თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

225

ISSN 0376—2637

მათემატიკა • მექანიკა • ასტრონომია
МАТЕМАТИКА • МЕХАНИКА • АСТРОНОМИЯ
MATHEMATICS • MECHANICS • ASTRONOMY

12

თბილისი Тбилиси Tbilisi
1981

Л. Г. Гокиели (1901—1975)

Посвящается 80-летию со дня рождения проф. Л. П. Гокиели.

მიძღვნილია პროფ. ლ. გოკიელის დაბადების მე-80 წლისთავისადმი

To prof. L. Gokieli's 80-th birth anniversary

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
TBILISI UNIVERSITY PRESS

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
ტ. 225 V.

მათემატიკა • მექანიკა ასტრონომია

MATHEMATICS • MECHANICS ASTRONOMY

თბილისი 1981 Tbilisi

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Т. 225

МАТЕМАТИКА • МЕХАНИКА
АСТРОНОМИЯ

Тбилиси 1981

Редактор издательства Л.Абуашвили

Сдано в производство 1. 07. 81. Подписано в печать 09. 11.81
УЭ 15264. Усл.печ. л.15. Уч.-изд.7,68. Тираж 300. Заказ
2012

Цена 1 руб.20 коп.

Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр.И. Чавчавадзе, 14
Типография Тбилисского университета.
Тбилиси, 380028, просп. И. Чавчавадзе, 1.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, I4.
თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,
თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, I.

В декабре 1981 года исполнилось 80 лет со дня рождения известного грузинского ученого-математика и философа, члена-корреспондента АН ГССР, заслуженного деятеля науки Грузинской ССР, доктора физико-математических наук, профессора Левана Петровича Гокиели.

Л.П.Гокиели прошел славный путь ученого, педагога, общественного деятеля. Он родился 3 декабря 1901 г. в г.Кутаиси. Здесь же окончил гимназию и в 1919 году поступил в Тбилисский государственный университет, который окончил в 1924 году по специальности математики. В этом же году он публикует свою первую научную работу. В 1927 - 1928 годах сдает магистерские экзамены; в 1929-1930 годах находится в научной командировке в Москве. С 1930 года он является профессором Тбилисского университета и читает ведущие курсы по математике и обоснованию математики и логики.

Многогранной и исключительно плодотворной была научная и общественная деятельность Л.П.Гокиели: заведующий кафедрой (с 1930 г. почти до конца жизни), декан факультета (два раза), заведующий отделом логики Института философии АН Грузинской ССР, президент Математического общества Грузии, бессменный руководитель созданого им на физико-математическом факультете семинара по изучению философских проблем физико-математических наук, член многих ученых советов, неутомимый исследователь, пропагандист и популяризатор актуальных проблем обоснования математики и логики.

Партия и правительство достойно оценили деятельность Л.П. Гокиели: он был награжден несколькими орденами и медалями, в том числе орденом Ленина (1953 г.), неоднократно ему присуждались премии...

Л.П.Гокиели был человеком науки в подлинном смысле этого слова; основной смысл своей жизни он видел в служении науке, в поиске истины.

Л.П.Гокиели - автор свыше 50 научных трудов (среди них: 3 учебника, 7 монографий, несколько научно-популярных брошюр). Приведем основные из этих трудов и дадим краткую характеристику некоторых из них: I) "Дифференциальное исчисление" (I932г.); 2) "Введение в математический анализ" (I938г.); 3) "Основы математики" (I958г.); 4)"Вопросы обоснования теории множеств" (докторская диссертация, I935г.); 5)"О понятии существования в математике" (I94Iг.); 6)"Математические рукописи К.Маркса" (I95Iг.); 8) "О природе логического" (I958г.); 9) "Логика, I" (I965г.); I0) "Логика, II" (I967г.).

Первые две книги являются одними из первых оригинальных учебников на грузинском языке по соответствующим дисциплинам; они сыграли важную роль в математическом образовании нескольких поколений математиков. В них, со свойственной автору логической строгостью и ясностью мысли, изложены некоторые основные понятия математического анализа и вопросы дифференциального исчисления; здесь на передний план выдвигается логический аспект некоторых основных понятий и истин математического анализа (множества, переменной, функций, бесконечно малой, производной, дифференциала и других).

Третья книга - "Основы математики" - представляет собой учебник монографического характера, предназначенный для студентов философского факультета. Здесь материал изложен с учетом интересов будущих философов: в органическом сочетании с техническо-алгоритмической стороной математики, дан диалектико-логико-философский анализ основных идей, понятий, методов, языка, аппарата и истин математики.

Книга "Математические рукописи К.Маркса и вопросы обоснования математики" представляет собой одно из самых значительных монографических исследований в Советском Союзе, посвященных математическим рукописям Маркса, взглядам Маркса на математику.

В двух книгах - в первой и второй частях "Логики" - подытожены некоторые основные результаты научных исследований автора, в частности, в них изложено одно из самых значительных его достижений - теория коренных выводов, которая представляет собой серьезную попытку оригинального построения логики.

Краеугольным камнем для научного творчества Л.П.Гокиели является диалектический метод познания; в основе всех его научных трудов, анализа сложных категорий и истин лежит глубокое понимание диалектического характера единства противоположностей и его творческое применение.

Результаты научных исследований Л.П.Гокиели являются подтверждением общей истины, что для адекватного отражения диалектических отношений объективного мира необходимо, чтобы сам процесс мышления - метод исследования - был диалектическим. Не искусственное расщепление, разъединение, метафизическое сопоставление противоположных сторон (понятий), а глубокое понимание диалектической природы единства противоположных сторон и его творческое применение - единственный правильный метод научного познания - установления истины, в частности объяснения и устранения парадоксов.

В трудах Л.П.Гокиели обосновано утверждение, что большая часть парадоксов теории множеств суть не действительно существующие логические противоречия, а результат неправильного понимания соответствующих понятий, метафизического подхода к вопросам.

Среди результатов научных исследований Л.П.Гокиели, как было уже отмечено, особое место занимает созданная им теория коренных выводов, являющаяся итогом многолетних размышлений автора над актуальными проблемами обоснования математики и логики. Основная идея этой теории, применительно к вопросу взаимоотношения противоположных сторон любой единой субстанции, может быть выражена следующим образом: метафизическое разъединение, метафизическое сопоставление находящихся в диалектическом единстве противоположных сторон (понятий), содержит негативный момент, который , однако, выступает в положительной роли в том смысле, что в результате такого искусственного разъединения возникает регресс в бесконечность, свидетельствующий о неправильности метафизического подхода. Например, любая субстанция имеет две противоположные стороны - количество и качество, находящиеся в диалектическом единстве; если мы их разъединим - представим их существующими раздельно, то у каждой из них окажутся свои две противоположные стороны - количество и качество - и этот процесс будет бесконечно продолжаться - получится регресс в бесконечность.

Разработанный им самим диалектический подход Л.П.Гокиели применял при исследовании различных проблем обоснования математики и логики, в результате чего добился их глубокого анализа;

в частности, он дал яркую характеристику диалектической природы таких понятий математики, как понятие переменной и бесконечно малой; он подчеркивает, что бесконечно малая - понятие исключительной глубины, обладающее двойственной природой - оно является двойным отрицанием нуля. Этот факт свидетельствует о том, что двойное отрицание чего-нибудь не является его простым восстановлением.

Л.П.Гокиели внес большой вклад в дело пропаганды и популяризации вопросов обоснования математики, логики, он был первым ученым в Грузии, который не только сам вел научные исследования по математической логике, но и всячески способствовал расширению и углублению научных исследований в этой исключительно важной и бурно развивающейся математической науке.

Л.П.Гокиели был не только глубоким знатоком марксистско-ленинской философии и серьезным исследователем её актуальных проблем, но и неутомимым её пропагандистом; особенно активную деятельность в этой области он вел в годы Отечественной войны и в последующем; он, в частности, является соавтором брошюры: "Фашизм - враг науки" (1941 г.). Значителен вклад Л.П.Гокиели в идеологическую борьбу с антинаучными, антимарксистскими учениями и течениями.

Л.П.Гокиели был человеком широкой эрудиции, высокой культуры с многосторонними интеллектуальными интересами; творчески владея математико-логическими и диалектико-логическими методами, он не ограничивался своей основной сферой исследования: эти методы он применял к исследовпнию актуальных проблем философии, к оценке достижений литературы и искусства; он глубоко понимал и любил литературу и искусство и часто откликался на значительные явления в этих областях; он обладал утонченным эстетическим чувством - человек красивой души, он знал цену красоты.

Л.П.Гокиели был истинным педагогом, обладая редким даром заинтересовать и увлечь слушателей глубоким и всесторонним анализом проблемы, раскрытием её сущности и природы. Л.П.Гокиели читал лекции с таким увлечением и мастерством, что они неизменно превращались в творческий акт и слушатель становился его непосредственным участником.

Л.П.Гокиели скончался 4-го января 1975 года после тяжелой и продолжительной болезни, до конца жизни сохранив высокий духовный настрой и ясность ума.

Результаты научных исследований Л.П.Гокиели получили широкое признание, но они настолько непреходящи, что их окончательная оценка - дело самого беспристрастного судьи - будущего.

Л.П.Гокиели преданно и бескорыстно служил науке, родине, народу. Светлая память о нем живет в сердцах его коллег, учеников, знакомых, наконец, людей, не знавших его лично, но знавших его труды, высоко ценивших его мощный ум.

П.Г.Когония

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

225, 1981

УДК 51:I.I6

ლევან გოკიელი - მათემატიკოსი და ლოგიკოსი

მ. ქიქინაძე

ლევან გოკიელმა ერთ-ერთმა პირველმა ჩამოაყალიბა დიალექტიკა როგორც ლოგიკა და შექმნა მათემატიკის დაფუძნების საკუთარი, დიალექტიკურ-მატერიალისტური კონცეფცია.

ჩვენი მიზანია მკითხველს წარმოვუდგინოთ მეცნიერის ორიგინალური სახე და მისი ფართო მეცნიერული შემოქმედების ძირითადი მომენტები.

ლევან გოკიელის მეცნიერული მეობის შეფასება ძნელი საქმეა, ვინაიდან ჩვენს წინაშეა გარკვეული ფენომენი, აზროვნების ღრმა და ორიგინალური წესი, რომლის ჩასაწვდომად საჭიროა.., იგივე წესი, საქმეს "აძნელებს" ისიც, რომ მეცნიერი შეგნებულად ერიდება საკითხების გამარტივებას; რათა მკითხველი თვით მუდამ მკვლევარის მდგომარეობაში იმყოფებოდეს და განაგრძობდეს წაკითხულზე აზროვნებას, ახლა მხედველობაში უნდა მივიღოთ პრობლემატიკის არაჩვეულებრივი სირთულე და მრავალმხრივობა: მათემატიკის, ფილოსოფიისა და ლოგიკის არსი და მათ შორის დამოკიდებულება, მათემატიკისა და ლოგიკის დაფუძნება, თვით დიალექტიკური ლოგიკის პოზიტიური თეორიის შექმნა. შეუძლებელია ასეთი საკითხების მარტივად წარმოდგენა და აქ უნებლიედ გახსენდება ჰეგელის ერთი შეპასუხება: "შეუძლებელია ჩემი გამოკვლევების უფრო გასაგებად წარმოდგენა", ვისაც სურს ლევან გოკიელის მეცნიერე

შემოქმედებას გაეცნოს, ის აუცილებლობით აღმოჩნდება ოკეანის პირისპირ, ხოლო ჭეშმარიტება,დემოკრიტეს სიტყვებით რომ ვთქვათ, ოკეანის ფსკერზეა[1].

ლევან გოკიელის შრომების მკითხველი საქმეს რამდენიმე გაიადვილებს, თუ თავიდანვე გაითვალისწინებს, რომ მათში მთავარია თვით ლოგიკურის ბუნებისა და ფასის გარკვევა,დიალექტიკური ლოგიკა და ლოგიკურობა ბოლომდე, აგრეთვე ის,რომ ლოგიკურს ახასიათებს აუცილებელი სისრულე და რეფლექსია,რომ ლოგიკური და კომპრომისი სრულიად უთავსარნი არიან, თუ თავიდანვე მივიღებთ მხედველობაში ბოლომდე ლოგიკურობის ამ მოთხოვნას, მაშინ იმ შემთხვევაში,როცა საკითხის ასეთნაირ ანალიზს ჩვეულებრივი გაგებით არ მივყევართ ბოლომდე, ვინაიდან წარმოიშობა უსასრულო სვლა, ჩვენ საქმე უნდა დავაბოლოვოთ ე.წ. დაუბოლოებელი დასკვნით და სწორედ ამით გამოვხატოთ ლოგიკურობა ბოლომდე.

თავიდანვე უნდა გავითვალისწინოთ ისიც, რომ სწორედ ავტორის აზროვნების დიალექტიკურ-ლოგიკური წესი,შერწყმული განუმეორებელ ბუნებრივ ნიჭთან, განაპირობებს მის განსაკუთრებულ კრიტიკულ აზროვნების უნარს, შეიძლება ითქვას,რომ მისი კრიტიკული ცეცხლის ალში იფერფლება თუნდაც ოდნავ არაზუსტად გამოთქმული აზრი, მისთვის დამახასიათებელია ძლიერი კრიტიკული გარკვევა და კამათის არაჩვეულებრივი ხელოვნება,რაც ზოგჯერ,როცა ეს აუცილებელი იყო,ოპონენტის მიმართ მწვავე სარკასტულ,ლოგიკურ თავდასხმად იქცეოდა.ეს გასაგებიცაა:ლოგიკური ისეთი რამაა,რაც არაფერს სტოვებს თავის გარეთ და აბსოლუტურად მოკლებულია "დანდობის" უნარს, ხოლო ეს ლოგიკურობა სრულად და ბოლომდე გატარებული;ცხა-

----

1 ამ სტრიქონების ავტორს პიზნად აქვს დასახული უახლოეს დროში დაასრულოს და გადასცეს გამოსაქვეყნებლად მონოგრაფიული ნაშრომი:"მათემატიკისა და ლოგიკის დაფუძნების ლევან გოკიელის კონცეფცია", რომელშიც დაწვრილებით იქნება გაშუქებული მისი შემოქმედების ძირითადი შინაარსი.

დია, კამათის დაპირისპირებით ასპექტში აღწევს თავის კულმინაციურ გამოხატულებას. ხშირად ამბობენ "ცივი ლოგიკა", ასეთ შემთხვევაში კი მე ვიტყოდი " მეტად მხურვალე ლოგიკა", ანუ "ვნებას მოკლებული ლოგიკის პათოსი", ბ.ვ.ბირიუკოვისა და ვ.ნ.ტროსტნიკოვის მოსწრებული გამოთქმით.

მეტად საგულისხმოა ლ.გოკიელის შესანიშნავი თვისება თვითოპონირებისა, რომელიც მას საშუალებას აძლევს საკითხის ამომწურავი ანალიზი ჩაატაროს მწვავე ლოგიკური დაპირისპირებისა, უკომპრომისობისა და ყოველგვარი მოსალოდნელი შეკამათების გათვალისწინების გზით.

ლევან გოკიელმა თვით ლოგიკა აიყვანა ლოგიკურობის მწვერვალამდე. ამიტომ: ლოგიკურობა უმაღლესი მნიშვნელობით, ლოგიკურობა ბოლომდე, უკიდურესი, პედანტური ლოგიკური სიზუსტე და ლოგიკურობის სიწმინდის დაცვა ბოლომდე, ლოგიკის უბასრესი მახვილი, შემჩნევა ჩვეულებრივ შეუმჩნეველისა, აზრის ვირტუოზული ვარირება, ლოგიკის დიალექტიკურობა საერთოდ და კერძოდ დიალექტიკური ნიუანსებით მდიდარი და მოქნილი აზროვნების სრულიად განუმეორებელი და მომხიბლავი მანერა. ასეთია ლევან გოკიელის აზროვნების ძალა და იერი. მას რომ ლოგიკის დიალექტიკური თეორია არც შეექმნა, უკვე აზროვნების მისი წესი, თვით ახდენს ლოგიკის როგორც დიალექტიკის დემონსტრაციას, თვით წარმოგვიდგენს ლოგიკის სტიქიას. ჩვენ სწორედ იმ განსაკუთრებული რეფლექსიის მოვლენასთან გვაქვს საქმე, როცა მეცნიერმა თავისი "ლოგიკის" სახით გააფორმა აზროვნების ის წესი, რომელსაც თვითვე მისდევდა თავიდანვე და რომლის განვითარებამაც მიგვიყვანა დიალექტიკური ლოგიკის გარკვეული თეორიის შექმნის სახით.

მეტად მრავალმხრივია ლევან გოკიელის მეცნიერული შემოქმედება, ხოლო განსაკუთრებული ნიჭი და დიდი ერუდიცია მას საშუა-

ლებას აძლევს გამოიკვლიოს სხვადასხვა მეცნიერებათა მიჯნებზე წარმოშობილი ძნელი და რთული პრობლემები და ის. მართლაც გვევლინება იმ მთამსვლელის როლში, რომელიც იპყრობს ამ მიჯნებზე მდებარე მწვერვალებს.

ბევრი რამაა საერთო ლევან გოკიელსა და ბერნარდ ბოლცანოს შორის. ორივე განსაკუთრებული ბუნებრივობით და მონოლითურობით აერთიანებენ თავის თავში მათემატიკოსსა და ფილოსოფოსს, მაგრამ მათ შორის მეტად საინტერესო განსხვავებაცაა. ბოლცანო მოვიდა მათემატიკაში როგორც ფილოსოფოსი და ფილოსოფიისათვის, მაგრამ მოვიდა როგორც თანამედროვე მათემატიკის ერთ-ერთი დიდი შემოქმედი და ფუძემდებელი; გოკიელი, პირიქით, ფილოსოფიაში მოვიდა მათემატიკური ბილიკებით, თან მოიტანა რა მათემატიკური და ლოგიკური ინტერესები, კერძოდ პარადოქსების პრობლემა, მოვიდა შეიარაღებული მათემატიკოსის ზუსტი ალღოთი და ტაქტით, რაც საერთოდ მის უპირატესობას შეადგენს ბევრ სხვა მკვლევართან შედარებით. მაგრამ ის ფილოსოფიაში მოვიდა არა მარტო მათემატიკოსისათვის, არამედ თვით ფილოსოფიისათვისაც და შექმნა კიდეც ლოგიკის დიალექტიკური თეორია. საქმის უფრო ზუსტი დახასიათება კი იმაში მდგომარეობს, რომ მისთვის ფილოსოფიაში მოსვლა არაა უბრალოდ მისი შემოქმედებითი ევოლუციის შედეგი, ვინაიდან ის თავიდანვე იკვლევდა მათემატიკის ისეთ პრობლემებს, რომელნიც ბუნებრივად მოითხოვენ მათემატიკისა, ლოგიკისა და ფილოსოფიის სინთეზურ სფეროს და ამ მხრივ ლევან გოკიელი თავიდანვე იმყოფებოდა ფილოსოფიაში. მეორე მხრივ, მისთვის თვით მათემატიკა იყო ლოგიკის ძირითადი სასინჯი ქვა და მრავალი წლის განმავლობაში ამავე ქვაზე ლესავდა ის თავის ლოგიკურ იარაღს. მან აჩვენა, რომ მათემატიკის დასაფუძნებლად ფილოსოფიისა და ლოგიკისადმი მიმართვა ამა თუ იმ სპეციალისტის მეცნიერული გემოვნების ან მათემატიკისათვის გარკვეული

ფუფუნების საქმე კი არაა, არამედ მათემატიკის დაფუძნება ლოგი-
კური აუცილებლობით მოითხოვს ზემოთ აღნიშნული სამი მეცნიერების სინთეზურ სფეროს, ის ფაქტი, რომ ლევან გოკიელი აღმოჩნდა ასეთი მეცნიერული გემოვნებისა და ამ პრობლემის სიმაღლეზე, ბედნიერი შემთხვევაა თვით ამ პრობლემისათვის.

როგორც აღვნიშნეთ, ლევან გოკიელისათვის გამოსავალი იყო მათემატიკის დაფუძნების მიზანი, მაგრამ მათემატიკის დაფუძნება და ლოგიკის დიალექტიკური თეორიის შექმნა მას დაესახა როგორც ერთი მთლიანი პრობლემა. მათემატიკის ხანგრძლივი დაფუძნების პროცესი მის შემოქმედებაში წარმოადგენს ამავე დროს ლოგიკის როგორც დიალექტიკის ქმნადობის პროცესს, ხოლო შემდეგ ამ გზით ჩამოყალიბებული ლოგიკა თვით წარმოსდგა როგორც მათემატიკის დაფუძნების, კერძოდ პარადოქსების პრობლემის ნამდვილი გადაწყვეტის ბუნებრივი საშუალება. ეს ლ.გოკიელისათვის არა თუ არ იყო მოულოდნელი, არამედ სავსებით შეესაბამებოდა მის მიერვე თავიდან დასახულ მიზანს - ეჩვენებინა პარადოქსების გაცილებით ღრმა ლოგიკური ბუნება, ვიდრე მათ შესახებ ადრე არსებულ თეორიებში ჰქონდათ წარმოდგენილი. მისი დიალექტიკური ლოგიკა კი ძირითადად სწორედ მათემატიკურ ფალაზე წარმოიშვა.

რა თქმა უნდა, არ არსებობს იმის აუცილებლობა, რომ ლოგიკის დიალექტიკური თეორია მათემატიკის დაფუძნების პრობლემის გადაწყვეტასთან დაკავშირებით შეიქმნას, მაგრამ თუ საქმე ეხება სწორედ სპეციალური მეცნიერების დაფუძნების გზაზე ამ თეორიის ქმნადობას. მაშინ, როგორც ეს ნათლად ჩანს ლ.გოკიელთან, ასეთ ოპტიმალურ გზად სწორედ მათემატიკის დაფუძნების გზა უნდა მივიჩნიოთ; ხოლო ვინც ლოგიკის ძირის პრობლემის გადაწყვეტისათვის უფრო ადრე მიიჩნევს ამ მიზნისათვის მეტად შესაფერ ანალიზს აქსიომური თეორიისა და მათემატიკური ლოგიკის არსის გარკვევას. და, ამასთან,

ერთად, შეამჩნევს პარადოქსების პრობლემის ღრმა კავშირს დიალექტიკურ ლოგიკაში ნეგატიური მომენტის როლის გარკვევასთან, მისთვის ეს გზა უკვე აუცილებელიც გახდება.

მეცნიერს არ შეუძლია სავსებით გათავისუფლდეს საკუთარი პროფესიული თვალსაზრისის გავლენისაგან და ამიტომ, კერძოდ ლევან გოკიელის ლოგიკურ ქმნილებას მათემატიკის დაღი ასვია, მაგრამ, როგორც ვხედავთ, ეს არის არა მანკიერების, არამედ, ოპტიმალობის დაღი. მაგრამ საქმე მარტო ლოგიკისათვის პოზიტიურ ტალღათა შორის ოპტიმალობას არ ეხება, ამ მხრივ საუკეთესო პრობლემატური წიაღის თვალსაზრისით, არამედ, იმასაც, რომ თვით მათემატიკა გარკვეულად ლოგიკის სტიქიაა, ხოლო მათემატიკოსის ზუსტი ალღო და ტაქტი-უაღრესად შესაფერისი ლოგიკური კვლევა-ძიებისათვის. მათემატიკა თვისობრივად განსხვავდება სხვა სპეციალურ მეცნიერებისაგან იმით, რომ მათემატიკურ აბსტრაქციას ზღვრული ხასიათი აქვს, რაც გამოიხატება თვით თვისობრიობიდან აბსტრაქციაში. მათემატიკის უკიდურესი აბსტრაქტულობა კი განაპირობებს მის ტიპიურობას ლოგიკისათვის, რაც კერძოდ გამოიხატება იმაში, რომ მათემატიკას საშუალება აქვს მეტად ხანგრძლივად არ მიმართოს უშუალოდ ცდას, ექსპერიმენტს და საქმე იქონიოს მხოლოდ თავის ცნებებთან, დებულებებთან და ლოგიკასთან, ე.ი. მეტად დიდი ხნის განმავლობაში განვითარდეს წმინდა შინაგანი გზით; მათემატიკის ობიექტი ადეკვატურია ლოგიკისათვის, გარდა ამისა, მათემატიკა, ყველა სხვა სპეციალურ მეცნიერებისაგან განსხვავებით, რომელნიც სინამდვილის რომელიმე თვისობრივ ნაწილს შეისწავლიან, შეისწავლის მთელი სინამდვილის ერთ მხარეს, რაოდენობრივ მხარეს, ანუ სპეციალურ კვლევას აწარმოებს რაოდენობის მთელი კატეგორიის გასწვრივ, რაც მას აახლოვებს ფილოსოფიასთან და, მაშასადამე, კვლავ ლოგიკასთან, როგორც ფილოსოფიურ მეცნიერებასთან, შემდეგ

ამისა, ერთ-ერთი უზოგადეს და ფუნდამენტურ ცნებას, რომელთანაც საქმე აქვს მათემატიკას, წარმოადგენს სიმრავლის ცნება, მეორე მხრივ, როგორც ლევან გოკიელმა აჩვენა, ის ზოგად-ლოგიკური ხასიათის ცნებაა და ამიტომ წარმოადგენს აგრეთვე ფილოსოფიური ლოგიკის ანუ უბრალოდ ლოგიკის ერთ-ერთ ძირითად ობიექტს. სწორედ პარადოქსების პრობლემაში ტიპიურად იჩენს თავს მათემატიკისა და ლოგიკის ეს სინთეზური მომენტი. ამასთან დაკავშირებით, ცხადია, შეიძლება შენიშნონ: თუ სიმრავლის ცნება ზოგად-ლოგიკური ცნებაა, მაშინ სიმრავლეთა თეორია ლოგიკას მიეკუთვნება. ამაზე ჩვენ ვუპასუხებთ: მათემატიკა შეისწავლის სიმრავლეთა აბსტრაქტულ ანუ წმინდა რაოდენობრივ თეორიას, სწორედ ეს მათემატიკური თეორიაა ცნობილი "სიმრავლეთა თეორიის" სახელწოდებით. ლოგიკისა და მათემატიკის კავშირის სფეროსათვის არსებითი მნიშვნელობა აქვს აგრეთვე იმას, რომ მათემატიკაში განსაკუთრებული ადგილი უკავია უსასრულობის ცნების ანალიზს, რაც მეტად ხელშემწყობია დიალექტიკური ლოგიკის ისეთი ბირთვის შესაქმნელად, როგორიცაა, ე.წ. უსასრულო ანუ დაუბოლოებელ დასკვნათა თეორია; რაც შეეხება ე.წ. "ფორმალურ ლოგიკას", სწორედ მათემატიკა წარმოადგენს უძლიერეს და ადეკვატურ საშუალებას ლოგიკის ფორმალური აპარატის კვლევისა, რაც პირველ რიგში მათემატიკური ლოგიკის ლოგიკისადმი გამოყენებაში გამოიხატება.

მოყვანილ მოსაზრებებთან დაკავშირებით კი უნდა დავასკვნათ, რომ ლოგიკის დიალექტიკური თეორიის ჩამოყალიბებისათვის საერთოდაც ოპტიმალურია მათემატიკისა და ლოგიკის კავშირით შექმნილი გარემო, ასეთია სწორედ ლევან გოკიელის შემოქმედების ასპარეზი.

ზოგადად ისიც უნდა აღვნიშნოთ, რომ მეცნიერების თანამედროვე დონეზე, როცა ტიპიურად გამოიხატა სპეციალური და ფილოსოფიური ცოდ

ნის დიალექტიკური სინთეზი და ურთიერთგანპირობებულობა, კერძოდ კი მეცნიერებათა ე.წ. "მათემატიზაციის" ეპოქაში, როცა სხვადასხვა მეცნიერებანი თავის სიმწიფეს და სრულყოფას აღწევენ მათში ზომის ფილოსოფიური კატეგორიის რეალიზაციის თვალსაზრისით, ფილოსოფიაში და ლოგიკაში ნამდვილად ნაყოფიერი მუშაობა შეუძლიათ იმ მკვლევარებს, რომელნიც თავის თავში პროფესიულ დონეზე აერთებენ ფილოსოფიისა და ერთი მაინც სპეციალური მეცნიერების ცოდნას. ლევან გოკიელის მაგალითზეც ჩვენ ვხედავთ, თუ რამდენად პროდუქტიულია ასეთი მეცნიერის მოღვაწეობა, როგორც ფილოსოფიისათვის, ისე სათანადო პოზიტიური მეცნიერებისათვის.

ლევან გოკიელის მთელი შემოქმედების ერთ-ერთი ძირითადი სახელმძღვანელო დებულება იყო დებულება ისტორიულისა და ლოგიკურის დიალექტიკური ერთიანობის შესახებ. თვით მან იშვიათი შეღწევადობით მოგვცა საერთოდ ამ სინთეზის, კერძოდ კი ლოგიკურის ისტორიზმის ანალიზი.

ამიტომ ჩვენ ბუნებრივად მიგვაჩნია თვით ლევან გოკიელის შემოქმედებაც წარმოვადგინოთ არა ქრონოლოგიურად, არამედ, ისტორიულისა და ლოგიკურის ერთიანობის პლანში. ეს გზავე წარმოადგენს უმოკლეს გზას მისი მოძღვრების ძირითადი შინაარსის წარმოდგენისა. ამის შესაბამისად ლევან გოკიელის მთელი შემოქმედება ამ სტატიის ავტორს ესახება სამი ძირითადი ფაზის სახით: 1) მათემატიკის დაფუძნება და ლოგიკურის ქმნადობა, 2) ლოგიკური და 3) მათემატიკის კვლავ დაფუძნება.

დავახასიათოთ მოკლედ ამ ფაზების შინაარსი.

პირველი ფაზის მოკლე შინაარსი ასეთია. ლევან გოკიელის კვლევის გამოსავალ პუნქტს შეადგენდა მათემატიკის დაფუძნების ძირითადი პრობლემების ანალიზი. როგორც ჩანს, უკვე სტუდენტობის წლებში მოხდა მისი ინტელექტუალური მიდრეკილების ასოცირება

მე-19-20 საუკუნეთა საზღვარზე წარმოშობილ მათემატიკის უძლიერეს კრიზისთან, რომელიც გამოიხატა კანტორის სიმრავლეთა თეორიაში წარმოშობილი პარადოქსების სახით. ლევან გოკიელი თავიდანვე ჩაწვდა იმ გარემოებას, რომ ვიწრო მათემატიკური მიდგომის ფარგლებში შეუძლებელია დაძლეულ იქნას პარადოქსებთან დაკავშირებული პრინციპული სიძნელეები, ვინაიდან მათ იმდენად ღრმა ბუნება აქვთ, რომ ამისათვის აუცილებელია თვით ლოგიკის მეცნიერების სათანადო დაფუძნება, ხოლო შემდეგში მისი ეს იდეა განვითარდა იმის შეგნებამდე, რომ ამ მიზნით და საერთოდაც საჭიროა ლოგიკის სრულიად ახალი - დიალექტიკური კონცეფციის შექმნა. ამასთან დაკავშირებით ლევან გოკიელის მთელი შემოქმედება წარმოადგენს მათემატიკისა და ლოგიკის დაფუძნების ერთმანეთისაგან ორგანულად განუყრელ ერთიან პროცესს.

განსახილავ პერიოდში პარადოქსების ანალიზთან დაკავშირებით გამოიჭედა სწორედ მისი ძირითადი იარაღი - უსასრულობაში რეგრესის მეთოდი, რომელიც შემდეგ საფუძვლად დაედო მის დიალექტიკურ დასკვნას - ე.წ. ძირეულ დასკვნას, რომლის ბაზაზეც აშენდა მისი ლოგიკის როგორც დიალექტიკის მთელი შენობა. ამავე პერიოდში მან აჩვენა სიმრავლისა და ნატურალური რიცხვის ცნებების ზოგად-ლოგიკური ხასიათი, რომელნიც ამგვარად შევიდნენ ლოგიკის არსენალში, მან, კერძოდ, აჩვენა ნატურალური რიცხვის ცნების აქსიომურად შემოყვანის შეუძლებლობა. ლევან გოკიელის შემოქმედებაში ლოგიკის როგორც დიალექტიკის თეორიის შესაქმნელად დიდი მოსამზადებელი მნიშვნელობა ჰქონდა აგრეთვე ლოგიკის აქსიომატიზაციის იდეის და მათემატიკური ლოგიკის ბუნების გარკვევას. მან ღრმად დაასაბუთა, რომ ლოგიკურადვე შეუძლებელია ლოგიკის პირველად აქსიომური გზით შემოყვანა. მან აგრეთვე დაასაბუთა, რომ მათემატიკური ლოგიკა, რომელიც ჩვეულებრივ მიაჩნიათ ლოგიკის

თანამედროვე სახე, ნამდვილად წარმოადგენს არა ლოგიკას, არამედ მათემატიკურ დისციპლინას.

განსახილავ პერიოდში მათემატიკისა და ლოგიკის ერთდროული დაფუძნების პროცესში მომწიფდა ლევან გოკიელის დიალექტიკური ლოგიკის სრული პოტენცია და ამ თეორიის ჩამოსაყალიბებლად საჭირო იყო მხოლოდ მცირე დრო ან ბიძგი, ამ შემთხვევაში ბიძგმა დაასწრო დროს სავლე წერეთლის დაუმთავრებელი დასკვნის სახით. მეორეს მხრივ, როგორც ეს კარგად ჩანს სავლე წერეთლის დიალექტიკური ლოგიკის პრობლემისადმი მიძღვნილი შრომებიდან, მას თავისი ლოგიკის როგორც დიალექტიკის თეორიის შესაქმნელად და ილუსტრირებისათვის ძალზე ხშირად მოჰყავდა ლევან გოკიელის სხვადასხვა შეხედულებანი და მაგალითები, განსაკუთრებით უსასრულობაში რეკურსის მაგალითები და ამდენად სრულიად აშკარაა ლევან გოკიელის შემოქმედების კვალი იდეური და ფაქტობრივი გავლენა სავლე წერეთლის ლოგიკური კონცეფციის ქმნადობის პროცესზე, ასეთია ამ ორი მეცნიერის შესანიშნავი პროდუქტიული თანამშრომლობა, რომლის ბუნებრივ შედეგს წარმოადგენს ქართული ფილოსოფიური სკოლის ფარგლებში დიალექტიკის როგორც ლოგიკის თეორიების შექმნა.

ლევან გოკიელი თავისი შემოქმედების მეორე ფაზაში, ლოგიკურის ფაზაში ე.წ. ძირეული დასკვნის საფუძველზე აგებს ლოგიკის როგორც დიალექტიკის მთლიან პოზიტიურ სისტემას.

"ძირეული დასკვნა" - წერს ლ.გოკიელი, შეიძლება განვსაზღვროთ როგორც ისეთი დასკვნა, რომელშიც რაიმე დებულების შინაარსი და დასაბუთება შეიცავენ როგორც ძირითად მომენტს იმ სიტუაციის გათვალისწინებას, რომელიც იქმნება თვით მისი უარყოფის ფაქტით" /Л.П.Гокиели, Логика, т.I, Тбилиси, Изд-во "Мецниереба", 1965, с.27. /. ამრიგად, ასეთ დასკვნაში რაიმე დებულება

ან გარემოება საბუთდება მხოლოდ და მხოლოდ მისივე უარყოფით. აქ ჩვენ საქმე გვაქვს დიალექტიკური უარყოფის ლოგიკურ ფორმასთან, ასეთი დასკვნის სახით ლოგიკისათვის გამონახულია თვითდამსაბუთებელი ძირი. დასკვნის აქ მოყვანილი ზოგადი იდეა საერთოა ლ.გოკიელისათვის და ს.წერეთლისათვის. საჭირო იყო ამ ზოგადი იდეის კონკრეტული რეალიზაცია, ურომლისოდაც ის ვერ გადაიქცეოდა სამუშაო იარაღად. სწორედ ამ პუნქტში იყოფა ლევან გოკიელის და სავლე წერეთლის გზები: პირველთან ნეგატიური მომენტი მონაწილეობს როგორც უსასრულობაში რეგრესთან დაკავშირებული შეუძლებლობა, ხოლო მეორესთან კი - როგორც შინაგანი წინააღმდეგობა.

ლ.გოკიელის ლოგიკური კონცეფციით, სხვათაშორის, გაირკვა ის მეტად საგულისხმო შემეცნებითი გარემოება, რომ ლოგიკისათვის როგორც დიალექტიკისათვის ფუძემდებელია სწორედ უსასრულობის ცნება.

და ბოლოს, ლ.გოკიელი თავისი შემოქმედების მესამე ფაზაში, მათემატიკის დაფუძნების ტალღაზე ჩამოყალიბებულ ლოგიკას როგორც დიალექტიკას კვლავ იყენებს მათემატიკის დაფუძნების პრობლემების გადასაწყვეტად, კერძოდ მისი ცენტრალური პრობლემის, სიმრავლეთა თეორიის პარადოქსების ბუნების დასადგენად. ის აჩვენებს, რომ პარადოქსები ლოგიკურ წინააღმდეგობებს კი არა, უსასრულობაში რეგრესის შეცდომას გამოხატავენ, რაც განპირობებულია სათანადო ცნებათა მეტაფიზიკური გაგებით, რომ არსი მეტაფიზიკაა, მოვლენა კი- ალოგიზმი. თუ პარადოქსებში განხორციელებულ მსჯელობებს სწორ მიმართულებას მივცემთ, მაშინ ისინი თვით დააფუძნებენ სათანადო ფილოსოფიურ და ლოგიკურ ჭეშმარიტებებს. მათემატიკის დაფუძნების ლევან გოკიელის თვალსაზრისი უნდა დავახასიათოთ როგორც საერთოდ დიალექტიკურ-მატერიალისტური, კერძოდ დიალექტიკურ-ლოგიკური, შინაარსობრივი, შეუზღუდავი და პირდაპირი

ანუ დადებითი, მატერიალისტური იმიტომ, რომ მასში მათემატიკა განხილულია როგორც სპეციალური მეცნიერება სინამდვილის რაოდენობრივი მხარის შესახებ, და ამასთან ერთად, ის მატერიალისტური ფილოსოფიის ყველა კატეგორიას უნარჩუნებს თავის ზოგად ფილოსოფიურ მნიშვნელობას თვით მათემატიკის შინაგან პლანში; საერთოდ დიალექტიკური იმიტომ, რომ, ჯერ-ერთი, მათემატიკა წარმოდგენილია როგორც გარკვეული ისტორიული განვითარება, აღნიშნული აზროვნების მეტაფიზიკური წესის პრიმატიდან დიალექტიკური წესის პრიმატზე გადასვლის ნიშნით, მეორე მხრივ კი ნაჩვენებია თანამედროვე მათემატიკის ღრმად დიალექტიკურ-სინთეზური ხასიათი; კერძოდ დიალექტიკური იმიტომ, რომ მათემატიკის დაფუძნება წარმოდგენილია განუყრელ კავშირში ლოგიკის დიალექტიკურ თეორიასთან; შინაარსობრივი იმიტომ, რომ მისთვის მთავარია მათემატიკურ ცნებათა შინაარსის გარკვევა და პრინციპული გამიჯვნა მათემატიკის დაფუძნების თანამედროვე ფორმალისტური კონცეფციებისაგან; შეუზღუდავი იმიტომ, რომ ყველა სხვა კონცეფციებისგან განსხვავებით, რომელნიც დაფუძნების პრობლემების გადაწყვეტას ცდილობენ სათანადო ცნებათა და პრინციპთა ისეთი ხელოვნური შეზღუდვით, რომ მათემატიკისათვის სახიფათო მომენტები გარეთ დარჩეს, ეს კონცეფცია აჩვენებს, რომ თურმე საჭირო არ იყო ხსენებული შეზღუდვა, ვინაიდან თვით სათანადო ცნებები და პრინციპები კი არა, მათი მეტაფიზიკური გაგებაა დამნაშავე ალოგიკურ მდგომარეობათა წარმოშობაში; ამასთან დაკავშირებით პირდაპირი ანუ დადებითი იმიტომ, რომ ეს კონცეფცია სიძნელეებს გვერდს კი არ უვლის, მათ კი არ გაურბის მათი სათანადო შეზღუდვის გზით გარეთ დატოვებით, არამედ პირდაპირი იერიში მიაქვს მათზე და ცდილობს ჩაწვდეს მათ ყველაზე ღრმა მიზეზებს.

კერძოდ [illegible] იყო ლ.გოკიელის მიდგომა პარადოქსების მიმართ.

ასეთმა ძლიერმა პოზიციამ მას საშუალება მისცა გაეხორ-ციელებინა მათემატიკის დაფუძნების მრავალ თანამედროვე, მათ შორის წამყვან კონცეფციათა ღრმა კრიტიკა, კერძოდ გამოევლინა ამ კონცეფციათა მეტაფიზიკური და ამასთან დაკავშირებული ლოგი-კურად მანკიერი ხასიათი,

ასეთია მოკლედ ლევან გოკიელის მეცნიერული შემოქმედების ძირითადი შინაარსი, ასეთია მისი როგორც მათემატიკოსის, ფილო-სოფოსისა და ლოგიკოსის სახე.

შემოსულია 9.IX.81 წ.

მათემატიკის დაფუძნებისა
და მეთოდიკის კათედრა.

М.Н.Чичинадзе

ЛЕВАН ГОКИЕЛИ - МАТЕМАТИК И ЛОГИК

Резюме

Проф. Л.П.Гокиели один из первых построил логику как диалектику и в глубокой связи с этим создал собственную, диалектико-материалистическую концепцию обоснования математики.

Ядром его логики является так называемый коренной вывод, в котором осуществляется логическая форма диалектического отрицания, выраженная в виде регресса в бесконечность. Его концепцию обоснования математики следует охарактеризовать как диалектико-материалистическую, в частности - диалектико-логическую, содержательную, неограничительную и прямую или положительную.

Обоснования математики и логики в творчестве Л.П.Гокиели представлены как единый диалектический процесс.

M.Chichinadze

LEVAN GOKIELI - MATHEMATICIAN AND LOGICIAN

Summary

Prof. Levan Gokieli is one of the first who represented Logic as Dialectics and created his own dialectico-materialistic conception of foundation of mathematics.

The basic concept of his logics is the so-called root-conclusion, in which the logical form of the dialectical negation, expressed by means of an infinite regress, is realised. His conception of foundation of mathematics may be characterized as dialectico-materialistic, in particular dialectico-logical, intentional, non-limiting and direct or positive.

Foundations of mathematics and logics as presented in L.Gokieli's works make up a whole and indivisible dialectical process.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

225, 1981

УДК 511.3

О ПРООБРАЗАХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $L(\alpha)$ И $\lambda(\alpha)$

П.Г.Когония

Пусть α - любое иррациональное число интервала $]0,1[$, а

$$\alpha=[0;a_1,a_2,\dots,a_n\dots] \tag{I}$$

- его разложение в арифметическую цепную дробь;

$\frac{p_n}{q_n}=S_n=[0;a_1,a_2,\dots,a_n]$ - отрезок, а $r_n=[a_n;a_{n+1},a_{n+2},\dots]$

- остаток ценной дроби (I). Как известно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=\alpha,\quad \alpha=\frac{p_n r_{n+1}+p_{n-1}}{q_n r_n+q_{n-1}}, \tag{2}$$

$$q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1},\quad p_{n+1}=a_{n+1}p_n+p_{n-1}\quad (n\in N).$$

Два числа α и β называются эквивалентными, если

имеют место соотношения

$$\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}, \quad ad - bc = \pm 1, \quad a, b, c, d \in Z.$$

Как известно /I/ , два иррациональных числа эквивалентны $(\alpha \sim \beta)$ тогда и только тогда, когда соответствующие цепные дроби имеют одинаковые остатки, т.е. когда их разложения имеют вид

$$\alpha = [0; b_1, b_2, \cdots, b_m, a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots], \qquad (3)$$

$$\beta = [0; c_1, c_2, \cdots, c_l, a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots].$$

Очевидно, что это отношение эквивалентности двух иррациональных чисел является отношением эквивалентности в общем смысле, т.е. обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

$\lambda(\alpha)$ - точная верхняя грань множества всех действительных положительных чисел m , для которых неравенство $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^m}$ имеет бесконечное множество решений в целых числах p, q $(q > 0)$

Как известно /2/,

$$L(\alpha) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} + 1, \qquad (4)$$

$$\{L(\alpha) \mid \alpha \in]0;1[\} = [2, \infty].$$

$\Lambda(\alpha)$ - точная верхняя грань множества всех действительных положительных чисел c , для которых неравенство

$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{c\,q^{\lambda(\alpha)}}$ имеет бесконечное множество решений в целых числах p, q $(q>0)$.

Известно, что /3/

$$\lambda(\alpha)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{q_{n+1}}{q_n^{\lambda-1}}= \tag{5}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\exp\left(\ln q_{n+1}-(\lambda-1)\ln q_n\right).$$

<u>Теорема I.</u>

Если $\alpha\sim\beta$, то $\lambda(\alpha)=\lambda(\beta)$.

<u>Доказательство.</u> По условию имеют место соотношения (3); пусть $\gamma=[0;a_1,a_2,\dots,a_n]$, тогда, в силу (3), имеем

$$\alpha=\left[0;b_1,b_2,\dots,b_m,\frac{1}{\gamma}\right]\sim\gamma.$$

$$\beta=\left[0;c_1,c_2,\dots,c_\ell,\frac{1}{\gamma}\right]\sim\gamma. \tag{6}$$

Достаточно доказать истинность равенства $\lambda(\alpha)=\lambda(\gamma)$ (истинность аналогичного равенства $\lambda(\beta)=\lambda(\gamma)$ устанавливается тем же способом).

Пусть $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_n'}{q_n'}$ $(n\in N)$ обозначают, соответственно, подходящие дроби чисел $\gamma=[0;a_1,a_2,\dots,a_n,\dots]$,

$$\alpha=[0; b_1, b_2, \dots, b_m, a_1, a_2, \dots, a_n]=[0; d_1, d_2, \dots, d_n, \dots].$$

$$\frac{p_n}{q_n}=[0; a_1, a_2, \dots, a_n], \quad \frac{p'_n}{q'_n}=[0; d_1, d_2, \dots, d_n] \tag{7}$$

Из (2), (3), (6) и (7) следует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}=\gamma, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{p'_n}{q'_n}=\alpha;$$

$$\frac{p'_n}{q'_n}=[0; b_1, b_2, \dots, b_m, a_1, a_2, \dots, a_{n-m}]=$$

$$=\frac{p'_m\cdot\frac{q_{n-m}}{p_{n-m}}+p'_{m-1}}{q'_m\cdot\frac{q_{n-m}}{p_{n-m}}+q'_{m-1}}=\frac{p'_m\cdot q_{n-m}+p'_{m-1}p_{n-m}}{q'_m\cdot q_{n-m}+q'_{m-1}\cdot p_{n-m}}. \tag{8}$$

Легко видеть, что последняя дробь несократима, поэтому (в силу несократимости подходящих дробей) имеем

$$q'_n=q'_m\cdot q_{n-m}+q'_{m-1}\cdot p_{n-m}=q_{n-m}\left(q'_m+q'_{m-1}\cdot\frac{p_{n-m}}{q_{n-m}}\right).$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{\ln q'_{n+1}}{\ln q'_n}=\frac{\ln q_{n+1-m}+\ln\left(q'_m+q'_{m-1}\cdot\frac{p_{n+1-m}}{q_{n+1-m}}\right)}{\ln q_{n-m}+\ln\left(q'_m+q'_{m-1}\cdot\frac{p_{n-m}}{q_{n-m}}\right)}=$$

$$\frac{\ln q_{n+1-m}}{\ln q_{n-m}}\cdot\frac{1+o(1)}{1+o(1)}\cdot(n\to\infty).$$

Из (4), (8) и последнего равенства следует истинность равенства $\lambda(\alpha)=\lambda(\gamma)$.

Следствие. Для любого фиксированного $c>0$ множество

$$\lambda^{-1}(c)=\{\alpha\in\,]0,1[\;|\;\lambda(\alpha)=c\}$$ всюду плотно.

В самом деле, известно, что для любого $c\geq 2$ уравнение $\lambda(\alpha)=c$ разрешимо; в силу же теоремы I, если α - одно из решений этого уравнения, то все числа, эквивалентные ему, являются решениями этого же уравнения. Но, как известно, любой класс эквивалентных друг другу чисел является счетным, всюду плотным множеством.

Теорема 2. Если $\alpha=[0;a_1,a_2,\dots,a_n,\dots]$,

$\beta=[0;b_1,b_2,\dots,b_m,a_1,a_2,\dots,a_n,\dots]$, то

$$\lambda(\beta)=\frac{\lambda(\alpha)}{(q'_m+q'_{m-1}\cdot\alpha)^{\lambda-2}},\ \text{где}\ \frac{p'_m}{q'_m}=[0;b_1,b_2,\dots,b_m]. \quad (9)$$

Доказательство. Подходящие дроби числа α обозначим через $\frac{p_n}{q_n}$, а подходящие дроби числа β - через $\frac{p'_n}{q'_n}$; тогда для любого $n>m$ имеем

$$\frac{p'_n}{q'_n}=[0;b_1,b_2,\dots,b_m,a_1,a_2,\dots,a_n]=$$

$$=\frac{p'_m\cdot q_{n-m}+p'_{m-1}\cdot p_{n-m}}{q'_m\cdot q_{n-m}+q'_{m-1}\cdot p_{n-m}}$$

откуда

$$q'_n = q'_m \cdot q_{n+m} + q'_{m-1} \cdot p_{n-m}, \quad q'_{n+1} = q'_m \cdot q_{n+1-m} + q'_{m-1} \cdot p_{n+1-m}$$

$$\frac{q'_{n+1}}{q'^{k-1}_n} = \frac{q'_m \cdot q_{n+1-m} + q'_{m-1} \cdot p_{n+1-m}}{\left(q'_m \cdot q_{n-m} + q'_{m-1} \cdot p_{n-m}\right)^{k-1}} =$$

$$\frac{q_{n+1-m}}{q^{k-1}_{n-m}} \cdot \frac{q'_m + q'_{m-1} \cdot \frac{p_{n+1-m}}{q_{n+1-m}}}{\left(q'_m + q'_{m-1} \cdot \frac{p_{n-m}}{q_{n-n}}\right)^{k-1}} .$$

Из (2), (5) и последнего равенства получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{q'_{n+1}}{q'^{k-1}_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{q_{n+1-m}}{q^{k-1}_{n-m}} \cdot \lim \frac{q'_m + q'_{m-1} \cdot \frac{p_{n+1-m}}{q_{n+1-m}}}{\left(q'_m + q'_{m-1} \cdot \frac{p_{n-m}}{q_{n-m}}\right)^{k-1}} =$$

$$= \lambda(\alpha) \cdot \frac{q'_m + q'_{m-1} \cdot \alpha}{\left(q'_m + q'_{m-1}\right)^{k-1}}$$

т.е.

$$\lambda(\beta) = \frac{\lambda(\alpha)}{\left(q'_m + q'_{m-1} \cdot \alpha\right)^{k-2}}$$

Если β и γ – два любых эквивалентных друг другу числа, причем

$$\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots], \quad \beta = [0; b_1, b_2, \cdots, b_m, a_1, a_2, \cdots, a_n$$

$\gamma=[0; c_1, c_2, \cdots c_\ell, a_1, a_2, \cdots a_n, \dots]$, то, в силу (9), имеем

$$\lambda(\gamma)=\frac{\lambda(\alpha)}{\left(q''_\ell+q''_{\ell-1}\cdot\alpha\right)^{L-2}},\ \lambda(\gamma)=\left(\frac{q'_m+q'_{m-1}\cdot\alpha}{q''_\ell+q''_{\ell-1}\cdot\alpha}\right)^{L-2}\cdot\lambda(\beta). \qquad (10)$$

Последняя формула устанавливает связь между значениями функции λ при двух эквивалентных между собой значениях аргумента. Из (10) следует, что

$$\lambda(\gamma)=\lambda(\beta)\Longleftrightarrow q'_m=q''_\ell,\ q'_{m-1}=q_{\ell-1} \qquad (11)$$

Из (9) ясно, что для чисел $\alpha=[0; a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$, $[\beta=0; b_1, b_2, \cdots, b_m, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$ равенство $\lambda(\alpha)=\lambda(\beta)$ имеет место тогда и только тогда, когда $q'_m=1,\ q'_{m-1}=0$, т.е. когда $\alpha=\beta$. Итак

<u>Следствие</u>. Если $\alpha=[0; a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$,

$\beta=[0; b_1, b_2, \cdots, b_m, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$ и $\alpha\neq\beta$,

то $\lambda(\alpha)\neq\lambda(\beta)$.

Таким образом, на классе эквивалентных чисел функции L и λ ведут себя по-разному: в то время как L на всем классе эквивалентности принимает одно и то же значение, λ повторяет значения на этом классе "редко".

Поступила 30.X.1980

Кафедра высшей математики инженерно-экономического факультета ТГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Я.Хинчин. Цепные дроби, М.-Л., 1949.

2. J.F.Koksma. Diophantische Approximationen, Berlin, 1936.

3. П.Г.Когония. Труды ТГУ, 179, 1976, стр.59-61.

პ.კოღონია

$L(\alpha)$ და $\lambda(\alpha)$ ფუნქციათა მნიშვნელობების წინასახეთა შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში დამტკიცებულია, რომ $L(\alpha)$ ფუნქცია მუდმივია ექვივალენტურ რიცხვთა კლასზე, ხოლო $\lambda(\alpha)$ ფუნქციისათვის დადგენილია კავშირი ექვივალენტურ რიცხვებზე მის მნიშვნელობებს შორის.

P.Kogonia

ON THE INVERSE IMAGES OF VALUES OF $L(\alpha)$ AND $\lambda(\alpha)$ FUNCTIONS

Summary

It is proved that the function $L(\alpha)$ is constant on a class of equivalent numbers, which for the function $\lambda(\alpha)$ a connection is established between its values at equivalent points.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

225, 1981

УДК 513.83

О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ ТЕОРИИ БИТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ К ТЕОРИИ УПОРЯДОЧЕННЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Б.П.Двалишвили

Пусть $(X,\tau,\leqslant)$ – упорядоченное топологическое пространство (ниже у.т.п.), где τ – топология, $\leqslant$ – частичный порядок. Изучение таких пространств систематически проводится Л.Начбиным в монографии /I/. Вспомним, что подмножество $A\subset X$ называется возрастающим, если из $a\leqslant x$ и $a\in A$ следует $x\in A$. Для каждого подмножества $A\subset X$ единственным образом определяется наименьшее возрастающее множество $i(A)$ в X, содержащее A. Двойственно, подмножество $A\subset X$ называется убывающим, если из $x\leqslant a$ и $a\in A$ следует $x\in A$; через $d(A)$ обозначается наименьшее убывающее множество в X, содержащее A. Подмножество $A\subset X$ называется выпуклым, если $A=i(A)\cap d(A)$. Далее, через

$I(A)$ и $D(A)$ обозначаются соответственно наименьшее замкнутое возрастающее и наименьшее замкнутое убывающее множества в X, содержащие A.

Битопологическое пространство (X, τ_1, τ_2) (ниже бипространство) - это множество X, снабженное двумя произвольными топологиями τ_1 и τ_2 (см. /2/), которые, хотя при определении бипространства, вообще говоря, и не связываются между собой каким-либо единым законом, какой-либо, имеющей место для всех случаев, "дистрибутивностью", однако, всякий раз, когда исследуются различные свойства таких пространств оказывается, что каждая из этих двух топологий в совокупности с другой является более богатой структурой и позволяет в некоторых случаях получить более обширную информацию, нежели рассмотрение исходного множества с каждой топологией в отдельности.

М.Канфелл в /3/ провел параллель между теориями у.т.п. и бипространств, сопоставляя каждому у.т.п. $(X, \tau, \leq)$ бипространство (X, τ_1, τ_2), где

$$\tau_1 = \{U : U \in \tau,\ U = i(U)\},$$

$$\tau_2 = \{V : V \in \tau,\ V = d(V)\}$$ (см. также /1/).

Здесь же заметим, что τ_1 называется верхней, а τ_2 - нижней топологиями относительно порядка $\leq$.

С другой стороны, М.Канфеллом был поставлен вопрос: в каком случае бипространство может трактоваться как у.т.п., т.е.

если (X,τ_1,τ_2) – бипространство и $\tau=\tau_1\vee\tau_2$, то при каких условиях существует частичный порядок $\leqslant$ на X, относительно которого τ_1 является верхней, а τ_2 – нижней топологиями?

Ответ на этот вопрос, данный Х.Пристли в /4/, гласит: пусть для бипространства (X,τ_1,τ_2) топология $\tau=\tau_1\vee\tau_2$ является бикомпактной. Тогда на X существует такой частичный порядок $\leqslant$, что $(X,\tau,\leqslant)$ является строго T_2-упорядоченным (см. ниже) и τ_1 совпадает с верхней, а τ_2 – с нижней топологиями относительно $\leqslant$ тогда и только тогда, когда

(I) (X,τ_1) (или (X,τ_2)) удовлетворяет аксиоме отделимости T_0;

(2) бипространство (X,τ_1,τ_2) парно регулярно (см./2/).

Указанная двойственность между категориями бипространств и у.т.п. позволяет изучать различные свойства у.т.п. на основе соответствующих свойств ассоциированного бипространства, а также изучать свойства бипространства при помощи соответствующего (в определенных условиях) у.т.п.

В данной работе аксиомы отделимости у.т.п. будут рассмотрены в зависимости от аксиом парной отделимости ассоциированного бипространства, а также будет построена теория размерности для у.т.п., исходя из построений, данных в /5/, для теории бипространств.

Аксиомами отделимости у.т.п. занимались Л.Начбин /I/, С.Маккартан /6/, Р.Маккаллион /7/ и другие, аксиомами же отделимости бипространств - Дж.Келли /2/, Е.Лейн /8/, И.Рейлли /9/ и другие.

В частности, Л.Начбин определил T_2, нормально и вполне регулярно упорядоченные пространства, причем, последние-на функциональном языке; С.Маккартан определил T_1 и регулярно упорядоченные пространства, а Р.Маккаллион - вполне регулярно упорядоченные пространства, однако во внутренних терминах. Отметим, что С.Маккартан изучил и так называемые строгие варианты этих аксиом; разница состоит в том, что вместо возрастающих (убывающих) окрестностей берутся открытые возрастающие (открытые убывающие) окрестности. Приведем одну из этих аксиом, а именно строгую T_2 - упорядоченность, т.е. монотонную отделимость в терминах Л.Начбина: для любой пары различных точек $x, y \in X$, $x \nleq y$, существуют дизъюнктные открытые окрестности $U(x)=iU(x)$, $U(y)=dU(y)$.

Ясно, что в у.т.п. $(X,\tau,\leq)$ из $x \nleq y$ следует $x \neq y$. Оказывается, что справедливы следующие предложения:

I) если бипространство (X,τ_1,τ_2) удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 в смысле /9/, то $(X,\tau,\leq)$ является строго T_1-упорядоченным в смысле /6/;

2) если бипространство (X,τ_1,τ_2) является парно хаусдорфовым в смысле /2/, то $(X,\tau,\leq)$ является строго T_2-упорядоченным в смысле /6/;

3) у.т.п. $(X,\tau,\leq)$ является строго регулярно упорядо-

ченным в смысле /6/ тогда и только тогда, когда бипространство (X, τ_1, τ_2) является парно регулярным в смысле /2/;

4) у.т.п. $(X, \tau, \leq)$ является строго нормально упорядоченным в смысле /6/ тогда и только тогда, когда бипространство (X, τ_1, τ_2) является парно нормальным в смысле /2/.

Изучим, наконец, зависимость аксиом полной регулярности.

Приведем некоторые факты из работы Р.Маккаллиона.

Если дано у.т.п. $(X, \tau, \leq)$, то (τ_1, τ_2), где τ_1 и τ_2 являются топологиями на X, называется парой, определяющей порядок, если $\tau_1, \tau_2 \leq \tau$ и следующие условия равносильны:

(I) $x \in \tau_1 cl\{y\}$;

(2) $x \leq y$;

(3) $y \in \tau_2 cl\{x\}$.

Рассматривая на X семейства $\mathcal{A} = \{A : A = \mathcal{D}(A)\}$ и $\mathcal{B} = \{B : B = I(B)\}$, Т.Маккаллион называет семейство $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ нормально упорядоченной подбазой для $(X, \tau, \leq)$, если

(I) $\mathcal{A}$ (соответственно $\mathcal{B}$) является базой замкнутых множеств топологии $\tau_{\mathcal{A}}$ (соответственно $\tau_{\mathcal{B}}$) на X, $\tau_{\mathcal{A}} \vee \tau_{\mathcal{B}} = \tau$ и $(\tau_{\mathcal{A}}, \tau_{\mathcal{B}})$ – пара, определяющая порядок;

(2) если множество $F \subset X$ замкнуто в топологии $\tau_{\mathcal{A}}$

(соответственно $\tau_{\mathcal{B}}$) и $x \bar{\in} F$, то существует множество $B \in \mathcal{B}$ (соответственно $A \in \mathcal{A}$), для которого $x \in B$, $B \cap F = \phi$ (соответственно $x \in A$ и $A \cap F = \phi$);

(3) если $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ и $A \cap B = \phi$, то существуют такие $A' \in \mathcal{A}$, $B' \in \mathcal{B}$, что $A \subseteq A'$, $B \subseteq B'$, $A \cap B' = \phi = A' \cap B$ и $A' \cup B' = X$.

Т.Маккаллион доказал, что у.т.п. $(X, \tau, \leq)$ является вполне регулярно упорядоченным тогда и только тогда, когда оно обладает нормально упорядоченной подбазой.

С другой стороны, если дано бипространство (X, τ_1, τ_2), то система $Z = \{Z_1, Z_2\}$, где Z_1 и Z_2 суть базы соответственно τ_1 и τ_2 замкнутых множеств, называется бизамкнутой базой этого бипространства, а система $co Z = \{co Z_1, co Z_2\}$, где $co Z_i$ – открытая база, сопряженная с базой Z_i, $i = 1, 2$, называется биоткрытой базой этого бипространства, сопряженной с базой Z .

Бизамкнутая база $Z = \{Z_1, Z_2\}$ называется бинормальной базой бипространства (X, τ_1, τ_2) , если удовлетворяются следующие условия:

1. для любой точки $x \in X$ и любой её τ_j -открытой окрестности $U(x)$ существует такое $A \in Z_i$, что $x \in A \subseteq U(x)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.

2. Если $A \in Z_1$, $B \in Z_2$ и $A \cap B = \phi$, то существуют такие $U(A) \in co\, Z_2$, $U(B) \in co\, Z_1$, что $U(A) \cap U(B) = \phi$ (см. /10/).

В /10/ доказано, что бипространство парно вполне регулярно в смысле /8/ тогда и только тогда, когда оно обладает бинормальной базой.

Оказывается, что справедливо

<u>Предложение 5</u>. У.т.п. $(X, \tau, \leq)$ является вполне регулярно упорядоченным тогда и только тогда, когда на X существует пара (τ_1, τ_2), определяющая порядок, $\tau_1 \vee \tau_2 = \tau$ и бипространство (X, τ_1, τ_2) является парно вполне регулярным.

В самом деле, если $(X, \tau, \leq)$ есть вполне регулярно упорядоченное пространство, то оно обладает нормально упорядоченной подбазой $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Пусть τ_1 – топология, базой замкнутых подмножеств для которой служит $\mathcal{A}$, а τ_2 – топология, базой замкнутых множеств для которой служит $\mathcal{B}$. Тогда, поскольку $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ – нормально упорядоченная подбаза, то (τ_1, τ_2) является парой, определяющей порядок, $\tau_1 \vee \tau_2 = \tau$ и $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ есть бинормальная база бипространства (X, τ_1, τ_2).

Наоборот, если (τ_1, τ_2) – пара, определяющая порядок, $\tau_1 \vee \tau_2 = \tau$ и бипространство (X, τ_1, τ_2) является парно вполне регулярным, то оно обладает бинормальной базой $Z = \{Z_1, Z_2\}$. Легко видеть, что тогда $Z_1 \cup Z_2$ – нормально упорядоченная подбаза для $(X,\tau,\leqslant)$, ч.т.д.

Перейдем теперь к построению теории размерности для у.т.п. Интерес к построению такого рода естественен по той простой причине, что для у.т.п. не существовало теории размерности, учитывающей одновременно обе структуры: топологию и порядок.

Пусть $(X,\tau,\leqslant)$ есть у.т.п. и (X,τ_1,τ_2) - ассоциированное бипространство. Ясно, что если $A\subset X$, то $\mathcal{D}(A)=\tau_1 cl A$, $I(A)=\tau_2 cl A$, и если множество A является замкнутым и выпуклым в $(X,\tau,\leqslant)$, т.е. $A=\mathcal{D}(A)\cap I(A)$, то A бизамкнуто в (X,τ_1,τ_2) ,т.е. $A=\tau_1 cl A\cap\tau_2 cl A$ (см. /5/).

Определение I. Пусть A и B - подмножества у.т.п. X. Будем писать, что $A<'B$, если выполняется равенство.

$$(A\cap I(B))\cup(\mathcal{D}(A)\cap B)=\phi.$$

Если $A<'B$ и одновременно существуют такие открытые окрестности $U(A)=dU(A)$ и $U(B)=iU(B)$, что $U(A)\cap U(B)=\phi$, то будем писать $A\ll' B$.

Определение 2. У.т.п. $(X,\tau,\leqslant)$ будем называть наследственно строго нормально упорядоченным, если любое его упорядоченное подпространство является строго нормально упорядоченным.

Перейдем теперь к определению размерностных функций для у.т.п. $(X,\tau,\leqslant)$.

Определение 3. Пусть $A\subset X$, где $(X,\tau,\leqslant)$ есть у.т.п.; тогда $(i,d)Fr\,A = I(A) \cap \mathcal{D}(X \setminus A)$, $(d,i)Fr\,A = \mathcal{D}(A) \cap I(X \setminus A)$.

Ясно, что если A – открытое возрастающее (соответственно убывающее) подмножество в $(X, \tau, \leqslant)$, то $(i,d)Fr\,A = I(A) \cap (X \setminus A) = I(A) \setminus (A)$ (соответственно $(d,i)Fr\,A = \mathcal{D}(A) \cap (X \setminus A) = \mathcal{D}(A) \setminus (A)$.

<u>Определение 4.</u> Предположим, что $o\text{-}Ind\,X = -1$ ($o\text{-}ind\,X = -1$) $\Longleftrightarrow X = \phi$.

Полагая, что смысл неравенства $o\text{-}Ind\,X \leqslant n-1$ ($o\text{-}ind\,X \leqslant n-1$) уже определен, будем считать, что $o\text{-}Ind\,X \leqslant n$ ($o\text{-}ind\,X \leqslant n$), если выполнены следующие условия:

(I) для любого замкнутого возрастающего множества $A \subset X$ (для любой точки $x \in X$) и любой его открытой возрастающей окрестности $\mathcal{U}(A)$ (соответственно $\mathcal{U}(x)$) существует такая открытая возрастающая окрестность $V(A)$ (соответственно $V(x)$), что $I\,V(A) \subseteq \mathcal{U}(A)$ и $o\text{-}Ind\,(i,d)Fr\,V(A) \leqslant n-1$ (соответственно $I\,V(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ и $o\text{-}ind\,(i,d)Fr\,V(x) \leqslant n-1$);

(2) для любого замкнутого убывающего множества $B \subset X$ (для любой точки $x \in X$) и любой его открытой убывающей окрестности $\mathcal{U}(B)$ (соответственно $\mathcal{U}(x)$) существует такая открытая убывающая окрестность $V(B)$ (соответственно $V(x)$), что $\mathcal{D}V(B) \subseteq \mathcal{U}(B)$ и $o\text{-}Ind\,(d,i)Fr\,V(B) \leqslant n-1$ (соответственно $\mathcal{D}V(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ и $o\text{-}ind\,(d,i)Fr\,V(x) \leqslant n-1$).

$o\text{-}Ind\,X = n$ (соответственно $o\text{-}ind\,X = n$), если выполнено неравенство $o\text{-}Ind\,X \leq n$ (соответственно $o\text{-}ind\,X \leq n$), а неравенство $o\text{-}Ind\,X \leq n-1$ (соответственно $o\text{-}ind\,X \leq n-1$) уже не выполняется. Наконец, если неравенство $o\text{-}Ind\,X \leq n$ (соответственно $o\text{-}ind\,X \leq n$) не выполняется ни для какого $n \geq -1$, то будем считать $o\text{-}Ind\,X = \infty$ (соответственно $o\text{-}ind\,X = \infty$).

$o\text{-}Ind\,X$ и $o\text{-}ind\,X$ назовем большой и малой индуктивными размерностями у.т.п. $(X, \tau, \leq)$.

Ясно, что $o\text{-}Ind\,X$ и $o\text{-}ind\,X$ могут быть определены и с помощью соответствующим образом определенных перегородок.

<u>Определение 5</u>. Предположим, что $o\text{-}\dim X = -1 \Longleftrightarrow X = \phi$

Полагаем, что $o\text{-}\dim X \leq n$, если выполнены следующие условия:

(I) для любой системы открытых возрастающих множеств $\{U_s : s = \overline{1,k}\}$ и любой системы замкнутых возрастающих множеств $\{A_s : s = \overline{1,k}\}$ с условием $A_s \subset U_s$ для каждого $s = \overline{1,k}$, существует такая система открытых возрастающих множеств $\{V_s : s = \overline{1,k}\}$, что $A_s \subset V_s \subset U_s$ для каждого $s = \overline{1,k}$ и $\operatorname{ord}\{(i,d)Fr\,V_s : s = \overline{1,k}\} \leq n$;

(2) для любой системы открытых убывающих множеств

$\{U_s : s=\overline{1,k}\}$ и любой системы замкнутых убывающих множеств $\{B_s : s=\overline{1,k}\}$ с условием $B_s \subset U_s$ для каждого $s=\overline{1,k}$ существует такая система открытых убывающих множеств $\{V_s : s=\overline{1,k}\}$, что $B_s \subset V_s \subset U_s$ для каждого $s=\overline{1,k}$ и $\operatorname{ord}\{(d,i)Fr_{\tau}V_s : s=\overline{1,k}\} \leq n$.

Далее, $o\text{-}\dim X = n$, если неравенство $o\text{-}\dim X \leq n$ выполнено, а неравенство $o\text{-}\dim X \leq n-1$ не выполнено. Наконец, если неравенство $o\text{-}\dim X \leq n$ не выполняется ни для какого $n \geq -1$, то говорим $o\text{-}\dim X = \infty$. $o\text{-}\dim X$ назовем лебеговой размерностью у.т.п. $(X,\tau,\leq)$.

Замечание. Пусть $(X,\tau,\leq)$ есть у.т.п. и (X,τ_1,τ_2) - ассоциированное бипространство. Тогда ясно, что $o\text{-}Ind(X,\tau,\leq) = p\text{-}Ind(X,\tau_1,\tau_2)$, $o\text{-}ind(X,\tau,\leq) = p\text{-}ind(X,\tau_1,\tau_2)$, $o\text{-}\dim(X,\tau,\leq) = p\text{-}\dim(X,\tau_1,\tau_2)$, где $p\text{-}Ind X$, $p\text{-}ind X$ и $p\text{-}\dim X$ соответственно большая, малая и лебегова биразмерности бипространства (X,τ_1,τ_2) (см. 5). Если рассматривать $(R,\tau,\leq)$, где R - вещественная прямая, τ - обычная топология, а $\leq$ - естественный порядок на R, то ассоциированным бипространством является (R,τ_1,τ_2), где $\tau_1=\{\phi,R\}\cup\{(a,+\infty): a\in R\}$ и $\tau_2=\{\phi,R\}\cup\{(-\infty,a): a\in R\}$. Поэтому, как легко видеть, $o\text{-}Ind R = o\text{-}ind R = o\text{-}\dim R = 1$.

Доказательства приводимых ниже утверждений для $o\text{-}Ind X$

$o\text{-}ind\,X$ и $o\text{-}dim\,X$ легко получаются как следствия из соответствующих битопологических утверждений переходом на ассоциированные бипространства (см. /5/). Ясно, что эти доказательства можно проводить непосредственно в категории у.т.п., однако это нам не представляется целесообразным, так как они значительно усложняются.

Справедливы следующие утверждения:

6) для того, чтобы у.т.п. $(X, \tau, \leq)$ было наследственно строго нормально упорядоченным, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух подмножеств $A, B \subset X$ из $A <' B$ следовало $A \ll' B$;

7) размерностные функции $o\text{-}Ind\,X$, $o\text{-}ind\,X$ и $o\text{-}dim\,X$ являются инвариантами сохраняющих порядок гомеоморфизмов;

8) если размерность $o\text{-}Ind\,X$ (соответственно, $o\text{-}ind\,X$) является конечной, то у.т.п. $(X, \tau, \leq)$ является строго нормально (соответственно строго регулярно) упорядоченным;

9) если $(X, \tau, \leq)$ является строго нормально упорядоченным и A замкнуто и выпукло в X, т.е. $A = \mathcal{D}(A) \cap I(A)$, то $(A, \tau_A, \leq)$ также является строго нормально упорядоченным.

Теорема 1. Пусть $A \subset X$, $A = \mathcal{D}(A) \cap I(A)$ (соответственно $A \subset X$ - произвольное подмножество), тогда $o\text{-}Ind\,A \leq o\text{-}Ind\,X$, $o\text{-}dim\,A \leq o\text{-}dim\,X$ (соответственно $o\text{-}ind\,A \leq o\text{-}ind\,X$).

Теорема 2. Для любого у.т.п. $(X, \tau, \leq)$ равенства

$o\text{-}Ind\,X=0$, $o\text{-}dim\,X=0$ равносильны друг другу и каждое из них влечет строгую нормальную упорядоченность $(X,\tau,\leq)$.

Теорема 3. Пусть наследственно строго нормально упорядоченное пространство $(X,\tau,\leq)$ есть сумма счетного числа дизъюнктных множеств $\mathcal{D}_k : X=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{D}_k$, обладающих тем свойством, что все частные суммы $F_k=\bigcup_{s\leq k}\mathcal{D}_s$, $k=\overline{1,\infty}$, удовлетворяют условию: $F_k=\mathcal{D}(F_k)=I(F_k)$. Если, при этом, $o\text{-}Ind\,\mathcal{D}_k\leq n$ для всех $k=\overline{1,\infty}$, то $o\text{-}Ind\,X\leq n$.

Теорема 4. Пусть $X_k=i(X_k)=d(X_k)$ - открытые подмножества в X для всех $k=\overline{1,\infty}$, где $(X,\tau,\leq)$ является наследственно строго нормально упорядоченным. Кроме того, $X_k\supseteq X_{k+1}$, $X_1=X$ и $\bigcap_{k=1}^{\infty}X_k=\phi$. Если для всех $k=\overline{1,\infty}$, $o\text{-}Ind\,(X_k\setminus X_{k+1})\leq n$, то $o\text{-}Ind\,X\leq n$.

Следствие. Если $A=\mathcal{D}(A)=I(A)$, $A\subset X$, где $(X,\tau,\leq)$ есть наследственно строго нормально упорядоченное пространство и $o\text{-}Ind\,A\leq n$, $o\text{-}Ind\,(X\setminus A)\leq n$, то и $o\text{-}Ind\,X\leq n$.

Теорема 5. Если $(X,\tau,\leq)$ есть наследственно строго нормально упорядоченное пространство и $X=P\cup Q$, где

$o\text{-}Ind\, P \leq n$, $o\text{-}Ind\, Q \leq 0$, то $o\text{-}Ind\, X \leq n+1$.

Следствие. Если наследственно строго нормально упорядоченное пространство $(X, \tau, \leq)$ представляется в виде суммы $n+1$ множеств X_K, где $o\text{-}Ind\, X_K \leq 0$ для любого $K = \overline{0,n}$, то $o\text{-}Ind\, X \leq n$.

Теорема 6. Пусть строго нормально упорядоченное пространство $(X, \tau, \leq)$ представляется в виде суммы $X = \bigcup_{K=1}^{\infty} X_K$, где $X_K = \mathcal{D}(X_K) = I(X_K)$ и $o\text{-}Ind\, X_K = 0$ (или, что то же самое, $o\text{-}dim\, X_K = 0$) для любого $K = \overline{1,\infty}$. Тогда $o\text{-}Ind\, X = 0$, а, следовательно, $o\text{-}dim\, X = 0$.

Теорема 7. Если $X_0 \subset X$ и $X_0 = \bigcup_{K=1}^{\infty} A_K$, где $A_K = \mathcal{D}(A_K) = I(A_K)$ в $(X, \tau, \leq)$ и $o\text{-}Ind\, X \leq 0$, т.е. $o\text{-}dim\, X \leq 0$, то $o\text{-}Ind\, X_0 \leq 0$ и, значит, $o\text{-}dim\, X_0 \leq 0$.

Теорема 8. Пусть $(X, \tau, \leq)$ является наследственно строго нормально упорядоченным. Тогда для любых подмножеств $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset X$ справедливо равенство

$$o\text{-}ind\,(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \leq o\text{-}ind\, \mathcal{M} + o\text{-}ind\, \mathcal{N} + 1.$$

Ясно, что справедливо и обобщение этого неравенства, т.е. справедливо неравенство

$$o\text{-}ind(\mathcal{M}_0 \cup \mathcal{M}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{M}_n) \leq$$

$$\leq o\text{-}ind\,\mathcal{M}_0 + o\text{-}ind\,\mathcal{M}_1 + \cdots + o\text{-}ind\,\mathcal{M}_n + n$$

для любых $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n \subset X$.

Следствие. Если наследственно строго нормально упорядоченное пространство $(X, \tau, \leq)$ представляется в виде суммы $X = \bigcup_{k=0}^{n} X_k$ и $o\text{-}ind\,X_k \leq 0$ для любого $k = \overline{0,n}$, то $o\text{-}ind\,X \leq n$.

Поступила 30.X.1980

Кафедра алгебры и геометрии

ЛИТЕРАТУРА

1. L.Nachbin. Topology and order, Van Nostrand Math. Studies 4, Princeton, New-Tersey, 1965.
2. J. C.Kelly. Proc. London Math. Soc., 13, N 3, 71-89, 1963.
3. M. J.Canfell. Thesis, University of Edinburgh, 1968.
4. H. \.Pristley. Proc. London Math. Soc., 24, N3, 503-530, 1972.
5. Б.П.Двалишвили. Сообщения АН ГССР, 76, № I, 49-52, I974.
6. S.D.McCartan Proc. Cambridge Philos.Soc., 64, 965-973, 1968.
7. T.McCallion Proc. London Cambridge Philos. Soc., 71, 463-473, 1972.
8. E.P.Lane. Proc. London Math. Soc., 17, N 3, 241-256, 1967.
9. I.L.Reilly. Ph. D. Thesis, Urbana-Champaign, Illinois, Library,University of Illinois, 1970.
10. Б.П.Двалишвили. Сообщения АН ГССР, 73,№2, 285-288, I974.

ბ.დვალიშვილი

ბიტოპოლოგიურ სივრცეთა თეორიის ზოგიერთი გამოყენების შესახებ დალაგებულ ტოპოლოგიურ სივრცეთა თეორიაში

რეზიუმე

შესწავლილია დალაგებული ტოპოლოგიური სივრცეების განცალების აქსიომათა კავშირი ამ სივრცეებთან გარკვეული აზრით ასოცირებული ბიტოპოლოგიური სივრცეების განცალების აქსიომებთან. გარდა ამისა, დალაგებული ტოპოლოგიური სივრცეებისათვის აგებულია განზომილების თეორია, რომელშიც მტკიცდება განზომილების კლასიკური თეორიის ბევრი ცნობილი თეორემის ანალოგიური თეორემა.

B.Dvalishvili

ON SOME APPLICATIONS OF THE THEORY OF BITOPOLOGICAL SPACES IN THE THEORY OF ORDERED TOPOLOGICAL SPACES

Summary

The relations between the separation axioms of ordered topological spaces and the separation axioms of bitopological spaces have been studied. For ordered topological spaces the dimension functions of the type ind, Ind and dim in the notations o-ind, o-Ind and o-dim respectively are defined. The conditions are found in which analogous theorems of the classical dimension theory (monotony, Menger-Urysohn, Dowker's sum theorem for disjoint sets, etc.) are true for the above functions.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

225, 1981

УДК 519.2

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКЕ ЧАСТИЧНО-НАБЛЮДАЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В СХЕМЕ КАЛМАНА-БЬЮСИ

В.М.Дочвири

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – полное вероятностное пространство и $(\mathcal{F}_t)$, $0 \leq t \leq T < \infty$ – неубывающее семейство σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, $0 \leq s \leq t$. Рассмотрим заданный на этом пространстве двумерный частично-наблюдаемый гауссовский случайный процесс $(\theta, \xi^\varepsilon) = (\theta_t, \xi_t^\varepsilon)$, $0 \leq t \leq T$, согласованный с семейством $(\mathcal{F}_t)$, со значениями в $R^2 = R^1 \times R^1$ и удовлетворяющий следующим стохастическим дифференциальным уравнениям

$$d\theta_t = [a_0(t) + a_1(t)\theta_t]dt + b(t)dw_t, \quad \theta_0 = w_0 = 0, \tag{1}$$

$$d\xi_t^\varepsilon = [A_0(t) + A_1(t)\theta_t]dt + \varepsilon d\tilde{w}_t, \quad \xi_0^\varepsilon = \tilde{w}_0 = 0, \tag{2}$$

где $w = (w_t, \mathcal{F}_t)$ и $\tilde{w} = (\tilde{w}_t, \mathcal{F}_t)$ – независимые стандартные винеровские процессы, $\varepsilon > 0$ – константа. Предполагается, что наблюдаемым является только процесс ξ_t^ε, который содержит неполную информацию о ненаблюдаемом процессе θ_t. Это т.н. схема Калмана-Бьюси частично-наблюдаемых случайных процессов /I/.

Пусть далее задана функция выигрыша, имеющая следующий вид:

$$g(t,x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t) x^k, \tag{3}$$

где $f_k(t)$, $0 \le t \le T$, $k = 0,1,\dots,n$ – измеримые и ограниченные функции. Определим цены S^0 и S^ε в "0-задаче" и "ε-задаче" с помощью соотношений /3/

$$S^0 = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^\theta} M g(\tau, \theta_\tau) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^\theta} M\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(\tau)\theta_\tau^k\right), \tag{4}$$

$$S^\varepsilon = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^{\xi^\varepsilon}} M g(\tau, \theta_\tau) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^{\xi^\varepsilon}} M\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(\tau)\theta_\tau^k\right), \tag{5}$$

где $\mathfrak{M}^\theta$ и $\mathfrak{M}^{\xi^\varepsilon}$ обозначают классы моментов остановки относительно семейств σ-алгебр $(\mathcal{F}_t^\theta)$ и $(\mathcal{F}_t^{\xi^\varepsilon})$, связанных соответственно с процессами θ_t и ξ_t^ε, $\mathcal{F}_t^\theta = \sigma\{\theta_s, s \le t\}$, $\mathcal{F}_t^{\xi^\varepsilon} = \sigma\{\xi_s^\varepsilon, s \le t\}$ /2/.

В настоящей работе задача оптимальной остановки по неполным данным ненаблюдаемой компоненты θ_t процесса $(\theta_t, \xi_t^\varepsilon)$

относительно функции выигрыша (3) сводится к некоторой задаче по полным данным (теорема I) и доказывается сходимость цены S^{ε} в "ε-задаче" к цене S^{0} в "0-задаче" при $\varepsilon \to 0$ (теорема 2). Аналогичные вопросы изучены в /3/, когда $g(t,x)$ является линейной или квадратичной от x функцией, и в /5/.

Предположим, что коэффициенты процесса $(\theta_t, \xi_t^{\varepsilon})$ являются измеримыми функциями и при всех t, $0 \le t \le T$ удовлетворяют следующим условиям:

(I) $a_1(t) \le 0$, $\int_0^T a_1(t)dt = A > -\infty$,

(II) $0 \le a_0(t) \le a < \infty$,

(Ш) $\int_0^T A_0^2(t)dt < \infty$,

(IУ) функция $b(t)$ непрерывна, монотонно не убывает и

$$0 \le b(t) \le B < \infty,$$

(У) функция $A_1(t)$ непрерывна, монотонно не возрастает и существуют константы $\underline{A}_1$ и $\bar{A}_1$, $0 < \underline{A}_1 \le \bar{A}_1 < \infty$, такие, что $\underline{A}_1 \le A_1 \le \bar{A}_1$.

Заметим, что когда $\varepsilon = 0$, то тогда при условии (У) σ-алгебры $\mathcal{F}_t^{\xi^0}$ и $\mathcal{F}_t^{\theta}$ совпадают для всех t или, что то же самое, $\mathfrak{M}^{\xi^0} = \mathfrak{M}^{\theta}$, в силу чего совпадают также цены (4) и (5).

Введем следующие обозначения:

$$\mu_k^{\varepsilon}(t)=M\left(\theta_t^{k}/\mathcal{F}_t^{\xi^{\varepsilon}}\right),$$

$$m_t^{\varepsilon}=\mu_1^{\varepsilon}(t)=M\left(\theta_t/\mathcal{F}_t^{\xi^{\varepsilon}}\right),$$

$$\gamma_t^{\varepsilon}=M\left(\theta_t-m_t^{\varepsilon}\right)^2.$$

Используя свойства процесса $(\theta_t, \xi_t^{\varepsilon})$, легко видеть, что

$$\mu_k^{\varepsilon}(t)=\sum_{i=0}^{k}\varphi_i(k)\left(\gamma_t^{\varepsilon}\right)^{i/2}\left(m_t^{\varepsilon}\right)^{k-i}, \tag{6}$$

где i принимает четные значения, а

$$\varphi_i(k)=\frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{2^{i/2}\cdot\left(\frac{i}{2}\right)!},\quad k=0,1,\dots,n.$$

Определим теперь случайный процесс θ_t^{ε} соотношением

$$d\theta_t^{\varepsilon}=\left[a_0(t)+a_1(t)\theta_t^{\varepsilon}\right]dt+\frac{A_1(t)\gamma_t^{\varepsilon}}{\varepsilon}dW_t. \tag{7}$$

Имеет место следующий результат:

<u>Теорема I</u>. Пусть частично-наблюдаемый гауссовский случайный процесс $(\theta_t, \xi_t^{\varepsilon})$ задан системой (I), (2), процесс θ_t^{ε} определен формулой (7) и функция выигрыша имеет вид (3). Тогда

$$s^{\varepsilon}=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}^{\theta}} M\tilde{g}\left(\tau,\nu_k^{\varepsilon}(\tau)\right)=\sup_{\tau\in\mathfrak{M}^{\theta}} M\left(\sum_{k=0}^{n}f_k(\tau)\nu_k^{\varepsilon}(\tau)\right), \tag{8}$$

где

$$\nu_\kappa^\varepsilon(t) = \sum_{i=0}^{\kappa} \varphi_i(\kappa)\left(\gamma_t^\varepsilon\right)^{i/2}\left(m_t^\varepsilon\right)^{\kappa-i} \tag{9}$$

Доказательство. Сначала покажем, что в (5) под знаком математического ожидания вместо процесса θ_t можно поставить случайный процесс $\mu_t^\varepsilon(t)$, который согласован с семейством σ-алгебр $(\mathcal{F}_t^{\xi^\varepsilon})$. Действительно, используя свойства условного математического ожидания и лемму I.9 из /I/, мы можем написать

$$S^\varepsilon = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^{\xi^\varepsilon}} M\left(\sum_{\kappa=0}^{n} f_\kappa(\tau)\theta_\tau^\kappa\right) =$$

$$= \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^{\xi^\varepsilon}} M\left[M\left(\sum_{\kappa=0}^{n} f_\kappa(\tau)\cdot\theta_\tau^\kappa\right)/\mathcal{F}_\tau^{\xi^\varepsilon}\right] =$$

$$= \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^{\xi^\varepsilon}} M\left[\sum_{\kappa=0}^{n} f_\kappa(\tau) M\left(\theta_\tau^\kappa/\mathcal{F}_\tau^{\xi^\varepsilon}\right)\right] =$$

$$= \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^{\xi^\varepsilon}} M\left(\sum_{\kappa=0}^{n} f_\kappa(\tau)\mu_\kappa^\varepsilon(\tau)\right) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^{\xi^\varepsilon}} M\tilde{g}\left(\tau,\mu_\kappa^\varepsilon(\tau)\right).$$

Заметим, что процесс m_t^ε можно представить в виде (см. главу I0 в /I/):

$$dm_t^\varepsilon = \left[a_0(t) + a_1(t) m_t^\varepsilon\right] dt + \frac{A_1(t)\,\gamma_t^\varepsilon}{\varepsilon}\, d\bar{w}_t^\varepsilon , \qquad (10)$$

где $\bar{w}_t^\varepsilon$ - новый винеровский (обновляющий) процесс. При этом σ-алгебры $\mathcal{F}_t^{\xi^\varepsilon}$ и $\mathcal{F}_t^{\bar{w}^\varepsilon}$ совпадают при всех $t,\ 0 \le t \le T$. Сравнивая (7) и (10) мы видим, что у процессов $\mu_\kappa^\varepsilon(t)$ и $\nu_\kappa^\varepsilon(t)$ совпадают все конечномерные распределения и поэтому

$$\sup_{\tau \in \mathfrak{M}^{\nu_\kappa^\varepsilon}} M\tilde{g}(\tau, \nu_\kappa^\varepsilon(\tau)) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}^{\xi^\varepsilon}} M\tilde{g}(\tau, \mu_\kappa^\varepsilon(\tau)). \qquad (11)$$

Но так как $\mathcal{F}_t^{\nu_\kappa^\varepsilon} = \mathcal{F}_t^\theta$, то совпадают также и соответствующие классы моментов остановки $\mathfrak{M}^{\nu_\kappa^\varepsilon}$ и $\mathfrak{M}^\theta$, в силу чего из (11) получаем утверждение теоремы 1.

Таким образом, с помощью теоремы 1 проделана редукция исходной задачи оптимальной остановки процесса θ_t по неполным данным относительно функции выигрыша $g(t,x)$ к задаче по полным данным процесса $\nu_\kappa^\varepsilon(t)$ относительно $\tilde{g}(t,x)$.

Перейдем теперь к выводу оценки разности $S^0 - S^\varepsilon$, откуда будет следовать сходимость S^ε к S^0 при $\varepsilon \to 0$. Предположим с этой целью, как и раньше, что функции $f_\kappa(t)$ ограничены $0 \le f_\kappa(t) \le H_\kappa < \infty,\ 0 \le t \le T,\ \ \kappa = 0,1,\dots,n$ и обозначим

$$H = \max_{0 \le k \le n} H_k . \tag{12}$$

Кроме этого, запишем процессы θ_t и θ_t^{ε} как решения стохастических дифференциальных уравнений (I) и (7) соответственно. В силу теоремы 4.10 из /I/ имеем

$$\theta_t = \phi(t)\left[\int_0^t \phi^{-1}(s)\, a_0(s)\, ds + \int_0^t \phi^{-1}(s)\, b(s)\, dw_s\right], \tag{13}$$

$$\theta_t^{\varepsilon} = \phi(t)\left[\int_0^t \phi(s)\, a_0(s)\, ds + \int_0^t \phi^{-1}(s)\, \frac{A_1(s)\, \gamma_s^{\varepsilon}}{\varepsilon}\, dw_s\right], \tag{14}$$

где неслучайная функция

$$\phi(t) = \exp\left[\int_0^t a_1(s)\, ds\right]. \tag{15}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы I и $\varepsilon < 1$. Тогда, если $s^0 < \infty$, то s^{ε} сходится к s^0 при $\varepsilon \to 0$, и эта сходимость определяется соотношением

$$0 \le s^0 - s^{\varepsilon} \le C \cdot \sqrt{\varepsilon}, \tag{16}$$

где константа

$$C = H\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k 4^k}{8 e^{kA}} \sqrt{\frac{2B}{\underline{A}_1}\left\{(aT)^{2(k-1)} + 2^{k+1}\left[(2k-3)T\right]^{k-1} \cdot \left(B\frac{\bar{A}_1}{\underline{A}_1}\right)^{2(k-1)}\right\} +}\right.\right.$$

$$+\sum_{i=2}^{k}\varphi_i(k)\frac{2^{k-i}}{e^{(k-i)A}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{B}{\underline{A}_1}\right)^{i}\left\{(aT)^{2(k-i)}+2^{k-i+2}\left([2(k-i)-1]T\right)^{k-i}\left(B\frac{\bar{A}_1}{\underline{A}_1}\right)^{2(k-i)}\right\}}\Bigg]\Bigg\}\quad (1$$

Если же $S^{0}=\infty$, то $\mathcal{E}^{\varepsilon}=\infty$ для любого $\varepsilon>0$.

<u>Доказательство.</u> Прежде всего заметим, что левая сторона оценки (I6) и вторая часть теоремы 2 доказываются аналогично тому, как это делается в /3/. Для доказательства правой стороны оценки (I6) используем теорему I, согласно которой мы можем написать

$$S^{0}-S^{\varepsilon}\leq H\sup_{\tau\in\mathfrak{M}^{\theta}}\left(\sum_{k=0}^{n}M\left|\theta_{\tau}^{k}-\nu_{k}^{\varepsilon}(\tau)\right|\right)\leq$$

$$\leq H\left(\sum_{k=0}^{n}\sup_{\tau\in\mathfrak{M}^{\theta}}M\left|\theta_{\tau}^{k}-\sum_{i=0}^{k}\varphi_i(k)\left(\gamma_{\tau}^{\varepsilon}\right)^{i/2}\left(\theta_{\tau}^{\varepsilon}\right)^{k-i}\right|\right)\leq \tag{I8}$$

$$\leq H\left(\sum_{k=0}^{n}\left[\sup_{\tau\in\mathfrak{M}^{\theta}}M\left|\theta_{\tau}^{k}-\left(\theta_{\tau}^{\varepsilon}\right)^{k}\right|+\sum_{i=2}^{k}\varphi_i(k)\left(\frac{B}{\underline{A}_1}\varepsilon\right)^{i/2}\sup_{\tau\in\mathfrak{M}^{\theta}}M\left|\theta_{\tau}^{\varepsilon}\right|^{k-i}\right]\right),$$

где мы воспользовались оценкой (I.32) из /3/, согласно которой $\gamma_{t}^{\varepsilon}\leq B\varepsilon/\underline{A}_1$. Используя неравенство Коши-Буняковского, легко видеть, что

$$\sup_{\tau\in\mathfrak{M}^{\theta}}M\left|\theta_{\tau}^{k}-\left(\theta_{\tau}^{\varepsilon}\right)^{k}\right|\leq k\sqrt{2^{2(k-1)-1}\cdot I_1(k)\cdot I_2}\,, \tag{I9}$$

где мы обозначим

$$I_1(\kappa) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^\theta} M\left[\theta_\tau^{2(\kappa-1)} + \left(\theta_\tau^\varepsilon\right)^{2(\kappa-1)}\right], \tag{20}$$

$$I_2 = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^\theta} M\left(\theta_\tau - \theta_\tau^\varepsilon\right)^2 . \tag{21}$$

Пусть также

$$I_3(\kappa, i) = \sup_{\tau\in\mathfrak{M}^\theta} M\left|\theta_\tau^\varepsilon\right|^{\kappa-i} \tag{22}$$

и оценим отдельно величины $I_1(\kappa)$, I_2 и $I_3(\kappa,i)$. Замечая, что $0\le \phi(t)\le 1$ при всех t, $0\le t\le T$, согласно формул (13) и (14) мы можем написать

$$I_1(\kappa)\le 2\cdot 2^{2(\kappa-1)-1}\cdot\sup_{t\le T}\left[\int_0^t \phi^{-1}(s)a_0(s)ds\right]^{2(\kappa-1)} +$$

$$+2^{2(\kappa-1)}\left\{M\sup_{t\le T}\left[\int_0^t \phi^{-1}(s)b(s)dw_s\right]^{2(\kappa-1)} + \right. \tag{23}$$

$$\left. + M\sup_{t\le T}\left[\int_0^t \phi^{-1}(s)\frac{A_1(s)\,\gamma_s^\varepsilon}{\varepsilon}dw_s\right]^{2(\kappa-1)}\right\}.$$

Далее имеем

$$I_2 \le \sup_{t \le T} M\left[\int_0^t \phi(s)\left(b(s) - \frac{A_1(s)\gamma_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right)dw_s\right]^2 =$$

$$= \sup_{t \le T}\left[\int_0^t \phi^{-2}(s)\left(b(s) - \frac{A_1(s)\gamma_s^\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 ds\right] \le \tag{24}$$

$$\le \phi^{-2}(T)\gamma_T^\varepsilon \le e^{-2A}\cdot\frac{B}{A_1}\varepsilon,$$

где мы воспользовались оценками (I.3I) из (I.32) из /3/. Имеем также

$$I_3(\kappa,i) \le \sqrt{\sup_{\tau \in \mathfrak{M}^\theta} M\left(\theta_\tau^\varepsilon\right)^{2(\kappa-i)}} \le$$

$$\le \sqrt{2^{\kappa-i-1}\left\{\sup_{t\le T}\left[\int_0^t \phi^{-1}(s)a_0(s)ds\right]^{2(\kappa-i)} + M\sup_{t\le T}\left[\int_0^t \phi^{-1}(s)\,\frac{A_1(s)\gamma_s^\varepsilon}{\varepsilon}dw_s\right]^{2(\kappa-i)}\right\}}$$

Используя теперь следствие II на странице I20 из /4/ и учитывая (I8), (23), (24) и (25), получим доказательство теоремы 2.

Замечание. Желательно изучить рассматриваемые в этой работе вопросы о редукции и сходимости цен и для более общей функции выигрыша, а также случай дискретного времени. Изучению этих вопросов будут посвящены последующие работы.

Поступила I5.X.1980

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Ш.Лишцер, А.Н.Ширяев. Статистика случайных процессов, М., 1974.
2. А.Н.Ширяев. Статистический последовательный анализ, М., 1976.
3. Х.Х.Ферманн. Об оптимальной остановке случайных процессов по неполным данным, Кандидатская диссертация, М., 1977.
4. Н.В.Крылов. Управляемые процессы диффузионного типа, М., 1977.
5. В.М.Дочвири, Сообщения АН Груз.ССР, т.100, №3, 1980.

ბ.დოჭვირი

კალმან-ბიუსის სქემაში ნაწილობრივ დაკვირვებადი შემთხვევითი პროცესების ოპტიმალური გაჩერების შესახებ

რეზიუმე

კალმან-ბიუსის სქემისათვის ნაწილობრივ დაკვირვებადი შემთხვევითი პროცესების ოპტიმალური გაჩერების ამოცანა დაყვანილია სრულად დაკვირვებად შემთხვევაზე და დამტკიცებულია შესაბამისი ფასების კრებადობა. მოგების ფუნქციად განხილულია n-ური რიგის პოლინომი.

V. Docviri

ON THE OPTIMAL STOPPING OF PARTIALLY OBSERVABLE RANDOM PROCESSES IN THE KALMAN-BUCY SCHEME

Summary

The problem of the optimal stopping of partially observable random processes for the Kalman-Bucy scheme is reduced to the completely observable case, and the convergence of the corresponding cost functions is proved. An n-th order polynomial is assumed to be the reward function.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

225, 1981

УДК 517.51

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.С. Церетели

С представлением функций многих переменных суппериозициями функций меньшего числа переменных связана тринадцатая проблема Гильберта. Этим вопросом занимались А.Н.Колмогоров, В.И. Арнольд, Ю.П.Офман, М.-Б. А. Бабаев, С.Я.Хавинсон и др.

Пусть $\mathcal{D}$ - ограниченная замкнутая область в плоскости xOy, а $f(x,y)$ - заданная на $\mathcal{D}$ ограниченная функция. Пусть $\mathcal{D}_x$ $(\mathcal{D}_y)$ - проекция $\mathcal{D}$ на ось Ox (Oy) и пусть на множестве $\mathcal{D}_x$ $(\mathcal{D}_y)$ задан класс функций $\{\varphi(x)\}$ $[\{\psi(y)\}]$. Будем приближать функцию $f(x,y)$ функциями вида $\prod_{k=1}^{n}\left[\varphi_k(x)+\psi_k(y)\right]$. Пусть

$$E_n(f) = \inf_{\varphi_k, \psi_k} \sup_{\mathcal{D}} \left| f(x,y) - \prod_{k=1}^{n} \left[\varphi_k(x) + \psi_k(y) \right] \right| .$$

Обозначим через $H_1 = \{\varphi(x)\}$ $[H_2 = \{\psi(y)\}]$ класс функций, полные вариации которых ограничены в совокупности числом K и для которых на $\mathcal{D}_x$ $(\mathcal{D}_y)$ существует точка x_0 (y_0), в которой значения всех функций из H_1 (H_2) ограничены числом $\mathcal{M}$. Пусть $H_n = \left\{ q(x,y) = \prod_{k=1}^{n} \left[\varphi_k(x) + \psi_k(y) \right] \right\}$, где $\varphi_k(x) \in H_1$, $\psi_k(y) \in H_2$.

Имеет место

Теорема I. Для всякой функции $f(x,y)$, ограниченной в ограниченной замкнутой области $\mathcal{D}$, в классе H_n существует функция $q_0(x,y)$ наилучшего приближения, т.е.

$$\sup_{\mathcal{D}} \left| f(x,y) - q_0(x,y) \right| = \inf_{q \in H_n} \sup_{\mathcal{D}} \left| f(x,y) - q(x,y) \right| = E_n(f).$$

Доказательство. Пусть $\{q_i(x,y)\}_{i=1}^{\infty} \in H_n$ - последовательность функций, для которой

$$\lim_{i \to \infty} \sup_{\mathcal{D}} \left| f(x,y) - q_i(x,y) \right| = E_n(f).$$

Легко видеть, что эта последовательность ограничена, т.е. существует такая константа K_1, что

$$\sup_{D} \left| q_i(x,y) \right| < K, \quad i=1,2,\ldots$$

Нетрудно заметить, что последовательности $\{\varphi_{k,i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\psi_{k,i}(y)\}_{i=1}^{\infty}$, $k=1,2,\ldots,n$, равномерно ограничены. В силу теоремы Э.Хелли из последовательности $\{\varphi_{1i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_{1,i_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$, сходящуюся в каждой точке сегмента D_x к некоторой функции $\varphi_{1,0}(x)$, имеющей ограниченную вариацию. Рассмотрим последовательность $\{\varphi_{2,i_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$. Отсюда можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_{2,z_s}(x)\}_{s=1}^{\infty}$, сходящуюся в каждой точке сегмента D_x к некоторой функции $\varphi_{2,0}(x)$, имеющей ограниченную вариацию, и т.п. Продолжая этот процесс, наконец, получим такую подпоследовательность $\{\tau_\mu\}$ последовательности $\{i\}$, что

$$\lim_{\mu\to\infty} \varphi_{k,\tau_\mu}(x) = \varphi_{k,0}(x), \quad k=1,2,\ldots,n,$$

$$\lim_{\mu\to\infty} \psi_{k,\tau_\mu}(y) = \psi_{k,0}(y), \quad k=1,2,\dots,n.$$

Легко вицеть, что $\varphi_{k,0}(x_0) \le M$ и $\psi_{k,0}(y) \le M$, $k=1,2,\dots,n$.

Покажем, что $\varphi_{k,0}(x) \in H_1$, $\psi_{k,0}(y) \in H_2$, $k=1,2,\dots,n$, для этого достаточно показать, что

$$\bigvee_{\mathcal{D}_x}(\varphi_{k,0}) \le K, \quad \bigvee_{\mathcal{D}_y}(\psi_{k,0}) \le K, \quad k=1,2,\dots,n$$

Имеем:

$$\bigvee_{\mathcal{D}_x}(\varphi_{k,0}) = \sup_m \left\{ \sum_{i=1}^m \left| \varphi_{k,0}(x_i) - \varphi_{k,0}(x_{i-1}) \right| \right\} =$$

$$= \sup_m \left\{ \sum_{i=1}^m \left| \lim_{\mu\to\infty} \left[\varphi_{k,\tau_\mu}(x_i) - \varphi_{k,\tau_\mu}(x_{i-1}) \right] \right| \right\} =$$

$$= \sup_m \left\{ \lim_{\mu\to\infty} \sum_{i=1}^m \left| \varphi_{k,\tau_\mu}(x_i) - \varphi_{k,\tau_\mu}(x_{i-1}) \right| \right\} \le K, \ k=1,2,\dots,n$$

т.е. $\bigvee_{\mathcal{D}_x}(\varphi_{k,0}) \le K$, $k=1,2,\dots,n$. Аналогично $\bigvee_{\mathcal{D}_y}(\psi_{k,0}) \le K$, $k=1,2,\dots,n$.

Следовательно, $\varphi_{k,0}(x) \in H_1$, $\psi_{k,0}(y) \in H_2$, $k=1,2,\dots,n$

Итак,

$$q_0(x,y) = \prod_{k=1}^n \left[\varphi_{k,0}(x) + \psi_{k,0}(y) \right] \in H_n$$

и

$$\lim_{\mu\to\infty} q_{\tau_\mu}(x,y) = q_0(x,y).$$

Так как $\{\tau_\mu\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{i\}$, то

$$\lim_{\mu\to\infty} \sup_{\mathcal{D}} \left| f(x,y) - q_{\tau_\mu}(x,y) \right| = E_n(f),$$

т.е.

$$\lim_{\mu\to\infty} \rho\left[f(x,y);\ q_{\tau_\mu}(x,y) \right] = E_n(f).$$

Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое число N, что при $\mu > N$ будем иметь

$$\rho\left[f(x,y),\ q_{\tau_\mu}(x,y) \right] < E_n(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, для всякой фиксированной точки $(x',y') \in \mathcal{D}$ и для уже названного $\varepsilon > 0$ найдется такое число N_1, что при $\mu > N_1$ будем иметь

$$\rho\left[q_0(x',y');\ q_{\tau_\mu}(x',y') \right] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Очевидно, что при $\mu > N$ будем иметь

$$\rho\left[f(x',y').\ q_{\tau_\mu}(x',y') \right] < E_n(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, при $\mu > \max(N, N_1)$ имеем

$$\rho\left[f(x,y),\ q_0(x,y)\right] < E_n(f) + \varepsilon,$$

т.е.

$$\rho\left[f(x,y),\ q_0(x,y)\right] \leq E_n(f)$$

В силу определения $E_n(f)$ имеем

$$\rho\left[f(x,y),\ q_0(x,y)\right] = E_n(f).$$

Теорема доказана.

Пусть $H_3 = \{\varphi(x)\}\ [H_4 = \{\psi(y)\}]$ - класс непрерывных на $\mathcal{D}_x\ (\mathcal{D}_y)$ функций, а $f(x,y)$ - непрерывна на $\mathcal{D}$. Следуя Ю.П.Офману /I/, будем называть молнией совокупность вершин ломаной линии, каждое звено которой параллельно либо O_x, либо O_y и два звена, имеющие общую вершину, перпендикулярны.

Имеет место

<u>Теорема 2</u>. Для того чтобы функция $\prod_{k=1}^{n}\left[\varphi_k^*(x) + \psi_k^*(y)\right]$ $\left[\varphi_k^*(x) \in H_3,\ \psi_k^*(y) \in H_n\right]$ доставляла наилучшее приближение непрерывной функции $f(x,y)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала молния $l \subset \mathcal{D}$ со следующими свойствами:

1. L либо замкнута, либо содержит бесконечное число звеньев.

2. В вершинах L разность $f(x,y)-\prod_{k=1}^{n}\left[\varphi_k^*(x)+\psi_k^*(y)\right]$ принимает значения $\pm\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}=\max_{\mathcal{D}}\left|f(x,y)-\prod_{k=1}^{n}\left[\varphi_k^*(x)+\psi_k^*(y)\right]\right|$, причем знаки разности в соседних вершинах L противоположны.

Доказательство. Как известно (см. /2/), существует положительная мера μ и два непересекающихся замкнутых множества $\mathcal{D}^+$ и $\mathcal{D}^-$ таких, что

$$f(x,y)-\prod_{k=1}^{n}\left[\varphi_k^*(x)+\psi_k^*(y)\right]=\begin{cases}\mathcal{M} & x\in\mathcal{D}^+\\ -\mathcal{M} & x\in\mathcal{D}^-,\end{cases}\quad \mathcal{D}^+\cup\mathcal{D}^-=\mathcal{D}_\mu.$$

Из этих множеств можно выделить точки Чебышевского альтернанса. Достаточность условия доказывается аналогично теореме 1 работы /3/ с небольшими изменениями.

Поступила 10.X.1980

Кафедра вычислительной математики

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.П.Офман. Изв. АН СССР, сер.мат., 25 /1961/, 239-252.

2. З.С.Романова. Литовский матем.сборник, т.II, №2 /1963/, 181-191.

3. С.Я.Хавинсон. Изв.АН СССР, сер.матем., 33 /1969/, 650-666.

ა.წერეთელი

ორი ცვლადის ფუნქციის აპროქსიმაციის ერთი საკითხის შესახებ

რეზიუმე

შრომაში განხილულია საკითხი ორი ცვლადის $f(x,y)$ ფუნქციის $\prod_{k=1}^{n}[\varphi_k(x)+\psi_k(y)]$ სახის ფუნქციებით აპროქსიმაციის შესახებ. მოცემულია საკმარისი პირობა, რომლის დროსაც ნებისმიერი შემოსაზღვრული $f(x,y)$ ფუნქციისათვის $\left\{\prod_{k=1}^{n}[\varphi_k(x)+\psi_k(y)]\right\}$ კლასში არსებობს საუკეთესო თანაბარი მიახლოების ფუნქცია. უწყვეტი ფუნქციების შემთხვევაში ნაჩვენებია ჩებიშევის ალტერნანსის წერტილების არსებობა.

A.Tsereteli

ON THE PROBLEM OF APPROXIMATION OF THE FUNCTION OF TWO VARIABLES

Summary

In the present paper the problem of approximation of the function of two variables by the functions of $\prod_{k=1}^{n}[\varphi_k(x)+\psi_k(y)]$ is considered.

The sufficient conditions are given under which for any bounded function $f(x,y)$ in the class $\left\{\prod_{k=1}^{n}[\varphi_k(x)+\psi_k(y)]\right\}$ there exists a function of the best uniform approximation. In the case of continuous functions the Chebyshev alternance points are shown to exist.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

225, 1981

УДК 517.51

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.С.Церетели

Пусть $\mathcal{D}$ – ограниченная замкнутая область плоскости xOy, а $f(x,y)$ – заданная на $\mathcal{D}$ ограниченная функция. Пусть $\mathcal{D}_x$ $(\mathcal{D}_y)$ – проекция $\mathcal{D}$ на ось Ox (Oy) и на множестве $\mathcal{D}_x$ $(\mathcal{D}_y)$ задан класс функций $\{\varphi(x)\}$ $[\{\psi(y)\}]$. Будем приближать функцию $f(x,y)$ функциями вида $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\psi_k(y)$. Пусть,

$$E_n(f) = \inf_{\varphi_k,\psi_k} \sup_{\mathcal{D}} \left| f(x,y) - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\psi_k(y) \right|.$$

Подобными вопросами занимались А.Н.Колмогоров, В.И.Арнольд, Ю.П.Офман, М.-Б. А.Бабаев, С.Я.Хавинсон, В.П. Моторный и др.

Обозначим через $H_1=\{\varphi(x)\}$ $[H_2=\{\psi(y)\}]$ класс функций, полные вариации которых ограничены в совокупности числом K и для которых на $\mathcal{D}_x$ $(\mathcal{D}_y)$ существует точка x_0 (y_0), в которой значения всех функций из H_1 (H_2) ограничены числом M. Пусть $H_n=\{g(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\psi_k(y)\}$, где $\varphi_k(x)\in H_1$, $\psi_k(y)\in H_2$.

Имеет место

Теорема I. Для всякой функции $f(x,y)$, ограниченной в ограниченной замкнутой области $\mathcal{D}$, в классе H_n существует функция $g_0(x,y)$ наилучшего приближения, т.е.

$$\sup_{\mathcal{D}}|f(x,y)-g_0(x,y)|=\inf_{g\in H}\sup_{\mathcal{D}}|f(x,y)-g(x,y)|=E_n(f).$$

Доказательство. Пусть $\{g_i(x,y)\}_{i=1}^{\infty}\in H_n$ - такая последовательность функций, что

$$\lim_{i\to\infty}\sup_{\mathcal{D}}|f(x,y)-g_i(x,y)|=\inf_{g\in H_n}\sup_{\mathcal{D}}|f(x,y)-g(x,y)|=E_n(f).$$

Эта последовательность равномерно ограничена; действительно, для числа $\varepsilon=1$ найдется такой номер N, что

$$\sup_{\mathcal{D}}|f(x,y)-g_i(x,y)|<E(f)+1 \quad \text{при } i>N.$$

При $i > N$ имеем

$$\sup_{D}\left|g_i(x,y)\right| \leq \sup_{D}\left|f(x,y)-g_i(x,y)\right| + \sup_{D}\left|f(x,y)\right| \leq E_n(f)+1+M,$$

где $M_1 = \sup\limits_{D}\left|f(x,y)\right|$, т.е. последовательность

$\{g_i(x,y)\}_{i=N}^{\infty}$ равномерно ограничена, а также и

$$\left\{g_i(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_{k,i}(x)\psi_{k,i}(y)\right\}_{i=1}^{\infty}.$$

Следовательно, существует такая константа $K_1 > 0$, что

$$\sup_{D}\left|g_i(x,y)\right| < K_1, \quad i=1,2,\ldots.$$

Легко видеть, что последовательности $\{\varphi_{k,i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\psi_{k,i}(y)\}_{i=1}^{\infty}$

$(k=\overline{1,n})$ ограничены одним числом. Действительно, для любых

k, i и $x'\in D_x$, $y'\in D_y$ имеем

$$\left|\varphi_{k,i}(x')\right| \leq \left|\varphi_{k,i}(x')-\varphi_{k,i}(x_0)\right| + \left|\varphi_{k,i}(x_0)\right| \leq K+M,$$

$$\left|\psi_{k,i}(y')\right| \leq \left|\psi_{k,i}(y')-\psi_{k,i}(y_0)\right| + \left|\psi_{k,i}(y_0)\right| \leq K+M.$$

В силу теоремы Э.Хелли, из последовательности $\{\varphi_{1,i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$

можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_{1,i_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$, сходящуюся в каждой точке сегмента D_x к некоторой функции $\varphi_{1,0}(x)$, имеющей ограниченную вариацию. Рассмотрим последовательность

$\{\varphi_{2,i_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$. Из этой последовательности можно также выделить подпоследовательность $\{\varphi_{2,\lambda_s}(x)\}_{s=1}^{\infty}$, сходящуюся в каждой точке сегмента $\mathcal{D}_x$ к некоторой функции $\varphi_{2,0}(x)$, имеющей ограниченную вариацию. Здесь $\{\lambda_s\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{i_j\}$, следовательно

$$\lim_{s\to\infty} \varphi_{1,\lambda_s}(x) = \varphi_{1,0}(x).$$

Рассмотрим теперь последовательность $\{\varphi_{3,\lambda_s}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ и т.д. Продолжая этот процесс, наконец, получим такую подпоследовательность $\{\tau_\mu\}$ последовательности $\{i\}$, что

$$\lim_{\mu\to\infty} \varphi_{k,\tau_\mu}(x) = \varphi_{k,0}(x), \quad k=1,2,\dots,n,$$

$$\lim_{\mu\to\infty} \psi_{k,\tau_\mu}(y) = \psi_{k,0}(y), \quad k=1,2,\dots,n.$$

Легко видеть, что $|\varphi_{k,0}(x_0)| \le M$ и $|\psi_{k,0}(y_0)| \le M$, $k=\overline{1,n}$.

Покажем, что $\varphi_{k,0}(x) \in H_1$, $\psi_{k,0}(y) \in H_2$, $k=1,2,\dots,n$.

Для этого достаточно показать, что

$$\bigvee_{\mathcal{D}_x}(\varphi_{k,0}) \le K, \quad \bigvee_{\mathcal{D}_y}(\psi_{k,0}) \le K, \quad k=1,2,\dots,n.$$

Имеем:

$$\bigvee_{\mathcal{D}_x}(\varphi_{k,0}) = \sup_m \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_{k,0}(x_i) - \varphi_{k,0}(x_{i-1}) \right| \right\} =$$

$$= \sup_m \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left| \lim_{\mu \to \infty} \left[\varphi_{\kappa,\tau_\mu}(x_i) - \varphi_{\kappa,\tau_\mu}(x_{i-1}) \right] \right| \right\} =$$

$$= \sup_m \left\{ \lim_{\mu \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \left| \varphi_{\kappa,\tau_\mu}(x_i) - \varphi_{\kappa,\tau_\mu}(x_{i-1}) \right| \right\} \leq K,$$

$$\kappa = 1, 2, \ldots, n,$$

т.е.

$$\underset{\mathcal{D}_x}{V} \left(\varphi_{\kappa,0} \right) \leq K, \quad \kappa = 1, 2, \ldots, n.$$

Аналогично получим, что $\underset{\mathcal{D}_y}{V} \left(\psi_{\kappa,0} \right) \leq K$. Следовательно $\varphi_{\kappa,0}(x) \in H_1$, $\psi_{\kappa,0}(y) \in H_2$, $\kappa = 1, 2, \ldots, n$. Итак, имеем

$$g_0(x,y) = \sum_{\kappa=1}^{n} \varphi_{\kappa,0}(x)\, \psi_{\kappa,0}(y) \in H_n$$

и

$$\lim_{\mu \to \infty} g_{\tau_\mu}(x,y) = g_0(x,y).$$

Так как $\{\tau_\mu\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{i\}$, то

$$\lim_{\mu \to \infty} \sup_{\mathcal{D}} \left| f(x,y) - g_{\tau_\mu}(x,y) \right| = E_n(f),$$

т.е.

$$\lim_{\mu \to \infty} \rho \left[f(x,y),\, g_{\tau_\mu}(x,y) \right] = E_n(f).$$

Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\mathcal{N}$, что при $\mu > \mathcal{N}$ будем иметь

$$\rho \left[f(x,y),\, g_{\tau_\mu}(x,y) \right] < E_n(f) \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, для всякой фиксированной точки $(x',y')\in \mathcal{D}$ и уже названного $\varepsilon>0$ найдется такое число N_1, что при $\mu>N_1$ будем иметь

$$\rho[g_0(x',y'), g_{\tau_\mu}(x',y')]<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Очевидно, что при $\mu>N$ будем иметь

$$\rho[f(x',y'), g_{\tau_\mu}(x',y')]<E_n(f)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, при $\mu>\max(N, N_1)$ имеем

$$\rho[f(x,y), g_0(x,y)]<E_n(f)+\varepsilon.$$

В силу произвольности ε, будем иметь

$$\rho[f(x,y), g_0(x,y)]\leq E_n(f).$$

Далее, так как $g_0(x,y)\in H_n$, то в силу определения $E_n(f)$, величина, стоящая в левой части последнего неравенства, не может быть меньше $E_n(f)$, следовательно

$$\rho[f(x,y), g_0(x,y)]=E_n(f),$$

т.е.

$$\sup_{\mathcal{D}}|f(x,y)-g_0(x,y)|=E_n(f).$$

Теорема доказана.

Пусть на множестве $\mathcal{D}_x$ $(\mathcal{D}_y)$ задан класс непрерывных функций $H_3=\{\varphi(x)\}$ $[H_4=\{\psi(y)\}]$ и пусть $f(x,y)$ – непрерывна на $\mathcal{D}$. Следуя Ю.П.Офману /I/, будем называть молли совокупность вершин ломаной линии, каждое звено которой параллельно либо Ox, либо Oy и два звена, имеющие общую вершину, перпендикулярны.

Имеет место

Теорема 2. Для того чтобы заданная на $\mathcal{D}$ борелевская вещественная мера μ б а ортогональна ко всем произведениям $\varphi(x)\psi(y)$, $\varphi(x)\in H_3$, $\psi(y)\in H_4$, необходимо и достаточно, чтобы для любого борелевского $E\subset \mathcal{D}_x$ $\mu[(E\times\mathcal{D}_y)\cap\mathcal{D}]=0$ и для любого борелевского $E\subset\mathcal{D}_y$ $\mu[(\mathcal{D}_x\times E)\cap\mathcal{D}]=0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть μ ортогональна ко всем произведениям $\varphi(x)\psi(y)$, это значит

$$\int\limits_{\mathcal{D}}\varphi(x)\psi(y)\,d\mu=0.$$

В частности, это равенство будет выполняться при $\varphi(x)\psi(y)\equiv 1$, т.е.

$$\int\limits_{\mathcal{D}}d\mu=0,$$

отсюда $\mu(\mathcal{D})=0$. Так как для любого борелевского $E\subset\mathcal{D}_x$

$\mu[(E\times\mathcal{D}_y)\cap\mathcal{D}]\le\mu(\mathcal{D})$, то $\mu[(E\times\mathcal{D}_y)\cap\mathcal{D}]=0$

Аналогично $\mu[(\mathcal{D}_x\times E)\cap\mathcal{D}_y]=0$.

Достаточность. Пусть для любого борелевского $E\subset\mathcal{D}_x$

$\mu[(E\times\mathcal{D}_y)\cap\mathcal{D}]=0$ и для любого $E\subset\mathcal{D}_y$ $\mu[(\mathcal{D}_x\times E)\cap\mathcal{D}]=0$

Имеем

$$\left|\int_{\mathcal{D}}\varphi(x)\psi(y)\,d\mu\right| \le \sqrt{\int_{\mathcal{D}}\varphi^2(x)\,d\mu}\ \sqrt{\int_{\mathcal{D}}\psi^2(y)\,d\mu} =$$

$$= \sqrt{\int_{\mathcal{D}_x}\varphi^2(x)\,d\lambda_1}\ \sqrt{\int_{\mathcal{D}_y}\psi^2(y)\,d\lambda_2}\,,$$

где для $E \subset \mathcal{D}_x$ мера λ_1 определена как $\lambda_1(E) = \mu[(E\times\mathcal{D}_y)\cap\mathcal{D}]$, а для $E \subset \mathcal{D}_y$ мера λ_2 определена как $\lambda_2(E) = \mu[(\mathcal{D}_x\times E)\cap\mathcal{D}]$; п этому ортогональность μ ко всем $\varphi(x)\psi(y)$ равносильна тому, что $\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 0$. Теорема доказана.

<u>Теорема 3</u>. Для того чтобы сумма $\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^*(x)\psi_k^*(y)$ $[\varphi_k^*(x)\in H_3,\ \psi_k^*(y)\in H_4]$ доставляла наилучшее приближение непрерывной функции $f(x,y)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала молния $L \subset \mathcal{D}$ такая, что

1. L либо замкнута, либо содержит бесконечное число звеньев.

2. В вершинах L разность $f(x,y)-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^*(x)\psi_k^*(y)$ принимает значения $\pm M$, где $M = \sup_{\mathcal{D}}\left|f(x,y)-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^*(x)\psi_k^*(y)\right|$ причем знаки разности в соседних вершинах L противоположны.

<u>Доказательство.</u> Как известно (см. /5/), существует положи-

тельная мера μ и два непересекающихся замкнутых множества $\mathcal{D}^+$ и $\mathcal{D}^-$ таких, что

$$f(x,y)-\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^*(x)\psi_k^*(y)=\begin{cases}\mathcal{M} & x\in\mathcal{D}^+\\ -\mathcal{M} & x\in\mathcal{D}^-, \quad \mathcal{D}^+\cup\mathcal{D}^-=\mathcal{D}_\mu\end{cases}$$

Из этого множества, используя теорему 2, легко можно выделить точки Чебышевского алтернанса (см. /4/). Достаточность условия доказывается аналогично теореме I работы /4/ с небольшими изменениями.

Поступила IO.X.I980.

Кафедра вычислительной математики

ЛИТЕРАТУРА

I. Ю.П.Офман. Изв. АН СССР, сер. матем., 25, I96I, 239-252.
2. М.-Б. А.Бабаев. Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-мат. и тех. наук, 6, 1962, 25-39.
3. М.-Б. А.Бабаев. Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-мат. и мат. наук, I97I, № 2, 23-29.
4. С.Я.Хавинсон. Изв. АН СССР, сер. матем., 33, I969, 650-666.
5. З.С.Романова. Литовский матем.сборник, т.П, №2,1963,I8I-I9I.
6. В.П.Моторный. Изв. АН СССР, сер. матем., 27, 1963, I2II-I2I4.

ა.წერეთელი

ორი ცვლადის ფუნქციის აპროქსიმაციის შესახებ

რეზიუმე

შრომაში განხილულია საკითხი ორი ცვლადის $f(x,y)$ ფუნქციის $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \psi_k(y)$ სახის ფუნქციებით აპროქსიმაციის შესახებ. მოცემულია საკმარისი პირობა, რომლის დროსაც ნებისმიერი შემოსაზღვრული $f(x,y)$ ფუნქციისათვის $\left\{\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \psi_k(y)\right\}$ კლასში არსებობს საუკეთესო თანაბარი მიახლოების ფუნქცია. უწყვეტი ფუნქციების შემთხვევაში ნაჩვენებია ჩებიშევის ალტერნანსის წერტილების არსებობა.

A. Tsereteli

ON THE APPROXIMATION OF THE FUNCTION OF TWO VARIABLES

Summary

The problem of the approximation of the function of two variables by the functions $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \psi_k(y)$ is considered.

The sufficient conditions are given under which for any bounded function $f(x,y)$ in the class $\left\{\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \psi_k(y)\right\}$ there exists a function of the best uniform approximation. In the case of continuous functions the Chebyshev alternance points are shown to exist.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

225, 1981

УДК 517. 5. 122

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТАУБЕРОВА ТИПА ДЛЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Э.В.Челидзе

Пусть на двумерном сегменте $R_0=[a_1,b_1;a_2,b_2]$ задана конечная функция $F(x,y)$. Возьмем в R_0 двумерный сегмент $r=[x_1,x_2;y_1,y_2]$ и введем обозначение

$$\Delta(F;r)=F(x_1,y_1)-F(x_2,y_1)+F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2).$$

<u>Определение</u>. Функцию $F(x,y)$, заданную на R_0, назовем с конечной вариацией на R_0, если $\Delta(F;r)$ – функция с конечной вариацией на R_0 и, кроме того, $F(x,a_2)$ и $F(a_1,y)$ суть функции конечной вариации, соответственно в промежутках $[a_1,b_1[$, $[a_2,b_2[$.

<u>Лемма 1</u>. Если $\alpha(u,v)$ является функцией конечной вариации в квадрате $[0,1;0,1]$, то

$$\lim_{s,\sigma\to 0}\int_0^1\int_0^1 e^{-su-\sigma v}\,d\alpha(u,v)=\int_0^1\int_0^1 d\alpha(u,v)=\alpha(1,1).$$

<u>Доказательство.</u> Положим

$$A(s,\sigma)=\int_0^1\int_0^1 e^{-su-\sigma v}\,d\alpha(u,v).$$

Тогда

$$\alpha(1,1)-A(s,\sigma)=\int_0^1\int_0^1\left[1-e^{-su-\sigma v}\right]d\alpha(u,v).$$

Так как

$$1-e^{-su-\sigma v}<su+\sigma v-s\sigma uv,$$

то

$$\left|\alpha(1,1)-A(s,\sigma)\right|<\int_0^1\int_0^1(su+\sigma v-s\sigma uv)\,d\alpha(u,v)=$$

$$=s\int_0^1\int_0^1 u\,d\alpha(u,v)+\sigma\int_0^1\int_0^1 v\,d\alpha(u,v)-s\sigma\int_0^1\int_0^1 uv\,d\alpha(u,v).$$

Следовательно, для произвольного числа $\varepsilon>0$ существует та-

кое $\delta>0$, что при $s<\delta$, $\sigma<\delta$

$$\left|\alpha(1,1)-A(s,\sigma)\right|<\varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{s,\sigma\to 0} A(s,\sigma)=\alpha(1,1).$$

Лемма доказана.

<u>Лемма 2</u>. Если существуют интегралы

$$\int_1^\infty \frac{|\beta(u,1)|}{u}\,du,\quad \int_1^\infty \frac{|\beta(1,v)|}{v}\,dv,$$

и, кроме того, $\lim\limits_{u\to\infty}\alpha(u,1)=0$ и $\lim\limits_{v\to\infty}\alpha(1,v)=0$

то имеют место равенства

$$\lim_{s\to 0}\int_1^\infty \frac{\beta(u,1)}{u^2}e^{-su}\,du=\int_1^\infty \frac{\beta(u,1)}{u^2}\,du=$$

$$=\beta(1,1)-\alpha(1,1)-\int_0^1[\alpha(\infty,\tau)-\alpha(1,\tau)]\,d\tau,$$

$$\lim_{\sigma\to 0}\int_1^\infty \frac{\beta(1,v)}{v^2}e^{-\sigma v}\,dv=\int_1^\infty \frac{\beta(1,v)}{v^2}\,dv=$$

$$=\beta(1,1)-\alpha(1,1)-\int_0^1[\alpha(t,\infty)-\alpha(t,1)]\,dt.$$

<u>Доказательство</u>. Положим, что

$$I_1=\int_1^\infty \frac{\beta(u,1)}{u^2}\,du,\quad I_1(s)=\int_1^\infty \frac{\beta(u,1)}{u^2}e^{-su}\,du.$$

Тогда

$$|I_1-I_1(s)|\le\int_1^\infty \frac{|\beta(u,1)|}{u^2}(1-e^{-su})\,du<s\int_1^\infty \frac{|\beta(u,1)|}{u}\,du.$$

Следовательно,

$$\lim_{s\to 0}\left|I_1 - I_1(s)\right| = 0,$$

или

$$\lim_{s\to 0}\int_1^\infty \frac{\beta(u,1)}{u^2} e^{-su}\,du = \int_1^\infty \frac{\beta(u,1)}{u^2}\,du.$$

Теперь покажем, что

$$\int_1^\infty \frac{\beta(u,1)}{u^2}\,du = \beta(1,1) - \alpha(1,1) - \int_0^1 [\alpha(\infty,\tau) - \alpha(1,\tau)]\,d\tau.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_1^\infty \frac{\beta(u,1)}{u^2}\,du = \left[-\frac{1}{u}\beta(u,1)\right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{d\beta(u,1)}{u} = \beta(1,1) + \int_1^\infty \frac{d\beta(u,1)}{u}.$$

Но

$$\frac{\partial\beta(u,1)}{\partial u} = -u\int_0^1 \frac{\partial\alpha(u,\tau)}{\partial u}\,d\tau + u\,\frac{\partial\alpha(u,1)}{\partial u}.$$

Поэтому

$$\int_1^\infty \frac{\beta(u,1)}{u^2}\,du = \beta(1,1) + \int_1^\infty \left[-\int_0^1 \frac{\partial\alpha(u,\tau)}{\partial u}\,d\tau + \frac{\partial\alpha(u,1)}{\partial u}\right] du =$$

$$= \beta(1,1) - \alpha(1,1) - \int_0^1 [\alpha(\infty,\tau) - \alpha(1,\tau)]\,d\tau.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\sigma\to 0}\int_1^\infty \frac{\beta(1,v)}{v^2}e^{-\sigma v}dv =$$

$$=\beta(1,1)-\alpha(1,1)-\int_0^1[\alpha(t,\infty)-\alpha(t,1)]dt.$$

Лемма 3. Если существует двойной интеграл

$$I=\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{|\beta(u,v)|}{uv}dudv,$$

имеет место равенство

$$\lim_{s,\sigma\to 0}\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u^2v^2}e^{-su-\sigma v}dudv = \tag{I}$$

$$=\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u^2v^2}dudv.$$

Доказательство. Введем обозначения

$$I(s,\sigma)=\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u^2v^2}e^{-su-\sigma v}dudv,$$

$$I^*=\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u^2v^2}dudv$$

Имеем:

$$\left|I^*-I(s,\sigma)\right|=\left|\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u^2v^2}\left(1-e^{-su-\sigma v}\right)dudv\right|\le$$

$$\le\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{|\beta(u,v)|}{u^2v^2}(su+\sigma v)dudv< s\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{|\beta(u,v)|}{uv}dudv+$$

$$+\sigma\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{|\beta(u,v)|}{uv}dudv.$$

Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{s,\sigma\to 0}\left|I^*-I(s,\sigma)\right|=0$, т.е. имеет место равенство (I).

Лемма 4. Если существует интеграл

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{|\beta(u,v)|}{uv} du dv \tag{2}$$

и, кроме того, $\lim_{u\to\infty} \alpha(u,1)=0$ и $\lim_{v\to\infty} \alpha(1,v)=0$, то

имеет место равенство

$$\lim_{s,\sigma\to 0} \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u^2 v^2} e^{-su-\sigma v} (1+su)(1+\sigma v) du dv =$$

$$= \beta(1,1) - \alpha(1,1) - \alpha(\infty,\infty) -$$

$$- \int_0^1 [\alpha(t,\infty) - \alpha(t,1)] dt - \int_0^1 [\alpha(\infty,\tau) - \alpha(1,\tau)] d\tau,$$

где

$$\beta(u,v) = \int_0^u \int_0^v t\tau \, d\alpha(t,\tau).$$

Доказательство. Имеем

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u^2 v^2} e^{-su-\sigma v} (1+su)(1+\sigma v) du dv =$$

$$= \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u^2 v^2} e^{-su-\sigma v} du dv + s \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u v^2} e^{-su-\sigma v} du dv +$$

$$+ \sigma \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u^2 v} e^{-su-\sigma v} du dv + s\sigma \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{uv} e^{-su-\sigma v} du dv.$$

Поскольку существует интеграл (2), очевидно существуют интегралы

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u^2 v^2} du dv, \quad \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u^2 v} du dv, \quad \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u v^2} du dv.$$

Следовательно, в силу леммы 3 имеем

$$\lim_{s,\sigma\to 0}\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u^2v^2}e^{-su-\sigma v}(1+su)(1+\sigma v)\,du\,dv=$$

$$=\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u^2v^2}\,du\,dv.$$

Далее, применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u^2v^2}\,du\,dv=\beta(1,1)-\frac{\beta(b_1,1)}{b_1}+\frac{\beta(b_1,b_2)}{b_1b_2}-\frac{\beta(1,b_2)}{b_2}-$$

$$-\frac{1}{b_2}\int_1^{b_1}\frac{\partial\beta(u,b_2)}{\partial u}\cdot\frac{1}{u}\,du+\int_1^{b_1}\frac{\partial\beta(u,1)}{\partial u}\cdot\frac{1}{u}\,du-\frac{1}{b_1}\int_1^{b_2}\frac{\partial\beta(b_1,v)}{\partial v}\cdot\frac{1}{v}\,dv+$$

$$+\int_1^{b_2}\frac{\partial\beta(1,v)}{\partial v}\cdot\frac{1}{v}\,dv+\int_1^{b_1}\int_1^{b_2}d\alpha(u,v)=\beta(1,1)-\frac{\beta(b_1,1)}{b_1}+$$

$$+\frac{\beta(b_1,b_2)}{b_1b_2}-\frac{\beta(1,b_2)}{b_2}-A_1^*+A_2^*-A_3^*+A_4^*+ \qquad (3)$$

$$+\alpha(1,1)+\alpha(b_1,b_2).$$

Оценим A_1^*. Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial\beta(u,b_2)}{\partial u}=-u\int_0^{b_2}\frac{\partial\alpha(u,\tau)}{\partial u}\,d\tau+ub_2\,\frac{\partial\alpha(u,b_2)}{\partial u}.$$

Поэтому

$$A_1^*=\frac{1}{b_2}\int_1^{b_1}\frac{1}{u}\left[-u\int_0^{b_2}\frac{\partial\alpha(u,\tau)}{\partial u}\,d\tau+ub_2\,\frac{\partial\alpha(u,b_2)}{\partial u}\right]du=$$

$$= \frac{1}{b_2}\int_0^{b_2} d\tau \int_1^{b_1} \frac{\partial \alpha(u,\tau)}{\partial u}\,du + \int_1^{b_1} \frac{\partial \alpha(u,b_2)}{\partial u}\,du =$$

$$= \frac{1}{b_2}\int_0^{b_2} \left[\alpha(b_1,\tau) - \alpha(1,\tau)\right] d\tau + \alpha(b_1,b_2) - \alpha(1,b_2).$$

Отсюда, при $b_1, b_2 \to \infty$ получим

$$A_1^* = \alpha(\infty,\infty).$$

Аналогично находим, что $\lim\limits_{b_1,b_2\to\infty} A_3^* = \alpha(\infty,\infty)$.

Вычислим A_2^*.

$$\lim_{b_1,b_2\to\infty} A_2^* = \int_1^{b_1}\left[-\int_0^1 \frac{\partial \alpha(u,\tau)}{\partial u}\,d\tau + \frac{\partial \alpha(u,1)}{\partial u}\right] du =$$

$$= -\int_0^1 \left[\alpha(b_1,\tau) - \alpha(1,\tau)\right] d\tau + \alpha(b_1,1) - \alpha(1,1).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $b_1, b_2 \to \infty$, полчаем

$$\lim_{b_1,b_2\to\infty} A_2^* = -\int_0^1 \left[\alpha(b_1,\tau) - \alpha(1,\tau)\right] d\tau - \alpha(1,1).$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{b_1,b_2\to\infty} A_4^* = -\int_0^1 \left[\alpha(t,b_2) - \alpha(t,1)\right] dt - \alpha(1,1).$$

Следовательно, переходя к пределу в равенстве (3) при $b_1, b_2 \to \infty$, получаем

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{\beta(u,v)}{u^2v^2}\,du\,dv=\beta(1,1)-\alpha(1,1)-\alpha(\infty,\infty)-$$

$$-\int_0^1[\alpha(t;\varepsilon_2)-\alpha(t,1)]dt-\int_0^1[\alpha(\varepsilon_1,\tau)-\alpha(1,\tau)]d\tau.$$

Лемма доказана.

<u>Теорема</u>. Пусть двойной интеграл Стилтьеса

$$f(s,\sigma)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su-\sigma v}\,d\alpha(u,v)$$

сходится для любого $s>0,\ \sigma>0$, где $\alpha(u,v)$ - функция конечной вариации на $[0,\infty;0,\infty[$ с условиями

$$\lim_{u\to\infty}(u,1)=0,\quad \lim_{v\to\infty}(1,v)=0,$$

и пусть

$$\lim_{s,\sigma\to 0} f(s,\sigma)=A.$$

Если

$$\lim_{t,\tau\to\infty}\frac{\beta(t,\tau)}{t\tau}=0 \qquad (4)$$

и, кроме того, существуют интегралы

$$\int_1^\infty\frac{|\beta(u,1)|}{u}\,du,\quad \int_1^\infty\frac{|\beta(1,v)|}{v}\,dv,\quad \int_1^\infty\int_1^\infty\frac{|\beta(u,v)|}{uv}\,du\,dv,$$

где

$$\beta(t,\tau)=\int_0^t\int_0^\tau uv\,d\alpha(u,v),$$

то

$$\lim_{t,\tau\to\infty} \alpha(t,\tau)=A.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно допустить, что A=0. Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_1^{b_1}\int_1^{b_2} e^{-su-\sigma v}\,d\alpha(u,v)=\int_1^{b_1}\int_1^{b_2} e^{-su-\sigma v}\frac{1}{uv}\,d\beta(u,v)=$$

$$=\int_1^{b_1}\int_1^{b_2}\frac{\beta(u,v)}{u^2v^2}e^{-su-\sigma v}(1+su)(1+\sigma v)\,du\,dv-e^{-\sigma}\int_1^{b_1}\frac{\beta(u,1)}{u^2}e^{-su}(1+su)\,du-$$

$$-e^{-\sigma b_2}\int_1^{b_1}\frac{\beta(u,b_2)}{u^2 b_2}e^{-su}(1+su)\,du-e^{-s}\int_1^{b_2}\frac{\beta(1,v)}{v^2}e^{-\sigma v}(1+\sigma v)\,dv-$$

$$-e^{-sb_1}\int_1^{b_2}\frac{\beta(b_1,v)}{b_1v^2}e^{-\sigma v}(1+\sigma v)\,dv+\beta(1,1)e^{-s-\sigma}-\frac{\beta(b_1,1)}{b_1}e^{-sb_1-\sigma}+ \tag{5}$$

$$+\beta(b_1,b_2)e^{-sb_1-\sigma b_2}-\frac{\beta(1,b_2)}{b_2}e^{-s-\sigma b_2}.$$

Оценим $I_1=e^{-\sigma b_2}\int_1^{b_1}\frac{\beta(u,b_2)}{u b_2}e^{-su}\left(\frac{1}{u}+s\right)du.$

В силу условия теоремы $\frac{\beta(t,\tau)}{t\tau}$ ограничена, т.е.

$\frac{|\beta(t,\tau)|}{t\tau}\le M$. Поэтому

$$|I_1|<e^{-\sigma b_2}M\int_1^{b_1}e^{-su}\left(\frac{1}{u}+s\right)du<Me^{-\sigma b_2}\int_1^{b_1}e^{-su}(1+s)\,du<$$

$$< M(1+s)e^{-\sigma b_2}\,\frac{e^{-sb_1}}{s}.$$

Отсюда ясно, что $\lim\limits_{b_1,b_2\to\infty} I_1=0.$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{b_1,b_2\to\infty} I_2=\lim_{b_1,b_2\to\infty} e^{-sb_1}\int_1^{b_2}\frac{\beta(b_1,v)}{b_1 v}e^{-\sigma v}\left(\frac{1}{v}+\sigma\right)dv=0.$$

Далее, в силу условия теоремы

$$\lim_{b_1\to\infty}\frac{\beta(b_1,1)}{b_1}\cdot e^{-sb_1-\sigma}=0,$$

$$\lim_{b_2\to\infty}\frac{\beta(1,b_2)}{b_2}\cdot e^{-s-\sigma b_2}=0,$$

$$\lim_{b_1,b_2\to\infty}\beta(b_1,b_2)e^{-sb_1-\sigma b_2}=0.$$

Переходя к пределу в равенстве (5) при $b_1, b_2\to\infty$, с учетом условия (4) получаем

$$\int_1^\infty\!\!\int_1^\infty e^{-su-\sigma v}d\alpha(u,v)=\int_1^\infty\!\!\int_1^\infty\frac{\beta(u,v)}{u^2v^2}e^{-su-\sigma v}(1+su)(1+\sigma v)\,du\,dv-$$

(6)

$$-e^{-\sigma}\int_1^\infty\frac{\beta(u,1)}{u^2}e^{-su}(1+su)du-e^{-s}\int_1^\infty\frac{\beta(1,v)}{v^2}e^{-\sigma v}(1+\sigma v)dv+\beta(1,1)e^{-s-\sigma}.$$

Оценим интеграл $B=e^{-\sigma}\int_1^\infty\frac{\beta(u,1)}{u^2}e^{-su}(1+su)du.$

Имеем

$$B=e^{-6}\int_1^\infty \frac{\beta(u,1)}{u^2}e^{-su}du+se^{-6}\int_1^\infty \frac{\beta(u,1)}{u}e^{-su}du=B_1+B_2 .$$

На основании леммы 2

$$\lim_{s,6\to 0} B_1=\beta(1,1)-\alpha(1,1)-\int_0^1[\alpha(\infty,\tau)-\alpha(1,\tau)]d\tau .$$

Далее

$$B_2=e^{-6}s\int_1^N \frac{\beta(u,1)}{u}e^{-su}du+e^{-6}s\int_N^\infty \frac{\beta(u,1)}{u}e^{-su}du=B_2'+B_2''$$

$$\left|B_2''\right|<e^{-6}s\varepsilon\int_N^\infty e^{-su}du<e^{-6}s\varepsilon\int_0^\infty e^{-su}du=e^{-6}\varepsilon<\varepsilon .$$

$$\left|B_2'\right|\leqslant e^{-6}s\int_1^N \frac{|\beta(u,1)|}{u}e^{-su}du<e^{-6}s\int_1^N \frac{|\beta(u,1)|}{u}du .$$

Отсюда $\lim\limits_{s\to 0} B_2'=0$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что при $s<\delta$ $\left|B_2'\right|<\varepsilon$. Таким образом, при $s<\delta$

$$|B_2|<2\varepsilon .$$

Следовательно,

$$\lim_{s,6\to 0} B=\beta(1,1)-\alpha(1,1)-\int_0^1[\alpha(\infty,\tau)-\alpha(1,\tau)]d\tau .$$

Аналогично доказывается справедливость равенства

$$\lim_{s,\sigma\to 0} e^{-s}\int_1^\infty \frac{\beta(1,v)}{v^2}e^{-\sigma v}(1+\sigma v)\,dv=$$

$$=\beta(1,1)-\alpha(1,1)-\int_0^1[\alpha(t,\infty)-\alpha(t,1)]\,dt.$$

Переходя к пределу в равенстве (6) при $s,\sigma\to 0$ и принимая во внимание лемму (4), имеем:

$$\lim_{s,\sigma\to 0}\int_1^\infty\int_1^\infty e^{-su-\sigma v}\,d\alpha(u,v)=\alpha(1,1)-\alpha(\infty,\infty). \tag{7}$$

С другой стороны,

$$\int_1^\infty\int_1^\infty e^{-su-\sigma v}d\alpha(u,v)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su-\sigma v}d\alpha(u,v)-\int_0^1\int_0^1 e^{-su-\sigma v}d\alpha(u,v)-$$

$$-\int_{u=0}^1\int_{v=1}^\infty e^{-su-\sigma v}d\alpha(u,v)-\int_{u=1}^\infty\int_{v=0}^1 e^{-su-\sigma v}d\alpha(u,v)=B_1^*-B_2^*-B_3^*-B_4^*. \tag{8}$$

Из условия теоремы следует, что $\lim\limits_{s,\sigma\to 0+} B_1^*=0$. В силу леммы I $\lim\limits_{s,\sigma\to 0+} B_2^*=\alpha(1,1)$. Докажем, что

$$\lim_{s,\sigma\to 0+} B_3^*=-\alpha(1,1). \tag{9}$$

Имеем

$$\left|\int_{u=0}^1\int_{v=1}^\infty d\alpha(u,v)-\int_{u=0}^1\int_{v=1}^\infty e^{-su-\sigma v}d\alpha(u,v)\right|\le$$

$$\le\int_{u=0}^1\int_{v=1}^\infty\left(1-e^{-su-\sigma v}\right)|d\alpha(u,v)|<\varepsilon.$$

Отсюда

$$\lim_{s,\sigma\to 0+} B_3^* = \int_{u=0}^{1}\int_{v=1}^{\infty} d\alpha(u,v) = \alpha(1,\infty) - \alpha(0,\infty) - \alpha(1,1) + \alpha(0,1).$$

Учитывая, что $\alpha(1,\infty)=0,\ \alpha(0,\infty)=0,\ \alpha(0,1)=0$, получаем (9).

Аналогично

$$\lim_{s,\sigma\to 0+} B_4^* = -\alpha(1,1).$$

Переходя к пределу в равенстве (8) при $s,\sigma\to 0+$, будем иметь

$$\lim_{s,\sigma\to 0+} \int_1^{\infty}\int_1^{\infty} e^{-su-\sigma v} d\alpha(u,v) = \alpha(1,1).$$

Следовательно, из равенства (7) находим, что $\alpha(\infty,\infty)=0$, т.е.

$$\lim_{t,\tau\to\infty} \alpha(t,\tau) = 0.$$

Теорема доказана.

Поступила 20.I.1981.

Кафедра математики для физиков

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Г.Челидзе. Некоторые методы суммирования двойных рядов и двойных интегралов. Изд-во Тбилисского университета. 1977
2. Г.Харди. Расходящиеся ряды, М., ИЛ, 1951.

ე.ჭელიძე

ორჯერადი ინტეგრალებისათვის ტაუბერის ტიპის ერთი თეორემის შესახებ

რეზიუმე

დამტკიცებულია ტაუბერის ტიპის ერთი თეორემა სტილტიესის ორმაგი ინტეგრალებისათვის.

E.Chelidze

ON A TAUBERIAN THEOREM FOR DOUBLE INTEGRALS

Summary

A Tauberian theorem is proved for double Stieltjes integrals.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

225, 1981

УДК 517.929.7

О ЗАДАЧЕ КОШИ-НИКОЛЕТТИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ш.М.Гелашвили

Пусть m и n – некоторые натуральные числа, $N_n = \{1, \cdots, n\}$, $\tilde{N}_n = \{0, 1, \cdots, n\}$, R – множество действительных чисел, $R^m = \underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{m}$, $f_k : N_n \times R^m \to R$, $\tau_k : N_n \to R$ $(k = 1, \cdots, m)$, Δ – разностный оператор первого порядка $(\Delta x(i) = x(i+1) - x(i))$, а S_k $(k = 1, \cdots, m)$ – операторы, которые действуют в пространстве функций $x : \tilde{N}_n \to R$ и определены равенствами

$$S_k(x)(i) = \begin{cases} x(\tau_k(i)) & \text{при } \tau_k(i) \in \tilde{N}_n, \\ 0 & \text{при } \tau_k(i) \notin \tilde{N}_n \end{cases}$$

Зададим произвольно $i_k \in \tilde{N}_n$, $c_k \in R$ $(k=1,\cdots,m)$ и рассмотрим задачу об отыскании решения $(x_1,\cdots,x_m):\tilde{N}_n \to R^m$ системы разностных уравнений

$$\Delta x_k(i-1)=f_k\Big(i,s_1(x_1)(i),\cdots,s_m(x_m)(i)\Big), \qquad (0.1)$$
$$(k=1,\cdots,m),$$

удовлетворяющего условиям

$$x_k(i_k)=c_k \quad (k=1,\cdots,m). \qquad (0.2)$$

Эту задачу мы будем называть разностной задачей Коши-Николетти, так как порождающая её дифференциальная задача в литературе известна именно под таким названием / I,2,3 /.

В настоящей статье устанавливаются достаточные условия существования и единственности решения задачи (0.I), (0.2), носящие характер односторонних или двухсторонних ограничений на правые части системы (0.I).

Аналогичные результаты для дифференциальной задачи Коши-Николетти содержатся в /3/.

§ I. Формулировка теорем существования и единственности

Всюду в дальнейшем предполагается, что при любых $i \in N_n$ и $k \in N_m$ функция $f_k(i,\cdot,\cdots,\cdot):R^m \to R$ является непрерывной.

Мы будем рассматривать случай, когда функции $f_\kappa : N_n \times R^m \to R$ $(\kappa = 1, \cdots, m)$ удовлетворяют одной из следующих четырех систем неравенств:

$$\left| f_\kappa(i, x_1, \cdots, x_m) \right| \leq b_\kappa(i) + \sum_{j=1}^{m} a_{\kappa j}(i) |x_j| \qquad (\kappa = 1, \cdots, m), \tag{I.1}$$

$$\left| f_\kappa(i, x_1, \cdots, x_m) - f_\kappa(i, y_1, \cdots, y_m) \right| \leq \sum_{j=1}^{m} a_{\kappa j}(i) |x_j - y_j| \qquad (\kappa = 1, \cdots, m), \tag{I.2}$$

$$f_\kappa(i, x_1, \cdots, x_m)\, \mathrm{sign}\left[\left(i - i_\kappa - \tfrac{1}{2}\right) x_\kappa\right] \leq b_\kappa(i) + \sum_{j=1}^{m} a_{\kappa j}(i) |x_j| \qquad (\kappa = 1, \cdots, m), \tag{I.3}$$

$$\left[f_\kappa(i, x_1, \cdots, x_m) - f_\kappa(i, y_1, \cdots, y_m) \right] \mathrm{sign}\left[\left(i - i_\kappa - \tfrac{1}{2}\right)(x_\kappa - y_\kappa)\right] \leq \sum_{j=1}^{m} a_{\kappa j}(i) |x_j - y_j| \qquad (\kappa = 1, \cdots, m) \tag{I.4}$$

Теорема I.I. Пусть на множестве $\mathcal{N}_n \times R^m$ соблюдаются неравенства (I.I) (неравенства (I.2)) и задача

$$\left|\Delta x_\kappa(i-1)\right| \leq \sum_{j=1}^{m} a_{\kappa j}(i)\ \left|s_j(x_j)(i)\right| \qquad (\text{I.5})$$

$$(\kappa=1,\cdots,m),$$

$$x_\kappa(i_\kappa)=0 \quad (\kappa=1,\cdots,m) \qquad (\text{I.6})$$

имеет только нулевое решение. Тогда задача (0.I), (0.2) имеет хотя бы одно (единственное) решение.

Следствие. Пусть $\tau_\kappa(i) \neq \tau_\kappa(j)$ при $i \neq j$ $(\kappa=1,\cdots,m)$ на множестве $\mathcal{N}_n \times R^m$ соблюдаются неравенства (I.I) (неравенства (I.2)) и все собственные значения матрицы

$$\widetilde{A} = \left(\frac{\widetilde{a}_{\kappa j}}{2\sin\frac{\pi}{4n+2}}\right)_{\kappa,j=1}^{m}, \qquad (\text{I.7})$$

где

$$\widetilde{a}_{\kappa j} = \max\left\{a_{\kappa j}(i) : i \in \mathcal{N}_n,\ \tau_\kappa(i) \in \mathcal{N}_n\right\}^{*}, \qquad (\text{I.8})$$

по модулю меньше единицы. Тогда задача (0.I), (0.2) имеет хо-

---
* Если $\left\{\tau_\kappa(1),\cdots,\tau_\kappa(n)\right\} \cap \mathcal{N}_n \neq 0$, то $a_{\kappa j}=0$.

тя бы одно (единственное) решение.

Теорема I.2. Пусть

$$S_k(x_k)(i) = \begin{cases} x_k(i) & \text{при } i \geq i_k \\ x_k(i-1) & \text{при } i < i_k \end{cases} \quad (k=1,\cdots,m) \tag{I.9}$$

и на множестве $\mathcal{N}_n \times R^m$ соблюдаются неравенства (I.3) (неравенства (I.4)), где $a_{kj} : \mathcal{N}_n \to [0,+\infty[$, и задача (I.5), (I.6) имеет только нулевое решение. Тогда задача (0.1), (0,2) имеет хотя бы одно (единственное) решение.

Следствие. Пусть S_k $(k=1,\cdots,m)$ определены равенствами (I.9), на множестве $\mathcal{N}_n \times R^m$ соблюдаются неравенства (I.3) (неравенства (I.4)), $a_{kj} : \mathcal{N}_n \to [0,+\infty[$ и все собственные значения матрицы (I.7), где

$$\tilde{a}_{kj} = max\{a_{kj}(i) : i \in \mathcal{N}_n,\ i-i_k \geq 1\}, \tag{I.10}$$

по модулю меньше единицы. Тогда задача (0.1), (0.2) имеет хотя бы одно (единственное) решение.

§ 2. Леммы об априорных оценках

<u>Лемма 2.I</u>. Пусть задача (I.5), (I.6) имеет только нулевое решение. Тогда существует положительное число ρ такое, что, каковы бы ни были вектор-функции $(x_1,\cdots,x_m):\widetilde{N}_n\to R^m$, $(b_1,\dots,b_m):N_n\to R^{m}_{+}$ * и постоянный вектор $(c_1,\cdots,c_m)\in R^m$, из неравенств

$$\left|\Delta x_k(i-1)\right|\le b_k(i)+\sum_{j=1}^{m}a_{kj}(i)\left|s_j(x_j)(i)\right| \tag{2.1}$$

$$(k=1,\cdots,m),$$

$$\left|x_k(i_k)\right|\le\left|c_k\right| \quad (k=1,\cdots,m) \tag{2.2}$$

вытекает оценка

$$\max\left\{\left|x_k(i)\right|:i\in N_n,\ k\in N_m\right\}\le$$
$$\le\rho\sum_{k=1}^{m}\left[\left|c_k\right|+\sum_{i=1}^{n}b_k(i)\right] \tag{2.3}$$

<u>Доказательство</u>. Допустим противное. Тогда для любого натурального ρ существуют вектор-функции $\left(b_1^{(\rho)},\cdots,b_m^{(\rho)}\right):N_n\to R^m_+$, $\left(x_1^{(\rho)},\cdots,x_m^{(\rho)}\right):\widetilde{N}_n\to R^m$ и постоянный вектор

---

* $R^m_+=\left\{(x_1,\cdots,x_m)\in R^m: x_1\ge 0,\dots,x_m\ge 0\right\}$.

$\left(C_1^{(p)},\dots,C_m^{(p)}\right) \in R_+^m$, такие, что

$$\left|\Delta x_k^{(p)}(i-1)\right| \leq \sum_{j=1}^{m} a_{kj}(i) \left|S_j\left(x_j^{(p)}\right)(i)\right| + b_k^{(p)}(i) \qquad (2.4)$$
$$(k=1,\dots,m),$$

$$\left|x_k^{(p)}(i_k)\right| \leq C_k^{(p)} \quad (k=1,\dots,m), \qquad (2.5)$$

$$\rho_p = \max\left\{\left|x_k^{(p)}(i)\right| : i \in N_n,\ k \in N_m\right\} > \qquad (2.6)$$
$$> p \sum_{k=1}^{m}\left[C_k + \sum_{i=1}^{n} b_k^{(p)}(i)\right].$$

Пусть

$$y_k^{(p)}(i) = \frac{x_k^{(p)}(i)}{\rho_p} \quad (k=1,\dots,m).$$

Для любого натурального p существует $q_p \in N_m$ такое, что

$$\max\left\{\left|y_{q_p}^{(p)}(i)\right| : i \in N\right\} = 1. \qquad (2.7)$$

Согласно (2.4) и (2.5)

$$\left|\Delta y_k^{(p)}(i-1)\right| \leq \sum_{j=1}^{m} a_{kj}(i) \left|S_j\left(y_j^{(p)}\right)(i)\right| + \varepsilon_k^{(p)}(i) \qquad (2.8)$$
$$(k=1,\dots,m),$$

$$\left| y_k^{(p)}(i_k) \right| \leq \delta_k^{(p)} \quad (k=1,\dots,m) \quad , \tag{2.9}$$

где

$$\varepsilon_k^{(p)}(i) = \frac{b_k^{(p)}(i)}{\rho_p}, \qquad \delta_k^{(p)} = \frac{c_k^{(p)}}{\rho_p} .$$

Из (2.6) непосредственно вытекает, что

$$\varepsilon_k^{(p)}(i) \leq \frac{1}{p}, \quad \delta_k^{(p)} \leq \frac{1}{p} . \tag{2.10}$$

Для любых $i \in \tilde{N}_n$ и $k \in N_m$ последовательность $\left(y_k^{(p)}(i)\right)_{p=1}^{\infty}$ ограничена. Поэтому из $\left(\left(y_1^{(p)}, \dots, y_m^{(p)}\right)\right)_{p=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследсвательность $\left(\left(y_1^{(p_s)}, \dots, y_m^{(p_s)}\right)\right)_{s=1}^{\infty}$, сходящуюся на $\tilde{N}_n$.

Положим

$$y_k(i) = \lim_{s \to \infty} y_k^{p_s}(i) \quad (k=1,\dots,m). \tag{2.11}$$

В силу (2.8)-(2.11) имеем

$$\left| \Delta y_k(i-1) \right| \leq \sum_{j=1}^{m} a_{kj}(i) \left| S_j(y_j)(i) \right| \quad (k=1,\dots,m),$$

$$y_k(i_k) = 0 \quad (k=1,\dots,m).$$

Отсюда, согласно условиям леммы, вытекает, что $y_k(i)=0$ $(k=1,\dots,m)$. С другой стороны, ввиду (2.7) существует $q\in N_m$ такое, что

$$\max\left\{\left|y_q(i)\right| : i\in N_n\right\}=1.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2.2. Пусть s_k $(k=1,\dots,m)$ определены равенствами (I.9) и задача (I.5), (I.6) имеет только нулевое решение. Тогда существует положительное число ρ такое, что, каковы бы ни были вектор-функции $(x_1,\dots,x_m):\tilde N_n\to R^m$ и $(b_1,\dots,b_m):N_n\to R^m_+$, из неравенств

$$\Delta x_k(i-1)\,\mathrm{sign}\left[\left(i-i_k-\frac{1}{2}\right)s_k(x_k)(i)\right]\le$$
$$\le b_k(i)+\sum_{j=1}^m a_{kj}(i)\left|s_j(x_j)(i)\right| \quad (k=1,\dots,m) \tag{I.12}$$

и условий (2.2) вытекает оценка (2.3).

Доказательство. Пусть ρ - число, подобранное в соответствии с леммой 2.1, а $(x_1,\dots,x_m)$ - произвольное решение задачи (2.12), (2.2). Учитывая условия (I.9) и неравенства

$$\Delta\left|x_\kappa(i-1)\right| \leq \Delta x_\kappa(i-1)\,\mathrm{sign}\left[x_\kappa(i)\right] \quad \text{при } i > i_\kappa,$$

$$\Delta\left|x_\kappa(i-1)\right| \geq \Delta x_\kappa(i-1)\,\mathrm{sign}\left[x_\kappa(i-1)\right] \quad \text{при } i < i_\kappa,$$

из (2.12) находим

$$\Delta\left|x_\kappa(i-1)\right| \leq \sum_{j=1}^{m} a_{\kappa j}(i)\left|s_j(x_j)(i)\right| + b_\kappa(i) \quad \text{при } i \geq i_\kappa \tag{2.13}$$

и

$$\Delta\left|x_\kappa(i-1)\right| \geq -\sum_{j=1}^{m} a_{\kappa j}(i)\left|s_j(x_j)(i)\right| - b_\kappa(i) \quad \text{при } i < i_\kappa. \tag{2.14}$$

Пусть $(y_1,\dots,y_m)$ – решение задачи

$$\Delta y_\kappa(i-1) = \left[\sum_{j=1}^{m} a_{\kappa j}(i)\left|s_j(x_j)(i)\right| + b_\kappa(i)\right]\mathrm{sign}\left[i - i_\kappa - \tfrac{1}{2}\right]$$

$$(\kappa=1,\dots,m),$$

$$y_\kappa(i_\kappa) = \left|c_\kappa\right| \quad (\kappa=1,\dots,m).$$

Ввиду неравенств (2.2), (2.13) и (2.14) имеем

$$\left|x_\kappa(i_\kappa)\right| \leq y_\kappa(i) \quad (\kappa=1,\dots,m).$$

Поэтому

$$\left|\Delta y_\kappa(i-1)\right| \leq \sum_{j=1}^{m} a_{\kappa j}(i)\; s_j(y_j)(i) + b_\kappa(i)$$

$$(\kappa=1,\dots,m).$$

В силу леммы 2.I

$$\max\left\{\left|y_K(i)\right| : i\in N_n,\ K\in N_m\right\}\le$$

$$\le \rho\sum_{K=1}^{m}\left[\left|C_K\right|+\sum_{i=1}^{n} b_K(i)\right].$$

Следовательно, справедлива оценка (2.3). Лемма доказана.

Лемма 2.3. Пусть функция $x:\tilde{N}_n\to R$ для некоторого $i_0\in\tilde{N}_n$ удовлетворяет условию

$$x(i_0)=0 \qquad (2.15)$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{n} x^2(i)\le \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{4n+2}}\sum_{i=1}^{n}\left[\Delta x(i-1)\right]^2. \qquad (2.16)$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $i_0=0$. Положим

$$y(i)=\begin{cases} x(i) & \text{при } i\le n,\\ x(2n-i+1) & \text{при } i>n.\end{cases}$$

Тогда $y:\tilde{N}_{2n+1}\to R$ и $y(0)=y(2n+1)=0$. Поэтому в силу теоремы I.I из /4/ имеем

$$\sum_{i=0}^{2n+1} y^2(i)\le \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{4n+2}}\sum_{i=1}^{2n+1}\left[\Delta y(i-1)\right]^2.$$

Следовательно, справедливо неравенство (2.16). Случай, когда $i_0 \neq 0$, легко можно свести к рассмотренному. Лемма доказана.

Лемма 2.4. Пусть $\tau_k(i) \neq \tau_k(j)$ при $i \neq j$ $(k=1,\dots,m)$ и все собственные значения матрицы (2.7) по модулю меньше единицы. Тогда задача (I.5), (I.6) имеет только нулевое решение.

Доказательство. Пусть $(x_1,\dots,x_m):\tilde{N}_n \to R^m$ — решение задачи (I.5), (I.6). Тогда для любого натурального k будем иметь

$$\left|x_k(i)\right| < \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \left|z_j(i)\right|, \tag{2.17}$$

где

$$z_j(i)=\begin{cases} \sum\limits_{p=i_k+1}^{i}\left|s_j(x_j)(p)\right| & \text{при } i \geqslant i_k+1, \\ 0 & \text{при } i=i_k, \\ \sum\limits_{p=i+1}^{i_k}\left|s_j(x_j)(p)\right| & \text{при } i<i_k \end{cases} \tag{2.18}$$

Если применить неравенство Минковского, из (2.17) получим

$$\left\{\sum_{i=0}^{n} x_k^2(i)\right\}^{1/2} \leqslant \sum_{j=1}^{m} \tilde{a}_{kj} \left\{\sum_{i=0}^{n}\left[z_j(i)\right]^2\right\}^{1/2}. \tag{2.19}$$

В силу леммы 2.3 из (2.18) и (2.19) вытекает, что

$$\left\{\sum_{i=0}^{n} x_\kappa^2(i)\right\}^{1/2} \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{\tilde{a}_{\kappa j}}{2\sin\frac{\pi}{4n+2}} \left\{\sum_{i=1}^{n} \left[s_j(x_j)(i)\right]^2\right\}^{1/2} \qquad (2.20)$$

$$(\kappa = 1, \cdots, m).$$

Однако

$$\sum_{i=1}^{n} \left[s_j(x_j)(i)\right]^2 \leq \sum_{i=0}^{n} x_j^2(i).$$

Следовательно, неравенства (2.20) принимают вид

$$\left\{\sum_{i=0}^{n} x_\kappa^2(i)\right\}^{1/2} \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{\tilde{a}_{\kappa j}}{2\sin\frac{\pi}{4n+2}} \left\{\sum_{i=0}^{n} x_j^2(i)\right\}^{1/2}$$

$$(\kappa = 1, \cdots, m),$$

или

$$\rho \leq \tilde{\mathcal{A}} \rho, \qquad (2.21)$$

где ρ - вектор-столбец с компонентами

$$\rho_\kappa = \left[\sum_{i=0}^{n} x_\kappa^2(i)\right]^{1/2} \quad (\kappa = 1, \cdots, m).$$

Поскольку спектр матрицы $\mathcal{A}$ расположен внутри единичного круга и $\rho \geq 0$, из неравенства (2.21) вытекает, что $\rho = 0$. Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теорем существования и единственности

Доказательство теоремы I.I. Сначала рассмотрим случай, когда соблюдаются неравенства (I.I).

Пусть ρ – постоянная, фигурирующая в лемме 2.I. Положим

$$\eta = m\rho \sum_{k=1}^{m}\Big[|c_k| + \sum_{i=1}^{n} b_k(i)\Big], \tag{3.I}$$

$$\chi(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } |s| \le \eta, \\ 2 - \frac{s}{\eta} & \text{при } \eta \le |s| \le 2\eta, \\ 0 & \text{при } |s| \ge 2\eta, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\tilde f_k(i, y_1, \cdots, y_m) = \tag{3.3}$$

$$= \chi\big(|y_1| + \cdots + |y_m|\big) f_k(i, y_1, \cdots, y_m),$$

И рассмотрим систему разностных уравнений

$$\Delta x_k(i-1) = \tilde f_k\big(i, s_1(x_1)(i), \cdots, s_m(x_m)(i)\big) \tag{3.4}$$

$$(k = 1, \cdots, m).$$

Легко видеть, что задача (3.4), (0.2) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$x_k(i) = c_k + \sum_{j=1}^{n} g_k(i,j) f_k\big(j, s_1(x_1)(j), \cdots, s_m(x_m)(j)\big)$$

$$(k=1,\cdots,m), \tag{3.5}$$

где

$$g_k(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i>i_k,\ j>i_k, \\ 0 & \text{при } i>i_k,\ j\le i_k, \\ -1 & \text{при } i<i_k,\ i+1\le j\le i_k, \\ 0 & \text{при } i<i_k,\ j\notin\{i+1,\cdots,i_k\}, \\ 0 & \text{при } i=i_k,\ j\in N_n. \end{cases}$$

Функции $\tilde f_k(i\cdot,\dots,\cdot): R^m \to R$ $(k=1,\cdots,m)$ непрерывны и ограничены. Поэтому согласно теореме Боля-Брауэра система (3.5) разрешима. Следовательно, существует решение $(x_1,\cdots,x_m)$ задачи (3.4), (0.2).

Ввиду условий (1.1), (3.2) и (3.3), $(x_1,\cdots,x_m)$ удовлетворяет неравенствам (2.1), (2.2). Поэтому в силу леммы 2.1 справедлива оценка (2.3). Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{m} \left| s_k(x_k)(i) \right| \le r, \tag{3.6}$$

из (3.2), (3.3) и (3.6) ясно, что $(x_1,\cdots,x_m)$ является решением системы (0.1). Тем самым разрешимость задачи (0.1), (0.2) доказана.

Перейдем к рассмотрению случая, когда соблюдаются неравенства (1.2). Из этих неравенств вытекает неравенство (1.1), где

$$b_k(i) = \left| f_k(i, 0, \cdots, 0) \right| \quad (k = 1, \cdots, m).$$

Поэтому согласно выш доказанному задача (0.1), (0.2) разрешима.

Пусть $(x'_1, \cdots, x'_m)$ и $(x''_1, \cdots, x''_m)$ – два произвольных решения этой задачи. Тогда, ввиду (1.2), вектор-функция $(x_1, \cdots, x_m)$, где $x_k = x'_k - x''_k$, является решением задачи (1.5), (1.6). Однако по нашему допущению, эта задача имеет только нулевое решение. Поэтому $x'_k(i) = x''_k(i)$ $(k = 1, \cdots, m)$. Следовательно, задача (0.1), (0.2) имеет одно и только одно решение. Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается и теорема 1.2, но вместо леммы 2.1 следует применить лемму 2.2.

Чтобы убедиться в справедливости следствий теорем 1.1 и 1.2, достаточно принять во внимание лемму 2.4.

Поступила 25.X.1980.

Кафедра вычислительной математики

ЛИТЕРАТУРА

1. A.Lasota, C.Olech, Ann. Polon. Math., 16, N1, 69-94, 1964.

2. И.Т.Кигурадзе. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси, Изд-во Тбилисского ун-та, 1975.

3. I.T.Kiguradze. Ann. di Matem. pura ed appl., 104, 151-175, 1975.

4. A. Lasota. Ann. Polon. Math., 20, N$^{\circ}$ 2, 183-190, 1968.

შ.გელაშვილი

კოში-ნიკოლეტის ამოცანების ზოგადი არაწრფივი სხვაობიან განტოლებათა სისტემისათვის

რეზიუმე

განხილულია ამოცანა

$$\Delta x_k(i-1) = f_k\big(i, s_1(x_1)(i), \cdots, s_m(x_m)(i)\big) \quad (k=1,\cdots,m),$$

$$x_k(i_k) = c_k \quad (k=1,\cdots,m),$$

სადაც $f_k : \{1,\cdots,n\} \times R^m \to R$, $i_k \in \tilde{N}_n = \{0,1,\cdots,n\}$, $c_k \in R$,

$$s_k(x)(i) = \begin{cases} x(\tau_k(i)), & \text{თუ } \tau_k(i) \in \tilde{N}_n \\ 0, & \text{თუ } \tau_k(i) \notin \tilde{N}_n, \end{cases}$$

და $\tau_k : \tilde{N}_n \to R$. დადგენილია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის საკმარისი პირობები.

Sh.Gelashvili

ON THE CAUCHY-NICOLETTI PROBLEM FOR SYSTEMS OF NONLINEAR DIFFERENCE EQUATIONS

Summary

The problem

$$\Delta x_k(i-1)=f_k\big(i,\, S_1(x_1)(i),\cdots,S_m(x_m)(i)\big)\quad (k=1,\cdots,m),$$

$$x_k(i_k)=c_k\quad (k=1,\cdots,m)$$

is considered, where $f_k:\{1,\cdots,n\}\times R^m\longrightarrow R$, $i_k\in\tilde{N}_n=\{0,1,\cdots,n\}$,

$c_k\in R$,

$$S_k(x)(i)=\begin{cases} x(\tau_k(i)) & \text{when } \tau_k(i)\in\tilde{N}_n, \\ 0 & \text{when } \tau_k(i)\notin\tilde{N}_n \end{cases}$$

and $\tau_k:\tilde{N}\longrightarrow R$. The sufficient conditions of solvability and unique solvability are established.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

225, 1981

УДК 517.539.3

თვითმფრინავის სასრული ხისტი და დრეკადი ფრთის სინგულარულ ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა დაყვანა ჩვეულებრივ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე

ა. კაკალია

§ 1. განვიხილოთ სასრული ხისტი ფრთის სინგულარული ინტეგრო-დიფერენციალური (პრანდტლის) განტოლება

$$\frac{\Gamma(t_0)}{B(t_0)} - \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{\Gamma'(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0), \qquad (1.1)$$

სადაც $\Gamma(t)$ - ცირკულაცია - საძიებელი ფუნქციაა; $\Gamma'(t)=\frac{d\Gamma}{dt}$. $B(t)$ და $f(t)$ მოცემული ფუნქციებია; $B(t) = \frac{m\cdot b(t)}{8}$, $f(t)=4v\alpha($

/1/.

ფრთის სიმეტრიის საფუძველზე

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma(t)=\Gamma(-t),\ B(t)=B(-t),\ f(t)=f(-t), \\ &\text{გარდა ამისა,} \\ &\Gamma(a)=\Gamma(-a)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

(1.1) ასე გადავწეროთ:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{+a}\frac{i\Gamma(t)}{t-t_0}dt = \frac{\Gamma(t_0)}{B(t_0)} - f(t_0). \qquad (1.3)$$

შექცევის ცნობილი ფორმულის ძალით (1.3) -დან

$$\Gamma'(t_0)=\frac{C}{\sqrt{a^2-t_0^2}}-\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\,\Gamma(t)}{B(t)(t-t_0)}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-t_0}f(t)\,dt;$$

რადგან $\Gamma(t)=\Gamma(-t)$, ამიტომ $\Gamma'(t)=-\Gamma'(-t)$, მაშასადამე $\Gamma'(0)=0$ და ამიტომაც $C=0$.

ამრიგად

$$\Gamma'(t_0)=-\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\cdot\Gamma(t)}{B(t)(t-t_0)}dt+$$

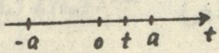
$$+\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\,f(t)}{t-t_0}dt. \quad (1.4)$$

აღვნიშნოთ /2/

$$\Gamma'(t)=\mu(t). \quad (1.5)$$

მაშინ

$$\Gamma(t)=\int_{-a}^{t}\mu(t_1)dt_1+C_1;$$



ნახ.

მაგრამ

$$\Gamma(-a)=\int_{-a}^{-a}\mu(t_1)dt_1+C_1=0 \qquad \text{და} \quad C_1=0.$$

ამიტომ

$$\Gamma(t)=\int_{-a}^{t}\mu(t_1)dt_1=\int_{-a}^{+a}\omega(t,t_1)\mu(t_1)dt_1, \quad (1.6)$$

სადაც

$$\omega(t,t_1)=\begin{cases}1, & \text{როცა } t_1\in[-a,t],\\ 0, & \text{როცა } t_1\in(t,a].\end{cases} \quad (1.6^1)$$

(1.5) და (1.6)-ის (1.4)-ში შეტანით მივიღებთ

$$\mu(t_0) = -\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{B(t)(t-t_0)}dt\int_{-a}^{+a}\omega(t,t_1)\mu(t_1)dt_1 +$$

$$+\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-t_0}f(t)\,dt,$$

ანუ

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\mu(t_1)dt_1\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\,\omega(t,t_1)}{B(t)(t-t_0)}dt =$$

$$= F(t_0), \tag{1.7}$$

სადაც $F(t_0) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-t_0}f(t)\,dt$ ცნობილი ფუნქციაა.

გავამარტივოთ (1.7) განტოლების გული

$$K_1(t_0,t_1) = \int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\,\omega(t,t_1)}{B(t)(t-t_0)}dt.$$

ცხადია

$$\int_{-a}^{+a}\omega(t,t_1)dt = \int_{-a}^{t_1}\omega(t,t_1)dt + \int_{t_1}^{a}\omega(t,t_1)dt = \int_{t_1}^{a}dt,$$

ამიტომ

$$K_1(t_0,t_1) = \int_{t_1}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{B(t)(t-t_0)}dt.$$

(1.7) ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{a}K_1(t_0,t_1)\mu(t_1)dt_1 = F(t_0), \tag{1.8.}$$

სადაც

$$K_b(t_0,t_1)=\int_{t_1}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{B(t)(t-t_0)}\,dt, \qquad (1.9)$$

$$F(t_0)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\cdot f(t)}{t-t_0}\,dt. \qquad (1.10)$$

§ 2. ახლა განვიხილოთ თვითმფრინავის სასრული დრეკადი ფრთის სინგულარული ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{\Gamma(t_0)}{B(t_0)}-\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{\Gamma'(t)}{t-t_0}\,dt+ \qquad (2.1)$$

$$+4\rho v^2\int_0^{t_0}\left[\chi(t)\int_a^t\psi(t_1)\Gamma(t_1)\,dt_1\right]dt=F_0(t_0),$$

სადაც

$$\frac{1}{GJ_p(t)}=\chi(t),\quad \phi(t)=C_{m_0}(t)\,b^2(t),\quad \frac{m(t)\,b(t)}{a_0(t)}=\psi(t),$$

$$F_0(t_0)=4v\left(\alpha+\alpha_1(t_1)\right)-4\rho v^3\int_0^{t_0}\left[\chi(t)\int_a^t\phi(t_1)\,dt_1\right]dt, \qquad (2.2)$$

$$B(t_0)=\frac{a_0(t_0)\,b(t_0)}{4}$$

ცნობილი ფუნქციებია.

მექანიკური მოსაზრებებიდან გამომდინარეობს, რომ $\alpha(t)$, $\alpha_1(t)$, $\Gamma(t)$, $a_0(t)$, $m(t)$, $b(t)$, $J_p(t)$, $C_{m_0}(t)$ ფუნქციები წარმოადგენენ ლუწ ფუნქციებს; გარდა ამისა $\Gamma(a)=\Gamma(-a)=0$, $B(a)=B(-a)=0$,

$B(t)\neq 0,\ t\in(-a,a)$ /3/, /4/.

აღვნიშნოთ (მუდმივი)

$$4\rho v^2=A. \qquad (2.3)$$

(2.1) ასე გადავწეროთ:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{\Gamma'(t)}{t-t_0}\,dt=$$

$$=\frac{\Gamma(t_0)}{B(t_0)}+A\int_0^{t_0}\left[\chi(t)\int_a^t\psi(t_1)\Gamma(t_1)\,dt_1\right]dt-F_0(t_0). \tag{2.4}$$

შებრუნების ფორმულის თანახმად ვწერთ:

$$\Gamma'(t_0)=-\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\,\Gamma(t)}{B(t)(t-t_0)}\,dt-$$

$$-\frac{A}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-t_0}\left\{\int_0^t\left[\chi(\tau)\int_a^\tau\psi(t_1)\Gamma(t_1)\,dt_1\right]d\tau\right\}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\,F_0(t)}{t-t_0}\,dt+\frac{C}{\sqrt{a^2-t_0^2}}. \tag{2.5}$$

თუ განვსაზღვრავთ (2.5)-ში შემავალ C მუდმივს, მივიღებთ:

$$C=-\frac{A}{\pi}\left(\int_0^a\psi(t_1)\Gamma(t_1)\,dt_1+\nu\cdot\int_0^a\phi(t_1)\,dt_1\right)\times$$

$$\times\int_{-a}^{+a}\left[\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t}\int_0^t\chi(t_1)\,dt_1\right]dt. \tag{2.6}$$

მაშინ (2.5) ასე გადაიწერება:

$$\Gamma'(t_0)=-\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\,\Gamma(t)}{B(t)(t-t_0)}\,dt-\frac{A}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-t_0}\times$$

$$\times\left\{\int_0^t\left[\chi(\tau)\int_a^\tau\psi(t_1)\Gamma(t_1)\,dt_1\right]d\tau\right\}dt+\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-t_0}F_0(t)\,dt-$$

$$-\frac{A}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\left(\int_0^a\psi(t_1)\Gamma(t_1)\,dt_1+\nu\cdot\int_0^a\phi(t_1)\,dt_1\right)\cdot\int_{-a}^{+a}\left[\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t}\int_0^t\chi(t_1)\,dt_1\right]dt.$$

თუ გავითვალისწინებთ $\omega(t,t_1)$ ფუნქციის განსაზღვრასა და (1.6) და (2.6) ფორმულებს, ეს უკანასკნელი შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\mu(t_0)+\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}K_\rho(t_0,\varsigma)\,\mu(\varsigma)\,d\varsigma=E_1(t_0), \tag{2.7}$$

სადაც $K_{\rho}(t_0, \xi)=$

$$= K_b(t_0,\xi) + \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-t_0}\,\phi_1(t,\xi)\,dt + \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t}\,\phi_2(t,\xi)\,dt, \tag{2,8}$$

$$E_1(t_0) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-t_0} f_0(t)\,dt -$$

$$- \frac{A v}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}} \int_0^a \Phi(t_1)\,dt_1 \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t}\,dt \int_0^t \chi(\tau)\,d\tau, \tag{2,9}$$

$$\phi_1(t,\xi) = A\cdot\int_0^t \chi(\tau)\,d\tau \int_a^{\tau} \psi(t_1)\,\omega(t_1,\xi)\,dt_1, \tag{2,10}$$

$$\phi_2(t,\xi) = A\cdot\int_0^t \chi(\tau)\,d\tau \int_0^a \psi(t_1)\,\omega(t_1,\xi)\,dt_1, \tag{2,11}$$

$$K_b(t_0,\xi) = \int_{\xi}^{a} \frac{\sqrt{a^2-t^2}}{B(t)(t-t_0)}\,dt. \tag{2,12}$$

(2.9), (2.10), (2.11); (2.12) ფორმულებში შემავალი ფუნქციები და მუდმივი განისაზღვრება (1,6'), (2.2) და (2.3) ტოლობებით.

შენიშვნა: ცხადია, (2,5) განტოლება ასეც შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\mu(t_0)+\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\bar{K}_\varphi(t_0,\zeta)\mu(\zeta)d\zeta=\bar{E}_1(t_0), \qquad (2.7')$$

სადაც

$$\bar{K}_\varphi(t_0,\zeta)=K_b(t_0,\zeta)+\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-t_0}\Phi_1(t,\zeta)\,dt, \qquad (2.8')$$

$$\bar{E}_1(t_0)=$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-t_0}F_0(t)dt+\frac{C}{\sqrt{a^2-t_0^2}}, \qquad (2.9')$$

ხოლო $\Phi_1(t,\zeta)$ და $K_b(t_0,\zeta)$ კვლავ (2.10) და (2.12) ფორმულებით განისაზღვრება.

აქ C ჯერჯერობით განუსაზღვრელი მუდმივია, რომლის განსაზღვრებაც ადვილად მოხერხდება განტოლების რიცხვითი ამოხსნისას, რადგან (2.7') წრფივი ინტეგრალური განტოლებაა.

$K_b(t_0,t_1)$ და $K_\varphi(t_0,\zeta)$ გულების დასახასიათებლად საკმარისია განვიხილოთ ინტეგრალები:

$$\int_{t_1}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{B(t)(t-t_0)}dt,\quad \int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-t_0}\Phi_1(t,\zeta)dt \quad \text{და}$$

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\,\Phi_2(t,\zeta)}{t}dt.$$

თუ მოვითხოვთ, რომ ფუნქცია $p(t)=\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{B(t)}$, $-a\leq t\leq a$, სეგმენტში აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას; მაშინ $\Phi_1(t,\zeta)$ და $\Phi_2(t,\zeta)$ ფუნქციებიც დააკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას ამავე სეგმენტში და ზემოთ განხილულ ინტეგრალებს ექნებათ ლოგარითმული ხასიათის განსაკუთრებულობანი და, მაშასადამე, როგორც ხისტი, ისე დრეკადი სასრული ფრთის სინგულარული ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები – (1.1) და (2.1) – დაიყვანება ჩვეულებრივ სინგულარულ

(კვაზი-რეგულარულ) (1,8) და (2.7) ინტეგრალურ განტოლებებზე.

ბოგოლიუბოვ-კრილოვის იდეის გამოყენებით, მოწოდებული იყო რიცხვითი ამოხსნის სავსებით დასაბუთებული მეთოდი (1,8) განტოლებისათვის (ხისტი ფრთის შემთხვევა). ამ მეთოდით ამოხსნილი იყო ამოცანები სასრული ხისტი, მართკუთხოვანი და ელიფსური ფორმის ფრთებისათვის. იგივე ამოცანები ამოხსნილი იყო მულთოპის მეთოდით; ამ ორი მეთოდით მიღებული რიცხვითი ამოხსნები დიდი სიზუსტით დაემთხვევიან ერთმანეთს (იხ. /5/).

შემოსულია 9.1.1975 წ.

დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებების კათედრა

ლიტერატურა

1. Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М.-Л., 1946

2. И.Н.Векуа. Труды Тбилисского математического института им. А.М.Размадзе АН ГССР, т.XXIУ, 1957.

3. Я.М.Серебрийский. Труды ЦАГИ, вып.329. Москва, 1937.

4. А.Г.Кекелия. Сообщения АН ГССР, т.XXУШ, № 1, 1962.

5. А.Г.Кекелия, Н.Н.Джгаркава. Исследования некоторых управлений математической физики. Институт прикладной математики ТГУ, Тбилиси, 1974.

А.Г.Кекелия

ПРИВЕДЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЖЕСТКОГО И УПРУГОГО КРЫЛЬЕВ САМОЛЕТА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА К ОБЫКНОВЕННЫМ СИНГУЛЯРНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Резюме

Следуя работе Н.П.Векуа /2/, сингулярные интегро-дифференциальные уравнения жесткого и упругого крыла самолета конечного размаха приведены к обыкновенным сингулярным (квазирегулярным) интегральным уравнениям.

A.Kekelia

REDUCTION OF THE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE AIRCRAFT RIGID AND ELASTIC WING OF FINITE SPAN TO ORDINARY SINGULAR EQUATIONS

Summary

Following N.P.Vekua's study /2/, the singular integro-differential equations of the aircraft rigid and elastic wing of finite span are reduced to ordinary singular (quasi-regular) integral equations.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

225, 1981

УДК 512.7

БИАВТОМАТЫ

Б.И.Плоткин

I. Определения. Биавтоматы отличаются от автоматов тем, что входные сигналы преобразуют не только состояния, но и внешние состояния – выходные сигналы. Биавтомат понимается как система $\mathfrak{A}=(A,X,B)$ с тремя основными множествами: A - множество состояний, X - множество входных сигналов и B - множество выходных сигналов, которое трактуется так же, как множество внешних состояний. Предполагается также, что определены три операции: $\circ: A\times X\to A$, $*: A\times X\to B$ и $\circ: B\times X\to B$. Каждый входной сигнал x преобразует состояние a в новое состояние $a'=a\circ x$, внешнее состояние b - в новое внешнее состояние $b'=b\circ x$, и, кроме того, x преобразует состояние a в сигнал на выходе $b = a * x$.

Биавтоматы имеют естественный физический смысл, и они могут участвовать в качестве некоторых "частей" в задачах синтеза автоматов.

Мы рассматриваем только линейные биавтоматы. Предполагаем, что A и B - линейные пространства над некоторым полем K и что все переходы: $a \mapsto a \circ x$, $a \mapsto a * x$ и $b \mapsto b \circ x$ при каждом данном x являются линейными преобразованиями. Можно также рассматривать ситуацию, когда A и B - модули над коммутативным кольцом с единицей, но сейчас для простоты изложения ограничимся ситуацией линейных пространств.

Пусть A и B - два таких пространства, $End\,A$ и $End\,B$ - соответствующие системы эндоморфизмов, и $Hom(A,B)$ - все линейные отображения из A и B. Все они также являются линейными над K пространствами, а в $End\,A$ и $End\,B$ имеется еще умножение, согласованное с линейными операциями аксиомами линейной K- алгебры. Обозначим через $\nabla(A,B)$ прямую сумму пространств:

$$\nabla(A,B) = End\,A \oplus Hom(A,B) \oplus End\,B,$$

и для каждого $\gamma \in \nabla(A,B)$, $\gamma = \sigma_1 + \varphi + \sigma_2$, $\sigma_1 \in End\,A$

$\varphi \in Hom(A,B)$ и $\sigma_2 \in End\,B$, определим: $\gamma^{\alpha} = \sigma_1$, $\gamma^{\delta} = \varphi$ и $\gamma^{\beta} = \sigma_2$. Здесь α, δ и β - соответствующие проектирования.

По данным A и B строим специальный биавтомат

$$Atm(A,B) = (A, \nabla(A,B), B),$$

в котором операции определяются правилами: $a \circ \gamma = a\gamma^{\alpha}$, $a * \gamma = a\gamma^{\delta}$ и $b \circ \gamma = b\gamma^{\beta}$.

Для произвольного биавтомата $\mathfrak{A} = (A, X, B)$ также рассмотрим отображения: $\alpha : X \to End\,A$, $\delta : X \to Hom(A,B)$ и $\beta : X \to End\,B$. Определяются эти отображения правилами: $ax^{\alpha} = a \circ x$, $ax^{\delta} = a * x$ и $bx^{\beta} = b \circ x$ для каждого $x \in X$ и произвольных $a \in A$ и $b \in B$. Эти три отображения α, δ и β дают одно отображение $\nu = (\alpha, \delta, \beta) : X \to \nabla(A,B)$. Теперь понятно, что задание биавтомата $\mathfrak{A} = (A, X, B)$ равносильно заданию некоторого отображения -представления $\nu : X \to \nabla(A,B)$.

В пространстве $\nabla(A,B)$ введем еще умножение с помощью правила:

$$(\gamma_1\gamma_2)^{\alpha}=\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\alpha}\,,\quad (\gamma_1\gamma_2)^{\beta}=\gamma_1^{\beta}\gamma_2^{\beta} \quad \text{и} \quad (\gamma_1\gamma_2)^{\delta}=\gamma_1^{\delta}\gamma_2^{\beta}+\gamma_1^{\alpha}\gamma_2^{\delta}$$

Непосредственно проверяется, что это умножение ассоциативно, и что вместе с линейными операциями умножение дает K-алгебру $\nabla(A,B)$. Эта алгебра обладает единицей ε, которая проектируется в единицы в $End\,A$ и $End\,B$ и в нуль в $Hom(A,B)$.

Просто проверяются соотношения:

1. $a\circ\gamma_1\gamma_2=(a\circ\gamma_1)\circ\gamma_2$.
2. $b\circ\gamma_1\gamma_2=(b\circ\gamma_1)\circ\gamma_2$.
3. $a*\gamma_1\gamma_2=(a\circ\gamma_1)*\gamma_2+(a*\gamma_1)\circ\gamma_2$.
4. $a\circ(\gamma_1+\gamma_2)=a\circ\gamma_1+a\circ\gamma_2$.
5. $b\circ(\gamma_1+\gamma_2)=b\circ\gamma_1+b\circ\gamma_2$.
6. $a*(\gamma_1+\gamma_2)=a*\gamma_1+a*\gamma_2$.
7. $a\circ\lambda\gamma=\lambda(a\circ\gamma)$.
8. $a*\lambda\gamma=\lambda(a*\gamma)$.
9. $b\circ\lambda\gamma=\lambda(b\circ\gamma)$

Здесь a и b – произвольные элементы в A и B, соответственно, γ_1, γ_2 и γ – элементы в $\nabla(A,B)$ и $\lambda \in K$.

<u>Определение</u>. Биавтомат $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ с полугруппой входных сигналов Γ называется полугрупповым биавтоматом, если операции удовлетворяют аксиомам I, 2 и 3. Если система входных сигналов есть K – алгебра $\mathcal{A}$ и выполнены все аксиомы I–9, то $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{A}, B)$ есть кольцевой биавтомат (над K).

Таким образом, $Atm(A,B)$ есть кольцевой, и, следовательно, полугрупповой биавтомат. Каждый кольцевой биавтомат является одновременно и полугрупповым биавтоматом.

<u>Предложение I</u>. Биавтомат $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ с полугруппой входных сигналов тогда и только тогда является полугрупповым биавтоматом, когда определяющее представление $\nu : \Gamma \to \nabla(A,B)$ есть гомоморфизм полугрупп. Биавтомат $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{A}, B)$ с K-алгеброй входных сигналов есть кольцевой биавтомат, если $\nu : \mathcal{A} \to \nabla(A,B)$ – гомоморфизм K- алгебр.

Доказывается это предложение тривиальной проверкой.

Полугрупповой автомат есть частный случай полугруппового биавтомата. В определении автомата нужно требовать, чтобы все входные сигналы действовали в B нулевым образом. Если в A все входные сигналы действуют как нуль, то имеем определение коавтомата.

Отметим еще, что в отличие от автоматов, для биавтоматов всегда возможно присоединение единицы к системе входных сигналов. Если эта система есть полугруппа или алгебра, то известным приемом добавляем внешнюю единицу и требуем, чтобы эта единица действовала как единица в $\nabla(A,B)$.

2. Гомоморфизмы биавтоматов. Гомоморфизм

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) : \mathfrak{A} = (A, X, B) \to \mathfrak{A}' = (A', X', B')$$

- это три отображения: $\mu_1 : A \to A'$, $\mu_2 : X \to X'$ и $\mu_3 : B \to B'$, где μ_1 и μ_2 - линейные отображения, причем выполнены условия согласованности с операциями:

1. $(a \circ x)^{\mu_1} = a^{\mu_1} \circ x^{\mu_2}$;
2. $(a * x)^{\mu_3} = a^{\mu_1} * x^{\mu_2}$;
3. $(b \circ x)^{\mu_3} = b^{\mu_3} \circ x^{\mu_2}$.

Для полугрупповых биавтоматов нужно требовать еще, чтобы соответствующее $\mu_2 : \Gamma \to \Gamma'$ было гомоморфизмом полугрупп, и аналогично для кольцевых биавтоматов.

Теперь можно говорить о категории биатоватов над данным K, имеем также категорию полугрупповых автоматов и категорию кольцевых автоматов над K

Рассмотрим, далее, биавтомат $\mathfrak{A}=(A,X,B)$, и пусть $F=F(X)$ - свободная полугруппа над множеством X. Представление $\nu: X\to\nabla(A,B)$ однозначно продолжается до гомоморфизма полугрупп $\nu: F\to\nabla(A,B)$, и это определяет полугрупповой биавтомат (A,F,B), который обозначим через $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$. Переход $\mathfrak{A}\to\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ хорошо согласован с гомоморфизмами и, таким образом, $\mathcal{F}$ есть функтор из категории биавтоматов в категорию полугрупповых биавтоматов.

Пусть теперь $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ - полугрупповой биавтомат, и пусть еще $K\Gamma$ - полугрупповая алгебра над Γ. Гомоморфизм $\nu:\Gamma\to\nabla(A,B)$ однозначно продолжается до гомоморфизма алгебр $\nu: K\Gamma\to\nabla(A,B)$. Этим определяется кольцевой биавтомат $(A,K\Gamma,B)$ и здесь так же имеем функтор из категории полугрупповых биавтоматов в категорию кольцевых биавтоматов.

Все эти переходы полезны и широко используются.

Отдельно рассматриваются гомоморфизмы по состояниям, по входным сигналам и по внешним состояниям. Гомоморфизм по состояниям - это гомоморфизм вида

$$\mu:\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)\to\mathfrak{A}'=(A',\Gamma,B),$$

действующий тождественно на входные и выходные сигналы. Аналогично определяются два других.

Пусть дан гомоморфизм

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) : \mathfrak{A} = (A, \Gamma, B) \longrightarrow \mathfrak{A}' = (A', \Gamma', B').$$

Используя $\mu_2 : \Gamma \to \Gamma'$, построим биавтомат (A', Γ, B'). Определяется этот биавтомат сквозным гомоморфизмом

$$\Gamma \xrightarrow{\mu_2} \Gamma' \xrightarrow{\nu'} \nabla(A', B'),$$

и теперь имеем гомоморфизм по входным сигналам

$$\bar{\mu}_2 : (A', \Gamma, B') \longrightarrow (A', \Gamma', B').$$

Имеем также автомат (A, Γ, B'). Здесь Γ действует в A как в автомате $\mathfrak{A}$ и в B' – как в построенном (A', Γ, B'). Действие из A в B' определяется через $(a * \gamma)^{\mu_3}$, где в скобках обозначено соответствующее действие в $\mathfrak{A}$. При этом, μ_1 индуцирует гомоморфизм по состояниям

$$\bar{\mu}_1 : (A, \Gamma, B') \rightarrow (A', \Gamma, B'),$$

и μ_3 дает гомоморфизм по выходам

$$\bar{\mu}_3 : (A, \Gamma, B) \longrightarrow (A, \Gamma, B').$$

Так приходим к каноническому разложению:

$$\mu = \bar{\Gamma}_3 \bar{\Gamma}_1 \bar{\Gamma}_2 .$$

Здесь мы работали с полугрупповыми биавтоматами, и так же можно действовать в двух других категориях.

Дальше, как правило, речь будет идти о полугрупповых биавтоматах и это не всегда будет оговариваться.

Пусть $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ – такой биавтомат. Его конгруенция – это тройка $\rho = (A_0, \tau, B_0)$, где A_0 и B_0 – подпространства в A и B, соответственно, инвариантные относительно действия Γ в A и B и удовлетворяющие условию: $a * \gamma \in B_0$ для любых $a \in A_0$ и $\gamma \in \Gamma$. Кроме того, τ – конгруенция в Γ и $\gamma_1 \tau \gamma_2$ влечет

$a \circ \gamma_1 - a \circ \gamma_2 \in A_0$, $a * \gamma_1 - a * \gamma_2 \in B_0$ и

$b \circ \gamma_1 - b \circ \gamma_2 \in B_0$ при любых $a \in A$ и $b \in B$. По конгруенции ρ строится фактор-автомат $\mathfrak{A}/\rho = (A/A_0, \Gamma/\tau, B/B_0)$

Мы говорим здесь о фактор-автомате, а не фактор-биавтомате, что неудобно. Точно так же будем говорить и о подавтомате биавтомата, а не подбиавтомате.

Ядро гомоморфизма биавтоматов определяется покомпонентно и является конгруенцией в указанном смысле. На этой основе приходим к теореме о гомоморфизмах.

3. Универсальные биавтоматы. Для каждого биавтомата $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ имеется единственный гомоморфизм по входным сигналам

$$\mu:\mathfrak{A}\to Atm(A,B)$$

с данной правой частью. Это гомоморфизм, индуцируемый определяющим представлением $\nu:\Gamma\to\nabla(A,B)$. В этом смысле биавтомат $Atm(A,B)$ есть универсальный притягивающий объект в категории биавтоматов с данными A и B и с гомоморфизмами по входным сигналам.

Ядро гомоморфизма $\mu:\mathfrak{A}\to Atm(A,B)$ в Γ называется ядром данного $\mathfrak{A}$. Если это ядро тривиально, то автомат называется точным. Если автомат $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ не является точным, и τ - его ядро, то, переходя к фактор-автомату $(A,\Gamma/\tau,B)$ получаем точный биавтомат. Физически переход к точному биавтомату означает сжатие информации на входе без потерь на выходе.

Легко понять, что биавтомат $Atm(A,B)$ является в том же смысле универсальным в соответствующей категории кольцевых автоматов.

Второй универсальный биавтомат $Atm(\Gamma,B)$ определяется для заданного представления (B,Γ) и является универсальным по состояниям. Для построения этого биавтомата исходим из тройки $(Hom(K\Gamma,B),\Gamma,B)$. Здесь $K\Gamma$ рассматривается только как линейное K- пространство. Действие Γ в B уже задано, а действие в $Hom(K\Gamma,B)$ определяем по следующему правилу:

$$(\varphi\circ\gamma)(u)=\varphi(\gamma u)-\varphi(\gamma)\circ u$$

для каждых $\varphi\in Hom(K\Gamma,B)$, $\gamma\in\Gamma$ и $u\in K\Gamma$. Проверяется, что переход $\varphi\mapsto\varphi\circ\gamma$ есть линейное отображение, и что $\varphi\circ\gamma_1\gamma_2=(\varphi\circ\gamma_1)\circ\gamma_2$. Дальше полагаем: $\varphi*\gamma=\varphi(\gamma)$. Здесь $\varphi\mapsto\varphi*\gamma$ также линейное отображение, и выполняется: $\varphi*\gamma_1\gamma_2=(\varphi\circ\gamma_1)*\gamma_2+(\varphi*\gamma_1)\circ\gamma_2$. Таким образом, имеем биавтомат $Atm(\Gamma,B)=(Hom(K\Gamma,B),\Gamma,B)$.

<u>Предложение 2</u>. Биавтомат $Atm(\Gamma,B)$ является универсальным притягивающим объектом в категории биавтоматов с заданным представлением (B,Γ) и с гомоморфизмами по состояниям.

<u>Доказательство</u>. Пусть дан биавтомат $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ с данным (B,Γ). Рассмотрим отображение $\nu: A\to Hom(K\Gamma,B)$

определяемое правилом:

$$a^{\nu}(u) = a * u$$

для любых $a \in A$ и $u \in K\Gamma$. Проверяется, что это отображение дает гомоморфизм по состояниям: $\nu : \mathfrak{A} \to Atm(B, \Gamma)$.

С другой стороны, если $\nu_1 : \mathfrak{A} \to Atm(B, \Gamma)$ – гомоморфизм по состояниям, то $a * u = a^{\nu_1} * u = a^{\nu_1}(u)$ и $\nu_1 = \nu$.

Ядро A_0 гомоморфизма ν в A называется ядром приведения биавтомата $\mathfrak{A}$. Если это ядро тривиально, то $\mathfrak{A}$ называется приведенным. Если $\mathfrak{A}$ не является приведенным, то, переходя к $(A/A_0, \Gamma, B)$, получаем приведенный биавтомат. Такое приведение есть сжатие информации по состояниям без потерь на выходе.

Допустим, далее, что задано представление $(B, \mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ – K-алгебра. Рассматривая $\mathcal{A}$ как K-пространство, возьмем $Hom(\mathcal{A}, B)$ и на тройке $(Hom(\mathcal{A}, B), \mathcal{A}, B)$ построим кольцевой биавтомат. Действие $\mathcal{A}$ в B уже задано, а действие в $Hom(\mathcal{A}, B)$ определяем правилом:

$$(\varphi \circ u)(v) = \varphi(uv) - \varphi(u) \circ v\,; \quad \varphi \in Hom(\mathcal{A}, B)\,;$$
$$u, v \in \mathcal{A}.$$

Кроме того, полагаем: $\varphi * u = \varphi(u)$. Проверяется, что для $(Hom(A,B), A, B)$ выполняются все аксиомы кольцевого биавтомата, и этот биавтомат обозначим через $Atm(A,B)$. Доказывается также соответствующее универсальное свойство для $Atm(A,B)$. Понятно также, что биавтомат $Atm(\Gamma,B)$ есть $Atm(K\Gamma,B)$, в котором система входных сигналов ограничена полугруппой Γ .

Перейдем к третьему универсальному $Atm(A,\Gamma)$. Здесь дано представление (A,Γ) и универсальное свойство относится к гомоморфизмам по выходам. Будем исходить из тройки $(A, \Gamma, A \otimes K\Gamma)$, где справа стоит тензорное произведение K-пространств A и $K\Gamma$. Для любых $a \in A$, $u \in K\Gamma$ и $\gamma \in \Gamma$ полагаем:

$$(a \otimes u) \circ \gamma = a \otimes u\gamma - (a \circ u) \otimes \gamma.$$

Непосредственно проверяется, что этим действительно задается представление $(A \otimes K\Gamma, \Gamma)$. Дальше полагаем $a * \gamma = a \otimes \gamma$. Линейность отображения $a \mapsto a * \gamma$ очевидна, и соотношени

$a * \gamma_1 \gamma_2 = (a \circ \gamma_1) * \gamma_2 + (a * \gamma_1) \circ \gamma_2$ также выполняется. Так приходим к биавтомату $Atm(A,\Gamma) = (A, \Gamma, A \otimes K\Gamma)$. Очевидна двойственность в определении $Atm(\Gamma, B)$ и $Atm(A, \Gamma)$. Эта двойственность подтверждается и следующим предложением.

<u>Предложение 3.</u> Биавтомат $Atm(A, \Gamma)$ есть универсальный отталкивающий объект в категории биавтоматов с данным представлением (A, Γ) и с гомоморфизмами по выходным сигналам.

<u>Доказательство</u>. Пусть имеется биавтомат $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ с тем же (A, Γ). Этот биавтомат определяет билинейное отображение

$$A \times K\Gamma \longrightarrow B, \quad (a, u) \longmapsto a * u.$$

Этому билинейному отображению отвечает линейное отображение $\nu : A \otimes K\Gamma \to B$. Проверим, что ν дает гомоморфизм по внешним состояниям $\nu : Atm(A, \Gamma) \to \mathfrak{A}$. Операцию $*$ в $Atm(A, \Gamma)$ будем обозначать через $\circledast$.

Имеем:

$$(a\otimes\gamma)^{\nu}=(a,\gamma)^{\nu}=a*\gamma;$$

$$((a\otimes u)\circ\gamma)^{\nu}=(a\otimes u\gamma)-((a\circ u)\otimes\gamma)^{\nu}=a*u\gamma-(a\circ u)*\gamma=$$

$$=(a*u)\circ\gamma=(a\otimes u)^{\nu}\circ\gamma.$$

и элементы вида $a\otimes u$ линейно порождают $A\otimes K\Gamma$. Единственность этого гомоморфизма следует из определений.

Автомат $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ называется приведенным справа, если гомоморфизм ν есть эпиморфизм. Если приведенности нет, то её можно достичь устранением лишних выходных сигналов. Одновременное приведение по всем трем множествам проводится в следующей последовательности. Вначале приводим биавтомат слева, затем переходим к точному, и, наконец, приводим справа. Такая последовательность приведения связана с каноническим разложением произвольного гомоморфизма.

Третий универсальный биавтомат можно строить и в категории кольцевых биавтоматов. Если дано представление $(A,\mathcal{A})$, то биавтомат $Atm\,(A,\mathcal{A})$ определяем на тройке множеств $(A,\mathcal{A},A\otimes\mathcal{A})$, где в тензорном произведении $\mathcal{A}$ рассматривается только как линейное пространство. Операции определяются правилами:

$$a*u=a\otimes u$$

и

$$(a\otimes u)\circ v=a\otimes uv-(a\circ u)\otimes v,\quad a\in A,\ u,v\in\mathcal{A}.$$

Все необходимое здесь проверяется. При этом, биавтомат

$Atm(A,\Gamma)$ можно трактовать как $Atm(A, K\Gamma)$, если входные сигналы ограничить полугруппой Γ.

Как отмечалось, произвольный биавтомат с полугруппой Γ и данными A и B задается гомоморфизмом $\Gamma \to \nabla(A,B)$. Точно так же, если даны представления (A,Γ) и (B,Γ), то для того, чтобы собрать из них биавтомат, можно воспользоваться вторым или третьим универсальными. Можно, например, взять $Atm(A,\Gamma)$, и тогда биавтомат $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ задается произвольным гомоморфизмом представлений $(A \otimes K\Gamma, \Gamma) \to (B,\Gamma)$. Можно исходить из $Atm(\Gamma,B)$ и произвольного гомоморфизма представлений $(A,\Gamma) \to (Hom(K\Gamma,B),\Gamma)$. Эти гомоморфизмы представлений предполагаются тождественными на полугруппе Γ.

4. Свободные биавтоматы. Для каждой полугруппы Γ через Γ^1 обозначаем результат внешнего присоединения к Γ единицы, которую будем обозначать через 1. Регулярное представление $(K\Gamma^1, \Gamma)$ свободно порождается единицей: если (A,Γ) - другое представление полугруппы Γ, то каждое сопоставление $1 \to a \in A$ дает линейное отображение $\nu : K\Gamma^1 \to A$, перестановочное с действием Γ. Определяется это отображение

правилом $u^{\nu} = a \circ u$. Аналогично определяется свободное представление полугруппы Γ над произвольным множеством свободных образующих Z : Γ регулярно действует на свободном $K\Gamma^1$ - модуле над Z. При этом, каждый $z \in Z$ отождествляется с $z \circ 1$.

Возьмем теперь $Atm(K\Gamma^1, \Gamma) = (K\Gamma^1, \Gamma, K\Gamma^1 \otimes K\Gamma)$. Если $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ - произвольный биавтомат с полугруппой Γ, то, сопоставляя $1 \to a \in A$, имеем отображение $\nu_1 : K\Gamma^1 \to A$, перестановочное с действием Γ. Отображение ν_1 определяет также биавтомат $(K\Gamma^1, \Gamma, B)$, где Γ действует в $K\Gamma^1$ регулярно, в B как в $\mathfrak{A}$ и $u * \gamma = u^{\nu_1} * \gamma$. Одновременно имеем гомоморфизм по состояниям: $\nu_1 : (K\Gamma^1, \Gamma, B) \to \mathfrak{A}$.

По определению $Atm(K\Gamma^1, \Gamma)$ имеем гомоморфизм по внешним состояниям $\nu_2 : Atm(K\Gamma^1, \Gamma) \to (K\Gamma^1, \Gamma, B)$. Теперь приходим к сквозному гомоморфизму

$$Atm(K\Gamma^1, \Gamma) \xrightarrow{\nu_2} (K\Gamma^1, \Gamma, B) \xrightarrow{\nu_1} (A, \Gamma, B),$$

определяемому сопоставлением $1 \longrightarrow a$ однозначно. Это означает, что биавтомат $(K\Gamma^1, \Gamma, K\Gamma^1 \otimes K\Gamma)$ свободно порождается состоянием 1.

Отметим еще, что по построению при этом гомоморфизме элемент $u \otimes v$ из $K\Gamma^1 \otimes K\Gamma$ переходит в $u^{\nu_1} * v = (a \circ u) * v$.

Биавтомат $(K\Gamma^1, \Gamma, K\Gamma^1 \otimes K\Gamma)$ будем называть регулярным биавтоматом полугруппы Γ над данным полем K.

Пусть теперь $(ZK\Gamma^1, \Gamma)$ – свободное представление полугруппы Γ с произвольным множеством свободных образующих Z, и возьмем для этого представления универсальный биавтомат $(ZK\Gamma^1, \Gamma, ZK\Gamma^1 \otimes K\Gamma)$. Те же соображения, что и приводившиеся только что, показывают, что этот биавтомат свободно порождается множеством состояний Z. Отметим также, что этот биавтомат можно трактовать как прямую сумму Z-копий регулярного биавтомата $(K\Gamma^1, \Gamma, K\Gamma^1 \otimes K\Gamma)$ по разным $z \in Z$ и при фиксированной системе входных сигналов Γ.

Пусть, далее, дана пара множеств Z и Y. Возьмем $Atm(ZK\Gamma^1, \Gamma)$ и к внешним состояниям этого биавтомата добавим в качестве прямого слагаемого свободный $K\Gamma^1$- модуль над Y . Мы получим новый биавтомат, который обозначим через $Atm(Z,\Gamma,Y)$. Это свободный биавтомат с данной Γ над парой множеств Z и Y . Для любого другого биавтомата $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ с полугруппой Γ , любые отображения $Z\to A$ и $Y\to B$ однозначно продолжаются до гомоморфизма по внешним и внутренним состояниям $Atm(Z,\Gamma,Y)\to\mathfrak{A}$.

Наконец, определим свободный автомат с переменной Γ . Даны три множества Z , X и Y , и пусть $F=F(X)$ - свободная полугруппа над множеством X . Положим $Atm(Z,X,Y)=Atm(Z,F,Y)$.

<u>Предложение 4</u>. Для произвольного биавтомата $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ любые три отображения $Z\to A$, $X\to\Gamma$ и $Y\to B$ однозначно определяют гомоморфизм $Atm(Z,X,Y)\to\mathfrak{A}$.

Доказывается это предложение стандартными соображениями с учетом приводившихся только что замечаний.

Это означает, что $Atm(Z,X,Y)$ есть свободный биавтомат в категории всех биавтоматов над данным полем K

В терминах свободных биавтоматов исследуются определяющие и тождественные соотношения произвольных биавтоматов.

5. Биавтоматы и представления. Каждый биавтомат $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ содержит представления (A,Γ) и (B,Γ). Кроме того строится следующее треугольное представление: $(A\oplus B,\Gamma)$, где Γ действует в прямой сумме $A\oplus B$ по формуле

$$(a+b)\circ\gamma = a\circ\gamma + a*\gamma + b\circ\gamma.$$

Легко проверить, что этим действительно задается представление, и треугольность его означает, что подпространство B инвариантно относительно действия Γ. Если, в частности, исходить из универсального биавтомата $Atm(A,B)=(A,\nabla(A,B),B)$, то полугруппа $\nabla(A,B)$ приобретает следующую мартичную картинку

$$\left(\begin{array}{c|c} End\,A & Hom(A,B) \\ \hline 0 & End\,B \end{array}\right)$$

Очевидно также, что гомоморфизмам биавтоматов отвечают гомоморфизмы соответствующих треугольных представлений.

Пусть теперь дано треугольное представление $(A\oplus B,\Gamma)$, в котором подпространство B инвариантно относительно действия Γ. Построим по нему биавтомат $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$.

Пусть π_1 и π_2 – проектирования суммы $A \oplus B$ на первое и второе слагаемые, соответственно. Положим $a \circ \gamma = (a \circ \gamma)^{\pi_1}$, $a * \gamma = (a \circ \gamma)^{\pi_2}$ и $b \circ \gamma = b \circ \gamma$ для каждых $a \in A$, $b \in B$ и $\gamma \in \Gamma$. Непосредственно проверяется, что этим задается биавтомат.

Таким образом, биавтоматы находятся в известном взаимно-однозначном соответствии с треугольными представлениями, и это соответствие может быть использовано как той, так и другой стороной.

Перейдем теперь к биавтоматам Мура, определяемым по аналогии с автоматами Мура.

6. Биавтоматы Мура. Пусть даны два представления (A, Γ) и (B, Γ) и пусть $\psi : A \to B$ – некоторое линейное отображение. Для любых $a \in A$ и $\gamma \in \Gamma$ положим:

$$a * \gamma = (a \circ \gamma)^{\psi} - a^{\psi} \circ \gamma .$$

Непосредственно проверяется, что так всегда возникает биавтомат, и каждый такой биавтомат называется биавтоматом Мура. Понятно, что если ψ перестановочно с действием Γ, то соответствующая операция $*$ оказывается нулевой.

Пусть $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ – произвольный биавтомат и

$\psi: A \to B$ - линейное отображение. Через $\mathcal{M}_\psi$ обозначим множество всех $\gamma \in \Gamma$, для которых выполняется: $a * \gamma = (a \circ \gamma)^\psi - a^\psi \circ \gamma$, $a \in A$. Непосредственно проверяем, что $\mathcal{M}_\psi$ - подполугруппа, и этим выделяется муровская часть $(A, \mathcal{M}_\psi, B)$ с данным ψ. Применим это к $Atm(A,B)$. Для заданного ψ элемент $\gamma = (\sigma_1, \varphi, \sigma_2)$ принадлежит $\mathcal{M}_\psi$, если $a\varphi = a\sigma_1\psi - a\psi\sigma_2$; $\varphi = \sigma_1\psi - \psi\sigma_2$.

Таким образом, никакое $\psi: A \to B$ не делает $Atm(A,B)$ биавтоматом Мура.

Предложение 5. Каждый биавтомат $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ есть гомоморфный образ по состояниям некоторого биавтомата Мура.

Доказательство. Возьмем соответствующее треугольное представление $(A \oplus B, \Gamma)$ вместе с (B, Γ) и с помощью проектирования $\psi: A \oplus B \to B$ составим биавтомат Мура $(A \oplus B, \Gamma, B)$. Дальше возьмем проектирование $\nu: A \oplus B \to A$. Имеем:

$$((a+b)\circ\gamma)^\nu = (a\circ\gamma + a*\gamma + b\circ\gamma)^\nu = a\circ\gamma = (a+b)^\nu\circ\gamma;$$

$$((a+b)*\gamma) = ((a+b)\circ\gamma)^\psi - (a+b)\psi\circ\gamma = a*\gamma + b\circ\gamma - b\circ\gamma =$$

$$= a*\gamma = (a+b)^\nu * \gamma.$$

Следствие. Гомоморфизмы по соотояниям не сохраняют муровское свойство биавтоматов.

Легко, однако, проверить, что гомоморфизмы по выходным сигналам сохраняют это свойство.

Действительно, если $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ - биавтомат Мура с отображением $\psi: A\to B$ и $\nu: B\to B'$ определяет гомоморфизм по выходным сигналам $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)\to\mathfrak{A}'=(A,\Gamma,B')$, то отображение $\psi\nu: A\to B'$ делает второй биавтомат муровским:

$$a*\gamma=(a*\gamma)^{\nu}=((a\circ\gamma)^{\psi}-a^{\psi}\circ\gamma)^{\nu}=(a\circ\gamma)^{\psi\nu}-a^{\psi\nu}\circ\gamma.$$

Здесь $*$ в начале строки - это операция в $\mathfrak{A}'$.

Предложение 6. Если $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ - биавтомат со свободным над множеством Z представлением (A,Γ), то $\mathfrak{A}$ есть биавтомат Мура.

Доказательство. Возьмем произвольное отображение $\psi: Z\to B$. Далее, для каждого $z\circ u$, $u\in K\Gamma^1$, положим:

$$(z\circ u)^{\psi}=z*u+z^{\psi}\circ u.$$

Здесь, если $u=1$, то $z*u=0$ и данное ψ продолжает исходное отображение ψ. Имеем линейное отображение каждого $zK\Gamma^1$ в B, которое продолжается до линейного отображения $\psi: A \longrightarrow B$. Определение условия Мура можно переписать в виде:

$$(a\circ\gamma)^{\psi} = a*\gamma + a^{\psi}\circ\gamma.$$

Возьмем теперь $a = z\circ u$, и тогда:

$$(a\circ\gamma)^{\psi} = (z\circ u\gamma)^{\psi} = z*u\gamma + z^{\psi}\circ u\gamma = (z\circ u)*\gamma + (z*u)\circ\gamma + z^{\psi}\circ u\gamma =$$

$$= a*\gamma + \left((z\circ u)^{\psi} - z^{\psi}\circ u\right)\circ\gamma + z^{\psi}\circ u\gamma =$$

$$= a*\gamma + a^{\psi}\circ\gamma,$$

что и требовалось.

Обобщим сейчас это предложение в виде следующего признака биавтомата Мура.

Предложение 7. Пусть задан биавтомат $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$. Для того чтобы этот биавтомат был муровским необходимо и достаточно, чтобы в A можно было выбрать систему $K\Gamma^1$ – образующих Z и отображение $\psi: Z \longrightarrow B$, для которых выполняется:

$$\sum z_i\circ u_i = 0 \Longrightarrow \sum \left(z_i * u_i + z_i^{\psi}\circ u_i\right) = 0$$

при всевозможных $z_i \in Z$ и $u_i \in K\Gamma^1$.

Доказательство. Необходимость получим, если возьмем $Z = A$ и соответствующее ψ, определяющее биавтомат Мура. При этом нужно иметь в виду, что биавтомату с полугруппой Γ отвечает не только $K\Gamma$ -, но и $K\Gamma^1$- биавтомат. Если

(A, Γ, B) - биавтомат Мура с отображением $\psi: A \to B$, то $(A, K\Gamma^1, B)$ - биавтомат Мура: для любых $a \in A$ и $u \in K\Gamma^1$ выполняется $a * u = (a \circ u)^\psi - a^\psi \circ u$.

Проверим достаточность. Пусть даны Z и $\psi: Z \to B$. Каждый $a \in A$ можно записать в виде $a = \sum z_i \circ u_i$, $u_i \in K\Gamma^1$.

Положим $a^\psi = \sum (z_i * u_i + z_i^\psi \circ u_i)$. Из условий следует, что отображение ψ определено корректно, и что оно линейно. Далее вычисляем:

$$(a \circ \gamma)^\psi = \sum (z_i \circ u_i \gamma)^\psi = \sum (z_i * u_i \gamma + z_i^\psi \circ u_i \gamma) =$$

$$= \sum (z_i \circ u_i) * \gamma + \sum (z_i * u_i) \circ \gamma + \sum z_i^\psi \circ u_i \gamma =$$

$$= a * \gamma + \Big(\sum (z_i * u_i + z_i^\psi \circ u_i)\Big) \circ \gamma = a * \gamma + a^\psi \circ \gamma.$$

Отметим теперь следующую задачу.

Можно ли выделить в терминах полугрупп или полугрупповых алгебр класс полугрупп Γ, для которых все биавтоматы (A,Γ,B) над данным полем K являются биавтоматами Мура?

Подобная задача для автоматов решается в /1/. Для автоматов соответствующий критерий муровского свойства имеет вид

$$\sum z_i \circ u_i = 0 \Longrightarrow \sum z_i * u_i = 0,$$

где z_i - произвольные состояния и $u_i \in K\Gamma$. Это условные тождества, и, следовательно, автоматы Мура над данным K составляют квазимногообразие. В частности, подавтомат автомата Мура также является автоматом Мура.

Для биавтоматов приведанный критерий уже не связан с условными тождествами. Это не случайно, как показывает следующее предложение, двойственное предложению 5.

<u>Предложение 8</u>. Каждый биавтомат (A,Γ,B) может быть вложен в качестве подавтомата по выходным сигналам в некоторый биавтомат Мура.

<u>Доказательство</u>. Прежде всего заметим, что для каждого биавтомата (A,Γ,B) имеется представление $(A\oplus B,\Gamma)$, определяемое также формулой: $(a+b)\circ\gamma = a\circ\gamma - a*\gamma + b\circ\gamma$.

Возьмем теперь копию A' пространства A с изоморфизмом $\psi: A \to A'$ и рассмотрим еще биавтомат (A', Γ, B) копирующий исходный (A, Γ, B). Здесь $a^{\psi} \circ \gamma = (a \circ \gamma)^{\psi}$ и $a^{\psi} * \gamma = a * \gamma$, $a \in A$. По биавтомату (A', Γ, B) построим представление $(A' \oplus B, \Gamma)$ в соответствии с указанным только что правилом. Два представления (A, Γ) и $(A' \oplus B, \Gamma)$ соберем в биавтомат $(A, \Gamma, A' \oplus B)$, определяя операцию $*$ как в заданном (A, Γ, B). При этом, (A, Γ, B) есть подавтомат в $(A, \Gamma, A' \oplus B)$. Покажем теперь, что последний удовлетворяет условию Мура с отображением $\psi: A \to A' \subset A' \oplus B$. Действительно

$$a^{\psi} \circ \gamma = a^{\psi} \circ \gamma - a^{\psi} * \gamma = (a \circ \gamma)^{\psi} - a * \gamma;$$

$$a * \gamma = (a \circ \gamma)^{\psi} - a^{\psi} \circ \gamma, \quad a \in A, \quad \gamma \in \Gamma.$$

<u>Следствие</u>. Подавтомат по выходным сигналам для биавтомата Мура может не быть биавтоматом Мура.

С другой стороны, очевидно, что подавтомат по состояниям сохраняет муровское свойство.

<u>7. Конструкции.</u> Определяемые здесь конструкции используются в задачах декомпозиции биавтоматов и в теории многообразий

биавтоматов. Прежде всего - это треугольные произведения, которые сейчас определим. Пусть даны два биавтомата $\mathfrak{A}_1=(A_1,\Sigma_1,B_1)$ и $\mathfrak{A}_2=(A_2,\Sigma_2,B_2)$. Обозначим $\Phi_1=Hom(A_2,A_1)$, $\Psi=Hom(A_2,B_1)$ и $\Phi_2=Hom(B_2,B_1)$. Φ_1, Ψ и Φ_2 рассматриваются здесь как абелевы группы по сложению - модули над $Z\Sigma_2$. Σ_2 действует в Φ_1, Ψ и Φ_2 слева по правилам:

$$a(\sigma\circ\varphi_1)=(a\circ\sigma)\varphi_1, \quad a(\sigma\circ\psi)=(a\circ\sigma)\psi \quad \text{и} \quad b(\sigma\circ\varphi_2)=(b\circ\sigma)\varphi_2$$

при любых $a\in A_2$, $b\in B_2$, $\sigma\in\Sigma_2$, $\varphi_1\in\Phi_1$, $\varphi_2\in\Phi_2$ и $\psi\in\Psi$. Σ_1 действует в Φ_1, Ψ и Φ_2 справа:

$$a(\varphi_1\circ\sigma)=(a\varphi_1)\circ\sigma, \quad a(\psi\circ\sigma)=(a\psi)\circ\sigma,$$

$$b(\varphi_2\circ\sigma)=(b\varphi_2)\circ\sigma, \quad \sigma\in\Sigma_1.$$

Кроме того, для любых $\varphi_1\in\Phi_1$ и $\sigma_1\in\Sigma_1$ определен элемент $\varphi_1*\sigma_1\in\Psi$. Определяется этот элемент правилом: $a(\varphi_1*\sigma_1)=(a\varphi_1)*\sigma_1$, $a\in A_2$. Точно так же, для $\varphi_2\in\Phi_2$ и $\sigma_2\in\Sigma_2$ определяется $\sigma_2*\varphi_2\in\Psi$: $a(\sigma_2*\varphi_2)=(a*\sigma_2)\varphi_2$. Все эти действия согласованы с линейными операциями в Φ_1

Ψ и Φ_2, и легко проверяются соотношения:

$$\varphi_1 * 6_1' 6_1'' = (\varphi_1 \circ 6_1') * 6_1'' + (\varphi_1 * 6_1') \circ 6_1''$$

$$6_2' 6_2'' * \varphi_2 = 6_2' \circ (6_2'' * \varphi_2) + 6_2' * (6_2'' \circ \varphi_2)$$

Возьмем теперь декартово произведение:

$$\Gamma = \Sigma_1 \times \Phi_1 \times \Psi \times \Phi_2 \times \Sigma_2$$

и пусть α, d_1, δ, d_2 и β - соответствующие проектирования. Определим на Γ умножение, полагая:

$$\alpha(\gamma_1 \gamma_2) = \alpha(\gamma_1) \cdot \alpha(\gamma_2); \quad \beta(\gamma_1 \gamma_2) = \beta(\gamma_1) \cdot \beta(\gamma_2);$$

$$d_1(\gamma_1 \gamma_2) = d_1(\gamma_1) \circ \alpha(\gamma_2) + \beta(\gamma_1) \circ d_1(\gamma_2);$$

$$d_2(\gamma_1 \gamma_2) = d_2(\gamma_1) \circ \alpha(\gamma_2) + \beta(\gamma_1) \circ d_2(\gamma_2);$$

$$\delta(\gamma_1 \gamma_2) = \delta(\gamma_1) \circ \alpha(\gamma_2) + \beta(\gamma_2) \circ \delta(\gamma_2) + $$
$$+ d_1(\gamma_1) * \alpha(\gamma_2) + \beta(\gamma_1) * d_2(\gamma_2).$$

Можно проверить, что относительно такого умножения Γ - полугруппа. Здесь α и β - гомоморфизмы, а d_1, d_2 и δ - дифференцирования.

Дальше определяем биавтомат $\mathfrak{A}_1 \nabla \mathfrak{A}_2 = (A_1 \oplus A_2, \Gamma, B_1 \oplus B_2)$, полагая:

$$(a_1+a_2)\circ\gamma = a_1\circ\alpha(\gamma)+a_2 d_1(\gamma)+a_2\circ\beta(\gamma),$$

$$(a_1+a_2)*\gamma = a_1*\alpha(\gamma)+a_2\delta(\gamma)+a_2*\beta(\gamma),$$

$$(b_1+b_2)\circ\gamma = b_1\circ\alpha(\gamma)+b_2 d_2(\gamma)+b_2\circ\beta(\gamma)$$

Проверяется, что здесь действительно возникает биавтомат $\mathfrak{O}$ и это и есть интересующее нас треугольное произведение. Название конструкции связано с особенностями матричного вида операторов, которые нетрудно усмотреть.

Естественно определяются параллельные, последовательные и общие каскадные соединения биавтоматов. Все они допускают вложение в треугольное произведение. Треугольное произведение биавтоматов Мура, вообще, не является биавтоматом Мура. Для автоматов Мура можно построить специальное треугольное умножение, сохраняющее муровское свойство. Связано это с возможностью перехода к автоматам с полугруппой, содержащей единицу, которая равносильна свойству быть автоматом Мура. Для биавтоматов Мура подобной реализации нет, и здесь соответствующей конструкции мы не знаем.

Имеются связи между треугольным умножением биавтоматов и треугольным умножением соответствующих треугольных представлений. Треугольное умножение представлений определялось в /2/.

Перейдем дальше к конструкциям сплетения биавтомата с полугруппой. Их будет две - декартово сплетение и свободное сплетение. Первое основано на функторе Hom, а второе-на тензорном умножении.

Пусть даны две полугруппы Σ и Φ. Как известно, их оплетение $\Sigma W r \Phi$ определяется на множестве $\Phi \times \Sigma^{\Phi}$ пар $(\varphi, \bar{\sigma})$, $\varphi \in \Phi$, $\bar{\sigma} \in \Sigma^{\Phi}$ с умножением $(\varphi_1, \bar{\sigma}_1)(\varphi_2, \bar{\sigma}_2) = (\varphi_1 \varphi_2, (\bar{\sigma}_1 \circ \varphi_2)\bar{\sigma}_2)$, где функция $\bar{\sigma} \circ \varphi$ определяется условием: $(\bar{\sigma} \circ \varphi)(x) = \bar{\sigma}(\varphi x)$, $x \in \Phi$.

Сплетение $\Sigma W r \Phi$ есть полугруппа.

Пусть теперь даны биавтомат $\mathfrak{A} = (A, \Sigma, B)$ и полугруппа

Построим новый биавтомат $\mathfrak{A} W r \Phi = (Hom(K\Phi, A), \Sigma W r \Phi, Hom(K\Phi, B))$

Определим для полугруппы $\Gamma = \Sigma W r \Phi$ соответствующие операции действия.

Пусть $f \in Hom(K\Phi, A)$, $\bar{\sigma} \in \Sigma^{\Phi}$ и $\varphi \in \Phi$

Элементы $f \circ \bar{\sigma}$ и $f \circ \varphi$ достаточно задать на $x \in \Phi$.

Полагаем: $(f \circ \bar{\sigma})(x) = f(x) \circ \bar{\sigma}(x)$ и $(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi x)$. Непосредственно проверяется соотношение:

$$(f \circ \bar{\sigma}) \circ \varphi = (f \circ \varphi) \circ (\bar{\sigma} \circ \varphi).$$

Из этого соотношения следует, что если определить:

$$f\circ(\varphi,\bar{\sigma})=(f\circ\varphi)\circ\bar{\sigma},$$

то приходим к предотавлению $(Hom\,(K\Phi,A),\Gamma)$. Точно так же определяется предотавление $(Hom\,(K\Phi,B),\Gamma)$.

Определим, далее, элемент $f*\bar{\sigma}\in Hom\,(K\Phi,B):(f*\bar{\sigma})(x)=f(x)*\bar{\sigma}(x)$.

Имеем соотношение: $(f*\bar{\sigma})\circ\varphi=(f\circ\varphi)*(\bar{\sigma}\circ\varphi)$. С помощью этого соотношения доказывается, что если определить еще:

$$f*(\varphi,\bar{\sigma})=(f\circ\varphi)*\bar{\sigma},$$

то в итоге имеем биавтомат $\mathfrak{A}\,Wr\,\Phi$, наызваемый декартовым оплетением биавтомата $\mathfrak{A}$ с полугруппой Φ.

Перейдем теперь к свободным оплетениям. На этот раз будем исходить из левого оплетения $\Sigma\,wr\,\Phi$, определенного на множестве $\Sigma^{\Phi}\times\Phi$ пар $(\bar{\sigma},\varphi)$ с умножением:

$(\bar{\sigma}_1,\varphi_1)(\bar{\sigma}_2,\varphi_2)=(\bar{\sigma}_1(\varphi_1\circ\bar{\sigma}_2),\varphi_1\varphi_2)$, где $(\varphi\circ\bar{\sigma})(x)=\bar{\sigma}(x\varphi)$.

Полугруппу $\Sigma\,wr\,\Phi$ обозначим через Γ. Пусть теперь даны биавтомат $\mathfrak{A}=(A,\Sigma,B)$ и полугруппа Φ. Определим свободное оплетение $\mathfrak{A}\,wr\,\Phi=(A\otimes K\Phi,\ \Sigma\,wr\,\Phi,\ B\otimes K\Phi)$

Тензорное произведение $A \otimes K\Phi$ порождается элементами $a \otimes x$, $a \in A$ и $x \in \Phi$. Полагаем:

$$(a \otimes x) \circ (\bar{\sigma}, \varphi) = (a \circ \bar{\sigma}(x)) \otimes x\varphi,$$

и этим определяется представление $(A \otimes K\Phi, \Gamma)$. Точно так же определяем представление $(B \otimes K\Phi, \Gamma)$. Далее, операцию $*$ зададим правилом:

$$(a \otimes x) * (\bar{\sigma}, \varphi) = (a * \bar{\sigma}(x)) \otimes x\varphi.$$

Проверяется, что так определенные операции действительно задают биавтомат $\mathfrak{A} \, wr \, \Phi$.

Определим, наконец, понятие индуцирования для биавтоматов. Пусть дан биавтомат $\mathfrak{A} = (A, \Sigma, B)$ и пусть Σ есть подполугруппа в другой полугруппе Γ. Пусть $(\bar{A}, \Gamma)$ и $(\bar{B}, \Gamma)$ - соответствующие индуцированные представления. Возьмем $Atm(\bar{A}, \Gamma) = (\bar{A}, \Gamma, \bar{A} \otimes K\Gamma)$, и рассмотрим еще биавтомат $\mathfrak{A}' = (\bar{A}, \Gamma, (\bar{A} \otimes K\Gamma) \oplus \bar{B})$, определяемый естественным образом. В этом биавтомате произведем факторизацию по соотношению: $a * b = a \circledast b$ для всех $a \in A$ и $b \in \Sigma$. Перейдем к фактор-автомату $\overline{\mathfrak{A}}$. Следующее предложение означает, что $\overline{\mathfrak{A}}$ есть результат индуцирования.

Предложение 9. Пусть дан биавтомат $\mathfrak{A}_1 = (A_1, \Gamma, B_1)$ и еще задан гомоморфизм

$$\mu = (\mu_1, id, \mu_3): \mathfrak{A} = (A, \Sigma, B) \to \mathfrak{A}_1 = (A_1, \Gamma, B_1),$$

тождественный на Σ. Тогда этот гомоморфизм однозначно продолжается до гомоморфизма $\bar{\mu}: \overline{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{A}_1$, тождественного на Γ.

Доказательство. Гомоморфизмы μ_1 и μ_3 однозначно продолжаются до гомоморфизмов $\bar{\mu}_1: \bar{A} \to A_1$ и $\bar{\mu}: \bar{B} \to B_1$ перестановочных с действием Γ. С помощью $\bar{\mu}_1$ определим биавтомат $(\bar{A}, \Gamma, B_1)$, где Γ в $\bar{A}$ действует как $(\bar{A}, \Gamma)$ и в B_1 как в $\mathfrak{A}_1$. Кроме того, определяем $a * \gamma = a^{\bar{\mu}_1} * \gamma$. При этом, имеем однозначно определенные гомоморфизмы

$$(\bar{A}, \Gamma, \bar{A} \circledast K\Gamma) \xrightarrow{\nu} (\bar{A}, \Gamma, B_1) \xrightarrow{\bar{\mu}_1} (A_1, \Gamma, B_1).$$

и здесь $(a \otimes \gamma)^{\nu} = a^{\bar{\mu}_1} * \gamma$. Гомоморфизм $\nu \bar{\mu}_1$ вместе с $\bar{\mu}_3$ приводит к гомоморфизму $\mathfrak{A}' \longrightarrow \mathfrak{A}_1$. При этом, $(a*б)^{\mu_3} = a^{\mu_1} * б = (a \otimes б)^{\nu}$ и, следовательно, приходим к гомоморфизму $\bar{\mathfrak{A}} \longrightarrow \mathfrak{A}_1$. Единственность такого продолжения очевидна.

Вернемся теперь к треугольному умножению, и сделаем одно полезное замечание. Пусть дан биавтомат $\mathfrak{A} = (A, \Sigma, B)$. Возьмем в нем подавтомат $(0, \Sigma, B)$ и соответствующий фактор-автомат реализуем как $(A, \Sigma, 0)$. Тогда имеется естественное вложение:

$$\mathfrak{A} \to (0, \Sigma, B) \nabla (A, \Sigma, 0).$$

Действительно, будем исходить из гомоморфизма: $\nu : \Sigma \to \nabla(A, B)$, определяющего биавтомат $\mathfrak{A}$, и пусть $\nu = (\alpha_0, \delta_0, \beta_0)$. В треугольном произведении $(0, \Sigma, B) \nabla (A, \Sigma, 0)$ полугруппа входных сигналов строится на декартовом произведении $\Gamma = \Sigma \times \Phi_1 \times \Psi \times \Phi_2 \times \Sigma$. В данном случае Φ_1 и Φ_2 – нули и $\Psi = Hom(A, B)$. Используем вводившиеся раньше отображения α, β, d_1, d_2 и δ, зададим отображение $\mu : \Sigma \longrightarrow \Gamma$ по правилу: $\alpha(6^{\mu}) = \beta(6^{\mu}) = 6$,

$$d_1(6^{\mu}) = d_2(6^{\mu}) = 0, \quad \delta(6^{\mu}) = \delta_0(6); \quad 6 \in \Sigma.$$

Кроме того, A отождествляем с $0 \oplus A$ и B - с $B \oplus 0$. Простая проверка показывает, что все это дает нужное вложение.

В заключение отметим, что целью этой статьи было выделить структуру биавтомата, и назвать основные понятия, связанные с этой структурой. В основе были линейные преобразования, но можно было бы исходить также и из аффинных преобразований, что важно для приложений.

Дальнейшее развитие теории предполагает как математические задачи, так и задачи, связанные с приложениями. Одновременно с этой статьей подготовлены к печати еще две работы по данной теме. В статье М.И.Гобечия /3/ рассматриваются тождества и многообразия биавтоматов, а в работе И.Н.Перанидзе /4/ рассматривается задача декомпозиции для биавтоматов, и указываются тождества некоторых универсальных биавтоматов.

Поступила 25.X.1980

Рижский Краснознаменный институт инженеров гражданской авиации, г.Рига.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.И.Плоткин, В.Б.Штейнбук, И.Н.Перанидзе. ДАН СССР.

2. Б.И.Плоткин. УМН, 32:5 (197), 3-68, 1977.

3. М.И.Гобечия, В настоящем сборнике.

4. И.Н.Церанидзе, В настоящем сборнике.

ბ.პლოტკინი

ბიავტომატები

რეზიუმე

განიხილება ზოგიერთი კონსტრუქცია ბიავტომატების თეორიაში.

B.Plotkin

BIAUTOMATA

Summary

Some constructions in the theory of biautomata are investigated.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

225, 1981

УДК 512.7

МНОГООБРАЗИЯ БИАВТОМАТОВ

М.И.Гобечия

Введение

Приведем некоторые необходимые нам определения, в основном следуя работе Б.И.Плоткина /I/.

Пусть K – фиксированное коммутативное кольцо с единицей. Линейный полугрупповой биавтомат над K понимается как тройка $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$, в которой A и B – модули над K и Γ – полугруппа. При этом определены три операции:

$\circ: A\times\Gamma\to A$, $*: A\times\Gamma\to B$, $\circ: B\times\Gamma\to B$, для которых отображения $a\mapsto a\circ\gamma$, $a\mapsto a*\gamma$, $b\mapsto b\circ\gamma$ $(a\in A,\ b\in B)$ при всяком $\gamma\in\Gamma$ являются гомоморфизмами. Кроме этого выполняются соотношения:

1. $a \circ \gamma_1 \gamma_2 = (a \circ \gamma_1) \circ \gamma_2$,

2. $a * \gamma_1 \gamma_2 = (a \circ \gamma_1) * \gamma_2 + (a * \gamma_1) \circ \gamma_2$,

3. $b \circ \gamma_1 \gamma_2 = (b \circ \gamma_1) \circ \gamma_2$.

A называется модулем состояний, B - модулем внешних состояний- выходных сигналов, Γ - полугруппой входных сигналов.

В настоящей работе будут рассматриваться только линейные полугрупповые биавтоматы.

Пусть $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ и $\mathfrak{A}' = (A', \Gamma', B')$ - два биавтомата. Гомоморфизм $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ - это тройка гомоморфизмов: $\mu_1 : A \to A'$, $\mu_2 : \Gamma \to \Gamma'$, $\mu_3 : B \to B'$, для которой выполнены условия согласованности с операциями

1. $(a \circ \gamma)^{\mu_1} = a^{\mu_1} \circ \gamma^{\mu_2}$,

2. $(a * \gamma)^{\mu_3} = a^{\mu_1} * \gamma^{\mu_2}$,

3. $(b \circ \gamma)^{\mu_3} = b^{\mu_3} \circ \gamma^{\mu_2}$.

$(a \in A,\ b \in B,\ \gamma \in \Gamma)$.

Можно определить гомоморфизмы биавтоматов по состояниям, по входным и выходным сигналам.

Биавтоматы вместе с их гомоморфизмами составляют категорию. В ней биавтомат $\mathfrak{A}' = (A', \Gamma', B')$ есть подавтомат биавтомата $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$, если $A' \subset A$, $\Gamma' \subset \Gamma$, $B' \subset B$ и, кроме этого,

$a \circ \gamma \in A'$, $a * \gamma \in B'$, $b \circ \gamma \in B'$ для любых $a \in A'$, $b \in B'$, $\gamma \in \Gamma'$.

Вместо неудобных "подбиавтомат", "фактор-биавтомат" мы будем пользоваться терминами "подавтомат", "фактор-автомат".

Естественно определяются фактор-автоматы и декартовы произведения биавтоматов. Имеет место теорема гомоморфизмов. Обычным образом формулируется теорема Ремака.

Биавтомат $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ называется точным, если из равенств $a \circ \gamma_1 = a \circ \gamma_2$, $a * \gamma_1 = a * \gamma_2$ и $b \circ \gamma_1 = b \circ \gamma_2$ при всяких $a \in A$, $b \in B$ вытекает $\gamma_1 = \gamma_2$ $(\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma)$. Всегда можно перейти к точному фактор-автомату.

Определим теперь треугольное умножение биавтоматов.

Пусть даны два биавтомата $\mathfrak{A}_1 = (A_1, \Sigma_1, B_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (A_2, \Sigma_2, B_2)$.

Возьмем $\Phi_1 = Hom(A_2, A_1)$, $\Psi = Hom(A_2, B_1)$ и $\Phi_2 = Hom(B_2, B_1)$. Φ_1, Ψ и Φ_2 рассматриваются как абелевы группы-модули над Z. Σ_1 действует в Φ_1, Φ_2 и Ψ справа по правилам: $a(\varphi_1 \circ \sigma_1) = a\varphi_1 \circ \sigma_1$, $b(\varphi_2 \circ \sigma_1) = b\varphi_2 \circ \sigma_1$, $a(\psi \circ \sigma_1) = a\psi \circ \sigma_1$. Σ_2 действует в

Φ_1, Φ_2 и Ψ слева: $a(\sigma_2\circ\varphi_1)=(a\circ\sigma_2)\varphi_1$, $b(\sigma_2\circ\varphi_2)=(b\circ\sigma_2)\varphi_2$, $a(\sigma_2\circ\psi)=(a\circ\sigma_2)\psi$. Кроме этого, определены элементы $\varphi_1*\sigma_1\in\Psi$ и $\sigma_2*\varphi_2\in\Psi$, действующие по правилам: $a(\varphi_1*\sigma_1)=a\varphi_1*\sigma_1$, $a(\sigma_2*\varphi_2)=(a*\sigma_2)\varphi_2$ $(a\in A_2,\ b\in B_2,\ \sigma_1\in\Sigma_1,\ \sigma_2\in\Sigma_2,\ \varphi_1\in\Phi_1,\ \varphi_2\in\Phi_2,\ \psi\in\Psi)$.

Возьмем декартово произведение $\Gamma=\Sigma_1\times\Phi_1\times\Psi\times\Phi_2\times\Sigma_2$. Через α, d_1, δ, d_2 и β обозначим соответствующие проектирования. Пусть $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$. Введем в Γ умножение, полагая:

$$\alpha(\gamma_1\gamma_2)=\alpha(\gamma_1)\alpha(\gamma_2);\quad d_1(\gamma_1\gamma_2)=d_1(\gamma_1)\circ\alpha(\gamma_2)+\beta(\gamma_1)\circ d_1(\gamma_2);$$

$$\delta(\gamma_1\gamma_2)=\delta(\gamma_1)\circ\alpha(\gamma_2)+\beta(\gamma_1)\circ\delta(\gamma_2)+d_1(\gamma_1)*\alpha(\gamma_2)+\beta(\gamma_1)*d_2(\gamma_2);$$

$$d_2(\gamma_1\gamma_2)=d_2(\gamma_1)\circ\alpha(\gamma_2)+\beta(\gamma_1)\circ d_2(\gamma_2);\quad \beta(\gamma_1\gamma_2)=\beta(\gamma_1)\beta(\gamma_2).$$

Проверяется, что такое умножение определяет на Γ полугруппу. Возьмем тройку $\mathfrak{A}_1\nabla\mathfrak{A}_2=(A_1\oplus A_2,\ \Gamma,\ B_1\oplus B_2)$.

Для любых $a_1\in A_1,\ a_2\in A_2,\ b_1\in B_1,\ b_2\in B_2,\ \gamma\in\Gamma$ полагаем:

$$(a_1+a_2)\circ\gamma=a_1\circ\alpha(\gamma)+a_2 d_1(\gamma)+a_2\circ\beta(\gamma),$$

$$(a_1+a_2)*\gamma=a_1*\alpha(\gamma)+a_2\delta(\gamma)+a_2*\beta(\gamma),$$

$$(b_1+b_2)\circ\gamma=b_1\circ\alpha(\gamma)+b_2 d_2(\gamma)+b_2\circ\beta(\gamma).$$

Можно проверить, что $\mathfrak{A}_1 \nabla \mathfrak{A}_2$ является биавтоматом. Его называют треугольным произведением $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

Определим несколько операторов, применяемых к классам биавтоматов. Пусть $\mathfrak{X}$ - произвольный класс биавтоматов, тогда

$S\mathfrak{X}$ - класс всех подавтоматов биавтоматов из $\mathfrak{X}$;

$Q\mathfrak{X}$ - класс всех гомоморфных образов биавтоматов из $\mathfrak{X}$;

$C\mathfrak{X}$ - класс всех биавтоматов, являющихся декартовым произведением биавтоматов из $\mathfrak{X}$;

$\mathcal{D}\mathfrak{X}$ - класс всех дискретных прямых произведений биавтоматов из $\mathfrak{X}$;

$\mathcal{D}_0\mathfrak{X}$ - класс всех конечных прямых произведений биавтомотов из $\mathfrak{X}$;

$V\mathfrak{X}$ - класс всех биавтоматов, для которых некоторый гомоморфный образ по входным сигналам содержится в $\mathfrak{X}$.

Класс биавтоматов над данным кольцом K называется многообразием, если он замкнут относительно операторов V, Q, S, C.

Пусть $\mathfrak{X}$ - многообразие и $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ - некоторый биавтомат. Через $\mathfrak{X}^*(\mathfrak{A})$ обозначим пересечение всех подавтоматов $(A', \Gamma, B') \subset \mathfrak{A}$, для которых $(A/A', \Gamma, B/B') \in \mathfrak{X}$. Ясно, что $\mathfrak{A}/\mathfrak{X}^*(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{X}$.

Класс биавтоматов над данным K, замкнутый относительно операторов $V, Q, S, \mathcal{D}$, называется радикальным классом.

Каждому радикальному классу соответствует функция $\mathfrak{X}'$, определяемая следующим образом: $\mathfrak{X}'(\mathfrak{A})$ есть подавтомат в $\mathfrak{A}$, порожденный всеми $(A', \Gamma, B') \subset \mathfrak{A}$, у которых $(A', \Gamma, B') \in \mathfrak{X}$. По определению радикального класса $\mathfrak{X}'(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{X}$

Каждое многообразие является одновременно и радикальным классом. Следовательно, многообразию всегда отвечают две функции - радикал $\mathfrak{X}'$ и вербал $\mathfrak{X}^*$.

Первый параграф настоящей работы посвящен многообразиям линейных полугрупповых биавтоматов. Приводится определение согласованного кортежа и доказывается теорема типа теоремы Биркгофа для многообразий линейных полугрупповых биавтоматов. Кроме этого, определяется умножение многообразий на языке согласованных кортежей.

Основным содержанием второго параграфа является рассмотрение связи между умножением многообразий и треугольным умножением биавтоматов.

I. Многообразия Γ-биавтоматов и согласованные кортежи

Будем рассматривать категорию биавтоматов (A, Γ, B) над кольцом K с фиксированной полугруппой Γ. Через Γ^1 обозначим результат внешнего присоединения к Γ единицы. $K\Gamma$ - полугрупповая алгебра полугруппы Γ над K.

Определим свободные объекты в категории Γ-биавтоматов. Пусть $(Z\,Y)$ - произвольная пара множеств. Через A обозначим свободный $K\Gamma^1$-модуль над Z. Каждый элемент из A имеет однозначную запись $\sum\limits_i z_i \circ u_i$, $z_i \in Z$, $u_i \in K\Gamma^1$. Пусть $H_0 = A \otimes K\Gamma$ - тензорное произведение K-модулей A и $K\Gamma$. Любой элемент из H_0 допускает формальную запись $\sum\limits_{i,j} z_{ij}(u_{ij} \otimes v_i)$, $z_{ij} \in Z$, $u_{ij} \in K\Gamma^1$, $v_i \in K\Gamma$.
Пусть H_1 - свободный $K\Gamma^1$-модуль над Y. Каждый элемент из H_1 имеет вид $\sum\limits_i y_i \circ u_i$, $y_i \in Y$, $u_i \in K\Gamma^1$. Пусть $H = H_0 \oplus H_1$. Возьмем тройку (A, Γ, H). Определим операции $\circ, *, \circ$. Если $a \in A$, $a = \sum\limits_i z_i \circ u_i$, $z_i \in Z$, $u_i \in K\Gamma^1$, $\gamma \in \Gamma$, то, полагаем: $a \circ \gamma = \sum\limits_i z_i \circ u_i \gamma \in A$, $a * \gamma = a \otimes \gamma = \sum\limits_i z_i (u_i \otimes \gamma) \in H$.

Пусть $h = h_0 + h_1 \in H$, где $h_0 = \sum\limits_i a_i \otimes v_i$, $v_i \in K\Gamma$, $h_1 = \sum\limits_i y_i \circ u_i$, $y_i \in Y$, $u_i \in K\Gamma^1$, тогда

$$h \circ \gamma = \sum_i a_i \otimes v_i \gamma - \sum_i (a_i \circ v_i) \otimes \gamma + \sum_i y_i \circ u_i \gamma \in H.$$

Этим определяется биавтомат (A,Γ,H) и непосредственно можно проверить, что он свободно порождается парой (Z,Y).

Пусть (G,Γ,B) некоторый биавтомат. Скажем, что в нем выполняется битождество $Z\circ u\equiv 0$, если для любого гомоморфизма $\mu:(A,\Gamma,H)\to(G,\Gamma,B)$ имеем $Z^{\mu}\circ u=0$. Аналогично определяются битождества $Z*v\equiv 0$ и $y\circ u\equiv 0$.

Возьмем, далее, некоторое многообразие биавтоматов $\mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{X}^*(A,\Gamma,H)=(W_1,\Gamma,W_2)$ и $\mathfrak{X}^*(A,\Gamma,H_0)=(W_1',\Gamma,W_2')$. Ясно, что (W_1,Γ,W_2) вполне характеристический подавтомат в (A,Γ,H) и (W_1',Γ,W_2') - такой же в (A,Γ,H_0). Нетрудно проверить, что $W_1=W_1'$ и $W_2=W_2'\oplus W_2''$, где $W_2''=W_2\cap H_1$

Возьмем $Z=\{1\}$ и $Y=\varphi$, где 1 - внешняя единица. Получим циклический справа свободный биавтомат $(K\Gamma^1,\Gamma,K\Gamma^1\otimes K\Gamma)$. Операции определяются следующим образом. Если $u\in K\Gamma^1$, $v\in K\Gamma$ и $\gamma\in\Gamma$, то полагаем: $u\circ\gamma=u\gamma$, $u*\gamma=u\otimes\gamma$, $(u\otimes v)\circ\gamma=$ $=u\otimes v\gamma-uv\otimes\gamma$.

Пусть $\mathfrak{A}=(G,\Gamma,B)$ - некоторый биавтомат и $g\in G$. Из универсальности $(K\Gamma^1, \Gamma, K\Gamma^1 \otimes K\Gamma)$ вытекает существование гомоморфизма

$$\mu : (K\Gamma^1, \Gamma, K\Gamma^1 \otimes K\Gamma) \longrightarrow (G, \Gamma, B).$$

Если $u \in K\Gamma^1$ и $v \in K\Gamma$, то $u^\mu = g \circ u$, $(u \otimes v)^\mu = (g \circ u) * v$.

Полагая $Z = \{1\}$ и $Y = \{1\}$, получим циклический свободный биавтомат $(K\Gamma^1, \Gamma, (K\Gamma^1 \otimes K\Gamma) \otimes \wedge\Gamma^1)$, называемый регулярным.

Пусть в тройке (U_1, V, U_2) U_1 и U_2 - двусторонние идеалы в $K\Gamma^1$ и V - некоторое подмножество в $K\Gamma$. В $K\Gamma^1 \otimes K\Gamma$ возьмем линейную оболочку W элементов:

1. $u_1 \otimes w$, $u_1 \in U_1$, $w \in K\Gamma$;

2. $w \otimes v$, $w \in K\Gamma^1$, $v \in V$;

3. $w \otimes v\gamma - wv \otimes \gamma$, $w \in K\Gamma^1$, $v \in V$, $\gamma \in \Gamma$;

4. $w_1 \otimes w_2 u_2 - w_1 w_2 \otimes u_2$, $w_1 \in K\Gamma^1$, $w_2 \in K\Gamma$, $u_2 \in U_2$;

5. $u_1 \otimes w\gamma - u_1 w \otimes \gamma$, $u_1 \in U_1$, $w \in K\Gamma$, $\gamma \in \Gamma$.

Сопоставим W подмножество $\overline{V}$ в $K\Gamma$ по правилу:

тогда и только тогда $v \in \bar{V}$, когда $\varepsilon \oplus v \in W$ (ε - единица в $K\Gamma^1$).

Тройку (U_1, V, U_2) назовем согласованным кортежем, если $V = \bar{V}$.

Пусть $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ - некоторый биавтомат. Через U_1 обозначим множество всех $u_1 \in K\Gamma^1$, для которых при любом $a \in A$ выполняется $a \circ u_1 = 0$. Пусть V - множество всех $v \in K\Gamma$, для которых при любом $a \in A$ имеем $a * v = 0$. Обозначим через U_2 множество всех $u_2 \in K\Gamma^1$, для которых при любом $b \in B$ выполняется $b \circ u_2 = 0$. Легко проверить, что тройка (U_1, V, U_2) удовлетворяет следующим условиям:

1. U_1 и U_2 - двусторонние идеалы в $K\Gamma^1$,
2. V - подкольцо в $K\Gamma$,
3. $U_1 \cap V$ - левый и $U_2 \cap V$ - правый идеалы в $K\Gamma^1$.
4. $U_1 U_2 \subset V$.

(U_1, V, U_2) составляет согласованный кортеж. Действительно, по данной тройке построим W. Пусть соответствующий согласован ный кортеж имеет вид $(U_1, \overline{V}, U_2)$. Ясно, что $V \subset \overline{V}$. Проверим обратное включение. Если $v \in \overline{V}$, тогда $\varepsilon \circ v \in W$. Легко заметить, что гомоморфизм $\mu : (K\Gamma^1, \Gamma, K\Gamma^1 \circ K\Gamma) \to (A, \Gamma, B)$ переводит здесь все элементы из W в 0. Следовательно, $(a \circ \varepsilon) * v = 0 = a * v$ при любом $a \in A$. Отсюда $v \in V$ и $V = \overline{V}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторое многообразие, которому принадлежат все циклические подавтоматы в $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$. Нетрудно показать, что тогда и $\mathfrak{A} \in \mathfrak{X}$. Проверка этого факта опирается на следующее свойство многообразий биавтоматов. Если (G_1, Γ, G_2) – биавтомат, где $G_2 = G_2' \oplus G_2''$, $G_1 * \Gamma \subset G_2'$ и $G_2'' \circ \Gamma \subset G_2''$, то из $(G_1, \Gamma, G_2') \in \mathfrak{X}$ и $(0, \Gamma, G_2'') \in \mathfrak{X}$ следует $(G_1, \Gamma, G_2) \in \mathfrak{X}$.

Теперь ясно, что каждое многообразие Γ- биавтоматов порождается некоторым циклическим Γ-биавтоматом. В частности, в этой роли могут выступать фактор-автоматы регулярного биавтомата.

Наша цель – описать вполне характеристические подавтоматы свободных Γ-биавтоматов.

Теорема I. Многообразия Γ-биавтоматов находятся во взаимно-однозначном соответствии с согласованными кортежами вида $(\mathcal{U}_1, \mathcal{V}, \mathcal{U}_2)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ - некоторый класс биавтоматов. Сопоставим ему тройку $(\mathcal{U}_1, \mathcal{V}, \mathcal{U}_2)$ следующим образом: $u_1 \in \mathcal{U}_1$, $v \in \mathcal{V}$ и $u_2 \in \mathcal{U}_2$, если в $\mathfrak{X}$ выполняются тождества $z \circ u_1 \equiv 0$, $z * v \equiv 0$ и $y \circ u_2 \equiv 0$.

Мы уже отмечали, что $(\mathcal{U}_1, \mathcal{V}, \mathcal{U}_2)$ составляет согласованный кортеж. Построим по нему W.

Пусть $\mathcal{F} = (A, \Gamma, H)$ - циклический свободный биавтомат с одноэлементными порождающими $\{z\}$ и $\{y\}$. Обозначим через W_1 линейную оболочку элементов $z \circ u_1$ с $u_1 \in \mathcal{U}_1$, через W_2' - элементов zw с $w \in W$ и через W_2'' - элементов $y \circ u_2$ с $u_2 \in \mathcal{U}_2$.

Легко проверить, что $(W_1, \Gamma, W_2' \oplus W_2'')$ является подавтоматом в (A, Γ, H), при этом (W_1, Γ, W_2') - подавтомат в (A, Γ, H).

Теперь возьмем $\nu \in End\,\mathcal{F}$. Любой эндоморфизм свободного биавтомата индуцируется отображениями: $\nu_1 : \{z\} \to A$, $\nu_3 : \{y\} \to H_0 \oplus H_1$.

Пусть сначала $\nu_3' : \{y\} \to H_1$. Тогда ν_1 индуцирует $\nu' \in End(A, \Gamma, H_0)$ и любой эндоморфизм (A, Γ, H_0) можно получить таким образом. Если $z^{\nu_1} = z \circ u$, $u \in K\Gamma^1$, $w_1 \in W_1$, $w_1 = z \circ u_1$, $u_1 \in U_1$, $w_2 \in W_2''$, $w_2' = z w$, $w \in W$, то $w_1^{\nu} = (z \circ u_1)^{\nu} = z^{\nu} \circ u_1 = z \circ u u_1 \in W_2$; $(w_2')^{\nu} = z^{\nu} w = (z \circ u) w \in W_2''$.

Это означает, что (W_1, Γ, W_2') вполне характеристический подавтомат в (A, Γ, H_0).

Пусть, далее, $\nu_1 : \{z\} \to A$, $\nu_3 : \{y\} \to H_1$. Ясно, что $W_1^{\nu} \subset W_1$ и $(W_2')^{\nu} \subset W_2'$. Если $y^{\nu_3} = y \circ u$, $u \in K\Gamma^1$, $w_2'' \in W_2''$, $w_2'' = y \circ u_2$, $u_2 \in U_2$, то $(w_2'')^{\nu} = (y \circ u_2)^{\nu} = y^{\nu} \circ u_2 = y \circ u u_2 \in W$

Возьмем $\nu_1 : \{z\} \to A$, $\nu_3 : \{y\} \to H_0 \oplus H_1$. Пусть $y^{\nu_3} = h_0 + h_1$, где $h_0 \in H_0$ и $h_1 \in H_1$. Ясно, что

$\overset{\vee}{W_1} \subset W_1$, $(W_2')^{\vee} \subset W_2'$. Если $w_2'' \in W_2''$, $w_2'' = y \circ u_2$, $u_2 \in U_2$, то $(w_2'')^{\vee} = (y \circ u_2)^{\vee} = \overset{\vee}{y} \circ u_2 = (h_0 + h_1) \circ u_2 = h_0 \circ u_2 + h_1 \circ u_2 \in W_2' \oplus W_2''$.

Таким образом, согласованному кортежу (U_1, V, U_2) соответствует вполне характеристический подавтомат в $\mathcal{F}$. Проверим, что по этому подавтомату можно восстановить кортеж.

Возьмем фактор-автомат $(A/W_1, \Gamma, H/W_2)$. Пусть (U_1', V', U_2') есть соответствующий согласованный кортеж. Мы проведем проверку равенства $V = V'$. Аналогично получаются $U_1 = U_1'$ и $U_2 = U_2'$.

Пусть $v \in V'$. Это означает, что $z(\varepsilon \circledast v) \in W_2'$, отсюда имеем, что $\varepsilon \circledast v \in W$, последнее дает $v \in V$. Наоборот, если $v \in V$ и $a = z \circ u$, где $u \in K\Gamma^1$, то $a \circledast v = (z \circ u) \circledast v = z(u \circledast v) \in W_2'$, следовательно, $u \circledast v \in W$ и $v \in V'$. Отсюда заключаем, что $V = V'$.

Возьмем в $\mathcal{F}$ произвольный вполне характеристический подавтомат $(G, \Gamma, B = B_1 \oplus B_2)$. Пусть $(A/G, \Gamma, H/B)$ – соответствующий фактор-автомат. Согласованный кортеж, отвечающий этому биавтомату, обозначим через (U_1, V, U_2). Построим по нему вполне характеристический подавтомат $(W_1, \Gamma, W_2 = W_2' \otimes W_2'')$.

Тогда (W_1, Γ, W_2) совпадет с (G, Γ, B), при этом $W_2' = B_1$ и $W_2'' = B_2$.

Проверим, например, что $W_2' = B_1$. Пусть $w_2' \in W_2'$, $w_2' = zw$, где $w \in W$, тогда элементы zw будут принадлежать ядру гомоморфизма $\mathcal{F} \longrightarrow (A/G, \Gamma, H/B)$. Следовательно, $w_2' \in B$. Расшифровав w, получим, $w_2' \in B_1$. Наоборот, если $b \in B_1$, $b = z(u \otimes v)$, $u \otimes v \in K\Gamma' \otimes K\Gamma$, то из полной характеристичности (G, Γ, B) получим, что, подставляя вместо z любой $a \in A$, будем иметь $a(u \otimes v) \in B_1$. Это дает $u \otimes v \in W$ и $z(u \otimes v) \in W_2'$. Отсюда $B_1 = W_2'$.

Аналогично, можно проверить, что $W_1 = G$, $W_2'' = B_2$ и операции определены одинаково.

Этим искомое соответствие полностью установлено. Заметим, что если многообразию $\mathfrak{X}$ отвечает кортеж (U_1, V, U_2) и вербальный биавтомат (W_1, Γ, W_2) , то они в точности соответствуют друг другу.

Таким образом, теорема I и теорема Биркгофа /5/ уже дают существование взаимно-однозначного соответствия между многообразиями Γ-биавтоматов и подходящими согласованными кортежами.

Аналогичными выкладками можно проверить существование такого же соответствия в случае нефиксированной действующей полугруппы.

Теперь уже можно определить операцию умножения многообразий Γ-биавтоматов на языке согласованных кортежей.

Произведение двух многообразий $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ определяется следующим правилом. Тогда и только тогда $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B) \in \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2$, когда в $\mathfrak{A}$ найдется подавтомат $\mathfrak{A}' = (A', \Gamma, B') \in \mathfrak{X}_1$ с $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}' = (A/A', \Gamma, B/B') \in \mathfrak{X}_2$. Ассоциативность такого умножения станет очевидной, после того, когда операция будет определена на языке согласованных кортежей.

На множестве согласованных кортежей введем умножение. Пусть кортежу (U_1', V', U_2') отвечает $W' \subset K\Gamma^1 \otimes K\Gamma$ и (U_1'', V'', U_2'') отвечает $W'' \subset K\Gamma^1 \otimes K\Gamma$ по уже отмеченному правилу. Тогда

$(U_1', V', U_2') \times (U_1'', V'', U_2'') = (U_1' U_1'', \bar{V}, U_2' U_2'')$, где $\bar{V}$ отвечает $W = U_1'(W'') + (W')U_2'' \subset K\Gamma^1 \oplus K\Gamma$.

Результат такого умножения является согласованным кортежем. Легко проверить, что здесь возникает полугруппа согласованных кортежей.

<u>Теорема 2</u>. Полугруппа многообразий Γ-биавтоматов над кольцом K антиизоморфна полугруппе согласованных кортежей.

<u>Доказательство</u>. Через $\mathfrak{X}$ обозначим многообразие, соответствующее согласованному кортежу: $(U_1'', V'', U_2'') \times (U_1', V', U_2') = (U_1'' U_1', \bar{V}, U_2'' U_2')$, где (U_1', V', U_2') соответствует $\mathfrak{X}_1$, (U_1'', V'', U_2'') соответствует $\mathfrak{X}_2$, $\bar{V}$ соответствует $W = U_1''(W') + (W'')U_2'$.

Проверим, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2$.

Возьмем биавтомат $\mathfrak{A} = (K\Gamma^1/U_1'' U_1', \Gamma, (K\Gamma^1 \oplus K\Gamma) \oplus K\Gamma / W \oplus U_2'' U_2')$

Легко проверить, что $\mathfrak{A}$ – свободный в $\mathfrak{X}$ биавтомат.

Пусть $\mathfrak{A}' = (U_1'/U_1'' U_1', \Gamma, W'' \oplus U_2'' / W \oplus U_2'' U_2')$. Нетрудно показать, что $\mathfrak{A}'$ аннулируется кортежем (U_1', V', U_2') в то время, как $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}' = (K\Gamma^1/U_1'', \Gamma, (K\Gamma^1 \oplus K\Gamma) \oplus K\Gamma^1 / W'' \oplus U_2'')$ аннулируется кортежем (U_1'', V'', U_2''). Следовательно, $\mathfrak{A}' \in \mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}' \in \mathfrak{X}_2$.

Отсюда $\mathfrak{A} \in \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2$, что означает $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2$.

Проверим обратное включение. Пусть $\mathfrak{A} = (G, \Gamma, B) \in \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2$, то есть в $\mathfrak{A}$ существует подавтомат $\mathfrak{A}' = (G', \Gamma, B') \in \mathfrak{X}_1$ с $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}' \in \mathfrak{X}_2$. Тогда $\mathfrak{A}'$ аннулируется кортежем (U_1', V', U_2') и $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ аннулируется кортежем $(U_1'', V'' U_2'')$. Мы должны показать, что $\mathfrak{A}$ аннулируется кортежем $(U_1'' U_1', \bar{V}, U_2'' U_2')$.

Пусть $b \in B$, $w \in U_2'' U_2'$, $w = \sum_{i,j} k_{ij} w_i'' w_j'$, $w_i'' \in U_2''$, $w_j' \in U_2'$, $k_{ij} \in K$. Тогда $b \circ w = \sum_{i,j} k_{ij} (b \circ w_j'') \circ w_j'$. По условию $b \circ w_i'' \in B'$. Обозначим $b \circ w_i''$ через $b_i \in B'$. Получим $b \circ w = \sum_{i,j} k_{ij} (b_i \circ w_j') = 0$. Аналогично можно проверить выполнение остальных тождеств.

Следовательно, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{X}$. Отсюда $\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \subset \mathfrak{X}$, что дает вместе с предыдущим $\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}$. Антиизоморфизм установлен.

2. Многообразия биавтоматов и треугольное умножение

Здесь будем предполагать, что полугруппа Γ не фиксированная и основное кольцо K, является полем.

Если θ_1 и θ_2 - некоторые классы биавтоматов над полем K, то $\theta_1 \nabla \theta_2$ будет обозначать класс, состоящий из всевозможных треугольных произведений биавтоматов из θ_1 на автоматы из θ_2.

Сформулируем сначала несколько свойств, которыми обладают треугольные произведения.

<u>Предложение I.</u> Если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ - два многообразия биавтоматов и $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{X}_2$ - некоторые биавтоматы в них, то $\mathfrak{A}_1 \nabla \mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2$.

<u>Предложение 2</u>. Пусть $(A,\Gamma,B)=(A_1,\Gamma_1,B_1)\nabla(A_2,\Gamma_2,B_2)$ и $(G_1,\Gamma,G_2)\subset(A,\Gamma,B)$, при этом $G_1\subset A_1$ и $G_2\subset B_1$. Тогда существует эпиморфизм по входным сигналам:

$$(G_1,\Gamma,G_2)\to(A_1,\Gamma_1,B_1)\nabla(A_2\cap G_1,\Gamma,B_2\cap G_2).$$

<u>Предложение 3</u>. Пусть $\nu:(A_1,\Sigma_1,B_1)\to(A_1',\Sigma_1',B_1')$ - гомоморфизм биавтоматов и (A_2,Σ_2,B_2) - некоторый биавтомат. Тогда существует гомоморфизм

$$\mu:(A_1,\Sigma_1,B_1)\nabla(A_2,\Sigma_2,B_2)\to(A_1',\Sigma_1',B_1')\nabla(A_2,\Sigma_2,B_2),$$

тождественный на втором сомножителе. При этом мономорфизму (эпиморфизму) ν отвечает мономорфизм (эпиморфизм) μ.

Предложение 4. Пусть $(A,\Gamma,B)=\prod_\alpha(A_\alpha,\Sigma_\alpha,B_\alpha),\ \alpha\in I$, (G,Σ,H)-произвольный биавтомат. Тогда существует вложение:

$$(A,\Gamma,B)\nabla(G,\Sigma,H)\to\prod_\alpha\left[(A_\alpha,\Sigma_\alpha,B_\alpha)\nabla(G,\Sigma,H)\right].$$

Следствие. Если I - некоторое множество и (A,Γ,B) и (G,Σ,H) - биавтоматы, тогда существует вложение:

$$(A,\Gamma,B)^I\nabla(G,\Sigma,H)\to\left[(A,\Gamma,B)\nabla(G,\Sigma,H)\right]^I.$$

Предложение 5. Пусть $(A_1',\Sigma_1',B_1')\subset(A_1,\Sigma_1,B_1)$ и $(A_2',\Sigma_2',B_2')\subset(A_2,\Sigma_2,B_2)$. Тогда

$$(A_1',\Sigma_1',B_1')\nabla(A_2',\Sigma_2',B_2')\in \mathrm{Var}\left[(A_1,\Sigma_1,B_1)\nabla(A_2,\Sigma_2,B_2)\right].$$

Доказательства этих свойств опираются на приведенные в данной работе определения. Они достаточно просты, но вместе с тем громоздки и поэтому мы их опускаем.

<u>Предложение 6</u>. Пусть $\mathfrak{X} = \mathrm{Var}\,\theta$, где θ - некоторый класс биавтоматов. Тогда все свободные биавтоматы из $\mathfrak{X}$ содержатся в $VSC\theta$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathfrak{A} = (G, \Gamma, B) \in \theta$ и (A, F, H) -абсолютно свободный биавтомат над системой порождающих множеств (Z, X, Y). Отображения $\nu_1 : Z \to G$, $\nu_2 : X \to \Gamma$, $\nu_3 : Y \to B$ можно продолжить до гомоморфизма $\nu : (A, F, H) \to (G, \Gamma, B)$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$.

Пусть $W_{1\mathfrak{A}} = \mathrm{Ker}\,\nu_1$, $W_{2\mathfrak{A}} = \mathrm{Ker}\,\nu_3$ и $\rho_{\mathfrak{A}} = \mathrm{Ker}\,\nu_2$. Обозначим $\prod\limits_{\mathfrak{A}\in\theta} W_{1\mathfrak{A}} = W_1$, $\prod\limits_{\mathfrak{A}\in\theta} \rho_{\mathfrak{A}} = \rho$ и $\prod\limits_{\mathfrak{A}\in\theta} W_{2\mathfrak{A}} = W_2$. Тогда $(A/W_1, F, H/W_2)$ - свободный в $\mathfrak{X}$ биавтомат.

По теореме Ремака существует вложение

$$\left(A/W_1, F/\rho, H/W_2\right) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{A}\in\theta} \left(A/W_{1\mathfrak{A}}, F/\rho_{\mathfrak{A}}, H/W_{2\mathfrak{A}}\right).$$

Каждый сомножитель произведения лежит в θ, следовательно $\left(A/W_1, F/\rho, H/W_2\right) \in SC\theta$, отсюда $\left(A/W_1, F, H/W_2\right) \in VSC\theta$.

Наша дальнейшая цель - раскрыть связь между треугольным умножением биавтоматов и умножением многообразий биавтоматов.

Теорема 3. Пусть θ_1 и θ_2 – некоторые классы биавтоматов. Справедливо следующее равенство: $Var(\theta_1 \nabla \theta_2) = Var\,\theta_1 \cdot Var\,\theta_2$.

Доказательство теоремы будет проходить в несколько этапов.

Лемма I. Пусть $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ – два многообразия биавтоматов, (A,F,B) – свободный в $\mathfrak{X}_1$ биавтомат со счетными Z и Y, а (A_1,F,B_1) – свободный циклический в $\mathfrak{X}_2$. Через $(A,\bar{F},B)$ и (A_1,F_1,B_1) обозначим соответствующие точные биавтоматы. Тогда каждый из биавтоматов $(A,F,B)\nabla(A_1,F_1,B_1)$ и $(A,\bar{F},B)\nabla(A_1,F_1,B_1)$ порождает $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$.

Доказательство. Пусть многообразию $\mathfrak{X}_1$ отвечает согласованный кортеж (U_1'', V'', U_2'') с соответствующим W'' и $\mathfrak{X}_2$ отвечает (U_1', V', U_2') с W'. Тогда по теореме 2 $\mathfrak{X}$ определяется кортежем $(U_1' U_1'', \bar{V}, U_2' U_2'')$ с $W = U_1'(W'') + (W')U_2''$.

Следовательно, $\mathfrak{X}_1$ порождается циклическим биавтоматом $\mathfrak{A}_1 =$

$$=\left(KF^{1}/U_1'',F,{}^{(KF^{1}\circledast KF)\oplus KF^{1}}/W''\oplus U_2''\right),$$

$\mathscr{X}_2$ – циклическим биавтоматом $\mathfrak{A}_2=\left(KF^{1}/U_1',F,{}^{(KF^{1}\circledast KF)\oplus KF^{1}}/W'\oplus U_2'\right)$

и $\mathscr{X}_1\mathscr{X}_2$ порождается биавтоматом $\mathfrak{A}=\left(KF^{1}/U_1'U_1'',F,{}^{(KF^{1}\circledast KF)\oplus KF^{1}}/W\oplus U_2'U_2''\right)$

В $\mathfrak{A}$ возьмем подавтомат $\mathfrak{A}'=\left(U_1'/U_1'U_1'',F,{}^{W'\oplus U_2'}/W\oplus U_2'U_2''\right)$.

Ясно, что $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'\cong\mathfrak{A}_2$.

Соответствующие точные биавтоматы обозначим для $\mathfrak{A}$ через $\overline{\mathfrak{A}}$, для $\mathfrak{A}_1$ – через $\overline{\mathfrak{A}}_1$, для $\mathfrak{A}_2$ – через $\overline{\mathfrak{A}}_2$ и для $\mathfrak{A}'$ – через $\overline{\mathfrak{A}'}$. Из V – замкнутости многообразий вытекает, что $\overline{\mathfrak{A}}\in\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2,\overline{\mathfrak{A}'}$, $\overline{\mathfrak{A}}_1\in\mathscr{X}_1$ и $\overline{\mathfrak{A}}_2=\mathscr{X}_2$. Существует вложение $\mathfrak{A}\longrightarrow\overline{\mathfrak{A}'}\triangledown\overline{\mathfrak{A}}_2$ (7). Следовательно, вместе с $\overline{\mathfrak{A}}$ порождающим $\mathscr{X}_1\mathscr{X}_2$ биавтоматом является и $\overline{\mathfrak{A}'}\triangledown\overline{\mathfrak{A}}_2$.

Подберем мощности Z и Y так, чтобы существовал эпиморфизм $\mu:\mathscr{F}=(A,F,B)\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow\mathfrak{A}'$.

Обозначим соответствующий $\mathscr{F}$ точный биавтомат через $\overline{\mathscr{F}}$.

Существует эпиморфизм $\bar{\mu}: \bar{\mathcal{F}} \twoheadrightarrow \overline{\mathfrak{A}'}$ и по предложению 3 ему отвечает эпиморфизм $\nu: \bar{\mathcal{F}} \triangledown \overline{\mathfrak{A}_2} \twoheadrightarrow \overline{\mathfrak{A}'} \triangledown \overline{\mathfrak{A}_2}$. Следовательно, $\bar{\mathcal{F}} \triangledown \overline{\mathfrak{A}}_2 \in \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2$ и порождает его.

Лемма 2. Пусть (G, Γ, B) - некоторый биавтомат, $\mathfrak{X}_1 = Var(G, \Gamma, B)$ и $\mathfrak{A} = (A, F, H)$ - свободный циклический биавтомат в $\mathfrak{X}_2$. Тогда

$$\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 = Var\left[(G, \Gamma, B) \triangledown (A, F, H)\right].$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}_1$ - свободный в $\mathfrak{X}_1$ биавтомат со счетными порождающими и $\bar{\mathcal{F}}_1$ - соответствующий точный биавтомат. Тогда по лемме I $\bar{\mathcal{F}}_1 \triangledown \bar{\mathfrak{A}}$ вместе с $\mathcal{F}_1 \triangledown \mathfrak{A}$ порождает $\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2$. Так как $\bar{\mathcal{F}}_1 \in QSC(G, \Gamma, B)$, то в декартовой степени $(G, \Gamma, B)^I$ для некоторого множества I существует подавтомат (G_1, Γ_1, B_1) , который эпиморфно отображается на $\bar{\mathcal{F}}_1$. Через $\mathfrak{X}$ обозначим $Var\left[(G, \Gamma, B) \triangledown \mathfrak{A}\right]$.

По следствию предложения 4 существует вложение:

$$(G,\Gamma,B)^I \triangledown \mathfrak{A} \longrightarrow [(G,\Gamma,B)\triangledown\mathfrak{A}]^I .$$

Следовательно, $(G,\Gamma,B)^I \triangledown \mathfrak{A} \in \mathfrak{X}$. По предложению 5 $(G_1,\Gamma_1,B_1)\triangledown\mathfrak{A}\in\mathfrak{X}$. Из предложения 3 следует существование эпиморфизма $(G_1,\Gamma_1,B_1)\triangledown\mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathcal{G}_1\triangledown\mathfrak{A}$, откуда имеем $\mathcal{G}_1\triangledown\mathfrak{A}\in\mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\subset\mathfrak{X}$. По предложению 1 $(G,\Gamma,B)\triangledown\mathfrak{A}\in\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$, поэтому $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$.

<u>Лемма 3</u>. Пусть θ - некоторый класс биавтоматов, $\mathfrak{X}=\mathrm{Var}\,\theta$ и (A,F,B) - свободный в $\mathfrak{X}$ биавтомат. В A и B выделим линейно независимые системы элементов, соответственно $a_1,\cdots,a_n$ и $b_1,\cdots,b_m$. Тогда существует биавтомат $(G,\Gamma,T)\in\mathcal{D}_0\theta$ с гомоморфизмом $\nu:(A,F,B)\longrightarrow(G,\Gamma,T)$ таким, что $a_1^\nu,\cdots,a_n^\nu$ и $b_1^\nu,\cdots,b_m^\nu$ снова составляют линейно независимые системы.

<u>Доказательство</u>. Пусть векторное пространство $H=\sum\limits_{\alpha\in I} H_\alpha$ Если $M\subset I$, то через φ_M обозначим проектирование

$\varphi_M : H \longrightarrow \sum\limits_{\alpha\in M} H_\alpha$. Мы утверждаем, что если $h_1, \dots, h_n$ – линейно независимая система в H , тогда при некотором конечном M $h_1^{\varphi_M}, \dots, h_n^{\varphi_M}$ будет линейно независимой.

Действительно, для каждого конечного M пусть $H^{(M)} = \operatorname{Ker} \varphi_M$. Тогда $H^{(M_1)} \cap H^{(M_2)} = H^{(M_1 \cup M_2)}$. Пусть H_0 есть подпространство в H , натянутое на $h_1, \dots, h_n$. $\cap H^{(M)} = 0$, отсюда $\bigcap\limits_{M\subset I} (H_0 \cap H^{(M)}) = 0$, H_0 конечномерно, следовательно, при некотором конечном M имеем $H_0 \cap H^{(M)} = 0$. Это означает, что $\varphi_M : H \to \sum\limits_{\alpha\in M} H_\alpha$ для такого M индуцирует мономорфизм на H_0 , отсюда получаем, что $h_1^{\varphi_M}, \dots, h_m^{\varphi_M}$ линейно независимая система.

По предложению 5 $(A,F,B) \in VSC\theta$. Пусть $(G_\alpha, \Gamma_\alpha, T_\alpha) \in \theta$, $\alpha \in I$ – такая система биавтоматов, что если (G', Γ', T') – их декартово произведение, то существует эпиморфизм по входам $\mu:(A,F,B)\twoheadrightarrow(G',\Gamma',T')$, тождественный на A и B эпиморфизм, следовательно $a_1^\mu=g_1,\dots,a_n^\mu=g_n$ и $b_1^\mu=t_1,\dots,b_m^\mu=t_m$ - линейно независимые системы соответственно в G' и T'.

Пусть M_1 - конечное подмножество в I, для котрого $g_1^{\varphi_{M_1}},\dots,g_n^{\varphi_{M_1}}$ линейно независимы в $\sum\limits_{\alpha\in M_1}G_\alpha$ и M_2 - такое же подмножество для $t_1^{\varphi_{M_2}},\dots,t_m^{\varphi_{M_2}}$ в $\sum\limits_{\alpha\in M_2}T_\alpha$. Пусть $M=M_1\cup M_2$. Возьмем $(G,\Gamma,T)=\prod\limits_{\alpha\in M}(G_\alpha,\Gamma_\alpha,T_\alpha)$ и $\varphi_M:(G',\Gamma',T')\twoheadrightarrow(G,\Gamma,T)$. Ясно, что $(G,\Gamma,T)\in\mathcal{D}_0\theta$ и $\nu:\mu\varphi_M:(A,F,B)\to(G,\Gamma,T)$ есть искомый гомоморфизм.

Для упрощения дальнейших выкладок проведем предварительно некоторые вычисления.

Пусть $(A,\Gamma,B)=(A_1,\Sigma_1,B_1)\nabla(A_2,\Sigma_2,B_2)$. Здесь $\Gamma=\Sigma_1\times\Phi_1\times\Psi\times\Phi_2\times\Sigma_2$, $\Phi_1=Hom(A_2,A_1)$, $\Psi=Hom(A_2,A_1)$, $\Phi_2=Hom(B_2,B_1)$.

Через $F=F(X)$ обозначим свободную полугруппу, порожденную некоторым множеством X. Возьмем $u=u(x_1,\dots,x_n)\in KF^1$, где $x_1, \dots, x_n \in X \cdot u(x_1, \dots, x_n) =$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, \ \alpha_{i_1, \dots, i_k} \in K.$$

Вычислим $u(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, если $\gamma_i = (\sigma_{1i}, \varphi_{in}, \psi_i, \varphi_{2i}, \sigma_{2i})$, $i = \overline{1,n}$, $\gamma_i \in \Gamma^1$. Проектирования $\alpha: \Gamma \to \Sigma_1$, $d_1: \Gamma \to \Phi_1$, $\delta: \Gamma \to \Psi$, $d_2: \Gamma \to \Phi_2$, $\beta: \Gamma \to \Sigma_2$ можно продолжить до гомоморфизмов $\alpha: \Gamma^1 \to \Sigma_1^1$, $\beta: \Gamma^1 \to \Sigma_2^1$, $d_1: \Gamma^1 \to \Phi_1$, $d_2: \Gamma^1 \to \Phi_2$ естественно, полагая, что $d_1 1 = 0$ и $d_2 1 = 0$.

Индукцией по n легко проверяются формулы, аналогичные правилу дифференцирования произведения:

$$d_1(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \sum_i \gamma_1 \cdots \gamma_{i-1} \circ d_1 \gamma_i \circ \gamma_{i+1} \cdots \gamma_n ;$$

$$d_2(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \sum_i \gamma_1 \cdots \gamma_{i-1} \circ d_2 \gamma_i \circ \gamma_{i+1} \cdots \gamma_n ;$$

$$\delta(\gamma_1 \cdots \gamma_n) = \sum_i \gamma_1 \cdots \gamma_{i-1} \circ \delta \gamma_i \circ \gamma_{i+1} \cdots \gamma_n + \sum_i \gamma_1 \cdots \gamma_{i-1} \circ d_1 \gamma_i * \gamma_{i+1} \cdots \gamma_n +$$
$$+ \sum_i \gamma_1 \cdots \gamma_{i-1} * d_2 \gamma_i \circ \gamma_{i+1} \cdots \gamma_n .$$

Теперь расшифруем элемент $u(\gamma_1 \cdots \gamma_n) \in K\Gamma^1$.

$$\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_k}=\left(\sigma_{1i_1}\cdots\sigma_{1i_k},\ d_1(\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_k}),\ \delta(\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_k}),\ d_2(\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_k}),\ \sigma_{2i_1}\cdots\sigma_{2i_k}\right).$$

$$u(\gamma_1\cdots\gamma_n)=$$

$$=\Big(u(\sigma_{11}\cdots\sigma_{1n}),\sum_{i_1,\dots,i_n}\alpha_{i_1,\dots,i_k}d_1(\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_k}),\sum_{i_1,\dots,i_n}\alpha_{i_1,\dots,i_k}\delta(\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_k}),\sum_{i_1,\dots,i_k}\alpha_{i_1,\dots,i_k}d_2(\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_k}),u(\sigma_{21}\cdots\sigma_{2n})\Big).$$

Замечание. Аналогично можно получить вид элемента

$v(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in K\Gamma$, если $v(x_1,\dots,x_n)=\sum\limits_{i_1\cdots i_n}\beta_{i_1\cdots i_k}x_{i_1}\cdots x_{i_k}\in KF$.

Пусть, далее $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$, $b_1\in B_1$, $b_2\in B_2$, $u(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in K\Gamma^1$.

Тогда $a_1+a_2\circ u(\gamma_1,\dots,\gamma_n)=a_1\circ u(\sigma_{11},\dots,\sigma_{1n})+\sum\limits_{i_1,\dots,i_n}\alpha_{i_1,\dots,i_k}a_2d_1(\gamma_1,\dots,\gamma_{i_k})+$

$+a_2\circ u(\sigma_{21},\dots,\sigma_{2n})$;

$$(b_1+b_2)\circ u(\gamma_1,\dots,\gamma_n)=b_1\circ u(\sigma_{11},\dots,\sigma_{1n})+\sum_{i_1,\dots,i_n}\alpha_{i_1,\dots,i_k}b_2d_2(\gamma_i,\dots,\gamma_{i_k})+$$

$$+b_2\circ u(\sigma_{21},\dots,\sigma_{2n}).$$

Пусть $v(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in K\Gamma$, тогда $(a_1+a_2)*v(\gamma_1,\dots,\gamma_n)=$

$$=a_1*v(\sigma_{11},\dots,\sigma_{1n})+\sum\beta_{i_1,\dots,i_k}a_2\delta(\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_k})+a_2*v(\sigma_{21},\dots,\sigma_{2n}).$$

I. Допустим, что $u=u(x_1,\dots,x_n)\in U_1'\cap U_1''$, где кортеж (U_1',V',U_2') соответствует многообразию $\mathfrak{X}_1$, а (U_1'',V'',U_2'') соответствует многообразию $\mathfrak{X}_2$. Следовательно, в $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ выполняется битождество $Z\circ U\equiv 0$. Отсюда имеем $a\circ u(\gamma_1,\dots,\gamma_n)=\sum\alpha_{i_1,\dots,i_k}a_2 d_1(\gamma_{i_1},\dots,\gamma_{i_k})$.

Расшифруем $d_1(\gamma_{i_1},\dots,\gamma_{i_k})$.

$$d_1(\gamma_{i_1},\dots,\gamma_{i_k})=\sum_j \nu_{i_1},\dots,\gamma_{i_{j-1}}\circ d_1\gamma_{i_j}\circ\gamma_{i_{j+1}},\dots,\gamma_{i_n}=$$

$$=\sum_j 6_{2i_1},\dots,6_{2i_{j-1}}\circ\varphi_{1i_j}\circ 6_{i_{j+1}},\dots,6_{1i_n}.$$

Тогда

$$a\circ u(\gamma_1,\dots,\gamma_n)=\sum\sum\alpha_{i_1,\dots,i_k}\left(\left(\left(a_2\circ 6_{2i_1},\dots,6_{2i_{j-1}}\right)\varphi_{1i_j}\right)\circ 6_{1i_{j+1}},\dots,6_{1i_n}\right.$$

2. Пусть $v=v(x_1,\dots,x_n)\in V'\cap V''$. Тогда в $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ выполняется битождество $Z*v\equiv 0$. Отсюда

$$a*v(\gamma_1,\dots,\gamma_n)=\sum\beta_{i_1,\dots,i_k}a_2\delta(\gamma_{i_1},\dots,\gamma_{i_k})=$$

$$=\sum\sum\beta_{i_1,\dots,i_k}\left(\left(\left(a_2\circ 6_{2i_1},\dots,6_{2i_{j-1}}\right)\varphi_{ij}\right)\circ 6_{1i_{j+1}},\dots,6_{1i_n}\right)+$$

$$+\sum\sum\beta_{i_1,\dots,i_k}\left(\left(\left(a_2\circ 6_{2i_1},\dots,6_{2i_{j-1}}\right)\varphi_{1i_j}\right)*6_{1i_{j+1}},\dots,6_{1i_n}\right)+$$

$$+\sum\sum\beta_{i_1,\dots,i_k}\left(\left(\left(a_2*6_{2i_1},\dots,6_{2i_{j-1}}\right)\varphi_{2i_j}\right)\circ 6_{1i_{j+1}},\dots,6_{1i_n}\right).$$

3. Пусть $u=u(x_1,\dots,x_n)\in U_2'\cap U_2''$. Тогда в $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ имеет место битождество $y\circ u_2\equiv 0$. Следовательно

$$b\circ u(\gamma_1,\dots,\gamma_n)=\sum\alpha_{i_1,\dots,i_k}\, b_2 d_2(\gamma_{i_1},\dots,\gamma_{i_k})=$$

$$=\sum\sum\alpha_{i_1,\dots,i_k}\left(\left(\left(b_2\circ\sigma_{2i_1},\dots,\sigma_{2i_{j-1}}\right)\varphi_{2i_j}\right)\circ\sigma_{1i_{j+1}},\dots,\sigma_{1i_n}\right).$$

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{X}_1=\mathrm{Var}(A_1,\Sigma_1,B_1)$, $\mathfrak{X}_2=\mathrm{Var}\,\Theta$, где Θ -некоторый класс биавтоматов. Если $\Theta=\mathcal{D}_0\Theta$, то

$$\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2=\mathrm{Var}\left[(A_1,\Sigma_1,B_1)\nabla\Theta\right].$$

Доказательство. Пусть (G_1,F,G_2) - циклический свободный биавтомат в $\mathfrak{X}_2$. Тогда по лемме 2 треугольное произведение $(A_1,\Sigma_1,B_1)\dot\nabla(G_1,F,G_2)$ порождает $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$. Следовательно, любое из битождеств $z\circ u\equiv 0$, $z*v\equiv 0$, $y\circ u\equiv 0$, имеющее место в $(A_1,\Sigma_1,B_1)\nabla(G_1,F,G_2)$, выполняется и в биавтоматах $(A_1,\Sigma_1,B_1)\dot\nabla(A_2,\Sigma_2,B_2)$ для всякого $(A_2,\Sigma_2,B_2)\in\mathfrak{X}_2$.

I. Проверим, что если $z\circ u\equiv 0$ не является битождеством в $(A_1,\Sigma_1,B_1)\dot\nabla(G_1,F,G_2)$, то оно не выполняется и в некотором $(A_1,\Sigma_1,B_1)\dot\nabla(A_2,\Sigma_2,B_2)$ с $(A_2,\Sigma_2,B_2)\in\mathfrak{X}_2$. Можно считать, что $u\in U_1'\cap U_1''$.

По условию для некоторого $g \in A_1 \oplus G_1$, $g = a_1 + g_1$, $a_1 \in A_1$, $g_1 \in G_1$, $\gamma_i \in \Gamma^1$, где $\Gamma = \Sigma_1 \times \overline{\Phi}_1 \times \overline{\Psi} \times \overline{\Phi}_2 \times \Sigma_2$, $\overline{\Phi}_1 = Hom(G_1, A_1)$, $\overline{\Psi} = Hom(G_1, B_1)$, $\overline{\Phi}_2 = Hom(G_2, G_1)$, имеем $g \circ u(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \neq 0$.

$$g \circ u(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) = \sum \sum \alpha_{i_1 \cdots i_k} \left(\left(\left(g \circ 6_{2i_1} \cdots, 6_{2i_{j-1}} \right) \varphi_{1i_j} \right) \circ 6_{1i_{j+1}}, \cdots, 6_{1i_n} \right),$$

$6_{1i_j} \in \Sigma_1$, $6_{2i_j} \in \Sigma_2$, $\alpha_{i_1 \cdots i_k} \in K$, $\varphi_{1i_j} \in \overline{\Phi}_1$.

Пусть V_1 – линейная оболочка в G_1 конечного множества $\{g_1 \circ 6_{2i_1} \cdots 6_{2i_{j-1}}\}$. По лемме 3 в $\Theta = \mathcal{D}_0 \Theta$ можно так подобрать (A_2, Σ_2, B_2) с гомоморфизмом $\mu: (G_1, F, G_2) \to (A_2, \Sigma_2, B_2)$, чтобы $(g_1 \circ 6_{2i_1} \cdots 6_{2i_{j-1}})^\mu$ били линейно независимы, т.е. совпадали размерности V_1 и $A' = V_1^\mu$. Возьмем гомоморфизм $\nu: A_2 \to G_1$, обратный μ на A' и вне A' определенный произвольным образом. Пусть $\varphi'_{1i_j} = \nu \varphi_{1i_j}$, $\varphi'_{1i_j} \in Hom(A_2, A_1)$.

Тогда $(g_1 \circ 6_{2i_1} \cdots 6_{2i_{j-1}})^\mu \varphi'_{1i_j} = (g_1 \circ 6_{2i_1} \cdots 6_{2i_{j-1}})^{\mu\nu} \varphi_{1i_j} = (g_1 \circ 6_{2i_1} \cdots 6_{2i_{j-1}}) \varphi_{1i_j}$.

Пусть $g_1^\mu = a_2$, $a = a_1 + a_2 \in A_1 \oplus A_2$, $6_{2i}^\mu = \lambda_{2i} \in \Sigma_2$,

$\tau_i = (\sigma_{1i}, \varphi'_{1i}, 0, 0, \lambda_{2i})$.

Тогда $a \circ u(\tau_1, \cdots, \tau_n) = g \circ u(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \neq 0$.

2. Так же можно показать, что если $y \circ u \equiv 0$ не выполняется в $(A_1, \Sigma_1, B_1) \nabla (G_1, F, G_2)$, то оно не выполняется и в некотором $(A_1, \Sigma_1, B_1) \nabla (A_2, \Sigma_2, B_2)$, где $(A_2, \Sigma_2, B_2) \in \mathfrak{X}_2$.

3. Возьмем битождество $z * v \equiv 0$, не выполняющееся в $(A_1, \Sigma_1, B_1) \nabla (G_1, F, G_2)$, $v \in V' \Pi V''$. Тогда для некоторого $g \in A_1 \oplus G_1$, $g = a_1 + g_1$, $a_1 \in A_1$, $g_1 \in G_1$, $\gamma_i \in \Gamma$,

$$\Gamma = \Sigma_1 \times \bar{\Phi}_1 \times \bar{\Psi} \times \bar{\Phi}_2 \times F$$

имеем: $g * v(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \neq 0$.

$$g * v(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) = \sum\sum \beta_{i_1, \cdots, i_k} \left(\left(\left(g_1 \circ \sigma_{2i_1} \cdots \sigma_{2i_{j-1}} \right) \psi_{ij} \right) \circ \sigma_{1i_{j+1}} \cdots \sigma_{1i_n} \right) +$$

$$+ \sum\sum \beta_{i_1, \cdots, i_k} \left(\left(\left(g_1 \circ \sigma_{2i_1} \cdots \sigma_{2i_{j-1}} \right) \varphi_{1i_j} \right) * \sigma_{1i_{j+1}} \cdots \sigma_{1i_n} \right) +$$

$$+ \sum\sum \beta_{i_1, \cdots, i_k} \left(\left(\left(g_1 * \sigma_{2i_1} \cdots \sigma_{2i_{j-1}} \right) \varphi_{2i_j} \right) \circ \sigma_{2i_{j+1}} \cdots \sigma_{1i_n} \right).$$

По лемме 3 в $\Theta = \mathcal{D}_0 \Theta$ существует такой биавтомат (A_2, Σ_2, B_2) с гомоморфизмом $\mu : (G_1, F, G_2) \to (A_2, \Sigma_2, B_2)$, что системы $\left(g_1 \circ \sigma_{2i_1} \cdots \sigma_{2i_{j-1}}\right)^{\mu}$ и $\left(g_1 * \sigma_{2i_1} \cdots \sigma_{2i_{j-1}}\right)^{\mu}$ останутся линейно независимыми.

Обозначим через V_1 линейную оболочку множества $\{g_1 \circ \sigma_{2i_1} \cdots \sigma_{2i_{j-1}}\}$ и через V_2 - множества $\{g_1 * \sigma_{2i_1} \cdots \sigma_{2i_{j-1}}\}$.

Возьмем гомоморфизм $\nu_1 : A_2 \to G_1$ и $\nu_2 : B_2 \to G_2$, где

ν_1 - обратный μ на $V_1^{\mu} = A'$ и ν_2 - обратный μ на $V_2^{\mu} = B'$.

Пусть $\varphi'_{1i_j} = \nu_1 \varphi_{1i_j}$, $\varphi'_{2ij} = \nu_2 \varphi_{2ij}$, $\psi'_{ij} = \nu_1 \psi_{ij}$. Тогда $\varphi'_{1i_j} \in Hom(A_2, A_1)$, $\varphi'_{2ij} \in Hom(B_2, B_1)$, $\psi_{ij} \in Hom(A_2, B_1)$

Пусть $g_1^{\mu} = a_2$, $a = a_1 + a_2 \in A_1 \oplus A_2$, $\sigma_{2i}^{\mu} = \lambda_{2i} \in \Sigma_2$,

$\tau_i = (\sigma_{1i}, \varphi'_{1i}, \psi'_i, \varphi'_{2i}, \lambda_{2i})$, тогда $a * v(\tau_1, \cdots, \tau_n) =$ $= g * v(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \neq 0$.

Следовательно, $(A_1, \Sigma_1, B_1) \nabla \theta$ порождает $\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2$.

Дальше мы сможем убедиться, что условие $\theta = \mathcal{D}_0 \theta$ несущественно.

Лемма 5. Пусть $\mathfrak{X}_1 = Var(A_1, \Sigma_1, B_1)$ и θ - произвольный класс биавтоматов. Тогда $\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 = Var\,[(A_1, \Sigma_1, B_1) \nabla \theta]$.

Доказательство. Пусть $\theta' = \mathcal{D}_0\theta$, $\mathfrak{X} = Var\,[(A_1, \Sigma_1, B_1)\nabla\theta]$ и $\mathfrak{X}_2 = Var\,\theta = Var\,\theta'$. По лемме 4 $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ порождается классом $(A_1, \Sigma_1, B_1)\nabla\theta'$. Ясно, что $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$. Проверим обратное включение.

Пусть $(A, \Gamma, B) = (A_1, \Sigma_1, B_1)\nabla(A_2, \Sigma_2, B_2)$, где $(A_2, \Sigma_2, B_2) \in \theta'$. Тогда существует такой конечный набор биавтоматов $(A_{2i}, \Sigma_{2i}, B_{2i}) \in \theta$, $i \in I$, что $(A_2, \Sigma_2, B_2) = \prod\limits_{i\in I}(A_{2i}, \Sigma_{2i}, B_{2i}) \in \mathcal{D}_0\theta$.

Нетрудно проверить, что тройки $(A_1 \oplus A_{2i}, \Gamma, B_1 \oplus B_{2i})$ являются биавтоматами для всех $i \in I$.

Существуют эпиморфизмы по входам:

$$\mu_i : (A_1 \oplus A_{2i}, \Gamma, B_1 \oplus B_{2i}) \twoheadrightarrow (A_1, \Sigma_1, B_1)\nabla(A_{2i}, \Sigma_{2i}, B_{2i}) = (A_i', \Gamma_i, B_i').$$

Здесь $(A_i', \Gamma_i, B_i') \in \mathfrak{X}$, отсюда $(A_1 \oplus A_{2i}, \Gamma, B_1 \oplus B_{2i}) \in \mathfrak{X}$.

(A, Γ, B) порождается биавтоматами $(A_1 \oplus A_{2i}, \Gamma, B_1 \oplus B_{2i})$ по всем $i \in I$. Так как $\mathfrak{X}$ – многообразие, а, следовательно, и радикальный класс, то $(A, \Gamma, B) \in \mathfrak{X}$. Отсюда $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 \subset \mathfrak{X}$.

что и дает $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$.

Доказательство теоремы 3. Пусть точный биавтомат (A_1,Σ_1,B_1) порождает $\mathfrak{X}_1$. Тогда $(A_1,\Sigma_1,B_1)\nabla\Theta_2$ порождает $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$. $\mathfrak{X}_1=\operatorname{Var}\Theta_1$, поэтому $(A_1,\Sigma_1,B_1)\in QSC\Theta_1$. Это означает, что существует набор биавтоматов $(A_{1i},\Sigma_{1i},B_{1i})\in\Theta_1$ $i\in I$, в декартовом произведении которых (A,Σ,B) содержится подавтомат (A',Σ',B'), который эпиморфно отображается на (A_1,Σ_1,B_1). Если $\mathfrak{X}=\operatorname{Var}(\Theta_1\nabla\Theta_2)$ и $(G,\Gamma,L)\in\Theta_2$, то существует вложение:

$$(A,\Sigma,B)\nabla(G,\Gamma,L)\longrightarrow\prod_{i\in I}\left[(A_{1i},\Sigma_{1i},B_{1i})\nabla(G,\Gamma,L)\right]\in\mathfrak{X}.$$

Отсюда $(A,\Sigma,B)\nabla(G,\Gamma,L)\in\mathfrak{X}$. Так как $(A',\Sigma',B')\subset(A,\Sigma,B)$, то $(A',\Sigma',B')\nabla(G,\Gamma,L)\in\mathfrak{X}$ по предложение 5. Но $(A',\Sigma',B')\nabla(G,\Gamma,L)$ эпиморфно отображается на $(A_1,\Sigma_1,B_1)\nabla(G,\Gamma,L)$, следовательно, $(A_1,\Sigma_1,B_1)\nabla(G,\Gamma,L)\in\mathfrak{X}$. Отсюда $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\subset\mathfrak{X}$.

По предложению I $\Theta_1\nabla\Theta_2\subset\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$. Следовательно,

$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$. Теорема доказана.

Поступила 25.Х.1980.

Рижский Краснознаменный институт инженеров гражданской авиации, г.Рига

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.И.Плоткин. В настоящем сборнике.
2. Б.И.Плоткин. Латвийский математический ежегодник, т.19, Рига, "Зинатне", 143-169, 1976.
3. Б.И.Плоткин. УМН, т.32, вып.5, 3-68, 1977.
4. Б.И.Плоткин, СМЖ, т.13, вып.5, 1030-1053, 1972.
5. Б.И.Плоткин, Ц.Е.Дидидзе, Е.М.Кубланова. ДАН, вып.6, 537-541, 1975.
6. Ц.Е.Дидидзе. Вопросы вычислительной математики. Труды ВЦ АН ГССР, т.12, вып.1, Тбилиси, "Мецниереба", 118-131, 1973.
7. И.Н.Перанидзе. В настоящем сборнике.
8. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп. Под редакцией М.Арбиба. М., "Статистика", 1975.
9. I.Higgins. "Math. Nachrichten", 27, N 1-2. p. N 5-132, 1963.

მ.გობეჩია

ბიავტომატის მრავალსახეობები

რეზიუმე

ავტომატებისაგან განსხვავებით ბიავტომატებში შემავალი სიგნალები გარდაქმნის არა მარტო მდგომარეობებს, არამედ გამომავალ სიგნალებსაც - გარე მდგომარეობებს. განიხილება მხოლოდ წრფივი ნახევარჯგუფური ბიავტომატები. შემოტანილია სამკუთხა ნამრავლის კონსტრუქცია, ბიავტომატების მრავალსახეობის ცნება და მრავალსახეობათა გამრავლება.

განიხილება მრავალსახეობათა ნამრავლის კავშირი ბიავტომატების სამკუთხა ნამრავლთან.

M.Gobechia

THE VARIETES OF BIAUTOMATA

Summary

Unlike automata, the input signals of biautomata transform not only states bu output signals or external states as well. Only linear, semigroup biautomata are considered. A triangular product design, the concept of variety of biautomata, and multiplication of varieties are introduced. The relation of the product of varietes to the triangular product of biautomata is considered.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

225, 1981

УДК 512.7

ТРЕУГОЛЬНОЕ УМНОЖЕНИЕ В ТЕОРИИ БИАВТОМАТОВ

И.Н.Перанидзе

В статье доказывается теорема о вложении в треугольное произведение для биавтоматов и рассматриваются тождества универсальных биавтоматов. Определения приводятся в основном следуя работе Б.И.Плоткина /I/.

I. Биавтоматы. Каждой паре модулей A, B над некоторым кольцом K сопоставим полугруппу $\nabla(A,B)$ на декартовом произведении $\mathrm{End}\,A \times \mathrm{Hom}(A,B) \times \mathrm{End}\,B$ с умножением

$$(\sigma_1', \varphi_1', \sigma_2')(\sigma_1'', \varphi_1'', \sigma_2'') = (\sigma_1'\sigma_1'', \sigma_1'\varphi_1'' + \varphi_1'\sigma_2'', \sigma_2'\sigma_2''),$$

$(\sigma_1', \sigma_1'' \in \mathrm{End}\,A;\ \varphi_1', \varphi_1'' \in \mathrm{Hom}(A,B);\ \sigma_2', \sigma_2'' \in \mathrm{End}\,B)$. Биавтоматом над K назовем тройку $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$, в которой A и B - модули над K и Γ - полугруппа, для которой задано представление $\nu=(\alpha,\delta,\beta):\Gamma\longrightarrow\nabla(A,B)$, здесь $\alpha:\Gamma\to End A$ и $\beta:\Gamma\longrightarrow End B$ гомоморфизмы, $\delta:\Gamma\to Hom(A,B)$ дифференцирование являются соответствующими проекциями ν. ν называется биавтоматным представлением полугруппы Γ.

Задание биавтомата (A,Γ,B) над K равносильно заданию трех операций $\circ: A\times\Gamma\to A$, $*: A\times\Gamma\to B$, $\circ: B\times\Gamma\to B$, для которых отображения $a\longmapsto a\circ\gamma$, $a\longmapsto a*\gamma$, $b\longmapsto b\circ\gamma$ $(a\in A,\ b\in B)$ для всякого $\gamma\in\Gamma$ являются гомоморфизмами. Кроме этого выполняются соотношения: $a\circ\gamma_1\gamma_2=(a\circ\gamma_1)\circ\gamma_2$, $a*\gamma_1\gamma_2=(a\circ\gamma_1)*\gamma_2+(a*\gamma_1)\circ\gamma_2$, $b\circ\gamma_1\gamma_2=(b\circ\gamma_1)\circ\gamma_2$ $\quad(a\in A,\ b\in B,\ \gamma_1,\gamma_2\in\Gamma)$.

K - модуль A называется модулем состояний, B есть модуль внешних состояний - выходных сигналов, Γ - полу -

группа входных сигналов.

Если $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ и $\mathfrak{A}'=(A',\Gamma',B')$ - два биавтомата, то гомоморфизм $\mu:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{A}'$ - это тройка гомоморфизмов $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$, $\mu_1:A\to A'$, $\mu_2:\Gamma\to\Gamma'$, $\mu_3:B\to B'$, для которой выполнены условия $(a\circ\gamma)^{\mu_1}=a^{\mu_1}\circ\gamma^{\mu_2}$, $(a*\gamma)^{\mu_3}=a^{\mu_1}*\gamma^{\mu_2}$, $(b\circ\gamma)^{\mu_3}=b^{\mu_3}\circ\gamma^{\mu_2}$ $(a\in A,\ b\in B,\ \gamma\in\Gamma)$.

Можно определить гомоморфизмы биавтоматов по состояниям, по входам и выходным сигналам.

Биавтомат $\mathfrak{A}'=(A',\Gamma',B')$ есть подавтомат биавтомата $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$, если $A'\subset A$, $\Gamma'\subset\Gamma$, $B'\subset B$ и, кроме того, $a\circ\gamma\in A'$, $a*\gamma\in B'$, $b\circ\gamma\in B'$ для любых $a\in A'$, $b\in B'$, $\gamma\in\Gamma'$.

Естественно определяются фактор-автоматы.

Пусть $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ - биавтомат и $\nu:\Gamma\to\nabla(A,B)$ - биавтоматное представление. Ядерная конгруенция ρ этого гомоморфизма называется ядром данного биавтомата. Если ядро

ρ тривиально, то биавтомат называется точным. Всегда можно перейти к точному биавтомату $(A, \Gamma/\rho, B)$. Далее будем рассматривать биавтоматы над полем.

Определим треугольное умножение биавтоматов. Пусть даны биавтоматы $\mathfrak{A}_1 = (A_1, \Sigma_1, B_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (A_2, \Sigma_2, B_2)$. Возьмем $\Phi_1 = Hom(A_2, A_1)$, $\Psi = Hom(A_2, B_1)$ и $\Phi_2 = Hom(B_2, B_1)$. Φ_1, Ψ, Φ_2 рассматриваются как абелевы группы по сложению. Σ_1 действует в Φ_1, Φ_2 и Ψ справа по правилам: $a_2(\varphi_1 \circ \sigma_1) = (a_2\varphi_1)\circ\sigma_1$, $b_2(\varphi_2 \circ \sigma_1) = (b_2\varphi_2)\circ\sigma_1$, $a_2(\psi\circ\sigma_1) = (a_2\psi)\circ\sigma_1$. Σ_2 действует в Φ_1, Φ_2 и Ψ слева: $a_2(\sigma_2\circ\varphi_1) = (a_2\circ\sigma_2)\varphi_1$,

$b_2(\sigma_2\circ\varphi_2) = (b_2\circ\sigma_2)\varphi_2$, $\quad a_2(\sigma_2\circ\psi) = (a_2\circ\sigma_2)\psi$

для любых $a_2 \in A_2$, $b_2 \in B_2$, $\sigma_1 \in \Sigma_1$, $\sigma_2 \in \Sigma_2$, $\varphi_1 \in \Phi_1$, $\varphi_2 \in \Phi_2$, $\psi \in \Psi$.

Кроме того, для любых $\varphi_1 \in \Phi_1$, $\varphi_2 \in \Phi_2$, $\sigma_1 \in \Sigma_1$, $\sigma_2 \in \Sigma_2$ определены элементы $\varphi_1 * \sigma_1 \in \Psi$, $\sigma_2 * \varphi_2 \in \Psi$, действующие по правилам: $a_2(\varphi_1 * \sigma_1) = (a_2\varphi_1) * \sigma_1$, $a_2(\sigma_2 * \varphi_2) = (a_2 * \sigma_2)\varphi_2$

для каждого $a_2 \in A_2$. Все эти действия согласованы с линейными операциями в Φ_1, Φ_2 и Ψ. Проверяется, что $\varphi_1 * \sigma_1'\sigma_1'' =$

$$= (\varphi_1 \circ \sigma_1') * \sigma_1'' + (\varphi_1 * \sigma_1') \circ \sigma_1'', \quad \sigma_2'\sigma_2'' * \varphi = \sigma_2' \circ (\sigma_2'' * \varphi) + \sigma_2' * (\sigma_2'' \circ \varphi)$$

Рассмотрим теперь декартово произведение множеств $\Gamma = \Sigma_1 \times \Phi_1 \times \Psi \times \Phi_2 \times \Sigma_2$ и определим в Γ умножение по прави-

$$(\sigma_1', \varphi_1', \psi', \varphi_2', \sigma_2')(\sigma_1'', \varphi_1'', \psi'', \varphi_2'', \sigma_2'') =$$

$$= (\sigma_1'\sigma_1'', \varphi_1' \circ \sigma_1'' + \sigma_2' \circ \varphi_1'', \varphi_1' * \sigma_1'' + \sigma_2' * \varphi_2'' + \sigma_2' \circ \psi'' + \psi' \circ \sigma_1'', \varphi_2' \circ \sigma_1'' + \sigma_2' \circ \varphi_2'', \sigma_2'\sigma_2''),$$

$$(\sigma_1', \sigma_1'' \in \Sigma_1, \sigma_2', \sigma_2'' \in \Sigma_2, \varphi_1', \varphi_1'' \in \Phi_1, \varphi_2', \varphi_2'' \in \Phi_2, \psi', \psi'' \in \Psi).$$

Проверим ассоциативность этого умножения.

Пусть $\gamma_1 = (\sigma_1', \varphi_1', \psi', \varphi_2', \sigma_2')$, $\gamma_2 = (\sigma_1'', \varphi_1'', \psi'', \varphi_2'', \sigma_2'')$,

$$\gamma_3 = (\sigma_1''', \varphi_1''', \psi''', \varphi_2''', \sigma_2''').$$

$$(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3 = (\sigma_1'\sigma_1''\sigma_1''', (\varphi_1'\sigma_1'' + \sigma_2'\varphi_1'')\sigma_1''' + \sigma_2'\sigma_2''\varphi_1''', (\varphi_1'\sigma_1'' + \sigma_2'\varphi_1'') * \sigma_1''' +$$

$$+ \sigma_2'\sigma_2''\psi''' + \sigma_2'\sigma_2'' * \varphi_2''' + (\varphi_1' * \sigma_1'' + \sigma_2'\psi'' + \sigma_2' * \varphi_2'' + \psi'\sigma_1'')\sigma_1''', (\varphi_2'\sigma_1'' +$$

$$+\sigma_2'\varphi_2'')\sigma_1'''+\sigma_2'\sigma_2''\varphi_2''',\ \sigma_2'\sigma_2''\sigma_2''')=(\sigma_1'\sigma_1''\sigma_1''',\ \varphi_1'\sigma_1''\sigma_1'''+\sigma_2'\,(\varphi_1''\sigma_1'''+$$

$$+\sigma_2''\varphi_1'''),\ \varphi_1'*\sigma_1''\sigma_1'''+\sigma_2'(\varphi_1''*\sigma_1'''+\sigma_2''\psi'''+\sigma_2''*\varphi_2'''+\psi''\sigma_1''')+\sigma_2'*(\varphi_2''\sigma_1'''+$$

$$+\sigma_2^{*}\varphi_2''')+\psi'\sigma_1''\sigma_1''',\ \varphi_2'\sigma_1''\sigma_1'''+\sigma_2'\,(\varphi_2''\sigma_1'''+\sigma_2''\varphi_2'''),\ \sigma_2'\sigma_2''\sigma_2''')=\gamma_1(\gamma_2\gamma_3).$$

Получили, что Γ - полугруппа. Пусть, далее $A=A_1\oplus A_2$ и $B=B_1\oplus B_2$. Для любых $a=a_1+a_2$, $b=b_1+b_2$, $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$, $b_1\in B_1$, $b_2\in B_2$ и $\gamma=(\sigma_1,\varphi_1,\psi,\varphi_2,\sigma_2)\in\Gamma$ полагаем:

$$a\circ\gamma=a_1\circ\sigma_1+a_2\varphi_1+a_2\circ\sigma_2,$$

$$a*\gamma=a_1*\sigma_1+a_2\psi+a_2*\sigma_2,$$

$$b\circ\gamma=b_1\circ\sigma_1+b_2\varphi_2+b_2\circ\sigma_2.$$

Проверим аксиомы биавтомата и покажем, что здесь действительно возникает биавтомат.

$$a\circ\gamma_1\gamma_2=a_1\circ\sigma_1'\sigma_1''+a_2\,(\varphi_1'\sigma_1''+\sigma_2'\varphi_1'')+a_2\circ\sigma_2'\sigma_2''=$$

$$=a_1\circ\sigma_1'\sigma_1''+a_2\varphi_1'\sigma_1''+a_2\sigma_2'\varphi_1''+a_2\circ\sigma_2'\sigma_2''=$$

$$=(a_1\circ\sigma_1'+a_2\varphi_1')\circ\sigma_1''+(a_2\circ\sigma_2')\varphi_1''+(a_2\circ\sigma_2')\circ\sigma_2''=(a\circ\gamma_1)\circ\gamma_2.$$

$$b\circ\gamma_1\gamma_2=b_1\circ\sigma_1'\sigma_1''+b_2\,(\varphi_2'\sigma_1''+\sigma_2'\varphi_2'')+b_2\circ\sigma_2'\sigma_2''=$$

$$=b_1\circ\sigma_1'\sigma_1''+(b_2\varphi_2')\circ\sigma_1''+(b_2\circ\sigma_2')\varphi_2''+(b_2\circ\sigma_2')\circ\sigma_2''=$$

$$=(b_1\circ\sigma_1'+b_2\varphi_2')\circ\sigma_1''+(b_2\circ\sigma_2')\varphi_2''+(b_2\circ\sigma_2')\circ\sigma_2''=(b\circ\gamma_1)\circ\gamma_2$$

$$(a\circ\gamma_1)*\gamma_2+(a*\gamma_1)\circ\gamma_2=(a_1\circ\sigma_1'+a_2\varphi_1'+a_2\circ\sigma_2')*\gamma_2+(a_1*\sigma_1'+a_2\psi'+$$

$$+a_2*\sigma_2')*\gamma_2=(a_1\circ\sigma_1'+a_2\varphi_1')*\sigma_1'+(a_2\circ\sigma_2')\psi''+(a_2\circ\sigma_2')*\sigma_2''+$$

$$+(a_1*\sigma_1'+a_2\psi')\circ\sigma_1''+(a_2*\sigma_2')\varphi_2''+(a_2*\sigma_2')\circ\sigma_2''=$$

$$=(a_1\circ\sigma_1')*\sigma_1''+a_2(\varphi_1'*\sigma_1'')+a_2(\sigma_2'\psi'')+(a_2\circ\sigma_2')*\sigma_2''+$$

$$+(a_1*\sigma_1')\circ\sigma_1''+a_2(\psi'\sigma_1'')+(a_2*\sigma_2')\varphi_2''+(a_2*\sigma_2')\circ\sigma_2''=$$

$$=a_1*\sigma_1'\sigma_1''+a_2(\varphi_1'*\sigma_1''+\sigma_2'\psi''+\psi'\sigma_1''+\sigma_2'*\varphi_2'')+a_2*\sigma_2'\sigma_2''=$$

$$=a*\gamma_1\gamma_2.$$

Биавтомат $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ называется треугольным произведением автоматов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ и обозначается через $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\nabla\mathfrak{A}_2$.

Далее вместо подбиавтомата и факторбиавтомата будем говорить подавтомат и факторавтомат.

2. Теорема о вложении в треугольное произведение.

Пусть $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ - точный биавтомат. В таком случае полугруппу Γ можно трактовать как подполугруппу $\nabla(A,B)=$ $=End A\times Hom(A,B)\times End B$. Пусть A_1 и B_1 - инвариантные относительно подпространства в A и B и $B_1\supset A_1*\Gamma$

Имеем подавтомат (A_1, Γ, B_1) и факторавтомат $(A/A_1, \Gamma, B/B_1)$ и соответствующие точные биавтоматы $\mathfrak{A}_1 = (A_1, \Gamma_1, B_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (A/A_1, \Gamma_2, B/B_1)$. Этим биавтоматам отвечают гомоморфизмы $\Gamma_1 \to \nabla(A_1, B_1)$ и $\Gamma_2 \to \nabla(A/A_1, B/B_1)$, являющиеся мономорфизмами.

Теорема. Биавтомат $\mathfrak{A}$ может быть вложен в качестве подавтомата в треугольное произведение $\mathfrak{A}_1 \nabla \mathfrak{A}_2$.

Доказательство. Пусть A_2 и B_2 – некоторые дополнения для A_1 и B_1 в A и B : $A = A_1 \oplus A_2$ и $B = B_1 \oplus B_2$. Действия полугруппы Γ_2 в A/A_1 и B/B_1 перенесем на A_2 и B_2.

Пусть $\nu_1 : A = A_1 \oplus A_2 \to A/A_1$ – естественный гомоморфизм и $\nu_2 : A \to A_2$ – проектирование. ν_1 индуцирует изоморфизм $\nu_1 : A_2 \to A/A_1$ и в этом смысле будем понимать $\nu_1^{-1} : A/A_1 \to A_2$. Для любого $a \in A$ имеем $(a^{\nu_1})^{\nu_1^{-1}} = a^{\nu_2}$.

Если, далее $a_2 \in A_2$ и $\sigma_2 \in \Gamma_2$, то положим

$a_2 \circ \sigma_2 = \left(a_2^{\nu_1} \circ \sigma_2\right)^{\nu_1^{-1}}$

Возьмем также естественный гомоморфизм $\nu_3 : B \to B/B_1$. ν_3 индицирует изоморфизм $\nu_3 : B_2 \to B/B_1$. Возьмем обратное отображение: $\nu_3^{-1} : B/B_1 \to B_2$. Положим $a_2 * \sigma_2 = \left(a_2^{\nu_1} * \sigma_2\right)^{\nu_3}$,

$b_2 \circ \sigma_2 = \left(b_2^{\nu_3} \circ \sigma_2\right)^{\nu_3^{-1}}$ для любого $b_2 \in E_2$. ν_1 и ν_3 дают изоморфизм биавтоматов $(A_2, \Gamma_2, B_2) \longrightarrow (A/A_1, \Gamma_2, B/B_1)$.

Вложим теперь Γ_1 и Γ_2 в $\nabla(A,B)$. Элементу $\gamma_1 = (\sigma_1, \tau_1, \eta_1) \in \Gamma_1$, где $\sigma_1 \in End\,A_1$, $\tau_1 \in Hom(A_1, B_1)$, $\eta_1 \in End\,B_1$, сопоставим $\bar{\gamma}_1 = (\bar{\sigma}_1, \bar{\tau}_1, \bar{\eta}_1) \in \nabla(A,B)$ следующим образом:

$\bar{\sigma}_1$ действует в A_1 как σ_1, в A_2 – как единица, $\bar{\tau}_1$ в A_1 – как τ_1 и в A_2 – как нуль, $\bar{\eta}_1$ действует в B_1 как η_1 и в B_2 – как единица. Элементу $\gamma_2 = (\sigma_2, \tau_2, \eta_2) \in \Gamma_2$, где $\sigma_2 \in End\,A_2$, $\tau \in Hom(A_2, B_2)$, $\eta_2 \in End\,B_2$ сопоставим $\bar{\gamma}_2 = (\bar{\sigma}_2, \bar{\tau}_2, \bar{\eta}_2) \in \nabla(A,B)$ следующим образом:

$\overline{\sigma}_2$ действует в A_2 как σ_2, в A_1 – как единица, $\overline{\tau}_2$ в A_2 – как τ_2 и в A_1 – как нуль, $\overline{\eta}_2$ действует в B_2 как η_2 и в B_1 – как единица. Так приходим к полугруппам $\overline{\Gamma}_1$ и $\overline{\Gamma}_2$, лежащим в $\nabla(A,B)$ и изоморфным соответственно Γ_1 и Γ_2.

Каждому $\varphi_1 \in Hom(A_2, A_1)$ сопоставим $\overline{\varphi}_1 \in End\,A$ следующим образом: $\overline{\varphi}_1$ действует в A_2 как φ_1 и в A_1 – как нуль.

Каждому $\varphi \in Hom(A_2, B_1)$ сопоставим $\overline{\varphi} \in Hom(A,B)$. $\overline{\varphi}$ действует в A_2 как φ и в A_1 – как нуль.

Элементу $\varphi_2 \in Hom(B_2, B_1)$ сопоставим $\overline{\varphi}_2 \in End\,B$ таким образом: $\overline{\varphi}_2$ действует в B_2 как φ_2 и в B_1 – как нуль.

Обозначим через Γ множество элементов в $\nabla(A,B)$ вида $\gamma = (\overline{\sigma}_1\overline{\sigma}_2 + \overline{\varphi}_1,\ \overline{\tau}_1 + \overline{\varphi} + \overline{\tau}_2,\ \overline{\eta}_1\overline{\eta}_2 + \overline{\varphi}_2)$, где $(\overline{\sigma}_1, \overline{\tau}_1, \overline{\eta}_1) \in \overline{\Gamma}_1$, $(\overline{\sigma}_2, \overline{\tau}_2, \overline{\eta}_2) \in \overline{\Gamma}_2$, $\overline{\varphi}_1 \in End\,A$, $\overline{\varphi} \in Hom(A,B)$ и $\overline{\varphi}_2 \in End\,B$.

Проверим, что Γ' – полугруппа. Пусть

$$\gamma_1 = \left(\bar{\sigma}_1'\bar{\sigma}_2' + \bar{\varphi}_1',\ \bar{\tau}_1' + \bar{\psi}' + \bar{\tau}_2',\ \bar{\eta}_1'\bar{\eta}_2' + \bar{\varphi}_2'\right)$$

и

$$\gamma_2 = \left(\bar{\sigma}_1''\bar{\sigma}_2'' + \bar{\varphi}_1'',\ \bar{\tau}_1'' + \bar{\psi}'' + \bar{\tau}_2'',\ \bar{\eta}_1''\bar{\eta}_2'' + \bar{\varphi}_2''\right);$$

$$\gamma_1\gamma_2 = \Big(\left(\bar{\sigma}_1'\bar{\sigma}_2' + \bar{\varphi}_1'\right)\left(\bar{\sigma}_1''\bar{\sigma}_2'' + \bar{\varphi}_1''\right), \left(\bar{\sigma}_1'\bar{\sigma}_2' + \bar{\varphi}_1'\right)\left(\bar{\tau}_1'' + \bar{\psi}'' + \bar{\tau}_2''\right) +$$

$$+ \left(\bar{\tau}_1' + \bar{\psi}' + \bar{\tau}_2'\right)\left(\bar{\eta}_1''\bar{\eta}_2'' + \bar{\varphi}_2''\right), \left(\bar{\eta}_1'\bar{\eta}_2' + \bar{\varphi}_2'\right)\left(\bar{\eta}_1''\bar{\eta}_2'' + \bar{\varphi}_2''\right)\Big) =$$

$$= \Big(\bar{\sigma}_1'\bar{\sigma}_2'\bar{\sigma}_1''\bar{\sigma}_2'' + \bar{\varphi}_1'\bar{\sigma}_1''\bar{\sigma}_2'' + \bar{\sigma}_1'\bar{\sigma}_2'\bar{\varphi}_1'' + \bar{\varphi}_1'\bar{\varphi}_1'',\ \bar{\sigma}_1'\bar{\sigma}_2'\bar{\tau}_1'' + \bar{\varphi}_1'\bar{\tau}_1'' +$$

$$+ \bar{\sigma}_1'\bar{\sigma}_2'\bar{\psi}'' + \bar{\varphi}_1'\bar{\psi}'' + \bar{\sigma}_1'\bar{\sigma}_2'\bar{\tau}_2'' + \bar{\varphi}_1'\bar{\tau}_2'' + \bar{\tau}_1'\bar{\eta}_1''\bar{\eta}_2'' + \bar{\psi}'\bar{\eta}_1''\bar{\eta}_2'' +$$

$$+ \bar{\tau}_2'\bar{\eta}_1''\bar{\eta}_2'' + \bar{\tau}_1'\bar{\varphi}_2'' + \bar{\psi}'\bar{\varphi}_2'' + \bar{\tau}_2'\bar{\varphi}_2'',\ \bar{\eta}_1'\bar{\eta}_1''\bar{\eta}_2'\bar{\eta}_2'' + \bar{\varphi}_2'\bar{\eta}_1''\bar{\eta}_2'' +$$

$$+ \bar{\eta}_1'\bar{\eta}_2'\bar{\varphi}_2'' + \bar{\varphi}_2'\bar{\varphi}_2''\Big).$$

Очевидно, что $\bar{\varphi}_1'\bar{\varphi}_1''$, $\bar{\varphi}_1'\bar{\psi}''$, $\bar{\varphi}_1'\bar{\tau}_2''$ действуют, как нуль в A и $\bar{\tau}_1'\bar{\varphi}_2''$, $\bar{\psi}'\bar{\varphi}_2''$, $\bar{\varphi}_2'\bar{\varphi}_2''$ действуют как нуль в B. Легко проверяется, что элемент $\bar{\sigma}_1'\bar{\sigma}_2'\bar{\tau}_1'' + \bar{\tau}_1'\bar{\eta}_1''\bar{\eta}_2''$ действует как некоторый элемент типа $\bar{\tau}_1 \in Hom(A,B)$, элемент $\bar{\sigma}_1'\bar{\sigma}_2'\bar{\psi}'' + \bar{\psi}'\bar{\eta}_1''\bar{\eta}_2'' + \bar{\varphi}_1'\bar{\tau}_1'' + \bar{\tau}_2'\bar{\varphi}_2''$ – как некоторый элемент типа $\bar{\varphi} \in Hom(A,B)$, элемент $\bar{\sigma}_1'\bar{\sigma}_2'\bar{\tau}_2''+$ $+\bar{\tau}_2'\bar{\eta}_1''\bar{\eta}_2''$ - как некоторый элемент типа $\bar{\tau}_2 \in Hom(A,B)$ элемент $\bar{\varphi}_1'\bar{\sigma}_1''\bar{\sigma}_2''+\bar{\sigma}_1'\bar{\sigma}_2'\bar{\varphi}_1''$ - как некоторый элемент типа $\bar{\varphi}_1 \in End A$ и элемент $\bar{\varphi}_2'\bar{\eta}_1''\bar{\eta}_2''+\bar{\eta}_1'\bar{\eta}_2'\bar{\varphi}_2''$ - как некоторый элемент типа $\bar{\varphi}_2 \in End B$. Отсюда $\gamma_1\gamma_2 \in \Gamma'$

Итак получили, что Γ' - полугруппа.

Пусть $(A_1, \Gamma_1, B_1) \nabla (A_2, \Gamma_2, B_2) = (A, \Gamma'', B)$. Полугруппа Γ'' определяется на декартовом произведении $\Gamma_1 \times Hom(A_2, A_1) \times$ $\times Hom(A_2, B_1) \times Hom(B_2, B_1) \times \Gamma_2$. Каждому элементу $(\gamma_1, \varphi_1, \psi, \varphi_2, \gamma_2) =$ $=((\sigma_1, \tau_1, \eta_1), \varphi_1, \psi, \varphi_2, (\sigma_2, \tau_2, \eta_2)) \in \Gamma''$ сопоставим $(\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2+$ $+\bar{\varphi}_1, \bar{\tau}_1+\bar{\psi}+\bar{\tau}_2, \bar{\eta}_1\bar{\eta}_2+\bar{\varphi}_2) \in \Gamma'$. Проверим, что таким образом получаем изоморфизм: $\mu: \Gamma'' \longrightarrow \Gamma'$.

Пусть $(\gamma_1', \varphi_1', \psi', \varphi_2', \gamma_2')$ и $(\gamma_1'', \varphi_1'', \psi'', \varphi_2'', \gamma_2'')$ - элементы в Γ''.

$$(\gamma_1', \varphi_1', \psi', \varphi_2', \gamma_2')(\gamma_1'', \varphi_1'', \psi'' \varphi_2'', \gamma_2'') = (\gamma_1'\gamma_1'', \varphi_1'\gamma_1'' + \gamma_2'\varphi_1'', \varphi_1' * \gamma_1'' + \gamma_2'\psi'' +$$

$$+ \gamma_2' * \varphi_2'' + \psi'\gamma_1'', \varphi_2'\gamma_1'' + \gamma_2'\varphi_2'', \gamma_2'\gamma_2'') = ((\sigma_1'\sigma_1'', \sigma_1'\tau_1'' + \tau_1'\eta_1'', \eta_1'\eta_1''),$$

$$\varphi_1'\sigma_1'' + \sigma_2'\varphi_1'', \varphi_1'\tau_1'' + \sigma_2'\psi'' + \tau_2'\varphi_2'' + \psi'\eta_1'', \varphi_2'\eta_1'' + \eta_2'\varphi_2'', (\sigma_2'\sigma_2'', \sigma_2'\tau_2'' +$$

$$\tau_2'\eta_2'', \eta_2'\eta_2''));$$

$$((\gamma_1', \varphi_1', \psi', \varphi_2', \gamma_2')(\gamma_1'', \varphi_1'', \psi'', \varphi_2'', \gamma_2''))^{\mu} = (\bar{\sigma}_1'\bar{\sigma}_1''\bar{\sigma}_2'\bar{\sigma}_2'' + \bar{\varphi}_1'\bar{\sigma}_1'' + \bar{\sigma}_2'\bar{\varphi}_1'',$$

$$\bar{\sigma}_1'\bar{\tau}_1'' + \bar{\tau}_1'\bar{\eta}_2'' + \bar{\varphi}_1'\bar{\tau}_1'' + \bar{\sigma}_2'\bar{\psi}'' + \bar{\tau}_2'\bar{\varphi}_2'' + \bar{\psi}'\bar{\eta}_1'' + \bar{\sigma}_2'\bar{\tau}_2'' + \bar{\tau}_2'\bar{\eta}_2'',$$

$$\bar{\eta}_1'\bar{\eta}_1''\bar{\eta}_2'\bar{\eta}_2'' + \bar{\varphi}_2'\bar{\eta}_1'' + \bar{\eta}_2'\bar{\varphi}_2'').$$

Получили, что $\mu : \Gamma'' \longrightarrow \Gamma'$ – гомоморфизм с тривиальным ядром. Значит μ – изоморфизм.

Так как Γ' – подполугруппа в $\nabla(A, B)$, то естественным образом определен биавтомат (A, Γ', B). Имеем:

$$a \circ \gamma = a_1\bar{\sigma}_1 + a_2\bar{\varphi}_1 + a_2\bar{\sigma}_2,$$

$$a * \gamma = a_1\bar{\tau}_1 + a_2\bar{\psi} + a_2\bar{\tau}_2,$$

$$b \circ \gamma = b_1\bar{\eta}_1 + b_2\bar{\varphi}_2 + b_2\bar{\eta}_2.$$

Здесь $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $\gamma = (\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 + \bar{\varphi}_1, \bar{\tau}_1 + \bar{\psi} + \bar{\tau}_2, \bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 + \bar{\varphi}_2) \in \Gamma'$.

Понятно, что $\mu : \Gamma'' \longrightarrow \Gamma'$ определяет изоморфизм биавтоматов (A, Γ'', B) и (A, Γ', B). Таким образом доказано, что

$(A_1, \Gamma_1, B_1) \nabla (A_2, \Gamma_2, B_2) \approx (A, \Gamma', B)$. Остается доказать, что $\Gamma \subset \Gamma'$.

Пусть $\gamma = (\sigma, \tau, \eta) \in \Gamma$.

Рассмотрим разность $\sigma - \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2$.

$$a_2(\sigma - \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2) = a_2\sigma - a_2\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 = a_2\sigma - a_2\bar{\sigma}_2 \in A_1,$$

$$a_1(\sigma - \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2) = a_1\sigma - a_1\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 = a_1\sigma - a_1\bar{\sigma}_1 = 0.$$

Получили, что $\sigma - \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2$ действует так, как некоторый элемент типа $\bar{\varphi}_1 \in End\, A$. Поэтому $\sigma - \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 = \bar{\varphi}_1$ и $\sigma = \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 + \bar{\varphi}_1$.

Рассмотрим теперь разность $\tau - \bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_2$.

$$a_2(\tau - \bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_2) = a_2\tau - a_2\bar{\tau}_1 - a_2\bar{\tau}_2 = a_2\tau - a_2\bar{\tau}_2 \in B_1,$$

$$a_1(\tau - \bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_2) = a_1\tau - a_1\bar{\tau}_1 - a_1\bar{\tau}_2 = a_1\tau - a_1\bar{\tau}_1 = 0.$$

Получаем, что $\tau - \bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_2$ действует так, как некоторый элемент типа $\bar{\psi} \in Hom(A, B)$. Поэтому $\tau - \bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_2 = \bar{\psi}$ и $\tau = \bar{\tau}_1 + \bar{\psi} + \bar{\tau}_2$. Возьмем теперь разность $\eta - \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2$ и подействуем на элементы $b_2 \in B_2$ и $b_1 \in B_1$.

$$b_2(\eta-\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2)=b_2\eta-b_2\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2=b_2\eta-b_2\bar{\eta}_2\in B_1,$$

$$b_1(\eta-\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2)=b_1\eta-b_1\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2=b_1\eta-b_1\bar{\eta}_1=0.$$

Получили, что $\eta-\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2$ действует так, как некоторый элемент типа $\bar{\varphi}_2\in End\,B$. Поэтому $\eta-\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2=\bar{\varphi}_2$ и $\eta=\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2+\bar{\varphi}_2$. Значит $\gamma=(\sigma,\tau,\eta)=(\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2+\varphi_1,\ \bar{\tau}_1+\bar{\varphi}+\tau_2,\ \bar{\eta}_1\bar{\eta}_2+\bar{\varphi}_2)\in\Gamma'$. Этим доказано, что $\Gamma\subset\Gamma'$.

Таким образом, установлено, что биавтомат (A,Γ,B) вкладывается в треугольное произведение $(A_1,\Gamma_1,B_1)\nabla(A_2,\Gamma_2,B_2)$, а последнее изоморфно произведению $(A_1,\Gamma_1,B_1)\nabla(A/A_1,\Gamma_2,B/B_1)$.

Теорема доказана.

Биавтомат $\mathfrak{A}'=(A',\Gamma',B')$ называется делителем биавтомата $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$, если $\mathfrak{A}'$ есть гомоморфный образ некоторого подавтомата в $\mathfrak{A}$.

Биавтомат $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ назовем простым, если он относится к одному из следующих типов;

1) $A=0$ и (B,Γ) - неприводимое представление;

2) (A,Γ) - неприводимо и $B=0$

3) (A,Γ) - неприводимо и (B,Γ) - неприводимо.

Для биавтоматов над полем имеет место теорема декомпозиции, аналогичная теореме Крона-Роудза.

<u>Теорема</u>. Точный коне номерный биавтомат $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ над полем (A и B конечномерны) вкладывается в качестве подавтомата в треугольное произведение своих простых делителей.

<u>Доказательство</u>. Пусть длина композиционного ряда Γ- инвариантных подпространств в $A - n$, а длина композиционного ряда Γ-инвариантных подпространств в $B - m$. Назовем $k=n+m$ композиционной длиной биавтомата $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$.

Проведем доказательство индукций по композиционной длине биавтомата. Пусть $k=0$, тогда $A=0$ и $B=0$. Значит биавтомат (A,Γ,B) является тривиальным.

Пусть $k=1$, тогда или а) $n=1$ и $m=0$ или б) $n=0,\ m=1$. Пусть а) $n=1$ и $m=0$, тогда биавтомат имеет вид $(A,\Gamma,0)$ и является простым. В случае б) биавтомат имеет вид $(0,\Gamma,B)$ и он тоже простой.

Пусть теперь $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ имеет композиционную длину k и допустим, что для биавтоматов композиционной длины $\leq k-1$ теорема справедлива.

Далее обозначим $A*\Gamma=B_0$ и рассмотрим два случая:

1) $B_0\neq B$. Тогда B строго больше B_0. Выберем максимальное Γ-инвариантное подпространство $B': B\supset B'\supset B_0$. Имеем подавтомат (A,Γ,B') и фактор-автомат $(0,\Gamma,B/B')$ и соответственно точные биавтоматы (A,Γ_1,B') и $(0,\Gamma_2,B/B')$. $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ вкладывается в треугольное произведение $(A,\Gamma_1,B')\nabla(0,\Gamma_2,B/B')$ в качестве подавтомата. Здесь $(0,\Gamma_2,B/B')$ - простой, а у биавтомата (A,Γ_1,B') композиционная длина меньше, чем у биавтомата (A,Γ,B), и по предположению индукций он вкладывается в качестве подавтомата в треугольное произведение своих простых делителей, а значит и сам (A,Γ,B) вкладывается в треугольное произведение своих простых делителей, так как простые делители (A,Γ,B') являются простыми делителями (A,Γ,B).

2) $B_0=B$. Выберем максимальное Γ- инвариантное подпростран-

ство A' в $A: A \supset A'$. Пусть $A*\Gamma = B_0'$, $B_0' = B$ и B' - максимальное Γ - инвариантное подпространство в $B: B \supset B' \supset B_0'$. Тогда (A, Γ, B) вкладывается в качестве подавтомата в треугольное произведение $(A', \Gamma_1, B') \nabla \nabla (A/A', \Gamma_2, B/B')$, где оба сомножителя соответственно точные. Второй сомножитель простой. У биавтомата (A', Γ_1, B') композиционная длина меньше композиционной длины биавтомата (A, Γ, B). Если $B_0' = B$, то имеем подавтомат (A', Γ, B) и фактор-автомат $(A/A', \Gamma, 0)$ и соответствующие точные биавтоматы (A', Γ_1, B) и $(A/A', \Gamma_2, 0)$. И здесь применяется выше приводившиеся рассуждение.

Теорема доказана.

Замечание. В теореме можно было ограничиться первыми и вторыми видами простых биавтоматов, так как простой биавтомат (A, Γ, B) третьего вида вкладывается в треугольное произведение $(0, \Gamma, B) \nabla (A, \Gamma, 0)$, где оба сомножителя первого и второго вида соответственно. При этом, однако, увеличивается число сомножителей треугольного произведения.

3. Тождества. Все тождества биавтоматов сводятся к тождествам следующих типов:

I. $z \circ u_1 \equiv 0, \quad u_1 \in U_1,$

2. $y \circ u_2 \equiv 0, \quad u_2 \in U_2,$

3. $z * v \equiv 0, \quad v \in V,$

4. тождества полугруппы входных сигналов.

Здесь U_1 и U_2 - вполне характеристические двусторонние идеалы в свободной полугрупповой алгебре KF (K - основное поле, F - свободная полугруппа над счетным множеством X), V - некоторое множество. Между U_1, V, U_2 имеются определенные связи /6/.

Пусть $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ - биавтомат над полем. Определим действие полугруппы Γ в прямой сумме $A \oplus B$. Для любых

$a + b \in A \oplus B$ и $\gamma \in \Gamma, \quad (a+b)\cdot\gamma = a \circ \gamma + a * \gamma + b \circ \gamma.$

Проверяется, что этим задано треугольное представление $(A \oplus B, \Gamma)$.

Покажем, что если (U_1, V, U_2) - все тождества биавтомата (A,Γ,B), то $\mathcal{U}=\mathcal{V}\cap\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$ - все тождества представления $(A\oplus B,\Gamma)$.

Пусть $\mathcal{U}'$ - тождества представления и $u\in\mathcal{U}'$. Тогда при любом гомоморфизме $\mu:F\to\Gamma$ $(a+b)\cdot u^{\mu}\equiv 0\,(a\in A, b\in B, u\in\mathcal{U}')$. Если $b=0$, то $a\cdot u^{\mu}=a\circ u^{\mu}+a*u^{\mu}=0$, но здесь прямая сумма, поэтому $a\circ u^{\mu}=0$ и $a*u^{\mu}=0$ и $u\in\mathcal{U}_1$, $u\in\mathcal{V}$. Если $a=0$, то $b\cdot u^{\mu}=b\circ u^{\mu}=0$ и $u\in\mathcal{U}_2$. Значит $u\in\mathcal{V}\cap\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$.

Получили, что $\mathcal{U}'\subset\mathcal{U}$. Обратное включение очевидно.

4. Тождества универсального биавтомата
$Atm(A,B)=(A,\nabla(A,B),B)$*

<u>Теорема</u>. Если $(\mathcal{U}_1,\mathcal{V},\mathcal{U}_2)$ - тождества биавтомата $Atm(A,B)$, то $\mathcal{V}=\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2$.

<u>Доказательство</u>. Сначала покажем, что $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}_1$. Запишем $v\in\mathcal{V}$ в таком виде: $v=\sum\lambda_i f_i=\sum u_i x_i$, где

* Определение этого и других универсальных биавтоматов см. в [1].

$$f_i = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$$

Заметим, что каждое u_i -непустое. Пусть некоторое u_i - пустое, тогда выберем такой гомоморфизм $\mu : F \longrightarrow \nabla(A,B)$ что $x_j^{\mu} = (0,0,0)$ при $j \neq i$, $x_i^{\mu} = (0, \varphi, 0)$ и φ такой, что при некотором $a \in A : a\varphi \neq 0$. Имеем: $0 = a * v^{\mu} = a * x_i^{\mu} = a\varphi \neq 0.$ Получили противоречие.

Покажем, что при любом гомоморфизме $\mu : F \longrightarrow \nabla(A,B)$ и при любом $a \in A$ выполняется: $(a \circ u_i^{\mu}) * x_i^{\mu} = 0$

Продолжим μ до гомоморфизма $\mu : KF \longrightarrow K\nabla(A,B)$ и пусть $x_i^{\mu} = (\sigma_{1i}, \varphi_i, \sigma_{2i})$ $(\sigma_{1i} \in End\, A,\ \varphi_i \in Hom(A,B),\ \sigma_{2i} \in End\, B)$

Рассмотрим еще вспомогательный гомоморфизм $\mu' : F \longrightarrow \nabla(A,B)$, для которого $x_j^{\mu'} = (\sigma_{1j}, 0, 0)$ при $j \neq i$, $x_i^{\mu'} = (\sigma_{1i}, \varphi_i, 0)$

Имеем: $(a * v \equiv 0) \Rightarrow \left(0 = a * \left(\sum\limits_j u_j x_j\right)^{\mu'} = \sum\limits_j a * (u_j x_j)^{\mu'} =\right.$

$$= \sum_j \left[(a \circ u_j^{\mu'}) * x_j^{\mu'} + (a * u_j^{\mu'}) \circ x_j^{\mu'} \right] = \sum_j (a \circ u_j^{\mu'}) * x_j^{\mu'} +$$

$$+ \sum_j (a * u_j^{\mu'}) \circ x_j^{\mu'} = \sum_j (a \circ u_j^{\mu'}) * x_j^{\mu'} = (a \circ u_i^{\mu'}) * x_i^{\mu'} =$$

$$\left. = (a \circ u_i^{\mu}) * x_i^{\mu} = 0 \right)$$

Теперь покажем, что $u_i \in U_1$. Допустим противное. Пусть $a \circ u_i^\mu \neq 0$ при некотором a и μ. Тогда $a' = a \circ u_i^\mu \neq 0$. Используем приводившиеся выкладки и пусть $x_i^\mu = (6, \varphi, 0)$ и φ такой, что $a'\varphi \neq 0$. Имеем $(a \circ u_i^\mu) * x_i^\mu = a' * x_i^\mu = a'\varphi \neq 0$. Получили противоречие. Значит $u_i \in U_1$. Так как U_1 - двусторонний идеал, то $V \subset U_1$.

Покажем теперь, что $V \subset U_2$. Запишем $v \in V$ так: $v = \sum x_i v_i$. Таким же рассуждением, что делалось для u_i можно показать, что каждое v_i - непустое. Возьмем еще дополнительный гомоморфизм $\mu'' : F \to \nabla(A, B)$, для которого $x_j^{\mu''} = (0, 0, 6_{2j})$ при $j \neq i$, $x_i^{\mu''} = (0, \varphi_i, 6_{2i})$. Имеем

$$a * v \equiv 0 \Rightarrow a * \Big(\sum_j x_j v_j\Big)^{\mu''} =$$

$$= \sum_j a * (x_j v_j)^{\mu''} = \sum_j \Big[(a \circ x_j^{\mu''}) * v_j^{\mu''} + (a * x_j^{\mu''}) \circ v_j^{\mu''}\Big] =$$

$$= \sum_j (a \circ x_j^{\mu''}) * v_j^{\mu''} + \sum_j (a * x_j^{\mu''}) \circ v_j^{\mu''} = \sum_j (a * x_j^{\mu''}) \circ v_j^{\mu''} =$$

$$= (a * x_i^{\mu''}) \circ v_i^{\mu''} = (a * x_i^{\mu}) \circ v_i^{\mu} = 0$$

Получили, что $\left(a*x_i^{\mu}\right)\circ v_i^{\mu}=0$ при любых $a\in A$ и $\mu : F\longrightarrow \nabla(A,B)$. Это означает, что $v_i\in U_2$. Таким образом, $V\subset U_2$.

Из предыдущих замечаний выходит, что тождества представления $\left(A\oplus B, \nabla(A,B)\right)$ есть V.

Из определения треугольного произведения для представления полугрупп /2/ можно заметить, что $\left(A\oplus B, \nabla(A,B)\right)=$ $=(B, End\,B)\,\nabla\,(A, End\,A)$. Тогда известная теорема /2/ утверждает, что $Var\left(A\oplus B, \nabla(A,B)\right)= Var\,(B, End\,B)\,Var\,(A, End\,A)$. Отсюда получаем, что $V=U_1U_2$.

С другой стороны, тождества представлений $(A, End\,A)$ и $(B, End\,B)$ совпадают с ассоциативными тождествами $End\,A$ и $End\,B$. Покажем это.

Пусть $\mathcal{F}$ - свободная ассоциативная алгебра. Она совпадает с полугрупповой алгеброй KF свободной полугруппы F. Возьмем $\nu : \mathcal{F}\longrightarrow End\,A$ - любой гомоморфизм алгебр, $\nu_0 : F\longrightarrow$

$\longrightarrow End\,A$ - ограничение ν (гомоморфизм полугрупп), $\nu_1 : \mathcal{F} \longrightarrow K\,End\,A$ - продолжение ν_0 (гомоморфизм полугрупповых алгебр), $\tau : K\,End A \longrightarrow End A$ - канонический гомоморфизм, который определен так: берем тождественное отображение $End A \longrightarrow End A$ и $\sum^0 \lambda_i \sigma_i \longrightarrow \sum \lambda_i \sigma_i$, где $\sum^0 \lambda_i \sigma_i$ - сумма в $K\,End\,A$, а $\sum \lambda_i \sigma_i$ - сумма в $End\,A$. Получаем коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} K End A \arrow[rr, "\tau"] & & End A \\ & \mathcal{F} = KF \arrow[ul, "\nu_1"] \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

т.е. $\nu = \nu_1 \tau$.

Пусть $u \in \mathcal{F}$ - ассоциативное тождество. $End A$. Возьмем $\nu_0 : F \longrightarrow End A$ - любой гомоморфизм полугрупп, продолжим его до $\nu_1 : \mathcal{F} \longrightarrow K End A \xrightarrow{\tau} End\,A$. $\nu_1 \tau$ - гомоморфизм алгебр. Тогда $u^{\nu_1 \tau} = 0$. Значит $u^{\nu_1} \in Ker\,\tau$ и u является тождеством $(A, End A)$.

Пусть теперь u - тождество $(A, End A)$. Возьмем любой гомоморфизм $\nu: \mathcal{F} \longrightarrow End\,A$. Как уже показали, тогда

$\nu = \nu_1 \tau$, где $\nu_1 : KF \longrightarrow K\,End\,A$ - продолжение

$\nu_0 : F \longrightarrow End\,A$. Но тогда $u^{\nu_1 \tau} = 0$, т.е. $u^{\nu} = 0$.

Значит u - ассоциативное тождество $End\,A$.

Итак, получили, что тождества универсального биавтомата $Atm\,(A,B)$ сводятся к ассоциативным тождествам $End\,A$ и $End\,B$.

5. Тождества универсального биавтомата

$$\mathfrak{A} = (A, End\,A, A \otimes End\,A)$$

Действия биавтомата определяются следующим образом:

$$a \circ u = au; \quad a * u = a \otimes u; \quad (a \otimes u) \circ v = a \otimes uv - (a \circ u) \otimes v;$$

$(a \in A;\ u, v \in End\,A)$. Корректность определения третьего действия и все остальное необходимое проверяется (см. /1/).

Пусть $\mathcal{F}$ - свободная ассоциативная алгебра. Рассмотрим $End\,A$ как алгебру, и, пусть $\tau: \mathcal{F} \longrightarrow End\,A$ - любой гомоморфизм. Рассмотрим случай, когда A - конечномерное векторное пространство. Допустим, что $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ -базис в нем. Каждому вектору $a \in A$ в этом базисе однозначно соответствует строка $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, где $a = \alpha_1 \ell_1 + \cdots + \alpha_n \ell_n$.

По таким же соображениям можно говорить, что элементам $w, u^\tau, v^\tau \in End A \; (u, v \in \mathcal{F})$ соответствуют однозначно матрицы $\mathcal{D}, C$ и B. Тогда можно писать: $a \circ u^\tau = aC \equiv 0$. Но так как это равенство справедливо при любом a, то следует, что $C = 0$.

$$a * u^\tau = a \circledast u^\tau = a \circledast C = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \circledast C = (\alpha_1 C, \cdots, \alpha_n C) \equiv 0.$$

И здесь следует, что $C = 0$.

Рассмотрим теперь тождества U_2.

$$(a \circledast w) \circ v^\tau \equiv 0 \qquad /I/$$

$$a \circledast w v^\tau = a \circledast \mathcal{D}B = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \circledast \mathcal{D}B = (\alpha_1 \mathcal{D}B, \cdots, \alpha_n \mathcal{D}B).$$

Обозначим $(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\mathcal{D}$, тогда

$$(a \circ w) \circledast v^\tau = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \circledast B = (\beta_1 B, \cdots, \beta_n B).$$

Пусть $a = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (1, 0, \cdots, 0)$, $C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \cdots \alpha_{1n} \\ \text{-----------} \\ \alpha_{n1} \cdots \alpha_{nn} \end{pmatrix}$

тогда $a\mathcal{D}=(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1n})$ и из /I/ получается, что

$(\alpha_1\mathcal{D}B,0,\cdots,0)\equiv(\alpha_{11}B,\cdots,\alpha_{1n}B)$. Но так как это выполняется при любом a и w, следует, что $B=0$.

Итак получили, что все тождества этого биавтомата $\mathfrak{A}$ это ассоциативные тождества $End\,A$.

6. Тождества универсального биавтомата

$$Atm(A,\Gamma)=(A,\Gamma,A\circledast K\Gamma)$$

В универсальном биавтомате $Atm(A,\Gamma)$ предполагается, что заданы тождества представления (A,Γ) $\mathcal{U}_1$ и тождества полугруппы Γ.

Рассмотрим сейчас тождества $\mathcal{V}$.

Пусть $\mu: F\to\Gamma$ - любой гомоморфизм, который продолжен до гомоморфизма $\mu: KF\to K\Gamma$. Возьмем $v\in\mathcal{V}$, тогда $v^{\mu}\in K\Gamma$. Запишем v^{μ} так: $v^{\mu}=\sum_i\lambda_i\gamma_i$.

Имеем: $a*v^{\mu}\equiv c\Rightarrow a\circledast v^{\mu}=\sum_i(\lambda_i a)\circledast\gamma_i=\sum_i a'\circledast\gamma_i=0.$

Но здесь прямая сумма, так как $A \otimes K\Gamma$ можно предоставить как прямую сумму $\sum A \otimes \gamma$. Поэтому получим, что все $(\lambda_i a) \otimes \gamma_i = 0$ и все $\lambda_i = 0$. Значит $v^{\mu} = 0$ и v – тождества регулярного представления $(K\Gamma, \Gamma)$.

Пусть теперь $u_2 \in U_2$. $\mu: F \to \Gamma$ – любой гомоморфизм, продолженный до гомоморфизма $\mu: KF \to K\Gamma$. Запишем

$u_2^{\mu} = \sum \lambda_i \gamma_i$, тогда $(a \otimes \gamma) \circ u_2^{\mu} = a \otimes \gamma u_2^{\mu} - (a \circ \gamma) \otimes u_2^{\mu} \equiv 0$,

отсюда $a \otimes \sum_i \lambda_i \gamma \gamma_i \equiv (a \circ \gamma) \otimes \sum_i \lambda_i \gamma_i$; $\sum_i \lambda_i a \otimes \gamma \gamma_i = \sum_i (\lambda_i a \circ \gamma) \otimes \gamma_i$.

Если γ обратим, то все $\gamma \gamma_i$ разные и пробегают Γ.

Обозначим $\gamma \gamma_i = \gamma_k$, тогда $\sum_i \lambda_i a \otimes \gamma_k = \sum_i (\lambda_i a \circ \gamma) \otimes \gamma_i$.

Но здесь прямая сумма, поэтому $\lambda_k (a \circ \gamma) = \lambda_i a$. Получили, что любой a – собственный вектор. Таким образом доказана следующая теорема.

Пусть (A, Γ) – произвольное представление, (U_1, V, U_2) – соответствующий кортеж тождеств биавтомата $Atm(A, \Gamma)$, тогда V состоит из тождеств регулярного представления $(K\Gamma, \Gamma)$.

Если в Γ имеется обратимый элемент γ, для которого не каждый вектор в A является собственным, то и $\mathcal{U}_2$ состоит из тождеств регулярного представления $(K\Gamma, \Gamma)$.

Так будет, например, для $Atm(A, End\, A)$.

Описание тождеств представления $(A \Phi K\Gamma, \Gamma)$ при различных других предположениях относительно исходного (A, Γ) будет проведено отдельно.

7. Тождества универсального биавтомата

$$Atm(\Gamma, B) = (Hom(K\Gamma, B), \Gamma, B)$$

Теорема. Пусть дано представление (B, Γ) с системой тождеств $\mathcal{U}_2$ и пусть $(\mathcal{U}_1, \mathcal{V}, \mathcal{U}_2)$ - кортеж $Atm(\Gamma, B)$. Тогда $\mathcal{V}$ есть тождества регулярного представления $(K\Gamma, \Gamma)$. Если в заданном (B, Γ) полугруппа Γ содержит некоторый элемент, для которого не каждый $b \in B$ является собственным вектором, то и $\mathcal{U}_1$ совпадает с тождествами регулярного представления $(K\Gamma, \Gamma)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mu: F \to \Gamma$ - любой гомоморфизм, который продолжен до гомоморфизма $\mu: KF \to K\Gamma$ полугрупповых алгебр. Возьмем $u \in U_1$. Тогда $(\varphi \circ u^{\mu})(x) = \varphi(u^{\mu}x) - \varphi(u^{\mu}) \circ x$ при любых $\varphi \in Hom(K\Gamma, B)$ и $x \in \Gamma$.

Возьмем x, участвующий во второй части условия теоремы, и допустим вначале, что $u^{\mu}x$ и u^{μ} - линейно независимы. Пусть b - некоторый элемент из B. Выбираем φ так, что $\varphi(u^{\mu}) = b$ и $\varphi(u^{\mu}x) \neq b \circ x$. Получили противоречие. Значит нельзя допустить, что $u^{\mu}x$ и u^{μ} линейно независимы.

Таким образом, между $u^{\mu}x$ и u^{μ} имеется линейная зависимость и пусть $u^{\mu}x = \lambda u^{\mu}$. Имеем: $\varphi(u^{\mu}x) = \varphi(\lambda u^{\mu}) = \lambda\varphi(u^{\mu}) \equiv \varphi(u^{\mu}) \circ x$.

Пусть вектор b не является собственным для заданного x: $b \circ x \neq \lambda b$ ни при каком λ. Если $u^{\mu} \neq 0$, то при некотором φ имеем: $\varphi(u^{\mu}) = b$. И тогда:

$\lambda\varphi(u^{M}) \neq \varphi(u^{M})\circ x$. Получили противоречие. Следовательно, $u^{M}=0$, и u есть тождество регулярного представления $(K\Gamma,\Gamma)$.

Пусть $v\in V$, тогда $\varphi * v^{M} = \varphi(v^{M})$ и аналогично получаем, что v есть тождество регулярного представления $(K\Gamma,\Gamma)$.

Замечание. В частности для $Atm(End\,B, B)$ U_1 и V совпадают с тождествами соответствующего регулярного представления полугруппы $End\,B$, а U_2 есть тождества ассоциативной алгебры $End\,B$.

Отдельно будут изучаться тождества представления $(Hom(K\Gamma,B),\Gamma)$ при других предложениях.

Поступила 25.X.1980

Рижский Краснознаменный институт инженеров гражданской авиации, г.Рига.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.И.Плоткин. В настоящем сборнике.

2. Б.И.Плоткин. Латвийский математический ежегодник, т.19, Рига, "Зинатне", 143-169, 1976.

3. Б.И.Плоткин, В.Б.Штейнбук, И.Н.Перанидзе. ДАН СССР.
4. Б.И.Плоткин, Ц.Е.Дидидзе, Е.М.Кубланова, Кибернетика, № I, 47-54, 1977.
5. Б.И.Плоткин, Ц.Е.Дидидзе, Е.М.Кубланова. Кибернетика, № 3, I6-24, 1977.
6. М.И.Гобечия. В насто[illegible]эм сборнике.
7. И.Н.Перанидзе. УШ конференция математиков высших учебных заведений Грузинской ССР. Тезисы докладов, Тбилиси, I2I, 1979.

ი.პერანიძე

სამკუთხა ნამრავლი ბიავტომატების თეორიაში

რეზიუმე

მტკიცდება დეკომპოზიციის თეორემა ბიავტომატებისათვის. განიხილება უნივერსალურ ბიავტომატთა იგივეობები.

I.Peranidze

TRIANGULAR PRODUCT IN BIAUTOMATA THEORY

Summary

Some decomposition theorems on biautomata and identities of universal biautomata are considered.

УДК 51.1

Леван Гокиели - математик и логик. М.Н.Чичинадзе.
Труды Тбилисского университета. Математика.
Механика. Астрономия. 225, 1981

Проф. Л.П.Гокиели один из первых построил логику как диалектику и в глубокой связи с этим создал собственную, диалектико-материалистикую концепцию обоснования математики.

Ядром его логики является так называемый коренной вывод, в котором осуществляется логическая форма диалектического отрицания, выраженная в виде регресса в бесконечность. Его концепцию обоснования математики следует охарактеризовать как диалектико-материалистическую, в частности - диалектико-логическую, содержательную, неограничительную и прямую или положительную.

Обоснования математики и логики в творчестве Л.П. Гокиели представлены как единый диалектический процесс.

УДК 511.3

О прообразах значений функций $\iota(\alpha)$ и $\lambda(\alpha)$. П.Г.Когония. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 225, 1981

В работе доказано, что функция $\iota(\alpha)$ постоянна на классе эквивалентных чисел, а для функции $\lambda(\alpha)$ установлена связь между её значениями в эквивалентных точках. Библ. 3 назв.

УДК 513.83

О некоторых приложениях теории битопологических пространств к теории упорядоченных топологических пространств. Б.П.Двалишвили. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 225, 1981

На основе двойственности между категориями упорядоченных топологических пространств и ассоциированных в определенном смысле битопологических пространств изучена зависимость аксиом отделимости упорядоченных топологических пространств от соответствующих аксиом парной отделимости ассоциированных битопологических пространств. Построена теория размерности упорядоченных топологических пространств, охватывающая все три основные размерности функции: индуктивно малую, индуктивно большую и основанную на покрытиях, с таким расчетом, чтобы все три введенные функции учитывали как топологическую структуру, так и структуру порядка. Для указанных функций доказаны аналоги многих известных теорем классической теории размерности при помощи соответствующих битопологических результатов, полученных ранее. Библ. 10 назв.

УДК 519.2

Об оптимальной остановке частично-наблюдаемых случайных процессов в схеме Калмана-Бьюси. В.М.Дочвири. Труды Тбилисского университета. Математика, Механика, Астрономия. 225, 1981

Для схемы Калмана-Бьюси частично-наблюдаемых случайных процессов задача оптимальной остановки сведена к полностью наблюдаемому случаю и доказана сходимость соответствующих цен. В качестве функции выигрыша рассмотрен полином степени n . Библ. 5 назв.

УДК 517.51

Об одном вопросе аппроксимации функций двух переменных. А.С.Церетели. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 225, 1981

В работе рассмотрен вопрос об аппроксимации функций двух переминных функциями вида $\prod_{k=1}^{n}\left[\varphi_k(x)+\psi_k(y)\right]$. Дается достаточное условие, при котором для любой ограниченной функции $f(x,y)$ в классе $\left\{\prod_{k=1}^{n}\left[\varphi_k(x)+\psi_k(y)\right]\right\}$ существует функция наилучшего равномерного приближения. Показано также существование точек Чебышевского алтернанса. Библ. 3 назв.

УДК 517.51

Об аппроксимации функций двух переменных. А.С.Церетели. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 225, 1981

В работе рассмотрен вопрос аппроксимация функций двух переменных функциями вида $\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\psi_k(y)$. Дается достаточное условие, при котором для любой ограниченной функции

$\vec{f}(x,y)$ в классе $\left\{\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\psi_k(y)\right\}$ существует функция наилучшего равномерного приближения. Показано также существование точек Чебышевского алтернанса. Библ. 6 назв.

УДК 517.5.122

Об одной теореме тауберова типа для двойных интегралов. Э.В.Челидзе. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 225, 1981

Доказывается одна теорема тауберова типа для двойных интегралов. Библ. 2 назв.

УДК 517.929.7

О задаче Коши-Николетти для систем нелинейных разностных уравнений. Ш.М.Гелашвили. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 225, 1981

Устанавливаются достаточные условия существования и единственности решения системы разностных уравнений

$$\Delta x_k(i-1)=f_k\left(i, s_1(x_1)(i), \dots, s_m(x_m)(i)\right) \quad (k=1,\dots,m),$$

удовлетворяющего условиям $x_k(i_k)=c_k \quad (k=1,\dots,m)$.

Предполагается, что $f_k: \{1,\dots,m\}\times R^m \longrightarrow R$, $i_k \in \tilde{N}_n = \{0,1,\dots,n\}$,

$c_k \in R$, $\tau_k: \tilde{N}_n \longrightarrow R$ и

$$S_k(x)(i) = \begin{cases} x(\tau_k(i)) & \text{при } \tau_k(i) \in \tilde{N}_n, \\ 0 & \text{при } \tau_k(i) \notin \tilde{N}_n. \end{cases}$$

Библ. 4 назв.

УДК 517. 539.3

Приведение интегро-дифференциальных уравнений жесткого и упругого крыльев самолета конечного размаха к обыкновенным сингулярным уравнениям. А.Г.Кекелия. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 225, 1981

Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения жесткого и упругого крыла самолета конечного размаха приведены к обыкновенным сингулярным (квазирегулярным) интегральным уравнениям. Библ. 5 назв.

УДК 512.7

Биавтоматы. Б.И.Плоткин. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 225, 1981

Биавтомат состоит из двух линейных пространств - пространств внутренних и внешних состояний и полугруппы входных сигналов. Элементы этой полугруппы преобразуют внутренние и внешние состояния, а также внутренние состояния - во внешние. При этом, выполняются определенные аксиомы для этих действий.

В работе рассматриваются некоторые исходные понятия теории биавтоматов, выделяются универсальные биавтоматы, рассматриваются биавтоматы Мура, определяются некоторые конструкции. Библ. 4 назв.

УДК 512.7

Многообразия биавтоматов. М.И.Гобечия. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 225, 1981.

В отличие от автоматов в биавтоматах входные сигналы преобразуют не только состояния, но и выходные сигналы - внешние состояния. Рассматриваются только линейные полугрупповые биавтоматы. Определяются конструкция треугольного умножения, понятие многообразия биавтоматов и умножение многообразий.

Рассматриваются связи умножения многообразий с треугольным произведением биавтоматов. Библ. 9 назв.

УДК 512.7

Треугольное умножение в теории биавтоматов. И.Н.Перанидзе. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 225, 1981

Доказывается теорема декомпозиции для биавтоматов. Использована конструкция треугольного умножения биавтоматов.

Рассматриваются тождества универсальных биавтоматов. Библ. 7 назв.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

შ ი ნ ა ა რ ს ი

Contents