ა. ბენაშვილი

ცდომილებათა თეორია

საქართველოს სსრ მინისტრთა საბჭოს უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების სახელმწიფო კომიტეტის მიერ დამტკიცებულია დამხმარე სახელმძღვანელოდ უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლებისათვის

გამომცემლობა „განათლება"
თბილისი — 1965

რედაქტორი პროფ. ნ. თ ე ვ ზ ა ძ ე

რედაქტორისაგან

ცნობილი ასტრონომ-გეოდეზისტი, მეცნიერების დამსახურებული მოღვაწე პროფესორი ანდრია მიხეილის ძე ბენაშვილი დაიბადა 1868 წელს, ყვარელში. 1887 წელს დაამთავრა მოსკოვის სამხედრო სასწავლებელი, ხოლო 1899 წელს — გენერალური შტაბის აკადემიის საერთო და გეოდეზიური განყოფილება, რის შემდეგ იგი მივლინებულ იქნა სამუშაოდ პულკოვოს მთავარ ასტრონომიულ ობსერვატორიაში. აქვე დაიცვა დისერტაცია თემაზე „ორი ვარსკვლავის შესაბამისი სიმაღლეების და ზენიტური მანძილების მცირე სხვაობით განედის განსაზღვრა", რისთვისაც მას 1901 წელს აკადემიის კონფერენციის წარდგენით მიენიჭა ასტრონომ-გეოდეზისტის წოდება. 1901 — 1916 წლებში ა. ბენაშვილი პეტერბურგში დასავლეთის საზღვრების სივრცეების ტრიანგულაციის უფროსი იყო და იმავე დროს 1902 — 1918 წლამდე განაგებდა პეტერბურგის ტექნოლოგიური ინსტიტუტის გეოდეზიის კათედრას. იგი იყო თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ერთ-ერთი დამაარსებელთაგანი. 1918 — 1941 წლებში სხვადასხვა დროს ხელმძღვანელობდა თბილისის გეოფიზიკურ ობსერვატორიას, ასტრონომია-გეოდეზიის, გეოდეზიის და გეოდეზია-მარკშეიდერიის კათედრებს; კითხულობდა ლექციებს ასტრონომიაში, უმაღლეს გეოდეზიაში, ტოპოგრაფიაში და ცდომილებათა თეორიაში თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, პოლიტექნიკურ, საამშენებლო, მელიორაციულ, რკინიგზელთა, სამთო მეტალურგიულ, ინდუსტრიულ ინსტიტუტებში და ქუთაისისა და სოხუმის პედაგოგიურ ინსტიტუტში.

ა. ბენაშვილმა თავისი ცხოვრების მანძილზე გამოაქვეყნა მრავალი შრომა, რომელთაგანაც განსაკუთრებით აღსანიშნავია: უმაღლესი გეოდეზია (რუსულ ენაზე), სფერული ტრიგონომეტრია და სფერული ასტრონომია, ტოპოგრაფიის პირველი ნაწილი (ქართულ და რუსულ ენაზე).

ა. ბენაშვილი გარდაიცვალა 1941 წ. 28 ივნისს, ქ. სოხუმში და დაკრძალულია ქ. თბილისში ვაკის პანთეონში.

ა. ბენაშვილის წინამდებარე წიგნი „ცდომილებათა თეორია" დაიწერა ორმოციან წლებში და, მიუხედავად იმისა, რომ შრომა ასახავს

გეოდეზიურ განაზომთა მათემატიკური დამუშავების დარგში ოცდაათიანი წლების დონეს, იგი დღესაც, როგორც დამხმარე სახელმძღვანელო, დიდ სარგებლობას მოუტანს სამარკშეიდერო-საინჟინრო გეოდეზიური სპეციალობის სტუდენტობას, აგრეთვე გეოდეზიური წარმოების და მეცნიერ მუშაკებს.

წიგნში ძირითადად დაცულია ავტორისეული სტილი და ტერმინები.

ტექნიკურ მეცნიერებათა დოქტორი
პროფესორი **ნ. თევზაძე**

I

ალბათობის თეორიის დასაბამი

1. მარტივი შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობა

ბევრი მოვლენა შეპირობებულია ისეთი გარემოებებით და მიზეზებით, რომლებიც ან სრულებით შეუმჩნეველი რჩება, ან კიდევ იმდენად რთულია, რომ შეუძლებელია მათი ერთობლივი ზემოქმედების შედეგთა წინასწარ განჭვრეტა. ამგვარ მოვლენათა წარმოშობის განუსაზღვრელობის გამო, ჩვენ მათ მარტივად ვთვლით როგორც *შემთხვევითს*. მაგალითად, ჩვენ შემთხვევითობას მივაწერთ იმას, რომ იატაკზე დაცემული ლითონის ფული ხან ერთი გვერდითაა ზემოთ, ხან მეორეთი.

ამნაირად, რომელიმე შემთხვევითი ხდომილობის განჭვრეტით წარმოდგენაში მხოლოდ ერთადერთი გარემოებაღა გვრჩება, რომელიც შეიძლება გავხადოთ მსჯელობის საგნად,—სახელდობრ, ამ ხდომილობის წარმოშობის მეტი თუ ნაკლები *ალბათობა*, მისი მეტი თუ ნაკლები *შესაძლებლობა*, მაგალითად, მოგებიანი ბილეთის ამოღება სალატარიო ლარნაკიდან, რომელშიაც 100 ბილეთზე 10 მოგებიანია, ორჯერ უფრო ალბათიერია, ვიდრე მეორე ლარნაკიდან, რომელშიაც 100 ბილეთზე მხოლოდ 5-ია მომგებიანი.

ამგვარი მსჯელობა უსათუოდ გულისხმობს ისეთ *შემთხვევებსა* და *ხდომილობებს*, რომლებიც *ერთნაირად შესაძლებელია*, *ერთნაირად მოსალოდნელია*, თუ განსაზღვრულ პირობებში, მრავალნაირ ხდომილობათა შორის, უსათუოდ უნდა მოხდეს ესა თუ ის ხდომილობა და ამავე დროს არ არსებობს ისეთი მიზეზი, რომლის ზეგავლენით უნდა მოხდეს უპირატესობრივ ერთი მათგანი და არა მეორე, მაშინ ასეთი ხდომილობანი იქნებიან ერთნაირად შესაძლებელი.

გარემოებანი ანუ პირობები, რომელთა თანაყოფიერებაში ხორციელდება რომელიმე შემთხვევითი ხდომილობა, იწოდება მის *შანსებად*. რომელიმე მოვლენის ალბათობის განსაზღვრისათვის საჭიროა გაანგარიშებული იყოს ყოველნაირი შანსი, როგორც იმისა, რომ ხდომილობა განხორციელდება, ისე იმისა, რომ იგი არ მოხდება. თუ ხელშემწყობი შანსების რიცხვი არახელშემწყობი შანსების რიცხვზე

მეტია, მაშინ ვიტყვით, რომ უფრო ალბათიერია ხდომილობის განხორციელება, რაც უფრო მეტია ხელშემწყობი შანსების შედარებითი რიცხვი, მით უფრო ალბათიერია შემთხვევითი ხდომილობის მოვლინება. ხოლო მარტოოდენ ხელშემწყობი შანსების არსებობის შემთხვევაში ხდომილობა უკვე შემთხვევითობის ხასიათს ჰკარგავს, იგი გადაიქცევა აუცილებლობად. როდესაც ხელშემწყობი შანსების რიცხვი $\frac{1}{2}$-ზე მეტია, მაშინ უფრო ალბათიერია, რომ ხდომილობა მოხდება, ვიდრე არა.

ამასთანავე, შანსების აღრიცხვის დროს გათვალისწინებული უნდა იყოს შემდეგი გარემოებანი: 1) არც ერთი შანსი არ იყოს გამოტოვებული აღრიცხვიდან, ე. ი. აღირიცხოს ყველა აუცილებელი შანსი; 2) ყველა შანსი უნდა იყოს ერთნაირი ღირსებისა, ე. ი. ერთნაირად შესაძლებელი; 3) შანსები უნდა იყოს ურთიერთდამოუკიდებელი, ე. ი. თუ ადგილი ექნება ერთ-ერთ შანსს, ადგილი არ უნდა ჰქონდეს სხვა რომელიმეს.

ვთქვათ, მაგალითად, გვაქვს ლარნაკი, რომელშიც მოთავსებულია 10 ბურთულა, მოცულობითა და წონით ერთნაირი, მაგრამ მათში 6 თეთრია და 4 შავი; ბურთულები გულდასმით ავრიოთ და შემდეგ ამოვიღოთ ერთი ბურთულა; საკითხი ისმება იმის შესახებ, თუ რამდენად ალბათიერია თეთრი ბურთულის მოვლინება?

ცდაში ყველა შანსის რიცხვი 10-ია, ვინაიდან უსათუოდ ამოიღება ერთ-ერთი რომელიმე ბურთულა; მაგრამ მათში თეთრი ბურთულისათვის ხელშემწყობი შანსების რიცხვი იქნება 6. აშკარაა, რომ ამ შემთხვევაში ყველა შანსი ერთნაირად შესაძლებელია და ურთიერთ დამოუკიდებელი და ამიტომ თეთრი ბურთულის მოვლინების ალბათობა უნდა შეფასებული იყოს წილადად $\frac{6}{10}$.

შემთხვევითი ხდომილობის მათემატიკურ ალბათობას უწოდებენ ორი რიცხვის შეფარდებას, რომელთაგან პირველი ეკუთვნის ერთნაირად მოსალოდნელ შემთხვევებს, როდესაც ხსენებული ხდომილობა შეიძლება მოხდეს, ხოლო მეორე რიცხვი—გამოუკლებლივ ყველა იმ შემთხვევას, როდესაც იგი შესაძლებელია მოხდეს, ან არ მოხდეს. მაგალითად, როდესაც ბანქოს მთლიანი დასტიდან, რომელშიაც შედის 52 კარტი, ამოიღებენ ერთ კარტს, მაშინ წარმოგვიდგება 52 ერთნაირად მოსალოდნელი შემთხვევა ერთ-ერთი კარტის ამოღებისა; მაგრამ მათ შორის იქნება მხოლოდ 12 შანსი, ხელსაყრელი ფიგურის ამოღებისათვის (მეფე, დედოფალი, ვალეთი); ამიტომ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული აღმოჩნდება ფიგურა, თანასწორი

იქნება $\frac{12}{52}$-სა; ხოლო ალბათობა საწინააღმდეგო ხდომილობისა, ე. ი. როდესაც ამოღებული აღმოჩნდება უბრალო კარტი, თანასწორი იქნება: $\frac{52-12}{52} = 1 - \frac{12}{52}$.

ალბათობის ასეთი განსაზღვრება გვიჩვენებს, რომ ალბათობა ყოველთვის ერთზე ნაკლები უნდა იყოს; როდესაც ალბათობა ერთის თანასწორი გახდება, მაშინ ხდომილობის მოვლენა გადაიქცევა უცილობლობად; ხოლო თუ იგი ნულია, მაშინ ხდომილობის მოვლინება შეუძლებელია.

ალბათობა აღინიშნება P ასოთი.

განვიხილოთ მეორე მაგალითი. ვთქვათ, აგდებულია ორი კამათელი (იაქე, სათამაშო კუბიკური ძვალი), რომლის წახნაგებზე წარწერილია 1, 2, 3, 4, 5, 6. რა ალბათობისა იქნება ის შემთხვევა, როდესაც შეპირობებულია, რომ ჯამი მიღებული ქულებისა უნდა უდრიდეს 8-ს? ორი კამათელის ექვს-ექვსი წახნაგი ერთად მოგვცემს 36 თანასწორად მოსალოდნელ კომბინაციას, მაგრამ სასურველი ხდომილობისათვის ხელსაყრელი იქნება მხოლოდ 5 შემდეგი კომბინაცია:

პირველ კამათელზე ნახული ქულა:	2	3	4	5	6
მეორე „	6	5	4	3	2

მაშასადამე, საძიებელი ალბათობა უდრის $\frac{5}{36}$-ს.

ალბათობის ამნაირივე განსაზღვრა ქულების დანარჩენი შესაძლებელი ჯამებისათვის მოგვცემს:

ჯამი:	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ალბათობის მრიცხველი:	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

სამი კამათელის შემთხვევაში, 36 განხილული შემთხვევა უნდა შეწყვილებული (კომბინირებული) იქნას მესამე კამათელის ექვს შესაძლებელ შემთხვევასთან; მაშინ სამ კამათელზე მიღებული ჯამებისათვის ალბათობათა მრიცხველები, რომელთა საერთო მნიშვნელია $6^3=216$, იქნება:

ჯამი:	3 და 18	4 და 17	5 და 16	6 და 15	7 და 14
მრიცხველი:	1	3	6	10	15

ჯამი:	8 და 13	9 და 12	10 და 11
მრიცხველი;	21	25	27

2. ალბათობა სრული და პირობითი

ზემოთ მოყვანილ მაგალითებში ცდების ყველა გარემოება, რომელთა თანაყოფიერებაში განხორციელებული იქნა შემთხვევითი ხდომილობანი, იყო სრულებით გარკვეული და საკითხი მხოლოდ იმაში მდგომარეობდა, რომ აღრიცხული ყოფილიყო ყველა შანსი, შეფასებული ყოფილიყო მათი—თანასწორშესაძლებლობა და გამოყოფილი ყოფილიყო ხელშემწყობი შანსები. მაგრამ სინამდვილეში ჩვეულებრივ ადგილი აქვს ხოლმე ისეთ შემთხვევებს, როდესაც ზოგიერთ გარემოებას, რომელიც თან სდევს შემთხვევით ხდომილობას, აქვს გაურკვეველი ხასიათი და ამიტომ ამგვარ გარემოებათა შესახებ შეიძლება დაშვებული იქნას სხვადასხვანაირი გულვება. თუ მიღებული იქნება განსაზღვრული გულვება (ან ჰიპოთეზი), მაშინ შესაძლებელი ხდება განსაზღვრული იყოს შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობაც ზემოთ მოცემული წესების მიხედვით; ამნაირად ნაპოვნ ალბათობას უწოდებენ შემთხვევითი ხდომილობის პ ი რ ო ბ ი თ ა ლ ბ ა თ ო ბ ა ს; ხოლო ხდომილობის ს რ უ ლ ა ლ ბ ა თ ო ბ ა შ ი იგულისხმება ისეთი ალბათობა, რომელიც მონახული იქნება, ცდასთან დაკავშირებული, ყველა შესაძლებელი გულვების ანგარიშში მიღებითა და შეფასებით.

ვთქვათ, მაგალითად, ლარნაკში ჩადებული 10 ბურთულა,—ნაწილი თეთრი ფერისა, ნაწილი შავი, მაგრამ რამდენია თეთრი და რამდენია შავი, ჩვენ არ ვიცით. გამოსაცნობია იმის ალბათობა, რომ ლარნაკიდან ამ პირობებში ამოღებული ბურთულა იქნება მხოლოდ თეთრი.

ცხადია, რომ თეთრი და შავი ბურთულის რიცხვის შესახებ ლარნაკში შეიძლება დაშვებული იყოს რამდენიმე გულვება. ვივარაუდებთ, რომ ლარნაკში მხოლოდ ერთი თეთრი ბურთულაა, მაშინ მისი მოვლინების პირობითი ალბათობა იქნება $\frac{1}{10}$; თუ გულვებული იქნება ორი თეთრი ბურთულა, მაშინ მოგვეცემა ახალი პირობითი ალბათობა $\frac{2}{10}$ და ა. შ. თეთრი ბურთულის მოვლინების სრულ ალბათობად ჩავთვლით ისეთ ალბათობას, რომლის გამოსათვლელად აღრიცხული იქნება ყველა შანსი, ყოველგვარ შესაძლებელ გულვებათა დაშვების პირობებში ამასთან გამოყოფილი იქნება ხელშემწყობი შანსები.

ქვემოთ მოყვანილია თეორემები, რომელნიც ამარტივებენ ზემოხსენებულ ანგარიშს.

3. რთული ხდომილობის ალბათობა

შემთხვევითი ხდომილობა, რომელიც შეიცავს რამდენიმე მარტივი ხდომილობის მოვლინებას, იწოდება რ თ უ ლ ხ დ ო მ ი ლ ო ბ ა დ, მა-

გალითად, თუ ბანქოს სამი სხვადასხვა დასტიდან ამოღებული იქნება თითო კარტი, მაშინ ფიგურის ამოსვლა, ერთობლივად სამივე დასტიდან, განიხილება როგორც რთული ხდომილობა.

ვთქვათ, რომელიმე რთული A ხდომილობა შემდგარია s რიცხვის მარტივი ხდომილობისაგან,—a_1, a_2, a_3 a_s, რომელთა ალბათობაა:

$$P_1=\frac{m_1}{M_1},\quad P_2=\frac{m_2}{M_2},\qquad ,P_s=\frac{m_s}{M_s} \qquad (1)$$

სადაც M_1, M_2, , M_3 წარმოადგენენ ყველა ერთნაირად მოსალოდნელ შანსების რიცხვებს, რომელთაც ადგილი ექნებათ პირველ, მეორე და სხვა მარტივ a_1, a_2, , a_3 ხდომილობის წარმოშობის დროს, ხოლო m_1, m_2, m_s გამოსახავენ აგრეთვე ერთნაირად მოსალოდნელ შანსების რიცხვებს, რომლებიც *ხელსაყრელია* ხსენებულ ხდომილობათა მოვლინებისათვის. როდესაც ყველა ხსენებული მარტივი ხდომილობა წარმოიშვება თანადროულად ან ერთობლივად და ამასთანავე *ურთიერთდამოუკიდებლად*, მაშინ ყოველი M_1 შანსი თანასწორი შესაძლებლობით შეიწყვილება ყველა დანარჩენ M_1, M_2, M_s შანსთან; ამიტომ რთული A ხდომილობისათვის ყველა ერთნაირად მოსალოდნელი შანსის N რიცხვი იქნება:

$$N=M_1\cdot M_2\cdot M_3 \qquad M_s.$$

მაგრამ რთული ხდომილობა გულისხმობს, რომ მომხდარია ყოველი მისი შემადგენელი მარტივი ხდომილობა; რადგან ყოველი m_1 შანსთაგანი, რაც ხელსაყრელია a_1 ხდომილობისათვის, თანაბარი შესაძლებლობით შეიწყვილება ყოველ ცალკეულ m_2, $m_3 \cdots m_s$ შანსთან, რომელნიც ხელსაყრელი იქნებიან დანარჩენ ხდომილობათათვის, ამიტომ საერთო რიცხვი შანსებისა, რომელნიც ხელსაყრელია A-თვის, იქნება:

$$n=m_1\cdot m_2\cdot m_3 \qquad m_s,$$

და, მაშასადამე, A ხდომილობის ალბათობა იქნება

$$P=\frac{n}{N}=\frac{m_1\cdot m_2\cdot m_3 \qquad m_s}{M_1\cdot M_2\cdot M_3 \qquad M_s}=P_1\cdot P_2\cdot P_3 \qquad P_s \qquad (2)$$

ე. ი. *რთული ხდომილობის ალბათობა მის შემადგენელ მარტივ ხდომილობათა ალბათობების ნამრავლის თანასწორია.*

განხილული თეორემა გულისხმობს, რომ მარტივი ხდომილობანი, რომლებიც ქმნიან რთულ ხდომილობას, *არამც და არამც არ ახდენენ ზეგავლენას ერთმანეთზე*. მაგრამ, თუ ხდომი-

ლოპის წარმოშობის პირობებში ასეთ ურთიერთზეგავლენას აქვს ადგილი, მაშინ იგი უნდა ანგარიშში იყოს მიღებული. მაგალითად, თუ პანქოს მთლიანი დასტიდან რამდენჯერმე ზედიზედ ამოიღებენ თითო ქაღალს და მაშინვე უკან ჩასდებენ, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ ტუზი (კიკო) ზედიზედ სამჯერ ამოვა, ზემოთ მოყვანილი თეორემის საფუძვლით იქნება

$$\left(\frac{4}{52}\right)^3=\left(\frac{1}{13}\right)^3=\frac{1}{2197}\,.$$

მაგრამ, თუ ამოღებული ტუზი დასტაში უკან აღარ ჩაიდება, მაშინ ქარტის მეორე ამოღებაზე ტუზის გამოჩენის ალბათობა უკვე $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$ კი არ იქნება, არამედ იქნება $\frac{3}{51}=\frac{1}{17}$, ხოლო მესამე ამოღებაზე ალბათობა გამოვა $\frac{2}{50}=\frac{1}{25}$. ამის გამო ალბათობა იმისა, რომ ამგვარ პირობებში, სამჯერ ზედიზედ ამოღებული აღმოჩნდება ტუზი, იქნება

$$\frac{1}{13}\times\frac{1}{17}\times\frac{1}{25}=\frac{1}{5525}\,.$$

თუ (I) ალბათობა ერთნაირია, ე. ი. $P_1=P_2=P_3= \qquad =P_s=P_0$, მაშინ იქნება

$$P=(p_0)^s \qquad (3).$$

4. ალბათობათა შეკრება

ვთქვათ, ყუთში ჩაყრილია სხვადასხვა ფერის ბურთულები: a—თეთრი, b—ყვითელი, c—ნარინჯი, d—ლურჯი, e—შავი. ანდეზე ამოვიღოთ ერთი ბურთულა. განსასაზღვრელია იმის ალბათობა, რომ ამოღებული ბურთულა იქნება ღია ფერისა, ღია ფერად მივიღოთ თეთრი, ყვითელი, ნარინჯი. ამ შემთხვევაში იქნება:

$$n=a+b+c,\ N=a+b+c+d+e.$$

მაშასადამე,

$$P=\frac{n}{N}=\frac{a+b+c}{N}=\frac{a}{N}+\frac{b}{N}+\frac{c}{N}\,,$$

მაგრამ $p_1=\frac{a}{N}$ არის თეთრი ბურთულის მოვლინების ალბათობა, $p_2=\frac{b}{N}$—ყვითელისა, $p_3=\frac{c}{N}$—ნარინჯისა; ამიტომ

$$P=p_1+p_2+p_3\,.$$

დასკვნა: თუ ხდომილობა შეიძლება მოვლინებული იქნას რამდენიმე ურთიერთდამოუკიდებელი სახით, მაშინ ამნაირი ხდომილობის მოვლინების ალბათობა ეთანასწორება ყველა სახეობის მოვლინებათა ალბათობების ჯამს.

ვთქვათ, მოსალოდნელია a ხდომილობის მოვლინება. იგი შეიძლება მოგვევლინოს ან a_1 სახით, ან a_2-თი, ან a_3-თი ან a_s-ით. მათი ალბათობა აღვნიშნოთ შესაბამისად $p_1, p_2, p_3 \cdots p_s$-ით. მაშინ a ხდომილობის P ალბათობა იქნება:

$$P = p_1 + p_2 + p_3 \quad p_s. \quad (4).$$

იმ შემთხვევაში თუ ყველა ალბათობა ერთნაირია, ე. როდესაც $p_1 = p_2 = p_3 = \quad = p_s = p_0$, მაშინ

$$P = sp_0.$$

ნ. დიდ რიცხვთა კანონი

ცდის ერთნაირ პირობებში თუ თვალყურს ვადევნებთ რომელიმე შემთხვევითი ხდომილობის მოვლინებას მრავალჯერ, მაშინ შევნიშნავთ, რომ შეფარდება შემთხვევათა რიცხვისა, როდესაც ეს ხდომილობა სინამდვილეში მოხდება, ყველა დაკვირვებულ შემთხვევათა რიცხვთან, თუ ეს უკანასკნელი რიცხვი განუწყვეტლივ იზრდება, სულ უფრო და უფრო უახლოვდება განხილად ხდომილობის თეორიულ ალბათობას.

ნათქვამის ნათელსაყოფად წარმოვიდგინოთ დახურული ქურქელი, N ბურთულის შემცველი და ვიგულვოთ, რომ ბურთულები მოცულობითა და წონით ერთნაირია, მხოლოდ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან ფერით. ვთქვათ, მათ შორის n_1 რიცხვი იქნება წითელი ფერისა, n_2—ყვითელისა, n_3—ლურჯისა და სხვ. ასე, რომ თეორიული ალბათობა, რომ ქურქლიდან ამოღებული ერთი ბურთულა აღმოჩნდება სწორედ წითელი ფერისა, იქნება $p_1 = \frac{n_1}{N}$, ყვითელისა — $p_2 = \frac{n_2}{N}$, ლურჯისა—$p_3 = \frac{n_3}{N}$ და ა. შ. ახლა დავიწყოთ ბურთულების მრავალჯერადი ამოღება ქურქლიდან, რომლებიც თვითეული მაშინვე უკან დავაბრუნოთ ხოლმე და ყოველ ჯერზე გულდასმით ავურიოთ ერთიმეორეში, რათა არც ერთმა ამოღებამ არ იქონიოს ზეგავლენა მომდევნო ამოღებაზე. თუ შესრულებული იქნებოდა ამნაირი ამოღებათა დიდი S რიცხვი, მაშინ წითელი ფერის ბურთულა ამოვიდოდა s_1-ჯერ, ყვითელისა s_2-ჯერ, ლურჯისა s_3-ჯერ და ა. შ. განვაგრძოთ ცდები, რაც შეიძლება ხანგრძლივად და ყოველ ჯერზე გამოვთვალოთ

მიღებული s_1, s_2, s_3 რიცხვების შეფარდება საერთო S რიცხვთან: მაშინ დავრწმუნდებით, რომ შეფარდებანი

$$\frac{s_1}{S},\ \frac{s_2}{S},\ \frac{s_3}{S},$$

თანდათან უფრო და უფრო უახლოვდებიან შესაბამისად p_1, p_2, $p_3 \ldots$ ალბათობებს: თუ ამოღებათა S რიცხვი განუწყვეტლივ იმატებს, მაშინ ხსენებულ შეფარდებათა ერთმანეთისაგან განსხვავება შეიძლება დაყვანილ იქნას მინიმუმამდე.

ცდეულთა დიდი რიცხვის განხილული თვისება, პირველად თეორიულად დამტკიცებული იაკობ ბერნულის (Iacob Bernoulli 1654—1740) და შემდეგ პუასონის მიერ (Simeon-Denis Poisson 1781—1840) ცნობილია დიდ რიცხვთა კანონის სახელწოდებით; იგი მუდამ მართლდება ბუნებაში, როდესაც ადგილი აქვს ყოველგვარ შემთხვევით ხდომილობათა და მოვლენათა მრავალჯერ განმეორებას. ეს კანონი შესაძლებლობას იძლევა ალბათობის თეორია გამოყენებული იქნას მრავალი პრაქტიკული საკითხის გადაწყვეტის დროს ბუნებისმეტყველებაში და ყოველდღიურ ცხოვრებაში; აქ მხოლოდ საჭიროა, რომ აღებული იყოს შემთხვევითი ხასიათის არა რომელიმე ცალკეული ფაქტი, არამედ საკმაოდ დიდი რიგი მსგავსი ფაქტებისა.

განვიხილოთ ერთი მაგალითი, რომელიც ფრიად მარტივად ადასტურებს დიდ რიცხვთა კანონს.

რიცხვთა ჩვეულებრივი ლოგარითმები 5-ნიშნიან ტაბულებში, როგორც ცნობილია, ზუსტია მათი უკანასკნელი ათწილადი ნიშნის მხოლოდ $+0{,}5$ და $-0{,}5$-ის ფარგლებში. ამასთანავე 10 სხვადასხვა შემთხვევა,— როდესაც ლოგარითმის ცდომილება მოქცეულია $-0{,}5$ და $-0{,}4$-სა, $-0{,}4$ და $-0{,}3$-სა, $-0{,}3$ და $-0{,}2$-სა, $-0{,}2$ და $-0{,}1$-სა, $-0{,}1$ და 00-სა, 00 და $+0{,}1$-სა, $+0{,}1$ და $+0{,}2$-სა, $+0{,}2$ და $+0{,}3$-სა, $+0{,}3$ და $+0{,}4$-სა, $+0{,}4$ და $+0{,}5$-ს შორის, — შეიძლება ჩათვლილი იყოს როგორც ერთნაირად ალბათიერი, და ამიტომ ყოველი მათგანის ალბათობა უნდა უდრიდეს $\frac{1}{10}$-ს.

საზოგადოდ, სხვადასხვა ჯგუფის ცდომილებათათვის $\frac{s}{S}$ შეფარდება მით უფრო მიუახლოვდება თეორიულ $\frac{1}{10}$-ის ალბათობას, რაც უფრო მეტი ხდება S რიცხვი.

II

დაკვირვებათა შემთხვევითი ცდომილებანი

6. მუდმივი და შემთხვევითი ცდომილება

გაზომვები, რომლებზედაც გეოდეზია, ასტრონომია და სხვა მეცნიერებანი აფუძნებენ თავის დასკვნებს, მუდამ მეტად თუ ნაკლებად დამახინჯებულ შედეგებს იძლევიან, რომლებიც შეპირობებულია სხვადასხვა მიზეზით, ეს მიზეზებია:

1) დაკვირვების იარაღებისა და მეთოდის ნაკლი; 2) ადამიანის გრძნობათა (მხედველობის, შეხების და სმენის) უსასრულობა და, 3) გარეშე გარემოებათა არახელსაყრელობა. ამიტომ საჭიროა მუდამ გათვალისწინებული გვქონდეს ის ზეგავლენა, რომელსაც ზემოხსენებული მიზეზები ახდენენ გაზომვების შედეგზე.

ზოგიერთი ზემოხსენებული მიზეზი შეიძლება იმდენად საფუძვლიანად შევისწავლოთ და გამოვიკვლიოთ, რომ მისი ზედმოქმედება ყოველი აღებული შემთხვევისათვის წინასწარვე გავითვალისწინოთ. ამნაირ მიზეზთაგან წარმოშობილი ცდომილებანი იწოდებიან მუდმივ ანუ სისტემატურ ცდომილებებად.

მაგრამ დანარჩენ მიზეზთა უმეტესობის ზედმოქმედება გაზომვებზე სრულებით შეუმჩნეველია. მაგალითად, შეიარაღებული თვალისათვის ორი წერტილი, ხილული 1′-იანი კუთხის ფარგალში, მოჩანს როგორც ურთიერთშერწყმული და ამიტომ დიოპტრების უზუსტესად საგანზე დამიზნების დროსაც კი აუცილებელია ყოველნაირი ცდომილება —60″-დან მოყოლებული ვიდრე +60″-მდე და ამ ფარგლებში მომხდარი ცდომილება შეპირობებულია მარტოოდენ შემთხვევითობით. ერთობლიობით წარმოიშვება სავსებით შემთხვევითი ხასიათის ცდომილებანი, ხან დადებითი, ხან უარყოფითი, ზოგჯერ ფრიად მცირედი, ზოგჯერ კიდე დიდი, რომელნიც ამასთანავე არასდროს არ გადაცილდებიან განზღრულ ფარგლებს, რაც დაკავშირებულია განხილად დაკვირვებათა თვისებულ ხასიათთან. ამგვარი ცდომილებანი იწოდებიან შემთხვევითად. მათზე მსჯელობა შეიძლება მხოლოდ ალბათობის თეორიის საფუძველზე და სწორედ ამ გზით უნდა იყოს

მონახული უალბათიერესი დანასკვი მრავალ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ გაზომვათა შედეგებიდან, და თანვე უნდა განსაზღვრული იყოს ხსენებული დანასკვის შესაფერი სანდოობის ზომა.

მაგრამ ამასთანავე ცდომილებათა დაყოფა მუდმივებად და შემთხვევითებად უნდა ჩაითვალოს, ასე თუ ისე, ცოტაოდენ პირობითად, ვინაიდან სანამ არ არის გამოკვლეული გაზომვათა შედეგების დამმახინჯებელი მიზეზი, მანამდე მის მიერ წარმოშობილი ცდომილებანი,—აქ სხვა გამოსავალი არ არის,—უნდა ჩათვლილი იქნან შემთხვევითად. ვთქვათ, მაგალითად, ჩვენ ვზომავთ რომელიმე კუთხეს ტლანქად გაკეთებული ტრანსპორტირით, რომლის დანაყოფები ალაგ-ალაგ ერთნაირი არ არის. ამ ტრანსპორტირის სხვადასხვა ნაწილით გაზომილი კუთხე მოგვცემს სხვადასხვანაირ შედეგს და აღმოჩენილი ცდომილებანი უნდა ჩაითვალოს შემთხვევითად. მაგრამ, თუ გამოკვლეული იქნება ტრანსპორტირის ყველა დანაყოფის შეცდომები, მაშინ ყოველივე, რაც მიწერილი იყო შემთხვევითობას, შეიქმნება კანონიერი და აუცილებელი გახდება.

შემთხვევით ცდომილებათა ძირითადი თვისებები

ყოველგვარ გაზომვას, როგორც აღნიშნული იყო, აუცილებლად თან სდევს შემთხვევითი ცდომილება. ამნაირ ცდომილებათა შესახებ მსჯელობის მათემატიკურ ნიადაგზე დასაყენებლად საჭიროა მუდამ ვიგულვოთ გაზომვათა უსასრულო S რიცხვი, რომელიც შესრულებული იქნება ერთნაირად ხელსაყრელ პირობებში და ერთნაირი მუყაითობით, რათა გაზომვათა ყველა ცალკეული შედეგი ჩათვლილი იქნას ტოლზუსტად.

ამნაირ პირობებში წარმოშობილი შემთხვევითი ცდომილებანი მოქცეული იქნებიან განსაზღვრულ, მეტი თუ ნაკლები სიფართის, ფარგლებში და ამ ფარგლებში მათ შეუძლიათ იქონიონ ყოველნაირი მნიშვნელობა, დადებითი თუ უარყოფითი. აღვნიშნოთ კიდური უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა ცდომილისა შესაბამისად $+\Delta$ და $-\Delta$-თი; თუ ცდომილებათა S რიცხვი ნაგულისხმევი იქნება როგორც განუსაზღვრელად დიდი, მაშინ შემთხვევით ცდომილებას შეუძლია მიიღოს ერთ-ერთი ქვემოთ მოცემული მნიშვნელობა:

$$-\Delta,\ -\frac{(S-1)\,\Delta}{S},\ \frac{(S-2)\,\Delta}{S},\quad -\frac{3\Delta}{S},\ -\frac{2\Delta}{S},\ -\frac{\Delta}{S},\ O,$$

$$+\frac{\Delta}{S},\ +\frac{2\Delta}{S},\ +\frac{3\Delta}{S},\quad +\frac{(S-2)\,\Delta}{S},\ +\frac{(S-1)\,\Delta}{S},\ +\Delta.$$

ცდომილების ამ მნიშვნელობათა რიცხვი არის $(2S+1)$ და მათ შორის ინტერვალი უდრის $\frac{\Delta}{S}$-ს; თუ S რიცხვი უსაზღვროდ ზრდადია, მაშინ $\frac{\Delta}{S}$ ინტერვალი წარმოადგენს უსასრულოდ მცირე ოდენობას, რომელსაც აღვნიშნავთ: $d\Delta$-თი, ე. ი.

$$\frac{\Delta}{S}=d\Delta.$$

რადგან ცდომილების ცალკეულ მნიშვნელობათა რიცხვი უსაზღვროდ დიდია, ამიტომ ალბათობა იმისა, რომ ცდომილება მიიღებს რომელიმე $\frac{m\cdot\Delta}{S}=m\cdot d\Delta$ მნიშვნელობას, იქნება განუსაზღვრელად მცირე, და მით უფრო იქნება ნაკლები, რაც უფრო მეტი იქნება S რიცხვი, ე. ი. რაც უფრო ნაკლები იქნება $d\Delta$. გარდა ამისა, როდესაც ცდომილებათა რიცხვი $+\Delta$ და $-\Delta$ ზღვრებს შორის განუზღვრელად დიდია, შემთხვევით ცდომილებას შეუძლია მიიღოს ყოველგვარი მნიშვნელობა როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი; ამიტომ რომელიმე ცდომილების მოვლინების ალბათობა, ცხადია, იქნება თვით ცდომილების ფუნქცია, მაშასადამე, Δ ცდომილების p_Δ ალბათობა შეიძლება გამოსახულ იქნას ფორმულით:

$$p_\Delta=f(\Delta)\,d\Delta \tag{1}$$

როდესაც f ფუნქციის სახე ცნობილია, მაშინ შესაძლებელია განსაზღვრული იყოს ალბათობა იმისა, რომ გაზომვათა ცდომილებანი მოქცეული იქნება მოცემულ a და b ზღვრებს შორის; სახელდობრ, ალბათობათა შეკრების თეორემის ძალით, ეს ალბათობა იქნება:

$$\int_a^b f(\Delta)\,d\Delta.$$

რადგანაც ცდომილება უსათუოდ მოქცეულია $-\Delta$ და $+\Delta$ ზღვრებს შორის, ამიტომ ცხადია

$$\int_{-\Delta}^{+\Delta} f(\Delta)\,d\Delta=1.$$

რა მიზეზებითაც არ უნდა იყოს წარმოშობილი შემთხვევითი ცდომილებანი, ჩვენ არავითარი საბუთი არ გვაქვს ვიგულვოთ, რომ რო-

მელიმე ხსენებული მიზეზთაგანი მოქმედებდა უპირატესობრივ ერთ მხარეზე და არა მეორეზე. ამიტომ რაგინდარა სიდიდის დადებითი $+\Delta$ ცდომილება იმდენადვე ალბათიერია, როგორც მისი თანასწორი უარყოფითი $-\Delta$ ცდომილება, ე. ი.

$$p_{-\Delta}=p_{+\Delta}.$$

ამაში გამოიხატება შემთხვევით ცდომილებათა ერთ-ერთი ძირითადი თვისება, რომელიც გვიჩვენებს, რომ $f(\Delta)$ ფუნქცია უსათუოდ ლუწი უნდა იყოს.

აღნიშნულ თვისებას უშუალოდ მოჰყვება ისეთი მნიშვნელოვანი შედეგი: ნებისმიერ კენტ ხარისხში ამაღლებულ დაკვირვებათა ყველა ცდომილის ალგებრული ჯამის შეფარდება ცდომილებათა საერთო S რიცხვთან უნდა განუწყვეტლივ ისწრაფოდეს ნულისაკენ S რიცხვის ზრდასთან დაკავშირებით.

მართლაც, დავანაწილოთ ყველა ცდომილება ჯგუფებად ისეთნაირად, რომ ჯგუფებს შორის ინტერვალი იყოს $\frac{\Delta}{S}=d\Delta$; რიცხვი ცდომილებათა ჯგუფებში, რასაკვირველია, სხვადასხვანაირი იქნება. აღვნიშნოთ ცალკეულ ჯგუფებში შემავალი ცდომილებანი Δ_1, Δ_2, Δ_3, ასოებით, ხოლო მათი რიცხვები ჯგუფებში შესაბამისად s_1, s_2, s_3 ასოებით, მივიღებთ:

$$\frac{\Sigma\Delta^n}{S}=\frac{s_1\Delta_1{}^n+s_2\Delta_2{}^n+s_3\Delta_3{}^n\cdots}{S}=p_1\Delta_1{}^n+p_2\Delta_2{}^n+p_3\Delta_3{}^n+$$

რომელშიაც n ხარისხს შეიძლება ჰქონდეს ყოველნაირი სიდიდის კენტი მნიშვნელობა. მიღებულ ჯამში ყოველ დადებით $+\Delta$-ს უსათუოდ ესატყვისება ასეთივე სიდიდის უარყოფითი $-\Delta$ მნიშვნელობა, და ამასთანავე $p_{-\Delta}=p_{+\Delta}$, ამიტომ, როდესაც S რიცხვი უსასრულოდ დიდია და n რიცხვი კენტია, აუცილებლად უნდა იყოს

$$\frac{\Sigma\Delta^n}{S}=0 \tag{2}$$

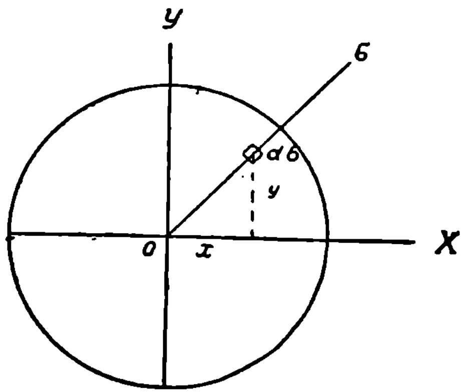
შემთხვევით ცდომილებათა განხილული თვისების მიხედვით დავასკვნით, რომ თუ აღებული სიდიდისათვის გვექნებოდა გაზომვათა უსასრულო რიცხვი, მაშინ მათი საშუალო არითმეტიკული თავისუფალი აღმოჩნდებოდა შემთხვევით ცდომილებათაგან. სინამდვილეში,

რასაკვირველია, შეუძლებელია გაზომვათა არამც თუ უსასრულო რიცხვისა, არამედ, ხშირად, თვით საკმაოდ დიდი რიცხვის მიღებაც კი. უმეტეს ნაწილად პრაქტიკაში ვკმაყოფილდებით ხოლმე გაზომვათა შეზღუდული რიცხვით, ასე, რომ საშუალო შედეგი აუცილებლად შეიცავს ცდომილებას. გაზომვათა შედეგის პრაქტიკული ღირებულების გამოსარკვევად, სხვაგვარად, სანდოობის იმ ზომის შესაფასებლად, რომლის ღირსეული აღმოჩნდება წარმოებულ გაზომვათა შედეგები, საჭიროა ამ შედეგის ცდომილების განსაზღვრის წესის ცოდნა, რაც შეადგენს ცდომილებათა თეორიის ამოცანას.

შემთხვევით ცდომილებათა მეორე მნიშვნელოვანი თვისება ის არის, რომ მცირე ცდომილებანი უფრო ხშირია, ვიდრე დიდი, და მათ სიდიდეს აქვს გარკვეული ზღვარი, რომელსაც იგი (სიდიდე) არ გადასცილდება; ასე, რომ, თუ რომელიმე განაზომთა რიგში აღმოჩენილი იქნება ხსენებულ ზღვარს გადაცილებული ცდომილება, მაშინ ეს უკანასკნელი შემთხვევითი ცდომილება კი არაა, არამედ ტლანქი შეცდომაა, მარცხი. ნათქვამის დამტკიცება მოცემულია ქვემოთ, ალბათობის ცხრილში.

ზ. შემთხვევითი ცდომილების ალბათობის გამოხატულება

$f(\Delta)$ ფუნქციის ალგებრული სახე უმარტივესად გამოირკვევა შემდეგი მსჯელობით. ვთქვათ, თოფს ესვრიან O წერტილს. ამ წერტილში წარმოვიდგინოთ ორი რომელიმე ურთიერთმართობული OX და OY ღერძი; მაშინ ტყვიის გადახრის ალბათობა პირველი მიმართულებით x ოდენობაზე, ხოლო მეორე მიმართულებით y ოდენობაზე, გამოისახება იმავე $f(\Delta)$ ფუნქციით შემდეგნაირად:



ნახ. 1

$$p_x = f(x)\,dx,$$
$$P_y = f(y)\,dy.$$

რადგანაც ეს ორივე გადახრა უნდა ჩაითვალოს ურთიერთდამოუკიდებლად, ამიტომ მათი ერთობლივი წარმოშობის ალბათობა, ე. ი.

როდესაც ტყვია მოხვდება უსასრულოდ მცირე $d\sigma=dx\cdot dy$ ფართობს, რომლის კოორდინატებია x და y, 3 §-ის ძალით, იქნება

$$p_\sigma=p_x\cdot p_y=f(x)\cdot f(y)\cdot dx\,dy=f(x)\cdot f(y)\,d\sigma.$$

ეხლა საკოორდინატო ღერძად მივიღოთ O_σ მიმართულება, მაშინ d_σ ფართობის კოორდინატები იქნება O და $r=\sqrt{x^2+y^2}$. ამ შემთხვევაში იგივე p_σ ალბათობა გამოიხატება ფორმულით

$$p_\sigma=p_0\cdot p_r=f(0)\cdot f(r)\,d\sigma \tag{3}$$

მაშასადამე, გვექნება:

$$f(x)\cdot f(y)=f(0)\cdot f(r),$$

ანუ

$$\lg f(x)+\lg f(y)=\lg f(0)+\lg f(r)\cdot$$

ამ განტოლებით განისაზღვრება f ფუნქცია. მისი დიფერენციალის აღება ჯერ x-ით, მერე y-ით მოგვცემს:

$$\frac{d\lg f(x)}{dx}=\frac{d\lg f(r)}{dr}\cdot\frac{dr}{dx},\qquad \frac{d\lg f(y)}{dy}=\frac{d\lg f(r)}{dr}\cdot\frac{dr}{dy}.$$

რადგანაც $r^2=x^2+y^2$,
ამიტომ

$$\frac{dr}{dx}=\frac{x}{r},\qquad \frac{dr}{dy}=\frac{y}{r},$$

და

$$\frac{d\lg f(x)}{x\cdot dx}=\frac{d\lg f(y)}{y\cdot dy}=\frac{d\lg f(r)}{r\cdot dr}=-\frac{1}{m^2}.$$

აქ $-\frac{1}{m^2}$ უნდა წარმოადგენდეს ერთ რომელიმე მუდმივ ოდენობას, აუცილებლად უარყოფითს, ვინაიდან x-ის ზრდასთან ერთად ფუნქცია $f(x)$ უნდა კლებულობდეს. შემდეგ გვექნება:

$$d\lg f(x)=-\frac{x\,dx}{m^2}\quad\text{და}\quad \lg f(x)=\lg K-\frac{x^2}{2m^2}\cdot\lg e,$$

ხოლო აქედან

$$f(x)=K\cdot e^{-\frac{x^2}{2m^2}} \tag{4}$$

როგორც ვხედავთ, როდესაც $x=0$, მაშინ

$$f(0)=K.$$

ამ მუდმივი K ოდენობის განსაზღვრისათვის ჯერ ელემენტური $d\sigma$ ფართობი გამოვსახოთ პოლურ r და θ კოორდინატებში (ნახ. 1); გვექნება

$$d\sigma = dr \cdot r d\theta,$$

შემდეგ, (4)-ის მიხედვით,

$$f(r) = K \cdot e^{-\frac{r^2}{2m^2}}$$

ხოლო, (3)-ის საფუძვლით

$$p_0 = K^2 \cdot e^{-\frac{r^2}{2m^2}} \cdot dr \cdot r d\theta.$$

ამ უკანასკნელი გამოხატულების ინტეგრალი $\theta=0$-დან, ვიდრე $\theta=2\pi$ და $r=0$-დან ვიდრე $r=\infty$-მდე უნდა უდრიდეს ერთეულს, ვინაიდან ტყვიის ისეთ ნიშანში მოხვედრის ალბათობა, რომელიც იგი უსასრულოდ დიდია, გადაიქცევა უცილობლად. მაშასადამე, უნდა იყოს:

$$1 = 2\pi K^2 \cdot m^2 \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2m^2}} \cdot d\left(\frac{r^2}{2m^2}\right) = 2\pi K^2 m^2,$$

საიდანაც

$$K = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}}.$$

ამის მიხედვით (4) ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$f(x) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2m^2}}.$$

ყოველივე ზემონათქვამის საფუძვლით დავასკვნით, რომ p_Δ ალბათობა იმისა, რომ დაკვირვებათა მოცემულ რიგში დაშვებული იქნება შემთხვევითი Δ ცდომილება, მოქცეული ფრიად ვიწრო $\Delta - \frac{d\Delta}{2}$ და $\Delta + \frac{d\Delta}{2}$ ფარგლებში, უნდა გამოისახებოდეს ფორმულით

$$p_\Delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}} \cdot \frac{d\Delta}{m} \tag{5}$$

७. გაზომილი სიდიდის უალბათიერესი მნიშვნელობა

როდესაც x ოდენობის განსაზღვრისათვის წარმოებულია ტოლზუსტ გაზომვათა საკმაოდ მნიშვნელოვანი n რიცხვი და მიღებულია ერთმანეთისაგან მეტად თუ ნაკლებად განსხვავებული $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$ მნიშვნელობანი, მიშინ ყველა ცალკეული შედეგის ცდომილებანი, რომლებიც ჩვენ ვიგულვოთ მხოლოდ როგორც შემთხვევითი, გამოისახებიან შემდეგნაირად:

$$\Delta_1=x-a_1, \quad \Delta_2=x-a_2, \; \Delta_3=x-a_3 \qquad \Delta_n=x-a_n \tag{6}$$

მათი ალბათობა, (5) ფორმულის ძალით, იქნება:

$$p_1=\frac{d\Delta}{m\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2m^2}\cdot\Delta_1^2} \qquad p_2=\frac{d\Delta}{m\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2m^2}\cdot\Delta_2^2},$$

$$p_3=\frac{d\Delta}{m\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2m^2}\cdot\Delta_3^2} \qquad p_n=\frac{d\Delta}{m\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2m^2}\cdot\Delta_n^2},$$

მაგრამ რომელიმე ცდომილების მოვლინება ცალკეულ დაკვირვებაში ჩვენ უნდა ჩავთვალოთ უბრალო ხდომილებად, რომელსაც არავითარი ზეგავლენა არ ექნება მომდევნო დაკვირვებებზე; ამიტომ ცდომილებათა ერთობლივი წარმოხდომა მთელ რიგ n დაკვირვებაში წარმოადგენს რთულ ხდომილობას, რომლის ალბათობა იქნება

$$P=p_1\cdot p_2\cdot p_3 \qquad p_n=\left(\frac{d\Delta}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{m^n}\cdot e^{-\frac{1}{2m^2}\cdot\Sigma\Delta^2}, \tag{7}$$

სადაც

$$\Sigma\Delta^2=\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2+ \qquad +\Delta_n^2.$$

რადგანაც ნამდვილი x მნიშვნელობა ჩვენთვის უცნობია, ამიტომ მის შესახებ ჩვენ შეგვიძლია ვიქონიოთ რამდენადმე მიახლოებითი გულვება და ყოველი ამისთანა გულვება მოგვცემს ცდომილებათათვის სრულებით გარკვეულ Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_n მნიშვნელობას და მოგვიყვანს განსაზღვრულ p ალბათობამდე. თავისთავად გასაგებია, რომ ყველა გულვება, რომლებიც მოგვცემს p-თვის შედარებით არაფრისებრ მნიშვნელობას, უკუგდებულ უნდა იქნეს და საუკეთესო გულვებად x-ის მნიშვნელობის შესახებ აღიარებულ უნდა იქნეს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც p ალბათობა იქნება უდიდესი, ე. ი. მის გამოხატულებაში შემავალი $\Sigma\Delta^2$ აღმოჩნდება უმცირესი. ამისათვის საჭიროა, რომ

$$\frac{d\Sigma\Delta^2}{dx}=\Delta_1\frac{d\Delta_1}{dx}+\Delta_2\frac{d\Delta_2}{dx}+\Delta_3\frac{d\Delta_3}{dx}+\cdots+\Delta_n\frac{d\Delta_n}{dx}=0,$$

ანუ, რადგანაც (6)-ის მიხედვით

$$\frac{d\Delta_1}{dx}=\frac{d\Delta_2}{dx}=\frac{d\Delta_3}{dx}= \qquad \frac{d\Delta_n}{dx}=1,$$

ამიტომ უნდა იყოს:

$$\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+ \qquad \Delta_n=0\cdot$$

შევიტანოთ ამ გამოხატულებაში მისი წევრების მნიშვნელობა (6)-დან:

$$(x-a_1)+(x-a_2)+(x-a_3)+ \qquad + \ (x-a_n)=0,$$

საიდანაც

$$x=\frac{a_1+a_1+a_3+ \ \cdots \ + \ a_n}{n}=a, \tag{8}$$

ე. ი. გაზომილი სიდიდის უალბათიერესი მნიშვნელობა არის ყველა ცალკეული ტოლზუსტი განაზომის საშუალო არითმეტიკული. განხილული წესი სხვანაირად იწოდება არითმეტიკული შუადის დასაბამად.

აქ საკითხს შეგვიძლია მივუდგეთ გამარტივებულადაც. (6)-ში მოცემულ განტოლებათა ჯამი იქნება:

$$nx=a_1+a_2+a_3+ \qquad a_n+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+ \qquad +\Delta_n,$$

საიდანაც

$$x=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}+\frac{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3 \ + \ \cdots \ \Delta_n}{n}=$$

$$=\frac{a_1+a_2+a_3+ \ \cdots \ a_n}{n}+\frac{\Sigma\Delta}{n}.$$

n რიცხვი, რომ უსასრულოდ დიდი იყოს, მაშინ, (2) ფორმულის ძალით, $\frac{\Sigma\Delta}{n}$ უნდა უდრიდეს ნულს; ხოლო თუ n წარმოადგენს შეზღუდულ რიცხვს, მაშინ $\frac{\Sigma\Delta}{n}$ ჯამი მით უფრო მიახლოებული იქნება ნულთან, რაც უფრო მეტია წარმოებულ გაზომვათა n რიცხვი; ყოველ შემთხვევაში, ეს ჯამი თვითეულ Δ ცდომილებაზე ნაკლები იქნება (აქ, რასაკვირველია, ნაგულისხმევია გაზომვათა საკმაოდ დიდი რიცხვი). ნათქვამის საფუძვლით გამოხატულება

$$a=\frac{a_1+a_2+a_3 \ \cdots \ + \ a_n}{n} \tag{8}$$

წარმოადგენს გაზომილი x სიდიდის უალბათიერეს მნიშვნელობას, რაც უკვე ზემოთაც გვქონდა დამტკიცებული.

10. უმეშვეო გაზომვათა საშუალო ცდომილება

მუდმივი m ოდენობა, რომელზედაც, როგორც (5) ფორმულა გვიჩვენებს, დამოკიდებულია ალბათობის თანდათან შემცირება Δ ცდომილების ზრდასთან დაკავშირებით, სხვადასხვაგვარი დაკვირვებათათვის სხვადასხვანაირია და ამიტომ იგი შეიძლება განსაზღვრული იყოს ყოველი მათგანისათვის მხოლოდ ცალკეულად.

ჩვენ მიერ გამოყვანილი (7) ფორმულა გამოხატავს რომელიმე უმეშვეო ტოლზუსტ დაკვირვებათა რიგში მომხდარი $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \cdots \Delta_n$ ცდომილებების ერთობლივი წარმოხდომის P ალბათობას. განსახილველი ფორმულა გვიჩვენებს სწორედ იმას, რომ ხსენებული რიგისათვის ყველაზე უფრო შესატყვისი მნიშვნელობა m-სა იქნება ისეთი მნიშვნელობა, რომლისათვისაც P ალბათობა უდიდესი იქნება, ე. ი., როდესაც:

$$\frac{dP}{dm}=\left(\frac{d\Delta}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\left(\frac{\Sigma\Delta^2}{m^{n+3}}\cdot e^{-\frac{1}{2m^2}\Sigma\Delta^2}-\frac{n}{m^{n+1}}\cdot e^{-\frac{1}{2m^2}\Sigma\Delta^2}\right)=0,$$

ანუ

$$\left(\frac{d\Delta}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\frac{1}{m^{n+1}}\cdot e^{-\frac{1}{2m^2}\Sigma\Delta^2}\left(\frac{\Sigma\Delta^2}{m^2}-n\right)=0,$$

საიდანაც

$$\frac{\Sigma\Delta^2}{m^2}=n,$$

ხოლო აქედან

$$m^2=\frac{\Sigma\Delta^2}{n} \quad \text{და} \quad m=\pm\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n}} \tag{9}$$

მაშასადამე, m^2 წარმოადგენს მოცემულ n დაკვირვებათა რიგში მომხდარი ყველა Δ ცდომილების კვადრატების საშუალო არითმეტიკულს. ამის გამო m იწოდება *ცალკეული დაკვირვების (განაზომის) საშუალო კვადრატოვან ცდომილებად* ანუ, *მოკლედ, საშუალო ცდომილებად*. იგი გვესახება როგორც ბუნებრივი საზომი დაკვირვებათა რიგში მომხდარი ყოველი ცალკეული ცდომილებისა და ამასთანავე იგი სავსებით ახასიათებს დაკვირვებათა სიზუსტეს, ვინაიდან მისი ცოდნით ჩვენთვის ცნობილია აგრეთვე ყოველნაირი სიდიდის ცდომილების ალბათობაც.

საშუალო კვადრატოვანი ცდომილების ცნება შეიძლება განსაზღვრული იყოს აგრეთვე გამარტივებული მსჯელობითაც, რაც ქვემოთაა მოყვანილი.

ცალკეულ a_1, a_2, a_3, a_n გაზომვათა ღირსეულობის შესაფასებლად არ შეიძლება მათ ნამდვილი Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_n ცდომილებათა საშუალო არითმეტიკულით (იხ. 9 §).

$$\frac{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\cdots+\Delta_n}{n}=\frac{\Sigma\Delta}{n}$$

სარგებლობა, ვინაიდან მსხვილ ან წვრილ ცდომილებათა შემთხვევითი დაგროვების გამო, ან კიდე,—გაზომვათა შეზღუდული რიცხვის შემთხვევაში,—დადებითთა და უარყოფით ცდომილებათა რიცხვების არათანასწორობის მიზეზით, იგი, შესაძლებელია, აღმოჩნდეს ან ფრიად დიდი, ან ფრიად მცირე ოდენობა, რის გამოც, მიუხედავად ყველა გაზომვის ტოლზუსტობისა, იგი ვერ გამოდგება ცალკეული გაზომვის (განაზომის) სანდოობის საზომად. ამ მოსაზრებით, ცალკეულ გაზომვათა სანდოობის შესაფასებლად ღებულობენ ცდომილებათა არითმეტიკულ შუადს არა მათი პირველი ხარისხებიდან, არამედ მათი კვადრატებიდან, რაც სრულებით აბათილებს ცდომილებათა ნიშნების ზეგავლენას.

აღვნიშნოთ ამნაირი არითმეტიკული საშუალო m^2-ით; გვექნება:

$$m^2=\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2+\cdots\Delta_n^2}{n}=\frac{\Sigma\Delta^2}{n},$$

საიდანაც

$$m=\pm\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n}} \qquad (9)$$

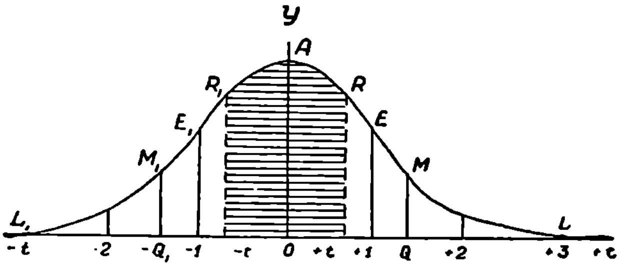
11. შემთხვევით ცდომილებათა ალბათობის მრუდი და ტაბულა

მე-10 პარაგრაფში ნათქვამის საფუძველზე, თუ ყოველ Δ ცდომილებას გამოვსახავთ მისი შეფარდებით საშუალო m ცდომილებასთან, ე. ი. $t=\frac{\Delta}{m}$ რიცხვით $\left[dt=\frac{d\Delta}{m}\right]$, მაშინ (5) ფორმულიდან შეგვიძლია ადვილად გამოვიყვანოთ იმის p_t ალბათობა, რომ ცალკეულ გაზომვაში დაშვებული იქნება ისეთი შემთხვევითი ცდომილება, რომელიც არ გასცილდება ფრიად ვიწრო $t-\frac{dt}{2}$ და $t+\frac{dt}{2}$ ფარგლებს. ხსენებული p_t ალბათობის გამოხატულება იქნება:

$$p_t=y_t\cdot dt,$$

$$\text{სადაც} \quad y_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

y_t ოდენობანი, რომელთა პროპორციულია p_t ალბათობანი, ადვილად გამოითვლება სხვადასხვა t რიცხვისათვის; მათი მნიშვნელობა მოცემულია პარაგრაფის ბოლოში. თუ ახლა t რიცხვებს მივიღებთ აბსცისებად, ხოლო y_t რიცხვებს ორდინატებად, მივიღებთ $LMEAE_1 M_1L_1$ მრუდს (ნახ. 2), რომელიც თვალსაჩინოდ გამოსახავს შემთხვევითი ცდომილებების ალბათობათა კლების კანონს, მათი (ცდომილებების) ნულის ორივე მხარეს ზრდასთან დაკავშირებით.



ნახ. 2

იგი უახლოვდება აბსცისების ღერძს, თუმცა ასიმპტოტურად, მაგრამ მეტისმეტად სწრაფად, ისე რომ უკვე, $t = \pm 3$-თვის იგი თითქმის სრულებით მას ერწყმის (ცდომილებათა ალბათობა ხდება სავსებით არაფრისებრი). აგრეთვე ადვილი დასანახია, რომ მრუდის გაზნექილობა გადადის შეზნექილობაში ორი გადანაღუნის E და E_1 წერტილში, რომლებიც ესატყვისება სწორედ $t = \pm 1$-ს.

ახლა განვსაზღვროთ იმის სასრული $P(t)$ ალბათობა, რომ რომელიმე ცალკეულ დაკვირვებაში მომხდარი ცდომილება არ გადასცილდება განსაზღვრულ $\pm t$ ოდენობას, ე. ი. რომ იგი არ გადასცილდება $+t$ და $-t$ ზღვრებს. ამისათვის, აშკარაა, უნდა აღებული იყოს p_t ალბათობათა ჯამი ყოველგვარ t ოდენობათათვის, რომლებიც კი მოქცეული იქნება ხსენებულ ფარგლებში. მაშასადამე, გვექნება:

$$P(t) = \int_{-t}^{+t} y_t \cdot dt = 2\int_0^t y_t \cdot dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot dt \qquad (10)$$

ამ გამოხატულებაში შემავალი ინტეგრალი გამოსახავს ალბათობის მრუდის ფართობს, მოქცეულს MQ და M_1Q_1 ორდინატს შორის,

რომელნიც ესატყვისება $+t$ და $-t$ აბსცისს. იგი შეიძლება გამოთვლილი იქნას ინტეგრალქვეშა ფუნქციის კრებად მწკრივად დაშლით t-ს ხარისხების მიმართ. მაგრამ მისი რიცხობრივი მნიშვნელობანი t-ს სხვადასხვა ოდენობისათვის შეიძლება უფრო მარტივად იყოს გამოთვლილი კვადრატურების ოდენობით, ე. ი. $\frac{1}{2}(y_0+y_1)\,dt$, $\frac{1}{2}(y_1+y_2)\,dt$ და ა.შ. ოდენობათა თანმიმდევრობითი შეჯამებით, რისთვისაც y_0, y_1, y_2 ორდინატებსშორისი dt შუალედისათვის საკმარისი იქნება მიღებული იყოს $dt=0{,}1$. სწორედ ამ ღონეობით არის გამოთვლილი $P(t)$ მნიშვნელობანი, მოყვანილი ქვემორე ტაბულაში y_t ოდენობათა გვერდით.

ალბათობის ტაბულის დახმარებით ადვილად გამოიცნობა, თუ მოცემულ n ტოლზუსტ დაკვირვებაში, რომელთა საშუალო ცდომილება არის m, რამდენი უნდა იყოს ისეთი ცდომილება, რომელიც თავისი სიდიდით არ გადასცილდება განსაზღვრულ $\pm\delta$-ს. ამისათვის მხოლოდ საჭიროა $t=\frac{\delta}{m}$ არგუმენტისათვის მონახული იქნეს ალბათობა და მერე იგი გამრავლებული იყოს n-ზე. ამის მიხედვით ჩვენი ტაბულა დაგვანახვებს, რომ 1000 დაკვირვებაში უნდა მოხდეს:

383-მდე ცდა (38,3%) რიცხვითი მნიშვნელობით $\frac{1}{2}\,m$-ზე მცირე და 617 ცდა (61,7%) $-\frac{1}{2}\,m$-ზე დიდი.

683-მდე ცდა (68,3%) რიცხვითი მნიშვნელობით m-ზე მცირე და 317 ცდა (31,7%) $-m$-ზე დიდი.

954-მდე ცდა (95,4%) რიცხვითი მნიშვნელობით $2m$-ზე მცირე და 46 ცდა (4,6%) $-2m$-ზე დიდი.

997-მდე ცდა (99,7%) რიცხვითი მნიშვნელობით $3m$-ზე მცირე და 3 ცდა (0,3%) $-3m$-ზე დიდი.

და თითქმის სრულებით წარმოუდგენელია, რომ აღმოჩნდეს თუნდაც ერთი ცდომილება, გადაცილებული $3\frac{1}{2}\,m$-ს,

$$y_t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \qquad P(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt.$$

t	y_t	$P(t)$	t	y_t	$P(t)$	t	y_t	$P(t)$
0,0	0,399	0.000	1,3	0,171	0,806	2,6	0,014	0,991
0,1	0,397	0,080	1,4	0,150	0,838	2,7	0,010	0,993
0.2	0,391	0,159	1,5	0,130	0,866	2.8	0,008	0,995
0,3	0,381	0.236	1,6	0,111	0,890	2,9	0,006	0,996
0,4	0,368	0,311	1,7	0,094	0,911	3,0	0,004	0,997
0,5	0,352	0,383	1,8	0,079	0,928	3,1	0,003	0,998
0,6	0,333	0,451	1,9	0,066	0.942	3,2	0,002	0,999
0,7	0,313	0,516	2,0	0,054	0,954	3,3	0,002	0,999
0,8	0,290	0,576	2,1	0,044	0,964	3,4	0,001	0,999
0,9	0,265	0,632	2,2	0,036	0,972	3,5	0,001	0,999
1,0	0,242	0,683	2,3	0,028	0,979	3,6	0,001	1,000
1,1	0,218	0,729	2,4	0,022	0,984	3,7	0,001	—
1,2	0,194	0,770	2,5	0.017	0,988	3,8	0,000	

12. ალბათიერი ცდომილება

ყოველნაირ გაზომვათა მრავალგვარ ცდომილებას შორის უფრო საინტერესო და მნიშვნელოვანია ისეთი ρ ცდომილება, რომლის ალბათობა $P(t)=P\left(\frac{\rho}{m}\right)=\frac{1}{2}$-ს, ე. ი. ცდომილების რაოდენობა, რაც რიცხვითი მნიშვნელობით ρ-ზე მცირეა, თითქმის ისეთივეა, რაც ρ-ზე დიდ ცდომილებათა რაოდენობა. ასეთ ცდომილებას უწოდებენ **ალბათიერ ცდომილებას**. ალბათობის მრუდზე (ნაკვთი 2) მისი შესატყვისი R და R_1 ორდინატი გამოჰყოფენ დასერილ ფართობს, რომელიც შეადგენს მრუდის მთელი $LMAM_1L_1$ ფართობის სწორედ ნახევარს. ზემოთ მოყვანილი ტაბულა გვიჩვენებს, რომ ალბათობა $P(t)=0{,}500$-ს, როდესაც არგუმენტი $t=\frac{\rho}{m}=0{,}674$; მაშასადამე,

$$\rho=0{,}674m=\frac{2}{3}\,m \text{ (დაახლ.)}, \qquad (11)$$

ე. ი. **ალბათიერი ცდომილება შეადგენს საშუალო ცდომილების დაახლოებით ორ მესამედს.**

თუ მოცემულია გაზომვათა საკმაოდ მრავალრიცხოვანი რიგი, ალბათიერი ცდომილება შეიძლება მონახულ იქნას შემდეგი მარტივი, მაგრამ ტლანქი, სამაგიეროდ თვალსაჩინო და პირდაპირი ხერხით, რომელიც გამომდინარეობს თვით ალბათიერი ცდომილების ცნებიდან: ამისათვის ცდომილებათა მთელ n რიცხვში რიგობრივი წესით უნდა შევარჩიოთ $\frac{n}{2}$ ცდომილება, რიცხვითი მნიშვნელობით უახ-

ლოესი ნულთან, მაშინ ცდომილება, რომელიც მოქცეული აღმოჩნდება $\frac{n}{2}$ მომცრო და $\frac{n}{2}$ მოზრდილ ცდომილებათა ზღვარზე, იქნება საკმარისი მიახლოებით საძიებელი ალბათიერი ცდომილება.

13. არითმეტიკული შუადის საშუალო ცდომილება

განსაკუთრებულ ინტერესს წარმოადგენს არითმეტიკული შუადის, ანუ, რაც იგივეა, გაზომვათა საბოლოო შედეგის საშუალო ცდომილების განსაზღვრა.

აშკარაა, შედეგის საშუალო ცდომილება უნდა უდრიდეს ნამდვილი x ოდენობისა და არითმეტიკული a შუადის სხვაობას, რაც § 9-ის მიხედვით გამოისახება ფორმულით

$$x-a=\frac{\Sigma\Delta}{n}.$$

აღვნიშნოთ იგი m_0-ით;

გვექნება:

$$m_0=\frac{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\cdots+\Delta_n}{n}.$$

Δ ცდომილებათა სხვადასხვა ნიშნის ზეგავლენის თავიდან ასაცილებლად ავიყვანოთ ამ გამოხატულების ორივე ნაწილი კვადრატის ხარისხში; მივიღებთ:

$$m_0^2=\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2+\cdots+\Delta_n^2+2\Delta_1\Delta_2+2\Delta_1\Delta_3+\cdots+2\Delta_{n-1}\Delta_n}{n^2}.$$

რადგანაც შემთხვევით ცდომილებათა თვისებების მიხედვით გაორკეცებულ $2\Delta_1\Delta_2$, $2\Delta_1\Delta_3$ ნამრავლებს აქვთ სხვადასხვა ნიშანი, ამიტომ, თუ გაზომვათა n რიცხვი საკმაოდ დიდია, ამ ნამრავლების ჯამი უსათუოდ მიისწრაფვის ნულისაკენ; ეს რომ ასე არა ყოფილიყო, მაშინ Δ_1, Δ_2 Δ_3, Δ_n ცდომილებანი იქნებოდა არა შემთხვევითი, არამედ მუდმივი ხასიათისა, ამ მოსაზრებით უგულვებელვყოთ ორკეცი ნამრავლები, რის შემდეგაც შედეგის საშუალო ცდომილებისათვის მოგვეცემა:

$$m_0=\pm\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n^2}} \qquad (12)$$

(9) და (12) ფორმულის ერთმანეთთან შედარება საშუალებას იძლევა დავამყაროთ კავშირი გაზომვათა შედეგსა და ცალკეული გაზომვის საშუალო ცდომილებას შორის, სახელდობრ:

$$m_0 = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad (13)$$

აქედან დავასკვნით, რომ გაზომვათა რიცხვის ზრდასთან ერთად მცირდება შედეგის საშუალო ცდომილებაც, მაგრამ ეს შემცირება პროპორციულია არა გაზომვათა რიცხვისა, არამედ პროპორციულია ამ რიცხვის კვადრატული ფესვისა. ვთქვათ, მაგალითად, რომელიმე კუთხსაზომი იარაღი იძლევა უშუალოდ გაზომილი კუთხეებისათვის $\pm 30''$-ის საშუალო ცდომილებას; მაშინ კუთხის 4-ჯერ გაზომვის შედეგის ცდომილება გამოვა 2-ჯერ ნაკლები, ე. ი. $\pm 15''$; 9-ჯერ გაზომვა იმავე კუთხისა იძლევა შედეგისათვის 3-ჯერ ნაკლებ ცდომილებას, ე. ი. $\pm 10''$-ს, და, საზოგადოდ, n გაზომვათა შუადისათვის საშუალო ცდომილება იქნება

$$m_0 = \pm \frac{30''}{\sqrt{n}}.$$

14. გაზომვათა საშუალო ცდომილება, როდესაც გასაზომი სიდიდის ნამდვილი მნიშვნელობა უცნობია

ზემოთ ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ გასაზომი სიდიდის x მნიშვნელობა ცნობილია; სინამდვილეში კი იგი ყოველთვის უცნობია. მიუხედავად ამისა, წინა პარაგრაფების მსჯელობა დარჩება სავსებით ძალაში იმ შემთხვევაშიაც, თუ ნამდვილ $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \cdots \Delta_n$ ცდომილებათა ნაცვლად, გვეცოდინება ყოველი ცალკეული $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$ განაზომის $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ δ_n გადახრა არითმეტიკული a შუადიდან, ე. ი. ოდენობანი:

$$\delta_1 = a - a_1,\ \delta_2 = a - a_2,\ \delta_3 = a - a_3 \qquad \delta_n = a - a_n \qquad (\delta)$$

δ გადახრათა და ნამდვილ Δ ცდომილებათა შორის არსებობს მარტივი თანაფარდობა. მართლაც და, რადგან

$$\delta_1 = a - a_1,\ \Delta_1 = x - a_1 \text{ და } m_0 = x - a,$$

ამიტომ

$$\Delta_1 = \delta_1 + m_0.$$

ამის მიხედვით გვექნება თანაფარდობათა შემდეგი რიგი:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_1 + m_0 \\ \Delta_2 &= \delta_2 + m_0 \\ \Delta_3 &= \delta_3 + m_0 \\ &\cdots\cdots \\ \Delta_n &= \delta_n + m_0. \end{aligned}$$

ავამაღლოთ მოყვანილი ტოლობანი კვადრატის ხარისხში, შემდეგ შევაჯამოთ მიღებული რიცხვები და, დასასრულ, გავყოთ ყველა ჯამი n-ზე, გვექნება:

$$\frac{\Sigma\Delta^2}{n}=\frac{\Sigma\delta^2}{n}+2m_0\cdot\frac{\Sigma\delta}{n}+m_0^2 \qquad (14)$$

ამ განტოლებაში მარჯვენა ნაწილის მეორე წევრი უდრის ნულს, ვინაიდან (δ) ტოლობათა შეჯამება და მერე n-ზე გაყოფა მოგვცემს:

$$\frac{\Sigma\delta}{n}=a-\frac{a_1+a_2+a_3\cdots+a_n}{n};$$

რადგანაც (8) ფორმულის ძალით

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}=a,$$

ამიტომ, აშკარაა,

$$\frac{\Sigma\delta}{n}=0.$$

ამნაირად, ზემოთ წარმოდგენილი (14) გამოხატულება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{\Sigma\Delta^2}{n}=\frac{\Sigma\delta^2}{n}+m_0^2.$$

რადგანაც (9) და (13) ფორმულის ძალით $\frac{\Sigma\Delta^2}{n}=m^2$ და $m_0^2=\frac{m^2}{n}$, ამიტომ გვექნება:

$$m^2=\frac{\Sigma\delta^2}{n}+\frac{m^2}{n},$$

საიდანაც

$$m=\pm\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}} \qquad (15)$$

მაშასადამე, თუ გასაზომი სიდიდის ნამდვილი მნიშვნელობა უცნობია, მაშინ ცალკეული განაზომის საშუალო ცდომილება უდრის კვადრატულ ფესვს წილადიდან, რომლის მრიცხველია გადახრათა კვადრატების ჯამი, ხოლო მნიშვნელი—განაზომთა რიცხვი ერთის გამოკლებით.

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ (13) ფორმულის ძალით რომელიმე სიდიდის განაზომთა არითმეტიკული შუადის (შედეგის) საშუალო ცდომილება გამოისახება ფორმულით

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{\Sigma \delta^2}{n(n-1)}}, \tag{16}$$

ე. ი. **შედეგის საშუალო ცდომილება უდრის ცალკეული განაზომის საშუალო ცდომილებას, გაყოფილს განაზომთა რიცხვის კვადრატულ ფესვზე.**

ადვილად ასახსნელია განსხვავების მიზეზი (9) და (15) ფორმულას შორის. ვთქვათ, შესრულებულია **მხოლოდ ერთი** გაზომვა. თუ ცნობილია სიდიდის ნამდვილი მნიშვნელობა, მაშინ ერთი გაზომვაც გვაძლევს წარმოდგენას მის სიზუსტეზე,—სახელდობრ, (9) ფორმულის მიხედვით, მისი საშუალო ცდომილება $m = \pm\Delta$.

მაგრამ თუ სიდიდის ნამდვილი მნიშვნელობა უცნობია, მაშინ, აშკარაა, საშუალო არითმეტიკული უდრის ამ ერთი გაზომვის შედეგს და, მაშასადამე, მის სიზუსტეზე არავითარი წარმოდგენა არ გვეძლევა. მართლაც და, ამ შემთხვევაში (15) ფორმულა მოგვცემს $\frac{0}{0}$-ს, ე. ი. საშუალო ცდომილება ღებულობს განუსაზღვრელ სახეს; (9) ფორმულა კი ამ შემთხვევისათვის მოგვცემდა $m = 0$ (თითქოს თვით გაზომვა ყოფილიყოს შეუცდომელი), რაც, რასაკვირველია, არ არის სწორი. სწორედ ეს არის მიზეზი იმ წესისა, რომ სანდო შედეგის მისაღებად აუცილებლად საჭიროა რამდენიმე გაზომვის მოხდენა (ორისა და მეტისა). ამ შემთხვევაში საშუალო არითმეტიკული მოგვცემს უფრო ზუსტ შედეგს, ხოლო ცალკეულ გაზომვათა საშუალოდან გადახრა ამასთანავე დაასურათებს თვით შედეგის სიზუსტესაც.

(13) ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ცალკეული გაზომვის საშუალო ცდომილების მიხედვით (რომელიც განსაზღვრული იყო გაზომვათა შეზღუდული რიცხვიდან), გამოვთვალოთ გაზომვათა ის რიცხვი, რომლებიც საერთოდ უნდა შესრულებული იყოს, რათა მათი შედეგის საშუალო ცდომილება არ აღემატებოდეს განზღრულ მნიშვნელობას. ამ მიზნით (13) ფორმულა უნდა გარდაიქმნას შემდეგნაირად:

$$n = \frac{m^2}{m_0^2} \tag{17}$$

ვთქვათ, მაგალითად, ერთი რომელიმე სიგრძე გაზომილი იყო 4-ჯერ და ცალკეული გაზომვისათვის მიღებული იყო საშუალო ცდომილება $m = \pm 0{,}094$ მ. ახლა გვესაჭიროება გაზომვის შედეგის სიზუსტის აწევა $m_0 = \pm 0{,}010$ მეტრამდე. მოცემული რიცხვების (17) ფორმულაში შეტანა მოგვცემს $n = 88$.

მაგალითები

უშუალო გაზომვათა საშუალო და ალბათიერი ცდომილების შესახებ ნათქვამის გასაშუქებლად განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი I. ბაფთით ხაზის ოთხჯერ გაზომვამ მოგვცა:

განაზომი

განაზომი	δ	δ^2
897,53 მ	+0,10	0,0100
61 მ	+0,02	0,0004
71 მ	−0,08	0,0064
67 მ	−0,04	0,0016
a=897,63 მ	$\Sigma\delta=-0{,}00$	$\Sigma\delta^2=0{,}0184$

(15), (16) და (11) ფორმულის ძალით გვექნება:

ცალკეული გაზომვის საშუალო ცდომილება $m=\pm 0{,}078$ მ
შედეგთა საშუალო ცდომილება $m_0=\pm 0{,}039$ მ
შედეგთა ალბათიერი ცდომილება $\rho=\pm 0{,}026$ მ

მაშასადამე, საბოლოო შედეგი იქნება 897,63 მ $\pm$ 0,039 მ.

მაგალითი II. პულკოვოს ასტრონომიულ ობსერვატორიაში რამდენიმე წლის განმავლობაში (XIX საუკუნის შუა ხანებში) ერთი და იმავე ფრიად ზუსტი ხელსაწყოთი მრავალჯერ გაზომილი იყო პოლარი ვარსკვლავის (Polaris) δ დახრილობა, ამნაირ განაზომთა რამდენიმე ასეულიდან გამოყვანილი საშუალო არითმეტიკული $\delta_0 = 88^\circ 28' 58'',44$ მივიღოთ პოლარი ვარსკვლავის დახრილობის ჭეშმარიტ მნიშვნელობად და მერე გამოვწეროთ მისგან $\Delta=\delta-\delta_0$ გადახრები მხოლოდ ერთი 1843 წლის 40 დაკვირვებისათვის; მიღებული Δ დავალაგოთ მათი რიცხობრივი მნიშვნელობის რიგზე, წამის მეასედი ნაწილის ანგარიშში მიღებით.

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} -41-39-36-34-32-24-24-17-14 \\ -14-13-11-19-7-6-5-5-4 \quad 0 \quad 0 \\ +61+41+35+33+28+25+20+20+18+18+15 \\ +14+13+10+9+7+5+4+4+2 \end{array} \right.$$

მიუხედავად იმისა, რომ აღებული იყო დაკვირვებათა მცირერიცხოვანი რიგი, შემთხვევით ცდომილებათა ყველა დამახასიათებელი თვისება მაინც გამოაშკარავებულია სავსებით დამაკმაყოფილებლად,— სახელდობრ:

1) დადებით ცდომილებათა რიცხვი (20) თითქმის უდრის უარყოფითთა რიცხვს (აგრეთვე 20, თუ მივათვლით ორს ნულის თანასწორ ცდომილებას).

2) ყველა ცდომილების ალგებრული ჯამის შეფარდება მათ საერთო რიცხვთან უდრის $\frac{+382-342}{40}$ $\frac{1''}{100}=0'',01$-ს, ე. ი. განსხვავდება ნულისაგან სულ უმნიშვნელო ოდენობით.

3) დაკვირვებათა საშუალო m ცდომილებისათვის გვექნება
$m^2=\frac{\Sigma\Delta^2}{n}=0'',0525$ ანუ $m=\pm 0''.23$.

4) ალბათიერი ცდომილებისათვის გვექნება $\rho=\frac{2}{3}m=\pm 0'',15$.

თეორიის მიხედვით უნდა იყოს 20 ცდომილება $\pm 0'',15$-ზე ნაკლები და 20 ცდომილება $\pm 0'',15$-ზე მეტი. თუ, როგორც ზემოთაა ნაჩვენები, მოცემულ რიგში შევარჩევთ ცდომილებებს, რომლებიც რიცხობრივი მნიშვნელობით იქნებიან უმცირესი, ჩვენ მივადგებით ცდომილებას $0'',14$, რომელიც ფრიად ახლოსაა გამოთვლილ ρ-ს მნიშვნელობასთან.

5) ესევე მაგალითი გვიჩვენებს, რომ უდიდესი მომხდარი ცდომილება $+0''$, 61 უნდა ჩათვლილ იქნას ნორმულ მოვლენად, ვინაიდან თეორიის ძალით დიდი ალბათობით მოსალოდნელი იყო, რომ 40 დაკვირვებაში გამოერეოდა თუნდაც ერთი ცდომილება, რომელიც მოქცეული იქნებოდა $0'',57$-სა $\left(2\frac{1}{2}m\right)$ და $0''$, 69-ის ($3m$) შორის; ამიტომ არ არსებობდა არავითარი საბუთი ამ ცდომილების ($\pm 0''$, 61) უგულებელყოფისათვის, როგორც ნაკლებად ვარგისისა, მხოლოდ იმ მოსაზრებით, რომ იგი სხვა ცდომილებებზე მეტად არის გადახრილი საშუალო არითმეტიკულიდან, მუდამ უნდა ვიქონიოთ მხედველობაში, რომ განაზომთა რიგში, რომელნიც შესრულებული იქნება თანაბარ პირობებში და ერთნაირი მუყაითობით, უდიდესი მომხდარი ცდომილება იმდენადვე ალბათიერია, როგორც სხვა ყოველი ცალკეულად აღებული ცდომილება. მხოლოდ აშკარა წინდაუხედაობა დაკვირვების ჩაწერის დროს ან კიდევ სხვა არახელსაყრელი გარემოებები შეიძლება ჩაითვალოს საკმაო საბუთად, რომ უგულებელვყოთ აღებული შედეგი ან კიდევ განვსაჯოთ იგი როგორც ნაკლებად სანდო.

მაგალითი III. ერთი კუთხის გაზომვის დროს, რომელიც შესრულებული იყო თანაბარ პირობებში და ერთნაირი მუყაითობით, მიღებულია 18 ურთიერთდამოუკიდებელი შედეგი. ეს შედეგები და

შესაბამის ცდომილებათა გამოთვლა მოცემულია ქვემოთ წარმოდგენილ ცხრილში.

83° 30′ 36,25″	−1″,38	1,9044
7,50	−2,63	6,9169
6,00	−1,13	1,2769
4,77	+0,10	0,0100
3,75	+1,12	1,2544
0,25	+4,62	21,3444
3,70	+1,17	1,3689
6,14	−1,27	1,6129
4,04	+0,83	0,6889
6,96	−2,09	4,3681
3,16	+1,71	2,9241
4,57	+0,30	0,0900
4,75	+0,12	0,0144
6,50	−1,63	2,6569
5,00	−0,13	0,0169
4,75	+0,12	0,0144
4,25	+0,62	0,3844
5,25	−0,38	0,1444
83° 30′ 34″,87	$\Sigma\delta = +0,07$	$\Sigma\delta^2 = 46,9713$

ცალკეული განაზომის საშუალო ცდომილება $m = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}} =$ $= \pm 1'',66$,

საშუალო არითმეტიკულის საშუალო ცდომილება $m_0 = \pm\frac{m}{\sqrt{n}} =$ $= \pm 0'',39$,

საბოლოო შედეგი იქნება 83° 30′ 34″,87 ±0″,39.

II მაგალითში ნათქვამი შეიძლება შემოწმებულ იქნეს III მაგალითშიაც და იმავე შედეგის მიღებით.

15. გაზომვათა სიზუსტის საზომი

ცალი გაზომვის საშუალო ცდომილება და საშუალო ცდომილება არითმეტიკული შუადისა გამოიყენება გაზომვათა სიზუსტის საზომის განსაზღვრისათვის. ცალკეული გაზომვის სიზუსტის საზომად ითვლება წილადი $\frac{1}{m}$, ხოლო არითმეტიკული შუა-

დის სიზუსტის საზომად $\frac{1}{m_0}$, სადაც, როგორც წინათ, m და m_0 არის ცალკეული განაზომისა და არითმეტიკული შუადის საშუალო ცდომილებანი.

აქედან გამომდინარე:

1) თუ ორი რომელიმე გაზომვის სიზუსტის საზომია $\frac{1}{m}$ და $\frac{1}{m'}$, მაშინ მათი ურთიერთშეფარდება მოგვცემს

$$\frac{1}{m} : \frac{1}{m'} = m' : m, \tag{18}$$

ე. ი. ორი გაზომვის სიზუსტის საზომი მათ საშუალო ცდომილებათა უკუპროპორციულია. ამის მიხედვით, ის გაზომვა ითვლება უფრო ზუსტად, რომლის საშუალო ცდომილება ნაკლებია, ხოლო ერთნაირი სიზუსტის მქონე გაზომვებად ითვლება ის გაზომვები, რომელთა საშუალო ცდომილებანი თანასწორია.

2) თუ $\frac{1}{m_0}$ არის არითმეტიკული შუადის სიზუსტის საზომი, ხოლო $\frac{1}{m}$—ცალკეული განაზომისა, მაშინ

$$\frac{1}{m_0} : \frac{1}{m} = m : m_0.$$

აქ მეორე ნაწილში შევიტანოთ m_0-ს ნაცვლად მისი (13) მნიშვნელობა $\frac{m}{\sqrt{n}}$, მივიღებთ:

$$\frac{1}{m_0} = \frac{1}{m}\sqrt{n}, \tag{19}$$

ე. ი. არითმეტიკული შუადის სიზუსტის საზომი პროპორციულია კვადრატული ფესვისა განაზომთა რიცხვიდან. მაშ.სადამე, განაზომთა რიცხვის ზრდასთან ერთად მატულობს საშუალო არითმეტიკულის სიზუსტეც, მაგრამ არა განაზომთა რიცხვის პროპორციულად, არამედ პროპორციულად კვადრატული ფესვისა ამ რიცხვიდან. როგორცა ვხედავთ, (19) ფორმულას (13) გამოხატულების მიმართ შებრუნებული სახე აქვს.

III

დანასკვთა სიზუსტე

16. დანასკვის საშუალო ცდომილება

როდესაც გაზომვით ნაპოვნ x სიდიდეს გავატარებთ გამოთვლათა მთელ რიგში, მაშინ $X=f(x)$ შედეგიც მეტნაკლებად იქნება მცდარი, რაც დამოკიდებულია ერთის მხრით, x სიდიდის საშუალო m ცდომილებაზე, ხოლო, მეორეს მხრით, წარმოებულ გამოთვლათა რიგზე, ე. ი. თვით $f(x)$ ფუნქციის სახეზე. მაგრამ რადგანაც x სიდიდის სხვადასხვა შემთხვევით Δ ცდომილებას X დანასკვში (გამონათვალში) ესატყვისება მთელი რიგი შემთხვევითი D ცდომილება, ამიტომ ამ უკანასკნელი რიგისათვისაც არსებობს თავისი საშუალო M ცდომილება, რომლის კვადრატი უდრის ყველა D კვადრატის საშუალო არითმეტიკულს. ამ საშუალო ცდომილებით (ან მისგან გამოყვანილი ალბათიერი ცდომილებით) ხასიათდება X დანასკვის (გამონათვალის) სიზუსტე.

უმარტივესი ფუნქცია იქნება $X=\alpha x$, რომელშიაც გაზომვით მიღებული x რაოდენობა, საშუალო m ცდომილების მქონი, მრავლდება რომელიმე მუდმივ α რიცხვზე. მისი დანასკვის შემთხვევითი და საშუალო ცდომილებანი იქნება:

$$D_1=\alpha\Delta_1$$
$$D_2=\alpha\Delta_2$$
$$D_3=\alpha\Delta_3$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$D_n=\alpha\Delta_n$$
$$\frac{\Sigma D^2}{n}=\alpha^2\cdot\frac{\Sigma D^2}{n}.$$

საიდანაც

$$M^2=\alpha^2 m^2.$$

მაშასადამე, X დანასკვის საშუალო ცდომილება იქნება

$$M=\alpha m \qquad (1)$$

მაგალითად, ქაღალდზე ფარგლის დახმარებით, 10 სანტიმეტრიანი რადიუსით მოხაზულია წრეხაზი, ე. ი. $m=0^c,01$ და

$$r=10^c\pm 0^c,01.$$

(1) ფორმულის მიხედვით, წრეხაზის $2\pi r$ სიგრძეში ცდომილება იქნება

$$2\pi X 0^c,01=\pm 0^c,06.$$

17. გაზომილ ოდენობათა წირული ფუნქციის საშუალო ცდომილება

A. ჯერ განვსაზღვროთ საშუალო M ცდომილება ფუნქციისა

$$X=x\pm x',$$

რომელშიაც x და x' ოდენობა მიღებულია ურთიერთდამოუკიდებელი დაკვირვებით, შესაბამისი საშუალო m და m' ცდომილებით.

როგორც უკვე ნათქვამი იყო, რომელიმე x სიდიდის საშუალო m ცდომილებაში უნდა ვიგულისხმოთ საშუალო კვადრატული ფრიად დიდი n რიცხვის შემთხვევითი

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3, \qquad \Delta_n$$

ცდომილებანი, რომლებიც ერთნაირი ალბათობით თან სდევს x-ის გაზომვებს, ე. ი.

$$m^2=\frac{1}{n}\left(\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2+\cdots+\Delta_n^2\right)=\frac{\Sigma\Delta^2}{n}.$$

ამნაირადვე უნდა გვქონდეს წარმოდგენილი ფრიად დიდი n' რიცხვი შემთხვევითი

$$\Delta_1',\ \Delta_2',\ \Delta_3', \qquad \Delta_{n'}'$$

ცდომილებანი, რომელნიც ესატყვისება x' სიდიდეს, ე. ი.

$$m'^2=\frac{1}{n'}\left(\Delta_1'^2+\Delta_2'^2+\Delta_3'^2+ \qquad + \Delta_{n'}'^2\right)=\frac{\Sigma\Delta'^2}{n'}.$$

ხოლო $x\pm x'$ ჯამსა და სხვაობაში თანაბარი ალბათობით მოსალოდნელია ყოველგვარი ჯუფთება პირველი რიგის Δ ცდომილებათა მეორე რიგის Δ' ცდომილებებთან, ე. ი. შემდეგი სახის D ცდომილებანი:

$$\begin{array}{llll}
\Delta_1\pm\Delta_1' & \Delta_2\pm\Delta_1' & \Delta_3\pm\Delta_1' & \Delta_n\pm\Delta_1' \\
\Delta_1\pm\Delta_2' & \Delta_2\pm\Delta_2' & \Delta_3\pm\Delta_2' & .\ \Delta_n\pm\Delta_2' \\
\Delta_1\pm\Delta_3' & \Delta_2\pm\Delta_3' & \Delta_3\pm\Delta_3' & \Delta_n\pm\Delta_3' \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\Delta_1\pm\Delta_{n'}' & \Delta_2\pm\Delta_{n'}' & \Delta_3\pm\Delta_{n'}' & .\ \Delta_n\pm\Delta_{n'}'
\end{array}$$

ამ ოდენობათა კვადრატების ჯამი, გაყოფილი მათ $N=nn'$ რიცხვზე, მოგვცემს:

$$M^2=\frac{\Sigma D^2}{N}=\frac{n'\Sigma\Delta^2\pm2\Sigma\Delta\cdot\Sigma\Delta'+\Sigma\Delta'^2}{nn'}=$$

$$=\frac{\Sigma\Delta^2}{n}\pm2\frac{\Sigma\Delta}{n}\cdot\frac{\Sigma\Delta'}{n'}+\frac{\Sigma\Delta'^2}{n'};$$

ხოლო რადგანაც, შემთხვევით ცდომილებათა ძირითადი თვისების საფუძვლით,

$$\frac{\Sigma\Delta}{n}=0 \quad \text{და} \quad \frac{\Sigma\Delta'}{n'}=0,$$

ამიტომ

$$M^2=m^2+m'^2$$

და

$$M=\sqrt{m^2+m'^2} \qquad (2)$$

მაგალითი I. გაზომილია ორი კუთხე:

$$\begin{array}{r} \alpha=56^\circ\ \ 47'\ \ 30''\pm8'' \\ \beta=63\ \ \ \ 11\ \ \ 20\ \ \pm6 \\ \hline \alpha+\beta=119^\circ\ 58'\ 50''\pm10''. \end{array}$$

აქ

$$M=\sqrt{8^2+6^2}=\pm10''.$$

მაგალითი II. გაზომილია ორი სწორი ნაკვეთი:

$$\begin{array}{r} a=139^m,2\pm0^m,3 \\ b=\ \ 76,4\ \ \ \pm0,4 \\ \hline a+b=215^m,6\ \pm0^m,5 \end{array}$$

აქ

$$M=\sqrt{(0,3)^2+(0,4)^2}=\pm0,^m5$$

B. ვთქვათ, ეხლა მოცემულია ალგებრული

$$X=x+x'+x''$$

ჯამი სამი ურთიერთდამოუკიდებელი x, x', x'' რაოდენობისა, რომელთა საშუალო ცდომილებანი შესაბამისად არის m, m', m''. ამ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია $(x+x')$ ჯამი განვიხილოთ როგორც ერთი სიდიდე, განმცდელი $\sqrt{m^2+m'^2}$ ცდომილებისა, და ამიტომ, ახლახან ზემოთ დამტკიცებულის საფუძვლით, პირდაპირ დავწეროთ:

$$M^2=m^2+m'^2+m''^2.$$

ცხადია, საზოგადოდ, რამდენი x, x', x'', x''', საკრებიც არ უნდა იყოს, მუდამ იქნება:

$$M=\sqrt{m^2+m'^2+m''^2+m'''^2+} \qquad (3)$$

კერძო შემთხვევაში, როდესაც $m=m'=m''=m'''$ მაშინ

$$M=m\sqrt{n} \qquad (4)$$

მაგალითად, თუ შეკრულ მრავალკუთხედში გაზომილი იყო ყველა მისი n კუთხე საშუალო m_β ცდომილებით, მაშინ კუთხეთა ჯამის საშუალო M_β ცდომილება იქნება:

$$M_\beta=m_\beta\sqrt{n}$$

მაგალითი III. ზუსტი ნიველობის საშუალებით მიღებულია სიმაღლეთა სხვაობანი:

1. ლენინგრადი (ოქტომბრის რკინიგზის სადგური) კრონშტადტი (ფუტშტოკის ნული)	$+10^m,86\pm0^m,11$
2. ბოლოგოე-ლენინგრადი . . .	$+168,64\pm0,19$
3. მოსკოვი (ოქტომბრის რკინიგზის სადგური)—ბოლოგოე . .	$-26,09\pm0,15$
	$+153^m,41\pm0^m,26$

ასეთი იქნება მოსკოვის სიმაღლე კრონშტადტის ფუტშტოკის მიმართ.

მაგალითი IV. 20 მეტრიანი ბაფთით, რომლით გაზომვა იძლევა $\pm0,7$ სანტიმეტრის ტოლ საშუალო ცდომილებას ბაფთის ყოველ დადებაზე; გაზომილია 1280 მეტრი მანძილი (64 ბაფთა). ამ შემთხვევაში მთელი სიგრძის საშუალო ცდომილება გამოვა

$$\pm0^c,7\sqrt{64}=\pm5^c,6.$$

დასასრულ, იმავე (1) და (3) ფორმულების გამოყენების თვალსაზრისით, ახლა ავიღოთ მთელ რიგ x, x', x'', x''' ოდენობათა წრფივი X ფუნქცია, რომლებიც მიღებულია ურთიერთთან დამოუკიდებლად წარმოებული გაზომვებიდან საშუალო m, m', m'', m''' ... ცდომილებებით, ე. ი. ფუნქცია:

$$X=\alpha x+\alpha' x'+\alpha'' x''+\alpha''' x'''+$$

მაშინ X დანასკვის საშუალო M ცდომილება დაისახება ამნაირად:

$$M=\sqrt{\alpha^2m^2+\alpha'^2m'^2+\alpha''^2m''^2+\alpha'''^2m'''^2+\cdots} \qquad (5)$$

მაგალითი V. თუ რომელიმე x სიდიდისათვის უშმუალო გაზომვებით მიღებულია მთელი რიგი ტოლზუსტი $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ მნიშვნელობანი, მაშინ მისთვის უალბათიერეს დანასკვად იქნება (9 §-ის (8)) არითმეტიკული შუადი

$$x=\frac{a_1+a_2+a_3+\ \cdots\ +a_n}{a}.$$

თუ გაზომვათა საშუალო ცდომილება არის m, მაშინ x დანასკვის საშუალო m_x ცდომილება გამოიანგარიშება (5) ფორმულის მიხედვით, ამნაირად:

$$m_x^2=\frac{nm^2}{n^2}=\frac{m^2}{n} \text{ ანუ } m_x=\frac{m}{\sqrt{n}} \qquad (6)$$

როგორცა ვხედავთ, გამოყვანილი ფორმულა წარმოადგენს 13§-ის (13) ფორმულის სრულ ანალოგიას.

მაგალითი VI. ვთქვათ, რომელიმე საკმაოდ დიდი S მანძილი გაზომილია ბაფთის საშუალებით, რომლის სიგრძე უდრის a-ს, და შედეგად მიღებულია $S=na$. ამ უკანასკნელის მცდარობა გამოწვეულია, ჯერ ერთი, იმით, რომ თვით ზომარი ბაფთა შეიცავს რომელიმე m_a ცდომილებას, და, მეორე, იმით, რომ ბაფთის ყოველი დადება სხვადასხვა შემთხვევითი ცდომილების გამო, განიცდის რომელიმე საშუალო m_b ცდომილებას. პირველი მიზეზის წყალობით S სიგრძეში დაგროვდება საშუალო $M_a=nm_a$ ცდომილება (ფორმ. (1)); მეორე მიზეზით $S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ ჯამში მოხდება საშუალო $M_b=m_b\sqrt{n}$ ცდომილება (ფორმ. (4)); ხოლო ორივე მიზეზის ზედმოქმედებით გაზომვის შედეგი განმცდელი იქნება საშუალო ცდომილებისა

$$M=\sqrt{M_a^2+M_b^2}=\sqrt{n^2m_a^2+nm_b^2},$$

ანუ

$$\frac{M}{S}=\frac{M}{na}=\sqrt{\left(\frac{m_a}{a}\right)^2+\left(\frac{m_b}{a}\right)^2\cdot\frac{1}{n}}.$$

მაშასადამე, როდესაც S სიგრძე გაიზომება რომელიმე a საზომის მრავალჯერადი მოზომვით, მაშინ შ ე ფ ა რ დ ე ბ ი თ ი $\frac{M}{S}$ ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა მით უფრო იქნება ნაკლები, რაც უფრო მეტია მოზომვათა n რიცხვი.

მაგალითი VII. ვთქვათ, x და y რაოდენობა განისაზღვრება ორი შემდეგი განტოლებით:

$$x+y=a \quad \text{და} \quad 2x+y=b,$$

რომლებშიაც a და b მონახულია გაზომვით, ერთი და იმავე საშუალო m ცდომილებით. მათი ერთობლივი გადაწყვეტა მოგვცემს:

$$x=b-a \quad \text{საშუალო ცდომილებით} \quad m_x=m\sqrt{2}$$

$$y=2a-b \qquad \text{,,} \qquad m_y=m\sqrt{5}.$$

მაგრამ თუ ამის შემდეგ საჭირო გახდება $r=y-x$ სხვაობის საშუალო m_r ცდომილების განსაზღვრა, მაშინ (3) ფორმულის უშუალო გამოყენებით მოგვეცემოდა

$$m_r^2=m_x^2+m_y^2=7m^2,$$

რაც სწორი არ იქნებოდა, ვინაიდან x და y დამოკიდებულია ერთსა და იმავე მცდარ a და b ოდენობაზე. ამიტომ m_r ცდომილების განსაზღვრისათვის ჯერ უნდა r ოდენობა გამოვსახოთ a და b-ს საშუალებით, ე. ი. გამოვიყვანოთ

$$r=y-x=3a-2b,$$

ხოლო უკვე მას შემდეგ (5) ფორმულის საფუძვლით, გამოვითვლით m_r-ს, რომელიც იქნება:

$$m_r^2=9m^2+4m^2=13m^2.$$

18. გაზომილ სიდიდეთა რაგინდარა ფუნქციის საშუალო ცდომილება

ეხლა განვსაზღვროთ რომელიმე X დანასკვის (გამონათვალის) საშუალო M ცდომილება, როდესაც იგი წარმოადგენს რამდენიმე x, x', x'', სიდიდის რაგინდარა უწყვეტ ფუნქციას, ხოლო თვით ეს სიდიდენი მიღებულია ურთიერთთან დამოუკიდებელი გაზომვებითა და საშუალო m, m', m'', ცდომილებებით, ე. ი. მოცემულია ფუნქცია:

$$X=f(x,\ x',\ x'',\ \cdots).$$

აქ ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ:

$$x=x_0+\Delta x, \quad x'=x_0'+\Delta x', \quad x''=x_0''+\Delta x'',$$

სადაც x_0, x_0', x_0'', წარმოადგენს x, x', x'', სიდიდეთა თუმცა ნებისმიერ, მაგრამ სრულებით განზღვრულ მიახლოებით ოდენობებს, ხოლო Δx, $\Delta x'$, $\Delta x''$, მათ ფრიად მცირე შესწორებებს, რომელთათვისაც სწორედ უნდა იყოს მიკუთვნებული როგორც გაზომვათა ყოველგვარი შემთხვევითი ცდომილებანი, ისე ზემოთ მოყვანილი საშუალო m, m', m'', $\cdots$ ცდომილებანიც.

დავშალოთ f ფუნქცია მცირედ Δx, $\Delta x'$, $\Delta x''$, ოდენობათა ხა-

რისხების მიხედვით და მასთან შევიზღუდოთ მათი პირველი ხარისხებით, გვექნება:

$$X=f(x_0,\ x_0',\ x_0''\cdots)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x+\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_0 \Delta x'+\left(\frac{\partial f}{\partial x''}\right)_0 \Delta x''+\cdots,$$

სადაც $f(x_0,\ x_0',\ x_0'',\ \cdots)$ და კოეფიციენტები $\Delta x,\ \Delta x',\ \Delta x'',\ \cdots$ -ის წინ წარმოადგენენ არჩეულ $x_0,\ x_0',\ x_0''\ \cdots$ მნიშვნელობათა შესაბამის სრულებით განსაზღვრულ ოდენობებს. ამნაირად, X-თვის მოცემულია $\Delta x,\ \Delta x',\ \Delta x'',\ \cdots$ ოდენობათა წრფივი ფუნქციის სახე და, მაშასადამე, (5) ფორმულის საფუძვლით, გვექნება:

$$M^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 m^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_0^2 m'^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x''}\right)_0^2 m''^2+\cdots \tag{7}$$

ხოლო თუ X-ის დამოკიდებულება $x,\ x',\ x''\ldots$ ოდენობებთან გამოსახულია არაცხადი ფუნქციით

$$f(X,\ x,\ x',\ x'',\ \cdots)=0,$$

მაშინ მისი დიფერენციალის აღება $X,\ x,\ x',\ x'',$ -ით მოგვცემს მცირე $\Delta X,\ \Delta x,\ \Delta x',\ \Delta x'',$ ნაზრდთათვის შემდეგ დიფერენციალურ გამოხატულებას:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_0 \Delta X+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x+\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_0 \Delta x'+\left(\frac{\partial f}{\partial x''}\right)_0 \Delta x''+\quad=0,$$

და შემდეგ უკვე, წინანდებურად, X ოდენობის საშუალო M ცდომილება იქნება:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_0^2 M^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 m^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_0^2 m'^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x''}\right)_0^2 m''^2+ \tag{8}$$

ვთქვათ, მოცემულია გამოხატულებანი

$$X=xx',\quad X'=\frac{x}{x'},$$

რომლებშიაც ურთიერთთან დამოუკიდებელი x და x' სიდიდე განმცდელია საშუალო m და m' ცდომილებისა, და უნდა განვსაზღვროთ მათი საშუალო M და M' ცდომილება. ამ მიზნით უფრო მარტივი იქნება ჯერ მივცეთ მათ ლოგარითმული სახე

$$\lg X=\lg x+\lg x',\quad \lg X'=\lg x-\lg x',$$

შემდეგ ავიღოთ მათი დიფერენციალი

$$\frac{\Delta X}{X}=\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta x'}{x'},\qquad \frac{\Delta X'}{X'}=\frac{\Delta x}{x}-\frac{\Delta x'}{x'},$$

და ბოლოს, (8) ფორმულის მიხედვით, მივიღებთ:

$$\left(\frac{M}{X}\right)^2=\left(\frac{M'}{X'}\right)^2=\left(\frac{m}{x}\right)^2+\left(\frac{m'}{x'}\right)^2.$$

მაგალითი I. ბრტყელ ABC სამკუთხედში უშუალოდ გაზომილია მისი სამი c, A, C ნაწილი და მიღებულია მათთვის შემდეგი რიცხობრივი მნიშვნელობანი შესაბამი საშუალო ცდომილებებით:

$x=c=236{,}84$ მეტრი $\qquad m=\pm 0{,}06$ მეტრი

$x'=A=42°38',0 \qquad m'=\pm 1',0$

$x''=C=103°24',5 \qquad m''=\pm 0',5$

გამოსათვლელია a გვერდი და მისი საშუალო ცდომილება. ამ შემთხვევაში $X=a$ ფუნქცია გამოისახება განტოლებით

$$X=a=\frac{c\cdot\sin A}{\sin C}.$$

ამ უკანასკნელში რიცხობრივ მონაცემთა შეტანა მოგვცემს:

$$a=164{,}91 \text{ მეტრს.}$$

ჩვენი ფუნქციისა c, A და C ცვლადებით წარმოებულნი შესაბამისად იქნება:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\sin A}{\sin c}=0{,}696 \text{ მ.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x'}=\frac{c\cdot\cos A}{\sin c}=a\cdot\operatorname{ctg} A=178{,}726 \text{ მ}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x''}=\frac{c\sin A}{\sin C}\cdot\cos c=-a\cdot\operatorname{ctg} c=-39{,}312 \text{ მ.}$$

გაზომილ ოდენობათა საშუალო ცდომილება იქნება:

$$m=\pm 0{,}06 \text{ მ}$$

$$m'=\pm 1' \sin 1'=\pm\frac{1}{3438}=\pm 0{,}00029 \text{ მ.}$$

$$m''=\pm 0',5 \sin 1'=\pm\frac{1}{2{,}3438}=0{,}00014 \text{ მ.}$$

წარმოებულ მოქმედებათა საფუძვლით გვექნება:

$$M=\sqrt{(0{,}696\times 0{,}06)^2+(178{,}726\times 0{,}00029)^2+(39{,}312\times 0{,}00014)^2}=$$

$$=\sqrt{0{,}001743}=\pm 0{,}067 \text{ მ.}$$

მაშასადამე, საბოლოო შედეგი იქნება:

$$a=164,91\pm 0,067 \text{ მ.}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: როდესაც x და x' ოდენობანი წარმოადგენს მარტივ რიცხვებს, მაშინ ზემოთ განხილული X ფუნქციის საშუალო ცდომილების განსაზღვრა შეიძლება გამარტივებულ იქნას. ვთქვათ, გვაქვს ფუნქცია

$$X=xx',$$

სადაც x განაზომის საშუალო ცდომილება არის m, ხოლო x'-სა m'. მაშინ X-ის საშუალო M ცდომილებისათვის დავწერთ:

$$X\pm M=(x\pm m)(x'\pm m')=xx'\pm x'm\pm xm'\pm mm'.$$

უგულებელვყოთ mm' როგორც მეორე რიგის მცირე ოდენობა და დაგვრჩება:

$$M=\pm x'm\pm xm'.$$

განტოლების მარჯვენა ნაწილში წევრების ნიშნები უცნობია და მათ კომბინაციას შეუძლია მოგვცეს M-თვის მეტად გაზვიადებული ან შემცირებული მნიშვნელობა; ამიტომ, უკვე წინათ ხსენებული მოსაზრების საფუძველზე, დავწერთ:

$$M=\pm\sqrt{x'^2m^2+x^2m'^2}.$$

მაგალითი II. გამოვთვალოთ ფართობი მართკუთხედისა, რომლის გვერდების სიგრძე მათი საშუალო ცდომილებითურთ არის:

$$a=53^m\pm 0^m,2,\qquad b=96^m\pm 0^m,4.$$

$$M=\pm\sqrt{(96)^2\cdot(0,2)^2+(53)^2\cdot(0,4)^2}=\pm 28,6 \text{ კვ. მეტრი}$$

მაშასადამე, მართკუთხედის ab ფართობი უდრის

$$5088\pm 28,6 \text{ კვ. მეტრს.}$$

მაგალითი III. ABC სამკუთხედში გაზომილია C გვერდი საშუალო m_c ცდომილებით და A და C კუთხე საშუალო m ცდომილებით გამოთვლილი იქნას a გვერდი და მისი საშუალო m_a ცდომილება.

a გვერდი გამოითვლება ფორმულით:

$$a=C\cdot\frac{\sin A}{\sin C}.$$

მისი გალოგარითმება მოგვცემს:

$$\lg a=\lg c+\lg\sin A-\lg\sin C.$$

ამ უკანასკნელი გამოხატულების დიფერენციალი იქნება:

$$\frac{da}{a}=\frac{dc}{c}+dA\operatorname{ctg}\Delta-dc\operatorname{ctg}c.$$

მაშასადამე, a გვერდის შეფარდებითი საშუალო ცდომილება იქნება:

$$\frac{m_a^2}{a}=\frac{m_c^2}{c}+m^2(\operatorname{ctg}^2A+\operatorname{ctg}^2C).$$

მაგალითი IV. სამკუთხედთა ჯაჭვში გაზომილია a ბაზისი და ორ-ორი კუთხე, ყოველ სამკუთხედში ერთნაირი საშუალო m ცდომილებით. გამოთვლილ იქნეს b_n გვერდი, რომელიც დაშორებულია ბაზისს n სამკუთხედით, და მისი საშუალო m_b ცდომილება. ბაზისი ვიგულვოთ როგორც უცდომილო.

აღვნიშნოთ $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ ასოებით კუთხეები, მდებარე იმ გვერდების პირისპირ, რომელნიც განსაზღვრულია უკანა სამკუთხედებიდან, ხოლო $B_1, B_2, B_3, \dots B_n$ ასოებით კუთხეები, რომელნიც მდებარეა განსასაზღვრელი გვერდების პირისპირ. გვექნება:

$$b_n=a\cdot\frac{\sin B_1\cdot\sin B_2\cdots\sin B_n}{\sin A_1\cdot\sin A_2\cdots\sin A_n}.$$

გალოგარითმების და მერე დიფერენციალის აღების შემდეგ, მივიღებთ:

$$\frac{db_n}{b_n}=dB_1\operatorname{ctg}B_1+dB_2\operatorname{ctg}B_2+\dots+dB_n\operatorname{ctg}B_n-$$
$$-dA_1\operatorname{ctg}A_1-dA_2\operatorname{ctg}A_2-\dots-dA_n\operatorname{ctg}A_n.$$

მაშასადამე, საძიებელი საშუალო m_b ცდომილება b_n გვერდისა იქნება:

$$\left(\frac{m_b}{b_n}\right)^2=m^2[\operatorname{ctg}^2A_1+\operatorname{ctg}^2B_1+\operatorname{ctg}^2A_2+\operatorname{ctg}^2B_2+\cdots+\operatorname{ctg}^2A_n+\operatorname{ctg}^2B_n].$$

თუ ჯაჭვი შედგენილი იქნებოდა მსგავსი სამკუთხედებიდან, მაშინ

$$\frac{m_b}{b_n}=m\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{\operatorname{ctg}^2A+\operatorname{ctg}^2B}.$$

აქედან დავასკვნით, რომ ტრიგონომეტრიული ბადის გვერდის საშუალო ცდომილება იზრდება კუთხეთა გაზომვის საშუალო ცდომილების პროპორციულად და პროპორციულად იმ სამკუთხედთა რიცხვის კვადრატული ფესვისა, რომლებიც მოქცეულია ბაზისსა და ბოლო გვერდს შორის.

მაგალითი V. გაზომილია l სიგრძის სწორი საშუალო m_l ცდომილებით და მისი α აზიმუტი საშუალო m_α ცდომილებით. გამოსაცნობია ხაზის საწყისი და ბოლო წერტილის კოორდინატების სხვაობათა საშუალო m_x და m_y ცდომილება.

საწყისი წერტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ x_1 და y_1 ასოებით, ხოლო ბოლოსი—x_2 და y_2 ასოებით, გვექნება:

$$x_2 - x_1 = l\cos\alpha$$

$$y_2 - y_1 = l\sin\alpha.$$

მაშასადამე, (7) ფორმულის მიხედვით, დავწერთ:

$$m_x^2 = m_e^2\cdot\cos^2\alpha + l^2\cdot\sin^2\alpha\cdot m_\alpha^2 = m_e^2\cdot\frac{(x_2-x_1)^3}{l^2} + (y_2-y_1)^2\cdot m_\alpha^2,$$

$$m_y^2 = m_c^2\sin^2\alpha + l^2\cdot\cos^2\alpha\cdot m_\alpha^2 = m_l^2\cdot\frac{(y_2-y_1)^2}{l^2} + (x_2-x_1)^2\cdot m_\alpha^2.$$

19. ანათვლის დამრგვალებისმიერი ცდომილება

ყოველგვარი გაზომვა თავდება ანათვლის აღებით. ყოველ ანათვალს თან სდევს ერთნაირი ცდომილება, გამოწვეული გაზომვის შედეგის დამრგვალებით. მაგალითად, გაზომილი ხაზის სიგრძეს ჩვენ ხშირად ვამრგვალებთ 1 სანტიმეტრამდე, კუთხეებს — მინუტებამდე, სეკუნდებამდე და ა. შ.

ანათვლის აღების დროს ჩვეულებრივ ადვილად განისაზღვრება კიდეგანი ცდომილება, რომელიც აუცილებელია ანათვლის დამრგვალებაში. იგი საერთოდ ეთანასწორება იმ რიგობის ერთეულის ნახევარს, რომელზედაც ხდება დამრგვალება. მაგალითად, თუ დამრგვალება მეტრის 0,1-ზეა, მაშინ დამრგვალების კიდეგანი ცდომილება უნდა იგულისხმებოდეს 5 სანტიმეტრამდე; კუთხის 1′-მდე დამრგვალებაში კიდეგანი ცდომილება დამრგვალებისა უნდა იყოს დაახლოებით ნახევარწუთი (0′,5).

საზოგადოდ, დამრგვალების ცდომილებას შეიძლება მიწერილი ჰქონდეს ისეთივე თვისებები, როგორიც აქვს შემთხვევით ცდომილებებს, ერთის გამონაკლისით,—სახელდობრ, კავშირი საშუალო ცდომილებასა და კიდეგან ცდომილებას შორის იქნება სხვანაირი, რაც შეპირობებულია იმ გარემოებით, რომ *დამრგვალების ყველა ცდომილება, აბსოლუტური მნიშვნელობით კიდეგან ცდომილებაზე ნაკლები, ერთნაირად მოსალოდნელია.*

ხსენებული კავშირის დასამყარებლად, დავუშვათ, რომ დამრგვალების ცდომილება იცვლის თავის მნიშვნელობას ყოველ e შუალედზე და ბოლოს აღწევს თავის კიდეგან α მნიშვნელობას, თუ e შუალედი n-ჯერ შედის α ოდენობაში, ე. ი., თუ

$$\alpha = ne,$$

მაშინ ჩვენ შეგვეძლება გამოვწეროთ მთელი რიგი ყოველგვარ მნიშვნელობათა, რომელნიც კი შეუძლია მიიღოს დამრგვალების ცდომილებამ, სახელდობრ:

$$-ne,\ -(n-1)e, \quad -3e,\ -2e,\ -e,\ 0+e,\ +2e,\ +3e, \cdots +ne$$

ამ რიგის წევრების რიცხვი იქნება $(2n+1)$.

რადგანაც მოყვანილი რიგის ყველა ცდომილება ერთნაირად მოსალოდნელია, ამიტომ, თუ გაზომვათა რიცხვი განუზღვრელად დიდია, მაშინ ყოველი მათგანი მეორდება, დაახლოებული ვარაუდით, თანატოლი რაოდენობით, და, მაშასადამე, დამრგვალების საშუალო ცდომილების გამოსაცნობად, საკმარისია გამოთვლილი იქნას ზემო რიგის ცდომილებათათვის საშუალო ცდომილება, გვექნება:

$$m = \pm \sqrt{\frac{(e^2+(2e)^2+(3e)^2+\cdots+(ne)^2)\times 2}{2n+1}} =$$

$$= \pm e \sqrt{\frac{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\cdot 2}{2n+1}}$$

როგორც ცნობილია,

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ამიტომ

$$m = \pm e \sqrt{\frac{n(n+1)}{3}}.$$

რადგანაც $e = \frac{\alpha}{n}$, ამიტომ

$$m = \pm \alpha \sqrt{\frac{n+1}{3n}},$$

ანუ

$$m = \pm \alpha \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3n}}.$$

თუ n რიცხვი ფრიად დიდია, მაშინ მარტივად გვექნება:

$$m = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{3}},$$

საიდანაც

$$a = \pm \sqrt{3} \times m = \pm 1{,}7m \qquad (\alpha)$$

აქედან დავასკვნით, რომ თუ დამრგვალებისმიერი ცდომილება შედარებით დანარჩენი წყაროებით წარმოშობილ ცდომილებებთან, მნიშვნელოვნად დიდია, მაშინ გაზომვის შედეგის ზღვრული Δ ცდომილება გაანგარიშებულ უნდა იქნეს როგორც სამკეც საშუალო ცდომილებაზე ნაკლები, ე. ი.

$$\Delta < 3m.$$

მეორეს მხრით, რადგანაც გაზომვაში წვრილი ცდომილებანი უფრო ხშირია, ვიდრე მსხვილი, ამიტომ (α) ფორმულის მიხედვით, უნდა დავასკვნათ, რომ ყოველ შემთხვევაში,

$$\Delta > 2m,$$

გარდა ისეთი შემთხვევისა, როდესაც დამრგვალებისმიერი ცდომილება თავისი სიდიდით ფრიად სჭარბობს სხვა ყოველგვარი სახის ცდომილებას, ე. ი. როდესაც დამრგვალებისმიერი ცდომილება, წარმოებული გაზომვის პირობებში, ტლანქია.

IV.

არატოლზუსტი გაზომვები, დანასკვთა წონა

20. დანასკვის წონა

როდესაც უმეშვეო გაზომვით მიღებულია x ოდენობის მრავალნაირი ტოლზუსტი $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ მნიშვნელობანი, რომლებიც არ შეიცავენ მუდმივ ცდომილებებს და ექვემდებარებიან მხოლოდ საშუალო m ცდომილებას, მაშინ განაზომთა n რიცხვის მატებით შეგვიძლია (თეორიის მიხედვით), x-ის უალბათიერესი

$$x=\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)$$

დანასკვის საშუალო $m_x=\frac{m}{\sqrt{n}}$ ცდომილება დავიყვანოთ ნებისმიერ მინიმუმამდე; ამისათვის, როდესაც ცნობილია m და m_x, საჭიროა მხოლოდ განაზომთა რიცხვი თანასწორი გავხადოთ

$$n=\frac{m^2}{m_x^2}\text{-ისა.}$$

ეს უკანასკნელი არის ცნობილი (17) ფორმულა, ჩვენ მიერ უკვე 14 §-ში გამოყვანილი.

წინაუკმოდ ყოველი x დანასკვი, რომელიც განსაზღვრული საშუალო m_x ცდომილების განმცდელია, ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც არითმეტიკული შუადი, გამოყვანილი ისეთ ტოლზუსტ დანასკვთა წარმოსახვითი რიცხვიდან, რომლებიც იქნებიან ერთისა და იმავე სანებური საშუალო μ ცდომილების განმცდელი.

ნათქვამის საფუძველზე ადვილად განისაზღვრება x ოდენობის უალბათიერესი მნიშვნელობა, მაშინ, როდესაც მოცემულია მისი რამდენიმე ურთიერთდამოუკიდებელი $x_1, x_2, x_3,$ დანასკვი, რომლებიც ექვემდებარებიან სხვადასხვა საშუალო $m_1, m_2, m_3, \cdots$ ცდომილებებს. ამ მიზნით ყველა მოყვანილი ცალკეული $x_1, x_2, x_3 \cdot\cdot$ დანასკვი უნდა წარმოვიდგინოთ როგორც ტოლზუსტ გაზომვათა

არითმეტიკული შუადი, რომელიც განიცდის რაიმე სიდიდის ე რ თ ს ა დ ა ი მ ა ვ ე ს ა შ უ ა ლ ო μ ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა ს; ამისათვის გამოვთვალოთ ამ გაზომვათა ისეთი p_1, p_2, p_3, რიცხვები, რომლებიც აკმაყოფილებდეს შემდეგ გამოხატულებებს:

$$\frac{\mu}{\sqrt{p_1}}=m_1, \quad \frac{\mu}{\sqrt{p_2}}=m_2, \quad \frac{\mu}{\sqrt{p_3}}=m_3$$

ე. ი. იყოს

$$p_1=\frac{\mu^2}{m_1^2}, \quad p_2=\frac{\mu^2}{m_2^2}; \quad p_3=\frac{\mu^2}{m_3^2}, \tag{1}$$

მაშინ x ოდენობისათვის გვექნება ერთი რაიმე წარმოსახვითი

$$P=p_1+p_2+p_3+ \qquad =\Sigma p$$

სიდიდეთა ტოლზუსტი რიცხვი, რომელთა საერთო ჯამი, ცხადია, ქვემო გამოხატულების თანასწორი იქნება:

$$p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+$$

ზემონათქვამის მიხედვით დავასკვნით, რომ ს ა ე რ თ ო ა რ ი თ მ ე ტ ი კ უ ლ ი x შ უ ა დ ი ს უალბათიერესი მნიშვნელობა და მისი საშუალო m_x ცდომილება გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+\cdots}{p_1+p_2+p_3}=\frac{\Sigma px}{\Sigma p} \\ m_x&=\frac{\mu}{\sqrt{P}}=\frac{\mu}{\sqrt{p_1+p_2+p_3+\cdots}} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

საერთო არითმეტიკული შუადი ხშირად იწოდება წ ო ნ ი თ შ უ ა დ ა დ. P, p_1, p_2, p_3, რიცხვები,—სხვადასხვა x, x_1, x_2, x_3, დანასკვის საშუალო ცდომილებათა კვადრატების უკუპროპორციული, — იწოდებიან ამ დანასკვთა წ ო ნ ე ბ ა დ. ხსენებული რიცხვები ყველა, ერთისა და იმავე სრულებით სანებური μ ოდენობის პროპორციულია; ამიტომ ისინი იძლევიან მხოლოდ შ ე ფ ა რ დ ე ბ ი თ წ ა რ მ ო დ გ ე ნ ა ს (ცნებას) x, x_1, x_2, x_3, · ოდენობათა სიზუსტის შესახებ, თუ არ იქნება შეპირობებული, რა საშუალო μ ცდომილებას ესატყვისება ის p, რომელიც მიღებულია წონათა ერთეულად. მოხერხებულია წონათა ერთეულად მიღება ისეთი დანასკვის წონისა, რომლის საშუალო ცდომილება თანასწორი იქნება ერთისა; ამ შემთხვევაში (1) ფორმულები მიიღებენ ფრიად მარტივ სახეს:

$$p_1=\frac{1}{m_1^2}, \quad p_2=\frac{1}{m_2^2}, \quad p_3=\frac{1}{m_3^2}, \tag{3}$$

ზოგადი სახე (1) ფორმულებისა არის

$$p_x=\frac{\mu^2}{m_x^2},$$

რომელშიაც μ წარმოადგენს ცალკეული ტოლზუსტი შედეგის საშუალო ცდომილებას. თუ ამ ფორმულაში მივიღებთ $p_x = 1$, მაშინ

$$\mu=m_x.$$

აქედან დავასკვნით, რომ μ არის საშუალო ცდომილება ცალკეული შედეგისა, რომლის წონა $p=1$.

(2) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ საერთო არითმეტიკული შუადის წონა

$$P=p_1+p_2+p_3+\qquad=\Sigma p, \tag{4}$$

ე. ი. საერთო არითმეტიკული შუადის წონა უდრის მისი შემადგენელი დანასკვის წონების ჯამს.

(1) გამოხატულების ზოგადი სახის $\left[p_x=\frac{\mu^2}{m_x^2}\right]$ შედარება 14 §-ის (17) ფორმულასთან $\left[n=\frac{m^2}{m_0^2}\right]$, რომლებშიაც მრიცხველები წარმოადგენენ ცალკეული განაზომების საშუალო ცდომილებებს, ხოლო მნიშვნელები—დანასკვთა საშუალო ცდომილებებს, გვიჩვენებენ, რომ

$$p_x=n, \tag{5}$$

ე. ი. რომელიმე დანასკვის წონად (გაზომვათა და დანასკვთა საშუალო ცდომილებებთან დამოუკიდებლად) შეიძლება მიღებული იქნას შესრულებულ გაზომვათა რიცხვი, ანუ, სხვანაირად, რომელიმე დანასკვის წონა შესრულებულ გაზომვათა რიცხვის პროპორციულია.

თავისთავად გასაგებია, რომ მსჯელობაში დანასკვთა წონის შესახებ, შეიძლება, საშუალო ცდომილების ნაცვლად უცილობლად ნაგულისხმევი იყოს ალბათიერი ცდომილებაც.

(2) ფორმულით გამოთვლის დროს, როგორც უბრალო არითმეტიკული შუადის გამოთვლისას, იყენებენ შესწორებათა მეთოდს, რაც ფრიად ამარტივებს მუშაობას.

აღვნიშნოთ გასაზომი სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა x_0 ასოთი, ხოლო შესწორებანი შესატყვისად $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots \eta$, ასოებით. დავწეროთ:

$$x_1=x_0+\eta_1$$
$$x_2=x_0+\eta_2$$
$$x_3=x_0+\eta_3$$
$$\cdot \quad \cdot$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობანი (2) ფორმულაში; მივიღებთ:

$$x=x_0+\frac{p_1\eta_1+p_2\eta_2+p_3\eta_3+\cdots}{p_1+p_2+p_3+\cdots}=x_0+\frac{\Sigma p\eta}{\Sigma p} \qquad (2)'$$

ვთქვათ, გაზომვებით მიღებული გვქონდა 4 დანასკვი:

$x_1=7,416$ სმ — 8 განაზომიდან
$x_2=7,345$ სმ — 6
$x_3=7,430$ სმ — 4
$x_4=7,210$ სმ — 2

(2)' ფორმულის მიხედვით გამოვიყვანთ:

$$x=7,20+\frac{8\times0,216+6\times0,145\times4\times0,230+2\times0,010}{20}=$$

$$=7,20+\frac{3,538}{20}=7,38 \text{ სმ.}$$

21. წონითი ტაბულა

ვთქვათ, რომელიმე x ოდენობის განსაზღვრისათვის გაზომვით მიღებულია $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ ურთიერთდამოუკიდებელი რიგი დანასკვთა მათი საშუალო $m_1, m_2, m_3, \cdots m_n$ ცდომილებებით, რომლებიც (დანასკვები) თვით წარმოადგენენ არითმეტიკულ საშუალოებს ტოლზუსტ განაზომთაგან, შესაბამისად რიცხვით $p_1, p_2, p_3, \cdots p_n$, ხოლო ყველა ეს უკანასკნელი განაზომი განიცდის ერთსა და იმავე საშუალო μ ცდომილებას (იხ. § 20).

მაშინ, (1)-ის მიხედვით,

$$m_1=\frac{\mu}{\sqrt{p_1}}, \quad m_2=\frac{\mu}{\sqrt{p_2}}, \quad m_3=\frac{\mu}{\sqrt{p_3}}, \cdots m_n=\frac{\mu}{\sqrt{p_n}},$$

და, მაშასადამე,

$$m_1\sqrt{p_1}=m_2\sqrt{p_2}=m_3\sqrt{p_3}= \qquad =m_n\sqrt{p_n}=\mu, \qquad (6)$$

ე. ი. ყოველი არატოლზუსტი დანასკვის საშუალო ცდომილების ნამრავლი მისი წონის კვადრატულ ფესვზე წარმოადგენს მუდმივ ოდენობას. ამ შემთხვევაში μ რიცხვი უნდა განიხილებოდეს როგორც

ერთეული (ცალკეული) განაზომის საშუალო ცდომილება, ანუ საშუალო ცდომილება განაზომისა, რომლის წონა ერთეულია.

μ ოდენობას შეიძლება მივაკუთვნოთ ნებისმიერი მნიშვნელობა, ანუ, სხვანაირად, სიზუსტის ერთეულის მნიშვნელობა ნებისმიერია. მივიღოთ $\mu=1$ და შევადგინოთ ქვემოთ მოყვანილი ცხრილი, რომლის დახმარებით, მოცემული საშუალო ცდომილების არგუმენტის მიხედვით, შეიძლება განსაზღვრული იქნას განაზომის წონა $p=\frac{1}{\mu^2}$.

μ	p	μ	p	μ	p	μ	p	μ	p
0,0	∞	2,0	0,250	4,0	0,062	6,0	0,028	8,0	0,016
0,1	100,000	2,1	0,227	4,1	0,059	6,1	0,027	8,1	0,015
0,2	25,000	2,2	0,207	4,2	0,057	6,2	0,026	8,2	0,015
0,3	11,111	2,3	0,189	4,3	0,054	6,3	0,025	8,3	0,015
0,4	6,250	2,4	0,173	4,4	0,052	6,4	0,024	8,4	0,014
0,5	4,000	2,5	0,160	4,5	0,049	6,5	0,024	8,5	0,014
0,6	2,778	2,6	0,148	4,6	0,047	6,6	0,023	8,6	0,014
0,7	2,041	2,7	0,137	4,7	0,045	6,7	0,022	8,7	0,013
0,8	1,562	2,8	0,128	4,8	0,043	6,8	0,022	8,8	0,013
0,9	1,235	2,9	0,119	4,9	0,042	6,9	0,021	8,9	0,013
1,0	1,000	3,0	0,111	5,0	0,040	7,0	0,020	9,0	0,012
1,1	0,826	3,1	0,104	5,1	0,038	7,1	0,020	9,1	0,012
1,2	0,694	3,2	0,098	5,2	0,037	7,2	0,019	9,2	0,012
1,3	0,592	3,3	0,092	5,3	0,036	7,3	0,019	9,3	0,012
1,4	0,510	3,4	0,087	5,4	0,034	7,4	0,018	9,4	0,011
1,5	0,444	3,5	0,082	5,5	0,033	7,5	0,018	9,5	0,011
1,6	0,391	3,6	0,077	5,6	0,032	7,6	0,017	9,6	0,011
1,7	0,346	3,7	0,073	5,7	0,031	7,7	0,017	9,7	0,011
1,8	0,309	3,8	0,069	5,8	0,030	7,8	0,016	9,8	0,011
1,9	0,277	3,9	0,066	5,9	0,029	7,9	0,016	9,9	0,010

22. ერთეული წონის მქონე (წონა=1) განაზომის საშუალო ცდომილება და საერთო არითმეტიკული შუადის საშუალო ცდომილება

ვთქვათ, მოცემულია n-ჯერი გაზომვის არატოლზუსტი x_1, x_2, x_3, ... x_n დანასკვები, მათი p_1, p_2, p_3, p_n წონებით და ნამდვილი Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_n ცდომილებებით.

თუ მოყვანილი დანასკვების ნამდვილი ცდომილება არის $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_n$, მაშინ, ცხადია, რომ ქვემო ნამრავლების

$$\sqrt{p_1}\cdot x_1,\ \sqrt{p_2}\cdot x_2,\ \sqrt{p_3}\cdot x_3,\ \ldots\ \sqrt{p_n}\cdot x_n \qquad (7)$$

ნამდვილი ცდომილებანი იქნება:

$$\sqrt{p_1}\cdot \Delta_1,\ \sqrt{p_2}\cdot \Delta_2,\ \sqrt{p_3}\cdot \Delta_3,\ \ldots\ \sqrt{p_n}\cdot \Delta_n \qquad (8)$$

(7) რიგის ცალკეულ მნიშვნელობათა წონის გამოსათვლელად მივმართოთ 16 §-ს, სადაც გვქონდა ფუნქცია

$X=\alpha x$ მისი საშუალო ცდომილებით $M=\alpha m_x$.

მივიღებთ $\alpha=\sqrt{p}$, გვექნება:

$$X=\sqrt{p}\cdot x \quad \text{და} \quad M=\sqrt{p}\cdot m_x,$$

სადაც m_x წარმოადგენს ცალკეული დანასკვის საშუალო ცდომილებას. ამასთანავე (2)-ის მიხედვით

$$m_x=\frac{\mu}{\sqrt{p}},$$

რომელშიაც μ არის საშუალო ცდომილება ერთეული განაზომისა, რომლის წონა ერთეულია ($p=1$), ამიტომ

$$M=\mu.$$

აქედან დავასკვნით, რომ (7) რიგს ყველა წევრს აქვს ერთი და იგივე საშუალო μ ცდომილება, ე. ი. ყველა ისინი ტოლზუსტია და ყოველ მათგანს აქვს ერთეულის თანასწორი წონა. მაშასადამე, (8) რიგი შეიძლება განხილულ იქნას როგორც ტოლზუსტ დანასკვთა ნამდვილი ცდომილებანი, ამიტომ მისთვის გამოიყენება ცნობილი ფორმულა (10 § (9))

$$\mu=\sqrt{\frac{\Sigma\,(\sqrt{p}\Delta)^2}{n}}=\sqrt{\frac{\Sigma\,(p\Delta^2)}{n}} \qquad (\mu)$$

განსახილველ საკითხს შეიძლება მივუდგეთ სხვაგვარადაც. აღვნიშნოთ $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ დანასკვთა საშუალო ცდომილებანი შესაბამისად $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ ასოებით, მაშინ, ცნობილი წესის მიხედვით, დავწერთ:

$$m_1=\frac{\mu}{\sqrt{p_1}},$$

$$m_2 = \frac{\mu}{\sqrt{p_2}},$$

$$m_n = \frac{\mu}{\sqrt{p_n}},$$

სადაც μ არის განაზომის საშუალო ცდომილება, რომლის წონა $p=1$.

ზემოთ მოცემულ ტოლობათა მიხედვით გვექნება:

$$\mu = m_1\sqrt{p_1} = m_2\sqrt{p_2} = m_3\sqrt{p_3} = \qquad = m_n\sqrt{p_n};$$

აქედან

$$\mu^2 = p_1 m_1^2 = p_2 m_2^2 = p_3 m_3^2 = \cdots = p_n m_n^2;$$

ანუ

$$\mu^2 = \frac{p_1 m_1^2 + p_2 m_2^2 + p_3 m_3^2 + \cdots + p_n m_n^2}{n},$$

და ბოლოს

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{p_1 m_1^2 + p_2 m_2^2 + p_3 m_3^2 + \cdots + p_n m_n^2}{n}} \tag{9}$$

როდესაც გაზომვათა რიცხვი დიდია, მაშინ საფეხურის ქვეშ საშუალო ცდომილებანი შეიძლება საკმარი სიზუსტით შეცვლილი იქნენ ნამდვილი Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_n ცდომილებებით; მაშასადამე, გვექნება

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\,(p\Delta^2)}{n}} \tag{μ}$$

μ ოდენობას მოკლედ უწოდებენ **ერთეული წონის საშუალო ცდომილებას**. განვიხილოთ უბრალო მაგალითი; მოცემულია:

x განაზომები:	7,416 სმ,	7,345 სმ,	7,430 სმ,	7,210 სმ;
Δ ცდომილებებით:	−0,16 მმ,	+0,55 მმ,	−0,30 მმ;	+1,90მმ;
p წონებით:	8	6	4	2.

გამოთვლა მოგვცემს:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{8\times0{,}16^2 + 6\times0{,}55^2 + 4\times0{,}30^2 + 2\times1{,}90}{4}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{6{,}00}{4}} = \pm1{,}22 \text{ მმ},$$

ხოლო 20 §-ის (2) ფორმულის მიხედვით, ცნობილი წესით,

$$x=7,20+\frac{8\times0,216+6\times0,145+4\times0,230+2\times0,010}{20}=$$

$$=7,20+\frac{3,538}{20}=7,3769 \text{ სმ.}$$

ზემოხსენებული 20 §-ის (2) ფორმულის მრიცხველი და მნიშვნელი გადავამრავლოთ ნებისმიერ k რიცხვზე, რომელიც შეიძლება იყოს როგორც მთელი, ისე წილადი; მივიღებთ:

$$x=\frac{x_1p_1k+x_2p_2k+x_3p_3k+\cdots+x_np_nk}{p_1k+p_2k+p_3k+\qquad p_nk}.$$

მივიღოთ აღნიშვნა:

$$p_1k=p_1', \quad p_2k=p_2', \quad p_3k=p_3', \qquad p_nk=p_n';$$

გვექნება:

$$x=\frac{x_1p_1'+x_2p_2'+x_3p_3'+\cdots+x_np_n'}{p_1'+p_2'+p_3'+\qquad p_n'}.$$

ამნაირად, წონებს არსებითად აქვთ შეფარდებითი მნიშვნელობა, რაც ნაჩვენები იყო მე-20 პარაგრაფში. მაშასადამე, როგორც წინათაც გვქონდა გამორკვეული, ყველა განაზომის წონები შეგვიძლია ერთდროულად გავამრავლოთ ან შევამციროთ ნებისმიერად და ამით წონითი შუადის მნიშვნელობა არ შეიცვლება; მაგრამ ცხადია, რომ შესაბამისად შეიცვლება ერთეული წონის საშუალო ცდომილება.

ნამდვილი Δ ცდომილება უმეტეს ნაწილად უცნობია, მაგრამ შეიძლება გამოთვლილი იყოს დანასკვთა δ გადახრები საერთო არითმეტიკული შუადიდან.

გამოვიყვანოთ ფორმულა, რომლითაც შეიძლება შეცვლილ იქნას ნამდვილ ცდომილებათა მიხედვით მონახული შესატყვისი ერთეული წონის საშუალო ცდომილება ისეთი გამოხატულებით, რომელიც შეიცავს δ გადახრებს.

ვთქვათ, x ოდენობა წარმოადგენს $a_1, a_2, a_3, \quad a_n$ დანასკვთა საშუალო არითმეტიკულს, რომელთა წონებია $p_1, p_2, p_3, \quad p_n$, ხოლო გადახრები შუადიდან $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \quad \delta_n$.

ამგვარად, გვაქვს:

$$\delta_1=x-a_1, \; \delta_2=x-a_2, \; \delta_3=x-a_3, \qquad \delta_n=x-a_n, \tag{δ}$$

მათი ჯამი წონებითურთ:

$$\Sigma(p\delta)=p_1(x-a_1)+p_2(x-a_2)+p_3(x-a_3)+\cdots+p_n(x-a_n)=$$
$$=x\Sigma p-\Sigma(pa)$$

როდესაც დანასკვთა რიცხვი უსასრულოდ დიდია, მაშინ $\Sigma(p\delta)=0$ და, მაშასადამე,

$$x\Sigma p=\Sigma(pa) \tag{10}$$

ადვილად დამტკიცდება, რომ მუდამ

$$\Sigma(p\delta^2)<\Sigma(p\gamma^2),$$

სადაც γ წარმოადგენს a_1, a_2, a_3 ... a_n დანასკვთა გადახრებს ნების მიერად აღებული y ოდენობიდან, ე. ი.:

$$\gamma_1=y-a_1,\ \gamma_2=y-a_2,\ \gamma=y-a_3,\ \cdots\ \gamma_n=y-a_n.$$

შევადგინოთ ჯამები:

$$\Sigma(p\delta^2)=p_1(x-a_1)^2+p_2(x-a_2)^2+p_3(x-a_3)^2+\cdots+p_n(x-a_n)^2=$$
$$=x^2\Sigma p-2x\Sigma(pa)+\Sigma(pa^2),$$

$$\Sigma(p\gamma^2)=p_1(y-a_1)^2+p_2(y-a_2)^2+p_3(y-a_3)^2+\cdots+p_n(y-a_n)^2=$$
$$=y^2\Sigma p-2y\Sigma(pa)+\Sigma(pa^2).$$

ქვემო სტრიქონს გამოვაკლოთ ზემო სტრიქონი

$$\Sigma(p\gamma^2)-\Sigma(p\delta^2)=(y^2-x^2)\Sigma p-2(y-x)\Sigma(pa).$$

მიღებულ გამოხატულებაში შევიტანოთ $\Sigma(pa)$-ს ნაცვლად მისი თანაწორი $x\Sigma p$ (10)-დან; მივიღებთ:

$$\Sigma(p\gamma^2)-\Sigma(p\delta^2)=(y^2-x^2)\Sigma p-2(y-x)\,x\Sigma p.$$

ფრჩხილების გახსნისა და მსგავს წევრთა გაერთიანების შემდეგ გვექნება:

$$\Sigma(p\gamma^2)-\Sigma(p\delta^2)=(y-x)^2\Sigma p.$$

ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილი დადებითია, — მაშასადამე, დამტკიცებულია, რომ

$$\Sigma(p\delta^2)<\Sigma(p\gamma^2),$$

და, რადგანაც y-ის მნიშვნელობა სავსებით ნებისმიერია, ამიტომ ცხადია, რომ

$$\Sigma(p\delta^2)=\text{minimum},$$

მაშასადამე, აგრეთვე

$$\Sigma(p\delta^2)<\Sigma(p\Delta^2),$$

სადაც Δ წარმოადგენს დანასკვთა უცნობ ნამდვილ ცდომილებებს, და შემდეგ

$$\sqrt{\frac{\Sigma(p\delta^2)}{n}}<\sqrt{\frac{\Sigma(p\Delta^2)}{n}} \tag{11}$$

ახლა ამ უტოლობის მარცხენა ნაწილი გავადიდოთ იმდენად, რომ უტოლობა გარდაიქმნას ტოლობად, რა მიზნითაც მის მნიშვნელს გამოვაკლოთ რაიმე i ოდენობა; მივიღებთ:

$$\sqrt{\frac{\Sigma(p\delta^2)}{n-i}}=\sqrt{\frac{\Sigma(p\Delta^2)}{n}} \tag{12}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი გამოსახავს ერთეულწონიანი დაკვირვების საშუალო ცდომილებას. თუ გვექნებოდა მხოლოდ ერთი დაკვირვება (ე. ი. თუ $n-1$), მაშინ ამ ერთადერთი შედეგის შესახებ ჩვენ არავითარი დასკვნის გამოტანა არ შეგვეძლება, სხვაგვარად, შედეგის ცდომილება რჩება განუსაზღვრელი. ამ შემთხვევაში გამოდის, რომ $\delta=0$,—თითქოს დაკვირვება სრულებით შეუცდომელი იყოს, რაც შეუძლებელია. მარცხენა ნაწილმა, რომელსაც ექნება სახე

$$\sqrt{\frac{0}{1-i}},$$

მიიღოს განუსაზღვრელი სახე $\frac{0}{0}$, საჭიროა, რომ i უდრიდეს 1-ს ($i=1$). მაშასადამე, იმისათვის, რომ (12)-ის მარცხენა ნაწილი გარდაიქმნას განსაზღვრულ ოდენობად, საჭიროა, რომ მისი მნიშვნელი უდრიდეს ($n-1$)-ს და ამასთანავე იყოს $n>1$.

ამგვარად, ერთეულწონიანი საშუალო ცდომილება შეიძლება გამოსახული იყოს ორმაგი ფორმით:

$$\sqrt{\frac{\Sigma(p\Delta^2)}{n}}=\sqrt{\frac{\Sigma(p\delta^2)}{n-1}}=\mu \;\ldots.. \tag{13}$$

საერთო არითმეტიკული შუადის საშუალო m_x ცდომილება ადვილად გამოიყვანება, თუ გავიხსენებთ, რომ ამ შუადის წონა უდრის $\Sigma p=P$-ს (ფორმ. (2)), მაშასადამე,

$$m_x=\frac{\mu}{\sqrt{\Sigma p}}=\sqrt{\frac{\Sigma(p\delta^2)}{\Sigma p\cdot(n-1)}} \tag{14}$$

საერთო არითმეტიკული შუადის საშუალო ცდომილების გამოყვანას შეგვიძლია მივუდგეთ სხვანაირად.

აღვნიშნოთ საძიებელი ოდენობის ნამდვილი მნიშვნელობა X ასოთი, ხოლო საერთო არითმეტიკული შუადის საშუალო ცდომილება m_x-ით, ე. ი.

$$X-x=m_x.$$

δ გადახრათა და ნამდვილ Δ ცდომილებათა შორის არსებობს მარტივი თანაფარდობა; მართლაცა და, რადგანაც, მაგალითად,

$$\delta_1 = X - a_1, \quad \Delta_1 = X - a_1, \quad m_x = X - x,$$

ამიტომ

$$\Delta_1 = \delta_1 + m_x.$$

ამის მიხედვით გვექნება

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_1 + m_x \\ \Delta_2 &= \delta_2 + m_x \\ \Delta_3 &= \delta_3 + m_x \\ &\cdots \\ \Delta_n &= \delta_n + m_x \end{aligned}$$

მიღებული ტოლობანი ავიყვანოთ კვადრატულ ხარისხში, მერე გადავამრავლოთ შესაბამ წონებზე, შევაჯამოთ და, დასასრულ, ყველა ჯამი გავყოთ n-ზე; მივიღებთ:

$$\frac{\Sigma(p\Delta^2)}{n} = \frac{\Sigma(p\delta^2)}{n} + 2m_x \cdot \frac{\Sigma(p\delta)}{n} + \frac{\Sigma p}{n} \cdot m_x^2.$$

როგორც ზემოთ დავინახეთ, როდესაც დანასკვთა რიცხვი უსასრულოდ დიდია, მაშინ $\Sigma(p\delta) = 0$; ამიტომ უკანასკნელად მიღებული გამოხატულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\Sigma(p\Delta^2)}{n} = \frac{\Sigma(p\delta^2)}{n} + \frac{\Sigma p}{n} \cdot m_x^2.$$

(μ) ფორმულის მიხედვით, ც ა ლ კ ე უ ლ ი დ ა ნ ა ს კ ვ ი ს საშუალო ცდომილება

$$\mu^2 = \frac{\Sigma(p\Delta^2)}{n},$$

ამიტომ დავწერთ

$$\mu^2 = \frac{\Sigma(p\delta^2)}{n} + \frac{\Sigma p}{n} \cdot m_x^2.$$

(2) ფორმულის მიხედვით,

$$m_x^2 = \frac{\mu^2}{\Sigma p};$$

მაშასადამე,

$$\mu^2 = \frac{\Sigma(p\delta^2)}{n} + \frac{\mu^2}{n},$$

საიდანაც

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\Sigma (p\delta^2)}{n-1}} \tag{13}$$

ასე გამოიხატება ცალკეულ დანასკვთა საშუალო ცდომილება საერთო არითმეტიკული შუადიდან გადახრათა მიხედვით.

საერთო არითმეტიკული შუადის საშუალო ცდომილება იქნება

$$m_x = \pm \sqrt{\frac{\Sigma (p\delta^2)}{\Sigma p \cdot (n-1)}} = \frac{\mu}{\sqrt{\Sigma p}} \tag{14}$$

23. გაზომილ ოდენობათა ფუნქციის წონის განსაზღვრა

ვთქვათ, საძიებელი X ოდენობა არის უშუალო გაზომვით მიღებულ x_1, x_1, x_3, x_n შედეგთა ფუნქცია, ხოლო ამ უკანასკნელთა წონები შესაბამისად იყო p_1, p_2, p_3, $\cdots p_n$. განსასაზღვრელია X-ის P წონა.

განვიხილოთ X ფუნქციის ოთხი სახე.

a) გაზომვით მიღებულია x ოდენობა მისი p წონით. განსაზღვრულ იქნას $X = \alpha x$ ფუნქციის წონა.

x და X ოდენობის საშუალო ცდომილებანი აღვნიშნოთ m_x და M ასოებით. 16 §-ის (1) ფორმულის მიხედვით $M = \alpha m_x$. ვთქვათ, საშუალო μ ცდომილება ესატყვისებოდეს შედეგს წონით 1. რადგანაც წონები და საშუალო ცდომილებანი ურთიერთ უკუპროპორციულია, ამიტომ დავწეროთ შემდეგ ორ ტოლობას:

$$m_x^2 = \frac{\mu^2}{p}, \qquad M^2 = \frac{\mu^2}{P}.$$

შევიტანოთ აქ M^2-ის ნაცვლად მისი მნიშვნელობა $\alpha^2 m_x^2$; მცირე გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$\alpha^2 \cdot \frac{\mu^2}{p} = \frac{\mu^2}{P},$$

საიდანაც

$$\frac{1}{P} = \frac{\alpha^2}{p},$$

ანუ საბოლოოდ

$$P = \frac{p}{\alpha^2}. \tag{15}$$

b) განვიხილოთ ფუნქცია $X = x_1 + x_2$.

ვთქვათ, x_1 და x_2 შედეგის წონებია p_1 და p_2, ხოლო საშუალო ცდომილებანი m_1 და m_2. განსაზღვრული იქნას X ფუნქციის P წონა და საშუალო M ცდომილება.

17 §-ის (2) ფორმულის მიხედვით $M^2 = m_1^2 + m_2^2$. როგორც ზემოთ განხილულ შემთხვევაში, გვექნება:

$$m_1^2 = \frac{\mu^2}{p_1}, \quad m_2^2 = \frac{\mu^2}{p_2}, \quad M^2 = \frac{\mu^2}{P}.$$

ამ მნიშვნელობათა იმავე 17 §-ის (2) ფორმულაში შეტანისა და მარტივი გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}. \tag{16}$$

c) გვაქვს გაზომილ $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ შედეგთა, რომელთა წონებია შესაბამისად $p_1, p_2, p_3, \dots p_n$, წრფივი ფუნქცია

$$X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

მისი წონა განისაზღვრება b) შემთხვევის მიხედვით; როგორც შედეგი გვექნება:

$$\frac{1}{P} = \frac{\alpha_1^2}{p_1} + \frac{\alpha_2^2}{p_2} + \frac{\alpha_3^2}{p_3} + \cdots + \frac{\alpha_n^2}{P_n} \tag{17}$$

d) გვაქვს გაზომილ $x_1, x_2\ x_3, \dots x_n$ შედეგთა რომელიმე ფუნქცია

$$X = f(x_1, x_2, x_3. \dots x_n)$$

და გამოსაცნობია მისი P წონა.

დამოკიდებულება მათ საშუალო ცდომილებათა შორის გამოიხატება ცნობილი 18 §-ის (7) ფორმულით:

$$M^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 m_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_0 m_3^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 m_n^2.$$

აქაც

$$m_1^2 = \frac{\mu^2}{p_1}, \quad m_2^2 = \frac{\mu^2}{p_2}, \quad m_3^2 = \frac{\mu^2}{p_3}, \qquad m_n^2 = \frac{\mu^2}{p_n} \quad \text{და} \quad M^2 = \frac{\mu^2}{P},$$

ამიტომ

$$\frac{1}{P} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2}{p_1} + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2}{p_2} + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_0^2}{p_3} + \cdots + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2}{p_n} \tag{18}$$

მაგალითი I. ერთი რომელიმე ადგილის Y სიგანედისათვის, სხვადასხვა დამკვირვებლის მიერ, სხვადასხვა ხელსაწყოს გამოყენებით, მონახულია შემდეგი ოდენობანი:

$$Y_1 = 59°\ 46'\ 21'',71 \text{ ალბათიერი ცდომილებით } \rho_1 = \pm 0'',12$$
$$Y_2 = \quad 38 \quad " \quad " \quad \rho_2 = \pm 0,08$$
$$Y_3 = \quad 46 \quad " \quad " \quad \rho_3 = \pm 0,05$$

განსაზღვრული უნდა იყოს Y-ს მნიშვნელობა და მისი ალბათიერი ცდომილება.

წონათა ერთეულად ჯერ მივიღოთ იმ დანასკვთა წონა, რომლის ალბათიერი ცდომილება $\rho_0 = \pm 0'',10$; მაშინ დაკვირვებულ Y_1, Y_2 და Y_3 მნიშვნელობათა წონა იქნება:

$$p = \left(\frac{0,10}{0,12}\right)^2 = 0,7,\ p_2 = \left(\frac{0,10}{0,08}\right)^2 = 1,6, \quad P_3 = \left(\frac{0,10}{0,05}\right)^2 = 4.$$

გამოთვლის გასამარტივებლად მივიღოთ $59°\ 46'\ 21'',50 = Y_0$; მაშინ, 20 §-ის (1) და (2) ფორმულის მიხედვით, გვექნება:

$$Y = Y_0 + \frac{0,7 \times 0'',21 - 1,6 \times 0''.12 - 4,0 \times 0,04}{0,7 + 1,6 + 4,0} = Y_0 - 0'',03 =$$
$$= 59°46'\ 21'',47,$$

$$p_Y = 0,7 + 1,6 + 4,0 = 6,3,\ \rho_Y = \pm \frac{\rho_0}{\sqrt{p_Y}} = \pm 0'',04.$$

ახლა წონათა ერთეულად მივიღოთ იმ სიგანედის წონა, რომლის ალბათიერი ცდომილება უდრის ერთს; მაშინ დაკვირვებული Y_1, Y_2 და Y_3 სიგანედის წონა იქნება:

$$p_1 = \left(\frac{1}{0,12}\right)^2 = 69,\ p_2 = \left(\frac{1}{0,08}\right)^2 = 156, \quad p_3 = \left(\frac{1}{0,05}\right)^2 = 400.$$

ზემოთ ნაჩვენები გამოთვლის შესრულების შემდეგ, სიგანედისა და მისი ალბათიერი ცდომილებისათვის მივიღებთ წინანდელ მნიშვნელობებს.

მაგალითი II. ერთი რომელიმე სიგრძის განსაზღვრელად წარმოებული სამი რიგი გაზომვით მიღებული იყო ქვემო რიცხვები:

642,28 მეტრი	642,22 მეტრი	642,30 მეტრი
,25 "	,26 "	,25 "
,32 "	$x_2 = 642,24$ მეტრი	,21 "
,27 "	$p_2 = n_2 = 2$	,28 "
$x_1 = 642,28$ მეტრი		,32 "
$p_1 = n_1 = 4$		$x_3 = 642,27$ მეტრი
		$p_3 = n_3 = 5$

ვთქვათ, აქ $642,20 = x_0$, მაშინ x-ის საბოლოო მნიშვნელობა იქნება:

$$x = x_0 + \frac{0,08 \times 4 + 0,04 \times 1 + 0,07 \times 5}{4+2+5} = x_0 + \frac{0,75}{11} =$$

$$= x_0 + 0,068 = 642,268 \text{ მეტრი}$$

წონით $p = 11$.

მაგალითი III. კუთხე გაზომილი იყო ოთხჯერ და მიღებულია შემდეგი საშუალო მნიშვნელობანი ილეთების რიცხვის აღნიშვნით:

1.	55° 48′ 23″	3	ილეთი
2.	28	5	„
3.	27	1	„
4.	31	2	„

მიახლოებით მნიშვნელობად მივიღოთ 55° 48′ 30″ და სხვაობა დანასკვთა და მიახლოებით მნიშვნელობას შორის აღვნიშნოთ η ასოთი. გამოთვლა მოყვანილია ქვემო წარმოდგენილ სქემაში.

გაზომვის შედეგი	მიახლოებითი მნიშვნელობა	μ	p	p^2	δ	δ^2	$p\delta^2$
55° 48′ 23″	55° 52′ 40″	−7″	3	−21″	+4″,1	16″,81	50″,43
28		−2	5	−10	−0,9	0,81	4,05
27		−3	1	−3	+0,1	0,01	0,01
31		+1	2	+2	−3,9	15,21	30.42
55 48 27,1			11	−32	$\Sigma p\delta = 0$		84,01

წონითი შუადი არის: $55°\,48'\,30'' - \frac{32''}{11} = 55°\,48'\,27'',1$, წონით 11. შესატყვისი ერთეული წონის საშუალო ცდომილება იქნება:

$$\mu = \sqrt{\frac{84,91}{4-1}} = \sqrt{28,30} = \pm 5'',3.$$

საბოლოო შედეგის საშუალო ცდომილება:

$$\pm \frac{5'',3}{\sqrt{11}} = \pm 1'',6.$$

მაგალითი IV. მოსკოვის სამიჯნო ინსტიტუტის ობსერვატორიის სიგანედი განსაზღვრული იყო 1892 წელს პასაჟ-ინსტრუმენტით 13 ვარსკვლავს დაკვირვებით. მიღებული შედეგები მათი წონებით მოთავსებულია ქვემო ცხრილში. განსასაზღვრელია სიგანედის უალბათიერესი მნიშვნელობა და მისი საშუალო ცდომილება.

ვარსკვ. №№	სიგანედი	წონა p	δ	$p\delta$	δ^2	$p\delta^2$
1	55° 45′ 38″, 33	0,36	−0,15	−0,0540	0,0225	0,0081
2	38 63	0,36	−0,45	−0,1620	0,2025	0,0729
3	38,38	0,26	−0,20	−0,0520	0,0400	0,0104
4	39.07	0,28	−0,89	−0,2492	0,7921	0,2218
5	37,72	0,26	+0.46	+0.1196	0,2116	0,0550
6	39,96	0,21	−1.78	−0.3738	3,1684	0,6654
7	38,03	0,26	+0,15	+0,0390	0,0225	0,0059
8	38,42	0.33	−0.24	−0,0792	0,0576	0,0190
9	38,36	0,31	−0.18	−0,0558	0,0324	0.0100
10	37,57	0.40	+0,61	+0,2440	0,3721	0,1488
11	36,93	0.44	+1,25	+0,5500	1,5625	0,6875
12	38,72	0.33	−0,54	−0,1782	0,2916	0,0962
13	37,51	0.35	+0,67	+0,2345	0,4489	0,1571
წონითი	55 45 38,18	4,15		−1,2042		2,1581
შუადი				+1,1871		
				−0,0171		

ერთეული წონის შესატყვისი საშუალო ცდომილება

$$\mu=\sqrt{\frac{2,1581}{13-1}}=\pm 0,''42.$$

საბოლოო შედეგის საშუალო ცდომილება:

$$m_Y=\pm\frac{0,42}{\sqrt{4,15}}=\pm 0'',21.$$

ობსერვატორიის სიგანედი იქნება

$$Y=55^\circ\ 45'\ 38'',18\pm 0'',21.$$

მაგალითი V. მოსკოვის უნივერსიტეტის ობსერვატორიის სიგანედი განსაზღვრული იყო წარსული XIX საუკუნის შუა ხანებში 9 ვარსკვლავის დაკვირვებით. ყოველმა ცალკეულმა ვარსკვლავმა მოიცვა ობსერვატორიის სიგანედი თავისი საშუალო ცდომილებით.

წონათა განსაზღვრისათვის, რაც საჭიროა საბოლოო შედეგის გამოსათვლელად, მივიღოთ ერთეულ წონად იმ სიგანედის წონა, რომლის საშუალო ცდომილება ედრებოდა 1″-ს;

მაშინ ყველა ცხრა დანასკვის წონა გამოითვლება ფორმულით $\frac{1}{\mu^2}$. წონების საშუალებით გამოვითვლით სიგანედის წონით შუადსაც.

ქვემოდ მოყვანილია გამოთვლის სქემა.

ვარსკვლავი	სიგანედი Y	μ	p
β Draconis	55° 45′ 20″,29	±0,248	16,26
γ Draconis	19,39	0,270	13,72
ν_1 Draconis	20,61	0,199	25,25
ν_2 Draconis	20,27	0,230	18,90
51 Draconis	19,81	0,188	29,29
x Cygni	19,61	0,398	6,31
γ Urs. major	19,22	0,208	23,11
z Urs. major. pr	19,08	0,179	31,21
z Urs. major. sg.	19,71	0,275	15,14
წონითი შუადი	55° 45′ 19″,763		178,19

წონითი შუადი სიგანედისა გამოდის

$$Y=55°\ 45'\ 19'',763 \quad \text{წონით} \quad 178,19.$$

მაშასადამე, საბოლოო შედეგის საშუალო ცდომილება იქნება:

$$m_Y=\frac{\pm 1''}{\sqrt{178,19}}=\pm 0'',075.$$

მაგალითი VI. ABC სამკუთხედში გაზომილია სამივე კუთხე:

A კუთხე—4 ილეთით, B—3 ილეთით, C—6 ილეთით.

რა წონა ექნება სამკუთხედის კუთხეთა ჯამს, თუ ერთეულ წონად მიღებული იქნება წონა იმ კუთხისა, რომელიც გაზომილი იქნება ერთი ილეთით.

საძიებელი წონა აღვნიშნოთ p ასოთი; გვექნება:

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3+4+2}{12}=\frac{9}{12}.$$

მაშასადამე,

$$p=\frac{12}{9}=1,33.$$

მაგალითი VII. სამკუთხედთა ჯაჭვი შედგება n სამკუთხედისაგან რომლების კუთხეთა ჯამის შეუკვრელობა შესაბამისად არის Δ_1, Δ_2, Δ_3, $\ldots$ Δ_n, ხოლო წონა $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$. მოსანახია ჯაჭვის ცალკეული კუთხის საშუალო ცდომილება, შესატყვისი ერთეული წონისა.

პასუხი: $$\mu=\sqrt{\frac{\Sigma\,(p\Delta^2)}{n}} \qquad (19)$$

მაგალითი VIII. 10 პოლიგონში გაზომილია ყველა კუთხე ერთი და იმავე სიზუსტით და მიღებულია კუთხეთა ჯამის 10 შეუკვრელობა, მოთავსებული ქვემო ტაბულაში. გამოსაცნობია ცალკეული გაზომილი კუთხის საშუალო ცდომილება პოლიგონებში.

აღვნიშნოთ პოლიგონების ცალკეული კუთხის საშუალო ცდომილება m ასოთი; მაშინ ცალკეული პოლიგონის კუთხეთა ჯამის საშუალო ცდომილება იქნება $m\sqrt{n}$, სადაც n არის კუთხეების რიცხვი პოლიგონში, ხოლო წონა,—თუ ერთეულ წონად მივიღებთ საშუალო m ცდომილების შესატყვის წონას,—$\frac{1}{n}$. პოლიგონების კუთხეთა ჯამის შეუკვრელობა აღვნიშნოთ შესაბამისად Δ_1, Δ_2, Δ_3 ... Δ_n-თი.

ცალკეული კუთხის საშუალო m ცდომილება მაგალითის მიხედვით განისაზღვრება VII მაგალითის მიხედვით ფორმულით

$$m=\sqrt{\frac{\Sigma\,(p\Delta^2)}{n}}\,, \qquad (20)$$

სადაც Δ წარმოადგენს ცალკეული პოლიგონის კუთხეთა ჯამის შეუკვრელობას.

ქვემო ტაბულაში მოყვანილია გამოთვლის სქემა.

პოლიგ. №№	კუთხეთა რიცხვი n	შეუკვრ. Δ	წონა p	Δ^2	$p\Delta^2$
1	10	48′	$\frac{1}{10}$	2304	230,4
2	18	53	$\frac{1}{18}$	2809	156,1
3	9	15	$\frac{1}{9}$	225	25,0
4	15	89	$\frac{1}{15}$	7921	528,4
5	8	52	$\frac{1}{8}$	2704	338,0
6	7	9	$\frac{1}{7}$	81	11,7
7	9	114	$\frac{1}{9}$	12996	1444,0
8	6	39	$\frac{1}{6}$	1521	253,5
9	11	18	$\frac{1}{11}$	324	29,5
10	22	171	$\frac{1}{22}$	29241	1329,1
					4345,7

(20) ფორმულის მიხედვით, პოლიგონების ცალკეული კუთხის საძიებელი საშუალო m ცდომილება იქნება

$$m=\sqrt{\frac{4345,7}{10}}=\pm 2,1''.$$

მაგალითი IX. *A* წერტილის სიმაღლე განსაზღვრულია ხუთი სხვადასხვა სიზუსტის მქონე ნიველირსავალის მეშვეობით. საძიებელია *A* წერტილის ნიშნულის უალბათიერესი მნიშვნელობა და მისი სიზუსტე.

გაზომვათა შედეგი და მათი დამუშავება მოყვანილია ქვემოთ წარმოდგენილ ტაბულაში. მიახლოებით მნიშვნელობად მივიღოთ $12,350 \cdot \eta = 12,350 - H$.

სავალის №	წერტილის ნიშნული H	საშუალო ცდომილება	წონა $p=\frac{100}{m^2}$	η	$p\eta$	δ	$p\delta$	$p\delta^2$
1	$12^m,356$	$\pm 2^{mm},1$	23,0	6	138,0	+0,6	+13,8	8,3
2	361	3,4	8,7	11	95,7	−4,4	−38,3	168,5
3	357	1,2	69,0	7	483,0	−0,4	−27,6	11,0
4	355	4,3	5,4	5	27,0	+1,6	+8,6	13,8
5	352	3,2	9,8	2	19,6	+4,6	+45,1	207,5
	$12,356_6$	115,9	115,9				2,6	409,1

(11) ფორმულის მიხედვით, წონის ზოგადი სახე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ასე:

$$p=\frac{k}{m^2}\cdot$$

k-ს მნიშვნელობას შეარჩევენ ისეთი ვარაუდით, რომ წონები გამოისახებოდეს უპირატესობრივ ათეულებში და ერთეულებში. განსახილველ მაგალითში უფრო ხელსაყრელი იქნება *k*-თვის მივიღოთ 100 ნიშნულების, წონითი შუადი ედრება (მაგალითი 1):

$$H_0=12,350+\frac{763,3}{115,9}=12,356_6.$$

შემდგომი გაშოთვლა მოგვცემს (ფორმ. (20)):

$$m=\pm\sqrt{\frac{409,1}{5-1}}=\pm\sqrt{102,3}=\pm 10,1 \text{ მმ}.$$

$$M = \pm \sqrt{\frac{102,3}{115,9}} = \pm \sqrt{0,882} = \pm 0,94 \text{ მმ.}$$

m-ის მნიშვნელობა შეგვიძლია გამოვიყვანოთ სხვანაირადაც. ზემოთ მოტანილ ფორმულაში ვთქვათ, $p=1$ და ამასთანავე მივიღოთ სათვალავში, რომ იქ m გამოსახავს ერთეულიანი წონის საშუალო ცდომილებას; მაშინ გვექნება:

$$1 = \frac{k}{m},$$

საიდანაც

$$m = \pm \sqrt{k};$$

ხოლო, რადგანაც ჩვენ მაგალითში მივიღეთ $k=100$, ამიტომ

$$m = \pm \sqrt{100} = \pm 10 \text{ მმ.}$$

როგორც ვხედავთ, მეორე ხერხით მიღებული შედეგი ფრიად მიახლოებულია ზემოთ მიღებულ რიცხვთან.

V

ორკეცი განაზომები

24. ერთნაირი სიზუსტის ორკეცი განაზომები

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ისეთი შემთხვევები, როდესაც ერთი და იმავე ხელსაწყოთი ერთი და იმავე მეთოდით იზომება სხვადასხვა ოდენობა და ამ დროს ყოველი მათგანი იზომება ორჯერ იმ მიზნით, რომ, ჯერ ერთი, დარწმუნებული ვიყოთ იმაში, რომ განაზომი თავისუფალია ტლანქი შეცდომისაგან, და მეორე,—რათა საშუალება ვიქონიოთ განაზომის სიზუსტის შეფასებისათვის.

ვთქვათ, მაგალითად, გაზომილი იყო n ოდენობა და მიღებული იყო *ტოლზუსტ* განაზომთა შემდეგი ორი რიგი:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\ a_n,$$
$$a_1',\ a_2',\ a'_3,\ \cdots\ a_n'.$$

შევადგინოთ განაზომთა სხვაობები:

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1 - a_1' \\ d_2 &= a_2 - a_2' \\ d_3 &= a_3 - a_3' \\ &\cdots \\ d_n &= a_n - a_n'. \end{aligned}$$

მიღებული სხვაობები საშუალებას იძლევიან წარმოდგენა ვიქონიოთ წარმოებული გაზომვის სიზუსტეზე. მართლაცა და, იდეალურ პირობებში ყოველი ეს სხვაობა *უნდა უდრიდეს ნულს*; მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია ყველა d_1, d_2, d_3, $\cdots$ d_n ოდენობა განვიხილოთ, როგორც სხვაობათა გადახრა მათი *ნამდვილი* მნიშვნელობიდან, რომელიც ნულია (ე. ი. როგორც ნამდვილი ცდომილებანი) და მათ მიხედვით განვსაზღვროთ *ცალკეული სხვაობის* საშუალო ცდომილება ცნობილი ფორმულის დახმარებით (10 § (9)).

$$m_d = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} \tag{1}$$

მეორეს მხრით, რადგანაც ნავარაუდებია, რომ განაზომთა ორივე რიგი ერთნაირი სიზუსტის მქონეა, ამიტომ ცნობილი ფორმულის მიხედვით (17 § (4)) დავწერთ:

$$m_d = m_a \sqrt{2},$$

სადაც m_a გამოსახავს ორივე რიგის ცალკეული განაზომის საშუალო ცდომილებას. მაშასადამე,

$$m_a = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{2n}} \qquad (2)$$

მიღებული ფორმულა სამართლიანია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ გაზომვათა პირველი და მეორე რიგის შედეგები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან მხოლოდ შემთხვევითი ცდომილებებით; ხოლო თუ საფიქრებელია, რომ ხსენებული შედეგები შეიცავენ აგრეთვე სისტემატური ხასიათის სხვაობასაც, მაშინ საჭიროა ყოველი ცალკეული სხვაობიდან ჯერ გამოყოფილი იქნას სისტემატური ცდომილება.

გაზომვათა დიდი რიგის შემთხვევაში სისტემატური სხვაობის არსებობა მჟღავნდება იმ მოვლენაში, რომ სხვაობებში სჭარბობს ერთ-ერთი ნიშანი, დადებითი ან უარყოფითი, და ამასთან Σd დაშორებულია 0-ს.

თუ ვიგულვებთ, რომ სისტემატური გავლენა ყოველი წყვილი განაზომის სხვაობაზე დაახლოებით ერთნაირია, მაშინ, წყვილად განაზომთა საკმაოდ დიდი რიგის შემთხვევაში შეგვიძლია მივიღოთ, რომ $\sum_1^n d$ ჯამში შემთხვევითი ცდომილებანი ურთიერთკომპენსირებულია, ხოლო სისტემატური—შეჯამებული; სხვაგვარად $\sum_1^n d$ ჯამი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც სისტემატურ ცდომილებათა ჯამი. მაშასადამე,

$$\frac{\Sigma d}{n} = q$$

წარმოადგენს სისტემატურ ცდომილებათა არითმეტიკულ შუადს. შევადგინოთ θ განხრები:

$$\begin{aligned} q - d_1 &= \theta_1 \\ q - d_2 &= \theta_2 \\ q - d_3 &= \theta_3 \\ &\cdot \\ q - d_n &= \theta_n. \end{aligned}$$

მაშასადამე, წყვილი განაზომის სხვაობის საშუალო ცდომილება იქნება:

$$m_d = \sqrt{\frac{\Sigma \theta^2}{n-1}}, \qquad (3)$$

ხოლო ყოველი ცალკეული განაზომის (ორივე რიგში) საშუალო ცდომილება ედრება:

$$m_a = \sqrt{\frac{\Sigma \theta^2}{2(n-1)}}. \qquad (4)$$

მაგალითი I. შესრულებულია მიკროსკოპ-მიკრომეტრის ძაფების 10-ჯერ წყვილ-წყვილი დაყენება წრედის კვესურებზე. განსასაზღვრელია ერთი დაყენების სიზუსტე.

ქვემოთ მოყვანილია გამოთვლის სქემა.

წყვილის №	1-ლი დაყენება	მე-2 დაყენება	d	d^2
1	28″,3	27″,2	+1″,1	1,21
2	51,0	52,2	—1,2	1,44
3	35,5	36,0	—0,5	0,25
4	17,3	17,1	+0,2	0,04
5	24,8	25,7	—0,9	0,81
6	20,5	20,1	+0,4	0,16
7	3,4	4,1	—0,7	0,49
8	41,0	40,1	+0,9	0,81
9	38,7	38,2	+0,5	0,25
10	20,1	20,6	—0,5	0,25
			—0,7	5,71

$$q = \frac{0'',7}{10} = -0'',07$$

სხვაობათა (d) ნიშნები და q-ს სიმცირე გვიჩვენებს, რომ მიკროსკოპ-მიკრომეტრის ძაფების წრედის კვესურებზე დაყენების დროს არ მელავნდება სისტემატურ ცდომილებათა შესამჩნევი ზეგავლენა. ამიტომ ცალკეული დაყენების საშუალო ცდომილება იქნება:

$$m_a = \pm\sqrt{\frac{5,71}{20}} = \pm 0'',54.$$

მაგალითი II. შესრულებულია ხაზის სიგრძის ათი წყვილადი გაზომვა. განსასაზღვრელია სისტემატური და შემთხვევითი ხასიათის ზეგავლენა გაზომვის შედეგზე.

ქვემოთ მოყვანილია გამოთვლის სქემა

წყვილის №	გაზომვა წინ (a)	გაზომვა უკან (a')	d	θ	θ^2
1	376^m,350	376^m,356	—6	—4,5	20,25
2	,350	,368	—18	+7,5	56,25
3	,355	,362	—7	—3,5	12,25
4	,335	,352	—17	+6,5	42,25
5	,348	,360	—12	+1,5	2,25
6	,370	,380	10	—0,5	0,25
7	,360	,370	—10	—0,5	0,25
8	,350	,360	—10	—0,5	0,25
9	,370	,375	—5	—5,5	30,25
10	,360	,370	—10	—0,5	0,25
			—105	0,0	164,50

ყველა d სხვაობა უარყოფითია, რაც იმის აღმნიშვნელია, რომ გაზომვაში სისტემატური ცდომილებებია:

$$q = -\frac{105 \text{ მმ}}{10} = -10{,}5 \text{ მმ},$$

$$m_a = \pm\sqrt{\frac{164{,}50}{18}} = \pm\sqrt{9{,}14} = \pm 3{,}0 \text{ მმ}.$$

მაგალითი III. წრედ-ალიდადის მიკროსკოპ-მიკრომეტრი ისე უნდა იყოს გამართული, რომ, როდესაც წრედის დანაყოფი 5'-ია, ხოლო დოლის დანაყოფი 1″, მაშინ, ძაფების წრედის უმცროსი კვესურიდან უფროს კვესურზე გადაყვანის დროს, მიკრომეტრის დოლმა უნდა გაიაროს სწორედ $2^1/_2$ ბრუნი და სეკუნდების ანათვალი დოლზე ორივე კვესურისათვის იყოს ერთი და იგივე, ე. ი. ორი ანათვლის სხვაობა უნდა უდრიდეს ნულს.

ქვემოთ წარმოდგენილ ტაბულაში მოყვანილია წრედის უფროს და უმცროს კვესურზე აღებულ ანათვალთა 36 სხვაობა წრედის ყოველ 10°-ზე და ყველა გამოთვლა.

d სხვაობის ნიშნების დალაგება ცხადჰყოფს, რომ სხვაობებში ადგილი აქვს მცირე სისტემატურ ცდომილებას.

$$q = -\frac{6{,}00}{30} = -0'',17.$$

წრეღის კვესანი	ანათვალთა სხვაობა d	θ	θ^2	წრეღის კვესანი	ანათვალთა სხვაობა d	θ	θ^2
0°	+0",60	−0,77	0,593	180	−0",20	0,03	0,001
10	−0,35	+0,18	0,032	190	0,00	−0,17	0,029
20	+0,50	−0,67	0,449	200	0,00	−0,17	0,029
30	−0,25	+0,08	0,006	210	−0,80	+0,63	0,397
40	−1,10	+0,93	0,865	220	+0,25	−0,42	0,176
50	−0,40	+0,23	0,053	230	+0,15	−0,32	0,102
60	−0,55	+0,38	0,144	240	+0,35	−0,52	0,270
70	−0,70	+0,53	0,281	250	−1,35	+1,18	1,392
80	−0,35	+0,18	0,032	260	−0,50	+0,33	0,109
90	−0,20	+0,03	0,001	270	+0,55	−0,72	0,518
100	+0,65	−0,82	0,672	280	+0,45	−0,62	0,384
110	+0,10	−0,27	0,073	290	−0,40	+0,23	0,053
120	−0,15	−0,02	0,000	300	−0,05	−0,12	0,014
130	−0,50	+0,33	0,109	310	−0,30	+0,13	0,017
140	+0,15	−0,32	0,102	320	−0,85	+0,68	0,462
150	+1,05	−1,22	1,488	330	−1,20	+1,03	1,061
160	0,00	−0,17	0,029	340	−0,55	+0,38	0,144
170	−0,15	−0,02	0,000	350	0,00	−0,27	0,073
					−6,00	−0,12	10,160

მიკრომეტრის ძაფების ერთი დაყენების საშუალო ცდომილება იქნება:

$$m_a = \pm\sqrt{\frac{10\cdot 16}{2\,(36-1)}} = \pm 0'',38.$$

განსახილველ შემთხვევაში $q = -0,17$ წარმოადგენს მიკროსკოპის run-ს.

მაგალითი IV. ტაშკენტის ასტრონომიული ობსერვატორიის გეოგრაფიული სიგანედი განსაზღვრული იყო 14 ვარსკვლავის დამზერით, რომლის დროსაც ყოველი ვარსკვლავი დამზერილი იყო ორჯერ ხელსაწყოს ორი მდგომარეობით.

განსახილველი ორკეცი დანამზერები განირჩევიან ერთმანეთისაგან მხოლოდ შემთხვევითი ცდომილებების ზეგავლენით. განსასაზღვრელია ყოველი ცალკეული დანამზერის საშუალო ცდომილება.

ქვემოთ მოცემულია გამოთვლის სქემა.

ტაშკენტის ობსერვატორიის სიგანედის ცალკეული განსაზღვრულების საშუალო ცდომილება იქნება:

$$m = \sqrt{\frac{18,5928}{2\times 14}} = \sqrt{0,6640} = \pm 0'',81.$$

№№	ვარსკვლ. სახელწოდება	სიგანედი G	d	d^2
1	9 Camelop	41° 19′ 33″,10 32,84	+0″,26	0,0676
2	44 H. Cephei	32,96 33,96	-1,00	1,0000
3	α Urs. minor	28,95 31,17	2.22	4.9284
4	4 H. Draconis	30,08 30,50	—0,42	0,1764
5	ϰ Draconis	28,81 28,70	+0,11	0,0121
6	μ Draconis	31,16 28,32	+2,84	8,0655
7	θ Bootis	31,38 30,78	+0,60	0,3000
8	β Coronae	32,15 32,40	-0,25	0,0625
9	α Bootis	34,89 33,45	+1,44	2,0736
10	ε Virginis	33,34 33,55	-0,21	0,0441
11	δ Virginis	32,39 33,11	—0,72	0,5184
12	ϰ Virginis	31,51 32,10	—0,59	0,3481
13	89 Virginis	31,35 31,23	+0,12	0,0144
14	ν Sagittarii	27,80 28,84	-0,96	0,9216
			—1,00	18,5926

25. სხვადასხვანაირი სიზუსტის ორკეცი განაზომები

ვთქვათ, გაზომილია n რაოდენობა, ყველა ორ-ორჯერ და მიღებულია ქვემო შედეგები, მათი წონებითურთ:

$$1.\quad a_1,\ a_2,\ a_3,\quad a_n$$
$$p_1,\ p_2,\ p_3,\quad p_n$$
$$2.\quad a_1',\ a_2',\ a_3',\quad a_n$$
$$p_1',\ p_2',\ p_3',\quad p_n'.$$

უნდა განსაზღვრულ იქნეს ცალკეული განაზომის საშუალო ცდომილება, შესატყვისი ერთეული წონისა.

შევადგინოთ შესაბამისი განაზომების სხვაობები მათი წონებითურთ:

$$d_1,\ d_2,\ d_3,\quad d_n$$
$$P_1,\ P_2,\ P_3,\quad P_n,$$

სადაც წონები გამოთვლილია 23 §-ის (16) ფორმულის დახმარებით; სახელდობრ:

$$\frac{1}{P_1}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1'},\quad \frac{1}{P_2}=\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2'},$$

რადგანაც ყოველი სხვაობის ნამდვილი მნიშვნელობა უნდა უდრიდეს ნულს, ამიტომ $d_1,\ d_2,\ d_3 \cdots d_n$ ოდენობანი წარმოადგენენ სხვაობათა ნამდვილ ცდომილებებს და, მაშასადამე, საძიებელი საშუალო ცდომილება ცალკეული სხვაობისა იქნება (22 § (μ)).

$$m_d=\sqrt{\frac{\Sigma\,(pd^2)}{n}} \tag{5}$$

თუ ორივე რიგის განაზომთა წონები ერთნაირია, მაშინ $d_1,\ d_2,\ d_3.\quad d_n$ სხვაობათა წონები შესაბამისად იქნება

$$\frac{p_1}{2}\quad \frac{p_2}{2}\quad \frac{p_3}{2},\quad \frac{p_n}{2},$$

და, მაშინ, ერთეული წონის შესაბამისი საშუალო ცდომილება ცალკეული განაზომისა გამოვა:

$$m_a=\sqrt{\frac{\Sigma\,(pd^2)}{2n}} \tag{6}$$

ამ ფორმულას შეიძლება მიეცეს ასეთი სახეც:

$$m_a=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{2\Sigma\left(\frac{1}{p}\right)}} \tag{7}$$

აქ საჭიროა დავრწმუნდეთ, ხომ არ განსხვავდებიან მეორე რიგის შედეგები პირველი რიგის შედეგებისაგან ისეთი ოდენობებით, რომელთაც ექნებათ არა შემთხვევითი, არამედ სისტემატური ხასიათი; ამ უკანასკნელ შემთხვევაში,—თუ გაზომვათა რიცხვი საკმაოდ დიდია, $\Sigma (Pd)$ ნულის თანასწორი არ იქნება და ამიტომ, ცდომილების განსაზღვრის წინასწარი საშუალო, საჭიროა სხვაობებიდან გამოყოფილი იქნას მათი სისტემატური ნაწილი.

მხოლოდ დარჩენილი $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \dots \theta_n$ სხვაობები შეიძლება გამოყენებულ იქნენ ერთეული წონის შესაბამისი საშუალო ცდომილების გამოსაყვანად ქვემოთ მოტანილი ფორმულის დახმარებით:

$$m_a = \sqrt{\frac{\Sigma (p\theta^2)}{2(n-1)}} \tag{8}$$

მაგალითი I. ქვემო ტაბულაში მოცემულია ფოლადის ბაფთით გაზომილი 27 ხაზის ორკეცი განაზომი. საჭიროა განსაზღვრულ იქნას ერთეული სიგრძის საშუალო ცდომილება.

ამნაირად, გვაქვს გაზომვის შედეგები:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,$$

$$a_1',\ a_2',\ a_3',$$

მათი წონებით. პირობით მივიღოთ რომელიმე ნებისმიერი a_0 სიგრძე როგორც ერთეული წონის მქონე; მაშინ განაზომების შეფარდებითი წონები შესაბამისად იქნება:

$$p_1 = \frac{a_0}{a_1} = \frac{a_0}{a_1'}\ , \quad p_2 = \frac{a_0}{a_2} = \frac{a_0}{a_2'}\ , \quad p_3 = \frac{a_0}{a_3} = \frac{a_0}{a_3'}\ ,$$

ნათქვამის მიხედვით, ჩვენს მაგალითში m_{100}-ით აღვნიშნოთ 100 მ სიგრძის ხაზის საშუალო ცდომილება, რომლის წონა მივიღოთ ერთეულად. მაშინ განაზომების შეფარდებითი წონები გამოისახება ზოგადი ფორმულით

$$p = \frac{100}{a} = \frac{100}{a'}$$

შევადგინოთ $d_1, d_2, d_3 \quad d_{27}$ სხვაობები და თანვე ვიგულვოთ, რომ პირველსა და მეორე გაზომვათა შორის არსებობს არა სისტემატური, არამედ მხოლოდ შემთხვევითი ხასიათის განსხვავება; მაშინ გვექნება:

$$m^2_{100} = \frac{\Sigma (pd^2)}{2n} = \frac{100}{2n} \cdot \frac{\Sigma d^2}{\Sigma a}\ ,$$

ხოლო ერთმეტრიანი სიგრძისათვის

$$m_1 = \frac{m_{100}}{\sqrt{100}} = \frac{m_{100}}{10}.$$

ქვემოთ მოყვანილია გამოთვლის სქემა:

№№ რიგზე			d	d^2	$p=\frac{100}{a}$	pd^2
1	313^m,85	313^m,89	—0^m,04	16^c	0,32	5^c,12
2	280,80	280,70	+0,10	100	0,36	36,00
3	195,08	195,13	—0,05	25	0,51	12,75
4	327,41	327,49	—0,08	64	0,31	19,84
5	313,75	313,71	+0,04	16	0,32	5,12
6	341,89	341,82	+0,07	49	0,29	14,21
7	332,75	332,75	0,00	0	0,30	0,00
8	317,18	317,23	—0,05	25	0,32	8,00
9	319,25	319,11	+0,14	196	0,31	60,76
10	288,45	288,51	—0,06	36	0,35	12,60
11	292,74	292,69	+0,05	25	0,34	8,50
12	302,77	302,73	+0,04	16	0,33	5,28
13	304,08	304,03	+0,05	25	0,33	8,25
14	287,75	287,81	—0,06	36	0,35	12,60
15	286,86	286,86	0,00	0	0,35	0,00
16	240,96	241,04	—0,08	64	0,41	26,24
17	198,90	198,92	—0,02	4	0,50	2,00
18	76,40	76,41	—0,01	1	1,31	1,31
19	97,29	97,29	0,00	0	1,03	0,00
20	114,85	114,85	0,00	0	0,87	0,00
21	139,09	139,13	—0,04	16	0,72	11,52
22	258,70	258,73	—0,03	9	0,39	3,51
23	267,61	267,69	—0,08	64	0,37	23,68
24	109,71	109,73	—0,02	4	0,91	3,64
25	98,18	98,20	—0,02	4	1,02	4,08
26	146,91	146,91	0,00	0	0,68	0,00
27	309,86	309,85	+0,01	1	0,32	0,32
	6563^m.07	6563^m,21	—0^m,14	796^c		285^c,32

100-მეტრიანი ხაზის საშუალო ცდომილება გამოდის:

$$m_{100} = \sqrt{\frac{285,32}{54}} = \pm 2^c,3 = \pm 0^m,023$$

და, მაშასადამე,

$$m_1 = \frac{0^m,023}{10} = \pm 0^m,0023.$$

განსახილველი შემთხვევისათვის გამოვიყენოთ აგრეთვე (7) ფორმულაც

$$m_{100}=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{2\Sigma\left(\frac{1}{p}\right)}},$$

ამასთანავე მივიღოთ სათვალავში, რომ $\frac{1}{p}=\frac{a}{100}$, ე. ი.

$$\Sigma\left(\frac{1}{p}\right)=\Sigma\left(\frac{a}{100}\right).$$

გვექნება:

$$m_{100}=10\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{2\Sigma a}}.$$

აქედან ერთეული სიგრძისათვის მივიღებთ:

$$m_1=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{2\Sigma a}}.$$

შევიტანოთ რიცხვითი მნიშვნელობანი; გვექნება:

$$m_1=\sqrt{\frac{0{,}0796}{2\times 6563}}=0^m{,}0025.$$

ნაპოვნი რიცხვი საკმარისი სიზუსტით ემთხვევა (6) ფორმულით მიღებულ შედეგებს.

ახლა გამოვარკვიოთ განსახილველი შემთხვევის ხაზის განაზომებზე სისტემატური და შემთხვევითი ხასიათის ზომის ზეგავლენა.

მივიღებთ რა მხედველობაში, რომ Σd ჯამში შემთხვევითი ცდომილებანი ურთიერთ კომპენსირებულია, ხოლო სისტემატური—შეჯამებული, შეგვიძლია წინანდებურად დავწეროთ:

$$q=\frac{\Sigma d}{\Sigma a},$$

ასეთი იქნება სისტემატური ზეგავლენის სიდიდე სიგრძის ერთეულზე.

შემდეგ, ყოველი ხაზისათვის გამოვთვლით ჯერ qa ოდენობას, ხოლო მერე სხვაობებს

$$\theta=d-qa.$$

აქაც θ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც გადახრა სისტემატურ ცდომილებათა მათი საშუალო არითმეტიკულიდან; მაშინ საშუალო ცდო-

მილება სიგრძის ერთეულზე გამოთვლება უკვე ცნობილი (8) ფორმულით

$$m_{100}=\sqrt{\frac{\Sigma(p\theta^2)}{2(n-1)}}.$$

გამოთვლის სქემა.

№№ რიგ.			d	qa	θ	θ^2	$p=\frac{100}{a}$	$p\theta^2$
1	$313^m,85$	$313^m,89$	-4^c	$-0^c,7$	$-3,3$	10,89	0,32	3,5
2	280,80	280,70	+10	0,6	+10,6	112,36	0,36	40,4
3	195,08	195,13	−5	−0,4	−4,6	21,16	0,51	10,8
4	327,41	327,49	−8	−0,7	−7,3	53,29	0,31	16,5
5	313,75	313,71	+4	−0,7	+4,7	22,09	0,32	7,1
6	341,89	341,82	+7	−0,7	+7,7	59,29	0,29	17,2
7	332,75	332,75	0	−0,7	+0,7	0,49	0,30	0,2
8	317,18	317,23	−5	−0,7	−4,3	18,49	0,32	5,9
9	319,25	319,11	+14	−0,7	+14,7	216,09	0,31	67,0
10	288,45	288,51	−6	−0,6	−5,4	29,16	0,35	10,2
11	292,74	292,69	+5	−0,6	+5,6	31,36	0,34	10,7
12	302,77	302,73	+4	−0,6	+4,6	21,16	0,33	7,0
13	304,08	304,03	+5	−0,6	+5,6	31,36	0,33	10,4
14	287,75	287,81	−6	−0,6	−5,4	29,36	0,35	10,2
15	286,86	286,86	0	−0,6	+0,6	0,36	0,35	0,1
16	240,96	241,04	−8	−0,5	−7,5	56,25	0,41	23,1
17	198,90	198,92	−2	−0,4	−1,6	2,56	0,50	1,3
18	76,40	76,41	−1	−0,2	−0,8	0,64	1,31	0,8
19	97,29	97,29	0	−0,2	+0,2	0,04	1,03	0,0
20	114,85	114,85	0	−0,2	+0,2	0,04	0,87	0,0
21	139,09	139,13	−4	−0,3	−3,7	13,69	0,72	9,9
22	258,70	258,73	−3	−0,5	−2,5	6,25	0,39	2,4
23	267,61	267,69	−8	−0,6	−7,4	54,76	0,37	20,2
24	109,71	109,73	−2	−0,2	−1,8	3,24	0,91	2,9
25	98,18	98,20	2	−0,2	−1,8	3,24	1,02	3,3
26	146,91	146,91	0	−0,3	+0,3	0,9	0,68	0,1
27	309,86	309,85	+1	−0,6	+1,6	2,56	0,32	0,8
	$6563^m,07$	$6563^m,21$	-14^c	$13^c,7$	$-0,3$			282,0

$$g=-\frac{0.14}{6563}=-0,000021.$$

$$m_{100}=\sqrt{\frac{282,0}{2\times(27-1)}}=\sqrt{5,42}=\pm 2^c,3=\pm 0^m,023.$$

საშუალო ცდომილება 1 მეტრზე იქნება:

$$m_1=\frac{m_{100}}{\sqrt{100}}=\frac{m_{100}}{10}=0^m,0023.$$

m_1 მივიღეთ ისეთივე, როგორიც იმ შემთხვევაში, როდესაც ვგულისხმობდით, რომ გაზომვაზე ზეგავლენა ახდენდა მხოლოდ შემთხვევითი ცდომილებანი. ასეც იყო მოსალოდნელი, ვინაიდან d სხვაობანი აღმოჩნდა სხვადასხვა ნიშნიანი და თვით Σd წარმოადგენს შედარებით მცირე ოდენობას. აქედან დავასკვნით, რომ განსახილველი მაგალითის ორჯეც განაზომთა სხვაობებში სისტემატურ ცდომილებათა ზეგავლენა უმნიშვნელოა.

მაგალითი II. ნიველობა წარმოებული იყო წინ და უკან სხვადასხვა უბნებზე და მიღებული იყო აღმატებათა ჯამები, მოთავსებული ქვემო ტაბულაში. აღმატება წინ მსვლელობაში აღნიშნულია h'-ასოთი, უკან,—h''-ით; მათი ჯამი $h'+h''=d$ გამოსახავს ნიველირსავალის შეუკვრელობას.

უბნის №	მარკის №	ჯამი აღმატებათა h'	h''	d	სადგ. რიცხვი	$p=\frac{1000}{n}$	d^2	pd^2
	30							
1		$+12607^{mm},8$	$-12611^{mm},6$	$-3,^{mm}8$	66	15	14,4	216
	1543							
2		−3753,5	+3753,7	+0,2	88	11	0,0	0
	1532							
3		−615,4	+615,0	−0,4	5	200	0,2	40
	1568							
4		−17278,7	+17279,3	+0,6	11	91	0,4	36
	1549							
5		+11360,4	−11359,1	+1,3	58	17	1,7	29
	1536							
6		+5431,5	−5427,6	+3,9	66	15	15,2	228
	1514							
7		−2344,1	+2346,7	+2,6	55	18	6,8	122
	1524							
8		+6222,2	−6224,0	−1,8	48	21	3,2	67
	1523							
9		+2202,8	−2208,6	−5,8	51	20	33,6	672
	1502							
10		−5772,3	+5777,6	+5,3	66	15	28,1	422
	1552							
11		+24082,4	−24073,8	+8,6	85	12	74,0	888
	1022			+10,7	599		177,6	2720

d სხვაობათა ნიშნების დაწყობა გვიჩვენებს, რომ მათში სისტემატურ ცდომილებებს არა სჭერიათ მნიშვნელოვანი ადგილი

$$m_{1000}=\pm\sqrt{\frac{2720}{22}}=\pm\sqrt{124}=\pm 11{,}1 \text{ მმ.}$$

გამოთვლის ხერხიანობისათვის წონა გამოითვლებოდა ფორმულით

$$p=\frac{1000}{n},$$

ე. ი. წონის ერთეულად მიღებული იყო 1000 სადგურის შემცველი ნიველირსავალის წონა; ამის მიხედვით ცალკეული სადგურის საშუალო ცდომილებისათვის გვექნება:

$$m_1=\frac{m_{1000}}{\sqrt{1000}}=\pm\sqrt{\frac{124}{1000}}=\pm 0{,}35 \text{ მმ.}$$

ერთკეცი ნიველირსავალის ცალკეულ კილომეტრზე მოდის საშუალო ცდომილება:

$$m_k=m_1\cdot\sqrt{10}=\pm 1{,}11 \text{ მმ.}$$

ორკეცი ნიველირსავალისაზე

$$m_k=\pm\frac{1{,}11}{\sqrt{2}}=\pm\sqrt{\frac{1{,}24}{2}}=\pm 0{,}79 \text{ მმ.}$$

ამგვარად, განსახილველ მაგალითში კიდეგანი Δ ცდომილება ზუსტი ნიველობის ცალკეულ კილომეტრზე იქნება

$$\Delta=\pm 0{,}79\times 3=\pm 2{,}4 \text{ მმ.}$$

წინ და უკან სვლის საშუალო არითმეტიკულისათვის.

მაგალითი III. ქვემოთ ტაბულაში მოყვანილია დიდი სიზუსტის ორკეცი ნიველობის შედეგები 20 გავლილ უბანზე. აღმატება წინ მსვლელობაში აღნიშნულია h' ასოთი, უკან—h''-ით; მათი ჯამი $h'+h''=d$ გამოსახავს ნიველირსავალის შეუკვრელობას.

განსახილველ მაგალითში ცხადად აშკარავდება ჭარბობა დადებითი d სხვაობათა უარყოფითებთან შედარებით როგორც ნიშნისა, ისე სიდიდის მხრით. მაშასადამე, აქ ადგილი უნდა ჰქონდეს ცალმხრივად მომქმედ ცდომილებათა წყაროს. საფუძველი გვაქვს ვიფიქროთ, რომ ერთგვარი სისტემატური q ცდომილება მოქმედებს ყოველ სადგურზე. მისი ოდენობის გამოსარკვევად გამოვთვლით Σd-ს და გავყოფთ მას Σs-ზე (ყველა სადგურის რიცხვზე), იმ ვარაუდის გაწევით, რომ Σd-ში

სვლის №	ნიშნის	ჯამი ამატებათა h'	ჯამი ამატებათა h"	d	სადგ. რიცხ.	—qs	θ	$p=\frac{1000}{s}$	θ	pθ²
	1014									
		mm	mm	mm		mm	mm			
1		+2097,2	—2093,6	+3,6	49	—2,3	—1,3	20	1,7	34
	1087									
2		+6626,3	—6622,8	+3,5	38	—1,7	+1,8	26	3,2	83
	1065									
3		— 1736,0	+1737,0	+1,0	46	—2,1	—1,1	22	1,2	26
	1210									
4		+17436,2	—17435,8	+0,4	58	—2,7	—2,3	17	5,3	90
	1010									
5		+15940,7	—15939,9	+0,8	40	—1,8	—1,0	25	1,0	25
	1207									
6		+499,8	—498,0	+1,8	28	—1,3	+0,5	36	0,2	7
	1089									
7		+13377,6	—13380,4	—2,8	21	—1,0	—3,8	48	14,4	691
	1373									
8		+32149,8	—32150,7	—0,9	32	—1,5	—2,4	31	5,8	180
	1384									
9		+17289,4	—17282,4	+7,0	29	—1,3	5,7	34	32,5	1105
	1159									
10		+13849,9	—13852,5	—2,8	23	—1,1	—3,9	43	15,2	654
	1257									
11		+32533,1	—32534,1	—1,0	43	—2,0	—3,0	23	9,0	207
	1032									
12		+11516,8	—11511,4	+5,4	30	—1,4	+4,0	33	16,0	528
	1475									
13		+6175,0	—6173,4	+1,6	36	—1,7	—0,1	28	0,0	0
	1635									
14		—9313,3	+9313,7	+0,4	26	—1,2	—0,8	38	0,6	23
	1239									
15		—27130,7	+27126,1	—4,6	30	1,4	—6,0	33	36,0	1188
	1168									
16		—19946,3	+19949,2	+2,9	29	—1,3	+1,6	34	2,6	89
	1380									
17		+10190,3	+10170,7	+19,6	46	—2,1	—17,5	22	306,2	6736
	870									
18		+6165,1	—6164,8	+0,3	29	—1,3	—1,0	34	1,0	34
	938									
19		—22377,7	+22370,7	—7,0	49	—2,3	—9,3	20	86,5	1730
	1768									
20		—10396,6	+10399,9	+3,3	25	—1,2	+2,1	40	4,4	176
	1772									
				+51,6	707	—3[illegible],7	—0 [illegible]		542,8	13605
				—19,1						
				+32,5						

შემთხვევითი ცდომილებანი მნიშვნელოვნად იქნება კომპენსირებული. ამ მოსაზრებით დავწერთ:

$$q = \frac{\Sigma d}{\Sigma s},$$

რომელიც ჩვენს შემთხვევაში იქნება:

$$q = +\frac{32,5}{707} = +0,046 \text{ მმ.}$$

ამის შემდეგ შევადგენთ სხვაობებს ქვემოთ მოყვანილი ფორმულის მიხედვით:

$$\theta = d - qs.$$

მიღებული θ_1, θ_2, θ_3, θ_{20} შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც გადახრები მათი საშუალო არითმეტიკულიდან ორკეცად წარმოებულ ნიველობაში. რადგან ცნობილია ნიველობის შედეგთა წონა ცალკეულ უბნებში, ამიტომ ერთეული წონის შესატყვისი საშუალო ცდომილება გამოითვლება (8) ფორმულის მიხედვით:

$$m_{1000} = \pm\sqrt{\frac{13605}{2(20-1)}} = \pm\sqrt{\frac{13605}{38}} = \pm\sqrt{358} = \pm 19 \text{ მმ.}$$

აქედან

$$m_1 = \pm\frac{m_{1000}}{\sqrt{1000}} = \pm\sqrt{\frac{358}{1000}} = \pm 0,60 \text{ მმ.}$$

ორკეცი ნიველობის შუადისათვის იქნება:

$$m_1 = \pm\frac{0,60}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{\frac{0,358}{2}} = \pm 0,42 \text{ მმ.}$$

ორკეცი ნიველობის ყოველ კილომეტრზე მოდის:

$$m_k = \pm 0,42\sqrt{10} = \pm 1,33 \text{ მმ.}$$

გამოთვლილი m_k მნიშვნელობა აღმოჩნდა იმაზე მეტი, რაც დასაშვებია უმაღლესი სიზუსტის ნიველობისათვის. ამის მიზეზი უნდა ვეძიოთ უბანში № 17, სადაც მიღებულია ფრიად დიდი d სხვაობა.

მართლაც, ერთკეცი ნიველირსავალისათვის

$$m_{46} = \pm 0,60\sqrt{46} = \pm\sqrt{16,6} = \pm 4,0 \text{ მმ.}$$

ხოლო ორკეცი ნიველობის სხვაობისათვის

$$m_{46} = \pm 4,0\sqrt{2} = \pm 5,7 \text{ მმ.}$$

მიღებული რიცხვის გასამკეცება მოგვცემს ± 17 მმ-ს, ხოლო სინამდვილეში $\theta_{46}=+17,5$ მმ. სისტემატური ცდომილების გამოკლებით. აქედან ცხადია, რომ № 17 უბანზე ნიველობა უნდა განმეორებული იყოს. თუ ტაბულიდან ამოღებული იქნება № 17 უბანი და ხელმეორედ დამუშავებული ნიველობის შედეგი, მაშინ ორკეცი ნიველობის ცალკეულ კილომეტრზე საშუალო ცდომილება იქნება დაახლოებით ± 1 მმ.

26. ერთი და იმავე ოდენობის ორჯერადი გაზომვის კიდეგანი სხვაობა

ერთი და იმავე ოდენობის ორჯერადი ყოვლად ზუსტი გაზომვის სხვაობა, აშკარაა, უნდა უდრიდეს ნულს (24 §). მაგრამ აუცილებელ ცდომილებათა მიზეზით, რომლებიც თან სდევს ყოველ გაზომვას, ეს სხვაობა ნულს არ უდრის და იგი შეიძლება განხილულ იქნას როგორც ერთი რომელიმე

$$f(x)=x-x=0$$

ფუნქციის ნამდვილი აბსოლუტური ცდომილება. ამ მოსაზრების მიხედვით 24 §-ში გამოყვანილი იყო ფორმულა (2).

$$m_a=\pm\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{2n}}.$$

11 §-ში გამორკვეული იყო, რომ კიდეგანი ცდომილება უდრის სამკეც საშუალოს; ხოლო რადგან $m_d=m_a\sqrt{2}$, ამიტომ ერთი და იმავე ოდენობის ორი გაზომვის კიდეგანი სხვაობა იქნება

$$3m_a\sqrt{2}=4,242m_a \qquad (9)$$

ამის გამო მიღებულია, რომ კიდეგანი სხვაობა უნდა უდრიდეს დაახლოებით ოთხკეც საშუალო ცდომილებას (ნამდვილად საშუალო ცდომილების $4^1/_4$-ს), მაგალითად, თუ რომელიმე გაზომვის საშუალო ცდომილება არის 0″,01, მაშინ უმაღლესი ზღვარი სხვაობისა ორ ასეთივე გაზომვას შორის იქნება 0″,04.

ხსენებული დასკვნა შეიძლება გავრცელებულ იქნას აგრეთვე გაზომვათა ისეთ ცალკეულ რიგზე, რომლის საშუალო ცდომილება არის m_a; ასეთ რიგში უმაღლესი ზღვარი სხვაობისა ორ ცალკეულ განაზომს შორის არ უნდა სჭარბობდეს $4^1/_4\, m_a$-ს.

VI

ცდომილებათა თეორიის გამოყენება ტოპოგრაფიულ პრაქტიკაში

27. კუთხზომითი სამუშაოები

I შემთხვევა. **ხაზის გაზომვა ადგილზე.**

საზომ სიგრძეში ბაფთა დალაგდა n-ჯერ, ვთქვათ, ერთი დადების საშუალო ცდომილება არის m. საძიებელია გაზომილი სიგრძის საშუალო m_s ცდომილება.

ბაფთის ყველა მოზომვა ჩვენ უნდა ვიგულვოთ როგორც ტოლზუსტი. მაშასადამე, 17 §-ის (4) ფორმულის მიხედვით დაიწერება:

$$m_s = m \cdot \sqrt{n}.$$

აღვნიშნოთ ხაზის სიგრძე s ასოთი, ხოლო ზომარი ბაფთის სიგრძე a-თი; გვექნება:

$$s = a \cdot n,$$

ხოლო აქედან

$$m_s = m\sqrt{\frac{s}{a}} = \frac{m}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{s}$$

$\frac{m}{\sqrt{a}}$ ოდენობა გამოყენებული ბაფთისათვის, განსაზღვრულ პირობებში, წარმოადგენს მუდმივ ოდენობას: აღვნიშნოთ იგი μ ასოთი, ე. ი.

$$\frac{m}{\sqrt{a}} = \mu.$$

მაშინ გვექნება

$$m_s = \mu \cdot \sqrt{s}$$

შედეგის სიზუსტის შეფარდებითი მნიშვნელობის მისაღებად, ზემო გამოხატულების ორივე ნაწილი გავყოთ s-ზე; მივიღებთ:

$$\frac{m_s}{s} = \frac{\mu}{\sqrt{s}} \qquad (1)$$

აქედან დავასკვნით, რომ, თუ ხაზის გაზომვის დროს არ იყო შემჩნეული თვალსაჩინო ზეგავლენა სისტემატური ცდომილებისა, მაშინ რაც უფრო გრძელი იქნება გასაზომი ხაზი, მით უფრო მეტი იქნება მისი გაზომვის სიზუსტე.

II შემთხვევა. **გაზომილი კუთხის საშუალო ცდომილება**

ადგილზე დამზერილია რომელიმე მიმართულება ერთი წრედით (წრედი მარჯვნივ ან წრედი მარცხნივ) და ჰორიზონტულ წრედზე აღებულია ანათვალი ორივე ვერნიერით, რასაც მინიმუმამდე დაჰყავს წრედის ექსცენტრისიტეტის ზეგავლენა. ამ შემთხვევაში ანათვალის ცდომილება ედრება ვერნიერის სიზუსტის ნახევარს; აღვნიშნოთ იგი τ-თი.

კუთხე განისაზღვრება ორი დამზერილი მიმართულების საშუალებით; მისი სიდიდე უდრის მარჯვენა მიმართულების ანათვალს მინუს მარცხენა მიმართულების ანათვალი. თუ დამზერა წარმოებული იყო მხოლოდ ერთი წრედით, მაშინ m_0 ცდომილება კუთხისა, რომელიც წარმოადგენს ორი ოდენობის სხვაობას, იქნება

$$m_0=\tau\sqrt{2}$$

თუ კუთხე განისაზღვრება როგორც არითმეტიკული შუადი ორი განაზომისა ორივე წრედით (ერთი ილეთით), მაშინ კუთხის საშუალო m_1 ცდომილება იქნება:

$$m_1=\frac{\tau\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\tau, \qquad (2)$$

როდესაც კუთხე გაზომილია ორი ილეთით, შედეგის m_2 ცდომილება იქნება

$$m_2=\frac{\tau}{\sqrt{2}}, \qquad (3)$$

სამი ილეთით გაზომვის შემთხვევაში

$$m_3=\frac{\tau}{\sqrt{3}}, \qquad (4)$$

ხოლო N ილეთით გაზომვისას

$$m_N=\frac{\tau}{\sqrt{N}}. \qquad (5)$$

ვთქვათ, მაგალითად, ვერნიერის სიზუსტე არის 1′ ($\tau=0',5$), მაშინ,

ორი ილეთის შემთხვევაში, კუთხის საშუალო ცდომილება გამოიხატება ოდენობით

$$m_2=\frac{0',5}{\sqrt{2}}=0',35,$$

ხოლო სამი ილეთის შემთხვევაში ოდენობით

$$m_3=\frac{0',5}{\sqrt{3}}=0',29.$$

III შემთხვევა. ფიგურის შეუკვრელობა

აქ ნაგულისხმევი უნდა გვქონდეს, რომ ფიგურაში ყველა კუთხე გაზომილია თანაბარ პირობებში ერთნაირი საშუალო ცდომილებით.

მრავალკუთხედში კუთხეთა ჯამის საშუალო ცდომილება, როდესაც მასში კუთხეთა რიცხვია n და ყოველი კუთხე გაზომილია 2 ილეთით, გამოიხატება ფორმულით

$$M_2=m_2\sqrt{n}$$

თუ კუთხეები იზომებოდა 3 ილეთით, მაშინ სამკუთხედის კუთხეთა ჯამის საშუალო ცდომილება იქნება

$$M_3=m_3\sqrt{3}.$$

დასაშვები შეუკვრელობა ფიგურისა უნდა მივიღოთ მისი საშუალო ცდომილების ორკეცი მნიშვნელობის თანასწორი, ე. ი.

$$M_2^0=2m_2\sqrt{n} \quad \text{და} \quad M_3^0=2m_3\sqrt{3}. \tag{6}$$

თუ, მაგალითად, ვერნიერის სიზუსტეს 1′ და $n=9$ მაშინ

$$M_2^0=2\times 0',35\times\sqrt{9}=2',1.$$

ტექნიკურ ტრიანგულაციაში კუთხე იზომება 3 ილეთით (მესამე კლასის ტრიანგულაცია), ამიტომ კუთხეთა ჯამის დასაშვები შეუკვრელობა სამკუთხედში იქნება:

$$M_3^0=2\times 0',29\times 1,73=1',0,$$

თუ კუთხე სამკუთხედში იზომება N ილეთით, მაშინ დასაშვები შეუკვრელობა სამკუთხედში გამოვა

$$M_N^0=3m_N\sqrt{3}.$$

ავიღოთ მეორე კლასის ტრიანგულაცია, რომელშიაც კუთხე იზომება 6 ილეთით. ამ შემთხვევაში

$$m_6=\frac{\tau}{\sqrt{6}},$$

ხოლო დასაშვები შეუკვრელობა სამკუთხედში იქნება:

$$M_6^0=2m_6\sqrt{3}=2\cdot\frac{\tau}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}=\sqrt{2}\cdot\tau. \qquad (7)$$

თუ, მაგალითად, ვერნიერის სიზუსტე 10″-ა ($\tau=5''$), მაშინ

$$M_6^0=\sqrt{2}\times 5''=7'',1.$$

პირველი კლასის ტრიანგულაციაში, სადაც მიღებულია კუთხეთა გასაზომად 12 ილეთი, გვექნება

$$m_{12}=\frac{\tau}{\sqrt{12}},$$

ხოლო დასაშვები შეუკვრელობა სამკუთხედისა გამოვა

$$M_{12}^0=2\cdot\frac{\tau}{\sqrt{12}}\cdot\sqrt{3}=\frac{2\tau\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}}=\tau\ldots\ldots \qquad (8)$$

თუ მაგალითად, ვერნიერის სიზუსტე უდრის 2″-ს ($\tau=1''$), მაშინ სამკუთხედის დასაშვები შეუკვრელობა იქნება

$$M_{12}^0=1''.$$

IV შემთხვევა. **ხაზის ბოლოსა მიმართულებიდან გადახრის საშუალო მნიშვნელობა, გამოწვეული ხაზის სიგრძისა და მისი მიმართულების მცდარობით**

აღვნიშნოთ ხაზის სიგრძე s ასოთი, მისი აზიმუტი α-თი. ხაზის ბოლოის კოორდინატთა ნაზრდები გამოისახება ფორმულებით:

$$\Delta x=s\cos\alpha, \quad \Delta y=s\sin\alpha.$$

აღვნიშნოთ m_x და m_y-ით ცდომილებანი ნაზრდებში, გამოწვეული s და α ოდენობათა მცდარობით. მაშინ 18 §-ის (7) ფორმულის მიხედვით (მაგალითი V) დავწეროთ:

$$m_x^2=\cos^2\alpha\cdot m_s^2+s^2\sin^2\alpha\cdot m_\alpha\sin^2 1',$$

$$m_y^2=\sin^2\alpha\cdot m_s^2+s^2\cos^2\alpha\cdot m_\alpha^2\sin^2 1'.$$

აქ m_s გამოხატავს მცდარობას ხაზის სიგრძეში, ხოლო m_α—მცდარობას აზიმუტში; მოყვანილ ფორმულებში ეს უკანასკნელი გამოსახულია მინუტებში და $\sin 1'=\frac{1}{3438}$.

მცირედი გარდაქმნის შემდეგ ზემო ფორმულები მიიღებენ ასეთ სახეს:

$$m_x^2=\frac{\Delta x^2}{s^2}\cdot m_s^2+\Delta y^2\cdot m_\alpha^2\sin^2 1',$$

$$m_y^2=\frac{\Delta y^2}{s^2}\cdot m_s^2+\Delta x^2\cdot m_\alpha^2\sin^2 1'.$$

თუ სათვალავში მივიღებთ (1) ფორმულას, დავწერთ:

$$m_x^2=\frac{\Delta x^2}{s}\cdot\mu^2+\Delta y^2\cdot m_\alpha^2\sin^2 1',$$

$$m_y^2=\frac{\Delta y^2}{s}\cdot\mu^2+\Delta x^2\cdot m_\alpha^2\sin^2 1'.$$

სადაც m_x და m_y გამოხატავენ ხაზის ბოლოს წანაცვლების საშუალო m_s მნიშვნელობის პროექციებს აბსცისებისა და ორდინატების ღერძებზე; მაშასადამე,

$$m_s^2=m_x^2+m_y^2,$$

ანუ

$$m_s^2=s\cdot\mu^2+s^2\cdot m_\alpha^2\sin^2 1'.$$

შედეგის შეფარდებითი მნიშვნელობა იქნება:

$$\left(\frac{m_s}{s}\right)^2=\frac{\mu^2}{s}+m_\alpha^2\sin^2 1'. \tag{9}$$

ამ გამოხატულების მეორე ნაწილის პირველი წევრი წარმოადგენს ხაზის s სიგრძის სიზუსტის კვადრატს (ფორმ. (1)), ხოლო მეორე წევრი—აზიმუტის ცდომილების რკალურ მნიშვნელობას.

განვიხილოთ რიცხვითი მაგალითი. ხელსაყრელ პირობებში ხაზისა ფოლადის ბაფთით გაზომვის დროს კოეფიციენტი $\mu=0{,}0028$. ვთქვათ, აზიმუტის საშუალო ცდომილება $m_\alpha=\pm 0',4$ და $s=100$; მაშინ გვექნება:

$$\left(\frac{m_s}{s}\right)^2=\frac{0{,}0028^2}{100}+0{,}4^2\times\frac{1}{3438^2},$$

$$\left(\frac{m_s}{s}\right)^2=10^{-10}(784+135)=10^{-10}\times 919,$$

საიდანაც

$$\frac{m_s}{s}=0{,}00030.$$

თუ $s=1000$ m, მაშინ

$$\left(\frac{m_s}{s}\right)^2=\frac{0{,}0028^2}{1000}+0{,}4^2\times\frac{1}{3438^2},$$

$$\left(\frac{m_s}{s}\right)^2=10^{-10}(78{,}4+135)=10^{-10}\times 213{,}4.$$

საიდანაც

$$\frac{m_s}{s}=0{,}00015.$$

როგორცა ვხედავთ, როდესაც ხაზი მოკლე იყო, მაშინ უმთავრესი ზეგავლენა ხაზის ბოლოის მდებარეობაზე ეკუთვნოდა მისი სიგრძის ცდომილებას, ხოლო გრძელი ხაზის შემთხვევაში სჭარბობდა აზიმუტის ცდომილების ზეგავლენა.

V შემთხვევა. **სამკუთხედებში კუთხეთა ჯამების f_1, f_2, f_3 f_n შეუკვრელობათა მიხედვით განსაზღვრული იქნას ცალკეული კუთხის გაზომვის სიზუსტე ტრიანგულაციაში.**

შეუკვრელობა განსხვავდება კუთხეთა ჯამის ცდომილებ-საგან მხოლოდ ნიშნით. ამიტომ ცალკეული სამკუთხედის კუთხეთა ჯამის საშუალო ცდომილების განსაზღვრისათვის გვაქვს გამოხატულება (10 §-ის (9) ფორმ.)

$$m=\pm\sqrt{\frac{\Sigma f^2}{n}}.$$

კუთხის საშუალო ცდომილება აღვნიშნოთ m_β-თი; მაშინ

$$m=m_\beta\sqrt{3},$$

ხოლო აქედან

$$m_\beta=\frac{m}{\sqrt{3}}.$$

ამ გამოხატულებაში შევიტანოთ ზემოთ გამოყვანილი m-ის მნიშვნელობა:

$$m_\beta=\pm\sqrt{\frac{\Sigma f^2}{3n}}. \qquad (10)$$

ამრიგად, მივიღეთ ეგრეთწოდებული ფერეროს (Annibale ferrero 1839—1802) ფორმულა.

მაგალითად, რუსეთის მერიდიანის რკალისათვის („Дуга меридиана") $m=\pm 0'',88$; ამიტომ ამ რკალის ცალკეული კუთხის სიზუსტე გამოდის

$$m_\beta = \pm \frac{0'',88}{\sqrt{3}} = \pm 0'',50.$$

VI შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. გამოთვლილი გვერდების სიზუსტის შეფასება

სამკუთხედში კუთხეები აღვნიშნოთ α, β, γ ასოებით, ხოლო მათ პირისპირმდებარე გვერდები შესაბამისად a, b, c ასოებით.

მაგალითი I. შევაფასოთ გამოთვლილი b გვერდის სიზუსტე.
ამისათვის გვაქვს ფორმულა

$$b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma},$$

რომლის გალოგარითმება მოგვცემს:

$$\lg b = \lg c + \lg \sin\beta - \lg \sin\gamma.$$

ამ უკანასკნელის დიფერენციალი იქნება:

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + \operatorname{ctg}\beta \cdot d\beta \sin 1'' - \operatorname{ctg}\gamma \cdot d\gamma \sin 1''.$$

18 §-ის (7) ფორმულის მიხედვით (მაგ. I და III) დავწეროთ:

$$\frac{m_b^2}{b^2} = \frac{m_c^2}{c^2} + \operatorname{ctg}^2\beta \cdot m_\beta^2 \sin^2 1'' + \operatorname{ctg}^2\gamma \cdot m_\gamma^2 \sin^2 1''. \qquad (11)$$

აქ m-ის ქვეშ იგულისხმება საშუალო ცდომილება. m_β^2 და m_γ^2, ასევე როგორც $d\beta$ და $d\gamma$, გამოსახულია სეკუნდებში.
გადავწყვიტოთ რიცხვითი მაგალითი.

$$\begin{array}{ll} \beta = 61^\circ\, 51'\, 48'',56 & m_\beta = \pm 0'',28 \\ \gamma = 58\ \ 15\ \ \ 13,07 & m_\gamma = \pm 0,40 \\ c = 599,87365 \text{ მ} & m_c = \pm 0,45 \text{ მმ.} \end{array}$$

ეს რიცხვები შევიტანოთ (11) ფორმულაში:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{0,45}{599,874}\right)^2 + 0,513^2\left(\frac{0,28}{206\,000}\right)^2 + 0,619^2\left(\frac{0,40}{206\,000}\right)^2$$

გამოთვლის შემდეგ მივიღებთ:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = (0,075^2 + 0,071^2 + 0,102^2) \cdot 10^{-10},$$

ხოლო აქედან

$$\frac{m_b}{b} = \pm 10^{-5}\sqrt{0,0211} = \pm 10^{-5} \times 0,145 = \pm \frac{1}{690\,000}.$$

მაგალითი 2. ახლა შევაფასოთ a გვერდის სიზუსტე იმავე ზემოთ მოყვანილ მონაცემთა მიხედვით. გვექნება:

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma),$$

$$a = \frac{c \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin \gamma}.$$

გავალოგარითმოთ უკანასკნელი გამოხატულება:

$$\lg a = \lg c + \lg \sin(\beta + \gamma) - \lg \sin \gamma.$$

ავიღოთ ამ უკანასკნელის დიფერენციალი:

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + \operatorname{ctg}(\beta + \gamma) \cdot d\beta \sin 1'' + [\operatorname{ctg}(\beta + \gamma) - \operatorname{ctg} \gamma] \cdot d\gamma \sin 1'',$$

ანუ

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} - \operatorname{ctg} \alpha \cdot d\beta \sin 1'' - [\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma] \cdot d\gamma \sin 1''$$

და, ბოლოს

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot m_\beta^2 \sin^2 1'' + [\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma]^2 \cdot m_\gamma^2 \sin^2 1'' \qquad (12)$$

მაგალითი 3. თუ მოცემულია c გვერდი და α და β კუთხე, მაშინ ცნობილი იქნება $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ და ამიტომ დავწერთ:

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

გავალოგარითმოთ ეს გამოხატულება:

$$\lg b = \lg c + \lg \sin \beta - \lg \sin(\alpha + \beta).$$

ავიღოთ ამ უკანასკნელის დიფერენციალი:

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + [\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg}(\alpha + \beta)] \cdot d\beta \sin 1'' - \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) \cdot d\alpha \sin 1'',$$

ანუ

$$\frac{db}{b} = \frac{dc}{c} + [\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma] \cdot d\beta \sin 1'' + \operatorname{ctg} \gamma \cdot d\alpha \sin 1'',$$

და, ბოლოს

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + [\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma]^2 \cdot m_\beta^2 \sin^2 1'' + \operatorname{ctg}^2 \gamma \cdot m_\alpha^2 \sin^2 1'' \qquad (13)$$

მაგალითი 4. თუ ყველა კუთხე სამკუთხედში გაზომილია თანაბარ პირობებში და. მაშასადამე, შეგვიძლია მივიღოთ

$$m_\alpha = m_\beta = m_\gamma = m,$$

მაშინ ზემოთ მოყვანილ (11), (12) და (13) მივცემთ ასეთ სახეს:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 &= \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + (\operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma)\cdot m^2\sin^2 1'', \\
\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 &= \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + (2\operatorname{ctg}^2\alpha + 2\operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}^2\gamma)\cdot m^2\sin^2 1'', \\
\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 &= \left(\frac{m_c}{c}\right)^2 + (\operatorname{ctg}^2\beta + 2\operatorname{ctg}\beta\ \operatorname{ctg}\gamma + 2\operatorname{ctg}^2\gamma)\cdot m^2\sin 1''.
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

ამნაირად შევაფასებთ სამკუთხედში გამოთვლილი გვერდების სიზუსტეს იმ შემთხვევაში, როდესაც მოცემულია ერთი გვერდი და ორი კუთხე.

შეფასება გამოთვლილი გვერდების სიზუსტისა იმ შემთხვევაში, თუ სამკუთხედში მოცემულია ერთი გვერდი და სამივე კუთხე, განხილული იქნება VII თავში.

28. გეომეტრიული ნიველობა

I შეცდომა. ნიველობის სიზუსტე დამოკიდებულია როგორც ცდომილებებზე, ისე შეცდომებზე, რომელნიც აგრეთვე არა იშვიათი მოვლენაა მუშაობის წარმოების დროს. შეცდომა ცდომილებისაგან განსხვავდება იმით, რომ იგი შეიძლება წინასწარ იყოს გათვალისწინებული, შემჩნეული და განმეორებით დამზერის დროს თავიდან აცილებული; ამის თქმა არ შეიძლება ცდომილების შესახებ, რომელსაც შემთხვევითი ხასიათი აქვს და იგი აუცილებლად მოხდება.

შეცდომები, რომლებიც ხდება გეომეტრიულ ნიველობაში. დაკავშირებულია ერთის მხრით, ინსტრუმენტის დადგმულობასთან, და, მეორეს მხრით, ლარტყის ათვლასთან. პირველი სახის შეცდომა გამოიხატება იმით, რომ ნიველირის დამიზნების დროს შესაძლებელია თარაზოს ბუშტულა შემთხვევით ერთი ან მეტი დანაყოფით დაშორებული აღმოჩნდეს შუშის შუაგულს. თუ, როგორც ჩვეულებრივ არის ხოლმე, სიგრძე თარაზოს ერთი დანაყოფისა უდრის 3 მილიმეტრს, ხოლო თარაზოს სიმრუდის რადიუსი 20 მეტრს (ე. ი. საფასური თარაზოს ერთი დანაყოფისა არის დაახლოებით $\frac{3}{20\,000 \sin 1''} = 30''$), მა-

შინ შეცდომა ლარტყის ანათვალში, 20 მეტრის მანძილზე, თარაზოს ბუშტულის ერთ დანაყოფზე გადახრის შემთხვევაში უდრის 3 მილიმეტრს, ხოლო 100 მეტრის მანძილზე 15 მილიმეტრს.

თარაზოს ათვლისათვის სარკის ან პრიზმების ხმარება (როგორც ეს მიღებულია ზუსტ ნიველობაში) გამორიცხავს ასეთ შეცდომებს, ვინაიდან ცდის პირს მუდამ თვალწინ აქვს თარაზოს ბუშტულა.

შეცდომა ლარტყაზე ათვლაში წარმოადგენს მარცხს 1, 5, 10 ან 100 დანაყოფით, ე. ი. 1, 5, 10 ან 100 სანტიმეტრით. თუ ლარტყა დაყოფილია სანტიმეტრებად.

გამოცდილება და გულისყური ამცირებს შეცდომებს, მაგრამ იგი მაინც ხდება, ამიტომ მუშაობის წესი ისეთი უნდა იყოს, რომ ამგვარი შეცდომები დავინახოთ, ადვილად გამოაშკარავდეს და გამოსწორდეს.

II ცდომილება. მთავარი ცდომილებები უნდა ვეძიოთ: ჭოგრის სალტეების ჩალითებთან (Lager) თანამხებლობაში, აგრეთვე ზესადები თარაზოსი სალტეებთან თანამხებლობაში, ბუშტულის დაყენებაში, ლარტყის დანაყოფების ათვლაში, ატმოსფერულ პირობებში და ლარტყის სიგრძის ცვალებადობაში.

1. თანამხებლობისმიერი ცდომილება. აქ განვიხილავთ ცდომილებას 100 მეტრით დაშორებულ ლარტყის ანათვალში, გამოწვეულს თანამხებლობის ცდომილებით. ცნობილ გეოდეზისტ პორროს (Ignacio Porro) გამოკვლევით საშუალო ცდომილება, დამოკიდებული სალტეებისა და ჩალითების ურთიერთშემხებლობის არასისრულეზე, შეიძლება შეფასებულ იქნას მილიმეტრის $\frac{1}{200}$-ით, როდესაც მანძილი სალტეებს შორის ეთანასწორება 0,20 მეტრს. იმ ნიველირებში, რომლებშიაც თარაზო დამაგრებულია ან ჭოგრთან, ან ქვედგამთან, ცდომილება დამოკიდებულია სალტეებისა და ჩალითების თანამხებლობის უსრულადობაზე; ზესადებთარაზოიან ნიველირში ამას ზედ ერთვის შემხებლობის უსრულადობა თარაზოს ფეხებსა და სალტეებს შორისაც. თანამხებლობის ორი ადგილის მიხედვით. მიზნების მიმართულება მცდარი გამოვა $\frac{1^{mm}}{200}\cdot\sqrt{2}$-ით 0,20 მეტრის მანძილზე ანუ $\frac{1^{mm}}{200}\times\frac{100}{0,2}\times\sqrt{2}=3,5$ მმ-ით 100 მეტრისათვის; თუ დამიზნება ორჯეცია, მაშინ აღნიშნული ცდომილება შემცირდება $\sqrt{2}$-ჯერ, ე. ი. იქნება $\frac{3,5\text{ მმ}}{\sqrt{2}}=2,5$ მმ.

მიღებული რიცხვის სიდიდე გვიჩვენებს, თუ რა დიდი მნიშვნელობა აქვს განსაკუთრებული სალტეებისა და ჩალითების სუფთად შე-

ნახვას; მათი გასუფთავება უნდა ხდებოდეს უსათუოდ დღეში ორჯერ-სამჯერ, ხოლო მტვრიან გზებზე მუშაობის დროს ან წვიმიან ამინდში უფრო ხშირადაც.

აქ საჭიროა აღნიშნული იყოს, რომ შუადან ნიველობის დროს თანამხებლობის ცდომილება ისპობა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ორი ანათვლის აღების დროს (გახედვა უკან, გახედვა წინ) ნიველირის ყველა ნაწილის ურთიერთმდებარეობა უცვლელი დარჩება.

2. დადგმულობისმიერი ცდომილება. გამოცდილება გვიჩვენებს, რომ ბუშტულის მოყვანა თარაზოს შუაში დახელოვნებული დამმზერის მიერ წარმოებს საშუალო ცდომილებით—0,15 მილიმეტრი, რაც ესატყვისება ბუშტულის ბოლოების ერთი და იმავე ნუმრის ნაკვესებიდან 0,3 მილიმეტრით დაშორებას. ანათვალი ლარტყაზე, რომელიც დადგმულია ნიველირიდან თარაზოს სიმრუდის რადიუსის ტოლ მანძილზე, ედრება 0,15 მილიმეტრს. თუ ეს რადიუსი, მაგალითად, 25 მეტრია, მაშინ 100 მეტრის სიშორისათვის საშუალო ცდომილება ლარტყის ანათვალისა იქნება

$$\pm 0^{mm},15 \times \frac{100}{25} = \pm 0,6 \text{ მმ.}$$

ხოლო 50 მეტრისათვის

$$\pm 0^{mm},15 \times \frac{50}{25} = \pm 0,3 \text{ მმ.}$$

მიღებული რიცხვები უნდა მივაკუთვნოთ ნიველირებს, რომელთა თარაზოს ჩვენება აითვლება სარკის ან პრიზმის დახმარებით, მონიველის ადგილიდან დაუძვრელად, მაგრამ თუ თარაზოს არა აქვს სარკე და პრიზმი, ან არ არის თანაშემწე, რომლის მოვალეობაა ბუშტულისათვის თვალყურის დევნება, მაშინ გადაჭარბებული არ იქნება, თუ ხსენებული საშუალო ცდომილებისათვის მივიღებთ გაორკეცებულ, შეიძლება გასამკეცებულ ოდენობასაც, სახელდობრ 1,5 მმ-ს 100 მეტრისათვის, ან—1 მილიმეტრს 50 მეტრისათვის.

3. ლარტყაზე ათვლით, ანუ ლარტყის დანაყოფის ნაწილის თვალით შეფასებით გამოწვეული ცდომილება. გამოცდილება გვიჩვენებს, რომ 20-ჯერ გადიდებული ჭოგრით აღებული ლარტყის ანათვალი, რომელიც დაშორებულია 100 მეტრით, შეიცავს საშუალო ცდომილებას ლარტყის ერთი დანაყოფის თითქმის $\pm \frac{7}{100}$-ს, ე. ი. 0,7 მილიმეტრს, თუ ლარტყა დაყოფილია სანტიმეტრებად. თუ

ლარტყის დაშორება 50 მეტრია, მაშინ ანათვლის ცდომილება იქნება $\pm\frac{0{,}7\ \text{მმ}}{\sqrt{2}}=\pm 0{,}5$ მმ.

4. ატმოსფერული პირობებისმიერი ცდომილება. დამზერისათვის მავნე ატმოსფერული მოვლენები შემდეგია: შუქის ჰაერში გარდატეხა ანუ რეფრაქცია, ჰაერის ღელვა, ქარი, წვიმა და ტემპერატურის უცაბედი ცვლილება. ქარის და წვიმის დამზერაზე ზეგავლენა უმნიშვნელოა, თუ ეს მოვლენები დიდი სიმძლავრისა არ არის. ჰაერის ღელვა, ფრიად მცირედ ადიდებს საშუალო ცდომილებას. სამაგიეროდ, რეფრაქციას შეუძლია გამოიწვიოს რამდენიმე მილიმეტრის ცდომილება; მაგრამ გამოცდილება გვიჩვენებს, რომ მისი ზეგავლენა შეიძლება თითქმის სავსებით გაბათილებულ იქნას, თუ დამზერის გარეშე დავტოვებთ ლარტყის ქვედა ნახევარ მეტრს. დასასრულ, ტემპერატურის უცაბედ ცვლილებას შეუძლია გამოიწვიოს ინსტრუმენტის ნაწილებში წონასწორობის დარღვევა, იგი უფრო მავნებელი იქნება იმდენად, რამდენადაც მეტი იქნება დროის შუალედი ორ დამიზნებას შორის (უკან და წინ).

დამზერის წარმოების სიჩქარე წარმოადგენს მისი სიზუსტის არსებით პირობას.

5. ლარტყის სიგრძის ცვალებადობისმიერი ცდომილება. ჰაერის სინოტივისა და ტემპერატურის ცვალებადობის ზეგავლენის ქვეშ ლარტყის სიგრძე განიცდის ცვლილებას, რომელიც ორგვარია:

a) დღის განმავლობაში ლარტყის სიგრძე იცვლება ტემპერატურის ცვლილებასთან ერთად; კიდეგანი მნიშვნელობა ამ ცვლილებისა, ლარტყის საშუალო დღიურ სიგრძესთან შედარებით, საერთოდ უდრის $\pm 0{,}02$ მმ-ს ყოველ მეტრზე, ანუ სიგრძის $\frac{1}{50\,000}$-ს.

b) ლარტყის სიგრძე განიცდის ნელს, მაგრამ ფრიად მნიშვნელოვან ცვლილებას, გამოწვეულს ხის შრობისა და ჰაერის სინოტივის ცვალებადობის მიერ; მისი უდიდესი მნიშვნელობა აღწევს ყოველ მეტრზე $\pm 0{,}2$ მილიმეტრიდან $\pm 0{,}3$ მილიმეტრამდე, ანუ ზოგადად $\pm\frac{1}{4000}$-მდე, ხოლო საშუალო ცდომილება გამოისახება $\pm\frac{1}{8000}$-ით. საზოგადოდ ეს ცდომილება სრულებით უმნიშვნელოდ უნდა ჩაითვალოს ჩვეულებრივ ნიველობაში. მაგრამ მთიან ადგილებში ამგვარ ცდომილებას შეუძლია მიიღოს ფრიად დიდი მნიშვნელობა, მაგალითად, თუ ლარტყებს აქვთ სისტემატური მცდარობა ყოველ მეტრზე

მხოლოდ 0,2 მილიმეტრი, მათ ძალუძთ გამოიწვიონ მ თ ე ლ ი დ ე ც ი მ ე ტ რ ი შეცდომა ნიველობის შედეგში იმ შემთხვევაში, თუ სიმაღლეთა სხვაობა ორ წერტილს შორის აღწევს 500 მეტრამდე; თვით საშუალო ცდომილება კი შეიძლება არ აღემატებოდეს ± 2 სანტიმეტრს.

III. ერთი გახედვის საშუალო ცდომილება, როგორც შედეგი ზემოთ მოყვანილ მავნე ფაქტორთა ზეგავლენისა.

ამის გამოსაყვანად, ვიგულვოთ, რომ ნიველირი დადგმულია სწორედ ორი წერტილის შუაში, რაც სპობს როგორც თანმხებლობის, ისე სალტეების უთანასწორობის ცდომილებებს; რომ ჭოგრის გამადიდებლობა 20-ია, ხოლო თარაზოს სიმრუდის რადიუსი 35 მეტრი (ერთი დანაყოფის საფასური ამ შემთხვევაში უდრის $\frac{3}{25\,000 \sin 1''}$ 24″-ს); რომ თარაზო მომარაგებულია სარკით ან პრიზმით. ამასთანავე უყურადღებოდ დავტოვოთ ცვალებადი ზეგავლენა მავნე ატმოსფერულ პირობათა და აგრეთვე ლარტყების სიგრძის ცვალებადობაც, რომელიც ზეგავლენას ახდენს მხოლოდ ფრიად უსწორმასწორო ადგილებში.

მაშასადამე, დარჩება ორი მავნე ფაქტორი, რომლებიც აზიანებენ ნიველობის სიზუსტეს: ერთია დადგმულობა ინსტრუმენტისა, მეორე— ლარტყის ანათვალი. როგორც ზემოთ დავინახეთ, პირველი მიზეზი წარმოშობს 100 მეტრით დაშორებული ლარტყის ანათვალში საშუალო ცდომილებას $\pm 0{,}6$ მმ-ს, ხოლო 50 მეტრის მანძილზე $\pm 0{,}3$ მმ-ს მეორე მიზეზი საშუალო ცდომილებას ლარტყის დანაყოფის ნაწილის შეფასებაში $\pm 0{,}7$ მმ-ს 100 მეტრის მანძილზე და 0,5 მმ-ს 50 მეტრის მანძილზე. მაშასადამე, ერთი გახედვის საშუალო ცდომილება 100 მეტრის მანძილზე იქნება

$$\pm \sqrt{(0{,}6)^2 + (0{,}7)^2} = \pm 0{,}92 \text{ მმ.}$$

ხოლო 50 მეტრის მანძილზე

$$\pm \frac{0{,}92}{\sqrt{2}} = \pm 0{,}65 \text{ მმ.}$$

თუ დამზერა გ ა ო რ კ ე ც ე ბ უ ლ ი ა (ჭოგრის და თარაზოს გადადებით და ათვლების განმეორებით), მაშინ ზემოთ მიღებული ცდომილება გაიყოფა $\sqrt{2}$-ზე, ე. ი. ე რ თ ი გ ა ხ ე დ ვ ი ს ს ა შ უ ა ლ ო ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა ი ქ ნ ე ბ ა: 100 მ ე ტ რ ი ს მ ა ნ ძ ი ლ ზ ე

$$\pm \frac{0{,}92 \text{ მმ}}{\sqrt{2}} - \pm 0{,}65 \text{ მმ,} \tag{15}$$

ხოლო 50 მეტრის მანძილზე

$$\pm \frac{0{,}65\ მმ}{\sqrt{2}} = \pm 0{,}46\ მმ, \qquad (15)$$

ასეთი იქნება ცალი გახედვის საშუალო ცდომილება ხელსაყრელ პირობებში; არახელსაყრელ პირობებში მიღებული რიცხვები უნდა იყოს გაორკეცებული; ე. ი. გვექნება: 100 მეტრისათვის ±1,30 მმ, 50 მეტრისათვის ±0,92 მმ.

IV. **ორი წერტილის დონეთა სხვაობის საშუალო ცდომილება.** საშუალო ცდომილება ორი წერტილის სიმაღლეთა სხვაობისა, რომლებიც ერთმანეთისაგან 200 მეტრით არიან დაშორებული, გამოისახება ფორმულით:

$$\pm 0{,}65\ მმ\sqrt{2} = \pm 0{,}92\ მმ, \qquad (16)$$

100 მეტრისათვის იქნება

$$\pm 0{,}46\ მმ\sqrt{2} = \pm 0{,}65\ მმ \qquad (16)$$

ასეთი ოდენობანი გვექნება ხელსაყრელი პირობებისათვის და გაორკეცებული დამზერის შემთხვევაში; არახელსაყრელ პირობებში მიღებული რიცხვები უნდა იყოს გაორკეცებული; სახელდობრ, 200 მეტრისათვის იქნება ±1,84 მმ, ანუ დამრგვალებით 2 მილიმეტრი; 100 მეტრისათვის 1,30 მმ, ანუ დამრგვალებით 1,5 მმ; ტექნიკურ ნიველობაში ეს უკანასკნელი რიცხვი შეიძლება გადიდებული იყოს 2 მმ-დე.

V. **კილომეტრული ცდომილება.** საშუალო ცდომილებას ერთკილომეტრიანი ნიველირსავალისათვის გამოვიყვანთ იმ გულვების ქვეშ, რომ პიკეტებს შორის მანძილის ნორმა არის 100 მეტრი; მაშასადამე, კილომეტრში მოქცეულია 10 სადგური. კილომეტრული საშუალო ცდომილება იქნება:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ხელსაყრელ პირობებში} & \pm 0{,}65\sqrt{10} = \pm 2\ მმ \\ \text{არახელსაყრელ პირობებში} & = \pm 4\ მმ \\ \text{საშუალო პირობებში} & = \pm 3\ მმ \end{array}\right\} \quad (17)$$

ამნაირია უდიდესი სიზუსტე, რომლის მიღწევა აღწერილ პირობებში შესაძლებელია გეომეტრიულ ნიველობაში.

საფრანგეთის უმაღლესი სიზუსტის ნიველობაში კილომეტრული საშუალო ცდომილება დაყვანილია ±1,5 მმ-მდე თარაზოს სიმრუდის რადიუსის 50 მეტრამდე გადიდებით. რადგანაც ამასთანავე ნიველირსავალი გაივლება ორჯერ (წინ და უკან), ამიტომ ორი შედეგის შუადის ცდომილება დაიწევს ±1,1 მმ-მდე ცალკეულ კილომეტრზე, ანუ იგი იქნება maximum 2 მმ-დან 2,5 მმ-მდე იმავე კილომეტრზე.

ჱი. ტახეომეტრია

1. საშუალო ცდომილება ორი წერტილის სიმაღლეთა სხვაობისა შეპირობებული მათ შორის მანძილისა და ვერტიკალური კუთხის ცდომილებით

გეოდეზიურ ნიველობაში მთავარი ნაწილი ფორმულისა, რომლითაც გამოითვლება ორი წერტილის სიმაღლეთა სხვაობა, არის

$$h = s\,\mathrm{tg}\,\alpha, \tag{18}$$

სადაც s არის მანძილი წერტილებს შორის, ხოლო α ვერტიკალური კუთხე, გამოსახული მინუტებში. აღვნიშნოთ საშუალო ცდომილება სიმაღლეთა სხვაობისა, მანძილისა და ვერტიკალური კუთხისა შესაბამისად ასოებით m_h, m_s, m_α.

ცნობილი წესის მიხედვით დავწერთ:

$$m_h^2 = \mathrm{tg}^2\alpha \cdot m_s^2 + \frac{s^3}{\cos^1\alpha} \cdot m_\alpha^2 \sin^2 1' \tag{19}$$

(18) ფორმულის სათვალავში მიღებით გვექნება:

$$m_h^2 = \frac{h^2}{s^2} \cdot m_s^2 + \frac{h^2}{\cos^2\alpha \sin^2\alpha} \cdot m_\alpha^2 \sin^3 1',$$

ანუ

$$m_h^2 = h^2 \left[\frac{m_s^2}{s^2} + \frac{4}{\sin^2 2\alpha} \cdot m_\alpha^2 \sin^2 1' \right],$$

საიდანაც შეფარდებითი ცდომილება იქნება:

$$\left(\frac{m_h}{h}\right)^2 = \left(\frac{m_s}{s}\right)^3 + \frac{4}{\sin^2 2\alpha} \cdot m_\alpha^2 \sin^2 1'. \tag{20}$$

როგორცა ვხედავთ, სიმაღლეთა სხვაობის სიზუსტე დამოკიდებულია გაზომილი სიგრძის სიზუსტეზე, კუთხის გაზომვის სიზუსტესა და თვით კუთხის სიდიდეზე; რაც უფრო ნაკლები იქნება α კუთხე, მით უფრო მეტი გამოვა შეფარდებითი $\left(\frac{m_h}{h}\right)$ ცდომილება.

ვაკე ადგილებში შეიძლება მივიღოთ $\cos\alpha = 1$; მაშინ (19) ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$m_h^2 = h^2 \cdot \left(\frac{m_s}{s}\right)^3 + s^2 \cdot m_\alpha^2 \sin^2 1'. \tag{21}$$

III. დასაშვები შეუკვრელობა სიმაღლეთა სხვაობების ჯამში ტახეომეტრიულ სავალში

გვაქვს ცნობილი ფორმულა

$$H=\sum_{1}^{n} h.$$

კვლავინდებურად დავწერთ (იხ. ფორმ. (21))

$$m_H^2=\Sigma\, m_h^2=\Sigma\left(h\cdot\frac{m_s}{s}\right)^2+\Sigma s^2\cdot m_\alpha^2\sin^2 1'. \qquad (22)$$

მანძილმზომით ხაზების სიზუსტე შეიძლება მიღებული იქნას $\frac{1}{300}$-ის თანასწორად. აღვნიშნოთ ეს სიზუსტე μ ასოთი; მაშინ გვექნება:

$$m_s=\mu\, s.$$

ამის მიხედვით ზემო ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$m_H^2=\mu^2\,\Sigma h^2+\Sigma\, s^2\cdot m_\alpha^2\sin^2 1'. \qquad (23)$$

თუ სავალის გვერდები იზომებოდა ფოლადის ბაფთით, მაშინ 27 §-ის მიხედვით შეგვიძლია მივიღოთ, რომ

$$m_s=\mu\sqrt{s},$$

სადაც

$$\mu=\frac{m}{\sqrt{a}}$$

და a გამოსახავს ზომარი ბაფთის სიგრძეს. მაშასადამე, (22) ფორმულა გადიწერება ასე:

$$m_H^2=\mu^2\Sigma\left(\frac{h^2}{s}\right)+\Sigma s^2\cdot m_\alpha^2\sin^2 1'. \qquad (24)$$

ტახეომეტრიული გვერდების საშუალო მნიშვნელობა იქნება:

$$\frac{\Sigma s}{n}=s_0,$$

ხოლო აქედან პერიმეტრი იქნება

$$\Sigma\, s=ns_0$$

და პერიმეტრის კვადრატი

$$(\Sigma s)^2=n^2s_0^2.$$

გამოვიყვანოთ შეფარდებითი მნიშვნელობა დასაშვები შეუკვრელობისა ტახეომეტრიული სავალის სიგრძის მიმართ. ამისათვის (23) და (24) ფორმულის ორივე ნაწილი გავყოთ პერიმეტრის კვადრატზე. მივიღებთ:

$$\left(\frac{m_{\text{н}}}{\Sigma s}\right)^2=\frac{\mu^2}{n^2 s_0^2}\cdot\Sigma h^2+\frac{n s_0^2}{n^2 s_0^2}\cdot m_\alpha^2\sin^2 1',$$

$$\left(\frac{m_{\text{н}}}{\Sigma s}\right)^2=\frac{\mu^2}{n^2 s_0^2}\cdot\Sigma\left(\frac{h^2}{s_0}\right)+\frac{n s_0^2}{n^2 s_0^2}\cdot m_\alpha^2\sin^2 1'.$$

მიღებულ ფორმულებში h-ის ნაცვლად შევიტანოთ მისი მნიშვნელობა $s_0 \operatorname{tg}\alpha$; გვექნება:

$$\left(\frac{m_{\text{н}}}{\Sigma s}\right)^2=\mu^2\cdot\frac{\Sigma \operatorname{tg}^2\alpha}{n^2}+\frac{1}{n}m_\alpha^2\sin^2 1'. \tag{25}$$

$$\left(\frac{m_{\text{н}}}{\Sigma s}\right)^2=\mu\cdot\frac{\Sigma \operatorname{tg}^2\alpha}{s_0 n^2}+\frac{1}{n}\cdot m_\alpha^2\sin^2 1'. \tag{26}$$

(25) ფორმულაში: $\mu=\pm\frac{1}{300}$ და $m_\alpha=\pm 0',5$.

(26) ფორმულაში: $\mu=\pm\frac{m}{\sqrt{a}}=\pm\frac{1^c}{\sqrt{2000^c}}=\pm\frac{1}{45}$ და $m_\alpha=0',5$.

VII

გაწონასწორებითი გამოთვლები ტოპოგრაფიულ პრაქტიკაში

30. სამკუთხედის კუთხეთა გაწონასწორება და მისი გვერდების გამოთვლის სიზუსტის შეფასება

ვთქვათ, ABC სამკუთხედში გაზომილია სამივე კუთხე და c გვერდი. ვთქვათ, კუთხეების ნამდვილი მნიშვნელობა არის A, B, C, ხოლო გაზომვით მიღებული მათი მნიშვნელობა შესაბამისად იყო α, β, γ.

გეომეტრიის მიხედვით

$$A+B+C=180^\circ,$$

ხოლო გაზომილი კუთხეების ჯამი იქნება

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ+f, \tag{1}$$

სადაც f არის კუთხეთა ჯამის *შეუკვრელობა*.

გაზომილ კუთხეთა მიხედვით, მოვნახოთ ყოველი მათგანის საბოლოო მნიშვნელობა. ყოველი კუთხისათვის ჩვენ გვექნება ორნაირი მნიშვნელობა; მაგალითად, A კუთხისათვის დავწერთ:

$$\begin{array}{lll} \text{ერთი მნიშვნელობა} & — & \alpha \\ \text{მეორე} \quad „ & — & \alpha'=180^\circ-\beta-\gamma \end{array} \tag{2}$$

აქ α', როგორც ვხედავთ, წარმოადგენს ჯამის ფუნქციას; ამიტომ 23 §-ის (16) ფორმულის საფუძველით გვექნება:

$$\frac{1}{p_{\alpha'}}=\frac{1}{p_\alpha}+\frac{1}{p_\gamma} \tag{3}$$

ამით გამოითვლება $p_{\alpha'}$ წონა.

α კუთხის p_α წონა ცნობილია უშუალო დამზერიდან. მაშინ 20 §-ის (2) ფორმულის ძალით

$$\alpha_0=\frac{\alpha p_\alpha+\alpha' p_{\alpha'}}{p_\alpha+p_{\alpha'}}.$$

ახლა განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როდესაც სამივე კუთხე გაზომილია თანაბარ პირობებში, ე. ი. მათი p_α, p_β, p_γ წონები ერთნაირია და, მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ

$$p_\alpha = p_\beta = p_\gamma = 1;$$

სხვაგვარად, გაზომვის ერთეულად მივიღოთ ცალი კუთხის გაზომვის სიზუსტე. ამის მიხედვით (3) ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{1}{p\alpha'} = 1 + 1 = 2,$$

ხოლო აქედან

$$p\alpha' = \frac{1}{2}\cdot$$

ნათქვამის ძალით, საერთო არითმეტიკული α_0 შუადისათვის გვექნება:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha + \frac{1}{2}\,\alpha'}{1 + \frac{1}{2}}\cdot$$

შევიტანოთ ამ გამოსახულებაში α'-ის მნიშვნელობა (2)-დან:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha + \frac{1}{2}\,(180 - \beta - \gamma)}{1\,\frac{1}{2}}\,, \qquad (4)$$

ანუ, მცირე გარდაქმნის შემდეგ,

$$\alpha_0 = \frac{1\,\frac{1}{2}\,\alpha + \frac{1}{2}\,(180^\circ - \alpha - \beta - \gamma)}{1\,\frac{1}{2}}\cdot$$

აქედან, როდესაც სათვალავში მივიღებთ (1)-ს, გვექნება:

$$\alpha_0 = \alpha + \frac{\frac{1}{2}\,(-f)}{1\,\frac{1}{2}} = \alpha - \frac{1}{3}\,f. \qquad (5)$$

ამნაირადვე დავწერთ

$$\left.\begin{aligned}\beta_0&=\beta-\frac{1}{3}f,\\ \gamma_0&=\gamma-\frac{1}{3}f.\end{aligned}\right\} \qquad (5)'$$

მაშასადამე, თუ სამკუთხედში სამივე კუთხე გაზომილია ერთნაირი სიზუსტით, მაშინ, კუთხეების შესასწორებლად, ყოველ მათგანში შეტანილი უნდა იყოს შეუკვრელობის მესამედი შებრუნებული ნიშნით.

ახლა განვიხილოთ სამკუთხედის გამოთვლილი გვერდის სიზუსტე. a გვერდისათვის გვექნება:

$$a=\frac{c\cdot\sin\alpha_0}{\sin\gamma_0}. \qquad (6)$$

გალოგარითმება მოგვცემს:

$$\lg a=\lg c+\lg\sin\alpha_0-\lg\sin\gamma_0.$$

ამ გამოხატულების დიფერენცირებით მივიღებთ:

$$\frac{da}{a}=\frac{dc}{c}+\operatorname{ctg}\alpha_0\cdot d\alpha_0\sin 1''-\operatorname{ctg}\gamma_0\,d\gamma_0\sin 1''. \qquad (7)$$

აქედან გამომდინარეობს ის დასკვნა, რომ თუ მოცემულია

c გვერდი	d_c	ცდომილებით
α_0 კუთხე	d_α	"
γ_0 კუთხე	d_γ	"

მაშინ a გვერდი გამოთვლილი ზემოთ მოცემული (6) ფორმულით, შემცველი იქნება da ცდომილებისა.

(7) ფორმულიდან ჩვენ არ შეგვიძლია უშუალოდ გადავიდეთ საშუალო ცდომილების გამოყვანაზე, როგორც ეს ხდება ხოლმე 18 §-ის (7) ფორმულის მიხედვით, ვინაიდან ამ შემთხვევაში საბოლოო α_0, β_0, γ_0 მნიშვნელობანი ურთიერთდამოუკიდებელი არ არიან. (4) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ α_0 არის სამივე გაზომილი α, β, γ, კუთხის ფუნქცია. ესევე ითქმის β_0 და γ_0 კუთხის შესახებაც. ამნაირად გამოდის, რომ α_0, β_0 და γ_0 კუთხეები წარმოადგენენ ერთნაირ ოდენობათა ფუნქციებს. 18 §-ის (7) ფორმულაზე გადასასვლელად გამოვიყვანოთ $d\alpha_0$ და $d\gamma_0$-ის მნიშვნელობა.

(4) გამოხატულების დიფერენცირება მოგვცემს:

$$d\alpha_0=\frac{2}{3}d\alpha-\frac{1}{3}d\beta-\frac{1}{3}d\gamma. \qquad (8)$$

ამნაირადვე გვექნება:

$$d\gamma_0=\frac{2}{3}\,d\gamma-\frac{1}{3}\,d\alpha-\frac{1}{3}\,d\beta. \qquad (8)'$$

შევიტანოთ მიღებული $d\alpha_0$ და $d\gamma_0$ (7) ფორმულაში; მსგავს წევრთა შეკრების შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{da}{a}=\frac{dc}{c}+\frac{1}{3}\,[(2\operatorname{ctg}\alpha_0+\operatorname{ctg}\gamma_0)\cdot d\alpha-(\operatorname{ctg}\alpha_0-\operatorname{ctg}\gamma_0)\cdot d\beta-$$
$$-(\operatorname{ctg}\alpha_0+2\operatorname{ctg}\gamma_0)\cdot d\gamma]\sin 1''.$$

ახლა უკვე გვაქვს უფლება გამოვიყენოთ 18 §-ის (7) ფორმულა, ვინაიდან da არის დამოუკიდებელ dc, $d\alpha$, $d\beta$ და $d\gamma$ ცდომილებათა წირული ფუნქცია. ხსენებული ფორმულის გამოყენება მოგვცემს:

$$\frac{m_\alpha^2}{\alpha^2}=\frac{m_c^2}{c^2}+\frac{1}{9}\,[(2\operatorname{ctg}\alpha_0+\operatorname{ctg}\gamma_0)^2\cdot m_\alpha^2+(\operatorname{ctg}\alpha_0-\operatorname{ctg}\gamma_0)^2\cdot m_\beta^2+$$
$$+(\operatorname{ctg}\alpha_0+2\operatorname{ctg}\gamma_0)^2\cdot m_\gamma^2]\sin^2 1''.$$

რადგანაც განსახილველ შემთხვევაში ჩვენ ნაგულისხმევი გვქონდა, რომ სამივე კუთხე გაზომილია თანაბარ პირობებში, ამიტომ

$$m_\alpha=m_\beta=m_\gamma=m$$

და ამის გამო

$$\left(\frac{m_\alpha}{a}\right)^2=\left(\frac{m_c}{c}\right)^2+\frac{1}{9}\,[(2\operatorname{ctg}\alpha_0+\operatorname{ctg}\gamma_0)^2+(\operatorname{ctg}\alpha_0-\operatorname{ctg}\gamma_0)^2+$$
$$+(\operatorname{ctg}\alpha_0+2\operatorname{ctg}\gamma_0)^2]\cdot m^2\sin^2 1''.$$

ფრჩხილების გახსნის შემდეგ მოგვეცემა:

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2=\left(\frac{m_c}{c}\right)^2+\frac{2}{3}\,[\operatorname{ctg}^2\alpha_0+\operatorname{ctg}^2\gamma_0+\operatorname{ctg}\alpha_0\cdot\operatorname{ctg}\gamma_0]\cdot m^2\sin^2 1'' \qquad (9)$$

ამნაირადვე მივიღებთ:

$$\frac{db}{b}=\frac{dc}{c}+\frac{1}{3}\,[(2\operatorname{ctg}\beta_0+\operatorname{ctg}\gamma_0)\,d\beta-(\operatorname{ctg}\beta_0-\operatorname{ctg}\gamma_0)\,d\alpha-$$
$$-(\operatorname{ctg}\beta_0+2\operatorname{ctg}\gamma_0)\,d\gamma]\sin 1''.$$

ხოლო შემდეგ:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2=\left(\frac{m_c}{c}\right)^2+\frac{2}{3}\,[\operatorname{ctg}^2\beta_0+\operatorname{ctg}^2\gamma_0+\operatorname{ctg}\beta_0\cdot\operatorname{ctg}\gamma_0]\cdot m^2\sin^2 1'' \quad (9)'$$

იმავე 18 §-ის (7) ფორმულის გამოყენებით (8) ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$m_{\alpha_0}^2=\frac{4}{9}m^2+\frac{1}{9}m^2+\frac{1}{9}m^2=\frac{2}{3}m^2,$$

საიდანაც

$$m_{\alpha_0}=m\sqrt{\frac{2}{3}} \tag{10}$$

ამნაირადვე გვექნება

$$m_{\beta_0}=m\sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{10'}$$

$$m_{\gamma_0}=m\sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{10''}$$

(4) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ $p_{\alpha_0}=1\frac{1}{2}$, და რადგანაც საზოგადოდ

$$m_i=\frac{\mu}{\sqrt{p_i}},$$

ამიტომ

$$m_{\alpha_0}=\frac{\mu}{\sqrt{1\frac{1}{2}}}=m\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

რადგანაც ჩვენ შემთხვევაში წონათა ერთეულად მიღებულია ერთი კუთხის გაზომვის წონა, ამიტომ

$$\mu=m,$$

და, მაშასადამე,

$$m_{\alpha_0}=m\sqrt{\frac{2}{3}},$$

ე. ი. წონათა გამოყენებით იგივე შედეგი მივიღეთ.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როდესაც სამკუთხედი თავისი მოყვანილობით უახლოვდება თანასწორგვერდიანს. ვთქვათ,

$$\alpha_0=\beta_0=\gamma_0=60°.$$

ამ შემთხვევაში (9) ფორმულა გვექნება:

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2=\left(\frac{m_c}{c}\right)^2+2\mathrm{ctg}^2 60°\cdot m^2\sin^2 1''=\left(\frac{m_c}{c}\right)^2+\frac{2}{3}m^2\sin^2 1'' \tag{11}$$

როდესაც გაზომილია მხოლოდ ორი α_0 და γ_0 კუთხე, მაშინ გამოვიყენებთ 27 §-ის (11) ფორმულას:

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2=\left(\frac{m_c}{c}\right)^2+(\mathrm{ctg}^2\alpha_0+\mathrm{ctg}^2\gamma_0)\,m^2\sin^2 1'',$$

რომელიც, როდესაც $\alpha_0=\gamma_0=60°$, მოგვცემს:

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2=\left(\frac{m_c}{c}\right)^2+2\,\mathrm{ctg}^2 60°\cdot m^2\sin^2 1''=\left(\frac{m_c}{c}\right)^2+\frac{2}{3}\,m^2\sin^2 1''.$$

მივიღეთ ფორმულა სავსებით იგივე (11) ფორმულისა.

31. გასწვრივი ნიველობის სიზუსტე და გაწონასწორების საფუძვლები

წინა თავში ვნახეთ, რომ ნიველობის სიზუსტე დამოკიდებულია უმთავრესად ორ ფაქტორზე: ეს არის ინსტრუმენტის დადგმულობა და ლარტყის ანათვალი, რომელთა ცდომილებანი შეაპირობებენ ნიველირსავალის საერთო ცდომილებას. იქ გვქონდა მიღებული ორი წერტილის სიმაღლეთა სხვაობისათვის (ცალ სანტიმეტრებად დაყოფილი ლარტყის შემთხვევაში), 200 მეტრის მანძილზე. ორკეცი დამზერის პირობაში, საშუალო ცდომილება $\pm 0{,}92$ მმ; თუ მანძილი ლარტყებს შორის 100 მეტრია, როგორც ეს არის მიღებული საბჭოთა კავშირის ტექნიკურ ნიველობაში, მაშინ იმავე საშუალო ცდომილებისათვის გვქონდა $\pm 0{,}65$ მმ, ხოლო საშუალო *კილომეტრული* ცდომილება იყო

$$\pm 0{,}65\sqrt{10}=\pm \text{ მმ (დამრგვალებით)}$$

ასეთი უნდა იყოს *პირველი ხარისხის* ტექნიკური ნიველობის სიზუსტე.

რუსეთის *მეორე ხარისხის* ტექნიკური ნიველობის პრაქტიკა საშუალო ღირსების ინსტრუმენტის (გამადიდებლობა 15—20-მდე, მგრძნობიერობა თარაზოსი 20—30″) და საჟენის ასედებად დაყოფილი ლარტყის შემთხვევაში იძლეოდა ლარტყის ანათვლისათვის დამრგვალებით 2 მმ-ის სიზუსტეს; აქედან, *ორი წერტილის დონეთა სხვაობის საშუალო ცდომილება* გამოდიოდა $\pm 2^{mm}\sqrt{2}$, ხოლო *კილომეტრული ცდომილება*

$$\pm 2\cdot\sqrt{2}\ \sqrt{10}=\pm 8{,}5 \text{ მმ.}$$

არახელსაყრელ პირობებში (მაგალითად, მერყევ ნიადაგზე, სუსტად გასარჩევი ლარტყების შემთხვევაში, ქარიან ამინდში და სხვ.) ხაზის ბოლო წერტილების დონეთა სხვაობის სიზუსტე მცირდება, მაგრამ კილომეტრული ცდომილება მაინც არ უნდა აღემატებოდეს

მოყვანილი ცდომილების ორკეც სიდიდეს, ე. ი. ± 17 მმ-ს. საზოგადოდ რუსეთის პრაქტიკით, საშუალო კილომეტრული ცდომილება, ხელსაყრელ პირობებში, იმყოფება $\pm 4{,}3$ მმ, და $\pm 8{,}5$ მმ შორის და ამ ფარგლებში მიღწეული სიზუსტე ყოველგვარი ტექნიკური საქმისათვის დამაკმაყოფილებლად ითვლება.

გასწვრივი ნიველობის სიზუსტის საკითხი განვიხილოთ ცდომილებათა თეორიის საფუძველზე.

ორი მეზობელი პიკეტის დონეთა h სხვაობა განისაზღვრება ფორმულით

$$h=a-b,$$

სადაც a და b წარმოადგენენ უკანა და წინა ლარტყის ანათვლებს. აღვნიშნოთ m ასოთი ცალი გახედვის საშუალო ცდომილება, ხოლო m_h-ით ორი პიკეტის დონეთა სხვაობის საშუალო ცდომილება; მაშინ, როგორც ცნიბილია,

$$m_h=m\sqrt{2}$$

რთულ გასწვრივ ნიველობაში, ინსტრუმენტის n-ჯერ დადგმის შემთხვევაში, ბოლო წერტილების დონეთა სხვაობის საშუალო M ცდომილება იქნება

$$M=m_h\sqrt{n}=m\sqrt{2n}, \tag{12}$$

რაც ჩვენთვის უკვე ცნობილია, თუ 10 გამოსახავს სადგურების რიცხვს ერთი კილომეტრის სავალზე, ხოლო m_k—ნიველობის საშუალო კილომეტრულ ცდომილებას, მაშინ წინანდებურად

$$m_k=m\sqrt{2\cdot 10}=m\sqrt{20} \tag{13}$$

(12) ფორმულის (13)-ზე გაყოფა მოგვცემს M-თვის:

$$M=m_k\sqrt{\frac{n}{10}}=m_k\sqrt{D}=m\sqrt{20\cdot D} \tag{14}$$

სადაც D არის ნიველირსავალის სიგრძე, გამოსახული კილომეტრობით, (14) ფორმულა გამოხატავს დამოკიდებულებას ნიველირსავალის ცდომილებასა და კილომეტრულ ცდომილებას შორის, ე. ი. ნიველირსავალის ცდომილება პროპორციულია კვადრატული ფესვისა მისი D სიგრძიდან. წინაუკმოდ, თუ ცნობილი იქნება M ცდომილება, მაშინ ნიველირსავალის კილომეტრული ცდომილება გამოითვლება ფორმულიდან:

$$m_k=\frac{M}{\sqrt{D}}. \tag{15}$$

m ოდენობა, ე. ი. საშუალო ცდომილება ლარტყაზე ცალი გახედვისა, რასაკვირველია, უნდა ითვლებოდეს მუდმივად, თუ მანძილი ნიველირიდან ლარტყამდე უცვლელი რჩება; მაგრამ თუ იგი ცვალებადია, მაშინ m პროპორციული იქნება ლარტყის ნიველირიდან დაშორებისა. მაშასადამე, თუ d გამოსახავს ლარტყების ურთიერთდაშორებას, მაშინ

$$m=\frac{1}{2}kd,$$

სადაც k—არის პროპორციულობის კოეფიციენტი, ხმარებული ინსტრუმენტისათვის უცვლადი. (14) ფორმულაში შევიტანოთ 10 სადგურის ნაცვლად შეფარდება $\frac{1}{d}$,—რომელშიაც მრიცხველი გამოხატავს ერთ კილომეტრს,—ხოლო m-ის მაგივრად $\frac{1}{2}kd$; მივიღებთ;

$$M=\frac{k\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{Dd}=\frac{k\cdot\sqrt{Dd}}{\sqrt{2}} \qquad (16)$$

ზემონათქვამიდან დავასკვნით:

a) ერთისა და იმავე ინსტრუმენტისათვის, ნიველობის ერთგვაროვან პირობებში (k მუდმივია) და ლარტყებს შორის უცვლელი d მანძილისათვის (d მუდმივაა), ნიველობის შედეგის ცდომილება ნიველირსავალის სიგრძის კვადრატული ფესვის პროპორციულია,—სხვა თქმით, სიზუსტე ნიველობისა იმავე სიგრძის კვადრატული ფესვის უკუპროპორციულია.

b) ერთისა და იმავე ინსტრუმენტისათვის, ნიველობის ერთგვაროვან პირობებში (k მუდმივია), D სიგრძის ნიველირსავალის შედეგის ცდომილება პიკეტებშორისი d მანძილის კვადრატული ფესვის პროპორციულია, ანუ, სხვა თქმით, სიზუსტე D სიგრძის ნიველირსავალისა იმავე d მანძილის კვადრატული ფესვის უკუპროპორციულია.

აქედან გამომდინარეობს ის დასკვნა, რომ ნიველობის სიზუსტის აწევისათვის უნდა შემცირებული იქნას მანძილი ლარტყებს შორის; ამას მოსდევს მუშაობის დროის გადიდება და სადგურების რიცხვის გამრავლება, რაც თავის მხრით მავნე ზეგავლენას ახდენს იმავე სიზუსტეზე. ამიტომ საჭიროა ისეთი პრაქტიკული შუადის მიღება, რომელიც მოგვცემს უდიდეს სიზუსტეს მუშაობის სიჩქარის შეუმცირებლად. სწორედ ამ მოთხოვნილების დასაკმაყოფილებლად ლარტყებშორისი მანძილისათვის მიღებულია ნორმა—100 მ.

82. ნიველირსავალის გაწონასწორება

წარმოვიდგინოთ, რომ ორი A და B წერტილის მიმართ, რომელთა სიმაღლე (აბსოლუტური თუ პირობითი) ზედმიწევნით არის ცნობილი, განისაზღვრება მესამე c წერტილის სიმაღლე. ვთქვათ, ამ უკანასკნელის A და B-დან დაშორება შესაბამისად არის D_1 და D_2. დავუშვათ, c წერტილის A-ს მიმართ ნიშნული არის h, ხოლო B-ს მიმართ $h+w$, ასე, რომ w წარმოადგენს ნიველობის შეუკვრელობას A და B წერტილს შორის c-ს გზით. ადვილად დამტკიცდება, რომ h და $h+w$ ნიშნულის წონები აღმოჩნდება D_1 და D_2 მანძილის უკუპროპორციული.

მართლაცდა, საშუალო ცდომილებანი დონეთა სხვაობებისა c-სა და A და B წერტილებს შორის, (14) ფორმულის მიხედვით, იქნება შესაბამისად

$$m_k\sqrt{D_1} \text{ და } m_k\sqrt{D_2},$$

ხოლო მათი p_1 და p_2 წონები, როგორც საშუალო ცდომილებათა კვადრატების უკუპროპორციული ოდენობანი, გამოისახება ასე:

$$p_1=\frac{\mu^2}{m_k^2D_1}, \quad p_2=\frac{\mu^2}{m_k^2D^2}$$

აქ μ-ს ქვეშ იგულისხმება საშუალო ცდომილება იმ ნიველირსავალისა, რომლის წონა არის 1 (ერთი). თუ ამ უკანასკნელი ნიველირსავალის ადგილას მივიღებთ ე რ თ კ ი ლ ო მ ე ტ რ ი ა ნ ნიველირსავალს, რომლის საშუალო ცდომილება m_k-ს უდრის, მაშინ

$$\mu=m_k, \quad p_1=\frac{1}{D_1}, \quad p_2=\frac{1}{D_2}. \tag{17}$$

როგორც უკვე ცნობილია, c წერტილის ფალბათიერესი hc ნიშნულის გამოსაყვანად h და $h+w$ უნდა გადავამრავლოთ შესაბამისად p_1 და p_2 წონებზე და შემდეგ მათი ჯამი გავყოთ წონების ჯამზე; გვექნება:

$$h_c=\frac{hp_1+(h+w)p_2}{p_1+p_2}=\frac{h\cdot\frac{1}{D_1}+(h+w)\frac{1}{D_2}}{\frac{1}{D_1}+\frac{1}{D_2}}=h+w\cdot\frac{D_1}{D_1+D_2} \tag{18}$$

მიღებულ გამოხატულებას მივუმატოთ და გამოვაკლოთ $\frac{D_2w}{D_1+D_2}$; მოგვეცემა მეორე ფორმულა:

$$h_c = (h + w) - w \cdot \frac{\overline{D}^2}{D_1 + D_2} \cdot \qquad (19)$$

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი წესი ნიველირსავალის გაწონას-წორებისა: თუ A და B წერტილს შორის ან კიდე კეტილ პოლიგონში ნიველობით განსაზღვრულია შუალედი C, D E, წერტილის (სამანებისა და პიკეტების) ნიშნულები და ამით მიღებულია w შეუკვრელობა, მაშინ ეს უკანასკნელი უნდა განწილული იქნას შუალედ წერტილებს შორის პროპორციულად მათი დაშორებისა საწყისი წერტილიდან.

გაწონასწორებული ნიველირსავალის კილომეტრული საშუალო ცდომილების გამოსაყვანად უნდა გამოვიყენოთ (15) ფორმულა, რომელშიაც M-ის ნაცვლად შევიტანთ w-ს; D იქნება მთელი სიგრძე ნიველირსავალისა.

33. ნიველირსავალთა ქსელის გაწონასწორება

როდესაც მოცემულია ურთიერთდამოუკიდებელ ნიველირსავალთა მთელი ქსელი, რომლებიც დაყრდნობილია ან ზუსტად ცნობილ სანიველო მარკებზე, ან წარმოადგენენ კეტილ პოლიგონებს, მაშინ ქსელის კილომეტრული საშუალო ცდომილების გამოსათვლელად უნდა ვიხმაროთ ფორმულა (20), რომელიც ქვემოთ არის გამოყვანილი.

ვთქვათ, დანიველებულია მთელი რიგი ხაზებისა სიგრძით D_1, D_2, D_3, D_n და მიღებულია შეუკვრელობანი, შესაბამისად W_1, W_2 W_3,… … W_n. ნიველირსავალთა წონები წინანდებურად გამოისახება შეფარდებებით

$$\frac{1}{D_1}, \ \frac{1}{D_2}, \ \frac{1}{D_3} \qquad \frac{1}{D_n}.$$

რადგან მოყვანილი შეუკვრელობანი განსჯილი უნდა იყოს როგორც ნიველირსავალების ნამდვილი ცდომილებანი, ამიტომ, როგორც გამოყვანილი გვქონდა 22 §-ში (ფორმ. (9)), საშუალო კილომეტრული m_k ცდომილების გამოსათვლელად უნდა გამოვიყენოთ ფორმულა:

$$m_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{w_1^2}{D_1} + \frac{w_2^2}{D_2} + \frac{w_3^2}{D_3} + \cdots + \frac{w_n^2}{D_n}} \qquad (20)$$

ესევე (20) ფორმულა შეიძლება გამოყენებული იყოს იმ შემთხვევაშიაც, თუ ნიველირსავალი გავლილია ორჯერ: წინ და უკან და მასზე გამართულია რამდენიმე სამანი. მაშინ D_1, D_2, D_3, იქნება

ორკეცი მანძილი სამანებს შორის (სიგრძე მარყუშისა), w_1, w_2, w_3 შეუკვრელობა სამანების ნიშნულებისა და n-რიცხვი მარყუშებისა. გერმანული (პრუსიული) ინსტრუქცია ნიველირსავალის ორკეცი ნიველობის ვარგისობის შესაფასებლად, არ კმაყოფილდება (20) ფორმულით გამოთვლილი კილომეტრული საშუალო ცდომილებით, არამედ ამცირებს მას $\frac{\sqrt{2}}{2}$-ზე გადამრავლებით. პრუსიული ინსტრუქციით ორივე ნიველირსავალი, გავლილი წინ და უკან, წონასწორდება ურთიერთის დამოუკიდებლად, რისთვისაც შეუკვრელობა იყოფა შუაზე და მიღებული ნახევარი განაწილდება სამანებს შორის პირდაპირი და შებრუნებული სავალისათვის ცალ-ცალკე. საბოლოო შედეგის გამოსაყვანად, აღებული უნდა იყოს ყოველი სამანისათვის შუადი ორი გაწონასწორებული ნიშნულიდან. პრუსიული ინსტრუქციით ნიველობა დამაკმაყოფილებელია, თუ ცდომილება არ აღემატება 3 მმ-ს კილომეტრზე და მის გამოსაყენებლად კიდევ დასაშვები, თუ ეს ცდომილება 3—5 მმ-ის ფარგლებშია მოქცეული.

პრაქტიკიდან დავინახეთ, რომ, თუ ნიველობის ხაზზე სამანები არ არის დასმული, მაშინ, წინ და უკან ნიველობის შემთხვევაში, შედეგის შეფასებაში უპირატესობა უნდა მიეცეს პრუსიულ ფორმულას.

ცდომილებათა განწილვა სანიველო პოლიგონებში შეიძლება მოხდეს როგორც მტკიცე გზით — უმცირეს კვადრატთა მეთოდის მიხედვით — ისე სანებური გამარტივებული გზითაც.

გაწონასწორების სანებური წესის შემთხვევაში, მიზანშეწონილი იქნება, თუ მოცემულ რთულ ქსელში ამოირჩევა რამდენიმე მთავარი ნიველირსავალი და მათი კვანძური წერტილები გაწონასწორდება უმცირეს კვადრატთა მეთოდის. ამის შემდგომ გამოითვლება შეუკვრელობანი დანარჩენი ნიველირსავალებისა (კვანძებს შორის), და ეს შეუკვრელობანი განაწილდება შუალედ წერტილებზე სავალთა სიგრძის პროპორციულად.

ქსელის გაწონასწორება შეიძლება უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გარეშეც. ამისათვის წინასწარ უნდა შედგენილი იყოს პოლიგონების სავალების ნახაზი, ყოველი პოლიგონის შიგნით უნდა ჩაწერილი იყოს მისი შესატყვისი შეუკვრელობა და ამის შემდეგ იგი განწილული იყოს ქვემორე წესის მიხედვით: თუ ორ მოსაზღვრე პოლიგონში შეუკვრელობებს აქვთ ერთი და იგივე ნიშანი, მაშინ მათი საერთო სავალი დატოვებული იქნება შეუსწორებლად და შეუკვრელობა განაწილდება პოლიგონების დანარჩენ გვერდებს შორის; თუ შეუკვრელობების ნიშნები ურთიერთწინააღმდეგია, მაშინ, პირიქით, უმჯობესია შეუკვრე-

ლობის უდიდესი ნაწილი გადავიტანოთ პოლიგონების საერთო სავალზე.

ფრიად ხელსაყრელია ქსელის გაწონასწორების ე. წ. თანდათანობითი მეთოდი, რომელსაც გამოვიყენებთ მაგალითის გადაწყვეტის გზით (35 § V შემთხვევა).

34. ნიველირსავალის შეუკვრელობის დასაშვები ნორმები

28 §-ში გამოყვანილი ნიველირსავალის კილომეტრული საშუალო ცდომილების მიხედვით (ფორმ. (17), ქვემოთ მოგვყავს ნიველირსავალის შეუკვრელობის ის დასაშვები ნორმები, რომლებიც მიღებული უნდა იყოს პირველი ხარისხის ნიველობაში. მანძილი პიკეტებს შორის ნაგულისხმევია 100 მეტრი, ხოლო ლარტყა სანტიმეტრებად დაყოფილი:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ხელსაყრელ პირობებში} & 2^{mm}\sqrt{D} \\ \text{არახელსაყრელ} & 4^{mm}\sqrt{D} \\ \text{საშუალო} & 3^{mm}\sqrt{D} \end{array}\right\} \quad (21)$$

ციფრები საფესურების წინ წარმოადგენენ ნიველირსავალის კილომეტრულ საშუალო ცდომილებას, ხოლო საფესურების ქვეშ მოქცეული D ასო—კილომეტრებში გამოსახულ ნიველირსავალის სიგრძეს.

თუ ლარტყა დაყოფილია საჟენის ასედებად, როგორც ეს მიღებული იყო ძველ რუსულ ლარტყებში, მაშინ საჟენის ასედი შეგვიძლია მივიღოთ დამრგვალებით (2 სანტიმეტრის თანასწორად), ვინაიდან 0,01 საჟ. = 2,134 სმ., და მაშინ წყვილ სანტიმეტრებად დაყოფილი ლარტყის შემთხვევაში შეუკვრელობის დასაშვები ნორმები, იმავე 100 მეტრის მანძილისათვის, იქნება:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ხელსაყრელ პირობებში} & 3^{mm},2\sqrt{D} \\ \text{არახელსაყრელ} & 6^{mm},4\sqrt{D} \\ \text{საშუალო} & 4,8\sqrt{D} \end{array}\right\} \quad (21)$$

35. ნიველირსავალის შეუკვრელობის მოსპობა

სხვადასხვა ცდომილებათა მიზეზით, რომლებიც მუდამ თან სდევს ნიველობის წარმოებას (ინსტრუმენტის დადგმულობისა და ლარტყის ანათვლის მცდარობა, ინსტრუმენტის მომწესობა, ცუდი ხილვადობა, რეფრაქცია და სხვ.), ნიველობის შედეგი აუცილებლად შეიცავს ცდომილებას, რომლის გათვალისწინება, მისი შემთხვევითი ხასიათის გამო, სრულე-

ბით შეუძლებელია. მაგრამ, როგორც ზემოთ გვქონდა ნაჩვენები, ნიველობის ყველა წესის დაცვის პირობებში, ხსენებული ცდომილება მაინც არ უნდა გასცილდეს განზღვრულ მაქსიმუმს; წინააღმდეგ შემთხვევაში ხაზის ნიველობა უნდა იყოს განმეორებული. ამნაირად, ხაზის ნიველობის დროს, შეცდომა, რომელსაც ტოპოგრაფიაში ეწოდება ნიველობის შ ე უ კ ვ რ ე ლ ო ბ ა, აუცილებელია, და მონიველეს წინაშე მუდამ არის ამოცანა ამ შეუკვრელობის მოსპობის შესახებ ისეთი ღონისძიებით, რომ ბოლო წერტილების დონეთა სხვაობის მნიშვნელობა იყოს უალბათიერესი. ამისათვის საჭიროა, რომ გაწონასწორების შემდეგ, ყოველი ორი მეზობელი შემაკავშირებელი წერტილის სიმაღლეთა სხვაობა დამზერით მიღებულ სხვაობას დაშორებული იყოს ისეთი მცირე ოდენობით, რომ არ აღემატებოდეს დამზერილ სიმაღლეთა სხვაობის მოსალოდნელ ცდომილებას; როგორც დავინახეთ, ეს იქნება საშუალოდ 1 მილიმეტრი ($\pm 0,65$ და 1 მმ).

რასაკვირველია, თუ ბოლო წერტილების სიმაღლეთა სხვაობა ზუსტად არის ცნობილი, მაშინ ნიველირსავალის გაწონასწორების დროს ბოლო წერტილების მოცემული სიმაღლეები უცვლელი დარჩება, ხოლო პიკეტებზე განწილული შეუკვრელობა არ უნდა აღემატებოდეს იმავე ზემოთ მოყვანილ რიცხვს—1 მილიმეტრს. ასევე ითქმის კეტილი პოლიგონის შესახებაც, რომლის თავი და ბოლო ერთ წერტილშია მოქცეული და, მაშასადამე, დონეთა სხვაობა არის ნული.

გასწვრივი ნიველობის ველში წარმოების დროს ჩვეულებრივ საქმე გვაქვს ხოლმე ხუთნაირ შემთხვევასთან და მათში შეუკვრელობის მოსპობის წესებს თანმიმდევრობით განვიხილავთ მაგალითებზე.

I შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. **ორი ერთმანეთის მიმდევარი ნიველირსავალის შეკვრა, რომლებიც გავლილია ერთი მიმართულებით.**

ეს ისეთი შემთხვევაა, როცა ნიველობა ხდება ორი ნიველირით დამოუკიდებლად, ერთი მეორის მიმდევრობით ერთსა და იმავე ბოლო წერტილამდე. თუ არც თავისა და არც ბოლოს სიმაღლე მოცემული არ არის, მაშინ საწყისი წერტილისათვის უნდა მივიღოთ პირობითი მნიშვნელობა, რომელიმე მრგვალი რიცხვი, მაგალითად 10 მეტრი, და, მის მიხედვით, გამოვთვალოთ ყველა სამანისა და პიკეტის ნიშნული.

a) განვიხილოთ ჯერ ისეთი შემთხვევა, როდესაც ნიველირსავალზე ს ა მ ა ნ ე ბ ი ა რ მ ო ი პ ო ვ ე ბ ა. ვთქვათ. ო რ ი ნ ი ვ ე ლ ი რ ი თ გავლილია მანძილი ინსტრუმენტების 22-ჯერ დადგმით და ორ სავალს შორის მიღებულია შეუკვრელობა 8 მმ; მაშასადამე, შეუკვრელობა ერთ სავალზე მოდის 4 მმ.

ლარტყები დაყოფილია სანტიმეტრებად, მუშაობის პირობები საშუალო. სიგრძე ნიველირსავალისა $D=2,2$ კმ.

მიღებული შეუკვრელობა (4 მმ) დასაშვებია, ვინაიდან (21) ფორმულის ძალით

$$4 \text{ მმ} < 3\sqrt{2{,}2} \text{ მმ}.$$

(0) პიკეტის ნიშნული მოცემულია, ხოლო (22) პიკეტის ნიშნული უნდა უდრიდეს ორი სავალით მიღებული სიმაღლეების არითმეტიკულ შუადს. მაშასადამე, შეუკვრელობა 4 მმ უნდა განწილული იყოს 21 პიკეტს შორის, (1)-დან (21)-მდე, მათი საწყისი წერტილიდან ((0) პიკეტი) დაშორების პროპორციულად, ანუ, რაც ერთი და იგივეა, გავლილი სადგურების რიცხვის პროპორციულად. პირველი (1) პიკეტისათვის შესწორება იქნება $\frac{4}{21} \times 1$, მეორისათვის — $\frac{4}{21} \times 2$ და ასევე შემდეგ: უკანასკნელი პიკეტისათვის — $\frac{4}{21} \times 21$. მიღებულ რიცხვებს დავამრგვალებთ მთელ მილიმეტრებამდე.

შეუკვრელობის განწილვა შეიძლება შესრულებული იყოს უფრო მარტივი წესითაც; სრულებით საჭირო არ არის შესწორების გამოთვლა ყოველი პიკეტისათვის ცალკე. საკმარისი იქნება ეს 4 მმ განვწილოთ სადგურების იმდენ ჯგუფზე, რამდენი მილიმეტრიცაა შეუკვრელობაში, ე. ი. 4 ჯგუფზე. ყოველ ჯგუფზე მოვა $\frac{24}{4} = 5$ პიკეტი; დარჩენილი 1 პიკეტი უნდა მიემატოს უკანასკნელ ჯგუფს, იმ მოსაზრების მიხედვით, რომ რაც უფრო დაშორებულია პიკეტი გამოსავალ წერტილს, მით უფრო მეტია მისი ცდომილება. მაშასადამე, ჯგუფები დაეწყობა ასე:

I ჯგუფი	—(1), (2), (3), (4), (5)	1^{mm}
II „	—(6), (7), (8), (9), (10)	2^{mm}
III	—(11), (12), (13), (14), (15)	3^{mm}
IV	—(16), (17), (18), (19), (20), (21)	4^{mm}

მაშასადამე, I ჯგუფის ყოველი ცალკეული პიკეტის შესწორება იქნება 1 მმ; II ჯგუფისა—2 მმ; III ჯგუფისა—3 მმ; IV ჯგუფისა—4 მმ.

თუ პირველი სავალის ნიშნული, ვთქვათ, მეორისაზე ნაკლები აღმოჩნდა, მაშინ ყოველ იმ შესწორებას, რომელიც უნდა მიემატოს პირველი სავალის პიკეტების ნიშნულებს, ექნება დადებითი ნიშანი. უკანასკნელ (22) პიკეტს მთლად ემატება 4 მილიმეტრი. თუ გამოთვლისათვის ავიღებთ მეორე სავალს, აქ, წინაუკმოდ, შესწორებებს ექნებათ უარყოფითი ნიშანი.

ზემოთ მოყვანილი გამოთვლა წესიერად რომ არის ნაწარმოები, ჩანს შემდეგი შემოწმებიდან: სიმაღლეთა სხვაობის ცვლილება ჯგუფებს შორის ეთანასწორება 1 მილიმეტრს,—მაშასადამე, 4 ჯგუფისათვის (3 შუალედი) ხსენებული ცვლილება იქნება 3 მილიმეტრი, რომელსაც უნდა მიემატოს სიმაღლის ცვლილება (0) პიკეტსა და I ჯგუფს შორის (1 მილიმეტრი); მივიღებთ 4 მილიმეტრს.

წარმოებული ნიველობის შესაფასებლად, გამოვთვალოთ კილომეტრული საშუალო ცდომილება, რომელიც (15) ფორმულის მიხედვით იქნება:

$$m_k = \pm \frac{4^{mm}}{\sqrt{2,2}} = \pm 2,7 \text{ მმ (დამრგვალებით } \pm 3^{mm}),$$

რაც არ გადასცილდება თეორიის მოთხოვნილებას და პრაქტიკის მონაცემს.

b) თუ ნიველირსავალზე, რომელიც გავლილია ორი თანმიმდევარი ნიველირით, დასმულია სამანები, მაშინ, შემაკავშირებელი წერტილების ნიშნულების გამოთვლის წინ ჯერ უნდა განვსაზღვროთ თვით სამანების ნიშნულები.

ავიღოთ მაგალითი. ვთქვათ, ნიველობა იწყება *A* წერტილში და თავდება *B* წერტილში და გავლილ ხაზზე დასმულია სამანები *C*, *D*, *E* წერტილში. სამანების სიმაღლეთა სხვაობა და მათ შორის მანძილები ორივე ნიველირისათვის შემდეგია:

AC (4 კმ)	*CD* (7 კმ)
+17,099	+32,688
+17,089	+32,674
w=+0,010=+10 მმ.	+0,014=+14 მმ.
DE (3 კმ)	*EB* (5 კმ)
+21,753	—38,209
+21,747	—38,197
+0,006=+6 მმ.	—0,012=—12 მმ.

მონიველეების მიერ გავლილი მანძილი არის 4+7+3+5=19 კილომეტრი და, მაშასადამე, სადგურების ნორმული რიცხვი იქნება 19×10=190. სავალებს შორის მიღებული შეუკვრელობა არის: 10+ +14+6—12=+18 მმ; აქედან ერთ სავალზე მოდის შეუკვრელობის ნახევარი $+\frac{18}{2}=+9$ მმ. იგი დასაშვებია, ვინაიდან

$$9 \text{ მმ} < 3\sqrt{19} \text{ მმ} = 13 \text{ მმ}.$$

ნიველირსავალის შესაკვრელად შეგვიძლია მოვიქცეთ ორნაირად. პ ი რ ვ ე ლ ი,—განწილვა შეუკვრელობისა (9 მმ) მოვახდინოთ სავსებით ისე, როგორც ზემოთ განხილულ შემთხვევაში, ე. ი. ხელსაწყო რიცხვის მიხედვით; მაშინ (1) პიკეტის შესწორება იქნება $-\frac{9}{189} \times 1$, 2-სა $\frac{9}{189} \times 2$ და ა. შ., ან კიდევ ჯგუფებად დაყოფით, რომელთა რიცხვი იქნება 9. პირველი 40 პიკეტის შესწორებათა ჯამი მოგვცემს პირველი (C) სამანის ნიშნულის შესწორებას; შემდეგი 70 პიკეტის შესწორებათა ჯამი მეორე (D) სამანის ნიშნულის შესწორებას და ა. შ. საშუალო კილომეტრული ცდომილება პირველი შემთხვევისათვის იქნება

$$m_k = \pm \frac{9}{\sqrt{19}} = \pm 2 \text{ მმ}.$$

მ ე ო რ ე მ ე თ ო დ ი მდგომარეობს იმაში, რომ ნიველობას სამანებს შორის განვიხილავთ როგორც დამოუკიდებელ ნიველირსავალს, გავლილს ორი ინსტრუმენტით. ამ შემთხვევაში სიმაღლეთა სხვაობის გამოსათვლელად ავიღებთ ორი რიცხვის შუადს ყოველი სამანისათვის ცალკე, ხოლო ნიშნულების გამოსათვლელად ხსენებულ შუადებს თანმიმდევრობით მივუმატებთ (0) პიკეტის ნიშნულს. მაგალითად, ასე:

A 224,905	C 241,999	D 274,680	E 296,430
AC + 17,094	CD + 32,681	DE + 21,750	EB − 38,203
C 241,999	D 274,680	E 296,430	B 258,227

შეუკვრელობას ყოველ უბანში განვწილავთ ისე, როგორც ზემოთ პირველ უბანში მოგვიხდება $\frac{10}{2} = 5$ მილიმეტრის განწილვა 40 პიკეტზე, მეორეში—$\frac{14}{2} = 7$ მილიმეტრის განწილვა 70 პიკეტზე და ა. შ., ჯგუფობრივი წესით.

მეორე შემთხვევა უფრო მარტივია, ვიდრე პირველი, მხოლოდ იძლევა ცოტა ნაკლებ სიზუსტეს. საშუალო კილომეტრული ცდომილება გამოითვლება (20) ფორმულით:

$$m_k = \pm \frac{1}{\sqrt{4}} \sqrt{\frac{5^2}{4} + \frac{7^2}{7} + \frac{3^2}{3} + \frac{6^2}{5}} = \pm 2{,}4 \text{ მმ}.$$

თუ ვიხმარდით პრუსიული სისტემის გამოთვლას (33 §), მაშინ კილომეტრული ცდომილება გამოვიდოდა ნაკლები, ე. ი. $\pm 2{,}4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \pm 1{,}7$ მმ; მაგრამ ამას არსებითი მნიშვნელობა არა აქვს.

II შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. **კეტილი ნიველირსავალის შეკვრა.**

ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს კეტილი მრავალკუთხედის (პოლიგონის) ნიველობასთან, როდესაც მონიველე უბრუნდება საწყის წერტილს. აქ ნიველირსავალის შეუკვრელობა ისეთივეა, როგორიც ნ ა ხ ე ვ ა რ შ ე უ კ ვ რ ე ლ ო ბ ა; ზემოთ განხილულ პირველ შემთხვევაში, და ამიტომ განწილვა შეუკვრელობისა და გამოთვლა საშუალო კილომეტრული ცდომილებისა წარმოებს იმნაირადვე, როგორც პირველ შემთხვევაში.

III. შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. **წინ და უკან გავლილი ნიველირსავალის შეკვრა.**

აქ უკან გავლილი სავალი შეგვიძლია მივამსგავსოთ პირველი შემთხვევის მეორე ნიველირით შესრულებულ ნიველირსავალს და გაწონასწორებისათვის გამოვიყენოთ იგივე ღონისძიება, რაც ხმარებული იყო პირველ შემთხვევაში. საშუალო კილომეტრული ცდომილების გამოსათვლელად უნდა გამოვიყენოთ იგივე (20) ფორმულა, მაგრამ მასში შეუკვრელობა ყოველი უბნისა უნდა მრიცხველში შევიტანოთ მთლიანად; რაც შეეხება მნიშვნელს, მასში უნდა შეტანილი იყოს ორკეცი მანძილი სამანებს შორის. თუ განსახილველ შემთხვევაში გამოვიყენებთ I შემთხვევის მაგალითს, მაშინ საშუალო კილომეტრული ცდომილება იქნება:

$$m_k = \pm \frac{1}{\sqrt{4}} \sqrt{\frac{10^2}{8} + \frac{14^2}{14} + \frac{6^2}{6} + \frac{12^2}{10}} = \pm 3{,}4 \text{ მმ}.$$

პრუსიული სისტემით გამოთვლა მოგვცემს $\pm 3{,}4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \pm 2{,}4$ მმ.

თვით ნიველობის წარმოების შესახებ საჭიროა გვახსოვდეს შემდეგი. ორჯერ, წინ და უკან გავლილი ნიველირსავალი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ორი დამოუკიდებელი ნიველირსავალი: მთავარი და საკონტროლო (როგორც I შემთხვევაში). უკან სვლის დროს საჭიროა შემკავშირებელი წერტილების მეორედ მიღებული სიმაღლეთა სხვაობა შევადაროთ პირველად მიღებულ სხვაობას. თუ პირველთა მეორეთაგან დაცილება აღემატება ლარტყის დანაყოფის ს ა მ მ ე ა თ ე დ ს (3 მილიმეტრს), მაშინ შესაბამის სადგურზე მესამედ უნდა იყოს დამზერილი სიმაღლეთა სხვაობა.

IV. შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა. **ნიველირსავალის შეკვრა, რომლის ბოლოების სიმაღლე (აბსოლუტური თუ პირობითი) მოცემულია, და რომელიც ნიველირით გავლილია ერთხელ.**

ვთქვათ, AB ნიველირსავალზე დასმულია ორი C და E სამანი, მასთან ზუსტი ნიველობით მიღებული B წერტილის სიმაღლე A-ს მიმართ არის 72,788 მეტრი. მანძილები სამანებს შორის და მათი ურთიერთაღმატება, მიღებული ტექნიკური ნიველობით, არის შემდეგი:

AC (15 კმ)	CE (22 კმ)	EB (12 კმ)
+54,517 მ.	−35,791 მ.	−91,484 მ.

აღმატება A წერტილისა B-ს მიმართ, მიღებული ტექნიკური ნიველობით, იქნება:

$$54{,}517-35{,}791-91{,}484=-72{,}758 \text{ მ}$$

$$\text{ნამდვილი აღმატება} \cdots = -72{,}788 \text{ მ.}$$

$$\text{შეუკვრელობა } \omega \cdots \quad -0{,}030 \text{ მ.}$$

მთელი სიგრძე ნიველირსავალისა არის:

$$\Sigma D=15+22+12=49 \text{ კმ;}$$

ამ მანძილზე ნორმული რიცხვი სადგურებისა იქნება 490, საშუალო პირობებში მიღებული შეუკვრელობა უნდა ჩაითვალოს დასაშვებად, ვინაიდან (21)-ის ძალით

$$30 \text{ მმ} < 4{,}8 \text{ მმ} \sqrt{49} = 33{,}6 \text{ მმ.}$$

ცალკე უბნების შეკრულობის გამოსათვლელად $\frac{\omega}{\Sigma D}$ უნდა გადავამრავლოთ უბნების შესაბამის სიგრძეზე; ამის შემდეგ დონეთა სხვაობების შესწორებული მნიშვნელობანი გამოითვლება ქვემოთ მოყვანილი ანგარიშის მიხედვით:

$$AC \qquad +54{,}517-\frac{0{,}030}{49}\times 15=+54{,}517-0{,}009_2=+54{,}508 \text{ მ}$$

$$CE \qquad -35{,}791-\frac{0{,}030}{49}\times 22=-35{,}791-0{,}013_5=-35{,}805 \text{ მ}$$

$$EB \qquad -91{,}484-\frac{0{,}030}{49}\times 12=-91{,}484-0{,}007_3=-91{,}491 \text{ მ.}$$

$$\text{ჯამი} = -72{,}788 \text{ მ}$$

საშუალო კილომეტრული ცდომილება იქნება:

$$\pm\frac{30}{\sqrt{49}}=\pm 4{,}3 \text{ მმ.}$$

იგივე ცდომილება გაწონასწორების შემდეგ შეკრულობათა მიხედვით იქნება

$$\pm\frac{1}{\sqrt{4}}\sqrt{\frac{(9,2)^2}{15}+\frac{(13,5)^2}{22}+\frac{(7,3)^2}{12}+\frac{0^2}{49}}=\pm 2,1 \text{ მმ.}$$

საფეხურის ქვეშ მყოფი მეოთხე წევრის მრიცხველი წარმოადგენს AB ნიველირსავალის უშუალო შეუკვრელობას, რომელიც, აშკარაა, უდრის ნულს.

V შემთხვევა. **შეკვრა ნიველირსავალისა, რომლის ბოლოების სიმაღლე (აბსოლუტური თუ პირობითი) მოცემულია და რომელიც გავლილია ნიველობით ორჯერ (წინ და უკან).**

ვთქვათ, გვაქვს იგივე AB ნიველირსავალი C და E სამანით, როგორც ზემოთ განხილულ შემთხვევაში, იმავე ზუსტ დონეთა სხვაობით —72,788 მ. ნიველირსავალი გავლილია ორჯერ, წინ და უკან, ერთი სავალის მეორესთან დამოუკიდებლად. გაწონასწორება ამ ორკეცი ნიველირსავალისა შეგვიძლია შევასრულოთ ორნაირი ხერხით: ერთი ე. წ. თანდათანობითი გაწონასწორების ღონეობა, მეორე— ჩვეულებრივი უშუალო. განვიხილოთ ცალ-ცალკე.

a) ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოთავსებულია როგორც ორკეცი ნიველობის შედეგები, ისე გაწონასწორების თანდათანობითი პროცესი.

1. გამოთვლიან ცალკე შეუკვრელობას B, E, C წერტილში და ჩაწერენ მას თანდათანობითი გაანგარიშების პირველ (1) სვეტში; გამოთვლიან A წერტილში მიღებულ საერთო შეუკვრელობას როგორც პირდაპირი, ისე შებრუნებული ნიველირსავალიდან, ამასთან პირდაპირი სავალის შეუკვრელობას ჩაწერენ იმავე პირველ სვეტში. მიღებული რიცხვები ასეთია:

$$-0,026,\ +0,034,\ -0,028,\ -0,040,\ (-0,020).$$

შენიშვნა. ხაზის შეკვრა შებრუნებული ნიველირსავალის მიხედვით წარმოებს იმავე წესით, როგორც პირდაპირი ნიველირსავალის შემთხვევაში, და შედეგიც უნდა იყოს ორივე შემთხვევაში ერთნაირი.

2. გამოთვლიან საშუალო კილომეტრულ ცდომილებას $\frac{w^2}{D}$ ფორმულის მიხედვით, ყოველი სამანისა და მთელი ნიველირსავალისათვის და ჩაწერენ მსხვილი ასოებით თანდათანობითი გაანგარიშების პირველ სვეტში w-ს ზემოდან. მიღებული რიცხვები:

$$\frac{(26)^2}{24}=28,\ \frac{(34)^2}{44}=26,\ \frac{(28)^2}{30}=26,\ \frac{(40)^2}{49}=33,\ \left[\frac{(20)^2}{49}=8\right].$$

ეს უკანასკნელი რიცხვი იწერება 33-ს გვერდით ფრჩხილებში (8).

ნიველობის მიმართულება	დამზერილ სიმაღლეთა სხვაობა	მანძილი სამანებს შორის D	თანდათანობითი გაანგარიშება		შეუკვრ. ω შეუკვრ. δ	შეკრულ სიმაღლეთა სხვაობა	$\frac{\delta^2}{D}$
			1	2			
1	*BEB*		28				
			−26	0	−26		
BE	+91,471	12	+13	+7,3	+20,3	$+91,491_3$	34,3
EB	−91,497	12	+13	−7,3	+ 5,7	$-91,491_3$	2,7
	−0,026	24	0	0	0	0	
2	*ECE*		26				
			+34	0	+34		
EC	+35,808	22	−17	+13,5	− 3,5	$+35,804_5$	0,5
CE	−35,774	22	−17	−13,5	−30,5	$-35,804_5$	42,3
	+0,034	44	0	0	0	0	
3	*CAC*		26				
			−28	0	−28		
CA	−54,531	15	+14	+9,2	+23,2	$-54,507_8$	35,9
AC	+54,503	15	+14	−9,2	+ 4,8	$+54,507_8$	1,5
	−0,028	30	0	0	0	0	117,2
4	*ABECA*						
			33(8)				
AB	−72,788		−40	−30	−40	−72,788	
BE	+91,471	12	+13	+7,3	+20,3	$+91,491_3$	
EC	+35.808	22	−17	+13,5	− 3,5	$+35,804_5$	
CA	−54,531	15	+14	+9,2	+23,2	$-54,507_8$	
	−0,040	49	−30	0	0	0	

ამ რიცხვების მიხედვით გამოითვლება საშუალო კილომეტრული ცდომილება პირდაპირი და, შემდეგ, შებრუნებული ნიველირსავალისათვის. რიცხვების ჯამები:

პირდაპირი სავალისათვის — 28+26+26+33=113 მმ.

შებრუნებული — 28+26+26+ 8= 88 მმ.

კილომეტრული საშუალო ცდომილება პირდაპირი სავალიდან:

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{113} = \pm 5{,}3 \text{ მმ.}$$

კილომეტრული საშუალო ცდომილება შებრუნებული სავალიდან:

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{88} = \pm 4{,}7 \text{ მმ.}$$

შესადარებლად მოვიყვანთ კილომეტრულ საშუალო ცდომილებას იმ გულვების მიხედვით, რომ ნიველირსავალზე სამანები არ იყო დასმული; იგი იქნება:

$$\pm \frac{30}{\sqrt{49}} = \pm 4{,}3 \text{ მმ.}$$

3. უბნების შეუკვრელობის გამოსათვლელად, პირდაპირი და შებრუნებული სავალისათვის ცალ-ცალკე დამზერით მიღებული რიცხვები (—26, +34, —28) უნდა გაიყოს შუაზე და შეცვლილი ნიშნით შეტანილ იქნას თანდათანობითი გაანგარიშების პირველი სვეტის შესაბამის ადგილებში. უკანასკნელ ზოლში დალაგებულია პირდაპირი ნიველირსავალის შეუკვრელობანი საერთო შეუკვრელობასთან ერთად (—40, +18, —17+14).

4. ხსენებული შეუკვრელობანი უნდა შევაჯამოთ w-თან ერთად; მიიღება 0, 0, 0, —30.

5. რადგან A წერტილში შეუკვრელობა არ ეთანასწორება ნულს, სახელდობრ არის 30 მმ, ამიტომ ეს უკანასკნელი განწილული უნდა იყოს უბნების სიგრძის პროპორციულად. გამოთვლილი რიცხვები: $\frac{30}{49} \times 12 = 7{,}3$, $\frac{30}{49} \times 22 = 13{,}5$, $\frac{30}{49} \times 15 = 9{,}2$, უნდა შეტანილი იქნას თანდათანობითი გაანგარიშების მეორე სვეტში შებრუნებული ნიშნით და ბოლოს ყველა ისინი—გაერთჯამებული შეუკვრელობასთან (—30).

6. გაერთჯამება მეორე სვეტში მოქცეული რიცხვებისა ყველგან იძლევა ნულებს, რაც მოწმობს გამოთვლის სისწორეს. შეუკვრელობა მოსპობილია.

7. „შეუკვრელობისა და შეკრულობის“ სვეტში მოთავსებულია w ყოველი ცალკე უბნისათვის, ხოლო მათ ქვემოდან ნიველირსავალების სიმაღლეთა სხვაობის δ შესწორება, რომელიც უდრის თანდათანობითი გაანგარიშების პირველისა და მეორე სვეტის ერთსა და იმავე სტრიქონზე მყოფი რიცხვების ჯამს. თუ გამოთვლა სწორია, მაშინ w-სა და δ-ს ჯამები მთელ სვეტში უნდა ეთანასწორებოდეს ნულებს.

8. ზემოთ გამოთვლილი შეკრულობანი (δ) უნდა მიემატოს ორივე სავალის დამზერილ სიმაღლეთა სხვაობებს და გამოითვლება უკვე შეკრული (შესწორებული) სამანებშორისო სიმაღლეთა სხვაობანი, მოთავსებულნი უკანასკნელის წინა სვეტში. გამოთვლის სისწორე მტკიცდება იმით, რომ ორივე რიცხვის ჯამები ეთანასწორება ნულს.

9. გაწონასწორებული სიმაღლეთა სხვაობების საშუალო კილომეტრული ცდომილების გამოსათვლელად აღებული უნდა იყოს δ შესწორებების კვადრატები, მანძილებთან შეფარდებული, და შემდეგ— მათი საერთო ჯამი, რომელიც იმ შემთხვევაში ეთანასწორება 117,2-ს. ეს ჯამი მცირედ განსხვავდება მეორე მუხლში მიღებული 113-გან, რაც მიეწერება შეცდომათა დაგროვებას გამოთვლის დროს; თვით საშუალო კილომეტრული ცდომილება შეკრულობის მონაცემთა მიხედვით გამოითვლება გამოხატულებიდან:

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(20,3)^2}{12} + \frac{(5,7)^2}{12} + \frac{(3,5)^2}{22} + \frac{(30,5)}{22} + \frac{(23,2)^2}{15} + \frac{(4,8)^2}{15}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{34,3 + 2,7 + 0,5 + 42,3 + 35,9 + 15} = \frac{1}{2}\sqrt{117,2} =$$

$$= \pm 5,4 \text{ მმ.}$$

პრუსიული ფორმულით იქნება:

$$m = \pm 5,4 \frac{\sqrt{2}}{2} = \pm 3,8 \text{ მმ.}$$

10. საშუალო კილომეტრული ცდომილება, გამოთვლილი პირდაპირი და შებრუნებული სავალისათვის ცალ-ცალკე, იქნება:

$$m_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(20,3)^2}{12} + \frac{(3,5)^2}{22} + \frac{(23\ 2)^2}{15} + \frac{0^2}{49}} = \pm 4,2 \text{ მმ.}$$

$$m_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5,7)^2}{12} + \frac{(30.5)^2}{22} + \frac{(4,8)^2}{15} + \frac{0^2}{49}} = \pm 3,4 \text{ მმ.}$$

შემოწმება:

$$m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} = \sqrt{(4\ 2)^2 + (3,4)^2} = \pm 5,4 \text{ მმ,}$$

რაც ეთანხმება წინა მუხლში გამოყვანილ საშუალო ცდომილებას.

b) უშუალო გამარტივებული გამოთვლა, რომელიც იძლევა იმავე შედეგებს, რაც ნახულია თანდათანობით გაწონასწორებაში, წარ-

მოებს შემდეგნაირად: ღებულობენ ორჯერ გავლილი უბნების დონეთა სხვაობების შუადებს, რომელთა ჯამს ადარებენ ბოლო წერტილების ნამდვილ სხვაობას; გამოთვლილ შეუკვრელობას ანაწილებენ ცალკე უბნებზე, სიგრძეთა მიხედვით, და ამით თავდება შეუკვრელობის გაბათილება:

$$91,484-\frac{-72,788+(91,484+35,791-54,517)}{49}\times 12=91,491_3 \text{ მ.}$$

$$35,791+0,013_5=35,804_5 \text{ მ}; \quad -54,517+0,009_2=-54,507_8 \text{ მ.}$$

საშუალო კილომეტრული ცდომილება, გაწონასწორების შემდეგ, გამოითვლება გამოხატულებით:

$$m=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(7,3)^2}{12}+\frac{(13,5)^2}{22}+\frac{(9.2)^2}{15}+\frac{0^2}{49}}=\pm 2.1 \text{ მმ.}$$

მიღებული ცდომილება ნამდვილზე ნაკლებია, ვინაიდან აქ, გამოთვლის დროს, საქმე გვქონდა უბნების სიმაღლეთა სხვაობების შუადებთან, რომელთა ჯამი უფრო დაახლოებულია ჭეშმარიტ სიმაღლეთა სხვაობასთან, ვიდრე ცალკეული ნიველირსავალების სიმაღლეთა სხვაობები.

როდესაც სამანები შეკრულია, შეუდგებიან შეუკვრელობის განწილვას ცალკე უბნებში, რაც კეთდება პირველ მუხლში ნაჩვენები წესით; ხოლო როდესაც შეკრული იქნებიან შემაკავშირებელი წერტილები, მაშინ მიმართავენ *შუალედი წერტილების* ნიშნულების გამოთვლასაც.

36. ერთმაგი ნიველირსავალის გაწონასწორება

წინა პარაგრაფებში განხილული გვქონდა ნიველირსავალის გაწონასწორების საფუძვლები და მასთან ერთად მოყვანილი იყო ყოველგვარი მაგალითი, რომლებიც პრაქტიკაში გვხვდება. ამ პარაგრაფში ერთმაგი ნიველირსავალის გაწონასწორებას მიუდგებით ცოტა სხვანაირად.

ვთქვათ, მოცემულია n—სადგურიანი ნიველირსავალი, გაწყობილი A და B წერტილს შორის, რომელთა H_a და H_b ნიშნული ზუსტად არის ცნობილი. განვსაზღვროთ რომელიმე E წერტილის H_e ნიშნული, რომელიც დაშორებულია A წერტილს K სადგურით. E წერტილის ნიშნული შეიძლება განსაზღვრულ იქნას ორი გზით: A წერტილიდან და B წერტილიდან.

გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= H_a + \sum_{1}^{k} h \\ H_2 &= H_b - \sum_{n}^{k+1} \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

H_e' და H_e^2-ს მნიშვნელობა ტოლზუსტი არ არის.

ცნობილი ფორმულის მიხედვით დავწერთ:

$$m_1 = m_h \sqrt{k},$$

$$m_2 = m_h \sqrt{n-k}.$$

მეორე მხრივ, წონის ცნების მიხედვით,

$$m_1 = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}},$$

$$m_2 = \frac{\mu}{\sqrt{p_2}}.$$

უკანასკნელი ორი წყვილი ფორმულის ურთიერთდაპირისპირება მოგვცემს:

$$p_1 = \frac{\mu^2}{m_n^2 \cdot k},$$

$$p_2 = \frac{\mu^2}{m_n^2 \cdot (n-k)}.$$

ვთქვათ, $\mu = m_n$, ე. ი. მივიღოთ წონის ერთეულად დონეთა სხვაობის განსაზღვრის სიზუსტე ცალკეულ სადგურზე; გვექნება:

$$p_1 = \frac{1}{k}, \quad p_2 = \frac{1}{n-k}. \qquad (23)$$

ახლა მიღებული გვაქვს ორი მნიშვნელობა H_1 და H_2 და მათი წონები p_1 და p_2 საძიებელი E წერტილისათვის და ამიტომ მარტივად განვსაზღვრავთ მის საბოლოო H_e ნიშნულს, საერთო არითმეტიკული შუადის ფორმულის დახმარებით მივიღებთ

$$H_e = \frac{H_1 \cdot P_1 + H_2 P_2}{P_1 + P_2}. \qquad (24)$$

ამ ფორმულის გამარტივების თვალსაზრისით, (22) ფორმულებში ავიღოთ სხვაობა ზემო და ქვემო გამოხატულებისა:

$$H_1 - H_2 = H_a - H_b + \sum_1^n h = \sum_1^n h - (H_b - H_a).$$

როგორცა ვხედავთ, ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს განსახილველი ნიველირსავალის შეუკვრელობას. აღვნიშნოთ იგი f ასოთი, გვექნება:

$$H_1 - H_2 = f,$$

საიდანაც

$$H_2 = H_1 - f.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა (24) ფორმულაში:

$$H_c = \frac{H_1 \cdot p_1 + (H_1 - f) \cdot p_2}{p_1 + p_2},$$

საიდანაც, მარტივი გარდაქმნის შემდეგ, მივიღებთ:

$$H_c = H_1 - f \cdot \frac{p_2}{p_1 + p_2}.$$

ამ გამოხატულებაში შევიტანოთ წონების მნიშვნელობა (23)-დან; საბოლოოდ გვექნება:

$$H_c = H_1 - \frac{f}{n} \cdot k \tag{25}$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა გამოხატავს ნიველირსავალის გაწონასწორების იმავე წესს, რაც დამტკიცებული იყო 32 §-ში.

ეხლა განვსაზღვროთ საბოლოო შედეგის სიზუსტე, რა მიზნითაც გამოვარკვიოთ E წერტილის H_c ნიშნულის p_c წონა.

როგორც უკვე ცნობილია,

$$p_c = p_1 + p_2,$$

ან კიდევ (23)-ის მიხედვით

$$p_c = \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} = \frac{n}{k(n-k)}. \tag{26}$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ პიკეტების გამოთვლილი საბოლოო მნიშვნელობანი არ შეიძლება ჩათვლილი იქნენ ერთნაირად საიმედოდ. ყველაზე დაბალი ღირსებისა იქნება ის შედეგი, რომლის p_c წონა იქნება უმცირესი. n რიცხვის შემთხვევაში p_c წონა იცვლება k რიცხვთან დამოკიდებულებით.

p_c-ს მინიმუმს ესატყვისება ქვემო გამოხატულების მაქსიმუმი:

$$y=k\,(n-k).$$

k-ს იმ მნიშვნელობის მოსანახად, რომელსაც მოგვცემს y ფუნქციისათვის მაქსიმუმს, ავიღოთ ამ ფუნქციის წარმოებული:

$$\frac{dy}{dk}=n-2k=0.$$

საიდანაც

$$k=\frac{n}{2} \tag{27}$$

მაშასადამე, გაწონასწორებული ნიველირსავალის ყველაზე სუსტ ადგილს წარმოადგენს მისი შუაგული:

ნიველირსავალის შუაწერტილის ნიშნულის წონა, გაწონასწორების შემდეგ, (26) და (27) ფორმულის ძალით, იქნება $\frac{4}{n}$.

შემდეგ, ცნობილია, რომ

$$m_c=\frac{\mu}{\sqrt{p_c}}=\frac{m_n}{\sqrt{p_c}},$$

ამიტომ ნიველირსავალის შუაწერტილისათვის იქნება

$$m_c=\frac{m_n}{2}\sqrt{n} \tag{28}$$

უკანასკნელი (23) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ მუშაობის განსაზღვრულ პირობებში, რომელიც ხასიათდება საშუალო m_n ცდომილებით, შესაძლებელია ვარაუდის გაწევა პიკეტების იმ რიცხვის შესახებ, რომელიც უნდა დაშვებული იყოს ნიველირსავალში, რომ სიზუსტე ყველაზე სუსტი ადგილისა არ იყოს ნაკლები, იმ სიზუსტეზე, რომელიც მოეთხოვება ამ პირობებში ნიველირსავალს. მაგალითად, თუ $m_n=\pm 1$ მმ, და არსებობს საჭიროება, რომ სამანების ნიშნულების საშუალო ცდომილება არ აღემატებოდეს ± 1 სმ-ს, მაშინ, (28) ფორმულის მიხედვით, გვექნება უტოლობა

$$\frac{1}{2}\text{ მმ }\sqrt{n}<1\text{ სმ},$$

საიდანაც

$$n<400.$$

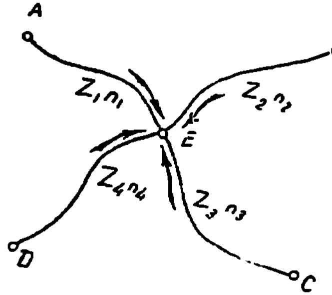
თუ, ვთქვათ, პიკეტებს შორის მანძილი მიღებულია 100 მ, მაშინ ნიველირსავალის სიგრძე შეიძლება იყოს 40 კილომეტრამდე.

37. გაწონასწორება ნიველირსავალთა ქსელისა, რომლებიც დაყრდნობილია მარკებსა და სამანებზე (რეპერებზე)

განსახილველ შემთხვევაში შეიძლება გამოყენებული იყოს ე. წ. კ ვ ა ნ ძ ე ბ ი ს მეთოდი.

I. **ერთი კვანძის შემთხვევა.** თუ A, B, C და D წერტილიდან (ნაკვთი 3), რომელთა ნიშნულები ცნობილია, გაწყობილია E წერტილამდე ნიველირსავალები, ამ შემთხვევაში E წერტილი გამოსახავს კ ვ ა ნ ძ ს. საძიებელია მიღებულ ნიველირსავალთა ქსელის გაწონასწორება.

ამ მიზნით, პირველ ყოვლისა, მონაცემთა მიხედვით, განვსაზღვრავთ E წერტილის H_e უალბათესი მნიშვნელობის ნიშნულს. ამისათვის ოთხი ნიველირსავალის საშუალებით გამოვთვლით E წერტილის ნიშნულის ოთხ ურთიერთ დამოუკიდებელ მნიშვნელობას— H_1, H_2, H_3, H_4. ამ ოდენობათა წონები შესაბამისად იქნება:



ნახ. 3

$$p_1=\frac{1}{n_1}, \quad p_2=\frac{1}{n_2}, \quad p_3=\frac{1}{n_3}, \quad p_4=\frac{1}{n_4},$$

სადაც n გამოსახავს სადგურების რიცხვს ნიველირსავალში.

საერთო არითმეტიკული შუადის ფორმულა მოგვცემს:

$$H_e=\frac{H_1p_1+H_2p_2+H_3p_3+H_4p_4}{p_1+p_2+p_3+p_4}.$$

ახლა შევადგინოთ სხვაობები:

$$H_1-H_e,\ H_2-H_e,\ H_3-H_e,\ H_4-H_e,$$

რომლებიც მოგვცემენ Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 ნიველირსავალების შეუკვრელობას; ამ უკანასკნელებს განვაწილებთ ნიველირსავალებზე გასწვრივი ნიველირსავალისათვის მიღებული წესის მიხედვით და ამით მოთავდება ქსელის გაწონასწორება.

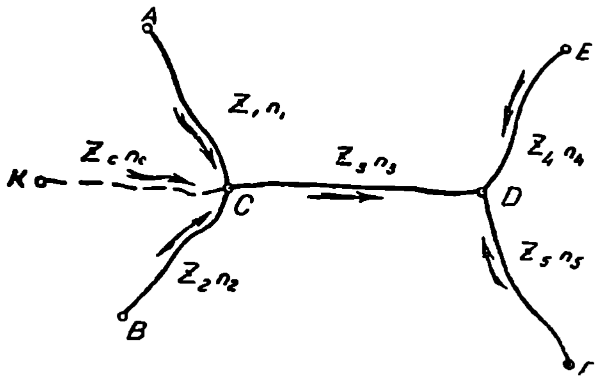
II. **ორი კვანძის შემთხვევა.** ვთქვათ, გაწონასწორებული უნდა იქნას 4 ნაკვთზე გამოსახული ფიგურა:

როგორც წინა შემთხვევაში, ჯერ განვსაზღვროთ C კვანძის H_1 და H_2 ნიშნულები Z_1 და Z_2 სავალების საშუალებით. ამ მნიშვნელობათა წონებია:

$$p_1=\frac{1}{n_1}, \quad p_2=\frac{1}{n_2}.$$

c წერტილის ნიშნულის უალბათიერესი მნიშვნელობა განსახილველი ორი სავალიდან იქნება:

$$H_c=\frac{H_1\cdot p_1+H_2\cdot p_2}{p_1+p_2}.$$



ნახ. 4

მიღებული H_c-ს წონა გამოითვლება ფორმულით:

$$p_c=p_1+p_2.$$

როგორც ჩვეულებრივ

$$p_c=\frac{1}{n_c},$$

სადაც n_c გამოსახავს ისეთი ერთეული ნიველირსავალის სადგურების რიცხვს, რომელსაც მივიღებთ ბოლო წერტილისათვის p_c ნიშნულის წონით.

შებრუნებულად გვექნება:

$$n_c=\frac{1}{p_c}.$$

ამნაირად, ორი Z_1 და Z_2 სავალის ნაცვლად რომ გაწყობილი ყოფილიყო მხოლოდ ერთი kc ნიველირსავალი n_c სადგურით, მაშინ c წერტილის ნიშნული ამ ნიველირსავალით გამოთვლილი იქნებოდა იმავე p_c წონით, და, მაშასადამე, იმავე სიზუსტით, რა სიზუსტეც მიღწეული იყო ორი Z_1 და Z_2 ნიველირსავალის შემთხვევაში. ამის

გამო წარმოსახვითი KC სავალი შეიძლება მიღებულ იქნას როგორც Z_1 და Z_2 სავალის ეკვივალენტური; ჩვენ მას აღვნიშნავთ Z_c ასოთი.

ეკვივალენტური Z_c სავალის მიღებით ჩვენი ამოცანა ღებულობს პირველი ამოცანის სახეს, სადაც კვანძად შეიქმნება D წერტილი. წინანდებურად გამოვთვლით D კვანძის ნიშნულს სამჯერ,—Z_4, Z_5 და (Z_c+Z_3) სავალის საშუალებით; მივიღებთ H_4, H_5 და H_{c+3} ნიშნულს. H_{c+3} მნიშვნელობა ფაქტიურად თანასწორი იქნება C წერტილის H_c ნიშნულისა, რომელსაც მიემატება Z_3-ს ამატებათა ჯამი. გამოთვლილი ნიშნულების წონები შესაბამისად იქნება:

$$p_4=\frac{1}{n_4}\,,\quad p_5=\frac{1}{n_5}\,,\quad p_{c+3}=\frac{1}{n_c+n_3}\cdot$$

მიღებულ მონაცემთა მიხედვით გამოვთვლით D წერტილის ნიშნულის საბოლოო მნიშვნელობას:

$$H_D=\frac{H_4\cdot p_4+H_5\cdot p_5+H_{c+3}\cdot p_{c+3}}{p_4+p_5+p_{c+3}}\,.$$

სხვაობები

$$H_4-H_D=f_4,\quad H_5-H_D=f_5,\quad H_{c+3}-H_D=f_{c+3}$$

გამოსახავენ Z_4, Z_5 და (Z_c+Z_3) ნიველირსავალების შეუკვრელობას.

Z_4 და Z_5 სავალის შეკვრა შესრულდება ჩვეულებრივი წესით. ხოლო რაც შეეხება (Z_c+Z_3) ნიველირსავალს, აქ

$$-\frac{H_{c+3}-H_D}{n_c+n_3}=a$$

გამოსახავს განსახილველი სავალის ცალი სადგურის შესწორებას. ამ შესწორების შეტანა Z_3 სავალის ყოველ სადგურში მოგვცემს სადგურების ამატებათა საბოლოო მნიშვნელობას ამ სავალში,

C წერტილის ნიშნულის საბოლოო H_c მნიშვნელობა გამოითვლება ფორმულით:

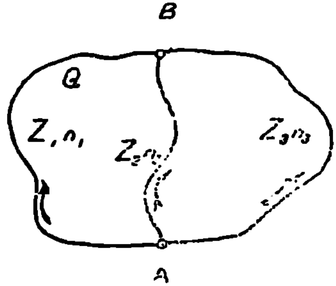
$$H_c=H_c+a\cdot n_c\,.$$

ახლა დაგვრჩენია Z_1 და Z_2 ნიველირსავალის გაწონასწორება, რისთვისაც გამოვთვლით H_1-H_c და H_2-H_c შეუკვრელობას ყოველი მათგანისათვის და განვწილავთ მათ უკვე ცნობილი წესით:

ზემოთ განხილული მეთოდი შეიძლება გამოყენებული იყოს მაშინაც, თუ ნიველირსავალთა ქსელში კვანძების რიცხვი ორზე მეტია.

38. კეტილ ნიველირსავალთა ქსელის გაწონასწორება

I შემთხვევა. ვთქვათ, მოცემულია ორი მომიჯნავე კეტილი ნიველირებული Q და R პოლიგონი, რომელთა საერთო ნაწილი მოქცეულია A და B პიკეტებს შორის (ნაკვეთი 5). A პიკეტი მივიღოთ როგორც საწყისი და, მისი აბსოლუტური თუ პირობითი ნიშნულის მიხედვით, გამოვთვალოთ B პიკეტის ნიშნული სამი Z_1, Z_2 და Z_3 ნიველირსავალის საშუალებით. მივიღებთ H_1, H_2, H_3 მნიშვნელობას შესაბამისი წონებით:



ნახ. 5

$$p_1=\frac{1}{n_1}, \quad p_2=\frac{1}{n_2}, \quad p_3=\frac{1}{n_3}.$$

საერთო არითმეტიკული შუალის ფორმულის დახმარებით გამოვთვლით B წერტილის ნიშნულის საბოლოო მნიშვნელობას:

$$H_b=\frac{H_1\cdot p_1+H_2p_2+H_3p_3}{p_1+p_2+p_3}.$$

ამის შემდეგ გამოვთვლით H_1-H_b, H_2-H_b, H_3-H_b სხვაობებს, რომლებიც წარმოადგენენ შეუკვრელობას Z_1, Z_2, Z_3 სავალებში, და მათ განვწილავთ ყოველ სავალში ცალკე.

II შემთხვევა. მოცემულია პოლიგონების ქსელი ოთხი A, B, C და D კვანძით (ნაკვეთი 6). ამგვარი ქსელის გაწონასწორება შეიძლება მიყვანილი იყოს ერთეულკეტილი ნიველირსავალის გაწონასწორებაზე. ნახაზზე ისრებით აღნიშნულია შვიდი ნიველირსავალის მიმართულება კვანძებს შორის. ვთქვათ, სავალების ბოლოების სიმაღლეთა სხვაობანი შესაბამისად არის h_1, h_2, h_7, ხოლო სადგურების რიცხვი სავალებზე— n_1, n_2, n_7.

ორი Z_1 და Z_2 სავალის მიხედვით გამოვთვლით A და B კვანძის უალბათიერეს h_{ab} სიმაღლეთა სხვაობას:

$$h_{ab}=\frac{h_1\cdot p_1+h_2\cdot p_2}{p_1+p_2},$$

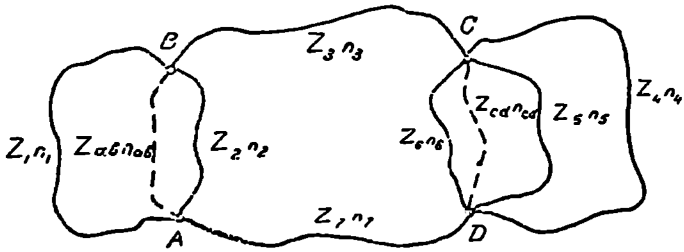
სადაც $p_1=\frac{1}{n_1}$ და $p_2=\frac{1}{n_2}$; მისი წონა იქნება

$$p_{ab}=p_1+p_2,$$

ხოლო ამის მიხედვით

$$n_{ab} = \frac{1}{p_{ab}}.$$

მაშასადამე, A და B კვანძებს შორის ჩვენ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ისეთი Z_{ab} ნიველირსავალი, რომლის სადგურთა რიცხვი იქნება n_{ab} და რომლის მიერ მოცემული შედეგის სიზუსტე ეკვივალენ-



ნახ. 6

ტური იქნება Z_1 და Z_2 სავალის მიერ მონაცემი სიზუსტისა. ამიტომ შემდგომში ჩვენ Z_1 და Z_2 სავალის ნაცვლად დროებით ვიგულისხმებთ ერთ Z_{ab} ნიველირსავალს, სადგურთა n_{ab} რიცხვით და დონეთა h_{ab} სხვაობით.

სამი Z_4, Z_5 და Z_6 ნიველირსავალის მეშვეობით ამნაირადვე გამოვთვლით C და D კვანძის დონეთა სხვაობის უალბათიერეს h_{cd} მნიშვნელობას:

$$h_{cb} = \frac{h_4 \cdot p_4 + h_5 p_5 + h_6 p_6}{p_4 + p_5 + p_6},$$

სადაც

$$p_4 = \frac{1}{n_4}, \quad p_5 = \frac{1}{n_6}, \quad p_6 = \frac{1}{n_6}.$$

მისი წონა იქნება:

$$p_{cd} = p_4 + p_5 + p_6,$$

ხოლო ამის მიხედვით

$$n_{cd} = \frac{1}{p_{cd}}.$$

n_{cd} წარმოადგენს სადგურების რიცხვს წარმოსახვით Z_{cd} სავალზე, რომელიც თავისი შედეგის სიზუსტით ეკვივალენტურია Z_4, Z_5, Z_6 ნიველირსავალის მიერ მოცემული შედეგის სიზუსტისა და, მაშასადამე, მას შეუძლია შემდგომში სამის მაგიერობა გასწიოს.

ამნაირად, რთული ფიგურის ნაცვლად, გაწონასწორება გვიხდება მხოლოდ ერთეული კეტილი $ABCD$ პოლიგონისა, რომელიც შემდგარია ოთხი სავალისაგან: Z_{ab}, Z_3, Z_{cd} და Z_7, გვექნება:

$$h_{ab}+h_3+h_{cd}+h_7=f,$$

სადაც f არის ხსენებული პოლიგონის შეუკვრელობა.

სადგურების რიცხვი პოლიგონში იქნება:

$$n_{ab}+n_3+n_{cd}+n_7=n,$$

ხოლო

$$-\frac{f}{n}=a$$

გამოსახავს განხილადი პოლიგონის ცალი სადგურის შესწორებას.

ამნაირად, Z_3 და Z_7 სავალი იქნება შეკრული, ხოლო Z_{ab} და Z_{cd} სავალისათვის ჩვენ გამოვთვლით A და B და C და D კვანძების დონეთა სხვაობის საბოლოო მნიშვნელობას; სახელდობრ:

$$h_{AB}=h_{ab}+a\cdot n_{ab},$$

$$h_{CD}=h_{cd}+a\cdot n_{ad}.$$

ეხლა h_1-h_{AB} და h_2-h_{AB} სხვაობები წარმოადგენენ Z_1 და Z_2 ნიველირსავალის შეუკვრელობას, ხოლო h_4-h_{CD}, h_5-h_{CD} და h_6-h_{CD} სხვაობანი—Z_4, Z_5 და Z_6 სავალის შეუკვრელობას. შეუკვრელობათა განწილვით ცალკეულ სავალებზე მთავრდება სანიველო ქსელის გაწონასწორება. პიკეტების ნიშნულების გამოთვლა სრულდება ჩვეულებრივი წესით.

ზემოთ განხილული გაწონასწორების წესი შეიძლება გავრცელებული იქნას ნებისმიერად რთულ ქსელზედაც.

39. ნიველებულ ქსელთა გაწონასწორების მაგალითი

სანამ შევუდგებოდეთ ქვემოთ მოყვანილი მაგალითის გადაწყვეტას, გავიხსენოთ ის ცნებები, რომლებიც წინა პარაგრაფებში გვქონდა განხილული:

μ — ერთეული განაზომის (სიმაღლეთა სხვაობის საშუალო ცდომილება, რომლის წონა ერთეულია ($p=1$);

μ_1 — ცალი სადგურის სიმაღლეთა სხვაობის საშუალო ცდომილება

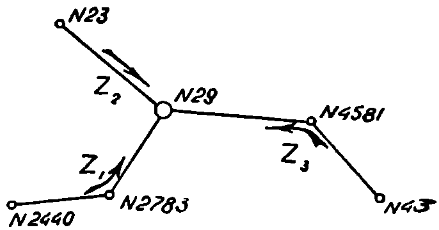
η — მიახლოებითი x_0 მნიშვნელობის შესწორება, 20 §-ის (2), ფორმულის მიხედვით

$$x = x_0 + \frac{\Sigma\, p\eta}{\Sigma\, p}.$$

ბ გადახრა არითმეტიკული შუადიდან: 22 §-ის (13) და (14) ფორმულები

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\,(p\delta^2)}{n-1}}, \quad m_x = \pm\frac{\mu}{\sqrt{\Sigma p}} = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\,(p\delta^2)}{\Sigma p\cdot(n-1)}}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი*. მოცემულია სამი Z_1, Z_2, Z_3 ნიველირსავალი, გამოსული № 23, № 43 და № 2440 მარკიდან, რომელთა ნიშნული ზუსტად არის ცნობილი. სავალები იყრებიან კვანძსამანში № 29 (ნაკვთი 7). გამოსავალი მონაცემები და გადაწყვეტის განრიგი მოცემულია ქვემო ტაბულებში *a*) და *b*).



ნახ. 7

ყოველ სავალში გამოითვლება აღმატებათა ჯამი, საერთო რიცხვი სადგურებისა და სავალის წონა და შემდეგ სავალის ბოლოს ნიშნული— წ ი ნ ა ს წ ა რ ი (ტაბულა (*a*)). ამ გამოთვლათა საფუძველზე დგება ტაბულა (*b*), რომელშიაც გამოითვლება საბოლოო H_{29} ნიშნული და ხდება შედეგის სიზუსტის შეფასება.

საკითხის გასაშუქებლად განვიხილოთ I მაგალითში Z_1 სავალის გამოთვლა. განხილულ სავალში წ ი ნ ა ს წ ა რ ი ნ ი შ ნ უ ლ ი იქნება:

$$103{,}776_0 + 0{,}117_9 = 103{,}893_9.$$

ასევეა გამოთვლილი წინასწარი ნიშნულები Z_2 და Z_3 სავალშიც.

კვანძის მიახლოებით მნიშვნელობად მიღებულია უმცირესი წინასწარი ნიშნული (Z_2):

$$x_0 = H'_{29} = 103{,}886.$$

საბოლოო მნიშვნელობა კვანძის ნიშნულისა არის:

$$x = H_{29} = 103{,}891.$$

Δh შესწორება გამოითვლება სულ ბოლოში.

---

* А. С. Чеботарев. Способ наименьших квадратов.

მარკებისა და სამანების №№	გაზომილ სიმაღლეთა სხვაობა h მმ	სადგ. რიცხვი n	წონა $p=\frac{100}{n}$	შესწორება Δh მმ	შესწორებულ სიმაღლეთა სხვაობა $h+\Delta h$	წინასწარი ნიშნული H' მ	საბოლოო ნიშნული H მ
			ს ა ვ ა ლ ი Z_1				
2440							$103,776_0$
	+6,2	2		−1,2	+5,0		
2783							103,781
	+111,7	4		−1,7	+110,0		
29			16			$103,893_9$	103,891
Σ	117,9	6		−2,9	+115,0		
			ს ა ვ ა ლ ი Z_2				
23							105.869_3
	−1983,0	6		+4,7	−1978,3		
29			16			$103,886_3$	103,891
Σ	−1983,0	6		+4,7	−1978,3		
			ს ა ვ ა ლ ი Z_3				
43							$102,018_3$
	+743,1	3		−10,4	+732,7		
4581							102,751
	+1130,7	4		+9,3	+1140,0		
29			14			$103,892_7$	103,891
Σ	+1873,8	7		−1,1	+1872,7		

სავალის №№	H'_{29}	η	p	$p\eta$	δ	$p\delta$	$p\delta^2$
Z_1	$103,893_9$	+7,9	16	+126,4	−3,2	−51,2	163.8
Z_2	$,886_3$	+0,3	16	+4,8	+4,4	+70,4	309,8
Z_3	$,892_1$	+6,1	14	+85,4	−1,4	−19,6	27,4
არითმ. შუალი	$103,890_7$		46	+216,6		−0,4	501,0

მიახლ. მნიშვ. $H'_2=103,886$; $\frac{\Sigma p\eta}{\Sigma p}=\frac{216,6}{46}=+4,7$;

$$H_{29}=103,886+0,004_7=103,890_7.$$

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{\Sigma p\delta^2}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{501}{2}}=\pm 15,8 \text{ მმ};$$

$$\mu_1=\frac{\mu}{\sqrt{100}}=\pm 1,58 \text{ მმ}; \quad m_x=\frac{\mu}{\sqrt{\Sigma p}}=\pm\frac{15,8}{\sqrt{46}}=\pm 2,3 \text{ მმ}.$$

40. ტახეომეტრიული ქსელის გაწონასწორება

ალმატებათა გაწონასწორება, რომელიც მიღებულია ტახეომეტრიული წესით, შეიძლება შესრულებული იყოს იმავე მეთოდით, როგორიც ნიველებულ ქსელთა გაწონასწორების დროს. აქ მხოლოდ საჭიროა გარკვეული იყოს, თუ რა უნდა იქნას მიღებული ამა თუ იმ ტახეომეტრიული სავალის წონად.

ამ მიზნით განვიხილოთ 29 §-ის (19) ფორმულა, რომელიც გამოსახავს ორი მეზობელი წერტილის სიმაღლეთა სხვაობის საშუალო ცდომილებას. სიმაღლეთა h სხვაობა, როგორც ცნობილია, განისაზღვრება ფორმულით:

$$h=s\operatorname{tg}\alpha.$$

ზემოხსენებული (19) ფორმულა არის:

$$m_h^2=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot m_s^2+\frac{s^2}{\cos^4\alpha}\cdot m_\alpha^2\sin^2 1'. \qquad (29)$$

ვთქვათ, ნიველობა წარმოებს ვაკე ადგილზე; მაშინ ერთი სადგურიდან მეორეზე დამიზნების დროს დახრის α კუთხე შეიძლება ჩათვლილ იქნას უმნიშვნელო ოდენობად (0°-დან 3°-მდე). ასეთ შემთხვევაში $\cos\alpha$ შეიძლება მიღებული იყოს ერთის თანასწორად, ხოლო $\operatorname{tg}\alpha$-ს მნიშვნელობა მოქცეული იქნება 0-სა და 0,1-ის ფარგლებში. მაშინ გვექნება:

$$m_h^2=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot m_s^2+s^2\cdot m_\alpha^2\sin^2 1' \qquad (30)$$

თუ ტახეომეტრიული აგეგმვის დროს სიგრძეები იზომება ფოლადის ბაფთით, ე. ი. სიზუსტით $\frac{1}{1000}-\frac{1}{2000}$, ხოლო შვეული კუთხეები სიზუსტით 1′-მდე, მაშინ (30) ფორმულის მარჯვენა ნაწილში პირველი წევრი, მეორესთან შედარებით, მცირე გამოვა. ასეთ შემ-

თხვევაში m_h ცდომილება შეიძლება მიღებული იყოს s მანძილის პროპორციულად. ამის მიხედვით დაიწერება:

$$m_h = \lambda s.$$

h ამაღლების p წონა გამოისახება ფორმულით:

$$p = \frac{\mu^2}{m_n^2},$$

ანუ

$$p = \frac{\mu^2}{\lambda^2 s^2}.$$

მუდმივი $\frac{\mu^2}{\lambda^2}$ ოდენობა აღვნიშნოთ k ასოთი, ე. ი. მივიღოთ $\frac{\mu^2}{\lambda^2} = k$, მაშინ

$$p = \frac{k}{s^2}.$$

ჩვეულებრივ k-ს მნიშვნელობისათვის აიღება 1, 10, 100, ვთქვათ, $k=1$; გვექნება:

$$p = \frac{1}{s^2}. \tag{31}$$

აქედან დავასკვნით, რომ განსახილველ შემთხვევაში, ორი წერტილის სიმაღლეთა სხვაობის წონა მათშორისი მანძილის კვადრატის უკუპროპორციულია.

ამიტომ, თუ გვაქვს ერთეული ტახეომეტრიული სავალი, გაწყობილი ორ ნიშნულიან წერტილს შორის და შემდგარი n კარშიკისაგან მათი h_1, h_2, h_n სიმაღლეთა სხვაობებით, მაშინ სავალის შეუკვრელობა უნდა განწილული იყოს სიმაღლეთა სხვაობებს შორის კარშიკების სიგრძის კვადრატის პროპორციულად.

რადგანაც ტახეომეტრიული სავალის საწყისი და ბოლო წერტილის სიმაღლეთა H სხვაობა გამოისახება ფორმულით

$$H = \sum_1^n h,$$

ამიტომ ამ სიმაღლეთა სხვაობის P წონა 23 §-ის (16) ფორმულის მიხედვით განისაზღვრება გამოხატულებით:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \cdots + \frac{1}{p_n},$$

ხოლო (31)-ის ძალით, გამოხატულებით:

$$\frac{1}{P}=s_1^2+s_2^2+s_3^2+\quad+s_n^2,$$

საიდანაც

$$P=\frac{1}{s_1^2+s_2^2+s_2^2+\cdots+s_n^2} \tag{32}$$

ამ ფორმულით გამოითვლება ცალკეული ტახეომეტრიული სავალების წონა, რის შემდეგაც შეუდგებით ტახეომეტრიული ქსელის გაწონასწორებას იმ წესრიგის მიხედვით, რომელიც აღწერილია 31—39 §§-ში.

თუ s მანძილები იზომება მ ა ნ ძ ი ლ მ ზ ო მ ი თ, ამ შემთხვევაშიაც შეგვიძლია დავუშვათ, რომ ცდომილება მანძილში თვით მანძილის პროპორციულია, ე. ი.

$$m_s=\nu_s \tag{33}$$

მაშასადამე, (3) ფორმულა გადახალისდება ასე:

$$m_h^2=s^2(\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\nu^2+m_\alpha^2\sin^2 1').$$

ამგვარად, განხილად შემთხვევაშიაც ვაკე ადგილებისათვის შეგვიძლია მივიღოთ, რომ

$$p=\frac{1}{s^2}, \tag{31}$$

და შეუკვრელობის განწილვა მოვახდინოთ ზემოთ ნაჩვენები წესის მიხედვით.

თუ დასანიველებელი ადგილი მცირედ უსწორმასწოროა, ე. ი. გვხვდება 3°-ს გადაცილებული დახრის კუთხეები, მაშინ (29) ფორმულის მარჯვენა ნაწილში პირველი წევრი თვალსაჩინოდ სჭარბობს მეორეს; ამიტომ განსახილველ პირობებში უმჯობესად უნდა იყოს მიჩნეული 29 §-ის (21) ფორმულა:

$$m_h^2=h^2\cdot\left(\frac{m_s}{s}\right)^2+s^2\cdot m_\alpha^2\sin^2 1',$$

რომელიც, (33)-ის მიხედვით, მიიღებს ასეთ სახეს:

$$m_h^2=h^2\nu^2+s^2\cdot m_\alpha^2\sin^2 1'. \tag{34}$$

ამ გამოსახულების მარჯვენა ნაწილში პირველი წევრი (ადგილობრივი პირობების მიხედვით) სჭარბობს მეორეს; ამიტომ წონასათვის უნდა მივიღოთ ფორმულა

$$p=\frac{k}{n^2}.$$

როდესაც მანძილი აიღება გ ე გ მ ა ზ ე, როგორც ამას აქვს ხოლმე ადგილი სიმაღლეების განსაზღვრის დროს მენზულით აგეგმვაში, მაშინ m_s ცდომილება არ არის დამოკიდებული თვით მანძილზე, და ამიტომ წონის საკითხი გაურკვეველი ხდება. სიმარტივისათვის შეგვიძლია მივიღოთ, რომ

$$p=\frac{1}{s};$$

მაგრამ უფრო მიზანშეწონილი იქნება ყველა აღმატების წონა მარტივად ვიგულვოთ ერთის თანასწორად.

აღმატებათა წონის განსაზღვრის ზემოთ აღწერილი წესი აგრეთვე გამოიყენება ბორცვიანი ადგილის შემთხვევაშიაც.

41. პოლიგონის გაწონასწორება კუთხზომითი აგეგმვით

პოლიგონის ყველა გვერდისა და კუთხის გაზომვის დროს გვაქვს ხოლმე ს ა მ ი ჭ ა რ ბ ი მ ო ნ ა ც ე მ ი, რომელთა მიხედვით უნდა დაკმაყოფილებული იყოს სამი პირობა:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^n \beta-180^\circ(n-2)=0,\\&\sum_1^n \Delta x=0,\\&\sum_1^n \Delta y=0,\end{aligned}\right\}\qquad(35)$$

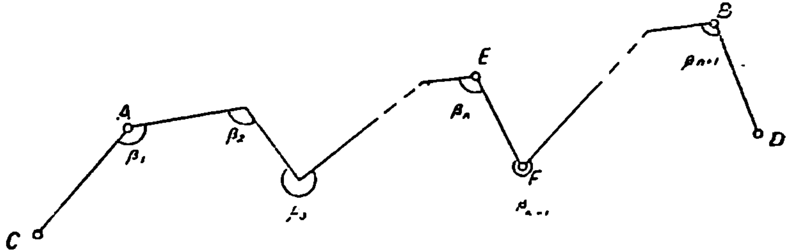
კეტილ მრავალკუთხედში.

ღია პოლიგონში, მარჯვნივ მდებარე კუთხეების თვლის შემთხვევაში, ეს პირობები მიიღებენ ასეთ სახეს:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^{n+1} \beta+(\alpha_b-\alpha_a)-180^\circ(n+1)=0,\\&\sum_1^n \Delta x-(x_b-x_a)=0,\\&\sum_1^n \Delta y-(y_b-y_a)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(36)$$

სირთულის თავიდან აცილების თვალსაზრისით, პოლიგონის გაწო-ნასწორების დროს, ცალკე აწონასწორებენ კუთხეებსა და ცალკე კო-ორდინატთა ნაზრდებს.

1. ვთქვათ, A და B წერტილს შორის (ნახ. 8) გაწყობილია n გვერდიანი პოლიგონი, რომლის β_1, β_2, β_3 β_{n+1} კუთხე გაზომი-ლია უშუალოდ, მიმიჯენელი CA და DB გვერდის α_a და α_b აზიმუტი მოცემულია. საძიებელია α_k აზიმუტის განსაზღვრა EF გვერდისათვის, რომლის რიგობრივი ნუმერი A-დან არის k.



ნახ. 8

EF გვერდის აზიმუტისათვის შეგვიძლია გამოთვლით მივიღოთ ორი მნიშვნელობა: ერთი—CA გვერდის მიმართ, სახელდობრ,

$$\alpha_k' = \alpha_a + k \cdot 180^\circ - \sum_1^k \beta;$$

მეორე—DB გვერდის მიმართ,

$$\alpha_k'' = \alpha_b - (n+1-k) \cdot 180^\circ + \sum_{k+1}^{n+1} \beta.$$

აზიმუტი წარმოადგენს გაზომილ კუთხეთა ჯამის ფუნქციას. ვი-გულვოთ, რომ განხილად პოლიგონში არ მოიპოვება მოკლე გვერ-დები და ყველა კუთხის გაზომვა წარმოებული იყო თანაბარ პირობებ-ში, ე. ი. ყველა განაზომი ტოლზუსტია. აღვნიშნოთ ცალი კუთხის გაზომვის საშუალო ცდომილება m ასოთი და აზიმუტისა m_α-თი, გვექნება:

$$m_{\alpha'} = m \cdot \sqrt{k},$$

$$m_{\alpha''} = m \cdot \sqrt{n+1-k}.$$

მეორეს მხრით, წონის ცნების მიხედვით,

$$m_{\alpha'} = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}},$$

სადაც p_1 არის EF ხაზის აზიმუტის წონა. მაშასადამე,

$$m\cdot\sqrt{k}=\frac{\mu}{\sqrt{p_1}},$$

საიდანაც

$$p_1=\frac{\mu^2}{m^2k}\cdot$$

თუ დავუშვებთ $\mu=m$, ე. ი. თუ წონის ერთეულად მივიღებთ ცალი კუთხის გაზომვის წონას, მაშინ

$$p_1=\frac{1}{k}\cdot$$

ამნაირადვე დავინახავთ, რომ

$$p_2=\frac{1}{n+1-k}$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ განსახილველ შემთხვევაში არსებობს სრული ანალოგია ერთეული ნიველირსავალის გაწონასწორების მაგალითთან, რომელიც განხილული იყო 36 §-ში. ამიტომ ცხადია, რომ შედეგში ჩვენ მივალთ ისეთივე დასკვნამდე, რაც გამოიხატებოდა ფორმულით (36 §-ის (25) ფორმ.)

$$\alpha_k=\alpha_k'+\frac{f_\beta}{n+1}\cdot k, \tag{37}$$

სადაც f_β წარმოადგენს შეუკვრელობას სავალის კუთხეთა ჯამში.

უკანასკნელი ფორმულა (37) შესაძლებლობას გვანიჭებს მივიდეთ შემდეგ დასკვნამდე: პოლიგონის გვერდების აზიმუტების უალბათიერესი მნიშვნელობის მისაღებად, საკმარისია პოლიგონის კუთხეთა ჯამის შეუკვრელობა თანასწორად განაწილებული იქნას შებრუნებული ნიშნით ყველა კუთხეზე, რის შემდეგაც შეუდგებიან გვერდების აზიმუტების გამოთვლას საწყისი და ბოლო გვერდის აზიმუტიდან გამოსვლით.

EF გვერდის აზიმუტის წონა გაწონასწორების შემდეგ იქნება

$$p_k=p_1+p_2=\frac{n+1}{k\,(n+1-k)}\cdot$$

ამნაირი გაწონასწორების შემდეგ უსუსტესი ადგილი იქნება პოლიგონის შუაგული. როდესაც

$$k=\frac{n+1}{2}\cdot$$

მაშინ

$$p_k=\frac{4}{n+1}.$$

მიღებული დასკვნა სამართლიანი იქნება კეტილი პოლიგონის შემთხვევაშიაც.

2. ვთქვათ, ახლა, პოლიგონში (ნახ. 8) გაზომილია გვერდების $s_1, s_2, s_3, \cdots s_n$ სიგრძე, მოცემულია ბოლო წერტილების კოორდინატები $A(x_a, y_a)$ და $B(x_b, y_b)$ და გამოთვლილია კოორდინატების ნაზრდები მთელ სავალზე. განსასაზღვრელია რომელიმე E წერტილის კოორდინატები x_n, y_e.

E წერტილის კოორდინატებისათვის ჩვენ გვექნება ორი მნიშვნელობა: A წერტილის მიმართ

$$\left.\begin{aligned} x_e'&=x_a+\sum_1^k \Delta x, \\ y_e'&=y_a+\sum_1^k \Delta y. \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

B წერტილის მიმართ

$$\left.\begin{aligned} x_e''&=x_b-\sum_{k+1}^n \Delta x, \\ y_e''&=y_b-\sum_{k+1}^n \Delta y. \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

მოყვანილ ოდენობათა წონების განსაზღვრა წარმოადგენს ფრიად რთულ საქმეს; ამიტომ ანგარიშის გამარტივების თვალსაზრისით, ჩვეულებრივ გულვობენ, რომ პოლიგონის ყოველი წვეროს გამოთვლილი კოორდინატების წონა უკუპროპორციულია სავალის სიგრძისა, რომლითაც დაშორებულია საწყის წერტილს განსაზღვრადი წვერო; ასეთი გულვება ახლოა ჭეშმარიტებასთან, ვინაიდან ცხადია, რომ რაც უფრო გრძელია პოლიგონი, მით უფრო ნაკლები იქნება მისი ბოლოს კოორდინატების განსაზღვრის სიზუსტე.

აღვნიშნოთ x_e' და y_e' კოორდინატების წონა p_1 ასოთი, ხოლო x_e'' და y_e'' კოორდინატებისა p_2-თი: შემდეგ აღვნიშნოთ

$$\sum_1^k s=S_1, \quad \sum_{k+1}^n s=S_2, \quad \sum_1^n s=S;$$

მივიღებთ

$$p_1 = \frac{1}{S_1}, \quad p_2 = \frac{1}{S_2}. \tag{40}$$

გასაგებია, რომ ამგვარი განსაზღვრა კოორდინატების წონისა აუცილებლად შეიცავს თვითნებობის ელემენტს; გარდა ამისა, ისიც უნდა იყოს მხედველობაში მიღებული, რომ E წერტილის კოორდინატები, გამოთვლილი (38) და (39) ფორმულით, არ არიან სავსებით ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი, რადგანაც ისინი მიღებულია გაწონასწორებული აზიმუტების საშუალებით. მაგრამ, როგორც გამოცდილება გვიჩვენებს, ზემოხსენებული გარემოებანი შეიძლება უგულვებელვყოთ.

E წერტილის კოორდინატების უალბათიერესი მნიშვნელობის გამოსათვლელად გვაქვს ფორმულები:

$$\left.\begin{aligned} x_e &= \frac{x_e' \cdot p_1 + x_e'' \cdot p_2}{p_1 + p_2}, \\ y_e &= \frac{y'_e \cdot p_1 + y''_c \cdot p_2}{p_1 + p_2}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

აღვნიშნოთ შეუკვრელობა აბსცისებისა და ორდინატების ნაზრდებში შესაბამისად f_x და f_y ასოებით; გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n \Delta x &= x_b - x_a + f_x, \\ \sum_1^n \Delta y &= y_b - y_a + f_y. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

მეორე მხრივ, (38) და (39) ფორმულების ურთიერთგამოკლებით გვექნება:

$$x_e'' - x_e' = x_b - x_a - \sum_1^n \Delta x,$$

$$y_e'' - y_e' = y_b - y_a - \sum_1^n \Delta y,$$

საიდანაც, როდესაც ანგარიშში მივიღებთ (42)-ს, გვექნება:

$$x_e'' = x_e' - f_x,$$
$$y_e'' = y_e' - f_y.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობანი (41) ფორმულებში:

$$x_e=\frac{x_e'\cdot p_1+(x_e'-f_x)\,p_2}{p_1+p_2},$$

$$y_e=\frac{y_e'\,p_1+(y_e'-f_y)\,p_2}{p_1+p_2};$$

ხოლო აქედან, მცირე გარდაქმნის შემდეგ:

$$x_e=x_e'-\frac{p_2}{p_1+p_2}\cdot f_x,$$

$$y_e=y_e'-\frac{p_2}{p_1+p_2}\cdot f_y.$$

მიღებულ ფორმულებში შევიტანოთ წონების მნიშვნელობა (40)-დან:

$$\left.\begin{aligned} x_e&=x_e'-\frac{fx}{S}\cdot S_1\\ y_e&=y_e'-\frac{fy}{S}\cdot S_1\end{aligned}\right\}\qquad(43)$$

ამ ფორმულებიდან, გამოვიყვანთ შემდეგ დასკვნას: კოორდინატთა ნაზრდების გაწონასწორებისათვის უნდა შებრუნებული ნიშნით აღებული f_x და f_y შეუკვრელობა განწილული იქნას შესაბამი აბსცისებსა და ორდინატებს შორის მანძილების პროპორციულად საწყისი წერტილიდან. რადგან, პოლიგონის ყოველი წვერო გამოთვლება უკანა წვეროს მდებარეობის მიმართ, ამიტომ შესწორება კოორდინატთა ნაზრდებისა ხდება პოლიგონის გვერდების სიგრძის პროპორციულად; მაშინ (43) ფორმულებში S იქნება პოლიგონის პერიმეტრი, ხოლო S_1 გვერდის სიგრძე.

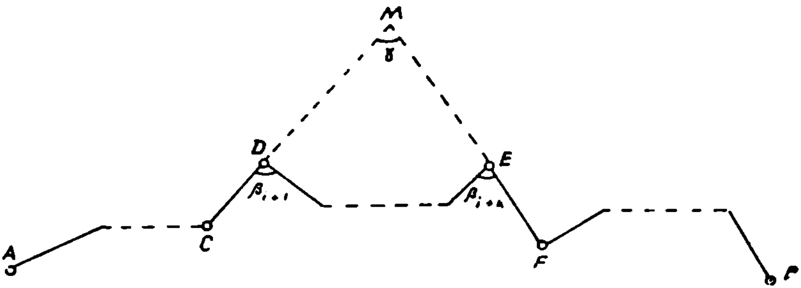
თავისთავად გასაგებია, რომ ზემოთ დადგენილი კოორდინატთა ნაზრდების გაწონასწორების წესი სამართლიანია კეტილი პოლიგონისათვისაც.

42. კუთხზომილი პოლიგონების ქსელის გაწონასწორება

ზემო პარაგრაფიდან აშკარად ჩანს, რომ თუ კუთხზომილი პოლიგონების ქსელი გაწყობილია წერტილებს შორის, რომელთა კოორდინატები ზუსტად არის ცნობილი, და იმავე დროს ქსელი ხსენებულ წერტილებში დაყრდნობილია ზუსტი აზიმუტების მქონე გვერდებზე, მაშინ ასეთი ქსელის კუთხეებისა და კოორდინატთა ნაზრდების გაწო-

ნასწორება შეიძლება მოხდენილი იყოს კვანძების გაწონასწორების მეთოდით, სავსებით იმავე წესით, რაც გამოყენებული იყო 37 §-ში, ნიველირსავალთა ქსელის გაწონასწორებისათვის; აქ კუთხეების გაწონასწორების დროს აზიმუტის წონა მიიღება როგორც შესაბამი სავალის კუთხეთა რიცხვის უკუპროპორციული, ხოლო წერტილის კოორდინატების წონა — სავალის სიგრძის უკუპროპორციული.

კეტილი კუთხზომილი პოლიგონების ქსელის გაწონასწორების დროს შეიძლება სარგებლობა 38 §-ში აღწერილი მეთოდით, სადაც



ნახ. 9

გამოყენებული იყო განშტოებათა ეკვივალენტური შენაცვლება; ამასთანავე აბსცისებისა და ორდინატების ნაზრდების გაწონასწორების დროს ამგვარ ეკვივალენტად შეიძლება გამოყენებული იყოს იმ კვანძების აბსცისებისა ან ორდინატების სხვაობა, რომელთა შორის გაწყობილია შესანაცვლებელი სავალები. რაც შეეხება კუთხეების გაწონასწორებას, აქ ეკვივალენტის მოსანახად მივმართავთ ქვემოთ წარმოდგენილ მეთოდს.

ვთქვათ, გვაქვს კუთხზომილი პოლიგონი $ACDEFB$ (ნაკვთი 9). დავამყაროთ კავშირი სავალის CF ნაწილის $\beta_{i+1}, \beta_{i+2}, \cdots \beta_{i+k}$ კუთხეთა და იმ γ კუთხეს შორის, რომელიც შექმნილია კიდური CD და EF გვერდის განგრძნობით მათ M წერტილში შეხვედრამდე.

ცნობილია, რომ აზიმუტი

$$(EF)=(CD)+k\cdot 180^\circ - \sum_{i+1}^{i+k}\beta,$$

ხოლო მეორეს მხრით

$$(EF)=(CD)+180^\circ-\gamma.$$

მიღებულ გამოხატულებათა მარჯვენა ნაწილების დაპირისპირება მოგვცემს:

$$(CD)+k\cdot 180^\circ-\sum_{i+1}^{i+k}\beta=(CD)+180^\circ-\gamma,$$

საიდანაც

$$\gamma=\sum_{i+1}^{i+k}\beta-(k-1)\,180^\circ \qquad (44)$$

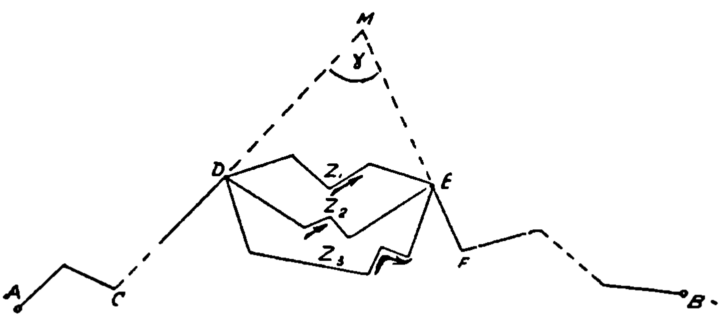
ასეთია კავშირი სავალის მარჯვნივ მდებარე კუთხეთათვის, თუ მოცემულია მარცხნივ მდებარე კუთხეები $\lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}, \dots \lambda_{i+k}$, მაშინ, რადგანაც საზოგადოდ

$$\beta=360^\circ-\lambda,$$

ამიტომ, (44) ფორმულაში ამის შეტანისა და მერე მცირე გარდაქმნის შემდეგ, მივიღებთ:

$$\gamma=(k+1)\,180^\circ-\sum_{i+1}^{i+k}\lambda. \qquad (45)$$

γ კუთხე არის k გაზომილ კუთხეთა ჯამის ფუნქცია; ამასთანავე, რადგანაც უშუალოდ გაზომილი კუთხეები ჩათვლილი გვაქვს როგორც



ნახ. 10.

ტოლზუსტი, ხოლო ცალი კუთხის გაზომვის წონაც მიღებულია ერთეულად, ამიტომ, აზიმუტთან ანალოგიის ძალით, შეგვიძლია, როგორც წინა §-ში, დავწეროთ:

$$p=\frac{1}{k}\cdot$$

ვთქვათ ახლა, პოლიგონის D და E წერტილს შორის (ნახ. 10) არსებობს განშტოება, შემდგარი, მაგალითად, სამი ცალკეული z_1, z_2 და

z_3 სავალისაგან, რომელთა კუთხეების რიცხვი შესაბამისად არის k_1, k_2, k_3.

γ კუთხის გამოთვლა ცალკეული სავალისათვის მოგვცემს γ_1, γ_2, γ_3 მნიშვნელობას, რომელთა წონა შესაბამისად იქნება:

$$p_1=\frac{1}{k_1}, \quad p_2=\frac{1}{k_2}, \quad p_3=\frac{1}{k_3}.$$

საერთო არითმეტიკული შუადის ფორმულის მიხედვით გვექნება:

$$\gamma=\frac{\gamma_1\cdot p_1+\gamma_2\cdot p_2+\gamma_3\cdot p_3}{p_1+p_2+p_3}.$$

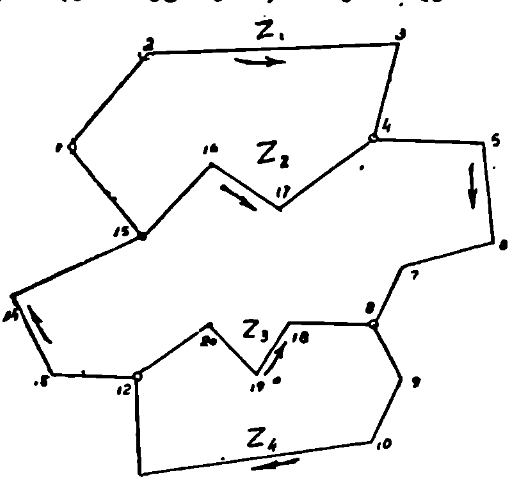
γ ოდენობა წარმოადგენს ეკვივალენტურ შენაცვლებას z_1, z_2, z_3 სავალის კუთხეთათვის განსახილველი პოლიგონის კუთხეების გაწონასწორების დროს. γ კუთხის წონა გამოიხატება ფორმულით

$$p=p_1+p_2+p_3,$$

საიდანაც, წონის ცნების მიხედვით,

$$k=\frac{1}{p},$$

k რიცხვი გვიჩვენებს, რომ, შედეგის სიზუსტის მხრივ, γ კუთხე ეთანადება k კუთხეთა ჯამის განსაზღვრის სიზუსტეს.



ნახ. 11

γ კუთხის ეკვივალენტად გამოყენება საშუალებას გვაძლევს, კეტილი პოლიგონების ქსელის კუთხეთა გაწონასწორების დროს, განშტოებათა თანდათანობითი შესაბამი γ კუთხით შენაცვლების ხერხით, ამოცანა მიყვანილი იქნას ერთეული კეტილი პოლიგონის გაწონასწორებამდე; ამ შემთხვევაში გაწონასწორების წესრიგი ისეთივეა, რაც გამოყენებული იყო ნიველირსავალის ქსელის გაწონასწორების დროს (იხ. 38 და 39 §§).

43. კეტილი კუთხზომილი პოლიგონების ქსელის გაწონასწორების მაგალითი*

ვთქვათ, მოცემულია კეტილი პოლიგონი ორი დიაგონალური სავალით (ნახ. 11).

ოთხი კვანძით პოლიგონი დიაგონალური სავალებითურთ ნაწილდება ექვს ცალკეულ სავალად, ყოველ სავალს აქვს მიცემული მიმართულება საათის ისრის სვლის მიმართულებით, რისთვისაც დამკვირვებელი უნდა წარმოდგენილი იყოს ფიგურის შუა ნაწილში. კუთხეების გაწონასწორებისათვის z_1 და z_2 სავალის კუთხეები უნდა შენაცვლებული იყოს (14—15) და (4—5) გვერდებს შორის მდებარე $\gamma_{1,2}$ კუთხის უალბათიერესი მნიშვნელობით. სწორედ ამნაირადვე z_3 და z_4 სავალის კუთხეები უნდა შენაცვლებული იყოს (7—8) და (12—13) გვერდებს შორის მდებარე $\gamma_{3,4}$ კუთხის უალბათიერესი მნიშვნელობით. მაშინ z_5 და z_6 სავალის კუთხეები $\gamma_{1,2}$ და $\gamma_{3,4}$ კუთხესთან ერთად ქმნიან კეტილ მრავალკუთხედს. შევადგინოთ ყველა ხსენებულ კუთხეთა ჯამი და შევადაროთ იგი თეორიულ ჯამს,—მოგვეცემა ამ კეტილი მრავალკუთხედის შეუკვრელობა კუთხეთა ჯამში, რომელსაც განვწილავთ კუთხეთა შორის; განწილვის დროს უნდა სათვალავში იყოს მიღებული $\gamma_{1,2}$ და $\gamma_{3,4}$ კუთხის წონა. ამნაირად, z_5 და z_6 სავალის კუთხეები გაწონასწორებული იქნება და ამავე დროს ცნობილი გახდება აგრეთვე $\gamma_{1,2}$ და $\gamma_{3,4}$ კუთხის საბოლოო მნიშვნელობაც $\gamma_{1,2}$. კუთხის საბოლოო მნიშვნელობა საშუალებას იძლევა განსაზღვრული იქნას z_1 და z_2 სავალის კუთხეთა ჯამის შეუკვრელობა, ხოლო $\gamma_{3,4}$ კუთხის საბოლოო მნიშვნელობის ცოდნით განისაზღვრება z_3 და z_4 სავალის კუთხეთა ჯამის შეუკვრელობა. ამის შემდეგ ყველა ზემოთ მოყვანილი სავალის გაწონასწორება უკვე მარტივ საქმეს წარმოადგენს. კოორდინატთა ნაზრდების გაწონასწორება სრულდება იმავე წესით.

გამოთვლები მოცემულია ქვემოთ მოყვანილ ტაბულებში.

უალბათიერესი მნიშვნელობა კუთხეებისა იქნება:

$$\gamma_{1,2}=102°50',3, \quad \gamma_{3,4}=69°32',5$$

წონით

$$p_{1,2}=0,45, \quad p_{3,4}=0,40.$$

მაშასადამე, $\gamma_{1,2}$ კუთხე გამოდის 2,2 კუთხის ტოლძალიანი, ხოლო $\gamma_{3,4}$—2,5 კუთხის თანადი. $\gamma_{1,2}$ და $\gamma_{3,4}$ კუთხის ჯამი z_5 და z_6 სავალის კუთხეებთან ერთად უდრის 900°3',8-ს.

* Чеботарев. Способ наименьших квадратов.

უკანასკნელი ჯამის შეუკვრელობა არის $+3',8$. ამ შეუკვრელობის განხილვა მოგვცემს:

z_5 სავალის კუთხეთათვის	$+0',8$
z_6 „ „	$+1,2$
$\gamma_{1,2}$ კუთხისათვის	$+0,8$
$\gamma_{3,4}$	$+1,0$

კუთხეების საბოლოო მნიშვნელობა:

$$\gamma_{1,2} \qquad 102°49',5$$
$$\gamma_{3,4} \qquad 69\ 31,5.$$

კვანძის ხაზების აბსცისებისა და ორდინატების ნაზრდების უხლბათხერესი მნიშვნელობა შესაბამისად იქნება:

$$(15-4) \cdots \Delta x_{1,2}=-5,46, \ \Delta y_{1,2}=+160,88$$
$$(8-12) \cdots \Delta x_{3,4}=-47,47, \ \Delta y_{3,4}=-219,43$$

მათი წონა

$$p_{1,2}=0,54, \quad p_{3,4}=0,69.$$

მაშასადამე, კვანძის (15—4) ხაზი შეესაბამება სავალს სიგრძით 190 მეტრი, ხოლო კვანძის (8—12) ხაზი—სავალს სიგრძით 150 მეტრი.

ჯამი აბსცისებისა და ორდინატების ნაზრდებისა კეტილ მრავალკუთხედში, რომელიც შემდგარია z_5 და z_6 სავალის გვერდებითა და (15—4) და (8—12) კვანძის ხაზებით, არის:

$$\Sigma\,\Delta x=-0,40, \quad \Sigma\Delta y=-0,58.$$

ამ შეუკვრელობათა განწილვა z_5 და z_6 სავალზე და კვანძის ხაზებზე მოგვცემს:

	Δx	Δy
z_5 ·····	$-0,14$	$-0,20$
z_7 ·····	$-0,13$	$-0,19$
(15—4) ·····	$-0,07$	$-0,11$
(8—12) ·····	$-0,06$	$-0,08$

კვანძის ხაზების კოორდინატთა ნაზრდების საბოლოო მნიშვნელობა იქნება:

	Δx	Δy
(15—4) ······	$-5,39$	$+160,99$
(8—12) ······	$-47,41$	$-219,35.$

გაწონასწორების შემდეგ მიღებულ საბოლოო შედეგთა სიზუსტის შესაფასებლად უნდა გავითვალოთ მათი წონები ცნობილი ფორმულის მიხედვით:

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{p}}.$$

როდესაც ცნობილი იქნება წონა და ერთეული წონის საშუალო ცდომილება, ადვილად განისაზღვრება აგრეთვე შედეგის საშუალო ცდომილებაც.

წერტ. №	გაზომილი კუთხე	კუთხ. შესწ.	გვერდის აზიმუტი	ხაზის სიგრძე	გამოთვლილი ±	გამოთვლილი Δx	შესწ. Δx	გამოთვლილი ±	გამოთვლილი Δy	შესწ. Δy	კოორდინატი ±	კოორდინატი x	კოორდინატი ±	კოორდინატი y
	მარჯ. მდ.					სავალი	z_1							
14	—	—												
			40°39′,0	212,58	+	170,35		—	127,17	0,04				
15	257°24′	0,5									—	170,35	+	127,26
			323 15,5	123,35	+	24,94		+	120,80	0,01				
1	64 56	0,5										0,00		0,00
			78 20,0	190,09	—	19,73		+	180,07	0,04				
2	162 23	0,5									+	24,94	+	120,79
			95 57,5	182,22	—	180,25		—	21,58	0,04				
3	89 10	0,5									+	5,21	+	309,82
			186 48,0											
4	248 59	0,5									—	175,74	+	288,20
5			117 49,5											
—	822,52 720,00	2,5		708,24 $s_1=7,1$ $p_1—0,14$	— —	5,39 5,39		+ +	161,12 160,99					
$\gamma_1=$ —	102 52 102,495		$p_1=\frac{1}{5}=0,20$			0,00		+	0,13					
შეუკვ. ქიდევ.	∓2,5 ∓3,4													

შეუკვრელობა$=\sqrt{0,00^2+0,13^2}=0,13$

	მარცხ.მდ.					ავალი	z_2							
14	—	—												
			40°39′,0											
15	322° 10′	0,1					+			+	—	170,35	+	127,21
			182 48,9	57,33	—	57,26	0,02	—	2,82	0,04				
17	89 9	0,1									—	227,59	+	124,43
			91 57,8	126,51	—	4,34	0,05	+	126,44	0,13				
16	121 33	0,1									—	231,88	+	251,00
			33 30,7	67,31	+	56,12	0,02	+	37,16	0,04				
4	264 19	0,2									—	175,74	+	288,20
5			117 49,5											
	797 11	0,5		251,15	—	5,48		+	160,78	0,21				
				$s_2=2,5$										
	900 00			$p_2=0,40$	—	5,39	0,09	+	160,99					
γ_2	102 49		$p_1=\frac{1}{4}=0,25$		—	0,09		—	0,21					
—	102 49,5													
შეუკ.	—0,5													
კიდეგ.	—3,0													

შეუკვრელობა$=\sqrt{0,09^2+0,21^2}=0,23$

წერტი-ლის №	გაზომილი კუთხე	კუთხ. შესწ.	გვერდის აზიმუტი	ხაზის სიგრძე	გამოთვლილი ±	გამოთვლილი Δx	შესწ. Δx	გამოთვლილი ±	გამოთვლილი Δy	შესწ. Δy	კოორდინატი ±	კოორდინატი x	კოორდინატი ±	კოორდინატი y
	მარჯ. მდ.					სავალი	z_3							
7														
			208°28′,7											
8	125°28′	0,3					+			+	−	406,00	+	231,81
			263 1,0	70,25	−	8,54	0,01	−	69,73	0,01				
18	172 11	0,3									−	414,53	+	162,12
			270 50,3	66,13	+	0,97	0,01	−	66,12	0,04				
19	199 1	0,3									−	413,55	+	96,04
			251 49,6	42,16	−	13,15	0,00	−	40,06	0,02				
20	193 21	0,3									−	426,70	+	56,00
			238 28,9	51,12	−	26,72	0,01	−	43,57	0,03				
12	99 32	0,3									−	453,41	+	12,46
			318 57,2											
13														
—	789 33 720 00	1,5		229,66 $s_3=2,3$ $p_3=0,43$	− −	47,44 47,41	0,03	− −	219,48 219,35	0,13				
γ_3 =	69 33 69 31,5		$p_3=\frac{1}{5}=0,20$		−	0,03		−	0,13					
შეუკვრ. კიდევ.	+1,5 +3,4				შეუკვრელობა $=\sqrt{0,03^3+0,13^2}=0,13$									

	მარჯვ.მდ.					სავალი	z_4							
7	—	—	208°28,7											
8	197°38′	0,1					+			+	—	406,00	+	231,81
			190 50,8	79,91	—	78,48	0,02	—	15,04					
9	188 21	0,1									—	484,46	+	216,77
			182 29,9	56,86	—	56,81	0,02	—	2,48					
10	98 32	0,1									—	541,25	+	214,29
			263 58,0	105,11	—	11,05	0,03	—	104,53					
11	128 31	0,1									—	552,27	+	109,76
			315 27,1	138,68	+	98,82	0,04	—	97,29	0,01				
12	176 30	0,1									—	453,41	+	12,46
			318 57,2											
13														
	789 32	0,5	380 56	380,56	—	47,52	0,11	—	219,34	0,01				
				$s_4=3,8$										
—	720 00			$p_4=0,26$		47,41		—	219,35					
γ_4	69 32		$p_4=\frac{1}{5}=0,20$		—	0,11		+	0,01					
—	69 31,5													
შეუკვრ.	+0,5													
კიდეგანი	+2,1													

შეუკვრელობა$=\sqrt{0,11^2+0,01^2}=0,11$

წერტი-ლის №	გაზომილი კუთხე	კუთხ. შესწ.	გვერდის აზიმუტი	ხაზის სიგრძე	გამოთვლილი		შესწ. Δx	გამოთვლილი		შესწ. Δy	კოორდინატი			
					±	Δx		±	Δy		±	x	±	y
	მარჯ. მდ.					სავალი	$z_б$							
12	—	—					+			+	—	453,41	+	12,46
			318°57′,2	56,53	+	42,63	0,02	—	37,12	0,03				
13	126°56	0,4									—	410,76	—	24,63
			12 1,6	86,57	+	84,67	0,04	+	18,04	0,05	—	326,05	—	6,54
14	151 23	0,4												
			40 39,0	205,12	+	155,62	0,08	+	133,63	0,12	—	170,35	+	127,51
15														
	278 19	0,8		348,22	+	282,92	0,14	+	114,55	0,20				
				$s_б=3,5$	—	0,14		—	0,20					
შეუკვრ.	+0,5													
კიდებ.	—2,1				შეუკვრელობა $=\sqrt{0,14^2+0,20^2}=0,24$									
	მარჯვ. მდ.					სავალი	$z_б$							
4	—	—					+			+	—	175,74	+	288,20
			117°49′,5	93,00	—	43,41	0,04	+	82,25	0,05				
5	87°30′	0,4									—	219,11	+	370,50
			210 19,9	57,56	—	49,68	0,02	—	29,07	0,03	—	268,77	+	341,46
6	156 59	0,4												
			233 21,3	73,74	—	44,01	0,03	—	59,16	0,05	—	312,75	+	282,35
7	204 53	0,4												
			20828,7	106,15	—	93,29	0,04	—	50,60	0,06	—	406,00	+	231,81
8		1,2												
	449 22			330,43	—	230,39	0,13	—	56,58	0,19				
				$s_б=3,3$	—	0,13		—	0,19					
შეუკვრ.	+1,2													
კიდებ.	+2,6				შეუკვრელობა $=\sqrt{0,13^2+0,19^2}=0,23$									

VIII

უმცირეს კვადრატთა ხერხი

44. თანასწორი სიზუსტის მინიჭება და წირული სახის მიცემა განტოლებებისათვის

რომელიმე საძიებელი X, Y, Z, ოდენობის განსაზღვრა უშუალო დაკვირვებათა და გაზომვათა დახმარებით პრაქტიკაში ხდება შედარებით იშვიათად, უმეტეს ნაწილად საძიებელი ოდენობანი დაკავშირებულია ხოლმე დაკვირვებით მონახულ N_1, N_2, N_3, $\cdots$, N_s ოდენობებთან, და მათ შორის დამოკიდებულება ჩვეულებრივ გამოისახება რამენაირი, სრულიად განსაზღვრული ფუნქციების საშუალებით:

$$\left.\begin{array}{r} N_1=f_1(X, Y, Z, \ldots),\ N_2=f_2(X, Y, Z, \ldots), N_3=f_3(X, Y, Z,\ldots) \\ (N_s=f_s(X, Y, Z,\ldots) \end{array}\right\}. \quad (1)$$

საძიებელ X, Y, Z, ოდენობათა n რიცხვი რომ მოცემულ (1) განტოლებათა s რიცხვის თანასწორი იყოს და ამასთანავე მათ შორის არ მოიპოვებოდეს იგივი განტოლებანი, მაშინ X, Y, Z უცნობთათვის მოგვეცემოდა სრულებით გარკვეული რიცხობრივი მნიშვნელობანი:

$$X=F_x(N_1,\ N_2,\ N_3,\ \cdots N_s),\ Y=F_y(N_1,\ N_2,\ N_3 \cdots\ N_s),$$
$$Z=F_2(N_1,\ N_2,\ N_3,\qquad N_s),$$

და მათი საშუალო ცდომილებანი განისაზღვრებოდა N_1, N_2, N_3,$\cdots N_s$ ოდენობათა მოცემულ საშუალო ცდომილებათა მიხედვით II თავში აღწერილი ზოგადი წესების საფუძველზე. თუ განტოლებათა რიცხვი აღემატება უცნობთა რიცხვს, ე. ი. თუ $s>n$ მაშინ,—რადგანაც შეუძლებელია ისეთ X, Y Z ოდენობათა მოპოება, რომლებიც ზედმიწევნით აკმაყოფილებდნენ ყველა მოცემულ s განტოლებას,— საჭირო ხდება საძიებელი ოდენობათათვის უალბათიერეს მნიშვნელობათა მონახვა, ე. ი. ისეთი მნიშვნელობებისა, რომლებიც რაც შეიძლება მეტი სიზუსტით აკმაყოფილებდეს ყველა ხსენებულ განტოლებას.

საზოგადოდ, დაკვირვებული N_1, N_2, N_3, N_s ოდენობანი გან-მცდელია სხვადასხვა საშუალო m_1, m_2 m_3, m_s ცდომილებებისა. მაგრამ თუ, 20 §-ის (1) ფორმულის მიხედვით, ჩვენ განვსაზღვრავთ მათ შ ე ფ ა რ დ ე ბ ი თ წ ო ნ ე ბ ს

$$p_1=\frac{\mu_1}{m_1^2}, \quad p_2=\frac{\mu^2}{m_2^2}, \quad p_3=\frac{\mu^2}{m_3^2}, \quad \cdots p_s=\frac{\mu_2}{m_s^2},$$

სადაც μ იქნება საშუალო ცდომილება წარმოსახვითი დაკვირვებისა, რომლის წონა $p=1$, და შემდეგ ყოველ (1) განტოლებათაგანს გადა-ვამრავლებთ მისი შესატყვისი წონის კვადრატულ ფესვზე, მაშინ, N_1, N_2, N_3, N_s რიცხვების ნაცვლად მივიღებთ ოდენობებს

$$N_1\sqrt{p_1}, \quad N_2\sqrt{p_2}, \quad N_3\sqrt{p_3}, \qquad N_s\sqrt{p_s},$$

რომელთა საშუალო ცდომილება იქნება ე რ თ ი დ ა ი გ ი ვ ე μ. ნათქვამის მიხედვით შემდგომში ყოველთვის ნაგულისხმევი გვექნება, რომ ყველა (1) განტოლება ზემოთ ნაჩვენები წესით უკვე მიყვანილია ერთსა და იმავე სიზუსტეზე.

შემდეგ ამისა, როგორიც არ უნდა იყოს (1) განტოლებანი, ყო-ველთვის შესაძლებელია მათთვის წრფივი სახის მიცემა საძიებელ X, Y, Z, ოდენობათა მიმართ. ამისათვის უნდა მოვიქცეთ 18 §-ში მოცემული წესის მიხედვით, ე. ი. X, Y, Z, $\cdots$ -თვის შევარჩიოთ საკმაოდ მიახლოებული X_0, Y_0, Z_0, $\cdots$ ოდენობანი, მერე ვთქვათ, რომ

$$X=X_0+x, \quad Y=Y_0+y, \quad Z=Z_0=z, \tag{2}$$

და ვეძიოთ მხოლოდ ფრიად მცირედი x, y, z, შესწორებანი. უმეტეს ნაწილად მიახლოებითი X_0, Y_0, Z_0, $\ldots$ მნიშვნელობანი უკვე წინასწარ არის ხოლმე ცნობილი; წინააღმდეგ შემთხვევაში მათი გან-საზღვრისათვის ვიყენებთ (1) განტოლებებს, რომელთაგან, უცნობთა რიცხვის მიხედვით, გამოვარჩევთ ნებისმიერ n განტოლებას, და მათი ერთობლივი გადაწყვეტით მივიღებთ X_0, Y_0, Z_0, მნიშვნელობას.

f_1, f_2, f_3, f_s ფუნქციები დავშალოთ მწკრივებად მცირედ x, y. z, შესწორებათა ხარისხების მიმართ და შევიზღუდოთ მათი პირველი ხარისხებით:

$$N_1=f_1(X_0, Y_0, Z_0, \ldots)+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0 x+\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0 y+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)_0 z+\cdots$$

$$N_2=f_2(X_0, Y_0, Z_0\cdots)+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0 x+\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_0 y+\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)_0 z+\cdots$$

$$N_3=f_3(X_0, Y_0, Z_0, \dots)+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)_0 x+\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)_0 y+\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)_0 z+\dots$$

$$N_s=f_s(X_0, Y_0, Z_0, \dots)+\left(\frac{\partial f_s}{\partial x}\right)_0 x+\left(\frac{\partial f_s}{\partial y}\right)_0 y+\left(\frac{\partial f_s}{\partial z}\right)_0 z+$$

მერე აღვნიშნოთ:

$$\begin{array}{llll}
\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_0=a_1, & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)_0=a_2, & \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)_0=a_3, & \left(\frac{\partial f_s}{\partial x}\right)_0=a_s, \\
\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_0=b_1, & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)_0=b_2, & \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)_0=b_3, & \left(\frac{\partial f_s}{\partial y}\right)_0=b_s, \\
\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)_0=c_1, & \left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)_0=c_2, & \left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)_0=c_3, & \left(\frac{\partial f_s}{\partial z}\right)_0=c_s,
\end{array}$$

და აგრეთვე

$$\left.\begin{array}{l}
N_1-f_1(X_0, Y_0, Z_0, \quad)=w_1 \\
N_2-f_2(X_0, Y_0, Z_0, \quad)=w_2 \\
N_3-f_3(X_0, Y_0, Z_0, \quad)=w_3 \\
\\
N_s-f_s(X_0, Y_0, Z_0, \quad)=w_s,
\end{array}\right.$$

ამ აღნიშვნების მიხედვით, მოცემული (1) განტოლებანი საბოლოოდ მიიღებენ ასეთ სახეს:

$$\left.\begin{array}{ll}
a_1x+b_1y+c_1z+ & =w_1 \\
a_2x+b_2y+c_2z+ & =w_2 \\
a_3x+b_3y+c_3z+ & =w_3 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
a_3x+b_sy+c_sz+ & =w_s
\end{array}\right\} \quad (3)$$

მიღებული წირული s განტოლებანი იწოდებიან **ძირითად განტოლებებად**. მათში $a_1, a_2, a_3, \dots a_s, b_1, b_2, b_3 \dots b_s, c_1, c_2, c_3, c_s$—კოეფიციენტები წარმოადგენენ სავსებით განსაზღვრულ რიცხვებს. რაც შეეხება $w_1, w_2, w_3 \dots w_s$ ოდენობებს, ისინი ექვემდებარებიან ერთსა და იმავე საშუალო μ ცდომილებას, ვინაიდან ისინი შეიცავენ იმავე შემთხვევით ცდომილებებს, რასაც $N_1, N_2, N_3, \dots, N_s$ ოდენობანი, რომლებიც მიყვანილია ერთსა და იმავე სიზუსტეზე.

46. ნორმული განტოლებანი

(3) სისტემაში განტოლებათა რიცხვი აღემატება უცნობთა რიცხვს, ამიტომ შეუძლებელია უცნობთათვის ისეთ მნიშვნელობათა მონახვა, რომლებიც სავსებით აკმაყოფილებენ ამ განტოლებებს. ამის გამო საჭირო ხდება x, y, z, ... შესწორებათათვის მეტად თუ ნაკლებად მიახლოებულ მნიშვნელობათა შერჩევა, ხოლო ყოველი ამნაირი ვარაუდი გამოიწვევს ქვემორე სახის სხვაობებს (რიცხვით s):

$$w_1-(a_1x+b_1y+c_1z+ \quad)=v_1$$

$$w_2-(a_2x+b_2y+c_2z+ \cdots)=v_2$$

$$w_3-(a_2x+b_3y+c_3z+ \cdots)=v_3$$

$$w_s-(a_sx+b_sy+c_sz+ \quad)=v_s,$$

რომელნიც უნდა გამოსახავდნენ w_1, w_2, w_3, ..., w_s რიცხვებში შემავალ შემთხვევით ცდომილებებს. მაგრამ რადგანაც ყოველი v_1, v_2, v_3 ... v_s ცდომილების ცალკეულად მოვლინების ალბათობა, 8 §-ის (5) ფორმულის ძალით, არის

$$p_1=\frac{d\Delta}{\mu\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{v_1^2}{2\mu^2}}, \quad p_2=\frac{d\Delta}{\mu\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{v_2^2}{2\mu^2}}$$

$$p_3=\frac{d\Delta}{\mu\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{v_3^2}{2\mu^2}}, \quad p_s=\frac{d\Delta}{\mu\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{v_s^2}{2\mu^2}},$$

ხოლო ყველა მათი ერთობლივი წარმოხდომის ალბათობა (3§) იქნება

$$P=p_1\cdot p_2\cdot p_3 \cdots p_s=\left(\frac{d\Delta}{\mu\sqrt{2\pi}}\right)^s\cdot e^{-\frac{1}{2\mu^2}\cdot\Sigma v^2},$$

სადაც $\Sigma v^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2+\cdots+v_s^2$.

ამიტომ x, y, z, შესწორებათა უალბათიერეს სისტემად უნდა ჩაითვალოს ისეთი სისტემა, რომლისათვისაც ეს P ალბათობა იქნება უდიდესი, ხოლო ამისათვის საჭიროა, რომ იყოს

$$\Sigma v^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2+\cdots+v_s^2=\text{minimum} \quad \dots (5)$$

მაშასადამე, ძირითად s განტოლებათა წყებაში ყველა v_1, v_2, v_3, ... v_s ცდომილებათა კვადრატების ჯამი უნდა იყოს უმცირესი. სწორედ ამის მიხედვით საძიებელ ოდენობათა განსაზღვრის

ლონეობა, როდესაც წარმოებულია მრავალრიცხოვანი დაკვირვება, იწოდება *უმცირეს კვადრატთა მეთოდად*. იგი თითქმის ერთდროულად მოწონებული იყო საფრანგეთში *ლეჟანდრის* მიერ (Adrien marie Legendre 1752—1833) და გერმანიაში გაუსის მიერ (Karl Friedrich Gauss 1777—1855); მაგრამ პირველმა ვერ მისცა მას სათანადო დამტკიცება, *გაუსმა* კი ეს მეთოდი დააფუძნა ალბათობის თეორიის დასაბამზე და განავითარა იგი პრაქტიკაში გამოსაყენებლად ყოველგვარი წვლილადის გათვალისწინებით.

რადგანაც x, y, z, შესწორებანი (რიცხვით n) არავითარი დამოკიდებულებით არ არიან ერთმანეთთან დაკავშირებული, ამიტომ (5) პირობა, დიფერენციალური აღრიცხვის წესების მიხედვით მიიღება შემდეგი n განტოლება:

$$\left.\begin{aligned}
v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial x}+\cdots+v_s\frac{\partial v_s}{\partial x}=0\\
v_1\frac{\partial v_1}{\partial y}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial y}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial y}+\cdots+v_s\frac{\partial v_s}{\partial y}=0\\
v_1\frac{\partial v_1}{\partial z}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial z}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial z}+\cdots+v_s\frac{\partial v_s}{\partial z}=0
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

რომლებშიაც (4)-ის ძალით

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}=-a_1,\ \frac{\partial v_2}{\partial x}=-a_2,\ \frac{\partial v_3}{\partial x}=-a_3,\ \ldots\ \frac{\partial v_s}{\partial x}=-a_s$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}=-b_1,\ \frac{\partial v_2}{\partial y}=-b_2,\ \frac{\partial v_3}{\partial y}=-b_3,\ \ldots\ \frac{\partial v_s}{\partial y}=-b_s$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z}=-c_1,\ \frac{\partial v_2}{\partial z}=-c_2,\ \frac{\partial v_3}{\partial z}=-c_3,\ \ldots\ \frac{\partial v_s}{\partial z}=-c_s$$

მიღებულ მნიშვნელობათა (6) განტოლებებში შეტანა მოგვცემს n ახალ განტოლებას:

$$\left.\begin{aligned}
a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\cdots+a_sv_s=(av)=0\\
b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+\qquad+b_sv_s=(bv)=0\\
c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+\cdots+c_sv_s=(cv)=0
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

შევიტანოთ ამ უკანასკნელ განტოლებებში v_1, v_2, $v_3 \cdots v_s$ მნიშვნელობანი (4) განტოლებებიდან და შესამოკლებლად მივიღოთ ჰაუსის მიერ მოცემული ქვემო აღნიშვნები:

$$a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 + \cdots + a_sa_s = (aa)$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_sb_s = (ab)$$
$$b_1b_1 + b_2b_2 + b_3b_3 + \cdots + b_sb_s = (bb)$$
$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + \cdots + a_sc_s = (ac)$$

საბოლოოდ გვექნება n განტოლება:

$$\left.\begin{aligned} (aa)\,x + (ab)\,y + (ac)\,z + \cdots &= (nw) \\ (ab)\,x + (bb)\,y + (bc)\,z + \cdots &= (bw) \\ (ac)\,x + (bc)\,y + (cc)\,z + \cdots &= (cw) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

მიღებული (8) განტოლებანი, რომელთა გადაწყვეტით განისაზღვრება საძიებელ x, y, z, ოდენობათა უალბათიერესი მნიშვნელობა, იწოდებიან ნორმულ განტოლებებად. როგორც ადვილი დასანახია, პირველი მათგანის მისაღებად, ჯერ უნდა ყოველი ძირითადი განტოლება ((4) ფორმ.) გადავამრავლოთ მასში შემავალი x-ის კოეფიციენტზე და მერე მიღებული შედეგები შევაჯამოთ; მეორის მისაღებად, ყოველი ძირითადი განტოლება ამნაირადვე გადავამრავლოთ მასში შემავალი y-ის კოეფიციენტზე და მიღებული შედეგები შევაჯამოთ ა. შ. როგორცა ვხედავთ, (8) განტოლებებში ყველა კოეფიციენტი, გარდა (aa), (bb), (cc), კოეფიციენტებისა, შედის ორ-ორჯერ.

46. საძიებელ ოდენობათა წონა და საშუალო ცდომილება

ნორმული (8) განტოლებების გადაწყვეტის შემდეგ, ყოველი საძიებელი ოდენობა, მაგალითად x, გამოსახული იქნება w_1, w_2, w_3, $\cdots$ w_s-ის საშუალებით ასეთნაირად:

$$x = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \cdots + \alpha_s w_s, \qquad (9)$$

სადაც α_1, α_2, $\alpha_3 \cdots \alpha_s$ რიცხვებს დამოკიდებულება აქვთ მხოლოდ a_1, a_2, $a_3 \cdots$, b_1, b_2, b_3, $\cdots$, c_1, c_2, c_3, და ა. შ. ოდენობებთან, რომლებიც თვით თავისუფალია დაკვირვებათა ცდომილებათაგან.

საძიებელი x ოდენობის წონისა და საშუალო ცდომილების განსაზღვრისათვის, (8) განტოლებათაგან პირველი გადავამრავლოთ სანებურ A_1 მამრავლზე, მეორე A_2-ზე, მესამე A_3-ზე და ა. შ.; მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
(aa)\,A_1x+(ab)\,A_1y+(ac)\,A_1z+\quad &=(aw)\,A_1 \\
(ab)\,A_2x=(bb)\,A_2y+(bc)\,A_2z+\quad &=(bw)\,A_2 \\
(ac)\,A_3x+(bc)\,A_3y+(cc)\,A_3z\ +\quad &=(cw)\,A_3
\end{aligned}
$$

ყველა მიღებულ განტოლებათა ჯამი მოგვცემს:

$$
\left.
\begin{aligned}
&[(aa)\,A_1+(ab)\,A_2+(ac)\,A_3+\qquad]\,x+ \\
&+[(ab)\,A_1+(bb)\,A_2+(bc)\,A_3+\qquad]\,y+ \\
&+[(ac)\,A_1+(bc)\,A_2+(cc)\,A_3+\qquad]\,z+
\end{aligned}
\right\} \quad (10)
$$

ვთქვათ, n სანებურ A_1, A_2, A_3, მამრავლთა მნიშვნელობა განისაზღვრება ქვემოთ მოცემულ პირობათა მიხედვით:

$$
\left.
\begin{aligned}
(aa)\,A_1+(ab)\,A_2+(ac)\,A_3+\quad &=1 \\
(ab)\,A_1+(bb)\,A_2+(bc)\,A_3+\ \cdots &=0 \\
(ac)\,A_1+(bc)\,A_2+(cc)\,A_3+\quad &=0
\end{aligned}
\right\} \quad (11)
$$

მაშინ (10) განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$x=(aw)\,A_1+(bw)\,A_2+(cw)\,A_3+$$

ამ გამოხატულების გახსნა მოგვცემს:

$$
\begin{aligned}
x=&(a_1w_1+a_2w_2+a_3w_3+\quad +a_sw_s)\,A_1+ \\
&+(b_1w_1+b_2w_2+b_3w_3+\cdots+b_sw_s)\,A_2+ \\
&+(c_1w_1+c_2w_2+c_2w_3+\cdots+c_sw_s)\,A_3+
\end{aligned}
$$

ხოლო აქედან

$$
\left.
\begin{aligned}
x=&(a_1A_1+b_1A_2+c_1A_3+\cdots)\,w_1+ \\
&+(a_2A_2+b_2A_2+c_2A_3+\cdots)\,w_2+ \\
&+(a_3A_1+b_3A_2+c_2\bar{A}_3+\cdots)\,w_3+ \\
& \\
&+(a_sA_1+b_sA_2+c_sA_3+\qquad)\,w_s
\end{aligned}
\right\} \quad (12)
$$

ამ (12) განტოლებათა (9) განტოლებასთან იგივეობისათვის საჭიროა, რომ

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1=a_1A_1+b_1A_2+c_1A_3+\\ \alpha_2=a_2A_1+b_2A_2+c_2A_3+\cdots\\ \alpha_3=a_3A_1+b_3A_2+c_3A_3+\cdots\\ \\ \alpha_s=a_sA_1+b_sA_2+c_3A_3+\end{array}\right\} \quad (13)$$

ცხადია, ამ უკანასკნელ (13) გამოხატულებებში α_1, α_2, α_3, α_s ოდენობანი არ არიან დამოკიდებული დაკვირვების ცდომილებებზე, ხოლო რაც შეეხება w_1, w_2, w_3, $\ldots w_s$ ოდენობებს ((12) განტოლებებში), როგორც უკვე აღნიშნული იყო 44 §-ში, იგინი ექვემდებარებიან ერთსა და იმავე საშუალო μ ცდომილებას.

ყოველივე ზემონათქვამის მიხედვით, მონახული x ოდენობის საშუალო m_x ცდომილება, 17 §-ის (5) ფორმულის საფუძვლით, წარმოგვიდგება შემდეგი სახით:

$$\left.\begin{array}{l}m_x^2=\mu^2[(a_1A_1+b_1A_2+c_1A_3+\quad)^2+\\ \quad+(a_2A_1+b_2A_2+c_2A_3+\quad)^2+\\ \quad+(a_3A_1+b_3A_2+c_3A_3+\quad)^2+\\ \\ \quad(a_sA_1+b_sA_2+c_sA_3+\cdots)^2]\end{array}\right\} \quad (14)$$

მიღებულ (14) განტოლებაში გავხსნათ ფრჩხილები და ბოლოს გამოვიყენოთ წინათ ხმარებული აღნიშვნები, გვექნება:

$$\begin{array}{l}a_1^2A_1^2+b_1^2A_2^2+c_1^2A_3^2+\quad+2a_1b_1A_1A_2+2a_1c_1A_1A_3+\\ \qquad\qquad\qquad+2b_1c_1A_2A_3+\quad+\\ +a_2^2A_1^2+b_2^2A_2^2+c_2^2A_3^2+\quad+2a_2b_2A_1A_2+2a_2c_2A_1A_3+\\ \qquad\qquad\qquad+2b_2c_2A_2A_3+\quad+\\ +a_3^2A_1^2+b_3^2A_2^2+c_3^2A_3^2+\cdots+2a_3b_3A_1A_2+2a_3c_3A_1A_3+\\ \qquad\qquad\qquad+2b_3c_3A_2A_3+\quad+\\ \\ +a_s^2A_1^2+b_s^2A_2^2+c_s^2A_3^2+\quad+2a_sb_sA_1A_2+2a_sc_sA_1A_3+\\ +2b_sc_sA_2A_3+\quad+=(aa)A_1^2+(bb)A_2^2+(cc)A_3^2+\cdots+\\ +2(ab)A_1A_2+2(ab)A_1A_3+2(bc)A_2A_3+\end{array}$$

უკანასკნელი სტრიქონი გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$
\begin{aligned}
&(aa)\,A_1^2+(ab)\,A_1A_2+(ac)\,A_1A_3+\qquad +\\
+&(ab)\,A_1A_2+(bb)\,A_2^2+(bc)\,A_2A_3+\qquad +\\
+&(ac)\,A_1A_3+(bc)\,A_2A_3+(cc)\,A_3^2+\qquad +
\end{aligned}
$$

ხოლო აქედან

$$
\left.
\begin{aligned}
&[(aa)\,A_1+(ab)\,A_2+(ac)\,A_3+\qquad]\,A_1+\\
+&[(ab)\,A_1+(bb)\,A_2+(bc)\,A_3+\qquad]\,A_2+\\
+&[(ac)\,A_1+(bc)\,A_2+(cc)\,A_3+\qquad]\,A_3+
\end{aligned}
\right|
\qquad (15)
$$

ასეთი სახე მიიღო (14) განტოლებაში დიდ ფრჩხილებში მოქცეულმა გამოხატულებამ. ამ (15) გამოხატულებაში A_1-ის წინ ფრჩხილებში ჩაყენებული ჯამი, (11)-ის ძალით, უდრის 1-ს, ჯამი A_2-ის წინ— ნულს,— ჯამი A_3-ისა და დანარჩენების წინაც—აგრეთვე ნულს, ამიტომ (14) განტოლება საბოლოოდ მოგვცემს:

$$m_x^2=\mu^2A_1 \qquad (16)$$

მიღებული (16) განტოლებიდან საძიებელი x-ის წონისათვის, და ანალოგიურად y, z, და სხვათა წონისათვის გვექნება:

$$p_x=\frac{\mu^2}{m_x^2}=\frac{1}{A_1}\,,\quad p_y=\frac{\eta^2}{m_y^2}=\frac{1}{B_2}\,,\quad p_z=\frac{\mu^2}{m_z^2}=\frac{1}{C_3} \quad (17)$$

$\frac{1}{B_2}$, $\frac{1}{C_3}$, რიცხვები ვანისაზღვრება განტოლებათა (11) სისტემის ანალოგიური სისტემებიდან:

$$
\left.
\begin{aligned}
&(aa)\,B_1+(ab)\,B_2+(ac)\,B_3+\cdots\cdots=0\\
&(ab)\,B_1+(bb)\,B_2+(bc)\,B_3+\cdots\cdots=1\\
&(ac)\,B_1+(bc)\,B_2+(cc)B_3+\cdots\cdots=0\\
&(aa)\,c_1+(ab)\,c_2+ac)\,c_3+\cdots=0\\
&(ab)\,c_1+(bb)c_2+(bc)\,c_3+\cdots+0\\
&(ac)\,c_1+(bc)\,c_2+(cc)\,c_3+\cdots=1
\end{aligned}
\right\} \quad (11)'
$$

თვით საძიებელი y, z, ოდენობანი, (9)-ის ანალოგიურად, გამოისახებიან მოცემულ w_1, w_2, w_3, ოდენობათა წირ ლ ფუნქციებად:

$$
\left.
\begin{aligned}
y&=\beta_1w_1+\beta_2w_2+\beta_3w_3+\cdots+\beta_sw_s,\\
z&=\gamma_1w_1+\gamma_2w_2+\gamma_3w_3+\cdots+\gamma_sw_s,
\end{aligned}
\right\} \quad (18)
$$

47. დაკვირვებათა საშუალო ცდომილების გამოყვანა ძირითადი განტოლებებიდან

ძირითად (3) განტოლებებში შემავალ $w_1, w_2, w_3, \cdots w_s$ ოდენობათა საშუალო μ ცდომილება ყოველთვის არ არის ხოლმე წინასწარ ცნობილი; პირიქით, უმეტეს ნაწილად იგი განისაზღვრება იმ ნარჩენ $v_1, v_2, v_3, \quad v_s$ სხვაობათა ((4)' ფორმ.) საშუალებით, რომელნიც აღმოჩნდებიან ხოლმე (3) განტოლებებში მას შემდეგ, რაც მათში შეტანილი იქნება საძიებელ $x, y, z, \ldots\ldots$ ოდენობათა უალბათიერესი მნიშვნელობა.

ვთქვათ, საძიებელ ოდენობათა ნამდვილი მნიშვნელობა არის

$$x=\xi, \quad y=\eta, \quad z-z,$$

მათი (3) განტოლებებში შეტანით მივიღებთ დაკვირვებათა s ნამდვილ ცდომილებას: $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \quad \Delta_s$. ასეთი შეტანა მოვახდინოთ ჯერ (3) სისტემის პირველ განტოლებაში:

$$w_1-a_1(x-\xi)-b_1(y-\eta)-c_1(z-\zeta)- \quad =\Delta_1,$$

ანუ

$$w_1-(a_1x+b_1y+c_1z+ \quad)+a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta+\cdots=\Delta_1.$$

შევიტანოთ აქ (4)-ში მიღებული აღნიშვნები, გვექნება:

$$v_1+a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta+ \quad -\Delta_1.$$

(3) სისტემის ყველა განტოლებაში ამნაირადვე $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\varsigma, \ldots$ ოდენობათა შეტანა მოგვცემს განტოლებათა ასეთ ჯგუფს:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1=v_1+a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta+\cdots \\ \Delta_1=v_2+a_2\xi+b_2\eta+c_2\zeta+ \\ \Delta_3=v_3+a_3\xi+b_3\eta+c_3\zeta+ \\ \\ \Delta_s=v_s+a_s\xi+b_s\eta+c_s\zeta+\cdots \end{array}\right\} \qquad (19)$$

გადავამრავლოთ (19) გამოხატულებანი სტრიქონ-სტრიქონ შესაბამისად $v_1, v_2, v_3, \quad v_s$ ოდენობებზე, მივიღებთ:

$$\begin{array}{l} \Delta_1v_1=v_1^2+a_1\xi v_1+b_1\eta v_1+c_1\zeta v_1+ \\ \Delta_2v_2=v_2^2+a_2\xi v_2+b_2\eta v_2+c_2\zeta v_2+ \\ \Delta_3v_3=v_3^2+a_3\xi x_3+b_3\eta v_3+c_3\zeta v_3+ \\ \\ \Delta_sv_s=v_s^2+a_s\xi v_s+b_s\eta v_s+c_s\zeta v_s+ \\ \hline \end{array}$$

$$\text{ჯამი} \quad (\Delta v)=(vv)+(av)\,\xi+(bv)\,\eta+(cv)\,\zeta+ \qquad (20)$$

რადგანაც (7)-ის ძალით $(av)=0$, $(bv)=0$, $(cv)=0$, , ამიტომ

$$(\Delta v)=(vv \tag{21}$$

ახლა გადავამრავლოთ იგივე (19) გამოხატულებანი სტრიქონ-სტრიქონ შესაბამისად Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_s ოდენობებზე; მივიღებთ, (20)-ის სრული ანალოგიით, სტრიქონების შეჯამების შემდეგ:

$$(\Delta\Delta)=(v\Delta)+(a\Delta)\,\xi+(b\Delta)\,\eta+(c\Delta)\,\zeta+$$

ხოლო (21)-ის საფუძველით, $(v\Delta)$-ს (vv)-თი შეცვლის შემდეგ, გვექნება:

$$(\Delta\Delta)=(vv)+(a\Delta)\,\xi+(b\Delta(\,\eta+(c\Delta)\,\zeta+ \tag{22}$$

ახლა (19) განტოლებანი გადავამრავლოთ თანმიმდევრობით ქვემო მამრავლებზე:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ & & \\ & & \\ a_s & b_s & c_s \end{array}$$

და ბოლოს ავიღოთ მათი ჯამები. ხსენებული გადამრავლება მოვახდინოთ პირველი a_1, a_2, a_3, a_s რიგისათვის, ხოლო დანარჩენებისათვის დავწეროთ მიღებულის ანალოგიით:

$$\begin{array}{l} a_1\Delta_1=a_1v_1+a_1^2\xi+a_1b_1\eta+a_1c_1\zeta+ \\ a_2\Delta_2=a_2v_2+a_2^2\xi+a_2b_2\eta+a_2c_2\zeta+ \\ a_3\Delta_3=a_3v_3+a_3^2\xi+a_3b_3\eta+a_3c_3\zeta+ \\ \\ a_s\Delta_s=a_sv_s+a_s^2\zeta+a_sb_s\eta+a_sc_s\zeta+ \\ \hline \text{ჯამი}\ (a\Delta)=(av)+(aa)\,\zeta+(ab)\,\eta+(ac)\,\eta+ \end{array}$$

ანალოგიით შემდგომი სტრიქონები დაიწერება ასე:

$$(b\Delta)=(bv)+(ab)\,\xi+(bb)\,\eta+(bc)\,\zeta+$$

$$(c\Delta)=(cv)+(ac)\,\xi+(bc)\,\eta+(cc)\,\zeta+$$

რადგანაც (7)-ის საფუძვლით $(av)=0$, $(bx)=0$, $(cv)=0$, ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ გამოხატულებებს:

$$\left.\begin{aligned}(a\Delta)&=(aa)\,\xi+(ab)\,\eta+(ac)\,\zeta+\\(b\Delta)&=(ab)\,\xi+(bb)\,\eta+(bc)\,\zeta+\\(c\Delta)&=(ac)\,\xi+(bc)\,\eta+(cc)\,\zeta+\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

მიღებული გამოხატულებანი განსხვავდებიან ნორმული (8) განტოლებებისაგან მხოლოდ იმით, რომ მათში w_i, x, y, z, შეცვლილია შესაბამისად Δ_i, ξ, η, ζ, ოდენობებით. მაშასადამე, თუ (9) და (18)-ში w_1, w_2, w_3 w_s ოდენობებს შევცვლით Δ_1, Δ_2, $\Delta_3 \cdots \Delta_s$ ცდომილებებით, მაშინ ξ, η, ζ, უცნობთათვის გვექნება შემდეგი გამოხატულებანი:

$$\xi=(\alpha\Delta),\quad \eta=(\beta\Delta),\quad \zeta\,(\gamma\Delta). \qquad (24)$$

ავიღოთ ახლა $\xi\,(d\Delta)$ ნამრავლი და მივცეთ მას ასეთი სახე:

$$\xi\,(a\Delta)=(\alpha\Delta)\,(a\Delta)=(\alpha_1\Delta_1+\alpha_2\Delta_2+\alpha_3\Delta_3+\cdots+\alpha_s\Delta_s)\,(a_1\Delta_1+$$
$$+a_2\Delta_2+a_3\Delta_3+\cdots+a_s\Delta_s)=a_1\alpha_1\Delta_1{}^2+a_2\alpha_2\Delta_2{}^2+a_3\alpha_3\Delta_3{}^2+\cdots+$$
$$+a_s\alpha_s\Delta_s{}^2+(a_1\alpha_2+a_2\alpha_1)\,\Delta_1\Delta_2+(a_1\alpha_3+a_3\alpha_1)\,\Delta_1\Delta_3+$$

მიღებულ გამოხატულებაში უალბათიერესი მნიშვნელობა იმ წევრების ჯამისა, რომლებშიაც შედის ნამრავლები $\Delta_1\Delta_2$, $\Delta_1\Delta_3$, $\Delta_2\Delta_3$ ..., უნდა უდრიდეს ნულს, ვინაიდან როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი Δ_i ცდომილება ერთნაირად ალბათიერია; რაც შეეხება Δ_1^2, Δ_2^2, Δ_3^2, Δ_s^2 კვადრატებს, მათ მაგიერ შეიძლება შეტანილი იყოს მათი საშუალო არითმეტიკული (10 § (9)).

$$\frac{\Sigma\,\Delta^2}{s}=\frac{(\Delta\,\Delta)}{s}=\mu^2;$$

მაშინ ხსენებული $\xi\,(a\Delta)$ ნამრავლისათვის გვექნება:

$$\xi(a\Delta)=\mu^2\,(a\alpha).$$

მიღებულ განტოლებაში $(a\alpha)$ უდრის 1-ს; მართლაცა და, თუ (13) განტოლებებს სტრიქონ-სტრიქონ გადავამრავლებთ a_1, a_2, a_3 a_s ოდენობებზე და შემდეგ შევაჯამებთ, მივიღებთ გამოხატულებას

$$(a\alpha)=(aa)\,A_1+(ab)\,A_2+(ac)\,A_3+ \qquad ,$$

რომელიც, 11-ის თანახმად, ერთს უდრის. მაშასადამე,

$$\xi\,(a\Delta)=\mu^2.$$

სწორედ ამნაირადვე დამტკიცდება, რომ აგრეთვე

$$\eta\,(b\Delta)=\mu^2,\quad \zeta\,(c\Delta)=\mu^2,$$

ამიტომ $(\Delta\Delta)=\Sigma\Delta^2$ განისაზღვრება (22) განტოლებიდან შემდეგნაირად:

$$(\Delta\Delta)=s\mu^2=(vv)=n\mu^2,$$

ვინაიდან ξ, μ, ζ უცნობთა რიცხვი უდრის n-ს; ხოლო აქედან

$$\mu^2=\frac{(vv)}{s-n}=\frac{\Sigma v^2}{s-n} \tag{25}$$

ამნაირად, დაკვირვებულ $w_1, w_2, w_3 \cdots w_s$ ოდენობათა საშუალო μ ცდომილების გამოსაყვანად,—ძირითად განტოლებებში ნარჩენ v_1, v_2, v_3, $p_3 \cdots v_s$ გადახრებთან დამოკიდებულებით,—Σv^2 ჯამი უნდა ყოველთვის გაყოფილი იქნას $s-n$ სხვაობაზე, რომელშიაც s არის ძირითად განტოლებათა რიცხვი, ხოლო n საძიებელ x, y, z, ... უცნობთა რიცხვი.

მაგალითისათვის განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როდესაც უცნობი x ოდენობა განისაზღვრება ერთნაირი სიზუსტის მქონე უშუალო დანამზერებიდან:

$$x=a_1,\quad x=a_2,\quad x=a_3,\ \ldots\ x=a_s.$$

ამ შემთხვევაში მათი საშუალო μ ცდომილება უნდა განისაზღვრებოდეს ფორმულით

$$\mu^2=\frac{\Sigma(a_i-a)^2}{s-1}, \tag{26}$$

რომელშიაც

$$\Sigma(a_i-a)^2=(a_1-a)^2+(a_2-a)^2+(a_3-a)^2+\cdots+(a_s-a)^2,$$

ხოლო

$$a=\frac{a_1+a_2+a_3\cdots+a_s}{s}=\frac{\Sigma a_i}{s}.$$

(26) ფორმულა იგივეა 14 §-ის (15) ფორმულისა, რომელშიაც δ წარმოადგენს ცალკეულ განაზომთა გადახრას მათი საშუალო არითმეტიკულიდან, ე. ი.

$$\delta_1=a_1-a,\quad \delta_2=a_2-a,\quad \delta_3=a_3-a,\quad \delta_s=a_s-a.$$

48. ნორმულ განტოლებათა გადაწყვეტა

ნორმულ (8) განტოლებათა გადაწყვეტის უმარტივესი მეთოდი მდგომარეობს უცნობთა თანმიმდევრობით ამორიცხვაში, რაც სრულდება ქვემოთ მოყვანილი წესით.

(8) სისტემის პირველი განტოლება გავყოთ (aa)-ზე და მიღებული x-ის მნიშვნელობა შევიტანოთ დანარჩენ განტოლებებში. შემდეგ,

უცნობთა კოეფიციენტები შესამოკლებლად აღვნიშნოთ იმ სიმბოლოებით, რომლებიც ნორმულ განტოლებებში მდგარია y, z, … უცნობთა წინ მხოლოდ 1-იანი ნიშნაკით, ამრიგად:

$$(bb)-\frac{(ab)}{(aa)}\cdot(ab)=(bb)_1$$

$$(bc)-\frac{(ac)}{(aa)}\,(ab)=(bc)_1$$

$$(bw)-\frac{(aw)}{(aa)}\,(ab)=(bw)_1.$$

მივიღეთ $(n-1)$ განტოლება, რომელიც გარეგნულად მსგავსია (8) განტოლებებისა, მაგრამ ისინი უკვე აღარ შეიცავენ უცნობ x-ს; სახელდობრ:

$$\left.\begin{array}{l}(bb)_1\,y+(bc)_1\,z+\qquad=(bw)_1\\(bc)_1\,y+(cc)_1\,z+\qquad=(cw)_1\\ \\ \end{array}\right\}\quad(8)_1$$

ამნაირადვე ამოვრიცხოთ უცნობი y და შესამოკლებლად კვლავ აღვნიშნოთ

$$(cc)_1-\frac{(bc)_1}{(bb)_1}\,(bc)_1=(cc)_2,$$

ე. ი. იმავე სიმბოლოებით, რაც დგას z, -ის წინ, მხოლოდ 2-იანი ნიშნაკით, გვექნება:

$$\left.\begin{array}{l}(cc)_2\,z+\qquad=(cw)_2\\ \end{array}\right\}\quad(8)_2$$

ასევე უნდა მოვიქცეთ შემდგომშიაც z-ისა და დანარჩენ უცნობთა ამოსარიცხავად იქამდე, ვიდრე არ დაგვრჩება მხოლოდ ერთი $(8)_{n-1}$ განტოლება მარტო ერთი უცნობით საერთო, ყველაზე უფრო ხელსაყრელი. სქემა (8), $(8)_1$, $(8)_2$, … განტოლებათა რიცხობრივ გადასაწყვეტად, მოცემულია ქვემო მაგალითში. ამავე სქემის მიხედვით მოინახება აგრეთვე დამხმარე A_1, A_2, , B_1, B_2, $\cdots$, C_1, C_2, $\cdots$, ოდენობანი (11) და (11)' განტოლებიდან, რომელთა შესახებ ნათქვამი იყო 46 §-ში.

უცნობთა ამ თანმიმდევრობით ამორიცხვას აქვს თვალსაჩინო უპირატესობა. მართლაც, თუ ჩვენ, არც თვით ნორმულ განტოლებაში,

არც მომდევნო $(8)_1$, $(8)_2$, $(8)_{n-1}$ განტოლებებში არ დაუშვებთ არავითარ არითმეტიკულ შეკვეცას, მაშინ სულ უკანასკნელ $(8)_{n-1}$ განტოლებაში კოეფიციენტი ერთადერთი დარჩენილი უცნობის წინ გამოვა მისი წონის თანასწორი, ასე რომ, უცნობთა ამორიცხვა რომ წარმოებულიყო შებრუნებული წესრიგით, ქვემო ნორმული განტოლებიდან დაწყებული, მაშინ ბოლო შედეგში x-ისა და მისი p_x წონისათვის გვექნება:

$$(aa)_{n-1} \cdot x = (aw)_{n-1} \quad \text{და} \quad p_x = (aa)_{n-1}.$$

თუ ამნაირადვე ამოვრიცხავდით დამხმარე A_3, A_2, A_1 ოდენობებს (11) სისტემის განტოლებებიდან, რომელნიც საესებით (8)-ის მსგავსია, მაშინ, ცხადია, გვექნება ასეთი უკანასკნელი $(11)_{n-1}$ განტოლება, მხოლოდ ერთი A_1 ოდენობის შემცველი:

$$(aa)_{n-1} A_1 = 1;$$

ამიტომ (17)-ის საფუძვლით უნდა იყოს

$$(aa)_{n-1} = \frac{1}{A_1} = p_x \tag{27}$$

უმცირეს კვადრატთა მეთოდი, $x, y, z,$ უცნობთა დიდი n რიცხვის შემთხვევაში, მოითხოვს იმდენად ბევრ გამოთვლას, რომ აუცილებლად საჭირო ხდება ვიქონიოთ მათი სისწორის საიმედო კონტროლი. ამ მიზნით, $x, y, z, \cdots$ უცნობთა რიცხობრივი მნიშვნელობისა და (4)-ში ნაჩვენებ გადახრათა (რომელნიც საჭიროა საშუალო μ ცდომილების განსაზღვრულად (იხ. (47 §)) გამოთვლის შემდეგ, უმარტივესი იქნება, თუ შევადგენთ ასეთ ჯამს:

$$(vw) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + \quad + v_s w_s$$

და შევამოწმებთ, საკმარისი სიზუსტით კმაყოფილდება, თუ არა ტოლობა

$$(vw) = (vv) \tag{28}$$

ამ მიზნით გადავამრავლოთ (4) განტოლებანი შესაბამისად v_1, v_2, v_3, v_s-ზე; მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
v_1 w_1 - (a_1 v_1 x + b_1 v_1 y + c_1 v_1 z + \quad &) = v_1^2 \\
v_2 w_2 - (a_2 v_2 x + b_2 v_2 y + c_2 v_2 z + \quad &) = v_2^2 \\
v_3 w_3 - (a_3 v_3 x + b_3 v_3 y + c_3 v_3 z + \quad &) = v_3^2 \\
\\
v_s w_s - (a_s v_s x + b_s v_s y + c_s v_s z + \quad &) = v_s^2 \\
\hline
\text{ჯამი} \quad (vw) - [(av)\, x + (bv)\, y + (cv)\, z + \quad &] = (vv)
\end{aligned}$$

რადგანაც (7)-ის ძალით

$$(av(=0, \quad (bv)=0, \quad (cv)=0$$

ამიტომ

$$(vw)=(vv),$$

მაგრამ უკეთესი იქნება მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ჯერ ძირითად (3) განტოლებებში შევადგინოთ ჯამები:

$$r_1=a_1+b_1+c_1+ \qquad +w_1$$
$$r_2=a_2+b_2+c_2+ \qquad +w_2$$
$$r_3=a_3+b_3+c_3+ \qquad +w_3$$

$$r_s=a_s+b_s+c_s+ \qquad +w_s.$$

შემდეგ, გადავამრავლოთ ისინი სტრიქონ-სტრიქონ $a_1, a_2, a_3, \cdots a_s$-ზე, მერე $b_1, b_2, b_3, \qquad b_s$-ზე, მერე $c_1, c_2, c_3, \qquad c_s$-ზე და ა. შ, და ბოლოს შევაჯამოთ მიღებული შედეგები, რაც მოგვცემს ქვემო ტოლობებს:

$$(aa)+(ab)+(ac)+ \qquad +(aw)=ar$$
$$(ab)+(bb)+(bc)+ \qquad +(bw)=bs$$
$$(ac)+(ac)+(cc)+ \qquad +(cw)=cr$$

ამის შემდეგ, $(8)_1$, $(8)_2$, ფორმულებთან ანალოგიით, დავწეროთ:

$$(bb)_1+(bc)_1+ \qquad +(bw)_1=(br)_1$$
$$(bc)_1+(cc)_1+ \qquad +(cw)_1=(cr)_1$$

$$(cc)_2+ \cdots\cdots (cw)_2=(cr)_2$$

და ა. შ.

49. ნორმულ განტოლებათა გადაწყვეტის მაგალითები

მაგალითი 1. ვთქვათ, განზომადი N რაოდენობა (რაც ხშირად გვხვდება ხოლმე სინამდვილეში) წარმოადგენს t ცვლადის ასეთ ფუნქციას

$$N=A+Bt+Ct^2,$$

და საჭიროა განსაზღვრული იყოს მასში შემავალი A, B, C, მუდმივების უალბათიერესი მნიშვნელობა და მათი საშუალო m_A, m_B, m_C

ცდომილებანი, რისთვისაც მოცემულია დაკვირვებით მიღებული N-ის 9 მნიშვნელობა მათი შესაბამისი არაერთნაირი წონებითურთ.

t	$+1,5$	$+1,1$	$+0,7$	$+0,3$	$-0,1$	$-0,5$	$-1,0$	$-1,5$	$-2,0$
N	$+6,20$	$+3,45$	$+2,00$	$+1,80$	$+2,40$	$+4,55$	$+8,85$	$+15,70$	$+24,40$
P	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

შემდგომ გამოთვლებში გადაჭარბებულად დიდი რიცხვების თავიდან ასაცილებლად დავდოთ:

$$A=A_0+x,\quad B=B_0+y,\quad C=C_0+z.$$

მერე პირველი, მეხუთე და მერვე განტოლებიდან განვსაზღვრავთ მიახლოებით მნიშვნელობებს

$$A_0=+2,4,\quad B_0=-3,2,\quad C=+3,8,$$

რის შემდეგაც გვექნება 9 ძირითადი განტოლება (ფორმ. (3)) საძიებელ x, y, z შესწორებათათვის, ქვემოთ მოცემული კოეფიციენტებით:

$$a=\sqrt{p}\,,\quad b=t\sqrt{p}\,,\quad c=t^2\sqrt{p}\,,\quad w=(N-A_0-B_0t-C_0t^2)\sqrt{p}.$$

ამის შემდეგ, შემდგომი გამოთვლის შესამოწმებლად, შევადგენთ ჯამებს

$$r=a+b-c+w$$

და, დასასრულ, ჯამებს

(aa), (ab), (ac), (am), (ar), (bb), (bc), (bm), (br), (cc), (cm), (cr),

რომლებიც შედიან ნორმულ (8) განტოლებებში, x, y, z-თვის.

$$\text{კონტროლი}\ \left\{\begin{array}{ll} (ar)=-0,290 & (aa)+(ab)-(ac)+(aw)=-0,290 \\ (br)=+8,333 & (ab)+(bb)-(bc)+(bw)=+8,345 \\ (cr)=-7,260 & (ac)+(bc)-(cc)+(cw)=-7,260 \end{array}\right.$$

ყველა საძიებელ x, y, z შესწორებათა მათი p_x, p_y, p_z წონებითურთ განსაზღვრას (ნორმული (8) განტოლებებიდანა ლა მათგან გამომდინარე $(8)_1$ და $(8)_2$ განტოლებებიდან), ვაწარმოებთ 4-ნიშნიანი ლოგარითმების დახმარებით, ქვემოთ მოცემული სქემის მიხედვით.

№№	a	b	c	w		ar	br	cr
1	0,707	+1,060	+1,591	+0,035	+0,211	+0,150	+0,225	+0,337
2	1,000	+1,100	+1,210	—0,030	+0,860	+0,860	+0,946	+1,041
3	1,000	+0,700	+0,490	—0,020	+1,190	+1,190	+0,833	+0,583
4	1,000	+0,300	+0,090	+0,020	+1,230	+1,230	+0,369	+0,111
5	1,000	—0,100	+0,010	—0,360	+0,530	+0,530	—0,053	+0,005
6	1,000	—0,500	+0,250	—0,400	—0,150	—0,150	+0,075	—0,038
7	1,000	—1,000	+1,000	—0,550	—1,550	—1,550	+1,550	—1,550
8	0,707	—1,060	+1,591	—0,035	—1,979	—1,400	+2,098	—3,149
9	0,500	—1,000	+2,000	+0,200	—2,300	—1,150	+2,360	—4,600
ჯამი	7,914	—0,500	+8,232	—1,140	—1,958	—0,290	+8,343	—7,260

№№	aa	ab	ac	aw	bb	bc	bw	cc	cw
1	+0,500	+0,750	+1,125	+0,025	+1,125	+1,687	+0,038	+2,531	+0,056
2	+1,000	+1,100	+1,210	—0,030	+1,210	+1,331	—0,033	+1,464	—0,036
3	+1,000	+0,700	+0,490	—0,020	+0,490	+0,343	—0,014	+0.240	—0,010
4	+1,000	+0,300	+0,090	+0,020	+0,090	+0,027	+0,006	+0,008	+0,002
5	+1,000	—0,100	+0,010	—0,360	+0,010	—0,001	+0,036	+0,000	—0,004
6	+1,000	—0,500	+0,250	—0,400	+0,250	—0,125	+0,200	+0,063	—0,100
7	+1,000	—1,000	+1,000	—0,550	+1,000	—1,000	+0,550	+1,000	—0,550
8	+0,500	—0,750	+1,125	—0,025	+1,125	—1,687	+0,037	+2,531	—0,056
9	+0.250	—0,500	+1,000	+0,100	+1,000	—2,000	—0,200	+4,000	+0,400
ჯამი	+7,250	0,000	+6,300	—1,240	+6,300	—1,425	+0,620	+11,837	—0,298

$(aa)=7{,}250$ $\lg(aa)=0{,}8603$	$(ab)=0$ $\lg(ab)=-$	$(ac)=+6{,}300$ $\lg(ac)=0{,}7933$	$(a\omega)=-1{,}240$ $\lg(a\omega)=0{,}0934_n$	$(ar)=-0{,}290$ $\lg(ar)=9{,}4624_n$
	$(bb)=6{,}300$ $(ab)\dfrac{(ab)}{(aa)}=0$ $(bb)_1=6{,}300$ $\lg(bb)_1=0{,}7993$	$(bc)=-1{,}425$ $(ac)\dfrac{(ab)}{(aa)}=0$ $(bc)_1=-1{,}425$ $\lg(bc)_1=0{,}1538_n$	$(b\omega)=+0{,}620$ $(a\omega)\dfrac{(ab)}{(aa)}=0$ $(b\omega)_1=+0{,}620$ $\lg(b\omega)_7=9{,}7924$	$(br)=+8{,}345$ $(ar)\dfrac{(ab)}{(aa)}=0$ $(br)_1=-8{,}345$ $\lg(br)_1=0{,}9214$
	$z=+0{,}152$ $\lg z=9{\cdot}1822$ $(cc)_1=6{,}363$ $\lg(cc)_1=0{,}8037$	$(cc)=11{,}837$ $(ac)\dfrac{(ac)}{(aa)}=+5{,}474$ $(cc)_1=6{,}363$ $(bc)_1\dfrac{(bc)_1}{(bc)_1}=+0{,}323$ $p_2=(cc)_2=6{,}041$ $\lg p_1=\lg(cc)_2=0{,}7811$ $(cb)_1=-1{,}425$ $\lg(cb)_1=0{,}1538_n$	$(c\omega)=-0{,}298$ $(a\omega)\dfrac{(ac)}{(aa)}=-1{,}077$ $(c\omega)_1=+0{,}779$ $(b\omega)_1\dfrac{(bc)_1}{(bb)_1}=-0{,}140$ $(c\omega)_2=+0{,}919$ $\lg(c\omega)_2=9{,}9633$ $(c\omega)_1=+0{,}779$ $\lg(c\omega)_1=9{,}8912$	$(cr)=-7{,}260$ $(ar)\dfrac{(ac)}{(aa)}=-0{,}252$ $(cr)_1=-7{,}008$ $(cr)_1\dfrac{(bc)_1}{(bb)_1}=-1{,}888$ $(cr)_2=5{,}120$ (კონტროლი) $(cr)_1=-7{,}008$ $\lg(cr)_3=0{,}8456_n$

$(cc)=11{,}837$ $\lg (cc)=1{,}0733$	$y=+0{,}133$ $\lg y=9{,}1230$ $(cb)=-1{,}425$ $\lg (cb)=0{,}1538_n$	$(bb)_1=6{,}300$ $(cb)_1 \frac{(cb)_1}{(cc)_4}=+0{,}319$ $p_y=(bb)_2=5{,}981$ $\lg p_y=\lg (bb)_2=0{,}7768$ $(ca)=+6{,}300$ $\lg (ca)=0{,}7993$	$(bw)_1=+0{,}620$ $(cw)_1 \frac{(cb)_1}{(cc)_1}=-0{,}174$ $(bw)_2=+0{,}794$ $\lg (bw)_2=9{,}8998$ $(cw)=-0{,}298$ $\lg (cw)=9{,}4742_n$	$(br)_1=+8{,}345$ $(cr)_1 \frac{(cb)_1}{(cc)_1}=+5{,}569$ $(br)_2=+6{,}776$ (კონტროლი) $(cr)=-7{,}260$ $g\ (cr)=0{,}8600\ n$
	$(bb)=6{,}300$ $(cb)\frac{(cb)}{(cc)}=+0{,}17$ $(bb)_1=6{,}128$ $\lg (bb)_1=0{,}7874$	$(ba)=6$ $(ca)\frac{(cb)}{(cc)}=-0{,}758$ $(ba)_1=+0{,}758$ $\lg (ba)_1=9{,}8791$	$(bw)=+0{,}620$ $(cw)\frac{(cb)}{(cc)}=+0{,}036$ $(bw)_1=+0{,}584$ $\lg (bw)_1=9{,}7664$	$(br)=+8{,}345$ $(cr)\frac{(cb)}{(cc)}=+0{,}874$ $(br)_1=+7{,}471$ $\lg (br)_1=0{,}8734$
	$x=-0{,}303$ $\lg x=9{,}4816_n$	$(aa)=7{,}250$ $(ca)\frac{(ca)}{(cc)}=-3{,}352$ $(aa)_1=3{,}898$ $(ba)_1\frac{(ba)_1}{(bb)_1}=+0{,}094$ $p_x=(aa)_2=3{,}804$ $\lg p_x=\lg (aa)_2=$ [illegible],5802	$(aw)=-1{,}240$ $(cw)\frac{(ca)}{(cc)}=-0{,}159$ $(aw)_1=1{,}081$ $(bw)_1\frac{(ba)_1}{(bb)_1}=+0{,}072$ $(aw)_2=-1{,}153$ $\lg (aw)_2=0{,}0618$	$(ar)=-0{,}290$ $(cr)\frac{(ca)}{(cc)}=-3{,}863$ $(ar)_1=+3{,}573$ $(br)_1\frac{(ba)_1}{(bb)_1}=+0{,}924$ $(ar)_2=+2{,}649$ (კონტროლი)

დასასრულ, მონახულ x, y, z ოდენობებს შევიტანთ 9 ძირითად განტოლებაში, რის შემდეგაც მივიღებთ გადახრას ანუ სხვაობას

$$v=w-(ax+by=cz),$$

რომლებიც ქვემოთ არის მოყვანილი; ყველა გამოთვლის სისწორე კვლავ შემოწმებულია იმით, რომ საკმარისი მიახლოებით იანგარიშება

$$(vw)=(vv)$$

№№	ax	by	cz	ჯამი	w	v	wv	v^2
1	−0,214	+0,141	+0,242	+0,169	+0,035	−0,13	−0,005	0,017
2	−0,303	+0,184	+0,330	+0,027	−0,030	−0,06	+0,002	0,004
3	−0,303	+0,075	+0,168	−0,135	−0,020	+0,11	−0,005	0,012
4	−0,303	+0,014	+0,054	−0,249	+0,020	+0,27	+0,005	0,073
5	−0,303	+0,002	−0,011	−0,314	−0,360	−0,05	+0,018	0,003
6	−0,303	+0,038	−0,028	−0,331	−0,400	−0,07	+0,028	0,005
7	−0,303	+0,152	−0,019	−0,284	−0,550	−0,27	+0,148	0,073
8	−0,214	−0,141	+0,242	−0,113	−0,035	+0,08	−0,003	0,006
9	−1,152	−0,133	+0,304	+0,019	+0,200	+0,18	+0,036	0,032
							$(wv)=0,227$	$0,225=(vv)$

მოცემულ N ოდენობათა საშუალო μ ცდომილება, რომელთა p წონა ერთის თანასწორია, (25) ფორმულის მიხედვით ასეთი მიიღება:

$$\mu^2=\frac{\Sigma v^2}{9-3}=\frac{0,225}{6}=0,0375,\quad \mu-\pm 0,19;$$

ამიტომ;

$A=+2,4-0,30=+2,10$ საშუალო ცდომილებით $m_A=\dfrac{\mu}{\sqrt{p_x}}=\pm\ 0.10$

$B=-3,2+0,13=-3,07$ $\qquad m_B=\dfrac{\mu}{\sqrt{p_y}}=\pm 0,08$

$C=+3,8+0,14=-3,95$ $\qquad m_C-\dfrac{\mu}{\sqrt{p_z}}=\pm 0,08.$

მაგალითი 2. მოცემულია სწორი ხაზი მისი განტოლებით $Y=AX+$ $+B$, რომლის გაზომილი X აბსცისები და Y ორდინატები ქვემოთ არის მოყვანილი, უნდა განისაზღვროს წრფის საკუთხო A კოეფიციენტი და B მონაკვეთი ორდინატების ღერძზე.

$$X_1+10 \qquad Y_1=8{,}39 \qquad \text{წონით } p_1=1$$
$$X_2=20 \qquad Y_2=11{,}42 \qquad p_2=1$$
$$X_3=30 \qquad Y_3=14{,}08 \qquad p_3=1$$
$$X_4=40 \qquad Y_4=16{,}83 \qquad p_4=1$$
$$X_5=50 \qquad Y_5=19{,}66 \qquad " \quad p_5=1$$

გამოთვლის დროს დიდი რიცხვების თავიდან ასაცილებლად, დავწეროთ

$$A=A_0+x, \quad B=B_0+y.$$

და შემდეგ მესამე და მეოთხე განტოლების გადაწყვეტით განვსაზღვროთ A_0 და B_0:

$$14{,}08=30A_0=B_0$$
$$16{,}83=40A_0+B_0,$$

რომლებიც მოგვცემენ:

$$A_0=0{,}28, \quad B_0=5{,}68,$$

A და B-ს საბოლოო მნიშვნელობა იქნება:

$$A=0{,}28+x, \quad C=5{,}68+y.$$

ხუთი ძირითადი განტოლებისათვის კოეფიციენტები მოინახება ქვემო ფორმულებიდან:

$$a=X\sqrt{p}, \quad b=1\cdot\sqrt{p}\,w+(X-A_0X-B_0)\sqrt{p}.$$

ძირითადი ფორმულები შემდეგია:

$$10x+y=-0{,}09$$
$$20x+y=+0{,}14$$
$$30x+y=\quad 0{,}00$$
$$40x+y=-0{,}05$$
$$50x+y=-0{,}02$$

ამ განტოლებათა გასამარტივებლად, ვთქვათ, $10x=x'$; მაშინ ძირითადი განტოლებები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$x'+y=-0{,}09$$
$$2x'+y=+0{,}14$$
$$3x'+y=\quad 0{,}00$$
$$4x'+y=-0{,}05$$
$$5x'+y=-0{,}02.$$

ძირითად განტოლებათა მიხედვით შევადგენთ ნორმულ განტოლებებს:

$$(aa)\,x' + (ab)\,y = (aw)$$
$$(ab)\,x' + (bb)\,y + (bw)$$

ამ უკანასკნელთათვის კოეფიციენტების შესადგენად ძირითადი განტოლებები იძლევიან:

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=4,\ a_5=5$$
$$b_1=1,\ b_2=1,\ b_3=1,\ b_4=1,\ b_5=1$$
$$w_1=-0{,}09,\ w_2=+0{,}14,\ w_3=0{,}00,\ w_4=-0{,}05,\ w_5=-0{,}02.$$

ნორმულ განტოლებათა კოეფიციენტები:

$$(aa)=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$$
$$(ab)=1+2+3+4+5=15$$
$$(aw)=-0{,}09+0{,}28-0{,}00-0{,}20-0{,}10=-0{,}11$$
$$(bb)=1^2+1^2+1^2+1^2+1^2=5$$
$$(bw)=-0{,}09+0{,}14-0{,}00-0{,}05-0{,}02=-0{,}02.$$

თვით ნორმული განტოლებანი იქნება:

$$55x'+15y=-0{,}11$$
$$15x'+\ 5y=-0{,}02$$

ამ განტოლებათა ერთობლივი გადაწყვეტა მოგვცემს:

$$y=+0{,}011,\ x'=-0{,}005,\ x=-0{,}0005.$$

მაშასადამე,

$$A=0{,}2800-0{,}0005=0{,}279_5$$
$$B=5{,}680+0{,}011=5{,}691.$$

წონები:

$$p_x=(aa)_{n-1}=55,\quad p_y=(bb)_{n-1}=5.$$

№№	ax	by	ჯამი	w	v	wv	v^2
1	−0,005	+0,011	+0,006	−0,090	−0,096	+0,00864	0,00922
2	−0,010	+0,011	+0,001	+0,140	+0,139	+0,01946	0,01932
3	−0,015	+0,011	−0,005	0,000	+0,005	+0,00000	$0{,}00002_5$
4	−0,020	+0,011	−0,009	−0,050	−0,041	+0,00205	0,00268
5	−0,025	+0,011	−0,014	−0,020	−0,006	+0,00012	$0{,}00003_6$
						$(wv)=+0{,}03027$	$0{,}03028=(vv)$

მოცემულ Y ოდენობათა საშუალო μ ცდომილება, რომელთა წონა $p=1$, (25) ფორმულის მიხედვით იქნება:

$$\mu^2=\frac{0{,}0303}{5-2}=\frac{0{,}0303}{3}=0{,}0101,\ \mu=\pm 0{,}101,$$

და ამიტომ

$$A=0{,}279_5 \text{ საშუალო ცდომილებით } m_A=\frac{\mu}{\sqrt{p_x}}=\pm\frac{0{,}101}{\sqrt{55}}=\pm 0{,}014,$$

$$B=5{,}691 \quad \text{"} \quad m_B=\frac{\mu}{\sqrt{p_y}}=\pm\frac{0{,}101}{\sqrt{5}}=\pm 0{,}046,$$

50. უმცირეს კვადრატთა მეთოდის ელემენტური დასაბუთება

9 §-ში განსაზღვრული არითმეტიკული შუადის წესი შეიძლება გამართლებული იყოს იმ გარემოებით, რომ ცალკეულ განაზომთა მათი არითმეტიკული შუადიდან გადახრათა კვადრატების ჯამი ნაკლებია, ვიდრე იმავე განაზომების, სხვა რომელიმე ნებისმიერად აღებული ოდენობიდან გადახრათა კვადრატების ჯამი.

მართლაც და, ვთქვათ, a_0 წარმოადგენს a_1, a_2, a_3, $\dots$ a_n განაზომთა არითმეტიკულ შუადს, ხოლო b—ნებისმიერად აღებულ რაიმე რიცხვს. შევადგინოთ სხვაობები:

$$\begin{aligned}
\Delta_1&=a_0-a_1 & \delta_1&=b-a_1\\
\Delta_2&=a_0-a_2 & \delta_2&=b-a_2\\
\Delta_3&=a_0-a_3 & \delta_3&=b-a_3\\
\\
\Delta_n&=a_0-a_n & \delta_n&=b-a_n
\end{aligned}$$

ორივე სისტემის კვადრატების ჯამები იქნება:

$$\Sigma\Delta^2=na_0^2-2a_0\Sigma a+\Sigma a^2$$
$$\Sigma\delta^2=nb^2-2b\Sigma a+\Sigma a^2$$

პირველი განტოლების მეორიდან გამოკლება მოგვცემს:

$$\Sigma\delta^2-\Sigma\Delta^2=nb^2-na_0^2-2b\Sigma a+2a_0\Sigma a,$$

რომლიდანაც, $a_0=\frac{\Sigma a}{n}$-ის შეტანის შემდეგ, გამოვიყვანთ:

$$\Sigma\delta^2-\Sigma\Delta^2=nb^2-\frac{(\Sigma a)^2}{n}-2b\,\Sigma a+2\,\frac{(\Sigma a)^2}{n}=$$
$$=n\left[b^2-2b\,\frac{\Sigma a}{n}+\left(\frac{\Sigma a}{n}\right)^2\right]=n\left(b-\frac{\Sigma a}{n}\right)^2.$$

აქ გაზომვათა რიცხვი და $\left(b-\frac{\Sigma a}{n}\right)^2$, როგორც ყოველი კვადრატი, წარმოადგენენ დადებით ოდენობებს; ამიტომ

$$\Sigma\Delta^2<\Sigma\delta^2,$$

რაც იყო დასამტკიცებელი სწორედ ამის საფუძვლით, როგორც თვით არითმეტიკული შუადის გამოყვანის მეთოდი, ისე ყველა მისგან გამომდინარე შედეგი, იწოდება **უმცირეს კვადრატთა მეთოდად**.

ჩვენ მიერ უკვე ნაჩვენები იყო, თუ რა საუცხოვო საშუალებას წარმოადგენს განსახილველი მეთოდი განტოლებათა გადასაწყვეტად იმ შემთხვევაში, როდესაც განტოლებათა რიცხვი აღემატება უცნობთა რიცხვს.

მოვიყვანოთ ამ უმცირეს კვადრატთა მეთოდის უმარტივესი გამოყენების მაგალითები.

ვთქვათ, x უცნობისათვის შედგენილი გვაქვს განტოლებანი:

$$x=a_1,\;\; x=a_2,\;\; x=a_3,\;\; \cdots x=a_n.$$

მათი ამ მეთოდით გადასაწყვეტად შევადგინოთ განხრათა კვადრატების ჯამი:

$$s=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+(x-a_3)^2+\cdots+(x-a_n)^2=\text{minimum}.$$

შევუთანასწოროთ ნულს პირველი წარმოებული s-ისა x-ით, გვექნება:

$$(x-a_1)+(x-a_2)+(x-a_3)+\;\cdots+\;(x-a_n)=0,$$

საიდანაც x-ის უალბათიერესი მნიშვნელობა ასეთი გვექნება:

$$x=\frac{a_1+a_2+a_3+\;\cdots\;+a_n}{n},$$

რაც სავსებით ეთანხმება 9§-ის (8) ფორმულას.

ვთქვათ, ახლა გაზომვათა რიგი იძლევა ორ x და y უცნობიან განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned}
a_1x+b_1y+c_1&=0\\
a_2x+b_2y+c_2&=0\\
a_3x+b_3y+c_3&=0\\
&\\
a_nx+b_ny+c_n&=0.
\end{aligned}$$

წინა შემთხვევის მიხედვით, უმცირეს კვადრატთა მეთოდი აქაც მოითხოვს მინიმუმის პირობის დაცვას, ე. ი. უნდა იყოს:

$$S=(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2+(a_3x+b_3y+c_3)^2+\quad + \\ +(a_nx+b_ny+c_n)^2=\text{minimum}.$$

ეს პირობა იწვევს ორი ქვემო განტოლების ერთობლივ გადაწყვეტას, ე. ი. განტოლებათა

$$\frac{ds}{dx}=0,\ \ \frac{ds}{dy}=0,$$

ანუ, დიფერენციალის აღების შემდეგ, განტოლებათა

$$a_1(a_1x+b_1y+c_1)+a_2(a_2x+b_2y+c_2)+a_3(a_3x+b_3y+c_3)+ \\ +\quad +a_n(a_nx+b_ny+c_n)=0$$

$$b_1(a_1x+b_1y+c_1)+b_2(a_2x+b_2y+c_2)+b_3(a_3x+b_3y+c_3)+ \\ +\quad +b_n(a_nx+b_ny+c_n)=0.$$

ფრჩხილების გახსნისა და მსგავს წევრთა გაერთების შემდეგ გვექნება ცნობილი ნორმული განტოლებანი:

$$(aa)\,x+(ab)\,y+(ac)=0$$
$$(ab)\,x+(bb)\,y+(bc)=0,$$

სადაც

$$(aa)=a_1^2+a_2^2+a_3^2+\quad +a_n^2=\Sigma a^2$$
$$(ab)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\quad +a_nb_n=\Sigma ab$$
$$(ac)=a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+\quad +a_nc_n=\Sigma ac$$
$$(bb)=b_1^2+b_2^2+b_3^2+\quad +b_n^2=\Sigma b^2$$
$$(bc)=b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3+\quad b_nc_n=\Sigma bc.$$

როგორც წინათაც დავინახეთ, პირველი ნორმული განტოლების მისაღებად, ყოველი მოცემული (ძირითადი) განტოლება უნდა გადამრავლდეს მისი x-ის კოეფიციენტზე და [მერე მიღებული შედეგები შეჯამებული, ხოლო მეორე ნორმული განტოლების მისაღებად, იგივე მოცემული განტოლებანი უნდა გადამრავლდეს სათითაოდ მათი y-ის კოეფიციენტზე და მიღებული შედეგები იმნაირადვე შეჯამდეს. ხსენებული ნორმული განტოლებანი გადაწყდება ელემენტური ალგებრის ჩვეულებრივი წესის მიხედვით.

მსგავსადვე გადაწყდება აგრეთვე მრავალუცნობიანი განტოლებანიც.

ზემონათქვამის გასაშუქებლად განვიხილოთ მარტივი მაგალითი, რომლის მსგავსი ხშირადა გვხვდება პრაქტიკაში. ვთქვათ, რომელიმე

თითბრის მასშტაბის l სიგრძისა და მისი გაფართოების k კოეფიციენტის განსაზღვრისათვის მოხდენილი იყო ოთხი გაზომვა და სხვადასხვა t ტემპერატურისათვის მიღებული იყო მასშტაბის შემდეგი სიგრძე:

$$
\begin{array}{ll}
t_1=20^\circ & l_1=1000{,}22 \text{ მმ} \\
t_2=40^\circ & l_2=1000{,}65 \text{ „} \\
t_3=50^\circ & l_3=1000{,}90 \text{ „} \\
t_4=60^\circ & l_4=1001{,}05 \text{ „}.
\end{array}
$$

მოყვანილი 4 განაზომი მოგვცემს შემდეგი ოთხი სახის განტოლებას:

$$l=l_0+kt,$$

მათში ორი უცნობია: l_0 სიგრძე მასშტაბისა 0°-ის ტემპერატურაზე და k—მისი გაფართოების კოეფიციენტი. ძირითადი განტოლებანი იქნება ასეთი:

$$
\begin{aligned}
l_0+20k-1000{,}22&=0\\
l_0+40k-1000{,}65&=0\\
l_0+50k-1000{,}90&=0\\
l_0+60k-1001{,}05&=0.
\end{aligned}
$$

დიდი რიცხვების თავიდან ასაცილებლად, მასშტაბის სიგრძისათვის მივიღოთ მიახლოებითი მნიშვნელობა $l=1000$ მმ და ვეძიოთ მხოლოდ მისი Δl შესწორება: მაშინ ზემო განტოლებანი გადახალისდება ასეთნაირად:

$$
\begin{aligned}
\Delta l+20k-0{,}22&=0\\
\Delta l+40k-0{,}65&=0\\
\Delta l+50k-0{,}90&=0\\
\Delta l+60k-1{,}05&=0
\end{aligned}
$$

ნორმული განტოლებების კოეფიციენტები იქნება:

$$(aa)=4,\ (ab)=170,\ (bb)=8100,\ (ac)=-2{,}82,\ (bc)=-138{,}40,$$

ხოლო თვით ნორმული განტოლებანი დაიწერება ასე:

$$
\begin{aligned}
4\Delta l+170k-2{,}82&=0\\
170\Delta l+8100k-138{,}40&=0.
\end{aligned}
$$

ამ განტოლებათა ერთობლივი გადაწყვეტა მოგვცემს:

$$\Delta l=-0{,}196 \text{ მმ},\quad k=0{,}0212.$$

მაშასადამე, მასშტაბის სიგრძე 0°-თვის გამოდის 999,804 მმ, ხოლო გაფართოების კოეფიციენტი $\dfrac{k}{1000}=0{,}0000212.$

სამკუთხედის ბადის გაწონასწორება

§1. სამკუთხედთა ბადის კუთხეების უალბათიერესი შესწორებანი. კორელატების მეთოდი

უმცირეს კვადრატთა მეთოდს აქვს უაღრესად დიდი გამოყენება გეოდეზიურ და ასტრონომიულ გამოთვლებში. სრულებით წარმოუდგენელია უცილობლო და უცდომილო შედეგის მიღება წერტილების გეოგრაფიულ მდებარეობაში ხსენებული თეორიის გამოყენების გარეშე. ამიტომ ყოველ მნიშვნელოვან გეოდეზიურ სამუშაოთა გამოთვლას აუცილებლად უნდა წინ უძღოდეს სამკუთხედთა ბადის გაწონასწორება უმცირეს კვადრატთა ხერხის წესების მიხედვით.

როგორც პირველი, ისე მეორე კლასის ტრიანგულაციაში უსათუო წესად არის მიღებული ყოველ სამკუთხედში სამივე კუთხის გაზომვა. ეს ხდება როგორც ტრიანგულაციის სიზუსტის აწევის თვალსაზრისით, ისე ყველა განაზომის ურთიერთით შემოწმებისათვის. ამავე მიზნით ზოგჯერ იზომება ხოლმე ის კუთხეებიც, რომელნიც საზღვრავენ დიაგონალების მიმართულებას მომიჯნავე სამკუთხედებში. მაგრამ, რადგანაც გაზომილი კუთხეები აუცილებლად განიცდის დიდ თუ პატარა შემთხვევით ცდომილებებს, ამიტომ სინამდვილეში არც ერთ სამკუთხედში კუთხეთა ჯამი არ ეთანასწორება ზედმიწევნით $180°+\varepsilon$-ს და ამასთანავე არ არის ხოლმე დაკმაყოფილებული სამკუთხედთა ბადეში აგრეთვე ფიგურების სხვა გეომეტრიული თვისებებიც. ამიტომ სანამ შეუდგებოდეთ ბადის თანმიმდევრობითი გამოთვლას, საჭირო ხდება კუთხეებისათვის ისეთ უალბათიერეს შესწორებათა მონახვა, რომელნიც შეჰქმნიდნენ გამოუკლებლივ ყველა გეომეტრიულ პირობას სავსებით დაკმაყოფილებულს; უამისოდ გამოთვლილი გვერდებისათვის მოგვეცემოდა არა სრულებით განზღრული, არამედ სხვადასხვანაირი მნიშვნელობა, იმის მიხედვით, თუ რომელი კუთხეები იქნებოდა გამოთვლაში შეტანილი.

განვიხილოთ ეს საკითხი ზოგადად. ვთქვათ, $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ ოდენობათათვის (რიცხვით n), რომელნიც მკვეთრად უნდა აკმაყოფილებდეს ქვემორე s პირობას

$$f_1(X_1, X_2, X_3, \qquad X_n)=0,\ f_2(X_1, X_2, X_3 \qquad X_n)=0, \cdots$$
$$\cdots f_s(X_1, X_2, X_3 \qquad X_n)=0, \tag{1}$$

უშუალო გაზომვით მონახულია ყოველგვარი მუდმივი ცდომილებისაგან განთავისუფლებული შემდეგი მნიშვნელობანი:

$$X_1=N_1,\quad X_2=N_2,\quad X_3=N_3, \qquad X_n=N_n, \tag{2}$$

მათი შეფარდებითი $p_1, p_2, p_3 \qquad p_n$ წონებით. ამასთან გამოთვლით მიღებულია:

$$f_1(N_1, N_2, \cdots N_3, N_n)=w_1,\quad f_2(N_1, N_2, N_3, \qquad N_n)=w_2,$$
$$\cdots f_s(N_1, N_2, N_3 \cdots N_n)=w_s.$$

ამ მონაცემთა მიხედვით საჭიროა ყველა $X_1, X_2, X_3, \qquad X_n$ ოდენობისათვის *უალბათიერეს* მნიშვნელობათა განსაზღვრა. ცხადია, აქ ნაგულისხმევია, რომ მოცემულ s პირობას შორის არ არის არც ერთი ისეთი, რომელიც უშუალოდ გამომდინარე იყოს სხვათაგან, და რომ ამასთანავე *თვით პირობათა s რიცხვი საძიებელ ოდენობათა n რიცხვზე ნაკლებია.*

მიახლოებით $N_1, N_2, N_3, \qquad N_n$ ოდენობათა ფრიად მცირედი შესწორებანი აღვნიშნოთ $x_1, x_2, x_3, \qquad x_n$ ასოებით, ე. ი. ვთქვათ

$$X_1=N_1+x_1,\ X_2=N_2+x_2,\ X_3=N_3+x_3, \qquad X_n=N_n+x_n, \tag{3}$$

რის შემდეგაც გვექნება:

$$f_1(N_1+x_1, N_2+x_2, N_3+x_3, \qquad N_n+x_n)=0,$$
$$f_2(N_1+x_1, N_2+x_2, N_3+x_3, \qquad N_n+x_n)=0,$$
$$f_s(N_1+x_1, N_2+x_2, N_2+x_3, \qquad N_n+x_n)=0.$$

დავშალოთ $f_1, f_2, f_3 \qquad f_s$ ფუნქციები მწკრივებად მცირედი $x_1, x_2, x_3 \qquad x_n$ შესწორებათა ხარისხების მიმართ და დაშლაში შევიზღუდოთ ამ შესწორებათა პირველი ხარისხით:

$$f_1(N_1, N_2, N_3, \qquad N_n)+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 x_1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 x_2+$$
$$+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right)_0 x_3+ \qquad +\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_0 x_n=0$$

$$f_2(N_1, N_2, N_3, \cdots N_n)+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 x_1+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 x_2+$$
$$+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)_0 x_3+ \qquad +\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_0 x_n=0$$

$$f_3(N_1,\ N_2,\ N_3, \qquad N_n)+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)_0 x_1+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)_0 x_2+$$
$$+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right)_0 x_3+\cdots+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_n}\right)_0 x_n=0$$

$$f_s(N_1\ N_2,\ N_3, \qquad N_n)+\left(\frac{\partial f_s}{\partial x_1}\right)_0 x_1+\left(\frac{\partial f_s}{\partial x_2}\right)_0 x_2+$$
$$+\left(\frac{\partial f_s}{\partial x_3}\right)_0 x_3+\cdots+\left(\frac{\partial f_s}{\partial x_n}\right)_0 x_n=0$$

წინანდებურად შესამოკლებლად აღვნიშნოთ:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0=a_1, \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0=a_2, \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right)_0=a_3\cdots\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_0=a_n$$
$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0=b_1, \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0=b_2, \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)_0=b_3, \cdots\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_0=b_n$$
$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)_0=c_1, \quad \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)_0=c_2, \quad \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right)_0=c_3, \cdots\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_n}\right)_0=c_n$$

მაშინ ჩვენი ფუნქციები მიიღებენ წრიულ სახეს:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+ \qquad a_nx_n=-w_1 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+ \qquad b_nx_n=-w_2 \\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+ \qquad c_nx_n=-w_3 \end{array}\right\} \tag{4}$$

შემდეგ x_1, x_2, x_3, $\quad x_n$ ოდენობათა უალბათიერეს მნიშვნელობათა მისაღებად გამოვიყენებთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდის ჩვეულებრივ წესებს, ე. ი. (2) წყების ყოველ განტოლებას გავამრავლებთ მისი წონის კვადრატულ ფესვზე, რის შემდეგაც იგი მიიღებს სახეს:

$$x_1\sqrt{p_1}=N_1\sqrt{p_1}\,,\ X_2\sqrt{p_2}=N_2\sqrt{p_2}\,,\ N_3\sqrt{p_3}=$$
$$=X_3\sqrt{p_3}\,, \qquad X_n\sqrt{p_n}=N_n\sqrt{p_n}\cdots \tag{5}$$

ყველა მიღებული განტოლება ექვემდებარება ისეთი წარმოსახვითი დაკვირვების საშუალო μ ცდომილებას, რომლის წონა $p=1$ (44 §), ასეთივე ცდომილების განმცდელია აგრეთვე მცირედი x_1, x_2, x_3, $\cdots$

$\cdots x_n$ შესწორებანიც, რომელთა წონები იქნება იგივე p_1, p_2, p_3, $\cdots p_n$. ამიტომ (3) და (5)-ის საფუძვლით

$$\sqrt{p_1}\cdot x_1=0,\ \sqrt{p_2}\cdot x_2=0,\ \sqrt{p_3}\cdot x_3=0,\ \cdots\ \sqrt{p_n}\cdot x_n=0. \qquad (6)$$

მიღებულ (6) განტოლებებში შევიტანოთ s ნებისმიერი x_1, x_2, x_3, x_s შესწორებანი, რომელნიც გამოყვანილი იქნება (4) განტოლებებიდან; ამ შემთხვევაში ყოველი მათგანი წარმოადგენს დანარჩენ შესწორებათა (რიცხვით $n-s$) წირულ ფუნქციას. მაშინ $(n-s)$ შესწორებათა განსაზღვრისათვის გვექნება n ძირითადი კანტოლება (6): ხოლო როდესაც ისინი მონახული იქნება ცნობილი წესების მიხედვით, მაშინ მივიღებთ სრულიად განსაზღვრულ მნიშვნელობებს აგრეთვე x_1, x_2, x_3, x_s შესწორებათათვისაც. დასასრულ, საშუალო μ ცდომილება ისეთი დაკვირვებისა, რომლის წონა $(p=1)$ მიღებულია როგორც p_1, p_2, p_3, p_n წონათა ერთეული, გამოითვლება ნულიდან გადახრათა კვადრატების ჯამიდან, ხოლო ეს გადახრები წარმოადგენენ ნარჩენებს ყველა (6) განტოლებაში: ე. ი. ჯამიდან

$$\Sigma px^2=q_1x_1^2+p_2x_2^2+p_3x_3^2+ \qquad +p_nx_n^2 \qquad (7)$$

მაშასადამე,

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{\Sigma px^2}{n-(n-s)}}=\pm\sqrt{\frac{\Sigma px^2}{s}}\,. \qquad (8)$$

მაგრამ დაყენებული საკითხის ასეთი გადაწყვეტა ვერ ჩაითვლება ხელსაყრელად ტრიანგულაციის დამუშავების დროს, ვინაიდან საჭირო გეომეტრიულ პირობათა s რიცხვი ყოველთვის გაცილებით უფრო ნაკლებია, ვიდრე საძიებელ შესწორებათა n რიცხვი; ასე, რომ თუ მოვიქცეოდით ზემონათქვამისებურად, მაშინ მოგვიხდებოდა შედგენა და ბოლოს გადაწყვეტა ფრიად დიდი $(n-s)$ რიცხვის ნ ო რ მ უ ლ განტოლებათა მათში შემავალი $(n-s)$ უცნობით. ამიტომ ტრიანგულაციებში გამოიყენება მხოლოდ ქვემოთ აწერილი წესები, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ s რიცხვის ნორმულ განტოლებათა გადაწყვეტას და ამასთანავე საშუალებას იძლევა გამოთვლა წარმოებული იქნას მუდამ ერთისა და იმავე სქემის მიხედვით.

რადგანაც ამოცანა ითვალისწინებს x_1, x_2, x_3, $\cdots$ x_n ისეთ შესწორებათა მონახვას, რომლებიც მტკიცედ უნდა აკმაყოფილებდნენ (4) პირობებს და ამასთანავე იძლეოდნენ (7) ჯამისათვის რაც შეიძლება მცირე მნიშვნელობას, ამიტომ ამ ჯამის სრული დიფერენციალი ყველა x_1, x_2, x_3 $\cdots$ x_n ცვლადებით უნდა უდრიდეს ნულს, ე. ი. უნდა იყოს

$$p_1x_1dx_1+p_2x_2dx_2+p_3x_3dx_3+ \qquad +p_nx_ndx_n=0;\ \cdots\cdot \quad (9)$$

ხოლო აუცილებელი (4) პირობები (რიცხვით s) იქნება:

$$\left.\begin{array}{l} a_1dx_1+a_2dx_2+a_3dx_3+ \qquad +a_ndx_n=0 \\ b_1dx_1+b_2dx_2+b_3dx_3+ \qquad +b_ndx_n=0 \\ c_1dx_1+c_2dx_2+c_3dx_3+ \qquad +c_ndx_n=0 \\ \end{array}\right\}. \quad (10)$$

ამ განტოლებებიდან ჩვენ შეგვეძლო s რიცხვის ნებისმიერი დიფერენციალის დანარჩენთა ფუნქციაში განსაზღვრა, შემდეგ მათი (9) განტოლებაში შეტანა და ბოლოს დარჩენილი ($n-s$) დიფერენციალის კოეფიციენტების ნულისათვის მიტოლება; მაგრამ ასეთი ხერხი არაფრით არ განსხვავდება ზემოთ მოყვანილი გადაწყვეტის წესებისაგან. მის ნაცვლად, (10) განტოლებები გადავამრავლოთ განუზღვრელ k_1, k_2, k_3, $\quad k_s$ კოეფიციენტებზე, რომელთაც გ ა უ ს მ ა სახელად კ ო რ ე ლ ა ტ ე ბ ი უწოდა, და შემდეგ შევაჯამოთ ისინი ერთმანეთთან და შებრუნებული ნიშნით აღებულ (9) განტოლებასთან, მივიღებთ:

$$\begin{array}{l} (-p_1x_1+a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3+ \qquad)\,dx_1+ \\ +(-p_2x_2+a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3+ \qquad)\,dx_2+ \\ +(-p_3x_3+a_3k_1+b_3k_2+c_3k_3+ \qquad)\,dx_3+ \\ \\ +(-p_nx_n+a_nk_1+b_nk_2+c_nk_3+ \qquad)\,dx_n=0 \end{array}$$

აქ ყოველთვის შესაძლებელია ისეთ k_1, k_2, k_3, $\quad k_s$ ოდენობათა მონახვა, რომ მიღებულ განტოლებაში რამდენიმე s დიფერენციალის წინ კოეფიციენტები გამოვიდეს ნულის თანასწორი; ხოლო შემდეგ, ზემონათქვამის საფუძველით, უნდა ნულს მიუტოლოთ ყველა დანარჩენი ($n-s$) დიფერენციალის კოეფიციენტებიც; ამის მიხედვით აუცილებლად უნდა იყოს:

$$\left.\begin{array}{l} p_1x_1=a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3+ \\ p_2x_2=a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3+ \\ p_3x_3=a_3k_1+b_3k_2+c_3k_3+ \\ \qquad\qquad \cdot \\ p_1x_n=a_nk_1+b_nk_2+c_nk_3+ \end{array}\right\} \quad (11)$$

ახლა შევიტანოთ x_1, x_2, x_3, $\quad x_n$ (4) განტოლებაში და სიმარტივისათვის აღვნიშნოთ:

$$(aa)=\frac{a_1^2}{p_1}+\frac{a_2^2}{p_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{p_n}, \quad (ab)=\frac{a_1b_1}{p_1}+\frac{a_2b_2}{p_2}+\cdots+\frac{a_nb_n}{p_n},$$

$$(bb)=\frac{b_1^2}{p_1}+\frac{b_2^2}{p_2}+\cdots+\frac{b_n^2}{p_n}\,,\quad (bc)=\frac{b_1c_1}{p_1}+\frac{b_2c_2}{p_2}+\cdots+\frac{b_nc_n}{p_n}\,,$$

რის შემდეგაც მივიღებთ:

$$\left.\begin{array}{ll} (aa)\,k_1+(ab)\,k_2+(ac)\,k_3+ & =-w_1 \\ (ab)\,k_1+(bb)\,k_2+(bc)\,k_3+ & =-w_2 \\ (ac)\,k_1+(bc)\,k_2+(cc)\,k_3+ & =-w_3 \\ & \end{array}\right\}. \quad (12)$$

როგორც ვხედავთ, ამ s განტოლების სახე ისეთივეა, როგორიც ნორმული განტოლებებისა, რომლებიც გამოყვანილი იყო უმცირეს კვადრატთა მეთოდით. ამის გამო მათი რიცხვითი გამოთვლა, რომელიც მდგომარეობს უცნობთა თანმიმდევრობითი ამორიცხვაში, შეიძლება შესრულებული იყოს უკვე ცნობილი, ფრიად ხელსაყრელი, სქემის მიხედვით. მაშასადამე, ჯერ განვსაზღვრავთ k_1, k_2, k_3 k_s კორელატებს, მერე (11) განტოლებებიდან მივიღებთ ყველა x_1, x_2, x_3 x_n შესწორებას და ბოლოს, (8) ფორმულის საშუალებით, გამოვთვლით $p=1$ წონის შესატყვის საშუალო μ ცდომილებას.

ჩვეულებრივ, ტრიანგულაციებში სამკუთხედთა ბადის ყველა წერტილში გაზომილ კუთხეთა წონა მიღებულია როგორც ერთნაირი, ამიტომ ამ პარაგრაფის ფორმულებში მარტივად ვიღებთ:

$$p_1=p_2=p_3= \qquad =1.$$

ამის გამო გაწონასწორებით გამოთვლებში გამოსაყენებელი ფორმულები და თვით გაწონასწორებითი გამოთვლაც მნიშვნელოვნად მარტივდება. ყველა ხსენებულ ფორმულას ჩვენ აქ ერთად შევკრებთ და დავნომრავთ რომაული ციფრებით 12-ის გვერდით. სიმარტივისა და ერთნაირობის თვალსაზრისით სამკუთხედებში კუთხეებს აღვნიშნავთ არაბული ციფრებით 1, 2, 3, ხოლო მათ საძიებელ შესწორებებს არაბულივე ციფრებით, მხოლოდ მათი ფრჩხილებში მოქცევით, ე. ი. (1), (2), (3),

ამნაირად, კ უ თ ხ ე თ ა შ ე ს წ ო რ ე ბ ე ბ ი ს ა თ ვ ი ს გვექნება ფორმულები:

$$\left.\begin{array}{l} (1)=a_1k_1+b_1k_2+c_1k_3+ \\ (2)=a_2k_1+b_2k_2+c_2k_3+ \\ (3)=a_3k_1+b_3k_2+c_3k_3+ \\ \\ (n)=a_nk_1+b_nk_2+c_nk_3+\cdots \end{array}\right\} \quad (12-\mathrm{I})$$

მსგავს წევრთა ჯამებისათვის:

$$\left.\begin{aligned}(aa)&=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3+\quad+a_na_n\\(ab)&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\quad+a_nb_n\\(bb)&=b_1b_1+b_2b_2+b_3b_3+\quad+b_nb_n\end{aligned}\right\}\quad(12\text{—II})$$

კორელატების ნორმულ განტოლებათათვის (რიცხვით s):

$$\left.\begin{aligned}(aa)\,k_1+(ab)\,k_2+(ac)\,k_3+\cdots+w_1&=0\\(ab)\,k_1+(bb)\,k_2+(bc)\,k_3+\quad+w_2&=0\\(ac)\,k_1+(bc)\,k_2+(cc)\,k_3+\quad+w_3&=0\end{aligned}\right\}\quad(12\text{—III})$$

გამოთვლის შესამოწმებლად გამოიყენება ფორმულა:

$$(1)^2+(2)^2+(3)^2+\quad+(n)^2=-(k_1w_1+k_2w_2+k_3w_3+\cdots)\quad(12\text{—IV})$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა გამოითვლება (12—I) და (12—III) ფორმულების საფუძველზე, რომელთაგან პირველნი აიყვანება კვადრატის ხარისხში, ხოლო მეორენი გადამრავლდება თანმიმდევრობით k_1, k_2, k_3, k_s-ზე და პირველთა და მეორეთა ჯამები ურთიერთ შეიტოლებიან.

კუთხის საშუალო ცდომილება განისაზღვრება ((8) ფორმულის საფუძვლით) ფორმულით:

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{(1)^2+(2)^2+(3)^2+\cdots+(n)^2}{s}}\quad(12\text{—V})$$

საჭიროდ ვთვლით აქვე აღნიშნული იყოს ზოგიერთი პრაქტიკული წესი, რომლებითაც ჩვეულებრივ სარგებლობენ გამომთვლელები გაწონასწორებითი გამოთვლის წარმოების დროს.

ყოველი გაწონასწორებითი გამოთვლა შედგება ხუთი ცალკეული მოქმედებისაგან: 1) პირობითი განტოლებების შერჩევა და მათი კოეფიციენტებისა და ცნობილი წევრების გამოთვლა; 2) პირობითი განტოლებების ნორმულ განტოლებებად გარდაქმნა; 3) ნორმული განტოლებების გადაწყვეტა; 4) კუთხეთა შესწორებების გამოთვლა; 5) პირობითი განტოლებების შემოწმება და კუთხეებში გამოთვლილი შესწორებების შეტანა.

შერჩეული პირობითი განტოლებები დაიწყობა თანმიმდევრობით წესრიგზე, რა დროსაც გამოიწერება პირობები ჯერ კუთხეებისა,

შერე სინუსებისა. გამოწერა სრულდება სათანადო დაუჯრედებულ ქაღალდზე; კუთხეები დაინომრება და ჩაიწერება საერთო სვეტში ერთი მეორის ქვემოდან; ყოველი განტოლებისათვის დაინიშნება ცალკე სვეტი და შესაბამისი უცნობის პირდაპირ ჩაიწერება მარტო კოეფიციენტები, ხოლო მათ ქვემოდან ცნობილი წევრები; იმ უცნობთა პირდაპირ, რომელნიც განსახილველ შესწორებაში არ შედის, ტოვებენ ცარიელ ადგილებს.

კუთხეთა განტოლებებში უცნობთა კოეფიციენტები არის ე რ თ ე უ ლ ე ბ ი დადებითი (+) ან უარყოფითი (—) ნიშნაკით; კუთხეების გაწონასწორების დროს მათ შესწორებებს ექნებათ აგრეთვე კოეფიციენტი +1.

სინუსების განტოლებებში უცნობთა კოეფიციენტები წარმოადგენენ ს ი ნ უ ს თ ა ლ ო გ ა რ ი თ მ ე ბ ი ს ც ვ ლ ი ლ ე ბ ა ს შ ე ს ა ბ ა მ ი ს ი კ უ თ ხ ე ე ბ ი ს 1″-ით ც ვ ლ ი ლ ე ბ ა ზ ე; ეს ცდომილებები გამოიწერება კუთხეების lg sin-ის გამოთვლასთან ერთად; რადგანაც ტაბულებში ხსენებული ცვლილებები ჩვეულებრივ მოცემულია 10″-თვის, ამიტომ გამოწერის დროს ისინი უნდა გაყოფილი იქნენ 10-ზე. მახვილი კუთხეების კოეფიციენტებს აქვთ დადებითი (+) ნიშანი, ბლაგვი კუთხეებისას—უარყოფითი (—). რადგანაც პირობითი განტოლებების შედგენის დროს შეცდომების უმრავლესობა წარმოდგება კოეფიციენტების ნიშნების მცდარობის მიზეზით, ამიტომ ამ გარემოებაზე უნდა იყოს მიქცეული განსაკუთრებული ყურადღება.

ნორმულ განტოლებათა კოეფიციენტების გამოთვლა სრულდება (10—II) ფორმულებით. რადგანაც კუთხეთა განტოლებების კოეფიციენტები არის +1 ან —1, ამიტომ ნორმულ განტოლებათა პირველი კოეფიციენტების შედგენა ხდება მარტივად და ჩქარა; სიძნელე იწყება მხოლოდ იმ კოეფიციენტების შედგენიდან, რომლებიც შედის სინუსების განტოლებებში; მრავალრიცხოვანი გადამრავლება უნდა სრულდებოდეს ლოგარითმების დახმარებით ან კიდევ საანგარიშო მანქანაზე (არითმომეტრზე); ყოველ შემთხვევაში გამოთვლა უნდა შემოწმებული იქნას ხოლმე 48 §-ში მოცემულ მითითებათა მიხედვით,— სახელდობრ, თუ აღვნიშნავთ

$$\left.\begin{array}{l} r_1=a_1+b_1+c_1+\qquad+w_1 \\ r_2=a_2+b_2+c_2+\qquad+w_2 \\ r_3=a_3+b_3+c_3+\cdots+w_3 \\ \\ r_s'=a_s+b_s+c_s+\qquad+w_s \end{array}\right\} \quad (12—VI)$$

და მერე შევადგენთ ქვემო ნამრავლთა ჯამებს

$$\left.\begin{array}{l}(ar)=a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3+\\(br)=b_1r_1+b_2r_2+b_3r_3+\cdots\\(cr)=c_1r_1+c_2r_2+c_3r_3+\end{array}\right\}, \quad (12-\mathrm{VII})$$

მაშინ ნორმულ განტოლებათა კოეფიციენტების გამოთვლის შესამოწმებლად გვექნება ტოლობანი:

$$\left.\begin{array}{l}(ar)=(aa)+(ab)+(ac)+\\(br)=(ab)+(bb)+(bc)+\\(cr)=(ac)+(bc)+(cc)+\end{array}\right\}. \quad (12-\mathrm{VIII})$$

ნორმულ განტოლებათა გადაწყვეტა სრულდება ელემენტური ალგებრის წესების მიხედვით, გამოთვლა უნდა დაიწყოს საგანგებო სქემის მიხედვით, რომელიც ემყარება თვით განტოლებათა კოეფიციენტების შედგენის კანონს (12—III), თუ პირველი ნორმული განტოლების ყველა კოეფიციენტს თანმიმდევრობით გადავამრავლებთ $\frac{(ab)}{(aa)}$, $\frac{(ac)}{(aa)}$, შეფარდებებზე და მერე შედეგებს ჩავწერთ მეორე, მესამე და ა. შ. განტოლების ქვეშ, მაშინ ყოველ წყვილ განტოლებაში პირველი უცნობის კოეფიციენტები გახდება თანასწორი, და, მაშასადამე, გამოკლების შემდეგ, პირვანდელ s-უცნობიანი s განტოლების ნაცვლად, გვექნება $(s-1)$ განტოლება $(s-1)$ უცნობით; ამასთანავე ახლად მიღებული განტოლებების კოეფიციენტებიც მიჰყვება იმავე ნორმული განტოლებების კოეფიციენტების კანონს. ზემოთ მოყვანილ მოქმედებათა განმეორების შემდეგ $(s-1)$ განტოლების მიმართ, გვექნება $(s-2)$ განტოლებისაგან შემდგარი სისტემა $(s-2)$ უცნობით და ა. შ. ამ სახით ხდება უცნობთა თანმიმდევრობითი ამორიცხვა, პირველიდან მოყოლებით, და საბოლოო შედეგში გვექნება ერთუცნობიანი ერთი განტოლება.

მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ ის გარემოება, რომ ყოველი გამოკლების შემდეგ განტოლებების პირველი წევრები ისპობა, ამიტომ მათ უკვე აღარა წერენ და გამოთვლას აწყობენ იმ მაგალითის მიხედვით, რომელიც მოცემული იქნება 55 §-ში (მაგალითი II).

ნორმული განტოლებების უცნობთა კოეფიციენტები და ცნობილი წევრები გამოიწერება დაუჯრედებულ ქაღალდზე ისეთი ვარაუდით, რომ პირველსა და მეორე განტოლებას შორის დარჩეს ორი თავისუფალი სტრიქონი, მეორისა და მესამის 4 სტრიქონი, მესამესა და

მეოთხეს შორის 6 სტრიქონი და ა. შ. თვით კოეფიციენტები ჩაიწერება შესაბამის სვეტებში, რომლებიც აღნიშნულია k_1, k_2, k_3 ასოებით. პირველ განტოლებაში გამოიწერება ყველა კოეფიციენტი, მეორეში—ყველა, პირველის გარდა, მესამეში — ყველა, პირველი ორის გარდა, და ა. შ. ასე, რომ უკანასკნელ განტოლებაში გამოიწერება მხოლოდ უკანასკნელი უცნობის კოეფიციენტი და ამ განტოლების ცნობილი წევრი. ასეთ სქემაში განტოლებები განლაგებულია არა ერთ სტრიქონში, არამედ სვეტებში და სტრიქონებში; ყოველი განტოლება იწყება პირველი სტრიქონიდან და მისდევს სვეტს მის ბოლომდე, შემდეგ მოუხვევს მარჯვნივ და გადის სტრიქონის ბოლომდე.

ყველას მარჯვნივ იწერება კიდევ შემოწმებული სვეტი (r), რომლის ყოველი რიცხვი წარმოადგენს შესაბამისი განტოლების ყველა კოეფიციენტისა და მისი ცნობილი წევრის ჯამს, ე. ი.

$$(ar)+w_1,\ (br)+w_2,\ (cr)+w_3,$$

ამ სვეტის რიცხვებზე აწარმოებენ იმისთანავე მოქმედებას, რაც წარმოებული იყო განტოლებათა კოეფიციენტებსა და ცნობილ წევრებზე. ყოველი ამორიცხვის შემდეგ სრულდება შემოწმებაც: ყოველ ახალ განტოლებაში (რომელიც წაიკითხება ზემოთ აღნიშნული წესით) ყველა კოეფიციენტის ჯამი უნდა უდრიდეს ახალ რიცხვს შემოწმებულ სვეტში.

ნორმული განტოლებების გამრავლება $-\frac{(ab)}{(aa)}$, $-\frac{(ac)}{(aa)}$ შეფარდებებზე წარმოებს ოთხნიშნიანი ლოგარითმების დახმარებით.

კუთხეების შესწორებები გამოითვლება (12—I) ფორმულით. გამოთვლის შემოწმებისათვის გამოიყენება (12—IV) ფორმულა.

როდესაც მონახულია ყველა შესწორება, კარგი იქნება შეტანილი იყოს ისინი პირობით განტოლებებში, რათა დარწმუნებული ვიყოთ მთელი გამოთვლის სისწორეში. თუ წინა შემოწმებებმა მოგვცა დამაკმაყოფილებელი შეწყობილობა, ეს აღნიშნავს მხოლოდ განტოლებათა გადაწყვეტის სისწორეს, ხოლო შესწორებების პირობით განტოლებებში შეტანა უკვე დაგვარწმუნებს აგრეთვე თვით განტოლებათა შედგენის სისწორეშიც.

გამოთვლილი შესწორებები უნდა მიმატებული იქნას კუთხეებისათვის მათი ნიშნებით; ამნაირად მიღებული შედეგები მოგვცემენ გაწონასწორებულ კუთხეებს.

ყოველივე ზემონათქვამის გასაშუქებლად ჯერ განვიხილოთ ორი უმარტივესი კერძო შემთხვევა.

1. ვთქვათ, სამი კუთხე სფერული სამკუთხედისა, რომლის სფერული სიჭარბე არის ε, გაზომილია საშუალო m_1, m_2, m_3, ცდომილებით, ანუ, რაც ერთი და იგივეა, $p_1=\frac{1}{m_1^2}$, $p_2=\frac{1}{m_2^2}$, $p_3=\frac{1}{m_3^2}$ წონით, და მიღებულია მათთვის N_1, N_2, N_3 ოდენობა. ამნაირად, გვაქვს

$$N_1+N_2+N_3-(180°)+(\varepsilon))=w.$$

აუცილებელი პირობა, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდნენ კუთხეების უალბათიერესი x_1, x_2, x_3 შესწორებანი, იქნება

$$x_1+x_2+x_3=-w,$$

და რადგანაც მასში $a_1=a_2=a_3=1$, ამიტომ დამხმარე k კორელატი, (12) ფორმულათა ძალით, წარმოგვიდგება ასეთი სახით

$$(m_1^2+m_2^2+m_3^2)\cdot k=-w.$$

მაშასადამე, (11) გამოხატულების მიხედვით მივიღებთ:

$$x_1=-w\cdot\frac{m_1^2}{m_1+m_2^2+m_3^2},\ x_2=-w\cdot\frac{m_2^2}{m_1^2+m_2^2+m_3^2},$$

$$x_3=-w\cdot\frac{m_3^2}{m_1^2+m_2^2+m_3^2};$$

ე. ი. სამკუთხედის კუთხეთა ჯამში მომხდარი w ცდომილება უნდა განაწილებული იქნას ყველა კუთხეზე მათ საშუალო ცდომილებათა კვადრატების პროპორციულად, მაშასადამე, თანასწორად, თუ მათი გაზომვა ტოლზუსტი იყო.

II, ვთქვათ, სამ A, B, C, წერტილში (ნახ. 12) გაზომილია კუთხეები: $X_1=BAO$, $X_2=CBA$, $X_3=ACO$. მეოთხე O წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის ერთ-ერთი მოყვანილი კუთხეთაგანი უკვე ზედმეტია.

სფერული ABC სამკუთხედის კუთხეები აღვნიშნოთ A, B, C ასოებით, ხოლო გვერდების კუთხიერი მნიშვნელობა $\overset{\frown}{AO}$, $\overset{\frown}{BA}$, $\overset{\frown}{CO}$-თი, მივიღებთ სამ თანაფარდობას:

$$\frac{\sin\overset{\frown}{AO}}{\sin\overset{\frown}{BO}}=\frac{\sin(B-X_2)}{\sin X_1},\quad \frac{\sin\overset{\frown}{BO}}{\sin\overset{\frown}{CO}}=\frac{\sin(C-X_3)}{\sin X_2},$$

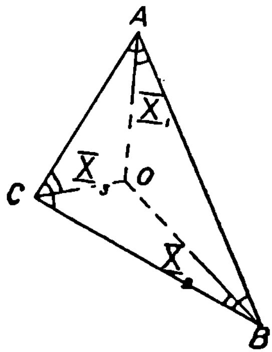
$$\frac{\sin CO}{\sin AO}=\frac{\sin(A-X_1)}{\sin X_3},$$

რომელთა ნამრავლი მოგვცემს შემდეგ აუცილებელ პირობას, რომელსაც მტკიცედ უნდა აკმაყოფილებდნენ ფიგურის კუთხეები:

$$\frac{\sin(A-X_1)\cdot\sin(B-X_2)\cdot\sin(C-X_3)}{\sin X_1\cdot\sin X_2\cdot\sin X_3}=1$$

ანუ $f=\lg$ მრიცხველისა $-\lg$ მნიშვნელისა$=0$.

იმის ცხადსაყოფად, თუ როგორ უნდა იყოს გამოყენებული ნაჩვენები აუცილებელი პირობა რიცხვითი გამოთვლის დროს, წარმოვიდგინოთ, რომ ABC სამკუთხედის სფერული სიჭარბე $\varepsilon=3'',5$-ს, და A, B, C, წერტილში ერთნაირი სიზუსტით გაზომილი კუთხეები რომ იყო:



ნახ. 12

$A=37^\circ\ 18'\ 52''$	$X_1=19^\circ\ 45'\ 4''$
$B=47\ \ 32\ \ 14$	$X_2=26\ \ 21\ \ 30$
$C=95\ \ 8\ \ 48,5$	$X_3=37\ \ 44\ \ 37.$

$A+B+C=179\ \ 59\ \ 54,5$
$\quad=(180^\circ+\varepsilon)-9'',0.$

აღვნიშნოთ მათი საძებნი შესწორებანი შესაბამისად α, β, γ, x_1, x_2, x_3 ასოებით; მაშინ პირველი აუცილებელი პირობა მათთვის, როგორც პირველ მაგალითში, იქნება

$$\alpha+\beta+\gamma=+9'',0.$$

ახლა მივმართოთ $f=0$ პირობის რიცხვით შემოწმებას. ამ მიზნით გამოვწეროთ მასში შემავალ კუთხეთა სინუსების ექვსნიშნიანი ლოგარითმები და მათ გვერდით ტაბულებში მოცემული ლოგარითმების ცვლილებანი, რომლებიც შეესატყვისება კუთხეთა $1''$-ვან ცვლილებებს, ვინაიდან სწორედ ეს ცვლილებანი წარმოადგენენ იმ დიფერენციალურ $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, კოეფიციენტებს, რომლებიც შედიან f ფუნქციის, — მცირედ x_1, x_2, x_3, (ნაზრდების მიმართ), დაშლაში. ამრიგად გვექნება:

	ცვლ. მე-5 ნიშ.		ცვლ. 5 ნიშ.
$\lg\sin(A-X_1)=9.47696_2$	$+0,67$	$\lg\sin X_1=9.52883_3$	$+0,59$
$\lg\sin(B-X_2)=9.55784_5$	$+0,54$	$\lg\sin X_2=9.64736_7$	$+0,42$
$\lg\sin(C-X_3)=9.92556_1$	$+0,13$	$\lg\sin X_3=9.78684_3$	$+0,27$
$\lg$ მრიცხველ. $=8.96306_8$		$\lg$ მნიშ. $=8.96304_3$	

$\lg$ მრიცხველისა $-\lg$ მნიშვნელისა$=+2,5.$

აქედან საძებნ შესწორებათა (რომლებიც გამოსახულია წამებში) მეორე აუცილებელ პირობას პირდაპირ ხაზოვანი სახით მივიღებთ:

$$+0{,}67\,(\alpha-x_1)+0{,}54\,(\beta-x_2)+0{,}13\,(\gamma-x_3)-0{,}59x_1-$$
$$-0{,}42x_2-0{,}27x_3=-2'',5,$$

ანუ

$$+0{,}67\alpha+0{,}54\beta+0{,}13\gamma-1{,}26x_1-0{,}96x_2-0{,}40x_3=-2'',5.$$

ამის შემდეგ, საერთო (12) ფორმულების საფუძვლით, ორი k_1 და k_2 კორელატის განსაზღვრისათვის ქვემოთ წარმოდგენილია ოდენობები და განტოლებები:

$$a_1=a_2=a_3=1;\ (aa)=3;\ ab=+0{,}67+0{,}54+0{,}13=+1{,}34;$$
$$(bb)=+3{,}43,$$
$$+3{,}00k_1+1{,}34k_2=+9'',0$$
$$+1{,}34k_1+3{,}43k_2=-2'',5,$$

საიდანაც

$$k_1=+0{,}43,\quad k_2=-2{,}30.$$

მიღებულ ოდენობათა (11) ფორმულებში შეტანა მოგვცემს:

$$\begin{array}{ll}
\alpha=k_1+0{,}67k_2=+2'',5 & \alpha^2=6\\
\beta=k_1+0{,}54k_2=+2\ ,8 & \beta^2=8\\
\gamma=k_1+0{,}13k_2=+3\ ,7 & \gamma^2=14\\
x_1=-1{,}26k_2=+2\ ,9 & x_1^2=8\\
x_2=-0{,}96k_2=+2\ ,2 & x_2^2=5\\
x_3=-0{,}40k_2=+0\ ,9 & x_3^2=1\\
\hline
 & \Sigma=42
\end{array}$$

აქედან, გაზომილ კუთხეთა საშუალო μ ცდომილება, (8) ფორმულის მიხედვით, გამოდის

$$\sqrt{\frac{42}{2}}=\pm 4'',6.$$

მაგრამ, მიღებული ოდენობა ნამდვილს ფრიად დაშორებულია, ვინაიდან იგი ემყარება მხოლოდ ორ გამომჟღავნებულ შემთხვევით $-9'',0$ და $+2'',5$ ცდომილებას.

52. პირობითი განტოლებების სახეობანი

ახლა განვიხილოთ გეომეტრიულ პირობათა სხვადასხვა სახეობა, რომელთაც ადგილი აქვთ ხოლმე ტრიგონომეტრიულ ბადეებში. შესამოკლებლად, წინანდებურად (51 §), ბადის გაზომილ კუთხეებს აღ-

ვნიშნავთ რიგობრივი 1, 2, 3, ციფრებით, ხოლო მათ შესატყვის შესწორებებს ამისთანავე ციფრებით, მხოლოდ მათი მოქცევით ფრჩხილებში—(1), (2), (3),

1) ფიგურათა პირობითი განტოლებანი. შეკრულ გეომეტრიულ ფიგურაში, ე. ი. ისეთ ფიგურაში, რომელშიაც ყველა კუთხე უშუალოდ არის გაზომილი, შინაგან კუთხეთა ჯამი უნდა უდრიდეს $180^\circ(n-2)+\varepsilon$-ს, სადაც n არის ფიგურის გვერდების რიცხვი, ხოლო ε — მისი სფერული სიჭარბე. მაგალითად, სამკუთხედში კუთხეთა ჯამი უნდა უდრიდეს $180^\circ+\varepsilon$-ს, ოთხკუთხედში $360^\circ+\varepsilon$-ს და ა. შ. ამნაირად, ყოველი შეკრული ფიგურის გაზომილი კუთხეები უნდა აკმაყოფილებდნენ ასეთ განტოლებას:

$$1+2+3+\qquad-[180^\circ(n-2)+\varepsilon]=0 \tag{13}$$

სინამდვილეში ეს პირობა თითქმის არასოდეს არ არის ხოლმე დაკმაყოფილებული, ე. ი. გაზომილ კუთხეთა ჯამისა და თეორიული ჯამის სხვაობა ნული კი არ არის, არამედ უდრის რომელიმე w ოდენობას, რომელიც იწოდება ფიგურის ცდომილებად:

$$1+2+3+\qquad-[180^\circ(n-2)+\varepsilon]=w \tag{14}$$

გამოთვლის ამოცანას შეადგენს გაზომილ 1, 2, 3, კუთხეთა ისეთი (1), (2), (3), შესწორების მონახვა, რომ დაკმაყოფილებულ იქნას (13) განტოლება, ე. ი. გვქონდეს:

$$1+(1)+2+(2)+3+(3)+\qquad-[180^\circ(n-2)+\varepsilon]=0 \tag{15}$$

გამოვაკლოთ (14) განტოლება (15)-ს; მივიღებთ:

$$(1)+(2)+(3)+\qquad+w=0 \tag{16}$$

კერძო შემთხვევაში, მაგალითად, სამკუთხედისათვის, ფიგურის პირობითი განტოლება იქნება

$$(1)+(2)+(3)+w=0.$$

გაწონასწორებითი (გასწორადებითი) გამოთვლა მტკიცე საშუალებას იძლევა მოსპობილ იქნას შეუსაბამობა გაზომილ სიდიდეთა (კუთხეები, გვერდები) და გეომეტრიულ პირობათა შორის ბადის ფიგურებში.

2) ჰორიზონტის პირობითი განტოლებანი. როდესაც ტრიგონომეტრიულ წერტილზე გაზომილია ყველა გარშემო კუთხე, მაშინ მათი ჯამი უნდა უდრიდეს 360°-ს, ე. ი. უნდა კმაყოფილდებოდეს განტოლება

$$1+2+3+\qquad-360^\circ=0.$$

სინამდვილეში, გაზომვის აუცილებელ ცდომილებათა გამო, ხსენებული ჯამი ყოველთვის დაცილებულია თეორიულ ჯამს რაიმე ω ოდენობით, რომელიც იწოდება ჰ ო რ ი ზ ო ნ ტ ი ს ც დ ო მ ი ლ ე ბ ა დ, ე. ი.

$$1+2+3+\qquad -360^\circ=\omega.$$

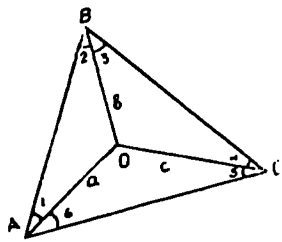
გაწონასწორებითი გამოთვლის მიზანია ისეთ (1), (2), (3). შესწორებათა მონახვა, რომ დაკმაყოფილებულ იქნეს განტოლება

$$1+(1)+2+(2)+3+(3)+\qquad -360^\circ=0.$$

1-ლ მუხლში ნაჩვენები გამოკლების მიხედვით, გვექნება ჰორიზონტის პირობითი განტოლება

$$(1)+(2)+(3)+\qquad +\omega=0.$$

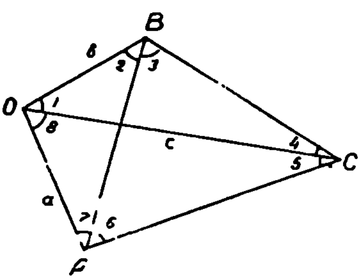
3) პ ო ლ უ ს ე ბ ი ს პ ი რ ო ბ ი თ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ნ ი. თუ ერთ-ერთი წერტილიდან, რომელიც პ ო ლ უ ს ა დ იწოდება, გაზომილია მიმართულებანი რომელიმე შეკრული ფიგურის ყველა წვეროზე, შეიძლება შედგენილი იყოს ცნობილი კუთხეების ფარდობათა მთელი რიგი, რომელთა ნამრავლი, ფიგურის გეომეტრიულ თვისებათა ძალით, უნდა უდრიდეს ე რ თ ს. მაგალითად, 13, 14, 15 ფიგურისათვის გვექნება ტოლობანი:



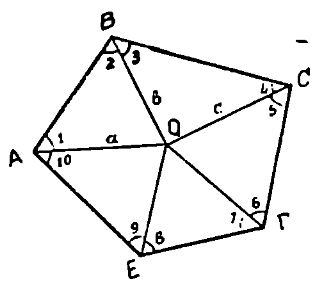
ნახ. 13

$$\frac{a\cdot b\cdot c}{b\cdot c\cdot a}=1 \text{ (ნაკვთი 13 და 14)},$$

$$\frac{a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e}{b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot a}=1 \text{ (ნაკვთი 15)}.$$



ნახ. 14



ნახ. 15

მიღებულ განტოლებებში შევცვალოთ გვერდების შეფარდება მათ პირისპირ მდებარე კუთხეების სინუსების შეფარდებით; მივიღებთ:

$$\frac{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6}{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5} = 1 \text{ (ნაკვთი 13)},$$

$$\frac{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin (6+7)}{\sin 7 \cdot \sin (2+3) \sin 5} = 1 \text{ (ნაკვთი 14)},$$

$$\frac{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8 \cdot \sin 10}{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 9} = 1 \text{ (ნაკვთი 15)}.$$

მიღებულ შეფარდებათა ორივე ნაწილის გალოგარითმება მოგვცემს განტოლებებს, რომელთა ზოგადი სახე იქნება:

$$(\lg \sin 2 + \lg \sin 4 + \cdots) - (\lg \sin 1 + \lg \sin 3 + \cdots) = 0.$$

თუ ამ გამოხატულებაში შევიტანთ გაზომილ 1, 2, 3,··· კუთხეებს, მაშინ, საზოგადოდ, მარჯვენა ნაწილში ნული კი არ იქნება, არამედ რომელიმე w რიცხვი, წოდებული შეუკვრელობის ცდომილებად, რომელიც გამოიხატება ლოგარითმების უკანასკნელი ნიშნის ერთეულებში, ე. ი. იქნება:

$$(\lg \sin 2 + \lg \sin 4 + \cdots) - (\lg \sin 1 + \lg \sin 3 + \cdots) = w \qquad (17)$$

გასწორადებითი გამოთვლის ამოცანა გაზომილი 1, 2, 3,··· კუთხეებისათვის გულისხმობს ისეთ (1), (2), (3),··· შესწორებათა მონახვას, რომ დაკმაყოფილებულ იქნას განტოლება:

$$\begin{aligned}&[\lg \sin (2+(2)) + \lg \sin ((4+(4)) + \cdots] -\\ &-[\lg \sin (1+(1)) + \lg \sin (3+(3)) + \cdots] = 0 \qquad (18)\end{aligned}$$

შესამოკლებლად აღვნიშნოთ სინუსების ლოგარითმების ფრიად მცირედი ცვლილებანი, კუთხეების 1″-ით ცვლილებასთან დაკავშირებით, α, β, γ, ასოებით; მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

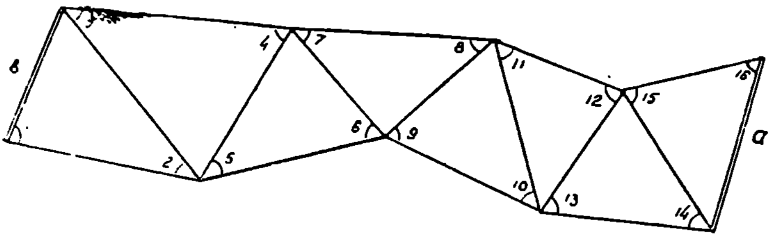
$$\lg \sin (1+(1)) = \lg \sin 1 + \alpha \cdot (1)$$
$$\lg \sin (2+(2)) = \lg \sin 2 + \beta \cdot (2)$$
$$\lg \sin (3+(3)) = \lg \sin 3 + \gamma \cdot (3).$$

სადაც კუთხეების (1), (2), (3), შესწორებანი გამოსახულია წამებით. მიღებულ გამოხატულებათა (18) განტოლების ყველა წევრში შეტანა და მერე წევრ-წევრად (17) განტოლების გამოკლება მოგვცემს:

$$\beta \cdot (2) + \delta \cdot (4) + \qquad - \alpha \cdot (1) - \gamma \cdot (3) - \qquad + w = 0 \qquad (19)$$

ასეთი ზოგადი სახე აქვს პოლუსის პირობით განტოლებას.

4) *ბაზისების პირობითი განტოლებანი.* თუ მოცემულ ტრიგონომეტრიულ ბადეში მოიპოვება არა ერთი, არამედ რამდენიმე ბაზისი, მაშინ, ერთი მათგანიდან გამოსვლით, შეგვიძლია ყველა დანარჩენი ბაზისი განვსაზღვროთ გამოთვლით. მათი ერთმანეთთან დამკავშირებელი სამკუთხედების მეშვეობით. მაგრამ გამოთვლით მიღებული ბაზისის სიგრძე, ჩვეულებრივ, არ ეთანასწორება უშუალოდ გაზომვით მიღებულ შედეგს, რაც მიეწერება როგორც შემკავშირებელ კუთხეთა ცდომილებებს, ისე თვით ბაზისების გაზომვის ცდომილებებს. თუ, მაგალითად, ორი ბაზისი დაკავშირებულია



ნახ. 16

ერთმანეთთან სამკუთხედთა მარტივი ჯაჭვით (ნახ. 16), მაშინ a ბაზისის გამოთვლა შეიძლება b-თან დამოკიდებულებით ქვემოთ მოცემული ფორმულის საშუალებით:

$$\lg a_1 = \lg b + [\lg \sin 1 + \lg \sin 3 + \cdots] - [\lg \sin 2 + \lg \sin 4 + \cdots].$$

საზოგადოდ, a_1 სიგრძე თანასწორი არ იქნება უშუალო გაზომვით მიღებული a სიგრძისა, ამიტომ შესაბამის სინუსთა ლოგარითმების ჯამთა სხვაობა არ ეთანასწორება გაზომილ ბაზისთა ლოგარითმების სხვაობას და მოგვცემს რომელიმე w ოდენობას, რომელიც იწოდება *კავშირის ცდომილებად*, ე. ი.

$$[\lg \sin 1 + \lg \sin 3 + \quad] - [\lg \sin 2 + \lg \sin 4 + \quad] + \\ + (\lg b - \lg a) = w. \qquad (20)$$

გაწონასწორებითი გამოთვლის ამოცანას შეადგენს გაზომილ 1, 2, 3, კუთხეთა და გაზომილი a და b ბაზისის ისეთ (1), (2), (3), და (a) და (b) შესწორებათა მონახვა, რომ დაკმაყოფილებული იქნას განტოლება:

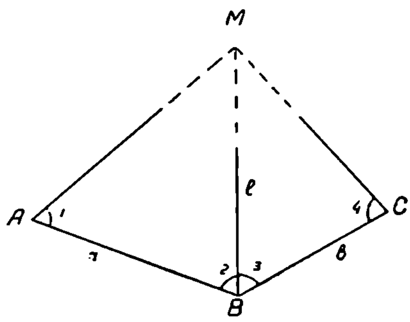
$$[\lg \sin (1 + (1)) + \lg \sin (3 + (3)) + \cdots] - [\lg \sin (2 + (2)) + \\ + \lg \sin (4 + (4)) + \cdots] + [\lg (b + (b)) - \lg (a + (a))] = 0 \qquad (21)$$

ამჟამად, ბაზისების გაზომვა სრულდება გაცილებით მეტი სიზუსტით, ვიდრე კუთხეებისა, და, საზოგადოდ, იგი შეადგენს გეოდეზიურ სამუშაოთა უზუსტეს ნაწილს; ამიტომ, ჩვეულებრივ, არ იკვლევენ ხოლმე ბაზისების (a) და (b) შესწორებას და w შეუთანხმებლობას მიაწერენ 1, 2, 3,   კუთხეთა მცდარობას. ამ მოსაზრებით (21) განტოლებაში (a) და (b) შესწორებას ვიგულვებთ ნულებად, შემდეგ, როგორც ზემოთ იყო ახსნილი, $\lg \sin(1+(1))$-სა და სხვ. გავხსნით და ბოლოს მიღებულ გამოხატულებას წევრწევრ გამოვაკლებთ (20) განტოლებას, მოგვეცემა:

$$\alpha_1 \cdot (1) - \beta_1 \cdot (2) + \alpha_2 \cdot (3) - \beta_2 \cdot (4) + \quad + w = 0, \tag{22}$$

სადაც α_1, β_1 შესაბამისი კუთხეების სინუსთა ლოგარითმების ცვლილებანია, თვით კუთხეების $1''$-ით ცვლილებასთან დაკავშირებით, ხოლო (1), (2),   წინანდებურად 1, 2,   კუთხეთა შესწორებებია.

5) *გვერდების პირობითი განტოლებანი.* ტრიანგულაციის ზოგიერთი წერტილი განისაზღვრება ე. წ. *ტრიგონომეტრიული გადაკვეთით*, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ განმხოლოებული წერტილი (მაგალითად, ინსტრუმენტის დასადგმელად მიუდგომი) დაიმზირება ორი ან სამი მოცემული წერტილიდან (ნახ. 17).



ნახ. 17

თუ დამზერილია მხოლოდ ორი მიმართულება (AM და BM), მაშინ M წერტილის მდებარეობის გამოთვლა ABM სამკუთხედში არ შეიცავს არავითარ შეუთანხმებლობას, მაგრამ ამასთანავე არც შემოწმება გვექნება, ხოლო თუ მასზე დამზერილია სამი ან მეტი მიმართულება, მაშინ მოგვეცემა ერთი ან რამდენიმე საერთო გვერდი, რომლებიც შეიძლება გამოთვლილი იქნენ დამოუკიდებლად სხვადასხვა სამკუთხედიდან. დამზერის ცდომილებათა გამო ხსენებული საერთო გვერდები, საზოგადოდ, ერთმანეთისაგან განსხვავებული იქნებიან. მაგალითად, ABM და BCM სამკუთხედების საერთო $BM=l$ გვერდი განისაზღვრება ორი ურთიერთდამოუკიდებელი განტოლებიდან, რომლებიც ქვემოთ მოცემულია ლოგარითმული სახით:

$$\lg l_1 = \lg a + \lg \sin 1 - \lg \sin (1+2),$$
$$\lg l_2 = \lg b + \lg \sin 4 - \lg \sin (3+4).$$

უმცდარი დამზერის შემთხვევაში l_1 და l_2 იქნებოდა ერთნაირი და ამიტომ ამ განტოლებათა მეორე ნაწილების სხვაობა ნულის თანასწორი მიიღებოდა. სინამდვილეში კი, საბოლოოდ გამოთვლილი a და b გვერდისა და გაზომილი 1, 2, ... კუთხეების მათში შეტანა, ხსენებული სხვაობისათვის ნულს კი არ მოგვცემს, არამედ რომელიმე მცირედ w ცდომილებას; მას *გვერდის ცდომილება* ეწოდება, ე. ი.

$$\lg \sin 1 - \lg \sin (1+2) - \lg \sin 4 + \lg \sin (3+4) + \lg a - \lg b = w \qquad (23)$$

გაწონასწორებითი გამოთვლის ამოცანა მდგომარეობს 1, 2, კუთხეების ისეთ (1), (2), შესწორებათა მონახვაში, რომ დაკმაყოფილებული იქნას განტოლება

$$\lg \sin (1+(1)) - \lg \sin (1+2+(1)+(2)) - \lg \sin (4+(4)) +$$
$$+ \lg \sin (3+4+(3)+(4)) + \lg a - \lg b = 0 \qquad (24)$$

გავხსნათ სინუსების ლოგარითმები და (23) განტოლება გამოვაკლოთ (24)-ს, მივიღებთ:

$$\alpha \cdot (1) - \beta \cdot ((1)+(2)) - \delta \cdot (4) + \gamma \cdot ((3)+(4)) + w = 0 \qquad (25)$$

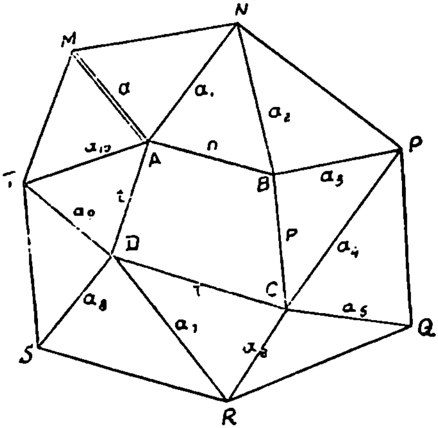
ამ სახით წარმოგვიდგება *გვერდების პირობითი განტოლება*.

ყველა ზემოთ მოყვანილ პირობით განტოლებათა სახეობანი უცნობთა კოეფიციენტების მიხედვით, შეიძლება გაყოფილი იყოს ორ წყებად: ფიგურებისა და ჰორიზონტის განტოლებებში ხსენებული კოეფიციენტები მუდამ ერთეულია, მაშინ როდესაც პოლუსების, ბაზისებისა და გვერდების განტოლებებში ისინი წარმოადგენენ სინუსთა ლოგარითმების ცვლილებას შესაბამ კუთხეთა 1″-ით ცვლილებასთან დაკავშირებით. პირველი წყების განტოლებანი საერთოდ იწოდება *კუთხეთა განტოლებად*, ხოლო მეორე წყებისა — *სინუსების განტოლებად*. ადვილი გასაგებია, რომ პირველი წყების განტოლებათა გადაწყვეტა გაცილებით უფრო მარტივია, ვიდრე მეორესი.

6) *პოლიგონების (მრავალკუთხედების) პირობითი განტოლებანი*. როდესაც AMN, ANB, BNP, TAM სამკუთხედთა (ნახ. 18) უწყვეტი ჯაჭვი შეიკვრება და შიგნით ჰქმნის მრავალკუთხიან ABC A სივრცეს (ტრიანგულაციით გაუვსებელს),

მაშინ კუთხეთა და სინუსთა პირობით განტოლებებს ემატება კიდევ სამი განტოლება: ერთი—კუთხურივე განტოლება, რომელიც გამოსახავს $ABCD$ A მრავალკუთხედის შინაგანი კუთხეების ჯამს, და ორი სრულებით განსაკუთრებული სახეობისა, რომლებიც გამოსახავენ პოლიგონის აუცილებელ შეკრულობას და იწოდებიან **პ ი რ ო ბ ი თ პ ო ლ ი გ ო ნ უ რ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ე ბ ა დ.**

თუ პოლიგონის შინაგანი სივრცე წარმოადგენს $ABCD$ ოთხკუთხედს გვერდებით $AB=n$, $BC=p$, $CD=r$, და $DA=t$ და კუთხეებით—A, B, C, D. ამ შემთხვევაში პოლიგონური პირობები ჯერ კიდევ საკმაოდ ადვილად შესადგენია (ლ ე ჟ ა ნ დ რ ი ს თეორემის საფუძველზე), AC და BD დიაგონალის გამოხატულებათა მიხედვით და გვესახება შემდეგნაირად:



ნახ. 18

$$n^2+p^2-2np\cos B=r^2+t^2-2rt\cos D,$$
$$p^2+r^2-2pr\cos C=t^2+n^2-2tn\cos A.$$

აქ როგორც n, p, r, t გვერდები, ისე A, B, C, D კუთხეები, უნდა გამოსახული იქნენ სამკუთხედთა ჯაჭვის გაზომილი კუთხეების საშუალებით.

როდესაც სფერული პოლიგონი შეიცავს გვერდების დიდ რიცხვს, მაშინ პოლიგონური პირობები ღებულობენ იმდენად რთულ და უხერხულ სახეს, რომ ისინი ბადის თავდაპირველ გაწონასწორებითი გამოთვლის დროს სრულებით ანგარიშში არ მიიღება. ბადის ყველა წერტის გეოდეზიური სიგანედისა და სიგრძედის გამოთვლის შემდეგ პოლიგონის შეკრულობის ორი პირობა გამოისახება უფრო მარჯვე ფორმით, სახელდობრ, საწყისი წერტის გამოსავალი სიგანედი და სიგრძედი უნდა უდრიდეს მასსავე გამოთვლით მიღებულ სიგანედსა და სიგრძედს, რის გასწორადების დროს საჭირო ხდება ბადის კუთხეების ხელმეორედ შესწორება.

53. ურთიერთდამოუკიდებელ პირობათა რიცხვი

მრავალ გეომეტრიულ პირობათაგან, რომელთაც აკმაყოფილებს რთული ტრიგონომეტრიული ბადის კუთხეები, ზოგიერთი იქნება სხვათა პირდაპირი და აუცილებელი შედეგი. 51 §-ის წესების მიხედვით, კუთხეთა უალბათიერესი შესწორებების მონახვა გულისხმობს, რომ ყველა კუთხისათვის მიღებული პირობები ერთმანეთისაგან არსებითად განსხვავებულია. ამიტომ აუცილებელ საჭიროებას წარმოადგენს ყველა ურთიერთდამოუკიდებელი გეომეტრიული პირობის რიცხვის ცოდნა მოცემულ ბადეში, რათა არ იყოს გამოტოვებული არც ერთი მათგანი, ან კიდე არ იყოს შეტანილი რომელიმე ზედმეტი პირობა, რომელიც იქნება წინათ აღებულ პირობათა მხოლოდ ფარული შედეგი.

ჯერჯერობით ვიგულვოთ ისეთი შემთხვევა, როდესაც ბადეში გაზომილია მხოლოდ ერთი ბაზისი, და, ვთქვათ, თვით ბადე შეიცავს m წერტს და მასში საერთოდ გაზომილია i კუთხე. რადგანაც ბადეში განსაზღვრული უნდა იყოს $(m-2)$ წერტი ბაზისის ორი წერტის მიმართ, ხოლო ყოველი წერტი სავსებით განსაზღვრულია მასზე აღებული (საიდანაც არ უნდა იყოს) ორი მიმართულებით, ე. ი. ტრიანგულაციის ორი კუთხით, ამიტომ აუცილებელი და ამასთანავე სავსებით საკმარისი რიცხვი კუთხეებისა მთელ ბადეში იქნება $2(m-2)$. ყოველი ზედმეტი გაზომილი კუთხე იძლევა ერთს აუცილებელ გეომეტრიულ პირობას და, მაშასადამე, ყველა ურთიერთდამოუკიდებელი როგორც **კუთხური**, ისე **გვერდული პირობის რიცხვი** იქნება:

$$s=i-2(m-2)=i-2m+4 \tag{26}$$

აქ ნაგულისხმევია ყველა გვერდული პირობა, რომელნიც, გვაძლევენ სინუსების განტოლებებს, გარდა საბაზისო განტოლებებისა, რომელნიც სათვალავში არ მიიღება.

რამდენი **გვერდული** პირობა (საბაზისო პირობათა გამოკლებით) უნდა შედიოდეს საერთო s რიცხვში, ეს ადვილად განისაზღვრება, საკმარისია მხოლოდ დაითვალოს ბადის ყველა იმ გვერდის i' რიცხვი, რომელთა მიმართულება იყო აღებული. რადგან ყოველი $(m-2)$ წერტთაგანის მდებარეობა ორი საბაზისო წერტის მიმართ სავსებით განსაზღვრულია ორი მასში გადაკვეთილი გვერდით, და რადგანაც ამასთანავე ბადის ერთ-ერთი გვერდი არის თვით ბაზისი, ამიტომ გვერდების აუცილებელი და სავსებით საკმარი რიცხვი ბადეში იქნება:

$$2(m-2)+1=2m-3;$$

ყოველი ზედმეტი გვერდი იძლევა ერთ გვერდულ პირობას, ასე რომ ყველა ურთიერთდამოუკიდებელი პირობის რიცხვი იქნება:

$$s'=i'-2m+3 \tag{27}$$

დანარჩენი ურთიერთდამოუკიდებელი პირობები უკვე კ უ თ ხ უ რ ი იქნება (მათთან უნდა იყოს მითვლილი აგრეთვე ჰორიზონტული პირობებიც); ამიტომ მათი s'' რიცხვი უნდა იყოს

$$s''=s-s'=i-i'+1 \tag{28}$$

დასასრულ, თუ ბადეში გაზომილია არა ერთი, არამედ n ბაზისი, მაშინ ურთიერთ დამოუკიდებელ ს ა ბ ა ზ ი ს ო პირობათა რიცხვი, ცხადია, იქნება $(n-1)$, მაშასადამე, მთლად პირობათა რიცხვი ბადეში მიიღება:

$$S=s+n-1 \tag{29}$$

მაგალითი 1. $ABCDE$ ბადეში (ნახ. 19), რომელშიაც მთლიანი ხაზებით აღნიშნულია გაზომილი კუთხეები, ხოლო წყვეტილი ხაზებით გაუზომელი, გვექნება:

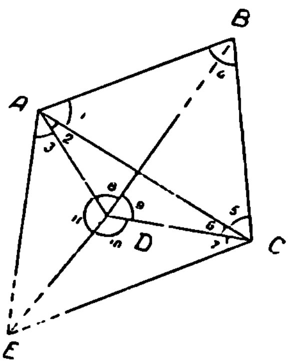
$m=5, \quad i=11, \quad i'=9;$

ამიტომ (26), (27) და (28) ფორმულის მიხედვით მივიღებთ:

$$s=11-2\times5+4=5,$$
$$s'=9-2\times5+3=2,$$
$$s''=11-9+1=3.$$

კუთხური პირობები:

$$1+4+5=180^\circ+\varepsilon_1$$
$$2+6+8+9=180^\circ+\varepsilon_2$$
$$8+9+10+11=360^\circ$$



ნახ. 19

გვერდული პირობები (პოლუსებისა):

$$\frac{\sin(1+2)\cdot\sin5\cdot\sin9}{\sin8\cdot\sin1\cdot\sin(5+6)}=1$$

$$\frac{\sin3+\sin(6+7)\cdot\sin10}{\sin11\cdot\sin(2+3)\cdot\sin7}=1.$$

მაგალითი 2. 18 ნაკვეთზე გამოსახულ ბადეში, რომელიც შედგება 11 სამკუთხედისაგან და რომლის ყოველ სამკუთხედში გაზომილია სამივე კუთხე, გვაქვს:

$m=11, \quad i=33, \quad i'=22;$

ამიტომ

$$s=33-2\times 11+4=15,\ s'=22-22+3=3,\ s''=33-22+1+12;$$

ამასთან 12 კუთხურ პირობაში შევა

$$A+B+C+D=360^\circ+\varepsilon;$$

ერთი გვერდული პირობა (პოლუსისა) იქნება გვერდების შეფარდე-ბებიდან:

$$\frac{a}{a_1}\cdot\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\qquad\frac{a_9}{a_{10}}\cdot\frac{a_{10}}{a}=1;$$

რაც შეეხება ორ პოლიგონურ პირობას, რომლებიც უნდა შევიდეს $s'=3$ რიცხვში, მათ შესახებ უკვე ნათქვამი იყო 52 §-ში.

მაგალითი 8. $PTKG$ ოთხკუთხედში (ნაკვთი 23), რომელშიაც ყველა გვერდისა და ორივე დიაგონალის მიმართულება დამზერილია ორივე მხრიდან, ე. ი. გაზომილია 8 კუთხე, 1-დან 8-მდე, გვექნება:

$$m=4,\quad i=8,\quad i'=6;$$

ამიტომ

$$s=8-2\times 4+4=4,\quad s'=6-2\times 4+3=1,\quad s''=8-6+1=3.$$

აქ კუთხურ პირობით განტოლებათათვის შეიძლება აღებული იყოს რომელიმე სამი სამკუთხედის კუთხეთა ჯამები; რაც შეეხება მეოთხე სამკუთხედის კუთხეთა ჯამს, იგი აუცილებლად იქნება პირველი სამი სამკუთხედის კუთხეთა ჯამების შედეგი, ვინაიდან ყველა სამკუთხე-დის სფერული ε_1, ε_2, ε_3 და ε_4 სიჭარბეები ერთმანეთთან დაკავშირე-ბულია ტოლობით

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon_3+\varepsilon_4.$$

სწორედ ამნაირადვე ერთი საპოლუსო (გვერდული) პირობითი განტოლებისათვის შეიძლება ნებისმიერად აღებული იყოს ერთ-ერთი ქვემო ოთხთაგანი:

$$\frac{\sin 2\cdot\sin(8-7)\cdot\sin(4-3)}{\sin 3\cdot\sin 1\cdot\sin 8}=1,\qquad \frac{\sin 8\cdot\sin(2-1)\sin(6-5)}{\sin 5\cdot\sin 7\cdot\sin 2}=1,$$

$$\frac{\sin 6\cdot\sin(4-3)\cdot\sin 2-1)}{\sin 1\cdot\sin 5\cdot\sin 4}=1,\qquad \frac{\sin 4\cdot\sin(6-5)\cdot\sin(8-7)}{\sin 7\cdot\sin 3\cdot\sin 6}=1,$$

ვინაიდან ყველა ისინი იძლევიან ერთსა და იმავე შედეგს, თუ სათა-ნადოდ შესრულებული იქნება ყველა კუთხური პირობა.

მეფის რუსეთში, რთული ტრიგონომეტრიული ბადის გაწონასწორების დროს უფრო ხელსაყრელად იყო მიჩნეული არა კუთხეების, არამედ მიმართულებათა გაწონასწორება. გამოთვლის წესებში არსებითი განსხვავება არ არსებობს; კუთხეების შესწორებათა ნაცვლად ეძებენ მიმართულებათა შესწორებებს, ხოლო კუთხეთა შესწორება გამოითვლება როგორც მიმართულებათა შესწორებების სხვაობა.

განვიხილოთ დამოუკიდებელ პირობათა განსაზღვრის წესი მიმართულებათა გაწონასწორების შემთხვევაში. ჯერ ავიღოთ ერთბაზიანი (ან სრულებით უბაზისო) ბადე, რომელშიაც არ იქნება აგრეთვე განმხოლოებული წერტილებიც. ვთქვათ, ბადე შედგება P წერტისაგან, რომლებზედაც დამზერილია D მიმართულება; რიცხვი ბაზისებისა არის L, ხოლო მათ შორის ბლანდეა l ხაზი. ბლანდედ ითვლება ხაზი, დამზერილი ორივე ბოლოდან, არაბლანდედ—დამზერილი მხოლოდ ერთი ბოლოდან; ცხადია, რომ

$$D=l+L.$$

P, D, l, L რიცხვები განისაზღვრება ნაკვთზე უბრალო დათვლით.

რადგანაც ყოველ წერტზე არსებობს ერთი საწყისი (ნულოვანი) მიმართულება, რომელიც არავითარ მონაცემს არ იძლევა გამოთვლისათვის (კუთხე დგება ორი მიმართულებით), ამიტომ P წერტისაგან შემდგარ ბადეში პირველ ყოვლისა უნდა არსებობდეს P საწყისი მიმართულება. ხსენებულ წერტილთაგან ცალკე აღებული პირველი ორი (მაგალითად, ბაზისისა ან გამოსავალი გვერდის ბოლოები), მნიშვნელობას არის მოკლებული, ხოლო ტრიანგულაცია, წერტილების განსაზღვრის თვალსაზრისით, არსებითად იწყება მესამე წერტილიდან. მაშასადამე, ტრიანგულაციით განსაზღვრული უნდა იყოს $(P-2)$ წერტილი, ხოლო ყოველი მათგანისათვის საჭიროა და საკმარისი ორი მიმართულება (ცხადია, ორი სხვა წერტილიდან დამზერილი). ამგვარად, ტრიანგულაციის ყველა წერტილის განსაზღვრისათვის აუცილებელია და საკმარი გვქონდეს მიმართულებათა შემდეგი რიცხვი:

$$P+2\,(P-2)=3P-4.$$

ასეთ ტრიანგულაციაში ყველა წერტილი შეიძლება გამოვთვალოთ მხოლოდ ერთხელ და უგანრემზომობოდ, ამასთან მასში არ იქნება არც ერთი პირობითი განტოლება. ყოველი ზედმეტი მიმართულება,— აუცილებლად საჭირო $(3P-4)$ რიცხვის გარეშე, — მოგვცემს ერთ პირობით განტოლებას, ვინაიდან ყოველი ასეთი მიმართულებით დამზერილი იქნება უამისოდაც უკვე განსაზღვრული წერტილი. ამ-

ნაირად, ყველა პირობითი განტოლების N რიცხვი თანასწორი იქნება ბადეში არსებულ მიმართულებათა D რიცხვისა, აუცილებელ $(3P-4)$ მიმართულებათა გამოკლებით, ე. ი.

$$N=D-3P=4 \tag{30}$$

აღნიშნულ პირობით განტოლებათა რიცხვში შევა როგორც ფიგურებისა, ისე პოლუსების განტოლებანი. ფიგურების პირობითი განტოლებანი მიიღება მხოლოდ ბლანდე ხაზების ანგარიშით, ვინაიდან არაბლანდე ხაზები ფიგურებს ვერ შეკრავენ. P წერტილის შესაკავშირებლად საჭიროა სულ ცოტა $(P-1)$ ბლანდე ხაზი, ეს ხაზები ჯერ კიდევ არ მოგვცემენ არც ერთ პირობით განტოლებას. მაგრამ ყოველი შემდეგი ბლანდე ხაზი უსათუოდ შეჰკრავს რომელიმე ფიგურას და მოგვცემს ერთ პირობით განტოლებას. მაშასადამე, ფიგურის პირობით განტოლებათა A რიცხვი ეთანასწორება ბადის ყველა ბლანდე ხაზის l რიცხვს. აუცილებლად საჭირო $(P-1)$ ხაზის გამოკლებით, ე. ი. ფიგურების პირობით განტოლებათა რიცხვი განისაზღვრება ფორმულით

$$A=l-P+1 \tag{31}$$

პოლუსების პირობითი განტოლებანი მიიღება როგორც ბლანდე, ისე არაბლანდე ხაზების საშუალებით. P წერტისაგან შემდგარ ტრიგონომეტრიულ ბადეში უსათუოდ უნდა შედიოდეს: პირველი ორი წერტის შემაერთებელი ერთი ხაზი (ბაზისი ან კიდე ძირითადი გვერდი), და ორ-ორი ხაზი ყველა მომდევნო წერტის განსაზღვრისათვის. ასე, რომ იყოს სულ ცოტა

$$1+2(P-2)=2P-3$$

ხაზი მაინც. ამასთანავე, ყოველი ხაზი, გარდა აღნიშნული აუცილებლად საჭირო რიცხვისა, მოგვცემს კიდევ ერთ საპოლუსო პირობით განტოლებას, იმიტომ რომ იგი მიმართული იქნება წერტილზე, რომელიც უამისოდაც განსაზღვრულია. ამრიგად, პოლუსების პირობით განტოლებათა B რიცხვი ეთანასწორება ბადეში არსებული ყველა ხაზის L რიცხვს, აუცილებლად საჭირო $(2P-3)$ ხაზის გამოკლებით, ე. ი. პოლუსების პირობით განტოლებათა რიცხვი განისაზღვრება ფორმულით:

$$B=L-2P+3 \tag{32}$$

პირობით განტოლებათა რიცხვის შესამოწმებლად გამოიყენება თანაფარდობა

$$N=A+B.$$

მაგალითი 4. 20 ნახაზზე გამოსახული ტრიგონომეტრიული ბადე შეიცავს 6 წერტს, 22 მიმართულებას, 10 ბლანდესა და 2 არაბლანდე ხაზს, ასე რომ $P=6$, $D=22$, $l=10$, $L=12$.

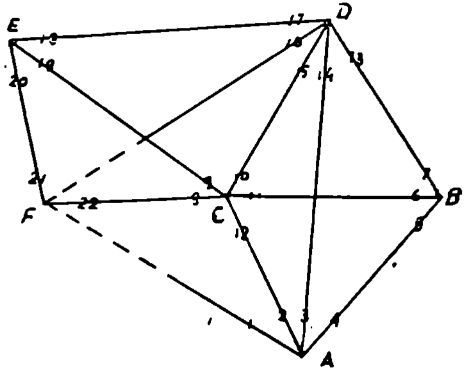
მათი შეტანა (30), (31), (32) ფორმულაში მოგვცემს:

$$N=22-18+4=8$$

$$A=10-6+1=5 \qquad \text{შემოწმება: } 8=5+3$$

$$B=12-12+3=3$$

ზემოთ განხილული იყო მხოლოდ ფიგურებისა და პოლუსების პირობითი განტოლებანი; დანარჩენი პირობითი განტოლებანი ჩვეულებრივ არ შევა საერთო გაწონასწორებით გამოთვლაში და განიხილება ცალკე; ასეთია ბაზისებისა და გვერდების პირობითი განტოლებანი.



ნახ. 20

ბაზისების პირობითი განტოლებების რიცხვი უდრის ტრიანგულაციაში გაზომილი ბაზისების რიცხვს ერთის (აუცილებლად საჭიროს) გამოკლებით, ვინაიდან ერთი ბაზისის მეშვეობით შეიძლება გამოთვლილი იყოს ყველა დანარჩენი, და ყოველი მათგანის უშუალო გაზომვითა და გამოთვლით მიღებულ შედეგთა ერთმანეთთან შედარება მოგვცემს ერთ საბაზისო განტოლებას. მაშასადამე, **საბაზისო პირობითი განტოლებების** C **რიცხვი** ტრიანგულაციაში, რომელშიაც გაზომილი იყო Q ბაზისი, განისაზღვრება ფორმულით

$$C=Q-1 \tag{33}$$

გვერდების პირობითი განტოლებანი მიიღება განმხოლოებული წერტების განხილვის საშუალებით, ყოველი ამგვარი წერტილისათვის გაწონასწორებითი გამოთვლა სრულდება ცალკე და, მაშასადამე, ცალკევე განისაზღვრება განტოლებათა რიცხვიც. როგორც ნათქვამი იყო, ამგვარი წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის საჭირო და საკმარისია ორი მიმართულება, ხოლო ყოველი ზედმეტი მიმართულება მოგვცემს ერთ განტოლებას. ამრიგად, **საგვერდო პირობით**

განტოლებათა S რიცხვი განმხოლოებული წერტილისათვის, რომლისაკენ დამზერილია R მიმართულება, განისაზღვრება ფორმულით

$$S=R-2 \tag{34}$$

გარდა ზემოთ მოყვანილი ფორმულებისა, დამოუკიდებელ პირობით განტოლებათა რიცხვი ყოველ ტრიგონომეტრიულ ბადეში შეიძლება განსაზღვრული იყოს უშუალოდ ნახაზიდანაც; საჭიროა მხოლოდ, ყოველი წერტილი აგებული იყოს თანმიმდევრობით, ერთი მეორის მიყოლებით, და მუდამ გვახსოვდეს, რომ ყოველი ახალი ხაზი, უკვე აგებულ წერტილთან მიყვანილი, მოგვცემს ერთ საპოლუსო პირობით განტოლებას, თუ ეს ხაზი არაბლანდეა, და ერთ საპოლუსო და ერთ საფიგურო პირობით განტოლებას, თუ იგი ბლანდეა.

მაგალითისათვის 20 ნახაზზე მოცემულ ბადეში ვიწყოთ წერტების აგება AB ბაზისიდან. უბრალო CBA, DCB, ECD და FEC სამკუთხედების თანმიმდევრობითი აგება მოგვცემს ფიგურის 4 პირობით განტოლებას: ბლანდე AD ხაზი მოგვცემს ერთს ფიგურისა და ერთს პოლუსის განტოლებას; ასე, რომ განსახილველ ბადეში სულ უნდა იყოს 8 პირობითი განტოლება, რომელთაგან 5 იქნება ფიგურისა და 3 პოლუსისა, რაც ეთანხმება ფორმულებით მიღებულ რიცხვებს.

54. ბესსელის წესი დამოუკიდებელ პირობათა შერჩევისათვის

რადგანაც ფრიად რთულ ბადეში მოიპოვება მრავალი ისეთი პირობა, რომლებიც არსებითად წარმოადგენენ სხვათა შედეგს, ამიტომ საჭიროა დიდი სიფრთხილე, რათა გამოთვლაში არ იყოს შეტანილი დანარჩენთა იგივი არც ერთი პირობა, ამ მიზნით საუკეთესო იქნება გამოვიყენოთ ბესსელის მიერ დადგენილი ფრიად მარტივი და პრაქტიკული წესი.

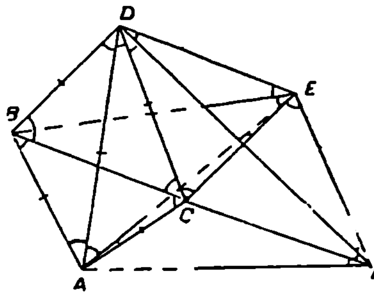
განვიხილოთ, მაგალითად, უკვე საკმაოდ რთული $ABCDEF$ ბადე (ნახ. 21) 6 წერტს შორის, რომელშიაც აღნიშნულია 20 გაზომილი კუთხე და 14 გვერდი.

მისთვის (26), (27) და (28) ფორმულის მიხედვით უნდა იყოს:

$$s=20-2\times6+4=12,\ s'=14-2\times6+3=5,\ s''=20-14+1=7,$$

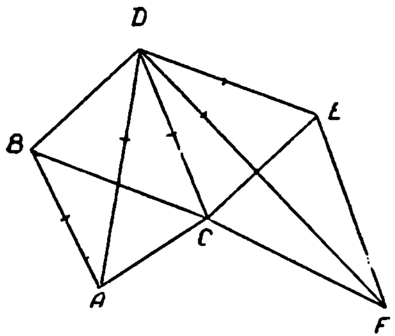
რადგანაც საპოლუსო (გვერდული) განტოლება უმარტივესად გამოიყვანება ოთხკუთხედიდან, რომელშიაც მოცემულია ყველა 6 გვერ-

დის მიმართულება, ამიტომ ჯერ გამოვწეროთ ყველა ასეთი ოთხკუთხედი, რომელთაც აქვთ საერთო წვეროდ ბადის ერთ-ერთი წერტი, მაგალითად A. ავიღოთ $ABDE$ ოთხკუთხედი და მასში გადავხაზოთ AB გვერდი, შემდეგ $ADEC$ ოთხკუთხედში გადავხაზოთ AD გვერდი და, დასასრულ, $AECF$ ოთხკუთხედში გადავხაზოთ AC გვერდი. ახლა A წერტთან უკვე აღარ დარჩენილა ოთხკუთხედი. ამის შემდეგ გადავედივართ მეორე, მაგალითად, B წერტზე. ავიღოთ $BDEC$ ოთხკუთხედი და მასში გადავხაზოთ BD გვერდი; ახლა B წერტილთან უკვე



ნახ. 21

აღარა გვაქვს თავისუფალი ოთხკუთხედი, ვინაიდან $BECA$ ოთხკუთხედში უკვე გადახაზულია BA და CA გვერდი. მერე გადავალთ D წერტზე და მასთან მყოფ $DEFC$ ოთხკუთხედში გადავხაზავთ DC გვერდს, რის შემდეგაც აღარ გვექნება არც ერთი თავისუფალი ოთხკუთხედი, რადგანაც დარჩენილია ბადის მხოლოდ სამი C, E და F წერტილი. ამგვარად გამოწერილი 5 ოთხკუთხედი მოგვცემს 5 საპოლუსო (გვერდულ) პირობას, რომლებიც არავითარ შემთხვევაში არ იქნებიან ერთი მეორის შედეგი.



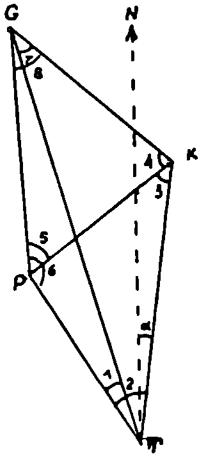
ნახ. 22

ურთიერთდამოუკიდებელ კუთხურ განტოლებათა შესადგენად ასეთნაირადვე გამოვიყენებთ ყველა სამკუთხედსა და ყველა მასში შემავალ შეკრულ ფიგურას, შედგენილს მხოლოდ იმისთანა გვერდებისაგან, რომელთა მიმართულება დამზერილია ორივე ბოლოდან. ჩვენ $ABCDEF$ ბადეში დავტოვოთ მხოლოდ ასეთი გვერდები (ნახ. 22) და ჯერ გამოვწეროთ ყველა სამკუთხედი A წერტთან. მერე ავიღოთ ABC სამკუთხედი და გადავხაზოთ მისი AB გვერდი, მერე ADC სამკუთხედში გადავხაზოთ მისი AD გვერდი; ახლა A წერტთან უკვე აღარა გვაქვს მეტი სამკუთხედი და ამიტომ გადავ-

დივართ მეორე წერტილზე, მაგალითად, D-ზე. აქ ავიღებთ თანმიმდევრობით DEF, DCF, DCB სამკუთხედს და მათში გადავხაზავთ DE, DE და DC გვერდს; ამით მოთავდება D წერტილთან ყველა სამკუთხედი. ვინაიდან ABD სამკუთხედის AD და AB გვერდი უკვე გადახაზულია. ამის შემდეგ ჩვენ ფიგურაში დარჩება ერთი CEF სამკუთხედი, რიცხვით მეექვსე. მიღებულ ექვს ურთიერთ დამოუკიდებელ კუთხურ პირობას უნდა მიემატოს მეშვიდე—ჰორიზონტული პირობა C წერტილთან.

ნნ. სამკუთხედთა ბადის გაწონასწორებითი გამოთვლის მაგალითები

მაგალითი 1. ტრიანგულაციის გაწონასწორებითი გამოთვლის ნათელსაყოფად და სამკუთხედთა გვერდების გამოთვლის წესის საჩვენებლად განვიხილოთ დედამიწის იდეალურ სფეროიდულ ზედაპირზე გაშლილი ტრიანგულაციის ოთხი წერტი: T (ტორნეო), K (კაკამავარა), P (პერრავარა) და G (გუიტაპერი), რომლებიც შედის რუსული გრადუსული გაზომვის გაგრძელებაში ლაპლანდიაში* (ნახ. 23).



ნახ. 23

ტრიანგულაციის მონაცემნი:

1) დასაბამითი T წერტის ასტრონომიული სიგანედი $S_0 = 65°49'44'',57$.

2) დასაბამითი TK გვერდის აზიმუტი $\alpha_0 = 3°1'30'',33$.

3) დასაბამითი TK გვერდის სიგრძე $TK = 17814,86$ ტუაზი.

4) კუთხეები, მიღებული გაზომილ მიმართულებათაგან:

$PTG = 1 = 7°\ 4'\ 3'',09$	$GPK = 5 = 55°53'45'',32$
$PTK = 2 = 29°54'30'',69$	$GPT = 6 = 166°38'41'',09$
$TKP = 3 = 39°20'33'',82$	$KGT = 7 = 37°22'59'',30$
$TKG = 4 = 119°46'34'',19$	$KGP = 8 = 43°40'17'',43.$

---

* Дуга меридиана, В. Струве, ნაწ. II.

პირველი მიახლოებით ვიგულვოთ, რომ ყველა სამკუთხედი მოცემულ ოთხ წერტს შორის ბრტყელია და 4-ნიშნიანი ლოგარითმების დახმარებით გამოვთვალოთ ბადის ყველა გვერდის სიგრძე ტუაზებში; მივიღებთ შემდეგ მიახლოებით სიგრძეებს ათასეულ ტუაზებში:

$$TK = 17{,}81, \qquad TP = 12{,}08, \qquad KP = 9{,}50,$$
$$KG = 11{,}39, \qquad GP = 13{,}56, \qquad GT = 25{,}47.$$

შემდეგ, $TKGP$ ოთხკუთხედის ცენტრული წერტის სიგანედისათვის მივიღოთ მრგვალი რიცხვი $\varphi = 66°0'$ და სათანადო გეოდეზიური ტაბულებიდან (კ ლ ა რ კ ი ს სფეროიდისათვის) გამოვწეროთ სიმრუდის M და N რადიუსი, რომელთა საშუალებით გამოვთვლით $R = \sqrt{MN}$-ს, იმ სფეროს საშუალო სიმრუდის რადიუსს, რომლის ზედაპირზე უნდა გამოითვალოს ყველა სამკუთხედი, იგი აღმოჩნდება:

$$\lg R = 6{,}5158 \text{ (ტუაზ.)}.$$

ამ მონაცემით მარტივად გამოითვლება ოთხი სამკუთხედის სფერული სიჭარბე—ε_1, ε_2, ε_3, ε_4.

ამის შემდეგ გამოითვლება სამკუთხედთა შეცდომილება, რომელიც წარმოადგენს სხვაობას სამკუთხედის დამზერილ კუთხეთა ჯამსა და თეორიულ ჯამს შორის (§ 52, მ. I).

ΔTKP		ΔTKG	
2=	29°54′30″,69	4=	119°46′34″,19
3=	39 20 33 ,82	2—1=	22 50 27 ,60
6—5=	110 44 55 ,77	7=	37 22 59 ,30
ε=	180 0 0 ,28		180 0 1 ,09
180°+ε=	180 0 1 ,03		180 0 1 ,69
w_1=	— 0 ,75	w_2=	— 0 ,60

ΔTPG		ΔKPG	
1=	7° 4′ 3″,09	4—3=	80°26′ 0″,37
6=	166 38 41 ,09	5=	55 53 43 ,32
8—7=	6 17 18 ,13	8=	43 40 17 ,43
	180 0 2 ,31		180 0 3 ,12
	180 0 0 ,36		180 0 1 ,02
w_3=	+ 1 ,95	w_4=	+ 2 ,10

რადგანაც უკანასკნელი სამკუთხედის კუთხეთა ჯამი წარმოადგენს პირველი სამის შედეგს ($w_1 + w_4 + w_2 + w_3$), ამიტომ სამი ურთიერთ-

დამოუკიდებელი კუთხური პირობითი განტოლება მოცემულ კუთხეთა (1), (2), (3), (8) შესწორებათათვის იქნება:

$$(2)+(3)+(6)-(5)=+0'',75$$
$$(4)+(2)-(1)+(7)=+0\ ,60$$
$$(1)+(6)+(8)-(7)=-1\ ,95.$$

მათ უნდა მიემატოს კიდევ ერთი გვერდული (პოლუსური) განტოლება, მაგალითად:

$$\frac{TK}{PK}\cdot\frac{PK}{GK}\cdot\frac{GK}{TK}=\frac{\sin(6-5)\cdot\sin 8\cdot\sin(2-1)}{\sin 2\cdot\sin 5\cdot\sin 7}=1,$$

რომელსაც მიეცემა ლოგარითმული, ხოლო შემდეგ წირული სახეც, როგორც ეს ახსნილი იყო 52 §-ში (მ. 3, (18)), ამრიგად:

მრიცხველი	ცვლილ 1″-ზე მე-7 ნიშნ.	მნიშვნელი	ცვლილ 1″-ზე მე-7 ნიშნ.
lg sin (6−5)=9.9708778	− 8,0	lg sin 2=9.6977668	+36,6
lg sin 8 =9.8391780	+22,1	lg sin 5=9.9180410	+14,2
lg sin (2−1) =9.5890277	+55,0	lg sin 7=9.7832903	+27,6
ჯამი=9.3991835		ჯამი=9.3991981	

$$w=\lg \text{მრიცხვ.}-\lg \text{მნიშვნ.}=-146.$$

$$-50,0\,(1)+13,4\,(2)-6,2\,(5)-8,0\,(6)-27,6\,(7)+22,1\,(8)=+146.$$

შემდგომ გამოთვლაში დიდი რიცხვების თავიდან ასაცილებლად, საუკეთესო იქნება, თუ ამ განტოლებაში უდიდეს კოეფიციენტს მივცემთ ისეთსავე მნიშვნელობას, როგორც წინანდელ განტოლებებში, ე. ი. გავხდით ერთეულად. ამ მიზნით მთელი განტოლება გავყოთ 50-ზე, რის შემდეგაც გვექნება:

$$-1,00\,(1)+0,268\,(2)-0,124\,(6)-0,160\,(6)-0,552\,(7)+$$
$$+0,442\,(8)=+2'',92_8$$

მეტი მოხერხებულობისა და თვალსაჩინოების მიზნით, ერთნაირ შესწორებათა a_1a_2 b_1b_2 c_1c_2 d_1d_2 კოეფიციენტები ოთხ პირობით განტოლებაში დალაგებულია ქვემო ტაბულაში:

განტ.	კოეფ.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	$-w$
I	a	0	+1	+1	0	−1	+1	0	0	=+0,75
II	b	−1	+1	0	+1	0	0	+1	0	=+0,60
III	c	+1	0	0	0	0	+1	−1	+1	=−1,95
IV	d	−1	+0,268	0	0	−0,124	−0,160	−0,552	+0,442	=+2,92

$(aa)=+4$ $(ac)=+1$ $(bb)=+4$ $(bd)=+0{,}716$ $(cd)=-0{,}166$

$(ab)=+1$ $(ad)=+0{,}232$ $(bc)=-2$ $(cc)=+4$ $(dd)=+1{,}613$

კორელატების განტოლებანი:

$$\begin{array}{lllll} 4k_1+k_2 & +k_3 & +0{,}232k_4 & =+0'',75 & k_1=+0{,}504 \\ k_1+4k_2 & -2k_3 & +0{,}716k_4 & =+0\ ,60 & k_2=-0{,}798 \\ k_1+2k_2 & +4k_3 & -0{,}166k_4 & =-1\ ,95 & k_3=-0{,}930 \\ 0{,}232k_1+0{,}716k_2 & +0{,}166k_3 & +1{,}613k_4 & =+2\ ,92 & k_4=-1{,}994 \end{array}$$

ამის შემდეგ (11) ფორმულების საშუალებით გამოვთვლით თვით გაზომილ კუთხეთა შესწორებებს, ხოლო (8) ფორმულით ცალკეული კუთხის გაზომვის საშუალო ცდომილებას:

						კვადრატი	
(1)=		$-k_2$	$+k_3$	$-k_4$	=−2″,13	4,54	1+(1)= 7° 4′0″,96
(2)=	$+k_1$	$+k_2$		$+0{,}268k_4$	=+0 ,24	0,06	2+(2)= 29 54 30,93
(3)=	$+k_1$				=+0 ,50	0,25	3+(3)= 39 20 34,32
(4)=		$+k_2$			=−0 ,80	0,64	4+(4)=119 46 33,39
(5)=	$-k_1$			$-0{,}124k_4$	=−0 ,75	0,56	5+(5)= 55 53 44,57
(6)=	$+k_1$		$+k_3$	$-0{,}160k_4$	=−0 ,74	0,55	6+(6)=166 38 40,35
(7)=		$+k_2$	$-k_3$	$-0{,}552k_4$	=−0 ,97	0,94	7+(7)= 37 22 58,33
(8)=			$+k_3$	$+0{,}442k_4$	=−0 ,05	0,00	8+(8)= 43 40 17,38
						Σ=7,54	

ცალკეული კუთხის გაზომვის საშუალო ცდომილება იქნება:

$$\mu=\sqrt{\frac{7{,}54}{4}}=\pm 1'',3.$$

განსახილველი ბადის სამკუთხედთა ყველა გვერდის საბოლოო სიგრძე გამოითვლება ლეჟანდრის თეორემის მიხედვით შემდეგნაირად.

$\Delta TKP\ \frac{1}{3}\varepsilon_1=0'',34$	$\lg TK=4,2507823$
$(6-5)-\frac{1}{3}\varepsilon_1=110^\circ 44' 55'',44$	$\lg\sin=9,9708780$
$2-\frac{1}{3}\varepsilon_1=\ \ 29\ 54\ 30\ ,59$	$\lg\sin=9,6977665$
$3-\frac{1}{3}\varepsilon_1=\ \ 39\ 20\ 33\ ,98$	$\lg\sin=9,8020607$
ჯამი$=180\ \ 0\ \ 0\ ,01$	$\lg\frac{TK}{\sin(6-5)}=4.2799043$
	$\lg PK=3.9776708$
	$\lg PT=4.0819650$

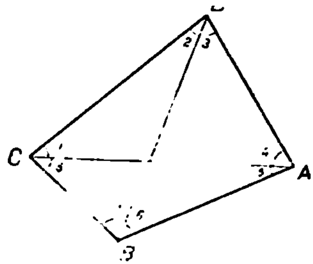
$\Delta KPG\ \frac{1}{3}\varepsilon_4=0'',34$	$\lg PK=3.9776708$
$8-\frac{1}{3}\varepsilon_4=\ \ 43\ 40\ 17\ ,04$	$\lg\sin=9.8391772$
$(4-3)-\frac{1}{3}\varepsilon_4=\ \ 80\ 25\ 58\ ,73$	$\lg\sin=9.9939174$
$5-\frac{1}{3}\varepsilon_4=\ \ 55\ 53\ 44\ ,23$	$\lg\sin=9.9180395$
ჯამი$=180\ \ 0\ \ 0\ ,00$	$\lg\frac{PK}{\sin 8}=4.1384936$
	$\lg PG=4.1324110$
	$\lg KG=4.0565331$

$\Delta TKG\ \frac{1}{3}\varepsilon_2=0'',56$	$\lg TK=4.2507823$
$7-\frac{1}{3}\varepsilon_2=\ \ 37\ 22\ 57\ ,77$	$\lg\sin=9.7832861$
$4-\frac{1}{3}\varepsilon_2=119\ 46\ 32\ ,83$	$\lg\sin=9.9385074$
$(2-1)-\frac{1}{3}\varepsilon_2=\ \ 22\ 50\ 29\ ,41$	$\lg\sin=9.5890368$
ჯამი$=180\ \ 0\ \ 0\ ,01$	$\lg\frac{TK}{\sin 7}4.4674962$
	$\lg TG=4.4060036$
	$\lg KG=4.0565330$
	(შემოწმება)

მაგალითი 2. ქვემოთ მოყვანილი მაგალითი გამოთვლილი იქნება იმ წესებისა და სქემების მიხედვით, რომელნიც მიღებულია ჩვენი ქვეყნის ტრიანგულაციებში, თანახმად 51 §-ში მოცემულ მითითებათა და ფორმულებისა (12-I-დან ვიდრე 12-VIII-მდე).

გვაქვს $ABCD$ ოთხკუთხედი (ნახ. 24) ორი დიაგონალითურთ, რომელშიაც გაზომილია 8 კუთხე, აღნიშნული ნაკვთზე ციფრებით:

1.	48°	33′	29″	,58
2.	30	5	42	,94
3.	41	46	55	,76
4.	59	33	52	,07
5.	29	47	15	,94
6.	48	51	53	,83
7.	60	2	5	,96
8.	41	18	43	,89



ნახ. 24

ურთიერთდამოუკიდებელ პირობათა რიცხვი, 53 §-ის (26) ფორმულის თანახმად, განისაზღვრება შემდეგნაირად: ყველა გაზომილი კუთხის რიცხვი $i=8$, ბადის წერტების რიცხვი $m=4$, ამიტომ ყველა დამოუკიდებელი განტოლების s რიცხვი იქნება:

$$s''=8-4\times2+4=4.$$

მათში 3 იქნება ფიგურების განტოლებანი, ხოლო ერთი—პოლუსის განტოლება, ვინაიდან იმავე §-ის (28) ფორმულის ძალით, რომელშიაც i' არის ბადის ყველა გვერდის რიცხვი (ჩვენ შემთხვევაში $i'=6$), ყველა კუთხური პირობის s'' რიცხვი უნდა იყოს

$$s''=8-6+1=3.$$

ფიგურების სამი განტოლების შესადგენად ავიღოთ სამი ქვემო სამკუთხედი, რომელთა სფერული სიჭარბე გამოთვლილია საგანგებო ფორმულების საშუალებით (78 §):

	CDA		DAB		ABC
1.	48″33′29″,58	3.	41°46′55″,76	5.	29°47′15″,94
2+3.	71 52 38 ,70	4+5	89 21 8 ,01	6+7.	108 53 59 ,79
4	59 33 52 ,07	6	48 51 53 ,83	8.	41 18 43 ,89
	180 0 0 ,35		179 59 57 ,60		189 59 59 ,62
	$\varepsilon_1=1'',22$		$\varepsilon_2=0'',98$		$\varepsilon_3=0'',62$
	$w_1=-0,87$		$w_2=-3,38$		$w_3=-1,00$

პოლუსის განტოლების შესადგენად, პოლუსად ავირჩევთ B წვერ-ტილს, როგორც AC დიაგონალთან უახლოესს:

$$\frac{BC}{BD}\cdot\frac{BD}{BA}\cdot\frac{BA}{BC}=\frac{\sin 2}{\sin(1+8)}\cdot\frac{\sin(4+5)}{\sin 3}\cdot\frac{\sin 8}{\sin 5}.$$

	lg sin	Δlg sin		lg sin	Δlg sin
2.	9.7002183	+36,3	1+8	9.9999989	0
4+5.	9.9999723	+ 0,2	3	9.8236700	+23,6
8.	9.8196502	+23,9	5	9.6961716	+36,7
	9.5198408			9.5198405	

$w=$lg მრიცხველისა — lg მნიშვნელისა—$+3$.

პოლუსის განტოლება:

$$+36{,}3\,(2)+0{,}2\,(4)+0{,}2\,(5)+23{,}9\,(8)-23{,}6\,(3)-36{,}7\,(5)+3=0,$$

ანუ, გაერთებისა და ყველა წევრების 10-ზე გაყოფის შემდეგ (რათა ისინი თავისი აბსოლუტური მნიშვნელობის ფიგურათა განტოლებების კოეფიციენტებს უახლოვდებოდნენ):

$$+3{,}63\,(2)-2{,}36\,(3)+0{,}02\,(4)-3{,}65\,(5)+2{,}39\,(8)+0{,}30=0.$$

ქვემოთ მოყვანილი ტაბულა წარმოადგენს ოთხივე პირობით განტოლებას (I—IV); მასში შეტანილია მხოლოდ უცნობთა კოეფიციენტები; ცარიელი ადგილები იმას აღნიშნავენ, რომ შესაბამისი უცნობის კოეფიციენტი ნულია.

შესწ.	განტოლება						
	I	II	III	IV	r	x	x^2
	a	b	c	d			
(1)	+1				+1,00	—1,″08	1,17
(2)	+1			+3,63	+4,63	+0 ,28	0,08
(3)	+1	+1		—2,36	—0,36	+0 ,39	0,15
(4)	+1	+1		+0,02	+2,02	+1 ,28	1,64
(5)		+1	+1	—3,65	—1,65	+0 ,18	0,03
(6)		+1	+1		+2,00	+1 ,54	2,37
(7)			+1		+1,00	—0 ,80	0,64
(8)			+1	+2,39	+3,39	+0 ,09	0,01
w	—0,87	—3,38	1,00	+0,30		Σ x^2	6,09
kw	+0.935	—7,923	+0,804	+0,112		Σ kw	—6,07

ორი უკანასკნელი სვეტი წარმოადგენს კუთხეთა შესწორებებს, გამოთვლილს 51 §-ის (12—1) ფორმულით, და მათ კვადრატებს.

ნორმულ განტოლებათა კოეფიციენტები იქნება:

$$(aa)=1^2+1^2+1^2+1^2=4,\quad (ab)=1\cdot1+1\cdot1=2,$$

$$(ac)=0,\quad (ad)=+3{,}63-2{,}36+0{,}02=+1{,}29$$

$$(bb)=+4,\quad (bc)=+2,\quad (bd)=-2{,}36+0{,}02-3{,}65=-5{,}99$$

$$(cc)=+4,\quad (cd)=-3{,}65+2{,}39=-1{,}26$$

$$(dd)=(3{,}63)^2+(2{,}36)^2+(0{,}02)^2+(3{,}65)^2+(2{,}39)^2=37{,}78$$

$$(ar)=+7{,}29,\quad (br)=+2{,}01,\quad (cr)=+4{,}74,\quad (dr)=+31{,}82.$$

51 §-ში მოცემულ მითითებათა მიხედვით ქვემოთ მოყვანილია ნორმულ განტოლებათა გადაწყვეტის სქემა:

	I	II	III	IV	w	r
+4,688 +0,482 —0,87	+4 0,6021	+2 0,3010	0	+1,29 0,1106	+0,87 $9,9395_n$	+6,42 0,8075
+4,300 k_1=—1,075	—1,608 —2,484 —2,94	+4 +1 +3	+2 0 +2	—0,99 +0,65 —6,64	—3,38 —0,44 —2,94	—1,37 +3,21 —4,58
k_2=+2,344	—7,032	0,4771	0,3010	$0,8222_n$	$0,4783_n$	$0,6609_n$
		—1,186 +0,66	+4 0	—1,26 0	—1,00 0	+3,74 0
		+2,146 0,3316 0,4265	+4 +1,33 +2,67	—1,26 —4,43 3,17	—1,00 —1,96 +0,96	+3,74 —3,05 +6,79
k_3=—0,804 lg k_3=		$9,9051_n$	0,4265	0,5011	0,9823	0,8319
lg (—7,07)= lg (+18,90)= lg k_4= k_4=+0,374			$0,8494_n$ 1,2765 9,5729	+37,78 + 0,42 +37,36 +14,70 +22,66 + 3,76 +18,90	+0,30 —0,28 +0,58 +6,51 —5,93 +1,14 —7,07	+32,12 + 2,07 +30,05 +10,14 +19,91 + 8,06 +11,85

გამოთვლის შემოწმება ხდება 51 §-ის (12—IV) ფორმულით:

$$(x^2)=6{,}09 \text{ და } -(kw)=6{,}07.$$

იმავე პარაგრაფის (12—I) ფორმულების დახმარებით გამოვთვლით გაზომილ კუთხეთა შესწორებებს:

(1)=	k_1				$=-1'',075$
(2)=	k_1			$+3,69k_4$	$=+0\ ,282$
(3)=	k_1	$+k_2$		$-2,36k_4$	$=+0\ ,386$
(4)=	k_1	$+k_2$		$+0,02k_4$	$=+1\ ,277$
(5)=		$+k_2$	k_3	$-3,65k_4$	$=-0\ ,175$
(6)=		$+k_2$	k_3		$=+1\ ,540$
(7)=			k_3		$=+0\ ,804$
(8)=			k_3	$+2,39k_4$	$=+0\ ,090$

ცალკეული კუთხის გაზომვის საშუალო ცდომილება გამოითვლება იმავე 51 §-ის (12—V) ფორმულით:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{6,09}{4}} = \pm 1'',23.$$

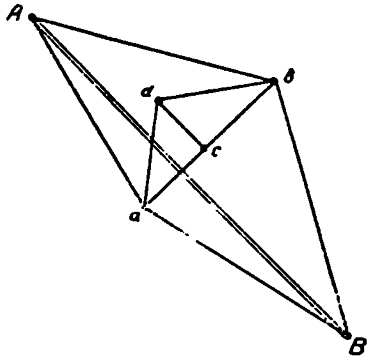
დასასრულ, გამოვიყვანთ გასწორადებულ კუთხეებს:

დამზ. კუთხე	შესწორ.	გასწორ. კუთხე
48°33′29″,58	$-1'',08$	48°33′28″,50
30 5 42 ,94	$+0\ ,28$	35 5 43 ,22
41 46 55 ,76	$+0\ ,39$	41 46 56 ,15
59 33 52 ,07	$+1\ ,28$	59 33 53 ,35
29 47 15 ,94	$+0\ ,18$	29 47 16 ,12
48 51 53 ,83	$+1\ ,54$	48 51 55 ,37
60 2 5 ,96	$-0\ ,80$	60 2 5 ,16
41 18 43 ,89	$+0\ ,09$	41 18 43 ,98

ადვილი დასარწმუნებელია, რომ გაწონასწორებული კუთხეების კუთხეთა ჯამები ყველა სამკუთხედში 180°+ε-ის თანასწორი იქნება და გვერდების გამოთვლაში არავითარ წინააღმდეგობას არ ექნება ადგილი.

I და II მაგალითში სქემათა შედარება გვიჩვენებს, რომ როდესაც პირობით განტოლებათა რიცხვი მცირეა, მაშინ თანაბრად შეიძლება ორივე სქემით სარგებლობა. მაგრამ თუ განტოლებათა რიცხვი დიდია, განსაკუთრებით იმ შემთხვევაში, როდესაც გამოთვლაში შედის რამდენიმე საგვერდო განტოლება (საბაზისო თუ საპოლუსო), მაშინ მეორე სქემას ექნება მნიშვნელოვანი უპირატესობა როგორც გამოთვლის დალაგებისა, ისე მუდმივი კონტროლის მხრივ. ამგვარი სქემა, უფრო რთული (წონებითურთ), უკვე მოცემული იყო 49 §-ში (კორელატების გამოუყენებლად).

მაგალითი 3. აქ მოცემული იქნება მაგალითი მიმართულებათა გაწონასწორებისა. განვიხილოთ ო რ ს კ ი ს ბაზისის ბადე, გამოსახული 25 ნახაზზე *. *ab* ბაზისი *c* წერტილით გაყოფილია ორ ნაწილად, რომლებიც ერთმანეთთან შეადგენენ 180°-თან მიახლოებულ კუთხეს; რადგან ხსენებული ნაწილები გაზომილია დამოუკიდებლად, ამიტომ განსახილველ ბადეში არსებითად არის ორი ბაზისი, რომელთა ზედაპირთან მიყვანილი სიგრძე (საჟენებში) არის:



ნახ. 25

სამხრეთი ნაწილი··$ac=2166,588$
ჩრდილო ნაწილი···$bc=1993,779$

$$\lg ac=3,3357762_5$$
$$\lg bc=3,2996770_8$$

მიმართულებათა ნუმერაცია (ზრდადი აზიმუტების კვალობაზე)

a	*c*	*b*	*d*	*A*	*B*
1—*aA*	6—*ca*	9—*bB*	14—*db*	17—*Ab*	20—*Ba*
2—*ad*	7—*cd*	10—*bc*	15—*dc*	18—*AB*	21—*BA*
3—*ab*	8—*cb*	11—*ba*	16—*da*	19—*Aa*	22—*Bb*
4—*ac*		12—*bd*			
5—*aB*		13—*bA*			

a					*c*				
1=	0°	0′	0″	0″,00	6=	0	0′	0″,00	0″,00
2=	38	46	43,59	41,54	7=85	41		32,65	32,87
3=	79	15	33,80	33,72	8=179	59		49,12	48,15
4—	79	15	39,46	39,39					
5=154	42		18,85	18,14					

b					*d*				
9=	0	0′	0″,00	0″,00	14=	0°	0′	0″,00	0″,00
10=	63	54	21,94	23,57	15=	46	24	59,96	61,93
11=	63	54	29,45	29,76	16=100	14		30,86	31,24
12=103	11		7,70	6,41					
13=124	53		56,01	55,69					

* Записки Военно-Топ. Отдела Главного Штаба, часть XLVII, 1891 г.

A		B	
17= 0° 0′ 0″,00	0″,00	20= 0° 0′ 0″,00	0″00
18= 27 3 3,12	2,90	21=12 35 44,46	44,31
19= 39 45 1,58	0,62	22=40 38 46,16	46,09

მიმართულებათა მარჯვნივ მოყვანილია წამებში გამოსახული გაწონასწორების შემდეგ მიღებული შესწორებანი.

განხილულ ბადეში 6 წერტილია, 22 მიმართულება, 11 ბლანდე და 2 ბაზისის ხაზი და ამიტომ, (31), (32) და (33) ფორმულის მიხედვით,

$$A=6, \quad B=2, \quad C=1,$$

სულ 9 პირობითი განტოლება.

ფიგურების 6 პირობითი განტოლების შესადგენად ავიღებთ ქვემორე სამკუთხედებს:

abB

5—3=	75°26′45″,05
11—9=	63 54 29 ,45
22—20=	40 38 46 ,16
	180 0 0 ,66
ε=	0 ,27
w=+	0 ,39

abA

3—1=	79°15′33″,80
13—11=	60 59 26 ,56
19—17=	39 45 1 ,58
	180 0 1 ,94
ε=	0 ,27
w=+	1 ,67

AbB

13—9=	124° 53′ 56″,01
18—17=	27 3 3 ,12
22—21=	28 3 1 ,50
	180 0 0 ,63
ε=	0,37
w=+	0,26

abd

3— 2=	40° 28′ 50″,21
12—11=	39 16 38 ,25
16—14=	100 14 40 ,86
	179 59 59 ,32
ε=	0 ,08
w=—	0 ,76

acd

4—2=	40° 28, 55″,87
7—6=	85° 41 32 ,65
16—15=	53 49 30 ,90
	179 59 59 ,42
ε=	0 ,04
w=—	0 ,62

cbd

8—7=	94° 18′ 16″,47
12—10=	39 16 45 ,76
15—14=	46 24 59 ,96
	180 0 2 ,19
ε=	0 ,04
w=+	2 ,15

ამ მონაცემთა მიხედვით ფიგურების პირობითი განტოლებანი იქნება:

$$(5)-(3)+(11)-(9)+(22)-(20)+0{,}39=0$$
$$(3)-(1)+(13)-(11)+(19)-(17)+1{,}67=0$$
$$(13)-(9)+(18)-(17)+(22)-(21)+0{,}26=0$$
$$(3)-(2)+(12)-(11)+(16)-(14)-0{,}76=0$$
$$(4)-(2)+(7)-(6)+(16)-(15)-0{,}62=0$$
$$(8)-(7)+(12)-(10)+(15)-(14)+2{,}15=0.$$

პოლუსის ორი პირობითი განტოლების შესადგენად ავიღებთ $aAbB$ და $acbd$ ოთხკუთხედს, ხოლო მათ პოლუსებად b და d წვეროებს:

$$\frac{bB}{ba}\quad\frac{ba}{bA}\quad\frac{bA}{bB}=\frac{\sin(5-3)\cdot\sin(19-17)\cdot\sin(22-21)}{\sin(22-20)\cdot\sin(3-1)\cdot\sin(18-7)}=1.$$

5— 3	$9.9858352_2+\ 5{,}5$	22—20	$9.8138381_9+24{,}5$
19—17	$9.8058031_0+25{,}3$	3— 1	$9.9923241_2+\ 4{,}0$
22—21	$9.6723272_3+39{,}5$	18—17	$9.6518026_5+41{,}2$
	9.4639655_6		9.4639649_6

$$w=+6{,}0$$

$$\frac{db}{dc}\quad\frac{dc}{da}\quad\frac{da}{db}=\frac{\sin(8-7)\cdot\sin(4-2)\cdot\sin(12-11)}{\sin(12-10)\cdot\sin(7-6)\cdot\sin(3-2)}=1.$$

8 —7	$9.9987731_7-\ 1{,}6$	12—10	$9.8014739_0+25{,}7$
4 —2	$9.8123863_0+\ 24{,}7$	7— 6	$9.9987714_2+\ 1{,}6$
12—11	$9.8014545_9+\ 25{,}8$	3— 2	$9.8123723_2+24{,}7$
	9.6126140_6		9.6126176_4

$$w=-35{,}8.$$

აქედან, პოლუსების პირობითი განტოლებანი, წევრთა გაერთიანებისა და 10-ზე გაყოფის შემდეგ, იქნება:

$$+0{,}40\,(1)-0{,}95\,(3)+0{,}55\,(5)+1{,}59\,(17)-4{,}12\,(18)+2{,}53\,(19)+$$
$$+2{,}45\,(20)-3{,}95\,(21)+1{,}50\,(22)+0{,}60=0.$$

$$-2{,}47\,(3)+2{,}47\,(4)+0{,}16\,(6)-0{,}16\,(8)+2{,}57\,(10)-2{,}58\,(11)+$$
$$+0{,}01\,(12)-3{,}58=0.$$

დასასრულ, ბაზისების პირობითი განტოლება მიიღება acd და cbd სამკუთხედის საერთო cd გვერდის გამოთვლით ac და bc ბაზისის მიხედვით. რადგანაც

$$cd = ac \cdot \frac{\sin(4-2)}{\sin(16-15)} = bc \cdot \frac{\sin(12-10)}{\sin(15-14)},$$

ამიტომ უნდა იყოს

$$\frac{ac \sin(4-2) \cdot \sin(15-14)}{bc \cdot \sin(12-10) \cdot \sin(16-15)} = 1.$$

ac	3.3357762_5	bc	3.2996770_9
$4-2$	$9.8123862_8 + 24{,}7$	$12-10$	$9.8014738_8 + 25{,}7$
$15-14$	$9.8599618_0 + 20{,}0$	$16-15$	$9.9069921_7 + 15{,}4$
	3.0081243_3		3.0081431_4

$$w = -188{,}1.$$

აქედან, ბაზისების პირობითი განტოლება იქნება:

$$-2{,}47\,(2) + 2{,}47\,(4) + 2{,}57\,(10) - 2{,}57\,(12) - 2{,}00\,(14) +$$
$$+ 3{,}54\,(15) - 1{,}54\,(16) - 18{,}81 = 0.$$

ახლა შევაერთოთ ყველა პირობითი განტოლება ერთად და გამოვწეროთ კოეფიციენტები შესწორებათა რიგის მიხედვით; მაშინ ჩვეულებრივი გაერთების შემდეგ მივიღებთ: (გვ. 223).

გამოთვლილი k_1, k_2, k_3, კორელატების მნიშვნელობა ჩავსვათ კოეფიციენტების ტაბულაში, რის შემდეგაც მივიღებთ მიმართულებათა შესწორებებს, რომლებიც მოთავსებულია იქვე უკანასკნელ სვეტში.

გამოთვლის შესამოწმებლად გამოიყენება ფორმულა (12—IV):

$$\Sigma x^2 = +11{,}11, \quad \Sigma kw = -11{,}12.$$

გაზომილი მიმართულების საშუალო μ ცდომილება გამოითვლება ფორმულით (12—V):

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{11{,}11}{9}} = \pm 1'',11,$$

ხოლო გაზომილი კუთხის საშუალო ცდომილება იქნება

$$\pm 1'',11 \sqrt{2} = \pm 1'',57.$$

დასასრულ, მივუმატებთ გამოთვლილ შესწორებებს შესაბამის მიმართულებებს და მივიღებთ გაწონასწორებულ მიმართულებებს, რომლებიც მოთავსებულია (წამებში) ამ მაგალითის დასაწყისში.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	მიმართ. შესწორ.
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	
1		−1					+0,40			+0",582
2				−1	−1				−2,47	−1 ,473
3	−1	+1		+1			−0,95	−2,47		+0 ,503
4					+1			+2,47	+2,47	+0 ,514
5	+1						+0,55			−0 ,126
6					−1			+0,16		+0 ,251
7					+1	−1				+0 ,472
8						+1		−0,16		−0 ,723
9	−1		−1							−0 ,065
10						−1		+2,57	+2,57	+1 ,568
11	+1	−1		−1				−2,58		+0 ,241
12				+1		+1		+0,01	−2,57	−1 ,358
13		+1	+1							−0 ,387
14				−1		−1			−2,00	−0 ,782
15					−1	+1			+3,54	+1 ,184
16				+1	+1				−1,54	−0 ,402
17		−1	−1				+1,59			+0 ,393
18			+1				−4,12			+0 ,177
19		+1					+2,53			−0 ,570
20	−1						+2,45			+0 ,137
21			−1				−3,95			−0 ,208
22	+1		+1				+1,50			+0 ,071
m	+0,39	+1,67	+0,26	−0,76	−0,62	+2,15	+0,60	−3,58	−18,81	
km	−0,05	−0,97	+0,05	−0,45	+0,17	−1,60	+0,00	+0,53	−8,80	

ქვემოთ მოყვანილია ნორმულ განტოლებათა გადაწყვეტის სქემა.

X

გაწონასწორებითი გამოთვლის გამარტივება

56. ზოგადი მოსაზრება

გაწონასწორებითი გამოთვლა წარმოადგენს ერთ ურთულეს და უძნელეს საგამოთვლო სამუშაოს, რომელიც გამომთვლელისაგან მოითხოვს გულისყურის უკიდურეს დაძაბვას. ფრიად დიდსა და რთულ ბადეში ხსენებული გამოთვლა უაღრესად ხანგრძლივი და მომქანცველია, მაშინ როცა გაზომილ კუთხეთა სიზუსტე ამით ფრიად მცირედ არის ხოლმე მატებული; მართლაც, როდესაც მოხდენილია კუთხეთა n გაზომვა საჭირო $(n-s)$ გაზომვის ნაცვლად, მაშინ გასწორადებულ კუთხეთა წონა საშუალოდ მატულობს მხოლოდ $\frac{n}{n-s}$ ფარდობის კვალობაზე, რომელიც, s რიცხვის შედარებითი სიმცირისა გამო, არასოდეს არ გადასცილდება $1\frac{1}{2}$-სა ან 2-ს. ამ მოსაზრების მიხედვით, ყოველთვის გათვალისწინებული უნდა გვქონდეს, რომ გაწონასწორებითი გამოთვლის მთავარ მიზანს შეადგენს არა უალბათიერეს მნიშვნელობათა მონახვა გაზომილ კუთხეთათვის, რათა აწეული იქნას ტრიანგულაციის ყველა შედეგის სიზუსტე, არამედ მხოლოდ ამ კუთხეთა გაწონასწორება, რომ ისინი ურთიერთს არ ეწინააღმდეგებოდნენ. ნათქვამის საფუძველზე, ყოვლად დასაშვებად უნდა ჩაითვალოს თეორიული წესებიდან ნაწილობრივი გადახვევა, თუ იგი ამსუბუქებს და ამარტივებს გამოთვლას.

ვრცელ ტრიგონომეტრიულ საჭირო პირობათა ბადეში სრული s რიცხვი, რომლებიც აკავშირებენ ერთმანეთთან კუთხეთა ყველა საძიებელ შესწორებას, იმდენად დიდია ხოლმე, რომ s კორელატის s განტოლებიდან სრული სიმტკიცით მონახვა სინამდვილეში თითქმის შეუძლებელი ხდება. ეს გარემოება გვაიძულებს ბადის რამდენიმე ცალკეულ ჯგუფად დაყოფას და ყოველი, მათგანისათვის გაწონასწორებითი გამოთვლის ცალკე შესრულებას. ეს იმით არის გამოწვეული,

რომ გაცილებით უფრო ადვილია და სწრაფი $\frac{s}{n}$ უცნობიანი $\frac{s}{n}$- განტოლების n-ჯერ გადაწყვეტა, ვიდრე s უცნობიანი s განტოლების ერთხელ გადაწყვეტა. ასე, მაგალითად, ფრიად რთული ბადე, რომლითაც დაფარული იყო დიდი ბრიტანეთი ირლანდიითურთ და რომელიც შეიცავდა 920 დამოუკიდებელ პირობით განტოლებას, გაწონასწორებითი გამოთვლის შესასრულებლად, დაყოფილი იყო 21 ჯგუფად; მაგრამ, მიუხედავად ამნაირი გამარტივებისა, მის გამოთვლას 8 გამოცდილმა გამომთვლელმა მოანდომა $2\frac{1}{2}$- წელიწადი.

ამიტომ საჭიროა შევამციროთ საგამოთვლო სამუშაო, რისთვისაც ადგილის დაკვლევის დროს უნდა ვცდილობდეთ, რაც შეიძლება მარტივი სახე მივცეთ სამკუთხედთა ბადეს და თავიდან ავიცილოთ ზედმეტი დიაგონალების დამზერა; მაშინ შესაძლებელი გახდება ბადის ცალკეულ სისტემებად დაყოფა და საგამოთვლო შრომის მაქსიმალურად შემცირება. მთლიანი გაწონასწორებითი გამოთვლა გამოიყენება თითქმის მარტო საბაზისო ბადეში. უშუალოდ გაზომილი მოკლე ბაზისიდან გრძელ გამოსავალ გვერდზე გადასვლა ჩვეულებრივ ხდება ხოლმე დიაგონალურ მიმართულებათა რთული ქსელის მეშვეობით, საკმაოდ მახვილი შემკავშირებელი კუთხეებით, ხოლო ამისთანა ბადეში გამოთვლის არავითარი გამარტივება არ არის დასაშვები (შედეგის სიზუსტის დაუზიანებლად).

როდესაც ტრიანგულაციური სამუშაო გაწყობილია მცირე ფართობზე და თვით ბაზისებისა და კუთხეების გაზომვა წარმოებულია უმარტივესი ხელსაწყოებისა (მაგ., ხის კვერთხეპისა, დაჭიმული თოკისა ან მავთულის სიგრძივ) და კუთხსაზომი იარაღის ($^1/_2$ ან და 1'იანი სიზუსტის მექონისა) დახმარებით, მაშინ სავსებით დასაშვებია, რომ სამკუთხედები დალაგებული იყოს ადგილზე ისეთნაირად, რომ ისინი ჰქმნიდნენ უბრალო ჯაჭვებს ან ე. წ, ცენტრულ სისტემებს, რომელთაც ერთმანეთთან გადააბამენ სამკუთხედთა უბრალო ჯაჭვებითვე. ამნაირი წესით გაწონასწორებითი გამოთვლა, როგორც შემდეგში ვნახავთ, უკიდურესად მარტივდება, ხოლო ამის მიუხედავად, მიღებული შედეგი მუდამ აკმაყოფილებს პრაქტიკის უმკაცრეს მოთხოვნებს. ქვემოთ მოყვანილი გვექნება გამარტივებული გაწონასწორებითი გამოთვლის მაგალითები, რომლებიც უპირატესად გამოიყენებიან პრაქტიკაში.

67. სამკუთხედთა ჯაჭვი ორ ბაზისს (გვერდს) შორის

ვთქვათ, ორ გაზომილ ბაზისს ან ორ მოცემულ გვერდს შორის (უკანასკნელთა სიგრძე მოცემულია წინათ ყოფილი ტრიანგულაცი-

იდან), სიგრძით b და a (ნახ. 16), დაგებულია n სამკუთხედისაგან შემდგარი უწყვეტი ჯაჭვი. ამნაირ ჯაჭვში მოიპოება $n+1$ პირობითი განტოლება, რომელთაგან n განტოლება არის ფიგურებისა და 1 საბაზისო. $n+1$ განტოლების ერთობლივად გადაწყვეტის ნაცვლად შეიძლება შედეგის სიზუსტის ყოვლად დაუზიანებლად მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ჯერ გავაწონასწორებთ ყველა ცალკეულ სამკუთხედს (სამკუთხედის შეუკვრელობის სამ თანასწორ ნაწილად გაყოფით) და შემდეგ გადავწყვეტთ მხოლოდ ერთ საბაზისო პირობით განტოლებას. უკანასკნელი გადაწყვეტა უნდა შესრულებული იყოს ისეთნაირად, რომ ახლად მიღებულ კუთხეთა შესწორებანი არ არღვევდნენ უკვე გასწორადებულ კუთხეთა ჯამებს; ამის შესრულება ადვილია, თუ დავთქვამთ, რომ კუთხეების ახალ x, y, z შესწორებათა შორის, ყოველ სამკუთხედში, არსებობდეს ასეთი თანაფარდობა

$$z=-(x+y).$$

ამგვარად, ვიგულვოთ, რომ n სამკუთხედისაგან შემდგარ ჯაჭვში, კუთხეები ყველა სამკუთხედში უკვე მიყვანილია $180°+\varepsilon$ ჯამზე, საბაზისო პირობითი განტოლება წარმოგვიდგება ასეთი სახით (52 § (22)):

$$\Sigma\,(\alpha\cdot x)-\Sigma\,(\beta\cdot y)+w=0 \tag{1}$$

სადაც α და β წარმოადგენენ შემკავშირებელ კუთხეთა სინუსების ლოგარითმების ცვლილებას, x და y—ამ კუთხეების საძიებელ შესწორებებს, ხოლო w სხვაობას ბაზისის (ან მოცემული გვერდის) გამოთვლილი სიგრძის ლოგარითმისა და მისი ნამდვილი სიგრძის ლოგარითმს შორის, ე. ი.

$$w=\lg a_1-\lg a.$$

x, y, z შესწორებანი მონახული უნდა იქნეს ქვემო პირობის დაცვით:

$$\Sigma\,[x^2+y^2+(x+y)^2]=\text{minimum} \tag{2}$$

(1) და (2) განტოლების დიფერენციალი იქნება:

$$\Sigma\,\alpha\,dx-\Sigma\,\beta\,dy=0$$

$$\Sigma\,(2x+y)\,dx+\Sigma\,(x+2y)\,dy=0.$$

თუ პირველ განტოლებას გადავამრავლებთ რომელიმე A რიცხვზე და ნამრავლს შევკრებთ მეორე განტოლებასთან, მაშინ A რიცხვის განუზღვრელობის გამო, მიღებულ ჯამში, dx და dy ოდენობა შეიძლება ჩათვლილ იქნეს როგორც სრულებით სანებური, და, მაშასადამე, ეს ჯამი დაკმაყოფილდება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ყოველ სამკუთხედში მიღებულ იქნება:

$$2x+y=A\cdot\alpha$$
$$x+2y=A\cdot\beta,$$

საიდანაც

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{3}A\,(2\alpha+\beta) \\ y&=\frac{1}{3}A\,(\alpha+2\beta) \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

ახლა შევიტანოთ ჯაჭვის ყველა სამკუთხედისათვის გამოთვლილი x და y (1 პირობით განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\Sigma\left(\alpha\cdot\frac{1}{3}A\,(2\alpha+\beta)\right)+\Sigma\left(\beta\cdot\frac{1}{3}A\,(\alpha+2\beta)\right)+w=0$$

ანუ

$$A\cdot\Sigma\frac{1}{3}\,[\alpha^2+\beta^2+(\alpha+\beta)^2]+w=0$$

აღვნიშნოთ

$$\frac{1}{[3]}\,[\alpha^2+\beta^2+(\alpha+\beta)^2]=S;$$

მაშინ მოგვეცემა

$$A=-\frac{w}{\Sigma S}\cdot$$

გამოთვლილი A-ს მნიშვნელობა შევიტანოთ (3) ფორმულებში და გავიხსენოთ, რომ $z=-(x+y)$, მაშინ მივიღებთ ყოველი სამკუთხედის სამივე კუთხის შესწორებებს:

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{w}{3\Sigma S}\,(2\alpha+\beta) \\ y&=+\frac{w}{3\Sigma S}\,(\alpha+2\beta) \\ z&=+\frac{w}{3\Sigma S}\,(\alpha-\beta) \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

გამოთვლის შესამოწმებლად გამოვიყენებთ ფორმულას

$$\Sigma\,(x^2+y^2+z^2)=\frac{w^2}{\Sigma S} \tag{5}$$

ორ ბაზისს (გვერდს) შორის მდებარე სამკუთხედთა ჯაჭვის გაწონასწორების დროს მთავარ სამუშაოს შეადგენს კუთხეთა შესწორებების გამოთვლა (4) ფორმულების მეშვეობით. შრომის შემცირების

თვალსაზრისით შეიძლება გამოყენებული იქნას კიდევ უფრო მიახლოებითი ფორმულები, რომლებიც უკვე აღარ მოგვცემენ ისეთ შესწორებებს, რომელთა კვადრატების ჯამი იქნებოდა უმცირესი, მაგრამ რომლებიც სამაგიეროდ მიგვაღწევინებენ მიზანს უმოკლესი გზით. ქვემოთ მოვიყვანთ ორ ამგვარ წესს.

1) რადგანაც შუალედი კუთხეები სრულებით არ შედის ბოლო გვერდის გამოთვლაში, ამიტომ ისინი შეიძლება დატოვებულ იქნენ უცვლელად და შესწორებული იყოს ჯაჭვის ყველა სამკუთხედის მხოლოდ შემკავშირებელი კუთხეები; რომ არ დავარღვიოთ წინათ გასწორადებული 180°-ზე მიყვანილი ჯამები, შემკავშირებელ კუთხეთა შესწორებებისათვის მივიღებთ $x=-y$ და მათი მნიშვნელობის განსაზღვრისათვის ავიღოთ (3) ფორმულების ჯამი, გვექნება:

$$2x=A\,(\alpha+\beta)$$

რომლის მიხედვით

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{A}{2}\,(\alpha+\beta)\\ y&=-\frac{A}{2}\,(\alpha+\beta)\end{aligned}\right\}. \qquad (A)$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობანი (1) ფორმულაში:

$$\Sigma\left(\alpha\cdot\frac{A}{2}\,(\alpha+\beta)\right)+\Sigma\left(\beta\cdot\frac{A}{2}\,(\alpha+\beta)\right)+w=0.$$

ანუ

$$\frac{A}{2}\,\Sigma\,[\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2]+w=0,$$

საიდანაც

$$A=-\frac{2w}{\Sigma\,(\alpha+\beta)^2}.$$

ეს A-ს მნიშვნელობა შევიტანოთ ზემო (A) ფორმულებში; საბოლოოდ გვექნება:

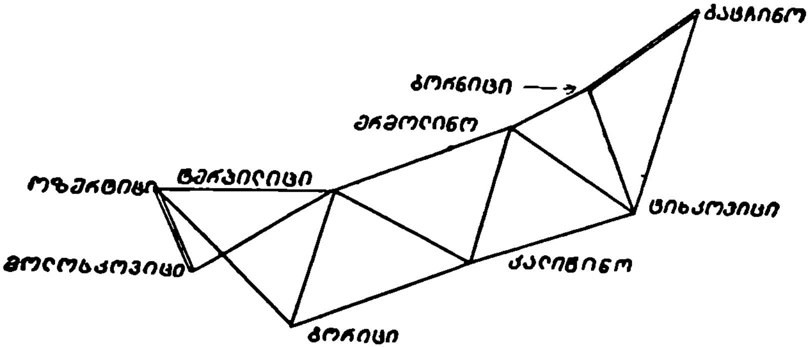
$$x=-y=-(\alpha+\beta)\cdot\frac{w}{\Sigma\,(\alpha+\beta)^2}. \qquad (6)$$

2) თუ ჯაჭვის ყველა სამკუთხედში შემკავშირებელ კუთხეთა შესწორებებს ვიგულვებთ როგორც ურთიერთთანასწორს, მაშინ მათი გამოთვლისათვის გამოვიყენებთ ქვემო ფორმულას, რომელიც გამოგვყავს (6)-ის მიხედვით:

$$x=-y=-\frac{w}{\Sigma\,(\alpha+\beta)}. \qquad (7)$$

მაგალითი 20. ნაკვთზე გამოსახულია ყოფილი პეტროგრადის გუბერნიის პირველი კლასის ტრიანგულაციის ნაწილი ბორნიცი-გატჩინო გვერდსა და მოლოსკოვიცის ბაზისს შორის.

ქვემო ტაბულაში, რომელიც შეიცავს ყველა მონაცემს შემდგომი გამოთვლის საწარმოებლად, გაზომილი კუთხეები ჯერ შესწორებულია



ნახ. 26

სამკუთხედთა მცდარობათა მიმართ და მიყვანილია სიბრტყეში, ე. ი. ყოველი სამკუთხედის კუთხისათვის მიმართულია მესამედი სხვაობისა, კუთხეთა ჯამსა და 180°-ს შორის, ხოლო შემდეგ ამ ბრტყელი კუთხეების მიხედვით გამოთვლილია ყველა შემკავშირებელი გვერდი, რისთვისაც გამოსავალ სიგრძედ მიღებულია გვერდი ბორნიცი-გატჩინო; მისი ლოგარითმი (საჟენებში) უდრის 3.8511110-ს. გამოთვლა წარმოებულია შვიდნიშნიანი ლოგარითმების დახმარებით მერვე ნიშნის შენახვით, რომელიც მიიღება როგორც ინტერპოლობის შედეგი; ტაბულებიდანვე გამოიწერება აგრეთვე შემკავშირე კუთხეთა სინუსების ლოგარითმების ცვლილებებიც, ე. ი. β და α.

ოზერტიც-მოლოსკოვიცის ბაზისის ლოგარითმი გამოთვლით გამოდის 3.6630752_1, მაშინ როდესაც ბაზისის ნამდვილი სიგრძის ლოგარითმი არის 3.6631028; მაშასადამე,

$$w = -275{,}9, \quad \Sigma S = 5218,$$

ამიტომ

$$\frac{w}{3\Sigma S} = 0{,}0176.$$

(4) ფორმულებით გამოთვლილ კუთხეთა შესწორებანი მოცემულია სვეტში, რომელიც დასათაურებულია y, z, x ასოებით (ყოველი

წერტის სახელწოდება	გაზომილი კუთხე	ბრტყელი კუთხე	β, α, S	შესწორება y, z, x (4)	(6)	(7)
ტიხკოვიცი	48°47′59″,25	56″,98	+18,4	−1″,14	−1,36	−1″,12
ბორნიცი	94 10 24 ,16	21 ,88		−0 ,17	0	0
გატჩინო	37 1 43 ,41	41 ,14	+27,9	+1 ,31	+1,36	+1 ,12
	180 0 6 ,82		1087			
ერმოლინო	46 46 29 ,40	28 ,45	+19,8	+0 ,67	−0,53	−1 ,12
ტიხკოვიცი	38 18 30 ,88	29 ,93		+0 ,38	0	0
ბორნიცი	94 55 2 ,58	1 ,62	−1,8	+0 ,29	+0,53	+1 ,12
	180 0 2 ,86		240			
კალიტინო	70 22 1 ,08	3 ,93	7,5	−0 ,72	−0,98	−1 ,12
ერმოლინო	70 21 20 ,35	23 ,13		−0 ,32	0	0
ტიხკოვიცი	39 16 30 ,04	32 ,88	+25,8	+1 ,04	+0,98	+0 ,12
	179 59 51 ,47		610			
ტერბილიცი	35 12 36 ,49	35 ,66	+29,9	−1 ,21	−1,13	−1 ,12
კალიტინო	76 53 5 ,02	4 ,19		+0 ,38	0	0
ერმოლინო	67 54 20 ,98	20 ,15	+8,6	+0 ,83	+1,13	+1 ,12
	180 0 2 ,49		817			
გორიცი	47 23 59 ,38	59 ,28	+19,4	−1 ,19	−1,41	−1 ,12
ტერპილიცი	96 19 57 ,39	57 ,28		−0 ,16	0	0
კალიტინო	36 16 3 ,54	3 ,44	+28,7	+1 ,35	+1,41	+1 ,12
	180 0 0 ,31		1171			
ოზერტიცი	44 57 3 ,50	2 ,39	+21,1	−0 ,81	−0,73	−1 ,12
ტერპილიცი	55 2 51 ,06	49 ,95		+0 ,31	0	0
გორიცი	80 0 8 ,77	7 ,66	+3,7	+0 ,50	+0,73	+1 ,12
	180 0 3 ,33		358			
მოლოსკოვ.	90 28 30 ,33	27 ,59	−0,1	+0 ,66	−1,10	−1 ,12
ოზერტიცი	60 11 59 ,79	57 ,06		−0 ,66	0	0
ტეპილიცი	29 19 38 ,08	35 ,35	+37,5	+1 ,32	+1,10	+1 ,12
	180 0 8 ,20		935			

სამკუთხედის კუთხეთა რიგობაზე). შემოწმება (5) ფორმულების საშუალებით;

$$\Sigma (x^2+y^2+z^2)=14,60$$

$$\frac{w^2}{\Sigma S}=14,59.$$

ადვილი დასარწმუნებელია, რომ მონახული შესწორებებით შეცვლილ კუთხეთა მეშვეობით გამოთვლილი ბაზისის სიგრძე შეუთანხმდება მის ნამდვილ სიგრძეს (ლოგარითმულ გამოთვლათა სიზუსტის ფარგლებში).

განსახილველ მაგალითში (4) ფორმულებით გამოთვლილ შესწორებათა კვადრატების ჯამი უდრის 14,60-ს, მაშინ როდესაც (6) და (7) ფორმულებით გამოთვლილი იგივე ჯამი იქნება 16,10 და 17,56, მიუხედავად იმისა, რომ უკანასკნელ შემთხვევაში შუალედ კუთხეთა შესწორებანი ეთანასწორებიან ნულს.

58. ცენტრული სისტემა

საერთო წვეროს გარშემო დაწყობილ სამკუთხედთა ერთობლიობა იწოდება ც ე ნ ტ რ უ ლ ს ი ს ტ ე მ ა დ. თუ სისტემა შემდგარია n სამკუთხედისაგან, მაშინ იგი თუნდაც, ცალკეულად აღებული, შეიცავს $n+1$ პირობით განტოლებას, რომელთაგან n არის ფიგურების განტოლებათა რიცხვი (სამკუთხედთა რიცხვის მიხედვით), ხოლო—ერთი პოლუსის განტოლება. ყველა $n+1$ განტოლების ერთობლივად გადაწყვეტის ნაცვლად, შეიძლება, შედეგის სიზუსტის ყოვლად დაუზიანებლად, გამოყენებული იქნას ქვემოთ აღწერილი გაწონასწორების გამარტივებული წესი.

ჯერ ყველა სამკუთხედში კუთხეთა ჯამი მიჰყავთ 180°-ზე $A+B+$ $+C-180°$ სხვაობის სამ თანასწორ ნაწილად გაყოფით. შემდეგ, მიღებული ბრტყელი კუთხეებით, რომელიმე შემკავშირებელი a გვერდის საწყისად მიღებით, გამოითვლება ყველა დანარჩენი გვერდი. განსხვავება გამოთვლით მიღებული შემკავშირებელი გვერდისა a_1 სიგრძესა და თავდაპირველად მიღებული მის a სიგრძეს შორის მოგვცემს სავსებით საბაზისო განტოლების მსგავს პირობით განტოლებას, სახელდობრ:

$$\Sigma (\alpha \cdot x)-\Sigma (\beta \cdot y)+w=0, \qquad (8)$$

სადაც α და β წარმოადგენენ შემკავშირებელ კუთხეთა სინუსების ლოგარითმების ცვლილებას, x და y შესაბამის კუთხეთა საძიებელ შესწორებებს, ხოლო

$$w=\lg a_1-\lg a.$$

შუალედ კუთხეთა შესწორებები (ჩვენ შემთხვევაში კუთხეები ცენტრული წერტილის, პოლუსის გარშემო) უნდა აკმაყოფილებდეს ქვემო განტოლებებს:

$$\left.\begin{array}{c} z=-(x+y) \\ z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n=360^\circ-\Sigma C=-w_1 \\ \Sigma z=-(\Sigma x+\Sigma y)=-w_1 \end{array}\right\}. \qquad (9)$$

პირველი განტოლება აუცილებლად საჭიროა იმისათვის, რომ ყოველი სამკუთხედის კუთხეთა ჯამი, ერთხელ 180°-ზე მიყვანილი, უკვე აღარ იყოს შეცვლილი, ხოლო მეორე იმისათვის, რომ პოლუსთან არსებულ სფერულ კუთხეთა $c_1+c_2+c_3+\quad+c_n$ ჯამი უდრიდეს 360°-ს.

(8) და (9) განტოლება უნდა გადაწყვეტილ იქნას ქვემო პირობის მიხედვით:

$$\Sigma\,[x^2+y^2+(x+y)^2]=\text{minimum} \qquad (10).$$

(8), (9), (10) განტოლების დიფერენცირება მოგვცემს:

$$\begin{aligned} &\Sigma\alpha\cdot dx-\Sigma\,\beta\cdot dy=0 \\ &\Sigma\,dx+\Sigma\,dy=\qquad 0 \\ &\Sigma\,(2x+y)\,dx+\Sigma\,(x+2y)\,dy=0. \end{aligned}$$

თუ პირველსა და მეორე განტოლებას გადავამრავლებთ შესაბამისად ჯერ განუსაზღვრელ A და B რიცხვებზე და მერე შევკრებთ მესამე განტოლებასთან, მაშინ, A და B რიცხვის განუსაზღვრელობის გამო, მიღებულ ჯამში dx და dy ოდენობანი შეიძლება ჩათვლილ იქნას, როგორც სრულებით სანუბური, და ამიტომ ხსენებული ჯამი დაკმაყოფილებული იქნება მხოლოდ იმ პირობით, თუ ყოველი სამკუთხედისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} &2x+y=A\alpha+B \\ &x+2y=-A\beta+B, \end{aligned}$$

საიდანაც:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{1}{3}\,[A\,(2\alpha+\beta)+B] \\ y&=-\frac{1}{3}\,[A\,(\alpha+2\beta)-B] \end{aligned}\right| \qquad (11)$$

განსახილველი სისტემის ყველა სამკუთხედის ეს x და y მნიშვნელობა შევიტანოთ (8) და (9) პირობით განტოლებებში და წინანდებურად შევიღოთ S აღნიშვნა; გვექნება:

$$A\Sigma S-\frac{1}{3}B\Sigma(\beta-\alpha)+w=0$$

$$\frac{1}{3}A\Sigma(\beta-\alpha)-\frac{2}{3}Bn+w_1=0.$$

ამ A და B უცნობიანი ორი განტოლების გადაწყვეტა მოგვცემს:

$$\left.\begin{aligned}A&=\frac{-2n\cdot w+w_1\Sigma(\beta-\alpha)}{2n\,\Sigma S-\frac{1}{3}[\Sigma(\beta-\alpha)]^2}\\ B&=\frac{3w_1\Sigma S-w\Sigma(\beta-\alpha]}{2n.\Sigma S-\frac{1}{3}[\Sigma(\beta-\alpha)]^2}\end{aligned}\right\}. \qquad (12)$$

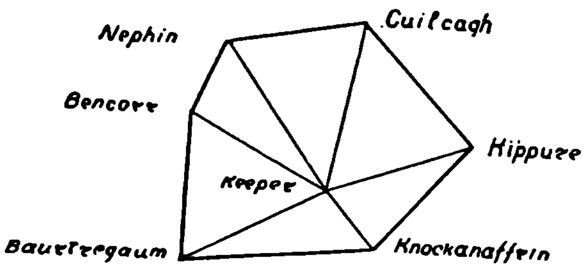
მიღებული A და B მნიშვნელობის მიხედვით განისაზღვრება ყველა სამკუთხედის სამივე კუთხის შესწორება:

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{3}[A(2\alpha+\beta)+B\\ y&=-\frac{1}{3}[A(\alpha+2\beta)-B]\\ z&=\frac{1}{3}[A(\beta-\alpha)-2B]\end{aligned}\right\}. \qquad (13)$$

გამოთვლის შესამოწმებლად გამოვიყენებთ ფორმულას:

$$\Sigma(x^2+y^2+z^2)=-Aw+Bw_1. \qquad (14)$$

მაგალითი: 27 ნახაზზე გამოსახულია ვეება ცენტრული სისტემა, რომლითაც დაფარულია ირლანდიის ზედაპირის უდიდესი ნაწილი.



ნახ. 27

ქვემო ტაბულაში მოყვანილია ყველა მონაცემი გაწონასწორებითი გამოთვლისათვის, ხოლო გამოსავალ გვერდად აღებულია გვერდი Keeper-Baurtregaum, რომლის ლოგარითმი (საჟენობით) არის 4.7592323.

წერტების სახელ-წოდება და სფე-რული სიჭარბე	გაზომილი კუთხე	ბრტყელი კუთხე	β, α S	შესწორება y, z, x
Bencorr	52° 16′ 22″,32	10″,10	+16,3	+0″,22
Keeper	68 57 68 ,90	56 ,67	—	+0 ,02
Baurtregaum	58 45 65 ,46	53 ,23	+12,8	—0 ,24
ε=38″,36	180 0 36 ,68		425	
Nephin	54 38 27 ,77	22 ,15	+15,0	+0 ,12
Keeper	22 47 43 ,81	38 ,20	—	+0 ,07
Bencorr	102 33 65 ,26	59 ,65	—4,7	—0 ,05
ε=20″,60	180 0 16 ,84		118	
Cuilcagh	68 21 60 ,37	46 ,40	+8,4	+0 ,10
Keeper	37 32 47 ,29	33 ,31	—	+0 ,03
Nephin	74 5 54 ,27	40 ,29	+6,0	—0 ,13
ε=40″,12	180 0 41 ,93		105	
Kippure	69 17 33 ,41	17 ,24	+8,0	+0 ,15
Keeper	58 47 62 ,80	46 ,63	—	+0 ,08
Cuilegh	51 55 12 ,30	56 ,13	+16,5	—0 ,23
ε=49″,03	180 0 48 ,51		312	
Knockanaffrin	81 34 25 ,36	15 ,48	+3,1	+0 ,21
Keeper	68 45 22 ,28	12 ,39	—	+0 ,21
Kippure	29 40 42 ,02	32 ,13	+37,0	—0 ,42
ε=22″,50	180 0 29 ,66		996	
Baurtregaum	25 57 17 ,09	10 ,96	+43,3	+0 ,53
Keeper	103 7 54 ,92	48 ,80	—	—0 ,10
Knockanaffrin	50 55 6 ,36	0 ,24	—17,1	—0 ,43
ε=20″,88	180 0 12 ,37		1938	

გამოთვლით მიღებული გვერდის ლოგარითმი Keeper-Baurtregaum არის 4.7592384_4; მაშასადამე,

$$w=+61{,}4, \quad \Sigma S=3894, \quad \Sigma(\beta-\alpha)=+9{,}4.$$

გაზომილი სფერული კუთხეები პოლუსთან არის:

68°	58′	9″,	46
22	47	45 ,	07
37	32	46 ,	68
58	48	2 ,	97
68	45	19 ,	89
103	7	55 ,	76
359	59	59 ,	83

$$w_1 = \Sigma C - 360° = -0'',17, \quad n = 6.$$

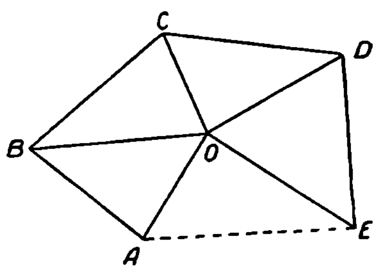
ამ მონაცემთა მიხედვით (12) ფორმულებით გამოვიყვანთ:

$$A = -0,0158, \quad B = -0,0549.$$

(13) ფორმულებით გამოთვლილ კუთხეთა x, y, z შესწორებანი მოთავსებულია ზემო ტაბულის უკანასკნელ სვეტში. შემოწმება (14) ფორმულით:

$$\Sigma(x^2 + y^2 + z^2) = +0,978$$
$$-Aw + Bw_1 = +0,979.$$

შედეგის სიზუსტის თითქმის სრულებით დაუზიანებლად, განხილული ცენტრული სისტემა შეიძლება გამოყენებული იქნას პრაქტიკის იმ შემთხვევაშიაც, როდესაც ბადის ადგილზე გაწყობის დროს რაიმე მიზეზისა გამო ვერ წარმოიქმნება შეკრული ფიგურა, მაგალითად, 28 ნახაზის მსგავსი, რომელზედაც გამოსავალი გვერდია OA (ან ფიგურის რომელიმე სხვა გვერდი). ამ შემთხვევაში სავსებით დასაშვებია, სამკუთხედების წინასწარი გასწორადების შემდეგ, გამოთვლილი იყოს AOE კუთხე ასე:



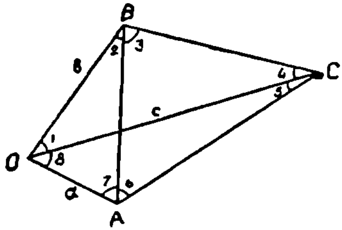
ნახ. 28

$$360° - (AOB + BOC + COD + DOE),$$

ხოლო ამის მერე, ორი AO და EO გვერდისა და მათ შუა მდებარე AOE კუთხის მიხედვით, გამოთვლილი იყოს OAE და OEA კუთხეებიც. ამნაირად, ხელოვნურად შექმნილ AOE სამკუთხედში სამივე კუთხე იქნება ცნობილი, რის შემდეგაც 28 ფიგურა გადაიქცევა ცენტრულ სისტემად, რომლის გამოსათვლელად გამოვიყენებთ ზემოთ აღწერილ წესებს.

59. გეოდეზიური ოთხკუთხედი

ორდიაგონალიანი ოთხკუთხედი წარმოადგენს ფიგურას, რომელიც განსაკუთრებით ხშირად გვხვდება ტრიანგულაციებში, მაგრამ ამასთანავე მისი გაწონასწორება საერთო წესების მიხედვით, ე. ი. მისი ოთხი პირობითი განტოლების გადაწყვეტით (სამი განტოლება ფიგურისა და ერთი პოლუსისა), მოითხოვს საკმაოდ დიდ შრომასა და დროს. გამოჩენილი რუსი მეცნიერის ვ. ვ. ვიტკოვსკის (В. В. ВИТКОВСКИЙ) მიერ შემუშავებულია ფრიად გამარტივებული წესი გეოდეზიური ოთხკუთხედის გაწონასწორებისათვის, რომელიც ქვემოთ არის მოყვანილი.



ნახ. 29

განვიხილოთ გეოდეზიური $AOBC$ ოთხკუთხედი (ნახ. 29), აღვნიშნოთ მისი რვა კუთხე რიგობრივი რიცხვებით, ხოლო მათი შესწორებანი ფრჩხილებში მოქცეული იმავე რიცხვებით.

აღვნიშნოთ OBC, ABC, OAC სამკუთხედების მცდარობა შესაბამისად w_1, w_2, w_3 ასოებით; გვექნება კუთხეების შემდეგი სამი პირობითი განტოლება:

$$\begin{aligned}
&(1)+(2)+(3)+(4) && +w_1=0\\
&(3)+(4)+(5)+(6) && +w_2=0\\
&(5)+(6)+(7)+(8) && +w_3=0,
\end{aligned}$$

რომელთაგან, საერთო წესების საფუძვლით, გამოითვლება ნორმული განტოლებანი:

$$\begin{aligned}
4k_1+2k_2 \qquad\quad & +w_1=0\\
2k_1+4k_2+2k_3 & +w_2=0\\
2k_2+4k_3 & +w_3=0
\end{aligned}$$

მათი გადაწყვეტა მოგვცემს:

$$k_1=\frac{1}{8}\,(-3w_1+2w_2-w_3)$$

$$k_2=\frac{1}{8}\,(+2w_1-4w_2+2w_3)$$

$$k_3=\frac{1}{8}\,(-w_1+2w_2-3w_3).$$

კუთხეების შესწორებათა გამოსათვლელად გამოვიყენებთ ფორმულებს:

$$(1)=(2)=\frac{1}{8}(-2w_1+2w_2-w_3)=-\frac{1}{4}w_1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}w_1-w_2+\frac{1}{2}w_3\right)$$

$$(3)=(4)=\frac{1}{8}(-w_1-2w_2+B_3)=-\frac{1}{4}w_1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}w_1-w_2+\frac{1}{2}w_3\right)$$

$$(5)=(6)=\frac{1}{8}(+w_1-2w_2-w_3)=-\frac{1}{4}w_3+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}w_1-w_2+\frac{1}{2}w_3\right)$$

$$(7)=(8)=\frac{1}{8}(-w_1+2w_2-2w_3)=-\frac{1}{4}w_3-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}w_1-w_2+\frac{1}{2}w_3\right)$$

ანუ, თუ შესამოკლებლად აღვნიშნავთ,

$$u=\frac{1}{2}w_1-w_2+\frac{1}{2}w_3, \tag{15}$$

მაშინ

$$\left.\begin{aligned}(1)=(2)&=-\frac{w_1+u}{4}\\(3)=(4)&=-\frac{w_1-u}{4}\\(5)=(6)&=-\frac{w_3-u}{4}\\(7)=(8)&=-\frac{w_3+u}{4}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

მიღებული შესწორებების კუთხეებში შეტანის შემდეგ, შევადგენთ პოლუსის პირობით განტოლებას. ახლა თუ იმავე რვა კუთხის ახალ შესწორებებს აღვნიშნავთ შესაბამისად x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4 ასოებით, მაშინ საძიებელი პირობითი განტოლება (როდესაც პოლუსად მიღებული გვექნება დიაგონალების გადაკვეთის წარმოსახვითი წერტილი) დაიწერება ასე:

$$\Sigma(\alpha\cdot x)-\Sigma(\beta\cdot y)+w=0 \tag{16}$$

უკვე გასწორადებული სამკუთხედების მოშლის თავიდან ასაცილებლად x და y შესწორებანი ამასთანავე უნდა აკმაყოფილებდნენ ქვემო განტოლებებსაც:

$$\begin{aligned}x_1+y_1+x_2+y_2 \qquad\qquad &=0\\ x_2+y_2+x_3+y_3 \qquad &=0\\ +x_3+y_3+x_4+y_4 &=0.\end{aligned}$$

შესამოკლებლად აღვნიშნოთ:

$$\begin{array}{l|l} x_1+y_1=+2t & x_1-y_1=2t_1 \\ x_2+y_2=-2t & x_2-y_2=2t_2 \\ x_3+y_3=+2t & x_3-y_3=2t_3 \\ x_4+y_4=-2t & x_4-y_4=2t_4 \end{array}$$

მივიღებთ:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1=+t+t_1 & y_1=+t-t_1 \\ x_2=-t+t_2 & y_2=-t-t_2 \\ x_3=+t+t_3 & y_3=+t-t_3 \\ x_4=-t+t_4 & y_4=-t-t_4 \end{array}\right\} \tag{17}$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობანი (16)-ში:

$$\alpha_1(t+t_1)+\alpha_2(-t+t_2)+\alpha_3(t+t_3)+\alpha_4(-t+t_4)-$$
$$-\beta_1(t-t_1)-\beta_2(-t-t_2)-\beta_3(t-t_3)-\beta_4(-t-t_4)+w=0,$$

ანუ

$$[(\alpha_1-\beta_1)-(\alpha_2-\beta_2)+(\alpha_3-\beta_3)-(\alpha_4-\beta_4)]\,t+$$
$$+(\alpha_1+\beta_1)\,t_1+(\alpha_2+\beta_2)\,t_2+(\alpha_3+\beta_3)\,t_3+(\alpha_4+\beta_4)\,t_4+w=0 \tag{18}$$

მაგრამ, რადგანაც (16) განტოლება უნდა გადაწყვეტილი იყოს იმ პირობის დაცვით, რომ შესწორებათა კვადრატების ჯამი უმცირესი იყოს, ამიტომ, თანახმად მიღებული აღნიშვნებისა, დავწერთ:

$$(t+t_1)^2+(t-t_1)^2+(t-t_2)^2+(t+t_2)^2+(t+t_3)^2+(t-t_3)^2+$$
$$+(t-t_4)^2+(t+t_4)^2=\text{minimum},$$

ხოლო გაერთებისა და 2-ზე გაყოფის შემდეგ.

$$4t^2+t_1^2+t_2^2+t_3^2+t_4^2=\text{minimum} \tag{19}$$

(18) და (19) განტოლების დიფერენცირება მოგვცემს:

$$[(\alpha_1-\beta_1)-(\alpha_2-\beta_2)+(\alpha_3-\beta_3)-(\alpha_4-\beta_4)]\,dt+$$
$$+(\alpha_1+\beta_1)\,dt_1+(\alpha_2+\beta_2)\,dt_2+(\alpha_3+\beta_3)\,dt_3+(\alpha_4+\beta_4)\,dt_4=0$$
$$4t\cdot dt+t_1dt_1+t_2dt_2+t_3dt_3+t_4dt_4=0.$$

გადავამრავლოთ პირველი ამ განტოლებათაგანი ჯერ განუსაზღვრელ k რიცხვზე და შემდეგ შევუტოლოთ ერთმანეთს dt, dt_1, dt_2, dt_3 და dt_4-ის კოეფიციენტები, მივიღებთ:

$$\left.\begin{array}{l} 4t=k\,[(\alpha_1-\beta_1)-(\alpha_2-\beta_2)+(\alpha_3-\beta_3)-(\alpha_4-\beta_4)] \\ \quad t_1=k\,(\alpha_1+\beta_1) \qquad t_3=k\,(\alpha_3+\beta_3) \\ \quad t_2=k\,(\alpha_2+\beta_2) \qquad t_2=k\,(\alpha_4+\beta_4) \end{array}\right\} \tag{20}$$

მიღებულ ოდენობათა (18) პირობით განტოლებაში შეტანა მოგვცემს:

$$k\cdot\frac{1}{4}[(\alpha_1-\beta_1)-(\alpha_2-\beta_2)+(\alpha_3-\beta_3)-(\alpha_4-\beta_4)]^2+$$
$$+k\,\Sigma\,(\alpha+\beta)^2+w=0,$$

საიდანაც

$$k=\frac{-w}{\frac{1}{4}[(\alpha_1-\beta_1)-(\alpha_2-\beta_2)+(\alpha_3-\beta_3)-(\alpha_4-\beta_4)]^2+\Sigma\,(\alpha+\beta)^2} \qquad (21)$$

ეს k-ს მნიშვნელობა შევიტანოთ (20) განტოლებებში და გამოვთვალოთ t_1, t_2, t_3, t_4, რომელთა მიხედვით (17) ფორმულების მეშვეობით უკვე განვსაზღვრავთ ოთხკუთხედის ყველა რვა კუთხის x და y შესწორებას.

ამნაირად, გეოდეზიური ოთხკუთხედის გაწონასწორების განრიგი იქნება შემდეგი:

პირველად გამოვთვლით სამი OBC, ABC და OAC სამკუთხედის მცდარობას ქვემო ფორმულების მეშვეობით:

$$\left.\begin{aligned} w_1&=(1+2+3+4)-(180^\circ+\varepsilon_1)\\ w_2&=(3+4+5+6)-(180^\circ+\varepsilon_2)\\ w_3&=(5+6+7+8)-(180^\circ+\varepsilon_3)\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

სადაც 1, 2, 8 გაზომილი კუთხეებია, ხოლო ε_1, ε_2, ε_3 — სამკუთხედების სფერული სიჭარბე.

შემდეგ, (15) ფორმულებით გამოვთვლით დამხმარე u ოდენობასა და ყველა რვა კუთხის წინასწარ (1), (2), (8) შესწორებას.

(1), (2), (8) შესწორებას მივუმატებთ 1, 2, 8 კუთხეებს, მოვნახავთ გასწორადებული კუთხეების სინუსების ლოგარითმებს და თანვე გამოვწერთ ტაბულებიდან π და β ოდენობებს.

მიღებული ოდენობებით გამოვთვლით:

$$\left.\begin{aligned} w=[&\lg\sin(1+(1))+\lg\sin(3+(3))+\\ &+\lg\sin(5+(5))+\lg\sin(7+(7))-\\ &-[\lg\sin(2+(2))+\lg\sin(4+(4))+\\ &+\lg\sin(6+(6))+\lg\sin(8+(8+(8))]\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

და (21) ფორმულით k რიცხვს.

დასასრულ, (20) ფორმულებით გამოვთვლით დამხმარე t, t_1, t_2, t_3, t_4 ოდენობებს და (17) ფორმულებით ყველა რვა კუთხის დამატებით x და y შესწორებებს.

მაგალითი. განვიხილოთ გეოდეზიური ოთხკუთხედი, უკვე გაწონასწორებული ჩვეულებრივი წესით (55 §, ნახ. 24).

გაზომილი კუთხე	პირველადი შესწორებით გასწ. კუთხე	lg sin	α და β	მეორადი შესწორება
1. 48°33′29″,58	29,19	9.8748454	+18,6	−0″,69
2. 30 5 42 ,94	42,55	9.7002169	+36,3	+0 ,68
3. 41 46 55 ,76	56,59	9.8236720	+23,6	−0 ,45
4. 59 33 52 ,07	52,90	9.9356089	+12,4	+0 ,45
5. 29 47 15 ,94	16,80	9.6961748	+36,7	−0 ,69
6. 48 51 53 ,83	54,69	9.8768895	+18,4	+0 ,68
7. 60 2 5 ,96	5,60	9.9376822	+12,13	−0 ,45
8. 41 18 43 ,89	43,53	9.8196493	+23,9	+0 ,45

CDA. *DAB*, *ABC* სამკუთხედების მცდარობა შესაბამისად იყო:

$$w_1=-0'',87,\quad w_2=-3'',38,\quad w_3=-1'',00.$$

მაშასადამე, (15) ფორმულების მიხედვით გვექნება:

$$u=-0,44+3,38-0,50=+2'',44$$

$$(1)=(2)=-0'',39$$
$$(3)=(4)=+0\ ,83$$
$$(5)=(6)=+0\ ,86$$
$$(7)=(8)=-0\ ,36$$

ამ შესწორებებით გასწორებული კუთხეების წამები მოთავსებულია ზემოთ მოცემული ცხრილის მესამე სვეტში და ამ გასწორებულ კუთხეთათვის გამოწერილია სინუსების ლოგარითმები და მათი ცვლილებანი, მოქცეული მეოთხე და მეხუთე სვეტში.

შემდეგ, (23), (21) და (20) ფორმულების მიხედვით გვექნება:

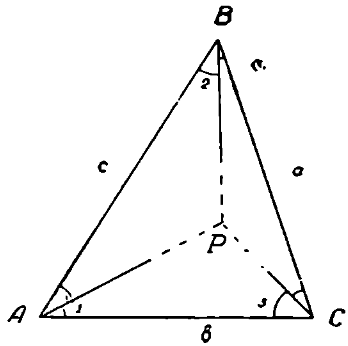
$$w=+0,0000108,\quad \lg k=8.0968_n,\quad t=-0'',004,$$

$$t_1=-9'',686,\quad t_2=-0'',450.\quad t_3=-0'',689,\quad t_4=-0'',450.$$

ადვილი დასანახია, რომ (17) ფორმულებით გამოთვლილი და ცხრილის უკანასკნელ სვეტში მოთავსებული,—მეორადი შესწორებების შეტანის შემდეგ მოგვეცემა საბოლოოდ გაწონასწორებული კუთხეები, რომლებიც გამოთვლის დასაშვები სიზუსტის ფარგლებში, ე. ი. 0″,01-მდე ეთანასწორებიან 55 §-ში მიღებულ კუთხეებს,

60. გვერდების გაწონასწორება

ვთქვათ, რომელიმე განმხოლოებული P წერტილი (ნახ. 30) დამზერილი იყო პირველი კლასის ABC სამკუთხედის სამი წვეროდან; სამკუთხედი საბოლოოდაა გამოთვლილი, ასე რომ არ შეიძლება არც მისი A, B, C კუთხეების, არც მისი a, b, c გვერდების შეცვლა. განმხოლოებული P წერტის დამზერით მიღებული $1=CAP$, $2==ABP$ და $3=ACP$ კუთხეები ბადის საერთო გაწონასწორებაში არ შესულან, ამიტომ ცალკეულ ABP, BCP, CAP სამკუთხედთა გამოთვლის შემდეგ, მათი საერთო AP, BP, CP გვერდებისათვის, საზოგადოდ, მოგვეცემა არა ერთნაირი მნიშვნელობა. პირობითი განტოლება შეიძლება შედგენილი იყოს ნებისმიერად აღებული გვერდის მტოლებით. ავიღოთ, მაგალითად, AP გვერდი. CAP და



ნახ. 30

ABP სამკუთხედის სფერული სიჭარბე აღვნიშნოთ შესაბამისად ε_1 და ε_2 ასოებით; მაშინ ნახაზიდან გვექნება:

$$\Delta CAP \qquad AP=b\cdot\frac{\sin\left(3-\frac{1}{3}\varepsilon_1\right)}{\sin\left(180^\circ+\varepsilon_1-(1+3)-\frac{1}{3}\varepsilon_1\right)}$$

$$\Delta ABP \qquad AP=C\cdot\frac{\sin\left(2-\frac{1}{3}\varepsilon_3\right)}{\sin\left(180^\circ+\varepsilon_2-(A-1+2)-\frac{1}{3}\varepsilon_2\right)}$$

საიდანაც უნდა იყოს:

$$b\cdot\sin\left(3-\frac{1}{3}\varepsilon_1\right).\sin\left(A-1+2-\frac{2}{3}\varepsilon_2\right)=$$
$$=C\cdot\left(2-\frac{1}{3}\varepsilon_2\right)\cdot\sin\,(1+3)-\frac{2}{3}\varepsilon_1\Big)\cdot$$

სინამდვილეში, დამზერათა აუცილებელ ცდომილებათა გამო, სრულ თანასწორობას არ ექნება ადგილი, ამიტომ, ორივე ნაწილის ლოგარითმების აღების შემდეგ, მოგვეცემა:

$$\lg b+\lg\sin\left(3-\frac{1}{3}\varepsilon_1\right)+\lg\sin\left(A-1+2-\frac{2}{3}\varepsilon_2\right)-$$

$$-\lg c-\lg\sin\left(2-\frac{1}{3}\varepsilon_2\right)-\lg\sin\left(1+3-\frac{2}{3}\varepsilon_1\right)=w, \qquad (24)$$

სადაც w არის გვერდის ცდომილება, გამოსახული ლოგარითმის ათწილად ნიშნებში.

3, $A-1+2$, 2 და $1+3$ კუთხეთა სინუსების ლოგარითმების ცვლილებანი შესამოკლებლად აღვნიშნოთ α, β, γ, δ ასოებით, ხოლო კუთხეთა საძებნი შესწორებანი—ფრჩხილებში მოქცეული შესაბამისი ციფრებით; მაშინ დავწერთ ქვემო პირობით განტოლებას:

$$\alpha\,(3)-\beta\,(1)+\beta\,(2)-\gamma\,(2)-\delta\,(1)-\delta\,(3)+w=0,$$

ანუ

$$-(\beta+\delta)\,(1)+(\beta-\gamma)\,(2)+(\alpha-\delta)\,(3)+w=0. \qquad (25)$$

პირობით განტოლებათა გადაწყვეტის წესების მიხედვით გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} (1)&=-(\beta+\delta)\cdot k\\ (2)&=\ \ (\beta-\gamma)\cdot k\\ (3)&=\ \ (\alpha-\delta)\cdot k\\ k&=-\frac{w}{(\beta+\delta)^2+(\beta-\gamma)^2\,(\alpha-\delta)^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (26)$$

თუ განმხოლოებული წერტილი დამზერილი იყო არა სამი, არამედ მრავალი, საზოგადოდ n წერტილიდან, მაშინ საჭირო ხდება (25) სახის $n-2$ განტოლების შედგენა და მათი გადაწყვეტა საერთო წესების მიხედვით, რომლებიც მიღებულია ბევრი ერთობლივი პირობითი განტოლების გადაწყვეტის დროს.

აქ საჭიროა აღნიშნული იყოს ის გარემოება, რომ თუ რომელიმე წერტზე, მაგალითად A-ზე, გაზომილი იყო არა მარტო $1=CAP$ კუთხე, არამედ BAP კუთხეც, მაშინ, სანამ შევადგენდეთ პირობით განტოლებებს, მანამდე მათი ჯამი უნდა მიყვანილი იყოს $A=BAC$ კუთხის ტოლობაზე (ე. ი. მცდარობა გაიყოს შუაზე) და უკვე ამის შემდეგ მოვიქცეთ ზემონაირად, ან კიდე შევიტანოთ ცალკე პირობითი განტოლება ჯამისა.

თუ მხედველობაში ვიქონიებთ განმხოლოებული წერტების დამზერის ნაკლებ სიზუსტეს (ჩვეულებრივ დაიმზირებიან ილეთების ნაკლები რიცხვით) და აგრეთვე იმ გარემოებასაც, რომ განმხოლოებული წერტის მდებარეობა არ გამოიყენება შემდგომი გამოთვლისათვის, მაშინ სავსებით დასაშვები ხდება სფერული სიჭარბის უგულე-

ზელყოფა, რაც საგრძნობლად ამარტივებს (24) ფორმულას: ამგვარ წერტთა დიდი რიცხვის შემთხვევაში ხსენებულ გამარტივებას აქვს პრაქტიკული მნიშვნელობა.

მაგალითი. მოცემულია პირველი კლასის ABC სამკუთხედი (ნახ. 30), რომლის სამი დამზერილი კუთხე იყო;

სფერული კუთხე	ბრტყელი კუთხე	გვერდ. ლოგარ. საყ.
$A=64°43'\,51'',74$	$51'',40$	4.0490100
$B-42\ \ 3\ \ 30\ ,94$	$30\ ,60$	3.9186940
$C=73\ \ 12\ \ 38\ ,34$	$38\ ,00$	4.0737721
$180\ \ 0\ \ 1\ ,02$	$0\ ,00$	

სამივე წვეროდან დამზერილი იყო განმხოლოებული P წერტი და მიღებული იყო:

$$CAP=1=37°\ \ 6'\ 41''$$
$$ABP=2=24\ \ 12\ \ 57$$
$$ACP=3=47\ \ 58\ \ 29$$

ACP და ABP სამკუთხედების სფერული სიჭარბე არის $\varepsilon_1=0'',36$, $\varepsilon_2=0'',39$.

გვერდის პირობითი განტოლება (24)-ის მიხედვით იქნება:

$$\lg AC=3.9186940,$$

$$\lg\sin\left(3-\frac{1}{3}\varepsilon_1\right)=\lg\sin 47°58'28,88=9.8709007 \qquad \alpha=+19,0$$

$$\lg\sin\left(A-1+2-\frac{2}{3}\varepsilon_2\right)=\lg\sin 58°50'7'',48=\underline{9.8955545} \quad \beta=+16,5$$

$$3.6851492$$

$$\lg AB=4.0737721$$

$$\lg\sin\left(2-\frac{1}{3}\varepsilon_2\right)=\lg\sin 24°12'56'',87=9.6129687 \qquad \gamma=+46,8$$

$$\lg\sin\left(1+3-\frac{2}{3}\varepsilon_1\right)=\lg\sin 85°\ \ 5'\ \ 9'',76=\underline{9.9984008} \quad \delta=+1,8$$

$$3.6851416$$

აქ $w=+76$, ამიტომ (26) ფორმულები მოგვცემენ:

$$\lg k=8.6908_n, \quad (1)=+0'',90, \quad (2)=+1'',49, \quad (3)=-0'',84,$$

და გასწორებული სფერული კუთხეები იქნება:

$$1=37°\ \ 6'\ 41'',90$$
$$2=24\ \ 12\ \ 58\ ,49$$
$$3=47\ \ 58\ \ 28\ ,16$$

ქვემოთ მოყვანილი სამკუთხედების საბოლოო გამოთვლა გვიჩვენებს, რომ მომიჯნე გვერდების მნიშვნელობა გამოდის ერთნაირი ლოგარითმულ გამოთვლათა დასაშვები სიზუსტის ფარგლებში. კუთხეები P წერტთან გამოყვანილია, როგორც შევსება $180°+\varepsilon$-მდე შესაბამისი სამკუთხედების ორი დანარჩენი კუთხის ჯამისა.

B	17°50′ 32″,45	32″,36	3.7008765	9.4862867
C	25 14 10 ,18	10 ,09	3.8443559	4.2145898
P	136 55 17 ,65	17 ,55	4.0490100	9.6297661
	180 0 0 ,28	0 ,00	9.8344202	
C	47 58 28 ,16	28 ,04	3.7911923	9.8708991
A	37 6 41 ,90	41 ,78	3.7008765	3.9202932
P	94 54 50 ,30	50 ,18	3.9186940	9.7805833
	180 0 0 ,36	0 ,00	9.9984008	
A	27 37 0 ,84	9 ,71	3.8443558	9.6661392
B	21 12 58 ,40	58 ,36	3.7911922	4.1782166
P	123 9 52 ,06	51 ,93	4.0737721	9.6129756
	180 0 0 ,39	0 ,00	9.8955555	

61. პოტენოტის ამოცანა

ზოგჯერ საჭირო ხდება ხოლმე ისეთი წერტილის მდებარეობის განსაზღვრა, რომელიც არ დამზერილა ტრიანგულაციის წარმოების დროს, ადგილობრივი პირობების მიზეზით. ასეთ შემთხვევაში დადგებიან საძიებელ წერტილზე და დამზერენ მიმართულებებს რომელიმე სამკუთხედის სამივე წვეროზე, რომელთა მდებარეობა უკვე განსაზღვრულია. ასეთი შემთხვევა გეოდეზიაში იწოდება პ ო ტ ე ნ ო ტ ი ს (Laurent Polhenot 1660—1732) ამოცანად. ჩვენ აქ განვიხილავთ მის ანალიზური გადაწყვეტას ჯერ ს ი ბ რ ტ ყ ე შ ი, ხოლო შემდეგ სფერულ ზედაპირზე.

1. ვთქვათ, რომელიმე P წერტილში (ნახ. 31) გაზომილია 1 და 2 კუთხე სამ PA, PB, PC მიმართულებათა შორის. ხსენებულ სამ წერტილამდე p_1, p_2, p_3 მანძილების განსაზღვრისათვის საკმარისია ვიცოდეთ $PAC=x$ და $PCA=y$ კუთხეები. ACP სამკუთხედიდან გვექნება:

$$x+y+1+2=180°,$$

საიდანაც

$$x+1=180°-(y+2),$$

ანუ

$$\sin(x+1)=\sin(y+2) \qquad (27)$$

ხოლო $ABCP$ ოთხკუთხედიდან, პოლუსად B წერტილის მიღებით:

$$\frac{a\cdot p_2\cdot c}{p_2\cdot c\cdot a}=\frac{\sin 1}{\sin(C+y)}\ \frac{\sin(A+x)}{\sin 2}\ \frac{\sin C}{\sin A}=1$$

ანუ

$$\sin 1\cdot\sin(A+x)\cdot\sin C=\sin(C+y)\cdot\sin 2\cdot\sin A. \qquad (28)$$

(27) განტოლების ორივე ნაწილი გადავამრავლოთ $\sin A$ $\sin C$-ზე და მიღებულ ნამრავლს გამოვაკლოთ (28) განტოლება; შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ:

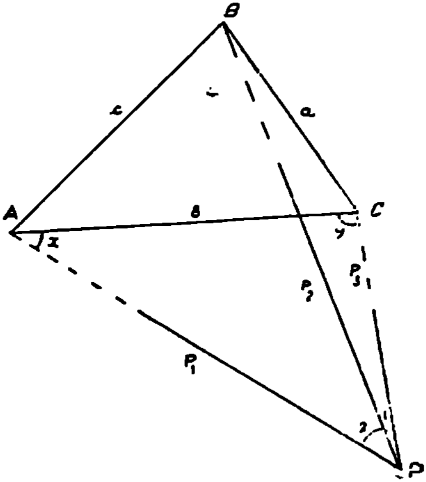
$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\sin A\cdot\sin(C-2)}{\sin C\cdot\sin(A-1)}. \qquad (29)$$

ამ განტოლების მეორე ნაწილი აღვნიშნოთ $\operatorname{ctg}\theta$-თი; გვექნება:

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\operatorname{ctg}\theta}{1}$$

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{\operatorname{ctg}\theta-1}{\operatorname{ctg}\theta+1}=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\theta-\operatorname{ctg}45^\circ}{\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{ctg}45^\circ}$$



ნახ. 31

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}=\frac{\sin(45^\circ-\theta)}{\sin(45^\circ+\theta)}=\operatorname{tg}(45^\circ-\theta).$$

რადგანაც $x+y=180^\circ-(1+2)$, $\frac{x+y}{2}=90^\circ-\frac{1+2}{2}$, ამიტომ საბოლოოდ

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\operatorname{tg}(45^\circ-\theta)\cdot\operatorname{ctg}\frac{1+2}{2}.$$

ამნაირად, პოტენოტის ამოცანის ანალიზური გადაწყვეტისათვის სიბრტყეში გვექნება ფორმულების შემდეგი წყება:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg}\theta &= \frac{\sin A\cdot\sin(C-2)}{\sin C\cdot\sin(A-1)} \\ \operatorname{tg}\frac{x-y}{2} &= \operatorname{tg}(45^\circ-\theta)\cdot\operatorname{ctg}\frac{1+2}{2} \\ \frac{x+y}{2} &= 90^\circ-\frac{1+2}{2} \end{aligned}\right\}. \tag{30}$$

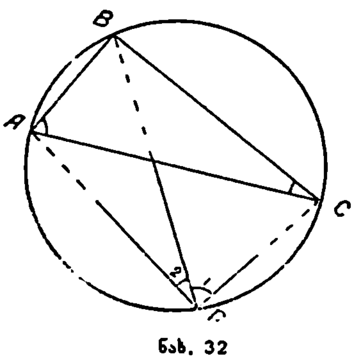
ადვილი დასანახია, რომ ამოცანის გადაწყვეტა შეუძლებელი ხდება, როდესაც $\operatorname{ctg}\theta$ ღებულობს განუზღვრელ მნიშვნელობას, ე. ი. როდესაც მოცემული კუთხეები დაკავშირებულია ერთმანეთთან ქვემო განტოლებებით:

$$\sin A\cdot\sin(C-2)=0$$
$$\sin C\cdot\sin(A-1)=0.$$

რადგანაც საზოგადოდ, A და C კუთხე არ უდრიან არც 0°-სა და არც 180°-ს, ამიტომ უკანასკნელი ფორმულებიდან გამოდის, რომ

$$C=2 \text{ და } A=1.$$

32 ნაკვთი ცხადჰყოფს, რომ ამ შემთხვევაში P წერტილი იმყოფება ABC სამკუთხედის გარშემო შემოწერილ წრეხაზზე.



ნახ. 32

A, C, x და y კუთხეთა ნიშნები დამოკიდებულია საძიებელი P წერტილის მდებარეობაზე ABC სამკუთხედის მიმართ. (30) ფორმულები გამოყვანილია 31 ნაკვთის მიხედვით, ე. ი. იმ შემთხვევისათვის, როდესაც P წერტილი იმყოფება ABC სამკუთხედის გარეთ, მისი ერთ-ერთი გვერდის პირდაპირ. თუ P წერტილი მოქცეულია ABC სამკუთხედის შიგნით, მაშინ x და y კუთხის ნიშნები უნდა ჩაითვალოს უარყოფითად; მაგრამ მაინც ეს გარემოება არ შესცვლის θ-ს ნიშანს, ვინაიდან (29) გამოხატულებაში x და y ნიშანს იცვლიან ერთდროულად. თუ P წერტილი იმყოფება ABC სამკუთხედის გარეთ, მაგრამ იმავე დროს კუთხის პირდაპირ (ე. ი. სხვა თქმით, თუ B წერტილი მოქცეულია ACP სამკუთხედის შიგნით), მაშინ A და C კუთხეს უნდა მიეკუთვნოს უარყოფითი ნიშნები; ამ შემთხვევაში θ კუთხის გამოსათვლელად უნდა გამოყენებული იყოს ფორმულა

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{\sin A \cdot \sin(C+2)}{\sin C \cdot \sin(A+1)}.$$

მაგალითი. P წერტში დამზერილია კუთხეები (ნახ. 31)

$$1 = 5°\ 59'\ 14'',0$$
$$2 = 36\quad 3\quad 14\ ,8,$$

რომლებიც შედგენილია მიმართულებებით სამკუთხედის წვეროებზე. სამკუთხედის მონაცემები:

$A = 39°\ 14'\ \ 0'',1$	$\lg a = 3.5941876$
$B = 85\ \ 46\ \ 30\ ,0$	$\lg b = 3.7919587$
$C = 54\ \ 59\ \ 29\ ,9$	$\lg c = 3.7064607$

(30) ფორმულებით გამოთვლა მოგვცემს:

$$\theta = 65°\ 26'\ \ 3'',4$$
$$x = 24\ \ 51\ \ 54\ ,0$$
$$y = 113\quad 5\ \ 37\ ,2.$$

ხოლო ABP, BCP და ACP სამკუთხედების გადაწყვეტის შემდეგ მივიღებთ:

$$\lg p_1 = 3.9298241$$
$$\lg p_2 = 3.8907010$$
$$\lg p_3 = 3.5898472$$

2. ახლა განვიხილოთ ეს ამოცანა სფერულ ზედაპირზე. ამ შემთხვევაში კავშირი x, y, 1 და 2 კუთხეს შორის გამოისახება ფორმულით

$$x + y + 1 + 2 = 180° + \varepsilon,$$

სადაც ε არის ACP სამკუთხედის (ნახ. 31) სფერული სიჭარბე. ამის გამო (27) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\sin(x+1) = \sin(y+2-\varepsilon);$$

ანუ, რადგანაც ε-ის სიმცირის გამო, შეგვიძლია მივიღოთ $\sin\varepsilon = \varepsilon''\sin 1''$ და $\cos\varepsilon = 1$, ამიტომ

$$\sin(x+1) = \sin(y+2) - \cos(y+2)\cdot\varepsilon''\cdot\sin 1''.$$

ორივე ნაწილი ამ განტოლებისა გადავამრავლოთ $\sin A\ \sin C$-ზე და მიღებულ შედეგს წევრ-წევრ გამოვაკლოთ (28) განტოლება, რომელიც სამართლიანი რჩება სფერული ზედაპირისათვისაც; შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\sin A\cdot\sin(C-2)}{\sin C\cdot\sin(A-1)}\left[1-\frac{\sin C\cdot\cos(y+2)}{\sin(C-2)\cdot\sin y}\varepsilon'' \quad \sin 1''\right]. \tag{31}$$

ლეჟანდრის თეორემის საფუძვლით (იხ. 78 §), ε შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ამნაირად:

$$\varepsilon=\frac{b^2}{5R^2\sin 1''} \quad \frac{\sin x\cdot\sin y}{\sin(1+2)},$$

სადაც R არის დედამიწის ბურთის საშუალო რადიუსი, ეს ε-ის მნიშვნელობა შევიტანოთ (31) განტოლებაში და მერე შესამოკლებლად აღვნიშნოთ

$$\frac{b^2}{2R^2}\cdot\frac{\sin x\cdot\sin C\cdot\cos(y+2)}{\sin(1+2)\cdot\sin(C-2)}=u.$$

მივიღებთ:

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\sin A\cdot\sin(C-2)}{\sin C\cdot\sin(A-1)}\cdot(1-u). \tag{32}$$

გამოყვანილი გამოხატულების ლოგარითმი იქნება:

$$\lg\operatorname{ctg}\theta=\lg\frac{\sin A\cdot\sin(C-2)}{\sin C\cdot\sin(A-1)}+\lg(1-u).$$

$(1+u)$ რიცხვის ლოგარითმის დაშლის ზოგადი სახე, როგორც ცნობილია, არის;

$$\lg(1+u)=M\left(\frac{u}{1}-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\cdots\right)$$

სადაც $M=0,4343\cdots$ არის ბრიგსის ლოგარითმების მოდული. რადგანაც u ყოველთვის მცირე ოდენობაა, ამიტომ დაშლაში შეგვიძლია შევიზღუდოთ მხოლოდ პირველი წევრით და მარტივად მივიღოთ

$$\lg(1-u)=-M\cdot u.$$

მაშასადამე, გვექნება:

$$\lg\operatorname{ctg}\theta=\lg\frac{\sin A\cdot\sin(C-2)}{\sin C\cdot\sin(A-1)}-M\cdot u. \tag{33}$$

აქ გამოხატულების მეორე $M\cdot u$ წევრი წარმოადგენს პირველი წევრის მცირე ლოგარითმულ შესწორებას, გამოსახულს უკანასკნელი ათწილადი ნიშნის ერთეულებში.

ამნაირად, პოტენოტის ამოცანის ანალიზურად გადაწყვეტისათვის სფერულ ზედაპირზე გვექნება ფორმულების შემდეგი წყება:

$$\left.\begin{aligned}
u&=\frac{b^2}{2R^2}\cdot\frac{\sin x\cdot\sin C\cdot\sin(y+2)}{\sin(1+2)\cdot\sin(C-2)}\\
\varepsilon&=\frac{b^2}{2R^2\sin 1''}\;\frac{\sin x\cdot\sin y}{\sin(1+2)}\\
\lg\operatorname{ctg}\theta&=\lg\frac{\sin A\cdot\sin(C-2)}{\sin C\cdot\sin(A-1)}-M\cdot u\\
\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}&=\operatorname{tg}(45^\circ-\theta)\cdot\operatorname{ctg}\frac{1+2-\varepsilon}{2}\\
\frac{x+y}{2}&=90^\circ-\frac{1+2-\varepsilon}{2}
\end{aligned}\right\}\qquad(34)$$

(34) ანალოგიურია (30) ფორმულებისა; გარდა იმ შენიშვნებისა, რომლებიც თქმული იყო ამ უკანასკნელი ფორმულების შესახებ, საჭიროა აღინიშნოს, რომ u და ε ოდენობათა გამოსათვლელად ამოცანა წინასწარ უნდა გადაწყდეს სიბრტყეში. ასეთი გამოთვლა (30) ფორმულებით საკმარისია წარმოებული იყოს 4-ნიშნა ლოგარითმების დახმარებით.

მაგალითი. მივიღოთ ზემო მაგალითის მონაცემები; წინასწარი გამოთვლით მიღებული გვაქვს (საშუალო სიგანედი $S=46°26'$, ABC სამკუთხედის $\varepsilon=0'',26$):

$$\begin{array}{lll@{\qquad\qquad}l}
\theta= & 65^\circ & 26' & \varepsilon=0'',26\\
x= & 24 & 52 & u=-0,0000029\\
y= & 113 & 6 & M\cdot u=-0,0000013
\end{array}$$

(34) ფორმულებით საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\begin{array}{lllll@{\qquad}l}
\theta= & 65^\circ & 26' & 3'',11 & & \lg p_1=3.9298246\\
x= & 24 & 51 & 54\,,36 & & \lg p_2=3.8907018\\
y= & 113 & 5 & 37\,,10 & & \lg p_3=3.5898486
\end{array}$$

62. პოტენოტის წერტილების გაწონასწორება

თუ ახლად განსასაზღვრელი წერტილიდან დამზერილია ძველი ტრიანგულაციის მხოლოდ სამი წერტი, მაშინ ხელთა გვაქვს ყველა მონაცემი მის გამოსათვლელად, მაგრამ მოკლებული ვართ გამოთვლის

შემოწმების შესაძლებლობას; თუ დამზერილი იქნება ოთხი ან მეტი რიცხვი ძველი წერტებისა, მაშინ ცალკეული გამონათვლები შეიძლება შემოწმებულ იქნას. ამასთანავე საჭირო ხდება აგრეთვე გაწონასწორებითი გამოთვლაც, რათა თანხმობილი იქნას სხვადასხვა გამოსავალი მონაცემით მიღებული ახალი წერტის მნიშვნელობანი. ამ შემთხვევაში პირობით განტოლებათა რიცხვი თანასწორი იქნება დამზერილ მიმართულებათა რიცხვისა სამის (აუცილებლად საჭირო) გამოკლებით.

პირობით განტოლებათა შესადგენად უმარტივესი იქნება ურთიერთშედარებული იყოს რიცხობრივი მნიშვნელობანი, მიღებული (32) ფორმულის საშუალებით (სიბრტყისათვის $u=0$) სახელდობრ, განსაზღვრულობათა ორი სისტემისათვის გვექნება განტოლება:

$$\frac{\sin A_1 \cdot \sin (C_1 - 2_1)}{\sin C_1 \cdot \sin (A_1 - 1_1)} \cdot (1 - u_1) = \frac{\sin A_2 \cdot \sin (C_2 - 2_2)}{\sin C_2 \cdot \sin (A_2 - 1_2)} \cdot (1 - u_2). \quad (35)$$

როდესაც ამ განტოლებაში ჩავსხამთ დამზერილ კუთხეებს, იგი, საერთოდ, არ იქნება დაკმაყოფილებული, ასე რომ მისი ორივე ნაწილის გალოგარითმებისა და მერე ყველა მისი წევრის მარცხენა ნაწილში გადატანის შემდეგ, გვექნება არა ნული, არამედ რომელიმე w ოდენობა, ე. ი. იქნება

$$\lg \sin A_1 + \lg \sin (C_1 - 2_1) - \lg \sin C_1 - \lg \sin (A_1 - 1_1) - \lg \sin A_2 -$$
$$- \lg \sin (C_2 - 2_2) + \lg \sin C_2 + \lg \sin (A_2 - 1_2) - M (u_1 - u_2) = w. \quad (36)$$

მიღებულის მაგვარი პირობით განტოლებათა გადაწყვეტა არაფრით არ განსხვავდება სინუსების პირობით განტოლებათა გადაწყვეტისაგან. განტოლების განსახილველი სახე განსაკუთრებით იმ მხრივ არის ხელსაყრელი, რომ თუ ტრიანგულაციაში აღმოჩნდა ისეთი წერტი, რომელიც განისაზღვრება პოტენოტის ამოცანის მეშვეობით ბევრი წერტიდან მიმართულების დამზერით, მაშინ ამგვარი განტოლებანი შეიძლება გადაწყვეტილ იქნენ დანარჩენ პირობით განტოლებებთან ერთობლივად.

მაგალითი. P წერტიდან (ნახ. 33) დამზერილია მიმართულებანი $ABCD$ ოთხკუთხედის წვეროებზე.

1= 0° 0′ 0″,0	−0″,43
2= 6 18 41 ,6	+0 ,34
3=36 3 14 ,8	+0 ,23
4=42 2 28 ,8	−0 ,13

ნაკვეთზე აღნიშნული კუთხეების მნიშვნელობა იყო:

$$A_1 = 6°52'18'',02 \qquad A_2 = 39°14'\ 0'',18$$
$$C_1 = 3\ 57\ \ 0\ ,20 \qquad C_2 = 54\ 59\ 29\ ,98$$

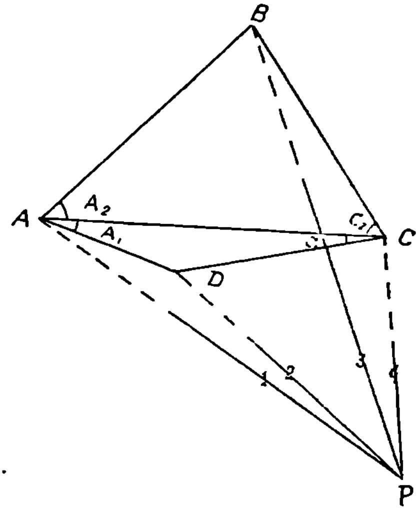
ხოლო AC დიაგონალის ლოგარითმი $AC = 3.7919587$.

დამხმარე u_1 და u_2 ოდენობანი ABC და ADC სამკუთხედისათვის წინასწარ გამოთვლილი (30) ფორმულებით შესაბამისად გამოვიდა:

$$u_1 = -0{,}0000002_6$$
$$u_2 = -0{,}0000029_2$$

აქ შეიძლება შედგენილი იყოს მხოლოდ ერთი პირობითი განტოლება (35), სახელდობრ:

$$\frac{\sin A_1 \cdot \sin(C_1 + (2-1))}{\sin C_1 \cdot \sin(A_1 + (4-2))} \cdot (1 - u_1) =$$
$$= \frac{\sin A_2 \cdot \sin(C_2 - (3-1))}{\sin C_2 \cdot \sin(A_2 - (4-3))} \cdot (1 - u_2).$$



ნახ. 33

მოგვყავს სინუსების ლოგარითმები და მათი ცვლილებანი კუთხის 1''-ით ცვლილებაზე:

A_1	9.0778981_1		A_2	9.8010472_8	
$C_1+(2-1)$	9.2507686_3	$+116{,}3$	$C_2-(3-1)$	9.5112647_1	$+61{,}4$
C_1	8.8381365_0		C_2	9.9133202_7	
$A_1+(4-2)$	9.8305210_5	$+\ 22{,}9$	$A_2-(4-3)$	9.7389686_0	$+32{,}2$
	9.6600091_9			9.6600232_0	

შემდეგ, $M(u_1 - u_2) = +0.0000011_6$

და ამიტომ (36) ფორმულაში,—მეშვიდე ათწილადი ნიშნის ერთეულებში,—იქნება

$$w = -151{,}7.$$

მსგავსი წევრების გაერთების შემდეგ პირობითი განტოლება მიიღებს სახეს:

$$-177{,}1(1) + 139{,}2(2) + 93{,}6(3) - 55{,}1(4) - 151{,}7 = 0,$$

ხოლო ნორმული $(aa)\,k+w=0$ განტოლება:

$$62{,}750k-151{,}7=0$$

საიდანაც

$$\lg k=7.3834,$$

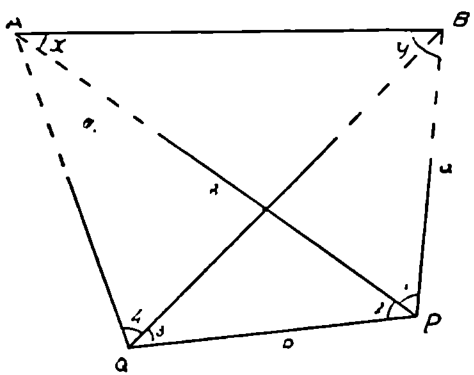
თვით შესწორებანი $(1)=a_1k$, $(2)=a_2k$ და ა. შ. მოყვანილია ზემოთ, მიმართულებათა მარჯვენა მხარეზე. გაწონასწორებული მიმართულებანი გამოდის:

$$\begin{aligned} 1 &= \;\;0^\circ\;\;0'\;\;0'',00 \\ 2 &= \;\;6\;\;18\;\;42\;,37 \\ 3 &= 36\;\;\;3\;\;15\;,46 \\ 4 &= 42\;\;\;2\;\;29\;,10 \end{aligned}$$

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მიღებული რიცხვების გამოთვლაში გამოყენების დროს არავითარ წინააღმდეგობას არ ექნება ადგილი.

63. ჰანზენის ამოცანა

ზოგჯერ ადგილი აქვს ხოლმე შემთხვევას, როდესაც საჭირო ხდება ისეთი წერტის მდებარეობის განსაზღვრა, რომლიდანაც დაიმზირება ტრიანგულაციის მხოლოდ ორი წერტი. ამოცანის გადასაწყვეტად შეარჩევენ დამხმარე წერტს, რომლიდანაც უნდა ჩანდეს ახალი წერტილიცა და ტრიანგულაციის ორი წერტიც. განხილადი ამოცანის საუკეთესო გადაწყვეტა მოგვცა გერმანელმა ასტრონომმა ჰანზენმა (Peter Andreas Hansen 1795 — 1874), რომლის სახელსაც ეს ამოცანა ატარებს.



ნახ. 34

ვთქვათ, A და B (ნახ. 34) გამოსახავს ტრიანგულაციის ორ წერტილს, რომელთა მდებარეობა და, მაშასადამე, მათშორისი s მანძილიც ცნობილია. P წერტილის მდებარეობის განსაზღვრელად საჭიროა x და y კუთხის ცოდნა, რომლებსაც ადგენენ A და B წერტებთან P-დან დამზერილი მიმართულებანი.

საძიებელი P და დამხმარე Q წერტთან ზომავენ 1, 2, 3, 4 კუთხეებს.

ABP სამკუთხედიდან გვექნება:

$$x+y+1=180°, \; x+y=180°-1, \; \frac{x+y}{2}=90°-\frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin x}{\sin y}.$$

უცნობი a და b გვერდის ამოსარიცხად მივმართავთ BPQ და APQ სამკუთხედს:

BPQ სამკუთხედი მოგვცემს

$$\frac{a}{p}=\frac{\sin 3}{\sin(180°-(1+2+3))}=\frac{\sin 3}{\sin(1+2+3)}$$

APQ სამკუთხედი მოგვცემს

$$\frac{b}{p}=\frac{\sin(3+4)}{\sin(180°-(2+3+4))}=\frac{\sin(3+4)}{\sin(2+3+4)}$$

პირველისა მეორეზე გაყოფით მივიღებთ:

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{a}{b}=\frac{\sin 3\cdot\sin(2+3+4)}{\sin(1+2+3)\cdot\sin(3+4)}.$$

მიღებული განტოლების მეორე ნაწილი აღვნიშნოთ $\operatorname{ctg}\theta$-თი; მაშასადამე,

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\operatorname{ctg}\theta.$$

ეს გამოხატულება გარდავქმნათ სავსებით ისეთნაირადვე, როგორც პოტენოტის ამოცანაში, და ანგარიშში ვიქონიოთ, რომ $\frac{x+y}{2}=90°-\frac{1}{2}$; საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\operatorname{tg}(45°-\theta)\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}.$$

ამნაირად, ჰანზენის ამოცანის ანალიზურად გადაწყვეტისათვის გვექნება შემდეგი წყება ფორმულებისა:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{ctg}\theta &= \frac{\sin 3 \cdot \sin(2+3+4)}{\sin(1+2+3)\cdot\sin(3+4)} \\
\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} &= \operatorname{tg}(45^\circ - \theta)\cdot \operatorname{ctg}\frac{1}{2} \\
\frac{x+y}{2} &= 90^\circ - \frac{1}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

მაგალითი. საძიებელ P წერტზე და დამხმარე Q-ზე და დამზერილი იყო კუთხეები:

$$1 = 5^\circ 59' 14'',0 \qquad 3 = 24^\circ 51' 54'',0$$

$$2 = 36 \quad 3 \quad 14\ ,8 \qquad 4 = 39^\circ \ 14 \quad 0,1$$

(37) ფორმულებით გამოთვლა მოგვცემს:

$$\theta = 63^\circ 25' 32'',5$$

$$x = \quad 5 \ 55 \ 38\ ,8$$

$$y = 168 \quad 5 \quad 7,2.$$

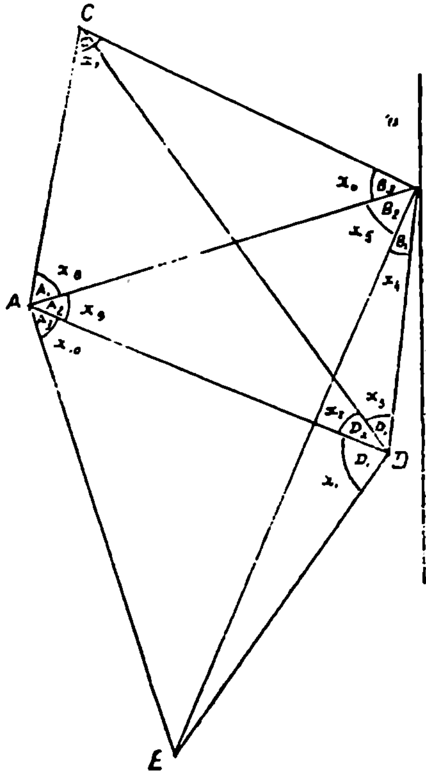
XI

სამკუთხედთა ბადის გაწონასწორების მაგალითი

64. ამოცანა

$ACBDE$ ხუთკუთხედში მოცემულია გვერდი AC=14247,58 საჟ. საშუალო ცდომილებით= ±0,1 საჟ. და გაზომილია ათი კუთხე სხვადასხვა წონით

კუთხის სახელწ.	გაზომილი კუთხე	წონა
C_1	73°28′10″,2	0,64
B_1	21 56 56 ,5	1,00
B_2	56 12 57 ,6	1,44
B_3	50 36 9 ,3	1,00
D_1	61 43 58 ,3	1,00
D_2	80 43 26 ,8	1,44
D_3	41 17 23 ,5	1,00
A_1	55 55 42 ,4	0,64
A_2	43 3 36 ,1	1,44
A_3	65 28 22 ,0	0,64



ნახ. 35

კუთხეები გაზომილია 10″-იანი უნივერსალური ინსტრუმენტით ერთეული წონის საშუალო ცდომილებით ±2″,0 (მეორე კლასის ტრიანგულაცია). საჭიროა:

1) გაწონასწორებული იქნას ხუთკუთხედის კუთხეები:

A) პირობით განტოლებათათვის გადაწყვეტილებათა ნებისმიერი შერჩევით,

B) კორელატების დახმარებით,

C) დამოუკიდებელ კუთხეთათვის ნორმული განტოლებების შედგენით;

2) განსაზღვრული იყოს ADC კუთხის საბოლოო წონა,

3) გამოთვლილი იყოს ბადის სამკუთხედები და A და D წერტის სიგანედები და სიგრძედები, რისთვისაც მოცემულია B წერტის სიგანედი $\varphi = 58° \; 45' \; 14'',5$ და BE მიმართულების ასტრონომიული აზიმუტი $A = 30°36'24'',3$ (საშუადღეო ხაზის სამხრეთული მიმართულებიდან დასავლეთისაკენ).

სამკუთხედების წინასწარი გადაწყვეტა და სფერული სიჭარბის გამოთვლა

მოცემულია c, B, C და D. გამოსათვლელია b, d, ε. ფორმულები:

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C}; \qquad d = \frac{c \sin D}{\sin C};$$

$$\varepsilon = [4] \; bc \cdot \sin D, \; [4] = \lg \frac{1}{2\rho \, p \sin 1''}.$$

კონტროლი

1) $s = 180°$

2) lg მომიჯნე გვერდებისა უნდა იყოს ერთნაირი.

3) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$ და $\varepsilon_4 + \varepsilon_5 = \varepsilon_6 + \varepsilon_7$.

გამოთვლის სქემა

№№ სამკ.	წვერო	კუთხე	lg sin	გვერდისა	გამოთვლა
			$\lg\left(\frac{c}{\sin C}\right)_{\dots 4}$		[4] 7
	C		$\lg \sin C$ 1	$\lg c$ (მოც.)	$\lg (cb)$ 8
1	B		$\lg \sin B$ 2	$\lg b$ ... 5	$\lg \sin D$ ... 9
	D		$\lg \sin D$ ... 3	$\lg d$ ... 6	$\lg \varepsilon$ 10
		s (ჯამი)			
		ε_1			

სამკ. №№	წვერო	კუთხე	lg sin	lg გვერდისა	გამოთვლა
1	A	55°55′42″,4	9.9182	4.1538	8.4315
	B	50 36 9,3	9.8880	4.1840	9.8880
	C	73 28 10,2	9.9817	4.2475	0.3803
		180 0 0			
		$\varepsilon_1''=2,''40$			
2	A	43 8 36,1	9.8343	4.2475	8.4204
	B	56 12 57,6	9.9197	4.0875	9.8343
	D	80 43 26,8	9.9941	4.1728	0.3153
		180 0 0			
		$\varepsilon_2''=2,''06$			
3	A	65 28 22,0	9.9589	4.1728	8.4033
	E	52 47 39,7	9.9012	4 2165	9.9448
	D	61 43 58,3	9.9448	4.2305	0.4089
		180 0 0			
		$\varepsilon_3''=2'',56$			
4	D	41 17 23,5	9.8195	4.1840	8.4329
	C	31 53 29,6	9.7229	4.0874	9.8195
	B	106 49 6,9	9.9810	4.3455	0.3132
		180 0 0			
		$\varepsilon_4''=2,''06$			
5	D	39 25 58,9	9.8029	4.3455	8.4993
	C	41 34 42,6	9.8219	4.1538	9.8219
	A	98 50 18,5	9.9946	4.1728	0.3820
		180 0 0			
		$\varepsilon_5''=2,''41$			
6	B	34 16 1,1	9.7505	4.2165	8.4640
	E	37 12 0,8	9.7815	4.2475	9.9769
	A	108 31 58,1	9.9769	4.4429	0.5017
		180 0 0			
		$\varepsilon_6''=3,''17$			
7	D	142 27 24,6	9.7849	9.1849	8.6734
	B	21 56 56,5	9.5726	9.5726	9.4295
	E	15 35 38,9	9.4295	9.4290	0.1637
		180 0 0			
		$\varepsilon_7''=1,''46$			

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2=4,''47 \qquad \varepsilon_2+\varepsilon_3=4,''63$$
$$\varepsilon_4+\varepsilon_5=4,''47 \qquad \varepsilon_6+\varepsilon_7=4,''63$$

პირობით განტოლებათა რიცხვის განსაზღვრა.

აღვნიშნოთ:

N — ყველა დამოუკიდებელი პირობითი განტოლების რიცხვი

E — რიცხვი გაზომილი კუთხეებისა

R — მოცემული ბადის წერტებისა

A — ფიგურების პირობით განტოლებათა

B — რიცხვი პოლუსების პირობით განტოლებათა
L — „ ბადეში მყოფი ხაზებისა
მაშინ $N=E-2P+4$ ე. ი. $N=10-10+4=4$

ფიგურების პირობით განტოლებათა რიცხვი იქნება სწორედ 2, ვინაიდან ბადეში შედის მხოლოდ ორი სამკუთხედი, რომლებშიაც გაზომილია ყველა კუთხე, სახელდობრ ACB და ABD, ე. ი. $A=1$

$$B=L-2P+3, \text{ ე. ი. } B=9-10+3=2$$

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა: $A+B=N$; ე. ი. $2+2=4$

ფიგურებისა და პოლუსების პირობით განტოლებათა შედგენა. ფიგურებისა და პოლუსების პირობით განტოლებათა შესადგენად კუთხეების შესწორებანი აღვნიშნოთ x_1, x_2 $x_3 \cdots x_{10}$; ასოებით

$\mathrm{I} \cdots \triangle ACB \cdots x_6+x_7+x_8+n_1=0$

$\mathrm{II} \cdots \triangle ABD \cdots x_2+x_5+x_9+n_2=0$, სადაც

$$B_3+C_1+A_1-(180°+\varepsilon)n_1 \text{ და } A_2+B_2+D_3-(180°+\varepsilon)=n_2$$

პოლუსების პირობით განტოლებათა შესადგენად $ACBD$ ოთხკუთხედში პოლუსად მივიღოთ B წვერო როგორც უახლესი მის პირისპირ მდებარე დიაგონალთან, და იმავე მოსაზრებით $ABDE$ ოთხკუთხედისათვის D წვერო.

პოლუსი B. $\quad \dfrac{BD}{AB}\ \dfrac{BA}{BC}\ \dfrac{BC}{BD}=$

$$=\frac{\sin\left(A_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2\right)\cdot\sin\left(C_1-\frac{1}{3}\varepsilon_1\right)\cdot\sin\left(D_3-\frac{1}{3}\varepsilon_4\right)}{\sin\left(D_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2\right)\cdot\sin\left(A_1-\frac{1}{3}\varepsilon_1\right)\cdot\sin\left(180+\varepsilon_4-(D_3+B_2+B_3)-\frac{1}{3}\varepsilon_4\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(A_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2\right)\cdot\sin\left(C_1-\frac{1}{3}\varepsilon_1\right)\cdot\sin\left(D_3-\frac{1}{3}\varepsilon_4\right)}{\sin\left(D_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2\right)\cdot\sin\left(A_1-\frac{1}{3}\varepsilon_4\right)\cdot\sin\left(D_3+B_2+B_3-\frac{2}{3}\varepsilon_4\right)}=1$$

მიღებული ტოლობა სამართლიანია მხოლოდ ნამდვილი კუთხეებისათვის, ჩვენ განკარგულებაში კი გაზომილი კუთხეებია მათი აუცილებელი ცდომილებებითურთ; ამიტომ ტოლობის ლოგარითმის აღების შემდეგ მის მარჯვენა ნაწილში ნულის ნაცვლად მოგვეცემა რომელიმე n_3 რიცხვი; იგი გამოსახულია ლოგარითმების უკანასკნელი ნიშნის ერთეულებში

$$(a) \cdots \lg\sin\left(A_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2\right)+\lg\sin\left(C_1-\frac{1}{3}\varepsilon_1\right)+$$

$$+\lg\sin\left(D_3-\frac{1}{3}\varepsilon_4\right)-\lg\sin\left(D_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2\right)-\lg\sin\left(A_1-\frac{1}{3}\varepsilon_1\right)-$$

$$-\lg\sin\left(D_3+B_2+B_3-\frac{2}{3}\varepsilon_4\right)=n_3.$$

მოსანახია კუთხეების ისეთი $x_1,\ x_2,\ x_3\cdots x_{10}$, შესწორებანი, რომ

$$(b)\cdots\lg\sin\left(A_2+x_9-\frac{1}{3}\varepsilon_2\right)+\lg\sin\left(C_1+X_7-\frac{1}{3}\varepsilon_1\right)+$$

$$+\lg\sin\left(D_3+x_3-\frac{1}{3}\varepsilon_4\right)-$$

$$-\lg\sin\left(D_2+x_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2\right)-\lg\sin\left(A_1+x_8-\frac{1}{3}\varepsilon_1\right)-$$

$$-\lg\sin\left(D_3+x_3+B_2+x_5+B_3+x_6-\frac{2}{3}\varepsilon_4\right)=0$$

ყოველი lg sin შეიძლება გახსნილი და წარმოდგენილი იყოს შემდეგნაირად:

$$\lg\sin\left(D_3+x_3+B_2+x_5+B_3+x_6-\frac{2}{3}\varepsilon_4\right)=$$

$$=\lg\sin\left(D_3+B_2+B_3-\frac{2}{3}\varepsilon_4\right)+Q_{D_3+B_2+B_3-\frac{2}{3}\varepsilon_4}(x_3+x_5+x_6),$$

სადაც Q არის lg sin-ის ცვლილება $\left(D_3+B_2+B_3-\frac{2}{3}\varepsilon_4\right)$ კუთხის 1″-ის ცვლილებაზე. (b) ტოლობის ყველა საკრების ამნაირად დაშლა და შემდეგ მათგან (a) ტოლობის გამოკლება მოგვცემს B წერტის საპოლუსო განტოლებას

$$\mathrm{III}\cdots Q_{A_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2}(x_9)+Q_{C_1-\frac{1}{3}\varepsilon_1}(x_7)-Q_{B_3+\frac{1}{3}\varepsilon_4}(x_3)-$$

$$-Q_{D_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2}(x_2)-Q_{A_1-\frac{1}{3}\varepsilon_1}(x_8)-Q_{D_3+B_2+B_3-\frac{2}{3}\varepsilon_4}(x_3+x_5+x_6)+$$

$$+n_3=0$$

პოლუსად მივიღოთ $DEAB$ ოთხკუთხედის D წერტილი:

$$\frac{DE}{DA}\ \frac{DA}{DB}\ \frac{DB}{DE}=$$

$$\frac{\sin\left(A_3-\frac{1}{3}\varepsilon_3\right)\cdot\sin\left(B_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2\right)\cdot\sin\left[180+\varepsilon_7-(B_1+D_2+D_2)-\frac{3}{2}\varepsilon_7\right.}{\sin\left[180+\varepsilon_3-(A_3+D_1)-\frac{1}{3}\varepsilon_3\right]\cdot\sin\left(A_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2\right)\cdot\sin\left(B_1-\frac{1}{3}\varepsilon_7\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(A_3-\frac{1}{3}\,\varepsilon_3\right)\cdot\sin\left(B_2-\frac{1}{3}\,\varepsilon_2\right)\cdot\sin\left(B_1+D_1+D_2-\frac{2}{3}\,\varepsilon_7\right)}{\sin\left(A_3+D_1-\frac{2}{3}\,\varepsilon_3\right)\cdot\sin\left(A_2-\frac{1}{3}\,\varepsilon_2\right)\cdot\sin\left(B_1-\frac{1}{3}\,\varepsilon_7\right)}=1$$

ზემორე მსჯელობის საფუძველით გვექნება:

$$(a)\cdots\lg\sin\left(A_3-\frac{1}{3}\,\varepsilon_3\right)+\lg\sin\left(B_2-\frac{1}{3}\,\varepsilon_2\right)+$$

$$+\lg\sin\left(B_1+D_1+D_2-\frac{2}{3}\,\varepsilon_7\right)-\lg\sin\left(A_3+D_1-\frac{2}{3}\,\varepsilon_3\right)-$$

$$-\lg\sin\left(A_2-\frac{1}{3}\,\varepsilon_2\right)-\lg\sin\left(B_1-\frac{1}{3}\,\varepsilon_7\right)=n_4$$

მოვნახოთ x_1, x_2, $x_3 \cdots x_{10}$ კუთხეთა ისეთი შესწორებანი, რომ იყოს:

$$(b_1)\cdots\lg\sin\left(A_3+x_{10}-\frac{1}{3}\,\varepsilon_3\right)+\lg\sin\left(B_2+x_5-\frac{1}{3}\,\varepsilon_2\right)+$$

$$+\lg\sin\left(B_1+x_4+D_1+x_1+D_2+x_2-\frac{2}{3}\,\varepsilon_7\right)-$$

$$-\lg\sin\left(A_3+x_{10}+D_1+x_1-\frac{2}{3}\,\varepsilon_3\right)-\lg\sin\left(A_2+x_9-\frac{1}{3}\,\varepsilon_2\right)-$$

$$-\lg\sin\left(B_1+x_4-\frac{1}{3}\,\varepsilon_7\right)=0.$$

ასეთნაირად გავშალოთ ამ ტოლობის ყველა საკრები და გამოვაკლოთ მას (a_1) ტოლობა; მივიღებთ $DEAB$ ოთხკუთხედის D წერტილის საპოლუსო განტოლებას:

$$\mathrm{IV}\cdots Q_{A_3-\frac{1}{3}\varepsilon_3}(x_{10})+Q_{B_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2}(x_5)+$$

$$+Q_{B_1+D_1+B_2-\frac{2}{3}\varepsilon_1}(x_4+x_1+x_2)-Q_{A_3+D_1-\frac{2}{3}\varepsilon_3}(x_1+x_{10})-$$

$$-Q_{A_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2}(x_3)-Q_{B_1-\frac{1}{3}\varepsilon_7}(x_4)+n=0.$$

ეხლა გადავიდეთ პირობით (ძირითად) განტოლებათა კოეფიციენტების და ცნობილი წევრების გამოთვლაზე:

A_1	55°	55′	42″,4		A_2	43°	3′	36″,1
B_2	50	36	9 ,3		B_2	56	12	57 ,6
C_1	73	28	10 .2		D_2	80	43	26 ,8
S	180	0	1 ,9		S	180	0	0 ,5
$180°+\varepsilon=$	180	0	2″ ,4		$180°+\varepsilon=$	180	0	2″,1
$n_1=$			—0″ ,5		$n=$			— 1″,6

სფერ. სიჭარბე	კუთხეების სახელწოდება		სფერული კუთხე	ბრტყელი კუთხე	სფერ. კუთხ. lg sin	ბრტყელი კუთხის lg sin	Q
	სფერული	ბრტყელი					
$\varepsilon_2=2,07$	A_2	$A_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2$	43° 3′ 36″,1	43° 3′ 36″	9.8342707	9.8342692	+22,5
$\varepsilon_1=2,4$	C_1	$C_1-\frac{1}{3}\varepsilon_1$	73 28 10 ,2	73 28 9,4	9.9816684	9.9816679	+ 6,2
$\varepsilon_4=2,06$	D_3	$D_3-\frac{1}{3}\varepsilon_1$	41 17 23 ,5	47 17 22,8	9.8194575	9.8194557	+ 2,40
					9.6353966	9.6353928	
					$n_3=+68$	$n_3=+68$	
$\varepsilon_2=2,07$	D_2	$D_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2$	80 43 26,8	80 43 26,1	9.9942835	9.9942833	+ 3,4
$\varepsilon_1=2,4$	A_1	$A_1-\frac{1}{3}\varepsilon_1$	55 55 42,4	55 55 41,6	9.9182079	9.9182066	+14,2
$\varepsilon_4=2,06$	$D_3+B_2+B_3-\varepsilon_4$	$D_3+B_2+B_3-\frac{2}{3}\varepsilon_4$	148 6 28,3	148 6 29,0	9.7228984	9.7228961	−33,9
					9.6353898	9.6353860	
$\varepsilon_3=2,56$	A_3	$A_3-\frac{1}{3}\varepsilon_3$	65 28 22,0	65 28 21,2	9.9589288	0.9589280	+ 9,6
$\varepsilon_2=2,07$	B_2	$B_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2$	56 12 57,6	56 12 56,9	9.9196741	9.9196731	+14,1
$\varepsilon_7=1,46$	$B_1+D_1+D_2-\varepsilon_7$	$B_1+D_1+D_2-\frac{2}{3}\varepsilon_7$	164 24 20,1	164 24 20,6	9.4294709	9.4294673	−75,5
					9.3080741	9.3080684	
					$n_4=115$	$n_4=115$	
$\varepsilon_3=2,56$	$A_3+D_1-\varepsilon_3$	$A_3+D_1-\frac{2}{3}\varepsilon_3$	127 12 17,7	127 12 18,6	9.9011737	9.9011723	−16,0
$\varepsilon_2=2,07$	A_2	$A_2-\frac{1}{3}\varepsilon_2$	43 3 36,1	43 3 35,4	9.8342707	9.8342692	+22,5
$\varepsilon_7=1,46$	B_1	$B_1-\frac{1}{3}\varepsilon_7$	21 56 56,5	21 56 56,0	9.5726179	9.5726154	+52,3
					9.3080624	9.3080569	

პირობითი (ძირითადი) განტოლებანი

I $\quad x_6+x_7+x_8-0,50=0$

II $\quad x_2+x_5+x_9-1,56=0$

III $\quad 22,5\,x_9+6,2\,x_7+24,0\,x_3-3,4\,x_2-14,2\,x_8+$
$+33,9\,(x_3+x_5+x_6)+68=0.$

გავხსნათ ფრჩხილები, მოვახდინოთ მსგავს წევრთა გაერთიანება და გამოვცვალოთ ნიშნები:

$$3,4\,x_2-57,9\,x_3-33,9x_5-33,9\,x_6-6,2\,x_7+14,2\,x_8-22,5\,x_9-68=0$$

IV $\quad 9,6\,x_{10}+14,1\,x_5=75,5(x_4+x_1+x_2)+16,0(x_1+x_{10})-$
$-22,5\,x_9-52,3\,x_4+115=0.$

აქაც მოვიქცეთ ზემონათქვამი წესით და მივიღებთ:

$$59,5\,x_1+75,5\,x_2+127,8\,x_4-14,1\,x_5+22,5\,x_9-25,6\,x_{10}-115=0.$$

პირობითი განტოლებანი გადავწეროთ ამნაირად:

I $\quad x_6+x_7+x_8 \quad -0,50=0$

II $\quad x_2 \quad +x_5 \quad +x_9 \quad -156=0$

III $\quad +3,4\,x_2-57,9\,x_3 \quad -33,9\,x_5-33,9\,x_6-$
$-6,2\,x_7+14,2\,x_8-22,5\,x_9 \quad -68=0$

IV $\quad 59,5\,x_1+75,5\,x_2 \quad +127,8\,x_4-$
$-14,1\,x_5 \quad +22,5\,x_9-25,6\,x_{10}-115=0$

A. გაწონასწორება პირობით განტოლებათათვის გადაწყვეტილებათა ნებისმიერი შერჩევით

პ ი რ ო ბ ი თ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ნ ი

I $\quad +x_6+x_7+x_8 \quad -0,50=0$

II $\quad +x_2 \quad +x_5 \quad +x_9 \quad -1,56=0$

III $\quad +3,4\,x_2-57,9\,x_3 \quad -33,9\,x_5-33,9\,x_6-$
$-6,2\,x_7-14,2\,x_8-22,5\,x_9 \quad -68=0$

IV $\quad +59,5\,x_1+75,5\,x_2 \quad +127,8\,x_4-14,1\,x_5 \quad +$
$+22,5\,x_9-25,6\,x_{10}-115=0.$

პირველ განტოლებაში შერჩევით შევიტანოთ შესწორებათა ნებისმიერი მნიშვნელობანი, მაგალითად, $(x_6)=-0,30$ და $(x_7)=+0,20$

1-ლი განტოლება იქნება: $-0,30+0,20+(x_8)-0,50=0$

ამ განტოლების გადაწყვეტით მივიღებთ (x_8) შესწორების მნიშ-

ვნელობას, რომელიც წარმოადგენს დამოუკიდებელ (x_6) და (x_7)-ის ფუნქციას:

$$x_8=+0,60.$$

მეორე განტოლებაში შევიტანოთ $(x_2)=+0,9$ და $(x_5)=+0,20$. მე-2 განტოლება იქნება: $+0,9+0,2+(x_9)-1,56=0$.

ამ განტოლების გადაწყვეტით მივიღებთ (x_9) შესწორებას:

$$x_9=+0,46$$

(x_2), (x_5), (x_6), (x_7), (x_8), (x_9) შესწორებანი შევიტანოთ მე-3 პირობით განტოლებაში და გადავწყვიტოთ იგი დამოუკიდებელი (x_3) ფუნქციის მიმართ

III $$\cdot+3,4\,(+0,90)-33,9\,(+0,20)-33,9\,(-0,30)-6,2\,(+0,20)+$$
$$+14,2\,(+0,60)-22,5\,(+0,46)-57,9\,x_3-68=0$$
$$+3,06-6,78+10,17-1,24+8,52-10,35-57,9\,x_3-68=0$$
$$-57,9\,x_3=+64; \quad x_3=-1,10$$

დასასრულ, მიღებული შესწორებების IV განტოლებაში შეტანითა და (x_1) და (x_4)-თათვის ნებისმიერ მნიშვნელობათა მიცემით განვსაზღვრავთ (x_{10}) შესწორებას

IV $$\cdots+59,5\,(+0,10)+75,5\,(+0,90)+127,8\,(+0,30)-14,1\,(+0,20)+$$
$$+22,5\,(+0,46)-25,6\,(x_{10})-115=0$$
$$-25,6\,x_{10}=-4,77; \quad x_{10}=-0,19$$

შესწორებათა ცხრილი

$x_1=+0,10$
$x_2=+0,90$
$x_3=-1,10$
$x_4=+0,30$
$x_5=+0,20$
$x_6=-0,30$
$x_7=+0,20$
$x_8=+0,60$
$x_9=+0,46$
$x_{10}=-0,19$

ACB △-დან	ABD △-დან
$(x_6)+(x_7)+(x_8)=180°+2'',4$	$(x_2)+(x_3)+(x_9)=180°+2'',06$
50° 36′ 09″	80°43′ 27″,7
73 36 10,4	56 12 57 ,8
55 55 43	43 3 36 ,56
180 — 2,4	180 — 2 ,06

ზემოთ განხილულ შესწორებათა მსგავსი მნიშვნელობანი შეიძლება შერჩეული იყოს ნებისმიერი სიმრავლისა, მაგრამ გაწონასწორების მთავარი ამოცანა მდგომარეობს ისეთ შესწორებათა მონახვაში, რომ მათი კვადრატების ჯამი გამოვიდეს უმცირესი (minimum). ამის საშუალებას იძლევა ნორმულ განტოლებათა გადაწყვეტა კორელატების დახმარებით ან კიდე მათ დაუხმარებლად.

B. კუთხეების გაწონასწორება კორელატების დახმარებით

თუ ძირითადი პირობითი განტოლებანი გამოისახება ქვემო ფორმულებით

$$
\begin{array}{ll}
a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+ & .+a_ix_i=-n_1 \\
b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+ & .+b_ix_i=-n_2 \\
. & . \\
h_1x_1+h_2x_2+h_3x_3+ \quad . & .+h_ix_i=-n_3
\end{array}
$$

და $g_1x_1^2+g_2x_2^2+g_3x_3^3+g_4x_4^2 \qquad .+g_ix_i^2=\text{minimum}$

(სადაც g_1, g_2, $\qquad .g_i$ — შესატყვისი წონებია), მაშინ:

$$x_1=\frac{a_i}{g_1}K_1+\frac{b_1}{g_1}K_2+\frac{c_1}{g_1}K+ \qquad .+\frac{h_1}{g_1}K_s$$

$$x_2=\frac{a_2}{g_2}K_1+\frac{b_2}{g_2}K_2+\frac{c_3}{g_3}K_3+ \qquad +\frac{h_2}{g_2}K_s$$

$$x_i=\frac{a_i}{g_i}K_1+\frac{b_i}{g_i}K_2+\frac{c_i}{g_i}K_3+ \qquad .+\frac{h_i}{g_i}K_s$$

და ნორმული განტოლებანი კორელატებში იქნება:

$$
\begin{array}{ll}
[aa]K_1+[ab]K_2+[ac]K_3+ & .+[ah]K_s=-n_1 \\
[ab]K_1+[bb]K_2+[bc]K_3+ & .+[bh]K_s=-n_2 \\
 & \\
[ah]K_1+[bh]K_2+[ch]K_3+ & .+[hh]K_s=-n_s,
\end{array}
$$

სადაც

$$[aa]=\frac{a_1^2}{g_1}+\frac{a_2^2}{g_2}+\cdots\frac{a_i^2}{g_i}; \qquad [ba]=\frac{a_1b_1}{g_1}+\frac{a_2b_2}{g_2}+\cdots+\frac{a_ib_i}{g_i};$$

$$[ha]=\frac{h_1a_1}{g_1}+\frac{h_2a_2}{g_2}+\cdots+\frac{h_ia_i}{gi}$$

და ა. შ.

ჩვენი ძირითადი განტოლებანია:

$$
\begin{array}{l}
\text{I} \qquad\qquad\qquad\qquad x_6 \quad +x_7 \quad +x_8 \qquad -0{,}50=0 \\
\text{II} \quad +x_2 \qquad\qquad +x_5 \quad +x_9 \qquad\qquad -1{,}56=0 \\
\text{III}\cdots+3{,}4x_2-57{,}9x_3\cdots-33{,}9x_5-33{,}9x_6-6{,}2x_7+14{,}2x_8+22{,}5x_9 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -68=0 \\
\text{IV}\cdots59{,}5x_1+75{,}5x_2\cdots+127{,}8x_4-14{,}1x_5+22{,}5x_9-25{,}6x_{10} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -115=0
\end{array}
$$

წონები: $g_7,\ g_8,\ g_{10}=0{,}64;\ g_1,\ g_3,\ g_4,\ g_6=1{,}00;\ g_2, g_5,\ g_9=1{,}44$

g	a	b	c	d		K_1	K_2	K_3	K_4
$1{,}00x_1=0$	0	0	$+\frac{5{,}95}{1{,}00}K_4$		x_1	0	0	0	$+5{,}95$
$1{,}44x_2=0$	$+\frac{1{,}00}{1{,}44}K_2$	$+\frac{0{,}34}{1{,}44}K_3$	$+\frac{7{,}55}{1{,}44}K_4$		x_2	0	$+0{,}69$	$+0{,}24$	$+5{,}24$
$1{,}00x_3=0$	0	$-\frac{5{,}79}{1{,}00}K_3$	0		x_3	0	0	$-5{,}79$	0
$1{,}00x_4=0$	0	0	$+\frac{12{,}78}{1{,}00}K_4$		x_4	0	0	0	$+12{,}78$
$1{,}44x_5=0$	$+\frac{1{,}00}{1{,}44}K_2$	$-\frac{3{,}39}{1{,}44}K_3$	$-\frac{1{,}41}{1{,}44}K_4$		x_5	0	$+0{,}69$	$-2{,}35$	$-0{,}98$
$1{,}00x_6=$	$+\frac{1{,}00}{1{,}00}K_1$	0	$-\frac{3{,}39}{1{,}00}K_3$	0	x_6	$+1{,}00$	0	$-3{,}39$	0
$0{,}64x_7=$	$+\frac{1{,}00}{0{,}64}K_1$	0	$-\frac{0{,}62}{0{,}64}K_3$	0	x_7	$+1{,}56$	0	$-0{,}98$	0
$0{,}64\ x_8=$	$+\frac{1{,}00}{0{,}64}K_1$	0	$+\frac{1{,}42}{0{,}64}K_3$	0	x_8	$-1{,}56$	0	$+2{,}22$	0
$1{,}44\ x_9=0$	$+\frac{1{,}00}{1{,}44}K_2$	$-\frac{2{,}25}{1{,}44}K_3$	$+\frac{2{,}25}{1{,}44}K_4$		x_9	0	$+0{,}69$	$-1{,}56$	$+1{,}56$
$0{,}64\ x_{10}=0$	0	0	$-\frac{2{,}56}{0{,}64}K_4$		x_{10}	0	0	0	-4

$$[aa]=\frac{1^2}{1{,}00}+\frac{1^2}{0{,}64}+\frac{1}{0{,}64}=+4{,}12$$

$$[ab]=\qquad=0$$

$$[ac]=-\frac{3{,}39}{1{,}00}-\frac{0{,}62}{0{,}64}+\frac{1{,}42}{0{,}64}=-2{,}14$$

$$[ad]=\qquad=0$$

$$[bb]=\frac{1^2}{1{,}44}+\frac{1^2}{1{,}44}+\frac{12}{1{,}44}=+2{,}07$$

$$[bc]=\frac{0{,}34}{1{,}44}-\frac{3{,}39}{1{,}44}-\frac{2{,}25}{1{,}44}=-3{,}67$$

$$[bd]=\frac{7,55}{1,44}-\frac{1,41}{1,44}+\frac{2,25}{1,44} \qquad .=+5,82$$

$$[cc]=\frac{(0,34)^2}{1,44}+\frac{(5,79)^2}{1,00}+\frac{(3,39)^2}{1,44}=\frac{(3,39)^2}{1,00}+\frac{(0,62)^2}{0,64}+$$

$$+\frac{(1,42)^2}{0,64}+\frac{(2,25)^2}{1,44} \qquad .=+60,34$$

$$[cd]=\frac{0,34\cdot 7,55}{1,44}+\frac{3,39\cdot 1,41}{1,44}-\frac{2,25\cdot 2,25}{1,44} \qquad .=+1,58$$

$$[dd]=\frac{(5,95)^2}{1,00}+\frac{(7,55)^2}{1,44}+\frac{(12,78)^2}{1,00}+\frac{(1,41)^2}{1,44}+$$

$$+\frac{(2,25)^2}{1,44}+\frac{(2,56)^2}{0,64} \qquad =+253,46$$

ნორმული განტოლებანი კორელატებში:

$$
\begin{aligned}
4,12K_1 \qquad\qquad -2,14K_3 \qquad\qquad\qquad &=+\ 0,50\\
+2,07K_2-\ 3,67K_3+5,82K_4 &=+\ 1,56\\
-2,14K_1-3,67K_2+60,34K_3+\ 1,58K_4 &=+\ 6,80\\
+5,82K_2+\ 1,58K_3+253,46K_4 &=+11,50
\end{aligned}
$$

ნორმულ განტოლებათა კორელატებით გადაწყვეტა

	[aa] A	[ab] B	[ac] C	[ad] D	n	s
−0,3889	+4,12	0	−2,14	0	+0,50	+2,48
−0,50	0,6149	—	n 0,3304	—	9,6990	0,3945
0,8489						
n 9,9489	−0,6670	+2,07	−3,67	+5,82	+1,56	+5,78
0,6149	+0,1214	0	0	0	0	0
lgA=9,3340	−1,56	+2,07	−3,67	+5,82	+1,56	+5,78
A=+0,2158	−2,1056	0,3160	n 0,5647	0,7649	0,1931	0,7619
	n 0,3234					
	0,3160	+0,2482	+60,34	+1,58	+6,80	+62,91
lg B=0,0074		−9,83	+1,11	0	−0,26	−1,29
B=+1,0172		−9,5818	+59,23	+1,58	+7,06	+64,20
		n 0,9814	+6,51	−10,32	−2,77	−10,25
		1,7220	+52,72	+11,90	+9,83	+74,45
		lg (C)=9.2594	+1,7220	1,0755	0,9926	1,8719
C=+0,1817						
			lg 4,89=0,6893	+253,46	+11,50	+272,36
			lg 234,41=2.3700	0	0	0
			lg D=8.3193	+253,46	+11,50	+272,36
			D=+0,021	+16,36	−4,39	+16,25
				+237,10	+7,11	+256,11
				+2,69	+2,22	+11,80
				+234,41	+4,89	+239,31

შ ე მ ო წ მ ე ბ ა: მიღებული კორელატები ჩავსვათ 1 ნორმულ განტოლებაში:

1 $4,12(K_1)-2,14\,(K_3)=+0,50$

$=4,12(+0,22)-2,14(+0,18)=+0,50;\quad +0,90=+0,89$ კმაყოფილდება

2 . ჩავსხათ IV განტოლებაში:

$$+5,82(K_2)+1,58\,(K_3)+253,46\,(K_4)=+11,50$$

$$+5,82\,(+1,017)+1,58\,(+0,181)+253,46\,(+0,021)=+11,50$$

$$5,91894+0,28440+5,3226=+11,50$$

$$+11,50=+11,50.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: D-ს კოეფიციენტის აბსოლუტური მნიშვნელობის ფრიადი სიდიდის გამო აქ შემოწმება შესრულებულია მხოლოდ სამი ათწილადი ნიშნით.

კუთხეთა შესწორებების გამოთვლა

$x_1=+5,95+0,021 \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad . \quad . \qquad =+0,13$

$x_2=+0,69+1,017+0,24+0,182+5,24+0,021 \quad .=+0,86$

$x_3=-5,79+0,182 \qquad =-1,05$

$x_4=+12,78+0,021 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad .=+0,27$

$x_5=+0,69+1,017-2,35+0,98+0,021 \quad . =+0,25$

$x_6=+1,00+0,216-3,39+0,182 \qquad =-0,40$

$x_7=+1,56+0,216-0,98+0,182 \qquad =+0,16$

$x_8=+1,56+0,216+2,22+0,182 \quad . \quad . \quad . \quad . =+0,74$

$x_9=+0,69+1,017-1,56+0,182+1,56+0,021 \quad .=+0,45$

$x_{10}=-4+0,021 \qquad =-0,08$

C. კუთხეთა გაწონასწორება კორელატების დაუხმარებლად დამოუკიდებელ კუთხეთათვის ნორმულ განტოლებათა შედგენის საშუალებით

ძ ი რ ი თ ა დ ი გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ნ ი

I $\quad . +(6) \quad . + (7)\ . \quad +(8) \quad . -0,50=0$

II $\quad +(2) \quad . \quad . \quad +(5)\ . \quad . \ . +(9) \cdot\cdot\cdot\cdot -1,56=0$

III $\quad . -3,4(2)+57,9(3)\cdots+33,9(5)+33,9(6)+6,2(7)-14,2(8)+ +22,5(9) \quad +68=0$

IV $\cdot\ \cdot +59,5(1)+75,5(2) \quad . +127,8(4)-14,1(5)\ .\ .\ .\ .\ .\ +22,5(9)-25,6(10)-115=0$

$$\text{II-დან} \qquad .(9) = -(2) - (5) + 1{,}56$$

I და III-დან ამოვრიცხავთ (6)-ს, რისთვისაც I-ს გადავამრავლებთ 33,9-ზე და მიღებულ შედეგს გამოვაკლებთ III-ს.

$$\text{I} \qquad .33{,}9(6) + 33{,}9(7) + 33{,}9(8) - 0{,}50 \cdot 33{,}9 = 0$$

მივიღებთ:

$$+3{,}4(2) - 57{,}9(3) - 33{,}9(5) + 33{,}9(7) - 6{,}2(7) + 33{,}9(8) + 14{,}2(8) -$$
$$- 22{,}5(9) - 84{,}95 = 0$$

გაერთების შემდეგ $-27{,}7(7) = 25{,}9(2) - 57{,}9(3) - 11{,}4(5) + 48{,}1(8) -$
$- 120{,}05$

I და III-დან ამოვრიცხავთ (7)-ს:

$$6{,}2(6) + 6{,}2(7) + 6{,}2(8) + 6{,}2(-0{,}50) = 0$$

გამოვრიცხავთ III-დან, გადავამრავლებთ I-ს $\cdots - 3{,}4(2) + 57{,}9(3) +$
$+ 33{,}9(5) + 33{,}9(6) - 6{,}2(6) - 14{,}2(8) - 6{,}2(8) + 22{,}5(9) + 68{,}0 + 3{,}4 = 0$

$$22{,}5(9) = -22{,}5(2) - 22{,}5(5) + 1{,}56\ (22{,}5)$$

$$3{,}4(2) + 57{,}9(3) + 33{,}9(5) + 27{,}7(6) - 20{,}4(8) + 22{,}5(9) - 22{,}5(2) -$$
$$- 22{,}5(5) + 71{,}1 + 35{,}1 = 0$$

გაერთების შემდეგ: $-27{,}7(6) = -25{,}9(2) + 57{,}9(3) + 11{,}4(5) -$
$- 20{,}4(8) + 106{,}2$

IV-დან $\cdots - 59{,}5(1) = +75{,}5(2) + 127{,}8(4) - 14{,}1(5) + 22{,}5(9) -$

$$- 25{,}6(10) - 115{,}0 - 22{,}5(2) - 22{,}5(5) + 35{,}1$$

$$- 59{,}5(1) = +53{,}0(2) + 127{,}8(4) - 36{,}6(5) - 25{,}6(10) - 79{,}9$$

ძირითად განტოლებათა ერთეული წონისადმი ($g=1$) მისაყვანად, გადავამრავლოთ ისინი შესაბამისი წონების კვადრატულ ფესვზე.

წონა g	$\sqrt{g}$	
1	1	$-(1) = +\frac{53{,}0}{59{,}5}(2) + \frac{127{,}8}{59{,}5}(4) - \frac{36{,}6}{59{,}5}(5) - \frac{25{,}6}{59{,}5}(10) - \frac{79{,}9}{59{,}5}$
1,44	1,2	$+(2)$
1	1	$+(3)$
1	1	(4)
1,44	1,2	(5)

$$1 \qquad 1-(6) \quad -\frac{25,9}{27,7}(2)+\frac{57,9}{27,7}(3)+\frac{11,4}{27,7}(5)-\frac{20,4}{27,7}(8)+\frac{106,2}{27,7}$$

$$0,64 \qquad 0,8-(7) \quad +\frac{25,9}{27,7}(2)-\frac{57,9}{27,7}(3)-\frac{11,4}{27,7}(5)-\frac{48,1}{27,7}(8)-\frac{120,05}{27,7}$$

$$0,64 \qquad 0,8-(8) \qquad \cdot \qquad \cdot$$

$$1,44 \qquad 1,2-(9) \qquad +(2) \qquad +(5) \qquad -1,56$$

$$0,64 \qquad 0,8 \quad (10)$$

ძირითად განტოლებათა საბოლოო სახე

$$\begin{array}{ll}
1) \cdots +0,891(2) \quad \cdots +2,148(4)-0,615(5) \quad \cdot -0,430(10)-1343 & =0 \\
2) \cdots +1,200(2) & \cdot =0 \\
3) \qquad \cdot +1,000(3) & \cdot =0 \\
4) \qquad \cdot +1,000(4) & \cdot =0 \\
5) \qquad \cdot +1,200(5) & =0 \\
6) \cdots -0,935(2)+2,090(3) \cdots +0,411(5)-0,736(8) \quad \cdot +3,834 & =0 \\
7) \cdots +0,748(2)-1,672(4) \cdots +0,329(5)+1,389(8) \quad \cdot -3,467 & =0 \\
8) \qquad \cdot +0,800(8) & \cdot =0 \\
9) \cdots +1,200(2) \quad \cdot +1,200(5) \quad \cdot -1,872 & =0 \\
10) \qquad \cdot +0,800(10) & \cdot =0
\end{array}$$

როგორც ცნობილია, როდესაც ძირითად განტოლებებს აქვთ ზოგადი სახე,

$$\begin{array}{ll}
a_1x+b_1y+c_1z+ & .k_1w=n_1 \\
a_2x+b_2y+c_2z+ & .k_2w=n_2 \\
a_3x+b_3y+c_3z+ & .k_3w=n_2 \\
 & \\
a_sx+b_sy+c_sz+ & .k_sw=n_s
\end{array}$$

მაშინ ნორმული განტოლებანი, გაუსის აღნიშვნათა მიხედვით დაიწერება ასე:

$$\begin{array}{ll}
[aa]x+[ab]y+ & .+[ak]w=[an] \\
[ba]x+[bb]y+ & .+[bk]w=[bn] \\
[ca]x+[cb]y+ & .+[ck]w=[cn] \\
\cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\
[ka]x+[kb]y+ & .+[kk]w=[kn]
\end{array}$$

№	a	b	c	d	e	f	n	s	as	bs	cs	ds	es	fs
1	0,891		+2,148	—0,615		—0,430	—1,343	+0,651	+0,580		+1,398	—0,430		—0,280
2	+1,000							+1,200	+1,44					
3		+1,200						+1,000		+1,000				
4			+1,000					+1,000			+1,000			
5				1,200				+1,200				+1,44		
6	—0,935	+2,090		+0,411	—0,736		+3,834	+4,664	—4,361	+9,748		+1,917	—3,433	
7	+0,748	—1,672		—0,329	+1,389		—3,467	—3,331	—2,492	+5,569		+1,096	—4,627	
8					+0,800			+0,800					+0,64	
9	+1,200			+1,200			—1,872	+0,528	+0,634			+0,634		
10						+0,800		+0,800						+0,64
									—4,199	+16,317	+2,398	+4,687	—7,420	+0,360

$[aa] = +0{,}794+1{,}44+0{,}874+0{,}559+1{,}44 = +5{,}107$

$[ab] = -1{,}954-1{,}251 = -3{,}205$

$[ac] = +1{,}914 = +1{,}914$

$[ad] = -0{,}548-0{,}384-0{,}246+1{,}44 = +0{,}262$

$[ae] = +0{,}688+1{,}039 = +1{,}727$

$[af] = -0{,}383 = -0{,}383$

$[an] = -1{,}1966-3{,}5848-2{,}5933-2{,}2464 = -9{,}64 \qquad as = -4{,}199$

$[bb] = +1{,}000+4{,}3681+2{,}7956 = +8{,}164$

$[bc] = 0 = 0$

$[bd] = +0{,}8590+0{,}5501 = 1{,}409$

$[be] = -1{,}5382-2{,}3224 = -3{,}861$

$[bf] = 0 = 0$

$[bn] = +8{,}013+5{,}797 = +13{,}810 \qquad bs = +16{,}317$

$[cc] = +4{,}6139+1{,}000 = +5{,}614$

$[cd] = +1{,}321 = -1{,}321$

$[ce] = 0 = 0$

$[cf] = -0{,}924 = -0{,}924$

$[cn] = -2{,}885 = -2{,}885 \qquad cs = +2{,}398$

$[dd] = +0{,}3782+1{,}44+0{,}1689+0{,}1082+1{,}44 = +3{,}535$

$[de] = -0{,}302-0{,}457 = -0{,}759$

$[df] = +0{,}264 = +0{,}264$

$[dn] = +0{,}826+1{,}576+1{,}141-2{,}246 = +1{,}297 \qquad ds = +4{,}687$

$[ee] = =0{,}5417+1{,}929+0{,}64 = +3{,}111$

$[ef] = 0 = 0$

$[en] = -2{,}822-4{,}816 = -7{,}638 \qquad es = -7{,}420$

$[ff] = +0{,}185+0{,}64 = +0{,}825$

$[fn] = +0{,}577 = +0{,}577 \qquad fs = +0{,}359$

ნორმული განტოლებანი

$\mathrm{I}\ +5{,}107(2)-3{,}205(3)+1{,}914(4)+0{,}262(5)+1{,}727(8)-0{,}383(10)-9{,}621=0$

$\mathrm{II}\ -3{,}205(2)+8{,}164(3)+1{,}409(5)-3{,}861(8)+13{,}810=0$

$\mathrm{III}\ +1{,}914(2)+5{,}614(4)-1{,}321(5)-0{,}924(10)-2{,}885=0$

$$IV+0,262(2)+1,409(3)-1,324(4)+3,535(5)-0,759(8)+0,264(10)+$$
$$+1,297=0$$
$$V+1,727(2)-3,861(3) \quad -0,759(5)+3,111(8) \quad -7,638=0$$
$$VI-0,383(3) \quad -0,924(4)+0,264(5) \quad +0,825(10)+$$
$$+0,577=0.$$

გამოთვლილ შესწორებათა შემოწმება ნორმულ განტოლებებში

მიღებულ შესწორებებს შევიტანთ I ნორმულ განტოლებაში

I. $$5,107(2)-3,205(3)+1,914(4)+0,262(5)+1,727(8)-$$
$$-0,383(10)-9,621=0$$
$$5,107(+0,855)-3,205(-1,050)+1,914(+0,268)+0,262(+$$
$$+0,253)+1,727(+0,740)-0,383(-0,084)-9,621=0$$
$$4,3664+3,3652+0,5129+0,0662+1,2779+0,0317=+9,6207$$
$$+9,621-9,621=0$$

შევიტანთ IV ნორმულ განტოლებაში

IV. $$0,262(2)+1,409(3)-1,321(4)+3,535(5)-$$
$$-0,759(8)+0,264(10)+1,297=0$$
$$0,262(+0,855)+1,409(-1,050)-1,321(+0,268)+$$
$$+3,535(+0,253)-0,759(+0,740)+0,740)+$$
$$+0,264(-0,084)+1,297=0$$
$$+0,2240-1,4794-0,3540+0,8943-0,5616-0,0221+1297=0$$
$$+2,415-2,417$$

მიღებულია დასაშვები განსხვავება

გამოთვლა შესწორებათა: (1), (6), (7) და (9)

(9) შესწორების გამოთვლა.

II (ძირითადი) განტოლებიდან

$$(9)=-(2)-(5)+1,56$$
$$(9)=-0,855-0,253+1,56; \quad (9)=+0,45.$$

(1) შესწორების გამოთვლა

1. ძირითადი განტოლება

$$(1) \cdots +0,891(2)+2,148(4)-0,615(5)-0,430(10)-1,343=0$$

$$(1) \quad +0,891(+0,855)+2,148(+0,268)-0,615(+0,253)-$$

$$-0,430(-0,084)-1,343=0$$

$$(1)+0,7618+0,5756-0,1555+0,0361-1,343=0$$

$$(1)+1,3735-1,4985=0; \quad (1)=+0,13$$

(6) შესწორების გამოთვლა
6 ძირითადი განტოლება

$$(6)-0,935(2)+2,090(3)+0,411(5)-0,736(8)+3,834=0$$

$$(6)-0,935(+0,855)+2,090(-1,050)+0,411(+0,253)-$$

$$-0,736(+0,740)+3,834=0$$

$$(6)-0,7994-2,1945+0,1039-0,5446+3,834=0;$$

$$(6)=-0,399 \text{ ანუ } -0,40$$

(7) შესწორების გამოთვლა
1 ძირითადი განტოლებიდან

$$(7)=-(6)-(8)+0,50$$

$$(7)=+0,40-0,74+0,50; \quad (7)=+0,16$$

კუთხეთა შესწორებების და თვით გაწონასწორებულ კუთხეთა ტაბულა

კუთხე	შესწორება x	x^2	გაწონასწორებული კუთხე
1	+0,13	0,02	61° 43′ 58″,43
2	+0,86	0,74	80 43 27,66
3	—1,05	1,10	41 17 22,45
4	+0,27	0,07	21 56 56,77
5	+0,25	0,06	56 12 57,85
6	—0,40	0,16	50 36 8,90
7	+0,16	0,03	73 28 10,36
8	+0,74	0,55	55 55 43,14
9	+0,45	0,20	43 3 36,55
10	—0,08	0,01	65 28 21,92

გაწონასწორებულ კუთხეთა შესწორება

ACB △-დან კუთხე:	(6)	.50°36′8,″90
	(7)	.77 28 10,36
	(8)	.55 55 43,14
		180° 0′ 2,″40

იმავე სამკუთხედის სფერული სიჭარბე $\varepsilon_1 = 2'',40$

ABD Δ-დან კუთხე:	(2)	$80°43'27,''66$
	(5)	$56\ 12\ 57,\ 85$
	(9)	$43\ \ 3\ 36,\ 55$
		$180\ \ 0\ \ 2,''06$
		$\varepsilon_2 = 2,''06$

დამზერათა საშუალო ცდომილების გამოყვანა

(საბოლოო საშუალო ცდომილება)

1. კორელატთა წესის მონაცემნი

ფორმულა: $$\varepsilon^2 = \frac{g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 + g_3 x_3^2 + \cdots + g_i x_i^2}{s},$$

სადაც s — პირობით (ძირითად) განტოლებათა რიცხვი,
$g_1,\ g_2,\ g_3 \cdots g_i$ — გაზომილ კუთხეთა წონები
$x_1\ x_2,\ x_3 \cdots x_{10}$ — გაწონასწორებულ კუთხეთა შესწორებანი

		x^2	g	gx^2	
x_1	+0,13	0,0169	1,00	0,017	
x_2	+0,86	0,7396	1,44	1,065	
x_3	—1,05	1,1025	1,00	1,103	
x_4	+0,27	0,0729	1,00	0,073	
x_5	+0,25	0,0625	1,44	0,090	$\varepsilon^2 = \frac{3,170}{4} = 0,''793$
x_6	—0,40	0,1600	1,00	0,160	$\varepsilon = 0,''28$
x_7	+0,16	0,0256	0,64	0,016	
x_8	+0,74	0,5476	0,64	0,350	
x_9	+0,45	0,2025	1,44	0,292	
x_{10}	—0,08	0,0064	0,64	0,004	
				3,170	

2) უკორელატებოდ გაწონასწორების მონაცემები:

ფორმულა: $\varepsilon^2 = \frac{[vv]}{s - \sigma}$, სადაც $[vv]$ არის ნარჩენ ცდომილებათა კვადრატების ჯამი. s — პირობით (ძირითად) განტოლებათა რიცხვი. σ — ძირითად განტოლებებში შემავალ დამოუკიდებელ კუთხეთა შესწორებების რიცხვი.

v	vv	
+0,116	0,0135	
—1,026	1,0527	
+1,049	1,1004	ჩვენ შემთხვევაში
—0,268	0,0718	$s=10$
—0,300	0,0900	$\sigma=6$
—0,393	0,1544	
+0,223	0,0497	$\varepsilon^2=\frac{3,178}{4}=0,794$
—0,592	0,3505	
+0,540	0,2916	$\varepsilon= \qquad =0,28$
—0,064	0,0041	
		$\Sigma[vv]=3,178$

ADC კუთხის საბოლოო წონის განსაზღვრა

საკითხის გადასაწყვეტად ვისარგებლებთ კორელატებიან ნორმულ განტოლებათა კოეფიციენტებით და შესაბამისი პირობითი განტოლებებით.

$$u=\angle ADC=(180°+\varepsilon_2-B_2-A_2-D_3-x_3-x_5-x_9)$$

შევუტოლოთ გაზომილ რაოდენობათა წირული ფუნქციის ზოგად გამოხატულებას.

$$u=v+l_1x_1+l_2x_2+l_3x_3+\cdots+l_ix_i \quad \text{მივიღებთ:}$$

$$l_3=l_5=l_9=1; \text{ დანარჩენი } l \text{ — ნულებია}$$

პირობით განტოლებათა ზოგადი სახე

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+ \qquad .+a_ix_i+n_1=0$$
$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+ \qquad .+b_ix_i+n_2=0$$
$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+ \qquad .+c_ix_i+n_3=0$$

$$n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+ \qquad .+n_ix_i+n_s=0$$

ჩვენი ამოცანისათვის პირობითი განტოლებანი იქნება:

I $\qquad .+(x_6)+\cdots(x_7)+\cdots(x_8)\cdots$
$\qquad . \quad .-0,50=0$

II$\cdots+(x_2) \quad . \quad . \quad . \quad .+(x_5) \quad . \quad . \quad .+(x_9)\cdots-1,56=0$

III$\cdots3,4(x_2)+57,9(x_3)\cdots+33,9(x_5)+33,9(x_6)+6,2(x_7)-14,2(x_8)+$
$+22,5(x_9)\cdots+68=0$

IV$+59,5(x_1)+75,5(x_2)\cdots+127,8(x_4)-14,1(x_5) \quad . \quad . \quad .+22,5(x_9)-$
$-25,6(x_{10})-115=0$

აქედან $a_6=+1 \quad b_2=+1 \quad c_2=-3,4 \quad d_1=+59,5$

$a_7=+1 \quad b_5=+1 \quad c_3=+57,9 \quad d_2=+75,5$

$a_8=-1 \quad b_9=+1 \quad c_5=+33,9 \quad d_4=+127,8$

დანარჩენი ნულებია $\quad c_6=+33,9 \quad d_5=-14,1$

$c_7=+\ 6,2 \quad d_9=+22,5$

$c_8=-14,2 \quad d_{10}=-25,6$

$c_9=+22,5$ დანარჩენი ნულებია

კორელატებიან ნორმულ განტოლებათა კოეფიციენტები:

[aa]	[ab]	[ac]	[ad]
4,12	0	—2,14	0
	[bb]	[bc]	[bd]
	+2,07	—3,67	+5,82
		[cc]	[cd]
		+60,34	+1,58
			[dd]
			+253,46

$q_1, q_2, q_3 \quad \ldots q_s$ ოდენობათა კორელატებიან ნორმულ განტოლე-ბათა კოეფიციენტებთან შემკავშირებელი ფორმულები:

$$[aa]q_1+[ab]q_2+\cdots+[ah]q_s=-[al]$$
$$[ba]q_1+[bb]q_2+\cdots+[bh]q_s=-[bl]$$
$$[ha]q_1+[hb]q_2+\cdots+[hh]q_s=-[hl]$$

სადაც

$$[al]=\frac{a_1b_1}{g_1}+\frac{a_2b_2}{q_2}+\cdots+\frac{a_il_i}{q_i}$$
$$[bl]=\frac{b_1l_1}{q_1}+\frac{b_2l_2}{q_2}+\cdots+\frac{b_il_i}{q_i}$$
$$[hl]=\frac{h_1l_1}{q_1}+\frac{h_2l_2}{q_2}+\cdots+\frac{h_il_i}{q_i}$$

ჩვენ ამოცანაში

$$[al]=-\frac{1}{0,64}-\frac{1}{0,64}\cdots\cdots=-\frac{2}{0,64}\quad .=-3,125$$
$$[bl]=-\frac{1}{1,44}\quad .=-\frac{1}{1,44}\quad .=-0,694$$
$$[cl]=-\frac{6,2}{0,64}+\frac{14,2}{0,64}-\frac{22,5}{1,44}\cdots=+\frac{8}{0,64}-\frac{22,5}{1,44}\cdots=-3,125$$
$$[dl]=-\frac{22,5}{1,44}\quad=-\frac{22,5}{1,44}\quad .=-15,625$$

განვსაზღვროთ $g_1, g_2, \ldots g_n$	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[al]$	s
+0,2173	+4,12	0	—2,14	0	+ 3,13	+ 5,11
+3,13	0,6149	0	n 0,3304	0	0,4955	0,7084
+3,3473						
0,5247	+0,3727	+2,07	—3,67	+ 5,82	+ 0,69	+ 4,91
0,6149	—0,3063	0	0	0	0	0
$\lg q_1 = 9.9098\,n$	+0,6900	+2,07	—3,67	+ 5,82	+ 0,69	+ 4,91
$q_1 = 0.8125$	+0,7564	0,3160	n 0,5647	0,7649	9,8388	0,6911
	9,5707					
	0,3160	—0,6263	+60,34	+ 1,58	+ 3,13	+59,24
$\lg q_2 =$	9.2547 n	+5,98	+ 1,11	0	— 1,63	— 2,65
$q_2 = —0,1798$		+5,3537	+59,23	+ 1,58	+ 4,76	+61,89
		0,7287	+ 6,51	—10,32	— 1,22	— 8,71
		1,7220	+52,72	+11,90	+ 5,98	+70,60
$\lg q_3 =$		9.0067 n	1,7220	1,0755	0,7767	1,8488
$q_3 = —0,1015$						
				+253,46	+15,63	+276,49
$\lg 12,34 = 1.0913$				0	0	0
$\lg 234,41 = 2.3700$				+253,46	+15,13	+276,49
$\lg q_4 = 8.7213\,n$				+ 16,36	+ 1,94	+ 13,81
$q_4 = —0,0526$				+237,10	+13,69	+262,68
				+ 2,69	+ 1,35	+ 15,93
				+234,41	+12,34	+246,75

შემოწმება:

მიღებული კორელატები შევიტანოთ I ნორმულ განტოლებაში.

$$\mathrm{I} \cdots +4,12(-0,81)-2,14(-0,10)=3,13, \qquad 3,13=3,13$$

	L	L^2	$\frac{L^2}{q}$
$L_1=l_1+a_1q_1+b_1q_2+c_1q_3+d_1q_4=$	—0,315	0,099	0,099
$L_2=l_2+a_2q_1+b_2q_2+c_2q_3+d_2q_4=$	—0,383	0,147	0,102
$L_3=l_3+a_3q_1+b_3q_2+c_3q_3+d_3q_4=$	—0,591	0,349	0,349
$L_4=l_4+a_4q_1+b_4q_2+c_4q_3+d_4q_4=$	—0,677	0,458	0,458
$L_5=l_5+a_5q_1+b_5q_2+c_5q_3+d_5q_4=$	—0,289	0,084	0,051
$L_6=l_6+a_6q_1+b_6q_2+c_6q_3+d_6q_4=$	—0,427	0,182	0,182
$L_7=l_7+a_7q_1+b_7q_2+c_7q_3+d_7q_4=$	—0,244	0,060	0,094
$L_8=l_8+a_8q_1+b_8q_2+c_8q_3+d_8q_4=$	—0,036	0,001	0,002
$L_9=l_9+a_9q_1+b_9q_2+c_9q_3+d_9q_4=$	—0,467	0,218	0,151
$L_{10}=l_{10}+a_{10}q_1+b_{10}q_2+c_{10}q_3+d_{10}q_4=$	+0,136	0,018	0,028

$$\Sigma\frac{L^2}{q}=1,516$$

$$gu=\frac{1}{\Sigma\frac{L^2}{g}}=\frac{1}{1,516}=0,66.$$

სამკუთხედების საბოლოო გადაწყვეტილება

ფორმულები:

$$\frac{l}{m}=\frac{\sin L}{\sin M};\qquad \frac{n}{m}=\frac{\sin N}{\sin M};\quad l=m\frac{\sin L}{\sin M};\ n=m\frac{\sin N}{\sin M}$$

№ Δ	წვერო	გაზომილი კუთხე	შესწორ.	გაწონასწორებული კუთხე: სფერული	გაწონასწორებული კუთხე: ბრტყელი	ბრტყელი კუთხის lg sin	გვერდის lg	გამოთვლა
1	A	55°55′42″,4	+0,74	55°55′43″,14	55°55′42″,34	9.9182078$_8$	4.1839051$_3$	9.9182078$_8$
	B	50 36 9,3	−0,40	50 36 8, 90	50 36 8, 10	9.8880438$_1$	4.1537410$_9$	4.2656972$_8$
	C	73 28 10,2	+0,16	73 28 10, 36	73 28 9, 56	9.9816679$_3$	4.2473652$_1$	9.9816679$_3$
	$\varepsilon_1''=2,''40$			180° 2″,40	180			
2	A	43 3 36,1	+0,45	43 3 36,55	43 3 35,86	9.8342701$_9$	4.2473652$_1$	9.8342701$_9$
	B	56 12 57,6	+0,25	56 12 57,85	56 12 57,16	9.9196735$_6$	4.0873518$_3$	4.2530816$_4$
	D	80 43 26,8	+0,86	80 43 27,67	80 43 26,98	9.9942835$_7$	4.1727551$_4$	9.9196735$_6$
	$\varepsilon_2''=2,''07$			180° 2″,07	180°			
3	A	65 28 22,0	−0,08	65 28 21,92	65 28 21,07	9.9589279$_3$	4.1727551$_1$	9.9448513$_7$
	E			52 47 42,21	52 47 41,35	9.9011722$_6$	4.2164342$_4$	4.2715828$_7$
	D	61 43 58,3	+0,13	61 43 58,43	61 43 57,58	9.9448513$_7$	4.2305108$_1$	9.9589279$_3$
	$\varepsilon_3''=2,''56$			180° 2″,56	180°			
4	D	41 17 23,5	−1,05	41 17 22,45	41 17 21,76	9.8194533$_2$	4.0873518$_3$	9.8194533$_2$
	C	31 53		31 53 32,86	31 53 32,18	9.7229001$_9$	4.1839049$_6$	4.3644516$_4$
	B	106 49 6,9	−0,15	106 49 6,75	106 49 6,06	9.9810148$_8$	4.3454665$_2$	9.9810148$_8$
	$\varepsilon_4''=2,''06$			180° 2″,06	180°			

5	D	39 26 03,3	+1,91	39 26 05,21	39 26 04,41	9.8029080_9	4.3454665_2	9.8028968_3
	C			41 34 37,51	41 34 36,70	9.8219221_8	4.1537409_4	4.3508328_5
	A	98 59 18,5	+1,19	98 59 19,69	98 59 18,89	9.9946336_7	4.1727550_3	9.8219326_2
	$\varepsilon''_5=2'',41$			180° 2'',41	180°			
6	B	34 16 01,1	−0,02	34 16 01,08	34 16 0,02	9.7505434_6	4.2473652_1	9.7505434_6
	E			37 12 03,62	37 12 02,57	9.7814746_2	4.2164340_8	4.4658905_9
	A	108 31 58,1	+0,37	108 31 58,47	108 31 57,41	9.9768736_1	4.4427644_0	9.9768738_1
	$\varepsilon''_6=3'',17$	180		180° 3'',17	180°			
7	D	142 27 25,1	+0,99	142 27 26, 0	142 27 25,59	9.7848704_8	4.2305108_1	9.7848704_8
	B	21 56 56,5	+0,27	21 56 56,77	21 56 56,28	9.5726167_4	4.4427645_5	4.6578940_7
	E			15 35 38,69	15 35 38,13	9.4294578_8	4.0873519_6	9.4294578_8
	$\varepsilon''_7=1'',46$			180° 1'',46	180°			

გეოგრაფიული კოორდინატების გამოთვლა

კლარკის ფორმულები

$$\varepsilon=[4]\, s^2 \sin\alpha \operatorname{cosin}\alpha \qquad \varphi_1=\varphi_0-\eta$$

$$u=[1]_n s \operatorname{cosin}\left(\alpha-\frac{2}{3}\varepsilon\right) \qquad \lambda=\frac{v}{\operatorname{cosin}\left(\varphi_1+\frac{1}{3}\varphi\right)}$$

$$v=[2]_0 s \sin\left(\alpha-\frac{1}{3}\varepsilon\right) \qquad t=\lambda\cdot\sin\left(\varphi_1+\frac{2}{3}\eta\right)$$

$$\varphi_0=\varphi+u \qquad \omega_1=\omega+\lambda$$

$$\varphi_n=\frac{\varphi+\varphi_0}{2}$$

$$\eta=[3]_0 v^2 \operatorname{tg}\varphi_0 \qquad \alpha_1=180°+\alpha-\varepsilon+t$$

$$[1]=\lg\frac{x}{\rho} \qquad [2]=\lg\frac{x}{p}; \qquad [3]=\lg\frac{p}{2\rho x}; \qquad [4]=\lg\frac{x}{2\rho p}$$

B წერტის მონაცემნი . . . $\varphi_B=58°\ 45'\ 14,''5$

BA გვერდის აზიმუტია $\alpha=244°\ 52'\ 25,''4$

მანძილი BA $\lg s=4.2473649$

A წერტის სიგანედისა და სიგრძედის და AB აზიმუტის გამოთვლა

$[4]=2,0608 \qquad \alpha-\frac{1}{3}\varepsilon=244°52'24'',94 \qquad \varphi=58°45'14'',500$

$\lg s^2=8,4947 \qquad \alpha-\frac{2}{3}\varepsilon=244°52'24'',48 \qquad u=\ -8'37'',510$

$\lg\sin\alpha=9.9568\, n \qquad \lg\sin\left(\alpha-\frac{1}{3}\varepsilon\right)=n\, 9.9568276 \qquad \varphi_0=58°36'36'',990$

$\lg\operatorname{cosin}\alpha=9,6280_n \qquad [2]_0=8,8377535 \qquad \eta=\ 4'',828$

$\lg\varepsilon=0.1403 \qquad \lg s=4.2473649 \qquad \varphi_1=58°36'32'',162$

$\varepsilon=+1'',38 \qquad [1]_n=8,8385549$

$\varphi_1+\frac{1}{3}\eta=58°36'33'',771$

$\frac{1}{3}\varepsilon=+0'',46 \qquad \lg\operatorname{cosin}\left(\alpha-\frac{2}{3}\varepsilon\right)=n9.6279992$

$\varphi_1+\frac{2}{3}\eta=58°36'35'',381$

$\lg \cos \sin \alpha = 3{,}8754_n$

$[1] = 8{,}8385$

$\lg u = 2.7139\,n$

$u = -8'37'',5$

$\varphi_0 = 58°36'37'',0$

$\varphi_n = 58°40'55'',8$

$\lg v^2 = 6.08389$

$\lg \lg \varphi_0 = 0.21456$

$[3]_0 = 4{,}38535$

$\lg \eta = 0.68380$

$\lg u = n\,2.7139190$

$\lg v = n\,3.0419460$

$$\lg \cos \sin\left(\varphi_1 + \frac{1}{3}\eta\right) = 9.7167293$$

$\lg \lambda = n\,3{,}3252167$

$$\lg \sin\left(\varphi_1 + \frac{2}{3}\eta\right) = 9.9312748$$

$\lg t = n\,3{,}2564914$

$180° + \alpha - \varepsilon = 64°52'24'',02$

$t = -30'5'',059$

$\lambda = -35'14'',544$

მივიღეთ:

$\varphi_1 = 58°36'32,''162;$ $\omega = -35'14,''544:$ $\alpha_1 = 64°22'18'',961$

გეოგრაფიული კოორდინატების გამოთვლა

მოცემული წერტი	B	A
განსასაზღ. წერტი	D	D
φ	58°45'14",5	58°36'32",162
ω		—35'14",544
α	188°39'27,"88	107°25'56",581
$\lg s$	4.0873542	4.1727546
[4]	2.0608	2.0609
$\lg s^2$	8.1747	8.3455
$\lg \sin \alpha$	n9.1776	9.9796
$\lg \cos \alpha$	n9.9950	n9.4765
$\lg \varepsilon$	9.4081	n9.8625
ε	+0",26	—0,73
$\frac{1}{3}\varepsilon$	+0",09	—0,124
$\lg s \cos \sin \alpha$	n4.0824	n3.6493
[1]	8.8385	8.3386
$\lg u$	n2.9209	n2.4879
u	—13,'53",5	—5'7",5
φ_0	58°31'21",0	58°31'24",662
φ_n	58°38'17",75	58°33'58,"412
$\lg v^2$	4.20547	5.98018
$\lg \lg \varphi_0$	0.21306	0.21308
$[3]_0$	4.38536	4.38536
$\log \eta$	8.80389	0,57862
$\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon$	188°39'27",79	107°25'56",82
$\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon$	188°39'27",71	107°25'57",07
$\lg \sin\left(\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon\right)$	n9.1776269	9.9795806

მოცემული წერტი	B	A
განსასაზ. წერტი	D	D
$[2]_0$	8.8377555	8.8377555
lg s	4.0873542	4.1727546
$[1]_n$	8.8385579	8.8385629
$\lg \cos\sin\left(\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon\right)$	*n* 9.9950229	*n* 9.4765162
$\lg u$	*n* 2.9209350	*n* 2.4878337
φ	58°45′14″,5	58°36′32,″162
u	—13′53″,556	—5′7,″492
φ_0	58°31′20″,944	58°31′24,″670
$-\eta$	—0″,064	—3″,190
φ_1	58°31′20,880	58°31′20,″880
$\varphi_1 + \frac{1}{3}\eta$	58°31′20″,901	58°31′22,″143
$\varphi_1 + \frac{2}{3}\eta$	58°31′20″,922	58°31′23,″406
$\lg v$	*n* 2.1027366	2.9900907
$\lg \cos\left(\varphi_1 + \frac{1}{3}\eta\right)$	9.7178070	9.7178027
$\lg \lambda$	*n* 3.3849296	3.2722880
$\lg \sin\left(\varphi_1 + \frac{2}{3}\eta\right)$	9.9308702	9.9708734
$\lg t$	*n* 2.3157998	3.2031614
$180° + \alpha - \varepsilon$	8°39′27″,62	287°25′57″,311
t	—3′26″,919	+26′36″472
λ	—4′2″,622	+31′11″,923
φ_1	58°31′20″,880	58°31′20″,880
ω_1	—4′2″,622	—4′2″,621
α_1	8°36′0″,701	287°52′33″,783

XII

დამატებითი თავი

65. ხდომილობათა სრული ჯგუფი

ვთქვათ, გვაქვს ბურთულები, ჩაწყობილი ორ ყუთში: პირველ ყუთშია a_1 თეთრი და b_1 შავი ბურთულა, ხოლო მეორეში a_2 თეთრი და b_2 შავი ბურთულა. ბურთულები გულდასმით აირევა ყუთებში და ყოველი ყუთიდან ამოიღება თითო ბურთულა. გამოვიცნოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ბურთულა იქნება თ ე თ რ ი.

გამოვიანგარიშოთ ყველა შანსის რიცხვი, რომელიც მოსალოდნელია განსახილველ ცდაში. რადგან პირველი ყუთიდან ამოღებული ერთ-ერთი ბურთულა შეიწყვილება მეორე ყუთის ყოველ ბურთულასთან, ამიტომ, ცხადია, რიცხვი შეწყვილებისა იქნება იმდენი, რამდენი ბურთულაც არის მეორე ყუთში, ე. ი. a_2+b_2. ესევე ითქმის პირველი ყუთის დანარჩენი ბურთულების შესახებაც; ასე, რომ n რიცხვი წყვილ-წყვილი კომბინაციებისა იქნება:

$$n=(a_1+b_1)(a_2+b_2).$$

ამნაირადვე გამოვიყვანთ, რომ m რიცხვი ყველა ხელშემწყობი კომბინაციისა წყვილ-წყვილად, პირველი ყუთის ყველა თეთრი ბურთულისა მეორე ყუთის ყველა თეთრ ბურთულასთან, გამოისახება ფორმულით:

$$m=a_1a_2.$$

მაშასადამე, თეთრი ბურთულის ორივე ყუთიდან ერთობლივად მოვლინების ალბათობა იქნება:

$$p=\frac{m}{n}=\frac{a_1a_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}$$

ანუ

$$p=\frac{a_1}{a_1+b_1}\cdot\frac{a_2}{a_2+b_2}$$

აქ $\dfrac{a_1}{a_1+b_1}$ წარმოადგენს პირველი ყუთიდან თეთრი ბურთუ-

ლის მოვლინების ალბათობას, ხოლო $\frac{a_2}{a_2+b_2}$ მეორე ყუთიდან თეთრი ბურთულის მოვლინების ალბათობას. აღვნიშნოთ ისინი შესაბამისად p_1 და p_2 ასოთი. მაშინ გვექნება:

$$p_{თთ}=p_1\cdot p_2.$$

ეს დასკვნა ნაჩვენები გვქონდა უკვე კურსის I თავში.

ახლა განვიხილოთ შავი ბურთულების მოვლინების ალბათობის საკითხი. ამისათვის აღვნიშნოთ პირველი ყუთიდან და მეორე ყუთიდან შავი ბურთულების მოვლინების ალბათობა შესაბამისად q_1 და q_2 ასოთი, ე. ი.

$$q_1=\frac{b_1}{a_1+b_1}, \quad q_2=\frac{b_2}{a_2+b_2}$$

შემდეგ, წინანდებურად გვექნება:

$$p_{შშ}=\frac{b_1b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}=q_1\cdot q_2$$

სწორედ ამნაირადვე ენახავთ, რომ პირველი ყუთიდან თეთრი ბურთულისა და მეორე ყუთიდან შავი ბურთულის ერთობლივად მოვლინების ალბათობა იქნება:

$$p_{თშ}=\frac{a_1b_2}{(a_1+b_1)\,(a_2+b_2)}=p_1\cdot q_2$$

დასასრულ, შავი ბურთულისა პირველი ყუთიდან და თეთრისა მეორე ყუთიდან ერთობლივი მოვლინების ალბათობა გამოისახება ფორმულით:

$$p_{შთ}=\frac{a_1b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}=q_1p_2.$$

ცხადია, უსათუოდ უნდა მოხდეს ერთ-ერთი ზემოხსენებული კომბინაციათაგანი, როდესაც ვიღებთ ყუთებიდან თითო ბურთულას. მაშასადამე, გვაქვს კომბინაციები:

თთ, შშ, თშ, შთ,

რომელთა ალბათობა შესაბამისად არის:

$$p_{თთ},\ p_{შშ},\ p_{თშ},\ p_{შთ}.$$

ეხლა ისმება საკითხი იმის შესახებ, თუ რანაირი იქნებოდა ალბათობა იმ შემთხვევაში, თუ მოგვევლინებოდა ერთ-ერთი ზემოთ მოყვანილი კომბინაციათაგანი, ორივე ყუთიდან თითო ბურთულის იმოღების დროს; ამის პასუხად იქნება შეკრების ფორმულა:

$$p = p_{\text{თთ}} + p_{\text{მმ}} + p_{\text{თმ}} + p_{\text{მთ}},$$

ანუ

$$P = p_1 p_2 + q_1 q_2 + p_1 q_2 + q_1 p_2,$$

ანუ

$$P = (p_1 + q_1)(p_2 + q_2) \qquad (P)$$

ზემოთ ნახულის მიხედვით

$$p_1 + q_1 = \frac{a_1}{a_1 + b_1} + \frac{b_1}{a_1 + b_1} = 1.$$

ამნაირადვე

$$p_2 + q_2 = 1.$$

მაშასადამე, (P) ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$P = 1.$$

როგორც ვიცით; ერთეული ალბათობა გამოსახავს ხდომილობის უცილობლობას,— ასეც უნდა იყოს ამ შემთხვევაში.

ზემოთ მოყვანილ ხდომილობათა ჯგუფი, როგორც საზოგადოდ ხდომილობათა ყოველნაირი ჯგუფი, რომელთა ალბათობათა ჯამი ერთეულს უდრის, იწოდება ხ დ ო მ ი ლ ო ბ ა თ ა ს რ უ ლ ჯ გ უ ფ ა დ.

ყოველი A ხდომილებისთვის მუდამ არსებობს მისი საწინაღო B ხდომილება. ყოველი ცდის წარმოების დროს ადგილი აქვს ხოლმე ხდომილების ან მოვლენას, ან არმოვლენას. თუ ხდომილების მოვლინების ალბათობას აღვნიშნავთ p ასოთი, ხოლო არმოვლინებისას q ასოთი, მაშინ, როგორც ამ პარაგრაფში იყო გამოყვანილი, მუდამ იქნება

$$p + q = 1.$$

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი I. განსაზღვრულ იქნეს ალბათობა იმისა, რომ n ლითონის ფულის აგდების დროს ყველა ფული დაეცემა ზურგ-აღმა. საძიებელი ალბათობა განისაზღვრება ალბათობათა გადამრავლებით, რა დროსაც მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ ზურგის ყოველი ცალკეული მოვლინების ალბათობა უდრის $\frac{1}{2}$-ს.

მაშასადამე, 3 §-ის (3) ფორმულის მიხედვით გვექნება:

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

თუ, მაგალითად, $n = 10$, მაშინ

$$P=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}.$$

მაგალითი II. განსაზღვრულ იქნას ალბათობა იმისა, რომ n ფულის აგდების დროს ფული დაეცემა ღერბისა და ზურგის განსაზღვრულ კომბინაციაში.

ვთქვათ, მოცემულია ასეთი კომბინაცია ღერბისა და ზურგისა:

ღ, ზ, ზ, ღ, ღ, ღ, ზ, ღ, ზ.

აქ ჩვენ კვლავ საქმე გვაქვს რთულ ხდომილებასთან, რომელშიაც ყოველი ცალკეული ხდომილების ალბათობა უდრის $\frac{1}{2}$-ს. მაშასადამე, აქაც გამოვიყენებთ 3 §-ის (3) ფორმულას და მივიღებთ:

$$P=\left(\frac{1}{2}\right)^{n},$$

ე. ი. გვექნება ისეთივე ალბათობა, როგორც ზემო მაგალითში. ამნაირად, ღერბებისა და ზურგების ყოველნაირ განსაზღვრულ კომბინაციას აქვს ერთი და იგივე ალბათობა.

მაგალითი III. განსასაზღვრელია ალბათობა იმისა, რომ n ფულის აგდების დროს მოგვევლინოს რომელიმე კომბინაცია k ღერბისა და $n-k$ ზურგისა.

k ღერბისა და $n-k$ ზურგის განზღვრული კომბინაციის ალბათობა, როგორც ზემოთ გამოვიყვანეთ, არის $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$, რადგანაც საკმარისია, რომ განხორციელდეს რომელიმე ზემოხსენებული კომბინაცია, ამიტომ აქ შეიძლება გამოყენებული იყოს ალბათობათა შეკრების წესი; მაგრამ რადგანაც აქ ცალკეული ხდომილების მოვლინების ალბათობა მუდამ ერთი და იგივეა და ყოველი მათგანი უდრის $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$-ს, ამიტომ აქ საჭიროა მხოლოდ გაანგარიშებული იყოს ყველა k ღერბისა და $n-k$ ზურგის კომბინაციების რიცხვი. ეს უკანასკნელი არის C_n^k, მაშასადამე, განხილვად შემთხვევაში გვექნება:

$$P=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n}. \qquad (C)$$

C_n^k-ს უდიდესი მნიშვნელობა ესატყვისება $k=\frac{n}{2}$-ს, როდესაც n ლუწია, ამიტომ

$$P_{max}=C_n^{\frac{n}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{\left(1\cdot2\cdot3\frac{n}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

განხილული სამი მაგალითი გამოვიყენოთ ყოველგვარ გაზომვებში. ეს ადვილია, თუ ღერბის მაგივრად, მაგალითად, ვიგულვებთ პლუსს, ხოლო ზურგის ნაცვლად — მ ი ნ უ ს ს; მაშინ, — გაზომვის დროს სისტემატურ ცდომილებათა უყოფლობის შემთხვევაში, — პლუსიანი ცდომილების მოვლინების ალბათობა, ისევე როგორც მინუსიანი ცდომილებისა, ერთი და იგივეა და უდრის $\frac{1}{2}$-ს.

ამნაირად, n-ჯერ გაზომვის შემთხვევაში, ყველა პლუსიანი ცდომილების მოვლინების ალბათობა განისაზღვრება ფორმულით

$$P=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ამავე ფორმულით განისაზღვრება ყველა მინუსიანი ცდომილების ალბათობაც და აგრეთვე პლუსისა და მინუსის ყოველნაირი გ ა ნ ზ ღ ვ რ უ ლ ი კომბინაციის ალბათობაც. ზემოთ მოყვანილი (C) ფორმულა განსაზღვრავს k პლუსებისა და $n-k$ მინუსების ერთი რომელიმე კომბინაციის ალბათობას ცდომილებათა n რიცხვის შემთხვევაში.

უდიდესი ალბათობა n გაზომვაში ექნება იმ შემთხვევას, როდესაც მოვლინებულია ცდომილებათა ისეთი კომბინაცია, სადაც პლუსიან ცდომილებათა რიცხვი მინუსიან ცდომილებათა რიცხვის თანასწორია.

ლ უ წ ი n-თვის ზემოთ მივიღეთ:

$$P_{max}=C_n^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n;$$

კ ე ნ ტ ი n-თვის გვექნება:

$$P_{max}=C_n^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n=C_n^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

მაგალითად, $n=10$-თვის გვექნება:

$$P_{max}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=252\times\frac{1}{1024}=\frac{63}{256};$$

$n=11$-თვის:

$$P_{max}=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\quad\left(\frac{1}{2}\right)^{11}=462\times\frac{1}{2048}=\frac{231}{1024}$$

მაგალითი IV. განსაზღვრულ იქნას ალბათობა იმისა, რომ პირველი დადებითი ცდომილება მოვლინებული იქნება ერთ-ერთ კენტ განაზომში. მაშასადამე, განსასაზღვრელია ალბათობა იმისა, რომ პირველი დადებითი ცდომილება პირველად მოგვევლინება ან პირველ, ან მესამე, ან მეხუთე და ა. შ. განაზომში. პირველი განაზომისათვის გადაწყვეტილება მარტივია, სახელდობრ,

$$P_1=\frac{1}{2}$$

იმისათვის, რომ დადებითი ცდომილება მოგვევლინოს პირველად მხოლოდ მესამე განაზომში, აუცილებელია, რომ პირველი და მეორე ცდომილება იყოს უარყოფითი. მაშასადამე, აქ საქმე გვექნება რთულ ხდომილობასთან, რომელიც შემდგარია სამი მარტივი ხდომილობისაგან: ორი ცდომილობა უარყოფითია, ერთი დადებითი, ამ შემთხვევაში

$$P_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

სწორედ ამნაირადვე, იმისათვის, რომ დადებითი ცდომილება მოგვევლინოს პირველად მხოლოდ მეხუთე განაზომში, საჭიროა, რომ პირველი ოთხი ცდომილება იყოს უარყოფითი. მაშასადამე,

$$P_5=\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

როდესაც n ლ უ წ ი ა, მაშინ უკანასკნელ შემთხვევაში გვექნება: $(n-2)$ უარყოფითი ცდომილება და $(n-1)$ დადებითი, ასე რომ

$$P_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

ხოლო თუ n კ ე ნ ტ ი ა, მაშინ

$$P_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

ალბათობა იმისა, რომ დადებითი ცდომილება პირველად მოგვევლინება ერთ-ერთ კენტ განაზომში, ზოგადად გამოისახება ქვემო ფორმულებით; თუ n ლ უ წ ი ა, მაშინ

$$P_{კნ}=p_1+p_2+p_3=\cdots+p_{n-1}=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{3}$$

ხოლო თუ n კენტია, მაშინ

$$P_{კნ}=p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\quad\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{3}.$$

სწორედ ამნაირადვე დავრწმუნდებით, რომ ალბათობა იმისა, რომ დადებითი ცდომილება პირველად მოგვევლინება მე-2, მე-4 და საზოგადოდ ლუწ განზომში, გამოისახება ქვემო ფორმულებით:

$$P_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$P_4=\left(\frac{1}{2}\right)^4,$$

$$P_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ თუ n ლუწია,}$$

და

$$P_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \text{ თუ n კენტია.}$$

საზოგადოდ, საერთო სახე ალბათობისა, თუ პირველი დადებითი ცდომილება მოგვევლინება ერთ-ერთ ლუწ განზომში, იქნება შემდეგი:

n ლუწია

$$\dot{P}_{ლწ}=\frac{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\quad\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{3}-$$

ხოლო თუ n კენტია

$$P_{ლწ}=\frac{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{3}.$$

ავიღოთ შეფარდება: n ლუწია

$$\frac{P_{კტ}}{P_{ლწ}}=\frac{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}=2,$$

n კენტია

$$\frac{P_{კტ}}{P_{ლწ}}=\frac{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}>2.$$

66. შემთხვევით მოვლენათა ალბათობა ცდის მრავალჯერ განმეორებისას

ვთქვათ, ცდა მდგომარეობს ერთ-ერთი, A ან B, ხდომილობის მოვლინებაში, ამასთან A-ს ალბათობა არის p, B-სი — q. ასეთი ხდომილობანი იწოდებიან ურთიერთსაწინააღმდეგოდ და მათი ალბათობათა ჯამი უდრის ერთეულს, ე. ი.

$$p+q=1,$$

ვინაიდან უცილობელია, რომ ცდის დროს ან A უნდა მოგვევლინოს, ან B.

ცდის ორჯერ მოხდენისას, ჩვენ უნდა მოველოდეთ ერთ-ერთს ოთხ რთულ ხდომილებათაგან, სახელდობრ AA, AB, BA, BB-ს, რომელთა ალბათობა არის:

$$p^2,\ pq,\ qp,\ q^2.$$

ჯამი ორი შუა ალბათობისა მოგვცემს იმის ალბათობას, რომ ორ ცდაში მოხდება ან AB, ან BA ხდომილება, ე. ი. A და B მოგვევლინება ერთად განურჩევლად მოვლინების რიგისა.

მაშასადამე, ორჯერ ცდაში მოსალოდნელია ერთ-ერთი სამ ხდომილებათაგანი:

1) A ხდომილების მოვლინება ორჯერ; 2) ორივე A და B ხდომილების მოვლინება თითოჯერ: 3) B ხდომილობის მოვლინება ორჯერ. ამ ხდომილობათა ალბათობა იქნება — p^2, $2pq$ და q^2, ე. ი. წარმოადგენენ $(p+q)^2$ ბინომის წევრებს:

$$(p+q)^2=p^2+2pq+q^2=1.$$

თუ ცდა მეორდება სამჯერ, მაშინ მოსალოდნელია ხდომილებათა

შემდეგი რვა კომბინაცია: AAA, AAB, ABA, BAA, ABB, BAB, BBA, BBB, რომელთა ალბათობა არის: პირველისა p^3, მეორისა, მესამისა და მეოთხისა სათითაოდ p^2q, მეხუთისა, მეექვსისა და მეშვიდესი სათითაოდ pq^2 და მერვესი q^3,

სამი თანასწორი p^2q ალბათობის ჯამი, $3p^2q$, აღნიშნავს იმას, რომ ადგილი ექნება ან AAB ხდომილობას, ან ABA-ს, ან კიდევ BAA-ს,

სამი pq^2 ალბათობის ჯამი, $3pq^2$, გამოსახავს იმას, რომ განხორციელდება ერთ-ერთი სამ კომბინაციათაგანი: ABB, BAB, BBA.

p^3 აღნიშნავს A ხდომილობის სამჯერ განმეორებას.

q^3 აღნიშნავს B ხდომილობის სამჯერ განმეორებას.

განსახილველი ოთხი კომბინაციის ალბათობა იქნება—p^3, $3p^2q$, $3pq^2$ და q^3, ე. ი. ალბათობანი წარმოადგენენ ქვემო ბინომის წევრებს:

$$(p+q)^3=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3=1.$$

მოყვანილი გამოკვლევა შეიძლება გავრცელებულ იქნას ცდის განმეორების ნებისმიერ რიცხვზე. ვთქვათ, ცდა განმეორებულია n-ჯერ. თუ უყურადღებოდ დავტოვებთ შემთხვევით ხდომილობათა მოვლინების არეს, მაშინ მოსალოდნელია ერთ-ერთი $n+1$ შემთხვევათაგანის განხორციელება: 1) A ხდომილობის მოვლინება n-ჯერ; 2) A ხდომილობის მოვლინება $(n-1)$-ჯერ და B-სი ერთხელ; $\cdots k+1)$ A ხდომილობის მოვლინება $(n-k)$-ჯერ და B-სი k-ჯერ$\cdots n)$ A ხდომილობის მოვლინება ერთხელ და B-სი $(n-1)$-ჯერ; $(n+1)$ B ხდომილობის მოვლინება n-ჯერ.

პ ი რ ვ ე ლ ი შემთხვევის ალბათობა არის P^n. მ ე ო რ ე შემთხვევამ შეიძლება მიიღოს ერთ-ერთი შემდეგი სახე: B ხდომილობა მოგვევლინება ან პირველ ცდაში, ან მეორეში, ან მესამეში და ა. შ. უკანასკნელამდე, ხოლო დანარჩენებში მოგვევლინება მხოლოდ A ხდომილება. ყველა ამ სახეთა ალბათობა ერთნაირია და უდრის $P^{n-1}q$; მაშასადამე, მეორე შემთხვევის ალბათობა იქნება

$$np^{n-1}q.$$

რიცხვი სახეობათა, რომლებშიაც შეიძლება განხორციელებულ იქნას მესამე შემთხვევა, ცხადია, უდრება n ელემენტის ორობით ჯუფთებას:

$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}.$$

ყოველი სახეობის ალბათობა იქნება $p^{n-2}q^2$ და, მაშასადამე, მესამე შემთხვევის ალბათობა გამოვა:

$$C_n^2p^{n-2}q^2=\frac{n(n-1)}{2}\,p^{n-2}\cdot q^2.$$

მსგავსი მსჯელობით მოვნახავთ აგრეთვე დანარჩენ შემთხვევათა ალბათობასაც, ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილება მოგვევლინება $(n-k)$-ჯერ, ხოლო B ხდომილება k-ჯერ, თანასწორი იქნება გამოხატულებისა:

$$C_n^kp^{n-k}q^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots k}\,p^{n-k}q^k,$$

ვინაიდან ეს შემთხვევა შეიძლება მოგვევლინოს იმდენ სახეობაში, რამდენ k-ბით ჯუფთებასაც მოგვცემს n ელემენტი, და ყოველი სახეობის ალბათობა იქნება $p^{n-k}q^k$.

დასასრულ უკანასკნელი შემთხვევის ალბათობა იქნება q^n. გადავიდეთ ზოგად შემთხვევაზე, რისთვისაც დავშალოთ მწკრივად ბინომი

$$(p+q)^n=(q+p)^n=1;$$

მივიღებთ:

$$(p+q)^n=p^n+np^{n-1}q\,\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\,p^{n-2}q^2+\qquad+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots k}\,p^{n-k}q^k+$$

$$+npq^{n-1}+q^n=1 \tag{1}$$

მისი მეორე სახეობა იქნება

$$(p+q)^n=C_n^0p^n+C_n^1p^{n-1}q+C_n^2p^{n-2}q^2+\cdots+C_n^kp^{n-k}q^k+\cdots+$$

$$+C_n^{n-1}pq^{n-1}+C_nq^n=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^kp^{n-k}q^k=1 \tag{2}$$

მიღებული მწკრივები საშუალებას იძლევიან განვსაზღვროთ ალბათობა ყოველი ცალკეული სახეობისა $(n+1)$ სახეობიდან, რომლებშიაც კი შეიძლება გამოსახული იქნას n-ჯერ მოხდენილი ცდა, თუ სათვალავში არ იქნება მიღებული ცალკეულ ცდათა თანმიმდევრობა.

(2) მწკრივში წევრი $C_n^kp^{n-k}q^k$ გამოსახავს p_k ალბათობას იმისას, რომ n-ჯერ მოხდენილ ცდაში A ხდომილობა გვევლინება $(n-k)$-ჯერ და არ მოგვევლინება k-ჯერ; ამასთან არ უნდა იყოს სათვალავში მიღებული, როგორც იყო უკვე აღნიშნული, ხდომილობის მოვლინებისა და არმოვლინების რიგობა. ამნაირად

$$q_k=C_n^k p^{n-k} q^k.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც $p=q=\frac{1}{2}$, უკანასკნელი ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$P_k=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

თუ $p=q=\frac{1}{2}$, მაშინ (2) ფორმულას მიეცემა სიმეტრიული გამოხატულება:

$$C_n^0\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^1\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots+C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots+$$

$$+C_n^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=1 \qquad (3)$$

რადგანაც

$$C_n^0=C_n^n=1,\quad C_n^1=C_n^{n-1}=n,\quad C_n^2=C_n^{n-2}=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$$ და ა. შ.

და რადგანაც (3) მწკრივის წევრების მატება თუ კლება დამოკიდებულია მხოლოდ და მხოლოდ C_n^0, C_n^1, $C_n^2\cdots$ კოეფიციენტებზე, ამიტომ უდიდეს წევრად მწკრივში მუდამ იქნება შუა წევრი — ანუ $C_n^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, თუ n ლუწია ან კიდე ერთ-ერთი შუაწევრთაგანი $C^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ან $C_n^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, რომლებიც ურთიერთთანასწორია, — — როდესაც n კენტია.

მაგალითად, თუ $n=6$, გვექნება:

$$\frac{1}{64}+\frac{6}{64}+\frac{15}{64}+\frac{20}{64}+\frac{15}{64}+\frac{6}{64}+\frac{1}{64}=1,$$

ხოლო თუ $n=7$

$$\frac{1}{128}+\frac{7}{128}+\frac{21}{128}+\frac{35}{128}+\frac{35}{128}+\frac{21}{128}+\frac{7}{128}+\frac{1}{128}=1.$$

ამნაირად, რიცხვი $\frac{n}{2}$ (როდესაც n ლუწია) ან $\frac{n-1}{2}$ (თუ n კენტია) გამოსახავს, n-ჯერ წარმოებულ ცდაში, ხდომილობათა მოელი-

ნების უალბათიერეს რიცხვს, როდესაც $P=\frac{1}{2}$.

ახლა განვიხილოთ (2) მწკრივი, რომელშიაც შევიტანოთ: $n=6$, $P=\frac{2}{3}$ და $q=\frac{1}{3}$.

$$\frac{64}{729}+\frac{192}{729}+\frac{240}{729}+\frac{160}{729}+\frac{60}{729}\,\frac{12}{729}+\frac{1}{729}=1.$$

როგორც ვხედავთ, მწკრივი მოკლებულია სიმეტრიულობას და უდიდეს წევრად გადაიქცა არა შუა წევრი, არამედ ის წევრი, რომლისათვისაც $k=2$.

რაც უფრო განსხვავებული იქნება p და q, მით უფრო მოკლებული იქნება მწკრივი სიმეტრიულობას.

ვთქვათ, ცდას აწარმოებენ n-ჯერ, საძიებელია P ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობა, რომლის ალბათობა არის p, მოგვევლინება არა ნაკლებ a — ჯერისა და არა უმეტეს b — ჯერისა. ცხადია, რომ საძიებელი ალბათობა უდრის ალბათობათა ჯამს, რომელნიც ესატყვისება A ხდომილობის მოვლინებას a-ჯერ, $(a+1)$-ჯერ, $(a+2)$-ჯერ$\cdots$ და ა. შ. და ბოლოს b-ჯერ. ყოველი ხსენებული ალბათობა გამოისახება $(p+q)^n$ ბინომის წევრის სახით:

$$C_n^k p^{n-k} q^k,$$

რომელშიაც k ღებულობს ყველა მთელ მნიშვნელობას a-დან b-მდე ამნაირად,

$$P=\sum_{k=a}^{k=b} C_n^k p^{n-k} q^k.$$

67. სტირლინგის ფორმულა

ცდის მრავალჯერ განმეორებისას, ალბათობის გამოთვლის სიძნელე მდგომარეობს ნიუტონის (Isaak Newton 1643—1727) ბინომის კოეფიციენტების გამოანგარიშებაში, რომელთა ზოგადი სახეა:

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-k)}$$

როდესაც n და k წარმოადგენენ დიდ რიცხვებს, მაშინ გვიხდება მრავალი თანმიმდევრობითი რიცხვის გადამრავლება. ეს გამოთვლა ფრიად გამარტივებულია სტირლინგის მიერ (Iames Stirling 1696 —

— 1770) მოწოდებული მიახლოებითი ფორმულის დახმარებით, სა-ხელდობრ

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \tag{4}$$

ამ ფორმულის გამოსაყვანად პირველ ყოვლისა საჭიროა:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n=n^n\varphi(n) \tag{5}$$

და შეუდგეთ $\varphi(n)$ ფუნქციის განსაზღვრას.

მივუმატოთ ამ უკანასკნელი გამოხატულების მარცხენა ნაწილს კიდევ ერთი $n+1$ მამრავლი:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n\,(n+1)=(n+1)^{n+1}\varphi\,(n+1)$$

ანუ

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n=n^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\varphi(n+1).$$

საიდანაც (5)-ის მიხედვით

$$\varphi\,(n+1)=\varphi\,(n)\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^n,$$

ხოლო აქედან

$$\psi\,(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\varphi\,(n) \tag{6}$$

როგორც ცნობილია,

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

ამიტომ მამრავლი $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$, როდესაც n ფრიად დიდია, თავისი მნიშვნელობით უახლოვდება e^{-1}-ს, და მაშასადამე. (6) გამოხატულებაში, მარცხენა ნაწილისათვის ყოველი ახალი მამრავლის მიმატება ცვლის $\varphi\,(n)$ ფუნქციას ისეთნაირად, რომ მასში ყოველთვის შეიძლება e^{-1} ფაქტორის გამოყოფა. ნათქვამის მიხედვით, შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი გამოხატულება:

$$\varphi\,(n)=e^{-n}\psi\,(n),$$

იმ რწმენით, რომ $\psi(n)$, n-ის ცვლასთან დაკავშირებით, იცვლება გაცილებით უფრო ნელა, ვიდრე $\varphi\,(n)$. ამნაირად, (5)-ის მიხედვით, გვექნება:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n=n^n e^{-n}\psi(n) \tag{7}$$

ახლა გამოვარკვიოთ $\psi(n)$ ფუნქციის სახე.

დავუმატოთ (7) ფორმულის მარცხენა ნაწილს $(n+1)$ მამრავლი:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n\,(n+1)=(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}\psi\,(n+1),$$

ანუ

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n=n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot e^{-(n+1)}\psi\,(n+1).$$

მიღებული გამოხატულება გავყოთ (7)-ზე; მივიღებთ:

$$\frac{\psi\,(n+1)}{\psi\,(n)}=e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \tag{8}$$

ვთქვათ აქ

$$Z=e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

ავილოთ ამ უკანასკნელის ლოგარითმი, დავშალოთ იგი მწკრივად, დაშლაში უკუვაგდოთ $\frac{1}{n^3}$ რიგის წევრები; გვექნება:

$$\lg Z=1-n\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{2n};$$

მაშასადამე,

$$Z=e^{\frac{1}{2n}}.$$

დავშალოთ ეს უკანასკნელი მწკრივად და შევიზღუდოთ დაშლაში $\frac{1}{n}$ რიგის წევრებით; მივიღებთ:

$$Z=1+\frac{1}{2n}.$$

იმავე რიგის სიზუსტით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$1+\frac{1}{2n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}.$$

ამნაირად (8) გამოხატულება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{\psi\,(n+1)}{\psi\,(n)}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}. \tag{9}$$

ახლა მივიღოთ

$$\psi(n)=\sqrt{n}\cdot F(n). \tag{10}$$

მაშინ (7)-ის მიხედვით გვექნება:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n=n^{n}e^{-n}\sqrt{n}\cdot F(n) \tag{11}$$

$F(n)$ ფუნქციის განსაზღვრელად ვისარგებლოთ ვალისის (Iohn Wallis 1616—1703) მიერ მოცემული ქვემორე გამოხატულებით:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots\frac{(2n)\cdot(2n)}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \tag{12}$$

გარდავქმნათ ამ გამოხატულების მრიცხველი და მნიშვნელი.

$$\frac{\pi}{2}=\frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n)\cdot(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots(2n-1)(2n+1)}=$$

$$=\frac{(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdots 2n)\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdots 2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}=$$

$$=\frac{2^{n}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)\cdot 2^{n}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots(2n-1)(2n+1)}=$$

$$=\frac{2^{2n}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)^{2}}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots(2n-1)(2n+1)}.$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2^{2n}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)^{2}\cdot 2^{2n}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)^{2}}{1\cdot\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots(2n-1)(2n+1)\cdot 2^{2n}(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)^{2}}=$$

$$=\frac{2^{4n}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)^{4}}{(2n+1)\cdot[1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n-1)]\cdot[1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n-1)]\cdot[2^{n}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)]\cdot[2^{n}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)]}=$$

$$=\frac{2^{4n}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)^{4}}{(2n+1)[1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n-1)]\cdot[1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n-1)]\cdot[2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n]\cdot[2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n]}=$$

$$=\frac{2^{4n}(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)^{4}}{(2n+1)[1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdots(2n-1)\cdot 2n]\cdot[1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdots(2n-1)\cdot 2n]}=$$

$$=\frac{2^{4n}(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n)^{4}}{(2n+1)(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 2n)^{2}}.$$

მიღებულ გამოხატულებაში შევიტანოთ (11)

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2^{4n}[n^n e^{-n}\sqrt{n}\,F(n)]^4}{(2n+1)[(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}\,F(2n)]^2}=$$

$$=\frac{2^{4n}n^{4n}e^{-4n}n^2[F(n)]^4}{(2n+1)2^{4n}n^{4n}e^{-4n}2n\,[F(2n)]^2}=\frac{n}{2(2n+1)}\quad\frac{[F(n)]^4}{[F(2n)]^2}.$$

აქედან

$$\frac{[F(n)]^4}{[F(2n)]^2}=\frac{(2n+1)}{n}\pi=\left(2+\frac{1}{n}\right)\pi. \tag{13}$$

(13) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ როდესაც n წარმოადგენს ფრიად დიდ რიცხვს, მაშინ ფუნქცია $F(n)$ არ არის n-ზე დამოკიდებული, და ამიტომ შეგვიძლია მივიღოთ $F(n)=F(2n)$. მაშასადამე, (13) ფორმულას მიეცემა ასეთი სახე:

$$F(n)=\sqrt{2\pi} \tag{14}$$

შევიტანოთ ეს (14) გამოხატულება (11) ფორმულაში; გვექნება:

$$1\cdot2\cdot3\cdots n=\sqrt{2\pi n}\cdot e^{-n}\cdot n^n \tag{15}$$

მიღებული ფორმულის სიზუსტის გამოსაცდელად მივიღოთ $n=20$; გამოთვლა მოგვცემს:

$$1\cdot2\cdot3\cdots20=2432902008176640000$$

$$e^{-20}\cdot20^{20}\cdot\sqrt{40\pi}=2422786385510400000$$

ამ ორი რიცხვის თანაფარდობა არის:

100417.

68. A ხდომილების (რომლის ალბათობა არის P) მოვლინებისა და არამოვლინების უალბათიერესი რიცხვი, როდესაც ცდა განმეორებულია მრავალჯერ

ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილება განმეორდება k-ჯერ, 66 §-ის ძალით იქნება:

$$C^k_n p^k q^{n-k}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{1\cdot2\cdot3\cdots k\cdot1\cdot2\cdot3\cdots(n-k)}\,p^k q^{n-k}.$$

უალბათიერესი k რიცხვი A ხდომილობის მოვლინებათა, ცხადია, ესატყვისება $(q+p)^n$ ბინომის უდიდეს წევრს. ავღნიშნოთ საძიებელი k რიცხვი α — ასოთი, ზოგადი წევრი მწკრივისა $k=\alpha$-თვის არის

$$P_\alpha=C^\alpha_n p^\alpha q^{n-\alpha},$$

ხოლო ორი მისი მეზობლისა: წინარისა

$$P_{\alpha-1}=C_n^{\alpha-1}p^{\alpha-1}q^{n-\alpha+1}$$

და მომდევნოსი

$$P_{\alpha+1}=C_n^{\alpha+1}p^{\alpha+1}q^{n-\alpha-1}$$

იმისათვის, რომ P იყოს უდიდესი, საჭიროა და საკმარისი, რომ

$$\left.\begin{array}{r} P_\alpha \geqq P_{\alpha-1} \\ \text{და} \qquad P_\alpha \geqq Q_{\alpha+1} \end{array}\right\} \tag{16}$$

მივიღებთ რა მხედველობაში P_α, $P_{\alpha-1}$ და $P_{\alpha+1}$-ის მნიშვნელობას, დავწერთ:

$$C_n^\alpha p^\alpha q^{n-\alpha} \geqq C_n^{\alpha-1}p^{\alpha-1}q^{n-\alpha+1},$$

$$C_n^\alpha p^\alpha q^{n-\alpha} \geqq C_n^{\alpha+1}p^{\alpha+1}q^{n-\alpha-1}.$$

აქედან

$$C_n^\alpha p \geqq C_n^{\alpha-1}q,$$

$$C_n^\alpha q \geqq C_n^{\alpha+1}p.$$

ამის შემდეგ გვექნება:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-\alpha+2)\cdot(n-\alpha+1)}{1\cdot 2\cdots(\alpha-1)\cdot\alpha}\cdot p \geqq \frac{n(n-1)\cdots(n-\alpha+2)}{1\cdot 2\cdots(\alpha-1)}\cdot q$$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-\alpha+1)}{1\cdot 2\cdots\alpha}\cdot q \geqq \frac{n(n-1)\cdots(n-\alpha+1)(n\cdot\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\alpha\,(\alpha+1)}\cdot q$$

შეკვეცის შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{n-\alpha+1}{\alpha}\cdot p \geqq q$$

$$q \geqq \frac{n-\alpha}{\alpha+1}\cdot p$$

ანუ

$$(n-\alpha+1)\,p \geqq \alpha q,$$

$$(\alpha+1)\,q \geqq (n-\alpha)p.$$

აქედან

$$np-\alpha p+p \geqq \alpha q,$$

$$\alpha q+q \geqq np-\alpha p.$$

შემდეგ გვექნება:

$$np+p \geqq \alpha p+\alpha q,$$

$$\alpha p+\alpha q+q \geqq np.$$

რადგანაც

$$p+q=1,$$

ამიტომ ზემორე უტოლობანი მიიღებენ ასეთ სახეს:

$$np+p \geqq \alpha;$$

$$\alpha+q \geqq np,$$

ანუ

$$\left.\begin{aligned} np+p &\geqq \alpha, \\ \alpha &\geqq np-q \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

როგორცა ვხედავთ, α რიცხვი მოქცეულია ორ ზღვარს შორის; ამ უკანასკნელთა სხვაობა უდრის:

$$np+p-(np-q)=p+q=1$$

მაშასადამე, α რიცხვი მოქცეულია ორ დადებით რიცხვს შორის, რომელთა სხვაობა უდრის ერთს; ხოლო რადგანაც α წარმოადგენს მთელ რიცხვს, ამიტომ მისი მნიშვნელობა სავსებით განისაზღვრება ზემოთ მონახული (17) უტოლობებით.

მაგალითად, 66 §-ში მოყვანილი მაგალითი, რომელშიაც მიღებული იყო $n=6$, $P=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, მოგვცემს (17)-ის მიხედვით:

$$6\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \geqq \alpha$$

$$\alpha \geqq 6\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$

ცხადია, რომ განხილად შემთხვევაში $\alpha \doteq 3$.

იმავე 66 §-ის მეორე მაგალითში მოცემული იყო $n=7$, $P=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$; გვექნება

$$7\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \geqq \alpha,$$

$$\alpha \geqq 7\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2},$$

საიდანაც

$$4 \geqq \alpha \geqq 3$$

ამ შემთხვევაში განურჩევლად შეიძლება მიღებული იყოს

$$\alpha=3 \text{ ან } \alpha=4$$

66 §-ის მესამე მაგალითში მოცემული იყო $n=6$, $P=\frac{1}{3}$, $q=\frac{2}{3}$; გვექნება:

$$6\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\geqq\alpha,$$

$$\alpha\geqq6\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{3},$$

საიდანაც

$$2\cdot\frac{1}{3}\geqq\alpha\geqq1\cdot\frac{1}{3},$$

და, მაშასადამე,

$$\alpha=2.$$

ამნაირად, თუ $n=10000$, $P=\frac{1}{3}$ და $q=\frac{2}{3}$, მაშინ

$$\left(10000\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\geqq\alpha,$$

$$\alpha\geqq\left(10000\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3},$$

საიდანაც

$$3333\,\frac{2}{3}\geqq\alpha\geqq3332\cdot\frac{2}{3}.$$

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში $\alpha=3333$.

როდესაც n ფრიად დიდი რიცხვია, შეგვიძლია მივიღოთ, (17)-ის მიხედვით,

$$\alpha=np \tag{18}$$

ვინაიდან p და q მუდამ ერთზე ნაკლებია, მაგალითად ზემო მაგალითისათვის

$$np=3333\,\frac{1}{3},$$

რაც მხოლოდ $\frac{1}{3}$-ით არის 3333-ზე მეტი.

საწინაღო ხდომილობის მოვლინებათა უალბათიერესი რიცხვი იქნება

$$n-np=nq \tag{19}$$

ზემო ნათქვამიდან დავასკვნით, რომ ცდის დიდი რიცხვის შემთხვევაში, რომელიმე ხდომილების მოვლინების უალბათიერესი რიცხვი უდრის ყველა ცდის რიცხვს, გადამრავლებულს ამ ხდომილობის ალბათობაზე.

69. A ხდომილობის მოვლინების უდიდესი ალბათობის გამოთვლა ცდის n-ჯერ განმეორების შემთხვევაში

საძიებელი P ალბათობა გამოისახება $C_n^\alpha p^\alpha q^{n-\alpha}$-თი, რომელშიაც

$$\alpha=np \text{ და } n-\alpha=nq.$$

მისი გამოხატულება იქნება

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots np\; 1\cdot 2\cdot 3\cdots nq}\cdot p^{np}q^{nq}.$$

გამოვიყენოთ აქ სტირლინგის ფორმულა და მივიღებთ საძიებელი ალბათობის მიახლოებით მნიშვნელობას:

$$P=\frac{e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}\, p^{np}q^{nq}}{e^{-np}(np)^{np}\sqrt{2\pi_{np}}\, e^{-nq}\,(np)^{nq}\sqrt{2\pi_{nq}}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi_{npq}}}. \tag{20}$$

70. ბერნულის თეორემა

თუ რომელიმე ცდის წარმოების დროს შესაძლებელია მოვლინება შემთხვევითი A ხდომილობისა, რომლის ალბათობა არის p, მაშინ, როგორც ეს იყო აღნიშნული 68 §-ში, მის მოვლინებათა უალბათიერესი რიცხვი, n-ჯერი ცდის შემთხვევაში, იქნება np, მაგრამ იმავე დროს მისი ალბათობა, (20) ფორმულის მიხედვით, მიისწრაფის ნულისაკენ n-ის ზრდასთან დაკავშირებით.

ეხლა საკითხი ისმება იმის შესახებ, თუ რას უნდა უდრიდეს ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობის მოვლინებათა რიცხვი, n-ჯერი ცდის შემთხვევაში, მოქცეული იქნას ზღვართა შორის, რომლებიც დაშორებული იქნებიან np-ს, ორივე მხრით, განსაზღვრული α რაოდენობით.

ამავე პასუხს იძლევა ბერნულის (Iacob Bernoulli 1654) თეორემა.

უკვე ცნობილი წესით აღვნიშნოთ ალბათობა იმისა, რომ A ხდო-

მილობა, n-ჯერი ცდის შემთხვევაში, მოგვევლინება $(np-h)$-ჯერ, სადაც h-ის ქვეშ ნაგულისხმევი გვექნება, n-თან შედარებით, თვით $\sqrt{n}$-თან შედარებითაც კი, — მცირედი რიცხვი. საძიებელი P_n ალბათობის გამოხატულება, სტირლინგის ფორმულის დახმარებით, გარდავქმნათ შემდეგნაირად (§—69):

$$P_h=C_n^{np-h}q^{nq-h}q^{nq+h}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot p^{np-h}q^{nq-h}}{1\cdot2\cdot3\cdots(np-h)1\cdot2\cdot3\cdots(nq+n)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{h}{np}\right)^{np-h+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{n}{nq}\right)^{nq+h+\frac{1}{2}}} \qquad (21)$$

უგულვებელვყოთ $\frac{1}{n^3}$ რიგის წევრები ქვემორე ფარგლებში; გვექნება:

$$\lg\left(1-\frac{h}{np}\right)^{np-h+\frac{1}{2}}=\left(np-h+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{h}{np}-\frac{h}{2n^2p^2}\right).$$

$$\lg\left(1+\frac{h}{nq}\right)^{nq+h+\frac{1}{2}}=\left(np+h+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{h}{nq}-\frac{h}{2n^2q^2}\right).$$

ამ საფუძველზე, როდესაც უგულვებელვყოფთ $\frac{1}{n^2}$ რიგის წევრებს, მივიღებთ:

$$\lg\left(1-\frac{h}{np}\right)^{np-h+\frac{1}{2}}+\lg\left(1+\frac{h}{nq}\right)^{nq+h+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{n^2}{2n}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)+\frac{h}{2n}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right).$$

რადგანაც $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{pq}$, ამიტომ

$$\left(1-\frac{h}{np}\right)^{np+h+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{h}{np}\right)^{np+h+\frac{1}{2}}=e^{\frac{h^2}{2npq}}\left(1+\frac{p-q}{n}\right)$$

შევიტანოთ ეს უკანასკნელი (21)-ში; გვექნება:

$$P_h=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot e^{-\frac{h^2}{2npq}}\left(1-\frac{p-q}{n}\right) \qquad (22)$$

მიღებული ფორმულა გამოხატავს იმის ალბათობას, რომ A ხდომილობის მოვლინებათა რიცხვი, n-ჯერი ცდის შემთხვევაში, დაშორებული იქნება np-ს h ოდენობით, როდესაც $p=q$, მაშინ გამოხატულება ფრჩხილებში ერთის თანასწორია. საერთოდ კი წილადი $\frac{p-q}{h}$ წარმოადგენს მცირე ოდენობას, ვინაიდან h რიცხვი მუდამ მთელია; ამიტომ ეს წილადი შეიძლება უკუგდებულ იქნას და მაშინ (22) ფორმულა მიიღებს გამარტივებულ სახეს:

$$P_h=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{h^2}{2npq}} \tag{23}$$

ამ (23) გამოხატულებაში მივცეთ h-ს ყველა თანმიმდევრობითი მნიშვნელობა განსაზღვრულ a და b ფარგლებში და შემდეგ შედეგები შევაჯამოთ, მივიღებთ:

$$P_{a,\,b}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\, npq}}\sum_{h=a}^{h=b}e^{-\frac{h^2}{2npq}} \tag{24}$$

ეს ფორმულა გამოხატავს იმის ალბათობას, რომ A ხდომილობის მოვლინებათა რიცხვი, n-ჯერი ცდის შემთხვევაში, მოქცეული იქნება a და b ზღვარის ფარგლებში.

მივიღოთ ქვედა ზღვარი $-\alpha$-ს თანასწორად, ზედა ზღვარი $+\alpha$-სი, მაშინ, ვიქონიებთ რა მხედველობაში, რომ ფუნქცია $e^{-\frac{h^2}{2npq}}$ ლუწია, გვექნება:

$$P_{-\alpha,+\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\sum_{-\alpha}^{+\alpha}e^{-\frac{h^2}{2npq}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{o}^{\alpha}e^{-\frac{h}{2npq}}\frac{1}{\sqrt{2\,npq}}. \tag{25}$$

ეს ფორმულა გამოხატავს იმის ალბათობას, რომ A ხდომილების მოვლინებათა რიცხვი (აღვნიშნოთ იგი K ასოთი) დაშორებული იქნება nq-ს რაოდენობით, რომელიც აბსოლუტური მნიშვნელობით α-ზე ნაკლები იქნება, ე. ი. იგი იქნება ალბათობა შემდეგი უტოლობისა:

$$\left.\begin{array}{c}-\alpha<np-k<+\alpha, \\ \text{ანუ} \quad -\frac{\alpha}{n}<p-\frac{K}{n}<+\frac{\alpha}{n}\end{array}\right\}. \tag{26}$$

h არგუმენტი (25) გამოხატულებაში წყვეტადი რიცხვია; იგი წარმოადგენს მთელ რიცხვს და, მაშასადამე, იცვლება ყოველ ერთეულზე.

ამ მოსაზრებით გარდავქმნათ (25) გამოხატულება, რისთვისაც შევიტანოთ მასში ახალი ცვლადი შემდეგი აღნიშნულებით:

$$\frac{h}{\sqrt{2npq}}=t. \tag{27}$$

როდესაც h იცვლის მნიშვნელობას o-სა და α-ს შორის, მაშინ t განიცდის ცვლილებას O-სა და $\frac{h}{\sqrt{2npq}}$-ს შორის.

თუ h-ს მივუმატებთ ერთს, მაშინ t იცვლება Δt-თი და გვექნება:

$$\frac{h+1}{\sqrt{2npq}}-t=\Delta t,$$

საიდანაც

$$\Delta t=\frac{1}{\sqrt{2npq}}.$$

მაშასადამე, (25) გამოხატულებას მიეცემა ასეთი სახე:

$$P_{-\alpha,+\alpha}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{o}^{\frac{\alpha}{\sqrt{2npq}}} e^{-t^2}\Delta t. \tag{28}$$

შევიტანოთ აქ აღნიშვნები

$$g=\frac{\alpha}{\sqrt{2npq}}. \tag{29}$$

როდესაც ცდების n რიცხვი ფრიად დიდია, მაშინ t ცვლადი შეგვიძლია ვიგულვოთ როგორც განუწყვეტლივ ცვალებადი, ხოლო Δt როგორც უსასრულოდ მცირე ოდენობა, ამიტომ ასეთ შემთხვევაში (28) გამოხატულება მიიღებს სახეს:

$$P_{-\alpha,+\alpha}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{o}^{g} e-t^2 dt. \tag{30}$$

მაშასადამე, $P_{-\alpha,+\alpha}$ წარმოადგენს g ზღვარის ერთგვარ ფუნქციას:

$$P_{-\alpha,+\alpha}=F(g) \tag{31}$$

(26), (29) და (30) გამოხატულების ძალით ჩვენ მივალთ შემდეგ დასკვნამდე: ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილობის მოვლინებათა რიცხვი, ცდების n რიცხვის შემთხვევაში, არ განსხვავდება np-საგან α ოდენობაზე მეტად, ანუ, რაც ერთი და იგივეა, რომ A ხდომილო-

ბის მოვლინებათა k რიცხვის შეფარდება ყველა ცდის რიცხვთან $\left(ე.\ ი.\ \frac{k}{n}\right)$ განსხვავებული იქნება A ხდომილობის ალბათობისაგან ნებისმიერად მცირედი $\frac{\alpha}{n}$ ოდენობით, გამოისახება ფუნქციით:

$$F(g)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{g} e^{-t^2}dt. \qquad (32)$$

$F(g)$ ფუნქციის ტაბულა გვიჩვენებს, რომ $F(g)$ ფუნქცია, g ოდენობის ზრდასთან დაკავშირებით, ფრიად სწრაფად უახლოვდება ერთეულს და გადაიქცევა ერთის თანასწორად, როდესაც $g=\infty$.

თუ დავხაზავთ მრუდს $y=F(x)$, დავრწმუნდებით, რომ ეს მრუდი, დაწყებული კოორდინატთა სათავეში, მიემართება ასიმპტოტურად და განუწყვეტლივ უახლოვდება სწორს, რომელიც X-ების ღერძის სწვრივი იქნება და დაშორებული იქნება მისგან $+1$ — ით.

ქვემოთ მოყვანილია $F(g)$ ფუნქციის კერძო მნიშვნელობათა ტაბულა.

g	$F(g)$	g	$F(g)$	g	$F(g)$
0,00	0,000	0,70	0,678	1,40	0,952
0,05	0,056	0,75	0,711	1,45	0,960
0,10	0,112	0,80	0,742	1,50	0,966
0,15	0,168	0,85	0,771	1,55	0,972
0,20	0,223	0,90	0,797	1,60	0,976
0,25	0,276	0,95	0,821	1,65	0,980
0,30	0,329	1,00	0,843	1,70	0,984
0,30	0,379	1,05	0,862	1,70	0,987
0,40	0,428	1,10	0,880	1,80	0,989
0,45	0,425	1,15	0,896	1,85	0,991
0,05	0,520	1,20	0,910	1,90	0,993
0,55	0,563	1,25	0,923	1,95	0,994
0,60	0,604	1,30	0,934	2,00	0,995
0,65	0,642	1,35	0,944	2,25	0,9985
0,70	0,678	1,40	0,952	2,50	0,9996
—	—	—	—	3,00	0,99997
—	—	—	—	—	1,000

ცხრილი გვიჩვენებს, რომ უკვე მცირედი არგუმენტისათვის $F(g)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი ფრიად მიახლოებულია ერთეულთან.

ცხადია, ცდების ყველანაირი n რიცხვისათვის, მუდამ შესაძლებელია ისეთი α ზღვარის შერჩევა, რომლისათვისაც, — ალბათობით, რო-

მელიც ნებისმიერად ახლობელი იქნება ერთეულთან, — A ხდომილების მოვლინებათა რიცხვი არ გადასცილდება უალბათიერეს np რიცხვს α ოდენობაზე მეტად.

n რიცხვის ზრდასთან ერთად იზრდება ამ α ზღვარის აბსოლუტური მნიშვნელობაც, მაგრამ ამასთანავე მისი შეფარდებითი მნიშვნელობა, ე. ი. შეფარდება $\frac{\alpha}{n}$ იმავე პირობებში ისწრაფის ნულისაკენ. მართლაც და, ცდების n რიცხვის შემთხვევაში, $F(g)$ ალბათობის მიღწევით, მოსალოდნელია, რომ A ხდომილების მოვლინებათა რიცხვი არ გადასცილდება

$$\alpha = g\sqrt{2npq} \tag{33}$$

ზღვარს, რომლის შეფარდებითი მნიშვნელობა არის

$$\frac{\alpha}{n} = g\sqrt{\frac{2pq}{n}} \tag{34}$$

როდესაც n უსაზღვროდ იზრდება, α-ც იზრდება $\sqrt{n}$-ის პროპორციულად და იმავე დროს $\frac{\alpha}{n}$ ისწრაფვის ნულისაკენ.

მაშასადამე, ბერნულის თეორემა შეიძლება ფორმულირებული იყოს შემდეგნაირად:

ალბათობა იმისა, რომ სხვაობა $\frac{k}{n}$ შეფარდებისა (სადაც k არის A ხდომილების მოვლინებათა მოსალოდნელი რიცხვი, ხოლო n განზრახულ ცდათა რიცხვი) და A ხდომილების p ალბათობას შორის არ გადასცილდება მოცემულ $\frac{\alpha}{n}$ რიცხვს, სწრაფად მიილტვის ერთისაკენ n-ის ზრდასთან დაკავშირებით, ხოლო ცდათა ფრიად დიდი რაოდენობის შემთხვევაში ეს ალბათობა მიახლოებულია ერთთან უკვე მაშინ, როდესაც α-ს მნიშვნელობანი შედარებით n-თან არაფრისებრია.

$\frac{k}{n}$ შეფარდება იწოდება ხდომილების სიხშირედ.

მაშასადამე, სიხშირის ზღვარი წარმოადგენს ხდომილობის ალბათობას.

$$\lim \frac{k}{n} = p. \tag{35}$$

$n=\infty$

ბერნულის თეორემიდან გამომდინარეობს დიდ რიცხვთა კანონის შემდეგი კერძო გამოთქმა: როდესაც ცდის განმეორებათა რიცხვი უსასრულოდ ზრდადია, მაშინ ამ ცდისადმი თვისებული შემთხვევითი ხდომილების მოვლინებათა მოსალოდნელი რიცხვის შეფარდება ცდათა საერთო რიცხვთან ისწრაფის ამ ხდომილების ალბათობისაკენ.

მაგალითი. რას უნდა უდრიდეს ალბათობა იმისა, რომ, 100-ჯერ გაზომვის შემთხვევაში, მიღებული [იქნას 40-დან 60-მდე დადებითი ცდომილება.

შემთხვევით ცდომილებათათვის დადებითი ცდომილების ალბათობა არის $\frac{1}{2}$. მაშასადამე, დადებითი ცდომილებების მოვლინებათა უალბათიერესი რიცხვი იქნება

$$100\cdot\frac{1}{2}=50.$$

სიხშირე არის $\frac{40}{100}=\frac{2}{3}$-დან $\frac{60}{100}$-მდე, აქედან

$$\frac{\alpha}{n}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{10},$$

(34) ფორმულის მიხედვით გვექნება:

$$g=\frac{\alpha}{n}\sqrt{\frac{n}{2pq}}=\frac{1}{10}\sqrt{\frac{100}{2\cdot\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}}}=1,41.$$

ალბათობათა ტაბულა მიღებული $g=1,41$-თვის მოგვცემს

$$P_{-\frac{1}{10},+\frac{1}{10}}=0,954.$$

ამნაირად, 100-ჯერ გაზომვის შემთხვევაში, დადებით ცდომილებათა ისეთი რიცხვის მიღების შესაძლებლობა, რომელიც დაშორებული იქნებოდა მის უალბათიერეს მნიშვნელობას (50-ს) 10-ზე მეტად, საკმაოდ მცირე გამოდის. მისი ალბათობა 5 %-ზე ნაკლებია.

71. მათემატიკური მოლოდინი

მათემატიკური მოლოდინის ცნების გასაშუქებლად, განვიხილოთ ასეთი მაგალითი: რომელიმე M პიროვნებას აქვს a მანეთად ღირებული ნივთი, რომელსაც იგი აგდებს ლატარიაში უმოგებოდ და უზარალოდ.

თუ ბილეთების რიცხვი იქნება n, მაშინ ცალკეული ბილეთის ღირებულება იქნება $\frac{a}{n}$. N პიროვნება ყიდულობს m ბილეთს და ამნაირად ხდება ხსენებული ნივთის მოსალოდნელ მფლობელად. თუ ეს პიროვნება ნივთს მოიგებს, მაშინ მას შეუძლია გაყიდოს იგი a მანეთად, მაგრამ ლატარიის გათამაშებამდე მას ხელთ აქვს მხოლოდ ბილეთები ღირებული $\frac{a}{n} \cdot m$ მანეთად. როგორც ვიცით, $\frac{m}{n} = P$ არის მოგების ალბათობა N პიროვნებისათვის; მაშასადამე,

$$\frac{a}{n} \cdot m = ap$$

ამნაირად, ნივთის ღირებულება N პიროვნებისათვის გათამაშებამდე გამოისახება მისი სრული a ღირებულებით, გადამრავლებული მოგების p ალბათობაზე.

ნათქვამის შესაბამისად, თუ მოიპოვება რომელიმე ოდენობა, რომელსაც შეეძლება მიიღოს სხვადასხვანაირი მნიშვნელობა

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \cdots a_n.$$

რომელთა მოვლინების ალბათობა შესაბამისად იქნება

$$P_1,\ P_2,\ P_3, \cdots P_n,$$

მაშინ, ალბათობის თეორიის მიხედვით, გამოხატულება

$$a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + \cdots + a_np_n,$$

იწოდება x ოდენობის მათემატიკურ მოლოდინად, ეს უკანასკნელი შემოკლებით აღინიშნება მმ ასოებით, ასე რომ

$$\text{მმ}\ (x) = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + \cdots + a_np_n \tag{36}$$

აქ

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1. \tag{37}$$

მათემატიკური მოლოდინის იდეისა და მნიშვნელობის გამოსარკვევად გაზომვათა თვალსაზრისით, წარმოვიდგინოთ, რომ ყუთში მოქცეულია:

$$\left.\begin{array}{llll} 1\text{ — ლი სერია} & k_1 & \text{ბურთულებისა წარწერით რიცხვისა} & a_1 \\ \text{მე-2} & k_2 & & a_2 \\ \text{მე-3} & k_3 & & a_3 \\ \cdot & & & \\ n\text{-ური} & k_n & \text{,,} & a_n \end{array}\right\} 38$$

საერთო რიცხვი ბურთულებისა

$$K=k_1+k_2+k_3+\cdots+k_n.$$

წარმოებს ცდები, რომელნიც მდგომარეობს იმაში, რომ ყუთიდან ანდეზე ამოიღება ერთი ბურთულა, ჩაიწერება მასზე დანიშნული რიცხვი და მერე იგი უკან ჩაიგდება და ბურთულები გულდასმით აირევა. ცდების რიცხვია N. ვთქვათ, ამ დროს აღმოჩნდა, რომ

1 — ლი	სერიის ბურთულები ამოღებული	იყო	m_1-ჯერ
მე-2	"		m_2-ჯერ
მე-3			m_3-ჯერ
.			
n-ური			m_n-ჯერ

ცხადია, რომ

$$m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n=N$$

გამოვთვალოთ ყველა ჩაწერილი რიცხვის არითმეტიკული შუადი; მივიღებთ:

$$x_0=\frac{a_1m_1+a_2m_2+a_3m_3+\cdots+a_nm_n}{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n}=$$

$$=\frac{a_1m_1+a_2m_2+a_3m_3+\cdots+a_nm_n}{N},$$

საიდანაც

$$x_0=a_1\cdot\frac{m_1}{N}+a_2\cdot\frac{m_2}{N}+a_3\cdot\frac{m_3}{N}+\cdots+a_n\cdot\frac{m_n}{N} \tag{39}$$

აქ

$$\frac{m_1}{N},\ \frac{m_2}{N},\ \frac{m_3}{N},\qquad \frac{m_n}{N}$$

რიცხვები წარმოადგენენ $a_1, a_2, a_3\cdots a_n$ რიცხვების მოვლინების სიხშირეს, ხოლო მათი ალბათობა შესაბამისად არის:

$$p_1=\frac{k_1}{K},\quad p_2=\frac{k_2}{K},\quad p_3=\frac{k_3}{K},\qquad p_n=\frac{k_n}{K} \tag{40}$$

თუ N რიცხვი განუზღვრელად ზრდადია, მაშინ (39)-ის ზღვარზე გადასვლისას გვექნება:

$$\lim x_0=a_1,\quad \lim\frac{m_1}{N}+a_2,\lim\frac{m_2}{N}+a_3,\lim\frac{m_3}{N}+\cdots+a_n\lim\frac{m_n}{N}. \tag{41}$$

ბერნულის (35) ფორმულის ძალით, როდესაც $N\to\infty$, მაშინ

$$\lim \frac{m_1}{N}=p_1, \quad \lim \frac{m_2}{N}=p_2, \quad \lim \frac{m_3}{N}=p_3, \ldots \quad \lim \frac{m_n}{N}=p_n,$$

და (41) ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\lim x_0=a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3+\cdots+a_np_n. \tag{42}$$

ამ გამოხატულების (36) ფორმულისათვის დაპირისპირება მოგვცემს:

$$მმ\,(x)=\lim_{N\to\infty} x_0. \tag{43}$$

მაშასადამე, რომელიმე შემთხვევითი ოდენობის მათემატიკური მოლოდინი წარმოადგენს ამ ოდენობის ყველა ცალკეული მნიშვნელობის არითმეტიკული შუადის ზღვარს, როდესაც ცდათა რიცხვი განუზღვრელად ზრდადია. მეორეს მხრით ცნობილია, რომ რომელიმე X ოდენობის მრავალჯერი გაზომვის შემთხვევაში, ტოლზუსტ გაზომვათა არითმეტიკული შუადის ზღვარი უდრის მის ჭეშმარიტ X მნიშვნელობას, ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty} x_0=X. \tag{44}$$

(43) და (44) ტოლობათა დაპირისპირება მიგვიყვანს იმ დასკვნამდე, რომ

$$მმ\,(x)=X. \tag{45}$$

მაგალითად, კამათელის აგდების დროს ზემოთ წახნაგზე შეიძლება გამოჩნდეს ერთ-ერთი ექვს ციფრთაგანი: 1, 2, 3, 4, 5, 6. ცალკეული ციფრის მოვლინების ალბათობა არის $\frac{1}{6}$. ამიტომ (36) ფორმულის მიხედვით გვექნება:

$$მმ\,(x)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}=3\frac{1}{2}.$$

მაშასადამე, თუ კამათელის აგდების რიცხვი უსასრულოდ დიდია, მაშინ ყველა მოვლინებული ციფრის არითმეტიკული შუალედი $3\frac{1}{2}$-ის თანასწორი იქნება.

72. ამოცანები

1. მონახული იყოს ალბათობა იმისა, რომ დაკვირვების ცდომილება მოქცეული იქნება $-\alpha$ და $+\alpha$ ზღვარს შორის

პირველ ყოვლისა გარდავქმნით 8 §-ის (5) ფორმულას, რომელშიაც

აღვნიშნოთ:

$$h^2=\frac{1}{2m^2}, \quad h=\frac{1}{m\sqrt{2}}$$

იგი მიიღებს ასეთ სახეს:

$$P=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-h^2\Delta^2}d\Delta \tag{46}$$

ამოცანის საძიებელი P ალბათობა გამოიხატება ინტეგრალით:

$$P=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta$$

შევიტანოთ ამ გამოხატულებაში ახალი ცვლადი

$$h\Delta=y \tag{47}$$

გვექნება

$$P=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\alpha h}^{+\alpha h} e^{-y^2}dy=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\alpha h} e^{-y^2}dy. \tag{48}$$

საძიებელი P ალბათობის მოსანახად უნდა მივმართოთ (32) ფუნქციის ცნობილ ტაბულებს (70 §), საიდანაც $g=h\alpha$ არგუმენტისათვის გვექნება

$$P=F\,(h\alpha) \tag{49}$$

II. იმავე განხილული ამოცანისათვის მივიღოთ ახალი ზღვრები a და b, რომელთაგან $b>a$ წინანდებურად

$$P=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{a}^{b} e^{-y^2}dy.$$

რადგანაც

$$\int_a^b=\int_a^o+\int_o^b=\int_o^b-\int_o^a,$$

ამიტომ

$$P=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{bh} e^{-y^2}dy-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{ah} e^{-y^2}dy=\frac{1}{2}\,F(hb)-\frac{1}{2}\,F\,(ha). \tag{50}$$

III. ნაგულვებია ერთი რომელიმე ოდენობის n-ჯერ გაზომვა. უნდა განსაზღვრულ იქნას ისეთ ცდომილებათა უალბათიერესი რიცხვი, რომელიც მოქცეული იქნება $-\alpha$ და $+\alpha$ ზღვარს შორის.

აღვნიშნოთ საძიებელი რიცხვი k ასოთი და გავითვალისწინოთ ბერნულის თეორემა, რომლის მიხედვით, როდესაც n წარმოადგენს დიდ რიცხვს, შეგვიძლია უდიდესი ალბათობით ვიგულვოთ, რომ $\frac{k}{n}$ შეფარდება არ დასცილდება იმის ალბათობას, რომ ცდომილება მოქცეული იქნება $-\alpha$ და $+\alpha$ ზღვარს შორის. მაშასადამე, k-ის მიახლოებითი განსაზღვრისათვის გვექნება გამოხატულება

$$\frac{k}{n}=F(n\alpha),$$

საიდანაც

$$k=nF(h\alpha).$$

73. გაზომვის სიზუსტის ზომა

დავამყაროთ კავშირი სიზუსტის ზომასა და h პარამეტრს შორის ალბათობის გამოხატულებაში

$$P=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta.$$

ვთქვათ, გვაქვს ორი სხვადასხვა სიზუსტის განაზომი და პირველი განაზომი ზემო გამოხატულებაში ხასიათდება h_1 პარამეტრით, ხოლო მეორე h_2 პარამეტრით, ალბათობით, რომელიც თანასწორი იქნება

$$P_1=F(h_1\alpha),$$

ჩვენ შეგვიძლია ვიგულვოთ, რომ პირველი განაზომის ცდომილება გადაიხრება ნულიდან არა უმეტეს α ოდენობისა.

ალბათობით, რომელიც თანასწორი იქნება

$$P_2=F(h_2\alpha),$$

შეგვიძლია ვიგულვოთ, რომ მეორე განაზომის ცდომილება მოქცეული იქნება იმავე ზღვრებში. თუ $P_2>P_1$, მაშინ მეორე განაზომი პირველზე ზუსტია: თუ $P_2=P_1$, მაშინ ორივე განაზომი ერთი სიზუსტისაა, ხოლო თუ $P_2<P_1$, მაშინ მეორე განაზომი პირველზე ტლანქია.

(48) ფორმულა ცხადჰყოფს, რომ ერთისა და იმავე α-თვის P მატულობს h-ის ზრდასთან დაკავშირებით. მაშასადამე, პირველ შემთხვევაში $h_2>h_1$, მეორეში $h_2=h_1$ და მესამეში $h_2<h_1$. ამნაირად,

h პარამეტრი იზრდება გაზომვათა სიზუსტის ზრდასთან დამოკიდებულებით.

მიღებულია დაკვირვებათა სიზუსტის გაზომვა h კოეფიციენტის სიდიდის საშუალებით, ამიტომ ხსენებული კოეფიციენტი იწოდება **სიზუსტის საზომად**.

1. სიზუსტის საზომის უალბათიერესი მნიშვნელობის მონახვა

სიზუსტის საზომი შეიძლება განსაზღვრულ იქნას ერთნაირი სიზუსტის რამდენიმე გაზომვის შედეგის ერთმანეთთან შედარებით.

გაზომვათა სიზუსტის შესაფასებლად გამოიყენება საშუალო კვადრატული ცდომილება, რომელიც გამოისახება ცნობილი ფორმულით

$$m=\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n}}\cdot$$

მოვნახოთ კავშირი საშუალო m ცდომილებასა და სიზუსტის h საზომს შორის. ამისათვის ზემო ფორმულას მივცეთ ასეთი სახე

$$m^2=\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2+\cdots+\Delta_n^2}{n}.$$

(43) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ, როდესაც n უსასრულოდ დიდია, მაშინ

$$m^2=\text{მმ}(\Delta^2),\cdots(m)$$

ე. ი. რომ საშუალო ცდომილება უდრის კვადრატულ ფესვს ცდომილებათა კვადრატის მათემატიკური მოლოდინიდან.

(36)-ის მიხედვით

$$\text{მმ}(x)=a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3+\cdots+a_np_n,$$

რომლის გამოყენება ჩვენ შემთხვევაში მოგვცემს:

$$\text{მმ}(\Delta^2)=\sum_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta^2p, \tag{51}$$

სადაც $-\varepsilon$ და $+\varepsilon$ არის Δ ცდომილებათა ქვემო და ზემო ზღვარი. p-ს ნაცვლად (51) ფორმულაში შევიტანოთ მისი მნიშვნელობა (46)-დან; მივიღებთ

$$მმ(\Delta^2)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta^2 e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta. \qquad (52)$$

ამ (52) ფორმულის გარდაქმნა მოგვცემს:

$$მმ(\Delta^2)=-\frac{1}{2h\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta e^{-h^2\Delta^2}d(-h^2\Delta^2)=-\frac{1}{2h\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta de^{-h^2\Delta^2},$$

საიდანაც

$$მმ(\Delta^2)=-\frac{1}{2h\sqrt{\pi}}\left\{\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta e^{-h^2\Delta^2}-\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}e^{-h^2\Delta^2}d\Delta\right\}.$$

როგორც ცნობილია, განზღვრულ ზღვარს გადაცილებული ცდომილებანი სრულებით წარმოუდგენელია, ამიტომ შეიძლება მივიღოთ, რომ

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\Delta e^{-h^2\Delta^2}\quad 0,$$

და, მაშასადამე, გვექნება

$$მმ(\Delta^2)=\frac{1}{2h\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}e^{-h^2\Delta^2}d\Delta.$$

შევიტანოთ აქ ცვლადი $y=h\Delta$: მივიღებთ

$$მმ(\Delta^2)=\frac{1}{2h^2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-h\varepsilon}^{+h\varepsilon}e^{-y^2}dy \qquad (53)$$

როდესაც ინტეგრალის ზღვრები უსასრულობას წარმოადგენს, მაშინ

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi};$$

ამის მიხედვით შეგვიძლია მივიღოთ

$$\int\limits_{-h\varepsilon}^{+h\varepsilon}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$$

და მაშინ (53) გამოხატულება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$მმ(\Delta^2)=\frac{1}{2n^2},$$

ანუ თუ სათვალავში მივიღებთ (m) ფორმულას, მაშინ

$$m^2=\frac{1}{2n^2},$$

საიდანაც

$$n=\frac{1}{m\sqrt{2}}. \tag{54}$$

აქედან დავასკვნით, რომ გაზომვათა სიზუსტეზე მსჯელობა შეგვიძლია როგორც მათი სიზუსტის საზომის საშუალებით, ისე მათ საშუალო ცდომილებათა მიხედვით, რომლებიც გაზომვათა სიზუსტის უკუპროპორციულია.

გაზომვის ალბათიერი ცდომილება

ალბათობა იმისა, რომ გაზომვის სიზუსტე მოქცეულია $+\alpha$ და $-\alpha$ ზღვრებში, ჩვენ მიერ გამოსახულია (48) და (49) ფორმულებით, ე. ი.

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{n\alpha} e^{-y}\,dy=F(n\alpha). \tag{55}$$

ვთქვათ, გაზომვის სიზუსტის n საზომი ცნობილია და მაშინ α შევარჩიოთ ისე, რომ იყოს

$$F(n\alpha)=\frac{1}{2}.$$

ვთქვათ, ეს მოხდეს იმ შემთხვევაში, როდესაც

$$\alpha=\rho.$$

$F(g)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ტაბულაში ვნახავთ, რომ $p=\frac{1}{2}$-ის მნიშვნელობას ესატყვისება არგუმენტი 0,4769; მაშასადამე,

$$n\rho=0{,}4769 \text{ და } \rho=\frac{0{,}4769}{n}. \tag{56}$$

ρ ოდენობა, როგორც უკვე ცნობილია, იწოდება **ალბათიერ ცდომილებად**, რომლის დახასიათება შეიძლება შემდეგნაირად:

ალბათიერი ρ ცდომილება გამოსახავს ისეთ ოდენობას, რომლის მიმართ ნამდვილი ცდომილების აბსოლუტური მნიშვნელობა, თანაბარი ალბათობით, შეიძლება იყოს, როგორც მასზე ნაკლები, ისე მასზე დიდი. ცხადია, რაც უფრო მეტია ρ, მით უფრო ნაკლები ღირსებისაა გაზომვა, ასე რომ გაზომვის სიზუსტე ერთნაირად შეიძლება შეფასებულ იქნას როგორც საშუალო, ისე ალბათიერი ცდომილებით.

76. დამოკიდებულება ალბათიერ და საშუალო ცდომილებას შორის

(54) და (56) ფორმულების მიხედვით დავწერთ

$$\rho=0{,}4769\sqrt{2}\cdot m=0{,}6745m\sim\frac{2}{3}m. \tag{57}$$

მაშასადამე, ალბათიერი ცდომილება საშუალო ცდომილების პროპორციულია და დაახლოებით უდრის მის $\frac{2}{3}$-ს.

გაზომვათა კიდეგანი ცდომილება

ალბათობა იმისა, რომ გაზომვის ცდომილება მოქცეულია $+\alpha$ და $-\alpha$ ზღვრებს შორის, გამოისახება (55) ფორმულით

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{h\alpha} e^{-y^2}dy=F(h\alpha). \tag{55}$$

და მოინახება $F(g)$ ფუნქციის ცხრილში $h\alpha$ არგუმენტის მიხედვით.

ამ არგუმენტში სიზუსტის h საზომის ნაცვლად შეიძლება შეტანილ იქნას სიზუსტის მეორე კრიტერიუმი—საშუალო m ცდომილება ან ალბათიერი ρ ცდომილება. საშუალო ცდომილების შეტანის შემდეგ საძიებელი ალბათობა გამოისახება ფორმულით.

$$F\left(0.7071\frac{\alpha}{m}\right),$$

ხოლო ალბათიერი ცდომილების შეტანით — ფორმულით

$$F\left(0.4769\frac{\alpha}{\rho}\right)$$

$F(g)$ ფუნქცია ერთეულად გადაიქცევა მხოლოდ ზღვარზე $g=\infty$: მაშასადამე, ყოველგვარი დაკვირვების დროს შეგვიძლია უცილობლად

ვადასტუროთ მხოლოდ ის, რომ გაზომვის ნამდვილი ცდომილება მოქცეულია $+\omega$ და $-\omega$-ს შორის. მაგრამ ამასთანავე, თუ მხედველობაში ვიქონიებთ, რომ $F(g)$ ფუნქციის მნიშვნელობანი ხდება ერთის ახლობლად უკვე მცირედი არგუმენტებისათვის, ჩვენ შეგვიძლია უდიდესი ალბათობით ვადასტუროთ, რომ გაზომვის ცდომილება სინამდვილეში მოქცეულია უფრო ვიწრო ფარგლებში.

როდესაც $\frac{\alpha}{m}$ შეფარდებისათვის მიცემული იქნება მნიშვნელობანი 1, 2, 3, ... მივიღებთ ისეთ ალბათობას, რომ გაზომვის ცდომილება მოქცეული იქნება ნულსა და საშუალო ცდომილებას შორის, ნულსა და ორკეც საშუალო ცდომილებას შორის, და დასასრულ, ნულსა და სამკეც საშუალო ცდომილებას შორის. $F(g)$ ფუნქციის ტაბულა გვანახვებს, რომ ეს ალბათობანი შესაბამისად იქნებიან:

$$\frac{\alpha}{q}-\frac{m}{0,68}, \qquad \frac{2m}{0,95}, \qquad \frac{3m}{0,997},$$

ე. ი. ჩვენ შეგვიძლია გადაჭრით გამოვთქვათ, რომ ალბათობა იმისა, რომ გაზომვის ცდომილება მოქცეული იქნება 0-სა და $3m$-ს შორის, დაცილებულია 1-ს მხოლოდ 0,003-ით; ამ ოდენობას, — სამკეც საშუალო ცდომილებას, — უწოდებენ გაზომვის კიდეგან ცდომილებას. მაშასადამე, შეგვიძლია მივიღოთ, რომ

$$\varepsilon=3m, \tag{56}$$

ხოლო თუ სათვალავში მივიღებთ (57)-ს, გვექნება

$$\varepsilon=4,5\rho \tag{57}$$

ლეჟანდრის თეორემა

პრაქტიკაში იშვიათად გვხვდება სამკუთხედები 100 კილომეტრიანი და მეტი სიგრძის გვერდებით; უმეტეს ნაწილად გვერდების სიგრძე 25—30 კილომეტრია, ასე რომ სამკუთხედის წვეროების შემაერთებელი გეოდეზიური ხაზები ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ, არამც თუ როგორც ელიფსური რკალები, არამედ, სულ მარტივად, როგორც დიდი წრეხაზის რკალები სფეროზე, რომლის საშუალო რადიუსია $\rho_m=\sqrt{MN}$. აქ M და N წარმოადგენს ბრუნვის ელიფსოიდის მთავარ კვეთილობათა სიმრუდის რადიუსებს: M (უმცირესი) — მერიდიანული კვეთილობისა, N (უდიდესი) — კვეთილობისა პირველი ვერტიკალის მიმართებით.

ნათქვამის საფუძველით, დედამიწის დონებრივ ზედაპირზე სამკუ-

თხედების გადასაწყვეტად გამოვიყენებთ სფერული ტრიგონომეტრიის ჩვეულებრივ ფორმულებს.

მაგრამ ამ შემთხვევაში წინ გვეღობება ორნაირი დაბრკოლება: 1) პირველი მდგომარეობს იმაში, რომ დედამიწის ზედაპირზე სიგრძეები (მაგ., ბაზისისა) მოცემულია ხოლმე ხაზოვანი საზომით (კილომეტრით, მეტრით) მაშინ, როდესაც სფერული ტრიგონომეტრიის ფორმულები წერტილებს შორის სიგრძეს იძლევიან კუთხიერი საზომით (გრადუსით, გრადით, წუთით, წამით);

2) მეორე — სამკუთხედის გვერდების სიმცირის გამო (დედამიწის ზედაპირზე 100 კილომეტრიანი მანძილიც კი 1-ზე ნაკლებია), მათი კუთხიერი მნიშვნელობა გამოისახება ფრიად მცირედი რიცხვებით, რის გამოც ასეთი სამკუთხედების გადაწყვეტა სფერულ ზედაპირზე მოკლებულია სასურველ სიმარტივეს.

მოყვანილი მოსაზრების საფუძველზე იქმნება აუცილებლობა, — სფერული ტრიგონომეტრიის ფორმულები იმგვარად იყოს გარდაქმნილი, რომ გამოთვლა მოხდეს სამკუთხედების გვერდების ხაზოვან საზომებში.

სფერული ABC სამკუთხედის გვერდების სიგრძე აღვნიშნოთ შესაბამისად a, b, c, ასოებით. თუ სამკუთხედში ცნობილია ორი A და B კუთხე და ერთ-ერთის პირისპირ მდებარე a გვერდი, მაშინ სიმრუდის საშუალო $\rho_m = \sqrt{MN}$ რადიუსის შემთხვევაში, $\frac{b}{\rho_m}$ გვერდისათვის გვექნება:

$$\sin\frac{b}{\rho_m} = \sin\frac{a}{\rho_m}\,\frac{\sin B}{\sin A}$$

მიღებული გამოხატულება დავშალოთ მწკრივად მცირედ $\frac{a}{\rho_m}$ და $\frac{b}{\rho_m}$ ოდენობათა ხარისხების მიმართ და თან შევიზღუდოთ მათი მესამე ხარისხით:

$$\frac{b}{\rho_m} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{b^3}{\rho^3_m} = \left[\frac{a}{\rho_m} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{a^3}{\rho^3_m}\right]\frac{\sin B}{\sin A} = a\,\frac{\sin B}{\sin A}\left[\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{a^2}{\rho^3_m}\right],$$

საიდანაც

$$b = a\,\frac{\sin B}{\sin A}\left[1 - \frac{1}{6}\,\frac{a^2}{\rho^2_m}\right] + \frac{1}{6}\,\frac{b^3}{\rho^2_m}$$

თუ ვიკმარებთ დაშლის პირველი ხარისხებით, მაშინ

$$b - a\frac{\sin B}{\sin A},$$

და, მაშასადამე, ზემოთ გამოყვანილი b-ს მნიშვნელობა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}\left[1 - \frac{a^2}{6\rho^2_m} + \frac{b^2}{6\rho^2_m}\right]. \tag{58}$$

ამ ფორმულით მონაცემი სიზუსტე აკმაყოფილებს ყოველგვარ პრაქტიკულ მოთხოვნას, ვინაიდან, თვით 400 კილომეტრის სიგრძის მქონე a და b გვერდის შემთხვევაშიაც კი, განგდებული მეხუთე ხარისხის წევრები $\left(\frac{1}{120}\ \frac{a^5}{\rho^4_m}\right.$ და $\left.\frac{1}{120}\ \frac{b^5}{\rho^4_m}\right)$ შეადგენენ, ხსენებული გვერდების $\frac{1}{6\,000\,000}$-ზე ნაკლებ ნაწილს.

მაგრამ უმარტივესად გეოდეზიური სამკუთხედები გადაწყდება ლ ე ჟ ა ნ დ რ ი ს (Adrien Marie Legendre 1752—1833) შემდეგი ღირსშესანიშნავი თეორემის საფუძველზე:

თუ წარმოვიდგენთ ისეთ ბრტყელ $A'B'C'$ სამკუთხედს, რომლის a, b, c გვერდები ისეთივეა, როგორც მცირე სფერულ ABC სამკუთხედში, მაშინ პირველის ყოველი კუთხე ნაკლები იქნება, ვიდრე მეორის შესაბამისი კუთხე, სფერული სიჭარბის $\frac{1}{3}$-ით.

ამ თეორემის ძალით, იმავე b გვერდის განსაზღვრა სამკუთხედის მოცემული სამი a, A, B ნაწილის მიხედვით მოხდება ფორმულით,

$$b = a\frac{\sin\left(B - \frac{1}{3}\varepsilon\right)}{\sin\left(A - \frac{1}{3}\varepsilon\right)}, \tag{59}$$

რომელიც მტკიცე იქნება მცირედ ოდენობათა მესამე ხარისხამდე.

თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისი იქნება ნაჩვენები იყოს (58) და (59) ფორმულის იგივობა.

სფერული ABC სამკუთხედის მცირედობის გამო, სფერული სიჭარბე $\varepsilon'' = A + B + C - 180°$ შეიძლება ჩათვლილი იყოს მეორე რიგის მცირედ ოდენობად. როგორც ცნობილია, სფერული სამკუთხედის

ფართობი $\rho_m=\sqrt{MN}$ რადიუსიან სფეროზე განისაზღვრება ფორმულით

$$P=\rho_m{}^2\varepsilon''\sin 1''=\rho^2{}_m\varepsilon,$$

სადაც $\varepsilon=\varepsilon''\sin 1''$ წარმოადგენს ε'' რკალს, გამოსახულს რადიანით. ε-ის იმავე მცირედობის გამო, სფერული სამკუთხედის ფართობისათვის შეგვიძლია მივიღოთ მ ი ა ხ ლ ო ე ბ ი თ ი გ ა მ ო ხ ა ტ უ ლ ე ბ ა.

$$\rho^2{}_m\varepsilon=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sin(A+B),$$

საიდანაც

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{\rho^2{}_m}\sin(A+B). \tag{60}$$

გავხსნათ (59) ფორმულა და, ε-ის მცირედობის გამო, მივიღებთ $\sin\frac{\varepsilon}{3}=\frac{\varepsilon}{3}$ და $\cos\frac{\varepsilon}{3}=1$; მივიღებთ:

$$b=a\frac{\sin B-\cos B\cdot\frac{\varepsilon}{3}}{\sin A-\cos A\frac{\varepsilon}{3}}=a\cdot\frac{\sin B\left(1-\frac{\cos B}{\sin B}\cdot\frac{\varepsilon}{3}\right)}{\sin A\left(1-\frac{\cos A}{\sin A}\cdot\frac{\varepsilon}{3}\right)}.$$

გავყოთ მრიცხველი მნიშვნელზე ალგებრული წესით და შედეგში შევიზღუდოთ ε-ის პირველი ხარისხებით:

$$b=a\cdot\frac{\sin B}{\sin A}\left[1-\frac{\varepsilon}{3}\quad\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\varepsilon}{3}\quad\frac{\cos A}{\sin A}\right]=$$

$$=a\cdot\frac{\sin B}{\sin A}\left[1-\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{\sin(A-B)}{\sin A\cdot\sin B}\right].$$

შევიტანოთ ამ გამოხატულებაში ε-ს მნიშვნელობა (60)-დან:

$$b=a\cdot\frac{\sin B}{\sin A}\left[1-\frac{ab}{6\rho^2{}_m}\cdot\sin(A+B)\frac{\sin(A-B)}{\sin A\cdot\sin B}\right]=$$

$$=a\cdot\frac{\sin B}{\sin A}\left[1-\frac{ab}{6\rho^2{}_m}\quad\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cdot\sin B}\right]=$$

$$=a\cdot\frac{\sin B}{\sin A}\left[1-\frac{ab}{6\rho^2{}_m}\cdot\left(\frac{\sin A}{\sin B}-\frac{\sin B}{\sin A}\right)\right].$$

გეოდეზიურ პრაქტიკაში. როგორც უკვე იყო ხსენებული; a, b, c გვერდები წარმოადგენენ მცირედ ოდენობებს, ამიტომ $\sin\frac{a}{\rho_m}$ და $\sin\frac{b}{\rho_m}$-ის დაშლაში, როგორც წინათ, შეგვიძლია შევიზღუდოთ $\frac{a}{\rho_m}$ და $\frac{b}{\rho_m}$-ის პირველი ხარისხებით, ამიტომ მარტივად გვექნება

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b},$$

ისე, როგორც ბრტყელ სამკუთხედში. ამის მიხედვით, ზემოთ გამოყვანილი გამოხატულება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$b=a\cdot\frac{\sin B}{\sin A}\left[1-\frac{a^2}{6\rho^2_m}+\frac{b^2}{6\rho^2_m}\right] \tag{58}$$

ეს გამოხატულება (58)-ის იგივეა. მაშასადამე, ლეჟანდრის თეორემა დამტკიცებულია. აქედან დავასკვნით, რომ ყოველი გეოდეზიური სამკუთხედის გადაწყვეტის დროს, ე. ი. სამკუთხედისა სფეროიდზე, რომლის გვერდები წარმოადგენენ გეოდეზიურ ხაზებს, სიგრძით 400 კილომეტრამდე, შეიძლება, სიზუსტით გვერდების სიგრძის $\frac{1}{6000000}$ გამოყენებული იყოს ლეჟანდრის თეორემა.

ქვემოთ მოყვანილია ფრიად მარტივი ფორმულები სამკუთხედების გადასაწყვეტად დედამიწის დონებრივ ზედაპირზე

I. მოცემულია $a;\ A,\ B.$

1. $$b=a\cdot\frac{\sin B}{\sin A}$$

2. $$\varepsilon''=\frac{a^2}{2MN\sin 1''}\cdot\frac{\sin B}{\sin A}\sin(A+B)=$$
$$=\frac{a^2}{2MN\sin 1''}\ \frac{\sin B\cdot\sin C}{\sin(B+C)}$$

3. $$C=180^\circ+\varepsilon-(A+B)$$

4. $$b=a\frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{3}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{3}\right)}$$

$$5. \qquad C=a\frac{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{3}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{3}\right)}$$

II. მ ო ც ე მ უ ლ ი ა a, b, c.

$$1. \qquad \varepsilon''=\frac{ab}{2MN\sin 1''}\cdot\sin C=\frac{ab}{2MN\sin 1''}\cdot\sin(A+B)$$

$$2. \qquad \frac{A+B}{2}=90^\circ+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{C}{2}$$

$$3. \qquad \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(C-\frac{\varepsilon}{3}\right)\ \frac{a-b}{a+b}$$

$$4. \qquad C=a\cdot\frac{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{3}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{3}\right)}=b\cdot\frac{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{3}\right)}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{3}\right)}$$

II. ჯგუფის (3) ფორმულაში, რომელიც მიღებულია ნ ე პ ე რ ი ს (Iohn Neper 1550—1617) ანალოგიიდან,

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}=\frac{\rho_m\left(\frac{a-b}{2}\right)''\sin 1''}{\rho_m\left(\frac{a+b}{2}\right)''\sin 1''}$$

აქედან ცხადია, რომ ხსენებულ ფორმულაში $(a-b)$ და $(a+b)$ წარმოადგენენ ხაზოვან ოდენობებს, რომლებიც გამოსახულია საზომის იმავე ერთეულებში, როგორც $\rho_m=\sqrt{MN}$.

III. მ ო ც ე მ უ ლ ი ა A, B, C, a

$$1. \qquad \varepsilon''=A+B+C-180^\circ$$

$$2. \qquad h=a\frac{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{3}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{3}\right)}$$

$$3. \qquad c=a\frac{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{3}\right)}{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{3}\right)}=b\cdot\frac{\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{3}\right)}{\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{3}\right)}$$

შინაარსი

V

VI

VIII

IX

X

XI

XII

გამომც. რედაქტორი ე. ბახუტაშვილი
ტექრედაქტორი მ. ასათიანი
კორექტორი ც. კვინტრაძე

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 3/V-65 წ.
ქაღალდის ზომა 60×90. ნაბეჭდი თაბახი 20.5.
სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 17.77.
უე 00257. ტირაჟი 1000. შეკვ. № 111.

ფასი 75 კაპ.

გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, კამოს ქ., № 18

Издательство „Ганатлеба", Тбилиси, ул. Камо, № 18

სტამბა № 1, თბილისი, ორჯონიკიძის ქ. № 50.

Типография № 1, Тбилиси, ул. Орджоникидзе № 50.