თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
ტ. 204

ISSN 0376—2637

# მათემატიკა ● მექანიკა ასტრონომია

თბილისი — 1978

ეძღვნება პროფ. ე.კ.ხარაძეს

დაბადების 70-ე წლისთავზე

Посвящается проф. Е.К.Харадзе

к 70-летию со дня рождения

To prof. E.Kharadze's 70th

birth anniversary

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

Издательство Тбилисского университета

Tbilisi University Press

# ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

# PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

Т. 204 V.

## Математика * Механика * Астрономия

## Mathematics * Mechanics
## Astronomy

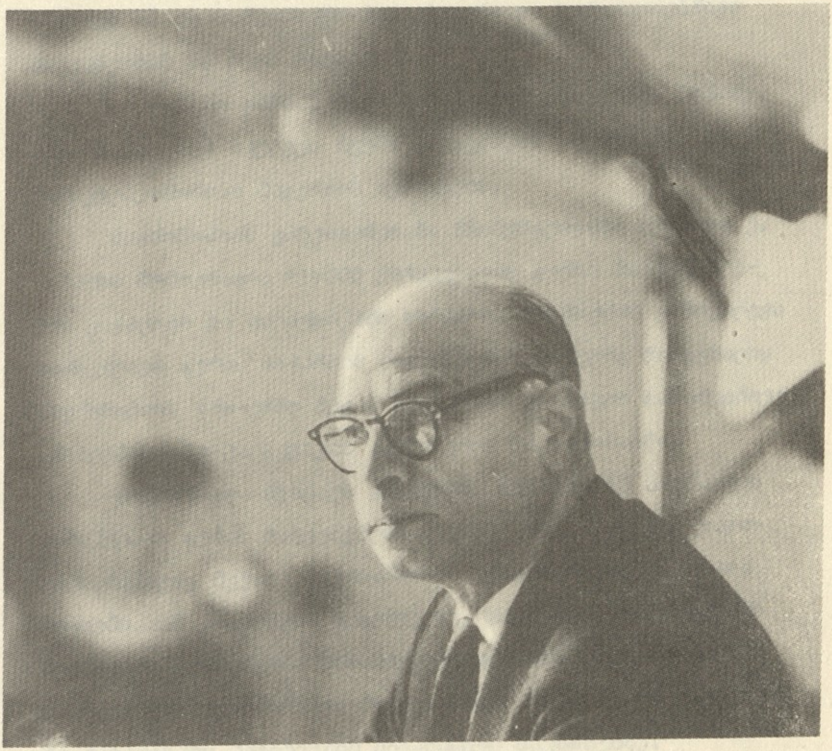
Тбилиси 1978 Tbilisi

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

ტ. 204

# მათემატიკა * მექანიკა * ასტრონომია

თბილისი 1978



ე. კ. ხარაძე

Е. К. ХАРАДЗЕ

ქართული საბჭოთა ასტრონომიის ფუძემდებელს, საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის პრეზიდენტს ევგენი კირილეს ძე ხარაძეს 70 და სამეცნიერო-პედაგოგიური და საზოგადოებრივი მოღვაწეობის 50 წელი შეუსრულდა.

დიდია მისი დამსახურება სამამულო მეცნიერების წინაშე, დიდი ხანია იგი იკვლევს ჩვენი გალაქტიკის აგებულებას და ვარსკვლავთშორისი მატერიის თვისებებს.

ასტრონომიის განვითარებაში მნიშვნელოვანი წვლილია ე. ხარაძის მონოგრაფია "14000 ვარსკვლავის ფერის მაჩვენებლების კატალოგი და გალაქტიკაში სინათლის შთანთქმის გამოკვლევა ვარსკვლავთ ფერის სიჭარბის საფუძველზე", რომელიც მიძღვნილია ასტრონომიის ერთ-ერთი მეტად აქტუალური და რთული თანამედროვე პრობლემისადმი-გალაქტიკის აგებულების საკითხისადმი.

მონოგრაფია შეიცავს კაპტეინის შერჩეულ 43 არისათვის ვარსკვლავთ ფერის მაჩვენებლის ყველაზე სრულ და ზუსტ კატალოგს, რომელიც შევიდა საერთაშორისო ფუნდამენტურ კატალოგთა რიცხვში. ამ კატალოგის საფუძველზე, ხსენებულ მონოგრაფიაში მეცნიერმა განსაზღვრა მშთანთქავი მატერიის მახასიათებლები და მათი გათვალისწინებით მოგვცა მთელი რიგი ახალი დასკვნები გალაქტიკის აგებულების სხვადასხვა საკითხებზე.

ე.ხარაძის ეს მონოგრაფია საფუძვლად დაედო მრავალ ვარსკვლავთსტატისტიკურ და თეორიულ გამოკვლევებს ვარსკვლავთ ასტრონომიაში როგორც ჩვენში, ისე საზღვარგარეთ.

შემდგომში ე.ხარაძისა და ძისი მოწაფეების გამოკვლევათა მეშვეობით აბასთუმნის ასტროფიზიკური ობსერვატორია საბჭოთა კავშირში მოთავე დაწესებულებად იქცა გალაქტიკის შესწავლის საკითხში.

ე.ხარაძის ხელმძღვანელობით აბასთუმნის ასტროფიზიკურ ობსერვატორიაში დამუშავდა ვარსკვლავთა სპექტრული კლასიფიკაციის ორიგინალური მეთოდიკა, რომლის გამოყენებით შედგენილ იქნა მრავალი ათასი ვარსკვლავის სპექტრების კატალოგები.

მნიშვნელოვანი შედეგები აქვს მიღებული ე.ხარაძეს მზის მახლობელ არეში ვარსკვლავთ განაწილების კანონზომიერების გამოკვლევაში. აბასთუმანში შედგენილ 11000 ვარსკვლავის სპექტრული კატალოგის გამოყენების საფუძველზე აგებული და გამოკვლეულია ვარსკვლავთ სიმკვრივეთა და ნათობის ფუნქციები. მიღებულია ადრინდელ შეხედულებებისაგან არსებითად განსხვავებული მეტად საინტერესო შედეგები.

საინტერესო შედეგები აქვს მიღებული ე.ხარაძეს ცვალებადი ვარსკვლავების გამოკვლევის დარგში, ტელესკოპების გამოკვლევასა და ასტროკლიმატის შესწავლაში და სხვ. ე.ხარაძის მეცნიერული ნაშრომები გამოქვეყნებულია როგორც საბჭოთა კავშირში, ასევე საზღვარგარეთულ ასტრონომიულ გამოცემებში.

აღსანიშნავია ე.ხარაძის დიდი ორგანიზატორული საქმიანობა. მან საფუძველი ჩაუყარა საბჭოთა კავშირში პირველ სამთო ასტროფიზიკურ ობსერვატორიას აბასთუმანში, რომელმაც შემდგომში სახელი გაუთქვა ქართულ ასტრონომიულ სკოლას როგორც საბჭოთა კავშირში, ისე საზღვარგარეთ.

აბასთუმნის ობსერვატორიის მეცნიერული კოლექტივის დიდი უმრავლესობა, ისევე როგორც თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასტრონომიის კათედრის წევრები, ევგენი ხარაძის აღზრდილები არიან.

იგი დღესაც რესპუბლიკის ასტრონომიული კადრების მომზადების სათავეშია.

შთამბეჭდავია მაღალ მეცნიერულ დონეზე და ლამაზი ქართული ენით, თავისებური მანერით სტუდენტებისათვის წაკითხული მისი ლექციები.

საშუალო სკოლებისათვის ასტრონომიის, სტუდენტებისათვის - ასტრონომიის საფუძვლების ორტომიანი სახელმძღვანელოების და ასტრონომიული სპეციალობის სტუდენტებისათვის ზოგადი ასტროფიზიკის კურსის ავტორი თავისი საყვარელი დარგის დაუზარელი პროპაგანდისტია. ხშირად აქვეყნებს პოპულარულ ბროშურებსა და სტატიებს.

ე. ხარაძე არის სსრ კავშირის უმაღლესი საბჭოს დეპუტატი, საქართველოს კომპარტიის ცენტრალური კომიტეტის წევრი, "ცოდნის" რესპუბლიკური საზოგადოების თავმჯდომარე, საერთაშორისო ასტრონომიული კავშირის რამოდენიმე დარგობრივი კომისიის წევრი და ამ კავშირის ყრილობების აქტიური მონაწილე, საერთაშორისო ასტრონომიული კავშირის ვიცე-პრეზიდენტი, "საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის მოამბის" მთავარი რედაქტორი.

წლების მანძილზე ევგენი კირილეს ძე ხარაძე იყო თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის რექტორი.

პარტიამ და ხელისუფლებამ ღირსეულად დააფასეს ღვაწლმოსილი მეცნიერის დიდი დამსახურება. იგი დაჯილდოებულია ლენინის ორდენით, ოქტომბრის რევოლუციის, შრომის წითელი დროშის ორდენებით და მედლებით.

ვუსურვოთ ჩვენს სახელოვან სწავლულსა და საზოგადო მოღვაწეს კვლავაც ხალისითა და მხნეობით ემსახუროს თავის საყვარელ საქმეს - ქართული საბჭოთა მეცნიერების განვითარებას.

Грузинская общественность широко отметила 70-летие со дня рождения и 50-летие научно-педагогической и общественной деятельности основоположника грузинской советской астрономии, президента АН ГССР Евгения Кирилловича Харадзе.

Велика его заслуга перед отечественной наукой. Вот уже в течение многих лет он исследует строение нашей Галактики и свойства межзвездной среды.

Монография Е.К.Харадзе "Каталог показателей цвета 14000 звезд и исследование поглощения света в Галактике на основе цветовых избытков звезд" посвящена одной из наиболее актуальных и сложных проблем астрономии - строению Галактики. Эта монография содержит для 43-х избранных площадок Каптейна самый полный и точный каталог показателей цвета звезд, который вошел в число международных фундаментальных каталогов. В упомянутой монографии ученый определил характеристики поглощающей среды и на их основе дал ряд новых заключений по разным вопросам строения Галактики.

Монография Е.К.Харадзе стала основой для многих звездно-статистических и теоретических исследований в звездной астрономии как у нас, так и за рубежом.

Благодаря исследованиям Е.К.Харадзе и его учеников Абастуманская астрофизическая обсерватория стала ведущей среди обсерваторий Советского Союза по вопросу изучения строения Галактики.

Под руководством Е.К.Харадзе в Абастуманской астрофизической обсерватории разработана оригинальная методика спектральной классификации звезд, применением которой были составлены каталоги спектров многих тысяч звезд.

Значительные результаты были получены Е.К.Харадзе в исследовании закономерности распределения звезд в околосолнечной области.

На основе спектрального каталога 11000 звезд построены и исследованы функции плотности и светимости звезд. Получены весьма интересные результаты, заметно отличающиеся от принятых ранее выводов относительно некоторых аспектов строения Галактики.

Интересные выводы получены Е.К.Харадзе в изучении переменных звезд, в исследовании телескопа и изучении астроклимата и др.

Научные статьи Е.К.Харадзе опубликованы в астрономических журналах как Советского союза, так и зарубежных стран.

Особо следует отметить большую организаторскую деятельность Е.К.Харадзе.

Он является основателем первой советской горной астрофизической обсерватории в Абастумани, снискавшей грузинской астрономической школе широкое признание как у нас, так и за рубежом.

Большинство научных сотрудников Абастуманской обсерватории, а также членов кафедры общей астрономии Тбилисского государственного университета являются воспитанниками Е.К.Харадзе.

Он и в настоящее время руководит подготовкой астрономических кадров республики. Впечатлительны его лекции для студентов, прочитанные на высоком научном уровне.

Е.К.Харадзе является автором учебника астрономии для средних школ, двухтомного учебника "Основы астрономии" для студентов и курса "Общей астрофизики" для студентов астрономической специальности. Как неустанный пропагандист своей любимой профессии, он часто публикует популярные брошюры и статьи.

Е.К.Харадзе - депутат Верховного Совета СССР, член ЦК КП Грузии, председатель республиканского общества "Знание", член нескольких отраслевых комиссий международного астрономического союза и активный участник генеральных съездов этого союза, вице-президент международного астрономического союза, главный редактор журнала "Сообщения Академии наук ГССР".

В течение ряда лет Е.К.Харадзе был ректором Тбилисского государственного университета.

Партия и Правительство высоко оценили заслуги ученого. Он награжден четырьмя орденами Ленина, орденом Октябрьской революции, орденами Трудового Красного Знамени и медалями.

Пожелаем нашему выдающемуся ученому и общественному деятелю и впредь успешно служить своему любимому делу - развитию грузинской советской науки.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени

государственного университета

204, 1978

УДК 52

# О ДВИЖЕНИИ ДВУХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ В НЬЮТОНОВОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Н.Г.Магнарадзе

I. В работах [I - 7] мы исследовали движение в ньютоновом гравитационном поле многих тел с переменными массами, являющимися аналитическими функциями от времени $t$ на сегменте $t_0 \leq t \leq t_0 + h_0$, где $t_0$ - известный начальный момент, а $h_0$ - заданное положительное число. Мы предполагали, что в рассматриваемом гравитационном поле действует закон Ньютона или несколько обобщенный закон, когда функция сил является полиномом относительно обратных величин взаимных расстояний между телами, имеющими коэффициенты, аналитически зависящие от времени. Кроме гравитационных сил мы принимали во внимание также реактивные силы Мещерского-Циолковского, действующие на заданные тела.

Исходя из этих предположений, в основу исследования мы положили определенную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Мы рассмотрели как случаи регулярного движения, когда взаимные расстояния между телами остаются больше некоторого положительного постоянного числа [I - 5], так и случай парного соударения тел [6 - 7].

В случае регулярного движения, для координат движущихся тел мы построили степенные ряды относительно $t-t_0$ и доказали их сходимость на определенном сегменте $t_0 \leq t \leq t_0 + h$, где положительная постоянная $h < h_0$ находится эффективно.

Кроме того, нами были установлены оценки остаточных членов этих рядов.

Для определения коэффициентов степенных рядов неизвестных величин мы построили рекуррентные соотношения, достаточно удобные для их вычисления на современных вычислительных машинах.

При выводе упомянутых соотношений мы использовали метод, являющийся обобщением метода, предложенного И.Ф.Стеффенсеном [8] для решения ограниченной задачи трех тел с постоянными массами, получившего дальнейшее развитие и применение в наших работах [I - 7] (в случае переменных масс) и в статьях Рабе [9], В.А.Брумберга [I0], П.Сконцо [I], В.Ф.Мячина и О.А.Сизовой [I2], Р.Броука [I3], Е.Чарзла и Робертса [I4] и др. ( в случае постоянных масс).

Во всех этих исследованиях отмечается эффективность метода Стеффенсена, а в [I4] на численных примерах показывается даже преимущество этого метода перед другими методами, например, методами Рунге-Кутта и Гаусса-Джексона.

В случае парного соударения, для координат движущихся тел мы построили обобщенные степенные ряды по времени и доказали их сходимость для определенного промежутка времени вблизи момента первого соударения. Это дало возможность локального аналитического продолжения решения рассматриваемой системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами после первого соударения. Применяемый нами способ отличается от известного метода Зундмана для аналитического продолжения решения задачи трех тел с постоянными массами вблизи момента соударения, основанного на законах площадей и интеграла энергии, не имеющих аналога, вообще говоря, в рассматриваемом нами более общем случае. Для определения коэффициентов разложений неизвестных величин в обобщенные степенные ряды и в этом случае удается построить рекуррентные соотношения. Мы также установили асимптотическую оценку для вектора скорости одного из тел при его приближении к другому какому-либо телу, дающую возможность найти порядок роста величины скорости в зависимости от достаточно малого расстояния между этими телами.

В случае двух тел $M_0$, $M_1$, имеющих, соответственно, переменные массы, упомянутые выше рекуррентные соотношения для коэффициентов разложений неизвестных величин существенно упрощаются, а оценки соответствующих остаточных членов представляются в эффективном виде.

В настоящей статье мы исследуем случай регулярного движения, а в следующей статье рассмотрим случай соударения тел.

2. Основная система дифференциальных уравнений движения двух тел $M_0$ и $M_1$, имеющих, соответственно,

переменные массы $m_0(t)$ и $m_1(t)$, в ньютоновом гравитационном поле, с учетом реактивных сил, по отношению к некоторой абсолютной системы координат в векторной форме имеет вид:

$$m_0(t)\frac{d^2}{dt^2}\vec{\rho}_0 = \gamma(t)\,m_0(t)\,m_1(t)\frac{\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_0}{|\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_0|^3}+\lambda_0(t)\frac{d}{dt}\vec{\rho}_0,$$

$$m_1(t)\frac{d^2}{dt^2}\vec{\rho}_1 = \gamma(t)\,m_0(t)\,m_1(t)\frac{\vec{\rho}_0-\vec{\rho}_1}{|\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_0|^3}+\lambda_1(t)\frac{d}{dt}\vec{\rho}_1, \tag{I}$$

где $\vec{\rho}_0$ и $\vec{\rho}_1$ – радиус-векторы точек $M_0$ и $M_1$, а $\gamma(t)$ – коэффициент гравитации, который, для общности, предполагается заданной функцией от времени $t$; первые слагаемые в правой части (I) изображают силы гравитации, а вторые слагаемые – реактивные силы в смысле Мещерского-Циолковского.

Требуется определить решение $\vec{\rho}_0$, $\vec{\rho}_1$ системы (I), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\vec{\rho}_0(t_0)=\vec{\rho}_{0,0}\ ,\qquad \vec{\rho}_0{}'(t_0)=\vec{\rho}_{0,1}$$

$$\vec{\rho}_1(t_0)=\vec{\rho}_{1,0}\ ,\qquad \vec{\rho}_1{}'(t_0)=\vec{\rho}_{1,1} \tag{2}$$

где $\vec{\rho}_{0,0}$, $\vec{\rho}_{0,1}$, $\vec{\rho}_{1,0}$, $\vec{\rho}_{1,1}$ – заданные постоянные векторы.

Ниже мы будем считать, что $\gamma(t)m_0(t)$, $\gamma(t)m_1(t)$, $\lambda_0(t)/m_0(t)$ и $\lambda_1(t)/m_1(t)$ представляются в виде степенных рядов относительно $t-t_0$, сходящихся на заданном сегменте $t_0\le t\le t_0+h_0$.

Как хорошо известно, задачу Коши (I) – (2) решают следующим методом. Полагая

$$\vec{\rho}_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{\rho}_{0,n}(t-t_0)^n\ ,\quad \vec{\rho}_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\vec{\rho}_{1,n}(t-t_0)^n,$$

все известные коэффициенты $\vec{\rho}_{0,n}$ и $\vec{\rho}_{1,n}$ $(n=2,3,\ldots)$ определяют из системы (I) и уравнений, получаемых из (I) последовательным дифференцированием и подстановкой $t=t_0$:

$$\vec{\rho}_{0,n}=\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{dt^n}\vec{\rho}_0\right)_{t=t_0}\ ,\quad \vec{\rho}_{1,n}=\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{dt^n}\vec{\rho}_1\right)_{t=t_0},$$

$n=1,2,\ldots$

Но этот метод является довольно громоздким и неудобен для применения современных вычислительных машин.

Для решения задачи Коши (I) - (2) и несколько более общих, указанных в работах [I - 7] , мы предложили упомянутый выше в п. I метод, суть которого заключается в следующем.

Введя вспомогательные неизвестные:

$$\vec{r}=\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_0\ ,\qquad r=|\vec{r}|,\qquad s=r^{-3}\ ,\qquad u_i=a_i(t)s,\quad i=0,1 \tag{3}$$

и обозначения:

$$a_0(t)=\gamma(t)m_1(t)\ ,\qquad b_0(t)=\frac{\lambda_0(t)}{m_0(t)},$$
$$a_1(t)=-\gamma(t)m_0(t)\ ,\qquad b_1(t)=\frac{\lambda_1(t)}{m_1(t)}, \tag{4}$$

решение задачи Коши (I) - (2) приводим к решению следующей эквивалентной задачи.

Найти основные $\vec{\rho}_0(t)$ , $\vec{\rho}_1(t)$ и вспомогательные

$\vec{r}(t), r(t), s(t), u_0(t), u_1(t)$ неизвестные (3), удовлетворяющие следующей эквивалентной системе дифференциальных и конечных уравнений:

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{\rho}_i = u_i(t)\vec{r}(t) + b_i(t)\frac{d}{dt}\vec{\rho}_i, \quad i=0,1$$
$$\vec{r} = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_0,$$
$$r^2 = (\vec{r}, \vec{r}), \tag{5}$$
$$r\frac{d}{dt}s = -3s\frac{d}{dt}r,$$
$$u_i = a_i(t)s, \qquad i=0,1$$

и начальным условиям:

$$\vec{\rho}_i(t_0) = \vec{\rho}_{i,0}, \qquad \vec{\rho}_i{}'(t_0) = \vec{\rho}_{i,1}, \tag{6}$$
$$\vec{r}(t_0) = \vec{\rho}_{1,0} - \vec{\rho}_{0,0},$$
$$r^2(t_0) = (\vec{\rho}_{1,0} - \vec{\rho}_{0,0}, \vec{\rho}_{1,0} - \vec{\rho}_{0,0}),$$
$$s(t_0) = (\vec{\rho}_{1,0} - \vec{\rho}_{0,0}, \vec{\rho}_{1,0} - \vec{\rho}_{0,0})^{-\frac{3}{2}},$$
$$u_i(t_0) = a_i(t_0)(\vec{\rho}_{1,0} - \vec{\rho}_{0,0}, \vec{\rho}_{1,0} - \vec{\rho}_{0,0})^{-\frac{3}{2}}, \qquad i=0,1.$$

Как было отмечено выше, в настоящей статье рассматривается лишь регулярное движение двух тел $M_0$ и $M_1$. Поэтому существует такое положительное число $\delta_0$, что все допустимые векторы $\vec{\rho}_0$ и $\vec{\rho}_1$, среди которых ищутся основные неизвестные $\vec{\rho}_0(t)$, $\vec{\rho}_1(t)$, удовлетворяют условию

$$|\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_0| \geq \delta_0. \tag{7}$$

В силу (6) и (7), имеем

$$r(t_0) \geq \delta_0. \tag{8}$$

Теперь положим

$$a_i(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n}(t-t_0)^n , \quad b_i(t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_{i,n}(t-t_0)^n \tag{9}$$

и будем считать, что

$$|a_{i,n}| \le A_i \frac{H_0^n}{n^\alpha}, \quad |b_{i,n}| \le B_i \frac{H_0^n}{n^\alpha}, \tag{I0}$$

$$n=1,2,\dots ; \qquad i=0,1 ,$$

где $\alpha > 1$ , $A_i$ , $B_i$ ( $i$ =0,1), $H_0$ - заданные положительные числа.

Заметим, что специальный вид мажорант (I0) для коэффициентов степенных рядов (9) очень удобен при доказательстве сходимости степенных рядов, представляющих решение системы (5), для эффективного определения промежутка их сходимости и оценки остаточных членов.

Класс аналитических функций (9), удовлетворяющих условиям вида (I0), является достаточно широким. В частности, полиномы любой степени, а также все элементарные алгебраические и трансцендентные функции удовлетворяют условию (I0), если их разложим в степенные ряды в окрестности любой регулярной точки. Решение системы (5), удовлетворяющее начальным условиям (6), будем искать в виде степенных рядов:

$$\vec{\rho}_i(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \vec{\rho}_{i,n}(t-t_0)^n ,$$

$$\vec{r}(t)=\sum_{n=0}^{\infty} \vec{r}_n (t-t_0)^n , \quad r(t)=\sum_{n=0}^{\infty} r_n (t-t_0)^n , \tag{II}$$

$$s(t)=\sum_{n=0}^{\infty} s_n (t-t_0)^n , \quad u_i(t)=\sum_{n=0}^{\infty} u_{i,n} (t-t_0)^n ,$$

$$i=0,1 .$$

Очевидно, начальные коэффициенты разложений (II)

$$\vec{\rho}_{i,0}\,,\ \vec{\rho}_{i,1}\,,\ \vec{r}_0\,,\ r_0\,,\ s_0\,,\ u_{i,0}\,,\qquad i=0,1, \tag{I2}$$

в силу (6) определяются через известные величины.

Подставляя разложения (9), (II) в систему (5) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $t-t_0$ , получим следующую систему рекуррентных соотношений для определения коэффициентов разложений (II):

$$(n+1)(n+2)\vec{\rho}_{i,n+2}=\sum_{k=0}^{n}u_{i,k}\,\vec{r}_{n-k}+\sum_{k=0}^{n}(k+1)b_{i,n-k}\,\vec{\rho}_{i,k+1},$$

$$\vec{r}_n=\vec{\rho}_{1,n}-\vec{\rho}_{0,n},$$

$$\sum_{k=0}^{n}r_k r_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(\vec{r}_k,\vec{r}_{n-k}),$$

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)r_{n-k}\,s_{k+1}=-3\sum_{k=0}^{n}(k+1)r_{k+1}\,s_{n-k},$$

$$u_{i,n}=\sum_{k=0}^{n}a_{i,n-k}\,s_k,$$

$$n=0,1,2,\dots\ ;\qquad i=0,1.$$

В последних соотношениях, из каждой суммы выделим члены, соответствующие значениям индекса: $k=0$ и $k=n$. Тогда получим

$$(n+1)(n+2)\vec{\rho}_{i,n+2}=u_{i,0}\,\vec{r}_n+u_{i,n}\,\vec{r}_0+b_{i,n}\,\vec{\rho}_{i,1}+b_{i,0}(n+1)\vec{\rho}_{i,n+1}+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}u_{i,k}\,\vec{r}_{n-k}+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)b_{i,n-k}\,\vec{\rho}_{i,k+1},$$

$$\vec{r}_n=\vec{\rho}_{1,n}-\vec{\rho}_{0,n},$$

$$2r_0r_n=2(\vec{r}_0,\vec{r}_n)+\sum_{k=1}^{n-1}(\vec{r}_k,\vec{r}_{n-k})-\sum_{k=1}^{n-1}r_k,r_{n-k},$$

$$r_0(n+1)s_{n+1}=-s_1r_n-3r_1s_n-3s_0(n+1)r_{n+1}-$$

$$-\sum_{\kappa=1}^{n-1}(\kappa+1)\tau_{n-\kappa} S_{\kappa+1} - 3\sum_{\kappa=1}^{n-1}(\kappa+1)\tau_{\kappa+1} S_{n-\kappa}\,,$$

$$u_{i,n} = S_0 a_{i,n} + a_{i,0} S_n + \sum_{\kappa=1}^{n-1} a_{i,n-\kappa} S_\kappa\,, \tag{13}$$

$$n = 0,1,2,\ldots\;; \qquad i = 0,1\,.$$

При этом выражения

$$\sum_{\kappa=1}^{-1}(\ldots)\,, \qquad \sum_{\kappa=1}^{0}(\ldots)$$

полагаем равными нулю.

4. Для доказательства сходимости степенных рядов (II) и рядов, получаемых из них дифференцированием, положим

$$\begin{aligned}
&|\vec{\rho}_{i,n}| \le R_i \frac{H^n}{n^\alpha}\,, \\
&|\vec{\tau}_n| \le R_2 \frac{H^n}{n^\alpha}\,, \\
&|\tau_n| \le R \frac{H^n}{n^\alpha}\,, \\
&|S_n| \le S \frac{H^n}{n^\alpha}\,, \\
&|u_{i,n}| \le U_i \frac{H^n}{n^\alpha}\,, \qquad n = 1,2,\ldots\;; \quad i = 0,1\,,
\end{aligned} \tag{I4}$$

где положительные постоянные $R_j\,(j=0,1,2), R, S, U_i\;(i=0,1)$ и $H$ подлежат определению.

Очевидно, что исходя из начальных значений (I2) и пользуясь рекуррентными соотношениями (I3), всегда можно подобрать упомянутые постоянные так, чтобы удовлетворялись соотношения (I4) для $n=1,2,\ldots,\rho$, где $\rho$ -определенное натуральное число. Для того чтобы (I4) удовлетворялись для всех натуральных чисел $n$, следует постоянные $R_0$, $R_1$, $R_2$, $R$, $S$, $U_0$, $U_1$, $H$ подчинить указанным ниже соотношениям.

Из рекуррентных соотношений (I3), в силу (I0), (I4), следует, что

$$(n+1)(n+2)|\vec{\rho}_{i,n+2}| \le |u_{i,0}| R_2 \frac{H^n}{n^\alpha} + \tau_0 U_i \frac{H^n}{n^\alpha} + |\vec{\rho}_{i,1}| B_i \frac{H_0^n}{n^\alpha} +$$

$$+ |b_{i,0}|(n+1) R_i \frac{H^{n+1}}{(n+1)^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} U_i \frac{H^k}{k^\alpha} R_2 \frac{H^{n-k}}{(n-k)^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) B_i \frac{H_0^{n-k}}{(n-k)^\alpha} R_i \cdot$$

$$\cdot \frac{H^{k+1}}{(k+1)^\alpha},$$

$$|\vec{\tau}_n| \le R_1 \frac{H^n}{n^\alpha} + R_0 \frac{H^n}{n^\alpha},$$

$$2\tau_0 |\tau_n| \le 2\tau_0 R_2 \frac{H^n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} R \frac{H^k}{k^\alpha} R \frac{H^{n-k}}{(n-k)^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} R_2 \frac{H^k}{k^\alpha} R_2 \frac{H^{n-k}}{(n-k)^\alpha},$$

$$\tau_0 (n+1)|S_{n+1}| \le |S_1| R \frac{H^n}{n^\alpha} + 3|\tau_1| S \frac{H^n}{n^\alpha} + 3 S_0 (n+1) R \frac{H^{n+1}}{(n+1)^\alpha} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) R \frac{H^{n-k}}{(n-k)^\alpha} S \frac{H^{k+1}}{(k+1)^\alpha} + 3 \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) R \frac{H^{k+1}}{(k+1)^\alpha} S \frac{H^{n-k}}{(n-k)^\alpha},$$

$$|u_{in}| \le s_0 A_i \frac{H_0^n}{n^\alpha} + |a_{i,0}| S \frac{H^n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} A_i \frac{H_0^{n-k}}{(n-k)^\alpha} S \frac{H^k}{k^\alpha},$$

$$n = 2,3,\dots; \qquad i = 0,1.$$

Полагая $H > \max\{1, H_0\}$ во всех членах в правой части соотношений (I5), кроме первого члена последнего соотношения, получим

$$(n+1)(n+2)|\vec{\rho}_{i,n+2}| \le |u_{i,0}| R_2 \frac{H^{n+1}}{n^\alpha} + \tau_0 U_i \frac{H^{n+1}}{n^\alpha} +$$

$$+ |\vec{\rho}_{i,1}| B_i \frac{H^{n+1}}{n^\alpha} + |b_{i,0}| R_i \frac{H^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}} + \tag{I6}$$

$$+ R_2 U_i H^{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha} + B_i R_i H^{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}(n-k)^\alpha},$$

$$|\vec{\tau}_n| \le (R_0 + R_1) \frac{H^n}{n^\alpha},$$

$$2 r_0 |r_n| \le 2 r_0 R_2 \frac{H^n}{n^\alpha} + \left(R^2 + R_2^2\right) H^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha},$$

$$r_0 (n+1) |s_{n+1}| \le |s_1| R \frac{H^n}{n^\alpha} + 3 |r_1| S \frac{H^n}{n^\alpha} + 3 s_0 R \frac{H^{n+1}}{(n+1)^{\alpha-1}} +$$

$$+ R S H^{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1} (n-k)^\alpha} + 3 R S H^{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}(n-k)^\alpha},$$

$$|u_{i,n}| \le s_0 A_i \frac{H_0^n}{n^\alpha} + |a_{i,0}| S \frac{H^n}{n^\alpha} + A_i S H^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha},$$

$$n = 2, 3, \dots; \qquad i = 0, 1.$$

Теперь воспользуемся известными неравенствами (см., например, [I] ):

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha} < \frac{L_\alpha}{n^\alpha}, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k^\alpha (n-k)^\alpha} < \frac{L_\alpha}{2 n^{\alpha-1}},$$

$$L_\alpha = \frac{2^\alpha (3\alpha - 1)}{\alpha - 1},$$

$$n = 2, 3, \dots; \qquad \alpha > 1,$$

и заметим, что при $n \ge 2$ имеем:

$$\frac{1}{n^\alpha} \le \frac{2^\alpha}{(n+2)^\alpha}, \quad \frac{1}{(n+1)(n+2) n^\alpha} \le \frac{2^\alpha}{12 (n+2)^\alpha},$$

$$\frac{1}{(n+2)(n+1)^\alpha} < \frac{2^\alpha}{4 (n+2)^\alpha}, \quad \frac{1}{(n+1) n^\alpha} < \frac{2^\alpha}{3 (n+1)^\alpha}.$$

Тогда соотношения (I6) можно представить так:

$$|\vec{\rho}_{i,n+2}| \le \frac{2^{\alpha-2}}{3} \Big[ |\vec{\rho}_{i,1}| B_i + \left(3 |b_{i,0}| + 2 L_\alpha B_i\right) R_i + |u_{i,0}| R_2 + r_0 U_i + L_\alpha R_2 U_i \Big] \frac{H^{n+1}}{(n+2)^\alpha},$$

$$|\vec{r}_n| \le \left(R_0 + R_1\right) \frac{H^n}{n^\alpha}, \tag{I7}$$

$$|r_n| \le \left[R_2 + \frac{L_\alpha}{2 r_0} \left(R^2 + R_2^2\right)\right] \frac{H^n}{n^\alpha},$$

$$|S_{n+1}| \leq \left[\left(3S_0 + \frac{2^\alpha}{3}|S_1|\right)\frac{R}{\tau_0} + 2^\alpha\frac{|\tau_1|}{\tau_0}\frac{S}{H} + \frac{2^{\alpha+3}}{3\tau_0}L_\alpha RS\right]\frac{H^{n+1}}{(n+1)^\alpha},$$

$$|U_{i,n}| \leq \left[S_0 A_i\frac{H_0}{H} + (|a_{i,0}| + L_\alpha A_i)S\right]\frac{H^n}{n^\alpha},$$

$n = 2, 3, \ldots;\quad i = 0, 1.$

Из (I7), очевидно, вытекает, что соотношения (I4) остаются справедливыми для всех натуральных чисел $n \geq 2$, если соблюдаются следующие соотношения:

$$|\vec{f}_{i,1}|B_i + (3|b_{i,0}| + 2L_\alpha B_i)R_i + |U_{i,0}|R_2 + \tau_0 U_i + L_\alpha R_2 U_i \leq \frac{3H}{2^{\alpha-2}}R_i,$$

$$R_0 + R_1 \leq R_2, \tag{I8}$$

$$R_2 + \frac{L_\alpha}{2\tau_0}(R_2^2 + R^2) \leq R,$$

$$\left(3S_0 + \frac{2^\alpha}{3}|S_1|\right)\frac{R}{\tau_0} + 2^\alpha\frac{|\tau_1|}{\tau_0}\frac{S}{H} + \frac{2^{\alpha+3}}{3\tau_0}L_\alpha RS \leq S,$$

$$S_0 A_i\frac{H_0}{H} + (|a_{i,0}| + L_\alpha A_i)S \leq U_i,$$

$i = 0, 1.$

Теперь докажем, что существуют положительные постоянные $R_0, R_1, R_2, R, S, U_0, U_1, H$, удовлетворяющие соотношениям (I8).

Положительные числа $U_0$ и $U_1$ фиксируем совершенно произвольно. Остальные постоянные последовательно подчиним следующим соотношениям:

$$0 < S \leq \frac{U_i}{2(|a_{i,0}| + L_\alpha A_i)},$$

$$0 < R < \min\left\{\frac{2\tau_0}{L_\alpha}, \frac{3\tau_0 S}{18S_0 + 2^{\alpha+1}|S_1| + 2^{\alpha+4}L_\alpha S}\right\}, \tag{I9}$$

$$0 < R_2 \le \min\left\{1,\ \frac{R(2r_0 - L_\alpha R)}{2r_0 + L_\alpha}\right\},$$

$$0 < R_i \le \frac{1}{2} R_2,$$

$$H > \max\left\{1, H_0, \frac{2S_0}{U_i} A_i H_0, 2^{\alpha+1}\frac{|r_1|}{|r_0|}, \frac{2^{\alpha-2}}{3}\frac{C_i}{R_i}\right\},$$

где

$$C_i = |\vec{P}_{i,1}| B_i + (3|b_{i,0}| + 2L_\alpha B_i) R_i + |u_{i,0}| R_2 + r_0 U_i + L_\alpha R_2 U_i,$$

$i = 0,1.$

Тогда легко доказать, что из (I9) следуют соотношения (I8). Таким образом соотношения (I4) имеют место для всех $n = 1,2,\dots$.

Теперь докажем абсолютную и равномерную сходимость рядов (II) на сегменте

$$|t - t_0| \le h, \quad h = H^{-1},$$

где $H$ - определенное положительное число, удовлетворяющее последнему из соотношений (I9).

В самом деле, имеем, например,

$$|\vec{r}(t)| \le r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |\vec{r}_n| |t - t_0|^n \le r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_2 \frac{H^n}{n^\alpha}(t - t_0)^n \le$$

$$\le r_0 + R_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty,$$

ибо, по условию $\alpha > 1$.

Ряды, получаемые из (II) дифференцированием любое число раз, очевидно, также сходятся абсолютно и равномерно на сегменте $|t-t_0| \le h_1, \quad h_1 < h = H^{-1}$

или же на сегменте $|t-t_0| \le h$, если заданное число $\alpha > 1$ считать достаточно большим.

5. Пользуясь соотношениями (I4), легко оценить остатки степенных рядов (II). Например, для ряда

$$\vec{\rho}_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\rho}_{i,n}(t-t_0)^n = \sum_{\kappa=0}^{n} \vec{\rho}_{i,\kappa}(t-t_0)^\kappa + [\vec{\rho}_i(t)]_n,$$

где

$$[\vec{\rho}_i(t)]_n = \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \vec{\rho}_{i,\kappa}(t-t_0)^\kappa, \qquad n \ge 1,$$

является его остатком, получаем оценку:

$$|[\vec{\rho}_i(t)]_n| \le \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} |\vec{\rho}_{i,\kappa}| (t-t_0)^\kappa \le \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} R_i \frac{H^\kappa}{\kappa^\alpha} |t-t_0|^\kappa \le$$

$$\le R_i \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^\alpha}$$

или

$$|[\vec{\rho}_i(t)]_n| < \frac{R_i}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}},$$

$i = 0,1.$

Поступила I6.Ш.I978

Кафедра астрономии

ЛИТЕРАТУРА

I. Н.Г.Магнарадзе, Бюлл.Абастуманской астрофиз.обс., 1959, № 24, I45-I59.

2. Н.Г.Магнарадзе, Бюлл.Абастуманской астрофиз.,обс., 1961, № 26, 215-224.
3. Н.Г.Магнарадзе, Бюлл.Абастуманской астрофиз. обс., 1964, № 30, 145-152.
4. Н.Г.Магнарадзе, Бюлл.Абастуманской астрофиз. обс., 1966, № 32, 135-156.
5. Н.Г.Магнарадзе, Сообщения АН Груз.ССР, 1972, 68, № 1, 57-60.
6. Н.Г.Магнарадзе, Сообщения АН Груз.ССР, 1972, 68, № 2, 325-328.
7. Н.Г.Магнарадзе, Труды Тбилисского гос.ун-та, 1976, 1979, 75-83.
8. J.F.Steffensen, Mat Fys Medd.Dan.Vid. Selsk., 1956, 30, N18, 3-17.
9. E.Rabe, Astr. J., 1961, 66, N9, 500-516.
10. В.А.Брумберг, Труды Ин-та теорет.астр., 1963, № 4, 234-256.
11. P.Sconzo, Astr. Nachr., 1967, 290, N4, 163-170.
12. В.Ф.Мячин, О.А.Сизова, Труды Института теорет.астр., 1970, XII, № 5, 389-400.
13. R.Broucke, Celestial Mech., 1971,4, N1, 110-115.
14. Charles E.Roberts JR., Celestial Mech., 1975, 12,N4, 397-407.
15. Г.Н.Дубошин, Небесная механика, Аналитические и качественные методы. М., "Наука", 1964, 560 стр.
16. К.А.Зигель, Лекции по небесной механике. М.,ИЛ, 1959, 300 стр.

ნ.მაღნარაძე



## ცვლადი მასიანი ორი სხეულის მოძრაობის შესახებ ნიუტონისეულ გრავიტაციულ ველში

რეზიუმე

აგებულია ცვლადი მასიანი ორი სხეულის ნიუტონისეულ გრავიტაციულ ველში რეგულარული მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი დროის ხარისხოვანი მწკრივების სახით.

ამ მწკრივების კოეფიციენტებისათვის მიღებულია რეკურენტული დამოკიდებულებები, რომლებიც ძალიან მოხერხებულია მათი ანგარიშისათვის თანამედროვე გამომთვლელ მანქანებზე.

დამტკიცებულია ხსენებული მწკრივების კრებადობა და შეფასებულია შესაბამისი ნაშთები.

N.Magnaradze

## ON THE MOTION OF TWO BODIES OF VARIABLE MASSES IN A NEWTONIAN GRAVITATIONAL FIELD

Summary

A solution of the system of differential equations of regular motion of two bodies of variable masses in a newtonian gravitational field is constructed in the form of power series in time.

For the coefficients of these series recurrent relations are obtained, which are very convenient for their computation on modern computers.

The convergence of these series is demonstrated and the estimations of their remainders is obtained.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

204, 1978

УДК 539.3.01

# ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

М.О.Башелейшвили, Д.Г.Натрошвили

I. <u>Обозначения и определения</u>. Пусть $E_3$ – трехмерное евклидово пространство и $\mathcal{D}^+$ – конечная область из $E_3$, ограниченная простой замкнутой поверхностью $S \equiv \partial\mathcal{D}^+$; $\mathcal{D}^- = E_3 \setminus \bar{\mathcal{D}}^+$, где $\bar{\mathcal{D}}^+ = \mathcal{D}^+ \cup S$.

Введем обозначения: $I = [0, +\infty)$, $Q^\pm = \mathcal{D}^\pm \times I$, $\partial Q^\pm = \partial\mathcal{D}^\pm \times I$, $\bar{Q}^\pm = Q^\pm \cup \partial Q^\pm$.

Будем считать, что $S \in \Pi_2(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ (см. [1], [2]).

Вектор-функцию $u: \bar{\mathcal{D}}^+ \to E_3$ назовем регулярной в $\mathcal{D}^+$, если $u \in C^2(\mathcal{D}^+) \cap C^1(\bar{\mathcal{D}}^+)$ и имеет интегрируемые в $\mathcal{D}^+$ вторые производные.

Вектор-функцию $u: \bar{\mathcal{D}}^- \to E_3$ назовем регулярной в $\mathcal{D}^-$, если $u \in C^2(\mathcal{D}^-) \cap C^1(\bar{\mathcal{D}}^-)$, имеет интегрируемые в $\mathcal{D}^-$ вторые производные и удовлетворяет условиям

$$|u_k(x)| < \frac{c}{|x|}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_j} u_k(x)\right| < \frac{c}{|x|^2}, \quad k, j = 1,2,3,$$

при $x\in\mathcal{D}^-\setminus Ш(0;1)$ , где $Ш(0;1)=\{x\in E_3\,|\,|x|<1\}$,

$|x|=\{x_1^2+x_2^2+x_3^2\}^{1/2}$.

Вектор-функцию $u:\bar{Q}^+\to E_3$ назовем регулярной в $Q^+$, если $u\in C^2(Q^+)\cap C^1(\bar{Q}^+)$ и для произвольно фиксированного $t\in I$ вторые производные по всем переменным интегрируемы в $\mathcal{D}^+$.

Вектор-функцию $u:\bar{Q}^-\to E_3$ назовем регулярной в $Q^-$, если $u\in C^2(Q^-)\cap C^1(\bar{Q}^-)$ , для произвольно фиксированного $t\in I$ вторые производные по всем переменным интегрируемы в $\mathcal{D}^-$ и

$$\forall\, x\in\mathcal{D}^-\setminus Ш(0;1),\quad \forall t\in[0,t_1],\quad t_1>0:$$

$$|u_k(x,t)|<\frac{c}{|x|},\quad \left|\frac{\partial}{\partial x_j}u_k(x,t)\right|<\frac{c}{|x|^2},\quad k,j=1,2,3.$$

П. Постановка задач. Теоремы единственности. Основные задачи динамики теории упругости для однородных анизотропных сред, без ограничения общности, можно сформулировать следующим образом.

Найти регулярное в $Q^\pm$ решение уравнения [3] , [4]

$$A(\partial x)u(x,t)-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)=F(x,t),\quad (x,t)\in Q^\pm, \tag{I}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{t\to 0+}u(x,t)=0,\quad \lim_{t\to 0+}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=0,\quad x\in\bar{\mathcal{D}}^\pm, \tag{2}$$

и одному из следующих граничных условий

$$\{u(z,t)\}^\pm\equiv\lim_{\mathcal{D}^\pm\ni x\to z\in S}\{u(x,t)\}=f(z,t),\quad (z,t)\in\partial Q^\pm, \tag{I$^\pm$}$$

или

$$\left\{T(\partial z,\nu)u(z,t)\right\}^{\pm}=\lim_{D^{\pm}\ni x\to z\in S}\left\{T(\partial x,\nu)u(x,t)\right\}-f(z,t),\qquad (z,t)\in\partial Q^{\pm},\tag{II}^{\pm}$$

где $u(u_1,u_2,u_3)$ - вектор смещения,

$$A=\|A_{kp}\|_{3\times 3},\quad A_{kp}(\xi)=\sum_{j,q=1}^{3}C_{kjpq}\xi_j\xi_q,\quad k,j=1,2,3,$$

$C_{kjpq}$ - упругие постоянные [5] $(C_{kjpq}=C_{pqkj}=C_{jkpq}=C_{kjqp})$,

$T$ - оператор напряжения:

$$T=\|T_{kp}\|_{3\times 3},\quad T_{kp}(\xi,\nu)=\sum_{j,q=1}^{3}C_{kjpq}\nu_j\xi_q,\quad k,p=1,2,3,$$

$\nu$ - орт внешней по отношению к $D^+$ нормали в точке $z\in S$, $F=(F_1,F_2,F_3)$ и $f=(f_1,f_2,f_3)$ заданные соответственно на $\bar{Q}^{\pm}$ и $\partial Q^{\pm}$ векторы, $\rho$ - плотность среды (ниже будем считать, что $\rho=1$ ).

Справедлива

Теорема I. Задача (I)-(2)-$(K)^{\pm}$ $(K=I,\text{II})$ при $F=0$, $f=0$ в классе регулярных векторов имеет только нулевое решение.

Доказательство. Для произвольного регулярного в $Q^{\pm}$ вектора можем писать

$$\int_{D^{\pm}}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\left\{A(\partial x)u(x,t)-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right\}dx=$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{D^{\pm}}\left\{\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2+E(u,u)\right\}dx\pm\tag{3}$$
$$\pm\int_{S}\left\{\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}\right\}^{\pm}\left\{T(\partial z;\nu)u(z,t)\right\}^{\pm}dS,$$

где

$$E(u,u)=\sum_{k,j,p,q=1}^{3} c_{kjpq}\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_j}\frac{\partial u_p(x,t)}{\partial x_q}. \qquad (4)$$

Выражению (4) можно придать вид

$$E(u,u)=\sum_{k,j,p,q=1}^{3} c_{kjpq}\, e_{kj}\, e_{pq}, \qquad (5)$$

где
$$e_{kj}=\frac{1}{2}\Big[\frac{\partial}{\partial x_j}u_k(x,t)+\frac{\partial}{\partial x_k}u_j(x,t)\Big],\quad k,j=1,2,3.$$

Известно [4], что форма (5) при условии $e_{kj}=e_{jk}$ является положительно определенной.

С учетом этого свойства, из формулы (3) в условиях теоремы I получим:
$$\Big[\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\Big]^2+E(u,u)=0.$$

И, следовательно, $u\equiv 0$ ч.т.д.

III. Сведение к эллиптическим задачам. Ниже, при изучении вопроса существования решении сформулированных динамических задач, использован метод, изложенный в работе [6]. В этом методе основную роль играет исследование специальных эллиптических задач и свойства тензоров Грина этих задач.

Рассмотрим следующую эллиптическую краевую задачу.

Найти регулярный в $\mathcal{D}^{\pm}$ вектор $v$, удовлетворяющий уравнению

$$A(\partial x)v(x,\tau)-\tau^2 v(x,\tau)=H(x,\tau),\ x\in\mathcal{D}^{\pm}, \qquad (6)$$

и одному из следующих граничных условий

$$\{v(z,\tau)\}^{\pm}=h(z,\tau),\quad z\in S \qquad (I.\tau)^{\pm}$$

или

$$\{T(\partial z,\nu)v(z,\tau)\}^{\pm}=h(z,\tau),\quad z\in S, \qquad (\mathrm{II}.\tau)^{\pm}$$

где $\tau \in \Pi(\sigma_1)$, $H$ и $h$ известные вектор-функции, определенные соответственно на $\mathcal{D}^{\pm} \times \Pi(\sigma_1)$ и $S \times \Pi(\sigma_1)$, $\Pi(\sigma_1)$ – комплексная полуплоскость $Re\,\tau \geq \sigma_1 > \sigma_0 \geq 0$, $\sigma_1 = const$, $\sigma_0 = const$.

Сначала рассмотрим задачу (6) – (I. $\imath$ $)^+$.

Представим вектор $v$ в виде двух слагаемых:

$$v = \overset{(1)}{v} + \overset{(2)}{v}, \tag{7}$$

где $\overset{(1)}{v}$ удовлетворяет условиям

$$A(\partial x)\overset{(1)}{v}(x,\tau) = 0, \qquad x \in \mathcal{D}^+, \tag{8}$$

$$\left\{\overset{(1)}{v}(z,\tau)\right\}^+ = h(z,\tau), \qquad z \in S, \tag{9}$$

а $\overset{(2)}{v}$ – условиям

$$A(\partial x)\overset{(2)}{v}(x,\tau) - \tau^2 \overset{(2)}{v}(x,\tau) = M(x,\tau), \qquad x \in \mathcal{D}^+, \tag{I0}$$

$$\left\{\overset{(2)}{v}(z,\tau)\right\}^+ = 0, \qquad z \in S, \tag{II}$$

$$M(x,\tau) = H(x,\tau) + \tau^2 \overset{(1)}{v}(x,\tau). \tag{I2}$$

Имеют места следующие теоремы.

Теорема 2. Если $\forall z \in S: h(z,\cdot)$ – аналитический в $\Pi(\sigma_1)$ вектор и $\forall \tau \in \Pi(\sigma_1): h(\cdot,\tau) \in C^{1,\beta}(S)$, $S \in \Lambda_2(\alpha)$, $0 < \beta < \alpha \leq 1$, то существует единственное регулярное решение $\overset{(1)}{v}$ задачи (8)-(9), при $\forall x \in \overline{\mathcal{D}}^+$ аналитическое по $\tau$ в $\Pi(\sigma_1)$ и

$$\|\overset{(1)}{v}(\cdot,\tau)\|_{(\mathcal{D}^+,k)} \leq c\,\|h(\cdot,\tau)\|_{(S,k,\beta)}, \quad k = 0,1, \tag{I3}$$

$$\|\overset{(1)}{v}(\cdot,\tau)\|_{(\mathcal{D}^+,2)} \leq c(\sigma)\,\|h(\cdot,\tau)\|_{(S,0)}, \tag{I4}$$

где символы $\|\cdot\|_{(\mathcal{D}^+,k)}$ и $\|\cdot\|_{(S,k,\beta)}$ обозначают норму соответственно в пространствах $C^k(\overline{\mathcal{D}}^+)$ и $C^{k,\beta}(S)$

(см.например [2] , гл. I, § I5), $\bar{\mathcal{D}}_1^+\subset\mathcal{D}^+$, $\delta=\min|y-y'|$, при $(y,y')\in\partial\mathcal{D}^+\times\partial\mathcal{D}_1^+$, $c=const$, $C(\delta)$ постоянная, зависящая от $\delta$ ($C(\delta)\longrightarrow+\infty$, при $\delta\to0$); $C$ и $C(\delta)$ не зависят от $\tau$.

<u>Теорема 3</u>. Если $\forall x\in\bar{\mathcal{D}}^+ : M(x,\cdot)$ аналитический в $\Pi(\sigma_1)$ вектор и $\forall\tau\in\Pi(\sigma_1): M(\cdot,\tau)\in C^1(\bar{\mathcal{D}}^+)$, $S\in\Lambda_2(\alpha)$, $0<\alpha\le1$, то существует единственное регулярное решение $\overset{(2)}{v}$ задачи (I0)-(II), аналитическое по $\tau$ в $\Pi(\sigma_1)$ при $\forall x\in\bar{\mathcal{D}}^+$ и

$$\|\overset{(2)}{v}(\cdot,\tau)\|_{(\mathcal{D}^+,0)}\le c|\tau|\,\|M(\cdot,\tau)\|_{(\mathcal{D}^+,0)}, \qquad (I5)$$

$$\|\overset{(2)}{v}(\cdot,\tau)\|_{(\mathcal{D}^+,1)}\le c|\tau|^{4/3}\,\|M(\cdot,\tau)\|_{(\mathcal{D}^+,0)}, \qquad (I6)$$

$$\|\overset{(2)}{v}(\cdot,\tau)\|_{(\mathcal{D}_1^+,2)}\le C(\delta)\Big[|\tau|^3\,\|M(\cdot,\tau)\|_{(\mathcal{D}^+,0)}+ \qquad (I7)$$
$$+\|M(\cdot,\tau)\|_{(\mathcal{D}^+,1)}\Big],$$

где $\bar{\mathcal{D}}_1^+\subset\mathcal{D}^+$, $\delta=\min|y-y'|$ при $(y,y')\in\partial\mathcal{D}^+\times\partial\mathcal{D}_1^+$, $c=const$, $C(\delta)$ - постоянная, зависящая от $\delta$ ($C(\delta)\to\infty$ при $\delta\to0$); $C$ и $C(\delta)$ не зависят от $\tau$.

IУ. <u>Доказательство теоремы 2</u>. В условиях, наложенных на упругие постоянные $C_{kjpq}$, система (8) является самосопряженной, сильно эллиптической системой [7] .

Используя положительную определенность формы (5), легко доказать, что однородная задача (8)-(9) (когда $h$ = 0) имеет только нулевое решение.

Как было анонсировано в работе [8] , основные задачи статики анизотропной теории упругости можно исследовать методом потенциала и сингулярных интегральных уравнений. Ниже приводится подробное доказательство существования решения т.н. первой основной задачи (т.е. задачи (8)-(9)).

Пусть $\Gamma = \|\Gamma_{kj}\|_{3\times 3}$ фундаментальное решение уравнения (8):

$$A(\partial x)\Gamma(x) = \delta(x)E,$$

где $\delta(\cdot)$ – распределение Дирака, $E = \|\delta_{kj}\|_{3\times 3}$ – единичная матрица. Свойства фундаментального решения для общих эллиптических систем изучены во многих работах (см., напр., [9], [10], [11]).

В нашем случае можно доказать, что преобразование Фурье от локально интегрируемой матрицы $B = \|B_{kj}\|_{3\times 3}$, где

$$B_{kj}(\rho) = \frac{\mathcal{D}_{kj}(\rho)}{\det A(i\rho)}, \quad \rho \in E_3,$$

$i$ – мнимая единица, $\mathcal{D}_{kj}(\rho)$ – алгебраическое дополнение элемента $A_{kj}(i\rho)$ матрицы $A(i\rho)$, является фундаментальным решением, т.е.

$$\Gamma(x) = \frac{1}{8\pi^3}\int_{E_3} B(\rho)e^{i\rho x}d\rho. \qquad (18)$$

Формуле (18) можно придать вид:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{8\pi^2|x|}\int_0^{2\pi} C(x,\varphi)d\varphi, \qquad (19)$$

где

$$C = \|C_{kj}\|_{3\times 3}, \quad C_{kj}(x,\varphi) = B(a(x)\omega), \quad k,j = 1,2,3,$$

$\omega = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, $a(x) = \|a_{kj}(x)\|_{3\times 3}$ – ортогональная матрица, в которой $a_{k3} = \frac{x_k}{|x|}$, $k = 1,2,3$.

Из формулы (19) очевидно, что $\Gamma_{kj} \in C^\infty(E_3 \setminus \{0\})$ и является однородной функцией степени –1.

Рассмотрим обобщенные потенциалы простого и двойного слоя:

$$V(x) = \int_S \Gamma(y-x)\psi(y)d_y S, \qquad (20)$$

$$W(x)=\int_S [T(\partial y,n)\Gamma(y-x)]'\varphi(y)\,d_yS, \tag{21}$$

где $\psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$ и $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ – плотности потенциалов, символ $[\cdot]'$ обозначает транспонирование матрицы, $n$ -орт внешней по отношению к $\mathcal{D}^+$ нормали в точке $y\in S$.

Используя результаты работ [12], [13], можно доказать следующие леммы.

Лемма I. При $\varphi\in C^{1,\beta}(S)$, $S\in \text{Л}_2(\alpha)$, $0<\beta<\alpha\le 1$ вектор, определенный формулой (21), является регулярным в $\mathcal{D}^\pm$ решением уравнения (8) и

$$[W(z)]^{\pm}=\pm\frac{1}{2}\varphi(z)+\int_S [T(\partial y,n)\Gamma(y-z)]'\varphi(y)\,d_yS,\quad z\in S, \tag{22}$$

где сингулярный интеграл в правой части равенства (22) понимается в смысле главного значения.

При этом

$$\|W\|_{(\mathcal{D}^\pm,k)}\le C\,\|\varphi\|_{(S,k,\beta)},\quad k=0,1,$$

$$\|W\|_{(\mathcal{D}_1^+,2)}\le C(\delta)\,\|\varphi\|_{(S,0)},\quad \overline{\mathcal{D}}_1^{\,\pm}\subset\mathcal{D}^\pm$$

$C=const>0$, $C(\delta)$ – постоянная, зависящая от $\delta=\min|y-y'|$, при $(y,y')\in S\times\partial\mathcal{D}_1^\pm$.

Лемма 2. При $\psi\in C^{0,\beta}(S)$, $S\in \text{Л}_2(\alpha)$, $0<\beta<\alpha\le 1$ вектор, определенный формулой (20), является регулярным в $\mathcal{D}^\pm$ решением уравнения (8) и

$$\{T(\partial z,\nu)V(z)\}^{\pm}=\mp\frac{1}{2}\psi(z)+\int_S T(\partial z,\nu)\Gamma(y-z)\psi(y)\,d_yS,\quad z\in S, \tag{23}$$

где сингулярный интеграл в правой части равенства (23) понимается в смысле главного значения.

При этом

$$\|V\|_{(\mathcal{D}^{\pm},0)} \le c\|\varphi\|_{(S,0)},$$

$$\|V\|_{(\mathcal{D}^{\pm},1)} \le c\|\varphi\|_{(S,0,\beta)},$$

$$\|V\|_{(\mathcal{D}_1^{\pm},2)} \le c(\delta)\|\varphi\|_{(S,0)}, \quad \overline{\mathcal{D}}_1^{\pm}\subset\mathcal{D}^{\pm},$$

$c=const>0$ , $c(\delta)$ – постоянная, зависящая от $\delta=\min|y-y'|$ при $(y,y')\in S\times\partial\mathcal{D}_1^{\pm}$.

Будем искать решение задачи (8)-(9) в виде потенциала (21). Тогда для определения искомой плотности $\varphi$ получим сингулярное интегральное уравнение:

$$K(\varphi)(z)\equiv\frac{1}{2}\varphi(z)+\int_S[T(\partial y,n)\Gamma(y-z)]'\varphi(y)d_yS=h(z,\tau), \quad z\in S. \tag{24}$$

Сопряженное однородное уравнение имеет вид:

$$K^*(\psi)(z)\equiv\frac{1}{2}\psi(z)+\int_S[T(\partial z,\nu)\Gamma(y-z)]\psi(y)d_yS=0, \quad z\in S. \tag{25}$$

Это уравнение получается, если в области $\mathcal{D}^-$ решение уравнения (8), удовлетворяющее условию

$$[T(\partial z,\nu)V(z)]^-=0, \tag{26}$$

будем искать в виде потенциала простого слоя (20).

Согласно общей теории сингулярных интегральных уравнений (см. [I2] , [I4] , [I5] ), для нормальной разрешимости уравнения (24) достаточно доказать, что его символический детерминант отличен от нуля.

Характеристические матрицы $\overset{(1)}{\chi}$ и $\overset{(2)}{\chi}$, соответствующие уравнениям (24) и (25) в точке $z\in S$, вычисляются формулами

$$\overset{(1)}{\chi}(z,\vartheta)=\frac{1}{2}E+\left\{|\xi|^2\left[T(b(z)\nabla_\xi,\nu)\Gamma(b(z)\xi)\right]\right\}'_{\xi_3=0}, \tag{27}$$

$$\overset{(2)}{\chi}(z,\vartheta)=\frac{1}{2}E-\left\{|\xi|^2\left[T(b(z)\nabla_\xi,\nu)\Gamma(b(z)\xi)\right]\right\}_{\xi_3=0}, \tag{28}$$

где $\xi\in E_3$, $\nabla_\xi=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\frac{\partial}{\partial\xi_2},\frac{\partial}{\partial\xi_3}\right)$, $b=\|b_{kj}\|_{3\times 3}$ – ортогональная матрица, в которой $b_{k3}(z)=\nu_k$, $k=1,2,3$, $\xi_1=|\bar\xi|\cos\vartheta$, $\xi_2=|\bar\xi|\sin\vartheta$, $\bar\xi=(\xi_1,\xi_2,0)$, $0\le\vartheta<2\pi$.

Легко показать, что такие же (с точностью до знака) характеристические матрицы получаются при рассмотрении аналогичных задач для полупространства

$$E_3^+(\nu)=\left\{x\in E_3\Big|\sum_{k=1}^3\nu_k x_k>0\right\} \text{ и } E_3^-(\nu)=\left\{x\in E_3\Big|\sum_{k=1}^3\nu_k x_k<0\right\},$$

если решения ищутся в виде потенциалов двойного и простого слоя. Тут получаются сингулярные интегральные уравнения на $\partial E_3^+(\nu)=\partial E_3^-(\nu)=\left\{x\in E_3\Big|\sum_{k=1}^3\nu_k x_k=0\right\}$.

Используя тот факт, что символические матрицы таких уравнений совпадают с преобразованиями Фурье их сингулярных ядер (см. [14] ) и что эти символические матрицы совпадают (с точностью до знака) с символическими матрицами $\sigma(\overset{(1)}{\chi})$ и $\sigma(\overset{(2)}{\chi})$ соответствующими характеристикам (27) и (28), получим:

$$\sigma[\overset{(1)}{\chi}(z,\vartheta)]=[R^{(+)}(\bar p)]',$$

$$\sigma[\overset{(2)}{\chi}(z,\vartheta)]=-R^{(-)}(\bar p),$$

где

$$\bar{P}=(P_1,P_2),\quad P_1=|\bar{P}|\cos\vartheta,\quad P_2=|\bar{P}|\sin\vartheta,\quad |\bar{P}|=\sqrt{P_1^2+P_2^2},$$

$$R^{(\pm)}(\bar{P})=-\frac{i}{2\pi}\int_{L^{\pm}} T(b(z)\rho,\nu)B(b(z)\rho)\,d\rho_3, \tag{29}$$

$\rho=(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$, $L^{+}(L^{-})$ – кусочно гладкая кривая в верхней (нижней) комплексной полуплоскости, охватывающая все корни уравнения $\det B(b(z)\rho)=0$ относительно $\rho_3$ с положительными (отрицательными) мнимыми частями (в нашем случае имеются три корня с положительными и три корня с отрицательными мнимыми частями).

Легко показать, что $R^{(\pm)}_{kj}$ является однородной от $(\rho_1,\rho_2)$ функцией нулевой степени; поэтому без ограничения общности можно считать, что $|\bar{P}|=1$

С другой стороны, задачи для полупространства $E_3^{\pm}(\nu)$ известным образом (применением преобразования Фурье) сводятся к краевым задачам для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, задача

$$A(\partial x)V(x)=0,\quad x\in E_3^{+}(\nu),$$
$$[T(\partial z,\nu)V(z)]^{+}=\mathcal{F}(z),\quad z\in\partial E_3^{+}(\nu),$$
$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{\partial^m}{\partial x_k^m}V_j(x)=0,\quad m=0,1,\quad k,j=1,2,3,$$

сводится к задаче

$$A(b(z)\mathcal{P})M(\bar{P},\xi_3)=0,\qquad \xi_3>0, \tag{30}$$

$$\lim_{\xi_3\to 0+} T(b(z)\mathcal{P},\nu)M(\bar{P},\xi_3)=\hat{\mathcal{F}}(-\bar{P}), \tag{31}$$

$$\lim_{\xi_3\to 0+}\frac{d^k}{d\xi_3^k}M(\bar{P},\xi_3)=0,\quad k=0,1,\quad \bar{P}=(P_1,P_2), \tag{32}$$

где $\mathcal{P}=(-iP_1,-iP_2,\frac{d}{d\xi_3})$, $\hat{\mathcal{F}}$ – преобразование Фурье вектора $\mathcal{F}$.

Сильная эллиптичность системы (8) дает возможность доказать, что столбцы матрицы

$$N^{(+)}(\bar{\rho},\xi_3)=\frac{1}{2\pi}\int_{L^-}B(b(z)\rho)e^{-i\rho_3\xi_3}\,d\rho_3$$

представляют линейно независимые решения уравнения (30), стремящиеся к нулю при $\xi_3\to+\infty$, для $\forall\bar{\rho}\in E_2\setminus\{0\}$, а столбцы матрицы

$$N^{(-)}(\bar{\rho},\xi_3)=\frac{1}{2\pi}\int_{L^+}B(b(z)\rho)e^{-i\rho_3\xi_3}\,d\rho_3$$

являются линейно независимыми решениями, стремящимися к нулю при $\xi_3\to-\infty$.

Если теперь решение задачи (30)-(32) ищем в виде линейной комбинации столбцов матрицы $N^{(+)}$, то, в силу (31), для искомых постоянных получим линейную систему алгебраических уравнений, главная матрица которой будет $R^{(+)}(\bar{\rho})$ (см. (29)).

С учетом формулы

$$\int_{a_1}^{a_2}A(b(z)\mathcal{P})M\cdot\bar{M}\,d\xi_3=\left[T(b(z)\mathcal{P},\nu)M\cdot\bar{M}\right]_{a_1}^{a_2}-$$

$$-\frac{1}{4}\int_{a_1}^{a_2}\sum_{k,j,p,q=1}^{3}C_{kjpq}\,e_{kj}\,\bar{e}_{pq}\,d\xi_3,$$

где $0\le a_1<a_2\le+\infty$, $\bar{M}$ - комплексно сопряженный к $M$,

$$e_{kj}=\nu_j\frac{dM_k}{d\xi_3}+\nu_k\frac{d\bar{M}_j}{d\xi_3}+i\sum_{l=1}^{2}\left[b_{jl}\bar{M}_k+b_{kl}\bar{M}_j\right]\rho_l,$$

легко доказать, что однородная задача (30)-(32) имеет лишь тривиальное решение.

Из этого факта следует, что

$$\forall \bar{p} \in E_2 \setminus \{0\} : \det R^{(+)}(\bar{p}) \neq 0.$$

Аналогично получим, что

$$\forall \bar{p} \in E_2 \setminus \{0\} : \det R^{(-)}(\bar{p}) \neq 0.$$

Таким образом, символические детерминанты, соответствующие уравнениям (24) и (25), отличны от нуля и эти уравнения нормально разрешимы.

Можно доказать, что соответствующие им однородные уравнения имеют лишь тривиальные решения; поэтому индексы сингулярных операторов $K$ и $K^*$ равны нулю и неоднородное уравнение (24) разрешимо при произвольной правой части $h$.

Теперь, используя лемму I и теорему вложения для решения сингулярного интегрального уравнения [12], легко довести до конца доказательство теоремы 2, ч.т.д.

Замечание I. После нашей работы [8] появилась работа [16], в которой тоже сформулированы теоремы о нормальности операторов $K$ и $K^*$ и о существовании решения основных задач статики анизотропной теории упругости для однородной среды.

У. Тензоры Грина. Тензором Грина первой основной задачи для уравнения (8) будем называть матрицу $\overset{(1)}{\mathcal{G}}$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\forall (x,y) \in (\bar{\mathcal{D}}^+ \times \bar{\mathcal{D}}^+) \setminus \Lambda : \overset{(1)}{\mathcal{G}}(x,y) = \Gamma(x-y) - \overset{(1)}{g}(x,y),$

$\Lambda = \{(x,y) \in \bar{\mathcal{D}}^+ \times \bar{\mathcal{D}}^+ / x = y\},$

2) $\forall (x,y) \in \mathcal{D}^+ \times \mathcal{D}^+ : A(\partial x)\overset{(1)}{g}(x,y) = 0,$

3) $\forall (z,y) \in S \times \mathcal{D}^+ : [\overset{(1)}{\mathcal{G}}(z,y)]^+ = 0.$

Используя результаты работы [I7], можно доказать следующие предложения.

<u>Лемма 3</u>. Если $S\in \Lambda_2(\alpha)$, $0<\alpha\leq 1$, то существует тензор Грина $\overset{(1)}{\mathcal{G}}$ первой основной задачи для уравнения (8) и

$$\overset{(1)}{\mathcal{G}}_{kj}\in C(1,\alpha',\alpha'),\ \frac{\partial}{\partial x_l}\overset{(1)}{\mathcal{G}}_{kj}\in C(2,\alpha',\alpha'),\ \forall\alpha'\in(0,\alpha),\ \text{на}\ \bar{D}^+\times\bar{D}^+,$$

$$\forall(x,y)\in(\bar{D}^+\times\bar{D}^+)\setminus\Lambda:[\overset{(1)}{\mathcal{G}}(x,y)]'=\overset{(1)}{\mathcal{G}}(y,x).$$

Определение класса $C(m,\alpha,\beta)$ см. в [I2].

Тензор Грина второй основной задачи для уравнения (8) определяется аналогично (см. [I7]) и имеет те же свойства, что и тензор Грина первой задачи.

VI. Доказательство теоремы 3. Используя лемму 3, можно показать, что всякое регулярное решение задачи (I0)-(II) является решением интегрального уравнения

$$\overset{(2)}{U}(x,\tau)-\tau^2\int_{D^+}\overset{(1)}{\mathcal{G}}(x,y)\overset{(2)}{U}(y,\tau)dy=\int_{D^+}\overset{(1)}{\mathcal{G}}(x,y)M(y,\tau)dy, \qquad (33)$$

и, наоборот, всякое решение уравнения (33) при условиях теоремы 3 является регулярным решением задачи (I0)-(II).

Теперь, для завершения доказательства теоремы 3 следует повторить рассуждение, приведенное в пункте VII, параграфа 6, работы [I7].

VII. Основные теоремы. Из теорем 2 и 3 с учетом формулы (7) следует

Т е о р е м а 4. Если $S\in Л_2(\alpha)$, $\forall\tau\in\Pi(\sigma_1): h(\cdot,\tau)\in C^{1,\beta}(S)$,

$0<\beta<\alpha\le 1$, $H(\cdot,\tau)\in C^1(\bar{D}^+)$, $\forall z\in S$, $\forall x\in\bar{D}^+: h(z,\cdot)$ и

$H(x,\cdot)$ -аналитические по $\tau$ в $\Pi(\sigma_1)$ векторы, то существует единственное регулярное решение $v$ задачи (6)-(I. $\tau$ )$^+$, оно является аналитическим по $\tau$ в $\Pi(\sigma_1)$ и

$$\|v(\cdot,\tau)\|_{(D^+,0)}\le C|\tau|\left[\|H(\cdot,\tau)\|_{(D^+,0)}+|\tau|^2\|h(\cdot,\tau)\|_{(S,0,\beta)}\right],$$

$$\|v(\cdot,\tau)\|_{(D^+,1)}\le C\Big[|\tau|^{\frac{13}{5}}\left(\|H(\cdot,\tau)\|_{(D^+,0)}+|\tau|^2\|h(\cdot,\tau)\|_{(S,0,\beta)}\right)+$$

$$+\|h(\cdot,\tau)\|_{(S,1,\beta)}\Big],$$

$$\|v(\cdot,\tau)\|_{(D_1^+,2)}\le C(\delta)\Big[|\tau|^3\left(\|H(\cdot,\tau)\|_{(D^+,0)}+|\tau|^2\|h(\cdot,\tau)\|_{(S,0,\beta)}\right)+$$

$$+\|H(\cdot,\tau)\|_{(D^+,1)}+|\tau|^2\|h(\cdot,\tau)\|_{(S,1,\beta)}\Big],$$

$$\bar{D}_1^+\subset D^+,\qquad \delta=\min|y-y'|,\quad (y,y')\in S\times\partial D_1^+.$$

Теперь, применяя свойства преобразования Лапласа, теорему 4 и схему исследования динамических задач, изложенную в работе [6] , можно доказать следующую основную теорему.

Т е о р е м а 5. Пусть $S\in Л_2(\alpha)$,

$\forall t\in I: F(\cdot,t)\in C^1(\bar{D}^+)$, $\forall x\in\bar{D}^+: F(x,\cdot)\in C^5(I)$,

$\forall t\in I: f(\cdot,t)\in C^{1,\beta}(S)$, $\forall z\in S: f(z,\cdot)\in C^7(I)$,

$$\forall x \in \mathcal{D}^+ : \lim_{t \to 0+} \frac{\partial^k}{\partial t^k} F(x,t) = 0, \quad k = \overline{0,3},$$

$$\forall z \in S : \lim_{t \to 0+} \frac{\partial^m}{\partial t^m} f(z,t) = 0, \quad m = \overline{0,5},$$

$$0 < \beta < \alpha \leq 1,$$

кроме того $f$, $F$ и их указанные производные при больших $t$ по модулю ограничены выражением $c \exp(\sigma_0 t)$ $(c = const > 0, \quad \sigma_0 = const \geq 0)$.

Тогда существует единственное регулярное в $Q^+$ решение $u$ задачи (1)-(2)-(I)$^+$ и оно представимо в виде:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\eta t} v(x,\eta) d\eta, \quad \sigma > \sigma_1,$$

где $v$ - решение задачи (6)-(I.$\tau$)$^+$ при

$$H(x,\tau) = \int_0^\infty e^{-\tau t} F(x,t) dt,$$

$$h(z,\tau) = \int_0^\infty e^{-\tau t} f(z,t) dt,$$

$$Re\, \tau \geq \sigma_1 > \sigma_0.$$

Замечание 2. Совершенно аналогично исследуются и задачи (1)-(2)-(I)$^-$, (1)-(2)-(II)$^\pm$. Можно исследовать также динамические задачи для однородных анизотропных упругих сред ограниченных несколькими замкнутыми поверхностями.

Поступила 9.III.1978
НИИ прикладной математики
ТГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.М.Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М., 1953.

2. В.Д.Купрадзе, Т.Г.Гегелиа, М.О.Башелейшвили, Т.В.Бурчу-

ладзе, Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М., 1976.

3. Н.И.Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.

4, С.Г.Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела. М., 1950.

5. А.Ляв, Математическая теория упругости. М.-Л., 1935.

6. В.Д.Купрадзе, Т.В.Бурчуладзе, Итоги науки и техники, т. 7, 1975, 163-292.

7. G.Fichera, Existence theorems in elasticity. Handb.d. Physik. Bd. VI/2, N3, Springer-Verlag, Heidelberg, 1973.

8. М.О.Башелейшвили, Д.Г.Натрошвили, ДАН СССР, т.231, №1, 1976, 53-56.

9. Л.Хермандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.

10. Ф.Йон, Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М., 1958.

11. И.М.Гельфонд, Г.Е.Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, вып. I, М., 1959.

12. Т.Г.Гегелиа, Некоторые вопросы теории многомерных сингулярных интегральных уравнений, теории потенциала и их приложений в теории упругости. Докт. дисс., Тбилисский мат. ин-т АН Груз. ССР, Тбилиси, 1963.

13. С.Агмон, А.Дуглис, Л.Ниренберг, Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М., 1962.

14. С.Г.Михлин, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., 1962.

15. R.T.Seely, Amer. J.Math., 83, N2, 1961, 265-275.

16. Р.В.Капанадзе, Сообщ. АН Груз. ССР, 88, № 2, 1977, 305-308.

17. Д.Г.Натрошвили, Оценки тензоров Грина теории упругости и некоторые их приложения. Изд.Тбилисского ун-та, Тбилиси, 1978.

მ.ბაშელეიშვილი, დ.ნატროშვილი

## დრეკადობის თეორიის დინამიკის ამოცანები ერთგვაროვანი ანიზოტროპული სხეულებისათვის

რეზიუმე

ლაპლასის გარდაქმნისა და პოტენციალთა თეორიის მეთოდების გამოყენებით შესწავლილია დრეკადობის კლასიკური თეორიის დინამიკის ძირითადი ამოცანები ერთგვაროვანი ანიზოტროპული სხეულებისათვის.

M.Basheleishvili, D.Natroshvili

## DYNAMICAL PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR HOMOGENEOUS ANISOTROPIC MEDIA

Summary

The basic dynamical problems of the theory of classical elasticity for homogeneous anisotropic media are studed by application of Laplace transformation and methods of the potential theory.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

204, 1978

УДК 539.3.01

# ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНО-КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ СТАТИКИ ДЛЯ СОСТАВНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

М.О.Башелейшвили, Л.Г.Гиоргашвили, Ш.П.Зазашвили

## § I. Об одном способе решения первой граничной задачи для концентрического кругового кольца

Система уравнений статики плоской теории упругости в компонентах смещения имеет вид

$$\mu \Delta u_1 + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div}\vec{u} = 0,$$
$$\mu \Delta u_2 + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_2}\operatorname{div}\vec{u} = 0, \qquad (\text{I.I})$$

где $u_1$ и $u_2$ – компоненты вектора смещения $\vec{u}$, $\lambda$ и $\mu$ – постоянные Ламе.

Пусть имеется круговое кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями $L_1$ и $L_2$ радиусов $R_1$ и $R_2$ $(R_1<R_2)$ с центром в начале координат.

Рассмотрим первую граничную задачу:

Найти внутри кольца регулярное решение $\vec{u}(u_1,u_2)$ системы (I.I) по граничному условию на $L_1$ и $L_2$

$$u_1 = u_1^- , \quad u_2 = u_2^- \quad \text{на } L_1 ,$$
$$u_1 = u_1^+ , \quad u_2 = u_2^+ \quad \text{на } L_2 , \tag{I.2}$$

где $u_1^-, u_2^-, u_1^+$ и $u_2^+$ – заданные функции.

С целью упрощения исследования поставленной задачи введем функции

$$U = x_1 u_1 + x_2 u_2 ,$$
$$V = - x_2 u_1 + x_1 u_2 . \tag{I.3}$$

Система (I.I) относительно функции $U$ и $V$ примет вид

$$\mu \Delta U = 2\mu\theta - (\lambda+\mu)\rho \frac{\partial\theta}{\partial\rho} ,$$
$$\mu \Delta V = 2\mu\omega - (\lambda+\mu) \frac{\partial\theta}{\partial\psi} , \tag{I.4}$$

где $(\rho,\psi)$ – полярные координаты точки $x(x_1, x_2)$,

$$\theta = div\,\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{\partial V}{\partial\psi}\right), \quad \Delta\theta = 0,$$
$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho} - \frac{\partial U}{\partial\psi}\right), \quad \Delta\omega = 0. \tag{I.5}$$

Заметим, что система (I.I) относительно функции $\theta$ и $\omega$ перепишется так:

$$(\lambda+2\mu)\rho\frac{\partial\theta}{\partial\rho} - \mu\frac{\partial\omega}{\partial\psi} = 0,$$
$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial\psi} + \mu\rho\frac{\partial\omega}{\partial\rho} = 0. \tag{I.6}$$

Граничные условия для функции $U$ и $V$ будут иметь вид

$$U = U^+ = R_2(u_1^+\cos\psi + u_2^+\sin\psi), \quad V = V^+ = R_2(u_2^+\cos\psi - u_1^+\sin\psi) \text{ на } L_2,$$
$$U = U^- = R_1(u_1^-\cos\psi + u_2^-\sin\psi), \quad V = V^- = R_1(u_2^-\cos\psi - u_1^-\sin\psi) \text{ на } L_1. \tag{I.7}$$

Гармонические в кольце функции $\theta$ и $\omega$ будем искать в виде

$$\theta = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{R_1}{\rho}\right)^n A_n + \left(\frac{\rho}{R_2}\right)^n B_n\right], \tag{I.8}$$

$$\omega = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{R_1}{\rho}\right)^n C_n + \left(\frac{\rho}{R_2}\right)^n D_n\right], \tag{I.9}$$

где $A_0$ и $C_0$ - постоянные, а $A_n, B_n, C_n, D_n$ - функции аргумента $\psi$.

Так, как $\theta$ и $\omega$ должны удовлетворять системе (I.6), то

$$A_n = -\frac{\mu}{n(\lambda+2\mu)}C_n', \quad B_n = \frac{\mu}{n(\lambda+2\mu)}D_n', \quad C_n = \frac{\lambda+2\mu}{\mu n}A_n', \quad D_n = -\frac{\lambda+2\mu}{\mu n}B_n',$$

$$A_n'' + n^2 A_n = 0, \quad B_n'' + n^2 B_n = 0,$$

$$C_n'' + n^2 C_n = 0, \quad D_n'' + n^2 D_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{I.10}$$

Здесь штрих обозначает производную.

Внеся (I.10) в (I.9), получим:

$$\omega = C_0 + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{R_1}{\rho}\right)^n A_n' - \left(\frac{\rho}{R_2}\right)^n B_n'\right]. \tag{I.11}$$

Подставляя (I.8) и (I.11) в (I.4), получим

$$\mu\Delta u = 2\mu A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{[2\mu + (\lambda+\mu)n]\left(\frac{R_1}{\rho}\right)^n A_n + [2\mu - (\lambda+\mu)n]\left(\frac{\rho}{R_2}\right)^n B_n\right\},$$

$$\mu\Delta V = 2\mu C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{[2(\lambda+2\mu) - (\lambda+\mu)n]\left(\frac{R_1}{\rho}\right)^n A_n' - [2(\lambda+2\mu) + (\lambda+\mu)n]\left(\frac{\rho}{R_2}\right)^n B_n'\right\}. \tag{I.12}$$

Решение системы (I.12) имеет вид

$$u = u^{(0)} + \frac{A_0}{2}\rho^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{[2\mu + (\lambda+\mu)n]P_n(\rho)A_n + [2\mu - (\lambda+\mu)n]Q_n(\rho)B_n\right\}, \tag{I.13}$$

$$V=V^{(0)}+\frac{C_0}{2}\rho^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big\{\big[2(\lambda+2\mu)-(\lambda+\mu)n\big]P_n(\rho)A_n' - \qquad (I.14)$$

$$-\big[2(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)n\big]Q_n(\rho)B_n'\Big\},$$

где $U^{(0)}$ и $V^{(0)}$ – произвольные гармонические функции,

$$P_1(\rho)=\frac{R_1}{2\mu}\Big[\rho\ln\frac{\rho}{R_1}+\Big(\frac{R_1^2}{\rho}-\rho\Big)\beta\Big],\quad \beta=\frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2},$$

$$P_n(\rho)=\frac{1}{4\mu(n-1)}\Big\{\alpha_n\Big(\frac{R_1\rho}{R_2^2}\Big)^n+\big(R_2^2-\rho^2-\alpha_n\big)\Big(\frac{R_1}{\rho}\Big)^n\Big\},\ \alpha_n=\frac{R_2^2-R_1^2}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}},\ n=2,3,\dots$$

$$Q_n(\rho)=\frac{1}{4\mu(n+1)}\Big\{\alpha_n\Big(\frac{R_1^2}{R_2\rho}\Big)^n-\big(R_1^2-\rho^2+\alpha_n\big)\Big(\frac{\rho}{R_2}\Big)^n\Big\},\quad n=1,2,\dots$$

$$P_n(R_1)=P_n(R_2)=0,\qquad n=1,2,\dots$$

$$Q_n(R_1)=Q_n(R_2)=0,\qquad n=1,2,\dots$$

Пусть граничные данные $U^-$, $U^+$, $V^-$, $V^+$ разлагаются в ряды Фурье

$$U^-=\frac{1}{2}U_0^-+\sum_{n=1}^{\infty}U_n^-,\qquad U^+=\frac{1}{2}U_0^++\sum_{n=1}^{\infty}U_n^+,$$

$$V^-=\frac{1}{2}V_0^-+\sum_{n=1}^{\infty}V_n^-,\qquad V^+=\frac{1}{2}V_0^++\sum_{n=1}^{\infty}V_n^+,$$

где

$$U_n^{\pm}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U^{\pm}\cos n(\vartheta-\psi)\,d\vartheta,\quad V_n^{\pm}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}V^{\pm}\cos n(\vartheta-\psi)\,d\vartheta,\ n=0,1,2,\dots$$

Тогда, в силу (I.I3) и (I.I4), можно определить $U^{(0)}, V^{(0)}$, $A_0, C_0$ и функции $U$ и $V$ примут вид

$$U=\frac{(R_2^2-\rho^2)U_0^-+(\rho^2-R_1^2)U_0^+}{2(R_2^2-R_1^2)}+\sum_{n=1}^{\infty}\big[K_n(\rho)U_n^-+H_n(\rho)U_n^+\big]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\big[2\mu+(\lambda+\mu)n\big]P_n(\rho)A_n+\big[2\mu-(\lambda+\mu)n\big]Q_n(\rho)B_n\Big\},\qquad (1.15)$$

$$V=\frac{(R_2^2-\rho^2)V_0^-+(\rho^2-R_1^2)V_0^+}{2(R_2^2-R_1^2)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[K_n(\rho)V_n^-+H_n(\rho)V_n^+\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{\left[2(\lambda+2\mu)-(\lambda+\mu)n\right]P_n(\rho)A_n'-\left[2(\lambda+2\mu)+(\lambda+\mu)n\right]Q_n(\rho)B_n'\right\}, \tag{1.16}$$

где
$$K_n(\rho)=\frac{\left(\frac{R_1}{\rho}\right)^n-\left(\frac{\rho R_1}{R_2^2}\right)^n}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}},\quad H_n(\rho)=\frac{\left(\frac{\rho}{R_2}\right)^n-\left(\frac{R_1^2}{R_2\rho}\right)^n}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}}, \tag{1.17}$$

$$K_n(R_1)=1,\quad K_n(R_2)=0,\quad H_n(R_1)=0,\quad H_n(R_2)=1$$

В формулах (I.I5) и (I.I6) осталось определить функции $A_n$ и $B_n$. Для определения этих функций вычислим $\theta$ по формуле (I.5), предполагая, что $U$ и $V$ имеют вид (I.I5) и (I.I6). Приравнивая граничное значение полученного таким образом значения функции $\theta$ с граничным значением $\theta$, заданным по формуле (I.8), для определения функции $A_n$, $B_n$, $(n=1,2,\dots)$ получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases}(B-2\beta)A_1+\left(-\frac{R_1}{2R_2}+\frac{(2B-1)R_2}{2R_1}\right)B_1=-\frac{2\mu}{\lambda+3\mu}\,\theta_1^-,\\ \frac{R_1}{R_2}\left[-B+2\beta\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]A_1+\left[\frac{1}{2}+\frac{1-2B}{2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]B_1=\frac{2\mu}{\lambda+3\mu}\,\theta_1^+,\end{cases} \tag{I.I8}$$

$$\begin{cases}\left[1-\frac{Bn-B+1}{R_1^2}\alpha_n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}\right]A_n+\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\left[1-\frac{Bn+B-1}{R_1^2}\alpha_n\right]B_n=\frac{(1-B)(n-1)}{n}\theta_n^-,\\ \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\left[1-\frac{Bn+1-B}{R_2^2}\alpha_n\right]A_n+\left[1-\frac{Bn+B-1}{R_2^2}\alpha_n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}\right]B_n=\frac{(1-B)(n+1)}{n}\theta_n^+\end{cases} \tag{I.I9}$$

$$n=2,3,\dots$$

где
$$B=\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu},\quad \theta_n^-=\frac{n(S_n U_n^+-\Delta_n U_n^-)+(V_n^-)'}{R_1^2},\quad n=1,2,\dots$$

$$\theta_n^+ = \frac{n(\Delta_n U_n^+ - S_n U_n^-) + (V_n^+)'}{R_2^2}, \quad n=1,2,\ldots \qquad S_n = \frac{2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}},$$

$$\Delta_n = \frac{1+\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}}, \quad n=1,2,\ldots$$

Детерминанты систем (I.18) и (I.19)

$$\mathcal{D}_1 = B^2\left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right] + \left[1+\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]\ln\frac{R_1}{R_2},$$

$$\mathcal{D}_n = \left[1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}\right]\left\{1-\frac{1+B^2(n^2-1)}{R_1^2R_2^2}\alpha_n^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}\right\}, \quad n=2,3,\ldots$$

отличны от нуля. Найдя $A_n$, $B_n$ $(n=1,2,\ldots)$ из (I.18) и (I.19) и подставив их значения в формулы (I.15) и (I.16), решение поставленной задачи получим в виде:

$$u = \frac{(R_2^2-\rho^2)U_0^- + (\rho^2-R_1^2)U_0^+}{2(R_2^2-R_1^2)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[K_n(\rho) - \frac{n\Delta_n}{R_1^2}A_n(\rho) - \frac{nS_n}{R_2^2}B_n(\rho)\right]U_n^- + \left[H_n(\rho) + \frac{nS_n}{R_1^2}A_n(\rho) + \frac{n\Delta_n}{R_2^2}B_n(\rho)\right]U_n^+\right\} \mp \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{A_n(\rho)}{R_1^2}(V_n^-)' + \frac{B_n(\rho)}{R_2^2}(V_n^+)'\right\} \tag{1.20}$$

$$V = \frac{(R_2^2-\rho^2)V_0^- + (\rho^2-R_1^2)V_0^+}{2(R_2^2-R_1^2)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[K_n(\rho) - \frac{n^2}{R_1^2}C_n(\rho)\right]V_n^- + \left[H_n(\rho) - \frac{n^2}{R_2^2}\mathcal{D}_n(\rho)\right]V_n^+\right\} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{nS_n}{R_1^2}C_n(\rho) + \frac{n\Delta_n}{R_2^2}\mathcal{D}_n(\rho)\right](U_n^+)' - \left[\frac{n\Delta_n}{R_1^2}C_n(\rho) + \frac{nS_n}{R_2^2}\mathcal{D}_n(\rho)\right](U_n^-)'\right\}, \tag{1.21}$$

где

$$A_1(\rho) = \frac{\mu}{\mathcal{D}_1}\left\{P_1(\rho)\left[-1+(2B-1)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right] + 2(2B-1)Q_1(\rho)\left[B-2\beta\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]\frac{R_1}{R_2}\right\}, \tag{1.22}$$

$$B_1(\rho)=\frac{\mu}{D_1}\left\{P_1(\rho)\left[1-(2B-1)\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right]\frac{R_1}{R_2}-2(2B-1)(B-2\beta)Q_1(\rho)\right\}, \tag{1.23}$$

$$A_n(\rho)=\frac{2\mu}{nD_n}\left\{(Bn-B+1)(n-1)P_n(\rho)\left[1-(Bn+B-1)\frac{\alpha_n}{R_2^2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}\right]+\right.$$

$$\left.+(Bn+B-1)(n+1)Q_n(\rho)\left[1-(Bn-B+1)\frac{\alpha_n}{R_2^2}\right]\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n\right\}, \quad n=2,3,\ldots \tag{1.24}$$

$$B_n(\rho)=\frac{2\mu}{nD_n}\left\{(Bn-B+1)(n-1)P_n(\rho)\left[1-(Bn+B-1)\frac{\alpha_n}{R_1^2}\right]\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n+\right.$$

$$\left.+(Bn+B-1)(n+1)Q_n(\rho)\left[1-(Bn-B+1)\frac{\alpha_n}{R_1^2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}\right]\right\}, \quad n=2,3,\ldots \tag{1.25}$$

$$C_1(\rho)=\frac{\mu}{D_1}\left\{P_1(\rho)\left[-1+(2B-1)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]+2(2B+1)Q_1(\rho)\left[B-2\beta\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]\frac{R_1}{R_2}\right\},$$

$$D_1(\rho)=\frac{\mu}{D_1}\left\{P_1(\rho)\left[1-(2B-1)\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right]\frac{R_1}{R_2}+2(2B+1)(2\beta-B)Q_1(\rho)\right\},$$

$$C_n(\rho)=\frac{2\mu}{n^2D_n}\left\{(Bn+B+1)(n+1)Q_n(\rho)\left[1-(Bn-B+1)\frac{\alpha_n}{R_2^2}\right]\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n-\right.$$

$$\left.-(Bn-B-1)(n-1)P_n(\rho)\left[1-(Bn+B+1)\frac{\alpha_n}{R_2^2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}\right]\right\}, \quad n=2,3,\ldots \tag{1.26}$$

$$D_n(\rho)=\frac{2\mu}{n^2D_n}\left\{(Bn-B-1)(n-1)P_n(\rho)\left[1-(Bn+B-1)\frac{\alpha_n}{R_1^2}\right]\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n-\right.$$

$$\left.-(Bn+B+1)(n+1)Q_n(\rho)\left[1-(Bn-B+1)\frac{\alpha_n}{R_1^2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}\right]\right\}, \quad n=2,3,\ldots \tag{1.27}$$

$$A_n(R_1)=A_n(R_2)=0, \qquad B_n(R_1)=B_n(R_2)=0,$$

$$C_n(R_1)=C_n(R_2)=0, \qquad D_n(R_1)=D_n(R_2)=0, \quad n=1,2,\ldots \tag{1.28}$$

Если решения систем (I.18) и (I.19) внесем в формулу (I.8), получим

$$\theta=\frac{U_0^+-U_0^-}{R_2^2-R_1^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{nS_n}{R_1^2}E_n(\rho)+\frac{n\Delta_n}{R_2^2}F_n(\rho)\right]U_n^+-\left[\frac{n\Delta_n}{R_1^2}E_n(\rho)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{nS_n}{R_2^2}F_n(\rho)\right]U_n^-\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{E_n(\rho)}{R_1^2}(V_n^-)'+\frac{F_n(\rho)}{R_2^2}(V_n^+)'\right\}, \quad (1.29)$$

где

$$E_1(\rho)=\frac{B-1}{2\mathcal{D}_1}\left\{\left[1-(2B-1)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]\frac{R_1}{\rho}+2\left[B-2\beta\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]\frac{\rho R_1}{R_2^2}\right\}, \quad (1.30)$$

$$F_1(\rho)=\frac{B-1}{2\mathcal{D}_1}\left\{-\left[1-(2B-1)\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right]\frac{R_1^2}{\rho R_2}+2(2\beta-B)\frac{\rho}{R_2}\right\}, \quad (1.31)$$

$$E_n(\rho)=\frac{1-B}{n\mathcal{D}_n}\left\{(n-1)\left[1-(nB+B-1)\frac{\alpha_n}{R_2^2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}\right]\left(\frac{R_1}{\rho}\right)^n-\right.$$

$$\left.-(n+1)\left[1-(Bn-B+1)\frac{\alpha_n}{R_2^2}\right]\left(\frac{\rho R_1}{R_2^2}\right)^n\right\}, \quad n=2,3,\ldots \quad (1.32)$$

$$F_n(\rho)=\frac{1-B}{n\mathcal{D}_n}\left\{(n+1)\left[1-(Bn-B+1)\frac{\alpha_n}{R_1^2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n}\right]\left(\frac{\rho}{R_2}\right)^n-\right.$$

$$\left.-(n-1)\left[1-(Bn+B-1)\frac{\alpha_n}{R_1^2}\right]\left(\frac{R_1^2}{\rho R_2}\right)^n\right\}, \quad n=2,3,\ldots \quad (1.33)$$

Пусть $X_n$ и $Y_n$ – компоненты вектора напряжения $T\vec{U}(x)$ действующего на контуре с нормалью $\vec{n}(n_1,n_2)$, Введем функции

$$X=\rho(x_1X_n+x_2Y_n), \qquad Y=\rho(-x_2X_n+x_1Y_n) \quad (1.34)$$

Так как

$$X_n=\tau_{11}n_1+\tau_{12}n_2, \qquad Y_n=\tau_{12}n_1+\tau_{22}n_2,$$

где

$$n_k=\frac{x_k}{\rho}, \qquad k=1,2,$$

$$\tau_{11} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$

$$\tau_{12} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),$$

$$\tau_{22} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

то формулы (I.34) примут вид

$$X = (\lambda + 2\mu)\rho^2\theta - 2\mu\left(U + \frac{\partial V}{\partial \psi}\right), \tag{I.35}$$

$$Y = \mu\rho^2\omega - 2\mu\left(V - \frac{\partial U}{\partial \psi}\right), \tag{I.36}$$

Очевидно, что формула (I.34) дает возможность определить значения функции $X$ и $Y$ на границе области при заданных внешних напряжениях.

## § 2. Решение гранично-контактных задач для областей, ограниченных концентрическими окружностями

Пусть имеется концентрические окружности $L_1, L_2, \ldots, L_n$, $(n \geqslant 2)$ радиусов $R_1, R_2, \ldots, R_n$ $(R_1 < R_2 < \ldots < R_n)$ с центром в начале координат. Обозначим через $D_k$ $(k = \overline{2,n})$ концентрическое круговое кольцо, ограниченное окружностями $L_{k-1}$ и $L_k$, а через $D_1$ – круг радиуса $R_1$.

Пусть упругая среда, характеризуемая постоянными $\lambda_k$, $\mu_k$ заполняет область $D_k$ $(k = 1, 2, \ldots n)$. Требуется:

Найти в области $D_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ регулярный вектор $\vec{u}^{(k)} = \left(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}\right)$, удовлетворяющий условиям:

1.
$$\begin{cases} \mu_k \Delta u_1^{(k)} + (\lambda_k + \mu_k)\dfrac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{div} \vec{u}^{(k)} = 0, \\ \mu_k \Delta u_2^{(k)} + (\lambda_k + \mu_k)\dfrac{\partial}{\partial x_2} \operatorname{div} \vec{u}^{(k)} = 0, \quad x \in D_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \tag{2.I}$$

$$
2.\ \begin{cases} \left(U_\nu^{(\kappa)}(z)\right)^- - \left(U_\nu^{(\kappa-1)}(z)\right)^+ = \varphi^{(\kappa)}(z), \\ \left(U_s^{(\kappa)}(z)\right)^- = \left(U_s^{(\kappa-1)}(z)\right)^+ = 0, \\ \left(T^{(\kappa)}\vec{U}^{(\kappa)}(z)\right)_\nu^- - \left(T^{(\kappa-1)}\vec{U}^{(\kappa-1)}(z)\right)_\nu^+ = \Phi^{(\kappa)}(z),\ z\in L_\kappa,\ \kappa=2,3,\dots,n \end{cases} \quad (2.2)
$$

$$
3.\ \begin{cases} \left(U_1^{(n)}(z)\right)^+ = f(z), \\ \left(U_2^{(n)}(z)\right)^+ = g(z),\quad z\in L_n, \end{cases} \quad (2.3)
$$

где $U_\nu^{(\kappa)}$ и $U_s^{(\kappa)}$ – нормальная и касательная составляющие вектора смещения $\vec{U}^{(\kappa)}$, $\left(T^{(\kappa)}\vec{U}^{(\kappa)}\right)_\nu$ и $\left(T^{(\kappa)}\vec{U}^{(\kappa)}\right)_s$ – нормальная и касательная составляющие вектора напряжения $T^{(\kappa)}\vec{U}^{(\kappa)}(x)$, $\varphi^{(\kappa)}$, $\Phi^{(\kappa)}$, $f$ и $g$ – заданные функции.

Поставленная выше гранично-контактная задача относительно функции $U$ и $V$ сформулируется так:

Найти в области $D_\kappa\ (\kappa=1,2,\dots,n)$ регулярный вектор $(U^{(\kappa)}, V^{(\kappa)})$ удовлетворяющий условиям:

$$
1.\ \begin{cases} \mu_\kappa \Delta U^{(\kappa)} = 2\mu_\kappa \theta^{(\kappa)} - (\lambda_\kappa + \mu_\kappa)\rho \dfrac{\partial\theta^{(\kappa)}}{\partial\rho}, \\ \mu_\kappa \Delta V^{(\kappa)} = 2\mu_\kappa \omega^{(\kappa)} - (\lambda_\kappa + \mu_\kappa)\dfrac{\partial\theta^{(\kappa)}}{\partial\psi},\quad x(\rho,\psi)\in D_\kappa, \\ \qquad \kappa=1,2,\dots,n \end{cases} \quad (2.4)
$$

$$
2.\ \begin{cases} \left(U^{(\kappa)}(z)\right)^- - \left(U^{(\kappa-1)}(z)\right)^+ = R_{\kappa-1}\,\varphi^{(\kappa)}(z), \\ \left(V^{(\kappa)}(z)\right)^- = \left(V^{(\kappa-1)}(z)\right)^+ = 0, \\ \left(X^{(\kappa)}(z)\right)^- - \left(X^{(\kappa-1)}(z)\right)^+ = R_{\kappa-1}\,\Phi^{(\kappa)}(z),\ z\in L_\kappa,\ \kappa=2,3,\dots,n \end{cases} \quad (2.5)
$$

$$
3.\ \begin{cases} \left(U^{(n)}(z)\right)^+ = R_n\left(f(z)\cos\psi + g(z)\sin\psi\right) = p(z), \\ \left(V^{(n)}(z)\right)^+ = R_n\left(g(z)\cos\psi - f(z)\sin\psi\right) = q(z),\quad z\in L_n. \end{cases} \quad (2.6)
$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$U^{(1)}(x)=\frac{\rho^2}{2R_1^2}\left(U_0^{(1)}\right)^+ +\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\left[1+\frac{(jB^{(1)}+B^{(1)}-1)(R_1^2-\rho^2)}{2R_1^2}\right]\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^j\left(U_j^{(1)}\right)^+ +\right.$$

$$\left.+\frac{(jB^{(1)}+B^{(1)}-1)(R_1^2-\rho^2)}{2jR_1^2}\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^j\left[\left(V_j^{(1)}\right)^+\right]'\right\}, \tag{2.7}$$

$$V^{(1)}(x)=\frac{\rho^2}{2R_1^2}\left(V_0^{(1)}\right)^+ +\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\left[1-\frac{(jB^{(1)}+B^{(1)}+1)(R_1^2-\rho^2)}{2}\right]\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^j\left(V_j^{(1)}\right)^+ -\right.$$

$$\left.-\frac{(jB^{(1)}+B^{(1)}+1)(R_1^2-\rho^2)}{2jR_1^2}\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^j\left[\left(U_j^{(1)}\right)^+\right]'\right\},\quad x\in D_1, \tag{2.8}$$

$$U^{(k)}(x)=\frac{(R_k^2-\rho^2)\left(U_0^{(k)}\right)^- +(\rho^2-R_{k-1}^2)\left(U_0^{(k)}\right)^+}{2(R_k^2-R_{k-1}^2)}+\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\left[K_j^{(k)}(\rho)-\right.\right.$$

$$-\frac{j\Delta_j^{(k)}}{R_{k-1}^2}A_j^{(k)}(\rho)-\frac{jS_j^{(k)}}{R_k^2}B_j^{(k)}(\rho)\left]\left(U_j^{(k)}\right)^- +\right[H_j^{(k)}(\rho)+\frac{jS_j^{(k)}}{R_{k-1}^2}A_j^{(k)}(\rho)+$$

$$\left.+\frac{j\Delta_j^{(k)}}{R_k^2}B_j^{(k)}(\rho)\right]\left(U_j^{(k)}\right)^+\Big\}+\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{A_j^{(k)}(\rho)}{R_{k-1}^2}\left[\left(V_j^{(k)}\right)^-\right]'+\frac{B_j^{(k)}(\rho)}{R_k^2}\left[\left(V_j^{(k)}\right)^+\right]'\right\}, \tag{2.9}$$

$$V^{(k)}(x)=\frac{(R_k^2-\rho^2)\left(V_0^{(k)}\right)^- +(\rho^2-R_{k-1}^2)\left(V_0^{(k)}\right)^+}{2(R_k^2-R_{k-1}^2)}+\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\left[K_j^{(k)}(\rho)-\right.\right.$$

$$-\frac{j^2}{R_{k-1}^2}C_j^{(k)}(\rho)\left]\left(V_j^{(k)}\right)^- +\right[H_j^{(k)}(\rho)-\frac{j^2}{R_k^2}D_j^{(k)}(\rho)\left]\left(V_j^{(k)}\right)^+\right\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{jS_j^{(k)}}{R_{k-1}^2}C_j^{(k)}(\rho)+\frac{j\Delta_j^{(k)}}{R_k^2}D_j^{(k)}(\rho)\right]\left[\left(U_j^{(k)}\right)^+\right]'-\left[\frac{j\Delta_j^{(k)}}{R_{k-1}^2}C_j^{(k)}(\rho)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{jS_j^{(k)}}{R_k^2}D_j^{(k)}(\rho)\right]\left[\left(U_j^{(k)}\right)^-\right]'\right\},\qquad x\in D_k,\quad k=1,2,\ldots,n, \tag{2.10}$$

где функции $K_j^{(\kappa)}(\rho)$, $H_j^{(\kappa)}(\rho)$, $A_j^{(\kappa)}(\rho)$, $B_j^{(\kappa)}(\rho)$, $C_j^{(\kappa)}(\rho)$ и $D_j^{(\kappa)}(\rho)$ $(j=1,2,\ldots)$ имеют вид (I.17), (I.22)... (I.27), а функции $(U_o^{(1)})^+$, $(V_j^{(\kappa)})^+$, $(U_j^{(\kappa)})^-$, $(V_j^{(\kappa)})^+$, $(V_j^{(\kappa)})^-$, $(V_o^{(1)})^+$ – пока неизвестны.

Предположим, что заданные функции $\varphi^{(\kappa)}$, $\Phi^{(\kappa)}$, $p$ и $q$ разлагаются в ряды Фурье:

$$\varphi^{(\kappa)}=\frac{1}{2}\varphi_o^{(\kappa)}+\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j^{(\kappa)}, \qquad \Phi^{(\kappa)}=\frac{1}{2}\Phi_o^{(\kappa)}+\sum_{j=1}^{\infty}\Phi_j^{(\kappa)},$$

$$p=\frac{1}{2}p_o+\sum_{j=1}^{\infty}p_j, \qquad q=\frac{1}{2}q_o+\sum_{j=1}^{\infty}q_j,$$

где

$$\varphi_j^{(\kappa)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi^{(\kappa)}\cos j(\varphi-\psi)\,d\varphi, \qquad \Phi_j^{(\kappa)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi^{(\kappa)}\cos j(\varphi-\psi)\,d\varphi,$$

$$p_j=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}p\cos j(\varphi-\psi)\,d\varphi, \qquad q_j=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}q\cos j(\varphi-\psi)\,d\varphi, \quad j=0,1,2,\ldots$$

Для определения неизвестных функций, в силу граничных условий (2.5) и с помощью формул (I.35) и (I.29), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\mu_2-\mu_1}{R_1^2}+\sigma_1+\sigma_2\right)(U_o^{(1)})^+-\sigma_2(U_o^{(2)})^+=\Psi_o^{(2)},\\[2mm] -\sigma_{\kappa-1}(U_o^{(\kappa-2)})^++\left(\dfrac{\mu_\kappa-\mu_{\kappa-1}}{R_{\kappa-1}^2}+\sigma_{\kappa-1}+\sigma_\kappa\right)(U_o^{(\kappa-1)})^+-\sigma(U_o^{(\kappa)})^+=\Psi_o^{(\kappa)}, \quad \kappa=3,4,\ldots,n-1\\[2mm] -\sigma_{n-1}(U_o^{(n-2)})^++\left(\dfrac{\mu_n-\mu_{n-1}}{R_{n-1}^2}+\sigma_{n-1}+\sigma_n\right)(U_o^{(n-1)})^+=\Psi_o^{(n)},\end{cases} \tag{2.11}$$

$$-\left[\frac{2(\mu_2-\mu_1)}{R_1^2}+b_j^{(1)}+\frac{(\lambda_1+2\mu_1)(1-B^{(1)})(j+1)}{R_1^2}\right](U_j^{(1)})^++d_j^{(2)}(U_j^{(2)})^+=\Psi_j^{(2)},$$

$$a_j^{(\kappa-2)}(U_j^{(\kappa-2)})^+-\left[\frac{2(\mu_\kappa-\mu_{\kappa-1})}{R_{\kappa-1}^2}+b_j^{(\kappa-1)}+C_j^{(\kappa-1)}\right](U_j^{(\kappa-1)})^++d_j^{(\kappa)}(U_j^{(\kappa)})^+=\Psi_j^{(\kappa)}, \quad \kappa=3,4,\ldots,n-1,$$

$$a_j^{(n-2)}(U_j^{(n-2)})^+-\left[\frac{2(\mu_n-\mu_{n-1})}{R_{n-1}^2}+b_j^{(n-1)}+C_j^{(n-1)}\right](U_j^{(n-1)})^+=\Psi_j^{(n)}, \tag{2.12}$$

где

$$\sigma_k=\frac{\lambda_k+2\mu_k}{R_k^2-R_{k-1}^2},\quad k=2,3,\dots n,\qquad \sigma_1=\frac{\lambda_1+2\mu_1}{R_1^2},$$

$$a_j^{(k-2)}=\left(\lambda_{k-1}+2\mu_{k-1}\right)\left[\frac{j\Delta_j^{(k-1)}}{R_{k-2}^2}E_j^{(k-1)}(R_{k-1})+\frac{jS_j^{(k-1)}}{R_{k-1}^2}F_j^{(k-1)}(R_{k-1})\right],$$

$$b_j^{(k-1)}=\left(\lambda_k+2\mu_k\right)\left[\frac{j\Delta_j^{(k)}}{R_{k-1}^2}E_j^{(k)}(R_{k-1})+\frac{jS_j^{(k)}}{R_k^2}F_j^{(k)}(R_{k-1})\right],$$

$$c_j^{(k-1)}=\left(\lambda_{k-1}+2\mu_{k-1}\right)\left[\frac{jS_j^{(k-1)}}{R_{k-2}^2}E_j^{(k-1)}(R_{k-1})+\frac{j\Delta_j^{(k-1)}}{R_{k-1}^2}F_j^{(k-1)}(R_{k-1})\right],$$

$$d_j^{(k)}=\left(\lambda_k+2\mu_k\right)\left[\frac{jS_j^{(k)}}{R_{k-1}^2}E_j^{(k)}(R_{k-1})+\frac{j\Delta_j^{(k)}}{R_k^2}F_j^{(k)}(R_{k-1})\right],$$

$$\psi_0^{(2)}=-\frac{1}{2R_1}\Phi_0^{(2)}-\left[\frac{\mu_2}{R_1^2}+\sigma_2\right]R_1\varphi_0^{(2)},$$

$$\psi_0^{(k)}=-\frac{1}{2R_{k-1}}\Phi_0^{(k)}+\sigma_{k-1}R_{k-2}\varphi_0^{(k-1)}-\left[\frac{\mu_2}{R_{k-1}^2}+\sigma_k\right]R_{k-1}\varphi_0^{(k)},\quad k=3,4,\dots,n-1,$$

$$\psi_0^{(n)}=-\frac{1}{2R_{n-1}}\Phi_0^{(n)}+\sigma_{n-1}R_{n-2}\varphi_0^{(n-1)}-\left[\frac{\mu_n}{R_{n-1}^2}+\sigma_n\right]R_{n-1}\varphi_0^{(n)}+\sigma_n P_0,$$

$$\psi_j^{(2)}=\frac{1}{R_1}\Phi_j^{(2)}+\left(\frac{2\mu_2}{R_1^2}+b_j^{(1)}\right)R_1\varphi_j^{(2)},$$

$$\psi_j^{(k)}=\frac{1}{R_{k-1}}\Phi_j^{(k)}+\left(\frac{2\mu_k}{R_{k-1}^2}+b_j^{(k-1)}\right)R_{k-1}\varphi_j^{(k)}-a_j^{(k-2)}R_{k-2}\varphi_j^{(k-1)},\quad k=3,4,\dots,n-1,$$

$$\psi_j^{(n)}=\frac{1}{R_{n-1}}\Phi_j^{(n)}+\left(\frac{2\mu_n}{R_{n-1}^2}+b_j^{(n-1)}\right)R_{n-1}\varphi_j^{(n)}-a_j^{(n-2)}R_{n-2}\varphi_j^{(n-1)}-$$

$$-\left(\lambda_n+2\mu_n\right)\frac{F_j^{(n)}(R_{n-1})}{R_n^2}(q_j)'-d_j^{(n)}P_n,\qquad j=1,2,\dots,$$

На основании единственности решения задачи можно показать, что детерминанты систем (2.II) и (2.I2) отличны от нуля, хотя для детерминанта системы (2.II) это легко показать непосредственно. Действительно, для детерминанта системы (2.II) имеем рекуррентную формулу

$$\mathcal{D}_{n-1} = A_{n-1}\mathcal{D}_{n-3} + (\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})A_{n-2}\mathcal{D}_{n-4} + (\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}+\alpha_{n-2}\beta_{n-1}+$$

$$+\beta_{n-1}\beta_{n-2})A_{n-3}\mathcal{D}_{n-5}+\ldots+(\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_4+\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}\ldots\alpha_4\beta_{n-1}+$$

$$+\alpha_{n-3}\alpha_{n-4}\ldots\alpha_4\beta_{n-1}\beta_{n-2}+\ldots+\beta_{n-1}\beta_{n-2}\ldots\beta_4)A_3\mathcal{D}_1+$$

$$+(\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_3+\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}\ldots\alpha_3\beta_{n-1}+\alpha_{n-3}\alpha_{n-4}\ldots\alpha_3\beta_{n-1}\beta_{n-2}+\ldots+$$

$$+\beta_{n-1}\beta_{n-2}\ldots\beta_3)A_2\mathcal{D}_0+\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1+\alpha_{n-2}\alpha_{n-3}\ldots\alpha_1\beta_{n-1}+\alpha_{n-3}\alpha_{n-4}\ldots$$

$$\ldots\alpha_1\beta_{n-1}\beta_{n-2}+\ldots+\beta_{n-1}\beta_{n-2}\ldots\beta_1,$$

где

$$A_k=\frac{\mu_k(\lambda_k+\mu_k)}{R_k^2R_{k-1}^2},\ k\geqslant 2,\ \alpha_k=\sigma_k-\frac{\mu_k}{R_k^2},\ \beta_{k-1}=\sigma_k+\frac{\mu_k}{R_{k-1}^2},$$

$$\mathcal{D}_0=1,\quad \mathcal{D}_1=\sigma_1+\sigma_2+\frac{\mu_2-\mu_1}{R_1^2}=\alpha_1+\beta_1$$

Так как $A_k>0,\ \alpha_k>0$ и $\beta_{k-1}>0\ (k=2,3,\ldots n)$, то $\mathcal{D}_1>0$. Тогда и $\mathcal{D}_2>0$ и поэтому $\mathcal{D}_3>0$. Наконец получим, что $\mathcal{D}_{n-1}>0$.

Решением систем (2.II) и (2.I2) получим значения неизвестных функции $(U_j^{(1)})^+, (U_j^{(2)})^+,\ldots,(U_j^{(n)})^+,\ j=0,1,\ldots$ . Тогда, в силу граничных условий (2.5) и (2.6), будут известны значения функций $(U_j^{(2)})^-, (U_j^{(3)})^-,\ldots,(U_j^{(n)})^-,\ j=0,1,\ldots$ и, следовательно, по формулам (2.7), (2.8), (2.9) и (2.I0) функции $U^{(1)}, V^{(1)}, U^{(2)}, V^{(2)},\ldots,U^{(n)}, V^{(n)}$ будут определены полностью. Наконец, с помощью формул

$$u_1^{(\kappa)}=\frac{x_1}{\rho^2}U^{(\kappa)}-\frac{x_2}{\rho^2}V^{(\kappa)},\quad u_2^{(\kappa)}=\frac{x_2}{\rho^2}U^{(\kappa)}+\frac{x_1}{\rho^2}V^{(\kappa)}$$

определяются значения компонентов смещения.

Аналогично решается следующая задача:

Найти в области $\mathcal{D}_\kappa\ (\kappa=2,3,\ldots,n)$ регулярный вектор $\vec{u}^{(\kappa)}=\left(u_1^{(\kappa)},u_2^{(\kappa)}\right)$, удовлетворяющий условиям:

$$1.\begin{cases}\mu_\kappa\Delta u_1^{(\kappa)}+(\lambda_\kappa+\mu_\kappa)\dfrac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div}\vec{u}^{(\kappa)}=0,\\ \mu_\kappa\Delta u_2^{(\kappa)}+(\lambda_\kappa+\mu_\kappa)\dfrac{\partial}{\partial x_2}\operatorname{div}\vec{u}^{(\kappa)}=0,\quad x\in\mathcal{D}_\kappa,\ \kappa=2,3,\ldots,n\end{cases}$$

$$2.\begin{cases}\left(u_\nu^{(\kappa)}(z)\right)^- -\left(u_\nu^{(\kappa-1)}(z)\right)^+=\varphi^{(\kappa)}(z),\\ \left(u_s^{(\kappa)}(z)\right)^-=\left(u_s^{(\kappa-1)}(z)\right)^+=0,\\ \left(T^{(\kappa)}\vec{u}^{(\kappa)}(z)\right)_\nu^- -\left(T^{(\kappa-1)}\vec{u}^{(\kappa-1)}(z)\right)_\nu^+=\Phi^{(\kappa)}(z),\quad z\in L_\kappa,\ \kappa=3,4,\ldots,n\end{cases}$$

$$\left(u_1^{(2)}(z)\right)^-=f(z),\quad \left(u_2^{(2)}(z)\right)^-=\varphi(z),\quad z\in L_1$$

$$\left(u_1^{(n)}(z)\right)^+=h(z),\quad \left(u_2^{(n)}(z)\right)^+=g(z),\quad z\in L_n$$

Этим же способом можно решить гранично-контактную задачу для областей, ограниченных концентрическими окружностями, когда на границе $L_n$ задан вектор напряжения.

## § 3. Примеры.

Пусть упругая среда, характеризуемая постоянными $\lambda_\kappa$ и $\mu_\kappa$, заполняет область $\mathcal{D}_\kappa\ (\kappa=1,2,\ldots,n)$. Определим упругое равновесие тела с учетом силы инерции. Система уравнений упругого равновесия в этом случае будет иметь вид

$$\begin{aligned} &\mu_\kappa \Delta u_1^{(\kappa)} + (\lambda_\kappa + \mu_\kappa)\frac{\partial}{\partial x_1} \operatorname{div} \vec{u}^{(\kappa)} = m_\kappa \omega_\kappa^2 x_1 \\ &\mu_\kappa \Delta u_2^{(\kappa)} + (\lambda_\kappa + \mu_\kappa)\frac{\partial}{\partial x_2} \operatorname{div} \vec{u}^{(\kappa)} = m_\kappa \omega_\kappa^2 x_2 \end{aligned} \tag{3.I}$$

где $m_\kappa$ – масса среды, $\omega_\kappa$ – угловая скорость.

Рассмотрим гранично-контактную задачу:

Найти в области $\mathcal{D}_\kappa (\kappa = 1,2,\ldots,n)$ регулярный вектор $\vec{u}^{(\kappa)}(u_1^{(\kappa)}, u_2^{(\kappa)})$, удовлетворяющий системе (3.I) и гранично-контактным условиям:

$$\begin{aligned} &1.\ (\vec{u}^{(\kappa)}(z))^+ - (\vec{u}^{(\kappa+1)}(z))^- = 0, \\ &2.\ (T^{(\kappa)}\vec{u}^{(\kappa)}(z))^+ - (T^{(\kappa+1)}u^{(\kappa+1)}(z))^- = 0, \quad \kappa = 1,2,\ldots,n-1, \\ &3.\ (\vec{u}^{(n)}(z))^+ = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$\vec{u}^{(\kappa)}(x) = a_\kappa x \rho^2 + \alpha_\kappa \frac{x}{\rho^2} + \beta_\kappa x, \tag{3.3}$$

где $\alpha_\kappa$, $\beta_\kappa$ – искомые постоянные, а $\alpha_1 = 0$,

$$a_\kappa = m_\kappa \omega_\kappa^2 [8(\lambda_\kappa + 2\mu_\kappa)]^{-1}, \quad \kappa = 1,2,\ldots,n.$$

Граничные условия (3.2) перепишем следующим образом:

$$1.\ (V_\kappa(z))^+ - (V_{\kappa+1}(z))^- = 0, \tag{3.4}$$

$$2.\ (z\cdot T^{(\kappa)}\vec{u}^{(\kappa)}(z))^+ - (z\cdot T^{(\kappa+1)}\vec{u}^{(\kappa+1)}(z))^- = 0, \quad \kappa = 1,2,\ldots,n-1 \tag{3.5}$$

$$3.\ (V_n(z))^+ = 0. \tag{3.6}$$

Учитывая условия (3.4), решения (3.3) примут вид

$$\vec{U}^{(\kappa)}(x)=a_\kappa\frac{x}{\rho^2}(\rho^2-R_{\kappa-1}^2)(\rho^2-R_\kappa^2)+\frac{x(\rho^2-R_{\kappa-1}^2)}{\rho^2(R_\kappa^2-R_{\kappa-1}^2)}(V_\kappa)^+ + \frac{x(R_\kappa^2-\rho^2)}{\rho^2(R_\kappa^2-R_{\kappa-1}^2)}(V_{\kappa-1})^+. \tag{3.7}$$

Из (3.5) и (3.6) для $(V_\kappa)^+$ получаем следующую алгебраическую систему:

$$\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{R_1^2}+\sigma_1+\sigma_2\right)(V_1)^+-\sigma_2(V_2)^+=-\frac{m_2\omega_2^2}{8}(R_2^2-R_1^2)-\frac{m_1\omega_1^2}{8}R_1^2$$

$$-\sigma_\kappa(V_{\kappa-1})^+ +\left(\frac{\mu_{\kappa+1}-\mu_\kappa}{R_\kappa^2}+\sigma_\kappa+\sigma_{\kappa+1}\right)(V_\kappa)^+-\sigma_{\kappa+1}(V_{\kappa+1})^+=-\frac{m_{\kappa+1}\omega_{\kappa+1}^2}{8}(R_{\kappa+1}^2-R_\kappa^2)-\frac{m_\kappa\omega_\kappa^2}{8}(R_\kappa^2-R_{\kappa-1}^2), \tag{3.8}$$

$$\kappa=2,3,\dots,n-2,$$

$$-\sigma_n(V_{n-2})^+ +\left(\frac{\mu_n-\mu_{n-1}}{R_{n-1}^2}+\sigma_{n-1}+\sigma_n\right)(V_{n-1})^+=-\frac{m_n\omega_n^2}{8}(R_n^2-R_{n-1}^2)-\frac{m_{n-1}\omega_{n-1}^2}{8}(R_{n-1}^2-R_{n-2}^2).$$

Детерминант этой системы совпадает с детерминантом системы (2.II), отличным от нуля.

Аналогично решается следующая задача:

Найти в области $\mathcal{D}_\kappa$ $(\kappa=1,2,\dots,n)$ регулярный вектор $\vec{U}^{(\kappa)}(U_1^{(\kappa)},U_2^{(\kappa)})$, удовлетворяющий системе (3.I) и гранично-контактным условиям:

1. $(\vec{U}^{(\kappa)}(z))^+-(\vec{U}^{(\kappa+1)}(z))^-=0,$
2. $(T^{(\kappa)}\vec{U}^{(\kappa)}(z))^+-(T^{(\kappa+1)}\vec{U}^{(\kappa+1)}(z))^-=0,\quad \kappa=1,2,\dots,n-1,$
3. $(T^{(n)}\vec{U}^{(n)}(z))^+=0.$

Эта задача с помощью представления решения (3.3) системы (3.I) сводится к алгебраической системе, детерминант которой отличен от нуля.

Поступила I3.III.1978

НИИ прикладной математики
ТГУ

## ЛИТЕРАТУРА


1. М.О.Башелейшвили, Третий национальный конгресс по теоретической и прикладной механике, Варна, 13-16 сентябрь, 1977, 304-308.
2. В.Д.Купрадзе, Т.Г.Гегелиа, М.О.Башелейшвили, Т.В.Бурчуладзе, Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. "Наука", М., 1976.


მ.ბაშელეიშვილი, ლ.გიორგაშვილი, შ.ზაზაშვილი

### სტატიკის ზოგიერთი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ეფექტური ამოხსნა შედგენილი იზოტროპული სხეულებისთვის


რეზიუმე

ნაშრომში ახალი მეთოდით ამოხსნილია კონცენტრული იზოტროპული რგოლისთვის სტატიკის პირველი ძირითადი სასაზღვრო ამოცანა. ამ ამოცანის დახმარებით ამოხსნილია სტატიკის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა კონცენტრული $n$ რაოდენობა წრეებით შედგენილი იზოტროპული სხეულებისთვის. ამოცანის ამოხსნა მიღებულია აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი მწკრივების სახით.


M. Bashelishvili, L.Giorgashvili, Sh.Zazashvili

### EFFECTIVE SOLLUTION OF SOME BOUNDARY-CONTACT PROBLEMS OF STATICS FOR COMPOSITE ISOTROPIC BODIES


Summary

The first basic boundary value problem of statics for a concentric isotropic ring is solved by a new method. The boundary-contact problem of statics for isotropic bodies, composed of n consentric circles is solved with the help of this problem.

The solution of the problem is recieved in the form of absolutely and uniformly convergent series.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

204, 1978

УДК 517. 512

# ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ $L$ ЧАСТНЫХ СУММ РЯДА ФУРЬЕ-СТИЛЬТЬЕСА ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ

Г.С.Янаков

Пусть $\mathcal{S}_\lambda(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{k}\sin kt$, где ряд справа сходится всюду. Из теоремы I работы 6 и теоремы Карамата 4 следует, что ограниченность последовательности интегралов

$$\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cos kt\Big|dt \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

равносильна тому, что $\mathcal{S}_\lambda(t)$ суть ограниченной вариации на $[0,2\pi]$ $(\mathcal{S}\in V)$ и

$$\int_0^{2\pi}|\mathcal{S}_\lambda(t)-S_n(\mathcal{S}_\lambda)(t)|dt=O\Big(\frac{1}{n}\Big) \quad (n\to\infty).$$

Из замечания 2 работы 6 непосредственно следует, что если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{k}\cos kt$ всюду сходится, его сумма $\widetilde{\mathcal{S}}_\lambda\in V$ и

$$\int_0^{2\pi}|\widetilde{\mathcal{S}}_\lambda(t)-S_n(\widetilde{\mathcal{S}}_\lambda)(t)|dt=O\Big(\frac{1}{n}\Big) \quad (n\to\infty) \tag{I}$$

то

$$\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \sin kt\Big|dt = O(1) \qquad (n\to\infty) \tag{2}$$



Обратное утверждение является также следствием замечания 2 работы [6] . Отсюда легко заключаем, что для произвольной функции $\varphi\in V$ из условия

$$\int_0^{2\pi}|\varphi(t)-S_n(\varphi)(t)|dt = O\left(\tfrac{1}{n}\right) \quad (n\to\infty), \tag{3}$$

где $S_n(\varphi)$ - частная сумма ряда Фурье для $\varphi$ , следует соотношение

$$\int_0^{2\pi}|S_n'(\varphi)(t)|dt = O(1) \qquad (n\to\infty) \tag{4}$$

<u>Предложение I.</u> Если $\varphi\in V$ и при некотором $p>1$

$$\left\{\int_0^{2\pi}|\varphi(t+h)+\varphi(t-h)-2\varphi(t)|^p dt\right\}^{1/p} = O(h) \qquad (h\to 0) \tag{5}$$

то

$$\int_0^{2\pi}|S_n'(\varphi)(t)|dt = O(1) \qquad (n\to\infty).$$

Достаточно доказать, что выполнено условие (3). Но

$$\int_0^{2\pi}|\varphi(t)-S_n(\varphi)(t)|dt \le (2\pi)^{1/q}\left\{\int_0^{2\pi}|\varphi(t)-S_n(\varphi)(t)|^p dt\right\}^{1/p} \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

и, как известно, последний интеграл не превосходит $C_p E_n(\varphi)_{L_p}$ , где $E_n(\varphi)_{L_p}$ - наилучшее приближение тригонометрическими полиномами функции $\varphi$ в пространстве $L_p$ , а $C_p$ -константа, зависящая только от $p$ . Теперь достаточно заметить, что для функции, удовлетворяющей условию (5) (см. [2] стр. 35I),

$$E_n(\varphi)_{L_p} = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty)$$

Предложение I является обобщением теоремы Холланда и Твоми [5], доказанной ими для $p=2$. Для этого случая сделаем еще одно замечание: если $\varphi \in V$ и

$$\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2(\varphi) + b_k^2(\varphi)\right\}^{1/2} = O(1/n) \quad (n \to \infty)$$

где $a_k(\varphi)$ и $b_k(\varphi)$ – коэффициенты Фурье, то частные суммы Фурье–Стильтьеса функции $\varphi$ ограничены в $L$.

Обозначим через $K$ последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k \geq 1}$. В дальнейшем эта последовательность фиксирована. Через $C(K)$ обозначим класс непрерывных периодических функций $f$, для которых частные суммы ряда Фурье $S_{n_k}(f)$ равномерно сходятся.

Теорема I. Выполнение каждого из условий

$$\varphi_\lambda \in V, \int_0^{2\pi} |\varphi_\lambda(t) - S_{n_k}(\varphi_\lambda)(t)|\,dt = O(1/n_k) \, (k \to \infty) \tag{6}$$

$$\int_0^{2\pi} \left|\sum_{\nu=1}^{n_k} \lambda_\nu \cos \nu t\right| dt = O(1) \tag{7}$$

необходимо и достаточно, чтобы (обозначения из [I], стр. 282)

$$\{\lambda_\nu\} \in (C, C(K)).$$

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма I. Пусть $\varphi_\lambda \in V$, тогда равномерная сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt], \tag{8}$$

где $a_k(f)$, $b_k(f)$ – коэффициенты Фурье для непрерывной функции $f$, равносильна соотношению

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_k (a_k \sin kt - b_k \cos kt)}{k} = O(1/n) \quad (n \to \infty) \tag{9}$$

равномерно по $t$ .

<u>Доказательство</u>

При $\varphi_\lambda \in V$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ является рядом Фурье непрерывной функции $f_\lambda$ ( I , стр.282).

Левую часть равенства (9) перепишем следующим образом:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_{k/k}(a_k \sin kt - b_k \cos kt) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)[\varphi_\lambda(t) - S_n(\varphi_\lambda)(t)]dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_\lambda(x-t)[\varphi_1(t) - S_n(\varphi_1)(t)]dt = \Phi_\lambda(t) - S_n(\Phi_\lambda)(t), \quad (10)$$

где $\varphi_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}$, $\Phi_\lambda(x) = \int_0^x f_\lambda(t)dt$,

и воспользуемся равенством:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f_\lambda(x-t) - S_n(f_\lambda)(x-t) + S_n(f_\lambda)(x-t)\}\{\varphi_1(t) - T_n(t) + T_n(t) - S_n(\varphi_1)(t)\}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{f_\lambda(x-t) - S_n(f_\lambda)(x-t)\}\{\varphi_1(t) - T_n(t)\}dt,$$

где $T_n(\varphi_1)$ - полином наилучшего приближения функции $\varphi_1$ в $L$ .

Известно, что для функции $\varphi \in V$ $E_n(\varphi)_{L_1} = O(\frac{1}{n})$ ( 2 стр. I39, стр.274). Значит,

$$\max_{0\le t\le 2\pi}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_{k/k}(a_k \sin kt - b_k \cos kt)\right| \le \max_t |f_\lambda(t) - S_n(f_\lambda)(t)| \cdot E_n(\varphi_1)_{L_1} = \frac{1}{n}\max_{0\le t\le 2\pi}|f_\lambda(t) - S_n(f_\lambda)(t)|$$

и необходимость условия (9) очевидна. Пусть имеет место (9). Обозначим через $\tau_n(f)$ сумму Валле-Пуссена для функции $f$ . Известно, что для непрерывной функции $f$ $\max_t |\tau_n(f)(t)| \le 3\max_t |f(t)|$ и $\tau_n(f)(t) - f(t) = O(1)$

равномерно по $t$, а для функции $f$, имеющей непрерывную производную $f'$; $[\tau_n(f)]' = t_n(f')$.

Воспользовавшись этими свойствами сумм Валле-Пуссена и неравенством Бернштейна для производной тригонометрического полинома, получаем:

$$\max_t |\Phi_\lambda(t) - S_n(\Phi_\lambda)(t)| \geq 1/3 \max_t |t_n(\Phi_\lambda - S_n(\Phi_\lambda))(t)| \geq$$

$$\geq \frac{1}{6n} \max_t |[t_n(f_\lambda - S_n(f_\lambda))(t)| = \frac{1}{6n} \max_t |\tau_n(f_\lambda)(t) -$$

$$- f_\lambda(t) + f_\lambda(t) - S_n(f_\lambda)(t)| = O(1/n) + \frac{1}{6n} \max_t |f_\lambda(t) - S_n(f_\lambda)(t)|$$
$$(n \to \infty).$$

Следовательно, справедливо следующее соотношени:

$$\max_t |\Phi_\lambda(t) - S_n(\Phi_\lambda)(t)| = O\left(\frac{1}{n}\right) \max_t |f_\lambda(t) - S_n(f_\lambda)(t)|,$$
$$(n \to \infty)$$

из которого достаточность условия (9) ясна.

Сделаем два очевидных замечания к лемме I.

I. Равномерная сходимость последовательности частных сумм порядка $n_k$ ряда (8) равносильна соотношению, полученному из (9) заменой $n$ на $n_k$.

2. Равномерная ограниченность частных сумм ряда (8) равносильна условию (9), если в нем $o$ малое заменить на $O$ большое. Из леммы I следует теорема Салема (см. Бари Н.К. Тригонометрические ряды, стр.I9I) при $(\lambda_k = 1,\ k = 1,2,\ldots)$

Перейдем теперь к доказательству теоремы I. Так как выполняется условие (6), то из равенства (I0) следует соотношение

$$\sum_{\nu=n_k+1}^{\infty} \lambda_\nu/_\nu (a_\nu \sin\nu t - b_\nu \cos\nu t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\{\varphi_\lambda - S_{n_k}(\varphi_\lambda)\}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \{f - T_{n_k} + T_{n_k}\}\{\varphi_\lambda - S_{n_k}(\varphi_\lambda)\} = E_{n_k}(f)\int_0^{2\pi} [\varphi_\lambda - S_{n_k}(\varphi_\lambda)](t)\,dt = o\left(\frac{1}{n_k}\right)$$

равномерное по $t$ и на основе леммы следует, что $\{\lambda_k\}\in(C,C(k))$. Из условия же $\{\lambda_\nu\}\in(C,C(k))$ следует, что $\varphi_\lambda\in V$ ( [I] стр.282).

Покажем, что в этом случае выполняется и равенство (6):

$$\int_0^{2\pi}|\varphi_\lambda(t)-S_{n_k}(\varphi_\lambda)(t)|dt=O(1/n_k)\quad(k\to\infty).$$

Допустим противное. Тогда

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, n_k\int_0^{2\pi}|\varphi_\lambda-S_{n_k}(\varphi_\lambda)|(t)dt=\infty$$

Можно построить подпоследовательность последовательности $k-\{n_m\}$, удовлетворяющей следующим условиям:

$$n_{m+1}\geqslant 2n_m$$

$$n_{m+1}\int_0^{2\pi}|\varphi_\lambda(t)-S_{n_{m+1}}(\varphi_\lambda)(t)|dt\geqslant n_m$$

Возьмем $f$ в виде следующего ряда:

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}1/n_{m-1}\,\tau_{n_m}[\operatorname{sign}(\varphi_\lambda-S_{n_m}(\varphi_\lambda))](x)$$

Имеем $\sum\limits_{m=1}^{\infty}1/n_{m-1}\leq\sum\limits_{m=1}^{\infty}1/2^m<+\infty$ и, значит, $f\in C[0,2\pi]$.

Можно доказать, что

$$\sum_{k=n_m+1}^{\infty}\lambda_k/k\,(a_k(f)\sin kt-b_k(f)\cos kt)\neq O\left(\frac{1}{n_m}\right)(m\to\infty)$$

Отсюда $\{\lambda_k\}\bar{\in}(C,C(k))$ ; это противоречие и доказывает достаточность условия (6). Равносильность же условия (7) условию $\{\lambda_\nu\}\in(C,C(k))$ следует из теоремы Банаха-Штейнгауза, если заметить, что

$$S_{n_k}^{\lambda}(f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x+t)\sum_{\nu=1}^{n_k}\lambda_\nu\cos\nu t\,dt$$

есть последовательность линейных, непрерывных операторов, действующих из $C$ в $C$. Теорема I полностью доказана.

Как следствие этой теоремы получаем

Предложение 2. Пусть $\varphi(x)$ - функция с ограниченным изменением и с рядом Фурье-Стильтьеса

$$d\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{n_k} \cos n_k x + \mu_{n_k} \sin n_k x,$$

в котором $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$. Тогда частные суммы этого ряда ограничены в $L$.

Действительно,

$$\int_0^{2\pi} |\varphi - S_{n_\nu}(\varphi)|(x)dx = \int_0^{2\pi} \left|\varphi - \frac{S_{n_\nu}(\varphi) + \ldots + S^{(\varphi)}_{n_{\nu+1}-1}}{n_{\nu+1} - n_\nu}\right|(x)dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} |\varphi - \sigma^{(\varphi)}_{n_{\nu+1}-1, m_\nu}|(x)dx,$$

где $m_\nu = n_{\nu+1} - n_\nu - 1$, $\sigma_{n,m}(\varphi) = \frac{1}{m+1}\sum_{\nu=n-m}^{n} S_\nu(\varphi)$

сумма Валле-Пуссена. Легко заметить (см., например, 3 стр. I27), что

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(t) - \sigma_{n_{\nu+1}-1, m_\nu}(\varphi)(t)|dt = O(E_{n_\nu}(\varphi)) = O\left(\frac{1}{n_\nu}\right).$$

Предложение 3. Для функции с ограниченным изменением $\varphi(x)$ равносильны следующие соотношения

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(x) - S_n(\varphi)(x)|dx = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n \to \infty),$$

$$\int_0^{2\pi} |\tilde{\varphi}(x) - S_n(\tilde{\varphi})(x)|dx = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n \to \infty),$$

( $\tilde{\varphi}$ - сопряженная функция к $\varphi$ ).

Для доказательства воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2. Для того чтобы $\varphi \in V$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(\tilde{\varphi})(t) - \tilde{\varphi}(t)|dt = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty)$$

Приведем доказательство необходимости последнего условия.

Действительно, $\int_0^{2\pi} |\sigma_n(\tilde{\varphi})(t) - \tilde{\varphi}(t)|dt =$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)} \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{\pi} \{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)\} \frac{\sin(n+1)t}{(2\sin \frac{1}{2}t)^2} dt \right| dx$$

$$\int_0^{2\pi} \left| \int_0^{\pi} \{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)\} \frac{\sin(n+1)t}{(2\sin\frac{1}{2}t)^2} dt \right| dx = \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{\pi/n+1} + \int_{\pi/n+1}^{\pi} dt \right| dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{\pi/n+1} + \int_{\pi/n+1}^{\pi} \{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)\} \frac{\sin(n+1)t}{t^2} dt \right| dx + O(1) = I_1 + I_2 + O(1).$$

Воспользуемся тем, что для функции с ограниченным изменением

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(x+h) - \varphi(x-h)| dx = O(h) \quad (h \to 0),$$

и получим следующие оценки:

$$I_1 = \int_0^{\pi/n+1} O(t) \frac{(n+1)t}{t^2} dt + O(1) = O(1)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \left| \int_{\pi/n+1}^{\pi} \{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)\} \frac{\sin(n+1)t}{t^2} dt \right| dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{k\frac{\pi}{n+1}}^{(k+1)\frac{\pi}{n+1}} \{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)\} \frac{\sin(n+1)t}{t^2} dt \right| dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^{\pi/n+1} \left\{\varphi\left(x+t+\frac{k\pi}{n+1}\right) - \varphi\left(x-t-\frac{k\pi}{n+1}\right)\right\} \frac{\sin(n+1)t}{\left(t+\frac{k\pi}{n+1}\right)^2} dt \right| dx$$

Обозначим $\varphi(x+t) - \varphi(x-t) = \varphi_x(t)$ и предположим вначале, что $n$ - четное. Тогда последнее равенство перепишется так:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n/2} \int_0^{\pi/n+1} \left\{ \frac{\varphi_x\left(t + \frac{2k\pi}{n+1}\right)}{\left(t + \frac{2k\pi}{n+1}\right)^2} - \frac{\varphi_x\left(t + \frac{2k-1}{n+1}\pi\right)}{\left(t + \frac{2k-1}{n+1}\pi\right)^2} \right\} \sin(n+1)t\, dt \right| dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n/2} \int_0^{\pi/n+1} \frac{\varphi_x\left(t+\frac{2k\pi}{n+1}\right) - \varphi_x\left(t+\frac{2k-1}{n+1}\pi\right)}{\left(t + \frac{2k-1}{n+1}\pi\right)^2} \sin(n+1)t\, dt \right| dx +$$

$$+\frac{2\pi}{n+1}\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n/2}\int_0^{\pi/n+1}\frac{\varphi_x\left(t+\frac{2k\pi}{n+1}\right)}{\left(t+\frac{2k\pi}{n+1}\right)\left(t+\frac{2k-1}{n+1}\pi\right)^2}\sin(n+1)t\,dt\Big|dx+$$

$$+\left(\frac{\pi}{n+1}\right)^2\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n/2}\frac{\varphi_x\left(t+\frac{2k\pi}{n+1}\right)}{\left(t+\frac{2k\pi}{n+1}\right)^2\left(t+\frac{2k-1}{n+1}\pi\right)^2}\sin(n+1)t\,dt\Big|dx=$$

$$=I_2^{(1)}+I_2^{(2)}+I_2^{(3)}.$$

$$I_2^{(1)}=\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n/2}\int_0^{\pi/n+1}\frac{\varphi_x\left(t+\frac{2k\pi}{n+1}\right)-\varphi_x\left(t+\frac{2k-1}{n+1}\pi\right)+\varphi_x\left(-t-\frac{2k-1}{n+1}\pi\right)-\varphi_x\left(-t-\frac{2k\pi}{n+1}\right)}{\left(t+\frac{2k-1}{n+1}\pi\right)^2}\sin(n+1)t\,dt\Big|dx$$

$$I_2^{(1)}=O\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n/2}\int_0^{\pi/n+1}\frac{\sin(n+1)t}{\left(t+\frac{2k-1}{n+1}\pi\right)^2}dt=O\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n/2}\int_0^{\pi/n+1}\frac{O((n+1)^2)}{(k+1)^2}dt=O\left(\frac{1}{n}\right)\cdot O(n)=O(1)$$

$$I_2^{(2)}=O\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n/2}\int_0^{\pi/n+1}\frac{\sin(n+1)t}{\left(t+\frac{2k-1}{n+1}\pi\right)^2}dt=O(1)$$

$$I_2^{(3)}=O(1)\cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right)\sum_{k=1}^{n/2}\int_0^{\pi/n+1}\frac{\sin(n+1)t}{\left(t+\frac{2k\pi}{n+1}\right)\left(t+\frac{2k-1}{n+1}\pi\right)^2}dt=O(1)$$

Легко заметить, что

$$\sigma_{n+1}(\tilde\varphi)(t)-\sigma_n(\tilde\varphi)(t)=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и значит для любого $n$ справедлива оценка

$$\int_0^{2\pi}|\sigma_n(\tilde\varphi)-\tilde\varphi(t)|dt=O\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to\infty).$$

Из равенства $\sigma_n(\tilde\varphi)-S_n(\tilde\varphi)=\frac{S_n'(\varphi)}{n+1}$ (см., например, [1], стр. 426) и леммы 2 следует, что

$$\int_0^{2\pi}|\tilde\varphi(t)-S_n(\tilde\varphi)(t)|dt=\frac{1}{n+1}\int_0^{2\pi}|S_n'(\varphi)(t)|dt+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Но, как мы уже отмечали, условие (3) эквивалентно условию (4) и, значит, предложение 3 доказано.

Поступила 6.III.1978

Кафедра
математического анализа

## ЛИТЕРАТУРА


1. А.Зигмунд, Тригонометрические ряды, т.I, М., 1965.
2. А.Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960.
3. Ф.И.Харшиладзе, Труды Тбилисского Математического института им. Размадзе АН ГССР, 26, 1959.
4. I.Karamata, J.Math. Pure et Appl., 35, 1956, 87-95.
5. F.Holland, G.B.Twomey, Proc. Roy.Irish. Acad., 1976, A76, № 21-23, 289-299.
6. Г.С.Янаков, Сообщения Академии наук Грузинской ССР, 84, I, 1976.


გ. იანაკოვი

### შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციის ფურიე-სტილტიესის მწკრივის კერძო ჯამების შემოსაზღვრულობის შესახებ $L$ სივრცეში


რეზიუმე

დადგენილია საკმარისი პირობა იმისა, რომ შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციის ($V$-კლასი) ფურიე-სტილტიესის მწკრივის კერძო ჯამები შემოსაზღვრულია $L$ სივრცეში. დამტკიცებულია წინადადება: თუ $\varphi \in V$, მაშინ შემდეგი პირობები ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

1. $$\int_0^{2\pi} |\varphi(t) - S_n(\varphi)(t)| dt = O(1/n) \quad (n \to \infty),$$

2. $$\int_0^{2\pi} |\tilde{\varphi}(t) - S_n(\tilde{\varphi})(t)| dt = O(1/n) \quad (n \to \infty)$$

( $\tilde{\varphi}$ სიმბოლოთი აღნიშნულია $\varphi$ ფუნქციის შეუღლებული)

G. Ianakov

# ON THE BOUNDEDNESS OF PARTIAL SUMS OF FOURIER-STILTJES SERIES OF THE FUNCTION OF BOUNDED VARIATION IN L SPACE

Summary

The sufficient conditions for the boundedness of partial sums of Fourier-Stiltjes series are obtained. It is shown that for function of bounded variation the following two conditions are equivalent

1. $\int_0^{2\pi} |\varphi(x) - S_n(\varphi)(x)| dx = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n \to \infty)$

2. $\int_0^{2\pi} |\tilde{\varphi}(x) - S_n(\tilde{\varphi})(x)| dx = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n \to \infty)$

($\tilde{\varphi}$ is the conjugate of $\varphi$ )

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
204, 1978

УДК 512.815.I , 5II.2I8.

# О ФУНКЦИЯХ РАЗБИЕНИЙ

Э.Т.Самсонадзе

Нашей задачей является нахождение числа $Q(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ целых неотрицательных решений системы линейных неравенств

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{I}$$

и числа $P(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ целых неотрицательных решений системы линейных уравнений $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1,2,\ldots,n)$ с фиксированными целыми коэффициентами $a_{ij}$ $(i=1,2,\ldots,n;$ $j=1,2,\ldots,m)$ как функций от $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

В отличие от известных методов нахождения функций разбиения (например, [I] ), мы для наших целей вводим в рассмотрение следующие функции $\mathcal{E}(x;y)$, $\bar{\mathcal{E}}(x;y)$ действительных переменных:

$\mathcal{E}(x;y)=1$ , если $x \leq y$ и $\mathcal{E}(x;y)=0$ , если $x > y$ ;

$\bar{\mathcal{E}}(x;y)=1$ , если $x < y$ и $\bar{\mathcal{E}}(x;y)=0$ , если $x \geq y$ .

Как нетрудно видеть, эти функции тесно связаны с функцией $Q(b_1, b_2, \ldots, b_n)$:

$$Q(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \sum_{x_1=0,1,\ldots} \ \sum_{x_2=0,1,\ldots} \cdots \sum_{x_m=0,1,\ldots} \ \prod_{i=1}^{n} \omega_i\Big(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j ; b_i\Big), \tag{2}$$

где $\omega_i(x;y)=\bar{\mathcal{E}}(x;y)$, если $i$-тое неравенство в системе (I) является строгим $(1\le i\le n)$ и $\omega_i(x;y)\equiv\mathcal{E}(x;y)$ в противном случае. Кроме того, принимая во внимание, что $\delta(c;d)=\mathcal{E}(c;d)-\mathcal{E}(c;d-1)$ при целых $c,d$, где $\delta(c;d)$ – символ Кронекера, получим что при целых $b_1,b_2,\dots,b_n$ функция $P(b_1,b_2,\dots,b_n)$ выражается через $Q(b_1,b_2,\dots,b_n)$ следующим образом:

$$P(b_1,b_2,\dots,b_n)=\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\dots\sum_{k_n=0}^{1}(-1)^{k_1+k_2+\dots+k_n}\,Q(b_1-k_1,b_2-k_2,\dots,b_n-k_n), \tag{3}$$

где $Q(b_1-k_1,\dots,b_n-k_n)$ – число целых неотрицательных решений системы нестрогих неравенств $\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}x_j\le b_i-k_i$ $(i=1,2,\dots,n)$.

Изучим свойства функций $\mathcal{E}(x;y)$ и $\bar{\mathcal{E}}(x;y)$, которые мы, ради удобства, будем обозначать общим символом $\omega(x;y)$, причем если $\omega(x;y)\equiv\mathcal{E}(x;y)$, то $\bar\omega(x;y)\equiv\bar{\mathcal{E}}(x;y)$ и наоборот, если $\omega(x;y)\equiv\bar{\mathcal{E}}(x;y)$, то $\bar\omega(x;y)\equiv\mathcal{E}(x;y)$. Кроме того, если через $\omega_i(x;y)$ $(1\le i\le n)$ обозначена одна из функций $\mathcal{E}(x;y)$, $\bar{\mathcal{E}}(x;y)$, то $\omega_i^{(1)}(x;y)=\omega_i(x;y)$, $\omega_i^{(-1)}(x;y)\equiv\bar\omega_i(x;y)$.

Нетрудно видеть, что

$$\omega(x;y)=\omega(x+a;y+a),\qquad \omega(x;y)=\omega(xz;yz),$$

$$(\omega(x;y))^z=\omega(x;y),\qquad \omega(x;y)+\bar\omega(y;x)=1,$$

$$\omega_1(x;a_1)\omega_2(x;a_2)=\omega_2(a_1;a_2)\omega_1(x;a_1)+\bar\omega_2(a_2;a_1)\omega_2(x;a_2),$$

$$\omega_1(x;a_1)\omega_2(-x;a_2)=\omega_i(0;a_1+a_2)(\omega_1(x;a_1)-\omega_2(x;-a_2))\quad(i=1,2)$$

при любых действительных $x,y,a_1,a_2,a$ и положительном $z$; /$\omega_i(x;y)$ $(i=1,2)$ – произвольная из функций $\mathcal{E}(x;y)$, $\bar{\mathcal{E}}(x;y)$/.

Применяя эти свойства функций $\omega(x;y)$, можно доказать, что если среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ есть положительные, то

$$\prod_{\ell=1}^{n} \omega_\ell (a_\ell x; b_\ell) = \sum_{t=1}^{n} (\operatorname{sign} a_t) \omega_{t;t} \left(x; \frac{b_t}{a_t}\right) \gamma(t), \quad (4)$$

где суммирование подразумевается лишь по таким $t$ $(1 \le t \le n)$ что $a_t \ne 0$ ; $\gamma(t) = \prod_{\ell=1,\ \ell \ne t}^{n} \omega_{t;\ell}(0; d_\ell^t)$, $d_\ell^t = (\operatorname{sign} a_t)(b_\ell a_t - b_t a_\ell)$ $(1 \le \ell, t \le n)$;

а функция $\omega_{t;\ell}(x;y)$ $(1 \le t, \ell \le n)$ определяется следующим образом:

если $a_\ell = 0$ , то $\omega_{t,\ell}(x;y) \equiv \omega_\ell(x;y)$ $(1 \le \ell, t \le n)$

если $a_\ell \ne 0$, $1 \le \ell < t \le n$ , то $\omega_{t;\ell}(x;y) \equiv \omega_t^{(\alpha)}(x;y)$, $\alpha = \operatorname{sign}(-a_t a_\ell)$.

если $a_\ell \ne 0$, $1 \le \ell = t \le n$ , то $\omega_{t;\ell}(x;y) \equiv \omega_t^{(\beta)}(x;y)$, $\beta = \operatorname{sign} a_t$ ;

если $a_\ell \ne 0$, $1 \le t < \ell \le n$ , то $\omega_{t;\ell}(x;y) \equiv \omega_\ell(x;y)$.

Применяя результат [2] , можно показать, что если $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $f_1(x_2, x_3, \ldots x_m), \ldots, f_{m-1}(x_m)$ - многочлены, то выражение $\sum_{x_m=0}^{f_m} \sum_{x_{m-1}=0}^{f_{m-1}(x_m)} \ldots \sum_{x_1=0}^{f_1(x_2, x_3, \ldots, x_m)} f_0(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ является многочленом от $f_m$ и от коэффициентов многочленов $f_i(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_m)$ $(i=0,1,\ldots m-1)$. Этот многочлен обозначим через $F(f_m, f_{m-1}, \ldots, f_1, f_0)$ . Введем, кроме того, следующие обозначения: $\bar{a}$ - наименьшее целое число, не меньшее числа $a$ ; $\bar{\mathcal{E}}(a) = \bar{a} - 1$ , $\mathcal{E}(a) = [a]$.

(как известно, [1], $\bar{a} = -[-a]$).

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{x=0,1,\ldots} \omega(x;a) f(x) = \omega(0;a) F(\omega(a), f), \quad (5)$$

где $\omega(a) = \mathcal{E}(a)$ , если $\omega(x;a) \equiv \mathcal{E}(x;a)$ и $\omega(a) = \bar{\mathcal{E}}(a)$ , если $\omega(x;a) \equiv \bar{\mathcal{E}}(x;a)$.

Из формул (4) и (5) получим, что если среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ есть положительные, то

$$\sum_{x=0,1,\ldots}\left(f(x)\prod_{\ell=1}^{n}\omega_\ell(a_\ell x; b_\ell)\right)=\sum_{t=1}^{n}\left((\operatorname{sign} a_t)F\left(\omega_{t;t}\left(\frac{b_t}{a_t}\right); f\right)\times\right. \tag{6}$$
$$\left.\times\prod_{\ell=1}^{n}\omega_{t;\ell}(0; b_\ell^t)\right).$$

(суммирование в правой части равенства (6) подразумевается лишь по таким $t\ (1\le t\le n)$, что $a_t\ne 0)$, где $b_\ell^t=(\operatorname{sign} a_t)(b_\ell a_t - b_t a_\ell)$ при $\ell\ne t,\ 1\le \ell, t\le n$; $b_\ell^t=(\operatorname{sign} a_t)b_t$ при $1\le \ell=t\le n$; $\omega_{t;t}(x)=\mathcal{E}(x)$, если $\omega_{t;t}(x;y)=\mathcal{E}(x;y)$ и $\omega_{t;t}(x)=\bar{\mathcal{E}}(x)$, если $\omega_{t;t}(x;y)=\bar{\mathcal{E}}(x;y)$.

Для вычисления $Q(b_1,\ldots,b_n)$ по формуле (2) можно при определенных условиях применить последовательно несколько раз формулу (6), и т.о. окончательно получим вычислительную схему, которая позволяет выразить функцию $Q(b_1,\cdots,b_n)$ через выражения $F(f_m,\cdots,f_1)$ в случае, когда $Q(b_1,\ldots,b_n)$ конечно при любых $b_1,\ldots,b_n$. Приведем эту схему.

Пусть

$$\Delta^{i_1,\ldots,i_{k-1},\,i_k}_{j_1,\cdots j_{k-1},\,j'}\Big/\Delta^{i_1,\ldots,i_{k-1},\,i_k}_{j_1,\ldots,j_{k-1},\,j} \tag{7}$$

при $1\le j_1,\ldots,j_{k-1}<j'<j\le m$, $1\le i_1,\ldots,i_k\le n$, $1\le k<m$, $\Delta^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j'}\ne 0$,

где через $\Delta^{\tau_1,\ldots,\tau_k}_{\rho_1,\ldots,\rho_k}$ обозначен минор матрицы $(a_{ij})$, содержащей её $\tau_1,\ldots,\tau_k$ -тые строчки и $\rho_1,\ldots,\rho_k$ -тые столбцы $(1\le\tau_1,\ldots,\tau_k\le n,\ \ 1\le\rho_1,\ldots,\rho_k\le m,\ \ 1\le k<m)$.

Строится цепь "матриц":

$$A_0=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \ldots & a_{1,m+1} & \omega_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,m+1} & \omega_n \end{array}\right),\quad A_{t_1}=\left(\begin{array}{ccc|c} a^{t_1}_{1,2} & \ldots & a^{t_1}_{1,m+1} & \omega_{t_1;1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a^{t_1}_{n,2} & \ldots & a^{t_1}_{n,m+1} & \omega_{t_1,n} \end{array}\right),$$

$$\ldots A_{t_1,\ldots,t_m}=\left(\begin{array}{c|c} a^{t_1,\ldots,t_m}_{1,m+1} & \omega_{t_1,\ldots,t_m;1} \\ \cdots & \cdots \\ a^{t_1,\ldots,t_m}_{n,m+1} & \omega_{t_1,\ldots,t_m;n} \end{array}\right), \tag{8}$$

где $a_{i,m+1}=b_i \quad (1\le i\le n), \qquad a^{t_1}_{t_1,j}=(\operatorname{sign} a_{t_1,1})\,a_{t_1,j}$;

$a^{t_1}_{\ell,j}=(\operatorname{sign} a_{t_1,1})\begin{vmatrix} a_{t_1,1} & a_{t_1,j} \\ a_{\ell,1} & a_{\ell,j} \end{vmatrix}$ при $\ell\ne t_1,\ 1\le \ell, t_1\le n,\ 1\le j\le m+1$,

$a^{t_1,\ldots,t_{k+1}}_{t_{k+1},j}=\left(\operatorname{sign} a^{t_1,\ldots,t_k}_{t_{k+1},k+1}\right) a^{t_1,\ldots,t_k}_{t_{k+1},j},\quad a^{t_1,\ldots,t_{k+1}}_{\ell,j}=$

$=\left(\operatorname{sign} a^{t_1,\ldots,t_k}_{t_{k+1},k+1}\right)\begin{vmatrix} a^{t_1,\ldots,t_k}_{t_{k+1},k+1} & a^{t_1,\ldots,t_k}_{t_{k+1},j} \\ a^{t_1,\ldots,t_k}_{\ell,k+1} & a^{t_1,\ldots,t_k}_{\ell,j} \end{vmatrix}$ при $\ell\ne t_{k+1},\ 1\le \ell, t_1,\ldots,t_{k+1}\le n$,

$2\le k+1<j\le m+1;\ \omega_i(x;y)\equiv\bar{\varepsilon}(x;y)$ или $\omega_i(x;y)\equiv\varepsilon(x;y)$ в зависимости от того, является или нет $i$-тое неравенство в системе (I) строгим; соответственно $\omega_i(x)\equiv\bar{\varepsilon}(x)$ или $\omega_i(x)\equiv\varepsilon(x)$;

$$\omega_{t_1;i}=\delta(0;a_{i,1})\,\omega_i+(1-\delta(0;a_{i,1}))\,\omega^{(\alpha_1)}_{\max(t_1,i)},\quad \alpha_1=\operatorname{sign}\left((-a_{i,1})^{\bar{\varepsilon}(i;t_1)}(a_{t_1,1})^{\varepsilon(i;t_1)}\right),$$

$$\omega_{t_1,\ldots,t_{k+1};i}=\delta(0;a^{t_1,\ldots,t_k}_{i,k+1})\,\omega_{t_1,\ldots,t_k;i}+\left(1-\delta(0;a^{t_1,\ldots,t_k}_{i,k+1})\right)\omega^{(\alpha)}_{t_1,\ldots,t_k;\max(t_{k+1},i)}$$

$$\alpha=\operatorname{sign}\left(\left(-a^{t_1,\ldots,t_k}_{i,k+1}\right)^{\bar{\varepsilon}(i;t_{k+1})}\left(a^{t_1,\ldots,t_k}_{t_{k+1},k+1}\right)^{\varepsilon(i;t_{k+1})}\right)\qquad (1\le i\le n).$$

В цепочке (8) числа $t_1, t_2,\ldots,t_m$ пробегают лишь те элементы множества $\{1,2,\ldots,n\}$, при которых $a_{t_1,1}\,a^{t_1}_{t_2,2}\ldots a^{t_1,\ldots,t_{m-1}}_{t_m,m}\ne 0$.

Число $Q(b_1,\ldots,b_n)$ целых неотрицательных решений системы (I) определяется по следующей формуле:

$$Q(b_1,\ldots,b_n)=\sum_{t_1=1}^{n}\ldots\sum_{t_m=1}^{n}\Big(\left(\operatorname{sign} a_{t_1,1}\,a^{t_1}_{t_2,2}\ldots a^{t_1,\ldots,t_{m-1}}_{t_m,m}\right)\times$$

$$\times\,\varphi(t_1,\ldots,t_m)\prod_{\ell=1}^{n}\omega_{t_1,\ldots,t_m;\ell}\left(0;b^{t_1,\ldots,t_m}_{\ell}\right)\Big), \tag{9}$$

где $b_l^{t_1,\dots,t_m} = a_{l,m+1}^{t_1,\dots,t_m}$, $\varphi(t_1,\dots,t_m) = F'(f_{t_1},\dots,t_m,\dots,f_{t_1},1)$,

$$f_{t_1,\dots,t_i}(x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_m) = \omega_{t_1,\dots,t_i;t_i}\left(\frac{a_{t_i,m+1}^{t_1,\dots,t_i} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{t_i,j}^{t_1,\dots,t_i} x_j}{|a_{t_i,i}^{t_1,\dots,t_{i-1}}|}\right),$$

$$f_{t_1,\dots,t_m} = \omega_{t_1,\dots,t_m;t_m}\left(\frac{a_{t_m,m+1}^{t_1,\dots,t_m}}{|a_{t_m,m}^{t_1,\dots,t_{m-1}}|}\right) \qquad (1 \le i < m).$$

В общем случае функция $Q(b_1,\dots,b_n)$ находится таким образом:

$$Q(b_1,\dots,b_n) = \sum_{y_2=0}^{c_2-1}\sum_{y_3=0}^{c_3-1}\dots\sum_{y_m=0}^{c_m-1} Q'\Big(b_1-\sum_{j=2}^{m}a_{1j}y_j,\dots,b_n-\sum_{j=2}^{m}a_{nj}y_j\Big), \qquad (10)$$

где $c_2, c_3, \dots, c_m$ – произвольные натуральные числа, удовлетворяющие условию

$$a_{i_1,1} \,\big|\, a_{i_1,2}\, c_2\,, \qquad \Delta_{j_1,\dots,j_{k-1},j}^{i_1,\dots,i_{k-1},i_k}\, c_j \,\big|\, \Delta_{j_1,\dots,j_{k-1},j+1}^{i_1,\dots,i_{k-1},i_k}\, c_{j+1} \qquad (11)$$

при $1 \le j_1,\dots,j_{k-1} < j < m$, $1 \le i_1,\dots,i_k \le n$, $1 \le k < m$, $\Delta_{j_1,\dots,j}^{i_1,\dots,i_k} \ne 0$ ; а $Q'(d_1,\dots,d_n)$ – число целых неотрицательных решений системы $\sum_{j=1}^{m}(c_j a_{ij})x_i \le d_i$ $(i=1,\dots,n)$ , вычисляемое по формуле (9).

Метод вычисления $F(f_m,\dots,f_0)$ известен [2] ; можно также применить следующую явную формулу для суммы степеней натуральных чисел [3] :

$$\sum_{x=1}^{z} x^n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} \frac{(-1)^{k+n} k^n z(z+1)\dots(z+i)C_i^k}{(i+1)!}. \qquad (12)$$

Заметим, что с помощью функций $\omega(x;y)$ можно найти также число целых решений системы линейных диофантовых неравенств и уравнений [4] . Задача нахождения числа целых решений для некоторых специальных систем линейных диофантовых неравенств рассмотрена, например, в [5].

Рассмотрим примеры на вычисление числа целых неотрицательных решений системы линейных диофантовых неравенств и уравнений.

Пример I. Найти число $Q(b)$ целых неотрицательных решений неравенства $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \le b$ и число $P(d)$ целых неотрицательных решений уравнения $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = d$, где $a_1, a_2, \ldots a_m, b, d$ - натуральные числа.

Согласно формулам (I0) и (II), получаем:

$$Q(b) = \sum_{y_2=0}^{c_2-1} \sum_{y_3=0}^{c_3-1} \ldots \sum_{y_m=0}^{c_m-1} Q'(b - a_2 y_2 - a_3 y_3 - \ldots - a_m y_m),$$

где $Q'(b')$ - число целых неотрицательных решений неравенства $\sum_{j=1}^{m} a_j' x_j \le b'$, где $a_j' = c_j a_j$, а натуральные числа $c_2, c_3, \ldots, c_m$ таковы, что

$$a_j c_j \,|\, a_{j+1} c_{j+1}, \quad c_1 = 1 \quad (1 \le j < m) \qquad \text{(II}'\text{)}$$

Для вычисления $Q'(b')$ составим цепочку (8):

$$A_0 = (a_1', a_2', \ldots, a_m', b' \,/\, \varepsilon), \quad A_1 = (a_2', a_3', \ldots, a_m', b'/\varepsilon),$$

$$A_2 = (a_3', a_4', \ldots, a_m', b'/\varepsilon), \ldots, A_{m-1} = (a_m', b'/\varepsilon), \ A_m = (b'/\varepsilon).$$

Применив формулу (9), отсюда получим:

$$Q'(b') = \varepsilon(0; b') F\left(\left[\frac{b'}{a_m'}\right], \left[\frac{b' - a_m' x_m}{a_{m-1}'}\right], \ldots, \left[\frac{b' - a_m' x_m - a_{m-1}' x_{m-1} - \ldots - a_2' x_2}{a_1'}\right]\right),$$

Как видно из формулы (II ), числа $c_2, c_3, \ldots, c_m$ можно брать таким образом:

$$c_{i+1}=\frac{[a_1,a_2,\dots,a_i]}{([a_1,a_2\dots,a_i],a_{i+1})} \quad (1\le i<m), \qquad (\mathrm{II}'')$$



где через $[a_1,a_2,\dots,a_i]$ обозначено наименьшее общее кратное чисел $a_1,a_2,\dots,a_i$, а через $(a,\ell)$ – наибольший общий делитель чисел $d,\ell$.

Таким образом, получаем

$$Q(b)=\sum_{y_2=0}^{c_2-1}\sum_{y_3=0}^{c_3-1}\dots\sum_{y_m=0}^{c_m-1}\mathcal{E}(0;b-\sum_{i=2}^{m}a_iy_i)F(f_m,f_{m-1},\dots,f_1,1), \qquad (13)$$

где

$$f_m=\left[\frac{b-\sum_{k=2}^{m}a_ky_k}{c_ma_m}\right],\quad f_i(x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_m)=\left[\frac{b-\sum_{k=2}^{m}a_ky_k}{c_ia_i}\right]-$$

$$-\frac{\sum_{k=i+1}^{m}c_ka_kx_k}{c_ia_i} \qquad (1\le i<m),$$

а $c_2,c_3,\dots,c_m$ вычисляются по формуле (II$''$).

Согласно формуле (3),

$$P(d)=Q(d)-Q(d-1). \qquad (14)$$

Пример 2. Найти функцию разбиения Костанта симплектической алгебры Ли $C_2$.

Как нетрудно видеть, функция разбиения Костанта $P_{C_2}(\mu)$ алгебры $C_2$ с корнями $\pm 2e_1,\ \pm 2e_2,\ \pm e_1\pm e_2$, где $e_1 e_2$ – ортонормированный базис, а $\mu=ae_1+be_2$, представляет при $a\ge 0,\ a+b\ge 0,\ a+b\equiv 0 \pmod 2$ число целых неотрицательных решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} x_1+x_2\le \frac{1}{2}(a+b),\\ x_1-x_2\le \frac{1}{2}(a-b). \end{cases}$$

Проведя вычисления по формуле (9), получим

$$P_{C_2}(M) = \varepsilon(0;A)\varepsilon(0;A+B)F(A, A-x_2, 1) - \varepsilon(0;A+B)\bar{\varepsilon}(0;-B)F(-B-1, B+x_2, 1) + \varepsilon(0;A+B)\bar{\varepsilon}(0;A-B)\left[F\left(\frac{A-B}{2}-1, B+x_2, 1\right) - F\left(\frac{A-B}{2}-1, A-x_2, 1\right)\right],$$

где
$$A = \frac{1}{2}(a+b), \quad B = \frac{1}{2}(a-b),$$

откуда следует:

$$P_{C_2}(M) = \frac{1}{8}(a+b+2)(a+b+4) + \frac{1}{8}(b-a)(b-a-2)\bar{\varepsilon}(0;b-a) - \left[\frac{(b+1)^2}{4}\right]\bar{\varepsilon}(0;b)$$

при
$$a \geq 0, \ a+b \geq 0, \ a+b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 2)$$

Очевидно, что если не выполняется хотя бы одно из условий: $a \geq 0, \ a+b \geq 0, \ a+b \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 2)$, то $P_{C_2}(M) = 0$.

Пример 3. Найти функцию разбиения Костанта ортогональной алгебры Ли $\mathcal{D}_3$

Пусть $P_{\mathcal{D}_3}(M)$ – функция разбиения алгебры $\mathcal{D}_3$ с корнями $\pm e_i \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq 3)$, где $e_1, e_2, e_3$ –ортонормированный базис; $M = ae_1 + be_2 + ce_3$. Очевидно, что если не выполняется хотя бы одно из следующих условий: $a \geq 0$, $a+b \pm c \geq 0, \ a+b+c = 0 \ (\mathrm{mod}\, 2)$, то $P_{\mathcal{D}_3}(M) = 0$; в противном случае $P_{\mathcal{D}_3}(M)$ равна числу целых неотрицательных решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} -x-y \leq \frac{1}{2}(-a+b+c), \\ x-z \leq \frac{1}{2}(a-b+c), \\ y+z \leq \frac{1}{2}(a+b-c). \end{cases}$$

Применяя формулы (9) и (I2), получим:

$$P_{\mathcal{D}_3}(M) = -\frac{1}{6}\bar{\varepsilon}(0;a-b-c)\left[b(b+1)(b+2)\varepsilon(0;b) + c(c^2-1)\bar{\varepsilon}(c;0)\right] + \frac{1}{24}(a-b+c)(a-b+c+2)\bar{\varepsilon}(0;b-a-c)\left[2a+b-c+5+(-a+b+2c-1)\bar{\varepsilon}(0;a-b-c)\right] + \frac{1}{24}(a+b-c+2)(a+b-c+4)\left[2a-b+c+3+(-a+2b+c)\bar{\varepsilon}(0;a-b-c)\right].$$

Отметим, что другая формула для $\rho_{D_3}(M)$ приведена в [6].

Покажем, что функцию $Q(b_1, \dots, b_n)$ можно выразить через миноры матрицы $(a_{ij})$. Обозначим:

$$A_{t_1, t_2, \dots, t_k; \rho} = \begin{vmatrix} a_{t_{\rho_1}, \rho_1} & \dots & a_{t_{\rho_1}, \rho_{\ell-1}} & a_{t_{\rho_1}, \rho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{t_{\rho_{\ell-1}}, \rho_1} & \dots & a_{t_{\rho_{\ell-1}}, \rho_{\ell-1}} & a_{t_{\rho_{\ell-1}}, \rho} \\ a_{t_{\rho_\ell}, \rho_1} & \dots & a_{t_{\rho_\ell}, \rho_{\ell-1}} & a_{t_{\rho_\ell}, \rho} \end{vmatrix}$$

где $a_{i,m+1} = b_i$ $(1 \le i \le n)$; $t_{\rho_1}, \dots, t_{\rho_{\ell-1}}, t_{\rho_\ell}$ - такая последовательность последовательности $t_1, t_2, \dots, t_k$ $(1 \le \rho_1 < \dots < \rho_{\ell-1} < \rho_\ell = k,\ 1 \le \ell \le k)$, которая содержит все ее различные по величине элементы с наибольшими порядковыми номерами $(1 \le t_1, t_2, \dots, t_k \le n,\ 1 \le k \le \rho \le m+1)$.

Методом математической индукции по $k$ можно доказать:

$$a_{\ell,i}^{t_1,\dots,t_k} = \left|a_{t_1,1}\right|^{n(t_2,\dots,t_k,\ell)-1} \left|a_{t_2,2}^{t_1}\right|^{n(t_3,\dots,t_k,\ell)-1} \dots \left|a_{t_{k-1},k-1}^{t_1,\dots,t_{k-2}}\right|^{n(t_k,\ell)-1} \times \tag{I5}$$
$$\times \left(\operatorname{sign} a_{t_1,1}\, a_{t_2,2}^{t_1} \dots a_{t_k,k}^{t_1,\dots,t_{k-1}}\right) A_{t_1,\dots,t_k,\ell;i},$$

где через $n(t_i, \dots, t_k, \ell)$ $(2 \le i \le k \le m)$ обозначено количество различных чисел в последовательности $t_i, t_{i+1}, \dots, t_k$.

Как известно [7], многогранник решений совместной системы нестрогих линейных неравенств тогда и только тогда неограничен, когда неограничен многогранник решений соответствующей системы однородных неравенств. Кроме того, "если ранг $r_i$ матрицы $A_i$, полученной из матрицы $A$ совместной системы $\sum_{k=1}^{m} a_{jk} x_k \le a_j$ $(j = 1, \dots, n)$ вычеркиванием ее $i$-того столбца, отличен от нуля, то достаточным условием неограниченности многогранника решений этой системы в положительном направлении оси $x_i$ пространства $P^n$ является существование в матрице $A_i$ такого отличного от нуля минора $\Delta$ $r_i$-ого порядка, что среди определителей, полученных окаймлением его с помощью $i$-ого столбца и произвольной строки, не встречаются определители, совпадающие по знаку с $\Delta$ [7] . Принимая во внимание также формулу (I5), можно доказать следующую лемму:

Лемма. Множество целых неотрицательных решений системы (I) линейных неравенств тогда и только тогда конечно при любых $b_1, \ldots, b_n$ , когда для любых $t_1, \ldots, t_r, i$ $(1 \le r < i \le m,\ 1 \le t_1, \ldots, t_m \le n)$ найдется такое число $l\ (1 \le l \le n)$ , что $a_{l,i}^{t_1,\ldots,t_r} > 0$.

Как следует из этой леммы, вышеприведенную схему можно применять и для выяснения того, конечно ли множество целых неотрицательных решений системы (I) при любых $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

А именно, система (I) тогда и только тогда имеет при любых $b_1, \ldots, b_n$ конечное множество целых неотрицательных решений, когда в матрицах цепочки (8) любой столбец (не считая двух последних столбцов) содержит хотя бы одно положительное число.

С помощью формул (9), (I5) и леммы доказывается

Теорема. Если число $Q(b_1, \ldots, b_n)$ целых неотрицательных решений системы (I) линейных диофантовых неравенств конечно при любых $b_1, \ldots, b_n$ и для миноров матрицы $(a_{ij})$ выполняется условие (7), то

$$Q(b_1,\ldots,b_n) = \sum_{t_1=1}^{n} \ldots \sum_{t_m=1}^{n} \alpha(t_1,\ldots,t_m)\,\beta(t_1,\ldots,t_m)\,\varphi(t_1,\ldots,t_m), \qquad (I6)$$

где суммирование подразумевается лишь по таким $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $(1 \le t_1, t_2, \ldots, t_m \le n)$, что $A_{t_1;1} A_{t_1,t_2;2} \cdots A_{t_1,t_2,\ldots,t_m;m} \neq 0$;

$$\alpha(t_1,\ldots,t_m) = \operatorname{sign} A_{t_1,\ldots,t_m;m},$$

$$\beta(t_1,\ldots t_m) = \prod_{\ell=1}^{n} \omega_{t_1,\ldots t_m;\ell}\left(0; A_{t_1,\ldots,t_m;m} A_{t_1,\ldots,t_m,\ell;m+1}\right),$$

$$\varphi(t_1,\ldots t_m) = F(f_{t_1,\ldots,t_m},\ldots,f_{t_1},1) \quad f_{t_1,\ldots,t_m} = \omega_{t_1,\ldots,t_m;t_m}\left(\frac{A_{t_1,\ldots t_m;m+1}}{A_{t_1,\ldots,t_m;m}}\right),$$

$$f_{t_1,\ldots,t_i}(x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_m) = \omega_{t_1,\ldots,t_i;t_i}\left(\frac{A_{t_1,\ldots,t_i;m+1} - \sum_{j=i+1}^{m} A_{t_1,\ldots,t_i,j}\, x_j}{A_{t_1,\ldots,t_i;i}}\right)$$

$$(1 \le i < m).$$

Если $Q(b_1,\ldots,b_n)$ конечно при любых $b_1,\ldots,b_n$, но условие (7) не выполнено, то функция $Q(b_1,\ldots,b_n)$ находится с помощью формул (I0), (II), (I5).

<u>Пример 4</u>. Найти функцию разбиения Костанта унимодулярной алгебры Ли $A_{n-1}$.

Как нетрудно видеть, функция разбиения $P_{A_{n-1}}(\mu)$ алгебры $A_{n-1}$ с корнями $\pm(e_i - e_j)$ $(1 \le i < j \le n)$, где $e_1, e_2, \ldots, e_n$ -ортонормированный базис, а $\mu = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$, представляет число целых неотрицательных решений следующеи системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=2}^{n} x_{1,j} = b_1, \\ -\sum_{j=1}^{i-1} x_{j,i} + \sum_{j=i+1}^{n} x_{i,j} = b_i, & (2 \le i \le n-1) \\ -\sum_{j=1}^{n-1} x_{j,n} = b_n. \end{cases}$$

Очевидно, что $P_{A_{n-1}}(\mu) = 0$ при $\sum_{i=1}^{n} b_i \neq 0$.

Пусть $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$. Применив формулы (3) и (9), получим, что функция разбиения $P_{A_{n-1}}(\mu)$ алгебры $A_{n-1}$ имеет вид:

$$P_{A_{n-1}}(\mu)=\sum_{k_1=0}^{1}\ldots\sum_{k_n=0}^{1}(-1)^{k_1+\ldots+k_n}Q(b_1-k_1,\ldots,b_n-k_n),$$

где

$$Q(d_1,\ldots,d_n)=\sum_{t_1=1}^{n}\ldots\sum_{t_m=1}^{n}\alpha(t_1,\ldots,t_m)\beta(t_1,\ldots,t_m)\varphi(t_1,\ldots,t_m),$$

$m=\frac{1}{2}n(n-1)$ функции $\alpha(t_1,\ldots,t_m)$, $\beta(t_1,\ldots,t_m)$, $\varphi(t_1,\ldots,t_m)$ определяются так, как в формуле (I6),

$$A_{t_1,\ldots,t_r;s}=\sum_{s_1\in R}\sum_{s_2\in R}\ldots\sum_{s_k\in R}\Big(a_{t_{i_1},s_1}a_{t_{i_2}s_2}\ldots a_{t_{i_k},s_k}\prod_{1\le i<j\le k}\operatorname{sign}(s_j-s_i)\Big),$$

$$R=M\cup\{s\},\quad M=\{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}\}=\Big\{i:1\le i<r,\ \prod_{\ell=i+1}^{r}(t_\ell-t_i)\neq 0\Big\},$$

$$1\le i_1<i_2<\ldots<i_k=r\le s\le m+1,\qquad a_{p,m+1}=d_p,$$

$$a_{p,\ell}=\bar{\varepsilon}(p;n)\sum_{p+1\le j<n}\delta\big(2\ell-2j+2p;(2n-p)(p-1)\big)-\bar{\varepsilon}(1;p)\sum_{1\le i\le p-1}\delta\big(2\ell-2p+2i;(2n-i)(i-1)\big)$$

$$(1\le p\le n,\quad 1\le \ell\le m,\quad 1\le t_1,\ldots,t_r\le n).$$

Поступила I5.II.1978

Кафедра
алгебры и геометрии

ЛИТЕРАТУРА

I. Г.Полиа и Г.Сеге, Задачи и теоремы из анализа. I, М., 1956.

2. В.А.Кудрявцев, Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли. М., 1936.

3. Э.Т.Самсонадзе, УII конференция математиков ВУЗ-ов ГССР, 1977.

4. Э.Т.Самсонадзе, Труды молодых научных работников ТГУ, 1976.

5. М.М.Артюхов, Математический сборник. 51, № 4, 1960.

6. D.Radhakrishnan, J.Math. Phys. 10, N2, 1969

7. С.Н.Черников, Линейные неравенства. М., 1968.

ე.სამსონაძე

## დაყოფის ფუნქციების შესახებ

რეზიუმე

მოცემულია დიოფანტეს უტოლობათა სისტემების $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \le b_i$ ( $i=1,2,\dots,n$ ) და განტოლებათა სისტემების $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ მთელ არაუარყოფით ამონახსნთა რაოდენობის როგორც $b_1, b_2, \dots, b_n$ -ის ფუნქციების გამოთვლის ხერხი.

მაგალითების სახით ნაპოვნია დიოფანტეს წრფივი უტოლობის $\sum_{j=1}^{m} a_j x_j \le b$ და განტოლების $\sum_{j=1}^{m} a_j x_j = b$ მთელ არაუარყოფით ამონახსნთა რიცხვი და აგრეთვე ლის $C_2, D_3, A_{n-1}$ ალგებრების დაყოფის ფუნქციები.

E. Samsonadze

## ON PARTITION FUNCTIONS

Su..mary

A method is presented for calculating the number of nonnegative integer solutions for the system of Diofant inequalities $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1,\dots,n)$ and equalities $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1,\dots,n)$ as functions of $b_1, b_2, \dots, b_n$.

By way of examples, numbers of nonnegative integer solutions of Diofant inequalities $\sum_{j=1}^{m} a_j x_j \leq b$ and equalities $\sum_{j=1}^{m} a_j x_j = b$ as well as the partition functions of algebra Li $C_2, D_3, A_{n-1}$ are found.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени

государственного университета

204, 1978

УДК 517.946

# О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ГУРСА

М.П.Григолия

Задача Гурса, или характеристическая задача для квазилинейной гиперболической системы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{I}$$

с непрерывной правой частью $f:[0,a]\times[0,b]\times R^n \longrightarrow R^n$ заключается в отыскании её решения $u:[0,a]\times[0,b]\longrightarrow R^n$, непрерывного вместе с $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и удовлетворяющего краевым условиям

$$u(x,0) \quad \text{при} \quad 0 \le x \le a; \quad u(0,y) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le y \le b. \tag{2}$$

Известные теоремы о разрешимости этой задачи [I - 6], несмотря на различные формулировки, содержат два типа условий. Первое из них относится к гладкости отображения $(x,y,u,p,q) \longrightarrow f(x,y,u,p,q)$ относительно $p$ и $q$, второе же - к его поведению при $\|u\|+\|p\|+\|q\| \longrightarrow +\infty$. Условия первого типа, как правило, являются довольно тонкими (например, условия Чилиберто-Цитароза и Вальтера [2, 5, 6] ), а условия второго типа – наоборот, жесткими.

В настоящей статье мы попытались согласовать упомянутые выше условиях двух типов таким образом, чтобы придать каждому из них возможно общий и естественный вид.

Роль условий первого типа у нас играет наложенное на $f$ одностороннее ограничение типа Нагумо. Оказывается, что при его соблюдении вопрос о разрешимости задачи (I), (2) сводится к нахождению условий, гарантирующих равномерную по $(x_0, y_0)\in ]0,a]\times]0,b]$ априорную ограниченность решений системы (I), удовлетворяющих краевым условиям

$$u(x,0)=0 \text{ при } 0\le x\le x_0\,;\quad u(0,y)=0 \text{ при } 0\le y\le y_0\,. \qquad (3)$$

## § I. Формулировка теорем существования

Во всей статье приняты следующие обозначения:

$L=(\lambda_{ik})_{i,k=1}^{n}$ и $\ell=(\lambda_i)_{i=1}^{n}$ – матрица и $n$-мерный вектор столбец с элементами $\lambda_{ik}$ и $\lambda_i$ $(i,k=1,\dots,n)$,

$$|L|=(|\lambda_{ik}|)_{i,k=1}^{n}, \quad |\ell|=(|\lambda_i|)_{i=1}^{n},$$

$$\|L\|=\sum_{i,k=1}^{n}|\lambda_{ik}|, \quad \|\ell\|=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|,$$

$$\operatorname{sign}(\ell)=(\operatorname{sign}\lambda_i)_{i=1}^{n}, \quad \operatorname{Sign}(\ell)=\begin{pmatrix} \operatorname{sign}\lambda_1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sign}\lambda_2 \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots 0 & \operatorname{sign}\lambda_n \end{pmatrix}.$$

Если $L_j=(\lambda_{ik}^{(j)})_{i,k=1}^{n}$ и $\ell_j=(\lambda_i^{(j)})_{i=1}^{n}$ $(j=1,2)$, то

$$L_1\le L_2 \Longleftrightarrow \lambda_{ik}^{(1)}\le\lambda_{ik}^{(2)} \ (i,k=1,\dots,n),\quad \ell_1\le\ell_2 \Longleftrightarrow \lambda_i^{(1)}\le\lambda_i^{(2)} \ (i=1,\dots,n).$$

$u\cdot v$ – скалярное произведение векторов $u$ и $v$.

$R^k$ – $k$ – мерное вещественное евклидово пространство.

$R^{k\times k}$ – пространство всех $k\times k$ матриц с вещественными элементами.

$C(\mathcal{D};R^k)$ и $C(\mathcal{D};R^{k\times k})$ – пространства непрерывных отображений $\mathcal{D}$, соответственно, в $R^k$ и $R^{k\times k}$.

Если $L=(\lambda_{ik})_{i,k=1}^n\in C(\mathcal{D};R^{k\times k})$, то

$$\max\{L(x):x\in\mathcal{D}\}=(\max\{\lambda_{ik}(x):x\in\mathcal{D}\})_{i,k=1}^n.$$

Определение. Будем говорить, что непрерывное отображение $(x,y,u,p,q)\longrightarrow f(x,y,u,p,q)$ множества $[0,a]\times[0,b]\times R^{3n}$ в $R^n$ принадлежит классу $Nag([0,a]\times[0,b]\times R^{3n};R^n)$ если при любом $\rho\in]0,+\infty[$ на множестве

$$\{(x,y,u,p,q):x\in]0,a],y\in]0,b],\|u\|\leq\rho xy,\ \|p\|\leq\rho y,\|q\|\leq\rho x\} \tag{4}$$

соблюдаются неравенства

$$\begin{gathered}\operatorname{Sign}(p-\bar{p})[f(x,y,u,p,q)-f(x,y,u,\bar{p},q)]\leq\frac{1}{y}H_{1\rho}(y)|p-\bar{p}|,\\ \operatorname{Sign}(q-\bar{q})\cdot[f(x,y,u,p,q)-f(x,y,u,p,\bar{q})]\leq\frac{1}{x}H_{1\rho}(x)|q-\bar{q}|,\end{gathered} \tag{5}$$

и равномерно на том же множестве

$$\lim_{\|p-\bar{p}\|\to 0}\frac{\|f(x,y,u,p,q)-f(x,y,u,\bar{p},q)\|}{y^{\beta_\rho}}=\lim_{\|q-\bar{q}\|\to 0}\frac{\|f(x,y,u,p,q)-f(x,y,u,p,\bar{q})\|}{x^{\alpha_\rho}}=0, \tag{6}$$

где $\alpha_\rho$ и $\beta_\rho$ – неотрицательные постоянные, а $H_{1\rho}\in C([0,b];R^{n\times n})$ и $H_{2\rho}\in C([0,a];R^{n\times n})$ – неотрицательные матрицы такие, что для некоторого достаточно малого $\delta_\rho>0$ собственные значения матриц

$$\max\left\{\frac{1}{1+\beta_\rho}H_{1\rho}(y):y\in[0,\delta_\rho]\right\},\ \max\left\{\frac{1}{1+\alpha_\rho}H_{2\rho}(x):x\in[0,\delta_\rho]\right\}$$

по модулю не превосходят единицы.

Теорема I. Пусть

$$f \in Nag([0,a]\times[0,b]\times R^{3n}; R^n) \tag{7}$$

и существует положительная постоянная $r$ такая, что каковы бы ни были $x_0 \in ]0,a]$ и $y_0 \in ]0,b]$ для произвольного решения (если такое существует) задачи (I),(3), справедлива оценка

$$\|u(x,y)\| + \left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right\| + \left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\| < r \quad \text{при } 0 \le x \le x_0,\ 0 \le y \le y_0. \tag{8}$$

Тогда задача (I),(2) разрешима.

Из этой общей теоремы с помощью леммы об интегральных неравенствах получаются следующие эффективные признаки разрешимости рассматриваемой задачи.

Теорема 2. Пусть соблюдается условие (7) и в $[0,a]\times[0,b]\times R^{3n}$ имеет место неравенство

$$\|f(x,y,u,p,q)\| \le \varphi(\|u\|+\|p\|+\|q\|), \tag{9}$$

где $\varphi: [0,+\infty[ \to ]0,+\infty[$ непрерывна, не убывает, и

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\varphi(t)} < +\infty. \tag{10}$$

Тогда задача (I), (2) разрешима.

Теорема 3. Пусть соблюдается условие (7) и

$$f(x,y,u,p,q)\, sign(p) \le \varphi(\|u\|+\|p\|)$$

при

$$(x,y,u,p,q) \in [0,a]\times[0,b]\times R^{3n}, \quad \|p\| \ge \rho_0, \tag{11}$$

где $\rho_0$ - положительная постоянная, а $\varphi: [0,+\infty[ \to ]0,+\infty[$ - непрерывная, неубывающая функция, удовлетворяющая условию

(I0). Пусть далее, для любого $\rho \in ]0,+\infty[$ найдется непрерывная, неубывающая функция $\varphi_\rho : [0,+\infty[ \to ]0,+\infty[$ такая, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\varphi_\rho(t)} = +\infty \tag{I2}$$

и

$$\|f(x,y,u,p,q)\| \le \varphi_\rho(\|q\|)$$

при

$$(x,y) \in [0,a]\times[0,b], \quad \|u\|+\|p\| \le \rho, \quad q \in R^n. \tag{I3}$$

Тогда задача (I), (2) разрешима.

При $n=1$ из теоремы 2 непосредственно вытекает

Теорема 2′. Пусть $f \in C([0,a]\times[0,b]\times R^3; R)$ в $]0,a]\times]0,b]\times R^3$ удовлетворяет неравенствам

$$|f(x,y,u,p,q)| \le \tau(1+|u|+|p|+|q|), \tag{I4}$$

$$[f(x,y,u,p,q)-f(x,y,u,\bar{p},q)]\operatorname{sign}(p-\bar{p}) \le \frac{l_1(y)}{y}|p-\bar{p}|,$$

$$[f(x,y,u,p,q)-f(x,y,u,p,\bar{q})]\operatorname{sign}(q-\bar{q}) \le \frac{l_2(x)}{x}|q-\bar{q}|$$

и равномерно на каждом ограниченном подмножестве множества $]0,a]\times]0,b]\times R^3$

$$\lim_{|p-\bar{p}|\to 0} \frac{f(x,y,u,p,q)-f(x,y,u,\bar{p},q)}{y^\beta} = \lim_{|q-\bar{q}|\to 0} \frac{f(x,y,u,p,q)-f(x,y,u,p,\bar{q})}{x^\alpha} = 0,$$

где $\alpha$, $\beta$ и $\tau$ – неотрицательные постоянные, $l_1 \in C([0,b];R)$, $l_2 \in C([0,a];R)$ и для некоторого достаточно малого $\delta>0$

$$l_1(t) \le 1+\beta, \quad l_2(t) \le 1+\alpha \quad \text{при } 0 \le t \le \delta. \tag{I5}$$

Тогда задача (I),(2), разрешима.

В.Вальтер [6] доказал разрешимость задачи (I),(2) при предположениях, что $f \in C([0,a]\times[0,b]\times R^3; R)$ наряду с (I4) удовлетворяет и неравенству

$$|f(x,y,u,p,q)-f(x,y,u,\bar{p},\bar{q})| \le \frac{l_1(y)}{y}|p-\bar{p}| + \frac{l_2(x)}{x}|q-\bar{q}|,$$

где $\ell_1 \in C([0,b];R)$, $\ell_2 \in C([0,a];R)$ и $\ell_i(0)<1$ $(i=1,2)$. Там же он отметил, что в случае $\ell_1(y)\equiv 1$, $\ell_2(x)\equiv 1$ "вопрос о справедливости теоремы существования остается открытым".

Теорема 2$'$, обобщая упомянутый результат В.Вальтера, заодно дает положительный ответ на поставленный им вопрос.

Отметим, что условие (I5) является в определенном смысле неулучшаемым. В самом деле, как в этом легко можно убедиться, если $a=b=1$, $\beta=0$, $\varepsilon>0$ - сколь угодно малое и

$$f(x,y,u,p,q)=\begin{cases} y-\dfrac{1}{2} & \text{при} \quad x=0 \\ x^{\alpha+\varepsilon}\sin\left(\dfrac{(1+\alpha+2\varepsilon)q}{x^{1+\alpha+\varepsilon}}\right)+y-\dfrac{1}{2} & \text{при} \quad x>0, \end{cases}$$

то задача (I),(2) не имеет решения, хотя $f$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2$'$, кроме условия (I5), вместо которого имеем $0\equiv\ell_1(t)<1+\beta$, $\ell_2(t)\equiv 1+\alpha+2\varepsilon$.

## § 2. Некоторые вспомогательные предложения

<u>Лемма I</u>. Пусть $\gamma_i$ $(i=1,2,3)$ - неотрицательные постоянные, $\eta_i:[0,x_0+y_0]\to[0,+\infty[$ $(i=1,2,3)$ - суммируемые функции, а $\varphi:[0,+\infty[\to]0,+\infty[$ - непрерывная, неубывающая функция, удовлетворяющая условию (I0). Тогда, каковы бы ни были непрерывные функции $\xi_i:[0,x_0]\times[0,y_0]\to[0,+\infty[$ $(i=1,2,3)$, удовлетворяющие неравенствам

$$\xi_1(x,y)\le\gamma_1+\int_0^x ds\int_0^y \eta_1(s+t)\varphi[\xi_1(s,t)+\xi_2(s,t)+\xi_3(s,t)]dt, \tag{I6}$$

$$\xi_2(x,y)\le\gamma_2+\int_0^y \eta_2(x+t)\varphi[\xi_1(x,t)+\xi_2(x,t)+\xi_3(x,t)]dt,$$

$$\xi_3(x,y) \le \gamma_3 + \int_0^x \eta_3(s+y)\varphi[\xi_1(s,y)+\xi_2(s,y)+\xi_3(s,y)]ds,$$



будем иметь

$$\xi_1(x,y)+\xi_2(x,y)+\xi_3(x,y) \le \Psi^{-1}\Big[\Psi(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)+\int_0^{x+y}\Big(\int_0^t \eta_1(s)ds +$$

$$+\eta_2(t)+\eta_3(t)\Big)dt\Big],$$

где $\Psi(x)=\int_0^x \frac{dt}{\varphi(t)}$, а $\Psi^{-1}$ - функция обратная $\Psi$.

Доказательство этой леммы мы опускаем, так как оно аналогично доказательству леммы 2.2 из [9].

Лемма 2. Пусть $f^K \in C([0,a]\times[0,b]\times R^{3n}; R^n)$ и существует $\rho \in ]0,+\infty[$ такое, что равномерно на множестве (4)

$$\lim_{K\to+\infty} f^K(x,y,u,p,q) = f(x,y,u,p,q), \tag{I7}$$

где $f$ - вектор-функция, удовлетворяющая условию (7). Пусть далее для любого натурального $K$ вектор-функция $u^K:[0,a]\times[0,b]\to R^n$ является решением системы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f^K\Big(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\Big), \tag{I8}$$

удовлетворяющим краевым условиям (2) и неравенству

$$\Big\|\frac{\partial^2 u^K(x,y)}{\partial x\,\partial y}\Big\| \le \rho \quad \text{при } 0\le x\le a,\ 0\le y\le b. \tag{I9}$$

Тогда из последовательности $\{u^K\}_{K=1}^{+\infty}$ можно выбрать подпоследовательность $\{u^{K_i}\}_{i=1}^{+\infty}$, равномерно сходящуюся на $[0,a]\times[0,b]$ вместе с $\Big\{\frac{\partial u^{K_i}}{\partial x}\Big\}_{i=1}^{+\infty}$ и $\Big\{\frac{\partial u^{K_i}}{\partial y}\Big\}_{i=1}^{+\infty}$, при этом

$$u(x,y) = \lim_{i\to+\infty} u^{K_i}(x,y) \tag{20}$$

является решением задачи (I), (2).

Доказательство. Положим

$$p^k(x,y)=\frac{\partial u^k(x,y)}{\partial x},\quad q^k(x,y)=\frac{\partial u^k(x,y)}{\partial y}.$$

Из (2) и (I9) ясно, что последовательности $\{u^k\}_{k=1}^{+\infty}$, $\{p^k\}_{k=1}^{+\infty}$ и $\{q^k\}_{k=1}^{+\infty}$ равномерно ограничены на $[0,a]\times[0,b]$, а $\{u^k\}_{k=1}^{+\infty}$ является и равностепенно непрерывной.

Докажем равностепенную непрерывность $\{p^k\}_{k=1}^{+\infty}$.

Допустим противное. Тогда найдутся сходящиеся последовательности точек $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{+\infty}$ и $\{(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\}_{i=1}^{+\infty}$ области $[0,a]\times[0,b]$ и последовательность натуральных чисел $\{k_i\}_{i=1}^{+\infty}$ такие, что

$$\lim_{i\to+\infty}(x_i-\bar{x}_i)=\lim_{i\to+\infty}(y_i-\bar{y}_i)=0,\quad \lim\|p^{k_i}(x_i,y_i)-p^{k_i}(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\|>0. \tag{21}$$

Пусть

$$V^i(y)=p^{k_i}(x_i,y),\quad \bar{V}^i(y)=p^{k_i}(\bar{x}_i,y). \tag{22}$$

Ввиду (2) и (I9), последовательности $\{V^i\}_{i=1}^{+\infty}$ и $\{\bar{V}^i\}_{i=1}^{+\infty}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на $[0,b]$. Поэтому без ограничения общности, их можно считать равномерно сходящимися.

Полагая

$$V(y)=\lim_{i\to+\infty}V^i(y),\quad \bar{V}(y)=\lim_{i\to+\infty}\bar{V}^i(y),$$

в силу (2I), будем иметь

$$\|V(y_0)-\bar V(y_0)\|>0, \qquad (23)$$

где

$$y_0=\lim_{i\to+\infty} y_i$$

Согласно (22), при любом натуральном

$$\frac{dV^i(y)}{dy}=f(x_i,y,u^{k_i}(x_i,y),V^i(y),q^{k_i}(x_i,y))+\eta^i(y),\quad V^i(0)=0; \qquad (24)$$

$$\frac{d\bar V^i(y)}{dt}=f(x_i,y,u^{k_i}(x_i,y),\bar V^i(y),q^{k_i}(x_i,y)+\bar\eta^i(y),\quad \bar V^i(0)=0;$$

где

$$\eta^i(y)=f^{k_i}(x_i,y,u^{k_i}(x_i,y),V^i(y),q^{k_i}(x_i,y))-f(x_i,y,u^{k_i}(x_i,y),V^i(y),q^{k_i}(x_i,y)),$$

$$\bar\eta^i(y)=f^{k_i}(\bar x_i,y,u^{k_i}(\bar x_i,y),\bar V^i(y),q^{k_i}(\bar x_i,y))-f(x_i,y,u^{k_i}(x_i,y),\bar V^i(y),q^{k_i}(x_i,y).$$

С другой стороны, как это следует из (I7) и (I9), равномерно на $[0,b]$ соблюдаются условия

$$\lim_{i\to+\infty}\eta^i(y)=0,\quad \lim_{i\to+\infty}\bar\eta_i(y)=0. \qquad (25)$$

Пусть $\beta_\rho$, $\delta_\rho$ и $H_{1\rho}$ - числа и матрица, подобранные для $f$ в соответствии введенному в §I определению класса $Nag([0,a]\times[0,b]\times R^{3n};R^n)$.

Ввиду (6), существует $\omega_\rho\in C([0,b];R)$ такая, что $\omega_\rho(0)=0$ и на множестве (4) имеем

$$\|f(x,y,u,p,q)-f(x,y,u,\bar p,q)\|\le\omega_\rho(y)y^{\beta_\rho}.$$

В силу этой оценки и условия (5), из (24) вытекает, что

$$\|V^i(y)-\bar V^i(y)\|\le\int_0^y[t^{\beta_\rho}\omega_\rho(t)+\|\eta^i(t)\|+\|\bar\eta^i(t)\|]dt,$$

$$|V^i(y)-\bar V^i(y)\|\le\int_0^y Sign[V^i(t)-\bar V^i(t)]\cdot[\frac{dV^i(t)}{dt}-\frac{d\bar V^i(t)}{dt}]dt\le$$

$$\leq \int_0^y \left[\frac{1}{t} H_{1p}(t) |V^i(t) - \bar{V}^i(t)| + |\gamma^i(t) + |\bar{\gamma}^i(t)|\right] dt.$$

Перейдя к пределу в этих неравенствах, когда $i \to +\infty$ согласно (25) получим

$$|V(y) - \bar{V}(y)| \leq \int_0^y \frac{1}{t} H_{1p}(t) |V(t) - \bar{V}(t)| dt$$

при

$$0 \leq y \leq b; \quad \lim_{y \to 0} \frac{\|V(y) - \bar{V}(y)\|}{y^{1+\beta_p}} = 0. \tag{26}$$

Поскольку собственные значения матрицы

$$max \left\{ \frac{1}{1+\beta_p} H_{1p}(y) : 0 \leq y \leq \delta_p \right\}$$

по модулю не превосходят единицы, из (26) вытекает, что

$$V(y) = \bar{V}(y) \quad \text{при} \quad 0 \leq y \leq b$$

(см. [8], лемма 2.2). Но это противоречит неравенству (23). Полученное противоречие доказывает равностепенную непрерывность последовательности $\{p^k\}_{k=1}^{+\infty}$.

Совершенно аналогично доказывается, что и последовательность $\{q^k\}_{k=1}^{+\infty}$ является равностепенно непрерывной.

Согласно лемме Арцела-Асколи, из $\{u^k\}_{k=1}^{+\infty}$, $\{p^k\}_{k=1}^{+\infty}$ и $\{q^k\}_{k=1}^{+\infty}$ можно выделить подпоследовательности $\{u^{k_i}\}_{i=1}^{+\infty}$, $\{p^{k_i}\}_{i=1}^{+\infty}$ и $\{q^{k_i}\}_{i=1}^{+\infty}$, равномерно сходящиеся на $[0,a] \times [0,b]$. Пусть $u$ – функция, определенная равенством (20). Тогда

$$\lim_{i \to +\infty} p^{k_i}(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \quad \lim_{i \to +\infty} q^{k_i}(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}.$$

Учитывая теперь условие (17), можно убедиться, что $u$ является решением задачи (1),(2). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть соблюдается условие (7) и существует положительная постоянная $\rho$ такая, что в $[0,a]\times[0,b]\times R^{3n}$ имеет место неравенство

$$\|f(x,y,u,p,q)\|\le\rho.$$

Тогда задача (I),(2) разрешима.

<u>Доказательство</u>. Пусть

$$f^k(x,y,u,p,q)=\int_{R^{3n}}\mathcal{M}_k(V^1-u,V^2-p,V^3-q)f(x,y,V^1,V^2,V^3)dV^1dV^2dV^3,$$

где $\mathcal{M}_k:R^{3n}\to[0,+\infty[\ (k=1,2,\ldots)$ - последовательность непрерывно дифференцируемых функций таких, что

$\mathcal{M}_k(V^1,V^2,V^3)=0$ при $\|V^1\|+\|V^2\|+\|V^3\|\ge\frac{1}{k}$,

$$\int_{R^{3n}}\mathcal{M}_k(V^1,V^2,V^3)dV^1dV^2dV^3=1\quad(k=1,2,\ldots).$$

Тогда в $[0,a]\times[0,b]\times R^{3n}$ имеют место неравенства

$$\|f^k(x,y,u,p,q)\|\le\rho\qquad(k=1,2,\ldots)\tag{27}$$

и равномерно на множестве (4) соблюдается условие (I7) (см. [7], стр.270).

Ввиду непрерывной дифференцируемости $\mathcal{M}_k\ (k=1,2,\ldots)$, очевидно существование последовательности положительных чисел $\{\rho_k\}_{k=1}^{+\infty}$ такой, что на множестве (4) выполняются неравенства

$$\|f^k(x,y,u,p,q)-f^k(x,y,\bar u,\bar p,\bar q)\|\le\rho_k(\|u-\bar u\|+\|p-\bar p\|+\|q-\bar q\|)\quad(k=1,2,\ldots)\tag{28}$$

Исходя из (27) и (28), с помощью метода последовательных приближений легко покажем, что при любом натуральном $k$ задача (I8),(2) имеет единственное решение $u^k$, удовлетворяющее оценке (I9) (см., например, [4], стр.205-216). Поэтому разрешимость задачи (I),(2) непосредственно вытекает из леммы 2. Лемма доказана.

## § 3. Доказательство теорем существования

Доказательство теоремы I. Пусть

$$\rho = \max\{\|f(x,y,u,p,q)\| : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ \|u\|+\|p\|+\|q\| \le r\},$$

$$\chi_i(V;\lambda) = \begin{cases} V_i & \text{при } |V_i| \le \lambda \ [1] \\ \lambda \operatorname{sign} V_i & \text{при } |V_i| > \lambda \end{cases},\quad \chi(V;\lambda) = \left(\chi_i(V;\lambda)\right)_{i=1}^{n},$$

$$\tilde{f}(x,y,u,p,q) = f(x,y,\chi(u;\rho xy),\chi(p;\rho y),\chi(q;\rho x)).$$

Согласно лемме 3, система

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \tilde{f}\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

имеет решение $u$, удовлетворяющее краевым условиям (2). Докажем, что $u$ является и решением задачи (I),(2). Ввиду определения $\tilde{f}$, для этого достаточно показать, что

$$\|u(x,y)\| + \left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right\| + \left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\| < r \quad \text{при } 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b.$$

Предположим, что последнее неравенство нарушается. Тогда найдутся $x_0 \in ]0,a]$ и $y_0 \in ]0,b]$ такие, что

$$\max\left\{\|u(x,y)\| + \left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right\| + \left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\| : 0 \le x \le x_0,\ 0 \le y \le y_0\right\} = r.$$

С другой стороны, сужение вектор-функции $u$ в $[0,x_0]\times[0,y_0]$ является решением задачи (I),(3) и поэтому имеет место оценка (8). Получили противоречие, что и доказывает теорему.

Доказательство теоремы 2. Согласно теореме I, для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что, каковы бы ни были $x_0 \in ]0,a]$, $y_0 \in ]0,b]$ и решение $u$ задачи (I),(3), справедлива оценка (8), где $r$ – положительная постоянная, не зависящая от $x_0$, $y_0$ и $u$.

---

[1] $V_i$ – $i$-ая компонента вектора $V$.

Полагая

$$\xi_1(x,y)=\|u(x,y)\|,\ \xi_2(x,y)=\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right\|,\ \xi_3(x,y)=\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|,$$

ввиду (3) и (9), убедимся в справедливости неравенств (16), где $\delta_i=0,\ \eta_i=1\ (i=1,2,3)$. Поэтому, в силу леммы I,

$$\|\xi_1(x,y)\|+\|\xi_2(x,y)\|+\|\xi_3(x,y)\|\le\Psi^{-1}\left[\frac{(x_0+y_0+2)^2}{2}-2\right]<$$

$$<\Psi^{-1}[(a+b+2)^2]=\tau \qquad \text{при } 0\le x\le x_0,\ 0\le y\le y_0.$$

Следовательно, справедлива оценка (8). Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы 2 нетрудно видеть, что ограничение (I0) можно ослабить, а именно, заменить его следующим

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\varphi(t)}>\frac{(a+b)(a+b+4)}{2}.$$

Если же совсем отказаться от подобного ограничения, то разрешимость задачи Гурса можно доказать не во всей области $[0,a]\times[0,b]$, а только в некоторой достаточно малой окрестности начала координат.

Доказательство теоремы 3. Пусть $x_0\in\,]0,a],\ y_0\in\,]0,b]$, $u$ - произвольное решение задачи (I),(3),

$$\xi_1(x,y)=\|u(x,y)\|,\quad \xi_2(x,y)=\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right\|.$$

Обозначим через $I_x$ множество всех $y\in[0,y_0]$, для которых $\|\xi_2(x,y)\|\ge\rho_0$. Согласно (II), какое бы ни было $x\in[0,x_0]$ почти всюду на $I_x$ будем иметь

$$\frac{\partial\xi_2(x,y)}{\partial y}=f\left(x,y,u(x,y),\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)\cdot \operatorname{sign}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right]\le$$

$$\le\varphi[\xi_1(x,y)+\xi_2(x,y)].$$

Отсюда, ввиду (3), вытекает, что в $[0,x_0]\times[0,y_0]$ соблюдается неравенство (I6), где $\gamma_1 = a\rho_0$, $\gamma_2=\rho_0$, $\gamma_3 = b$, $\eta_1=\eta_2=1$, $\eta_3=\xi_3=0$. Поэтому, в силу леммы I,

$$\|u(x,y)\|+\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right\|<r_0 \quad \text{при } 0\le x\le x_0,\ 0\le y\le y_0, \tag{29}$$

где $r_0=\Psi^{-1}\left[\Psi(\gamma_1+\gamma_2)+(a+b+1)^2\right]$.

Согласно (3), (I3) и (29),

$$\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|\le\int_0^x \varphi_{r_0}\left(\left\|\frac{\partial u(s,y)}{\partial s}\right\|\right)ds \quad \text{при } 0\le x\le x_0,\ 0\le y\le y_0.$$

Применяя опять лемму I, отсюда получим

$$\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|\le\Psi_{r_0}^{-1}(a) \quad \text{при } 0\le x\le x_0,\ 0\le y\le y_0, \tag{30}$$

где $\Psi_{r_0}^{-1}$ – функция обратная

$$\Psi_{r_0}(x)=\int_0^x\frac{ds}{\varphi_{r_0}(s)}.$$

Из (29) и (30) ясно, что имеет место оценка (8), где $r=r_0+\Psi_{r_0}^{-1}(a)$ не зависит от $x_0, y_0$ и $u$. Следовательно, соблюдаются все условия теоремы I, что и доказывает справедливость теоремы 3.

Поступила 2I.Ш.I978

Кафедра дифференциальных и интегральных уравнений

ЛИТЕРАТУРА

I. P.Hartman, A.Wintner, Amer. J.Math., 74, N4, 1952, 834-864.

2. C.Ciliberto, Ricerche di Mat., 4, N1, 1955, 15-29.

3. A.Alexiewicz, W.Orlicz, Stud. Math., 15, N2, 1956, 201-215.

4. Ф.Трикоми, Лекции по уравнениям в частных производных, М., ИЛ, 1957.

5. A.Zitarosa, Ricerche di Mat., 8, N2, 1959, 240-270.

6. W.Walter, Math. Z., 71, N 4, 1959, 436-453.

7. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959.

8. М.П.Григолия, Дифференциальные уравнения, II, №I2, 1975, 2210-2219.

9. М.П.Григолия, Труды Тбилисского ун-та, I66, 1976, I3-30.

მ.გრიგოლია

გურსას ამოცანის ამოხსნადობის შესახებ

რეზიუმე

დადგენილია გურსას ამოცანის ამოხსნადობის ახალი საკმარისი პირობები კვაზიწრფივი ჰიპერბოლური სისტემებისათვის.

M.Grigolia

ON THE SOLVABILITY OF THE GOURSAT PROBLEM

Summary

Some new sufficient conditions are established under which the Goursat problem for quasi-linear systems of hyperbolic type is solvable.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

204, 1978

УДК 532.5

# ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА К ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Н.П.Патарая

Допустим, что рассматривается плоская задача обтекания идеальной несжимаемой жидкостью бесконечно длинного цилиндра, поперечное сечение которого представляет собой алгебраическую кривую четвертого порядка.

$$a^2(x^2+y^2)^2-a^2b^2y^2-b^4x^2=0 \qquad (I)$$

Примем $a \geqslant b$ . В частном случае, когда $a=b$ , уравнению (I) соответствует окружность круга с радиусом, равным $a$ , и,таким образом, решение поставленной задачи будет содержать, как частный случай, хорошо известное решение задачи обтекания кругового цилиндра.

В одной из ранее опубликованных нами работ [I] изложены алгорифм обобщения вариационных методов для бесконечных областей и их применение к совместным (также и к изолированным) движениям твердых тел в жидкости (также и к задачам обтеканий твердых тел жидкостью). Суть алгорифма состоит в отображении в конечную область $\Omega^*$ с помощью переменных

$$\xi = \frac{b^2 x}{x^2+y^2}, \quad \eta = \frac{b^2 y^2}{x^2+y^2}$$

внешности контура (I), содержащего бесконечно удаленную точку, и отыскании для полученной области гармонической функции $\varphi^*$, удовлетворяющей на контуре $\Gamma^*$ области $\Omega^*$ условию

$$\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial n}\right)_{\Gamma^*} = \frac{b^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}\left\{\left[U_x(\eta^2-\xi^2)-2U_y\xi\eta\right]\cos\widehat{n\xi}+\left[U_y(\xi^2-\eta^2)-\right.\right. \tag{2}$$

$$\left.\left.-2U_x\xi\eta\right]\cos\widehat{n\eta}\right\},$$

где

$U_x, U_y$ – проекции вектора скорости точек контура $\Gamma$ поперечного сечения цилиндра на осях координат $Ox$ и $Oy$,

$n$ – внешняя к контуру $\Gamma^*$ нормаль.

При решении задачи обтекания в формулу

$$\vec{V} = \vec{V_0} + [\vec{\omega}, \vec{r}],$$

дающую распределение скоростей точек твердого тела, надо положить

$$\vec{\omega} = 0, \quad U_x = -V_{\infty x}, \quad U_y = -V_{\infty y}$$

где

$\vec{\omega}$ – угловая скорость цилиндра, а $V_{\infty x}$ и $V_{\infty y}$ – проекции скорости обтекающей жидкости на бесконечности.

Для того чтобы получить потенциал скорости обтекающей жидкости, следует потенциал скорости жидкости $\varphi^*$, соответствующий равномерно поступательному движению цилиндра против направления скорости обтекающей жидкости на бесконечности $U_\infty$, сложить с потенциалом скорости однородного потока жидкости

$$\varphi'(x,y) = U_{\infty x} x + U_{\infty y} y.$$

В статье [I] показано, что отыскание гармонической функции $\varphi^*$ по условию (2) на контуре $\Gamma^*$ сводится к нахождению минимума функционала

$$I = \iint_{\Omega^*} \left\{\left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi^*}{\partial\eta}\right)^2\right\} d\xi d\eta - 2b^2 \int_{\Gamma^*} \frac{\varphi^*}{(\xi^2+\eta^2)^2} \left\{ \left[U_{\infty x}(\xi^2-\eta^2) + 2U_{\infty y}\xi\eta\right]\cos\widehat{n\xi} + \left[-U_{\infty y}(\xi^2-\eta^2) + 2U_{\infty x}\xi\eta\right]\cos\widehat{n\eta} \right\} dS, \ldots \quad (3)$$

при естественных граничных условиях.

Отыскивая первое приближение для $\varphi^*$ по методу Ритца, положим

$$\varphi^*(\xi,\eta) = A\xi + B\eta. \quad (4)$$

Постановка $\cos\widehat{n\xi}\,dS = d\eta$, $\cos\widehat{n\eta}\,dS = -d\xi$, $\varphi^*(\xi,\eta) = A\xi + B\eta$ в (3) для определения коэффициентов $A$ и $B$ приведет к следующей системе уравнений

$$A\iint_{\Omega^*} d\xi d\eta - b^2 \int_{\Gamma^*} \frac{U_{\infty x}(\xi^3 - \xi\eta^2) + 2U_{\infty y}\xi^2\eta}{(\xi^2+\eta^2)^2} d\eta - b^2 \int_{\Gamma^*} \frac{U_{\infty y}(\xi^3-\xi\eta^2) - 2U_{\infty x}\xi^2\eta}{(\xi^2+\eta^2)^2} d\xi = 0, \quad (5)$$

$$B\iint_{\Omega^*} d\xi d\eta - b^2 \int_{\Gamma^*} \frac{U_{\infty x}(\xi^2\eta - \eta^3) + 2U_{\infty y}\xi\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2} d\eta - b^2 \int_{\Gamma^*} \frac{U_{\infty y}(\xi^2\eta-\eta^3) - 2U_{\infty x}\xi\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2} d\xi = 0.$$

Отыщем для рассматриваемого случая преобразованную область $\Omega^*$ и её контур $\Gamma^*$.

Преобразование

$$x=\frac{b^2\xi}{\xi^2+\eta^2}\,,\quad y=\frac{b^2\eta}{\xi^2+\eta^2}$$

переводит уравнение $a^2(x^2+y^2)^2-a^2b^2y^2-b^4x^2=0$

в уравнение эллипса $\dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}=1,$

который и будет контуром $\Gamma^*$ преобразованной области $\Omega^*$. Подставив в (5) $\xi=a\cos t$, $\eta=b\sin t$, получим:

$$\begin{aligned}
&\pi abA-b^2V_{\infty x}\int_0^{2\pi}\frac{ba^3\cos^4t-ab^3\cos^2t\sin^2t}{(a^2\cos^2t+b^2\sin^2t)^2}\,dt-\\
&-2V_{\infty y}b^2\int_0^{2\pi}\frac{a^2b^2\cos^3t\sin t}{(a^2\cos^2t+b^2\sin^2t)^2}\,dt-\\
&-b^2V_{\infty y}\int_0^{2\pi}\frac{a^2b^2\sin^3t\cos t-a^4\cos^3t\sin t}{(a^2\cos^2t+b^2\sin^2t)^2}\,dt\qquad\qquad(6)\\
&-2b^2V_{\infty x}\int_0^{2\pi}\frac{a^3b\cos^2t\sin^2t}{(a^2\cos^2t+b^2\sin^2t)^2}\,dt=0\\
&\pi abB-b^2V_{\infty x}\int_0^{2\pi}\frac{a^2b^2\cos^3t\sin t-b^4\sin^3t\cos t}{(a^2\cos^2t+b^2\sin^2t)^2}\,dt-\\
&-2b^2V_{\infty y}\int_0^{2\pi}\frac{ab^3\cos^2t\sin^2t}{(a^2\cos^2t+b^2\sin^2t)^2}\,dt-\\
&-b^2V_{\infty y}\int_0^{2\pi}\frac{b^3a\sin^4t-a^3b\cos^2t\sin^2t}{(a^2\cos^2t+b^2\sin^2t)^2}\,dt-\\
&-2b^2V_{\infty x}\int_0^{2\pi}\frac{a^2b^2\sin^3t\cos t}{(a^2\cos^2t+b^2\sin^2t)^2}\,dt=0.
\end{aligned}$$

Подробное вычисление этих интегралов заняло бы много места. В результате вычислений будем иметь

$$A\pi ab - 2\pi V_{\infty x}\frac{ab^2}{a+b}=0,$$

$$B\pi ab - 2\pi V_{\infty y}\frac{b^3}{a+b}=0,$$

что для постоянных $A$ и $B$ даст

$$A=\frac{2V_{\infty x}b}{a+b}$$

$$B=\frac{2V_{\infty y}b^2}{a(a+b)} \qquad (7)$$

После подстановки значений для $A$ и $B$ в (4) получим

$$\varphi^*(\xi,\eta)=\frac{2V_{\infty x}b}{a+b}\xi+\frac{2V_{\infty y}b^2}{a(a+b)}\eta \qquad (8)$$

Переход от переменных $\xi,\eta$ к переменным $x,y$ для потенциала скорости бесциркуляционного движения жидкости, соответствующего плоскопараллельному переносному движению в ней цилиндра с контуром поперечного сечения

$$a^2(x^2+y^2)^2-a^2b^2y^2-b^4x^2=0,$$

даст

$$\varphi(x,y)=\frac{2V_{\infty x}b^3}{a+b}\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{2V_{\infty y}b^4}{a(a+b)}\frac{y}{x^2+y^2} \qquad (9)$$

где $-V_{\infty x}, -V_{\infty y}$ – проекции вектора скорости цилиндра на осях $OX$ и $OY$ ( вспомним, что скорость движения цилиндра направлена против скорости обтекающей жидкости на бесконечности).

Сложив потенциал (9) с потенциалом скорости однородного потока

$$\varphi'(x,y) = V_{\infty x} x + V_{\infty y} y,$$

получим искомый потенциал скорости, соответствующей обтеканию указанного выше цилиндра, в виде

$$\varphi(x,y) = V_{\infty x} x \left[1 + \frac{2b^3}{a+b}\frac{1}{x^2+y^2}\right] + V_{\infty y} y \left[1 + \frac{2b^4}{a(a+b)}\frac{1}{x^2+y^2}\right] \quad (10)$$

Положив $a = b$ в формуле (10), получим потенциал скорости жидкости бесциркуляционного обтекания кругового цилиндра.

Полученное таким образом выражение можно сравнить с хорошо известным точным выражением потенциала скорости бесциркуляционного обтекания кругового цилиндра, которое имеет вид

$$\varphi = V_{\infty x} x + V_{\infty y} y + \frac{a^2}{x^2+y^2}\left(V_{\infty x} x + V_{\infty y} y\right) \quad (11)$$

Сравнение (11) с (12) при $a=b$ показывает их идентичность.

Таким образом приходим к заключению, что первое приближение по обобщенному вариационному методу для рассмотренной выше задачи обтекания в частном случае при $a = b$ дает точное решение гидродинамической задачи обтекания кругового цилиндра.

Поступила 3.IУ.1978

Кафедра механики сплошных сред

## ЛИТЕРАТУРА


1. Н.Н.Патарая, Обобщения вариационных методов для бесконечных областей и их применения к задачам совместного движения твердых тел в жидкости, Труды Тбилисского университета, 166, 1976.
2. Л.В.Канторович и В.И.Крылов, Приближенные методы высшего анализа, М., 1962.



ნ.პატარაია


## განზოგადოებული ვარიაციული მეთოდის გამოყენება უკუმში იდეალური სითხით ერთი ცილინდრული სხეულის გარსდენის ბრტყელი ამოცანისათვის


### რეზიუმე

სტატიაში გამოყენებულია განზოგადოებული ვარიაციული მეთოდი ერთი ცილინდრული სხეულის უკუმში იდეალური სითხით გარსდენის ამოცანის ამოსახსნელად.

ცილინდრის განივკვეთის კონტური წარმოადგენს მეოთხე რიგის ალგებრულ მრუდს, რომლის განტოლებაა

$$a^2(x^2+y^2)^2-a^2b^2y^2-b^4x^2=0.$$

კერძო შემთხვევაში, როდესაც $a=b$ მიიღება წრიული ცილინდრის გარსდენის ამოცანა, რომლის შესაბამი სიჩქარის პოტენციალის ზუსტი მნიშვნელობა კარგადაა ცნობილი. გამოთვლები ჩატარებულია პირველი რიგის მიახლოებით და მიღებულია ფორმულა

$$\varphi(x,y)=V_{\infty x}\, x\left[1+\frac{2b^3}{a+b}\,\frac{1}{x^2+y^2}\right]+V_{\infty y}\, y\left[1+\frac{2b^4}{a(a+b)}\,\frac{1}{x^2+y^2}\right],$$

სადაც $V_{\infty x}$ და $V_{\infty y}$ უსასრულობაში ნაკადის სიჩქარის კოორდი-ნატთა ღერძებზე გეგმილებია. როდესაც $a=b$ მიიღება წრიული ცილინ-დრის გარსდენის სიჩქარის პოტენციალის ზუსტი მნიშვნელობა.



N.Pataraya

## APPLICATION OF THE GENERALIZED VARIATION METHOD FOR A SINGLE PLANE SUM OF STREAMLINING OF A CYLIDRICAL BODY BY AN IDEAL INCOMPRESSIBLE LIQUID

Summary

The present paper deals with the generalized variation method applied to the solution of a single plan sum of streamlining of a cylindrical body by liquid. The profile of the cylinder cross-section represents an algebraic curve of the fourth order

$$a^2(x^2+y^2)^2-a^2b^2y^2-b^4x^2=0$$

In a particular case, when a = b, we have the sum of streamlining of a circular cylinder. The first approximation according to the generalized variation method for the potential of liquid velocity is obtained from the expression:

$$\varphi(x,y)=V_{\infty x}\,x\left[1+\frac{2b^3}{a+b}\,\frac{1}{x^2+y^2}\right]+V_{\infty y}\,y\left[1+\frac{2b^4}{a(a+b)}\,\frac{1}{x^2+y^2}\right]$$

which in the case a = b gives a precise expression of the potential of liquid velocity for the sum of streamlining of a circular cylinder. In the expression for $\varphi(x,y)$, $V_{\infty x}$, $V_{\infty y}$ the latter are projections on axes OX and OY of liquid velocity in infinity.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

204, 1978

УДК 533.538

# ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Дж. В. Шарикадзе

Известно, что нелинейные уравнения магнитной гидродинамики допускают точные решения в случае, когда соответствующие скорости течения и индуцированного магнитного поля не зависят от координаты $x$ в направлении, параллельном стенке, а коэффициенты этих уравнений суть постоянные величины [1,2]. Если считать коэффициенты функциями времени, то решение обще.. задачи приводится к решению интегродифференциального уравнения, решаемого в виде сходящихся рядов [3].

В настоящей работе поставлена задача: найти скорость свободного потока и скорость отсоса как функции времени, при которых поставленная задача будет автомодельной.

Итак, пусть перпендикулярно к пористой пластинке действует внешнее однородное магнитное поле, в общем случае меняющееся со временем. Тогда система, определяющая скорость и индуцированное магнитное поле в приближении пограничного слоя, будет иметь вид:

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v_0(t) \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{B_0}{\rho \mu_0} \frac{\partial b_x}{\partial y} = - \frac{dU_\infty}{dt} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} U_\infty ,$$

$$\nu_m \frac{\partial^2 b_x}{\partial y^2} + v_0(t) \frac{\partial b_x}{\partial y} - \frac{\partial b_x}{\partial t} + B_0 \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (I)$$

Функции $u(y,t)$ и $b_x(y,t)$ удовлетворяют следующим начально-граничным условиям:

$$u(y,0) = U_\infty(0), \quad u(0,t) = 0, \quad u(\infty,t) = U_\infty(t),$$

$$b_x(y,0) = 0, \quad b_x(0,t) = 0, \quad b_x(\infty,t) = 0. \qquad (2)$$

Рассмотрим случай, когда $\nu = \nu_m$, и введем новые неизвестные функции

$$V_{1,2}(y,t) = u(y,t) \pm \frac{b_x(y,t)}{\sqrt{\rho \mu_0}} \qquad (3)$$

Здесь $u(y,t)$ – скорость течения проводящей жидкости с коэффициентом электропроводности $\sigma = const$, $v_0(t)$ – скорость отсоса или вдува, $b_x(y,t)$ – индуцированное магнитное поле, $B_0$ – внешнее заданное магнитное поле, $\nu$ и $\nu_m$ – коэффициенты обычной и магнитной вязкости, $\rho$ -плотность жидкости, $\mu_0$ – магнитная проницаемость, $U_\infty(t)$ – скорость свободного потока.

Для определения неизвестных функций $V_{1,2}(y,t)$ из (I) и (2) получим следующие уравнения и предельные условия:

$$\nu \frac{\partial^2 V_{1,2}}{\partial y^2} + \left[ v_0(t) \pm V_A \right] \frac{\partial V_{1,2}}{\partial y} - \frac{\partial V_{1,2}}{\partial t} = - \frac{dU_\infty}{dt} - \sigma \mu_0 V_A^2 U_\infty \qquad (4)$$

$$V_{1,2}(y,0) = U_\infty(0), \quad V_{1,2}(0,t) = 0, \quad V_{1,2}(\infty,t) = U_\infty(t)$$

где $V_\alpha = \frac{B_0}{\sqrt{\rho\mu_0}}$ - скорость Альфена.

Введем новую переменную $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$ и функции

$$V_{1,2}(y,t) = U_\infty(t)\left[1-\varphi_{1,2}(\eta)\right]. \tag{5}$$

Тогда из (4) получим

$$\frac{d^2\varphi_{1,2}}{d\eta^2} + 2\left\{\eta + \sqrt{\frac{t}{\nu}}\left[V_0(t) \pm V_\alpha\right]\right\}\frac{d\varphi_{1,2}}{d\eta} - 4t\left[\frac{d\ln U_\infty}{dt} + 6\mu_0 V_\alpha^2\right]\varphi_{1,2} = 0, \tag{6}$$

$$\varphi_{1,2}(0) = 1, \quad \varphi_{1,2}(\infty) = 0.$$

Для того чтобы полученное уравнение принадлежало автомодельному типу, необходимо положить:

$$\sqrt{\frac{t}{\nu}}\left[V_0(t) \pm V_\alpha\right] = \beta_{1,2} = const,$$

$$t\left[\frac{d\ln U_\infty}{dt} + 6\mu_0' V_\alpha^2\right] = a - const. \tag{7}$$

Учитывая эти соотношения, из (6) будем иметь

$$\frac{d^2\varphi_{1,2}}{d\eta^2} + 2\left[\eta + \beta_{1,2}\right]\frac{d\varphi_{1,2}}{d\eta} - 4a\varphi_{1,2} = 0, \tag{8}$$

$$\varphi_{1,2}(0) = 1, \quad \varphi_{1,2}(\infty) = 0.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\varphi_{1,2}(\eta) = \frac{g_{2a}(\sqrt{2}\,\xi)}{g_{2a}(\sqrt{2}\,\beta_{1,2})}, \tag{9}$$

где

$$\xi = \eta + \beta_{1,2}, \tag{10}$$

$$g_{2a}(x) = \frac{1}{\Gamma(2a+1)}\int_x^\infty (z-x)^{2a} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма функция. С помощью (9), (5) и (3) легко найти скорость течения и индуцированное магнитное поле.

Таким образом, если скорость свободного потока суть функция вида

$$u_\infty(t) = A t^{a} e^{-\sigma \mu_0 V_\alpha^2 t},$$

а скорость отсоса имеет вид

$$V_0(t) = \beta_{1,2}\sqrt{\frac{\nu}{t}} \mp V_\alpha ,$$

то решение поставленной задачи можно найти точно.

Поступила 25.XII.1977

Кафедра
механики сплошных сред

## ЛИТЕРАТУРА

1. U.Suryaprakasarao, ZAMM, 33, 3, 1963.
2. А.А.Мегахед, Магнитная гидродинамика, I, 1974.
3. Д.В.Шарикадзе, Труды Тбилисского университета, А 9 (157), 1975.

ჯ.შარიქაძე

## მაგნიტური ჰიდროდინამიკის განტოლების ერთი ზუსტი ამოხსნის შესახებ

## რეზიუმე

შრომაში შესწავლილია გამტარი სითხით ფოროვანი ფირფიტის გარსდენის ამოცანა, როდესაც ინდუცირებული მაგნიტური ველი გათვალისწინებულია. ნაპოვნია გარე ნაკადისა და გაჟონვის სიჩქარეები როგორც დროის ისეთი ფუნქციები, რომლებიც მოძრაობას ავტომოდელურს ხდის. მიღებულია ასეთი ამოცანის ზუსტი ამონახსნი.

J. Sharikadze

# ON AN EXACT SOLUTION OF A MAGNETOHYDRODYNAMIC EQUATION



Summary

The problem of flow around a porous plate by a conductive fluid with regard to an induced magnetic field is investigated. The values of the velocity of the external fluid and of the suction velocity as time functions are found for the problem to be a similarity. An exact solution of the problem is obtained.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
204, 1978

УДК 583.4

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ СЖИМАЕМОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Л.Г.Азмайпарашвили

В последнее время большое внимание уделяется исследованию разнообразных задач, связанных с расчетом пограничного слоя электропроводящей сжимаемой и несжимаемой жидкости под влиянием внешнего магнитного поля. Наряду с точными решениями таких задач значительное место занимают приближенные методы, позволяющие решать широкий класс задач, не поддающийся точному расчету [1-2]. В настоящей статье для расчета пограничного слоя электропроводящей сжимаемой жидкости в присутствии внешнего поперечного магнитного поля применяется метод последовательных приближений. Аналогичные задачи для несжимаемой проводящей жидкости были исследованы в работах [3 - 6].

Система уравнений пограничного слоя электропроводящей сжимаемой жидкости в присутствии перпендикулярного стенке магнитного поля, в рамках безиндукционной модели $R_m \ll 1$, имеет вид:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0,$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{1}{c}j_z B_y,$$

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu c_p}{P_r}\frac{\partial T}{\partial y}\right)+u\frac{\partial p}{\partial x}+$$

$$+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{j_z^2}{\sigma},$$

$$j_z=\sigma\left(E_z+\frac{1}{c}uB_y\right),$$

с граничными условиями

$$u|_{y=0}=0,\quad v|_{y=0}=0,\quad u|_{y=\infty}=u_\infty(x)$$

Здесь и ниже будут приняты следующие обозначения: $u$ и $v$ – составляющие скорости, направленные соответственно вдоль и по нормали обтекаемой поверхности, $p$ – давление, $\rho$ – плотность, $T$ – температура, $c_p$ – теплоёмкость при постоянном давлении, причем $\varkappa=c_p/c_v$, $\mu$ – динамическая вязкость, $i_0$ – полная энергия, $c$ – скорость света, $L$ – характерная длина, $B_y$ – внешнее магнитное поле, $\sigma$ – электропроводность, $j_z$ – плотность тока, $E_z$ – напряжение электрического поля, $M_a$, $P_r$, $H_a$ – соответственно числа Маха, Прандтля и Гартмана, знаком $\infty$ обозначаются значения параметров вдали от тела, знаком $00$ – параметры торможения, черточка сверху обозначает безразмерную величину.

Данная ниже система исследуется в предположении $P_r=1$, $E_z=0$ и с учетом следующего закона изменения проводимости среды:

$$\sigma=\sigma_0\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right).$$

При таких условиях систему легко преобразовать к виду:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0,$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\rho_\infty u_\infty\frac{du_\infty}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{1}{c^2}\sigma_0 B_y^2 u\left(1-\frac{u}{u_\infty}\right), \qquad (1)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(c_p T+\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(c_p T+\frac{u^2}{2}\right)\right]. \qquad (2)$$

Как известно [7] , тривиальным интегралом (2), удовлетворяющим условию отсутствия теплоотдачи между стенкой и потоком, является

$$c_p T+\frac{u^2}{2}=i_0=const,$$

который дает

$$T=T_{00}\left(1-\frac{u^2}{2i_0}\right),$$

где

$$T_{00}=\frac{i_0}{c_p}$$

Из закона Бернулли

$$\rho=\rho_{00}\left(1-\frac{u_\infty^2}{2i_0}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \qquad (3)$$

и из уравнения Клайперона

$$p=R\rho T,$$

следует

$$\rho=\rho_{00}\left(1-\frac{u_\infty^2}{2i_0}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\Big/\left(1-\frac{u^2}{2i_0}\right). \qquad (4)$$

Применяя эмпирический закон изменения вязкости

$$\mu=\mu_{00}\left(\frac{T}{T_{00}}\right)^n=\mu_{00}\left(1-\frac{u^2}{2i_0}\right)^n$$

и вводя функцию тока

$$\rho u=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad (5)$$

$$\rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{6}$$

в переменных Дородницына

$$\xi = \int_0^x \left(1-\frac{U_\infty^2}{2i_0}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} dx, \quad \eta = \int_0^y \left(1-\frac{U_\infty^2}{2i_0}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \Big/ \left(1-\frac{U^2}{2i_0}\right), \tag{7}$$

уравнение (I) с учетом (3)-(7) преобразуем к виду:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \rho_{00}^2 \frac{1-\frac{U^2}{2i_0}}{1-\frac{U_\infty^2}{2i_0}} U_\infty \frac{dU_\infty}{d\xi} + \mu_{00}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(1-\frac{U^2}{2i_0}\right)^{n-1}\frac{\partial^2\psi}{\partial \eta^2}\right] + \left(1-\frac{U^2}{2i_0}\right)\left(1-\frac{U_\infty^2}{2i_0}\right)^{\frac{2\varkappa}{1-\varkappa}} \rho_{00}\,\sigma_0 \frac{B_y^2}{c^2}\left(1-\frac{1}{U_\infty \rho_{00}}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right),$$

И, наконец, вводя безразмерные величины

$$U = \sqrt{2i_0}\,\bar{U}, \quad U_\infty = \sqrt{2i_0}\,\bar{U}_\infty, \quad \psi = \rho_{00} L \sqrt{2i_0}\,F, \quad \eta = L\tau,$$

$$\xi = \rho_{00} L \sqrt{2i_0}\, s/\mu_{00}, \quad B_y = B_0 \bar{B}, \quad H_a^2 = \frac{\sigma B_0^2 L^2}{c^2 \mu_{00}},$$

получим уравнение движения с граничными условиями в безразмерной форме:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial s\,\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = \left[1-\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)^2\right] U_\infty \frac{dU_\infty}{ds}\Big/\left(1-U_\infty^2\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\left[1-\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)^2\right]^{n-1}\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}\right\} - H_a^2 B^2\left[1-\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)^2\right]\left(1-U_\infty\right)^{\frac{2\varkappa}{1-\varkappa}}\left(1-\frac{1}{U_\infty}\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)\frac{\partial F}{\partial \tau},$$

$$F\Big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \tau}\Big|_{\tau=\infty} = U_\infty \tag{8}$$

/черточки над безразмерными величинами опущены/.

Для применения метода последовательных приближений Е.Швеца [8] к решению уравнения (8), перепишем в форме

$$\frac{\partial^3 F}{\partial \tau^3}=\left[1-\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)^2\right]^{1-n}\left\{\frac{\partial F}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial s\partial \tau}=\frac{\partial F}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}-\left[1-\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)^2\right](1-U_\infty^2)^{-1}U_\infty\frac{dU_\infty}{ds}+\right.$$

$$+2(n-1)\left[1-\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)^2\right]^{n-2}\frac{\partial F}{\partial \tau}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}\right)^2+ \tag{9}$$

$$\left.+H_a^2(1-U_\infty)^{\frac{2\varkappa}{1-\varkappa}}\frac{\partial F}{\partial \tau}\left[1-\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)^2\right]\left(1-\frac{1}{U_\infty}\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)\right\}=G_n(F)$$

Будем искать решение (9) в виде суммы двух членов ряда

$$F=F_0+F_1+\dots$$

где $F_0$ и $F_1$ – решения следующих краевых задач:

$$\frac{\partial^3 F_0}{\partial \tau^3}=0,\quad F_0\Big|_{\tau=0}=0,\quad \frac{\partial F_0}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}=0,\quad \frac{\partial F_0}{\partial \tau}\Big|_{\tau=\delta(s)}=U_\infty,$$

$$\frac{\partial^3 F_1}{\partial \tau^3}=G_n(F_0),\quad F_1\Big|_{\tau=0}=0,\quad \frac{\partial F_1}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0}=0,\quad \frac{\partial F_1}{\partial \tau}\Big|_{\tau=\delta(s)}=0,$$

а для определения неизвестной безразмерной толщины пограничного слоя $\delta(s)$ потребуем выполнения равенства:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}\Big|_{\tau=\delta(s)}=0, \tag{10}$$

которое выражает условие плавного перехода скорости пограничного слоя в скорость внешнего потока.

Этот метод успешно можно применить для решения многих задач гидродинамического и магнитогидродинамического пограничного слоя, следуя работе [9], в которой было проведено сравнение таких приближенных решений с точными решениями для несжимаемой жидкости, причем погрешность в ряде случаев не превышала 10%.

В качестве примера можно привести выражение напряжения трения на пластине и для сжимаемого гидродинамического пограничного слоя:

$$\tau_{\tau p} = \frac{K}{\sqrt{x}} \sqrt{\mu_{00} \rho_{00} U_\infty^3} \left(1 - \frac{U_\infty^2}{2i_0}\right)^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)}}.$$

Здесь коэффициент $K$ , вычисленный вышеупомянутым методом (интегрированием уравнения (9) при $H_a = 0$ ), равняется 0,333 , по приближенному методу Кармана, $K = 0,34$ , а распределение $K$ для точного решения [7] показано на рисунке, где линия I показывает распределение по точному решению, линия 2 – по методу Кармана, а линия 3 – по методу последовательных приближений

Здесь

$$\alpha_0^2 = \frac{\frac{\varkappa-1}{2} M_a^2}{1 + \frac{\varkappa-1}{2} M_a^2}$$

Рассмотрим случай, когда $n$ = I, тогда выражение продольной скорости в пограничном слое, найденное из (9), примет вид

$$u = \frac{\partial F}{\partial \tau} = -\frac{U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}}{24\delta^3}\tau^4 + \lambda^2 B^2 \frac{\delta^2}{U_\infty^2} N(\tau) - \frac{\frac{dU_\infty}{dx}}{(1-U_\infty^2)U_\infty} M(\tau)\delta^2 +$$

$$+\left(\frac{U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx}}{24} - \lambda^2 B^2 \frac{N(U_\infty)}{U_\infty^2}\delta + \frac{\frac{dU_\infty}{dx}}{(1-U_\infty^2)U_\infty} M(U_\infty)\delta\right]\tau + \frac{U_\infty}{\delta}\tau, \qquad \text{(II)}$$

где

$$\lambda = H_a (1 - U_\infty^2)^{\frac{\varkappa}{1-\varkappa}}, \quad M(\tau) = \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^4}{12},$$

$$N(\tau)=\left(\frac{\tau^3}{6}-\frac{\tau^5}{20}\right)-\frac{1}{U_\infty}\left(\frac{\tau^4}{12}-\frac{\tau^6}{30}\right),$$

$$\tau=\frac{U_\infty}{\delta}\tau$$

Соотношение (I0) для определения безразмерной толщины пограничного слоя дает:

$$\frac{d}{dS}(\delta^2)-\frac{16}{U_\infty^3}\left\{\frac{\lambda^2B^2}{U_\infty}\left[U_\infty N'(U_\infty)-N(U_\infty)\right]+\frac{\frac{d}{dS}U_\infty}{1-U_\infty^2}\left[U_\infty M'(U_\infty)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-M(U_\infty)\right]\right\}\delta^2+\frac{16}{U_\infty}=0,$$

где

$$N'(U_\infty)=\frac{U_\infty^2}{6}-\frac{U_\infty^4}{20},\quad M'(U_\infty)=U_\infty-\frac{U_\infty^3}{3}. \tag{I2}$$

Уравнение (I2) представляет собой линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\delta^2$ с переменными коэффициентами, интегрируемое при условии

$$\delta\big|_{S=0}=0. \tag{I3}$$

Общий интеграл задачи (I2)-(I3) имеет вид:

$$\delta^2=exp(V)\int_0^x\frac{16}{U_\infty}exp(-V)\,dS, \tag{I4}$$

где

$$V=\int_0^x\frac{16}{U_\infty^3}\left\{\frac{\lambda^2B^2}{U_\infty^2}\left[U_\infty N'(U_\infty)-N(U_\infty)\right]+\frac{\frac{d}{dS}U_\infty}{1-U_\infty^2}\left[U_\infty M'(U_\infty)-M(U_\infty)\right]\right\}dS.$$

Из (II) легко получить выражение для изменения безразмерного касательного напряжения вдоль стенки, подставляя в него значение толщины слоя $\delta$, найденное из (I4):

$$\tau_{\text{тр}} = \left.\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2}\right|_{\tau=0} = \frac{U_\infty^2}{24}\frac{d\delta}{dS} - \frac{\lambda^2 B^2}{U_\infty^2} N(U_\infty)\delta + \frac{U'_\infty}{(1-U_\infty^2)U_\infty} M(U_\infty)\delta + \frac{U_\infty}{\delta}. \tag{15}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, интересные с точки зрения их практического применения.

I. Обтекание полубесконечной пластины при однородном поперечном магнитном поле. В этом случае $U_\infty = const$ и $B = 1$. Формулы (14) и (15) дают:

$$\delta^2 = \frac{60}{\lambda^2(5-2U_\infty^2)}\left[\exp\left(\lambda^2 \frac{4(5-2U_\infty^2)}{15U_\infty} S\right) - 1\right],$$

$$\tau_{\text{тр}} = \frac{U_\infty^2}{24} \cdot \frac{d\delta}{dS} - \lambda^2 U_\infty\left(\frac{5-U_\infty^2}{60}\right)\delta + \frac{U_\infty}{\delta}.$$

2. Обтекание пластины при $B = S^{-1/2}$. Для данного распределения магнитного поля решение уравнения несжимаемого пограничного слоя автомодельно. В этом случае будем иметь:

$$\delta^2 = \begin{cases} \dfrac{4}{15U_\infty - 4\lambda^2(5-U_\infty^2)} S, & \text{при } \dfrac{4\lambda^2(5-U_\infty^2)}{15U_\infty} \neq 1 \\[2ex] \dfrac{16}{U_\infty} \cdot S \, \dfrac{4\lambda^2(5-U_\infty^2)}{15U_\infty} & \text{при } \dfrac{4\lambda^2(5-U_\infty^2)}{15U_\infty} = 1. \end{cases}$$

Поступила 25.У.1978

Кафедра
теоретической механики
ГПИ

## ЛИТЕРАТУРА


1. А.Б.Ватажин, Г.А.Любимов, С.А.Регирер, Магнитногидродинамические течения в каналах , М., "Наука", 1970.
2. Г.Г.Брановер, А.Б.Цинобер, Магнитная гидродинамика несжимаемых сред, М., "Наука", 1970.
3. Д.В.Шарикадзе, Сообщ. АН ГССР, 44, 3, 1970.
4. Д.В.Шарикадзе, Труды I респ. конф. по аэрогидродинамике, теплообмену и массообмену, Изд. Киевского университета, 1969.
5. В.С.Юферев, Изв. АН СССР, МЖГ, I, 1967.
6. В.С.Юферев, Изв. АН СССР, МЖГ, 6, 1967.
7. А.Дородницын, ПММ, т.УI, вып.6, 1942.
8. М.Е.Швец, ПММ, т.XII, вып.3, 1949.
9. Л.И.Бузникова, Б.Г.Иотковский, В.В.Кирилов, Изв. АН СССР, МЖГ, I, 1969.


ლ.აზმაიფარაშვილი

### კუმშვადი გამტარი სითხის ლამინარული სასაზღვრო ფენის გაანგარიშების ერთი მეთოდის შესახებ


რეზიუმე

შესწავლილია გამტარი კუმშვადი სითხის სტაციონარული სასაზღვრო ფენის ამოცანა მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდის გამოყენებით. გამოყვანილია და ამოხსნილია მოძრაობის განტოლება. განხილულია ამოცანის რამდენიმე კერძო შემთხვევა, რომლისთვისაც ამონახსნები მიღებულია ცხადი სახით.

L.Azmaiparashvili

## ABOUT A METHOD OF CALCULATION OF A LAMINAR BOUNDARY LAYER OF COMPRESSIBLE CONDUCTIVE FLUID

Summary

The problem of the boundary layer of a compressible conductive fluid is studied by the approximation method. Some particular cases of the problem are considered for which the solutions are obtained explicity.

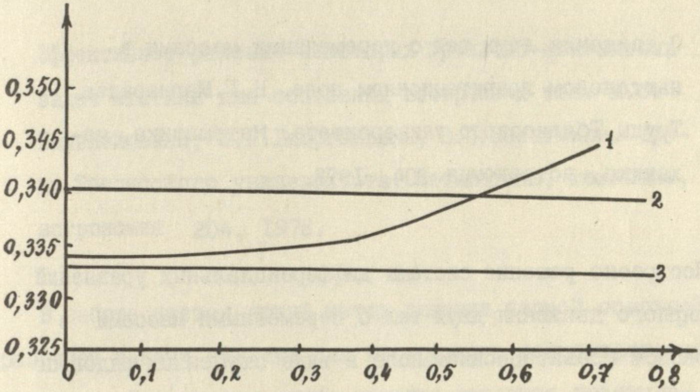

0,350
0,345
0,340
0,335
0,330
0,325
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
$\alpha_0^2$
1
2
3

Рис.

УДК 52

О движении двух тел с переменными массами в ньютоновом гравитационном поле. Н.Г.Магнарадзе. Труды Тбилисского университета. Математика, механика, астрономия. 204, 1978.

Построено решение системы дифференциальных уравнений регулярного движения двух тел с переменными массами в ньютоновом гравитационном поле в виде степенных рядов по времени.

Для коэффициентов этих рядов получены рекуррентные соотношения, удобные для их вычисления на современных вычислительных машинах.

Доказана сходимость упомянутых рядов и оценены соответствующие остатки. Библ. 16 назв.

УДК 539.3.01

Динамические задачи теории упругости для однородных анизотропных сред. М.О.Башелейшвили, Д.Г.Натрошвили. Труды Тбилисского университета. Математика, механика, астрономия. 204, 1978.

Применением преобразования Лапласа и методов теории потенциала и сингулярных интегральных уравнений изучены основные гранично-начальные задачи динамики для однородных анизотропных упругих сред. Библ. 17 назв.

УДК 539.3.01

Эффективное решение некоторых гранично-контактных задач статики для составных изотропных тел. М.О. Башелейшвили, Л.Г. Гиоргашвили, Ш.П. Зазашвили. Труды Тбилисского университета. Математика, механика, астрономия 204, 1978.

В работе дается новый метод решения первой основной граничной задачи статики для изотропного концентрического кольца. При помощи этого решения решается гранично-контактная задача статики для изотропного тела, состоящего из $n$ концентрических слоев. Решение получается в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда. Библ. 2 назв.

УДК 517.512

Об ограниченности в пространстве $L$ частных сумм ряда Фурье-Стильтьеса функции с ограниченным изменением. Г.С.Янаков. Труды Тбилисского университета. Математика, механика, астрономия. 204, 1978.

В работе приведены достаточные условия ограниченности в пространстве $L$ частных сумм ряда Фурье-Стильтьеса функции с ограниченным изменением. Доказано, что для функции $\varphi(x)$ с ограниченным изменением эквивалентны следующие условия:

1. $\int_0^{2\pi} |\varphi(t) - S_n(\varphi)(t)| dt = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty)$ ,

2. $\int_0^{2\pi} |\tilde{\varphi}(t) - S_n(\tilde{\varphi})(t)| dt = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty)$

( $\tilde{\varphi}$ - сопряженная функция к $\varphi'$ ). Библ. 6 назв.

УДК 512.815.1 , 511,218.

О функциях разбиений. Э.Т.Самсонадзе. Труды Тбилисского университета. Математика, механика, астрономия. 204, 1978.

Приведен метод нахождения числа целых неотрицательных решений системы линейных диофантовых неравенств $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1,2,\ldots,n)$ и системы линейных диофантовых уравнений $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1,2,\ldots,n)$ как функций от $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

В качестве примеров найдены число целых неотрицательных решений диофантового линейного неравенства $\sum_{j=1}^{m} a_j x_j \leq b$ и уравнения $\sum_{j=1}^{m} a_j x_j = b$ , а также функции разбиения лиевых алгебр $C_2, D_3$ и $A_{n-1}$ . Библ. 7 назв.

УДК 517.946

О разрешимости задачи Гурса. М.П.Григолия. Труды Тбилисского университета. Математика, механика, астрономия. 204, 1978.

Устанавливаются новые достаточные условия разрешимости задачи Гурса для квазилинейных гиперболических систем. Библ. 9 назв.

УДК 532.5

Применение обобщенного вариационного метода к одной плоской задаче обтекания цилиндрического тела идеальной несжимаемой жидкостью. Н.Н.Патарая. Труды Тбилисского университета. Математика, механика, астрономия. 204, 1978.

Применен обобщенный вариационный метод к одной плоской задаче обтекания цилиндрического тела идеальной несжимаемой жидкостью.

Уравнение поперечного сечения цилиндра представляет собой алгебраическую кривую четвертого порядка, которая в частном случае является окружностью круга. Библ. 2 назв.

УДК 533.538

Об одном точном решении уравнения магнитной гидродинамики. Дж.В.Шарикадзе. Труды Тбилисского университета. Математика, механика, астрономия. 204, 1978.

В работе изучена задача обтекания пористой пластины проводящей жидкостью с учетом индуцированного магнитного поля. Найдены значения внешнего потока и скорости вдува как функции времени, когда задача становится автомодельной. Получено точное решение такой задачи. Библ. 3 назв.

УДК 538.4

Об одном методе расчета ламинарного пограничного слоя сжимаемой проводящей жидкости. Л.Г.Азмайпарашвили. Труды Тбилисского университета. Математика, механика, астрономия. 204, 1978.

Изучена задача стационарного пограничного слоя сжимаемой проводящей жидкости методом последовательных приближений. Выведено и решено уравнение движения. Рассмотрены некоторые частные случаи задачи, для которых решения найдены в явном виде. Библ. 9 назв.

# შინაარსი

# СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

გამომცემლობის რედაქტორი ლ.აბუაშვილი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 26.12.78. უე 14071.
საბეჭდი ქაღალდი № 60X84. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 8,75.
სააღრ.-საგამომც. თაბახი 5,18, ტირაჟი 300. შეკვეთის № 201

ფასი 52 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი 380028,
ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.
Издательство Тбилисского университета, Тбилиси,
380028, пр. И.Чавчавадзе, I4.

საქ.სსრ მეცნიერებათა აკადემიის სტამბა, თბილისი, 380060,
კუტუზოვის ქ. 19.
Типография АН Грузинской ССР, Тбилиси, 380060, ул.Кутузова, I9.