, \ldots \qquad (3.3)$$

где n – количество молекул в единице объема, а m – масса молекулы. Принимая во внимание, что $nm=\rho$ – плотность жидкости и деля на $ds\,dt$, для составляющей импульса по оси Ox, перенесенного параллельно оси Oy, приходящейся на единицу площади и единицу времени (напряжение), получим:

$$\frac{1}{6}\rho\left(\bar{c}+v_y-\frac{\partial v_y}{\partial y}\bar{\delta}\right)\left(v_x-\frac{\partial v_x}{\partial y}\bar{\delta}\right)\approx\frac{1}{6}\rho\left(\bar{c}v_x-\bar{c}\frac{\partial v_x}{\partial y}\bar{\delta}+\right. \qquad (3.4)$$

$$\left.+v_y v_x-v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\bar{\delta}-v_x\frac{\partial v_y}{\partial y}\bar{\delta}\right)\ldots$$

(здесь отброшено слагаемое при множителе $\bar{\delta}^2$ как малое второго порядка по сравнению с $\bar{\delta}$).

Точно так же, для составляющей по оси Ox импульса, перенесенного через ds молекулами, пришедшими от площади ds', расположенной на оси Oy в точке $y+\bar{\delta}$ параллельно ds, приходящейся на единицу площади и единицу времени, получим:

$$\frac{1}{6}\rho\left(\bar{c}-v_y-\frac{\partial v_y}{\partial y}\bar{\delta}\right)\left(V_x+\frac{\partial V_x}{\partial y}\bar{\delta}\right)\approx\frac{1}{6}\rho\left(\bar{c}V_x+\bar{c}\frac{\partial V_x}{\partial y}\bar{\delta}-V_yV_x-V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}\bar{\delta}-V_x\frac{\partial v_y}{\partial y}\bar{\delta}\right)\ldots \tag{3.5}$$

Избыточный перенос составляющей по оси Ox количества движения через единицу площади, расположенной параллельно оси Ox, приходящейся на единицу времени, равен касательному напряжению f_{yx}, приложенному к площадке, которое получим вычтя (3.4) из (3.5), что даст:

$$f_{yx}=-\frac{1}{3}\rho V_yV_x+\frac{1}{3}\rho\bar{c}\bar{\delta}\frac{\partial V_x}{\partial y}=-\frac{1}{3}\rho V_xV_y+\mu\frac{\partial V_x}{\partial y}\ldots \tag{3.6}$$

где слагаемое $\mu\frac{\partial V_x}{\partial y}$ представляет собою известное касательное напряжение молекулярного трения Ньютона.

Что касается слагаемого $-\frac{1}{3}\rho V_yV_x$, то можно сказать, что оно связано с переносом количества движения от молярного движения жидкости и поэтому может быть названо напряжением молярного трения, которое происходит от эффекта сложения тепловой скорости с молярной скоростью и около неподвижных твердых стенок равно нулю.

Если в какой-либо точке многомерного потока составляющая скорости по какой-либо оси равна нулю, то в той же точке соответствующее той же оси касательное напряжение молярного трения тоже равно нулю. Точно так же касательное напряжение, приложенное к площадке, расположенной перпендикулярно к оси Oy и связанное со скоростью V_y будет

$$f'_{xy}=\mu\frac{\partial V_y}{\partial x}=\frac{\bar{\delta}}{3}\rho\bar{c}\frac{\partial V_y}{\partial x}\ldots \tag{3.7}$$

На основании (3.6) и (3.7) суммарное касательное напряжение, приложенное к единице плоской площадки, расположенной в плоскости xoy, получится равным:

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=-\frac{1}{3}\rho V_x V_y+\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\cdots \quad (3.8),$$

что отличается от известной в гидродинамике формулы слагаемым $-\frac{1}{3}\rho V_x V_y$, которое было названо нами напряжением молярного трения.

Рассуждая таким же образом, для касательных компонентов тензора скоростей деформации вязкой несжимаемой жидкости будем иметь:

$$\begin{aligned}\tau_{xz}=\tau_{zx}=-\frac{1}{3}\rho V_x V_z+\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\cdots\cdots\\ \tau_{yz}=\tau_{zy}=-\frac{1}{3}\rho V_y V_z+\mu\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)\end{aligned} \quad (3.9)$$

Выведем теперь выражения для нормальных составляющих тензора напряжений вязкой несжимаемой жидкости. Положим, что площадь ds расположена нормально к оси OX и составляющая по оси OX вектора средней макроскопической скорости в точках этой площади равна V_x. Соударяющиеся молекулы, двигающиеся поступательно параллельно оси OX со скоростью $\bar{c}+V_x-\frac{\partial V_x}{\partial y}\bar{\delta}$ от площадки ds', расположенной на оси OX в точке $x-\bar{\delta}$ параллельно ds за время dt, перенесут через ds импульс, равный

$$\frac{1}{6}\rho\left[\bar{c}+V_x-\frac{\partial V_x}{\partial x}\bar{\delta}\right]^2 ds\,dt\approx\frac{ds\,dt}{6}\rho\left\{\bar{c}+V_x^2+2\bar{c}V_x-\right.$$
$$\left.-2\bar{c}\frac{\partial V_x}{\partial x}\bar{\delta}-2V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}\bar{\delta}\right\}$$

ибо $\bar{\delta}^2$ очень малая величина.

Составляющая же по оси OX импульса, перенесенного через ds молекулами, "пришедшими" от площадки ds', расположенной на оси OX в точке $x+\bar{\delta}$ параллельно ds за время dt, будет

$$\frac{1}{6}\rho\, ds\,dt\left[\bar{c}-V_x-\frac{\partial V_x}{\partial x}\bar{\delta}\right]^2\approx\frac{ds\,dt}{6}\rho\left\{\bar{c}^2+V_x^2-2\bar{c}V_x-\right.$$
$$\left.-2\bar{c}\frac{\partial V_x}{\partial x}\bar{\delta}+2V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}\bar{\delta}\right\}$$

Если принять молекулы за твердые упругие шары, то после каждого удара они будут обмениваться импульсами, что для нормального напряжения даст:

$$\frac{1}{6}\rho\left[\bar{c}^2+V_x^2+2\bar{c}V_x-2\bar{c}\frac{\partial V_x}{\partial x}\bar{\delta}-2V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}\bar{\delta}\right]-\left[-\frac{1}{6}\rho\left(\bar{c}^2+V_x^2-2\bar{c}V_x-2\bar{c}\frac{\partial V_x}{\partial x}\bar{\delta}+2V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}\bar{\delta}\right)\right]=\frac{1}{6}\rho\left[2\bar{c}^2+2V_x^2-4\bar{c}\frac{\partial V_x}{\partial x}\bar{\delta}\right].$$

Таким образом, для нормального напряжения, приложенного к площадке, расположенной нормально к оси Ox, получим:

$$F_{xx}=-p-\frac{1}{3}\rho V_x^2+2\mu\frac{\partial V_x}{\partial x}\quad\ldots\ldots \tag{3.10}$$

Точно так же будем иметь:

$$F_{yy}=-p-\frac{1}{3}\rho V_y^2+2\mu\frac{\partial V_y}{\partial y}$$

$$F_{zz}=-p-\frac{1}{3}\rho V_z^2+2\mu\frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{3.10}$$

4. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Проектируя общее уравнение движения сплошной среды на осях координат и обозначая проекции массовой силы через X, Y, Z, получаем:

$$\frac{dV_x}{dt}=X+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial F_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial F_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial F_{zx}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{dV_y}{dt}=Y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial F_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial F_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial F_{zy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{dV_z}{dt}=Z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial F_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial F_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial F_{zz}}{\partial z}\right)$$

что на основании (3.8), (3.9) (3.10) и равенства $div\,\vec{V}=0$ даст

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}+\frac{4}{3}\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta V_x$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t}+\frac{4}{3}\left(V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta V_y \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}+\frac{4}{3}\left(V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta V_z$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнения неразрывности несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными, которые отличаются от уравнений Навье-Стокса множителем $\frac{4}{3}$, стоящим при конвекционных слагаемых ускорения. В векторной форме уравнения (4.I) запишутся в виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{4}{3}(\vec{V},\nabla)\vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\Delta\vec{V} \qquad (4.2)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривая формулы (3.8), (3.9) и (3.10) можно заметить, что компоненты тензора вязких напряжений состоят из двух слагаемых. Первое слагаемое пропорционально квадрату скорости и плотности жидкости, а второе пропорционально производным от компонентов скорости по координатам и коэффициенту молекулярного трения.

В точках неподвижных твердых тел первое слагаемое равно нулю (в силу прилипания к нему жидкости) и касательные напряжения принимают обычный вид, соответствующий молекулярному трению. На дальнем от твердой поверхности расстоянии первое слагаемое при многомерных потоках во много раз может превосходить второе. Такое поведение касательных напряжений качественно согласуется с их поведением при турбулентных течениях.

Количественные выводы можно сделать после интегрирования системы (4.I), что связано со значительными математическими трудностями. Однако (4.I) показывают, что одномерные потоки несжимаемой жидкости не могут быть турбулентными.

(Поступило I.XII.1975)

Кафедра
механики сплошных сред

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.А. Штрауф, Молекулярная физика. М.-Л., 1949.
2. Я.И. Френкель, Собрание избранных трудов, т.II, Издательство АН СССР, 1958.
3. Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая гидромеханика, тт.I и II, М.-Л., 1948.
4. Л.Г.Лойцянский, Механика жидкости и газа, М., 1959.
5. Д.Л. Гурвич, Н.З.Френкель, Гидравлика, М.-Л., 1940.
6. Бай Ши-и, Турбулентное течение жидкостей и газов, М., 1962.
7. L. Prandtl, O. Tietjens, Gleichgewicht und Reibungslose Bewegung, 1922.
8. L. Prandtl, O. Tietjens, Bewegung Reibender Flüssigkeiten und technische Anwendungen, 1931.
9. L. Schiller, Strömung in Rohren, 1932.

ნ.პატარაია

ბლანტ სითხეში ტურბულენტური ხახუნის ზოგიერთი საკითხი

რეზიუმე

სტატიაში ახსნილია ტურბულენტური მხები ძაბვების წარმოქმნის მექანიზმი მატერიის კინეტიკური თეორიის თვალსაზრისით.

ტურბულენტური ხახუნის დროს მხები და ნორმალური ძაბვებისათვის გამოყვანილია შემდეგი ფორმულები:

$$F_{xx}=-P-\frac{1}{3}\rho V_x^2+2\mu\frac{\partial V_x}{\partial x},\quad F_{yy}=-P-\frac{1}{3}\rho V_y^2+2\mu\frac{\partial V_y}{\partial y},\quad F_{zz}=-P-\frac{1}{3}\rho V_z^2+2\mu\frac{\partial V_z}{\partial z},$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=-\frac{1}{3}\rho V_x V_y+\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right),\quad \tau_{xz}=\tau_{zx}=-\frac{1}{3}\rho V_x V_z+\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=-\frac{1}{3}\rho V_y V_z+\mu\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y}\right).$$

მიღებულია ბლანტი უკუმში სითხის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები ძაბვების ზემოთ მითითებული გეგმილების შესაბამისად და მოცემულია მხები ძაბვების ფორმულებში ავტორის მიერ მიღებული დამატებითი წევრების თვისობრივი ანალიზი.

N.Pataraia

SOME QUESTIONS OF TURBULENT FRICTION IN VISCOUS FLUID

Summary

The mechanism of the formation of turbulent contiguous voltage is explained from the viewpoint of the kinetic theory of matter.

The author has derived the following formulae for the voltage under turbulent friction:

$$F_{xx}=-p-\frac{1}{3}\rho V_x^2+2\mu\frac{\partial V_x}{\partial x},\quad F_{yy}=-p-\frac{1}{3}\rho V_y^2+2\mu\frac{\partial V_y}{\partial y},\quad F_{zz}=-p-\frac{1}{3}\rho V_z^2+2\mu\frac{\partial V_z}{\partial z},$$

$$F_{xy}=F_{yx}=-\frac{1}{3}\rho V_x V_y+\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right),$$

$$F_{xz}=F_{zx}=-\frac{1}{3}\rho V_x V_z+\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y}\right),$$

$$F_{yz}=F_{zy}=-\frac{1}{3}\rho V_y V_z+\mu\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y}\right).$$

Differential equations of the motion of the viscous incompressible liquid are also derived in accordance with the above - mentioned voltage projection and a qualitative analysis is given of additiond members in the contiguous voltage formulae derived by the author.

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები, 176, 1976

Труды Тбилисского университета, 176, 1976

პარალელურ ფირფიტებს შორის ბლანტი სითხის სტაციონარული მოძრაობის შესახებ

ნ. ჯორბენაძე

განვიხილოთ ბლანტი უკუმში სითხის სტაციონარული მოძრაობა ორ ჰორიზონტალურ პარალელურ ფოროვან ფირფიტებს შორის.

ვთქვათ ქვედა ფირფიტა უძრავია, ხოლო ზედა უახლოვდება ქვედა ფირფიტას მოცემული v_z -მუდმივი სიჩქარით. იგულისხმება, რომ ზედა ფირფიტა გადატანით მოძრაობასთან ერთად ბრუნავს პერპენდიკულარული ღერძის გარშემო მუდმივი ω კუთხური სიჩქარით და აგრეთვე ფირფიტების ფორებში სითხის გაჟონვის კანონი ცნობილია.

აღნიშნული ამოცანა იმ შემთხვევაში, როცა ზედა ფირფიტა ასრულებს მხოლოდ გადატანით მოძრაობას, შესწავლილია /1,2/-შრომებში.

ვისარგებლოთ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემით, რომლის სათავე შევუთავსოთ ქვედა ფირფიტის ცენტრს, ხოლო Oz ღერძი მივმართოთ ფირფიტების მართობულად ზევით.

ფირფიტებს შორის მოთავსებული სითხის მოძრაობა იქნება ღერძსიმეტრიული, ამიტომ მასობრივი ძალების უგულვებელყოფის შემდეგ ბლანტი უკუმში სითხის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\varphi^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_r}{r^2}\right), \qquad /1/$$

$$v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}+\frac{v_r v_\varphi}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r^2}\right),$$

$$v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right),$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0,$$

სადაც v_r, v_φ და v_z სითხის სიჩქარის კომპონენტებია, P -წნევა, ν -სითხის სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტი, ρ -სიმკვრივე.

სიჩქარის კომპონენტებისათვის გვექნება შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$v_r\Big|_{z=0} = v_\varphi\Big|_{z=0} = 0, \qquad v_z\Big|_{z=0} = -v_0 \qquad /2/$$

$$v_r\Big|_{z=h} = 0,\; v_\varphi\Big|_{z=h} = r\omega,\; v_z\Big|_{z=h} = -v_1,\; (v_1 = v_2 - v_3),$$

სადაც h მანძილია ფირფიტებს შორის, v_0 და v_3 გაჟონვის სიჩქარეა, ქვე-და და ზედა ფირფიტაში შესაბამისად, v_2 კი ზედა ფირფიტის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე.

დავუშვათ, რომ სითხის სიჩქარის v_z მდგენელი დამოუკიდებელია r-ზე, ხოლო v_φ და v_r მდგენელები r-ის წრფივი ფუნქციებია /3/

$$v_\varphi = r v(z) \qquad\qquad /3/$$
$$v_z = u(z)$$

/1/ სისტემის მეოთხე განტოლებიდან ცხადია, რომ

$$v_r = -\frac{r}{2}\frac{du}{dz} \qquad /4/$$

/3/ და /4/ ფორმულების ძალით /1/ განტოლებათა სისტემა და /2/ სასაზღვრო პირობები შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\nu\frac{d^4u}{dz^4} = u\frac{d^3u}{dz^3} - 4v\frac{dv}{dz}, \qquad /5/$$

$$\nu\frac{d^2v}{dz^2} = u\frac{dv}{dz} - v\frac{du}{dz}, \qquad /6/$$

$$u\Big|_{z=0} = -v_0,\; \frac{du}{dz}\Big|_{z=0} = 0,\; u\Big|_{z=h} = -v_1,$$

$$\frac{du}{dz}\Big|_{z=h} = 0,\; v\Big|_{z=0} = 0,\; v\Big|_{z=h} = \omega. \qquad /7/$$

u და v უცნობი ფუნქციების განსასაზღვრავად, გრინის ფუნქციის გამოყენებით, მივიღებთ შემდეგ ინტეგროდიფერენციალურ განტოლებებს /4/:

$$u = F(z) + \int_0^h \left[u\frac{d^3u}{d\eta^3} - 4v\frac{dv}{d\eta}\right] G(z,\eta)\,d\eta, \qquad /8/$$

$$v=\Phi(z)+\int_0^h\left[u\frac{dv}{d\eta}-v\frac{du}{d\eta}\right]H(z,\eta)\,d\eta, \qquad /9/$$

სადაც

$$\Phi(z)=\frac{\omega}{h}z,$$

$$G(z,\eta)=\begin{cases}\frac{1}{6}z^2(\eta-h)^2(2zh+z-3\eta), & z<\eta\\ \frac{1}{6}\eta^2(z-h)^2(2z\eta+\eta-3z), & z\geq\eta\end{cases}$$

$$H(z,\eta)=\begin{cases}(h-\eta)z, & z<\eta,\\ (h-z)\eta, & \eta\leq z.\end{cases}$$

თუ ახლა /8/ განტოლებას გავაწარმოებთ z -ით სამჯერ, ხოლო /9/-ს ერთხელ, მაშინ $u, v, \frac{du}{dz}, \frac{dv}{dz}$ და $\frac{d^3u}{dz^3}$ უცნობი ფუნქციების განსასაზღვრავად მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{aligned}
u&=F(z)+\int_0^h\left[u\frac{d^3u}{d\eta^3}-4v\frac{dv}{d\eta}\right]G(z,\eta)\,d\eta,\\
v&=\Phi(z)+\int_0^h\left[u\frac{dv}{d\eta}-v\frac{du}{d\eta}\right]H(z,\eta)\,d\eta,\\
\frac{du}{dz}&=\frac{dF}{dz}+\int_0^h\left[u\frac{d^3u}{d\eta^3}-4v\frac{dv}{d\eta}\right]\frac{\partial G}{\partial z}\,d\eta, \qquad /10/\\
\frac{dv}{dz}&=\frac{d\Phi}{dz}+\int_0^h\left[u\frac{dv}{d\eta}-v\frac{du}{d\eta}\right]\frac{\partial H}{\partial z}\,d\eta,\\
\frac{d^3u}{dz^3}&=\frac{d^3F}{dz^3}+\int_0^h\left[u\frac{d^3u}{d\eta^3}-4v\frac{dv}{d\eta}\right]\frac{\partial^3G}{\partial z^3}\,d\eta.
\end{aligned}$$

/ 10 / სისტემის მაგიერად განვიხილოთ სისტემა δ პარამეტ-რით ინტეგრალური წევრების წინ, რომლისგანაც, როცა $\delta=1$, მიიღება /10/ და უცნობი ფუნქციები ვეძებოთ მწკრივების სახით:

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k U_k, \quad v=\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k V_k, \quad \frac{du}{dz}=\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k W_k, \tag{11}$$

$$\frac{dv}{dz}=\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k X_k, \quad \frac{d^3u}{dz^3}=\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k Y_k.$$

/ 11 / მწკრივის კოეფიციენტთა განსასაზღვრავად მივიღებთ შემდეგ რეკურენტულ ფორმულებს:

$$U_0=\mathcal{F}, \quad V_0=\Phi, \quad W_0=\frac{d\mathcal{F}}{dz}, \quad X_0=\frac{d\Phi}{dz}, \quad Y_0=\frac{d^3\mathcal{F}}{dz^3},$$

$$U_{k+1}=\int_0^h\sum_{m=0}^{k}\left[U_m Y_{k-m}-4V_m X_{k-m}\right]G(z,\eta)\,d\eta,$$

$$V_{k+1}=\int_0^h\sum_{m=0}^{k}\left[U_m X_{k-m}-V_m W_{k-m}\right]H(z,\eta)\,d\eta, \tag{12}$$

$$W_{k+1}=\int_0^h\sum_{m=0}^{k}\left[U_m Y_{k-m}-4V_m X_{k-m}\right]\frac{\partial G}{\partial z}\,d\eta,$$

$$X_{k+1}=\int_0^h\sum_{m=0}^{k}\left[U_m X_{k-m}-V_m W_{k-m}\right]\frac{\partial H}{\partial z}\,d\eta,$$

$$Y_{k+1}=\int_0^h\sum_{m=0}^{k}\left[U_m Y_{k-m}-4V_m X_{k-m}\right]\frac{\partial^3 G}{\partial z^3}\,d\eta.$$

/11 / მწკრივების კრებადობის დასამტკიცებლად ვისარგებლოთ ოდ-კვისტის მეთოდით /5/; /12/ ფორმულების ძალით /13/ მწკრივების მაჟორანტულ მწკრივს ექნება შემდეგი სახე:

$$D=\sum_{k=0}^{\infty}\delta^{k}D_{k}, \qquad /13/$$

სადაც

$$D_{k+1}=5M\sum_{m=0}^{\infty}D_{m}D_{k},$$

$$|F|,\ |\Phi|,\ \left|\frac{dF}{dz}\right|,\ \left|\frac{d\Phi}{dz}\right|,\ \left|\frac{d^{3}F}{dz^{3}}\right|\leq D_{0},$$

$$\int_{0}^{h}\left|\frac{\partial^{i}G}{\partial z^{i}}\right|d\eta,\ \int_{0}^{h}\left|\frac{\partial^{j}H}{\partial z^{j}}\right|d\eta\leq M;$$

$$(i=0,1,3;\ j=0,1)$$

როცა /13/ მწკრივი კრებადია, მაშინ D აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$D=D_{0}+5M\delta D^{2} \qquad /14/$$

/14/ განტოლებას ნამდვილი ამოხსნა მხოლოდ მაშინ აქვს, როცა

$$20M\delta D_{0}<1 \qquad /15/$$

/14/-დან ცხადია, რომ

$$D=\frac{1}{10\delta M}\left(1-\sqrt{1-20\delta MD_{0}}\right).$$

თუ ახლა უკანასკნელი გამოსახულების მარჯვენა მხარეში მდგომ ფესვს გაშლით მწკრივად, /15/ პირობის ძალით მივიღებთ აბსოლუტურად კრებად მწკრივს, რომელიც ემთხვევა /13/ მწკრივს. მაშასადამე /11/ მწკრივების აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადობის საკმარისი პირობა, როცა $\delta=1$, არის

$$20MD_{0}<1.$$

თუ ახლა U ფუნქციის მოძებნილ მნიშვნელობას შევიტანთ /1/ სისტემაში, წნევის გამოსათვლელად მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$P-P_{0}=\int_{0}^{z}\left[\nu\rho\frac{d^{2}u}{dz^{2}}-\rho u\frac{du}{dz}\right]dz.$$

თეორიული მექანიკის კათედრა

(მიღებულია 25.IV.1975)

ლიტერატურა

1. С.М.Тарг, Основные задачи теории ламинарных течений. Москва-Ленинград, 1951.

2. Н.П.Джорбенадзе, Поджатие вязкого слоя, заключенного между двумя пластинами. Труды ТГУ, т.117, 1966.

3. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости, под редакцией С.Гольдштейна, т.I, 1948.

4. В.И.Смирнов, Курс высшей математики, т.IУ, М., 1953.

5. F.K.G. Odqvist Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten. Mathem. Zeitschr., 32, 1930, 329-375.

Н.П.Джорбенадзе

О СТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ

Р е з ю м е

Рассматривается стационарное поджатие вязкой несжимаемой жидкости между параллельными пористыми пластинами, когда нижняя пластина неподвижна, а верхняя приближается к нижней, вращаясь с постоянной угловой скоростью. Найдены законы распределения скорости и давления.

N. Jorbenadze

ON THE STEADY MOTION OF A VISCOUS FLUID BETWEEN PARALLEL PLATES

Summary

Steady compression of a viscous incompressible fluid between parallel porous plates is considered for the case when the lower plate is fixed while the upper approaches it at a steady angular velocity. The distribution laws of velocity and pressure have been found.

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები, 176, 1976

Труды Тбилисского университета, 176, 1976

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНКЕ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ОТВЕРСТИЕМ, СЖАТОЙ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ И СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ

О.Е.Анджапаридзе, М.Н.Кукуладзе

В статье анализируются результаты исследования поляризационно-оптическим методом напряженного состояния в пластинке при наличии в потолке скважин, просверленных нормально к контуру выреза.

Эксперименты проводились на моделях из оптически активного материала марки "ЭД-6", который характеризовался следующими оптико-механическими показателями: модуль продольной упругости $E=29000$ кг/см^2, коэффициент Пуассона $\mu = 0,37$, оптическая постоянная $\sigma^{(1,0)} = 10,2$ кг/см^2.

Моделями служили прямоугольные пластинки размером I40x90мм с вырезом прямоугольной формы 30х25 мм в центре образца.

Эксперименты проводились на поляризационной установке ППУ-4. Равномерно распределенная нагрузка передавалась с помощью пресса УП-4.

Для создания в верхней половине пластинки сосредоточенных сил нормально к контуру выреза вставлялись металлические стержни с резьбой на концах.

В качестве стержня использовалась стальная проволока. При завинчивании гаек сила натяжения через небольшие опорные металлические шайбы передавалась на модель, вызывая на контуре выреза пластинки действия двух сосредоточенных сил, равных по величине и направленных вдоль стержня в противоположные стороны.

Для измерения величины натяжений стержня нами использовался специально изготовленный динамометр /I/, который предварительно тарировался на УП-4.

Исследование проводилось в следующей последовательности:

Сначала исследовалось распределение напряжений вокруг прямоугольного выреза в пластинке при действии равномерно распределенной сжимающей нагрузки с интенсивностью $P = 43$ кг/см^2 (рис.Iа).

В тех же условиях на той же пластинке исследовалось напряжение после сверловки (рис.Iб).

Сопоставление полученных результатов позволили оценить влияние выреза на перераспределении напряжений вокруг контура отверстия.

Для проверки результаты эксперимента сопоставлялись с теоретическими расчетами.

Исследования по схеме Iб показали, что при наличии в потолке скважин, просверленных к поверхности выреза, при принятом соотношении сторон особенных изменений в распределении напряжений вокруг контура не наблюдаются.

Затем исследовалось напряжение в пластинке и вокруг выреза прямоугольной формы под действием сосредоточенных сил, вызванных натяжением стержней при трех значениях распора (Н= 42 кг, 60 кг и 78 кг) (рис.Iв).

Картина изоклин и изостат при натяжении штанг силой Н =78 кг изображена на рис.2.

Получены также картины полос для других значений сил натяжения стержней.

На рис.3 дана картина полос при натяжении стержня силой Н=76 кг.

Главные нормальные напряжения вдоль вертикальной оси симметрии в пластинке определялись методом графического интегрирования. Эпюры нормальных напряжений для двух значений сил распора приведены на рис. 4 и 5.

Эпюры главных нормальных напряжений вдоль вертикальной оси симметрии изображены на рис.6 и 7.

Анализируя полученные данные отметим, что устройство крепи оказывает определенное влияние в перераспределении нормальных напряжений по вырезам пластинки. Значительные изменения нормальных и касательных напряжений происходят в той части отверстия, где устроены штанги.

При увеличении натяжений область влияния штанговой крепи практически не возрастает, а увеличиваются давление между слоями и вертикальные нормальные напряжения σ_y. Значительное влияние на область действия главных напряжений оказывает длина штанг.

При натяжении штанг H=40 кг максимальная величина σ_y составляет I,4 полос, а при H=76 кг оно составляет 2,7 полос, т.е. почти в два раза больше.

В нижней части выреза изменение напряжений от натяжений штанг не наблюдается.

Преобладающее значение имеют растягивающие напряжения на контуре выреза и вблизи него. Эти напряжения быстро убывают с удалением точки от контура. На расстоянии a/h = 0,2 (а - ширина выреза, h - высота пластинки) имеем изотропную точку.

Вслед за этой точкой напряжение становится сжимающим и на расстоянии a/h = 0,5 усилие вновь меняет знак. В дальнейшем напряжение быстро нарастает и достигает максимального значения в середине площади, охватываемой зажимами. Затем наблюдается снижение этого напряжения, которое при расстоянии a/h = 1,5 от контура выреза полностью исчезает.

Абсолютные величины этих напряжения так же изменяются в зависимости от силы распора. Изменение сил распора распространяется лишь в пределах действия сосредоточенных сил.

При совместном действии равномерно распределенных и сосредоточенных сил по вертикальному оси симметрии имеем горизонтальные растягивающие напряжения, которые достигают максимальных значений на самом контуре выреза по середине области, охватываемой штангами.

(Поступило 20.XII.1975)

Кафедра
теоретической механики

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Н.Кукуладзе, О.Е.Анджапаридзе, А.Тополкароев, Труды Тбилисского университета, т.110, 1965.

2. В.Ф.Трумбачев, Распределение напряжений вокруг горных выработок, Углетехиздат, 1956.

ო.ანჯაფარიძე, მ.კუკულაძე

სწორკუთხოვანი ხვრელის მქონე ფირფიტაში ძაბვების განაწილება თანაბრადგანაწილებულ და შეყრილი ძალების მოქმედებისას

რეზიუმე

სტატიაში ფოტოდრეკადობის მეთოდის გამოყენებით შესწავლილია სწორკუთხოვანი ხვრელის მქონე ფირფიტაში ძაბვების განაწილება თანაბრადგანაწილებული დატვირთვის და შტანგის დაჭიმულობის სხვადასხვა მნიშვნელობების ერთდროული მოქმედების დროს.

O.Anjaparidze, M.Kukuladze

DISTRIBUTION OF STRESSES IN A PLATE WITH A RECTANGULAR HOLE COMPRESSED BY UNIFORMLY DISTRIBUTED AND CONCENTRATED FORCES

Summary

The distribution of stresses in a plate with a rectangular hole at different values of stretched bar was studied by the method of photoelasticity.

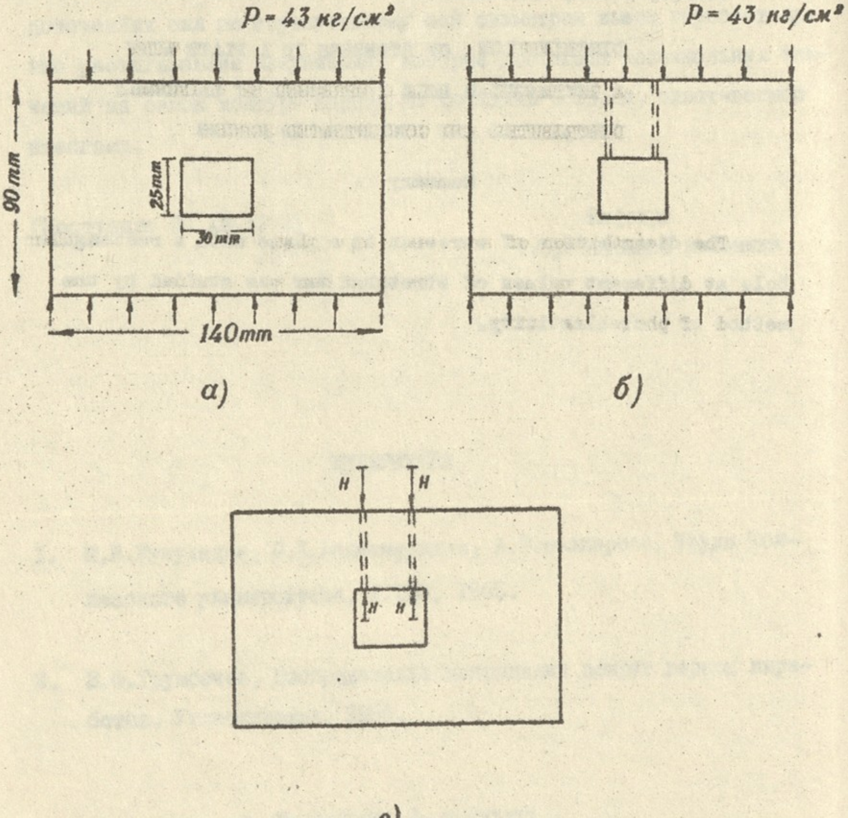

Рис. I

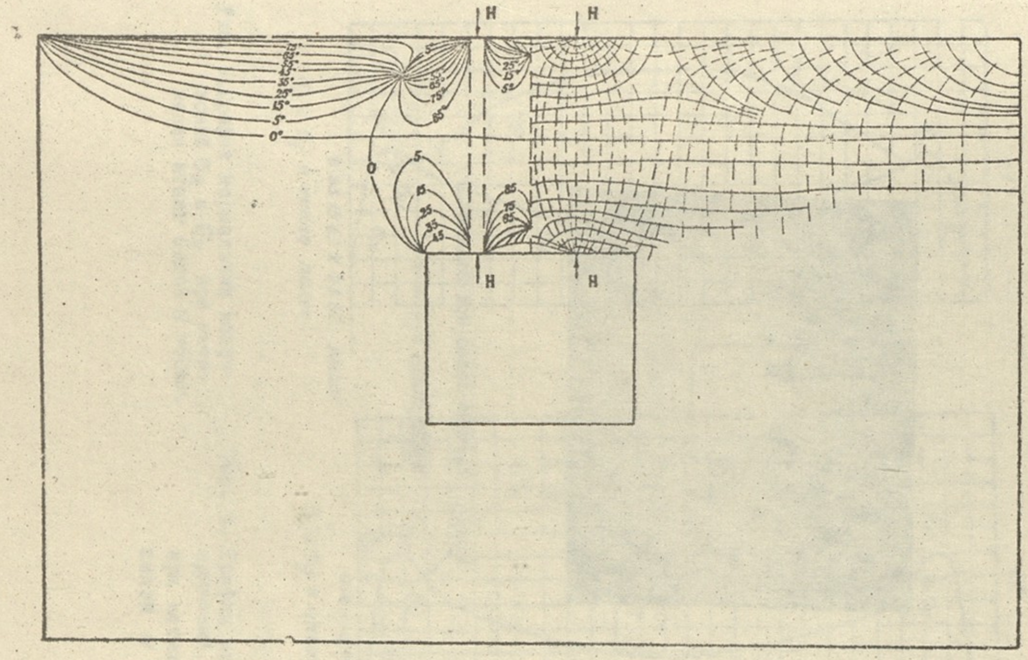

Рис.2. Картина изоклин и изостат для пластинки, подвергающей-ся натяжению штанг силой H = 76 кг.

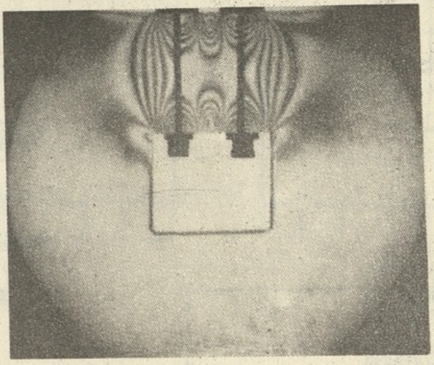

Рис.3. Картина полос при натяжении штанг силой Н = 76 кг.

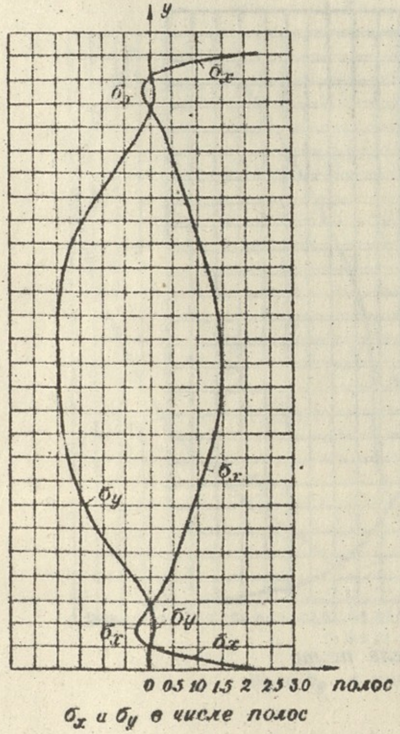

Рис. 4. График нормальных напряжений σ_x и σ_y при натяжении штанг силой H =60кг.

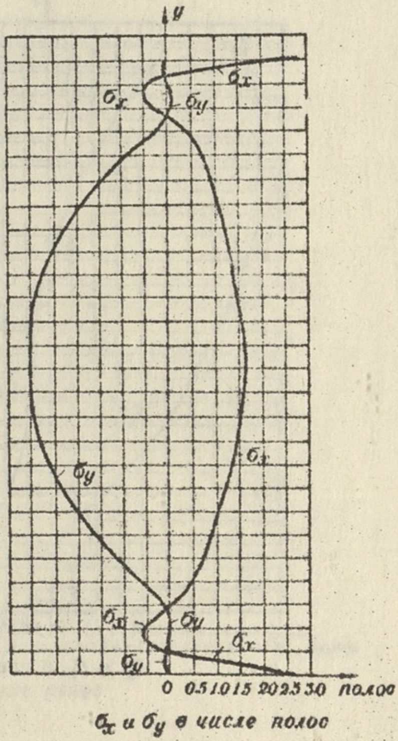

Рис. 5. График нормальных напряжений σ_x и σ_y при натяжении штанг силой H = 76 кг.

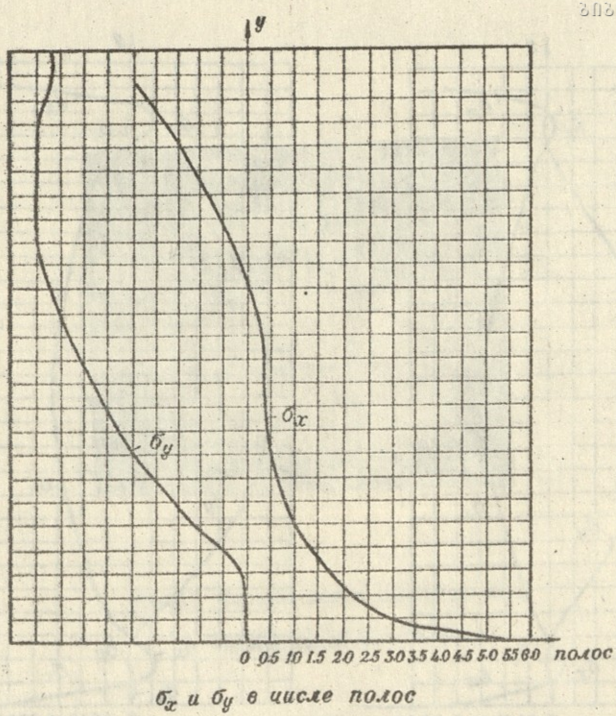

Рис.6. График нормальных напряжений при P = 43 кг/см^2 и натяжений штанг силой H = 42 кг.

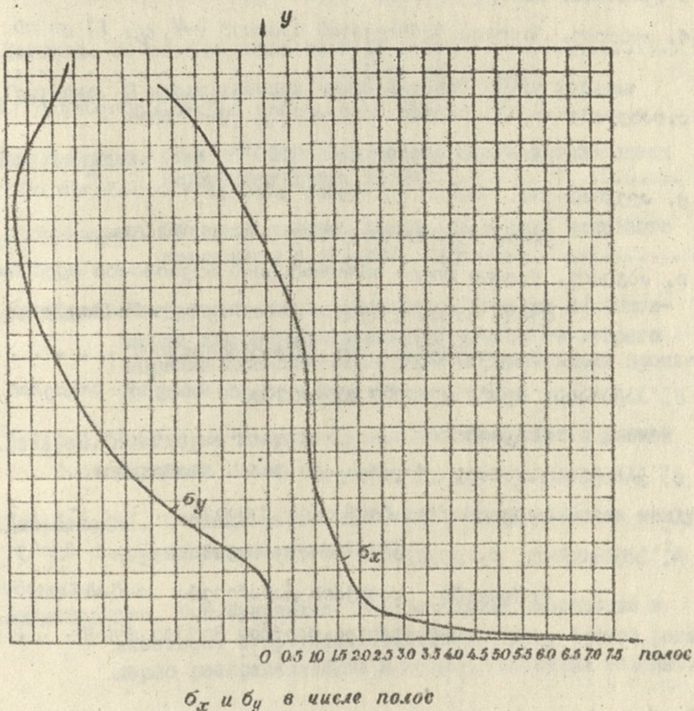

Рис.7. График нормальных напряжений при равномерно распределенной нагрузке Р = 43 кг/см^2 и распоре натяжения силой Н = 76 кг.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

Содержание

CONTENTS

გამომცემლობის რედაქტორი ლ. აბუაშვილი

კორექტორი ე.სულხანიშვილი

გადაეცა წარმოებას 4.X.76

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 15.VII.76

ქაღალდის ფორმატი 60 X 84

ნაბეჭდი თაბახი 4,25

სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 3,65

შეკვეთა 3410 უე 11302 ტირაჟი 300

ფასი 43 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი 380028

ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14

Издательство Тбилисского университета
Тбилиси 380028, пр. И.Чавчавадзе, I4

საქ. სსრ მეცნ. აკადემიის სტამბა, თბილისი, 380060, კუტუზოვის ქ.19

Типография АН Груз. ССР, Тбилиси 380060, ул. Кутузова, I9