საქართველოს მეცნიერებათა აკადემია

ნიკო მუსხელიშვილი

ქოშის ზიპის ინზეგრალების გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის

თბილისი
„მეცნიერება“
1992

517.95+517.958
ბ 92

წინამდებარე წიგნი თარგმანია აკადემიკოს ნიკო მუსხელიშვილის (1891—1976) პირველი მონოგრაფიისა, რომელიც ფრანგულ ენაზე გამოვიდა 1922 წ. და ამჟამად ბიბლიოგრაფიულ იშვიათობას წარმოადგენს. მონოგრაფია ეძღვნება კოშის ტიპის ინტეგრალის გამოყენებას დრეკადობის თეორიისა და ჰიდროდინამიკის ზოგიერთ ბრტყელ ამოცანაში.

წიგნი სარგებლობას მოუტანს მკითხველთა ფართო წრეს — მათემატიკოსებს, ფიზიკოსებს, ინჟინრებს, განსაკუთრებით კი შესაბამის სპეციალობათა სტუდენტებს.

ფრანგულიდან თარგმნა ხ. ინასარიძემ
რედაქტორი ლ. მაღნარაძე

ბ $\frac{1604010000}{М\ 607\ (06)—92}$ რეზ. 91 © გამომცემლობა „მეცნიერება“, 1992

ISBN 5—520—01464—7

ქართული გამოცემის რედაქტორისაგან

წინამდებარე წიგნი ფრანგულ ენაზე გამოსცა თბილისის უნივერსიტეტმა 1922 წელს. ქართული გამოცემა, რომელსაც წინ უძღვის ფრანგული გამოცემიდან გადმობეჭდილი ქართული წინასიტყვაობა, იმეორებს ორიგინალს, თუ ცვლილებად არ ჩავთვლით წვრილმან უზუსტობათა შესწორებას. ლიტერატურული და სხვა ხასიათის დამატებითი ცნობები მოცემულია ავტორის შენიშვნებში, რომელთა შესაბამისი ადგილები დანომრილია. ორიგინალისაგან განსხვავებით თარგმანში შენიშვნები წიგნის ბოლოსაა დართული.

როგორც ეს საარქივო მასალებიდან ირკვევა, ნ ი კ ო მ უ ს ხ ე ლ ი შ ვ ი ლ ს განზრახული ჰქონია ეს წიგნი საფუძვლად დაედო დისერტაციისათვის დოქტორის ხარისხის მოსაპოვებლად საჯაროდ დაცვის წესით. მისგან დამოუკიდებელი სხვადასხვა მიზეზის გამო საჯარო დაცვა ვერ მოხერხდა, თუმცა მას უკვე ჰქონდა მიღებული თავისი ნაშრომის დადებითი დახასიათება ისეთი ცნობილი მათემატიკოსებისაგან, როგორებიც იყვნენ XX საუკუნის ერთ-ერთი გამოჩენილი მათემატიკოსი, საფრანგეთის აკადემიის წევრი ჟ. ა დ ა მ ა რ ი (მისი წერილი ინახება ნ. მუსხელიშვილის საოჯახო არქივში) და პეტერბურგის უნივერსიტეტის პროფესორები ვ. ს ტ ე კ ლ ო ვ ი და დ. ტ ა მ ა რ კ ი ნ ი (რომლებმაც ოფიციალური რეცენზიები წარმოადგინეს).

მხოლოდ 1933 წელს, ნიკო მუსხელიშვილის საკავშირო მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტად არჩევის შემდეგ, მიენიჭა მას ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორის ხარისხი დაუცველად — honoris causa.

1934 წლიდან იწყება ნიკო მუსხელიშვილის სამეცნიერო-კვლევითი მუშაობის ახალი, მეტისმეტად ნაყოფიერი პერიოდი. თუ მანამდე მისი კვლევის საკითხები უშუალოდ უკავშირდებოდა კ ო შ ი ს ტიპის ინტეგრალთა თეორიის მეთოდის გამოყენებას მათემატიკური ფიზიკის, კერძოდ, დრეკადობის თეორიისა და ჰიდრომექანიკის ორგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანების ეფექტური ამონახსნების ასაგებად, განსახილველი არეების წრეზე კონფორმულად ამსახველი რაციონალური ფუნქციების საშუალებით, ახლა ავტორი იყენებს ფ რ ე დ ჰ ო ლ მ ი ს

ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდსაც ამ ამოცანათა ამონახსნების არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების დასადგენად.

ხსენებული ორი მეთოდის მისეულმა სინთეზმა მას საშუალება მისცა მიეღო ახალი, ზოგ შემთხვევაში მოულოდნელი შედეგები.

ამიტომ სავსებით ბუნებრივია, ამ სინთეზს, როგორც მათემატიკური ფიზიკის თავისთავად მეთოდს, მუსხელიშვილის მეთოდი ეუწოდოთ.

კოშის ტიპის ინტეგრალთა თეორიასთან მჭიდროდ დაკავშირებული ყოველი სიახლე ნამდვილი და კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიებში, აგრეთვე ყოველი ახალი შედეგი ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიაში იძლევა მუსხელიშვილის მეთოდის შემდგომი განვითარების ახალ პერსპექტივას. ფართოდ ცნობილია, თუ რა არსებითი წვლილი შეიტანა თვით ნიკო მუსხელიშვილმა ერთგანზომილებიანი კოშის ტიპის ინტეგრალებისა და სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიებში.

ნიკო მუსხელიშვილის მიერ მიღებული შედეგები მნიშვნელოვნად განავითარეს მისმა მოწაფეებმა, თანამშრომლებმა და კოლეგებმა. ამ მიმართულებით გამოქვეყნებულია სხვადასხვა ქვეყნის მკვლევართა მრავალი სტატია და მონოგრაფია. მათი მიმოხილვა მოცემულია ნიკო მუსხელიშვილის სახელგანთქმულ მონოგრაფიებში «Некоторые основные задачи математической теории упругости» (მოსკოვი, 1966) და «Сингулярные интегральные уравнения» (მოსკოვი, 1968; ქართულ ენაზე გამოიცა 1982 წ.).

წინამდებარე წიგნი უპირველეს ყოვლისა განკუთვნილია ქართული უნივერსიტეტების იმ სტუდენტებისათვის, რომლებსაც კარგად აქვთ შეთვისებული სასწავლო პროგრამებით გათვალისწინებული უმაღლესი მათემატიკისა და თეორიული მექანიკის საკითხები. ამ წიგნის მნიშვნელობასა და სარგებლობას განსაზღვრავს ის გარემოება, რომ მისი აგტორია თანამედროვე მათემატიკური ანალიზისა და უწყვეტ ტანთა მექანიკის საყოველთაოდ აღიარებული მკვლევარი ნიკო მუსხელიშვილი. ეს მონოგრაფია საფუძვლად დაედო ნ. მუსხელიშვილის შემდგომ გამოკვლევებს, რომლებმაც მნიშვნელოვანწილად განაპირობეს სხვა მეცნიერთა მიერ მიღებული პირველხარისხოვანი შედეგები მათემატიკური ფიზიკის მრავალ დარგში.

დიდ შემოქმედებით წარმატებას ვუსურვებ ახალგაზრდა კოლეგებს.

ამ წიგნის გამოცემა გათვალისწინებულია იმ ღონისძიებათა შორის, რომლებიც ნიკო მუსხელიშვილის დაბადებიდან 100 წლის შესრულებასთან არის დაკავშირებული.

მადლიერების გრძნობით უნდა აღინიშნოს ბორის ხვედელიძის, ხვედრი ინასარიძის, ვახტანგ კოკილაშვილის, მარინე მუსხელიშვილის, მანანა სურმავას, მანანა წიკლაურის, თენგიზ შერვაშიძის, ჯონდო გვაზავას და სხვათა წვლილი წიგნის გამოსაცემად მომზადებაში.

ლევან მაღნარაძე

თბილისი, 1990 წ., 27 სექტემბერი

APPLICATIONS DES INTÉGRALES

ANALOGUES A CELLES

DE CAUCHY

A QUELQUES PROBLÈMES DE LA

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

PAR

Nicolas MUSCHELIŠVILI

PROFESSEUR-ADJOINT A L'UNIVERSITÉ DE TIFLIS

ტფილისის უნივერსიტეტის
გამოცემა.

Édition de l'Université
de Tiflis.

Tiflis,

IMPRIMERIE DE L'ÉTAT

1922

წინასიტყვაობა

ჩემი მიზანი იყო, რომ ეს წიგნი პირველად ქართულად გამომეცა, და შემდეგ იგი მემუარის სახით ერთ-ერთ უცხოურ ჟურნალში დაბეჭდა.

მაგრამ გარეშე მიზეზებმა, რომლებმაც ერთბაშად შეგვაწყვეტინა წესიერი ურთიერთობა ევროპასთან და თითქმის შეუძლებელი გახადა დაბეჭდილიყო ამოდენა მემუარი უცხოეთში, მაიძულა აქვე გამომეცა ეს წიგნი ისეთ ენაზე, რომელიც ყველა მათემატიკოსისათვის გასაგებია.

აქ აღარ შევეხები წიგნის შინაარსს, იგი საკმაოდ ცხადია შესავლიდან, სარჩევიდან და სხვადასხვა თავებიდან, რომელთაც წინ უძღვის შინაარსის მოკლე მიმოხილვა.

ჩემი კვლევა-ძიების შედეგები ნაწილობრივ უკვე გამოქვეყნებულია სხვადასხვა ჟურნალში; კერძოდ, არსებითი ნაწილი ორი უკანასკნელი თავისა მოთხრობილია ჩემს სტატიაში „Sur l'intégration de l'équation biharmonique", რომელიც აკადემიკოსმა ვ. სტეკლოვმა რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიას წარუდგინა დასაბეჭდად; წინამდებარე შრომაში ეს გამოკვლევა გვარიანად არის დამატებული, რადგანაც აქ შემოტანილია სპეციალური სახის მრუდწირული კოორდინატები, რომლებიც გვიადვილებენ გამოთვლას გამოყენების მიზნით.

ორიოდე სიტყვა კიდევ იმის შესახებ, თუ რა პირობებში მიხდებოდა ამ წიგნის დაწერა და დაბეჭდვა.

1914 წლიდან არც ერთ გერმანულ, ხოლო 1917 წლიდან არც ერთ ევროპულ გამოცემას. საზოგადოდ, ჩვენამდე არ მოულწევია (გარდა თითო-ოროლა ცალ-ცალკე წიგნაკისა) და ამიტომ მე საშუალება არა მქონდა ანგარიში გამეწია სპეციალური ლიტერატურისათვის აღნიშნული წლებიდან.

თანაც წიგნი იწყობოდა და იბეჭდებოდა მეტისმეტად ძნელ პირობებში. მხოლოდ პროფესორ ანდრია რაზმაძის თაოსნობით არის, თუ ჩვენში რთულფორმულებიანი მათემატიკური თხზულების დაბეჭდვა ხერხდება. ამიტომ მოხარული ვარ გადავუხადო მას ჩემი მადლობა ტექნიკურ დაბრკოლებათა დაძლევისათვის.

ჩემს მოვალეობად ვთვლი უღრმესი მადლობა გამოვუცხადო ამ წიგნის დაბეჭდვისათვის უნივერსიტეტის პროფესორთა საბჭოს, განსაკუთრებით ბატონ რექტორს, პროფესორ ივანე ჯავახიშვილს იმ ცხოველი ყურადღების გამო, რომელსაც იგი იჩენდა ამ წიგნისადმი.

ფრანგული ენის ლექტორმა, ქ-მა ელისაბედ ორბელიანმა ვალი დამდო ფრანგული ტექსტის გადათვალიერებით; ქ-მა ნინო დიასამიძემ, ჩვენი უნივერსიტეტის სტუდენტმა, დიდი დახმარება გამიწია ხელნაწერის სასტამბოდ დამზადებაში, ჩემმა მეგობარმა დოცენტმა არჩილ ხარაძემ გადაიკითხა უკვე დაბეჭდილი თაბახები და აღნუსხა კორექტურული შეცდომები, რომლებიც წიგნის ბოლოშია მოყვანილი. ყველას ჩემი გულწრფელი მადლობა.

ტექსტში ქართული და რუსული გვარების ტრანსკრიფციისას მე ვხელმძღვანელობდი ჩეხური წესით, რომელიც მიღებულია მ ა თ ე მ ა ტ ი კ ურ მ ე ც ნ ი ე რ ე ბ ა თ ა ე ნ ც ი კ ლ ო პ ე დ ი ი ს ფრანგულ გამოცემაში.

ყოველ თავს თავისი ნუმერაცია აქვს ფორმულებისათვის.

ნიკო მუსხელიშვილი

თბილისი, 3 აპრილი, 1922 წ.

შესავალი

ამ წიგნში გადმოვცემთ ახალ მეთოდს მათემატიკური ფიზიკის იმ ძირითადი ამოცანების ამოსახსნელად, რომელნიც უკავშირდებიან

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

ლ ა პ ლ ა ს ი ს განტოლებას (ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ განტოლებას) და

$$\Delta\Delta U \equiv \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \qquad (2)$$

ბ ი ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ განტოლებას.

ჩვენი ნაშრომის ხასიათის წარმოსაჩენად გავიხსენოთ (2) ბიჰარმონიულ განტოლებასთან დაკავშირებული ძირითადი საკითხები, (1) განტოლებაზე შეჩერება კი საჭიროდ არ მიგვაჩნია, ვინაიდან მისი თეორია დიდი ხანია კლასიკურად იქცა და კარგადაა ცნობილი.

როგორც ვიცით, (2) ბიჰარმონიული განტოლება თავს იჩენს დრეკადობის თეორიისა და ჰიდროდინამიკის სხვადასხვა საკითხში.

უმეტეს შემთხვევაში საჭიროა განისაზღვროს (2)-ის U ამონახსნი, რომელიც რეგულარულია მოცემულ S არეში, ხოლო მის C საზღვარზე გარკვეულ პირობებს აკმაყოფილებს.

ასეთი პირობების ტიპური მაგალითია C საზღვარზე U ფუნქციისა და მისი $\frac{dU}{dn}$ ნორმალური წარმოებულის მნიშვნელობათა მოცემა.

ქვემოთ (თავი III) დავრწმუნდებით, რომ ეს იგივეა, რაც C საზღვარზე

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}$$

კერძო წარმოებულების მნიშვნელობათა დასახელება:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f_1(s), \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = f_2(s) \qquad (C\text{-ზე}), \qquad (3)$$

სადაც f_1 და f_2 საზღვრის რკალის s სიგრძის მოცემული ფუნქციებია.

გ. ლაურიჩელას მიხედვით, (3) პირობების შესაბამის ამოცანას ძირითად ამოცანას ვუწოდებთ.

ამ დამახასიათებელი შემთხვევის გარდა დრეკადობის თეორიაში განიხილება უფრო რთული შემთხვევებიც, რომელთაგან ზოგიერთს, ყველაზე მნიშვნელოვანს, ქვემოთ, IV თავში განვიხილავთ.

უკანასკნელ ხანს ჩვენ მიერ „ძირითადად" წოდებული ამოცანის განხილვას მრავალი მნიშვნელოვანი ნაშრომი მიეძღვნა[1]. შეიძლება ჩაითვალოს, რომ ეს ამოცანა თეორიულად სავსებით ამოხსნილია იმ შემთხვევაში, როცა S არე მარტივსაზღვრიანია და სასრული. უსასრულო არისათვის (გარე ამოცანა) კი ზოგი საკითხი გამოსაკვლევი დარჩა, რაც მე სხვაგან უკვე აღვნიშნე[2].

გამოკვლეულად შეგვიძლია ჩავთვალოთ აგრეთვე დრეკადობის თეორიის ორგანზომილებიანი ამოცანის (ე. წ. ბრტყელი ამოცანა) შესაბამისი შემთხვევაც (შდრ. IV თავი)[3].

ზოგადი ხასიათის ნაშრომებში შემოთავაზებული ინტეგრების მეთოდები, როგორც მოსალოდნელი იყო, წმინდად თეორიულია და მათი ეფექტურად გამოყენება საზოგადოდ ვერ ხერხდება. ამ გარემოებამ განაპირობა მრავალი გამოკვლევა, რომელსაც უფრო პრაქტიკული მიზანი ჰქონდა — კერძო, მაგრამ მეტ-ნაკლებად მნიშვნელოვანი ამოცანების ამონახსნების აგება. მათგან ჩვენ ამჯერად გვაინტერესებს მხოლოდ ისინი, რომელთა მიზანია მათემატიკური ფიზიკის ამა თუ იმ ამოცანის ზოგადი ამონახსნის აგება არეთა მოცემული, შეძლებისდაგვარად ვრცელი კლასისათვის[4].

ასეთი ხასიათისაა ჩვენი ნაშრომიც. აქ გადმოცემული მეთოდი ვარგისია მარტივადბმული (სასრული ან უსასრულო) S არეებისათვის, რომელთაც შემდეგი თვისება გააჩნიათ.

როგორც ცნობილია, S არე ყოველთვის გადაისახება კონფორმულად წრეზე. ვთქვათ, ეს გადასახვა ხორციელდება

$$z=\omega(\zeta), \quad z=x+iy, \quad \zeta=\xi+i\eta, \tag{4}$$

ფუნქციით, რომელიც S არის (x, y) წერტილებს უთანადებს წრის (ξ, η) წერტილებს. არეები, რომელთათვისაც გამოდგება ჩვენი მეთოდი, იმით ხასიათდება, რომ წრეზე $\omega(\zeta)$ რაციონალური ფუნქციით გადაისახება.

რაც შეეხება სასაზღვრო პირობებს, ისინი შეიძლება სხვადასხვანაირი იყოს. აქ ჩვენ მხოლოდ იმ შემთხვევებს განვიხილავთ, რომლებიც შეესაბამებიან ჩამაგრებული დრეკადი ფირფიტის წონასწორობას (ძირითადი ბიჰარმონიული ამოცანა) და დრეკადობის ორგანზომილებიანი ამოცანის შესატყვის ორ ძირითად შემთხვევას.

ჯერ კიდევ ე. ალმანსი[5] მოგვცა ძირითადი ბიჰარმონიული ამოცანის ამოხსნის მეთოდი ისეთი არეებისათვის, რომელთათვისაც $\omega(\zeta)$ ფუნქცია მრავალწევრია. შემდგომ ტ. ბოჯიო[6] ამოხსნა დრეკადობის თეორიის ორგანზომილებიანი ამოცანა არეთა ამავე კლასისათვის, როცა არის საზღვარზე დრეკადი გადაადგილების ვექტორია მოცემული, და განავრცო თავისი მეთოდი ისეთ სასრულ არეებზე, რომლებიც წრეზე რაციონალური $\omega(\zeta)$ ფუნქციით აისახება[7].

მიგვაჩნია, რომ ჩვენი მეთოდი გაცილებით მარტივია და უშუალო. ამას გარდა, ის უფრო ზოგადია, ვინაიდან ისევე კარგად მიუდგება უსასრულო არეს, როგორც სასრულს[8] და თითქმის არ განასხვავებს ზემოხსენებულ სასაზღვრო ამოცანებს[9]. ამის საპირისპიროდ, ალმანსისა და ბოჯიოს მეთოდები ამ შემთხვევებიდან მხოლოდ ერთ-ერთისათვისაა განკუთვნილი. კერძოდ, ამ ავტორებს არ განუხილავთ ძირითადი ბიჰარმონიული ამოცანა, როცა $\omega(\zeta)$ არის პოლინომისაგან განსხვავებული რაციონალური ფუნქცია.

მაგალითად, ელიფსის გარე არე S, რომელიც უსასრულო ბრტყელი არეა, ზემოხსენებული არეების კერძო შემთხვევაა, ვინაიდან შესაბამისი $\omega(\zeta)$ საკმაოდ მარტივი რაციონალური ფუნქციაა; ჩვენი მეთოდი ერთბაშად იძლევა სასაზღვრო ამოცანების ზოგად ამონახსნებს, ალმანსის მეთოდის უშუალო გამოყენება კი შეუძლებელია[10].

ჩვენი მეთოდის ძირითადი იდეა შემდეგია: ვიყენებთ ბიჰარმონიული ფუნქციის ზოგად წარმოდგენას კომპლექსური სახით, რომელიც დიდი ხნის წინ მოგვცა ე. გურსამ[11]:

$$U=\frac{1}{2}\{\bar{z}\varphi(z)+z\overline{\varphi(z)}+\psi(z)+\overline{\psi(z)}\},$$

სადაც $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ $z=x+iy$ კომპლექსური ცვლადის ანალიზური ფუნქციებია, ხოლო $\bar{z}$, $\overline{\varphi(z)}$ და $\overline{\psi(z)}$ შესაბამისად z-ის, $\varphi(z)$-ის და $\psi(z)$-ის კომპლექსურად შეუღლებული სიდიდეები.

შემდეგ შემოგვაქვს ახალი ζ ცვლადი, რომელიც z სიდიდეს

$$z=\omega(\zeta)$$

ტოლობით უკავშირდება და S არეს ζ სიბრტყის σ წრეს უთანადებს. ζ ცვლადის მეშვეობით სასაზღვრო პირობები შესანიშნავ სახეს იღებს, რომლის დახმარებით უშუალოდ გამოითვლება φ და ψ ფუნქციები

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_1+if_2}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta' \qquad (5)$$

სახის ინტეგრალების რამდენიმე თვისებაზე დამყარებული ძალზე მარტივი ხერხით. ასეთ ინტეგრალებს კოშის ტიპის ინტეგრალებს ვუწოდებთ.

U-სათვის კომპლექსური გამოსახულების გამოყენების იდეა ახალი არაა; რამდენადაც ვიცი, მსგავსი მიზნის მისაღწევად ეს იდეა სისტემატურად არავის გამოუყენებია[12].

ახალი აქ (5) სახის კომპლექსურ ინტეგრალებზე გადასვლაა[13]. მართალია, ადრე გ. კოლოსოვმა და მე ჩვენს სტატიაში გამოვიყენეთ მსგავსი იდეა, მაგრამ ეს იყო მხოლოდ ძალიან კერძო, სახელდობრ, წრიული არის შემთხვევა[14].

სანამ ბიჰარმონიულ განტოლებაზე გადავიდოდეთ, II თავში განვიხილავთ (1) ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ განტოლებას, რომელსაც ანალოგიური მეთოდით ვუდგებით.

სხვათა შორის, ეს მეთოდი გვაძლევს გამოყენებით კვლევაში ფრიად გამოსადეგ ფორმულებს. მაგალითად დავასახელებთ უსასრულო სითხეში ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი ფორმის ცილინდრის მოძრაობის ამოცანის ამოხსნას (მოძრაობა ცილინდრის ფუძეების პარალელურია) და ერთ საკმაოდ საინტერესო შედეგს, რომელიც იმ შემთხვევას ეხება, როცა ამონახსნი ელემენტარული ფუნქციებით გამოისახება (შდრ. თავი II, § 31).

(5) სახის ინტეგრალების ჩვენთვის აუცილებელი თვისებები დადგენილია ამ ნაშრომის I თავში, რომელიც ეძღვნება კვლევისათვის საჭირო დამხმარე დებულებებს.

აღსანიშნავია შემდეგი გარემოებაც. ზოგიერთი შედეგის დამტკიცებისას შემომაქვს საზღვარზე მოცემული ფუნქციების სხვადასხვა შეზღუდვა: მაგალითად, ვუშვებ, რომ ეს ფუნქციები უწყვეტია, წარმოებადია და ა. შ. მე შემეძლო შემეცვალა ეს პირობები, რომელთა მთავარი დანიშნულება ზოგიერთ ზღვარზე გადასვლის უზრუნველყოფაა, უფრო ზოგადი პირობებით, თუ გამოვიყენებდი, მაგალითად, ლ ე ბ ე გ ი ს ინტეგრალებს, მაგრამ ეს არ გავაკეთე, რათა უცხო განხილვებით არ დამეჩრდილა მეთოდის ესოდენ მარტივი იდეა. მეორე მხრივ, მკითხველი ადვილად შენიშნავს, ამ შეზღუდვათაგან რომელი შეიძლება მოიხსნას ისე, რომ შედეგები უცვლელი დარჩეს.

თავი I

დამხმარე დებულებები

ეს თავი მიძღვნილია კომპლექსური ცვლადის თეორიის ზოგიერთი კარგად ცნობილი საკითხისადმი, რომელსაც ხშირად გამოვიყენებთ ჩვენს გამოკვლევებში. პირველ განყოფილებაში ვამტკიცებ კოშის ტიპის ინტეგრალების ზოგიერთ თვისებას, ხოლო მეორეში მომყავს მარტივსაზღვრიანი არის წრეზე კონფორმული ასახვის ცნობილი ძირითადი თვისებები.

1. კოშის ტიპის ინტეგრალები

კოშის ინტეგრალების ანალოგიური ინტეგრალების, ან მოკლედ, კოშის ტიპის ინტეგრალების ქვეშ გვესმის

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_1+if_2}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta' \qquad (*)$$

სახის ინტეგრალები, სადაც

$$\zeta=\xi+i\eta$$

აღნიშნავს კომპლექსურ ცვლადს, C შეკრული მარტივი წირია, ζ' არის ცვლადი წერტილი C-ზე და, ბოლოს, f_1 და f_2 C წირის რკალის ნამდვილი ფუნქციებია.

(*) ინტეგრალი არ არის კოშის ინტეგრალი ჩვეულებრივი აზრით, ვინაიდან კოშის ინტეგრალში f_1+if_2 გამოსახულება წარმოადგენს მნიშვნელობას, რომელსაც C-ს შიგნით ჰოლომორფული ფუნქციაᲘ[15] იღებს C წირის გასწვრივ და, მაშასადამე, მასში მონაწილე f_1 და f_2 ფუნქციები დამოუკიდებელი არაა: თუ ერთ-ერთი მათგანი მოცემულია, მეორე განსაზღვრული იქნება მუდმივამდე სიზუსტით.

ჩვენ დავადგენთ (*) სახის ინტეგრალების ზოგიერთ თვისებას და განვიხილავთ მხოლოდ იმ შემთხვევას, როცა C არის წრეწირი, რადგან შემდგომში მხოლოდ ამ შემთხვევას გამოვიყენებთ.

ა. ჰარნაკის ერთ-ერთ სტატიაში[16] მოყვანილია ზოგიერთი დებულება, რომელიც ზოგად შემთხვევას ეხება.

§ 1. თეორემა კოშის ტიპის ინტეგრალის ზღვრის შესახებ. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\vartheta)\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta}, \tag{1}$$

სადაც

$$\zeta=\xi+i\eta$$

კომპლექსური ცვლადია, γ არის წრეწირი ζ ცვლადის სიბრტყეში, ζ' არის γ-ზე ცვლადი წერტილი და, ბოლოს, $f(\vartheta)$ არის γ-ს ϑ რკალის ნამდვილი ფუნქცია.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავუშვათ, რომ γ წრეწირის რადიუსი $\rho=1$ და მისი ცენტრი არის $\zeta=0$ სათავეში.

ამ დაშვებით, ϑ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ζ' კომპლექსური სიდიდის არგუმენტი და გვექნება

$$\zeta'=e^{i\vartheta}.$$

ცხადია, რომ (1) ფორმულით განსაზღვრული $\Phi(\zeta)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია γ-ს შიგნით.

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს, თუ როგორ იქცევა ეს ფუნქცია თვით γ წრეწირის მიდამოში[17].

თეორემა. *დავუშვათ, რომ (1) ინტეგრალში $f(\vartheta)$ აღნიშნავს ინტეგრებად ფუნქციას მთელ γ წრეწირზე და უწყვეტს თავის $\frac{df}{d\vartheta}$ პირველ წარმოებულთან ერთად γ-ს $A'B'$ რკალზე. ამას გარდა, ვთქვათ, AB არის $A'B'$ რკალში მთლიანად მოთავსებული რაიმე რკალი და ζ_1 არის AB რკალის ნებისმიერი წერტილი.*

ამ დაშვების შემდეგ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ, როცა ζ წერტილი ისე მიისწრაფვის ζ_1 წერტილისაკენ, რომ ყოველთვის რჩება γ-ს შიგნით, მაშინ $\Phi(\zeta)$ ფუნქცია თანაბრად მიისწრაფვის სავსებით განსაზღვრული ზღვრისაკენ და ეს ზღვარი იქნება ϑ-ს უწყვეტი ფუნქცია AB რკალზე.

ამ თეორემის დასამტკიცებლად გარდავქმნათ (1) ინტეგრალი პოლარული კოორდინატების შემოტანით. ამისათვის დავუშვათ

$$\zeta'=\rho e^{i\vartheta}.$$

γ-ს ζ′ წერტილებისათვის გვექნება $\rho=1$ და, მაშასადამე,

$$\zeta'=e^{i\vartheta}.$$

r-ით აღვნიშნოთ მანძილი ζ-სა და ζ′-ს შორის, ψ-თი აღვნიშნოთ ζ′—ζ სიდიდის არგუმენტი, რის შედეგად გვექნება

$$\zeta'-\zeta=re^{i\psi}.$$

თუ (1)-ში შევიტანთ ამ აღნიშვნებს და შევნიშნავთ, რომ

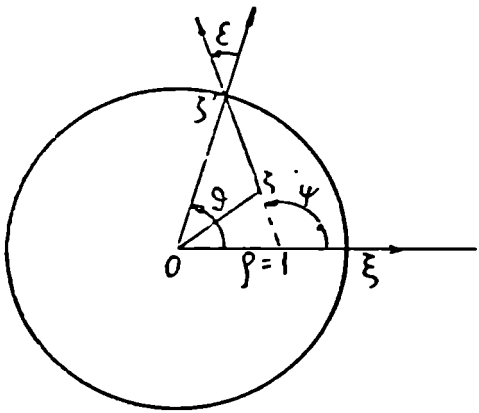
$$d\zeta'=ie^{i\vartheta}\,d\vartheta,$$

გვექნება

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\vartheta)\,e^{i(\vartheta-\psi)}\,d\vartheta}{r}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\,\frac{\cos\varepsilon}{r}\,d\vartheta-\frac{i}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f\,\frac{\sin\varepsilon}{r}\,d\vartheta, \qquad (2)$$

სადაც $\varepsilon=\psi-\vartheta$ აღნიშნავს კუთხეს, რომელსაც ადგენს ζ′—ζ ვექტორი γ-ს გარე ნორმალთან (ζ′ წერტილში), ამასთან, ეს კუთხე ათვლილია ნორმალიდან დადებითი მიმართულებით (ნახ. 1)



ნახ. 1

თავდაპირველად განვიხილოთ (2) ტოლობებიდან უკანასკნელის მარჯვენა მხარის პირველი ინტეგრალი. ეს ინტეგრალი, ცხადია, ორმაგი ფენის ლოგარითმული პოტენციალია, რომლის წრფივი სიმკვრივე არის $f(\vartheta)$.

ამ პოტენციალის კარგად ცნობილი თვისებები საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ ის თანაბრად მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა ζ მიისწრაფვის ζ_1-ისაკენ, ვინაიდან $f(\vartheta)$ ფუნქცია უწყვეტია $A'B'$ რკალზე, რომელიც თავის მხრივ შეიცავს AB რკალს.

გარდა ამისა ვიცით, რომ

$$\lim_{\zeta \to \zeta_1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \frac{\cos \varepsilon}{r} d\vartheta = \frac{1}{2} f(\vartheta_1) +$$

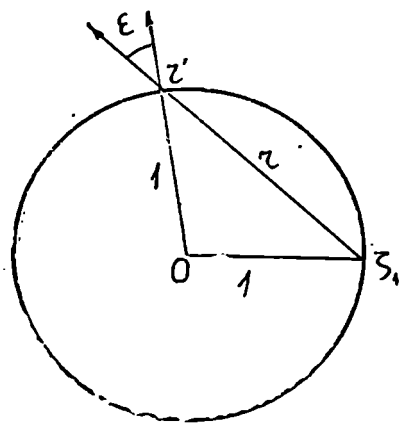
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \frac{\cos \varepsilon}{r} d\vartheta, \qquad (3)$$

სადაც მარჯვენა მხარეში r აღნიშნავს მანძილს ζ' და $\zeta_1 = e^{i\vartheta_1}$ წერტილებს შორის, რომლებიც მოთავსებულია γ-ზე.

მეორე მხრივ ცხადია, რომ $\zeta = \zeta_1$-თვის

$$\frac{\cos \varepsilon}{r} = \frac{1}{2}$$

(ნახ. 2) და, მაშასადამე,



ნახ. 2

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \frac{\cos \varepsilon}{r} d\vartheta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) d\vartheta = \text{const}. \qquad (3^*)$$

ამგვარად გვექნება

$$\lim_{\xi\to\xi_1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,\frac{\cos\varepsilon}{r}\,d\vartheta=\frac{1}{2}\,f(\vartheta_1)+\text{const}, \tag{4}$$

რაც ამტკიცებს ამ ზღვრის უწყვეტობას AB რკალზე.

განვიხილოთ ახლა ინტეგრალი

$$\int_0^{2\pi} f\,\frac{\sin\varepsilon}{r}\,d\vartheta.$$

ცხადია, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_0^{2\pi} f\,\frac{\sin\varepsilon}{r}\,d\vartheta=\int_\gamma f\,\frac{dr}{r}. \tag{5}$$

ვთქვათ, γ_0 არის γ-ს ნაწილი, რომელიც მიღებულია $A'B'$ რკალის ამოგდებით. გვექნება

$$\int_\gamma f\,\frac{dr}{r}=\int_{A'}^{B'} f\,\frac{dr}{r}+\int_{\gamma_0} f\,\frac{dr}{r}.$$

ინტეგრალი, გავრცელებული γ_0 რკალზე, აკმაყოფილებს ჩვენი თეორემის პირობებს; განსახილავი დაგვრჩა ის ინტეგრალი, რომელიც გავრცელებულია $A'B'$ რკალზე. ნაწილობითი ინტეგრება გვაძლევს

$$\int_{A'}^{B'} f\,\frac{dr}{r}=[f\lg r]_{A'}^{B'}-\int_{A'}^{B'} f'(\vartheta)\lg r\,d\vartheta.$$

მაგრამ უკანასკნელი ინტეგრალი არის მარტივი ფენის პოტენციალი $f'(\vartheta)$ უწყვეტი სიმკვრივით; მაშასადამე, ის არის უწყვეტი ფუნქცია AB რკალის მიდამოში; ვინაიდან $[f\lg r]_{A'}^{B'}$ ფუნქციას აქვს იგივე თვისება, ჩვენი თეორემა საკუთებით დამტკიცებულია.

§ 2. **განზოგადება.** დავამტკიცოთ ახლა უფრო ზოგადი დებულება, სახელდობრ:

ვთქვათ, $f(\vartheta)$ ინტეგრებადი ფუნქციაა γ-ზე და უწყვეტია ყველა თავისი წარმოებულებით $n+1$ რიგამდე γ-ს $A'B'$ რკალზე. ვთქვათ, AB არის $A'B'$ რკალში მთლიანად მოთავსებული რკალი და ζ_1 არის AB რკალის ნებისმიერი წერტილი.

მაშინ $\Phi^{(n)}(\zeta)$ თანაბრად მიისწრაფვის გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა ζ ისე მიისწრაფვის ζ_1-ისაკენ, რომ რჩება γ-ს შიგნით; ეს ზღვარი იქნება Φ რკალის უწყვეტი ფუნქცია AB ინტერვალში.

მართლაც, თავდაპირველად დავუშვათ, რომ $n=1$. წინა აღნიშვნების თანახმად გვექნება

$$\Phi'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{fd\zeta'}{(\zeta'-\zeta)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{A'}^{B'}.$$

მარჯვენა მხარის პირველი ინტეგრალი აკმაყოფილებს ჩვენი თეორემის პირობებს.

მეორე ინტეგრალი შეიძლება გარდაიქმნას შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{A'}^{B'}\frac{fd\zeta'}{(\zeta'-\zeta)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{A'}^{B'}\frac{fe^{i\vartheta}\,id\vartheta}{(e^{i\vartheta}-\zeta)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{A'}^{B'}f\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{e^{i\vartheta}-\zeta}\right)d\vartheta=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{f(\vartheta)}{e^{i\vartheta}-\zeta}\right]_{A'}^{B'}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{A'}^{B'}\frac{f'(\vartheta)\,d\vartheta}{e^{i\vartheta}-\zeta}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{f(\vartheta)}{e^{i\vartheta}-\zeta}\right]_{A'}^{B'}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{A'}^{B'}f'\frac{ie^{-i\vartheta}\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta}.$$

ინტეგრებული ნაწილი აკმაყოფილებს თეორემის პირობებს. რაც შეეხება ინტეგრალს, მას აქვს ისეთი სახე, რომელიც უკვე იყო განხილული წინა §-ში, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ $f(\vartheta)$ ნამდვილი ფუნქციის ნაცვლად აქ მონაწილეობს კომპლექსური ფუნქცია $ie^{-i\vartheta}f'(\vartheta)$. მაგრამ, თუ განვაცალკევებთ ერთმანეთისაგან ამ უკანასკნელი ფუნქციის ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, განსახილავი გახდება ჯამი ისეთი ორი ინტეგრალისა, რომლებიც წინა §-ის ინტეგრალის ანალოგიურია. ამრიგად, ჩვენი თეორემა დამტკიცებულია $n=1$ შემთხვევისათვის.

$n=2$ შემთხვევა ასევე დაიყვანება წინა შემთხვევაზე და ასე შემდეგ.

შენიშვნები. 1. როცა f ფუნქცია უწყვეტია მთელ წრეწირზე, მაშინ წინა თეორემები რჩება სამართლიანი, თუ AB რკალს შევცვლით მთელი γ წირით.

2. ცხადია, რომ წინა თეორემები სამართლიანი რჩება, თუ $f(\vartheta)$-ს შევცვლით

$$f_1(\vartheta)+if_2(\vartheta)$$

კომპლექსური გამოსახულებით.

§ 3. ძირითადი თეორემა. გადავიდეთ ახლა შემდეგი თეორემის დამტკიცებაზე (თეორემა ეკუთვნის ჰარნაკს)[18].

თეორემა. *ვთქვათ. $f_1(\vartheta)$ და $f_2(\vartheta)$ ორი ნამდვილი, შემოსაზღვრული ფუნქციაა γ წრეწირზე და უწყვეტია γ-ზე გარდა, შესაძლოა, წერტილთა სასრული რაოდენობისა. თუ*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_1\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_2\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta} \tag{6}$$

ტოლობას ადგილი აქვს γ-ს შიგნით მოთავსებულ ყოველ ζ წერტილში, მაშინ გვექნება აგრეთვე

$$f_1(\vartheta)=f_2(\vartheta)$$

ϑ-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის, გარდა f_1 და f_2 ფუნქციების წყვეტის შესაძლო წერტილებისა.

მართლაც, ვთქვათ

$$f(\vartheta)=f_1(\vartheta)-f_2(\vartheta).$$

წინა პარაგრაფების აღნიშვნების თანახმად, (6) ტოლობა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად (იხ. (2) ფორმულა):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,\frac{\cos\varepsilon}{r}\,d\vartheta-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,\frac{\sin\varepsilon}{r}\,d\vartheta=0,$$

საიდანაც გვაქვს

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,\frac{\cos\varepsilon}{r}\,d\vartheta=0.$$

რადგან, დაშვების თანახმად, ეს ტოლობა უნდა დაკმაყოფილდეს γ-ს შიგნით ყოველ ζ წერტილში, ამიტომ გვექნება აგრეთვე

$$\lim_{\zeta\to\zeta_1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,\frac{\cos\varepsilon}{r}\,d\vartheta=0,$$

სადაც $\zeta_1 = e^{i\vartheta_1}$ აღნიშნავს γ-ს ნებისმიერ წერტილს. აქედან ვასკვნით, (3) და (3*) ფორმულების გათვალისწინებით, რომ

$$0 = \frac{1}{2} f(\vartheta_1) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{1}{2} f(\vartheta_1) + \text{const},$$

ანუ

$$f(\vartheta) = \text{const} = C,$$

გარდა, შესაძლოა, ϑ-ს მნიშვნელობათა სასრული რაოდენობისა (f ფუნქციის წყვეტის წერტილებისა).

თუ $f(\vartheta) = C$ მნიშვნელობას შევიტანთ წინა ტოლობებში, მივიღებთ

$$\frac{1}{2} C + \frac{1}{2} C = 0$$

და, მაშასადამე, $C = 0$. ამრიგად გვექნება

$$f(\vartheta) = f_1(\vartheta) - f_2(\vartheta) = 0,$$

თუ მხედველობაში არ მივიღებთ წყვეტის წერტილებს.

შედეგი. ვთქვათ, $u_1(\vartheta)$, $v_1(\vartheta)$, $u_2(\vartheta)$, $v_2(\vartheta)$ γ წრეწირის ϑ რკალის ნამდვილი და უწყვეტი ფუნქციებია. ზემოთქმულის თანახმად ცხადია, რომ ტოლობები

$$u_1(\vartheta) = u_2(\vartheta),$$
$$v_1(\vartheta) = v_2(\vartheta)$$

შემდეგი ტოლობების ტოლფასია:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{u_1 + iv_1}{\zeta' - \zeta}\, d\zeta' = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{u_2 + iv_2}{\zeta' - \zeta}\, d\zeta',$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{u_2 - iv_2}{\zeta' - \zeta}\, d\zeta' = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{u_2 - iv_2}{\zeta' - \zeta}\, d\zeta',$$

სადაც ζ აღნიშნავს γ-ს შიგნით მოთავსებულ ნებისმიერ წერტილს.

§ 4. კოშის ფორმულების ანალოგიური ფორმულები. დავამტკიცოთ ახლა რამდენიმე მარტივი ფორმულა, რომლებიც მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ ჩვენი მეთოდისათვის.

პირველი ფორმულა. ვთქვათ, $f(\zeta)$ არის კომპლექსური ζ ცვლადის ფუნქცია, რომელიც ჰოლომორფულია C მარტივი ჩაკეტილი

წირის შიგნით, გარდა ერთადერთი a წერტილისა, სადაც ამ ფუნქციას გააჩნია პოლუსი მთავარი ნაწილით:

$$\frac{a_n}{(\zeta-a)^n}+\frac{a_{n-1}}{(\zeta-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{a_1}{\zeta-a}.$$

გარდა ამისა დავუშვათ, რომ $f(\zeta)$ უწყვეტია C წირზე[19].

შემდეგ, თუ ζ-თი აღვნიშნავთ C-ს რაიმე შიგა წერტილს, გვექნება ფორმულა

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta')}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'=f(\zeta)-\frac{a_n}{(\zeta-a)^n}-\frac{a_{n-1}}{(\zeta-a)^{n-1}}-\ldots-\frac{a_1}{\zeta-a}. \qquad (7)$$

მართლაც, კოშის თეორემის თანახმად გვაქვს

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \left\{ f(\zeta')-\frac{a_n}{(\zeta'-a)^n}-\ldots-\frac{a_1}{\zeta'-a}\right\}\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}=$$

$$=f(\zeta)-\frac{a_n}{(\zeta-a)^n}-\ldots-\frac{a_1}{\zeta-a},$$

რადგან ფიგურულ ფრჩხილებში მოქცეული ფუნქცია ჰოლომორფულია C-ს შიგნით. მაგრამ ამ ფორმულის მარცხენა მხარე დასამტკიცებელი ფორმულის მარცხენა მხარის ტოლია, ვინაიდან k რიცხვის ყოველი მთელი დადებითი მნიშვნელობისათვის გვექნება

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\zeta'}{(\zeta'-a)^k(\zeta'-\zeta)}=0; \qquad (8)$$

ეს ადვილად მტკიცდება, თუ ინტეგრების C წირს შევცვლით უსასრულოდ დიდი რადიუსის მქონე წრეწირით.

მაშასადამე, (7) ფორმულა დადგენილია.

მეორე ფორმულა. ვთქვათ, $f(\zeta)$ არის ჰოლომორფული ფუნქცია მარტივი ჩაკეტილი C წირის გარეთ, გარდა შესაძლოა $\zeta=\infty$ წერტილისა, სადაც მას აქვს პოლუსი

$$a_n\zeta^n+a_{n-1}\zeta^{n-1}+\ldots+a_1\zeta+a_0$$

მთავარი ნაწილით[20]; გარდა ამისა დავუშვათ, რომ $f(\zeta)$ უწყვეტია თვით C წირზე.

როგორც ზემოთ, თუ ζ-თი აღვნიშნავთ C წირის შ ი გ ა წერტილს, გვექნება ფორმულა

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta')}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta' = a_n\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} + \ldots + a_1\zeta + a_0. \qquad (9)$$

მართლაც, შემოვხაზოთ Γ წრეწირი ცენტრით სათავეში საკმაოდ დიდი რადიუსით ისე, რომ C წირი მთლიანად მოთავსდეს Γ-ს შიგნით. ვინაიდან $f(\zeta)$ ჰოლომორფულია Γ-ს გარეთ (გარდა, შესაძლოა, $\zeta=\infty$ წერტილისა), ლ ო რ ა ნ ი ს ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$f(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\zeta^k} + a_n\zeta^n + \ldots + a_1\zeta + a_0,$$

ამასთან უსასრულო მწკრივი თანაბრად კრებადია Γ-ს გარეთ.

მეორე მხრივ, ვინაიდან $f(\zeta)$ ჰოლომორფულია C-სა და Γ-ს შორის მოთავსებულ არეში, გვექნება

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta')}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta' = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta')}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta' =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[a_n\zeta'^n + \ldots + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{\zeta'^k}\right]\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta} =$$

$$= a_n\zeta^n + a_{n-1}\zeta^{n-1} + \ldots + a_0,$$

ვინაიდან, როგორც ეს ახლახან ვნახეთ, ყოველი ინტეგრალი

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{b_k\,k\,d\zeta'}{\zeta'^k(\zeta'-\zeta)}, \quad k=1,\ 2,\ldots,$$

ნულია.

მაშასადამე, (9) ფორმულა დამტკიცებულია.

11. კონფორმული ასახვის შესახებ

კონფორმული ასახვის თვისებები ამჟამად კარგად არის ცნობილი[21]. მიუხედავად ამისა, ჩემი აზრით, სასარგებლო იქნება აქ გავიხსენოთ ზოგიერთი ძირითადი ცნება, რომელიც აუცილებელია ჩვენი მეთოდის გამოყენებისათვის.

§ 5. განვიხილოთ (x, y) წერტილთა სიბრტყეზე არე, შემოსაზღვრული ჩაკეტილი მარტივი C წირით.

ეს არე შეიძლება იყოს სასრული ან უსასრულო. პირველ შემთხვევაში ის წარმოადგენს სიბრტყის იმ ნაწილს, რომელიც მოთავსებულია C წირის შიგნით, ხოლო მეორე შემთხვევაში ის არის სიბრტყის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია C-ს გარეთ.

ვთქვათ, σ არის ერთეულრადიუსიანი წრე (ξ, η) წერტილთა სიბრტყეზე ცენტრით სათავეში.

მაშინ, როგორც ცნობილია, ყოველთვის შეიძლება მოიძებნოს

$$\zeta = \xi + i\eta$$

კომპლექსური ცვლადის ისეთი $\omega(\zeta)$ ანალიზური ფუნქცია, რომ

$$z = x + iy = \omega(\zeta) \tag{10}$$

დამოკიდებულება S არის σ წრეზე ურთიერთცალსახა ასახვას მოვცემს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, (10) დამოკიდებულება σ-ს ყოველ ζ წერტილს შეუთანადებს S-ის ერთ წერტილს და პირიქით.

ასეთ ასახვას ეწოდება კონფორმული, ვინაიდან ის ინარჩუნებს უსასრულოდ მცირე ფიგურების მსგავსებას. კიდევ დავაზუსტოთ ეს თვისება.

ვთქვათ, C' და C'' ორი წრფივი ელემენტია, S-ში მოთავსებული და S-ის z_0 წერტილიდან გამომავალი. (10) დამოკიდებულება უთანადებს C'-ს და C''-ს σ-ში მოთავსებულ ორ γ' და γ'' ელემენტს, გამომავალს ζ_0 წერტილიდან, რომელიც z_0 წერტილის ანასახია.

კონფორმული ასახვის ძირითადი თვისება ზუსტად იმაში მდგომარეობს, რომ C' და C'' ელემენტებს შორის კუთხე γ'-ს და γ''-ს შორის კუთხის ტოლია. გარდა ამისა, (10) დამოკიდებულება ინარჩუნებს კუთხეების ათვლის მიმართულებას. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ ნებისმიერად ავირჩევთ C' და C'' ელემენტებზე დადებით მიმართულებებს, მაშინ γ'-ისა და γ''-ის შესაბამისი მიმართულებები ისეთნაირი იქნება, რომ γ'-დან γ''-ზე გადასვლა მოხდება იმავე ბრუნვით, რაც C'-დან C''-ზე.

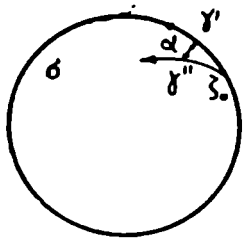
ეს ყველაფერი შეეხება S-ის ან σ-ს შიგნით მოთავსებულ წერტილებს.

რაც შეეხება თვით სასაზღვრო წირებს, ჩვენი ზოგადი დაშვებები საშუალებას იძლევა დავასკვნათ მხოლოდ, რომ ეს წირები ერთმანეთის ცალსახად ეთანადება[22].

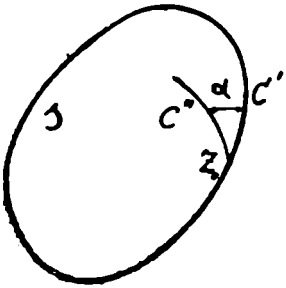
მაგრამ არსებობს საკმაოდ მრავალი შემთხვევა, როცა შეიძლება დარწმუნებული ვიყოთ, რომ ასახვა კონფორმულია სასაზღვრო წირების წერტილებისათვისაც; ეს ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევებში წინა დებულებები სამართლიანი რჩება, თუ z_0 და γ_0 წერტილები თვით სასაზღვრო წირებზეა და C' და γ' ელემენტებად შესაბამისად ავიღებთ

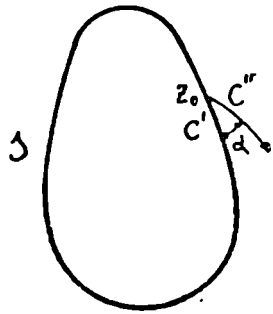
ამ წირების ელემენტებს (იხ. ნახ. 3, სადაც მოცემულია სასრული S არის და უსასრულო S არის შემთხვევები).

შევთანხმდეთ, დადებითი ვუწოდოთ C-ს გავლის იმ მიმართულებას, რომელიც S არეს ტოვებს მარცხნივ (ნახ. 3). აქედან ცხადია, რომ



წრე σ





სასრული არე; უსასრულო არე

ნახ. 3

C-ს გავლის დადებით მიმართულებას ყოველთვის შეესაბამება γ წრეწირის გავლის დადებითი მიმართულება.

§ 6. გავიხსენოთ კიდევ კონფორმული ასახვის ზოგიერთი ძირითადი თვისება და შევთანხმდეთ ზოგიერთი აღნიშვნის შესახებ.

როცა S არე სასრულია, მაშინ $\omega(\zeta)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია ყველგან σ-ში და მისი წარმოებული $\omega'(\zeta)$ არ არის ნული ამ არეში.

როცა S არე უსასრულოა, მაშინ $\omega(\zeta)$-ს აქვს მარტივი პოლუსი σ-ში; $\omega'(\zeta)$ წარმოებული აგრეთვე არ არის ნული σ-ში.

უფრო ქვემოთ გავაკეთებთ დამატებით დაშვებას; სახელდობრ, დავუშვებთ, რომ $\omega'(\zeta)$ თანაბრად მიისწრაფვის ნულისაგან განსხვავებუ-

ლი ზღვრისაკენ, როცა ζ მიისწრაფვის γ წრეწირის წერტილისაკენ. თუ ეს პირობა შესრულებულია, შეგვიძლია დარწმუნებული ვიყოთ, რომ ასახვა კონფორმული იქნება აგრეთვე თვით საზღვარზე.

იმისათვის, რომ ეს პირობა დაკმაყოფილდეს, საკმარისია, მაგალითად, დავუშვათ, რომ C არის ანალიზური წირი კუთხოვანი წერტილების გარეშე.

ცნობილია, რომ ყოველთვის შეიძლება $\omega(\zeta)$ ისე ავირჩიოთ, რომ S-ის ნებისმიერ წერტილს შეესაბამებოდეს σ-ს ნებისმიერად არჩეული წერტილი.

ქვემოთ ჩვენ ყოველთვის შემდეგნაირად მოვიქცევით:

როცა S სასრულია, (x, y) წერტილთა სიბრტყის სათავედ ავიღებთ S-ის რაიმე წერტილს და ამ წერტილს შევუსაბამებთ σ-ს $\zeta=0$ წერტილს (წრის ცენტრი), ასე რომ გვექნება

$$\omega(0)=0. \tag{11}$$

როცა S უსასრულოა, $z=\infty$ წერტილს შევუსაბამებთ $\zeta=0$ წერტილს, ასე რომ $\omega(\zeta)$-ს ექნება (მარტივ და ერთადერთ) პოლუსად $\zeta=0$ წერტილი:

$$\omega(\zeta)=\frac{c}{\zeta}+\text{ჰოლომორფული ფუნქცია}. \tag{12}$$

z სიბრტყის წირები, რომლებიც შეესაბამებიან ζ სიბრტყის $\rho=\text{const}$ წრეწირებს, შეკრული წირები იქნებიან.

წირები, რომლებიც ρ-ს განსხვავებულ მნიშვნელობებს შეესაბამება, არასოდეს არ კვეთენ ერთმანეთს. როცა S არე სასრულია, ის წირები, რომლებიც ρ-ზე ნაკლებ მნიშვნელობებს შეესაბამება, მთლიანად მოთავსებულია იმ წირების შიგნით, რომლებიც მეტ მნიშვნელობებს შეესაბამება; როცა S არე უსასრულოა, განლაგება შებრუნებით ხდება.

σ-ს $\vartheta=\text{const}$ რადიუსებს შეესაბამება წირები, რომლებიც, როცა S სასრულია, გამოდიან $z=0$ წერტილიდან და მთავრდებიან C-ზე; როცა S უსასრულოა, ეს წირები გამოდიან უსასრულობიდან და მთავრდებიან აგრეთვე C-ზე.

$\rho=\text{const}$ და $\vartheta=\text{const}$ წირები z სიბრტყეში ადგენენ წირების ორთოგონალურ ბადეს.

წირთა ამ სისტემას მოგვიანებით გამოვიყენებთ როგორც მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემას.

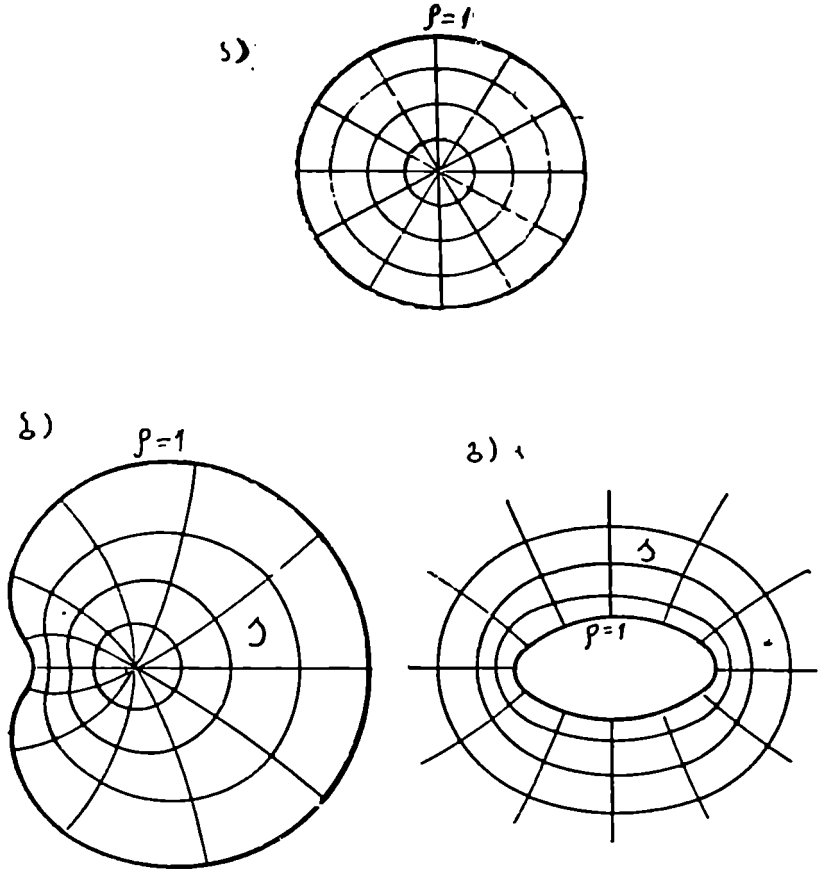
4ა) და 4ბ) ნახაზებზე წარმოდგენილია სასრული და უსასრულო არის შემთხვევები.

ნახ. 4ა) შეესაბამება

$$z=b(\zeta+a\zeta^2),\quad b>0,\quad 0<a<\frac{1}{2}$$

დამოკიდებულებას, ანუ

$$x=b\rho\cos\vartheta+ab\rho^2\cos 2\vartheta,$$
$$y=b\rho\sin\vartheta+ab\rho^2\sin 2\vartheta$$



ნახ. 4

დამოკიდებულებას, რომელიც ახორციელებს პასკალის ლოკოკინით შემოსაზღვრული არის კონფორმულ ასახვას σ წრეზე; პასკალის ლოკოკინის პარამეტრული განტოლებაა

$$x=b\cos\vartheta+ab\cos 2\vartheta,\quad y=b\sin\vartheta+ab\sin 2\vartheta.$$

ნახ. 4_3) შეესაბამება

$$z=b\left(\zeta+\frac{a}{\zeta}\right),\quad b>0,\quad a>1$$

დამოკიდებულებას, ანუ

$$x=b\left(a+\frac{a}{\rho}\right)\cos\vartheta,\qquad y=b\left(\rho-\frac{a}{\rho}\right)\sin\vartheta$$

დამოკიდებულებას, რომელიც ახორციელებს უსასრულო არის კონ-ფორმულ გადასახვას σ წრეზე; ეს არე

$$\frac{x^2}{b^2(a+1)^2}+\frac{y^2}{b^2(a-1)^2}=1$$

ელიფსის გარე არეა.

ამ შემთხვევაში $\rho=\text{const}$, $\vartheta=\text{const}$ წირები არის შესაბამისად ელიფსები და მათთან კონფოკალური ჰიპერბოლები.

თავი II

მარტივი გამოყენებები ლოგარითმული პოტენციალის თეორიასა და ჰიდროდინამიკაში

სანამ გადავიდოდეთ ბიჰარმონიულ განტოლებაზე და დრეკადობის თეორიასთან დაკავშირებულ ამოცანებზე, განვიხილოთ ჰარმონიული განტოლების თეორიის ზოგიერთი ამოცანა. ამ შემთხვევაში ჩვენს მეთოდს უშუალოდ მივყავართ რამდენიმე საკმაოდ მარტივ ფორმულამდე, რომელიც ფრიად მოხერხებულია სხვადასხვაგვარი გამოყენებისათვის. ამ ფორმულათაგან ზოგიერთი კარგა ხნის წინაა მიღებული სხვადასხვა გზით. ფორმულები მარტივი მაგალითების სახითაა მოყვანილი, რათა ცხადი გახდეს გამოყენებული მეთოდის სიმარტივე.

1. წინასწარი შენიშვნები

§ 7. ჰარმონიული ფუნქციის წარმოდგენა კომპლექსური ცვლადის ფუნქციების საშუალებით. ვთქვათ, $U(x, y)$ არის ცალსახა ფუნქცია, უწყვეტი თავისი მეორე რიგის კერძო წარმოებულებთან ერთად (x, y) წერტილთა სიბრტყის გარკვეულ S არეში და აკმაყოფილებს ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ს

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0;$$

მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ U არის ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ ი S-ში. თუ S არე უსასრულოა, ჩვენ მხოლოდ მაშინ ვიტყვით, რომ U ჰარმონიულია S-ში, როცა ის შემოსაზღვრულია უსასრულობაში.

წინააღმდეგ შემთხვევაში U-ს ეწოდება ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ ი S-ში, გ ა რ დ ა უ ს ა ს რ უ ლ ო წ ე რ ტ ი ლ ი ს ა.

ჩვენ განვიხილავთ ორი ტიპის S არეებს, სახელდობრ:

1. არეებს, რომლებიც შედგებიან მარტივი შეკრული S წირის შიგნით მოთავსებული (x, y) წერტილთა სიბრტყის ნაწილისაგან.

2. არეებს, რომლებიც შედგებიან მარტივი შეკრული C წირის გარეთ მდებარე სიბრტყის ნაწილისაგან.

შემდგომში ჩვენ ამ ორ შემთხვევას განვასხვავებთ იმით, რომ ვიტყვით არე ს ა ს რ უ ლ ი ა ან უ ს ა ს რ უ ლ ო.

ვთქვათ, $U(x, y)$ არის მოცემულ S არეში ჰარმონიული ფუნქცია.

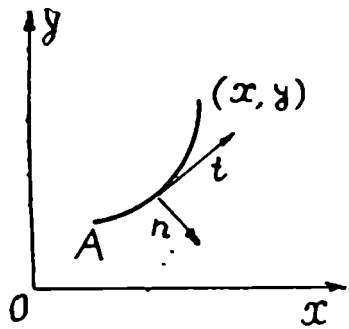
ცნობილია, რომ $U(x, y)$ შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც ნამდვილი ნაწილი $z=x+iy$ კომპლექსური ცვლადის გარკვეული ანალიზური $\varphi(z)$ ფუნქციისა; სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ყოველთვის შეიძლება ვიპოვოთ ისეთი ნამდვილი $V(x, y)$ ფუნქცია, რომ

$$U+iV=\varphi(z). \tag{1}$$

მოცემული U ფუნქციისათვის ფუნქცია V განისაზღვრება მუდმივამდე სიზუსტით. V-ს მისაღებად შეგვიძლია მოვიქცეთ შემდეგნაირად.

ვთქვათ, $A(x_0, y_0)$ არის S-ის ნებისმიერი წერტილი. შევაერთოთ ეს წერტილი (x, y) წერტილთან უწყვეტი წირით, რომელიც S-დან არ გამოდის და რომელსაც ყველგან აქვს გარკვეული მხები.

ამ წირის გავლის დადებით მიმართულებად ავიღოთ ის, რომელსაც მივყავართ A წერტილიდან (x, y) წერტილში. ეს შეთანხმება საკმაოდ განსაზღვრავს ამ წირის მხების დადებით მიმართულებას. ნორმალის



ნახ. 5

დადებითი მიმართულება ისე ავირჩიოთ, რომ ნორმალი მხების მიმართ მოთავსდეს ისე, როგორც Ox ღერძია მოთავსებული Oy-ის მიმართ z წერტილთა სიბრტყეში (ნახ. 5).

ამ დაშვებით გვექნება

$$V(x, y)=V(x_0, y_0)+\int_A^{(x, y)} \frac{dU}{dn}\, ds, \tag{2}$$

სადაც ინტეგრალი აღებულია ზემოხსენებული წირის გასწვრივ, s აღნიშნავს ამ წირის A წერტილიდან ათვლილ რკალის სიგრძეს, ხოლო $\frac{dU}{dn}$ არის U-ს წარმოებული დადებითი ნორმალის გასწვრივ; $V(x_0, y_0)$ შეიძლება ნებისმიერად ავირჩიოთ.

დავამტკიცოთ, რომ $V(x, y)$ არის (x, y) წერტილის ცალსახა ფუნქცია.

ამის ტოლფასია დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი

$$\int \frac{dU}{dn}\, ds,$$

აღებული S-ში მოთავსებული ნებისმიერი ჩაკეტილი C' წირის გასწვრივ, ნულის ტოლია.

ეს ცხადია იმ შემთხვევაში, როცა S არე სასრულია, ვინაიდან მაშინ U იქნება ჰარმონიული S-ში მთლიანად მოთავსებული რაიმე მარტივი შეკრული წირის შიგნით[23].

საეჭვო შეიძლება იყოს მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა S არე უსასრულოა და ინტეგრების C' წირი თავის შიგნით შეიცავს S-ის C საზღვარს. მაგრამ ამ შემთხვევაში C' წირი შეიძლება შეიცვალოს წრეწირით ცენტრით სათავეში და საკმარისად დიდი R რადიუსით იმისათვის, რომ C საზღვარი აღმოჩნდეს ამ წრეწირის შიგნით.

მეორე მხრივ, თუ r-ით და θ-თი აღვნიშნავთ (x, y) წერტილის პოლარულ კოორდინატებს, მაშინ $U(x, y)$ ჰარმონიული ფუნქცია შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს

$$U(x, y) = a_0 + \frac{1}{r}(a_{-1}\cos\theta - b_{-1}\sin\theta) +$$

$$+ \frac{1}{r^2}(a_{-2}\cos 2\theta - b_{-2}\sin 2\theta) + \ldots \qquad (3)$$

მწკრივით[24], რომელიც თანაბრად კრებადია, როცა $r > R$.

რადგან ინტეგრების C' წირი R რადიუსიანი წრეწირია, ხოლო გარე ნორმალის მიმართულება არის R რადიუსის მიმართულება, ამიტომ

$$\frac{dU}{dn} = -\frac{1}{R^2}(a_{-1}\cos\theta - b_{-1}\sin\theta) + \ldots .$$

აქედან ცხადია, რომ $\frac{dU}{dn}$ ინტეგრალი, აღებული C' წრეწირის გასწვრივ, ნულის ტოლია. ამრიგად, V. ფუნქციის ცალსახობა დამტკიცებულია. აქედან გამომდინარეობს, რომ ფუნქცია

$$\varphi(z) = U + iV,$$

რომელიც განსაზღვრულია U ჰარმონიული ფუნქციით, ყოველთვის ცალსახაა. ამას გარდა, ვინაიდან მისი ნამდვილი ნაწილი U შემოსაზღვრულია S-ში, ამიტომ თვით φ ფუნქციაც იქნება შემოსაზღვრული.

ამრიგად, საბოლოოდ გვაქვს, რომ $\varphi(z)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია მთელ S არეში ($z=\infty$ წ ე რ ტ ი ლ ი ს ჩ ა თ ვ ლ ი თ)[25].

§ 8. გაგრძელება. როცა S არე უსასრულოა და U ფუნქცია ჰარმონიულია S-ში, გარდა $z=\infty$ წერტილისა, მაშინ მივიღებთ წინა §-ის შედეგებისაგან განსხვავებულ შედეგებს.

მართლაც, ამ შემთხვევაში არ შეიძლება ითქვას, რომ ინტეგრალი

$$\int \frac{dU}{dn}\, ds,$$

აღებული C საზღვრის მომცველ რაიმე შეკრულ უწყვეტმხებიან C' წირზე, ნულის ტოლია. მაშასადამე, $\varphi(z)$ ფუნქცია საზოგადოდ იქნება მრავალსახა. ადვილია ამ მრავალსახეობის ხასიათის გამოკვლევა.

მართლაც, S არეში გავიყვანოთ L ჭრილი, რომელიც გამოდის C საზღვრის რაიმე წერტილიდან და მიდის უსასრულობაში (ნახ. 6). ასეთნაირად გაჭრილი არე აღვნიშნოთ S'-ით.

ამ ახალ არეში V ფუნქცია უკვე ცალსახაა, ვინაიდან რაიმე შეკრული C' წირი ვერ მოიცავს C-ს, თუ არ გადაკვეთა L ჭრილი; აქედან გამომდინარეობს, რომ ინტეგრალი

$$\int \frac{dU}{dn}\, ds,$$

აღებული C' წირის გასწვრივ, რომელიც არ გამოდის S'-დან, იქნება ნულის ტოლი.

მაგრამ, ცხადია, რომ V-ს მნიშვნელობები ჭრილის მოპირდაპირე ნაპირებზე არ იქნება, საზოგადოდ, ერთმანეთის ტოლი.

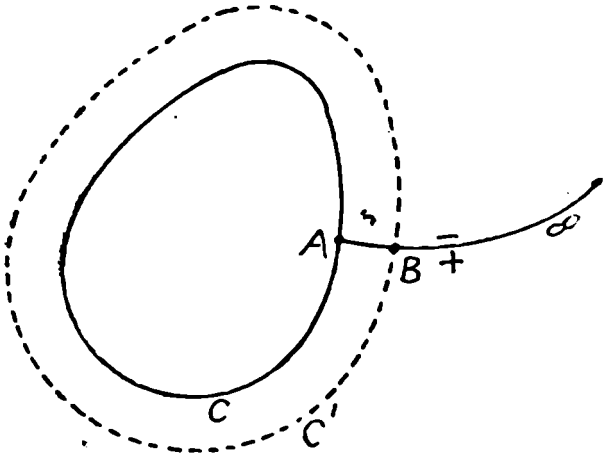
დადებითი ვუწოდოთ L ჭრილის იმ ნაპირს, რომელიც მარჯვნივ რჩება, როცა ვმოძრაობთ $A\infty$ მიმართულებით. მოპირდაპირე ნაპირს ეწოდება უარყოფითი.

ვთქვათ, V_+ და V_- V-ს მნიშვნელობებია L-ით ორივე ნაპირის ერთსა და იმავე გეომეტრიულ B წერტილში (ნახ.6).

(2) ფორმულა გვაძლევს

$$V_+ - V_- = \int_{C'} \frac{dU}{dn}\, ds,$$

სადაც C' აღნიშნავს რაიმე მარტივ შეკრულ წირს, რომელიც გამოდის B-დან, შემოუვლის C საზღვარს და ბრუნდება B-ში, ისე რომ მიდის L-ის უარყოფითი ნაპირიდან დადებით ნაპირამდე.



ნახ. 6

ადვილად მოწმდება, რომ ეს ინტეგრალი არ არის დამოკიდებული არც B-ს მდებარეობაზე L-ზე, არც C' წირის ფორმაზე. მაშასადამე, მთელ ჭრილზე გვექნება

$$V_+ - V_- = \alpha, \tag{4}$$

სადაც α აღნიშნავს მუდმივს,

$$\alpha = \int_{C'} \frac{dU}{dn}\, ds = \int_{G} \frac{dU}{dn}\, ds. \tag{5}$$

თუ ახლა ჭრილს ამოვაგდებთ, მაშინ გაუჭრელ S არეში $V(x, y)$ ფუნქცია მრავალსახა იქნება; სახელდობრ, ყოველთვის, როცა (x, y) წერ-

ტილი დადებითი მიმართულებით აღწერს C-ს მომცველ წირს, $V(x, y)$ ფუნქცია გაიზრდება a მუდმივით.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ფუნქცია

$$\varphi(z)=U+iV$$

აგრეთვე მრავალსახა იქნება: z წერტილის C-ს გარშემო ერთი სრული შემოვლა მას ზრდის წმინდა წარმოსახვითი ai მუდმივით.

ვთქვათ, z_0 რაიმე წერტილია, მოთავსებული C-ს შიგნით (და, მაშასადამე, S-ის გ ა რ ე თ). მაშინ ფუნქცია

$$\varphi(z)-\frac{\alpha}{2\pi}\lg(z-z_0)$$

იქნება ც ა ლ ს ა ხ ა S-ში.

მაშასადამე, გვექნება

$$\varphi(z)=\frac{\alpha}{2\pi}\lg(z-z_0)+\varphi_1(z), \tag{6}$$

სადაც $\varphi_1(z)$ აღნიშნავს ფუნქციას, ჰოლომორფულს S-ში, გარდა, შესაძლოა, $z=\infty$ წერტილისა.

§ 9. გაშლა $z=\infty$ წერტილის მიდამოში. არ იქნება ზედმეტი აქ გავიხსენოთ ჰარმონიული ფუნქციის ცნობილი გაშლა უსასრულოდ შორეული წერტილის მიდამოში.

ვთქვათ, U არის ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს წინა §-ის პირობებს

ვთქვათ, ამას გარდა, Γ არის წრეწირი, რომლის ცენტრი სათავეშია და მოიცავს თავის შიგნით მთელ C საზღვარს.

თუ r-ით და θ-თი აღვნიშნავთ (x, y) წერტილის პოლარულ კოორდინატებს, მაშინ გვექნება შემდეგი გაშლა:

$$U=k\lg r+\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta), \tag{A}$$

სადაც k, a_n, b_n აღნიშნავს ნამდვილ მუდმივებს. ეს მწკრივი თანაბრად კრებადია Γ-ს გარეთ მდებარე ყოველ სასრულ არეში[26]. U-ს შეუღლებული V ფუნქცია მოიცემა

$$V=k\theta+\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^n(a_n\sin n\theta-b_n\cos n\theta)+C \tag{B}$$

მწკრივით, სადაც C აღნიშნავს ნებისმიერ ნამდვილ მუდმივს.

დაბოლოს,

$$\varphi(z)=U+iV$$

ფუნქციას ექნება გაშლა

$$\varphi(z)=U+iV=k\lg z+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(a_n-ib_n)z^n+iC. \qquad (C)$$

კერძოდ, როცა U ფუნქცია ჰარმონიულია ყველგან, მაშინ წინა ვაშლებში უნდა დავუშვათ $k=0$ და ამოვაგდოთ ყველა წევრი, რომელიც შეიცავს r-ის ან z-ის უარყოფით ხარისხს.

შევნიშნოთ, რომ ეს ფორმულები იძლევა ახალ საშუალებას დავადგინოთ წინა §-ების შედეგები.

კერძოდ, (B) ფორმულის მიხედვით გვექნება

$$V_+-V_-=2\pi k.$$

(4) ფორმულასთან შედარება გვაძლევს, რომ

$$k=\frac{\alpha}{2\pi}.$$

§ 10. აღნიშვნები. საზოგადოდ, იმ ფაქტის გამოსახვისათვის, რომ a არის b-ს ნამდვილი ნაწილი, ვხმარობთ $a=\mathrm{Re}\,b$ აღნიშვნას.

მაშასადამე, ამის თანახმად გვექნება

$$U(x,\ y)=\mathrm{Re}\,\varphi(z).$$

მაგრამ, შემდგომისათვის უფრო მოხერხებული იქნება ვიხმაროთ სხვა აღნიშვნა.

$\overline{\varphi(z)}$-ით აღვნიშნოთ $\varphi(z)$-ის შეუღლებული გამოსახულება, ე. ი., თუ

$$\varphi(z)=U+iV,$$

მაშინ განსაზღვრის თანახმად გვექნება

$$\overline{\varphi(z)}=U-iV.$$

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$2U=\varphi(z)+\overline{\varphi(z)}. \qquad (7)$$

U ფუნქციის მოძებნა, რომელიც ამა თუ იმ პირობას აკმაყოფილებს, $\varphi(z)$-ის მოძებნის ტოლფასია.

შენიშვნა. $\overline{\varphi(z)}$ ფუნქცია შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც

$$\overline{z}=x-iy$$

კომპლექსური ცვლადის ფუნქცია:

$$\overline{\varphi(z)}=\overline{\varphi}\ (\overline{z}). \tag{8}$$

$\overline{\varphi}(\overline{z})$ ფუნქცია $\overline{z}$-ის ჰოლომორფული ფუნქციაა, თუ $\varphi(z)$ არის z-ის ჰოლომორფული ფუნქცია.

ადვილად ვრწმუნდებით, რომ $\overline{\varphi}(\overline{z})$ ფუნქციაზე შეიძლება ჩატარდეს დიფერენცირების და ინტეგრების იგივე ოპერაციები, რაც z კომპლექსური ცვლადის ფუნქციაზე.

მაგალითად, გვექნება

$$\frac{d\overline{\varphi}(\overline{z})}{d\overline{z}}=\overline{\varphi}'(\overline{z}),$$

სადაც $\overline{\varphi}'(\overline{z})$ აღნიშნავს $\varphi'(z)$-ის შეუღლებულ ფუნქციას.

თუ $\varphi(z)$ არის რაციონალური ფუნქცია ან z-ის ხარისხოვანი მწკრივი, მაშინ $\overline{\varphi}(\overline{z})$-ის მისაღებად საკმარისია $\varphi(z)$-ში $\overline{z}$ შევცვალოთ z ცვლადით და კოეფიციენტები — შეუღლებული სიდიდეებით. ამ შემთხვევაში ჩვენ ვიხმართ აგრეთვე $\varphi(\overline{z})$ აღნიშვნას იმ ფუნქციისათვის, რომელიც მიიღება $\varphi(z)$-ისაგან, როცა მასში კოეფიციენტებს შეუღლებული სიდიდეებით შევცვლით.

ცხადია, როცა $\varphi(z)$ არის z-ის მთელი ხარისხების მწკრივი, $\varphi(z)$, $\overline{\psi}(\overline{z})$ და $\overline{\varphi}(z)$ ფუნქციების გაშლის კრებადობის წრეები ერთი და იგივეა.

11. ძირითადი ამოცანა წრიული არისათვის

ცნობილია ლოგარითმული პოტენციალის თეორიის ძირითადი ამოცანა: ვიპოვოთ გარკვეულ S არეში ჰარმონიული ფუნქცია, როცა მოცემულია ამ ფუნქციისა და მისი პირველი რიგის კერძო წარმოებულების წრფივი კომბინაცია S-ის C საზღვარზე; დირიხლესა და ნეიმანის კლასიკური ამოცანები ამ ზოგადი ამოცანის ძალიან კერძო შემთხვევებია.

მაგრამ, თუ ის მეთოდები, რომლებიც დღეს მათემატიკურ ანალიზს გააჩნია ზემოხსენებული კერძო ამოცანების ამოსახსნელად, სავსებით დამაკმაყოფილებელია, ეს არ ითქმის ზოგადი ამოცანის მიმართ. უმეტეს შემთხვევაში იმასაც ვერ ვიტყვით წინასწარ, გააჩნია მას ამონახსნი, თუ არა.

ამიტომ სასურველია გვქონდეს ისეთი მეთოდები, რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ ამოვხსნათ ეს ამოცანა კერძო შემთხვევებში მაინც. ერთ-ერთ ასეთ მეთოდს ჩვენ გადმოვცემთ შემდგომ ორ განყოფილებაში. ის გამოიყენება მრავალი საკმაოდ ზოგადი შემთხვევისათვის, რომელიც მოიცავს, როგორც ძალიან კერძო შემთხვევებს, დირიხლესა და ნეიმანის ამოცანებს. ქვემოთ ვნახავთ, რომ ეს ამოცანა შეიძლება დაყვანილ იქნეს ამოცანაზე წრიული არისათვის, რომელსაც შემდეგ §-ში დავსვამთ.

§ 11. საქმე ეხება შემდეგ ამოცანას: ვიპოვოთ კომპლექსური ζ ცვლადის φ(ζ) ფუნქცია, ჰოლომორფული γ წრეწირის შიგნით, რომელიც γ საზღვარზე აკმაყოფილებს პირობას

$$(a+ib)\,A(\zeta')\,\varphi'(\zeta')+(a-ib)\,\overline{A(\zeta')}\,\overline{\varphi'(\zeta')}+$$
$$+c\,[\varphi(\zeta')+\overline{\varphi(\zeta')}]=2f(\vartheta), \qquad (9)$$

სადაც a, b, c, f არის γ-ს ϑ რკალის სასრული ნამდვილი ფუნქციები, $A(\zeta)$ არის ζ კომპლექსური ცვლადის მოცემული ფუნქცია, ჰოლომორფული γ-ს შიგნით და უწყვეტი γ-ზე.

ζ' აღნიშნავს ცვლად წერტილს γ-ზე, $\varphi'(\zeta)$ აღნიშნავს $\frac{d\varphi}{d\zeta}$ წარმოებულს. ამის გარდა, $\varphi(\zeta')$, $\varphi'(\zeta')$, $\overline{\varphi(\zeta')}$ და ა. შ. აღნიშნავს ზღვრებს, რომლისაკენ მიისწრაფვის შესაბამისად $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$, $\overline{\varphi(\zeta)}$ და ა. შ. ფუნქციები, როცა ζ ისე მიისწრაფვის γ წრეწირის ζ'-ს წერტილისაკენ, რომ ყოველთვის რჩება γ-ს შიგნით. ამგვარად, თვით ამოცანის ჩამოყალიბება მოითხოვს ამ ზღვრების არსებობას. შემდგომში ჩვენ შემოვიფარგლებით ისეთი $\varphi(\zeta)$ ამონახსნების მოძებნით, რომლებიც უწყვეტია თავიანთ $\frac{d\varphi}{d\zeta}$ წარმოებულებთან ერთად თვით γ საზღვარზე[27].

A, a, b, c ფუნქციები ახასიათებს მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების ამა თუ იმ კლასს. მეთოდი, რომელსაც ჩვენ გადმოვცემთ, გამოიყენება იმ შემთხვევებში, როცა რკალის ფუნქციები a, b, c იმა-

ვე დროს γ საზღვრის წერტილების ξ', η' კოორდინატების რაციონალური ფუნქციებია.

§ 12. სასაზღვრო პირობების გარდაქმნა. ამრიგად დავუშვათ, რომ a, b, c ფუნქციები ξ'-ისა და η'-ის მოცემული რაციონალური ფუნქციებია, რომელთა მნიშვნელობები γ-ზე სასრულია.

თუ შევნიშნავთ, რომ

$$\xi'=\frac{\zeta'+\overline{\zeta}'}{2}, \qquad \eta'=\frac{\zeta'-\overline{\zeta}'}{2i},$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$a+ib=\frac{\Phi(\zeta', \overline{\zeta}')}{\Phi_1(\zeta', \overline{\zeta}')}, \qquad a-ib=\frac{\overline{\Phi}(\overline{\zeta}', \zeta')}{\overline{\Phi}_1(\overline{\zeta}', \zeta')},$$

$$c=\frac{\Psi(\zeta', \overline{\zeta}')}{\Psi_1(\zeta', \overline{\zeta}')},$$

სადაც, საზოგადოდ, $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$,... აღნიშნავენ x-ისა და y-ის მრავალწევრებს, ხოლო $\overline{\Phi}(x, y)$ აღნიშნავს მრავალწევრებს, რომლებსაც მივიღებთ, თუ $\Phi(x, y)$ მრავალწევრებში კოეფიციენტებს შევცვლით შეუღლებული სიდიდეებით.

ვინაიდან c არის ნამდვილი სიდიდე, ამიტომ, ცხადია, შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $\Psi(\zeta', \overline{\zeta}')$, $\Psi_1(\zeta', \overline{\zeta}')$ აგრეთვე ნამდვილია γ-ს ყოველი ζ' წერტილისათვის. (9)-ის ორივე მხარე გავამრავლოთ

$$\Phi_1(\zeta', \overline{\zeta}')\overline{\Phi_1(\zeta', \overline{\zeta}')}\,\Psi_1(\zeta', \overline{\zeta}')$$

ნამდვილ სიდიდეზე. მაშინ, (9) პირობა მიიღებს

$$P_1(\zeta', \overline{\zeta}')\,A(\zeta')\,\varphi'(\zeta')+\overline{P_1(\zeta', \overline{\zeta}')}\,\overline{A(\zeta')}\,\overline{\varphi'(\zeta')}+$$
$$+R_1(\zeta', \overline{\zeta}')\,[\varphi(\zeta')+\overline{\varphi}'(\overline{\zeta}')]=2f_1(\vartheta) \tag{10}$$

სახეს, სადაც P_1, R_1 მრავალწევრებს აღნიშნავენ, ხოლო $f_1(\vartheta)$ არის γ-ს ϑ რკალის მოცემული ნამდვილი ფუნქცია.

ზოგადობის შეუზღუდავად ყოველთვის შეგვიძლია დავუშვათ, რომ γ-ს რადიუსი ე რ თ ი ს ტოლია, და, რომ მისი ცენტრი ζ-სიბრტყის სათავეშია.

ამრიგად, γ წირის წერტილებისათვის გვექნება

$$\overline{\zeta}'=e^{-i\vartheta}=\frac{1}{\zeta'}$$

და (10) ღებულობს სახეს

$$P(\zeta')A(\zeta')\varphi'(\zeta')+Q(\zeta')\bar{A}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)+$$

$$+R(\zeta')\left[\varphi(\zeta')+\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\right]=2f_1(\vartheta), \qquad (11)$$

სადაც $P(\zeta)$, $Q(\zeta)$, $R(\zeta)$ აღნიშნავს

$$\frac{\Psi(\zeta)}{\zeta^n}$$

სახის რაციონალურ ფუნქციებს, სადაც Ψ მრავალწევრია.

ასახსნელი დარჩა მნიშვნელობა

$$\bar{A}\left(\frac{1}{\zeta'}\right), \quad \bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right), \quad \bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)$$

სიმბოლოებისა, რომლებიც მონაწილეობენ (11) ტოლობაში.

§ 10-ის შეთანხმების თანახმად, სიმბოლო $\bar{A}(\zeta)$ აღნიშნავს ζ-ს ფუნქციას, რომელიც $A(\zeta)$ ფუნქციიდან მიიღება, თუ ამ უკანასკნელი ფუნქციის ζ-ს ხარისხების მიხედვით გაშლის კოეფიციენტებს შევცვლით შეუღლებული სიდიდეებით. ვინაიდან $A(\zeta)$ არის ჰოლომორფული γ-ს შიგნით. ასეთივე იქნება $\bar{A}(\zeta)$, და ამიტომ ფუნქცია $\bar{A}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ ჰოლომორფულია γ-ს გარეთ. ზღვარი, რომლისკენაც მიისწრაფვის $\bar{A}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, როცა ζ მიისწრაფვის γ საზღვრის ζ' წერტილისაკენ, აღინიშნა $\bar{A}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)$-ით.

ეს ზღვარი ყოველთვის არსებობს, ვინაიდან ჩვენი დაშვებების თანახმად არსებობს ზღვარი, რომელიც აღვნიშნეთ $\overline{A(\zeta')}$-ით. ნათელია, რომ გვექნება

$$\bar{A}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)=\bar{A}(\bar{\zeta}');$$

$\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)$, $\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)$ სიმბოლოების მნიშვნელობები სავსებით ანალოგიურია.

ახლა გავიხსენოთ § 3-ის თეორემა. ამ თეორემის თანახმად, (11) ტოლფასია ტოლობისა

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left\{P(\zeta')A(\zeta')\varphi'(\zeta')+Q(\zeta')\bar{A}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)+\right.$$

$$+R(\zeta')\left[\varphi(\zeta')+\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\right]\Bigg\}\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{2f_1(\vartheta)\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta}, \qquad (12)$$

სადაც ζ აღნიშნავს γ-ს შიგნით მდებარე ნებისმიერ წერტილს.

§ 13. დიფერენციალური განტოლება $\varphi(\zeta)$-სათვის. $\varphi(\zeta)$ ფუნქციას და მის $\varphi'(\zeta)$, წარმოებულს ჩვენ მოვთხოვეთ პირობა, რომ თანაბრად მიისწრაფოდნენ შესაბამისად გარკვეული $\varphi(\zeta')$ და $\varphi'(\zeta')$ ზღვრებისაკენ, როცა ζ წერტილი მიისწრაფვის ζ'-საკენ ისე, რომ რჩება γ-ს შიგნით.

ამ პირობის თანახმად

$$\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad \bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

ფუნქციები აგრეთვე თანაბრად მიისწრაფვიან შესაბამისად

$$\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right), \quad \bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)$$

ზღვრებისაკენ, როცა ζ მიისწრაფვის ζ'-საკენ ისე, რომ რჩება γ-ს გარეთ.

ამიტომ, (12) ტოლობის მარცხენა მხარის ინტეგრალი ადვილად შეიძლება გამოითვალოს.

მართლაც, განვიხილოთ ჯერ ინტეგრალი

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}R(\zeta')\,\varphi(\zeta')\,\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}. \qquad (13)$$

ჩვენი დაშვებების თანახმად, $R(\zeta)\varphi(\zeta)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია γ-ს შიგნით, გარდა $\zeta=0$ წერტილისა, სადაც ამ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს პოლუსი, რომელიც წარმოიქმნება $R(\zeta)$ რაციონალური ფუნქციის პოლუსიდან.

ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$R(\zeta)\,\varphi(\zeta)=\frac{a_m}{\zeta^m}+\frac{a_{m-1}}{\zeta^{m-1}}+\ldots+\frac{a_1}{\zeta}+\text{ჰოლომორფული ფუნქცია},$$

სადაც m აღნიშნავს $R(\zeta)$ ფუნქციის პოლუსის რიგს, ხოლო $a_1, a_2, \ldots, a_m$ სიდიდეები $\varphi(\zeta)$ ფუნქციის ζ-ს ხარისხების მწკრივად გაშლის პირვე-

ლი m (ჯერ კიდევ უცნობი) კოეფიციენტის ადგილად შესადგენი წრფივი კომბინაციებია[28].

ამიტომ, § 4-ის პირველი ტოლობა უშუალოდ გვაძლევს, რომ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} R(\zeta')\,\varphi(\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}=R(\zeta)\,\varphi(\zeta)-\frac{a_m}{\zeta^m}-\ldots-\frac{a_1}{\zeta}. \qquad (14)$$

ახლა გადავიდეთ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} R(\zeta')\,\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta} \qquad (15)$$

ინტეგრალზე.

ჩვენი დაშვებების თანახმად,

$$A(\zeta)\,\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

ფუნქცია ჰოლომორფულია γ-ს გარეთ, გარდა $\zeta=\infty$ წერტილისა, სადაც მას შეუძლია ჰქონდეს პოლუსი, რომლის რიგი არ აღემატება $R(\zeta)$ რაციონალური ფუნქციის $\zeta=\infty$ პოლუსის n რიგს.

ამიტომ γ-ს გარეთ მდებარე წერტილებისათვის გვექნება

$$R(\zeta)\,\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=b_n\zeta^n+b_{n-1}\zeta^{n-1}+\ldots+b_1\zeta+b_0+\frac{b'}{\zeta}+\ldots,$$

სადაც $b_0, b_1, \ldots, b_n$ $\overline{\varphi}(\zeta)$-ს ζ-ს ხარისხების მწკრივად გაშლის პირველი $n+1$ კოეფიციენტის წრფივი კომბინაციებია.

§ 4-ის მეორე ტოლობის გამოყენება უშუალოდ გვაძლევს, რომ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} R(\zeta')\,\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}=b_n\zeta^n+b_{n-1}\zeta^{n-1}+\ldots+b_0. \qquad (16)$$

დანარჩენი ინტეგრალებიც გამოითვლება სავსებით ანალოგიურად და საბოლოოდ მივიღებთ:

$$P(\zeta)\,A(\zeta)\,\varphi'(\zeta)+R(\zeta)\,\varphi(\zeta)=\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_1(\zeta)\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta}+\Phi(\zeta), \qquad (17)$$

სადაც

$$\Phi(\zeta)=\frac{c_{-n}}{\zeta^n}+\frac{c_{-n+1}}{\zeta^{n-1}}+\ldots+c_0+c_1\zeta+\ldots+c_m\zeta^m, \qquad (18)$$

ხოლო m და n არ აღემატება $P(\zeta)$, $Q(\zeta)$, $R(\zeta)$ რაციონალური ფუნქციების რიგებს შორის უდიდესს[20].

c კოეფიციენტები შედგენილია შემდეგნაირად:

თუ $\psi(\zeta)$-ს გაშლას წარმოვადგენთ

$$\varphi(\zeta)=\alpha_0+i\beta_0+(\alpha_1+i\beta_1)\zeta+(\alpha_2+i\beta_2)\zeta^2+\ldots \tag{19}$$

სახით, მაშინ (18)-ში $c_{-n},\ldots, c_m$ კოეფიციენტები წრფივი კომბინაციებია (ცნობილი კოეფიციენტებით)

$$\alpha_0,\ \beta_0,\ \alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_2,\ \beta_2,\ldots,\alpha_k,\ \beta_k \tag{20}$$

სიდიდეებისა, სადაც k არ აღემატება $p+1$-ს, თუ p-თი აღვნიშნავთ $P(\zeta)$, $Q(\zeta)$, $R(\zeta)$ ფუნქციების რიგებს შორის უდიდესს.

თუ სიმოკლისათვის შემოვიტანთ

$$F(\zeta)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f_1\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta}+\Phi(\zeta) \tag{21}$$

აღნიშვნას, მაშინ (17) ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$P(\zeta)\,A(\zeta)\,\varphi'(\zeta)+R(\zeta)\,\varphi(\zeta)=F(\zeta). \tag{17*}$$

ეს არის უცნობი $\varphi(\zeta)$ ფუნქციისათვის პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება.

თუ მოვაბდენთ ამ განტოლების ინტეგრებას, მივიღებთ, რომ

$$\varphi(\zeta)=e^{-\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{R(\zeta_1)d\zeta_1}{P(\zeta_1)\,A(\zeta_1)}}\left[C+\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}e^{\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_2}\frac{R(\zeta_1)\,d\zeta_1}{P(\zeta_1)\,A(\zeta_1)}}\frac{F(\zeta_2)}{P(\zeta_2)\,A(\zeta_2)}\,d\zeta_2\right], \tag{22}$$

სადაც $C=\varphi(\zeta_0)$ აღნიშნავს ჯერჯერობით უცნობ მუდმივს, ხოლო ζ_0 არის ნებისმიერი წერტილი, მოთავსებული γ-ს შიგნით და განსხვავებული საინტეგრო ფუნქციების პოლუსებისაგან.

(22)-ის მარჯვენა მხარე წ რ ფ ი ვ ა დ შეიცავს მუდმივებს, სახელდობრ,

$$C,\ \alpha_0,\ldots,\ \alpha_k,\ \beta_0,\ldots,\ \beta_k$$

მუდმივებს, რომლებიც უნდა განისაზღვროს.

§ 14. მუდმივების განსაზღვრა. იმისათვის, რომ (22) გამოსახულებამ ეფექტურად მოგვცეს ჩვენი ამოცანის ამონახსნი, საჭიროა პ ი რ ვ ე ლ რ ი გ შ ი ის იყოს ჰოლომორფული γ-ს შიგნით. მაგრამ,

ვინაიდან ამ გამოსახულების განსაკუთრებული წერტილები შეიძლება გაჩნდეს მხოლოდ საინტეგრო ფუნქციების პოლუსებისაგან, ამიტომ ჰოლომორფულობის პირობის დასაკმაყოფილებლად საკმარისია, რომ (22) გამოსახულება იყოს სასრული და ცალსახა

$$\frac{1}{P(\zeta)\,A(\zeta)}$$

ფუნქციის თითოეული პოლუსის მიდამოში, რომელიც მოთავსებულია γ-ს შიგნით და, გარდა ამისა, $\zeta=0$ წერტილის მიდამოში, რომელიც შეიძლება იყოს $R(\zeta)$ ფუნქციის პოლუსი.

ამნაირად მივიღებთ რამდენიმე დამოკიდებულებას, რომლებიც უნდა დააკმაყოფილონ უცნობმა მუდმივებმა (იხ. § 15).

მ ე ო რ ე მ ხ რ ი ვ, საჭიროა რომ $\varphi(\zeta)$-ს გაშლის პირველი $k+1$ კოეფიციენტი შესაბამისად შემდეგი სიდიდეების ტოლი იყოს:

$$\alpha_0+i\beta_0,\quad \alpha_1+i\beta_1,\ldots,\ \alpha_k+i\beta_k. \tag{23}$$

ეს უკანასკნელი პირობა რომ გამოვსახოთ, საკმარისია (22)-ის მარჯვენა მხარე გავშალოთ ζ-ს ხარისხების მიხედვით და ζ^0-ის, ζ^1-ის, ζ^2-ის,..., ζ^k-ს კოეფიციენტები შესაბამისად (23) სიდიდეებს გავუტოლოთ.

ეს კიდევ იძლევა დამოკიდებულებებს (23) უცნობი სიდიდეებისათვის.

დასაკმაყოფილებელი რჩება $\varphi(\zeta)$ და $\varphi'(\zeta)$ ფუნქციების უწყვეტობის პირობა თვით γ საზღვარზე; ეს პირობა ჩვენ თავიდანვე მოვთხოვეთ ამ ფუნქციებს (§ 11).

ამისათვის ს ა კ მ ა რ ი ს ი ა დავუშვათ, რომ $A(\zeta)\,P(\zeta)$ არ ხდება ნული γ-ზე, და რომ $f(\vartheta)$ ფუნქცია უწყვეტია თავის წარმოებულთან ერთად γ წრეწირზე.

მართლაც, ამ შემთხვევაში $f_1(\vartheta)$ ფუნქციაც იქნება უწყვეტი თავის წარმოებულთან ერთად γ-ზე. მაშასადამე, § 1-ის თეორემის თანახმად, (21)-ით განსაზღვრული ფუნქცია უწყვეტია γ წრეწირზე და, ამიტომ ასეთივე იქნება (22) ტოლობით განსაზღვრული $\varphi(\zeta)$ ფუნქციაც.

ამის შემდეგ, (17*) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ასეთივე იქნება $\varphi'(\zeta)$ წარმოებული.

ჩვენ ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ $\varphi(\zeta)$ და $\varphi'(\zeta)$ უწყვეტია წრეწირზე; ამის ს ა კ მ ა რ ი ს ი პირობები ახლახან დავადგინეთ.

თუ (23) მუდმივები არჩეულია აღნიშნული წესით, მაშინ, ცხადია, რომ $\varphi(\zeta)$ აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს.

§ 15. **გაგრძელება.** რაც შეეხება (23) მუდმივების განსაზღვრისათვის დამოკიდებულებათა ეფექტურ შედგენას, ჩვენ შემოვიფარგლებით ყველაზე მარტივი შემთხვევის განხილვით, როცა

$$\frac{R(\zeta)}{P(\zeta)\,A(\zeta)}$$

ფუნქციის γ-ს შიგნით მოთავსებული პოლუსები მ ა რ ტ ი ვ ი ა.

ვთქვათ, a არის ერთ-ერთი ასეთი პოლუსი, ხოლო a მისი ნაშთია. ცხადია, რომ a-ს მიდამოში გვექნება გაშლა

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{R(\zeta_1)\,d\zeta_1}{P(\zeta_1)\,A(\zeta_1)} = \alpha \lg(\zeta - a) + \text{ჰოლომორფული ფუნქცია},$$

და ამიტომ

$$e^{\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{R(\zeta_1)\,d\zeta_1}{P(\zeta_1)\,A(\zeta_1)}} = (\zeta - a)^{\alpha} E(\zeta - a),$$

სადაც $E(\zeta - a)$ აღნიშნავს, საზოგადოდ, ხარისხოვან მწკრივს, რომელიც ნული არაა, როცა $\zeta = a$.

(22) ფორმულაში ჩასმა გვაძლევს, რომ

$$\varphi(\zeta) = (\zeta - a)^{-\alpha} E_1(\zeta - a) \left[C + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{(\zeta_1 - a)^{\alpha} E(\zeta_1 - a)\,F(\zeta_1)\,d\zeta_1}{P(\zeta_1)\,A(\zeta_1)} \right].$$

თუ გავშლით უკანასკნელ ინტეგრალს, მივიღებთ შემდეგი სახის მწკრივს[30]:

$$\varphi(\zeta) = (\zeta - a)^{-\alpha} E_1(\zeta - a)\,[C + C' + C_{-l}(\zeta - a)^{\alpha - l} + \ldots + \\ + C_{-l+1}(\zeta - a)^{\alpha - l + 1} + \ldots],$$

სადაც C' და C_l-ები წ რ ფ ი ვ ი კომბინაციებია $C_{-n}, \ldots, C_m$ მუდმივებისა, რომლებიც მონაწილეობენ $F(\zeta)$ ფუნქციაში (იხ. (18) ტოლობა) და, აქედან გამომდინარე, $\alpha_0, \beta_0, \ldots, \alpha_k, \beta_k$ მუდმივების წრფივი კომბინაციებია (იხ. (20)); l აღნიშნავს არაუარყოფით მთელ რიცხვს, რომელიც ნაკლებია

$$\frac{F(\zeta)}{P(\zeta)\,A(\zeta)}$$

ფუნქციის a პოლუსის რიგზე.

როცა α მთელია, შეიძლება გაჩნდეს ლოგარითმული წევრი

$$C'' \lg(\zeta - a),$$

რომლის C'' კოეფიციენტი, აგრეთვე, წრფივია $\alpha_0, \ldots, \beta_k$ მუდმივების მიმართ.

თუ ნულს გავუტოლებთ $C_{-l}, \ldots, C_{-1}$ კოეფიციენტებს, ლოგარითმული წევრის კოეფიციენტს და $C' + C''$ სიდიდეს, როცა α მთელი უარყოფითი რიცხვი არაა, მაშინ მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომელიც უნდა დააკმაყოფილოს C, α_0, $\beta_0, \ldots, \alpha_k$, β_k მუდმივებმა.

თუ ასეთნაირად მოვიქცევით

$$\frac{1}{P(\zeta)\,A(\zeta)}$$

ფუნქციის ყველა პოლუსის მიმართ და $\zeta = 0$ წერტილის მიმართ, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას ცნობილი მუდმივი კოეფიციენტებით, და ჩვენი ამოცანა დაიყვანება ამ ელემენტარული ალგებრული სისტემის ამოხსნაზე.

თუ ამ სისტემას გააჩნია მხოლოდ ერთი ამონახსნი, ან უსასრულო რაოდენობა ამონახსნებისა, ან ბოლოს, თუ სისტემა თავსებადი არაა, დასმულ ამოცანასაც ექნება შესაბამისად ერთი ამონახსნი ან უსასრულო რაოდენობა ამონახსნებისა, ან ამოცანა ამოხსნადი არ იქნება.

§ 16. შენიშვნა. ჩვენი მეთოდი თითქმის უცვლელად გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა (9) გამოსახულების ნაცვლად C საზღვარზე მოცემულია მსგავსი გამოსახულება, რომელიც წრფივად შეიცავს $\varphi(\zeta)$-ს წარმოებულებს გარკვეულ რიგამდე; ამოცანა დაიყვანება გარკვეული წრფივი დიფერენციალური განტოლების განხილვაზე (ფუქსის თეორიის თვალსაზრისით), რომელიც მიიღება სავსებით ანალოგიურად იმისა, როგორც იქნა მიღებული (17) განტოლება.

§ 17. მაგალითი: ლოგარითმული პოტენციალის თეორიის შერეული ამოცანა წრიული არისათვის. განვიხილოთ მარტივი მაგალითია სახით შემდეგი ამოცანა:

ვიპოვოთ (ერთეულრადიუსიანი) γ წრეწირის შიგნით ჰარმონიული $U(x, y)$ ფუნქცია, თუ მოცემულია, რომ

$$kU + l\frac{dU}{dn} = f(\vartheta) \qquad \gamma\text{-ზე}, \tag{24}$$

სადაც k და l აღნიშნავენ მოცემულ მუდმივებს და n აღნიშნავს γ-ს გარე ნორმალის მიმართულებას.

როცა $k = 1$, $l = 0$, მივიღებთ დირიხლეს ამოცანას; თუ $k = 0$, $l = 1$, გვექნება ნეიმანის ამოცანა.

გვაქვს (შდრ. § 10)

$$2U=\varphi(\zeta)+\overline{\varphi(\zeta)}. \tag{25}$$

ვიცით, რომ $\varphi(\zeta)$ შეიცავს წმინდა წარმოსახვით შესაკრებ მუდმივს, რომელიც სურვილისამებრ შეგვიძლია ავარჩიოთ.

ამიტომ შეგვიძლია, გარკვეულობისათვის, ეს მუდმივი ისეთნაირად ავარჩიოთ, რომ $\varphi(\zeta)$-ს მნიშვნელობა, როცა $\zeta=0$, ნამდვილი იყოს:

$$\varphi(0)=\alpha_0, \tag{26}$$

სადაც α_0 აღნიშნავს ჯერჯერობით უცნობ ნამდვილ მუდმივს.

გამოვსახოთ ახლა (24) $\varphi(\zeta)$ ფუნქციის საშუალებით. შევნიშნოთ, რომ თუ $d\zeta$ ნაზრდის მიმართულება ემთხვევა n ნორმალის მიმართულებას, მაშინ გვექნება $d\zeta=dn\cdot e^{i\vartheta}$, საიდანაც

$$\frac{d}{dn}=e^{i\vartheta}\frac{d}{d\zeta}=e^{-i\vartheta}\frac{d}{d\bar{\zeta}}. \tag{27}$$

ამრიგად, γ-ს გასწვრივ გვექნება

$$2\frac{dU}{dn}=e^{i\vartheta}\varphi'(\zeta')+e^{-i\vartheta}\overline{\varphi'(\zeta')}. \tag{27*}$$

მაგრამ, ვინაიდან ζ' წერტილი მდებარეობს γ-ზე, გვექნება

$$e^{i\vartheta}=\zeta', \quad e^{-i\vartheta}=\bar{\zeta}'=\frac{1}{\zeta'}$$

და (24) ღებულობს სახეს:

$$l\left[\zeta'\varphi'(\zeta')+\frac{1}{\zeta'}\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\right]+k\left[\varphi(\zeta')+\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\right]=2f(\vartheta).$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}$-ზე და ვაინტეგროთ γ-ს გასწვრივ. თითქმის გამოთვლების გარეშე[31] მივიღებთ, რომ

$$l\zeta\varphi'(\zeta)+k\varphi(\zeta)+k\alpha_0=\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{f\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta}, \tag{28}$$

სადაც $\alpha_0=\varphi(0)$ არის ნამდვილი რიცხვი. მის განსასაზღვრავად წინა ფორმულაში დავუშვათ $\zeta=0$, რაც მოგვცემს

$$2k\alpha_0=\frac{1}{\pi i}\int_\gamma f(\vartheta)\frac{d\zeta'}{\zeta'}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\vartheta)\,d\vartheta$$

ტოლობას.

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა (28)-ში, გვექნება[32]

$$l\zeta\varphi'(\zeta)+k\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\left[\frac{2f}{\zeta'-\zeta}-\frac{f}{\zeta'}\right]d\zeta'=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f\,\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'-\zeta}\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}. \tag{29}$$

წერის შესამოკლებლად დავუშვათ

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f\,\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'-\zeta}\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}. \tag{30}$$

ვიგულისხმოთ თავდაპირველად, რომ $l \neq 0$.

(29) განტოლების ინტეგრება გვაძლევს, რომ

$$\varphi(\zeta)=\zeta^{-m}\left[C+\frac{1}{l}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\zeta_1^{m-1}F(\zeta_1)\,d\zeta_1\right], \tag{31}$$

სადაც C მუდმივია, ζ_0 არის ნებისმიერი წერტილი γ-ს შიგნით და

$$m=\frac{k}{l}. \tag{32}$$

უნდა განვასხვავოთ სამი შემთხვევა:

1°. *როცა m დადებითია*, შეგვიძლია დავუშვათ $\zeta_0=0$, და მაშინ, აგრეთვე, უნდა დავუშვათ, რომ

$$C=0,$$

ვინაიდან სხვანაირად $\varphi(\zeta)$ ფუნქცია არ იქნებოდა სასრული, როცა $\zeta=0$.

მაშასადმე, გვექნება

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{l}\,\zeta^{-m}\int\limits_{0}^{\zeta}\zeta_1^{m-1}F(\zeta_1)\,d\zeta_1 \tag{33}$$

და ადვილია უშუალოდ შემოწმდეს, რომ ეს მართლაც არის ჩვენი ამოცანის ამოხსნა.

2°. *როცა m უარყოფითია*, მაგრამ არ არის მთელი, დავუშვათ, რომ

$$n=[-m]+1,$$

სადაც $[-m]$ აღნიშნავს $(-m)$-ის მთელ ნაწილს.

ამის შემდეგ ნაწილობითი ინტეგრებით მიიღება

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \zeta_1^{m-1} F(\zeta_1)\, d\zeta_1 = C_1 + \frac{\zeta^m}{m} F(\zeta) - \frac{\zeta^{m+1}}{m(m+1)} F'(\zeta) + \ldots +$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1} \zeta^{m+n-1} F^{(n-1)}(\zeta)}{m(m+1)\ldots(m+n-1)} + (-1)^n \int_0^{\zeta} \frac{\zeta_1^{m+n-1} F^{(n)}(\zeta_1)\, d\zeta_1}{m(m+1)\ldots(m+n-1)}, \quad (34)$$

სადაც C_1 მუდმივს აღნიშნავს.

(34) გამოსახულების ჩასმით (31)-ში ადვილად მტკიცდება, რომ

$$C + \frac{C_1}{l} = 0$$

დაშვება გვაძლევს $\varphi(\zeta)$ ფუნქციის ჰოლომორფულობას $\zeta = 0$ წერტილში. ამრიგად, საბოლოოდ გვექნება

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{l} \left[\frac{F(\zeta)}{m} - \frac{\zeta F'(\zeta)}{m(m+1)} + \ldots + (-1)^{n-1} \times \right.$$

$$\times \frac{\zeta^{n-1} F^{(n-1)}(\zeta)}{m(m+1)\ldots(m+n-1)} +$$

$$\left. + (-1)^n \zeta^{-m} \int_0^{\zeta} \frac{\zeta_1^{m+n-1} F^{(n)}(\zeta_1)\, d\zeta_1}{m(m+1)\ldots(m+n-1)} \right]. \quad (35)$$

3⁰. დაბოლოს, *როცა* m *არის მთელი უარყოფითი ან* 0, *დავუშვათ, რომ*

$$-m = n \geqslant 0.$$

კვლავ ნაწილობითი ინტეგრებით მივალთ

$$(-1)^n \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\zeta_1^{m+n-1} F^{(n)}(\zeta_1)\, d\zeta_1}{m(m+1)\ldots(m+n-1)} = \frac{1}{n!} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \zeta_1^{-1} F^{(n)}(\zeta_1)\, d\zeta_1$$

ინტეგრალამდე. მაგრამ, თუ $F^{(n)}(0) \neq 0$, ეს ინტეგრალი იძლევა ლოგარითმულ წევრს.

მაშასადამე,

$$F^{(n)} = 0 \quad (36)$$

პირობა აუცილებელია ამონახსნის არსებობისათვის.

როცა ეს პირობა შესრულებულია, განხილული ამოცანის ამონახსნი

$$\varphi(\zeta)=-\frac{1}{l}\left[C\zeta^n+\frac{F(\zeta)}{n}+\frac{\zeta F'(\zeta)}{n(n-1)}+\ldots+\frac{\zeta^{n-1}F^{(n-1)}(\zeta)}{n!}-\right.$$

$$\left.-\zeta^n\int_0^{\zeta}\frac{\zeta_1^{-1}F^{(n)}(\zeta_1)\,d\zeta_1}{n!}\right] \tag{37}$$

ფორმულით მოიცემა, სადაც C ნებისმიერია.

(36) პირობას შეგვიძლია მივცეთ ძალიან მარტივი სახე. მართლაც, გვაქვს

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\frac{2f}{\zeta'-\zeta}-\frac{f}{\zeta'}\right]d\zeta',\qquad F^{(n)}(\zeta)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{2f\,d\zeta'}{(\zeta'-\zeta)^{n+1}}.$$

მაშასადამე,

$$F^{(n)}(0)=\frac{n!}{\pi i}\int_\gamma f(\zeta')\zeta'^{-n-1}d\zeta'=\frac{n!}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\vartheta)\,e^{-ni\vartheta}\,d\vartheta.$$

თუ განვაცალკევებთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, (36)-ის ნაცვლად მივიღებთ, რომ

$$\int_0^{2\pi}f(\vartheta)\cos n\vartheta\,d\vartheta=\int_0^{2\pi}f(\vartheta)\sin n\vartheta\,d\vartheta=0. \tag{36*}$$

ამრიგად, გარდა იმ შემთხვევისა, როცა m არის არადადებითი მთელი რიცხვი, დასმულ ამოცანას გააჩნია ერთი და მხოლოდ ერთი ამონახსნი.

პირიქით, როცა

$$m=-n,$$

სადაც n აღნიშნავს დადებით რიცხვს ან 0-ს, (36*) ტოლობები წარმოადგენს აუცილებელ და საკმარის პირობას ამონახსნების არსებობისათვის. თუ ეს პირობა შესრულებულია, ამოცანას გააჩნია უსასრულო რაოდენობა ამონახსნებისა.

ამ შემთხვევაში (m არის არადადებითი მთელი) ერთგვაროვან ამოცანას, რომელიც

$$kU+l\frac{dU}{dn}=0\qquad \gamma\text{-ზე}, \tag{38}$$

პირობას შეესაბამება, გააჩნია არანულოვანი ამონახსნები. ეს ამონახსნები მოიცემა (37) ფორმულით, სადაც უნდა ავიღოთ $f(\vartheta) \equiv 0$ ან $F(\zeta) \equiv 0$. ამრიგად მივიღებთ, რომ

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{l} C\zeta^n = -\frac{1}{l} (A+iB)\rho^n e^{ni\vartheta}, \tag{39}$$

სადაც

$$C = A+iB, \quad \zeta = \rho e^{i\vartheta}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$U = \operatorname{Re}\varphi(\zeta) = -\frac{1}{l} \{A\rho^n \cos n\vartheta - B\rho^n \sin n\vartheta\}.$$

ამგვარად, როცა $n>0$, ერთგვაროვან სისტემას გააჩნია ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი:

$$U_1 = \rho^n \cos n\vartheta, \quad U_2 = \rho^n \sin n\vartheta. \tag{40}$$

როცა $n=0$, არსებობს მხოლოდ ერთი ამონახსნი $U_1 = 1$.

არაერთგვაროვანი ამოცანის ზოგადი ამონახსნი მიიღება, თუ ამ ამოცანის რაიმე კერძო ამონახსნს დავუმატებთ ერთგვაროვანი ამოცანის ზემოთ აგებული ყველა ამონახსნის წრფივ კომბინაციას.

§ 18. ნეიმანის ამოცანა წრისათვის. თუ

$$k = 0, \quad l = 1,$$

და, მაშასადამე,

$$m = 0,$$

სასაზღვრო პირობა ღებულობს

$$\frac{dU}{dn} = f(\vartheta) \tag{41}$$

სახეს და (36*) პირობები დაიყვანება ერთ პირობაზე:

$$\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta = 0. \tag{42}$$

$\varphi(\zeta)$ მოიცემა ფორმულით

$$\varphi(\zeta) = C + \frac{1}{2\pi i} \int_\theta^\zeta \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \int_\gamma f \frac{\zeta' + \zeta_1}{\zeta' - \zeta_1} \frac{d\zeta'}{\zeta'}. \tag{43}$$

ეს ფორმულა ადვილად გარდაიქმნება, თუ გამოვთვლით შიგა ინტეგრალს γ-ს გასწვრივ. მართლაც, თუ გავითვალისწინებთ (42) პირობას, მარტივი გამოთვლით მიიღება

$$\varphi(\zeta)=C_1-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma} f\lg(\zeta'-\zeta)\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}=C_1-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f\lg(\zeta'-\zeta)\,d\vartheta, \qquad (43^*)$$

სადაც C_1 აღნიშნავს ახალ მუდმივს[33].

მაგრამ გამოყენებებისათვის ხშირად უფრო მოსახერხებელია (43) ფორმულით მოქმედება.

§ 10. დირიხლეს ამოცანა წრისათვის. ჩვენ განსახილავი დაგვრჩა შემთხვევა, როცა $l=0$, რომელსაც შეესაბამება შემდეგი სახის პირობა:

$$U=f(\vartheta) \qquad \gamma\text{-ზე}. \qquad (44)$$

ეს არის დირიხლეს კარგად ცნობილი ამოცანა. თუ (29) ფორმულაში დავუშვებთ, რომ $k=1$, $l=0$, უშუალოდ გვექნება[34]

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f\,\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'-\zeta}\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}. \qquad (45)$$

შევნიშნოთ, რომ პუასონის კარგად ცნობილი ფორმულა ძალიან მარტივად გამომდინარეობს (45) ფორმულიდან.

მართლაც, ρ-თი და ψ-ით აღვნიშნოთ ζ წერტილის პოლარული კოორდინატები, ასე რომ გვექნება

$$\zeta=\rho e^{i\psi}.$$

მაშინ (45) ფორმულა მოგვცემს

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(\vartheta)\,\frac{e^{i\vartheta}+\rho e^{i\psi}}{e^{i\vartheta}-\rho e^{i\psi}}\,d\vartheta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(\vartheta)\,\frac{1-\rho^2-2i\rho\sin(\vartheta-\psi)}{1-2\rho\cos(\vartheta-\psi)+\rho^2}\,d\vartheta, \qquad (46)$$

საიდანაც

$$U=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{f(\vartheta)\,(1-\rho^2)\,d\vartheta}{1-2\rho\cos(\vartheta-\psi)+\rho^2}. \qquad (46^*)$$

აღსანიშნავია აგრეთვე ცნობილი ფორმულა, რომელიც იძლევა U-ს შეუღლებულ V ფუნქციას და რომელიც (46) ფორმულიდან მიიღება:

$$V=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\vartheta)\,\rho\sin(\vartheta-\psi)\,d\vartheta}{1-2\rho\cos(\vartheta-\psi)+\rho^2}. \qquad (46^{**})$$

§ 20. შენიშვნები მიღებულ ფორმულებში მონაწილე ინტეგრალების გამოთვლის შესახებ. (43) ფორმულა, რომელიც გვაძლევს ნეიმანის ამოცანის ამოხსნას, და (45) ფორმულა დირიხლეს ამოცანისათვის ზოგჯერ საგრძნობ უპირატესობებს იძლევა ჩვეულებრივ ფორმულებთან შედარებით. ასევე ზოგჯერ გაცილებით უფრო მოსახერხებელია (33), (35), (37) ფორმულების გამოყენება ისე, როგორც ჩაწერილია, თუ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს განვაცალკევებთ მხოლოდ ინტეგრალების გამოთვლის შემდეგ.

როცა, მაგალითად, $f(\vartheta)$ არის სასრული ტრიგონომეტრიული მწკრივი (ტრიგონომეტრიული მრავალწევრი)

$$f(\vartheta)=A_0+A_1\cos\vartheta+B_1\sin\vartheta+\ldots+A_k\cos k\vartheta+B_k\sin k\vartheta,$$

მაშინ,

$$\cos k\vartheta=\frac{1}{2}(e^{ik\vartheta}+e^{-ik\vartheta})=\frac{1}{2}\left(\zeta'^k+\frac{1}{\zeta'^k}\right),$$

$$\sin k\vartheta=\frac{1}{2i}(e^{ik\vartheta}-e^{-ik\vartheta})=\frac{1}{2i}\left(\zeta'^k-\frac{1}{\zeta'^k}\right).$$

ფორმულების დახმარებით f-ს შეგვიძლია მივცეთ სახე

$$f(\vartheta)=a_{-k}\zeta'^{-k}+\ldots+a_{-1}\zeta^{1-1}-1+a_0+\ldots+a_k\zeta'^k.$$

თუ (30) ფორმულაში $f(\vartheta)$-ს შევცვლით უკანასკნელი გამოსახულებით, მივიღებთ ინტეგრალს, რომელიც უშუალოდ გამოითვლება § 4-ის ფორმულების თანახმად, და მოგვცემს $F(\zeta)$ რაციონალურ ფუნქციას.

უფრო ზოგადად, თუ $f(\vartheta)$ შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს ζ'-ს რაციონალური $\Phi(\zeta')$ ფუნქციის სახით, მაშინ ინტეგრალი

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \Phi(\zeta')\,\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'}\,\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}$$

ადვილად გამოითვლება § 4-ის ფორმულების საშუალებით, ვინაიდან ζ'-ის რაციონალური ფუნქცია

$$\Phi(\zeta')\,\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'}$$

ყოველთვის შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს ორი რაციონალური ფუნქციის ჯამის სახით, რომელთაგან თითოეული აკმაყოფილებს § 4-ის ერთ-ერთ პირობას. ამ გზით მივიღებთ რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ $F(\zeta)$ ფუნქციას და ამოცანა ამოიხსნება ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით.

ანალოგიური სიმარტივე ბევრ სხვა შემთხვევასაც გააჩნია.

§ 21. მაგალითი. მარტივი მაგალითის სახით განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა:

ვიპოვოთ U ფუნქცია, ჰარმონიული γ წრეწირის შიგნით, გარდა 2 წერტილისა, სადაც ის იქცევა როგორც $k \lg|\zeta - a|$; C საზღვარზე მოიცემა $\frac{dU}{dn}$-ის მნიშვნელობა:

$$\frac{dU}{dn} = f(\vartheta) \qquad \gamma\text{-ზე},$$

სადაც f არის რკალის ფუნქცია, განსაზღვრული შემდეგნაირად

$$f = f_0 = \text{const}, \quad \text{როცა} \quad \vartheta_0 \leqslant \vartheta \leqslant \vartheta_0 + \varepsilon,$$

და $f = 0$ ϑ-ს დანარჩენი მნიშვნელობისათვის.

დავუშვათ, $r = |\zeta - a|$ და

$$U = U_1 + k \lg r.$$

U_1 ფუნქცია უნდა იყოს ჰარმონიული ყველგან γ-ს შიგნით და აკმაყოფილებდეს პირობას:

$$\frac{dU_1}{dn} = -k \frac{d \lg r}{dn} + f \qquad \gamma\text{-ზე}. \tag{47}$$

ამონახსნის არსებობისათვის აუცილებელია, რომ[35]

$$0 = \int_0^{2\pi} \frac{dU_1}{dn_1} d\vartheta = -k \int_0^{2\pi} \frac{d \lg r}{dn} d\vartheta + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0 + \varepsilon} f_0 d\vartheta = -2\pi k + \varepsilon f_0,$$

ე. ი.

$$\varepsilon f_0 = 2\pi k. \tag{48}$$

გამოვიყენოთ (43) ფორმულა, რომელშიც f უნდა შეიცვალოს (47) გამოსახულებით.

წინასწარ გარდავქმნათ (47) გამოსახულება. გვაქვს

$$\lg r = \lg|\zeta - a| = \operatorname{Re} \lg(\zeta - a) = \frac{1}{2} [\lg(\zeta - a) + \lg(\bar{\zeta} - \bar{a})]. \tag{49}$$

შემდეგ, § 17-ის (27*) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$\frac{d \lg r}{dn}=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{i\vartheta}}{\zeta'-a}+\frac{e^{-i\vartheta}}{\overline{\zeta'}-\overline{a}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\zeta'}{\zeta'-a}+\frac{1}{1-\bar{a}\zeta'}\right]. \qquad (50)$$

თუ (50)-ის საშუალებით გარდავქმნით (47) გამოსახულებას, შევიტანთ მას (43) ფორმულაში და უგულებელვყოფთ ნებისმიერ C მუდმივს, ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\varphi_1(\zeta)=\int^{\zeta}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\varepsilon} f_0\,\frac{\zeta'+\zeta_1}{\zeta'-\zeta_1}\,d\vartheta-\right.$$

$$\left.-\frac{k}{4\pi i}\int_{\gamma}\left(\frac{\zeta'}{\zeta'-a}+\frac{1}{1-\bar{a}\zeta'}\right)\frac{\zeta'+\zeta_1}{\zeta'-\zeta_1}\cdot\frac{d\zeta'}{\zeta'}\right],$$

სადაც $\varphi_1(\zeta)$ დაკავშირებულია U_1 ფუნქციასთან

$$U_1=\mathrm{Re}\,\varphi_1$$

ტოლობით.

$\varphi_1(\zeta)$ ფუნქციისათვის მიღებული გამოსახულების ყველა ინტეგრალი ადვილად გამოითვლება.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დაეუშვათ, რომ a არის ნამდვილი რიცხვი:

$$\bar{a}=a.$$

თუ შევნიშნავთ, რომ $\frac{1}{a}$ წერტილი არის γ-ს გარეთ, კოშის თეორემა ნაშთების შესახებ გვაძლევს

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left[\frac{\zeta'}{\zeta'-a}+\frac{1}{1-a\zeta'}\right]\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'-\zeta}\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}=\frac{2}{1-a\zeta} \qquad (50^*)$$

ფორმულას.

ინტეგრალი

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\varepsilon} f_0\,\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'-\zeta}\,d\vartheta$$

ასევე ადვილად გამოითვლება. ამ ელემენტარული გამოთვლის მაგიერ განვიხილოთ ზღვრული შემთხვევა, როცა $\varepsilon \to 0$ და $f_0 \to \infty$, მაგრამ ყოველთვის შესრულებულია ტოლობა

$$\varepsilon f_0 = 2\pi k.$$

ადვილი სანახავია, რომ ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\varepsilon} f_0 \frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'-\zeta}\, d\vartheta = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon f_0}{2\pi} \frac{a'+\zeta}{a'-\zeta} = k \frac{a'+\zeta}{a'-\zeta},$$

სადაც $a' = e^{i\vartheta_0}$; შემდეგ,

$$\varphi_1(\zeta) = \int^{\zeta} \frac{-k}{1-a\zeta_1} + k \frac{a'+\zeta_1}{a'-\zeta_1}\Bigg] \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} = k \lg\left(\zeta - \frac{1}{a}\right) - 2k \lg(\zeta - a').$$

ამიტომ

$$\varphi(\zeta) = \varphi_1(\zeta) + k \lg(\zeta - a) = k\left[\lg(\zeta - a) + \lg\left(\zeta - \frac{1}{a}\right) - 2\lg(\zeta - a')\right]$$

და მივიღებთ

$$U = k \lg \frac{r r_1}{r_2^2}$$

ფორმულას, სადაც r, r_1, r_2 აღნიშნავს მანძილებს ζ წერტილიდან შესაბამისად a წერტილამდე, γ-ს მიმართ a-ს შეუღლებულ წერტილამდე და a' წერტილამდე.

ცხადია, რომ ეს ფორმულა იძლევა ჰიდროდინამიკის შემდეგი ამოცანის ამონახსნს:

ვიპოვოთ უკუმშვადი სითხის ბრტყელი მოძრაობის სიჩქარეების U პოტენციალი, როცა γ წრეწირის შიგნით მოთავსებულ სითხეს a' წერტილში აქვს უსასრულოდ მცირე ხვრელი (ჩასადინარი), ხოლო γ-ს შიგნით a წერტილში არსებობს $2\pi k$ სიმძლავრის წყარო.

$\varepsilon f_0 = 2\pi k$ ტოლობა ნიშნავს, რომ a წერტილში წყაროს მიერ წარმოქმნილი სითხის რაოდენობა ტოლია სითხის იმ რაოდენობისა, რომელიც გამოედინება a' ხვრელიდან.

შემთხვევა, როცა რამდენიმე წყაროა და რამდენიმე ხვრელი, ანალოგიურად გამოიკვლევა.

§ 22. გრინის ფუნქცია შერეული ამოცანისათვის. მეორე მაგალითის სახით განვიხილოთ გ რ ი ნ ი ს ფუნქცია შერეული ამოცანისათვის, რომელიც შეესაბამება (24) პირობას.

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ

$$m=\frac{k}{l}>0.$$

მაშინ, ზოგადობის შეუზღუდავად, შეიძლება ვიგულისხმოთ

$$l=1, \quad k>0.$$

გრინის U ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგნაირად:

U ჰარმონიულია ყველგან γ-ს შიგნით, გარდა a წერტილისა, სადაც ის იქცევა, როგორც $-\lg|\zeta-a|$, ასე რომ, $U+\lg|\zeta-a|$ რჩება სასრული a-ს მიდამოში; ამას გარდა, ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას:

$$\frac{dU}{dn}+kU=0 \qquad \gamma\text{-ზე}. \tag{51}$$

დავუშვათ რომ $r=|\zeta-a|$ და

$$U_1=U+\lg r. \tag{52}$$

ჩვენი დაშვებების თანახმად, U_1 იქნება ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ ი ყველგან γ-ს შიგნით და ამას გარდა

$$\frac{dU_1}{dn}+kU_1=\frac{d\lg r}{dn}+k\lg r \qquad \gamma\text{-ზე}. \tag{51*}$$

თუ დავუშვებთ, რომ

$$U_1=\operatorname{Re}\varphi_1(\zeta),$$

მაშინ $\varphi_1(\zeta)$ ფუნქცია განსაზღვრულია § 17-ის (33) და (30) ფორმულებით, სადაც უნდა ვიგულისხმოთ $m=k$, $l=1$ და

$$f=\frac{d\lg r}{dn}+k\lg r. \tag{53}$$

ჩაწერის სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ a წერტილი მოთავსებულია ნამდვილ ღერძზე, რაც არ ზღუდავს ზოგადობას. თუ (53)-ში ჩავსვამთ წინა §-ის (49) და (50) გამოსახულებებს, მივიღებთ, რომ

$$f=\frac{1}{2}\left[\frac{\zeta'}{\zeta'-a}+\frac{1}{1-a\zeta'}\right]+\frac{k}{2}\left[\lg(\zeta'-a)+\lg\left(\frac{1}{\zeta'}-a\right)\right]. \tag{54}$$

მაშინ (30)-დან გვექნება

$$F_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{2}\left[\frac{\zeta'}{\zeta'-a}+\frac{1}{1-a\zeta'}\right]\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'-\zeta}\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{k}{2}\left[\lg(\zeta'-a)+\lg\left(\frac{1}{\zeta'}-a\right)\right]\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'-\zeta}\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}. \qquad (55)$$

მაგრამ პირველი ინტეგრალთაგანი უკვე გამოთვლილია წინა §-ში; მისი მნიშვნელობაა

$$\frac{1}{1-a\zeta}.$$

განვიხილოთ ახლა მეორე ინტეგრალი. თუ შევნიშნავთ, რომ

$$\lg(\zeta'-a)+\lg\left(\frac{1}{\zeta'}-a\right)=\lg\left(1-\frac{a}{\zeta'}\right)+\lg(1-a\zeta'), \qquad (56)$$

გვექნება [36]

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\left[\lg(\zeta'-a)+\lg\left(\zeta'-\frac{1}{a}\right)\right]\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'-\zeta}\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'}\lg\left(1-\frac{a}{\zeta'}\right)\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'}\lg(1-a\zeta')\,\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}. \qquad (57)$$

მაგრამ ფუნქცია

$$\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'}\lg\left(1-\frac{a}{\zeta'}\right),$$

განხილული როგორც ζ'-ის ფუნქცია, ჰოლომორფულია ყველგან γ-ს გარეთ და ნულია, როცა $\zeta'=\infty$ [37]. ამიტომ მისი შესაბამისი ინტეგრალი ნულის ტოლია.

ასევე ფუნქცია

$$\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'}\lg(1-a\zeta')$$

ჰოლომორფულია ζ'-ის მიმართ ყველგან γ-ს შიგნით და კ ო შ ი ს თეორემა გვაძლევს, რომ

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'}\lg(1-a\zeta')\,\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}=\frac{\zeta+\zeta}{\zeta}\lg(1-a\zeta)=2\lg(1-a\zeta).$$

თუ მიღებულ გამოსახულებებს ჩავსვამთ (55)-ში, გვექნება

$$F_1(\zeta)=\frac{1}{1-a\zeta}+k\lg(1-a\zeta).$$

(33) ფორმულის თანახმად

$$\varphi_1(\zeta)=\zeta^{-k}\int_0^{\zeta}\frac{\zeta_1^{k-1}}{1-a\zeta_1}\,d\zeta_1+k\zeta^{-k}\int_0^{\zeta}\zeta_1^{k-1}\lg(1-a\zeta_1)\,d\zeta_1$$

ან კიდევ, მეორე ინტეგრალის ნაწილობითი ინტეგრებით მიიღება

$$\varphi_1(\zeta)=\lg(1-a\zeta)+\zeta^{-k}\int_0^{\zeta}\zeta_1^{k-1}\frac{1+a\zeta_1}{1-a\zeta_1}\,d\zeta_1. \tag{58}$$

დაბოლოს, U-ს შესაბამისი $\varphi(\zeta)$ ფუნქციისათვის გვექნება ფორმულა

$$\varphi(\zeta)=\lg(1-a\zeta)-\lg(\zeta-a)+\zeta^{-k}\int_0^{\zeta}\zeta_1^{k-1}\frac{1+a\zeta_1}{1-a\zeta_1}\,d\zeta_1. \tag{59}$$

როცა k მთელი რიცხვია, გრინის ფუნქცია გამოისახება ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით.

ზოგად შემთხვევაში ინტეგრების წირად შეგვიძლია ავიღოთ სეგმენტი, რომელიც $\zeta=0$ სათავეს ζ წერტილთან აერთებს. თუ დავუშვებთ, რომ $\zeta=\rho e^{i\vartheta}$, ჩვენს შემთხვევაში გვექნება

$$d\zeta=e^{i\vartheta}\,d\rho$$

და საკმაოდ მარტივი გამოთვლების შემდეგ

$$U=\operatorname{Re}\varphi(\zeta)=\frac{1}{2}\lg\frac{1-2a\rho\cos\vartheta+a^2\rho^2}{a^2-2a\rho\cos\vartheta+\rho^2}+$$

$$+\rho^{-k}\int_0^{\rho}\frac{1-(1-a^2\rho_1^2)\rho_1^{k-1}\,d\rho_1}{1-2a\rho_1\cos\vartheta+a^2\rho_1^2}. \tag{59*}$$

ამ ფორმულის მიხედვით ადვილი შესამოწმებელია ცნობილი ფაქტი, რომ გრინის ფუნქცია სიმეტრიულია ζ და a წერტილების მიმართ.

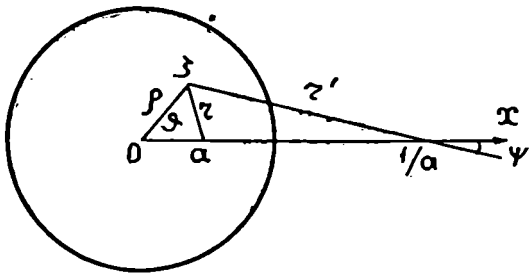
კერძოდ, თუ $k=1$, (59) ფორმულის ძალით

$$\varphi(\zeta)=\lg(1-a\zeta)-\lg(\zeta-a)-\frac{2}{a\zeta}\lg(1-a\zeta)-1.$$

ახლა სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $a>0$. ამ შემთხვევაში

$$U=\lg\left(\frac{ar'}{r}\right)-\frac{2}{a\rho}\left[\cos\vartheta\lg(ar')+\psi\sin\vartheta\right]-1,$$

სადაც r და r' მანძილებია ζ წერტილიდან შესაბამისად a და $\frac{1}{a}$ წერტილებამდე, ხოლო ψ არის $\frac{1}{a}-\zeta$ ვექტორის არგუმენტი, მოთავსებული $-\pi$-სა და π-ს შორის (ნახ. 7).



ნახ. 7

III. ძირითადი ამოცანა ნებისმიერი არისათვის

§ 23. ლოგარითმული პოტენციალის თეორიის ძირითადი ამოცანა. გადავიდეთ ახლა წინა განყოფილების დასაწყისში ჩამოყალიბებულ ამოცანაზე. ვთქვათ, S არის სასრული ან უსასრულო არე, შემოსაზღვრული შეკრული მარტივი C წირით. უნდა ვიპოვოთ ჰარმონიული ფუნქცია[38] S-ში, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$a(s)\frac{\partial U}{\partial x}+b(s)\frac{\partial U}{\partial y}+c(s)\,U=f(s)\quad C\text{-ზე}, \tag{60}$$

სადაც $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$, $f(s)$ აღნიშნავენ C წირის s რკალის მოცემულ ფუნქციებს.

თუ დავუშვებთ (შდრ. § 10), რომ

$$2U=\varphi_1(z)+\overline{\varphi_1(z)}, \tag{61}$$

მაშინ (60) პირობა ასე ჩაიწერება:

$$\overline{(a+ib)}\,\varphi_1'(z)+(a-ib)\varphi_1'(z)\overline{+c\,[\varphi_1(z)+\varphi_1(z)]}=2f. \qquad (60^*)$$

ამ ამოცანის დასაყვანად წინა თავში განხილულ ამოცანაზე, დავუშვათ, რომ S არე კონფორმულად ავსახეთ ζ სიბრტყის ერთეულ რადიუსიან σ წრეზე, რომლის ცენტრი $\zeta=0$ სათავეშია.

ვთქვათ, $\omega(\zeta)$ არის ფუნქცია, რომელიც S არეს უთანადებს σ წრეს, ასე რომ

$$z=\omega(\zeta) \qquad (62)$$

წერტილი ერთხელ (და მხოლოდ ერთხელ) აღწერს S არეს, როცა ζ აღწერს σ-ს.

გავიხსენოთ, რომ $\omega(\zeta)$ ჰოლომორფულია ყველგან σ-ში, გარდა იმ შემთხვევისა, როცა S არის უსასრულო; ამ შემთხვევაში $\omega(\zeta)$-ს გააჩნია σ-ში ერთი მარტივი პოლუსი, რომელიც შეესაბამება S-ის $z=\infty$ წერტილს.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავუშვათ, რომ ეს პოლუსი $\zeta=0$ სათავეშია. ვიცით, რომ $\omega'(\zeta)\neq 0$ σ-ში; ამას გარდა, ჩვენ დავუშვებთ. რომ $\omega'(\zeta)$ თანაბრად მიისწრაფვის ნულისაგან განსხვავებული $\omega'(\zeta')$ ზღვრისაკენ, როცა ζ მიისწრაფვის γ საზღვრის რაიმე ζ' წერტილისაკენ (შდრ. § 6).

შემდეგ შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\varphi_1(\omega(\zeta))=\varphi(\zeta). \qquad (63)$$

ჩვენი დაშვების თანახმად, $\varphi(\zeta)$ ჰოლომორფული ფუნქცია ყველგან γ-ს შიგნით და

$$(a+ib)\,\frac{\varphi'(\zeta')}{\omega'(\zeta')}+(a-ib)\,\frac{\overline{\varphi'(\zeta')}}{\overline{\omega'(\zeta')}}+c\,[\varphi(\zeta')+\overline{\varphi}(\overline{\zeta'})]=2f. \qquad (64)$$

მაგრამ უკანასკნელი ემთხვევა § 11-ის (9) პირობას, თუ დავუშვებთ, რომ

$$A(\zeta)=\frac{1}{\omega'(\zeta)}.$$

მაშასადამე, ეს ამოცანა დაიყვანება წინა თავში განხილულ ამოცანაზე და შეგვიძლია გამოვიყენოთ მასში გადმოცემული მეთოდი, თუ ξ', η' კოორდინატების საშუალებით გამოსახული a, b, c ამ კოორდინატების რაციონალური ფუნქციებია.

§ 24. **მუდმივი კოეფიციენტების შემთხვევა**[39]. მარტივ მაგალითს იძლევა ის შემთხვევა, როცა (60) ფორმულაში a, b, c კოეფიციენტები მუდმივებია.

(64) პირობა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(a+ib)\frac{\varphi'(\zeta')}{\omega'(\zeta')}+(a-ib)\frac{\overline{\varphi}_1\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}+c\left[\varphi(\zeta')+\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\right]=2f. \quad (64^*)$$

უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}$-ზე და ავიღოთ ინტეგრალი γ საზღვრის გასწვრივ. § 4-ის ფორმულების თანახმად გვექნება

$$(a+ib)\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}+(a-ib)\frac{\overline{\varphi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}+c\varphi(\zeta)+c\,\overline{\varphi(0)}=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta}. \quad (64^{**})$$

შევნიშნოთ, რომ როცა S უსასრულო არეა, მაშინ $\frac{1}{\omega'(0)}=0$ და (64**)-ის მარცხენა მხარეში მეორე წევრი არ გვექნება.

თუ დავუშვებთ, რომ a და b ერთდროულად არ არის ნული, (64*) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\varphi'(\zeta)+\frac{c}{a+ib}\omega'(\zeta)\varphi(\zeta)+K\omega'(\zeta)-F(\zeta)\omega'(\zeta)=0, \quad (65)$$

სადაც

$$K=\frac{a-ib}{a+ib}\frac{\overline{\varphi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}+\frac{c\,\overline{\varphi(0)}}{a+ib} \quad (66)$$

და

$$F(\zeta)=\frac{1}{\pi i(a+ib)}\int_{\gamma}\frac{f\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta}. \quad (67)$$

თუ $c\neq 0$, (65) განტოლების ინტეგრებით მივიღებთ, რომ

$$\varphi(\zeta)=Ce^{-\frac{c\omega(\zeta)}{a+ib}}-\frac{a+ib}{c}K+e^{-\frac{c\omega(\zeta)}{a+ib}}\int_{\zeta_0}^{\zeta}F(\zeta_1)\omega'(\zeta_1)e^{\frac{c\omega(\zeta_1)}{a+ib}}d\zeta_1, \quad (68)$$

და, თუ $c=0$, მაშინ

$$\varphi(\zeta)=C_0-K\omega(\zeta)+\int_{\zeta_0}^{\zeta} F(\zeta_1)\,\omega'(\zeta_1)\,d\zeta_1, \qquad (68^*)$$

სადაც C და C_0 ნებისმიერი მუდმივებია.

შემოვიფარგლოთ იმ შემთხვევით, როცა S არე სასრულია. მაშინ შეიძლება დავუშვათ, რომ

$$\omega(0)=0.$$

(68) და (68*) ფორმულები, სადაც შეგვიძლია ჩავსვათ $\zeta_0=0$, $\varphi(\zeta)$-საოთვის იძლევა γ-ს შიგნით ჰოლომორფულ გამოსახულებებს.

დასადგენი დაგვრჩა K მუდმივი (66) ფორმულის მიხედვით. თავდაპირველად განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $c\neq 0$. გამოვთვალოთ $\overline{\varphi(0)}$ და $\overline{\varphi'(0)}$ (68) ფორმულის მიხედვით; გვექნება

$$\overline{\varphi(0)}=\overline{C}-\frac{a-ib}{c}\,\overline{K},\quad \overline{\varphi'(0)}=\frac{c\overline{C'}\,\overline{\omega'(0)}}{a-ib}+\frac{\overline{\omega'(0)}\,\beta}{a-ib},$$

სადაც

$$\beta=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\,d\vartheta.$$

(66)-ში $\overline{\varphi(0)}$ და $\overline{\varphi'(0)}$ შევცვალოთ მათი მნიშვნელობებით. ზოგიერთი გამარტივების შემდეგ მიიღება

$$(a+ib)\,K+(a-ib)\,\overline{K}=\beta,$$

საიდანაც

$$\operatorname{Re}[(a+ib)\,K]=\frac{\beta}{2}.$$

მაშასადამე, $(a+ib)K$ მუდმივის წარმოსახვითი ნაწილი რჩება ნებისმიერი; ეს უკანასკნელი შეიძლება აღებულ იქნეს ნულის ტოლად. ვინაიდან მას არავითარი გავლენა არ აქვს U-ს მნიშვნელობაზე. C მუდმივი რჩება ნებისმიერი. მაშასადამე, ყველაზე ზოგადი ამონახსნი მოიცემა

$$\varphi(\zeta)=C\,e^{-\frac{c\omega(\zeta)}{a+ib}}-\frac{\beta}{2c}+e^{-\frac{c\omega(\zeta)}{a+ib}}\int_0^{\zeta} F(\zeta_1)\,\omega'(\zeta_1)\,e^{\frac{c\omega(\zeta_1)}{a+ib}}\,d\zeta_1 \qquad (69)$$

ფორმულით, სადაც C ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვია.

როცა $c=0$, ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$\varphi(\zeta)=C-\frac{\beta+iC'}{2(a+ib)}\,\omega(\zeta)+\int_0^{\zeta}F(\zeta_1)\,\omega'(\zeta_1)\,d\zeta_1, \qquad (69^*)$$

სადაც C და C' ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია.

თუ დავუბრუნდებით z ცვლადს, გვექნება

$$\varphi_1(z)=C\,e^{-\frac{cz}{a+ib}}-\frac{\beta}{2c}+e^{-\frac{cz}{a+ib}}\int_0^{z}F_1(z_1)\,e^{\frac{cz_1}{a+ib}}\,dz_1. \qquad (70)$$

როცა $c\neq 0$ და

$$\varphi_1(z)=C-\frac{\beta+iC'}{2(a+ib)}\,z+\int_0^{z}F_1(z_1)\,dz_1, \qquad (70^*)$$

როცა $c=0$; $F_1(z)$ აღნიშნავს $F(\zeta)$ ფუნქციას, თუ მას გამოვსახავთ z ცვლადის საშუალებით.

თუ $a=b=0$ (დ ი რ ი ხ ლ ე ს ამოცანა), წინა ფორმულები კარგავენ აზრს. მაგრამ ამონახსნი მიიღება უშუალოდ (64**) ფორმულიდან. თუ მასში დავუშვებთ, რომ $c=1$, ადვილად მივიღებთ

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}f\,\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'-\zeta}\,\frac{d\zeta'}{\zeta'} \qquad (70^{**})$$

ტოლობას წმინდა წარმოსახვით შესაკრებ მუდმივამდე სიზუსტით.

როცა S არე უსასრულოა, $\omega(\zeta)$ ფუნქციას პოლუსად აქვს $\zeta=0$ წერტილი. (68) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ თუ $c\neq 0$, მაშინ ამოცანას საზოგადოდ არ აქვს რეგულარული ამონახსნები.

IV. გამოუყენებები ჰიდროდინამიკის ძირითად ამოცანაში

გამოვიყენოთ ახლა ჩვენი მეთოდი ამოცანისათვის, რომელსაც ბრტყელი მოძრაობის შემთხვევაში ჰ ი დ რ ო დ ი ნ ა მ ი კ ი ს ძ ი რ ი თ ა დ ი ამ ო ცა ნ ა ეწოდება. ეს ამოცანა უშუალოდ დაიყვანება ნ ე ი მ ა ნ ი ს ამოცანაზე, რომელიც თავის მხრივ ძალიან კერძო შემთხვევაა § 23-ის ამოცანისა.

სხვათა შორის, შეიძლებოდა ამ ამოცანის ამონახსნის მიღება წრისათვის ნეიმანის ამოცანის ამონახსნისაგან, რომელიც გამოკვლეულია § 18-ში. მაგრამ გვირჩევნია მისი უშუალო განხილვა.

§ 25. ამოცანის ჩამოყალიბება. ვთქვათ, S არის (x, y) წერტილთა სიბრტყის არე, შემოსაზღვრული შეკრული მარტივი C წირით. განსახილველი ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს:

ვიპოვოთ უკუმშვადი სითხის უგრიგალო მოძრაობის სიჩქარეების განაწილება, როდესაც სითხეს S არე უკავია, თუ მოცემულია სიჩქარის ნორმალური f მდგენელის მნიშვნელობა S-ის C საზღვარზე; თუ S არე უსასრულოა, მაშინ ვუშვებთ, რომ სიჩქარეები უსასრულობაში ნულია.

ცხადია, რომ სინამდვილეში აქ საკითხი ეხება (x, y) წერტილთა სიბრტყის პარალელურ მოძრაობას სივრცულ არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია ამ სიბრტყის მართობი ცილინდრული ზედაპირით, ხოლო C არის ამ ზედაპირის პროექცია (x, y) წერტილთა სიბრტყეზე.

ვთქვათ, u და v სიჩქარის მდგენელებია, შესაბამისად, Ox და Oy ღერძებზე. დაშვების თანახმად u და v (x, y) წერტილის ცალსახა რეგულარული ფუნქციებია, რომლებიც დაკავშირებულია შემდეგი ტოლობით:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{71}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველთვის არსებობს ისეთი $U(x, y)$ ფუნქცია (სიჩქარეთა პოტენციალი), რომ

$$u = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{72}$$

U ფუნქციამ უნდა დააკმაყოფილოს პირობები:

$$\Delta U = 0 \qquad S\text{-ში} \tag{73}$$

და

$$\frac{\partial U}{\partial n} = f \qquad C\text{-ზე}, \tag{74}$$

სადაც f არის C წირის რკალის მოცემული ფუნქცია, ხოლო n გარე ნორმალია. ამას გარდა, თუ S არე უსასრულოა, მაშინ უსასრულოდ შორეული წერტილისათვის უნდა გვქონდეს:

$$u = \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad v = \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \tag{75}$$

ამგვარად, განხილველი ამოცანა დაიყვანება U ფუნქციის განსაზღვრაზე (73) — (75) პირობებით. მაგრამ სანამ წინ წავიდოდეთ, აუცილებელია შესწავლილ იქნეს უცნობი U ფუნქციის ხასიათი.

თუ u და v მოცემულია, მაშინ U ფუნქცია განისაზღვრება

$$U(x, y) = U_0 + \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u dx + v dy \tag{76}$$

ტოლობიდან, სადაც U_0 აღნიშნავს ნებისმიერ მუდმივს, (x_0, y_0) არის S-ის ნებისმიერი წერტილი და ინტეგრალი აღებულია S-ში მოთავსებული ნებისმიერი წირის გასწვრივ.

თუ S სასრულია, მაშინ (76) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ U იქნება (x, y) წერტილის ცალსახა ფუნქცია, ვინაიდან ინტეგრალი

$$\int u dx + v dy,$$

აღებული ნებისმიერი შეკრული წირის გასწვრივ, რომელიც არ გამოდის S-დან, (71) დამოკიდებულების ძალით ნულის ტოლია.

მაგრამ, როცა S უსასრულოა, U ფუნქცია, საზოგადოდ, მრავალსახა იქნება: თუ (x, y) წერტილი დადებითი მიმართულებით აღწერს C-ს მომცველ შეკრულ წირს, მაშინ U ფუნქციას დაემატება მუდმივი

$$k = \int\limits_{C'} u dx + v dy, \tag{77}$$

სადაც C' აღნიშნავს ნებისმიერ შეკრულ მარტივ გლუვ წირს, რომელიც მოიცავს C წირს; ადვილი სანახავია, რომ k არ არის დამოკიდებული C' წირის არჩევაზე.

k მუდმივს ც ი რ კ უ ლ ა ც ი ა ეწოდება. უნდა დავუშვათ, რომ k მოცემულია; წინააღმდეგ შემთხვევაში ამოცანა განუსაზღვრელი იქნება.

§ 26. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის შემოტანა. როგორც წინა პარაგრაფებში, დავუშვათ, რომ

$$U = \operatorname{Re} \varphi_1(z).$$

ჩვენ ვიცით, რომ თუ მოცემულია U, მაშინ $\varphi_1(z)$ ფუნქცია განისაზღვრება წმინდა წარმოსახვით მუდმივამდე სიზუსტით. შემდეგ, თუ მოცემულია u და v, მაშინ φ_1 ფუნქცია განსაზღვრულია კომპლექსურ

მუდმივამდე სიზუსტით. ეს შესაკრები მუდმივი არავითარ გავლენას არ ახდენს სიჩქარეების განაწილებაზე. ამიტომ φ_1 ფუნქციას ყოველთვის შეგვიძლია დავუმატოთ ნებისმიერი მუდმივი.

როცა S არე სასრულია, მაშინ $\varphi_1(z)$ ჰოლომორფული იქნება S-ში. უსასრულო არის შემთხვევის შესასწავლად, შევნიშნოთ, რომ

$$u-iv=\frac{\partial U}{\partial x}-i\,\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi_1'(z). \tag{78}$$

ამის გამო ცხადია, რომ $\varphi_1'(z)$ არის S-ში ჰოლომორფული ფუნქცია, რომელიც ნულია, როცა $z=\infty$. მაშასადამე, z-ის საკმაოდ დიდი მნიშვნელობისათვის გვექნება

$$\varphi_1'(z)=\frac{a_1+ib_1}{z}+\frac{a_2+ib_2}{z^2}+\ldots \tag{79}$$

და

$$\varphi_1(z)=\text{const}+(a_1+ib_1)\lg z-\frac{a_2+ib_2}{z}+\ldots. \tag{80}$$

თუ დავუშვებთ, რომ $z=0$ წერტილი არის S-ის გარეთ (C წირის შიგნით), ადვილად დავასკვნით, რომ

$$\varphi_1(z)=(a+ib)\lg z+\text{ჰოლომორფული ფუნქცია } S\text{-ში}. \tag{81}$$

ცხადია, b_1 მუდმივი დაკავშირებულია k ცირკულაციასთან

$$b_1=-\frac{k}{2\pi} \tag{82}$$

ტოლობით.

§ 27. სასაზღვრო პირობის გარდაქმნა. ვთქვათ, როგორც § 23-ში, $z=\omega(\zeta)$ არის დამოკიდებულება, რომელიც S არის წერტილებს უთანადებს $|\zeta|\leqslant 1$ წრის წერტილებს. ვთქვათ, ამას გარდა,

$$\varphi(\zeta)=\varphi_1(\omega(\zeta)). \tag{83}$$

$\dfrac{dU}{dn}$ ადვილად გამოისახება φ ფუნქციის საშუალებით. მართლაც, თუ dz ნაზრდს ავიღებთ n გარე ნორმალის მიმართულებით, მაშინ შესაბამისი $d\zeta$ ნაზრდი უნდა ავიღოთ γ წრეწირის რადიუსის მიმართულებით: ეს არის კონფორმული ასახვის თვისებების უშუალო შედეგი.

ამრიგად გვექნება

$$d\zeta=|d\zeta|\,e^{i\theta},\quad dz=\omega'(\zeta)\,d\zeta$$

და

$$\frac{d}{dn}=\frac{d}{|dz|}=\frac{1}{|\omega'(\zeta)|}\,\frac{d}{|d\zeta|}=\frac{e^{i\theta}}{|\omega'(\zeta')|}\,\frac{d}{d\zeta}=\frac{e^{-i\theta}}{|\omega'(\zeta')|}\,\frac{d}{d\bar{\zeta}}, \tag{84}$$

სადაც $\zeta'=e^{i\vartheta}$ აღნიშნავს γ წრეწირის წერტილს. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$2\,\frac{dU}{dn}=\frac{d}{dn}\,[\varphi_1(z)+\overline{\varphi_1(z)}]=\frac{e^{i\vartheta}}{|\omega'(\zeta')|}\,\frac{d\varphi}{d\zeta}+\frac{e^{-i\vartheta}}{|\omega'(\zeta')|}\,\frac{d\overline{\varphi}}{d\overline{\zeta}}$$

ან კიდევ

$$2\,\frac{dU}{dn}=\frac{\zeta'\,\varphi'(\zeta')}{|\omega'(\zeta')|}+\frac{1}{\zeta'}\,\frac{\overline{\varphi'(\zeta')}}{|\omega'(\zeta')|}\,. \tag{85}$$

მაშინ (74) სასაზღვრო პირობა ღებულობს სახეს

$$\zeta'\,\varphi'(\zeta')+\frac{1}{\zeta'}\,\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)=2f(\vartheta)\,|\omega'(\zeta')|. \tag{86}$$

§ 28. **ამონახსნი სასრული არისათვის.** განვიხილოთ ჯერ შემთხვევა, როცა S არე სასრულია. მაშინ $\varphi(\zeta)$ ჰოლომორფულია γ-ს შიგნით.

(86)-ის ორივე მხარე გავამრავლოთ $\frac{1}{2\pi i}\,\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}$-ზე და ავიღოთ ინტეგრალი γ წირის გასწვრივ; გვექნება

$$\int\limits_{\gamma}\zeta'\,\varphi'(\zeta')\,\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{\zeta'}\,\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\,\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f|\omega'|d\zeta'}{\zeta'-\zeta}. \tag{87}$$

მაგრამ, $\zeta\varphi'(\zeta)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია γ-ს შიგნით; $\frac{1}{\zeta}\,\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ ჰოლომორფულია γ-ს გარეთ და ნულია, როცა $\zeta=\infty$. მაშასადამე, § 4-ის ფორმულების თანახმად,

$$\zeta\varphi'(\zeta)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f|\omega'|d\zeta'}{\zeta'-\zeta}.$$

აქედან

$$\varphi'(\zeta)=\frac{\zeta^{-1}}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f|\omega'|d\zeta'}{\zeta'-\zeta}. \tag{88}$$

რადგან $\varphi'(\zeta)$ სასრულია, როცა $\zeta=0$, ამიტომ გვექნება

$$\int_{\gamma} f\,|\omega'|\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}=0 \tag{89}$$

ან კიდევ

$$\int_{0}^{2\pi} f|\omega'|d\vartheta=0. \tag{89*}$$

თუ დავუბრუნდებით (x, y) წერტილთა სიბრტყეს, ამ პირობას შეგვიძლია მივცეთ კარგად ცნობილი სახე

$$\int_{C} f ds=0. \tag{89**}$$

(89) არის ამონახსნის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. თუ ამ პირობას გავითვალისწინებთ, (88) ფორმულას შეგვიძლია მივცეთ ცოტა განსხვავებული სახე. მართლაც, დავუმატოთ (88)-ის მარჯვენა მხარეს გამოსახულება

$$-\frac{\zeta^{-1}}{2\pi i}\int_{\gamma} f|\omega'|\,\frac{d\zeta'}{\zeta'},$$

რომელიც ნულის ტოლია, გვექნება

$$\varphi'(\zeta)=\frac{\zeta^{-1}}{2\pi i}\int_{\gamma} f|\omega'|\,\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'-\zeta}\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}. \tag{88*}$$

აქედან

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\zeta}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\int_{\gamma} f|\omega'|\,\frac{\zeta'+\zeta_1}{\zeta'-\zeta_1}\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}+\text{const}. \tag{90}$$

§ 29. ამონახსნი უსასრულო არისათვის. განვიხილოთ ახლა ის შემთხვევა, როცა S არე უსასრულოა. ამ შემთხვევაში $\omega(\zeta)$-ს აქვს მარტივი პოლუსი γ-ს შიგნით და შეგვიძლია დავუშვათ, რომ ეს პოლუსია $\zeta=0$ წერტილი (შდრ. § 6). მაშასადამე,

$$\omega(\zeta)=\frac{c}{\zeta}+\text{ჰოლომორფული ფუნქცია}. \tag{91}$$

(81) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$\varphi(\zeta)=\varphi_1(\omega(\zeta))=(a_1+ib_1)\lg\omega(\zeta)+\text{ჰოლომორფული ფუნქცია}=$$
$$=-(a_1+ib_1)\lg\zeta+\text{ჰოლომორფული ფუნქცია}. \tag{92}$$

აქედან

$$\varphi'(\zeta)=-\frac{a_1+ib_1}{\zeta}+\text{ჰოლომორფული ფუნქცია}. \tag{93}$$

ამიტომ § 4-ის ფორმულების თანახმად, (87)-დან გვაქვს

$$\zeta\varphi'(\zeta)-(a_1-ib_1)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f|\omega'|d\zeta'}{\zeta'-\zeta}.$$

a_1-ისა და b_1-ის განსაზღვრისათვის დავუშვათ, რომ $\zeta=0$. გვექნება

$$-(a_1+ib_1)-(a_1-ib_1)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}f|\omega'|\frac{d\zeta'}{\zeta'}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}f|\omega'|d\vartheta.$$

ან კიდევ

$$a_1=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}f|\omega'|\frac{d\zeta'}{\zeta'}; \tag{94}$$

b_1 მოიცემა (82) ტოლობით:

$$b_1=-\frac{k}{2\pi}.$$

თუ a_1 და b_1 მუდმივების მნიშვნელობებს შევიტანთ $\zeta\varphi'(\zeta)$ ფუნქციისათვის ზემოთ დადგენილ ტოლობაში, მივიღებთ, რომ

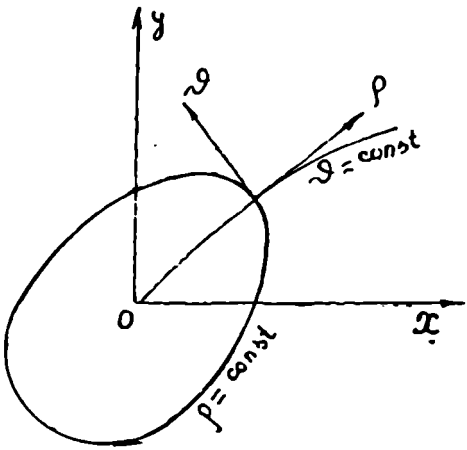
$$\zeta\varphi'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}f|\omega'(\zeta')|\frac{\zeta'+\zeta}{\zeta'-\zeta}\frac{d\zeta'}{\zeta'}+\frac{ki}{2\pi}. \tag{95}$$

აქედან

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\int\limits_{\gamma}f|\omega'|\frac{\zeta'+\zeta_1}{\zeta'-\zeta_1}\frac{d\zeta'}{\zeta'}+\frac{ki}{2\pi}\lg\zeta, \tag{96}$$

სადაც ζ_0 ნებისმიერი წერტილია γ-ს შიგნით.

§ 30. მრუდწირული კოორდინატები. თუ $\varphi(\zeta)$ ფუნქცია ვიპოვეთ, მაშინ ხშირად მოსახერხებელია ნაცვლად იმისა, რომ დავუბრუნდეთ ძველ x, y კოორდინატებს, შემოვიტანოთ მრუდწირული კოორდინატები ρ, ϑ, შექმნილი (x, y) წერტილთა სიბრტყის იმ წირების მიერ, რომლებიც შეესაბამება ζ სიბრტყის $\rho=\text{const}$ წრეებს და $\vartheta=\text{const}$ რადიუსებს (შდრ. § 6, გვ. 25). v_ρ-თი და v_ϑ-თი შესაბამისად აღვნიშნოთ სიჩქარის მდგენელები $\vartheta=\text{const}$, $\rho=\text{const}$ წირების მხებზე, რომლებიც გაღლებულია შესაბამისად ρ და ϑ კოორდინატების ზრდის მიმართულებით. ეს მხებები, რომლებსაც უბრალოდ ρ-თი და ϑ-თი აღვნიშნავთ, ქმნიან მართკუთხოვან ღერძთა სისტემას, რომლის ღერძების ურთიერთგანლაგება იგივეა, როგორც Ox, Oy ღერძებისა (ნახ. 8).



ნახ. 8

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ კავშირი u, v მდგენელებსა და v_ρ, v_ϑ მდგენელებს შორის, შევნიშნოთ ცხადი ტოლობები

$$v_\rho+iv_\vartheta=(u+iv)\,e^{-i\alpha},\quad v_\rho-iv_\vartheta=(u-iv)\,e^{i\alpha}, \tag{97}$$

სადაც α აღნიშნავს კუთხეს, რომელსაც ზრდადი ρ-ების მიმართულებით $\rho=\text{const}$ წირისადმი გავლებული ნორმალი ადგენს Ox ღერძთან; ამასთან ეს კუთხე ათვლილია დადებითი მიმართულებით.

ვთქვათ, ახლა, dz არის z-ის ნაზრდი ამ ნორმალის მიმართულებით. მაშინ ζ სიბრტყეში შესაბამისი $d\zeta$ ნაზრდი უნდა გამოვთვალოთ $\rho=\text{const}$ წრეწირის რადიუსის მიმართულებით. შემდეგ, გვაქვს

$$e^{i\alpha}=\frac{dz}{|dz|}=\frac{\omega'(\zeta)\,d\zeta}{|\omega'(\zeta)|\,|d\zeta|}=\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}\,e^{i\theta}=\frac{\zeta}{\rho}\;\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}.$$

აქედან ვასკვნით, რომ

$$v_\rho-iv_\theta=(u-iv)\,\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}\;\frac{\zeta}{\rho}. \tag{98}$$

მაგრამ, ვინაიდან

$$u-iv=\frac{d\varphi_1(z)}{dz}=\frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz},$$

ამიტომ გვექნება

$$v_\rho-iv_\theta=\frac{\varphi'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}\;\frac{\zeta}{\rho}. \tag{99}$$

§ 31. მაგალითი I. მოძრაობა სითხისა, რომელიც გარს უვლის მყარ ცილინდრულ ტიხარს (ან მოთავსებულია ასეთ ტიხარში). გამოვიყენოთ წინა შედეგები შემდეგი ამოცანის ამოსახსნელად.

განვსაზღვროთ მოძრაობა სითხისა, რომელიც გარს უვლის მყარ საზღვარს[40], *რომლის მოძრაობა მოცემულია (ან შესაბამისად — მოძრაობა სითხისა, რომელიც მოთავსებულია ასეთი საზღვრის შიგნით).*

განვიხილოთ ჯერ ბრუნვის შემთხვევა ფიქსირებული წერტილის ირგვლივ, მაგალითად, $z=0$ წერტილის ირგვლივ.

ვთქვათ, Ω არის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე (ალგებრული მნიშვნელობით). u'-ით და v'-ით აღვნიშნოთ საზღვრის რაიმე (x', y') წერტილის სიჩქარის მდგენელები Ox, Oy ღერძებზე. შემდეგ v'_ρ და v'_θ-ით აღვნიშნოთ იმავე სიჩქარის მდგენელები ρ, θ მრუდწირულ კოორდინატთა ღერძებზე (შდრ. § 30). მივიღებთ, რომ

$$u'-iv'=-i\Omega\,(x'-iy')$$

და, (98) ფორმულის თანახმად, გვექნება

$$v'_\rho-iv'_\theta=-\frac{i\Omega}{|\omega'(\zeta')|}\,(x'-iy')\,\omega'(\zeta')\,\zeta'=$$

$$=-\frac{i\Omega}{|\omega'(\zeta')|}\,\overline{\omega(\zeta')}\,\omega'(\zeta')\,\zeta', \tag{100}$$

რადგან საზღვარზე $\rho=1$.

ჩვენი ამოცანა დაიყვანება U პოტენციალის განსაზღვრაზე შემდეგი სასაზღვრო პირობით:

$$\frac{dU}{dn}=v'_\rho.$$

მაგრამ

$$v'_\rho=\mathrm{Re}(v'_\rho-iv'_\theta)=-\frac{i\Omega}{2|\omega'(\zeta')|}\left[\zeta'\overline{\omega(\zeta')}\,\omega'(\zeta')-\overline{\zeta'}\,(\omega'(\zeta)\overline{\omega'(\zeta')}\right]. \qquad (100^*)$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (96) ფორმულაში, გვექნება

$$\varphi(\zeta)=-\frac{i\Omega}{4\pi i}\int^{\zeta}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\int_\gamma\left[\zeta'\,\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\omega'(\zeta')-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\zeta'}\,\omega(\zeta')\,\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\right]\frac{\zeta'+\zeta_1}{\zeta'-\zeta_1}\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}+\frac{ki}{2\pi}\,\lg\zeta, \qquad (101)$$

და ამოცანა ამოხსნილია. თუ საქმე გვაქვს იმ სითხის მოძრაობასთან, რომელიც მოთავსებულია საზღვრის შიგნით, მაშინ უნდა დავუშვათ, რომ $k=0$, ვინაიდან ამ შემთხვევაში S არე სასრულია[41].

გადატანითი მოძრაობის შემთხვევა კიდევ უფრო მარტივია. მართლაც, ვთქვათ, ახლა (u', v') არის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე. (100)-ის ნაცვლად გვექნება

$$v'_\rho-iv'_\theta=(u'-iv')\,\frac{\omega'(\zeta')}{|\omega'(\zeta')|}\,\zeta' \qquad (102)$$

და (100*)-ის ნაცვლად მიიღება

$$v'_\rho=\frac{1}{2|\omega'(\zeta')|}\left[(u'-iv')\,\omega'(\zeta')\,\zeta'+(u'+iv')\overline{\omega'(\zeta')}\,\overline{\zeta'}\right].$$

და ბოლოს,

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{4\pi i}\int^{\zeta}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\int_\gamma\left[(u'-iv')\,\omega'(\zeta')\,\zeta'+\right.$$

$$\left.+(u'+iv')\,\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\frac{1}{\zeta'}\right]\frac{\zeta'+\zeta_1}{\zeta'-\zeta_1}\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}+\frac{ki}{2\pi}\,\lg\zeta. \qquad (103)$$

(101) და (103) ამონახსნების გაერთიანება იძლევა ზოგადი ამოცანის ამოხსნას.

უნდა აღინიშნოს, რომ გადატანითი მოძრაობის შემთხვევაში ამოცანის ამონახსნი შეიძლება სასრული სახით გამოისახოს ($\omega(\zeta)$ ფუნქციის საშუალებით). მართლაც, თუ S სასრულია, მაშინ $k=0$ და $\omega(\zeta)$ ჰოლომორფულია γ-ს შიგნით. შემდეგ (შდრ. § 4),

$$\varphi(\zeta)=(u'-iv')\,\omega(\zeta)+\text{const},$$

საიდანაც

$$\varphi_1(z)=(u'-iv')\,z+\text{const}, \tag{104}$$

რაც ამტკიცებს კარგად ცნობილ ფაქტს, რომ სითხე მოძრაობს ტიხართან ერთად.

თუ S არე უსასრულოა, მაშინ (91) ფორმულისა (იხ. გვ. 67) და § 4-ის ფორმულების თანახმად, ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\varphi(\zeta)=(u'-iv')\,\omega(\zeta)-(u'-iv')\frac{c}{\zeta}-(u'+iv')\,c\zeta+$$

$$+\frac{ki}{2\pi}\lg\zeta+\text{const}, \tag{105}$$

სადაც c არის (91) ფორმულის მუდმივი.

შევნიშნოთ კიდევ ერთი საინტერესო ფაქტი: თუ (101) ფორმულაში $\omega(\zeta)$ ფუნქცია რაციონალურია, მაშინ § 20-ის შენიშვნების თანახმად, ცხადია, რომ $\varphi(\zeta)$ გ ა მ ო ი ს ა ხ ე ბ ა ე ლ ე მ ე ნ ტ ა რ უ ლ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ს ს ა შ უ ა ლ ე ბ ი თ.

§ 32. მაგალითი II. სითხის მოძრაობა გრიგალური ძაფის არსებობისას. განვიხილოთ აგრეთვე შემდეგი ამოცანა:

ვ ი პ ო ვ ო თ ს ი ჩ ქ ა რ ე ე ბ ი ს გ ა ნ ა წ ი ლ ე ბ ა ს ი თ ხ ი ს ა, რ ო მ ე ლ ი ც გ ა რ ს უ ვ ლ ი ს მ ო ც ე მ უ ლ მ ყ ა რ ც ი ლ ი ნ დ რ ს (შ ე ს ა ბ ა მ ი ს ა დ, რ ო მ ე ლ ი ც მ ო თ ა ვ ს ე ბ უ ლ ი ა ც ი ლ ი ნ დ რ ში), თ უ ს ი თ ხ ე შ ი ა რ ს ე ბ ო ბ ს წ რ ფ ი ვ ი გ რ ი გ ა ლ უ რ ი ძ ა ფ ი, რ ო მ ე ლ ი ც ც ი ლ ი ნ დ რ ი ს მ ს ა ხ ვ ე ლ ე ბ ი ს პ ა რ ა ლ ე ლ უ რ ი ა.

ვთქვათ, $z_0=x_0+iy_0$ არის გრიგალური ძაფის თანაკვეთის წერტილი z-სიბრტყესთან და ვთქვათ, k_1 არის გრიგალური სიმძლავრე.

ამოცანა დაიყვანება U ფუნქციის განსაზღვრაზე, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს,

$$\Delta U=0 \quad S\text{-ში}, \quad \frac{dU}{dn}=0 \quad C\text{-ზე}, \tag{106}$$

$$U=\frac{k_1}{2\pi}\operatorname{Arctg}\frac{y-y_0}{x-x_0}+V, \tag{107}$$

სადაც V არის ფუნქცია, რომელსაც აქვს § 25-ის სიჩქარეების პოტენციალის ყველა თვისება.

(107) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ

$$\varphi_1(z) = -\frac{k_1 i}{2\pi} \lg(z - z_0) + \psi_1(z),$$

სადაც φ_1 და ψ_1 განსაზღვრულია ტოლობებით:

$$U = \operatorname{Re} \varphi_1, \quad V = \operatorname{Re} \psi_1.$$

შემდეგ,

$$\varphi(\zeta) = \varphi_1(\omega(\zeta)) = -\frac{k_1 i}{2\pi} \lg[\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)] + \psi_1(\omega(\zeta)) =$$

$$= -\frac{k_1 i}{2\pi} \lg(\zeta - \zeta_0) + \psi(\zeta), \tag{108}$$

სადაც $\psi(\zeta)$ არის ფუნქცია, რომელსაც აქვს წინა პარაგრაფების $\varphi(\zeta)$ ფუნქციის ყველა თვისება.

ამიტომ $\psi(\zeta)$ ფუნქციის განსაზღვრისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ (96) ფორმულა (ან კიდევ, თუ არე სასრულია, (90) ფორმულა), სადაც უნდა დავუშვათ, რომ

$$f = \operatorname{Re} \frac{d}{dn} \frac{k_1 i}{2\pi} \lg(\zeta - \zeta_0),$$

ვინაიდან საზღვრის გასწვრივ უნდა გვქონდეს

$$\operatorname{Re} \frac{d\varphi(\zeta)}{dn} = 0.$$

მაგრამ § 27-ის (84) ფორმულების (გვ. 65) ძალით

$$\operatorname{Re} \frac{d}{dn} \frac{k_1 i}{2\pi} \lg(\zeta - \zeta_0) = \frac{d}{dn} \frac{k_1 i}{4\pi} [\lg(\zeta - \zeta_0) - \lg(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)] =$$

$$= \frac{k_1 i}{4\pi} \left[\frac{\zeta'}{\zeta' - \zeta_0} - \frac{1}{1 - \zeta' \bar{\zeta}_0} \right] \frac{1}{|\omega'(\zeta')|}.$$

თუ (96)-ში f-ს შევცვლით ამ მნიშვნელობით, ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\psi(\zeta) = \frac{k_1 i}{2\pi} \lg\left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right) + \frac{ki}{2\pi} \lg \zeta$$

და

$$\varphi(\zeta) = \frac{k_1 i}{2\pi} \left[\lg\left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right) - \lg(\zeta - \zeta_0) \right] + \frac{ki}{2\pi} \lg \zeta; \tag{109}$$

როცა არე სასრულია, უნდა დავუშვათ, რომ $k = 0$.

§ 33. ელიფსური საზღვარი. დავუშვათ,

$$z=\omega(\zeta)=b\left(\zeta+\frac{a}{\zeta}\right). \tag{110}$$

აქედან გვაქვს

$$x=b\left(\rho+\frac{a}{\rho}\right)\cos\vartheta,\quad y=b\left(\rho-\frac{a}{\rho}\right)\sin\vartheta, \tag{111}$$

სადაც a, b აღნიშნავს ისეთ ნამდვილ მუდმივებს, რომ

$$a\geqslant 1,\quad b>0.$$

თუ ρ-ს ვცვლით 0-სა და 1-ს შორის, ხოლო ϑ-ს ვცვლით 0-სა და 2π-ს შორის, მივიღებთ კონფორმულ ასახვას $|\zeta|<1$ წრეზე S არისა, რომელიც წარმოადგენს z სიბრტყის უსასრულო ნაწილს, მოთავსებულს C ელიფსის გარეთ. C-ს განტოლებაა

$$\frac{x^2}{b^2(a+1)^2}+\frac{y^2}{b^2(a-1)^2}=1. \tag{112}$$

$\rho=\text{const}$ და $\vartheta=\text{const}$ წირები არის შესაბამისად ელიფსები და ჰიპერბოლები საერთო ფოკუსებით:

$$y=0,\qquad x=\pm 2b\sqrt{a} \tag{113}$$

(იხ. თავი I, გვ. 27).

განვიხილოთ რამდენიმე მარტივი მაგალითი ელიფსურ საზღვართან დაკავშირებით.

1⁰. ელიფსური ცილინდრის ბრუნვა უსასრულო სითხეში[42]. § 31-ის (101) ფორმულა უშუალოდ იძლევა ამონახსნებს:

$$\Phi(\zeta)=-\frac{i\Omega b^2}{4\pi i}\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\int_{\gamma}\left[\zeta'\left(1-\frac{a}{\zeta'^2}\right)\left(\frac{1}{\zeta'}+a\zeta'\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\zeta'}\left(1-a\zeta'^2\right)\left(\zeta'+\frac{a}{\zeta'}\right)\right]\frac{\zeta'+\zeta_1}{\zeta'-\zeta_1}\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}=-i\Omega ab^2\zeta^2; \tag{114}$$

სიმოკლისათვის ჩვენ აქ დავუშვით, რომ $k=0$.

§ 30-ის (99) ფორმულის თანახმად ვასკვნით:

$$v_\rho=\frac{2\Omega ab\rho^3\sin 2\vartheta}{\sqrt{\rho^4-2a\rho^2\cos 2\vartheta+a^2}},\qquad v_\vartheta=\frac{2\Omega ab\rho^3\cos 2\vartheta}{\sqrt{\rho^4-2a\rho^2\cos 2\vartheta+a^3}}. \tag{115}$$

2⁰. განვიხილოთ კიდევ შემდეგი ამოცანა:

დავუშვათ, რომ ელიფსური ცილინდრი განიცდის დეფორმაციას ისეთნაირად, რომ რჩება თავისთავის ჰომოფოკალური. ვიპოვოთ მოძრაობა სითხისა, რომელიც მის გარშემოა.

(110)-ის საშუალებით z-სიბრტყე ავსახოთ ζ-სიბრტყეზე ისეთნაირად, რომ t მომენტში ელიფსურ საზღვარს შეესაბამებოდეს $\rho=1$ წრეწირი. $t+dt$ მომენტისათვის ეს ელიფსი დეფორმირდება ჰომოფოკალურ ელიფსში, რომელიც შეესაბამება წრეწირს რადიუსით $\rho+d\rho$. თუ dz აღნიშნავს ელიფსური საზღვრის რაიმე წერტილის ნორმალურ გადაადგილებას, მაშინ ამ წერტილის სიჩქარის ნორმალური მდგენელია

$$v_n=\pm\left|\frac{dz}{dt}\right|=\pm|\omega'(\zeta')|\frac{|dz|}{dt}=\pm|\omega'(\zeta')|\frac{d\rho}{dt}=q(t)|\omega'(\zeta')|,$$

სადაც $q(t)$ აღნიშნავს დროის მოცემულ ფუნქციას.

ამის შემდეგ (96) ფორმულაში უნდა დავუშვათ, რომ

$$f=q(t)|\omega'(\zeta')|.$$

თუ დავუშვებთ, რომ ცირკულაცია ნულის ტოლია, გვექნება

$$\varphi(\zeta)=\frac{q(t)}{2\pi i}\int^{\zeta}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\int_{\gamma}|\omega'(\zeta')|^2\frac{\zeta'+\zeta_1}{\zeta'-\zeta_1}\frac{d\zeta'}{\zeta'}=$$

$$=\frac{b^2q(t)}{2\pi i}\int^{\zeta}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\int_{\gamma}\left(1-\frac{a}{\bar{\zeta}'^2}\right)(1-a\zeta'^2)\frac{\zeta'+\zeta_1}{\zeta'-\zeta_1}\frac{d\zeta'}{\zeta'}=$$

$$=b^2q(t)\,[(a^2+1)\lg\zeta-a\zeta^2];$$

ამოცანა ამოხსნილია.

§ 34. ზოგიერთი სხვა მარტივი საზღვარი. 1⁰. (112) ელიფსის ზღვრული ფიგურა $a=1$-სათვის არის Ox ღერძის სეგმენტი

$$-2b\leqslant x\leqslant 2b,\quad y=0.$$

თუ წინა ფორმულებში დავუშვებთ, რომ $a=1$, მივიღებთ დასმული ამოცანების ამოხსნას არისათვის, რომელიც წარმოადგენს წრფის სეგმენტით გაჭრილ მთელ უსასრულო სიბრტყეს.

2⁰. (110) ფორმულაში z ცვლადის წრფივი გარდაქმნის საშუალებით, მივიღებთ $a=1$-სათვის წრეწირის რკალით გაჭრილი მთელი სიბრტყის კონფორმულ ასახვას წრეზე. ცხადია $\omega(\zeta)$ ფუნქცია იქნება რაციონალური. ამიტომ, მაგალითად, სითხეში წრის რკალის მოძრაობის ამოცანა ამოიხსნება ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით (შდრ. § 31).

თავი III

გამოყენებები ძირითად ბიჰარმონიულ ამოცანაში[43]

შესავალში ჩვენ რამდენადმე გადმოვეცით ის საკითხები, რომლებიც დაკავშირებულია ბიჰარმონიულ განტოლებასთან. ეს თავი ეძღვნება ამოცანას, რომელსაც ვუწოდეთ ძირითადი ბ ი ჰ ა რ მ ო ნ ი უ ლ ი ა მ ო ც ა ნ ა, რომელსაც ზუსტად ჩამოვაყალიბებთ ცოტა ქვემოთ (§ 40). როგორც უკვე ვთქვით (გვ. 10), ჩვენი მეთოდი იძლევა საშუალებას მივიღოთ ამ ამოცანის სრული ამოხსნა ისეთი არეებისათვის, რომელთა ასახვა კონფორმულად შეიძლება წრეზე რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ს ს ა შ უ ა ლ ე ბ ი თ.

აქ დაგვრჩენია დავუმატოთ, რომ ჩვენი მეთოდის გადმოცემა სრულებით არ მოითხოვს § 41-ში ჩამოყალიბებული არსებობის ზოგადი თეორემების ცოდნას.

ეს გარემოება უმნიშვნელო არ არის, ვინაიდან ის საშუალებას იძლევა გამოვიყენოთ ჩვენი მეთოდი იმ შემთხვევაშიც, როცა ზოგადი თეორია საკმარისად სრულყოფილი არაა; სწორედ ჩვენი მეთოდის კერძო შემთხვევებში გამოყენებით მოგვეცა საშუალება შეგვენიშნა ხარვეზი გარე ამოცანის თეორიაში (შდრ. § 42).

1. ზოგადი ცნებები

§ 35. ბიჰარმონიული ფუნქცია. ვთქვათ, U არის

$$\Delta\Delta U \equiv \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0, \tag{1}$$

განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომ კერძო წარმოებულები

$$u = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{და} \quad v = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{2}$$

ცალსახა ფუნქციებია, რომლებიც უწყვეტია მათ კერძო წარმოებულებთან ერთად მესამე რიგამდე S არეში[44]. თუ S არე სასრულია (და,

მაშასადამე, § 7-ის მიხედვით მარტივადბმული), u-სა და v-ს ცალსახობა იწვევს U-ს ცალსახობას; მაგრამ, თუ S უსასრულოა, U შეიძლება მრავალსახა იყოს. მართლაც, გვაქვს

$$U=U_0+\int\limits_{(x_0,\,y_0)}^{(x,\,y)} udx+vdy, \tag{3}$$

სადაც (x_0, y_0) აღნიშნავს S-ში ნებისმიერ ფიქსირებულ წერტილს, U_0 არის U-ს მნიშვნელობა ამ წერტილში, ხოლო ინტეგრალი აღებულია S-ში მოთავსებული ნებისმიერი გლუვი წირის გასწვრივ.

როცა S არე სასრულია, მაშინ ნებისმიერი მარტივი, გლუვი, შეკრული წირის გასწვრივ აღებული ინტეგრალი

$$\int udx+vdy$$

ნულია, რადგან

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ U ცალსახაა. მაგრამ, როცა S არე უსასრულოა და ინტეგრების C' წირი მოიცავს S-ის C საზღვარს, ისევე, როგორც § 8-ში (გვ. 31), მაშინ ეს ინტეგრალი შეიძლება არ იყოს ნულის ტოლი.

თუ შევინარჩუნებთ § 8-ის აღნიშვნებს, გვექნება

$$U_+-U_-=B, \tag{4}$$

სადაც B აღნიშნავს მუდმივს:

$$B=\int\limits_{C'} udx+vdy. \tag{5}$$

მართლაც, ადვილად ვრწმუნდებით, რომ B არ არის დამოკიდებული C'-ს არჩევაზე და მუდმივია მთელი L ჭრილის გასწვრივ.

შემდგომში, U ბიჰარმონიული ფუნქციის ქვეშ გვესმის ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ამ §-ის დასაწყისში მოთხოვნილ პირობებს; უსასრულობაში ამ ფუნქციის ყოფაქცევასთან დაკავშირებული პირობები თითოეულ შემთხვევაში ცალკე იქნება მოცემული.

შენიშვნა. გამოყენებათა უმრავლესობაში უშუალო ფიზიკური აზრი აქვს არა U-ს, არამედ მის კერძო წარმოებულებს; ამ მიზე-

ზით ცალსახობის პირობას ვადებთ მხოლოდ მის u და v წარმოებულებს და არა U-ს.

§ 36. გურსას ფორმულა. აღნიშვნები. გ ურ ს ა ს ეკუთვნის ბიჰარმონიული ფუნქციის კომპლექსური ცვლადის ფუნქციების საშუალებით გამოსახვის ზოგადი წარმოდგენის ფორმულა. ჩვენ აქ მოვიტანთ ახალ გამოყვანას, რომელიც საშუალებას იძლევა დავაზუსტოთ ამ ფორმულაში შემავალი ფუნქციების ხასიათი. ამასთან დაკავშირებით შემოგვაქვს რიგი ფუნქციებისა, რომლებიც უფრო გვიან დაგვჭირდება.

ვთქვათ, U ბიჰარმონიული ფუნქციაა, ხოლო $P(x, y)$ არის

$$P(x, y)=\Delta U \tag{6}$$

ფორმულით განსაზღვრული ჰარმონიულია ფუნქცია[45], $Q(x, y)$ კი — $P(x, y)$-ის შეუღლებული ჰარმონიული ფუნქცია. მაშინ

$$P(x, y)+iQ(x, y)=f(z) \tag{7}$$

იქნება z კომპლექსური ცვლადის ანალიზური ფუნქცია.

დავუშვათ, რომ

$$\frac{1}{4}\int^{z} f(z_1)\,dz_1=p+iq=\varphi(z). \tag{8}$$

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\Delta p=\Delta q=0;\quad \frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{1}{4}P=\frac{1}{4}\Delta U.$$

აქედან გვექნება

$$\Delta[U-(px+qy)]=0.$$

მაშასადამე,

$$U=px+qy+p_1, \tag{9}$$

სადაც p_1 აღნიშნავს ჰარმონიულ ფუნქციას.

თუ შემოვიტანთ p_1-ის შეუღლებულ ჰარმონიულ ფუნქციას, (9) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$U=\operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z)+\psi(z)], \tag{10}$$

ან კიდევ

$$U=r^2\operatorname{Re}\frac{\varphi(z)}{z}+\operatorname{Re}\psi(z), \tag{11}$$

სადაც $r^2=x^2+y^2$ და

$$\psi(z)=p_1+iq_1. \tag{12}$$

სწორედ (10) ფორმულაა გ უ რ ს ა ს ფორმულა[46].

შევისწავლოთ ახლა შემოტანილი ფუნქციების ხასიათი.

§ 37. სასრული არის შემთხვევა. ცხადია, რომ როცა S არე სასრულია, მაშინ P, Q, p, q, p_1, q_1 ფუნქციები ჰარმონიულია ამ არეში, ხოლო $f(z)$, $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ ფუნქციები ჰოლომორფულია იმავე არეში. ამას გარდა, შევნიშნოთ, რომ, თუ U მოცემულია, მაშინ $Q(x, y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია

$$\alpha+i\beta+iC(x+iy)$$

სიდიდემდე სიზუსტით, სადაც α, β, C აღნიშნავენ ნებისმიერ ნამდვილ მუდმივებს.

ამის შემდეგ, ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

$$\varphi(0)=0, \quad \operatorname{Re}[i\varphi'(0)]=0. \tag{13}$$

ჩვენ აქ დავუშვით, ჩაწერის გამარტივებისათვის, რომ $z=0$ წერტილი მდებარეობს S-ში.

(13) პირობები მთლიანად განსაზღვრავს $\varphi(z)$-ს, როცა U ფუნქცია მოცემულია.

შეიძლება აგრეთვე დავუშვათ, რომ

$$\operatorname{Re}[i\psi(0)]=0; \tag{14}$$

ეს პირობა წინა (13) პირობასთან ერთად მთლიანად განსაზღვრავს $\psi(z)$ ფუნქციას.

§ 38. უსასრულო არის შემთხვევა. ცხადია, რომ $P(x, y)$ ფუნქცია ამ შემთხვევაშიც ცალსახა და ჰარმონიული იქნება S-ში უსასრულოდშორეული წერტილის გამოკლებით, მაგრამ $Q(x, y)$ ფუნქცია, საზოგადოდ, მრავალსახა იქნება, სახელდობრ, § 8-ის აღნიშვნების გამოყენებით,

$$Q_+-Q_-=\text{const}=4A, \tag{15}$$

სადაც (შდრ. § 8, გვ. 31)

$$4A=\int_{C'} \frac{dP}{dn}\, ds. \tag{16}$$

მაშასადამე, II თავის (გვ. 33) (6) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$f(z)=\frac{2A}{\pi} \lg z+f_0(z), \tag{17}$$

სადაც $f_0(z)$ ჰოლომორფულია S-ში, გარდა $z=\infty$ წერტილისა; ჩაწერის შესამოკლებლად ჩვენ დავუშვით, რომ $z=0$ წერტილი ძევს S-ის გარეთ (C საზღვრის შიგნით).

$f_0(z)$ გაიშლება ლორანის მწკრივად:

$$f_0(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n z^n. \tag{18}$$

თუ შემოვიტანთ

$$C_{-1}=\frac{2}{\pi i}(a+ib)$$

აღნიშვნას, მაშინ, (8) ფორმულის თანახმად,

$$\varphi(z)=\frac{A}{2\pi} z\lg z+\frac{a+ib}{2\pi i}\lg z+\varphi_0(z). \tag{19}$$

სადაც $\varphi_0(z)$ ჰოლომორფულია S-ში, გარდა, შესაძლოა, $z=\infty$ წერტილისა[47].

რაც შეეხებაψ(z) ფუნქციას, (19) და (10) ფორმულები გვიჩვენებს, რომ

$$\operatorname{Re}\psi_+-\operatorname{Re}\psi_-=U_+-U_-=(ax+by)=B-(ax+by),$$

სადაც B აღნიშნავს (4) ნამდვილ მუდმივს. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\psi(z)-\frac{B}{2\pi i}\lg z+\frac{a-ib}{2\pi i} z\lg z$$

ფუნქციის ნამდვილი ნაწილი ჰარმონიულია S-ში, გარდა, შესაძლოა, $z=\infty$ წერტილისა. მაშასადამე, II თავის (6) ფორმულის თანახმად (გვ. 33)

$$\psi(z)-\frac{B}{2\pi i}\lg z+\frac{a-ib}{2\pi i} z\lg z=\frac{C}{2\pi}\lg z+\psi_0(z),$$

სადაც C აღნიშნავს ნამდვილ მუდმივს და $\psi_0(z)$ ჰოლომორფულია S-ში, გარდა, შესაძლოა, $z=\infty$ წერტილისა. საბოლოოდ გვექნება

$$\psi(z)=\frac{B+iC}{2\pi i}\lg z-\frac{a-ib}{2\pi i} z\lg z+\psi_0(z). \tag{20}$$

§ 39. **გაგრძელება.** განვიხილოთ ერთი მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა, როცა $U(x, y)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=O\left(\frac{1}{r}\right),\quad \frac{\partial U}{\partial y}=O\left(\frac{1}{r}\right),\quad \Delta U=O\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{21}$$

სადაც r არის მანძილი (x, y) წერტილიდან $(0, 0)$ სათავემდე და $O\left(\frac{1}{r}\right)$ აღნიშნავს, საზოგადოდ, ისეთ ფუნქციას, რომ $rO\left(\frac{1}{r}\right)$ შემოსაზღვრულია უსასრულოდ შორეული წერტილის მიდამოში.

ამის შემდეგ, ცხადია, § 9-ის ფორმულის თანახმად (გვ. 33), რომ საკმარისად დიდი r-ისათვის გვექნება

$$P(x, y)=\Delta U=r^{-2}(a_{-2}\cos 2\theta-b_{-2}\sin 2\theta)+\ldots \tag{22}$$

Q ფუნქციის გაშლა მოიცემა იმავე § 9-ის (B) ფორმულით; თუ მასში შემავალ ნებისმიერ მუდმივს ნულს გავუტოლებთ, მივიღებთ, რომ

$$Q=-r^{-2}(a_{-2}\sin 2\theta+b_{-2}\cos 2\theta)+\ldots. \tag{23}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $4A=Q_{+}-Q_{-}$ მუდმივი (ფორმულა (15), გვ. 79) ნულია და, მაშასადამე, $Q(x, y)$ ფუნქცია ცალსახაა S-ში. ამას გარდა, (22) და (23) ფორმულების ძალით

$$f(z)=P+iQ=\frac{a_{-2}-ib_{-2}}{z^2}+\ldots. \tag{24}$$

აქედან ცხადია, რომ (8) ტოლობით განსაზღვრული $\varphi(z)$ ჰოლომორფულია S-ში, $z=\infty$ წ ე რ ტ ი ლ ი ს ჩ ა თ ვ ლ ი თ; ამას გარდა, $|z|$-ის საკმარისად დიდი მნიშვნელობებისათვის

$$\varphi(z)=\text{const}\ \frac{a_{-2}-ib_{-2}}{4z}+\ldots. \tag{25}$$

თუ (25)-ში ვიგულისხმებთ, რომ $\text{const}=0$ (რაც ყოველთვის დასაშვებია), გვექნება

$$\varphi(z)=O\left(\frac{1}{|z|}\right). \tag{25*}$$

(25) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ (19)-სა და (20)-ში უნდა დავუშვათ

$$a=b=0.$$

ამიტომ (20) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ წარმოებული

$$\psi'(z)=\frac{d\psi(z)}{dz}$$

ჰოლომორფულია S-ში, გარდა, შესაძლოა, $z=\infty$ წერტილისა.

მაგრამ, ჩვენ ახლა დავამტკიცებთ, რომ ეს ფუნქცია ჰოლომორფულია ყ ვ ე ლ გ ა ნ S-შ ი. მართლაც, (10) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ თუ (21) და (25) პირობები სრულდება, მაშინ ფუნქცია

$$\operatorname{Re}\frac{d\psi}{dz}$$

შემოსაზღვრულია S-ში. მაშასადმე, § 9-ის შედეგების თანახმად, გვექნება შემდეგი სახის გაშლა:

$$\operatorname{Re}\frac{d\psi}{dz}=a_0+r^{-1}(a_{-1}\cos\theta-b_{-1}\sin\theta)+\ldots;$$

აქედან

$$\frac{d\psi}{dz}=a_0-ib_0+\frac{a_{-1}-ib_{-1}}{z}+\ldots, \tag{26}$$

სადაც b_0 აღნიშნავს ნამდვილ მუდმივს[48]; ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

თუ, (25)-ის ნაცვლად, დავუშვებთ (25*) პირობას, მაშინ, როგორც ახლავე ვნახავთ, $\psi'(z)$-ის გაშლაში არ იქნება მუდმივი წევრი. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნებოდა

$$\psi(z)=(a_0-ib_0)\,z+(a_{-1}-ib_{-1})\lg z+\ldots;$$

$\psi(z)$ იქნებოდა z-ის რიგის და ასეთივე იქნებოდა $\operatorname{Re}\psi(z)$ ფუნქციაც. მაგრამ ეს შეუძლებელია, ვინაიდან (21) პირობის თანახმად

$$U(x,\ y)=\int^{(x,\ y)}\frac{\partial U}{\partial x}\,dx+\frac{\partial U}{\partial y}\,dy$$

ფუნქციის რიგი არ აღემატება $\lg r$-ის რიგს და, მეორე მხრივ, $\operatorname{Re}\psi$ და U ფუნქციათა რიგები ერთი და იგივეა (10) და (25) ფორმულების თანახმად.

ს ა ბ ო ლ ო ო დ, თ უ (2 1) პ ი რ ო ბ ე ბ ი შ ე ს რ უ ლ ე ბ უ ლ ი ა, მ ა შ ი ნ ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი

$$\varphi(z),\qquad \frac{d\psi(z)}{dz}$$

ჰ ო ლ ო მ ო რ ფ უ ლ ი ა S-ში, $z=\infty$ წ ე რ ტ ი ლ ი ს ჩ ა თ ვ ლ ი თ. ა მ ა ს გ ა რ დ ა, თ უ ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი მ უ დ მ ი ვ ე ბ ი ს ა თ ა ნ ა დ ო დ ა რ ი ს ა რ ჩ ე უ ლ ი, გ ვ ე ქ ნ ე ბ ა

$$\varphi(z)=O\left(\frac{1}{|z|}\right),\quad \frac{d\psi}{dz}=O\left(\frac{1}{|z|}\right); \tag{26*}$$

უ კ ა ნ ა ს კ ნ ე ლ ი პ ი რ ო ბ ი თ ე ს ფ უ ნ ქ ც ი ე ბ ი ს ა ვ ს ე ბ ი თ გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ უ ლ ი ა.

§ 40. ამოცანის ჩამოყალიბება. ძირითად ამოცანას ვუწოდებთ შემდეგ ამოცანას[49]:

ვიპოვოთ ბიჰარმონიული ფუნქცია U (§ 35) გარკვეულ S არეში, თუ მოცემულია

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} \tag{27}$$

კერძო წარმოებულების მნიშვნელობები S-ის C საზღვარზე:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=u(s), \quad \frac{\partial U}{\partial y}=v(s), \tag{28}$$

სადაც $u(s)$ და $v(s)$ C-ს s რკალის მოცემული ფუნქციებია.

ვუშვებთ, რომ საძებნი U ფუნქციის (27) წარმოებულები უწყვეტია თვით C საზღვარზე და, როცა S არე უსასრულოა, ვუმატებთ შეძდეგ პირობებს:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial U}{\partial y}=O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \Delta U=O\left(\frac{1}{r^2}\right). \tag{29}$$

ცხადია, რომ თუ U არის ამოცანის ამონახსნი, მაშინ $U+\text{const}$ აგრეთვე ამონახსნია; მხოლოდ მუდმივით განსხვავებული ამონახსნები არსებითად განსხვავებულად არ ჩაითვლება.

შენიშვნა. ხშირად ძირითად ამოცანას უწოდებენ

$$U=f(s), \quad \frac{dU}{dn}=f_1(s) \qquad (C\text{-ზე}) \tag{28*}$$

პირობებთან დაკავშირებულ ამოცანას, სადაც n აღნიშნავს C საზღვრის გარე ნორმალის მიმართულებას, ხოლო $f(s)$ და $f_1(s)$ C-ს s რკალის მოცემული ფუნქციებია.

მაგრამ ეს ამოცანა ადვილად დაიყვანება წინა ამოცანაზე. მართლაც, გვაქვს

$$u(s)=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{df}{ds}\cos(s, x)+f_1\cos(n, x),$$

$$v(s)=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial f}{ds}\cos(s, y)+f_1\cos(n, y),$$

სადაც s აღნიშნავს როგორც C საზღვრის ცვლადი წერტილის რკალურ აბსცისს, ათვლილს მისი რაიმე ფიქსირებული წერტილიდან, ისე ცვლად წერტილში მხებ წრფეს ზრდადი აბსცისის მიმართულებით

(შდრ. § 30, გვ. 69); ეს ორმაგი აღნიშვნა, ცხადია, ერთმანეთისაგან უნდა გავარჩიოთ თვით ტექსტის შინაარსის მიხედვით.

თუ მოცემულია f და f_1 ფუნქციები, მაშინ უკანასკნელი ტოლობებიდან უშუალოდ ვღებულობთ $u(s)$-ისა და $v(s)$-ის მნიშვნელობებს და განხილული ამოცანა დაიყვანება წინა ამოცანაზე.

დავუბრუნდეთ ახლა (28) პირობებს. თუ S სასრულია, მაშინ U ფუნქცია უნდა იყოს ცალსახა (§ 35) და ინტეგრალი

$$\int \frac{\partial U}{\partial x}\, dx + \frac{\partial U}{\partial y}\, dy,$$

აღებული S-ში მოთავსებული ნებისმიერი გლუვი შეკრული წირის გასწვრივ, ნულია. კერძოდ, თუ ინტეგრების წირად ავიღებთ C საზღვარს, გვექნება

$$\int_C [u(s)\cos(s,\ x) + v(s)\cos(s,\ y)]\, ds = 0. \tag{30}$$

ეს არის ამონახსნის არსებობის აუცილებელი პირობა.

უსასრულო არის შემთხვევაში ეს პირობა არ არის აუცილებელი, მაშინ მაინც, როცა თვით U ფუნქციას არ მოეთხოვება იყოს ცალსახა.

§ 41. არსებობის თეორემები. ცნობილია, რომ თუ სრულდება რამდენიმე შემზღუდველი პირობა, რომლებიც ეხება C საზღვარს და მოცემულ $u(s)$ და $v(s)$ ფუნქციებს, ადგილი აქვს შემდეგ თეორემებს[50]:

1°. როცა S არე სასრულია („შიგა ამოცანა"), ჩამოყალიბებულ ამოცანას აქვს ამონახსნი, თუ $u(s)$ და $v(s)$ აკმაყოფილებენ (30) პირობას; ამონახსნი ერთადერთია (წინა §-ის აზრით).

2°. როცა S უსასრულოა („გარე ამოცანა"), ამონახსნი არსებობს, თუ $u(s)$ და $v(s)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ შემდეგი სახის რამდენიმე პირობას:

$$\int_C [\lambda(s)\, u(s) + \mu(s)\, v(s)]\, ds = 0, \tag{31}$$

სადაც $\lambda(s)$, $\mu(s)$ აღნიშნავენ სავსებით გარკვეულ ფუნქციებს, რომელთა სახე დამოკიდებულია მხოლოდ S არეზე. ამონახსნი ერთადერთია (წინა §-ის აზრით).

§ 42. შენიშვნა გარე ამოცანასთან დაკავშირებით. თავის ხსენებულ შრომაში გ. ლაურიჩელა ამოცანის ამოხსნა ფრედჰოლმის ტიპის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე

დაყავს. მაგრამ, როცა საქმე გვაქვს უსასრულო არესთან, ეს ორი ამოცანა არ არის სავსებით ტოლფასი. ეს ფაქტი, რომელსაც, ეტყობა, გ. ლაურიჩელა მხედველობაში არ იღებს, ცხადი გახდება, თუ შევნიშნავთ შემდეგს:

როგორც ეს თვით გ. ლაურიჩელამ აჩვენა, იმისათვის, რომ მის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას ამონახსნი ჰქონდეს, მოცემულმა $u(s)$ და $v(s)$ ფუნქციებმა უნდა დააკმაყოფილოს (31) სახის სამი[51] დამოუკიდებელი პირობა.

მაგრამ ჩვენ მიერ განხილული ყველა არისათვის აუცილებელი და საკმარისი პირობების სახით მივიღეთ (31) სახის მხოლოდ ორი პირობა. მაშასადამე, გ. ლაურიჩელას მიერ მოცემული ერთ-ერთი პირობა გამომდინარეობს მისივე მეთოდიდან, და არა გამოსავალი ამოცანის ბუნებიდან.

ჩვენ გვეჩვენება, რომ ძნელი არ იქნებოდა შემდეგი თეორემის დამტკიცება, რომლის მიზანია გ. ლაურიჩელას შედეგების დასრულება.

გარე ამოცანის ამონახსნის არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ $u(s)$ და $v(s)$ აკმაყოფილებდნენ (31) სახის ორ პირობას

$$\int_C [\lambda_1(s)\,u(s) + \mu_1(s)\,v(s)]\,ds = 0,$$

$$\int_C [\lambda_2(s)\,u(s) + \mu_2(s)\,v(s)]\,ds = 0, \tag{31*}$$

სადაც λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 აღნიშნავენ კონტურის s რკალის სავსებით განსაზღვრულ ფუნქციებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს[52]:

$$\int_C \lambda_1(s)\,ds \neq 0, \qquad \int_G \mu_1(s)\,ds = 0,$$

$$\int_C \lambda_2(s)\,ds = 0, \qquad \int_C \mu_2(s)\,ds \neq 0. \tag{32}$$

თუ ეს თეორემა ჭეშმარიტია, რაც სხვათა შორის ფრიად მოსალოდნელია, მაშინ შეგვეძლება დავასკვნათ, რომ უსასრულო არესთან

დაკავშირებულ ამოცანას ყოველთვის აქვს (ერთადერთი) ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს ყველა დაშვებულ პირობას, გარდა (21)-ის პირველი ორი პირობისა, რომლებიც უნდა შეიცვალოს შემდეგით:

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| < \text{const} < \infty, \quad \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| < \text{const} < \infty.$$

მართლაც, თუ მოცემული ფუნქციები არ აკმაყოფილებენ (31)-ს, მაშინ ყოველთვის შეიძლება მოინახოს ორი l და m რიცხვი, ისეთი, რომ ფუნქციები

$$u_1 = u + l, \qquad v_1 = v + m$$

დააკმაყოფილებს ამ პირობებს. თუ, ახლა, ვიპოვით $U_1(x, y)$ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს § 40-ის პირობებს, სადაც u, v შეცვლილია u_1-ით და v_1-ით, მაშინ ფუნქცია

$$U_1(x, y) - lx - my + \text{const} \tag{33}$$

სწორედ საძიებელი ფუნქცია იქნება და ადვილი სანახავია, რომ ის ერთადერთია.

მაგრამ, მიუხედავად ამ ფაქტის მნიშვნელობისა, თეორემა, რომლის შედეგიც ის არის, ჯერ არ არის მკაცრად დამტკიცებული[53].

წინამდებარე წიგნის ხასიათი საშუალებას არ გვაძლევს განვიხილოთ ამონახსნის არსებობის თეორიული საკითხები. ამ საკითხს ღიად ვტოვებთ და უფრო იმიტომაც, რომ, როგორც ამ თავის შესავალში ითქვა, ამონახსნის არსებობის საკითხები არავითარ გავლენას არ ახდენს ჩვენს მეთოდზე.

თვით ამ მეთოდის გამოყენება ყოველი კერძო არისათვის მოგვცემს (31) ტიპის აუცილებელ და საკმარის პირობებს.

§ 43. ამონახსნი არეებისათვის, რომლებიც წრეზე რაციონალური ფუნქციების საშუალებით აისახებიან. დავუშვათ, რომ შესაძლებელია S არე ავსახოთ σ წრეზე რაციონალური $\omega(\zeta)$ ფუნქციის საშუალებით. ფუნქცია

$$z = \omega(\zeta) \tag{34}$$

გვაძლევს S-ის $z = x + iy$ და σ-ს $\zeta = \xi + i\eta$ წერტილებს შორის ურთიერთცალსახა თანადობას.

ჩაწერის სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ σ-ს რადიუსი ერთის ტოლია და მისი ცენტრი არის $\zeta = 0$ სათავეში.

თუ S არე სასრულია, ჩვენ დავუშვებთ, რომ $z = 0$ წერტილი არის S-ის შიგნით და ამას გარდა

$$\omega(0) = 0. \tag{35}$$

თუ S არე უსასრულოა, ჩვენ დავუშვებთ, რომ $z=\infty$ წერტილი შეესაბამება $\zeta=0$ წერტილს ისე, რომ

$$\omega(\zeta)=\frac{c}{\zeta}+\sigma\text{-ში ჰოლომორფული ფუნქცია} \tag{36}$$

(იხ. I თავის § 6).

ავიღოთ ახლა U-სათვის გ უ რ ს ა ს (10) გამოსახულება და ჩავწეროთ ის შემდეგი სახით:

$$2U=\bar{z}\varphi_1(z)+z\overline{\varphi_1(z)}+\psi_2(z)+\overline{\psi_2(z)}, \tag{37}$$

ამასთან, მოხერხებულობისათვის შემოვიღეთ ინდექსები.

სიმოკლისათვის დავუშვათ კიდევ, რომ

$$\psi_2'(z)=\frac{d\psi_2(z)}{dz}=\psi_1(z). \tag{38}$$

შაშინ გვექნება

$$2\frac{\partial U}{\partial x}=\psi_1(z)+\overline{\psi_1(z)}+\bar{z}\varphi_1'(z)+z\overline{\varphi_1'(z)}+\varphi_1(z)+\overline{\varphi_1(z)},$$

$$-2i\frac{\partial U}{\partial y}=\psi_1(z)-\overline{\psi_1(z)}+\bar{z}\varphi_1'(z)-z\overline{\varphi_1'(z)}-\varphi_1(z)+\overline{\varphi_1(z)}.$$

აქედან

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x}-i\frac{\partial U}{\partial y}&=\psi_1(z)+\bar{z}\varphi_1'(z)+\overline{\varphi_1(z)},\\ \frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}&=\overline{\psi_1(z)}+z\overline{\varphi_1'(z)}+\varphi_1(z).\end{aligned} \tag{39}$$

როცა S არე სასრულია, შეგვიძლია დავუშვათ (§ 37)

$$\varphi_1(0)=0,\quad \operatorname{Re}[i\varphi_1'(0)]=0. \tag{40}$$

უსასრულო არის შემთხვევაში დავუშვებთ, რომ φ_1 და ψ_1 ც ა ლ ს ა ხ ა ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\psi_1(\infty)=\varphi_1(\infty)=0 \tag{41}$$

(იხ. ამ §-ის (38) ფორმულა და § 39-ის (26*) ფორმულა, გვ. 82).

თუ შემოვიტანთ ζ ცვლადს, რომელიც z-თან დაკავშირებულია (34) დამოკიდებულებით, გვექნება

$$\frac{\partial U}{\partial x}-i\frac{\partial U}{\partial y}=\psi(\zeta)+\overline{\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}}\,\varphi'(\zeta)+\overline{\varphi(\zeta)},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=\overline{\psi(\zeta)}+\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\,\overline{\varphi'(\zeta)}+\varphi(\zeta), \tag{42}$$

სადაც დავუშვით

$$\psi(\zeta)=\psi_1(\omega(\zeta)),\quad \varphi(\zeta)=\varphi_1(\omega(\zeta)).$$

ჩვენი დაშვებების თანახმად, φ და ψ ფუნქციები ჰოლომორფულია σ-ში.

(40) და (41) ფორმულები შესაბამისად მოგვცემენ, რომ

$$\varphi(0)=0,\quad \mathrm{Re}\left[\frac{i\varphi'(0)}{\omega'(0)}\right]=0,\quad \text{როცა } S \text{ სასრულია} \tag{40*}$$

და

$$\varphi(0)=0,\ \psi(0)=0,\ \text{როცა } S \text{ უსასრულოა}. \tag{41*}$$

ამოცანა დაყვანილია φ და ψ ფუნქციების მოძებნაზე; ამ ფუნქციების განსაზღვრის შემდეგ (39) ფორმულებით ვიპოვით $\frac{\partial U}{\partial x}$-ს, $\frac{\partial U}{\partial y}$-ს და ერთი კვადრატურა მოგვცემს U-ს.

§ 44. გაგრძელება. დავუშვათ, რომ ჩვენს ამოცანას გააჩნია ისეთი ამონახსნი, რომ მისი შესაბამისი $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ ფუნქციები თანაბრად მიისწრაფვიან გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა ζ მიისწრაფვის γ წირის რაიმე წერტილისაკენ. შემდგომში ჩვენ შემოვიფარგლებით ისეთი ფუნქციების მოძებნით, რომლებსაც ეს თვისება აქვთ.

ვთქვათ, $\zeta'=e^{i\theta}$ არის γ საზღვრის ცვლადი წერტილი, ხოლო $\varphi(\zeta')$, $\psi(\zeta')$, $\varphi'(\zeta')$ შესაბამისად φ, ψ, φ' ფუნქციების მნიშვნელობებია γ საზღვარზე.

ამ დაშვების შემდეგ, (28) სასაზღვრო პირობებს, (42)-ის მიხედვით, შეიძლება მიეცეს შემდეგი სახე:

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\varphi(\zeta')}+\overline{\frac{\omega(\zeta')}{\omega'(\zeta')}}\,\varphi'(\zeta')+\psi(\zeta')=u-iv\\&\varphi(\zeta')+\frac{\omega(\zeta')}{\overline{\omega'(\zeta')}}\,\overline{\varphi'(\zeta')}+\overline{\psi(\zeta')}=u+iv\end{aligned}\right\}\ \gamma\text{-ზე} \tag{43}$$

ან კიდევ

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)+\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}{\omega'(\zeta')}\varphi'(\zeta')+\psi(\zeta')=u-iv \\ &\varphi(\zeta')+\frac{\omega(\zeta')}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)+\bar{\psi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)=u+iv \end{aligned}\right\}\ \gamma\text{-ზე.} \qquad (43^*)$$

ვთქვათ, ახლა, $p(\zeta)$ ნებისმიერი პ ო ლ ი ნ ო მ ი ა, რომელიც არ-არის ნული არც σ-ში, არც γ-ზე და ისეთია, რომ რაციონალურ ფუნ-ქციას

$$\omega(\zeta)\,p(\zeta)$$

არ აქვს პოლუსი γ-ს გ ა რ ე თ, გარდა, შესაძლოა, $z=\infty$ წერტილისა.

მაშინ ცხადია, რომ ფუნქციას

$$\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

არ ექნება პოლუსი γ-ს შ ი გ ნ ი თ, გარდა, შესაძლოა, $\zeta=0$ წერტი-ლისა.

(43*) ტოლობები გავამრავლოთ შესაბამისად

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)d\zeta'}{\zeta'-\zeta},\qquad \frac{1}{2\pi i}\,\frac{p(\zeta')\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta}$$

სიდიდეებზე, სადაც ζ აღნიშნავს წერტილს γ-ს შიგნით, და ავიღოთ ინტეგრალი γ-ზე: გვექნება:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\varphi\left(\frac{1}{\zeta'}\right)+\frac{\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}{\omega'(\zeta')}\varphi'(\zeta')+\right.$$

$$\left.+\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\psi'(\zeta')\right]\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{(u-iv)\,\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta',$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\left[p(\zeta')\varphi(\zeta')+\frac{p(\zeta')\omega(\zeta')}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)+p(\zeta')\overline{\psi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\right]\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{(u+iv)\,p(\zeta')}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'. \tag{44}$$

§ 3-ის (გვ. 20) შედეგის თანახმად, უკანასკნელი ტოლობები (43*)-ის ტოლფასია.

§ 45. **გაგრძელება.** ვთქვათ, n არის $p(\zeta)$-ს ხარისხი, ხოლო m არის

$$\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}$$

ფუნქციის $\zeta=0$ პოლუსის ჯერადობა.

გვაქვს

$$\frac{\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta)=\frac{A_m}{\zeta^m}+\frac{A_{m-1}}{\zeta^{m-1}}+\ldots+\frac{A_1}{\zeta}+\ldots,$$

$$\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\psi(\zeta)=\frac{B_n}{\zeta^n}+\frac{B_{n-1}}{\zeta^{n-1}}+\ldots+\frac{B_1}{\zeta}+\ldots \quad (\gamma\text{-ს შიგნით}),$$

$$\frac{p(\zeta)\,\omega(\zeta)}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\overline{A}_m\zeta^m+\overline{A}_{m-1}\zeta^{m-1}+\ldots+\overline{A}_1\zeta+\overline{A}_0+O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right),$$

$$p(\zeta)\,\overline{\psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\overline{B}_n\zeta^n+\overline{B}_{n-1}\zeta^{n-1}+\ldots+\overline{B}_1\zeta+B_0+O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right) \quad (\gamma\text{-ს გარეთ}), \tag{45}$$

$$\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right)$$

(უკანასკნელი ტოლობა არის (40*)-ის ან (41*)-ის შედეგი).

A_k და B_k მუდმივები შედგენილია შემდეგნაირად.

თუ დაკუშვებთ, რომ σ-ში

$$\varphi(\zeta)=(\alpha_0+i\alpha_0')+(\alpha_1+i\alpha_1')\,\zeta+\ldots, \tag{46}$$

$$\psi(\zeta)=\beta_0+i\beta_0'+(\beta_1+i\beta_1')\,\zeta+\ldots, \tag{47}$$

მაშინ $A_0, \ldots, A_m, \overline{A_0}, \ldots, \overline{A_m}$ მუდმივები

$$\alpha_0, \alpha_0', \ldots, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+1}' \tag{48}$$

სიდიდეების წრფივი და ერთგვაროვანი კომბინაციებია, ხოლო $B_0, \ldots, B_n, \overline{B_0}, \ldots, \overline{B_n}$ კი—

$$\beta_0, \beta_0', \ldots, \beta_n, \beta_n' \tag{48*}$$

სიდიდეების წრფივი და ერთგვაროვანი კომბინაციები.

ამ წრფივი კომბინაციების კოეფიციენტები გამოითვლება სავსებით ელემენტარული ოპერაციებით; თვით (48) და (48*) სიდიდეები ჯერჯერობით უცნობია.

(46)-ისა და (47)-ის მიხედვით § 4-ის ფორმულა (თავი I) გვაძლევს, რომ

$$\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\psi(\zeta) - \frac{B_n}{\zeta^n} - \frac{B_{n-1}}{\zeta^{n-1}} - \ldots - \frac{B_1}{\zeta} + \bar{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta) -$$

$$-\frac{A_m}{\zeta^m} - \ldots - \frac{A_1}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(u-iv)\,\bar{p}(\overline{\zeta'})}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta', \tag{49}$$

$$\overline{B}_n\zeta^n + \overline{B}_{n-1}\zeta^{n-1} + \ldots + \overline{B}_1\zeta + \overline{B}_0 + \overline{A}_m\zeta^m + \ldots +$$

$$+\overline{A}_1\zeta + \overline{A}_0 + p(\zeta)\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(u+iv)\,p(\zeta')}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'. \tag{50}$$

რადგან $p(\zeta)$ არ არის ნული σ-ში, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან განისაზღვრება σ-ში ჰოლომორფული $\varphi(\zeta)$ ფუნქცია. თუ (49)-ში შევიტანთ $\varphi(\zeta)$-ს ასეთნაირად განსაზღვრულ მნიშვნელობას, მივიღებთ $\psi(\zeta)$-ს მნიშვნელობას.

მაგრამ უკანასკნელი არ იქნება, საზოგადოდ, ჰოლომორფული σ-ში, თუ (48) და (48*) მუდმივები სათანადოდ არჩეული არაა.

§ 46. მუდმივების განსაზღვრა. (48) და (48*) მუდმივები ისე უნდა ავარჩიოთ, რომ დაკმაყოფილდეს შემდეგი პირობები:

1⁰. $\psi(\zeta)$ იყოს ჰოლომორფული σ-ში,

2⁰. $A_0, \ldots, \overline{B_n}$ მართლაც წარმოადგენდნენ იმ ფუნქციების გაშლების კოეფიციენტებს, რომლებიც მონაწილეობენ (45) ტოლობების მარცხენა მხარეებში, თუ მათში $\varphi(\zeta)$ და $\psi(\zeta)$-ს შეცვლით (49)-იდან და (50)-იდან მიღებული გამოსახულებებით.

3°. დაბოლოს, უნდა შესრულდეს (40*) ან (41*) ტოლობა (გვ. 88).

თუ მოვახერხებთ ზემოთ ჩამოთვლილი პირობების დაკმაყოფილებას და თუ, ამას გარდა, $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ ფუნქციები თანაბრად მიისწრაფვიან თავიანთი ზღვრისაკენ, როცა ζ მიისწრაფვის საზღვრის გარკვეული წერტილისაკენ, მაშინ ამოცანა ამოხსნილი იქნება.

დავუშვათ, რომ $u(s)$ და $v(s)$ s რკალის ფუნქციებია, უწყვეტი თავიანთი წარმოებულებებით მეორე რიგამდე. მაშინ ინტეგრალები

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{(u+iv)\,p(\zeta')}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta', \qquad J_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{(u-iv)\,\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta',$$

$$\frac{dJ}{d\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{(u+iv)\,p(\zeta')}{(\zeta'-\zeta)^2}\,d\zeta'$$

მიისწრაფვიან უწყვეტი ზღვრებისაკენ, როცა ζ მიისწრაფვის საზღვრის გარკვეული წერტილისაკენ; ეს არის I თავის § 2-ის თეორემის შედეგი (გვ. 17).

მაგრამ, ცხადია, რომ $\varphi(\zeta)$, $\varphi'(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ ფუნქციათა განმსაზღვრელი (49) და (50) ტოლობები წრფივად შეიცავენ J, J_1 და $\frac{dJ}{d\zeta}$ ინტეგრალებს, ζ-ს მიმართ რაციონალური კოეფიციენტებით, რომლებიც არ არის უსასრულო γ-ზე[54]. ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

დაგვრჩა დავაკმაყოფილოთ (1°—3°) პირობები. ისინი გვაძლევენ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას (48) და (48*) მუდმივებისათვის. მართლაც, ამ პირობების დასადგენად ჯერ გამოვთვალოთ $\varphi(\zeta)$-ს (50)-იდან მიღებული გამოსახულების გაშლის პირველი $m+2$ კოეფიციენტი და ისინი შესაბამისად გავუტოლოთ $\alpha_k+i\alpha'_k$ $(k=0, \ldots, m+1)$ სიდიდეებს. თუ ამ ტოლობებში განვაცალკევებთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, მივიღებთ განტოლებათა პირველ ჯგუფს, რომლებიც უნდა დააკმაყოფილონ α_k და β_k, $k=0, \ldots, m+1$, მუდმივებმა.

ამ ოპერაციების ეფექტური ჩატარება არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს, რადგან (50) ტოლობის მარჯვენა მხარის ინტეგრალს აქვს ძალიან მარტივი გაშლა:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{(u+iv)\,p(\zeta')\,d\zeta'}{\zeta'-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(u+iv)\,p(\zeta')\,\frac{d\zeta'}{\zeta'}+$$

$$+\frac{\zeta}{2\pi i}\int_{\gamma}(u+iv)\,p(\zeta')\,\frac{d\zeta'}{\zeta'^2}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u+iv)\,p(e^{i\vartheta})\,d\vartheta+\frac{\zeta}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u+iv)\,p(e^{i\vartheta})\,e^{-i\vartheta}\,d\vartheta\ldots. \qquad (51)$$

თვით (50) ფორმულის სტრუქტურა გვიჩვენებს, რომ განტოლებათა სისტემა, რომელიც ხსენებული გზით მიიღება, წრფივია α_k და β_k $(k=0,\ldots,m+1)$ უცნობების მიმართ, ხოლო მისი თავისუფალი წევრები (ϑ1) გაშლის კოეფიციენტების ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების წრფივი სასრული კომბინაციებია. (51) ფორმულების თანახმად, ცხადია, რომ ამ თავისუფალ წევრებს ექნებათ სახე

$$\int_0^{2\pi}[\lambda(\vartheta)\,u+\mu(\vartheta)\,v]\,d\vartheta,$$

სადაც $\lambda(\vartheta)$, $\mu(\vartheta)$ აღნიშნავენ ϑ-ს, ან, რაც იგივეა, C საზღვრის s რკალის საკუთარი განსაზღვრულ ფუნქციებს.

თუ წინა განტოლებები დაკმაყოფილებულად ჩავთვალეთ, ასევე მოვუქცეთ $\psi(\zeta)$-ს გამოსახულებებს.

თუ პირველი ჯგუფის განტოლებები დაკმაყოფილებულია, მაშინ $\psi(\zeta)$-ს გამოსახულების გაშლაში არ იქნება ζ-ს უარყოფითი ხარისხები, ვინაიდან $\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ მნიშვნელში შეიცავს ζ^n-ს, ხოლო გამოსახულება

$$\frac{\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\,\varphi'(\zeta)-\frac{A_m}{\zeta^m}-\ldots-\frac{A_1}{\zeta},$$

A_k მუდმივების განსაზღვრის თანახმად, ჰოლომორფულია $\zeta=0$ წერტილში.

ასეთნაირად ვღებულობთ წინა განტოლებების ანალოგიურ წრფივ განტოლებათა მეორე ჯგუფს.

უსასრულო არის შემთხვევაში 3° პირობა დაიყვანება

$$\alpha_0=\alpha_0'=\beta_0=\beta_0'=0$$

ტოლობებზე, ხოლო სასრული არის შემთხვევაში —

$$\alpha_0=\alpha_0'=0,\quad \alpha_1 A_1'-\alpha_1' A_1=0$$

ტოლობებზე, სადაც

$$A_1 + iA_1' = \omega'(0).$$

დაბოლოს, 1° პირობას დავაკმაყოფილებთ, თუ მოვითხოვთ, რომ $\psi(\zeta)$ იყოს სასრული $\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ ფუნქციის ყველა ნულისათვის, რომლებიც მოთავსებულია σ-ში. ეს კიდევ იძლევა სისტემას წრფივი განტოლებებისა, რომლებიც წინა განტოლებების სავსებით ანალოგიურია და რომელთა ეფექტური შედგენა მხოლოდ ელემენტარულ გამოთვლებს მოითხოვს.

ამგვარად, ჩვენ მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომლის თავისუფალ წევრებს აქვთ ზემოხსენებული სახე.

ეს სისტემა არ შეიძლება იყოს განუსაზღვრელი, ვინაიდან ვიცით, რომ ამონახსნი ერთადერთია, თუ ის არსებობს.

პირიქით, ეს სისტემა შეიძლება იყოს არათავსებადი; უცნობების გამორიცხვას მივყავართ, როგორც ეს ვიცით დეტერმინანტთა თეორიიდან, თავსებადობის შემდეგი სახის ერთ ან რამდენიმე პირობამდე:

$$\sum_k \Delta_k C_k = 0,$$

სადაც C_k აღნიშნავს განტოლებების თავისუფალ წევრებს, ხოლო Δ_k მუდმივი რიცხვებია.

თუ გავიხსენებთ C_k წევრების გამოსახულებას, იდვილად ვნახავთ, რომ ყოველ ზემოხსენებულ პირობას აქვს სახე

$$\int_0^{2\pi} [\lambda_1(\vartheta)\, u + \mu_1(\vartheta)\, v]\, d\vartheta = 0,$$

ან კიდევ, თუ დავუბრუნდებით (x, y) წერტილთა სიბრტყეს, —

$$\int_C [\lambda(s)\, u(s) + \mu(s)\, v(s)]\, ds = 0 \tag{52}$$

სახე, სადაც $\lambda(s)$, $\mu(s)$ C საზღვრის s რკალის სავსებით განსაზღვრული ფუნქციებია; ამ ფუნქციების სახე დამოკიდებულია მხოლოდ C საზღვარზე, რაც მოსალოდნელი იყო ზოგადი თეორემების თანახმად. სასრული არის შემთხვევაში ხსენებული პირობები დაიყვანება მხოლოდ ერთ (30) პირობაზე, ხოლო უსასრულო არის შემთხვევაში — (31) პირობებზე.

§ 47. **წრიული არე.** დავუშვათ, რომ წრის რადიუსი ერთის ტოლია. მაშინ

$$\omega(\zeta) \equiv \zeta$$

და შეგვიძლია ავიღოთ

$$p(\zeta) \equiv 1.$$

(43*) ფორმულების ძალით

$$u+iv=\varphi(\zeta')+\zeta'\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)+\bar{\psi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right),$$

$$u-iv=\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)+\frac{1}{\zeta'}\ \varphi'(\zeta')+\psi(\zeta').$$

თუ დავუშვებთ, რომ[55]

$$\varphi(\zeta)=\alpha_1\zeta+(\alpha_2+i\alpha_2')\zeta^2+\ldots,$$

$$\psi(\zeta)=\beta_0+i\beta_0'+\ldots,$$

მაშინ განხილული მეთოდის გამოყენებით უშუალოდ გვექნება

$$\psi(\zeta)+\frac{1}{\zeta}\ \varphi'(\zeta)-\frac{\alpha_1}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{u-iv}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta',$$

$$\beta_0-i\beta_0'+\alpha_1\zeta+2(\alpha_2-i\alpha_2')+\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{u+iv}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'.$$

ამ ტოლობაში ζ^0-ის და ζ-ს კოეფიციენტების შედარებით გვაქვს.

$$\beta_0-i\beta_0'+2(\alpha_2-i\alpha_2')=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(u+iv)\,d\vartheta,$$

$$2\alpha_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(u\cos\vartheta+v\sin\vartheta)\,d\vartheta,$$

$$0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(-u\sin\vartheta+v\cos\vartheta)\,d\vartheta.$$

უკანასკნელი ტოლობა ემთხვევა § 40-ის (30) აუცილებელ პირობას.

სხვა წევრების შედარება საშუალებას იძლევა განისაზღვროს თითოეული უცნობი მუდმივი ცალ-ცალკე; მაგრამ ამის გაკეთება არ არის საჭირო, ვინაიდან ამ უცნობების წრფივი კომბინაციების მნიშვნელობები უკვე მიღებულია. თუ ამ უცნობების მნიშვნელობებს ჩავსვამთ φ-სა და ψ-ს გამოსახულებებში, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{u+iv}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'-\frac{\zeta}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}(u\cos\vartheta+v\sin\vartheta)\,d\vartheta-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}(u+iv)\,d\vartheta,$$

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{u-iv}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'-\frac{1}{\zeta}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{u+iv}{(\zeta'-\zeta)^2}\,d\zeta'-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}(u\cos\vartheta+v\sin\vartheta)\,d\vartheta\right].$$

§ 48. პასკალის ლოკოკინა[56]. თუ დავუშვებთ, რომ

$$z=\omega(\zeta)=\zeta+a\zeta^2,\qquad 0<a<\frac{1}{2},$$

მივიღებთ ერთეულრადიუსიან წრეზე იმ სასრული არის კონფორმულ ასახვას, რომელიც შემოსაზღვრულია პასკალის ლოკოკინით:

$$x=\cos\vartheta+a\cos 2\vartheta,\qquad y=\sin\vartheta+a\sin 2\vartheta.$$

განხილული მეთოდის გამოყენება იძლევა თითქმის ისეთივე მარტივ ფორმულებს, როგორც წინა ფორმულებია: მკითხველს ვანდობთ მათ გამოყვანას.

§ 49. უსასრულო სიბრტყე ელიფსური ხვრელით[57]. ისევე, როგორც II თავის § 33-ში (გვ. 74), დავუშვათ, რომ

$$z=\omega(\zeta)=b\left(\zeta+\frac{a}{\zeta}\right),\tag{53}$$

ან, რაც იგივეა,

$$x=b\left(\rho+\frac{a}{\rho}\right)\cos\vartheta,\qquad y=b\left(\rho-\frac{a}{\rho}\right)\sin\vartheta,\tag{53*}$$

სადაც $a\geqslant 1,\quad b>0.$

მაშინ მივიღებთ C ელიფსის გარეთ მდებარე უსასრულო S არის კონფორმულ ასახვას $|\zeta|<1$ წრეზე; C-ს განტოლებაა

$$\frac{x^2}{b^2(a+1)^2}+\frac{y^2}{b^2(a-1)^2}=1. \tag{54}$$

(43*) ფორმულები მოგვცემს, რომ

$$\begin{gathered}\varphi(\zeta')+\frac{\zeta'^2+a}{\zeta'(1-a\zeta'^2)}\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)+\bar{\psi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)=u+iv,\\ \bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)+\frac{\zeta'(1+a\zeta'^2)}{\zeta'^2-a}+\psi(\zeta')=u-iv.\end{gathered} \tag{55}$$

თუ უკანასკნელი ტოლობების ორივე მხარეს გავამრავლებთ

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}$$

სიდიდეზე და ავიღებთ ინტეგრალს γ-ზე, გვექნება (შდრ. § 4)

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{u+iv}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta',$$

$$\frac{\zeta(1+a\zeta^2)}{\zeta^2-a}\,\varphi'(\zeta)+\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{u-iv}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta',$$

ვინაიდან (41*) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$\alpha_0=\alpha_0'=\beta_0=\beta_0'=0. \tag{56}$$

წინა ფორმულების ძალით,

$$\begin{gathered}\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{u+iv}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta',\\ \psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{u-iv}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'-\frac{\zeta(1+a\zeta^2)}{\zeta^2-a}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{u+iv}{(\zeta'-\zeta)^2}\,d\zeta'.\end{gathered} \tag{57}$$

დაგვრჩა შევამოწმოთ, რომ (56) პირობები შესრულებულია, ვინაიდან ამ პირობებით ვისარგებლეთ (57) ფორმულების გამოყვანის დროს. (56) პირობა, რაც იმას ნიშნავს, რომ $\varphi(0)=\psi(0)=0$, იძლევა

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,d\vartheta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\,d\vartheta \tag{58}$$

ტოლობებს.

ეს არის **აუცილებელი და საკმარისი** პირობები ამონახსნების არსებობისათვის; როგორც ვხედავთ, § 42-ში ჩამოყალიბებული თეორემა სამართლიანია განხილულ შემთხვევაში.

ჩვენი ამონახსნი ისეთია, რომ

$$\frac{\partial U}{\partial x}=O\left(\frac{1}{r}\right),\quad \frac{\partial U}{\partial y}=O\left(\frac{1}{r}\right). \tag{59}$$

თუ (58) პირობა არ არის შესრულებული, მაშინ არ არსებობს ამ თვისების მქონე ამონახსნი. მაგრამ, როგორც ეს § 42-ში იყო ნაჩვენები, ყოველთვის არსებობს ამონახსნი, რომლის $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ კერძო წარმოებულები შემოსაზღვრულია, მაგრამ აუცილებელი არაა ისინი ნული იყვნენ უსასრულობაში.

მართლაც, ადვილად ვღებულობთ ფორმულებს, რომლებიც იძლევა ამონახსნს ზოგად შემთხვევაში. აი ეს ფორმულები:

$$\varphi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{u+iv}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (u+iv)\,\frac{d\zeta'}{\zeta'},$$

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{u-iv}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'-\frac{\zeta(1+a\zeta^2)}{\zeta^2-a}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{u+iv}{(\zeta'-\zeta)^2}\,d\zeta'. \tag{57*}$$

ისინი განსხვავდებიან (57) ფორმულებისაგან მუდმივი შესაკრებით $\varphi(\zeta)$-ს გამოსახულებაში.

§ 50. ზოგიერთი სხვა საზღვარი. როგორც II თავის § 34-ში შევნიშნეთ, რაციონალური ფუნქციის საშუალებით შეიძლება განხორციელდეს წრეწირის რკალის გასწვრივ გაჭრილი სიბრტყის კონფორმული ასახვა წრეზე.

ჩვენი მეთოდის გამოყენება საშუალებას იძლევა მარტივად ამოვხსნათ ამ არესთან დაკავშირებული ბიჰარმონიული ამოცანა. კერძოდ, როცა წრიული რკალის ნაცვლად, სიბრტყე გაჭრილია სასრული სეგმენტის, მაგალითად,

$$-c\leqslant x\leqslant c,\quad y=0,$$

სეგმენტის გასწვრივ, მაშინ ამონახსნი მიიღება (57) და (57*) ფორმულებიდან, სადაც უნდა დავუშვათ $a=1$, $b=\frac{c}{2}$.

ასე მაგალითად, ადვილად მოინახება გ რ ი ნ ი ს ფუნქცია ასეთი არისათვის. თუ ამ სეგმენტის ერთ-ერთი ბოლო მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, მივიღებთ გ რ ი ნ ი ს ფუნქციას სიბრტყისათვის, რომელიც გაჭრილია ნახევარწრფის გასწვრივ. ეს კერძო შემთხვევა განიხილა ა დ ა მ ა რ მ ა[1], რომელმაც გამოიყენა ა ლ მ ა ნ ს ი ს მეთოდი.

მაგრამ ვინაიდან ალმანსის მეთოდი არ გამოიყენება უსასრულო არეებისათვის, ამიტომ ადამარი იძულებული გახდა სხვა გზას გაყოლოდა და განეხილა პასკალის ლოკოკინის ზღვრული შემთხვევა.

თავი IV

დრეკადობის თეორიის ორგანზომილებიანი ამოცანა

ბიჰარმონიული განტოლება ერთ-ერთ ყველაზე მნიშვნელოვან გამოყენებას დრეკადობის თეორიაში პოულობს.

ჩვენ აქ შემოვიფარგლებით მხოლოდ ორი ამოცანის განხილვით. ესენია: ჩამაგრებული დრეკადი ფირფიტის წონასწორობის ამოცანა (განხილული კირხჰოფის[58] მიახლოებითი თეორიის თვალსაზრისით) და დრეკადობის თეორიის ორგანზომილებიანი ამოცანის სახელწოდებით ცნობილი ამოცანა.

ამათგან პირველი ამოცანა უშუალოდ დაიყვანება წინა თავში განხილულ ამოცანაზე[59].

მეორე ამოცანა, რომელიც გაცილებით უფრო მეტ ინტერესს იწვევს, ამ თავში განიხილება.

1. ზოგადი საკითხები[60]

§ 51. ძირითადი განტოლებები. როგორც ცნობილია, დრეკადობის თეორიის ორგანზომილებიანი ამოცანის განტოლებები გამოიყენება ორ განსხვავებულ შემთხვევაში: სასრული სიმაღლის მარჯვი ერთგვაროვანი ცილინდრის დრეკადი წონასწორობისას, როცა დეფორმაცია არის ბრტყელი (გადაადგილებები ფუძეების პარალელურია) და თხელი დრეკადი ფირფიტის წონასწორობისას, როცა მის საზღვარზე მოდებულია ძალები, რომლებიც ფირფიტის სიბრტყეში მოქმედებენ.

ვთქვათ, X_x, X_y, Y_y არიან ძაბვის მდგენელები, რომლებიც (x, y) წერტილთა სიბრტყის პარალელურია, ხოლო u_x, u_y გადაადგილების მდგენელებია.

დრეკადობის თეორიის ორგანზომილებიანი ამოცანის ძირითადი განტოლებებია[61]:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial X_y}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}=0; \tag{1}$$

$$X_x=\lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x},$$

$$Y_y = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y},$$

$$X_y = Y_x = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right); \tag{2}$$

აქ λ და μ აღნიშნავენ ლ ა მ ე ს მუდმივებს.

ნათქვამი ეხება ბრტყელი დეფორმაციის ამოცანას[62]. თ ხ ე ლ ი ფ ი რ ფ ი ტ ი ს შემთხვევაში შეიძლება გამოვიყენოთ ზემოთ მოყვანილი განტოლებები, თუ X_x, Y_y, X_y, u_x, u_y აღნიშნავენ ძაბვებისა და გადაადგილებების ს ა შ უ ა ლ ო მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ებ ს ფირფიტის სისქის გასწვრივ და თუ λ-ს შევცვლით

$$\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + \mu} \tag{3}$$

მუდმივით.

(1) და (2) განტოლებები უნდა დაკმაყოფილდეს სხეულის მიერ დაკავებულ მთელ S არეში[63]. სასაზღვრო პირობები შეიძლება სხვადასხვა სახისა იყოს.

ძირითადია შემდეგი ორი შემთხვევა.

1. S-ის C ს ა ზ ღ ვ ა რ ზ ე მ ო ც ე მ უ ლ ი ა მ ო ქ მ ე დ ი ძ ა ლ ი ს მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ა:

$$\begin{aligned} X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) &= X_n(s), \\ X_y \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) &= Y_n(s). \end{aligned} \tag{4}$$

სადაც $X_n(s)$, $Y_n(s)$ აღნიშნავენ საზღვრის s რკალის მოცემულ ფუნქციებს; ეს არის მდგენელები ძალისა, რომელიც მოქმედებს საზღვრის სიგრძის ერთეულზე, ხოლო n გარე ნორმალია.

2. S-ის ს ა ზ ღ ვ ა რ ზ ე მ ო ც ე მ უ ლ ი ა გ ა დ ა ა დ გ ი ლ ებ ი ს მ ნ ი შ ვ ნ ე ლ ო ბ ებ ი:

$$u_x = u_x(s), \quad u_y = u_y(s), \tag{5}$$

სადაც $u_x(s)$, $u_y(s)$ აღნიშნავენ საზღვრის s რკალის მოცემულ ფუნქციებს.

ვუშვებთ, რომ X_x, $X_y = Y_x$, Y_y, u_x, u_y ფუნქციები ცალსახაა და რეგულარული S არეში.

როცა S არე უსასრულოა, დამატებით ვუშვებთ, რომ

$$X_x = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad X_y = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad Y_y = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{6}$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ ასეთი ძაბვების შესაბამისი გადაადგილებები შეიძლება არ იყვნენ შემოსაზღვრული უსასრულობაში; სახელდობრ, შეიძლება იზრდებოდნენ, როგორც $\lg r$.

შეგვეძლო დამატებითი შეთანხმების შემოტანა, რომელიც გამორიცხავდა ასეთი გადაადგილებების შესაძლებლობას. მაგრამ უფრო მეტი ზოგადობისათვის ჩვენ დავუშვებთ, რომ u_x, u_y იზრდება არა უმეტეს, ვიდრე $\lg r$.

§ 52. ზოგიერთი ძირითადი ფორმულა. ქვემოთ, მკითხველისათვის მოხერხებული რომ იყოს, თავმოყრილია ორგანზომილებიანი დრეკადობის თეორიის ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ფორმულა. ცნობილია, რომ ამ თეორიის ძირითადი განტოლებათა სისტემის ზოგადი რეგულარული ამონახსნი შეიძლება შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ[14]. ძაბვის მდგენელებია:

$$X_y=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\quad Y_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\quad X_y=Y_x=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}; \tag{7}$$

გადაადგილების მდგენელებია:

$$2\mu u_x=-\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}p,\qquad 2\mu u_y=-\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}q, \tag{8}$$

სადაც U აღნიშნავს Airy-ის (ერის) ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს

$$\Delta\Delta U=0$$

ბიჰარმონიულ განტოლებას, ხოლო p და q დაკავშირებულია ამ ფუნქციასთან III თავის (8) ტოლობით (გვ. 78). მოხერხებულობისათვის აქ ხელახლა მოგვყავს ზოგიერთი ცვლილებით ზემოთ მოყვანილი ფორმულები და აღნიშვნები, რომლებიც საჭიროა შემდეგომისათვის (შდრ. § 36, თავი III):

$$\Delta\Delta U=0, \tag{a}$$

$$\Delta U=P(x,\ y), \tag{b}$$

$$P(x,\ y)+iQ(x,\ y)=f_1(z), \tag{c}$$

$$\frac{1}{4}\int^{z} f_1(z_1)\,dz_1=p+iq=\varphi_1(z), \tag{d}$$

$$U=\mathrm{Re}\,[\bar{z}\,\varphi_1(z)+\psi_2(z)], \tag{e}$$

$$\psi_2'(z)=\psi_1(z). \tag{f}$$

ჩაწერის სიმოკლისათვის დავუშვათ აგრეთვე, რომ

$$\varphi_1'(z)=\frac{1}{4}f_1(z)\equiv\Phi_1(z),\quad \psi_1'(z)\equiv\Psi_1(z). \tag{g}$$

ამას კიდევ დავუმატოთ რამდენიმე ფორმულა, რომელთა მნიშვნელობა ქვემოთ იქნება ახსნილი:

$$z=\omega(\zeta), \tag{h}$$

$$\varphi_1(\omega(\zeta))\equiv\varphi(\zeta),\quad \psi_1(\omega(\zeta))\equiv\psi(\zeta), \tag{i}$$

$$\Phi_1(\omega(\zeta))\equiv\Phi(\zeta)\equiv\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)},\quad \Psi_1(\omega(\zeta))\equiv\Psi(\zeta)=\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}. \tag{j}$$

(*e*), (7) (8) ფორმულების თანახმად, გადაადგილებები და ძაბვები ადვილად გამოისახება z კომპლექსური ცვლადის ფუნქციების საშუალებით.

მაგრამ ჩვენ გვირჩევნია მივიღოთ გამოსახულებები არა თვით ამ სიდიდეებისათვის, არამედ მათი მარტივი წრფივი კომბინაციებისათვის.

ამ §-ის (8) ფორმულის და III თავის (39) ფორმულის (გვ. 87) ძალით

$$-2\mu(u_x+iu_y)=k\varphi_1(z)+z\overline{\varphi_1'(z)}+\overline{\psi_1(z)}, \tag{9}$$

სადაც ჩაწერის სიმოკლისათვის დავუშვით, რომ

$$k=1-\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}=-\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}. \tag{9*}$$

შემდეგ,

$$X_x+Y_y=2[\varphi_1'(z)+\overline{\varphi_1'(z)}]=2[\Phi_1(z)+\overline{\Phi_1(z)}], \tag{10}$$

$$2X_y+i(X_x-Y_y)=-2i[\bar{z}\psi_1'(z)+\psi_1'(z)]=$$
$$=-2i[\bar{z}\Phi_1'(z)+\Psi_1(z)]. \tag{11}$$

(10) და (11) არსებითად ემთხვევა კ ო ლ ო ს ო ვ ი ს ფორმულებს[65].

§ 53. შემოტანილი ფუნქციების შესწავლა. როცა სხეულის ძაბვები ცნობილია, (10) ფორმულა საშუალებით განსაზღვრავს $\Phi_1(z)$-ის ნამდვილ ნაწილს. ამის შემდეგ, თვით ეს ფუნქცია განსაზღვრულია წმინდა წარმოსახვით $i\alpha$ შესაკრებ მუდმივამდე სიზუსტით; მაშინ (11) ფორმულა საშუალებით განსაზღვრავს $\Psi_1(z)$ ფუნქციას, ვინაიდან $\Phi_1'(z)$ აღარ შეიცავს ნებისმიერ მუდმივს.

შემდეგ, ფუნქცია

$$\varphi_1(z)=\int^{z}\Phi_1(z_1)\,dz_1$$

განსაზღვრულია

$$i\alpha z+\beta+i\gamma=(-\alpha y+\beta)+i(\alpha x+\gamma)$$

სიდიდემდე სიზუსტით, სადაც α, β, γ აღნიშნავს ნამდვილ მუდმივებს.

ანალოგიურად, ფუნქცია

$$\psi_1(z)=\int^{z}\Psi_1(z_1)\,dz_1$$

განსაზღვრულია $\beta_1+i\gamma_1$ მუდმივამდე სიზუსტით.

აქედან გამომდინარეობს, რომ (9) ფორმულის მეშვეობით u_x, u_y გადაადგილებები განსაზღვრულია შესაბამისად

$$u_{0x}=\frac{\alpha(k-1)}{2\mu}\,y-\frac{k}{2\mu}\,\beta-\frac{1}{2\mu}\,\beta_1,$$

$$u_{0y}=-\frac{\alpha(k-1)}{2\mu}\,x-\frac{k}{2\mu}\,\gamma+\frac{1}{2\mu}\,\gamma_1 \tag{12}$$

სიდიდეებამდე სიზუსტით.

მაგრამ (u_{0x}, u_{0y}) გადაადგილება არის სხეულის მხოლოდ მყარი გადაადგილება. α, β, γ, β_1, γ_1 მუდმივების არჩევას არავითარი გავლენა არა აქვს სხეულის დეფორმაციაზე; მხოლოდ სხეულის მდებარეობაა დამოკიდებული ამ მუდმივებზე.

როდესაც სხეულის საზღვარზე ძაბვებია მოცემული, მაშინ ამ მუდმივებს შეგვიძლია ზოგადობის შეუზღუდავად მივანიჭოთ ნებისმიერი კერძო მნიშვნელობები[68].

მაგრამ, როცა სხეულის საზღვარზე მოცემულია გადაადგილებები, მაშინ ეს მუდმივები არ არიან სავსებით ნებისმიერი; სახელდობრ, (12) ფორმულების ძალით, თუ β_1 და γ_1-ს მივანიჭებთ ნებისმიერ მნიშვნელობებს, ცხადია, მაშინ β და γ მუდმივები სავსებით განსაზღვრული იქნება a მუდმივის საშუალებით.

ახლა ცალ-ცალკე განვიხილოთ სასრული და უსასრულო არის შემთხვევები[67].

1°. როცა S არე სასრულია Φ_1, Ψ_1, φ_1, ψ_1 ფუნქციები, როგორც ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, ჰოლომორფულია S-ში.

ნათქვამის თანახმად ადვილი სანახავია, რომ იმ შემთხვევაში, როცა სხეულის საზღვარზე მოცემულია ძაბვები, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავუშვათ:

$$\operatorname{Re}[i\varphi_1'(0)]=\operatorname{Re}[i\Phi_1(0)]=0,$$

$$\varphi_1(0)=\psi_1(0)=0, \tag{13}$$

რისთვისაც

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \beta_1,\ \gamma_1$$

მუდმივებს უნდა მივანიჭოთ სათანადო მნიშვნელობები.

როდესაც სხეულის საზღვარზე გადაადგილებებია მოცემული, მაშინ შეგვიძლია ვისარგებლოთ მხოლოდ β_1 და γ_1 მუდმივებით; ამ მუდმივების სათანადო არჩევით მივიღებთ, რომ

$$\psi_1(0)=0. \tag{14}$$

2°. *როცა S არე უსასრულოა*, (6) პირობების და (10) ფორმულის თანახმად ადვილად ვასკვნით, რომ $\Phi_1(z)$ ჰოლომორფულია S-ში და, ამას გარდა,

$$\Phi_1(z)=i\alpha+O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

მაგრამ, თუ $\alpha\neq 0$, მაშინ $\varphi_1(z)$-ისათვის მივიღებთ გამოსახულებას, რომელიც იზრდება, როგორც $|z|$, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენს ჰიპოთეზას, რომლის თანახმად გადაადგილებები იზრდება არა უმეტესად, ვიდრე $\lg|z|$. ამიტომ ყოველთვის უნდა დავუშვათ, რომ

$$\Phi_1(z)=O\left(\frac{1}{|z|}\right). \tag{15}$$

ამის შემდეგ გვექნება

$$\varphi_1(z)=(a+ib)\lg z+(\beta+i\gamma)+\mathring{\varphi}_1(z), \tag{16}$$

სადაც $a+ib$ აღნიშნავს z^{-1}-ის კოეფიციენტს $\Phi_1(z)$-ის გაშლაში და $\mathring{\varphi}_1(z)$ არის S-ში ჰოლომორფული ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$\mathring{\varphi}_1(z)=O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

შემდეგ, (11) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ

$$\Psi_1(z)=O\left(\frac{1}{|z|}\right). \tag{17}$$

და, მაშასადამე,

$$\psi_1(z)=(a_1+ib_1)\lg z+\beta_1+i\nu_1+\mathring{\psi}_1(z), \tag{18}$$

სადაც $\mathring{\psi}_1(z)$ არის ჰოლომორფული ფუნქცია S-ში, ისეთი, რომ

$$\mathring{\psi}_1(z)=O\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

ხოლო a_1, b_1 ნამდვილი მუდმივებია,

როცა საზღვარზე მოცემულია ძაბვები, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

$$\beta=\gamma=\beta_1=\gamma_1=0, \tag{19}$$

ხოლო როცა გადაადგილებებია მოცემული, შეგვიძლია მხოლოდ დავუშვათ, რომ

$$\beta_1=\gamma_1=0. \tag{19*}$$

ამას გარდა, (9) ფორმულის თანახმად, ადვილად ვრწმუნდებით, რომ გადაადგილებების ცალსახობისათვის აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს ტოლობა

$$2\pi i\,(a_1+ib_1)-2\pi ik\,(a-ib)=0,$$

ან, რაც იგივეა, ტოლობები

$$a_1-ka=0, \quad b_1+kb=0. \tag{20}$$

§ 54. მრუდწირული კოორდინატები. ხშირად მოსახერხებელია გამოვიყენოთ § 30-ში (გვ. 69) განსაზღვრული მრუდწირული კოორდინატები; გავიხსენოთ აქ მათი განსაზღვრება.

ვთქვათ,

$$z=\omega(\zeta) \tag{21}$$

არის ფუნქცია, რომელიც S არეს კონფორმულად ასახავს $|\zeta|<1$ წრეზე და რომელსაც ზემოთ ხშირად ვხმარობდით. ζ სიბრტყის $\rho=\text{const}$ წრეწირებს და $\vartheta=\text{const}$ ნახევარწრფეებს შეესაბამება z სიბრტყის $\rho=\text{const}$ და $\vartheta=\text{const}$ ორთოგონალური წირები, რომელთაც ვღებულობთ საკოორდინატო წირებად.

ნორმალები $\rho=\text{const}$ და $\vartheta=\text{const}$ წირებისადმი, გავლებული შესაბამისად ρ და ϑ კოორდინატების ზრდის მიმართულებით, ქმნიან ღერძთა სისტემას, რომელთა ურთიერთგანლაგება ისეთივეა, როგორც Ox და Oy ღერძებისა (ნახ. 8, გვ. 69).

ვთქვათ, u_ρ, u_ϑ არის ρ და ϑ ღერძებზე გადაადგილების მდგენელები. როგორც § 30-ში, ფორმულა (98) (გვ. 70) გვექნება

$$u_\rho+iu_\vartheta=(u_x+iu_y)\,\overline{\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}}\,\overline{\frac{\zeta}{\rho}}, \tag{22}$$

საიდანაც (9) ფორმულის დახმარებით ვღებულობთ, რომ

$$|\omega'(\zeta)|(u_\rho+iu_\theta)=-\frac{\bar{\zeta}}{\rho}\frac{1}{2\mu}\overline{\omega'(\zeta)}\left[k\varphi(\zeta)+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}\overline{\varphi'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)}\right], \tag{23}$$

სადაც

$$\varphi_1(\omega(\zeta))\equiv\varphi(\zeta),\quad \psi_1(\omega(\zeta))\equiv\psi(\zeta). \tag{24}$$

გადავიდეთ ახლა ძაბვებზე.

ვთქვათ, $\widehat{\rho\rho}$, $\widehat{\vartheta\vartheta}$, $\widehat{\rho\vartheta}$[68] ძაბვის მდგენელებია ρ, ϑ ღერძებზე. ღერძების გარდაქმნის ფორმულები[69]:

$$\widehat{\rho\rho}=X_x\cos^2\alpha+Y_y\sin^2\alpha-2X_y\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta}=X_x\sin^2\alpha+Y_y\cos^2\alpha-2X_y\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\widehat{\rho\vartheta}=(-X_x+Y_y)\sin\alpha\cos\alpha+X_y(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha),$$

სადაც α არის კუთხე ρ ღერძსა და Ox ღერძს შორის (ეს კუთხე იზომება Ox ღერძიდან დადებითი მიმართულებით), გვაძლევს, რომ

$$\widehat{\rho\rho}+\widehat{\vartheta\vartheta}=X_x+Y_y, \tag{25}$$

$$2\widehat{\rho\vartheta}+i(\widehat{\rho\rho}-\widehat{\vartheta\vartheta})=[2X_y+i(X_x-Y_y)]e^{2i\alpha},^{70} \tag{26}$$

ანუ, (10) და (11) ფორმულების თანახმად,

$$\widehat{\rho\rho}+\widehat{\vartheta\vartheta}=2[\Phi_1(z)+\overline{\Phi_1(z)}], \tag{27}$$

$$2\widehat{\rho\vartheta}+i(\widehat{\rho\rho}-\widehat{\vartheta\vartheta})=-2i[\Psi_1(z)+\bar{z}\Phi_1'(z)]e^{2i\alpha}. \tag{28}$$

თუ დავუშვებთ, რომ (იხ. § 52-ის (*j*) ფორმულები)

$$\Phi_1(\omega(\zeta))\equiv\Phi(\zeta),\quad \Psi_1(\omega(\zeta))\equiv\Psi(\zeta), \tag{j}$$

მაშინ

$$e^{i\alpha}=\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}\frac{\zeta}{\rho},\qquad e^{2i\alpha}=\frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\frac{\zeta^2}{\rho^2}$$

ფორმულების თანახმად (გვ. 70), გვექნება

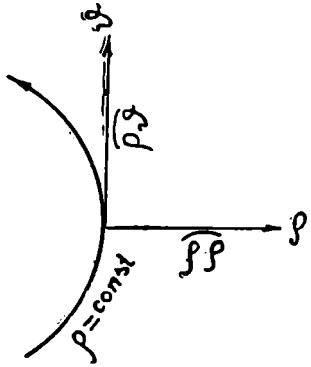
$$\widehat{\rho\rho}+\widehat{\vartheta\vartheta}=2[\Phi(\zeta)+\overline{\Phi(\zeta)}], \tag{27*}$$

$$2\widehat{\rho\vartheta}+i(\widehat{\rho\rho}-\widehat{\vartheta\vartheta})=-\frac{2i\zeta^2}{\overline{\omega'(\zeta)}\rho^2}[\Phi'(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}+\Psi(\zeta)\omega'(\zeta)]. \tag{28*}$$

აქედან ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების განცალკევებით ადვილად მიიღება $\widehat{\rho\rho}$, $\widehat{\vartheta\vartheta}$, $\widehat{\rho\vartheta}$ მნიშვნელობები.

მოვიყვანოთ კიდევ ერთი საჭირო ფორმულა. (27*) და (28*)-ს თანახმად ვღებულობთ, რომ

$$\widehat{\rho\rho}-i\,\widehat{\rho\vartheta}=\Phi(\zeta)+\overline{\Phi(\zeta)}-\frac{\zeta^2}{\rho^2}\cdot\frac{1}{\overline{\omega'(\zeta)}}\left[\Phi'(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}+\Psi(\zeta)\,\omega'(\zeta)\right]. \qquad (29)$$



ნახ. 9

ეს ფორმულა გვაძლევს ნორმალურ ($\widehat{\rho\rho}$) და მხებ ($\widehat{\rho\vartheta}$) მდგენელებს ძალისა, რომელიც მოქმედებს $\rho=\text{const}$ წირის ერთეულოვან სიგრძეზე ρ ღერძის დადებითი მიმართულებით (ნახ. 9). საჭიროა აგრეთვე ფორმულა, რომელიც იძლევა ნებისმიერი წირის ერთეულოვან სიგრძეზე მოქმედი ძალის ნორმალურ და მხებ მდგენელებს. ვთქვათ, N და T ძალის მდგენელებია შესაბამისად ნორმალისა და მხების დადებით მიმართულებებზე; ვუშვებთ, რომ ეს ორი მიმართულება ერთმანეთის მიმართ ისეა განლაგებული, როგორც Ox და Oy ღერძები.

ამ დაშვების შემდეგ, თუ (27) და (28) ფორმულებში $\widehat{\rho\rho}$-ს შევცვლით N-ით და $\widehat{\rho\vartheta}$-ს T-თი, მივიღებთ, რომ

$$N-iT=\Phi_1(z)+\overline{\Phi_1(z)}-\left[\bar{z}\,\Phi_1'(z)+\Psi_1(z)\right]e^{2i\alpha}, \qquad (30)$$

სადაც α აღნიშნავს კუთხეს ნორმალსა და Ox ღერძს შორის, ათვლილს ამ ღერძიდან დადებითი მიმართულებით.

II. ამოცანის ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როცა საზღვარზე მოცემულია ძაბვები. პირველი მეთოდი

ჩვეულებრივ ეს ამოცანა დაიყვანება ძირითად ბიჰარმონიულ ამოცანაზე. როგორც ვნახავთ, ეს დაყვანა ადვილია. მაშასადამე, ჩვენი მეთოდი საშუალებას მოგვცემს ამოვხსნათ ეს ამოცანა წინა თავში განხილული არეებისათვის. ცოტა ქვემოთ, ჩვენ მოვიყვანთ უფრო პირდაპირ მეთოდს, მაგრამ ახლა მითითებულ გზას გავყვებით.

§ 55. სასაზღვრო პირობების გარდაქმნა. სასაზღვრო პირობები შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\cos(n,\ x)-\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\cos(n,\ y)=X_n(s),$$
$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\cos(n,\ x)+\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cos(n,\ y)=Y_n(s). \tag{31}$$

ცხადია, რომ (31) ტოლფასია

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial U}{\partial y}=X_n(s),\qquad \frac{d}{ds}\frac{\partial U}{\partial x}=-Y_n(s) \tag{32}$$

ტოლობებისა. აქედან

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\int_{s_0}^{s} Y_n\,ds_1+\alpha\equiv u(s),$$
$$C\text{-ზე} \tag{33}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y}=\int_{s_0}^{s} X_n\,ds_1+\beta\equiv v(s),$$

სადაც α და β აღნიშნავს მუდმივებს, s_0 არის C საზღვრის ნებისმიერად ფიქსირებული წერტილის რკალური აბსცისი, ხოლო s ცვლადი წერტილის რკალური აბსცისია, ათვლილი დადებითი მიმართულებით (როცა S არე რჩება მარცხნივ).

§ 56. სასრული არე. როცა S არე სასრულია, მაშინ $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, U ცალსახა ფუნქციებია და, (33) ფორმულის თანახმად, უნდა გვქონდეს

$$\int_C X_n\,ds=\int_C Y_n\,ds=0. \tag{34}$$

ამას გარდა, III თავის (30) ტოლობა (გვ. 84), რომელიც შეიძლება

$$\int_C u\,dx+v\,dy=0$$

სახით ჩაიწეროს, ნაწილობითი ინტეგრებით გვაძლევს, რომ

$$\int_C x\,du+y\,dv=0.$$

აქედან, (33) ტოლობების გათვალისწინებით, მიიღება

$$\int_C (xY_n-yX_n)\,ds=0. \tag{35}$$

(34) და (35) პირობები აუცილებელია ამონახსნის არსებობისათვის. ისინი გამოხატავენ იმ ცხად ფაქტს, რომ გარე ძაბვების ტოლქმედი და ტოლქმედი მომენტი ნულის ტოლია.

α და β მუდმივებს შეგვიძლია მივცეთ ნებისმიერი მნიშვნელობები, ვინაიდან U-სათვის $\alpha x+\beta y$ სახის გამოსახულების მიმატება არ ცვლის სხეულის დეფორმაციას.

ვინაიდან $u(s)$, $v(s)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ძირითადი ბიჰარმონიული ამოცანის ამონახსნების არსებობის აუცილებელ პირობებს, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ჩვენი ამოცანა ამ უკანასკნელ ამოცანაზეა დაყვანილი. არსებობს ერთადერთი ამონახსნი[71].

როცა შესაძლებელია კონფორმულად ავსახოთ S არე $|\zeta|<1$ წრეზე $\omega(\zeta)$ რაციონალური ფუნქციის საშუალებით, მაშინ ჩვენი მეთოდი საშუალებას იძლევა გამოვთვალოთ $\varphi(\zeta)$ და $\psi(\zeta)$ ფუნქციები განსაზღვრული ინტეგრალების საშუალებით. ამ ფუნქციების განსაზღვრის შემდეგ, შეგვიძლია დავუბრუნდეთ z ცვლადს (იხ. § 52, გვ. 103) და გამოვთვალოთ ძაბვები და გადაადგილებები (9), (10) და (11) ფორმულების თანახმად.

მაგრამ, საზოგადოდ, გაცილებით უფრო მოსახერხებელია შემოვიტანოთ მრუდწირული კოორდინატები და ჩავატაროთ გამოთვლები (23), (27*) და (28*) ფორმულების მიხედვით.

§ 57. უსასრულო არე. როცა S არე უსასრულოა, (34) და (35) პირობები აუცილებელი არაა.

თუ გავითვალისწინებთ (16), (18) ფორმულებს და (19) პირობას, შეგვიძლია დავწეროთ[72]:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=a\cos 2\theta+b\sin 2\theta+(a+a_1)\lg r-(b+b_1)\theta+\frac{\partial \mathring{U}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=a\sin 2\theta-b\cos 2\theta+(a-a_1)\theta+(b-b_1)\lg r+\frac{\partial \mathring{U}}{\partial y}, \tag{36}$$

სადაც $\mathring{U}$ აღნიშნავს § 33-ის $\mathring{\varphi}_1$ და $\mathring{\psi}_1$ ფუნქციებთან დაკავშირებულ ბიჰარმონიულ ფუნქციას, რომელიც, მაშასადამე, აკმაყოფილებს III თავის (21) პირობებს; ამ ფორმულებში

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\qquad \theta=\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}.$$

(36) ტოლობათა თანახმად, (33) იძლევა, რომ[73]

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_+-\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]_-=\int_C Y_n\,ds=-2\pi(b+b_1),$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_+-\left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_-=-\int_C X_n\,ds=2\pi(a-a_1), \tag{37}$$

სადაც ინტეგრალები აღებულია C-ზე დადებითი მიმართულებით (S არე რჩება მარცხნივ). ეს ფორმულები,

$$a_1=ka,\quad b_1=-kb$$

ტოლობებთან ერთად (იხ. (20)), საშუალებით განსაზღვრავს a, b, a_1, b_1 მუდმივებს; სახელდობრ, თუ (X, Y) არის C საზღვარზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი, მაშინ მივიღებთ:

$$a=\frac{X}{2\pi(k-1)},\quad b=\frac{Y}{2\pi(k-1)},\quad a_1=\frac{kX}{2\pi(k-1)},$$

$$b_1=-\frac{kY}{2\pi(k-1)}. \tag{38}$$

ამასთან, აღვნიშნოთ ამ ფორმულების უშუალო შედეგი: **როცა გარე ძაბვების ტოლქმედი ნული არაა, გადაადგილებები**

არ შეიძლება იყოს შემოსაზღვრული უსასრულობაში: სახელდობრ, ისინი იზრდება, როგორც $\lg r$ [74]. ეს ცხადი გახდება, თუ (38)-ს შევადარებთ (9), (16) და (18) ფორმულებს.

ახლა განვსაზღვროთ $\mathring{U}$ ფუნქცია. (36) და (38) ფორმულები გვაძლევს $\frac{\partial \mathring{U}}{\partial x}$ და $\frac{\partial \mathring{U}}{\partial y}$ წარმოებულების მნიშვნელობებს C საზღვარზე; ეს მნიშვნელობები შეიცავს α, β შესაკრებ მუდმივებს, რომლებიც ისე შეგვიძლია ავირჩიოთ, რომ დაკმაყოფილდეს § 42-ის (31*) პირობები [75]. ვინაიდან ეს პირობები აუცილებელია და საკმარისი ამონახსნთა არსებობისათვის, ამიტომ ჩვენი ამოცანა დაყვანილია ძირითად ბიჰარმონიულ ამოცანაზე და მას აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

მაშასადამე, ჩვენი მეთოდი საშუალებას იძლევა ამოვხსნათ ეს ამოცანა იმ შემთხვევაში, როცა S არე წრეზე რაციონალური ფუნქციის საშუალებით აისახება.

$\varphi(\zeta)$ და $\psi(\zeta)$ ფუნქციების განსაზღვრის შემდეგ, ძაბვებსა და გადაადგილებებს გამოვითვლით, როგორც წინა §-ში.

§ 58. მაგალითები. რადგან განხილული ამოცანა დაყვანილია წინა თავის ამოცანაზე, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ის სავსებით ამოხსნილია ყველა იქ განხილულ შემთხვევაში.

ჩვენ აქ შემოვიფარგლებით §49-ის (57) ფორმულების გამოყენების რამდენიმე მაგალითის განხილვით. ამ თავის უკანასკნელ განყოფილებაში კიდევ ვნახავთ რამდენიმე მაგალითს, რომლებიც ამოხსნილია სხვა მეთოდით.

1°. ელიფსური ხვრელის (ან წრფივი ჭრილის) მქონე უსასრულო ფირფიტის წონასწორობის მდგომარეობა, როცა მისი ნაპირი განიცდის ნორმალურ მუდმივ წნევას.

განვიხილოთ არე, რომელიც წარმოადგენს მთელ უსასრულო სიბრტყეს ელიფსური ხვრელით. ამ შემთხვევაში შესაბამისი ფორმულები მოცემულია წინა თავის § 49-ში (გვ. 97). დავუშვათ, რომ ხვრელის ნაპირი განიცდის ნორმალურ მუდმივ P წნევას.

u, v-ს მნიშვნელობები, რომლებიც მონაწილეობენ § 49-ის (57) ფორმულებში, მოცემულია (33) ფორმულებით (გვ. 109). ამ ფორმულების თანახმად გვექნება

$$u(s) = -\int^{s} Y_{n_1}\, ds_1 = \int^{s} P\cos(n_1,\ y)\, ds_1 = -\int P dx' = -Px',$$

$$v(s) = \int^{s} X_{n_1}\, ds_1 = -\int^{s} P\cos(n_1,\ x)\, ds_1 = -\int P dy' = -Py',$$

სადაც x' და y' აღნიშნავენ C საზღვრის წერტილის კოორდინატებს.

ჩვენ არ დავუმატეთ ნებისმიერი α და β მუდმივები, ვინაიდან u-სა და v-ს მნიშვნელობები თვითონ აკმაყოფილებენ § 49-ის (58) პირობებს. მართლაც, გვაქვს

$$x'=b(a+1)\cos\vartheta, \quad y'=-b(a-1)\sin\vartheta$$

და, მაშასადამე,

$$\int_0^{2\pi} u\,d\vartheta=\int_0^{2\pi} v\,d\vartheta=0.$$

შემდეგ, § 49-ის (57) ფორმულები გვაძლევს:

$$\varphi(\zeta)=-\frac{P}{2\pi i}\int_\gamma \frac{x'+iy'}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta',$$

$$\psi(\zeta)=-\frac{P}{2\pi i}\int_\gamma \frac{x'-iy'}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'-\frac{\zeta(1+a\zeta^2)}{\zeta^2-a}\,\varphi'(\zeta).$$

მაგრამ უკანასკნელი ინტეგრალები ადვილად გამოითვლება. მართლაც, § 49-ის (53) ფორმულის თანახმად, გვაქვს

$$z=x+iy=b\left(\zeta+\frac{a}{\zeta}\right).$$

აქედან C-ს წერტილებისათვის მიიღება

$$x'+iy'=b\left(\zeta'+\frac{a}{\zeta'}\right),$$

$$x'-iy'=b\left(\overline{\zeta'}+\frac{a}{\overline{\zeta'}}\right)=b\left(\frac{1}{\zeta'}+a\zeta'\right).$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ წინა ინტეგრალებში და გამოვიყენებთ § 4-ის ფორმულებს, გვექნება

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{x'+iy'}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'=b\zeta, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{x'-iy'}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'=ab\zeta$$

და, მაშასადამე,

$$\varphi(\zeta)=-Pb\zeta, \quad \psi(\zeta)=Pb\left[\frac{\zeta(1+a\zeta^2)}{\zeta^2-a}-a\zeta\right].$$

φ და ψ ფუნქციების მონახვის შემდეგ გამოვთვლით ძაბვებს შემდეგი ფორმულების მიხედვით (§ 54):

$$\widehat{\rho\rho}-i\widehat{\rho\vartheta}=\Phi(\zeta)+\overline{\Phi(\zeta)}-\frac{\zeta^2}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}[\Phi'(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}+$$

$$+\Psi(\zeta)\,\omega'(\zeta)],\quad \widehat{\rho\rho}+\widehat{\vartheta\vartheta}=2\,[\Phi(\zeta)+\overline{\Phi(\zeta)}], \tag{A}$$

სადაც $\omega(\zeta)$, $\Phi(\zeta)$ და $\Psi(\zeta)$ უნდა შეიცვალოს მათი შემდეგი მნიშვნელობებით:

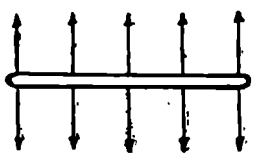
$$\omega(\zeta)=b\left(\zeta+\frac{a}{\zeta}\right),\qquad \Phi(\zeta)=\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)},\qquad \Psi(\zeta)=\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}.$$

გადაადგილებები გამოითვლება § 54-ის (23) ფორმულის მიხედვით.

ამრიგად, ძაბვებისა და გადაადგილებების ეფექტური პოვნა მოითხოვს სრულიად ელემენტარულ გამოთვლებს. შემოვისაზღვროთ ამ სიდიდეების პოვნით იმ ზღვრულ შემთხვევაში, როცა $a\to 1$. ამნაირად ჩვენ მივიღებთ უსასრულო ფირფიტის დრეკადი წონასწორობის ამოცანის ამოხსნას, როცა მას აქვს ჭრილი

$$-2b\leqslant x\leqslant 2b,\quad y=0,$$

რომლის ნაპირები განიცდის მუდმივ P წნევას (ნახ. 10).



ნახ. 10

განხილულ შემთხვევაში გვექნება

$$\Phi(\zeta)=-\frac{P\zeta^2}{\zeta^2-1},\quad \Psi(\zeta)\,\omega'(\zeta)=\psi'(\zeta)=-2Pb\,\frac{\zeta^2+1}{(\zeta^2-1)^2}.$$

ამის შემდეგ ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\widehat{\rho\rho}-i\widehat{\rho\vartheta}=P\,\frac{\zeta^2+\overline{\zeta}^2-2\zeta^2\overline{\zeta}^2}{(\zeta^2-1)(\overline{\zeta}^2-1)}+2P\,\frac{\zeta^2\overline{\zeta}^2}{\rho^2}\,\frac{\zeta^2+1-\zeta\overline{\zeta}^{-1}(\overline{\zeta}^2+1)}{(\zeta^2-1)^2(\overline{\zeta}^2-1)}.$$

ცხადია, პირველი წილადის მნიშვნელი ნამდვილია; იმისათვის, რომ მეორე წილადის მნიშვნელი ნამდვილი გავხადოთ, საკმარისია მისი მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ $(\bar{\zeta}^2-1)$-ზე. თუ, ამის შემდეგ ζ-ს შევცვლით მისი $\rho e^{i\vartheta}$ მნიშვნელობით და თუ განვაცალებთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, მარტივი გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ $\widehat{\rho\rho}$-სა და $\widehat{\rho\vartheta}$-ს მნიშვნელობებს. $\widehat{\vartheta\vartheta}$-ს მნიშვნელობა მოიცემა (A)-ს მეორე ფორმულით.

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\widehat{\rho\rho}=-P+\frac{P(1-\rho^2)^3(1+\rho^2)}{(\rho^4-2\rho^2\cos 2\vartheta+1)^2},$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta}=-P+\frac{P(1-\rho^4)(\rho^4+2\rho^2+1-4\rho^2\cos 2\vartheta)}{(\rho^4-2\rho^2\cos 2\vartheta+1)^2},$$

$$\widehat{\rho\vartheta}=-\frac{2P\rho^2(1-\rho^2)^2\sin 2\vartheta}{(\rho^4-2\rho^2\cos 2\vartheta+1)^2}.$$

(23) ფორმულის (გვ. 107) თანახმად[76], გადაადგილებებისათვის გვაქვს

$$|\omega'(\zeta)|(u_\rho+iu_\vartheta)=-\frac{1}{2\mu}\frac{Pb^2}{\rho}[2-(1+k)\rho^2-e^{-2i\vartheta}+ke^{2i\vartheta}].$$

აქედან, თუ $|\omega'(\zeta)|$-ს შევცვლით

$$|\omega'(\zeta)|=\frac{b}{\rho^2}\sqrt{\rho^4-2\rho^2\cos 2\vartheta+1}$$

მნიშვნელობით, გვექნება

$$u_\rho=\frac{Pb\rho}{2\mu}\frac{(1-k)\cos 2\vartheta+(1+k)\rho^2-2}{\sqrt{\rho^4-2\rho^2\cos 2\vartheta+1}},$$

$$u_\vartheta=-\frac{Pb\rho}{2\mu}\frac{(1+k)\sin 2\vartheta}{\sqrt{\rho^4-2\rho^2\cos 2\vartheta+1}}.$$

2°. ს ი ბ რ ტ ყ უ ე ლ ი ფ ს უ რ ი ხ ვ რ ე ლ ი თ, რ ო მ ლ ი ს ნ ა პ ი რ ი გ ა ნ ი ც დ ი ს მ ხ ე ბ ი მ უ დ მ ი ვ ი T ძ ა ლ ი ს მ ო ქ მ ე დ ე ბ ა ს.

ეს შემთხვევა სავსებით ანალოგიურია წინა შემთხვევისა. აქ მივიღებთ, რომ

$$u(s)=-\int_0^s T\cos(s_1,\ y)\,ds_1=-\int Tdy'=-Ty',$$

$$v(s)=\int^{s} T\cos(s_1,\ x)\,ds_1=\int Tdx'=Tx'.$$

მარტივი გამოთვლების შემდეგ, როგორც წინა შემთხვევაში, გვექნება

$$\varphi(\zeta)=Tbi\zeta,\qquad \psi(\zeta)=-Tbi\left(a\zeta+\frac{\zeta(1+a\zeta^2)}{\zeta^2-a}\right),$$

$$\widehat{\rho\rho}=T\rho^2(1-\rho^2)\,\frac{2a[\rho^4-\rho^2+2a^2-2a\rho^2\cos 2\vartheta]\sin 2\vartheta}{(\rho^4-2a\rho^2\cos 2\vartheta+a^2)^2},$$

$$\widehat{\vartheta\vartheta}=T\rho^4\,\frac{2a[\rho^4+2a^2+1-2a(1+\rho^2)\cos 2\vartheta]\sin 2\vartheta}{(\rho^4-2a\rho^2\cos 2\vartheta+a^2)^2},$$

$$\widehat{\rho\vartheta}=T\rho^2-T\rho^2(1-\rho^2)(a^2-\rho^4)\,\frac{1-2a\cos 2\vartheta+\rho^2}{(\rho^4-2a\rho^2\cos 2\vartheta+a^2)^2},$$

$$u_\rho=\frac{Tb\rho}{2\mu}\,\frac{[-2a\rho^2+a(1-k)]\sin 2\vartheta}{\sqrt{\rho^4-2a\rho^2\cos 2\vartheta+a^2}},$$

$$u_\vartheta=\frac{Tb\rho}{2\mu}\,\frac{[-2a\rho^2+a(1+k)]\cos 2\vartheta+a^2-1+(1-k)\rho^2}{\sqrt{\rho^4-2a\rho^2\cos 2\vartheta+a^2}}.$$

ამ ფორმულებიდან შეგვიძლია გადავიდეთ წრიული საზღვრის ცნობილ შემთხვევაზე. ამისათვის საკმარისია a მივასწრაფოთ უსასრულობისაკენ და b — ნულისაკენ ისეთნაირად, რომ ab ნამრავლი ყოველთვის წრიული ხვრელის R რადიუსის ტოლი დარჩეს,

$$ab=R.$$

ზღვარზე გადასვლით მიიღება, რომ

$$\widehat{\rho\vartheta}=T\rho^2,\qquad \widehat{\rho\rho}=\widehat{\vartheta\vartheta}=0,$$

$$u_\rho=0,\qquad u_\vartheta=\frac{TR}{2\mu}\,\rho.$$

არ უნდა დაგვავიწყდეს, რომ ρ და ϑ დამხმარე სიბრტყის წერტილის პოლარული კოორდინატებია. ფირფიტის $(x,\ y)$ წერტილთა სიბრტყის r და θ პოლარულ კოორდინატებზე გადასასვლელად უნდა დავუშვათ, რომ

$$\rho=\frac{R}{r},\qquad \vartheta=-\theta.$$

ცხადია, რომ საზოგადოდ,

$$\widehat{\rho\rho}=\widehat{rr},\quad \widehat{\vartheta\theta}=\widehat{\theta\theta},\quad \widehat{\rho\vartheta}=\widehat{r\theta},$$

$$u_\rho=-u_r,\quad u_\theta=-u_\theta.$$

მაშასადამე, ჩვენს შემთხვევაში გვექნება

$$\widehat{r\theta}=\frac{TR^2}{r^2},\qquad \widehat{rr}=\widehat{\theta\theta}=0,$$

$$u_r=0,\qquad u_\theta=-\frac{TR^2}{2\mu r}.$$

III. შემთხვევა, როცა საზღვარზე მოცემულია გადაადგილებები

§ 59. სასაზღვრო პირობა. როცა C საზღვარზე მოცემულია u_x და u_y-ის მნიშვნელობები, მაშინ ამოცანა დაიყვანება $\varphi_1(z)$ და $\psi_1(z)$ ფუნქციების განსაზღვრაზე (იხ. § 52-ის (9) ფორმულა, გვ. 103).

ამ ფორმულიდან ვღებულობთ შემდეგ ორ ტოლობას C-ზე:

$$k\varphi_1(z)+z\overline{\varphi_1'(z)}+\overline{\psi_1(z)}=-2\mu(u_x+iu_y),$$

$$k\overline{(\varphi_1(z)}+\bar{z}\varphi_1'(z)+\psi_1(z)=-2\mu(u_x-iu_y), \tag{39}$$

სადაც u_x, u_y აღნიშნავს C საზღვრის s რკალის მოცემულ ფუნქციებს.

თუ ახლა, ისე, როგორც წინა პარაგრაფებში, შემოვიტანთ ζ ცვლადს, რომელიც z-თან დაკავშირებულია

$$z=\omega(\zeta)$$

ტოლობით, მაშინ ძველ აღნიშვნებში გვექნება:

$$k\varphi(\zeta')+\frac{\omega(\zeta')}{\overline{\omega'(\zeta')}}\overline{\varphi'(\zeta')}+\overline{\psi(\zeta')}=-2\mu(u_x+iu_y),$$

$$k\overline{\varphi(\zeta')}+\overline{\frac{\omega(\zeta')}{\omega'(\zeta')}}\varphi'(\zeta')+\psi(\zeta')=-2\mu(u_x-iu_y). \tag{40}$$

თუ (40) ტოლობებს შევადარებთ III თავის (43) პირობებს (გვ. 88), ვნახავთ, რომ ჩ ვ ე ნ ი მ ე თ ო დ ი ს თ ვ ა ლ ს ა ზ რ ი ს ი თ ეს ორი პირობა სავსებით ანალოგიურია და, მაშასადამე, III თავში გადმოცემული მეთოდი გამოიყენება ყოველგვარი მოდიფიკაციის გარეშე.

გავაკეთოთ მხოლოდ რამდენიმე შენიშვნა.

ს ა ს ა რ უ ლ ი ა რ ი ს შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა შ ი . წინასწარ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

$$\psi(0)=0, \tag{41}$$

როგორც ეს ითქვა § 53-ში (გვ. 104).

ამოცანას ყოველთვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი, როგორც ეს ცნობილია დრეკადობის თეორიიდან.

რ ო ც ა S ა რ ე უ ს ა ს ა რ უ ლ ო ა, მაშინ ადვილი დასამტკიცებელია, რომ § 51-ის შეთანხმებების ძალით, ამოცანა რჩება განუსაზღვრელი. პირიქით, ის ხდება განსაზღვრული, როცა დავუშვებთ, რომ

1⁰. ან გადაადგილებებია შემოსაზღვრული უსასრულობაში,

2⁰. ან ცნობილია საზღვარზე მოდებული ძალების ტოლქმედი.

პირველ შემთხვევაში (16) და (18) ფორმულებში[77] (იხ. გვ. 105) შეგვიძლია დავუშვათ

$$a=b=a_1=b_1=\beta_1=\gamma_1=0;$$

მაშინ φ_1 და ψ_1 ფუნქციები ჰოლომორფული იქნება S-ში და, გარდა ამისა,

$$\psi_1(z)=O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

აქედან ვასკვნით, რომ

$$\psi(0)=0, \tag{41*}$$

როგორც სასრული არის შემთხვევაში.

მეორე შემთხვევა შეიძლება დაყვანილ იქნეს პირველზე § 57-ის ანალოგიური ხერხის საშუალებით. a, b, a_1, b_1 მუდმივები მოიცემა იმავე §-ის (38) ფორმულებით (გვ. 111).

§ 60. მაგალითი 1. წრიული არე. დავუშვათ, რომ γ წრის რადიუსი ე რ თ ი ს ტოლია. მაშინ $\omega(\zeta)=\zeta$ და (40) პირობები ასეთ სახეს ღებულობს:

$$\begin{gathered} k\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)+\frac{1}{\zeta'}\,\varphi'(\zeta)+\psi'(\zeta')=-2\mu(u_x-iu_y), \\ k\varphi(\zeta')+\zeta'\,\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)+\overline{\psi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)=-2\mu(u_x+iu_y). \end{gathered} \tag{42}$$

ვთქვათ,

$$\begin{gathered} \varphi(\zeta)=\alpha_0+i\alpha_0'+(\alpha_1+i\alpha_1')\,\zeta+(\alpha_2+i\alpha_2')\,\zeta^2+\ldots, \\ \psi(0)=0 \end{gathered} \tag{43}$$

(იხ. (41) პირობა).

(42) ტოლობების ორივე მხარე გავამრავლოთ $\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}$-ზე და ავიღოთ ინტეგრალი γ-ს გასწვრივ; § 4-ის ფორმულების თანახმად გვექნება

$$k\varphi(\zeta)+(\alpha_1-i\alpha_1')\zeta+2(\alpha_2+i\alpha_2')=\frac{\mu}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{u_x+iu_y}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta', \qquad (44)$$

$$\frac{1}{\zeta}\varphi'(\zeta)+\psi(\zeta)-\frac{\alpha_1+i\alpha_1'}{\zeta}+k(\alpha_0-i\alpha_0')=-\frac{\mu}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{u_x-u_y}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'. \qquad (45)$$

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $\alpha_0+i\alpha_0'$, $\alpha_1+i\alpha_1'$, $\alpha_2+i\alpha_2'$ მართლაც $\varphi(\zeta)$-ს გაშლის კოეფიციენტებია.

ამისათვის საკმარისია, რომ (45)-ის ორივე მხარე გავშალოთ ζ-ს ხარისხების მიხედვით, შევჩერდეთ მეორე რიგის წევრებზე და შევადაროთ კოეფიციენტები. გვექნება

$$2(\alpha_2-i\alpha_2')+k(\alpha_0+i\alpha_0')=-\frac{\mu}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(u_x+iu_y)\,d\vartheta,$$

$$(\alpha_1-i\alpha_1')+k(\alpha_1+i\alpha_1')=-\frac{\mu}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(u_x+iu_y)\,e^{-i\vartheta}\,d\vartheta, \qquad (46)$$

$$2k(\alpha_2+i\alpha_2')=-\frac{\mu}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(u_x+iu_y)\,e^{-2i\vartheta}\,d\vartheta.$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$k(\alpha_0+i\alpha_0')=-\frac{\mu}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}(u_x+iu_y)\,d\vartheta+$$

$$+\frac{\mu}{\pi k}\int\limits_0^{2\pi}(u_x-iu_y)\,e^{2i\vartheta}\,d\vartheta,$$

$$(46^*)$$

$$\alpha_1+i\alpha_1'=\frac{\mu}{\pi(k^2-1)}\int\limits_0^{2\pi}(u_x-iu_y)\,e^{i\vartheta}\,d\vartheta+$$

$$+\frac{k\mu}{\pi(1-k^2)}\int_0^{2\pi}(u_x+iu_y)\,e^{-i\vartheta}\,d\vartheta,$$

$$2(\alpha_2-i\alpha_2')=-\frac{\mu}{\pi k}\int_0^{2\pi}(u_x-iu_y)\,e^{2i\vartheta}\,d\vartheta.$$

უნდა შემოწმდეს კიდევ $\psi(0)=0$ პირობა, ვინაიდან ჩვენ ის გამოვიყენეთ, როცა გამოვიყვანეთ (44) და (45).

ამისათვის (44)-ში დავუშვათ $\zeta=0$; თუ შევნიშნავთ, რომ

$$\lim_{\zeta\to 0}\left[\frac{1}{\zeta}\,\varphi'(\zeta)-\frac{\alpha_1+i\alpha_1'}{\zeta}\right]=2(\alpha_2+i\alpha_2'),$$

მიიღება ტოლობა

$$2(\alpha_2+i\alpha_2')+k(\alpha_0-i\alpha_0')=-\frac{\mu}{\pi}\int_0^{2\pi}(u_x-iu_y)\,d\vartheta.$$

მაგრამ ეს ემთხვევა (46) ტოლობებიდან პირველს, რომელიც უკვე დაკმაყოფილებულია.

ამგვარად, ჩვენი ამოცანა ამოხსნილია; (44)-დან განვსაზღვრავთ $\varphi(\zeta)$-ს და შემდეგ (45)-დან მივიღებთ $\psi(\zeta)$-ს.

§ 61. მაგალითი 2. სიბრტყე ელიფსური ხვრელით. ამ შემთხვევაში

$$\omega(\zeta)\equiv b\left(\zeta+\frac{a}{\zeta}\right)$$

და სასაზღვრო პირობები ასეთ სახეს იღებს (შდრ. § 49):

$$k\varphi(\zeta')+\frac{\zeta'^2+a}{\zeta'(1-a\zeta'^2)}\,\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)+\overline{\psi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)=-2\mu(u_x+iu_y),$$

$$k\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)+\frac{\zeta'(1+a\zeta'^2)}{\zeta'^2-a}\,\varphi'(\zeta')+\psi(\zeta')=-2\mu(u_x-iu_y). \tag{47}$$

ვთქვათ, რომ გადაადგილებები შემოსაზღვრულია უსასრულობაში. მაშინ, როგორც ეს ნაჩვენები იყო § 59-ში, შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

$$\varphi(\zeta)=(\alpha_0+i\alpha_0')+(\alpha_1+i\alpha_1')\,\zeta+\ldots,\quad \psi(0)=0. \tag{48}$$

(47) ტოლობების ორივე მხარე გავამრავლოთ $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}$-ზე და ავიღოთ ინტეგრალი γ-ს გასწვრივ; გვექნება

$$k\varphi(\zeta)=-\frac{\mu}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{u_x+iu_y}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta',$$

$$\frac{\zeta(1+a\zeta^2)}{\zeta^2-a}\varphi'(\zeta)+\psi(\zeta)+k(\alpha_0-i\alpha_0')=-\frac{\mu}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{u_x-iu_y}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'.$$

უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარის მუდმივი წევრების შედარება გვაძლევს, რომ

$$k(\alpha_0+i\alpha_0')=-\frac{\mu}{\pi}\int_0^{2\pi}(u_x+iu_y)\,d\vartheta.$$

აქედან

$$k(\alpha_0-i\alpha_0')=-\frac{\mu}{\pi}\int_0^{2\pi}(u_x-iu_y)\,d\vartheta=-\frac{\mu}{\pi i}\int_{\gamma}(u_x-iu_y)\frac{d\zeta'}{\zeta'}.$$

თუ ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ წინა ფორმულებში, გამოვა, რომ

$$k\varphi(\zeta)=-\frac{\mu}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{u_x+iu_y}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta',$$

$$\psi(\zeta)=-\frac{\zeta(1+a\zeta^2)}{\zeta^2-a}\varphi'(\zeta)-\frac{\mu}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{u_x-iu_y}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'+ \tag{49}$$

$$+\frac{\mu}{\pi i}\int_{\gamma}(iu_x-iu_y)\frac{d\zeta'}{\zeta'}.$$

ცხადია, რომ $\psi(0)=0$ პირობა დაკმაყოფილებულია.

მარტივი მაგალითის სახით განვიხილოთ რ. რ. ვ ე ბ ი ს მიერ დასმული ამოცანა[78]: დავუშვათ, რომ ე ლ ი ფ ს უ რ ი ხ ვ რ ე ლ ი ს ნ ა პ ი რ ი გ ა ნ ი ც დ ი ს ს ა კ მ ა რ ი ს ა დ მ ც ი რ ე ε-მ ყ ა რ ბ რ უ ნ ვ ა ს ე ლ ი ფ ს უ რ ი ც ე ნ ტ რ ი ს გ ა რ შ ე მ ო:

$$u_x=-\varepsilon y',\quad u_y=\varepsilon x'\qquad C\text{-ზე};$$

განვსაზღვროთ სხეულის დეფორმაცია.

ცხადია, რომ C-ზე გვაქვს

$$u_x+iu_y=i\varepsilon(x'+iy'),$$

ან კიდევ

$$u_x+iu_y=i\varepsilon\omega(\zeta')=i\varepsilon b\left(\zeta'+\frac{a}{\zeta'}\right),$$

$$u_x-iu_y=-i\varepsilon\omega(\zeta')=-i\varepsilon b\left(\frac{1}{\zeta'}+a\zeta'\right).$$

თუ ამ გამოსახულებებს ჩავსვამთ (49)-ში, თითქმის გამოთვლების გარეშე მივიღებთ, რომ

$$\varphi(\zeta)=-\frac{2\mu b\varepsilon i}{k}\zeta,\quad \psi(\zeta)=2\mu b\varepsilon i\left[a\zeta+\frac{1}{k}\frac{\zeta(1+a\zeta^2)}{\zeta^2-a}\right].$$

$\varphi(\zeta)$ და $\psi(\zeta)$ ფუნქციათა ეს მნიშვნელობები ჩავსვათ § 54-ის (23) ფორმულაში (გვ. 107). გვექნება

$$|\omega'(\zeta)|(u_\rho-iu_\vartheta)=-\frac{ib^2\varepsilon}{\rho}\left[a(\zeta^2-a)+\frac{1}{k}(1+a\zeta^2)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{k}\frac{\zeta}{\bar\zeta}(\bar\zeta^2-a)+\frac{\bar\zeta}{\zeta}(\zeta^2-a)\right].$$

აქედან, ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების განცალკევების შემდეგ

$$|\omega'(\zeta)|u_\rho=\frac{2ab^2\varepsilon}{\rho}\frac{\mu}{\lambda+3\mu}\left(\rho^2+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\right)\sin 2\vartheta,$$

$$|\omega'(\zeta)|u_\vartheta=\frac{b^2(1-a^2)\varepsilon}{\rho}+\frac{2ab^2\varepsilon}{\rho}(\rho^2-1)\left(\frac{\mu}{\lambda+3\mu}\cos 2\vartheta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a}\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+3\mu}\right),$$

სადაც

$$|\omega'(\zeta)|=\frac{b}{\rho^2}\sqrt{\rho^4-2a\rho^2\cos 2\vartheta+a^2}$$

უსასრულობაში გადაადგილებები ნულის ტოლია, რადგან, როცა $\zeta=0$, $\varphi(0)=0$ და $\psi(0)=0$.

თუ დავუშვებთ, კერძოდ, რომ $a=1$, მივიღებთ ამონახსნს მთელი სიბრტყისათვის, რომელიც გაჭრილია წრფის სეგმენტის გასწვრივ. ამო-

ცანის პირობები დაახლოებით შეესაბამება შემდეგი სახის დეფორმაციას: უსასრულო დრეკად ფირფიტაში გაკეთებულ თხელ საკეტში ვათავსებთ სახრახნის ბოლოს და მას ვაბრუნებთ საკმარისად მცირე ε კუთხით.

IV. შემთხვევა, როცა საზღვარზე მოცემულია ძაბვები. მეორე მეთოდი

§ 62. თუ საკითხი ეხება სხეულის დრეკადი წონასწორობის მდგომარეობის განსაზღვრას, როცა მოცემულია ძალები მის საზღვარზე (ეს შემთხვევა უკვე იყო განხილული ამ თავის II განყოფილებაში), ხშირად უფრო მოსახერხებელია უშუალოდ განვსაზღვროთ $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ ფუნქციები და არა φ და ψ ფუნქციები.

მართლაც, Φ და Ψ ფუნქციებით ძაბვები უფრო მარტივად გამოისახება, ვიდრე φ და ψ ფუნქციებით, როგორც ეს ჩანს (10) და (11) ფორმულებიდან. ამას გარდა, როგორც ვნახავთ, სასაზღვრო პირობები Φ და Ψ ფუნქციებისათვის უფრო მარტივია, ვიდრე წინა შემთხვევაში, ვინაიდან მოცემული სიდიდეები $X_n(s)$, $Y_n(s)$ მასში მონაწილეობენ § 55-ის (33) ინტეგრალების გამოყენების გარეშე (გვ. 109).

ამ მიზეზის გამო ჩვენ აქ მოვიტანთ მეთოდს, რომელიც საშუალებას იძლევა განისაზღვროს Φ და Ψ ფუნქციები φ და ψ ფუნქციების დახმარების გარეშე. ეს მეთოდი და აგრეთვე წინა მეთოდი გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როცა S არე აისახება წრეზე რაციონალური ფუნქციის საშუალებით

ამისათვის გამოვიყენებთ § 54-ში შემოტანილ მრუდწირულ კოორდინატებს.

სასაზღვრო პირობას უშუალოდ იძლევა § 54-ის (29) ფორმულა (გვ. 108), სადაც უნდა დავუშვათ, რომ

$$\zeta=\zeta', \quad \rho=1.$$

გვექნება

$$\Phi(\zeta')+\overline{\Phi(\zeta')}-\frac{\zeta'^2}{\overline{\omega'(\zeta')}}\overline{[\omega(\zeta')\Phi'(\zeta')+\omega'(\zeta')\Psi(\zeta')]}=\widehat{\rho\rho}-i\widehat{\rho\vartheta} \quad \gamma\text{-ზე}. \tag{50}$$

ამ ფორმულაში $\widehat{\rho\rho}$ და $\widehat{\rho\vartheta}$ არიან γ წრეწირზე მოცემული ფუნქციები: შესაბამისად S-ის C საზღვრის ერთეულოვან სიგრძეზე მოქმედი ძალის ნორმალური და მხები მდგენელები; C საზღვარი შეესაბამება γ წრეწირს; $\widehat{\rho\rho}$ და $\widehat{\rho\vartheta}$ სიდიდეები γ წრეწირის ϑ რკალის სავსებით განსაზღვრული ფუნქციებია.

(50) ტოლობას შეიძლება მიეცეს შემდეგი სახე:

$$\Phi(\zeta')+\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\frac{\zeta'^2}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}\left[\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\Phi'(\zeta')+\omega'(\zeta')\Psi(\zeta')\right]=$$

$$=\widehat{\rho\rho}-i\widehat{\rho\vartheta}\qquad \gamma\text{-ზე.} \tag{51}$$

ვთქვათ, $p(\zeta)$ არის ისეთი პოლინომი, რომ

$$\frac{p(\zeta)}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\quad \text{და}\quad p(\zeta)\frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$$

რაციონალურ ფუნქციებს არ აქვთ პოლუსი γ-ს შ ი გ ნ ი თ, გარდა, შესაძლოა, $\zeta=0$ წერტილისა.

მაშინ

$$\frac{\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}{\overline{\omega}'(\zeta)},\qquad \bar{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

ფუნქციებს არ ექნებათ პოლუსები γ-ს გ ა რ ე თ გარდა, შესაძლოა, $\zeta=\infty$ წერტილისა.

თუ (51) ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $p(\zeta')$-ზე, მივიღებთ, რომ

$$p(\zeta')\Phi(\zeta')+p(\zeta')\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)-\zeta'^2\omega'(\zeta')\frac{p(\zeta')}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}\Psi(\zeta')-$$

$$-\zeta'^2\frac{p(\zeta')\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}\Phi'(\zeta')=p(\zeta')(\widehat{\rho\rho}-i\widehat{\rho\vartheta})\quad \gamma\text{-ზე.} \tag{52}$$

აქედან, თუ გადავალთ კომპლექსურად შეუღლებულ სიდიდეებზე, გვექნება:

$$\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\bar{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)+\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\Phi(\zeta')-\frac{1}{\zeta'^2}\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\frac{\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}{\omega'(\zeta')}\bar{\Psi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)-$$

$$-\frac{1}{\zeta'^2}\frac{\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\omega(\zeta')}{\omega'(\zeta')}\bar{\Phi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)=\overline{p(\zeta')}\,\widehat{(\rho\rho+i\rho\vartheta)}\ \gamma\text{-ზე.} \qquad (53)$$

ამ ორი უკანასკნელი ტოლობის მიმართ მოვიქცეთ ისე, როგორც წინა შემთხვევაში; სახელდობრ, მათი ორივე მხარე გავამრავლოთ

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}$$

სიდიდეზე, სადაც ζ აღნიშნავს წერტილს γ-ს შ ი გ ნ ი თ, და ავიღოთ ინტეგრალი γ-ს გასწვრივ. როგორც § 45-ში, მივიღებთ, რომ შესაბამისად:

$$p(\zeta)\Phi(\zeta)-\zeta^2 p(\zeta)\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\Phi'(\zeta)-\zeta^2 p(\zeta)\frac{\omega'(\zeta)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\Psi(\zeta)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{p\,\widehat{(\rho\rho-i\rho\vartheta)}}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'+T(\zeta), \qquad (52^*)$$

$$\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\Phi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\bar{p}\,\widehat{(\rho\rho+i\rho\vartheta)}}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta'+T_1(\zeta), \qquad (53^*)$$

სადაც $T(\zeta)$ და $T_1(\zeta)$ შემდეგი სახის რაციონალური ფუნქციებია:

$$\frac{C_{-k}}{\zeta^k}+\frac{C_{-k+1}}{\zeta^{-k+1}}+\ldots+C_0+\ldots+C_l\zeta^l;$$

აქ C-ები არის ζ-ს ხარისხების მიხედვით $\Phi(\zeta)$ და $\Psi(\zeta)$ ფუნქციების გაშლების კოეფიციენტების სასრული რაოდენობის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების ადვილად შესადგენი წრფივი კომბინაციები. ეს უცნობი კოეფიციენტები განისაზღვრება III თავის § 46-ის სავსებით ანალოგიური ხერხით.

(53*) ფორმულა მოგვცემს $\Phi(\zeta)$-ს მნიშვნელობას და შემდეგ (52*) ფორმულა მოგვცემს $\Psi(\zeta)$-ს.

§ 63. შენიშვნები. მუდმივების განსაზღვრისას უნდა გავითვალისწინოთ ქვემოთ მოყვანილი შენიშვნები:

1°. *როცა S არე სასრულია*, $\Phi(\zeta)$ ფუნქცია შეიცავს წმინდა წარმოსახვით შესაკრებ მუდმივს, რომელიც ჩვენს განკარგულებაშია. მაგალითად, შეგვიძლია დავუშვათ

$$\operatorname{Re}[i\Phi(0)]=0. \tag{54}$$

2°. *როცა S არე უსასრულოა*, უნდა დავუშვათ

$$\Phi(0)=\Psi(0)=0; \tag{54*}$$

იხ. გვ. 105, (15) და (17) ფორმულები.

შემდეგ, უნდა გავითვალისწინოთ გადაადგილებების ცალსახობის პირობა. ეს პირობა გამოისახება (20) ფორმულების საშუალებით (იხ. გვ. 106). მაგრამ ეს ფორმულები შეიცავს $\Phi_1(z)$ და $\Psi_1(z)$ ფუნქციებს. ჩვენ ახლა მათ გამოვსახავთ $\Phi(\zeta)$ და $\Psi(\zeta)$ ფუნქციების საშუალებით. $\zeta=0$ წერტილის მიდამოში გვაქვს

$$\Phi(\zeta)=(\alpha_1+i\alpha_1')\,\zeta+\ldots,\quad \Psi(\zeta)=(\beta_1+i\beta_1')\,\zeta+\ldots, \tag{55}$$

სადაც α და β ნამდვილი მუდმივებია[79].

მეორე მხრივ (§ 53, გვ. 105)

$$\Phi_1(z)=\varphi_1'(z)=\frac{a+ib}{z}+\ldots,\qquad \Psi_1(z)=\frac{a_1+ib_1}{z}+\ldots.$$

რადგან

$$z=\omega(\zeta)=\frac{c}{\zeta}+\text{ჰოლომორფული ფუნქცია},$$

ამიტომ

$$\Phi(\zeta)\equiv\Phi_1(\omega(\zeta))=\frac{a+ib}{c}\,\zeta+\ldots,\qquad \Psi(\zeta)=\frac{a_1+ib_1}{c}\,\zeta+\ldots.$$

აქედან

$$a+ib=(\alpha_1+i\alpha_1')\,c,\quad a_1+ib_1=(\beta_1+i\beta_1')\,c.$$

გადაადგილებების ცალსახობის პირობა, რომელსაც ჰქონდა სახე

$$a_1+ib_1=k\,(a-ib),$$

ახლა შემდეგ სახეს იღებს:

$$(\beta_1+i\beta_1')\,c=k\,(\alpha_1-i\alpha_1')\,\bar{c}. \tag{56}$$

აქედან, როცა c ნამდვილია, გვექნება

$$\beta_1+i\beta_1'=k\,(\alpha_1-i\alpha_1'). \tag{56*}$$

§ 64. მაგალითები. გადმოცემული მეთოდი განსაკუთრებით გამოსადეგია გამოყენებებისათვის იმ შემთხვევაში, როცა საზღვარზე მოქმედ ძალებს შორის არიან დისკრეტულ წერტილებში კონცენტრირებული ძალები.

წრიულ არესთან დაკავშირებით, მაგალითებს ნახავთ კ ო ლ ო ს ო ვ ი ს ა და ჩემს რუსულ ენაზე გამოქვეყნებულ სტატიაში (პეტროგრადის ელექტროტექნიკური ინსტიტუტის ჟურნალი «Известия»..., 1915 წ., XII ტ.). ჩვენ აქ შემოვიფარგლებით ელიფსური ხვრელის მქონე უსასრულო სიბრტყის შემთხვევის განხილვით. ამ შემთხვევაში გვექნება (იხ. § 49, გვ. 96)

$$\omega(\zeta)=b\left(\zeta+\frac{a}{\zeta}\right).$$

(52), (53) ფორმულები, სადაც შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $p(\zeta)=1-a\zeta^2$, ასე გარდაიქმნებიან

$$(1-a\zeta'^2)\,\Phi(\zeta')+(1-a\zeta^2)\,\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)-(\zeta'^2-a)\,\Psi(\zeta')-$$

$$-\zeta'(1+a\zeta'^2)\,\Phi'(\zeta')=(1-a\zeta'^2)\,(\widehat{\rho\rho}-i\widehat{\rho\vartheta}),$$

$$\left(1-\frac{a}{\zeta'^2}\right)\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)+\left(1-\frac{a}{\zeta'^2}\right)\Phi(\zeta')-\left(\frac{1}{\zeta'^2}-a\right)\overline{\Psi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)-$$

$$-\frac{1}{\zeta'}\left(1+\frac{a}{\zeta'^2}\right)\overline{\Phi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)=(1-a\overline{\zeta}'^2)\,(\widehat{\rho\rho}+i\widehat{\rho\vartheta}).$$

უკანასკნელი ტოლობების ორივე მხარე გავამრავლოთ

$$\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}$$

სიდიდეზე, სადაც ζ აღნიშნავს წერტილს γ-ს შ ი გ ნ ი თ და ავიღოთ ინტეგრალი γ-ს გასწვრივ. თუ გავითვალისწინებთ § 4-ის ფორმულებს და

$$\Phi(0)=\Psi(0)=0$$

ტოლობებს (§ 63, (54*)), მარტივი გამოთვლების შემდეგ გვექნება:

$$(1-a\zeta^2)\,\Phi(\zeta)-\zeta(1+a\zeta^2)\,\Phi'(\zeta)-(\zeta^2-a)\,\Psi(\zeta)-a(\alpha_1-i\alpha_1')\,\zeta-$$

$$-a(\alpha_2-i\alpha_2')=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{(1-a\zeta'^2)\,(\widehat{\rho\rho}-i\widehat{\rho\vartheta})}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta', \qquad (57)$$

$$\frac{\zeta^2-a}{\zeta}\,\Phi(\zeta)+\frac{a(\alpha_1+i\alpha_1')}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{(1-a\overline{\zeta'}^2)\,(\widehat{\rho\rho}-i\widehat{\rho\vartheta})}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta', \quad (58)$$

სადაც α_1, α_1', α_2, α_2' (ჯერჯერობით უცნობი) ნამდვილი მუდმივებია, რომლებიც შემდეგ გაშლაში მონაწილეობენ:

$$\Phi(\zeta)=(\alpha_1+i\alpha_1')\,\zeta+(\alpha_2+i\alpha_2')\,\zeta^2+\ldots.$$

ვინაიდან $a>1$, (58) ფორმულა გვაძლევს $\Phi(\zeta)$-სათვის გამოსახულებას, რომელიც ჰოლომორფულია σ-ში. თუ $\Phi(\zeta)$-ს ამ გამოსახულებით შევცვლით (57)-ში, $\Psi(\zeta)$-სათვის მივიღებთ გამოსახულებას, რომელიც აგრეთვე ჰოლომორფულია σ-ში. ახლა საჭიროა α_1, α_1', α_2, α_2' მუდმივების განსაზღვრა შემდეგი ტოლობების მიხედვით:

$$\Phi(0)=\Psi(0)=0,\quad \Phi'(0)=\alpha_1+i\alpha_1',\quad \Phi''(0)=2(\alpha_2+i\alpha_2'), \quad (59)$$

რომლებსაც უნდა დავუმატოთ გადაადგილებათა ცალსახობის პირობა.

მარტივი გამოთვლების შემდეგ ვნახავთ, რომ (59) პირობები დაიყვანება მხოლოდ ერთ ტოლობაზე:

$$-a(\alpha_2-i\alpha_2')=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{(1-a\zeta'^2)\,(\widehat{\rho\rho}-i\widehat{\rho\vartheta})}{\zeta'}\,d\zeta'. \quad (60)$$

გადაადგილებათა ცალსახობის პირობა გამოისახება წინა §-ის (56*) ფორმულით და მას შეიძლება ასეთი სახე მიეცეს:

$$\Psi'(0)=k\Phi'(0).$$

თუ ამ ფორმულაში $\Psi'(0)$-ს შევცვლით (57)-დან მიღებული მნიშვნელობით, გვექნება

$$a(1-k)(\alpha_1-i\alpha_1')=-\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\gamma}\frac{(1-a\zeta'^2)\,(\widehat{\rho\rho}-i\widehat{\rho\vartheta})}{\zeta'^2}\,d\zeta'. \quad (61)$$

მაშასადამე, α_1, α_1', α_2, α_2' მუდმივების მნიშვნელობები საკმაოდ განსაზღვრულია: მათ მივიღებთ, თუ (60) და (61)-ში განვაცალკევებთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს.

მარტივი მაგალითის სახით განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა ელიფსურ ნაპირზე მოქმედებს ორი ტოლი ერთმანეთის საწინააღმდეგო F სიდიდის მქონე ძალა, მოდებული მცირე ღერძის ბოლოებზე.

s' და s''-ით აღვნიშნოთ საზღვრის საკმარისად მცირე ε სიგრძის ორი რკალი, რომელთა შუა წერტილები მოთავსებულია მცირე ღერძის ბოლოებზე და დავუშვათ, რომ:

$\widehat{\rho\rho}=\frac{F}{\varepsilon}$ s' და s'' რკალებზე; $\widehat{\rho\rho}=0$ საზღვრის დანარჩენ ნაწილზე; $\widehat{\rho\Phi}=0$ მთელ საზღვარზე.

ეს მნიშვნელობები ჩავსვათ წინა ფორმულებში. შევნიშნოთ, რომ γ-ს რკალებს, რომლებიც შეესაბამება ელიფსის s' და s'' რკალებს, შუაწერტილებად აქვთ $\zeta=\pm i$ წერტილები და მათი სიგრძეა

$$\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{|\omega'(i)|}=\frac{\varepsilon}{b(1+a)}$$

თუ ε-ს მივასწრაფებთ ნულისაკენ ისე, რომ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon\cdot\widehat{\rho\rho})=F$, მაშინ ელემენტარული გამოთვლების შედეგად მივიღებთ:

$$\Phi(\zeta)=\frac{F}{\pi b}\ \frac{\zeta^2}{(\zeta^2-a)(1+\zeta^2)},$$

$$(\zeta^2-a)\Psi'(\zeta)=\frac{F}{\pi b}\ \frac{\zeta^2}{1+\zeta^2}+(1-a\zeta^2)\Phi(\zeta)-\zeta(1+a\zeta^2)\Phi'(\zeta).$$

ამის შემდეგ ამოცანის ამოხსნას დავასრულებთ ისე, როგორც § 58-ში.

ბოგვი, 19 სექტემბერი, 1921 წ.

ავტორის შენიშვნები

[1] ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხებისადმი მიძღვნილი ზოგადი ხასიათის შრომებიდან დავასახელოთ:

G. Lauricella. Sull'integrazione dell'equazione $\Delta^4 v=0$. Rend. del. R. Accad. dei Lincei, ser. 5, t. 16, 1907.

G. Lauricella. Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre de plaques élastiques encastrées. Acta Math., t. 32, 1909, p. 201—256.

A. Korn. Sur l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Ann. de l'Ecole Norm. Sup. 3-me série, t. 25, 1908, p. 529—583.

A. Korn. Allgemeine Lösung des Problems kleiner, stationärer Bewegungen in der reibenden Flüssigkeit. Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 1908.

A. Korn. Allgemeine Lösung des biharmonischen Problems im Raume. Bull. de Cracovie, 1907.

J. Hadamard. Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Mémoires des Sávants étrangers (Mémoires présentés par divers Sávants á l'Académie des sciences de l'Institut national de France), t. 33, № 4, Paris, 1908.

A. Haar. Die Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta\Delta U=0$. Nachr. d. Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1907, S. 280—287.

S. Zaremba. Bull. de Cracovie, 1907.

[2] შდრ. ჩემი სტატია: Sur l'intégration de l'équation biharmonique, გამოქვეყნებული რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის ბიულეტენში, 1919, № 12, p. 663—686; იხ. აგრეთვე წინამდებარე წიგნის თავი III.

[3] შემთხვევა, როცა მოცემულია საზღვარზე მოდებული ძაბვები, უშუალოდ დაიყვანება ძირითად შემთხვევაზე (შდრ. წინამდებარე წიგნის თავი IV).

შემთხვევა, როცა მოცემულია საზღვრის წერტილების გადაადგილებები, ასევე შეიძლება განხილულ იქნეს როგორც ამოხსნილი (ყოველ შემთხვევაში მარტივადბმული არეებისათვის), ვინაიდან ანალოგიური ზოგადი პრობლემა (სამგანზომილებიან სივრცეში) ამოხსნილია რამდენიმე ავტორის მიერ, მაგ., A. Korn (Ann. de l'Ecole Norm. Sup., 3-me série, t. 24, 1907, p. 9—75), I. Fredholm (Arkiv för matematik, astronomi och fysik, t. 2, № 28, 1906, p. 3—8) და H. Weyl (Rend. del Circolo Mat. di Palermo, t. 39, 1915, p. 1—49).

[4] ამგვარი შრომები მითითებულია უფრო ქვემოთ. იმ განსაკუთრებული ხასიათის შრომებიდან, რომლებიც გარდა სხვა შედეგებისა შეიცავენ აგრეთვე, ჩვენთვის საინტერესო კერძო შედეგებს, დავასახელოთ მხოლოდ ზოგიერთი:

X. Venske. Götting. Nachrichten, 1891. E. Almansi. Annali di matematica, ser. 3, t. 2, 1899, p. 1—51. J. H. Michell. London Math. Soc. Proc., t. 32, 1900; t. 34, 1902. A. Timpe. Inauguraldissertation (Göttingen, 1905). გ. კოლოსოვი, იხ. ქვემოთ, მე-12 შენიშვნა.

[5] E. Almansi. Sulla ricerca della funzioni poli-armoniche,... . Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. 13, 1899, p. 225—262.

[6] T. Boggio. Sull' equilibrio della membrane elastiche piane. Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, t. 35, 1900, p. 219—239.

[7] T. Boggio. Sull'equilibrio etc. Atti del Reale Ist. Veneto, t. 61, 1901/2, p. 619—636.

[8] ჰარმონიული განტოლების შემთხვევაში, უსასრულო არიდან სასრულ არეზე გადავედ.ვართ ინვერსიით (გარდაქმნა შებრუნებული რადიუსებით). მაგრამ განსახილავ შემთხვევაში ეს გადასვლა ხერხდება მხოლოდ საკმარისად რთული დამატებითი გამოკვლევით, ვინაიდან ამ შემთხვევაში ინვერსიას შემოაქვს არარეგულარული მამრავლი.

[9] ჩვენი მეთოდი უშუალოდ გამოიყენება სასაზღვრო პირობების ბევრ სხვა შემთხვევაში და, ამას გარდა, ის უშვებს მნიშვნელოვან განზოგადებას.

[10] შდრ. წინამდებარე წიგნის III თავის § 49-ის შენიშვნას (57-ე შენიშვნა, გვ. 134).

[11] É. Goursat. Sur l'équation $\Delta\Delta U=0$. Bull. Soc. Math. de France, t. 26, 1898, p. 236.

[12] დრეკადობის თეორიის ორგანზომილებიანი ამოცანის ამოხსნის ზოგადი წარმოდგენის მისაღებად გ. კოლოსოვმა შემოიტანა კომპლექსური ცვლადის ფუნქციები, რომლებიც ძალიან მოხერხებულია გამოყენებისათვის და მათ ჩვენ გამოვიყენებთ ქვემოთ IV თავის ბოლო განყოფილებაში. თვით გ. კოლოსოვმა ამოხსნა დრეკადობის თეორიის მრავალი მაგალითი სხვადასხვა ხერხით. შდრ.:

Г. В. Колосов. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. Юрьев, 1909.

G. Kolossoff. Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie. Zeitschr. für Math. und Phys., Bd. 62, 1914, S. 383—409.

[13] მე უკვე მოკლედ გადმოვეცი ჩემი მეთოდის არსი სტატიაში, რომელიც ვ. ა. სტეკლოვის მიერ 1918 წელს წარმოდგენილ იქნა რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის ბიულეტენში:

N. I. Muschelishvili. Sur l'intégration de l'équation biharmonique. bull. de l'Acad. des Sc. de Russie, 1919, № 12, 663—686.

[14] Г. В. Колосов и Н. И. Мусхелишвили. О равновесии упругих круглых дисков. Изв. Электротехн. Инст., т. 12, Петроград, 1915, 39—55.

[15] ან კიდევ, გარეთ.

[16] Axel Harnack. Beiträge zur Theorie des Cauchyschen Integrals. Berichte der K. Sächs. Ges. der Wiss., 1885; გადაბეჭდილია ჟურნალში Math. Annalen, Bd. 35, 1899, S. 1—18.

[17] შდრ. ჩემი ნაშრომი, მითითებული ზემოთ მე-13 შენიშვნაში.

[18] იხ. A. Harnack, იქვე. უნდა შევნიშნოთ, რომ ა. ჰარნაკი იხილავს ძალიან ზოგად შემთხვევას, მაგრამ მისი დამტკიცება არ არის საკმარისად ზუსტი.

[19] ამის ქვეშ გვესმის, რომ $f(\zeta)$ უწყვეტია სიბრტყის ნაწილში, რომელიც საზღვარს ეხება შიგა მხრიდან, თვით საზღვრის წერტილების ჩათვლით.

[20] $z=\infty$ წერტილის მიდამოში გაშლის მუდმივ წევრს ვაკუთვნებთ მის მთავარ ნაწილს.

[21] იხ. საზოგადოდ, W. F. Osgood. Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. I, 1912, ან კიდევ É. Picard. Traité d'analyse, t. II, 1905.

[22] ამისთვის საკმარისია, რომ C წირი იყოს ჟორდანის წირი. შდრ. C. Carathéodory. Über die gegenseitige Bezichung der Ränder bei konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis. Math. Annalen, Bd. 73. 1913

[23] გავიხსენოთ, რომ ჩვენი შეთანხმებების თანახმად, ამ შემთხვევაში S არის მარტივადბმული არე.

[24] შდრ. § 9.

[25] ამის დასამტკიცებლად შეიძლება შემოვიფარგლოთ სასრული არის შემთხვევით; უსასრულო არის შემთხვევა დაიყვანება წინაზე $z'=\frac{1}{z}$ გარდაქმნით.

[26] შდრ. W. F. Osgood (იხ. ზემოთ 21-ე შენიშვნა), გვ. 660.

[27] შედეგების შეუცვლელად შეიძლებოდა მოგვეთხოვა უფრო ზოგადი პირობები. მხოლოდ მსჯელობის გამარტივებისათვის შემოვიტანეთ აღნიშნული შეზღუდვა; იხ. შესავალი.

[28] მართლაც, ვთქვათ,

$$R(\zeta)=\frac{A_0+A_1\zeta+\ldots+A_n\zeta^n}{\zeta^m}$$

და

$$\varphi(\zeta)=\gamma_0+\gamma_1\zeta+\gamma_2\zeta^2+\ldots;$$

$A_0, A_1, \ldots, A_n$ აღნიშნავენ მოცემულ რიცხვებს. მივიღებთ

$$a_m=A_0\gamma_0,\quad a_{m-1}=A_1\gamma_0+A_0\gamma_1,\ldots,\quad a_1=A_{m-1}\gamma_0+\ldots+A_0\gamma_{m-1}.$$

[29] რაციონალური ფუნქციის რიგის ქვეშ იგულისხმება მისი მრიცხველისა და მნიშვნელის ხარისხებს შორის უდიდესი.

[30] გამოთვლები მნიშვნელოვნად გამარტივდება, თუ გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას; იხ. § 17-ის მაგალითი.

[31] მართლაც, ვთქვათ,

$$\varphi(\zeta)=\alpha_0+(\alpha_1+i\beta_1)\zeta+(\alpha_2+i\beta_2)\zeta^2+\ldots.$$

მაშინ

$$\frac{1}{\zeta}\,\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{\alpha_1-i\beta_1}{\zeta}+\frac{2(\alpha_2-i\beta_2)}{\zeta^2}+\ldots;$$

§ 4-ის (8) ფორმულის ძალით,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta'}\,\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}=0.$$

რადგან $\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ ფუნქციის გაშლა α_0 მუდმივი წევრით იწყება, ამიტომ გვექნება

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta'}\,\bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}=\alpha_0.$$

[32] (29) დიფერენციალური განტოლება უკვე იყო მიღებული ტ. ბოჯიოს მიერ სხვა გზით. მაგრამ ტ. ბოჯიო იფარგლება მხოლოდ იმ შემთხვევის განხილვით, როცა $\frac{k}{l} > 0$. შდრ. T. Boggio. Sulle funzioni di variabile complessa in un'area circolare. Atti della R. Acc. della Scienze di Torino, t. 47, 1911/12, p. 22—37.

[33] ფორმულა $\varphi(\zeta) = C_1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f \lg(\zeta' - \zeta)\, d\vartheta$ აგრეთვე მოგცა ტ. ბოჯიომ, იხ. იქვე; ამ ფორმულიდან მიღება უ. დინის ფორმულა

$$U = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dU}{dn} \lg r\, d\vartheta.$$

შდრ. U. Dini. Annali di Matematica, Ser. 2, t. 5, 1871/3.

[34] (45) ფორმულა ეკუთვნის ჰ. შვარცს; შდრ. H. Schwarz, Crelles Journal, Bd. 74, 1872, S. 218—253.

[35] (43) ფორმულა და (42) პირობა ჩვენ მიერ მიღებულია იმ დაშვებით, რომ f უწყვეტია. მაგრამ ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ჩვენი ფორმულები აგრეთვე იძლევიან ამოცანის ამოხსნას განხილული შემთხვევის ანალოგიურ შემთხვევებში. ყოველ შემთხვევაში მიღებული შედეგი ადვილად შემოწმდება უშუალო ჩასმით.

[36] ფუნქციები $\lg\left(1 - \frac{a}{\zeta}\right)$ და $\lg(1 - a\zeta)$ არიან მრავალსახა. ცხადია, რომ შეგვიძლია განვიხილოთ ამ ფუნქციების ნებისმიერი შტოები, იმ პირობით, რომ მათი ჯამი იყოს ნამდვილი γ-ზე. $\lg\left(1 - \frac{a}{\zeta}\right)$-სათვის ავირჩიოთ შტო, რომელიც ნულია, როცა $\zeta = \infty$. ეს შტო ჰოლომორფულია γ-ს გარეთ. $\lg(1 - a\zeta)$-სათვის ავირჩიოთ შტო, რომელიც ნულია, როცა $\zeta = 0$. ეს შტო ჰოლომორფულია γ-ს შიგნით.

[37] იხ. წინა შენიშვნა.

[38] შდრ. § 7.

[39] შდრ. ჩემი სტატია: Об определении гармонической функции по заданиям на контуре. Журн. физ.-мат. Общ. при Пермском Универс., вып. 1, 1919.

[40] რასაკვირველია, საკითხი ეხება (x, y) წერტილთა სიბრტყის პარალელურ მოძრაობას (§ 23).

[41] რასაკვირველია, $\omega(\zeta)$ ფუნქცია არ იქნება ერთი და იგივე ორივე შემთხვევაში.

[42] შდრ., მაგ., H. Lamb. Hydrodynamics. Cambridge, 1907.

[43] შდრ. ჩემი უკვე მითითებული ნაშრომი: Sur l'intégration de l'équation biharmonique. Bull. de l'Acad. des. Sc. de Russie, 1919, n° 12, p. 663—686.

[44] ჩვენ ვინარჩუნებთ წინადებარე წიგნის II თავის (გვ. 28) შეთანხმებებს S არეების შესახებ.

[45] როცა ელაპარაკობთ ჰარმონიულ ფუნქციაზე იმ არის მითითების გარეშე, სადაც ის ჰარმონიულია, ვგულისხმობთ U ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს $\Delta U = 0$ განტოლებას.

[46] É. Goursat. Sur l'équation $\Delta\Delta U = 0$. Bull. de la Soc. Math. de France, t. 26, 1898, p. 236.

[47] ის ფაქტი, რომ (18) გაშლას ადგილი აქვს $|z|$-ის მხოლოდ საკმარისად დიდი მნიშვნელობებისათვის, სრულიად არ მოქმედებს (19) შედეგის სისწორეზე მთელი S არისათვის; ეს არის უშუალო შედეგი ანალიზური ფუნქციების კარგად ცნობილი თვისებებისა.

[48] რასაკვირველია, a_k და b_k მუდმივების მნიშვნელობები არ არის ერთი და იგივე (22) და (26) ფორმულებში.

[49] შდრ. G. Lauricella. Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Acta Math., t. 32, 1909, pp. 201—256.

[50] იხ. G. Lauricella. იქვე.

[51] იხ. G. Lauricella, იქვე, გვ. 239, ფორმულა (17).

[52] შდრ. G. Lauricella. იქვე, თავი III, n° 10.

[53] თვით G. Lauricella კმაყოფილდება იმის დამტკიცებით, რომ, როცა (31) ტიპის პირობები (მასთან ასეთი სამია) არ არის შესრულებული, არსებობს ამონახსნი, რომლისთვისაც $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ უსასრულობაში იქცევიან ისე, როგორც შესაბამისად $hx+j$, $hy+k$ (სადაც h, j, k მუდმივებია). ცხადია, რომ ეს შედეგი არ არის საკმარისი: მაგალითები გვიჩვენებს, რომ არსებობს უსასრულო რიცხვი ამონახსნებისა, რომლებიც უსასრულობაში იზრდება უფრო ნელა, ვიდრე გ. ლაურიჩელას ამონახსნები.

[54] მართლაც, დაშვების თანახმად $p(\zeta)$ არ არის ნული γ-ზე; აქედან გამომდინარეობს, რომ იგივეს აქვს ადგილი $\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta'}\right) = \bar{p}(\bar{\zeta}') = \overline{p(\zeta')}$-სათვის.

ასევე, გამოსახულება

$$\bar{p}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}$$

არ არის უსასრულო γ-ზე, ვინაიდან $\omega'(\zeta) \neq 0$ γ-ზე.

[55] (40*) პირობების ძალით

$$\alpha_0 = \alpha_0' = \alpha_1' = 0.$$

[56] ეს შემთხვევა განხილული იყო ე. ალმანსის მიერ: E. Almansi, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. 13, 1899, p. 245—255.

[57] ტ. ბოჯიომ თავის სტატიაში: Construzione mediante integrali definit di funzioni armoniche o poli-armoniche nell'area esterna ad un ellise..., Rendic. d. R. Accad. dei Lincei, ser. 5., t. 11, 1902, მიუთითა ხერხი, რომლი-

თაც ამ შემთხვევაში შეიძლება ამოცანის ამოხსნა; ეს ხერხი იმაში მდგომარეობს, რომ ინვერსიით ამოცანა დაიყვანება პასკალის ლოკოკინის შემთხვევაზე და ის ამოიხსნება ე. ა ლ მ ა ნ ს ი ს მეთოდით. მაგრამ, როგორც ჩანს, ძალიან ძნელი იქნება ამ გზით ამოცანის სრული ამოხსნის მიღება.

[58] შდრ. O. Tedone und A. Timpe, Enzykl. d. Math. Wiss., Bd. IV, 25, Nr. 14b.

[59] შდრ., მაგ., G. Lauricella, იქვე (იხ. ზემოთ 49-ე შენიშვნა).

[60] იხ., საზოგადოდ, A. E. Love, Lehrbuch der Elastizität (A. Timpe-ს მიერ ინგლისურიდან გერმანულად ნათარგმნი). Lpz. 1907, Kap. IX. იხ. აგრეთვე Enzykl. d. Math. Wiss., IV, 25. Nr. 11; J. H. Michell. On the direct determination of tress..., Lond. Math. Soc. Proc., t. 31, p. 100—124.

[61] შდრ. A. E. Love, იქვე, §§ 144 და 146; ან კიდევ, Enzykl. d. Math. Wiss., IV, 25, Nr. 11.

[62] გავიხსენოთ, რომ ამ შემთხვევაში

$$X_z = Y_z = 0, \qquad Z = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(X_x + Y_y).$$

[63] S არის ქვეშ ჩვენ გვესმის სასრული ცილინდრული სხეულის ნებისმიერი კვეთა, რომელიც ფუძეების პარალელურია.

[64] იხ. A. E. Love, იქვე (იხ. მე-60 შენიშვნა), § 144. მოხერხებულობისათვის ჩვენ აქ მოგვყავს ა. ლ ა ვ ი ს აღნიშვნები ჩვენ აღნიშვნებთან შესადარებლად:

ჩვენი აღნიშვნები	X_x	X_y	Y_y	u_x	u_y	U	$\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}p$	$\frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}q$
ა. ლ ა ვ ი ს აღნიშვნები	X_x	X_y	Y_y	u	v	χ	ξ	η

[65] გ. კ ო ლ ო ს ო ვ ი, მე-12 შენიშვნაში (გვ. 131) მითითებული ნაშრომი.

[66] გარდა უსასრულო არის შემთხვევისა, როცა საჭიროა გარკვეული შეზღუდვა; იხ. ქვემოთ.

[67] ჩვენ აქ ვგულისხმობთ, რომ წერტილი $z=0$ ძევს S არის შიგნით, როცა S სასრულია, და S-ის გარეთ, თუ უკანასკნელი უსასრულოა.

[68] ჩვენ აქ ვიყენებთ ა. ლ ა ვ ი ს აღნიშვნებს (იხ. მე-60 შენიშვნაში მითითებული ნაშრომი). გავიხსენოთ, რომ შემოტანილი სიდიდეების მნიშვნელობა შემდეგია: თუ x, y ღერძებს დავამთხვევთ შესაბამისად ρ, ϑ ღერძებს, მაშინ გვაქვს:

$$\widehat{\rho\rho} = X_x, \quad \widehat{\rho\vartheta} = X_y, \quad \widehat{\vartheta\vartheta} = Y_y.$$

[69] იხ. ა. ლ ა ვ ი, იქვე (მე-60 შენიშვნაში მითითებული ნაშრომი), თავი II, § 49.

[70] ეს ფორმულები ეკუთვნის გ. კ ო ლ ო ს ო ვ ს (იქვე; იხ. მე-12 შენიშვნა). თუ არ ვცდები, ისინი აგრეთვე მიღებული იყო ჯ. მ ი ჩ ე ლ ი ს (J. H. Michell) მიერ.

[71] რასაკვირველია, გადაადგილებები განსაზღვრული იქნება სხეულის მხოლოდ მყარი გადაადგილების სიზუსტით.

[72] გამოთვლებისათვის მოსახერხებელია გამოიყენოთ § 43-ის (გვ. 87) (39) ფორმულები.

[73] აღნიშვნებისათვის იხ. § 8 (გვ. 31)

[74] რამდენადაც მე ვიცი, ეს ფაქტი არ იყო აღნიშნული არავის მიერ.

[75] მაშასადამე, ჩვენ აქ ვუშვებთ, რომ § 42-ის თეორემა სამართლიანია, რაც საესებით მოსალოდნელია. ის რომ არ ყოფილიყო სამართლიანი ზოგიერთი კერძო არისათვის, მაშინ განხილული ამოცანა ამ არეებისათვის ყოველთვის არ იქნებოდა შესაძლო: იარსებებდა § 41-ის (31) სახის შესაძლებლობის პირობა.

[76] გავიხსენოთ, რომ

$$k = -\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$$

და თუ გვაქვს თხელი ფირფიტა, მაშინ λ უნდა შეიცვალოს სიდიდით

$$\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

[77] იხ. გვ. 106-ის (19*) ფორმელა.

[78] შდრ. ა. ლ ა ვ ი, იქვე (იხ. მე-60 შენიშვნა), § 187. ა. ლ ა ვ ი ს მიხედვით ამოცანა აგრეთვე ამოხსნილი იქნა დ. ე დ ვ ა რ დ ს ი ს მიერ: D. Edwardes, Quart. Journ. of Math., t. 26, 1893. სამწუხაროდ, მე არ მქონდა საშუალება მენახა ვ ე ბ ი ს და ე დ ვ ა რ დ ს ი ს სტატიები.

[79] ეს მუდმივები უნდა განვასხვავოთ წინა პარაგრაფების მუდმივებისაგან, რომლებიც აღნიშნულია ანალოგიურად.

სარჩევი

	ᲒᲒ-
ქართული გამოცემის რედაქტორისაგან	3
წინასიტყვაობა	7
შესავალი	9
თავი I. დამხმარე დებულებები	13
I. კოშის ტიპის ინტეგრალები	13
§ 1. თეორემა კოშის ტიპის ინტეგრალის ზღვრის შესახებ	14
§ 2. განზოგადება	17
§ 3. ძირითადი თეორემა	19
§ 4. კოშის ფორმულების ანალოგიური ფორმულები	20
II. კონფორმული ასახვის შესახებ	22
§ 5.	22
§ 6.	24
თავი II. მარტივი გამოყენებები ლოგარითმული პოტენციალის თეორიასა და ჰიდროდინამიკაში	28
I. წინასწარი შენიშვნები	28
§ 7. ჰარმონიული ფუნქციის წარმოდგენა კომპლექსური ცვლადის ფუნქციების საშუალებით	28
§ 8. გაგრძელება	31
§ 9. გაშლა $z=\infty$ წერტილის მიდამოში	33
§ 10. აღნიშვნები	34
II. ძირითადი ამოცანა წრიული არისათვის	35
§ 11.	36
§ 12. სასაზღვრო პირობების გარდაქმნა	37
§ 13. დიფერენციალური განტოლება $\varphi(\zeta)$-სათვის	39
§ 14. მუდმივების განსაზღვრა	41
§ 15. გაგრძელება	43
§ 16. შენიშვნა	44
§ 17. მაგალითი: ლოგარითმული პოტენციალის თეორიის შერეული ამოცანა წრიული არისათვის	44
§ 18. ნეიმანის ამოცანა წრისათვის	49
§ 19. დირიხლეს ამოცანა წრისათვის	50
§ 20. შენიშვნები მიღებულ ფორმულებში მონაწილე ინტეგრალების გამოთვლის შესახებ	51
§ 21. მაგალითი	52
§ 22. გრინის ფუნქცია შერეული ამოცანისათვის	55
III. ძირითადი ამოცანა ნებისმიერი არისათვის	58
§ 23. ლოგარითმული პოტენციალის თეორიის ძირითადი ამოცანა	58
§ 24. მუდმივი კოეფიციენტების შემთხვევა	59

IV. გამოყენებები ჰიდროდინამიკის ძირითად ამოცანაში 62
§ 25. ამოცანის ჩამოყალიბება 63
§ 26. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის შემოტანა 64
§ 27. სასაზღვრო პირობის გარდაქმნა 65
§ 28. ამონახსნი სასრული არისათვის 66
§ 29. ამონახსნი უსასრულო არისათვის 67
§ 30. მრუდწირული კოორდინატები 69
§ 31. მაგალითი 1. მოძრაობა სითხისა, რომელიც გარს უვლის მყარ ცილინდრულ ტიხარს (ან მოთავსებულია ასეთ ტიხარში) . . 70
§ 32. მაგალითი 2. სითხის მოძრაობა გრიგალური ძაფის არსებობისას 72
§ 33. ელიფსური საზღვარი 74
§ 34. ზოგიერთი სხვა მარტივი საზღვარი 75
თავი III. გამოყენებები ძირითად ბიჰარმონიულ ამოცანაში 76
I. ზოგადი საკითხები 76
§ 35. ბიჰარმონიული ფუნქცია 76
§ 36. გურსას ფორმულა. აღნიშვნები 78
§ 37. სასრული არის შემთხვევა 79
§ 38. უსასრულო არის შემთხვევა 79
§ 39. გაგრძელება 80
II. ძირითადი ამოცანა. 83
§ 40. ამოცანის ჩამოყალიბება 83
§ 41. არსებობის თეორემები 84
§ 42. შენიშვნა გარე ამოცანასთან დაკავშირებით 84
§ 43. ამონახსნი არეებისათვის, რომლებიც წრეზე რაციონალური ფუნქციების საშუალებით აისახებიან 86
§ 44. გაგრძელება 88
§ 45. გაგრძელება 90
§ 46. მუდმივების განსაზღვრა 91
III. მაგალითები 95
§ 47. წრიული არე 95
§ 48. პასკალის ლოკოკინა 96
§ 49. უსასრულო სიბრტყე ელიფსური ხვრელით 96
§ 50. ზოგიერთი სხვა საზღვარი 98
თავი IV. დრეკადობის თეორიის ორგანზომილებიანი ამოცანა 100
I. ზოგადი საკითხები 100
§ 51. ძირითადი განტოლებები 100
§ 52. ზოგიერთი ძირითადი ფორმულა 102
§ 53. შემოტანილი ფუნქციების შესწავლა 103
§ 54. მრუდწირული კოორდინატები 106
II. ამოცანის ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როცა საზღვარზე მოცემულია ძაბვები. პირველი მეთოდი . 109
§ 55. სასაზღვრო პირობების გარდაქმნა 109
§ 56. სასრული არე 109
§ 57. უსასრულო არე . . . 111
§ 58. მაგალითები . 112

III. შემთხვევა, როცა საზღვარზე მოცემულია გადა-
ადგილებები 117
§ 59. სასაზღვრო პირობა 117
§ 60. მაგალითი I. წრიული არე 118
§ 61. მაგალითი II. სიბრტყე ელიფსური ხვრელით 120
IV. შემთხვევა, როცა საზღვარზე მოცემულია ძაბვე-
ბი. მეორე მეთოდი 123
§ 62. 123
§ 63. შენიშვნები 126
§ 64. მაგალითები 127
ავტორის შენიშვნები 130

ნიკო მუსხელიშვილი

კოშის ტიპის ინტეგრალების გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის

N. Muskhelishvili

APPLICATIONS OF CAUCHY TYPE INTEGRALS TO SOME PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

(In Georgian)

TBILISI

„METSNIEREBA" PUBLISHING HOUSE

1992

დაიბეჭდა საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის
სამეცნიერო-საგამომცემლო საბჭოს დადგენილებით

სბ 5052

გამომცემლობის რედაქტორი გ. ბ ო კ უ ჩ ა ვ ა
მხატვარი გ. ლ ო მ ი ძ ე
ტექრედაქტორი ნ. ბ ო კ ე რ ი ა
კორექტორი კ. ა ბ ჟ ა ნ დ ა ძ ე
გამომშვები ე. მ ა ი ს უ რ ა ძ ე

გადაეცა წარმოებას 11.IV.91. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 10.VII.92;
ქაღალდის ზომა 60×90 1/16; ქაღალდი № 2; ბეჭდვა მაღალი;
გარნიტურა ვენური; პირობით საბეჭდი თაბახი 8.75;
სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 7.3;

ტირაჟი 300; შეკვეთა № 2337;

ფასი 35 მან.

გამომცემლობა „მეცნიერება", თბილისი, 380060, კუტუზოვის ქ., 19
Издательство «Мецниереба», Тбилиси, 380060, ул. Кутузова, 19

საქართველოს მეცნ. აკადემიის სტამბა, თბილისი 380060, კუტუზოვის ქ., 19
Типография АН Грузии, Тбилиси, 380060, ул. Кутузова, 19