თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
ტ. 197



# მათემატიკა • მექანიკა • ასტრონომია

თბილისი — 1978

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
TBILISI UNIVERSITY PRESS

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
т. 197 v.



# МАТЕМАТИКА • МЕХАНИКА • АСТРОНОМИЯ

# MATHEMATICS • MECHANICS • ASTRONOMY

ТБИЛИСИ 1978 TBILISI

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

ტ. 197

# მათემატიკა • მექანიკა • ასტრონომია

თბილისი — 1978

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

197, 1978



УДК 517.946

# ილია ვეკუას მეცნიერული ბიოგრაფიისათვის

თ.ებანოიძე

წინამდებარე წერილში თავმოყრილია ილია ვეკუას მეცნიერულ ბიოგრაფიასთან დაკავშირებული და უცხოური წყაროებიდან აღებული ზოგიერთი ისეთი მასალა, რომლებიც კიდევ ერთხელ მიგვანიშნებს მის ერთობ მაღალ მეცნიერულ ავტორიტეტზე საზღვარგარეთის ფართო მათემატიკურ წრეებში. ეს მასალები ცალკეულ შემთხვევებში შეიძლება ნაკლებად იყოს ცნობილი მკითხველისათვის.

I

1954 წელს ამსტერდამში შედგა მათემატიკოსთა მეჯთე საერთაშორისო კონგრესი, რომელზეც ერთ-ერთი მიმოხილვითი (საათიანი) მოხსენება- "1953 წლის დამანგრეველ წყალდიდობასთან დაკავშირებით წამოჭრილი მათემატიკური პრობლემები" [1] წაიკითხა დ.ვან დანციგმა (van Danzig)[1]. მათემატიკური მოხსენებისათვის თითქოსდა უჩვეულო სათაურში ნახსენები სტიქიური უბედურება არნახული საზღვაო

-----------

1 დავით ვან დანციგი (1900-1959) -ცნობილი ჰოლანდიელი მათემატიკოსი.

წყალდიდობის სახით დაატყდა ჰოლანდიის სამხრეთ-დასავლეთ ნაწილს 1953 წლის 1 თებერვალს:გრიგალის შედეგად აბობოქრებულმა ჩრდილოეთის ზღვამ მრავალ ადგილას წალეკა სანაპირო კაშხალები.აი ამ ტრაგედიის რამდენიმე მონაცემი,ჩამოთვლილი ვან დანციგის მიერ: წყლით დაიფარა 150 000 ჰექტარზე მეტი მიწა; დაიღუპა 1800-ზე მეტი კაცი; დაინგრა 9 000 შენობა,დაზიანდა 38 000;კაშხალები გაირღვა 67 ადგილას; საერთო ზარალი შეფასდა ორ მილიარდ გულდენამდე.

წყალდიდობის შედეგად წამოჭრილ მათემატიკურ პრობლემებს ვან დანციგი სამ ჯგუფად ყოფს:

1, ზღვის დონის რხევების განაწილებასთან დაკავშირებული სტატისტიკური ექსტრაპოლაციის პრობლემები,

2, იმ დონის განსაზღვრასთან დაკავშირებული ეკონომეტრული პრობლემები, რომელსაც უნდა მიაღწიოს კაშხალების სიმაღლემ,

3, ზღვის დონის აწევის საკითხთან დაკავშირებული გამოყენებითი მათემატიკის პრობლემები; აქ იგულისხმება დონის ის აწევა, რომელსაც იწვევს ჩრდილოეთის ზღვაში მოძრავი დაწეული წნევის (დეპრესიის) არე,

ვან დანციგი შენიშნავს,რომ პირველი და მეორე ჯგუფის პრობლემები მათემატიკური თვალსაზრისით ტრივიალურია, ხოლო მესამე ჯგუფის პრობლემებს (სხვანაირად,ჰიდროდინამიკურ პრობლემებს),პირიქით, მივყავართ კერძოწარმოებულებიან განტოლებათა საკმაოდ რთულ საკითხებთან და რომ ეს პრობლემები ჯერაც საკმაოდ შორსაა სრული ამოხსნისაგან,

ჰიდროდინამიკური პრობლემების განხილვისას ვან დანციგი ერთგან ამბობს (და ჩვენთვის სწორედ ეს მომენტია განსაკუთრებით საყურადღებო): "... ეს განტოლება[1] შეიძლება ამოიხსნას იმ მეთოდებით, რომლებიც პუანკარემ[2] შემოიღო მოქცევათა თეორიის ანალოგი-

---

1 ლაპარაკია გარკვეულ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე,რომელსაც ქვემოთ გავეცნობით - თ.ე.

2 ვან დანციგი იმოწმებს H.Poincare. Leçons de mécanique celeste, vol. III, Paris, 1910.

ური ამოცანების ამოსახსნელად, ასეთი მეთოდები დაწვრილებით განიხილებოდა თბილისურ სკოლაში ნ.ი. მუსხელიშვილის[1] ხელმძღვანელობით; ჩვენი მიზნებისათვის განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ი.ნ.ვეკუასა[2] და ბ.ვ.ხვედელიძის[3] მიერ მიღებული შესანიშნავი შედეგები".

გავყვეთ ახლა ვან დანციგის მათემატიკურ მსჯელობას და ვნახოთ, თუ როგორ "შემოვიდა" მის მოხსენებაში ახლახან მოყვანილი ადგილი.

ვთქვათ, $\zeta$ წყლის დონის სიმაღლეა, ათვლილი მოცემული ნულოვანი დონიდან; $x, y$ -წყლის ზედაპირის მართკუთხოვანი კოორდინატები, $h$ - წყლის სიღრმე, $u, v$ -სიჩქარის კომპონენტები, $gX, gY$ - იმ გარე ძალების მდგენელები, რომლებიც მასის ერთეულზე მოდის. აქ ვგულისხმობთ, რომ $g$ სიმძიმის ძალის აჩქარებაა, ხოლო $X, Y$-$x, y, t$-ს მოცემული ფუნქციები. გარე ძალებს წარმოქმნის ატმოსფერული წნევის გრადიენტი და ხახუნის ძალები, რომლებსაც თავის მხრივ ქართა ველი აჩენს.

უწყვეტობისა და მოძრაობის განტოლებები ასეთი სახით წარმოგვიდგება:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x}+\frac{\partial(hv)}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda u-\Omega v+g\frac{\partial\zeta}{\partial x}=gX, \tag{1.1}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+\lambda v+\Omega u+g\frac{\partial\zeta}{\partial y}=gY,$$

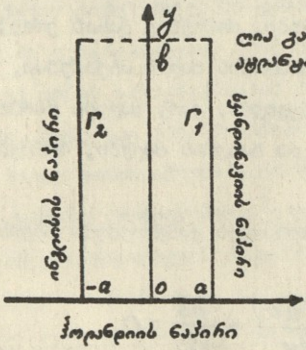
---

1. დამოწმებულია Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, Гостехиздат, 1946.
2. И.Н.Векуа. Комплексное представление решений эллиптических уравнений и его применения к граничным задачам. Тр.Тбил.мат. ин-та, 7(1939), 161-253.
3. Б.В.Хведелидзе. Задача Пуанкаре для линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа, Тр.Тбил. мат. ин-та, 12(1943), 47-77.

სადაც $\lambda$ აღნიშნავს ხახუნის კოეფიციენტს, $h^{-1}$-ს პროპორციულს, ხოლო $\Omega$ -კორიოლისის კოეფიციენტს, რომელიც $2\omega \sin\varphi$ -ს ტოლია; აქ $\omega$ დედამიწის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა, $\varphi$ -გეოგრაფიული განედი; თუმცა $\Omega$ და $h$ , და, მაშასადამე, $\lambda$-ც, $x,y$-ზეა დამოკიდებული, ჩვენ ვიღებთ მხოლოდ იმ შემთხვევას, როცა ეს სიდიდეები (ე.ი. $\Omega, h, \lambda$ ) მუდმივია. ეს დაშვება შეესაბამება მუდმივი სიღრმის მცირე აუზს.

ჩრდილოეთის ზღვა განიხილება, როგორც ასეთი $R$ მართკუთხედი:[1]

$$-a \le x \le a; \quad 0 < y < b; \qquad (R)$$




აქ $x=-a$ გვერდი უხეშად წარმოადგენს ინგლისის ნაპირს, $y=0$ - ჰოლანდიის ნაპირს, $x=a$ - სკანდინავიის ნაპირს; $y=b$ -ღია გასასვლელია ჩრდილოეთის ზღვიდან ატლანტის ოკეანეში, ასევე უხეშად $2a \approx 450$ კმ, $b \approx 4a \approx 900$ კმ, ნაკადი დუვრის სრუტიდან ახლანდელ მსჯელობაში უგულებელყოფილია.

სასაზღვრო პირობები მოითხოვს, რომ სიჩქარის ნორმალური მდგენელი ქრებოდეს ნაპირების გასწვრივ და რომ $\zeta$ უწყვეტი რჩებოდეს ოკეანესთან საზღვარზე, თუ ოკეანე უსასრულოდ ღრმა იგულის-

---

1 ნახაზი, რომელიც ჩვენ მოგვყავს, ვან დანციგს არა აქვს - თ.ე.

ხმება, ამ საზღვარზე შეიძლება დავუშვათ $\zeta=0$ . აქედან გვექნე-ბა

$$\Gamma\begin{cases}\Gamma_1: -a<x<a; \quad y=b, \quad \zeta=0,\\ \Gamma_2\begin{cases}x=\pm a, \quad 0<y<b, \quad u=0,\\ -a<x<a, \quad y=0, \quad v=0.\end{cases}\end{cases} \tag{1.2}$$

არასტაციონარული შემთხვევის განხილვისას მივმართოთ ლაპ-ლასის შემდეგ გარდაქმნას:

$$\bar\zeta(x,y,p)=\int_0^{\infty} e^{-pt}\zeta(x,y,t)\,dt,$$
$$\zeta(x,y,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}\,\bar\zeta(x,y,p)\,dp \tag{1.3}$$

( $p=-\lambda+i\omega$ ) და ანალოგიურ გარდაქმნას $u$ და $v$ -სათვის, მათი დახმარებით გვექნება

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\bar u}{\partial x}+\frac{\partial\bar v}{\partial y}+\frac{p}{h}\bar\zeta=0,\\ &(p+\lambda)\bar u-\Omega\bar v+g\frac{\partial\bar\zeta}{\partial x}=g\bar X,\\ &(p+\lambda)\bar v+\Omega\bar u+g\frac{\partial\bar\zeta}{\partial y}=g\bar Y.\end{aligned} \tag{1.4}$$

თუ $\bar u$ და $\bar v$ -ს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ დიფერენციალურ გან-ტოლებას

$$\Delta\bar\zeta-K^2\bar\zeta=\bar F, \tag{1.5}$$

სადაც

$$K^2=\frac{p}{gh}\left(p+\lambda+\frac{\Omega^2}{p+\lambda}\right), \tag{1.6}$$

$$F=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\Omega}{p+\lambda}\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right);$$

(1,5) განტოლებისათვის გვექნება შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

ოკეანესთან საზღვრის გასწვრივ

$$\bar{\xi}=0, \quad \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\nu}+\frac{\Omega}{p+\lambda}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial s}=\bar{f}, \qquad (1,7)$$

სადაც

$$f=\begin{cases} X+\dfrac{\Omega}{p+\lambda}Y, & \text{როცა } x=\pm a,\ 0<y<b, \\ \dfrac{\Omega}{p+\lambda}X-Y, & \text{როცა } |x|<a,\ y=0. \end{cases} \qquad (1,8)$$

შესაბამისი ჰიდროდინამიკური პრობლემის შესწავლის ძირითადი სიძნელეები გამოწვეულია კორიოლისის ძალებით და იმაში მდგომარეობს, რომ (1,7) სასაზღვრო პირობაში შედის ირიბი წარმოებული ნორმალური წარმოებულის ნაცვლად. კორიოლისის ძალების უკუგდება რომ შეიძლებოდეს, გვექნებოდა $\Omega=0$ და ამოცანაც შედარებით მარტივი გამოვიდოდა; მაგრამ ეს ასე არაა; უფრო მეტიც – ზოგჯერ აღნიშნული ძალები ის მთავარი წევრია, რომელიც მოძრაობას განსაზღვრავს.

ვთქვათ, $G=G(x,y,\xi,\eta)$ უცნობი ფუნქციაა, რომელსაც $x=\xi$, $y=\eta$ წერტილში ლოგარითმული განსაკუთრებულობა აქვს; გამოვიყენოთ $G$ და $\bar{\xi}$ ფუნქციების მიმართ გრინის ფორმულა; თუ (1.7) სასაზღვრო პირობითა და ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით ვისარგებლებთ, მივიღებთ:

$$\bar{\xi}=\varphi-\iint_R \bar{\xi}(\Delta-k^2)G\,d\xi\,d\eta+\int_{\Gamma_2}\bar{\xi}\left(\frac{\partial G}{\partial\nu}-\frac{\Omega}{p+\lambda}\frac{\partial G}{\partial s}\right)ds-$$

$$-\int_{\Gamma_1}G\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\nu}ds, \qquad (1.9)$$

$$\varphi=\iint_R G\bar{F}\,d\xi\,d\eta-\int_{\Gamma_2}G\bar{f}\,ds.$$

თუ შევძლებთ ისეთი გრინის $G$ ფუნქციის განსაზღვრას, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$
\begin{aligned}
&\Delta G-k^2G=0 \quad R\text{-ში},\\
&G=0 \quad \Gamma_1\text{-ზე}, \qquad\qquad (1.10)\\
&\frac{\partial G}{\partial \nu}-\frac{\Omega}{p+\lambda}\frac{\partial G}{\partial s}=0 \quad \Gamma_2\text{-ზე}.
\end{aligned}
$$

მაშინ (1.9) ფორმულა მოგვცემს საძიებელ ამონახსნს ცხადი სახით; მაგრამ $G$ ფუნქციის ცხადად მიღება არ მოხერხდა და უფრო ნაკლებით მოგვიხდა დაკმაყოფილება. აქ ნაყოფიერი შეიძლება გამოდგეს ასეთი ხერხი[1]:

1. დავუშვათ $G=\frac{1}{2\pi}\{K_0(kr)-K_0(kr')\}$,

სადაც $K_0$ -ნულოვანი რიგის მესამე გვარის ბესელის ფუნქციაა წმინდა წარმოსახვითი არგუმენტით,

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2, \quad r'^2=(x-\xi)^2+(y+\eta-2b)^2;$$

მაშინ (1.5) დიფერენციალური განტოლება და (1.7) სასაზღვრო პირობები, ცხადია დაკმაყოფილებული იქნება, რის გამოც (1.9) გახდება სინგულარული ინტეგრალური განტოლება კოშის ტიპის გულით; მასში შემავალი ინტეგრალები გაიგება ნაპირების[2] გასწვრივ... სწორედ ახლა გვხვდება ვან დანციგის მოხსენების ის ადგილი, რომელიც ზემოთ სიტყვასიტყვით ამოვწერეთ. როგორც ვნახეთ, ვან დანციგმა დაასახელა სამი ქართველი მათემატიკოსი და ესოდენ მაღალი შეფასება მისცა მათ შედეგებს, ამჟამად ი.ვეკუაზე გვაქვს საუბარი და უნდა გავიხსენოთ, რომ ვან დანციგის მიერ დამოწმებული ი.ვეკუას 1939 წლის ნაშრომში საგანგებო ყურადღება ეთმობოდა მეორე რიგის ზოგა-

---

1 ვან დანციგი რამდენიმე ხერხს ჩამოთვლის, მაგრამ ჩვენ მხოლოდ პირველი დაგვჭირდება - თ.ე.

2 იხ. ნახაზი - თ.ე.

დი სახის ელიფსურ დიფერენციალურ განტოლებას ანალიზური კოეფიციენტებით

$$\Delta u + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \qquad (1,11)$$

რომლის კერძო შემთხვევასაც, ცხადია, წარმოადგენს ვან დანციგის მიერ გამოყვანილი (1,5) განტოლება. კარგად ცნობილია, რომ ი.ვეკუას მიერ აგებული იყო (1,11) განტოლების ნამდვილი რეგულარული ამონახსნების ზოგადი წარმოდგენა

$$u = L[f_0(z)], \qquad (1,12)$$

სადაც $L$ -წრფივი ინტეგრალური ოპერატორია, ხოლო $f_0(z)$ - კომპლექსური ცვლადის ნებისმიერი ანალიზური ფუნქცია; $L$ ოპერატორი ალგორითმულად აიგება (1,11) განტოლების $a, b, c$ კოეფიციენტების მეშვეობით.

(1.12) ზოგადი წარმოდგენის ფორმულები ი.ვეკუამ პირველმა გამოიყენა სასაზღვრო ამოცანების გადასაწყვეტად, ამასთანავე მის მიერ განხილული სასაზღვრო პირობები უფრო ზოგადი იყო, ვიდრე დირიხლეს, ნეიმანის და პუანკარეს კლასიკურ სასაზღვრო ამოცანებში.

ისიც უნდა ავიხსენოთ, რომ შემდგომ გამოკვლევებში ი.ვეკუამ დეტალურად შეისწავლა პუანკარეს ამოცანა ირიბი წარმოებულით (ამოცანა, რომელზეც აგრეთვე ლაპარაკობს ვან დანციგი): მოიძებნოს რაიმე $D$ არეში

$$\Delta u + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y)$$

განტოლების $u(x,y)$ ამონახსნი, რომელიც არის $S$ საზღვარზე

$$\alpha u_x - \beta u_y = \gamma$$

პირობას აკმაყოფილებს. ამ ამოცანას ი.ვეკუა წყვეტს საკმარისად ზოგად პირობებში: $a, b, f \in L_p(D)$, $p>2$, $\alpha, \beta, \gamma$ კი $C_\delta(S)$ $(0<\delta<1)$ კლასის მოცემული ნამდვილი ფუნქციებია, ოღონდ მოითხოვება, რომ $\alpha^2+\beta^2=1$ $S$ -ზე.

რაც შეეხება ვან დანციგის (9) სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას, მასთან "პარალელის" გასავლებად უნდა შევნიშნოთ, რომ როცა ი.ვეკუა (1.11) ელიფსური განტოლებებისათვის ზოგად სასაზღვრო ამოცანებს მის მიერ ნაპოვნ ანალიზურ ფუნქციათა სპეციალური ინტეგრალური წარმოდგენების დახმარებით ხსნიდა, ეს ამოცანები მას მიჰყავდა

$$A(t)\mu(t)+\int_S K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=f(t), \quad t\in S$$

სახის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებამდე; ი.ვეკუას მიერვე იყო მიგნებული მათი ნორმალური ამოხსნადობის პირობა, გამოთქმული სასაზღვრო პირობებში მონაწილე კოეფიციენტების მეშვეობით.

2.

1957 წელს დაიბეჭდა ამერიკელი მათემატიკოსის პიტერ ჰენრიჩის (P.Henrici, ლოს ანჯელესი, კალიფორნია) ნაშრომი "ი.ნ.ვეკუას ელიფსურ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ ანალიზურკოეფიციენტებიან განტოლებათა თეორიის მიმოხილვა" [2]; ნაშრომის შესავალში ნათქვამია, რომ მთელ რიგ სტატიებში, რომელთა გამოქვეყნება 1937 წლიდან დაიწყო და რომლებიც შეჯამებულია წიგნში "ელიფსურ განტოლებათა ამოხსნის ახალი მეთოდები"[1], ქართველმა მათემატიკოსმა ი.ნ. ვეკუამ განავითარა ორდამოუკიდებელცვლადიანი და ანალიზურკოეფიციენტებიანი წრფივი ელიფსური კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების თეორია იმ მიმართულებით, რომელიც აზოგადებს ჰოლომორფულ ფუნქციათა კლასიკური თეორიის ზოგიერთ ასპექტს. ვეკუას თეორია გამოყენებითი მათემატიკის მკვლევართათვის არსებითად საინტერესოა, ვინაიდან ბევრ სხვა რამესთან ერთად იგი გვაწვდის ალგორითმს ამონახსნთა ე.წ. სრული სისტემის კონსტრუირებისათვის; ამასთანავე ეს ამონახსნები ბევრ შემთხვევაში შეიძლება მიღებულ იქნას ჩაკეტილი ანალიზური ფორმით. მიუხედავად ასეთი ინტერესისა

----------

1 პ.ჰენრიჩი იმოწმებს И.Н.Векуа. Новые методы решения эллиптических уравнений, ОГИЗ, М.-Л., 1948.

ვეკუას მიერ განვითარებული საკითხები დასავლეთის მათემატიკოსთა ჯეროვანი ყურადღების გარეშე დარჩა და მისი წიგნი ჯერ კიდევ არაა თარგმნილი[1].



წარმოდგენილი სტატია გააზრებულია როგორც ვეკუას თეორიის შესავალი. აქ ჩვენ ვეყრდნობით ვეკუას იმ შედეგებს, რომლებიც შეეხება ამონახსნების ანალიზურ გაგრძელებებსა და ამონახსნების წარმოდგენებს ჰოლომორფული ფუნქციების საშუალებით. ვეკუას სასაზღვრო ამოცანების თეორია, რომელიც ამ შედეგებს მჭიდროდ უკავშირდება, შემდგომ პუბლიკაციაში იქნება წარმოდგენილი[2].

იმისათვის, რომ ხაზი გავუსვათ ზემოთ აღნიშნული თეორიის საჭიროებას, ჩვენ ამ ნაშრომში ჩავურთეთ განტოლებების რამდენიმე ადვილად გასარჩევი მაგალითი. ზოგიერთი მათგანი ვეკუას მიერ არ იყო მოცემული.

პ. ჰენრიჩი შემდეგ მთელ განყოფილებას უთმობს ვეკუას თეორიის ზოგიერთი ფუნდამენტური ცნების შემოღებასა და ამ თეორიის ძირითადი თეორემის ჩამოყალიბებას.

ვთქვათ, $T(x,y)$ სიბრტყის არეა. განვიხილოთ $T$-ში განსაზღვრული კომპლექსური ფუნქციების სამი კლასი. ისინი აღვნიშნოთ $I(T)$, $II(T)$ და $III(T)$, ან, შემოკლებით, $I, II, III$.

$I$ კლასი შედგება ყველა იმ ფუნქციისაგან, რომლებიც ორჯერ უწყვეტად წარმოებადია $T$-ში. ამ კლასის ნებისმიერ ფუნქციას ვუწოდოთ $T$-ში რეგულარული ფუნქცია.

$II$ კლასი შედგება იმ $f(x,y)$ ფუნქციებისაგან, რომლებიც ანალიზურადაა დამოკიდებული ორ ნამდვილ $x$ და $y$ ცვლადზე $T$-ში. ამ კლასის ფუნქციებს ვუწოდოთ $T$-ში ნამდვილ-ანალიზური ფუნქციები.

---

1 არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ ეს ნათქვამია 1957 წელს; ი. ვეკუას აღნიშნული წიგნი ინგლისურ ენაზე გამოვიდა 1967 წელს, ამსტერდამში – თ.ვ.

2 ჩვენთვის უცნობია, გაკეთდა თუ არა ეს – თ.ვ.

იმისათვის, რომ III კლასი განვსაზღვროთ, საჭიროა გავიხსენოთ რამდენიმე კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის ზოგიერთი ძირითადი ფაქტი. ამ თეორიის მიხედვით II კლასის ყოველ $f(x,y)$ ფუნქციას შეგვიძლია შევუსაბამოთ ფუნქცია, რომელსაც ვუწოდებთ $f(x,y)$-ის ანალიზურ გაგრძელებას, რომელიც კომპლექსურ-ანალიზურია ორი კომპლექსური $x$ და $y$ ცვლადის $K^2$ სივრცის $\mathcal{D}$ არეში (ამასთანავე $\mathcal{D}$ არე შეიცავს $T$-ს) და რომელიც $f(x,y)$-ს ემთხვევა $(x,y)\in T$-სათვის. $f(x,y)$-ს ანალიზურ გაგრძელებას კვლავ $f(x,y)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ.

შემოვიყვანოთ ახლა $K^2$-ში ორი ახალი $z$ და $z^*$ ცვლადი

$$z=x+iy, \quad z^*=x-iy$$

თანაფარდობათა საშუალებით, $z$ და $z^*$ ცვლადები ურთიერთშეუღლებული მხოლოდ მაშინ იქნება, როცა $x$ და $y$ ნამდვილია.

ვთქვათ, $f(x,y)\in II\ (T)$; დავუშვათ, რომ

$$F(z,z^*)=f(x,y).$$

ყოველ $z_0=x_0+iy_0\in T$ წერტილს აქვს $T\ (z_0)$ ისეთი მიდამო, რომ $F\ (z,z^*)$ ანალიზურია ცილინდრულ $[T(z_0),\overline{T(z_0)}]$ არეში.

მაშინ III ($T$) კლასი შედგება II ($T$) კლასის ყველა იმ ფუნქციისაგან, რომელთათვისაც

$$T(z_0)\supset T \qquad \text{ყველა } z_0\in T\text{-სათვის.}$$

ეს ასეც შეიძლება გამოითქვას:

განმარტება: $f(x,y)$ ფუნქცია ეკუთვნის III ($T$) კლასს, თუ ამ ფუნქციის ანალიზური გაგრძელება

$$F(z,z^*)=f\left(\frac{z+z^*}{2},\frac{z-z^*}{2i}\right)$$

არსებობს და რეგულარულია ცილინდრულ $(T,\overline{T})$ არეში.

განვიხილოთ ახლა ნორმალური ფორმით აღებული მეორე რიგის წრფივი ელიფსური კერძონაწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება

$$l(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0, \qquad (l)$$

სადაც $a=a(x,y)$, $b=b(x,y)$, $c=c(x,y)$ ფუნქციები განტოლების კოეფიციენტებია.

ვეკუას თეორია -ხაზგასმით აღნიშნავს პ.ჰენრიჩი - შეიძლება გავრცელდეს აგრეთვე მაღალი რიგის ელიფსურ განტოლებებზე და ელიფსურ განტოლებათა სისტემებზეც, მაგრამ ჩვენ აქ ამ განზოგადებებს არ მიმოვიხილავთ.

ცალკე პუნქტადაა გამოყოფილი "ვეკუას თეორემა" ([2],1,3, გვ.172); თვით თეორემას ჰენრიჩი ასეთი სახით აყალიბებს:

თუ $T$ ცალბმულია და თუ ($l$)-ს კოეფიციენტები შედის III ($T$) კლასში, მაშინ ყველა ამონახსნი, რომელიც I ($T$)-ში შედის, შედის აგრეთვე III ($T$)-შიც.

თეორემის აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ III ($T$)- დან აღებული ამონახსნების ნებისმიერი წარმოდგენა სამართლიანია ყველა რეგულარული ამონახსნისათვის იმ პირობით, რომ კოეფიციენტები აგრეთვე III ($T$)-დან იქნება - ამბობს ჰენრიჩი.

ვეკუას ძირითადი დებულების მტკიცებას ავტორმა აგრეთვე სპეციალური პუნქტი მიუძღვნა და ასეც დაასათაურა: "ვეკუას თეორემის დამტკიცება" ([2],3,2 გვ.183).

ვ [1]

1973 წელს გამოქვეყნდა რუსული თარგმანი გერმანელი მათემატიკოსის ფ.ჰირცებრუხის (F.Hirzebruch ,ბონი, გფრ) მონოგრაფი-

------------

1 მესამე პუნქტის მოკლე შინაარსი თ.ებანოიძემ და ნ.კანდელაკმა მოახსენეს საქართველოს მათემატიკური საზოგადოების 1977 წლის 25 აპრილის სხდომას.

ისა "ტოპოლოგიური მეთოდები ალგებრულ გეომეტრიაში" [ 3 ], რომელსაც დართული აქვს ინგლისელი მათემატიკოსის რ. შვარცენბერგერის (R. Schwarzenberger, ვარვიკი) დამატება 1, "რიმან-როხის თეორემის გამოყენებანი" ([ 3 ], გვ.196).

დავუშვათ, შვარცენბერგერთან ერთად, რომ $\mathcal{D}$ აღნიშნავს დიფერენციალურ ოპერატორს,[1] $\mathcal{D}^*$ - ფორმალურად შეუღლებულ ოპერატორს, $\ker \mathcal{D}$ - $\mathcal{D}$ -ს გულს, $\operatorname{coker} \mathcal{D}$ - $\mathcal{D}$ -ს კოგულს. ცნობილია, რომ თუ $\mathcal{D}$ ელიფსურია, მაშინ $\mathcal{D}^*$ აგრეთვე ელიფსურია, $\ker \mathcal{D}$ გული სასრულგანზომილებიანია და $\dim \ker \mathcal{D}^* = \dim \operatorname{coker} \mathcal{D}$. $\tau(\mathcal{D})$ ინდექსი (ანუ ანალიზური ინდექსი) $\mathcal{D}$ -სათვის განისაზღვრება როგორც

$$\tau(\mathcal{D}) = \dim \ker \mathcal{D} - \dim \operatorname{coker} \mathcal{D} = \dim \ker \mathcal{D} - \dim \ker \mathcal{D}^*.$$

ამის შემდეგ შვარცენბერგერი აცხადებს: "ვეკუამ და გელფანდმა ივარაუდეს,[2] რომ მთელი რიცხვი $\tau(\mathcal{D})$ შეიძლება გამოისახოს ტოპოლოგიური ინვარიანტების საშუალებით. ეს ჰიპოთეზა კერძო შემთხვევებში შემოწმებული იყო აგრანოვიჩის, დინინის, ვოლპერტისა და სხვების მიერ".

სამწუხაროდ, ილია ვეკუას შემთხვევაში შვარცენბერგერი არ ასახელებს წყაროს, სადაც ეს მნიშვნელოვანი ჰიპოთეზაა წამოყენებული. შვარცენბერგერი მიუთითებს გელფანდის 1960 წლის ნაშრომს [4 ], ცოტა უფრო ახლოს გავეცნოთ ამ უკანასკნელს.

გელფანდი განიხილავს კერძოწარმოებულებიან განტოლებათა სისტემას

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = f(x), \qquad (3.1)$$

---

1 ჩვენ არ გამოვუდგებით ყველა აქ ხმარებული ცნების განმარტებას, რადგან ეს ახლა შორს წაგვიყვანს - თ.ე.

2 ხაზგასმა ჩვენია - თ. ე.

სადაც $x$ – $n$ -განზომილებიანი ნამდვილი სივრცის წერტილია, ხოლო $A$ – $m$ რიგის კვადრატული მატრიცა. იგულისხმება, რომ (3.1) სისტემა მოცემულია $x$ წერტილთა $\Omega$ არის $\bar{\Omega}$ ჩაკეტვაში და რომ ის ელიფსური სისტემაა ი.გ. პეტროვსკის განსაზღვრის აზრით. იგულისხმება აგრეთვე, რომ $\Omega$ არის $\Gamma$ საზღვარზე მოცემულია სასაზღვრო პირობა

$$B\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)\Big|_{\Gamma}=g(x), \qquad (3.2)$$

სადაც $B$ $m$ -სვეტიანი მართკუთხა მატრიცაა. შემდეგ განიხილება მოცემულ $\Omega$ არეში განსაზღვრული (3.1) სახის სისტემათა კლასი, როცა (3.1)-ში ფიქსირებულია ცვლადთა რიცხვი, უცნობ ფუნქციათა რიცხვი და წარმოებულთა უფროსი რიგი, ხოლო კოეფიციენტები შეიძლება იყოს ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციები. ასეთ კლასს გელფანდი უწოდებს მოცემული სტრუქტურის სისტემათა კლასს (ხაზგასმა მისივეა). (3.2) სასაზღვრო პირობის მატრიცაში აგრეთვე დავაფიქსიროთ გაწარმოების უფროსი რიგი და მატრიცის კოეფიციენტებიც ნებისმიერ უწყვეტ ფუნქციებად ჩავთვალოთ. (3.1) ელიფსური სისტემები (3.2) სასაზღვრო პირობებიდან ნებისმიერ პირობასთან ერთად წარმოქმნის ამოცანების კლასს, რომელიც წოდებულია მოცემული სტრუქტურის ამოცანათა კლასად.

ორ ამოცანას (ან ორ სისტემას, თუ სასაზღვრო პირობები არ გვაქვს) გელფანდი არქმევს ჰომოტოპიურად ეკვივალენტურს, თუ ისინი ერთიმეორისაგან მიიღებიან $A$ და $B$ მატრიცების კოეფიციენტთა უწყვეტი ცვლილებით, ამასთანავე ყოველთვის შესრულებულია ელიფსურობისა და რეგულარობის პირობები.

ყველაფერი, რაც ვიცით ელიფსურ განტოლებათა შესახებ, ამბობს გელფანდი, იმ თვალსაზრისს ადასტურებს, რომლის თანახმადაც (3.1) ელიფსურ სისტემათა და მათ ამონახსნთა ყველაზე არსებითი თვისებები საერთოდ არ უნდა იცვლებოდეს სისტემის ან ამოცანის მცირე დეფორმაციების დროს მოცემული სტრუქტურის შიგნით; სწორედ ამიტომაც შემოვიღეთ ჰომოტოპიური ეკვივალენტობის ცნება.

აქ გვაქვს, განაგრძობს გელფანდი, ორი მნიშვნელოვანი საკითხი: პირველი-ელიფსური ამოცანების (ე.ი. განტოლებებისა და სასაზღვრო პირობების) ყველა ჰომოტოპური ინვარიანტის პოვნა და მეორე - ამ ინვარიანტების აზრის გამორკვევა განტოლებათა ამონახსნების ტერმინებში.

კერძოდ, უნდა ველოდეთ, რომ ჰომოტოპური ინვარიანტი იქნება ამოცანის ინდექსი - ამოცანის "არაფრედჰოლმურობის ხარისხი", ე.ი. სხვაობა მოცემული ერთგვაროვანი ამოცანის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნების რიცხვსა და შეუღლებული ერთგვაროვანი ამოცანის წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნების რიცხვს შორის.

ი.ნ. ვეკუას, თ.დ.გახოვისა და სხვა ავტორთა ნაშრომებში, დასძენს გელფანდი, ინდექსი მიკნებულია ამოცანების სხვადასხვა კლასებისათვის სიბრტყეზე.

ინდექსის პრობლემის შესწავლაში ი.ვეკუას მნიშვნელოვანი წვლილის შეფასებისათვის, დაბოლოს, დავიმოწმებთ ისეთ ავტორიტეტულ წყაროს, როგორიცაა [ 5 ] . ამ წერილში ზოგადი ელიფსური სასაზღვრო ამოცანების თეორიაში ი.ვეკუას 30-იანი და 40-იანი წლების გამოკვლევების შესახებ ბევრია თქმული, მათ შორის:"ეს გამოკვლევები და, კერძოდ, აღნიშნული ამოცანების ნორმალური ამოხსნადობა, დადგენილი ი.ვეკუას მიერ, აგრეთვე ცხადი ფორმულა ინდექსისათვის, რომელიც გამოსახულია სასაზღვრო პირობის კოეფიციენტების საშუალებით, ფუძემდებლური აღმოჩენა ელიფსური. სასაზღვრო ამოცანების თეორიისათვის დამოუკიდებელ ცვლადთა ნებისმიერი რიცხვით, 60-იან წლებში ატიასა და ზინგერის შრომებში განხილულ იქნა ინდექსის პრობლემა ზოგადი ელიფსური სასაზღვრო ამოცანებისათვის დამოუკიდებელ ცვლადთა ნებისმიერი რიცხვით. ამ შრომებში ინდექსისათვის მოძებნილი ფორმულა განაზოგადებს 30-იან წლებში ი.ვეკუას მიერ მიღებულ ფორმულას".

მიღებულია 10.XI.77

საქ. სსრ მეცნ.აკადემიის
გამოთვლითი ცენტრი

## ლიტერატურა

I. Международный математический конгресс в Амстердаме (I954г). (Обзорные доклады), Москва, I96I.

2. P.Henrici. A Survey of I.N.Vekua's Theory of Elliptic Partial Differential Equations With Analytic Coefficients, J. App. Math. Phys., vol.8, 1957.

3. Ф.Хирцебрух. Топологические методы в алгебраической геометрии, Москва, I973.

4. И.М.Гельфанд. Об эллиптических уравнениях, УМН, т.ХУ, вып. 3(93), I960.

5. П.С.Александров, А.В.Бицадзе, М.И.Вишик, О.А.Олейник. Илья Несторович Векуа, УМН, т.XXXП, вып. 2(I94), I977.

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

197, 1978

УДК. 517.5

# СУММИРОВАНИЕ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Л.В.Жижиашвили

## §1. Некоторые определения и обозначения

Точки $n$ -мерного евклидова пространства $E_n$ будем обозначать через $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n),\dots$. В частности, $\vec{0}=(0,0,\dots,0)$, $\vec{1}=(1,1,\dots,1)$. Затем, будем считать, что $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$, $k\vec{x}=(kx_1,kx_2,\dots,kx_n)$, $k\in E_1$. Далее, пусть $M=\{1,2,\dots,n\}$ и $B$ - произвольное подмножество из $M$. Для любого вектора $\vec{x}\in E_n$ символом $\vec{x}_B$ будем обозначать такую точку из $E_n$, координаты которой с индексами из $B$ совпадают с соответствующими координатами вектора $\vec{x}$, а остальные - нули. Будем также предполагать, что $k(B)$ - число элементов множества $B$ и $E_n(B)$ - гиперплоскость, натянутая лишь на координатные векторы, индексы которых, составляют множество $B$ и $d\vec{s}_B=ds_{i_1}ds_{i_2}\dots ds_{i_k}$. Далее будем предполагать, что $R_n=[-\pi,\pi]^n$ и $R_n^{(B)}=R_n\cap E_n(B)$. Пусть $\vec{P}_i$ $(i=1,2)$ - точки из $E_n$. Запись $\vec{P}_1>\vec{P}_2$ означает, что ни одна из координат вектора $\vec{P}_1$ не меньше соответствующей координаты вектора $\vec{P}_2$ и для некоторого индекса $j_0$ имеем $P_{j_0}^{(1)} > P_{j_0}^{(2)}$. Далее, будем также предполагать, что $\overline{B} = C_M B$, $P_i = 0,1,\ldots$ $(i=\overline{1,n})$, $\vec{P} = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ и $\lambda(\vec{P})$ – число тех координат вектора $\vec{P}$, которые равны нулю. В дальнейшем будем рассматривать функции $f: R_n \to E_1$, периодические с периодом $2\pi$ относительно каждой переменной. Если $f \in L(R_n)$, то выражения

$$a_{\vec{P}}^{(B)}(f) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \int_{R^n} f(\vec{x}) \prod_{k \in B} \cos P_k x_k \prod_{i \in \overline{B}} \sin P_i x_i \, d\vec{x} \tag{I.I}$$

называем коэффициентами Фурье функции $f$. Ряд

$$\sum_{\vec{P} \geq \vec{0}}^{\infty} 2^{-\lambda(\vec{P})} \sum_{B \subseteq M} a_{\vec{P}}^{(B)}(f) \prod_{k \in B} \cos P_k x_k \prod_{i \in \overline{B}} \sin P_i x_i \tag{I.2}$$

будем называть $n$-кратным тригонометрическим рядом Фурье функции $f$. В дальнейшем обозначим его символом $\sigma_n[f]$. Символом же $\overline{\sigma}_n[f,B]$ обозначим сопряженный тригонометрический ряд для $\sigma_n[f]$ по тем (см. I, стр.8I) переменным, индексы которых составляют множество $B$. Далее, если $f \in L(R_n)$, то выражения

$$\overline{f}_B(\vec{x}) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{K(B)} \int_{R_n} f(\vec{x} + \vec{s}_B) \prod_{i_j \in B} ctg \frac{s_{i_j}}{2} d\vec{s}_B \tag{I.3}$$

будем называть сопряженной функцией $n$ переменных (относительно вопроса о существовании почти всюду на $R_n$ сопряженных функций $n$ переменных (см.[I], стр.84). Обозначим через $\overline{S}_{\vec{k}}(\vec{x}, f, B)$ частные суммы ряда $\overline{\sigma}_n[f,B]$ порядка $\vec{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, где

$k_i$ $(i=\overline{1,n})$ - целые неотрицательные числа. Если $B=\phi$ (пустое множество), то $\bar{S}_{\vec{k}}(\vec{x},f,\phi)$ означает частную сумму ряда $\sigma_n[f]$. Выражение

$$\sigma_n^\alpha(\vec{x},f,B)=\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k_1=0}^{n}A_{n-k_1}^{\alpha-1}S_{k_1,k_2,\dots,k_1}(\vec{x},f,B),\ \alpha>-1,\ \alpha\neq0, \tag{I.4}$$

будем называть $(C,\alpha)$ - средними рядами $\bar{\sigma}_n[f,B]$ $(\bar{\sigma}_n[f,\phi]\equiv\equiv\sigma_n[f])$, где

$$A_n^\alpha=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!},\ \alpha\neq-1,\ \alpha\neq-2,\dots \tag{I.5}$$

§2. Постановка вопроса; формулировка основного результата

Впервые И.Марцинкевич [2] применил метод суммирования $(C,1)$ для рядов $\sigma_2[f]$. В частности, он показал, что если $f\in L\overset{+}{\log}L$ на $R$, то почти всюду на $R_2$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^1(\vec{x},f,\phi)=f(\vec{x}), \tag{2.I}$$

если же $f\in C(R_2)$, то соотношение (2.I) имеет место в смысле равномерной сходимости. В статье [3] нами были приведены утверждения, относящиеся к поведению выражения $\sigma_n^\alpha(\vec{x},f,\phi)$, $\alpha>-1$, для функции $f\in L^p(R_2)$, $1\le p\le+\infty$ $(L^\infty\equiv C)$; в частности, были установлены некоторые аппроксимативные свойства для $\sigma_n^\alpha(\vec{x},f,\phi)$, $\alpha>-1$. В статье [4] установлено, что если

$f \in L(R_2)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^\alpha(\vec{x}, f, \phi) = f(\vec{x}), \quad \alpha > 0,$$

почти всюду на $R_2$. Этот результат обобщает соответствующее утверждение И.Марцинкевича [2](см. (2.I) ) как в смысле ослабления условия теоремы, так и в смысле обобщения метода суммирования. Р.Таберский [5] изучал также другие свойства $\sigma_n^1(\vec{x}, f, \phi)$ для $f \in C(R_2)$ или $f \in L(R_2)$. Заметим, что некоторые утверждения (например, теорема 2) Р.Таберского вытекают из соответствующих результатов статьи [3]. В определенном смысле к этому же кругу вопросов относятся результаты Р.Таберского [6] и М.Ф.Тимана, В.Г.Пономаренко [8](см. также [7] ).

Естественно, возникает вопрос: как ведут себя выражения $\sigma_n^\alpha(\vec{x}, f, B)$ (т.е. $(C,\alpha)$ средние $n$-кратных сопряженных тригонометрических рядов) при $B \neq \phi$ ? В настоящей статье поставленный вопрос изучается для случая $n=2$. Справедлива

<u>Теорема (основная)</u>. а) Если $f \in L\log^+ L$ на $R_2$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^\alpha(\vec{x}, f, B) = \bar{f}_B(\vec{x}), \quad \alpha > 0, \quad B \subseteq \{1,2\} \ (B \neq \phi), \tag{2.2}$$

почти всюду на $R_2$.

б) Для любого непустого множества $B$ и произвольного $\varepsilon \in (0,1]$ существует $f_0 \in L(\log^+ L)^{1-\varepsilon}$ на $R_2$, однако

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\sigma_n^\alpha(\vec{x}, f, B)\right| = +\infty, \quad \alpha > 0, \tag{2.3}$$

почти всюду на $R_2$.

Отметим, что утверждения основной теоремы без доказательств приведены в статье [9] . Требование $\alpha > 0$ в соотношении (2.3) не является существенным, так как, если $-1 < \alpha < 0$, то (независимо от множества $B$ ) легко построить функцию $f_1 \in C(R_2)$, для которой (2.3) имеет место всюду на $R_2$.

## § 3. Вспомогательные утверждения

<u>Лемма I.</u> Пусть

$$\mathcal{D}_k(x)=\frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}},\ \overline{\mathcal{D}}_k(x)=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{\cos(k+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}. \qquad (3.1)$$

Положим

$$K_m^{(1,\alpha)}(\vec{x})=\frac{1}{A_m^{\alpha}}\sum_{k=0}^{m}A_{m-k}^{\alpha-1}\overline{\mathcal{D}}_k(x_1)\mathcal{D}_k(x_2), \qquad (3.2)$$

$$K_m^{(2,\alpha)}(\vec{x})=\frac{1}{A_m^{\alpha}}\sum_{k=0}^{m}A_{m-k}^{\alpha-1}\mathcal{D}_k(x_1)\overline{\mathcal{D}}_k(x_2), \qquad (3.3)$$

$$K_m^{(3,\alpha)}(\vec{x})=\frac{1}{A_m^{\alpha}}\sum_{k=0}^{m}A_{m-k}^{\alpha-1}\overline{\mathcal{D}}_k(x_1)\overline{\mathcal{D}}_k(x_2), \qquad (3.4)$$

где $\alpha>-1,\ \alpha\neq 0$. Тогда

$$\left.\begin{aligned}&\|K_m^{(i,\alpha)}(\vec{x})\|_C=O(n^2),\ \alpha>0,\\&\|K_m^{(i,\alpha)}(\vec{x})\|_C=O(n^{2-\alpha}),\ -1<\alpha<0,\ i=\overline{1,3}\end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

Лемма I доказывается совершенно так же, как лемма I из статьи [3].

Легко проверяется и

<u>Лемма 2.</u> Если $0<|x_i|\leq\pi\ (i=1,2)$ и $K_m^{(i,\alpha)}(\vec{x})\ (i=\overline{1,3})$

определены соответственно соотношениями (3.I), (3.3), (3.4), то



$$K_m^{(i,\alpha)}(\vec{x})=\begin{cases}O\left(\frac{1}{|x_1x_2|}\right), & \alpha>0,\\ O\left(\frac{n^{-\alpha}}{|x_1x_2|}\right), & -1<\alpha<0.\end{cases} \tag{3.6}$$

Лемма 3. Пусть $0<x_2\pm x_1\le 2\pi-\delta$, $\delta\in(0,2\pi)$, $0<x_i\le\pi$ $(i=1,2)$, $0<|\alpha|<1$. Тогда

$$K_m^{(1,\alpha)}(\vec{x})=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_1}{2}K_m^{\alpha}(x_2)+\psi_m^{(1,\alpha)}(\vec{x})+\varkappa_m^{(1,\alpha)}(\vec{x}), \tag{3.7}$$

где

$$K_m^{\alpha}(x)=\frac{1}{A_m^{\alpha}}\sum_{k=0}^{m}A_{m-k}^{\alpha-1}D_k(x), \tag{3.8}$$

$$\psi_m^{(1,\alpha)}(\vec{x})=\frac{1}{8A_m^{\alpha}\sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_2}{2}}\left\{\frac{\sin[(m+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2})(x_1+x_2)-\frac{\pi\alpha}{2}]}{(2\sin\frac{x_1+x_2}{2})^{\alpha}}-\right. \tag{3.9}$$

$$\left.-\frac{\sin[(m+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2})(x_2-x_1)-\frac{\pi\alpha}{2}]}{(2\sin\frac{x_2-x_1}{2})^{\alpha}}\right\},$$

$$\varkappa_m^{(1,\alpha)}(\vec{x})=O\left\{\frac{1}{mx_1x_2(x_2-x_1)}+\frac{1}{mx_1x_2(2\pi-x_1-x_2)}\right\}. \tag{3.10}$$

Доказательство. В силу (3.I) и (3.3), имеем

$$K_m^{(1,\alpha)}(\vec{x})=$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x_1}{2} K_m^\alpha(x_2) - \frac{1}{A_m^\alpha} \sum_{k=0}^{m} A_{m-k}^{\alpha-1} \frac{\cos(k+\frac{1}{2})x_1 \sin(k+\frac{1}{2})x_2}{2\sin\frac{x_1}{2}\, 2\sin\frac{x_2}{2}}.$$

Отсюда

$$K_m^{(1,\alpha)}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_1}{2} K_m^\alpha(x_2) - \frac{1}{8A_m^\alpha \sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_2}{2}} \times$$

$$\times \operatorname{Im}\Big\{\sum_{k=0}^{m} A_{m-k}^{\alpha-1}\big[e^{i(k+\frac{1}{2})(x_1+x_2)} - e^{i(k+\frac{1}{2})(x_2-x_1)}\big]\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_1}{2}K_m^\alpha(x_2) - \frac{1}{8A_m^\alpha \sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_2}{2}} \operatorname{Im}\Big\{e^{i(m+\frac{1}{2})(x_1+x_2)}\sum_{k=0}^{m} A_k^{\alpha-1} e^{-ik(x_1+x_2)} -$$

$$- e^{i(m+\frac{1}{2})(x_2-x_1)} \sum_{k=0}^{m} A_k^{\alpha-1} e^{-ik(x_2-x_1)}\Big\} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_1}{2}K_m^\alpha(x_2) -$$

$$- \frac{1}{8A_m^\alpha \sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_2}{2}} \operatorname{Im}\Big\{e^{i(m+\frac{1}{2})(x_1+x_2)}\Big[\big(1-e^{-i(x_1+x_2)}\big)^{-\alpha} -$$

$$- \sum_{k=m+1}^{\infty} A_k^{\alpha-1} e^{-ik(x_1+x_2)}\Big] - e^{i(m+\frac{1}{2})(x_2-x_1)}\Big[\big(1-e^{-i(x_2-x_1)}\big)^{-\alpha} -$$

$$- \sum_{k=m+1}^{\infty} A_k^{\alpha-1} e^{-ik(x_2-x_1)}\Big]\Big\} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_1}{2}K_m^\alpha(x_2) +$$

$$+ \psi_m^{(1,\alpha)}(\vec{x}) + r_m^{(1,\alpha)}(\vec{x}),$$

где

$$\psi_m^{(1,\alpha)}(\vec{x}) = \frac{1}{8A_m^\alpha \sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_2}{2}} \operatorname{Im}\Big\{e^{i(m+\frac{1}{2})(x_2-x_1)}\big(1-e^{-i(x_2-x_1)}\big)^{-\alpha} - e^{i(m+\frac{1}{2})(x_1+x_2)}\big(1-e^{-i(x_1+x_2)}\big)^{-\alpha}\Big\}, \tag{3.12}$$

$$\tau_m^{(1,\alpha)}(\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{8A_m^\alpha \sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_2}{2}} \, \mathfrak{I}_m \Big\{ e^{i(m+\frac{1}{2})(x_1+x_2)} \sum_{k=m+1}^{\infty} A_k^{\alpha-1} e^{-ik(x_1+x_2)} - \tag{3.13}$$

$$- e^{i(m+\frac{1}{2})(x_2-x_1)} \sum_{k=m+1}^{\infty} A_k^{\alpha-1} e^{-ik(x_2-x_1)} \Big\}.$$

Используя (3.I2), нетрудно проверить, что $\psi_m^{(1,\alpha)}(\vec{x})$ определяется формулой (3.9). Что касается выражения для $\tau_m^{(1,\alpha)}(\vec{x})$, данного равенством (3.I3), то, применяя метод, использованный в [3] при доказательстве соответствующей части леммы 3, убеждаемся, что оно удовлетворяет условию (3.I0). Лемма доказана.

Аналогично доказывается

<u>Лемма 4</u>. Пусть $0<x_1 \pm x_2 \le 2\pi-\delta$, $\delta \in (0,2\pi)$, $0<x_i\le\pi$ $(i=1,2)$, $0<|\alpha|<1$ и $K_m^{(i,\alpha)}(\vec{x})$ $(i=2,3)$ определены соответственно соотношениями (3.3) и (3.4). Тогда

$$K_m^{(2,\alpha)}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_2}{2} K_m^\alpha(x_1) + \psi_m^{(2,\alpha)}(\vec{x}) + \tau_m^{(2,\alpha)}(\vec{x}), \tag{3.14}$$

$$K_m^{(3,\alpha)}(\vec{x}) = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{x_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_2}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_1}{2} H_m^\alpha(x_2) - \tag{3.15}$$

$$- \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_2}{2} H_m^\alpha(x_1) + \psi_m^{(3,\alpha)}(\vec{x}) + \tau_m^{(3,\alpha)}(\vec{x}),$$

где

$$\left.\begin{aligned} \psi_m^{(2,\alpha)}(\vec{x}) &\equiv \psi_m^{(2,\alpha)}\{(x_1,x_2)\} = \psi_m^{(1,\alpha)}\{(x_2,x_1)\}, \\ \tau_m^{(2,\alpha)}(\vec{x}) &\equiv \tau_m^{(2,\alpha)}\{(x_1,x_2)\} = \tau_m^{(1,\alpha)}\{(x_1,x_2)\}, \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

$$H_m^\alpha(x) = \frac{1}{A_m^\alpha} \sum_{k=0}^{m} A_{m-k}^{\alpha-1} \frac{\cos(k+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, \tag{3.17}$$

$$\psi_m^{(3,\alpha)}(\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{8A_m^\alpha \sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_2}{2}}\left\{\frac{\cos[(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2})(x_1-x_2)-\frac{\pi\alpha}{2}]}{(2\sin\frac{x_1+x_2}{2})^\alpha} - \frac{\cos[(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2})(x_1-x_2)\frac{\pi\alpha}{2}]}{(2\sin\frac{x_1-x_2}{2})^\alpha}\right\}, \tag{3.18}$$

$$r_m^{(3,\alpha)}(\vec{x}) = O\left\{\frac{1}{m x_1 x_2}\left[\frac{1}{x_1-x_2} + \frac{1}{2\pi - x_1 - x_2}\right]\right\}. \tag{3.19}$$

Следствие. Если $0 < x_i \leq \pi \ (i=1,2)$, $\frac{1}{n} \leq x_1 - x_2 \leq 2\pi - \delta$, $\delta \in (0, 2\pi)$, $0<\alpha<1$ и

$$U_m^{(3,\alpha)}(\vec{x}) = \psi_m^{(3,\alpha)}(\vec{x}) + r_m^{(3,\alpha)}(\vec{x}), \tag{3.20}$$

то

$$U_m^{(3,\alpha)}(\vec{x}) = O\left\{\frac{1}{n^\alpha x_1 x_2 (x_1-x_2)^\alpha}\right\}. \tag{3.21}$$

Заметим, что соотношение (3.21), с соответствующими изменениями, имеет место и для

$$U_m^{(i,\alpha)}(\vec{x}) = \psi_m^{(i,\alpha)}(\vec{x}) + r_m^{(i,\alpha)}(\vec{x}) \quad (i=1,2).$$

Лемма 5. Пусть $0 < s_1 \leq \frac{1}{m}$, $\frac{2}{m} \leq s_2 \leq \pi$. Тогда

$$\left\{\frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{k=0}^{m} A_{m-k}^{\alpha-1}\, \bar{D}_k(s_1)\frac{\cos(k+\frac{1}{2})s_2}{2\sin\frac{s_2}{2}}\right\} = O\left\{\frac{m^{1-\alpha}}{(s_2-s_1)^{1+\alpha}}\right\}, \quad 0<|\alpha|<1. \tag{3.22}$$

Справедливость леммы 5 нетрудно проверить, если учесть тот факт, что (см. [10], стр.159)

$$\left\{\frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{k=0}^{m} A_{m-k}^{\alpha-1}\frac{\cos(k+\frac{1}{2})s_2}{2\sin\frac{s_2}{2}}\right\}=O\left\{\frac{1}{m^\alpha s_2^{1+\alpha}}\right\},\quad \frac{2}{m}\le s_2\le\pi.$$

При доказательстве основной теоремы будут использованы и следующие (см. [4], а также [II], стр. 467-468) леммы:

Лемма 6. Пусть $R_2^{(1)}$ - квадрат $|x_i|\le 6\pi\ (i=1,2)$. Предположим, что функция $f$ суммируема на $R_2^{(1)}$ и для каждой точки $\vec{x}\in R_2$ положим

$$f_*(\vec{x})=\sup_{0\le t\le\delta}\frac{1}{4h(t)\eta(t)}\int_{-h(t)}^{h(t)}\int_{-\eta(t)}^{\eta(t)}|f(\vec{x}+\vec{u})|\,d\vec{u},\quad h(s)<\pi,\ \eta(s)<\pi,$$

где $h(t)$ и $\eta(t)$ - непрерывные, строго возрастающие на $[0,\delta]$ до $+\infty$ функции и $h(0)=\eta(0)=0$. Далее, пусть $f_*^{\alpha,\beta}$ - функция $f_*$ с $\alpha h(t)$, $\beta\eta(t)$ вместо $h(t)$ и $\eta(t)$, а $\alpha,\beta$ - положительные числа. Если

$$f_\lambda^*(\vec{x})=\sup_{i,j}\left\{f_*^{2^i,2^j}(\vec{x})2^{-\lambda(i+j)}\right\}\quad(i,j=0,1,\dots),\ \lambda>0,$$

$$B_\lambda(y)=\{\vec{x}:\vec{x}\in R_2,\ f_\lambda^*(\vec{x})>y>0\},$$

то

$$\operatorname{mes} B_\lambda(y)\le\frac{A}{y}\int_{R_2^{(1)}}|f(\vec{x})|\,d\vec{x},$$

где $A$ - положительная абсолютная константа.

Лемма 7. Предположим, что функции $f$, $h$ и $\eta$ удовлетворяют условиям леммы 6. Для каждой точки $\vec{x}\in R_2$ положим

$$\varphi_*(\vec{x}) = \sup_{0 \le t \le \delta} \frac{1}{4h(t)\eta(t)} \int_{-h(t)}^{h(t)} \int_{-\eta(t)}^{\eta(t)} |f(\vec{x}+\vec{u})| d\vec{u}.$$

Предположим, что $\varphi_*^{\alpha,\beta}$ – функция с $\alpha h(t)$, $\beta\eta(t)$ вместо $h(t)$ и $\eta(t)$.

Если

$$\varphi_\lambda^*(\vec{x}) = \sup_{i,j} \{ \varphi_*^{2^i,2^j}(\vec{x}) \lambda^{-\lambda(i+j)} \} \ (i,j=0,1,\dots), \ \lambda>0,$$

$$B_\lambda^{(1)}(y) = \{ \vec{x} : \vec{x} \in R_2, \ \varphi_\lambda^*(\vec{x}) > y > 0 \},$$

то

$$mes\, B_\lambda^{(1)}(y) \le \frac{A'}{y} \int_{R_2^{(1)}} |f(\vec{x})| d\vec{x},$$

где $A'$ – положительная абсолютная постоянная.

## §4. Доказательство основной теоремы

Пункт а). Так как $f \in L \log^+ L$ на $R_2$, то, согласно теореме А.Зигмунда (см. [I2], стр.568), функции $\bar{f}_1 \equiv \bar{f}_{\{1\}}$ и $\bar{f}_2 \equiv \bar{f}_{\{2\}}$ суммируемы на $R_2$. Тогда, используя теорему В.И.Смирнова (см. [I2] .стр.583), находим: $\bar{\sigma}_2[f,\{1\}] = \sigma_2[\bar{f}_1]$, $\bar{\sigma}_2[f,\{2\}] = \sigma_2[\bar{f}_2]$. Стало быть, в силу основной теоремы из статьи [4], соотношения (2.2) имеют место почти всюду на $R_2$ при $B=\{1\}$ или $B=\{2\}$.

Пусть теперь $B=\{1,2\}$. Используя (I.I), (I.4) и (3.4), будем иметь

$$\sigma_m^\alpha(\vec{x}, f, B) = \frac{1}{\pi^2}\int_{R_2} f(\vec{x}+\vec{s}) K_m^{(3,\alpha)}(\vec{s})\, d\vec{s} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi [f(x_1+s_1, x_2+s_2) - f(x_1-s_1, x_2+s_2) -$$

$$- f(x_1+s_1, x_2-s_2) + f(x_1-s_1, x_2-s_2)] K_m^{(3,\alpha)}(\vec{s})\, d\vec{s}.$$

Если положим

$$\psi(\vec{x}, \vec{s}) = f(x_1+s_1, x_2+s_2) - f(x_1-s_1, x_2+s_2) - \qquad (4.1)$$

$$- f(x_1+s_1, x_2-s_2) + f(x_1-s_1, x_2-s_2),$$

то $\sigma_m^\alpha(\vec{x}, f, B)$ можно представить так:

$$\sigma_m^\alpha(\vec{x}, f, B) = \frac{1}{\pi^2}\Big(\int_0^{\frac{1}{m}}\int_0^{\frac{1}{m}} + \int_0^{\frac{1}{m}}\int_{\frac{1}{m}}^{\pi} + \int_{\frac{1}{m}}^{\pi}\int_0^{\frac{1}{m}} +$$

$$+ \int_{\frac{1}{m}}^{\pi}\int_{\frac{1}{m}}^{\pi}\Big)\psi(\vec{x}, \vec{s}) K_m^{(3,\alpha)}(\vec{s})\, d\vec{s} = \sum_{j=1}^{4} \mathcal{P}_j(\vec{x}, f, m, \alpha)^*. \qquad (4.2)$$

Опираясь на (3.5) с индексом $i=3$ $(\alpha>0)$, в силу (4.2) находим

$$|\mathcal{P}_1(\vec{x}, f, m, \alpha)| \le C(\alpha) m^2 \int_0^{\frac{1}{m}}\int_0^{\frac{1}{m}} |\psi(\vec{x}, \vec{s})|\, d\vec{s}.$$

---

* В дальнейшем, вообще говоря, разные положительные константы, зависящие только от $\alpha$, будем обозначать через $C(\alpha)$.

Отсюда, согласно (4.1) и лемме 6, получаем

$$\operatorname{mes}\{\vec{x}: \sup_m |\mathcal{P}_1(\vec{x},f,m,\alpha)| > y > 0,\ \vec{x}\in R_2\} \le \frac{C(\alpha)}{y}\int_{R_2} |f(\vec{x})|\,d\vec{x}. \tag{4.3}$$

Положим

$$\overline{K}_m^{(\alpha)}(s) = \frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{k=0}^{m} A_{m-k}^{\alpha-1}\,\overline{\mathcal{D}}_k(s). \tag{4.4}$$

Согласно (3.1), (3.4) и (4.2), будем иметь

$$\mathcal{P}_2(\vec{x},f,m,\alpha) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{1}{m}}\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}} \psi(\vec{x},\vec{s})K_m^{(3,\alpha)}(\vec{s})\,d\vec{s} +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{1}{m}}\int_{\frac{2}{m}}^{\pi} \psi(\vec{x},\vec{s})K_m^{(3,\alpha)}(\vec{s})\,d\vec{s} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{1}{m}}\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}} \psi(\vec{x},\vec{s})K_m^{(3,\alpha)}(\vec{s})\,d\vec{s} + \tag{4.5}$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{1}{m}}\int_{\frac{2}{m}}^{\pi} \psi(\vec{x},\vec{s})\operatorname{ctg}\frac{s_2}{2}\,\overline{K}_m^{(\alpha)}(s_1)\,d\vec{s} - \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{1}{m}}\int_{\frac{2}{m}}^{\pi} \psi(\vec{x},\vec{s})\,\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{k=0}^{m} A_{m-k}^{\alpha-1}\,\overline{\mathcal{D}}(s_1)\,\frac{\cos(k+\frac{1}{2})s_2}{2\sin\frac{s_2}{2}}\right\}d\vec{s} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\delta_j(\vec{x},f,m,\alpha).$$

Ясно, что $\delta_1(\vec{x},f,m,\alpha)$ оценивается совершенно так же, как $\mathcal{P}_1(\vec{x},f,m,\alpha)$, т.е.

$$\operatorname{mes}\{\vec{x}: \vec{x}\in R_2,\ \sup_m |\delta_1(\vec{x},f,m,\alpha)| > y > 0\} \le \frac{C(\alpha)}{y}\int_{R_2} |f(\vec{x})|\,d\vec{x}. \tag{4.6}$$

Далее, пусть

$$N_1(f,\vec{x})=\sup_{0<\varepsilon\le\pi}\left|\int_{\varepsilon}^{\pi}[f(x_1+s_1,x_2)-f(x_1-s_1,x_2)]\operatorname{ctg}\frac{s_1}{2}\,ds_1\right|, \tag{4.7}$$

$$N_2(f,\vec{x})=\sup_{0<\eta\le\pi}\left|\int_{\eta}^{\pi}[f(x_1,x_2+s_2)-f(x_1,x_2-s_2)]\operatorname{ctg}\frac{s_2}{2}\,ds_2\right|. \tag{4.8}$$

Согласно известным результатам (см. [10], стр.442-443), можно заключить, что

$$\int_{R_2}|N_i(f,\vec{x})|\,d\vec{x}\le A\left\{\int_{R_2}|f(\vec{x})|\overset{+}{\log}|f(\vec{x})|\,d\vec{x}+1\right\},\ A>0,\ (i=1,2). \tag{4.9}$$

С другой стороны (см. [10], стр. 159),

$$\|\bar{K}_m^{(\alpha)}(s_1)\|_C=O(m). \tag{4.10}$$

Таким образом, используя (4.5), (4.10), (4.7) и (4.9) с индексом $i=2$, в силу леммы 6, справедлива оценка

$$\operatorname{mes}\left\{\vec{x}:\sup_m|\delta_2(\vec{x},f,m,\alpha)|>y>0,\ \vec{x}\in R_2\right\}\le\frac{C(\alpha)}{y}\int_{R_2}|f(\vec{x})|\overset{+}{\log}|f(\vec{x})|\,d\vec{x}+1\}. \tag{4.11}$$

Затем, согласно лемме 5 (см. (3.22) ), находим

$$|\delta_3(\vec{x},f,m,\alpha)|\le\int_0^{\frac{1}{m}}\left\{\int_{\frac{2}{m}}^{\pi}\frac{|\psi(\vec{x},\vec{s})|}{n^{\alpha-1}s_2^{1+\alpha}}\,ds_2\right\}ds_1.$$

Отсюда, используя оценку выражения $U_n^{(3)}(f;x,y)$ из статьи

[4] (см. [4], стр. III9, соотношения (26) - (29) ), получаем

$$mes\left\{\vec{x}:\vec{x}\in R_2,\sup_m\left|\delta_3(\vec{x},f,m,\alpha)\right|>y>0\right\}\leq\frac{C(\alpha)}{y}\int_{R_2}|f(\vec{x})|d\vec{x}. \tag{4.I2}$$

Таким образом, в силу (4.5), (4.6), (4.II) и (4.I2), верна следующая оценка:

$$mes\left\{\vec{x}:\vec{x}\in R_2,\sup_m\left|\mathcal{P}_2(\vec{x},f,m,\alpha)\right|>y>0\right\}\leq\frac{C(\alpha)}{y}\left\{\int_{R_2}|f(\vec{x})|\log(|f(\vec{x})|+e)+1\right\}. \tag{4.I3}$$

Совершенно аналогично получается и соотношение

$$mes\left\{\vec{x}:\vec{x}\in R_2,\sup_m\left|\mathcal{P}_3(\vec{x},f,m,\alpha)\right|>y>0\right\}\leq\frac{C(\alpha)}{y}\left\{\int_{R_2}|f(\vec{x})|\log(|f(\vec{x})|+e)+1\right\}. \tag{4.I4}$$

Далее, принимая во внимание (4.2), (3.I5) и (3.20), будем иметь

$$\begin{gathered}\mathcal{P}_4(\vec{x},f,m,\alpha)-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\frac{2}{m}}^{\pi}\int_{\frac{2}{m}}^{\pi}\psi(\vec{x},\vec{s})\,ctg\frac{s_1}{2}\,ctg\frac{s_2}{2}\,d\vec{s}=\\=\frac{1}{\pi^2}\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}}\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}}\psi(\vec{x},\vec{s})K_m^{(3,\alpha)}(\vec{s})d\vec{s}+\frac{1}{\pi^2}\int_{\frac{2}{m}}^{\pi}\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}}\psi(\vec{x},\vec{s})K_m^{(3,\alpha)}(\vec{s})d\vec{s}+\\+\frac{1}{\pi^2}\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}}\int_{\frac{2}{m}}^{\pi}\psi(\vec{x},\vec{s})K_m^{(3,\alpha)}(\vec{s})d\vec{s}+\frac{1}{4\pi^2}\int_{\frac{2}{m}}^{\pi}\int_{\frac{2}{m}}^{\pi}\psi(\vec{x},\vec{s})\,ctg\frac{s_1}{2}\,ctg\frac{s_2}{2}\,d\vec{s}-\\-\frac{1}{2\pi^2}\int_{\frac{2}{m}}^{\pi}\int_{\frac{2}{m}}^{\pi}\psi(\vec{x},\vec{s})\,ctg\frac{s_1}{2}H_m^{(\alpha)}(s_2)d\vec{s}+\frac{1}{\pi^2}\int_{\frac{2}{m}}^{\pi}\int_{\frac{2}{m}}^{\pi}\psi(\vec{x},\vec{s})u_m^{(3,\alpha)}(\vec{s})d\vec{s}=\sum_{k=1}^{6}z_k(\vec{x},f,m,\alpha).\end{gathered} \tag{4.I5}$$

С помощью рассуждений, которые были приведены выше для получения оценок (4.3), (4.I3) и (4.I4), можно заключить

$$\operatorname{mes}\{\vec{x}: x\in R_2,\ \sup_m |z_k(\vec{x},f,m,\alpha)|>y>0\}\le \tag{4.16}$$

$$\le \frac{C(\alpha)}{y}\left\{\int_{R_2}|f(\vec{x})|\log(|f(\vec{x})|+e)\,d\vec{x}+1\right\}\quad (i=\overline{1,5})$$

Рассмотрим следующие плоские множества:

$U_1=\{\vec{s}: \frac{2}{m}\le s_1, s_2\le\frac{4}{m}\}$, $U_2=\{\vec{s}: s_1\ge\frac{4}{m}, s_1\le\frac{3\pi}{4};\ s_2\ge\frac{3}{m}, s_2\le s_1-\frac{1}{m}\}$,

$U_3=\{\vec{s}: s_1\ge\frac{4}{m};\ \frac{2}{m}\le s_2\le\frac{3}{m}\}$, $U_4=\{\vec{s}: s_1\ge\frac{3}{m}, s_1\le s_2-\frac{1}{m};\ s_2\ge\frac{4}{m}, s_2\le\frac{3\pi}{4}\}$,

$U_5=\{\vec{s}: \frac{2}{m}\le s_1\le\frac{3}{m}, s_2\ge\frac{4}{m}\}$, $U_6=\{\vec{s}: s_1\ge\frac{4}{m}, s_1\le\frac{3\pi}{4};\ s_2\ge s_1-\frac{1}{m}, s_2\le s_1\}$,

$U_7=\{\vec{s}: s_1\ge s_2-\frac{1}{m}, s_1\le s_2;\ s_2\ge\frac{4}{m}, s_2\le\frac{3\pi}{4}\}$, $U_8=\{\vec{s}: s_1\ge\frac{3\pi}{4}, s_1\le\pi;\ s_2\ge\frac{3}{m}, s_2\le s_1-\frac{1}{m}\}$,

$U_9=\{\vec{s}: s_1\ge\frac{3\pi}{4}, s_1\le\pi;\ s_2\ge s_1-\frac{1}{m}, s_2\le s_1\}$, $U_{10}=\{\vec{s}: s_1\ge\frac{3}{m}, s_1\le s_2-\frac{1}{m};\ s_2\ge\frac{3\pi}{4}, s_2\le\pi\}$,

$U_{11}=\{\vec{s}: s_1\ge s_2-\frac{1}{m}, s_1\le s_2;\ s_2\ge\frac{3\pi}{4}, s_2\le\pi\}$, $\quad \vec{s}\in[\frac{2}{m},\pi;\frac{2}{m},\pi]$.

Ясно, что $U_i\cap U_j=\phi\ (i\ne j)$. Следовательно, в силу (4.I5) выражение $z_6(\vec{x},f,m,\alpha)$ можно представить в виде

$$z_6(\vec{x},f,m,\alpha)=\frac{1}{\pi^2}\sum_{i=1}^{11}\int_{U_i}\psi(\vec{x}+\vec{s})\,U_m^{(3,\alpha)}(\vec{s})\,d\vec{s}.$$

Отсюда

$$|z_6(\vec{x},f,m,\alpha)|\le\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{11}\left|\iint_{U_i}\psi(\vec{x}+\vec{s})\,U_m^{(3,\alpha)}(\vec{s})\,d\vec{s}\right|. \tag{4.I7}$$

В силу (3.6), (3.2I), (4.I) и лемм 5,6,7, можно заключить, что выражения

$$\left|\int_{u_i}\psi(\vec{x},\vec{s})\,u_m^{(3,\alpha)}(\vec{s})\,d\vec{s}\right| \quad (i=\overline{1,11})$$

оцениваются так же, как и выражения $M_k(f;x,y)$ из статьи [4](см. [4], стр.III7, соотношения (I6) - (I8)). Следовательно, верна оценка

$$mes\{\vec{x}:\vec{x}\in R_2,\ \sup_m|z_6(\vec{x},f,m,\alpha)|>y>0\}\leq \tag{4.I8}$$

$$\leq\frac{C(\alpha)}{y}\left\{\int_{R_2}|f(\vec{x})|\log(|f(\vec{x})|+e)\,d\vec{x}+1\right\}.$$

Таким образом, принимая во внимание соотношения (4.2), (4.3); (4.I3), (4.I4), (4.I6) и (4.I8), находим

$$mes\left\{\vec{x}:\vec{x}\in R_2,\ \sup_m\left|\sigma_m^{\alpha}(\vec{x},f,B)-\frac{1}{\pi^2}\int_{\frac{2}{m}}^{\pi}\int_{\frac{2}{m}}^{\pi}\psi(\vec{x},\vec{s})\,ctg\frac{s_1}{2}\,ctg\frac{s_2}{2}\,d\vec{s}\right|>y>0\right\}\leq$$

$$\leq\frac{C(\alpha)}{y}\left\{\int_{R_2}[|f(\vec{x})|\log(|f(\vec{x})|+e)\,d\vec{x}+1]\right\}.$$

Отсюда вытекает справедливость утверждения пункта а) и в том случае, когда $B=\{1,2\}$.

Справедливость пункта б) (достаточно проверить при $B=\{1\}$ или $B=\{2\}$ ) проверяется, в основном, таким же способом, как и справедливость теоремы 24 из работы [I3]([I3], стр. I24 - I33).

Теорема доказана.

Отметим, что нам не известно, как ведут себя следующие выражения:

$$H_n(\vec{x},f,B)=\frac{1}{A_n^{\alpha}}\sum_{k_1=0}^{n}A_{n-k_1}^{\alpha-1}\left|S_{k_1,k_1,\dots,k_1}(\vec{x},f,B)\right|,\ \alpha>0,\ n\geq 2,$$

где $B$ — любое подмножество из $M$ (даже в том случае, когда $B=\phi$).

Поступила 10.II.1977

Кафедра
теории функций и функционального анализа

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.В.Жижиашвили. УМН, т.28, вып.2(170) (1973), 65-119.

2. G.Marcinkiewicz. Ann. della R scuola N sup. di Pisa, 8 (1939), 149-160.

3. Л.В.Жижиашвили. Сиб. матем. ж., №3 (1967), 548-564.

4. Л.В.Жижиашвили. Изв. АН СССР, сер.матем. 32, 5(1968), 1112-1122.

5. R. Taberski. Rocz. Pol. tow. mat., Ser. 1, 16 (1972), 113-123.

6. R.Taberski. Bull. Acad. pol. sci ser. sci. math. astron. et phys., 18, N 6 (1970), 307 - 314.

7. М.Ф.Тиман, Г.Гаймназаров. ДАН Тадж.ССР, 15, № 5 (1972), 6-8.

8. М.Ф.Тиман, В.Г.Пономаренко. Изв.высших учебных зведений, математика, № 9 (1975), 59-677.

9. Л.В.Жижиашвили. Сообщ. АН Груз.ССР, 79, №3 (1975), 529-531.

10. А.Зигмунд. Тригонометрические ряды, т.I, изд. "Мир", М., 1965.

11. А.Зигмунд. Тригонометрические ряды, т.II, изд. "Мир", М., 1965.

12. Н.К.Бари. Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961.

13. Л.В.Жижиашвили. Сопряженные функции и тригонометрические ряды, Тбилиси, 1969.

ლ.ჟიჟიაშვილი

## ჯერადი ტრიგონომეტრიული მწკრივების შეჯამებადობა

რეზიუმე

სტატიაში დამტკიცებულია თეორემები, რომლებიც ეხება ორმაგი შეუღლებული ტრიგონომეტრიული მწკრივების $(C,\alpha)$, $\alpha>-1$ მეთოდით შეჯამებადობის საკითხს. მოყვანილი შედეგები გარკვეული აზრით საბოლოოა.

L.Zhizhiashvili

## ON THE SUMMABILITY OF MULTIPLE TRIGONOMETRIC SERIES

Summary

Theorems are proved concerning the summability of double conjugate trigonometric series by the method $(C,\alpha)$, $\alpha>-1$. The results obtained are finite in a certain sense

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

197, 1978

УДК 517.512

# МАЖОРАНТЫ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

С.Б.Топурия

1. Через $\mathcal{R}_k$ обозначим $k$-мерное евклидово пространство, а через $S^k$ – поверхность единичной гиперсферы с центром в начале координат; $S^k_\rho$ – гиперсфера с центром в начале координат и радиусом $\rho$; $V^k$ – шар, ограниченный поверхностью $S^k$; $|S^k_\rho|$ – площадь поверхности сферы $S^k_\rho$; $|S^k_\rho| = \frac{2\pi^{k/2}\rho^{k-1}}{\Gamma(k/2)}$; $(x,y)$ – скалярное произведение единичных векторов $x$ и $y$; $\omega(x,h)=\{y;\ y\in S^k,\ (x,y)\geq \cos h,\ 0<h\leq\pi\}$; множество $E(x,h)=\{y;\ (x,y)=\cos h,\ 0<h<\pi\}$ есть сфера пространства $\mathcal{R}_{k-1}$ радиуса $\sin h$.

Обозначим через $\rho, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{k-2}, \varphi$ гиперсферические координаты точки $x\,(x_1, x_2, \dots, x_k)$, где $x_1, x_2, \dots, x_k$ – прямоугольные декартовы координаты той же точки $x\in\mathcal{R}_k$, которые связаны с гиперсферическими следующим образом:

$$x_1 = \rho \cos \vartheta_1,$$
$$x_2 = \rho \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2,$$
$$\vdots$$
$$x_{k-1} = \rho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{k-2} \cos \varphi,$$
$$x_k = \rho \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{k-2} \sin \varphi,$$
$$0 \le \vartheta_p \le \pi,\ p = 1, 2, \dots, k-2;\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Если точка $x \in S^k$, то в гиперсферических координатах будем ее обозначать так: $x(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{k-2}, \varphi)$. Пусть $x(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{k-2}, \varphi)$ и $y(\vartheta_1', \vartheta_2', \dots, \vartheta_{k-2}', \varphi')$ – точки из $S^k$. Обозначим через $\gamma$ угол между радиусами, проведенными из центра шаровой поверхности к точкам $x$ и $y$. Легко заметить, что

$$\left.\begin{aligned} \cos\gamma = {} & \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_1' + \\ & + \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \sin\vartheta_1' \cos\vartheta_2' + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \dots \sin\vartheta_{k-2} \cos\varphi \sin\vartheta_1' \sin\vartheta_2' \dots \sin\vartheta_{k-2}' \cos\varphi' + \\ & + \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \dots \sin\vartheta_{k-2} \sin\varphi \sin\vartheta_1' \sin\vartheta_2' \dots \sin\vartheta_{k-2}' \sin\varphi'. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

Если $\vartheta_1 = 0$, т.е. точка $x$ совпадает с полюсом, то из (I) получаем $\cos\gamma = \cos\vartheta_1'$, а потому $\gamma = \vartheta_1'$. Следовательно, если преобразовать систему координат так, чтобы полюс совпал с $x$, то в этом случае $\vartheta_1' = \gamma$.

$L(S^k)$ – пространство суммируемых на $S^k$ функций; $L_p(S^k)$ – пространство суммируемых со степенью $p$ функций на $S^k$, $1 < p < \infty$; $M(S^k)$ – пространство конечных, регулярных борелевых мер с обычными нормами.

2. Пусть $f \in L(S^k)$, ее рядом Фурье-Лапласа называется ряд

$$S(f;x)=\sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{\lambda}(f;x),$$

где

$$Y_n^{\lambda}(f;x)=\frac{\Gamma(\lambda)(n+\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}}\int\limits_{S^k} P_n^{\lambda}[(x,y)]\,ds(y),^{*}$$

$\lambda=\frac{k-2}{2}$ ; функции $P_n^{\lambda}(t)$ называются многочленами Гегенбауера или ультрасферическими многочленами и определяются из разложения

$$\left(1-2ht+h^2\right)^{-\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\lambda}(t)h^n.$$

3. Пусть $\mu\in M(S^k)$. Известно ( [I], стр. I76), что $\mu$ почти во всех точках $x\in S^k$ имеет производную $\mu_s(x)$, под которой мы понимаем предел

$$\mu_s(x)=\lim_{r\to 0}\frac{\mu[\omega(x;r)]}{|\omega(x;r)|}.$$

Ряд Фурье-Лапласа-Стилтьеса определяется так:

$$S(d\mu;x)=\sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{\lambda}(d\mu;x),$$

где

---

ж $ds$ – элемент площади поверхности $S^k$ и

$$ds=\sin^{k-2}\vartheta_1\sin^{k-3}\vartheta_2\cdots\sin\vartheta_{k-2}\,d\vartheta_1\,d\vartheta_2\cdots d\vartheta_{k-2}\,d\varphi.$$

$$y_n^\lambda(d\mu;x)=\frac{\Gamma(\lambda)(n+\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}}\int\limits_{S^k} P_n^\lambda[(x,y)]\,d\mu(y)$$

$$(n=0,1,2,\dots).$$

Если $\mu$ абсолютно непрерывна, то

$$S(d\mu;x)=S(\mu_s;x).$$

4. Пусть $f\in L(S^k)$. Положим

$$f^*(x)=\sup_{0<\gamma\le\pi}\frac{1}{|\omega(x;\gamma)|}\int\limits_{\omega(x;\gamma)}|f(y)|\,ds(y). \tag{2}$$

В работе [2] (стр.172) доказаны следующие утверждения:

1) Если $f\in L_p(S^k)$, $p>1$, то $f^*\in L_p(S^k)$ и

$$\int\limits_{S^k}\{f^*(x)\}^p ds(x)\le C_{k,p}\int\limits_{S^k}|f(x)|^p ds(x). \tag{3}$$

2) Если $f\in L\ln^+L$, то $f^*\in L(S^k)$ и

$$\int\limits_{S^k} f^*(x)\,ds(x)\le B_k\int\limits_{S^k}|f(x)|\ln^+|f(x)|\,ds(x)+C_k. \tag{4}$$

Справедлива следующая

Лемма I. Если $f\in L(S^k)$, то $f^*\in L_\beta(S^k)$ для всех $0<\beta<1$ и

$$\int\limits_{S^k}\{f^*(x)\}^\beta ds(x)<C_{k,\beta}\Big\{\int\limits_{S^k}|f(x)|\,ds(x)\Big\}^\beta. \tag{5}$$

<u>Доказательство.</u> Пусть

$$e(y)=|E_y|=|E\{x; f^*(x)>y\}|.$$

Так как

$$E_y=E\{x;[f^*(x)]^{1-\varepsilon}>y^{1-\varepsilon}\},\quad 0<\varepsilon<1,$$

то ( [2], стр. 176; [3] стр.55)

$$\int\limits_{S^k}\{f^*(x)\}^{1-\varepsilon}dS(x)=-\int\limits_0^\infty y^{1-\varepsilon}de(y)=(1-\varepsilon)\int\limits_0 \frac{e(y)}{y^\varepsilon}dy<$$

$$<(1-\varepsilon)|S^k|\int\limits_0^{y_0}\frac{dy}{y^\varepsilon}+(1-\varepsilon)\int\limits_{y_0}^\infty\frac{e(y)}{y^\varepsilon}dy<(1-\varepsilon)|S^k|\frac{y_0^{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon}+$$

$$+(1-\varepsilon)\int\limits_{y_0}^\infty\frac{1}{y^\varepsilon}\left\{\frac{c}{y}\int\limits_{S^k}|f(x)|dS(x)\right\}dy=$$

$$=|S^k|y_0^{1-\varepsilon}+c(1-\varepsilon)\int\limits_{S^k}|f(x)|dS(x)\int\limits_{y_0}^\infty y^{-1-\varepsilon}dy=$$

$$=|S^k|y_0^{1-\varepsilon}+c(1-\varepsilon)\frac{y_0^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\int\limits_{S^k}|f(x)|dS(x).$$

Полагая

$$y_0=\int\limits_{S^k}|f(x)|dS(x),$$

получим

$$\int\limits_{S^k}\{f^*(x)\}^{1-\varepsilon}dS(x)<|S^k|\left\{\int\limits_{S^k}|f(x)|dS(x)\right\}^{1-\varepsilon}+$$

$$+\frac{C(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\left\{\int_{S^k}|f(x)|dS(x)\right\}^{1-\varepsilon},$$

откуда

$$\int_{S^k}\{f^*(x)\}^{\beta}dS(x)<C_{k,\beta}\left\{\int_{S^k}|f(x)|dS(x)\right\}^{\beta},$$

где $\beta=1-\varepsilon$. Лемма доказана.

Рассмотрим семейство линейных интегральных операторов вида

$$U_r(f;x)=\int_{S^k}f(y)\Phi_r(\gamma)dS(y),$$

где $r$ - некоторый параметр, а $\gamma$ определяется из равенства $(x,y)=\cos\gamma$.

Интегральные операторы такого типа возникают при изучении вопросов сходимости и суммируемости рядов Фурье-Лапласа.

Лемма 2. Пусть $\Phi_r(\gamma)$ $(0<\gamma\leq\pi)$ - неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^{\pi}\sin^{k-2}\gamma\,\Phi_r(\gamma)d\gamma\leq B, \tag{6}$$

$$\int_0^{\pi}\gamma^{k-1}\left|\frac{\partial\Phi_r(\gamma)}{\partial\gamma}\right|d\gamma\leq B_1, \tag{7}$$

где $B$ и $B_1$ не зависят от $r$. Тогда справедливо неравенство

$$\sup_r|U_r(f;x)|\leq Af^*(x), \tag{8}$$

где $A$ зависит лишь от $B, B_1$ и $k$.

Доказательство. Если принять точку $x$ за полюс, то будем иметь

$$\mathcal{U}_n(f;x)=\int_0^{\pi}\Phi_n(\gamma)d\gamma\int_{(x,y)=\cos\gamma}f(y)ds(y).$$

Положим

$$g(t)=\int_0^t\Psi_x(\gamma)d\gamma,$$

где

$$\Psi_x(\gamma)=\int_{(x,y)=\cos\gamma}f(y)ds(y).$$

Тогда

$$\mathcal{U}_n(f;x)=\int_0^{\pi}\Phi_n(\gamma)\Psi_x(\gamma)d\gamma. \tag{9}$$

В силу (2), имеем

$$|g(t)|=\left|\int_0^t d\gamma\int_{(x,y)=\cos\gamma}f(y)ds(y)\right|=$$

$$=\left|\int_{\omega(x;t)}f(y)ds(y)\right|\le|\omega(x;t)|f^*(x), \tag{10}$$

где

$$|\omega(x;t)|=\int_0^t d\gamma\int_{(x,y)=\cos\gamma}ds(y)=\frac{2\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}\int_0^t\sin^{k-2}\gamma\, d\gamma\le$$

$$\le\frac{2\pi^{\frac{k-1}{2}}}{(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}t^{k-1}.$$

Применяя формулу интегрирования по частям к равенству (9) и учитывая (10), получим

$$|U_r(f;x)| = \left|\left[\Phi_r(\gamma)g(\gamma)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} g(\gamma)\frac{\partial \Phi_r(\gamma)}{\partial \gamma}d\gamma\right| \leq$$

$$\leq C_k f^*(x)\left\{|\omega(x;\pi)|\Phi_r(\pi) + \int_0^{\pi}\gamma^{k-1}\left|\frac{\partial \Phi_r(\gamma)}{\partial \gamma}\right|d\gamma\right\}.^*$$

Оценим $|\omega(x;\pi)|\Phi_r(\pi)$. Для этого запишем (6) в виде

$$\int_0^{\pi}\sin^{k-2}\gamma\,\Phi_r(\gamma)d\gamma = \Phi_r(\pi)\int_0^{\pi}\sin^{k-2}\gamma\,d\gamma - \int_0^{\pi}\frac{\partial \Phi_r(\gamma)}{\partial \gamma}d\gamma\int_0^{\gamma}\sin^{k-2}t\,dt,$$

откуда

$$|\omega(x;\pi)|\Phi_r(\pi) \leq C_k(B+B_1).$$

В результате имеем

$$|U_r(f;x)| \leq C_k(B+2B_1)f^*(x).$$

Отсюда и получаем (8).

Полезно заметить, что если $\frac{\partial \Phi_r(\gamma)}{\partial \gamma}$ имеет постоянный

---

* Через $C_k, C_{k,\beta}, \ldots$ будем обозначать, вообще говоря, разные положительные константы, зависящие лишь от указанных параметров.

знак и если $\Phi_r(\pi)$ - ограниченная функция от $r$, то (7) вытекает из (6)*. Это получается немедленно, если отбросить знак абсолютной величины в (7) и проинтегрировать по частям.

Объединяя (8) с неравенствами (3), (4) и (5), получим следующую теорему:

Теорема I. В предположениях леммы 2 функция

$$N(f;x)=\sup_r |U_r(f;x)|$$

удовлетворяет неравенствам:

$$\begin{aligned}
&\int_{S^k}\{N(f;x)\}^\beta dS(x)\le C_{k,\beta}\Big\{\int_{S^k}|f(x)|dS(x)\Big\}^\beta \quad (0<\beta<1),\\
&\int_{S^k}\{N(f;x)\}^p dS(x)\le C_{k,p}\int_{S^k}|f(x)|^p dS(x) \quad (p>1),\\
&\int_{S^k}N(f;x)dS(x)\le C_k\int_{S^k}|f(x)|\ln^+|f(x)|dS(x)+C_k,
\end{aligned} \tag{II}$$

где постоянные зависят лишь от явно указанных индексов, а также от $B$ и $B_1$.

Приведем конкретные примеры функции $\Phi$. Одно из них - ядро Пуассона-Абеля

$$P_k(r,\gamma)=\frac{\Gamma(k/2)}{2\pi^{k/2}}\cdot\frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{k/2}}.$$

Легко проверить, что

$$\int_0^\pi \gamma^{k-2}P_k(r,\gamma)d\gamma=O(1).$$

Далее,

---

* Условия (7) и $\int_0^\pi\left|\frac{\partial\Phi_r(\gamma)}{\partial\gamma}\right|d\gamma\int_0^\gamma \sin^{k-2}t\,dt\le B_2$ эквивалентны.

$$\frac{\partial P_k(r,\gamma)}{\partial \gamma} = -\frac{\Gamma(k/2)}{2\pi^{k/2}} \cdot \frac{kr(1-r^2)\sin\gamma}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{k+2}{2}}}.$$

Отсюда видно, что $\frac{\partial P_k(r,\gamma)}{\partial \gamma}$ сохраняет знак и

$$P_k(r,\pi) = \frac{\Gamma(k/2)}{2\pi^{k/2}} \cdot \frac{1-r}{(1+r)^{k-1}} = O(1).$$

Следовательно, неравенства (II) будут иметь место, если в качестве $N(f;x)$ взять функцию $\sup\limits_{0<r<1} U(f;r,\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,\vartheta_{k-2},\varphi)$.*

Рассмотрим теперь $(C,\alpha)$ – среднее чезаро $\sigma_n^{\lambda,\alpha}(f;x)$ ряда Фурье-Лапласа. Его ядро $\Phi_n^{\lambda,\alpha}(\cos\gamma)$ не сохраняет постоянного знака, однако при $\alpha > \frac{k-2}{2}$ мажоранта этого ядра, определяемая равенствами

$$K_n^{\lambda,\alpha}(\gamma) = \begin{cases} C_\alpha n^{2\lambda+1} & \text{при } 0 \le \gamma \le \frac{1}{n}, \\ \frac{C'_\alpha}{n^{\alpha-\lambda}} \cdot \frac{1}{\gamma^{\alpha+1}\sin^\lambda\gamma} & \text{при } \frac{1}{n} < \gamma < \pi - \frac{1}{n}, \\ C''_\alpha n^{2\lambda-\alpha} & \text{при } \pi - \frac{1}{n} \le \gamma \le \pi, \end{cases}$$

удовлетворяет условиям (6) и (7) при соответствующем выборе постоянных $C_\alpha, C'_\alpha, C''_\alpha$. Следовательно, неравенства (II) будут иметь место, если в качестве $N(f;x)$ взять функцию $\sup\limits_{n\ge 0} |\sigma_n^{\lambda,\alpha}(f;x)|$ при $\alpha > \lambda = \frac{k-2}{2}$.

---

* Где $U(f;r,\vartheta_1,\vartheta_2,\dots,\vartheta_{k-2},\varphi)$ – интеграл Пуассона функции $f$.

5. Обозначим через $T(x)$ коническую окрестность точки $x \in S^k$; $T(x) \subset V^k$. Коническая окрестность $T(x)$ называется симметрической, если ее ось проходит через центр сферы. Обозначим через $K(x)$ любой конус с вершиной в точке $x$. Симметрический конус $K(x)$ назовем конусом касания к сфере $S_\delta^k$, $0<\delta<1$, если расстояние от центра сферы $S_\delta^k$ до поверхности конуса равно $\delta$, и обозначим его через $K_\delta(x)$. При этом множество точек касания делит $S_\delta^k$ на малую $\underset{=}{S}{}_\delta^k$ и большую $\bar{S}_\delta^k$ части. Через $\Omega_\delta(x)$ обозначим открытую область, ограниченную конусом касания $K_\delta(x)$ и поверхностью $\bar{S}_\delta^k$.

Положим

$$N_\delta(f;x)=\sup|U(f;r,\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_{k-2},\varphi)| \qquad (12)$$

$$(r,\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_{k-2},\varphi)\in\Omega_\delta(x).$$

Теорема 2. Функция $N_\delta(f;x)$, определенная равенством (12), удовлетворяет неравенствам (11), причем константы будут зависеть также и от $\delta$.

Доказательство. При доказательстве можно предположить, что $f(x)\geqslant 0$. Пусть $z(r,\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_{k-2},\varphi)\in\Omega_\delta(x)$ и

$$U(f;z)=U(f;r,\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_{k-2}\,\varphi)=$$

$$=\frac{\Gamma(k/2)}{2\pi^{k/2}}\int_{S^k}\frac{1-r^2}{|zy|^k}f(y)\,dS(y).$$

В силу леммы 3 из [4] для точки $\bar{x}(r,\vartheta_1^\circ,\vartheta_2^\circ,\ldots,\vartheta_{k-2}^\circ\,\varphi^\circ)$, лежащей на радиусе $0x$, имеем неравенство

$$|\bar{x}y| < C_\delta |zy|,$$

откуда

$$U(f;r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{k-2},\varphi) < C_{\delta,k}\, U(f;r,\vartheta_1^0,\dots,\vartheta_{k-2}^0,\varphi^0).$$

Следовательно,

$$N_\delta(f;x) < C_{\delta,k} \sup_{0<r<1} U(f;r,\vartheta_1^0,\dots,\vartheta_{k-2}^0,\varphi^0).$$

Из этого неравенства и теоремы I следует справедливость теоремы 2.

Теорема 3. Пусть $U_r(dF;x)$ – средние Абеля ряда $S(dF;x)$ и пусть $N(x) = \sup\limits_{0<r<1} |U_r(dF;x)|$. Тогда

$$\Big\{\int_{S^k} [N(x)]^\beta dS(x)\Big\}^{1/\beta} \le C_{k,\beta} \int_{S^k} |dF(x)|, \quad 0<\beta<1, \tag{I3}$$

и

$$\lim_{r\to 1} \int_{S^k} |U_r(dF;x) - F_S(x)|^\beta dS(x) = 0, \quad 0<\beta<1. \tag{I4}$$

Доказательство. Пусть $0<R<1$ и $N_R(x) = \sup\limits_{r\le R} |U_r(dF;x)|$.

Из следствия теоремы I вытекает

$$\Big\{\int_{S^k} [N_R(x)]^\beta dS(x)\Big\}^{1/\beta} \le C_{k,\beta} \int_{S^k} |U_R(dF;x)|\, dS(x).$$

Из этого неравенства получим

$$\left\{\int_{S^k}[N_R(x)]^\beta dS(x)\right\}^{1/\beta} \leq C_{k,\beta}\int_{S^k}|dF(x)|.$$

Устремляя $R$ к I, получаем неравенство (I3).

Соотношение (I4) следует из того, что $|U_k(dF;x)-F_S(x)|^\beta$ стремится к нулю почти всюду и мажорируется интегрируемыми функциями.

<u>Замечание</u>. Теорема 3 справедлива для $(C,\alpha)$ – средних рядов $S(dF;x)$ при $\alpha > \frac{k-2}{2}$.

Поступила IO.XI.I977

Кафедра
высшей математики ГПИ
им. В.И.Ленина

ЛИТЕРАТУРА

I. С.Сакс. Теория интеграла, ИЛ, Москва, I949.

2. H.E. Rauch. Journal Canadien de Math., vol. VII, N2 (1956), 171-183

3. А.Зигмунд, Тригонометрические ряды, т.I, изд. "Мир", Москва, I965.

4. С.Б.Топурия. Сообщения АН Грузинской ССР, 2, I966, 265-272.

ს.თოფურია

## ზოგიერთი სინგულარული ინტეგრალის მაჟორანტები

### რეზიუმე

განხილულია სპეციალური სახის სინგულარული ინტეგრალები ჰიპერსფეროზე, რომელთა გული დამოკიდებულია მხოლოდ სკალარულ ნამრავლზე, ასეთი სახის ინტეგრალური ოპერატორებისათვის დადგენილია ა.ზიგმუნდის, ა.კოლმოგოროვის და მ.რისის ტიპის უტოლობები იმ შემთხვევაში, როდესაც გული არადადებითია და აკმაყოფილებს გარკვეულ პირობებს.

S. Topuria

## MAJORANTS OF CERTAIN SINGULAR INTEGRALS

### Summary

Singular integrals of a special type on an hypersphere whose kernel depends only on the scalar product are considered. For integral operators of this type the inequalities of A.Zygmund, A.Kolmogorov and M.Riesz are established for the case when the kernel is not positive and satisfies certain conditions.

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

197, 1978

УДК 517.5

# ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТИПА ВЛОЖЕНИЯ

Л.К.Панджикидзе

Начиная с 1967 года П.Л.Ульяновым был опубликован ряд работ (см. /1/ - /6/), в которых рассматривались вопросы о вложении классов функций $H_p^\omega$ от одной переменной. Поясним, что $\omega=\omega(\delta)\ (0\le\delta\le 1)$ - данный модуль непрерывности (см. /23/) и

$$H_p^\omega=\{f: f\in L_p(0,1)\ (1\le p<\infty),\ \omega_p(\delta;f)=O(\omega(\delta))\},$$

где

$$\omega_p(\delta;f)=\sup_{0<h\le\delta}\|f(x+h)-f(x)\|_{L_p(0,1-h)}$$

- интегральный модуль непрерывности функции $f$ (см. /4/).

В упомянутых работах П.Л.Ульянова ставился вопрос о распространении полученных им результатов на случай классов функций многих переменных. Некоторые результаты в этом направлении уже известны (см. /7/ - /22/).

В этой статье мы изложим достаточное условие, которое обеспечивает принадлежность произведения двух функций, взятых из разных функциональных пространств, к некоторому определенному функциональному пространству, при этом доказательство будем вести для $K$ - мерного случая $(K \geq 1)$.

Дадим некоторые определения и сформулируем одно вспомогательное неравенство.

Пусть $R_K$ - $K$ - мерное евклидово пространство точек $X=(x_1,x_2,\dots,x_K)$ с вещественными координатами, $\Delta_K = [0,1;\dots;0,1]$ - единичный $K$ - мерный куб и $L_p^{(K)} \equiv L_p(\Delta_K)$ - пространство всех измеряемых на $\Delta_K$ функций, для которых

$$\|f\|_{L_p^{(K)}} = \left\{ \int_{\Delta_K} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1 \leq p < \infty).$$

Через

$$\omega_{p,x_i}(\delta;f) = \sup_{0<h\leq\delta} \left\{ \int_0^1 \dots \int_0^{1-h} \dots \int_0^1 |f(x_1,\dots,x_i+h,\dots,x_K) - f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_K)|^p dx_1,\dots,dx_K \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$(i=1,\dots,K)(0 \leq \delta \leq 1)$ обозначают частный интегральный модуль непрерывности по переменному $x_i$ (см.,напр., /24/, стр.I24 - I25).

Положим

$$\Omega_p(\delta_1,\dots,\delta_K;f) = \sum_{i=1}^{K} \omega_{p,x_i}(\delta_i,f) \quad (0 \leq \delta_i \leq 1,\ i=1,\dots,K)$$

(при $\delta_1 = \dots = \delta_K = \delta$ будем считать, что

$$\Omega_p(\delta_1,\dots,\delta_K;f) \equiv \Omega_p(\delta;f)).$$

Далее, если $f \in L_p(\Delta_k)$ при некотором $p \in [1,\infty)$, то для всех целых $n_i \geq 1 \ (i=1,\dots,k)$ справедливо неравенство

$$\Omega_p\left(\frac{1}{n_1},\dots,\frac{1}{n_k};f\right) \geq C_{k,p}\left(\|f\|_{L_p^{(k)}}\right)^{1-p} \times$$

$$\times\left(\int_0^{\left(\prod_{i=1}^k n_i\right)^{-1}} F^p(z;|f|)\,dz - \int_{1-\left(\prod_{i=1}^k n_i\right)^{-1}}^{1} F^p(z;|f|)\,dz\right), \tag{I}$$

где $F(z;|f|)$ - неотрицательная, невозрастающая на /0,I/ функция, равноизмеримая с $|f|$, и $C_{k,p}$ - некоторая положительная константа, зависящая от $k$ и $p$. Заметим, что это неравенство нами было доказано (см. /22/) для случая $k=1$ и $1<p<\infty$, а также для $k=2$, $1 \leq p<\infty$ (при $k=1$, $p=1$, см. /6/ лемма 5), но его без затруднений можно распространить на любую размерность пространства $R_k$. Отметим также, что в работах /2I/ и /I9/ доказано неравенство типа (I) для случая $k \geq 2$, $p=1$, правда в несколько ином виде. Далее, если учесть лемму 2 из /I9/, то

$$C_{k,p} = [p(k+1)2^{k+p}]^{-1}.$$

Будем рассматривать следующий вопрос: если $p$, $q$ и $\gamma$ - некоторые числа, удовлетворяющие условиям $1 \leq q,\ p<\infty$, $1 \leq \gamma \leq \min(p,q)$, $f \in L_p(\Delta_k)$ и $g \in L_q(\Delta_k)$, то каков должен быть порядок убывания $\Omega_\gamma(\delta_1,\dots,\delta_k;f)$ или $\Omega_\gamma(\delta_1,\dots,\delta_k;g)$, чтобы было справедливо включение

$$fg \in L_\gamma(\Delta_k)?$$

На этот вопрос отвечает следующая теорема типа вложения:

<u>Теорема</u>. Пусть $p$, $q$ и $\gamma$ - некоторые числа с услови-

ями $p,q\in[1,\infty)$, $1\le\gamma\le\min(p,q)$. Предположим, что $f\in L_p(\Delta_k)$, $g\in L_q(\Delta_k)$ и сходится хотя бы один из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma k-1}\,\Omega_\gamma(n^{-q};f),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma k-1}\,\Omega_\gamma(n^{-p};f).$$

Тогда

$$fg\in L_\gamma(\Delta_k).$$

Если же $f\neq const$ и $g\neq const$, то

$$\|fg\|^{\gamma}_{L_\gamma^{(k)}}\le\min\Big(\|f\|^{\gamma}_{L_\gamma^{(k)}}+C(f,\gamma,k)\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma k-1}\times$$

$$\times\,\Omega_\gamma\big(n^{-q}\|g\|^{\frac{q}{k}}_{L_q^{(k)}};f\big),\ \|g\|^{\gamma}_{L_\gamma^{(k)}}+C(g,\gamma,k)\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma k-1}\times$$

$$\times\,\Omega_\gamma\big(n^{-p}\|f\|^{\frac{p}{k}}_{L_p^{(k)}};g\big)\Big),$$

где $C(f,\gamma,k)$, $C(g,\gamma,k)$ – положительные константы, зависящие от $f,g,\gamma$ и $k$.

Доказательство. Будем предполагать, что $f,g\neq const$, так как в противном случае справедливость включения $fg\in L_\gamma(\Delta_k)$ очевидна.

Положим

$$M_n(f)=\big(x: x\in\Delta_k;\ (n-1)^k<|f(x)|\le n^k\big)\quad (n=1,2,\ldots)$$

и

$$A_n(f)=(x: x\in\Delta_k;\ |f(x)|>n^k)\quad (n=0,1,\ldots).$$



Тогда

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n(f)\Big)\cup(x: x\in\Delta_k;\ f(x)=0)=\Delta_k,$$

$$A_n(f)\subset A_{n-1}(f)\quad (n=1,2,\ldots),$$

$$M_n(f)=A_{n-1}(f)\setminus A_n(f)\quad (n=1,2,\ldots).$$

Следовательно,

$$\|fg\|^{\gamma}_{L_\gamma(k)}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{M_n(f)}|g|^{\gamma}|f|^{\gamma}dx\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma k}\int_{M_n(f)}|g|^{\gamma}dx=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}n^{\gamma k}\int_{M_n(f)}|g|^{\gamma}dx=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}n^{\gamma k}\Big(\int_{A_{n-1}(f)}|g|^{\gamma}dx-\int_{A_n(f)}|g|^{\gamma}dx\Big)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{n=0}^{N-1}(n+1)^{\gamma k}\int_{A_n(f)}|g|^{\gamma}dx-\sum_{n=1}^{N}n^{\gamma k}\int_{A_n(f)}|g|^{\gamma}dx\Big)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\Big(\int_{A_0(f)}|g|^{\gamma}dx+\sum_{n=1}^{N-1}\big((n+1)^{\gamma k}-n^{\gamma k}\big)\int_{A_n(f)}|g|^{\gamma}dx-$$

$$-N^{\gamma k}\int_{A_N(f)}|g|^{\gamma}dx\Big)\le\|g\|^{\gamma}_{L_\gamma(k)}+\sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)^{\gamma k}-n^{\gamma k}\big)\times$$

$$\times \int\limits_{A_n(f)} |g|^{\gamma} dx \le \|g\|^{\gamma}_{L_\gamma(\kappa)} + C(\gamma,\kappa) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\kappa-1} \int\limits_{A_n(f)} |g|^{\gamma} dx .$$

Но (см. /25/ , стр. 57)

$$\int\limits_{A_n(f)} |g|^{\gamma} dx \le \int\limits_{0}^{\mu(A_n(f))} G^{\gamma}(z;|g|)dz , \tag{2}$$

где $G(z;|g|)$ – неотрицательная, невозрастающая на /0,I/ функция, равноизмеримая с $|g|$ , а $\mu(E)$ – лебегова мера измеримого множества $E$ . Далее, так как $f \in L_p(\Delta_\kappa)$ то

$$\mu(A_n(f)) = \mu(x: x \in \Delta_\kappa ; |f(x)| > n^{\kappa}) \le n^{-\kappa p} \|f\|^{p}_{L_p(\kappa)} .$$

Откуда, согласно (2), будем иметь

$$\int\limits_{A_n(f)} |g|^{\gamma} dx \le \int\limits^{n^{-\kappa p}\|f\|^{p}_{L_p(\kappa)}} G^{\gamma}(z;|g|)dz . \tag{3}$$

Используя теперь (I), находим

$$\int\limits_0^{n^{-\kappa}} G^{\gamma}(z;|g|)dz \le C^{-1}_{\kappa,\gamma} (\|g\|_{L_\gamma(\kappa)})^{\gamma-1} \Omega_\gamma(n^{-1};g) +$$

$$+ \int\limits_{1-n^{-\kappa}}^{1} G^{\gamma}(z;|g|)dz \le C^{-1}_{\kappa,\gamma} (\|g\|_{L_\gamma(\kappa)})^{\gamma-1} \Omega_\gamma(n^{-1};g) +$$

$$+ n^{-\kappa} G^{\gamma}(\tfrac{1}{2};|g|)$$

при $n \geq 2$. Но, так как $g \neq const$, то найдется постоянная $c = c(g) > 0$, такая, что

$$n^{-k} \leq c(g)\,\Omega_\gamma(n^{-1}; g)$$

для всех $n$ = I,2, ... . Поэтому

$$\int_0^{n^{-k}} G^r(z; |g|)\,dz \leq C_2(\gamma, g)\,\Omega_\gamma(n^{-1}; g) \tag{4}$$

для некоторого $c_2(\gamma, g) > 0$ при всех $n$ = I,2, ... .

Пусть теперь

$$\frac{1}{m+1} \leq n^{-p}\|f\|^{\frac{p}{k}}_{L_p^{(k)}} < \frac{1}{m}.$$

Используя (4) и то, что (см. /24/, стр.III)

$$\omega_{\gamma, x_i}(\delta_1; g) \leq 2\frac{\delta_1}{\delta_2}\,\omega_{\gamma, x_i}(\delta_2; g)$$

при $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 \leq 1$, $(i = 1, \dots, k)$, находим

$$\int_0^{n^{-kp}\|f\|^p_{L_p^{(k)}}} G^r(z; |g|)\,dz \leq \int_0^{m^{-k}} G^r(z; |g|)\,dz \leq$$

$$\leq C_2(\gamma, g)\,\Omega_\gamma(m^{-1}; g) \leq 2c_2(\gamma, g)\,\Omega_\gamma\left(\frac{1}{m+1}; g\right) \leq$$

$$\leq 2c_2(\gamma, g)\,\Omega_\gamma\left(n^{-p}\|f\|^{\frac{p}{k}}_{L_p^{(k)}}; g\right). \tag{5}$$

Таким образом, согласно (2) и (5), имеем

$$\|fg\|^{\gamma}_{L_\gamma(k)} \le \|g\|^{\gamma}_{L_\gamma(k)} + C(\gamma,g,k)\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma k-1} \times$$

$$\times\, \Omega_\gamma\Big(n^{-p}\|f\|^{\frac{p}{k}}_{L_p(k)};\, g\Big).$$

Совершенно аналогично получается, что

$$\|fg\|^{\gamma}_{L_\gamma(k)} \le \|f\|^{\gamma}_{L_\gamma(k)} + C(\gamma,f,k)\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma k-1} \times$$

$$\times\, \Omega_\gamma\Big(n^{-q}\|g\|^{\frac{q}{k}}_{L_q(k)};\, f\Big).$$

Стало быть, теорема доказана.

Из этой теоремы для случая $k=1$, $p=q$ и $f\equiv g$ получаем следующее

Следствие. Если $f\in L_p(0,1)$ при некотором $1\le p<\infty$ и $1\le\gamma\le p$, то из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-1}\omega_\gamma(n^{-p};f)$$

вытекает справедливость включения

$$f\in L_{2\gamma}(0,1).$$

Более того, если $f\ne \mathrm{const}$, то

$$\|f\|^{2\gamma}_{L_{2\gamma}} \le \|f\|^{\gamma}_{L_\gamma} + C(f,\gamma)\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-1}\omega_\gamma\big(n^{-p}\|f\|^{p}_{L_p};\, f\big).$$

Заметим, что это предположение является тривиальным при $1\le\gamma\le\frac{p}{2}$ и при $\gamma=p$.

Поступила 10.XI.1977

Кафедра теории функции и функционального анализа

## ЛИТЕРАТУРА


1. П.Л.Ульянов. Матем. сб., 72, №2 (1967), 193-225.
2. П.Л.Ульянов. Матем. зам., 1, №4 (1967), 405-414.
3. П.Л.Ульянов. ДАН СССР, 1976, №6 (1968), 1259-1261.
4. П.Л.Ульянов. Изв. АН СССР, сер.матем., 32, №3 (1968), 649-686.
5. П.Л.Ульянов. ДАН СССР, 184, №5 (1969), 1044-1047.
6. П.Л.Ульянов. Матем. сб. 81, №1 (1970), 104-131.
7. О.В.Бесов. В.П.Ильин. Матем.зам., 6, №2 (1969), 129-138.
8. М.Ф.Тиман. ДАН СССР, 193, №6 (1970), 1251-1254.
9. Г.Гаймназаров. ДАН Тадж. ССР, 13, №1 (1970), 7-10.
10. Н.Т.Темиргалиев. Изв. АН Каз. ССР, сер. физ.-мат., №5 (1970), 90-92.
11. Л.К.Панджикидзе. Сообщ. АН Груз. ССР, 56, №1 (1968), 21-24.
12. Л.К.Панджикидзе. Сообщ. АН Груз.ССР, 60, № 1 (1970), 29-32.
13. Л.К.Панджикидзе. Сообщ. АН Груз.ССР, 61, № 1 (1971), 25-28.
14. Л.К.Панджикидзе, Сообщ. АН Груз.ССР, 61, № 2 (1971), 281-284.
15. Ю.А.Брудный. Труды Московского матем.общ-ва, 24 (1971), 69-132.
16. М.К.Потапов. Труды МИ АН ГССР, 117 (1972), 256-291.
17. Н.Т.Темиргалиев. Изв. высш.учебн.завед., математика, № 9 (1972).
18. Н.Т.Темиргалиев. Матем.зам., № 2 (1972), 139-148.
19. В.И.Коляда. Сибирский матем. журнал, XIУ, №4, (1973), 767-790.
20. М.К.Потапов. Конструктивные характеристики и теоремы вложения для некоторых классов функций, докторская диссертация, Москва, 1973.

21. Н.Т.Темиргалиев. О некоторых многомерных теоремах вложения и о производных из классов $\varphi(L)$, кандидатская диссертация, Москва, 1973.

22. Л.К.Панджикидзе. Теоремы вложения и связь между наилучшими приближениями в разных метриках. Кандидатская диссертация, Тбилиси, 1971.

23. С.М.Никольский. ДАН СССР, 52, № 3 (1946), 191-194.

24. А.Ф.Тиман. Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз , Москва, 1960.

25. А.Зигмунд. Тригонометрические ряды, т.I, изд. "Мир", Москва, 1965.

ლ.ფანჯიკიძე

## ჩართვის ტიპის ერთი თეორემის შესახებ

რეზიუმე

სტატიაში დამტკიცებულია თეორემა, რომელიც წარმოადგენს $fg\in L_r$ $(1\le r\le \min(p,q))$ ჩართვის საკმარის პირობას, ჩამოყალიბებულს მოცემული $f\in L_p, g\in L_q$ $(1\le p,q<\infty)$ ფუნქციების უწყვეტობის ინტეგრალური მოდულების ტერმინებში. თეორემა მტკიცდება ნებისმიერი $K$-განზომილებიანი სივრცეებისათვის.

L.Panjikidze

## ABOUT A THEOREM OF EMBEDDING TYPE

Summary

The theorem proved in the note is a sufficient condition for embedding $fg\in L_r$ $(1\le r\le$ min(p,q)) , expressed in the continuity integral module terms of $f\in L_p$, $g\in L_q$ $(1\le$ p, q $<\infty$ ) functions. The theorem is proved for any K-dimensional $(1\le$ k $<\infty$ ) spaces.

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

197, 1978

УДК 511.3

# ОБ ОБЪЕДИНЕНИИ КЛАССОВ ВЫЧЕТОВ, II

П.Г.Когония

**Работа посвящена обобщению результатов одноименной статьи автора /1/, а именно, в ней решается задача о числе классов вычетов объединения, когда по каждому отдельному модулю берется по нескольку классов вычетов.**

1. Пусть $n$ – любое натуральное число $\geq 2$; $m_1, m_2, \ldots, m_n$ – любая возрастающая последовательность попарно взаимно простых натуральных чисел $(m_1 \geq 2)$; $M_n = \prod m_k$, $M'_k = \frac{M_n}{m_k}$ $(k=1,2,\ldots,n)$;

$a_k$ – любое число полной системы наименьших неотрицательных вычетов по модулю $m_k$; $\overline{a_k}$ – соответствующий класс вычетов, т.е. $\overline{a_k} = \{x \in Z / x \equiv a_k \pmod{m_k}\}$.

Как известно, каждый класс вычетов $\overline{a_k}$ разбивается на $M'_k$ классов вычетов по модулю $M$, т.е. $\overline{a_k}$ представляет собой объединение $M'_k$ классов вычетов по модулю $M$. Рассмотрим объединение

$$E_n=\bar{a}_1\cup\bar{a}_2\cup\ldots\cup\bar{a}_n=\{x\in Z/x\equiv$$
$$\equiv a_1(\mathrm{mod}\, m_1)\}\cup\{x\in Z/x\equiv a_2\,(\mathrm{mod}\, m_2)\}\cup\ldots$$
$$\ldots\cup\{x\in Z/x\equiv a_n\,(\mathrm{mod}\, m_n)\}. \qquad (I)$$

Очевидно, что $E_n$ состоит из полных классов вычетов по модулю $M$. В работе /I/ доказано, что число $T_n$ всех разных классов вычетов по модулю $M$, содержащихся в $E_n$, выражается формулой

$$T_n=M_n-\prod_{\kappa=1}^{n}(m_\kappa-1)=M_n\left[1-\prod_{\kappa=1}^{n}\left(1-\frac{1}{m_\kappa}\right)\right]= \qquad (2)$$
$$=M_n(1-\varepsilon_n),\quad \left(\varepsilon_n=\prod_{\kappa=1}^{n}\left(1-\frac{1}{m_\kappa}\right)\right).$$

Основная цель работы – обобщение формулы (2). Пусть по модулю $m_\kappa\ (\kappa=1,2,\ldots,n)$ берется $r_\kappa$ классов вычетов $(1\le r_\kappa\le m_\kappa)$ $\bar{a}_{\kappa 1},\bar{a}_{\kappa 2},\ldots,\bar{a}_{\kappa r_\kappa}$; рассмотрим объединение $E_n$ этих классов

$$E_n=\left(\bigcup_{x_1=1}^{r_1}\bar{a}_{1x_1}\right)\cup\left(\bigcup_{x_2=1}^{r_2}\bar{a}_{2x_2}\right)\ldots\cup\left(\bigcup_{x_n=1}^{r_n}\bar{a}_{nx_n}\right)= \qquad (I_I)$$
$$=\{x\in Z/x\equiv a_{11},a_{12},\ldots,a_{1r_1}(\mathrm{mod}\, m_1)\}\cup\ldots\cup\{x\in Z/x\equiv$$
$$\equiv a_{n1},a_{n2},\ldots,a_{nr_n}(\mathrm{mod}\, m_n)\}.$$

Очевидно, что и это объединение $E_n$ состоит из полных классов вычетов по модулю $M_n$. Для числа всех классов вычетов по модулю $M_n$ существует формула, обобщающая формулу (2), именно, истинна

<u>Теорема I.</u> Число $T_n$ всех разных классов вычетов по модулю

$M_n$, содержащихся в $E_n$, выражается формулой

$$T_n = M_n - \prod_{k=1}^{n}(m_k - r_k) = M_n\Big[1 - \prod_{k=1}^{n}\Big(1 - \frac{r_k}{m_k}\Big)\Big] = \qquad (2_I)$$

$$M_n(1-\mathcal{E}_n), \quad \Big(\mathcal{E}_n = \prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{r_k}{m_k}\Big)\Big).$$

<u>Доказательство</u>. Применим метод полной математической индукции. Пока докажем справедливость формулы ($2_I$) при I) $n=2$, $r_1=r_2=1$. Это является частным случаем $(n=2)$ формулы (2), доказанной в работе /I/, но для достижения цельности изложения приведем прямое (не зависящее от предыдущих рассуждений) доказательство формулы ($2_I$) в этом частном случае.

Итак, пусть даны натуральные числа $m_1, m_2$ $(1<m_1<m_2)$ и $M_2 = m_1 m_2$, $(m_1, m_2)=1$, $M_1' = \frac{M_2}{m_1} = m_2$, $M_2' = \frac{M_2}{m_2} = m_1$.

Рассмотрим классы вычетов по модулям $m_1$ и $m_2$

$$x_1 \equiv a_1 \pmod{m_1}, \quad x_2 \equiv a_2 \pmod{m_2}, \quad 0 \le a_1 \le m_1 - 1, \qquad (3)$$
$$0 \le a_2 \le m_2 - 1.$$

Первый состоит из $M_1'$ классов вычетов по модулю $M_2$, а второй – из $M_2'$ классов вычетов по модулю $M_2$; эти классы, соответственно, суть следующие:

$$x_1 \equiv a_1, a_1+m_1, a_1+2m_1, \dots, a_1+m_1 x, \dots, a_1+m_1(M_1'-1) \pmod{M_2}$$
$$0 \le x \le m_2 - 1; \qquad (3_I)$$

$$x_2 \equiv a_2,\ a_2+m_2,\ a_2+2m_2, \dots, a_2+m_2 y, \dots, a_2+m_2(M_2'-1) \pmod{M_2}$$

$$0 \le y \le m_1-1. \qquad (3_2)$$

Задача сводится к нахождению числа всех разных классов вычетов по модулю $M_2$, содержащихся в объединении классов ($3_I$) и ($3_2$); очевидно, что число $T_2$ равно $M_1'+M_2'$ минус число всех классов вычетов, содержащихся как в ($3_I$), так и в ($3_2$), т.е.

$$T_2 = M_1'+M_2'-L = m_1+m_2-L. \qquad (4)$$

Из ($3_I$) и ($3_2$) следует, что $L$ равно числу всех упорядоченных пар $(x, y)$ целых чисел, удовлетворяющих условиям

$$a_1+m_1x \equiv a_2+m_2y \pmod{M_2}, \quad 0 \le x \le m_2-1 \qquad (5)$$
$$0 \le y \le m_1-1.$$

В силу ($3_I$) и ($3_2$), имеем

$$0 \le a_1+m_1x \le m_1-1+m_1(m_2-1) = m_1m_2-1; \qquad (6_I)$$
$$0 \le a_1+m_1x \le M_2-1;$$
$$0 \le a_2+m_2y \le m_2-1+m_2(m_1-1) = m_1m_2-1; \qquad (6_2)$$
$$0 \le a_2+m_2y \le M_2-1.$$

Из (5), ($6_I$) и ($6_2$) следует, что

$$a_1+m_1x = a_2+m_2y, \quad 0 \le x \le m_2-1, \quad 0 \le y \le m_1-1; \qquad (5_I)$$

(5) и ($5_I$) - эквивалентные между собой условия; покажем, что

$(5_I)$ имеет единственное целочисленное решение. В самом деле, неопределенное уравнение $a_1+m_1x=a_2+m_2y$ можно записать в виде сравнения $m_2y \equiv a_1-a_2 \pmod{m_1}$; последнее сравнение, ввиду условия $(m_1,m_2)=1$, имеет единственное решение по модулю $m_1$, т.е. существует единственное число $y$, удовлетворяющее этому сравнению и неравенствам $0 \le y \le m_1-1$; соответствующее значение $x$ является целым числом, удовлетворяющим неравенствам $0 \le x \le m_2-1$. В самом деле, в силу условий, налагаемых на числа $a_1 a_2$ и $y$, имеем

$$1-m_1 \le a_2-a_1 \le m_2-1, \quad 0 \le m_2 y \le m_1 m_2 - m_2,$$

$$\frac{1-m_1}{m_1} \le x = \frac{m_2y+a_2-a_1}{m_1} \le \frac{m_1m_2-1}{m_1},$$

$$\frac{1}{m_1}-1 \le x \le m_2-\frac{1}{m_1}.$$

Из последних неравенств следует ( $x$ - целое число), что $0 \le x \le m_2-1$. Итак, существует единственная пара $(x,y)$ целых чисел, удовлетворяющих условиям (5), т.е. $L=1$; отсюда, в силу (4), имеем

$$T_2 = m_1+m_2-1 = m_1m_2+m_1+m_2-1-m_1m_2 = m_1m_2-(m_1-1)(m_2-1) = M_2-(m_1-1)(m_2-1).$$

Это равенство означает справедливость формулы $(2_I)$ в рассматриваемом случае.

2) $n=2,\ 1 \le r_1 \le m_1,\ 1 \le r_2 \le m_2$. В этом случае мы имеем две системы классов вычетов по модулям $m_1$ и $m_2$:

$$x_1 \equiv a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1r_1} \pmod{m_1};$$

$$x_2 \equiv a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2r_2} \pmod{m_2};\qquad (3^{\mathrm{I}})$$

каждый класс $x_1 \equiv a_{1i} \pmod{m_1}$ $(i=1,2,\dots,r_1)$ разбивается на $m_2$ классов вычетов по модулю $M_2$:

$$x_1 \equiv a_{1i}, a_{1i}+m_1, a_{1i}+2m_1, \dots, a_{1i}+(m_2-1)m_1 \pmod{M_2}; \qquad (3^{\mathrm{I}}_{1})$$

аналогично для класса $x_2 \equiv a_{2k} \pmod{m_2}$ $(k=1,2,\dots,r_2)$ имеем

$$x_2 \equiv a_{2k}, a_{2k}+m_2, a_{2k}+2m_2, \dots, a_{2k}+(m_1-1)m_2 \pmod{M_2} \qquad (3^{\mathrm{I}}_{2})$$

Таким образом, $r_1$ классов вычетов по модулю $m_1$ дают вместе $r_1 m_2$ классов вычетов по модулю $M_2$ ; аналогично, $r_2$ классов вычетов по модулю $m_2$ дают вместе $r_2 m_1$ классов вычетов по модулю $M_2$ ; обозначим множество всех классов вычетов $(3^{\mathrm{I}}_{1})$ через $A_i$ $(i=1,2,3,\dots,r_1)$; множество классов вычетов $(3^{\mathrm{I}}_{2})$ – через $B_k$ $(k=1,2,3,\dots,r_k)$; каждый $A_i$ состоит из $m_2$ элементов, каждый $B_k$ – из $m_1$ элементов. Очевидно, что множества $A_i$ попарно не пересекаются, аналогично – $B_k$ . Вместе с тем, согласно вышеустановленному результату, каждое $A_i$ имеет с любым $B_k$ единственный общий элемент. Отсюда непосредственно следует, что для числа $T_2$ всех разных элементов объединения $\left(\bigcup_{i=1}^{r_1} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{r_2} B_k\right)$ имеет место равенство

$$T_2 = r_1 m_2 + r_2 m_1 - r_1 r_2 = m_1 m_2 + r_1 m_2 + r_2 m_1 - r_1 r_2 -$$
$$- m_1 m_2 = m_1 m_2 - (m_1 - r_1)(m_2 - r_2) = M_2 - (m_1 - 1)(m_2 - 1)$$

Последнее равенство означает справедливость формулы $(2_I)$ в рассматриваемом случае $(n=2,\ 1 \le r_1 \le m_1,\ 1 \le r_2 \le m_2)$.

3) $n \geqslant 2,\ 1 \le r_k \le m_k\ (k=1,2,\dots,n)$. Допустим, что формула $(2_I)$ верна для любого $n \geqslant 2$ и докажем её справедливость для $n+1$. Пусть даны натуральные числа $m_1, m_2, \dots, m_n, m_{n+1}$ $x$ $x(m_i > 1\ (m_i, m_k) = 1),\ 1 \le r_k \le m_k,\ 1 \le k \le n+1$. Итак, по любому модулю $m_k$ $(k=1,2,\dots,n,n+1)$ берется $r_k$ классов вычетов; каждый такой класс разбивается на $M'_k = \frac{m_{n+1}}{m_k}$ классов вычетов по модулю $M_{n+1}$, где $M_{n+1} = m_1 m_2 \dots m_n m_{n+1} = M_n \cdot m_{n+1}$.

Имеем системы классов вычетов по модулям $m_1, m_2, \dots, m_n, m_{n+1}$:

$$x_1 \equiv a_{11}, \dots, a_{1r_1} \pmod{m_1},\ x_2 \equiv a_{21}, \dots, a_{2r_2} \pmod{m_2},$$
$$x_n \equiv a_{n1}, \dots, a_{nr_n} \pmod{m_n},\ x_{n+1} \equiv a_{n+11}, \dots, a_{n+1\, r_{n+1}} \pmod{m_{n+1}} \tag{7}$$

Объединение $E_{n+1}$ всех классов (7) состоит из полных классов вычетов по модулю $M_{n+1}$; число всех этих классов есть (согласно обозначению) $T_{n+1}$.

Итак, объединение $E_{n+1}$ имеет вид

$$E_{n+1} = \{x_1 \equiv a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1r_1} \pmod{m_1}\} \cup \{x_2 \equiv a_{21}, a_{22}, \dots$$
$$\dots a_{2r_2} \pmod{m_2}\} \cup \dots \cup \{x_n \equiv a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nr_n} \pmod{m_n}\} \cup \tag{$7_I$}$$
$$\cup \{x_{n+1} \equiv a_{n+11}, a_{n+12}, \dots, a_{n+1\, r_{n+1}} \pmod{m_{n+1}}\}.$$

Множество всех классов вычетов по модулю $M_{n+1}$, из которых состоит $E_{n+1}$ (и число которых равно $T_{n+1}$), разбивается на два подмножества без общих элементов: множества тех классов, которые содержатся в первых $n$ скобках правой части ($7_I$), и множества тех классов, которые содержатся в последней скобке правой части ($7_I$). По допущению объединения первых $n$ скобок правой части ($7_I$) состоит из $T_n = M_n - \prod_{k=1}^{n}(m_k - r_k)$ классов вычетов по модулю $M_n$; отсюда следует, что объединение ($7_I$) можно записать и так:

$$E_{n+1} = \{x_1 \equiv b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1M_n} \pmod{M_n}\} \cup \{x_2 \equiv \tag{$7_2$}$$

$$\equiv a_{n+11}, a_{n+12}, \ldots, a_{n+1\,r_{n+1}} \pmod{M_{n+1}}\}.$$

В силу результата, установленного в случае 2), имеем, что число всех классов вычетов по модулю $M_{n+1}$, содержащихся в $E_{n+1}$, выражается равенством

$$T_{n+1} = M_{n+1} - (M_n - T_n)(m_{n+1} - r_{n+1}) = M_{n+1} -$$

$$- \prod_{k=1}^{n}(m_k - r_k)(m_{k+1} - r_{k+1}).$$

$$T_{n+1} = M_{n+1} - \prod_{k=1}^{n+1}(m_k - r_k).$$

<u>Следствие I</u>.

$$T_n = M_n \Longleftrightarrow \exists k\,(r_k = m_k).$$

<u>Следствие 2</u>.

$$T_n = M_n - 1 \Longleftrightarrow \forall k\,(r_k = m_k - 1).$$

2. Таким образом, если для любого $n \geq 2$ числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ удовлетворяют вышеперечисленным условиям; $r_1, r_2, \ldots, r_n$ любые натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $1 \leq r_k \leq m_k$, $M_n = m_1 m_2 \ldots m_n$, то объединение $r_1$ классов по модулю $m_1$, $r_2$ классов по модулю $m_2$ и т.д. $r_n$ классов по модулю $m_n$ состоит из полных классов вычетов по модулю $M_n$ и число последних выражается формулой ($2_I$); в частном случае $(r_k = 1,\ k = 1, 2, \ldots, n)$ – формулой (2). В дальнейшем будет использована только формула (2). Итак, имеем

$$T_n = M_n - \prod_{k=1}^{n} (m_k - 1) = M_n \left[1 - \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{m_k}\right)\right] = \qquad (2^I)$$

$$= M_n (1 - \varepsilon_n) = M_n - \varepsilon_n M_n,$$

где

$$\varepsilon_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{m_k}\right). \qquad (8)$$

Как известно, если $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ означает бесконечную возрастающую последовательность натуральных чисел, то ее плотность (по Шнирельману) определяется равенством

$$\sigma(A) = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{A_n}{n}, \text{ где } A_n = \sum_{a_k \leq n} 1, \ (0 \leq \sigma(A) \leq 1). \qquad (9)$$

Очевидно, что плотность арифметической прогрессии с разностью $m$, точнее – класса вычетов по модулю $m$ $A = \{r, r+m, r+2m, \ldots$

$\ldots, r+q_m, \ldots\}, 0 \le r \le m-1$ равна $\frac{1}{m}$

$$\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = \frac{1}{m}. \qquad (9_I)$$

Очевидно также, что плотность объединения конечного числа попарно не пересекающихся последовательностей равна сумме плотностей последних.

$E_n$ представляет собой объединение $T_n$ разных классов вычетов по модулю $M_n$. Все неотрицательные элементы $E_n$ образуют $T_n$ арифметических прогрессий по модулю $M_n$; если, ради простоты, положим, что $E_n$ обозначает объединение последних прогрессий, то из формулы (2), в силу сделанного выше замечания, следует

Теорема 2.

$$\sigma(E_n) = \frac{T_n}{M_n} = 1 - \varepsilon_n \quad \left(\varepsilon_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{m_k}\right)\right). \qquad (10)$$

**3.** Пусть дана бесконечная возрастающая последовательность $\{m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots\}$ попарно взаимно простых натуральных чисел $(m_1 > 1)$, $M_n = m_1 m_2 \cdots m_n$ $(n \geq 1)$.

Возьмем по каждому модулю $m_n$ по одному (любому) классу вычетов и рассмотрим объединение последних:

$$E_\infty = E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid x \equiv a_n \pmod{m_n},\ x \geq 0\} \qquad (11)$$

Это объединение можно представить в виде бесконечной возрастающей последовательности неотрицательных целых чисел; оно, очевидно, зависит как от модулей $m_n$ , так и от классов вычетов $\bar{a}_n$ по каждому модулю $m_n$.

В силу (I) и (I0), имеем

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad (E_n \subset E_{n+1}). \tag{II}$$

Из последних соотношений следует, что

$$\sigma(E) \geqq \lim_{n\to\infty} \sigma(E_n).$$

Из (I0) и последнего равенства следует

Теорема 2.

$$\sigma(E)\geqq 1-\varepsilon \quad \left(\varepsilon=\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=\lim \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{m_k}\right)\right). \tag{I2}$$

Следствие I.

$$\sigma(E)=1 \text{ если } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m_k}=\infty \left(\varepsilon=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{m_k}\right)=0\right). \tag{I3}$$

Следствие 2. Если $m_n=p_n$ ($n$ -тому простому числу), то для любых вычетов $a_n$

$$\sigma(E)=1.$$

Поступила 5.XI.1977

Кафедра высшей математики
инженерно-экономического
факультета ТГУ

## ЛИТЕРАТУРА

1. П.Г.Когония. Труды ТГУ, 176, 1976, 5-13.

პ.კოღონია

### ნაშთთა კლასების გაერთიანებათა შესახებ, II

რეზიუმე

ნაშრომში განზოგადებულია ავტორის ამავე სახელწოდების სტატიის შედეგები და მოყვანილია მისი ერთი გამოყენება.

P.Kogonia

### ON THE UNIONS OF RESIDUE CLASSES, II

Summary

The author's results of a previous paper are generalized and their application given.

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

197, 1978

УДК 511.3

# НЕКОТОРЫЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ, II

П.Г.Когония

Работа посвящена исследованию множества значений знаменателя подходящей дроби любого конечного порядка, т.е. множества

$$E_n=\{q_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\,/\,(x_1,x_2,\dots,x_n)\in N^n\},\qquad (n=1,2,\dots). \tag{I}$$

В одноименной работе автора установлено существование нескольких интервалов, не содержащих элементов множества $E_n$; в данной же работе доказано, что плотность ( по Шнирельману) этого множества равна I.

I. Пусть $\alpha\in(0,1)$ - любое иррациональное число, а

$$\alpha=[0;x_1,x_2,\dots,x_n,\dots] \tag{2}$$

- его разложение в арифметическую непрерывную дробь; пусть, далее

$$\frac{p_n}{q_n}=[0;x_1,x_2,\ldots,x_n],\ r_n=[x_{n+1};x_{n+2},\ldots], \tag{3}$$
$$(n=1,2,\ldots).$$

Как известно (см., напр., /1/), имеют место соотношения

$$q_1=x_1,\ q_2=x_1x_2+1,\ q_{n+1}=x_{n+1}q_n+q_{n-1}, \tag{4}$$
$$(n=2,3,\ldots).$$

Решение последнего рекуррентного соотношения дает /2/

$$q_n=\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\ \sum_{\substack{(i_1 i_2\ldots i_{n-2k})\\ i_1\equiv 1 (mod\, 2)\\ i_{s+1}\not\equiv i_s (mod\, 2)}} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{n-2k}}. \tag{5}$$

Итак, $q_n=q_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – знаменатель подходящей дроби $\frac{p_n}{q_n}$ непрерывной дроби (2) представляет собой многочлен $n$ степени специального вида.

Из (5) непосредственно следует, что минимальное значение $q_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ равно

$$q_n(1,1,\ldots,1,1)=\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\ \sum_{\substack{(i_1 i_2\ldots i_{n-2k})\\ i_1\equiv 1 (mod\, 2)\\ i_{s+1}\not\equiv i_s (mod\, 2)}} 1=V_n, \quad (n=1,2,\ldots). \tag{5$_I$}$$

где $V_n$ – $n$ -тый член ряда Фибоначчи

$$1,2,3,5,8,13,\ldots,V_n\ldots\ (V_1=1,V_2=2,V_{n+1}=V_n+V_{n-1},n\geq 2). \tag{6}$$

Таким образом, задача заключается в нахождении множества всех значений многочлена $q_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ в бесконечном интервале $]V_n,\infty[$ и множеств значений системы $(x_1,x_2,\dots x_n)\in$ $\in N^n$, при которых $q_n(x_1,x_2,\dots x_n)$ принимает то или другое значение, т.е. в исследовании вопроса о разрешимости и числа решений неопределенного уравнения

$$q_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=m. \ ((x_1,x_2,\dots,x_n)\in N^n, \ m>V_n). \tag{7}$$

Как было отмечено выше, установлено /3/ существование нескольких интервалов правее $V_n$, не содержащих значения многочлена $q_n$, причем самым левым из таких интервалов является

$$]V_n, V_n+V_{n-2}[ \quad (n\geq 4).$$

Из (I) и (5) непосредственно следует, что $E_1=\{1,2,\dots\}=N$, $E_2=\{2,3,4\dots\}=N-\{1\}$; легко показать, что $E_3=\{3,4,5,\dots\}=$ $=N-\{1,2\}$. Известно /4/, что $q_4, q_5, q_6, q_7$ принимают все целые положительные значения начиная с некоторых небольших значений.

Итак, для первых 7 значений $n$ $E_n$ содержит бесконечный полуинтервал $[T_n,\infty[$ ($T_n$ - левый конец наибольшего из таких полуинтервалов). Естественно, возникает вопрос о справедливости аналогичного утверждения для любого $n\in N$. Оригинальный прием, примененный в работе /4/, дает некоторый алгоритм, но только для конкретных значений $n$, причем число необходимых вычислений быстро возрастает с ростом числа $n$.

Итак, неизвестно, истинно ли высказывание: для любого $n$ существует $T_n\in N$ такое, что

$$]T_n,\infty[\subset E_n. \tag{8}$$

Не владея методом решения этой задачи, естественно попытаться более или менее подробно исследовать структуру множества $E_n$. Как известно, немалую информацию о бесконечной последовательности натуральных чисел содержит её плотность (по Шнирельману).

2. Пусть дана любая бесконечная последовательность попарно взаимно простых натуральных чисел $\{m_k\}$ $(m_1>1)$; возьмем по каждому модулю $m_k$ по одному (любому) классу вычетов и рассмотрим бесконечное объединение всех этих классов

$$E=\{x\in N / x\equiv a_1 (\mathrm{mod}\, m_1)\}\cup\{x_2\in N / x_2\equiv a_2(\mathrm{mod}\, m_2)\}\cup\ldots$$
$$\ldots\cup\{x_n\in N / x_n\equiv a_n (\mathrm{mod}\, m_n)\}\cup\ldots$$

Автором настоящей работы доказано /5/, что

$$\sigma(E)=1, \text{ если } \sum_{k=1}^{\infty}=\frac{1}{m_k}=\infty. \tag{9}$$

Применяя это равенство докажем, что истинна

Теорема

$$\forall n\in N / \sigma(E_n)=1. \tag{I0}$$

Доказательство. Для $n=1,2$ это утверждение тривиально истинно. Пусть $n\geqslant 2$ – любое натуральное число; для такого $n$ имеем, в силу (4),

$$q_{n+1}=x_{n+1}q_n+q_{n-1}. \tag{$4_I$}$$

Из (I) и ($4_I$) следует

$$E_{n+1}=\{q_{n+1}(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}) / (x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1})\in N^{n+1}\}\supset$$

$$\supset\{q_{n+1}(1,1,\ldots,1,x_n,x_{n+1}) / x_n,x_{n+1}\in N\}=\{x_{n+1}q_n+q_{n-1} / x_n x_{n+1}\in N\}=$$

$$=\{x_{n+1}(x_n q_{n-1}+q_{n-2})+q_{n-1} / x_n,x_{n+1}\in N\}=$$

$$=\{x_{n+1}(x_n V_{n-1}+V_{n-2})+V_{n-2} / x_n,x_{n+1}\in N\}. \tag{II}$$

Так как в (II) $x_n$ и $x_{n+1}$ независимо друг от друга пробегают (возрастая) весь натуральный ряд чисел, ($V_{n-1}$ и $V_{n-2}$ - данные числа при фиксированном $n$ ), удобнее ввести для них символы, не связанные (и по форме) с $n$ ; тогда (II) можно переписать следующим образом:

$$E_{n+1} \supset \{S(tV_{n-1}+V_{n-2})+V_{n-2} / t,\ s\in N\}. \tag{II$_\mathrm{I}$}$$

Множество $\{tV_{n-1}+V_{n-2} / t\in N\}$ - арифметическая прогрессия с разностью $V_{n-1}$ и первым членом $V_{n-2}$. Так как $(V_{n-1}, V_{n-2})=1$ , последняя прогрессия содержит бесконечное множество простых чисел; пусть это множество следующее:

$$\{t_k V_{n-1}+V_{n-2} / k\in N\}=\{g_k / k\in N\}. \tag{I2}$$

Из (I2) и (I3) следует

$$E_{n+1} \supset \{Sg_k+V_{n-2} / S,\ k\in N\}. \tag{I2$_\mathrm{I}$}$$

Так как $\{g_k / k\in N\}$ - какая-то бесконечная последовательность простых чисел, множество

$$\{Sg_k+V_{n-2} / S,\ k\in N\}\left(\sum_{k=1}^{\infty}=\frac{1}{g_k}=\infty\right) \tag{I3}$$

представляет собой объединение бесконечного множества классов вычетов по попарно взаимно простым модулям; поэтому, это множество, в силу равенства (9), является множеством плотности I. Из ($12_I$) и этого факта следует справедливость теоремы.



Поступила 25.X.1977

Кафедра высшей математики
инженерно-экономического
факультета ТГУ

## ЛИТЕРАТУРА

I. А.Я.Хинчин. Цепные дроби, М.-Л., I949
2. П.Г.Когония. Труды ТГУ, 56, I955.
3. П.Г.Когония. Труды ТГУ, I85, I977.
4. Б.Г.Тасоев. Труды ТГУ, I85, I977.
5. П.Г.Когония. Труды ТГУ, I76, I976.

პ.კოღონია

### ზოგიერთი განუსაზღვრელი განტოლება უწყვეტ წილადთა თეორიაში, II

#### რეზიუმე

ნაშრომში დამტკიცებულია, რომ ნებისმიერი რიგის მახლოვარი წილადის მნიშვნელის მნიშვნელობათა სიმრავლის სიმკვრივე უდრის 1.

P.Kogonia

### SOME INDEFINITE EQUATIONS IN THE THEORY OF CONTINUED FRACTIONS, II

#### Summary

It is proved in the paper that the density of the set of values of the denominator of a convergent of arbitrary order of a continued fraction is 1.

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

197, 1978

УДК 517.

# ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОРТОНОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

И.Н.Карцивадзе

Пусть $H$ – действительное сепарабельное гильбертово пространство, а $|x|$ – норма элемента $x$ из $H$. Пусть далее $\langle x,y\rangle$ – скалярное произведение элементов $x$ и $y$, принадлежащих $H$. Всякое отображение $f: H\times H \to H$ будем называть ортогональным умножением, если $f$ билинейно и удовлетворяет условию: $|f(x,y)| = |x||y|$ при всех $(x,y)\in H\times H$.

При изучении ортогональных умножений в $H$ существенную роль играют матрицы $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$ нормированных элементов из $H$, для которых выполнены равенства

$$\langle \mu_{\alpha,\beta};\mu_{\gamma,\delta}\rangle + \langle \mu_{\alpha,\delta};\mu_{\gamma,\beta}\rangle = 0 \qquad (1)$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ – произвольные натуральные числа, такие что $(\alpha,\beta)\neq(\gamma,\delta)$.

Матрицы $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$ нормированных элементов из $H$, удовлетворяющих условиям (I), мы будем называть кососвязанными матрицами нормированных элементов из $H$. В работе [I] доказано, что для любой кососвязанной матрицы $M=\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$ нормированных элементов из $H$ и любого выбранного в $H$ ортонормального базиса $E=(e(1),e(2),\dots)$ существует единственное умножение $f_{M,E}$ в $H$, для которого выполняются равенства $f_{M,E}(e(p),e(q))=\mu_{p,q}$ для всех пар натуральных чисел $p$ и $q$. Такое ортогональное умножение задается формулой

$$f(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,e(k)\rangle u_k(y),$$

где

$$u_k(y)=\sum_{q=1}^{\infty}\langle y,e(q)\rangle \mu_{k,q}.$$

Ясно, что последовательность элементов $\{\mu_{k,q}\}_{q=1}^{\infty}$, составляющая $k$-ую строку матрицы $\{\mu_{p,q}\}_{p,q=1}^{\infty}$, представляет собой ортонормированную систему элементов $H$, при каждом $k$ $(k=1,2,\dots)$. Очевидно далее, что эта последовательность представляет собой последовательность образов базисных элементов $E$, при линейном отображении $u_k\equiv f_{M,E}(e(k),-):H\to H$. Следовательно, замкнутое подпространство $F_k$, порожденное ортонормированной системой элементов $\{\mu_{k,q}\}_{q=1}^{\infty}$, является образом $H$ при отображении $u_k$ /т.е. $F_k=u_k(H)=f_{M,E}(e(k),H)$/.

В работе [I] доказано, что коразмерность подпространства $H$, являющегося образом $H$ при линейном отображении $f_x:H\to H$, определенном равенством $f_x(y)=f_{M,E}(x,y)$, т.е. коразмерность подпространства $f_{M,E}(x,H)$ не зависит от $x\in H$, при $x\neq 0$.

Отсюда следует, что коразмерность всех подпространств $F_K$ $(k=1,2,\dots)$ одинакова, т.е. все строки любой кососвязанной матрицы $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$ нормированных элементов $H$ порождают подпространства одинаковой коразмерности. Доказательство этого факта, приведенное в [I], опирается на свойства ортогонального умножения $+_{M,E}$. Между тем, это обстоятельство имеет чисто геометрическую основу и является следствием нижеприведенной теоремы, доказательство которой и составляет содержание настоящей работы.

Теорема. Если в действительном сепарабельном пространстве $H$ заданы две ортонормированные системы элементов $(e(1), e(2),\dots,$ $\dots, e(n),\dots)$ и $(g(1), g(2),\dots, g(n),\dots)$, такие что

$$\langle e(p), g(q)\rangle + \langle e(q), g(p)\rangle = 0,$$

при любых натуральных $p$, $q$, то $\operatorname{codim} E = \operatorname{codim} G$, где $E$ и $G$ обозначают замкнутые подпространства $H$, порожденные соответственно системами $(e(i))_{i\geq 1}$ и $(g(i))_{i\geq 1}$. /Точнее равенство $\operatorname{codim} E = \operatorname{codim} G$ следует понимать так: либо одно из этих чисел конечно и тогда конечно и ему равно и второе, либо оба эти числа бесконечны/.

Доказательство. Рассмотрим сперва случай, когда $\operatorname{codim} E = K$ и $K<\infty$. Докажем тогда, что $\operatorname{codim} G \leq K$ /и, следовательно, тоже конечна/.

Доказательство будем вести от противного. Пусть $\operatorname{codim} G \geq K+1$ и пусть $\varphi(1), \varphi(2),\dots \varphi(k)$ - некоторый ортонормированный базис ортогонального к $E$ дополнения в $H$. Тогда ясно, что система элементов $(\varphi(1), \varphi(2),\dots, \varphi(k);\ e(1), e(2),\dots, e(n)\dots)$ представляет собой ортонормированный базис $H$.

Обозначая через $G'$ подпространство, порожденное всеми элементами $(\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(k); g(1), g(2), \dots, g(n), \dots)$, будем иметь

$$\ell \equiv \operatorname{codim} G' \geq 1.$$

/Действительно, добавление любого элемента к образующим некоторого подпространства, очевидно, может уменьшить коразмерность подпространства не более чем на единицу/. Пусть $\psi(1), \psi(2), \dots, \psi(\ell)$ $(1 \leq \ell \leq \infty)$ – некоторый ортонормированный базис ортогонального к $G'$ подпространства в $H$. Представляя каждое $\psi(i)$ $(1 \leq i \leq \ell)$ в ортогональном базисе $\varphi(1), \dots, \varphi(k), e(1), e(2), \dots, e(n), \dots$, получим

$$\psi(i) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{i\alpha}\, e(\alpha),$$

т.к. все элементы $\psi(i)$ ортогональны всем элементам $\varphi(1), \dots, \varphi(k)$.

Обозначим через $\psi^*(i) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{i\alpha}\, g(\alpha)$ $(i = 1, 2, \dots, \ell)$ и составим скалярные произведения $\langle \psi^*(i); e(k) \rangle$. Учитывая условия теоремы, получим

$$\langle \psi^*(i), e(k) \rangle = \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{i\alpha} \langle g(\alpha), e(k) \rangle = -\sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{i\alpha} \langle g(k), e(\alpha) \rangle =$$

$$= -\langle g(k), \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{i\alpha}\, e(\alpha) \rangle = -\langle g(k), \psi(i) \rangle.$$

Но последние скалярные произведения равны нулю, т.к. $\psi(i)$ выбраны из ортогонального дополнения к $G' \supset G$. Следовательно, $\psi^*(i)$ ортогональны к подпространству $E$. С другой стороны, элементы $\psi^*(i)$ $(i = 1, 2, \dots, \ell)$ составляют ортонормированную систему элементов $H$, т.к.

$$\langle \psi^*(i), \psi^*(j) \rangle = \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{i\alpha} c_{j\alpha} = \langle \psi(i), \psi(j) \rangle = \delta_{i,j} .$$



Таким образом, $\psi_1^*(1), \dots, \psi^*(l)$ лежат в ортогональном дополнении подпространства $E$, имеющего коразмерность $\kappa$, и ортогональны между собой. Отсюда следует, что $l \leq \kappa$ и, следовательно, $l < \infty$.

Представляя теперь каждое $\psi^*(i)$ $(i=1,2,\dots,l)$ в базисе $(\varphi(1),\dots,\varphi(\kappa), e(1),\dots)$, и учитывая ортогональность $\psi^*(i)$ ко всем элементам $e(1), e(2), \dots$, будем иметь

$$\psi^*(i) = \sum_{j=1}^{\kappa} \beta_{ij} \varphi(j) \quad (i=1,2,\dots,l) \tag{2}$$

Из ортонормированности системы $\psi^*(1), \dots, \psi^*(l)$ следует, что она линейно независима и поэтому матрица преобразования (2) имеет ранг, равный $l$. Не нарушая общности, очевидно, можно считать, что система уравнений (2) позволяет линейно выразить $\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(l)$ через $\psi^*(1), \psi^*(2), \dots, \psi^*(l)$ и остальные векторы $\varphi(l+1), \dots, \varphi(\kappa)$. Теперь очевидно, что замкнутое подпространство $G'$, порожденное векторами $\varphi(1),\dots,\varphi(\kappa)$; $g(1), g(2), \dots, g(n), \dots$, порождается также векторами $\psi^*(1), \dots, \psi^*(l)$; $\varphi(l+1),\dots,\varphi(\kappa)$; $g(1),\dots, g(n)\dots$; но векторы $\psi^*(1), \dots, \psi^*(l)$ лежат в подпространстве $G \subset G'$ и поэтому подпространство $G'$ порождено векторами $\varphi(l+1),\dots,\varphi(\kappa)$; $g(1), \dots, g(n)\dots$. Итак, подпространство $G'$ получается из подпространства $G$ добавлением к последнему новых образующих $\varphi(l+1), \dots, \varphi(\kappa)$ в количестве $\kappa - l$. Поэтому /вспомним допущение $\operatorname{codim} G \geq \kappa+1$/

$$l = \operatorname{codim} G' \geq \operatorname{codim} G - (k-l) \geq k+1-(k-l) = l+1.$$

Итак, мы пришли к неравенству $l \geq l+1$, которое, ввиду доказанной конечности $l$, представляет противоречие. Следовательно, мы доказали, что если $\operatorname{codim} E = k < \infty$, то $\operatorname{codim} G \leq k$. Отсюда следует справедливость теоремы во всех случаях. Действительно, если $\operatorname{codim} E < \infty$, то по доказанному $\operatorname{codim} G = k' \leq k$ и значит $k'$ конечен. Но тогда меняя ролями $E$ и $G$, получаем $k \leq k'$, что дает $k = k'$. Теперь очевидно, что теорема верна также в предположении $\operatorname{codim} E = +\infty$, ибо коразмерность $G$ не может быть конечной в силу уже доказанной части теоремы.

Поступила 20.XI.1977 Кафедра математического анализа

ЛИТЕРАТУРА

I. Н.П.Канделаки, И.Н.Карцивадзе, Т.Л.Чантладзе. Труды ТГУ, I79, 1976, стр. 43-57.

ი. ქარცივაძე

## ორთონორმალური სისტემების ერთი თვისების შესახებ


### რეზიუმე

ჰილბერტის ნამდვილ $H$ სივრცეში განიხილება ორი ორთონორმალური $\{e_i\}_{i\geq 1}$ და $\{e'_i\}_{i\geq 1}$ სისტემა, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულნი არიან შემდეგი ირიბადშეუღლების პირობებით: $\langle e_i, e'_j\rangle + \langle e_j, e'_i\rangle = 0$, ყოველი $(i,j)$ წყვილისათვის $i \neq j$. დამტკიცებულია, რომ $\mathrm{codim}\, E = \mathrm{codim}\, E'$, სადაც $E$ და $E'$ აღნიშნავს სათანადოდ $\{e_i\}_{i\geq 1}$ და $\{e'_i\}_{i\geq 1}$ სისტემით წარმოქმნილ ქვესივრცეებს $H$-იდან.


I. Kartsivadze

## ON A PROPERTY OF ORTHONORMAL SYSTEMS


### Summary

In a real Hilbert space H two orthonormal systems $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ and $\{e'_i\}_{i=1}^{\infty}$ having the following property of oblique connection: $\langle e_i, e'_j\rangle + \langle e_j, e'_i\rangle = 0$ for every pair (i,j), $i \neq j$ are considered. It is proved that codim E=codim E′ where E and E′ denote the subspaces of H generated by $\{e_i\}$ and $\{e'_i\}$.

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

I97, I978

УДК 5I3.836

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ $K$-ГРУПП ГОМОЛОГИИ

Д.О.Баладзе

Группы $K$ – цепей $\{C_p^K(\Phi, G)\}$ компактного метрического пространства $\Phi$ над группой коэффициентов $G$, введенные нами в /I/, как легко можно заметить, изоморфны цепям двойного комплекса

$$Hom_\varepsilon(C_*(K), \tilde{C}_*(\Phi, G)) = \{\sum_{j-i=p} Hom_\varepsilon(C_i(K), \tilde{C}_j(\Phi, G))\}, p \geq 0,$$

а формула $K$ – граничного оператора $\partial: C_p^K(\Phi, G) \to C_{p-1}^K(\Phi, G)$ совпадает с формулой дифференциала в двойном комплексе $Hom_\varepsilon(C_*(K), \tilde{C}_*(\Phi, G))$. Здесь через $\tilde{C}_*^K(\Phi, G)$ обозначен комплекс цепей остовов компакта $\Phi$ над группой коэффициентов $G$, а $\varepsilon$ означает, что требуются не все гомоморфизмы $x: C_*(K) \to \tilde{C}_*(\Phi, G)$, а лишь такие, для которых степень мелкости цепей, соответствующих $\tau \in K$, стремится к нулю, когда $\tau$ уходит в "бесконечность" в комплексе $K$. Рассмотрим теперь группу $K$ – цепей нулевой размерности $C_0^K(\Phi, G)$ компакта $\Phi$ над группой коэффициентов $G$. Как мы заметили выше,

$$C_0^K(\Phi, G) = \sum_{j-i=0} Hom_\varepsilon(C_i(K), \tilde{C}_j(\Phi, G)) =$$

$$= \sum_i Hom_\varepsilon(C_i(K), \tilde{C}_i(\Phi, G)).$$

Пусть $x = \{x_\tau\} \in \sum_i Hom_\varepsilon(C_i(K), \tilde{C}_i(\Phi, G)$,

тогда $(\partial x)_\tau = \partial(x_\tau) + (-1)^{dim\, x_\tau} \cdot x_{\partial\tau}$. Но не всегда $(\partial x)_\tau = 0$. Следовательно, существует $\partial x = y$ цикл размерности $-1$, т.е. $y \in C_{-1}^K(\Phi, G) = \sum_{j-i=1} Hom_\varepsilon(C_i(K), \tilde{C}_j(\Phi, G))$. Отсюда и еще из других соображений, естественно, возникает необходимость рассмотрения всего двойного комплекса, т.е. при $p < 0$, тем более, что, как заметили выше, все равно цепи размерности $-1$ присутствуют неявно в двойном комплексе $Hom_\varepsilon(C_*(K), \tilde{C}_*(\Phi, G))$, при $p \geq 0$. Таким образом, $K$ - группой гомологии размерности $p$ компакта $\Phi$ над группой коэффициентов $G$ мы в дальнейшем будем называть, по определению, гомологическую группу двойного комплекса

$$Hom_\varepsilon(C_*(K), \tilde{C}_*(\Phi, G)) = \{\sum_{j-i=p} Hom_\varepsilon(C_i(K), \tilde{C}_j(\Phi, G))\},$$

где $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Необходимость рассмотрения и целого отрицательного числа $p$ в двойном комплексе $Hom_\varepsilon(C_*(K), \tilde{C}_*(\Phi, G))$ следует еще из следующего примера.

Пусть $K$ - компактный полиедр, тогда в двойном комплексе $Hom_\varepsilon(C_*(K), \tilde{C}_*(\Phi, G))$ $\varepsilon$ можно опустить (это условие автоматически выполняется). Учитывая ацикличность цепного комплекса $\tilde{C}_*(\Phi, G)$, т.е. тривиальность $K$ - групп гомологии $\Delta_p^K(\Phi, G)=0$ для каждого положительного целого числа $p$, $p>0$, получаем, что $\Delta_p^K(\Phi, G)=H_{-p}(K)$ для $p<0$ и $\Delta_0^K(\Phi, G)=H_0(K)$ (применяя формулы для вычисления гомологии комплекса гомоморфозмов, см. /2/). С другой стороны, этот факт показывает, что в случае компактных полиедров $K$, $K$ - группы гомологии $\Delta_p^K(\Phi, G)$ компакта $\Phi$ над группой коэффициентов $G$ не зависят от компакта $\Phi$, а зависят только от компактного полиедра $K$. Отсюда следует, что рассмотрение $K$ - групп гомологии $\Delta_p^K(\Phi, G)$ компакта $\Phi$ над группой коэффициентов $G$ имеет смысл только при некомпактных полиедрах $K$.

Теперь исследуем дальнейшие зависимости $K$ - групп гомологии $\Delta_p^K(\Phi, G)$ от параметра $K$. Пусть $K$ - локально конечный комплекс, $\Phi$ - компактное метрическое пространство и $G$ - абелева группа. Как было отмечено выше, мы можем определить $K$ - цепной комплекс $C_*^K(\Phi, G)$ компакта $\Phi$ над группой коэффициентов $G$ как бесконечную в обе стороны последовательность

$$C_*^K(\Phi, G): \dots \xleftarrow{\partial_{-2}} C_{-2}^K(\Phi, G) \xleftarrow{\partial_{-1}} C_{-1}^K(\Phi, G) \xleftarrow{\partial_0} C_0^K(\Phi, G) \xleftarrow{\partial_1} C_1^K(\Phi, G) \xleftarrow{\partial_2} \dots,$$

в которой произведение любых двух последовательных отображений равно нулю.

Гомология этого $K$ - цепного комплекса $C_*^K(\Phi, G)$ и есть $p$ - мерная $K$ - группа гомологии $\Delta_p^K(\Phi, G)$ компакта $\Phi$ над группой коэффициентов $G$, где $p=0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Если $C_*^K(\Phi, G)$ и $C_*^{K'}(\Phi, G)$ соответственно $K$ - и $K'$ - цепные комплексы компакта $\Phi$ над группой коэффициентов $G$, то $K$ - цепным преобразованием $f: C_*^K(\Phi, G) \to C_*^{K'}(\Phi, G)$, по определению, называем такое семейство гомоморфизмов $f_p: C_p^K(\Phi, G) \to C_p^{K'}(\Phi, G)$, заданных по одному для каждого $p$, что выполняются равенства $\partial_p' f_p = f_{p-1} \partial_p$ для всех $p$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Это условие означает коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\cdots & C_{p-1}^K(\Phi, G) \arrow[l] \arrow[d, "f_{p-1}"] & C_p^K(\Phi, G) \arrow[l, "\partial_p"'] \arrow[d, "f_p"] & C_{p+1}^K(\Phi, G) \arrow[l, "\partial_{p+1}"'] \arrow[d, "f_{p+1}"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & C_{p-1}^{K'}(\Phi, G) \arrow[l] & C_p^{K'}(\Phi, G) \arrow[l, "\partial_p'"'] & C_{p+1}^{K'}(\Phi, G) \arrow[l, "\partial_{p+1}'"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Ясно, что $K$ - цепное отображение $f: C_*^K(\Phi, G) \to C_*^{K'}(\Phi, G)$ индуцирует гомоморфизм $f_{p*}: \Delta_p^K(\Phi, G) \to \Delta_p^{K'}(\Phi, G)$ для всех $p$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Если $f: C_*(K') \to C_*(K)$ - отображение, порожденное симплициальным отображением локально конечного комплекса $K'$ в локально конечном комплексе $K$, то отображение $\gamma$, переводящее $x$, $x \in C_*^K(\Phi, G)$, в $xf = y \in C_*^{K'}(\Phi, G)$, является $K$ - цепным преобразованием $\gamma: C_*^K(\Phi, G) \to C_*^{K'}(\Phi, G)$.

Действительно, для доказательства этого утверждения нужно показать коммутативность следующей диаграммы:

$$
\begin{array}{ccccc}
C^K_*(\Phi, G) \cdots \leftarrow & C^K_{p-1}(\Phi, G) & \xleftarrow{\partial_p} & C^K_p(\Phi, G) & \leftarrow \cdots \\
\gamma \big\downarrow & \big\downarrow \gamma_{p-1} & & \big\downarrow \gamma_p & \\
C^{K'}_*(\Phi, G) \cdots \leftarrow & C^{K'}_{p-1}(\Phi, G) & \xleftarrow{\partial'_p} & C^{K'}_p(\Phi, G) & \leftarrow \cdots .
\end{array}
$$

Это значит, что нужно доказать справедливость равенства $\partial'_p \gamma_p = \gamma_{p-1} \partial_p$ для каждого $p$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Пусть $x_p = \{x_\tau\} \in C^K_p(\Phi, G)$, $(\partial x_p)_\tau = \partial(x_{p\tau}) + (-1)^{\dim x_{p\tau}} \cdot x_{p\partial\tau} = x_{(p-1)\tau}$, где $\partial x_p = x_{p-1} \in C^K_{p-1}(\Phi, G) \cdot y_{(p-1)\tau'} = x_{p-1} f_{p-1}(\tau') = x_{(p-1)\tau}$; $y_{p-1} = x_{p-1} f_{p-1} \in C^{K'}_{p-1}(\Phi, G)$.

С другой стороны, $\gamma_p(x_p)(\tau') = x_p f_p(\tau') = y_{p\tau}$, где $\gamma_p(x_p) = y_p \in C^{K'}_p(\Phi, G) \cdot (\partial'_p y_p)_{\tau'} = y_{(p-1)\tau'}$.

Следовательно, $\partial'_p \gamma_p = \gamma_{p-1} \partial_p$, ч.т.д.

Для любого тождественного симплициального отображения $f: K \to K$ индуцированный гомоморфизм $f_{p*}: \Delta^K_p(\Phi, G) \to \Delta^K_p(\Phi, G)$ также является тождественным отображением.

Если $f: K \to K'$ и $g: K' \to K''$ – симплициальные отображения, то композиция индуцированных ими гомоморфизмов $f_{p*}: \Delta^{K'}_p(\Phi, G) \to \Delta^K_p(\Phi, G)$ и $g_{p*}: \Delta^{K''}_p(\Phi, G) \to \Delta^{K'}_p(\Phi, G)$ совпадает с индуцированным гомоморфизмом произведения $(gf)_{p*}: \Delta^{K''}_p(\Phi, G) \to \Delta^K_p(\Phi, G)$, т.е. $(gf)_{p*} = f_{p*} g_{p*}$ для каждого $p$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Это утверждение получается из коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\cdots & C^{K''}_{p-1}(\Phi, G) \arrow[l] \arrow[d, "g_{p-1}"] & C^{K''}_{p}(\Phi, G) \arrow[l, "\partial''_p"'] \arrow[d, "g_p"] & C^{K''}_{p+1}(\Phi, G) \arrow[l, "\partial''_{p+1}"'] \arrow[d, "g_{p+1}"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & C^{K'}_{p-1}(\Phi, G) \arrow[l] \arrow[d, "f_{p-1}"] & C^{K'}_{p}(\Phi, G) \arrow[l, "\partial'_p"'] \arrow[d, "f_p"] & C^{K'}_{p+1}(\Phi, G) \arrow[l, "\partial'_{p+1}"'] \arrow[d, "f_{p+1}"] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & C^{K}_{p-1}(\Phi, G) \arrow[l] & C^{K}_{p}(\Phi, G) \arrow[l, "\partial_p"'] & C^{K}_{p+1}(\Phi, G) \arrow[l, "\partial_{p+1}"'] & \cdots . \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Следовательно, $K$ - группа гомологии $\Delta^K_p(\Phi, G)$ компакта $\Phi$ над группой коэффициентов $G$ является контравариантным функтором от параметра $K$, т.е. контравариантным функтором, определенным на категории $\mathfrak{A}$, объектами которого являются все локально конечные (бесконечные) комплексы, а отображениями их - симплициальные отображения со значениями в категории групп $A = \{\Delta^K_p(\Phi, G)\}$.

$K$ - цепная гомотопия $S$ между двумя $K$ - цепными преобразованиями $f, g : C^K_*(\Phi, G) \to C^{K'}_*(\Phi, G)$ - это семейство гомоморфизмов $S_p : C^K_p(\Phi, G) \to C^{K'}_{p+1}(\Phi, G)$ по одному для каждого $p$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, при этом выполняется равенство:

$$\partial'_{p+1} S_p + S_{p-1}\partial_p = f_p - g_p .$$

В этом случае мы пишем $S : f \overset{K}{\simeq} g$.

<u>Теорема I</u>. Если $S$ $K$ - цепная гомотопия между двумя $K$ - цепными преобразованиями $f, g : C^K_*(\Phi, G) \to C^{K'}_*(\Phi, G)$, то индуцированные гомоморфизмы $f_{p*}$ и $g_{p*}$ тождественны, т.е. $f_{p*} = g_{p*} : \Delta^K_p(\Phi, G) \longrightarrow \Delta^{K'}_p(\Phi, G)$ для каждого

$p,\ p=0,\pm 1,\pm 2,\dots$

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\leftarrow C^K_{p-1}(\Phi,G) & \xleftarrow{\partial_p} & C^K_p(\Phi,G) & \xleftarrow{\partial_{p+1}} & C^K_{p+1}(\Phi,G) & \leftarrow\cdots \\
f_{p-1}\downarrow g_{p-1} & & f_p\downarrow g_p & & f_{p+1}\downarrow g_{p+1} & \\
\cdots\leftarrow C^{K'}_{p-1}(\Phi,G) & \xleftarrow{\partial'_p} & C^{K'}_p(\Phi,G) & \xleftarrow{\partial'_{p+1}} & C^{K'}_{p+1}(\Phi,G) & \leftarrow\cdots
\end{array}$$

Допустим, что $z_p=\{z_\tau\}$ является $K$ - циклом из $C^K_p(\Phi,G)$, тогда $\partial_p z_p=0$. Если применим формулу $\partial'_{p+1}S_p+S_{p-1}\partial_p=f_p-g_p$, получим

$$f_p z_p-g_p z_p=\partial'_{p+1}S_p z_p+S_{p-1}\partial_p z_p=\partial'_{p+1}S_p z_p,$$

что означает, что $f_p z_p$ и $g_p z_p$ $K'$ - гомологичны между собой. Поэтому $f_p z_p$ и $g_p z_p$ входят в один и тот же смежный класс $K'$ - группы гомологии $\Delta^{K'}_p(\Phi,G)$, что требовалось доказать.

Теорема 2. Если $f,g:K'\to K$ комбинаторно близкие отображения локально конечного комплекса $K'$ в локально конечный комплекс $K$, то $K$ - цепные преобразования $f,g:C^K_*(\Phi,G)\to C^{K'}_*(\Phi,G)$ $K$- цепно гомотопны между собой, т.е. существует $K$ - цепная гомотопия $S:f\overset{K}{\simeq}g$.

Доказательство. Построим призму $\Pi$ над комплексом остова $\tilde{C}_*(\Phi,G)$ компакта $\Phi$; подразделим симплициально призму $\Pi$. Если теперь возьмем произвольную $p$ - мерную $K$-цепь

$x=\{x_\tau\}\in C_p^K(\Phi,G)$, то $\Pi x$ будет $K$-цепью размерности $p+1$. Отображение $S_p$ определим при помощи равенства

$$S_p(x)=\begin{cases} x_p f_p & \text{на нижнем основании призмы } \Pi \\ x_p g_p & \text{на верхнем основании призмы } \Pi. \end{cases}$$

Тогда ясно, что $f_p(x)-g_p(x)=\partial'_{p+1}S_p(x)+S_{p-1}\partial_p x$. Когда $x$ есть $K$-цикл размерности $p$, тогда отсюда получается гомотопия $S_p: f_p \overset{K}{\simeq} g_p$, ч.т.д.

Пусть дано $K$-цепное преобразование $f: C_*^K(\Phi,G)\to C_*^K(\Phi,G)$. $K$-цепное преобразование $f$ называется $K$-цепной эквивалентностью, если существует другое $K'$-цепное преобразование $h: C_*^{K'}(\Phi,G)\to C_*^K(\Phi,G)$ и, кроме того, $K$ и $K'$-цепные гомотопии $s: hf\overset{K}{\simeq} 1_K$ и $t: fh\overset{K'}{\simeq} 1_{K'}$. Так как $1_{K*}$ и $1_{K'*}$ – тождественные гомоморфизмы, $1_{K*}:\Delta_p^K(\Phi,G)\to\Delta_p^K(\Phi,G)$ и $1_{K'*}:\Delta_p^{K'}(\Phi,G)\to\Delta_p^{K'}(\Phi,G)$, то из теоремы I получается

<u>Следствие</u>. Если $f: C_*^K(\Phi,G)\to C_*^{K'}(\Phi,G)$ – $K$-цепная эквивалентность, то индуцированное отображение $f_{p*}:\Delta_p^K(\Phi,G)\to\Delta_p^{K'}(\Phi,G)$ является изоморфизмом для каждой размерности $p$, $p=0,\pm1,\pm2,\dots$.

<u>Теорема 3</u>. Если $s: f\overset{K}{\simeq} g: C_*^K(\Phi,G)\to C_*^{K'}(\Phi,G)$ и $s': f'\overset{K}{\simeq} g': C_*^{K'}(\Phi,G)\to C_p^{K''}(\Phi,G)$ – $K$ и $K'$-цепные гомотопии, то $K$-цепной гомотопией является и отображение

$$f'S+S'g : f'f \overset{K}{\simeq} g'g : C_*^K(\Phi, G) \to C_*^{K''}(\Phi, G).$$

<u>Доказательство</u>. По условию теоремы имеют место равенства

$$\partial'_{p+1} S_p + S_{p-1}\partial_p = f_p - g_p \quad \text{и} \quad \partial''_{p+1} S'_p + S'_{p-1}\partial'_p = f'_p - g'_p.$$

Для доказательства теоремы достаточно умножить первое равенство слева на $f'_p$, а второе - справа на $g_p$ и сложить.

Действительно,

$$\begin{array}{l} f'_p\partial'_{p+1} S_p + f'_p S_{p-1}\partial_p = f'_p f_p - f'_p g_p \\ + \\ \partial''_{p+1} S'_p g_p + S'_{p-1}\partial'_p g_p = f'_p g_p - g'_p g_p \\ \hline f'_p\partial'_{p+1} S_p + f'_p S_{p-1}\partial_p + \partial''_{p+1} S_p g_p + S'_{p-1}\partial'_p g_p = f'_p f_p - g'_p g_p. \end{array}$$

Следовательно, $f'S+S'g : f'f \overset{K}{\simeq} g'g$, ч.т.д.

Рассмотрим опять двойной комплекс $Hom_\varepsilon(C_*(K), \tilde{C}_*(\Phi, G))$.

Для $K$ - группы $\Delta_0^K(\Phi, G)$ нулевой размерности компакта $\Phi$ над группой коэффициентов $G$ доказывается следующая

<u>Теорема 4</u>. $K$ - цикл $z$ нулевой размерности, $z = \{z_\tau\} \in Z_0^K(\Phi, G)$, компакта $\Phi$ над группой коэффициентов $G$ является $K$ - цепным преобразованием комплекса $C_*(K)$ в комплекс $\tilde{C}_*(\Phi, G)$, т.е. $z : C_*(K) \to \tilde{C}_*(\Phi, G)$; $K$ - цикл $z$ нулевой размерности является $K$ - границей элемента $t$ из $C_1^K(\Phi, G) = \sum_{j-i=1} Hom_\varepsilon(C_i(K), \tilde{C}_j(\Phi, G))$ тогда и только тогда, когда $t$ есть $K$ - гомотопия $t : z \overset{K}{\simeq} 0$.

Доказательство. Если $z \in z_0^K(\Phi, G)$, то $\partial z = 0$.

Следовательно, $(\partial z)_\tau = \partial(z_\tau) + (-1)^{\dim z_\tau} \cdot z_{\partial\tau} = 0$.

Отсюда получаем, что

$$\partial(z_\tau) = (-1)^{\dim z_\tau + 1} \cdot z_{\partial\tau}. \tag{I}$$

Равенство (I) означает коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \leftarrow & C_{p-1}(K) & \xleftarrow{\partial} & C_p(K) & \xleftarrow{\partial} & C_{p+1}(K) & \leftarrow \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \leftarrow & \tilde{C}_{p-1}(\Phi, G) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{C}_p(\Phi, G) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{C}_{p+1}(\Phi, G) & \leftarrow \cdots
\end{array}$$

Коммутативность этой диаграммы, в свою очередь, означает, что $K$ - цикл $z$ нулевой размерности, $z \in z_0^K(\Phi, G)$, является $K$ - цепным преобразованием комплекса $C_*(K)$ в комплексе $\tilde{C}_*(\Phi, G)$.

Допустим теперь, что $z \in z_0^K(\Phi, G)$, $t \in C_1^K(\Phi, G) = \sum_{j-i=1} Hom_\varepsilon(C_i(K), \tilde{c}_j(\Phi, G))$ и $\partial t = z$. По определению $(\partial t)_\tau = \partial(t_\tau) + (-1)^{\dim t_\tau} \cdot t_{\partial\tau} = z$. Из этого равенства получается, что $t : z \overset{K}{\simeq} 0$, что и требовалось доказать.

Из этой теоремы получается такой вывод:

$K$ - группа гомологии $\Delta_0^K(\Phi, G)$ нулевой размерности компакта $\Phi$ над группой коэффициентов $G$ есть абелева группа $K$ - гомологических классов $K$ - цепных преобразований $z : C_*(K) \to \tilde{C}_*(\Phi, G)$.

Поступила 21.IX.1977

Кафедра
общей математики

## ЛИТЕРАТУРА


1. Д.О.Баладзе. Труды Тбилисского математического института, т. XLI, 1972.
2. Н.Стинрод и С.Эйленберг. Основания алгебраической топологии. М., 1958.


დ.ბალაძე

### ჰომოლოგიის K-ჯგუფთა ზოგიერთი თვისების შესახებ

რეზიუმე

შრომაში შესწავლილია K-პარამეტრის მიმართ აღებული ჰომოლოგიის ჯგუფის სხვადასხვა თვისებები.

D.Baladze

### ON SOME PROPERTIES OF K-GROUPS OF HOMOLOGY

Summary

Various properties of a homological group with respect to parameter K are studied in this paper.

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

197, 1978

УДК 517.9

# ОБ ИНВАРИАНТНОМ ПРИЗНАКЕ КВАДРАТИЧНЫХ СЕТЕЙ

Г.Н.Тевзадзе

I. В трехмерном проективном пространстве $P_3$ рассмотрим последовательность Лапласа непараболических конгруэнций прямых

$$\ldots, \underset{-2}{C}, \underset{-1}{C}, \underset{0}{C}, \underset{1}{C}, \underset{2}{C}, \ldots, \underset{n}{C}, \ldots \tag{I}$$

и их фокальных поверхностей

$$\ldots, \underset{-2}{S}, \underset{-1}{S}, \underset{0}{S}, \underset{1}{S}, \underset{2}{S}, \ldots, \underset{n}{S}, \ldots \tag{2}$$

Предполагается, что последовательность (2) не обрывается, т.е. ни одна поверхность $\underset{n}{S}$ не вырождается в линию и не является развертывающейся поверхностью. При этом каждая конгруэнция $\underset{n}{C}$ в качестве своих фокальных поверхностей имеет $\underset{n}{S}$, $\underset{n+1}{S}$.

Пусть

$$\underset{n}{f}_{ij}\, du^i du^j = 0 \tag{3}$$

- фокальная (сопряженная) сеть поверхности $\underset{n}{S}$, где $n$ принимает целочисленные значения

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

а тензорные индексы $i, j$ - только два значения

$$i, j = 1, 2.$$

Каждую поверхность $\underset{n}{S}$ из последовательности (2) нормализуем в смысле Нордена прямыми Грина сети (3) ([I], стр.363) и индуцируемую при этом на $\underset{n}{S}$ пару конформных связностей обозначим через

$$\left( \underset{n}{G}{}_{ij}^{\;k}, \underset{n}{\Gamma}{}_{ij}^{k} \right), \tag{4}$$

а через $\underset{n}{b}_{ij}$ - тензор асимптотической сети фокальной поверхности

$$\underset{n}{b}_{ij}\, du^i du^j = 0. \tag{5}$$

Вейлевые связности (4) имеют общую изотропную сеть ([3], (2.22))

$$\underset{n}{\nabla}_k \underset{n}{f}_{ij} = (\underset{n}{\omega}_k + 2\underset{n}{T}_k)\underset{n}{f}_{ij}, \quad \underset{n}{\nabla}_{(k)} \underset{n}{f}_{ij} = (\underset{n}{\omega}_k - 2\underset{n}{T}_k)\underset{n}{f}_{ij} \tag{6}$$

где

$$\underset{n}{T}_k = \underset{n}{\tilde{b}}{}^{ij}\left(\underset{n}{\nabla}_i \underset{n}{b}_{kj} - \frac{1}{2}\underset{n}{\nabla}_k \underset{n}{b}_{ij}\right) \tag{7}$$

- чебышевский вектор сети (5), а $\underset{n}{\omega}_k$ - тензорная величина.

Деривационные уравнения нормализованной фокальной поверхности $\underset{n}{S}$ имеют вид ([3], (2.37) )

$$\underset{n}{\nabla}_j \underset{n}{\mathcal{Y}}_i = \underset{n}{\ell}_j \underset{n}{\mathcal{Y}}_i + \underset{n}{p}_{ij} \underset{n}{\mathscr{X}} + \underset{n}{b}_{ij} \underset{n}{\mathcal{X}}, \quad \underset{n}{\nabla}_{(j)} \underset{n}{z}_i = \underset{n}{\lambda}_j \underset{n}{z}_i + \underset{n}{\pi}_{ij} \underset{n}{\xi} + \underset{n}{b}_{ij} \underset{n}{\Sigma}, \tag{8}$$

где ([3], (2.77), (3.14) )

$$2\underset{n}{\ell}_i = \underset{n}{\omega}_i + \underset{n}{T}_i, \quad 2\underset{n}{\lambda}_i = \underset{n}{\omega}_i - \underset{n}{T}, \tag{9}$$

$$\underset{n}{p}_{ij} = \underset{n}{\varphi} \underset{n}{f}_{ij} - \underset{n}{\varphi} \underset{n}{e}_{ij} + \underset{n}{\ell} \underset{n}{\varepsilon}_{ij}, \quad \underset{n}{\pi}_{ij} = [\underset{n}{y} + \nabla^k (\underset{n}{T}_r f^r_k)] \underset{n}{f}_{ij} - \underset{n}{\varphi} \underset{n}{e}_{ij} + \underset{n}{\lambda} \underset{n}{\varepsilon}_{ij}, \tag{10}$$

$$4\underset{n}{\ell} = \nabla^i (\underset{n}{\omega}_i + \underset{n}{T}_i), \quad 4\underset{n}{\lambda} = \nabla^i (\underset{n}{\omega}_i - \underset{n}{T}_i), \tag{11}$$

$$\underset{n}{e}_{ij} = \underset{n}{f}_{ir} \underset{n}{b}^r_j . \tag{12}$$

Тензоры Риччи связностей (4) будут соответственно ([3], (3.6)):

$$\begin{aligned} \underset{n}{R}_{ij} &= -\underset{n}{f}_{ij} \nabla^k (\underset{n}{T}_r f^r_k) - \underset{n}{\varepsilon}_{ij} \nabla^k (\underset{n}{T}_k + \tfrac{1}{2} \underset{n}{\omega}_k), \\ \underset{n}{\rho}_{ij} &= \underset{n}{f}_{ij} \nabla^k (\underset{n}{T}_r f^r_k) + \underset{n}{\varepsilon}_{ij} \nabla^k (\underset{n}{T}_k - \tfrac{1}{2} \underset{n}{\omega}_k). \end{aligned} \tag{13}$$

Тензорные индексы всюду перебрасываются вверх или вниз двумя взаимными бивекторами

$$\underset{n}{\varepsilon}_{ij}, \ \underset{n}{\varepsilon}^{ij}, \ \underset{n}{\varepsilon}_{ik} \underset{n}{\varepsilon}^{kj} = \delta^j_i,$$

согласованными с тензорами $\underset{n}{b}_{ij}$, $\underset{n}{f}_{ij}$ следующим образом:

$$\underset{n}{\varepsilon}_{12} = \underset{n}{\varepsilon} = \sqrt{\operatorname{Det} \| \underset{n}{b}_{ij} \|} = \sqrt{-\operatorname{Det} \| \underset{n}{f}_{ij} \|},$$

где $\underset{n}{\varepsilon}$ – единственная отличная от нуля компонента бивектора $\underset{n}{\varepsilon}_{ij}$.

С фокальной сетью (3) связываются инварианты ([3], (2.49))

$$\underset{n}{\rho}=\frac{1}{2}\underset{n}{v}\underset{n}{P}_{ri}(\underset{n}{f}^{ri}+\underset{n}{\varepsilon}^{ri}),\quad \underset{n}{\pi}=\frac{1}{2}\underset{n}{v}\underset{n}{\pi}_{ri}(\underset{n}{f}^{ir}+\underset{n}{\varepsilon}^{ir}), \tag{14}$$

$$\underset{n}{\bar{\rho}}=\frac{1}{2}\underset{n}{v}\underset{n}{P}_{ri}(\underset{n}{f}^{ir}+\underset{n}{\varepsilon}^{ir}),\quad \underset{n}{\bar{\pi}}=\frac{1}{2}\underset{n}{v}\underset{n}{\pi}_{ri}(\underset{n}{f}^{ri}+\underset{n}{\varepsilon}^{ri}),$$

где $\underset{n}{v}=\underset{n}{\bar{v}}^{i}\underset{n}{v}_{i}=-\underset{n}{k}\,\underset{n}{b}_{ir}\underset{n}{v}^{i}\underset{n}{v}^{r}$ ( $\underset{n}{k}$ – множитель пропорциональности), $\underset{n}{v}^{i}$, $\underset{n}{\bar{v}}^{i}$ – касательные векторы к линиям сети (3)

$$\underset{n}{v}\,\underset{n}{f}_{ij}=\underset{n}{v}_{i}\underset{n}{\bar{v}}_{j}+\underset{n}{v}_{j}\underset{n}{\bar{v}}_{i}. \tag{15}$$

Величины (14) удовлетворяют равенствам ([3], (3.12))

$$\underset{n}{\bar{\rho}}-\underset{n}{\pi}=\underset{n}{v}\nabla^{k}(\underset{n}{T}_{r}\underset{n}{f}^{r}_{k}+\frac{1}{2}\underset{n}{T}_{k}),\quad \underset{n}{\rho}-\underset{n}{\pi}=\underset{n}{v}\nabla^{k}(\underset{n}{T}_{r}\underset{n}{f}^{r}_{k}-\frac{1}{2}\underset{n}{\omega}_{k}), \tag{16}$$

$$\underset{n}{\bar{\pi}}-\underset{n}{\rho}=\underset{n}{v}\nabla^{k}(\frac{1}{2}\underset{n}{T}_{k}-\underset{n}{T}_{r}\underset{n}{f}^{r}_{k}),\quad \underset{n}{\bar{\rho}}-\underset{n}{\bar{\pi}}=\underset{n}{v}\nabla^{k}(\underset{n}{T}_{r}\underset{n}{f}^{r}_{k}+\frac{1}{2}\underset{n}{\omega}_{k}).$$

Связь между чебышевскими векторами асимптотических сетей двух соседних фокальных поверхностей дается соотношениями ([3], (2.81) и (2.83)):

$$\underset{n+1}{T}_{i}=\underset{n}{T}_{i}+\underset{n}{f}^{r}_{i}[\partial_{r}\lg(\underset{n}{v}/\sqrt{\underset{n}{\rho}\underset{n}{\pi}})-\underset{n}{\omega}_{r}]+\partial_{i}\lg\sqrt[4]{\underset{n}{\rho}/\underset{n}{\pi}}. \tag{17}$$

$$\underset{n}{T_i} = \underset{n+1}{T_i} - f_i^{\,r}\left[\partial_r \lg\left(\underset{n+1}{v} / \sqrt{\underset{n+1}{\bar{p}}\,\underset{n+1}{\bar{\pi}}}\right) - \underset{n+1}{\omega_r}\right] + \partial_i \lg \sqrt[4]{\underset{n+1}{\bar{p}} / \underset{n+1}{\bar{\pi}}}\,, \tag{18}$$

а связь, существующая между векторами $\underset{n}{\omega_i}$ поверхностей $\underset{n}{S}$ и $\underset{n+1}{S}$ выражается формулой ([3], (2.82))

$$\underset{n+1}{\omega} = \underset{n}{\omega_i} + f_i^{\,r} \partial_r \lg \sqrt{\underset{n}{\pi} / \underset{n}{p}} + \partial_i \lg\left(\underset{n+1}{a}\,\underset{n+1}{b}\,\sqrt{\underset{n}{p\pi}}\right). \tag{19}$$

Для тензора Сегре поверхности $\underset{n}{S}$ имеем представление ([3], (2.133)):

$$\underset{n}{B}{}^{k}_{ij} = \left(\underset{n}{f_{ij}}\,\underset{n}{f}{}^{kr} - \underset{n}{\ell_{ij}}\,\underset{n}{e}{}^{kr}\right)\underset{n}{T_r}. \tag{20}$$

2. Нас интересует случай, когда для некоторого фиксированного значения $n = q$ фокальная поверхность $\underset{q}{S}$ – **квадрика**, т.е. неразвертывающаяся поверхность 2-го порядка. Это означает, что

$$\underset{q}{B}{}^{k}_{ij} = 0,$$

или, согласно (20),

$$\underset{q}{T_i} = 0. \tag{21}$$

Здесь $\underset{q}{T_i}$ – чебышевский вектор сети (5):

$$\underset{q}{b_{ij}}\, du^i du^j = 0. \tag{22}$$

В этом случае на нормализованной поверхности $\underset{q}{S}$ связности (4) совпадают ([2], [3], (2.131)) и выражения (4), (8), (10), (11), (13), (16), (17), (18), (6) принимают следующий вид:

$$\left(\underset{q}{G}{}^{k}_{ij},\ \underset{q}{G}{}^{k}_{ij}\right), \tag{23}$$

$$\underset{q}{\nabla_j}\,\underset{q}{y_i}=\underset{q}{l_j}\,\underset{q}{y_i}+\underset{q}{p_{ij}}\,x+\underset{q}{b_{ij}}\,X,\quad \underset{q}{\nabla_j}\,\underset{q}{\eta_i}=\underset{q}{l_j}\,\underset{q}{\eta_i}+\underset{q}{p_{ij}}\,\underset{q}{\xi}+\underset{q}{b_{ij}}\,\underset{q}{\Sigma}, \tag{24}$$

$$2\underset{q}{l_i}=2\underset{q}{\lambda_i}=\underset{q}{\omega_i},\quad 4\underset{q}{l}=4\underset{q}{\lambda}=\nabla^i\underset{q}{\omega_i}, \tag{25}$$

$$\underset{q}{p_{ij}}=\underset{q}{\pi_{ij}}=\underset{q}{\varphi}\,\underset{q}{f_{ij}}-\underset{q}{\psi}\,\underset{q}{e_{ij}}+\underset{q}{l}\,\underset{q}{\varepsilon_{ij}}, \tag{26}$$

$$\underset{q}{R_{ij}}=\underset{q}{\rho_{ij}}=-\frac{1}{2}\underset{q}{\varepsilon_{ij}}\nabla^k\underset{q}{\omega_k}, \tag{27}$$

$$\underset{q}{\bar p}=\underset{q}{\pi},\quad \underset{q}{\bar\pi}=\underset{q}{p},\quad \underset{q}{p}-\underset{q}{\pi}=-(\underset{q}{\bar p}-\underset{q}{\bar\pi})=\frac{1}{2}\underset{q}{v}\nabla^k\underset{q}{\omega_k}, \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\underset{q+1}{T_i}&=f_i^r\left[\partial_r \lg(\underset{q}{v}/\sqrt{\underset{q}{p}\,\underset{q}{\pi}})-\underset{q}{\omega_r}\right]+\partial_i \lg\sqrt[4]{\underset{q}{p}/\underset{q}{\pi}},\\ \underset{q+1}{T_i}&=f_i^r\left[\partial_r \lg(\underset{q+1}{v}/\sqrt{\underset{q+1}{\bar p}\,\underset{q+1}{\bar\pi}})-\underset{q+1}{\omega_r}\right]+\partial_i \lg\sqrt{\underset{q+1}{\bar\pi}/\underset{q+1}{\bar p}},\end{aligned} \tag{29}$$

$$\underset{q}{\nabla_r}\,\underset{q}{f_{ij}}=\underset{q}{\omega_r}\,\underset{q}{f_{ij}},\quad \underset{q}{\nabla_r}\,\underset{q}{b_{ij}}=\underset{q}{\omega_r}\,\underset{q}{b_{ij}},\quad \underset{q}{\nabla_r}\,\underset{q}{e_{ij}}=\underset{q}{\omega_r}\,\underset{q}{e_{ij}} \tag{30}$$

Формулы (30) следуют из соотношений ([3], (2.23)). Кроме того, для касательных векторов сети

$$\underset{q}{f_{ij}}\,du^i d^j=0 \tag{31}$$

имеем, что ([3], (2.33))

$$\underset{q}{\nabla_r}\,\underset{q}{v^i}=\underset{q}{h_r}\,\underset{q}{v^i},\quad \underset{q}{\nabla_r}\,\underset{q}{\bar v^i}=\underset{q}{s_r}\,\underset{q}{\bar v^i},$$

$$2\underset{q}{h_i}=\nabla_i \lg(\underset{q}{v}/\underset{q}{k})-\underset{q}{\omega_i},\quad 2\underset{q}{s_i}=\nabla_i \lg(\underset{q}{v}\,\underset{q}{k})-\underset{q}{\omega_i}. \tag{32}$$

Условие интегрируемости деривационных уравнений (24) можно представить в следующем виде ([3], (3.29)):

$$4\underset{q}{\nabla}^{k}(\underset{q}{\varphi}\underset{q}{f}_{ik}-\underset{q}{\psi}\underset{q}{\ell}_{ik})+\underset{q}{\omega}_{i}\nabla^{k}\underset{q}{\omega}_{k}+\nabla_{i}\nabla^{k}\underset{q}{\omega}_{k}=0. \tag{33}$$

Очевидно, условие (33) представляет систему двух дифференциальных уравнений с частными производными, с двумя неизвестными функциями $\underset{q}{\varphi}(u^1,u^2)$, $\underset{q}{\psi}(u^1,u^2)$.

Из равенств (I4), (25), (26) выводим, что

$$\underset{q}{P}=-\nu(\underset{q}{\varphi}+\underset{q}{\ell}),\quad \underset{q}{\Pi}=-\nu(\underset{q}{\varphi}-\underset{q}{\ell}). \tag{34}$$

Невырожденная сопряженная сеть на квадрике называется квадратичной сетью. Все формулы пункта 2 верны для квадратичной сети (3I).

Отметим один результат, непосредственно вытекающий из формул (28).

Допустим, что касательные прямые к линиям одного семейства квадратичной сети (3I) образуют конгруэнцию Вейнгартена. В этом случае ([3], (5.75))

$$\underset{q}{P}=\underset{q}{\Pi}$$

и, согласно соотношению (28),

$$\underset{q}{\bar{P}}=\underset{q}{\bar{\Pi}}$$

т.е. касательные прямые к линиям второго семейства сети (3I) так же образуют конгруэнцию Вейнгартена. Таким образом, справедлива следующая

<u>Теорема I</u>. Если касательные прямые к линиям одного семейства

квадратичной сопряженной сети образуют конгруэнцию $W$ , то эта сеть является сетью $R$ .

3. Теперь допустим, что последовательность преобразований Лапласа квадратичной сети (3I) периодическая и содержит четыре преобразования. Это означает, что последовательности (I) и (2) замкнуты и они состоят только из четырех членов, которые обозначим теперь так:

$$\underset{q}{C},\ \underset{q+1}{C},\ \underset{q+2}{C},\ \underset{q+3}{C}, \tag{35}$$

$$\underset{q}{S},\ \underset{q+1}{S},\ \underset{q+2}{S},\ \underset{q+3}{S}, \tag{36}$$

где поверхность $\underset{q}{S}$ - квадрика, а $\underset{q}{S}, \underset{q+1}{S}$ - фокальные поверхности конгруэнции $\underset{q}{C}$ ; $\underset{q+1}{S}, \underset{q+2}{S}$ - конгруэнции $\underset{q+1}{C}$ и, наконец, $\underset{q+3}{S}$ , $\underset{q}{S}$ - фокальные поверхности конгруэнции $\underset{q+3}{C}$ . Известно ([3], (5.153)), что последовательности вида (35) характеризуются соотношениями

$$8\underset{q}{T_i} = \partial_i\, lg(\underset{q}{\Pi}\underset{q}{\bar\Pi}/\underset{q}{p}\underset{q}{\bar p}) + f_i^{\,r}\partial_r\, lg(\underset{q}{\dot p}\underset{q}{\Pi}/\underset{q}{\bar p}\underset{q}{\bar\Pi}), \qquad \underset{q}{P_{ij}}\,\underset{q}{\ell^{ij}} = 0,$$

первое из которых, в силу равенства (2I), (28), является тождеством, а второе, согласно выражению (26), принимает следующий вид:

$$\underset{q}{\psi} = 0. \tag{37}$$

Поэтому условие (33), учитывая формулы (30), дает, что

$$\nabla_i \underset{q}{\varphi} = -\underset{q}{\varphi}\,\underset{q}{\omega_i} + \frac{1}{4} f_i^{\,r}(\underset{q}{\omega_r}\nabla^k \underset{q}{\omega_k} + \nabla_r\nabla^k \underset{q}{\omega_k}), \tag{38}$$

т.е. получили два уравнения с одной неизвестной функцией $\underset{q}{\psi}(u^1, u^2)$. Условие интегрируемости системы (38) можно представить в следующем виде:

$$\underset{q}{\psi}\,\underset{q}{\nabla}^k\omega_k=\frac{1}{4}f^r_m\underset{q}{\nabla}^m(\omega_r\underset{q}{\nabla}^k\omega_k+\nabla_r\underset{q}{\nabla}^k\omega_k)-\frac{1}{4}\underset{q}{f}^{rm}\omega_m(\omega_r\underset{q}{\nabla}^k\omega_k+\nabla_r\underset{q}{\nabla}^k\omega_k). \tag{39}$$

Здесь следует различать два случая: когда уравнение (39) фактически содержит функцию $\underset{q}{\psi}$ и когда оно её не содержит.

Пусть сперва

$$\underset{q}{\nabla}^k\omega_k\neq 0. \tag{40}$$

Теперь равенство (39) определяет функцию $\underset{q}{\psi}$ и система уравнений (38), (39) налагает ограничение только на величины

$$\underset{q}{\omega}_i,\ \underset{q}{f}_{ij}. \tag{41}$$

Тензоры (41), по известной формуле ([1], стр.154)

$$\underset{q}{G}^k_{ij}=\left\{{k \atop ij}\right\}_{\underset{q}{f}}-\frac{1}{2}(\underset{q}{\omega}_i\delta^k_j+\underset{q}{\omega}_j\delta^k_i-\underset{q}{\omega}_r\underset{q}{\tilde{f}}^{rk}\underset{q}{f}_{ij}) \tag{42}$$

образуют вейлевую связность (23), которая на квадрике является квазиевклидовой, т.е. её тензор Риччи - антисимметрическая величина

$$\underset{q}{R}_{(ij)}=0.$$

Как известно ([6], стр.219),

$$\underset{q}{R}_{ij}=\underset{q}{k}_{ij}-\nabla_{[i}\underset{q}{\omega}_{j]}-\frac{1}{2}(\nabla_r\underset{q}{\omega}_s)\underset{q}{\tilde{f}}^{rs}\underset{q}{f}_{ij}, \tag{43}$$

где $\underset{q}{K}_{ij}$ – тензор Риччи связности Римана, соответствующей метрическому тензору $\underset{q}{f}_{ij}$, т.е.

$$\underset{q}{K}_{ij} = -\frac{1}{2}\underset{q}{K}\,\underset{q}{f}_{ij} = \partial_i \underset{q}{\Gamma}{}^{r}_{ir} - \partial_r \underset{q}{\Gamma}{}^{r}_{ji} - \underset{q}{\Gamma}{}^{r}_{sr}\underset{q}{\Gamma}{}^{s}_{ji} + \underset{q}{\Gamma}{}^{r}_{sj}\underset{q}{\Gamma}{}^{s}_{ir}. \tag{44}$$

В этой формуле $\underset{q}{K}$ – гауссова кривизна римановой связности:

$$\underset{q}{\Gamma}{}^{r}_{ij} = \left\{ {r \atop ij} \right\}_{\underset{q}{f}} = \frac{1}{2}\underset{q}{f}{}^{rs}(\partial_i \underset{q}{f}_{js} + \partial_j \underset{q}{f}_{is} - \partial_s \underset{q}{f}_{ij}), \tag{45}$$

а символ (45) обозначает скобку Кристоффеля тензора $\underset{q}{f}_{ij}$. В силу этих равенств, условие антисимметричности тензора (43) принимает следующий вид:

$$\underset{q}{K} = \underset{q}{f}{}^{rs}\underset{q}{\nabla}_r \underset{q}{\omega}_s. \tag{46}$$

Если величины (4I) удовлетворяют равенству (46), то связность (42) будет квазиевклидовой. Такая связность допускает существование $\infty^1$ полей абсолютно параллельных направлений ([I], стр.296). Векторы $a_i$, принадлежащие этим направлениям, можно пронормировать так, что в равенствах вида

$$\nabla_r a_i = \rho_r a_i$$

вектор $\rho_r$ всегда будет один и тот же для всех полей абсолютно параллельных направлений [4]. Поэтому в данной квазиевклидовой связности (42) формулы (32) будут справедливы для всех её полей абсолютно параллельных направлений. Например, нормируя векторы $\underset{q}{v}^i$, $\underset{q}{\bar{v}}^i$ следующим образом

$$\underset{q}{K} = const, \quad \underset{q}{v} = const,$$

в силу формул (32), получаем, что

$$\underset{q}{\nabla_r} \underset{q}{v^i} = -\frac{1}{2} \underset{q}{\omega_r} \underset{q}{v^i}, \quad \underset{q}{\nabla_r} \underset{q}{\bar{v}^i} = -\frac{1}{2} \underset{q}{\omega_r} \underset{q}{\bar{v}^i},$$

$$\underset{q}{\nabla_r} \underset{q}{v_i} = \frac{1}{2} \underset{q}{\omega_r} \underset{q}{v_i}, \quad \underset{q}{\nabla_r} \underset{q}{\bar{v}_i} = \frac{1}{2} \underset{q}{\omega_r} \underset{q}{\bar{v}_i}. \tag{47}$$

Здесь $\underset{q}{v_i}$, $\underset{q}{\bar{v}_i}$ – нормированные касательные векторы к линиям сети (31). Новые векторы, построенные с помощью этих векторов,

$$\underset{q}{a_i} = \underset{q}{v_i} + c\underset{q}{\bar{v}_i}, \quad \underset{q}{b_i} = \underset{q}{v_i} - c\underset{q}{\bar{v}_i}, \quad c = const \tag{48}$$

так же удовлетворяют соотношениям (47). Рассматривая симметричный тензор

$$\underset{q}{b_{ij}} = \underset{q}{a_{(i}} \underset{q}{b_{j)}}, \tag{49}$$

по формулам (15), (47), (48) и (49) непосредственно проверяем, что

$$\underset{q}{\nabla_r} \underset{q}{b_{ij}} = \underset{q}{\omega_r} \underset{q}{b_{ij}}, \quad \underset{q}{b_{ij}} \underset{q}{f^{ij}} = 0.$$

Следовательно, сеть (49) будет чебышевской сетью в связности (42) и поэтому верно равенство (21).

Теперь, согласно соотношениям (25), (26), (37), (39) строим тензор

$$\underset{q}{P_{ij}} \tag{50}$$

и применяем основную теорему Нордена о существовании нормализованной поверхности в пространстве $P_n$ ([I], стр.225).

Согласно этой теореме, величины

$$\underset{q}{G}{}_{ij}^{k}, \quad \underset{q}{b}{}_{ij}, \quad \underset{q}{\rho}{}_{ij}, \tag{5I}$$

имеющие выражения (42), (49), (50), определяют нормализованную квадрику в пространстве $P_3$. На этой квадрике (49) будет тензором асимптотической сети, а (3I) - её изотропной сетью. Таким образом доказана следующая

<u>Теорема 2.</u> При условии (40) равенства (38), (39), (46) необходимы и достаточны для того, чтобы величины (4I) на квадрике $\underset{q}{S}$ определяли четырехчленную периодическую (замкнутую) последовательность Лапласа конгруэнции прямых (35).

Согласно этой теореме построение конфигурации (35), (36) сведено к удовлетворению величинами (4I) трех дифференциальных уравнений с частными производными инвариантного вида (38), (39) и (46).

3. Теперь допустим, что в последовательности (2) некоторая поверхность $\underset{q}{S}$ - квадрика и на ней

$$\nabla^{k} \underset{q}{\omega}_{k} = 0. \tag{52}$$

Следовательно, согласно формуле (27),

$$\underset{q}{R}_{ij} = \underset{q}{\rho}_{ij} = 0,$$

т.е. на квадрике $\underset{q}{S}$ индуцирована евклидова пара сопряженных связностей и поэтому сеть (3I) является сетью $R$ [2], что непосредственно следует также из равенств (28) ([3], (5.I3))

$$\underset{q}{P}-\underset{q}{\Pi}=\underset{q}{\bar{\Pi}}-\underset{q}{\bar{P}}=0. \tag{53}$$

Как известно ([5], стр.142), в этом случае все фокальные сети (3) будут сетями $R$, что легко проверяется. В самом деле, согласно формулам (19), (29), (52):

$$\underset{q+1}{\omega_i}=\underset{q}{\omega_i}+\partial_i \lg(\underset{q+1}{a}\ \underset{q+1}{b}\ \underset{q}{P}), \quad \underset{q+1}{T_i}=f_i^r[\partial_r \lg(\underset{q}{v}/\underset{q}{P})-\underset{q}{\omega_r}], \tag{54}$$

поэтому, учитывая условие (52), из равенств (16) получаем, что

$$\underset{q+1}{P}=\underset{q+1}{\Pi}, \quad \underset{q+1}{\bar{P}}=\underset{q+1}{\bar{\Pi}},$$

т.е. соседняя поверхность $\underset{q+1}{S}$ также является поверхностью $R$.

Согласно (52) нормирование тензора $\underset{q}{f_{ij}}$ в равенстве (30), можно фиксировать так, что

$$\underset{q}{\omega_i}=0. \tag{55}$$

Теперь, система дифференциальных уравнений (33) заметно упрощается:

$$\underset{q}{\nabla^r}(\underset{q}{\varphi}\,\underset{q}{f_{ir}}-\underset{q}{\psi}\,\underset{q}{e_{ir}})=0$$

и, в силу формул (30), (55), имеем, что

$$\underset{q}{\nabla_r}\psi=\underset{q}{b_r^k}\,\underset{q}{\nabla_k}\varphi. \tag{56}$$

Следовательно,

$$\underset{q}{b}^{ij}\underset{q}{\nabla}_i\underset{q}{\nabla}_j\underset{q}{\varphi}=0. \qquad (57)$$

В выражении (34) принимая во внимание равенство (55), получаем, что

$$\underset{q}{P}/\underset{q}{v}=\underset{q}{\pi}/\underset{q}{v}=-\underset{q}{\varphi},$$

поэтому, в силу (54),

$$\underset{q+1}{T_i}=-f_i^{r}\partial_r \lg \underset{q}{\varphi}, \qquad (58)$$

где функция $\underset{q}{\varphi}$ удовлетворяет уравнению (57) и в общем случае тензор $\underset{q+1}{T_i}$ отличен от нуля.

Как следует из вышеизложенного, нормализованная **квадрика** $\underset{q}{S}$ строится следующим образом: согласно (44) выбирается невырожденный симметричный тензор $\underset{q}{f}_{ij}$ удовлетворяющий уравнению:

$$\underset{q}{f}^{ij}(\partial_j\underset{q}{\Gamma}_{ir}^{r}-\partial_r\underset{q}{\Gamma}_{ji}^{r}-\underset{q}{\Gamma}_{sr}^{r}\underset{q}{\Gamma}_{ji}^{s}+\underset{q}{\Gamma}_{sj}^{r}\underset{q}{\Gamma}_{ir}^{s})=0, \qquad (59)$$

где $\underset{q}{\Gamma}_{ij}^{r}$ имеет строение (45). Поэтому в связности (45) будем иметь, что

$$\underset{q}{\nabla}_r\underset{q}{f}_{ij}=0.$$

Если касательные векторы $\underset{q}{v}^i, \underset{q}{\bar{v}}^i$ сети

$$\underset{q}{f}_{ij}\,du^i du^j=0 \qquad (60)$$

нормированы надлежащим образом, то, в силу (47), можно положить, что

$$\underset{q}{\nabla_r}\,\underset{q}{v_i}=0,\quad \underset{q}{\nabla_r}\,\underset{q}{\bar{v}^i}=0 \tag{61}$$

и поэтому векторы

$$\underset{q}{a_i}=\underset{q}{v_i}+c\,\underset{q}{\bar{v}_i},\quad \underset{q}{b_i}=\underset{q}{v_i}-c\,\underset{q}{\bar{v}_i}\quad (c=const\neq 0)$$

будут удовлетворять уравнению (61), а для симметричного тензора

$$\underset{q}{b_{ij}}=\underset{q}{a_{(i}}\,\underset{q}{b_{j)}} \tag{62}$$

будем иметь, что

$$\underset{q}{\nabla_r}\,\underset{q}{b_{ij}}=0,\quad \underset{q}{b_{ij}}\,\underset{q}{f^{ij}}=0.$$

Далее, согласно соотношениям (56), (57) выбираем функции $\underset{q}{\varphi}$, $\underset{q}{\psi}$ и строим тензор

$$\underset{q}{P_{ij}}=\underset{q}{\varphi}\,\underset{q}{f_{ij}}-\underset{q}{\psi}\,\underset{q}{e_{ij}},\quad (\underset{q}{e_{ij}}=\underset{q}{f_{ir}}\,\underset{q}{b^r_j}),\quad \underset{q}{\varphi}\neq 0. \tag{63}$$

Теперь, в силу известной теоремы существования нормализованной поверхности ([I], стр.225) в пространстве $P_3$ величины $\underset{q}{\Gamma^r_{ij}}$, $\underset{q}{b_{ij}}$, $\underset{q}{P_{ij}}$, имеющие выражения (45), (59), (62), (63) определяют нормализованную квадрику $\underset{q}{S}$, на которой прямые Грина сети (60) индуцируют евклидову пару сопряженных связностей. Таким образом доказана следующая

Теорема 3. Для того чтобы сеть (60) была квадратичной сетью $R$ необходимо и достаточно удовлетворение уравнения (59).

Заметим, что по формуле (58) можно предположить неравенство

$$\underset{q+1}{T_i} \neq 0$$

и, поэтому в этом случае, в силу теоремы 3, в ряде (2) получаются отличные от квадрики новые поверхности $R$.

4. Допустим, что в последовательности (2) некоторые две соседние фокальные поверхности $\underset{q}{S}$, $\underset{q+1}{S}$ - квадрики, т.е.

$$\underset{q}{T_i} = 0, \qquad (64)$$
$$\underset{q+1}{T_i} = 0.$$

В этом случае формулы (I7), (I8) дают, что

$$\partial_i \lg \sqrt[4]{\underset{q}{P}/\underset{q}{\pi}} + f_i^{r}\left[\partial_r \lg\left(\underset{q}{v}/\sqrt{\underset{q}{P}\,\underset{q}{\pi}}\right) - \underset{q}{\omega_r}\right] = 0, \qquad (65)$$

$$\partial_i \lg \sqrt[4]{\underset{q+1}{\bar{P}}/\underset{q+1}{\bar{\pi}}} - f_i^{r}\left[\partial_r \lg\left(\underset{q+1}{v}/\sqrt{\underset{q+1}{\bar{P}}\,\underset{q+1}{\bar{\pi}}}\right) - \underset{q+1}{\omega_r}\right] = 0. \qquad (66)$$

Теперь докажем, что из равенств (64), (65) следует равенство

$$\underset{q+2}{T_i} = 0.$$

В самом деле, согласно (28) имеем, что

$$\underset{q}{\bar{P}} = \underset{q}{\pi}, \quad \underset{q}{\bar{\pi}} = \underset{q}{P}, \quad \underset{q+1}{\bar{\pi}} = \underset{q+1}{P}, \quad \underset{q+1}{\bar{P}} = \underset{q+1}{\pi},$$

поэтому по формуле (I7)

$$\underset{q+2}{T_i} = \underset{q+1}{T_i} + f_i^{\,r}\Big[\partial_r \lg\big(\underset{q+1}{v}\,/\sqrt{\underset{q+1}{\rho}\,\underset{q+1}{\pi}}\big) - \underset{q+1}{\omega_r}\Big] + \partial_i \lg \sqrt[4]{\underset{q+1}{\rho}\,/\,\underset{q+1}{\pi}} =$$

$$= f_i^{\,r}\Big[\partial_r \lg\big(\underset{q+1}{v}\,/\sqrt{\underset{q+1}{\pi}\,\underset{q+1}{\bar{\rho}}}\big) - \underset{q+1}{\omega_r}\Big] + \partial_i \lg \sqrt[4]{\underset{q+1}{\pi}\,/\,\underset{q+1}{\bar{\rho}}}$$

и полученное выражение, в силу (66), равняется нулю. Таким образом, в этом случае все поверхности (2) будут квадриками и справедлива следующая

Теорема 4. Равенства (64), (65) необходимы и достаточны для того, чтобы необрывающаяся последовательность Лапласа фокальных поверхностей (2) состояла только из квадрик.

Как известно, всякая невырождённая сопряжённая сеть на квадрике называется квадратичной сетью.

Определение. Квадратичную сеть назовем вполне квадратичной, если все её преобразования Лапласа – квадратичные сети.

В этих терминах теорему 4 можно сформулировать следующим образом: если сеть (3) при некотором $n = q$ – квадратичная сеть, то условие (65) необходимо и достаточно для того, чтобы она была вполне квадратичной сетью.

Вполне квадратичную сеть можно конструировать следующим образом. Пусть $\underset{q}{f_{ij}}$ – некоторый невырожденный симметричный тензор, а $\underset{q}{\omega_i}$ – некоторый вектор. С помощью величин

$$\underset{q}{f_{ij}},\ \underset{q}{\omega_i} \tag{67}$$

образуем вейлевую связность (42) $\underset{q}{G^k_{ij}}$ и потребуем, чтобы она была квазиевклидовой. Для этого необходимо и достаточно удовлетворение условия (46). Затем образуем тензор (49) $\underset{q}{b}_{ij}$ и рассмотрим тензор (26)

$$\underset{q}{p}_{ij} = \underset{q}{\varphi}\,\underset{q}{f}_{ij} - \underset{q}{\psi}\,\underset{q}{e}_{ij} + l\,\underset{q}{\varepsilon}_{ij},$$

где $\underset{q}{\omega}_i, \underset{q}{f}_{ij}, \underset{q}{\varphi}$ и $\underset{q}{\psi}$ удовлетворяют системе (33), (65).

Очевидно, величины $\underset{q}{G}^k_{ij}, \underset{q}{b}_{ij}, \underset{q}{p}_{ij}$ в пространстве $P_3$ определяют некоторую нормализованную квадрику $\underset{q}{S}$, на которой сеть

$$\underset{q}{f}_{ij}\,du^i du^j = 0 \tag{68}$$

будет вполне квадратичной сетью.

Таким образом, для конструирования вполне квадратичной сети искомые функции $\underset{q}{\omega}_i, \underset{q}{f}_{ij}, \underset{q}{\varphi}, \underset{q}{\psi}$ должны удовлетворять системе (33), (46), (65).

5. Учитывая результаты предыдущего пункта можно сформулировать условие, когда четырехчленная замкнутая последовательность Лапласа (36) состоит только из квадрик. Для этого, очевидно, нужно, чтобы в теореме 2 величины (41) дополнительно удовлетворяли системе (65). Следовательно, конструирование вполне квадратичной сети (68), образующей четырехчленную замкнутую последовательность Лапласа, требует, чтобы пять функции (67) удовлетворяли пять уравнений (38), (39), (46), (65).

Наконец рассмотрим случай, когда для четырехчленной замкнутой последовательности (36) вместо неравенства (40) имеем равенство

$$\nabla^k_q \omega_k = 0.$$

Согласно результатам пункта 3 квадратичная сеть (3I) будет сетью $R$ и при надлежащем нормировании её тензора

$$\omega_{\,q\,i} = 0.$$

В силу равенств (37), (33), (58), (63), теперь получаем, что

$$\underset{q}{\varphi} = const \neq 0, \quad \underset{q+1}{T_i} = 0, \tag{69}$$

$$\underset{q}{p_{ij}} = const \underset{q}{f_{ij}}, \quad const \neq 0.$$

Поэтому сеть (3I) будет вполне квадратичной, т.е. все четыре поверхности последовательности (36) будут квадрики. Таким образом, квадратичная сеть $R$, дающая четырехчленную замкнутую последовательность квадратичных сетей $R$, строится следующим образом. Рассматриваются величины

$$\underset{q}{\Gamma^k_{ij}}, \ \underset{q}{b_{ij}}, \ \underset{q}{p_{ij}},$$

имеющие выражения (45), (59), (62), (69). В пространстве $P_3$ они определяют некоторую квадрику $\underset{q}{S}$, на которой сеть (3I) будет вполне квадратичной сетью $R$. Преобразование Лапласа этой сети даст четырехчленную замкнутую последовательность. В этой конструкции невырожденный симметричный тензор $\underset{q}{f_{ij}}$ удовлетворяет единственному уравнению (59).

Поступила 10.XI.1977

Тбилисский
математический институт им.
А.М.Размадзе

## ЛИТЕРАТУРА

1. А.П.Норден. Пространства аффинной связности, изд. второе, М., 1976.
2. А.П.Норден. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 7, 1949, 31-64.
3. Г.Н.Тевзадзе, Труды Тбилисского математического института им. А.М.Размадзе, т. LIУ, 1976.
4. Г.Н.Тевзадзе. Известия высших учебных заведений, математика, № 4 (17), 1960, 178-186.
5. С.П.Фиников. Проективно-дифференциальная геометрия, М., 1937.
6. J.A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin, 1924.

გ.თევზაძე

## კვადრატული ბადეების ინვარიანტული ნიშნის შესახებ

### რეზიუმე

სამგანზომილებიან პროექციულ სივრცეში ტენზორული მეთოდით შეისწავლება ზედაპირთა ლაპლასის მიმდევრობა, რომელსაც ერთი ამ ზედაპირთაგანი მეორე რიგისაა (ე.ი. კვადრიკა არის). ყველა შედეგი წარმოდგენილია მრუდწირულ კოორდინატთა ზოგად სისტემაში. კერძოდ, მიღებულია ტენზორული ნიშნები, რომლებიც ახასიათებს ლაპლასის ოთხწევრიან ჩაკეტილ მიმდევრობას და ისეთ მიმდევრობას, რომელიც მხოლოდ კვადრიკებისაგან შედგება.

G.Tevzadze



## ON THE INVARIANT CHARACTERISTIC OF QUADRATIC NETS

Summary

The Laplace sequence of spaces in threedimensional projective space is studied by the tensor method when this sequence contains one second order surface (the quadric). All the results are presented in a system of common curvilinear coordinates. In particular, tensor characteristics are obtained, describing the four-term closed Laplace sequence and the sequence consisting of quadrics only.

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ

ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

197, 1978

УДК 517.944

# О РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

П.К.Зерагия

I. На плоскости $Oxy$ рассмотрим прямоугольник $\Pi=\{x,y;\ 0\leq x\leq a,\ 0\leq y\leq b\}$ и лежащую в нем линию $x=\lambda(y)$, где $\lambda(y)$ - непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям: $\lambda(0)=0,\ \lambda'(y)\neq 0$ при $0\leq y\leq b$. Часть прямоугольника $\Pi$, определенную неравенствами $0\leq y\leq b$, $\lambda(y)\leq x\leq a$ обозначим через $G$.

Пусть задано нелинейное дифференциальное уравнение гиперболического типа

$$u_{xy}=f(x,y,u,p,q), \tag{I}$$

где

$$p=\frac{\partial u}{\partial x}=u_x,\quad q=\frac{\partial u}{\partial y}=u_y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=u_{xy}.$$

Для уравнения (I) граничные задачи Коши и Гурса по методу Чаплыгина были исследованы многими авторами (см., например [I - 5] ).

В настоящей статье, с применением метода линеаризации и последовательных приближений, приводится решение следующей смешанной граничной задачи.

Найти регулярное решение (т.е. непрерывное и имеющее непрерывные частные производные первого порядка и непрерывную вторую смешанную производную) $u(x,y)$, удовлетворяющее внутри области $G$ уравнению (I) и следующим граничным условиям на характеристике $y=0$ и на линии $x=\lambda(y)$:

$$u(x,y)\Big|_{y=0}=0, \quad u(x,y)\Big|_{x=\lambda(y)}=0. \tag{2}$$

Легко показать, что выбор нулевых граничных условий (2) не ограничивает общности рассматриваемой граничной задачи.

В самом деле, граничные условия более общего вида

$$u(x,y)\Big|_{y=0}=\varphi(x), \quad u(x,y)\Big|_{x=\lambda(y)}=\psi(y), \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ - заданные функции, $\varphi(0)=\psi(0)$, подстановкой $z(x,y)=u(x,y)-\varphi(x)-\psi(y)+\varphi[\lambda(y)]$ можно свести к граничным условиям (2).

2. Пусть функция $f(x,y,u,p,q)$ ограничена и непрерывна относительно $x,y,u,p,q$ в области $\Omega=\{(x,y)\in G, -\infty<u,p,q<\infty\}$ и в той же области имеет ограниченные и непрерывные частные производные первого порядка относительно $u,p,q$.

Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка внутри области $G$.

Прямые, параллельные осям координат, проведенные через точку $M$, встречают характеристику $y=0$ и линию $x=\lambda(y)$, соответственно, в точках $P$ и $N$. Опустим из точки $N$ на ось $y=0$ перпендикуляр $NQ$ и обозначим область прямоугольника $PMNQ$ через $\sigma_{xy}$.

Тогда, легко видеть, что решение граничной задачи (I), (2) эквивалентно решению следующего нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$u(x,y)=\iint\limits_{\sigma_{xy}} f(\xi,\eta,u,p,q)\,d\xi\,d\eta, \tag{4}$$

или

$$u(x,y)=\int_{\lambda(y)}^{x} d\xi\int_0^y f(\xi,\eta,u,p,q)\,d\eta. \tag{5}$$

Отсюда следует, что

$$p(x,y)=\int_0^y f(x,\eta,u,p,q)\,d\eta, \tag{6}$$

$$q(x,y)=\int_{\lambda(y)}^{x} f(\xi,y,u,p,q)\,d\xi-\lambda'(y)\int_0^y f(\lambda(y),\eta,\tilde{u},\tilde{p},\tilde{q})\,d\eta. \tag{7}$$

3. Для решения систем (5), (6), (7) применим метод последовательных приближений Пикара. Допустим $u_0=p_0=q_0=0$ и построим последовательности функций $\{u_n\}, \{p_n\}, \{q_n\}$ с помощью рекурентных формул:

$$u_{n+1}(x,y)=\int_{\lambda(y)}^{x} d\xi\int_0^y f(\xi,\eta,u_n,p_n,q_n)\,d\eta, \tag{8}$$

$$p_{n+1}(x,y)=\int_0^y f(x,\eta,u_n,p_n,q_n)\,d\eta, \tag{9}$$

$$q_{n+1}(x,y)=\int_{\lambda(y)}^x f(\xi,y,u_n,p_n,q_n)\,d\xi-\lambda'(y)\int_0^y f(\lambda(y),\eta,\tilde u_n,\tilde p_n,\tilde q_n)\,d\eta \tag{10}$$

$$n=1,2,3,\ldots$$

Рассмотрим разность:

$$u_{n+1}-u_n=\int_{\lambda(y)}^x d\xi\int_0^y\{f(\xi,\eta,u_n,p_n,q_n)-f(\xi,\eta,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})\}\,d\eta. \tag{11}$$

Из (11), на основании формулы конечных приращений, имеем

$$u_{n+1}-u_n=\int_{\lambda(y)}^x d\xi\int_0^y\{(u_n-u_{n-1})f_u^*+(p_n-p_{n-1})f_p^*+(q_n-q_{n-1})f_q^*\}\,d\eta, \tag{12}$$

где

$$f_u^*=f_u'(\xi,\eta,u_{n-1}+\theta(u_n-u_{n-1}),\ p_{n-1}+\theta(p_n-p_{n-1}),\ q_{n-1}+\theta(q_n-q_{n-1})),$$

$$0<\theta<1;$$

аналогичные выражения имеем для $f_p^*$, $f_q^*$.

Положим

$$\max\{\max_{\Omega}|f_u'|,\ \max_{\Omega}|f_p'|,\ \max_{\Omega}|f_q'|\}=m, \tag{13}$$

$$\max_{[0,b]}|\lambda'(y)|=k,\quad 0<l\le\min(a,b),\quad Q_l=\{x,y;\,0\le x\le l,\,0\le y\le l\},$$

$$G_l=G\cap Q_l,\quad M_n=\max_{Q_l}\{|u_n-u_{n-1}|+|p_n-p_{n-1}|+|q_n-q_{n-1}|\}.$$

Тогда из (I2), согласно (I3), имеем

$$|u_{n+1}-u_n|\le m\int_0^x d\xi\int_0^y\{|u_n-u_{n-1}|+|p_{n+1}-p_n|+|q_{n+1}-q_n|\}d\eta.$$

Отсюда, в силу (I3), получим

$$|u_{n+1}-u_n|\le ml^2M_n. \tag{I4}$$

Аналогично, из (9) и (I0), в силу (I3), будем иметь:

$$|p_{n+1}-p_n|\le mlM_n, \tag{I5}$$

$$|q_{n+1}-q_n|\le mlM_n+mklM_n=ml(k+1)M_n. \tag{I6}$$

Из неравенств (I4), (I5) и (I6) получим

$$M_{n+1}\le ml(k+l+2)M_n,$$

или

$$M_{n+1}\le \alpha_0^n M_1, \tag{I7}$$

где $\alpha_0=ml(k+l+2)$.

Таким образом, если $\alpha_0<1$, то из (I7) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ сходится. Тем самым доказана равномерная сходимость последовательностей функций $\{u_n\},\{p_n\},\{q_n\}$ в области $G_l$.

Предельная функция $\lim_{n\to\infty}u_n(x,y)=u(x,y)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$u(x,y)=\iint_{G_{xy}}f(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)\,d\xi d\eta.$$

Отсюда следует, что $u(x,y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и граничным условиям (2). Кроме того, легко убедиться в том, что полученное решение регулярно и единственно.

Таким образом, мы доказали, что для достаточно малого значения $l$ уравнение (1) при граничных условиях (2) имеет единственное регулярное решение в области $G_l$.

4. Теперь построим решения системы (5), (6), (7) другим методом – методом линеаризации и последовательных приближений. Этот метод позволяет получить решение нелинейного уравнения (1) с помощью решения определенной последовательности линейных уравнений.

Предположим, что функция $f(x,y,u,p,q)$, кроме указанных выше условий, дополнительно удовлетворяет следующему условию: в области $\Omega$ она имеет ограниченные и непрерывные частные производные второго порядка относительно $u, p, q$.

Введем обозначение

$$R=\max\{m,\max_{\Omega}|f''_{uu}|,\max_{\Omega}|f''_{pp}|,\max_{\Omega}|f''_{qq}|,\max_{\Omega}|f''_{up}|,\max_{\Omega}|f''_{uq}|\max_{\Omega}|f''_{pq}|\}. \tag{18}$$

Пусть $u_0, p_0, q_0$ – некоторые начальные приближения. Построим последовательности функций $\{u_n\}, \{p_n\}, \{q_n\}$ с помощью рекурентных формул:

$$u_n(xy)=\int_{\lambda(y)}^{x}d\xi\int_0^y\{f(\xi,\eta,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})+f'_u(\xi,\eta,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})(u_n-u_{n-1})+$$

$$+f'_p(\xi,\eta,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})(p_n-p_{n-1})+f'_q(\xi,\eta,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})(q_n-q_{n-1})\}d\eta; \tag{8$'_n$}$$

$$p_n(x,y)=\int_0^y \{f(x,\eta,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})+f'_u(x,\eta,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})(u_n-u_{n-1})+$$

$$+f'_p(x,\eta,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})(p_n-p_{n-1})+f'_q(x,\eta,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})(q_n-q_{n-1})\}d\eta; \qquad (9'_n)$$

$$q_n(x,y)=\int_{\lambda(y)}^x \{f(\xi,y,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})+f'_u(\xi,y,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})(u_n-u_{n-1})+$$

$$+f'_p(\xi,y,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})(p_n-p_{n-1})+f'_q(\xi,y,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})(q_n-q_{n-1})\}d\xi- \qquad (10'_n)$$

$$-\lambda'(y)\int_0^y \{f(\lambda(y),\eta,\tilde{u}_{n-1},\tilde{p}_{n-1},\tilde{q}_{n-1})+f'_u(\lambda(y),\eta,\tilde{u}_{n-1},\tilde{p}_{n-1},\tilde{q}_{n-1})(u_n-u_{n-1})+$$

$$+f'_p(\lambda(y),\eta,\tilde{u}_{n-1},\tilde{p}_{n-1},\tilde{q}_{n-1})(p_n-p_{n-1})+f'_q(\lambda(y),\eta,\tilde{u}_{n-1},\tilde{p}_{n-1},\tilde{q}_{n-1})(q_n-q_{n-1})\}d\eta.$$

Из $(8_n)$, $(9_n)$, $(10_n)$ легко следует, что функции являются непрерывными функциями. Рассмотрим разность

$$u_{n+1}-u_n=\int_{\lambda(y)}^x d\xi\int_0^y \{f(\xi,\eta,u_n,p_n,q_n)-f(\xi,\eta,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})-$$

$$-f'_u(\xi,\eta,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})(u_n-u_{n-1})-f'_p(\xi,\eta,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})(p_n-p_{n-1})-$$

$$-f'_q(\xi,\eta,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})(q_n-q_{n-1})+f'_u(\xi,\eta,u_n,p_n,q_n)(u_{n+1}-u_n)+ \qquad (11'_n)$$

$$+f'_p(\xi,\eta,u_n,p_n,q_n)(p_{n+1}-p_n)+f'_q(\xi,\eta,u_n,p_n,q_n)(q_{n+1}-q_n)\}d\eta.$$

Если в правой части $(11'_n)$ к разности $f(\xi,\eta,u_n,p_n,q_n)-$ $-f(\xi,\eta,u_{n-1},p_{n-1},q_{n-1})$ применим формулу Тейлора, получим

$$u_{n+1}-u_n=\int_{\lambda(y)}^x d\xi\int_0^y \{\frac{1}{2}[f''_{uu}(\xi,\eta,\alpha_{1n},\alpha_{2n},\alpha_{3n})(u_n-u_{n-1})^2+f''_{pp}(\xi,\eta,\alpha'_{1n},\alpha'_{2n},\alpha'_{3n})(p_n-p_{n-1})^2+$$

$$+f''_{qq}(\xi,\eta,\alpha''_{1n},\alpha''_{2n},\alpha''_{3n})(q_n-q_{n-1})^2+2f''_{up}(\xi,\eta,\alpha'''_{1n},\alpha'''_{2n},\alpha'''_{3n})(u_n-u_{n-1})(p_n-p_{n-1})+$$

$$+2f''_{uq}(\xi,\eta,\alpha^{IV}_{1n},\alpha^{IV}_{2n},\alpha^{IV}_{3n})(u_n-u_{n-1})(q_n-q_{n-1})+2f''_{pq}(\xi,\eta,\alpha^{V}_{1n},\alpha^{V}_{2n},\alpha^{V}_{3n})(p_n-p_{n-1})(q_n-q_{n-1})]+$$

$$+f'_u(\xi,\eta,u_n,p_n,q_n)(u_{n+1}-u_n)+f'_p(\xi,\eta,u_n,p_n,q_n)(p_{n+1}-p_n)+ \qquad (12'_n)$$

$$+f'_q(\xi,\eta,u_n,p_n,q_n)(q_{n+1}-q_n)\}d\eta,$$

где $\alpha_{1n},\alpha_{2n},\alpha_{3n}$ и т.д. - соответствующие средние значения.

Аналогичные формулы будем иметь для разностей $p_{n+1}-p_n$ и $q_{n+1}-q_n$.

Из $(12'_n)$, согласно (13) и (18), получим

$$|u_{n+1}-u_n|\le\int_0^x d\xi\int_0^y\{\frac{R}{2}[(u_n-u_{n-1})^2+(p_n+p_{n-1})^2+(q_n-q_{n-1})^2+$$

$$+2|u_n-u_{n-1}||p_n-p_{n-1}|+2|u_n-u_{n-1}||q_n-q_{n-1}|+2|p_n-p_{n-1}||q_n-q_{n-1}|]+$$

$$+R[|u_{n+1}-u_n|+|p_{n+1}-p_n|+|q_{n+1}-q_n|]\}d\eta,$$

или

$$|u_{n+1}-u_n|\le\int_0^x d\xi\int_0^y\{\frac{R}{2}[|u_n-u_{n-1}|+|p_n-p_{n-1}|+|q_n-q_{n-1}|]^2+$$

$$+R[|u_{n+1}-u_n|+|p_{n+1}-p_n|+|q_{n+1}-q_n|]\}d\eta.$$

Отсюда, в силу (13), следует, что

$$|u_{n+1}-u_n|\le\left(\frac{R}{2}M_n^2+RM_{n+1}\right)l^2. \qquad (19)$$

Аналогичные оценки получим для разностей $p_{n+1}-p_n$ и $q_{n+1}-q_n$:

$$|p_{n+1}-p_n|\le\left(\frac{R}{2}M_n^2+RM_{n+1}\right)l, \qquad (20)$$

$$|q_{n+1}-q_n|\le\left(\frac{R}{2}M_n^2+RM_{n+1}\right)+K\left(\frac{R}{2}M_n^2+RM_{n+1}\right)l. \qquad (21)$$

Из (I9), (20) и (2I) имеем

$$M_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2} M_n^2 + M_{n+1}\right) R\ell(k+\ell+2).$$

Отсюда, при $R\ell(k+\ell+2) < 1$, получим

$$M_{n+1} \leq \alpha M_n^2, \tag{22}$$

где

$$\alpha = \frac{R\ell(k+\ell+2)}{2[1-R\ell(k+\ell+2)]}.$$

Из (22) легко следует, что

$$M_{n+1} \leq \frac{1}{\alpha} (\alpha N_1)^{2^n}, \tag{23}$$

где

$$N_1 = \sup_{\ell>0} M_1(\ell),$$

$$M_1(\ell) = \max_{G_\ell} \{|u_1-u_0|+|p_1-p_0|+|q_1-q_0|\}.$$

Теперь $\ell$ подчиним неравенству

$$R\ell(k+\ell+2) < \min\left\{1, \frac{2}{N_1+2}\right\}.$$

Тогда легко видеть, что $\alpha N_1 < 1$ и, в силу (23), ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ сходится. Следовательно, функциональные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1}-u_n), \quad \sum_{n=0}^{\infty} (p_{n+1}-p_n), \quad \sum_{n=0}^{\infty} (q_{n+1}-q_n)$$

сходятся равномерно в области $G_\ell$. Тем самым доказана равномерная сходимость последовательностей функций $\{u_n\}$, $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ в области $G_\ell$. Легко видеть, что предельная функция $\lim u_n(x,y) = u(x,y)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x,y) = \iint_{G_{xy}} f(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Отсюда следует, что функция $u(x,y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (I) и граничным условиям (2). Легко видеть также, что полученное решение является единственным регулярным решением задачи (I), (2).

Таким образом, методом линеаризации и последовательных приближений доказывается существование единственного решения граничной задачи (I), (2) для малого значения $\ell$, со степенной быстротой сходимости процесса (23). Последняя, очевидно, является гораздо лучшей, чем быстрота сходимости по геометрической прогрессии (I7), полученной одним лишь методом последовательных приближений.

Поступила I0.XI.I977

Кафедра
общей математики

ЛИТЕРАТУРА

I. Г.А.Артемов, ДАН СССР, I955, т.I02, № 2, I07-200.
2. Г.А.Артемов, ДАН СССР, I957, т.II2, № 5, 79I-792.
3. Г.П.Кухта, Научные доклады высшей школы, I959, № 2.
4. П.К.Зерагия. Труды ТГУ, т.II0, I965, I45-I54, I56-I63.
5. Э. Гурса. Курс математического анализа, т.Ш, ч. I, I933.

პ.ზერაგია

## ერთი არაწრფივი ჰიპერბოლური ტიპის დიფერენციალური განტოლების შერეული სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის შესახებ

რეზიუმე

შრომაში მოცემულია ჰიპერბოლური ტიპის არაწრფივი (1) დიფერენციალური განტოლების შერეული სასაზღვრო (2) ამოცანის ამოხსნა.

P.Zeragia

## ON THE SOLUTION OF THE MIXED BOUNDARY PROBLEM OF ONE NON-LINEAR HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATION

Summary

The solution of the mixed boundary problem (2) of a non-linear hyperbolic differential equation (1) is given.

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

197, 1978

УДК 538.4

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАРМАНА-ПОЛЬГАУЗЕНА ДЛЯ РАСЧЕТА ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬЮ

Дж.В.Шарикадзе

Как нам известно, до настоящего времени почти во всех исследованиях метод Кармана-Польгаузена /I.2/ применялся лишь для расчета пограничного слоя с постоянной электропроводностью.

В настоящей работе выведены интегральные соотношения для нестационарного течения вязкой слабопроводящей несжимаемой жидкости $Re_m \ll 1$ в присутствии внешнего однородного магнитного поля с учетом переменности коэффициента электропроводности $\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right)$, и для исследования стационарного пограничного слоя рассмотрены профили скоростей в виде полинома 6-ой степени, удовлетворяющие дополнительным граничным условиям.

Для получения искомых соотношений уравнение пограничного слоя слабопроводящей жидкости, находящейся в магнитном поле,

при $\vec{E} = 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u_\infty}{\partial t}+u_\infty\frac{\partial u_\infty}{\partial x}+$$

$$+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+m^2\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)(\alpha u_\infty-\beta u), \tag{1}$$

умножим на $u^k$ и проинтегрируем обе части по $y$ в пределах от $0$ до $\delta(x,t)$. Здесь $\delta(x,t)$ – толщина пограничного слоя, а коэффициенты $\alpha$ и $\beta$ введены для объединения случаев постоянной и переменной проводимости.

$$\alpha=1,\ \beta=0 \quad \text{при} \quad \sigma=\sigma_0=const,$$

$$\alpha=0,\ \beta=1 \quad \text{при} \quad \sigma=\sigma_0\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right), \tag{2}$$

а

$$m^2=\frac{\sigma_0 B^2}{\rho}. \tag{3}$$

Принимая во внимание, что распределение внешней скорости $u_\infty(x,t)$ не зависит от $y$ и что составляющие скорости $u$ и $v$ удовлетворяют граничным условиям

$$u=0,\ v=0 \quad \text{при} \quad y=0,$$

$$u=u_\infty(x,t) \quad \text{при} \quad y=\delta(x,t), \tag{4}$$

после простых преобразований получим

$$\frac{1}{k+1}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta u^{k+1}dy-\frac{u_\infty^{k+1}}{k+1}\frac{\partial\delta}{\partial t}-\frac{u_\infty^{k+1}}{k+1}\int_0^\delta u\,dy+\frac{1}{k+1}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u^{k+2}dy=$$

$$=\left[\frac{\partial u_\infty}{\partial t}+u_\infty\frac{\partial u_\infty}{\partial x}+\alpha m^2 u_\infty\right]\int_0^\delta u^k dy-(\alpha+\beta)m^2\int_0^\delta u^{k+1}dy+ \tag{5}$$

$$+\beta\frac{m^2}{u_\infty}\int_0^\delta u^{k+2}dy-\nu k\int_0^\delta u^{k-1}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy-\nu\left(u^k\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

Это выражение является обобщением интегрального соотношения на случай слабопроводящей жидкости в присутствии магнитного поля, установленного В.Голубевым для пограничного слоя обычной гидродинамики /3,4/.

Придавая числу $K$ значения 0,I,2 и т.д., можно получить ряд независимых между собой соотношений. При этом очевидно, что для любого $K$, кроме $K=0$, последнее слагаемое в (5) будет равно нулю, так как при $y=0$ скорость $u\equiv 0$. Если, в частности, положить в (5) $K=0$, придем к соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta u\,dy-u_\infty\frac{\partial\delta}{\partial t}-u_\infty\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u\,dy+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u^2dy= \tag{6}$$

$$=\left[\frac{\partial u_\infty}{\partial t}+u_\infty\frac{\partial u_\infty}{\partial x}+\alpha m^2u_\infty\right]\delta-(\alpha+\beta)m^2\int_0^\delta u\,dy+$$

$$+\beta\frac{m^2}{u_\infty}\int_0^\delta u^2dy-\nu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

Если движение стационарно, то из (6) имеем

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2dy-u_\infty\frac{d}{dx}\int_0^\delta u\,dy=\left[u_\infty\frac{du_\infty}{dx}+\alpha m^2u_\infty\right]\delta- \tag{7}$$

$$-(\alpha+\beta)m^2\int_0^\delta u\,dy+\beta\frac{m^2}{u_\infty}\int_0^\delta u^2dy-\nu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}.$$

При $m=0$ оно дает соотношение, полученное Карманом для обычной гидродинамики.

При $K=1$ из соотношения (5) приходим к:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta \frac{u}{2}dy+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \frac{u^3}{2}dy-\frac{u_\infty^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u\,dy-$$

$$-\frac{u_\infty^2}{2}\frac{\partial\delta}{\partial t}=\left[\frac{\partial u_\infty}{\partial t}+u_\infty\frac{\partial u_\infty}{\partial x}+\alpha m^2 u_\infty\right]\int_0^\delta u\,dy- \tag{8}$$

$$-(\alpha+\beta)m^2\int_0^\delta u^2dy+\beta\frac{m^2}{u_\infty}\int_0^\delta u^3dy-\nu\int_0^\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2dy,$$

которое при $m=0$ совпадает с соотношением, полученным Л.Лейбензоном и выражающим соответствующую теорему об изменении энергии.

Для оценки толщины пограничного слоя, как и в обычной гидродинамике, введем толщину вытеснения

$$\delta^*=\int_0^\infty\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)dy \tag{9}$$

и толщину потери импульса

$$\delta^{**}=\int_0^\infty\frac{u}{u_\infty}\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right)dy. \tag{10}$$

Тогда из (6), прибавляя к обеим частям выражения

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\delta u_\infty dy=-\frac{\partial}{\partial t}u_\infty\delta,\quad -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u_\infty dy=-\frac{\partial}{\partial x}u_\infty^2\delta,$$

$$u_\infty\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u_\infty dy=u_\infty\frac{\partial}{\partial x}(u_\infty\delta),\quad -m^2(\alpha+\beta)\int_0^\delta u_\infty dy=-m^2(\alpha+\beta)\delta u_\infty,$$

$$-\beta\frac{m^2}{u_\infty}\int_0^\delta u_\infty^2dy=-\beta m^2u_\infty\delta, \tag{11}$$

после простых преобразований будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_\infty \delta^*)+\frac{\partial}{\partial x}(u_\infty^2 \delta^{**})+u_\infty \delta^* \frac{\partial u}{\partial x}+m^2 u_\infty (\alpha\delta^*-\beta\delta^{**})=\frac{\tau}{\rho}. \tag{12}$$

Это выражение при $m=0$ переходит в соотношение, которое было получено Л.Прандтлем для обычной гидродинамики. Здесь $\tau=\mu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$ – напряжение трения на поверхности обтекаемого контура.

В стационарном случае (12) дает:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx}+(2\delta^{**}+\delta^*)\frac{d\ln u_\infty}{dx}+\frac{m^2}{u_\infty}(\alpha\delta^*-\beta\delta^{**})=\frac{\tau}{\rho u_\infty^2}. \tag{13}$$

Соотношениями (8), (12), (13) можно пользоваться как для асимптотического слоя, так и для слоя конечной толщины. В последнем случае верхним пределом интегралов, входящих в (9), (10), будет $\delta(x,t)$.

Вводя толщину потери энергии

$$\delta^{***}=\int_0^\infty \frac{u}{u_\infty}\left(1-\frac{u^2}{u_\infty^2}\right)dy, \tag{14}$$

из (8) будем иметь

$$\frac{\partial \delta^*}{\partial t}+\frac{1}{u_\infty^2}\frac{\partial u_\infty^2\delta^{**}}{\partial t}+\frac{1}{u_\infty^2}\frac{\partial (u_\infty^3\delta^{***})}{\partial x}+$$

$$+2m^2(\delta^{**}-\beta\delta^{***})=\frac{2\nu}{u_\infty^2}\int_0^\infty\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2dy. \tag{15}$$

Наконец выпишем уравнение нестационарного температурного пограничного слоя переменно проводящей несжимаемой вязкой жидкости с учетом вязкой и джоулевой диссипации

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{j^2}{\sigma} \tag{16}$$

и вычтем из этого выражения

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T_\infty}{\partial t}+u_\infty\frac{\partial T_\infty}{\partial x}\right)=\frac{j_\infty^2}{\sigma_\infty},$$

где $\frac{j_\infty^2}{\sigma_\infty}$ – джоулево тепло на бесконечности.

Проинтегрировав полученную разность по $y$ в пределах от $0$ до $\delta_T$, где $\delta_T$ – толщина температурного пограничного слоя, после простых преобразований получим:

$$\int_0^{\delta_T}\frac{\partial}{\partial t}(T-T_\infty)dy+\int_0^{\delta_T}\frac{\partial}{\partial x}\left[u(T-T_\infty)\right]dy+\frac{\partial T_\infty}{\partial x}\int_0^{\delta_T}(u-u_\infty)dy=$$

$$=-\frac{1}{P_r}\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}+\frac{\nu}{c_p}\int_0^{\delta_T}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2dy+\frac{1}{\rho c_p}\int_0^{\delta_T}\left(\frac{j^2}{\sigma}-\frac{j_\infty^2}{\sigma_\infty}\right)dy, \tag{17}$$

где $P_r=\frac{\lambda}{\rho c_p}$ – число Прандтля.

Рассмотрим приложение этого метода к случаю стационарного обтекания пластины. Обозначим скорость набегающего на пластину потока $u_\infty=u_0=const$, а толщину пограничного слоя $\delta(x)$, где $\delta(x)$ – подлежащая определению функция. Предположим, что профиль скоростей в пограничном слое может быть представлен многочленом

$$u = u_0 \sum_{k=0}^{6} A_k y^k, \tag{I8}$$

где $A_k(x)$ подбираются так, чтобы удовлетворялись соответствующие граничные условия. Эти условия, как и в обычной гидродинамике, получаются из уравнения (I) и имеют следующий вид:

$$\text{при } y=0 \quad 1.\ u=0, \quad 3.\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\alpha \frac{m^2}{\nu} u_0, \quad 5.\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{m^2}{\nu}\frac{\partial u}{\partial y},$$

(I9)

$$\text{при } y=\delta(x) \quad 2.\ u=u_0, \quad 4.\ \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad 6.\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 7.\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0.$$

Обозначим $\frac{y}{\delta} = \eta, \quad \frac{m^2 \delta^2}{\nu} = \lambda, \quad \frac{u}{u_\infty} = \varphi(\eta).$

Удовлетворяя по разной последовательности эти условия, из (I8) получим I2 разных профилей скорости

1. $\varphi_{1,2} = \eta,$

2. $\varphi_{1,2,3} = \left(1 + \frac{\alpha\lambda}{2}\right)\eta - \frac{\alpha\lambda\eta^2}{2},$

3. $\varphi_{1,2,4} = 2\eta - \eta^2,$

4. $\varphi_{1,2,3,4} = \left(\frac{3}{2} + \frac{\alpha\lambda}{4}\right)\eta - \frac{\alpha\lambda}{2}\eta^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha\lambda}{4}\right)\eta^3,$

5. $\varphi_{1,2,4,6} = 3\eta - 3\eta^2 + \eta^3,$

6. $\varphi_{1,2,3,5} = 3\dfrac{2+\alpha\lambda}{6+\lambda}\eta - \dfrac{\alpha\lambda}{2}\eta^2 + \dfrac{\lambda}{2}\,\dfrac{2+\alpha\lambda}{6+\lambda}\eta^3,$

7. $\varphi_{1,2,3,4,5} = 6\dfrac{4+\alpha\lambda}{18+\lambda}\eta - \dfrac{\alpha\lambda}{2}\eta^2 + \lambda\dfrac{4+\alpha\lambda}{18+\lambda}\eta^3 - \dfrac{12-6(\alpha-1)\lambda+\alpha\lambda^2}{2(18+\lambda)}\eta^4,$

8. $\varphi_{1,2,3,4,6} = \left(2+\dfrac{\alpha\lambda}{6}\right)\eta - \dfrac{\alpha\lambda}{2}\eta^2 - \left(2-\dfrac{\alpha\lambda}{2}\right)\eta^3 + \left(1-\dfrac{\alpha\lambda}{6}\right)\eta^4,$

9. $\varphi_{1,2,4,6,7} = 4\eta - 6\eta^2 + 4\eta^3 - \eta^4,$

10. $$\varphi_{1,2,3,4,5,6} = 3\frac{20+3\alpha\lambda}{36+\lambda}\eta - \frac{\alpha\lambda}{2}\eta^2 + \frac{\lambda}{2}\,\frac{20+3\alpha\lambda}{36+\lambda}\eta^3 -$$

$$- \frac{120-6(6\alpha-5)\lambda+3\alpha\lambda^2}{2(36+\lambda)}\eta^4 + \frac{72-6(3\alpha-2)\lambda+\alpha\lambda^2}{2(36+\lambda)}\eta^5,$$

11. $$\varphi_{1,2,3,4,6,7} = \left(\frac{5}{2}+\frac{\alpha\lambda}{8}\right)\eta - \frac{\alpha\lambda}{2}\eta^2 - \left(5-\frac{3}{4}\alpha\lambda\right)\eta^3 +$$

$$+ \left(5-\frac{\alpha\lambda}{2}\right)\eta^4 - \left(\frac{3}{2}-\frac{\alpha\lambda}{8}\right)\eta^5,$$

12. $$\varphi_{1,2,3,4,5,6,7} = 12\frac{10+\alpha\lambda}{60+\lambda}\eta - \frac{\alpha\lambda}{2}\eta^2 + 2\lambda\frac{10+\alpha\lambda}{60+\lambda}\eta^3 -$$

$$-3\frac{100-5(4\alpha-3)\lambda-\alpha\lambda^2}{60+\lambda}\eta^4 + \frac{180-6(5\alpha-3)\lambda+\alpha\lambda^2}{60+\lambda}\eta^5 -$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{240-4(9\alpha-5)\lambda+\alpha\lambda^2}{60+\lambda}\eta^6.$$

Из этих формул (8) легко получить выражения толщин пограничного слоя, а затем и трения. Они приведены в таблице.

| $U$ | $\alpha, \beta$ | $x, \delta^2$ | $\dfrac{\tau\delta}{u_0\rho\nu}$ |
|---|---|---|---|
| $U_{1,2}$ | $\alpha=1$, $\beta=0$ | $\delta^2 = {}^{2\nu}/_{m^2}\left(1-e^{-\frac{6m^2}{u_0}x}\right)$ | $1$ |
| | $\alpha=0$, $\beta=1$ | $\delta^2 = {}^{6\nu}/_{m^2}\left(e^{\frac{2m^2}{u_0}x}-1\right)$ | $1$ |
| $U_{1,2,3}$ | $\alpha=1$, $\beta=0$ | $x = \frac{u_0}{m^2}\left(-0{,}25\lambda + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\lambda}{2\sqrt{3}}\right)$ | $1+{}^{\lambda}/_{2}$ |
| | $\alpha=0$, $\beta=1$ | $\delta^2 = {}^{6\nu}/_{m^2}\left(e^{2m^2/u_0\cdot x}-1\right)$ | $1$ |
| $U_{1,2,4}$ | $\alpha=1$, $\beta=0$ | $\delta^2 = {}^{6\nu}/_{m^2}\left(1-e^{-\frac{5m^2}{u_0}x}\right)$ | $2$ |
| | $\alpha=0$, $\beta=1$ | $\delta^2 = {}^{15\nu}/_{m^2}\left(e^{\frac{2m^2}{u_0}x}-1\right)$ | $2$ |
| $U_{1,2,3,4}$ | $\alpha=1$, $\beta=0$ | $x = {}^{u_0}/_{m^2}\left[-0{,}071\lambda - 0{,}189\ln\frac{\lambda^2-6\lambda+72}{72} + 0{,}926\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\lambda-3}{7{,}94} + \mathrm{arctg}\,0{,}38\right)\right.$ | ${}^{1}/_{2}\left(3+\frac{\lambda}{2}\right)$ |
| | $\alpha=0$, $\beta=1$ | $\delta^2 = {}^{140\nu}/_{13m^2}\left(e^{\frac{2m^2}{u_0}x}-1\right)$ | $\frac{3}{2}$ |
| $U_{1,2,4,6}$ | $\alpha=1$, $\beta=0$ | $\delta^2 = {}^{12\nu}/_{m^2}\left(1-e^{-\frac{14m^2}{3u_0}x}\right)$ | $3$ |
| | $\alpha=0$, $\beta=1$ | $\delta^2 = {}^{28\nu}/_{m^2}\left(e^{\frac{2m^2}{u_0}x}-1\right)$ | $3$ |
| $U_{1,2,3,5}$ | $\alpha=1$, $\beta=0$ | $x = {}^{u_0}/_{m^2}\left[0{,}143\lambda + 3\ln\left(1+\frac{\lambda}{8}\right) + 21{,}943\left(\frac{1}{6+\lambda}-\frac{1}{6}\right) - 0{,}301\ln\left(1-\frac{\lambda}{3{,}828}\right) - 2{,}442\ln\frac{\lambda^2+9{,}828\lambda+37{,}619}{37{,}619} + 6{,}245\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\lambda+4{,}914}{3{,}67} - \mathrm{arctg}\,1{,}34\right)\right]$ | $+\,3\,\frac{2+\lambda}{6+\lambda}$ |
| | $\alpha=0$, $\beta=1$ | $x = {}^{u_0}/_{m^2}\left[-1{,}999\ln\left(1+\frac{\lambda}{6}\right) + 1{,}659\ln\left(1+\frac{\lambda}{12{,}918}\right) + 0{,}420\ln\frac{\lambda^2+6{,}642\lambda+25{,}931}{25{,}931} + 1{,}214\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\lambda+3{,}32}{3{,}86} - \mathrm{arctg}\,0{,}86\right)\right]$ | $\frac{6}{6+\lambda}$ |

$U \qquad \alpha, \beta \qquad x, \; \delta^2 \qquad \dfrac{\tau\delta}{u_0 \rho \nu}$

$\alpha = 1$, $\beta = 0$

$$x = {}^{u_0}/_{m^2}\Big[0{,}060\lambda + 0{,}157 \ln\left(1+\frac{\lambda}{18}\right) + 53{,}673\left(\frac{1}{18+\lambda} - \frac{1}{18}\right) - 0{,}434 \ln\left(1 - \frac{\lambda}{9{,}197}\right) - 0{,}933 \ln \frac{\lambda^2 + 9{,}197\lambda + 156{,}578}{156{,}578} + 2{,}072\left(\operatorname{arctg}\frac{\lambda+4{,}60}{11{,}96} - \operatorname{arctg} 0{,}39\right)\Big]$$

$$6\,\frac{4+\lambda}{18+\lambda}$$

$U_{1,2,3,4,5}$

$\alpha = 0$, $\beta = 1$

$$x = {}^{u_0}/_{m^2}\Big[-4{,}742 \ln\left(1+\frac{\lambda}{18}\right) + 3{,}257 \ln\left(1 + \frac{\lambda}{56{,}820}\right) + 0{,}992 \ln\frac{\lambda^2 + 9{,}680\lambda + 65{,}977}{65{,}977} + 1{,}182\left(\operatorname{arctg}\frac{\lambda + 4{,}84}{6{,}52} - \operatorname{arctg} 0{,}74\right)\Big].$$

$$\frac{24}{18+\lambda}$$

$\alpha = 1$, $\beta = 0$

$$x = {}^{u_0}/_{m^2}\Big[0{,}033\lambda + 0{,}168 \ln\frac{\lambda^2 - 16\lambda + 240}{240} + 0{,}138\left(\operatorname{arctg}\frac{\lambda - 8}{13{,}27} - \operatorname{arctg} 0{,}60\right)\Big]$$

$$2 + \frac{\lambda}{6}$$

$U_{1,2,3,4,6}$

$\alpha = 0$, $\beta = 1$

$$\delta^2 = {}^{630\nu}/_{37m^2}\left(e^{\frac{2m^2}{u_0}x} - 1\right) \qquad 2$$

$\alpha = 1$, $\beta = 0$

$$\delta^2 = {}^{20\nu}/_{m^2}\left(1 - e^{-\frac{9m^2}{240}x}\right) \qquad 4$$

$U_{1,2,4,6,7}$

$\alpha = 0$, $\beta = 1$

$$\delta^2 = {}^{45\nu}/_{m^2}\left(e^{\frac{2m^2}{u_0}} - 1\right). \qquad 4$$

| $U$ | $\alpha, \beta$ | $x, \delta^2$ | $\frac{\tau\delta}{u_0 \rho \nu}$ |
|---|---|---|---|
| | $\alpha=1$, $\beta=0$ | $x = {}^{u_0}/_{m^2}\left[0{,}033\lambda + 0{,}108 \ln\left(1+\frac{\lambda}{36}\right) + 112{,}363\left(\frac{1}{36+\lambda} - \frac{1}{36}\right) - 0{,}496 \ln\left(1 - \frac{\lambda}{16{,}545}\right) - 0{,}816 \ln \frac{\lambda^2 + 4{,}545\lambda + 435{,}189}{435{,}189} + 1{,}407\left(\operatorname{arctg}\frac{\lambda + 2{,}27}{20{,}74} - \operatorname{arctg} 0{,}11\right)\right]$ | $3\frac{20+3\lambda}{36+\lambda}$ |
| $U_{1,2,3,4,5,6}$ | $\alpha=0$, $\beta=1$ | $x = {}^{u_0}/_{m^2}\left[-2\ln\left(1+\frac{\lambda}{36}\right) + 1{,}250 \ln\left(1+\frac{\lambda}{64{,}245}\right) + 0{,}625 \ln \frac{\lambda^2 + 26{,}955\lambda + 310{,}661}{310{,}661} + 0{,}524\left(\operatorname{arctg}\frac{\lambda + 13{,}48}{11{,}36} - \operatorname{arctg} 1{,}19\right)\right]$ | $\frac{60}{36+\lambda}$ |
| | $\alpha=1$, $\beta=0$ | $x = {}^{u_0}/_{m^2}\left[-0{,}018\lambda + 0{,}34 \ln \frac{\lambda^2 - 30\lambda + 600}{600} + 1{,}265\left(\operatorname{arctg}\frac{\lambda - 15}{19{,}37} + \operatorname{arctg} 0{,}78\right)\right]$ | $\frac{5}{2} + \frac{\lambda}{8}$ |
| $U_{1,2,3,4,6,7}$ | $\alpha=0$, $\beta=1$ | $\delta^2 = {}^{99\nu}/_{4m^2}\left(e^{\frac{2m^2}{u_0}x} - 1\right)$ | $5/2$ |
| | $\alpha=1$, $\beta=0$ | $x = {}^{u_0}/_{m^2}\left[0{,}0204\lambda + 1{,}705 \ln\left(1+\frac{\lambda}{60}\right) + 197{,}332\left(\frac{1}{60+\lambda} - \frac{1}{60}\right) - 0{,}292 \ln\left(1 - \frac{\lambda}{11{,}860}\right) - 1{,}051 \ln \frac{\lambda^2 - 18{,}140\lambda + 2124{,}860}{2124{,}860} - 0{,}010\left(\operatorname{arctg}\frac{\lambda - 9{,}07}{45{,}19} + \operatorname{arctg} 0{,}20\right)\right]$ | $12\frac{10+\lambda}{60+\lambda}$ |
| $U_{1,2,3,4,5,6,7}$ | | $x = {}^{u_0}/_{m^2}\left[-2\ln\left(1+\frac{\lambda}{60}\right) + 1{,}211 \ln\left(1+\frac{\lambda}{103{,}122}\right) + 0{,}645 \ln \frac{\lambda^2 + 43{,}078\lambda + 698{,}902}{698{,}902} + 0{,}419\left(\operatorname{arctg}\frac{\lambda + 21{,}54}{15{,}33} - \operatorname{arctg} 1{,}41\right)\right]$ | $\frac{120}{60+\lambda}$ |

Как видно из этих формул, с увеличением магнитного поля в жидкости с постоянной электропроводимостью толщина пограничного слоя уменьшается, а с переменной, наоборот, увеличивается. Противоположный эффект наблюдается при расчете поверхностного трения.

Поступила 10.5.1977

Кафедра
механики сплошных сред

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Б.Ватажин, Г.А.Любимов, С.А.Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах, М., 1970.
2. Г.Шлихтинг. Теория пограничного слоя, М., 1969.
3. Л.Г.Лойцянский. Ламинарный пограничный слой, М., 1962.
4. С.М.Тарг. Основные задачи теории ламинарных течений, М.-Л., 1951.
5. Д.В.Шарикадзе. Магнитная гидродинамика, 4, 1968.
6. Д.В.Шарикадзе. Труды ТГУ, А 9(157), 1975.
7. S.K.Ojha. ZAMM 45, 5 1965.

ჯ.შარიქაძე

## კარმან-პოლჰაუზენის მეთოდის გამოყენება ცვლადი ელექტროგამტარებლობის მქონე სითხის სასაზღვრო ფენის გასაანგარიშებლად


### რეზიუმე

განზოგადებულია გოლუბევის, ლეიბენზონის, კარმანის ინტეგრალური თანაფარდობანი ცვლადი ელექტროგამტარებლობის მქონე სითხისათვის. შესწავლილია ფირფიტის გარსდენის ამოცანა კარმან-პოლჰაუზენის მეთოდით. სასაზღვრო ფენაში სიჩქარის პროფილები აღებულია მე-6 ხარისხის პოლინომის სახით. სასაზღვრო პირობების კომბინაციების საშუალებით მიღებულია 12 შემთხვევა, რომელთათვისაც გამოთვლილია მხები ძაბვები და სასაზღვრო ფენის სისქე.


J. Sharikadze

## THE USE OF THE KARMAN-POLHAUSEN METHOD IN ESTIMATING THE LAMINAR BOUNDARY LAYER OF FLUID WITH VARIABLE ELECTROCONDUCTIVITY


### Summary

The Golubev, Leibenson and Th. Karman integral equations for a fluid with variable electroconductivity are generalized. The equation of flow round a plate is studied by the Karman-Polhausen method. The velocity profiles in the boundary layer are taken as a polynomial of the sixth degree. Through combining the boundary conditions twelve cases have been obtained, the tangential stress and the boundary layer thickness have been calculated.

УДК 517.946

К научной биографии И.Н.Векуа. Эбаноидзе Т.А.
Труды Тбилисского университета, 197, 1978.
Математика, механика, астрономия.

Изложены некоторые материалы иностранных источников, связанные с научной биографией И.Н.Векуа. Библ. 5 назв.

УДК 517.5

Суммирование кратных тригонометрических рядов.
Жижиашвили Л.В. Труды Тбилисского университета,
197,1978 Математика, механика, астрономия.

Доказывается теорема относительно $(C,\alpha)$, $\alpha > -1$, суммируемости двойных сопряженных тригонометрических рядов. Полученный результат является неусиляемым. Библ. 13 назв.

УДК 517.512

Мажоранты некоторых сингулярных интегралов. Топурия С.Б.
Труды Тбилисского университета, 197,1978.Математика,
механика, астрономия

Рассматривается специальный сингулярный интеграл на гиперсфере, ядро которого зависит лишь от скалярного произведения. Для таких операторов устанавливаются неравенства типа А.Зигмунда, А.Н.Колмогорова и М.Рисса в предположении, что ядро преобразования есть неотрицательная функция, удовлетворяющая определенным условиям. Библ. 4 назв.

УДК 517.5

Об одной теореме типа вложения. Панджикидзе Л.К. Труды Тбилисского университета, 197, 1978. Математика, механика, астрономия

Для функций $f$ и $g$ соответственно из $k$ - мерных пространств $L_p$ и $L_q$ $(k \geq 1, 1 \leq p, q < \infty)$ найдено достаточное условие для включения $fg \in L_\gamma$ $(1 \leq \gamma \leq \min(p, q))$, выраженное в терминах интегральных модулей непрерывности. Библ. 25 назв.

УДК 511.3

Об объединении классов вычетов, II. Когония П.Г. Труды Тбилисского университета, 197, 1978. Математика, механика, астрономия

Решается задача о числе классов вычетов, когда по каждому модулю берётся несколько классов вычетов. Библ. I назв.

УДК 511.3

Некоторые неопределенные уравнения в теории непрерывных дробей, II. Когония П.Г. Труды Тбилисского университета, 197, 1978. Математика, механика, астрономия

Исследуется множество значений знаменателя подходящей дроби любого конечного порядка; доказано, что это множество имеет плотность, равную единице. Библ. 5 назв.

УДК 517.

Об одном свойстве ортонормальных систем. Карцивадзе И.Н. Труды Тбилисского университета, 197, 1978. Математика, механика, астрономия

Рассматриваются ортонормальные системы $(e_k)_{k\geq 1}$ и $(g_k)_{k\geq 1}$ действительного гильбертова сепарабельного пространства $H$, удовлетворяющие следующим условиям кососвязанности:

$$\langle e_m, g_n\rangle + \langle e_n, g_m\rangle = 0,$$

для всех пар натуральных чисел $m$ и $n$. Такие системы, естественно, возникают при изучении вопроса о существовании ортогонального умножения в гильбертовом пространстве $H$. Доказывается, что коразмерности подпространств $H'$ и $H''$, порожденных рассматриваемыми системами, равны. Библ. 1 назв.

УДК 513.836

О некоторых свойствах $K$ -групп гомологии. Баладзе Д.О. Труды Тбилисского университета, 197, 1978. Математика, механика, астрономия

Изучаются некоторые свойства группы гомологии, взятой относительно параметра $K$ ($K$ - любой локально конечный комплекс): функторальность, точность, гомотопичность и т.п. В частности, показано, что $K$ -группа гомологии относительно параметра является контравариантным функтором, а относительно пространства $X$ - ковариантным функтором.

УДК 517.9

Об инвариантном признаке квадратичных сетей. Тевзадзе Г.Н. Труды Тбилисского университета, 197, 1978. Математика, механика, астрономия

В трехмерном проективном пространстве рассматривается последовательность Лапласа нормализованных поверхностей, где одна из этих поверхностей - квадрика, т.е. невырожденная поверхность второго порядка. В частности, получены тензорные характерные признаки четырехчленной замкнутой последовательности и последовательности Лапласа, состоящей только из квадрик. Библ. 6 назв.

УДК 5I7.944

О решении смешанной граничной задачи одного нелинейного дифференциального уравнения гиперболического типа.

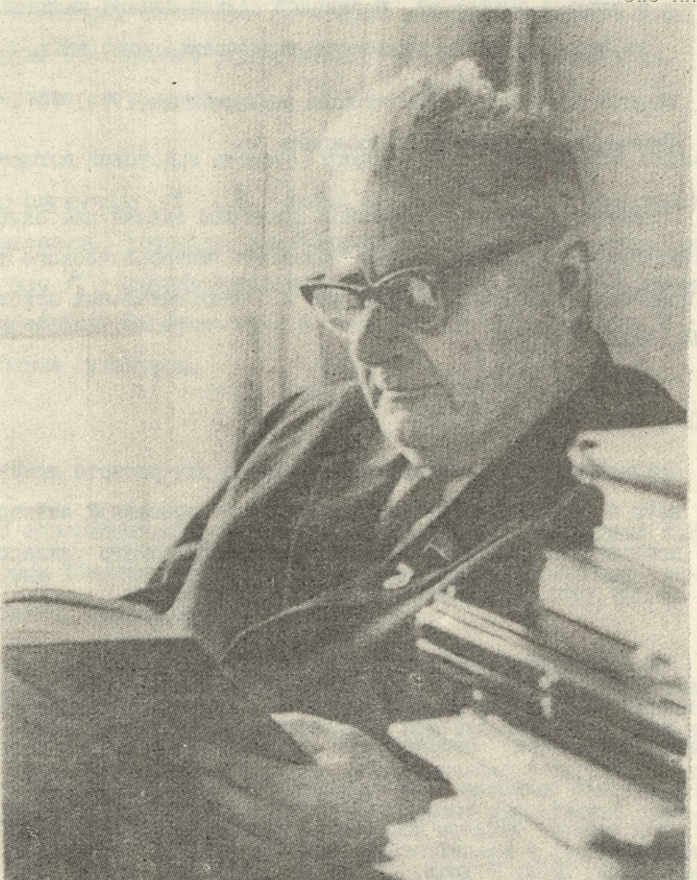
Зерагия П.К. Труды Тбилисского университета,I97,I978. Математика, механика, астрономия

Приводится решение смешанной граничной задачи для одного нелинейного дифференциального уравнения гиперболического типа с применением метода линеаризации и последовательных приближений. Библ. 5 назв.

УДК 538.4

Применение метода Кармана-Польгаузена для расчета ламинарного пограничного слоя для жидкости с переменной электропроводностью. Шарикадзе Дж.В. Труды Тбилисского университета,I97,I978. Математика, механика, астрономия.

Обобщаются известные интегральные соотношения Голубева, Лейбензона, Кармана для вязкой жидкости с переменной электропроводностью. Рассчитан пограничный слой методом Кармана-Польгаузена с помощью полинома 6-ой степени. Получены I2 профилей скорости, для которых найдены толщины пограничного слоя и поверхностное трение. Библ. 7 назв.



И.Н. В Е К У А ( 1907 - 1977 )

И.Н.ВЕКУА



Советская наука понесла тяжелую утрату. 2 декабря 1977г. на 71-м году жизни скончался депутат Верховного Совета СССР, член президиума Академии наук СССР, Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственной премий академик ИЛЬЯ НЕСТОРОВИЧ ВЕКУА.

Ушел из жизни один из крупнейших ученых, выдающийся организатор науки и высшего образования в нашей стране.

В своих фундаментальных работах И.Н.Векуа создал целый ряд новых научных направлений в теории уравнений в частных производных, геометрии и теории упругости.

Мировой известностью пользуются его исследования по аналитической теории эллиптических уравнений, сингулярным интегральным уравнениям и обобщенным аналитическим функциям. Построенная им теория упругих оболочек находит важные применения в современной строительной технике.

Огромное значение для развития советской науки имела педагогическая и научно-организаторская деятельность И.Н.Векуа. На протяжении многих лет Илья Несторович отдавал свой талант организатора и ученого развитию научных исследований в Грузии, воспитанию молодых ученых и подготовке высококвалифицированных специалистов во многих областях знаний.

И.Н.Векуа родился 23 апреля 1907 года в селе Шешелети Грузинской ССР в семье крестьянина.

После окончания средней школы в г.Зугдиди в 1925 году он поступает на физико-математический факультет Тбилисского университета, который успешно заканчивает в 1930 году.

В I929-30 гг. И.Н.Векуа работает в Геофизической обсерватории Грузии сначала в Тбилиси, а затем в Карсани (недалеко от Тбилиси).

В октябре I930 г. он поступает в аспирантуру при Академии наук СССР в Ленинграде. В аспирантуре И.Н.Векуа работает под руководством акад. А.Н.Крылова.

За три года пребывания в Ленинграде Илья Несторович стал вполне сложившимся математиком, автором серьезных научных исследований.

В I933 г. Илья Несторович возвращается в Тбилиси и начинает работать в должности научного сотрудника физико-математического факультета Тбилисского университета.

В I935 г. И.Н.Векуа - ученый секретарь Математического института Грузинского филиала Академии наук СССР, в создании которого он принимал самое активное участие. Илья Несторович параллельно ведет преподавательскую работу в Тбилисском государственном университете, а с I936 года он возглавляет и работу теоретического отдела Геофизического института Грузинского филиала Академии наук СССР.

В I937 г. И.Н.Векуа защищает кандидатскую диссертацию на тему: "Распространение упругих колебаний в бесконечном слое" и избирается доцентом Тбилисского государственного университета.

Начатые Ильей Несторовичем в I936 году интенсивные исследования по аналитической теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа с двумя независимыми переменными легли в основу его докторской диссертации "Комплексное представление решений эллиптических уравнений и их применение к граничным задачам", защищенной в I939 году.

За выдающиеся научные достижения в области математики и механики в 1944г. он был избран членом-корреспондентом Академии наук Грузинской ССР, а в 1946 г. - членом-корреспондентом Академии наук СССР и действительным членом Академии наук Грузинской ССР. В 1943 г. И.Н.Векуа вступил в ряды КПСС. В 1948 году выходит в свет его монография "Новые методы решения эллиптических уравнений", удостоенная Государственной премии СССР.

Илья Несторович показал себя крупным организатором науки на постах заведующего отделом Тбилисского математического института, председателя отделения математических и естественных наук (1947-1950 гг.) и академика - секретаря Академии наук ГССР (1947-1951гг.).

В 1951 году И.Н.Векуа переезжает в Москву, где начинает работать в должности заведующего отделом Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ) и заведующего кафедрой механики в Московском физико-техническом институте. В конце 1952 года его избирают профессором кафедры дифференциальных уравнений Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, а в 1953 г. - старшим научным сотрудником Математического института им. В.А.Стеклова Академии наук СССР.

Московский период научной деятельности И.Н.Векуа знаменуется признанием его научных заслуг во всемирном масштабе. Он избирается членом ряда зарубежных академий и научных обществ.

В 1952 году И.Н.Векуа - заместитель директора по научной работе Института точной механики и вычислительной техники АН СССР, а с 1955 года - заместитель директора Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР.

С 1958 года И.Н.Векуа - академик Академии наук СССР.

С января 1959 года И.Н.Векуа - ректор Новосибирского государственного университета. Одновременно он руководит теоретическим отделом Института гидродинамики СО АН СССР.

В 1961 году за большие заслуги в подготовке специалистов и развитии науки И.Н.Векуа был награжден орденом Ленина, а в 1963 году за труд "Обобщенные аналитические функции" ему была присуждена Ленинская премия.

С 1964 года Илья Несторович является вице-президентом Академии наук Грузинской ССР, а с декабря 1965 г. - ректором Тбилисского государственного университета.

В 1972 г. И.Н.Векуа был избран президентом АН Грузинской ССР. Многогранную научную, научно-организационную и педагогическую работу он сочетал с большой государственной и общественной деятельностью, избирался депутатом Верховного Совета СССР 7,8 и 9-го созывов, членом ЦК Компартии Грузии.

Коммунистическая партия и Советское правительство высоко оценили заслуги И.Н.Векуа. Он удостоен высокого звания Героя Социалистического Труда, награжден пятью орденами Ленина, орденом "Знак Почета" и медалями.

Светлая память об Илье Несторовиче Векуа, замечательном ученом и организаторе науки, посвятившем всю свою жизнь служению Родине, навсегда сохранится в сердцах его друзей, коллег и учеников.

# შინაარსი

СОДЕРЖАНИЕ

# Contents

გამომცემლობის რედაქტორი ლ.აბუაშვილი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 22/V-78

ქაღალდის ფორმატი 60X84

ნაბეჭდი თაბახი 10

სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 5,82

ფასი 58 კაპ.

შეკვეთა 1773 უე 06611 ტირაჟი 300

---

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი 380028,
ი.ჭავჭავაძის,14
საქ.სსრ მეცნიერებათა აკადემიის სტამბა, თბილისი, 380060,
კუტუზოვის 19.

Издательство Тбилисского университета, Тбилиси, 380028,

пр. И.Чавчавадзе, I4.

Типография АН ГССР, Тбилиси, 380060, ул. Кутузова I9.