იაშა დიასამიძე

ალგებრა და რიცხვთა თეორია

ნაწილი I

(საფაკულტეტო სწავლებისათვის)

ბათუმი
2008

წინამდებარე სახელმძღვანელო საფაკულტეტო სწავლების ლექციების მოკლე კურსია ალგებრასა და რიცხვთა თეორიაში. იგი შესაძლებლობის ფარგლებში ითვალისწინებს სხვადასხვა სპეციალობის თავისებურებებსა და სტუდენტთა დამოუკიდებლად მუშაობის მოთხოვნებს. გარდა ამისა, მათემატიკის სპეციალობაზე, თემათა დუბლირების გარეშე, შესაძლებელი იქნება ლექციების კურსის ბაზისად გამოყენება ცოდნის შემდგომი გაღრმავებისას.

ლექციების კურსის თითოეულ პარაგრაფს თან ერთვის შესაბამისი სავარჯიშოები.

ავტორი დიდი მადლიერებით მიიღებს ყველა იმ შენიშვნასა და სურვილს, რომელიც მიმართული იქნება სალექციო კურსის შემდგომ დასახვეწად.

ავტორის კოორდინატები:
ქ. ბათუმი, ნინოშვილის ქუჩა 57 (ხიმშიაშვილის 21), ბინა 27.
მობილური ტელეფონი - 893 90 89 64.

რედაქტორები: ალექსანდრე ლაშხი - ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სრული პროფესორი

გურამ ჩაჩანიძე - პედაგოგიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სრული პროფესორი

რეცენზენტები: მიხეილ ამაღლობელი - ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი

შალვა ბახტაძე - ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი

შოთა მახარაძე - ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი.

ISBN 99940 – 25 – 47 - 3

ითვალე დრო
და აგროვე ცოდნა

წინასიტყვაობა

პასუხი კითხვაზე, თუ რას სწავლობს ალგებრა, აუცილებლად მათემატიკური აზროვნების განვითარების საწყისებამდე მიგვიყვანს. ალგებრის განვითარების საწყისები კი გარკვეულწილად დაკავშირებულია მთელი რიცხვების შეკრების, გამრავლების და ახარისხების ხელოვნებასთან. მთელი რიცხვების არცთუ ისე გასაგები და არაცალსახა შეცვლა ასოებით, საშუალებას იძლევა მანამდე არსებული ცნობილი კანონებით ვიმუშაოთ ალგებრული ოპერაციების გაცილებით ფართო სივრცეში. ძირითადი სიძნელეები კი დაკავშირებულია იმ დიდი რაოდენობის ალგებრული ოპერაციების თვისებების შესწავლასთან, რომლებიც მოცემულ სიმრავლეებშია განმარტებული.

წინამდებარე საფაკულტეტო კურსი წარმოადგენს ისეთ სახელმძღვანელოს, რომელიც მკითხველს ალგებრად წოდებული დიდი შენობის ფასადის რაღაც ნაწილს დაანახებს და ამ შენობაში შესვლის სურვილის შემთხვევაში მის კარიბჭემდე მიიყვანს.

ავტორი

§1. სიმრავლეები

სიმრავლეთა თეორია შეისწავლის ისეთ ობიექტებს, რომლებსაც კლასები ეწოდება. X და Y კლასებისათვის განიმარტება ბინარული მიმართება $X \in Y$, რომელსაც ასე კითხულობენ: X კლასი არის Y კლასის ელემენტი, ან კიდევ X კლასი ეკუთვნის Y კლასს. სიმბოლური $X \notin Y$ ჩანაწერით აღინიშნება, რომ X კლასი არ არის Y კლასის ელემენტი.

განსაზღვრება 1. თუ X და Y კლასები შედგებიან ერთი და იგივე ელემენტებისაგან, მაშინ მათ ერთმანეთის ტოლი ეწოდება და $X = Y$ სიმბოლოთი ჩაიწერება.

$X = Y$ ტოლობის უარყოფა კი $X \neq Y$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

განსაზღვრება 2. ცვლადების შემცველ ისეთ წინადადებას, რომელიც გადაიქცევა გამონათქვამად, როცა მასში შემავალ ცვლადებს მათი დასაშვები მნიშვნელობებით შეცვლით, გამოთქმითი ფუნქცია ან კიდევ პრედიკატი ეწოდება.

პრედიკატებს $P(x)$, $Q(x,y)$ და ა.შ. სიმბოლოებით აღვნიშნავთ. მაშასადამე პრედიკადი შეიძლება იყოს ერთცვლადიანი, ორცვლადიანი, და ა.შ.

შემდგომში კლასი შეიძლება მოცემული იქნეს ან მისი ყველა ელემენტის ჩამოთვლით, ასე მაგალითად $X = \{x, y, z, t\}$, ან კიდევ გამოთქმითი ფუნქციის გამოყენებით. კერძოდ $X = \{x \mid P(x)\}$ კლასი შედგება ყველა ისეთი x ელემენტისაგან, რომელთათვისაც $P(x)$ პრედიკატი ჭეშმარიტია. ანალოგიურად $Y = \{(x,y) \mid Q(x,y)\}$ კლასს ეკუთვნის მხოლოდ ისეთი (x,y) წყვილები, რომელთათვისაც $Q(x,y)$ პრედიკატი ჭეშმარიტია.

განსაზღვრება 3. თუ X კლასი არის რომელიმე სხვა კლასის ელემენტი, მაშინ ასეთ X კლასს სიმრავლე ეწოდება.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ არსებობს კლასი, რომელიც სიმრავლე არ არის. მართლაც, ვთქვათ A არის კლასი, რომლის ელემენტებია ყველა

ისეთი X სიმრავლეები, რომლებიც $X \notin X$ პირობას აკმაყოფილებენ.

დავუშვათ, რომ A კლასი სიმრავლეა და მის მიმართ განვიხილოთ შემდეგი შესაძლო ორი შემთხვევა:

1) $A \in A$, მაშინ A-ს განსაზღვრის თანახმად გვექნება $A \notin A$.

2) $A \notin A$, მაშინ A-ს განსაზღვრის თანახმად მივიღებთ $A \in A$.

1) და 2) პუნქტებში მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ ჩვენი დაშვება არ არის სწორი, ე.ი. A კლასი სიმრავლე არაა.

შემდგომში განვიხილავთ მხოლოდ იმ კლასებს, რომლებიც სიმრავლეებს წარმოადგენენ.

განსაზღვრება 4. სიმრავლეს, რომელიც არცერთ ელემენტს არ შეიცავს ცარიელი სიმრავლე ეწოდება.

ცარიელი სიმრავლე განისაზღვრება ცალსახად და $\varnothing$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

თუ X სიმრავლის ყოველი ელემენტი იმავე დროს Y სიმრავლის ელემენტიცაა, მაშინ X სიმრავლეს Y სიმრავლის ქვესიმრავლე ეწოდება და სიმბოლურად $X \subseteq Y$ სახით აღინიშნება.

X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს X სიმრავლის ბულეანი ეწოდება და $B(X)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ვთქვათ I და X რაღაც სიმრავლეებია და $I \neq \varnothing$. I სიმრავლის ყოველ i ელემენტს შევუსაბამოთ X სიმრავლის რომელიღაც X_i ქვესიმრავლე და ასეთ სიმრავლეთა ერთობრიობა $B = \{X_i \mid i \in I\}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. იტყვიან, რომ B არის X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სისტემა (ოჯახი), თუ რომელიღაც $i', j' \in I$ და $i' \neq j'$ ინდექსებისათვის სრულდება $X_{i'} = X_{j'}$ ტოლობა, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი $B-$ს მიმართ ამბობენ, რომ იგი X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლეა.

შევნიშნოთ, რომ თუ X სიმრავლეში ელემენტების რაოდენობა სასრულია, მაშინ მასში ელემენტების რაოდენობა $|X|$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

თეორემა 1. ვთქვათ X, Y და Z ნებისმიერი სამი სიმრავლეა.

მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) $\varnothing \subseteq X$;

b) $X \subseteq X$ (ჩართვის რეფლექსურობა);

c) თუ $X \subseteq Y$ და $Y \subseteq X$, მაშინ $X = Y$ (ჩართვის ანტისიმეტრიულობა);

d) თუ $X \subseteq Y$ და $Y \subseteq Z$, მაშინ $X \subseteq Z$ (ჩართვის ტრანზიტიულობა);

e) თუ X სასრული სიმრავლეა და $|X| = n$, მაშინ $|B(X)| = 2^n$.

ახლა განვმარტოთ სიმრავლეთა გაერთიანების, თანაკვეთისა და სხვაობის ოპერაციები.

განსაზღვრება 5. X და Y სიმრავლეთა გაერთიანება ეწოდება სიმრავლეს, რომლიც შედგება მხოლოდ იმ ელემენტებისაგან, რომლებიც მიეკუთვნებიან ან X ან Y სიმრავლეს და $X \cup Y$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

X და Y სიმრავლეთა თანაკვეთა ეწოდება სიმრავლეს, რომლის ელემენტებია მხოლოდ X და Y სიმრავლის საერთო ელემენტები და $X \cap Y$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

X და Y სიმრავლეთა სხვაობა შედგება X სიმრავლის ყველა იმ ელემენტისაგან, რომლებიც Y სიმრავლეს არ ეკუთვნიან. X და Y სიმრავლეთა სხვაობა $X \setminus Y$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

თეორემა 2. ნებისმიერი X, Y, Z სიმრავლეებისათვის სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) $X \cup X = X$ და $X \cap X = X$ (გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციების იდემპოტენტურობის კანონები);

b) $X \cup Y = Y \cup X$ და $X \cap Y = Y \cap X$ (გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციების კომუტაციურობის კანონები);

c) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ და $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$ (გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციების ასოციაციურობის კანონები);

d) $X \cup (X \cap Z) = X$ და $X \cap (X \cup Z) = X$ (შთანთქმის კანონები);

e) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ და $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

(დისტრიბუციულობის კანონები თანაკვეთისა გაერთიანების მიმართ და გაერთიანებისა თანაკვეთის მიმართ);

f) $X\setminus(Y\cup Z)=(X\setminus Y)\cap(X\setminus Z)$ და $X\setminus(Y\cap Z)=(X\setminus Y)\cup(X\setminus Z)$ (დე მორგანის კანონები).

დამტკიცება. ვაჩვენოთ მხოლოდ $X\setminus(Y\cup Z)=(X\setminus Y)\cap(X\setminus Z)$ ტოლობის სამართლიანობა. მართლაც, თანახმად თეორემა 1-ის $b)$ წინადადებისა, საჭიროა

$$X\setminus(Y\cup Z)\subseteq(X\setminus Y)\cap(X\setminus Z) \text{ და } (X\setminus Y)\cap(X\setminus Z)\subseteq X\setminus(Y\cup Z)$$

ჩართვათა სამართლიანობის დამტკიცება.

1) მართლაც, თუ $x\in X\setminus(Y\cup Z)$, მაშინ $x\in X$ და $x\notin Y\cup Z$. $x\notin Y\cup Z$ პირობიდან, თანახმად სიმრავლეთა გაერთიანების ოპერაციის განმარტებისა, მივიღებთ $x\notin Y$ და $x\notin Z$. ახლა თუ მივიღებთ მხედველობაში $x\in X$ პირობას, მაშინ $x\notin Y$ და $x\notin Z$ პირობების ძალით გვექნება $x\in X\setminus Y$ და $x\in X\setminus Z$, ე.ი. $x\in(X\setminus Y)\cap(X\setminus Z)$. ამგვარად, თუ $x\in X\setminus(Y\cup Z)$, მაშინ $x\in(X\setminus Y)\cap(X\setminus Z)$, ე.ი. $X\setminus(Y\cup Z)\subseteq$ $\subseteq(X\setminus Y)\cap(X\setminus Z)$.

2) ახლა თუ $x\in(X\setminus Y)\cap(X\setminus Z)$, მაშინ $x\in X\setminus Y$ და $x\in X\setminus Z$. ბოლო ორი პირობის ძალით გვექნება $x\in X$, $x\notin Y$ და $x\notin Z$. ამიტომაც $x\in X$ და $x\notin Y\cup Z$, ე.ი. $x\in X\setminus(Y\cup Z)$. ამგვარად, თუ $x\in(X\setminus Y)\cap(X\setminus Z)$, მაშინ $x\in X\setminus(Y\cup Z)$, ე.ი. $(X\setminus Y)\cap(X\setminus Z)\subseteq X\setminus(Y\cup Z)$.

1) და 2) პუნქტებში მიღებული შედეგებიდან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობის სამართლიანობა. □.

განსაზღვრება 6. ხშირად, სიმრავლეები, რომლებიც გამოიყენებიან ამა თუ იმ თეორიაში, შედიან რაიმე ფიქსირებულ სიმრავლეში. მაგალითად გეომეტრიაში საქმე გვაქვს რომელიღაც სივრცის წერტილების სიმრავლესთან, არითმეტიკაში კი ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლესთან და ა. შ.. ასეთ ფიქსირებულ სიმრავლეს უნივერსალური სიმრავლე, ან კიდევ უნივერსუმი, ეწოდება და U სიმბოლოთი აღინიშნება.

ვთქვათ $A \subseteq U$. მაშინ $\overline{A} = U \setminus A$ სიმრავლეს A სიმრავლის U სიმრავლემდე დამატება ეწოდება.

თეორემა 3. ვთქვათ $A, B \subseteq U$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) $A \cup U = U$ და $A \cap U = A$;

b) $A \cup \overline{A} = U$ და $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

c) $\overline{\overline{A}} = A$;

d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (დე მორგანის კანონები);

e) $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \overline{\left(\overline{A} \cup B\right)}$;

f) $A \subseteq B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A \cap \overline{B} = \varnothing$;

g) $A \subseteq B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ (საწინააღმდეგო პოზიციათა კანონი);

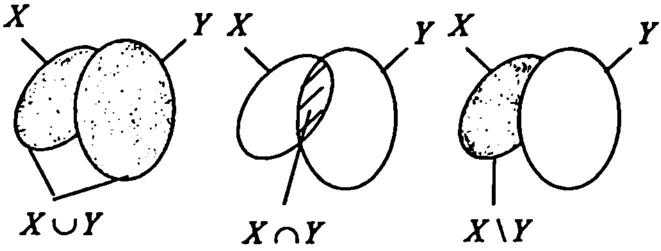
h) $A = B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = \varnothing$.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ მხოლოდ $h)$ წინადადების სამართლიანობა. მართლაც $A = B$ ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A \subseteq B$ და $B \subseteq A$. აქედან და $f)$ წინადადების თანახმად გვექნება $A \cap \overline{B} = \varnothing$ და $B \cap \overline{A} = \varnothing$, ე.ი. $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = \varnothing$.

მეორეს მხვრივ, თუ A და B არის U სიმრავლის ისეთი ქვესიმრავლეები, რომ $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = \varnothing$, მაშინ $A \cap \overline{B} = \varnothing$ და $B \cap \overline{A} = \varnothing$. ბოლო ორი ტოლობიდან $f)$ წინადადების თანახმად შესაბამისად მივიღებთ $A \subseteq B$ და $B \subseteq A$, ე.ი. $A = B$. □.

სიმრავლეთა თვისებების გრაფიკული გამოსახვის დროს ხშირად გამოიყენება ეილერის დიაგრამები, რომელსაც ასევე ვენის დიაგრამები ეწოდება. ამ დროს სიბრტყეზე სიმრავლე გამოისახება, როგორც ჩაკეტილი არის წერტილთა სიმრავლე (ან კიდევ როგორც წრის წერტილთა სიმრავლე). ასე მაგალითად, თუ X და Y გამოსახულია წრის წერტილთა სიმრავლით, მაშინ $X \cup Y$, $X \cap Y$ და $X \setminus Y$ სიმრავ-

ლეები შეიძლება გამოსახული იქნას, როგორც სიბრტყის დაშტრიხული არეები (ნახ. 1).



ნახ. 1

ახლა განვმარტოთ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის ცნება.

განსაზღვრება 7. ვთქვათ x და y რაღაც ობიექტებია და $x \neq y$. $\{x,y\}$ სიმრავლეს დაულაგებელი წყვილი ეწოდება. ცხადია $\{x,y\}=\{y,x\}$, ხოლო $\{\{x\},\{x,y\}\}$ სიმრავლეს კი დალაგებული წყვილი ეწოდება და (x,y) სიმბოლოთი აღინიშნება. თანახმად დალაგებული წყვილის განსაზღვრისა, გვექნება $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$.

დამტკიცდება, რომ $(x,y)=(z,t)$ მხოლოდ მაშინ, როცა $x=z$ და $y=t$.

განსაზღვრება 8. X და Y სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი ეწოდება $\{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ სიმრავლეს და $X \times Y$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე.ი. $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

შევნიშნოთ, რომ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის ოპერაცია არაკომუტაციური ოპერაციაა. ამასთან თუ X და Y სიმრავლეებში ელემენტთა რაოდენობა სასრულია, მაშინ ადგილი აქვს $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$ ტოლობას.

სავარჯიშოები

a) დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

1) $X\setminus(X\setminus Y)=X\cap Y$; 2) $Y\cup(X\setminus Y)=X\cup Y$; 3) $Y\cap(X\setminus Y)=\varnothing$;

b) დაამტკიცეთ შემდეგ წინადადებათა სამართლიანობა:

1) თუ $Y\subseteq X$, მაშინ $(X\setminus Y)\cup Y=X$;
2) თუ $X\subseteq Y$, მაშინ $X\cap Y=X$;
3) თუ $X\subseteq Y$, მაშინ $X\cup Y=Y$;
4) თუ $X\cap Y=\varnothing$, მაშინ $(X\cup Y)\setminus Y=X$;
5) თუ $X\subseteq Y$, მაშინ $X\setminus Z\subseteq Y\setminus Z$;
6) თუ $X\subseteq Y$, მაშინ $X\cap Z\subseteq Y\cap Z$;
7) თუ $X\subseteq Y$ მაშინ $X\cup Z\subseteq Y\cup Z$;
8) თუ $C=A\setminus B$, მაშინ $C\cap B=\varnothing$;
9) თუ $X\not\subset Y$, მაშინ $X\setminus Y\neq\varnothing$;
10) თუ $X\subseteq Z$, მაშინ $X\cup(Y\cap Z)=(X\cup Y)\cap Z$;

c) დაამტკიცეთ შემდეგ წინადადებათა სამართლიანობა:

1) $X\cup Z=\varnothing$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X=\varnothing$ და $Y=\varnothing$;
2) $X\setminus Y=Y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Y\setminus X=Y$;
3) $X\cup Y=X\setminus Y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Y=\varnothing$;
4) $X\setminus Y=X\cap Y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X=\varnothing$;
5) $X\subseteq Y\cup Z$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X\setminus Y\subseteq Z$;
6) $X\cap Y=X\cup Y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X=Y$;
7) $X\subseteq Y\subseteq Z$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X\cup Y=Y\cap Z$.

d) დაამტკიცეთ, რომ თუ $|X|=n$, მაშინ $B(X)=2^n$.

e) ნებისმიერი x,y,z,t ელემენტებისათვის $\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{z\},\{z,t\}\}$ მხოლოდ მაშინ, როცა $x=z$ და $y=t$.

f) ვთქვათ, X,Y,Z,T ნებისმიერი სიმრავლეებია. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა:

1) $(X\cap Y)\times(Z\cap T)=(X\times Z)\cap(Y\times T)$;
2) $(X\cap Y)\times Z=(X\times Z)\cap(Y\times Z)$;
3) $X\times(Z\cap T)=(X\times Z)\cap(X\times T)$;

4) $(X\cup Y)\times Z=(X\times Z)\cup(Y\times Z)$;

5) $(X\setminus Y)\times Z=(X\times Z)\setminus(Y\times Z)$.

g) ვთქვათ X და Y ნებისმიერი ორი სიმრავლეა. დაამტკიცეთ, რომ $X\times Y=\varnothing$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X=\varnothing$ ან $Y=\varnothing$;

h) ვთქვათ X_i $(i\in I)$ და Y არიან X სიმრავლის ქვესიმრავლეები. დაამტკიცეთ შემდეგ ტოლობათა სამართლიანობა:

1) $\left(\bigcup_{i\in I}X_i\right)\cap Y=\bigcup_{i\in I}(X_i\cap Y)$, $\left(\bigcap_{i\in I}X_i\right)\cup Y=\bigcap_{i\in I}(X_i\cup Y)$;

2) $Y\setminus\bigcup_{i\in I}X_i=\bigcap_{i\in I}(Y\setminus X_i)$; $Y\setminus\bigcap_{i\in I}X_i=\bigcup_{i\in I}(Y\setminus X_i)$ (დე მორგანის განზოგადოებული კანონები);

3) $\overline{\bigcup_{i\in I}X_i}=\bigcap_{i\in I}\overline{X_i}$, $\overline{\bigcap_{i\in I}X_i}=\bigcup_{i\in I}\overline{X_i}$.

i) დამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი სასრული $X_1,X_2,\dots,X_n$ სიმრავლეებისათვის

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}X_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|X_i|-\sum_{1\le i<j\le n}(X_i\cap X_j)+\dots+$$
$$+(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n}\left|X_{i_1}\cap X_{i_2}\cap\dots\cap X_{i_k}\right|+\dots+(-1)^{n-1}(X_1\cap X_2\cap\dots\cap X_n).$$

j) ვთქვათ $p_1,p_2,\dots,p_s$ წყვილ-წყვილად განსხვავებული მარტივი ნატურალური რიცხვებია და $n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$. თუ $\varphi(n)$ აღნიშნავს n რიცხვის ყველა ისეთ ნატურალურ გამყოფთა რიცხვს, რომელებიც $n-$თან თანამარტივებია და $n-$ს არ აღემატებიან, მაშინ

$$\varphi(n)=n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right).$$

k) ვთქვათ $X_1,X_2,\dots,X_n$ არის X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაღაც სიმრავლე. იპოვეთ X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა მაქსი-

მალური რიცხვი, რომელიც შეიძლება მიღებული იქნას $X_1, X_2, \ldots, X_n$ სიმრავლეებიდან მათ მიმართ სიმრავლეთა გაერთიანების, თანაკვეთისა და X სიმრავლემდე დამატების ოპერაციების გამოყენებით.

l) ვთქვათ n და m ნატურალური რიცხვებია, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ და $C_n^m = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$. დაამტკიცეთ შემდეგ ტოლობათა სამართლიანობა:

1) $(a+b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$; 2) $C_n^m = C_n^{n-m}$; 3) $\sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$;

4) $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i = 0$; 5) $\sum\limits_{i=0}^{n} i \cdot C_n^i = n \cdot 2^{n-1}$.

m) ვთქვათ X ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეა, $B(X)$ კი არის X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე და $\overline{A} = X \setminus A$ და $A \div C = (A \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap C)$ ნებისმიერი $A, B, C \in B(X)$ ელემენტისათვის. დაამტკიცეთ შემდეგ ტოლობათა სამართლიანობა:

1) $A \div B = B \div A$;

2) $(A \div B) \div C = B \div (A \div C)$;

3) $A \div \varnothing = A$.

4) $(A \div B) \cap C = (A \cap B) \div (A \cap C)$;

5) $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

6) $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

7) X სიმრავლის ნებიამიერი A ქვესიმრავლისათვის არსებობს X სიმრავლის ისეთი B ქვესიმრავლე, რომ $A \div B = \varnothing$.

n) დაამტკიცეთ, რომ X სიმრავლის ნებიამიერი A, B და C ქვესიმრავლეებისათვის სამართლიანია $A \cap B \subseteq C$ ტოლობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A \subseteq (X \setminus B) \cup C$.

§ 2. თანადობები, ასახვები

ვთქვათ, X და Y ნებისმიერი ორი არაცარიელი სიმრავლეა.

განსაზღვრება 1. X და Y სიმრავლეთა $X\times Y$ დეკარტული ნამრავლის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს ეწოდება თანადობა X და Y სიმრავლეებს შორის, ხოლო თანადობას X და X სიმრავლეებს შორის ბინარული მიმართება ეწოდება X სიმრავლეზე.

ვთქვათ $\alpha,\beta\subseteq X\times Y$. რადგან α და β თანადობები სიმრავლეებს წარმოადგენენ, ამიტომაც შეიძლება მათი შედარება თეორიულ-სიმრავლური $\subseteq$ ჩართვის მიმართ. ასევე მათზე შეიძლება შევასრულოთ სიმრავლეთა გაერთიანების, სიმრავლეთა თანაკვეთისა და სიმრავლეთა სხვაობის ოპერაციები: $\alpha\cup\beta$, $\alpha\cap\beta$ და $\alpha\setminus\beta$.

ახლა ვთქვათ f რაღაც თანადობაა X და Y სიმრავლეთა შორის. თუ $(x,y)\in f$ $(x\in X,\, y\in Y)$, მაშინ $(x,y)\in f$ პირობას xfy სახით ჩავწერთ.

განსაზღვრება 2. ვთქვათ X, Y და Z რაღაც არაცარიელი სიმრავლეებია $\alpha\subseteq X\times Y$ და $\beta\subseteq Y\times Z$. α და β თანადობათა $\alpha\circ\beta$ ნამრავლის ქვეშ იგულისხმება ისეთი თანადობა X და Z სიმრავლეებს შორის, რომ $x(\alpha\circ\beta)z$ მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი $y\in Y$ ელემენტი, რომ $x\alpha y\beta z$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

1) ვიტყვით, რომ $x\in X$ ელემენტი ეკუთვნის fX სიმრავლეს, თუ მოიძებნება ისეთი $y\in Y$ ელემენტი, რომ სრულდება პირობა xfy.

2) ვიტყვით, რომ $y\in Y$ ელემენტი ეკუთვნის Yf სიმრავლეს, თუ მოიძებნება ისეთი $x\in X$ ელემენტი, რომ სრულდება პირობა xfy.

   fX სიმრავლეს f თანადობის პირველი გეგმილი, ხოლო Yf სიმრავლეს f თანადობის მეორე გეგმილი ეწოდება.

3) $\Delta_X=\{(x,x)\mid x\in X\}$.

ახლა მოვიყვანოთ X და Y სიმრავლეთა შორის f თანადობის ზოგიერთი შესაძლო თვისებები:

a) $fX = X$, ე.ი. X სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის მოიძებნება Y სიმრავლის ისეთი y ელემენტი, რომ xfy;

b) f ისეთი თანადობაა, რომ xfy_1 და xfy_2 $(x \in X,\ y_1, y_2 \in Y)$ პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $y_1 = y_2$ ტოლობა;

c) f ისეთი თანადობაა, რომ $x_1 fy$ და $x_2 fy$ $(x_1, x_2 \in X,\ y \in Y)$ პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $x_1 = x_2$ ტოლობა;

d) $Yf = Y$, ე.ი. Y სიმრავლის ყოველი y ელემენტისათვის მოიძებნება X სიმრავლის ისეთი x ელემენტი, რომ xfy;

განსაზღვრება 3. თუ X და Y სიმრავლეთა შორის f თანადობა ისეთია, რომ იგი ერთდროულად აკმაყოფილებს a) და b) პირობებს, მაშინ მას X სიმრავლის Y სიმრავლეში ასახვა ეწოდება. $fX = X$ სიმრავლეს f ასახვის განსაზღვრის არე, ხოლო Yf სიმრავლეს კი - f ასახვის მნიშვნელობათა სიმრავლე ეწოდება.

თუ f არის X სიმრავლის Y სიმრავლეში ასახვა, მაშინ მას სიმბოლურად ასეც ჩასწერენ $f : X \to Y$, ხოლო პირობა xfy კი - $f(x) = y$ სახით ჩაიწერება. ამ შემთხვევაში y ელემენტს x ელემენტის სახე ეწოდება f ასახვის დროს, ხოლო x ელემენტს კი - y ელემენტის წინასახე f ასახვის დროს.

თუ $f : X \to Y$ და $g : Z \to Y$ ორი ასახვაა და $f \subseteq g$, მაშინ f ასახვას g ასახვის X სიმრავლემდე შეზღუდვა ეწოდება, ხოლო g ასახვას f ასახვის Z სიმრავლემდე გაგრძელება ეწოდება.

ცხადია f ასახვა იქნება X სიმრავლემდე g ასახვის შეზღუდვა, თუ $X \subseteq Z$ და $f(x) = g(x)$ ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის.

ახლა თუ $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $Yf = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ და $f(x_i) = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, მაშინ f ასახვა ხშირად სიმბოლურად ასეც ჩაიწერება

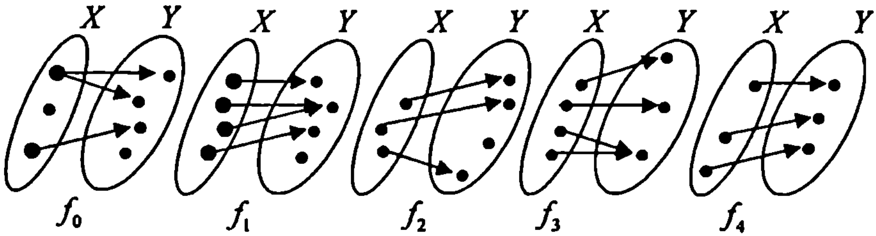
$$f=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_2 \end{pmatrix}. \qquad \dots(*)$$

განსაზღვრება 4. თუ f არის X სიმრავლის Y სიმრავლეში ასახვა და c) პირობასაც აკმაყოფილებს, მაშინ მას X სიმრავლის Y სიმრავლეში ურთიერთცალსახა ასახვა ან კიდევ ინექცია ეწოდება.

განსაზღვრება 5. თუ f არის X სიმრავლის Y სიმრავლეში ასახვა და d) პირობასაც აკმაყოფილებს, მაშინ მას X სიმრავლის Y სიმრავლეზე ასახვა ან კიდევ სურექცია ეწოდება.

განსაზღვრება 6. თუ f არის X სიმრავლის Y სიმრავლეში ასახვა და ერთდროულად c) და d) პირობებს აკმაყოფილებს, მაშინ მას X სიმრავლის Y სიმრავლეზე ურთიერთცალსახა ასახვა ან კიდევ ბიექცია ეწოდება. თუ X სასრული სიმრავლეა და $X=Y$, მაშინ მას ჩასმა ეწოდება,

ქვემოთ მოცემულ დიაგრამებზე f_0 არ არის ასახვა, f_1 ასახვაა, f_2 ინექციაა, f_3 სურექციაა, ხოლო f_4 ბიექციაა.



თეორემა 1. ვთქვათ $|X|=m$ და $|Y|=n$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) X და Y სიმრავლეთა შორის ყველა თანადობათა რიცხვი $2^{n\cdot m}$ – ის ტოლია;

b) X სიმრავლის Y სიმრავლეში ყველა ასახვათა რაოდენობა n^m – ის ტოლია;

c) თუ $m\le n$, მაშინ X სიმრავლის Y სიმრავლეში ყველა ინექციათა რაოდენობა $n(n-1)\cdots(n-m+1)$ ტოლია;

d) თუ $m \geq n$, მაშინ X სიმრავლის Y სიმრავლეში ყველა სურექციათა რაოდენობა $n^m + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \cdot C_n^i \cdot (n-i)^m$ ტოლია;

e) თუ $m = n$, მაშინ X სიმრავლის Y სიმრავლეში ყველა ბიექციათა რაოდენობა $n!$ ტოლია.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ მხოლოდ $a)$ წინადადების სამართლიანობა. მართლაც, თუ $|X| = m$ და $|Y| = n$, მაშინ $|X \times Y| = m \cdot n$. თანახმად თანადობათა განსაზღვრისა, მათი რაოდენობა იმდენი იქნება, რამდენიცაა $X \times Y$ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა რიცხვი. რადგან $m \cdot n$ ელემენტიანი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა რიცხვი $2^{m \cdot n}$ – ის ტოლია, ამიტომაც X და Y სიმრავლეებს შორის თანადობათა რაოდენობაც $2^{m \cdot n}$ – ის ტოლი იქნება. □.

$b)$, $c)$, $d)$ და $e)$ წინადადებათა სამართლიანობის დამტკიცება მკითხველისათვის მიგვინდია.

ახლა ვთქვათ, f არის X სიმრავლის Y სიმრავლეში ასახვა. f ასახვას შევუთანადოთ Y და X სიმრავლეებს შორის $f^{-1} = \{(y,x) \mid xfy\}$ თანადობა.

თეორემა 2. f^{-1} თანადობა Y და X სიმრავლეებს შორის მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება ასახვა Y სიმრავლისა X სიმრავლეში, როცა f ბიექციაა. ასეთ შემთხვევაში თვითონ f^{-1} ასახვაც ბიექცია იქნება.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ f^{-1} თანადობა Y და X სიმრავლეებს შორის ასახვაა. ვაჩვენოთ, რომ f ბიექციაა X და Y სიმრავლეებს შორის. ამისათვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

1) ვთქვათ y არის Y სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი. რადგან f^{-1} თანადობა Y და X სიმრავლეებს შორის ასახვაა, ამიტომაც Y სიმრავლის ყოველი y ელემენტისათვის მოიძებნება X სიმრავლის ისეთი x ელემენტი, რომ $yf^{-1}x$. აქედან და f^{-1} ასახვის განსაზღვრის თანახმად გვექნება xfy, ე.ი. f ასახვა სურექციაა.

2) ახლა ვთქვათ $x_1 f y$ და $x_2 f y$, რომელიღაც $x_1, x_2 \in X$ და $y \in Y$. აქედან და f^{-1} ასახვის განსაზღვრის თანახმად მივიღებთ $y f^{-1} x_1$ და $y f^{-1} x_2$ და $x_1 = x_2$. ამგვარად, თუ სრულდება პირობები $x_1 f y$ და $x_2 f y$, მაშინ $x_1 = x_2$, ე.ი. f ასახვა ინექციაა.

1) და 2) პუნქტებიდან გამომდინარეობს რომ f ბიექციაა X და Y სიმრავლეებს შორის.

ახლა დავუშვათ, რომ f ბიექციაა X და Y სიმრავლეებს შორის და ვაჩვენოთ, რომ f^{-1} თანადობაც Y და X სიმრავლეებს შორის ბიექცია იქნება. ამისათვის განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

3) ვთქვათ, y არის Y სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი. რადგან f ასახვა სურექციაა, ამიტომაც დასახელებული y ელემენტისათვის არსებობს X სიმრავლის ისეთი x ელემენტი, რომ $x f y$. აქედან f^{-1} თანადობის განსაზღვრის თანახმად გვექნება $y f^{-1} x$. მივიღეთ, რომ $f^{-1} Y = Y$.

4) ახლა ვთქვათ, რომელიღაც $y \in Y$ და $x_1, x_2 \in X$ ელემენტებისათვის სამართლიანია $y f^{-1} x_1$ და $y f^{-1} x_2$ პირობები. მაშინ f^{-1} თანადობის განსაზღვრის თანახმად მივიღებთ, რომ $x_1 f y$ და $x_2 f y$. ბოლო პირობებიდან, იმის გამო, რომ f ინექციაა, გვექნება $x_1 = x_2$.

მივიღეთ, რომ $y f^{-1} x_1$ და $y f^{-1} x_2$ პირობებიდან ყოველთვის მიიღება $x_1 = x_2$ ტოლობა.

5) ახლა ვთქვათ რომელიღაც $y_1, y_2 \in Y$ და $x \in X$ სამართლიანია $y_1 f^{-1} x$ და $y_2 f^{-1} x$ პირობები. აქედან f^{-1} თანადობის განსაზღვრის თანახმად მივიღებთ, რომ $x f y_1$ და $x f y_2$. ბოლო პირობებიდან, იმის გამო, რომ f ასახვაა, გვექნება $y_1 = y_2$.

მივიღეთ, რომ $y_1 f^{-1} x$ და $y_2 f^{-1} x$ პირობებიდან ყოველთვის მიიღება $y_1 = y_2$ ტოლობა.

6) დავუშვათ, რომ x არის X სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი. f

ასახვის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ xfy რომელიღაც $y \in Y$ ელემენტისათვის. აქედან f^{-1} თანადობის განსაზღვრის თანახმად გვექნება $yf^{-1}x$, ე.ი. სამართლიანია $Yf^{-1} = X$ ტოლობა.

3), 4), 5) და 6) პუნქტებიდან გამიმდინარეობს რომ f^{-1} ბიექციაა Y და X სიმრავლეებს შორის. □

განსაზღვრება 6. ვთქვათ, მოცემულია ორი $f: X \to Y$ და $g: Y \to Z$ ასახვა. $g \cdot f$ ასახვათა ნამრავლის (კომპოზიციის) ქვეშ იგულისხმება X სიმრავლის Z სიმრავლეში ასახვა, რომელიც ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის აკმაყოფილებს პირობას

$$(g \cdot f)(x) = g(f(x)).$$

თეორემა 3. ვთქვათ, მოცემულია ორი $f: X \to Y$ და $g: Y \to Z$ ასახვა. მაშინ $g \cdot f = f \circ g$ (იხ. განსაზღვრება 2).

დამტკიცება. $g \cdot f = f \circ g$ ტოლობის დასამტკიცებლად განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

1) ვთქვათ, x არის X სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ $(g \cdot f)(x) = z$ რომელიღაც $z \in Z$ ელემენტისათვის. ბოლო ტოლობიდან, თანახმად ასახვათა განმარტების ოპერაციისა, მივიღებთ, რომ $g(y) = z$, თუ $f(x) = y$, ე.ი. ygz და xfy. ახლა თუ მივიღებთ მხედველობაში თანადობათა ოპერაციის განსაზღვრას და xfy, ygz პირობებს, გვექნება $x(f \circ g)z$.

ამგვარად სამართლიანია ჩართვა $g \cdot f \subseteq f \circ g$.

2) მეორეს მხრივ, თუ $x'(f \circ g)z'$, რომელიღაც $x' \in X$ და $z' \in Z$ ელემენტებისათვის, მაშინ თანახმად თანადობათა გამრავლების ოპერაციისა, არსებობს ისეთი $y' \in Y$ ელემენტი, რომ $x'fy'$ და $y'gz'$, ე.ი. $f(x') = y'$, $g(y') = z'$ და ამიტომაც $(g \cdot f)(x') = g(f(x')) = g(y') = z'$, ე.ი. $x'(g \cdot f)z'$.

მივიღეთ, რომ $f \circ g \subseteq g \cdot f$.

1) და 2) პუნქტებიდან გამომდინარეობს, რომ $g \cdot f = f \circ g$. □

თეორემა 4. ვთქვათ მოცემულია ორი $f: X \to Y$ და $g: Y \to Z$ ასახვა. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებანი:

a) ორი ასახვის ნამრავლი ასახვაა;

b) ორი ინექციის ნამრავლი ინექციაა;

c) ორი სურექციის ნამრავლი სურექციაა;

d) ორი ბიექციის ნამრავლი ბიექციაა;

e) $f \cdot f^{-1} = \Delta_Y$ და $f^{-1} \cdot f = \Delta_X$.

დამტკიცება. განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

1) ვთქვათ, x არის X სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი. მაშინ f და g ასახვების განსაზღვრის თანახმად არსებობენ ისეთი $y \in Y$ და $z \in Z$ ელემენტები, რომ xfy და ygz. ასეთ პირობებში მივიღებთ $(g \cdot f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, ე.ი. $x(g \cdot f)z$ და ამიტომაც $(g \cdot f)X = X$.

2) თუ $x'(g \cdot f)z_1$ და $x'(g \cdot f)z_2$ რომელიღაც $x' \in X$ და $z_1, z_2 \in Z$ ელემენტებისათვის, მაშინ $(g \cdot f)(x') = z_1$, $(g \cdot f)(x') = z_2$ და $g(f(x')) = z_1$, $g(f(x')) = z_2$. მოცემულობის თანახმად g ასახვაა, ამიტომაც ბოლო ორი ტოლობიდან მივიღებთ, რომ $z_1 = z_2$.

1) და 2) პუნქტებიდან გამომდინარეობს, რომ $g \cdot f$ ასახვაა. □.

3) ახლა ვთქვათ, f და g ასახვები ინექციებია. თუ $x_1(g \cdot f)z$ და $x_2(g \cdot f)z$, მაშინ სრულდება პირობები $(g \cdot f)(x_1) = z$, $(g \cdot f)(x_2) = z$ და $g(f(x_1)) = z$, $g(f(x_2)) = z$. რადგან g ინექციაა, ამიტომ $f(x_1) = f(x_2)$. აქედან მივიღებთ, რომ $x_1 = x_2$, რადგან f ინექციაა.

ამგვარად თუ f და g ასახვები ინექციებია, მაშინ $x_1(g \cdot f)z$, $x_2(g \cdot f)z$ პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს ტოლობა $x_1 = x_2$, ე.ი. $g \cdot f$ ასახვა ინექციაა. □

4) ახლა დავუშვათ, რომ f, g ასახვები სურექციებია და z არის Z

სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი. რადგან g ასახვა სურექციაა, ამიტომ არსებობს Y სიმრავლის ისეთი y ელემენტი, რომ $g(y)=z$. ასევე, რადგან f სურექციაა, ამიტომ დასახელებული $y \in Y$ ელემენტისათვის არსებობს $x \in X$ ელემენტი, რომ $f(x)=y$. ამგვარად $(g \cdot f)(x)=$ $=g(f(x))=g(y)=z$, რადგანაც $f(x)=y$ და $g(y)=z$. მივიღეთ, რომ $X(g \cdot f)=Z$.

ახლა თუ გავითვალისწინებთ 3) და 4) მიღებულ შედეგებს გვექნება, რომ $g \cdot f$ ასახვა სურექციაა. □

3) და 4) პუნქტებიდან გამომდინარეობს რომ $g \cdot f$ ასახვა ბიექციაა. □

5) ახლა ვთქვათ, რომელიღაც $y, y' \in Y$ ელემენტებისათვის $y\left(f \cdot f^{-1}\right) y'$, მაშინ $\left(f \cdot f^{-1}\right)(y)=y'$ და $f\left(f^{-1}(y)\right)=y'$. $f\left(f^{-1}(y)\right)=y'$ ტოლობიდან, თუ $f^{-1}(y)=x$, მივიღებთ $f(x)=y'$, ამგვარად $f(x)=y'$ და $f(x)=y$, ე.ი. $y=y'$, რადგან f ასახვაა. მივიღეთ, რომ $y \Delta_Y y$, ე.ი. $f \cdot f^{-1} \subseteq \Delta_Y$

მეორეს მხრივ, თუ $y' \Delta_Y y'$, მაშინ პირობიდან, რომ f ბიქციაა, იარსებებს ისეთი $x' \in X$ ელემენტი, რომ $x' f y'$. აქედან, თანახმად f^{-1} თანადობის განმარტებისა, გვექნება $y' f^{-1} x'$. ამიტომაც თანადობათა ნამრავლის განსაზღვრისა და თეორემა 3 - ის თანახმად გვექნება $y'\left(f^{-1} \circ f\right) y'$ და $y'\left(f \cdot f^{-1}\right) y'$ მივიღეთ, რომ სამართლიანია ჩართვა $\Delta_Y \subseteq f \cdot f^{-1}$. ამგვარად, სამართლიანია $f \cdot f^{-1}=\Delta_Y$ ტოლობა.

ანალოგიურად დამტკიცდება $f^{-1} \cdot f=\Delta_X$ ტოლობაც. □

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

ა) $X=\left\{x_1, x_2, x_3\right\}$, $Y=\left\{y_1, y_2, y_3, y_4\right\}$ და $Z=\left\{z_1, z_2, z_3\right\}$ სიმრავ-

ლეებს შორის მოცემულია თანადობები:

$$f_1=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_3,y_4)\},$$

$$f_2=\{(x_1,y_1),(x_2,y_1),(x_3,y_2)\},$$

$$f_3=\{(y_1,z_1),(y_2,z_2),(y_3,z_3),(y_4,z_1)\},$$

$$f_4=\{(y_1,z_1),(y_2,z_2),(y_3,z_3)\},$$

$$f_5=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\},$$

$$f_6=\{(x_1,z_1),(x_2,z_2),(x_3,z_3)\}.$$

იპოვეთ:

1) თანადობები, რომლებიც ასახვები არ არიან;
2) ინექციები; 3) სურექციები; 4) ბიექციები;
5) $f_3\cdot f_2$, $f_2\circ f_3$; $f_3\cdot f_5$, $f_5\circ f_3$ და $f_1\circ f_3$ ნამრავლები.

b) მოცემული $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ თანადობებიდან, ისინი რომლებიც ასახვებია, ჩაწერეთ $(*)$ სახით.

c) ვთქვათ, $X=\{x_1,x_2,x_3\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$ და $Z=\{z_1,z_2,z_3\}$.

იპოვეთ:

1) თანადობათა რიცხვი X სიმრავლისა Y სიმრავლეში;
2) ასახვათა რიცხვი X სიმრავლისა Y სიმრავლეში;
3) ინექციათა რიცხვი X სიმრავლისა Y სიმრავლეში;
4) სურექციათა რიცხვი Y სიმრავლისა Z სიმრავლეზე;
5) ბიექციათა რიცხვი X და Z სიმრავლეებს შორის;
6) ყველა ასახვები X სიმრავლისა Y სიმრავლეში;
7) ყველა ინექციები X სიმრავლისა Y სიმრავლეში;
8) ყველა სურექციები Y სიმრავლისა Z სიმრავლეზე;
9) ყველა ბიექციები X და Z სიმრავლეებს შორის.

d) რა შემთხვევაში იარსებებს ინექცია X სიმრავლისა Y სიმრავლეში.

e) რა შემთხვევაში იარსებებს სურექცია X სიმრავლისა Y სიმრავლეზე.

f) იპოვეთ ყველა ბიექცია $X_i = \{1, 2, ..., i\}$ სიმრავლეზე, როცა $i = 2, 3, 4$;

g) ვთქვათ f ბიექციაა X და Y სიმრავლეებს შორის. აჩვენეთ, რომ $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

h) დაამტკიცეთ თეორემა 1.

i) ვთქვათ Y არის უსასრულო X სიმრავლის სასრული ქვესიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ბიექცია $X \setminus Y$ და X სიმრავლეებს შორის.

j) ვთქვათ f არის X სიმრავლის Y სიმრავლეში ასახვა. ხოლო g კი Y სიმრავლის X სიმრავლეში ასახვაა. g ასახვას ეწოდება f ასახვის მარცხენა (მარჯვენა) შებრუნებული, თუ $g \cdot f = \Delta_Y$ $\left(f \cdot g = \Delta_X\right)$.

1) აჩვენეთ, რომ f ინექციაა, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას გააჩნია მარცხენა შებრუნებული;

2) აჩვენეთ, რომ f სურექციაა, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას გააჩნია მარჯვენა შებრუნებული.

k) ვთქვათ X და Y შესაბამისად ადამიანთა და სკამთა სიმრავლეა რომელიღაც კინოთეატრში. შემდეგი ორი წინადადებიდან რომელი განსაზღვრავს ასახვას X სიმრავლისა Y სიმრავლეში, Y სიმრავლისა X სიმრავლეში. რომელ შემთხვევაში ეს ასახვა იქნება ინექცია, სურექცია და ბიექცია.

1) ყოველ ადამიანს ეთანადება ის სკამი, რომელზედაც იგი ზის;

2) ყოველ სკამს ეთანადება ის ადამიანი, რომელიც მასზედ ზის.

l) ვთქვათ X უსასრულო, ხოლო Y სასრული სიმრავლეა. აჩვენეთ, რომ არსებობს $X \setminus Y$ და X სიმრავლეებს შორის ისეთი ასახვა, რომელიც ბიექციაა.

§ 3. ბინარული მიმართებები

ვთქვათ X ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეა და $X \times X$ არის X სიმრავლის თავისთავზე დეკარტული ნამრავლი. როგორც ვიცით, X სიმრავლის თავისთავზე დეკარტული ნამრავლის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს ეწოდება ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე. თუ α ბინარული მიმართებაა X სიმრავლეზე, მაშინ $\alpha \subseteq X \times X$. თუ (x, y), $(x, y \in X)$ დალაგებული წყვილი ეკუთვნის α ბინარულ მიმართებას, ე.ი. თუ $(x, y) \in \alpha$, მაშინ ამ პირობას შემოკლებით ასეც ჩავწერთ $x\alpha y$. თუ რომელიღაც $x, y, z \in X$ ელემენტებისათვის ერთდროულად სრულდება $x\alpha y$ და $y\alpha z$ პირობები მაშინ გამოვიყენებთ ჩანაწერს $x\alpha y\alpha z$.

თუ $|X| = n$, მაშინ $|X \times X| = n^2$ და ყველა ბინარულ მიმართებათა რიცხვი X სიმრავლეზე იქნება 2^{n^2}-ის ტოლი.

ახლა ვთქვათ $x \in X$, $Y \subseteq X$ და $\alpha \subseteq X \times X$. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\alpha^{-1} = \{(y, x) \mid y, x \in X;\ x\alpha y\},\ x\alpha = \{y \in X \mid x\alpha y\},$$

$$Y\alpha = \bigcup_{x \in Y} x\alpha,\ \alpha x = x\alpha^{-1},\ \alpha Y = Y\alpha^{-1},\ \Delta_Y = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

ცარიელ ბინარულ მიმართებას $\varnothing$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ.

განსაზღვრება 1. ვთქვათ $\alpha, \beta \subseteq X \times X$. α და β ბინარულ მიმართებათა $\alpha \circ \beta$ ნამრავლის ქვეშ იგულისხმება ისეთი ბინარული მიმართება, რომ $x(\alpha \circ \beta)y$ მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი $z \in X$ ელემენტი, რომ $x\alpha z\beta y$.

განსაზღვრება 2. α ბინარულ მიმართებას X სიმრავლეზე ეწოდება რეფლექსური თუ $\Delta_X \subseteq \alpha$; სიმეტრიული, თუ $\alpha = \alpha^{-1}$; ანტისიმეტრიული, თუ $\alpha \cap \alpha^{-1} \subseteq \Delta_X$; ტრანზიტიული, თუ $б \circ б \subseteq б$ და იდემპოტენტური, თუ $б \circ б = б$.

ადვილი საჩვენებელია შემდეგ წინადადებათა სამართლიანობა:

a) α ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე რეფლექსურია, თუ ყოველი $x \in X$ - სათვის $x\alpha x$.

b) α ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე სიმეტრიულია, თუ $x\alpha y\ (x, y \in X)$ პირობიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $y\alpha x$ პირობა.

c) α ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე ანტისიმეტრიულია, თუ $x\alpha y$ და $y\sigma x$ $(x, y \in X)$ პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $x = y$ პირობა.

d) α ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე ტრანზიტიულია, თუ $x\alpha y$ და $y\alpha z$ $(x, y, z \in X)$ პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $x\alpha z$ პირობა .

განსაზღვრება 3. ბინარულ მიმართებას კვაზიდალაგების მიმართება ეწოდება, თუ იგი რეფლექსურია და ტრანზიტულია; დალაგების მიმართება ეწოდება, თუ იგი რეფლექსურია, ანტისიმეტრიულია და ტრანზიტულია; ექვივალენტობის მიმართება ეწოდება, თუ იგი რეფლექსურია, სიმეტრიულია და ტრანზიტულია.

განსაზღვრება 4. სიმრავლეს, რომელზეც განმარტებულია ერთი მაინც დალაგების მიმართება, დალაგებული სიმრავლე ეწოდება.

თუ X სიმრავლეზე განსაზღვრული σ დალაგების მიმართება ისეთია, რომ ყოველი $x, y \in X$ ელემენტებისათვის ადგილი აქვს ან $x\sigma y$ ან $y\sigma x$, მაშინ X სიმრავლეს წრფივად დალაგებული სიმრავლე ეწოდება.

ვთქვათ X დალაგებული სიმრავლეა „$\leq$“ დალაგების მიმართ, ხოლო Y მისი რომელიმე ქვესიმრავლეა. თუ $x_0 \in Y$ და ყოველი $y \in Y$ ელემენტისათვის აკმაყოფილებს პირობას $x_0 \leq y$, მაშინ x_0 ელემენტს Y სიმრავლის უმცირესი ელემენტი ეწოდება.

განსაზღვრება 5. თუ წრფივად დალაგებული სიმრავლე ისეთია, რომ მისი ყოველი არაცარიელი ქვესიმრავლე უმცირეს ელემენტს შეიცავს, მაშინ მას სავსებით დალაგებული სიმრავლე ეწოდება.

თეორემა 1. ვთქვათ $б$ არის ექვივალენტობის მიმართება X სიმრავლეზე. მაშინ $\mathrm{x}б = \mathrm{y}б$ $(\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{X})$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathrm{x}б\mathrm{y}$.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $б$ არის ექვივალენტობის მიმართება X სიმრავლეზე და $x\alpha y$. განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

1) $t \in x\alpha$. მაშინ $x\alpha t$ და $t\alpha x$, რადგანაც α სიმეტრიული ბინარული მიმართებაა. ასევე $t\alpha x\alpha y$ და $t\alpha y$, ვინაიდან α ტრანზიტიული ბინარული მიმართებაა. ამგვარად $t \in \alpha y$ და ამიტომაც $x\alpha \subseteq y\alpha$.

2) ახლა თუ $x\alpha y$ და $t' \in y\alpha$, მაშინ 1) პუნქტში დამტკიცებულის ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $y\alpha \subseteq x\alpha$.

1) და 2) დამტკიცებულის თანახმად გვექნება $x\alpha = y\alpha$.

ახლა ვთქვათ, რომ $б$ არის ექვივალენტობის მიმართება X სიმრავლეზე და $x\alpha = y\alpha$.

3) თუ $t \in x\alpha = y\alpha$, მაშინ $x\alpha t$ და $y\alpha t$. აქედან მივიღებთ $x\,\alpha\, t\,\alpha\, y$ და $x\alpha y$, რადგანაც α სიმეტრიული და ტრანზიტიული ბინარული მიმართებაა. მივიღეთ, რომ თუ $x\alpha = y\alpha$, მაშინ $x\alpha y$. □.

თეორემა 2. ვთქვათ, $б$ არის ექვივალენტობის მიმართება X სიმრავლეზე. მაშინ $x\alpha \cap y\alpha = \varnothing$ $(\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{X})$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $(x, y) \notin \alpha$.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $б$ არის ექვივალენტობის მიმართება X სიმრავლეზე და $(x, y) \notin \alpha$. განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

1) $t \in x\alpha \cap y\alpha$. მაშინ $x\alpha t$ და $y\alpha t$. აქედან მივიღებთ $x\alpha t\alpha y$ და $x\alpha y$, რადგანაც α სიმეტრიული და ტრანზიტიული ბინარული მიმართებაა. მაგრამ $x\alpha y$ პირობა $(x, y) \notin \alpha$ დაშვებას ეწინააღმდეგება. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ $x\alpha \cap y\alpha = \varnothing$.

ახლა ვთქვათ, რომ $б$ არის ექვივალენტობის მიმართება X სიმრავლეზე და $x\alpha \cap y\alpha = \varnothing$.

თუ სრულდება პირობა $x\alpha y$, მაშინ $y \in x\alpha$ და $y \in y\alpha$, რადგანაც α არის X სიმრავლეზე რეფლექსური ბინარული მიმართება. ამ-

გვარად $y \in x\alpha \cap y\alpha$. მაგრამ ბოლო პირობა $x\alpha \cap y\alpha = \varnothing$ დაშვებას ეწინააღმდეგება. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ $(x, y) \notin \alpha$. □

განსაზღვრება 6. ვთქვათ, რომ $б$ არის ექვივალენტობის მიმართება X სიმრავლეზე და $x \in X$. მაშინ $x\alpha$ სიმრავლეს X სიმრავლის $\alpha-$ექვივალენტობის კლასს უწოდებენ.

თეორემა 1 გვიჩვენებს, რომ X სიმრავლის $\alpha-$ექვივალენტობის კლასი ამ კლასიდან აღებული ელემენტით ცალსახად განისაზღვრება.

განსაზღვრება 7. ვიტყვით, რომ X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რომელიმე X_i $(i \in I)$ სისტემა არის X სიმრავლის წესიერი დანაწილება, თუ ერთდროულად სრულდება შემდეგი სამი პირობა:

a) $X_i \neq \varnothing$, ყოველი $i \in I$ - სათვის;

b) $X_i \cap X_j = \varnothing$, ყოველი $i, j \in I$ - სათვის, სადაც $i \neq j$;

c) $X = \bigcup\limits_{i \in I} X_i$.

თეორემა 3. X სიმრავლეზე განსაზღვრულ ექვივალენტობის მიმართებებსა და X სიმრავლის წესიერ დანაწილებებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა.

დამტკიცება. ვთქვათ $б$ არის X სიმრავლეზე განსაზღვრული ექვივალენტობის მიმართება. ვაჩვენოთ, რომ X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $x\alpha$ $(x \in X)$ სიმრავლე X სიმრავლის წესიერი დანაწილებას წარმოადგენს. მართლაც:

1) $x \in x\alpha$, რადგანაც α რეფლექსური ბინარული მიმართებაა. ამგვარად ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის $x\alpha \neq \varnothing$.

2) $x\alpha$ და $y\alpha$ $(x, y \in X)$ სიმრავლეები თეორემა 1 - სა და 2 - ის თანახმად ან ემთხვევიან ერთმანეთს ან არ თანაიკვეთებიან.

3) $X = \bigcup\limits_{x \in X} x\alpha$, რადგანაც $x \in x\alpha$ ყოველი $x \in X$ - სათვის.

1), 2) და 3) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $x\alpha$ $(x \in X)$ სისტემა არის X სიმრავლის წესიერი დანაწილება.

4) ახლა ვთქვათ α და α' არიან ექვივალენტობის მიმართებები X სიმრავლეზე და $\alpha \neq \alpha'$. მაშინ ან $\alpha \setminus \alpha' \neq \varnothing$ ან $\alpha' \setminus \alpha \neq \varnothing$. ვიგულისხმოთ, რომ $\alpha \setminus \alpha' \neq \varnothing$, ე.ი. $x\alpha y$ და $(x,y) \notin \alpha'$ რომელიღაც $x, y \in X$ - სათვის. ამგვარად $y \in x\alpha$ და $y \notin x\alpha'$. ამიტომაც $x\alpha \neq x\alpha'$, ე.ი. α და α' ექვივალენტობებით განსაზღვრული X სიმრავლის წესიერი დანაწილებები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

მივიღეთ, რომ X სიმრავლეზე განსაზღვრულ ექვივალენტობის მიმართებას ცალსახად ეთანადება X სიმრავლის რომელიღაც წესიერი დანაწილება.

ახლა ვთქვათ, რომ X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა X_i $(i \in I)$ სისტემა არის X სიმრავლის წესიერი დანაწილება და

$$\beta = \bigcup_{i \in I} (X_i \times X_i).$$

ვაჩვენოთ, რომ β ექვივალენტობის მიმართებაა X სიმრავლეზე.

5) რადგან $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, ამიტომაც ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის ყოველთვის მოიძებნება ისეთი $i_0 \in I$, რომ $x \in X_{i_0}$, ე.ი. $(x, x) \in X_{i_0} \times X_{i_0}$. ბოლო პირობიდან β მიმართების განსაზღვრის თანახმად გვექნება $x\beta x$. ეს კი ნიშნავს, რომ β რეფლექსური ბინარული მიმართებაა.

6) ახლა თუ $x\beta y$ რომელიღაც $x, y \in X -$ სათვის, მაშინ β მიმართების განსაზღვრის თანახმად არსებობს ისეთი $k \in I$ ელემენტი, რომ $(x, y) \in X_k \times X_k$, ე.ი. $x, y \in X_k$ და ამიტომაც $(y, x) \in X_k \times X_k$. ბოლო პირობიდან β მიმართების განსაზღვრის თანახმად გვექნება $y\beta x$. ეს კი ნიშნავს, რომ β სიმეტრიული ბინარული მიმართებაა.

7) ახლა თუ $x\beta z\beta y$ რომელიღაც $x, z, y \in X$ - სათვის, მაშინ β მიმართების განსაზღვრის თანახმად არსებობს ისეთი $p, q \in I$ ელემენტები, რომ $(x, z) \in X_p \times X_p$, $(z, y) \in X_q \times X_q$, ე.ი. $z \in X_p \cap X_q$. ბოლო პირობიდან X სიმრავლის წესიერი დანაწილების განსაზღვრის

თანახმად გვექნება $p=q$, და ამიტომაც $x,z,y\in X_p$ და $(x,y)\in X_p\times X_p$. ბოლო პირობიდან β მიმართების განსაზღვრის თანახმად გვექნება $x\beta y$. ეს კი ნიშნავს, რომ β ტრანზიტიული ბინარული მიმართებაა.

5), 6), 7) პუნქტების ძალით გვექნება, რომ β ექვივალენტობის მიმართებაა X სიმრავლეზე.

8) ცხადია, რომ ყოველი $x\in X$, თუ $x\in X_i$, მაშინ $x\beta=X_i$. მე-4) პუნქტის თანახმად X სიმრავლის ყოველი წესიერი დანაწილება ცალსახად განსაზღვრავს ექვივალენტობის მიმართებას.

მივიღეთ, რომ X სიმრავლის წესიერი დანაწილება ცალსახად განსაზღვრავს X სიმრავლეზე რომელიღაც ექვივალენტობის მიმართებას.

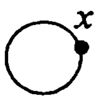
განსაზღვრება 8. გრაფის ქვეშ ესმით სიბრტყის წერტილთა ნებისმიერი სიმრავლე, რომელსაც გრაფის წვეროებს უწოდებენ და ზოგიერთ წვეროთა შემაერთებელი წირების ერთობლიობა.

გრაფის ორი წვეროს შემაერთებელ წირს გრაფის წიბოს უწოდებენ.

გრაფს, რომლის ყოველ წიბოზე აღნიშნულია მიმართულება, ორიენტირებულ გრაფს უწოდებენ.

არსებობს მარტივი ხერხი ბინარული მიმართების წარმოდგენისა ორიენტირებული გრაფის სახით. მართლაც, ვთქვათ X სასრული სიმრავლეა და $\alpha\subseteq X\times X$. X სიმრავლის ელემენტები წარმოვადგინოთ როგორც სიბრტყის წერტილები. α ბინარული მიმართების ყოველ (x,y) წყვილს, თუ $x\neq y$ შევუთა ნადოთ ორიენტირებული წიბო, რომელიც x წვეროდან გამოდის y წვეროს მიმართულებით. თუ $x=y$ მაშინ მას შევუსაბამებთ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულების მქონე მარყუჟს (იხ. შესაბამისად ნახატები 1 და 2).

ნახ. 1



ნახ. 2

სავარჯიშოები

a) ვთქვათ $X=\{1,2\}$. იპოვეთ:

1) ყველა ბინარული მიმართებათა რაოდენობა;
2) ყველა ბინარული მიმართები;
3) ყველა რეფლექსური ბინარული მიმართები;
4) ყველა სიმეტრიული ბინარული მიმართები;
5) ყველა ანტისიმეტრიული ბინარული მიმართები;
6) ყველა ტრანზიტიული ბინარული მიმართები;
7) ყველა კვაზიდალაგების მიმართები;
8) ყველა დალაგების მიმართებები;
9) ყველა წრფივი დალაგების მიმართები;
10) ყველა ექვივალენტობის მიმართები;
11) ყველა იდემპოტენტური მიმართები;
12) ააგეთ დალაგების მიმართებათა გრაფები.

b) ვთქვათ $X=\{1,2,3,4,5\}$ სიმრავლეზე მოცემულია შემდეგი ბინარული მიმართებები:

$$\alpha_1=\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(5,3)\},$$
$$\alpha_2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\},$$
$$\alpha_3=\{(2,1),(2,2),(2,5),(4,1),(4,2),(4,5),(5,1),(5,2),(5,5)\},$$
$$\alpha_4=\{(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,3),(3,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\}.$$

იპოვეთ $\alpha_1\circ\alpha_2$, $\alpha_2\circ\alpha_1$, $\alpha_3\circ\alpha_4$, $\alpha_4\circ\alpha_3$ და $\alpha_3\circ\alpha_3$.

c) დაამტკიცეთ, რომ X სიმრავლეზე კვაზიდალაგების, დალაგებისა და ექვივალენტობის მიმართებები ყოველთვის იდემპოტენტური მიმართებებია.

d) ვთქვათ α და β_i $(i\in I)$ არიან X სიმრავლეზე რაღაც ბინარულ მიმართებათა სიმრავლე. აჩვენეთ, რომ:

1) $\alpha\circ\left(\bigcup\limits_{i\in I}\beta_i\right)=\bigcup\limits_{i\in I}(\alpha\circ\beta_i)$;

2) $\alpha \circ \left(\bigcap_{i \in I} \beta_i \right) \subseteq \bigcup_{i \in I} (\alpha \circ \beta_i)$;

3) $\left(\bigcup_{i \in I} \beta_i \right) \circ \alpha = \bigcup_{i \in I} (\beta_i \circ \alpha)$;

4) $\left(\bigcap_{i \in I} \beta_i \right) \circ \alpha \subseteq \bigcup_{i \in I} (\beta_i \circ \alpha)$.

e) ვთქვათ α, β და δ ბინარული მიმართებებია X სიმრავლეზე. აჩვენეთ, რომ $(\alpha \circ \beta) \circ \delta = \alpha \circ (\beta \circ \delta)$.

f) ვთქვათ α და β ბინარული მიმართებებია X სიმრავლეზე. აჩვენეთ, რომ $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$.

g) ვთქვათ α და β ისეთი ექვივალენტობის მიმართებებია X სიმრავლეზე, რომ $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$. აჩვენეთ, რომ $\alpha \circ \beta$ იქნება ექვივალენტობის მიმართება X სიმრავლეზე.

h) აჩვენეთ, რომ X სიმრავლეზე ნებისმიერი α, β და δ მიმართებებისათვის, თუ $\alpha \subseteq \beta$, მაშინ $\alpha \circ \delta \subseteq \beta \circ \delta$ და $\delta \circ \alpha \subseteq \delta \circ \beta$.

i) ვთქვათ α ნებისმიერი ბინარული მიმართებაა X სიმრავლეზე და $\alpha' = \prod_{n=1}^{\infty} \alpha^n$. აჩვენეთ, რომ:

1) $\alpha \circ \varnothing = \varnothing \circ \alpha = \varnothing$;

2) $\alpha \circ \Delta_X = \Delta_X \circ \alpha = \alpha$;

3) $\alpha \cup \Delta_X$ რეფლექსური ბინარული მიმართებაა X სიმრავლეზე;

4) $\alpha \cup \alpha^{-1}$ სიმეტრიული ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე;

5) α' ტრანზიტული ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე;

6) მაშინ $(\alpha \cup \alpha^{-1} \cup \Delta_X)'$ ექვივალენტობის მიმართება X სიმრავლეზე.

§ 4. $n-$ არული მიმართებები, $n-$ არული ალგებრული ოპერაციები, ალგებრები და ალგებრული სისტემები

ვთქვათ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეებია და $x_1, x_2, \ldots x_n$ შესაბამისად $X_1, X_2, \ldots, X_n$ სიმრავლეთა ელემენტებია.

განსაზღვრება 1. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მიმდევრობას $n-$ ელემენტიანი კორტეჟი ეწოდება $X_1, X_2, \ldots, X_n$ სიმრავლეებზე და $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. თუ $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ მეორე კორტეჟია $X_1, X_2, \ldots, X_n$ სიმრავლეზე, მაშინ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ კორტეჟებს უწოდებენ ერთმანეთის ტოლს, თუ $x_i = y_i$ ყოველი $i = 1, 2, \ldots, n$ - სათვის.

სიმრავლეს $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ სიმრავლთა დეკარტული ნამრავლი ეწოდება. თუ $X_1 = \cdots = X_n = X$, მაშინ $\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n}$ სიმრავლე X^n სიმბოლოთი აღინიშნება.

განსაზღვრება 2. X^n სიმრავლის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს $n-$ არული მიმართება ეწოდება X სიმრავლეზე.

განსაზღვრება 3. X^n სიმრავლის X სიმრავლეში ნებისმიერ f ასახვას $n-$ არული ალგებრული ოპერაცია (ან კიდევ $n-$ რანგიანი ალგებრული ოპერაცია) ეწოდება. $n = 1, 2, 3$ შემთხვევაში f ასახვას შესაბამისად უნარული, ბინარული და ტერნარული ოპერაციები ეწოდება. X სიმრავლის ელემენტის დაფიქსირებას კი ნულარული ოპერაცია ეწოდება.

ახლა ვთქვათ Ω რაღაც ოპერაციათა სიმრავლეა X სიმრავლეზე, ხოლო Ω' კი რაღაც მიმართებათა სიმრავლეა X სიმრავლეზე.

განსაზღვრება 4. დალაგებულ $\mathbf{X} = (X, \Omega, \Omega')$ სამეულს ალგებრული სისტემა ეწოდება. Ω სიმრავლეს კი მთავარი ოპერაციათა სიმ-

რავლეს უწოდებენ. ხოლო ალგებრულ $\mathbf{X}=(X,\Omega,\varnothing)$ და $\mathbf{Y}=(X,\varnothing,\Omega')$ სისტემებს შესაბამისად ალგებრა და მოდელი ეწოდება და $\mathbf{X}=(X,\Omega)$ და $\mathbf{Y}=(X,\Omega')$ სიმბოლოებით აღინიშნება.

თუ $\Omega=\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$, მაშინ $\mathbf{X}=(X,\Omega)$ ალგებრას სიმბოლურად ასეც წარმოადგენენ $\mathbf{X}=(X,f_1,f_2,\ldots,f_n)$.

ორ $\mathbf{X}=(X,\Omega)$ და $\mathbf{Y}=(Y,\Omega')$ ალგებრას ერთნაირტიპიანი ეწოდება, თუ Ω და Ω' სიმრავლეებს შორის არსებობს ისეთი θ ბიექცია, რომ ყოველი $f\in\Omega$ ელემენტისათვის f და $\theta(f)$ ოპერაციების რანგები ერთმანეთის ტოლია.

ვთქვათ $\mathbf{X}=(X,\Omega)$ და $\mathbf{Y}=(Y,\Omega')$ ერთნაირტიპიანი ალგებრებია და θ ისეთი ბიექციაა, რომ ყოველი $f\in\Omega$ ელემენტისათვის f და $\theta(f)$ ოპერაციების რანგები ერთმანეთის ტოლია. თუ $Y\subseteq X$ და ყოველი $\theta(f)\in\Omega'$ ოპერაცია არის f ოპერაციის Y სიმრავლემდე შეზღუდვა, მაშინ $\mathbf{Y}=(Y,\Omega')$ ალგებრას $\mathbf{X}=(X,\Omega)$ ალგებრის ქვეალგებრა ეწოდება.

ახლა ვთქვათ $(*)$ და $(\circ)$ ორი ბინარული ალგებრული ოპერაციაა X სიმრავლეზე. მათ შეიძლება გააჩნდეთ შემდეგი თვისებები:

a) $x*y=y*x$ ყოველი $x,y\in X$ ელემენტებისათვის ($(*)$ ოპერაცია კომუტაციურია);

b) $(x*y)*z=x*(y*z)$ ყოველი $x,y,z\in X$ ელემენტებისათვის ($(*)$ ოპერაცია ასოციაციურია);

c) თუ $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს ისეთი $e\in X$ ელემენტი, რომ $e*x=x*e=x$ ყოველი $x\in X$ ელემენტისათვის. მაშინ e ნეიტრალური ელემენტი ეწოდება $(*)$ ოპერაციის მიმართ.

d) ვთქვათ $(*)$ ოპერაციის მიმართ X სიმრავლეში არსებობს e ნეიტრალური ელემენტი. თუ $(*)$ ოპერაციის მიმართ X სიმრავლის x ელემენტისათვის არსებობს ისეთი x' ელემენტი, რომ $x' * x = x * x' = e$ მაშინ x' ელემენტს x ელემენტის სიმეტრიული ელემენტი ეწოდება.

e) თუ $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს ისეთი $0 \in X$ ელემენტი, რომ $0 * x = x * 0 = 0$ ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის, მაშინ 0 ნულოვანი ელემენტი ეწოდება $(*)$ ოპერაციის მიმართ.

f) $x*(y \circ z) = (x*y) \circ (x*z)$ და $(y \circ z)*x = (y*x) \circ (z*x)$ ($(*)$ ოპერაციის დისტრიბუციულობის კანონები $(\circ)$ ოპერაციის მიმართ).

თუ $(*)$ ოპერაცია აღნიშნულია $(+)$ სიმბოლოთი, მაშინ მას X სიმრავლეზე შეკრების ოპერაცია ეწოდება. X სიმრავლის ნეიტრალურ e ელემენტს და x ელემენტის სიმეტრიულ x' ელემენტს შეკრების ოპერაციის მიმართ, შესაბამისად ნულოვან და მოპირდაპირე ელემენტებს უწოდებენ და 0 და $-x$ სიმბოლოებით აღნიშნავენ.

თუ $(*)$ ოპერაცია აღნიშნულია $(\cdot)$ სიმბოლოთი, მაშინ მას X სიმრავლეზე გამრავლების ოპერაცია ეწოდება. X სიმრავლის ნეიტრალურ e ელემენტს და x ელემენტის სიმეტრიულ x' ელემენტს გამრავლების ოპერაციის მიმართ, შესაბამისად ერთეულოვან და შებრუნებულ ელემენტებს უწოდებენ და 1 და x^{-1} სიმბოლოებით აღნიშნავენ.

განსაზღვრება 5. $\mathbf{X} = (X, *)$ ალგებრას, სადაც $(*)$ ბინარული ალგებრული ასოციაციური ოპერაციაა, ნახევარჯგუფი ეწოდება.

თუ X ნახევარჯგუფში $(*)$ ოპერაციის მიმართ არსებობს ნეიტრალური ელემენტი, მაშინ $\mathbf{X}$ ნახევარჯგუფს მონოიდი ეწოდება.

განსაზღვრება 6. $\mathbf{X} = (X, *, ')$ ალგებრას, სადაც $(*)$ არის ბინარული ალგებრული ოპერაცია, ხოლო (') უნარული ალგებრული ოპერაციაა, ჯგუფი ეწოდება, თუ

a) $(X,*)$ მონოიდია $(*)$ ოპერაციის მიმართ ნეიტრალური e ელემენტით;

b) ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $x' \in X$ ელემენტი, რომ $x * x' = x' * x = e$;

X ჯგუფს ეწოდება აბელური, თუ ჯგუფში განმარტებული $(*)$ ოპერაცია კომუტაციურია.

განსაზღვრება 7. $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ ალგებრას, სადაც $(+)$ და $(\cdot)$ არის ბინარული ალგებრული ოპერაციები, $(-)$ უნარული ალგებრული ოპერაციაა, ხოლო 1 ნულარული ალგებრული ოპერაციაა, რგოლი ეწოდება, თუ

a) $(X,+,-)$ აბელური ჯგუფია $(+)$ და $(-)$ ოპერაციების მიმართ ნულოვანი 0 ელემენტით;

b) $(X,\cdot)$ მონოიდია $(\cdot)$ ოპერაციის მიმართ ერთეულოვანი 1 ელემენტით;

c) $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$ და $(y+z)\cdot x=(y\cdot x)+(z\cdot x)$;

$(X,+,-)$ აბელურ ჯგუფს, **X** რგოლის ადიციური ჯგუფი ეწოდება.

$(X,\cdot,1)$ ალგებრას **X** რგოლის მულტიპლიკაციური მონოიდი ეწოდება.

X რგოლს ეწოდება კომუტაციური, თუ რგოლში განმარტებული გამრავლების ოპერაცია კომუტაციურია.

ამბობენ **X** რგოლია ნულის გამყოფი ელემენტების გარეშე, თუ ნებისმიერი $x,y \in X$ ელემენტებისათვის $x \neq 0$ და $y \neq 0$ პირობიდან ყოველთვის გამომდინარეობს პირობა $x \cdot y \neq 0$.

კომუტაციურ **X** რგოლს ნულის გამყოფი ელემენტების გარეშე მთელობის არე ეწოდება.

განსაზღვრება 7. ვთქვათ 0 და 1 რგოლის ნულოვანი და ერთეულოვანი ელემენტებია. იმ უმცირეს $n \geq 1$ ნატურალურ რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $n \cdot 1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n} = 0$, რგოლის მახასიათებელი ეწოდება.

თუ ტოლობა $n \cdot 1 = 0$ სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $n = 0$, მაშინ $\mathbf{X}$ -ს ნულმახასიათებლიანი რგოლი ეწოდება.

განსაზღვრება 8. ვთქვათ $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ რგოლია. თუ $\mathbf{X}$ რგოლის ყოველი არანულოვანი $x \in X$ ელემენტისათვის არსებობს შებრუნებული $x^{-1} \in X$ ელემენტი, მაშინ $\mathbf{X}$ რგოლს ტანი ეწოდება.

განსაზღვრება 9. ვთქვათ 0 არის $\mathbf{X} = (X,+,-,\cdot,1)$ ტანის ნულოვანი ელემენტი. თუ $0 \neq 1$, მაშინ კომუტაციურ $\mathbf{X}$ ტანს ველი ეწოდება.

ვთქვათ $\mathbf{X} = (X,+,-,\cdot,1)$ არის რომელიღაც ველი, რომელსაც სკალართა ველი ეწოდება, ხოლო მის ელემენტებს კი - სკალარები ეწოდება.

ახლა ვთქვათ V არაცარიელი სიმრავლეა. $\omega : X \times V \to V$ რომელიღაც ასახვაა $X \times V$ სიმრავლისა V სიმრავლეში. ამ დროს (x,a) ელემენტის $(x \in X, a \in V)$ სახეს ω ასახვის დროს $x \cdot a$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, ე.ი. $\omega((x,a)) = x \cdot a$.

თუ $x \in X$ სკალარი ფიქსირებულია, და ω_x არის ω ასახვის შეზღუდვა $\{x\} \times V$ სიმრავლემდე, მაშინ ω_x ასახვა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც უნარული ოპერაცია V სიმრავლეზე.

განსაზღვრება 10. ალგებრას $\mathbf{V} = (V,+,\{\omega_x \mid x \in X\})$ ეწოდება ვექტორული (წრფივი) სივრცე X ველზე, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

a) $(V,+,-)$ ალგებრა, სადაც $(-)$ ოპერაცია ემთხვევა ω_{-1} $(-1 \in X)$ ოპერაციას, აბელური ჯგუფია;

b) $\omega_{x\cdot y}(a)=\omega_x(\omega_y(a))$ (ე.ი. $(x\cdot y)\cdot a=x\cdot(y\cdot a)$), ყოველი $x,y\in X$ სკალარისათვის და $a\in V$ ელემენტისათვის;

c) $\omega_{x+y}(a)=\omega_x(a)+\omega_y(a)$ (ე.ი. $(x+y)\cdot a=x\cdot a+y\cdot a$), ყოველი $x,y\in X$ სკალარისათვის და $a\in V$ ელემენტისათვის;

d) $\omega_x(a+b)=\omega_x(a)+\omega_x(b)$ (ე.ი. $x\cdot(a+b)=x\cdot a+x\cdot b$), ყოველი $x\in X$ სკალარისათვის და $a,b\in V$ ელემენტებისათვის;

e) $\omega_1(a)=a$ (ე.ი. $1\cdot a=a$), ყოველი $a\in V$ ელემენტისათვის.

$(V,+,-)$ ჯგუფს $\mathbf{V}$ ვექტორული სივრცის ადიციური ჯგუფი ეწოდება. ამ ჯგუფის ნულოვან ელემენტს, რომელსაც $\mathbf{0}$ სიმბოლოთი ალვნიშნავთ, $\mathbf{V}$ ვექტორული სივრცის ნულოვანი ელემენტი ეწოდება. $\mathbf{V}$ ვექტორული სივრცის ელემენტებს ვექტორები ეწოდება, ხოლო V სიმრავლის a და $\omega_{-1}(a)=-a$ ელემენტებს, მოპირდაპირე ვექტორები ეწოდება. და ბოლოს b), c), d) და e) პირობებს $\mathbf{V}$ ვექტორული სივრცის აქსიომები ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ ვქტორული სივრცეში და ველში გამოყენებული ზოგიერთი ოპერაციის სიმბოლო ერთმანეთს ემთხვევა. მათი განსხვავება ხდება იმ ელემენტების მიხედვით რომლებზედაც ისინი მოქმედებენ.

განსაზღვრება 11. ალგებრას $\mathbf{V}=(V,+,\cdot,\{\omega_x \mid x\in X\})$, სადაც $(V,+,\{\omega_x \mid x\in X\})$ ვექტორული სივრცეა $\mathbf{X}$ ველზე, ეწოდება წრფივი ალგებრა, თუ

a) $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ და $c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b$, ყოველი $a,b,c\in V$ ელემენტებისათვის;

b) $\omega_x(a\cdot b)=(\omega_x a)\cdot b=a\cdot(\omega_x b)$ (ე.ი. $x\cdot(a\cdot b)=(x\cdot a)\cdot b=a\cdot(x\cdot b)$), ყოველი $a,b\in V$ და $x\in X$ ელემენტებისათვის.

$(V,+,\{\omega_x \mid x\in X\})$ ვექტორული სივრცის განზომილებას $\mathbf{V}$ ალგებრის რანგი ეწოდება.

განსაზღვრება 12. ისეთ წრფივ ალგებრას, რომლის ყოველ ნულისაგან განსხვავებულ ელემენტს გამრავლების ოპერაციის მიმართ გააჩნია შებრუნებული ელემენტი, ეწოდება ალგებრა გაყოფით.

თეორემა 1. $\mathbf{X}=(X,*)$ ალგებრაა, სადაც $(*)$ ბინარული ალგებრული ოპერაციაა. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები.

a) თუ e' და e'' შესაბამისად არიან მარცხენა და მარჯვენა ნეიტრალური ელემენტები $(*)$ ოპერაციის მიმართ, მაშინ $e'=e''$, ე.ი. $(*)$ ოპერაციის მიმართ ნეიტრალური ელემენტი ცალსახად განისაზღვრება;

b) თუ $0'$ და $0''$ შესაბამისად არიან მარცხენა და მარჯვენა ნულები $(*)$ ოპერაციის მიმართ, მაშინ $0'=0''$, ე.ი. $(*)$ ოპერაციის მიმართ ნულოვანი ელემენტი ცალსახად განისაზღვრება.

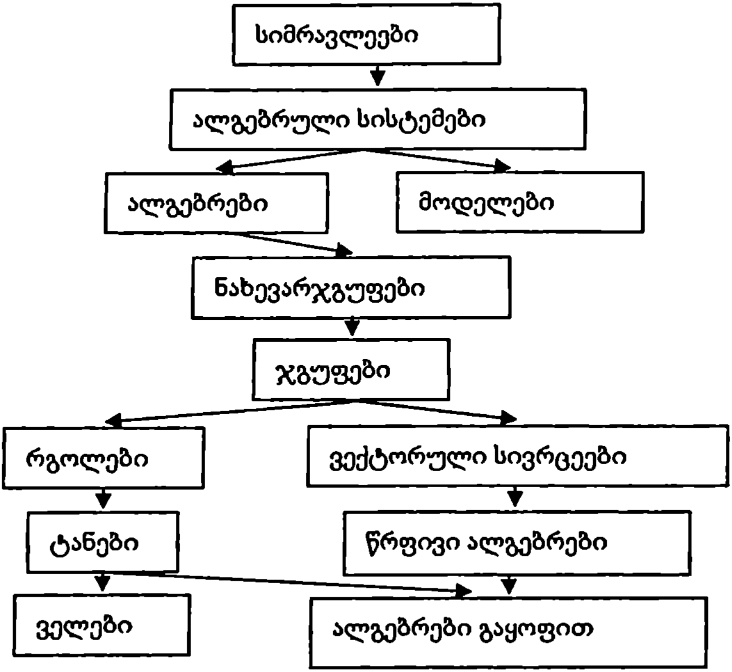
დამტკიცება. ვთქვათ e' და e'' შესაბამისად არიან მარცხენა და მარჯვენა ნეიტრალური ელემენტები $(*)$ ოპერაციის მიმართ. მაშინ $e''=e'*e''=e'$.

ახლა თუ $0'$ და $0''$ შესაბამისად არიან მარცხენა და მარჯვენა ნულები $(*)$ ოპერაციის მიმართ, მაშინ $0'=0'*0''=0''$. □

თეორემა 2. $\mathbf{X}=(X,*,e)$ ალგებრა მონოიდია. თუ x' და x'' შესაბამისად არიან $x\in X$ ელემენტის მარცხენა და მარჯვენა სიმეტრიული ელემენტები $(*)$ ოპერაციის მიმართ, მაშინ $x'=x''$, ე.ი. $(*)$ ოპერაციის მიმართ x ელემენტის სიმეტრიული ელემენტი ცალსახად განისაზღვრება.

დამტკიცება. $\mathbf{X}=(X,*,e)$ ალგებრა მონოიდია. მაშინ $(x'*x)*x''=$ $=e*x''=x''$, $x'*(x*x'')=x'*e=x'$. რადგან $(*)$ ოპერაცია ასოციაციურია. ამიტომაც $(x'*x)*x''=x'*(x*x'')$, ე.ი. $x'=x''$. □

ქვემდებარე დიაგრამაზე მოცემულია ალგებრულ სისტემათა კლასებს შორის დამოკიდებულებები. კერძოდ, კლასებს შორის ისრის ბოლოები მიუთითებენ იმ კლასებს, რომლებიც შედიან ამორჩეული ალგებრულ სისტემათა კლასში.



ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

ა) ვთქვათ, N, Z, Q, R სიმბოლოებით შესაბამისად აღნიშნული არიან ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლე, ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე და ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. $(+), (-), (\cdot)$ და $(:)$ სიმბოლოებით

აღნიშნული არიან შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის ოპერაციები მოცემულ სიმრავლეებზე.

1) შეამოწმეთ ჩამოთვლილი ოპერაციებიდან რომელი ოპერაციებია ალგებრული N, Z, Q, R სიმრავლეებზე.
2) შეამოწმეთ ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელი სიმრავლეები რომელი ოპერაციების მიმართ ქმნიან ალგებრას.
3) შეამოწმეთ ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელი სიმრავლეები რომელი ოპერაციების მიმართ ქმნიან ნახევარჯგუფს.
4) შეამოწმეთ ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელი სიმრავლეები რომელი ოპერაციების მიმართ ქმნიან მონოიდს.
5) შეამოწმეთ ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელი სიმრავლეები რომელი ოპერაციების მიმართ ქმნიან ჯგუფს.
6) შეამოწმეთ ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელი სიმრავლეები რომელი ოპერაციების მიმართ ქმნიან რგოლს.
7) შეამოწმეთ ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელი სიმრავლეები რომელი ოპერაციების მიმართ ქმნიან ტანს.
8) შეამოწმეთ ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელი სიმრავლეები რომელი ოპერაციების მიმართ ქმნიან ველს.

b) შეამოწმეთ ჩამოთვლილი სიმრავლეებიდან რომელი სიმრავლეები $(+),(-),(\cdot)$ ოპერაციების მიმართ ქმნიან ველს:

1) ყველა კენტმნიშვნელიანი რაციონალური რიცხვები;
2) ყველა $x+y\sqrt{2}$ სახის რიცხვები, სადაც $x, y \in R$;
3) ყველა $x+y\sqrt{5}$ სახის რიცხვები, სადაც $x, y \in R$;
4) ყველა $x+y\sqrt[3]{2}$ სახის რიცხვები, სადაც $x, y \in R$;
5) ყველა $x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}$ სახის რიცხვები, სადაც $x, y \in R$;

c) ვთქვათ m ნულისაგან განსხვავებული რომელიღაც ნატურალური რიცხვია.

$$\overline{0}=\{mz \mid z \in Z\},\ \overline{1}=\{mz+1 \mid z \in Z\}, \dots, \overline{m-1}=\{mz+(m-1) \mid z \in Z\}.$$

ახლა ვთქვათ $Z_m=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\dots,\overline{m-1}\}$ და $\overline{i}, \overline{j} \in Z_m$. სიმრავლეში

შემოვიტანოთ ელემენტთა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები შემდეგნაირად: $\overline{i}+\overline{j}=\overline{i+j}$ და $\overline{i}\cdot\overline{j}=\overline{i\cdot j}$. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{Z}_m=\left(Z_m,+,-,\cdot,\overline{1}\right)$ ალგებრა ყოველთვის რგოლია და ველია, როცა m მარტივი რიცხვია. რგოლის მახასიათებელი კი m-ის ტოლია.

d) ვთქვათ $R^n=\left\{\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\mid x_1,x_2,\ldots,x_n\in R\right\}$. $\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$, $\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)\in R^n$ და $x\in R$. R^n სიმრავლეზე განვმარტოთ ბინარული $(+)$ და უნარული ω_x ოპერაციები შემდეგნაირად:

$$\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)+\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)=\left(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n\right),$$

$$\omega_x\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=x\cdot\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\left(x\cdot x_1,x\cdot x_2,\ldots,x\cdot x_n\right).$$

აჩვენეთ, რომ ალგებრა $\mathbf{R}^n=\left(R^n,+,\left\{\omega_x, x\in X\right\}\right)$ ვექტორული სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა R ველზე.

e) ვთქვათ X ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეა. X სიმრავლეზე განვმარტოთ $(\cdot)$ გამრავლების ოპერაცია შემდეგნაირად: $x\cdot y=x$ ყოველი $x,y\in X$ ელემენტებისათვის. აჩვენეთ, რომ ალგებრა $\left(X,\cdot\right)$ ნახევარჯგუფია.

f) აჩვენეთ, რომ $\mathbf{R}=\left(R,*\right)$ ალგებრა ნახევარჯგუფია $(*)$ ოპერაციის მიმართ და იპოვეთ მისი იდემპოტენტური ელემენტები, თუ

1) $a*b=a+b+3$; 2) $a*b=a\cdot\left(1-b\right)+b$; 3) $a*b=a+b-ab$;

4) $a*b=a+b+ab$; 5) $a*b=-a-b+ab+2$; 6) $a*b=-2a-2b+ab+6$;

7) $a*b=2a+2b+2ab+1$, სადაც R ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლეა, ხოლო $(+),(-),(\cdot)$ შესაბამისად შეკრების, გამოკლებისა და გამრავლების ოპერაციებია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე.

g) ვთქვათ K არის ყველა $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix}$ სახის მატრიცების სიმრავლე რაციო-

ნალური a და b ელემენტებით. აჩვენეთ, რომ ალგებრა $\mathrm{K}=(K,+,-,\cdot,e)$, სადაც $(+),(-)$ და $(\cdot)$ მატრიცების შეკრების, მოპირდაპირე ელემენტის აღების და გამრავლების ოპერაციებია, ხოლო $e=\begin{pmatrix}1 0\\0 1\end{pmatrix}$. აჩვენეთ, რომ K ალგებრა ველია, რომელიც შეიცავს ისეთ x ელემენტს, რომ $x^2=-e$.

h) ვთქვათ Z ყველა მთელი რიცხვების სიმრავლეა, ხოლო $(+)$, $(-)$ და $(\cdot)$ შესაბამისად შეკრების, გამოკლების და გამრავლების ოპერაციებია მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე და $x,y\in Z$. აჩვენეთ, რომ $(Z,+_1,-_1,\cdot_1,e)$ ალგებრა რგოლია, თუ

1) $x+_1 y=x+y-2,\ \ x\cdot_1 y=x\cdot y-2\cdot x-2\cdot y+6;$

2) $x+_1 y=x+y-1,\ \ x\cdot_1 y=x\cdot y-x-y+2;$

3) $x+_1 y=x+y+3,\ \ x\cdot_1 y=x\cdot y-3\cdot x-3\cdot y+6;$

4) $x+_1 y=x+y+2,\ \ x\cdot_1 y=x\cdot y+2\cdot x+2\cdot y+2.$

i) ვთქვათ R ყველა ნამდვილი რიცხვების სიმრავლეა, ხოლო $(+)$, $(-)$ და $(.)$ შესაბამისად შეკრების, გამოკლების და გამრავლების ოპერაციებია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე და $x,y\in Z$. აჩვენეთ, რომ $(Z,+_1,-_1,\cdot_1,e)$ ალგებრა ველია, თუ

1) $x+_1 y=x+y-\frac{1}{2},\ \ x\cdot_1 y=x\cdot y-\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot y+\frac{3}{4};$

2) $x+_1 y=x+y-\frac{1}{2},\ \ x\cdot_1 y=\frac{3}{2}x\cdot y-\frac{3}{4}\cdot x-\frac{3}{4}\cdot y+\frac{7}{8};$

3) $x+_1 y=x+y+\frac{1}{2},\ \ x\cdot_1 y=x\cdot y+\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot y-\frac{1}{4}.$

§ 5. რიცხვითი სისტემები

ნატურალურ რიცხვთა სისტემა

განსაზღვრება 1. $\mathrm{N}=(N,+,\cdot,0,1)$ ალგებრას, სადაც N არაცარიელი სიმრავლეა, $(+)$, $(\cdot)$ შესაბამისად შეკრებისა და გამრავლების ბინარული ალგებრული ოპერაციებია, ხოლო 0 და 1 ნულარული ოპერაციებია, ეწოდება ნატურალურ რიცხვთა სისტემა, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

a) $n+1\neq 0$ ყოველი $n\in N$ ელემენტისათვის;

b) თუ $n+1=m+1$, მაშინ $n=m$ ყოველი $n,m\in N$ ელემენტებისათვის;

c) $m+0=m$, ყოველი $m\in N$ ელემენტისათვის;

d) $n+(m+1)=(n+m)+1$, ყოველი $n,m\in N$ ელემენტებისათვის;

e) $n\cdot 0=0$, ყოველი $n\in N$ ელემენტისათვის;

f) $n\cdot(m+1)=n\cdot m+n$, ყოველი $n,m\in N$ ელემენტებისათვის;

g) თუ A არის N სიმრავლის ისეთი ქვესიმრავლე, რომ $0\in A$ და ყოველი n - სათვის პირობიდან $n\in A$ ყოველთვის გამომდინარეობს $n+1\in A$ პირობა, მაშინ $A=N$.

საზოგადოდ $a)$, $b)$, $c)$, $d)$, $e)$, $f)$, $g)$ პირობებს პეანოს აქსიომები ეწოდება. $g)$ აქსიომას კი ინდუქციის აქსიომა ეწოდება.

N სიმრავლის ელემენტებს ნატურალური რიცხვები ეწოდება. 0 - სა და 1 - ს ნატურალურ რიცხვთა N სისტემის ნულოვანი და ერთეულოვანი ელემენტი ეწოდება.

$1+1$, $(1+1)+1$, $((1+1)+1)+1$ და ა.შ. ელემენტების ჩასაწერად შესაბამისად გამოიყენებიან სიმბოლოები 2, 3, 4 და ა.შ. ამგვარად,

$$1+1=2,\ (1+1)+1=3,\ ((1+1)+1)+1=4 \text{ და ა.შ.}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ნატურალურ რიცხვთა სისტემა.

ვთქვათ, რომ $\{\mathrm{I}\}$ ერთელემენტიანი სიმრავლეა. I ელემენტის გა-

მოყენებით შევადგინოთ ყველა შესაძლო სასრული მიმდევრობა. ასეთ მიმდევრობებს საზოგადოდ სიტყვები ეწოდება $\{\mathrm{I}\}$ სიმრავლეზე. სიტყვადაა მიღებული ისეთი მიმდევრობაც, რომელიც მოცემული სიმრავლის არცერთ სიმბოლოს არ შეიცავს. ასეთ სიტყვას ცარიელი სიტყვა ეწოდება.

შემდეგში სიტყვას, რომლის ჩაწერაში მონაწილეობს n რაოდენობის I სიმბოლო აღვნიშნავთ n, ხოლო ცარიელ სიტყვას კი - 0_1 სიმბოლოთი.

განსაზღვრება 2. შევნიშნოთ, რომ $\{\mathrm{I}\}$ სიმრავლეზე n და m სიტყვებს ერთმანეთის ტოლი ეწოდება თუ მათ ჩანაწერში გამოყენებულ I სიმბოლოთა რაოდენობა ერთნაირია.

$\{\mathrm{I}\}$ სიმრავლეზე ყველა სიტყვათა სიმრავლე აღვნიშნოთ N^* სიმბოლოთი. ვთქვათ $n,m \in N^*$. N^* სიმრავლეზე შემოვიტანოთ სიტყვათა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები შემდეგნაირად: კერძოდ n და m სიტყვათა ჯამის ქვეშ იგულისხმება სიტყვა nm და შემდგომში აღინიშნება სიმბოლოთი $n+_1 m$, ე.ი. $nm = n+_1 m$.

n და m სიტყვათა ნამრავლის ქვეშ იგულისხმება $\underbrace{m+_1 m+_1 \cdots +_1 m}_{n}$ სიტყვა და $n \cdot_1 m$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე.ი.

$$n \cdot_1 m = \underbrace{m +_1 m +_1 \cdots +_1 m}_{n}. \qquad \ldots(1)$$

თეორემა 1. $\mathrm{N}^* = \left(N^*, +_1, \cdot_1, 0_1, \mathrm{I}\right)$ ალგებრა ნატურალურ რიცხვთა სისტემას წარმოადგენს.

დამტკიცება. ვთქვათ n ნებისმიერი ელემენტია N^* სიმრავლიდან. მაშინ ცხადია სიტყვა $n\mathrm{I}$ არ არის ცარიელი, ამიტომ $n\mathrm{I} = n +_1 \mathrm{I} \neq 0_1$.

ახლა თუ n და m ისეთი ელემენტებია N^* სიმრავლიდან, რომ $n\mathrm{I} = m\mathrm{I}$. მაშინ ბოლო ტოლობიდან, განსაზღვრება (1)-ის თანახმად, გვექნება $n = m$, ე.ი. $n +_1 \mathrm{I} = m +_1 \mathrm{I}$ პირობიდან ყოველთვის მიიღება

$n = m$ ტოლობა.

განსაზღვრება 1-ის თანახმად ცხადია, რომ $m +_1 0_1 = m$ ყოველი $m \in N^*$ ელემენტისათვის.

ახლა, თუ $n, m \in N^*$, მაშინ $n(m\mathrm{I}) = (nm)\mathrm{I}$. ამიტომაც

$$n +_1 (m +_1 \mathrm{I}) = (n +_1 m) +_1 \mathrm{I}.$$

ვთქვათ n არის N^* ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ

$$n \cdot_1 0_1 = \underbrace{0_1 +_1 0_1 +_1 \cdots +_1 0_1}_{n} = 0_1 .$$

ახლა, თუ $n, m \in N^*$, მაშინ N^* სიმრავლეში გამრავლების ოპერაციის და სიტყვათა ტოლობის განმარტების თანახმად, გვექნება

$$n \cdot_1 (m +_1 \mathrm{I}) = \underbrace{(m +_1 \mathrm{I}) +_1 (m +_1 \mathrm{I}) +_1 \cdots +_1 (m +_1 \mathrm{I})}_{n} =$$

$$= \underbrace{m +_1 m +_1 \cdots +_1 m}_{n} +_1 \underbrace{\mathrm{I} +_1 \mathrm{I} +_1 \cdots +_1 \mathrm{I}}_{n} = (n \cdot_1 m) +_1 n.$$

ვთქვათ A არის N^* სიმრავლის ისეთი ქვესიმრავლე, რომ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

a) $0_1 \in A$ და

b) ყოველი $n -$ სათვის, პირობიდან $n \in A$ ყოველთვის გამომდინარეობს $n\mathrm{I} = n +_1 \mathrm{I} \in A$ პირობა.

$T(n)$ აღვნიშნოთ პრედიკატი "$n \in A$". დაშვების თანახმად $T(0_1)$ პრედიკატი ჭეშმარიტია. მაშინ $b)$ პირობის თანახმად $T(\mathrm{I})$ პრედიკატიც ჭეშმარიტი იქნება. აქედან იგივე $b)$ პირობის თანახმად მიიღება $T(\mathrm{II})$-ის ჭეშმარიტობაც, და ა. შ. $n+1$ ნაბიჯზე ყოველი $n \in N^*$ -სათვის მიიღება $T(n\mathrm{I})$ პრედიკატის ჭეშმარიტობაც. □

თეორემა 2 (მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი). თუ $T(n)$

არის ისეთი ერთადგილიანი პრედიკატი ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეზე, რომლიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

a) $T(0)$ ჭეშმარიტია;

b) თუ იმ პირობიდან, რომ $T(n)$ პრედიკატი ჭეშმარიტია ყოველი $n \in N$ - სათვის, ყოველთვის გამომდინარეობს პირობა, რომ $T(n+1)$ პრედიკატიც ჭეშმარიტია, მაშინ $T(n)$ პრედიკატი ჭეშმარიტი იქნება ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის.

დამტკიცება. ვთქვათ A არის ყველა იმ ნატურალური რიცხვების სიმრავლე, რომელთათვისაც $T(n)$ პრედიკატი ჭეშმარიტია. დაშვების თანახმად $T(0)$ ჭეშმარიტია, ე.ი. $0 \in A$. ახლა თუ ნებისმიერი $n \in N$ რიცხვისათვის $T(n)$ პრედიკატი ჭეშმარიტია, ე.ი. თუ $n \in A$, მაშინ დაშვების თანახმად $T(n+1)$ პრედიკატიც ჭეშმარიტი იქნება, ე.ი. $n+1 \in A$. აქედან, ინდუქციის აქსიომის თანახმად, მივიღებთ $A = N$. ამგვარად $T(n)$ პრედიკატი ჭეშმარიტი იქნება ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის. □

ხშირად ზემოთ დამტკიცებული თეორემის ნაცვლად გამოიყენება მისი ექვივალენტური თეორემები, რომელთაც ჩვენ დაუმტკიცებლად მოვიყვანთ.

თეორემა 3. $T(n)$ არის ერთადგილიანი პრედიკატი ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეზე, რომლიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

a) $T(m)$ ჭეშმარიტია;

b) თუ იმ პირობიდან, რომ $T(n)$ პრედიკატი ჭეშმარიტია ყოველი $n \in N$–სათვის $(n \geq m)$, ყოველთვის გამომდინარეობს პირობა, რომ $T(n+1)$ პრედიკატიც ჭეშმარიტი იქნება, მაშინ $T(n)$ პრედიკატი ჭეშმარიტი იქნება ნებისმიერი ნატურალური $n \geq m$ რიცხვისათვის.

თეორემა 4. $T(n)$ არის ერთადგილიანი პრედიკატი ნატურალურ

რიცხვთა N სიმრავლეზე, რომლიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

a) $T(0)$ ჭეშმარიტია;

b) თუ ყოველი $n \in N$ – სათვის, $T(n)$ პრედიკატის ჭეშმარიტობა გამომდინარეობს იმ დაშვებიდან, რომ $T(m)$ პრედიკატი ჭეშმარიტია ყოველი n-ზე ნაკლები m რიცხვისათვის, მაშინ $T(n)$ პრედიკატი ჭეშმარიტი იქნება ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის.

განსაზღვრება 3. n და m ნატურალური რიცხვების სხვაობა ეწოდება ისეთ ნატურალურ k რიცხვს, რომ $n+k=m$.

განსაზღვრება 4. ვთქვათ $n,m \in N$. იტყვიან, რომ n ნატურალური რიცხვი ნაკლებია m ნატურალურ რიცხვზე და სიმბოლურად ჩაწერენ $n<m$, თუ არსებობს ისეთი ნულისაგან განსხვავებული ნატურალური k რიცხვი, რომ $n+k=m$. ჩანაწერი $n \le m$ ნიშნავს, რომ $n<m$ ან $n=m$.

ახლა დამტკიცების გარეშე მოვიყანოთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ ბინარულ ალგებრულ ოპერაციათა და „$\le$“ ბინარული მიმართების ზოგიერთი თვისებები.

თეორემა 5. ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეზე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები და „$\le$“ მიმართება აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

a) შეკრების ოპერაცია კომუტაციურია;

b) შეკრების ოპერაცია ასოციაციურია;

c) ნებისმიერი n,m და k ნატურალური რიცხვებისათვის $n+k=m+k$ პირობიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $n=m$ ტოლობა;

d) ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის ან $n=0$ ან არსებობს ისეთი ნატურალური m რიცხვი, რომ $n=m+1$;

e) ნებისმიერი n და m ნატურალური რიცხვებისათვის, თუ $n+m=0$, მაშინ $n=m=0$;

f) ნებისმიერი n და m ნატურალური რიცხვებისათვის ან $n=m$ ან $n+k=m$ ან $m+s=n$, რომელიღაც $k,s \in N \setminus \{0\}$;

g) გამრავლების ოპერაცია კომუტაციურია;

h) გამრავლების ოპერაცია ასოციაციურია;

i) ნებისმიერი n, m და k ნატურალური რიცხვებისათვის სამართლიანია $k\cdot(n+m)=k\cdot n+k\cdot m$ ტოლობა.

j) ნებისმიერი n და m ნატურალური რიცხვებისათვის შემდეგი სამი $n=m$, $n<m$ და $m<n$ პირობიდან ყოველთვის სამართლიანია მხოლოდ ერთი.

k) ნებისმიერი n, m და k ნატურალური რიცხვებისათვის, თუ $n\leq m$ მაშინ $n+k\leq m+k$ და $n\cdot k\leq m\cdot k$;

l) ნებისმიერი n, m და k ნატურალური რიცხვებისათვის, თუ $n+k\leq m+k$ ან $n\cdot k\leq m\cdot k$ მაშინ $n\leq m$;

m) ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლე სავსებით დალაგებული სიმრავლეა „$\leq$" დალაგების მიმართ.

n) თუ m და n ისეთი ნატურალური რიცხვებია, რომ $m\cdot n=1$, მაშინ $m=n=1$;

მთელ რიცხვთა რგოლი

განსაზღვრება 5. $\mathrm{Z}=(Z,+,-)$ ჯგუფს მთელ რიცხვთა ადიციური ჯგუფი ეწოდება, თუ იგი აკმაყოფილებს პირობებს:

a) $N\subset Z$, და Z სიმრავლეში შეკრების ოპერაცია წარმოადგენს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში განმარტებული შეკრების ოპერაციის გაგრძელებას;

b) Z სიმრავლეში გამოკლების ოპერაცია ალგებრულია (ყოველთვის შესრულებადია) და Z სიმრავლის ყოველი ელემენტი ორი ნატურალური რიცხვის სხვაობის სახით წარმოიდგინება.

განსაზღვრება 6. ვთქვათ $a=m-n$ და $b=p-q$ არის Z სიმრავლის ნებისმიერი ორი ელემენტი. Z სიმრავლეზე გამრავლების ოპერაცია შემდეგნაირად განვმარტოთ

$$a\cdot b=(m-n)\cdot(p-q)=(mp+nq)-(mq+np).$$

მტკიცდება, რომ Z სიმრავლეზე a და b ელემენტების ნამრავლი ცალსახადაა განსაზღვრული.

განსაზღვრება 7. $\mathrm{Z}=(Z,+,-,\cdot,1)$ რგოლს უწოდებენ მთელ რიცხვთა რგოლს, თუ მოცემული რგოლის ადიციური ჯგუფი მთელ რიცხვთა

ადიციურ $(Z,+,-)$ ჯგუფს ემთხვევა, ხოლო რგოლში განმარტებული გამრავლების ოპერაცია კომუტაციურია და ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში განმარტებული გამრავლების ოპერაციის გაგრძელებას წარმოადგენს.

განსაზღვრება 8. ვთქვათ $a,b \in Z$. იტყვიან, რომ a მთელი რიცხვი ნაკლებია b მთელ რიცხვზე და სიმბოლურად ჩაწერენ $a<b$, თუ არსებობს ისეთი ნულისაგან განსხვავებული ნატურალური k რიცხვი, რომ $a+k=b$. ჩანაწერი $a \le b$ ნიშნავს, რომ $a<b$ ან $a=b$.

განსაზღვრება 9. ვთქვათ $a,b \in Z$. იტყვიან, რომ a იყოფა b-ზე, ან b გამყოფია a-ს და სიმბოლურად $b|a$ სახით ჩაწერენ, თუ $a=b\cdot q$ რომელიღაც $q \in Z$ მთელი რიცხვისათვის.

ვთქვათ $a,b,c,d_1,d_2 \in Z$. იტყვიან, რომ c რიცხვი არის a და b რიცხვების საერთო გამყოფი, თუ $a=c\cdot d_1$ და $b=c\cdot d_2$.

a და b რიცხვების ისეთ საერთო გამყოფს, რომელიც იყოფა მოცემული რიცხვების ნებისმიერ საერთო გამყოფზე, a და b რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი ეწოდება და (a,b) სიმბოლოთი აღინიშნება.

მთელ რიცხვთა გაყოფადობის შემდეგ პროცესს:

$$\begin{array}{ll}
a=b\cdot q_0+r_0, & b>r_0, \\
b=r_0\cdot q_1+r_1, & r_0>r_1, \\
r_0=r_1\cdot q_2+r_2, & r_1>r_2, \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\
r_{k-2}=r_{k-1}\cdot q_k+r_k, & r_{k-1}>r_k, \\
r_{k-1}=r_k\cdot q_{k+1}+0, &
\end{array}$$

a და b რიცხვების ევკლიდეს ალგორითმი ეწოდება.

იტყვიან, რომ c არის a და b რიცხვების საერთო ჯერადი, თუ $c=a\cdot d_1$ და $c=b\cdot d_2$.

a და b რიცხვების ისეთ საერთო ჯერადს, რომელზეც იყოფა მოცემული რიცხვების ნებისმიერი საერთო ჯერადი, a და b რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი ეწოდება და $[a,b]$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ახლა დამტკიცების გარეშე მოვიყანოთ მთელ რიცხვთა რგოლზე „$\le$" ბინარული მიმართებისა და ელემენტთა გაყოფადობის ზოგიერთი თვისებები.

თეორემა 6. მთელ რიცხვთა რგოლზე „$\le$" მიმართება და ელემენტთა გაყოფადობა აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

a) ნებისმიერი a და b მთელი რიცხვებისათვის შემდეგი სამი $a=b$, $a<b$ და $b<a$ პირობიდან ყოველთვის სამართლიანია მხოლოდ ერთი.

b) ნებისმიერი a მთელი რიცხვისათვის შემდეგი სამი $a<0$, $a=0$, და $0<a$ პირობიდან ყოველთვის სამართლიანია მხოლოდ ერთი.

c) ნებისმიერი a,b და c მთელი რიცხვებისათვის, თუ $a \le b$ მაშინ $a+c \le b+c$ და $a \cdot c \le b \cdot c$, როცა $c \ge 0$;

d) ნებისმიერი a და $b>0$ მთელი რიცხვებისათვის მოიძებნება მთელ რიცხვთა ისეთი ერთადერთი q და r წყვილი, რომ $a=b\cdot q+r$ და $0 \le r < b$;

e) a და b მთელი რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი ევკლიდეს ალგორითმში ბოლო ნულისაგან განსხვავებული ნაშთის ტოლია;

f) თუ a და b რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფია d რიცხვი, მაშინ ყოველთვის მოიძებნება ისეთი მთელი u და v რიცხვეში, რომ $a\cdot u+b\cdot v=d$;

g) $[a,b]=\dfrac{a\cdot b}{(a,b)}$;

h) თუ a,b,c,d,m და n ნებისმიერი მთელი რიცხვებია, მაშინ:

1) $a \mid a$;

2) $a \mid 0$;

3) თუ $0 \mid a$, მაშინ $a=0$;

4) $\pm 1 \mid a$;

5) თუ $a \mid 1$, მაშინ $a=\pm 1$;

6) თუ $a \mid b$ და $b \mid a$, მაშინ $a=\pm b$;

7) თუ $a \mid b$ და $b \mid c$, მაშინ $a \mid c$, ე.ი. გაყოფადობის მიმართება ტრანზიტულია;

8) თუ $c\,|\,a$, მაშინ $c\,|\,a\cdot b$;

9) თუ $c\,|\,a$ და $c\,|\,b$, მაშინ $c\,|\,(a\pm b)$;

10) თუ $a\,|\,b$, მაშინ $a\cdot c\,|\,b\cdot c$;

11) თუ $c\neq 0$, მაშინ $a\cdot c\,|\,b\cdot c$ გამომდინარეობს $a\,|\,b$ პირობა;

12) თუ $a\,|\,c$ და $b\,|\,d$, მაშინ $a\cdot b\,|\,b\cdot d$;

13) თუ $a\,|\,b$ და $a\,|\,c$, მაშინ $a\,|\,(m\cdot b\pm n\cdot c)$.

შევნიშნოთ, რომ ყოველი a მთელი რიცხვი იყოფა ± 1 და $\pm a$. a რიცხვის ასეთ გამყოფებს ტრივიალური გამყოფები ეწოდება.

$0-$საგან და $\pm 1-$საგან განსხვავებულ მთელ რიცხვს, რომლის ყოველი გამყოფი ტრივიალურია, მარტივი რიცხვი ეწოდება. თუ ნულისაგან განსხვავებულ მთელ რიცხვს გარდა ტრივიალური გამყოფებისა გააჩნია სხვა გამყოფიც, მას შედგენილი რიცხვი ეწოდება.

მთელი მარტივი რიცხვებია:

$$\pm 2,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 7,\ \pm 11,\ \pm 13,\ \pm 17,\ \pm 19,\ldots.$$

მთელი შედგენილი რიცხვებია:

$$\pm 4,\ \pm 6,\ \pm 8,\ \pm 9,\ \pm 10,\ldots.$$

თეორემა 7. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა;

b) $0-$სა და ± 1 რიცხვებისაგან განსხვავებული ნებისმიერი მთელი a რიცხვისათვის არსებობენ ისეთი წყვილ წყვილად ერთმანეთისაგან განსხვავებული მარტივი $p_1, p_2, \ldots, p_n$ და ნატურალური $k_1, k_2, \ldots, k_n$ რიცხვები, რომ $a = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}$. ($a$ რიცხვის ასეთნაირ წარმოდგენას მისი მარტივ მამრავლებად დაშლა ეწოდება).

რაციონალურ რიცხვთა ველი

განსაზღვრება 10. ვთქვათ, რომ $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ ველია. X სიმრავლის არაცარიელ Y ქვესიმრავლეს ეწოდება $\mathbf{X}$ ველის ქვეველი, თუ $\mathbf{Y}=(Y,+,-,\cdot,1)$ ალგებრა ველია იმ ოპერაციების მიმართ რაც $\mathbf{X}$ ველშია განმარტებული.

განსაზღვრება 11. $\mathbf{F}$ ველს $\mathbf{K}$ მთელობის არის განაყოფთა ველი ეწოდება, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

a) K არის F ველის ქვეველი;

b) F ველის ყოველი x ელემენტისათვის K მთელობის არეში მოიძებნებიან ისეთი a და b ელემენტები, რომ $x = a \cdot b^{-1}$.

განსაზღვრება 12. მთელ რიცხვთა რგოლის განაყოფთა ველს რაციონალურ რიცხვთა ველი ეწოდება.

რაციონალურ რიცხვთა ველს $\mathrm{Q} = (Q,+,-,\cdot,1)$ შემდეგში Q სიმბოლოთი აღვნიშნავთ; Q სიმრავლეს რაცინალურ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება, ხოლო მის ელემენტებს რაცინალური რიცხვები ეწოდება. ხშირად $x = a \cdot b^{-1}$ ელემენტს სიმბოლურად $x = \dfrac{a}{b}$ სახითაც ჩავწერთ.

განსაზღვრება 13. ვთქვათ $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \in Q$. იტყვიან, რომ $\dfrac{a}{b}$ რაციონალური რიცხვი ნაკლებია $\dfrac{c}{d}$ რაციონალურ რიცხვზე და სიმბოლურად ჩაწერენ $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$, თუ $a \cdot d < b \cdot c$. ჩანაწერი $\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{c}{d}$ ნიშნავს, რომ $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ ან $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

ადვილად შემოწმდება, რომ რაცინალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული „ $\leq$ " მიმართება დალაგების მიმართებაა.

ახლა დამტკიცების გარეშე მოვიყვანოთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ ბინარულ ალგებრულ ოპერაციათა და „ $\leq$ " ბინარული მიმართების ზოგიერთი თვისებები.

თეორემა 8. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეზე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები და „ $\leq$ " მიმართება აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

a) თუ a, b ისეთი ელემენტებია Q სიმრავლიდან, რომ $a \cdot b = 1$, მაშინ $a \neq 0$ და $b = a^{-1}$;

b) თუ a, b, c ისეთი ელემენტებია Q სიმრავლიდან, რომ $a \cdot c = b \cdot c$ და $c \neq 0$, მაშინ $a = b$;

c) თუ a, b ისეთი ელემენტებია Q სიმრავლიდან, რომ $a \cdot b = 0$, მაშინ $a = 0$ ან $b = 0$;

d) თუ a, b ისეთი ელემენტებია Q სიმრავლიდან,რომ $a \neq 0$ და $b \neq 0$, მაშინ $a \cdot b \neq 0$;

e) ვთქვათ $a, b, c, d \in Q$. მაშინ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a \cdot d = b \cdot c$ და $b \neq 0$ და $a \neq 0$;

f) ვთქვათ $a, b, c, d \in Q$. მაშინ $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$;

g) ვთქვათ $a, b, c, d \in Q$. მაშინ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$;

h) ვთქვათ $a, b \in Q$. მაშინ $\frac{a}{b} + \frac{(-a)}{b} = 0$ და $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b}$;

i) თუ a, b ისეთი ელემენტებია Q სიმრავლიდან,რომ $a \neq 0$ და $b \neq 0$,

მაშინ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$;

j) ვთქვათ $a, b, c \in Q$ და $c \neq 0$, მაშინ $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$;

k) ვთქვათ $a, b, c \in Q$. თუ $a < b$ და $b < c$, მაშინ $a < c$;

l) ნებისმიერი a და b რაციონალური რიცხვებისათვის შემდეგი სამი $a = b$, $a < b$ და $b < a$ პირობიდან ყოველთვის სამართლიანია მხოლოდ ერთი.

m) ნებისმიერი a, b და c რაციონალური რიცხვებისათვის, თუ $a < b$ მაშინ $a + c < b + c$ და $a \cdot c < b \cdot c$, როცა $c > 0$;

ნამდვილ რიცხვთა სისტემა

განსაზღვრება 14. $\mathrm{X} = (X, <)$ ალგებრულ სისტემას უწოდებენ დალაგებულს, თუ X სიმრავლის ელემენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

a) ნებისმიერი $a,b,c \in X$ ელემენტებისათვის $a<b$ და $b<c$ პირობებიდან ყოველთვის გამომდინარეობს $a<c$ პირობა;

b) X სიმრავლის ნებისმიერი a და b ელემენტებისათვის შემდეგი სამი $a=b$, $a<b$ და $b<a$ პირობიდან სრულდება მხოლოდ ერთი;

განსაზღვრება 15. $\mathrm{F}=(F,+,-,\cdot,1,<)$ ალგებრულ სისტემას უწოდებენ დალაგებულ ველს, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

a) $(F,+,-,\cdot,1)$ ალგებრა ველია;

b) $(F,<)$ ალგებრული სისტემა დალაგებული სიმრავლეა;

c) ნებისმიერი $a,b,c \in F$ ელემენტებისათვის, თუ $a<b$, მაშინ $a+c<b+c$ (შეკრების ოპერაციის მონოტონურობა);

d) ნებისმიერი $a,b,c \in F$ ელემენტებისათვის, თუ $a<b$ და $0<c$, მაშინ $a \cdot c<b \cdot c$ (გამრავლების ოპერაციის მონოტონურობა) .

თუ დალაგებული F ველის a ელემენტი აკმაყოფილებს $0<a$ პირობას, მაშინ მას დადებითი ელემენტი ეწოდება.

განსაზღვრება 16. დალაგებულ F ველის a ელემენტის $|a|$ აბსოლუტური მნიშვნელობა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$|a|=a \text{ თუ } 0<a \text{ და } |a|=-a, \text{ თუ } 0<-a.$$

განსაზღვრება 17. დალაგებულ F ველს ეწოდება არქიმედისეულად დალაგებული, თუ F ველის ნებისმიერი დადებითი a და b ელემენტებისათვის ყოველთვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური n რიცხვი, რომ $na=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n}>b$.

ვთქვათ $a_0,a_1,a_2,\ldots$ არის დალაგებული F ველის ელემენტთა რომელიღაც უსასრულო მიმდევრობა.

განსაზღვრება 18. დალაგებული F ველის a ელემენტს ეწოდება $a_0,a_1,a_2,\ldots$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ ნებისმიერი ε დადებითი ელემენტისათის მოიძებნება ისეთი ნატურალური n_ε რიცხვი, რომ როცა

$k \geq n_\varepsilon$, მაშინ $|a_k - a| < \varepsilon$. თუ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ მიმდევრობას გააჩნია ზღვარი, მაშინ მას კრებადი ეწოდება.

განსაზღვრება 19. დალაგებული $\mathbf{F}$ ველის ელემენტთა $a_0, a_1, a_2, \ldots$ მიმდევრობას ეწოდება ფუნდამენტალური, თუ ნებისმიერი ε დადებითი ელემენტისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური n_ε რიცხვი, რომ როცა $k, n > n_\varepsilon$, მაშინ $|a_k - a_n| < \varepsilon$.

განსაზღვრება 20. დალაგებულ $\mathbf{F}$ ველს ეწოდება სრული, თუ $\mathbf{F}$ ველის ელემენტთა ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა კრებადია ისევ $\mathbf{F}$ ველში.

განსაზღვრება 21. არქიმედისეულად დალაგებულ სრულ ველს ნამდვილ რიცხვთა სისტემა ეწოდება.

შემდგომში $\mathbf{R} = (R, +, -, \cdot, 1, <)$ სისტემას და $(R, +, -, \cdot, 1)$ ალგებრას შესაბამისად ნამდვილ რიცხვთა სისტემა და ნამდვილ რიცხვთა ველი ეწოდებათ; R სიმრავლეს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება, ხოლო მის ელემენტებს კი ნამდვილი რიცხვები ეწოდება.

თეორემა 9. ვთქვათ $\mathbf{R} = (R, +, -, \cdot, 1, <)$ ნამდვილ რიცხვთა სისტემაა და a, b, c, d არის R სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) $a < b$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $0 < b - a$;

b) ნებისმიერი $a \in R$ ელემენტისათვის შემდეგი სამი $a < 0$, $a = 0$ და $0 < a$ პირობიდან სამართლიანია მხოლოდ ერთი;

c) თუ $0 < a$ და $0 < b$, მაშინ $0 < a + b$ და $0 < a \cdot b$;

d) თუ $a < b$ და $c < d$, მაშინ $a + c < b + d$;

e) თუ $a < b$ და $0 < c$, მაშინ $a \cdot c < b \cdot c$;

f) თუ $a \neq 0$, მაშინ $0 < a^2$;

g) $0 < 1$ და $0 < n \cdot 1$ ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის;

h) ნებისმიერი a და $0 < b$ ნამდვილი რიცხვებისათვის მოიძებნება ნამდვილ რიცხვთა მხოლოდ ერთი ისეთი q და r წყვილი, რომ $a = b \cdot q + r$ და $0 \leq r < b$;

i) ყოველი ნამდვილი a რიცხვისათვის და ნატურალური n რიცხვისათვის არსებობს ერთადერთი დადებითი ნამდვილი c რიცხვი, რომ $c^n = a$ (ამ ერთადერთ დადებით c რიცხვს $n-$ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვი ეწოდება a რიცხვიდან);

j) $|a| = |-a|$;

k) $0 \le |a| \pm a$;

l) $|a+b| \le |a| + |b|$;

M) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

n) $|b| \le a$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $-a \le b \le a$.

კომპლექსურ რიცხვთა სისტემა

განსაზღვრება 22. ვთქვათ $\mathrm{F} = (F, +, -, \cdot, 1)$ ისეთი ველია, რომლის ყოველი $a \in F$ ელემენტისათვის სრულდება $a^2 \ne 1$ პირობა. K ველს F ველის კომპლექსური გაფართოება ეწოდება, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

a) F არის K ველის ქვეველი;

b) K ველში არსებობს ისეთი i ელემენტი, რომ $i^2 = -1$;

c) K ველის ყოველი z ელემენტისათვის არსებობენ ისეთი ცალსახად განსაზღვრული $a, b \in F$ ელემენტები, რომ $z = a + bi$.

განსაზღვრება 23. ნამდვილ რიცხვთა $\mathrm{R} = (R, +, -, \cdot, 1)$ ველის კომპლექსურ გაფართოებას კომპლექსურ რიცხვთა ველი ეწოდება.

შემდგომში კომპლექსურ რიცხვთა ველს $\mathrm{C} = (C, +, -, \cdot, 1)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. C-ს კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება, ხოლო C სიმრავლის ელემენტებს კომპლექსური რიცხვები ეწოდება.

თუ $z = a + bi,\ u = c + di\ \ (a, b, c, d \in R)$ არის C სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები, მაშინ C კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები შემდეგნაირად განიმარტებიან:

$$z + u = (a + c) + (b + d)i, \quad z \cdot u = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i.$$

განსაზღვრება 24. კომპლექსურ რიცხვთა ველის ნებისმიერ ქვეველს რიცხვითი ველი ეწოდება.

განსაზღვრება 25. ყოველ კომპლექსურ $z=a+bi\in C$ რიცხვს დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში შევუსაბამოთ $M(a,b)$ წერტილი. M წერტილს $a+bi$ კომპლექსური რიცხვის გეომეტრიულ წარმოდგენას უწოდებენ.

$z=a-bi$ კომპლექსურ რიცხვს და $\sqrt{a^2+b^2}$ რიცხვიდან არითმეტიკულ ფესვს შესაბამისად z კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული და z კომპლექსური რიცხვის მოდული ეწოდება და $\overline{z}$ და $|z|$ სიმბოლოებით აღინიშნება.

თეორემა 10. ვთქვათ $\mathrm{C}=(C,+,-,\cdot,1)$ კომპლექსურ რიცხვთა ველია $z=a+bi$, $u=c+di$ $(a,b,c,d\in R)$ არის C სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) $\overline{z+u}=\overline{z}+\overline{u}$;

b) $\overline{(-z)}=-\overline{z}$;

c) $\overline{z\cdot u}=\overline{z}\cdot\overline{u}$;

d) $\overline{(\overline{z})}=z$;

e) $z=\overline{z}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $z\in R$;

f) $z\cdot\overline{z}=a^2+b^2$;

g) $|z|^2=z\cdot\overline{z}$;

h) $|z|=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $z=0$;

i) $|z\cdot u|=|z|\cdot|u|$;

j) როცა $z\neq 0$, მაშინ $|z^{-1}|=|z|^{-1}$;

k) $|z+u|\leq|z|+|u|$;

l) $|z|-|u|\leq|z+u|$;

m) $\left||z|-|u|\right| \le |z+u|$.

განსაზღვრება 26. კომპლექსური $z = a + bi$ რიცხვის წარმოდგენას $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ სახით, სადაც r და φ ნამდვილი რიცხვებია და $0 \le r$, მისი ტრიგონომეტრიული ფორმით წარმოდგენა ეწოდება.

φ ნამდვილ რიცხვს კომპლექსური z რიცხვის არგუმენტი ეწოდება და $\arg z$ – ით აღინიშნება, ე.ი. $\varphi = \arg z$; r რიცხვს კი კომპლექსური z რიცხვის მოდული ეწოდება და $|z|$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე.ი. $r = |z|$.

თეორემა 11. ნებისმიერი კომპლექსური $z = a + bi$ რიცხვისათვის C სიმრავლიდან ყოველთვის მოიძებნება ნამდვილ რიცხვთა ისეთი r, φ წყვილი, რომ $0 < r$, $0 \le \varphi < 2\pi$ და $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

შევნიშნოთ, რომ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, ხოლო $\varphi = arctg\dfrac{b}{a}$.

თეორემა 12. ვთქვათ $\mathrm{C} = (C, +, -, \cdot, 1)$ კომპლექსურ რიცხვთა ველია $z = r_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ და $u = r_2(\cos\psi + i\sin\psi)$ არიან C სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტები. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) $z \cdot u = (r_1 \cdot r_2) \cdot (\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$;

b) $z^n = r_1^n \cdot (\cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi))$ (მუავრის ფორმულა);

c) $\dfrac{z}{u} \cdot = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$;

d) თუ ω_k აღნიშნავს ერთ-ერთ ფესვს $\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i\sin 0}$ -დან, მაშინ

$$\omega_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \text{ სადაც } k = 0, 1, \ldots, n-1;$$

e) თუ u_k აღნიშნავს ერთ-ერთ ფესვს $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$ -დან, მაშინ

$$u_k=(z)\cdot\left(\cos\frac{2\pi k+\varphi}{n}+i\sin\frac{2\pi k+\varphi}{n}\right),\ (k=0,1,\dots,n-1).$$

$\sqrt[n]{1}$ -ის ისეთ ω_k ფესვს, რომლის $k-$ური ხარისხები $(k=0,1,\dots,n-1)$ იძლევა $\sqrt[n]{1}$ -დან ყველა ფესვის მნიშვნელობას, პირველადი ფესვი ეწოდება.

მტკიცდება, რომ ω_k წარმოადგენს პირველად ფესვს მხოლოდ მაშინ, როცა k და n რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი $1-$ის ტოლია.

კვატერნიონთა ტანი

განსაზღვრება 27. ვთქვათ K ოთხგანზომილებიანი ვექტორული სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა R ველზე და $1,i,j,k$ მისი ბაზისია. K ვექტორულ სივრცეში ბაზისური ელემენტების გამრავლების ოპერაცია შემდეგნაირად განვმარტოთ:

	1	i	j	k
1	-1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

თუ $\alpha=a+bi+cj+dk$ და $\beta=a_1+b_1i+c_1j+d_1k$ $(a,b,c,d,a_1,b_1,c_1,d_1\in R)$ ორი ელემენტია K ვექტორული სივრციდან, მაშინ მათი ნამრავლი განისაზღვრება ტოლობით

$$\alpha\cdot\beta=(aa_1-bb_1-cc_1-dd_1)+(ab_1+ba_1+cd_1-dc_1)i+$$
$$+(ac_1+a_1c+db_1-bd_1)j+(ad_1+a_1d+bc_1-cb_1)k.$$

შემოწმდება, რომ K ვექტორული სივრცე მასში განმარტებული ოპერაციების მიმართ ქმნის წრივ ალგებრას, რომელსაც კვატერნიონთა ალგებრა ეწოდება. მოცემული ალგებრის ელემენტებს კვატერნიონები ეწოდება.

ვთქვათ $\alpha = a + bi + cj + dk$ არის K წრფივი ალგებრის რომელიღაც კვატერნიონი. მაშინ $\overline{\alpha} = a - bi - cj - dk$ კვატერნიონს α კვატერნიონის შეუღლებული კვატერნიონი ეწოდება.

თეორემა 13. კვატერნიონთა K ალგებრისათვის სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) კვატერნიონთა გამრავლების ოპერაცია არაკომუტაციურია;

b) თუ $\alpha = a + bi + cj + dk$ არის ალგებრის კვატერნიონი, მაშინ

$$\alpha \cdot \overline{\alpha} = \overline{\alpha} \cdot \alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2;$$

c) კვატერნიონთა K ალგებრა ტანია.

თეორემა 14. (ფრობენიუსი) არსებობენ მხოლოდ ერთრანგიანი, ორრანგიანი და ოთხრანგიანი ალგებრები გაყოფით.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

a) მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით დაამტკიცეთ:

1) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$;

3) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

4) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

5) აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის
$24 \mid 5^{2n} - 1$; $9 \mid 4^n + 6n - 1$; $27 \mid 10^{3n} - 1$; $8 \mid 3^{2n} + 5$;

6) თუ X ისეთი სიმრავლეა, რომ $|X| = n$, მაშინ $|B(X)| = 2^n$;

7) თუ X და Y ისეთი სიმრავლეებია, რომ $|X| = n$ და $|Y| = m$, მაშინ X სიმრავლის Y სიმრავლეში ყველა შესაძლო ასახვათა რიცხვი m^n −ის ტოლია;

8) თუ X და Y ისეთი სიმრავლეებია, რომ $|X|=n$ და $|Y|=m$, მაშინ X სიმრავლის Y სიმრავლეში ყველა შესაძლო ინექციათა რიცხვი $n\cdot(n-1)\cdots(n-m+1)-$ის ტოლია.

b) დაამტკიცეთ, რომ

1) $3|n^3-n$;

2) $5|n^5-n$;

3) $7|n^7-n$;

4) $6|n(n^2+5)$;

5) $30|n^5-n$.

c) აჩვენეთ, რომ

1) $x^2=2$ განტოლებას რაციონალურ რიცხვთა ველში არ აქვს ამონახსენი;

2) $x^2=a$ განტოლებას, სადაც a ნებისმიერი დადებითი ნამდვილი რიცხვია, ნამდვილ რიცხვთა ველში ყოველთვის აქვს ამონახსენი;

3) $x^2+1=0$ განტოლებას ნამდვილ რიცხვთა ველში არ აქვს ამონახსენი.

d) ვთქვათ R^+ ყველა დადებითი ნამდვილი რიცხვების სიმრავლეა. აჩვენეთ, რომ ალგებრა $(R^+,\cdot,^{-1})$, სადაც $(\cdot)$ არის გამრავლების ოპერაცია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში, ხოლო $(^{-1})$, მოცემულ ელემენტზე შებრუნებული ელემენტის შეთანადების ოპერაციაა, ჯგუფია.

e) იპოვეთ კომპლექსურ 1, i, $1+i$, $1-i$, $-1-i$, $1+i\sqrt{2}$ და $1+i\sqrt{3}$ რიცხვთა გეომეტრიული წარმოდგენა.

f) იპოვეთ სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებსაც გამოსახავენ კომპლექსური $|z|=a$, $|z|<a$, $|z-1|=a$ და $|z-1|<a$ რიცხვები.

g) ამოხსენით განტოლებები:

1) $(1-i)\cdot\overline{z}-3i\cdot z=1-i$;

2) $z\cdot\overline{z}-2\overline{z}=1-2i$;

3) $z\cdot\overline{z}+3(z-\overline{z})=4+3i$.

h) ამოხსენით განტოლებათა სისტემები:

1) $\begin{cases} ix+(1+i)y=3-i, \\ (1-i)x-(6-i)y=4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (1+i)x+(1-i)y=1+i, \\ (1-i)x-(1+i)y=1+3i; \end{cases}$

3) $\begin{cases} ix+(1+i)y=2+2i, \\ 2ix-(3+2i)y=5+3i; \end{cases}$

4) $\begin{cases} (1-i)x-3iy=-i, \\ 2x-(3+3i)y=3-i. \end{cases}$

i) ამოხსენით განტოლებები კომპლექსურ რიცხვთა ველში:

1) $z^2+5z+9=0$;

2) $z^3+1=0$;

3) $z^4+1=0$.

j) ვთქვათ K არის ყველა $m+ni$ სახის კომპლექსური რიცხვების სიმრავლე მთელი m და n რიცხვებით. აჩვენეთ, რომ $\mathrm{K}=(K,+,-,\cdot,1)$ ალგებრა, სადაც $(+),(\cdot),(-)$ კომპლექსურ რიცხვთა შეკრების, გამრავლების და მოცემულ ელემენტზე მოპირდაპირე ელემენტის შეთანადების ოპერაციებია, წარმოადგენს მთელობის არეს.

k) წარმოადგინეთ ტრიგონომეტრიულ ფორმით კომპლექსური 1, i, -1, $-i$, $1+i$ და $1-i$ რიცხვები.

l) იპოვეთ სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელებსაც გამოსახავენ კომპლექსური $\arg z=0$, $\arg z=\frac{\pi}{3}$, $\arg z=\pi$ და $\arg z=\frac{\pi}{2}$ რიცხვები.

m) იპოვეთ $\sqrt[3]{1}$ და $\sqrt[5]{1}$ რიცხვებიდან ყველა ფესვი და პირველადი ფესვები.

n) იპოვეთ ფესვის ყველა მნიშვნელობა:

1) $\sqrt{i}$; 2) $\sqrt{-2i}$; 3) $\sqrt[4]{i}$.

o) ამოხსენით განტოლება $x^6+64i=0$.

p) გამოთვალეთ გამოსახულება:

1) $(1+i)^{20}$;

2) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{10}$.

q) დაამტკიცეთ, რომ თუ $\alpha=a+bi+cj+dk$, მაშინ

$$\bar{\alpha}\cdot\alpha=\alpha\cdot\bar{\alpha}=a^2+b^2+c^2+d^2.$$

r) გაამარტივეთ გამოსახულება:

1) $\dfrac{2+3i+4j+5k}{1+3i+j+2k}$;

2) $\dfrac{1+3i+j+2k}{2+3i+4j+5k}$;

3) $\dfrac{1+3i+2k}{2+4j+5k}$

s) კვატერნიონთა ტანში ამოხსენით განტოლებები $\alpha x=\beta$ და $y\alpha=\beta$, თუ

1) $\alpha=2+3i+4j+5k$ და $\beta=1+3i+j+2k$;

2) $\alpha=1-i+2j+k$ და $\beta=-1+2i-2j+k$;

3) $\alpha=2+i+j+3k$ და $\beta=1+i+j+k$.

§ 6. მატრიცები

ვთქვათ X არაცარიელი სიმრავლეა.

განსაზღვრება 1. მართკუთხოვან ცხრილს

$$A=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}=\left(x_{ij}\right), \qquad \dots (1)$$

სადაც $x_{ij}\in X \quad \left(i=1,2,\dots m;\ j=1,2,\dots,n\right)$, ეწოდება $\left(m\times n\right)-$განზომილებიანი მატრიცა X სიმრავლეზე. x_{ij} ელემენტებს კი - A მატრიცის ელემენტები ეწოდება.

$x_{i1},x_{i2},\ \dots,x_{in}\ \left(i=1,2,..m\right)$ ელემენტთა სიმრავლეს A მატრიცის $i-$ური სტრიქონი ეწოდება, ხოლო $x_{1j},x_{2j}\ ,\dots,x_{mj}\ \left(j=1,2,\dots,n\right)$ ელემენტთა სიმრავლეს A მატრიცის $j-$ური სვეტი ეწოდება.

მატრიცას, რომელიც მიიღება A მატრიცისაგან მისი $i_1,i_2,\dots,i_k$ $\left(k<m\right)$ სტრიქონებისა და $j_1,j_2,\dots,j_s$ $\left(j<n\right)$ სვეტების ამოღებით, A მატრიცის ქვემატრიცა ეწოდება. A მატრიცის $x_{11},x_{22},\dots,x_{ss}$ ელემენტებს A მატრიცის მთავარი დიაგონალის ელემენტები ეწოდება.

X სიმრავლეზე განსაზღვრულ ორ ერთნაირგანზომილებიან A და

$$B=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{m1} & y_{m2} & \dots & y_{mn} \end{pmatrix}$$

მატრიცებს ეწოდება ერთმანეთის ტოლი, თუ $x_{ij}=y_{ij}$, სადაც $i=1,2,..m$ და $j=1,2,\dots,n$.

თუ A მატრიცისათვის სრულდება პირობა $m=n$, მაშინ A მატრიცას $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცა ეწოდება.

ახლა ვთქვათ s არის m და n რიცხვებს შორის უმცირესი რიცხვი.

განსაზღვრება 2. $(m \times n)$ – განზომილებიანი $A = (a_{ij})$ მატრიცის ქვემატრიცას

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} x_{11} x_{12} \ldots x_{1s} \\ x_{21} x_{22} \ldots x_{2s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{s1} x_{s2} \ldots x_{ss} \end{pmatrix}$$

ვუწოდებთ A მატრიცის მთავარ მატრიცას, ხოლო A მატრიცას კი $\overline{A}$ მატრიცის გაფართოებას

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} x_{1\,s+1}\ x_{1\,s+2}\ \ldots x_{1n} \\ x_{2\,s+1}\ x_{2\,s+2}\ \ldots x_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{s\,s+1}\ x_{s\,s+2}\ \ldots x_{sn} \end{pmatrix}$$

$\tilde{A}$ მატრიცით, თუ $s \leq n$.

შევნიშნოთ, რომ ყოველი კვადრატული მატრიცის მთავარი მატრიცა მასვე ემთხვევა. ახლა დავუშვათ, რომ A არის n – ური რიგის კვადრატული მატრიცა. მატრიცას, რომელიც წარმოდგენილია სახით

$$A' = \begin{pmatrix} x_{11}\ x_{21}\ \ldots x_{n1} \\ x_{12}\ x_{22}\ \ldots x_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n}\ x_{2n}\ \ldots x_{nn} \end{pmatrix}$$

A მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა ეწოდება.

განსაზღვრება 3. თუ $A = A'$, მაშინ A - ს სიმეტრიული მატრიცა ეწოდება.

ახლა ვთქვათ X რომელიღაც რიცხვითი ველია, ხოლო 0 და 1 ამ ველის ნულოვანი და ერთეულოვანი ელემენტებია. კვადრატულ მატრიცებს, რომლებიც წარმოდგენილია სახით:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-1\,1} & x_{n-1\,2} & x_{n-1\,3} & \ldots & x_{n-1\,n-1} & 0 \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n\,3} & \ldots & x_{n-1\,n} & x_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots x_{1\,n-1} & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & \ldots x_{2\,n-1} & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots x_{n-1\,n-1} & x_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & x_{nn} \end{pmatrix},$$

ე.ი. მთავარი დიაგონალის „ზემოთ" ან მთავარი დიაგონალის „ქვემოთ" ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, სამკუთხა მატრიცები ეწოდება. კვადრატულ მატრიცას,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & x_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_{nn} \end{pmatrix}$$

რომლის მთავარ დიაგონალზე არმდებარე ყველა ელემენტი ნულის ტოლია დიაგონალური მატრიცა ეწოდება.

მატრიცას, რომლის ყველა ელემენტი ნულია, ნულოვანი მატრიცა ეწოდება, ხოლო დიაგონალურ მატრიცას, რომლის მთავარი დიაგონალის ყოველი ელემენტი 1-ის ტოლია, ერთეულოვანი მატრიცა ეწოდება. შემდგომში ნულოვან და ერთეულოვან მატრიცებს შესაბამისად $\mathbf{0}$ და E სიმბოლოებით აღვნიშნავთ. ამგვარად,

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 00\dots0 \\ 00\dots0 \\ \dots\dots\dots \\ 00\dots0 \end{pmatrix} \text{ და } E = \begin{pmatrix} 10\dots0 \\ 01\dots0 \\ \dots\dots\dots \\ 00\dots1 \end{pmatrix}.$$

განსაზღვრება 4. ვთქვათ A მატრიცას აქვს (1) სახე. თუ სრულდება

$$x_{i1} + k \cdot x_{j1}, x_{i2} + k \cdot x_{j2}, \dots, x_{in} + k \cdot x_{jn} \text{ ან}$$

$$x_{1i} + k \cdot x_{1j}, x_{2i} + k \cdot x_{2j}, \dots, x_{mi} + k \cdot x_{mj}$$

პირობები, მაშინ იტყვიან, რომ A მატრიცის რომელიმე $i-$ური სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებზე დამატებულია A მატრიცის რომელიმე j სტრიქონის (სვეტის) ელემენტები გამრავლებული k რიცხვზე.

განსაზღვრება 5. ვთქვათ A არის $(m \times n)-$ განზომილებიანი მატრიცა R სიმრავლეზე. A მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნების ქვეშ ესმით შედეგი სახის გარდაქმნები:

a) A მატრიცის რომელიმე ორი სტრიქონის (სვეტის) ადგილების შეცვლა;

b) A მატრიცის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტის რომელიღაც ნულისაგან განსხვავეულ ელემენტზე გამრავლება.

c) A მატრიცის რომელიმე $i-$ური სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებზე A მატრიცის რომელიმე $j-$ური სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების დამატება გამრავლებული რაიმე $k-$ ელემენტზე.

d) A მატრიცაზე ნულოვანი სტრიქონის მიერთება ან ამოგდება.

A მატრიცის ისეთ ელემენტარულ გარდაქმნებს, რომელშიაც მონაწილეობს d) სახის გარდაქმნა A მატრიცის განსაკუთრებული გარდაქმნები ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი არაგანსაკუთრებული.

განსაზღვრება 6. ვთქვათ s არის m და n ნატურალურ რიცხვებს შორის უმცირესი და $A=\left(x_{ij}\right)$ არის $\left(m\times n\right)-$განზომილებიანი მატრიცა. ვიტყვით, რომ $\left(m\times n\right)-$განზომილებიანი $B=\left(y_{ij}\right)$ მატრიცა არის A მატრიცის შესაბამისი დაყვანილი მატრიცა სტრიქონების მიმართ, თუ B მატრიცა მიღებულია A მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნებით სტრიქონების მიმართ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

a) $y_{11}, y_{22}, \ldots, y_{ss} \in \{0,1\}$;

b) $y_{ij}=0$ ყოველი $1\le i\le s$ და $j-$სათვის, სადაც $1\le j<i$;

c) თუ რომელიღაც $i-$სათვის $\left(1\le i\le s\right)$ ადგილი აქვს ტოლობას $y_{ii}=1$, მაშინ B მატრიცის i სვეტის ყველა დანარჩენი ელემენტი ნულის ტოლია;

d) თუ რომელიღაც $j-$სათვის $\left(1\le j\le s\right)$ ადგილი აქვს ტოლობას $y_{jj}=0$, მაშინ $y_{ji}=0$ ყოველი $i=1,2,\ldots,s$.

განსაზღვრება 7. ვთქვათ s არის m და n ნატურალურ რიცხვებს შორის უმცირესი და $A=\left(x_{ij}\right)$ არის $\left(m\times n\right)-$განზომილებიანი მატრიცა. ვიტყვით, რომ $\left(m\times n\right)-$განზომილებიანი $B=\left(y_{ij}\right)$ მატრიცა არის A მატრიცის შესაბამისი დაყვანილი მატრიცა, თუ B მატრიცა მიღე-

ზულია A მატრიცის ელემენტარული გარდაქმნებით და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

a) $y_{11}, y_{22}, \ldots, y_{ss} \in \{0,1\}$;

b) B მატრიცის $y_{11}, y_{22}, \ldots, y_{ss}$ ელემენტებისაგან განსხვავებული ყველა ელემენტი ნულის ტოლია.

შევნიშნოთ, რომ მაშინ A მატრიცის სტრიქონების მიმართ დაყვანილი და დაყვანილი მატრიცების მთავარი მატრიცები, სტრიქონების მიმართ დაყვანილი და დაყვანილი მატრიცების განსაზღვრებების თანახმად, შესაბამისად სამკუთხა და დიაგონალური მატრიცები იქნებიან.

თეორემა 1. ვთქვათ $\mathbf{X}$ სიმრავლე ველია, ხოლო 0 და 1 მისი ნულოვანი და ერთეულოვანი ელემენტებია, ხოლო $A=(x_{ij})$ ნებისმიერი $(m \times n)$ - განზომილებიანი მატრიცაა X სიმრავლეზე. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებანი.

a) ყოველი A მატრიცა მისი არაგანსაკუთრებული გარდაქმნებით მიიყვანება დაყვანილ $(m \times n)$ − განზომილებიან $B=(y_{ij})$ მატრიცამდე;

b) ყოველი $m \times n$ $(m \geq n)$ განზომილებიანი A მატრიცა მისი სტრიქონების მიმართ არაგანსაკუთრებული გარდაქმნებით მიიყვანება სტრიქონების მიმართ დაყვანილ $(m \times n)$ - განზომილებიან $B'=(y'_{ij})$ მატრიცამდე;

c) ყოველი $m \times n$ $(m < n)$ განზომილებიანი A მატრიცა მისი სტრიქონების მიმართ განსაკუთრებული გარდაქმნებით მიიყვანება სტრიქონების მიმართ დაყვანილ $(n \times n)$ − განზომილებიან $B'=(y'_{ij})$ მატრიცამდე.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ a) წინადადების სამართლიანობა. მართლაც, ვთქვათ A მატრიცა წარმოდგენილია (1) სახით, ხოლო s უმცირესი რიცხვია m და n ნატურალურ რიცხვებს შორის. A მატრიცის მიმართ a) წინადადების სამართლიანობის დასამტკიცებლად გამოვიყე-

ნოთ მათემატიკური ინდუქცია A მატრიცის მთავარი მატრიცის s რიგის მიმართ.

a′) ჯერ დავუშვათ, რომ A მატრიცის მთავარი მატრიცის რიგი $s=1$, ასეთ შემთხვევაში A მატრიცა წარმოიდგინება

$$A=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \end{pmatrix} \text{ ან } A=\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{m1} \end{pmatrix}$$

სახით.

1) თუ $A=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \end{pmatrix}$ და $x_{11}=x_{12}=\dots=x_{1n}=0$, მაშინ ცხადია A მატრიცა დაყვანილია. ამიტომ, დავუშვათ, რომ $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$ ელემენტებიდან ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავებულია. ვთქვათ x_{1i} $(1 \le i \le n)$ პირველი ნულისაგან განსხვავებული ელემენტია. $A_1=\left(x_{1j}^{(1)}\right)$ $(j=1,2,\dots,n)$ ისეთი მატრიცაა, რომელიც მიიღება A მატრიცისაგან მისი პირველი და i სვეტების ადგილების ურთიერთ შეცვლით და დანარჩენი სვეტების ადგილზე დატოვებით. $A_2=\left(x_{1j}^{(2)}\right)$ კი ისეთი მატრიცაა, რომელიც მიიღება A_1 მატრიცისაგან მისი პირველი სვეტის $\left(x_{11}^{(1)}\right)^{-1}$ ელემენტზე გამრავლებით. ასეთ შემთხვევაში $x_{11}^{(2)}=1$ და $x_{1j}^{(2)}=x_{1j}^{(1)}$ ყოველი $j=2,3,\dots,n$. ახლა თუ A_2 მატრიცის პირველ სვეტს თანამიმდევრობით გავამრავლებთ $-x_{12}^{(2)}$, $-x_{13}^{(2)}$, ..., $-x_{1n}^{(2)}$ ელემენტებზე და შესაბამისად დავამატებთ A_2 მატრიცის მეორე, მესამე და ა. შ. მე-n სვეტებს, მივიღებთ $B_1=\begin{pmatrix} 1 0 \dots 0 \end{pmatrix}$ მატრიცას, რომელიც წარმოადგენს A მატრიცის შესაბამის დაყვანილ მატრიცას.

2) ახლა თუ

$$A=\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{m1} \end{pmatrix}$$

და $x_{11}=x_{21}=\ldots=x_{m1}=0$, მაშინ A დაყვანილი მატრიცაა. ამიტომ, დავუშვათ, რომ $x_{11},x_{21},\ldots,x_{m1}$ ელემენტებიდან ერთი მაინც ნულისაგან განსხვავებულია. ვთქვათ x_{p1} $(1\le p\le m)$ პირველი ნულისაგან განსხვავებული ელემენტია. $A_1'=\left(y_{q1}^{(1)}\right)$ $(q=1,2,\ldots,n)$ ისეთი მატრიცაა, რომელიც მიიღება A მატრიცისაგან მისი პირველი და q სტრიქონების ადგილების ურთიერთ შეცვლით და დანარჩენი სტრიქონების ადგილებზე დატოვებით. $A_2'=\left(y_{q1}^{(2)}\right)$ კი ისეთი მატრიცაა, რომელიც მიიღება A_1' მატრიცისაგან მისი პირველი სტრიქონის $\left(y_{11}^{(1)}\right)^{-1}$ ელემენტზე გამრავლებით. ასეთ შემთხვევაში $y_{11}^{(2)}=1$ და $y_{q1}^{(2)}=y_{q1}^{(1)}$ ყოველი $q=2,3,\ldots,n$. ახლა თუ A_2' მატრიცის პირველ სტრიქონს თანამიმდევრობით გავამრავლოთ $-y_{21}^{(2)}$, $-y_{31}^{(2)}$, ..., $-y_{m1}^{(2)}$ ელემენტებზე და შესაბამისად დავამატებთ A_2' მატრიცის მეორე, მესამე და ა. შ. მე-n სტრიქონებს, მივიღებთ

$$B_1'=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

მატრიცას, რომელიც წარმოადგენს A მატრიცის შესაბამის დაყვანილ მატრიცას. ამგვარად, როცა $s=1$ მაშინ a) წინადადება სამართლიანია.

b′) ახლა დავუშვათ, რომ a) წინადადება სამართლიანია X ველზე აღებული ყველა ისეთი მატრიცისათვის, რომელთა მთავარი მატრიცა $(s-1)$−განზომილებიანია და ვაჩვენოთ a) წინადადების სამართლიანობა

ყველა ისეთი მატრიცისათვის, რომელთა მთავარი მატრიცა s – განზომილებიანია. მართლაც, დავუშვათ, რომ (1) სახით წარმოდგენილი A მატრიცის მთავარი მატრიცის რიგი s – ის ტოლია.

3) თუ A მატრიცის პირველი სტრიქონისა და პირველი სვეტის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ A მატრიცის ისეთი არაგანსაკუთრებული გარდაქმნები, რომლებიც მოხდენილი იქნება მეორე, მესამე და ა.შ. მე-n სვეტებზე და მეორე, მესამე და ა.შ. მე-m სტრიქონებზე არ შეცვლის A მატრიცის პირველ სტრიქონსა და პირველ სვეტს, მაგრამ იგი იქნება A მატრიცის

$$B=\begin{pmatrix} x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

ქვემატრიცის არაგანსაკუთრებული გარდაქმნები. თანახმად ინდუქციური დაშვებისა, B მატრიცა ამ გზით შეიძლება მიყვანილი იქნას დაყვანილ მატრიცამდე, რადგან B მატრიცის მთავარი მატრიცის რიგი $(s-1)$–ის ტოლია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ A მატრიცაც მისი არაგანსაკუთრებული გარდაქმნებით დაყვანილ მატრიცამდე მიიყვანება.

4) ახლა ვთქვათ A მატრიცის პირველი სტრიქონის ან პირველი სვეტის რომელიმე ელემენტი ნულისაგან განსხვავებულია. ეს ელემენტი A მატრიცის სტრიქონების ადგილების ურთიერთ შეცვლით ან სვეტების ადგილების ურთიერთ შეცვლით შეიძლება მივიყვანოთ ისეთ $C=(z_{ij})$ $(i=1,2,...,m;\ \ j=1,2,...,n)$, რომ $z_{11}\neq 0$. $C_1=\left(z_{ij}^{(1)}\right)$ იყოს ისეთი მატრიცა, რომელიც მიიღება C მატრიცისაგან მისი პირველი სტრიქონის ყველა ელემენტის z_{11}^{-1} ელემენტზე გამრავლებით, ხოლო დანარჩენი სტრიქონების კი უცვლელად დატოვებით. ასეთ შემთხვევაში $z_{11}^{(1)}=1$. ახლა C_1 მატრიცის პირველი სტრიქონის ელემენტები თანამიმდევრობით გავამრავლოთ $-z_{21}^{(1)}$, $-z_{31}^{(1)}$,..., $-z_{m1}^{(1)}$ და შესაბამისად დავამატოთ მეორე, მესამე და ა. შ. მე-m სტრიქონების ელემენტებს. მივიღებთ $C_2=\left(z_{ij}^{(2)}\right)$ მატრიცას, რომლის პირველი სვეტის ყველა ელე-

მენტი, გარდა $z_{11}^{(2)}$ ნულის ტოლია, ხოლო $z_{11}^{(2)}=1$. ამის შემდეგ, C_2 მატრიცის პირველი სვეტის ელემენტები თანამიმდევრობით გავამრავლოთ $-z_{12}^{(2)}$, $-z_{13}^{(2)},\ldots,$ $-z_{1n}^{(2)}$ და შესაბამისად დავამატოთ მეორე, მესამე და ა. შ. მე-n სვეტების ელემენტებს, მივიღებთ $C_3=\left(z_{ij}^{(3)}\right)$ მატრიცას, რომლის პირველი სვეტისა და პირველი სტრიქონის ყველა ელემენტი, გარდა $z_{11}^{(3)}$ ნულის ტოლია, ხოლო $z_{11}^{(3)}=1$.

რადგან C_3 მატრიცის პირველი სტრიქონისა და პირველი სვეტის ყველა ელემენტი, გარდა $z_{11}^{(3)}$ ნულის ტოლია, ხოლო $z_{11}^{(3)}=1$, ამიტომ C_3 მატრიცის ისეთი არაგანსაკუთრებული გარდაქმნები, რომლებიც განხორციელებულია მის მეორე, მესამე და ა.შ. მე-n სვეტებზე და მეორე, მესამე და ა.შ. მე-m სტრიქონებზე, არ შეცვლის C_3 მატრიცის პირველ სტრიქონსა და პირველ სვეტს, მაგრამ იგი იქნება C_3 მატრიცის

$$C'=\begin{pmatrix} z_{22}^{(2)} \; x_{23}^{(2)} \; \ldots \; x_{2n}^{(2)} \\ z_{32}^{(2)} \; x_{33}^{(2)} \; \ldots \; x_{3n}^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{m2}^{(2)} \; x_{m3}^{(2)} \; \ldots \; x_{mn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

ქვემატრიცის არაგანსაკუთრებული გარდაქმნები. თანახმად ინდუქციური დაშვებისა C' მატრიცა ამ გზით შეიძლება მიყანილი იქნას დაყვანილ მატრიცამდე, რადგანაც C' მატრიცის მთავარი მატრიცის რიგი $(s-1)$−ის ტოლია. ამგვარად A მატრიცაც მისი არაგანსაკუთრებული გარდაქმნებით მიიყვანება დაყვანილ მატრიცამდე.

a) წინადადების სამართლიანობა დამტკიცებულია. □

ახლა დავამტკიცოთ b) წინადადების სამართლიანობა. მართლაც, ვთქვათ A მატრიცა წარმოდგენილია (1) სახით. A მატრიცის მიმართ b) წინადადების სამართლიანობის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქცია A მატრიცის სტრიქონთა m რიცხვის მიმართ.

5) თუ $m=1$, მაშინ $A=\left(x_{11}\right)$, რადგან $n \leq m$. თუ $x_{11}=0$, მაშინ ხ) წინადადება სამართლიანია. თუ $x_{11} \neq 0$, მაშინ A მატრიცის პირველი სტრიქონის x_{11}^{-1} ელემენტზე გამრავლებით მივიღებთ (x_{11}^{-1} ელემენტი არსებობს, რადგან $\mathbf{X}$ ველია და $x_{11} \neq 0$), $A'=(1)$ მატრიცას, რომელიც სტრიქონების მიმართ დაყვანილი მატრიცაა.

ახლა დავუშვათ, რომ ხ) წინადადება სამართლიანია X ველზე აღებული ყველა ისეთი მატრიცისათვის, რომელთა სტრიქონების რიცხვი $(m-1)$–ის ტოლია და ვაჩვენოთ ხ) წინადადების სამართლიანობა ყველა ისეთი მატრიცისათვის, რომელთა სტრიქონების რიცხვი m–ის ტოლია.

მართლაც, თუ A მატრიცის პირველი $x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{m1}$ სვეტის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ A მატრიცის სტრიქონთა ისეთი არაგანსაკუთრებული გარდაქმნები, რომლებიც განხორციელებული იქნება მეორე, მესამე და ა.შ. მე-m სტრიქონებზე, არ შეცვლის A მატრიცის პირველ სტრიქონს, მაგრამ იგი იქნება A მატრიცის

$$B'=\begin{pmatrix} x_{22} & x_{23} & \ldots & x_{2n} \\ x_{32} & x_{33} & \ldots & x_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m2} & x_{m3} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

ქვემატრიცის სტრიქონთა არაგანსაკუთრებული გარდაქმნები. თანახმად ინდუქციური დაშვებისა, B მატრიცა ამ გზით შეიძლება მიყვანილი იქნას სტრიქონების მიმართ დაყვანილ მატრიცამდე, რადგანაც B მატრიცის სტრიქონთა რიცხვი $(m-1)$–ის ტოლია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ A მატრიცაც მისი სტრიქონთა არაგანსაკუთრებული გარდაქმნებით მიიყვანება სტრიქონების მიმართ დაყვანილ მატრიცამდე.

6) ახლა დავუშვათ, რომ A მატრიცის პირველი სვეტის რომელიმე ელემენტი ნულისაგან განსხვავებულია. ეს ელემენტი A მატრიცის სტრიქონების ადგილების ურთიერთ შეცვლით შეიძლება მივიყვანოთ

ისეთ $D=(t_{ij})$ $(i=1,2,...,m; j=1,2,...,n)$ მატრიცამდე, რომ $t_{11}\neq 0$. $D_1=\left(t_{ij}^{(1)}\right)$ იყოს ისეთი მატრიცა, რომელიც მიიღება D მატრიცისაგან მისი პირველი სტრიქონის ყველა ელემენტის t_{11}^{-1} ელემენტზე გამრავლებით, ხოლო დანარჩენი სტრიქონების კი უცვლელად დატოვებით. ასეთ შემთხვევაში $t_{11}^{(1)}=1$. ახლა D_1 მატრიცის პირველი სტრიქონის ელემენტები თანამიმდევრობით გავამრავლოთ $-t_{21}^{(1)}$, $-t_{31}^{(1)},...,$ $-t_{m1}^{(1)}$ ელემენტებზე და შესაბამისად დავამატოთ მეორე, მესამე და ა. შ. მე-m სტრიქონების ელემენტებს. მივიღებთ $D_2=\left(t_{ij}^{(2)}\right)$ მატრიცას, რომლის პირველი სვეტის ყველა ელემენტი, გარდა $t_{11}^{(2)}$ ნულის ტოლია, ხოლო $t_{11}^{(2)}=1$. რადგან D_2 მატრიცის პირველი სვეტის ყველა ელემენტი, გარდა $t_{11}^{(2)}$ ნულის ტოლია, ხოლო $t_{11}^{(2)}=1$, ამიტომ D_2 მატრიცის სტრიქონთა ისეთი არაგანსაკუთრებული გარდაქმნები, რომლებიც განხორციელებულია მის მეორე, მესამე და ა.შ. მე-m სტრიქონებზე, არ შეცვლის D_2 მატრიცის პირველ სვეტს, მაგრამ იგი იქნება D_2 მატრიცის

$$D'=\begin{pmatrix} t_{22}^{(2)} & t_{23}^{(2)} & \dots & t_{2n}^{(2)} \\ t_{32}^{(2)} & t_{33}^{(2)} & \dots & t_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{m2}^{(2)} & t_{m3}^{(2)} & \dots & t_{mn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

ქვემატრიცის სტრიქონთა არაგანსაკუთრებული გარდაქმნები. თანახმად ინდუქციური დაშვებისა D' მატრიცა ამ გზით შეიძლება მიყანილი იქნას სტრიქონების მიმართ დაყვანილ მატრიცამდე, რადგანაც D' მატრიცის სტრიქონთა რიცხვი $(m-1)$–ის ტოლია. ამგვარად A მატრიცაც მისი სტრიქონთა არაგანსაკუთრებული გარდაქმნებით მიიყვანება სტრიქონების მიმართ დაყვანილ მატრიცამდე.

ხ) წინადადების სამართლიანობა დამტკიცებულია. □

ახლა დავამტკიცოთ c) წინადადების სამართლიანობა. მართლაც, ვთქვათ A არის $(s \times n)$ − განზომილებიანი მატრიცა (ე.ი. $s = m < n$). A' აღვნიშნოთ ისეთი n − ური რიგის კვადრატული მატრიცა, რომელიც მიღებულია A მატრიცისაგან $n - s$ რაოდენობის ნულოვანი სტრიქონების მიერთებით

$$A' = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{sn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

რადგან A' მატრიცის სვეტების რიცხვი არ აღემატება სტრიქონების რიცხვს, ამიტომ, როგორც ზემოთ 5) და 6) პუნქტებში იყო დამტკიცებული, A' მატრიცა სტრიქონების არაგანსაკუთრებული გარდაქმნებით შეიძლება მიყვანილი იქნეს სტრიქონების მიმართ დაყვანილ მატრიცამდე.

ახლა c) წინადადების სამართლიანობა გამომდინარეობს იქედან, რომ A' მატრიცა მიღებულია A მატრიცისაგან მისი განსაკუთრებული გარდაქმნებით.

c) წინადადების სამართლიანობა დამტკიცებულია. □

მაგალითი 1. იპოვეთ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცის სტრიქონების მიმართ დაყვანილი მატრიცები, რომლებიც მიიღებიან მისი სტრიქონების არაგანსაკუთრებული და განსაკუთრებული გარდაქმნებით. გვექნება:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&3\\0&1&-2&-2&6\\0&0&2&3&-5\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&3\\0&1&0&1&1\\0&0&2&3&-5\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&3\\0&1&0&1&1\\0&0&1&\frac{3}{2}&\frac{5}{2}\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

ამგვარად, A მატრიცის სტრიქონების მიმართ დაყვანილ მატრიცებს, რომლებიც მიიღებიან მისი სტრიქონების არაგანსაკუთრებული და განსაკუთრებული გარდაქმნებით, შესაბამისად ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&3\\0&1&0&1&1\\0&0&1&\frac{3}{2}&\frac{5}{2}\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&\frac{3}{2}&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

მაგალითი 2. იპოვეთ პირველ მაგალითში მოცემული A მატრიცის შესაბამისი დაყვანილი მატრიცა. გვექნება:

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&3&-3\\1&0&0&1&3\\0&1&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&3&-3\\0&1&-2&-2&6\\0&1&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&-2&-2&6\\0&0&2&3&-5\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&2&3&-5\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&\frac{3}{2}&\frac{5}{2}\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

ამვარად, A მატრიცის შესაბამის დაყვანილ მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

ახლა $\mathbf{X}$ ველზე განმარტებულ მატრიცთა სიმრავლეში განვმარ-

ტოთ მატრიცების შეკრების, გამრავლების და $\mathbf{X}$ ველის ელემენტზე გამრავლების ოპერაციები.

ყველა $(m\times n)$ – განზომილებიანი მატრიცის სიმრავლე $\mathbf{X}$ ველზე აღვნიშნოთ $X^{m\times n}$ - ით; $A=(x_{ij})$, $B=(y_{ij})\in X^{m\times n}$ და $\lambda\in X$. $X^{m\times n}$ სიმრავლეზე შემოვიტანოთ მატრიცების შეკრების ბინარული ალგებრული ოპერაცია და ω_λ $(\lambda\in X)$ უნარული ალგებრული ოპერაცია შემდეგნაირად: $A+B=(x_{ij}+y_{ij})$ და $\omega_\lambda(A)=(\lambda\cdot x_{ij})$, სადაც $i=1,2,...,m$ და $j=1,2,...,n$.

თეორემა 2. $X^{m\times n}$ სიმრავლეში მატრიცების შეკრების ბინარულ ალგებრულ ოპერაციასა და ω_λ $(\lambda\in X)$ ოპერაციებს გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

a) მატრიცთა შეკრების ოპერაცია კომუტაციურია;

b) მატრიცთა შეკრების ოპერაცია ასოციაციურია;

c) შეკრების ოპერაციის მიმართ $X^{m\times n}$ სიმრავლეში არსებობს ნულოვანი

$$0=\begin{pmatrix}00...0\\00...0\\.......\\00...0\end{pmatrix}$$

ელემენტი და $A=(x_{ij})$ მატრიცის მოპირდაპირე მატრიცა

$$-A=\begin{pmatrix}-x_{11} & -x_{12} & \dots & -x_{1n}\\-x_{21} & -x_{22} & \dots & -x_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\-x_{m1} & -x_{m2} & \dots & -x_{mn}\end{pmatrix}.$$

d) $(\omega_{\lambda_1\cdot\lambda_2})(A)=\omega_{\lambda_1}(\omega_{\lambda_2}(A))$, ყოველი $\lambda_1,\lambda_2\in X$ და $A\in X^{m\times n}$;

e) $(\omega_{\lambda_1+\lambda_2})(A)=\omega_{\lambda_1}(A)+\omega_{\lambda_2}(A)$, ყოველი $\lambda_1,\lambda_2\in X$ და $A\in X^{m\times n}$;

f) $\omega_\lambda(A+B)=\omega_\lambda(A)+\omega_\lambda(B)$, ყოველი $\lambda\in X$ და $A,B\in X^{m\times n}$;

g) $\omega_1(A)=A$, სადაც 1 არის $\mathbf{X}$ ველის ერთეულოვანი ელემენტი.

დამტკიცება. ჩამოყალიბებული თეორემის სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს პირობებიდან, რომ X ველში შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები კომუტაციური და ასოციაციურია, ხოლო შეკრება და გამრავლება ერთმანეთთან დაკავშირებულია დისტრიბუციულობის კანონით. □

დამტკიცებული თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ალგებრა $\left(X^{m\times n},\{\omega_\lambda \mid \lambda\in X\}\right)$ ვექტორული სივრცეა.

ახლა ვთქვათ $A=\left(x_{ij}\right)\in X^{m\times n}$, $B=\left(y_{ij}\right)\in X^{n\times s}$ და $C=\left(z_{ij}\right)\in X^{m\times s}$. ვიტყვით, რომ A და B მატრიცების ნამრავლი არის C მატრიცა და დავწერთ $A\cdot B=C$, თუ

$$z_{pq}=\sum_{k=1}^{n}x_{pk}\cdot y_{kq}=x_{p1}\cdot y_{1q}+x_{p2}\cdot y_{2q}+\cdots+x_{pn}\cdot y_{nq},$$

ყოველი $p=1,2,\ldots,m$ და $q=1,2,\ldots,s$.

შევნიშნოთ, რომ A და B მატრიცების ნამრავლი განსაზღვრულია მხოლოდ მაშინ, როცა A მატრიცის სვეტების რიცხვი უდრის B მატრიცის სტრიქონების რიცხვს.

თეორემა 3. თუ A,B და C ისეთი მატრიცებია, რომ $A\cdot B$ და $B\cdot C$ განსაზღვრულია, მაშინ $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$, ე.ი. მატრიცების გამრავლების ოპერაცია ასოციაციურია.

დამტკიცება. ვთქვათ მატრიცები $A=\left(x_{ij}\right)$, $B=\left(y_{ij}\right)$ და $C=\left(z_{ij}\right)$ შესაბამისად $(m\times n)$, $(n\times s)$ და $(s\times p)$ განზომილებიანი მატრიცებია. ცხადია, ასეთ შემთხვევაში არსებობს $A\cdot B$ და $B\cdot C$ ნამრავლი. ახლა დავუშვათ, რომ $A\cdot B=\left(a_{ij}\right)$, $B\cdot C=\left(b_{ij}\right)$, $(A\cdot B)\cdot C=\left(d_{ij}\right)$ და $A\cdot(B\cdot C)=\left(d'_{ij}\right)$. ასეთ შემთხვევაში

$$d_{ij}=\sum_{l=1}^{s}\left(a_{il}\cdot z_{lj}\right)=\sum_{l=1}^{s}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}x_{ik}\cdot y_{kl}\right)\cdot z_{lj}\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ik}\cdot y_{kl}\cdot z_{lj}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{s}\left(x_{ik}\cdot y_{kl}\cdot z_{lj}\right)\right),$$

$$d'_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ik}\cdot b_{kj}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ik}\cdot\sum_{l=1}^{s}y_{kl}\cdot z_{lj}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{s}\left(x_{ik}\cdot y_{kl}\cdot z_{lj}\right)\right)$$

მივიღეთ, რომ $d_{ij}=d'_{ij}$ ყოველი $i=1,2,...,m$ და $j=1,2,...,p$, ე.ი. სრულდება ტოლობა $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$. □

თეორემა 4. თუ A, B და C ისეთი მატრიცებია, რომ $B+C$ და $A\cdot(B+C)$ განსაზღვრულია, მაშინ

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C \text{ და } (B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A,$$

ე.ი. მატრიცების გამრავლებისა და შეკრების ოპერაციები ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან დისტრიბუციულობის კანონით.

დამტკიცება. ვთქვათ მატრიცები $A=(x_{ij})$ არის $(m\times n)$ განზომილებიანი მატრიცა, ხოლო $B=(y_{ij})$ და $C=(z_{ij})$ $(n\times s)$ არიან $(n\times s)$ განზომილებიანი მატრიცები. მაშინ ცხადია, არსებობენ $B+C$, $A\cdot(B+C)$, $A\cdot B$ და $A\cdot C$ მატრიცები. ცხადია $B+C=(y_{ij}+z_{ij})$. ახლა დავუშვათ, რომ $A\cdot B=(a_{ij})$, $A\cdot C=(c_{ij})$ და $A\cdot(B+C)=(d_{ij})$. ასეთ შემთხვევაში

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}x_{ik}\cdot\left(y_{kj}+z_{kj}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ik}\cdot y_{kj}+x_{ik}\cdot z_{kj}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ik}\cdot y_{kj}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ik}\cdot z_{kj}\right)=a_{ij}+c_{ij},$$

ყოველი $i=1,2,...,m$ და $j=1,2,...,s$. ბოლო ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$. □

თეორემა 5. ვთქვათ $X^{n\times n}$ არის ყველა $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცების სიმრავლე $\mathbf{X}$ ველზე. მაშინ ალგებრა $\mathbf{X}^{n\times n}=\left(X^{n\times n},+,-,\cdot,1\right)$ რგოლია, სადაც $(+)$ და $(\cdot)$ მატრიცთა შეკრებისა და გამრავლების ალგებრული ოპერაციებია; $(-)$ უნარული ალგებრული ოპერაციაა $X^{n\times n}$ სიმრავლეზე, რომელიც ყოველ მატრიცას $X^{n\times n}$ სიმრავლიდან შეუსაბამებს მის მოპირდაპირე მატრიცას, ხოლო 1 ნულარული ოპერაციაა, რომელიც $X^{n\times n}$ სიმრავლეში გამრავლების ოპერაციის მიმართ აფიქსირებს ერთეულოვან ელემენტს.

დამტკიცება. თეორემა 2-ის თანახმად $\left(X^{n\times n},+,-\right)$ ალგებრა ჯგუფია. ასევე თეორემა 3-ის თანახმად $\left(X^{n\times n},\cdot,1\right)$ ალგებრა ნახევარჯგუფია, იგი მონოიდიც იქნება, რადგანაც, თუ

$$E=\begin{pmatrix} 10...00 \\ 01...00 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 00...10 \\ 00...01 \end{pmatrix}$$

და $A\in X^{n\times n}$ ნებისმიერი მატრიცაა, მაშინ $E\cdot A=A\cdot E=A$, ე.ი. E მატრიცა გამრავლების ოპერაციის მიმართ $X^{n\times n}$ სიმრავლის ერთეულოვანი ელემენტია.

თეორემა 4-ის თანახმად $X^{n\times n}$ სიმრავლეში შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან დისტრიბუციულობის კანონით. გარდა ამისა $0\neq E$.

მივიღეთ, რომ $\mathbf{X}^{n\times n}=\left(X^{n\times n},+,-,\cdot,1\right)$ ალგებრა, რგოლია. □

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

a) $X=\{0,1\}$ სიმრავლეზე დაწერეთ:

1) ყველა $(1,1)$ განზომილებიანი მატრიცა;

2) ყველა $(1,2)$ განზომილებიანი მატრიცა;

3) ყველა $(3,1)$ განზომილებიანი მატრიცა;

4) ყველა მესამე რიგის დიაგონალური მატრიცა;

5) მესამე რიგის ნულოვანი და ერთეულოვანი მატრიცები;

6) ყველა მესამე რიგის ელემენტარული მატრიცა.

b) იპოვეთ $A=\begin{pmatrix}111\\011\\001\end{pmatrix}$ მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა.

c) იპოვეთ $A=\begin{pmatrix}101\\011\end{pmatrix}$ მატრიცის გაფართოება $B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ მატრიცით და B მატრიცისა A მატრიცით.

d) აჩვენეთ, რომ $A=\begin{pmatrix}1&3&6&1\\3&2&4&3\\6&4&3&5\\1&3&5&4\end{pmatrix}$ სიმეტრიული მატრიცაა.

e) იპოვეთ ქვემოთ მოცემული მატრიცების

$$A=\begin{pmatrix}1\\0\\4\\5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&4&7&6\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&0\\0&1&1&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\2&2\end{pmatrix}$$

მთავარი მატრიცები. იპოვეთ $\tilde{B}$ და $\tilde{C}$ მატრიცები.

f) იპოვეთ

$$A_1=\begin{pmatrix}102011\\201100\\011110\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}102\\201\\011\\110\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}01102011\\10001022\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},$$

$$A_5=\begin{pmatrix}0101\\1001\\1000\\1111\end{pmatrix},\ A_6=\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}$$

მატრიცების შესაბამისი სტრიქონების მიმართ დაყვანილი და დაყვანილი მატრიცები.

g) განისაზღვრებიან თუ არა ცალსახად მოცემული მატრიცის შესაბამისი სტრიქონების მიმართ დაყვანილი და დაყვანილი მატრიცები.

h) მოცემულია მატრიცები

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&2\\5&0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&2\\4&0\end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&0\\2&3&1&0&3\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\3&0&0\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}1&2&1&2&1\\2&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\end{pmatrix},\ B_3=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\3&2\\2&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

იპოვეთ A_1+B_1, $A_1\cdot A_2$, $B_1\cdot A_2$, $B_2\cdot A_3$ და $A_3\cdot B_3$.

i) იპოვეთ $f(A)$, თუ

1) $f(x)=x^2-x-1$ და $A=\begin{pmatrix}-26&-18&-27\\21&15&21\\12&8&13\end{pmatrix}$;

2) $f(x)=x^2-5x+3$ და $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}$;

3) $f(x)=x^3-2x^2+1$ და $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$;

4) $f(x)=x^3-3x+2$ და $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

§ 7. წრფივ განტოლებათა სისტემები

ვთქვათ $\mathbf{X}$ ველია. განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad \dots(1)$$

სადაც $b_i, a_{ij} \in \mathbf{X}$ $(i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n)$ და $x_1, x_2, ..., x_n$ რომელიღაც უცნობებია, ეწოდება n უცნობიანი m რაოდენობის წრფივ განტოლებათა სისტემა $\mathbf{X}$ ველზე. a_{ij} ელემენტებს (1) განტოლებათა სიტემაში შემავალ უცნობთა კოეფიციენტებს უწოდებენ, ხოლო $b_1, b_2, ..., b_m$ ელემენტებს კი - თავისუფალ წევრებს. თუ თავისუფალი წევრებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ (1) სისტემას არაერთგვაროვანი ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი ერთგვაროვანი ეწოდება. მატრიცებს

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}\ a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad \dots(2)$$

(1) განტოლებათა სისტემის მთავარი და გაფართოებული მატრიცები ეწოდება. $\mathbf{X}$ ველის ელემენტთა $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ სიტემას ეწოდება (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი, თუ უცნობთა $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$ მნიშვნელობებისათვის (1) განტოლებათა სისტემის ყოველი განტოლება ტოლობად გადაიქცევა.

თუ (1) განტოლებათა სისტემას ერთი ამონახსენი მაინც გააჩნია, მაშინ მას თავსებადი ეწოდება.

(1) განტოლებათა სისტემას ეწოდება

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{s1}x_1 + c_{s2}x_2 + \cdots + c_{sn}x_n = d_s \end{cases} \qquad \dots(3)$$

სისტემის ექვივალენტური, თუ (1) განტოლებათა სისტემის ყოველი ამონახსენი არის (3) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი და პირიქით (3) განტოლებათა სისტემის ყოველი ამონახსენი არის (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი.

თეორემა 1. თუ მე-(3) განტოლებათა სისტემა მიღებულია (1) განტოლებათა სისტემიდან შემდეგი გარდაქმნებით:

a) ორი განტოლების ადგილების ურთიერთ შეცვლით;

b) განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი განტოლების ნულისაგან განსხვავებულ ელემენტზე გამრავლებით;

c) განტოლებათა სისტემის $i-$ურ განტოლებაზე $j-$ური განტოლების $\left(1 \le i \ne j \le m\right)$ დამატებით გამრავლებული რაიმე k ელემენტზე, მაშინ იგი (1) განტოლებათა სისტემის ექვივალენტური იქნება.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ მხოლოდ c) წინადადების სამართლიანობა. მართლაც, ვთქვათ მე-3 განტოლებათა სისტემის ყველა განტოლება გარდა $i-$ური განტოლებისა (1) განტოლებათა სისტემის შესაბამის განტოლებებს ემთხვევა, ხოლო $i-$ური განტოლება მიღებულია (1) განტოლებათა სისტემის $i-$ურ განტოლებაზე $j-$ური განტოლების $\left(1 \le i \ne j \le m\right)$ დამატებით გამრავლებული $k \in \mathbf{X}$ ელემენტზე, ე.ი. მას ექნება სახე:

$$\left(a_{i1} + ka_{j1}\right)x_1 + \left(a_{i2} + ka_{j2}\right)x_2 + \cdots + \left(a_{in} + ka_{jn}\right)x_n = b_i + kb_j .$$

ახლა, თუ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ არის (1) განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ამონახსენი, მაშინ იგი ცხადია დააკმაყოფილებს (3) განტოლებათა სისტემის $i-$ური განტოლებისაგან განსხვავებულ ყველა განტოლებას. ამასთან:

$$\left(a_{i1} + ka_{j1}\right)\alpha_1 + \left(a_{i2} + ka_{j2}\right)\alpha_2 + \cdots + \left(a_{in} + ka_{jn}\right)\alpha_n =$$
$$\left(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n\right) + k \cdot \left(a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \cdots + a_{jn}\alpha_n\right) = b_i + kb_j ,$$

ე.ი. (1) განტოლებათა სისტემის $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ამონახსენი იქნება (3) განტოლებათა სისტემის ამონახსენიც.

ახლა ვთქვათ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ არის მე-(3) განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ამონახსენი. ეს ამონახსენი (1) განტოლებათა სისტემის $i-$ური განტოლებისაგან განსხვავებულ ყველა განტოლებას დააკმაყოფილებს. ამიტომაც,

$$a_{j1}\beta_1 + a_{j2}\beta_2 + \cdots + a_{jn}\beta_n = b_j. \qquad \ldots(4)$$

მეორეს მხრივ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ამონახსენი აკმაყოფილებს (3) განტოლებათა სისტემის $i-$ურ განტოლებასაც, ე.ი.

$$\left(a_{i1} + ka_{j1}\right)\beta_1 + \left(a_{i2} + ka_{j2}\right)\beta_2 + \cdots + \left(a_{in} + ka_{jn}\right)\beta_n = b_i + kb_j$$

ბოლო ტოლობიდან მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$\left(a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n\right) + k \cdot \left(a_{j1}\beta_1 + a_{j2}\beta_2 + \cdots + a_{jn}\beta_n\right) = b_i + kb_j. \ldots(5)$$

ახლა თუ (5) ტოლობაში გავითვალისწინებთ (4) ტოლობას, მივიღებთ $a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = b_i$

ამგვარად (3) განტოლებათა სისტემის ყოველი ამონახსენი (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენია. □

შევნიშნოთ, რომ თუ (1) განტოლებათა სისტემა, ან მისი ელემენტარული გარდაქმნებით მიღებულ განტოლებათა სისტემა, შეიცავს განტოლებას

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = b, \qquad \ldots(6)$$

სადაც $b \neq 0$. მაშინ პირველი თეორემის თანახმად (1) განტოლებათა სისტემაც არ თავსებადი იქნება. თუ მიღებულ განტოლებათა სისტემა შეიცავს განტილებას $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$, მაშინ პირველი თეორემის თანახმად (1) განტოლებათა სისტემაც იქნება თავსებადი, რადგანაც მას $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობთა ნებისმიერი მნიშვნელობა აკმაყოფილებს. ამიტომაც მიღებული განტოლებათა სისტემიდან მისი ამოშლა ყოველთვის შეიძლება.

დამტკიცებულ თეორემაში მოყვანილ a), b), c) პირობებს და (1) განტოლებათა სისტემიდან $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$ სახის განტოლების მიერთებას ან ამოშლას (1) განტოლებათა სისტემის ელემენტარული გარდაქმნები ეწოდება.

ცხადია (1) განტოლებათა სისტემის ელემენტარული გარდაქმნები (1) განტოლებათა სისტემის შესაბამისი გაფართოებული A მატრიცის სტრიქონების მიმართ ელემენტარული გარდაქმნების ტოლფასია. თეორემა 6.1-ის c) წინადადების თანახმად A მატრიცა მისი განსაკუთრებული გარდაქმნებით სტრიქონების მიმართ მიიყვანება სტრიქონების მიმართ დაყვანილ $(n \times n)$–განზომილებიან $B' = (y'_{ij})$ მატრიცამდე. თანახმად თეორემა 6.1-ის b) წინადადებისა გვექნება, რომ $y'_{11}, y'_{22}, \ldots, y'_{nn} \in \{0,1\}$. დავუშვათ, რომ

$$y'_{i_1 i_1} = 1, y'_{i_2 i_2} = 1, \ldots, y'_{i_r i_r} = 1 \ \ (1 \le r \le n)$$

დიაგონალზე მდგომი ყველა ის ელემენტია, რომელთა მნიშვნელობა $1-$ის ტოლია. დავწეროთ მიღებული B' მატრიცის შესაბამის განტოლებათა სისტემა. ამ სიტემაში $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ უცნობები მივიღოთ ძირითად უცნობებად, ხოლო ყველა დანარჩენი $(n-r)$ რაოდენობის უცნობი თავისუფალ უცნობებად და მიღებული განტოლებათა სისტემიდან გამოვთვალოთ $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ უცნობების მნიშვნელობები. მიღებულ ამოხსნათა სისტემას (1) განტოლებათა სისტემის ზოგად ამონახსენს უწოდებენ.

(1) განტოლებათა სისტემის ზემოთ აღწერილი მეთოდით ამოხსნას უცნობთა თანდათანობითი გამორიცხვის მეთოდით ამოხსნას ან კიდევ გაუსის მეთოდით ამოხსნას უწოდებენ.

მივანიჭებთ რა $(n-r)$ რაოდენობის თავისუფალ უცნობებს $\mathbf{X}$ ველიდან აღებული ელემენტების რომელიღაც მნიშვნელობებს, მაშინ (1) განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსენიდან $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$

უცნობთა მნიშვნელობები ცალსახად განისაზღვრებიან. მივიღებთ, რომ $x_1 = \delta_1,\ x_2 = \delta_2, \dots, x_n = \delta_n$. უცნობთა ამ მნიშვნელობებს (1) განტოლებათა სისტემის კერძო ამონახსენი ეწოდება და ხშირად $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ სახით ჩაიწერება.

შევნიშნოთ, რომ თუ (1) განტოლებათა სისტემა თავსებადია და $r = n$ მაშინ მას ერთადერთი ამონახსენი ექნება, ხოლო ერთზე მეტი ამონახსენი ექნება, როცა $r < n$ (ე.ი. ძირითად უცნობთა რიცხვი ნაკლებია განტოლებაში შემავალ უცნობთა რიცხვზე).

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

a) ამოხსენოთ შემდეგი განტოლებათა სისტემები:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 10x_3 - 2x_5 = -8, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_5 = -4. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = -1, \\ 3x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 = 3. \end{cases}$

b) განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გარეშე დაადგინეთ, თავსებადია თუ არა შემდეგი განტოლებათა სისტემები:

1) $\begin{cases} -9x_1+10x_2+3x_3+7x_4=7, \\ 7x_1+5x_2-4x_3-6x_4=3, \\ -4x_1+7x_2+x_3+3x_4=5. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 12x_1+9x_2+3x_3+10x_4=13, \\ 8x_1+6x_2+2x_3+5x_4=7, \\ 2x_1+x_2+2x_3-x_4=1. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+x_4=5, \\ 3x_1-3x_2+4x_3-3x_4=3, \\ x_1-2x_2+x_3-4x_4=-4. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-2, \\ 2x_1+4x_2-2x_3=0, \\ 2x_1+2x_2-3x_3=-1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x_1+4x_2=2, \\ 3x_1+x_2=4, \\ -x_1+2x_2=-1, \\ 2x_1+3x_2=5. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x_1+5x_2-5x_3+5x_4-x_5=2, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4+2x_5=0, \\ -x_1-2x_2+2x_3-2x_4+3x_5=3, \\ x_1+2x_2-2x_3+2x_4+x_5=2. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4, \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6, \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12, \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x_1-1x_2-6x_3+3x_4=-1, \\ 7x_1-4x_2+2x_3-15x_4=-32, \\ x_1-2x_2-4x_3+9x_4=5, \\ x_1-x_2+2x_3-6x_4=-8. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10, \\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=1, \\ 3x_1+9x_2+12x_3+9x_4=6, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4. \end{cases}$

10) $\begin{cases} -9x_1+6x_2+7x_3+10x_4=17, \\ -6x_1+4x_2+2x_3+3x_4=5, \\ -3x_1+2x_2-11x_3-15x_4=-26, \\ 3x_1+4x_2-x_3-11x_4=-12. \end{cases}$

c) დაადგინეთ თავსებადია თუ არა შემდეგი განტოლებათა სისტემები და თავსებადობის შემთხვევაში ამოხსენით ისინი:

1) $\begin{cases} 18x_1+6x_2+3x_3+2x_4=15, \\ -12x_1-3x_2-3x_3+3x_4=-6, \\ 4x_1+5x_2+2x_3+3x_4=3, \\ x_1+4x_2+x_3+4x_4=2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} -6x_1+8x_2-5x_3-x_4=9, \\ -2x_1+4x_2+7x_3+3x_4=1, \\ -3x_1+5x_2+4x_3+2x_4=3, \\ -3x_1+7x_2+17x_3+7x_4=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4, \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+3x_3=7. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9, \\ 8x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11. \end{cases}$

§ 8. ჩასმები

ვთქვათ $X=\{1,2,...,n\}$.

განსაზღვრება 1. X სიმრავლის თავისთავზე ნებისმიერ ბიექციას ჩასმა ეწოდება.

შემდგომში X სიმრავლეზე ყველა ჩასმათა სიმრავლეს S_n სიმბოლოთი აღვნიშნავთ. ამასთან თუ $\varphi\in S_n$, მაშინ φ ჩასმას წარმოვადგენთ შემდეგი სახით:

$$\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n\\ \varphi(1) & \varphi(2) & ... & \varphi(n)\end{pmatrix}.$$

ჩასმებს

$$e=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n\\ 1 & 2 & ... & n\end{pmatrix} \text{ და } \varphi^{-1}=\begin{pmatrix}\varphi(1) & \varphi(2) & ... & \varphi(n)\\ 1 & 2 & ... & n\end{pmatrix}$$

შესაბამისად, ერთეულოვან და φ ჩასმის შებრუნებულ ჩასმას უწოდებენ, რადგანაც $\varphi\cdot e=e\cdot\varphi=\varphi$ და $\varphi\cdot\varphi^{-1}=\varphi^{-1}\cdot\varphi=e$ ყოველი $\varphi\in S_n$ ჩასმისათვის.

ახლა ვთქვათ $i,j\in X\left(i\neq j\right)$. თუ φ ჩასმა აკმაყოფილებს პირობებს $\varphi(i)=j$, $\varphi\left(j\right)=i$ და $\varphi\left(t\right)=t$ ყოველი $t\in X$ რიცხვისათვის, რომელიც განსხვავებულია i და j რიცხვებისაგან, მაშინ φ ჩასმას ტრანსპოზიცია ეწოდება.

განსაზღვრება 2. იტყვიან, რომ φ ჩასმაში i და j რიცხვები ქმნიან ინვერსიას, თუ $\dfrac{i-j}{\varphi(i)-\varphi(j)}<0$.

შევნიშნოთ, რომ i და j რიცხვები φ ჩასმაში ქმნიან ინვერსიას, თუ φ ჩასმის რომელიმე სტრიქონში i რიცხვი გვხდება პირველად ვიდრე j რიცხვი და $i>j$.

განსაზღვრება 3. φ ჩასმას ლუწი ეწოდება, თუ φ ჩასმაში ინვერსიათა რიცხვი ლუწია, კენტი ეწოდება, თუ φ ჩასმაში ინვერსიათა

რიცხვი კენტია.

ცხადია, რომ ერთეულოვანი ჩასმა ლუწი ჩასმაა, რადგანაც e ჩასმაში ინვერსიათა რიცხვი ნულის ტოლია.

ვთქვათ R ყველა რაციონალური რიცხვების სიმრავლეა; $a \in R$ და $\theta' : R \to \{-1, 0, 1\}$ ასახვაა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\theta'(a) = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

ადვილად შემოწმდება, რომ ყოველი $a, b \in R$ რიცხვებისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\theta'(a \cdot b) = \theta'(a) \cdot \theta'(b),$$

ე.ი. სხვანაირად რომ ვთქვათ θ' მულტიპლიკაციური ასახვაა.

ახლა დავუშვათ, რომ $\theta : S_n \to \{-1, 1\}$ ისეთი ასახვაა, რომ $\theta(\varphi) = 1$, თუ φ ლუწი ჩასმაა და $\theta(\varphi) = -1$, თუ φ კენტი ჩასმაა.

ცხადია, რომ

$$\theta(\varphi) = \prod_{i,j \in X,\, i \neq j} \theta'\left(\frac{i-j}{\varphi(i) - \varphi(j)}\right). \qquad ...(1)$$

თეორემა 1. თუ τ ჩასმა ტრანსპოზიციაა, მაშინ იგი კენტი ჩასმაა.

დამტკიცება. ვთქვათ $i, j \in X$, $i < j$ და

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

ჩასმა ტრანსპოზიციაა. ადვილად შემოწმდება, რომ მოცემულ ჩასმაში ინვერსიას წარმოქმნიან $\{j, i+k\}$, $\{i+k, i\}$ და $\{j, i\}$ წყვილები, სადაც $k = 1, 2, \dots, (j-i) - 1$. მართლაც

$$\theta'\left(\frac{j-(i+k)}{\tau(j) - \tau(i+k)}\right) = \theta'\left(\frac{j-(i+k)}{i-(i+k)}\right) = -1,$$

$$\theta'\left(\frac{(i+k)-i}{\tau(i+k)-\tau(i)}\right)=\theta'\left(\frac{(i+k)-i}{(i+k)-j}\right)=-1$$

რადგანაც $j-(i+k)>0$, $i-(i+k)<0$ და $(i+k)-i>0$, $(i+k)-j<0$.

რაც შეეხება ზემოთ მოყვანილი წყვილებისაგან განსხვავებულ დანარჩენ წყვილებს, ისინი τ ჩასმაში ინვერსიას არ ქმნიან.

ამგვარად, τ ჩასმაში ინვერსიათა რიცხვი ტოლი იქნება

$$((j-i)-1)+((j-i)-1)+1=2\cdot(j-i)-1,$$

ე.ი. იგი ყოველთვის კენტი რიცხვია. ეს ნიშნავს, რომ τ კენტი ჩასმაა. □.

თეორემა 2. θ ასახვისათვის სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) θ ასახვა მულტიპლიკაციურია;

b) თუ τ ჩასმა ტრანსპოზიციაა, მაშინ $\theta(\tau)=-1$;

c) φ ჩასმისათვის სამართლიანია ტოლობა $\theta(\varphi)=\theta(\varphi^{-1})$;

d) თუ τ ჩასმა ტრანსპოზიციაა და φ ნებისმიერი ჩასმაა, მაშინ $\theta(\tau\cdot\varphi)= =\theta(\varphi\cdot\tau)=-\theta(\varphi)$;

e) თუ φ და ψ ჩასმებიდან ორივე ერთდროულად ლუწია ან კენტი, მაშინ მათი ნამრავლი ლუწი ჩასმაა;

f) თუ φ და ψ ჩასმებიდან ერთი ლუწია და მეორე კენტი, მაშინ მათი ნამრავლი კენტი ჩასმაა.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ a) წინადადება. მართლაც ვთქვათ $\varphi,\psi\in S_n$,

$$\psi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \psi(1) & \psi(2) & \dots & \psi(n)\end{pmatrix}$$

და

$$\varphi\cdot\psi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \varphi(\psi(1)) & \varphi(\psi(2)) & \dots & \varphi(\psi(n))\end{pmatrix}$$

მეორეს მხრივ, რადგან $X=\{\psi(1),\psi(2),...,\psi(n)\}$, ამიტომ φ ჩასმა შეიძლება წარმოვადგინოთ სახით

$$\varphi=\begin{pmatrix} \psi(1) & \psi(2) & ... & \psi(n) \\ \varphi(\psi(1)) & \varphi(\psi(2)) & ... & \varphi(\psi(n)) \end{pmatrix}.$$

ამიტომაც (1) ტოლობის თანახმად მივიღებთ:

$$\theta(\varphi)=\prod_{i,j\in X,\, i\neq j}\theta'\left(\frac{\psi(i)-\psi(j)}{\varphi(\psi(i))-\varphi(\psi(j))}\right).$$

ახლა თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ θ' ასახვა მულტიპლიკაციურია, გვექნება

$$\theta(\varphi)\cdot\theta(\psi)=\left(\prod_{i,j\in X,\, i\neq j}\theta'\left(\frac{\psi(i)-\psi(j)}{\varphi(\psi(i))-\varphi(\psi(j))}\right)\right)\cdot\left(\prod_{i,j\in X,\, i\neq j}\theta'\left(\frac{i-j}{\psi(i)-\psi(j)}\right)\right)=$$

$$=\prod_{i,j\in X,\, i\neq j}\theta'\left(\frac{\psi(i)-\psi(j)}{\varphi(\psi(i))-\varphi(\psi(j))}\cdot\frac{i-j}{\psi(i)-\psi(j)}\right)=$$

$$=\prod_{i,j\in X,\, i\neq j}\theta'\left(\frac{i-j}{\varphi(\psi(i))-\varphi(\psi(j))}\right)=\theta(\varphi\cdot\psi),$$

ე.ი. θ ასახვა მულტიპლიკაციურია. □

b) წინადადების სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1-დან.

ახლა თუ φ ნებისმიერი ჩასმაა, მაშინ თანახმად a) წინადადებისა გვექნება $1=\theta(e)=\theta(\varphi\cdot\varphi^{-1})=\theta(\varphi)\cdot\theta(\varphi^{-1})$, ე.ი. $\theta(\varphi)\cdot\theta(\varphi^{-1})=1$. აქედან θ ასახვის განსაზღვრის თანახმად გვექნება $\theta(\varphi)=\theta(\varphi^{-1})$. □

თუ τ ჩასმა ტრანსპოზიციაა და φ ნებისმიერი ჩასმაა, მაშინ

$$\theta(\tau\cdot\varphi)=\theta(\tau)\cdot\theta(\varphi)=(-1)\cdot\theta(\varphi)=-\theta(\varphi),$$

$$\theta(\varphi\cdot\tau)=\theta(\varphi)\cdot\theta(\tau)=\theta(\varphi)\cdot(-1)=-\theta(\varphi),$$

ე.ი. $\theta(\tau\cdot\varphi)=\theta(\varphi\cdot\tau)=-\theta(\varphi)$. □

თუ φ და ψ ჩასმებიდან ორივე ერთდროულად ლუწია ან კენტი, მაშინ შესაბამისად გვექნება:

$$\theta(\varphi\cdot\psi)=\theta(\varphi)\cdot\theta(\psi)=1\cdot1=1,\ \theta(\varphi\cdot\psi)=\theta(\varphi)\cdot\theta(\psi)=(-1)\cdot(-1)=1.$$

ბოლო ტოლობები გვიჩვენებს, რომ მოცემულ ჩასმათა ნამრავლი ლუწი ჩასმაა. □

ანალოგიურად დამტკიცდება f) წინადადების სამართლიანობა. □

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

a) იპოვეთ φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5 და φ_6 ჩასმებში ინვერსიათა რიცხვი და გამოთვალეთ $\theta(\varphi_1)$, $\theta(\varphi_2)$, $\theta(\varphi_3)$, $\theta(\varphi_4)$ $\theta(\varphi_5)$ და $\theta(\varphi_6)$, თუ

1) $\varphi_1=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\\6\,5\,4\,3\,2\,1\end{pmatrix}$, 2) $\varphi_2=\begin{pmatrix}1&6&3&4&5&2\\6&3&4&5&2&1\end{pmatrix}$, 3) $\varphi_3=\begin{pmatrix}1\,2\,5\,4\,6\,3\\6\,5\,4\,3\,2\,1\end{pmatrix}$,

4) $\varphi_4=\begin{pmatrix}1&7&3&4&5&6&2&8\\8&7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$, 5) $\varphi_5=\begin{pmatrix}1&7&3&4&5&6&2&8&9\\8&7&6&5&4&3&2&9&1\end{pmatrix}$,

6) $\varphi_6=\begin{pmatrix}1&7&2&4&5&6&3&8\\8&7&6&4&5&3&2&1\end{pmatrix}$.

b) ვთქვათ $\varphi=\begin{pmatrix}1&6&3&4&5&2\\6&3&4&5&2&1\end{pmatrix}$. იპოვეთ φ^2, φ^3, φ^4, φ^5 და φ^6.

c) ვთქვათ $X=\{1,2,\ldots,n\}$ და S_n არის სიმრავლის ყველა ჩასმათა სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbf{S}_n=(S_n,\cdot,^{-1})$ ალგებრა, სადაც $(\cdot)$ ჩასმათა გამრავლების ოპერაციაა S_n სიმრავლეზე, ხოლო $(^{-1})$, უნარული ოპერაციაა S_n სიმრავლეზე, რომელიც ყოველ $\varphi\in S_n$ ელემენტს შეუსაბამებს φ^{-1} ელემენტს, ქმნის ჯგუფს.

d) ვთქვათ $X=\{1,2,\ldots,n\}$ და A_n არის S_n სიმრავლის ყველა ლუწ ჩასმათა სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ $\mathrm{A}_n=\left(A_n,\cdot,^{-1}\right)$ ალგებრა, სადაც $(\cdot)$ ჩასმათა გამრავლების ოპერაციაა A_n სიმრავლეზე, ხოლო $\left(^{-1}\right)$, უნარული პერაციაა A_n სიმრავლეზე, რომელიც ყოველ $\varphi\in A_n$ ელემენტს შეუსაბამებს φ^{-1} ელემენტს, ქმნის ჯგუფს.

e) იპოვეთ შემდეგ ჩასმათა ნამრავლი:

1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&1&5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&2&4\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&4&5&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&1&5&6&3\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&2&1\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&1&6&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&4&2&1&5\end{pmatrix}$.

f) იპოვეთ შემდეგ ჩასმათა ლუწკენტოვნება:

1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&6&4&7&2&1&3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&5&2&1&6&4&8&7\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}3&5&6&4&2&1&7\\2&4&1&7&6&5&3\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}2&7&5&4&8&3&6&1\\3&5&8&7&2&6&1&4\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}1\;2\;3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n-1\;n\\2\;4\;6\ldots1\;3\;5\ldots\ldots\ldots\ldots\end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix}1\;2\;3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n-1\;n\\1\;3\;5\ldots2\;4\;6\ldots\ldots\ldots\ldots\end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix}1\;2\;3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n-1\;n\\2\;4\;6\ldots1\;3\;5\ldots\ldots\ldots\ldots\end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\ldots n-1&n\\n&1&n-1&2\ldots\ldots\ldots\ldots&\end{pmatrix}$.

§9. დეტერმინანტები

ვთქვათ X ველია,

$$A=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

არის $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცა X ველზე, ხოლო S_n ყველა $n-$ური რიგის ჩასმების სიმრავლეა $\{1,2,\dots,n\}$ სიმრავლეზე. ყოველი $\varphi\in S_n$ ჩასმისათვის შევადგინოთ A მატრიცის ელემენტების

$$x_{1\varphi(1)}\cdot x_{2\varphi(2)}\cdots x_{n\varphi(n)} \qquad \dots(1)$$

ნამრავლები.

შევნიშნოთ, რომ (1) ნამრავლში ყოველი სტრიქონიდან და ყოველი სვეტიდან აღებულია მხოლოდ თითო ელემენტი. მათი რაოდენობა კი იმდენია, რამდენი ჩასმაც არსებობს $\{1,2,\dots,n\}$ სიმრავლეზე, ამიტომაც მათი რაოდენობა $n!=1\cdot2\cdots n$ -ის ტოლია.

განსაზღვრება 1. რიცხვს

$$\sum_{\varphi\in S_n}\theta(\varphi)\left(x_{1\varphi(1)}\cdot x_{2\varphi(2)}\cdots x_{n\varphi(n)}\right)$$

A მატრიცის დეტერმინანტი ეწოდება და აღნიშნავენ $|A|$ ან $\det(A)$ სიმბოლოებით. ამგვარად,

$$|A|=\sum_{\varphi\in S_n}\theta(\varphi)\left(x_{1\varphi(1)}\cdot x_{2\varphi(2)}\cdots x_{n\varphi(n)}\right). \qquad \dots(2)$$

განსაზღვრება 2. ვთქვათ $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ არიან X ველის რომელიღაც ელემენტები. იტყვიან, რომ A მატრიცის $i-$ური $(1\le i\le n)$ სტრიქონი (სვეტი) არის A მატრიცის დანარჩენი სტრიქონების (სვეტების) წრფივი კომბინაცია, თუ

$$\begin{gathered} x_{ik}=\lambda_1x_{1k}+\lambda_2x_{2k}+\dots+\lambda_nx_{nk}, \\ \left(x_{ki}=\lambda_1x_{k1}+\lambda_2x_{k2}+\dots+\lambda_nx_{kn}\right) \end{gathered} \qquad \dots(3)$$

ყოველი k-სათვის, სადაც $k = 1,2,\dots,n$.

თეორემა 1. A მატრიცის დეტერმინანტისათვის სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) A მატრიცისა და მისი ტრანსპონირებული A' მატრიცის დეტერმინანტები ერთმანეტის ტოლია;

b) თუ A მატრიცის რომელიმე ორ სტრიქონს (სვეტს) ადგილებს შევუცვლით, მაშინ მისი დეტერმინანტი ნიშანს შეიცვლის;

c) თუ A მატრიცას ორი ერთნაირი სტრიქონი (სვეტი) აქვს, მაშინ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია;

d) თუ A მატრიცას რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტს გავამრავლებთ $\mathbf{X}$ ველის რომელიმე x ელემენტზე, მაშინ მოცემული მატრიცის დეტერმინანტიც x ელემენტზე გამრავლდება;

e) თუ A მატრიცას რომელიმე ორი სტრიქონი (სვეტი) პროპორციულია, მაშინ მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია;

f) ვთქვათ A მატრიცის $i-$ური სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტი $m-$რაოდენობის შესაკრებთა ჯამის ტოლია, მაშინ A მატრიცის დეტერმინანტი $m-$რაოდენობის დეტერმინანტთა ჯამის ტოლია, რომელთაგან პირველი დეტერმინანტის შესაბამისი მატრიცის $i-$ურ სტრიქონში ($i-$ურ სვეტში) ჯამის პირველი შესაკრებებია, მეორე მატრიცაში ჯამის მეორე შესაკრებები და ა.შ.;

g) A მატრიცის დეტერმინანტი არ შეიცვლება, თუ A მატრიცის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტს შესაბამისად დავუმატებთ A მატრიცას რომელიმე სხვა სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს გამრავლებულს $\mathbf{X}$ ველის რომელიმე ელემენტზე;

h) თუ A მატრიცის რომელიმე სტრიქონი (სვეტი) წარმოადგენს A მატრიცის დანარჩენი სტრიქონების (სვეტების) წრფივ კომბინაციას, მაშინ მოცემული მატრიცის დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

i) თუ A მატრიცის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ მატრიცის დეტერმინანტიც ნულის ტოლია;

k) თუ A სამკუთხა მატრიცაა, მაშინ მისი დეტერმინანტი მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტების ნამრავლის ტოლია;

დამტკიცება. ვთქვათ $A' = \left(y_{ij}\right)$, სადაც $i,j = 1,2,\dots,n$. თუ $\varphi \in S_n$,

მაშინ $\varphi^{-1} \in S_n$ და როცა φ გაირბენს S_n სიმრავლის ყოველ ელემენტს, ასევე φ^{-1} ჩასმაც გაირბენს S_n სიმრავლის ყოველ ელემენტს. გარდა ამისა

$$y_{1\varphi^{-1}(1)} \cdot y_{2\varphi^{-1}(2)} \cdots y_{n\varphi^{-1}(n)} =$$
$$= x_{\varphi^{-1}(1)\,1} \cdot x_{\varphi^{-1}(2)\,2} \cdots x_{\varphi^{-1}(n)\,n} = x_{1\varphi(1)} \cdot x_{2\varphi(2)} \cdots x_{n\varphi(n)},$$

რადგანაც $y_{ij} = x_{ji}$ ყოველი i და j – სათვის და

$$\left(\varphi^{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi^{-1}(1) & \varphi^{-1}(2) & \dots & \varphi^{-1}(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix} = \varphi.$$

ამიტომაც $\theta(\varphi) = \theta\left(\varphi^{-1}\right)$ ტოლობის თანახმად (იხ. თეორემა 8.2 წინადადება c)), გვექნება:

$$\left|A'\right| = \sum_{\varphi^{-1} \in S_n} \theta\left(\varphi^{-1}\right)\left(y_{1\varphi^{-1}(1)} \cdot y_{2\varphi^{-1}(2)} \cdots y_{n\varphi^{-1}(n)}\right) =$$
$$= \sum_{\varphi \in S_n} \theta(\varphi)\left(x_{1\varphi(1)} \cdot x_{2\varphi(2)} \cdots x_{n\varphi(n)}\right) = |A|. \ \square.$$

დამტკიცებული a) წინადადებიდან გამომდინარეობს, რომ დეტერმინანტის თვისება დარჩება სამართლიანი, თუ დეტერმინანტის მიმართ დამტკიცებულ თვისებაში სიტყვა სტრიქონს შევცვლით სიტყვა სვეტით.

ახლა A მატრიცის i და j $(1 \le i \ne j \le n)$ სტრიქონებს ადგილები შევუცვალოთ. $B = \left(y_{ij}\right)$ იყოს მიღებული მატრიცა. დავუშვათ, რომ τ არის ტრანსპოზიცია, რომელიც i რიცხვს გადაიყვანს j რიცხვში. მაშინ $y_{ik} = x_{i\tau(k)}$ ყოველი $i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$. ამიტომაც

$$|B| = \sum_{\varphi \in S_n} \theta(\varphi)\left(y_{1\varphi(1)} \cdot y_{2\varphi(2)} \cdots y_{n\varphi(n)}\right) = \sum_{\varphi \in S_n} \theta(\varphi)\left(x_{1\,\tau(\varphi(1))} \cdot x_{2\,\tau(\varphi(2))} \cdots x_{n\,\tau(\varphi(n))}\right).$$

თეორემა 2-ის d) წინადადების თანახმად $\theta(\tau \cdot \varphi) = -\theta(\varphi)$. გარდა ამისა, როცა φ ჩასმა გაირბენს S_n სიმრავლის ყველა ელემენტს, მაშინ

$\varphi' = \tau \cdot \varphi$ ჩასმაც გაირბენს S_n სიმრავლის ყველა ელემენტს. ამიტომაც გვექნება;

$$|B| = -\sum_{\varphi' \in S_n} \theta(\varphi')\left(x_{1\varphi'(1)}x_{2\varphi'(2)}\cdots x_{n\varphi'(n)}\right) = -|A|. \square.$$

ვთქვათ A მატრიცის i და j $(i \neq j)$ სტრიქონები ერთნაირია. $B = (y_{ij})$ იყოს მიღებული მატრიცა, რომელიც მიღებულია i და j სტრიქონების ადგილების ურთიერთ შეცვლით. ცხადია ამ შემთხვევაში $A = B$ და ამიტომაც $|B| = |A|$. მეორეს მხრივ b) წინადადების თანახმად $|B| = -|A|$. ამგვარად $|A| = -|A|$. საიდანაც მივიღებთ $2 \cdot |A| = 0$, ე.ი. $|A| = 0$. □

ახლა ვთქვათ B მატრიცაა, რომელიც მიღებულია A მატრიცისაგან მისი i-ური სტრიქონის ყველა ელემენტის X ველის x ელემენტზე გამრავლებით, ხოლო B მატრიცის დანარჩენი სტრიქონები ემთხვევა A მატრიცის შესაბამის სტრიქონებს. ასეთ შემთხვევაში

$$|B| = \sum_{\varphi \in S_n} \theta(\varphi)\left(x_{1\varphi(1)}x_{2\varphi(2)}\cdots\left(x \cdot x_{i\varphi(i)}\right)\cdots x_{n\varphi(n)}\right) =$$
$$= x \cdot \sum_{\varphi \in S_n} \theta(\varphi)\left(x_{1\varphi(1)}x_{2\varphi(2)}\cdots x_{i\varphi(i)}\cdots x_{n\varphi(n)}\right) = x \cdot |A|. \ \square$$

ვთქვათ A მატრიცის j სტრიქონის ყველა ელემენტი მიღებულია A მატრიცის i-ური სტრიქონის ყველა ელემენტის X ველის x ელემენტზე გამრავლებით. $|A| = x \cdot |B|$, სადაც B მატრიცის j-ური სტრიქონის ელემენტები მიღებულია A მატრიცის j-ური სტრიქონის ყველა ელემენტის x^{-1} ელემენტზე გამრავლებით, ხოლო B მატრიცის დანარჩენი სტრიქონები შესაბამისად ემთხვევიან A მატრიცის შესაბამის სტრიქონებს. ცხადია B მატრიცას i და j სტრიქონები ერთნაირი ექნება, c) წინადადების თანახმად $|B| = 0$. ამიტომაც $|A| = x \cdot |B| = x \cdot 0 = 0$. □

ვთქვათ A მატრიცის $i-$ური სტრიქონის ყველა ელემენტი წარმოიდგინება სახით:

$$x_{ik} = x_{ik}^{(1)} + \cdots + x_{ik}^{(m)} \quad (k = 1, 2, ..., m). \qquad ...(4)$$

ახლა $|A| = \sum_{\varphi \in S_n} \theta(\varphi)\left(x_{1\varphi(1)} x_{2\varphi(2)} \cdots x_{n\varphi(n)}\right)$ ტოლობის ყოველ შესაკრებში $x_{i\varphi(i)}$ თანამამრავლი შევცვალოთ მისი მნიშვნელობით მე-(4) ჯამიდან, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\varphi \in S_n} \theta(\varphi)\left(x_{1\varphi(1)} \cdot x_{2\varphi(2)} \cdots x_{n\varphi(n)}\right) = \\ &= \sum_{\varphi \in S_n} \theta(\varphi)\left(x_{1\varphi(1)} \cdot x_{2\varphi(2)} \cdots x_{i\varphi(i)}^{(1)} \cdots x_{n\varphi(n)}\right) + \\ &+ \sum_{\varphi \in S_n} \theta(\varphi)\left(x_{1\varphi(1)} \cdot x_{2\varphi(2)} \cdots x_{i\varphi(i)}^{(2)} \cdots x_{n\varphi(n)}\right) + \\ &+ \sum_{\varphi \in S_n} \theta(\varphi)\left(x_{1\varphi(1)} \cdot x_{2\varphi(2)} \cdots x_{i\varphi(i)}^{(m)} \cdots x_{n\varphi(n)}\right). \end{aligned}$$

შევცვლით რა ყველა ჯამებს შესაბამისი დეტერმინანტებით, მივიღებთ:

$$|A| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1}^{(1)} & x_{i2}^{(1)} & \dots & x_{in}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1}^{(m)} & x_{i2}^{(m)} & \dots & x_{in}^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}. \quad \square$$

ვთქვათ A მატრიცის $i-$ური სვეტის ყველა ელემენტზე შესაბამისად დამატებულია A მატრიცის $j-$ური $(i \neq j)$ სვეტის ელემენტები გამრავლებული X ველის x ელემენტზე. ასეთ შემთხვევაში თუ A მატრიცას წარმოვადგენთ $A = \left(A^1 \ \ A^2 \cdots A^i \cdots A^n\right)$ სახით, მაშინ მოცემული გარდაქმნებით მიღებულ B მატრიცა ექნება სახე $B = \left(A^1 \ \ A^2 \cdots A^i + xA^j \cdots A^n\right)$.

თანახმად c), f) და d) წინადადებისა გვექნება:

$$|B| = \left|\left(A^1 \ \ A^2 \cdots A^i \cdots A^n\right)\right| + x\left|\left(A^1 \ \ A^2 \cdots A^j \cdots A^n\right)\right|$$

ამ ჯამში მეორე დეტერმინანტი ნულის ტოლია, რადგან მას i და j სვეტები ერთნაირი აქვს. □

დავუშვათ, რომ A მატრიცის i – ური სტრიქონი წარმოადგენს A მატრიცის დანარჩენი სტრიქონების წრფივ კომბინაციას. B იყოს მატრიცა, რომლის i – ური სტრიქონის ყოველი ელემენტი წარმოდგენილია მე-(3) ტოლობებით, ხოლო B მატრიცის დანარჩენი სტრიქონები შესაბამისად ემთხვევა A მატრიცის შესაბამის სტრიქონებს. ცხადია $A = B$.

მეორეს მხრივ, თანახმად f) წინადადებისა B მატრიცის დეტერმინანტი n – რაოდენობის დეტერმინანტთა ჯამის ტოლია, რომელთაგან პირველი დეტერმინანტის შესაბამისი მატრიცის i – ურ სტრიქონში (3) ჯამის პირველი შესაკრებებია, მეორე მატრიცაში (3) ჯამის მეორე შესაკრებები და ა.შ. ასეთ შემთხვევაში თითოეულ მატრიცას ექნება ორი ერთნაირი სტრიქონი. თანახმად c) წინადადებისა, მათი დეტერმინანტები ნულის ტოლია, ე.ი. $|A| = |B| = 0$. □

ახლა დავუშვათ, რომ A მატრიცის i – ური სტრიქონის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია. რადგან (1) ნამრავლში ყოველი სტრიქონიდან და ყოველი სვეტიდან თითო ელემენტი მაინცაა აღებული, ამიტომ ყოველი $\varphi \in S_n$ ჩასმისათვის $x_{1\varphi(1)} \cdot x_{2\varphi(2)} \cdots x_{n\varphi(n)}$ ნამრავლი თანამამრავლად შეიცავს $x_{i\varphi(i)} = 0$ ელემენტს, ამიტომაც $x_{1\varphi(1)} \cdot x_{2\varphi(2)} \cdots x_{n\varphi(n)} = 0$. ახლა თუ გავიხსენებთ მატრიცის დეტერმინანტის განსაზღვრას, მივიღებთ, რომ $|A| = 0$. □

ვთქვათ A სამკუთხა მატრიცაა და φ ნებისმიერი ჩასმაა. დავუშვათ, რომ $x_{i\varphi(i)} = 0$ ყოველი $1 \le i < \varphi(i) \le n$ (მთავარი დიაგონალის ზემოთ მდებარე ყელა ელემენტი ნულია). დაშვებიდან გამომდინარე, A მატრიცის $x_{i\varphi(i)}$ ელემენტი შეიძლება იყოს ნულისაგან განსხვავებული, როცა $1 \le \varphi(i) \le i \le n$. ამგვარად, როცა $i = 1$, მაშინ პირობიდან

$1 \leq \varphi(1) \leq i$ მივიღებთ $\varphi(1)=1$, როცა $i=2$, მაშინ იგივე პირობიდან გვექნება $\varphi(2) \in \{1,2\}$. მაგრამ $\varphi(2)=1$ არ შეიძლება, რადგან φ ბიექციაა, ე.ი. $\varphi(2)=2$ და ა. შ. მივიღებთ, რომ როცა $i=n$, მაშინ $\varphi(n)=n$. ამგვარად, ნულისაგან განსხვავებული შეიძლება იყოს მხოლოდ $x_{11} \cdot x_{22} \cdots x_{nn}$ ნამრავლი. ახლა, თუ e ერთეულოვანი ჩასმაა, მაშინ

$$|A| = \theta(e)\left(x_{1e(1)} \cdot x_{2e(2)} \cdots x_{ne(n)}\right) = 1 \cdot \left(x_{11} \cdot x_{22} \cdots x_{nn}\right) = x_{11} \cdot x_{22} \cdots x_{nn}. \ \square$$

მინორები და ალგებრული დამატებები

ვთქვათ X ველზე განსაზღვრულ A მარტიცა წარმოდგენილია (1) სახით.

განსაზღვრება 3. A მარტიცის $k-$ური რიგის ქვემატრიცის დეტერმინანტს A მარტიცის $k-$ური რიგის მინორი ეწოდება.

განსაზღვრება 4. A მარტიცის იმ M_{ik} ქვემატრიცის დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება A მარტიცის i სტრიქონისა და k სვეტის ამოშლით, x_{ik} ელემენტის შესაბამისი მინორი ეწოდება, ხოლო X ველის

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$$

ელემენტს x_{ik} ელემენტის ალგებრული დამატება ეწოდება.

თეორემა 2. ვთქვათ

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

X ველზე განსაზღვრული მატრიცაა და $1 \leq i, j \leq n$. მაშინ

$$x_{i1}A_{j1} + x_{i2}A_{j2} + \cdots + x_{in}A_{jn} = |A|, \quad x_{1i}A_{1j} + x_{2i}A_{2j} + \cdots + x_{ni}A_{nj} = |A|,$$

თუ $i=j$ და $x_{i1}A_{j1} + x_{i2}A_{j2} + \cdots + x_{in}A_{jn} = 0, \quad x_{1i}A_{1j} + x_{2i}A_{2j} + \cdots + x_{ni}A_{nj} = 0,$

თუ $i \neq j$, ე.ი. A მატრიცის i სტრიქონის (i სვეტის) ელემენტების ნამრავლთა ჯამი შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე მოცემული მატრიცის დეტერმინანტის ტოლია, ხოლო A მატრიცის i სტრიქონის (i სვეტის) ელემენტების ნამრავლთა ჯამი სხვა სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნულის ტოლია.

ჩამოყალიბებული თეორემის დამტკიცება მკითხველისათვის მიგვინდია.

A მატრიცის დეტერმინანტის წარმოდგენას მე-(5) სახის ფორმულებით A მატრიცის დეტერმინანტის i სტრიქონის (i სვეტის) ელემენტების მიმართ დაშლა ეწოდება.

სავარჯიშოები

a) გამოიყვანეთ მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტების გამოსათვლელი ფორმულები.

b) გამოთვალეთ შემდეგი დეტერმინანტები:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} a & c-di \\ c+di & b \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 34 & 102 \\ 51 & 85 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} tg\alpha & -1 \\ 1 & tg\alpha \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; 11) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 13) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$;

14) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 15) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; 16) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$;

17) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; 18) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; 19) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

20) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; 21) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; 22) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

23) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; 24) $\begin{vmatrix} -5 & -7 & -2 & 2 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 6 & -1 & 15 & -5 \\ 5 & -4 & 10 & 1 & 14 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$; 25) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;

26) $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$; 27) $\begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 15 \\ 15 & 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 & 30 \end{vmatrix}$; 28) $\begin{vmatrix} 14 & 13 & 3 & -13 \\ -7 & -4 & 2 & 10 \\ 21 & 23 & 0 & -23 \\ 7 & 12 & -2 & -6 \end{vmatrix}$.

c) როგორ შეიცვლება $n-$ური რიგის კვადრატული A მატრიცის დეტერმინანტი, თუ მოცემული მატრიცის ყოველ ელემენტს შევცვლით მისი მოპირდაპირე ელემენტით.

d) ვთქვათ A არის $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცა X ველზე და λ მოცემული ველის ელემენტია. აჩვენეთ, რომ $|\lambda A| = \lambda^n \cdot |A|$.

e) დაამტკიცეთ, რომ $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)\cdot(z-y)\cdot(z-x)$.

f) დაამტკიცეთ, რომ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)\cdot(z-y)\cdot(z-x)$.

g) ვთქვათ A არის $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცა $\mathbf{X}$ ველზე. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის $\left|A^n\right|=\left|A\right|^n$.

h) გამოთვალეთ $n-$ური რიგის დეტერმინანტები.

1) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} n!\cdot a_0 & (n-1)!\cdot a_1 & (n-2)!\cdot a_2 & \dots & a_n \\ -n & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

i) $b)$ ამოცანაში მოცემული მეჩვიდმეტე და მეოცე დეტერმინანტები დაშალეთ პირველი სტრიქონისა და მეოთხე სვეტის ელემენტების მიმართ, ხოლო მეცხრამეტე დეტერმინანტი მეორე სტრიქონისა და მეხუთე სვეტის მიმართ.

j) იპოვეთ იმ მესამე რიგის კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტის უდიდესი მნიშვნელობა, რომლის ელემენტებია:

1) 0 და 1;
2) -1 და 1.

k) აჩვენეთ, რომ $n>1$ რიგის კვადრატული A მატრიცის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, თუ მისი რომელიღაც k რაოდენობის სტრიქონისა და l $(k+l>n)$ რაოდენობის სვეტის გადაკვეთაში მდებარე ყველა ელემენტი ნულია.

§ 10. არითმეტიკული ვექტორული სივრცეები

ვთქვათ $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ ნებისმიერი ველია და

$$X^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,|\,x_1,x_2,\ldots,x_n\in X\}.$$

$(x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in X^n$ და $x\in X$. X^n სიმრავლეზე განვმარტოთ ბინარული $(+)$ და უნარული ω_x (X სიმრავლის ელემენტის X^n სიმრავლის ელემენტზე გამრავლება) ოპერაციები შემდეგნაირად:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n),$$

$$\omega_x(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x\cdot x_1,x\cdot x_2,\ldots,x\cdot x_n).$$

ვაჩვენოთ, რომ ალგებრა $\mathbf{X}^n=(X^n,+,\{\omega_x\,|\,x\in X\})$ ვექტორული სივრცეა $\mathbf{X}$ ველზე. მართლაც, ვთქვათ $\alpha,\beta,\gamma\in X^n$, სადაც $\alpha=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\beta=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $\gamma=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ და $x,y\in X$. მაშინ

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\\&=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)=\\&=(y_1+x_1,y_2+x_2,\ldots,y_n+x_n)=\\&=(y_1,y_2,\ldots,y_n)+(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\beta+\alpha,\end{aligned}$$

რადგანაც $\mathbf{X}$ ველში შეკრების ოპერაცია კომუტაციურია.

ასევე დამტკიცდება, რომ $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$, რადგანაც $\mathbf{X}$ ველში შეკრების ოპერაცია ასოციაციურია.

V სიმრავლეში შეკრების ოპერაციის მიმართ ნულის როლს ასრულებს $0=(0,0,\ldots,0)$ ელემენტი, სადაც 0 არის $\mathbf{X}$ ველის ნულოვანი ელემენტი, ხოლო α ელემენტის მოპირდაპირე $-\alpha$ ელემენტის როლს ასრულებს $-\alpha=\omega_{-1}(\alpha)=(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)$, სადაც -1 არის $\mathbf{X}$ ველის ერთეულოვანი ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტი.

მივიღეთ, რომ ალგებრა $(X^n,+,-)$, კომუტაციური ჯგუფია. აქ

$(-)$ უნარული ალგებრული ოპერაციაა X^n სიმრავლეზე, რომელიც X^n სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეუსაბამებს მის მოპირდაპირე ელემენტს შეკრების ოპერაციის მიმართ, ე.ი. $-\alpha = \omega_{-1}(\alpha)$.

მეორეს მხრივ,

$$\begin{aligned}\omega_{x\cdot y}(\alpha) = \omega_{x\cdot y}\big((x_1, x_2, \ldots, x_n)\big) = \\ = \big((x\cdot y)\cdot x_1, (x\cdot y)\cdot x_2, \ldots, (x\cdot y)\cdot x_n\big) = \\ = \big(x\cdot(y\cdot x_1), x\cdot(y\cdot x_2), \ldots, x\cdot(y\cdot x_n)\big) = \\ = \omega_x\big((y\cdot x_1, y\cdot x_2, \ldots, y\cdot x_n)\big) = \\ = \omega_x\big(\omega_y\big((x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)\big) = \omega_x\big(\omega_y(\alpha)\big),\end{aligned}$$

ე.ი. $\omega_{x\cdot y}(\alpha) = \omega_x\left(\omega_y(\alpha)\right)$, რადგან X ველში გამრავლების ოპერაცია ასოციაციურია.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$\omega_{x+y}(\alpha) = \omega_x(\alpha) + \omega_y(\alpha)$, ნებისმიერი $x, y \in X$ და $\alpha \in X^n$ ელემენტებისათვის;

$\omega_x(\alpha + \beta) = \omega_x(\alpha) + \omega_x(\beta)$, ნებისმიერი ω_x უნარული ოპერაციებისათვის და $\alpha, \beta \in X^n$ ელემენტებისათვის;

$\omega_{-1}(\alpha) = -\alpha$, სადაც -1 აღნიშნულია X ველის ერთეულოვანი ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტი.

მივიღეთ, რომ X^n ვექტორული სივრცეა. მას X ველზე n განზომილებიანი არითმეტიკული ვექტორული სივრცე ეწოდება. მის ელემენტებს კი ვექტორები ეწოდება.

განსაზღვრება 1. ვთქვათ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ არის X^n ვექტორული სივრცის ვექტორთა რომელიღაც სისტემა. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ ვექტორთა სისტემას ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ მოიძებნება ისეთი $x_1, x_2, \ldots, x_s \in X$ ელემენტები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და სრულდება ტოლობა $x_1\cdot\alpha_1 + x_2\cdot\alpha_2 + \cdots + x_s\cdot\alpha_s = 0$.

წინააღმდეგ შემთხვევაში კი $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ ვექტორთა სისტემას წრფივად დამოუკიდებელი ეწოდება, ე.ი. $x_1\cdot\alpha_1+x_2\cdot\alpha_2+\dots+x_s\cdot\alpha_s=0$ ტოლობას ადგილი ექნება მხოლოდ მაშინ, როცა $x_1=x_2=\dots=x_s=0$.

იტყვიან, რომ $\beta\in X^n$ ვექტორი არის $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ ვექტორთა სისტემის წრფივი კომბინაცია, თუ მოიძებნება ისეთი $x_1,x_2,...,x_s\in X$ ელემენტები, რომ $\beta=x_1\cdot\alpha_1+x_2\cdot\alpha_2+\dots+x_s\cdot\alpha_s$.

თეორემა 1. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) თუ ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემა შეიცავს ნულოვან ვექტორს, მაშინ იგი წრფივად დამოკიდებულია;

b) თუ ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემის რომელიმე ქვესისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ მოცემული ვექტორთა სისტემაც წრფივად დამოკიდებული იქნება;

c) წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემის ნებისმიერი ქვესისტემაც წრფივად დამოუკიდებელი იქნება;

d) ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემა მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება წრფივად დამოკიდებული, თუ მისი რომელიმე ვექტორი დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაციაა;

e) თუ ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s,\beta$ სისტემა წრფივად დამოკიდებული, მაშინ β ვექტორი $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ ვექტორთა წრფივი კომბინაციაა.

დამტკიცება. ვთქვათ ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემაში α_i $(1\le i\le s)$ ნულოვანი ვექტორია და $x_1,x_2,...,x_s$ ისეთი ელემენტებია X ველიდან, რომ $x_i\neq 0$, ხოლო ყველა სხვა დანარჩენი ელემენტი ნულის ტოლია. ასეთ შემთხვევაში გვექნება $x_1\cdot\alpha_1+x_2\cdot\alpha_2+\dots+x_s\cdot\alpha_s=0$, ე.ი. ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. □.

დავუშვათ, რომ ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემის $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_k}$

$(k \le s)$ ქვესისტემა წრფივად დამოკიდებულია. მაშინ მოიძებნებიან ისეთი $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ ელემენტები $\mathbf{X}$ ველიდან, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და ადგილი აქვს ტოლობას $x_{i_1} \cdot \alpha_{i_1} + x_{i_2} \cdot \alpha_{i_2} + \cdots + x_{i_k} \cdot \alpha_{i_k} = 0$. ახლა ვთქვათ $x_1, x_2, \ldots, x_s$ ისეთი ელემენტებია $\mathbf{X}$ ველიდან, რომ $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\} \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ და $\{x_1, x_2, \ldots, x_s\} \setminus \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$ სიმრავლის ყოველი ელემენტი ნულია. ასეთ შემთხვევაში გვექნება $x_1 \cdot \alpha_1 + x_2 \cdot \alpha_2 + \cdots + x_s \cdot \alpha_s = 0$, ე.ი. ვექტორთა $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. □

ვთქვათ, ვექტორთა $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. თუ მოცემული ვექტორთა სისტემის $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ $(k < s)$ ქვესისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ b) წინადადების თანახმად მოცემული ვექტორთა სისტემაც წრფივად დამოკიდებული იქნება, რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემის ნებისმიერი ქვესისტემაც წრფივად დამოუკიდებელი იქნება. □

ვთქვათ, ვექტორთა $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. მაშინ მოიძებნება ისეთი $x_1, x_2, \ldots, x_s \in X$ ელემენტები, რომელთაგან ერთი მაინც (მაგალითად $x_1 \neq 0$) განსხვავებულია ნულისაგან და სრულდება ტოლობა $x_1 \cdot \alpha_1 + x_2 \cdot \alpha_2 + \cdots + x_s \cdot \alpha_s = 0$. დაშვების თანახმად არსებობს x_1^{-1}, რადგან $\mathbf{X}$ ველია და $x_1 \neq 0$. ბოლო ტოლობიდან მივიღებთ

$$\alpha_1 = -\left(x_1^{-1} \cdot x_2\right) \cdot \alpha_2 - \cdots - \left(x_1^{-1} \cdot x_s\right) \cdot \alpha_s,$$

სადაც $-\left(x_1^{-1} \cdot x_2\right), \ldots, -\left(x_1^{-1} \cdot x_s\right) \in X$, ე.ი α_1 ვექტორი დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაციაა.

მეორეს მხვრივ, თუ $\alpha_1 = y_2 \cdot \alpha_2 + \dots + y_s \cdot \alpha_s$. რომელიღაც $y_2, \dots, y_s \in X$, მაშინ $(-1) \cdot \alpha_1 + y_2 \cdot \alpha_2 + \dots + y_s \cdot \alpha_s = 0$, ე.ი. ვექტორთა $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, რადგან $-1 \in X$ და $-1 \neq 0$. □

ვთქვათ ვექტორთა $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. თუ ვექტორთა $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ $x_1 \cdot \alpha_1 + x_2 \cdot \alpha_2 + \dots + x_s \cdot \alpha_s + x \cdot \beta = 0$, რომელიღაც $x_1, x_2, \dots, x_s, x \in X$ ელემენტებისათვის. თუ დავუშვებთ, რომ $x = 0$, მაშინ პირობიდან, რომ ვექტორთა $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, გვექნება $x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0$. ბოლო პირობა ვექტორთა $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ სისტემის წრფივად დამოკიდებულების პირობას ეწინააღმდეგება. მიღებული წინააღმდეგობა გვიჩვენებს, რომ $x \neq 0$. მაშინ $x_1 \cdot \alpha_1 + x_2 \cdot \alpha_2 + \dots + x_s \cdot \alpha_s + x \cdot \beta = 0$ ტოლობიდან მივიღებთ, რომ $\beta = -(x^{-1} \cdot x_1) \cdot \alpha_1 - (x^{-1} x_2) \cdot \alpha_2 - \dots - (x^{-1} \cdot x_s) \cdot \alpha_s$, ე.ი. β ვექტორი $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ვექტორთა წრფივი კომბინაციაა, რადგან $-(x^{-1} \cdot x_1), -(x^{-1} \cdot x_2), -(x^{-1} \cdot x_s) \in X$.

განსაზღვრება 2. ვექტორთა $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ და $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ სისტემებს ეწოდება ერთმანეთის ექვივალენტური, თუ პირველი სისტემის ყოველი ვექტორი არის მეორე სისტემის ვექტორთა წრფივი კომბინაცია და პირიქით მეორე სისტემის ყოველი ვექტორი არის პირველი სისტემის ვექტორთა წრფივი კომბინაცია.

განსაზღვრება 3. ვთქვათ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ვექტორთა რაღაც სისტემაა. სიმრავლეს

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \{x_1 \cdot \alpha_1 + x_2 \cdot \alpha_2 + \dots + x_s \cdot \alpha_s \mid x_1, x_2, \dots, x_s \in X\}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ვექტორებით წარმოქმნილი წრფივი გარსი ეწოდება.

ადვილად შემოწმდება, რომ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ვექტორებით წარმოქმნილი წრფივი $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ გარსი ვექტორული სივრცეა $\mathbf{X}$ ველზე.

თეორემა 2. ვთქვათ $L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ არის $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ ვექტორებით წარმოქმნილი წრფივი გარსი. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) თუ $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s,\beta_{s+1} \in L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$, მაშინ ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s,\beta_{s+1}$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია;

b) თუ $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s,\beta_k \in L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ და $k>s$, მაშინ ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,...,\beta_k$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია;

c) თუ $\beta_1,\beta_2,...,\beta_k \in L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ და ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,...,\beta_k$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებულია, მაშინ $k \le m$;

d) $\mathbf{X}$ ველზე $n-$განზომილებიანი არითმეტიკული ვექტორული სივრცის $n+1$ რაოდენობის ვექტორთა ნებისმიერი სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

e) თუ ორი სასრული ვექტორთა სისტემა ერთმანეთის ექვივალენტურია და თითოეული მათგანი წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ მათში შემავალი ვექტორების რიცხვი ერთნაირია.

დამტკიცება. გამოვიყენოთ ინდუქცია s რიცხვის მიმართ. თანახმად თეორემა 1-ის $a)$ წინადადებისა, თეორემა სამართლიანია, თუ ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s,\beta_{s+1}$ სისტემაში ერთი მაინც ნულოვანი ვექტორია. ამიტომ დავუშვათ, რომ ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s,\beta_{s+1}$ სისტემის ყოველი ვექტორი არანულოვანია..

თუ $s=1$, მაშინ პირობიდან $\beta_1,\beta_2 \in L(\alpha_1)$ მიიღება $\beta_1 = x_1\cdot\alpha_1$ და $\beta_2 = x_2\cdot\alpha_1$, რომელიღაც არანულოვანი $x_1,x_2 \in X$ ელემენტებისათვის. ბოლო ორი ტოლობიდან მივიღებთ $x_1^{-1}\cdot\beta_1 - x_2^{-1}\cdot\beta_2 = 0$, რადგანაც $\mathbf{X}$ ველია და $x_1 \ne 0$ და $x_2 \ne 0$. ამგვარად ვექტორთა β_1,β_2 სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

დავუშვათ, რომ თეორემა სამართლიანია, როცა $s=k\ge 2$, ე.ი. თუ $\beta_1,\beta_2,...,\beta_k,\beta_{k+1} \in L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)$ მაშინ ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,...,\beta_k,\beta_{k+1}$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

დავუშვათ, რომ $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{k+1},\beta_{k+2}\in L(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{k+1})$. მაშინ

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= x_{11}\cdot\alpha_1+x_{12}\cdot\alpha_2+\dots+x_{1\,k+1}\cdot\alpha_{k+1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\beta_{k+1} &= x_{k+1\,1}\cdot\alpha_1+x_{k+1\,2}\cdot\alpha_2+\dots+x_{k+1\,k+1}\cdot\alpha_{k+1},\\
\beta_{k+2} &= x_{k+2\,1}\cdot\alpha_1+x_{k+2\,2}\cdot\alpha_2+\dots+x_{k+2\,k+1}\cdot\alpha_{k+1},
\end{aligned} \quad \dots(1)$$

თუ ბოლო ტოლობების მარჯვენა მხარეში α_{k+1} ვექტორის ყველა $x_{i\,k+1}$ $(i=1,2,\dots,k+2)$ კოეფიციენტი ნულია, მაშინ $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{k+1}\in L(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k)$ და ინდუქციური დაშვების თანახმად ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{k+1}$ სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. აქედან თეორემა 1-ის $b)$ წინადადების თანახმად მივიღებთ, რომ ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_{k+1},\beta_{k+2}$ სისტემაც წრფივად დამოკიდებული იქნება.

ახლა თუ α_{k+1} ვექტორის რომელიმე კოეფიციენტი, მაგალითად, $x_{k+2\,k+1}$ ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ

$$\beta_{k+2}=x_{k+2\,1}\cdot\alpha_1+x_{k+2\,2}\cdot\alpha_2+\dots+x_{k+2\,k+1}\cdot\alpha_{k+1}$$

ტოლობიდან ვიპოვით რა α_{k+1} ვექტორს და შემდეგ (1) ტოლობის პირველი $k+1$ რაოდენობის ტოლობიდან გამოვრიცხავთ α_{k+1} ვექტორს, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
\beta_1-x_1\cdot\beta_{k+2} &= x'_{11}\cdot\alpha_1+x'_{12}\cdot\alpha_2+\dots+x'_{1k}\cdot\alpha_k\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\beta_{k+1}-x_{k+1}\cdot\beta_{k+2} &= x'_{k+1\,1}\cdot\alpha_1+x'_{k+1\,2}\cdot\alpha_2+\dots+x'_{k+1\,k}\cdot\alpha_k
\end{aligned} \quad \dots(2)$$

ინდუქციური დაშვების თანახმად (2) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ ვექტორთა სისტემა $\beta_1-x_1\cdot\beta_{k+2},\dots,\beta_{k+1}-x_{k+1}\cdot\beta_{k+2}$ წრფივად დამოკიდებულია, ე.ი. არსებობენ ისეთი $y_1,y_2,\dots,y_{k+1}\in X$ ელემენტები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და სრულდება ტოლობა

$$y_1\cdot(\beta_1-x_1\cdot\beta_{k+2})+\dots+y_{k+1}\cdot(\beta_{k+1}-x_{k+1}\cdot\beta_{k+2})=0.$$

ბოლო ტოლობიდან მივიღებთ $y_1 \cdot \beta_1 + \cdots + y_{k+1} \cdot \beta_{k+1} + y_{k+2} \cdot \beta_{k+2} = 0$, სადაც $y_{k+2} = -\left(y_1 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2 + \cdots + y_{k+1} \cdot x_{k+1}\right)$.

მივიღეთ, რომ ვექტორთა $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k+1}, \beta_{k+2}$ სისტემა წრფივად დამოიდებულია.

$b)$ და $c)$ წინადადებების სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს $a)$ წინადადების სამართლიანობიდან. □

$d)$ წინადადების სამართლიანობა გამომდინარეობა $a)$ წინადადების სამართლიანობიდან, რადგან ყოველი $n-$განზომილებიანი ვექტორი $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წარმოადგენს $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,\ldots,0)$,..., $e_n = (0,0,\ldots,1)$ ვექტორთა წრფივ კომბინაციას, კერძოდ

$$\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \cdots + x_n \cdot e_n . \ \square$$

ახლა დავამტკიცოთ $e)$ წინადადების სამართლიანობა. მართლაც, თეორემა სამართლიანია, როცა ვექტორთა ორივე სისტემა ცარიელია. ახლა ვთქვათ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ და $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ ერთმანეთის ექვივალენტური ვექტორთა ორი არაცარიელი სისტემაა და თითოეული მათგანი წრივად დამოუკიდებელია. მაშინ $c)$ წინადადების თანახმად $k \le s$ და $s \le k$, ე.ი. $k = s$. □

განსაზღვრება 3. ვთქვათ ვექტორთა $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ რაღაც სისტემაა. მოცემული ვექტორთა სისტემის $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ $(k \le s)$ ქვესისტემას ეწოდება ვექტორთა $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ სიტემის ბაზისი, თუ შესრულებულია ორი პირობა:

a) ვექტორთა $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია;

b) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ სისტემის ყოველი ვექტორი $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ ვექტორთა სისტემის წრფივი კომბინაციაა.

ვექტორთა სისტემის ბაზისში შემავალი ვექტორების რიცხვს მოცემული ვექტორთა სისტემის რანგი ეწოდება.

ჩვენ შემდგომში განვიხილავთ ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ სისტემის შემდეგი სახის გარდაქმნებს:

1) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ სისტემის ნებისმიერი ორი ვექტორის ადგილების ურთიერთშეცვლა;
2) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ სისტემის ნებისმიერი ვექტორის X ველის არანულოვან ელემენტზე გამრავლება;
3) $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ სისტემის ნებისმიერ ვექტორზე ამ სისტემის ნებისმიერი ვექტორის დამატება გამრავლებული X ველის რომელიღაც ელემენტზე.

ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ სისტემის 1), 2) და 3) სახის გარდაქმნებს, შემდეგში, ელემენტარულ გარდაქმნებს ვუწოდებთ.

თეორემა 3. ვექტორთა სისტემის ელემენტარული გარდაქმნებით ვექტორთა სისტემის რანგი არ იცვლება.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ სისტემა არის $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_m$ სისტემის ბაზისი, ხოლო ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ სისტემა მიღებულია ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ სისტემის ელემენტარული გარდაქმნებით. ვაჩვენოთ, რომ ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ სისტემაც წრფივად დამოუკიდებელი იქნება.

მართლაც, თუ ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ სისტემა მიღებულია ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ სისტემისაგან რომელიმე ორი ვექტორის ადგილების ურთიერთშეცვლით, ან $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ სისტემის რომელიმე ვექტორის $\mathrm{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ ველის რომელიმე ნულისაგან განსხვავებულ ელემენტზე გამრავლებით, მაშინ ცხადია, ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელი იქნება.

ახლა ვთქვათ $\beta_i=\alpha_i+x\alpha_j$, რომელიღაც $1\le i\ne j\le s$ და $x\in X$-სათვის, ხოლო $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_2,\ldots,\beta_{i-1}=\alpha_{i-1}$, $\beta_{i+1}=\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_s=\beta_s$. თუ რომე-

ლიდაც $x_1,x_2,...,x_s \in X$ სამართლიანია ტოლობა $x_1\cdot\beta_1+x_2\cdot\beta_2+...+x_s\cdot\beta_s=0$, მაშინ $x_1\cdot\alpha_1+\cdots+x_{i-1}\cdot\alpha_{i-1}+x_i\cdot(\alpha_i+x\cdot\alpha_j)+x_{i+1}\cdot\alpha_{i+1}+\cdots+x_s\cdot\alpha_s=0$. აქედან მივიღებთ $x_1\cdot\alpha_1+x_2\cdot\alpha_2+\cdots+(x_i\cdot x+x_j)\cdot\alpha_j+\cdots+x_s\cdot\alpha_s=0$. ბოლო ტოლობაში ვექტორთა ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია, რადგანაც ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. ამის გამო გვექნება $x_i = 0$, $x_i\cdot x+x_j=0$, ე.ი. $x_j=0$. ამგვარად, $x_1\cdot\beta_1+x_2\cdot\beta_2+...+x_s\cdot\beta_s=0$, მხოლოდ მაშინ, როცა $x_1=x_2=...=x_s=0$, ე.ი. ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

ცხადია, ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემის ყოველი ელემენტი ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ სისტემის წრფივი კომბინაციაა. აქედან გამომდინარე, ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ სისტემა იქნება ვექტორთა $\delta_1,\delta_2,...,\delta_m$ სისტემის ბაზისი. □

თეორემა 4. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) თუ $\beta_1,\beta_2,...,\beta_k \in L(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$, მაშინ ვექტორთა $\beta_1,\beta_2,...,\beta_k$ სისტემის რანგი ნაკლებია ან ტოლი ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემის რანგზე;

b) სასრული ვექტორთა სისტემის ნებისმიერი ქვესისტემის რანგი ნაკლებია ან ტოლი მოცემული სისტემის რანგზე;

c) ვექტორთა ორი ექვივალენტურ სისტემის რანგები ტოლია;

d) $n-$განზომილებიანი არითმეტიკული ვექტორული სივრცის ნებისმიერი სასრული რაოდენობის ვექტორთა სისტემის რანგი $n-$ს არ აღემატება;

e) თუ სასრული ვექტორთა სისტემის რანგი $r-$ის ტოლია, მაშინ მისი ნებისმიერი ქვესისტემა რომელიც $r-$ზე მეტი რაოდენობის ელემენტს შეიცავს წრფივად დამოკიდებულია;

f) თუ ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ სისტემის რანგი არის ვექტორთა

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, \beta$ სისტემის რანგის ტოლი, მაშინ β ვექტორი $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ ვექტორთა სისტემის წრფივი კომბინაციაა.

დამტკიცება. თეორემაში განხილული წინადადებები ზემოთ განხილული თეორემების შედეგებს წარმოადგენენ.

სავარჯიშოები

a) თუ V ვექტორული სივრცეა X ველზე, მაშინ ამ სივრციდან აღებული $\alpha = (x_1, y_1)$ და $\beta = (x_2, y_2)$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია X ველზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$.

b) თუ V არის $n-$განზომილებიანი ვექტორული სივრცე X ველზე, მაშინ ამ სივრციდან აღებული α და β ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია X ველზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა რომელიღაც $\lambda \in X$ ელემენტისათვის $\alpha = \lambda\beta$ ან $\beta = \lambda\alpha$.

c) რა შემთხვევაში გააჩნია ვექტორთა სისტემას ერთადერთი ბაზისი?

d) ქმნის თუ არა ყველა $n-$განზომილებიან $\alpha = (x_1, x_2, ..., x_n)$ $(x_1, x_2, ..., x_n \in R)$ ვექტორთა სიმრავლე ვექტორულ სივრცეს ნამდვილ რიცხვთა R ველზე, რომელთათვისაც $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$.

e) იპოვეთ α_1, α_2 და α_3 ვექტორთა წრფივი $3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 8\alpha_3$ კომბინაცია, თუ $\alpha_1 = (1,2,1,2)$, $\alpha_2 = (-1,-3,4,5)$, $\alpha_3 = (-5,0,2,3)$.

f) ამოხსენით ვექტორული $2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 - 7x = \alpha_4$ განტოლება, თუ $\alpha_1 = (-1,2,-3,4)$, $\alpha_2 = (-1,-1,-1,5)$, $\alpha_3 = (2,-5,-1,3)$, $\alpha_4 = (2,-1,-2,-1)$.

g) ამოხსენით ვექტორული $3(\alpha_1 - 2x) + 5(\alpha_2 + \alpha_3 - 3x) = 2(\alpha_3 - 4x)$ განტოლება, თუ $\alpha_1 = (4,3)$, $\alpha_2 = (2,-1)$, $\alpha_3 = (-1,4)$.

h) არიან თუ არა შემდეგი ვექტორთა სისტემები წრფივად დამოკიდებულნი ან დამოუკიდებელნი:

1) $\alpha_1=(2,3,5)$, $\alpha_2=(-2,-3,-5)$;

2) $\alpha_1=(2,3,5)$, $\alpha_2=(-2,-3,-6)$;

3) $\alpha_1=(2,3,5)$, $\alpha_2=(2,3,5)$, $\alpha_3=(-2,-3,-6)$;

i) აჩვენეთ, რომ ვექტორთა $\alpha_1=(2,3,5)$, $\alpha_2=(1,3,3)$, $\alpha_3=(1,2,3)$; სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

j) აჩვენეთ, რომ ნამდვილი ცვლადის ყველა ფუნქციათა ვექტორულ სივრცეში ვექტორთა $f_1(x), f_2(x),\dots,f_n(x)$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობენ ისეთი $a_1,a_2,\dots,a_n$ რიცხვები, რომ

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1)\dots f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2)\dots f_n(a_2) \\ \dots & \dots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n)\dots f_n(a_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

k) აჩვენეთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა $\mathrm{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ველზე ფუნქციათა შემდეგი სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია:

1) $\sin x,\ \cos x$; 2) $1,\ \sin x,\ \cos x$;

3) $\sin x,\ \sin 2x,\dots,\sin nx$;

4) $1,\ \cos x,\ \cos 2x,\dots,\cos nx$;

5) $1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\dots,\ \cos nx,\ \sin nx$;

6) $1,\ \sin x,\ \sin^2 x,\dots,\ \sin^n x$;

7) $1,\ \cos x,\ \cos^2 x,\dots,\cos^n x$.

l) ვთქვათ $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ წყვილ-წყვილად განსხვავებული ნამდვილი რიცხვებია. აჩვენეთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა $\mathrm{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ველზე ფუნქციათა შემდეგი სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია:

1) $e^{\alpha_1 x},\ e^{\alpha_2 x},\dots,e^{\alpha_n x}$; 2) $x^{\alpha_1},\ x^{\alpha_2},\dots,x^{\alpha_n}$;

3) $(1-\alpha_1 x)^{-1},\ (1-\alpha_2 x)^{-1},\dots,(1-\alpha_n x)^{-1}$.

§ 11. მატრიცის რანგი

ვთქვათ

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \qquad \dots(1)$$

$(m \times n)$ – განზომილებიანი მატრიცაა $\mathbf{X}$ ველზე. განვიხილოთ ვექტორთა სისტემები

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (x_{11}\ x_{12}\ \dots x_{1n}), & \beta_1 &= (x_{11}\ x_{21}\ \dots x_{m1}), \\ \alpha_2 &= (x_{21}\ x_{22}\ \dots x_{2n}), & \beta_2 &= (x_{12}\ x_{22}\ \dots x_{m2}), \\ &\dots\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_m &= (x_{m1}\ x_{m2}\ \dots x_{mn}), & \beta_n &= (x_{1n}\ x_{2n}\ \dots x_{mn}). \end{aligned} \qquad \dots(2)$$

განსაზღვრება 1. ვექტორთა $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ და $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ სისტემების რანგებს შესაბამისად A მატრიცის სტრიქონული და სვეტური რანგები ეწოდება.

A მატრიცის რანგის ქვეშ ესმით მისი სვეტური რანგი.

შემდგომში A მატრიცის რანგს $rang\,A$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ.

თეორემა 1. მატრიცის სტრიქონული და სვეტური რანგები ერთმანეთის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ A ნებისმიერი $(m \times n)$ – განზომილებიანი მატრიცაა $\mathbf{X}$ ველზე. თეორემა 6.1 - ის a) წინადადების თანახმად ყოველი A მატრიცა მისი არაგანსაკუთრებული გარდაქმნებით (ე.ი. ვექტორთა (2) სისტემების ელემენტარული გარდაქმნებით) დაყვანილ $(m \times n)$ – განზომილებიან $B = (y_{ij})$ მატრიცამდე მიიყვანება. B მატრიცის ყველა ელემენტი, გარდა მთავარი დიაგონალის ელემენტებისა, ნულის ტოლია, ხოლო $y_{11}, y_{22}, \dots, y_{ss} \in \{0,1\}$ (აქ s უმცირესი რიცხვია m და n რიცხვებს შორის). დავუშვათ, რომ $y_{i_1 i_1} = y_{i_2 i_2} = \dots = y_{i_r i_r} = 1 \ \ (1 \le r \le s)$ ელემენტებით ამოიწურება B მატრიცის ნულისაგან განსხვავებული

ყველა ელემენტი. თეორემა 10.3 - ის თანახმად B მატრიცის ნულისაგან განსხვავებული სტრიქონები და სვეტები განხილულნი, როგორც n და $m-$განზომილებიანი ვექტორთა სისტემები შესაბამისად ვექტორთა $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ და $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ სისტემების ბაზისები იქნებიან. მაგრამ B მატრიცის ნულისაგან განსხვავებული სტრიქონების (სვეტების) რიცხვი $r-$ის ტოლია, ე.ი. მოცემული A მატრიცის სტრიქონული და სვეტური რანგი $r-$ის ტოლია. □

დამტკიცებული თეორემიდან უშალოდ გამომდინარეობს, რომ A მარიცის რანგი მისი არაგანსაკუთრებული გარდაქმნებით მიღებული დაყვანილი B მატრიცის მთავარ დიაგონალზე ნულისაგან განსხვავებული ელემენტთა რაოდენობის ტოლია.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

ა) იპოვეთ შემდეგი მატრიცების რანგები:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 4 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix};\ 2)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};\ 3)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & -7 & 8 & 3 & -6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$4)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 15 \end{pmatrix};\ 5)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ 6)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};7)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$8)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ 9)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};10)\ \begin{pmatrix} 77 & 32 & 6 & 5 & 3 \\ 32 & 14 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$11)\ \begin{pmatrix} -6 & 4 & 8 & -1 & 6 \\ -5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & -5 & 3 \\ 9 & 6 & 12 & -6 & 9 \end{pmatrix};\ 12)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & 9 & 8 & -7 & 3 \\ -12 & -5 & -8 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ 13)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

14) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 16) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

17) $\begin{pmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \end{pmatrix}$, 19) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

20) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 21) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & -7 & -5 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 22) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

ხ) λ პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის იპოვეთ შემდეგი მატრიცების რანგები:

1) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 17 & 7 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & \lambda \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$.

§ 12. წრფივ განტოლებათა სისტემის თავსებადობა. კრამერის ფორმულები

ვთქვათ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad \dots(1)$$

n უცნობიანი m რაოდენობის წრფივ განტოლებათა სისტემაა $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ ველზე, ხოლო

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad \dots(2)$$

(1) განტოლებათა სისტემის მთავარი და გაფართოებული მატრიცებია.

თეორემა 1. (1) განტოლებათა სისტემა თავსებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოცემული განტოლებათა სისტემის მთავარი და გაფართოებული მატრიცების რანგები ერთმანეთის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \dots,\ x_n = \alpha_n$ არის (1) განტოლებათა სისტემის რომელიღაც ამონახსენი. მაშინ

$$\begin{aligned} & a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ & a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m. \end{aligned} \qquad \dots(3)$$

ახლა თუ

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \beta_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \beta_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots\dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad \dots(4)$$

მაშინ (3) ტოლობების თანახმად გვექნება, რომ $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n=\beta$, ე.ი. (2) მატრიცის ბოლო სვეტი წარმოადგენს A მატრიცის პირველი n სვეტის წრფივ კომბინაციას. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ A და B მატრიცის რანგები ერთმანეთის ტოლია.

მეორეს მხრივ, თუ A და B მატრიცის რანგები ერთმანეთის ტოლია, მაშინ $\mathbf{X}$ ველში მოიძებნებიან ისეთი $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ ელემენტები, რომ $\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_n\beta_n=\beta$. აქედან მივიღებთ, რომ

$$\begin{gathered}
a_{11}\lambda_1+a_{12}\lambda_2+\cdots+a_{1n}\lambda_n=b_1,\\
a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2+\cdots+a_{2n}\lambda_n=b_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{m1}\lambda_1+a_{m2}\lambda_2+\cdots+a_{mn}\lambda_n=b_m,
\end{gathered}$$

ე.ი. $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ ელემენტთა სისტემა არის (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი. □

დამტკიცებულ თეორემას კრონეკერ-კაპელის თეორემა ეწოდება.

დავუშვათ, რომ $rang\ A=rang\ B$. $rang\ A-$სა და (1) განტოლებათა სისტემაში შემავალი უცნობთა n რიცხვის მიმართ განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა:

1) $rang\ A<n$. მაშინ (1) განტოლებათა სისტემაში იქნება $n-rang\ A$ რაოდენობის თავისუფალი უცნობი. თავისუფალ უცნობთა ყველა შესაძლო მნიშვნელობათა რაოდენობა განსაზღვრავს (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა რაოდენობას. მათი რაოდენობა კი ერთზე მეტი იქნება, რადგანაც $\mathbf{X}=(X,+,-,\cdot,1)$ ველის X სიმრავლისათვის სრულდება $|X|\geq 2$ უტოლობა.
2) $rang\ A=n$. მაშინ (1) განტოლებათა სისტემას ექნება მხოლოდ ერთი ამონახსენი.

კრამერის ფორმულები

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ (1) განტოლებათა სისტემაში უცნობთა

და განტოლებათა რიცხვი ერთნაირია (ე.ი. $m=n$) და $|B|\neq 0$. B_j $(j=1,2,...,n)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ მატრიცა, რომელიც მიიღება B მატრიცისაგან, მისი j სვეტის ელემენტების $b_1, b_2, ..., b_n$ ელემენტებით შეცვლით, ე.ი.

$$B_j=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\dots\ a_{1j-1}\ b_1\ a_{1j}\dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\dots\ a_{2j-1}\ b_2\ a_{1j}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\dots\ a_{nj-1}\ b_n\ a_{1j}\dots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

თეორემა 2. თუ (1) განტოლებათა სისტემაში $m=n$ და $|B|\neq 0$, მაშინ (1) განტოლებათა სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც გამოისახება $x_j=\dfrac{|B_j|}{|B|}$ $(j=1,2,...,n)$ ფორმულებით.

დამტკიცება. ვთქვათ $i=1,2,...,n$. (1) განტოლებათა სისტემის ყოველი $i-$ური განტოლება გავამრავლოთ a_{ij} $(j=1,2,...,n)$ ელემენტების შესაბამის A_{ij} ალგებრულ დამატებებზე და წევრობრივ შევკრიბოთ. მივიღებთ

$$\begin{aligned} &(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)\cdot A_{1j}+ \\ &+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)\cdot A_{2j}+ \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)\cdot A_{ij}+ \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)\cdot A_{nj}=b_1\cdot A_{ij}+b_2\cdot A_{2j}+\cdots+b_n\cdot A_{nj}. \end{aligned}$$

თუ ბოლო ტოლობაში ფრჩხილებს გავხსნით და გამოვთვლით უცნობთა კოეფიციენტებს, გვექნება:

$$\begin{aligned} &(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\cdots+a_{n1}A_{nj})\cdot x_1+ \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj})\cdot x_j+ \end{aligned}$$

....
$$+\left(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\right)\cdot x_j=b_1\cdot A_{1j}+b_2\cdot A_{2j}+\cdots+b_n\cdot A_{nj}.$$

ცხადია, რომ $b_1\cdot A_{1j}+b_2\cdot A_{2j}+\cdots+b_n\cdot A_{nj}=\left|B_j\right|$. გარდა ამისა, ბოლო ტოლობის მარცხენა მხარეში თანახმად თეორემა 9.2-ისა ყველა უცნობის კოეფიციენტი, გარდა x_j-ისა, ნულის ტოლია, ხოლო x_j კოეფიციენტი კი მოცემული განტოლებათა სისტემის მთავარი B მატრიცის დეტერმინანტის ტოლია, ე.ი. $|B|\cdot x_j=\left|B_j\right|$. მოცემულობის თანახმად $|B|\neq 0$, ამიტომ, $x_j=\dfrac{\left|B_j\right|}{|B|}$, სადაც $(j=1,2,\ldots,n)$. □

ფორმულებს:

$$x_1=\frac{|B_1|}{|B|},\ x_2=\frac{|B_2|}{|B|},\ldots,\ x_n=\frac{|B_n|}{|B|}$$

კრამერის ფორმულები ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ (1) განტოლებათა სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს როგორც მატრიცული განტოლება. მართლაც, თუ

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\x_n\end{pmatrix} \text{ და } B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\b_m\end{pmatrix},$$

მაშინ (1) განტოლებათა სისტემას ჩაწერილს მატრიცული ფორმით ექნება $A\cdot x=B$ სახე. ამასთან, თუ A არის $n-$ური რიგის ისეთი კვადრატული მატრიცა, რომ $|A|\neq 0$, მაშინ $x=A^{-1}\cdot B$ იქნება მოცემული განტოლების ამონახსენი.

განსაზღვრება 1. თუ (1) განტოლებათა სისტემაში $b_1,b_2,\ldots,b_m$ ელემენტებს შევცვლით ნულებით მივიღებთ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad \dots(5)$$

განტოლებათა სისტემას, რომელსაც (1) განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემა ეწოდება.

თეორემა 3. სამართლიანია შემდეგი წინადადებანი:

a) თუ $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \dots,\ x_n = \alpha_n$ და $x_1 = \beta_1,\ x_2 = \beta_2, \dots,\ x_n = \beta_n$ არის (1) განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ორი ამონახსენი, მაშინ $x_1 = \alpha_1 - \beta_1,\quad x_2 = \alpha_2 - \beta_2, \dots, x_n = \alpha_n - \beta_n$ იქნება (1) განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემის ამონახსენი;

b) თუ $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \dots,\ x_n = \alpha_n$ არის (1) განტოლებათა სისტემის რომელიმე ამონახსენი, ხოლო $x_1 = \delta_1,\ x_2 = \delta_2, \dots,\ x_n = \delta_n$ (1) განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ამონახსენია, მაშინ

$$x_1 = \alpha_1 + \delta_1, x_2 = \alpha_2 + \delta_2, \dots, x_n = \alpha_n + \delta_n$$

იქნება (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი.

დამტკიცება. ვთქვათ

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \dots,\ x_n = \alpha_n \text{ და } x_1 = \beta_1,\ x_2 = \beta_2, \dots,\ x_2 = \beta_n$$

არის (1) განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ორი ამონახსენი და $1 \le i \le m$, მაშინ

$$\begin{aligned} & a_{i1}(\alpha_1 - \beta_1) + a_{i2}(\alpha_2 - \beta_2) + \cdots + a_{in}(\alpha_n - \beta_n) = \\ & = (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n) - (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n) = b_i - b_i = 0, \end{aligned}$$

ე.ი. $x_1 = \alpha_1 - \beta_1,\quad x_2 = \alpha_2 - \beta_2, \dots, x_n = \alpha_n - \beta_n$ იქნება (1) განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემის ამონახსენი.

ახლა თუ $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2,\dots, x_n=\alpha_n$ არის (1) განტოლებათა სისტემის რომელიმე ამონახსენი, ხოლო $x_1=\delta_1, x_2=\delta_2,\dots, x_n=\delta_n$ (1) განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ამონახსენია, მაშინ

$$a_{i1}(\alpha_1+\delta_1)+a_{i2}(\alpha_2+\delta_2)+\cdots+a_{in}(\alpha_n+\delta_n)=$$
$$=(a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\cdots+a_{in}\alpha_n)+(a_{i1}\delta_1+a_{i2}\delta_2+\cdots+a_{in}\delta_n)=b_i+0=b_i,$$

ე.ი. მაშინ $x_1=\alpha_1+\delta_1, x_2=\alpha_2+\delta_2,\dots, x_n=\alpha_n+\delta_n$ იქნება (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი. □

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

ა) დაადგინეთ არის თუ არა შემდეგი განტოლებათა სისტემები თავსებადი და თავსებადობის შემთხვევაში იპოვეთ მათი ამონახსნები:

1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ x_1-x_2-2x_3-2x_4+3x_5=0, \\ x_1+x_2+4x_3+4x_4+9x_5=0, \\ x_1-x_2+8x_3-8x_4+27x_5=0, \\ x_1+x_2+16x_3+16x_4+81x_5=0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ 3x_1-5x_2+4x_3=0, \\ x_1-17x_2+4x_3=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0, \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0, \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0, \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0, \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1+x_2+x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1, \\ 2x_1+x_2-2x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+2x_2-3x_3=1. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 = 8, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 8, \\ x_2 + 2x_4 = 2. \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$ 13) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

ხ) წრფივ განტოლებათა სისტემა წარმოადგინეთ მატრიცული განტოლების სახით და იპოვეთ მატრიცული განტოლების ამონახსენი.

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = -3, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8, \\ 2x_1 + 7x_2 - 8x_3 = -1, \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -4, \\ 9x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 13, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 14. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 33, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 24, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 6, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 6. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 1, \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -1. \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-2x_4=0, \\ 3x_1+8x_2-4x_4=4, \\ 2x_1+2x_2-4x_3-3x_4=1, \\ 3x_1+8x_2-1x_3-6x_4=2. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x_1+4x_2+x_3+2x_4=5, \\ 3x_1+5x_2+x_3+5x_4=13, \\ 6x_1+x_2+x_3+5x_4=16, \\ 3x_1+5x_2+3x_3+x_4=5. \end{cases}$

c) ამოხსენით კრამერის ფორმულების გამოყენებით შემდეგი განტოლებათა სისტემები:

1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=7, \\ 4x_1+2x_2-x_3=9, \\ 3x_1+x_2+x_3=4. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x_1+x_2-3x_3=-8, \\ x_1+x_2-7x_3=-16, \\ 6x_1+x_2+4x_3=6. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=21, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=28, \\ x_1+x_2-x_3=9. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 8x_1+x_2+x_3=-8, \\ 5x_1+x_2-3x_3=3, \\ 3x_1+2x_2-x_3=3. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4, \\ 2x_1-x_2+x_3-5x_4=-9, \\ 3x_1+2x_2-x_3-x_4=2, \\ 4x_1+2x_2+3x_3-5x_4=-9. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4=7, \\ 3x_1-3x_2+x_3+x_4=20, \\ x_1+2x_2+3x_3-4x_4=-17, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+4x_4=9. \end{cases}$

7) $\begin{cases} -2x_1+x_2+3x_3-4x_4=-\dfrac{9}{2}, \\ 3x_1+4x_2-5x_3+x_4=13, \\ x_1+5x_2-x_3+x_4=7, \\ 4x_1-2x_2+2x_3-x_4=-3. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4, \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-4x_4=-4, \\ x_1+4x_2-5x_3+x_4=-2, \\ x_1+5x_2-2x_3+x_4=9. \\ 4x_1+x_2+2x_3-x_4=8. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 7x_1-2x_2+x_3-x_4=23, \\ 3x_1+x_2+x_3+x_4=18, \\ x_1+2x_2+2x_3-4x_4=10, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+x_4=32. \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4, \\ 2x_1-3x_2+x_3-5x_4=-11, \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4=-2, \\ 4x_1+2x_2+3x_3-x_4=-6. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-2x_4=-1, \\ 3x_1+8x_2-4x_4=4, \\ 2x_1+2x_2-4x_3-3x_4=-5, \\ 3x_1+8x_2-1x_3-6x_4=1. \end{cases}$

§ 13. მატრიცების შებრუნებული მატრიცები

თუ

$$A=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$n-$ური რიგის კვადრატული და ერთეულოვანი მატრიცებია $\mathbf{X}$ ველზე, მაშინ $A\cdot E=E\cdot A=A$.

განსაზღვრება 1. თუ $\mathbf{X}$ ველზე, არსებობს ისეთი $n-$ური რიგის კვადრატული B მატრიცა, რომ $A\cdot B=B\cdot A=E$, მაშინ B მატრიცას A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა ეწოდება და A^{-1} სიმბოლოთი აღინიშნება. ცხადია მოცემულ პირობებში A მატრიცაც იქნება B მატრიცის შებრუნებული მატრიცა.

შევნიშნოთ, რომ A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა ცალსახად განისაზღვრება. მართლაც, თუ $A\cdot B'=B'\cdot A=E$, მაშინ

$$B\cdot A\cdot B'=(B\cdot A)\cdot B'=E\cdot B'=B',$$
$$B\cdot A\cdot B'=B\cdot(A\cdot B')=B\cdot E=B,$$

ე.ი. $B=B'$, რადგანაც მატრიცების გამრავლების ოპერაცია ასოციაციურია.

შემდეგში $\mathbf{X}$ ველზე ყველა ისეთი $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცების სიმრავლე, რომელთაც შებრუნებული მატრიცები გააჩნიათ $GL(n,X)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ჩვენი შემდგომი მიზანია ვიპოვოთ A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა მისი არსებობის შემთხვევაში.

შეგახსენებთ, რომ A_{ij} სიმბოლოთი აღნიშნულია A მატრიცის x_{ij} $(i,j=1,2,\dots,n)$ ელემენტის შესაბამისი ალგებრული დამატება.

თეორემა 1. თუ $|A|\neq 0$, მაშინ A მატრიცის შებრუნებული A^{-1} მატრიცა გამოითვლება ფორმულით

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

დამტკიცება. მართლაც, თუ $|A|\neq 0$ და

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

მაშინ თეორემა 9.2-ის თანახმად გვექნება

$$\frac{1}{|A|}\cdot\left(A^{*}\cdot A\right)=\frac{1}{|A|}\cdot\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

ე.ი. $\frac{1}{|A|}\cdot\left(A^{*}\cdot A\right)=E$.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $\frac{1}{|A|}\cdot\left(A\cdot A^{*}\right)=E$, ე.ი.

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}$. □

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცა. გვექნება:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} \begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2&3\\1&0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\0&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

განსაზღვრება 2. ვთქვათ k ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. $n-$ური რიგის $A=\left(x_{ij}\right)$ $\left(i,j=1,2,...,n\right)$ მატრიცას ეწოდება ელემენტარული მატრიცა, თუ იგი შემდეგი ორი პირობიდან აკმაყოფილებს მხოლოდ ერთს:

a) $x_{pp}=k$ რომელიღაც ფიქსირებული $1\le p\le n$ რიცხვისათვის; $x_{ii}=1$ ყოველი $1\le i\le n$ რიცხვისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $i\ne p$ და $x_{ij}=0$ ყოველი $1\le i\ne j\le n$;

b) $x_{ii}=1$ ყოველი $1\le i\le n$ რიცხვისათვის; $x_{pq}=k$, რომელიღაც ფიქსირებული $1\le p\ne q\le n$ რიცხვებისათვის; $x_{ij}=0$ ყოველი $1\le i\ne j\le n$ რიცხვებისათვის, რომელთათვისაც სრულდება პირობა $i\ne p, j\ne q$.

$n-$ური რიგის კადრატული მატრიცა, რომელიც აკმაყოფილებს განსაზღვრება 2-ის $b)$ პირობას - $E_{p,q,k}$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო თუ იგი აკმაყოფილებს განსაზღვრება 2-ის $a)$ პირობას, მაშინ იგი $E_{p,k}$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

თეორემა 1. ვთქვათ A არის $n-$ური რიგის კადრატული მატრიცა. თუ $E_{p,k}$ და $E_{p,q,k}$ $n-$ური რიგის ელემენტარული მატრიცებია, მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) $E_{p,k}\cdot A$ არის მატრიცა, რომლის p სტრიქონისაგან განსხვავებული ყოველი სტრიქონი A მატრიცის შესაბამისი სტრიქონის ტოლია, ხოლო p სტრიქონი მიღებულია A მატრიცის p სტრიქონის

ყველა ელემენტის X ველის ნულისაგან განსხვავებულ k ელემენტზე გამრავლებით;

b) $E_{p,q,k} \cdot A$ არის მატრიცა, რომლის p სტრიქონისაგან განსხვავებული ყოველი სტრიქონი A მატრიცის შესაბამისი სტრიქონის ტოლია, ხოლო p სტრიქონი მიღებულია A მატრიცის p სტრიქონის ყველა ელემენტზე q სტრიქონის შესაბამისი ელემენტების დამატებით გამრავლებული k რიცხვზე;

c) ყოველი ელემენტარული მატრიცისათვის არსებობს მისი შებრუნებული მატრიცა.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ მხოლოდ $c)$ წინადადების სამართლიანობა. მართლაც, თანახმად მოცემული თეორემის $a)$ წინადადებისა, გვექნება: $E_{p,k} \cdot E_{p,\frac{1}{k}} = E_{p,\frac{1}{k}} \cdot E_{p,k} = E$.

მეორეს მხრივ, თანახმად მოცემული თეორემის $b)$ წინადადებისა მივიღებთ $E_{p,q,k} \cdot E_{p,q,(-k)} = E_{p,q,(-k)} \cdot E_{p,q,k} = E$. □

თეორემა 2. ვთქვათ X ველია ნულოვანი 0 და ერთეულოვანი 1 ელემენტებით, ხოლო A არის $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცა X ველზე. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) A მატრიცა შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს სახით: $A = E_1 \cdot E_2 \cdots E_m \cdot B'$, სადაც $E_1, E_2, ..., E_m$ რომელიღაც $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცებია X ველზე, ხოლო $B' = \left(b'_{ij}\right)$ არის $n-$ური რიგის დაყვანილი მატრიცა X ველზე, რომლის დიაგონალური $b'_{11}, b'_{22}, ..., b'_{nn}$ ელემენტები აკმაყოფილებენ პირობას: $b'_{11}, b'_{22}, ..., b'_{nn} \in \{0,1\}$.

b) თუ A მატრიცის რანგი $n-$ის ტოლია, მაშინ $\left(E_m^{-1} E_{m-1}^{-1} \cdots E_1^{-1}\right) \cdot A = E$ და ამიტომ, $A^{-1} = E_m^{-1} E_{m-1}^{-1} \cdots E_1^{-1}$.

c) A მატრიცას მაშინ და მხოლოდ მაშინ გააჩნია შებრუნებული მატრიცა, როცა მისი დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავებულია.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ a) წინადადების სამართლიანობა. მართლაც, თეორემა 6.1-ის b) წინადადების თანახმად, ყოველი A მატრიცა მისი არაგანსაკუთრებული გარდაქმნებით სტრიქონების მიმართ მიიყვანება სტრიქონების მიმართ დაყვანილ $(n\times n)$–განზომილებიან $B'=\left(y'_{ij}\right)$ მატრიცამდე. თეორემა 1-ის $a)$ და $b)$ წინადადებიდან გამომდინარეობს ისეთი $E_1, E_2, \ldots, E_m$ ელემენტარული მატრიცების არსებობა, რომ:

$$A=E_1\cdot E_2\cdots E_m\cdot B'.$$

თუ A მატრიცის რანგი n–ის ტოლია, მაშინ თეორემა 10.3-ის თანახმად B' მატრიცის რანგიც n–ის ტოლია. ასეთ შემთხვევაში, B' იქნება n–ური რიგის ერთეულოვანი მატრიცა, ე.ი. $B'=E$. ახლა $b)$ წინადადების სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 1-ის $c)$ წინადადებიდან.

თუ A მატრიცის რანგი n–ის ტოლია, მაშინ მისი არცერთი სტრიქონი არ არის დანარჩენი სტრიქონების წრფივი კომბინაცია. აქედან და თეორემა 9.1-ის $h)$ წინადადების თანახმად $|A|\neq 0$, ახლა თუ მივიღებთ მხედველობაში $b)$ წინადადებას გვექნება, რომ A მატრიცას გააჩნია შებრუნებული მატრიცა.

პირიქით მტკიცება გამომდინარეობს $\left(E_m^{-1}\cdot E_{m-1}^{-1}\cdots E_1^{-1}\right)\cdot A=E$ ტოლობიდან. □

ვთქვათ $|A|\neq 0$. რომ გამოვთვალოთ n–ური რიგის კვადრატული A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა, ამისათვის

$$(A\,|\,E)=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცა მისი სტრიქონების არაგანსაკუთრებული გარდაქმნებით უნდა მივიყვანოთ

$$(E\,|\,B)=\begin{pmatrix}1\ 0 \ldots 0\ y_{11}\ y_{12} \ldots y_{1n}\\ 0\ 1 \ldots 0\ y_{21}\ y_{22} \ldots y_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 0\ 0 \ldots 1\ y_{n1}\ y_{n2} \ldots y_{nn}\end{pmatrix}$$

მატრიცამდე. ასეთ შემთხვევაში B მატრიცა იქნება A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა, ე.ი. $B=A^{-1}$.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცა. გვექნება:

$$\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 4\ 1000\\0\ 1\ 0\ 1\ 0100\\0\ 0\ 1\ 4\ 0010\\0\ 0\ 0\ 1\ 0001\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 0\ 100\ \ -4\\0\ 1\ 0\ 0\ 010\ \ -1\\0\ 0\ 1\ 0\ 001\ \ -4\\0\ 0\ 0\ 1\ 000\ \ \ 1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&0&0&1&0&-3&8\\0&1&0&0&0&1&0&-1\\0&0&1&0&0&0&1&-4\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-2&-3&10\\0&1&0&0&0&1&0&-1\\0&0&1&0&0&0&1&-4\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

ამიტომ,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&-3&10\\0&1&0&-1\\0&0&1&-4\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

მართლაც,

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&-3&10\\0&1&0&-1\\0&0&1&-4\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

მატრიცთა ნამრავლის დეტერმინანტი.

თეორემა 3. ორი $n-$განზომილებიანი კვადრატული მატრიცის ნამრავლის დეტერმინანტი თანამამრავლთა დეტერმინანტების ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. თეორემა 12.2-ის $a)$ წინადადების თანახმად, ყოველი $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცა შეიძლება წარმოვადგინოთ $A=E_1\cdot E_2\cdots E_m\cdot B'$ სახით, სადაც $B'=\left(y'_{ij}\right)$ სტრიქონების მიმართ დაყვანილი $n-$ური რიგის კვადრატული მატრიცაა, ხოლო E_i, $\left(i=1,2,\ldots,m\right)$ არის $n-$ური რიგის ელემენტარული მატრიცა.

რადგან ყოველი ელემენტარული მატრიცა სამკუთხა მატრიცაა, ამიტომ, თეორემა 9.1-ის $k)$ წინადადების თანახმად, მისი დეტერმინანტი დიაგონალზე მდგომი ელემენტების ნამრავლის ტოლია. ამიტომ,

$$\left|E_m\right|=\begin{cases}k_m, & E_i=E_{p,k_m},\\ 1, & E_i=E_{p,q,k_m}.\end{cases}$$

აქედან კი მივიღებთ:

$$\left|E_m\cdot B'\right|=\begin{cases}k_m\cdot\left|B'\right|, & E_i=E_{p,k_m},\\ \left|B'\right|, & E_i=E_{p,q,k_m}\end{cases} \quad \text{და} \quad \left|E_m\right|\cdot\left|B'\right|=\begin{cases}k_m\cdot\left|B'\right|, & E_i=E_{p,k_m},\\ \left|B'\right|, & E_i=E_{p,q,k_m}.\end{cases}$$

ე.ი. $\left|E_m\cdot B'\right|=\left|E_m\right|\cdot\left|B'\right|$.

ახლა თუ $E_m\cdot B'=B_m$, მაშინ, ანალოგიურად ზემოთ დამტკიცებულისა, გვექნება $\left|E_{m-1}\cdot B_m\right|=\left|E_{m-1}\right|\cdot\left|B_m\right|$, ე.ი. $\left|E_{m-1}\cdot E_m\cdot B'\right|=\left|E_{m-1}\right|\cdot\left|E_m\right|\cdot\left|B'\right|$. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ სასრული ნაბიჯის შემდეგ მივიღებთ

$$\left|E_1\cdot E_2\cdot\cdots\cdot E_m\cdot B'\right|=\left|E_1\right|\cdot\left|E_2\right|\cdot\cdots\cdot\left|E_m\right|\cdot\left|B'\right|.$$

A და B მოცემული მატრიცების მიმართ განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

1) A მატრიცის სტრიქონები წრფივად დამოუკიდებელნი არიან. ასეთ შემთხვევაში A მატრიცის რანგი $n-$ის ტოლია და თანახმად 12.2 თეო-

რემისა, სამართლიანია ტოლობა $A=E_1\cdot E_2\cdots E_m\cdot E$, სადაც E არის $n-$ური რიგის ერთეულოვანი მატრიცა, ე.ი. $A=E_1\cdot E_2\cdots E_m$ და ამიტომ:

$$|A\cdot B|=|E_1\cdot E_2\cdot\dots\cdot E_m\cdot B|=|E_1\cdot E_2\cdot\dots\cdot E_m|\cdot|B|=|A|\cdot|B|.$$

2) A მატრიცის სტრიქონები წრფივად დამოკიდებულნი არიან. ამ შემთხვევაში თანახმად 9.1 თეორემის $h)$ წინადადებისა გვექნება, რომ $|A|=0$ და ამიტომაც $|A|\cdot|B|=0\cdot|B|=0$.

მეორეს მხრივ, მოცემულობის თანახმად, $A=E_1\cdot E_2\cdot\dots\cdot E_m\cdot B'$ ამიტომ, $E_m^{-1}\cdot E_{m-1}^{-1}\cdot\dots\cdot E_1^{-1}\cdot A=B'$ და ბოლო ტოლობის ორივე მხარის B მატრიცაზე გადამრავლებით მივიღებთ $E_m^{-1}\cdot E_{m-1}^{-1}\cdot\dots\cdot E_1^{-1}\cdot(A\cdot B)=B'\cdot B$. აქედან ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად გვექნება

$$\left|E_m^{-1}\right|\cdot\left|E_{m-1}^{-1}\right|\cdot\dots\cdot\left|E_1^{-1}\right|\cdot|A\cdot B|=|B'\cdot B|.$$

რადგან A მატრიცის სტრიქონები წრფივად დამოკიდებულნი არიან, ამიტომ B' მატრიცა შეიცავს ნულოვან სტრიქონს, აქედან გამომდინარე, $B'\cdot B$ მატრიცაც შეიცავს ნულოვან სტრიქონს და თანახმად 9.1 თეორემის $i)$ წინადადებისა, $|B'\cdot B|=0$, ე.ი.

$$\left|E_m^{-1}\right|\cdot\left|E_{m-1}^{-1}\right|\cdot\dots\cdot\left|E_1^{-1}\right|\cdot|A\cdot B|=0.$$

გარდა ამისა, ელემენტარული მატრიცების დეტერმინანტები ყოველთვის ნულისაგან განსხვავებულია. ამის გამო, ბოლო ტოლობიდან მივიღებთ, რომ $|A\cdot B|=0$. ახლა, თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ $|A|\cdot|B|=0$, მაშინ გვექნება, რომ $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$. □

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

ა) იპოვეთ შემდეგი მატრიცების შებრუნებული მატრიცები:

1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$,

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) შემდეგი განტოლებებიდან:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

2) $x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot x \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

იპოვეთ x მატრიცა:

c) ამოხსენით განტოლებათა სისტემები:

1) $\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}. \end{cases}$

§ 14. ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემა

ვთქვათ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \quad \dots(1)$$

n უცნობიანი m რაოდენობის ერთგვაროვანი წრფივი განტოლებათა სისტემაა $\mathbf{X} = (X, +, -, \cdot, 1)$ ველზე, ხოლო

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \dots \ a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \dots \ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \ a_{m2} \dots \ a_{mn} \end{pmatrix}$$

მისი მთავარი მატრიცაა.

ვიტყვით, რომ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ვექტორი არის (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი, თუ უცნობთა $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \dots$, $x_n = \alpha_n$ მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ (1) განტოლებათა სისტემას.

ყველა ისეთი $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ვექტორთა სიმრავლე, რომლებიც არიან (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი, აღვნიშნოთ V_1 სიმბოლოთი.

ვთქვათ $\lambda \in X$ და ω_λ ისეთი ასახვაა V_1 სიმრავლისა ყველა $n-$განზომილებიან არითმეტიკულ ვექტორთა V სიმრავლეში, რომ ყოველი $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in V_1$ ვექტორისათვის

$$\omega_\lambda((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n) \in V.$$

თეორემა 1. თუ $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in V_1$ და $\lambda_1, \lambda_2 \in X$, მაშინ $\omega_{\lambda_1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \omega_{\lambda_2}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in V_1$.

დამტკიცება. ცხადია, შემდეგ ტოლობათა სამართლიანობა:

$$\omega_{\lambda_1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+\omega_{\lambda_2}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=$$
$$=\lambda_1\cdot(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+\lambda_2\cdot(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=$$
$$=(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\beta_1,\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\beta_2,\ldots,\lambda_1\alpha_n+\lambda_2\beta_n).$$

ახლა თუ $1\le i\le m$, და

$$x_1=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\beta_1,\ x_2=\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\beta_2,\ldots,\ x_n=\lambda_1\alpha_n+\lambda_2\beta_n,$$

მაშინ:

$$a_{i1}(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\beta_1)+a_{i2}(\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\beta_2)+\cdots+a_{in}(\lambda_1\alpha_n+\lambda_2\beta_n)=$$
$$=\lambda_1\cdot(a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\cdots+a_{in}\alpha_n)+\lambda_2\cdot(a_{i1}\beta_1+a_{i2}\beta_2+\cdots+a_{in}\beta_n)=$$
$$=\lambda_1\cdot 0+\lambda_2\cdot 0=0,$$

ე.ი. ვექტორი: $\omega_{\lambda_1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+\omega_{\lambda_2}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ არის (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი. ამიტომ, $\omega_{\lambda_1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)+\omega_{\lambda_2}(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)\in V_1$. □

თეორემა 2. $\mathrm{V}_1=(V_1,+,\{\omega_\lambda\mid\lambda\in X\})$ ალგებრა, სადაც $(+)$ არის V_1 სიმრავლის ვექტორთა შეკრების ოპერაცია, ვექტორული სივრცეა.

დამტკიცება. თანახმად თეორემა 1-ისა $(V_1,+,-)$ ალგებრა კომუტაციური ჯგუფია. V_1 სიმრავლე ჩაკეტილია ω_λ $(\lambda\in X)$ ოპერაციების მიმართ. გარდა ამისა, ადვილად შემოწმდება, რომ V_1 ალგებრა აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებსაც:

a) $\omega_{\lambda_1\cdot\lambda_2}(a)=\omega_{\lambda_1}(\omega_{\lambda_2}(a))$,

b) $\omega_{\lambda_1+\lambda_2}(a)=\omega_{\lambda_1}(a)+\omega_{\lambda_2}(a)$,

c) $\omega_{\lambda_1}(a+b)=\omega_{\lambda_1}(a)+\omega_{\lambda_1}(b)$,

d) $\omega_1(a)=a$

ყოველი $a=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $b=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)\in V_1$ ვექტორისათვის და $\lambda_1,\lambda_2\in X$ ელემენტებისათვის.

მივიღეთ, რომ $\mathrm{V}_1 = \left(V_1, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in X\}\right)$ ალგებრა არითმეტიკული ვექტორული სივრცეა.

განსაზღვრება 1. $\mathrm{V}_1 = \left(V_1, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda \in X\}\right)$ ვექტორული სივრცის ნებისმიერ ბაზისს (1) განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემა ეწოდება.

რადგან ვექტორული სივრცის ბაზისი ცალსახად არ განისაზღვრება, ამიტომ, (1) განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემაც ცალსახად არ განისაზღვრება.

(1) განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემა საშუალებას იძლევა მოცემული განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ამონახსენი წარმოვადგინოთ ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემაში შემავალი ვექტორთა წრფივი კომბინაციის სახით, კოეფიციენტებით X სიმრავლიდან.

თეორემა 3. თუ (1) განტოლებათა სისტემის მთავარი მატრიცის რანგი r $(r \geq 1)$ ნაკლებია განტოლებაში შემავალ უცნობთა n რიცხვზე, მაშინ (1) განტოლებათა სისტემას გააჩნია $n-r$ რაოდენობის ვექტორისაგან შემდგარი ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემა.

დამტკიცება. თუ $r = n$, მაშინ (1) განტოლებათა სისტემას გააჩნია ერთადერთი ნულოვანი ამონახსენი. დავუშვათ $1 \leq r = r(A) < n$. 6.1 თეორემის ბ) წინადადების თანახმად ყოველი A მატრიცა მისი არაგანსაკუთრებული გარდაქმნებით სტრიქონების მიმართ მიიყვანება სტრიქონების მიმართ დაყვანილ $(m \times n)-$ განზომილებიან B' მატრიცამდე. დავუშვათ, რომ B' მატრიცით განსაზღვრულ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას აქვს სახე:

$$\begin{cases} x_1 - \cdots - \gamma_{11} x_{r+1} - \cdots - \gamma_{1n} x_n = 0, \\ x_2 - \cdots - \gamma_{21} x_{r+1} - \cdots - \gamma_{2n} x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r - \cdots - \gamma_{r1} x_{r+1} - \cdots - \gamma_{rn} x_n = 0. \end{cases} \qquad \dots(2)$$

აქ $x_1, x_2, \dots, x_r$ მთავარი, ხოლო $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ თავისუფალი უცნობებია. ცხადია, თავისუფალი უცნობების ფიქსირებული მნიშვნელობა ცალსახად განსაზღვრავს (1) განტოლებათა სისტემის ერთ რომელიმე ამონახსენს. კერძოდ, თუ $x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = x_n = 0$, მაშინ იგი მოგვცემს (1) განტოლებათა სისტემის ნულოვან ამონახსენს.

(2) განტოლებათა სისტემაში თანამიმდევრობით თითოეულ თავისუფალ უცნობს მივანიჭოთ 1-ის ტოლი, ხოლო ყველა დანარჩენს კი ნულის ტოლი მნიშვნელობა. შედეგად მივიღებთ (2) და (1) განტოლებათა სისტემების $n-r$ რაოდენობის ამონახსენს:

$$\begin{aligned} a_1 &= (\gamma_{11}, \gamma_{21}, \cdots, \gamma_m, 1, 0, \cdots, 0), \\ a_2 &= (\gamma_{12}, \gamma_{22}, \cdots, \gamma_m, 0, 1, \cdots, 0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-r} &= (\gamma_{1n-r}, \gamma_{2n-r}, \cdots, \gamma_{m-r}, 0, 0, \cdots, 1). \end{aligned}$$

მიღებული ამონახსნები განვალაგოთ C მატრიცის სტრიქონებად. გვექნება:

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_m & 1\,0\cdots0 \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_m & 0\,1\cdots0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{1n-r} & \gamma_{2n-r} & \cdots & \gamma_{m-r} & 0\,0\cdots1 \end{pmatrix}.$$

ვაჩვენოთ, რომ C მატრიცის სტრიქონები წრფივად დამოუკიდებელია. მართლაც, თუ $\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \cdots + \lambda_{n-r} \cdot a_{n-r} = (0, 0, \dots, 0)$, რომელიღაც $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r} \in X$ ელემენტებისათვის, მაშინ

$$(\dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r}) = (0, 0, \dots, 0),$$

ე.ი. $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-r} = 0$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (1) განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$$

ამონახსენი არის $a_1, a_2, \dots, a_{n-r}$ ვექტორთა წრფივი კომბინაცია კოეფიციენტებით X ველიდან. თანახმად თეორემა 1-ისა,

$$d = a - \left(\alpha_{r+1}a_1 + \alpha_{r+2}a_2 + \dots + \alpha_n a_{n-r}\right) \qquad \dots(3)$$

ვექტორი, წარმოადგენს (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენს. მისი გამარტივებით მივიღებთ: $d = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r, 0, 0, \dots, 0)$, ე.ი. იგი არის (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი, როცა $x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = x_n = 0$. ეს კი ნიშნავს, რომ $d = (0, 0, \dots, 0)$ და (1) განტოლებათა სისტემების ნულოვანი ამონახსენია. ამიტომაც თანახმად (3) ტოლობისა გვექნება:

$$a = (0, 0, \dots, 0) + \left(\alpha_{r+1}a_1 + \alpha_{r+2}a_2 + \dots + \alpha_n a_{n-r}\right) = \left(\alpha_{r+1}a_1 + \alpha_{r+2}a_2 + \dots + \alpha_n a_{n-r}\right).$$

მივიღეთ, რომ V_1 არითმეტიკული ვექტორული სივრციდან აღებული ვექტორთა $a_1, a_2, \dots, a_{n-r}$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია და V_1 ვექტორული სივრცის ბაზისია, ე.ი. იგი (1) განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემაა.

განტოლებათა (1) სისტემის ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემის საპოვნელად საჭიროა:

a) ვიპოვოთ (1) განტოლებათა სისტემის მთავარი მატრიცის რანგი r;

b) ვიპოვოთ (1) განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსენი;

c) შევადგინოთ $n-r$ რიგის კვადრატული

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცა;

d) (1) განტოლებათა სისტემის ზოგად ამონახსენში თანამიმდევრობით თითოეულ თავისუფალ უცნობს მივანიჭოთ 1-ის ტოლი, ხოლო

ყველა დანარჩენს კი ნულის ტოლი მნიშვნელობა. შედეგად მივიღებთ (1) განტოლებათა სისტემების $n-r$ რაოდენობის ამონახსენს.

$$\begin{array}{l} a_1=\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\dots,x_q^{(1)},1,\,0,\dots,0\right),\\ a_2=\left(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\dots,x_q^{(2)},0,\,1,\dots,0\right),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n-r}=\left(x_1^{(n-r)},x_2^{(n-r)},\dots,x_q^{(n-r)},0,\,0,\dots,1\right). \end{array}$$

თეორემა 3-ის თანახმად ვექტორთა $a_1,a_2,\dots,a_p$ სისტემა იქნება (1) განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემა.

სხვა ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემის მისაღებად საჭიროა B' მატრიცის ისეთი სხვა B მატრიცით შეცვლა, რომ $|B|\neq 0$.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

ა) იპოვეთ ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსენი და ერთ-ერთი ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემა:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2=0,\\ 2x_1+4x_2=0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0,\\ 2x_1+4x_2-6x_3=0. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4=0,\\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x_1-x_2-x_3=0,\\ 3x_1+x_2-2x_3=0,\\ -x_1+2x_2-x_3=0,\\ 2x_1+3x_2-3x_3=0. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4x_1-x_2-x_3-x_4=0,\\ 3x_1+x_2-2x_3+x_4=0,\\ -x_1+2x_2-x_3+2x_4=0,\\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4=0. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-3x_4+4x_5=0,\\ 2x_1+4x_2-2x_3-6x_4+8x_5=0. \end{cases}$ 7) $\begin{cases} -x_1-2x_2-2x_3+3x_4+x_5=0,\\ 2x_1+3x_2-x_3-2x_4+3x_5=0. \end{cases}$

8) $\begin{cases} -x_1-2x_2-2x_3+3x_4+x_5=0,\\ 2x_1+3x_2-x_3-2x_4+3x_5=0,\\ 3x_1+x_2-3x_3+2x_4+4x_5=0. \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4+4x_5=0,\\ x_1+3x_2-2x_3-x_4+x_5=0,\\ 3x_1-x_2-3x_3+2x_4+4x_5=0. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3x_1+5x_2-3x_3+5x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3+3x_4=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1+2x_2-2x_3+2x_4=0. \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=0, \\ x_1+4x_2-x_3=0, \\ 3x_1+3x_2-2x_3=0. \end{cases}$

12) $\begin{cases} 3x_1+5x_2-5x_3+5x_4-x_5=0, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4+2x_5=0. \end{cases}$ 13) $\begin{cases} -x_1-2x_2+2x_3-2x_4+3x_5=0, \\ x_1+2x_2-2x_3+2x_4+x_5=0. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4+4x_5=0, \\ x_1+3x_2-2x_3-x_4+x_5=0, \\ 3x_1-x_2-3x_3+2x_4+4x_5=0, \\ 5x_1+4x_2-4x_3+4x_4+9x_5=0, \\ 2x_1+5x_2-3x_3+2x_4+5x_5=0. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6=0, \\ 2x_1+3x_2-4x_3-5x_4+2x_5-x_6=0, \\ 3x_1-x_2-3x_3+2x_4+4x_5-3x_6=0, \\ 3x_1+2x_2+3x_3-6x_4+3x_5-2x_6=0, \\ 6x_1+x_2-6x_3-4x_4+7x_5-4x_6=0. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-3x_4+x_5-4x_6+x_7=0, \\ 2x_1+x_2-3x_3-x_4+4x_5-x_6+5x_7=0, \\ 3x_1-2x_2-4x_3+2x_4+x_5-4x_6+3x_7=0, \\ 3x_1-x_2-2x_3-4x_4+5x_5-5x_6+6x_7=0, \\ 5x_1-x_2-7x_3+x_4+5x_5-5x_6+8x_7=0, \\ 6x_1-3x_2-6x_3-2x_4+6x_5-9x_6+9x_7=0. \end{cases}$

17) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ 3x_1-3x_2+4x_3=0. \end{cases}$ 18) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+3x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+2x_3-2x_4=0, \\ x_1+4x_2-4x_3+4x_4=0. \end{cases}$

19) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=0, \\ -x_1-5x_2+3x_3-8x_4=0, \\ 4x_1+3x_2-x_3+5x_4=0, \\ 7x_1+x_2+x_3-2x_4=0. \end{cases}$ 20) $\begin{cases} 4x_1-x_2+5x_3-2x_4-x_5=0, \\ 3x_1+3x_2-2x_3+4x_4+2x_5=0, \\ x_1-4x_2+7x_3-6x_4-3x_5=0, \\ 7x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5=0. \end{cases}$

21) $\begin{cases} 5x_1-4x_2+3x_3+2x_4=0, \\ 3x_1-7x_2+7x_3+5x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-4x_3-3x_4=0, \\ 7x_1-x_2-x_3-x_4=0. \end{cases}$

§ 15. ერთი ცვლადის მრავალწევრთა რგოლი

ვთქვათ $K=(K,+,-,\cdot,1)$ და $L=(L,+,-,\cdot,1)$ კომუტაციური რგოლებია.

განსაზღვრება 1. L რგოლს ეწოდება K რგოლის მარტივი გაფართოება x ელემენტით, თუ

a) K რგოლი L რგოლის ქვერგოლია;

b) L რგოლის ყოველი f ელემენტისათვის მოიძებნება ისეთი $a_0,a_1,a_2,...,a_n \in K$ ელემენტები, რომ $f=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$.

შემდეგში $K[x]$-ით აღინიშნება K რგოლის მარტივი გაფართოება x ელემენტით.

განსაზღვრება 2. თუ ნებისმიერი $a_0,a_1,a_2,...,a_n \in K$ ელემენტებისათვის $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$, მაშინ $K[x]$ რგოლს ეწოდება K რგოლის მარტივი ტრანსცენდენტული გაფართოება x ელემენტით. ასეთ შემთხვევაში x-ს ეწოდება ტრანსცენდენტული ელემენტი K რგოლზე.

განსაზღვრება 3. $K[x]$ რგოლს, რომელიც წარმოადგენს K რგოლის მარტივ ტრანსცენდენტულ გაფართოებას x ელემენტით, ეწოდება მრავალწევრთა რგოლი K რგოლზე x ელემენტის მიმართ, ხოლო $K[x]$ რგოლის ელემენტებს კი მრავალწევრები ეწოდება x ელემენტის მიმართ.

შემდგომში $K[x]$ რგოლის მრავალწევრებს $f(x), g(x), q(x)$ და ა.შ. სიმბოლოებით აღვნიშნავთ. ამასთან, თუ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, მაშინ $a_0,a_1,...,a_n$ ელემენტებს $f(x)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები ეწოდება.

ვთქვათ $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_sx^s \in K[x]$

და $n \leq s$. $\mathrm{K}[x]$ რგოლზე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$f(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_sx^s \quad ...(1)$$

და $f(x)\cdot g(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m$, სადაც

$$c_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j, \ (0\leq k\leq n+s) \quad ...(2)$$

თეორემა 1. თუ $\mathrm{K}[x]$ მრავალწევრთა რგოლია K რგოლზე x ელემენტის მიმართ, მაშინ $\mathrm{K}[x]$ რგოლის ნებისმიერი $f(x)$ მრავალწევრის წარმოდგენა $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, $(a_0,a_1,a_2,...,a_n\in K)$ სახით ცალსახაა;

დამტკიცება. დავამტკიცოთ მხოლოდ $b)$ წინადადების სამართლიანობა. მართლაც, თუ f ელემენტს $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ სახით წარმოდგენის გარდა გააჩნია მეორე $f(x)=d_0'+d_1'x+d_2'x^2+\cdots+d_s'x^s$ სახის წარმოდგენაც და $n\leq s$, მაშინ:

$$(d_0'-a_0)+(d_1'-a_1)x+\cdots+(d_n'-a_n)x^n+d_{n+1}'x^{n+1}+\cdots+d_s'x^s=0$$

და რადგან x ტრანსცენდენტული ელემენტია K რგოლზე, გვექნება $a_0'-a_0=0$, $a_1'-a_1=0,...,$ $a_n'-a_n=0$, $a_{n+1}'=0,...,a_s'=0$.

მივიღეთ, რომ $\mathrm{K}[x]$ რგოლში f მრავალწევრის წარმოდგენა

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \ (a_0,a_1,a_2,...,a_n\in K)$$

სახით ცალსახაა. □.

განსაზღვრება 4. ვთქვათ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\in\mathrm{K}[x]$. n ნატურალურ რიცხვს ეწოდება f მრავალწევრის ხარისხი, თუ n არის x ელემენტის ის უდიდესი ხარისხი, რომლის a_n კოეფიციენტიც განსხვავებულია ნულისაგან. ამასთან, a_nx^n შესაკრებს $f(x)$ მრავალწევრის უფროსი წევრი, ხოლო a_n -ს f მრავალწევრის უფროსი კოეფი-

ციენტი ეწოდება. f მრავალწევრს ნორმირებული ეწოდება, თუ $a_n = 1$.

თუ $f = a_0$ და $a_0 \neq 0$, მაშინ მისი ხარისხი ნულის ტოლია, ხოლო ნულოვანი $f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n + \cdots$ მრავალწევრის ხარისხი საერთოდ არ განისაზღვრება.

შემდეგში $f(x)$ მრავალწევრის ხარისხი $\deg f(x)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

განსაზღვრება 5. ვთქვათ $\mathrm{F} = (F, +, -, \cdot, 1)$ ველია და

$$f(x), g(x), q(x), p(x), p'(x) \in \mathrm{F}(x).$$

იტყვიან, რომ $q(x)$ არის $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების საერთო გამყოფი, თუ $f(x) = q(x) \cdot p(x)$ და $g(x) = q(x) \cdot p'(x)$.

$f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების ისეთ საერთო გამყოფს, რომელიც იყოფა მოცემული მრავალწევრების ნებისმიერ საერთო გამყოფზე, $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი ეწოდება და $(f(x), g(x))$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

მრავალწევრთა გაყოფადობის შემდეგ პროცესს:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = g(x) \cdot q(x) + r_0(x), & \deg g(x) > \deg r_0(x), \\
g(x) = r_0(x) \cdot q_0(x) + r_1(x), & \deg r_0(x) > \deg r_1(x), \\
r_0(x) = r_1(x) \cdot q_1(x) + r_2(x), & \deg r_1(x) > \deg r_2(x), \\
\dotfill & \dotfill \\
r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x) \cdot q_{k-1}(x) + r_k(x), & \deg r_{k-1}(x) > \deg r_k(x), \\
r_{k-1}(x) = r_k(x) \cdot q_k(x) + 0, &
\end{array}$$

$f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა ევკლიდეს ალგორითმი ეწოდება.

იტყვიან, რომ $q(x)$ არის $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების საერთო ჯერადი, თუ $q(x) = f(x) \cdot p(x)$ და $q(x) = g(x) \cdot p'(x)$.

$f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების ისეთ საერთო ჯერადს, რომელზეც იყოფა მოცემული მრავალწევრების ნებისმიერი საერთო ჯერადი,

$f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების უმცირესი საერთო ჯერადი ეწოდება და $\left[f(x), g(x)\right]$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი და უმცირესი საერთო ჯერადი ცალსახად არ განისაზღვრება.

ვთქვათ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathrm{K}[x]$ და $a \in K$, მაშინ ცხადია, $f(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + \cdots + a_na^n \in K$ და $f(a)$ ელემენტს $f(x)$ მრავალწევრის მნიშვნელობა ეწოდება, როცა $x = a$ და თუ $f(a) = 0$, მაშინ a ელემენტს $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი ეწოდება.

ვთქვათ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathrm{K}[x]$. დავუშვათ, რომ

$$f^{\bullet} = \left\{\left(a,\ a_0 + a_1a + a_2a^2 + \cdots + a_na^n\right) \mid a \in K\right\}.$$

შევნიშნოთ, თუ $f(x), g(x) \in \mathrm{K}[x]$ და $f(x) \neq g(x)$, მაშინ არაა სავალდებულო ადგილი ჰქონდეს $f^{\bullet} = g^{\bullet}$ ტოლობას.

თეორემა 2. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) თუ $f(x), g(x) \in \mathrm{K}[x]$, მაშინ

$$\deg\left(f(x) + g(x)\right) \leq \max\left(\deg f(x), \deg g(x)\right);$$

b) თუ $f(x), g(x) \in \mathrm{K}[x]$, მაშინ

$$\deg\left(f(x) \cdot g(x)\right) \leq \deg f + \deg g(x);$$

c) თუ კომუტაციური K რგოლი მთელობის არეა, მაშინ

$$\deg\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \deg f(x) + \deg g(x)$$

და მრავალწევრთა $\mathrm{K}[x]$ რგოლი x ელემენტის მიმართ K რგოლზე მთელობის არე იქნება;

d) ვთქვათ K ველია. თუ $f(x), g(x) \in \mathrm{K}(x)$ და $g(x) \neq 0$, მაშინ არსებობენ ისეთი ცალსახად განსაზღვრული $q(x)$ და $r(x)$ მრავალ-

წევრები $\mathrm{K}(x)$ რგოლიდან, რომ $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$ და $0\leq \deg r(x)\leq \deg g(x)$ ან $r(x)=0$;

e) $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებისათვის შედგენილი ევკლიდეს ალგორითმის ბოლო ნულისაგან განსხვავებული $r_k(x)$ ნაშთის ტოლია.

f) $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უმცირესი საერთო ჯერადი

$$\left[f(x),g(x)\right]=\frac{f(x)\cdot g(x)}{\left(f(x),g(x)\right)};$$

g) თუ $f(x),g(x)\in \mathrm{K}[x]$ და $a\in K$, მაშინ $f(x)=(x-a)\cdot g(x)+f(a)$;

h) $x=a$ ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ იქნება $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი, როცა $f(x)$ მრავალწევრის $x-a$ ორწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი ნულის ტოლია (ბეზუს თეორემა);

i) თუ კომუტაციური K რგოლი მთელობის არეა, $f(x)\in \mathrm{K}[x]$ და $\deg f(x)=n$, მაშინ $f(x)$ მრავალწევრის ფესვთა რაოდენობა $n-$ს არ აღემატება;

j) თუ $n-$ური ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრს აღებულს მთელობის $\mathrm{K}[x]$ არიდან $n-$ზე მეტი ფესვი გააჩნია, მაშინ $f(x)$ ნულოვანი მრავალწევრია.

k) ვთქვათ $\mathrm{K}[x]$ მრავალწევრთა რგოლია K უსასრულო მთელობის არეზე. $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები $\mathrm{K}[x]$ მთელობის არიდან მაშინ და მხოლოდ მაშინაა ერთმანეთის ტოლი, როცა $f^{*}=g^{*}$.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ c) წინადადების სამართლიანობა. მართლაც ვთქვათ $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_sx^s\in \mathrm{K}[x]$ და $a_n,b_s\notin\{0\}$, მაშინ $f(x)\cdot g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\cdots+a_nb_sx^{n+s}$.

რადგან K მთელობის არეა და $a_n, b_s \notin \{0\}$, ამიტომ, $a_n b_s \neq 0$, ე.ი. თუ $f(x) \neq 0$ და $g(x) \neq 0$ მაშინ $f(x) \cdot g(x) \neq 0$. □.

ახლა დავამტკიცოთ $d)$ წინადადების სამართლიანობა. ვიგულისხმოთ, რომ $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_s x^s \in \mathrm{K}[x]$ $(b_s \neq 0)$ და გამოვიყენოთ მათემატიკური ინდუქცია n ნატურალური რიცხვის მიმართ. მართლაც, თუ $n = 0$, ან $n < \deg g(x)$, მაშინ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $q(x) = 0$, $r(x) = f(x)$ და $f(x) = g(x) \cdot 0 + f(x)$, ე.ი. ამ შემთხვევაში თეორემა სამართლიანია.

ახლა დავუშვათ, რომ $n \geq \deg g(x)$ და ვიგულისხმოთ, რომ თეორემა სამართლიანია ყველა იმ მრავალწევრთათვის, რომელთა ხარისხი n-ზე ნაკლებია და დავამტკიცოთ მისი სამართლიანობა, როცა $\deg f(x) = n$. მართლაც, რადგან K ველია, ამიტომ, თანახმად, $c)$ წინადადებისა, f და $a_n b_s^{-1} x^{n-s}$ მრავალწევრებს ერთნაირი უფროსი წევრი გააჩნიათ. რის გამოც:

$$f_1(x) = f(x) - a_n b_s^{-1} x^{n-s} \qquad ...(4)$$

მრავალწევრის ხარისხი n-ზე ნაკლებია.

$f_1(x)$ მრავალწევრის მიმართ განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

1) $f_1(x) = 0$. მაშინ თუ $q(x) = a_n b_s^{-1} x^{n-s}$ და $r(x) = 0$, მივიღებთ

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + 0.$$

2) $f_1(x) \neq 0$. ვინაიდან $\deg f_1(x) < n$, ამიტომ, ინდუქციური დაშვების თანახმად, არსებობენ ისეთი $q_1(x), r(x) \in \mathrm{K}(x)$ მრავალწევრები, რომ $f_1(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r(x)$, სადაც $\deg r(x) < \deg g(x)$ ან $r(x) = 0$. ახლა, თუ $f_1(x)$-ის მნიშვნელობას გავითვალისწინებთ (4) ტოლობაში და ჩავთვლით, რომ $q(x) = q_1(x) + a_n b_s^{-1} x^{n-s}$,

მივიღებთ: $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$, სადაც $\deg r(x)<\deg g(x)$ ან $r(x)=0$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ მოცემული $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებისათვის $q(x)$ და $r(x)$ მრავალწევრები ცალსახად განისაზღვრებიან.

მართლაც, ვთქვათ:

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x) \text{ და } \deg r(x)<\deg g(x) \text{ ან } r(x)=0.$$

$$f(x)=g(x)\cdot q_1(x)+r_1(x) \text{ და } \deg r_1(x)<\deg g(x) \text{ ან } r_1(x)=0.$$

ბოლო ორი ტოლობიდან მივიღებთ $r(x)-r_1(x)=g(x)\big(q_1(x)-q(x)\big)$, სადაც $r(x)-r_1(x)=0$ ან $0<\deg\big(r(x)-r_1(x)\big)<\deg g(x)$.

თუ $r(x)-r_1(x)\neq 0$, მაშინ $q_1(x)-q(x)\neq 0$ და

$$\deg\big(r(x)-r_1(x)\big)=\deg g(x)+\deg\big(q_1(x)-q(x)\big)\geq \deg g(x),$$

რაც $\deg\big(r(x)-r_1(x)\big)<\deg g(x)$ პირობას ეწინააღმდეგება. ამგვარად, $r(x)-r_1(x)=0$ და $q_1(x)-q(x)=0$, რადგანაც $g(x)\neq 0$. ბოლო ორი ტოლობიდან კი მივიღებთ $r(x)=r_1(x)$ და $q_1(x)=q(x)$. □

ახლა დავამტკიცოთ $g)$ წინადადების სამართლიანობა. მართლაც, თუ $f(x)$ ნულოვანი მრავალწევრია, მაშინ $f(a)=0$, $g(x)=0$ და ამიტომ, $f(x)=(x-a)\cdot 0+f(a)$. დავუშვათ, რომ $\deg f(x)=n\geq 1$. ამ შემთხვევაში გვექნება:

$$f(x)-f(a)=a_1(x-a)+a_2\left(x^2-a^2\right)+\cdots+a_n\left(x^n-a^n\right)=$$
$$=(x-a)\left(a_1+a_2(x+a)+\cdots+a_n\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-1}\right)\right)=(x-a)g(x),$$

სადაც, $g(x)=a_1+a_2(x+a)+\cdots+a_n\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-1}\right)\in \mathrm{K}[x]$.

ამგვარად, სამართლიანია $f(x)=(x-a)g(x)+f(a)$ ტოლობა. □

h) წინადადების სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს g) წინადადების სამართლიანობიდან.

ახლა დავამტკიცოთ $i)$ წინადადების სამართლიანობა. მართლაც, თუ $\deg f(x)=0$, მაშინ $f(x)=a_0$, სადაც $a_0 \neq 0$ და თეორემა სამართლიანია, რადგანაც მოცემულ მრავალწევრს არ გააჩნია ფესვი. დავუშვათ, ნებისმიერი $n-$ზე ნაკლები ხარისხის მქონე მრავალწევრის ფესვების რაოდენობა $n-$ს არ აღემატება. დავუშვათ, რომ $\deg f(x)=$ $=n\geq 1$. თუ $f(x)$ მრავალწევრს არ გააჩნია ფესვი, მაშინ თეორემა სამართლიანია. დავუშვათ, რომ $f(a)=0$, რომელიღაც $a\in K$ ელემენტისათვის. მაშინ $f(x)=(x-a)\cdot g(x)$, სადაც $g(x)\in \mathrm{K}[x]$ და თანახმად c) წინადადებისა $\deg g(x)=n-1$. ახლა, თუ $b\in K$, $b\neq a$ ელემენტი არის $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი, მაშინ $f(b)=(b-a)\cdot g(b)=0$. აქედან კი მივიღებთ $g(b)=0$, რადგანაც $b-a\neq 0$ და K რგოლი მთელობის არეა. დაშვების თანახმად, $g(x)$ მრავაწევრის ფესვთა რაოდენობა $n-1$ არ აღემატება, ამიტომ, $f(x)$ მრავალწევრის ფესვების რაოდენობაც $n-$ს არ აღემატება. □

$j)$ წინადადების სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს $i)$ წინადადების სამართლიანობიდან.

ახლა დავამტკიცოთ $k)$ წინადადების სამართლიანობა. მართლაც, ვთქვათ $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_sx^s\in \mathrm{K}[x]$. დავუშვათ, რომ $f(x)=g(x)$. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ნულოვანი მრავალწევრებია, მაშინ $f^*=g^*$. დავუშვათ, რომ $f(x)$ და $g(x)$ არანულოვანი მრავალწევრებია. დაშვების თანახმად $n=s$ და აქედან კი მივიღებთ $f^*=g^*$.

მეორეს მხრივ, თუ $f^{*} = g^{*}$ ყოველი $a \in K$ ელემენტისათვის და $h(x) = f(x) - g(x)$, მაშინ $h(a) = 0$ ყოველი $a \in K$ ელემენტისათვის, ე.ი. სასრული ხარისხის მრავალწევრს უსასრულო რაოდენობის ფესვი გააჩნია (K არის უსასრულო მთელობის არე). თანახმად g) წინადადებისა გვექნება, რომ $h(x)$ ნულოვანი მრავალწევრია, ე.ი. $f(x) = g(x)$. □

განსაზღვრება 6. დავუშვათ, რომ $\mathrm{F} = (F, +, -, \cdot, 1)$ ველია. $c, r \in F$, $f(x), g(x) \in \mathrm{F}(x)$ და $f(x) = (x - c)g(x) + r$, სადაც

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ და $g(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$.

მაშინ სამართლიანი იქნება შემდეგი ტოლობები:

$b_0 = a_0$, $b_1 = cb_0 + a_1$, $b_2 = cb_1 + a_2$, ..., $b_{n-1} = cb_{n-2} + a_{n-1}$ და $r = cb_{n-1} + a_n$.

$f(x)$ მრავალწევრის $x - c$ ორწევრზე გაყოფადობის მოცემულ პროცესს ჰორნერის სქემა ეწოდება.

გაყოფადობის პროცესის შესრულება უფრო მოსახერხებელია შემდეგი ცხრილის გამოყენებით.

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
c	b_0 a_0	b_1 $cb_0 + a_1$	b_2 $cb_1 + a_2$	...	b_{n-1} $cb_{n-2} + a_{n-1}$	b_n $cb_{n-1} + a_n$

განსაზღვრება 7. ვთქვათ $\mathrm{F} = (F, +, -, \cdot, 1)$ ველია და

$$f(x), g(x), q(x), p(x) \in \mathrm{F}(x).$$

თუ $f(x) = g(x) \cdot q(x)$ და $g(x) = f(x) \cdot p(x)$, მაშინ $f(x)$ და $g(x)$ ასოცირებული მრავალწევრები ეწოდება.

$f(x)$ მრავალწევრის ისეთ გამყოფებს, რომლებიც ან $f(x)$ მრავალწევრთანაა ასოცირებული ან F ველის ელემენტთან, $f(x)$ მრავალწევრის ტრივიალური გამყოფები ეწოდება.

$f(x)$ მრავალწევრს უწოდებენ შედგენილს $\mathrm{F}(x)$ რგოლში ან კიდევ დაყვანადს F ველზე, თუ რომელიღაც დადებითი ხარისხის $g(x)$ და $q(x)$ მრავალწევრებისათვის სამართლიანია $f(x)=g(x)\cdot q(x)$ ტოლობა.

$f(x)$ მრავალწევრს ეწოდება დაუყვანადი F ველზე, ან კიდევ მარტივი $\mathrm{F}(x)$ რგოლში, თუ მისი ნებისმიერი გამყოფი ტრივიალურია.

ვთქვათ $f(x)$ და $q(x)$ ორი მრავალწევრია მრავალწევრთა $\mathrm{F}(x)$ რგოლიდან, ხოლო $g(x)$ მარტივი მრავალწევრია $\mathrm{F}(x)$ რგოლში. თუ $q(x)$ მრავალწევრი არ იყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე და

$$f(x)=g(x)^m\cdot q(x),$$

მაშინ $g(x)$ მრავალწევრს $f(x)$ მრავალწევრის m ჯერადობის მამრავლი ეწოდება.

ვთქვათ $f(x)$ და $q(x)$ ორი მრავალწევრია მრავალწევრთა $\mathrm{F}(x)$ რგოლიდან და $c\in F$. თუ $q(x)$ მრავალწევრი არ იყოფა $x-c$ ორწევრზე და $f(x)=(x-c)^m\cdot q(x)$, მაშინ c ელემენტს $f(x)$ მრავალწევრის m ჯერადობის ფესვი ეწოდება.

თუ $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ ნებისმიერი მრავალწევრია მრავალწევრთა $\mathrm{F}(x)$ რგოლიდან, მაშინ $a_0\cdot n\cdot x^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$ მრავალწევრს ეწოდება მოცემული $f(x)$ მრავალწევრის ფორმალური წარმოებული და $f'(x)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ე.ი.

$$f'(x) = a_0 \cdot n \cdot x^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

თეორემა 3. ვთქვათ $f(x)$ და $g(x)$ ორი მრავალწევრია მრავალწევრთა $\mathbf{F}(x)$ რგოლიდან და $a \in F$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$;

b) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$;

c) $(a\cdot f(x))' = a\cdot f'(x)$;

d) $\left(f(x)^m\right)' = m\cdot f(x)^{m-1} f'(x)$, ნებისმიერი ნატურალური m რიცხვისათვის;

e) ვთქვათ $\mathbf{F}=(F,+,-,\cdot,1)$ ნულმახასიათებლიანი ველია. თუ $f(x)$ მრავალწევრია მრავალწევრთა $\mathbf{F}(x)$ რგოლიდან და $g(x)$ მარტივი მრავალწევრი $f(x)$ მრავალწევრის m ჯერადობის მამრავლია, მაშინ $g(x)$ მრავალწევრი $f'(x)$-სათვის $(m-1)$ ჯერადობის მამრავლი იქნება;

f) $f(x)$ მრავალწევრს მრავალწევრთა $\mathbf{F}(x)$ რგოლიდან, მაშინ და მხოლოდ მაშინ გააჩნია დაუყვანი ჯერადი მამრავლი, როცა $f(x)$ და $f'(x)$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი დადებითი ხარისხის მრავალწევრია;

g) ვთქვათ $f(x)$ მრავალწევრია მრავალწევრთა $\mathbf{F}(x)$ რგოლიდან. თუ $c \in F$ არის მოცემული მრავალწევრის m ჯერადობის ფესვი, მაშინ

$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(m-1)}(c) = 0,$$

ხოლო $f^{(m)}(c) \neq 0$.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ $e)$ წინადადების სამართლიანობა. მართლაც დავუშვათ, რომ $q(x)$ მრავალწევრი არ იყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე და $f(x)=g(x)^m\cdot q(x)$. მაშინ

$$f'(x)=m\cdot g(x)^{m-1}\cdot g'(x)\cdot q(x)+g(x)^m\cdot q'(x)=$$
$$=g(x)^{m-1}\left(m\cdot g'(x)\cdot q(x)+g(x)\cdot q'(x)\right).$$

ცხადია, $\deg(m\cdot g'(x))<\deg g(x)$ და $m\cdot g'(x)\neq 0$ რადგან $\mathbf{F}$ ნულმახასიათებლიანი ველია, ე.ი. $m\cdot g'(x)$ მრავალწევრი არ იყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე. ასევე $m\cdot g'(x)\cdot q(x)$ მრავალწევრი არ იყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე, რადგანაც დაშვების თანახმად $q(x)$ მრავალწევრი არ იყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე. ამგვარად, $m\cdot g'(x)\cdot q(x)+g(x)\cdot q'(x)$ მრავალწევრიც არ იყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე.

მივიღეთ, რომ $g(x)$ მრავალწევრი $f'(x)$ მრავალწევრის $(m-1)$ ჯერადობის მამრავლია. □

$f)$ და $g)$ წინადადებათა სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს $e)$ წინადადების სამართლიანობიდან. □

$\mathbf{F}$ ველს ეწოდება ალგებრულად ჩაკეტილი, თუ ყოველ დადებითი ხარისხის მრავალწევრს მრავალწევრთა $\mathbf{F}(x)$ რგოლიდან ერთი ფესვი მაინც გააჩნია $\mathbf{F}$ ველზე.

ვთქვათ $\mathbf{C}=(C,+,-,\cdot,1)$ კომპლექსურ რიცხვთა ველია.

თეორემა 4. ვთქვათ $\mathbf{C}=(C,+,-,\cdot,1)$ კომპლექსურ რიცხვთა ველია. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებანი:

a) კომპლექსურ რიცხვთა $\mathbf{C}=(C,+,-,\cdot,1)$ ველი ალგებრულად ჩაკეტილია;

b) $\mathrm{C}(x)$ მრავალწევრთა რგოლიდან აღებული ნებისმიერი დადებითი ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი შეიძლება ცალსახად წარმოდგენილი იქნეს C ველის ელემენტისა და მრავალწევრთა $\mathrm{C}(x)$ რგოლიდან აღებული ნორმირებულ წრფივ მრავალწევრთა ნამრავლის სახით, ე.ი.

$$f(x)=a\cdot(x-c_1)\cdot(x-c_2)\cdots(x-c_n),$$

სადაც $a\in C$ და $(x-c_1),(x-c_2),\ldots,(x-c_n)\in\mathrm{C}(x)$.

c) ნებისმიერი $n-$ური $(n\geq 2)$ ხარისხის მრავალწევრი დაყვანადია მრავალწევრთა $\mathrm{C}(x)$ რგოლში.

d) ნებისმიერ $n-$ური $(n\geq 1)$ ხარისხის მრავალწევრს მრავალწევრთა $\mathrm{C}(x)$ რგოლიდან ზუსტად n რაოდენობის ფესვი აქვს.

e) თუ $c_1,c_2,\ldots,c_n$ ელემენტები არიან

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_n\in\mathrm{C}(x)$$

მრავალწევრის ფესვები მაშინ:

$$\frac{a_1}{a_0}=-(c_1+c_2+\cdots+c_n),$$

$$\frac{a_2}{a_0}=c_1c_2+c_1c_3+\cdots+c_1c_n+c_2c_3+\cdots+c_{n-1}c_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{a_n}{a_0}=(-1)^n\cdot c_1c_2\cdots c_n.$$

(როცა $a_0=1$, მაშინ (1) ფორმულებს ვიეტას ფორმულები ეწოდება).

დამტკიცება. დავამტკიცოთ მხოლოდ $b)$, $c)$ და $e)$ წინადადებების სამართლიანობა.

მართლაც, ვთქვათ $f(x)$ რომელიღაც დადებითი ხარისხის მრავალწევრია მრავალწევრთა $\mathrm{C}(x)$ რგოლიდან. თანახმად $a)$ წინადადებისა, $f(x)$ მრავალწევრს ერთი ფესვი მაინც გააჩნია C ველზე. ვთქვათ ეს ფესვია c_1. თანახმად თეორემა 2-ის $h)$ წინადადებისა, გვექნება $f(x)=(x-c_1)\cdot f_1(x)$, სადაც $f_1(x)\in \mathrm{C}(x)$ და $\deg f(x)>\deg f_1(x)$. თუ $f_1(x)$ ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრია, მაშინ თეორემა სამართლიანია. დავუშვათ, რომ $\deg f_1(x)>0$. ახლა $f_1(x)$ მრავალწევრის მიმართ გავიმეოროთ იგივე პროცესი, რაც $f(x)$ მრავალწევრის მიმართ იყო ჩატარებული. გავაგრძელებთ, რა ამ პროცესს, სასრულ ნაბიჯზე მივიღებთ დასამტკიცებელი თეორემის სამართლიანობას. □

$c)$ წინადადების სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს $b)$ წინადადების სამართლიანობიდან. □

თანახმად თეორემა 3-ის $b)$ წინადადებისა გვექნება:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=a_0\cdot\left(x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}x+\frac{a_n}{a_0}\right)=$$
$$=a_0\cdot(x-c_1)\cdot(x-c_2)\cdots(x-c_n),$$

ე.ი.

$$x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}x+\frac{a_n}{a_0}=(x-c_1)\cdot(x-c_2)\cdot\cdots\cdot(x-c_n).$$

ბოლო ტოლობის მარჯვენა მხარეში თანამამრავლთა გადამრავლებით მივიღებთ:

$$x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}x+\frac{a_n}{a_0}=x^n-(c_1+c_2+\cdots+c_n)x^{n-1}+$$
$$+(c_1c_2+c_1c_3+\cdots+c_1c_n+c_2c_3+\cdots+c_{n-1}c_n)x^{n-2}+\cdots+(-1)^n\cdot c_1c_2\cdot\cdots\cdot c_n.$$

გავუტოლებთ რა უცნობების ერთნაირ ხარისხებთან მდგარ კოეფიციენტებს, მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობათა სამართლიანობას. □.

განსაზღვრება 8. $f(x)$ მრავალწევრის წარმოდგენას

$$f(x)=a\cdot(x-c_1)^{k_1}\cdot(x-c_2)^{k_2}\cdot\dots\cdot(x-c_m)^{k_m}$$

სახით, სადაც $a,c_1,c_2,\dots,c_m\in C$ და $c_1,c_2,\dots,c_m$ მოცემული მრავალწევრის წყვილ-წყვილად განსხვავებული ფესვებია, კანონიკური წარმოდგენა ეწოდება.

ჩვენ შემდეგში განვიხილავთ ნამდვილ კოეფიციენტებიან მრავალწევრებს.

თეორემა 5. ვთქვათ $\mathrm{R}=(R,+,-,\cdot,1)$ ნამდვილ რიცხვთა ველია. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებანი:

a) თუ $a+bi$ კომპლექსური რიცხვი არის $f(x)\in\mathrm{R}(x)$ მრავალწევრის ფესვი, მაშინ $a-bi$ კომპლექსური რიცხვიც იქნება მოცემული მრავალწევრის ფესვი;

b) მრავალწევრთა $\mathrm{R}(x)$ რგოლზე დაუყვანადია მხოლოდ პირველი ხარისხის მრავალწევრები, ან კიდევ მეორე ხარისხის ისეთი მრავალწევრები, რომლებიც ასოცირებული არიან $g(x)=(x-a)^2+b^2$ სახის მრავალწევრებთან, სადაც $a,b\in R, b\neq 0$;

c) ნებისმიერი დადებითი ხარისხის $f(x)$ მრავალწევრი შეიძლება ცალსახად წარმოდგენილი იქნას R ველის ელემენტისა და მრავალწევრთა $\mathrm{R}(x)$ რგოლიდან აღებული ისეთ მრავალწევრთა ნამრავლის სახით, რომელთა ხარისხი არ აღემატება ორს, ე.ი.

$$f(x)=a\cdot\prod_k\left((x-a_k)^2+b_k\right)\cdot\prod_p(x-c_p);$$

d) კენტი ხარისხის ნებისმიერ მრავალწევრს მრავალწევრთა $\mathrm{R}(x)$ რგოლიდან ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი გააჩნია. კერძოდ, $n-$ური ხარისხის მრავალწევრის ნამდვილ ფესვთა რაოდენობის ლუწ-კენტოვნება ემთხვევა n რიცხვის ლუწ-კენტოვნებას;

e) ნებისმიერ მრავალწევრს მრავალწევრთა $\mathrm{R}(x)$ რგოლიდან ლუწი რაოდენობის კომპლექსური ფესვი გააჩნია.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ $a)$ წინადადების სამართლიანობა. მართლაც , თუ $a+bi$ კომპლექსური რიცხვი არის

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_n\in\mathrm{R}(x)$$

მრავალწევრის ფესვი, მაშინ თანახმად თეორემა 5.9-ის $a),b),c),d)$ და $e)$ წინადადებებისა გვექნება:

$$f(a-bi)=a_0\cdot(a-bi)^n+a_1\cdot(a-bi)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\cdot(a-bi)+a_n=$$
$$=\overline{a_0}\cdot\overline{(a+bi)}^n+\overline{a_1}\cdot\overline{(a+bi)}^{n-1}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\cdot\overline{(a+bi)}+\overline{a_n}=$$
$$=\overline{\overline{a_0}\cdot(a+bi)^n}+\overline{\overline{a_1}\cdot(a+bi)^{n-1}}+\cdots+\overline{\overline{a_{n-1}}\cdot(a+bi)}+\overline{a_n}=$$
$$=\overline{a_0\cdot(a+bi)^n}+\overline{a_1\cdot(a+bi)^{n-1}}+\cdots+\overline{\overline{a_{n-1}}\cdot(a+bi)}+\overline{a_n}=$$
$$=\overline{a_0\cdot(a+bi)^n+a_1\cdot(a+bi)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\cdot(a+bi)+a_n}=\overline{f(a+bi)}=\overline{0}=0,$$

ე.ი. $a-bi$ კომპლექსური რიცხვიც $f(x)$ მრავალწევრის ფესვი იქნება. □

ახლა დავამტკიცოთ $b)$ წინადადების სამართლიანობა. მართლაც, ცხადია, პირველი ხარისხის ნებისმიერი მრავალწევრი დაუყვანადია მრავალწევრთა $\mathrm{R}(x)$ რგოლზე. ამიტომ, დავუშვათ, რომ $f(x)$ არის მრავალწევრთა $\mathrm{R}(x)$ რგოლზე დაუყვანადი ნებისმიერი მრავალწევრი, რომლის ხარისხიც ერთზე მეტია. მაშინ თეორემა 4-ის $a)$ წინადადების თანახმად R ველზე გააჩნია ერთი მაინც $a+bi$ $(a,b\in R)$ კომპლექსური ფესვი. თუ $b=0$, მაშინ ბეზუს თეორემის თანახმად $f(x)=(x-a)g(x)$, სადაც $\deg g(x)\geq 1$, რადგანაც $\deg f(x)\geq 2$. მაგრამ ბოლო ტოლობა ეწინააღმდეგება $f(x)$ მრავალწევრის დაუყვანადობას $\mathrm{R}(x)$ რგოლში.

ამგვარად, $b\neq 0$. დავუშვათ, რომ

$$f(x)=\left((x-a)^2+b^2\right)\cdot q(x)+(cx+d),$$

სადაც $c,d\in R$, ხოლო $q(x)$ მრავალწევრია $\mathrm{R}(x)$ რგოლიდან. მაშინ

$$f(a+bi)=\left(((a+bi)-a)^2+b^2\right)\cdot q(a+bi)+\left(c(a+bi)+d\right),$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ $c(a+bi)+d=0$, ე.ი. $ca+d=0$ და $cb=0$. ბოლო ტოლობიდან გვექნება $c=0$, რადგანაც $b\neq 0$. ასეთ შემთხვევაში მივიღებთ, რომ $d=0$.

ამგვარად $f(x)=\left((x-a)^2+b^2\right)\cdot q(x)$ და $q(x)$ მრავალწევრი ნულოვანი ხარისხისაა, რადგანაც $f(x)$ მრავალწევრი დაუყვანადია $\mathrm{R}(x)$ რგოლში. ეს კი ნიშნავს, რომ $f(x)$ და $(x-a)^2+b^2$ მრავალწევრები $\mathrm{R}(x)$ რგოლში ასოცირებულნი არიან. □

$c)$ წინადადების სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს $b)$ წინადადების სამართლიანობიდან. □

$d)$ და $e)$ წინადადებების სამართლიანობა უშუალოდ გამომდინარეობს $a)$ წინადადების სამართლიანობიდან.

მესამე ხარისხის განტოლებები

განტოლებას, რომელსაც აქვს

$$a_0y^3+a_1y^2+a_2y+a_3=0 \qquad ...(1)$$

სახე, სადაც $a_0,a_1,a_2,a_3\in R$ და y უცნობი სიდიდეა, მესამე ხარისხის სრული განტოლება ეწოდება. იგი $y=x-\dfrac{a_1}{3a_0}$ ჩასმით მიიყვანება

$$x^3+px+q=0 \qquad ...(2)$$

სახემდე, რომელსაც მესამე ხარისხის არასრული განტოლება ეწოდება. (2) განტოლებაში დავუშვათ, რომ $x = u + v$. მივიღებთ:

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0.$$

ახლა თუ $3uv + p = 0$, მაშინ

$$u^3 + v^3 + q \text{ და } uv = -\frac{p}{3}, \text{ ე.ი. } u^3 + v^3 + q \text{ და } u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

მივიღეთ, რომ u^3 და v^3 არის $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$ კვადრატული განტოლების ფესვები. მიღებულ განტოლებას (2) განტოლების ამომხსნელი განტოლება ეწოდება. მის დისკრიმინანტს აქვს

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

სახე.

თეორემა 6. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) $\sqrt[3]{1}$ -ის ყველა ფესვებია: $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ და $\omega_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) ვთქვათ z_1 და z_2 არის $x^3 + px + q = 0$ განტოლების ამომხსნელი $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$ განტოლების ფესვები. თუ ε არის $\sqrt[3]{1}$ რომელიმე წარმოსახვითი ფესვი, მაშინ $x^3 + px + q = 0$ განტოლების ფესვები გამოითვლება ფორმულებით:

$$x_1 = u + v,\ x_2 = u\varepsilon + v\varepsilon^2 \text{ და } x_2 = u\varepsilon^2 + v\varepsilon,$$

სადაც u და v ისეთი ფესვებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$u^3 = z_1,\ v^3 = z_2 \text{ და } uv = -\frac{p}{3}.$$

c) ვთქვათ $x^3 + px + q = 0$ ნამდვილკოეფიციენტებიანი განტოლებაა

და $\Delta=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}$ მისი დისკრიმინანტია. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

1) თუ $\Delta>0$ მაშინ მოცემულ განტოლებას ერთი ნამდვილი და ორი კომპლექსურად შეუღლებული ფესვი ექნება;
2) თუ $\Delta=0$ მაშინ მოცემულ განტოლების ყველა ფესვი ნამდვილია და ერთერთი მათგანი ჯერადი;
3) თუ $\Delta<0$ მაშინ მოცემულ განტოლების ყველა ფესვი ნამდვილია და წყვილ-წყვილად განსხვავებული.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

a) შეასრულეთ $f(x)$ მრავალწევრის $g(x)$ მრავალწევრზე ნაშთიანი გაყოფა:

1) $f(x)=2x^4-4x^3+4x^2-6,\ \ g(x)=x^2-3x-1\in R[x]$;
2) $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6,\ \ g(x)=x^2-3x+1\in R[x]$;
3) $f(x)=x^3-3x^2-x-1,\ \ g(x)=3x^2-2x-1\in R[x]$;
4) $f(x)=(10+5i)x^4-(15+13i)x^2+(10+3i)x+(10-5i),$
$g(x)=(2+i)x^2-3x+i\in C[x]$;
5) $f(x)=\overline{6}x^4+\overline{5}x^2-\overline{2},\ \ g(x)=\overline{1}x^3-\overline{2}x-\overline{1}\in Z_7[x]$;
6) $f(x)=\overline{2}x^5-\overline{3}x^4+\overline{2}x^3-\overline{3}x+\overline{1},\ \ g(x)=\overline{2}x^2-\overline{3}x+\overline{1}\in Z_5[x]$.

b) იპოვეთ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების უდიდესი საერთო გამყოფი და უმცირესი საერთო ჯერადი:

1) $f(x)=\overline{1}x^3+\overline{4}x-\overline{3},\ \ g(x)=\overline{1}x^4+\overline{1}x^3-\overline{1}x^2+\overline{1}x-\overline{2}\in Z_5[x]$;
2) $f(x)=\overline{3}x^2+\overline{1}x-\overline{2},\ \ g(x)=\overline{2}x^4-\overline{1}x^3-\overline{4}x^2+\overline{3}x-\overline{1}\in Z_7[x]$;
3) $f(x)=\overline{1}x^4+\overline{1}x-\overline{4},\ \ g(x)=\overline{2}x^4+\overline{1}x^3-\overline{3}x^2-\overline{2}x-\overline{2}\in Z_{11}[x]$;
4) $f(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1,\ \ g(x)=x^3-2x^2+x-2\in R[x]$;

5) $f(x)=x^4+2x^3+2x^2+2x+2,\ g(x)=x^3+3x^2+2\in R[x]$;

6) $f(x)=x^5+(1-i)x^4+x^3-ix^2-1,\ g(x)=x^4-ix^3-(1-i)x^2-x+1\in C[x]$.

c) იპოვეთ b, c და $d-$ს ისეთი მნიშვნელობები, რომლის დროსაც $f(x)$ მრავალწევრი უნაშთოდ გაიყოფა $g(x)$ მრავალწევრზე:

1) $f(x)=x^3+bx+c,\ g(x)=x^2+1$;

2) $f(x)=x^3+bx+c,\ g(x)=x^2+dx+1$;

3) $f(x)=x^4+bx+c,\ g(x)=x^2+dx+1$;

4) $f(x)=x^5+bx+c,\ g(x)=x^2+dx+1$.

d) იპოვეთ მრავალწევრთა ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი:

1) $f(x)=-3ix^2+(1+i)x+2,\ g(x)=x^4+ix^3-2ix\in C[x]$;

2) $f(x)=(2-i)x^2+1,\ g(x)=(1+i)x^2+ix+3i\in C[x]$;

3) $f(x)=\overline{3}x^3+\overline{5}x^2-\overline{2},\ g(x)=\overline{2}x^3-\overline{6}x+\overline{3}\in Z_7[x]$;

4) $f(x)=\overline{4}x^4+\overline{3}x^3+\overline{1}x+\overline{2},\ g(x)=\overline{3}x^4-\overline{3}x^3+\overline{4}x+\overline{1}\in Z_5[x]$;

e) ჰორნერის სქემის გამოყენებით შეასრულეთ $f(x)$ მრავალწევრისა $x-a$ ორწევრზე გაყოფა:

1) $f(x)=x^4-3x^3+x-1,\ a=2$;

2) $f(x)=9x^3+8x^2-10x-1,\ a=-3$;

3) $f(x)=4x^3+x^2,\ a=-1-i$;

4) $f(x)=\overline{3}x^3+\overline{6}x^2-\overline{2},\ \in Z_7[x],\ a=\overline{2}$;

5) $f(x)=\overline{7}x^4-\overline{9}x^3+\overline{8}x^2+\overline{10}x-\overline{6}\in Z_{11}[x],\ a=-\overline{3}$.

f) ჰორნერის სქემის გამოყენებით იპოვეთ $f(a)$:

1) $f(x)=x^5+3x^4+2x^3+8x+40,\ a=-3$;

2) $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16,\ a=4$

3) $f(x)=3x^4-x+300i,\ a=-3+i$;

4) $f(x)=2x^3-9x^2+4x-5,\ a=5+i$;

5) $f(x)=\overline{2}x^3+\overline{1}x^2-\overline{3}x+\overline{2}\in Z_5[x];\ a=\overline{3}$;

6) $f(x)=\overline{3}x^5-\overline{2}x^3+\overline{1}x^2+\overline{4}x-\overline{3}\in Z_7[x];\ a=-\overline{2}$.

g) ჰორნერის სქემის გამოყენებით იპოვეთ $f(x)$ მრავალწევრის a ფესვის ჯერადობა:

1) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8,\ a=2$;

2) $f(x)=x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16,\ a=-2$;

3) $f(x)=x^5-15x^4+76x^3-140x^2+75x-125,\ a=5$;

4) $f(x)=x^{10}-x^9-3x^8+4x^7+2x^6-6x^5+2x^4+4x^3-3x^2-x+1,\ a=\pm1$;

5) $f(x)=x^8-6x^7+13x^6-10x^5-9x^4+32x^3-37x^2+20x-4,\ a_1=1,\ a_2=2$;

6) $f(x)=\overline{1}x^5-\overline{2}x^3+\overline{1}x^2-\overline{2}\in Z_3[x],\ a=\overline{2}$;

7) $f(x)=\overline{1}x^7-\overline{3}x^6+\overline{1}x^5-\overline{1}x^3+\overline{4}x^2-\overline{4}x+\overline{2}\in Z_5(x),\ a_1=\overline{1}$;

8) $f(x)=x^6+2x^5+4x^4+4x^3+5x^2+2x-2,\ a=-1$;

9) $f(x)=x^5-4x^4-6x^3+16x^2+29x+12,\ a=-1,\ a=3$.

h) იპოვეთ b და c – ს ისეთი მნიშვნელობები, რომლის დროსაც a ელემენტი მოცემული მრავალწევრის k ჯერადი ფესვი იქნება:

1) $f(x)=x^4+bx^3+cx+1,\ a=-1,\ k=2$;

2) $f(x)=x^5-x^4-4x^3+bx^2+cx+1,\ a=1,\ k=3$;

i) ჩამოთვლილი Q, R და C ველებიდან რომელ ველშია დაყვანადი მრავალწევრები?

1) $f_1(x)=x^2-10x+21$,

2) $f_2(x)=2x^2-3x-5$,

3) $f_3(x)=3x^2+x+3$,

4) $f_4(x) = x^2 + 2x - 1$,

5) $f_5(x) = x^4 - 5x^2 + 6$,

6) $f_6(x) = x^3 + 8$,

7) $f_4(x) = x^3 - 1$.

j) ჰორნერის სქემის გამოყენებით იპოვეთ მოცემული მრავალწევრისა და მისი წარმოებულის მნიშვნელობა, როცა $x = a$:

1) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 1,\ a = 2$;

2) $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + 6x - 5,\ a = -3$;

3) $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1,\ a = 1 + 2i$;

4) $f(x) = x^4 - 3ix^3 + (1-i)x^2 + 2x + (1+i),\ a = i$.

k) არის თუ არა a ელემენტი მოცემული მრავალწევრისა და მისი წარმოებულის ფესვი?

1) $f(x) = 2x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8},\ a = \frac{1}{2}$;

2) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 18ix - 22\frac{1}{2} - 13\frac{1}{2}i,\ a = -\frac{3}{2}i$;

3) $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2,\ a = 1$;

4) $f(x) = x^3 + ix^2 + x + i,\ a = -i$.

l) იპოვეთ ასოითი კოეფიციენტების ისეთი მნიშვნელობები, რომლის დროსაც a იქნება მოცემული განტოლების ორჯერადი ფესვი:

1) $f(x) = x^5 - bx^2 - bx + 1,\ a = -1$

2) $f(x) = bx^4 + cx^3 + 1,\ a = 1$;

3) $f(x) = bx^{n+1} + cx^n + 1,\ a = 1$.

m) $C[x]$ მრავალწევრთა რგოლში იპოვეთ უმცირესი ხარისხის ნორმირებული მრავალწევრი რომელის ფესვებია:

1) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_{3,4} = 2$; 2) $x_1 = i,\ x_{2,3} = 1 - i$;

3) $x_{1,2}=i,\ x_{3,4}=-i$; 4) $x_{1,2}=1,\ x_{3,4,5}=\sqrt{2}$;

5) $x_1=\dfrac{1}{2},\ x_2=\dfrac{3}{4},\ x_{3,4}=i$; 6) $x_1=2,\ x_{2,3}=1-i,\ x_{4,5}=1$.

n) ვიეტას ფორმულების გამოყენებით ააგეთ მრავალწევრი, რომელის ფესვებია:

1) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$;

2) $x_1=0,\ x_{2,3}=1,\ x_4=-1$;

3) $x_{1,2}=i,\ x_{3,4}=1+i$.

o) $\mathrm{R}[x]$ მრავალწევრთა რგოლში იპოვეთ უმცირესი ხარისხის ნორმირებული მრავალწევრი რომელის ფესვებია:

1) $x_1=2+i,\ x_{2,3}=1$;

2) $x_1=-3,\ x_{2,3}=1-i$;

3) $x_1=1-i,\ x_{2,3}=2+i$;

4) $x_1=-1-i,\ x_{2,3}=i,\ x_{4,5}=1-i$;

5) $x_{1,2,3}=2-3i$.

p) ამოხსენით მესამე ხარისხის განტოლებები:

1) $x^3+9x^2+18x+28=0$;

2) $x^3-6x^2+57x-196=0$;

3) $x^3+3ix^2-(3+6i)x+(10-5i)=0$;

4) $x^3-9x^2+21x-5=0$;

5) $x^3+12x+63=0$;

6) $x^3+9x-26=0$;

7) $x^3-3x+2=0$;

8) $3x^3-8x+8=0$;

9) $4x^3-3x-1=0$.

§ 16. მრავალცვლადიან მრავალწევრთა რგოლი

ვთქვათ $\mathrm{K}=(K,+,-,\cdot,1)$ არის $\mathrm{L}=(L,+,-,\cdot,1)$ კომუტაციური რგოლის ქვერგოლი და $x_1,x_2,\dots,x_n \in L$.

განსაზღვრება 1. L რგოლის ისეთ მინიმალურ ქვერგოლს, რომელიც შეიცავს K რგოლსა და $x_1,x_2,\dots,x_n$ ელემენტებს K რგოლითა და $x_1,x_2,\dots,x_n$ ელემენტებით წარმოქმნილი რგოლი ეწოდება და $\mathrm{K}[x_1,x_2,\dots,x_n]$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ცხადია, $\mathrm{K}[x_1,x_2,\dots,x_n]$ არის L რგოლის ყველა იმ ქვერგოლების თანაკვეთა, რომლებიც K რგოლსა და $x_1,x_2,\dots,x_n$ ელემენტებს შეიცავენ.

ახლა დავუშვათ, რომ N ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა, $n\in N$ $(n\geq 2)$, $k=2,3,\dots,n$ და

$$N^n=\{(i_1,i_2,\dots,i_n)\mid i_1,i_2,\dots,i_n\in N\},$$

$$\mathrm{K}[x_1][x_2]\dots[x_{k-1}][x_k]=(\mathrm{K}[x_1][x_2]\dots[x_{k-1}])[x_k].$$

თეორემა 1. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) $\mathrm{K}[x_1][x_2]\dots[x_{n-1}][x_n]=\mathrm{K}[x_1,x_2,\dots,x_n]$;

b) $\mathrm{K}[x_1,x_2,\dots,x_n]$ რგოლის ნებისმიერი ელემენტი წარმოიდგინება

$$\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)\in M} a_{i_1i_2\dots i_n}\cdot x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\dots\cdot x_n^{i_n}$$

სახით, სადაც M არის N^n სიმრავლის რომელიღაც ქვესიმრავლე, ხოლო $a_{i_1i_2\dots i_n}$ $((i_1,i_2,\dots,i_n)\in M)$ არიან K სიმრავლის რომელიღაც ელემენტები.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ $b)$ წინადადების სამართლიანობა. მართლაც თანახმად $a)$ წინადადებისა $\mathrm{K}[x_1,x_2]=\mathrm{K}[x_1][x_2]$, ამიტომ $\mathrm{K}[x_1,x_2]$ რგოლის ყოველი ელემენტები შეიძლება წარმო-

დგენილი იქნას $\alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \cdots + \alpha_m x_2^m$ სახით, სადაც $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathrm{K}[x_1]$. ამასთან, თუ $q \in \max\{\deg \alpha_1, \deg \alpha_2, ..., \deg \alpha_m\}$, მაშინ ყოველი α_i $(i = 0, 1, ..., m)$ მრავალწევრი შეიძლება წარმოვადგინოთ $\alpha_i = a_{i0} + a_{i1} x_1 + \cdots + a_{iq} x_1^q$ სახით, სადაც $a_{ip} \in K$ $(i = 0, 1, ..., m, p = 0, 1, ..., q)$. ამგვარად $\mathrm{K}[x_1, x_2]$ რგოლის ნებისმიერი ელემენტი წარმოიდგინება $\sum_{(i_1, i_2) \in M} a_{i_1 i_2} \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2}$ სახით, სადაც $a_{i_1 i_2} \in K$ და M არის N^2 სიმრავლის რომელიღაც ქვესიმრავლე.

თუ აღწერილ პროცესს გავაგრძელებთ $a)$ წინადადების თანახმად სასრულ ნაბიჯზე მივიღებთ, რომ $\mathrm{K}[x_1, x_2, ..., x_n]$ რგოლის ნებისმიერი ელემენტი წარმოიდგინება $\sum_{(i_1, i_2, ..., i_n) \in M} a_{i_1 i_2 ... i_n} \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{i_n}$ სახით, სადაც M არის N^n სიმრავლის რომელიღაც ქვესიმრავლე, ხოლო $a_{i_1 i_2 ... i_n}$ $((i_1, i_2, ..., i_n) \in M)$ არიან K სიმრავლის რომელიღაც ელემენტები. □

განსაზღვრება 2. $x_1, x_2, ..., x_n$ ელემენტებს აღებულს L რგოლიდან K რგოლზე ალგებრულად დამოუკიდებლი ეწოდება თუ $\sum_{(i_1, i_2, ..., i_n) \in M} a_{i_1 i_2 ... i_n} \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{i_n} = 0$ ტოლობა სრულდება მხოლოდ, მაშინ როცა $a_{i_1 i_2 ... i_n} = 0$ ყოველი $(i_1, i_2, ..., i_n)$ ელემენტისათვის აღებული M სიმრავლიდან.

შევნიშნოთ, რომ როცა $n = 1$, მაშინ x_1 ელემენტის K რგოლზე ალგებრულად დამოუკიდებლობის ცნება ემთხვევა მის K რგოლზე ტრანსცედენტულობის ცნებას.

განსაზღვრება 3. $\mathrm{K}[x_1, x_2, ..., x_n]$ რგოლს ეწოდება K რგოლის $n-$ჯერადი ტრანსცედენტული გაფართოება, თუ ყოველი $s \in \{1, 2, ..., n\}$

რიცხვისათვის $K[x_1, x_2, ..., x_s]$ რგოლი წარმოადგენს $K[x_1, x_2, ..., x_{s-1}]$ რგოლის მარტივ ტრანსცედენტულ გაფართოებას x_s ელემენტის საშუალებით.

განსაზღვრება 4. $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ რგოლს, რომელიც წარმოადგენს არანულოვანი კომუტაციური K რგოლის $n-$ჯერად ტრანსცედენტულ გაფართოებას, K რგოლზე $x_1, x_2, ..., x_n$ ცვლადების მრავალწევრთა რგოლი ეწოდება.

თეორემა 1-ის თანახმად $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ რგოლის ნებისმიერი ელემენტი წარმოიდგინება

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n) \in M} a_{i_1 i_2 ... i_n} \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n} \quad ...(1)$$

სახით. მათ მრავალწევრები ეწოდება K რგოლზე $x_1, x_2, ..., x_n$ ცვლადების მიმართ, ხოლო $a_{i_1 i_2 ... i_n}$ $((i_1, i_2, ..., i_n) \in M)$ ელემენტებს $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ მრავალწევრის კოეფიციენტები, $a_{i_1 i_2 ... i_n} \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$ ელემენტებს $((i_1, i_2, ..., i_n) \in M)$ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ მრავალწევრის ერთწევრები და $i_1 + i_2 + \dots + i_n$ რიცხვებს კი ერთწევრების ხარისხები ეწოდებათ.

ორ $a \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$ და $b \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}$ ერთწევრს მსგავსი ეწოდება, თუ $i_p = k_p$ ყოველი $p = 1, 2, ..., n$. მსგავსი ერთწევრები ტოლია თუ მათი კოეფიციენტები ტოლია.

ორი მრავალცვლადიანი $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ და $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ მრავალწევრები ტოლია, თუ $f(x_1, x_2, ..., x_n)-$ისა და $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ მრავალწევრების ჩანაწერებში მონაწილე ერთწევრთა სიმრავლეები ერთმანეთის ტოლია.

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ მრავალწევრს, რომლის ერთწევრების ხარისხები ერთმანეთის ტოლია, ერთგვაროვანი მრავალწევრი ეწოდება, ხოლო ერთგვაროვან მრავალწევრს წრფივი ეწოდება, თუ მისი ხარისხი ერთის ტოლია.

$f(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრის არანულოვანი ერთწევრების ხარისხებს შორის უდიდეს $f(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრის ხარისხი ეწოდება და $\deg f$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

საზოგადოდ, ნულოვანი მრავალწევრის (ე.ი. ისეთი მრავალწევრის, რომლის ყოველი კოეფიციენტი ნულის ტოლია) ხარისხი არ განისაზღვრება.

მოცემული ერთწევრების ჯამი და ნამრავლი ასე განისაზღვრება:

$$a\cdot x_1^{l_1}\cdot x_2^{l_2}\cdot\dots\cdot x_n^{l_n}+b\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\dots\cdot x_n^{k_n}=(a+b)\cdot x_1^{l_1}\cdot x_2^{l_2}\cdot\dots\cdot x_n^{l_n},$$

თუ $a\cdot x_1^{l_1}\cdot x_2^{l_2}\cdot\dots\cdot x_n^{l_n}$ და $b\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\dots\cdot x_n^{k_n}$ მსგავსი ერთწევრებია, ხოლო $\left(a\cdot x_1^{l_1}\cdot x_2^{l_2}\cdot\dots\cdot x_n^{l_n}\right)\cdot\left(b\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\dots\cdot x_n^{k_n}\right)=(ab)\cdot x_1^{l_1+k_1}\cdot x_2^{l_2+k_2}\cdot\dots\cdot x_n^{l_n+k_n}$.

ორი მრავალცვლადიანი $f(x_1,x_2,...,x_n)$ და $g(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრები რომ შევკრიბოთ, ამისათვის საჭიროა, ავიღოთ მათი ალგებრული ჯამი და მსგავსი ერთწევრები შევკრიბოთ.

ორი მრავალცვლადიანი $f(x_1,x_2,...,x_n)$ და $g(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრები რომ გადავამრავლოთ, ამისათვის საჭიროა, $f(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრის ყოველი ერთწევრი გავამრავლოთ $g(x_1,x_2,...,x_n)$ მრავალწევრის თითოეულ ერთწევრზე და მიღებულ ალგებრულ ჯამში მსგავსი ერთწევრები შევკრიბოთ.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1x_2x_3-2x_1^2x_2+x_3^3$ და $g(x_1,x_2,x_3)=-x_1x_2x_3-2x_1^2x_2$ მრავალწევრების ჯამი და ნამრავლი. გვექნება:

$$f(x_1,x_2,x_3)+g(x_1,x_2,x_3)=\left(3x_1x_2x_3-2x_1^2x_2+x_3^3\right)+\left(-x_1x_2x_3-5x_1^2x_2\right)=$$
$$=\left(3x_1x_2x_3-x_1x_2x_3\right)+\left(-2x_1^2x_2-5x_1^2x_2\right)+x_3^3=2x_1x_2x_3-7x_1^2x_2+x_3^3;$$

$$f(x_1,x_2,x_3)\cdot g(x_1,x_2,x_3)=\left(3x_1x_2x_3-2x_1^2x_2+x_3^3\right)\cdot\left(-x_1x_2x_3-5x_1^2x_2\right)=$$
$$=-3x_1^2x_2^2x_3^2-15x_1^3x_2^2x_3+2x_1^3x_2^2x_3+10x_1^4x_2^2-x_1x_2x_3^4-5x_1^2x_2x_3^3=$$
$$=-3x_1^2x_2^2x_3^2-13x_1^3x_2^2x_3+10x_1^4x_2^2-x_1x_2x_3^4-5x_1^2x_2x_3^3.$$

თეორემა 2. ვთქვათ f და g არანულოვანი მრავალწევრებია მრავალწევრთა $\mathrm{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ რგოლიდან. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) თუ $f+g \neq 0$, მაშინ $\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \ \deg g\}$;

b) თუ $f \cdot g \neq 0$, მაშინ $\deg(f \cdot g) \leq \deg f + \deg g$;

c) თუ K მთელობის არეა, მაშინ $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$.

ვთქვათ $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n), k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in N^n$. N^n სიმრავლეში განვმარტოთ ბინარული „<" მიმართება შემდეგნაირად: კერძოდ ვიგულისხმოთ, რომ $i < k$, თუ $k_1 - i_1, k_2 - i_2, \ldots, k_n - i_n$ რიცხვებიდან პირველი ნულისაგან განსხვავებული რიცხვი დადებითია.

ნებისმიერი $i, k \in N^n$ ელემენტებისათვის შეიძლება იმის დამტკიცება, რომ შემდეგი სამი $i < k$, $i = k$, $k < i$ პირობიდან ყოველთვის სრულდება მხოლოდ ერთი, ე.ი. ბინარული „<" მიმართება არის მკაცრი დალაგების მიმართება N^n სიმრავლეში.

ახლა ვთქვათ f არანულოვანი მრავალწევრია მრავალწევრთა $\mathrm{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ რგოლიდან და Q_f არის f მრავალწევრის ყველა ერთწევრთა სიმრავლე და $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{i_n}$, $a_{k_1 k_2 \ldots k_n} \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{k_n} \in S_f$. S_f სიმრავლეზე განვმარტოთ ბინარული „<" მიმართება შემდეგნაირად:

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{i_n} < a_{k_1 k_2 \ldots k_n} \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{k_n}$$

მხოლოდ მაშინ, როცა $(i_1, i_2, \ldots, i_n) < (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ $(i < k)$. რადგან ბინარული „<" მიმართება არის მკაცრი დალაგების მიმართება N^n სიმრავლეში, ამიტომ ბინარული „<" მიმართება იქნება მკაცრი დალაგების მიმართება Q_f სიმრავლეში. Q_f სიმრავლის ასეთ დალაგებას f მრავალწევრის წევრთა ლექსიკოგრაფიული დალაგება ეწოდება.

განსაზღვრება 5. f მრავალწევრის წევრთა ლექსიკოგრაფიული დალაგების დროს Q_f სიმრავლეში ყოველთვის იარსებებს უდიდესი

ელემენტი, რომელსაც f მრავალწევრის უმაღლესი წევრი ეწოდება.

ახლა $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ რგოლში განვმარტოთ ბინარული „$\succ$“ მიმართება შემდეგნაირად: ვთქვათ $f, g \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$. ვიგულისხმოთ, რომ $f \succ g$ მხოლოდ მაშინ, როცა f მრავალწევრის უმაღლესი წევრი მეტია g მრავალწევრის უმაღლეს წევრზე. ადვილად შემოწმდება, რომ „$\succ$“ იქნება დალაგების მიმართება $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ რგოლზე.

ახლა ვთქვათ $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ მრავალწევრთა რაღაც მიმდევრობაა $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ რგოლიდან. $f_1, f_2, ..., f_n, ...$ მიმდევრობას უწოდებენ მკაცრად კლებადს, თუ $f_1 \succ f_2 \succ \cdots \succ f_n \succ \cdots$.

ვთქვათ S_n არის $X = \{1, 2, ..., n\}$ სიმრავლის ყველა ჩასმათა სიმრავლე, τ ჩასმა S_n სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტია, ხოლო f მრავალწევრია მრავალწევრთა $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ რგოლიდან.

განსაზღვრება 6. f მრავალწევრს მრავალწევრთა $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ რგოლიდან სიმეტრიული მრავალწევრი ეწოდება, თუ ყოველი $\tau \in S_n$ ჩასმისათვის სრულდება პირობა

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f\left(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(n)}\right).$$

განსაზღვრება 7. მრავალწევრებს, რომელებიც წარმოიდგინებიან

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sigma_n = (-1)^n x_1x_2 \cdots x_n$$

სახით, $x_1, x_2, ..., x_n$ ცვლადების ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრები ეწოდება.

$K(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ რგოლის ყველა იმ ქვერგოლთა თანაკვეთა, რომლებიც $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ მრავალ-

წევრებს შეიცავენ. ასევე, $SK[x_1,x_2,...,x_n]$ აღვნიშნოთ $K[x_1,x_2,...,x_n]$ რგოლის ყველა სიმეტრიულ მრავალწევრთა სიმრავლე. რადგან სიმეტრიულ მრავალწევრთა ჯამი და ნამრავლი კვლავ სიმეტრიული მრავალწევრებია, ამიტომ $SK[x_1,x_2,...,x_n]$ იქნება $K[x_1,x_2,...,x_n]$ რგოლის ქვერგოლი. ამასთან, აგრეთვე, სამართლიანი იქნება შემდეგი ჩართვა $K(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\subseteq SK[x_1,x_2,...,x_n]$.

თეორემა 3. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

a) თუ $f\in SK[x_1,x_2,...,x_n]$ და $a\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\cdots\cdot x_n^{k_n}$ არის f მრავალწევრის უმაღლესი წევრი, მაშინ $k_1\geq k_2\geq...\geq k_n$;

b) თუ $a\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\cdots\cdot x_n^{k_n}$ არის $SK[x_1,x_2,...,x_n]$ რგოლიდან აღებული არანულოვანი f მრავალწევრის უმაღლესი წევრი, მაშინ f და $a\cdot\sigma_1^{k_1-k_2}\cdot\sigma_2^{k_2-k_3}\cdot\cdots\cdot\sigma_n^{k_n}$ მრავალწევრების უმაღლესი წევრები ერთმანეთის ტოლია;

c) არანულოვან სიმეტრიულ $f_1\succ f_2\succ\cdots\succ f_n\succ\cdots$ მრავალწევრთა ყოველი მკაცრად კლებადი მიმდევრობა სასრულია;

d) $K(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=SK[x_1,x_2,...,x_n]$.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ მხოლოდ $d)$ წინადადების სამართლიანობა. მართლაც, ვთქვათ $f\in SK[x_1,x_2,...,x_n]$ და $a_0\cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\cdots\cdot x_n^{k_n}$ არის f მრავალწევრის უმაღლესი წევრი. მაშინ

$$f_1=f-a_0\cdot\sigma_1^{k_1-k_2}\cdot\sigma_2^{k_2-k_3}\cdot\cdots\cdot\sigma_n^{k_n}\qquad ...(1)$$

მრავალწევრი სიმეტრიულია, როგორც ორი სიმეტრიული მრავალწევრების სხვაობა, ამიტომ, თანახმად $b)$ წინადადებისა $f\succ f_1$. ახლა ვთქვათ $a_1\cdot x_1^{i_1}\cdot x_2^{i_2}\cdot\cdots\cdot x_n^{i_n}$ არის f_1 მრავალწევრის უმაღლესი წევრი. მაშინ

$$f_2=f_1-a_1\cdot\sigma_1^{i_1-i_2}\cdot\sigma_2^{i_2-i_3}\cdot\cdots\cdot\sigma_n^{i_n}\qquad ...(2)$$

მრავალწევრიც სიმეტრიულია და თანახმად $b)$ წინადადებისა კვლავ

მივიღებთ $f_1 \succ f_2$, ამგვარად მივიღებთ სიმეტრიულ $f_1 \succ f_2 \succ \cdots \succ f_n \succ \cdots$ მრავალწევრთა მკაცრად კლებად მიმდევრობას, რომელიც $c)$ წინადადების თანახმად სასრულია. დავუშვათ, რომ პროცესი შეწყდა $(s+1)$ ნაბიჯზე, ე.ი.

$$f_{s+1} = f_s - a_s \cdot \sigma_1^{m_1-m_2} \cdot \sigma_2^{m_2-m_3} \cdot \dots \cdot \sigma_n^{m_n}. \qquad \dots(s+1)$$

ახლა თუ $(1),(2),\dots,(s+1)$ ტოლობებს წევრობრივ შევკრებთ, მივიღებთ

$$f = a_0 \cdot \sigma_1^{k_1-k_2} \cdot \sigma_2^{k_2-k_3} \cdot \dots \cdot \sigma_n^{k_n} + a_1 \cdot \sigma_1^{l_1-l_2} \cdot \sigma_2^{l_2-l_3} \cdot \dots \cdot \sigma_n^{l_n} + \dots + a_s \cdot \sigma_1^{m_1-m_2} \cdot \sigma_2^{m_2-m_3} \cdot \dots \cdot \sigma_n^{m_n}.$$

ბოლო ტოლობა იმას გვიჩვენებს, რომ $f \in \mathrm{K}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. □

ახლა დავუშვათ, რომ: $f(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n$ და $g(x) = b_0 \cdot x^m + b_1 \cdot x^{m-1} + \dots + b_{m-1} \cdot x + b_m$ მრავალწევრებია კოეფიციენტებით $\mathbf{F}$ ველიდან, ხოლო $A(f,g)$ $(n+m)-$ რიგის კვადრატული მატრიცაა შედგენილი $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა კოეფიციენტებით

$$A(f,g) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & \cdots a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & \cdots b_{m-1} & b_m \end{pmatrix},$$

სადაც f მრავალწევრის კოეფიციენტები მეორდება $m-$ჯერ, ხოლო g მრავალწევრისა კი $n-$ჯერ.

განსაზღვრება 8. $A(f,g)$ მატრიცის დეტერმინანტს $f(x)$ და

$g(x)$ მრავალწევრების რეზულტანტი ეწოდება და $R(f,g)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

თეორემა 4. ვთქვათ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრებია კოეფიციენტებით $\mathbf{F}$ ველიდან. მაშინ $R(f,g)=0$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები იყოფიან დადებითი ხარისხის რომელიმე მრავალწევრზე, ან $a_0=b_0=0$.

მაგალითი 1. თუ $f(x)=x^3-1$ და $g(x)=x^2-1$, მაშინ

$$R(f,g)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\end{vmatrix}.$$

ცხადია, $R(f,g)=0$, რადგან $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრები იყოფა $x-1$ ორწევრზე.

მაგალითი 2. ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases}x^2y^2+x^2y+x+y=0,\\ xy^2+2xy+1=0.\end{cases} \quad ...(1)$$

(1) განტოლებათა სისტემიდან გამოვრიცხოთ x უცნობი. ამისათვის დავუშვათ, რომ $f(x)=(y^2+y)x^2+x+y$, $g(x)=xy^2+2xy+1$ და შევადგინოთ $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრების რეზულტანტი

$$R(f,g)=\begin{vmatrix}y^2+y & 1 & y\\ y^2+2y & 1 & 0\\ 0 & y^2+2y & 1\end{vmatrix},$$

ე.ი. $R(f,g)=y\left(\left(y^2+2y\right)^2-1\right)$. ამოვხსნით რა $y\left(\left(y^2+2y\right)^2-1\right)=0$ განტოლებას მივიღებთ: $y=0$ ან $y=-1$ ან $y=-1+\sqrt{2}$ ან $y=-1-\sqrt{2}$.

თუ $y=0$ მაშინ (1) სისტემიდან მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} x = 0, \\ 1 = 0, \end{cases}$$

ე.ი. (1) განტოლებათა სისტემა არათავსებადია.

თუ $y=-1$, მაშინ (1) სისტემიდან მივიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} x - 1 = 0, \\ -x + 1 = 0, \end{cases}$$

ე.ი. $x=1$ და $(1,-1)$ წყვილი იქნება (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენი.

თუ $y=-1\pm\sqrt{2}$, მაშინ (1) სისტემიდან მივიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} \left(2 \mp \sqrt{2}\right)x^2 + x + \left(-1 \pm \sqrt{2}\right) = 0, \\ x + 1 = 0, \end{cases}$$

რომლის ამონახსენია $x=-1$. ასეთ შემთხვევაში $\left(-1, -1+\sqrt{2}\right)$ და $\left(-1, -1-\sqrt{2}\right)$ წყვილები იქნება (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსენები.

სავარჯიშოები.

a) იპოვეთ შემდეგი მრავალწევრების ჯამი, სხვაობა და ნამრავლი:

1) $f(x_1,x_2) = -2x_1^3 + 4x_1x_2 - 6x_2^2$, $g(x_1,x_2) = 2x_1^3 - 8x_1x_3 + 2x_2^2$;

2) $f(x_1,x_2) = \sqrt{2}x_1 - 2x_1x_2 + \sqrt{3}x_2$, $g(x_1,x_2) = \sqrt{3}x_1 - \sqrt{2}x_2$;

b) იპოვეთ $f+g+h$ და $(f-g)-h$, თუ

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1x_2^2x_3 - 7x_1x_2 + 8x_2^3,$$
$$g(x_1,x_2,x_3) = 8x_1x_2 - 10x_1 - 12x_1x_2^2x_3,,$$
$$h(x_1,x_2,x_3) = 2x_2^3 + 9x_1x_2^2x_3 - x_1x_2$$

c) ლექსიკოგრაფიულად დაალაგეთ შემდეგი მრავალწევრის წევრები:

1) $f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2}x_2x_3^2-\frac{13}{4}x_1x_2x_3+x_2x_3+2x_1^2x_2+3x_1x_2$,

2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sqrt{2}x_1x_2x_4-3x_2x_3x_4+4\sqrt{3}x_1x_3x_4-5\sqrt{2}x_2^2x_4-x_2^2x_3$,

3) $f(x_1,x_2)=(5+i)x_2^3+3ix_1x_2^2+(4+2i)x_1^2x_2-8x_1^2x_2^2-ix_1x_2+x_1^2$.

d) მრავალწევრთა გადამრავლების გარეშე იპოვეთ მათი ნამრავლების უმაღლესი წევრები და ხარისხები:

1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2x_2x_3-3x_1^3x_2^2x_3+4x_1^3x_2^2,\ g(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2}x_2x_3^2-4x_1x_2^2$;

2) $f(x_1,x_2)=7x_1x_2-8x_1^2+4x_2^2,\ g(x_1,x_2)=-3x_1^2x_2^2+x_1^2x_2^3,\ h(x_1,x_2)=3x_1-2x_2$;

3) $f(x_1,x_2)=2ix_1^4-3x_1x_2^5-3ix_1^5x_2,\ g(x_1,x_2)=(4-i)x_2^6-(5-i)x_1x_2$;

4) $f(x_1,x_2,x_3)=-3x_1^2x_2x_3^3+(2+i)x_1^2x_2^2x_3,\ g(x_1,x_2,x_3)=-3x_1^3x_2^3-x_1^4x_2x_3+ix_2x_3$;

e) წარმოადგინეთ ერთგვაროვან მრავალწევრთა ჯამის სახით შემდეგი მრავალწევრები:

1) $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^3-2x_1^2x_3+x_2x_3-5x_1x_2x_3+4x_1-2x_1^2-6$;

2) $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_1^3x_2+x_1^2x_2-5x_1x_2^2+x_2^2-x_1x_2-3x_1^2x_2^2+2$;

3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_1^2-x_2^2-3x_1x_2x_3+x_1+x_2-x_1x_2+7$.

f) x_1,x_2,x_3 ცვლადების სიმეტრიული მრავალწევრები წარმოადგინეთ, როგორც მრავალწევრები $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ ცვლადების მიმართ:

1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-2x_1^2x_2^2-2x_1^2x_3^2-2x_2^2x_3^2$;

2) $f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$;

3) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;

4) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$;

5) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^4+x_2^4+x_3^4-x_1^2x_2^2-x_1^2x_3^2-x_2^2x_3^2$;

6) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$.

g) დავუშვათ, რომ $s_k=x^k+y^k$. დაამტკიცეთ, რომ $s_k=\sigma_1 s_{k-1}-\sigma_2 s_{k-2}$, სადაც $s_1=\sigma_1$, $s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$ და $k=3,4,\ldots$. აჩვენეთ, რომ

1) $s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2$;

2) $s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2$;

3) $s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2$;

4) $s_6=\sigma_1^6-4\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3$;

5) $s_7=\sigma_1^7-7\sigma_1^5\sigma_2+14\sigma_1^3\sigma_2^2-7\sigma_1\sigma_2^3$;

6) $s_8=\sigma_1^8-8\sigma_1^6\sigma_2+20\sigma_1^4\sigma_2^2-16\sigma_1^2\sigma_2^3+2\sigma_2^4$.

h) ამოხსენით განტოლებათა სისტემები:

1) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^3-y^3=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y=5, \\ x^6+y^3=65; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ xy=8. \end{cases}$

i) ამოხსენით ირაციონალური განტოლებები:

1) $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$; 2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}$.

j) ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ ველში, ამოხსენით განტოლებათა სისტემები x უცნობის გამორიცხვის გზით:

1) $\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2-16=0, \\ 2x^2-xy-x+y^2-y-4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-5y^3+2=0, \\ 2x^2+y^2-7=0. \end{cases}$

k) კომპლექსურ რიცხვთა $\mathbf{C}$ ველში, ამოხსენით განტოლებათა სისტემა ჯერ y უცნობის შემდეგ კი x უცნობის გამორიცხვის გზით

1) $\begin{cases} y^2+(x-4)y+x^2-2x+3=0, \\ y^3-5y^2+(x+7)y+x^3-x^2-5x-3=0. \end{cases}$

სავარჯიშოთა პასუხები

§ 1. სიმრავლეები

k)

2^{2^n}.

§ 2. თანადობები, ასახვები

a)

1) $f_1=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_3,y_4)\}$, $f_4=\{(y_1,z_1),(y_2,z_2),(y_3,z_3)\}$.

2) $f_5=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\}$, $f_6=\{(x_1,z_1),(x_2,z_2),(x_3,z_3)\}$.

3) $f_3=\{(y_1,z_1),(y_2,z_2),(y_3,z_3),(y_4,z_1)\}$, $f_6=\{(x_1,z_1),(x_2,z_2),(x_3,z_3)\}$.

4) $f_6=\{(x_1,z_1),(x_2,z_2),(x_3,z_3)\}$.

5) $f_3\cdot f_2=\varnothing$, $f_2\cdot f_3=\{(x_1,z_1),(x_2,z_1),(x_3,z_2)\}$, $f_3\cdot f_5=\varnothing$,
$f_5\cdot f_3=\{(x_1,z_1),(x_2,z_2),(x_3,z_3)\}$, $f_1\cdot f_3=\{(x_1,z_1),(x_2,z_2),(x_3,z_3)\}$.

b)

$$f_2=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix},\ f_3=\begin{pmatrix} y_1 & y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1 \end{pmatrix},\ f_5=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix},\ f_6=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

c)

1) $2^{12}=4096$, 2) $4^3=64$. 3) $4\cdot 3\cdot 2=24$. 4) 36. 5) $1\cdot 2\cdot 3=6$.

6) $f_1=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_1 & y_1 \end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, $f_3=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_1 & y_3 \end{pmatrix}$, $f_4=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_1 & y_4 \end{pmatrix}$,
$f_5=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_1 \end{pmatrix}$, $f_6=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_2 \end{pmatrix}$, $f_7=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$, $f_8=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_4 \end{pmatrix}$,

$$f_9=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_3&y_1\end{pmatrix},\ f_{10}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_3&y_2\end{pmatrix},\ f_{11}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_3&y_3\end{pmatrix},\ f_{12}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_3&y_4\end{pmatrix},$$

$$f_{13}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_4&y_1\end{pmatrix},\ f_{14}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_4&y_2\end{pmatrix},\ f_{15}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_4&y_3\end{pmatrix},\ f_{16}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_4&y_4\end{pmatrix},$$

$$f_{17}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_1&y_1\end{pmatrix},\ f_{18}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_1&y_2\end{pmatrix},\ f_{19}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_1&y_3\end{pmatrix},\ f_{20}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_1&y_4\end{pmatrix},$$

$$f_{21}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_2&y_1\end{pmatrix},\ f_{22}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_2&y_2\end{pmatrix},\ f_{23}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_2&y_3\end{pmatrix},\ f_{24}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_2&y_4\end{pmatrix},$$

$$f_{25}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_3&y_1\end{pmatrix},\ f_{26}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_3&y_2\end{pmatrix},\ f_{27}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_3&y_3\end{pmatrix},\ f_{28}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_3&y_4\end{pmatrix},$$

$$f_{29}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_4&y_1\end{pmatrix},\ f_{30}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_4&y_2\end{pmatrix},\ f_{31}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_4&y_3\end{pmatrix},\ f_{32}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_2&y_4&y_4\end{pmatrix},$$

$$f_{33}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_1&y_1\end{pmatrix},\ f_{34}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_1&y_2\end{pmatrix},\ f_{35}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_1&y_3\end{pmatrix},\ f_{36}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_1&y_4\end{pmatrix},$$

$$f_{37}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_2&y_1\end{pmatrix},\ f_{38}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_2&y_2\end{pmatrix},\ f_{39}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_2&y_3\end{pmatrix},\ f_{40}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_2&y_4\end{pmatrix},$$

$$f_{41}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_3&y_1\end{pmatrix},\ f_{42}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_3&y_2\end{pmatrix},\ f_{43}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_3&y_3\end{pmatrix},\ f_{44}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_3&y_4\end{pmatrix},$$

$$f_{45}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_4&y_1\end{pmatrix},\ f_{46}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_4&y_2\end{pmatrix},\ f_{47}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_4&y_3\end{pmatrix},\ f_{48}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_3&y_4&y_4\end{pmatrix},$$

$$f_{49}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_1&y_1\end{pmatrix},\ f_{50}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_1&y_2\end{pmatrix},\ f_{51}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_1&y_3\end{pmatrix},\ f_{52}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_1&y_4\end{pmatrix},$$

$$f_{53}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_2&y_1\end{pmatrix},\ f_{54}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_2&y_2\end{pmatrix},\ f_{55}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_2&y_3\end{pmatrix},\ f_{56}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_2&y_4\end{pmatrix},$$

$$f_{57}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_3&y_1\end{pmatrix},\ f_{58}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_3&y_2\end{pmatrix},\ f_{59}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_3&y_3\end{pmatrix},\ f_{60}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_3&y_4\end{pmatrix},$$

$$f_{61}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_4&y_1\end{pmatrix},\ f_{62}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_4&y_2\end{pmatrix},\ f_{63}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_4&y_3\end{pmatrix},\ f_{64}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_4&y_4&y_4\end{pmatrix}.$$

7) $f_7=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{pmatrix},\ f_8=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_4\end{pmatrix},\ f_{10}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_3&y_2\end{pmatrix},\ f_{12}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_3&y_4\end{pmatrix},$

$$f_{14}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_4 & y_2\end{pmatrix},\ f_{15}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_4 & y_3\end{pmatrix},\ f_{19}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_2 & y_1 & y_3\end{pmatrix},\ f_{20}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_2 & y_1 & y_4\end{pmatrix},$$

$$f_{25}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_2 & y_3 & y_1\end{pmatrix},\ f_{28}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_2 & y_3 & y_4\end{pmatrix},\ f_{29}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_2 & y_4 & y_1\end{pmatrix},\ f_{31}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_2 & y_4 & y_3\end{pmatrix},$$

$$f_{34}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_3 & y_1 & y_2\end{pmatrix},\ f_{36}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_3 & y_1 & y_4\end{pmatrix},\ f_{37}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_3 & y_2 & y_1\end{pmatrix},\ f_{40}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_3 & y_2 & y_4\end{pmatrix},$$

$$f_{45}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_3 & y_4 & y_1\end{pmatrix},\ f_{46}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_3 & y_4 & y_2\end{pmatrix},\ f_{50}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_4 & y_1 & y_2\end{pmatrix},\ f_{51}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_4 & y_1 & y_3\end{pmatrix},$$

$$f_{53}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_4 & y_2 & y_1\end{pmatrix},\ f_{55}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_4 & y_2 & y_3\end{pmatrix},\ f_{57}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_4 & y_3 & y_1\end{pmatrix},\ f_{58}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_4 & y_3 & y_2\end{pmatrix}.$$

8) $$f_1=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_1 & z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_1 & z_1 & z_3 & z_2\end{pmatrix},\ f_3=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_1 & z_3\end{pmatrix},\ f_4=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_2 & z_3\end{pmatrix},$$

$$f_5=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1\end{pmatrix},\ f_6=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_3 & z_2\end{pmatrix},\ f_7=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_3 & z_3\end{pmatrix},\ f_8=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_1 & z_3 & z_1 & z_2\end{pmatrix},$$

$$f_9=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_1 & z_3 & z_2 & z_1\end{pmatrix},\ f_{10}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_1 & z_3 & z_2 & z_2\end{pmatrix},\ f_{11}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_1 & z_3 & z_2 & z_3\end{pmatrix},\ f_{12}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_1 & z_3 & z_3 & z_2\end{pmatrix},$$

$$f_{13}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_2 & z_1 & z_1 & z_3\end{pmatrix},\ f_{14}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_2 & z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix},\ f_{15}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_2 & z_1 & z_3 & z_1\end{pmatrix},\ f_{16}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_2 & z_1 & z_3 & z_2\end{pmatrix},$$

$$f_{17}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_2 & z_1 & z_3 & z_3\end{pmatrix},\ f_{18}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_2 & z_2 & z_1 & z_3\end{pmatrix},\ f_{19}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_2 & z_2 & z_3 & z_1\end{pmatrix},\ f_{20}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_2 & z_3 & z_1 & z_1\end{pmatrix},$$

$$f_{21}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_2 & z_3 & z_1 & z_2\end{pmatrix},\ f_{22}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_2 & z_3 & z_1 & z_3\end{pmatrix},\ f_{23}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_2 & z_3 & z_2 & z_1\end{pmatrix},\ f_{24}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_2 & z_3 & z_3 & z_1\end{pmatrix},$$

$$f_{25}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_3 & z_1 & z_1 & z_2\end{pmatrix},\ f_{26}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_3 & z_1 & z_2 & z_1\end{pmatrix},\ f_{27}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_3 & z_1 & z_2 & z_2\end{pmatrix},\ f_{28}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_3 & z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix},$$

$$f_{29}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_3 & z_1 & z_3 & z_2\end{pmatrix},\ f_{30}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_3 & z_2 & z_1 & z_1\end{pmatrix},\ f_{31}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_3 & z_2 & z_1 & z_2\end{pmatrix},\ f_{32}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_3 & z_2 & z_1 & z_3\end{pmatrix},$$

$$f_{33}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_3 & z_2 & z_2 & z_1\end{pmatrix},\ f_{34}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_3 & z_2 & z_3 & z_1\end{pmatrix},\ f_{35}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_3 & z_3 & z_1 & z_2\end{pmatrix},\ f_{36}=\begin{pmatrix}y_1 & y_1 & y_2 & y_4\\ z_3 & z_3 & z_2 & z_1\end{pmatrix}.$$

9) $$f_1=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ z_1 & z_3 & z_2\end{pmatrix},\ f_3=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ z_2 & z_1 & z_3\end{pmatrix},\ f_4=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ z_2 & z_3 & z_1\end{pmatrix},$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{pmatrix},\ f_6 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_3 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}.$$

d)

$$|X| \le |Y|.$$

e)

$$|X| \ge |Y|.$$

f)

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ \psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ \psi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ \psi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\psi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \psi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \psi_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ \psi_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\psi_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ \psi_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ \psi_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \psi_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\psi_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ \psi_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix},\ \psi_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ \psi_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\psi_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \psi_{18} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \psi_{19} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \psi_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\psi_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \psi_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \psi_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \psi_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 3. ბინარული მიმართებები

ა)

1) $2^{2^2}=16$.

2) $\alpha_1=\varnothing$, $\alpha_2=\{(1,1)\}$, $\alpha_3=\{(1,2)\}$, $\alpha_4=\{(2,1)\}$, $\alpha_5=\{(2,2)\}$,
$\alpha_6=\{(1,1),(1,2)\}$, $\alpha_7=\{(1,1),(2,1)\}$, $\alpha_8=\{(1,1),(2,2)\}$,
$\alpha_9=\{(1,2),(2,1)\}$, $\alpha_{10}=\{(1,2),(2,2)\}$, $\alpha_{11}=\{(2,1),(2,2)\}$,
$\alpha_{12}=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$, $\alpha_{13}=\{(1,1),(1,2),(2,2)\}$,
$\alpha_{14}=\{(1,1),(2,1),(2,2)\}$, $\alpha_{15}=\{(1,2),(2,1),(2,2)\}$,
$\alpha_{16}=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.

3) α_8, α_{13}, α_{14}, α_{16}.

4) α_1, α_2, α_5, α_8, α_9, α_{12}, α_{15}, α_{16}.

5) α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, α_7, α_8, α_{10}, α_{11}, α_{13}, α_{14}.

6) α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, α_7, α_8, α_{10}, α_{11}, α_{13}, α_{14}, α_{16}.

7) α_8, α_{13}, α_{14}, α_{16}.

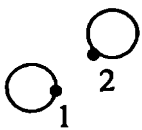
8) α_8, α_{13}, α_{14}.

9) α_8, α_{13}, α_{14}.

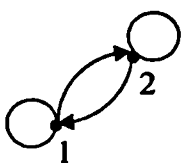
10) α_8, α_{16}.

11) α_1, α_2, α_5, α_6, α_7, α_8, α_{10}, α_{11}, α_{13}, α_{14}, α_{16}.

12) ნახ. 1 და ნახ. 2 შესაბამისად გამოსახულია α_8 და α_{16} ბინარულ მიმართებათა გრაფები:



ნახ. 1



ნახ. 2

b)

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2),(5,4)\},$$

$$\alpha_2 \circ \alpha_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\},$$

$$\alpha_3 \circ \alpha_4 = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\},$$

$$\alpha_4 \circ \alpha_3 = \{(2,1),(2,2),(2,5),(3,1),(3,2),(3,5),(5,1),(5,2),(5,5)\},\ \alpha_3 \circ \alpha_3 = \alpha_3.$$

§ 4. n – არული მიმართებები, n – არული ალგებრული ოპერაციები, ალგებრები და ალგებრული სისტემები

a)

1) N სიმრავლეზე ალგებრულია შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები, ხოლო Z, Q და R სიმრავლეზე შეკრების, გამოკლების და გამრავლების ოპერაციები.
2) $(N,+)$, $(N,\cdot)$, $(Z,+)$, $(Z,\cdot)$, $(Q,+)$, $(Q,\cdot)$ და $(R,+)$, $(R,\cdot)$ ალგებრებია.
3) $(N,+)$, $(N,\cdot)$, $(Z,+)$, $(Z,\cdot)$, $(Q,+)$, $(Q,\cdot)$ და $(R,+)$, $(R,\cdot)$ ალგებრები ნახევარჯგუფებია.
4) $(N,+)$, $(N,\cdot)$, $(Z,+)$, $(Z,\cdot)$, $(Q,+)$, $(Q,\cdot)$ და $(R,+)$, $(R,\cdot)$ ალგებრები მონოიდებია.
5) $(Z,+,-)$, $(Q,+,-)$ და $(R,+,-)$ ალგებრები ჯგუფებია.
6) $(Z,+,-,\cdot,1)$, $(Q,+,-,\cdot,1)$ და $(R,+,-,\cdot,1)$ ალგებრები რგოლებია.
7) $(Z,+,-,\cdot,1)$, $(Q,+,-,\cdot,1)$ და $(R,+,-,\cdot,1)$ ალგებრები ტანებია.
8) $(Z,+,-,\cdot,1)$, $(Q,+,-,\cdot,1)$ და $(R,+,-,\cdot,1)$ ალგებრები ველებია.

b)

1) არ ქმნის ველს, რადგან არაა სავალდებულო კენტმნიშვნელიანი

რაციონალური რიცხვის შებრუნებული იყოს კენტმნიშვნელიანი რაციონალური რიცხვი.

2) თუ $Q\left(\sqrt{2}\right)$ ყველა $x+y\sqrt{2}$ სახის რიცხვის სიმრავლეა, რაციონალური x და y კოეფიციენტებით, მაშინ $\left(Q\left(\sqrt{2}\right),+,-,\cdot,1\right)$ ალგებრა ველია.

3) თუ $Q\left(\sqrt{5}\right)$ ყველა $x+y\sqrt{5}$ სახის რიცხვის სიმრავლეა, რაციონალური x და y კოეფიციენტებით, მაშინ $\left(Q\left(\sqrt{5}\right),+,-,\cdot,1\right)$ ალგებრა ველია.

4) თუ $Q'\left(\sqrt[3]{2}\right)$ ყველა $x+y\sqrt[3]{2}$ სახის რიცხვის სიმრავლეა, რაციონალური x და y კოეფიციენტებით, მაშინ $\left(Q\left(\sqrt[3]{2}\right),+,-,\cdot,1\right)$ ალგებრა ველი არაა, რადგანაც იგი გამრავლების ოპერაციის მიმართ ჩაკეტილი არ არის.

5) თუ $Q\left(\sqrt[3]{2}\right)$ ყველა $x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4}$ სახის რიცხვის სიმრავლეა, რაციონალური x და y კოეფიციენტებით, მაშინ $\left(Q\left(\sqrt[3]{2}\right),+,-,\cdot,1\right)$ ალგებრა ველია.

f)

1) -3. 2) 0 და 1. 3) 0 და 1. 4) 0 და -1. 5) 0 და 1. 6) 2 და 3. 7) -1 და $-\frac{1}{2}$.

§ 5. რიცხვითი სისტემები.

g)

1) $z=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}i$. 2) $z=-i$ ან $z=2-i$. 3) $z=\frac{\sqrt{15}}{2}+\frac{1}{2}i$ ან

$$z=-\frac{\sqrt{15}}{2}+\frac{1}{2}i.$$

h)

1) $x=-3-i$, $y=2$. 2) $x=i$, $y=1+i$. 3) $x=2$, $y=1-i$.
4) $\varnothing$.

i)

1) $z_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{11}}{2}i$. 2) $z_1=-1$, $z_{2,3}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
3) $z_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$, $z_{3,4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$.

k)

$$\cos 0+i\sin 0,\ \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},\ \cos\pi+i\sin\pi,$$

$$\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2},\ \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

m)

$\omega_0=1$, $\omega_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. პირველადი ფესვებია ω_1 და ω_2.
$\omega_0=1$, $\omega_{1,2}=\cos\frac{2\pi}{5}\pm i\sin\frac{2\pi}{5}$, $\omega_{3,4}=-\cos\frac{\pi}{5}\pm i\sin\frac{\pi}{5}$. პირველადი ფესვებია: ω_1, ω_2, ω_3 და ω_4.

n)

1) $u_{1,2}=\pm\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. 2) $u_{1,2}=\pm(1-i)$.

3) $u_{1,2}=\pm\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$. $u_{3,4}=\pm\left(\cos\frac{3\pi}{8}-i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$.

o)

1) $u_{1,2}=\pm 2\cdot(1+i)$, $u_{3,4}=\pm 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $u_{5,6}=\pm 2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

p)

1) -1024. 2) -1.

r)

1) $\frac{5}{3}-\frac{2}{5}i-\frac{7}{15}j+\frac{2}{3}k$. 2) $\frac{25}{54}+\frac{1}{9}i+\frac{7}{54}j-\frac{5}{27}k$.

3) $\frac{4}{15}+\frac{14}{45}i+\frac{11}{45}j-\frac{13}{45}k$.

s)

1) $x=\frac{25}{54}-\frac{11}{54}j+\frac{4}{27}k$, $y=\frac{25}{54}+\frac{2}{9}i+\frac{7}{54}j-\frac{5}{27}k$.

2) $x=-\frac{6}{7}-\frac{3}{7}i-\frac{3}{7}j+\frac{4}{7}k$, $y=-\frac{6}{7}+\frac{5}{7}i+\frac{3}{7}j$.

3) $x=\frac{7}{15}+\frac{1}{5}i-\frac{1}{15}j-\frac{1}{15}k$, $y=\frac{7}{15}-\frac{1}{15}i+\frac{1}{5}j-\frac{1}{15}k$.

§ 6. მატრიცები

a)

1) $A_1=(0)$, $A_2=(1)$.

2) $A_1=(00)$, $A_2=(10)$, $A_3=(01)$, $A_4=(11)$.

3) $B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$B_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4) $C_1 = \begin{pmatrix} 000 \\ 000 \\ 000 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 100 \\ 000 \\ 000 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} 000 \\ 010 \\ 000 \end{pmatrix}$, $C_4 = \begin{pmatrix} 000 \\ 000 \\ 001 \end{pmatrix}$, $C_5 = \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 000 \end{pmatrix}$,

$C_6 = \begin{pmatrix} 100 \\ 000 \\ 001 \end{pmatrix}$, $C_7 = \begin{pmatrix} 000 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}$, $C_8 = \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}$.

5) $0 = \begin{pmatrix} 000 \\ 000 \\ 000 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}$.

6) $E_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 110 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 101 \\ 010 \\ 001 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 001 \end{pmatrix}$,

$E_5 = \begin{pmatrix} 100 \\ 011 \\ 001 \end{pmatrix}$, $E_6 = \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 101 \end{pmatrix}$, $E_7 = \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \\ 011 \end{pmatrix}$.

b)

$A' = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 111 \end{pmatrix}$.

c)

$\begin{pmatrix} 1010 \\ 0111 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0101 \\ 1011 \end{pmatrix}$.

e)

$\overline{A} = (1)$, $\overline{B} = (2)$, $\overline{C} = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \\ 011 \end{pmatrix}$, $\overline{D} = \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \end{pmatrix}$, $\tilde{B} = (3476)$, $\tilde{C} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

f)

$A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ მატრიცების სტრიქონების მიმართ დაყვანილ მატრიცებს შესაბამისად აქვთ სახე:

$$A_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},\ B_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -12 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix},$$

$$B_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_3' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ მატრიცების შესაბამის დაყვანილ მატრიცებს შესაბამისად აქვთ სახე:

$$A_1'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_1'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_2'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_3'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

h)

$$A_1 + B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 5 & 4 \\ 9 & 0 \end{pmatrix},\ A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 7 & 7 & 8 & 3 \\ 7 & 12 & 11 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 0 \end{pmatrix},\ B_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 10 & 8 & 8 & 6 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix},\ A_3 \cdot B_3 = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 8 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

i)

1) $f\left(\begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. 2) $f\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) $f\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $f\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & 18 \end{pmatrix}$.

§ 7. წრფივ განტოლებათა სისტემები

a)

1) $x_1 = 1 - x_3 + 4x_4$, $x_2 = x_3 - 3x_4$.

2) $x_1 = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}x_4$, $x_2 = -\frac{11}{4} + \frac{11}{4}x_4$, $x_3 = -\frac{21}{4} + \frac{21}{4}x_4$.

3) $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$, $x_2 = 3x_3 - x_4$.

4) $x_1 = 1$, $x_2 = -5x_4$, $x_3 = 1 - 4x_4$.

5) $x_1 = 5 - 4x_3$, $x_2 = -2 + 3x_3$.

6) $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 1$.

7) $x_1 = \frac{12}{7} - \frac{15}{7}x_4 - \frac{13}{7}x_5$, $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{8}{7} - \frac{3}{7}x_4 - \frac{4}{7}x_5$.

8) $x_1 = \frac{9}{7}$, $x_2 = \frac{1}{7}$.

b)

1) თავსებადია; 2) თავსებადია; 3) არათავსებადია; 4) თავსებადია;

5) არათავსებადია; 6) არათავსებადია; 7) თავსებადია; 8) თავსებადია; 9) არათავსებადია; 10) თავსებადია.

c)

1) $x_1 = 1$, $x_3 = -\frac{7}{5} - \frac{8}{5}x_2$, $x_4 = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}x_2$.

2) $x_1 = -\frac{7}{2} - \frac{19}{2}x_3 - \frac{7}{2}x_4$, $x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{13}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4$.

3) $x_1 = \frac{43}{8} - \frac{9}{8}x_3$, $x_2 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3$. $x_4 = -5$.

4) $x_2 = 4 + 2x_1 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$.

§ 8. ჩასმები

a)

1) 15, $\theta(\varphi_1) = -1$. 2) 19, $\theta(\varphi_2) = -1$. 3) 19, $\theta(\varphi_3) = -1$.

4) 37, $\theta(\varphi_4) = -1$. 5) 38, $\theta(\varphi_5) = 1$. 6) 36, $\theta(\varphi_6) = 1$.

b)

$\varphi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\varphi^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$,

$\varphi^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\varphi^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

e)

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

f)

1) კენტი; 2) ლუწი; 3) ლუწი; 4) კენტი; 5) $(-1)^{\left[\frac{n+2}{2}\right]}$; 6) $(-1)^{\left[\frac{n+1}{4}\right]}$; 7) $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$; 8) $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]}$.

§9. დეტერმინანტები

a)

1) $\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

2) $\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

b)

1) 11; 2) 13. 3) $\cos 2\alpha$. 4) $a \cdot b - c^2 - d^2$. 5) 2312. 6) $\sin(\alpha - \beta)$.
7) $\dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$. 8) 2. 9) 1. 10) 48. 11) 13. 12) 160. 13) -84. 14) 132.
15) -900. 16) 394. 17) 665. 18) 1692. 19) 96. 20) 410. 21) 207.
22) 198. 23) -336. 24) 10. 25) -7497. 26) 1. 27) -2639. 28) -924.

c)

1) $(-1)^n |A|$.

h)

1) $x^n + (-1)^{n+1} y^n$; 2) $n! \cdot \left(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n\right)$.

3) $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$; 4) $a_1\cdot a_2\cdots a_n\left(a_0-\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}-\cdots-\dfrac{1}{a_n}\right)$.

i)

1) $$\begin{vmatrix}5&6&0&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix}1&6&0&0\\0&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix}5&6&0&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}=-6\cdot\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&0&1&6\\0&0&0&5\end{vmatrix}+5\cdot\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&0&5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\end{vmatrix}.$$

2) $$\begin{vmatrix}3&6&0&4&0\\1&5&6&0&0\\2&1&5&1&0\\0&0&3&5&6\\0&0&0&2&5\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&1&0\\0&3&5&6\\0&0&2&5\end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix}1&6&0&0\\2&5&1&0\\0&3&5&6\\0&0&2&5\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}1&5&6&0\\2&1&5&0\\0&0&3&6\\0&0&0&5\end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix}3&6&0&4&0\\1&5&6&0&0\\2&1&5&1&0\\0&0&3&5&6\\0&0&0&2&5\end{vmatrix}=-4\cdot\begin{vmatrix}1&5&6&0\\2&1&5&0\\0&0&3&6\\0&0&0&5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3&6&0&0\\1&5&6&0\\0&0&3&6\\0&0&0&5\end{vmatrix}+5\cdot\begin{vmatrix}3&6&0&0\\1&5&6&0\\2&1&5&0\\0&0&0&5\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}3&6&0&0\\1&5&6&0\\2&1&5&0\\0&0&3&6\end{vmatrix};$$

3) $$\begin{vmatrix}2&3&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0\\1&1&4&0&0&0\\5&1&1&4&0&0\\3&1&2&1&1&3\\1&2&1&3&0&1\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}2&0&0&0&0\\1&4&0&0&0\\5&1&4&0&0\\3&2&1&1&3\\1&1&3&0&1\end{vmatrix};\quad\begin{vmatrix}2&3&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0\\1&1&4&0&0&0\\5&1&1&4&0&0\\3&1&2&1&1&3\\1&2&1&3&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&0&0&0\\0&3&0&0&0\\1&1&4&0&0\\5&1&1&4&0\\1&2&1&3&1\end{vmatrix}.$$

j)

1) 2;

შენიშვნა. აჩვენეთ, რომ მესამე რიგის დეტერმინანტში ყველა დადებითნიშნიანი შესაკრებლების ჯამი არ შეიძლება იყოს 1-

ის ტოლი. შემდეგ განიხილეთ მესამე რიგის დეტერმინანტი, რომლის მთავარ დიაგონალზე ყველა ელემენტი ნულია, ხოლო მის გარეთ კი ერთია.

2) 4.

შენიშვნა. მესამე რიგის დეტერმინანტში განიხილეთ ყველა დადებით ნიშნიანი შესაკრებლებისა და უარყოფით ნიშნიანი შესაკრებლების ნამრავლი და ბოლოს გამოთვალეთ ის დეტერმინანტი, რომლის მთავარ დიაგონალზე ყველა ელემენტი -1 - ია, ხოლო მის გარეთ კი 1 - ია.

§ 10. არითმეტიკული ვექტორული სივრცეები

c)

როცა ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

d)

ქმნიან.

e)

$$(-35,\ 12,\ 11,\ 20).$$

f)

$$\left(-\frac{9}{7},\ \frac{12}{7},\ -\frac{6}{7},\ 3\right).$$

g)

$$\left(\frac{24}{13},\ -\frac{4}{13}\right).$$

h)

1) ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, რადგან $\alpha_1+\alpha_2=0$;

2) ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებულია;
3) ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, რადგანაც $\alpha_1-\alpha_2+0\cdot\alpha_3=0$;

§ 11. მატრიცის რანგი

a)

1) 2. 2) 3. 3) 2. 4) 4. 5) 4. 6) 4. 7) 2. 8) 5. 9) 6. 10) 4. 11) 3. 12) 5. 13) 5. 14) 5. 15) 4. 16) 3. 17) 4. 18) n – ის ტოლია, როცა n კენტი რიცხვია და $(n-1)$ – ის ტოლია, როცა n ლუწი რიცხვია. 19) 4. 20) 4. 21) 4. 22) 4.

b)

1) 2 – ის ტოლია, როცა $\lambda=1$; 3 – ის ტოლია, როცა $\lambda=2,3$ და 4 – ის ტოლია ყველა დანარჩენ შემთხვევაში.
2) 2 – ის ტოლია, როცა $\lambda=0$ და 3 – ის ტოლია, როცა $\lambda\neq 0$.
3) 2 – ის ტოლია, როცა $\lambda=3$ და 3 – ის ტოლია, როცა $\lambda\neq 3$.
4) 3 – ის ტოლია, როცა $\lambda=\pm1$ ან $\lambda=\pm2$ და 4 – ის ტოლია, როცა $\lambda\neq\pm1$ და $\lambda\neq\pm2$.
5) 3 – ის ტოლია, როცა $\lambda=0,-2,-4$ და 4 – ის ტოლია ყველა დანარჩენ შემთხვევაში.

§ 12. წრფივ განტოლებათა სისტემის თავსებადობა. კრამერის ფორმულები

a)

1) $x_1=x_2=x_3=x_4=0$. 2) $x_1=x_2=x_3=0$. 3) $x_1=x_2=x_3=0$, $x_4=x_5$.

4) $x_1=\dfrac{3}{17}x_3-\dfrac{13}{17}x_4$, $x_2=\dfrac{19}{17}x_3-\dfrac{20}{17}x_4$.

5) $x_1=-\frac{1}{2}x_4+\frac{7}{8}x_5$, $x_2=-\frac{1}{2}x_4+\frac{5}{8}x_5$, $x_3=\frac{1}{2}x_4-\frac{5}{8}x_5$.

6) $x_1=-x_3$, $x_2=x_3$, $x_4=x_5=0$. 7) $x_1=2x_2-x_3$, $x_4=1$.

8) არათავსებადია; 9) არათავსებადია; 10) არათავსებადია;

11) $x_1=-2$; $x_2=4$, $x_3=9$, $x_4=-1$.

12) $x_1=1$; $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=0$.

13) არათავსებადია.

ხ)

1) $x_1=x_2=x_3=1$. 2) $x_1=x_2=x_3=1$. 3) $x_1=x_2=x_3=1$.

4) $x_1=0$, $x_2=x_3=1$. 5) $x_1=x_2=x_3=1$.

6) $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_3=-\frac{16}{3}$, $x_4=6$.

7) $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=-\frac{3}{2}$, $x_4=\frac{1}{2}$.

8) $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-1$, $x_3=\frac{3}{2}$, $x_4=0$.

9) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=1$, $x_4=2$.

10) $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=0$.

11) $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=x_4=0$.

12) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$.

13) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=0$, $x_4=1$.

14) $x_1=1$, $x_2=x_3=0$, $x_4=2$.

c)

1) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-1$. 2) $x_1=0$, $x_2=-2$, $x_3=2$.

3) $x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=-4$. 4) $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=-2$.

5) $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=-1$, $x_4=2$. 6) $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_3=1$, $x_4=4$.

7) $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=1,\ x_3=-\frac{3}{2},\ x_4=0.$ 8) $x_1=x_2=-1,\ x_3=0,\ x_4=1.$

9) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=4.$ 10) $x_1=4,\ x_2=3,\ x_3=2,\ x_4=1.$

11) $x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=-1,\ x_4=1.$ 12) $x_1=0,\ x_2=x_3=x_4=1.$

§ 13. მატრიცის შებრუნებული მატრიცები

a)

1) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{19}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 3) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 5) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

b)

1) $\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 3) $\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ -14 & -6 \end{pmatrix}$.

c)

1) $x=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

2) $x=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$

§ 14. ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტალურ ამონახსნთა სისტემა

a)

1) $x_1=-2x_2,\qquad \alpha_1=(-2,1).$

2) $x_1=-2x_2+3x_3,\qquad \begin{cases}\alpha_1=(-2,1,0),\\ \alpha_2=(3,0,1).\end{cases}$

3) $\begin{cases}x_1=-x_3+4x_4,\\ x_2=x_3-3x_4,\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha_1=(-1,1,1,0),\\ \alpha_2=(4,-3,0,1).\end{cases}$

4) $\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{7}x_3,\\ x_2=\dfrac{5}{7}x_3,\end{cases}\qquad \alpha_1=\left(\dfrac{3}{7},\dfrac{5}{7},1\right).$

5) $\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{7}x_3,\\ x_2=\dfrac{5}{7}x_3-x_4,\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha_1=\left(\dfrac{3}{7},\dfrac{5}{7},1,0\right),\\ \alpha_2=(0,-1,0,1).\end{cases}$

6) $x_1=-2x_2+x_3+3x_4-4x_5,\qquad \begin{cases}\alpha_1=(-2,1,0,0,0),\\ \alpha_2=(1,0,1,0,0),\\ \alpha_3=(3,0,0,1,0),\\ \alpha_4=(-4,0,0,0,1).\end{cases}$

7) $\begin{cases}x_1=8x_3-5x_4-9x_5,\\ x_2=-5x_3+x_4+5x_5,\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha_1=(8,-5,1,0,0),\\ \alpha_2=(-5,4,0,1,0),\\ \alpha_3=(-9,5,0,0,1).\end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = \frac{19}{16}x_4 - \frac{5}{8}x_5, \\ x_3 = \frac{9}{16}x_4 + \frac{9}{8}x_5, \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{19}{16}, \frac{9}{16}, 1, 0\right), \\ \alpha_2 = \left(0, -\frac{5}{8}, \frac{9}{8}, 0, 1\right). \end{cases}$

9) $\begin{cases} x_1 = -6x_4 - \frac{41}{7}x_5, \\ x_2 = -x_4 - \frac{8}{7}x_5, \\ x_2 = -5x_4 - \frac{29}{7}x_5, \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_1 = (-6, -1, -5, 1, 0), \\ \alpha_2 = \left(-\frac{41}{7}, -\frac{8}{7}, -\frac{29}{7}, 0, 1\right). \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1 = -4x_3, \\ x_2 = 3x_3 - x_4, \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_1 = (-4, 3, 1, 0), \\ \alpha_2 = (0, -1, 0, 1). \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1 = \frac{5}{9}x_3, \\ x_2 = \frac{1}{9}x_3, \end{cases}$ $\alpha_1 = \left(\frac{5}{9}, \frac{1}{9}, 1\right).$

12) $\begin{cases} x_1 = -13x_5, \\ x_2 = x_3 - x_4 + 8x_5, \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_1 = (0, 1, 1, 0, 0), \\ \alpha_2 = (0, -1, 0, 1, 0), \\ \alpha_3 = (-13, 8, 0, 0, 1). \end{cases}$

13) $x_1 = -2x_2 + 2x_3 - 2x_4,$ $\begin{cases} \alpha_1 = (-2, 1, 0, 0), \\ \alpha_2 = (2, 0, 1, 0), \\ \alpha_3 = (-2, 0, 0, 1); \end{cases}$

14) $\begin{cases} x_1 = -\frac{31}{35}x_5,\ x_2 = -\frac{11}{35}x_5, \\ x_3 = 0,\ x_4 = -\frac{29}{35}x_5, \end{cases}$ $\alpha_1 = \left(-\frac{31}{35}, -\frac{11}{35}, 0, -\frac{29}{35}, 1\right).$

15) $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{39}{31}x_5,\ x_2 = -\dfrac{3}{31}x_5, \\ x_3 = 0,\ x_4 = -\dfrac{5}{31}x_5,\ x_6 = 0, \end{cases}$ $\alpha_1 = \left(-\dfrac{39}{31}, -\dfrac{3}{31}, 0, -\dfrac{5}{31}, 1, 0\right).$

16) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{3}x_4 - 3x_5 + 2x_6 - 3x_7, \\ x_2 = \dfrac{4}{3}x_4 - \dfrac{8}{5}x_5 - \dfrac{3}{5}x_6 - \dfrac{7}{5}x_7, \\ x_3 = \dfrac{7}{3}x_4 - \dfrac{6}{5}x_5 + \dfrac{4}{5}x_6 - \dfrac{4}{5}x_7, \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_1 = \left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{7}{3}, 1, 0, 0, 0\right) \\ \alpha_2 = \left(-3, -\dfrac{8}{5}, -\dfrac{6}{5}, 0, 1, 0, 0\right), \\ \alpha_3 = \left(2, -\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, 0, 0, 1, 0\right), \\ \alpha_4 = \left(-3, -\dfrac{7}{5}, -\dfrac{4}{5}, 0, 0, 0, 1\right). \end{cases}$

17) $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{6}x_3, \\ x_2 = \dfrac{7}{6}x_3, \end{cases}$ $\alpha_1 = (-1, 7, 6).$

18) $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{8}{5}x_3 + \dfrac{8}{5}x_4, \\ x_2 = \dfrac{7}{5}x_3 - \dfrac{7}{5}x_4, \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_1 = (-8, 7, 5, 0), \\ \alpha_2 = (8, -7, 0, 5). \end{cases}$

19) $\left\{ x_1 = -\dfrac{4}{17}x_3,\ x_2 = \dfrac{11}{17}x_3,\ x_4 = 0, \right.$ $\alpha_1 = (-4, 11, 17, 0).$

20) $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{13}{15}x_3 + \dfrac{2}{15}x_4 + \dfrac{1}{15}x_5, \\ x_2 = \dfrac{23}{15}x_3 - \dfrac{22}{15}x_4 - \dfrac{11}{15}x_5, \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_1 = (-13, 23, 15, 0, 0), \\ \alpha_2 = (2, -22, 0, 15, 0), \\ \alpha_3 = (1, -11, 0, 0, 15). \end{cases}$

21) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{23}x_3 + \dfrac{6}{23}x_4, \\ x_2 = \dfrac{26}{23}x_3 + \dfrac{19}{23}x_4, \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_1 = (7, 26, 23, 0), \\ \alpha_2 = (6, 19, 0, 23). \end{cases}$

§ 15. ერთი ცვლადის მრავალწევრთა რგოლი

a)

1) $f(x) = g(x)\cdot(2x^2 + 2x + 12) + (38x + 6)$.

2) $f(x) = g(x)\cdot(2x^2 + 3x + 11) + (25x - 5)$.

3) $f(x) = g(x)\cdot\left(x - \dfrac{7}{3}\right) + \left(-\dfrac{20}{3}x - \dfrac{16}{3}\right)$.

4) $f(x) = g(x)\cdot(5x^2 + (6 - 3i)x + 1 - i) + ((10 - 6i)x + 9 - 6i)$.

5) $f(x) = g(x)\cdot\bar{6}x + (\bar{3}x^2 - \bar{1}x - \bar{2})$.

6) $f(x) = g(x)\cdot(\bar{1}x^3 + \bar{3}x + \bar{2}) - \bar{1}$.

b)

1) $(f(x), g(x)) = \bar{1}$, $[f(x), g(x)] = \bar{1}x^7 + \bar{1}x^6 + \bar{3}x^5 + \bar{2}x^4 + \bar{1}x^3 + \bar{2}x^2 - \bar{1}x + \bar{1}$.

2) $(f(x), g(x)) = \bar{1}$, $[f(x), g(x)] = -\bar{1}x^6 - \bar{1}x^5 - \bar{3}x^4 + \bar{1}x^2 + \bar{2}$.

3) $(f(x), g(x)) = \bar{2}x^2 + \bar{1}x + \bar{1}$, $[f(x), g(x)] = \bar{1}x^6 - \bar{2}x^4 + \bar{1}x^3 + \bar{4}x^2 - \bar{2}x + \bar{3}$.

4) $(f(x), g(x)) = x^2 + 1$, $[f(x), g(x)] = x^5 - x^4 - 3x^2 - x - 2$.

5) $(f(x), g(x)) = 1$, $[f(x), g(x)] = x^7 + 5x^6 + 8x^5 + 10x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 4$.

6) $(f(x), g(x)) = x^3 + (1 - i)x^2 - 1$, $[f(x), g(x)] = x^6 - ix^5 + ix^4 - (1 + i)x^3 + ix^2 - x + 1$.

c)

1) $b = 1$, $c = 0$.

2) $c=d=0,\ b=1$.

3) $b=1,\ c=0,\ d=-1$ ან $b=-1,\ c=0,\ d=1$.

4) $b=-1,\ c=0,\ d=0$ ან $b=1,\ c=1,\ d=1$.

d)

1) $x^4+ix^3-3ix^2+(1-i)x+2,\quad -x^4-ix^3-3ix^2+(1+3i)x+2,$
$-3ix^6+(4+i)x^5+(1+i)x^4-(6-2i)x^3+(2-2i)x^2-4ix.$

2) $3x^2+ix+1+3i,\quad (1-2i)x^2-ix+1-3i,$
$(3+i)x^4+(1+2i)x^3+(4+7i)x^2+ix+3i.$

3) $\overline{5}x^3+\overline{5}x^2-\overline{6}x+\overline{1},\quad \overline{1}x^3+\overline{5}x^2+\overline{6}x-\overline{5},$
$\overline{6}x^6+\overline{3}x^5-\overline{4}x^4-\overline{4}x^3+\overline{1}x^2+\overline{5}x-\overline{6}.$

4) $\overline{2}x^4+\overline{3},\quad \overline{1}x^4+\overline{1}x^3-\overline{3}x+\overline{1},$
$\overline{2}x^8+\ \overline{2}x^7-\overline{4}x^6+\overline{4}x^5+\overline{4}x^4+\overline{2}x^3+\overline{4}x^2+\overline{4}x+\overline{2}.$

e)

1) $(x-2)\cdot(x^3-x^2-2x-3)-7$.

2) $(x+3)\cdot(9x^2-19x+47)-142$.

3) $(x+1+i)\cdot(4x^2-(3+4i)x-(1-7i))+8-6i$.

4) $(x-\overline{2})\cdot(\overline{3}x^2+\overline{5}x+\overline{3})+\overline{4}$.

5) $(x+\overline{3})\cdot(\overline{7}x^3+\overline{10}x^2+\overline{10}x)$.

f)

1) -38. 2) 136. 3) $87+11i$. 4) $-1+58i$. 5) $\overline{4}$; 6) $\overline{3}$.

g)

1) 3. 2) 4. 3) 3. 4) 4, 4. 5) 2, 2. 6) 3. 7) 2. 8) 1. 9) 3, 1.

h)

1) $b=c=1$. 2) $b=8,\ c=-5$.

i)

1) Q. 2) Q. 3) C. 4) R. 5) Q. 6) Q. 7) Q.

j)

1) 33, 45. 2) 86, -102. 3) $-12-2i,\quad -16+8i$. 4) $-2+4i,\quad 4+7i$.

k)

1) არის; 2) არ არის; 3) არის; 4) არის.

l)

1) $b=-5$. 2) $b=3,\ c=-4$.

m)

1) $x^4-4x^3+3x^2+4x-4$. 2) $x^3+(-2+i)x^2+2x-2$;

3) x^4+2x^2+1.

4) $x^5-\left(2+3\sqrt{2}\right)x^4+\left(7+6\sqrt{2}\right)x^3-\left(12+5\sqrt{2}\right)x^2+\left(6+4\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{2}$.

5) $8x^4-(10+16i)x^3-(5-20i)x^2+(10-6i)x-3$.

6) $x^5+(-6+2i)x^4+(13-10i)x^3+(-12+18i)x^2+(4-14i)x+4i$.

n)

1) $x^3-6x^2+11x-6$. 2) $x^4-x^3-x^2+x$.

3) $3x^4-(6+12i)x^3-(15-18i)x^2+(18+6i)x-6i$.

o)

1) $x^4-6x^3+14x^2-14x+5$.

2) $x^5-x^4-4x^3+16x^2-20x+12$.

3) $x^6 - 10x^5 + 44x^4 - 108x^3 + 157x^2 - 130x + 50$.

4) $x^{10} - 2x^9 + 4x^8 - 4x^7 + 9x^6 - 10x^5 + 18x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 8x + 8$.

5) $x^6 - 12x^5 + 87x^4 - 376x^3 + 1129x^2 - 2028x + 2197$.

p)

1) $x_1 = -7, \;\; x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}i$.

2) $x_1 = 4, \;\; x_2 = 3 + 4\sqrt{3}i \;\; x_3 = 1 - 4\sqrt{3}i$.

3) $x_1 = 2 + i, \;\; x_{2,3} = -1 - 2i$.

4) $x_1 = 5, \;\; x_2 = 4 - \sqrt{3} \;\; x_3 = 2 + \sqrt{3}$.

5) $x_1 = -3, \;\; x_{2,3} = \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{5\sqrt{3}}{2} i$.

6) $x_1 = 2, \;\; x_{2,3} = 1 \pm 2\sqrt{3}i$.

7) $x_1 = -2, \;\; x_{2,3} = 1$,

8) $x_1 = -2, \;\; x_{2,3} = 1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3} i$.

9) $x_1 = 1, \;\; x_{2,3} = -\dfrac{1}{2}$.

§ 16. მრავალცვლადიან მრავალწევრთა რგოლი

a)

1) $f + g = 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2^2$, $f - g = -4x_1^3 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2^2$,
$f \cdot g = -4x_1^6 + 8x_1^4x_2 + 16x_1^4x_3 - 16x_1^3x_2^2 - 32x_1^2x_2x_3 + 8x_1x_2^3 + 48x_1x_2^2x_3 - 12x_2^4$.

2)
$$f + g = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)x_1 - 2x_1x_2 + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)x_2,$$
$$f - g = \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)x_1 - 2x_1x_2 + \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)x_2,$$
$$f \cdot g = \sqrt{6}x_1^2 + x_1x_2 - 2\sqrt{3}x_1^2x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_2^2 - \sqrt{6}x_2^2.$$

b)

1) $f+g+h=-10x_1+10x_2^3,$
$(f-g)-h=6x_1x_2^2x_3-14x_1x_2+10x_1+6x_2^3.$

c)

1) $2x_1^2x_2-\frac{13}{4}x_1x_2x_3+3x_1x_2+\frac{1}{2}x_2x_3^2+x_2x_3.$

2) $\sqrt{2}x_1x_2x_4+4\sqrt{3}x_1x_3x_4-x_2^2x_3-5\sqrt{2}x_2^2x_4-3x_2x_3x_4.$

3) $-8x_1^2x_2^2+(4+2i)x_1^2x_2+x_1^2+3ix_1x_2^2-ix_1x_2+(5+i)x_2^3.$

d)

1) $12x_1^4x_2^4x_3$, 9. 2) $-24x_1^5x_2^3$, 9. 3) $(-2-i)x_1^6x_2^3x_3^2$, 12.

4) $(-3+15i)x_1^6x_2^2$, 12.

e)

1) $(4x_1^3-2x_1^2x_3-5x_1x_2x_3)+(x_2x_3-2x_1^2)+4x_1-6.$

2) $(-3x_1^2x_2^2-x_1^3x_2)+(x_1^2x_2-5x_1x_2^2)+(x_1^2+x_2^2-x_1x_2)+2.$

3) $(x_1^3+x_2^3-3x_1x_2x_3)+(x_1^2-x_2^2-x_1x_2)+(x_1+x_2)+7.$

f)

1) $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3-2\sigma_2^2+3\sigma_3.$

2) $2\sigma_1^3-9\sigma_1\sigma_2+27\sigma_3.$

3) $\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-2\sigma_2.$

4) $-4\sigma_1^3\sigma_3+\sigma_1^2\sigma_2^2+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-4\sigma_2^3-27\sigma_3^2.$

5) $\sigma_1^4-\sigma_1^2\sigma_2+6\sigma_1\sigma_3+\sigma_2^2$.

6) $\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$.

h)

1) $x=2,\ y=0$ ან $x=0,\ y=-2$.

2) $x=2,\ y=1$ ან $x=-2,\ y=1$ ან $x=1,\ y=4$ ან $x=-1,\ y=4$.

3) $x=8,\ y=1$ ან $x=1,\ y=8$.

i)

1) $x=4$ ან $x=1$.

მითითება:

$$\left(y=\sqrt{17-x^2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=9\\ \sigma_1^2-2\sigma_2=17\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=7\\ xy=16\end{cases}\vee\begin{cases}x+y=5\\ xy=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=1\\ y=4.\end{cases}$$

2) $x=\dfrac{3}{5}$ ან $x=\dfrac{4}{5}$ ან $x=\dfrac{-5-\sqrt{73}}{14}$.

j)

1) $x=-1, y=1$ ან $x=1, y=-1$ ან $x=2, y=2$.

2) $x=\sqrt{3}, y=1$ ან $x=-\sqrt{3}, y=1$.

k)

1) $x=0,\ y=3$ ან $x=0,\ y=1$ ან $x=-1,\ y=2$ ან $x=-1,\ y=3$ ან $x=2,\ y=1+\sqrt{2}i$ ან $x=2,\ y=1-\sqrt{2}i$.

ლიტერატურა

1. Бухштаб А. А. Теория чисел. Москва, 1966.
2. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Москва, 2001.
3. Кострикин А. И. Сборник задач по алгебре. Москва, 2001.
4. Кошелев Ю. Г. Научные основы школьного курса математики при изучении числовых систем. Новосибирск, 1980.
5. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. Москва, 1979.
6. Курош А. Г. Курс Высшей алгебры. Москва, 1971.
7. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. Москва, 1962.
8. Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. Алгебра и теория чисел. Москва, 1978.
9. Ляпин Е. С., Аизенштат А. Я., Лесохин М. М. Упражнения по теории групп. Москва, 1967.
10. Нечаев В. А. Задачник практикум по алгебре (Группы, Кольца, Поля, Векторные и евклидовы пространства, Линейные отображения). Москва, 1985.
11. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. Москва, 1967.
12. Скорняков Л. А. Элементы алгебры. Москва, 1980.
13. Солодовников А. С. Задачник практикум по алгебре. Москва, 1985.
14. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. Москва, 1975.
15. ქათამაძე რ. უმაღლესი ალგებრის ამოცანათა კრებული. ბათუმი, 2002.
16. ქათამაძე რ. რიცხვთა თეორიის ამოცანათა კრებული. ბათუმი, 2004.
17. ქემხაძე შ. ს. უმაღლესი ალგებრა. თბილისი, 1972.

ძირითადი აღნიშვნები

1. $\square$ - წინადადების სამართლიანობის დამტკიცების დასრულების აღმნიშვნელი სიმბოლო.
2. $\in$ - მიკუთვნების მიმართება.
3. $\notin$ - მიკუთვნების მიმართების უარყოფა.
4. $=$ - ტოლობის მიმართება.
5. $\{x \mid P(x)\}$ - სიმრავლეა, რომელის ელემენტებია ყველა ისეთი x ელემენტი, რომელთათვისაც $P(x)$ პრედიკატი ჭეშმარიტია.
6. $B(X)$ - X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე - ბულეანი.
7. $|X|$ - X სიმრავლის სიმძლავრე ან სასრულ X სიმრავლეში ელემენტების რაოდენობა.
8. $\subseteq$ - თეორიულ-სიმრავლური ჩართვის მიმართება.
9. $\{x, y\}$ - დაულაგებელი წვილი.
10. $(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$ - დალაგებული წყვილი.
11. $\cup$, $\bigcup$ - თეორიულ-სიმრავლური გაერთიანების ოპერაცია.
12. $\cap$, $\bigcap$ - თეორიულ-სიმრავლური თანაკვეთის ოპერაცია.
13. $\setminus$ - სიმრავლეთა სხვაობის ოპერაცია.
14. U - უნივერსალური სიმრავლე.
15. $\overline{A} = U \setminus A$ - A სიმრავლის დამატება U სიმრავლემდე.
16. $X \times Y$ - X და Y სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი.
17. $\alpha \subseteq X \times Y$ - α თანადობაა X და Y სიმრავლეებს შორის.
18. $(x, y) \in f$, xfy - (x, y) წყვილი f თანადობის ელემენტია.
19. $\alpha \circ \beta$ - α და β თანადობების ნამრავლი.
20. fX - f თანადობის პირველი პროექცია ან f ასახვის განსაზღვრის არე.
21. Yf - f თანადობის მეორე პროექცია ან f ასახვის მნიშვნელობათა სიმრავლე.
22. $f : X \to Y$ - f ასახვაა X სიმრავლისა Y სიმრავლეში.
23. Δ_X - X სიმრავლის თავისთავზე იგივური ასახვა.
24. f^{-1} - f ასახვის შებრუნებული ასახვა.

25. $f \cdot g$ - f და g ასახვების ნამრავლი.

26. $\bigcup_{i \in I} X_i$ - ყველა X_i $(i \in I)$ სიმრავლის გაერთიანება.

27. $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ - ყველა X_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ სიმრავლის გაერთიანება.

28. $\bigcap_{i \in I} X_i$ - - ყველა X_i $(i \in I)$ სიმრავლის თანაკვეთა.

29. $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ - ყველა X_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ სიმრავლის თანაკვეთა.

30. $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ - $X_1, X_2, \dots, X_n$ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი.

31. X^n - X სიმრავლის თავისთავზე $n-$ჯერ დეკარტული ნამრავლი.

32. $*$ - ბინარული ალგებრული ოპერაცია.

33. $\circ$ - ბინარული ალგებრული ოპერაცია.

34. $+$ - შეკრების ბინარული ალგებრული ოპერაცია.

35. $\cdot$ - გამრავლების ბინარული ალგებრული ოპერაცია.

36. $-$ - გამოკლების ბინარული ალგებრული ოპერაცია.

37. $-, ^{-1}, '$ - მოპირდაპირეს, შებრუნებულის და სიმეტრიული ელემენტების აღების უნარული ოპერაციები.

38. (X, Ω, Ω') - ალგებრული სისტემა.

39. (X, Ω) - ალგებრა.

40. (X, Ω') - მოდელი.

41. $(X, *)$ - ნახევარჯგუფი.

42. $(X, \cdot)$ - ნახევარჯგუფი გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

43. $(X, +)$ - ნახევარჯგუფი შეკრების ოპერაციის მიმართ.

44. $(X, *, ')$ - ჯგუფი.

45. $(X, \cdot, ^{-1})$ - ჯგუფი გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

46. $(X, +, -)$ - ჯგუფი შეკრების ოპერაციის მიმართ.

47. $(X, +, -, \cdot, 1)$ - რგოლი.

48. $\mathbf{N}$ - ნატურალურ რიცხვთა სისტემა.

49. $\mathbf{Z}$ - მთელ რიცხვთა სისტემა

50. $\mathbf{Q}$ - რაციონალურ რიცხვთა სისტემა.

51. $\mathbf{R}$ - ნამდვილ რიცხვთა სისტემა.

52. $\mathbf{C}$ - კომპლექსურ რიცხვთა სისტემა.

53. $\mathbf{K}$ - კვატერნიონები.

54. S_n - $X=\{1,2,\ldots,n\}$ სიმრავლის ყველა ჩასმათა სიმრალე.

55. $\theta': R \to \{-1,0,1\}$, სადაც $\theta'(a)=\begin{cases} 1, & a>0, \\ 0, & a=0, \\ -1, & a<0. \end{cases}$

56. $\theta: S_n \to \{-1,1\}$, სადაც $\theta(\varphi)=1$, თუ φ ლუწი ჩასმაა და $\theta(\varphi)=-1$, თუ φ კენტი ჩასმაა.

57. $A=\left(x_{ij}\right)$ - მატრიცის აღმნიშვნელი სიმბოლო.

58. $|A|$ ან $\det A$ - A მატრიცის დეტერმინანტი.

59. V - არითმეტიკული ვექტორული სივრცე.

60. $r(A)$ - A მატრიცის რანგი.

61. $\mathrm{K}[x]$ - x ცვლადის მრავალწევრთა რგოლი კომუტაციურ K რგოლზე.

62. $(f(x),g(x))$ - $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი.

63. $(f(x),g(x))$ - $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უდიდესი საერთო გამყოფი.

64. $[f(x),g(x)]$ - $f(x)$ და $g(x)$ მრავალწევრთა უმცირესი საერთო ჯერადი.

65. $\mathrm{K}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ - $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ცვლადების მიმართ მრავალწევრთა რგოლი კომუტაციურ K რგოლზე.

66. $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ - ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრები.

67. $\mathrm{K}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ - $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ - ელემენტარული სიმეტრიული მრავალწევრებით წარმოქმნილი რგოლი.

68. $\mathrm{SK}[x_1, x_2, ..., x_n]$ - $x_1, x_2, ..., x_n$ ცვლადების ყველა სიმეტრიული მრავალწევრთა რგოლი.

69. $R(f, g)$ - f და g მრავალწევრების რეზულტანტი.

საგნობრივი საძიებელი

ს ა რ ჩ ე ვ ი