საქართველოს სსრ განათლების სამინისტროს
პედაგოგიკურ მეცნიერებათა სამეცნიერო-საკვლევი ინსტიტუტი

მიხ. კონიაშვილი

ტრიგონომეტრიისა და გეომეტრიის სწავლების საკითხები

ინსტიტუტის გამომცემლობა
19 თბილისი 57

რედაქტორისაგან

წინამდებარე ნაშრომი წარმოადგენს დოც. მიხ. კონიაშვილის ამავე საკითხებზე ადრე გამოცემული ნაშრომების უმნიშვნელოდ შესწორებულ გაერთიანებულ მეორე გამოცემას.

ავტორის მიერ ამ წიგნში განვითარებული მოსაზრებები ეხება იმ პროგრამასა და სახელმძღვანელოებს, რომლებიც ხმარებაში იყო წინად. ბევრმა ამ მოსაზრებამ დადებითი გადაწყვეტა ჰპოვა დღევანდელ სახელმძღვანელოსა და პროგრამაში. დანარჩენს ავტორი კვლავაც იცავს და ფიქრობს, რომ მისი მოსაზრებები გარკვეულად იმსახურებს ყურადღებას და სასარგებლო აღმოჩნდება ამ საკითხების გარშემო მასწავლებელთა აზრის მობილიზაციისათვის.

ნ ა წ ი ლ ი I

ტრიგონომეტრიის სწავლების საკითხები

თ ა ვ ი I

ტრიგონომეტრიის სწავლების ამოცანები და შინაარსი საშუალო სკოლაში

საშუალო სკოლის მათემატიკის პროგრამების განმარტებით ბარათში წერია:

„ტრიგონომეტრიის სწავლების მიზანი მდგომარეობს ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისა და მათ თვისებათა შესწავლაში, მართკუთხა და ირიბკუთხა სამკუთხედების ამოხსნაში და ტრიგონომეტრიის პრაქტიკულ გამოყენებაში გეომეტრიის, ფიზიკის, ტექნიკის და სხვათა საკითხებში".

პრაქტიკული გამოყენება მოითხოვს თეორიის შეგნებულ ცოდნას და შემეცნებით მუშაობას. ტრაფარეტულ, ფორმალურ ცოდნას არავითარი ფასი არა აქვს; უფრო მეტი, ასეთი ცოდნა უძლურია. ტრიგონომეტრიის შესწავლისას აუცილებელია სერიოზული ყურადღება მივაქციოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თვისებათა ღრმა და ყოველმხრივ შესწავლას, ძირითადი ცნების ზუსტად ფორმულირებას, ცვლადებს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულების მკაფიოდ წარმოდგენას და იმ პირობათა ზუსტად გამორკვევას, როდესაც ამა თუ იმ დებულებას ან ფორმულას აზრი აქვს. საჭიროა მკითხველის ყურადღების ფიქსირება აქ ჩამოთვლილ მომენტებზე.

მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითები: მოსწავლეს ვეუბნებით, რომ $\cos x$ ფუნქციის პერიოდი 2π რადიანია, რადგან, თუ x მივუმატებთ 2π-ს, $\cos x$-ის მნიშვნელობა არ შეიცვლება. ე. ი. $\cos(2\pi + x) = \cos x$, მაგრამ ეს გარემოება იმის უფლებას მაინც არ გვაძლევს, რომ 2π-ს ვუწოდოთ $\cos x$ ფუნქციის პერიოდი. აქ დავიწყებულია ფუნქციის (საზოგადოდ ფუნქციის) პერიოდის განსაზღვრა. თუ უკანასკნელს გავიხსენებთ, დავინახავთ, რომ საჭიროა

დამტკიცება იმისა, რომ 2π და მხოლოდ 2π წარმოადგენს $\cos x$-ის პერიოდს. ამ გარემოებაზე მოსწავლეს საშუალო სკოლაში ყოფნის დროს არაფერს ეუბნებიან. ეს—საკითხის მიჩქმალვაა.

შემდეგ. ვამტკიცებთ, რომ

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

მაგრამ არ ვეუბნებით, თუ ეს ტოლობა რა პირობაშია მართალი. ვასწავლით, რომ $\operatorname{tg} x$ ყოველ მეოთხედში მატულობს და არც ერთში არ კლებულობს, მაგრამ არ ვამჩნევთ, რომ მოსწავლისათვის გაუგებარი რჩება, როგორ შეიძლება $\operatorname{tg} x$ მეორე მეოთხედშიაც მატულობდეს, როდესაც უკვე პირველ მეოთხედში $\operatorname{tg} x$ მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, რაც მოსწავლეს რვეულში ჩაუწერია $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$ სახით.

ცნობილია, რომ საკითხს ფუნქციის არსებობის არეს შესახებ დიდი მნიშვნელობა აქვს. მიუხედავად ამისა, ტრიგონომეტრიის მთელი კურსის მანძილზე ამ საკითხს სრულიად არ ეხებიან, რასაც ასეთი შედეგი მოსდევს: მოსწავლისათვის განტოლებანი— $x = 3$ და $x + \arcsin x = 3 + \arcsin x$ ექვივალენტურ განტოლებებს წარმოადგენენ, და ამიტომ აქ მეორე განტოლების ფესვად ის ღებულობს $x = 3$. მექანიკურად ჩატარებულმა შეკვეცამ $\arcsin x$ წევრისა ხელი შეუშალა მას დაენახა, რომ $x = 3$ არ წარმოადგენს

$$x + \arcsin x = 3 + \arcsin x$$

განტოლების ფესვს, რადგანაც $\arcsin x$ ფუნქციის არსებობის არეა $-1 \leqslant x \leqslant 1$, და ამიტომ $\arcsin 3$ უაზრობას წარმოადგენს.

ასეთივე შეცდომას აქვს ადგილი, როდესაც $x + \lg x = \lg x - 2$ განტოლების ამოხსნას ვაწარმოებთ $\lg x$ წევრის გამოკლებით და ვღებულობთ $x = -2$ შეუმჩნევლად იმისა, რომ ელემენტარულ მათემატიკაში $\lg(-2)$ უაზრობაა. ფუნქციის არსებობის არის გამორკვევის დავიწყებით აიხსნება ის გარემოებაც, რომ მოსწავლე $(x - \sqrt{3}) \arcsin x = 0$ განტოლება ხსნის ჩვეულებრივი გზით:

ან $x - \sqrt{3} = 0$, ან $\arcsin x = 0$; ავიწყდება შეხედოს განტოლების მარცხენა ნაწილს ფუნქციონალური თვალსაზრისით და

ხედავს მხოლოდ ნამრავლს. ამიტომ, მოსწავლის თვალსაზრისით, განტოლებას აქვს ორი ფესვი $x = \sqrt{3}$ და $x = 0$, თუმცა განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ფესვი $x = 0$.

მეცხრე კლასში ცუშავდება ევრეთწოდებული პროპედევტიკული კურსი. მასალად აღებულია მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, ე. ი. მათი განსაზღვრა და ცვლა, როცა კუთხე იცვლება 0°-დან 90°-მდე; ვასწავლით აგრეთვე დამოკიდებულებებს მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის და ამ სამკუთხედების ამოხსნას ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ტაბულის დახმარებით. მეათე კლასის პროგრამა მოითხოვს 0°-დან 360°-მდე ცვალებადი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრას. განმარტებითი ბარათი არაფერს გვეუბნება იმის შესახებ, თუ რა გზით უნდა მივცეთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა განსაზღვრა, როდესაც საქმე გვაქვს მახვილ კუთხესთან, და რა გზით — როდესაც მხედველობაში გვაქვს კუთხე, რომელიც იცვლება 0°-დან 360°-მდე. სტაბილურ სახელმძღვანელოში (იხ. ნ. რიბკინის სწორხაზოვანი ტრიგონომეტრია, 1947 წ. სახელგამი) აღნიშნული მასალა დაყოფილია ასე: 1) მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და 2) ტრიგონომეტრიული ფუნქციები 90°-დან 360°-მდის ცვალებადი კუთხეებისა. დასახელებული წიგნის ავტორს თავიდანვე შემოაქვს ტრიგონომეტრიული ხაზების ცნება და ამ ცნებით სარგებლობს განურჩევლად იმისა, მახვილია კუთხე თუ არა.

პროპედევტიკული კურსისათვის, რომლის შესახებ ქვემოთ უფრო დაწვრილებით ვილაპარაკებთ, ტრიგონომეტრიული ხაზების შემოტანა მიზანშეწონილი არ არის. გაუგებრობას იწვევს, რატომ არის პროგრამაში გამოყოფილი ცალკე 0°-დან 360°-მდე ცვალებადი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრა იმის შემდეგ, როცა უკვე გავლილია კუთხის ცნების განზოგადება. თუ კუთხის ცნების განზოგადება მიცემულია, მაშინ სავსებით შესაძლებელია პირდაპირ შევუდგეთ ნებისმიერი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრას. თუ კი ჩვენ გვინდა დავამუშავოთ საკითხი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრების შესახებ, როდესაც კუთხე დადებითია და არ აღემატება 360°, მაშინ კუთხის ცნების განზოგადება მიზანშეწონილი იქნება ამ საკითხის გარჩევის შემდეგ მივცეთ.

ჩვენი აზრით შეუძლებელია აგრეთვე მასალის ასეთი დალაგება. „ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცვლა კუთხის 0°-დან 360°-მდე

ცვლილების დროს. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების პერიოდულობა" (იხ. პროგრამები, 1946 წ. გვ. 33). შეუძლებელია ტრიგონომეტრიული ფუნქციების პერიოდულობაზე საუბარი, ვიდრე მოსწავლემ არ იცის ნებისმიერი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრა. პროგრამა მოითხოვს მ ხ ო ლ ო დ ე რ თ ი ს ა დ ა ი მ ა ვ ე მ ა ხ ვ ი ლ ი კ უ თ ხ ი ს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის დამოკიდებულების გამოყვანას, რაც საკმარისი არ არის და ტრიგონომეტრიის ღირებულებასაც ამცირებს. აუცილებელია, რომ ძირითადი დამოკიდებულებანი ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის მიღებულ იქნას ზოგადი სახით, ვინაიდან მასალის ასეთი დამუშავება საჭიროებს ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ზუსტი განსაზღვრის ცოდნას, ნიშანთა წესის ცოდნას და ამ ცოდნის მიზანშეწონილ გამოყენებას განზოგადებულ დამოკიდებულებათა გამოყვანის დროს.

თითქმის უყურადღებოდ არის დატოვებული შებრუნებული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შესწავლა. ამ საკითხისათვის მხოლოდ 6 საათია გამოყოფილი. საჭიროა დაემატოს: 1) ტრიგონომეტრიული ოპერაციები შებრუნებულ ფუნქციებზე, 2) ძირითადი დამოკიდებულებანი შებრუნებულ ფუნქციათა შორის და 3) და ამ ფუნქციების გრაფიკები. მაშინ 6 საათის ნაცვლად საჭირო იქნება 15 საათი. ამასთან მკითხველის ყურადღება უნდა შევაჩეროთ ფუნქციის თანამედროვე მეცნიერულ განმარტებებზე (მხედველობაში გვაქვს ნამდვილი ცვლადის ფუნქციები).

ფუნქციის განსაზღვრისათვის შემდეგი სამი მოთხოვნა უნდა დავაკმაყოფილოთ:

1. დავადგინოთ (ვუჩვენოთ) ფუნქციის არსებობის არე;

2. შევიმუშავოთ წესი ფუნქციონალური შესაბამობისა ერთი მხრივ არგუმენტსა და მეორე მხრივ ფუნქციის მნიშვნელობათა შორის;

3. შევთანხმდეთ, რომ არგუმენტის თითოეულ დასაშვებ მნიშვნელობას შეესაბამებოდეს ფუნქციის სრულიად გარკვეული მნიშვნელობა.

თუ ფუნქციას ამ პირობებით განვსაზღვრავთ, მაშინ ისეთ ტერმინოლოგიას, როგორიცაა „მრავალნიშნა ფუნქცია", „ფუნქციის მრავალმნიშვნელიანობა", ან „მთავარი შტო" აზრი ეკარგება. ვიმეორებთ, რომ ჩვენ მხედველობაში გვაქვს ნ ა მ დ ვ ი ლ ც ვ ლ ა დ ი ს ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი. მაშასადამე, სასურველია პროგრამაში და სახელ-

მძღვანელოშიც სათანადო ცვლილებები იქნეს შეტანილი. ჩვენი აზრით ტრიგონომეტრიის კურსის დამუშავებას არავითარი პროპედევტიკული კურსი ან კონცენტრი არ ესაჭიროება. ყველა პირობა არსებობს იმისათვის, რომ ეს საგანი, რომელიც მუშავდება ორი წლის განმავლობაში, შეგნებულად იყოს დაძლეული და შეთვისებული მოსწავლეთა მიერ.

იმის გამო, რომ მე-9 კლასის პროგრამა გეომეტრიაში მოითხოვს მსგავსების სწავლებასთან დაკავშირებით დამუშავებულ იქნას პირველადი ცნობები ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა შესახებ, აგრეთვე მართკუთხა სამკუთხედების ამოხსნა, საჭიროა განვმარტოთ, რომ ამ მასალის მოცულობა არ უნდა აღემატებოდეს იმას, რაც, მაგალითად, მოცემულია ნ. ა. გლაგოლევის ელემენტარულ გეომეტრიაში (იხ. მისი პლანიმეტრია. 1944 წ. გვ. 178 182), გარდა § 212, რომელიც ეხება მახვილკუთხიანი სამკუთხედების ამოხსნას.

თ ა ვ ი II

ტრიგონომეტრიის პირველი გაკვეთილები

§ 1. კუთხისა და რკალის ცნების განზოგადება

ცნობილია, რომ მოსწავლე ადვილად ვერ ცნობს კუთხეს, რომელიც 180° აღემატება. ეს მოვლენა აიხსნება მხოლოდ იმით, რომ ის ვერ ხედავს, თუ რა პრაქტიკული მოსაზრებით არის გამოწვეული ასეთ კუთხეებზე საუბარი.

შემდეგი მუშაობა უსათუოდ გაუდვილებს როგორც მოსწავლეს, ისე მასწავლებელს, საფუძვლიანად გაარკვიოს ეს მეტად მნიშვნელოვანი მომენტი ტრიგონომეტრიის სწავლების პროცესში.

მ ი ვ მ ა რ თ ო თ ა ს ე თ ს ა კ ი თ ხ ე ბ ს.

ა) ბოთლი დახურულია საცობით. საცობში ბურღია. შეიძლება თუ არა ეს ბურღი მოვაბრუნოთ საცობში 210°-ით? 300°-ით? 360°-ით? 540°-ით? 720°-ით?

რამდენი ბრუნი გააკეთა ბურღმა, როდესაც ჩვენ იგი მოვაბრუნეთ 180°, 360°, 540°, 720°-ით?

აქ მოსწავლის ყურადღებას იმ მომენტსაც მივაქცევთ, რომ შეიძლება მოვაბრუნოთ ბურღი მარჯვნივ, ან მარცხნივ. თუ ბრუნ-

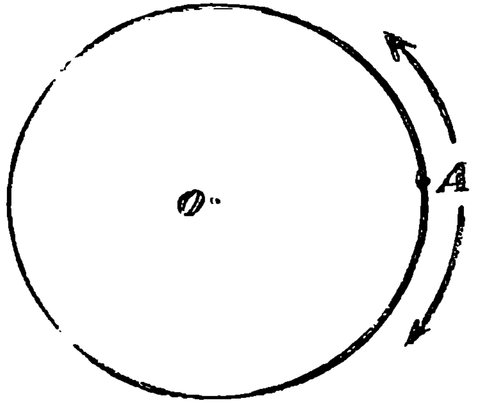
ჯას ვახდენთ მარცხნიდან მარჯვნივ, ბურღი მოძრაობს ქვევით, თუ კი მარჯვნიდან მარცხვნივ — ბურღი ამოდის ზევით. მაშასადამე, ბრუნვის მიმართულებას გარკვეული პრაქტიკული შედეგი უკავშირდება. მოვახდინოთ ეხლა შეთანხმება: ბრუნვის მეორე მიმართულება მივიღოთ როგორც დადებითი, პირველი კი — როგორც უარყოფითი.

ამოვხსნათ ხელახლად საკითხები:

1) ბურღი მოვაბრუნეთ საცობში $+540°$-ით. რა მანძილით გადაადგილდა იგი, თუ $+360°$-ით ბრუნვის დროს ის ქვევით იწევს 0,5 სმ-ით? 0,8 სმ-ით?

2) რამდენი გრადუსით უნდა მოვაბრუნოთ ისევ ის ბურღი, რომ მან ქვევით დაიწიოს 3 სმ-ით? 4,8 სმ-ით? ზევით ამოიწიოს 2 სმ-ით; 3,2 სმ-ით? და ა. შ.

ბ) წარმოვიდგინოთ, რომ წრეხაზზე აღებულია წერტილი A (ნახ. 1). ამ წერტილიდან გამოდის სხეული, რომელიც მოძრაობს ამ წრეხაზზე. თუ სხეული მოძრაობს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, მივიღოთ ეს უკანასკნელი როგორც უარყოფითი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი როგორც დადებითი. ამის შემდეგ ამოვხსნათ მაგალითები:



ნახ. 1.

სად იქნება სხეული, თუ მან გაიარა 40 რკალური გრადუსი? 120°? 240°? 400°?—60°?—120°—600°? და ა. შ.

მაშასადამე, ერთდროულად ხდება კუთხის ცნების განზოგადება, მისი როგორც აბსოლუტური მნიშვნელობის, ისე ნიშნის მხრივ.

ახლა კუთხეები შეგვიძლია განვიხილოთ მინუს უსასრულობიდან პლუს უსასრულობამდე.

მასწავლებელმა, ცხადია, არ უნდა იფიქროს, რომ კუთხის ცნების განზოგადება გამოწვეულია მხოლოდ იმ მიზეზებით, რომლებზეც ზემოთ შევჩერდით. მაგალითად, როდესაც ჩვენ ვპოულობთ $\sqrt[5]{1}$ და ვწერთ ამ ფესვს კომპლექსური რიცხვის სახით, ფესვის ყველა მნიშვნელობის გამოსაანგარიშებლად, აქაც საჭირო ხდება კუთხის განზოგადებული ცნებით სარგებლობა.

ისმება კითხვა, როგორ დავუკავშიროთ კუთხის ასეთი განზოგადებული ცნება იმ განსაზღვრებს, რომლებიც მიღებულია ელემენტარულ გეომეტრიაში.

განსაზღვრა კუთხისა, როგორც სიბრტყის ნაწილისა, არ ვარგა; არ გამოდგება აგრეთვე განსაზღვრა—როგორც ორი ურთიერთგადამკვეთი სწორი ხაზით შექმნილი ფიგურისა. ამ განსაზღვრებს ემჯობინება კუთხის განსაზღვრა როგორც სხივის უძრავი წერტილის ირგვლივ მობრუნების ზომისა.

გეომეტრიაში მოცემული კუთხის განსაზღვრა წარმოადგენს კერძო შემთხვევას ამ უფრო ფართო განსაზღვრისა. შემდეგში, როცა ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნაზე გადავალთ, მოსწავლის ყურადღება უნდა შევაჩეროთ იმ გარემოებაზე, რომ $\sin 0{,}01\,x = \frac{1}{2}$ განტოლება ამოუხსნელი დარჩებოდა, რომ კუთხის (ან რკალის) ცვლადობის არე გაფართოებული არ ყოფილიყო. მოსწავლემ სრულიად შეგნებული წარმოდგენა უნდა მიიღოს კუთხის ცვლადობის არეზე. კუთხე იცვლება $-\infty$-დან $+\infty$-მდე, ე. ი. მისი რიცხვითი მნიშვნელობა შესაძლებელია უდრიდეს ყოველგვარ ნამდვილ რიცხვს.

კუთხეზე წარმოდგენა და ხშირად მასთან დაკავშირებული მსჯელობა უფრო ნათელი გახდება, თუ ვსარგებლებთ კუთხის საწყისი და ბოლო გვერდის ცნებით.

მოსწავლისათვის გასაგები უნდა გავხადოთ შემდეგი: როდესაც ერთ სიბრტყეზე ვხედავთ ორ (OA და OB) სხივს, არ უნდა ვიფიქროთ რომ AOB კუთხე უსათუოდ 360°-ზე ნაკლებია; როცა გარკვეულად არ ვიცით, თუ როგორ შეიქმნა ეს კუთხე (AOB), უნდა

ვთქვათ, რომ იგი ეტოლება $360°n + \angle AOB$, სადაც n მთელი რიცხვია, $\angle AOB$ კი მახვილია, ან ბლაგვია, მაგრამ 360°-ზე ნაკლებია. კუთხე, როგორც ვხედავთ, მიმართული სიდიდეა. α და $2\varkappa\pi + \alpha$ კუთხეებს ერთნაირი საწყისი და ბოლო მნიშვნელობანი აქვს; ($\varkappa$ — ნებისმიერი მთელი რიცხვია).

§ 2. კუთხის (რკალის) რადიანული გაზომვა. გაკვეთილის მსვლელობა

მასწავლებელი — რა ერთეულებში ვზომავთ კუთხეს, რკალს?

მოსწავლე — კუთხეს ვზომავთ კუთხურ გრადუსებში, ხოლო რკალს — რკალურ გრადუსებში.

მასწავლებელი — რა არის კუთხური გრადუსი?

მოსწავლე — გრადუსი არის სწორი კუთხის $\frac{1}{90}$ ნაწილი.

მასწავლებელი — შეიძლება თუ არა, კუთხის საზომ ერთეულად მივიღოთ სწორი კუთხის სხვა ნაწილი, მაგალ., ერთი მეასედი? მეათედი?

მოსწავლე — შეიძლება.

მასწავლებელი ეუბნება კლასს, რომ პრაქტიკული საკითხებისათვის კუთხე იზომება გრადუსებში, რომ ყველა კუთხის საზომი იარაღი ჩვენებას გვაძლევს გრადუსული ზომით, ე. ი. გრადუსებითა და მისი ნაწილებით — მინუტებით, სეკუნდებით; მაგრამ თეორიული საკითხებისათვის, რასაც აყენებს უმაღლესი მათემატიკური ანალიზი, კუთხის სხვანაირი გაზომვა იხმარება.

მასწავლებელი — გაიხსენეთ, რა ძირითადი ერთეულებით სარგებლობთ თქვენ ფიზიკაში.

მოსწავლე — ფიზიკაში ძირითადი საზომი ერთეულები არის სიგრძის ერთეული, მასის ერთეული და დროის ერთეული.

კლასი გაიხსენებს იმას, რომ ყველა დანარჩენი ფიზიკური ერთეული წარმოადგენს წარმოებულ ერთეულს და განისაზღვრება დამოუკიდებლად კი არა, არამედ დასახელებული ერთეულების საშუალებით. გეომეტრიულ საკითხებშიც ძირითადი საზომი ერთეული სიგრძის ერთეულია, მაგალითად, 1 სმ, ხოლო ფართობისა და მოცულობის საზომი ერთეულებია 1 სმ^2 და 1 სმ^3. უკანასკნელი ერთეულები წარმოებულია 1 სმ-დან.

კუთხის გასაზომადაც ამგვარივე გზით ვისარგებლოთ.

გეომეტრიიდან ვიცით, რომ ცენტრული კუთხე თავისი შესა-

ბამი რკალით იზომება. ეს საზოგადოდ იმას ნიშნავს, რომ რამდენ საზომ ერთეულსაც შეიცავს რკალი, იმდენ საზომ ერთეულს შეიცავს შესაბამი ცენტრული კუთხეც. კუთხის რა საზომი ერთეულიც არ უნდა ამოვარჩიოთ ეს გეომეტრიული დებულება არ უნდა დაირღვეს. ეს ერთი მხრივ. მეორე მხრივ, გეომეტრიაში ძირითად საზომ ერთეულად ითვლება სიგრძის ერთეული. ახლა, ცხადია, რომ, თუ რკალის საზომ ერთეულად შევარჩევთ რკალს, რომლის სიგრძე რადიუსს ეტოლება, ხოლო კუთხის საზომ ერთეულად შევარჩევთ ცენტრულ კუთხეს, რომლის შესაბამი რკალია, ერთ ერთეულს ეტოლება, მაშინ:

1. ძალაში დარჩება ის გეომეტრიული დებულება, რომელიც ზემოთ გავიხსენეთ.

2. კუთხის საზომი ერთეული არ იქნება ისე *დამოუკიდებლად* და სრულიად თავისუფლად ამორჩეული, როგორც გრადუსი, არამედ ის იქნება დაკავშირებული ძირითად ერთეულთან (სიგრძის ერთეულთან) და წარმოგვიდგება როგორც წარმოებული ერთეული. ამგვარად, ჩვენ გვექნება რკალური ერთეული, რომელსაც უწოდებენ *რკალურ რადიანს*, და კუთხის ერთეული, რომელსაც უწოდებენ *კუთხურ რადიანს*, და რომელიც ისეთ ცენტრულ კუთხეს წარმოადგენს, რომლის შესაბამი რკალი თავისი სიგრძით რადიუსს ეტოლება. რადიუსი მიჩნეულია როგორც სიგრძის ერთეული.

მაშასადამე, ახლა ჩვენ გვაქვს კუთხის (რკალის) გაზომვის ორი სისტემა: *გრადუსული და რადიანული.*

ისმება საკითხი, როგორ ვიპოვოთ რადიანული გამოსახულება კუთხისა, რომელიც მოცემულია გრადუსებში, ან პირიქით, როგორ ვიპოვოთ გრადუსული გამოსახულება კუთხისა, რომელიც მოცემულია რადიანებში.

ამ საკითხის დამუშავებას მასწავლებელი ჩაატარებს ასე:

მასწავლებელი—რამდენ კუთხურ რადიანს შეადგენს 360 კუთხური გრადუსი?

დაფაზე დაიწერება $360^\circ = x$ რად.

მოსწავლე—360° შეადგენს იმდენ რადიანს, რამდენჯერაც წრის რადიუსი, რომელიც სიმარტივისათვის მიღებულია სიგრძის ერთეულად,—მოთავსდება წრეხაზის სიგრძეში.

მაშასადამე, მივიღებთ პასუხს:

$$360^\circ = 2\pi \text{ რადიანს.}$$

აი, ის გამოსავალი ტოლობა, რომელიც გაზომვის ერთი სისტემიდან მეორე სისტემაზე გადასვლის შესაძლებლობას გვაძლევს, მართლაც, ამ ტოლობიდან მივიღებთ:

1. $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ რადიანს,

2. $1 \text{ რადიანი} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 44''8.$

ამის თანახმად

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha \cdot \pi}{180} \text{ რადიანს,}$$

$$a \text{ რად.} = \frac{a \cdot 180^\circ}{\pi}.$$

ამ ტოლობათა მარჯვენა მხარეზე α და a განყენებული რიცხვებია.

საჭიროა მოსწავლემ დაიმახსოვროს, რომ $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ რადიანს, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ რადიანს, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ რად., $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ რად., და რომ რადიანული ზომა ცენტრული კუთხისა და მისი შესაბამი რკალისა ერთი და იმავე რიცხვით გამოისახება.

სავარჯიშოდ ავიღოთ მაგალითები:

ა) რამდენ რადიანს შეადგენს კუთხე $50^\circ 18'$? $72^\circ 40' 40''$?

ბ) რამდენ გრადუსს შეადგენს კუთხე 1, 2 რად.? 1,6 რად.? 0, 1 რად.? 2 რად.?

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: ჩანაწერი $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ ან $\pi = 180^\circ$ სწორი არაა!

აქ მე მინდა მასწავლებლის ყურადღება გავამახვილო ერთ მნიშვნელოვან საკითხზე—სიმბოლიკის საკითხზე. როდესაც კუთხე გამოსახულია გრადუსულ ზომაში და გვინდა დავწეროთ ასეთი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქცია, მაშინ აუცილებლად უნდა დაიწეროს ერთეულების სახელწოდება.

მაგალითად, ჩვენ ვწერთ $\sin 30^\circ$, $\operatorname{tg} 72^\circ$, $\cos 108^\circ$ და ვკით-

ხულობთ სინუსი 30 გრადუსისა, ტანგესი 72 გრადუსისა, კოსინუსი 108 გრადუსისა. მაგრამ, თუ კუთხე გამოსახულია რადიანებში, მაშინ ერთეულების სახელწოდება არ იწერება.

მაგალითად, სინუს ორი რადიანისა დაიწერება ასე: sin 2, ტანგენსი ნახევარი რადიანისა დაიწერება tg 0,5 სახით. ტრიგონომეტრიული ფუნქციის ქვეშ იწერება ის განყენებული რიცხვი, რომელიც, რადიანების რიცხვს გამოსახავს.

მოსწავლეს კარგად და ზედმიწევნით უნდა ესმოდეს ჩანაწერი: $\sin 3$; $\sin\sqrt{3}$; $\sin 1$; $\sin\alpha^2$ (აქ α არის აყვანილი კვადრატში, და არა სინუსი); $\mathrm{tg}\sqrt{\alpha}$ და ა. შ. *

დასასრულს მუშავდება რკალის სიგრძის ფორმულა, რომელიც ხშირად გამოიყენება მექანიკაში, ფიზიკასა და უმაღლეს მათემატიკაში.

ეს ფორმულა გვასწავლის, რომ რკალის სიგრძე ეტოლობა რადიუსს გამრავლებულს რადიანებში გამოსახულ შესაბამ ცენტრული კუთხის სიდიდეზე.

თუ რკალის სიგრძეს აღვნიშნავთ l ასოთი, შესაბამი ცენტრული კუთხის რადიანულ ზომას — a ასოთი, წრეხაზის რადიუსს — r ასოთი, მაშინ ფორმულა დაიწერება ასე:

$$l = ar.$$

კერძოდ, თუ წრეხაზის რადიუსი ეტოლება ერთეულს, ცენტრული კუთხე კი ერთ რადიანს, მაშინ შესაბამი რკალის სიგრძე იქნება ერთეულის ტოლი, ე. ი. $l=1$; ახლა, თუ ცენტრული კუთხე იქნება a რადიანის ტოლი, მაშინ l იქნება a ერთეულის ტოლი; თუ კი რადიუსსაც გავადიდებთ r-ჯერ, მაშინ რკალის სიგრძე l გახდება ar ერთეულის ტოლი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გავიგოთ რკალის სიგრძე, თუ წრეხაზის რადიუსი $=12$ სმ, ხოლო შესაბამი ცენტრული კუთხე $=1,5$ რადიანს.

პ ა ს უ ხ ი — რკალის სიგრძე $l = 12 \cdot 1,5$ სმ $= 18$ სმ.

განვიხილოთ კიდევ შემდეგი საკითხი.

სწორი ხაზის ირგვლივ ბრუნავს სხეული. რა მანძილს გაივლის მისი წერტილი A, თუ ის ღერძიდან დაშორებულია d სმ-ით, სხეული ჰი მობრუნდა a რადიანით.

---

* ცხადია, ამაზე მასწავლებელი შეჩერდება თავის დროზე და არა აქ.

საძებნი მანძილი $S=da$ სმ. თუ სხეულის ბრუნვის კუთხე მოცემული იქნება გრადუსებში, ე. ი. თუ a რადიანის ნაცვლად მოცემული იქნება a°, მაშინ ფორმულაც და გამოანგარიშებაც გართულდება. ამ შემთხვევაში იძულებული ვიქნებით დავწეროთ.

$$S=\frac{2\pi da}{360}=\frac{\pi da}{180}=da\cdot\frac{\pi}{180}\ (\text{სმ}).$$

როგორც ვხედავთ, აქ გაჩნდა ზედმეტი თანამამრავლი: $\frac{\pi}{180}$. ეს თანამამრავლი, როგორც ზევით დავინახეთ, წარმოადგენს რადიანებში გამოსახულ 1° კუთხეს; $a\cdot\frac{\pi}{180}$ ნამრავლი კი წარმოადგენს a° კუთხის რადიანულ ზომას. აქედან დასკვნა: მაშასადამე, თავიდანვე სჯობდა კუთხე გამოგვესახა რადიანებში და არა გრადუსებით უკანასკნელ საკითხში. აი ერთ-ერთი მაგალითი იმისა, რომ ზოგ საკითხში კუთხის რადიანული გაზომვა გრადუსულ გაზომვას სჯობს.

შემდეგში მოსწავლე არა ერთხელ დაინახავს კუთხის (რკალის) რადიანული გაზომვის უპირატესობას, როდესაც შეხვდება ასეთ უტოლობებს:

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x$$

$$\text{ან}\ 1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1,\ \text{სადაც}\ 0<x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

აქ მასწავლებელი მოსწავლის ყურადღებას კვლავ გაამახვილებს რადიანულ გაზომვაზე. ამის შესახებ მაშინაც საჭირო იქნება ლაპარაკი, როცა მოსწავლე შეუდგება $\operatorname{tg}(\operatorname{ctg}x)=\operatorname{ctg}(\operatorname{tg}x)$ სახის განტოლების ამოხსნას, ან კიდევ ჰარმონიული რხევის ფორმულის გამოყვანას. ხშირია შემთხვევა, როდესაც მასწავლებელი კმაყოფილდება რადიანული გაზომვის მეტად მოკლე ახსნით, ან სავსებით გამორიცხავს მას და შემდეგში მხოლოდ გრადუსული გაზომვით სარგებლობს. მასწავლებლის ასეთი არჩევანი უნდა შეფასდეს როგორც ფორმალიზმის ერთ-ერთი გამოვლინება. აღნიშნული საკითხების გარჩევაში რომ გავრცელებული შეცდომები არ დავუშვათ, საჭიროა მასწავლებლის ყურადღება შევაჩეროთ შემდეგზე:

ა) ზოგი ფიქრობს, რომ რადიანული გაზომვა განყენებულია,

რაც საშუალებას გვაძლევს ტრიგონომეტრიული ფუნქციები $\sin x$, $\cos x$ და სხვა განვიხილოთ როგორც ფუნქციები განყენებული არგუმენტისა. ეს აზრი მცდარია. თუ ჩვენ შევთანხმდით, რომ $\sin 2$ განვიხილოთ, როგორც სინუსი ორი რადიანისა (როდესაც გვინდა ვისარგებლოთ რადიანული გაზომვით), რატომ არ შეიძლება განვიხილოთ $\sin 2$ როგორც სინუსი ორი გრადუსისა, თუ შევჩერდებით გრადუსულ გაზომვაზე,—და $\sin 2°$ ნაცვლად ვწეროთ: $\sin 2$?

ბ) რადგან $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები წარმოადგენენ (ჩვენ მხედველობაში გვაქვს ელემენტარული მათემატიკა) გარკვეული მონაკვეთების ფარდობას რადიუსთან, ამიტომ მიზანშეწონილია — და არა აუცილებელი — რკალის (და მასთან ერთად კუთხის) რიცხვითი მნიშვნელობა მივიღოთ, როგორც რკალის სიგრძის და იმ წრის რადიუსის ფარდობა, რომელსაც გასაზომი რკალი ეკუთვნის. მაშინ უფრო ადვილი ხდება სხვადასხვა ფორმულების და ტრიგონომეტრიული უტოლობების გამოსახვა (იხ. ზევით) და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გამოანგარიშება. ფორმულები მიიღება უფრო მარტივი სახით; ამის გამო რადიანული გაზომვა არ უნდა იყოს დავიწყებული არც მასწავლებლისა და არც მოსწავლის მიერ. (იხ. აგრეთვე § 3-ს ბოლო).

§ 3. ცნება ფუნქციაზე. ფუნქციის ცნების განვითარების მოკლე ისტორიული ცნობები

თვით სიტყვა „ფუნქცია" (ლათინურად „functio" ნიშნავს აღსრულებას, შესრულებას) როგორც მათემატიკური ტერმინი პირველად იხმარა ლაიბნიცმა (ლაიბნიცი — გამოჩენილი გერმანელი მათემატიკოსი, ცხოვრობდა 1646—1716) 1694 წელს. წარმოვიდგინოთ, რომ x ცვლადი ღებულობს გარკვეულ მნიშვნელობებს ისე, რომ $a \leqslant x \leqslant b$, ე. ი. იცვლება $[a, b]$ შუალედში და ამ ცვლადზე დამოკიდებულია მეორე y ცვლადი სიდიდე. თუ x ცვლადის თითოეულ დასაშვებ მნიშვნელობას შეესაბამება y ცვლადის სავსებით გარკვეული მნიშვნელობა, მაშინ ამბობენ, რომ y ცვლადი x-ის ფუნქციაა, რაც მათემატიკურად ასე აღინიშნება:

$y = \mathrm{f}(x)$, ან $y = \mathrm{F}(x)$, $y = \mathrm{L}(x)$, $y = \alpha(x)$, $y = \omega(x)$ ან ამის მსგავსად.

აქ მასწავლებელმა უნდა მოიყვანოს და განიხილოს მაგალითები.

1. ავიღოთ $y=2x-1$; როცა $x=0$, მაშინ $y=-1$; $x=5$, მაშინ $y=9$ და ა. შ. უნდა დავსვათ საკითხი, როგორია x ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობანი? ე. ი. როგორია ფუნქციის არსებობის არე?

საზოგადოდ, ჩვენ აქ მხოლოდ x-ის და y-ის ნამდვილ მნიშვნელობებზე ვილაპარაკებთ. ჩვენს მაგალითში x-ისათვის დასაშვებია ყოველი ნამდვილი მნიშვნელობა, y ცვლადიც მიიღებს მუდამ ნამდვილ მნიშვნელობას.

ყოველივე ეს გაკვეთილზე კარგად უნდა იქნეს გამორკვეული, საჭიროა გრაფიკის აგებაც, რასაც დამუშავების პროცესში თვალსაჩინოება შეაქვს და ამით ხელს უწყობს საკითხის შეგნებულად შეთვისებას.

2 აი კიდევ მაგალითები, რომელთა განხილვაც სასურველია: $y=|x|$; $y=\sqrt{-x}$; $y=\sqrt[3]{x}$; აქ თითოეულ მაგალითში გამორკვეული უნდა იქნეს x ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობა—ეს ერთი, მეორე—რა წესით არის მოცემული y ცვლადი და მესამე—შეიძლება თუ არა ვუწოდოთ y ცვლადს „x-ის ფუნქცია". $y=|x|$ მაგალითში x-ს შეიძლება მივცეთ ყოველგვარი ნამდვილი მნიშვნელობა, y-იც მიიღებს ნამდვილ მნიშვნელობას. წესი, რომლითაც აქ ფუნქცია არის მოცემული, ასეთია: y ეტოლება x-ის მოდულს. x ცვლადის თითოეულ მნიშვნელობას y ცვლადის გარკვეული მნიშვნელობა შეესაბამება: როცა $x=3$, y-იც უდრის 3; როცა $x=-7$, y უდრის 7-ს და ა. შ.

$y=\sqrt{-x}$ მაგალითში $x\leqslant 0$. თუ ეს პირობა არ იქნება შესრულებული, y ცვლადი არ იქნება ნამდვილი, ჩვენ კი ვლაპარაკობთ მხოლოდ ნამდვილი ცვლადის ნამდვილ ფუნქციაზე.

$y=\sqrt[3]{x}$ მაგალითში x ცვლადს შეიძლება მივცეთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვითი მნიშვნელობა; $y=\frac{x+1}{x}$ მაგალითში $x=0$ გარდა (რადგან x-ის ამ მნიშვნელობისათვის წილადს ეკარგება აზრი) ყველა დანარჩენი მნიშვნელობა მისაღებია; მაგალითში $y=\frac{x}{x-1}$ x-ს შეიძლება მივცეთ ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობა, გარდა $x=1$; როცა $x=1$, ფუნქციას $y=\frac{x}{x-1}$ აზრი ეკარგება (მასწავ-

ლებელმა უნდა იცოდეს, რომ როცა $x=\frac{\pi}{2}$ ფუნქცია $tg\,x$ კარგავს აზრს, ვინაიდან $tg\frac{\pi}{2}$ არავითარ რიცხვს არ წარმოადგენს; უსასრულობა რიცხვი არაა, რიცხვი ყოველთვის სასრული უნდა იყოს). ძლიერ სასურველია $y=x$ და $y=|x|$ ფუნქციათა გრაფიკების აგება. გრაფიკები მოსწავლეს ნათლად დაანახვებს განსხვავებას მათ შორის.

საზოგადოდ გრაფიკული და ანალიზური ხერხის მიმდევრობითი გამოყენება ეფექტური საშუალებაა ფუნქციების გამოკვლევისა და მათი თვისებების შესწავლისა. სასარგებლოა განხილვა $n!$ ფაქტორიალ ფუნქციისა. მოსწავლე უნდა მივიყვანოთ იმ დასკვნამდე, რომ ცნება ფუნქციაზე ეს არის ცნება შესაბამისობაზე. ამიტომ დაუშვებელია აზრი (მტკიცება), რომ ფუნქცია სამგვარია: ფორმულით მოცემული, გრაფიკულად ან კიდევ ცხრილით მოცემული.

სავსებით შესაძლებელია, რომ არც ფორმულას, არც გრაფიკს და არც ტაბულას ჰქონდეს ადგილი, მაგრამ ისეთი წესის სიტყვიერი ფორმულირება ვიქონიოთ, რომელიც საშუალებას მოგვცემს ცვლადთა შორის გარკვეული შესაბამისობა დავადგინოთ; მაგალითად, x-ის (არგუმენტის, დამოუკიდებელი ცვლადის) ყოველი ირაციონალური მნიშვნელობისათვის y-ი მივიღოთ ნულის ტოლად ($y=0$), ხოლო x-ის ყოველი რაციონალური მნიშვნელობისათვის y-ი მივიღოთ ერთეულის ტოლად ($y=1$). ასეთი შესაბამისობა უფლებას გვაძლევს y-ი განვიხილოთ როგორც x-ის ფუნქცია. ამ ფუნქციას დირიხლეს (Dirichlet) ფუნქცია ეწოდება.

მხედველობიდან არ უნდა გამოგვრჩეს, რომ როცა რომელიმე მათემატიკური გამოსახულება შეიცავს რაიმე ცვლადს და, მაშასადამე, ამ ცვლადზეა დამოკიდებული (წარმოადგენს ამ ცვლადის ფუნქციას), აქედან კიდევ არ შეიძლება დავასკვნათ, რომ ფუნქცია უსათუოდ ანალიზურად არის მოცემული. თუ ფუნქციის ცნება იგივეა, რაც შესაბამისობის ცნება, ადვილად გასაგებია, რომ ფუნქცია თავისი არის შუალედებში შეიძლება მოცემული იყოს სხვადასხვა წესის მიხედვით, მაგალითად: თუ $-8<x\leqslant-3$, $y=x$; თუ $-3<x\leqslant 1$, $y=2x+1$; თუ კი $1<x\leqslant 2$, $y=\frac{1}{x}$ და ა. შ. ყველა ზემოხსენებულის შესახებ კლასში თანმიყოლებით საუბარი ზედიზედ მიუღებელია. ამასთან, მასწავლებელს უნდა ახსოვ-

დეს, რომ არ დაუშვას ისეთი შეცდომა, რომლის შემდეგში გამოსწორება ძალიან ძნელია.

მიზანშეწონილად მიგვაჩნია მასწავლებელს აქვე მივცეთ ფუნქციაზე ცნების განვითარების მოკლე ისტორიული ცნობა.

მათემატიკაში ეს უმნიშვნელოვანესი ცნება დეკარტმა შეიტანა.

მისთვის ფუნქცია რომელიმე მრუდი ხაზია. აღებულ ხაზზე წერტილის ორდინატი მისი აბსცისის ფუნქციაა (ბერნშტეინი).

დეკარტისთვის ფუნქციის განსაზღვრა დამოკიდებულია გეომეტრიაზე. მისთვის ფუნქცია და მრუდი სინონიმებია. ეს პირველი ეტაპია.

ნიუტონიც მრუდის ორდინატის სახით გამოხატავს სიდიდეს, რომელიც მეორე სიდიდის ფუნქციას წარმოადგენს (Цейтен, გვ. 388). ლაიბნიცი 1686 წელსაც კი ხმარობს გამოთქმას „ტრანსცენდენტული სიდიდეები", ნაცვლად გამოთქმისა „ტრანსცენდენტული ფუნქციები" (იქვე, გვ. 416).

XVIII საუკუნის დასაწყისს ბერნულიმ და ეილერმა ფუნქცია განსაზღვრეს, როგორც რომელიმე ანალიზური გამოსახულება. ფუნქციის განსაზღვრა ეილერის მიერ ასეთია: რომელიმე ცვლადი სიდიდის ფუნქცია ეწოდება ანალიზურ გამოსახულებას, რომელიც შედგენილია ამ ცვლადი სიდიდისა და მუდმივ ოდენობათა დახმარებით.

ამრიგად, ფუნქცია და ფორმულა (ანალიზური გამოსახულება) ერთისა და იმავე ცნების სინონიმებია. ეს მეორე ეტაპია.

XIX საუკუნის პირველ ნახევარში გაუსის მოწაფემ ლეჟენ დირიხლემ (1805—1859 წწ.) რომელმაც თავისი მასწავლებლის კათედრა დაიჭირა ჰეტინგენის უნივერსიტეტში, ფუნქციის უაღრესად ფართო განსაზღვრა მოგვცა, რომლითაც სარგებლობს თანამედროვე მათემატიკა და რომელიც ასეა ჩამოყალიბებული:

y-ს ეწოდება ნამდვილი x ცვლადის ფუნქცია რომელიმე $[a, b]$ შუალედში, თუ x-ის თითოეულ მნიშვნელობას ამ შუალედიდან შეესაბამება y-ის სავსებით განსაზღვრული მნიშვნელობა". ეს მესამე ეტაპია. ამ მესამე ეტაპს იმ მხრივ აქვს დიდი მნიშვნელობა, რომ სრულიად გვაცილებს თავიდან იმ ნათესაურ ურთიერთობას, რითაც უკავშირებდნენ ერთმანეთს ფუნქციასა და მრუდ ხაზს პირველ ეტაპზე, აგრეთვე ფუნქციასა და ფორმულას მეორე ეტაპზე.

დირიხლეს ფუნქციის ცნება უფრო ფართოა, ვიდრე მრუდის ცნება, როგორც იგი ესმოდათ მათემატიკოსებს XVII და XVIII

საუკუნეებში, იგი უფრო ფართოა აგრეთვე, ვიდრე ეილერის „ანალიზური გამოსახულება".

ადგილის სიმცირის გამო მოკლებული ვარ საშუალებას დავასურათო გამოთქმული დებულება რამდენიმე მაგალითით. აღვნიშნავ მხოლოდ, რომ თუ გვაქვს ჩანაწერი;

$$y=-1, \text{ როცა } x<0$$

$$y= \ 0, \text{ როცა } x=0$$

$$y=+1, \text{ როცა } x>0$$

აქ მოსწავლეები უნდა ხედავდნენ არა სამ ფუნქციას, თუმცა ჩვენ სამი ანალიზური გამოსახულება გვაქვს, არამედ ერთ ფუნქციას.

რასაკვირველია, ჩვენ შეგვიძლია შევამოკლოთ ჩანაწერი, თუ რომელიმე სპეციალურ ნიშანს შემოვიღებთ ჩვენი ერთი ფუნქციის აღსანიშნავად, რომელიც გამოსახულია სამი ფორმულით. მაგრამ ასეთი პირობითი ნიშანი საქმის არსს არ ცვლის. მართლაც, რა შეიცვლება არსებითად. თუ შევთანხმდებით, რომ ჩვენი ფუნქცია ასე აღვნიშნოთ: $y=\operatorname{sign}(x)$ და წავიკითხოთ y უდრის სიგნუმ x-ისა; (ლათინური „სიგნუმ" ნიშნავს ნიშანს, ბეჭედს).

ამ მომენტის შეგნებული შეთვისება დიდ ნაბიჯს წარმოადგენს მოსწავლის მათემატიკური განვითარების პროცესში, კერძოდ, ისეთი მნიშვნელოვანი და ძირითადი ცნების დაუფლებაში, როგორც არის ფუნქციის ცნება. თუ მოსწავლე ამ მომენტში გაერკვევა, მაშინ ადვილად გაიგებს, რომ რაიმე მრავალსახა ფუნქციაზე ლაპარაკი ზედმეტია. (არ დავივიწყოთ, რომ მხედველობაში გვაქვს მხოლოდ ნამდვილი ცვლადის ნამდვილი ფუნქცია).

„მრავალსახა ფუნქცია" ახლა ისე წარმოგვიდგება, როგორც სპეციალური ნიშნის დახმარებით მოკლედ ჩაწერილი ერთი ფუნქცია; ამასთან ეს ფუნქცია დასაწყისში გამოსახულია ფორმულებით, რომელთა რიცხვი ერთზე მეტია. თითოეული ეს ფორმულა ცალსახად (როგორც ამას მოითხოვს ფუნქციის ცნების განსაზღვრა) განსაზღვრავს ფუნქციის მნიშვნელობას მისი არსებობის არის შესაბამ ინტერვალში.

შეიძლება მკითხველმა იკითხოს, მაშ რას წარმოადგენს, ან რას გამოსახავს Arcsinx, თუ მრავალსახა ფუნქციის სახელს არ მივცემთ? პასუხი ასეთი იქნება: Arcsinx წარმოადგენს ყველა იმ კუთხის (რკალის) ზოგად სახეს, რომელთაც ერთნაირი სინუსი აქვთ.

ფუნქციას (ფორმულას) გაცილებით უფრო მეტი გამოყენება აქვს, როცა არგუმენტი განყენებული რიცხვია, და არა სიდიდე.

ავიღოთ, მაგალითად, ფუნქცია $y = ax$. თუ a არის თანაბრად მოძრავი სხეულის სიჩქარე, x კი დრო, მაშინ y გამოსახავს გავლილ მანძილს. მაგრამ ფუნქცია $y = ax$, სადაც ასოები y, a, x მიღებული იქნება როგორც განყენებული რიცხვები და არა როგორც გარკვეული კონკრეტული სიდიდეები, გამოიყენება იმ შემთხვევაშიც, როცა ვპოულობთ მართკუთხედის ფართობს, თუ a გამოსახავს ფუძეს, x კი სიმაღლეს, და კიდევ მრავალ სხვადასხვა შემთხვევაში. გარდა ამისა მათემატიკურ ანალიზში, კერძოდ, ალგებრასა და ტრიგონომეტრიაში, საზოგადოდ სიდიდეებზე შეიძლება ვაწარმოოთ მხოლოდ ორი ოპერაცია—შეკრება და გამოკლება—განყენებულ რიცხვებზე კი ყველა დანარჩენი. აქ ნათქვამი ემატება იმას, რაც იყო თქმული § 2 ს ბოლოს. (პუნქ. ა და ბ).

§ 4. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრა

ელემენტარულ მათემატიკაში დასაშვებია ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრა მხოლოდ გეომეტრიული გზით.

გეომეტრიული განსაზღვრა შეიძლება მივცეთ ორი გზით: ან ტრიგონომეტრიული ხაზების სარგებლობით, ან პროექციების საშუალებით. მაგალითად, სინუსი რიბკინის სწორხაზოვან ტრიგონომეტრიაში განისაზღვრება როგორც სინუსის ხაზის ფარდობა რადიუსთან; ა. ბერმანტის და ლ. ლუსტერნიკის ტრიგონომეტრიაში კი სინუსი განისაზღვრება როგორც საწყის რადიუსთან α კუთხის შემქმნელი რადიუსის ვერტიკალური პროექციის ფარდობა რადიუსის სიგრძესთან.

ამ უკანასკნელ ორ ავტორს ტრიგონომეტრიული ხაზების ცნებით სარგებლობა არაპედაგოგიურად მიაჩნია. ისინი ამბობენ, რომ ტრიგონომეტრიული ხაზებით ჩვენ ვსარგებლობთ მხოლოდ და მხოლოდ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრისათვის, რის შემდეგ მათ არსად აღარ ვახსენებთო. ეს მოსაზრება მართალია.

რასაკვირველია, პროექციის ცნება მნიშვნელოვანია; ამ ცნებით ჩვენ ვსარგებლობთ ხშირად სხვადასხვა მათემატიკური საკითხის ამოხსნის დროს. თეორემები პროექციებზე შესაძლებლობას გვაძლევენ საჭირო ფორმულა უფრო მოკლე გზით მივიღოთ. ეს სავსებით სწორია. მაგრამ ისიც უნდა გვახსოვდეს, რომ ჩვენი საშუალო სკო-

ლა მასობრივია და თვალსაჩინოებას სწავლებაში დიდი ადგილი უნდა დავუთმოთ. საკითხის ამ თვალსაზრისით განხილვისას ამ დასკვნამდე მივალთ, რომ ტრიგონომეტრიის კურსის დასაწყისში სწორედ პედაგოგიურად გამართლებული იქნება ტრიგონომეტრიული ხაზებით სარგებლობა*.

ზემოთ მოყვანილი სინუსის ორი განსაზღვრა ერთიმეორეს შეადარეთ და ადვილად შეამჩნევთ, რომ მეორე განსაზღვრა, რომელიც პროექციის ცნებაზეა აგებული, უფრო რთულია და უფრო ნაკლებად მისაწვდომი საშუალო მოსწავლისათვის. ამიტომ ჩვენ მიზანშეწონილად მიგვაჩნია, რომ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების **საბოლოო** განსაზღვრა მოცემულ იქნეს ტრიგონომეტრიული ხაზებისა და რადიუსის ფარდობის სახით. მაგრამ, მხედველობიდან არ უნდა გამოგვეპაროს ერთი საფრთხე. საქმე იმაშია, რომ მოსწავლენი ისე ეჩვევიან ამ ტრიგონომეტრიულ ხაზებსა და ტრიგონომეტრიულ წრეს, რომ მათ გარეშე უძნელდებათ ზოგიერთი საკითხის დაძლევა და ეძებენ წმინდა გეომეტრიულ გზას მაშინაც კი, როცა უფრო ადვილია ანალიზური გზა: მაგალითად, სამართლიანია თუ არა ყოველთვის ტოლობა

$$arc\sin(\sin x) = x$$

აქ პასუხი ასეთი უნდა იყოს: სამართლიანია, თუ

$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, თუ კი $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, მაშინ

$$arc\sin(\sin x) = \pi - x.$$

მოსწავლეს უნდა ესმოდეს, რომ ტრიგონომეტრიული ხაზები და ტრიგონომეტრიული წრე წარმოადგენენ მხოლოდდამხოლოდ დამხმარე თვალსაჩინო იარაღს, რომელიც დროებითი საშუალებაა ტრიგონომეტრიაში და მეტი არაფერი. ეს არის იარაღი, რომელსაც შემდეგში თავი უნდა დავანებოთ. ამიტომ აღნიშნულ საფრთხესთან ბრძოლისათვის საჭიროდ მიგვაჩნია შემდეგნაირი მუშაობა კლასთან.

---

* აგრეთვე სრულიად მისაღებია კოორდინატთა მეთოდიც. მაშინ, მაგალითად, $\sin x$, ვანისაზღვრება როგორც მოძრავი რადიუსის ბოლო წერტილის ორდინატის ფარდობა რადიუსის სიგრძესთან. ცხადია, ასეთი ინტერპრეტაცია ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისა არსებითად არ განსხვავდება იმ ინტერპრეტაციისაგან, რომელიც ხმარებულია წინამდებარე წიგნში.

ა) მოსწავლის ყურადღება იმ მნიშვნელოვან გარემოებას უნდა მიექცეს, რომ, თუ, მაგალითად, სამკუთხედის ერთ რომელიმე კუთხეს გავადიდებთ ორჯერ, სამჯერ..., მოპირდაპირე გვერდი იმდენჯერვე არ გადიდდება. ეს ფაქტი ძირითადია: აქ არავითარ პირდაპირ პროპორციულობას არა აქვს ადგილი და დამოკიდებულება კუთხესა და მოპირდაპირე გვერდს შორის რთული ბუნებისაა.

ბ) სამკუთხედის დასახელებულ ელემენტებს შორის უბრალო, მარტივი პროპორციულობა რომ არსებობდეს, მაშინ არითმეტიკის გარდა არაფერი დაგვჭირდებოდა, მაგრამ ეს ასე არ არის.

შემდეგისათვის ვგულისხმობთ, რომ კლასს აქვს დამაკმაყოფილებელი წარმოდგენა დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაზე და დეკარტის ნიშანთა წესზე.

ზემოაღნიშნულის შედეგად გაკვეთილების მსვლელობა ასეთ სახეს მიიღებს:

მ ა ს წ ა ვ ლ ე ბ ე ლ ი — ავიღოთ სამკუთხედი ABC (ერთ-ერთი მოსწავლე ხაზავს დაფაზე სამკუთხედს) და გვერდი AB გავადიდოთ ორჯერ, ხოლო წვერო C-ს მდებარეობა შეუცვლელი დავტოვოთ. ორჯერ გადიდდება თუ არა მოპირდაპირე C კუთხეც?

პ ა ს უ ხ ი — არა.

მ ა ს წ ა ვ ლ ე ბ ე ლ ი — დამიმტკიცეთ?

დამტკიცების შემდეგ კლასი იმ შემთხვევასაც გაარკვევს, როდესაც C კუთხე ორჯერ გადიდდება AB გვერდის ორჯერ გადიდების გამო, ასეთი შემთხვევა მიღებული იქნება როგორც გ ა მ ო ნ ა კ ლ ი ს ი.

დამტკიცებისათვის შეიძლება პარალელოგრამით სარგებლობა. პარალელოგრამში დიაგონალები იყოფიან შუაზე, მაგრამ ეს დიაგონალები მის კუთხეებს შუაზე საზოგადოდ არ ჰყოფენ. მხოლოდ რომბში კუთხეებიც იყოფა შუაზე. დამტკიცებისათვის შეიძლება ვისარგებლოთ აგრეთვე თეორემებით სამკუთხედის კუთხის ბისექტრისის შესახებ:

მ ა ს წ ა ვ ლ ე ბ ე ლ ი — როგორც ვხედავთ, სამკუთხედში გვერდებსა და მათ მოპირდაპირე კუთხეთა შორის პირდაპირი პროპორციულობა არ არსებობს. კავშირი მათ შორის რთული ხასიათისაა და მყარდება განსაკუთრებული ფუნქციების საშუალებით. ამ ფუნქციებს ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ეწოდება, რადგანაც ისინი უპირველეს ყოვლისა, ტრიგონომეტრიაში იხმარებიან. ტრიგონო-

მეტრია წარმოადგენს მათემატიკის ისეთ დარგს, რომლის უახლოესი მიზანი სამკუთხედების ამოხსნაა.

მასწავლებელი განუმარტავს კლასს, თუ რას ნიშნავს სამკუთხედის ამოხსნა. ცხადია, ამბობს მასწავლებელი, საჭირო ხდება ჯერ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შესწავლა. ტრიგონომეტრიის ამ ნაწილს გონიომეტრია ეწოდება. აქ ვაწარმოებთ გამოკითხვას.

მ ა ს წ ა ვ ლ ე ბ ე ლ ი — მაშ, ჯერ გავეცნოთ ამ ფუნქციებს. ავიღოთ მახვილი კუთხე ABC (ერთ-ერთი მოწაფე დაფაზე ხაზავს მახვილ კუთხეს, დანარჩენები—რვეულებში).

ავიღეთ AB გვერდზე M წერტილი (იხ. ნახ. 2). ამ წერტილიდან BC გვერდზე დავუშვათ MP პერპენდიკულარი; განვიხილოთ MP პერპენდიკულარის შეფარდება BM მონაკვეთთან, ე. ი.

$$\frac{MP}{MB}$$

გამოარკვიეთ, შეიცვლება თუ არა ეს შეფარდება, თუ იმავე გვერდზე M წერტილის ნაცვლად ავიღებთ სხვა რომელიმე M_1 წერტილს და შევადგენთ შეფარდებას

$$\frac{M_1P_1}{M_1B}$$

სადაც M_1P_1 წარმოადგენს პერპენდიკულარს BC გვერდისადმი.

პ ა ს უ ხ ი — არა. არ შეიცვლება. მოწაფე ამტკიცებს ამას. განიხილავენ მსგავს სამკუთხედებს MPB და $M_1P_1B_1$.

მ ა ს წ ა ვ ლ ე ბ ე ლ ი — შეიძლება თუ არა შეფარდება, თუ BC გვერდზე M წერტილის ნაცვლად ავიღებთ რომელიმე M_2 წერტილს. ამ წერტილიდან დავუშვებთ M_2P_2 პერპენდიკულარს BA გვერდზე და შევადგენთ შეფარდებას

$$\frac{M_2P_2}{BM_2}$$

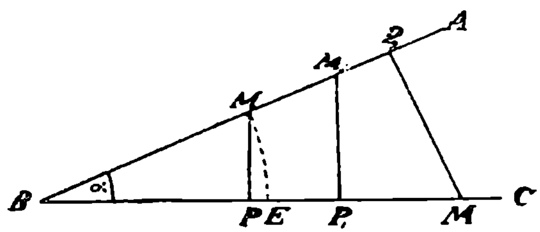
პ ა ს უ ხ ი — არა. არ შეიცვლება (მოწაფე ამტკიცებს იმავე გზით).

მ ა ს წ ა ვ ლ ე ბ ე ლ ი — რა შეიძლება აქედან დავასკვნათ?

კარგი იქნება, თუ კლასი დამოუკიდებლად გააკეთებს ამ დას-

კვნას. მაგრამ, თუ ეს არ მოხერხდება, მასწავლებელმა თვითონ უნდა ჩამოაყალიბოს საკითხის განხილვის შედეგი.

მ ა ს წ ა ვ ლ ე ბ ე ლ ი — მაშასადამე, თუ მოცემული გვაქვს მახვილი კუთხე და ამ კუთხის ერთ-ერთი გვერდის რომელიმე წერტილიდან მეორე გვერდზე დავუშვებთ პერპენდიკულარს, მაშინ ამ პერპენდიკულარის შეფარდებას მანძილთან კუთხის წვეროდან აღებულ წერტილამდე, გარკვეული მნიშვნელობა ექნება. კუთხის (ჯერ მხედველობაში გვაქვს მახვილი კუთხე) გარკვეულ მნიშვნელობას დასახელებული შეფარდების ერთი და მხოლოდ ერთი გარკვეული მნიშვნელობა შეესაბამება. მაშასადამე, ეს შეფარდება წარმოადგენს კუთხის ფუნქციას. მასწავლებელი ეუბნება მოწაფეებს ამ ფუნქციის სახელწოდებას და უჩვენებს მის აღნიშვნას. $\sin\alpha$.



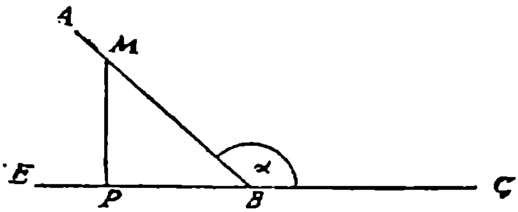
ნახ. 2.

ამგვარადვე კლასი ეცნობა $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ ფუნქციებს.

შემდეგ მასწავლებელი განიხილავს შემთხვევას, როცა $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (იხ. ნახ. 3). ავიღოთ ხელახლა M წერტილი ნებისმიერად BA გვერდზე, ვაწარმოოთ ყველა ის ოპერაციები, რომელთაც ზევით იყო თქმული, და განვიხილოთ $\frac{MP}{BM}$ შეფარდება. ეს შეფარდება იმავე თვალსაზრისით იქნება განხილული. აქ ახალს არ ექნება ადგილი. $\frac{BP}{BM}$ შეფარდება კი გვაძლევს შემთხვევას ვისაუბროთ მონაკვეთების მიმართულებაზე და დეკარტის ნიშანთა წესზე. უკანასკნელი დაგვჭირდება აგრეთვე $\frac{MP}{BP}$ და $\frac{BP}{MP}$ შეფარდებების განხილვის დროს.

მაშასადამე, როგორც ვხედავთ, განხილული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები წარმოადგენენ გარკვეული წესით აღებული ორი სიგრძის (ორი მონაკვეთის) შეფარდებას.

ამის შემდეგ მასწავლებელი განიხილავს ჯერ ისეთი კუთხეების ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს, რომლებიც 180°-ზე მეტია, ხოლო 270°-ზე ნაკლები, მერე დანარჩენი კუთხეების (270°, 360°) შუალედში. მიზანშეწონილი იქნება ჯერჯერობით თავი შევიკავოთ და არ ვისაუბროთ $\sec\alpha$ და $\operatorname{cosec}\alpha$ ზე; არც იმ შემთხვევებზე, როდესაც კუთხის ტანგენსი ან კოტანგენსი უსასრულობაა.



ნახ. 3.

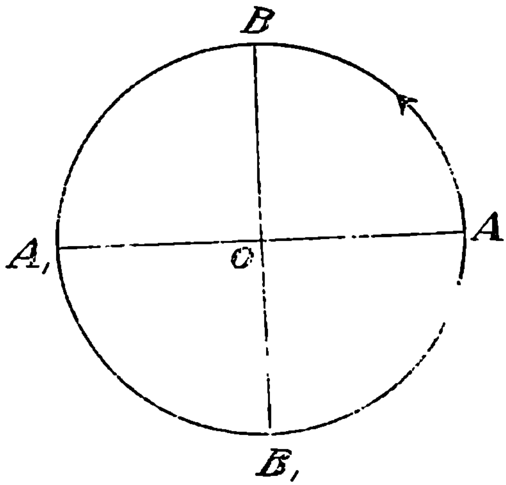
ახლა ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცვლადობის (და შემდეგ მათი გამოანგარიშების) საკითხის შესწავლისათვის ამგვარი ნახაზით სარგებლობა ერთგვარ უხერხულობას წარმოადგენს. მართლაც, გავადიდოთ კუთხე α, რისთვისაც მოვაბრუნოთ AB გვერდი B წერტილის ირგვლივ საათის ისრის მოძრაობის წინააღმდეგ. სად ავიღოთ ამ AB გვერდზე წერტილი, რომ ზემომოყვანილი წესით მიღებული შეფარდება ადვილად შევადაროთ პირველ შეფარდებას, ე. ი. $\frac{MP}{BM}$ შეფარდებას? ცხადია, ეს შედარება მაშინ უფრო ადვილია, როცა შეფარდების ერთ-ერთი წევრი, მაგალითად, მნიშვნელი უცვლელი დარჩება. ამგვარად, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცვლადობის შესწავლისათვის მიზანშეწონილია ისეთი შეფარდებები, რომლებშიც მნიშვნელი უცვლელია. მაშასადამე, ბუნებრივია ავაგოთ წრე და ვიხმაროთ ცენტრული კუთხეები. წრის რადიუსი შეიძლება ნებისმიერი სიდიდისა იყოს. ყველაზე მოხერხებულია, თუ წრის რადიუსს ერთეულის ტოლს ავიღებთ.

აღნიშნული შეფარდებების ნიშნების საკითხის გამორკვევისათვის მოვიხმაროთ დეკარტის სწორკუთხოვან კოორდინატთა სისტემა; კოორდინატთა სათავე ავიღოთ წრის ცენტრში, ე. ი. ავა-

გოთ ორი ურთიერთ პერპენდიკულარული დიამეტრი, მათი გადაკვეთის წერტილი წრის ცენტრში იქნება ერთ დიამეტრს ვუწოდოთ ჰორიზონტალური დიამეტრი, მეორეს—ვერტიკალური.

ასეთი განხილვის შემდეგ მოსწავლეები თავიანთ რვეულებში ააგებენ ტრიგონომეტრიულ წრეს.

ტრიგონომეტრიული წრე ეწოდება ისეთ წრეს, რომლის რადიუსი ერთეულის ტოლია, ცენტრი კოორდინატთა სისტემის სათავეშია, ხოლო რკალების ათვლის წერტილი იმყოფება ჰორიზონტალურ დიამეტრზე, და ცენტრიდან ერთი ერთეულის მანძილით არის დაშორებული (ნახ. 4).



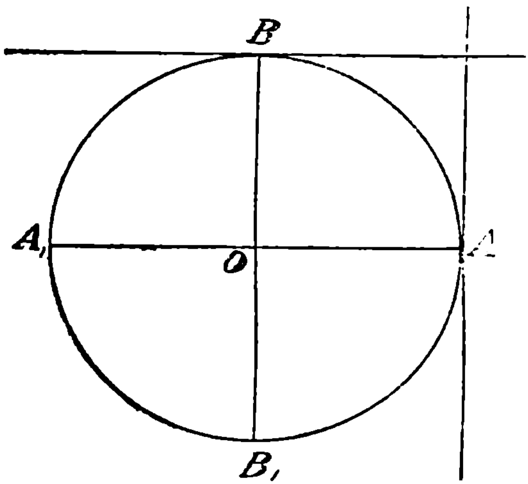
ნახ. 4.

ამგვარად ტრიგონომეტრიული წრის როლი გა: ორკვეულია. სწავლების პროცესში იგი წარმოადგენს დამხმარე საშუალებას.

იმის გამო, რომ შედეგში ჩვენ საქმე გვექნება ისეთ შეფარდებებთან, რომელთა მნიშვნელი ერთნაირია, მიზანშეწონილია მნიშვნელი რადიუსის ტოლი ავიღოთ. შემდეგ, იმის გამო, რომ ტანგენსი და კოტანგენსი განისაზღვრება როგორც ორი გარკვეული წესით აღებული ორი კათეტის შეფარდება, რომლის მნიშვნელი რადიუსს ეტოლება, მოსწავლისათვის ძნელი არ იქნება დასახელებული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ტრიგონომეტრიული ხაზების აგება. ამ გზით ჩამოყალიბდება ასეთი ნახაზი (ნახ. 5):

ასეთ ნახაზს მოსწავლე ტრიგონომეტრიის პირველ გაკვეთილებზე უნდა ხედავდეს. ამის შემდეგ მასწავლებელი კვლავ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრაზე გადადის, მაგრამ ტრიგონომეტრიული წრისა და ხაზების საშუალებით.

მართალია, ასეთი ხერხით მუშაობა შედარებით მეტ დროს მოითხოვს, მაგრამ იგი ხელს უწყობს წარმატებით სწავლებას. ასეთ პირობებში მოსწავლე უფრო შეგნებულად ითვისებს გავლილ მასალას, რადგან აქ სწავლების ყოველი მომენტი გამართლებულია თეორიულად და პრაქტიკულად. ეს კი ფორმალიზმის წინააღმდეგ ბრძოლის ერთ-ერთი გზაა.



ნახ. 5.

აუცილებელია განვუმარტოთ მოსწავლეებს, თუ რატომ ეწოდება sin α-ს, cos α-ს, tg α-ს და ctg α-ს α კუთხის (რკალის) ფუნქციები. ამისათვის უნდა გავიხსენოთ ის, რაც ზევით იყო ნათქვამი (§ 3) ფუნქციის ცნების შესახებ.

ავიღოთ sin α, სადაც α *კუთხე* (*რკალი*) ცვლადი სიდიდეა. α კუთხეს შეიძლება ნებისმიერი მნიშვნელობა ჰქონდეს. თუ ეს მნიშვნელობა მოცემულია, მაშინ შესაძლებლობა გვექნება ავიღოთ კუთხე, კვადრანტის მიხედვით სინუსის ხაზი და შემდეგ შევადგინოთ ამ ხაზის შეფარდება რადიუსთან (შეფარდება უნდა ავიღოთ თავისი

ალგებრული ნიშნით). ცხადია, რომ ეს შეფარდება სრულიად გარკვეული იქნება: კუთხის გარკვეულ მნიშვნელობას შეესაბამება ამ შეფარდების (ამ შემთხვევაში სინუსის) გარკვეული მნიშვნელობა.

რაც შეეხება ისეთ გამონაკლისს, როგორიცაა $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{ctg}\pi$, $\operatorname{ctg}2\pi$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, ამაზე ჩვენ მსჯელობა გვექნება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცვლის შესწავლასთან დაკავშირებით. სეკანსზე და კოსეკანსზე შეიძლება არ შევჩერდეთ. ამ ფუნქციებს მაინც და მაინც ისეთი მნიშვნელობა არა აქვთ, რომ მათი განხილვით დავამძიმოთ ტრიგონომეტრიის პირველი გაკვეთილები.

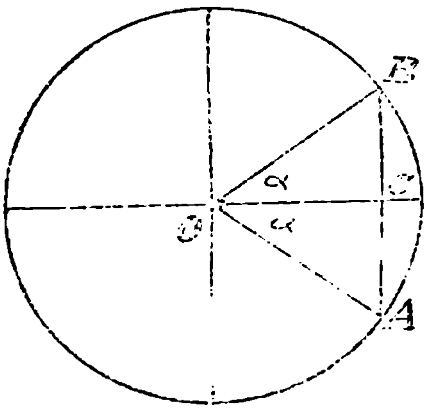
უფრო მეტი ვარჯიშია საჭირო: 1) ტრიგონომეტრიული ხაზების აგებაზე და მათი მიმართულების გამორკვევაზე, 2) ტრიგონომეტრიული ფუნქციების რიცხვითი მნიშვნელობის გამოანგარიშებაზე მოცემული კუთხის ტრიგონომეტრიული ხაზის და რადიუსის უშუალო გაზომვით, 3) კუთხის *აგებაზე*, როდესაც მოცემულია მისი რომელიმე ფუნქციის რიცხვითი მნიშვნელობა. ამ ვარჯიშს დიდი დიდაქტიკური მნიშვნელობა აქვს. ასეთი ვარჯიშის შედეგად მოსწავლე პრაქტიკულად იყენებს ტრიგონომეტრიის ძირითად ცნებებს და უფრო შეგნებულად ითვისებს მიღებულ ცოდნას, იმეორებს გეომეტრიულ მასალას, რადგან ზემოთ დასახელებული ამოცანები წარმოადგენენ გეომეტრიულ ამოცანებს აგებაზე (ამასთან ისიც იგულისხმება, რომ ამ ამოცანების ამოხსნის სხვა ხერხები მოსწავლემ ჯერ არ იცის). მოსწავლე ვარჯიშობს მიახლოებითს გაზომვა-გამოანგარიშებაში და შემდეგ, როდესაც იმივე ამოცანების ამოხსნის სხვა ისეთ ხერხს ეცნობა, რომელსაც გონიომეტრია იძლევა, ის ამ ხერხებს ერთმანეთს ადარებს და რწმუნდება *მეცნიერების ძალაში, რომელიც საშუალებას გვაძლევს უფრო და უფრო ადვილად დავძლიოთ პრაქტიკით (ამ სიტყვის ფართო გაგებით) წამოყენებული ამოცანები.* ამ მომენტს მასწავლებელმა ანგარიში უნდა გაუწიოს საქმით და არა სიტყვით. მასწავლებელმა უნდა დაარწმუნოს მოსწავლე აქ ნათქვამის სისწორეში. ამ პარაგრაფში განხილულ საკითხს უნდა დავუმატოთ მოკლე ისტორიული ცნობები, რომლებიც ეხება როგორც ცნებების, ისე ტერმინების განვითარების მხარეს, რაც მოსწავლისათვის მეტად საინტერესო და

საყურადღებო იქნება. ასეთი ცნობებით მოსწავლე დარწმუნდება, რომ არაფერი არ ჩნდება უცბად და სრულყოფილი სახით, რომ ყველაფერი იცვლება, ვითარდება. მოსწავლე იმასაც დაინახავს, თუ რა სიძნელეებს ჰქონდა ადგილი წარსულში და რამდენი მუშაობა დასჭირდათ მათემატიკოსებს, რომ ტრიგონომეტრიას ახლანდელი სახე მიეღო.

ტრიგონომეტრია აღმოცენდა ასტრონომიასთან დაკავშირებით და ემსახურებოდა მას როგორც გამოანგარიშებისათვის დამხმარე საშუალება.

ძველ საბერძნეთში ასტრონომიასთან ერთად ვითარებოდა ტრიგონომეტრიაც.

ის, რასაც „სინუსი“ ეწოდება, ძველ საბერძნეთში წარმოადგენდა მონაკვეთს და არა ორი მონაკვეთის ფარდობას. ეს მონაკვეთი იყო ორმაგი კუთხის ქორდა (ნახ. 6) AB, რაც ეტოლება $2\,OB \sin\alpha = 2r \sin\alpha$.



ნახ. 6.

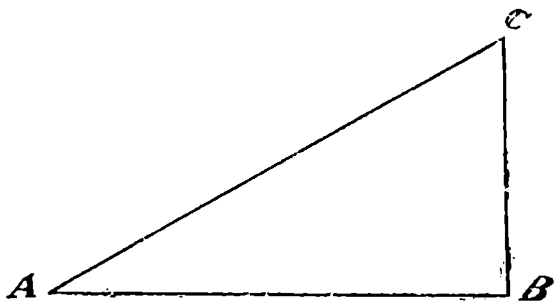
ძველი ინდოელები ორკეცი რკალის ქორდის ნაცვლად სარგებლობდნენ ამ ქორდის ნახევრით, ე. ი. BC მონაკვეთით, რასაც „მშვილდის ლამბს“ უწოდებდნენ. არაბებმა ამ სიდიდეს „სინუსი“ უწოდეს. სინუსი ლათინური სიტყვაა, რაც „უბე“-ს ნიშნავს.

სახელწოდებანი „სინუსი“ და „სინუს complementi“, რომელიც XIII საუკუნეში შეიცვალა „კოსინუსით“, გაჩნდა XII საუკუნეში. დამახასიათებელი აღნიშვნები sin და cos ლეონარდო ეილერის

(1707—1783) მასწავლებელს იოჰან ბერნულის ეკუთვნის. პეტერბურგელი აკადემიკოსი ფ. მაიერი sin და cos ნაცვლად წერდა (1729 წ.) S და C-ს.

სახელწოდებანი „ტანგენსი“ და „კოტანგენსი“ შემოღებულია XVI საუკუნეში, მაგრამ მხოლოდ XVII საუკუნეში დამკვიდრდა.

ყოველივე ეს ისე არ უნდა გავიგოთ, თითქოს ზემოთ დასახელებული ცნებებით (სიდიდეებით) წინათაც არ სარგებლობდნენ. ჯერ კიდევ X საუკუნეში არაბი ასტრონომები იმისათვის, რომ განესაზღვრათ ჰორიზონტისადმი მ ზ ი ს ს ი მ ა ღ ლ ე (ე. ი. $\angle AB$ კუთხე; იხ. ნახ. 7) AB ჩრდილის მიხედვით, რომელსაც ჰორიზონტალურ



ნახ. 7.

სიბრტყეზე იძლეოდა ვერტიკალურად დადგმული CB სარი, ჩრდილის სიგრძის რიცხვით მნიშვნელობას CB-ს დახმარებით ამ სიგრძის გაზომვის საშუალებით პოულობდნენ, ე. ი. $\frac{AB}{CB}$ შეფარდებას პოულობდნენ, რომელსაც უწოდებდნენ „umbra“-ს (ჩრდილს).

XIV საუკუნეში თომა ბრედვარდინი, რომელიც ერთ-ერთი პირველი მწერალია ტრიგონომეტრიაში, ამ შეფარდებას უწოდებდა „umbra recta“-ს (ჩვენებურად — კოტანგენსი), ხოლო იმას, რასაც ჩვენ ტანგენსს ვუწოდებთ, „umbra versa“-ს უწოდებდა.

სინუსის, როგორც შეფარდების განსაზღვრა, შემოღებულია XVIII საუკუნეში, ხოლო საბოლოოდ XIX საუკუნეში დამკვიდრდა. წინათ კი ის განისაზღვრებოდა, როგორც მ ო ნ ა კ ვ ე თ ი.

ეს ორი წინანდელი სახელწოდება („u m b r a“ recta და versa) ნათლად გვეუბნება, რომ ისინი შექმნილია ასტრონომიული დაკვირ-

ვების ზეგავლენით. რაც შეეხება ტრიგონომეტრიული ფუნქციის ნიშანს ამა თუ იმ კვადრანტში, უნდა აღვნიშნოთ, რომ ზემოთ დასახელებული აკადემიკოსი მაიერი ჯერ კიდევ სავსებით ნათლად ვერ ერკვეოდა ამ საქმეში. მეტიც, 1741 წ. გამოსულ დეპარსიეს ტრიგონომეტრიის კურსში (ტრაქტატში) ნახსენებიც არ არის ბლაგვი კუთხის სინუსი. დეპარსიეს აზრით ბლაგვ კუთხეს სინუსი არ აქვს. დეპარსიე თავის წიგნში სარგებლობს ტრიგონომეტრიული ხაზებით. ამ ავტორის შეხედულებით ბლაგვი და მახვილი მოსაზღვრე კუთხეების ტანგენსი ერთნაირია. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების, როგორც შეფარდებების, განსაზღვრა პირველად სიმონ კლუგელმა (1739—1812) შემოიღო, თუმცა ეილერიც ასეთი შეხედულობისა იყო, მაგრამ ეილერმა სათანადო განსაზღვრები არ მოგვცა. ტრიგონომეტრიას თანამედროვე სახე ეილერმა მისცა. ტრიგონომეტრიული სიდიდეების განხილვა, როგორც შეფარდებებისა და არა როგორც მონაკვეთებისა, მნიშვნელოვან ნაბიჯს წარმოადგენს, რადგან ტრიგონომეტრიული ხაზი მოცემული კუთხისა იცვლება რადიუსთან ერთად, ხოლო მისი შეფარდება რადიუსთან უცვლელია. (იხილეთ ამასთან § 5-ს ბოლო).

§ 5. ერთისა და იგივე კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა შორის დამოკიდებულების ძირითადი ფორმულების განზოგადება

მოსწავლე რომ ამ საკითხში გაერკვეს, საჭიროა თვით მასწავლებელმა კარგად იცოდეს შემდეგი ძირითადი მომენტი:

საშუალო სკოლის გეომეტრიის ელემენტარულ კურსში არ არსებობს მიმართული სიდიდეები.

ამიტომ ამ კურსში დეკარტის ნიშანთა წესზე ლაპარაკი არ წარმოებს. პირიქით, ტრიგონომეტრიული ხაზები და ფუნქციები მიმართული სიდიდეები არიან, ისე როგორც ალგებრული სიდიდეები. ნათქვამიდან გამომდინარეობს ასეთი დასკვნა:

როდესაც რაიმე ტრიგონომეტრიული დამოკიდებულება გამოგვყავს ამა თუ იმ გეომეტრიული ფორმულის დახმარებით, აუცილებელია ამ უკანასკნელში შემავალი სიდიდენი განვიხილოთ, როგორც ალგებრული (მიმართული) სიდიდენი.

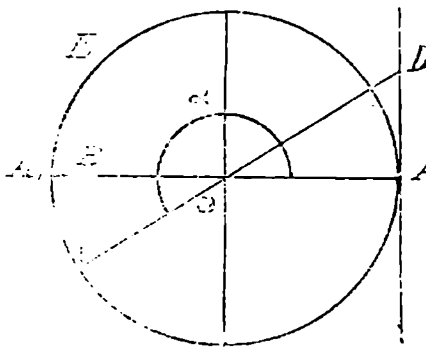
ამ შენიშვნის შემდეგ დავსვათ, მაგალითად, ასეთი საკითხი: იქნება თუ არა სამართლიანი მესამე მეოთხედში ფორმულები

$$1.\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$2.\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$3.\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

რომლებიც გამოყვანილი გვაქვს პირველი მეოთხედისათვის. ავიღოთ წრე და α კუთხე მესამე მეოთხედში (ნახ. 8).



ნახ. 8.

ნახაზზე α კუთხეს შეესაბამება AEC რკალი. დავუშვათ პერპენდიკულარი AA_1 დიამეტრზე C წერტილიდან. მივიღებთ OBC მართკუთხა სამკუთხედს. გავაგრძოთ OC რადიუსი ვიდრე არ გადაკვეთს ტანგენსების ხაზს. თუ გადაკვეთის წერტილს აღვნიშნავთ D ასოთი, მივიღებთ AOD მართკუთხა სამკუთხედს. BOC და AOD სამკუთხედი მსგავსია. დავწეროთ შემდეგი დამოკიდებულებანი:

$$BC^2 + OB^2 = R^2 \tag{1}$$

$$\frac{AD}{R} = \frac{CB}{OB} \tag{2}$$

$$\frac{OB}{BC} = \frac{FM}{OF} \tag{3}$$

ეს ფორმულები წმინდა გეომეტრიულ ფორმულებს წარმოადგენენ.

1-ლ ფორმულას შეგვიძლია მივცეთ სახე:

$$\left(\frac{BC}{R}\right)^2 + \left(\frac{OB}{R}\right)^2 = 1.$$

მე-2 ფორმულას მივცეთ სახე:

$$\frac{AD}{R}=\frac{\frac{CB}{R}}{\frac{OB}{R}}.$$

ამ ფორმულებში ყველა მონაკვეთი ჩვეულებრივი არითმეტიკული რიცხვებით გამოისახება (ე. ი. უნიშნოთ, აბსოლუტურად). აქ BC, OB, AD, OC მონაკვეთები გეომეტრიულ მონაკვეთებს წარმოადგენენ.

ახლა თუ ნიშნებსაც ანგარიშს გავუწევთ, დაწერილ ფორმულებს ასეთ სახეს მივცემთ:

$$\left(\frac{-BC}{R}\right)^2+\left(\frac{-OB}{R}\right)^2=1.$$

მაგრამ

$$\frac{-BC}{R}=\sin\alpha\ \frac{-OB}{R}=\cos\alpha,$$

და, მაშასადამე, მივიღებთ:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

მე-2 ფორმულა არ შეიცვლება, თუ მას გადავწერთ ასეთი სახით

$$\frac{AD}{R}=\frac{\frac{-CB}{R}}{\frac{-OB}{R}};$$

ახლა, რადგანაც

$$\frac{AD}{R}=\operatorname{tg}\alpha;\ \frac{-CB}{R}=\sin\alpha;\ \frac{-OB}{R}=\cos\alpha$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

მესამე ფორმულაც ასეთივე მსჯელობით მიიღება.

ამავე თვალსაზრისით შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ფორმულები ძალაში რჩებიან მეორე და მეოთხე კვადრანტებში.

ამ ფორმულების განზოგადება უფრო მოკლე გზით შეიძლება. ვისარგებლოთ α რკალის ბოლო წერტილის (ნახაზზე იხ. C წერტილი) x და y კოორდინატებით. ჩვენ ნახაზზე გვექნება $x=OB$, $CB=y$. კოორდინატები უკვე მიმართულ სიდიდეებს წარმოადგენენ, რის გამო ჩვენ თავისუფლად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

აქედან მივიღებთ

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \text{ვინაიდან}\ \sin^2\alpha=\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

$$\text{და}\ \cos^2\alpha=\frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

შემდეგ, ვინაიდან ტანგენსი განისაზღვრება, როგორც y კათეტის შეფარდება x კათეტთან, ხოლო კოტანგენსი, როგორც x კათეტისა — y კათეტთან, ამიტომ ადვილად მივიღებთ ფორმულებს

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ \text{და}\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

რომლებიც სამართლიანია α კუთხის ყოველი ნამდვილი და დასაშვები მნიშვნელობისათვის.

მაგალითად, თუ $\alpha=\frac{\pi}{2}$, მაშინ ცხადია, რომ $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ფორმულას აზრი ეკარგება, ვინაიდან

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{0}$$

და ნულზე რიცხვის გაყოფა კი შეუძლებელი მოქმედებაა. მაშ α-სათვის $\frac{\pi}{2}$ მნიშვნელობა დასაშვები არაა. აგრეთვე $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ფორმულას გამოყენება არა აქვს, თუ $\alpha=0$.

აქ განხილული სამი ძირითადი ფორმულა წარმოადგენენ ტრიგონომეტრიულ იგივეობას, რადგან სამართლიანი არიან α კუთხის (რკალის) ყოველი დ ა ს ა შ ვ ე ბ ი მნიშვნელობისათვის. ეს სამი ფორმულა საშუალებას გვაძლევს თითოეული ტრიგონომეტრიული ფუნქცია გამოვსახოთ მხოლოდ ერთი სხვა რომელიმე ტრიგონომეტრიული ფუნქციის საშუალებით. მაგალითად,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

როგორც ვხედავთ, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ და $\operatorname{ctg}\alpha$ გამოვსახეთ $\operatorname{tg}\alpha$-ს საშუალებით. მკითხველს ევალება:

1) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ და $\operatorname{ctg}\alpha$ გამოსახოს $\cos\alpha$-ს საშუალებით და გამოარკვიოს ნიშნების საკითხი.

2) $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ და $\cos\alpha$ გამოსახოს $\sin\alpha$-ს საშუალებით და გამოარკვიოს ნიშნების საკითხი. მოსწავლემ უნდა გაიგოს, რომ ფორმულები $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ერთი მეორესაგან დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი ა, ე. ი. რომელიმე ერთის მიღება, როგორც ორი დანარჩენი ფორმულის შედეგისა შ ე უ ძ ლ ე ბ ე ლ ი ა. მაგრამ ასეთი ფორმულა, როგორიცაა

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1 \quad \text{ან} \quad 1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

ახალ რამეს არ გვაძლევს და წარმოადგენს ძირითადი ფორმულების შ ე დ ე გ ს. აქ მასწავლებელმა უნდა განმარტოს თუ რატომ ვამბობთ, რომ სამი ძირითადი ფორმულა ერთი მეორესაგან დამოუკიდებელია. ფორმულა $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ წარმოადგენს $\operatorname{tg}\alpha$ ფუნქციის განსაზღვრას, რომელიც სრულიად არ გამომდინარეობს არც პირველი არც მესამე ფორმულიდან, რომელიც აგრეთვე წარმოადგენს $\operatorname{ctg}\alpha$ ფუნქციის განსაზღვრას. ეს განსაზღვრები ა ნ ა ლ ი ზ უ რ ი ფორმებია იმ განსაზღვრებისა, რომლებიც წინათ მივეცით მოსწავლეს ტრიგონომეტრიული ხ ა ზ ე ბ ი ს მოხმარებით*.

ყოველივე ეს სათანადო ვარჯიშით უნდა დამთავრდეს. აქ ვი-

* ახლა კი ტრიგონომეტრიული ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ს შემწეობით.

ძლევით კიდევ შემდეგ ისტორიულ ცნობებს ტრიგონომეტრია ბერძნული სიტყვაა და ნიშნავს „სამკუთხედების გაზომვა“-ს („ტრი გონონ“—სამკუთხედი, „მეტრეინ“—გაზომვა).

მათემატიკის ეს დარგი პირველად ემსახურებოდა ასტრონომიას. ცალკე დისციპლინის ხასიათი ტრიგონომეტრიამ მიიღო XIII საუკ. სპარსელი მათემატიკოსის ნასირ ედინის შრომაში.

ასტრონომია (და მასთან მჭიდრო დაკავშირებით ტრიგონომეტრიაც) წარმოიშვა კაცობრიობის პრაქტიკული მოღვაწეობიდან—ზღვაოსნობიდან, მიწისმზომლობიდან.

უკვე ძველი ბაბილონის ასტრონომებისათვის ცნობილი იყო ტრიგონომეტრიის მარტივი ძირითადი ცნობები.

II საუკ. ჩვენს წელთაღრიცხვამდე ძველი საბერძნეთის გამოჩენილმა ასტრონომებმა გიპარხმა და პტოლომემ ააგეს ტრიგონომეტრიული ცხრილები.

ძველი ინდოელების ტრიგონომეტრია ახლოსაა ბერძნების ტრიგონომეტრიასთან. ჩვენი წელთაღრიცხვის V—XII საუკ. განმავლობაში ინდოელმა მათემატიკოსებმა საგრძნობლად წასწიეს წინ ტრიგონომეტრია. მათთვის ცნობილი იყო ასეთი დამოკიდებულებანი, როგორცაა

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \text{ და } \sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha,$$

რომლებიც მოცემული იყო სიტყვიერი სახით.

IX—XV საუკ. განმავლობაში მათემატიკის განვითარებაში წამყვანი როლი ეკუთვნის უკვე შუააზიელ მეცნიერებს.

გამოჩენილმა ასტრონომმა ულუკბეკმა (XV საუკ.) სამარყანდის ობსერვატორიაში დაამუშავა ტრიგონომეტრიული ცხრილების შედგენის ზუსტი ხერხი.

§ 6. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ცვლილება კუთხის 0-დან 2π-მდე ცვლილების დროს

ეს საკითხი რიბკინის „სწორხაზოვან ტრიგონომეტრიაში“ არადამაკმაყოფილებლად არის დამუშავებული (იხ. 1947 წ. გამოცემა). მთავარი ნაკლი იმაში მდგომარეობს, რომ გადმოცემის ფორმა (სტილი). მათემატიკური თვალსაზრისით არ არის დამაჯერებელი. რიბკინი კმაყოფილდება ისეთი მსჯელობით, რაც თ ვ ა ლ თ ა ხ ე დ ვ ი თ სარგებლობს.

რიბკინი აცხადებს, რომ, როდესაც კუთხე იზრდება 0°-დან 90°-მდე, მასთან ერთად იზრდება შეფარდებებიც $\frac{BC}{R}$, $\frac{AD}{R}$ და მცირდება შეფერდებანი $\frac{OC}{R}$, $\frac{ME}{R}$ (იხ. § 9, ნახაზები 1, 2, 3, 4, 5). ამგვარად შეფარდებების ცვლილება დასაბუთებულია ნახაზის მიხედვით. ეს ნაკლი უნდა შესწორდეს.

გარდა ამისა, სასარგებლოდ მიგვაჩნია ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცვლილების საკითხის განხილვამდე მოსწავლეს განვუმარტოთ შემდეგი:

1. ფუნქციის ცვლილება დამოკიდებულია არგუმენტის ცვლილებაზე და, მაშასადამე, ფუნქციის ცვლილების გარკვევა უნდა ხდებოდეს არგუმენტის ცვლილებასთან დაკავშირებით.

საზოგადოდ დადგენილია, რომ ფუნქციის ცვლილების გარკვევა უნდა ხდებოდეს არგუმენტის ზრდასთან ერთად. თუ ფუნქციის მნიშვნელობა იზრდება არგუმენტის ზრდასთან ერთად, ფუნქციას ზრდადი ეწოდება; თუ მისი მნიშვნელობა კლებულობს, როცა არგუმენტი იზრდება, ფუნქციას უწოდებენ კლებად ფუნქციას.

2. ხშირია ასეთი შეცდომა: მოსწავლეს ჰგონია, რომ, როდესაც არგუმენტი მატულობს, ფუნქციაც უსათუოდ იზრდება. ამიტომ სასარგებლოა მოსწავლის ყურადღება შევაჩეროთ შემდეგ ფუნქციებზე $y=2x$; $y=3x-1$; $y=\frac{1}{x}$; $y=\frac{1}{x^2}$ და გამოვარკვიოთ, როგორ იცვლება ფუნქცია, როდესაც x იზრდება.

3. ხშირია ისეთი შემთხვევაც, როდესაც მოსწავლე ფიქრობს, რომ ფუნქცია იცვლება ისეთივე სიდიდით, როგორითაც იცვლება არგუმენტი.

ზედმეტი არ იქნება ყველა ამ გარემოებას ანგარიში გავუწიოთ.

ავიღოთ ფუნქცია $y=3x$. წარმოვიდგინოთ, რომ არგუმენტის ერთი რომელიმე ნებისმიერად აღებული მნიშვნელობა გავადიდეთ h დადებითი სიდიდით. როგორ შეიცვლება $y=3x$ ფუნქცია?

მასწავლებელი. რატომ ამოვარჩიეთ h დადებითი?

პასუხი. ჩვენ შევთანხმდით: ფუნქციის ცვლილება განვიხილოთ არგუმენტის ზრდასთან ერთად, ხოლო არგუმენტის მნიშვნელობა რომ გავადიდოთ, საჭიროა ამ უკანასკნელს დადებითი სიდიდე მივუმატოთ.

მ ა ს წ ა ვ ლ ე ბ ე ლ ი. მაშ, მიუმატეთ x-ის აღებულ მნიშვნელობას h დადებითი სიდიდე. ის სიდიდე კი, რომლითაც შეიცვლება ჩვენი ფუნქციის მნიშვნელობა, აღნიშნეთ H ასოთი. გამოვიანგარიშოთ ეხლა H სიდიდე.

პ ა ს უ ხ ი. (მოსწავლე წერს დაფაზე):

$$y + H = 3(x + h) = 3x + 3h$$

$$H = 3x + 3h - y = 3x + 3h - 3x = 3h$$

მაშასადამე,

$$H = 3h.$$

მ ა ს წ ა ვ ლ ე ბ ე ლ ი. როგორ შეიცვალა ფუნქციის მნიშვნელობა? იმდენად, როგორც x-ისა?

პ ა ს უ ხ ი. არა! ფუნქციის მნიშვნელობა გადიდდა 3-ჯერ მეტი სიდიდით.

მ ა ს წ ა ვ ლ ე ბ ე ლ ი. დამიმტკიცეთ, რომ ფუნქციის მნიშვნელობა გადიდდა 3-ჯერ მეტი სიდიდით.

პ ა ს უ ხ ი. გადიდდა, რადგანაც $H = 3h$; ჩვენ კი ვიცით, რომ h დადებითია. მაშასადამე, H-ც გამოვა დადებითი. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციის მნიშვნელობა გადიდდა.

მ ა ს წ ა ვ ლ ე ბ ე ლ ი. დასაშვებია, რომ H-ის შესახებაც თავიდანვე წამოგვეყენებინა მოთხოვნა, რომ ისიც დადებითი ყოფილიყო, როგორც h?

პ ა ს უ ხ ი. არა. ეს დასაშვები არ არის, რადგანაც, როდესაც არგუმენტი მატულობს, შეიძლება ფუნქცია მატულობდეს, შეიძლება კლებულობდეს.

მ ა ს წ ა ვ ლ ე ბ ე ლ ი. განვიხილოთ აგრეთვე $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის ცვლილება.

ერთი მოსწავლე წერს დაფაზე, დანარჩენი—რვეულებში.

$$y + H = \frac{1}{x + h},$$

აქედან

$$H = \frac{1}{x+h} - y = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{-h}{x(x+h)}$$

აქაც H არ ეტოლება h-ს საზოგადოდ.

მასწავლებელი. რა ნიშანი ექნება H-ს?

პასუხი. H-ის ნიშანი დამოკიდებულია x-ის ნიშანზე და ამ ცვლადის მნიშვნელობაზეც.

კლასი მასწავლებლის დახმარებით არკვევს, რომ თუ $x > 0$, H უარყოფითია, ე. ი. ფუნქცია კლებადია.

თუ $x < 0$, ხოლო მისი აბსოლუტური მნიშვნელობა (ე. ი. მოდულ x) ნაკლებია h-ზე, მაშინ H დადებითია, ე. ი. ფუნქცია ზრდადია.

თუ კი $x < 0$, მაგრამ $|x| >$ ', მაშინ H კვლავ უარყოფითი ხდება და ფუნქცია კლებულობს.

როგორც ვხედავთ, ეს ფუნქცია სხვადასხვა შუალედში სხვადასხვანაირად იცვლება—ხან იზრდება, ხან კლებულობს.

4. რიბკინის სახელმძღვანელოში კუთხის ცვლილების შუალედები გრადუსებით გამოისახება: 0-დან 90°-ამდე; 90°-დან 180°-ამდე, და ა. შ.

უმჯობესია შუალედები რადიანებში გამოვსახოთ: 0 რადიანიდან $\frac{\pi}{2}$ რადიანამდე, $\frac{\pi}{2}$ რადიანიდან π რადიანამდე და ა. შ. რაც ხელს შეუწყობს მოსწავლეს მეტი წარმატებით შეისწავლოს კუთხის რადიანული გაზომვა.

სკოლის პრაქტიკაში ხშირია, როცა მასწავლებელი მხოლოდ ერთხელ აუხსნის კლასს კუთხის რადიანულ გაზომვას, რაც ზერელე შესწავლის მიზეზი ხდება.

აქ ერთხელ კიდევ საჭიროა გავაფრთხილოთ მოსწავლე, რომ ჩანაწერი:

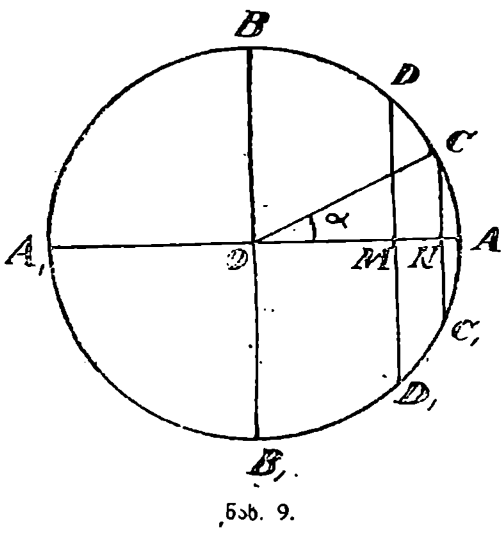
$$\frac{\pi}{2} = 90^\circ \text{ სწორი არ არის.}$$

ჩვენ ვწერთ $\sin\frac{\pi}{2}$-ს ნაცვლად $\sin 90^\circ$-სას, ეს იმიტომ,

რომ მიღებულია sin ნიშნის ქვეშ განყენებული რიცხვის წერა, როდესაც კუთხე გაზომილია რადიანებში. მაგრამ ეს განყენებული რიცხვი რადიანების რიცხვს გამოსახავს. მაშასადამე, სწორია მხოლოდ ასეთი ჩანაწერი:

$$\frac{\pi}{2} \text{ რად.} = 90^\circ.$$

ახლა შეიძლება შევუდგეთ იმ საკითხის დამუშავებას, რომელიც ამ პარაგრაფში იყო დასმული. განვიხილოთ მხოლოდ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, და $\operatorname{tg}\alpha$ ფუნქციების ცვლილება 0°-დან 2π-მდე შუალედში (0°-დან 360°-მდე). ავიღოთ ტრიგონომეტრიული წრე (ნახ. 9). ამ



ნახ. 9.

ნახაზზე $\angle\alpha = \angle AOC$; $CC_1 \perp A_1A$; $DD_1 \parallel CC_1$; $\angle AOD > \angle\alpha$, ე. ი. რკალი $AD > AC$ რკალზე. ცნობილი გეომეტრიული თეორემების თანახმად ვწერთ: ქორდა $DD_1 > CC_1$ ქორდაზე, რადგან რკალი $AD > AC$ რკალზე; OM მონაკვეთი ნაკლებია ON მონაკვეთზე, რადგან ქორდა DD_1 მეტია CC_1 ქორდაზე და, მაშასადამე, უფრო ახლოა ცენტრთან. თუ $DD_1 > CC_1$, მაშინ $MD > CN$-ზე.

ახლა ჩვენ გვეძლევა უფლება ვთქვათ, რომ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში

$\sin\alpha$ იზრდება არგუმენტის ზრდასთან ერთად 0-დან ერთამდე, $\cos\alpha$ კი კლებულობს 1-დან 0-მდე. აი ეს მსჯელობა სრულიად გამოტოვებულია რიბკინის ტრიგონომეტრიაში. სასარგებლოა, რომ მოსწავლემ $\cos\alpha$-ს ცვლილება გამოარკვიოს ანალიზურადაც

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

ფორმულის შემწეობით: რადგანაც $\sin\alpha$ $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ შუალედში მატულობს, ამიტომ ფესვი $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ და მასთან ერთად $\cos\alpha$ კლებულობს. იქ სადაც შესაძლებელია, ყოველთვის ნაყოფიერი იქნება როგორც გეომეტრიული, ისე ანალიზური ხერხის გამოყენება. თუ კლასი კარგად მეცადინეობს, უმჯობესია $\operatorname{tg}\alpha$-ს ცვლილება ორი გზით განვიხილოთ. თუ კლასი მოისუსტებს, საკმაოა ერთი ხერხი, ვინაიდან ანალიზური განხილვა უფრო ნაკლებ დროს წაართმევს მასწავლებელს, ამიტომ ვისარგებლოთ ფორმულით

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

აქ ზედმეტია ლაპარაკი იმაზე, თუ როგორ უნდა ვისარგებლოთ ამ ფორმულით.

შევეხოთ აქ საკითხს, რომელზეც შევაჩერეთ მკითხველის ყურადღება მეოთხე პარაგრაფში. ჩვენ იქ ვთქვათ, რომ, თუ $\alpha=\frac{\pi}{2}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ფორმულას აზრი ეკარგება; $\frac{\pi}{2}$ არ წარმოადგენს α-სათვის დასაშვებ მნიშვნელობას. თუ ეს ასეა, ცხადია, ჩვენ უნდა ვთქვათ, რომ $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ განსაზღვრული არ არის, არც $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

მაგრამ ხშირად სწერენ:

$$\operatorname{tg} 90^\circ = +\infty$$
$$\operatorname{tg} 90^\circ = -\infty$$

(იხ. რიბკინის „სწორხაზოვანი ტრიგონომეტრია“, გვ. 44, 1947 წ. გამოცემა).

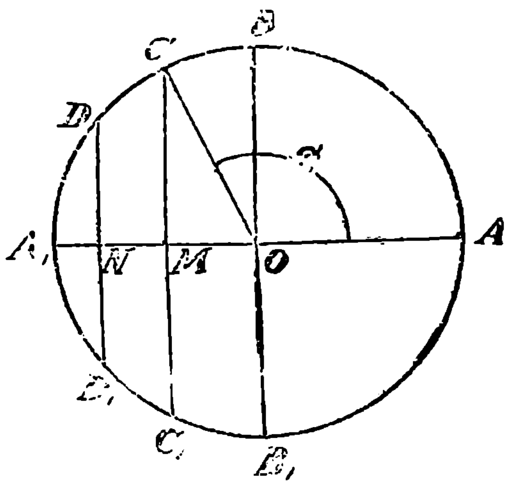
ტოლობა შეიძლება დავწეროთ ორი სასრულო სიდიდეს შორის. ლაპარაკი შეიძლება ორი მონაკვეთის ტოლობაზე, მაგრამ მიუღებელია ლაპარიკი ორი სწორი ხაზის ან სხივის ტოლობაზე.

ისეთი ჩანაწერი, როგორიცაა $\operatorname{tg} 90^\circ = +\infty$ პირობითი ჩანაწერია. ამ ჩანაწერით ჩვენ მოკლედ გამოვთქვამთ იმ აზრს, რომ, როცა α კუთხე იზრდება $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში, $\operatorname{tg} \alpha$-ც იზრდება და შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი დიდი დადებითი მნიშვნელობა.

ხაზგასმით ვთქვათ: ნული რიცხვია (ნეიტრალური), უსასრულობა რიცხვი არაა. მოსწავლემ ეს მტკიცედ უნდა დაიმახსოვროს.

ახლა განვიხილოთ იმავე ფუნქციების ცვლილება მეორე მეოთხედში, ე. ი. $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ შუალედში. მაშ, გვაქვს $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$.

მეორე მეოთხედში α კუთხის (რკალის) სინუსის ხაზი და სინუსი დადებითია, ხოლო კოსინუსის ხაზი და კოსინუსი უარყოფითია. როცა α კუთხე მატულობს, სინუსის ხაზი კლებულობს, რასაც მასწავლებლის ხელმძღვანელობით მოსწავლე ადვილად დაამტკიცებს, თუ ისარგებლებს მე-10 ნახაზით და ზემოთ გამოყენებული გეომეტრიული ხერხით.



ნახ. 10.

სახელდობრ, რკალი $C_1C > D_1D$ რკალზე, რადგანაც კუთხე α გადიდდა; ქორდა $C_1C > D_1D$ ქორდაზე და ა. შ..., მაშასადამე, $\sin\alpha$ კლებულობს. შემდეგ ირკვევა, რომ $\sin\alpha$ მეორე მეოთხედში კლებულობს 1-დან 0-მდე.

რაც შეეხება OM და ON კოსინუსის ხაზებს, აქ საჭიროა მათი შედარება ალგებრული თვალსაზრისით.

მოსწავლეს კარგად უნდა ესმოდეს და იყენებდეს პრინციპს: ორ უარყოფით რიცხვს შორის ის უფრო მეტია, რომლის აბსოლუტური მნიშვნელობა ნაკლებია. მოსწავლემ თვითონ უნდა ჩამოაყალიბოს, როგორ და რა საზღვრებში იცვლება $\cos\alpha$ მეორე მეოთხედში.

აქაც შეიძლება გამოვიყენოთ ანალიზური გზა.

მასწავლებელი. გამოარკვიეთ $\cos\alpha$-ს ცვლილება მეორე მეოთხედში. როგორ მოიქცევით?

პასუხი. $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

მასწავლებელი. ივარგებს თუ არა ეს ფორმულა მეორე მეოთხედისათვის. რა დაგავიწყდათ?

პასუხი. ნიშანი! უნდა ავიღოთ $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

მასწავლებელი. დამოკიდებულია თუ არა $\cos\alpha$-ს ნიშანი $\sin\alpha$-ს ნიშანზე?

(აქ საჭიროა გავიხსენოთ, რომ მოსწავლეს წარმოდგენილი აქვს, თითქოს $\cos\alpha$-ს ნიშანი დამოკიდებულია $\sin\alpha$-ს ნიშანზე. ეს მცდარი აზრი უნდა აღმოიფხვრას).

პასუხი: დამოკიდებულია.

მასწავლებელი. მაშ, თქვენი აზრით, $\sin\alpha$-ს ნიშანს გავლენა აქვს $\cos\alpha$-ს ნიშანზე?

პასუხი. აქვს.

მასწავლებელი. აბა აიღეთ $\sin\alpha$ უარყოფითი და შეასრულეთ ყველა მოქმედება ფორმულაში:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

კლასი ასრულებს მასწავლებლის დავალებას, მოწაფეები რწმუნდებიან იმაში, რომ $\cos\alpha$-ს ნიშანი გამორკვეული უნდა იქნეს მეოთხედების და არა სინუსის ნიშნის მიხედვით.

ასეთივე გზით მუშავდება საკითხი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცვლილების შესახებ დანარჩენ მეოთხედებში. $\operatorname{tg}\alpha$ და $\operatorname{ctg}\alpha$

ფუნქციების ცვლილება ირკვევა $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ და $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ფორმულების გამოყენებით. მაშასადამე, ამ პარაგრაფში აღნიშნული თემის დამუშავებისას მოსწავლე გამოიყენებს როგორც ტრიგონომეტრიის გავლილ მასალას, ისე ზოგიერთ თეორემას გეომეტრიის კურსიდან.

ა მ ო ც ა ნ ა. როგორ გამოვიყვანოთ $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ და $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ფორმულებიდან $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ფორმულა?

§ 7. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების პერიოდულობა

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით კუთხეების (რკალების ცვლილებას მხოლოდ $[0, 2\pi]$ ან $[0°, 360°]$ შუალედში. ამავე შუალედში ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცვლილებაც ირკვეოდა. ახლა უნდა დავსვათ საკითხი, როგორ იცვლება ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, როცა α კუთხე მეტია 2π რადიანზე, ან ნაკლებია -2π რადიანზე.

რიბკინის „სწორხაზოვანი ტრიგონომეტრია“ (იხ. 1947 წ. გამოცემა) ამ საკითხზე პასუხს გვაძლევს § 35-ში (გვ. 53, 54, 55), რაც არ შეიძლება დამაკმაყოფილებლად ჩავთვალოთ.

საქმე შემდეგშია. სრულიად სამართლიანია რომ ... $\pm 4\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 6\pi$... და ა. შ. რკალებში უმცირესი დადებითი მნიშვნელობა აქვს 2π-ს. მაგრამ მათემატიკურად და კრიტიკულად მოაზროვნე მკითხველი დასვამს კითხვას: საიდან ვიცით, რომ $\sin \alpha$ და $\cos \alpha$ ფუნქციებისათვის არ არსებობს 2π-ზე უფრო ნაკლები დადებითი სიდიდე, რაც ამ ფუნქციების პ ე რ ი ო დ ი ი ქ ნ ე ბ ა. ამ საკითხის უპასუხოდ დატოვება არ ივარგებს, პირიქით, მისი გამოკვლევა ხელს შეუწყობს მოსწავლის აზროვნების განვითარებას, ცოდნის გაღრმავებას, რაც თავის მხრივ საუკეთესო საშუალებას წარმოადგენს სწავლებაში ფორმალიზმთან საბრძოლველად. აქ მხედველობაში გვაქვს არა მხოლოდ ეს საკითხი, არამედ ყველა საკითხი, რომლის გამოკვლევა დიდ სიძნელეს არ წარმოადგენს და სავსებით შესაძლებელია ელემენტარული მათემატიკის ფარგლებში.

გავცეთ პასუხი დასმულ საკითხზე. წარმოვიდგინოთ, რომ არსებობს ისეთი დადებითი $p < 2\pi$-ზე სიდიდე, რომ

$$\sin(x + p) = \sin x$$

x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის. მაშინ ეს ტოლობა ძალაში უნდა დარჩეს $x = \frac{\pi}{2}$ მნიშვნელობისათვისაც, და შეგვიძლია დავწეროთ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + p\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. ახლა $\frac{\pi}{2}$ ეკუთვნის $[0,\ 2\pi]$ შუალედს და ამ შუალედში $\sin\alpha$ ღებულობს ერთეულის მნიშვნელობას მხოლოდ ერთხელ, როდესაც $\alpha = \frac{\pi}{2}$, და მიიღებს იმავე მნიშვნელობას, როდესაც $\frac{\pi}{2}$ კუთხეს მივუმატებთ $2k\pi$ სიდიდეს. მაგრამ ამ უკანასკნელის უმცირესი დადებითი მნიშვნელობაა 2π. მაშ $p = 2\pi$.

ასევე დავამტკიცებთ, რომ $\cos(x + p) = \cos x$ ტოლობაში, რომელიც სამართლიანი გვინდა იყოს x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, p-ს უმცირესი დადებითი სიდიდეა 2π. დამტკიცებისათვის საკმაოა ტოლობაში x-ის ნაცვლად დავწეროთ ნული. მივიღებთ:

$$\cos p = \cos 0 = 1$$

დანარჩენი ნათელია.

მოსწავლემ საჭიროა გაიგოს, რომ

1) პერიოდულობა ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისა ამ უკანასკნელის ერთ-ერთი თ ვ ი ს ე ბ ა ა,

2) ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შესწავლა, ამ თვისების გამო, თავდება მათი შესწავლით არგუმენტის ცვლილების მიხედვით ერთი პერიოდის საზღვრებში.

როდესაც მოსწავლეს ვეკითხებით, რას უდრის $\sin x$-ის პერიოდი, ხშირად გვესმის პასუხი: „სინუსის პერიოდი არის 2π". აქ არც აზრია სწორი, არც გამოთქმა. ასეთი პასუხი უშინაარსოა, რადგან სინუსი არავითარ ფუნქციას არ წარმოადგენს; ფუნქციას წარმოადგენს $\sin x$ და უნდა ითქვას $\sin x$ ფუნქციის პერიოდი არის 2π.

აღნიშნული შეცდომა ხშირია, ამიტომ საჭიროა მოსწავლის ყურადღება პერიოდულობის საკითხზე შევაჩეროთ. უპირველეს ყოვლისა, მოსწავლეს უნდა ესმოდეს, რომ $\sin x$, $\sin 3x$, $\sin(2x + 1)$, $\operatorname{tg} 5x$ და ა. შ. ფუნქციებში არგუმენტი არის x ცვლადი და არა $3x$, $2x + 1$.

მეორე, მას უნდა ესმოდეს, რომ $\sin x$ და $\sin 3x$ ს ხ ვ ა დ ა ს ხ ვ ა ფ უ ნ ქ ც ი ა ს წარმოადგენს.

მესამე, მან ზუსტად უნდა იცოდეს, თუ რას ეწოდება პერიოდი, და რომ პერიოდი ე მ ა ტ ე ბ ა* ა რ გ უ მ ე ნ ტ ს. ამის შემდეგ ისმება კითხვა, რას უდრის $\sin 4x$ ფუნქციის პერიოდი, ე. ი. რა უნდა მივუმატოთ x-ს არგუმენტს, რომ $4x$ სიდიდეს მოემატოს 2π. ვწერთ განტოლებას: $4x + 2\pi = 4(x + p)$, სადაც p საძებნი სიდიდეა, აქედან მივიღებთ, რომ $p = \frac{\pi}{2}$.

კითხვები: რას უდრის $\sin 5x$, $\sin(2x + 1)$, $\operatorname{tg} 3x$ ფუნქციების პერიოდი?

საჭიროა შევეხოთ შემდეგ საკითხსაც: რას ეტოლება $\sin ax^2$ ფუნქციის პერიოდი?

დავუშვათ, რომ საძებნი პერიოდი m სიდიდეს ეტოლება. მაშინ ადგილი უნდა ჰქონდეს

$$a(x+m)^2 - ax^2 = 2\pi \text{ ტოლობას,}$$

აქედან მივიღებთ

$$am^2 + 2amx = 2\pi,$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ m სიდიდის მნიშვნელობა დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ი ა x ცვლადის მნიშვნელობაზე, რასაც არა აქვს ადგილი $\sin x$, $\sin ax$, $\sin(ax + p)$ ფუნქციებში. მაშასადამე, ამ ფუნქციის პერიოდი არ არსებობს (დანარჩენს, რაც შეეხება პერიოდულობის საკითხს, მასწავლებელი იპოვის რიბკინის სახელმძღვანელოში).

მაგრამ ეს ისე არ უნდა გავიგოთ, თითქოს, $\sin ax^2$ ფუნქცია არ მიიღებს იმავე მნიშვნელობას, როდესაც ax^2 კუთხეს დაემატება 2π; ვიმეორებ: ax^2-ს დაემატება 2π და არა x-ს.

ს ა კ ი თ ხ ი. პერიოდულია თუ არა

$$y = \sin x + \sin 2x \text{ ფუნქცია,}$$

და, თუ პერიოდულია, რას ეტოლება მისი პერიოდი?

პ ა ს უ ხ ი. ამ ფუნქციის პერიოდია 2π, რადგანაც ეს არის ის უმცირესი დადებითი სიდიდე, რომელიც უნდა დაემატოს x-ს, რომ $\sin x + \sin 2x$ ფუნქციის მნიშვნელობა არ შეიცვალოს.

თუ მოსწავლე იტყვის, რომ მოცემული ფუნქციის პერიოდია π, მაშინ სცადოს: აიღოს $\sin(\pi + x) + \sin 2(\pi + x)$. მოსწავლე ადვილად შეამჩნევს, რომ $\sin 2(\pi + x) = \sin 2x$, მაგრამ $\sin(\pi + x)$ არ ეტოლება $\sin x$-ს.

---

* ან აკლდება.

მოსწავლეს მივცემთ დავალებას, გამოიანგარიშოს $\cos\frac{x}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{5}$, $\sin\frac{2x-1}{3}$ ფუნქციების პერიოდი.

ზემოთ განმარტებული ხერხით მასწავლებელი უჩვენებს მოსწავლეს, რომ $\operatorname{tg} x$ და $\operatorname{ctg} x$ ფუნქციების პერიოდია π.

§ 8. ლუწი და კენტი ფუნქციები

ჯერ განვიხილოთ ფუნქციები

$$y=x^2;\ y=x^3;\ y=\frac{1}{x};\ y=\frac{x^2+1}{x^2}$$

და გავარკვიოთ, რა ცვლილებას განიცდის თითოეული მათგანი, როგორც ფუნქციის აბსოლუტური მნიშვნელობის, ისე ნიშნის მხრით, როცა x-ს ჯერ მივცემთ 3-ის მნიშვნელობას, შემდეგ — 3-ის მნიშვნელობას, (გაისინჯება x-ის სხვა მნიშვნელობებიც, მაგალითად, $x=5$ და $x=-5$).

შემდეგ საკითხი ისმება ზოგადად, ე. ი. x-ის ნაცვლად ვწერთ $-x$-ს.

ამის შემდეგ ვაძლევთ ლუწი და კენტი ფუნქციის განსაზღვრას.

ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ მისი მნიშვნელობა არ იცვლება, მაგრამ იცვლება **მხოლოდ** არგუმენტის ნიშანი (რა მნიშვნელობაც არ უნდა მივცეთ არგუმენტს). მაგალითად, $y=x^2$; $y=x^4$ $y=\frac{x^2}{1+x^4}$ ლუწი ფუნქციებია.

ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ ის იცვლის **მხოლოდ** თავის ნიშანს, ამასთან იცვლება მარტო არგუმენტის ნიშანი (რა მნიშვნელობაც არ უნდა მივცეთ არგუმენტს). მაგალითად, $y=x^3$; $y=\frac{1}{x}$; $y=x^3-2x$ კენტი ფუნქციებია.

ლუწი და კენტი ფუნქციების განსაზღვრა უფრო მოკლე, ლამაზი და მარჯვე იქნება, თუ საზოგადოდ $f(x)$ და $\varphi(x)$ აღნიშვნებს ვიხმართ. სწორედ იმ თემასთან დაკავშირებით, რომელთანაც გვიხდება არა ერთი გარკვეული ფუნქციის თვისების შესწავლა, არამედ საუბარია სხვადასხვა ფუნქციის საერთო თვისებების შესწავლაზე, **დროულია და სავსებით მიზანშეწონილი** ეს აღნიშვნები შემოვიტანოთ.

$f(x)$ ფუნქცია ლუწია, როცა $f(x)=f(-x)$, და კენტია როცა $f(x)=-f(-x)$ x-ის ყოველი დასაშვები მნიშვნელობისათვის.

მხოლოდ ამის შემდეგ დავუმატებთ, რომ ფუნქცია შეიძლება არც ლუწი იყოს და არც კენტი. მაგალითად, $y=x+1$ ფუნქცია არც ლუწია, არც კენტია. მართლაც, თუ $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}$; თუ კი $x=-\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{2}$; მაშასადამე, ვხედავთ, რომ, როდესაც x-ის ნაცვლად ავიღეთ $(-x)$-ი, ფუნქციამ თავისი რიცხვითი მნიშვნელობა შეიცვალა, რასაც ადგილი არ უნდა ჰქონდეს არც ლუწი და არც კენტი ფუნქციისათვის.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ფუნქცია $\sin x$ კენტია, ე. ი. $\sin(-x)=-\sin x$, ან $\sin\alpha=-\sin(-\alpha)$, ხოლო ფუნქცია $\cos x$ — ლუწია. ეს უკანასკნელი ტოლობა მასწავლებელმა არ უნდა დაწეროს. საჭიროა თვითონ მოსწავლემ მოისაზროს მისი დაწერა, რადგანაც ჩვენ უკვე აუხსენით, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია კენტია, მაშინ ადგილი აქვს ასეთ ტოლობას:

$$f(x)=-f(-x).$$

მტკიცება მიმდინარეობს ასე: როგორიც არ უნდა იყოს რკალი α (ან x) მისი და $-\alpha$ რკალის ბოლო წერტილები სიმეტრიულად არიან დალაგებული ჰორიზონტალური დიამეტრის მიმართ და, მაშასადამე, ამ რკალების სინუსების ხაზები ერთმანეთისაგან მხოლოდ მიმართულებით (ნიშნით) განსხვავდებიან, კოსინუსის ხაზი კი საერთოა. ამგვარად გვექნება

$$\sin\alpha=-\sin(-\alpha)$$

$$\cos\alpha=\cos(-\alpha).$$

რიბკინის „სწორხაზოვან ტრიგონომეტრიაში" (იხ. გვ. 52, § 34, 1947 წ.) ეს ფორმულები მიღებულია ნახაზის საშუალებით. ავტორი კმაყოფილდება კერძო შემთხვევის (როცა α კუთხე მახვილია) განხილვით. ასეთი სწავლება ჩვენ სკოლაში უკვე აღარ გამოდგება. მასწავლებელმა ამ გარემოებას სერიოზული ყურადღება უნდა მიაქციოს, რომ მათემატიკის სწავლებას საგანმანათლებლო მნიშვნელობა არ დაეკარგოს და მოსწავლე ზერელე მსჯელობას არ მიეჩვიოს. ამის შემდეგ უნდა დავამტკიცოთ, რომ $\operatorname{tg} x$ კენტი ფუნქციაა.

ვწერთ $\operatorname{tg}(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\operatorname{tg} x$, ან

$$\operatorname{tg} x=-\operatorname{tg}(-x).$$

ასევე დამტკიცდება, რომ $\operatorname{ctg} x=-\cot(-x)$. მაშასადამე, $\operatorname{ctg} x$ ფუნქციაც კ ე ნ ტ ი ა.

კ ი თ ხ ვ ა: კენტია თუ ლუწი $\cos^2 x-\sin^2 x$ ფუნქცია?

პ ა ს უ ხ ი. ლუწია, რადგან $\cos 2x$ ლუწი ფუნქციაა.

კ ი თ ხ ვ ა: კენტია თუ ლუწი ფუნქციები:

$$\sin^2 x?\ \sin x+\cos x?\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x.$$

პ ა ს უ ხ ი. $\sin^2 x$ — ლუწი ფუნქციაა; $\sin x+\cos x$ არც ლუწია და არც კენტი; $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1$ და ამიტომ მის ლუწობაზე ან კენტობაზე საკითხი არ ისმის (შეიძლება მას მუდმივი ფუნქცია ვუწოდოთ).

მაგალითების ამოხსნისას მასწავლებელმა უნდა განიხილოს ისეთი შემთხვევებიც, როცა ფუნქცია არც ლუწია, არც კენტი. მაგალითად, $3x^2-2x+1$; $1+x$ არც ლუწი და არც კენტი ფუნქციებია.

მასწავლებელმა მოსწავლისაგან უნდა მოითხოვოს კენტი და ლუწი ფუნქციის გრაფიკის აგება და ყურადღება უნდა მიაქციოს იმას, რომ ლუწი ფუნქციის გრაფიკი იგრეკების ღერძის სიმეტრიულია (მაგალითად, $y=x^2$), ხოლო კენტი ფუნქციის გრაფიკი სწორხაზოვან კოორდინატთა სისტემის სათავის სიმეტრიულია (მაგალითად, $y=x^3$).

§ 9. დაყვანის ფორმულები

მათემატიკა ცდილობს ყოველ გამოსახულებას მისცეს რამდენადაც შეიძლება მარტივი სახე, ეძებს სიდიდის გამოანგარიშების მოკლე გზას. ტრიგონომეტრია გვაძლევს ფ ო რ მ უ ლ ე ბ ს, რომელთა საშუალებით შესაძლებელია ნებისმიერი რკალის (კუთხის) ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შეცვლა ისეთი დადებითი მახვილი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციებით, რომელიც არ აღემატება $\frac{\pi}{4}$ რადიანს (ე. ი. 45°). შემდეგში ჩვენ დავინახავთ, რომ მაგალითად,

$$\sin 70^\circ = \cos 20^\circ; \quad \cos 210^\circ = -\cos 30^\circ;$$
$$\operatorname{tg} 600^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ; \quad \sin 1120^\circ = \sin 40^\circ.$$

მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა ცხრილი მხოლოდ 0°-დან 45°-მდე (0-დან $\frac{\pi}{4}$-მდე) და შემდეგ ამ ცხრილით ვისარგებლოთ ნებისმიერი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციის მნიშვნელობის გამოანგარიშებისათვის.

ფორმულებს, რომელზეც ზევით დავიწყეთ ლაპარაკი, *დაყვანის ფორმულები* ეწოდება. *მოსწავლეს კარგად უნდა ჰქონდეს წარმოდგენილი ის მიზანი*, რასაც დაყვანის ფორმულები ემსახურება.

§ 7-ში ჩვენ შევხვდით დაყვანის ფორმულების ერთ მცირე ჯგუფს:

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha; \quad \cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \text{ და } \operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

§ 8-შიც შევხვდით ამავე ფორმულების შემდეგ ჯგუფს:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \text{ და } \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

ისმება საკითხი $\sin(2\pi - \alpha)$, $\cos(2\pi - \alpha)$, $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)$, $\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$ შესახებ.

ნათელია, რომ $\sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

აგრეთვე $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, და ა. შ.

გადავიდეთ დაყვანის ფორმულების შემდეგ ჯგუფზე:

$$\sin(\pi + \alpha), \ \cos(\pi + \alpha); \ \operatorname{tg}(\pi + \alpha), \ \operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$$
$$\text{და } \sin(\pi - \alpha), \ \cos(\pi - \alpha); \ \operatorname{tg}(\pi - \alpha), \ \operatorname{ctg}(\pi - \alpha).$$

შევჩერდეთ მხოლოდ $\sin(\pi + \alpha)$, $\sin(\pi - \alpha)$, $\cos(\pi + \alpha)$ და $\cos(\pi - \alpha)$ დაყვანის საკითხზე. როგორიც არ უნდა ავიღოთ რკალი α, დადებითი თუ უარყოფითი, ამ α რკალის ბოლო, როცა რკალს მივუმატებთ π რადიანს, გადაინაცვლებს დიამეტრულად მო-

პირდაპირე წერტილში, რაც მასწავლებელმა უნდა განმარტოს ნახაზის საშუალებით (უჩვენებს 2—3 სხვადასხვა შემთხვევას).

ამ გარემოების გამო, თუ α რკალის ბოლო ჰორიზონტალური დიამეტრის ზევით იყო, $\pi+\alpha$ რკალის ბოლო ამ დიამეტრის ქვევით მოხვდება და პირიქით. აღნიშნული უცვლელად ეხება $-\alpha$ და $\pi-\alpha$ რკალებსაც.

მაშასადამე, $\pm\alpha$ რკალის სინუსის და კოსინუსის ხაზები შესაბამისად განსხვავდებიან $\pi\pm\alpha$ რკალის სინუსის და კოსინუსის ხაზებისაგან მ ხ ო ლ ო დ მიმართულებით.

მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\sin(\pi-\alpha)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha$$

$\pi\pm\alpha$ შემთხვევა აქ ერთად განვიხილეთ, რადგან ეს ორი შემთხვევა ერთსა და იმავე კატეგორიას ეკუთვნის და ცალ-ცალკე განხილვას არ საჭიროებს. რიბკინის არაერთხელ დასახელებულ სახელმძღვანელოში (იხ. § 46, გვ. 57, 1947) ეს ორი შემთხვევა განხილულია ცალ-ცალკე, რაც მათემატიკური და მეთოდური თვალსაზრისით მცირე ღირებულებისაა.

შემდეგი რიგი დაყვანის ფორმულებისა ასეთია:

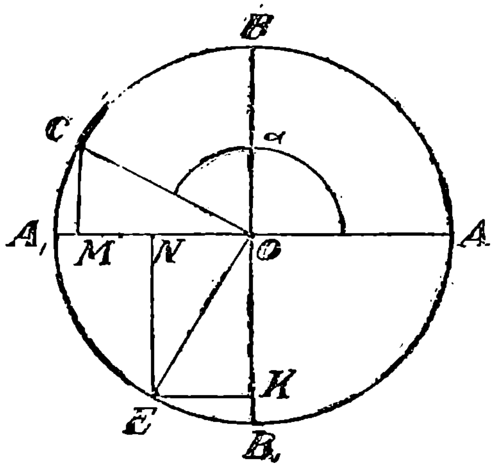
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha;$$

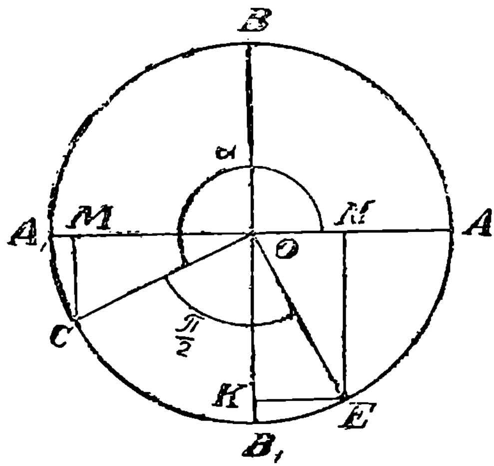
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha;\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha.$$

ვიდრე ამ ფორმულების გამოყვანას შევუდგებით, ს ა ჭ ი რ ო ა მოსწავლის ყურადღება მივაქციოთ ერთ გეომეტრიულ ფაქტს, რომელიც განმარტებული და დასაბუთებული უნდა იყოს ორი შემდეგი ნახაზის საშუალებით (ნახ. 11 და 12).



ნახ. 11.



ნახ. 12.

როგორიც არ უნდა იყოს α კუთხე (დადებითი თუ უარყოფითი), მისი ბოლო გვერდი OC ჰორიზონტალურ დიამეტრთან ისეთივე კუთხეს ქმნის, როგორსაც ქმნის $\alpha+\frac{\pi}{2}$ კუთხის ბოლო გვერდი ვერტიკალურ დიამეტრთან. ორივე ნახაზზე $\angle A_1OC = \angle EOB_1$. ამის დამტკიცება ადვილია. ეს ფაქტი მოსწავლემ კარგად უნდა შეითვისოს.

ცხადია, $CM = ON$ (ჯერჯერობით მიმართულებას და ნიშანს ანგარიშს არ ვუწევთ) და $EN = OM$.

თუ ახლა ნიშნებსაც ანგარიშს გავუწევთ, CM წარმოადგენს α კუთხის სინუსის ხაზს, ხოლო ON არის $\alpha + \frac{\pi}{2}$ კუთხის კოსინუსის ხაზი (რომელიც უარყოფითი მიმართულებისაა). მაშ, მე-11 ნახაზის მიხედვით შეიძლება დავწეროთ:

$$-\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha \quad \text{ან} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha.$$

იმავე ნახაზზე ვხედავთ, რომ $\frac{\pi}{2} + \alpha$ რკალის EM სინუსის ხაზი ეტოლება OM-ს, რომელიც α რკალის კოსინუსის ხაზია. მაშ, მე-11 ნახაზის მიხედვით ვწერთ:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha.$$

ვნახოთ, რას გვეტყვის მე-12 ნახაზი. აქაც $CM = ON$ და $OM = EN$, თუ ამ მონაკვეთებს ავიღებთ თავისი აბსოლუტური სიდიდით. თუ ამასთანავე მხედველობაში მივიღებთ, რომ OM და EN უარყოფითი მიმართულებისაა და მაშასადამე, ორივეს ერთნაირი ნიშანი აქვს, ხოლო CM და ON-იც მოპირდაპირე მიმართულებისაა, მივიღებთ:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha \text{ და}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha.$$

უკანასკნელი ორი ფორმულა ზოგადი სახისაა, მიუხედავად იმისა, თუ როგორია α კუთხე.

შემდეგ მასწავლებელი მოსწავლეებს წინადადებას აძლევს თვითონ დაიყვანონ α კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებზე $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. ამ დავალების შესრულება ადვილია და ნახაზებს არ საჭიროებს. მართლაც,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$

$$=-\cos\alpha.$$

გამოიყვანება აგრეთვე დანარჩენი ფორმულები:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\cos\left(3\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha \text{ და. ა. შ.}$$

რაც შეეხება $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$, $\operatorname{tg}\left(3\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$, $\operatorname{ctg}\left(3\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$ დაყვანის საკითხს, საკმაოა გავიხსენოთ

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{და} \quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{ან} \quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

ფორმულები და ეს უკანასკნელი გამოვიყენოთ.

ვარჯიშის წსაშუალებით მოსწავლემ უნდა მ ალწიოს მიზანს რომელიც ამ პარაგრაფის დასაწყისშია აღნიშნული. მართლაც, ავიღოთ მაგალითები:

1. $\sin 80°=\sin(90°-10°)=\cos 10°$, სადაც $0°<10°<$ $<45°$;

2. $\cos 140°=\cos(180°-40°)=-\cos 40°$; აქ $0°<40°$ $<45°$.

3. $\sin 335°=\sin(360°-25°)=-\sin 25°$; აქ $0°<25°<$ $<45°$.

4. $\cos 813°=\cos(2{\cdot}360°+93°)=\cos 93°=\cos(90°+3°)=$ $=-\sin 3°$, აქაც $0<3°<45°$.

5. $\operatorname{tg} 516°=\operatorname{tg}(3.180°-24°)=-\operatorname{tg} 24°$; $0°<24°<$ $<45°$.

6. $\operatorname{tg} 290°=\operatorname{tg}(3.90°+20°)=-\operatorname{ctg} 20°$ და ა. შ.

დაყვანის ფორმულებიდან მთავარია ოთხი, რომლებიც ყველაზე ხშირად იხმარება; ესენია:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha;\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha;$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha;\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$$

ეს ფორმულები მოსწავლემ უნდა დაიმახსოვროს. დანარჩენი დაყვანის ფორმულების დამახსოვრება საჭირო არაა. მაგრამ საჭიროა ცოდნა იმ წესისა, რომლის საშუალებით შეიძლება ადვილად შევადგინოთ ეს თუ ის დაყვანის ფორმულა. ამ წესის ფორმულირება შეიძლება სხვადასხვა სახით მივცეთ. ჩვენ ამ წესს ასე ჩამოვაყალიბებთ:

$\pi \pm \alpha$ და $2\pi \pm \alpha$ კუთხეების თითოეული ტრიგონომეტრიული ფუნქცია α კუთხის ერთნაირსახელიანი ფუნქციით იცვლება, ხოლო $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ და $3\,\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ კუთხეებისა კი შესაბამისი ტრიგონომეტრიული ფუნქციით.

ნიშნის საკითხს შემდეგი მსჯელობით ვარკვევთ. რადგან დაყვანის ფორმულები სამართლიანია α კუთხის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, მაშასადამე, სამართლიანია α მახვილი კუთხისათვისაც. თუ ეს ასეა, მაშინ ნიშანს ადვილად გამოვარკვევთ; ამისათვის საკმაოა ავიღოთ α კუთხისათვის $30°$ ან $45°$, მაშინ გვეცოდინება, რომელ მეოთხედში თავდება რკალი $\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $2\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$, ამის მიხედვით ნიშანსაც ამოვარჩევთ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = ?$

თუ ავიღებთ α კუთხისათვის მნიშვნელობას $30°$, მაშინ რკალი $3 \cdot \frac{\pi}{2} - \alpha$ თავდება მესამე მეოთხედში, რომელშიაც კოსინუსი უარყოფითია. მაშ დავწეროთ $\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$. აქ საჭიროა გავაფრთხილოთ მოსწავლე, რომ $-\sin\alpha$-ზე არ შეიძლება ვთქვათ, რომ ის უარყოფითია. $-\sin\alpha$-ს ნიშანი დამოკიდებულია α კუთხის მნიშვნელობაზე: თუ $\alpha = \frac{\pi}{6}$, მაშინ $-\sin\frac{\pi}{6} < 0$, თუ კი

$$\alpha = \frac{7\pi}{6}, \text{ მაშინ } \sin\frac{7\pi}{6} > 0.$$

§ 10. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გრაფიკები

გრაფიკებს შეაქვს თვალსაჩინოება; მყარდება კავშირი ანალიზურად მოცემულ ფუნქციასა და მის გეომეტრიულ სახეს შორის.

ეს კავშირი ნათელყოფს ფუნქციის თვისებებს, არკვევს ხშირად საკითხის ისეთ მხარეს, რაც მოსწავლის ყურადღებას ვერ მიიზიდავდა და ამიტომ მის ცოდნას ვერ გააღრმავებდა.

შევჩერდეთ სამ გრაფიკზე.

1. სინუსოიდი.

ასე უწოდებენ საზოგადოდ $y=\sin(ax+b)$ ფუნქციის გრაფიკს, კერძოდ, $y=\sin x$ ფუნქციის გრაფიკს.

ამ მრუდის აგებისათვის სრულიად არაა საჭირო ტრიგონომეტრიულ სიდიდეთა ცხრილებით სარგებლობა.

საჭიროა მხედველობაში მივიღოთ, რომ:

ა) ტრიგონომეტრიული წრის რადიუსი ერთეულს ეტოლება;

ბ) ტრიგონომეტრიული ხაზების სიგრძე გამოისახება იმავე რიცხვებით, როგორც შესაბამი ტრიგონომეტრიული ფუნქციები— მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები განყენებული რიცხვებია, ტრიგონომეტრიული ხაზები კი—სახელდებული.

გ) $\sin x$ ფუნქცია პერიოდულია, სახელდობრ, $\sin(2\pi+x)=$ $=\sin x$;

დ) $\sin x$ ფუნქცია სასრულოა;

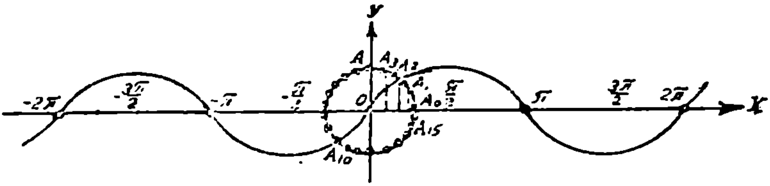
ე) $\sin(\pi-x)=\sin x$;

ვ) $\sin(\pi+x)=-\sin x$;

ზ) $\sin(-x)=-\sin x$.

ზემოხსენებულის შემდეგ ავიღოთ ტრიგონომეტრიული წრე. წრეხაზი დავყოთ, მაგალითად, 16 თანასწორ ნაწილად. გავავლოთ კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ მისი სათავე იყოს წრეხაზის ცენტრში, x-ების ღერძი კი გადიოდეს დაყოფის ერთ-ერთ წერტილზე. ახლა დაყოფის ყველა წერტილიდან დავუშვათ პერპენდიკულარები x-ბის ღერძზე; ესენი $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{8}\ldots$ $\frac{15\pi}{8}$ რკალის სინუსების ხაზებია. ამის შემდეგ კოორდინატთა სისტემის სათავიდან ორივე მხრივ x-ბის ღერძზე გადავზომოთ 2π სიგრძის მონაკვეთები (პრაქტიკულად საკმაოა გადავზომოთ 6 რადიუსის ტოლი მონაკვეთი), რომელნიც აგრეთვე თექვსმეტ-თექვსმეტ თანასწორ ნაწილად დავყოთ.

ამ წერტილიდან ავაგოთ პერპენდიკულარები და უკანასკნელებზე მოვზომოთ შესაბამისად სინუსების ხაზები, ამ ხაზების ბოლო წერტილები შევაერთოთ უწყვეტი ხაზით (იხ. ნახ. 13).



ნახ. 13

ნახაზზე A_0, A_1, A_2, A_3... A_{15} წრეხაზის დაყოფის წერტილებია.

რკალები A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 და ა. შ. ერთმანეთის ტოლია. A_1, A_2, A_3 წერტილზე აგებულია მათი ორდინატები.

სინუსოიდი კვეთს x-ის ღერძს იმ წერტილებში, რომელთა აბსცისები ეტოლება ლუწ რიცხვჯერ აღებულ $\frac{\pi}{2}$-ს.

$\sin x$ ფუნქცია აღწევს თავის მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობას, როცა აბსცისი x ღებულობს კენტ რიცხვჯერ აღებულ $\frac{\pi}{2}$ მნიშვნელობას.

ეს ყველაფერი ნათლად ჩანს ნახაზზე; ნათლად ჩანს ნახაზზე ისიც, რომ ფუნქცია პერიოდულია, რომ $\sin(\pi - x) = \sin x$ და $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

სასურველია და ფრიად სასარგებლო, მოსწავლემ ააგოს შემდეგ ფუნქციათა გრაფიკები:

$$ა)\quad y = 2\sin x; \quad y = \frac{1}{2}\sin x.$$

აქ მოსწავლემ უნდა გამოარკვიოს, რა მოსდის სინუსოიდს და როგორ შევცვალოთ დამხმარე წრის რადიუსი, რომ იოლად ავაგოთ გრაფიკი.

$$ბ)\quad y = \sin 2x; \quad y = \sin\frac{1}{2}x.$$

აქ საჭიროა მოსწავლემ გამოარკვიოს, როგორ შეიცვლება პერიოდი და როგორ ცვლილებას განიცდის სინუსოიდი.

$$გ)\quad y = 2\sin 3x; \quad y = \frac{1}{2}\sin 3x.$$

დ) $y = \sin(1+x)$; $y = \sin(-2+x)$.

აქ სინუსოიდი გადაადგილდება x-ბის ღერძის დადებითი ან უარყოფითი მიმართულებით. მოსწავლე გამოარკვევს, რა მანძილით მოხდება სინუსოიდის გადაადგილება პირველ შემთხვევაში და რა მანძილით მეორე შემთხვევაში.

ე) ააგეთ გრაფიკი $y = \sin x + \sin 2x$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. უკანასკნელი მაგალითი სავალდებულო არ არის, და შეიძლება დამუშავდეს საკლასო მუშაობის გარეშე — მათემატიკურ წრეში.

გრაფიკი $y = \cos x$ ფუნქციისა ადვილად დაიხაზება, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, და გავიხსენებთ $y = \sin(1+x)$ ფუნქციის აგებას.

აღვნიშნოთ აქ, რომ

$$y = m \sin(ax + b)$$

და

$$y = m \cos(ax + b)$$

სახის ფუნქციების გრაფიკებს ეწოდება მ ა რ ტ ი ვ ი ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ ი მ რ უ დ ე ე ბ ი.

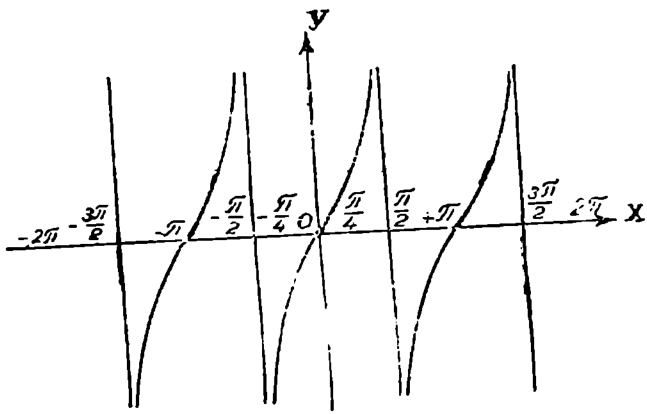
კ ი თ ხ ვ ა: რა შუალედში იცვლება $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, როცა x იცვლება $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში? $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ შუალედში? და ა. შ. გამოარკვიეთ ეს ანალიზურად და მოცემული ფუნქციის გრაფიკის საშუალებით.

ბუნებაში და ტექნიკაში ხშირად გვაქვს საქმე სხვადასხვა პერიოდულ მოძრაობასთან. ყველაზე მარტივს მათ შორის წარმოადგენს ეგრეთწოდებული მარტივი ჰარმონიული რხევა, რომლის შესწავლა დაკავშირებულია ზემომოყვანილ ფუნქციებთან. ამიტომ ასეთი ფუნქციების საფუძვლიან შესწავლას და მათი გრაფიკების აგებას სერიოზული ყურადღება უნდა მიექცეს.

2. ტ ა ნ გ ე ნ ს ო ი დ ი. ასე უწოდებენ $y = \operatorname{tg} x$ ფუნქციის გრაფიკს. ამ გრაფიკის ასაგებად უნდა ვისარგებლოთ იმავე ტექნიკური ხერხით. განსხვავება მხოლოდ იმაში იქნება რომ x-ბის ღერძის დაყოფის წერტილებიდან ამართულ პერპენდიკულარებზე ჩვენ მოვზო-

მავთ, ნიშნების მიხედვით, სინუსების ხაზების ნაცვლად ტანგენსების ხაზებს, რის შემდეგ ამ უკანასკნელთა ბოლო წერტილებს შევაერთებთ ერთმანეთთან.

ტ ა ნ გ ე ნ ს ო ი დ ი შესდგება სრულიად ერთნაირ, მაგრამ განკერძოებული მრუდეებისაგან, რადგანაც ტანგენსი x რკალისა აკეთებს ნახტომს პლუს უსასრულობიდან მინუს უსასრულობაზე, როდესაც x ცვლადი ღებულობს $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ (ე. ი. კენტ რიცხვჯერ აღებულ $\frac{\pi}{2}$) მნიშვნელობას (ნახ. 14).



ნახ. 14.

სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ტანგენსოიდი განიცდის წყვეტას $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ და ა. შ. წერტილებში. ნახაზზე მოცემულია მხოლოდ სამი ცალკეული მრუდი. ცხადია, რომ ასეთ მრუდეთა რიცხვი უსასრულოდ მრავალია. მრუდი, რომელიც არის $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში, წარმოადგენს $\operatorname{tg} x$ ფუნქციის მთავარ მნიშვნელობას.

3. ტრიგონომეტრიაში ზოგჯერ $\sec\alpha$ (ან $\sec x$) და $\operatorname{cosec}\alpha$ (ან $\operatorname{cosec} x$) ფუნქციებს ხმარობენ. პირველი იკითხება როგორც სეკანს ალფა (ან სეკანს იქს), მეორე — კოსეკანს ალფა (ან კოსეკანს იქს).

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

ეს ტოლობანი წარმოადგენენ დასახელებული ფუნქციების განსაზღვრას.

მოსწავლისათვის მეტად სასარგებლოა $\sec x$ ფუნქციის გრაფიკის აგება, რადგან მან აუცილებლად უნდა გამოიკვლიოს $\frac{1}{\cos x}$ წილადი ფუნქციის ცვლა, სახელდობრ:

ა) შეიძლება, თუ არა $\frac{1}{\cos x}$ წილადის მნიშვნელობა აბსოლუტურად 1-ზე ნაკლები იყოს?

ბ) შეიძლება, თუ არა ამ ფუნქციის გრაფიკის რომელიმე წერტილი $+1$ და -1 ერთეულის მანძილით იყოს დაშორებული x-ების ღერძიდან?

გ) რამდენი ასეთი წერტილი ექნება გრაფიკს და x-ის რომელი მნიშვნელობისათვის?

დ) x არგუმენტის ცვლის რა შუალედებში მატულობს და რა შუალედებში კლებულობს ჩვენი ფუნქცია?

ე) როგორ დალაგდება გრაფიკი x-ებისა და y-ების ღერძების მიმართ?

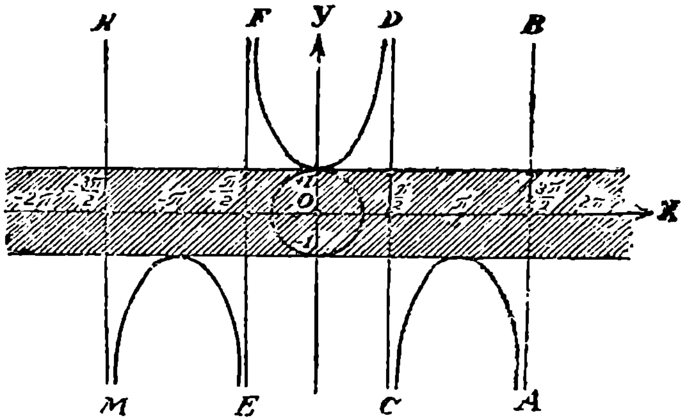
სეკანსოიდი. ასე ეწოდება $y = \operatorname{ses} x$ ფუნქციის გრაფიკს. ეს ფუნქცია არ არსებობს, თუ იგი აღებულია $(-1, +1)$ შუალედში თვით $+1$ და -1 გამონაკლისით. როდესაც $\sec x = +1$, $x = 0$; როდესაც $\sec x = -1$, $x = \pi$

გვექნება შემდეგი სახის ნახაზი (ნახ. 15). დაშტრიხულ ზოლში სეკანსოიდს არ ექნება არც ერთი წერტილი. სეკანსოიდი, როგორც ტანგენსოიდი, უსასრულოდ მრავალი განკერძოებული მრუდისაგან შედგება; ჩვენ ნახაზზე აგებულია მხოლოდ სამი მრუდი.

AB, CD, EF და MN — x-ბის ღერძისადმი პერპენდიკულარები, — წარმოადგენენ იმ სწორ ხაზებს, რომლებსაც ასიმპტოტიურად უახლოვდებიან სეკანსოიდის ცალკეული შტოები. ეს იმას ნიშნავს, რომ შტოები უსასრულოდ უახლოვდებიან AB, CD, EF, MN სწორ ხაზებს, მაგრამ მათი შერთვა ამ სწორებთან არასდროს არ მოხდება.

იმის შემდეგ, რაც უკვე იყო ნათქვამი სინუსოიდისა და ტან-

გენსოიდის აგებაზე, უნდა ვიფიქროთ, რომ ქვემოთ მოტანილი აგება ძნელი აღარ იქნება.



ნახ. 15.

მეორე თავში განხილული მასალის დამუშავებისათვის მასწავლებელს 32 — 34 საათი დასჭირდება.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო

1. ა ა გ ე თ კ უ თ ხ ე:

ა) თუ $\sin x = \frac{3}{4}$ და $\cos x < 0$;

ბ) თუ $\cos x = -\frac{5}{8}$ და $\sin x < 0$;

გ) თუ $\operatorname{tg} x = \frac{3}{5}$ და $\cos x < 0$;

დ) თუ $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$. საჭიროა x-ის აბსოლუტურად უმცირესი მნიშვნელობა.

ე) თუ $\sin x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$. აქ საჭიროა წმინდა გეომეტრიული აგება. გაიხსენეთ მსგავსი მართკუთხა სამკუთხედები:

2. დ ა ა მ ტ კ ი ც ე თ, რომ

ა) $\sin\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{5}$;

ბ) $\sin 220^\circ = \cos(-140^\circ)$;

გამოიყენეთ $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\alpha$ ფორმულა.

გ) $\sin(-123^\circ) = -\sin 57^\circ = -\cos 33^\circ$.

3. იპოვეთ $\cos x$ და $\operatorname{tg} x$, თუ $\sin x = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$.

პასუხი: $\cos x = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+m^2}}$; $\operatorname{tg} x = \pm m$.

4. თუ წინა მაგალითში $\cos x$-ის უარყოფით მნიშვნელობას აიღებთ, რა ნიშნით აიღებთ $\operatorname{tg} x$-ის მნიშვნელობას? რატომ?

5. α კუთხის რა მნიშვნელობა უნდა ავიღოთ, რომ $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ წილადმა მიიღოს უდიდესი მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$ არ არის უარყოფითი?

პასუხი: $\alpha = k\pi$, სადაც k მთელი ნებისმიერი რიცხვია.

6. გამოსახეთ $\sin\alpha$ ფუნქცია $\operatorname{tg}\alpha$-ს შემწეობით.

პასუხი: $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

აგრეთვე $\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

გამოიყენეთ ეს ფორმულები, როდესაც α კუთხე უდრის 135°. როგორ ამოარჩევთ ნიშნებს ორივე ფორმულის ერთდროულად სარგებლობისას? როგორ აიხსნება ამ ფორმულათა ორმაგი ნიშანი?

7. გამოარკვიეთ, რომელი სიდიდე უფრო მეტი ან ნაკლებია: $\sin(\alpha+\beta)$ თუ $\sin\alpha+\sin\beta$. რა პირობებშია პირველი სიდიდე მეორეზე მეტი და რა პირობებშია ნაკლები (ან ტოლი). ისარგებლეთ ტრიგონომეტრიული ხაზებით, ანგარიში გაუწიეთ ნიშნებსაც.

8. ცნობილია, რომ $\sin 20^\circ = 0{,}342$; $\sin 21^\circ = 0{,}358$; $\sin 22^\circ = 0{,}375$. გამოანგარიშეთ $\sin 20^\circ 40'$.

9. სად კლებულობს $\operatorname{tg} x$ ფუნქცია?

პასუხი: ყოველ მეოთხედში მატულობს.

10. როდის უდრის $\sin|x|$ ფუნქცია $\sin(-x)$-ს?

პასუხი: თუ $x < 0$, მაშინ $\sin|x| = \sin(-x)$ ან $-\sin x$.

11. გამოიანგარიშეთ x კუთხე ტრიგონომეტრიული ფუნქციების მნიშვნელობათა ცხრილის საშუალებით, თუ $\operatorname{tg} x = 0{,}384$.

12. ავაგოთ $y = \sin x^2$ ფუნქციის გრაფიკი. ეს მაგალითი მეტად საინტერესოა და ამასთან, მოწაფეებისათვის სასარგებლო. აქ მოსწავლემ უნდა გამოიყენოს მიღებული ცოდნა, და მისთვის თვალსაჩინოდ გამოირკვევა, რა შეითვისა მან კარგად და რა ხარვეზებს აქვს ადგილი მის ცოდნაში. მოსწავლისათვის ისიც გამოირკვევა, თუ რა დონეზე დგას მისი ფუნქციონალური აზროვნება. აქვე უნდა მივცეთ მითითება იმ მოსაზრებათა შესახებ, რითაც მან უნდა იხელმძღვანელოს ამ გრაფიკის აგებისათვის.

ა) $y = \sin x^2$ არაპერიოდული ფუნქციაა, (იხ. 7 §-ის ბოლო).

ბ) ეს ფუნქცია ლუწია; მისი გრაფიკი სიმეტრიულია y-ების ღერძის მიმართ (იხ. § 8). მაშასადამე, საკმაოა ავაგოთ გრაფიკის ნაწილი, სადაც x-ის მნიშვნელობა არაუარყოფითია, ე. ი. $(x \geqslant 0)$, ფუნქციის არგუმენტი x-ია.

გ) x არგუმენტს შეუძლია ყოველგვარი ნამდვილი მნიშვნელობა მიიღოს.

დ) x^2 რომ ეტოლებოდეს $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π... და ა. შ. საჭიროა, რომ $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$, $\sqrt{2\pi}$... და ა. შ.

ე) წინა შენიშვნის მიხედვით საჭიროა კოორდინატთა სისტემის სათავიდან დაწყებული x-ბის ღერძზე აღვნიშნოთ წერტილები

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \sqrt{\pi},\ \sqrt{\frac{3\pi}{2}},\ \sqrt{2\pi}...$$

$\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx \frac{5}{4},\ \sqrt{\pi} = \frac{7}{4}\right)$. (საკმაო 5 — 6 წერტილი).

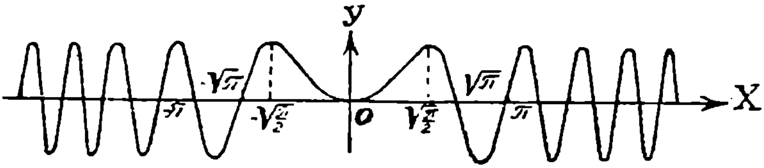
ვ) გამოვარკვიოთ, რა შუალედში იზრდება ფუნქცია და რა შუალედში კლებულობს; აგრეთვე x-ის რა მნიშვნელობებისათვის ეტოლება ნულს ფუნქცია $\sin x^2$.

ზ) შევამჩნიოთ და გამოვიყენოთ შემდეგი ფაქტი:

$\pi > \sqrt{2\pi} - \sqrt{\pi} > \sqrt{3\pi} - \sqrt{2\pi} > 2\pi - \sqrt{3\pi}..$, და, საზოგადოდ,

$$\sqrt{k\pi}-\sqrt{(k-1)\pi}>\sqrt{(k+1)\pi}-\sqrt{k\pi}$$

(k მთელი დადებითი რიცხვია) ამ მოსაზრებების მიხედვით აგებულ გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე: (იხ. ნახ. 16).



ნახ. 16.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: ამ გრაფიკს ეწოდება ფრენელის მრუდი, თვით $\sin x^2$ ფუნქციას აქვს დიდი გამოყენება ფიზიკაში სინათლის დიფრაქციის თეორიაში.

13. ააგეთ $y=\sin|x|$ და $y=|\sin x|$ გრაფიკი.

თ ა ვ ი III.

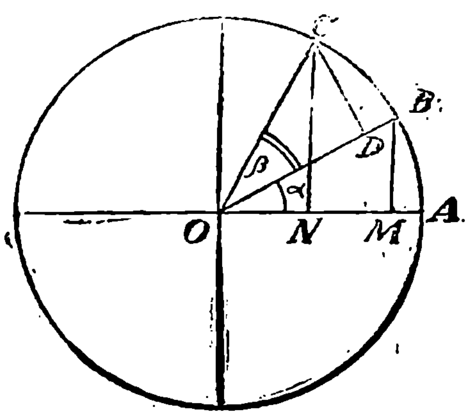
შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და გაყოფის ფორმულების შესახებ

§ 11. შეკრებისა და გამოკლების ფორმულები

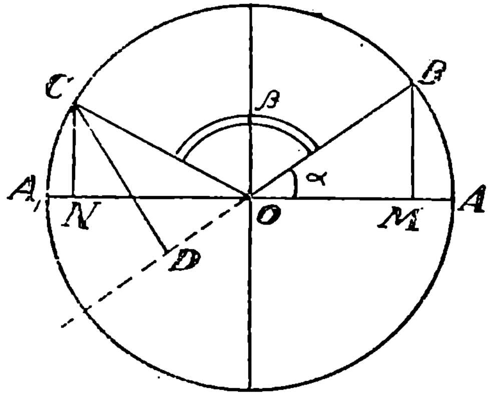
შეკრების და გამოკლების ფორმულების გამოყვანა იმ შემთხვევაში, როცა ორი α და β კუთხე მახვილი და დადებითია, არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს და ამაზე ლაპარაკი აქ ზედმეტია. გაცილებით უფრო ძნელია ამ ფორმულების ზ ო გ ა დ ო ბ ი ს დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ჩვენ ვფიქრობთ, რომ, ამ ფორმულებს გამოვიყვანთ ორ შემთხვევაში: როცა $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ და $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, ხოლო:

1) $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ და 2) $\alpha+\beta<\pi$, და შემდეგ მოსწავლეს ვეტყვით, რომ ეს ფორმულები ძალაში რჩებიან ყოველთვის, როგორიც არ უნდა იყოს α და β კუთხეები, საქმეს ამით არავითარ ზიანს არ მი-

ვაყენებთ. მართალია, შეკრების ფორმულები ფრიად მნიშვნელოვან გონიომეტრიულ ფორმულებს წარმოადგენენ (მათი შეწყობით ვღებულობთ გამრავლებისა და გაყოფის ფორმულებს), მაგრამ ეს კიდევ არაა საბუთი იმისათვის, რომ საშუალო სკოლაში ამ ფორმულების განზოგადება ისწავლებოდეს. ამისათვის საჭირო დრო შეიძლება გამოვიყენოთ სხვა საკითხების შესწავლისათვის, როგორიცაა, მაგალითად, $y=\sin x^2$ ფუნქციის გრაფიკის აგება (იხ. § 10, კითხვა 5, 6, 10, 12). სულ სხვაა, თუ ვისარგებლებთ შემკვრელის პროექციის თეორემით. მაშინ მოსწავლე იგრძნობდა ამ თეორემის სიმძლავრეს, მის ზოგად ხასიათს, და ამას ექნებოდა საგანმანათლებლო მნიშვნელობა. რიბკინის ტრიგონომეტრიაში, რომელიც ჩვენს სკოლებში იხმარება, განზოგადება მოცემულია გრძელი მსჯელობის სახით (იხ. § 54, გვ. 75, 1947). გარდა ამისა, მათემატიკის კურსში ზოგჯერ დასაშვებია რაიმე ფორმულის დაუმტკიცებლად მიცემაც. ვიდრე შეკრების ფორმულების გამოყვანას შევუდგებოდეთ, საჭიროა მოსწავლეს ვაჩვენოთ, რომ საზოგადოდ $\sin(\alpha+\beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$, რისთვისაც საკმაოა იმ ორი შემთხვევის განხილვა, რომელთაც ზემოთ შევეხეთ. აქ მოსწავლემ კარგად უნდა იცოდეს, რა ხაზები ა ს რ უ ლ ე ბ ე ნ ნახაზზე α და β კუთხის ტრიგონომეტრიული ხაზების როლს (ნახ. 17 და 18).



ნახ. 17.



ნახ. 18.

მოსწავლეს უნდა ესმოდეს, რომ მე-17 და მე-18 ნახაზებზე CD ასრულებს β კუთხის სინუსის ხაზის როლს, OD კი—მისი კოსინუსის ხაზის როლს.

თუ მოსწავლე ასეთ საკითხებში ერკვევა, მაშინ მას არც შეკრების ფორმულის გამოყვანის შეთვისებაც გაუძნელდება. ცხადია, რომ ამის შემდეგ საჭიროა ვარჯიში: მაგალითად, $\sin 75° = ?$ $\cos 75° = ?$ $\sin 15° = ?$ $\cos 15° = ?$ სასარგებლოა $\cos 75°$ და $\cos 15°$ გამოვიანგარიშოთ ორი გზით: ერთი — შეკრების (გამოკლების) ფორმულის გამოყენებით, მეორე — $\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \cos\alpha$ ფორმულის გამოყენებით; შედეგები შევადაროთ.

მეტად საჭიროა მივაქციოთ ყურადღება მნიშვნელოვან ნაკლს, რაც ასე ხშირია საშუალო სკოლის პრაქტიკასა და სახელმძღვანელოებში. ჩვენ აქ მხედველობაში გვაქვს ორი კუთხის ჯამის და სხვაობის ტანგენსის ფორმულა. ჩვეულებრივი გამოყვანა ამ ფორმულისა სკოლაში ასეთია: „გვაქვს:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta};$$

მარჯვენა მხარეში რომ $\operatorname{tg}\alpha$ და $\operatorname{tg}\beta$ მივიღოთ, გავყოთ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი ნამრავლზე $\cos\alpha\,\cos\beta$, მივიღებთ:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\quad\frac{\sin\beta}{\cos\beta}};$$

$$\text{ანუ}\quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta}\text{“}.$$

(იხ. რიბკინის ტრიგონომეტრია § 55, გვ. 77, 1947 წ.). ეს მაგალითი სქოლასტიკური და ფორმალისტური მსჯელობის საუკეთესო ნიმუშს წარმოადგენს. აქ ფორმის შიგნით ღარიბი შინაარსია. უპირველეს ყოვლისა, რით არის გამოწვეული სიტყვები „მარჯვენა მხარეში რომ $\operatorname{tg}\alpha$ და $\operatorname{tg}\beta$ მივიღოთ“? ალბათ, გარკვეული მიზნით, რაც აღნიშნული უნდა ყოფილიყო, იქნებ გვსურს $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ გამოვსახოთ $\operatorname{tg}\alpha$ და $\operatorname{tg}\beta$-ს საშუალებით, იქნებ გვსურს მარჯვენა მხარეს მარტივი სახე მივცეთ.

მეორე: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ რომ გამოვსახოთ $\operatorname{tg}\alpha$ და $\operatorname{tg}\beta$-ს საშუალებით, ეს ფუნქციები უნდა არსებობდნენ, რისთვისაც საჭიროა, რომ $\cos\alpha \neq 0$ და $\cos\beta \neq 0$, აგრეთვე $\alpha+\beta \neq k\cdot\frac{\pi}{2}$.

მესამე: მოსწავლემ ისიც უნდა დაინახოს, რომ შეიძლება $\operatorname{tg}\alpha$ და $\operatorname{tg}\beta$-ც არსებობდეს, მაგრამ ფორმულას არ ჰქონდეს გამოყენება; ეს მოხდება, როცა $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=1$.

სხვათაშორის, არ ვარგა, რომ სტაბილურ სახელმძღვანელოში მიღებულია დაწერა:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

რატომ ვწერთ გამრავლების ნიშანს $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$-ს შორის? ასეთი დაწერით უმიზნოდ რთულდება წერაც და ბეჭდვაც. მოსწავლეს უნდა მოვთხოვოთ ასეთი წერა:

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

საყურადღებოა ის გარემოებაც, რომ ორი კუთხის ჯამის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები ყოველთვის ალგებრულად გამოისახებიან შესაკრებ კუთხეთა ტრიგონომეტრიული ფუნქციების საშუალებით.

მაგალითად, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$. მარჯვენა ნაწილში მივიღეთ ჯამი ორი ისეთი წევრისა, რომელიც ნამრავლს წარმოადგენს.

აღსანიშნავია, რომ, მაგალითად, $lg(a+b)$ შეუძლებელია გამოვსახოთ ალგებრულად lga და lgb-ს საშუალებით.

დანარჩენი მასალა დამუშავდება ისე, როგორც იგი სტაბილურ სახელმძღვანელოშია.

§ 12. გამრავლების და გაყოფის ფორმულების შესახებ

არც დასახელებული ფორმულების გამოყვანა წარმოადგენს რაიმე სიძნელეს და დამუშავდება იმ თანმიმდევრობით და ისე, როგორც სახელმძღვანელოშია. მოსწავლეებმა ამ ფორმულების გამოყენებაში უნდა ივარჯიშონ, უმთავრესად იმისათვის, რომ მათ შეგნებულად ამოარჩიონ ნიშანი იმ რადიკალების წინ, რომლებითაც გამოისახებიან $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ და $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიექცეს ფორმულებს, რომლებიც α კუთხის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს რაციონალურად გამოსახავენ $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ფუნქციის საშუალებით. ამ ფორმულებს ხშირად იყენებენ როგორც ელემენტარულ მათემატიკაში (ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნა), ისე უმაღლეს მათემატიკაში.

ამ ფორმულების იმ სახით მიცემა, როგორც რიბკინის წიგნშია (იხ. რიბკინის ტრიგონომეტრია გვ. 95, 96), არ ივარგებს.

შემდეგ, ზედმეტი არ იქნება ვუჩვენოთ მოწაფეებს, რომ გაყოფის ფორმულების საშუალებით შეგვიძლია გამოვიანგარიშოთ $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{16}$, $\sin\frac{\pi}{16}$ და ა. შ. თუ გაყოფის ფორმულებით თანმიმდევრულად ვისარგებლებთ, შეგვიძლია გამოვიანგარიშოთ $\cos\frac{\pi}{2^n}$ და $\sin\frac{\pi}{2^n}$, სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია. საინტერესოა, რომ გამოანგარიშება მოხდება შემდეგი სახის რადიკალების საშუალებით. $\frac{\pi}{2^n}$ კუთხის კოსინუსისათვის:

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

და ა. შ.

$\frac{\pi}{2^n}$ კუთხის სინუსისათვის:

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; \quad \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

და ა. შ.;

აქ მოყვანილია სამი შემთხვევა, როცა $n = 3, 4, 5$, კუთხეები კი არის $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{16}$, $\frac{\pi}{32}$.

საინტერესოა ის გარემოებაც, რომ 3α, 4α, $5\alpha \ldots n\alpha$ (n მთელი დადებითი რიცხვია) კუთხის სინუსის და კოსინუსის პოვნა ალგებრული თვალსაზრისით დიდ სიძნელეს არ წარმოადგენს. მაგრამ, როდესაც გვინდა ვიპოვოთ $\frac{\alpha}{n}$ კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქცია, გამოსახული α კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების საშუალებით, მაშინ ალგებრული ხასიათის დაბრკოლებანი წამოიჭრება. ამას კარგი მოსწავლე ადვილად შეამჩნევს შემდეგი მაგალითიდან: ცნობილია, რომ $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

ჩავსვათ α-ს ნაცვლად $\frac{\alpha}{3}$, მივიღებთ:

$$\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}.$$

შემდეგ, თუ გვინდა გამოვსახოთ $\cos\frac{\alpha}{3}$ α კუთხის კოსინუსის საშუალებით, საჭირო იქნება კუბიკური განტოლების ამოხსნა, რასაც ელემენტარული მათემატიკა არ ეხება.

ამასთან დაკავშირებულია საკითხი კუთხის ტრისექციისა, ე.ი. კუთხის სამ ტოლ ნაწილად გაყოფისა ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით. კუთხის ტრისექცია ფარგლის და სახაზავის საშუალებით ამოუხსნადი ამოცანაა.

საქმე იმაშია, რომ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით შეიძლება ავაგოთ ისეთი სიდიდენი, რომლებიც გამოსახულნი არიან კვადრატული რადიკალების შეწყობით, ამასთან ასეთი რადიკალების რიცხვი სასრულოა.

კუბიკური ფესვები სულ სხვა ბუნების რიცხვებია, ვიდრე კვადრატული ფესვები.

1837 წ. ვანცელმა (Wantzell) დაამტკიცა, რომ კუბიკური განტოლების ფესვები შეუძლებელია გამოვსახოთ კვადრატული ფესვების საშუალებით.

კითხვები.

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; იპოვეთ $\sin(\alpha+\beta)$.

2) დაამტკიცეთ, რომ

$$\sin y = \sin x \cdot \cos(y-x) + \cos x \cdot \sin(y-x).$$

3) დაამტკიცეთ, რომ

$$\sqrt{3}\cos x \pm \sin x = 2\sin(60^\circ \pm x).$$

4) $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, იპოვეთ $\sin 36^\circ$, $\cos 36^\circ$, $\operatorname{tg} 36^\circ$.

პასუხი: $\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; $\cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$; $\operatorname{tg} 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$

5) $\operatorname{tg} x = 7$. იპოვეთ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. პას.: $\frac{1}{7}(\sqrt{50}-1)$ და $-\frac{1}{7}(\sqrt{50}+1)$.

6) დაამტკიცეთ, რომ

$$\sin x + \operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg} x \cos^2\frac{x}{2}.$$

7) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{n}$. რას უდრის $m\cos 2\alpha + n\sin 2\alpha$?

8) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}-1$; რას უდრის $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$?

ამ თავს შემდეგი ისტორიული ცნობით დავასრულებთ.

ხალხი განვითარების პირველსავე სტადიაზე გრძნობდა კალენდრის საჭიროებას, ე. ი. სწორად რომ ითქვას, წელიწადის დროთა დადგომის წინასწარ განსაზღვრის საჭიროებას, რადგანაც ამასთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული თესვისა და მოსავლის აღების საკითხები. ცნობილია, რომ მოსავლის ხარისხი დროულად თესვაზეა დამოკიდებული. მაგალითად, ეგვიპტეში მოსავალი დამოკიდებული იყო ნილოსის ადიდებაზე, რაც წლის განსაზღვრულ დროს ხდებოდა. მოსავალზე კი დამოკიდებულია ხალხის არსებობა.

კალენდარი საჭიროა ნაოსნობისათვის. ამჟამად ჩვენ სამოქალაქო კალენდარიც გვაქვს და ასტრონომიულიც. მაგრამ ჩვენს წელთაღრიცხვამდე 2000-ზე მეტი წლის მანძილზე კალენდრის როლს ასრულებდა ცის სფერო, რომელზედაც აკვირდებოდნენ მზეს, ვარსკვლავებსა და პლანეტებს. ძველად თანავარსკვლავედთა შორის მზის მდებარეობის მიხედვით განსაზღვრავდნენ წელიწადის დროს; ვარსკვლავების მდებარეობის მიხედვით გზას იგნებდნენ ხმელეთსა და ზღვაზე.

ნათქვამიდან ცხადია, რომ ყველა მეცნიერებათა შორის ერთ-ერთი პირველთაგანი ასტრონომია უნდა წარმოშობილიყო და განვითარებულიყო. მართლაც, აღმოსავლეთის ქვეყნებს—ჩინეთს, ინდოეთს, ეგვიპტეს და სხვ. უძველესი დროიდანვე ჰქონდათ ობსერვატორიები და სპეციალისტებიც ჰყავდათ, რომლებიც ასტრონომიულ დაკვირვებებს აწარმოებდნენ.

ასტრონომიისათვის საჭიროა სფერული ტრიგონომეტრია. ამიტომ სწორხაზოვან ტრიგონომეტრიაზე ადრე ჩნდება და ვითარდება სფერული ტრიგონომეტრია, რომელიც ასტრონომიის ნაწილად ითვლებოდა და რომლის საგანსაც შეადგენდა სფერული სამკუთხედების ამოხსნა, ე. ი. ისეთი სამკუთხედებისა, რომლებსაც სფეროზე ჰქმნის სამი დიდი წრის გადაკვეთა.

მაგრამ ასტრონომიას უკვე ჩვენს წელთაღრიცხვამდე II საუკუნეში დასჭირდა ზოგიერთი ისეთი თანაფარდობა, რომლებსაც იძლევა სწორხაზოვანი ტრიგონომეტრია, მაგალითად:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

რაც იმ დროს ცნობილი არ იყო.

ამ თანაფარდობათა ფუნქციას ასრულებდა გამოჩენილი ასტრონომის კლავდიუს პტოლომეს (ჩვენი წელთაღრიცხვის II ს.) თეორემა. ეს თეორემა იმაში მდგომარეობს, რომ მართკუთხედი, რომლის გვერდები წრეში ჩახაზული ოთხკუთხედის დიაგონალებს უდრის, ორი ისეთი მართკუთხედის ჯამის ტოლდიდაა, რომელთა გვერდებს წარმოადგენს ამ ჩახაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები. ამ თეორემის დახმარებით პტოლომე $\alpha+\beta$ და $\alpha-\beta$-სათვის ქორდებს α და β რკალების ქორდების მიხედვით პოულობდა. ასე შეადგინა მან ქორდების ცხრილი, რომელიც ჩვენს ახლანდელ სინუსების ცხრილს შესაბამება. ამრიგად, სწორხაზოვანი

ტრიგონომეტრიის ჩანასახს, გეომეტრიული ფორმით, ვპოულობთ ჩვენი წელთაღრიცხვის II საუკუნეში. რასაკვირველია, ტრიგონომეტრია ამ სიტყვის ახლანდელი მნიშვნელობით მაშინ არ არსებობდა.

როცა ცხოვრების პრაქტიკამ ისეთი საკითხები წარმოაყენა როგორიც არის, მაგალითად, გამოთვლა მანძილებისა მიუვალ წერტილებს შორის ან შორეულ წერტილებამდე, საგნის სიმაღლის განსაზღვრა, ადგილის გეგმის შედგენა, ზოგიერთი სწორხაზოვანი ნაკვეთის ფართობის გამოთვლა და ა. შ., ე. ი. წამოაყენა სამკუთხედების ამოხსნის ამოცანა, მაშინ სწორხაზოვანმა ტრიგონომეტრიამაც წინ წაწევა დაიწყო.

თ ა ვ ი IV

სამკუთხედების ამოხსნის შესახებ

§ 13. პროგრამული საკითხი

„სასწავლო პროგრამებისა და სასკოლო სახელმძღვანელოების გამარტივება, მათი არაძირითადი მასალისაგან განტვირთვა სწავლებაში ფორმალიზმის წინააღმდეგ ბრძოლის ერთ-ერთი პირობაა" (იხ. მითითებანი საშუალო სკოლის პროგრამებსა და სახელმძღვანელოებში შეტანილი ზოგიერთი ცვლილებების შესახებ. გაზ. „სახალხო განათლების" გამოცემა 1947. გვ. 3).

ამ მოსაზრების თანახმად XI კლასის ტრიგონომეტრიის პროგრამიდან ამოღებულია ტანგენსების თეორემა, მოლვეიდეს ფორმულები და სამკუთხედის ნახევარი კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების გამოსახვა გვერდების საშუალებით.

ირიბკუთხა სამკუთხედების ამოხსნა ხდება მხოლოდ სინუსების და კოსინუსების თეორემის საშუალებით. ამ თეორემის დამუშავება არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს და აქ ამ საკითხზე არ შევჩერდებით (იხ. რიბკინის „ტრიგონომეტრია" 1947 წ. გვ. 123, 124, 127, 128).

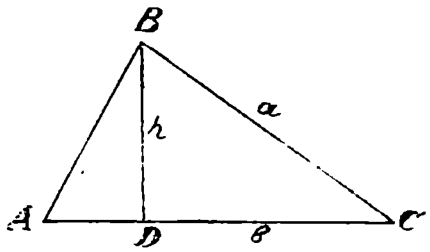
ზემოთ აღნიშნული ცვლილება ისე არ უნდა იყოს გაგებული, რომ, თითქოს, მისი პროგრამაში შეტანა დამოკიდებულია მასწავლებლის სურვილზე. პროგრამის ასეთი ცვლილება ს ა ვ ა ლ დ ე ბ უ ლ ო ა, მით უმეტეს, რომ ირიბკუთხა სამკუთხედების ამოხსნას უნდა დაეთმოს მხოლოდ 8 საათი, ნაცვლად წინანდელი 17 საათისა, და განთავისუფლებული 9 საათი უნდა მოხმარდეს გეომეტრიული

ამოცანების ამოხსნას ტრიგონომეტრიის გამოყენებით (იხ, მითითებანი"... გვ. 24, 25)..

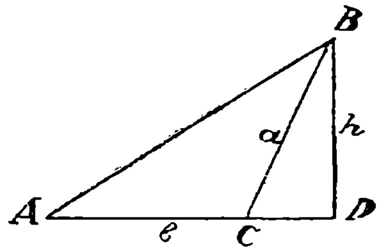
§ 14. ირიბკუთხა სამკუთხედის ამოხსნა

ჟურნალში „Математика в школе" (№ 4, 1948 წ. გვ. 42) მოცემულია ერთ-ერთი ვარიანტი სამკუთხედის ამოხსნისა, რაც მოსწავლისათვის ადვილად გასაგებია. ჩვენ ვურჩევთ მასწავლებელს ამ ვარიანტის გამოყენებას.

ამოვხსნათ ირიბკუთხა სამკუთხედი ორი გვერდითა და მათ შორის მდებარე კუთხით (ნახ. 19 და 20). მოცემულია გვერდები a, b და კუთხე C. განვიხილოთ ჯერ შემთხვევა, როცა $C < 90°$. BDC სამკუთხედიდან (ნახ. 19) გვექნება: $BD = h = a \sin C$;



ნახ. 19.



ნახ. 20.

$$DC = a \cos C;\ AD = b - DC = b - a \cos C.$$

ABD მართკუთხა სამკუთხედიდან:

$$\operatorname{tg} A = \frac{h}{AD} = \frac{a \sin C}{b - a \cos C},$$

საიდანაც გამოვთვლით A კუთხეს ნაწილობრივი გალოგარითმებით.

შემდეგ ვიპოვით B კუთხეს. სინუსების თეორემა გვაძლევს:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

ვაწარმოებთ შემოწმებას: $A+B+C=180^\circ$. ამის შემდეგ ვპოულობთ c გვერდს სინუსების თეორემის გამოყენებით:

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A},$$

და დასასრულ

$$S=\frac{ab\sin C}{2}.$$

თუ C კუთხე მეტია 90°, სულ ერთია ფორმულა $\operatorname{tg}A=\frac{a\sin C}{b-a\cos C}$ ძალაში რჩება. მართლაც, განვიხილოთ ეს შემთხვევა (ნახ. 20): აქაც $h=a\sin(180^\circ-C)=a\sin C$;

$$CD=a\sin(180^\circ-C)=-a\cos C;\ (-a\cos C>0).$$

$$AD=b+CD=b-a\cos C \text{ და მაშ}$$

$$\operatorname{tg}A=\frac{h}{AD}=\frac{a\sin C}{b-a\cos C}, \text{ ე. ი.}$$

A კუთხის გამოანგარიშება სწარმოებს ერთისა და იმავე ფორმულის საშუალებით. იქვე მოყვანილია მაგალითი რიბკინის კრებულიდან (§ 13, № 8), თვით ვარიანტი კ. ა გ რ ი ნ ს კ ი ს ეკუთვნის.

მაგალითი

$$a=225,\ b=800,\ C=36^\circ44'.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა:

$$\operatorname{tg}A=\frac{a\sin C}{b-a\cos C},$$

$$a\cos C=225\cdot\cos 36^\circ44'.$$

ლოგარითმული ცხრილის შემწეობით ვპოულობთ

$$a\cos C=180{,}7.$$

$$b-a\cos C=800-180{,}7=619{,}3.$$

$$\operatorname{tg}A=\frac{225\cdot\sin 36^\circ44'}{619{,}3},$$

ლოგარითმული ცხრილის გამოყენებით ვპოულობთ $A=12^\circ15'$. შემდეგ ვეძებთ კუთხე B-ს.

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{800\cdot\sin 12^\circ15'}{225},$$

საიდანაც $\angle B = 48°59'$, მაგრამ

$$36°44' + 12°15' + 48°59' \neq 180°.$$

ამიტომ, შეიძლება B კუთხისათვის შემდეგი რიცხვითი მნიშვნელობა ავიღოთ:

$$180° - 48°59' = 131°1',$$

რის უფლება ჩვენ გვაქვს, რადგან

1) $\sin 48°59' = \sin 131°1'$ და

2) გვერდი b მეტია a გვერდზე.

$$\text{გვერდი } c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{800 \cdot \sin 36°44'}{\sin 131°1'} = 634{,}2.$$

$$S = \frac{ab \sin C}{2} = 53830 \text{ კვ. ერთეულს.}$$

(ამოხსნაში ჩვენ მიერ შეტანილია ზოგიერთი განმარტება. მ. კ.).

ამოვხსნათ სამკუთხედი, რომლის სამივე გვერდი მოცემულია.

ჰერონის ფორმულის შემწეობით ვპოულობთ სამკუთხედის ფართობს

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

ამის შემდეგ ვიყენებთ სამკუთხედის ფართობის ფორმულას

$$S = \frac{bc \sin A}{2},$$

საიდანაც გამოვიანგარიშებთ A კუთხეს:

$$\sin A = \frac{2S}{bc}.$$

ანალოგიურად ვწერთ:

$$\sin B = \frac{2S}{ac} \text{ და } \sin C = \frac{2S}{ab};$$

დასასრულ ვაწარმოებთ შემოწმებას:

$$A + B + C = 180°.$$

თუ რიცხვობრივი მონაცემები არართული სახისაა, შეიძლება გამოვიყენოთ კოსინუსების თეორემა:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A,$$

რომელიც სამართლიანია, მიუხედავად იმისა, მახვილია A კუთხე თუ ბლაგვი.

როცა კუთხე $A=90°$, მივიღებთ პითაგორას თეორემას: $a^2=b^2+c^2$, რაც უკვე ცნობილია. კოსინუსების ფორმულა მოხერხებულია, თუ მონაცემები არ გამოისახებიან რთული რიცხვებით, რაც შესაძლებელს ხდის ვისარგებლოთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნატურალურ მნიშვნელობათა ცხრილით.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. $a=4$; $b=5$; $c=6$. ვიპოვოთ A, B, C კუთხე. ვწერთ:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}=\frac{45}{60}=0{,}75;$$

$$A\approx 41°40'.$$

ანალოგიურად ვიპოვოთ $B\approx 55°40'$, $C=82°40'$.

იმისათვის, რომ მოსწავლემ უფრო შეგნებულად შეითვისოს სამკუთხედის ამოხსნის თეორია, მისი ყურადღება უნდა შევაჩეროთ შემდეგ საკითხზე:

რას წარმოადგენს დამოკიდებულებანი:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2\,R$$

$$\text{და}\ A+B+C=180°.$$

მოსწავლეს უნდა ესმოდეს, რომ აღნიშნული დამოკიდებულებანი ისეთი სამკუთხედის ა ნ ა ლ ი ზ უ რ განსაზღვრას გვაძლევენ, რომლის სამი ძ ი რ ი თ ა დ ი ელემენტია მოცემული, სადაც ერთ-ერთი ელემენტი გვერდია (ძირითად ელემენტებად მიღებულია სამკუთხედის გვერდები და კუთხეები).

გეომეტრია საშუალებას გვაძლევს ფარგლისა და სახაზავის დახმარებით გ ე ო მ ე ტ რ ი უ ლ ა დ ვიპოვოთ სამკუთხედის ყველა ძირითადი ელემენტი თუ სამი ელემენტი (ოღონდ სამივე კუთხე არ იყოს) გეომეტრიულად არის მოცემული.

სინუსების თეორემა და მოთხოვნა, რომ

$$A+B+C=180°$$

საშუალებას გვაძლევს გ ა მ ო ვ ი ა ნ გ ა რ ი შ ო თ სამკუთხედის ყველა ძირითადი ელემენტი, როცა მისი სამი ელემენტის რიცხვითი მნიშვნელობა ცნობილია.

მოსწავლეს უნდა ესმოდეს, რომ ჩვენი ფორმულები წარმოადგენენ სამ დამოუკიდებელ თანაფარდობას სამკუთხედის ძირითად ელემენტებს შორის:

$$1)\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B};\quad 2)\ \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\text{და } 3)\ A+B+C=180^\circ.$$

მოსწავლისათვის გასაგები უნდა იყოს, რომ. თუ, როგორც ეს ზემოთ იყო განმარტებული, მოცემული ფორმულები საზღვრავს გარკვეულ სამკუთხედს, სხვა დამოკიდებულებანი სამკუთხედის ძირითად ელემენტებს შორის შეიძლება ვიპოვოთ იგივური ტრიგონომეტრიული გარდაქმნების საშუალებით. ასე, მაგალითად, შეიძლება გამოვიყვანოთ კოსინუსების თეორემა (იხ. რიბკინის ტრიგონომეტრია 1947, § 105, გვ. 131).

მოსწავლისათვის ისიც ნათელი უნდა იყოს რომ, თუ სინუსების თეორემიდან და $A+B+C=180^\circ$ პირობიდან გამომდინარეობს კოსინუსების თეორემა, ეს უკანასკნელი თეორემა შეიძლება მივიღოთ ძირითად ფორმულად და დანარჩენი მივიღოთ აქედან. ე. ი. სინუსების თეორემა კოსინუსების თეორემიდან.

ტრიგონომეტრიაში ლ. ეილერმა (1707 — 1783) პირველმა გამოიყენა სამკუთხედის გვერდების ლათინური a, b, c ასოებით აღნიშვნა და მათ პირდაპირ მდებარე კუთხეების A, B, C მთავრული ასოებით გამოსახვა, რაც ახლა საყოველთაოდ მიღებულია; ამით ფორმულებს უფრო გამოკვეთილი და წყობრი სახე მიეცათ.

საჭიროა მოსწავლის ყურადღების შეჩერება ამ ფაქტზე. მან მტკიცედ უნდა შეიგნოს, რომ ყოველი აზრი, იდეა, ფორმულა მაშინ უფრო ადვილია, როდესაც ისინი მკაფიოდ და მარტივად არის ჩამოყალიბებული. მათემატიკაშიც ფორმას, რომლითაც მოცემულია ეს თუ ის დამოკიდებულება სიდიდეთა შორის, მეტად დიდი მნიშვნელობა აქვს. მოსწავლე ყოველთვის უნდა ეძებდეს მიღებული შედეგის გამარტივებას, ამოხსნის მოკლე და საინტერესო გზას, რაც ადამიანზე ღრმა შთაბეჭდილებას ტოვებს.

§ 15. გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა ტრიგონომეტრიის გამოყენებით

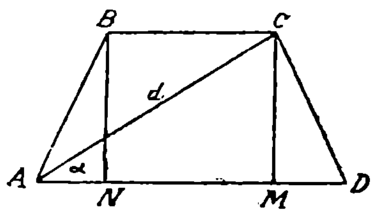
ასეთი ამოცანების ამოხსნისათვის რაიმე გარკვეული მიდგომა, ხერხი არ არსებობს. შეიძლება ვურჩიოთ მასწავლებელს, რომ მან მიაჩვიოს მოსწავლე იმის გარკვევას, საკმაოა თუ არა ამოცანის

მონაცემები იმ ნაკვთის ასაგებად, რომელსაც ამოცანა გულისხმობს.

ამოცანის მოთხოვნის (კითხვის) თვალსაზრისით არსებითად დიდ როლს ასრულებს ნაკვთის გეომეტრიული წარმოდგენა და მისი სპეციფიკის შემჩნევა, რაც ამორჩეული დამხმარე ხაზების შემწეობით არის შესაძლებელი. ამოცანის ამოხსნა უნდა ვაწარმოოთ ზოგადი სახით, ამონახსენიც ზოგადი იქნება.

მ ა გ ა ლ ი თ ე ბ ი.

1. $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციაში (ნახ. 21) დიაგონალი $AC = d$ ეპერპენდიკულარება CD ფერდს და ქმნის α კუთხეს AD ქვედა ფუძესთან. გავიგოთ ამ ტრაპეციის ფართობი S, თუ $d = 8$, $\alpha = 52°45'$.



ნახ. 21.

ჯერ გამოვარკვიოთ, საკმაოა თუ არა მონაცემები იმ ტრაპეციის ასაგებად, რომლის ფართობსაც ვეძებთ. d კათეტის და α კუთხის შემწეობით ავაგებთ ACD მართკუთხა სამკუთხედს. ამგვარად, ტრაპეციის სამი A, C, D წვერო აგებულია. B წვეროს ავაგებთ, თუ ავაგებთ CD მონაკვეთის ტოლ AB მონაკვეთს ისე, რომ ის ჰქმნიდეს AD ფუძესთან CDA კუთხის ტოლ BAD კუთხეს.

ნახაზზე $BN \perp AD$ და $CM \perp AD$.

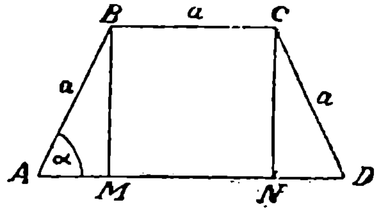
რა არის საჭირო იმისათვის, რომ მოსწავლემ ამოხსნის მოკლე გზა იპოვოს? მოსწავლემ უნდა მოისაზროს, რომ AM მონაკვეთი ეტოლება $AD+BC$ ჯამის ნახევარს; ამისათვის კი აუცილებელია წარმოდგენა BN და CM პერპენდიკულარებისა ქვედა ფუძისადმი და შემჩნევა იმისა, რომ $AN=MD$, დანარჩენი კი ადვილია. მაშასადამე, მთავარი ისაა, რომ მოსწავლემ შესძლოს ამოცანის გეომეტრიული ანალიზი. ამის შემდეგ ვიყენებთ ტრიგონომეტრიულ ფორმულებს და ვპოულობთ საძებნ სიდიდეს:

$$S = AM \cdot CN;\ AM = d\cos\alpha;\ CM = d\sin\alpha;$$

$$S = d^2 \sin\alpha\cos\alpha.$$

2. ტოლფერდა ტრაპეციაში BC ზედა ფუძე ტრაპეციის ფერდის ტოლია. ფერდი ჰქმნის ქვედა ფუძესთან α კუთხეს. რას უდრის $ABCD$ ტრაპეციის ფართობი, თუ $BC=a$? (ნახ. 22).

აქაც ისე, როგორც პირველ მაგალითში, მოსწავლემ უნდა გამოარკვიოს, უპირველეს ყოვლისა, რომ მონაცემების რიცხვი საკმაოა საძებნი S რიცხვის გამოსაანგარიშებლად, ე. ი. ეს მონაცემები საშუალებას გვაძლევს გარკვეული ტრაპეციის ასაგებად, გარკვეული სიდიდე ექნება მის ფართობსაც.



ნახ. 22.

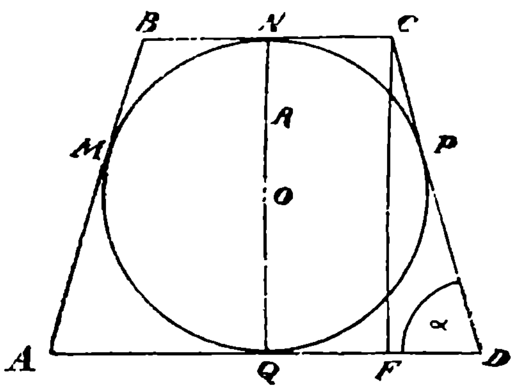
ამოცანის ამოხსნა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$S=AN\cdot BM=(a+AM)\cdot BM;$$

$$AM=a\cos\alpha;\ \ BM=a\sin\alpha;$$

$$S=a\,(1+\cos\alpha)\,a\sin\alpha=2\,a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha.$$

3. წრის ირგვლივ შემოხაზულია ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ფერდი AB ქმნის α კუთხეს AD ქვედა ფუძესთან. ვიპოვოთ ამ ტრაპეციის ფართობი, თუ წრის R რადიუსი ცნობილია (ნახ. 23).



ნახ. 23.

გამოვარკვიოთ ჯერ მონაცემების საკმარისობა გარკვეული ტრაპეციის ასაგებად. გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ შემოხაზული

α კუთხე იზომება PMQ და PQ რკალის ნახევარსხვაობით. ეს იმას ნიშნავს, რომ P და Q წერტილს ექნება გარკვეული მდებარეობა წრეხაზზე, თუ თავიდან აღებულია გარკვეული P წერტილი. ამავე მოსაზრებით გარკვეულ მდებარეობას დაიკავებს M წერტილი, თუ N წერტილი Q წერტილის დიამეტრულად მოპირდაპირე იქნება. თუ M, N, P და Q წერტილზე გავავლებთ მხებს მოცემული წრეხაზისადმი, მივიღებთ სრულიად გარკვეულ ტრაპეციას. რაც შეეხება იმ გეომეტრიულ წარმოდგენებს, რომლებიც მოგვცემს ამოხსნის გზას საკმაოა, შევამჩნიოთ (მივხვდეთ), რომ ტრაპეციის შუა ხაზი, რომლის აგება ზედმეტია, ეტოლება $NC+QD$ და რომ $NC=CP$, $QD=LP$. მაშ, ტრაპეციის შუა ხაზი ეტოლება CD ფერდს. ამ საფუძველზე ამოხსნა ასე ჩამოყალიბდება: CFD მართკუთხა სამკუთხედიდან ($CF \perp AD$) გვექნება

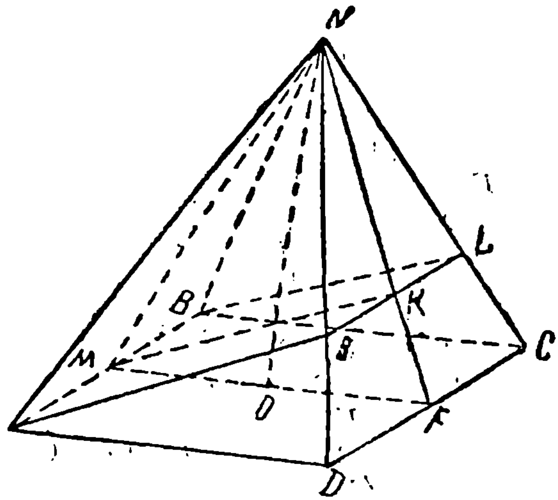
$$CD = CF : \sin\alpha = \frac{2\,R}{\sin\alpha}.$$

$$S = QN \cdot CD = \frac{4\,R^2}{\sin\alpha}.$$

ამ მაგალითებიდან ჩანს, რომ მონაცემთა საკმარისობის საკითხის გამორკვევას და ამოცანის გეომეტრიულ წარმოდგენას მეტი შეგნებულობა შეაქვს ამოცანათა ამოხსნის პროცესში. ასეთი მუშაობის დროს მოსწავლე იძულებულია გამოიყენოს გეომეტრიის ცოდნა, იაზროვნის წესიერად და სათანადო ფორმულები და გარდაქმნები ამოარჩიოს ტრიგონომეტრიის კურსიდან. ყოველივე ეს ხელს უწყობს სკოლას მათემატიკის სწავლებაში ფორმალიზმის წინააღმდეგ საბრძოლველად. როგორც ვხედავთ, ტრიგონომეტრიის როლი გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნაში მხოლოდ ტექნიკურია. ტრიგონომეტრია გვაძლევს ფორმულის შედგენის საშუალებას, *გამოთვლის* საშუალებას. იგი არ გვეხმარება ამოხსნის გეგმის შედგენაში, ამოხსნის გზის პოვნაში. აქ სიტყვა ეძლევა გეომეტრიას. ასეთი ამოცანები არსებითად გეომეტრიული ბუნებისაა. ამიტომ რთული ამოცანები კლასს არ უნდა მივცეთ. ასეთ ამოცანებზე შეიძლება მათემატიკურ წრეში ვავარჯიშოთ კარგად მომზადებული და ძლიერი მოსწავლეები.

4. ჟურნალში „Математика в школе“ (№ 3, 1956 წ.) მოთავსებულია მეტად საყურადღებო სტატია „Выполнение письменных работ на аттестат зрелости по геометрии с применением тригонометрии и оценка этих работ“ (გვ. 12—23).

სტატია შედგენილია ავტორთა კოლექტივის მიერ, რომელშიც შედიან ცნობილი მეთოდისტები: კ. ს. ბოგუშევსკი, ნ. ს. გლაგოლევი, ი. ი. სმირნოვი, ს. ვ. ფილიჩევი და პ. ა. ლარიჩევი (რედაქტორი). ამ სტატიის მიზანია კონკრეტულ მაგალითებზე მოგვცეს ნათელი წარმოდგენა იმ მოთხოვნათა შესახებ, რომლებიც



ნახ. 23

შესრულებული უნდა იყოს დასახელებულ წერით სამუშაოებში გამოსაშვებ გამოცდაზე. ამ სტატიაში გამოთქმული აზრები და მოყვანილი სანიმუშო მაგალითები არ უნდა იყოს უყურადღებოდ დატოვებული მათემატიკის მასწავლებლის მიერ.

სტატიაში განხილული 4 მაგალითიდან ჩვენ აქ მოვიტანთ მხოლოდ შემდეგს:

წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლე უდრის h, ხოლო მისი გვერდითი წახნაგი დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი α კუთხით. მოცემული პირამიდის ფუძის გვერდზე გავლებულია პირამიდის

კვეთა, პერპენდიკულარული პირდაპირმდებარე გვერდითი წახნაგის. განსაზღვრეთ მოკვეთილი პირამიდის მოცულობა (ნახ. 23_1).

გავავლოთ წესიერი $NABCD$ პირამიდის ფუძეში მდებარე კვადრატის MF სიმეტრიის ღერძი და M და F წერტილები შევაერთოთ პირამიდის N წვეროსთან. $\angle NFO$ — ორწახნაგა DC კუთხის ხაზოვანი კუთხეა, რადგან $OF \perp CD$ (აგების თანახმად) და $NF \perp CD$ (სამი პერპენდიკულარის თეორემის თანახმად: $NO \perp ABCD$ სიბ., NF—დახრილია იმავე სიბრტყისადმი და OF—მისი გეგმილია); ამოცანის პირობის თანახმად $\angle NFO = \alpha$;

ვთქვათ მოცემული პირამიდის $ABLE$ კვეთა, გავლებული მის ფუძის გვერდზე, პერპენდიკულარულია NDC წახნაგის; $AB \parallel CD$ (კვადრატის მოპირდაპირე გვერდები), $AB \parallel NDC$ სიბრტყის; მკვეთი სიბრტყე $ABLE$, გამავალი პირამიდის ფუძის AB გვერდზე, გადაკვეთს NDC სიბრტყეს სწორზე, რომელიც AB-ს პარალელურია; ამიტომ $EL \parallel AB$, ხოლო ოთხკუთხედი $ABLE$—ტრაპეციაა.

ხაზოვანი NFM კუთხის სიბრტყე, როგორც პერპენდიკულარული ორწახნაგა კუთხის DC წიბოსი, პერპენდიკულარულია ორწახნაგა კუთხის NDC წახნაგის (ორი სიბრტყის პერპენდიკულარობის ნიშნის თანახმად); მკვეთი სიბრტყე $ABLE$ აგრეთვე პერპენდიკულარულია NDC გვერდითი წახნაგის; NFM და $ABLF$ სიბრტყეების გადაკვეთის MK ხაზი პერპენდიკულარული იქნება NDC გვერდითი წახნაგის და ტრაპეციის LE ფუძისა, რომელიც NDC სიბრტყეზე მდებარეობს; MK ტრაპეციის სიმაღლეა. $MK \perp NDC$ სიბრტყის (დამტკიცებულია), ამიტომ $MK \perp NK$ (NK მდებარეობს NDC სიბრტყეზე). $LE \parallel AB$ (დამტკიცებულია), $AB \parallel CD$, $LE \parallel CD$; $NKF \perp CD$ (დამტკიცებულია). $CD \parallel LE$, $NK \perp FL$. თუ $NK \perp EL$ და $NK \perp EL$ და $NK \perp MK$, მაშინ $NK \perp ABLE$ სიბრტყის, NK—მოკვეთილი პირამიდის სიმაღლეა. ვიპოვოთ $NABLE$ პირამიდის მოცულობა (V).

$$V = \frac{1}{6}\ (AB + LE) \cdot MK \cdot NK.$$

NOF მართკუთხა სამკუთხედიდან ($NO \perp ABCD$ სიბრტყის, $NO \perp OF$), რომელშიაც $NO = h$ და $\angle NFO = \alpha$, გვაქვს:

$$OF = NO \cdot \operatorname{ctg} \alpha = h \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$NF = \frac{NO}{\sin \alpha} = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

სიმეტრიის ღერძის MF მონაკვეთი უდრის $2 \cdot OF$; $MF = 2h \operatorname{ctg} \alpha$. $MF = AD = AB$, საიდანაც ვპოულობთ ფუძის გვერდს $AB = 2h \operatorname{ctg} \alpha$. მართკუთხა MKF სამკუთხედიდან: $MK = MF \cdot \sin \alpha = 2h \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha = 2h \cos \alpha$; $FK = MF \cos \alpha = 2h \operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha$. განვსაზღვროთ NK — პირამიდის სიმაღლე:

$$NK = NF - FK = \frac{h}{\sin \alpha} - 2h \operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha =$$

$$= \frac{h}{\sin \alpha}(1 - 2\cos^2 \alpha) = -\frac{h \cos 2\alpha}{\sin \alpha}.$$

$$\Delta NEL \sim \Delta NDC \quad (EL \parallel CD). \quad \frac{EL}{DC} = \frac{NK}{NF};$$

$$EL = \frac{DC \cdot NK}{NF}. \quad EL = \frac{2h \operatorname{ctg} \alpha (-h \cos 2\alpha) \sin \alpha}{h \sin \alpha} = -2h \operatorname{ctg} \alpha \cos 2\alpha.$$

AB, EL, MK და NK მონაკვეთების მნიშვნელობანი ჩავსვათ მოცულობის ფორმულაში, მივიღებთ:

$$V = \frac{1}{6}(2h \operatorname{ctg} \alpha - 2h \operatorname{ctg} \alpha \cos 2\alpha) 2h \cos \alpha \cdot \left(-\frac{h \cos 2\alpha}{\sin \alpha}\right) =$$

$$= -\frac{4h^3 \operatorname{ctg} \alpha (1 - \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha \cos 2\alpha)}{6 \sin \alpha} =$$

$$= -\frac{8h^3 \operatorname{ctg} \alpha \sin^2 \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha}{6 \sin \alpha} = -\frac{4}{3} h^3 \cos^2 \alpha \cos 2\alpha \text{ (კუბ. ერთ.)}$$

განვიხილოთ ΔMNF. სიბრტყე $MNF \perp CD$, $CD \parallel AB$, სიბრტყე $MNF \perp AB$, $\angle NMF$ — ხაზოვანი კუთხეა AB ორწახნაგა კუთხის, $\angle NMF = \alpha$; $\angle NMF + \angle NFM = 2\alpha < 180°$.

ΔKMF-დან: $\angle KMF = 90° - \alpha$; $\angle NMF > \angle KMF$,

$$\alpha > 90° - \alpha, \; 2\alpha > 90°. \quad 90° < 2\alpha < 180°, \; \cos 2\alpha < 0.$$

$$-\frac{4}{3} h^3 \cos^2 \alpha \cos 2\alpha > 0$$

რაც მოითხოვება ამოცანის პირობებში (მოცულობა გამოისახება კუბური ერთეულების დადებითი რიცხვით).

პ ა ს უ ხ ი: მოკვეთილი პირამიდის მოცულობა უდრის:

$$-\frac{4}{3} h^3 \cos^2 \alpha \cos 2\alpha \text{ (კუბ. ერთ.)}.$$

თავი V

შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები (არკფუნქციები).

§ 16. ძირითადი ცნებანი

ავიღოთ $y=4x-3$ ფუნქცია. თუ x არგუმენტს მივცემთ გარკვეულ ნამდვილ მნიშვნელობას, მაგალითად, 2-სა, y ცვლადი მიიღებს ერთადერთ გარკვეულ მნიშვნელობას და მსგავს შესაბამობას ექნება ადგილი x ცვლადის ყველა დასაშვები მნიშვნელობისათვის. ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად ჩვენ ვიტყვით, რომ y-ი არის x-ის ფუნქცია.

ჩვენი ტოლობიდან x გამოვსახოთ y-ის საშუალებით; მივიღებთ $x=\frac{y+3}{4}$. აქაც y ცვლადის, რომელიც ახლა არგუმენტს წარმოადგენს, თითოეულ მნიშვნელობას x-ის მხოლოდ ერთი გარკვეული მნიშვნელობა შეესაბამება. მაგალითად, თუ $y=5$, $x=2$; თუ $y=7$, $x=2,5$ და ა. შ., მაშასადამე, x ცვლადი წარმოადგენს y-ის ფუნქციას. ეს ორი ფუნქცია არსებითად ერთსა და იმავე დამოკიდებულებას გვაძლევენ x და y-ს შორის. ორივე ფუნქციების მათემატიკური შინაარსი ერთნაირია.

მიღებულია ასეთი ტერმინოლოგია—ერთ ფუნქციას უწოდებენ პირდაპირ ფუნქციას, მეორეს შექცეულ ფუნქციას, ორივეს ერთად—ურთიერთ შექცეულ ფუნქციებს.

სიტყვასიტყვით იგივე ითქმის $y=x^3$ და $x=\sqrt[3]{y}$ ფუნქციების შესახებაც.

მაგრამ, თუ ავიღებთ $y=x^2$ და $x=\pm\sqrt{y}$, დავინახავთ, რომ, როდესაც y-ი ასრულებს დამოუკიდებელი ცვლადის როლს, x-ი მიიღებს *არა ერთ მნიშვნელობას*, არამედ ორს, თუ y-ს მივცემთ ნებისმიერ არაუარყოფით მნიშვნელობას. თუ $y=4$, $x=\pm 2$; თუ $y=9$, $x=\pm 3$ და ა. შ. ჩვენ უფლება არა გვაქვს ვთქვათ, რომ x-ი წარმოადგენს y-ის ფუნქციას. აქ ერთი ფორმულაა (გაერთიანებული), მაგრამ *ორი ფუნქცია*: $x=\sqrt{y}$ და $x=-\sqrt{y}$, $y\geqslant 0$. ასეთივე გარემოებას ვხვდებით, როდესაც მოვინდომებთ, $y=\sin x$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციის მონახვას.

თუ მოცემულია x რკალი, მაშინ მას შეესაბამება სრულიად გარკვეული სინუსის მნიშვნელობა; პირიქით, თუ სინუსის მნიშვნელობაა მოცემული, მაშინ შეიძლება ვიპოვოთ რკალების უსასრულო მრავალი მნიშვნელობა, რომელთა სინუსი ერთი და იგივეა. მაგალითად, თუ $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}$, სადაც $k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2 \ldots$ ასე გაჩნდა დაბრკოლება $y = \sin x$ ფუნქციის შექცეული ფუნქციის შედგენაში.

ეს დაბრკოლება ასე დაიძლევა;

შევთანხმდეთ: x ცვლადს მივცეთ $\left[-\frac{\pi}{2}, \ +\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში მყოფი მნიშვნელობანი. ცხადია $\sin x$ მიიღებს ყველა თავის შესაძლო მნიშვნელობას -1-დან $+1$-მდე. ამ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია ასე დავწეროთ:

$$x = arc \sin y$$

და წავიკითხოთ: x-ი არის რკალი, რომლის სინუსი უდრის y-ს, ან უფრო მოკლედ:

x-ი ეტოლება $arc \sin y$ (*arc*. შეკვეცილი ლათინური სიტყვაა: *arcus* — ნიშნავს რკალს). აქ y-ის თითოეულ მნიშვნელობას x-ის ერთი გარკვეული მნიშვნელობა შეესაბამება. მაგალითად, თუ $x = arc \sin \frac{1}{2}$, მაშინ $x = \frac{\pi}{6}$; თუ $x = arc \sin \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$;

თუ $x = arc \sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, მაშინ $x = -\frac{\pi}{3}$ და ა. შ.

$arc \sin 2$ — უაზრობაა. ფუნქციის $x = arc \sin y$-ის არსებობის არეა $[-1, +1]$ შუალედი, ე. ი. $-1 \leqslant y \leqslant +1$. თუ x-ს და y-ს შევუცვლით ადგილებს, მაშინ ჩვენი ფუნქცია ჩვეულებრივ სახეს მიიღებს:

$$y = arc \sin x,$$

სადაც არგუმენტი აღნიშნულია ჩვეულებრივი x ასოთი, ხოლო ფუნქცია y ასოთი. მოსწავლეს ასევე უნდა გავაცნოთ დანარჩენი შექცეული ფუნქციებიც.

დავუბრუნდეთ ფორმულას:

$$x = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}, \text{ თუ } \sin x = \frac{1}{2}.$$

როცა $k=0$, $x=\frac{\pi}{6}$, რაც (იხ. ზევით) შეგვიძლია გადავწეროთ ასე: $arc\sin\frac{1}{2}$, მაგრამ ამ მნიშვნელობის გარდა ფორმულა გვაძლევს სხვა უსასრულოდ მრავალ მნიშვნელობასაც. ტრიგონომეტრიაში მიღებულია ამ ფორმულის ასეთი დაწერა:

$$Arc\sin\frac{1}{2}=\kappa\pi+(-1)^{k}arc\sin\frac{1}{2}.$$

მაგალითად, თუ $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ და ვეძებთ ყველა იმ x რკალს, რომლის სინუსი ეტოლება $\frac{\sqrt{2}}{2}$, პასუხს დავწერთ ასე:

$$Arc\sin\frac{\sqrt{2}}{2}=k\pi+(-1)^{b}arc\sin\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ყველა რკალის აღსანიშნავად Arc იწერება (მთავრული A ასოს საშუალებით). ავიღოთ კიდევ ასეთი მაგალითი.

$$\sin x=-\frac{1}{2};\quad Arc\sin\left(-\frac{1}{2}\right)?$$

$$\text{პასუხი. } Arc\sin\left(-\frac{1}{2}\right)=k\pi+(-1)^{k}\cdot arc\sin\left(-\frac{1}{2}\right).$$

საზოგადოდ, თუ $\sin x=p$, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$Arc\sin p=\kappa\pi+(-1)^{k}\cdot arc\sin p\ . \tag{I}$$

$arc\sin p$-ს ეწოდება $Arc\sin p$-ს მთავარი მნიშვნელობა. არ დავივიწყოთ, რომ

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant arc\sin p\leqslant+\frac{\pi}{2},\ \text{ხოლო}\ -1\leqslant p\leqslant+1.$$

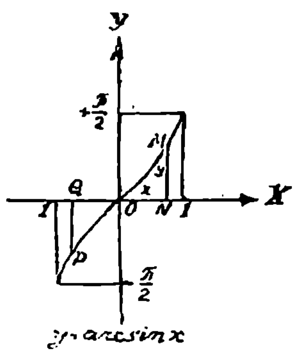
$Arc\sin p$-ს, სადაც p ცვლადია, ხშირად უწოდებენ მრავალნიშნა ფუნქციას. ხოლო $arc\sin p$-ს მრავალნიშნა ფუნქციის მთავარ შტოს. ჩვენ ამ ტერმინებს დავანებებთ თავს (იხ. თავი I, § 3).

ფორმულა (I) გვაძლევს უსასრულოდ მრავალი ფუნქციის ერთობლიობას, იგი გვაძლევს ყველა იმ რკალის ზოგად სახეს, რომელთა სინუსი p სიდიდის ტოლია.

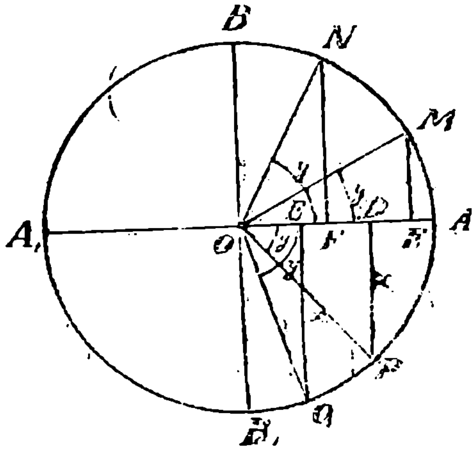
თუ p ასოს ნაცვლად ვიხმართ x ასოს, მაშინ ასეთ ფორმულას მივიღებთ:

$$Arc\sin x = k\pi + (-1)^k arc\sin x.$$

აუცილებელია $Arc\sin x$ გრაფიკის აგება და ამ გრაფიკიდან $arc\sin x$ ფუნქციის გრაფიკის გამოყოფა. ამასთან ერთად მიზანშეწონილია ტრიგონომეტრიული წრით სარგებლობა. მოსწავლეს თვალწინ შემდეგი სურათი უნდა ჰქონდეს (იხ. ნახ. 24 და 25). ორივე ნახაზი



ნახ. 24.



ნახ. 25.

პარალელურად უნდა განვიხილოთ. 25-ე ნახაზზე მოსწავლე ამჩნევს, როგორ იცვლება y რკალი, როდესაც x არგუმენტი იცვლება -1-დან $+1$-მდე. ეს დამოკიდებულება x-სა და y-ს შორის მოცემულია გრაფიკულად 24-ე ნახაზზე, რომელიც წარმოადგენს $y=arc\sin x$ ფუნქციის გრაფიკს. ამ ფუნქციის გრაფიკის აგებისათვის შეიძლება ასე მოვიქცეთ: ავაგოთ $x=\sin y$ ფუნქციის გრაფიკი იმგვარად, რომ y ცვლადის მნიშვნელობა იმყოფებოდეს

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში.

24-ე ნახაზზე მოსწავლე დაინახავს, რომ

$$arc\sin(-x) = -arc\sin x;$$

მართლაც, თუ $x>0$, მაშინ $y=MN=arc\sin x$, ხოლო $PQ=arc\sin(-x)$, სადაც $-x=OQ$ და OQ' მონაკვეთი ერთ-

ლებ ON მონაკვეთს. მაგრამ PQ-ს ალგებრული მნიშვნელობა ტოლია MN-ის მინუს ნიშნით აღებული ალგებრული მნიშვნელობისა, მაშ

$$arc \sin(-x) = -arc \sin x.$$

აქედან დავასკვნით, რომ $arc \sin x$ ფუნქცია კენტია. მიღებული ტოლობა შეიძლება გამოვიყვანოთ 25-ე ნახაზის დახმარებით. ყველა შემთხვევაში მტკიცების პროცესი უფრო თვალსაჩინო და გასაგები იქნება, თუ მოსწავლე წინასწარ გამოიყვანს ფორმულებს:

$$arc \sin(-1) = -\frac{\pi}{2} = -arc \sin 1,$$

$$arc \sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} = -arc \sin\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$arc \sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} = -arc \sin\frac{\sqrt{3}}{2};$$

დანარჩენი შექცეული ფუნქციები მუშავდება იმავე წესით და მეთოდური ხერხით, როგორც $arc \sin x$ ფუნქცია; ამასთან ადგილი აქვს განსხვავებასაც. შევჩერდეთ ამ განსხვავებაზე.

$arc \cos x$ (არკკოსინუს x) წარმოადგენს რკალს, რომელიც აღებულია $[0, \pi]$ შუალედში, სადაც რკალის კოსინუსი იცვლება $[-1, +1]$ შუალედში და სადაც კოსინუსის თითოეულ შესაძლო მნიშვნელობას რკალის ერთი და მხოლოდ ერთი გარკვეული მნიშვნელობა ეთანადება. ამ უკანასკნელ ფაქტში მოსწავლე შეგნებულად უნდა ერკვეოდეს, რისთვისაც საჭიროა სათანადო ვარჯიში:

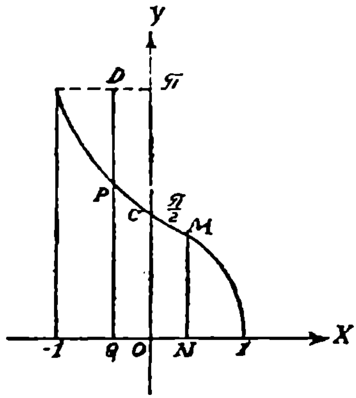
მაგალითად, $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; $\alpha = ?$ $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; $\alpha = ?$ და ა. შ.

$arc \cos x$ ფუნქციის განხილვის დროს ვისარგებლებთ მისი გრაფიკით და ტრიგონომეტრიული წრით. უკანასკნელი მოცემულია 25-ე ნახაზზე, გრაფიკი 26-ე ნახაზზე. გრაფიკი წარმოადგენს $x = \cos y$ კოსინუსოიდის $[0, \pi]$ შუალედში აღებულ რკალს (ე. ი. $0 \leqslant y \leqslant \pi$; $-1 \leqslant x \leqslant +1$).

$y = arc \cos x$ ფუნქცია კ ლ ე ბ უ ლ ო ბ ს π-დან 0-მდე, როდესაც x მ ა ტ უ ლ ო ბ ს -1-დან $+1$-მდე.

$arc \cos(-x) = \pi - arc \cos x.$

ნახაზზე: $DQ \perp OX$; $MN \perp OX$; $\overline{OQ} = \overline{ON}$; $\overline{OC} = \frac{\pi}{2}$; $\overline{MN} = \overline{PD}$. $PQ + DP = \pi$. დაწერილი ტოლობა ადვილად მტკიცდება 26-ე



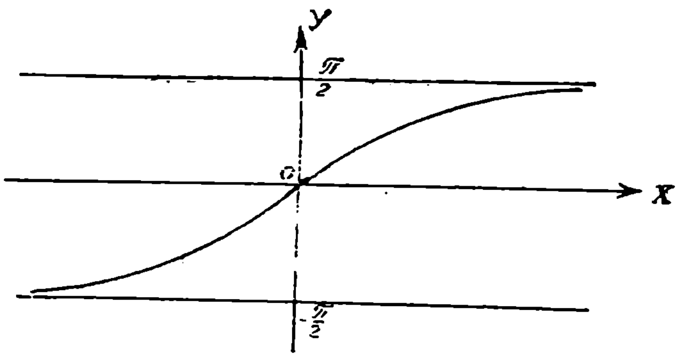
ნახ. 26.

ნახაზის განხილვით. მართლაც თუ $ON=X$; მაშინ $\overline{OQ}=-X$; $MN=arc\sin x$; ($\overline{OQ}$ ნიშნავს უნიშნო მონაკვეთს). $PQ = arc\cos(-x) = DQ - DP = \pi - MN = \pi - arc\cos x$; მაშ, $arc\cos(-x) = \pi - arc\cos x$.

$arc\cos x$ ფუნქცია არც ლუწია, არც კენტი.

$arc\,tg\,x$ (არკტანგეს x) შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქცია წარმოადგენს $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში აღებულ რკალს, რომლის ტანგენსი x-ს ეტოლება.

ეს ფუნქცია ზრდადია და აღნიშნულ შუალედში უწყვეტია. $arc\,tg\,x$ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 27-ე ნახაზზე. ნახაზიდან



ნახ. 27.

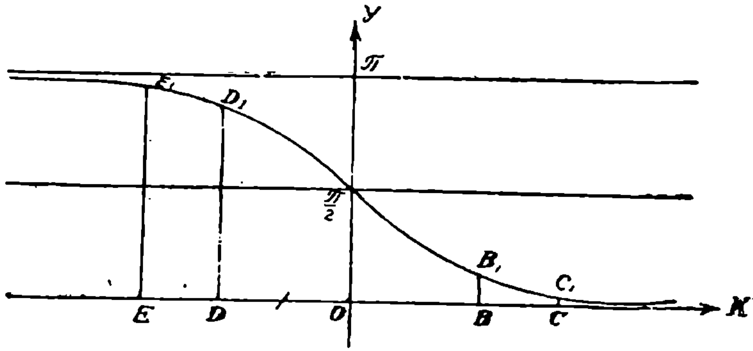
ადვილად მივიღებთ, რომ $arc\,tg(\ x) = \ arc\,tg\,x$, რასაც მკითხველი დაამტკიცებს. $arc\,tg\,x$ კენტი ფუნქციაა.

$arc\,ctg\,x$ ფუნქცია შუალედს $[0, \pi]$ შუალედში აღებულ რკალს, რომლის კოტანგენსი ნებისმიერ ნამდვილ x რიცხვს ეტოლება.

$arc\,ctg(-x) = \pi - arc\,ctg\,x$. ნათქვამში მოსწავლე ადვილად დარწმუნდება, თუ შეხედავს $y = arc\,ctg\,x$ ფუნქციის გრაფიკს (ნახ. 28). ამ გრაფიკის აგებამდე ზედმეტი არ იქნება გამოარკვიოს

$arc\,\mathrm{ctg}\,x$ ფუნქციის ცვლის საკითხი [0, π] შუალედში ტრიგონომეტრიული წრის საშუალებით.

$arc\,\mathrm{ctg}\,x$ არც ლუწი ფუნქციაა და არც კენტი.



ნახ. 28.

§ 17. ტრიგონომეტრიული ოპერაციები შექცეულ ფუნქციებზე

წინა პარაგრაფში მოცემული შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების განსაზღვრის თანახმად შეგვიძლია ვთქვათ, რომ

$$\sin(arc\sin x) = x,$$
$$\cos(arc\cos x) = x,$$
$$\mathrm{tg}(arc\,\mathrm{tg}\,x) = x \text{ და}$$
$$\mathrm{ctg}(arc\,\mathrm{ctg}\,x) = x.$$

ვიპოვოთ $\cos(arc\sin x)$, ე. ი. იმ რკალის კოსინუსი, რომლის სინუსი x-ის ტოლია. ცხადია, რომ

$$\cos(arc\sin x) = +\sqrt{1-x^2}$$

რადიკალის წინ ვწერთ მხოლოდ $+$ ნიშანს, რადგან $arc\sin x$ ფუნქცია იცვლება $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში, რომელშიც კოსინუსი არაუარყოფითი რიცხვია. ნიშანი $+$ შეიძლება არც დავწეროთ.

ვიპოვოთ $\sin(arc\cos x)$. $arc\cos x$ იცვლება [0, π] შუალედში. ამ შუალედში სინუსი არაუარყოფითია, და ამიტომ ვწერთ:

$$\sin(arc\cos x) = \sqrt{1-x^2}.$$

$$\operatorname{tg}(arc\sin x)=\frac{\sin(arc\sin x)}{\cos(arc\sin x)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\sin(2\,arc\sin x)=2\sin(arc\sin x).\ \cos(arc\sin x)=2x\sqrt{1-x^2}$.
აქ გამოყენებულია ფორმულა $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, თუ $arc\sin x$ რკალს შევცვლით α რკალით.

ვიპოვოთ $\operatorname{tg}^2\left(arc\operatorname{tg}\frac{a}{b}\right)$.

რადგან რკალის ტანგენსი ეტოლება $\frac{a}{b}$ სიდიდეს, ცხადია, იმავე რკალის ტანგენსის კვადრატი იქნება $\frac{a^2}{b^2}$ წილადის ტოლი. მაშ,

$$\operatorname{tg}^2\left(arc\operatorname{tg}\frac{a}{b}\right)=\frac{a^2}{b^2},$$

რაც ტრიგონომეტრიულ იგივეობას წარმოადგენს.

მკითხველს ევალება იპოვოს, რას ეტოლება:

1. $\sin^2(arc\cos x)+\cos^2(arc\cos x)$;
2. $\cos^2(arc\operatorname{tg}1)-\sin^2(arc\operatorname{tg}1)$;
3. $\cos^2(arc\operatorname{tg}y)-\sin^2(arc\operatorname{tg}y)$.

ზემოთ (§ 16) განხილული იყო $y=arc\sin x$ ფუნქცია. ახლა განვიხილოთ $y=arc\sin(\sin x)$ ფუნქცია. პირველ ფუნქციაში x არგუმენტი განყენებული რიცხვია, იგი იცვლება -1 დან $+1$-მდე. ამ ფუნქციის არსებობის არეა $[-1, +1]$ შუალედი, თვითონ ფუნქცია იცვლება $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში. მეორე ფუნქცია იცვლება იმავე შუალედში, ხოლო x არგუმენტი გამოსახავს რ კ ა ლ ს (კუთხეს), რომელიც როგორც ჩვენ ვიცით, იცვლება—∞-დან $+\infty$-მდე. ამ შუალედში აღებული რიცხვი რადიანების (გრადუსების) რიცხვს გვაძლევს. ეს მეორე ფუნქცია თავისი შინაარსით სრულიად განსხვავდება პირველი ფუნქციისაგან. იმის გამო, რომ x არგუმენტის მნიშვნელობა შეიძლება გამოვსახოთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვით, ხოლო y ცვლადი იმყოფება $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში, ამიტომ ცხადია, შ ე ც დ ო მ ა ი ქ ნ ე ბ ა დ ა ვ წ ე რ ო თ:

$$y=arc\sin(\sin x)=x.$$

$arc \sin(\sin x) = x$, როცა $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$,

ვინაიდან ამ შუალედში თანატოლი სინუსები აქვს თანატოლ კუთხეებს და ჩვენი ფუნქციაც იცვლება ამ შუალედში.

ავიღოთ შემთხვევა, როცა $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$; მაშინ, ცხადია, $(\pi - x)$ კუთხე მახვილია ან მართი. რადგან $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}$, ამიტომ, ზემოთ თქმულის თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$y = arc \sin(\sin x) = \pi - x.$$

თუ $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}$, მაშინ, ცხადია, $(x - 2\pi)$ კუთხე ხელახლად იმყოფება $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში, და შეგვიძლია დავწეროთ: $y = arc \sin(\sin x) = x - 2\pi$, და ა. შ. აქედან ჩანს, რომ მარჯვენა ნაწილში მდგომი გამოსახულება მიიღება იმ შუალედის მიხედვით, რომელშიც $arc \sin(\sin x)$ ფუნქციის არგუმენტი იცვლება.

მაგალითები:

$$arc \sin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}; \quad arc \sin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = -\frac{\pi}{3};$$

$$arc \sin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

საზოგადოდ თუ $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, მაშინ

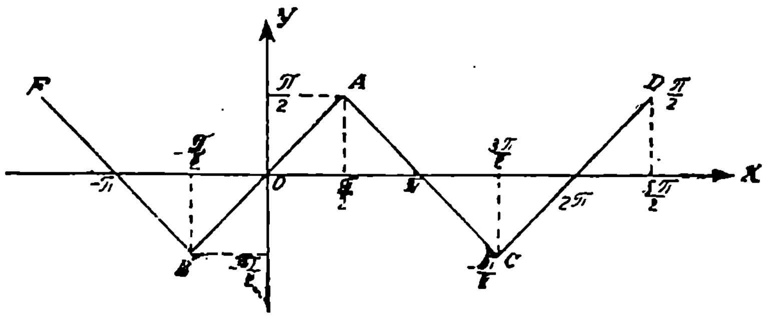
$$arc \sin(\sin x) = x - 2k\pi,$$

თუ კი $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, მაშინ

$$arc \sin(\sin x) = \pi - x + 2k\pi.$$

საინტერესო და მეტად სასარგებლოა $y = arc \sin(\sin x)$ ფუნქციის გრაფიკი. ამ გრაფიკის აგებისათვის უპირველეს ყოვლისა შევნიშნავთ, რომ y ორდინატი იცვლება $-\frac{\pi}{2}$-დან $+\frac{\pi}{2}$-მდე, რა სიდიდისაც უნდა იყოს x ცვლადი თუ $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, მაშინ

$y = x$, რომლის გრაფიკი იქნება (ნახ. 29) AB მონაკვეთი, რომელიც XOY კუთხის ბისექტრისის ნაწილია.



ნახ. 29.

თუ $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, მაშინ, როგორც ეს ზემოთ გვქონდა განმარტებული, $y = \pi - x$. როცა x-ი მატულობს, y-ი კლებულობს $\frac{\pi}{2}$-დან $-\frac{\pi}{2}$-მდე. გრაფიკი $y = \pi - x$ განტოლებისა იქნება AC მონაკვეთი. თუ $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}$, მაშინ $y = x \quad 2\pi$; ამ უკანასკნელის გრაფიკი იქნება CD მონაკვეთი და ა. შ. მაშასადამე, $y = arc\sin(\sin x)$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოგვიდგება უწყვეტი ტეხილი ხაზის სახით.

§ 18. ძირითადი დამოკიდებულებანი შექცეულ ფუნქციათა შორის

დავამტკიცოთ რომ,

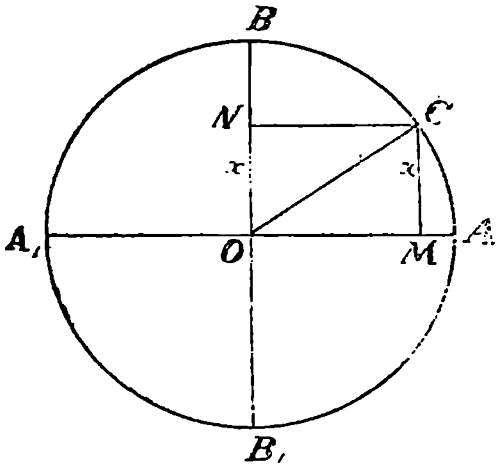
$$arc\sin x + arc\cos x = \frac{\pi}{2}.$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) როცა $x > 0$ (იხ. ნახ. 30). ავიღოთ ტრიგონომეტრიული წრე. აქ $arc\sin x = AC$ რკალს, $CM = x$ სინუსის ხაზია; $x = CM = ON$ მონაკვეთს, რომელიც COB კუთხისათვის კოსინუსის ხაზია.

ვინაიდან BC რკალი $= arc \cos x$ და რკალი $BC +$ რკალი $AC = \frac{\pi}{2}$, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$arc \sin x + arc \cos x = \frac{\pi}{2}.$$



ნახ. 30.

2) როცა $x < 0$ (ნახ. 31).

აქ $arc \sin x$ უარყოფითი AD რკალია. $x = MD = ON = KP$; $arc \cos x$ დადებითი ABK რკალია. რადგან $\angle AOD$ აბსოლუტურად ეტოლება BOK კუთხეს, ამიტომ სამართლიანია ტოლობა

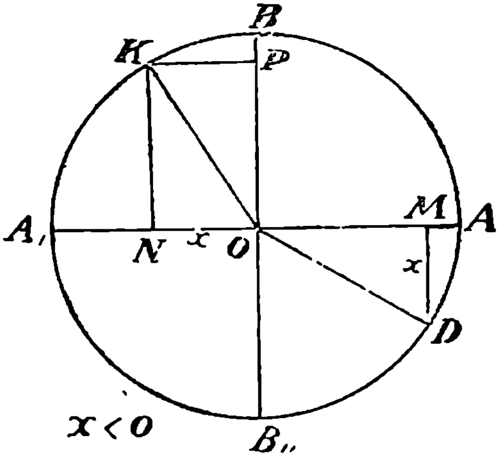
$$arc \sin x + arc \cos x = \frac{\pi}{2}$$

($arc \sin x$ უარყოფითია, $arc \cos x$ კი დადებითი). შემთხვევას, როცა $x = 0$, მკითხველი ადვილად დასძლევს.

გეომეტრიულად მტკიცდება აგრეთვე მეორე დამოკიდებულებაც:

$$arc \operatorname{tg} x + arc \operatorname{ctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

გამოვარკვიოთ, რა დამოკიდებულება არსებობს $arc \sin x$ და $arc \cos \sqrt{1+x^2}$ ფუნქციათა შორის.



ნახ. 31.

ადვილად გასაგებია, რომ როგორიც არ უნდა იყოს x-ი, (უარყოფითი თუ დადებითი) $arc\cos\sqrt{1-x^2}$ ყოველთვის არაუარყოფითია ($-1\leqslant x\leqslant 1$), მაგრამ $arc\sin x$ ფუნქციის ნიშანი დამოკიდებულია x-ის ნიშანზე. თუ ამ გარემოებას მივიღებთ მხედველობაში, ადვილად მივხვდებით, რომ $arc\sin x = arc\cos\sqrt{1-x^2}$, როცა $0\leqslant x\leqslant 1$, მაგრამ $arc\sin x = -arc\cos\sqrt{1-x^2}$, როცა $-1\leqslant x<0$. მაგალითად, $arc\sin\frac{\sqrt{2}}{2} = arc\cos\frac{\sqrt{2}}{2}$, მაგრამ

$$arc\sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -arc\cos\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$

ფუნქცია $arc\sin\sqrt{1-x^2}$ აგრეთვე არაუარყოფითია, $arc\cos x$ ფუნქციაც არაუარყოფითია; $arc\sin x$ იცვლება $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში, მეორე კი $[0, \pi]$ შუალედში. $arc\sin\sqrt{1-x^2} = arc\cos x^2$ თუ $0\leqslant x\leqslant 1$, და $arc\cos x = \pi - arc\sin\sqrt{1-x^2}$, თუ $-1\leqslant x<0$. ზემოთ დამუშავებული მასალა შექცეული ფუნქციების შესახებ სრულიად საკმაოა საშუალო სკოლისათვის.

მასწავლებელს შეუძლია უფრო ღრმად გაიცნოს ეს საკითხი, თუ იგი გულმოდგინედ შეისწავლის პროფ. С. И. Новоселов-ის წიგნს „Обратные тригонометрические функции" (მეორე გამოცემა, 1947).

თ ა ვ ი VI

ტრიგონომეტრიული განტოლებანი

§ 19. უმარტივესი ტრიგონომეტრიული განტოლებანი

ასეთი განტოლებანი იქნებიან, მაგალითად,

$$\operatorname{tg} x = 1;\ \operatorname{tg} x = -0{,}3;\ \sin x = -0{,}4;\ \cos x = \frac{2}{3};\ \operatorname{tg} 5x = 4;$$

$$\sin 2x = 0{,}3;\ \cos 4x = -0{,}7 \text{ და ა. შ.}$$

ამოვხსნათ $\operatorname{tg} 5x = 4$; დავწეროთ $z = 5x$, ვიპოვით $\lg 4$, შემდეგ z კუთხის ტაბულურ მნიშვნელობას, ე. ი. იმ მნიშვნელობას, რომელსაც გვაძლევს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ლოგარითმული ცხრილი (ტაბულა). ამ მნიშვნელობის გარდა ჩვენს განტოლებას აკმაყოფილებენ სხვა კუთხეებიც. მათი ზოგადი სახე იქნება: $z = k\pi + \alpha$, სადაც ასოთი α აღნიშნულია z კუთხის ტაბულური მნიშვნელობა. თუ ახლა z ნაცვლად დავწერთ $5x$, მივიღებთ

$$5x = k\pi + \alpha;\ x = k \cdot \frac{\pi}{5} + \frac{\alpha}{5}.$$

თუ $\operatorname{tg} x$ ფუნქციის მნიშვნელობა უარყოფითია, როგორც $\operatorname{tg} x = -0{,}3$ განტოლებაში, მაშინ ჯერ ვპოულობთ $\lg \operatorname{tg} x = \lg 0{,}3$, ამ ლოგარითმის მიხედვით, შემდეგ ვეძებთ x კუთხის ტაბულურ მნიშვნელობას და, თუ მას აღვნიშნავთ α ასოთი, x კუთხის ზოგადი სახე იქნება:

$$x = k\pi - \alpha.$$

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი:

$$\cos 3x = -\frac{1}{2};$$

$3x$ აღვნიშნოთ y ასოთი, გვექნება $\cos y = -\frac{1}{2}$;

ცხადია განტოლებას აკმაყოფილებს კუთხე 120° ანუ $\frac{2\pi}{3}$ რადიანი, ეს კუთხე წარმოადგენს თავისი აბსოლუტური მნიშვნელობით უმცირეს კუთხეს. ზოგადი სახე y კუთხისა იქნება:

$$y = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}; \quad x = \frac{2}{3}\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{9}.$$

შევამოწმოთ.

$$\cos 3\left(\frac{2}{3}\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{9}\right) = \cos\left(2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

მიზანშეწონილია აქვე შევნიშნოთ, რომ კუთხის ზოგადი სახე მაშინ უფრო მარტივია, როდესაც კუთხე მოცემულია თავისი ტანგენსით, და ყველაზე რთული, როდესაც კუთხე მოცემულია თავისი სინუსით. ამიტომ ცდილობენ ტრიგონომეტრიული განტოლება ისე გარდაქმნან, რომ საძებნი ტრიგონომეტრიული ფუნქცია იყოს ტანგენსი. მაგრამ, თუ ასეთი გარდაქმნა გამოიწვევს განტოლების გართულებას, მაგალითად, მიგვიყვანს განტოლებამდე, რომლის ამოხსნა ელემენტარული ალგებრის საშუალებით შეუძლებელია, მაშინ ასეთ ცდას თავი უნდა დავანებოთ. ზემოთ განხილული იყო ტოლობანი, რომლებიც გვაძლევენ საძიებელი კუთხის რომელიმე ერთი ფუნქციის მნიშვნელობას.

§ 20. ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნის ზოგადი ხერხი

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ ტრიგონომეტრიულ განტოლებაში შედის ერთ ფუნქციაზე მეტი, მაშინ ისეთი გარდაქმნა უნდა მოვახდინოთ, რომელიც ერთი რომელიმე ფუნქციის საშუალებით შეცვლის ყველა დანარჩენ ფუნქციას. მაშინ საქმე გვექნება მხოლოდ ერთ რომელიმე საძებნ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციასთან. შემდეგ ვიპოვით ამ ფუნქციის რიცხვით მნიშვნელობას და ამ უკანასკნელის საშუალებით მივიღებთ საძებნი კუთხის ზოგად სახეს. აი, ამაში მდგომარეობს ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნის ზოგადი ხერხი.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები:

1. $\cos(\alpha + x)\cos(\alpha - x) + 0{,}75 = \cos^2\alpha.$

აქედან ვწერთ:

$$\cos^2\alpha\cos^2 x - \sin^2\alpha\sin^2 x + 0{,}75 = \cos^2\alpha,$$
$$(1 - \sin^2\alpha)\cos^2 x - \sin^2\alpha\sin^2 x + 0{,}75 = \cos^2\alpha,$$
$$\cos^2 x - \sin^2\alpha(\cos^2 x + \sin^2 x) + 0{,}75 = \cos^2\alpha.$$

აქედან $\cos^2 x = \frac{1}{4}$; $\cos x = \pm\frac{1}{2}$; თუ $\cos x = \frac{1}{2}$, მაშინ

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \tag{I}$$

თუ $\cos x = -\frac{1}{2}$, მაშინ $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (II)

შეიძლება თუ არა ეს ორი რიგი ამონახსნებისა გამოვსახოთ ერთი ფორმულით.

მივცეთ II ფორმულას შემდეგი სახე:

$$x = 2k\pi \pm \pi \pm \frac{\pi}{3} = (2k \pm 1)\pi \pm \frac{\pi}{3} \tag{III}$$

$2k$ სადაც k მთელი რიცხვია, ლუწ რიცხვებს გვაძლევს, $2k \pm 1$ კი კენტ რიცხვებს იძლევა.

I და III ფორმულები გვეუბნებიან, რომ x რკალის საპოვნელად საჭიროა რკალი $\frac{\pi}{3}$ მივუმატოთ ან გამოვაკლოთ როგორც $2k\pi$, ისე $(2k+1)\pi$-ს. ეს მოთხოვნა მათემატიკურ ენაზე ასე დაიწერება: $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, სადაც k რიცხვს უნდა მივცეთ როგორც კენტი, ისე ლუწი მნიშვნელობანი.

შემოწმება

შემოწმების პროცესს გავამარტივებთ, თუ შემდეგი ფორმულით ვისარგებლებთ:

$$\cos 2\alpha + \cos 2x = 2\cos(\alpha + x)\cos(\alpha - x).$$

გავამრავლოთ ჩვენი განტოლება ორზე და დავწეროთ: $\cos 2\alpha + \cos 2x + 1{,}5 = 2\cos^2\alpha$ სახით. აქედან მივიღებთ:

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}.$$

ჩავსვათ x ნაცვ ად $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$, მაშინ გვექნება:

$$\cos\left(2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

მაშასადამე, განტოლება სწორად არის ამოხსნილი.

ცხადია, რომ მოცემული განტოლება შეიძლება ამოვხსნათ უფრო მარტივად, თუ თავიდანვე ვისარგებლებთ ზემოთ მოყვანილი ფორმულით*.

ეს მაგალითი გვასწავლის, რომ ზოგადი ხერხის მოხმარება არ წარმოადგენს ყოველთვის მის აუცილებლობას, და იქ, სადაც შესაძლებელია, უნდა ვისარგებლოთ უფრო მოკლე გზით, ამოხსნის ზოგად ხერხს არ უნდა მივმართოთ.

2. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$. ეს განტოლება დავწეროთ $\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x$ სახით. შევნიშნოთ, რომ $1-\operatorname{tg}^2 x \neq 0$, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში $\operatorname{tg} 2x$ არ იქნებოდა $\operatorname{tg} x$ ტოლი.

ამოხსნა ვაწარმოოთ ასე: გადავიტანოთ $\operatorname{tg} x$ მარცხნივ, დავიყვანოთ საერთო მნიშვნელზე და გავამრავლოთ $1-\operatorname{tg}^2 x$-ზე. მივიღებთ: $\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg}^2 x)=0$. $1+\operatorname{tg}^2 x \neq 0$, რადგან $\operatorname{tg}^2 x \geqslant 0$. რჩება მხოლოდ $\operatorname{tg} x = 0$, და $x = k\pi$.

შემოწმება

$$\operatorname{tg} 2k\pi = \operatorname{tg}\pi = 0.$$

3. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$. აქედან

$$\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2};$$

შემდეგ: $$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2};$$

აქედან $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 1$ და $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$, რადგან

$$x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi.$$

* მაშინ საუბარიც არ დაგვჭირდებოდა (I) და (II) ფორმულების გაერთიანების შესახებ, თუმცა ეს საუბარი საინტერესო საკითხს შეეხებოდა.

შემოწმება

$$\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

განვიხილოთ ამ განტოლების ამოხსნის სხვა ხერხი ავახარისხოთ ორივე ნაწილი კვადრატში. გვექნება:

$$1+2\sin x\cos x=2;\ \sin 2x=1;$$

$$2x=2k\pi+\frac{\pi}{2};\ x=k\pi+\frac{\pi}{4};$$

წინათ კი მივიღებთ $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$.

ცხადია, მიღებული ფორმულა შეიცავს გარეშე ფესვებს, სახელდობრ $\sin x+\cos x=-\sqrt{2}$ განტოლების ფესვებს, რადგან თუ ამ განტოლებას კვადრატში ავახარისხებთ, კვლავ მივიღებთ $1+2\sin x\cos x=2$ განტოლებას.

განტოლების ორივე ნაწილის კვადრატში ახარისხება სასურველი არაა. იგი მაშინ იხმარება, როდესაც სხვა გამოსავალი არა, გვაქვს, მაგალითად, ირაციონალური განტოლების ამოხსნისათვის. მაგრამ მაშინ გარეშე ფესვების საკითხის გამორკვევა სავალდებულოა. მაგალითად, ზემოთ მიღებული იყო ფორმულა $x=$ $=k\pi+\frac{\pi}{4}$, რომელიც გარეშე ფესვებსაც შეიცავს.

გამოვყოთ აქედან: $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ განტოლების ფესვები. მივიღოთ $k=0$, მაშინ $x=\frac{\pi}{4}$; $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$; მაშასადამე, $\frac{\pi}{4}$ წარმოადგენს მოცემულ განტოლების ფესვს. ნათელია, 2π რომ მივუმატოთ $\frac{\pi}{4}$ რიცხვს k-ჯერ, სადაც k მთელი დადებითი ან უარყოფითი რიცხვია, მივიღებთ ჩვენი განტოლების ფესვებს. ამ ფესვების ერთობლიობა გამოისახება $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ ფორმულით.

შემდეგ ავიღოთ $k=1$ და, მაშასადამე, $x=\pi+\frac{\pi}{4}$; გვექნება $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ და არა $\sqrt{2}$. ცხა-

და, $\pi+\frac{\pi}{4}$ რომ მივუმატოთ $2k\pi$ მარჯვენა მხარეზე ისევ $-\sqrt{2}$ მივიღებთ. ე. ი. კენტ რიცხვჯერ აღებული π, მიმატებული $\frac{\pi}{4}$ რიცხვს, ჩვენი განტოლების ფესვებს არ იძლევა.

განვიხილოთ კიდევ ერთი ხერხი:

$$\sin x+\cos x=\sin x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cos x=\sqrt{2};\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1;$$

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}.$$

უკანასკნელად გავეცნოთ ხერხს, რომელიც უფრო ზოგადი სახისაა. იგი ხშირად ართულებს ამოხსნას. ეს ხერხი მაშინ არის აუცილებელი, როდესაც მისი უფრო მარტივი სახეები (მოდიფიკაციები) ვერ სძლევენ საკითხს.

ავიღოთ ისევ ის განტოლება და გამოვსახოთ $\sin x$ და $\cos x$ რაციონალურად $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ფუნქციის საშუალებით. ამას ჩვენ მოვახერხებთ, თუ ვისარგებლებთ ცნობილი ფორმულებით:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

და

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

შევიტანოთ $\sin x$-ის და $\cos x$-ის ეს გამოსახულებანი $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ განტოლებაში. მივიღებთ:

$(\sqrt{2}+1)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{2}-1=0.$ აქედან მივიღებთ $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ფუნქციის მნიშვნელობას, და შემდეგ $\operatorname{tg}x$ ფუნქციის მნიშვნე-

ლობასაც
$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$ *

ფორმულის შემწეობით და ა. შ.

სასარგებლოა აგრეთვე შემდეგი ფორმულების ცოდნა, როდესაც საჭირო ხდება ზოგადი ხერხის გამოყენება:

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$$

და

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

4. $a\sin x + b\cos x = c$ განტოლების ამოხსნას აწარმოებენ ასე:

$$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}.$$

აღვნიშნოთ $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$, მაშინ φ შეიძლება გამოვიანგარიშოთ; მივიღებთ: $\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{a}\cos\varphi$; აქედან $\sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$. რადგან რკალი φ ცნობილია, გალოგარითმების საშუალებით ვიპოვით ჯერ ისეთ მახვილ β კუთხეს, რომ

$$\sin\beta = \frac{c}{a}\cos\varphi;$$

შემდეგ დავწერთ $x+\varphi = k\pi + (-1)^k\beta$ და უკანასკნელად

$$x = k\pi + (-1)^k\beta - \varphi.$$

განტოლებას ექნება ამონახსნები, თუ $-1 \leqslant \sin(x+\varphi) \leqslant 1$, რაც შეიძლება შევცვალოთ უფრო მოხდენილი პირობით

$$\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi \leqslant 1.$$

* ეს ფორმულები არ ივარგებს, როდესაც $x = \pi(2k+1)$.

მკითხველს ევალება გამოსახოს $\cos\varphi$ a, b, c ასოების საშუალებით და იპოვოს განტოლების ამოხსნის შესაძლებლობის პირობა $c^2 \leqslant a^2 + b^2$ სახით. ამ განტოლებაში $a \neq 0$ და $b \neq 0$. აქ საჭიროა ვისარგებლოთ $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$ ფორმულით.

§ 21. განტოლებანი, რომლებიც წარმოადგენენ ორი ერთნაირსახელიანი ფუნქციის ან ფუნქციისა და მისი კოფუნქციის ტოლობას

1. $\sin ax = \sin bx$,
2. $\cos ax = \cos bx$,
3. $\sin ax = \cos bx$,
4. $\sin ax = -\cos bx$,
5. $\operatorname{tg} ax = -\operatorname{ctg} bx$ და ა. შ.

აქ ხელსაყრელია გამოვიყენოთ შემდეგი დებულებანი:

1) ორ რკალს რომ ერთნაირი სინუსი ჰქონდეს, საჭიროა და საკმაო, ან რკალების ჯამი ეტოლობოდეს $(2\kappa+1)\pi$-ს, ან მათი სხვაობა ეტოლებოდეს $2\kappa\pi$-ს, სადაც κ მთელი რიცხვია.

2) ორ რკალს რომ ერთნაირი კოსინუსი ჰქონდეს, საჭიროა და საკმარისი, რომ მათი ჯამი ან სხვაობა ეტოლებოდეს $2\kappa\pi$-ს.

3) ორ რკალს რომ ერთნაირი ტანგენსი ჰქონდეს, საჭიროა და საკმაოა, რომ მათი სხვაობა ეტოლებოდეს $\kappa\pi$-ს.

გამოვიყენოთ პირველი დებულება.

ავიღოთ განტოლება $\sin 3x = \sin 5x$.

აქ ან $3x + 5x = (2\kappa+1)\pi$ ან $5x - 3x = 2\kappa\pi$, მაშასადამე, მივიღებთ ასეთ ამონახსნებს: $x = \kappa\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$, და $x = \kappa\pi$.

შემოწმება.

შემოწმებას ჩავატარებთ იმავე დებულების შემწეობით. მაგალითად, $\sin\left(3\kappa\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(5\kappa\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{8}\right)$, რადგან

$$3\kappa\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{8}+5\kappa\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{8}=(2\kappa+1)\pi.$$

ავიღოთ ახლა $\sin 3x = -\cos 5x$ განტოლება. მივცეთ მას $\sin(-3x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$ განტოლების სახე და შემდეგ გამოვიყენოთ პირველი დებულება.

ამოხსნის პრინციპი აქ ცხადია: ან ფუნქცია უნდა შევცვალოთ მისი კოფუნქციით, ან პირიქით; ეს ხდება დაყვანის ფორმულების გამოყენებით. არც ნიშნის საკითხი უნდა დავივიწყოთ.

§ 22. განტოლების ამოხსნა მარცხენა ნაწილის მამრავლებად დაშლით

განვიხილოთ მაგალითები:

1. უმარტივესი მაგალითი იქნება $\sin x \cdot \cos x = 0$. შემდეგ ვწერთ: ან $\sin x = 0$, ან $\cos x = 0$, დანარჩენი ნათელია.

2. $\sin 2x = 2\cos x$; აქედან $2\cos x(\sin x - 1) = 0$.

ან $\cos x = 0$; $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$,

ან $\sin x - 1 = 0$; $x = k\pi$.

შემოწმება ადვილია.

3. $1 - \cos x = 2\sin\frac{x}{2}$; $1 - \cos x - 2\sin\frac{x}{2} = 0$;

$2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} = 0$; $2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0$ და ა. შ.

4. $\sqrt{2}\sin x = \operatorname{tg} x$; $\operatorname{tg} x(\sqrt{2}\cos x - 1) = 0$. ან $\operatorname{tg} x = 0$, ან $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$ და, მაშასადამე, $x = k\pi$ და $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

5. $\frac{\sin(x-\alpha)}{\cos x}$ 0; $\sin(x-\alpha) \cdot \frac{1}{\cos x} = 0$; ცხადია, წილადი $\frac{1}{\cos x} \neq 0$, რადგან $\cos x \neq 0$,* მაშ. რჩება მხოლოდ

$\sin(x - \alpha) = 0$, და ა. შ.

---

* თუ $\cos x = 0$, $\frac{\sin(x-\alpha)}{0} = 0$ უაზრობაა.

6. $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$; აქედან $2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 0$, რადგან $\sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cos x$. დაშლის შემდეგ მივიღებთ: $\sin 2x (1 + 2 \cos x) = 0$ და ა. შ.

7. $\sin x - \cos x = 1$; $\sin x - (1 + \cos x) = 0$;

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0;$$

$$2 \cos \frac{x}{2}\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right) = 0 \text{ და ა. შ.}$$

8. $\sin 2x = 4\sin^3 x$, აქედან $2 \sin x \cos x - 4 \sin^3 x = 0$; $\sin x (\cos x - 2\sin^2 x) = 0$; $\sin x(\cos x - 2 + 2 \cos^2 x) = 0$;

$$\text{ან } \sin x = 0, \text{ ან } \cos x - 2 + 2\cos^2 x = 0,$$

რაც კვადრატულ განტოლებას წარმოადგენს. ამ განტოლების მხოლოდ ერთი ფესვია ვარგისი.

§ 23. ერთგვაროვანი განტოლებანი

ჩვენ აქ შევეხებით ისეთ ერთგვაროვან განტოლებას, სადაც მხოლოდ $\sin x$ და $\cos x$ შედის. საშუალო სკოლის პროგრამა მეტს არ მოითხოვს.

განტოლებას ერთგვაროვანი ეწოდება, თუ მის ყოველ ცალკეულ წევრში შემავალი ფუნქციისა და კოფუნქციის მაჩვენებლების ჯამი ერთნაირია, მარჯვენა ნაწილში კი ნულია (საზოგადოდ). მაგალითად, განტოლება $5 \sin^2 x - 2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x = 0$ ერთგვაროვანია. აქ ყოველ ცალკეულ წევრში $\sin x$ და $\cos x$ ხარისხების მაჩვენებლების ჯამი ეტოლება 2. მართლაც, $2 + 0 = 2 + 0 = 1 + 1 = 2$. მაჩვენებლების ჯამს ერთგვაროვნობის ხარისხი ეწოდება. ჩვენს მაგალითში ერთგვაროვნობის ხარისხი ეტოლება ორს.

1. ამოვხსნათ მოცემული მაგალითი. რადგან ამ განტოლებაში $\cos x$ არ ეტოლება ნულს (მაშინ ხომ $\sin x$ აგრეთვე ნულის ტოლი იქნებოდა, რაც შეუძლებელია), ამიტომ შეიძლება ყველა წევრი გავყოთ $\cos^2 x$-ზე, და განტოლება გადავწეროთ:

$$\cos^2 x (5 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 2) = 0, \text{ და } 5 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

2. $2\sin^2 x + 4 \cos^2 x = 3$.

ამ განტოლებას გარეგნულად არა აქვს ერთგვაროვანი განტოლების სახე, მაგრამ არსებითად ერთგვაროვანია. მართლაც, ეს

განტოლება შეგვიძლია ასე დავწეროთ: $2\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$, შემდეგ $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ ან $\operatorname{tg}^2 x = 1$, რადგან $\cos^2 x \neq 0$. შეიძლება ასეც $\cos 2x = 0$. ყველაზე ხელსაყრელი ხერხი ასეთია: ვინაიდან $2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2$, ამიტომ $2 + 2\cos^2 x = 3$ და ა. შ.

3. განვიხილოთ განტოლება $\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x = 0$, რომლის ერთგვაროვნობის ხარისხი 4-ია.

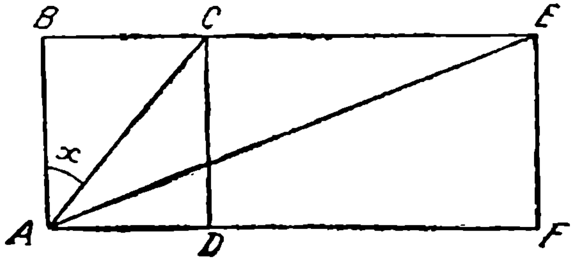
ამ შემთხვევაში გაყოფა არ შეიძლება არც $\sin x$ ზე, არც $\cos x$-ზე რადგან, როგორც $\sin x$ ისე $\cos x$-იც შეიძლება ნულის ტოლი იყოს. თავისთავად ცხადია, რომ არც $\sin x \cos x$-ზე შეიძლება გაყოფა. ეს ერთგვაროვანი განტოლება ამოიხსნება მამრავლებად დაშლის ხერხით.

4. $\sin^3 x + \sin^2 x \cos x + \sin x \cos^2 x = 0$. აქ შეიძლება გაყოფა $\cos^3 x$-ზე, რადგან $\cos x \neq 0$. გვექნება $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$; აქედან ან $\operatorname{tg} x = 0$, ან $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1 = 0$, ამ განტოლების ორივე ფესვი წარმოსახვითია და მიუღებელი.

§ 24. ამოცანები ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა შედგენაზე

ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნის თეორიას მნიშვნელოვანი პრაქტიკული გამოყენება აქვს გეომეტრიაში, მექანიკაში, ფიზიკასა და საზოგადოდ ტექნიკაში. მოვიყვანოთ ორი მაგალითი.

1. რა კუთხეს ქმნის $ABCD$ სწორკუთხედში AC დიაგონალი AB გვერდთან, თუ ცნობილია, რომ, როდესაც სწორკუთხედის AD ფუძეს გავადიდებთ სამჯერ, ამ მეორე სწორკუთხედის დიაგონალი AE შექმნის AB გვერდთან ორჯერ მეტ BAE კუთხეს (ნახ. 32).



ნახ. 32.

$$AB \perp AF;\ AF = 3\,AD;$$
$$\angle BAE = 2\,\angle BAC;\ \angle BAC = x.$$

ნახაზიდან, ცხადია, რომ $3\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,2x$. ამოვხსნათ ეს განტოლება:

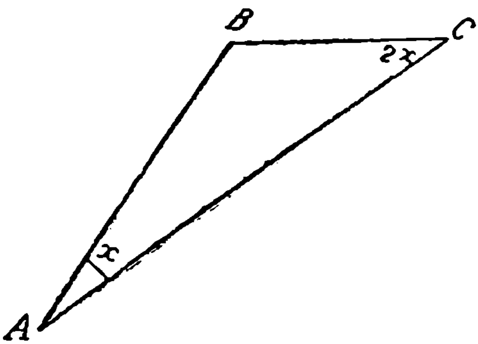
$$3\,\mathrm{tg}\,x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2 x}.$$

რადგან $x \neq 0$ და $\mathrm{tg}\,x \neq 0$, შევკვეცოთ $\mathrm{tg}\,x$-ზე; მივიღებთ:

$$3 \quad 3\,\mathrm{tg}^2 x = 2.$$

ამოცანას უპასუხებს მხოლოდ ერთი ფესვი $x = \frac{\pi}{6}$.

2. ABC სამკუთხედში გვერდი $BC = 1$; $AB = 1{,}5$; $\angle BCA = 2\,\angle BAC$. რას უდრის კუთხე A? (ნახ. 33).



ნახ. 33.

შევადგინოთ განტოლება.

$\frac{1}{\sin x} = \frac{1{,}5}{\sin 2x}$, $(x = \angle A)$. აქედან $\sin 2x = 1{,}5\ \sin x$ ანუ $2 \sin x \cos x = 1{,}5\ \sin x$. რადგან აქ $x \neq 0$, $\sin x$ ფუნქციის მნიშვნელობაც ნულს არ ეტოლება. ასეთ პირობებში $\sin x$-ზე შეკვეცა შესაძლებელია. მაშასადამე, მივიღებთ: $\cos x = 0{,}75$. დანარჩენი ადვილია. მოვიყვანოთ მაგალითები მექანიკიდან და ფიზიკიდან.

3. მატერიალურ წერტილზე მოქმედებს ორი, თითოეული 1 კგ-ის ტოლი, ძალა. რას ეტოლება მათ შორის კუთხე, თუ კუთხის და მომქმედი ძალების ორჯერ გადიდებით ტოლქმედი ძალა უცვლელი რჩება?

4. ორი სანთელი დაშორებულია ერთი მეორესაგან 40 სმ-ით. ორი ბრტყელი სარკე ვერტიკალურად დგას ისე, რომ პირველი სარკე დაშორებულია პირველი სანთლიდან 20 სმ-ით, ხოლო მეორე სარკე მეორე სანთლიდან 30 სმ-ით. რა კუთხეს ჰქმნის ერთი მეორესთან ეს ორი სარკე, თუ ცნობილია, რომ სანთლების გამოსახულებანი (ანარეკლები) ერთი მეორეს ემთხვევიან?

ამ უკანასკნელი ამოცანების ამოხსნაც ტრიგონომეტრიული განტოლების შედგენას მოითხოვს.

* *

თუ გადავათვალიერებთ ზემოთ მოყვანილ მაგალითებს ტრიგონომეტრიული განტოლებების ამოხსნაზე, დავინახავთ, რომ ეს საქმე მოითხოვს ტრიგონომეტრიულ გარდაქმნებს. აქ შეუძლებელია რაიმე ზოგადი სახის განსაზღვრის მიცემა საჭირო გარდაქმნების ჩასატარებლად. გარდაქმნების მიზანია მივიღოთ, რაც შეიძლება მარტივი სახის განტოლება. ამიტომ საკმაოდ უნდა ვავარჯიშოთ მოსწავლე ტრიგონომეტრიული გარდაქმნების წარმოებაში. ტრიგონომეტრიულ გარდაქმნებს ტრიგონომეტრიული საკითხების ამოხსნაში და ფორმულების გამოყვანაში ისეთივე მნიშვნელობა აქვს, როგორც ალგებრულ გარდაქმნებს საზოგადოდ ალგებრაში. სავარჯიშო მასალა არ უნდა იყოს რთული. ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნაზე მაშინ უნდა გადავიდეთ, როდესაც გონიომეტრია დამუშავებულია მთლიანად, ვინაიდან ტრიგონომეტრიული განტოლება ხშირად ამოიხსნება სხვადასხვა გზით, და მიზანშეწონილი გზის შერჩევა წარმოადგენს ისეთ საკითხს, რომელსაც უფრო იოლად და შეგნებულად ამოარჩევს ის მოსწავლე, რომელიც გაცნობილია გონიომეტრიას მთლიანად. საჭიროა აღვნიშნოთ, რომ გარდა აქ მოყვანილი ხერხებისა, რომლებიც საკმაოა საშუალო სკოლისათვის, არსებობენ სხვა ხერხებიც, მაგალითად, წარმოებული პროპორციის ხერხი, ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნამრავლის ჯამად გარდაქმნის ხერხი. გარემოება, რომელზეც საჭიროა მივუთითოთ მასწავლებელს, იმაში მდგომარეობს, რომ ძალიან ხშირად ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნისას, კუთხის ზოგადი სახე მიიღება სხვადასხვა გარეგნული ფორმით იმის და მიხედვით, თუ რა გზით მივიღეთ ამონახსენი. ეს გარემოება აბნევს მოსწავლეებს. ერთმა განტოლება ამოხსნა ერთი გზით, მეორემ მეორე გზით, ორივემ წესიერად ამოხსნა, მაგრამ ამონახსენი მიიღეს სხვადასხვა სახისა და გარეგნულად იმდენად განსხვავებული, რომ შედეგში არც

ერთია დარწმუნებული, არც მეორე. ასეთ მოვლენას ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნის პროცესში ხშირად აქვს ადგილი, რაც აზროვნების საკმაოდ რთულ მუშაობას მოითხოვს. საკითხს, რომელიც ჩვენ მხედველობაში გვაქვს, შეიძლება ვუწოდოთ საძებნი კუთხის ზოგადი სახის ფორმულების გარდაქმნა და გაერთიანება (გამარტივება). ეს საკითხი მეტად მნიშვნელოვანია და მოითხოვს ანალიზის ჩატარებას. კონკრეტულობისათვის განვიხილოთ შემდეგი:

ა) თუ k ასოთი ალვნიშნავთ მთელ რიცხვს, მაშინ $x=k$ წარმოადგენს ყოველ მთელ რიცხვს, როგორც დადებითს, ისე უარყოფითს, მაშასადამე, $x=k$ გვაძლევს ყველა მთელ რიცხვთა სიმრავლეს;

ბ) $2k+1$ და $2k-1$ გვაძლევს კენტ რიცხვთა ერთნაირ სიმრავლეს, ხოლო $2k$ — ყველა ლუწ რიცხვთა სიმრავლეს;

გ) $4k\pm1$ გვაძლევს იმავე სიმრავლეს, რასაც გვაძლევს $2k+1$ ან $2k-1$. მაშასადამე, $4k\pm1$ შეიძლება შევცვალოთ ან $2k+1$ ან $2k-1$ გამოსახულებით;

დ) წარმოვიდგინოთ, რომ ერთისა და იმავე განტოლების ამონახსენი გამოისახება $x=k\cdot108°\pm27°$ ფორმულით, როდესაც კუთხის ზოგადი სახე გამოთვლილია ერთი გზით, და $x=k\cdot54°+27°$ ფორმულით, როდესაც ეს ფორმულა მიღებულია სხვა ხერხის გამოყენებით.

რომელია სწორი პასუხი?

ამ საკითხს შეუძლებელია გვერდი ავუხვიოთ. ეს საჭიროებს დამატებით გამოკვლევას. ჩვენ ვიტყვით: ორივე ფორმულა სამართლიანია, ორივე საძებნი x კუთხის მნიშვნელობათა სრულიად ერთსადაიგივე სიმრავლეს გვაძლევს, მართლაც,

$$x=k\cdot108°\pm27°=27°(4k\pm1),$$

რაც შეიძლება უფრო მოკლედ გამოვსახოთ.

$$x=27°(2k+1)=k\cdot54°+27° \text{ ფორმულით.}$$

ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნისას ამგვარი საკითხები ხშირად წარმოიშობა.

საკითხი: ექვივალენტური არიან თუ არა გამოსახულებანი $x=1-4k$ და $x=4k+1$, სადაც k მთელ რიცხვს გამოსახავს?

პასუხი: ექვივალენტური არიან.

საკითხი: რა უფრო მარტივი ფორმულით შეიძლება შევცვალოთ გამოსახულება

$$x = \kappa \cdot \frac{\pi}{2} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4},$$

თუ ცნობილია, რომ $\kappa = 0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16\ldots$ და ასე შემდეგ?

პასუხი: $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$.

საკითხი: ექვივალენტურია თუ არა $x = \kappa$ და $x = \kappa - 1$ ან $x = \kappa + 4$?

პასუხი: ექვივალენტურია.

ე) ტრიგონომეტრიული განტოლების ფესვები ხშირად რამდენიმე ფორმულით გამოისახება. თითოეული ფორმულა ამონახსენების გარკვეულ სერიას იძლევა. იბადება კითხვა, შეიძლება თუ არა ამ ფორმულების ან მათი ნაწილის შეცვლა ისეთი ერთი ფორმულით, რომელიც მოგვცემს განტოლების ფესვებს უგამონაკლისოდ.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ფესვები გამოისახებიან სამი შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$x_1 = 3\kappa \frac{\pi}{4};\ x_2 = (3\kappa + 1)\frac{\pi}{4};\ x_3 = (3\kappa + 2)\frac{\pi}{4}.$$

ადვილად შესამჩნევია, რომ 3κ, $3\kappa + 1$ და $3\kappa + 2$ ასო κ-ს ყოველი მთელი მნიშვნელობისათვის გვაძლევს სამ თანამიმდევრობით მთელ რიცხვს უგამონაკლისოდ. მაგალითად, თუ $\kappa = 1$, მივიღებთ $3,\ 4,\ 5$; თუ $\kappa = 4$, მივიღებთ $12,\ 13,\ 14$; თუ $\kappa = -3$, მივიღებთ $-9,\ -8,\ -7$ და ასე შემდეგ. აქედან დავასკვნით, რომ ამ სამი ფორმულის ერთობლიობა გვაძლევს უგამონაკლისოდ იმავე ფესვებს, რასაც გვაძლევს ერთი შემდეგი ფორმულა $x = \kappa\frac{\pi}{4}$, რომელიც აერთიანებს სამ ზემოთმოყვანილ ფორმულას.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი. $x_1 = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ და $x_2 = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}$. მეორე ფორმულა გადავწეროთ ასეთი სახით:

$$x_2 = \kappa\pi - \frac{\pi}{3} = \kappa\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}(2\kappa - 1) + \frac{\pi}{6},$$

ხოლო პირველ ფორმულას მივცეთ ასეთი სახე:

$$x_1 = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}\cdot 2\kappa + \frac{\pi}{6}.$$

მაშასადამე, ჩვენ ვხედავთ, რომ ფესვების გამოთვლისათვის უნდა $\frac{\pi}{2}$ გავამრავლოთ როგორც კენტ, ისე ლუწ რიცხვზე და ნამრავლს მივუმატოთ $\frac{\pi}{6}$, რაც მოკლედ გამოისახება $x = \kappa \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ ფორმულით. ცხადია, ასეთი გაერთიანება ყოველთვის არ შეიძლება. საქმე მოითხოვს ფორმულების ანალიზსა და მიზანშეწონილ გარდაქმნებს. უფრო დაწვრილებით ამ საკითხის შესახებ იხილეთ ჟურნალი „Математика в школе" № 2. 1939 г. გვ. 57. „Методика исследования преобразований и упрощений формул общего вида углов в тригонометрических уравнениях" В. Подучева.

კითხვა: როგორი ერთი ფორმულით შევცვალოთ

$$x_1 = \kappa_1 \pi \text{ და } x_2 = \kappa \frac{\pi}{2}?$$

§ 25. ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნის გრაფიკული ხერხი

ავიღოთ განტოლება $x + \sin x = 0$. აღვნიშნოთ $\sin x$ ასოთი y, მაშინ გვექნება $y = \sin x$ ერთი მხრივ და $y = -x$ მეორე მხრივ. უჯრედიან ქაღალდზე (მილიმეტრიან ქაღალდზე) ავაგოთ $y = -x$ და $y = \sin x$ ფუნქციათა გრაფიკები, მაშინ გრაფიკების გადაკვეთის წერტილის აბსცისი მოგვცემს განტოლების ფესვს. ასე ამოიხსნება განტოლებანი:

$$1 + x = \sin x; \quad x^2 - \sin x = 0; \quad \lg x = \operatorname{tg} x; \quad \frac{1}{x} - \sin x = 0.$$

და სხვა ამგვარი.

§ 26. ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნის სხვა შემთხვევები

საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში „განუზღვრელობის ახსნაზე" საუბარი უადგილოა. თუ რომელიმე გამოსახულება x-ის რაიმე მნიშვნელობისათვის გვაძლევს ეგრეთწოდებულ $\frac{0}{0}$ განუზღვრელობას, ამ უკანასკნელს უნდა შევხედოთ როგორც უაზრობას და დავტოვოთ განხილვის გარეშე.

ავიღოთ განტოლება:

$$\frac{\sin 3x}{\sin x \cos x} = 0.$$

გავრცელებულია მცდარი მსჯელობა: წილადი რომ ნულს ეტოლებოდეს, საჭიროა მრიცხველი ნულის ტოლი იყოს, და ვწერთ:

$$\sin 3x = 0;\ 3x = k\pi;\ x = k\cdot\frac{\pi}{3}.$$

როდესაც k რიცხვი 3-ის ჯერადია, მაშინ მნიშვნელში მდგომი თანამამრავლი $\sin x$ ნულის ტოლია, და განტოლების მარცხენა ნაწილში მივიღებთ $\frac{0}{0}$. ასეთ შემთხვევაში განტოლებას ეკარგება აზრი, იგი უშინაარსო ხდება და $x = k\cdot\frac{\pi}{3}$ ამონახსენი მხოლოდ მაშინ ივარგებს, თუ რიცხვი k არ იქნება 3-ს ჯერადი.

აქ შესაძლებელია ასეთი მიდგომა:

ვიპოვოთ $\lim\limits_{x \to k\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{\sin x \cos x}$ და შევთანხმდეთ, რომ, თუ ეს ზღვარი იქნება ნულის ტოლი, როდესაც k—ჯერადია 3-სა, მაშინ $x = k\cdot\frac{\pi}{3}$ აღებული განტოლების ფესვს წარმოადგენს. მაგრამ ეს იქნება საქმის უნაყოფო გართულება, რასაც საშუალო სკოლაში თავი უნდა დავანებოთ.

სხვათა შორის, აქვე საჭიროა მივაქციოთ ყურადღება ერთ წესს, რომლითაც ჩვენ ვსარგებლობთ, როდესაც ტრიგონომეტრიული განტოლების მარცხენა მხარე წარმოდგენს ნამრავლს, ნულის ტოლს. ავიღოთ სავსებით ტრივიალური შემთხვევა: $\sin x = \sin x$; $x = ?$ ცხადია, x-ს შეიძლება მივცეთ ნებისმიერი მნიშვნელობა.

ამოვხსნათ ასე (თუმცა ამგვარად არავინ ამოხსნის):

$$(1-1)\ \sin x = 0$$

$$0\cdot\sin x = 0;\quad \sin x = 0;\quad x = k\pi.$$

და, მაშასადამე, დავკარგეთ ფესვები. მკითხველი უნდა მიხვდეს რაშია საქმე. აღნიშნული ფაქტი გვასწავლის, რომ თუ განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს ნამრავლს, ჩვენ შეგვიძლია ფესვების გამოსაანგარიშებლად თითოეული თანამამრავლი მხოლოდ

მაშინ გავუტოლოთ ნულს, როდესაც არც ერთი თანამამრავლი იგივურად არ ეტოლება ნულს.

განვიხილოთ $\sin x \cdot \operatorname{ctg} x = 0$ განტოლება. თუ ავიღებთ $\sin x = 0$ რომლის ფესვებია $x = k\pi$, მაშინ $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} k\pi = \pm\infty$, და მივიღებთ $0 \cdot (\pm\infty) = 0$; ცხადია, ასეთი ტოლობა უაზრობაა; ფესვები $x = k\pi$ უვარგისია. თუ კი ავიღებთ $\operatorname{ctg} x = 0$, მაშინ მივიღებთ $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ და მოცემულ განტოლებაში x-ის ნაცვლად ჩასმის შემდეგ გვექნება: $(\pm 1) \cdot 0 = 0$, რაც მისაღებია; ამ ფესვების მიღება ასეც შეიძლებოდა: $\cos x = 0$; $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} = (4k \pm 1)\frac{\pi}{2}$,

რაც ექვივალენტურია $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$. ცხადია, ეს უკანასკნელი ამონახსენი $\cos x = 0$ განტოლებისა პირდაპირაც შეიძლებოდა და გვეწერა, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $\sin x \neq 0$ აუცილებელი პირობაა იმისა, რომ განტოლებას აზრი არ დაეკარგოს. მაგრამ, როდესაც $\sin x \neq 0$, მაშინ მოცემული განტოლების $\sin x$-ზე შეკვეცა დასაშვებია.

ნათქვამთან დაკავშირებით განვიხილოთ წილადისახის ტრიგონომეტრიული განტოლებანი. ასეთი განტოლებანი ამოიხსნება შემდეგი ხერხით: განტოლების ყველა წევრი გადავიტანოთ მის ერთ ნაწილში და გავაერთმნიშვნელოვანოთ, მივიღებთ ნულის ტოლ წილადს; შემდეგ ამ წილადის მრიცხველი გავუტოლოთ ნულს და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება. მისი ამონახსნებიდან უნდა შევინარჩუნოთ მხოლოდ ისინი, რომლებიც არ გვაძლევენ განუზღვრელობას. მოვიტანოთ მაგალითები:

1. $\dfrac{Cos\ 2x}{1 + tg\ x} = 0$; $Cos\ 2x = 0$;

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

ამ ამონახსნებიდან უნდა შევინარჩუნოთ მხოლოდ $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$.

თუ ავიღებთ $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$, მაშინ გვექნება

$$\frac{\cos\left(2\kappa - \frac{\pi}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\kappa\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{0}{0}.$$

2. $\frac{\sin x}{1+\cos x} = \sin\frac{x}{2};$

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} - \sin\frac{x}{2} = 0;$$

$$\frac{\sin x - \sin\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\cos x}{1+\cos x} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{1+\cos x} =$$

$$= \frac{\sin x\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)}{1+\cos x} = 0;$$

$$\sin x\left(1-\cos\frac{x}{2}\right) = 0$$

თუ $\sin x = 0$, $x = \kappa\pi$ (κ მთელი რიცხვია), თუ კი $1+\cos x = 0$, $x = \kappa_1\pi$, სადაც κ_1 კენტი რიცხვია. მაშასადამე, $(2\kappa+1)\pi$ სახის ამონახსენი არ ივარგებს, და განტოლების ფესვები იქნება $x = 2\kappa\pi$. შემოწმებისათვის უნდა ვისარგებლოთ მოცემული განტოლებით.

3. $\frac{1+\cos 2x}{\cos x} = 0;$

$1+\cos 2x = 2\cos^2 x = 0$, აქედან $\cos x = 0$. მაშასადამე მრიცხველი და მნიშვნელი ერთდროულად ნულის ტოლი ხდებიან არგუმენტის $(2\kappa+1)\frac{\pi}{2}$ მნიშვნელობებისათვის; განტოლებას ფესვები არა აქვს.

გადავიდეთ განტოლებათა სისტემაზე:

1. $Sinx \cdot Cosy = 0,36$. (1)

$Cosx \cdot Siny = 0,14$ (2)

აქ ჩვენ გვაქვს ორი ორუცნობიან ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა სისტემა. ამნაირი სისტემის ამოხსნისათვის საზოგადოდ იქცევიან ასე: პოულობენ $x+y$ ჯამს და $x-y$ სხვაობას და შემდეგ x და y კუთხეებს. კუთხეები უნდა იყოს აღებული მხოლოდ მახვილი.

შესაძლებელია აგრეთვე გამოვიანგარიშოთ ჯერ $x+y$, ან $x-y$ და კიდევ $\frac{x}{y}$ შეფარდება. ცხადია, ამ შემთხვევაშიაც შევძლებთ x და y კუთხეების პოვნას ცალ-ცალკე.

ზემომოყვანილი პრინციპით რომ ვისარგებლოთ ჩვენს შემთხვევაში, ჯერ შევკრიბოთ, შემდეგ გამოვაკლოთ ჩვენი განტოლებანი. მივიღებთ:

$$Sin(x+y)=0,5$$

$$Sin(x-y)=0,22.$$

შემდეგ, საზოგადოდ, გალოგარითმების საშუალებით ვიპოვით $x+y$ ჯამს და $x-y$ სხვაობას და დასასრულ ცალ-ცალკე x, y კუთხეს.

2. $x+y=\alpha$; $Sinx+Siny=\alpha$.

ვწერთ $2\,Sin\frac{x+y}{2}\,Cos\frac{x-y}{2}=\alpha$;

$$2\,Sin\frac{\alpha}{2}\cdot Cos\frac{x-y}{2}=\alpha;\quad Cos\frac{x-y}{2}=\frac{a}{2\,Sin\frac{\alpha}{2}},$$

აქედან გალოგარითმების საშუალებით ვიპოვით ჯერ $\frac{x-y}{2}$, შემდეგ $x-y$ და საბოლოოდ x და y კუთხეს ცალ-ცალკე.

3. $x+y=\alpha$; $Sinx\,Siny=a$.

გავამრავლოთ მეორე განტოლება 2-ზე, მივიღებთ $2\,Sinx\,Siny=2a$, რადგან $Cos(x-y)-Cos(x+y)=2\,Sinx\,Siny=2a$, შეიძლება დავწეროთ $Cos(x-y)-Cos\,\alpha=2a$. აქედან

$$Cos(x-y)=2a+Cos\,\alpha.$$

გალოგარითმებით ვიპოვით $x-y$ სხვაობას, შემდეგ კი x და y კუთხეს.

4. $x+y=\alpha;\quad \dfrac{Sin x}{Sin y}=\dfrac{m}{n};$

ავიღოთ ჯერ მეორე ტოლობის წარმოებული პროპორცია შემდეგი სახით:

$$\frac{Sin x - Sin y}{Sin x + Sin y}=\frac{m-n}{m+n}, \text{ აქედან;}$$

$$\frac{tg\,\dfrac{x-y}{2}}{tg\,\dfrac{x+y}{2}}=\frac{m-n}{m+n} \quad \text{რადგან} \quad \frac{x+y}{2}=\frac{\alpha}{2},$$

ვწერთ $tg\,\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{m-n}{m+n}\;tg\,\dfrac{\alpha}{2}$; საიდანაც გალოგარითმებით ვიპოვით $x-y$ სხვაობას, და დასასრულ x და y კუთხეებს.

5. $x+y=\alpha;\; tgx+tgy=a.$

ჯერ დავწეროთ $tgx+tgy=\dfrac{Sin(x+y)}{Cosx\,Cosy}=a.$

შემდეგ $\dfrac{Sin\,\alpha}{Cosx\,Cos\,y}=a$; აქედან

$Cosx\cdot Cosy=\dfrac{Sin\,\alpha}{a}$. შემდეგში ამოხსნა იმნაირივეა, როგორც მე-3 მაგალითის ამოხსნა.

განვიხილოთ უკანასკნელად ტრიგონომეტრიული განტოლებანი შებრუნებულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებში.

1. $arc\,sin\,2x=arc\,sin\left(x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right).$

არ დაგვავიწყდეს, რომ $arcsinx$ ფუნქცია აიღება

$\left[-\dfrac{\pi}{2},\; +\dfrac{\pi}{2}\right]$ შუალედში.

თუ რკალები ტოლია, მათი სინუსებიც ტოლნი უნდა იყვნენ.

მაშ, $2x = x + \frac{\sqrt{3}}{4}$ და $x = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

შეამოწმებს თითონ მკითხველი

2. $arcsin x = arccos x$.

შევცვალოთ ამ განტოლების მეორე ნაწილი $arcsin \sqrt{1-x^2}$ ფუნქციით; მაშინ განტოლებას დავწერთ ასე:

$$arcsin x = arcsin \sqrt{1-x^2},$$

და მაშასადამე $x = \sqrt{1-x^2}$; $x_1 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

მეორე ფესვი არ ვარგა, რადგან

$$arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \neq arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. $arcsin x = 2 arcsin \frac{1}{2}$.

ავილოთ ორივე მხარის სინუსი. რადგან

$$Sin\, 2 arc\, sin \frac{1}{2} = 2 \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$Sin 2\alpha = 2 Sin\alpha \cdot Cos\alpha$ ფორმულის თანახმად და $Sin arcsin x = x$,

ამიტომ $$x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. $arc\, sin x = 2 arc\, cos x$.

მოვძებნოთ ორივე მხარის სინუსი, გვექნება:

$$x = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

აქედან $$x(1-2\sqrt{1-x^2}) = 0$$

$$x_1 = 0;\quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$ არ ვარგა

$$x_1 = 0 \text{ და } x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ ვარგა } x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

შევამოწმოთ მიღებული ამონახსნები.

ა) $arc\sin 0 = 0$, რადგან $arc\sin x$ აიღება $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში, ხოლო $arc\cos 0 = 90^\circ$; $2arc\cos 0 = 180^\circ$ და მაშასადამე, $x_1 = 0$ არ წარმოადგენს მოცემული განტოლების ამონახსენს.

ბ)
$$arc\sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -60^\circ,$$
$$2arc\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 300^\circ.$$

ეს ფესვიც არ ვარგა.

გ)
$$arc\sin\frac{\sqrt{3}}{2} = 60^\circ; \; 2arc\cos\frac{\sqrt{3}}{2} = 60^\circ,$$

და, მაშასადამე, x_2 წარმოადგენს მოცემული განტოლების ამონახსენს.

თ ა ვ ი VII

ტრიგონომეტრიის გამოყენებანი

§ 27. მე-15 და 23-ე პარაგრაფებში მოცემულია ამოცანები როგორც გეომეტრიიდან, ისე ფიზიკიდან, რომელთა ამოხსნა სწარმოებს **ტრიგონომეტრიის გამოყენებით**. მოვიყვანოთ სხვა მაგალითებიც.

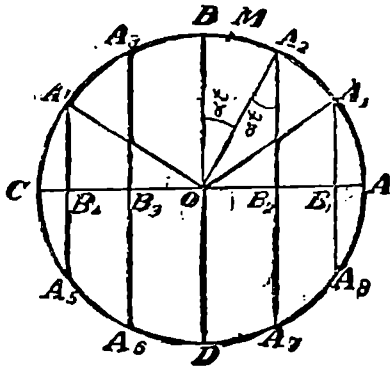
წარმოვიდგინოთ, რომ მოძრავ A წერტილზე, რომლის წონასწორობის წერტილი არის 0, მოქმედებს რაიმე მუდმივი **მიმართულების** ძალა, რომელიც ამ წერტილის წონასწორობის მდებარეობიდან დაცილების პროპორციულია. ასეთია, **მაგალითად**, ეგრეთწოდებული დრეკადი ძალები.

საზოგადოდ დრეკადი ძალები იწვევს დრეკად რხევებს, რომლებიც ჰარმონიული რხევადი მოძრაობის ამა თუ იმ შემთხვევას (სახეს) წარმოადგენენ.

აქ ჩვენ შევეხებით მარტივ ჰარმონიულ რხევით მოძრაობას.

წარმოვიდგინოთ, რომ ნივთიერი წერტილი წრეწირის B წერტილიდან (ნახ. 34) უცვლელი სიჩქარით იწყებს მოძრაობას და მთელ წრეწირს გაივლის T წამში. მაშინ, ცხადია, მისი პროექცია AC დიამეტრზე მოძრაობს O ცენტრიდან ჯერ A წერტილისაკენ,

შემდეგ A წერტილიდან C წერტილისაკენ და უბრუნდება O წერტილს (წონასწორობის მდებარეობაა), თუ ნივთიერი წერტილი შეასრულებს ერთ ბრუნს.



ნახ. 34.

პროექციის მოძრაობა AC დიამეტრზე თანაბარი აღარ იქნება. ნახაზზე წრეწირი დაყოფილია 12 თანასწორ ნაწილად. BA_2, A_2A_1, A_1A თანატოლ რკალს ნივთიერი წერტილი გაივლის ერთსა და იმავე დროის განმავლობაში, სახელდობრ, $\frac{T}{12}$ წმ განმავლობაში; მაგრამ მისი პროექცია AC დიამეტრზე იმავე $\frac{T}{12}$ წმ განმავლობაში შესაბამისად გაივლის ჯერ OB_2, შემდეგ B_2B_1, შემდეგ B_1A მანძილს. ცხადია,

$$OB_2 > B_2B_1 > B_1A$$

მაშ, პროექციის მოძრაობა AC დიამეტრზე სხვა სახისაა. ისმება კითხვა, რა კანონის მიხედვით ხდება პროექციის მოძრაობა?

დავუშვათ, რომ წრეწირზე მოძრავი წერტილი ერთ წამში გაივლის α რკალს, მაშინ t წამში გაივლის $BA_2 = \alpha t$ რკალს, ხოლო მისი პროექცია გაივლის $OB_2 = S = R\sin\alpha t$ მანძილს, სადაც R წრეწირის რადიუსია. მიღებული ფორმულა წარმოადგენს პასუხს დასმულ კითხვაზე. ასეთ მოძრაობას მარტივი ჰარმონიული რხევითი მოძრაობა ეწოდება.

აღვნიშნოთ, რომ ასეთი მოძრაობის დახასიათებისათვის არაა აუცილებელი α სიდიდის მოცემა. საკმარისია, თუ გვეცოდინება T სიდიდე — რხევის პერიოდი. მაშინ.

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} \text{ და } S = R\sin\frac{2\pi t}{T}.$$

თუ ნივთიერი წერტილი იწყებს თავის მოძრაობას არა B წერტილიდან, არამედ სხვა M წერტილიდან, მაშინ ჩვენი ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$S = R\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right),$$

სადაც $\varphi = BM$ რკალს. მარტივი ჰარმონიული რხევითი მოძრაობა ხდება AC დიამეტრის გასწვრივ.

ჰარმონიულ რხევით' მოძრაობას დიდი გამოყენება აქვს აკუსტიკისა და ოპტიკის მრავალი მოვლენის შესწავლისას.

როგორც დავინახეთ, მარტივი ჰარმონიული რხევითი მოძრაობა გამოიხატება სინუსოიდალური კანონით.

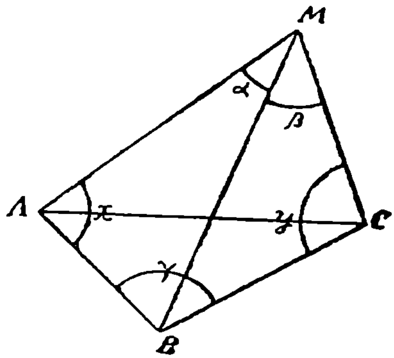
ამავე კანონის მიხედვით ხდება დინამომანქანების ცვლადი დენების ძალისა და ძაბვის ცვლილება. ამიტომ ელექტროტექნიკაში ასეთ დენებს სინუსოიდალური დენები ეწოდება. აქედან ცხადია ტრიგონომეტრიის თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა.

სამკუთხედების ამოხსნა საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ მანძილი ორ წერტილს შორის მისი უშუალოდ გაზომვის გარეშე. დედამიწაზე დიდი მანძილის უშუალო გაზომვა არ გვაძლევს საიმედო პასუხს, კუთხეების გაზომვა კი გაცილებით უფრო ადვილია და საკმაოდ ზუსტიც. ამიტომ დედამიწაზე გაზომვისას მიღებულია ასეთი ხერხი: დედამიწაზე აიღებენ ორ ისეთ წერტილს, რომელთა შორის მანძილის უშუალო გაზომვა ადვილია და საიმედო, და იმ სამკუთხედის კუთხეებს პოულობენ, რომლის ესა თუ ის ელემენტი საძებნ სიდიდეს წარმოადგენს. თუ როგორ ხდება სახელდობრ სხვადასხვა შემთხვევაში საძებნი სიდიდეების გამოანგარიშება, აქ არ ვილაპარაკებთ. ეს საკითხი დამაკმაყოფილებლად არის დამუშავებული რიბკინის ტრიგონომეტრიაში (იხ. §§ 117-დან 126-მდე, 1947 წ.) და არავითარ ზედმეტ განმარტებას არ მოითხოვს.

ტრიგონომეტრია გვეხმარება აგრეთვე დედამიწის მნიშვნელო-

ვანი ნაკვეთის ზედაპირის გეგმის გადაღებაში. აქ ჩვენ განვიხილავთ ეგრეთწოდებულ პოტენოტის ამოცანას.

წარმოვიდგინოთ, რომ რუკაზე (გეგმაზე), რომლის მასშტაბი ცნობილია, აღნიშნულია სამი სხვადასხვა ადგილი A, B, C; საჭიროა ამავე რუკაზე მეოთხე M ადგილის აღნიშვნა (ნახ. 35). ცხა-



ნახ 35.

დია, თუ ვიპოვით MAB და MCB კუთხეს, ადვილად ავაგებთ M წერტილს.

რუკა საშუალებას გვაძლევს გავიგოთ ABC სამკუთხედის AB და BC გვერდი და მათ შორის მდებარე ABC კუთხე. გარდა ამისა, კუთხსაზომი იარაღით გავიგებთ AMB და BMC კუთხესაც. ამრიგად, მონაცემების რიცხვი საკმაოა პოტენოტის ამოცანის ამოსახსნელად.

მოვიტანოთ აღნიშვნები:
$AB = a$; $BC = b$; $\angle ABC = \gamma$; $\angle AMB = \alpha$; $\angle MCB = \beta$. ეს ყველა ფერი ცნობილია. $\angle MAB = x$; $\angle MCB = y$.

$MABC$ ოთხკუთხედია. კუთხეების ჯამი 360° ეტოლება და, მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ: $x + y = 360° - (\alpha + \beta + \gamma)$.

თუ გავიგებთ $x - y$ სხვაობას, გამოვიანგარიშებთ x და y კუთხეს.

შევადგინოთ პროპორცია:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta},$$

რადგან ABM და BMC სამკუთხედებიდან ჩანს, რომ

$$BM = \frac{a \sin x}{\sin \alpha} = \frac{b \sin y}{\sin \beta}.$$

ვიპოვოთ დამხმარე φ კუთხე ისეთი, რომ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta};$$

ზემოთ მიღებული პროპორცია ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1}.$$

ავიღოთ შემდეგი წარმოებული პროპორცია:

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi + 1}.$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}},$$ ხოლო

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi + 1} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi 45^\circ} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ).$$

ახლა ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ).$$

რადგან კუთხე φ ვიპოვეთ და $x + y$ ჯამიც ცნობილია, ვიპოვით $x - y$ სხვაობას და შემდეგ x და y კუთხეს.

როგორც ვხედავთ, ტრიგონომეტრიას პრაქტიკაში ძალიან ფართო გამოყენება აქვს.

სავარჯიშო

1. როგორ იცვლება $\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x$ ფუნქცია $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში? სადაა ის დადებითი, სად უარყოფითი, სად ნულის ტოლი?

2. $\mathrm{Ctg}\,\alpha = -\frac{3}{5}$. რას ეტოლება $\sin\alpha$?

3. გაამარტივეთ ჯამი: $\mathrm{ctg}\,\alpha + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. პ ა ს. $\mathrm{cosec}\,\alpha$.

4. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta} = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta$$

5. მოცემულია ფუნქციები:

1) $y = 1 + \sin x$, 2) $\frac{\sin x}{1+\cos x}$, 3) $2\sin x$,

4) $\sqrt{x} + \cos x$, 5) $\lg x + \cos x$, 6) $2\cos x$. რომელია პერიოდული?

პას. პირველი, მეორე, მესამე და მეექვსე პერიოდულია, დანარჩენი არა.

6. იპოვეთ $\sin x \cos x$ ფუნქციის პერიოდი. პ ა ს. $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, რომლის პერიოდია π.

7. იპოვეთ 1) $\sin 2\pi x$, 2) $\sin 4\pi x$, 3) $\mathrm{tg}\,\frac{x}{3}$ პერიოდი. პ ა ს. 1) 1, 2) $\frac{1}{2}$, 3) 3π.

8. ააგეთ $\sin(x+\alpha)$ და $\sin(x-\alpha)$ ფუნქციის გრაფიკი. რითი განსხვავდებიან ამ ფუნქციების გრაფიკები $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკისაგან?

9. ააგეთ გრაფიკები $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right)$ და $\sin(x \pm \pi)$ ფუნქციებისა და ამ გრაფიკების საშუალებით გამოიყვანეთ ცნობილი დაყვანის ფორმულები.

10. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{7}$; რას ეტოლება $\alpha+\beta$ ჯამი? α და β მახვილი კუთხეებია. პ ა ს. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

11. გაამარტივეთ წილადი $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

12. გაამარტივეთ წილადი $\frac{1-2\sin^2\alpha}{2(\cos^2\alpha-1)}$.

13. გაამარტივეთ $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$.

14. არგუმენტის რა მნიშვნელობებისათვის $[0, 2\pi]$ შუალედში $\sin x+\cos x$ ჯამი იქნება: 1) დადებითი, 2) უარყოფითი, 3) ნულის ტოლი?

15. არგუმენტის რა მნიშვნელობებისათვის აქვს აზრი შემდეგ ფუნქციებს:

1) $\sqrt{\sin x}$, 2) $\sqrt{2-\sin x}$ 3) $\sqrt{2\sin x}$, 4) $\sqrt{\sin 2x}$,

5) $\sqrt{1-\cos x}$?

16. მოცემულია ტოლობა $\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$; შეიძლება აქედან მივიღოთ დასკვნა, რომ $arc\sin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{4}\pi$?

პას. არ შეიძლება, რადგან $ars\sin x$ ფუნქციის განსაზღვრის არე $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედია. შეიძლება დავწეროთ

$$arc\sin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

17. სწორია ტოლობა $arc\sin(\sin\frac{3}{4}\pi)=\frac{3}{4}\pi$? პას. არა. სწორია ასეთი დასკვნა: $arc\sin\left(\sin\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\pi}{4}$,

ა გ რ ე თ ვ ე $arc\sin\left(\sin\frac{3}{2}\pi\right)=-\frac{\pi}{2}$.

18. ამოხსენით განტოლება $arc \sin x = arc \cos \sqrt{1-x^2}$
პას.: $0 \leqslant x \leqslant 1$.

19. ამოხსენით განტოლება $\cos x = |x|$.

ეს განტოლება ამოიხსნება ასე: ავაგოთ კოსინუსოიდი და $y = |x|$ ფუნქციის გრაფიკი. შემდეგ ვპოულობთ ნახაზზე ორი გრაფიკის კვეთის წერტილებს. განტოლებას ორი ამონახსნი აქვს.

20. დაიყვანეთ ლოგარითმულ სახეზე $1+\sin\alpha+\cos\alpha$ ჯამი.

მ ი თ ი თ ე ბ ა.

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right);$$ დანარჩენი ნათელია.

21. დაიყვანეთ ლოგარითმულ სახეზე

$$2\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\alpha$$ ჯამი.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ეს ჯამი ადვილად დაიყვანება წინა მაგალითის სახეზე; მართლაც, ამ ჯამის პირველი წევრი ეტოლება $1+\sin\alpha$.

თ ა ვ ი VIII

ტრიგონომეტრიის სახელმძღვანელოების მოკლე მიმოხილვა

§ 28. ელემენტარული მათემატიკის არც ერთ დარგში არ მოგვეპოვება იმდენი სახელმძღვანელო, რამდენიც ტრიგონომეტრიაში. დავასახელებ სწორხაზოვანი ტრიგონომეტრიის სახელმძღვანელოების ავტორებს.

ნ. ბილიბინი, ემილ ბორელი, ბრიო და ბუკე, ს. ბუდაევსკი, გებელი, გესენბერგი, პროფ. გლაზენაპი, ა. დიმიტრიევი, ნ. დისენიი (Ди-Сеньи), ეგუნოვი, ა. ვოინოვი, პ. ზლოტჩანსკი, ნ. კილდიუშევსკი, ა. მალინინი, ვ. მროჩეკი, პროფ. ს. ნოვოსელოვი, ვ. კროგიუსი, ბ. პიოტროვსკი, ე. პრჟევალსკი, ა. ჟილინსკი, ა. რებიერი, ნ. რიბკინი, ა. სერრე, ნ. სლეტოვი (Слетов), თ. სიმაშკო, გ. ტიმე, ნ. შაპოშნიკოვი, ვ. შიდლოვსკი, ვერა შიფ (Вера

Шифф), ს. ჩემოლოსოვი, პ. შმულევიჩი, პროფ. ა. ბერმანტი და ლ. ლუსტერნიკი.

ეს სახელმძღვანელოები გამოცემულია სხვადასხვა დროს და, რა თქმა უნდა, ერთიმეორისაგან განირჩევიან:

1. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა განსაზღვრის პრინციპით.

ზოგი ავტორი ასეთ განსაზღვრას ტრიგონომეტრიული ხაზების საშუალებით იძლევა, მაგალითად, ნ. რიბკინი. ასეთი ავტორების რიცხვი ყველაზე მეტია.

ზოგს ტრიგონომეტრიული ფუნქციის ცნება მოცემული აქვს პროექციის შესახებ ძირითადი თეორემების გამოყენებით. ასეთია ა. ბერმანტის და ლ. ლუსტერნიკის „ტრიგონომეტრია", სადაც ეგრეთწოდებული შეკრების თეორემა დამტკიცებულია პროექციის თეორიის საფუძველზე.

ასეთივე მიდგომით დამუშავებულია აქ აღნიშნული საკითხები ბრიო-ბუკეს, ბუდაევსკის, პიოტროვსკის, კროგიუსის და ნოვოსელოვის სახელმძღვანელოებში. ასეთი ავტორების რიცხვი ჯერჯერობით მცირეა.

ზოგი ავტორი ტრიგონომეტრიული ცნების დამუშავების დროს სარგებლობს მართკუთხა კოორდინატებით, მაგალითად, ემილ ბორელი და ვერა შიფი. ასეთი ავტორების რიცხვი ყველაზე ნაკლებია.

ამასთან უნდა აღვნიშნოთ, რომ ეს ორი ავტორიც პროექციის ცნებით სარგებლობს.

2. რამდენად დაწვრილებით და მაღალხარისხოვნად არის გადმოცემული მასალა.

ამ მხრივ შეიძლება დავასახელოთ ა. სერრე, ნ. ბილიბინი, ე. პრჟევალსკი, რომელთა სახელმძღვანელოები მდიდარია ამოცანებით; პიოტროვსკი, ნოვოსელოვი, ბერმანტი და ლუსტერნიკი, კროგიუსი, შმულევიჩი და გლაზენაპი, რომელთა სახელმძღვანელოებში დიდი ყურადღება ექცევა გამოანგარიშების შემოწმებას (საკონტროლო შემოწმებას).

გლაზენაპის სახელმძღვანელოში მოყვანილია სხვადასხვა ამოცანა გეომეტრიიდან, მექანიკიდან, ფიზიკიდან, გეოდეზიიდან და ასტრონომიიდან. ზუსტ და კარგად ჩამოყალიბებულ განსაზღვრებს და თეორემების მტკიცებას იძლევა ნოვოსელოვის ტრიგონომეტრია, რომელიც შედგენილია სამასწავლებლო ინსტიტუტისათვის,

3. რამდენად ვრცლად და წესიერად არის დამუშავებული შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების თეორია.

ამ მხრივ დავასახელებთ შემდეგ ავტორებს: ს. ბუდაევსკის, ა. სერრეს, ვ. მროჩეკს, ნ. შაპოშნიკოვს, კროგიუსს და ყველაზე მეტად ს. ნოვოსელოვს. ამ უკანასკნელად დასახელებული ავტორის წიგნი: „Обратные тригонометрические функции" ყველაზე უკეთესად არის შედგენილი.

4. რამდენად სარგებლობს ავტორი გრაფიკული ხერხით.

ამ მხრივ დავასახელებთ ს. ნოვოსელოვს, ვ. მროჩეკს, ა. რებიერს, ს. ბუდაევსკის, ნ. ბილიბინს, ბერმანტს და ლუსტერნიკს.

ქართულ ენაზე მოგვეპოვება შემდეგ ავტორთა ტრიგონომეტრიის სახელმძღვანელოები: ა. დევიძე და ხარაბაძე, კ. სულაქველიძე, ს. შარაშენიძე, ჯიშკარიანი და ა. ხარაბაძე.

გარდა ამისა, ქართულ ენაზე არის ნათარგმნი რიბკინის, აგრეთვე ბერმანტისა და ლუსტერნიკის ტრიგონომეტრიის სახელმძღვანელოები.

ნაწილი II

გეომეტრიული ამოცანები აგებაზე

(კონსტრუქტიული ამოცანები)

A. ამოცანის ამოხსნა

გეომეტრიული ამოცანა აგებაზე წარმოადგენს ისეთ ამოცანას, რომელიც მოითხოვს რაიმე ნაკვთის ამოცანაში მოცემული პირობების დახაზვას ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, აგებაზე ამოცანის ამოხსნა წარმოებს სწორი ხაზებისა და წრეხაზების გავლების საშუალებით.

გეომეტრიულ ამოცანას აგებაზე შეიძლება ჰქონდეს ამონახსენთა ერთი, ორი და მეტი რაოდენობა.

ამოცანის სრული ამოხსნა შედგება შემდეგი ოთხი ნაწილისგან.

1. ამოცანის ანალიზი და მისი ამოხსნის გეგმის შემუშავება;
2. გეგმის შესრულება ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით;
3. დამტკიცება, რომ მიღებული ნაკვთი მართლაც აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას.
4. ამონახსენთა ყველა შესაძლებელი შემთხვევისა და მათი რაოდენობის გამოკვლევა.

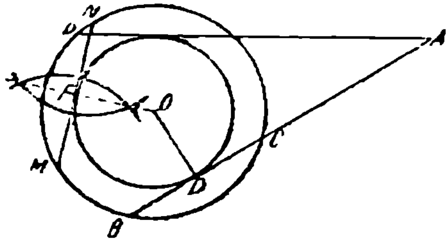
მაგალითისათვის გავარჩიოთ შემდეგი ამოცანა:

წრეხაზის გარეთ მოცემული A წერტილიდან გავავლოთ მკვეთი ისე, რომ ამ მკვეთის წრეხაზის შიგნითა ნაწილი მოცემულ მონაკვეთს ეტოლებოდეს.

I. ანალიზი

წარმოვიდგინოთ, რომ AB საძებნი მკვეთია (ნახ. 1). ადვილი გასაგებია, რომ AB მკვეთი იქნება მხები იმ წრეხაზისა, რომლის ცენტრი O წერტილშია, ხოლო რადიუსი ეტოლება OD მონაკვეთს, რომელიც AB მკვეთის პერპენდიკულარულია. OD რადიუსი რომ ვიპოვოთ, მოცემულ წრეში ჩავხაზოთ BC მონაკვეთის ტოლი ქორდა,

მაგალითად MN, და O წერტილიდან დავუშვათ პერპენდიკულარი OF. ნათქვამიდან გამომდინარეობს აგების ხერხი.



ნახ. 1.

II. ნაკვთის აგება

მოცემულ წრეხაზში ჩავხაზოთ მოცემული მონაკვეთის ტოლი ქორდა MN. O წერტილიდან დავუშვათ მასზე OF პერპენდიკულარი და OF რადიუსით შემოვხაზოთ წრეხაზი. A წერტილიდან გავავლოთ მიღებული წრეხაზის მხები AB და AP.

III. დამტკიცება

(აგების სისწორისა)

რადგან მხები AB დაშორებულია O წერტილიდან $OD=OF$ მანძილით, ამიტომ მონაკვეთი (ქორდა) EC ეტოლება ქორდა MN-ს: ამრიგად AB მკვეთის წრეხაზის შიგნითა ნაწილი მოცემული მონაკვეთის ტოლია და, მაშასადამე, AB სწორედ ის მკვეთია, რომელსაც ვეძებდით.

IV. ამონახსენის გამოკვლევა

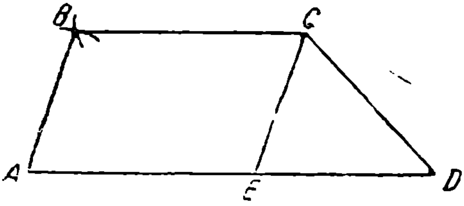
თუ მოცემული მონაკვეთი წრეხაზის დიამეტრზე მეტია, ამოცანა შეუძლებელი ხდება.

წრის გარეთ მდებარე ერთი წერტილიდან შეიძლება გავავლოთ წრეხაზისადმი ორი მხები, ამიტომ A წერტილიდან გავლებული ორივე მხები AB და AP აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას და ამგვარად ამოცანას ორი ამონახსენი აქვს.

განვიხილოთ კიდევ მაგალითი: ავაგოთ ტრაპეცია, რომლის ოთხივე გვერდი მოცემულია.

I. ანალიზი

წარმოვიდგინოთ, რომ საძებნი ტრაპეცია $ABUD$ აგებულია (ნახ. 2) მაშინ, თუ C წერტილზე გავავლებთ AB გვერდის პარალელურ CE ხაზს, გამოიყოფა ნაკვთი CDE, რომლის აგება არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.



ნახ. 2.

მართლაც, ეს ნაკვთი სამკუთხედია. ამ სამკუთხედის გვერდი CD მოცემულია, გვერდი $CE=AB$, რომელიც აგრეთვე მოცემულია, გვერდი ED ეტოლება მოცემულ AD და BC გვერდების სხვაობას. მაშასადამე, ჯერ ავაგებთ CDE სამკუთხედს და შემდეგ ადვილად მივიღებთ თვით $ABCD$ ტრაპეციასაც.

II. ტრაპეციის აგება

CD, CE და ED სამი ცნობილი მონაკვეთის საშუალებით ავაგოთ CDE სამკუთხედი. განვაგრძოთ შემდეგ გვერდი DE მარცხნივ და მოვკვეთოთ BC გვერდის ტოლი მონაკვეთი EA. საჭიროა ვიპოვოთ კიდევ წვერო B. ამას ვიპოვით, თუ C წერტილიდან შემოვხაზავთ რკალს $CB=AE$ რადიუსით, ხოლო A წერტილიდან $AB=CF$ რადიუსით და ამოვარჩევთ გადაკვეთის B წერტილს AD გვერდის ზევით და აგებული სამკუთხედის მარცხნივ. (იხ. ნახ. 2).

III. დამტკიცება

დავამტკიცოთ, რომ აგებული ნაკვთი მართლაც ის ტრაპეციაა, რომელსაც ვეძებდით.

რადგან $CB=AE$ და $AB=CE$, ამიტომ $ABCE$ ნაკვთი პარალელოგრამი იქნება, ე. ი. გვერდი BC პარალელურია AD გვერდისა: რადგან ED ეტოლება მოცემული ფუძეების სხვაობას, ამიტომ AD ეტოლება სწორედ იმ მონაკვეთს, რომელიც მოცემულია, როგორც ტრაპეციის ქვემო ფუძე. გვერდები AB, BC, CD შესაბამისად ეტოლება მოცემულ მონაკვეთებს.

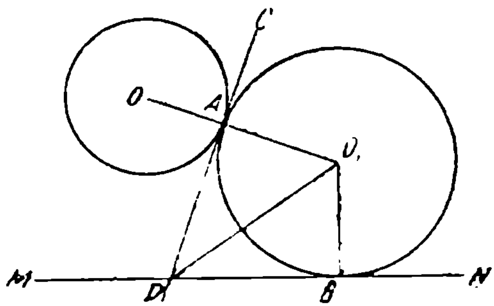
IV. ამოხსნის გამოკვლევა

ცხადია, რომ ტრაპეციის აგებისათვის გვესაჭიროება CDE სამკუთხედის აგება; ეს კი მოხდება მაშინ, როცა $CE+CD > ED$, ან

სხვანაირად, $CE+CD > AD - BC$. მაშასადამე, ტრაპეციის აგება შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც მისი ფერდების ჯამი მეტია ფუძეთა სხვაობაზე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: B წერტილის პოვნა შეგვიძლია აგრეთვე, თუ C წერტილიდან გავავლებთ AD-ს პარალელურ სწორს, ხოლო A წერტილზე CE-ს პარალელურს. ამ შენიშვნიდან გამომდინარეობს, რომ ამოცანას აქვს ერთი ამონახსენი, ე. ი. პირობების მიხედვით შეიძლება მხოლოდ ერთი გარკვეული ტრაპეციის აგება.

გ ა ნ ვ ი ხ ი ლ ო თ კ ი დ ე ვ ე რ თ ი მ ა გ ა ლ ი თ ი. ავაგოთ წრეხაზი, რომელიც ეხებოდეს მოცემულ MN სწორს და მოცემულ O წრეხაზს A წერტილში.



ნახ. 3.

I. ა ნ ა ლ ი ზ ი

წარმოვიდგინოთ, რომ O_1 წრეხაზი საძებნ წრეხაზს წარმოადგენს. მაშინ, ცხადია, რომ OAO_1 ხაზი სწორ ხაზს წარმოადგენს და, მაშასადამე, საძებნი წრეხაზის ცენტრი უნდა ვეძებოთ OA სწორზე. გარდა ამისა შევნიშნოთ, რომ O წრეხაზისადმი გავლებული მხები A წერტილზე იმავე დროს იქნება მხები O_1 წრეხაზისადმი იმავე A წერტილში. ნახ. 3-ზე ეს მხები CD სწორია. მაშასადამე, წერტილი O_1 უნდა მდებარეობდეს აგრეთვე CDN კუთხის ბისექტრისაზე.

II. ა გ ე ბ ა

გავავლოთ O წრეხაზისადმი CD მხები A წერტილში. გავყოთ $\angle CDN$ შუაზე, განვაგრძოთ OA სწორი. OA სწორისა და CDN

კუთხის ბისექტრისის გადაკვეთის წერტილი O_1 იქნება საძებნი წრეხაზის ცენტრი, რადიუსი კი O_1A. ნახაზზე $O_1B \perp MN$.

III. დამტკიცება

OO_1 სწორი გეომეტრიული ადგილია ყველა იმ წრეხაზების ცენტრებისა, რომლებიც ეხებიან O წრეხაზს A წერტილში; CDN კუთხის ბისექტრისა კი გეომეტრიული ადგილია იმ წრეხაზების ცენტრებისა, რომლებიც ეხებიან ამ კუთხის გვერდებს, (ე. ი. CD და MN-ს). რადგან O_1 წერტილი წარმოადგენს ამ ორ გეომეტრიულ ადგილთა გადაკვეთის წერტილს, ამიტომ აგებული O_1 წრეხაზი ეხება როგორც მოცემულ წრეხაზს, ისე MN სწორს.

IV. ამოხსნის გამოკვლევა

გარდა O_1 წრეხაზისა, რომელიც აგებულია ნახ. 3-ზე, შეიძლება ავაგოთ მეორე წრეხაზიც, თუ ცენტრად მივიღებთ OA სწორის და CDM კუთხის ბისექტრისის გადაკვეთის წერტილს. ამგვარად მივიღებთ ორ ამონახსენს. პირველი ამონახსენი გვაძლევს მოცემული და აგებული წრეხაზის გარეგან შეხებას. მეორე კი — შინაგან შეხებას.

თუ OA ეპერპენდიკულარება MN სწორს, მაშინ აგება მარტივდება, ამოცანას ერთი ამონახსენი რჩება; ადგილი ექნება ან შინაგან ან გარეგან შეხებას. თუ კი MN სწორი გაივლის, O და A წერტილებზე, მაშინ ამოცანას არ ექნება არც ერთი ამონახსენი.

მკითხველს არ უნდა ეგონოს, რომ სწორი MN უსათუოდ უნდა იყოს აღებული მოცემული წრეხაზის გარეშე.

შემდეგში, ადგილის მოგებისა და ამოცანათა მეტი რიცხვის ამოხსნის მიზნით, არ ვიძლევით ამოხსნას ასეთი ვრცელი სახით, და მკითხველს ევალება თვითონ გამოჰყოს ამოხსნის ის მთავარი ოთხი მომენტი, რომლის შესახებ ვისაუბრეთ ზემოთ.

B. ამოცანათა ამოხსნის ხერხები

თუ გადავათვალიერებთ იმ ხერხებს, რომლებსაც ჩვენ ვიყენებთ სხვადასხვა გეომეტრიულ ამოცანათა აგებაზე ამოხსნის დროს, დავინახავთ, რომ ამ ხერხების რიცხვი არც ისე დიდია.

დავასახელებთ იმ ხერხებს, რომლებითაც სარგებლობს მასწავლებელი და მოწაფე სრულ საშუალო სკოლაში:

1. გეომეტრიულ ადგილთა ხერხი.

2. მაგავსობის ხერხი (ან მსგავსი ნაკვთების ხერხი).
3. დამხმარე ნაკვთების ხერხი.
4. ნაკვთის გარდაქმნის ხერხი.
5. ალგებრული ხერხი.

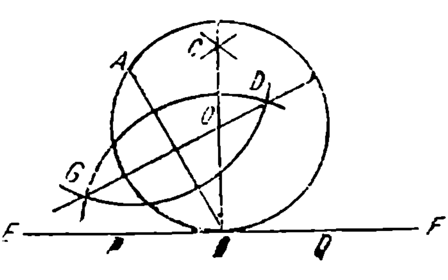
დავახასიათოთ თითოეული ხერხი ცალ-ცალკე.

I. გეომეტრიულ ადგილთა ხერხი მდგომარეობს შემდეგში: ძლიერ ხშირად მოცემული ამოცანა ადვილად ამოიხსნება, თუ ვიპოვით ისეთ M წერტილს, რომლის ცოდნა საკმარისია იმისათვის, რომ შემდეგ ავაგოთ საძებნი ნაკვთი. თუ წერტილი M ისეთი წერტილია, რომ ერთი მხრივ ის დევს ერთს გეომეტრიულ ადგილზე და მეორე მხრივ მეორე გეომეტრიულ ადგილზე, მაშინ, ცხადია, რომ M წერტილის საპოვნელად ჩვენ ვისარგებლებთ ამ ორი გეომეტრიული ადგილით. საჭირო M წერტილი იქნება გეომეტრიულ ადგილთა გადაკვეთის წერტილი.

ავიღოთ ამოცანა.

1. ავაგოთ წრეხაზი, რომელიც გაივლის A წერტილზე და ეხება მოცემულ EF სწორს B წერტილში (ნახ. 4).

ცხადია, რომ ადვილად ავაგებთ წრეხაზს, თუ როგორმე ვიპოვით მის ცენტრს, რადგან მაშინ გვეცოდინება რადიუსიც. მაშასადამე, ზემოთ დასახელებული M წერტილის როლს ამ ამოცანაში თამაშობს საძებნი წრეხაზის ცენტრი. მაგრამ ნათელია, რომ ეს ცენტრი ეკუთვნის ორ გეომეტრიულ ადგილს — ა) გეომეტრიულ ადგილს იმ წრეხაზების ცენტრებისა, რომლებიც ეხება EF სწორს B წერტილში და ბ) გეომეტრიულ ადგილს იმ წრეხაზების ცენტრებისა, რომლებიც გაივლის A და B წერტილებზე.



ნახ. 4.

პირველი გეომეტრიული ადგილი იქნება სწორი ხაზი, რომელიც ეპერპენდიკულარება EF სწორს B წერტილში, მეორე გეომეტრიული ადგილი იქნება სწორი, რომელიც ეპერპენდიკულარება AB ქორდას და ჰყოფს მას შუაზე. აქედან ჩანს, რომ ამოცანა აიგება შემდეგნაირად: B წერტილიდან გავავლებთ $BC \perp EF$; AB მონაკვეთის შუაწერტილზე გავავლებთ $GD \perp AB$; CB და GD-ს გადაკვეთაში მივიღებთ O წერტილს, რომელიც იქნება საძებნი წრეხაზის ცენტრი,

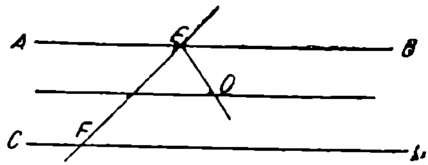
ხოლო OB მონაკვეთი მისი რადიუსი. თუ B წერტილზე EF სწორისადმი გავლებული პერპენდიკულარი გაივლის მოცემულ A წერტილზე, მაშინ ცენტრი იქნება AB მონაკვეთის შუაწერტილში.

ამოცანა შეუძლებელია იმ შემთხვევაში, როდესაც წერტილი A დევს EF სწორზე და არ ემთხვევა B წერტილს. უკანასკნელ შემთხვევაში ამოცანას ექნება უსასრულო მრავალი ამონახსენი.

ამოცანას, რომელსაც უსასრულო მრავალი ამონახსენი აქვს, განუზღვრელი ამოცანა ეწოდება.

2. განვიხილოთ კიდევ შემდეგი მაგალითი.

მოცემულია ერთმანეთის პარალელური ორი სწორი ხაზი AB და CD, და მკვეთი EF. გავავლოთ წრეხაზი, რომელიც ეხება სამივე ხაზს (ნახ. 5).



ნახ. 5.

ცხადია, რომ წრეხაზს ადვილად გავავლებთ, თუ ვიპოვით მის ცენტრს. უკანასკნელი დევს ერთის მხრივ $\angle E$-ს ბისექტრისზე, მეორეს მხრივ სწორზე, რომელიც ეპარალელება AB და CD სწორებს და თანასწორი მანძილით დაშორებულია ორივესგან. დანარჩენი ნათლად ჩანს ნახაზიდან. ამოცანა ყოველთვის შესაძლებელია. O წერტილი საძებნი წრეხაზის ცენტრია.

მკითხველი თითონ დაასახელებს იმ ორ გეომეტრიულ ადგილს, რომლითაც ჩვენ ვისარგებლეთ.

შეიძლებოდა გვესარგებლა ორი ბისექტრისითაც.

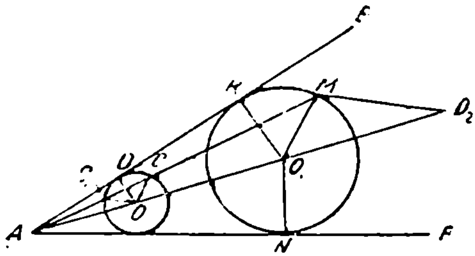
II. მსგავსობის ხერხი გამოიხატება შემდეგში: თუ საძებნი ნაკვთის აგება უშუალოდ გვიძნელდება, მაგრამ ადვილია მისი მსგავსი ნაკვთის აგება, ჯერ ამ უკანასკნელს ვაგებთ, რის შემდეგ მას ვადიდებთ ან ვამცირებთ იმდენჯერ, რამდენჯერაც საჭიროა, რომ დავაკმაყოფილოთ ამოცანის პირობები.

მაგალითები.

1. მოცემულ EAF კუთხეში ჩავხაზოთ ისეთი წრეხაზი, რომელიც კუთხის შიგნით მდებარე M წერტილზე გადიოდეს (ნახ. 6).

ჩავხაზოთ ჯერ რომელიმე წრეხაზი; ცხადია, მისი ცენტრი იქნება AB ბისექტრისზე. ამ უკანასკნელზე ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი O და დავუშვათ AE სწორზე პერპენდიკულარი OD. OD რადიუსით შემოვხაზოთ წრეხაზი. ეს წრეხაზი გადაჰკვეთს AM სწორს C და C_1 წერტილში. თუ ახლა OD რადიუსს გავადიდებთ იმდენჯერ, რამ-

დენჯერაც MA მეტია AC-ზე, ცხადია, ადვილად ავაგებთ საძებნ წრეხაზს. ამ მიზნით გავავლოთ M წერტილზე ხაზი MO_1 პარალელური OC ხაზისა. O_1 წერტილი იქნება საძებნი წრეხაზის ცენტრი, MO_1 კი რადიუსი. ეს რომ დავამტკიცოთ, საკმარისია გამოვარკვიოთ



ნახ. 6.

რომ $O_1M=O_1K=O_1N$, სადაც O_1K და O_1M წარმოადგენენ შესაბამისად AE და AF გვერდებისადმი პერპენდიკულარებს.

რადგან $\frac{O_1M}{OC}=\frac{AO_1}{AO}$ და $\frac{O_1K}{OD}=\frac{AO_1}{AO}$, შეიძლება დავწეროთ, რომ $\frac{O_1M}{OC}=\frac{O_1K}{OD}$; მაგრამ $OC=OD$, მაშასადამე $O_1M=O_1K$. გარდა ამისა $O_1K=O_1N$ იმიტომ, რომ O წერტილი დევს AO ბისექტრისზე. საბოლოოდ გვექნება: $O_1M=O_1K=O_1N$. თუ O წრეხაზის და AM სწორი ხაზის გადაკვეთის მეორე C_1 წერტილს შევუერთებთ O წერტილს და გავავლებთ MO_2-ს პარალელურად OC_1 რადიუსისა, ვიპოვით მეორე ამონახსენს. მეორე წრეხაზის ცენტრი იქნება O_2 წერტილში.

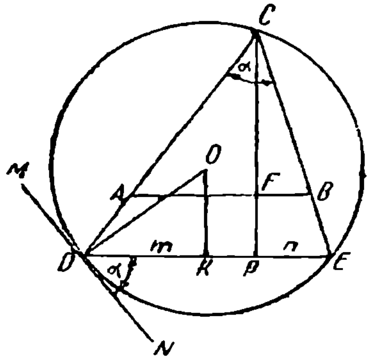
2. ავაგოთ სამკუთხედი ABC, რომელშიაც მოცემულია C წვეროსთან მდებარე კუთხე α, სიმაღლე h ამ წვეროდან დაშვებული და შეფარდება $\frac{m}{n}$ იმ მონაკვეთებისა, რომლებადაც იყოფა ფუძე სიმაღლით. (ნახ. 7).

თუ შეფარდება $\frac{m}{n}$ მოცემულია ორი მონაკვეთის შეფარდების სახით, ამოცანას ამოვხსნით ასე:

ნახაზზე $DP=m$; $PE=n$; $\angle EDN=\alpha$; O წრეხაზის ცენტრია. წრეხაზი ეხება MN სწორს D წერტილში და გაივლის D და E წერტილებზე.

O ცენტრის საპოვნელად საჭიროა აღვმართოთ MN სწორისადმი D წერტილიდან DO პერპენდიკულარი და DE სწორისადმი მის შუაწერტილიდან KO პერპენდიკულარი. ცენტრი O წარმოადგენს ამ ორი პერპენდიკულარის გადაკვეთის წერტილს.

შემდეგ OD რადიუსით შემოვხაზოთ წრეხაზი, P წერტილიდან აღვმართოთ პერპენდიკულარი და ამ პერპენდიკულარისა და წრეხაზის გადაკვეთის წერტილი C შევუერთოთ D და E წერტილებს. თუ ახლა C წერტილიდან მოვზომავთ CF მონაკვეთს, მოცემული h სიმაღლის ტოლს, და F წერტილზე გავავლებთ AB სწორს DE-ს პარალელურს, მივიღებთ საძებნ ABC სამკუთხედს. მართლაც, ამ სამკუთხედში კუთხე $C=\alpha$, რადგან ის იზომება იმავე რკალის ნახევრით, რომლითაც იზომება კუთხე EDN; CF სიმაღლე ეტოლება h მონაკვეთს, გარდა ამისა $\frac{AF}{FB}=\frac{DP}{PE}=\frac{m}{n}$



ნახ. 7.

მსგავსობის ხერხი ნაყოფიერად გამოიყენება შემდეგ შემთხვევებში:

ა) თუ ამოცანაში მოცემულია მხოლოდ ერთი ხაზოვანი ელემენტი (მაგალ., გვერდი, სიმაღლე, ბისექტრისა, მედიანა, პერიმეტრი), დანარჩენი მონაცემები კი კუთხეებს და შეფარდებებს წარმოადგენს, როგორც ეს დავინახეთ მეორე ამოცანაში.

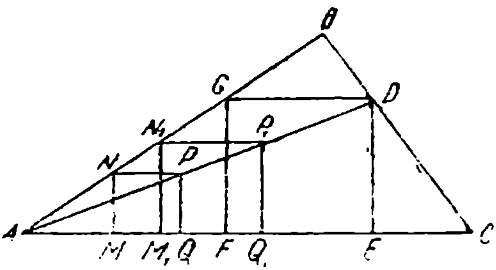
ბ) თუ ამოცანა მოითხოვს ისეთი ნაკვთის აგებას, რომელსაც უნდა ჰქონდეს გარკვეული მდებარეობა მოცემული ხაზებისა და წერტილების მიმართ, და თუ ამ ამოცანის ერთი პირობის მოცილებით შეგვიძლია ავაგოთ მთელი სისტემა საძებნი ნაკვთის მსგავს და მსგავსად განწყობილ ნაკვთებისა.

ასეთ შემთხვევას წარმოადგენს პირველი ამოცანა.

ამ შემთხვევაზე ამოვხსნათ კიდევ ერთი მაგალითი.

3. მოცემულ ABC სამკუთხედში ჩავხაზოთ კვადრატი ისე, რომ მისი ერთი გვერდი AC ფუძეზე მდებარეობდეს, დანარჩენი ორი წვერო კი AB და BC გვერდებზე. AC ფუძედ უდიდესი გვერდი ავიღოთ. (ნახ. 8).

ავაგოთ ისეთი კვადრატი, რომლის ერთი გვერდი ემთხვევა AC ფუძეს, და ერთი წვერო დევს AB გვერდზე. ამით ჩვენ გავთავისუფლდით ერთი მოთხოვნისაგან, რომ კვადრატის წვერო მდებარეობდეს აგრეთვე BC გვერდზე. ცხადია, რომ ასეთ პირობებში ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ უამრავი კვადრატი. სისტემა ამ კვადრატებისა წარმოადგენს მსგავს და მსგავსად დალაგებულ ნაკვთების სისტემას.



ნახ. 8.

ამ კვადრატების წვეროები P, P_1 და ასე შემდეგ, ყველა ერთ AP სწორზე იქნებიან დალაგებული. საძებნი კვადრატის D წვეროც ამ AP სწორზე უნდა იყოს, ე. ი. წერტილი D წარმოადგენს AP და BC სწორების გადაკვეთის წერტილს. მაშასადამე, საკმაოა ავაგოთ ნებისმიერი კვადრატი $MNPQ$, შემდეგ გავავლოთ AP სწორი, ვიპოვოთ წერტილი D. მაშინ $DEFG$ კვადრატი საძებნი კვადრატი იქნება. დავამტკიცოთ ეს.

$DG \parallel AC$. APN და ADG მსგავსი სამკუთხედებიდან გვაქვს:

$$\frac{AD}{AP}=\frac{DG}{PN};$$

აგრეთვე APQ და ADE სამკუთხედებიდან ვწერთ:

$$\frac{AD}{AP}=\frac{DE}{PQ};$$

მაშასადამე, $\dfrac{DG}{PN}=\dfrac{DE}{PQ}$.

რადგან $PN=PQ$ აგების თანახმად, ამიტომ $DE=DG$. გარდა ამისა, რადგან $DE\perp AC$ და $DG \parallel AC$, კუთხე GDE მართია, და აგებული ნაკვთი კვადრატია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ეს ამოცანა შეიძლება ამოვხსნათ ასეც: ავიღოთ

ნებისმიერი კვადრატი და შემოვხაზოთ მოცემული ABC სამკუთხე-დის მსგავსი Δ, შემდეგ მიღებულ ნაკვთს ან შევამცირებთ ან გავადიდებთ. ზოგიერთ სახელმძღვანელოში ასეთი ხერხი მიღებულია, როგორც ერთერთი დამოუკიდებელი ხერხი, რომელსაც შებრუნებულობის ხერხს უწოდებენ (метод обратности), რადგან მოცემული ამოცანის ნაცვლად ვაგებთ მის შებრუნებულს. შებრუნებულ ამოცანას ვადგენთ ამ გზით: ერთერთ მონაცემს ვსინჯავთ, როგორც საძებნს, ხოლო საძებნი მიიღება მონაცემად. ეს გზა გამოგვადგება მაშინ, როდესაც პირდაპირი ამოცანის ამოხსნა გვიძნელდება, მაგრამ მისი შებრუნებული ამოცანის ამოხსნა სიძნელეს არ წარმოადგენს.

ეს ხერხი არსებითად ახალ რამეს არ წარმოადგენს და შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც ერთერთი მოდიფიკაცია (ვარიანტი) მსგავსობის ხერხისა.

III. დამხმარე ნაკვთთა (ფიგურათა) ხერხი

ზოგიერთ ამოცანაში ადვილად შეიძლება დავხაზოთ საძებნი ნაკვთის ნაცვლად ისეთი ნაკვთი, რომელიც საძებნ ნაკვთზე გადასვლის გზას გვაძლევს. ეს ხერხი შეიძლება გამოდგეს, როცა ამოცანაში მოცემულია ორი გვერდის ჯამი ან სხვაობა. მაშინ ვხაზავთ ჯერ დამხმარე ნაკვთს, რომელშიაც, როგორც ელემენტი, შეგვაქვს მონაკვეთი მოცემული ჯამის ან სხვაობის ტოლი. დამხმარე ნაკვთის ასაგებად შეიძლება ვისარგებლოთ ან ყველა მონაცემებით, ან მათი ნაწილით. ამ ხერხის განმარტებისათვის განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები (მაგალ. № 2 ამოღებულია რიბკინის კრებულიდან: გვ. 23; № 60).

1. ავაგოთ სამკუთხედი ABC, რომელშიაც მოცემულია გვერდი b, კუთხე A და დანარჩენი ორი გვერდის ჯამი S (ნახ. 9).

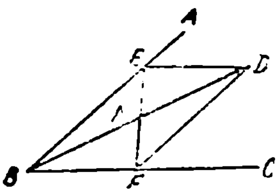
საძებნია სამკუთხედი ABC. ამისათვის გავავლოთ მონაკვეთი b, ე. ი. ფუძე AC. A წერტილთან ავაგოთ კუთხე A. დავუმატოთ ABC სამკუთხედის AB გვერდს მონაკვეთი BD, გვერდი BC-ს ტოლი, და შევაერთოთ D და C წერტილები DC მონაკვეთით. მივიღეთ დამხმარე სამკუთხედი ADC, რომლის აგება ადვილია, რადგან ცნობილია მისი ორი გვერდი — AC და $AD=S$ და მათ შორის მდებარე კუთხე A; ახლა, თუ გავყოფთ DC გვერდს შუაზე მისდამი EF პერპენდიკულარით, მივიღებთ გადაკვეთის წერტილს B-ს, რომელიც იქნება საძებნი სამკუთხედის მესამე წვერო (A და C ორი წვერი გვაქვს).

$\Delta\, ADC$ წარმოადგენს დამხმარე ნაკვთს.

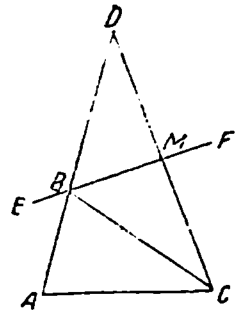
დამტკიცება ადვილია, თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $AD=S$, და $BD=BC$, და მაშასადამე, $AB+BC=S$.

2. ABC კუთხის შიგნით მოცემულია წერტილი M. ამ წერტილზე გავავლოთ სწორი ხაზი ისე, რომ მისი მონაკვეთი, მოთავსებული კუთხის გვერდებს შორის, M წერტილზე შუაზე იყოფოდეს (ნახ. 10).

თუ გავავლებთ BD მონაკვეთს M წერტილზე ისე, რომ BM მონაკვეთი ეტოლებოდეს MD მონაკვეთს, და შემდეგ DE და DF ხაზებს BC და BA გვერდების პარალელურად, მივიღებთ $EDFB$ პარალელოგრამს, რომლის მეორე დიაგონალი EF იყოფა M წერტილში შუაზე. დასახელებული პარალელოგრამი წარმოადგენს ამ შემთხვევაში დამხმარე ფიგურას, რომლის აგება არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს. დამტკიცება იმისა, რომ EF დიაგონალი გაივლის M წერტილზე და იყოფა



ნახ. 9.



ნახ. 10.

შუაზე ხდება ასე: $BEDF$ ფიგურა პარალელოგრამია — M წერტილი მისი BD დიაგონალის შუაწერტილია; EF მეორე დიაგონალია, და რადგან ეს მეორე ჰყოფს პირველს შუაზე, ამიტომ იგი გაივლის M წერტილზე და თვითონაც ამ წერტილში იყოფა შუაზე. როგორც ვხედავთ, დასახელებულ პირობებში ამოცანა ყოველთვის შესაძლებელია.

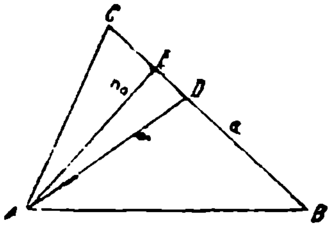
3. ავაგოთ სამკუთხედი ABC, რომელშიაც მოცემულია კუთხე A, სიმაღლე h^a და A კუთხის ბისექტრისა m. ნახ. 11.

ცხადია, ადვილად შეგვიძლია ავაგოთ დამხმარე მართკუთხა სამკუთხედი AED. შემდეგ ავაგებთ ABC სამკუთხედს, რაც უკვე ადვილია (დამხ. ფიგ. ხერხი).

კუთხე A მოცემულია, $AE=h^a$; $AD=m$; $\angle CAD=\angle DAB=$
$=\dfrac{\angle A}{2}$. აქ AED სამკუთხედი დამხმარე ნაკვთია.

ამ მესამე მაგალითში ჩვენ ვისარგებლეთ მხოლოდ ორი მონაცემით დამხმარე ADE სამკუთხედის აგებისათვის. მესამე მონაცემით (კუთხე A) ვისარგებლეთ საძებნ ABC ნაკვთის აგებაზე გადასვლისას.

მკითხველი მიაქცევს ყურადღებას იმ გარემოებას, რომ ამ უკანასკნელი სამი ამოცანის ამოხსნისათვის ჩვენ არ ვსარგებლობდით არც გეომეტრიული ადგილის ხერხით, არც მსგავსობის ხერხით და არც იმ ხერხით, რომელზედაც ახლა გადავალთ. ამით ეს ხერხი განსხვავდება სხვა ხერხებისაგან.



ნახ. 11.

თუ დამხმარე ნაკვთის აგებისათვის ვისარგებლებთ სხვა რაიმე ხერხით, მაშინ აგებას უნდა მივცეთ ამ ხერხის სახელწოდება. საზოგადოდ გეომეტრიული ამოცანა აგებაზე უფრო ხშირად ამოიხსნება ორი-სამი და მეტი ხერხის დახმარებით.

IV. *ნაკვთის გარდაქმნის ხერხი.* თუ საძებნი ნაკვთის ელემენტები (მაგალ., გვერდები, კუთხეები და სხვა) ისეა დალაგებული ერთიმეორის მიმართ, რომ გეომეტრიული კავშირი მათ შორის ნათლად არა სჩანს, მაშინ ვცდილობთ ისე გარდავქმნათ ნაკვთი, რომ ეს კავშირი გამომჟღავნდეს — ნათელი გახდეს.

ნაკვთის გარდაქმნისათვის სარგებლობენ ან 1) მისი რომელიმე ელემენტის პარალელური გადატანით, გადაადგილებით, ან 2) მისი ყველა ან ზოგიერთი ნაწილის ბრუნვით ღერძის ირგვლივ, ან 3) მისი ყველა ან ზოგიერთი ნაწილის ბრუნვით წერტილის ირგვლივ.

ამ გზით მიღებულ ნაკვთში ელემენტები შეიძლება უფრო მჭიდროდ დალაგდნენ, და ამიტომ კავშირი და გეომეტრიული დამოკიდებულება მათ შორის ადვილად შევაჩნიოთ.

განვიხილოთ ცალცალკე ყველა ეს შემთხვევა.

1) *ტრაპეციის აგება მისი ოთხი გვერდის მიხედვით.* ეს მაგალითი ამოხსნილია შესავალში. როგორც ვხედავთ ნახ. 2-ზე, აქ გვერდი AB გადანაცვლებულია (გადატანილია) პარალელურად CE მდგომარეობაში.

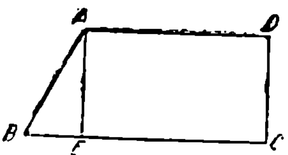
2) *ავაგოთ მართკუთხა ტრაპეცია, თუ მოცემულია მისი ფუძეთა ჯამი და ფერდები.* (ნახ. 12).

გავავლოთ A წერტილზე AE მონაკვეთი DC გვერდის პარალელური. მივიღებთ ABE სამკუთხედს, რომლის E კუთხე მართია. ამ სამკუთხედს ადვილად ავაგებთ. კათეტი BE ცნობილი გახდება. შემ-

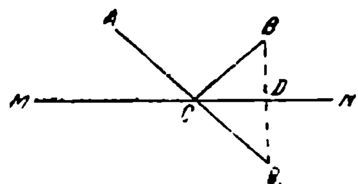
დეგ AD და BC ფუძეების ჯამს გამოვაკლებთ BE მონაკვეთს და სხვაობას გავყოფთ შუაზე, მივიღებთ AD გვერდს. AD გვერდს რომ მივუმატოთ BE მონაკვეთი, მივიღებთ BC გვერდს. დანარჩენი ნათელია. განვიხილოთ ახლა მაგალითი, სადაც ნაკვთის გარდაქმნა ხდება ბრუნვის საშუალებით გარკვეულად ამორჩეული ღერძის ირგვლივ.

3) მოცემულია სწორი ხაზი MN და მის ერთი მხრივ ორი წერტილი A და B. MN სწორზე უნდა ვიპოვოთ ისეთი წერტილი C, რომ $\angle ACM$ ეტოლებოდეს BCN კუთხეს (ნახ. 13).

მოვაბრუნოთ ACB ნაკვთი MN ღერძის ირგვლივ 180 გრადუსით. მაშინ C წერტილი დარჩება MN სწორზე; B წერტილი დაიკავებს B_1 წერტილის მდებარეობას. BD ეტოლება B_1D-ს, და BB_1 ეპერპენდიკულარება MN სწორს. რადგან $\angle BCD = \angle DCB_1$ და იმავე დროს ეტოლება $\angle ACM$, ამიტომ $\angle ACM = \angle DCB_1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ ACB_1 სწორი ხაზია. ამის შემდეგ ადვილად ვიპოვით C წერტილს.



ნახ. 12.



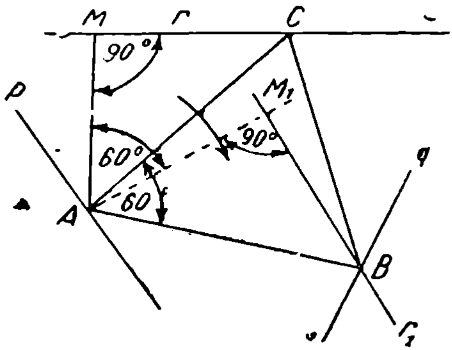
ნახ. 13.

ამისთვის დავუშვათ პერპენდიკულარი B წერტილიდან MN სწორზე და მიღებული მონაკვეთი BD განვაგრძოთ MN სწორის ქვევით DB_1=BD მანძილით. B_1 წერტილი შევუერთოთ A წერტილს სწორი ხაზით. AB_1 და MN სწორების გადაკვეთის წერტილი C იქნება საძებნი წერტილი. ამას თვითონ მკითხველიც დაამტკიცებს.

როგორც ეს ზემოთ იყო ნათქვამი, ნაკვთის გარდაქმნა შეიძლება მოვახდინოთ აგრეთვე ნაკვთის ან მისი ნაწილის ბრუნვით მოხერხებულად შერჩეული წერტილის ირგვლივ, აი ამის მაგალითი:

4) მოცემულია სამი სწორი ხაზი p, q, r და A წერტილი p სწორზე. საჭიროა ავაგოთ ისეთი ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის ერთი წვერო იყოს A წერტილში, დანარჩენი ორი კი q და r სწორ ხაზებზე (ნახ. 14).

AM ეპერპედიკულარება r სწორ ხაზს. ბრუნვის მიმართულებას გვიჩვენებს ისარი.



ნახ. 14.

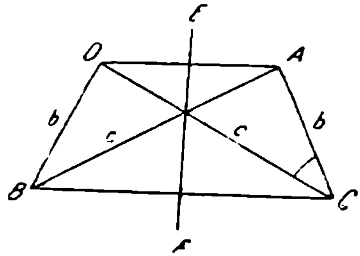
წარმოვიდგინოთ, რომ ჩვენ მოვაბრუნეთ AMC სამკუთხედი და თვით r სწორიც A წერტილის ირგვლივ 60°-ით. მაშინ, ცხადია, AM მონაკვეთი მობრუნდება აგრეთვე 60 -ით და დაიკავებს AM_1 მდებარეობას, სწორი r, რომელიც AM სწორს ეპერპენდიკულარება, დაიკავებს r_1 სწორის მდებარეობას და AM_1-ის პერპენდიკულარული დარჩება. C წერტილი დაემთხვევა B წერტილს. აქედან გამომდინარეობს ამოცანის ამოხსნის გზა. A წერტილიდან დავუშვებთ AM პერპენდიკულარს r სწორზე. შემდეგ AM მონაკვეთს მოვაბრუნებთ A წერტილის ირგვლივ ისე, როგორც გვიჩვენებს ისარი; M_1 წერტილზე გავავლებთ r_1 პერპენდიკულარს AM_1 სწორი ხაზისადმი. ეს პერპენდიკულარი r_1 გადაჰკვეთს q სწორს გარკვეულ B წერტილში. ამგვარად ვიპოვეთ საძებნი სამკუთხედის გვერდი AB დანარჩენი ადვილია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: ზოგიერთ სახელმძღვანელოში პარალელური გადანაცვლება, წერტილის ირგვლივ ბრუნვა და სწორი ხაზის ირგვლივ ბრუნვა განიხილება და ითვლება როგორც სხვადასხვა დამოუკიდებელი ხერხი, და არა როგორც სხვადასხვა სახეები და საშუალებანი **ერთი მთავარი ხერხისა,** რომელსაც ზოგიერთი ავტორი უწოდებს **ფიგურის გარდაქმნის ხერხს** (ავგუსტ ადლერი), ზოგიერთი კი უფრო მოკლედ **გადანაცვლების ან გადაადგილების ხერხს** (способ перенесения), როგორც ამას ხმარობს პროფ. ნეკრასოვი. (იხ. Август Адлер-ის „Теория геометрических построений". Одесса, 1924 г. П. Некрасов. Собрание геометрических задач на построение. Москва, 1892 г.).

4. ავაგოთ $\triangle ABC$ ისე, რომ გვერდები AB და AC ეტოლებოდეს შესაბამისად c და b მონაკვეთებს, ხოლო $\angle C$ და $\angle B$-ს სხვაობა ეტოლებოდეს α კუთხეს (ნახ. 15).

ნახაზზე ABC წარმოადგენს საძებნ სამკუთხედს. $\angle C - \angle ABC = \alpha$; $AB=c$; $AC=b$.

მოვაბრუნოთ 180°-ით ABC სამკუთხედი EF ღერძის ირგვლივ. EF ღერძი ეპერპენდიკულარება BC გვერდს და ყოფს მას შუაზე. მაშინ A წერტილი გადავა D წერტილში, C წერტილი B წერტილში და $\triangle ABC$ მიიღებს BDC-ს მდგომარეობას.



ნახ. 15.

შევჩერდეთ ADC სამკუთხედზე. მისი გვერდი $CD=c$, $AC=b$, კუთხე $ACD=\angle ACB-\angle ABC=\alpha$, რადგან $\angle DCB=\angle ABC$. ამგვარად მოცემული ელემენტები უფრო მჭიდროდ დალაგდნენ.

აღნიშნულ სამკუთხედში ჩვენთვის ცნობილია ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე α. ავაგებთ ჯერ ADC სამკუთხედს და შემდეგ მისი დახმარებით ადვილად აიგება საძებნი $\triangle ABC$. მკითხველზე შეიძლება ასეთმა ამოხსნამ მოახდინოს შთაბეჭდილება, რომ აქაც ჩვენ ვხმარობთ დამხმარე ნაკვთთა ხერხს. მაგრამ ეს სწორი არ არის. საქმე ამაშია, თუ რა გზით შეიქმნა დამხმარე ნაკვთი. აქ დამხმარე ნაკვთი მივიღეთ ღერძის ირგვლივ ბრუნვის საშუალებით, ამიტომაც ხერხსაც იგივე სახელწოდება აქვს.

V. ალგებრული ხერხი. § 1. წინასწარი შენიშვნები.

ხშირად საძებნი ნაკვთის აგება ადვილია, თუ ცნობილია მისი ელემენტი, მაგალ., გვერდი, ან ამ ელემენტის მდებარეობა, მაგალ., მანძილი სამკუთხედის წვეროდან და სხვ.

თუ შევძლებთ ისეთი განტოლების შედგენას, რომელიც გვაძლევს დამოკიდებულობას საძებნი ნაკვთის ამა თუ იმ ელემენტის და სხვა მონაცემთა შორის, მაშინ ამ ელემენტს ავაგებთ, თუ მას გამოვიან-

გარიშებთ მიღებული განტოლებიდან. მხოლოდ საჭიროა ვიცოდეთ, რომ აგება შესაძლებელი იქნება მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ჩვენთვის სასურველი ელემენტი გამოიხატება ფორმულით, სადაც შემავალ მოცემულ მონაკვეთებზე ვაწარმოებთ ოთხ არითმეტიკულ ოპერაციას ან კიდევ კვადრატულ ამოფესვასაც სასრულ რიცხვჯერ.

წარმოვიდგინოთ, რომ საძებნი მონაკვეთი x გამოისახა ასე:

$$1.\quad x = a \pm b$$

$$2.\quad x = \frac{bc}{a}$$

$$3.\quad x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$$

$$4.\quad x = \sqrt{ab}$$

$$5.\quad x = \frac{abc}{de}$$

$$6.\quad x = \frac{ab + cd - ef}{k + d - m}$$

$$7.\quad x = \frac{2ab}{3c}$$

$$8.\quad x = \frac{a \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}.$$

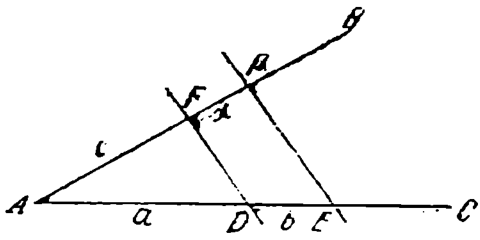
მაშინ ეს მონაკვეთი შეგვიძლია ვიპოვოთ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით, ე. ი. ავაგოთ.

ზემოთ მოყვანილ განტოლებებში a, b, c, d, e, f, k, p, m ასოები გამოსახავენ მონაკვეთებს.

პირველის აგება ცნობილია.

მეორეში x წარმოადგენს a, b, c მონაკვეთების მეოთხე პრო-

პორციულს, რაც შეიძლება დავწეროთ. ასე: $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ · x-ს ვიპოვით შემდეგი აგებით (ნახ. 16).



ნახ. 16.

მონაკვეთი $AD=a$
" $DE=b$
" $AF=c$
" $FD \parallel EP$

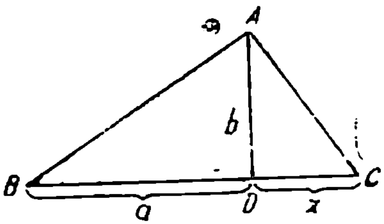
და მაშასადამე $FP=x$.

1. შენიშვნა. შესაძლებელია a, b, c მონაკვეთების მოკვეთა ABC კუთხის გვერდებზე კიდევ სხვანაირადაც.

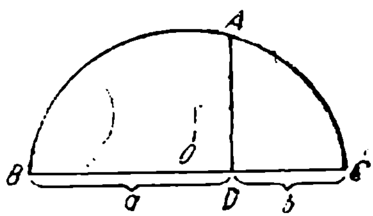
2. შენიშვნა. თუ $b=c$, მაშინ $x=\frac{b^2}{a}$ და x შეიძლება ავაგოთ ასე: (იხ. ნახ. 17).

აქ $BD=a$; $AD=b$; $AD \perp BD$; $AC \perp AB$; $x=DC$.

მესამეში: $x=\sqrt{a^2 \pm b^2}$, x წარმოადგენს ან ჰიპოტენუზას ისეთი მართკუთხა სამკუთხედისა, რომლის კათეტებია a და b ან კათეტს სამკუთხედისა, რომლის ჰიპოტენუზა არის a და კათეტი b.



ნახ. 17.



ნახ. 18.

მეოთხეში: $x=\sqrt{ab}$ აგება ნათლად ჩანს მე-18 ნახაზიდან.

ნახაზზე $BD=a$;

„ $DC=b$;

„ $BO=OC$;

OB რადიუსით შემოხაზულია წრეხაზის ნახევარი.

$AD \perp BC$ და AD წარმოადგენს $\sqrt{ab}$.

მ ე ხ უ თ ე შ ი : $x=\frac{abc}{de}$ წარმოვიდგინოთ ჯერ ასე:

$x=\frac{ab}{d}\ \frac{c}{e}$; ჯერ ავაგოთ მონაკვეთი $y=\frac{ab}{d}$, როგორც ეს უკვე იყო განმარტებული, და, როდესაც y-ს ვიპოვით, ავაგებთ $x=\frac{yc}{e}$.

მ ე ე ქ ვ ს ე შ ი: $x=\frac{ab+cd-ef}{\kappa+p-m}$ შეიძლება ავაგოთ ასე:

ვიპოვოთ ჯერ $\kappa+p-m$, რაც ადვილია. აღვნიშნოთ ეს ალგებრული ჯამი ასოთი r, მაშინ $x=\frac{ab}{r}+\frac{cd}{r}-\frac{ef}{r}$.

მ ე შ ვ ი დ ე შ ი: $x=\frac{2ab}{3c}$ ჯერ ვიპოვოთ მონაკვეთი $2a$, შემდეგ $3c$; აღვნიშნოთ $2a=m$ და $3c=n$, მაშინ მივიღებთ $x=\frac{mb}{n}$, რის აგება უკვე ვიცით; ან ჯერ ვიპოვოთ $y=\frac{ab}{c}$ და შემდეგ $x=\frac{2}{3}y$.

მ ე რ ვ ე შ ი : $x=\frac{a\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$.

მივცეთ x-ს შემდეგი სახე:

$$x=\frac{a\pm\sqrt{b\left(b-\frac{4ac}{b}\right)}}{2},$$

ავაგოთ ჯერ $y=\frac{4ac}{b}$, შემდეგ $z=b-y$,

შემდეგ $u=\sqrt{bz}$, მაშინ $x=\frac{a\pm u}{2}$,

რაც სრულიად ადვილია.

ისმება საკითხი: როგორ ავაგოთ მონაკვეთი $x=\sqrt{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\sqrt[4]{2}$ და სხვა ამგვარი მონაცემი.

C. ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი ალგებრული გამოსახულებანი, ერთგვაროვნობის დარღვევა და მისი აღდგენა, გეომეტრიული ფორმულების და განტოლებათა ერთგვაროვნობა

წარმოვიდგინოთ, რომ $a^m b^n c^p \ldots f^\kappa$ ერთწევრში $a, b, c \ldots f$ ასოებით აღნიშნული გვაქვს გარკვეული სხვადასხვა სიგრძის მონაკვეთები; მაშინ $m+n+p+\ldots+\kappa$ ხარისხების მაჩვენებელთა ჯამს ეწოდება ერთწევრის განზომილება. მაგ., a^2b სამი განზომილებისაა, a^3bc^2—ექვსი განზომილებისაა, a—ერთი განზომილებისაა, ხოლო $\frac{a}{b}$ ნულოვანი განზომილებისაა, ვინაიდან $\frac{a}{b}=a^1b^{-1}$ და $1+(-1)=0$.

თუ ერთწევრი წარმოადგენს წილადს, მაშინ ცხადია, მისი განზომილება ეტოლება მრიცხველის განზომილებას მინუს მნიშვნელის განზომილება. მაგ., $\frac{a^2b^3c}{d^2t}$ სამი განზომილებისაა, რადგან $2+3+1-(2+1)=3$.

მრავალწევრს ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ მისი ყველა წევრი ერთი და იგივე განზომილებისაა, მაგ., $4a^2b-3b^3+5abc$ ერთგვაროვანი ალგებრული გამოსახულებაა, რადგანაც ყველა წევრები ერთი და იგივე განზომილებისაა, სახელდობრ, სამი განზომილებისა, თუ მრავალწევრის წევრები სხვადასხვა განზომილებისაა, მაშინ იგი არაერთგვაროვანია, მაგ., $5a^3-3a^1b+2c$ არაერთგვაროვანია.

ერთგვაროვანი მრავალწევრის დამახასიათებელი თვისება მდგომარეობს იმაში, რომ თუ მის თითოეულ ასოს გავამრავლებთ n-ზე, მაშინ თვითონ მრავალწევრი გამრავლდება n^p-ზე, სადაც p გვიჩვენებს ამ მრავალწევრის განზომილებას. მართლაც, ავიღოთ $5a^2b-3ab^3+7c^3d$ და შევიტანოთ a, b, c და d-ს ნაცვლად na, nb, nc, nd,

მივიღებთ $5(na)^2(nb)-3(na)(nb)^2+7(nc)^2(nd)=5n^2a^2\cdot nb-$ $-3na\cdot n^2b^2+7n^2c^2\cdot nd=n^3(5a^2b-3ab^2+7c^2d)$, სადაც 3 გვიჩვენებს $5a^2b-3ab^2+7c^2d$ გამოსახულების განზომილებას.

ტოლობას (და განტოლებას) ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ მისი წევრების ერთ მხარეზე გადატანის შემდეგ მივიღებთ ერთგვაროვან გამოსახულებას.

აღსანიშნავია ის გარემოება, რომ გეომეტრიული ტოლობანი და განტოლებანი უსათუოდ ერთგვაროვანი უნდა იყოს. თუ გავიხსენებთ გეომეტრიულ ფორმულებს, დავინახავთ, რომ ეს ფორმულები ერთგვაროვანია.

მოვიყვანოთ მაგალითები:

1. ტრაპეციის შუა ხაზი l ეტოლება მისი ფუძეების ნახევარ ჯამს $l=\frac{a+b}{2}$; მარჯვენა და მარცხენა მხარე ერთი განზომილებისაა.

2. ირიბკუთხა სამკუთხედში გვაქვს, როგორ ვიცით, ახეთი დამოკიდებულება

$$a^2=c^2+b^2-2b\cdot AD;$$

აქ მარჯვენა მხარეც ორი განზომილებისაა და მარცხენაც.

3. პარალელოგრამში დიაგონალების კვადრატების ჯამი მისი გვერდების კვადრატების ჯამს ეტოლება.

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2;$$

ორივე მხარე ორი განზომილებისაა.

4. თუ წრეხაზში ავიღებთ M წერტილს და გავავლებთ ამ წერტილზე ორ AB და CD ქორდას, მაშინ დავინახავთ, რომ

$$AM\cdot MB=CM\cdot MD;$$

აქაც ორივე მხარე ერთი და იგივე განზომილებისაა.

5. $b_n=\frac{Ra_n}{\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}}$ ფორმულა აგრეთვე ერთგვაროვანია.

მარცხენა მხარეზე b_n ერთი განზომილებისაა, იგი გამოსახავს მონაკვეთს (წესიერი მრავალკუთხედის გვერდს), Ra_n ორი განზომილები-

საა, ხოლო მნიშვნელი $\sqrt{R^2-\frac{a^2_n}{4}}$ ერთი განზომილებისაა. მაშასადამე, მარჯვენა მხარეზედაც ერთი განზომილების სიდიდე გვაქვს.

6. ავიღოთ ახლა სამკუთხედის ფართობის ფორმულა $S=\frac{ah}{2}$. აქ ასო S ფართობს გამოსახავს და ორი განზომილებისაა, a და h ასოები კი მონაკვეთებს გამოსახავენ და მაშასადამე ah და მასთან ერთად $\frac{ah}{2}$ გამოსახულებანი ორი განზომილებისაა.

7. წაკვეთილი კონუსის მოცულობა $V=\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$. აქ მარცხენა მხარეზე V სამი განზომილების სიდიდეა, h ერთი განზომილებისაა, R^2+r^2+Rr ორი განზომილებისაა, ხოლო $\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$ სამი განზომილებისაა. რიცხვები $\frac{1}{3}$, π და 5, 3, 7—განყენებული რიცხვები არიან და ნულოვანი განზომილების გამოსახულებებს წარმოადგენენ. მკითხველმა კარგად უნდა შეითვისოს ის აზრი, რომ ფორმულების ერთგვაროვნობა გეომეტრიაში გეომეტრიულ კანონს წარმოადგენს.

წარმოუდგენელია, რომ ვახდენდეთ შედარებას მონაკვეთისა და მოცულობისა, ან მონაკვეთისა და ფართობისა, ან კიდევ ფართობისა და მოცულობისა, წარმოუდგენელია, რომ მონაკვეთი მივუმატოთ ან გამოვაკლოთ მოცულობას. შედარება შეიძლება მოხდეს მოცულობისა მოცულობასთან, ისე, როგორც შესაძლებელია შედარება დროისა დროსთან, ან წონისა წონასთან. წარმოვიდგინოთ, რომ აგებაზე რაიმე გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნის დროს ჩვენ მივიღეთ ალგებრული განტოლება, ამოვხსენით ეს განტოლება, სადაც x-ით აღნიშნული გვქონდა მონაკვეთი, ე. ი. ერთი განზომილების სიდიდე. ცხადია, რომ მაშინ მარჯვენა მხარეზედაც გამოსახულება უნდა იყოს ერთი განზომილების,—რადგანაც ამას მოითხოვს გეომეტრიული ფორმულის ერთგვაროვნობის კანონი. ავიღოთ ეხლა ერთგვაროვანი გამოსახულება, მაგ., $4a^2b-3bc^2+5abc$. წარმოვიდგინოთ, რომ a და b მონაკვეთები გაზომილი არიან c მონაკვეთით, როგორც

საზომი ერთეულით. მაშინ რა მოხდება? ჩვენი გამოსახულება მიიღებს სახეს: $4a^2b-3b+5ab$, რადგანაც $c=1$. მივიღეთ გამოსახულება, რომლის ერთგვაროვნობა დაირღვა, მაგრამ, ცხადია, დაირღვა არსებითად კი არა, არამედ ასე ვთქვათ, ფორმალურად, გარეგნულად.

ამ გამოსახულებაში წევრები სხვადასხვა განზომილების არიან. ერთგვაროვანობის დარღვევას წარმოადგენს აგრეთვე ის შემთხვევაც, როდესაც წევრების განზომილება ერთნაირი დარჩა, მაგრამ განზომილების მაჩვენებელი $\varkappa$ შეიცვალა. მაგ., $4a^3c-5ab^2c$ გამოსახულებაში c მივიღოთ სიგრძის საზომი ერთეულის ტოლი, მივიღებთ ერთგვაროვან $4a^3-5ab^2$ გამოსახულებას, რომლის განზომილების მაჩვენებელი $\varkappa$ იქნება სამის, და არა ოთხის ტოლი, როგორც წინეთ იყო. ცხადია, რომ აქაც ერთგვაროვანობა ირღვევა ფორმალურად.

იმ შემთხვევებში, როდესაც ერთგვაროვანობა დარღვეულია ფორმალურად, შეგვიძლია აღვადგინოთ მისი ერთგვაროვანობა, თუ ხელახლა შევიტანთ იმ ასოს, რომლის რიცხვითი მნიშვნელობა მიღებული იყო ერთის ტოლად, და თუ გვეცოდინება გამოსახულების პირვანდელი ფორმის განზომილების მაჩვენებელი $\varkappa$.

განვმარტოთ ნათქვამი მაგალითებით.

1. აღვადგინოთ ერთგვაროვნობა $4a^2-7ab^3+9$ გამოსახულებაში, თუ მონაკვეთი c პირვანდელ გამოსახულებაში მიღებული იყო ერთეულის ტოლი და ერთგვაროვანობის მაჩვენებელი კი $\varkappa$ იყო ხუთის ტოლი. ცხადია, ყოველი წევრი უნდა ყოფილიყო ხუთი განზომილებისა. მაშასადამე, $4a^2$ უნდა გავამრავლოთ c^3-ზე, მეორე c-ზე და მესამე წევრი 9 გავამრავლოთ c^5. მივიღებთ: $4a^2c^3-7ab^3c+9c^5$.

2. წილადმა, რომლის განზომილება ორის ტოლია, მიიღო სახე

$\dfrac{5a^2b-9ab^2+4d}{3d+10b^2}$ იმის შემდეგ, როდესაც c გავუტოლეთ ერთეულს.

ცხადია, ერთგვაროვანობას აღვადგენთ, თუ დავწერთ:

$$\frac{5\,a^2bc-9\,abc^2+4\,dc^3}{3dc+10b^2},$$

მაშინ მრიცხველის განზომილება იქნება 4, მნიშვნელის 2 და წილადის 2. მრიცხველიც ერთგვაროვანი გახდა და მნიშვნელიც.

3. ფესვმა, რომლის განზომილება ერთის ტოლია, მიიღო სახე:

$$x=\sqrt[3]{\frac{6ab-5}{2+a}}$$

იმის შემდეგ, როდესაც c მონაკვეთი გავუტოლეთ ერთეულს. აღვადგინოთ ერთგვაროვნობა. თუ ფესვის განზომილება ერთის ტოლია, მაშინ ფესვქვეშა გამოსახულების განზომილება სამის ტოლი უნდა იყოს, რადგან $\sqrt[3]{a^3}=a$. ამნაირ განზომილებას მივიღებთ ყველაზე მარტივად, თუ მრიცხველში გვექნება ოთხი განზომილების გამოსახულება, მნიშვნელში კი ერთი განზომილებისა. ამ უკანასკნელს კი ჩვენ მოვახერხებთ, თუ მრიცხველს დავწერთ $6abc^2-5c^4$ სახით, ხოლო მნიშვნელს $2c+a$ სახით.

ამგვარად, მივიღებთ ფესვს $\sqrt[3]{\frac{6abc^2-5c^4}{2c+a}}$.

აქ მრიცხველის განზომილება 4-ია, მნიშვნელის 1, მაშასადამე, ფესვქვეშა გამოსახულების განზომილება 3-ია და ფესვის კი $3:3=1$.
თუ შევადარებთ $\sqrt[3]{\frac{6ab-5}{2+a}}$ ფესვს $\sqrt[3]{\frac{6abc^2-5c^4}{2c+a}}$ ფესვთან, დავინახავთ, რომ ეს უკანასკნელი შეიძლება მივიღოთ პირველი ფესვიდან, თუ $\sqrt[3]{\frac{6ab-5}{2+a}}$ ფესვში a და b-ს ნაცვლად ჩავსვამთ $\frac{a}{c}$ და $\frac{b}{c}$ შეფარდებებს, გავამარტივებთ და შემდეგ მიღებულ გამოსახულებას გავამრავლებთ c^3, სადაც 3 წარმოადგენს ფესვქვეშა გამოსახულების განზომილების მაჩვენებელს. მოვახდინოთ ეს ოპერაციები:

$$\frac{6\,\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}-5}{2+\frac{a}{c}}=\frac{6\,\frac{ab}{c^2}-5}{\frac{2c+a}{c}}=\frac{6\,ab-5c^2}{(2c+a)c}.$$

გავამრავლოთ ახლა ეს წილადი c^4-ზე, მივიღებთ $\frac{6abc^3-5c^4}{2c+a}$

მაშასადამე $\sqrt[3]{\frac{6ab-5}{2+a}}$ ერთგვაროვანობის აღდგენის შემდეგ მიიღებს $\sqrt[3]{\frac{6abc^3-5c^4}{2c+a}}$ სახეს.

4. წარმოვიდგინოთ, რომ მონაკვეთი $x=\sqrt{2}$; აქ ფესვქვეშა რიცხვი 2 არ არის განყენებული რიცხვი, იგი არის ორი განზომილების სიდიდე. იგი წარმოიშვა ასე: $x=\sqrt{2c^2}$; ფესქვეშა c მონაკვეთი მიღებულია ერთეულად, და $x=\sqrt{2}$ შეიძლება წარმოვიდგინოთ ან როგორც $x=\sqrt{1^2+1^2}$, ე. ი., როგორც ჰიპოტენუზა მართკუთხა სამკუთხედისა, რომლის თითოეული კათეტი ეტოლება ზომის ერთეულს, ან როგორც $x=\sqrt{2.1}$, ე. ი. როგორც საშუალო პროპორციულ ორ მონაკვეთს $a=2$ და $b=1$ შორის.

5. $x=\sqrt{3}$; აქ შეიძლება მოვიქცეთ ასე: $x=\sqrt{1+(\sqrt{2})^2}$; თუ ავაგებთ $y=\sqrt{2}$, მაშინ მივიღებთ $x=\sqrt{1+y^2}$ და x იქნება მონაკვეთი, რომელიც წარმოადგენს ისეთი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზას, რომლის ერთ კათეტი ეტოლება ზომის ერთეულს, მეორე კი y-ს; $y=\sqrt{2}$.

6. განვიხილოთ კიდევ $x=\sqrt{2-\sqrt{3}}$. რადგანაც x წარმოადგენს მონაკვეთს, ამიტომ $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ფესვიც უნდა გვაძლევდეს მონაკვეთს. თუ ავიღებთ გამოსახულებას $\sqrt{2c^2-\sqrt{3c^4}}$ ან $\sqrt{2c^2-c\sqrt{3c^2}}$ და c ასოს შევარჩევთ, როგორც ზომის ერთეულს, ცხადია, მივიღებთ სწორედ გამოსახულებას $\sqrt{2-\sqrt{3}}$, მაშასადამე, x მონაკვეთი რომ ავაგოთ, ჯერ უნდა ავაგოთ $Z=\sqrt{3c^2}$ (იხ. ზემოთ, მაგალ. № 4), მივიღებთ $\sqrt{2c^2-cz}=\sqrt{c(2c-z)}$-ს და ამ უკანასკნელს ავაგებთ, როგორც საშუალო პროპორციულს c და $2c-z$ მონაკვეთებს შორის.

მოვიტანოთ მაგალითები აგებაზე

1. ავაგოთ მონაკვეთი $x=\frac{2a^2b-5ad^2+4abd}{3b^2-ad}$;

ამისათვის შეიძლება მოვახდინოთ შემდეგნაირი გარდაქმნა:

$$x = \frac{b\left(2a - 5\,\dfrac{d^2}{b} + 4d\right)}{\left(3\,\dfrac{b^2}{a} - d\right)} = \frac{by}{z},$$

სადაც

$$y = 2a - 5\,\frac{d^2}{b} + 4\,d \quad \text{და} \quad z = \frac{3b^2}{a} - d,$$

როგორც პირველი განზომილების სიდიდეები, წარმოადგენენ მონაკვეთებს. მაშასადამე, საპოვნი მონაკვეთი მიიღებს სახეს:

$$x = \frac{by}{z}.$$

საზოგადოდ, თუ x მონაკვეთი მოცემულია ისეთი წილადის საშუალებით, რომლის მრიცხველიც და მნიშვნელიც რაციონალურად არიან გამოსახულნი a, b, c...p მონაკვეთების საშუალებით, და თუ მრიცხველი წარმოადგენს κ განზომილების გამოსახულებას, მაშინ მრიცხველში უნდა გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ $\kappa-1$ განზომილების ერთწევრა თანამამრავლი, ხოლო მნიშვნელში $\kappa-2$ განზომილების ერთწევრა თანამამრავლი.

მოვიყვანოთ ამაზე კიდევ ერთი მაგალითი:

$$x = \frac{9\,ab^2d - 2a^3f + 5adf^2}{4a^3 - 3b^2f} = \frac{abf\left(9\,\dfrac{bd}{f} - 2\,\dfrac{a^2}{b} + 5\,\dfrac{df}{b}\right)}{af\left(4\,\dfrac{a^2}{f} - 3\,\dfrac{b^2}{a}\right)}$$

ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებანი პირველი განზომილების არიან. ამგვარად, $x = \dfrac{abfy}{afz} = \dfrac{by}{z}$,

სადაც

$$y = \frac{9\,bd}{f} - \frac{2a^2}{b} + \frac{5df}{b};$$

$$z = \frac{4a^2}{f} - \frac{3b^2}{a}.$$

2. ავაგოთ $x=\sqrt{a^2+bc-d^2}$. ავაგოთ ჯერ $y^2=bc$ ე. ი. $y=\sqrt{bc}$; შემდეგ $z=\sqrt{a^2+y^2}$ და დასასრულს $x=\sqrt{z^2-d^2}$.

შეიძლება მოვიქცეთ ასეც:

$$x=\sqrt{a\left(a+\frac{bc}{a}-\frac{d^2}{a}\right)}=\sqrt{a(a+y-z)};$$

სადაც

$$y=\frac{bc}{a}, \qquad z=\frac{d^2}{a}.$$

3. ავიღოთ კიდევ მაგალითი $x=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}$, აღვადგინოთ ჯერ ერთგვაროვნობა, რისთვისაც გადავწეროთ ასე:

$$x=c\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{4c.5c}-c\sqrt{3c.5c}}{5}};$$

ჯერ ავაგოთ მონაკვეთი $z=\sqrt{3c.5c}$; შემდეგ $y=\sqrt{5c.4c}$; მაშინ $x=\sqrt{\frac{y^4-cz}{5}}$, რასაც ადვილად ავაგებთ.

შენიშვნა: ყველა მაგალითში, სადაც ვსარგებლობთ c მონაკვეთით, როგორც საზომი ერთეულით, ეს მონაკვეთი უნდა ითვლებოდეს, როგორც მ ო ც ე მ უ ლ ი.

სავარჯიშო მასალა აგებაზე

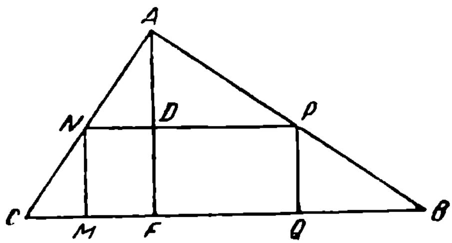
1. $x=a\sqrt{5}$
2. $x=a\sqrt{\frac{b}{c}}$; მითითება: $x=\sqrt{\frac{ab}{c}\cdot a}$; $y=\frac{ab}{c}$
3. $x=\sqrt{a^2-\frac{b^2c}{m}+d^2}$; მითითება: $y=\frac{bc}{m}$; $\frac{b^2c}{m}=by$
4. $x=\sqrt[4]{a^3b}$; მითითება: $x=\sqrt{a\sqrt{ab}}$
5. $x=a\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{2a^4}=\sqrt{a^2\sqrt{2a^3}}$.
6. $x=\sqrt{3-\sqrt{2}}$; (საზომი ერთეულით ისარგებლეთ).
7. $x=\sqrt{a^2+25}$ (მითითება ისეთივეა, როგორც 6-ში).

ალგებრული ხერხით გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნა შედგება სამი ნაწილისაგან:

1. განტოლების შედგენა,
2. ამონახსენის გამოკვლევა,
3. საძებნი ნაკვთის აგება.

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები.

1. მოცემულ სამკუთხედში, რომლის ფუძეა a მონაკვეთი და სიმაღლე h, ჩავხაზოთ $2p$ პერიმეტრის მქონე მართკუთხედი.



ნახ. 19.

მოცემულია $BC = a$; $AF = h$; $MNPQ$ საძებნი მართკუთხედია.

ა) განტოლების შედგენა

ცხადია, მართკუთხედს ადვილად ავაგებთ, თუ ვიპოვით ან AD ან MF, ან FQ, ან FD მონაკვეთს. ამოვარჩიოთ FD მონაკვეთი და აღვნიშნოთ იგი x-ით, მაშინ $NP = p - x$, რადგან $NP + NM = NP + FD = p$. ABC და ANP სამკუთხედები მსგავსია.

ვწერთ: $\frac{BC}{AF} = \frac{NP}{AD}$ ან $\frac{a}{h} = \frac{p-x}{h-x}$.

აქედან:

$$x = \frac{h(a-p)}{a-h} \qquad (1)$$

ბ) ამონახსენის გამოკვლევა

გადავწეროთ განტოლება შემდეგი სახით:

$$\frac{p-x}{a} = \frac{h-x}{h}.$$

ამონახსენი (1) რომ აკმაყოფილებდეს ამოცანას, საჭიროა, რომ $0 \leqslant x \leqslant h$. დავანებოთ თავი ზღვრულ მდგომარეობას, როდესაც $x=0$ ან $x=h$. დაწერილი პროპორციიდან ჩანს, რომ, თუ $x<h$, ის უსათუოდ ნაკლები იქნება p ნახევარპერიმეტრზედაც, რადგან $a>0$ და $h>0$. განვიხილოთ მოთხოვნა (требование), რომ $x<h$.

ანუ $\frac{h(a-p)}{a-h}<h$; $\frac{a-p}{a-h}<1$, h-ზე შეკვეცის შემდეგ.

ახლა, თუ $a>h$, ე. ი. ფუძე მეტია სიმაღლეზე, მაშინ $a-h>0$, და უტოლობის ორივე ნაწილის $(a-h)$-ზე გამრავლებისა და გამარტივების შემდეგ მივიღებთ $p>h$, ე. ი. ნახევარპერიმეტრი შერჩეული (მოცემული) უნდა იყოს h-ზე მეტი.

თუ კი $a<h$, მაშინ უტოლობა მიგვიყვანს $p<h$ პირობაზე, ე. ი. თუ $a<h$, მაშინ ნახევარპერიმეტრი p უნდა მოცემული იყოს h სიმაღლეზე ნაკლები.

გარდა ამისა საჭიროა, რომ $x>0$. ამისათვის, ან $p<a$ და $h<a$ პირობებს უნდა ჰქონდეს ადგილი, ან $p>a$ და $h>a$ პირობებს. თავი მოვუყაროთ ყველა მოთხოვნას, მივიღებთ შემდეგს:

A) $a>h$; $a>p$; $p>h$, რაც შეიძლება მოკლედ დაიწეროს $a>p>h$ უტოლობათა სახით. B) $a<h$; $p<h$; $a<p$, რაც მოკლედ დაიწერება $a<p<h$ უტოლობათა სახით. ზემოხსენებულიდან გამომდინარეობს დასკვნა, რომ ნახევარპერიმეტრი p უნდა იყოს შერჩეული საზოგადოდ a და h სიდიდეთა შორის. თუ ამას დავარღვევთ, ამოცანას არ ექნება ამონახსენი.

შევჩერდეთ ზღვრულ შემთხვევებზე.

ნათელია, რომ თუ $x=0$, მაშინ ჩახაზული მართკუთხედის სიმაღლე$=0$, ფუძეები იქნება BC მონაკვეთის ტოლი, ამ შემთხვევაში $p=a$, რაც ჩანს

$$\frac{p-x}{a}=\frac{h-x}{h}$$ პროპორციიდანაც.

თუ აქ ავიღებთ x ნულის ტოლს, გვექნება $\frac{p}{a}=1$; $p=a$.

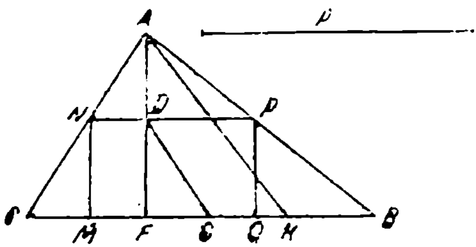
თუ კი $x=h$, მაშინ $x=p$, ე. ი. $p=h$. ამ შემთხვევაში ჩახაზული მართკუთხედი წარმოდგენილი იქნება FA ნაკვთით. ეს ნაკვთი იქნება ერთიმეორეზე დამთხვეული მონაკვეთი FA.

ვთქვათ ახლა, რომ $a=h$, მაშინ გვექნება:

$$\frac{p-x}{a}=\frac{a-x}{a}, \text{ ე. ი. } p=a;$$

ეს იმას გვიჩვენებს, რომ, თუ სამკუთხედის ფუძე a ეტოლება მის h სიმაღლეს, მაშინაც $p=a$, მაგრამ ეს შემთხვევა არსებითად განსხვავდება ზემოთ განხილული შემთხვევისაგან, როდესაც აგრეთვე მივიღეთ $p=a$. p შეიძლება a-ს ტოლი იყოს, როდესაც x ეტოლება 0-ს, ხოლო $a \neq h$; p უსათუოდ a-ს ტოლი იქნება, თუ $a=h$. ამ უკანასკნელ შემთხვევაში ამოცანას ექნება უამრავი ამონახსენი.

შევნიშნოთ, რომ თუ $a=h$, მაშინ p უსათუოდ ეტოლება a-ს, მაგრამ, თუ $p=a$, ეს იმას არ ნიშნავს, რომ a ეტოლება h-ს.



ნახ. 20.

გ) აგება

განვიხილოთ მხოლოდ შემთხვევა $a>p>h$. დავწეროთ ამონახსენი $\frac{a-h}{a-p}=\frac{h}{x}$ სახით (ნახ. 20).

$BC=a$; $FA=h$.

მოვზომოთ F წერტილიდან $a-h$ სხვაობის ტოლი მონაკვეთი FK; შემდეგ $a-p$ სხვაობის ტოლი FG. შევაერთოთ სწორით A და K წერტილი და გავავლოთ AK-ს პარალელური GD მონაკვეთი, მაშინ $x=FD$ მონაკვეთს, რადგან

$$\frac{FK}{FG}=\frac{h}{x}, \qquad \text{ე. ი.} \quad \frac{a-h}{a-p}=\frac{h}{x}.$$

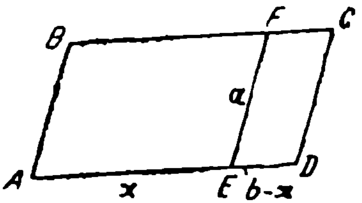
ახლა, როდესაც ვიცით x მონაკვეთი, ადვილად ავაგებთ საძებნ მართკუთხედ $MNPQ$-ს.

შენიშვნა: მკითხველს ევალება გამოარკვიოს, თუ როგორი უნდა ავარჩიოთ p მონაკვეთი, რომ მოცემულ

სამკუთხედში ჩახაზული მართკუთხედი კვადრატი იყოს.

პასუხი: $p = \frac{2ah}{a+h}$.

2. $ABCD$ პარალელოგრამში, რომლის გვერდი $AB=a$ და გვერდი $BC=b$, გავავლოთ AB გვერდის პარალელური სწორი EF ისე, რომ მივიღოთ $ABFE$ და $EFCD$ ორი მსგავსი პარალელოგრამი (ნახ. 21).



ნახ. 21.

ა) განტოლების შედგენა

$ABCD$—პარალელოგრამია.

$AB=a$; $BC=b$.

$ABFE \infty EFCD$.

$EF \parallel CD \parallel AB$.

$AE=x$.

მაშინ $\frac{x}{a}=\frac{a}{b-x}$;

აქედან

$$x = \frac{+b \pm \sqrt{b^2-4a^2}}{2}$$

ბ) გამოკვლევა.

ამონახსენი ივარგებს, თუ $0 < x < b$ და ამავე დროს ნამდვილი იქნება; ამონახსენი ნამდვილი რომ იყოს, საკმარისია პირობა: $b \geqslant 2a$, ე. ი. გვერდი b არ უნდა იყოს $2a$-ზე ნაკლები. x^2-bx+ $+a^2=0$ განტოლების ორივე ფესვი დადებითია, მაშასადამე $0<x$ მოთხოვნა თავისთავად კმაყოფილდება.

ფესვები b მონაკვეთზე ნაკლებია. საკმარისია ამაში დავრწმუნდეთ უდიდესი ამონახსენის მიმართ:

რადგან $\sqrt{b^2-4a^2} < b$; ამიტომ: $\frac{b+\sqrt{b^2-4a^2}}{2} < b$;

როგორც დავინახეთ, მოთხოვნა $0<x<b$ კმაყოფილდება თავისთავად. მაშასადამე, ამოცანის ამოხსნის შესაძლებლობისათვის საჭირო და საკმარისია მხოლოდ ერთად-ერთი პირობა $b \leqslant 2a$. ორივე ამონახსენი ვარგისია.

გ) აგება.

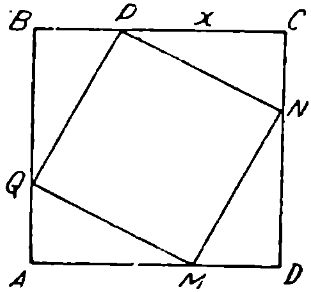
აგებისათვის ამონახსენს მივცეთ სახე:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - (2a)^2}}{2}.$$

ავაგოთ ჯერ $\sqrt{b^2-(2a)^2}$, შემდეგ მრიცხველის ორივე მნიშვნელობა და დასასრულს x_1 და x_2, რაც სიძნელეს არ წარმოადგენს.

3. კვადრატში, რომლის გვერდი a მონაკვეთის ტოლია, ჩავხაზოთ კვადრატი, რომლის გვერდი b მონაკვეთს ეტოლება (ნახაზი 22).

$ABCD$ კვადრატია. $AB = a$.
$MNPQ$ საძებნი კვადრატია.
გვერდი $MN = b$.


ნახ. 22.

ა) განტოლების შედგენა.

თუ ვიპოვით CP მონაკვეთს, ადვილად ავაგებთ $MNPQ$ კვადრატს. მივიღოთ მიმართულება C წერტილიდან P წერტილისაკენ, როგორც დადებითი და აღვნიშნოთ CP მონაკვეთი x ასოთი. აღვნიშნოთ, რომ CN, DM, AQ და BP მონაკვეთები ტოლნი უნდა იყვნენ. მაშინ BP მონაკვეთი ეტოლება $a-x$ სხვაობას, ეს უკანასკნელი კი ეტოლება CN მონაკვეთს. ამგვარად გვექნება $(a-x)^2+x^2 = b^2$. აქედან $2x^2-2ax+a^2-b^2=0$ და

$$x = \frac{a \pm \sqrt{2b^2-a^2}}{2}.$$

ბ) გამოკვლევა.

ამონახსენი აკმაყოფილებს ამოცანას, თუ $0<x<a$. განსაკუთრებული შემთხვევები, როცა $x=0$ ან $x=a$, ცალკე იქნება განხილული. გარდა ამისა ამონახსენი უნდა იყოს ნამდვილი. ეს უკანასკნელი მოთხოვნა რომ შევასრულოთ, საკმარისია, რომ $2b^2 \geqslant a^2$, ე. ი. $b \geqslant \frac{a}{2}\sqrt{2}$. მონაკვეთი b არ უნდა იყოს $\frac{a}{2}\sqrt{2}$-ზე ნაკლები. თუ a იქნება b-ზე მეტი, მაშინ ორივე ფესვი იქნება დადებითი, როგორც ეს ჩანს განტოლებიდან. როდესაც ჩვენ მოვითხოვთ, რომ

a იყოს b-ზე მეტი, ცხადია, არ უნდა დაგვავიწყდეს ის მოთხოვნაც, რომ b არ უნდა იყოს $\frac{a}{2}\sqrt{2}$-ზე ნაკლები.

აუცილებელია კიდევ, რომ $x < a$ ე. ი.

$$\frac{a+\sqrt{2b^2-a^2}}{2} < a.$$

ამოვხსნათ ეს უტოლობა, მივიღებთ $b < a$; აქ ახალი მოთხოვნა არა გვაქვს.

დავსვათ საკითხი, შესაძლებელია თუ არა, რომ ერთი ამონახსენი გამოვიდეს დადებითი, მაგრამ მაინც არ ვარგოდეს, და თუ შესაძლებელია, როდის? ვთქვათ $b > a$, მაშინ $2b^2-a^2 > a$;

$\frac{a+\sqrt{2b^2-a^2}}{2} > a$; მეორე ამონახსენი $\frac{a-\sqrt{2b^2-a^2}}{2}$ უარყოფითი გამოვა. ამ შემთხვევაში არც ერთი ამონახსენი არ არის მისაღები, მაშასადამე, ან ორივე ფესვი ვარგა ან არცერთი*. ფესვები რომ გამოსადეგი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\frac{a\sqrt{2}}{2} \leqslant b < a$. განვიხილოთ ახლა განსაკუთრებული შემთხვევები:

a) ვთქვათ $\frac{a\sqrt{2}}{2} = b$. ე. ი. $2b^2 = a^2$, მაშინ $x = \frac{a}{2}$.

ბ) ვთქვათ $a = b$, მაშინ $x = \frac{a+a}{2}$, ე. ი. $x_1 = a$; $x_2 = 0$ და ჩახაზული კვადრატი ემთხვევა მოცემულ კვადრატს.

გამოკვლევის პროცესში, რასაკვირველია, ასეთი განსაკუთრებული შემთხვევებიც უნდა იყოს განხილულნი, მაგრამ პრაქტიკულად ისინი ხშირად დიდ ინტერესს არ წარმოადგენენ, ზოგჯერ კი უფრო მეტს, ვიდრე ზოგადი.

გ) ა გ ე ბ ა.

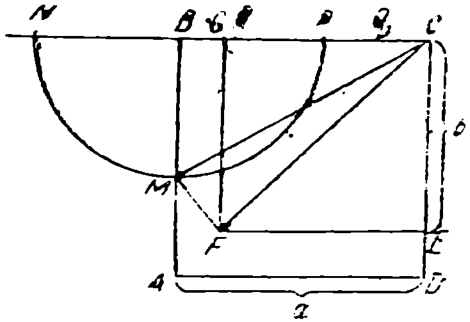
ამონახსენის აგებისათვის მივცეთ ფორმულას ასეთი სახე:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{(b\sqrt{2})^2 - a^2}}{2},$$

---

* შესაძლებელია ამოცანის რედაქციის შეცვლით მივიღოთ ისეთი მონათესავე ამოცანა, რომლისათვის a იყოს b-ზე ნაკლები, და ორივე ფესვი, ერთი დადებითი—მეორე უარყოფითი, გამოდგეს.

(შემდეგ იხ. ნახ. 23). $ABCD$ კვადრატია. $AD=a$, $CEFG$ კვადრატია; $CE=CG=b$, მაშინ ცხადია $CF=b\sqrt{2}$, CF რადიუსით C წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, შემოხაზულია რკალი, რომელიც ჰკვეთს AB გვერდს M წერტილში. ცხადია, $BM^2=CM^2-a^2=CF^2-a^2=(b\sqrt{2})^2-a^2$ და, მაშასადამე, $BM=\sqrt{(b\sqrt{2})^2-a^2}$. მოვზომოთ ახლა B წერტილიდან BC სწორზე მარცხნივ და მარჯვნივ BN და BP მონაკვეთები BM მონაკვეთის ტოლი; მაშინ CN იქნება გაორკეცებული უდიდესი ფესვი ხოლო CP გაორკეცებული უმცირესი ფესვი. ამ მონაკვეთების ნახევრები CQ და GQ_1 წარმოდგენენ საძებნ მონაკვეთებს. (იხ. განტოლების შედგენის დასაწყისი). ვიპოვით რა CP-ს, ავაგებთ $MNPQ$ კვადრატსაც. (ნახ. 22).



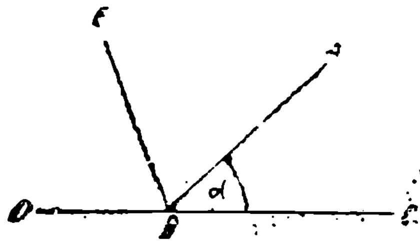
ნახ. 23.

D. სავარჯიშო მასალა მოკლე მითითებებით

მკითხველისათვის, უპირველეს ყოვლისა, ცნობილი უნდა იყოს იმ ძირითადი გეომეტრიული ამოცანების აგება, რომლებიც მოყვანილი და ამოხსნილია კისელევის გეომეტრიის კურსში. აქ ჩვენ ვაძლევთ სხვა ამოცანებს, რომლის უმრავლესობა ამოღებულია რიბკინის გეომეტრიულ ამოცანათა კრებულიდან, ნაწ. I, პლანიმეტრია, 1934 წ. გამოცემა.

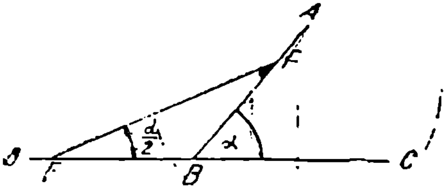
1. მოცემულია კუთხე α. ავაგოთ $d-\frac{\alpha}{2}$ კუთხე (ნახ. 24).

$\angle ABC=\alpha$; მაშინ $\angle ABD=2d-\alpha$. BE წარმოადგენს ABD კუთხის ბისექტრისას; მაშასადამე, $\angle ABE=\frac{2d-\alpha}{2}=d-\frac{\alpha}{2}$.



ნახ. 24.

2. ვიპოვოთ α კუთხის ნახევარი (ნახ. 25).

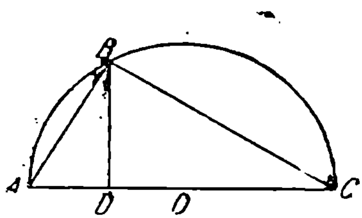


ნახ. 25.

$\angle ABC=\alpha$; $EFB=\frac{\alpha}{2}$, რადგან $BE=BF$. აქ ამოცანა მოითხოვს $\frac{\alpha}{2}$ კუთხის პოვნას და არა თვით α კუთხის შუაზე გაყოფას.

3. ავაგოთ მართკუთხა სამკუთხედი, თუ ცნობილია ჰიპოტენუზა და პროექცია ერთერთი კათეტისა ჰიპოტენუზაზე (ნახ. 26).

მოცემულია AC ჰიპოტენუზა და AB კათეტის AD პროექცია ჰიპოტენუზაზე. $AO=OC$.

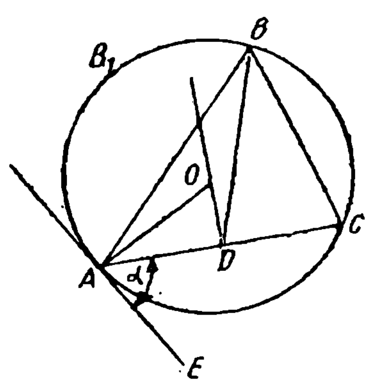


ნახ. 26.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. A წერტილიდან მოვზომოთ AD მონაკვეთი ჰიპოტენუზაზე, D წერტილიდან აღვმართოთ პერპენდიკულარი ჰიპოტენუზისადმი და ამ უკანასკნელის შუა O წერტილიდან OA რადიუსით შემოვხაზოთ ნახევარწრეხაზი. გადაკვეთის წერტილი B შევუერთოთ A და C წერტილებს. ამოცანა ამოხსნილია გეომეტრიულ ადგილთა ხერხით. რა წერტილების გეომეტრიულ ადგილებს წარმოადგენენ სწორი BD და ABC რკალი?

4. ავაგოთ სამკუთხედი, რომელშიაც მოცემულია ფუძე, მისი მოპირდაპირე კუთხე α და მედიანა (ნახ. 27).

ნახაზზე AC საძებნი სამკუთხედის ფუძეა, BD მისი მედიანა; კუთხე CAE ეტოლება მოცემულ α კუთხეს. $OA \perp AE$, $OD \perp AC$, მაშასადამე, O წერტილი წარმოადგენს ცენტრს წრეხაზისა, რომელიც გაივლის A და C წერტილებზე. D წერტილიდან შემოვხაზოთ DB რადიუსით რკალი. გა-



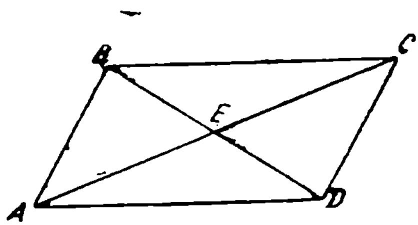
ნახ. 27.

დაკვეთის B და B_1 წერტილები იქნება საძებნი სამკუთხედის წვეროები. ამ შემთხვევაში ამოცანას აქვს ორი ამონახსენი.

მკითხველი თვითონ გამოარკვევს, როდის ექნება ამოცანას ერთი ამონახსენი, როდის არც ერთი. ამოცანა ამოხსნილია გეომეტრიულ ადგილთა ხერხით. ერთი ადგილია რკალი AB_1BC, მეორე—წრეხაზი, აგებული D წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან DB მედიანით. მიაქციეთ ყურადღება იმას, რომ $\angle ABC = \angle CAE = \alpha$, რადგან ეს კუთხეები იზომება ერთიდაიმავე რკალის ნახევარით.

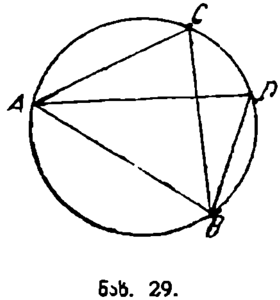
5. ავაგოთ პარალელოგრამი, თუ ცნობილია მისი ორივე დიაგონალი და მახვილი კუთხე A (ნახ. 28).

$ABCD$ საძებნი პარალელოგრამია. ABD სამკუთხედი შეგვიძლია ავაგოთ ისე, როგორც ამოც. 4, რადგან აქ ცნობილია ფუძე BD, მედიანა AE და კუთხე A. შემდეგ ამისა ავაგებთ თვით პარალელოგრამს.


ნახ. 28.

6. მოცემულ წრეხაზში ჩავხაზოთ სამკუთხედი, რომლის ორი კუთხე მოცემულია (ნახ. 29).

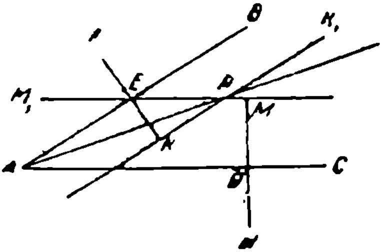
ჩავხაზოთ მოცემულ წრეხაზში ჯერ კუთხე $D = 2d - \angle(A+B)$, გავავლოთ AB ქორდა, შემდეგ ავაგოთ $\angle CAB$ მოცემული A კუთხის ტოლი. AC სწორის და წრეხაზის გადაკვეთის C წერტილი შევუერთოთ A და B წერტილებს, მივიღებთ საძებნ ACB სამკუთხედს. რადგან $\angle C = \angle D$ და კუთხე CAB ეტოლება მოცემულ A კუთხეს, ამიტომ კუთხე CBA აგრეთვე ტოლი იქნება მეორე მოცემული კუთხისა.


ნახ. 29.

7. ვიპოვოთ გეომეტრიული ადგილი ისეთი წერტილებისა, რომელთა მანძილების შეფარდება კუთხის გვერდებამდე უდრის $m : n$.

ნახაზზე BAC მოცემული კუთხეა;

$MN \perp AC$ და $MD = DN = m$; $KF \perp AB$ და $EK = EF = n$. $KK_1 \parallel AB$; $MM_1 \parallel AC$. P წერტილი MM_1 და KK_1-ის გადაკვეთის წერტილია. მაშინ AP სწორი იქნება საძებნი გეომეტრიული ადგილი. ცხადია, რომ შეგვიძლია გავავლოთ F წერტილზე AB გვერდის პარალელური, N წერტილზე AC გვერდის პარალელური. ამოცანას ექნება ოთხი ამონახსენი.



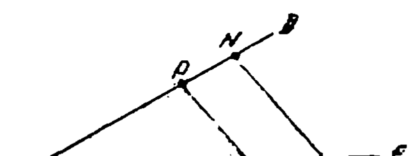
ნახ. 30.

დაასახელეთ აქ ის გეომეტრიული ადგილები, რომლებითაც ჩვენ ვისარგებლეთ P წერტილის საპოვნელად.

8. ვიპოვოთ მონაკვეთი, რომელიც იმდენჯერ მეტი იქნება მოცემულ m მონაკვეთზე, რამდენჯერაც მონაკვეთი b მეტია c მონაკვეთზე (ნახ. 31).

ნახაზზე DAE კუთხე ნებისმიერია. $AN=b$; $AP=c$; $AF=m$; $NK \parallel PF$. AK საძებნი მონაკვეთია.

9. მოცემულია კუთხე BAC და M წერტილი AB გვერდზე. AC გვერდზე ვიპოვოთ წერტილი N ისეთი, რომ $AN + MN = d$ მონაკვეთს.



ნახ. 31.

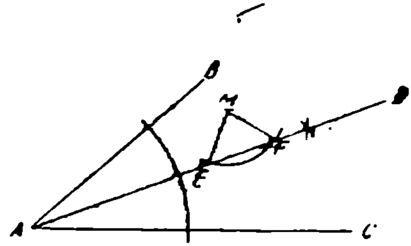
ამ ამოცანის ამოხსნა იხ. III, ნახ. 9. აქ მხოლოდ რედაქციაა შეცვლილი.

10. მოცემულია კუთხე BAC და წერტილი M მის შიგნით. ვიპოვოთ წერტილი, რომელიც ერთნაირად იყოს დაშორებული ამ კუთხის გვერდებიდან, ხოლო M წერტილიდან კი გარკვეული m მანძილით (ნახ. 32).

მითითება: AD არის BAC კუთხის ბისექტრისა. M წერტილიდან შემოხაზულია წრეხაზი m რადიუსით; E და F გადაკვეთის წერტილები წარმოადგენენ ამოცანის ამონახსნებს, ე. ი. საძებნ წერტილებს.

მკითხველი გამოარკვევს, როდის არ იქნება შესაძლებელი ამოცანის აგება.

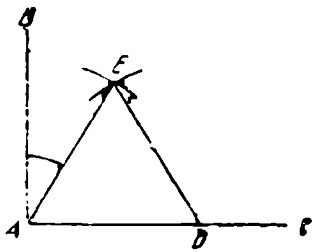
(ამოცანა ამოხსნილია გეომეტრიულ ადგილთა ხერხით. დაასახელეთ ეს გეომეტრიული ადგილები).



ნახ. 32.

11. მართი კუთხის გაყოფა სამ ტოლნაწილად ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით (ნახ. 33).

$\angle BAC=90°$; $AD=AE=ED$; მაშასადამე, $\angle EAD=60°$; $\angle EAB=90°-60°=30°$.

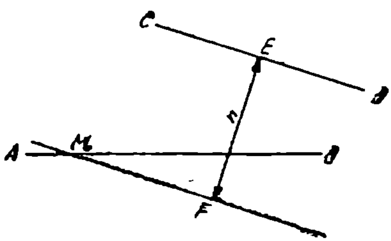


ნახ. 33.

12. იპოვეთ მოცემულ AB სწორზე ისეთი წერტილი M, რომელიც მეორე მოცემული CD სწორიდან დაშორებული იყოს n მანძილით (ნახ. 34).

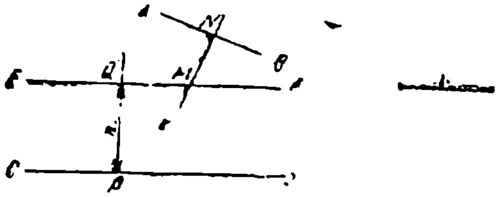
$EF\perp CD$; $EF=n$; $MF \parallel CD$.

M წერტილი ვიპოვეთ გეომეტრიულ ადგილთა ხერხით. ამოცანას აქვს ორი ამონახსენი. იპოვეთ მეორე. ამისათვის განაგრძეთ CD და AB სწორი ხაზები მარჯვნივ.



ნახ. 34.

13. იპოვეთ წერტილი, რომელიც თანასწორად არის დაშორებული A და B ორი მოცემულ წერტილიდან და n მანძილითაა დაშორებული CD სწორიდან (ნახ. 35).



ნახ. 35.

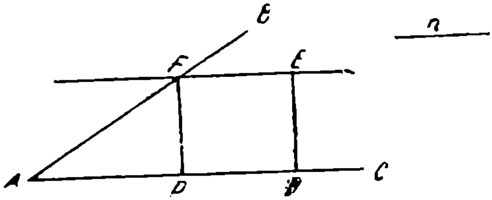
$PQ \perp CD$; $PQ = n$; Q წერტილზე გავლებულია $EF \parallel CD$.

AB გაყოფილია შუაზე N წერტილში. N წერტილზე გავლებულია $NK \perp AB$. EF და NK სწორების გადაკვეთის წერტილი M საძებნი წერტილია. (დაასახელეთ აქ გეომეტრიული ადგილები).

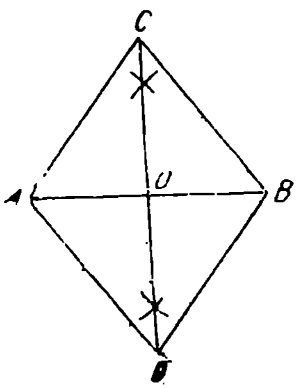
ამოცანას აქვს ორი ამონახსენი. მეორეს ვიპოვით, თუ გავავლებთ CD სწორი ხაზის პარალელურს მის ქვევით n მანძილზე დაშორებით.

14. მოცემული მახვილი კუთხის გვერდებს შორის მოათავსეთ გარკვეული სიგრძის მონაკვეთი ისე, რომ იგი ეპერპენდიკულარებოდეს ერთერთ გვერდს (ნახ. 36).

ნახ. 36-ზე $DE \perp AC$. DE ეტოლება n მონაკვეთს. EF პარალელურია AC სწორი ხაზისა. $FP \perp AC$. FP საძებნი მონაკვეთია



ნახ. 36.



ნახ. 37.

15. ავაგოთ რომბი, რომლის დიაგონალებია 4 სმ და 3 სმ (ნახ. 37).

აგება ნათლად სჩანს ნახაზიდან. $AB=3$ სმ; $AO=OB$; $CD \perp AB$; $OC=2$ სმ; $OD=2$ სმ. $ABCD$ საძებნი რომბია.

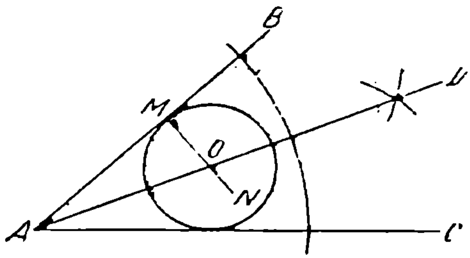
დაამტკიცეთ, რომ $ACBD$ რომბია.

16. ავაგოთ წრეხაზი, რომელიც ეხება $\angle BAC$-ს ორივე გვერდს და ერთ მათგანს M წერტილში (ნახ. 38).

MN და AD სწორების გადაკვეთის წერტილი O იქნება საძებნი.

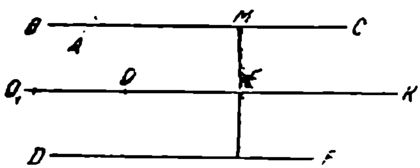
წრეხაზის ცენტრი, ხოლო OM მისი რადიუსი. ამოცანა ამოხსნილია გეომეტრიულ ადგილთა ხერხით. დაასახელეთ აქ გეომეტრიული ადგილები.

$MN=AB$; AD ბისექტრისაა BAC კუთხისა.



ნახ. 38.

17. ორ პარალელურ სწორ ხაზს შორის მოცემულია წერტილი A. გავავლოთ წრეხაზი, რომელიც ეხებოდეს ორივე სწორს და გაივლიდეს A წერტილზე (ნახ. 39).



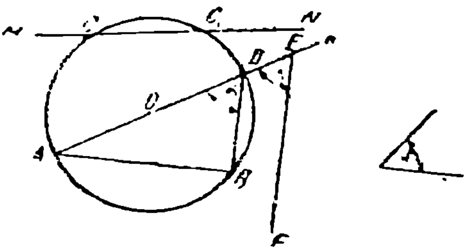
ნახ. 39.

A წერტილიდან ME მონაკვეთის ტოლი რადიუსით შემოვხაზოთ რკალი, რომლის გადაკვეთის წერტილები EK სწორთან იქნება O და O_1; ეს წერტილები იქნება საძებნი წრეხაზების ცენტრი; მათი რადიუსები კი იქნება OA და O_1A, რომლებიც ME მონაკვეთის ტოლია. დაასახელეთ ამ შემთხვევაში გეომეტრიული ადგილები. ააგეთ წრეხაზები.

ნახაზზე $BC \parallel DF$; $MN=DF$;
$MP=BC$; MN გაყოფილია შუაზე E წერტილში; $KF \parallel BC$.

18. მოცემულ MN სწორზე ვიპოვოთ ისეთი წერტილი, საიდანაც AB მოცემული მონაკვეთი სჩანს გარკვეული α კუთხით (ნახ. 40).

გავავლოთ ჯერ A წერტილზე ნებისმიერი სწორი AK და ამ სწორზე ნებისმიერად აღებულ E წერტილთან ავაგოთ კუთხე $AEF=\alpha$.

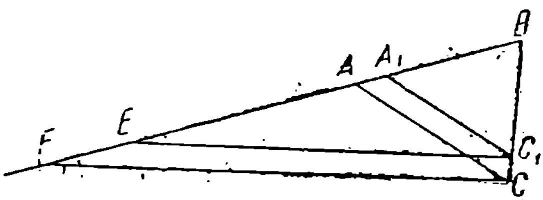


ნახ. 40.

შემდეგ B წერტილზე გავავლოთ $BD \parallel EF$. მიღებულ ADB სამკუთხედზე შემოვხაზოთ წრეხაზი. ამ წრეხაზისა და MN სწორის გადაკვეთის წერტილები C და C_1 იქნება საძებნი წერტილები. ACB და AC_1B კუთხეები ტოლია α კუთხისა. ამოცანას აქვს ორი ამონახსენი. როდის ექნება ერთი ამონახსენი? როდის არც ერთი?

19. ავაგოთ Δ, რომლის პერიმეტრი ეტოლება მოცემულ p სიგრძეს და რომელიც მსგავსია მოცემული ABC სამკუთხედისა (ნახ. 41).

ვიპოვოთ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი და შემდეგ გვერდები AB, BC, AC შევამციროთ ან გავადიდოთ იმდენჯერ, რამდენჯერაც მეტი ან ნაკლები იქნება მოცემული სამკუთხედის პერიმეტრი მოცემულ p პერიმეტრზე. ნახაზზე ეს მიიღებს ასეთ სახეს (ნახ. 41):



ნახ. 41.

ABC მოცემული Δ-ა. ვიპოვოთ ამ Δ-ის პერიმეტრი p_1.
$AB+BC+AC=BF=p_1$; $BE=p$; $CF \parallel EC_1$. $A_1C_1 \parallel AC$; A_1BC_1 საძებნი სამკუთხედია;

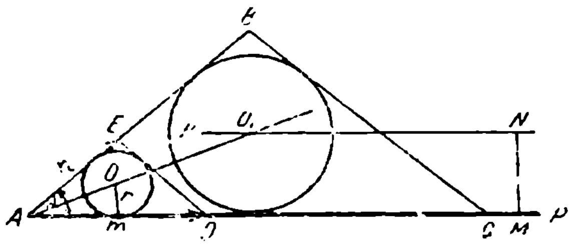
გვერდები AA, AC, CC უნდა შევამციროთ, რასაც ვაკეთებთ ასე: წერტილი F და C შევაერთოთ და გავავლოთ FC სწორის პა-

რალელური EC_1 სწორი ხაზი. მიღებული A_1BC_1 სამკუთხედი იქნება საძებნი სამკუთხედი (მსგავსობის ხერხი).

20. ავაგოთ ტოლფერდა სამკუთხედი, თუ მოცემულია წვეროსთან მდებარე კუთხე და მისი სიმაღლისა და ფერდის ჯამი.

ჯერ ავაგოთ მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ერთი მახვილი კუთხე ეტოლება მოცემული კუთხის ნახევარს. შემდეგ ავაგოთ ამის მსგავსი მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ჰიპოტენუზისა და კათეტის ჯამი მოცემულია. დასასრულ ავაგებთ საძებნ ტოლფერდა სამკუთხედს (მსგავსობის ხერხი).

21. ავაგოთ სამკუთხედი ACC ისე, რომ $\angle A$ ეტოლებოდეს მოცემულ α კუთხეს; $AC : AC = m : n$; სადაც



ნახ. 42.

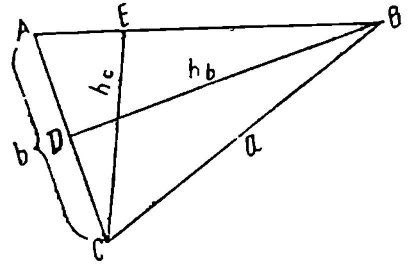
m და n მოცემული მონაკვეთებია, და ჩახაზული წრეხაზის რადიუსი R მონაკვეთის ტოლი იყოს (ნახ. 42).

ავაგოთ კუთხე α და მის A წვეროდან მოვკვეთოთ ერთ გვერდზე m, მეორე გვერდზე n მონაკვეთი, ამ მონაკვეთების ბოლოები E და D შევაერთოთ ED სწორით. მიღებულ AED სამკუთხედში ჩავხაზოთ წრეხაზი. აღვნიშნოთ ამ წრეხაზის რადიუსი r ასოთი. მიღებული სამკუთხედი გავადიდოთ ან შევამციროთ R და r რადიუსების მიხედვით.

ნახაზზე (42) AD$=m$; AE$=n$; AO ბისექტრისაა α კუთხისაა; $MN \perp AP$; MN=R; $NK \parallel AP$; O_1 წერტილი KN და AO სწორების გადაკვეთის წერტილია. O_1 წერტილიდან R რადიუსით შემო-

ხაზულია წრეხაზი და, დასასრულ, ამ წრეხაზისადმი გავლებულია BC მხები ED გვერდის პარალელურად. (მსგავსობის ხერხი).

22. ავაგოთ სამკუთხედი ABC, რომელშიაც მოცემულია გვერდი a და h_b h_c სიმაღლეები (ნახ. 43).



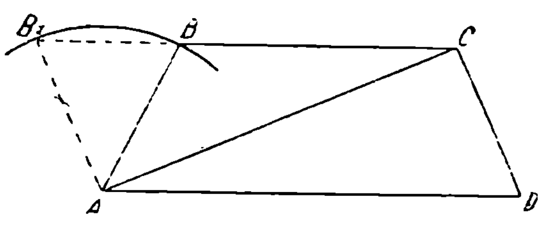
ნახ. 43.

ავაგოთ მართკუთხა სამკუთხედი CBD, რომელშიაც ცნობილია ჰიპოტენუზა a და კათეტი h_b. შემდეგ ავაგოთ მართკუთხა სამკუთხედი BCE ისე, რომ CBD და BCE სამკუთხედებს ჰიპოტენუზა a ჰქონდეთ საერთო და $CE=h_c$. CD და BE კათეტებს განვაგრძობთ მათი გადაკვეთის A წერტილამდე. (დახმარე ფიგურათა ხერხი). ABC საძებნი $\triangle$-ა.

23. ავაგოთ ტოლფერდა ტრაპეცია $ABCD$, რომელშიაც მოცემულია ქვედა ფუძე AD, დიაგონალი AC, რომელიც ეპერპენდიკულარება CD ფერდს (ნახ. 44).

$AB=CD$; $AC\perp CD$.

რადგან ACD მართკუთხა სამკუთხედში ცნობილია AD ჰიპოტენუზა და AC კათეტი, შეგვიძლია ავაგოთ დამხმარე ACD სამკუთხედი, შემდეგ C წერტილზე გავავლებთ AD ფუძის პარალელურ CB სწორს და A წერტილიდან CD ფერდის ტოლი რადიუსით შემოვ-



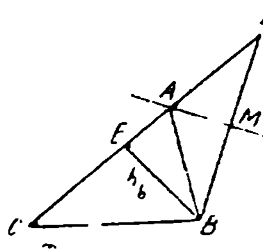
ნახ. 44.

ხაზავთ რკალს, რომლის გადაკვეთის წერტილი B იქნება საძებნი ტრაპეციის მეოთხე წვერო. (დამხმარე ფიგურათა ხერხი).

შენიშვნა. გადაკვეთის მეორე წერტილი B_1 იქნება AB_1CD პარალელოგრამის მეოთხე წვერო.

24. ავაგოთ სამკუთხედი ABC, რომელშიაც ცნობილია გვერდი a, დანარჩენი ორი გვერდის (b და c-ს) ჯამი და სიმაღლე h_b, (ე. ი. b გვერდზე დაშვებული) (ნახ. 45).

$$BE=h_b;\ BM=MD;$$
$$AM\perp BD;\ BE\perp CD,$$

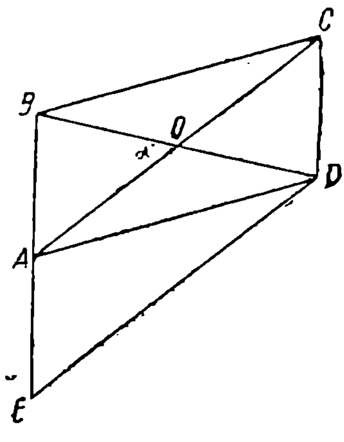


ნახ. 45.

ჯერ ავაგოთ დამხმარე სამკუთხედი BCD, რომელშიც ცნობილია, გვერდი $CD=AC+AB=b+c$. გვერდი a და სიმაღლე h_b; ეს ადვილია, თუ შევამჩნევთ, რომ BCE მართკუთხა სამკუთხედში ვიცით ჰიპოტენუზა a და კათეტი h_b. შემდეგ ავაგებთ ABC სამკუთხედს. (იხ. თავი B. ნახ. 7), აქ ჩვენ გამოვიყენეთ დამხმარე ფიგურათა და გეომეტრიულ ადგილთა ხერხები.

25. ავაგოთ $ABCD$ პარალელოგრამი, რომელშიაც მოცემულია ორი გვერდი BA და BC და α კუთხე AC და BD დიაგონალებს შორის (ნახ. 46).

D წვეროზე გავავლოთ AC დიაგონალის პარალელური სწორი და ამ სწორზე მოვკვეთოთ DE მონაკვეთი AC დიაგონალის ტოლი. ცხადია, $CD=AE$; $\angle BDE=\alpha$. მაშასადამე, BDE სამკუთხედში ცნობილია ფუძე $BE=2AB$; მედიანა $AD=BC$ და კუთხე BDE. მაშასადამე, ჯერ ავაგებთ BDE სამკუთხედს და შემდეგ $ABCD$ პარალელოგრამს. აქ ვისარგებლეთ პარალელური გადატანის ხერხით.

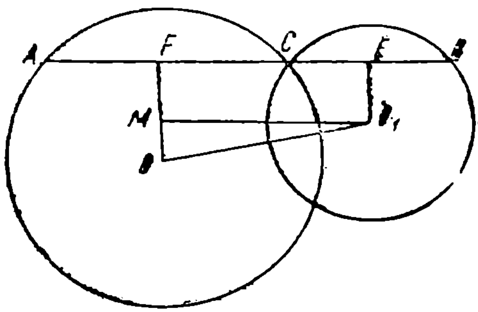


ნახ. 46.

26. ორი წრეხაზის გადაკვეთის წერტილზე გავავლოთ მკვეთი ისე, რომ წრეხაზების შიგნით მოცემული ამ მკვეთის ნაწილი გარკვეული l სიგრძის იყოს (ნახ. 47).

AB საძებნი მკვეთია. C წერტილი წრეხაზების გადაკვეთის ერთ-ერთი წერტილია.

O და O_1 მოცემული წრეხაზების ცენტრებია. $AC \perp OF$; $O_1E \perp CB$; O_1M პარალელურია AB მკვეთისა და ეტოლება AB მკვეთის ნახევარს. ამგვარად, პარალელური გადატანის საშუალებით მივიღეთ მართკუთხა სამკუთხედი OO_1M. ამ სამკუთხედში ცნობილია ჰიპოტენუზა OO_1 და კათეტი $O_1M=\frac{l}{2}$.



ნახ. 47.

ჯერ ავაგებთ ამ სამკუთხედს და დასასრულ C წერტილზე გავავლებთ O_1M კათეტის პარალელურს.

რადგან $O_1M<OO_1$, ამიტომ მკვეთი AB მიიღებს უდიდეს მნიშვნელობას, როდესაც იგი იქნება პარალელური OO_1 ხაზისა. ეს ამოცანაც ამოხსნილია პარალელური გადატანის ხერხით.

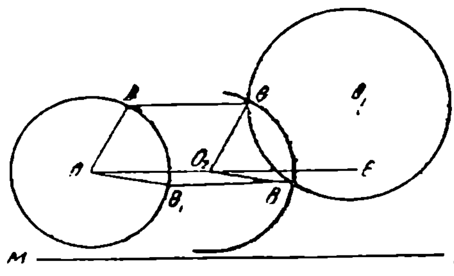
27. მოცემულ ორ წრეხაზს შორის მოათავსეთ d სიგრძის მონაკვეთი ისე, რომ იგი იყოს პარალელური მოცემული MN სწორი ხაზისა (ნახ. 48).

$OE \parallel MN$;

$OO_2=d$; $O_2C=OD$

$OD \parallel O_2C$; $OB_1 \parallel O_2B$.

ცენტრი O გადავაადგილოთ O_2 წერტილში ისე, რომ OO_2 ეპარალელებოდეს MN სწორს და ეტოლებოდეს d მონაკვეთს. O_2 წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან O წრეხაზის რადიუსით შემოვხაზოთ რკალი, რომელიც O_1 წრეხაზს გადაჰკვეთს C და B წერტილებში, გავავლოთ შემდეგ $OD \parallel O_2C$ და $OB_1 \parallel O_2B$; მაშინ, ცხადია, მონაკვეთები DC და B_1B ტოლი იქნება d მონაკვეთისა და პარალელური MN სწორი ხაზისა.

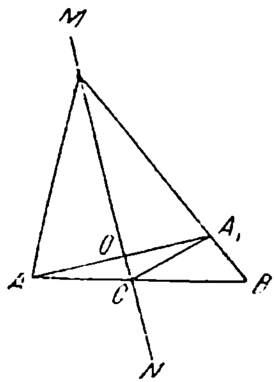


ნახ. 48

ეს ამოცანა ამოხსნილია პარალელური გადატანის ხერხით, რომელიც წარმოადგენს, როგორც ზევით იყო განმარტებული, ნაკვთების გარდაქმნის ხერხის ერთერთ მოდიფიკაციას.

28. მონაკვეთი AB გადაკვეთილია MN სწორი ხაზით C წერტილში. ვიპოვოთ MN სწორზე ისეთი წერტილი D, რომ კუთხეები ADC და CDB ტოლნი იყვნენ (ნახ. 49).

წარმოვიდგინოთ, რომ წერტილი D ვიპოვეთ და, მაშასადამე, $\angle ADC=\angle CDB$; თუ ჩვენ მოვაბრუნებთ ADC სამკუთხედს 180°-ით MN ღერძის ირგვლივ, ცხადია, რომ D წერტილი დარჩება თავის ადგილზე, A წერტილი გადაადგილდება A_1 წერტილში ისე, რომ $AA_1 \perp MN$ და $OA=OA_1$. რადგან $\angle ADC=\angle CDB$, წერტილები B, A_1 და D დალაგდება ერთ სწორ ხაზზე. ამ მსჯელობიდან გამომდინარეობს ამოცანის ასეთი აგება: A წერტილიდან MN სწორზე უნდა დავუშვათ პერპენდიკულარი AO. განვაგრძოთ იგი და მის გაგრძელებაზე მოვზომოთ OA_1 მონაკვეთი OA პერპენდიკულარის ტოლი. შემდეგ შევაერთოთ B და A_1 წერტილები სწორით BA_1 და განვაგრძოთ BA_1 MN სწორთან გადაკვეთის წერტილამდე. D წერტილი იქნება საძებნი წერტილი. როდის იქნება შეუძლებელი ეს ამოცანა? გაარჩიეთ შემთხვევა, როდესაც MN ჰკვეთს AB მონაკვეთს შუა წერტილში. (აქაც ჩვენ გამოვიყენეთ ფიგურის გარდაქმნის ხერხი, გარდაქმნა მოვახდინეთ ღერძის ირგვლივ ბრუნვის საშუალებით).



ნახ. 49.

29. მოცემულია O და O_1 ორი წრეხაზი და სწორი AB. გავავლოთ AB სწორისადმი ისეთი CD პერპენდიკულარი სწორი, რომლის ნაწილები წრეხაზების შიგნით ტოლი იყოს (ნახ. 50).

მოცემულია O და O_1 წრეხაზები და სწორი AB.

CD სწორის ასაგებად, OO_1 მონაკვეთი გავყოთ შუაზე E წერტილში და ამ წერტილზე გავავლოთ AB სწორის პარალელური A_1B_1 სწორი. შემდეგ მოვაბრუნოთ O წრეხაზი A_1B_1 სწორის ირგვლივ 180 გრადუსით. მივიღებთ O_2 წრეხაზს. ვთქვათ, O_2 წრეხაზი

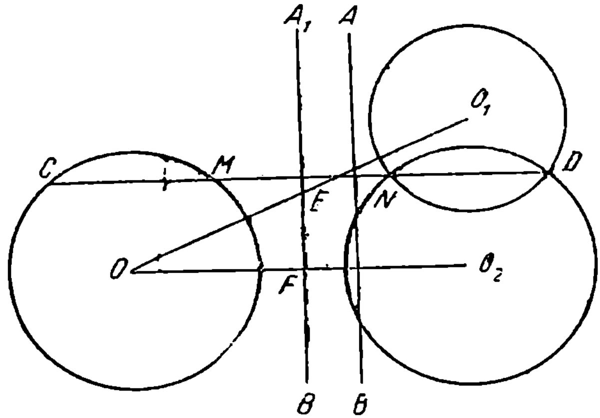
ჰკვეთს O_1 წრეხაზს N და D წერტილებში. ცხადია, საძებნი CD სწორი განისაზღვრება N და D წერტილებით.

ნახაზზე $OO_2 \perp A_1B_1$, E წერტილი OO_1-ის შუა წერტილია; $A_1B_1 \parallel AB$; $OF \perp FO_2$; CM იქნება ტოლი ND-სი.

რამდენი ამონახსენი აქვს ამოცანას?

გამოარკვიეთ ამოცანის აგების შესაძლებლობის პირობა.

ამოცანა ამოხსნილია ბრუნვის ხერხით.

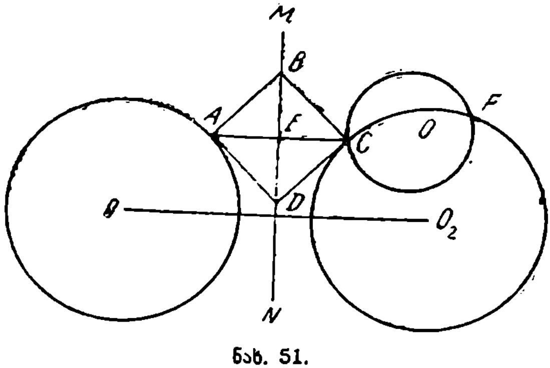


ნახ. 50.

30. ავაგოთ კვადრატი, რომლის ორი მოპირდაპირე წვერო მოთავსებული იყოს მოცემულ MN სწორზე, ორი დანარჩენი კი—ორ მოცემულ O და O_1 წრეხაზზე (ნახ. 51.).

ნახაზზე ABCD საძებნი კვადრატია. საკმაოა ვიპოვოთ მისი ერთი, მაგალითად C წვეროს მდებარეობა, რომ ავაგოთ შემდეგ თვით კვადრატიც. მართლაც, მაშინ გვეცოდინება CF მონაკვეთი ($CF \perp MN$; რატომ?), გავიგებთ დიაგონალ AC-ს, რომელზედაც ადვილად ავაგებთ კვადრატს.

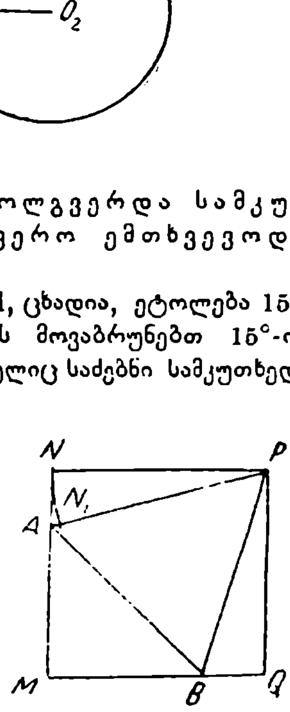
C წერტილის საპოვნელად მოვაბრუნოთ O წრეხაზი MN სწორის ირგვლივ 180°-ით, მივიღებთ O_2 და O_1 წრეხაზების გადაკვეთის C და F წერტილებს. დანარჩენი ნათელია. ამოცანა ამოხსნილია ღერძის ირგვლივ ბრუნვის ხერხით. რამდენი ამონახსენი აქვს ამოცანას? როდის შეუძლებელია აგება? საკმაო რიცხვი ამოცანებისა, რომლების ამოხსნა შესაძლებელია ნაკვთთა გარდაქმნის ხერხით, მოცემულია იულიუს პეტერსენის წიგნში: „Методы и теории для решения геометрических задач на построение", Москва, 1892. წიგნი შეიცავს 400-ზე მეტ ამოცანას.



ნახ. 51.

31. კვადრატში ჩავხაზოთ ტოლგვერდა სამკუთხედი ისე, რომ მისი ერთი წვერო ემთხვეოდეს კვადრატის წვეროს (ნახ. 52).

$\angle APB$ საძებნი სამკუთხედია. $\angle NPA$, ცხადია, ეტოლება $15°$-ს ისე, როგორც $\angle BPQ$. თუ NP გვერდს მოვაბრუნებთ $15°$-ით, წერტილი N გადავა N_1 წერტილში, რომელიც საძებნი სამკუთხედის AP გვერდზე იქნება. ამგვარად, გვერდი PN P წერტილის ირგვლივ მოვაბრუნოთ $15°$-ით და P წერტილი შევუერთოთ N_1 წერტილს, მიღებული მონაკვეთი განვაგრძოთ. MN და PN_1 სწორების გადაკვეთის A წერტილი იქნება მეორე წვერო საძებნი სამკუთხედისა. დანარჩენი ნათელია, როგორც ნათელია აქ ხმარებული P წერტილის ირგვლივ ბრუნვის ხერხი.

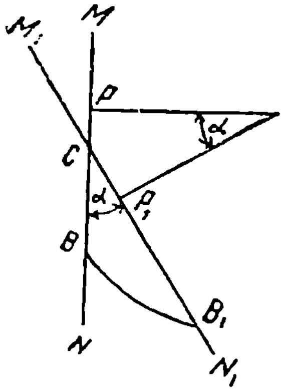


ნახ. 52.

ვიდრე გადავალთ შემდეგ ამოცანაზე, რომელსაც აგრეთვე ამოვხსნით იმავე ხერხით, გავერკვეთ წინასწარ შემდეგ თეორიულ საკითხში.

წარმოვიდგინოთ MN სწორი ხაზი, და წერტილი A მის გარეშე მოვაბრუნოთ MN ხაზი A წერტილის ირგვლივ რაიმე გარკვეული α კუთხით (ნახ. 53). ამისათვის მოვიქცეთ ასე: A წერტილიდან მოცემულ MN სწორზე დავუშვათ AP პერპენდიკულარი; AP მოვა-

ბრუნოთ A წერტილის ირგვლივ α კუთხით*. მაშინ წერტილი P გადაადგილდება P_1 წერტილში. ცხადია, $AP_1=AP$. გავავლოთ შემდეგ P_1 წერტილზე M_1N_1 სწორი AP_1 სწორისადმი პერპენდიკულარულად, რომელიც იქნება MN სწორის ახალი მდებარეობა.

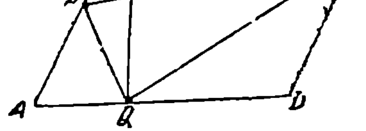


ნახ. 53.

ავიღოთ ახლა MN სწორზე ნებისმიერი B წერტილი და დავსვათ კითხვა, საით გადაადგილდება ეს წერტილი. ცხადია, რომ წერტილი B გადაადგილდება B_1 წერტილში, რომელიც დევს M_1N_1 სწორზე და დაშორებულია A წერტილიდან AB მონაკვეთის ტოლი მანძილით. ეს უკანასკნელი დასკვნა შეიძლება გამოვთქვათ MN სწორის ყოველი წერტილის შესახებ. ამ დასკვნას, და საზოგადოდ დასმულ საკითხზე მოცემულ განმარტებას დიდი მნიშვნელობა აქვს აგების საქმეში. განვიხილოთ ამის შემდეგ ამოცანა:

32. პარალელოგრამში ჩავხაზოთ ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის წვეროსთან მდებარე კუთხე ეტოლებოდეს α კუთხეს, ხოლო წვერო ემთხვეოდეს პარალელოგრამის ერთ-ერთ წვეროს. (ნახ. 54).

ნახაზზე $ABCD$ პარალელოგრამია. CPQ საძებნი სამკუთხედია. $\angle PCQ=\alpha$; $\angle AFQ=\alpha$. თუ როგორმე ვიპოვით Q წერტილს, ადვილად ავაგებთ საძებნ სამკუთხედს. წარმოვიდგინოთ, რომ AM სწორი მოვაბრუნეთ C წერტილის ირგვლივ α კუთხით ისე, როგორც ეს ზემოთ განვმარტეთ. მაშინ AM სწორი დაიკავებს NQ სწორის მდებარეობას და გადაკვეთს AD სწორს იმ Q წერტილში, რომელიც იქნება საძებნი სამკუთხედის მეორე წვერო. დანარჩენი ნათელია.



ნახ. 54.

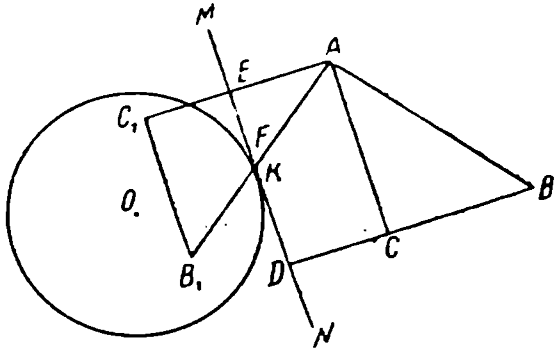
33. მოცემულია წრეხაზი და ორი წერტილი A და B მის გარეშე. გავავლოთ ამ წრეხაზისადმი მხები ისე, რომ მანძილი A წერტილიდან ამ მხებამდე ეფარდე-

* აქ მობრუნებულია საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

ბოდეს მანძილს იმავე წერტილიდან პერპენდიკულარამდე, რომელიც დაშვებულია B წერტილიდან მხებისადმი, ისე როგორც 1 : 2 (ნახ. 55).

ნახაზზე MN საძებნი მხებია O მოცემულ წრეხაზისადმი; $BD \perp MN$; $AE \perp MN$; $AC \perp BD$; $AE : AC = 1:2$.

წარმოვიდგინოთ, რომ მართკუთხა $\triangle ABC$ მოვაბრუნეთ A წერტილის ირგვლივ 90°-ით; მაშინ მივიღებთ AB_1C_1 სამკუთხედს. აქ $AB_1 = AB$; $AC_1 = AC$. ცხადია, კათეტი B_1C_1 იქნება MN მხების პარალელური. F წერტილში AB_1 კვეთს MN მხებს. რადგან $AO : AE = 2$, ამიტომ $AB_1 = 2AF$. მაშასადამე, წერტილი F ყოფილა



ნახ. 55.

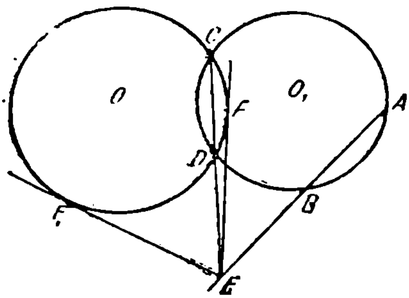
AB_1 ხაზის შუაწერტილი. ამგვარად AB_1 მონაკვეთს გავყოფთ შუაზე და ამ შუაწერტილიდან ვავლებთ მხებს წრეხაზისადმი (მკითხველს არ უნდა ეგონოს, რომ წერტილი F არის შეხების წერტილი K).

ამ მაგალითზე მკითხველი ნათლად ხედავს, რომ ABC სამკუთხედის A წერტილის ირგვლივ ბრუნვის საშუალებით, ამ სამკუთხედმა მიიღო ისეთი მდებარეობა, რომელმაც მოგვცა კავშირი AB_1C_1 და AEF ორ სამკუთხედს შორის. ამ კავშირით ჩვენ ვისარგებლეთ: ვიპოვეთ ის წერტილი F, საიდანაც გავლებული მხები MN იქნება საძებნი მხები.

33. ავაგოთ წრეხაზი, რომელიც გაივლიდეს ორ მოცემულ წერტილზე და ეხებოდეს მოცემულ წრეხაზს (ნახ. 56).

O მოცემული წრეხაზია, ხოლო A და B მოცემული ორი წერტილი.

გავავლოთ A და B წერტილებზე ნებისმიერი O_1 წრეხაზი; რომელიც კვეთდეს მოცემულ წრეხაზს. წარმოვიდგინოთ, რომ ქორდა AB კვეთს CD ქორდას E წერტილში. ამ E წერტილიდან გავავლოთ მხები EF მოცემული წრეხაზისადმი. შემდეგ A, B და F წერტილზე გავავლოთ წრეხაზი (ამას შეასრულებს მკითხველი). მივიღებთ საძებნ წრეხაზს რადგან $EA.EB=EC{\cdot}ED=EF^2$.

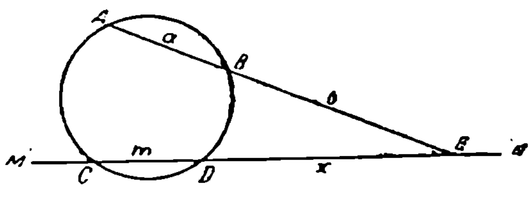


ნახ. 56.

თუ E წერტილიდან გავავლებთ მეორე EF_1 მხებს, მივიღებთ შეხების მეორე წერტილ F_1-ს. მაშასადამე, ამოცანას აქვს ორი ამონახსენი.

თუ პერპენდიკულარი AB, ქორდის შუა წერტილიდან აღმართული, გაივლის O წერტილზე, მაშინ E წერტილი იქნება უსასრულობაში, რადგან AB და CD პარალელური იქნება. ამ შემთხვევაში ორივე მხები გავლებული უნდა იყოს AB ქორდის პარალელურად.

34. A და B წერტილებზე გავავლოთ წრეხაზი, რომელიც მოკვ'ეთს მოცემულ სწორზე გარკვეული m სიგრძის ქორდას (ნახ. 57).



ნახ. 57.

განვაგრძოთ AB. ვთქვათ, რომ AB ჰკვეთს MN სწორს E წერტილში. აღვნიშნოთ ცნობილი მონაკვეთი BE ასოთი b, ხოლო ED—ასოთი x. მაშინ რადგან $AE\cdot BE=EC\cdot DE$, დავწეროთ

$(a+b)b=(x+m)x$, საიდანაც $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2+4b(a+b)}-m\right)$.

უარყოფითი ფესვი არ ივარგებს.

ამ ამონახსენის აგებისათვის მივიღოთ $y^2=4b\cdot(a+b)$, შემდეგ ავაგოთ $\sqrt{m^2+y^2}$, როგორც ჰიპოტენუზა სამკუთხედისა, რომლის კათეტებია m და y. ამის შემდეგ ადვილად ვიპოვით x.

ნახაზზე: $CD=m$; $AB=a$.

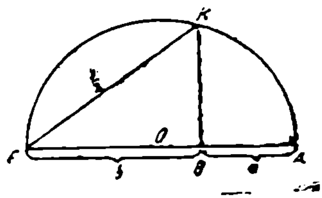
$BE=b$; $ED=x$.

$y=2\sqrt{b(a+b)}$; $\frac{y}{2}=\sqrt{b(a+b)}$ (იხ. ნახ. 58).

$EB=b$; $AB=a$; $EA=b+a$; $OA=$

$=\frac{a+b}{2}$ $\frac{y}{2}=EK$.

35. მოცემულია r რადიუსის წრეხაზი და AB სწორზე წერტილი M. ავაგოთ წრეხაზი, რომელიც ეხებოდეს მოცემულ წრეხაზს და სწორს M წერტილში (ნახ. 59).



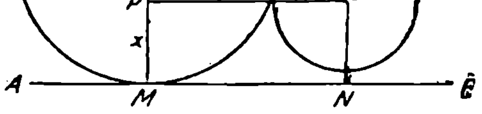
ნახ. 58.

ნახაზზე $O_1M=O_1C=x$; $OC=r$;

$O_1M\perp AB$; $ON\perp AB$; $OP\perp O_1M$.

აღვმართოთ ME პერპენდიკულარი AB სწორი ხაზისადმი და აგრეთვე დავუშვათ ON პერპენდიკულარი AB სწორზე. მაშინ ON და MN მონაკვეთები ცნობილი იქნებიან. აღვნიშნოთ $ON=a$, $MN=b$.

ცხადია, რომ საძებნი წრეხაზის ცენტრი O_1 უნდა მდებარეობდეს ME პერპენდიკულარზე. თუ ვიპოვით O_1M რადიუსს, მაშინ ადვილად ავაგებთ საძებნ წრეხაზს. აღვნიშნოთ O_1M რადიუსი x-ით, დავუშვათ O წერტილიდან OP პერპენდიკულარი ME სწორზე, მივიღებთ OPO_1 სამკუთხედს, სადაც $OO_1=r+x$;



ნახ. 59.

$OP=MN=b$; $O_1P=x-ON=x-a$: მაშასადამე:

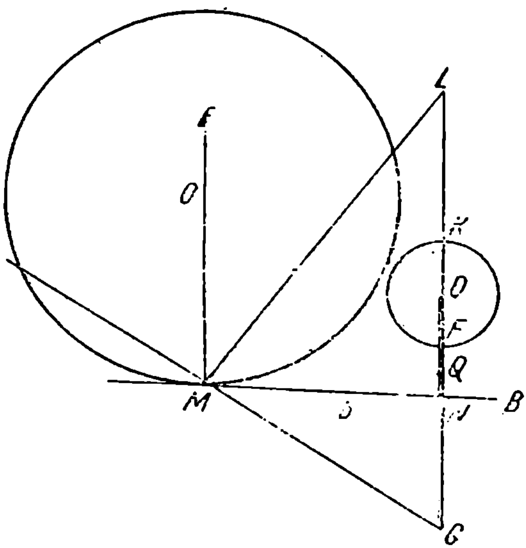
$$(r+x)^2=(x-a)^2+b^2.$$ აქედან

$$x = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{2\ (a + r)}.$$

აგებისათვის ამონახსენს მივცეთ ასეთი სახე:

$$x = \frac{a^2 - r^2}{2\,(a + r)} + \frac{b^2}{2\,(a + r)} = \frac{a - r}{2} + \frac{b^2}{2\,(a + r)}.$$

ჯერ ავაგოთ $y = \frac{b^2}{2\,(a + r)}$, შემდეგ $\frac{a - r}{2}$, შევკრიბოთ და მივიღებთ x. ეს ყველაფერი ჩანს 60 ნახაზიდან.



ნახ. 60.

$ON = a$; $MN = b$; $NF = a - r$; $NK = a + r$;

$NL = 2NK = 2(a + r)$; $NQ = \frac{a - r}{2}$; $MG \perp LM$.

შენიშვნა: ნახ. 60-ზე წრეხაზები ერთმანეთს უნდა ეხებოდნენ.

შენიშვნები: 1. როდესაც ვადგენთ განტოლებას ამოცანის ალგებრული ხერხით ამოხსნის დროს, უცნობი მონაკვეთი x ითვლება ყოველთვის როგორც დადებითი სიდიდე. თუ ამონახსენი უარყოფით მნიშვნელობას მიიღებს, ყოველთვის საჭიროა გამოვიკვლიოთ, რამდენად და რა პირობებშია ის გამოსადეგი. თუ უარყოფითი ამონახსენი დასაშვებია ამოცანის პირობების მხრივ, მაშინ ამასაც უნდა გავუწიოთ ანგარიში. ხანდახან შესაძლებელია ამოცანის შინაარსის ისეთი განზოგადება, როდესაც x-ის უარყოფით მნიშვნელობასაც აქვს კონკრეტული შინაარსი.

2. ზემოთ იყო ნათქვამი, რომ საძებნი მონაკვეთი x შეიძლება ავაგოთ მხოლოდ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით იმ შემთხვევაში, როდესაც მოცემულ მონაკვეთებზე ვაწარმოებთ ოთხ არითმეტიკულ და კვადრატული ამოფესვის ოპერაციებს, ე. ი. როდესაც გამოსახულება, რომელიც გვაძლევს x მონაკვეთს, შეიცავს მხოლოდ რაციონალურ ოპერაციებს და კვადრატულ ირაციონალობას.

თუ $x=a\sqrt[3]{2}$, ან x წარმოადგენს კუბური განტოლების ფესვს, მაშინ მონაკვეთის აგება ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით შეუძლებელია. შეუძლებელია აგრეთვე იმ შემთხვევაშიაც, როდესაც მონაკვეთი x გამოისახება კვადრატული ფესვით რაიმე ტრანსცენდენტული სიდიდიდან, როგორიცაა $x=\sqrt{\pi}$, $x=\sqrt{e}$, $x=\sqrt{\cos\alpha}$, სადაც α ნებისმიერი სიდიდეა.

ამით აიხსნება ის გარემოება, რომ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით შეუძლებელია ამოხსნა ეგრეწოდებული კუბის გაორკეცების ამოცანისა. ეს ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ავაგოთ ისეთი კუბის წიბო, რომელიც თავისი მოცულობით ორჯერ მეტია მოცემულ კუბზე.

თუ ამ უკანასკნელის წიბოს აღვნიშნავთ a ასოთი, მაშინ საძებნი წიბო $x=\sqrt[3]{2a^3}=a\sqrt[3]{2}$. მივიღეთ გამოსახულება, რომელიც შეიცავს კუბურ ირაციონალობას.

აგრეთვე ნებისმიერი კუთხის სამ ტოლ ნაწილად გაყოფა (ეგრეწოდებული კუთხის ტრისექცია) შეუძლებელია ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით.

ვანცელმა (Wautzell) პირველმა დაამტკიცა 1837 წელს, რომ კუთხის ტრისექცია დამოკიდებულია კუბურ განტოლებაზე, რომლის ფესვები შეუძლებელია გამოვსახოთ კვადრატული ფესვების საშუალებით.

თუ α კუთხე ის კუთხეა, რომელიც უნდა გავყოთ სამ ტოლ ნაწილად, მაშინ გვექნება:

$$Cos\alpha = 4\,Cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\,Cos\frac{\alpha}{3} \qquad (1)$$

მივიღოთ α კუთხის კოსინუსის ხაზი, როგორც საზომი ერთეული, და ვიპოვოთ $\frac{\alpha}{3}$ კუთხის კოსინუსის ხაზი. აღვნიშნოთ ეს უკანასკნელი $\frac{x}{2}$ წილადით, მაშინ ტოლობა (1) მიიღებს $x^3 - 3x - a = 0$ განტოლების სახეს, სადაც a წარმოადგენს α კუთხის კოსინუსის გაორკეცებულ ხაზს, ე. ი.

$$2\,Cos\alpha = a; \qquad 2\,Cos\frac{\alpha}{3} = x.$$

შეიძლება a ავიღოთ ისეთი, რომ მიღებული განტოლება ამოიხსნას კვადრატულ რადიკალებში. მაგ., თუ $a=0$, მაშინ მივიღებთ

$x^3 - 3x = 0$ განტოლებას.

ამ განტოლების ფესვებია 0, $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$. თუ $a=\sqrt{2}$, მაშინ გვექნება $x^2 - 3x - \sqrt{2} = 0$; ამ განტოლების ფესვებიც კვადრატულ რადიკალებში გამოისახება. მაგრამ თუ $a=1$, მაშინ:

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

განტოლების ფესვები კვადრატულ რადიკალებში აღარ გამოისახება.

ზოგიერთი კუთხე, როგორიცაა, მაგალითად, 90°, 45° და საზოგადოდ $\frac{\pi}{2^n}$, სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია, გაიყოფა სამ ტოლ ნაწილად ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით.

არ უნდა გვეგონოს, რომ კუთხის ტრისექცია სრულიად შეუძლებელი საქმეა. თუ ვისარგებლებთ სხვა მრუდეებით, მაგალ., კონუსური კვეთებით, ამოცანა უკვე დასაძლევი ხდება.

ამნაირივეა ამოცანები წრის კვადრატურის და წრეხაზის გასწორხაზოვანების შესახებ.

პირველი ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ავაგოთ კვადრატი, რომლის ფართობი ეტოლებოდეს მოცემული წრის ფართობს.

მეორე ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ვიპოვოთ მონაკვეთი, რომელიც თავისი სიგრძით ეტოლება წრეხაზის სიგრძეს.

ეს ორი უკანასკნელი ამოცანა ამოუხსნადია.

რომ წრის კვადრატურა ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ამოუხსნად ამოცანას წარმოადგენს, ეს პირველად მკაცრად დაამტკიცა ლინდემანმა (Lindemann) 1882 წ.

3. კერძოდ საინტერესოა ამოცანები, რომლების ამოხსნა შესაძლებელია მხოლოდ სახაზავის საშუალებით, ე. ი. მხოლოდ სწორი ხაზების გავლებით, ან მხოლოდ ფარგლის საშუალებით, ე. ი. წრეხაზების გავლების საშუალებით. ამგვარად შესაძლებელია:

ა) ფარგლისა და სახაზავის გეომეტრია.

ბ) სახაზავის გეომეტრია (შტეინერის აგებანი).

ასეთი ამოცანების ამოხსნის დროს, ჩვენ ვსარგებლობთ კიდევ სიბრტყეზე მოცემული რაიმე ფიგურით — პარალელოგრამით, კვადრატით, წრეხაზით.

გ) ფარგლის გეომეტრია (მასკერონის—Mascheron-ის აგებანი).

იხ. Август Адлер. Теория геометрических построений. Издание второе. Одесса. 1924.

4. ზოგიერთი ავტორი აღიარებს მხოლოდ ორ მთავარ ხერხს გეომეტრიულ ამოცანათა აგებისა:

ა) გეომეტრიულ ადგილთა ხერხი, რომელსაც აკუთვნებენ ძველი საბერძნეთის უდიდესი ფილოსოფოსის პლატონის სკოლას.

ბ) მეორე ხერხი მდგომარეობს შემდეგში:

სიბრტყეზე (ან სივრცეში) ამყარებენ ამა თუ იმ გეომეტრიულ შესაბამობას და საძებნი ნაკვთის ნაცვლად აგებენ წინასწარ გარდაქმნილ ნაკვთს, რომლის შექცეული გარდაქმნით პოულობენ საძებნ ნაკვთს.

რადგანაც შესაბამობა შეიძლება იყოს სხვადასხვანაირი, ამიტომ ამ მეორე ხერხს, ცხადია, უნდა ჰქონდეს მრავალი მოდიფიკაცია. (იხ. მაგალ. В. Каган-ის წერილი „Основные идеи геометрии". „Энциклопедич. Словарь Граната, т. 13). პროფ. მ. სიმონი (М. Симон) ასახელებს ოთხ ხერხს.

F. სტერეომეტრიული ამოცანები აგებაზე

სტერეომეტრიული აგება არსებითად განსხვავდება პლანიმეტრიული აგებისაგან. იმ დროს, როდესაც ეს უკანასკნელი ჩვენ შეგვიძლია ტექნიკურად შევასრულოთ სიბრტყეზე ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით, სივრცეში ამ ხელსაწყოებით ვერ ავაგებთ ნაკვთს. მაგალითად, თუ სივრცეში მოცემულია სამი წერტილი, როგორ ვუჩვენოთ ფაქტიურად ის სიბრტყე, რომელიც ამ სამი წერტილით სრულიად განისაზღვრება. ცხადია, აქ ჩვენ უნდა დავკმაყოფილდეთ მხოლოდ იმ გარემოებით, იმ აზრით, რომ სამ წერტილზე შეიძლება გავავლოთ ერთი გარკვეული სიბრტყე. ეს შესაძლებლობა ლოგიკური შესაძლებლობაა. ამას ჩვენ სისრულეში ვერ მოვიყვანთ ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით, აქ ნახაზს ვერ მივიღებთ.

ქვემოთ მოყვანილი სტერეომეტრიული აგებანი დამყარებულია შემდეგ ძირითად აგებაზე:

1) ყოველ სამ წერტილზე, რომლებიც ერთ სწორზე არ იმყოფება (ან წერტილზე და სწორზე), შეიძლება გავავლოთ სიბრტყე.

2) შეიძლება ვიპოვოთ სიბრტყისა და სწორის გადაკვეთის წერტილი.

3) შეიძლება ვიპოვოთ ორი სიბრტყის კვეთა.

ამ განმარტების შემდეგ ამოვხსნათ ამოცანები:

1. A წერტილიდან დავუშვათ პერპენდიკულარი MN სიბრტყეზე.

A წერტილზე გავავლოთ ისეთი P სიბრტყე, რომელიც კვეთდეს MN სიბრტყეს. P სიბრტყეზე A წერტილიდან დავუშვათ პერპენდიკულარი ამ სიბრტყეების გადაკვეთის BC სწორზე.

პერპენდიკულარისა და BC სწორის გადაკვეთის D წერტილიდან აღვმართოთ პერპენდიკულარი DE—MN სიბრტყეში, შემდეგ DE პერპენდიკულარზე და A წერტილზე გავავლოთ სიბრტყე Q და ამ უკანასკნელ სიბრტყეში დავუშვათ პერპენდიკულარი DE სწორზე A წერტილიდან, რაც იქნება პერპენდიკულარი MN სიბრტყისადმი.

შენიშვნა. დამტკიცება აგების სისწორისა ადვილია. ნახაზს გააკეთებს მკითხველი.

2. MN სიბრტყეზე მდებარე A წერტილიდან აღვმართოთ პერპენდიკულარი ამ სიბრტყისადმი.

MN სიბრტყეში A წერტილზე გავავლოთ AB სწორი და ამ სწორზე ნებისმიერი სიბრტყე P. უკანასკნელზე A წერტილიდან აღვმართოთ AC პერპენდიკულარი AB სწორისადმი. აღვმართოთ

აგრეთვე პერპენდიკულარი AD იმავე AB სწორისადმი MN სიბრტყეში, AD და AC სწორზე გავავლოთ სიბრტყე Q და ამ უკანასკნელში აღვმართოთ პერპენდიკულარი A წერტილიდან AC სწორისადმი. მივიღებთ საძებნ პერპენდიკულარს.

შენიშვნა: 1 და 2 ამოცანების აქ მოყვანილ ამოხსნას აქვს თეორიული მნიშვნელობა. პრაქტიკულად ეს ამოცანები ამოიხსნება სხვადასხვა ხელსაწყოსა და ხერხის საშუალებით. მაგალითად, თუ სიბრტყე ჰორიზონტალურია, ვისარგებლებთ შვეულით ან ორი მართკუთხა სამკუთხედით. ამ უკანასკნელი ხელსაწყოთი შეიძლება ვისარგებლოთ იმ შემთხვევაშიაც, როცა სიბრტყე ჰორიზონტალური არ არის.

3. A წერტილზე გავავლოთ BC სწორის პარალელური სწორი ხაზი.

ჯერ გავავლებთ A წერტილზე და BC სწორზე სიბრტყეს, შემდეგ ამ სიბრტყეში A წერტილზე ავაგებთ BC სწორის პარალელურ სწორს.

4. A წერტილზე გავავლოთ MN სიბრტყის პარალელური სწორი.

MN სიბრტყეში გავავლოთ ნებისმიერი სწორი და შემდეგ A წერტილზე გავავლოთ ამ სწორის პარალელური. ამოცანას აქვს უსასრულო მრავალი ამონახსენი.

5. BC სწორისადმი მის გარეშე მდებარე A წერტილზე გავავლოთ პერპენდიკულარული სიბრტყე.

BC სწორზე გავავლოთ ორი სიბრტყე—ერთი მათგანი A წერტილზე. A წერტილიდან დავუშვათ პერპენდიკულარი BC სწორზე. ამ პერპენდიკულარისა და BC სწორის გადაკვეთის D წერტილიდან აღვმართოთ პერპენდიკულარი DE მოცემულ BC სწორი ხაზისადმი მეორე სიბრტყეში. დასასრულ AD და DE სწორებზე გავავლოთ სიბრტყე. ეს უკანასკნელი იქნება საძებნი სიბრტყე.

6. A წერტილზე გავავლოთ სიბრტყე, რომელიც ეპარალელებოდეს ორ სხვადასხვა სიბრტყეზე მდებარე BC და DE სწორებს.

A წერტილზე გავავლოთ BC სწორის პარალელური AM სწორი და DE სწორის პარალელური AN სწორი. დასასრულ AM და AN სწორზე გავავლოთ სიბრტყე.

7. AB სწორზე გავავლოთ სიბრტყე CD სწორის პარალელური.

AB სწორზე ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი E და ამ წერტილზე გავავლოთ CD სწორის პარალელური EF სწორი. თუ ახლა AB და EF სწორზე გავავლებთ სიბრტყეს, მივიღებთ საძებნ სიბრტყეს.

8. A წერტილზე გავავლოთ MN სიბრტყის პარალელური სიბრტყე.

A წერტილიდან დავუშვით AB პერპენდიკულარი MN სიბრტყისადმი. A წერტილზე გავავლოთ AB სწორისადმი პერპენდიკულარი სიბრტყე. მივიღებთ საძებნ სიბრტყეს.

9. ვიპოვოთ უმოკლესი მანძილი AB და CD ორ ალმაცერ სწორს შორის.

AB სწორზე გავავლოთ სიბრტყე CD სწორის პარალელური, ხოლო CD სწორზე AB სწორის პარალელური. მანძილი ამ ორ სიბრტყეს შორის იქნება საძებნი უმოკლესი მანძილი.

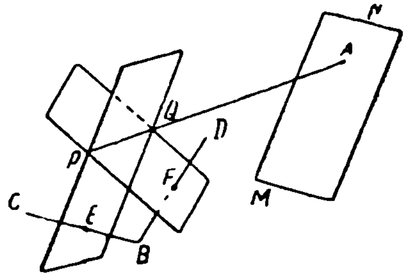
10. მოცემულ MN სწორზე ვიპოვოთ ისეთი A წერტილი, რომელიც თანასწორად იყოს დაშორებული B და C ორი მოცემული წერტილიდან.

BC მონაკვეთი გავყოთ შუაზე, ამ შუაწერტილზე გავავლოთ BC სწორისადმი პერპენდიკულარული სიბრტყე Q. ამ სიბრტყისა და MN სწორის გადაკვეთის წერტილი საძებნ წერტილს წარმოადგენს.

11. მოცემულ A წერტილზე გავავლოთ ისეთი სწორი, რომელიც კვეთდეს სივრცეში მოცემულ BC და DE ორ სწორს.

ამისათვის გავავლოთ ორი სიბრტყე—ერთი A წერტილზე და BC სწორზე, მეორე A წერტილზე და DE სწორზე. ამ ორი სიბრტყის გადაკვეთის სწორი ხაზი, რომელიც, ცხადია გაივლის A წერტილზე, იქნება საძებნი სწორი.

12. ვიპოვოთ MN სიბრტყეზე ისეთი წერტილი A, რომელიც თანასწორად იყოს დაშორებული სივრცეში (და არა ერთ სწორზე) მოცემულ B, C და D სამი წერტილიდან. (ნახ. 61).



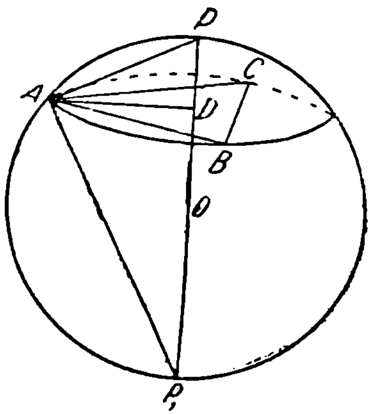
ნახ. 6

ნახ. 61-ზე E არის CB მონაკვეთის შუა წერტილი, F—კი BD მონაკვეთის შუაწერტილი.

გავავლოთ E წერტილზე CB სწორისადმი პერპენდიკულარული სიბრტყე, ხოლო F წერტილზე BD სწორისადმი პერპენდიკულარული სიბრტყე. ამ ორი სიბრტყის გადაკვეთის PQ სწორი ხაზისა და MN სიბრტყის გადაკვეთის A წერტილი საძებნ წერტილს წარმოადგენს.

13. ვიპოვოთ მოცემული სფეროს დიამეტრი (იხ. ნახ. 62).

P წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან, შემოვხაზოთ მრუდფეხებიანი ფარგლის საშუალებით ABC წრეხაზი სფეროს ზედაპირზე. ცხადია, მანძილი ფარგლის ფეხებს შორის იქნება AP ქორდის ტოლი. წრეხაზზე, ავილოთ ნებისმიერად A, B, C სამი წერტილი. ფარგლის საშუალებით ჩვენ შეგვიძლია გავიგოთ სამი ქორდა AB, AC და BC და ცალკე ავაგოთ სიბრტყეში სამკუთხედი ABC. შემოვხაზოთ ამ სამკუთხედზე წრეხაზი. ვიპოვით D ცენტრს და რადიუს AD-ს. შემდეგ ამისა ავაგებთ APD მართკუთხა სამკუთხედს, რაც შესაძლებელია, რადგან ვიცით AP ჰიპოტენუზაა და AD კათეტი. თუ ახლა ჩვენ აღვმართავთ AP ჰიპოტენუზისადმი პერპენდიკულარს A წერტილში და განვაგრძობთ PD კათეტს, ვიპოვით P_1 წერტილს. PP_1 იქნება საძებნი დიამეტრი. ამგვარად ფარგლისა და სახაზავის საშუალებით ვიპოვეთ მოცემული სფეროს დიამეტრი.



ნახ 62.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

ნ ა წ ი ლ ი I

ტრიგონომეტრიის სწავლების საკითხები.

თ ა ვ ი I

თ ა ვ ი II

თ ა ვ ი III

თ ა ვ ი IV

თ ა ვ ი V

თ ა ვ ი VI

თავი VII

თავი VIII

ნაწილი II

გეომეტრიული ამოცანები აგებაზე.

რედაქტორი ა. ძიქაძე
ტექრედაქტორი ს. ლორთქიფანიძე
კორექტორი თ. კობერიძე

* * *

გადაეცა წარმოებას 15/II-57 წ., ხელმოწერილია დასაბეჭდათ 29/X-57, ანაწყობის ზომა 6 × 9,5, ქაღალდის ზომა 60 × 84, სასტამბო ფორმათა რაოდენობა 12, სააღრიცხვო-საგამომცემლო — 9,5, საავტორო — 9,22.
უე 05150 შეკვ. № 290 ტირაჟი 3000.

ფასი 4 მან. 80 კაპ.

* * *

სტამბა „ლენინსკოე ზნამია", ძნელაძის ქ. № 21.