

მ. ა. კეტიანი, ი. ა. ზაზანი

სპორტული მოძრაობების მექანიკა

სსრ კავშირის მინისტრთა საბჭოს ფიზიკური კულტურისა და სპორტის კომიტეტის მიერ დაშვებული დამხმარე სახელმძღვანელოდ ფიზიკური კულტურის ინსტიტუტთა სტუდენტებისათვის

ბამოცემლობა „გ ა ნ ა თ ლ ე ბ ა“
თბილისი — 1983

5A2. 2 : 7A
ББК 28. 91 : 75
УДК 612. 76 : 531. 1
3 337

წინამდებარე ღამხმარე სახელმძღვანელო პირველად გამოდის და განკუთვნილია ფიზიკური კულტურის ინსტიტუტების სტუდენტებისათვის. ის შეიძლება გამოიყენონ აგრეთვე სპორტის სხვადასხვა სახეობაში მომუშავე მწვრთნელებმა, სპორტული და პედაგოგიური დისციპლინების კათედრათა მასწავლებლებმა. წიგნში გადმოცემულია ზოგადი (თეორიული) მექანიკის საფუძვლები და წარმოდგენილია სპორტულ პრაქტიკაში მრავალფეროვანი ამოცანების გადაწყვეტა. სახელმძღვანელო ხელს შეუწყობს მექანიკურ მოძრაობათა კანონების უფრო ღრმად გაგებას, სპორტული ტექნიკის ანალიზთან დაკავშირებული ამოცანების გადაწყვეტის ძირითადი მეთოდების ათვისებას, აგრეთვე სპორტული მოძრაობებისა და ფიზიკური ვარჯიშების კინემატიკური და დინამიკური სტრუქტურის კვლევისათვის საპირო ცოდნის შექმნას.

მთარგმნელი ჰ. წულაია

© Издательство «Физкультура и спорт»,
1974 г.

60900--057
П. М.—602(08)—83 220—83

© ქართული საბჭოთა კავშირის გამომცემლობა
საბჭოთა კავშირი, 1983

შესავალი

§ 1. ზოგადი მემანიაის საბანი და მეთოდი

ზოგადი (ანუ თეორიული) მექანიკა მეცნიერებაა მატერიალური სხეულების მოძრაობისა და წონასწორობის ზოგადი კანონების, ამ დროს სხეულთა ურთიერთქმედების შესახებ. ზოგადი მექანიკა ყველა თანამედროვე ტექნიკური დისციპლინის ერთ-ერთი მეცნიერული საფუძველია; იგი საფუძვლად უდევს მექანიკური მოძრაობის შესწავლას როგორც მიკრო-, ასევე მაკროდონეზე.

მექანიკური მოძრაობა ეწოდება მატერიალური სხეულებისა და მათი ცალკეული წერტილების ერთმანეთის მიმართ ურთიერთმდებარეობის ცვლილებას. მექანიკური მოძრაობა ადამიანის ორგანიზმის ფუნქციონირების განუყოფელი კომპონენტია. ადამიანის მოძრაობა მის ორგანიზმში მიმდინარე ყველა პროცესის (ბიოქიმიური, ფიზიოლოგიური და ფსიქოლოგიური) თავისებური ასახვაა. 1863 წელს ნაშრომში „თავის ტვინის რეფლექსები“ დიდი ფიზიოლოგი ი. მ. სეჩენოვი წერდა: „ტვინის მუშაობის გარეგანი გამოვლინებათა უსასრულო მრავალფეროვნება საბოლოოდ დაიყვანება ერთ მოვლენამდე — კუნთურ მოძრაობამდე“.

ადამიანის სხეული მიეკუთვნება მატერიალურ სხეულებს. მატერიალური სხეულები სხვადასხვაგვარია, მაგრამ მათ მოძრაობებს აქვს მრავალი საერთო თვისება, მათ შორის ისეთებიც, რომლებიც არ არიან დამოკიდებული თვით სხეულების ფიზიკურ თვისებებზე. მაგალითად, შეიძლება ვიმსჯელოთ რომელიმე საგნის (ვთქვათ, სპორტული იარაღის) სიმძიმის ცენტრის ტრაექტორიასა და ადამიანის სხეულზე, ცოცხალ და არაცოცხალ სხეულებს შორის განსხვავების გაუთვალისწინებლად. სხეულების მექანიკური მოძრაობის სწორედ ეს საერთო თვისებები შეისწავლება ზოგად მექანიკაში. მისი ამოცანაა „მოგვეცეს ბუნებაში მიმდინარე მოძრაობათა ყველაზე სრული და შეძლებისდაგვარად უფრო მარტივი აღწერა“ (რ. კირხპოფი).

ზოგადი მექანიკის საწყისი ცნებებია: „სივრცე“, „დრო“ და „მა-

სა“. ზოგადი მექანიკა არსებითად არ სარგებლობს არც ერთი ისეთი ცნებით, რომელიც არ იქნება ამ სამი ძირითადი ცნების წარმოებულნი. თუმცა, ისინი არ არის ერთადერთი შესაძლო საწყისი ცნებები და პირველი აღქმით მათ მნიშვნელოვნად ნაკლები თვალსაჩინოება ახასიათებთ, ვიდრე, მაგალითად, „სიჩქარესა“ და „ძალას“ (რომლებიც ჩვენთვის ყველა შემთხვევაში რჩებიან სივრცის, დროისა და მასის განსაზღვრის ერთადერთ საშუალებებად), მაგრამ მექანიკური მოძრაობის შესწავლისათვის განსაკუთრებით ხელსაყრელია დასკვნების უდიდესი სიმარტივის გამო.

შეგახსენებთ, რომ მსოფლმხედველობას, რომელიც ცდილობს გამოიყვანოს საგნის ყველა მოვლენა და თვისება სივრცის, დროისა და მასის ცნებებიდან, მექანიკური ეწოდება. მაგრამ არ უნდა ვითქვით, რომ მექანიკის კანონთა ყოველგვარი გამოყენება, მაგალითად, ადამიანის მოძრაობის აღწერისათვის, მექანიციზმია: ადამიანის მოძრაობის ანალიზის დროს მნიშვნელოვანია გამოვეყოთ მოძრაობის ზისტემის ის ელემენტები (თვისებები), რომლებიც შემოსაზღვრული არიან მექანიკური მახასიათებლების (კინემატიკური, დინამიკური, წონასწორობის პირობები და ა. შ.) წრით. ამ ელემენტების აღწერა მექანიკის კანონების მეშვეობით არ ეწინააღმდეგება ბუნებისმეტყველების თანამედროვე დიალექტიკურ პოზიციებს. ამჟამად არა გვაქვს არავითარი საფუძველი ვილაპარაკოთ ზოგადი მექანიკის კანონების „გამოუყენებლობაზე“ ადამიანის მოძრაობის აღწერისათვის. მაგრამ აუცილებელია ყოველთვის მკაფიოდ წარმოვიდგინოთ მათი თვისებების ის წრე, რომელიც შემოიხაზება განსაზღვრულ აბსტრაქციებსა და დაშვებებზე აგებული ზოგადი მექანიკის კანონების შესაძლებლობებით.

• ზოგადი მექანიკა მოძრაობის უფრო მთლიანი და მარტივი აღწერისათვის გამოყოფს მის უფრო მეტად მნიშვნელოვან მხარეებს და მიმართავს მოვლენათა სქემატიზაციას. ამიტომ იგი განიხილავს არა იმ მატერიალური სხეულების მოძრაობას, რომლებიც ბუნებაში რეალურად არსებობენ, არამედ მათი მხოლოდ განსაზღვრული საერთო თვისებების ამსახველი ზოგიერთი აბსტრაქციული მოდელის მოძრაობას. ამ მოდელებიდან ყველაზე უფრო მარტივია მატერიალური წერტილი, მატერიალური წერტილების სისტემა, აბსოლუტურად მყარი სხეული, ლეროვანი სისტემა (ბერკეტი, კინემატიკური ჯაჭვი, ლეროვანი კონსტრუქცია) და ა. შ.

მატერიალური წერტილი ეწოდება გარკვეული მასის მქონე სხეულს, რომლის ზომების უგულებელყოფა მოცემულ პირობებში შესაძლებელია. იგი გეომეტრიული წერტილისაგან განსხვავდება იმით, რომ სასრული მასა აქვს. მექანიკაში მატერიალურ წერტილად მიღე-

ბულია არა მარტო სხეულის უმცირესი ნაწილაკი, არამედ ზოგჯერ საკმაოდ დიდი ზომების სხეულიც. ასე, მაგალითად, მატერიალურ წერტილად შეიძლება მივიჩნიოთ ურო ან ბირთვი მათი ფრენის შესწავლის დროს, ხოლო ზოგ მოძრაობაში — ადამიანის სხეულიც კი. იმ შემთხვევაში, როდესაც სხეულის ზომების უგულებელყოფა შეუძლებელია, იგი შეიძლება აზრობრივად დავყოთ ნაწილებად და ისინი მივიჩნიოთ მატერიალურ წერტილებად. ასეთ შემთხვევაში უფრო სხეული უნდა განვიხილოთ, როგორც მატერიალური წერტილების სისტემა. რამდენიმე სხეულის მოძრაობის შესწავლის დროს ზოგიერთ შემთხვევაში ისინი შეიძლება მივიჩნიოთ მატერიალურ წერტილებად და ყველანი განვიხილოთ ერთად, როგორც მატერიალური წერტილების სისტემა.

ყველა ფიზიკური სხეული გარე ზემოქმედების გავლენით დეფორმირდება. თუ სხეულის დეფორმაცია უმნიშვნელოა, შეიძლება მისი უგულებელყოფა და ნაწილაკებს შორის მანძილის უცვლელად მიჩნევა, მაშინ ასეთ სხეულს უწოდებენ აბსოლუტურად მყარს.

ზოგად მექანიკაში მატერიალური წერტილისა და აბსოლუტურად მყარი სხეულის ცნებათა გამოყენება ამარტივებს მასში ჩატარებულ გამოკვლევებს. ამ აბსტრაქციებზე უარის თქმით შეუძლებელი იქნებოდა დაგვედგინა ყველა სხეულისათვის მოძრაობის საერთო კანონები, რომლებიც შემდგომ გამოიყენება რეალურად არსებული ფიზიკური სხეულების მიმართ (დრეკადი, დრეკად-ბლანტი, თხევადი და ა. შ., ამ უკანასკნელთა თვისებები და მოძრაობები შეისწავლება მექანიკის სხვადასხვა დარგში, რომლებიც არსებითად გადაიქცევენ დამოუკიდებელ მეცნიერებებად: მასალათა გამძლეობად, დრეკადობის მათემატიკურ თეორიად, ჰიდრავლიკად და სხვ.).

ამრიგად, ზოგად მექანიკაში შეისწავლება მოძრაობები აბსოლუტურად მყარი სხეულებისა, რომელთაც ბუნებაში არ ვხვდებით. მაგრამ პრაქტიკა ადასტურებს ზოგადი მექანიკის კანონებიდან გამომდინარე შედეგების სისწორეს. ამ კანონების საფუძველზე აგებული მსუბუქი ხიდები დიდ დატვირთვებს უძლებენ, მანქანები მუშაობენ, ხომალდები ცურავენ, თვითმფრინავები ფრენენ, ხოლო კოსმოსური ხომალდები აღწევენ, საბოლოო მიზანს.

ზოგადი მექანიკის კანონების გამოყენება შეიძლება აგრეთვე ადამიანის მოძრაობათა სისტემის ცალკეული ელემენტის ზუსტი აღწერისათვის. მაგრამ მათი გამოყენების სფერო ამ შემთხვევაში შესწავლულია იმ სპეციფიური თავისებურებებით, რომლებიც ანსხვავებენ ცოცხალ სისტემებს არაცოცხალისაგან.

ბიოლოგიური სისტემების განსხვავება არაცოცხალი სხეულებისაგან შეიძლება განვიხილოთ მხოლოდ ბიომექანიკური გაგებით; ამ

განსხვავებას სრულიადაც არ უდევს საფუძვლად ის გარემოება, რომ ბიოლოგიური სისტემები არ არიან აბსოლუტურად მყარი სხეულები (ამ გარემოებას მოცემულ შედარებაში აქვს იგივე ხვედრითი წონა რაც ორი არააცოცხალი სხეულის შედარებას).

ყველაზე მეტად ბიომექანიკის ინტერესებს პასუხობს ე. ს. ბაუერის¹ ცოცხალი სისტემების კონცეფცია, გამოახული რამდენიმე კანონის ფორმით; იგი მოიცავს ყველა იმ სისტემის თვისებებს, რომლებსაც უწოდებენ ცოცხალ სისტემებს, და დამახასიათებელია მხოლოდ მათთვის. ამ კონცეფციამ მიიღო მდგრადი უწონასწორობის პრინციპის სახელწოდება, რომელიც განსაზღვრავს ცოცხალ სისტემათა შემდეგ თვისებებს:

1. თავდაპირველად ყველა ბიოსისტემას ახასიათებს თავისი მდგომარეობის ცვლილება თვითნებურად, ე. ი. გარე მიზეზისაგან გამოუწვევლად. თუ მატერიალური სისტემა უძრავ მდგომარეობაშია ან მოძრაობს მაშინ და იქით, როდესაც და საითაც ამოძრავებს. მას მისი მასის შესაბამისი ინერციები და ხახუნის წინააღმდეგობები, მაშინ ამ სისტემას არაეინ უწოდებს ცოცხალს. ბიოსისტემის მდგომარეობის თვითნებური ცვალებადობა შესაძლებელია თვით სისტემაში ენერჯიის ისეთი დაგროვების შედეგად, რომლებსაც მასში გაბატონებული პირობებისა და გარემოს უცვლელი პირობების შემთხვევაში შეუძლიათ განიმუხტონ. მაშასადამე, ბიოსისტემებში არსებობს პოტენციალთა ისეთი სხვაობები, რომლებიც შეიძლება განიმუხტონ, ე. ი. გასწორდნენ გარე ხელშეწყობის გარეშე, ხოლო ამ დროს გამონთავისუფლებული ენერჯია შეიძლება გამოჟღავნდეს სხვადასხვაგვარად, მათ შორის მექანიკურ მუშაობადაც.

მაგრამ ეს თვისება არ არის საკმარისი ცოცხალი სისტემის სრულყოფილი განსაზღვრისათვის, რადგანაც იგივე თვისებები აქვს ნებისმიერ „მოსამართ“ მანქანებს (საათის მექანიზმს, აკუმულატორთა ბატარეას და ა. შ.).

2. ბიოსისტემებს აქვს მოწყობილობები, რომელთა დახმარებით მათ შეუძლიათ გარეშე ზემოქმედების ცვლილება (ბიძგი, წვევა, სიბოს გადატანა და ა. შ.) იმ პროცესების მეშვეობით, რომლებიც მიმდინარეობენ პოტენციალთა სხვაობის ხარჯზე. ბიოლოგიაში ბიოსისტემის ამ მნიშვნელოვან ნიშანს ახასიათებს ორი თვისება — გალიზიანება და აგზნებადობა. თანამედროვე ტექნიკურ პირობებში პრინციპულად შეიძლება მოდელირება გავუკეთოთ გალიზიანებას და აგზნებას, მაგრამ ბიოსისტემებისათვის ეს თვისებები მუდმივია და სწორედ ამით განსხვავდება პრინციპულად. ბიოსისტემები ხელოვ-

¹ ე. ს. ბაუერის ძირითადი შრომა — „Теоретическая биология“. М. — Л., изд-во ВИЭМ, 1935.

ნური სისტემებისაგან. მაგალითად, მოშვებული ზამბარა რომ ხელახლა დაეჭიმოთ, აუცილებელია შევასრულოთ გარე სამუშაო. კუნთი ამ სამუშაოს ასრულებს ძაბვის შედეგად, რომელიც აღიძვრება გალიზიანებით და რომელიც იმ პროცესების შედეგია, რომლებიც მიმდინარეობენ კუნთში გარე ზემოქმედებისაგან დამოუკიდებლად. კუნთში მომხდარი ცვლილებები, მისი ყოველი გალიზიანების შემდეგ დაკავშირებულია ენერჯის გადატანასა და პოტენციალთა სხვაობის აღდგენასთან და განასხვავებენ კუნთს უბრალო ზამბარისაგან.

3. ცოცხალი სისტემების მუშაობა ყოველგვარ გარე პირობებში მიმართულია წონასწორობის საწინააღმდეგოდ, რომელიც უნდა ყოფილიყო მოცემული გარე პირობებისა და სისტემის მოცემული საწყისი მდგომარეობის შემთხვევაში. ბიოსისტემებს შესწევთ უნარი გარდაქმნან თავისუფალი ენერჯია მუშაობად, რომელიც ზრდის სისტემის შრომისუნარიანობას. ცოცხალი სისტემები არასდროს არ არიან წონასწორობაში და საკუთარი თავისუფალი ენერჯის ხარჯზე მუდმივად ასრულებენ სამუშაოს წონასწორობის საწინააღმდეგოდ.

აქ მხოლოდ სქემატურადაა აღნიშნული ცოცხალი სისტემების პრინციპული განსხვავება არაცოცხალისაგან. მაგრამ ესეც საკმარისია იმის გასაგებად, თუ რაოდენ რთულია ადამიანის, როგორც ბიოსისტემათაგან ყველაზე სრულყოფილის, მოძრაობათა სრული აღწერის პრობლემა.

ფიზიოლოგიამ, ბიოფიზიკამ და სხვა ბიოლოგიურმა მეცნიერებებმა, რომლებიც აღჭურვილი არიან თანამედროვე რადიოელექტრონული აპარატურით, ბევრი გააკეთეს ადამიანის ორგანიზმში ბიოლოგიური პროცესების კანონზომიერებათა დადგენისათვის. ბიომექანიკის მიზანია გააერთიანოს ადამიანის მოძრაობებზე მექანიკური და ბიოლოგიური ცოდნა, იმისათვის, რათა დაადგინოს მათი ფორმირებისა და განვითარების ძირითადი კანონზომიერებანი.

მომავალი კვლევის ერთ-ერთი ამოცანაა პასუხის გაცემა მრავალ კითხვაზე, რომლებიც შეეხება ადამიანის მოძრაობით კოორდინაციას ექსტრემალურ პირობებში, -სადაც მოძრაობები არც თუ იშვიათად ფენომენურია. განსაკუთრებით ხშირია ასეთი მოძრაობები სპორტში, როდესაც სარეკორდო შედეგების მიღწევისას ადამიანი, როგორც ბიოსისტემა, ვლინდება უფრო ნათლად. ექსტრემულ პირობებში გამომქლავებული „ზეშესაძლებლობები“ არსებითად საინტერესოა მწვრთნელებისა და პედაგოგებისათვის. ადამიანის ორგანიზმის მოძრაობის შესაძლებლობათა ანალიზი — ბიომექანიკის უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა.

ზოგადი მექანიკის კანონები საშუალებას იძლევა აღწეროთ ამ შესაძლებლობათა გამომქლავების საბოლოო შედეგები, დავადგი-

ნოთ უკვე მომხდარი ან საეარაუდო (მოცემულ პირობებში) მოვლენების მექანიკური მახასიათებლების კავშირები, ამიტომ ეს კანონები არ შეიძლება დაუპირისპირდეს სისტემის იმ ბიოლოგიურ თვისებებს, რომლებითაც განისაზღვრება ორგანიზმის შესაძლებლობები.

მექანიკის ზოგადი კანონების ცოდნა აუცილებელი პირობაა ადამიანის მოძრაობითი საქმიანობის ყველა მხარის შემეცნებისათვის. სახელდობრ ამ კანონებით უნდა დავიწყოთ სპორტში მოძრაობების შესწავლა.

ძირითადი მექანიკის კურსი დაყოფილია სამ ნაწილად: სტატიკად, კინემატიკად და დინამიკად. სტატიკა შეისწავლის მყარი სხეულების წონასწორობის პირობებს, კინემატიკა — სხეულთა მოძრაობას მათზე ძალთა მოქმედების გაუთვალისწინებლად და, ბოლოს, დინამიკა — მექანიკურ მოძრაობებს მოძრავ ობიექტებზე მოდებულ ძალებთან კავშირში.

§ 2. მექანიკის ძირითადი კანონები¹

მექანიკის ძირითადი კანონები ბუნებაში და ექსპერიმენტის დროს მატერიალური სხეულების მოძრაობებზე საუკუნეობრივ დაკვირვებათა განზოგადების შედეგებია.

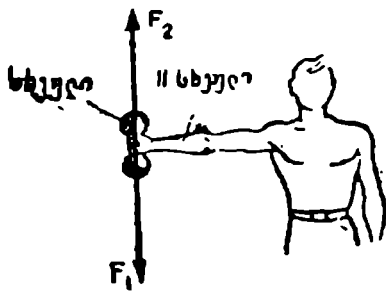
პირველი კანონი (ინერციის კანონი). ყოველი გარე ზემოქმედებისაგან იზოლირებული სხეული ინარჩუნებს მშვიდ მდგომარეობას ან თანაბარზომიერ სწორხაზოვან მოძრაობას მანამ, სანამ სხვა სხეულთა ზემოქმედება არ აიძულებს მას შეიცვალოს ეს მდგომარეობა.

ჩვენ ვამჩნევთ, რომ ნებისმიერი სხეული, თითქოსდა თავის ნებაზე მიშვებული, თანდათანობით ამცირებს სიჩქარეს და, ბოლოს, ჩერდება (მაგალითად, ბილიარდის ბურთულა მასზე კისის დარტყმის შემდეგ, ფეხბურთის ბურთი მასზე ფეხის დარტყმის შემდეგ და ა. შ.). ინერციის კანონთან ეს მოჩვენებითი წინააღმდეგობა აიხსნება მოცემული სხეულის მოძრაობაზე ზეგავლენით: მოძრაობის ზედაპირზე ხახუნით, ჰაერის წინააღმდეგობით და ა. შ. სწორედ ისინი ანელებენ სხეულის მოძრაობას. თუ შევამცირებთ მოძრაობის წინააღმდეგობას, მაშინ იგი მიუახლოვდება თანაბარს. რომ შეგვეძლოს სხეულის მოძრაობის ყოველგვარი წინააღმდეგობის მოსპობა, მაშინ მისი სიჩქარე არ შეიცვლებოდა არც მიმართულებით და არც სიდიდით (მაშასადამე, მოძრაობა იქნებოდა სწორხაზოვანი, თანაბარი).

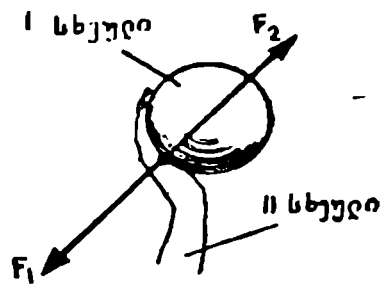
¹ მექანიკის ძირითადი კანონები აქ განიხილება ისეთი მოცულობით, რომელიც საკმარისია ძალის შესახებ ცნების ასათვისებლად და სტატიკის შესასწავლად. ისინი წარმოდგენილია კურსის შესამე ნაწილში — დინამიკაში და უფრო დაწვრილებითაა აღწერილი.

მატერიალური სხეულების ურთიერთქმედებას, რომლის შედეგადაც ხდება ამ სხეულთა მოძრაობის სიჩქარის ცვლილება (ან მათი დეფორმაცია), მექანიკური ურთიერთქმედება ეწოდება.

პრაქტიკულად, რა თქმა უნდა შეუძლებელია სხეულის იზოლირება გარშემო არსებული სხეულების ზემოქმედებისაგან, კერძოდ სხეულის მოძრაობის წინააღმდეგობის ძალთა სრული აცილება. ამიტომ სხეულის მოძრაობის შესანარჩუნებლად მას უნდა მოვდოთ რომელიმე F ძალა. თუ ეს ძალა იქნება წინააღმდეგობის P ძალაზე ნაკლები, მაშინ მოძრაობა შენელებს და სხეული გაჩერდება; თუ იგი წინააღმდეგობის ძალაზე მეტი იქნება, მაშინ სხეულის სიჩქარე გაიზრდება, ხოლო თუ ამ ძალების სიდიდეები ტოლი იქნება, სხეულის სიჩქარე უცვლელი დარჩება. ამ შემთხვევაში სხეულზე მოდებული ძალები ურთიერთწონასწორდება. ასეთი ძალები სხეულის მოძრაობაზე არ მოქმედებს. მაშასადამე, შეიძლება გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა: ყოველი სხეული, რომელიც ურთიერთ გაწონასწორებული ძალების მოქმედების



სურ. 1.



სურ. 2.

ქვეშა თავის სიჩქარეს ინარჩუნებს უცვლელად. კერძოდ შემთხვევაში, როდესაც სიჩქარე ნულის ტოლია, სხეული ინარჩუნებს სიმშვიდის მდგომარეობას. თუ რომელიმე სხეული მოძრაობს უცვლელი სიჩქარით, მაშინ შეიძლება ვილაპარაკოთ, რომ მასზე მოქმედი ყველა ძალა ურთიერთწონასწორობაშია.

სხეულის მიერ თავისი მოძრაობის (კერძოდ, სიმშვიდის მდგომარეობის) უცვლელად შენარჩუნებას მასზე მოქმედი ძალების არარსებობის (ან მათი წონასწორობის) დროს სხეულის ინერცია ეწოდება.

მეორე კანონი. ძალასა და სიჩქარეს (აჩქარებას) შორის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულებაა¹.

მესამე კანონი (ქმედებისა და უკუქმედების ტოლობის კანონი).

¹ ეს კანონი ღინამიკის ძირითადი კანონია და განიხილება შესაბამის ნაწილში.

ძალები, რომლებითაც ორი სხეული მოქმედებს ერთმანეთზე, ყოველთვის ტოლია და მიმართულია ერთ სწორ ხაზზე საწინააღმდეგო მიმართულებებით (ნახ. 1).

ქმედების და უქუქმედების ტოლობა აღინიშნება მაგალითად, ბურთზე დარტყმისას (ნახ. 2): ხელი ურტყამს ბურთს, ხოლო უქუქმედების ძალა ბურთის მხრიდან მოქმედებს ხელზე.

§ 8. ძალის ცნება

ადამიანი განიცდის კუნთოვანი ძალის შეგრძნებას რომელიმე სხეულის ერთი ადგილიდან მეორეზე გადაადგილების, მისი სიჩქარის ცვლილების დროს და ა. შ. ამ შეგრძნებასთან ანალოგიით ძალას უწოდებენ ერთი სხეულის ყოველგვარ მოქმედებას მეორეზე, რის შედეგადაც სხეული იცვლის მექანიკურ მდგომარეობას.

ამა თუ იმ ძალის წარმოშობის ბუნებას ფიზიკა შეისწავლის; ზოგად მექანიკას აინტერესებს მოცემული სხეულის მდგომარეობის მხოლოდ მექანიკური ცვლილება მასზე მოქმედი რომელიმე ძალის (სიმძიმის ძალის, ხახუნის ძალის და ა. შ.) შედეგად.

თუ სხეულის მდგომარეობის ცვლილება გამოიხატება მისი მოძრაობის სიჩქარის ცვლილებით, მაშინ ლაპარაკობენ ძალის დინამიკურ გამოვლინებაზე. სხეულის შენელებული დეფორმაციის დროს აღინიშნება ძალის სტატიკური გამოვლინება.

სხეულზე ძალის მოქმედება განისაზღვრება: 1. ძალის მოდების წერტილით, 2. ძალის მიმართულებით და 3. ძალის რიცხობრივი მნიშვნელობით (მოდულით), რომელსაც ადგენენ ერთეულად მიღებულ სხვა რომელიმე ძალასთან, მისი შედარების გზით.

ძალის ერთეულად პრაქტიკაში და ერთეულთა ტექნიკურ სისტემაში მიღებულია კილოგრამი, ე. ი. საერთაშორისო ეტალონის წონა, რომელიც უდრის ერთი კუბური დეციმეტრი სუფთა წყლის წონას 4°C -ის დროს ზღვის დონესა და განედზე 45° .

საერთაშორისო ერთეულთა სისტემაში ძალის ერთეულად მიღებულია ძალა, რომელსაც ნიუტონი ეწოდება.

1 კგ = 9,80665 ნ \approx 9,81 ნ \approx 10, ნ — მიახლოებითი გაანგარიშების დროს, ან 1 ნ = 0,101971 კგ \approx 0,102 კგ \approx 0,1 კგ — მიახლოებითი გაანგარიშების დროს; 1 მეგანიუტონი (მგნ) = $1 \text{ ნ} \cdot 10^6$ (მგნ \approx 100 000 კგ); 1 კილონიუტონი (კნ) = $0,001 \text{ მგნ} = 1 \text{ ნ} \cdot 10^3$ (1 კნ \approx 100 კგ).

ხელსაწყობებს, რომლებიც გამოყენებულია ძალის გასაზომად,

¹ სისტემა ინტერნაციონალური სისტემა; დაწერილებით იხ. თავი XII, § 60.

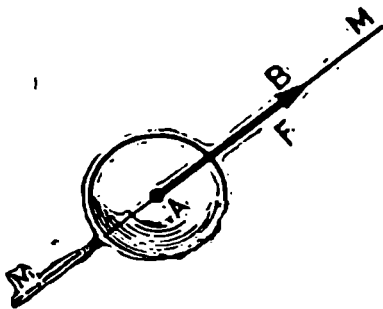
დინამომეტრები ეწოდება. დინამომეტრის მოქმედების პრინციპი ემყარება იმას, რომ ცნობილ ზღვრებამდე დრეკადი ელემენტის (ფინის) დეფორმაცია ან ზამბარის გაკიშვა მათი გამომწვევი ძალის პროპორციულია და წყდება ძალის მოქმედების შეწყვეტასთან ერთად.

§ 4. საალარული და ვექტორული სიდიდეები

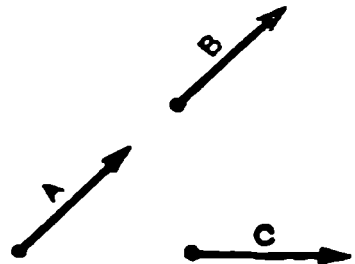
არსებობს ერთმანეთისაგან მნიშვნელოვნად განსხვავებული ფიზიკური სიდიდეების ორი რიგი. ისეთ სიდიდეებს, როგორც არის ტემპერატურა, დრო, მასა და ა. შ. ახასიათებენ (ზომის შერჩეული ერთეულის შემთხვევაში) რიცხვებით და უწოდებენ სკალარულ სიდიდეებს ან უბრალოდ სკალარებს. ისეთი სიდიდეების დასახასიათებლად, როგორც არის ძალა, სიჩქარე, აჩქარება და სხვა, მხოლოდ მათი რიცხობრივი სიდიდეების ჩვენება არ არის საკმარისი, საჭიროა ვიცოდეთ აგრეთვე მათი მიმართულება სივრცეში. ასეთ სიდიდეებს უწოდებთ ვექტორული სიდიდეები, ანუ უბრალოდ ვექტორები.

ყოველგვარი ვექტორული სიდიდე გრაფიკულად გამოისახება სწორხაზოვანი AB მონაკვეთით (ნახ. 3), რომლის სიგრძე არჩეული მასშტაბით შეესაბამება ვექტორის რიცხობრივ სიდიდეს, ხოლო მიმართულება ემთხვევა მის მიმართულებას და აღინიშნება ისრით. AB მონაკვეთის A და B წერტილები შესაბამისად AB ვექტორის საწყისი და ბოლოა. ვექტორის რიცხობრივი სიდიდე დადებითი სკალარული სიდიდეა, რომელიც განისაზღვრება არითმეტიკული რიცხვით.

რადგანაც ვექტორებზე მოქმედება არსებითად განსხვავდება სკალარულ სიდიდეებზე მოქმედებისაგან, ამიტომ მათი ერთმანეთისაგან განსასხვავებლად ვექტორული სიდიდეები აღინიშნება ერთი ან ორი ასოთი (პირველი აღნიშნავს ვექტორის დასაწყისს, ხოლო მეორე მის ბოლოს) ზემოდან ხაზით. ვექტორის მოდულს აღნიშნავენ იმავე ასოთი (ასოებით), რითაც თვით ვექტორს, მაგრამ ხაზის გარეშე.



სურ. 3.



სურ. 4.

ვექტორული სიდიდეების აღნიშვნისათვის ხშირად იყენებენ სქელ ასოებს, ხოლო სკალარულისათვის — ჩვეულებრივებს. ხანდა-ხან იმის ხაზგასმის მიზნით, რომ საინტერესოა მხოლოდ მოდული, ვექტორის აღმნიშვნელ ასოს სვაშენ სწორ ფრჩხილებში. ასე მაგალითად, $|F|$ — F ვექტორის გეგმილი, $|AB|$ — \overline{AB} ვექტორის გეგმილი.

არჩევენ ვექტორის სამ ტიპს:

1. ბმულ ვექტორებს, რომლებსაც აქვს მოდების გარკვეული წერტილი.

2. სრიალა ვექტორებს, რომელთა დასაწყისად შეიძლება მივიღოთ მათი მოქმედების ხაზზე მდებარე ნებისმიერი წერტილი. სრიალა ვექტორები შეიძლება გადავიტანოთ ამ ხაზის გასწვრივ.

3. თავისუფალ ვექტორებს, რომელთა დასაწყისად შეიძლება მივიღოთ სივრცის ნებისმიერი წერტილი.

ორ თავისუფალ ვექტორს ეწოდება ტოლი, თუ მათ აქვთ ერთნაირი მოდული და ერთნაირი მიმართულება (ე. ი. პარალელურებია და მიმართულია ერთ მხარეს). ასე, მაგალითად, \overline{A} და \overline{B} ვექტორები (ნახ. 4) ტოლი ვექტორებია. \overline{A} და \overline{C} ვექტორები კი, მიუხედავად იმისა, რომ მათ ერთნაირი მოდულები აქვს, არ არიან ტოლი, რადგანაც მათი მიმართულებები სხვადასხვაა.

სტატისტიკა

I ტ ა ვ ი

სტატისტიკის უმსახავალი

§ 5. სტატისტიკის საბაზისი და აქსიომები

სტატისტიკა ეწოდება თეორიული მექანიკის ნაწილს, რომელიც შეისწავლის სხეულებისა და მექანიკური სისტემების წონასწორობას, ე. ი. იმ პირობებს, რომლებშიც სხეულზე მოდებული ძალები არ ცვლის მის მოძრაობას, აგრეთვე განისაზღვრება წონასწორობის შესაძლო მდგომარეობები.

სტატისტიკას, კლასიკური მექანიკის პირველი და შესამე კანონების გარდა, საფუძვლად უდევს კიდევ სტატისტიკის აქსიომები. ისინი დასტურდება მრავალსაუკუნოვანი პრაქტიკით და მიიღება დამტკიცების გარეშე.

სანამ შევეხებოდეთ სტატისტიკის აქსიომებს, აუცილებელია შემოვიტანოთ რამდენიმე განსაზღვრება. წინასწარ საჭიროა შევნიშნოთ, რომ სტატისტიკის ყველა დებულება მართებულია მხოლოდ აბსოლუტურად მყარი სხეულისათვის. რეალურად დეფორმირებადი სხეულებისათვის მათი გამოყენების დროს კი აუცილებელია გავითვალისწინოთ ამ უკანასკნელთა თავისებურებანი.

1. მოცემულ სხეულზე მოქმედი ძალების ერთობლიობას ეწოდება ძალების სისტემა.

2. ძალების სისტემას, რომლის მოქმედებითაც თავისუფალი სხეული არ იცვლის თავის თანაბარ მოძრაობას ან მშვიდ მდგომარეობაში რჩება, ეწოდება ძალთა გაწონასწორებული სისტემა.

3. ძალას, რომელიც დაემატება სხეულზე მოქმედ ძალთა სისტემას და წონასწორობაში მოჰყავს სისტემა, ეწოდება გამწონასწორებელი ძალა.

4. ძალთა ორ სისტემას, თუ ისინი ერთნაირ ზემოქმედებას ახდენენ ერთსა და იმავე თავისუფალ მყარ სხეულზე, ეკვივალენტური სისტემა ეწოდება.

პირველი აქსიომა. აბსოლუტურად მყარი სხეული ორი ძალის მოქმედებით წონასწორობაშია მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ეს ძალები სიდიდით ტოლია და მიმართულია ერთ სწორ ხაზზე საწინააღმდეგო მიმართულებით.

მეორე აქსიომა. სხეულზე ძალების გაწონასწორებული სისტემის დამატებით ან მისგან მოცილებით სხეულის წონასწორობა არ ირღვევა.

შედეგი. აბსოლუტურად მყარი სხეულის რომელიმე წერტილში მოდებული ყოველი ძალა შეიძლება მისი მოქმედების შეუცვლელად გადავიტანოთ ამ ძალის მოქმედების ხაზზე მდებარე სხვა ნებისმიერ წერტილში.

აბსოლუტურად მყარი სხეულისათვის არსებითია არა ძალის მოდების წერტილი, არამედ მისი მოქმედების ხაზი. შეიძლება ვთქვათ, რომ აბსოლუტურად მყარი სხეულის მიმართ ძალა სრიალა ვექტორია.

მესამე აქსიომა. ერთ წერტილში მოდებული და ერთმანეთის მიმართ გარკვეული კუთხით მიმართული ორი ძალის ტოლქმედი მოდებულია იმავე წერტილში, სიდიდითა და მიმართულებით უდრის ამ ძალებზე. როგორც გვერდებზე, აგებული პარალელოგრამის დიაგონალს.

მოცემულ ძალებზე აგებულ პარალელოგრამს ეწოდება ძალთა პარალელოგრამი. ხოლო ტოლქმედის ასეთი გზით მოძებნის თვით ხერხს—პარალელოგრამის წესი.

ძალების პარალელოგრამის წესით შეკრებას უწოდებენ მათ გეომეტრიულ შეკრებას. ისევე, როგორც ნებისმიერი ვექტორების შეკრება, იგი აღინიშნება ჩვეულებრივი შეკრების (+) ნიშნით, რომელიც ძალების ვექტორების ასოებით გამოსახულებებს შორისაა. თუ R დრი F_1 და F_2 ძალის ტოლქმედია, მოდებული ტანზოვარჯიშის სხეულის ერთ O წერტილზე¹ (ნახ. 5), მაშინ შეიძლება, დავწეროთ:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (1)$$

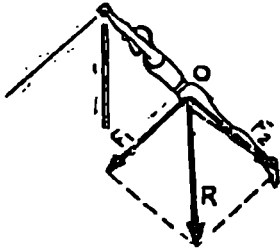
მესამე აქსიომა მიუთითებს ერთ წერტილზე მოდებული ორი ძალის ტოლქმედზე. თუკი ორი ძალა მოდებულია სხეულის სხვადასხვა

¹ აქ ტანზოვარჯიშის სხეული იმყოფება მოძრაობაში. F_1 და F_2 ძალების ბუნება არკვეული იქნება ნაწილში „დინამიკა“. მოცემულ მაგალითში პნიშენელოვანია ურადლება მივაქციოთ მხოლოდ ამ ძალების გეომეტრიულ შეკრებას.

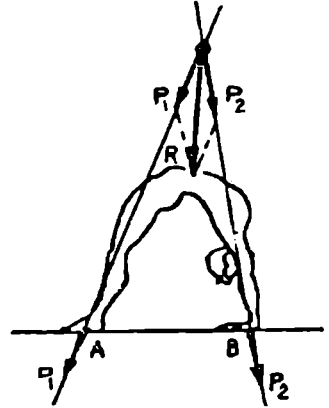
(A და B) წერტილზე და იკვეთება, მაშინ შედეგების გამოყენებით შეიძლება ორივე ძალა გადავიტანოთ მათი მოკმედების ხაზების გადაკვეთის წერტილში და შემდეგ შევკრიბოთ პარალელოგრამის წესით (ნახ. 6).

მაგალითი 1. 1. გვარლზე დაკიდებული მთამსვლელი $\bar{Q} = 70$ კგ წონით განიზიდება განზე თოკით, რომლის ძალაა $F = 70$ კგ. ვიპოვოთ ამ ძალების ტოლქმედი, თუ გავითვალისწინებთ, რომ კუთხე $\alpha = 90^\circ$.

ამოხსნა. შევკრიბოთ პარალელოგრამის



სურ. 5.



სურ. 6.

წესით Q და F ძალები და განვსაზღვროთ მათი ტოლქმედი: $\bar{R} = \bar{Q} + \bar{F}$. რადგან მოცემულ ძალებს შორის კუთხე $\alpha = 90^\circ$ -ის ტოლია, პარალელოგრამის $|R|$ დიაგონალი იქნება:

$$|R| = \sqrt{Q^2 + F^2} = \sqrt{70^2 + 70^2} = 98,96 \text{ კგ} \approx 960 \text{ ნ.}$$

ამრიგად, მთამსვლელის შემკავებელი ძალა გვარლზე განიზიდვის დროს გაიზარდა.

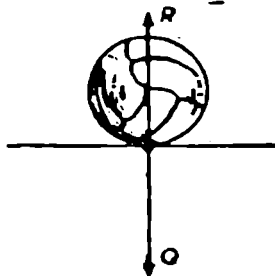
§ 6. კავშირების გზები და რეაქტივები

თავისუფალ სხეულში გულისხმობენ სხეულს, რომელსაც ძალების მოქმედების შედეგად შეუძლია გადაადგილება ნებისმიერი მიმართულებით (მაგალითად, ბურთი ფრენის დროს, წვიმის წვეთი). პრაქტიკულად უფრო ხშირად საქმე გვაქვს არათავისუფალ სხეულებთან, ე. ი. ისეთებთან, რომლებიც ეხებიან ან დაკავშირებული (შეერთებული) არიან სხვა სხეულებთან. რის გამოც მოცემული სხეულის გადაადგილებები შეზღუდული ან შეუძლებელია.

თუ სხეული არ არის თავისუფალი, მაშინ ამბობენ, რომ მასზე დადებულია ბმები. ბმები ეწოდება მოცემული სხეულის თავისუფალ გადაადგილებების შემზღუდავ სხეულებს. ასე, მაგალითად, იატაკზე

მდგომი ადამიანისათვის ბმა იატაკი. იგი ეწინააღმდეგება ადამიანის გადაადგილებას იატაკის ქვემოთ. ღერძზე დაკიდების დროს ტანმოვარჯიშისათვის ბმა ღერძის გრიფი. ადამიანის სხეულის ერთმანეთთან შეერთებული ცალკეული რგოლისათვის (წვივი, ბარძაყი, ტერფი, ხერხემალი და ა. შ.) ბმებია სახსრული ზედაპირები, იოგები, სახსრის ჩანთები და, რა თქმა უნდა, კუნთები.

ძალას, რომლითაც ბმა მოქმედებს სხეულზე და ეწინააღმდეგება



სურ. 7.

მის გადაადგილებას ამა თუ იმ მიმართულებით, ეწოდება ამ ბმის რეაქციის ძალა, ანუ უბრალოდ ბმის რეაქცია. ბმის რეაქციის ძალა მოდულით უდრის ბმაზე ზეწოლის ძალას და მიმართულია ამ უკანასკნელის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ასე, მაგალითად, თუ Q წონის სხეული მაგიდის გლუვ ზედაპირზეა (ნახ. 7), მაშინ მისი წონა¹ მიმართულია ვერტიკალურად ქვემოთ. მაგიდის მხრიდან რეაქციის R ძალა, სხეულზე მოქმედი, მიმართულია ვერტიკალურად ზემოთ. ამ ძალების მოდულები ტოლია: $|Q| = |R|$. ბმების რეაქციები არსებობს მხოლოდ მაშინ, როდესაც მოცემული სხეული მოქმედებს ბმებზე; როგორც კი შეწყდება ეს მოქმედება, ბმების რეაქციებიც შეწყდება. სხეულის წონა მიეკუთვნება აქტიური ძალების კატეგორიას. ძალები, რომლებიც არ ეკუთვნიან ბმების რეაქციის ძალებს, აქტიური ძალებია.

მოყვანილ მაგალითში სიმძიმის Q ძალა სიდიდით და მიმართულებით უცვლელი რჩება. ისეთი ამოცანების ამოხსნის დროს, რომლებშიც კვლევის ობიექტი თავისუფალი სხეულია, განსახილველი ძალა მოდებულია სხვადასხვა სხეულზე. ამიტომ ერთი სხეულის ნაცვლად გვაქვს სხეულთა სისტემა, ხოლო ამოცანა მდგომარეობს შესასწავლ სხეულზე მოქმედი ძალის განსაზღვრაში. ან ამ სხეულის წონასწორობის პირობების დადგენაში. ასე, მაგალითად, თუ გვინდა დავადგინოთ რომელიმე საგნის საყრდენის რეაქცია (იხ. ნახ. 7), მაშინ საქმე გვექნება ამ საგანთან და საყრდენთან (იატაკი), რომელიც ბმაა. ამიტომ სტატიკის ამოცანები — მათ შორის არათავისუფალი სხეულების წონასწორობაზე — შემდეგი დაშვებებით აიხსნება. ყოველგვარი არათავისუფალი სხეული განიხილება, როგორც თავისუფალი, აზრობრივად განათავისუფლებული ბმებისაგან, რომელთა მოქმედება სხეულზე შეცვლილია ამ ბმების რეაქციებით (ბ მ ე ბ ი ს. განთავისუფლები ს. მ. ჩ. ი. ს. ი. პ. ი.).

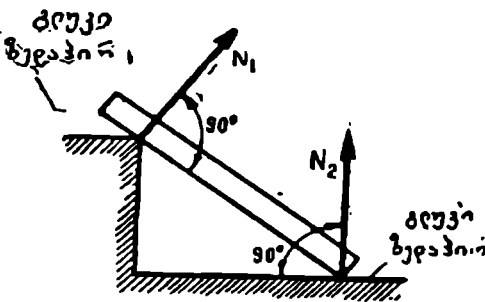
¹ სხეულის წონა კონტაქტის ძალაა, იგი მოდებულია ბმაზე. სიმძიმის ძალა დისტანტური ძალაა; იგი მოდებულია სიმძიმის ცენტრზე.

ფიზიკური ვარჯიშების კვლევის დროს მოქმედი ძალების განსაზღვრისას ხშირად საჭირო ხდება ვისარგებლოთ ბმების განთავისუფლების პრინციპით. ამიტომ აუცილებელია გავეცნოთ ბმების ძირითად ტიპებს.

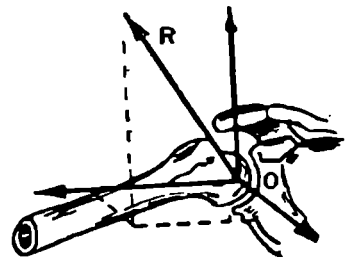
უმარტივესი ბმაა იატაკის ზედაპირი, რომელიც ეწინააღმდეგება სხეულის გადაადგილებას განსაზღვრული მიმართულებით. იგი ნაჩვენებია მე-7 ნახაზზე. ეს ზედაპირი შეიძლება იყოს ხორკლიანი ან იდეალურად გლუვი (რომელიც არ წარმოქმნის ხახუნს). ბმას იდეალურად გლუვი ზედაპირის სახით იდეალური ეწოდება. ზოგ შემთხვევაში სხეულის ხახუნი ზედაპირზე (ბმა) იმდენად მცირეა, რომ იგი შეიძლება უგულებელვყოთ და განვიხილოთ ბმა, როგორც იდეალური. ჭერჭერობით ვისაუბრებთ იდეალურ კავშირებზე.

ბმის რეაქციის მიმართულება ყოველთვის იმ მიმართულების საწინააღმდეგოა, რომლითაც მოცემული ბმა ხელს უშლის სხეულის გადაადგილებას. რადგან აბსოლუტურად გლუვი ზედაპირი ხელს უშლის არა სხეულის სრიალს მასზე, არამედ მხოლოდ სხეულების შესების წერტილში ზედაპირის ნორმალის მიმართულებით გადაადგილებას, ამიტომ მისი რეაქცია N_2 (ნახ. 8) მიმართულია ამ ნორმალის გასწვრივ. რეაქციის ძალის სიდიდე სხეულის ზეწოლის ტოლია. ამის გამო N_1 რეაქცია ღეროს გლუვი ზედაპირის პერპენდიკულარულია.

უმრავლეს შემთხვევაში წინასწარ შეუძლებელია ბმის რეაქციის მიმართულების ჩვენება და მისი განსაზღვრა რთული ამოცანაა. მაგალითად, ბმას, წარმოქმნილ მხრის სახსარში, რომელიც თავისი ფორმით უახლოვდება სფეროს სახსარს (ნახ. 9), გაურკვეველი



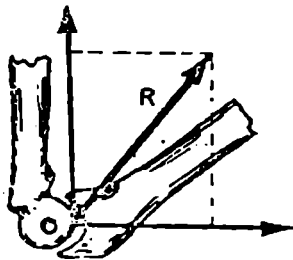
ნახ. 8.



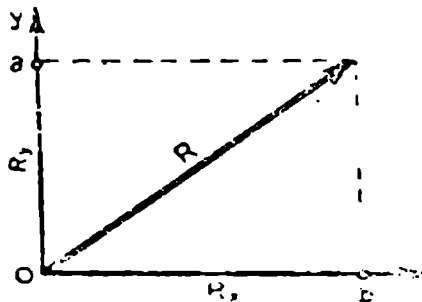
ნახ. 9.

სივრცითი მიმართულება აქვს, ხოლო ბმას მხარ-იდაყვის შეერთებაში (ჰოპონაქსები) (ნახ. 10) აქვს გაურკვეველი მიმართულება მხრის და იდაყვის ძელების სიბრტყეში.

ზედაპირზე ბმის რეაქციის განსაზღვრისათვის საჭიროა შევცვალოთ იგი ორი შემადგენელი რეაქციით, რომელთა მოქმედების ხაზების შერჩევა ნებისმიერად შეიძლება. მოსახერხებელია უცნობი რეაქცია დავშალოთ ჰორიზონტალურ და ვერტიკალურ შემდგენებად. ასეთ შემთხვევაში (ნახ. 11), მართალია, R_x და R_y შემდგენების მოდულები უცნობი რჩება, მაგრამ ამ ძალთა მიმართულებები უკვე მოცემულია.



ნახ. 10.



ნახ. 11.

ამოცანის დასმის დროს რეაქციის შემდგენებად დაშლისას შეიძლება არ ვიზრუნოთ მათ მიმართულებებზე. იგი შეიძლება შერჩეული იყოს არასწორად. ამ შემთხვევაში ამოცანის ამოხსნის დროს მივიღებთ უარყოფით სიდიდეებს — ეს უჩვენებს ძალის კუთხვარობა მიმართულებას.

როგორც აღვნიშნეთ, სახსრული-უძრავი საყრდენის რეაქციის ნაცვლად შეიძლება განვსაზღვროთ ამ რეაქციის ორი შემდგენის მოდულები. ამიტომ, როდესაც შესასწავლ სისტემაში გვხვდება ორი ღეროს უძრავი სახსრული სისტემა, აუცილებელია გვანსოვდეს ორი უცნობი ელემენტის (F_x და F_y) არსებობა.

აქამდე ლაპარაკი იყო ბმებზე აბსოლუტურად გლუვი ზედაპირებით. ეს ბმები ეწინააღმდეგება სხეულთა გადაადგილებას მხოლოდ ზედაპირის პერპენდიკულარული მიმართულებით და ახასიათებს ერთი ნორმალური რეაქცია (მაგალითად, როგორც მე-8 ნახაზზე). არა-გლუვი ზედაპირი ძნელებს თვით ზედაპირზე გადაადგილებას. მაშასადამე, არაგლუვი ზედაპირის რეაქცია უნდა იყოს რთული და ქონდეს ორი შემდგენი: ერთი — ნორმალური, ზედაპირის მიმართ, მეორე — სრიალის სიბრტყეში მდებარე და იმ სხეულის გადაადგილების საწინააღმდეგო მხარეს მიმართული, რომელზეც მოდებულია აქტიური ძალები. პირველი შემდგენი \vec{N} ნორმალური რეაქციაა, მეორე — $\vec{R}_{\text{სა}}$

ხახუნის ძალა ეწოდება. აქედან გამომდინარე, არაგლუვი საყრდენი ზედაპირები განსხვავდება იმით, რომ რეაქციის \overline{R} ძალა ორი \overline{N} და $\overline{R}_{ხახ}$ შემდგენის ჯამია:

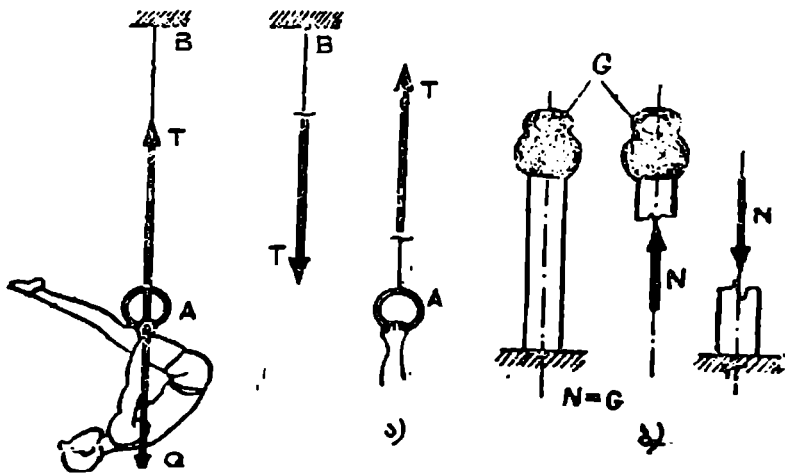
$$\overline{R} = \overline{N} + \overline{R}_{ხახ} \quad (2)$$

მართალია, იდეალურად გლუვი ზედაპირები და, აქედან გამომდინარე, იდეალური ბმები სინამდვილეში არ არსებობს, მრავალ შემთხვევაში ხახუნის ძალის სიდიდე იმდენად მცირეა, რომ შეიძლება უგულებელვყოთ და პრაქტიკულად ბმა იდეალურად მივიჩნიოთ. ასეთი ბმების მაგალითია სახსრული ზედაპირები.

ბმების გარდა, რომლებიც ხორციელდებიან სხეულის ზედაპირების უშუალო შეხების გზით, არსებობენ ბმები, განხორციელებული შუალედი სხეულებით. მაგალითად, ტანმოვარჯიშის სხეული მოქმედებს რგოლების კოქონაქურ საკიდებზე წყვილი გვარლით, ხოლო მოციგურავის სხეული ყინულს აწვება ციგურების ბასრი ზედაპირით.

დაუშვათ, AB გვარლის A რგოლზე, რომლის მეორე ბოლო უძრავადაა დამაგრებული B კავზე, ჰკიდია სხეული (ტანმოვარჯიშე) Q წონით (ნახ. 12). გვარლის T რეაქცია უმართულია ვერტიკალურად ზემოთ და რიცხობრივად უდრის სხეულის Q წონას. მნიშვნელოვანია აღვნიშნოთ, რომ გვარლი იწვევს სიდიდით ტოლ, მაგრამ მმართველებით საწინააღმდეგო მოქმედებას იმ სხეულზე, რომლებსაც იგი ეხება თავისი ბოლოებით.

თუ გვარლს, რომელზეც ჰკიდია სხეული, აზრობრივად გადავ-



ნახ. 12.

პრით, მაშინ ძალების მოქმედება გვარლში საკიდელზე და სხეულზე უნდა ეუჩვენოთ ისრებით, როგორც მაგალითად, მე-12 ა ნახაზზე. თუ გადაკრის ასეთ მეთოდს გამოვიყენებთ შეკუმშულ ღეროზე, მაშინ ამ ღეროში მოქმედი ძალები, საჭიროა მოვდოთ სხეულებს, რომლებსაც იგი აერთებდა, როგორც ეს ნაჩვენებია მე-12 ბ ნახაზზე.

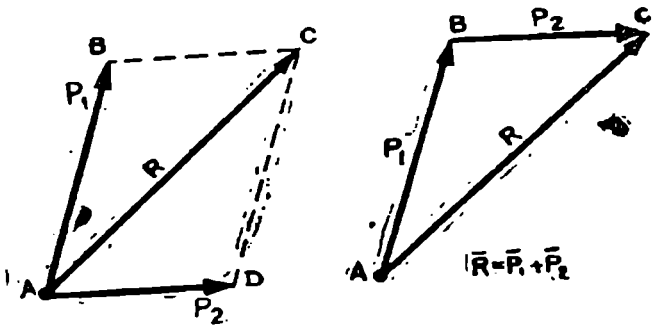
II ტ ა მ ი

კრებადი ძალების ბრტყელი სისტემა

§ 7. ერთ წერტილში მოღვაძლი ორი ძალის შეკრება

კრებად ძალებს უწოდებენ იმ ძალთა სისტემას, რომელთა მოქმედების ხაზები ერთ წერტილში იკვეთება. თუ მოცემული სისტემის ყველა ძალას გადავიტანთ. მათი მოქმედების ხაზების გასწვრივ ამ ხაზების გადაკვეთის საერთო წერტილში, მაშინ სისტემის მოქმედება აბსოლუტურად მყარ სხეულზე არ შეიცვლება. ეს საშუალებას იძლევა ნებისმიერად კრებადი ძალების სისტემა შევცვალოთ ერთ წერტილში მოდებული ძალების ეკვივალენტური სისტემით. აქ შეიძლება შემოვიფარგლოთ იმ კრებადი ძალების სისტემის განზილვით, რომელთა მოქმედების ხაზები განლაგებულია ერთ სიბრტყეში. ძალთა ასეთ სისტემას კრებადი ძალების ბრტყელ სისტემას უწოდებენ.

სხეულზე ერთ წერტილში მოდებული ორი ძალის შეკრება გრაფიკულად უბრალოდ ხდება. დავუშვათ, მყარი სხეულის A წერტილში მოდებულია ორი \vec{P}_1 და \vec{P}_2 ძალა (ნახ. 13). ძალთა პარალელოგრამის წესის საფუძველზე ამ ძალების \vec{R} ტოლქმედი მოდებულია იმა-



ნახ. 13.

ვე A წერტილში და მოდულით და მიმართულებით განისაზღვრება ამ ძალებზე, როგორც გვერდებზე, აგებული პარალელოგრამის დიაგონალით.

ტოლქმედის მოძებნისათვის $ABCD$ პარალელოგრამის ნაცვლად უფრო მოსახერხებელი და მარტივია ავაგოთ მხოლოდ ერთი ABC სამკუთხედი. ამისათვის ერთი ძალის ვექტორის (\vec{P}_1) ბოლოდან ვატარებთ მეორე ძალის ვექტორის (\vec{P}_2) ტოლ (\vec{BC}) ვექტორს. ABC სამკუთხედის ჩამკეტი AC გვერდი გამოსახავს ორი მოცემული კრებადი ძალის ტოლქმედს მოდულით და მიმართულებით. რჩება მხოლოდ მიღებულ მასშტაბში გავზომოთ მისი სიგრძე და განვსაზღვროთ რიცხობრივი მნიშვნელობა. ABC სამკუთხედს ეწოდება ძალური სამკუთხედი, ხოლო ორი ძალის შეკრების განხილულ ხერხს სამკუთხედის წესი.

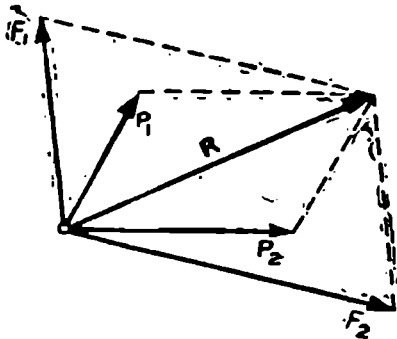
ერთ წერტილში მოდებელი ორი ძალის ტოლქმედი შეიძლება მოიძებნოს იმავე ძალური სამკუთხედის გამოყენებით.

§ 8. ძალის დაშლა ორ კრებად შეიძლება

ძალის დაშლა ორ შემდგენად ნიშნავს მოძებნოთ ორი ძალის ისეთი სისტემა, რომელიც სხეულზე ისეთსავე ზემოქმედებას მოახდენს, როგორსაც მოცემული ერთი ძალა. ადრე აღნიშნულიდან გამოდინარეობს, რომ ორი კრებადი F_1 და F_2 ძალა შეიძლება შევცვალოთ ერთი ტოლქმედი F ძალით. ცხადია, შესაძლებელია ერთი მოცემული F ძალის მოქმედებაც შევცვალოთ ამ ძალის მოქმედების ხაზზე აუცილებლად კრებადი ორი F_1 და F_2 ძალით. ამ შემთხვევაში, F ძალა უნდა იყოს იმ პარალელოგრამის დიაგონალი, რომლის გვერდებია F_1 და F_2 ძალები.

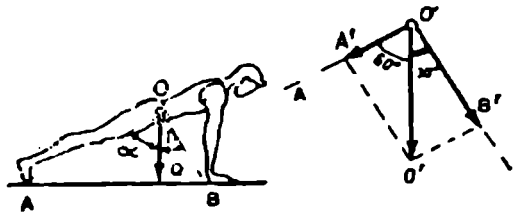
რადგანაც მოცემულ დიაგონალზე შეიძლება ავაგოთ პარალელოგრამების უსასრულო სიმრავლე (ნახ. 14), ამიტომ იმისათვის, რომ ამოხსნა იყოს განსაზღვრული, აუცილებელია ვიცოდეთ ან ორი მიმართულება, რომელთა გასწვრივ უნდა იმოქმედოს ძალის შემდგენებმა; ან ერთ-ერთი ძალის შემდგენის მოდული და მიმართულება; ანდაც ორივე შემდგენი ძალის მოდულები; ანდაც ერთი ძალის მოდული და მეორის მიმართულება.

ძალების ორ და მეტ შემდგენებად დაშლის ფართო გამოყენების მიუხედავად, საჭიროა ყოველთვის გვახსოვდეს, ეს მეთოდი პირობითი და მოსახერხებელია ამოცანების ამოხსნისათვის, მაგრამ ყოველთვის არ შეესაბამება შესასწავლ სისტემაში რეალურად არსებულ ძალებს. ამიტომ დაწვრილებითი ანალიზის გარეშე შეუძლებელია



1) $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$
 2) $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

ნახ. 14.



ნახ. 15.

ვიმსჯელოთ წარმოებული დაშლის საფუძველზე მიღებული ძალების არსებობაზე. მაგალითი 11.1. ფიზიკური ვარჯიშების კვლევის დროს უფრო ხშირად საჭიროა ძალა დაეშალოთ ორ კრებად ძალად, რომელთა OA და OB მიმართულებები მოცემულია (ნახ. 15). მოცემულ მაგალითში საუბარია რეალურ ძალებზე, რომლებიც მოქმედებენ A და B წერტილების საყრდენზე. Q ძალა ცნობილია, კუთხე $\alpha = 60^\circ$ $\beta = 30^\circ$. საჭიროა განვსაზღვროთ Q ძალის შემდგენები.

ამოხსნა. Q ძალის ვექტორის დასაწყისიდან გავ-

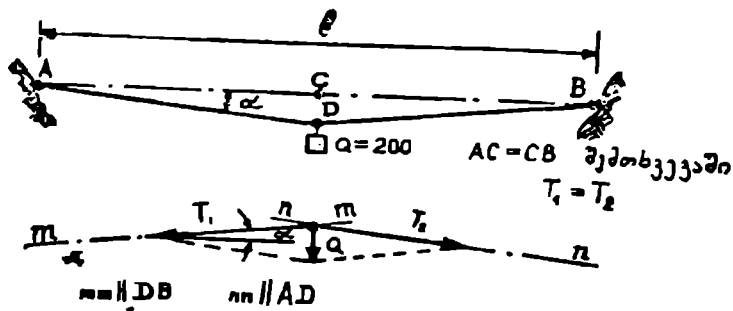
ტარებთ OA და OB აკრეთე $O'A'$ და $O'B'$ სწორ ხაზებს. შედეგად მივიღებთ $OA'O'B$ პარალელოგრამს, რომლისთვისაც Q ძალა დიაგონალია. ამ ძალის შემდგენებია $\vec{OA'}$ ვექტორი და $\vec{OB'}$ ვექტორი. აღნიშნული შემდგენები შეიძლება განსაზღვრული იყოს გრაფიკებითა და გაანგარიშებებით. ასე, მაგალითად, თუ სიმძიმის ძალა $Q = 70$ კგ, მაშინ

$$OA' = Q \cos \alpha = 70 \cos 60^\circ = 35 \text{ კგ,}$$

$$OB' = Q \cos \beta = 70 \cos 30^\circ = 60 \text{ კგ.}$$

მე-15 ნახაზიდან ჩანს, რომ ძალის შემდგენების რიცხობრივი სიდიდე მით უფრო მეტია, რაც მეტია კუთხე მათ მიმართულებებს შორის. საკმაოდ დიდი კუთხის არსებობისას თითოეული შემდგენის მორული შესაძლოა დასაშლელ ძალაზე მეტიც აღმოჩნდეს. ეს გარემოება უნდა გავითვალისწინოთ, თუ საქმე გვაქვს რეალურ ძალებთან და დაშლის ხერხით ვსარგებლობთ ამ ძალების მხედველობაში მიღების მიზნით.

მაგალითი 11. 2. მთამსვლელი უნდა გადავიდეს ნაპრალზე A წერტილიდან B წერტილში საკიდელათი (ნახ. 16). საკიდელასა და მთამსვლელის წონა $Q = 200$ კგ, მანძილი $l = 10$ მ. გამოვთვალოთ T_1 და T_2 გვარლების დაჭიმულობები ჩაზნექის CD ისრის შემთხვევაში, როცა CD უდრის 0,25 მ-ს; 0,5 მ-ს; 1,0 მ-ს.



ნახ. 16.

ამოხსნა. დავულოთ Q ძალა ორ T_1 და T_2 შემდგენად. გვარლის T_1 დაჭიმულობა უდრის:

$$T_1 = \frac{Q}{2 \sin \alpha}.$$

დავადგენთ, რომ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CD}{\frac{l}{2}} = \frac{CD}{5}.$$

შემდეგ ვაპოვობთ CD ჩაკიდულობის მოცემული მნიშვნელობის შემთხვევაში $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ სიდიდეებს და ამ კუთხეების სინუსებს (ცხრ. 1).

11.2 მაგალითის საანგარიშო ცხრილი (გვარლის დაჭიმულობის მნიშვნელობები) ცხრილი 1

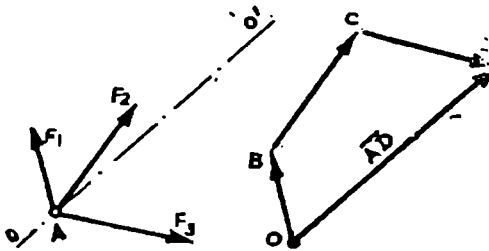
CD (მ)	$\operatorname{tg} \alpha$		$\sin \alpha$	T_1
0,25	0,05	$2^{\circ}50'$	0,05	2000 კგ (20 კნ)
0,50	0,10	$5^{\circ}50'$	0,10	1000 კგ (10 კნ)
1,00	0,20	$11^{\circ}20'$	0,20	500კგ (5 კნ)

განგარიშებები გვიჩვენებს, რომ თუ გვარლის სიმტკიცის მარაგი მცირეა, მაშინ სიჭირაა გადადგილება მისი ჩაკიდულობის დიდი ისრის შემთხვევაში.

§ 8. ძალური მრავალკუთხედი

მრავალკუთხედს, რომლის გვერდები უდრის კრებად ძალებს და მათ ტოლქმედს და მათივე მიმართულებისაა, ძალური მრავალკუთხედი ეწოდება. დაიწყოთ, მოცემული გვაქვს სამი კრებადი F_1, F_2, F_3

ძალა, რომლებიც უნდა შეეკრიბოთ. ვუჩვენოთ მოცემული ძალები ნებისმიერ მასშტაბში A წერტილში მოდებული ვექტორებით (ნახ. 17). ავირჩიოთ ძალთა მოქმედების სიბრტყეში ნებისმიერი O წერტილი და გადავზომოთ მისგან შერჩეულ მასშტაბში F_1 ძალის ტოლი ვექტორი \overline{OB} ; მისი ბოლოდან (წერტილი B) გავატაროთ F_2 ძალის ტოლი ვექტორი \overline{BC} ; ამ ვექტორის ბოლოდან (წერტილი C) გავატაროთ F_3 ძალის ტოლი ვექტორი \overline{CD} . O და D წერტილების შემაერთებელი ვექტორი \overline{OD} შერჩეულ მასშტაბში იქნება F_1, F_2 და F_3 ძალების ტოლქმედი. მიღებული მრავალკუთხედი $OBCD$ ძალური მრავალკუთხედი. მისი ჩამკეტი OD გვერდი მიმართულია პირველი ძალის ვექტორის საწყისიდან უკანასკნელი ვექტორის ბოლოსაკენ და გამოსახავს კრებადი ძალების მო-



ნახ. 17.

ცემული სისტემის ტოლქმედს როგორც სიდიდით, ასევე მიმართულებით. იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ ტოლქმედის მოქმედების ხაზი, საკმარისია კრებადი ძალების მოქმედების ხაზის საერთო A წერტილში გავატაროთ ძალური მრავალკუთხედის ჩამკეტი გვერდის პარალელური OO' სწორი ხაზი.

კრებადი ძალების შეკრების წესი ნებისმიერი ვექტორების შეკრების საერთო წესია და ეწოდება გეომეტრიული შეკრება. იგი მართებულია კრებადი ძალების ნებისმიერი რიცხვის შემთხვევაში. ძალების გეომეტრიული შეკრება შეიძლება ჩავეწეროთ ასე:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \dots + \overline{F}_n \quad (3)$$

ან შემოკლებით:

$$\overline{R} = \sum_1^n \overline{F}_n \quad (4)$$

\sum სიმბოლო აღნიშნავს, რომ საჭიროა შევაჯამოთ მის შემდგომ

მოთავსებული გამოსახულებები, n ინდექსზე ყველა მთელი რიცხვის მინიჭებით სიმბოლოს ქვემოთ ნაჩვენებიდან სიმბოლოს ზემოთ ნაჩ-

ვენებამდე: ხანდახან ჩაწერის გამარტივებისათვის ინდექსის ცვალე-
ბადობის ზღვრებს გამოტოვებენ და წერენ:

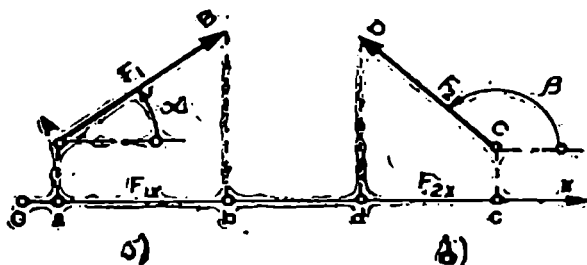
$$\bar{R} = \sum \bar{F}_n. \quad (5)$$

ასეთ შემთხვევაში გულისხმობენ, რომ იკრიბება ყველა ძალა, დაწყებული F_1 -დან F_n -მდე. კრებადი ძალების სისტემის ტოლქმედი შემდგენთა გეომეტრიული ჯამის ტოლია. თანამიმდევრობა, რომლი-
თაც აიგება ძალური მრავალკუთხედი, შეიძლება შეიცვალოს, რადგა-
ნაც შესაკრებთა ადგილების გადანაცვლებით გეომეტრიული ჯამი არ იცვლება.

§ 10. ვექტორის განსაზღვრა მისი გეგმილით

ვექტორების, მაგალითად ძალების, გეომეტრიული შეკრება, ძა-
ლური მრავალკუთხედის აგების დროს დაკავშირებულია გრაფიკულ
აგებებთან და არ იძლევა საკმარისად ზუსტ შედეგებს, ამიტომ ხში-
რად მიმართავენ ანალიზურ გამოთვლით მეთოდებს, რომლებიც ემ-
ყარება გეგმილების მეთოდის გამოყენებას.

დავუშვათ, $\overline{AB} = \overline{F}$ და x ღერძი ნახაზის სიბრტყეში მდებარეობს
(ნახ. 18, ა). მასზე დავუშვათ ვექტორის საწყისი A და ბოლო B -დან
პერპენდიკულარები, პერპენდიკულარების ფუძეებს (a და b) ეწოდე-
ბა ამ წერტილების გეგმილები მოცემულ ღერძზე.



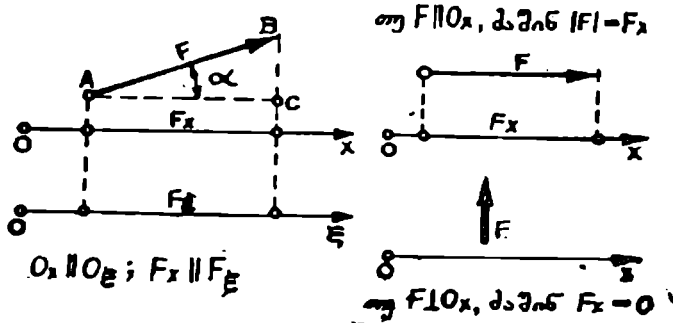
სურ. 18.

მონაკვეთის (ab) სიგრძეს გეგმილთღერძზე ეწოდება ვექტორის
გეგმილი მოცემულ ღერძზე. ვექტორის გეგმილი ღერძზე აღვნიშნოთ.
იმავე ასოთი, რომლითაც აღვნიშნავთ ვექტორს, და გეგმილთღერძი.
ვუჩვენოთ ინდექსით. ასე, მაგალითად, F — ვექტორის გეგმილი x -თა.
ღერძზე აღვნიშნება F_x -ით. ვექტორის გეგმილი მიჩნეულია დადები-
თად, თუ მისი მიმართულება ემთხვევა ღერძის მიმართულებას, და

უარყოფითად — წინააღმდეგ შემთხვევაში. მე-18, ა და მე-18, ბ ნახაზებიდან ჩანს, რომ ვექტორის ღერძზე გეგმილი დადებითია, როდესაც ვექტორი ადგენს მახვილ კუთხეს გეგმილთღერძის მიმართულებასთან: ვექტორის გეგმილი უარყოფითია, როდესაც ეს ვექტორი გეგმილთღერძის მიმართულებასთან ადგენს ბლაგვ კუთხეს. მაშასადამე,

$$F_{1x} = ab, \quad F_{2x} = -cd.$$

მნიშვნელოვანია აღვნიშნოთ, რომ ვექტორის გეგმილი ღერძზე არა ვექტორული, არამედ სკალარული სიდიდეა, რადგან იგი სავსებით განისაზღვრება გეგმილთღერძის შესაბამისი მონაკვეთის ნიშნითა და რიცხვითი მნიშვნელობით. ხშირად მოსახერხებელია ვექტორის დაგეგმილება ღერძზე, რომელიც გადის ვექტორის დასაწყისზე, მოცემულის პარალელურია და ერთნაირად მიმართულია. ვექტორის გეგმილები ორ პარალელურ და ერთნაირად მიმართულ ღერძებზე უდრის ერთმანეთს, როგორც პარალელურთა შორის პარალელურების მონაკვეთები. ეს კარგად ჩანს მე-19 ნახაზიდან. ξ ღერძი მოცემუ-



სურ. 19.

ლი x ღერძის პარალელურია და მასთან ერთნაირადაა მიმართული. ABC სწორი სამკუთხედიდან გვაქვს:

$$F_x = F \cos \alpha. \tag{6}$$

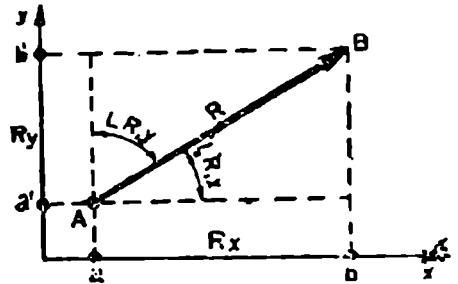
ვექტორის ღერძზე გეგმილი ტოლია ამ ვექტორის მოდულისა, გამრავლებული ვექტორისა და გეგმილთღერძის დადებით მიმართულებას შორის კუთხის კოსინუსზე.

ეს ტოლობა განსაზღვრავს გეგმილის რიცხობრივ სიდიდეს და მის ნიშანს. განხილულ შემთხვევაში (იხ. ნახ. 18, ა) α კუთხე მახვილია, შესაბამისად მისი კოსინუსი იქნება დადებითი და F_1 ძალის გეგმილიც დადებითია. მე-18, ბ ნახაზზე $\overline{F_2}$ ვექტორის გეგმილი უარ-

ყოფითია, რადგანაც ვექტორსა და გეგმილთღერძის დადებით მიმართულებას შორის კუთხე β ბლაგვია და ამ კუთხის კოსინუსი უარყოფითია.

თუ ვექტორი გეგმილთღერძის პარალელურია ($\alpha = 0^\circ$ ან $\alpha = 180^\circ$), ვექტორის გეგმილი ტოლია მისი მოდულისა, რომელიც აღებულია პლუსი ან მინუსი ნიშნით ვექტორის მიმართულების მიხედვით. თუ ვექტორი გეგმილთღერძის პერპენდიკულარულია ($\alpha = 90^\circ$), მაშინ მისი გეგმილი ნულის ტოლია.

სიბრტყეზე ვექტორის განსაზღვრისათვის საჭიროა ვიცოდეთ მისი გეგმილები მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ორ ღერძზე. ამ შემთხვევაში როგორც მე-20 ნახაზიდან ჩანს, \vec{R} ვექტორი მართკუთხედის დიაგონალია, რომლის გვერდები რიცხობრივად უდრის ვექტორის გეგმილებს კოორდინატთა ღერძებზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ \vec{R} ვექტორის მოდული უდრის:



სურ. 20.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (7)$$

ვექტორის მიმართულება განისაზღვრება ტოლობიდან

$$R_x = R \cos(\vec{R}, x) \quad \text{და} \quad R_y = R \cos(\vec{R}, y),$$

სადაც (\vec{R}, x) და (\vec{R}, y) კუთხეებია, რომელთაც ვექტორი ადგენს შესაბამისი გეგმილთღერძის დადებით მიმართულებასთან. აქედან:

$$\cos(\vec{R}, x) = \frac{R_x}{R} \quad \cos(\vec{R}, y) = \frac{R_y}{R} \quad (8)$$

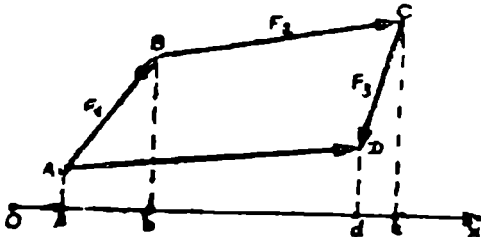
ამრიგად, ყოველი ვექტორი სიბრტყეზე სავსებით განისაზღვრება (მოცემულია), თუ მოცემულია მათი გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე. ვექტორის სივრცეში განსაზღვრისათვის საჭიროა ვიცოდეთ მისი გეგმილები სამ კოორდინატთა ღერძზე.

§ 11. ვექტორთა გეგმილთღერძის უკანონო გეგმილი ღერძზე

თეორემა: ვექტორების გეგმილთღერძის უკანონო გეგმილი რომელიმე ღერძზე ტოლია ვექტორთა შემდგენლების ალგებრული ჯამისა იმავე ღერძზე.

დავუშვათ, მოცემულია ერთ სიბრტყეში განლაგებული რამდენიმე, მაგალითად, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ ვექტორი. ვექტორების შეკრების წესის თანახმად, მათი გეომეტრიული ჯამი იქნება $\vec{AD} = \sum \vec{F}_n$ ვექტორი, რომელიც ჩამკეტი გვერდია ვექტორული $ABCD$ მრავალკუთხედისა, რომლის გვერდებია შემდგენი ვექტორები. (ნახ. 21).

თუ დავაგვიგმილებთ ვექტორებს რომელიმე x ღერძზე, მივიღებთ:



ნახ. 21.

$$F_{1x} = ab, \quad F_{2x} = bc,$$

$$F_{3x} = -cd, \quad R_x = ad.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ $ad = ab + bc - cd$, ე. ი.

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} =$$

$$= \sum F_{nx}, \text{ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.}$$

მოცემული თეორემა მართებულია არა მარტო სიბრტყეში განლაგებული ვექტორებისათვის, არამედ სივრცეში ნებისმიერად განლაგებული და ნებისმიერი რაოდენობის ვექტორებისთვისაც.

§ 12. კრებადი ძალების ერთეული სისტემის ტოლქვედის განსაზღვრა

როგორც უკვე ნათქვამი იყო, კრებადი ძალების სისტემის ტოლქვედი უდრის მათ გეომეტრიულ ჯამს; ვექტორების გეომეტრიული ჯამის გეგმილი რომელიმე ღერძზე ტოლია ვექტორების შემდგენთა ალგებრული ჯამისა. იმავე ღერძზე.

აქედან გამომდინარეობს, რომ კრებადი ძალების სისტემის ტოლქვედი რომელიმე ღერძზე უდრის ძალების შემდგენთა ალგებრულ ჯამს იმავე ღერძზე:

$$R_x = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = \sum X_n,$$

$$R_y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n = \sum Y_n. \quad (10)$$

ეს განტოლებები გვაძლევს საშუალებას, თუ ცნობილია ძალების გეგმილები რომელიმე ღერძზე, გამოვთვალოთ ტოლქვედის გეგმილი იმავე ღერძზე. თუ ვიცით რომელიმე ძალის გეგმილები ორ ურთიერთპერპენდიკულარულ ღერძზე, რომელთა სიბრტყეშიც მდებარეობს მოცემული ძალის ვექტორი, შეიძლება (7) და (8) ფორმულებით გამოვთვალოთ მისი მოძული და მიმართულება. ერთ სიბრტყეში

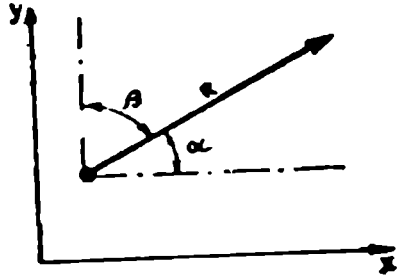
მდებარე ძალების ბრტყელი სისტემის ტოლქმედის მოდული გამოთვლება შემდეგი ფორმულით:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum X_n)^2 + (\sum Y_n)^2} \quad (11)$$

ტოლქმედსა და კოორდინატა ღერძებს შორის კუთხეები შეიძლება გამოთვალეთ ფორმულებით:

$$\cos(\bar{R}, x) = \frac{R_x}{R} = \frac{\sum X_n}{\sqrt{(\sum X_n)^2 + (\sum Y_n)^2}} \quad (12)$$

$$\cos(\bar{R}, y) = \frac{R_y}{R} = \frac{\sum Y_n}{\sqrt{(\sum X_n)^2 + (\sum Y_n)^2}}$$



ნახ. 22.

მიღებულია კუთხეების აღნიშვნა (\bar{R}, x)

ან (\bar{R}, y) -ით, ე. ი. იმ ვექტორების ან ღერძების მიმართულების, როპელთა შორისაცაა მოსაძებნი კუთ-

ხე. ასე, მაგალითად, კუთხე $\alpha = (\bar{R}, x)$, კუთხე $\beta = (\bar{R}, y)$ (ნახ. 22). (11) და (12) ფორმულები საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ კრებადი ძალების სისტემის ტოლქმედის მოდული და მიმართულება ალგებრული გამოთვლების გამოყენებით (ანალიზური მეთოდი).

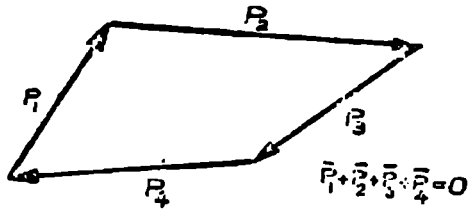
§ 18. კრებადი ძალების არტყელი სისტემის წონასწორობის პირობები

ადრე ნაჩვენები იყო, რომ კრებადი ძალების ყოველგვარი სისტემის შეცვლა შეიძლება ტოლქმედით. თუ ძალთა ეს სისტემა წონასწორობაშია, მაშინ მისი ტოლქმედი ნულის ტოლი უნდა იყოს.

განვიხილოთ კრებადი ძალების ბრტყელი სისტემის წონასწორობის გეომეტრიული პირობა.

კრებადი ძალების ტოლქმედი განისაზღვრება, როგორც ძალური მრავალკუთხედის ჩამკეტი გვერდი. ტოლქმედი რომ ნულის ტოლი იყოს, ამისათვის მრავალკუთხედის ჩამკეტი გვერდიც ნულის ტოლი უნდა იყოს. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, აუცილებელია ძალური მრავალკუთხედი თვითონ იკეტებოდეს. ეს დებულება შეიძლება ჩამოვყალიბოთ ასე: კრებადი ძალების სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ ძალების სისტემისათვის აგებული ძალური მრავალკუთხედი ჩაკეტილი იყოს.

23-ე ნახაზზე აგებულია ჩაკეტილი ძალური მრავალკუთხედი წონასწორობაში მყოფი კრებადი ძალების $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ და \bar{P}_4 ბრტყელი



ნახ. 23.

სისტემისათვის. მასში უქანასკნელი ძალის ვექტორის ბოლო ემთხვევა პირველი ვექტორის დასაწყისს. სწორედ ეს არის წონასწორობის გეომეტრიული პირობა.

ახლა განვიხილოთ კრებადი ძალების ბრტყელი სისტემის წონასწორობის ანალიზური პირობა. ანალიზური მეთოდის გამოყენების დროს წონასწორობის ანალიზისათვის ტოლქმედის სიდიდე გამოითვლება ფორმულით:

$$R = \sqrt{(\sum X_n)^2 + (\sum Y_n)^2} \quad (13)$$

თუ $R = 0$, და იმ პირობით, რომ $(\sum X_n)^2$ და $(\sum Y_n)^2$ ყოველთვის დადებითია, გვექნება:

$$\sum X_n = 0 \text{ და } \sum Y_n = 0. \quad (14)$$

ამ განტოლებებს ეწოდება წონასწორობის განტოლებები.

ამრიგად, კრებადი ძალების ბრტყელი სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისია, რომ ყველა ძალის გეგმილთა ჯამი ურთიერთპერპენდიკულარულ და ძალთა მოქმედების სიბრტყეში მდებარე ორი ნებისმიერი ღერძიდან თითოეულზე ნულის ტოლი იყოს. პრაქტიკაში ძალიან ხშირად გვხვდება ერთ სიბრტყეში მდებარე სამი არაპარალელური ძალის მოქმედება. თუ ერთ სიბრტყეში მდებარე სამი არაპარალელური ძალა, ურთიერთწონასწორდება, მაშინ მათი მოქმედების ხაზები იკვეთება ერთ წერტილში.

ეს შეიძლება ადვილად დავამტკიცოთ ამ ძალთა წონასწორობის სამკუთხედის აგების გზით.

§ 14. კრებადი ძალების ბრტყელი სისტემის წონასწორობაზე ამოცანათა ამოხსნა

ნებისმიერი სახით განლაგებული ძალების ბრტყელი სისტემის წონასწორობაზე ამოცანები რეკომენდებულია ამოვხსნათ განსაზღვრული თანამიმდევრობით. პირველად საჭიროა განთავისუფლების

პრინციპის გამოყენებით გავანთავისუფლოთ სხეული ან წერტილი, რომლის წონასწორობაც განისაზღვრება მათი ბმებისაგან და შეეცვალოთ ეს უკანასკნელი შესაბამისი რეაქციებით. შემდეგ საჭიროა გავაკეთოთ სტემატური ნახაზი, რომელზეც აღენიშნავთ სხეულსა ან წერტილზე მოდებულ ყველა აქტიურ ძალასა და ყველა ბმის რეაქციას (შეგახსენებთ, რომ სტატიკაში სხეულის წონასწორობის ნიშანია მისი უძრავობა). შემდგომ უნდა გამოვიყენოთ ძალების წონასწორობის პირობები გეომეტრიული ან ანალიზური ფორმით იმისდა მიხედვით, თუ რომელი მათგანი აღმოჩნდება უფრო მარტივი და მოხერხებული მოცემულ ამოცანაში. პირველ შემთხვევაში ჩაგვტოვოთ ძალური მრავალკუთხედის მეშვეობით კრებადი ძალების სისტემისათვის განსაზღვრავენ საძიებელ ძალებს ან მოცემული ამოცანის სხვა უცნობ სიდიდეებს, მეორე შემთხვევაში ადგენენ საძიებელ სიდიდეების გეგმილების მეთოდის გამოყენებით წონასწორობის (14) განტოლებიდან.

კოორდინატთა საწყისად მოსახერხებელია მივიღოთ ის წერტილი, რომელშიც ძალები იკრიბება. კოორდინატთა ღერძები საჭიროა მივმართოთ ისე, რომ შესაძლებელი გახდეს ძალთა გეგმილები ამ ღერძებზე მოენახოთ უფრო მარტივად. ხშირად ღერძებიდან ერთ-ერთს მოათავსებენ რომელიმე ერთი უცნობი ძალის მოქმედების ხაზის პერპენდიკულარულად, ამ შემთხვევაში ამ უცნობი ძალის გეგმილი გამოირიცხება წონასწორობის შესაბამისი განტოლებიდან და გაანგარიშებები გამარტივდება.

მაგალითი II. 3. წრეხაზზე რაიმე რადიუსით მოძრავ ველომრბოლეზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა $Q=81$ კგ და ცენტრიდანული ძალა $F=30$ კგ (ნახ. 24). საჭიროა მოვძებნოთ ტოლქნედი R , თუ ცნობილია, რომ სისტემა ველომრბოლე-ველოსიპედი გადახრილია ვერტიკალიდან ჰორიზონტისაკენ $\alpha=20^\circ$ კუთხით (ე. ი. სარბენი ბილიკის ჰორიზონტთან დახრის ტოლი კუთხით).

ამოხსნა. O წერტილი მოსახერხებელია მივიღოთ კოორდინატთა სათავედ, ხოლო F ძალის მოქმედების ხაზი — x ღერძად. y ღერძი შიშართული იქნება x ღერძის პერპენდიკულარულად. თუ დავაგეგმილებთ ძალებს კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ:

$$X_1 = Q \cos(\bar{Q}, x),$$

$$X_2 = F \cos(\bar{F}, x) = 30 \cos 0^\circ = 30 \text{ კგ} \quad (295 \text{ ნ}),$$

$$Y_1 = Q \cos(\bar{Q}, y) = 81 \cos 0^\circ = 81 \text{ კგ} \quad (794 \text{ ნ}),$$

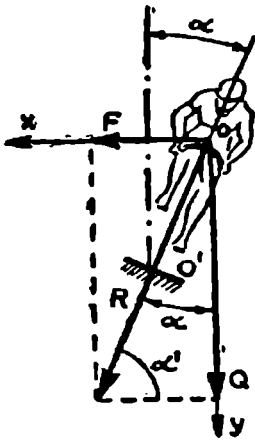
$$Y_2 = F \cos(\bar{F}, y) = 30 \cos 90^\circ = 0.$$

მე-10 ფორმულით განვსაზღვრავთ ტოლქმედის გეგმილს x ღერძზე.

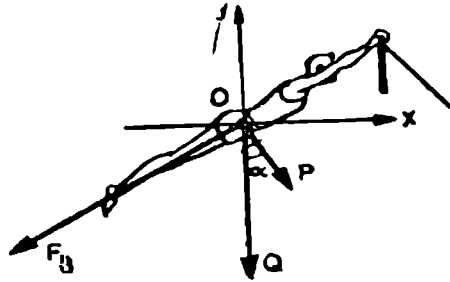
$$R_x = \Sigma X_n = 0 + 30 = 30 \text{ კგ (295 ნ)},$$

$$R_y = \Sigma Y_n = 81 + 0 = 81 \text{ კგ (794 ნ)}.$$

მე-11 ფორმულით განვსაზღვრავთ ტოლქმედის სიდიდეს (მოდულს):



ნახ. 24.



ნახ. 25.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{81^2 + 30^2} = 86 \text{ კგ (844 ნ)}.$$

ტოლქმედის მიმართულებას განვსაზღვრავთ ერთ-ერთი მე-12 ფორმულით:

$$\cos(\bar{R}, x) = \frac{R_x}{R} = \frac{30}{86} = 0,35.$$

აქედან (ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცხრილებიდან) დავადგენთ:

$$\angle(\bar{R}, x) = 69^\circ 30' \approx 70^\circ.$$

მაშასადამე, ტოლქმედი R , გამავალი O წერტილსა და O' წერტილზე (თვის გრუნტთან შეხების წერტილი), დახრილია ჰორიზონტალურ ზედაპირთან $\alpha = 70^\circ$ კუთხით.

მაგალითი II. 4¹. ტანმოვარჯიშეზე, რომელიც ასრულებს დიდ შემობრუნებას, დროის რომელიმე მომენტში მოქმედებს O წერტილში მოდებული ძალები: სიმძიმის ძალა $Q = 80$ კგ, ცენტრიდანული ძალა $F_b = 200$ კგ და ძალა, რომლითაც მწვრთნელი ეხმარება ვარჯიშის შესრულებაში $P = 40$ კგ (ნახ. 25). საჭიროა დავადგო-

¹ ეს მაგალითი არ მიეკუთვნება სტატიკას—იგი მოყვანილია აქ ტოლქმედის გეგმილთა მეორედით განსაზღვრაში სავარჯიშოდ.

ნოთ ტანმოვარჯიშის სხეულზე მოდებული ძალების ტოლქმედი. ცნობილია, რომ P ძალა F_y ძალის მოქმედების ხაზის პერპენდიკულარულია. Q და P -ს შორის კუთხე α კვლევის მომენტში 20° -ს უდრის.

ამოხსნა. მივიღოთ ტანმოვარჯიშის სხეულის სიმძიმის ცენტრი კოორდინატთა სათავედ, რომელთა ღერძები განლაგებული არიან ვერტიკალურად და ჰორიზონტალურად.

განვსაზღვროთ ძალების გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე. Ox ღერძზე გეგმილი:

$$P_x = P \cos (90^\circ - \alpha) = 40 \cdot \cos 70^\circ = 40 \cdot 0,34 = 13,6 \text{ კგ (133 ნ),}$$

$$Q_x = Q \cos 90^\circ = 0,$$

$$F_{ux} = F_y \cos \alpha = -200 \cdot \cos 20^\circ = -200 \cdot 0,94 = \\ = -188 \text{ კგ (-1850 ნ).}$$

ტოლქმედის გეგმილი Ox ღერძზე:

$$R_x = P_x + Q_x + F_{ux} = 13,6 + 0 - 188 = -174,4 \text{ კგ (-1710 ნ).}$$

გეგმილი Oy ღერძზე:

$$R_y = -P \cos \alpha = -40 \cos 20^\circ = -40 \cdot 0,94 = -38 \text{ კგ (-373 ნ),}$$

$$Q_y = Q = -80 \text{ კგ,}$$

$$F_{uy} = -F_y \cos 70^\circ = -200 \cdot 0,34 = -68 \text{ კგ (-670 ნ).}$$

ტოლქმედის გეგმილი Oy ღერძზე:

$$R_y = P_y + Q_y + F_{uy} = -38 - 80 - 68 = -196 \text{ კგ (-1920 ნ).}$$

ტოლქმედი:

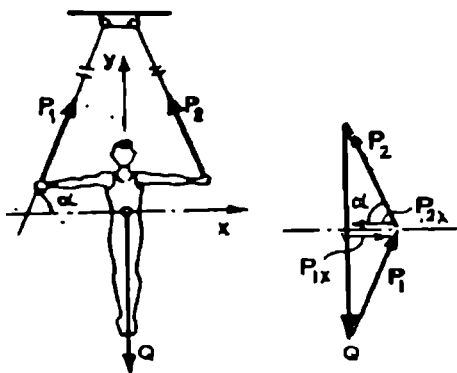
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-174,4)^2 + (-196)^2} = 263 \text{ კგ (2580 ნ).}$$

Ox ღერძსა და R ტოლქმედს შორის კუთხეს დავადგენთ მე-12 ფორმულით:

$$\cos(\bar{R}, x) = \frac{R_x}{R} = \frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}} = \frac{-174,4}{263} = -0,664.$$

იგი $48^\circ 36'$ -ის ტოლია. ნიშანი მინუსი კოსინუსის წინ ნიშნავს, რომ კუთხის გადაზომვა აუცილებელია ღერძის უარყოფითი მიმართულებიდან.

შ ა გ ა ლ ი თ ი II. 5. განვსაზღვროთ ტანვარჯიშის რგოლების



ნახ. 26.

გვარლებში P_1 და P_2 ძალები ტანმოვარჯიშის მიერ ხელების განზე გაბჯენის შესრულების დროს (ნახ. 26). ტანმოვარჯიშის სიმძიმის ძალა (Q) მოცემულია.

ამოხსნა. მივიღოთ ტანმოვარჯიშის სხეულის სიმძიმის ცენტრი x და y კოორდინატთა სათავედ, რომლებიც მიმართულნი არიან პორიზონტალურად და ვერტიკალურად. განვსაზღვროთ P_1 , P_2 და Q ძალების გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე.

გეგმილები x ღერძზე:

$$P_{1x} = P_1 \cos \alpha, \quad P_{2x} = -P_2 \cos \alpha, \quad Q_x = 0.$$

ტოლქმედის გეგმილი x ღერძზე:

$$R_x = P_1 \cos \alpha - P_2 \cos \alpha,$$

ანუ, რადგან წონასწორობის დროს $R_x = 0$, ამიტომ $|P_1| = |P_2|$. გეგმილები y ღერძზე:

$$P_{1y} = P_1 \sin \alpha, \quad P_{2y} = P_2 \sin \alpha,$$

$$Q_y = -Q.$$

ტოლქმედის გეგმილი y ღერძზე:

$$R_y = P_1 \sin \alpha + P_2 \sin \alpha - Q = 2 P \sin \alpha - Q,$$

ანუ, რადგან წონასწორობის დროს $R_y = 0$, ამიტომ $P = \frac{Q}{2 \sin \alpha}$.

26-ე ნახაზზე ნაჩვენებია აგრეთვე ამ ამოცანის გრაფიკული ამოხსნის სქემა. აგებულ ძალურ სამკუთხედებში Q გვარლებში ძალების გამწონასწორებელი ძალაა. ნახაზიდან ჩანს, რომ რგოლების ჩამოკიდების დაშოკლების (α -ს შემცირების) შემთხვევაში თითოეულ გვარლში ძალა, იზრდება; აგრეთვე ძალის პორიზონტალური შემდგენი, ე. წ. გაბჯენი, რომელიც ტანმოვარჯიშის სხეულზე მოცემულ ვარჯიშში „ჩამსოლ“ მოქმედებას ახდენს და აადვილებს „ჯვრის შე-

ნარჩუნებას. ამიტომ რგოლების დამოკლებული ჩამოკიდებით მიზანშეწონილია ვისარგებლოთ მოცემული ვარჯიშის ათვისების დროს. ჩვეულებრივ იყენებენ ქამარს (ხელის ლონჯას), რომლის მეშვეობითაც ახდენენ ბაგირების გადაჭერას სხვადასხვა დონეზე.

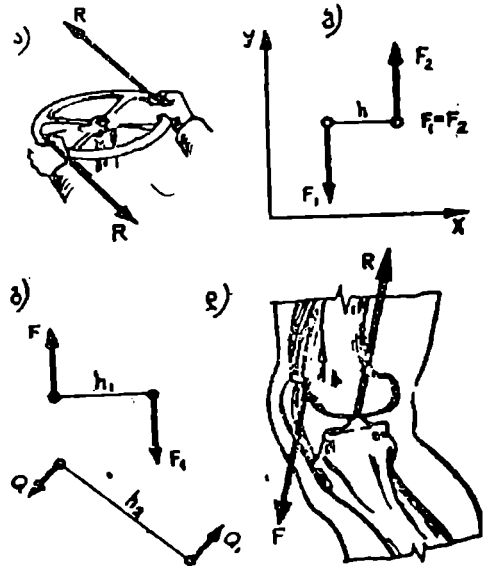
III თავი

პარალელური ძალები, წყვილძალა და ძალთა მომენტები

§ 15. პარალელური ძალების უპირადად წყვილძალა და მისი მომენტი სხეულზე.

ერთ მხარეს მიმართული ორი პარალელური ძალის შეკრება ხდება შემდეგი თეორემის¹ შესაბამისად: აბსოლუტურად მყარ სხეულზე მოქმედი ერთ მხარეს მიმართული ორი პარალელური ძალის ტოლქმედი მოდულით ტოლია შესაყრები ძალების მოდულების ჯამისა, მათი პარალელურია და მიმართულია იმავე მხარეს; ტოლქმედის მოქმედების ხაზი გადის შესაყრები ძალების მოდულების წერტილებს შორის ამ წერტილებიდან ძალების უკუპროპორციულ მანძილებზე.

მოდულით ტოლი და სხვადასხვა მხარეს მიმართული ორი პარალელური ძალის სისტემას წყვილძალა ეწოდება. ასეთი ძალების სისტემის მაგალითია ძალები, რომლებიც გადაეცემა მძღოლის ხელებიდან ავტომობილის საჭის თვალს (ნახ. 27, ა). წყვილძალას აქვს ძალიან დიდი მნიშვნელობა სპორტული მოძრაობების ანალიზის დროს. ძალების წყვილის ჯამი მულის ტოლია: $F_1 - F_2 = 0$ (ნახ. 27, ბ), ე. ი. წყვილძალას ტოლ-



ნახ. 27.

¹ მოსწავლეებმა უნდა დამტკიცონ.

ქმედი არა აქვს. მიუხედავად ამისა, სხეული, რომელზეც მოქმედებს წყვილძალა, არ არის წონასწორობაში. როგორც გამოცდილება გვიჩვენებს წყვილძალა, ცდილობს მოაბრუნოს სხეული, რომელზეც იგი მოდებულია. ეს თვისება რაოდენობრივად განისაზღვრება წყვილძალის მომენტი¹, რომელიც ტოლია ერთ-ერთი ძალის ნამრავლისა ძალების მოქმედების ხაზებს შორის უმოკლეს მანძილზე.

აღნიშნოთ წყვილძალის მომენტი M -ით, ხოლო ძალებს შორის მანძილი — h -ით. მაშინ მომენტის აბსოლუტური სიდიდე (იხ. ნახ. 27, ბ) იქნება:

$$M = Fh = F_1h. \quad (15)$$

ძალების მოქმედების ხაზებს შორის უმოკლეს მანძილს ეწოდება წყვილძალის მხარი. ამიტომ შეიძლება ვთქვათ, რომ წყვილძალის მომენტი რიცხობრივად უდრის ერთ-ერთი ძალის ნამრავლს მის მხარზე.

რადგანაც წყვილძალას ტოლქმედი არა აქვს, ამიტომ მისი გაწონასწორება ერთი ძალით არ შეიძლება. წყვილძალა შეიძლება გაწონასწორდეს სხვა წყვილძალით.

რადგან ერთეულების ტექნიკურ სისტემაში ძალა იზომება კილოგრამობით, ხოლო მხარი — მეტრობით, წყვილძალის მომენტი გაიზომება კილოგრამომეტრობით (კგმ). ერთეულთა საერთაშორისო სისტემაში (ის) ძალას ზომავენ ნიუტონობით, ხოლო მხარს — მეტრობით. შესაბამისად წყვილძალის მომენტი (ის) სისტემაში გაიზომება ნიუტონმეტრობით (ნმ).

1. მეგანიუტონმეტრი (მმმ) = 1000 კმმ (მმმ $\approx 10^6$ კგმ),

1 კილონიუტონმეტრი (კმმ) = 0,001 მმმ (1 კმმ ≈ 100 კგმ).

წყვილძალის მომენტს მიიჩნევენ დადებითად, თუ წყვილძალა ცდილობს მოაბრუნოს სხეული საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, და უარყოფითად, თუ მოაბრუნება ხდება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

ორი წყვილძალა მიჩნეულია ეკვივალენტურად იმ შემთხვევაში, როდესაც ერთი წყვილძალის მეორით შეცვლის შედეგად სხეულის მდგომარეობა არ იცვლება, ე. ი. სხეულის მოძრაობა არ იცვლება ან წონასწორობა არ ირღვევა. წყვილძალა მისი მოქმედების სიბრტყეში შეიძლება გადავიტანოთ ნებისმიერ მდგომარეობაში. მყარ სხეულზე წყვილძალის მოქმედების ეფექტი ამაზე არ არის დამოკიდებული.

წყვილძალების შეკრების საფუძველია წყვილძალის შემდეგი თვისება: შეიძლება ნებისმიერად შევცვალოთ ძალის სიდიდეები და

¹ წყვილძალის მომენტი ვექტორული სიდიდეა. აქ მხედველობაშია წყვილძალის მომენტის მოდული.

წყვილდალის მხარი სხეულის მდგომარეობის დაურღვევლად, თუ წყვილდალის მომენტი უცვლელი დარჩება. ასე, მაგალითად FF_1 წყვილდალა h_1 მხარით (ნახ. 27, გ) შეიძლება შევცვალოთ h_2 მხრიანი QQ_1 წყვილდალით, ამასთან, ვინარჩუნებთ წყვილდალის მომენტს უცვლელად.

ბიომექანიკურ სისტემებში წყვილდალის მაგალითად გამოდგება წყვილი: აქტიური კუნთობრივი წევა (F) — შესასრების რეაქცია (R) (ნახ. 27, დ).

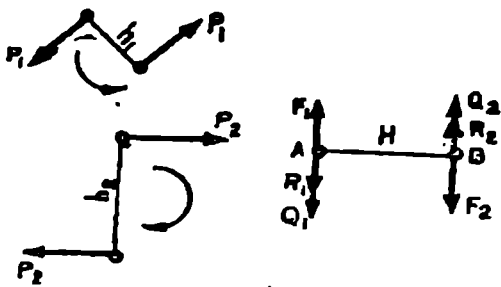
§ 10. წყვილდალების შეკრება

წყვილდალები ცალკეული ძალების მსგავსად შეიძლება შევკრიბოთ. წყვილდალას, რომელიც ცვლის მოცემულ წყვილდალებს, მარჯულტირებელი წყვილდალა ეწოდება.

შევკრიბოთ ერთ სიბრტყეში განლაგებული ორი წყვილდალა: P_1P_1 P_2P_2 მხრებით h_1 და h_2 (ნახ. 28), ე. ი.

$$M_1 = P_1 h_1,$$

$$M_2 = -P_2 h_2.$$



ნახ. 28.

დაიყვანოთ მოცემული წყვილდალები ერთ მხარეზე თითოეული წყვილდალის მომენტების შეუცვლელად. რომელიც მონაკვეთი $AB = H$ მივიღოთ გარდასახული წყვილდალის საერთო მხარად. აღვნიშნოთ Q_1 , Q_2 და $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ -ით ეკვივალენტური წყვილების ძალები, მაშინ

$$M_1 = P_1 h_1 = QH,$$

$$M_2 = -P_2 h_2 = -F_1 H.$$

თუ შევკრიბოთ A და B წერტილებში მოდებულ ძალებს, დავადგინოთ მათ ტოლქმედებს:

$$\overline{R_1} = \overline{Q} - \overline{F_1},$$

$$\overline{R_2} = \overline{Q} - \overline{F_2}. \quad (16)$$

სიდიდით ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული $\overline{R_1}$ და $\overline{R_2}$ ტოლქმედები ადგენს R_1R_2 წყვილდალას, რომლის მომენტიც

$$M = R_1 H = R_2 H. \quad (17)$$

R_1R_2 წყვილი მარეზულტირებელი წყვილია. ჩავსვათ მე-17 განტოლებაში R -ის მნიშვნელობა მე-16 განტოლებიდან, მივიღებთ:

$$M = R_1H' = (Q_1 - F_1)H.$$

მაგრამ, რადგანაც

$$QH = M_1, \quad -F_1H = M_2,$$

ამიტომ

$$M = M_1 + M_2.$$

აზრიგად, მივდივართ დასკვნამდე, რომ მარეზულტირებელი წყვილის მომენტი შემდგენი წყვილების მომენტთა ალგებრული ჯამის ტოლია. ეს დებულება მისაღებია ერთ სიბრტყეში მდებარე წყვილძალების ნებისმიერი რიცხვისათვის. ამიტომ შესაყრები წყვილების ნებისმიერი რიცხვის შემთხვევაში მარეზულტირებელი წყვილის მომენტი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{i=1}^n M_i. \quad (18)$$

წყვილძალების სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მარეზულტირებელი წყვილძალის მომენტი უდრიდეს ნულს ან წყვილძალების მომენტების ალგებრული ჯამი უდრიდეს ნულს.

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = 0. \quad (19)$$

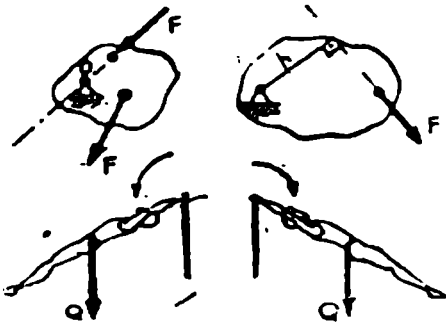
§ 17. ძალის მომენტის წარბილის მიმართ

დაეუშვათ, რომელიღაც სხეული (ფინი) ბრუნავს O წერტილის გარშემო (ნახ. 29, ა). იგი რომ მოვიყვანოთ ბრუნვით მოძრაობაში, საჭიროა მოვდოთ \vec{F} ძალა. თუ იგი მიმართული იქნება O ღერძზე კამაველი ხაზის გასწვრივ, მაშინ მოძრაობა (ბრუნვა) არ გვექნება. რადგანაც ეს ძალა გაწონასწორდება საყრდენის (ღერძის) რეაქციით.

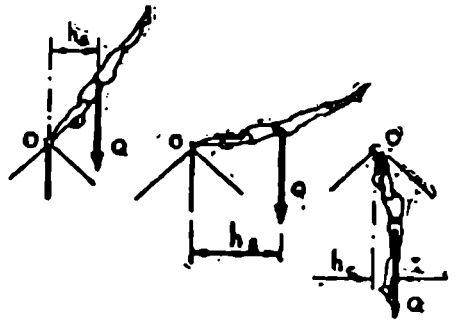
თუ \vec{F} ძალას ექნება სხვა ნებისმიერი მიმართულება, მაშინ იგი გამოიწვევს სხეულის ბრუნვას. სხეულის ბრუნვის გამოწვევი ძალის მოქმედების საზომი, ძალის მომენტი ა.

წერტილის მიმართ ძალის მომენტი¹ ეწოდება

¹ ძალის მომენტი წერტილის მიმართ ვექტორული სიდიდეა. აქ მხედველობაშია ძალის მომენტის მოდული.



ნახ. 29.



ნახ. 30.

ბა ძალის სიდიდის ნამრავლს მხარზე, ე. ი. მოცემული წერტილიდან ძალის მოქმედების ხაზზე დაშვებულ პერპენდიკულარზე (ნახ. 29, ბ). წერტილს, რომლის მიმართაც აიღება მომენტი, ეწოდება მომენტის ცენტრი; ხოლო პერპენდიკულარს — h მომენტის ცენტრის მიმართ ძალის მხარი.

\bar{F} ძალის მომენტი O -ს მიმართ აღინიშნება:

$$M_O(\bar{F}) = Fh. \quad (20)$$

ძალების მომენტებს ზომავენ კილოგრამომეტრობით (კგმ) ან ნიუტონმეტრობით (ნმ), როგორც წვეილძალის მომენტებს.

მიღებულია, რომ ძალის მომენტი მივიჩნიოთ დადებითად, თუ ძალა ცდილობს მოაბრუნოს სხეული საათის ისრის სვლის საწინააღმდეგოდ (ნახ. 29, გ), და უარყოფითად — პირუკუ შემთხვევაში (ნახ. 29, დ). როდესაც ძალის მოქმედების ხაზი გადის მოცემულ წერტილზე, მისი მომენტი ამ წერტილის მიმართ ნულის ტოლია, რადგან მხარი ნულს უდრის. ძალის მომენტის სიდიდე და მიმართულება (ნიშანი) დამოკიდებულია იმ წერტილის მდებარეობაზე, რომლის მიმართაც განსაზღვრავენ მომენტს.

მაგალითი III. 1. 30-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ლერძის გრძელის (წერტილი O) მიმართ სამი მდებარეობა. ტანმოვარჯიშის წონა (Q) 70 კგ-ის ტოლია. მისი მდებარეობის მიხედვით h მხარი იღებს მნიშვნელობებს $h_a = 0.45$ მ; $h_b = 1.0$ მ და $h_c = 0.25$ მ. საჭიროა გამოვთვალოთ სიმძიმის ძალის მომენტი, მოქმედი ტანმოვარჯიშეზე a , b და c მდებარეობაში. მოცემულია მხარები — O წერტილიდან სხეულის სიმძიმის ცენტრში მოღებულ Q ძალის მოქმედების ხაზზე დაშვებული პერპენდიკულარების სიგრძეები.

ამოხსნა. O წერტილის მიმართ Q სიმძიმის ძალის მომენტი

$$M_O(Q) = Qh$$

სამივე შემთხვევაში იქნება უარყოფითი, რადგანაც ძალა ცდილობს ტანმოვარჯიშის სხეული მოაბრუნოს საათის ისრის სვლის მიმართულებით:

$$M_a^Q = (\bar{Q}) = -Qh_a = -70 \cdot 0,45 = -30,5 \text{ კგმ } (-0,305 \text{ კმ}),$$

$$M_b^Q = (\bar{Q}) = -Qh_b = -70 \cdot 1,0 = -70,0 \text{ კგმ } (-0,700 \text{ კმ}),$$

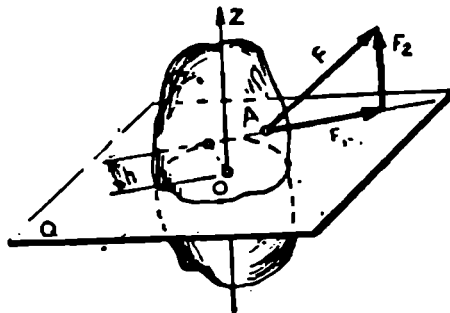
$$M_c^Q = (\bar{Q}) = -Qh_c = -70 \cdot 0,25 = -17,5 \text{ კგმ } (-0,175 \text{ კმ}).$$

§ 18. ძალის მომენტი ღერძის მიმართ

უფრო ხშირად მომენტის ცენტრია ბრუნვის ღერძზე მდებარე წერტილი. ამ შემთხვევაში სხეულზე ძალის მოქმედების ეფექტი დამოკიდებულია ძალის სიდიდეზე, ღერძის მიმართ მის დახრაზე და ძალის პოზიციის წერტილიდან ღერძამდე მანძილზე. ღერძზე გამავალ ძალებს და ღერძის პარალელურ ძალებს არ შეუძლია გამოიწვიოს ამ ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვა. დამაგრებული ღერძის გარშემო ძალის ბრუნვითი ეფექტის შესაფასებლად სარგებლობენ ღერძის მიმართ ძალის მომენტის ცნებით $M_z(\bar{F})$, სადაც z ბრუნვის ღერძია.

დავუშვათ, სხეულზე რომელიმე წერტილში, მაგალითად A -ში (ნახ. 31) მოქმედებს ნებისმიერი F ძალა, რომელიც არც ბრუნვის ღერძის პარალელურია და არც კვეთს მას. გავვლოთ O_z ღერძის პერპენდიკულარული და ძალის ვექტორის A დასაწყისზე გამავალი Q სიბრტყე. დავშალოთ მოცემული \bar{F} ძალა ორ შემდგენად: \bar{F}_1 მდებარეობს Q სიბრტყეში და F_2 O_z ღერძის პარალელურად.

O_z ღერძის პარალელური \bar{F}_2 შემდგენი არა ქმნის მომენტს ამ ღერძის მიმართ. Q სიბრტყეში მდებარე \bar{F}_1 შემდგენი კი ქმნის მომენტს O_z ღერძის მიმართ, ანუ, რაც იგივეა, O წერტილის მიმართ.



ნახ. 31.

F_1 ძალის მომენტი იზომება თვით ძალის მოდულის წამრავლით O წერტილიდან ამ ძალის მოქმედების ხაზზე დაშვებული პერპენდიკულარის h სიგრძეზე ე. თ.

$$M_x(\vec{F}) = F_1 h. \quad (21)$$

ღერძის მიმართ ძალის მომენტის გამოსახულებაში შედის ძალის შემდგენი, რომელიც ბრუნვის ღერძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში მდებარეობს.

მომენტის ნიშანი საერთო წესით განისაზღვრება სხეულის ბრუნვის მიმართულებით: (+) საათის ისრის სვლის საწინააღმდეგო მიმართულებით ბრუნვის; (-) საათის ისრის სვლის მიმართულებით ბრუნვის დროს. მომენტის ნიშნის განსაზღვრის დროს უნდა ვიმყოფებოდეთ ღერძის დადებითი მიმართულების მხარეს. ამიტომ 31 ნახაზზე F ძალის მომენტი O_x ღერძის მიმართ უარყოფითია.

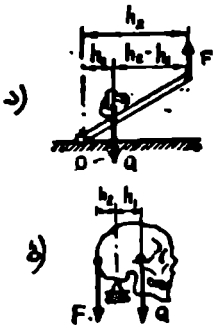
ამრიგად, ღერძის გარშემო ძალის მომენტის განსაზღვრისათვის საჭიროა: 1. დავაგეგმილოთ ძალა ღერძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეზე, 2. მოვძებნოთ ძალის გეგმილის მომენტი სიბრტყეზე ღერძის ამ სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილის მიმართ. არცთუ იშვიათად ღერძის მიმართ ძალის მომენტის განსაზღვრა დაიყვანება ბრუნვის ღერძზე წერტილის მიმართ ძალის მომენტის განსაზღვრამდე (როგორც 31 ნახაზზე). სპორტული მოძრაობების კვლევის დროს წერტილის ან ღერძის მიმართ ძალის მომენტის განსაზღვრა ძალიან ხშირად გვიხდება: სხვადასხვა ვარჯიშის შესრულების დროს სპორტსმენი ასრულებს მოძრაობებს ბრუნვის ღერძის პერპენდიკულარულად გენლაგებულ ვერტიკალურ სიბრტყეში.

§ 19. ბერკეტი. ბერკეტის წონასწორობა

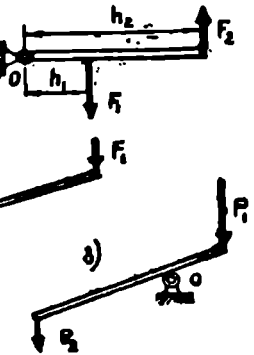
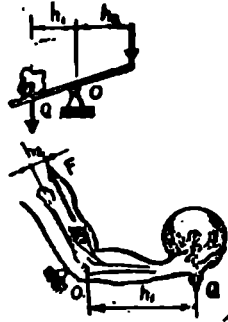
ბერკეტი ეწოდება რომელიმე ღერძზე სახსრულად დამაგრებულ ნიჟარ სხეულს. ტექნიკაში ბერკეტი უფრო ხშირად სწორი ფორმის ძელია. ბიომექანიკაში და ანატომიაში სხეულს, რომელიც ბერკეტს ქმნის, შეიძლება ჰქონდეს საკმაოდ რთული ფორმა (ნახ. 32). მრავალი ამოცანის გადაწყვეტის დროს საჭირო ხდება რომელიმე უძრავ ღერძზე (ბერკეტი) სახსრულად დამაგრებული სხეულის წონასწორობის განხილვა.

ბერკეტს შეუძლია იბრუნოს დამაგრების ღერძის ან სახსრის ცენტრის გარშემო. ბერკეტი წონასწორობაშია, როდესაც მასზე მოქმედი ყველა ძალიან მომენტთა ალგებრული ჯამი მისი უძრავი O წერტილის მიმართ ნულის ტოლია:

$$\sum M_o(\vec{F}_i) = 0. \quad (22)$$



ნახ. 32.



ნახ. 33.

ბერკეტისათვის (ნახ. 33,ა)

$$-F_1 h_1 + F_2 h_2 = 0 \quad (22 \text{ ა})$$

ან

$$F_1 h_1 = F_2 h_2$$

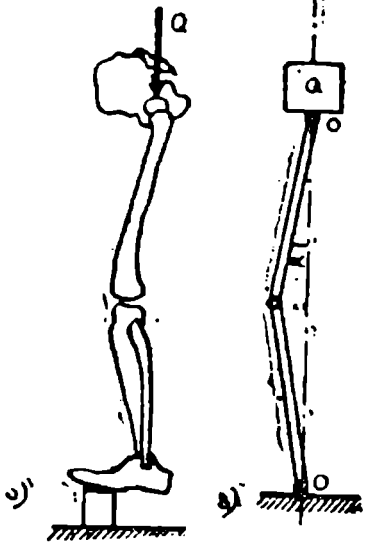
მხრების თანაფარდობების შერჩევით შეიძლება შევცვალოთ ძალთა თანაფარდობები. 33,ბ ნახაზზე ნაჩვენებ ბერკეტები, ემსახურება მეტი ძალის მიღებას მცირე ძალის მოდებისას ($F_2 > F_1$). 33,გ ნახაზზე გამოსახული ბერკეტი საჭიროებს უფრო მეტი P_1 ძალის მოღებას, ვიდრე P_2 — ძალა: მაგრამ აქ P_1 ძალის მცირე გადაადგილების დროს მიიღწევა P_2 ძალის მოდებიან წერტილის შედარებით დიდი გადაადგილება.

§ 20. უდგენილი პარკებში

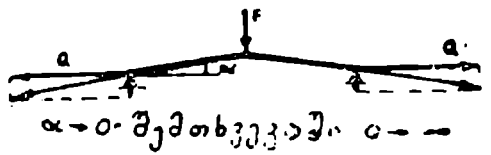
ბიომექანიკაში ხშირად გვხვდება ბოლოზე დატვირთული შედგენილი ბერკეტები. არსებითად ისინი სახსრებით დაკავშირებული ლერძებია, რომლებიც მდებარეობენ თითქმის ერთ სწორ ხაზზე (ნახ. 34). ისინი რომ განვალაგოთ OO' სწორი ხაზის გასწვრივ. საჭიროა, გადავლახოთ უმნიშვნელოდ მცირე კუთხე α . მსგავსი სისტემა დასახასიათებელია მენჯისა და დიდი წვივის, იდაყვისა და მხრის ძვლების შესახსრებისათვის.

შედგენილ ბერკეტზე მცირე F ძალის მოდებით (ნახ. 35). შეგვიძლია გადავლახოთ დიდი Q ძალა (კრივში თითქმის გამართული ზელი. სიმძიმის აწევის დროს თითქმის გამართული ფეხები და ა. შ.)

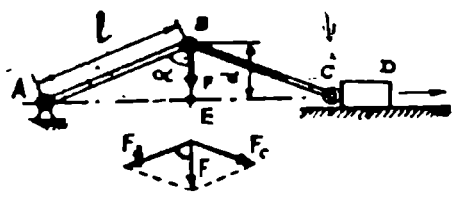
$$F = \frac{sQ}{la}, \quad (23)$$



ნახ. 34.



ნახ. 35.



ნახ.

სადაც s რთული ბერკეტის წაგრძელება,
 l — შედგენილი ბერკეტის რგოლების სიგრძე,
 a — მცირე კუთხე.

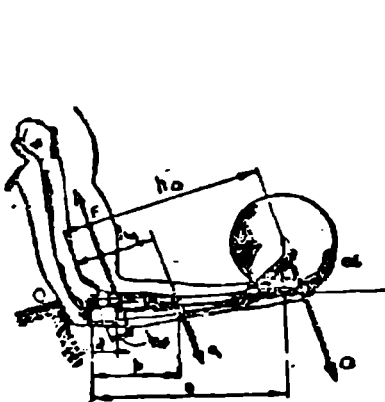
F ძალა გაცილებით მეტია Q -ზე, რადგანაც l შედარებით დიდია, ხოლო კუთხე α მცირეა. მოცემული ამოცანის ამოხსნისათვის დავეშვათ, რომ გვაქვს შედგენილი ბერკეტი (ნახ. 36), რომელიც შეიცავს AB და BC ღეროებს, შეერთებულს ერთმანეთთან სახსრულად B წერტილში. A წერტილში ბერკეტი „დაკავშირებულია“ სახსრით, ხოლო C წერტილში ებჯინება D სხეულს და შეუძლია მისი გადაადგილება: დავეშვათ, B — წერტილში მოდებულია F ძალა, მიმართული ვერტიკალურად ქვემოთ. F ძალა A და C წერტილებში მოქმედებს ღუძეზე: F_a და F_c (სიმეტრიის გამო ისინი ერთმანეთს უდრიან). განვსაზღვროთ ეს ძალები F ძალის ორ შემდგენად დაშლით (იხ. 3.6):

$$F_a = F = \frac{F}{2 \cos \alpha}$$

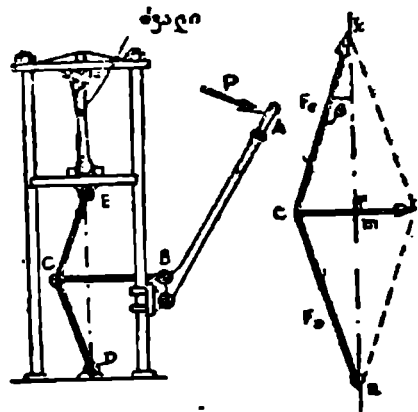
ამ ძალებიდან თითოეული მნიშვნელოვნად აღემატება F ძალას, რომელიც ზეწოლას ახდენს B სახსარზე. თუ $l=0,4$ მ, ხოლო $d=0,005$ მ. მაშინ $l/d = \frac{0,4}{0,005} = 80$. მაშასადამე, F_a და F_c ძალები

გადააქარბებს F ძალას დაახლოებით 40-ჯერ. ამიტომ, მიუხედავად იმისა, რომ თვით ძალა მრავალსახსროვანი ბერკეტის კუნთების სპეციფიკური მოქმედების შედეგად არ აღწევს მნიშვნელოვან სიდიდეებს, F_g და F_c ძალები საკმაოდ დიდია. ბერკეტების ასეთი სისტემა ადამიანის ზედა და ქვედა კიდურები.

ადამიანის ჩონჩხის ძვლები რთული ბიომექანიკური სისტემის ელემენტებია. ძვლების ბერკეტები ქმნის თავისებურ კინემატიკურ ჯაჭვებს, რომლებიც შეივსებიან კუნთობრივი წევრებით. 37 ნახაზზე სქემატიურად წარმოდგენილია ადამიანის ზედა კიდური. მასში შეიძლება გამოვყოთ ბერკეტი, შედგენილი ძვლების (იდაყვის და სხივური ძვლების) ღეროსაგან ამ ბერკეტის ბოლოს აქვს სახსრული შეერთება (იდაყვის სახსარი). თუ ხელში ტვირთი არ გვიჭირავს, მაშინ ძალა $Q=0$. ამ შემთხვევაში ბერკეტზე მოქმედებენ q —წინამხრის სიმძიმისა და წინამხრის კუნთ-მომხრელების წვეის ძალები. ბერკეტის წონასწორობისათვის აუცილებელია, რომ O წერტილის მიმართ მონენტების ჯამი იყოს ნულის ტოლი:



ნახ. 37.



ნახ. 38.

$$M_0 = \sum M_0(F_i) = 0.$$

თუ ვივარაუდებთ, რომ წინამხრის მოხრას იწვევს მხოლოდ მხრის იართავიანი კუნთი, მაშინ შეიძლება შევადგინოთ ტოლობა:

$$F h_F - q h_q = 0, \quad F = \frac{q h_q}{h_F}.$$

როგორც 37-ე ნახაზიდან ჩანს, $h_F < h_q$, ამიტომ კუნთით განვითარებული F ძალა უნდა იყოს q ძალაზე მეტი. იდაყვისა და მხრის

რგოლებს შორის კუთხის ცვლილებით მხრების სიდიდეებიც იცვლება. ბერკეტის h_F , h_a და h_q მხრები იცვლის სიგრძეს α კუთხის მიხედვით. თუ ხელის მტევანზე მოდებულია Q ძალა, წონაწილის პირობა შეიძლება ჩაეწეროს შემდეგნაირად:

$$F h_F - q h_q - Q h_q = 0.$$

აქედან:

$$F = \frac{q h_q + Q h_a}{h_F}.$$

კუთხის მიერ განვითარებული F ძალა უნდა იყოს ძალიან დიდი, რადგანაც h_q სიდიდე h_F -ზე გაცილებით მცირეა.

მაგალითი III. 2. დავადგინოთ F ძალის სიდიდე, რომელიც ეუმშავს ძვალს გამომცდელ წნეხში შემდეგ პირობებში: ძალა $P = 20$ კგ და მიმართულია O უძრავი ღერძის მკონე. OA ბერკეტის პერპენდიკულარულია; წნეხის განხილულ მდგომარეობაში BC კიმი OB -ს პერპენდიკულარულია და $\angle ECD$ -ს ყოფს შუაზე; ამავე დროს $\angle CED = \arctg 0,2 = 11^\circ 20'$; $OA = 1$ მ; $OB = 10$ სმ (ნახ. 38).

ამოხსნა: ECD მექანიზმი კინემატიკური ჯაჭვია — შედგენილი ბერკეტი. ამ ბერკეტსა და ED სწორ ხაზს შორის კუთხე შედარებით მცირეა ($11^\circ 20'$). ბერკეტის ერთი ბოლო ფიქსირებულია D წერტილში სახსრის საშუალებით, მეორე „დაკავშირებულია“ სახსრის ძვლის ქვედა სატაცთან. C წერტილზე მოდებულია F ძალა, რომელიც ცდილობს ბერკეტი გამართოს. იგი შეიძლება განვსაზღვროთ, რადგან OA O წერტილში დამაგრებული ბერკეტი. ბერკეტის წონასწორობისათვის აუცილებელია, რომ $F \cdot OB = P \cdot OA$, საიდანაც:

$$F = \frac{P \cdot OA}{OB} = \frac{20 \cdot 1}{10} = 200 \text{ კგ (2კნ)}.$$

განვსაზღვროთ F_E ძალა, რომელიც მოქმედებს ძვლის ქვედა სატაცზე. ამისათვის F ძალა დავშალოთ ორ შემდგენად: F_E და F_D , რომლებიც მიმართულია CE -სა და CD -ს გასწვრივ. \vec{F} ვექტორის დასაწყისიდან CE და CD რგოლების მიმართულებით გავატაროთ F_E და F_D ძალების მოქმედების ხაზები, ბოლოდან კი CD და CE ხაზების პარალელური ხაზები. K წერტილი E_E ვექტორის ბოლოა, ხოლო n წერტილი — F_E ვექტორის ბოლო. სიმეტრიის გამო E_E და E_D ძალების მოძულები ტოლია $\angle Ckm = \beta = 11^\circ 20'$; $\angle Cnm$ აგრეთვე ტოლია $\beta = 11^\circ 12'$. Ck და Cn მონაკვეთები ტოლია. $\triangle Cmk$

სწორკუთხაა. Ck —ამ სამკუთხედის ჰიპოტენუზაა, Cm — F ძალის ნახევრის ტოლი კათეტი (იხ. წონასწორობის სამკუთხედი). ამიტომ:

$$|F_E| = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{\sin \beta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{200}{\sin(11^\circ 20')} = 500 \text{ კგ (5 კნ).}$$

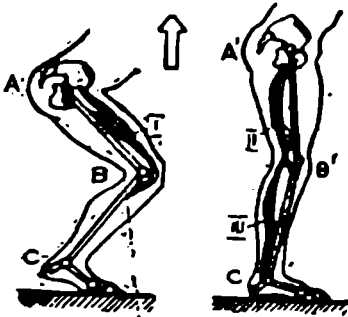
ამრიგად, ორი CE და CD ბერკეტის ერთობლიობამ ძალა 25-ჯერ გაზარდა, შედგენილი ბერკეტის წილად მოდის მისი გადაადგილება მხოლოდ 2,5-ჯერ ($11^\circ 20'$ მოცემული კუთხისათვის). AO სახელურის შემდგომი მოძრაობით (A წერტილი) შედგენილი ბერკეტი გაიმართება კიდევ უფრო მეტად, რაც გამოიწვევს β კუთხის შემცირებას და შესაბამისად F_E ძალის გაზრდას (ცხრ. 2).

ცხრილი 2

საანგარიშო ცხრილი III. შ მაგალითისათვის

β°	F_E ძალა	გადიერება შედგენილია ბერკეტის ხარჯზე
$11^\circ 20'$	5 კნ (500 კგ)	2,5-ჯერ
$5^\circ 00'$	11,5 კნ (1150 კგ)	6-ჯერ
$1^\circ 00'$	66 კგ (6600 კგ)	33-ჯერ

ძალის გაზრდა შედგენილი ბიომექანიკური ბერკეტის ხარჯზე ნიშნულზე აღემატება მკირე კუთხეების შემთხვევაში, როდესაც შეკუმშულ კუნთს არ ძალუძს შეასრულოს აუცილებელი მექანიკური მუშაობა (ნახ. 39). წნეხისაგან განსხვავებით,



ნახ. 39.

რომელშიც ჩვეულებრივი და შედგენილი ბერკეტები ერთდროულად მუშაობს (იხ. ნახ. 38), ბიომექანიკურ ჯაჭვში თავდაპირველად მუშაობს მხოლოდ ჩვეულებრივი ბერკეტი, ხოლო შემდეგ მუშაობაში ჩაერთვება შედგენილი ბერკეტი. ჩვეულებრივ ბერკეტში წვეის ძალვა, ალბათ, იქმნება მენჯის ოთხთავა კუნთით (I), ხოლო შედგენილში — მენჯის გამშლელი კუნთებით (II) და ბარძაყის შომხრელი კუნთებით (III).

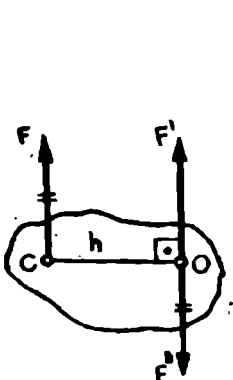
სიბრტყეზე ნებისმიერად გაწვავებულ ძალთა სისტემა

§ 21. ძალის დაუვანა წერტილზე

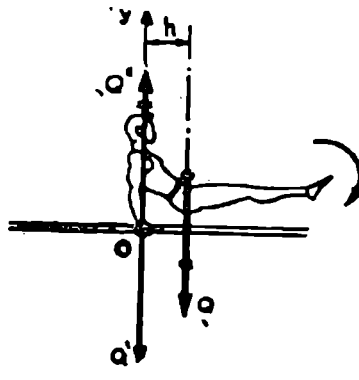
როგორც უკვე ნათქვამი იყო, ძალის გადატანა შეიძლება ან ძალის მოქმედების ხაზზე მდებარე ნებისმიერ წერტილში სხეულის მექანიკური მდგომარეობის შეუცვლელად.

ძალის გადატანა შეიძლება იმ წერტილშიც, რომელიც ძალის მოქმედების ხაზზე მდებარეობს (ნახ. 40). ანეთ გადატანას ეწოდება დაყვანა. დაეუშვათ. გვაქვს \bar{F} , ძალა. მოდებული C წერტილში. საჭიროა ამ ძალის გადატანა მის პარალელურად, რომელიდაც O წერტილში. მოვდოთ O წერტილში მოცემულ F ძალის მოდულს ტოლი და პარალელური, ურთიერთსაწინააღმდეგოდ მიმართული ორი \bar{F}' და \bar{F}'' ძალა. სხეულის მდგომარეობა ამით არ შეიცვლება, რადგანაც \bar{F}' და \bar{F}'' ძალები ურთიერთწონასწორდება. დაეუშვათ O წერტილიდან \bar{F} ძალის მოქმედების ხაზზე h პერპენდიკულარი, მაშინ მიღებული სამი ძალის სისტემა განიხილება, როგორც შედგენილი O წერტილში მოდებული \bar{F}' ძალითა და \bar{F}'' წყვილძალისაგან მომდინარეობს $M = Fh$. ასეთ წყვილძალას შეერთებულს უწოდებენ.

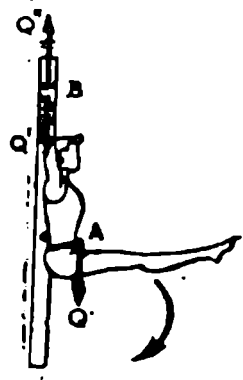
ამრიგად, ძალის წერტილზე დაყვანის დროს მიიღება ეკვივალენტური სისტემა, რომელიც შედგება მოდულით მოცემული (F) ძალის ტოლი და მისივე მიმართულების ძალისა და შეერთებული წყვილ-



ნახ. 40.



ნახ 41.



ნახ 42.

ძალისაგან, ზომის მომენტი მოცემული ძალის დაყვანის წერტილის მიმართ მომენტის ტოლია:

$$M_0 = (\bar{F}) = Fh. \quad (24)$$

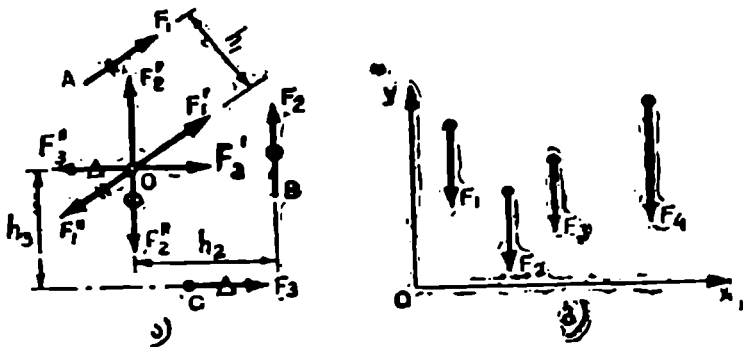
ძალის დაყვანა მოცემულ წერტილზე მოსახერხებელია გამოვიყენოთ სხეულზე ძალის მოქმედების ხასიათის გამოსავლინებლად. მაგალითად, სხეულზე მოდებულია y ღერძის პარალელური და მისგან h მანძილზე დაშორებული Q ძალა (ნახ. 41). ამ ძალის y ღერძზე მდებარე O წერტილზე დაყვანით შეგვიძლია განვსაზღვროთ, რომ დაყვანილ ძალა Q' ზეწოლას ახდენს ლატანზე, ხოლო შეერთებული QQ'' წყვილი $M = Qh$ მომენტით ედილობს მოაბრუნოს სხეული საათის ისრის სვლის მიმართულებით. თუ ტანმოვარჯიშე ინარჩუნებს თავის მდებარეობას უცვლელად (წონასწორობის მდგომარეობა), ნიშნავს, რომ ეს წყვილძალა წონასწორდება M მომენტის ტოლი, მაგრამ საწინააღმდეგოდ მიმართული სხვა წყვილძალით. მეორე წყვილძალა შეიძლება შექმნას ტანმოვარჯიშეზე ხელის მოჭერის ადგილას (როცა h მცირეა).

42-ე ნახაზზე ნაჩვენებია დაკიდება სატანვარჯიშო კედელზე. სხეულის Q წონა მოდებულია A წერტილში. Q ძალის B წერტილში გადატანის დროს აღიძვრება წყვილძალა, რომელიც აჭერს სპორტსმენის სხეულს სატანვარჯიშო კედელს.

§ 22. ძალეების არბეული სისტემის დაყვანა მოცემულ წერტილზე

ერთი ძალის მოცემულ წერტილზე დაყვანის მეთოდის გამოყენება შეიძლება ძალების ნებისმიერი რიცხვისათვის. დავუშვათ, სხეულის A , B და C წერტილებში (ნახ. 43 ა) მოდებულია ABC სიბრტყეში მდებარე \bar{F}_1 , \bar{F}_2 , და \bar{F}_3 ძალები. საჭიროა დავიყვანოთ ეს ძალები მოცემული სიბრტყის O წერტილში. პირველად დავიყვანოთ \bar{F}_1 ძალა. მოვდოთ O წერტილში ორი ძალა \bar{F}_1' და \bar{F}_1'' , ცალ-ცალკე მოცემული F_1 ძალის მოდულის ტოლი, მისი პარალელური და ურთიერთსაწინააღმდეგოდ მიმართულნი. \bar{F}_1 ძალის დაყვანის შედეგად ვღებულობთ O წერტილში მოდებულ \bar{F}_1' ძალას და $\bar{F}_1\bar{F}_1''$ წყვილძალას h_1 მხარით. ასევე მოვიქეცით B წერტილში მოდებული F_2 ძალის მიმართაც და მივიღებთ O წერტილში მოდებულ \bar{F}_2' ძალას და $\bar{F}_2\bar{F}_2''$ წყვილძალას h მხარით და ა. შ.

A , B და C წერტილებში მოდებული ძალების სისტემა მოცემულ



ნახ. 43.

შემთხვევაში შეცვლილია O წერტილში მოდებული კრებადი \vec{F}_1 , \vec{F}_2 და \vec{F}_3 ძალებით და O წერტილის მიმართ მოცემული ძალების მომენტების ტოლი წყვილძალების მომენტებით:

$$M_1 = M_0(\vec{F}_1) = -F_1 h_1,$$

$$M_2 = M_0(\vec{F}_2) = F_2 h_2,$$

$$M_3 = M_0(\vec{F}_3) = F_3 h_3.$$

ერთ წერტილში კრებადი ძალები შეიძლება შევცვალოთ ერთი \vec{R} ძალით, რომელიც მათი შემდგენების გეომეტრიული ჯამის ტოლია:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (25)$$

მოცემული ძალების გეომეტრიული ჯამის ტოლი \vec{R} ძალა ძალების სისტემის მთავარი ვექტორია. ერთ სიბრტყეში მდებარე წყვილძალების შეკრების წესის საფუძველზე ისინი შეიძლება შევცვალოთ იმავე სიბრტყეში მდებარე მარეზულტირებელი წყვილძალით. მარეზულტირებელი წყვილძალის მომენტი O წერტილის მიმართ მოცემული ძალების მიმართ მომენტთა ალგებრული ჯამის ტოლია:

$$M_0 = M_1 + M_2 + M_3 = \sum_{i=1}^n M_i. \quad (26)$$

ასეთ მომენტს უწოდებენ დაყვანის მოცემული (O) ცენტრის მიმართ სისტემის მთავარ მომენტს. მაშასადამე, ზოგად შემ-

თხვევაში ძალების ბრტყელი სისტემა რომელიმე O წერტილზე დაყვანის შემდეგ შეიცვლება მისი ეკვივალენტური სისტემით, რომელიც შედგება ერთი ძალისაგან — ძალების სისტემის მთავარი ვექტორისა და ერთი წყვილძალისაგან, რომლის მომენტსაც ეწოდება მოცემული სისტემის მთავარი მომენტი.

განხილული მასალიდან და 25-ე და 26-ე განტოლებებიდან გამომდინარეობს, რომ დაყვანილი სისტემა არ არის მხოლოდ ერთი R ძალის ეკვივალენტური და ამიტომ მთავარი \bar{R}' ვექტორი არ არის მოცემული ძალების სისტემის ტოლქმედი, გარდა იმ კერძო შემთხვევისა, როდესაც მთავარი მომენტი ნულს უდრის.

მთავარი ვექტორის სიდიდე და მიმართულება დამოკიდებული არ არის დაყვანის ცენტრის არჩევაზე. მთავარი M_0 მომენტის სიდიდე და მიმართულება დამოკიდებულია დაყვანის ცენტრის მდებარეობაზე, რადგანაც შემდგენ წყვილძალთა მხრების სიდიდეები დამოკიდებულია ძალისა და იმ წერტილის (ცენტრის) ურთიერთმდებარეობაზე, რომლის მიმართაც აიღება მომენტები.

ძალების სისტემის წერტილზე დაყვანის დროს შეიძლება შეგვხვდეს შემდეგი შემთხვევები:

1. $\bar{R}' \neq 0, \bar{M}_0 \neq 0$ — ზოგადი შემთხვევა, სისტემა დაიყვანება მთავარ მომენტზე.
2. $\bar{R}' \neq 0, \bar{M}_0 = 0$ — სისტემა დაიყვანება ერთ ტოლქმედზე, რომელიც სისტემის მთავარი ვექტორის ტოლია.
3. $\bar{R}' = 0, \bar{M}_0 \neq 0$ — სისტემა დაიყვანება წყვილძალაზე, რომლის მომენტი მთავარი მომენტის ტოლია.
4. $\bar{R}' = 0, \bar{M}_0 = 0$ — სისტემა წონასწორობაშია.

ზოგად შემთხვევაში, როდესაც $\bar{R}' = 0$ და $\bar{M}_0 = 0$, შეიძლება მოვიძებნოთ ისეთი წერტილი, რომლის მიმართაც ძალების სისტემის მთავარი მომენტი ნულს უდრის.

§ 28. ძალების ბრტყელი სისტემის წონასწორობის განტოლება

სიბრტყეში ნებისმიერად განლაგებული ძალების ყოველი სისტემის დაყვანა შეიძლება მთავარ ვექტორსა და მთავარ მომენტზე. ამიტომ სიბრტყეზე ძალების წონასწორობის პირობას აქვს შემდეგი სახე:

$$\bar{R}' = 0; \quad M_0 = \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}_i) = 0; \quad (27)$$

ამრიგად, სიბრტყეში ნებისმიერად განლაგებული ძალების სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ ძალების მთავარი მომენტი ნებისმიერ ცენტრის მიმართ ნულის ტოლი იყოს.

მთავარი ვექტორი \bar{R} ყველა იმ ძალის გეომეტრიული ჯამია, რომლებიც შეადგენენ სისტემას და გადატანილი არიან მისი დაყვანის ცენტრში. \bar{R} -ის სიდიდე შეიძლება განვსაზღვროთ სისტემის ყველა ძალის კოორდინატულ ღერძებზე დაგეგმილების მეშვეობით. თუ გამოვიყენებთ ყველა ძალის x და y ღერძებზე გეგმილების ჯამებისათვის შემოკლებულ აღნიშვნებს ΣF_{ix} და ΣF_{iy} , მთავარი ვექტორის სიდიდისათვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$R = \sqrt{(\Sigma F_{ix})^2 + (\Sigma F_{iy})^2}.$$

ძალების წონასწორობისათვის აუცილებელია, რომ მისი მთავარი ვექტორი იყოს ნულის ტოლი, ამიტომ

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad \Sigma F_{iy} = 0. \quad (28)$$

გარდა ამისა, წონასწორობისათვის აუცილებელია, რომ მთავარი მომენტიც ასევე ნულს უდრიდეს, ე. ი.

$$\Sigma M_o(F_i) = 0. \quad (29)$$

(28) და (29) განტოლებები იმ სხეულის წონასწორობის განტოლებებია, რომლებიც სიბრტყეში ნებისმიერად განლაგებული ძალების სისტემის ზემოქმედების ქვეშ არიან. 28-ე განტოლებები სისტემის ყველა ძალის გეგმილების ალგებრულ ჯამთა ნულთან ტოლობაა ორ ნებისმიერ კოორდინატულ ღერძზე; 29-ე განტოლება კი გამოხატავს ყველა ძალის მომენტების ჯამის ნულთან ტოლობას, ნებისმიერად შერჩეული წერტილის მიმართ. 28-ე და 29-ე განტოლებებით ამოიხსნება სტატიკის ამოცანები ძალების ბრტყელი სისტემისათვის, მართალია, მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ უცნობი ძალების რიცხვი (ან წონასწორობის განტოლებების რიცხვი) არ აღემატება სამს. წინააღმდეგ შემთხვევაში ამოცანა სტატიკურად გამოურკვეველია და ამოიხსნება უფრო რთული მეთოდებით, რომლებიც აქ არ არის განხილული.

ვთქვათ, მოცემულ სხეულზე მოდებულია პარალელური $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ ძალების გაწონასწორებული სისტემა (ნახ. 43, ბ). ძალების მოქმედების სიბრტყეში აღებულ ნებისმიერ O წერტილზე გავატაროთ Ox ღერძი, რომელიც ძალების პერპენდიკულარულია, და მათი პარალელური Oy ღერძი. ჩავიწეროთ ძალების მოცემული სისტემისათვის წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum_1^4 F_{ix} = 0; \quad \sum_1^4 F_{iy} = 0; \quad \sum_1^4 M_o = 0.$$

თითოეული ძალა ღერძის პერპენდიკულარულია და ძალის გეგმილი ამ ღერძზე ნულს უდრის. მაშასადამე, პირველი განტოლება გადაიქცევა იგივეობად $0=0$ და სრულდება იმისგან დამოუკიდებლად, წონასწორდება ძალები თუ არა. ამრიგად, პარალელური ძალების ბრტყელი სისტემისათვის რჩება მხოლოდ წონასწორობის ორი განტოლება.

რადგანაც ძალების გეგმილები Oy ღერძზე თვით ძალების ტოლია, წონასწორობის განტოლება პარალელური ძალების ბრტყელი სისტემისათვის მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\sum_1^n F_{iy} = 0; \quad \sum_1^n M_o = 0. \quad (30)$$

ძალების ბრტყელი სისტემის წონასწორობაზე ამოცანის ამოხსნის დროს აუცილებელია 28-ე და 29-ე განტოლებების გამოყენება. უპირველეს ყოვლისა საჭიროა დავრწმუნდეთ ამოცანის სტატიკურად რკვევადობაში, შემდგომ რაციონალურად შევარჩიოთ კოორდინატთა ღერძები და მომენტების ცენტრები განტოლებების ამოხსნასთან დაკავშირებული გამოთვლების გამარტივების მიზნით. უბრალოდ ამოიხსნება იმ ამოცანათა სისტემა, რომელთაგან თითოეული შეიცავს მხოლოდ ერთ-ერთ უცნობ ძალას. ეს მიიღწევა კოორდინატთა ღერძებისა და მომენტების ცენტრების შესაბამისი შერჩევით. მომენტის ცენტრად საჭიროა ავიღოთ ორი უცნობი ძალის გადაკვეთის წერტილი, მაშინ ამ წერტილის მიმართ მომენტების განტოლება მოიცავს მხოლოდ ერთ უცნობ ძალას. x და y კოორდინატთა ღერძების მიმართულებები საჭიროა შევარჩიოთ ისე, რომ ისინი იყოს რომელიღაც უცნობი ძალების პერპენდიკულარული, მაშინ შესაბამისი ღერძების პერპენდიკულარული უცნობი ძალების გეგმილები წონასწორობის განტოლებაში

არ შევა. უცნობი ძალების განსაზღვრა უკეთესია დაეიწყოს მომენტების განტოლებებით, ხოლო შემდგომ გადავიდეთ გეგმილების განტოლებებზე.

§ 26. ნაზისიური ძალების სივრცითი სისტემის წონასწორობის განტოლებები

ნებისმიერი ძალების სივრცითი, ისე როგორც ბრტყელი, სისტემა შეიძლება დავიყვანოთ რომელიმე O ცენტრზე და შევცვალოთ ერთი პარაზულტირებელი \bar{R} -ით და წყვილძალით M_0 მომენტით. \bar{R} და M_0 სიდიდეები განისაზღვრება ტოლობებით:

$$\bar{R} = \Sigma \bar{F}_n, \quad (31)$$

$$M_0 = \Sigma M_0(F_n). \quad (32)$$

თუ ვიმსჯელებთ ისევე როგორც § 23-ში, შეიძლება დავასკვნათ, რომ ამ ძალების სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია ერთდროულად $\bar{R} = 0$ და $M_0 = 0$. მაგრამ \bar{R} და M_0 ვექტორები გახდება ნულის ტოლი მხოლოდ მაშინ, როდესაც მათი ყველა გეგმილი კოორდინატთა ღერძებზე ნულის ტოლია, ე. ი. როდესაც $R_x = R_y = R_z = 0$ და $M_x = M_y = M_z = 0$, ან

$$R_x = \Sigma F_{nr}; \quad R_y = \Sigma F_{ny}; \quad R_z = \Sigma F_{nz}; \quad (33)$$

$$M_x = \Sigma M_x(F_n); \quad M_y = \Sigma M_y(F_n); \quad M_z = \Sigma M_z(F_n). \quad (34)$$

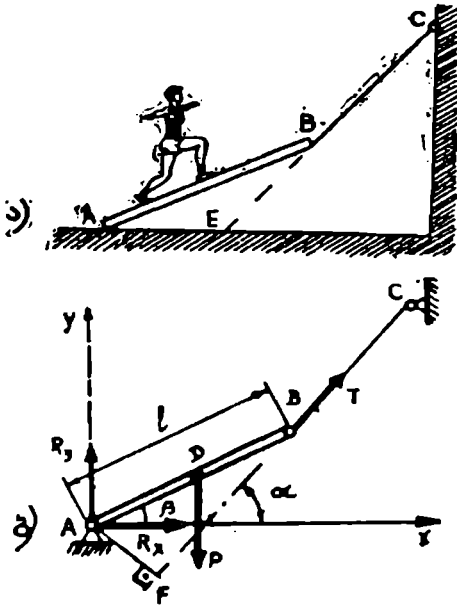
ე. ი. როდესაც მოქმედი ძალები აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\begin{cases} \Sigma F_{nx} = 0; \quad \Sigma F_{ny} = 0; \quad \Sigma F_{nz} = 0; \\ \Sigma M_x(F_n) = 0; \quad \Sigma M_y(F_n) = 0; \quad \Sigma M_z(F_n) = 0 \end{cases} \quad (35)$$

ამრიგად, 35 განტოლება გამოხატავს იმ თავისუფალი მყარი სხეულის წონასწორობის აუცილებელ პირობებს, რომელიც ნებისმიერი ძალების სივრცითი სისტემის მოქმედების ქვეშაა: ძალების სივრცითი სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისია, რომ ძალების გეგმილების ჯამი სამი კოორდინატთა ღერძიდან თითოეულზე და ამ ღერძების მიმართ მათი მომენტების ჯამი ნულის ტოლი იყოს.

პარალელური ძალების სივრცითი სისტემისათვის შეიძლება შევადგინოთ წონასწორობის სამი განტოლება: ორი განტოლება მომენტებისათვის და ერთი განტოლება გეგმილებისათვის.

1. გამოვეყოთ სხეული, რომლის წონასწორობაც უნდა განვიხილოთ;
2. გამოვსახოთ საანგარიშო სქემა, პირობითად ვუჩვენოთ კავშირები და მოცემული ძალები.
3. უკუუვადლოთ ბმები, გამოვსახოთ სქემაზე მათი რეაქციები;
4. ვაუტაროთ კოორდინატთა ღერძები ისე, რომ ერთი ღერძი იყოს რომელიმე უცნობი ძალების პერპენდიკულარული. დავსახოთ ზომენტების ცენტრები ორი უცნობი ძალის მოქმედების ხაზების გადაკვეთის წერტილში — ან ერთი უცნობი ძალის მოქმედების ხაზზე;
5. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები.
6. ამოვხსნათ განტოლებები და განვსაზღვროთ უცნობი ძალები.



ნახ. 44.

მაგალითი IV. 1. წონასწორობაში ვარჯიშის შესრულების დროს მოძრავ საყრდენზე გამოყენებული იყო P წონის AB ძელი ერთი A ბოლოთი დამაგრებული პორიზონტალურ იატაკზე, ხოლო მეორეთი მიბმული კედელზე BC თოკით (ნახ. 44, ა). გამოვთვალოთ სახსრის რეაქცია A წერტილში და თოკის T დაჭიმულობა, თუ მოცემულია:

$$\angle CED = \alpha; \quad \angle BAD = \beta.$$

ამოხსნა. უკუვადლოთ ბმები და შევცვალოთ ისინი ბმების რეაქციებით, როგორც ეს ნაჩვენებია 44, ბ ნახაზზე. A წერტილში (სახსრული საყრდენი) საყრდენის რეაქციის მიმართულება უცნობია, ამიტომ საჭიროა შევცვალოთ იგი

R_x და R_y გვემილებით. B წერტილში მოდებულია თოკის T რეაქცია. P ძალა მოდებულია AB ღეროს შუაში მდებარე D წერტილში. აღვნიშნოთ ძელის სიგრძე l -ით. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლება, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\angle ABF = \alpha - \beta$, ხოლო T ძალის მხარი $AF = l \sin(\alpha - \beta)$:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= R_x + T \cos \alpha = 0, \\ \Sigma F_y &= R_y - P + T \sin \alpha = 0, \\ \Sigma M_A &= -P \frac{l}{2} \cos \beta + T l \sin(\alpha - \beta) = 0.\end{aligned}$$

წონასწორობის განტოლებებიდან გვაქვს:

$$\begin{aligned}T &= P \frac{\cos \beta}{2 \sin(\alpha - \beta)}, \\ R_x &= -P \frac{\cos \alpha \cos \beta}{2 \sin(\alpha - \beta)}, \\ R_y &= P \left[1 - \frac{\sin \alpha \cos \beta}{2 \sin \alpha \cos \beta} \right].\end{aligned}$$

მაგალითი IV. 2. უმარტივესი ამწე მოწყობილობა მოთხილამურეებისათვის შედგება AB გვარლისა და დოლისაგან B ძრავით (ნახ. 45,). განვსაზღვროთ F წვევის ძალა მოთხილამურის თანაბარი მოძრაობის დროს იმ პირობით, რომ აღმართის სიბრტყე დახრილია პორიზონტისადმი $\alpha = 30^\circ$ კუთხით, მოთხილამურის წონა $Q = 79$ კგ, თუ

1. სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი $f = 0$;

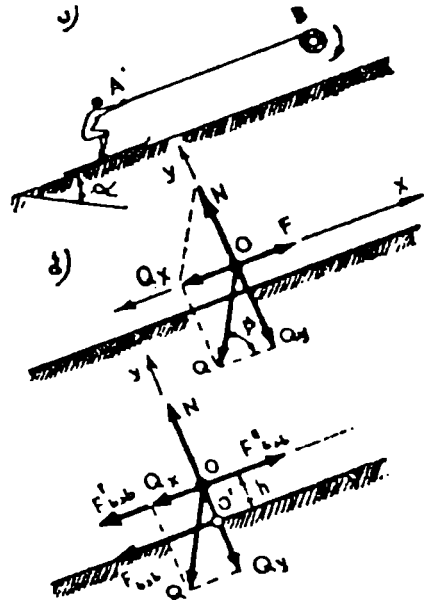
2. სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი $f = 0,1$.

ამოხსნა. 1-ლი ვარიანტი: $f = 0$.

45, ბ ნახაზზე მოთხილამურის სიმძიმის ცენტრში — O წერტილში მოდებულია სიმძიმის ძალა $Q = 70$ კგ და წვევის ძალა F მიმართული აღმართის პარალელურად, Q ძალა შეიძლება დავშალოთ შემდეგნაირად: ნორმალურ N რეაქციად და Q_x ძალად, რომელიც ეწინააღმდეგება წვევას. კოორდინატთა ღერძები მივმართოთ აღმართის პარალელურად და პერპენდიკულარულად.

შემდგენი

$$Q_x = Q \cos \beta = 70 \cos(90^\circ - 30^\circ) = 35 \text{ კგ (343 ნ).}$$



ნახ. 45.

წვეის ძალის გამოსათვლელად შევადგინოთ წონასწორობის განტოლება:

$$\Sigma F_x = -Q_x + F = 0.$$

აქედან:

$$F = Q_x = Q \cos \beta = 35 \text{ კგ (343 ნ).}$$

მე-2 ვარიანტი: $f = 0,1$.

45, გ ნახაზზე O წერტილში მოდებულია სიმძიმის Q ძალა და წვეის F ძალა, ხოლო O' წერტილში — „თხილამური-თოვლი“ ხახუნის ძალა $F_{\text{ხხ}}$. ღერძები განლაგებულია ისევე, როგორც 1-ლ ვარიანტში. კოორდინატთა საწყისი O წერტილშია. გადავიტანოთ O წერტილში $F_{\text{ხხ}}$ ძალა, როგორც ეს ნაჩვენებია § 23-ში, მიმართული წვეის F ძალის საწინააღმდეგოდ. ამ დროს აღიძვრება $F_{\text{ხხ}}$ ძალის მომენტი h მხარით, რომელიც მოზრდილი ადამიანისათვის საშუალოდ უდრის 0,9 მ-ს. სიმძიმის Q ძალა, როგორც 1-ლ ვარიანტში წეიძლება დავშალოთ ორ შემდგენად: ნორმალურ რეაქტიად N და პერიპონტალურ შემდგენად Q_x .

რადგან $\Sigma M_0 = -F_{\text{ხხ}} h \neq 0$, ამიტომ აღძრული წყვილძალა მოაბრუნებს სპორტსმენს საყრდენის წერტილის გარშემო (გადააყირავეს მას). წონასწორობისათვის უნდა არსებობდეს აგრეთვე ძალის მომენტი M_1 , ასე რომ

$$\Sigma M_0 = -F_{\text{ხხ}} h + M_1 = 0,$$

წონასწორობის განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ $M_1 = F_{\text{ხხ}} h$. ფაქტიურად ასეთი მომენტი იქმნება სპორტსმენის მოძრაობის მიმართულებასთან შეფარდებით რამდენადმე უკან გადახრის ხარჯზე. ახლა მოვძებნოთ Q_x და $F_{\text{ხხ}}$ გამოსახულებები:

$$Q_x = Q \cos 60^\circ; \quad F_{\text{ხხ}} = fN = fQ \cos 30^\circ.$$

და შევადგინოთ წონასწორობის განტოლება:

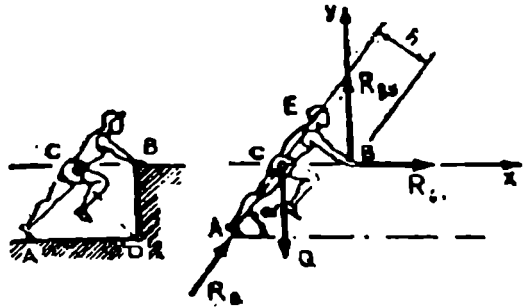
$$\Sigma F_x = -Q_x - F_{\text{ხხ}} + F = 0.$$

აქედან:

$$\begin{aligned} F = Q_x + F_{\text{ხხ}} &= Q \cos 60^\circ + fQ \cos 30^\circ = 70 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 70 \cdot 0,87 = \\ &= 41 \text{ კგ (402 ნ).} \end{aligned}$$

მაგალითი IV. 3. 46-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ადამიანი, რომელიც ეყრდნობა ხელებით კედელს B წერტილში. მისი წონა $Q = 70$

კბ და C წერტილში, მანძილი $AC=CD=1$ მ, ხოლო მანძილი $BD=0,8$ მ. CB ხაზი AD -ს პარალელურია. მოძებნოთ რეაქცია A წერტილში.



ნახ. 46.

ამოხსნა. ბმები (იატაკი და საყრდენი კედელი) უკუვაგდოთ და ისინი შევცვალოთ ბმების რეაქციებით. R_a რეაქცია A წერტილში მიმართულია AC ხაზის გასწვრივ. B წერტილში რეაქციის სიდიდე და მიმართულება უცნობია, ამიტომ შევცვალოთ იგი ორი R_{bx} და R_{by} შემდგენით, რომელთა მიმართულებები ემთხვევა B წერტილში კოორდინატთა ღერძების მიმართულებებს:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= R_a \cos \alpha + R_{bx} = 0, \\ \Sigma F_y &= R_a \sin \alpha - Q + R_{by} = 0, \\ \Sigma M_b &= -R_a h + Q \cdot CB = 0.\end{aligned}$$

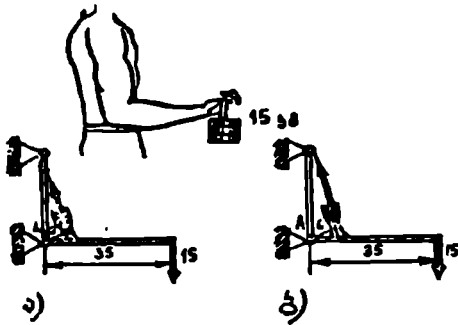
შენიშნოთ, რომ $\sin \alpha = \frac{BD}{AC} = 0,8$; $\alpha = 54^\circ$; $\cos \alpha = 0,59$. გარდა ამისა, $\angle ECB = \alpha = 54^\circ$; $h = CB \sin \alpha = CD \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 1,0 \cdot 0,59 \cdot 0,8 = 0,48$ (მ); $CB = CD \cos \alpha = 0,59$ (მ).
წონასწორობის განტოლების ამოხსნით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}R_{bx} &= -R_a \cos \alpha = -0,59 R_a; \\ R_{by} &= 70 - 0,8 R_a; \\ R_a &= \frac{Q \cdot CB}{h} = \frac{70 \cdot 0,59}{0,48} = 86,2 \text{ კგ (845 ნ);} \\ R_{bx} &= -0,59 \cdot R_a = -51 \text{ კგ (-500 ნ);} \\ R_{by} &= 70 - 0,8 \cdot 0,86 \cdot 20 \approx 1 \text{ კგ (10 ნ).}\end{aligned}$$

თუ უგულებელვყოფთ $R_{by} = 1$ კგ, როგორც მცირე სიდიდეს, შეიძლება ვთქვათ, რომ რეაქცია B წერტილში კედლიდან ადამიანის მხარეს მიმართულია პორიზონტალურად. R_{bx} -ის ნიშანი მიწის უჩვენებს, რომ რეაქციის მიმართულება არ იყო სწორად შერჩეული.

მაგალითი IV. 4. განესაზღვროთ მხრის კუნთსა და მხრის ორ-

თავა კუნთში ძალები (ნახ. 47) იმ დაშვებით, რომ ამ კუნთებიდან თითოეული, სხვა კუნთების მუშაობაში მონაწილეობის მიუღებლად, უზრუნველყოფს ხელში ტვირთის დაჭერას (მხოლოდ ამ შემთხვევაში იქნება ამოცანა სტატიკურად რკვევადი).



ნახ. 47.

ამოცანა. შევადგინოთ მხრის კუნთის მუშაობის გასაანგარიშებელი სქემა, იგი იწყება მხრის ძვლის წინა ზედაპირის ქვედა ნახევრიდან და მაგრდება იდაყვით ამობურცულ ძვალზე, მის გვირგვინოვან წანაზარდზე. ამ კუნთს A წერტილის მიმართ დაახლოებით 2 სმ-ის ტოლი მხარი აქვს.

ვიყენებთ წონასწორობის განტოლებას:

$$\Sigma M_A = 0; \quad F_1 \cdot 2 - Q \cdot 35 = 0.$$

აქედან

$$F_1 = \frac{15 \cdot 35}{2} = 263 \text{ კგ (2580 ნ).}$$

მხრის ორთავა კუნთი იწყება ბეჭზე და მაგრდება წინამხარზე სხივის ძვლის ბორცვსა და წინამხრის ფასციაზე. მას აქვს A წერტილის მიმართ მხარი, რომელიც მოზრდილი მამაკაცისათვის დაახლოებით 6 სმ-ის ტოლია.

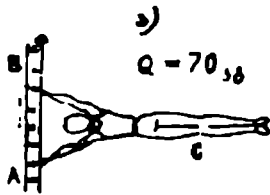
გამოვიყენებთ იმავე წონასწორობის განტოლებას და მივიღებთ:

$$F_2 = \frac{15 \cdot 35}{6} = 78,9 \text{ კგ (773 ნ).}$$

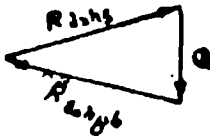
ამრიგად, ერთი და იმავე ტვირთი სხვადასხვა მდებარეობის მქონე კუნთებში იწვევს სხვადასხვა ძალას.

ეს მაგალითი ადასტურებს პ. ფ. ლესგაფტის სიტყვებს მოქნილი და ძლიერი კუნთების შესახებ: ძლიერ კუნთებს ბერკეტის ღერძის მიმართ დიდი მხრები აქვს (მოცემულ მაგალითში ეს მხრის ორთავა კუნთია), ხოლო მოქნილი კუნთები განლაგებულია ბერკეტის საყრდენთან ახლოს, მოქმედებს დიდი დამაბულობით და მალე იღლება (მოცემულ მაგალითში ეს მხრის კუნთია).

მაგალითი IV. 5. განვსაზღვროთ ძალები ტანმოვარჯიშის ზე-



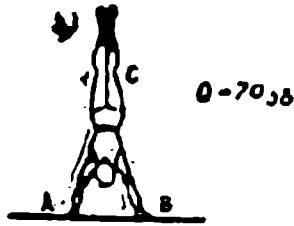
ამოხსნა:



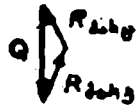
ძახები:

$$R_A = +120 \text{ კგ}$$

$$R_B = -120 \text{ კგ}$$



ამოხსნა:



ძახები:

$$R_A = 45 \text{ კგ}$$

$$R_B = 45 \text{ კგ}$$

ნახ. 48.

და კიდურებში ჰორიზონტალური განივი ბჯენისა (ნახ. 48, ა) და ვაშლილი ხელებით ყირის დროს (ნახ. 48, ბ).

ამოხსნა. ზედა კიდურებში ძალების განსაზღვრისათვის საკმარისია ავაგოთ წონასწორობის სამკუთხედები (ნახაზზე ამოცანა შესრულებულია გრაფიკული მეთოდით). მასშტაბში აიგება სპორტსმენის სხეულის სიმძიმის ძალის ვექტორი. შემდეგ ვექტორის დასაწყისიდან და ბოლოდან გაივლება ზედა კიდურთა ღერძების პარალელური სწორი ხაზები. ამ ხაზებზე წარმოქმნილი ვექტორები განსაზღვრავს, საძებნ ძალებს.

V თავი

ხ ა ხ უ ნ ი

§ 27. ხახუნის სახეები

ხახუნს უწოდებენ წინააღმდეგობას, რომელიც აღიძვრება ერთი სხეულის გადაადგილების დროს მეორე სხეულის ზედაპირზე. ხახუნი ერთ-ერთი ყველაზე გავრცელებული შოვლენაა ბუნებაში და თითქმის ყველგან გვხვდება. გადაადგილების ხასიათის მიხედვით არჩევენ: სრიალის ხახუნსა და გორვის ხახუნს.

სრიალის ხახუნის მაგალითებია: თხილამურის ხახუნი თოვლზე, ციგურებისა — ყინულზე, ფეხსაცმლის ლანჩისა — იატაკზე ან სარბენი ბილიკის საფარზე და ა. შ. გორვის ხახუნის მაგალითია: ველოსიპედის თვლების ხახუნი მიწაზე გადაგორების დროს, ხახუნი ბურთულებიან და გორგოლაჭიან საკისრებში და ა. შ. უმეტესი პრაქტიკული განგარიშებების დროს სარგებლობენ 1781 წელს კულონის მიერ დადგენილი ხახუნის ემპირიული კანონებით.

§ 28. სრიალის ხახუნი

სრიალის ხახუნს უწოდებენ წინააღმდეგობას, რომელიც აღიძვრება ერთი სხეულის სრიალის დროს მეორეს ზედაპირზე.

წინააღმდეგობის გამომწვევი ძირითადი მიზეზია შემხები სხეულების არააბსოლუტურად გლუვი ზედაპირები. ერთი სხეულის გადაადგილების დროს მეორე სხეულის ზედაპირზე საჭიროა რაღაც ძალა ამ წინააღმდეგობის დასაძლევად. ტექნიკური თვალსაზრისით ზედაპირები თუნდაც იდეალურად გლუვი რომ იყოს, აუცილებელია ძალის მოდება შეხების სხეულების ნაწილაკებს შორის მოლეკულური ურთიერთქმედების დასაძლევად.

კულონმა დაადგინა შემდეგი (მიახლოებით) ხახუნის კანონები:

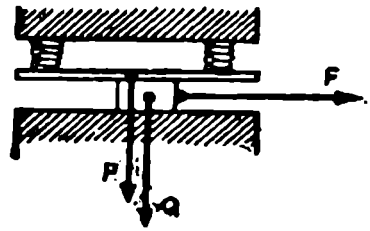
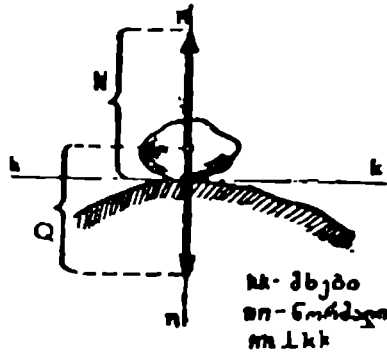
1. ხახუნის ძალა სხვა თანაბარ პირობებში არ არის დამოკიდებული მოხახუნე ზედაპირების ზომებზე. ეს კანონი მართებულია მოხახუნე ზედაპირების ფართობის ერთეულზე ზეწოლის მხოლოდ რომელიც სიდიდემდე.

2. ხახუნის ძალის სიდიდე პირდაპირპროპორციულია ერთი სხეულის ნორმალური ზეწოლისა მეორე სხეულზე.

ნორმალურ ზეწოლაში იგულისხმება სრიალის ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ ზეწოლა. როდესაც სიბრტყე პორიზონტალურია (ნახ. 49), ნორმალური ზეწოლა სხეულის წონის ტოლია. თუ სხეული დახრილ ზედაპირზე დევს, მაშინ ხახუნის ძალის სიდიდეზე მოქმედებს მხოლოდ სრიალის სიბრტყის პერპენდიკულარული N შემდგენი. ერომეტრებში გამოიყენება კონსტრუქციები, რომლებშიც წონის გარდა მოძრავ სხეულზე მოქმედებს დამატებითი P ძალა (ნახ. 50). ამ შემთხვევაში ნორმალურ ზეწოლად საჭიროა მივიჩნიოთ ძალების $Q + P$ ჯამი.

3. ხახუნის ძალის სიდიდე დამოკიდებულია მოხახუნე ზედაპირების მასალასა და მდგომარეობაზე, მათ შორის შეზეთვასა და იმაზე, თუ რა სახისაა ეს შეზეთვა. ლითონზე ლითონის ხახუნის ძალა ნაკლებია ხეზე ხის ხახუნის ძალაზე. ფოლადსა და ბრინჯაოს შორის ხახუნის ძალა ფოლადზე ფოლადის ხახუნის ძალაზე ნაკლებია და

ა. შ. რაც უფრო კარგადაა დამუშავებული მოხაზუნე ზედაპირები, მით ნაკლებია ხახუნი. მოხაზუნე ზედაპირების შეზეთვა ამცირებს ხახუნს (ნახევრად მშრალი და სველი ხახუნი). ეს კარგადაა ცნობილი



მოთხილამურებისათვის. შეზეთვის ხარისხსაც ასევე აქვს დიდი მნიშვნელობა. თხილამურების საცხს შეარჩევენ თოვლის საფარის მდგომარეობისა და ჰაერის ტემპერატურის მიხედვით.

კულონის მოცემული კანონის საფუძველზე ხახუნის ძალა გამოიხატება ასე:

$$R_{\text{ხახ}} = fN = fQ. \tag{36}$$

კოეფიციენტს უწოდებენ ხახუნის ან სრიალის კოეფიციენტს სიმშვიდის დროს, ანუ ხახუნის ზღვრულ კოეფიციენტს. იგი ახასიათებს მოხაზუნე ზედაპირების მდგომარეობას, მასალების გვარობას, მათ დამუშავებას, შეზეთვას და უღრის: $f = \frac{R_{\text{ხახ}}}{N}$. ამ ტოლობიდან გამომ-

დინარეობს, რომ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი განყენებული რიცხვია (უგანზომილებო).

4. მოძრაობის დროს ხახუნის ძალა სიმშვიდის დროს ხახუნის ძალაზე ნაკლებია. სხეული რომ გამოვიყვანოთ სიმშვიდის მდგომარეობიდან, საჭიროა (სხვა თანაბარ პირობებში) გადავლახოთ ხახუნის შედარებით მეტი ძალა, ვიდრე სხეულის მოძრაობის დროს. მოძრაობის დროს ხახუნის ძალა დამოკიდებულია მოძრაობის ფარდობით სიჩქარეზე. მოძრაობის დროს ხახუნის ძალის სიდიდეს განსაზღვრავენ 36-ე ფორმულით, რომელშიც სიმშვიდის დროს ხახუნის კოეფიციენტის ნაცვლად ჩასვამენ მოძრაობის ხახუნის კოეფიციენტს. სრიალის ხახუნის კოეფიციენტების საორიენტაციო მნიშვნელობები მოცემულია მე-3 ცხრილში.

სპორტში ხახუნის პრობლემას უდიდესი მნიშვნელობა აქვს. მე-4 ცხრილში მოცემულია თოვლზე თხილამურის ხახუნის კოეფიციენტის მნიშვნელობა.

ზოგიერთი მასალას მოძრაობის მიმართულებისადმი განლაგების მიხედვით ხახუნის სხვადასხვა მნიშვნელობა აქვს. მაგალითად, f-ის მნიშვნელობები სხვადასხვა აქვს მერქანს ბოჭკოების გრძივი და განივი მიმართულებით მოძრაობის დროს, ირმის ტყავს — ბეწვის მიმართულებით და მის საწინააღმდეგოდ მოძრაობის დროს.

ცხრილი 3

სხვადასხვა მასალის ხახუნის კოეფიციენტი

მოხახუნე ზედაპირების მასალები	ხახუნის კოეფიციენტი			
	ლიმუვიდის (შეკიდულობა)		მოძრაობის (სრიალი)	
	მშრალი	შეზეთვით	მშრალი	შეზეთვით
ფოლადი-ფოლადი	0,15	0,1—0,12	0,15	0,05—0,1
ფოლადი-ბრინჯაო	0,15	0,1—0,15	0,15	0,1—0,15
ჩბილი ფოლადი-მუხა	0,6	0,12	0,4—0,6	0,1
ხე-ხე	0,4—0,6	0,1	0,2—0,5	0,07—0,15
ტყავი-მუხა	0,6	—	0,3—0,5	—
ტყავი-თუჩი	0,2—0,5	0,15	0,6	0,15
რეზინი-თუჩი	—	—	0,8	0,5
ფოლადი-ყინული	0,4	—	0,01—0,03	—
ხე-ყინული (14°)	—	—	0,05	—

ცხრილი 4

თოვლზე თხილამურის ხახუნის დახასიათება

თოვლის საფარის დახასიათება	სრილის შეფასება	სრილის ხახუნის კოეფიციენტი
მყარი, გაყინული, მაგარი	ჩინებული, კარგი	0,02—0,06
გახაფხულის ფენილი	დამაკმაყოფილებელი	0,06—0,1
დატკეპნილი თოვლი	ცუდი	0,1—0,9
წებვადი თოვლი, ფხვიერი ღრმა თოვლი, თოვლი ჩანგრევადი ქერქით		

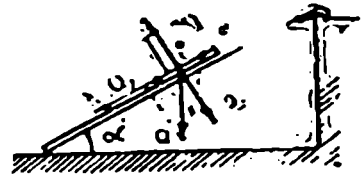
ყინულზე ფოლადის ხახუნის კოეფიციენტი დამოკიდებულია ყინულისა და ციგურის კავის ხარისხზე. რაც უფრო სუფთაა წყალი, რომლისგანაც დამზადებულია ყინული და რაც ნაკლებია მასში მინარევეები, მით უფრო ნაკლებია ხახუნის კოეფიციენტი. ყინულსა ან ციგურის კავზე უსწორმასწორობები და ჭუქუცი მკვეთრად ზრდის მას, ყინულზე ციგურის სრიალის დროს უშუალოდ კავის ქვეშ ყინული დნება და წარმოიქმნება საზეთის ძალიან თხელი შრე, რომელიც

ხახუნს ამცირებს 8—10-ჯერ. რაც უფრო მცირეა ჰაერის ტემპერატურა და მყარია ყინული, მით უფრო მცირეა საზეთი. ამჟებ დროს, არასაკმაოდ მაგარი ყინული ციგურების ქვეშ იმსხვრევა. სრიალი საუკეთესოა, როდესაც ყინულის ტემპერატურასა და გარემოს ტემპერატურას შორის ყველაზე დიდი განსხვავებაა, რაც შესაძლებელია ხელოვნურ-ყინულიან საციგურაო მოედნებზე და მაღალმთიან საციგურაოებზე. ჩვეულებრივ, საციგურაოებზე სრიალი სრულდება საუკეთესოდ მინუს 3—5°C ჰაერის ტემპერატურის დროს.

ხახუნის კოეფიციენტის განსაზღვრისათვის იყენებენ დახრილ სიბრტყეს. მასზე დებენ ძელს. სიბრტყის დახრის კუთხე შეიძლება იცვლებოდეს. რომელიღაც α კუთხის შემთხვევაში ძელი შეკავდება სიბრტყეზე; თუ თანდათან გაეზრდით კუთხეს, დადგება მომენტი, როდესაც ძელი დაიწყებს სრიალს. ამ კუთხის გაზომვით შეიძლება განესაზღვროთ ხახუნის ზღვრული კოეფიციენტის მნიშვნელობა.

შ ა გ ა ლ ი თ ი V. 1. დახრილ მუხის ფიცარზე დევს კუბის ფორმის 100 კგ წონის ფოლადის ძელი. იგი იწყებს სრიალს, როგორც კი სიბრტყის დახრის კუთხე მიაღწევს 32°-ს. განესაზღვროთ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტის მნიშვნელობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. O წერტილში მოდებულია ძალები: კუბის წონა Q , ნორმალური რეაქცია N და ხახუნის ძალა $R_{\text{ხახ}}$. მივმართოთ კოორდინატთა ღერძები დახრილი სიბრტყის პარალელურად (x) და პერპენდიკულარულად (y) (ნახ. 51). სრიალის მომენტის დასაწყისისათვის Q_x ძალა, რომელიც აიძულებს ტვირთს გადაადგილდეს ფიცარზე, ხახუნის ძალის ტოლია:



ნახ. 51.

$$|Q_x| = |R_{\text{ხახ}}| = fN;$$

$$Q_x = Q \sin \alpha; \quad N = Q \cos \alpha;$$

$$f = \frac{Q_x}{N} = \frac{Q \sin \alpha}{Q \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 32^\circ = 0,62.$$

აუცილებელია აღვნიშნოთ, რომ f ხახუნის კოეფიციენტი მოცემულ შემთხვევაში განისაზღვრება მხოლოდ ერთი α კუთხით: $f = \operatorname{tg} \alpha$.

§ 29. ხახუნის კუთხე და კონუსი

როდესაც სხეული ეყრდნობა გლუვ ზედაპირს, მხოლოდ ერთი ნორმალური რეაქციაა — N . ხოლო თუ საყრდენი ზედაპირი ხორ-

კლიანია, მაშინ ძერის \bar{P} ძალის მოქმედების დროს წარმოიქმნება სიბრტყის მხების მიმართულებით მოქმედი და \bar{P} -ს საწინააღმდეგო მხარეს მიმართული ხახუნის ძალა. კრიტიკული მომენტისათვის, როდესაც სხეული მოთავსებული იქნება სიმშვიდესა და მოძრაობას შორის ზღვარზე, ხახუნის ძალა იქნება მაქსიმალური $R_{\text{ხახ}} = fN$. ნორმალური რეაქცია N და მხები (ხახუნის ძალა) $R_{\text{ხახ}}$ პარალელოგრამის შეკრების წესით მოგვცემს საყრდენი ზედაპირის მთლიან რეაქციას, მიმართულს ნორმალისადმი რომელიღაც φ კუთხით.

უდიდესი φ კუთხეს, რომელზეც ხახუნის გამო გადაიხრება R რეაქცია ხორკლიანი ზედაპირის ნორმალიდან, ეწოდება ხახუნის კუთხე. 52-ე ნახაზზე მოყვანილ მაგალითში გვაქვს:

$$\text{tg } \varphi = \frac{R_{\text{ხახ}}}{N} = f.$$

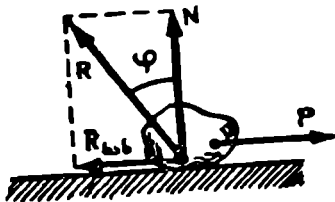
შესაბამისად:

$$\text{tg } \varphi = f. \quad (37)$$

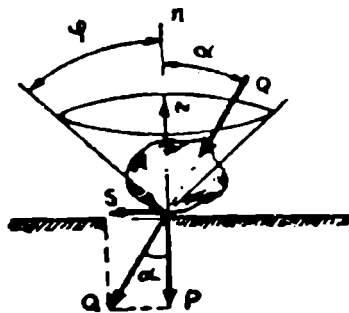
ხახუნის კუთხის ტანგენსი სრიალის ხახუნის კოეფიციენტის ტოლია.

თუ სხეულს შეუძლია გადაადგილება ხორკლიან ზედაპირზე ნებისმიერი მიმართულებით, მაშინ ამ ზედაპირის შესაძლო რეაქციების მოქმედების ხაზები ადგენს კონუსურ ზედაპირს (ნახ. 53). კონუსს, რომლის მსახველები დახრილია მოცემულ წერტილში სრიალის სიბრტყის ნორმალთან ხახუნის კუთხით, ხახუნის კონუსი ეწოდება.

თუ ხახუნის კოეფიციენტი მოცემულ ზედაპირზე სხეულის სხვადასხვა მიმართულებით მოძრაობის დროს ერთნაირია, მაშინ ამ ზედაპირის მთლიანი R რეაქცია ყველა მიმართულებით გადაიხრება



ნახ. 52.



ნახ. 53.

ნორმალისაგან ერთი და იმავე ხახუნის კუთხით და ხახუნის კონუსი იქნება წრიული მწვერვალთან 2φ -ს ტოლი კუთხით. ხოლო თუ ხახუნის კოეფიციენტს სხეულის სხვადასხვა მიმართულებით მოძრაობის დროს სხვადასხვა მნიშვნელობა აქვს, ხახუნის კონუსი იქნება არაწრიული (მაგალითად, სამთო სანადირო თხილამურებში).

დავეუშვათ, პორიზონტალურ ხორკლიან ზედაპირზე მდებარე სხეულზე მოდებულია Q ძალა, რომელიც სიბრტყის ნორმალთან α კუთხეს ადგენს (იხ. ნახ. 53). Q ძალა შეიძლება დაეშალოს ორ ძალად: P ძალად, რომელიც აქერს სხეულს ზედაპირზე და რომელიც წონასწორდება ზედაპირის ნორმალური N რეაქციით:

$$N = P = Q \cos \alpha,$$

და S ძალად, რომელიც ცდილობს დაძრას სხეული ადგილიდან:

$$S = Q \sin \alpha.$$

ზედაპირის ხორკლიანობა იწვევს ხახუნის $\bar{R}_{\text{ხახ}}$ ძალას, რომელიც მოქმედებს \bar{S} ძალის საწინააღმდეგო მიმართულებით. წონასწორობის დროს:

$$S = R_{\text{ხახ}} < R_{\text{ხახ} \cdot \tau} = fN = fQ \cos \alpha.$$

იმისათვის, რომ სხეული მოდებული ძალის მოქმედებით დაიძრას ადგილიდან. აუცილებელია S ძალა სიდიდით იყოს მეტი ან ტოლი $R_{\text{ხახ} \cdot \tau}$ -ზე, ე. ი.

$$Q \sin \alpha \geq fQ \cos \alpha,$$

ან

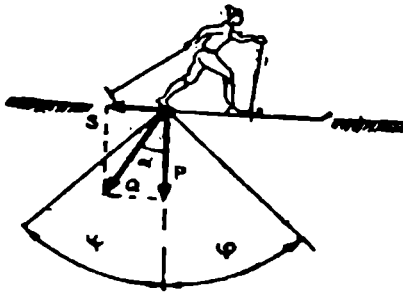
$$f = \operatorname{tg} \varphi \leq \operatorname{tg} \alpha.$$

საიდანაც

$$\alpha \geq \varphi.$$

ეს ნიშნავს, რომ როგორი ძალაც უნდა იყოს მოდებული სხეულზე, თუ α იქნება φ -ზე ნაკლები, მაშინ სხეული დარჩება წონასწორობაში, ე. ი. არ გადაადგილდება. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ სხეულზე მოდებული ძალა ხახუნის კონუსის საზღვრებშია, მაშინ მას არ ძალუძს სხეულის გადაადგილების გამოწვევა.

54-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მოთხილამურე. სანამ მის მიერ განვითა-

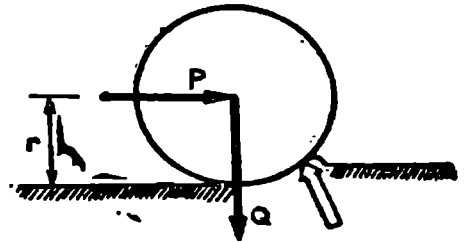


ნახ. 54.

რებული Q ძალა 2φ -ით განსაზღვრულ ხახუნის კონუსის ზღვრებშია, მისი მარცხენა ფეხი (და თხილამური) უძრავი დარჩება (წინააღმდეგ შემთხვევაში თხილამური გასრიალდება უკან და უკუბიძგი არ მოხდება). ამისათვის საცხს ამზადებენ ისე, რომ სიმწვიდის ხახუნის $R_{\text{ხახ}} \max$ ძალა სრიალის ხახუნის ძალაზე გაცილებით მეტი იყოს.

§ 30. გორვის ხახუნი

გადაგორების ხახუნი უმთავრესად წარმოიქმნება იმის გამო, რომ გორავი სხეული, ისევე როგორც საფუძველი, რომელზეც იგი გორავს, არ არიან აბსოლუტურად მყარი და ყოველთვის რამდენადმე დეფორმირდებიან ურთიერთქმედების დროს. მაგალითად, მძიმე ცილინდრის გადაადგილების დროს (ნახ. 55) ყოველთვის საჭიროა გადავლახოთ რაღაც „ბარიერი“ (ნახაზზე ნაჩვენებია ისრით). ამით გორვის ხახუნის ფიზიკური ხასიათი განსხვავდება სრიალის ხახუნისაგან, რომ დავძრათ Q წონის ცილინდრი (დავიწყეთ მისი გადაადგილება), საჭიროა ცენტრის დონეზე მოვდოთ ძალა:



ნახ. 55.

$$P = \frac{k}{r} Q, \quad (38)$$

სადაც k გორვის ხახუნის კოეფიციენტია, r — წვევის P ძალის მოდების სიმაღლე (მოცემულ შემთხვევაში — გადასაგორები ცილინდრის რადიუსი), Q — გრუნტზე დატვირთვა. k -ს განზომილებაა სიგრძის საზომი ერთეული. ამიტომ $\frac{k}{r}$ უგანზომილებო (ფარდობითი) სიდიდეა.

მე-5 ცხრილში მოცემული გორვის ხახუნის სამაგალითო მნიშვნელობებია.

ზოგიერთი მასალის გორვის ხახუნის კოეფიციენტი

მონახუნე ზელაპირების მასალები	ხახუნის კოეფიციენტი k (სმ)
რბილი ფოლადი — რბილი ფოლადი	0,005
ნაწრთობი ფოლადი — ნაწრთობი ფოლადი	0,001
ხე-ფოლადი	0,03—0,04
რეზინი-კორდი	0,10—0,15
რეზინი — ასფალტის საფარი	0,04

სპორტში გორვის ხახუნის კოეფიციენტს აქვს დიდი მნიშვნელობა ველოსიპედზე რბოლის ანალიზის დროს. ველოსიპედის თელისათვის გორვის ხახუნის კოეფიციენტი წარმოდგენილია მე-6 ცხრილში.

ველოსიპედის თელის გორვის ხახუნის კოეფიციენტი

გზის საფარი	$f = \frac{k}{r}$
ბუნებრივი გრუნტი კარგ მდგომარეობაში	0,02
ბეტონი, ასფალტი	0,004—0,006
დატკეპნილი თოვლი	0,2
რიყეფენილი	0,02

წევის P ძალის განსასაზღვრელი ფორმულა (თანაბარი მოძრაობა ნცირე სიჩქარით), თუ ცნობილია $f = \frac{k}{r}$ მნიშვნელობა, შეიძლება დაეწეროს ასე:

$$P = fQ. \tag{39}$$

მაგალითად, იმისათვის რომ გავაგოროთ ველოსიპედი ასფალტის გრუნტზე (პორიზონტალურზე), საჭიროა მოვდოთ ძალა:

$$P = fQ = 0,004 \cdot 15 = 0,06 \text{ კგ (0,59 ნ).}$$

თუ ველოსიპედზე 85 კგ წონის ადამიანი ზის, მაშინ $Q = 15 + 85 = 100$ კგ, ხოლო აუცილებელი ძალა $P = 0,004 \cdot 100 = 0,4$ კგ (3,9 ნ).

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ წევის ძალა P მკვეთრად იზრდება მოძ-

რაობის სიჩქარის ზრდით, გზის აღმართის მომატებით, ქარის გაძლიერებით და ა. შ.

მაგალითი V.2. ამოთხილამურემ შეარჩია თხილამურის საცხი, რომელიც უზრუნველყოფს ხახუნის სიმშვიდის კოეფიციენტს $f_{max} = 0,2$; ბ მოთხილამურემ-საცხი, რომელიც უზრუნველყოფს $f_{max} = 0,5$. განესაზღვროთ უკუბიძგის კუთხის მაქსიმალური შესაძლებლობა ა და ბ მოთხილამურეებისათვის.

ამოხსნა. რადგანაც $f_{max} = \text{tg}\varphi$, ამიტომ $\text{tg}\varphi_a = 0,2$; $\text{tg}\varphi_b = 0,5$. აქედან, ცხრილების გამოყენებით, დავადგენთ: $\varphi_a = 11^\circ 20'$; $\varphi_b = 27^\circ$. შესაბამისად, უკუბიძგის კუთხე ა მოთხილამურისათვის უნდა იყოს არა უმეტეს: $\alpha_a = 90^\circ - 11^\circ 20' = 78^\circ 40'$, ხოლო ბ მოთხილამურისათვის არა უმეტეს: $\alpha_b = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$.

VI თავი

სხეულის სიმძიმის ცენტრი

§ 81. ცნობა პარალელური ძალების ცენტრის შესახებ

მოდრავი სხეულის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი მახასიათებელია მისი სიმძიმის ცენტრი. მაგრამ, სანამ ვილაპარაკებდეთ სიმძიმის ცენტრზე, აუცილებელია შევჩერდეთ პარალელური ძალების ცენტრის ცნებაზე.

დაეუშვათ, მყარ სხეულზე A_1, A_2, \dots, A_n წერტილებში მოდებულა პარალელური და ერთ მხარეს მიმართული $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n$ ძალები. ცხადია, ამ ძალების სისტემის ტოლქმედი \overline{R} მიმართულია ისევე, როგორც შემდგენი ძალები, ამავე დროს მისი მოდული უდრის $\overline{R} = \Sigma F_i$;

თუ სხეულზე მოდებულ ყველა ძალას ერთდროულად და ერთნაირად მოვაბრუნებთ მათი მოდების წერტილების გარშემო, მაშინ ძალების ტოლქმედი ახალ მდებარეობაში ასევე შეიცვლის მიმართულებას, თან შეინარჩუნებს მოდების წერტილს და R მოდულს.¹

წერტილს, რომელზეც გადის პარალელური ძალების სისტემის ტოლ-

¹ ეს დებულება შეიძლება მივიღოთ დამტკიცების გარეშე: იგი მოცემულია თეორიული მექანიკის ნებისმიერ კურსში.

ქმედის მოქმედების ხაზი ამ ძალების ნებისმიერი მობრუნების დროს, მათი მოდების წერტილის მიმართ ერთი და იმავე მიმართულებითა და ერთი და იმავე კუთხით პარალელური ძალების ცენტრი ეწოდება.

წერტილის მდებარეობა, სადაც მოდებულია პარალელური ძალების ტოლქმედი, სხეულის მიმართ უცვლელია და არ არის დამოკიდებული კოორდინატა სისტემის შერჩევაზე. სინამდვილეში, თუ Q სხეულზე (შტანგა 4 ტვირთით) C წერტილში მოდებულია პარალელური R ძალების ტოლქმედი, მაშინ როგორი კოორდინატა სისტემაც x, y და x', y' უნდა გამოვიყენოთ, მასში შეიცვლება მხოლოდ C წერტილის კოორდინატები, მაგრამ სხეულის მიმართ მისი მდებარეობა არ შეიცვლება. ეს საშუალებას იძლევა შევარჩიოთ ნებისმიერი კოორდინატა სისტემა.

ავილოთ ნებისმიერი x, y, z კოორდინატთა ღერძები და აღვნიშნოთ წერტილის კოორდინატები:

$$A_1(x_1, y_1, z_1); A_2(x_2, y_2, z_2); \dots; C(x_c, y_c, z_c).$$

ვისარგებლოთ იმით, რომ წერტილის მდებარეობა არ არის დამოკიდებული ძალების მიმართულებებზე, მოვაბრუნოთ ძალები მათი წოდების წერტილის მიმართ ისე, რომ ისინი გახდნენ Oz ღერძის პარალელური, და გამოვიყენოთ მობრუნებული $\bar{F}_1', \bar{F}_2', \dots, \bar{F}_i'$ ძალების მიმართ ვარიჩინონის თეორემა: თუ ძალების მოცემული სისტემა არ არის ნულის ეკვივალენტური და ტოლქმედი აქვს, მაშინ ამ ტოლქმედის ნებისმიერი ღერძის მიმართ მომენტი ამავე ღერძის მიმართ შემდგენი ძალების მომენტთა ალგებრული ჯამის ტოლია.¹ ამიტომ თუ ავიღებთ Oy' ღერძის მიმართ მომენტს, მივიღებთ:

$$M_y(\bar{R}') = \sum M_y(\bar{F}_i'). \quad (40)$$

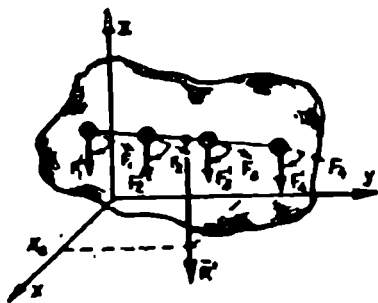
56-ე ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$M_y(\bar{R}') = \bar{R} x_c,$$

სადაც \bar{R} \bar{R} -ის ტოლქმედის მოდულია და $\bar{R} x_c$ -ის მოდულის ტოლია; x_c — Ox ღერძზე C წერტილის კოორდინატა (\bar{R}' ტოლქმედის ძალის მხარი).

ანალოგიურად ყველა შემდგენი ძალისათვის:

$$M_y(\bar{F}_i') = F_i x_i.$$



ნახ. 56.

¹ ამ თეორემის დამტკიცება თეორიული მექანიკის კურსებშია მოცემული.

ამიტომ მე-40 განტოლება შეიძლება დავწეროთ ასე:

$$R x_c = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_i x_i,$$

საიდანაც

$$x_c = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_i x_i}{R} \quad (41)$$

ამრიგად, მივიღეთ ტოლქმედის მოდების წერტილისათვის x_c კოორდინატა. რომ მივიღოთ y_c კოორდინატა, აუცილებელია ვიმოქმედოთ იმავე გზით და Ox ღერძის მიმართ ავიღოთ მომენტები. რომ მივიღოთ კოორდინატა Z_c , საჭიროა ჯერ მოვებარუნოთ ყველა ძალა და გავზადოთ ისინი პარალელური, მაგალითად, O_y ღერძისა, ხოლო შემდეგ ვეძიოთ მომენტები Ox ღერძის მიმართ.

ამის შედეგად მივიღებთ:

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{R}; \quad y_c = \frac{\sum F_i y_i}{R}; \quad z_c = \frac{\sum F_i z_i}{R}. \quad (42)$$

ამრიგად, თუ ცნობილია ძალების მოდული და მათ მოდების წერტილთა კოორდინატები, 42-ე გამოსახულების გამოყენებით შეიძლება უბრალო არითმეტიკული მოქმედებებით განესაზღვროთ ამ ძალების ტოლქმედის მოდების წერტილის კოორდინატები.

§ 22. მუხარ სხეულის სიმძიმის ცენტრი

დედამიწის ზედაპირთან ახლოს სხეულის ნებისმიერ ნაწილაკზე მოქმედებს ვერტიკალურად ქვემოთ მიმართული ძალა, რომელსაც სიმძიმის ძალა ეწოდება, საგნებისათვის, რომლებთანაც, ჩვეულებრივ გვაქვს საქმე. დედამიწის ზომებთან შედარებით მათი ზომების სიმცირის გამო, სხეულის ნაწილაკების სიმძიმის ძალები შეიძლება მივიჩნიოთ ერთმანეთის პარალელურ და თითოეული ნაწილაკისათვის მუდმივ სიდიდის შემნარჩუნებლად.

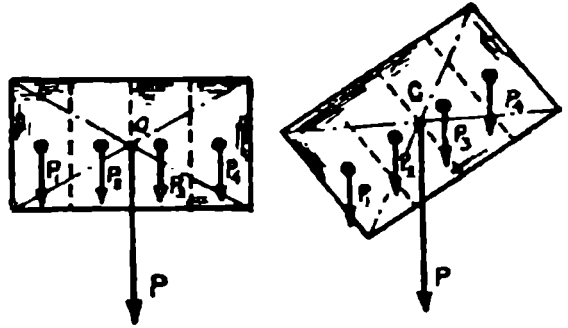
თუ სხეულის ცალკეულ ნაწილაკზე მოქმედი ძალებია P_1, P_2, \dots, P_i , ხოლო მათი ტოლქმედი \bar{P} , მაშინ ამ ძალის მოდული სხეულის წონის ტოლია და გამოითვლება ტოლობით

$$P = \sum P_i \quad (43)$$

სხეულის ნებისმიერი მობრუნების დროს ძალები რჩება მოდებულ მის ერთსა და იმავე წერტილებში, ერთმანეთის პარალელური და ინარჩუნებს თავიანთ მიმართულებებს. იცვლება მხოლოდ სხეულის მიმართ მათი მიმართულება (ნახ. 57). შესაბამისად \bar{P}_i ძალების P ტოლქმედი სხეულის ნებისმიერი მდებარეობისას გაივლის სხეულთან

უცვლელად დაკავშირებულ ერთსა და იმავე C წერტილზე. რომელიც \bar{P} სიმძიმის პარალელური ძალების ცენტრია. ამ წერტილს სხეულის სიმძიმის ცენტრი ეწოდება.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მყარი სხეულის სიმძიმის ცენტრი ამ სხეულთან უცვლელად დაკავშირებულ წერტილია, რომელზეც გადის შოკეთული სხეულის ნაწილაკების სიმძიმის ძალების ტოლქმედის მოქმედების ხაზი სხეულის სივრცეში ნებისმიერი მდებარეობისას.



ნახ. 57.

სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, პარალელური ძალების ცენტრის მსგავსად, შეიძლება განვსაზღვროთ ფორმულებით:

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{P}; \quad y_c = \frac{\sum P_i y_i}{P}; \quad z_c = \frac{\sum P_i z_i}{P}, \quad (44)$$

სადაც x_i, y_i, z_i — სხეულის ცალკეული ელემენტის სიმძიმის P_i ძალების მოდების წერტილთა კოორდინატებია.

ზოგ შემთხვევაში საქმე გვაქვს სხეულის მასებთან. სხეულის მასას ლუ აღვნიშნავთ M -ით, ხოლო მისი ცალკეული ნაწილაკის მასებს შესაბამისად m_1, m_2, \dots, m_i -ით, მაშინ $P = Mg$; $P_i = m_i g$, სადაც g სიმძიმის ძალის აჩქარებაა.

44-ე გამოსახულებაში ამ მნიშვნელობების ჩასმით მივიღებთ:

$$x_c = \frac{\sum_1^i m_i x_i}{M}; \quad y_c = \frac{\sum_1^i m_i y_i}{M}; \quad z_c = \frac{\sum_1^i m_i z_i}{M}. \quad (45)$$

C წერტილს, რომლის კოორდინატებიც განისაზღვრება 45-ე ფორმულებით, სხეულის მასის ცენტრი ეწოდება.¹

¹ მიუხედავად იმისა, რომ სხეულის მასის ცენტრის მდებარეობა ემთხვევა სხეულის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობას, ეს ცნებები იგივეობა არ არის. ცნებას „სიმძიმის ცენტრი“ აზრი აქვს არსებითად მხოლოდ ერთგვაროვანი სიმძიმის ველში მოთავსებულ მყარ სხეულისათვის. ცნებას „მასის ცენტრი“ აზრი აქვს მატერიალური წერტილების ნებისმიერი სისტემისათვის იმის მიუხედავად მასზე რომელიმე ძალა მოქმედებს თუ არა.

თუ 44-ე ტოლობებში სხეულის ცალკეული ნაწილაკის P_i წონის ნაცვლად ჩავსვათ ρv_i -ს, ხოლო სხეულის P წონის ნაცვლად V -ს, სადაც v_i და V შესაბამისად სხეულის ნაწილაკის მოცულობა და სხეულის მოცულობაა, ხოლო $d\rho$ — სხეულის ერთეული მოცულობის წონა,

$$x_c = \frac{\sum v_i x_i}{V}; \quad y_c = \frac{\sum v_i y_i}{V}; \quad z_c = \frac{\sum v_i z_i}{V}. \quad (46)$$

ამ ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრი დამოკიდებულია მხოლოდ მის გეომეტრიულ ფორმაზე და არ არის დამოკიდებული ρ -ს სიმკვრივეზე. ამის საფუძველზე წერტილს, რომლის კოორდინატებიც განისაზღვრება 46-ე ფორმულით, უწოდებენ V მოცულობის ცენტრს.

46-ე ფორმულის მრიცხველებში მოთავსებულ $\sum v_i x_i$, $\sum v_i y_i$ და $\sum v_i z_i$ გამოსახულებებს, უწოდებენ yOz , xOz და xOy სიბრტყეების მიმართ მოცულობის სტატიკურ მომენტებს.

მრავალ შემთხვევაში საქმე გვაქვს ფინიდან გამოკრილ სხეულებთან, რომელთა სისქე მუდმივია. ასეთი სხეულები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ბრტყელი ფიგურები. მათთვის S ფართობის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები იქნება:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S}; \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S}, \quad (47)$$

სადაც S მთელი ფინის ფართობია, ხოლო S_i — მისი ცალკეული ნაწილაკის ფართობი.

$\sum S_i x_i$ და $\sum S_i y_i$ სიდიდეებს უწოდებენ ბრტყელი ფიგურის სტატიკურ მომენტებს x და y ღერძების მიმართ.

ხაზის სიმძიმის ცენტრის, მაგალითად, მავთულის მრუდის განსაზღვრისათვის იყენებენ ფორმულებს:

$$x_c = \frac{\sum l_i x_i}{L}; \quad y_c = \frac{\sum l_i y_i}{L}; \quad z_c = \frac{\sum l_i z_i}{L} \quad (48)$$

სადაც, L — მთელი ხაზის სიგრძეა, ხოლო l_i — მისი ცალკეული ნაწილის სიგრძე.

აუცილებელია აღვნიშნოთ, რომ ზემოთქმული შეეხება ერთგვაროვან სხეულებს. ადამიანის სხეული ერთგვაროვანი არ არის. კუნთებსა და სხვა რბილ ქსოვილებს აქვს სიმკვრივე. დაახლოებით $K\rho = 1$ გ/სმ³,

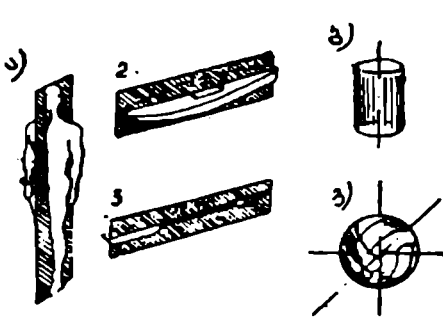
ძელის ქსოვილებს—1,5—2,0 გ/სმ², ხოლო ფილტვების ქსოვილებს —0,25—0,35 გ/სმ². ამიტომ მოცემულ პარაგრაფში მოყვანილ ფორმულებში, უნდა შევიტანოთ მნიშვნელოვანი შესწორებები თუ საქმე ეხება ადამიანის სხეულს.

§ 37. სხეულთა სიმძიმის ცენტრების განსაზღვრა

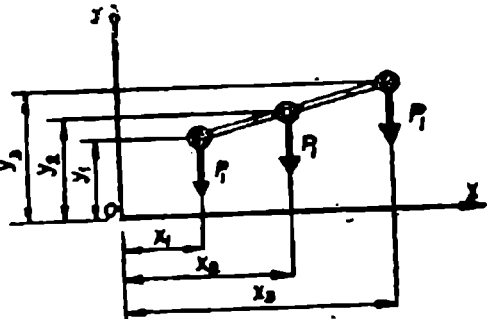
1. ანალიზური (განგარიშების) მეთოდები. 44—48-ე ფორმულების საფუძველზე შემუშავებულია სხეულთა სიმძიმის ცენტრების განსაზღვრის პრაქტიკული ხერხები. ამ დროს დიდი მნიშვნელობა აქვს სიმეტრიის არსებობას. თუ ერთგვაროვან სხეულს აქვს სიმეტრიის სიბრტყე, ღერძები ან ცენტრი, მაშინ მისი სიმძიმის ცენტრი შესაბამისად სიმეტრიის სიბრტყეში, სიმეტრიის ღერძზე ან სიმეტრიის ცენტრშია.

58, ა ნახაზზე ნაჩვენებია სხეულები, რომელთაც აქვთ სიმეტრიის სიბრტყე. თითოეული ასეთი სხეული შეიძლება დავყოთ ამ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიულად განლაგებული ერთნაირი წონის ელემენტარულ სხეულებად. ამავე დროს, თუ შევკრებთ სხეულის სიმეტრიულ ნაწილაკებზე მოდებულ სიმძიმის ძალებს, ყოველთვის მივიღებთ ტოლქმედს, რომელიც სიმეტრიის სიბრტყეში მდებარეობს. შესაბამისად, ყველა სიმძიმის ძალის ცენტრიც მოთავსებული იქნება ამ სიბრტყეში. ასეთნაირადვე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ სიმეტრიის ღერძის არსებობისას სიმძიმის ცენტრი იქნება ამ ღერძზე (ნახ. 58, ბ) ან სიმეტრიის ცენტრის არსებობისას სიმძიმის ცენტრი დაემთხვევა მას (ნახ. 58, გ). იგივე შეიძლება ითქვას ბრტყელი ფიგურების შესახებ.

ანალიზური მეთოდით სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრის დროს სხეულს აზრობრივად ყოფენ სასრული რიცხვის ნაწილაკებად, რომელთაგან თითოეულისათვის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა ცნობილია.



ნახ. 58.



ნახ. 59.

$$y_c = \frac{\sum y_i S_i}{S} = \frac{1 \cdot 4 + 3,5 \cdot 14 + 6 \cdot 8}{26} = \frac{101}{26} = 3,9.$$

სიმძიმის ცენტრის მოძებნილი მდებარეობა აღინიშნება *C* წერტილით.

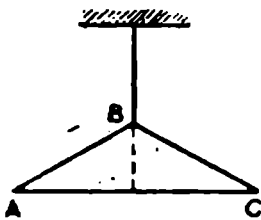
ცხრილი 7

IV. 1. შავალითის გასანაგარიშებელი ცხრილი

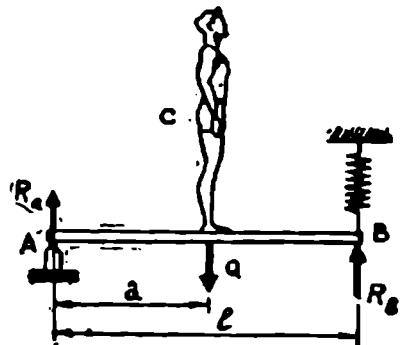
კოორდინატები	ცალკეული ფიგურა		
	1-ლი	მე-2	მე-3
x_i	-1	+1	+4
y_i	+1	+3,5	+6
z_i	0	0	0
ფართობი	4	14	8

შენიშვნა. კოორდინატთა ღერძები შეიძლება შევარჩიოთ ნებისმიერად; ზოგჯერ მოსახერხებელია კოორდინატთა სათავე შევეუთავსოთ ერთ-ერთი რგოლის სიმძიმის ცენტრს, მაშინ სტატიკური მომენტების ჯამი შემცირდება ერთი წევრით.

2. საიარაღო მეთოდები. ერთ-ერთი უბრალო საიარაღო მეთოდია — ჩამოკიდების მეთოდი. იგი იმაში მდგომარეობს, რომ სხეულს კიდებენ ძაფზე რიგრიგობით მის სხვადასხვა წერტილში. ძაფის მიმართულება ყოველთვის უჩვენებს სიმძიმის ძალის მიმართულებას. ამ მიმართულებების გადაკვეთის წერტილი სიმძიმის (*C*) ცენტრი იქნება. 61-ე ნახაზზე ნაჩვენებია სამკუთხედი, დაკიდებული პირველად *B* კუთხის წვეროთი, მეორეჯერ — *A* კუთხის წვეროთი. სამკუთხედზე აღნიშნული ხაზები ძაფის გაგრძელებებია, რომელზეც ჰკიდია სამკუთხედი; ამ ხაზების სიმძიმის ძალის მოქმედების ხაზების გადაკვეთა სამკუთხედის სიმძიმის ცენტრია.



ნახ. 61.



ნახ. 62.

სხვა პრაქტიკულად მნიშვნელოვანი მეთოდია აწონის მეთო-
დი. 62-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ადამიანი, რომელიც დგას AB ძელზე.
ამ უკანასკნელის ერთი ბოლო კი დამაგრებულია საყრდენ პრიზმზე,
ხოლო მეორეთი დინამომეტრის ზამბარაზე ჰკიდია. ადამიანის სიმძიმის
ძალა Q განსაზღვრულია წინასწარი აწონით. B წერტილში რეაქცია
 R_b შეიძლება განისაზღვროს დინამომეტრის ჩვენებით. A წერტილში
რეაქცია R_a ცხადია $Q - R_b$ ტოლია. დავუშვათ, მანძილი A -დან B -მდე
 l -ის ტოლია, ხოლო მანძილი A -დან სიმძიმის ცენტრზე გამავალ ძალის
შოკმედების ხაზამდე იქნება a . თუ გავუტოლებთ ნულს ადამიანის
სიმძიმის (C) ცენტრის მიმართ ყველა ძალის ნომენტების ჯამს, მივი-
ღებთ:

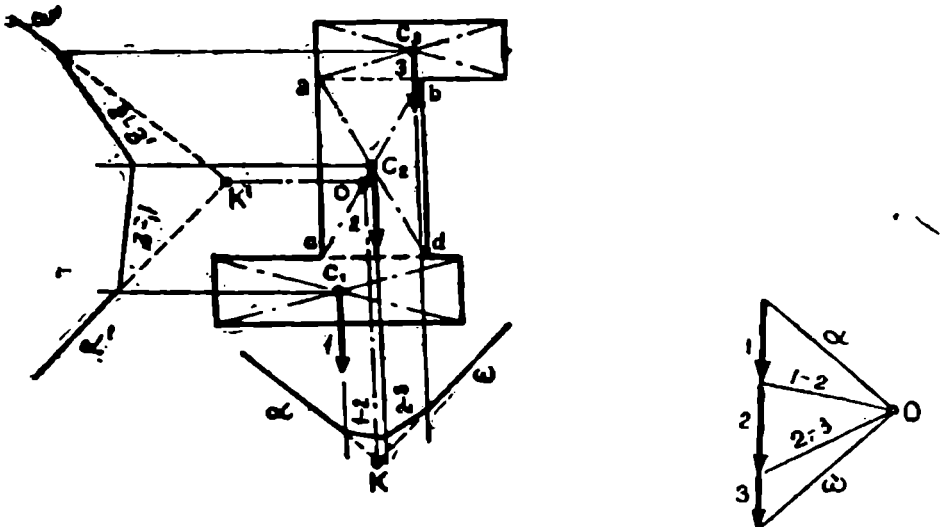
$$-R_a a + R_b(l - a) = 0,$$

საიდანაც: $-R_a a + R_b l - R_b a = 0, (R_a + R_b)a = R_b l$;

ხოლო, რადგან: $R_a + R_b = Q$, ამიტომ

$$a = \frac{R_b l}{Q}. \quad (49)$$

ხაზს (ვერტიკალი), რომელიც გადის ადამიანის სიმძიმის ცენტრზე,
ვიპოვით, თუ გადავიტოვოთ A წერტილიდან a დაშორებას, რომელიც
ადვილად მოიძებნება 49-ე ფორმულით. რომ გამოვიტვალოთ ადამიანის
სხეულის სიმძიმის ცენტრის სიმაღლე მის ძირითად დგომში; შეი-
ძლება ვისარგებლოთ ამავე ფორმულით, მაგრამ ადამიანმა ამისათვის
უნდა მიიღოს დინამომეტრულ ძელზე წოლითი მდგომარეობა.



ნახ. 63.

მ. გრაფიკული მეთოდი. ვთქვათ, მოცემულია ბრტყელი ფიგურა (ნახ. 63). დაეყოთ იგი ab და cd მონაკვეთებით სამ მართკუთხედად. ამ მართკუთხედების ფართობები (ან წონები ფიგურის ერთგვაროვნების დროს) აღვნიშნოთ ციფრებით 1, 2 და 3 და მივიჩნიოთ ისინი ვექტორებად, რომლებიც მოდებული არიან მართკუთხედების სიმძიმის ცენტრებში და მიმართული არიან ვერტიკალურად ქვემოთ. შევკრიბოთ ისინი თანამიმდევრობით (1, 2, 3) გრაფიკულად. შევარჩიოთ ნებისმიერი O პოლუსი. ავაგოთ ე. წ. თოკური მრავალკუთხედი და შევაერთოთ O პოლუსი 1, 2 და 3 ვექტორების საწყისთან და ბოლოსთან a , 1—2, 2—3, a მონაკვეთების საშუალებით. გავატაროთ a სხოვი (თოკურ მრავალკუთხედში a მონაკვეთის პარალელური) 1 ვექტორის მიმართულების გადაკვეთამდე. მიღებული გადაკვეთის წერტილიდან გაავლოთ 1—2 მონაკვეთი, შემდეგ 2—3 და a . a და a სხივების გაკრბელებით მათი ურთიერთგადაკვეთაზე მივიღებთ K წერტილს. საძებნი სიმძიმის ცენტრი ამ წერტილის გადამკვეთ ვერტიკალზე მდებარეობს. მოვაბრუნოთ ძალები 1, 2 და 3 მათი მოდების წერტილების გარშემო სწორი კუთხით ისე, რომ მათ მიიღონ $1'$, $2'$ და $3'$ მდებარეობები. ავაგოთ ამ ახალი ძალების სისტემისათვის თოკური მრავალკუთხედი. მისი გვერდები იქნება პირველი თოკური მრავალკუთხედის a , 1—2, 2—3, a გვერდების პერპენდიკულარული. ასე, რომ, მისი აგება არ არის სავალდებულო, მთავარია მოვებნოთ K' წერტილი — a' და a' სხივების გადამკვეთი. საძებნი სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს K წერტილზე გამავალი ვერტიკალისა და K' წერტილზე გამავალი ჰორიზონტალის გადაკვეთაზე.

§ 84. ადამიანის სხეულის სიმძიმის ცენტრის შესახებ

ადამიანის სხეულის საერთო სიმძიმის ცენტრის (ს. ს. ც.) განსაზღვრა მნიშვნელოვანია სპორტული მოძრაობების მექანიკის სხვადასხვა საკითხის გადაწყვეტისათვის. სიმძიმის ცენტრის მდებარეობის მიხედვით მსჯელობენ წონასწორობის მდგრადობაზე, მოძრაობის რაციონალურობაზე. ნებისმიერი მოძრაობის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი მახასიათებელია სიმძიმის ცენტრის ტრაექტორია. გარდა ამისა, სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა დამოკიდებულია სხეულის მასის განაწილებაზე და სპორტსმენის სომატური თავისებურებების ერთ-ერთი მაჩვენებელია. საქმე ის არის, რომ სხვადასხვა ადამიანს ხაზოვანი ზომების ტოლობის დროს სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა შეიძლება სხვადასხვა ჰქონდეს; ამა თუ იმ ქსოვილისა და ორგანოების ხვედრითი წონის მიხედვით. როდესაც ლაპარაკია ადამიანის სხეულის სიმძიმის ცენტრზე, ფაქტიურად იგულისხმება არა გეომეტრიული წერტილი, არანედ სფე-

რო, რომელშიც ეს წერტილი გადაადგილდება უწყვეტად. ეს გადაადგილება განპირობებულია სისხლის მიმოქცევით, სუნთქვით, საჭმლის მონელებით, კუნთობრივი ტრემორით და სხვა პროცესებით. საორიენტაციოდ შეიძლება მივიჩნიოთ, რომ იმ სფეროს დიამეტრი, რომლის შიგნითაც ხდება ს. ს. ც. უწყვეტი გადაადგილება სხეულის მშვიდ მდებარეობის დროს, დაახლოებით 10 მმ-ის ტოლია. მოძრაობის პროცესში იგი გაცილებით იზრდება და ს. ს. ც. გადაადგილებამ შეიძლება იმოქმედოს ვარჯიშის შესრულების ტექნიკაზე.

§ 25. ადამიანის სხეულის სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრა

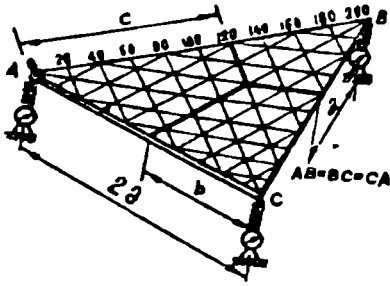
1. ანალოზური მეთოდი. ისევე როგორც სიმეტრიული მყარი სხეულის, ადამიანის სხეულის სიმძიმის ცენტრსაც განსაზღვრავენ ფოტოგრაფირებით ან გაზომვით, 44-ე ფორმულის მიხედვით ბრტყელი ფიგურისათვის. რომ განვსაზღვროთ ს. ს. ც., აუცილებელია ვიცოდეთ ადამიანის სხეულის ცალკეული რგოლების წონა მათი სიმძიმის ცენტრთა მდებარეობები (ცხრ. 8).

ც ხ რ ი 8

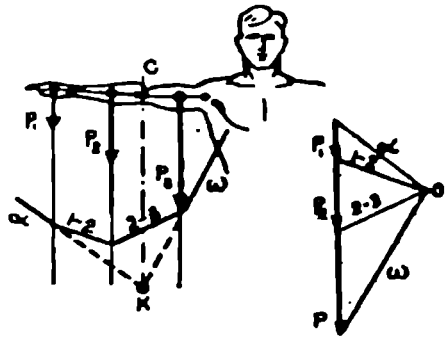
ადამიანის სხეულის რგოლების ფარდობითი წონა და სიმძიმის ცენტრების კოორდინატები

სხეულის ნაწილები	რგოლის ფარდობითი წონა (%)	ფარდობითი მანძილი (%) რგოლის პროქსიმალური ბოლოდან სიმძიმის ცენტრამდე
თავი	7	44
ტანი	43	47
მარჯვენა მხარი	3	47
მარცხენა მხარი	3	42
მარჯვენა წინამხარი	2	42
მარცხენა წინამხარი	2	
მარჯვენა მტევანი	1	
მარცხენა მტევანი	1	
მარჯვენა ბარძაყი	12	44
მარცხენა ბარძაყი	12	44
მარჯვენა წვივი	5	42
მარცხენა წვივი	5	42
მარჯვენა ტერფი	2	44
მარცხენა ტერფი	2	44

ასე, მაგალითად, თავის სიმძიმის ცენტრი გარეგანი სასმენი ხერხის ზედა ბოლოების შემაერთებელი ხაზის შუაზე მდებარეობს. მტევანის სიმძიმის ცენტრი ნახევრად მოხრილი თითებით მოთავსებულია ნების მესამე ძვლის თავის არეში.



ნახ. 64.



ნახ. 65.

2. საიარაღო მეთოდი. ფიზიკური ვარჯიშების პროცესში სხეულის მდებარეობა მრავალჯერ იცვლება. ამ დროს იცვლება სიმძიმის ცენტრის მდებარეობაც. სხეულის სხვადასხვა მდებარეობის დროს სიმძიმის ცენტრის მდებარეობის განსაზღვრა შეიძლება ხელსაწყოთა საშუალებით, რომელიც შედგება სამ დინამომეტრზე დამაგრებული სამკუთხა ბაქნისაგან (ნახ. 64). დინამომეტრები რეგისტრაციას უკეთებს რეაქციებს, რომლებიც დაუტვირთავი სამკუთხა ბაქნის რეაქციისა და სხეულის წონით გამოწვეულ რეაქციის ჯამია.

წონითი სიმეტრიის გამო ბაქნის წონით გამოწვეული რეაქციები ერთმანეთის ტოლია ($P_1 = P_2 = P_3$), ამიტომ ისინი შეიძლება ავტომატურად გამოირიცხოს დინამომეტრების ჩვენებებიდან (ან დინამომეტრები ცდის წინ შეიძლება დააყენონ ნულზე).

წონასწორობის განტოლებების გამოყენებით შეიძლება განსაზღვრონ a , b და c მონაკვეთები, რომლებითაც პოულობენ ბაქანზე მოთავსებული ადამიანის სხეულის სიმძიმის ცენტრს:

$$a = \frac{Q_a + 2Q_c}{2Q}; \quad b = \frac{Q_b + 2Q_a}{2Q}; \quad c = \frac{Q_c + 2Q_b}{2Q}; \quad (50)$$

სადაც Q ადამიანის სხეულის წონაა. რომელიც უდრის $Q_a + Q_b + Q_c$ დინამომეტრების ჩვენებებს (რომელთაგან გამოკლებულია ბაქნის $1/3$ წონა).

ადამიანის ბაქანზე დაწვენი წინ ბაქანს ფარავენ ქალაღის ფურცლით, ადამიანის პოზის კონტურის წინასწარ შემოხაზვით. ამის შემდეგ დინამომეტრების ჩვენებებისა და 50-ე ფორმულებით გაანგარიშებების საფუძველზე გადაზომივენ ქალაღზე a , b , c მონაკვეთებს.

8. გრაფიკული მეთოდი. (მაგალითი VI. 2.). 65-ე ნახაზზე ნაჩვენებია აგება, რომლის მეშვეობითაც განისაზღვრება ადამიანის მკლავის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა. ამ აგების მეთოდოკა აღწერილია (70-ე გვერდზე).

VII თავი

წონასწორობის მდგარლობა

§ 30. ცნება სხეულის წონასწორობის მდგარობის შესახებ

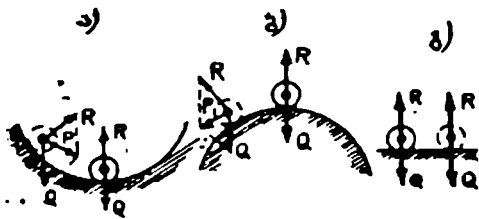
ფიზიკური ვარჯიშების შესწავლის დროს სხეულთა წონასწორობის მდგარობის საკითხს უაღრესად დიდი მნიშვნელობა აქვს. აქ განიხილება ძირითადად სხეულის წონასწორობის მდგარობა, როდესაც მასზე მოქმედი ძალა დიდი ხნის განმავლობაში ინარჩუნებს თავის სიდიდეს, ე. ი. როდესაც პირობები სტატიკას უახლოვდება.

სხეულის წონასწორობას ეწოდება მდგარობა თუ წონასწორობის მდებარეობიდან მცირე გადახრის შემდეგ სხეული ამ მდებარეობას უბრუნდება. სხეულის მდებარეობას ეწოდება არამდგარობა, თუ საწყისი მდებარეობიდან მცირე გადახრის შედეგად სხეულის წონასწორობა არ უბრუნდება ამ მდებარეობას.

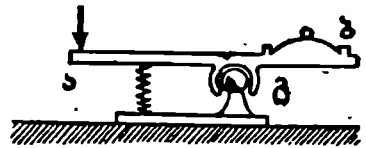
მდგარდი წონასწორობის მაგალითად შეიძლება გამოგვაღვეს იმ ბურთულის წონასწორობა, რომელიც ეხება ჩაზნექილ ზედაპირს მის ქვედა წერტილში (ნახ. 66, ა), არამდგარდი წონასწორობის მაგალითია იმ ბურთულის წონასწორობა, რომელიც ეხება ამოზნექილ ზედაპირს ზედა წერტილში (ნახ. 66, ბ). თუ ზედაპირი, რომელზეც ბურთულები დევს გლუვია, რეაქციის ძალა მიმართული იქნება ზედაპირის ნორმალის მიმართულებით. ამ ორ შემთხვევაში ბურთულები იქნება წონასწორობაში, რადგან შათზე მოდებული Q და R ძალები სიდიდეებით ტოლია და მიმართულია საწინააღმდეგოდ. თუ ბურთულებს გადავხრით წონასწორობის მდებარეობიდან, მაშინ საყრდენის რეაქცია შეიცვლის მიმართულებას. Q და R ძალების ტოლქმედი პირველ შემთხვევაში დააბრუნებს ბურთულას საწყის მდებარეობაში, ხოლო მეორეში უფრო დააცილებს მას.

ჰორიზონტალურ ზედაპირზე მოთავსებული ბურთულისათვის (ნახ. 66, გ) Q და R ძალები დარჩება წონასწორობაში მისი ნებისმიერი გადაადგილების დროს. ასეთ წონასწორობას გ ა ნ უ რ ჩ ე ვ ე ლ ი წონასწორობა ეწოდება.

პრაქტიკულად შეუძლებელია ისეთი არამდგარდი წონასწორობის



ნახ. 66.



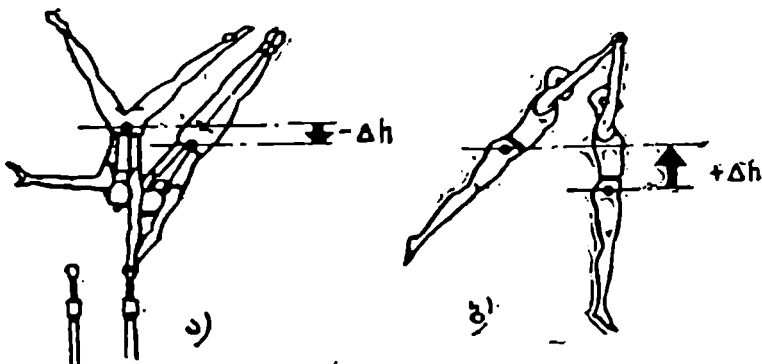
ნახ. 67.

შენარჩუნება, როგორც განხილულია ამოზნექილი ზედაპირის მწვერ-
ვალზე გლუვი ბურთულის მაგალითში. მხოლოდ კარგად გაწვრთნილ
ადამიანებს უონგლიორებს, ცირკის ტანმოვარჯიშეებს, ეკვლიბრისტებს
შესწევთ უნარი რეაქციის სისწრაფის მეოხებით შეაჩერონ საგანი ან
თავიანთი სხეული არამდგრადი წონასწორობის მდებარეობაში. დიდი
ხნის განმავლობაში, როგორც წესი, სხეული შეიძლება იმყოფებოდეს
მხოლოდ მდგრადი ან განუზრჩვეელი წონასწორობის მდგომარეობაში.

ამასთან ერთად, წვრთნის დროს ფართოდ გამოიყენება არამდგრა-
დი წონასწორობის მდებარეობა. ასე, მაგალითად, მის საფუძველზეა
აგებული ხელსაწყო (ნახ. 67) ფეხბურთელების წვრთნისა და რეაქციის
სისწრაფის განსაზღვრისათვის. ა სატერფულზე ფეხის დადებით ფეხ-
ბურთელი ვალდებულია შეაჩეროს ბურთულა ამოზნექილი ზედაპირის
ბ შემოხაზულ ზონაში, რომელიც ხისტადაა შეერთებული სატერფულ-
თან და სფერულ ბ სახსარზეა მოთავსებული.

**§ 87. საპრდენი წერტილის ან ბრუნვის ღერძის მქონე სხეულის
წონასწორობის მდგომარეობა**

ერთი საყრდენი წერტილის ან ბრუნვის ღერძის მქონე სხეულის
წონასწორობის მაგალითად შეიძლება განვიხილოთ ტანმოვარჯიშის სხე-
ულის წონასწორობა ყირის (ნახ. 68, ა) ან დაკიდების დროს (ნახ. 68,ბ).



ნახ. 68.

სხეულის წონასწორობა მდგრადია, თუ წონასწორობის მდგომარეობიდან მისი გადახრით სხეულის სიმძიმის ცენტრი აიწევა ზემოთ და არამდგრადია, თუ სხეულის წონასწორობის მდგომარეობიდან გადახრის დროს მისი სიმძიმის ცენტრი დაიწევს ქვემოთ. შესაბამისად, სხეულის წონასწორობა, რომელსაც საყრდენის წერტილი ან ბრუნვის ღერძი აქვს, იქნება მდგრადი, როდესაც მისი სიმძიმის ცენტრს უჭირავს ყველაზე დაბალი მდებარეობა ყველა შესაძლო მდებარეობიდან; არამდგრადი, როდესაც მას უჭირავს ყველაზე მაღალი მდებარეობა; განურჩეველი, როდესაც მისი სიმძიმის ცენტრის სიმაღლე სხეულის ყველა მდებარეობის დროს უცვლელი რჩება.

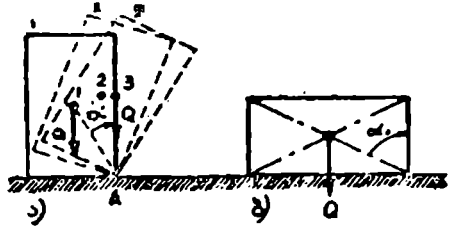
§ 38. სიგრაჟიზა და არდნოვილი სხეულის წონასწორობის მდგრადობა

თუ მყარ სხეულს, რომელიც თავისი ფუძით ეყრდნობა ჰორიზონტალურ სიბრტყეს (ნახ. 69, ა), მოვაბრუნებთ A წიბოს გარშემო (II მდებარეობა) ისე, რომ სხეულის სიმძიმის Q ძალა გადიოდეს მის მარცხნივ, მაშინ ეს ძალა ქმნის ბრუნვის ღერძის მიმართ მომენტს, რომელიც მიისწრაფვის დააბრუნოს სხეული წონასწორობის წინამდებარე მდგომარეობაში. როდესაც სხეული დაიჭერს III მდებარეობას, მაშინ სიმძიმის ძალა გაივლის საყრდენ ღერძზე და სიმძიმის ძალის მომენტი მის გარშემო ნულის ტოლი იქნება. ამ შემთხვევაში ერთნაირი ალბათობით სხეული შეიძლება დაბრუნდეს საწყის მდებარეობაში ან მარჯვნივ წაიქცეს. ამიტომ III მდებარეობა არამდგრადი წონასწორობის მდებარეობაა. I მდებარეობაში სხეული იქნება მდგრადი წონასწორობის მდგომარეობაში, რადგან მისგან მცირე გადახრისას სხეული ისევ უბრუნდება საწყის მდებარეობას.

მობრუნების კუთხეს α , რომლითაც საჭიროა სხეულის მობრუნება, რათა იგი გადავიყვანოთ მდგრადი მდებარეობიდან არამდგრადში, მდგრადობის კუთხე ეწოდება. იგი მით უფრო მეტია, რაც უფრო ფართოა სხეულის ფუძე და რაც უფრო დაბლაა მისი სიმძიმის ცენტრი. თუ იმავე სხეულს დავუდებთ სხვა სიბრტყით (ნახ. 69, ბ), მდგრადობის კუთხე მეტი იქნება ($\alpha_1 > \alpha$). სხეულის გადაყირავებისათვის ამ შემთხვევაში საჭირო იქნება მისი მობრუნება მეტი კუთხით. ეს გარემოება ფართოდ გამოიყენება სპორტულ პრაქტიკაში მდგრადი მდებარეობის შექმნისათვის. 70-ე ნახაზზე ნაჩვენებია, თუ როგორ მოქმედებს ფეხების დადგმა მდგრადობის კუთხის გაზრდაზე. კიბაობის და კრივის ტექნიკაში მდგრადობის კუთხის გადიდების საშუალებები განსაკუთრებით მრავალფეროვანია.

სხეულის თვისებას დაუბრუნდეს წონასწორობის საწყის მდებარეობას მასზე ამ წონასწორობის დამრღვევი ძალების მოქმედების შეწყ-

ვერის შემდეგ სხეულის დინამიკური მდგარადობა ეწოდება. იგი იზრდება სხეულის საყრდენი ფართობის გადიდებით და მისი სიმძიმის ცენტრის დაქვეითებით. თუ მყარი სხეული ეყრდნობა არა მთელი საფუძვლით, არამედ რამდენიმე წერტილით, რომლებიც ერთ სწორ ხაზზე არ მდებარეობენ,



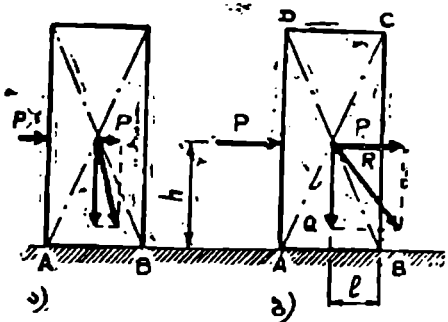
ნახ. 69.



ნახ. 70.

ბენ, მაშინ საყრდენის ფართობად უნდა მივიღოთ, ამ წერტილთა შემართებული სწორი ხაზებით შემოსაზღვრული ფართობი.

სხეულის თვისებას წინააღმდეგობა გაუწიოს მისი წონასწორობის თუნდაც მცირე დარღვევას სხეულის სტატიკური მდგარადობა ეწოდება. დაუშვათ, Q წონისა და $ABCD$ კვეთის მქონე სხეულზე მოქმედებს P ძალა, რომელიც ცდილობს გადააყიაროს სხეული B წიბოს გარშემო. სხეულის წონასწორობა შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, Q და P ძალების ტოლქმედი R გადააქვეთს საყრდენ ფართობს სხეულის საფუძვლის კონტურის შიგნით (ნახ. 71, ა). თუკი R ტოლქმედი გაივლის B წერტილის მარჯვნივ, მაშინ იგი შექმნის მომენტს, რომელიც შეეცდება გადააყიაროს სხეული ამ წერტილის გარშემო (ნახ. 71, ბ). ზივრული წონასწორობის შემთხვევაში, ე. ი. როდესაც R ტოლქმედი გაივლის B წერტილზე, ამ წერტილის მიმართ მისი მომენტი ნულის ტოლი იქნება. მაგრამ, ვარიანონის თეორემის თანახმად, R ტოლქმედის მომენტი შემდგენი ძალების მომენტთა ჯამის ტოლია. შესაბამისად, სხეულის ზღვრული წონასწორობის შემთხვევაში $Ql - Ph = 0$. სხეულის წონის ნამრავლს მის შესაძლო ბრუნვის ღერძის გარშემო მხარეზე სხეულის მდგარადობა



ნახ. 71.

წონის ნამრავლს მის შესაძლო ბრუნვის ღერძის გარშემო მხარეზე სხეულის მდგარადობა

ბის მომენტი ეწოდება. გადამყირავებელი ძალის მოდულის ნამრავლს სხეულის შეიძლო ბრუნვის ღერძის გარშემო მხარზე, გადამყირავებელი მომენტი ეწოდება. $P = \frac{Ql}{h}$ ძალას, ე. ი. მინიმალურ ძალას, რომლის დროსაც მყარი სხეული გადაყირავდება, კრიტიკული ძალა ეწოდება.

სხეულის სტატიკური მდგრადობისათვის აუცილებელია, რომ მისი მდგრადობის მომენტი გადამყირავებელ მომენტზე მეტი იყოს. მდგრადობის მომენტის ფარლობას გადამყირავებელ მომენტთან, ეწოდება მდგრადობის კოეფიციენტი:

$$R_{\text{და}} = \frac{Ql}{Ph} \quad (51)$$

სხეულის მდგრადი მდებარეობისათვის მდგრადობის კოეფიციენტი ერთზე მეტი უნდა იყოს.

§ 30. ადამიანის სხეულის წონასწორობის სტაბილური მდგრალობა

სხეულის მდგრადობასთან დაკავშირებული ყველა გამოთვლა რთულდება, როდესაც საქმე ეხება არა გეომეტრიულად სწორ მყარ სხეულს, არამედ ადამიანის სხეულს. ადამიანის ტერფები არ არის სწორი ფორმის და არც აბსოლუტურად ხისტი, სხეულის გადაყირავების დროს დეფორმირდება. ტერფების საყრდენი ფართობი (S) გადაყირავების დროს მცირდება. ამავდროს გადაყირავების წერტილი გადაადგილდება საყრდენი ფართობის შუაში. განვსაზღვროთ ადამიანისათვის კრიტიკული ძალა ძირითად დგომში: სხეულის წონა $Q = 70$ კგ, იატაკიდან სიმძიმის ცენტრამდე მანძილი $h = 0,9$ მ. ტერფის სიგრძე $l = 0,25$ მ. ტერფის სიგანე $C = 0,1$ მ. სავარაუდოდ, სიმძიმის ცენტრის გეგმილი გადის საყრდენი ფართობის ცენტრში.

თუ ადამიანის სხეულს მივიღებთ აბსოლუტურად ხისტად, ხოლო თუ გადამყირავებელი F_x ძალა მოდებულია სხეულის სიმძიმის ცენტრში და მიმართულია x ღერძის გასწვრივ ჰორიზონტალურად, მაშინ მისი განსაზღვრისათვის შეიძლება ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$F_x = \frac{Q \cdot \frac{l}{2}}{h} = \frac{70 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,125}{0,9} = 9,7 \text{ კგ (95 B).}$$

თუ გადამყირავებელი F_y ძალა მიმართულია y ღერძის გასწვრივ, მაშინ მისი კრიტიკული მნიშვნელობა იქნება:

$$F_v = \frac{Q \cdot \frac{c}{2}}{h} = \frac{70 \cdot 0,1}{0,9 \cdot 2} = 4,35 \text{ კგ} \quad (43 \text{ B})$$

მაგრამ სინამდვილეში გადამყირავებელი ძალის კრიტიკული მნიშვნელობა გაცილებით ნაკლებია. ამიტომ პრაქტიკაში ადამიანის სხეულზე მდგრადობის ამოცანების ამოხსნისათვის საჭიროა ვისარგებლოთ სხვა ფორმულებით.

წინასწარ საჭიროა შევიტანოთ გეომეტრიული ცნება — წინალობის მომენტი (W). ეს სიდიდე ემსახურება განივეკეთის ფართის ან (მოცემულ შემთხვევაში) საყრდენი ფართობის დახასიათებას და დამოკიდებულია არა მარტო ფართობის სიდიდეზე, არამედ მის ფორმაზე. l სიგრძისა და $2c$ სიგანის სწორკუთხა საყრდენი ფართობის წინალობის მომენტი l -ის პერპენდიკულარული და ფართობის სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ გამოითვლება ფორმულით:

$$W = \frac{2cl^2}{6}. \quad (52)$$

წინალობის მომენტი იზომება სმ³-ობით ან (ის სისტემაში) მ³-ობით, 1 სმ³ = 10⁻⁶ მ³.

ადამიანისათვის კრიტიკული F ძალისა და გადამყირავებელი M_0 მომენტის განსაზღვრისათვის მუშა ფორმულაა:

$$M \geq \frac{QW}{S}, \quad (53)$$

სადაც Q — სხეულის წონა (კგ) S — საყრდენი ფართობი (სმ²), W — საყრდენის ფართობის წინალობის მომენტი (სმ³). რადგანაც $M = Fl$, გადამყირავებელი ძალის კრიტიკული მნიშვნელობა იქნება:

$$F \geq \frac{QW}{Sh}.$$

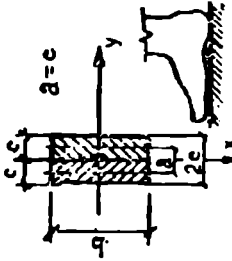
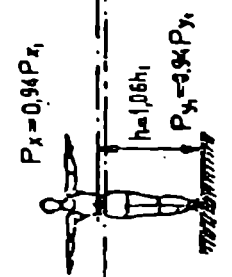
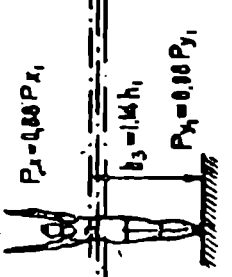
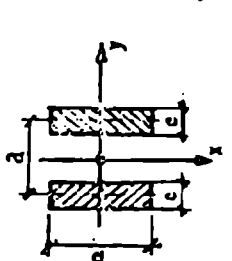
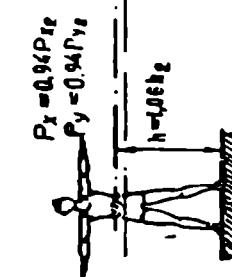
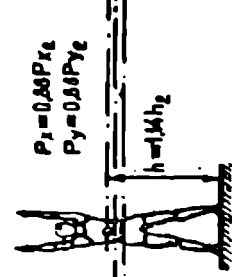
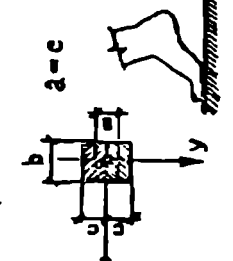
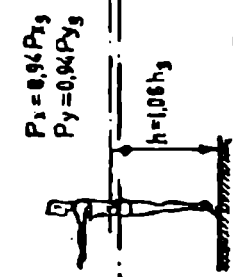
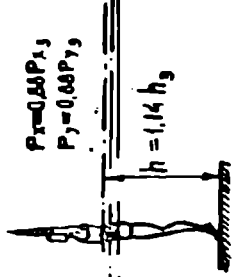
განვსაზღვროთ კრიტიკული F_x ძალა მოცემული ფორმულით

$$F_x \geq \frac{Q}{Sh} W_x = \frac{Q}{Sh} \cdot \frac{2cl^2}{6}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $S = 2cl$, მივიღებთ:

$$F_x \geq \frac{Q \cdot 2cl^2}{2cl \cdot 6} = \frac{Ql}{6}. \quad (54)$$

ზოგიერთ მრეობარეობაში ადამიანის სტატიკური მკვარდობის ანალიზის ფორმულები

მკვარდობის სტრუქტურა	ფორმულები	სტატიკური მკვარდობის ანალიზი	სტატიკური მრეობარეობა
	$P_{x_1} = \frac{G b}{6 h_1}$ $P_{y_1} = \frac{G c}{3 h_1}$		
	$P_{x_2} = \frac{G b}{6 h_2}$ $P_{y_2} = \frac{G(c^2 + 3a^2)}{6 h_2 (a+c)}$		
	$P_{x_3} = \frac{G b}{6 h_3}$ $P_{y_3} = \frac{G c}{3 h_3}$		

	$P_{x4} = \frac{Gb}{6h}$ $P_{y4} = \frac{G(c^2 + 3d^2)}{6h(a+c)}$	$P_x = 0.94Px4$ $P_y = 0.94Py4$	$P_x = 0.98Px4$ $P_y = 0.98Py4$
	<p>შუალედრი ძებნარეობა</p> $P_{x1} = \frac{Gb}{6h}$ $P_{y1} = \frac{Gc}{3h1}$	<p>ზოგჯერ ძებნარეობა</p> $P_x = \frac{Gb}{4.7h1}$ $P_y = \frac{Gc}{2.2h1}$	<p>შენიშვნა: ზოგჯერ ძებნარეობა განისაზღვრება β კუბით</p>
	<p>შუალედრი ძებნარეობა</p> $P_{x1} = \frac{Gb}{6h1}$ $P_{y1} = \frac{G(c^2 + 3d^2)}{6h1(a+c)}$	<p>ზოგჯერ ძებნარეობა</p> $P_x = \frac{Gb}{3.3h1}$ $P_y = \frac{G(c^2 + 3d^2)}{3.3h1(a+c)}$	<p>შენიშვნა: ზოგჯერ ძებნარეობა განისაზღვრება α კუბით</p>
<p>$d=e$</p>	$P_{x7} = \frac{G(c^2 + 12d^2 + 12e^2 + 12d^2 + 12e^2)}{6h1(c^2 + 12d^2 + 12e^2 + 12d^2 + 12e^2)}$ $P_{y7} = \frac{G(c^2 + 3d^2)}{8h1(a+c)}$	$P_x = \frac{P_{x7} \cdot h_1}{h}$ $P_y = \frac{P_{y7} \cdot h_1}{h_1}$	<p>მოყვანილი ფორმულები მართებულია იროვე ფორმულაზე სხეულის წონის თანახმად გააკეთოს შემოთავაზებული</p>

კონკრეტული შემთხვევისათვის:

$$F_{\alpha} \geq \frac{70 \cdot 0,25}{6 \cdot 0,9} = 3,24 \text{ კგ. (31,8 ნ).}$$

54-ე ფორმულიდან გაანგარიშების გზით მიღებული კრიტიკული ძალის სიდიდე შეესაბამება ცდის მონაცემებს.

მე-9 ცხრილში მოყვანილია ფორმულები კრიტიკული ძალის გასანგარიშებლად სპორტსმენის პოზის მიხედვით.

კინემაზიკა

VIII თავი

კინემატიკის შესავალი

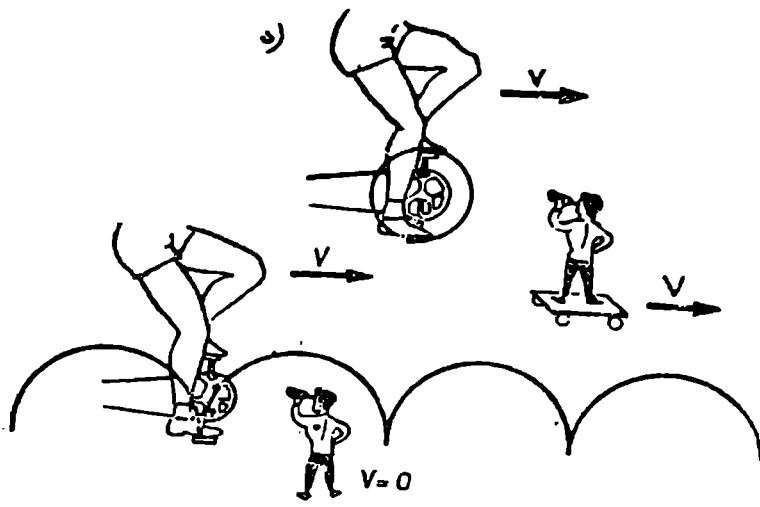
§ 40. ძირითადი ცნებანი

კინემატიკა ქწოდება მექანიკის ნაწილს, რომელიც შეისწავლის სხეულთა მოძრაობას მათი ინერტულობისა და მოქმედი ძალების გაუთვალისწინებლად. ამიტომ ზოგჯერ ამბობენ, რომ კინემატიკა შეისწავლის მოძრაობის გეომეტრიულ თვისებებს, ე. ი. სივრცეში სხეულთა ურთიერთმდებარეობის ცვლილებებს დროის განმავლობაში.

კინემატიკას განსაკუთრებით დიდი ადგილი უკავია ფიზიკური ვარჯიშების ბიომექანიკაში.

კვლევის კინემატიკურ მეთოდებს აქვს დამოუკიდებელი პრაქტიკული მნიშვნელობა მოძრაობის რთული ტრაექტორიის, ერთი ორგანოდან მეორეზე მოძრაობის გადაცემის შესწავლის დროს და ა. შ.

შეგახსენებთ, რომ მექანიკა მოძრაობაში გულისხმობს მოცემული სხეულის სხვა სხეულების მიმართ სივრცეში მდებარეობას ცვლილებას დროის განმავლობაში. რეგისტრაციისათვის აუცილებელია გამოვიყენოთ ათვლის რომელიმე სისტემა. ამიტომ საჭიროა დაზუსტდეს სხეულის მოძრაობის ცნება: მოძრაობა, სხეულის მდებარეობის ცვლილებაა დროის განმავლობაში ათვლის უძრავი სისტემის მიმართ. ეს დამატება არსებითია, რაც დასტურდება შემდეგი მაგალითებით. ველომობოლელი უნაგირიდან ხედავს, რომ მისი ფეხების ტერფის წვერები „გადის“ წრიულ გზას (ნახ. 72, ა). გზის პირას მდგომი ადამიანი ხედავს, რომ ველომობოლელის ტერფის წვერები „გადის“ ტალღისებრ გზას (ნახ. 72, ბ). გემის მგზავრი როდესაც იგი აკვირდება თანამგზავრს, რომელიც ბურთს ისვრის ზემოთ, ხედავს, რომ ბურთი



ნახ. 72.

მოდრაობს ვერტიკალურად ზემოთ და ქვემოთ. ნაპირზე მდგომი დამკვირვებელი კი ხედავს რომ ბურთი პარაბოლას აღწერს.

მიუხედავად იმისა, რომ უძრავი სხეულები არ არსებობს, პირობითად, ჩვეულებრივ, უძრავ მყარ სხეულად მიიჩნევენ სხეულს, რომელისგანაც მოსახერხებელია მოძრაობის პროცესებზე დაკვირვება, მაგალითად, დედამიწას. მრავალი ამოცანის გადაწყვეტის დროს უძრავ სხეულებს მიაკუთვნებენ აგრეთვე აუდიტორიის იატაკს, სათამაშო მოედანს და ა. შ. ამ დროს შეგნებულად ტოვებენ ყურადღების გარეშე დედამიწის დედამურ მოძრაობას.

კოორდინატთა სისტემას, დაკავშირებული სხეულთან, რომლის მიმართაც განიხილება შესასწავლი მოძრაობა, ათვლის სისტემა ეწოდება. თუ პირობითად დედამიწას მივიჩნევთ უძრავად, წინა ათვლის სისტემა დედამიწის მიმართ უძრავი იქნება. ამ ათვლის სისტემის, ე. ი. დედამიწის მიმართ სხეულების მოძრაობას მივიჩნევთ (პირობითად) აბსოლუტურ (მარეზულტირებელ) მოძრაობად.

მექანიკაში სივრცე განიხილება როგორც სამგანზომილებიანი ევკლიდეს სივრცე. მასში ყველა გაზომვა ხდება ევკლიდეს გეომეტრიის მეთოდების საფუძველზე. სივრცის საზომ ერთეულად მიღებულია ერთი მეტრი, დროის ერთეულად — ერთი წამი. დრო სკალარული, უწყვეტად ცვალებადი სიდიდეა. დრო t მიღებულია დამოუკიდებელ ცვლადად (არგუმენტად). ყველა სხვა ცვალებადი სიდიდე განიხილება,

როგორც t დროის ფუნქციები. ჩვეულებრივ, ეს ცვალებადი სიდიდეებია მანძილი, სიჩქარე, აჩქარება და ა. შ.

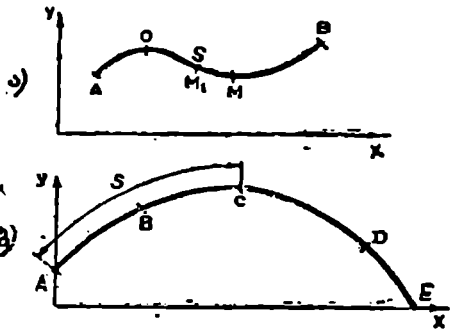
დროის ყოველი t მომენტი განისაზღვრება იმ წამთა რიცხვით, რომლებიც გასულია რომელიმე საწყისი t_0 მომენტიდან მოცემულამდე. ამ თანამიმდევრულ $(t - t_0)$ ან სხვა რომელიმე მომენტებს შორის სხვაობას დროის შუალედი ეწოდება.

როდესაც კინემატიკაში ამბობენ, რომ შესასწავლი მოძრაობა მოცემულია, ეს ნიშნავს, რომ ნაჩვენებია, სხეულის ან წერტილის მდებარეობა ათვლის მოცემული სისტემის დროის ნებისმიერ მომენტში.

კინემატიკის შესწავლა მოსახერხებელია დავიწყოთ უმარტივესი ობიექტიდან — წერტილიდან. მხოლოდ წერტილის კინემატიკის შესწავლის შემდეგ არის რაციონალური მყარი სხეულის მოძრაობის შესწავლაზე გადასვლა.

§ 41. წერტილის მოძრაობის განსაზღვრის ხერხები

1. ბუნებრივი ხერხი. დაეუშვათ, წერტილი ასრულებს მოძრაობას რომელიმე AB ხაზზე (ნახ. 73, ა). ამ ხაზს წერტილის ტრექტორია ეწოდება. შევარჩიოთ მასზე ნებისმიერი უბრავი O წერტილი და მივიჩნიოთ იგი მანძილის ათვლის საწყისად. ხაზოვან ერთეულებში გაზომილ OM რკალის სიგრძე ეწოდება M წერტილის მანძილი ათვლის საწყისიდან ანუ მისი რკალური კოორდინატა (ეს მანძილი აღვნიშნოთ პატარა s ასოთი; წერტილის მიერ განვლილი გზა მიღებულია აღვნიშნოთ დიდი ასოთი S).



ნახ. 73.

მივიღოთ რომელიმე მიმართულება ათვლის O საწყისიდან დადებითად, მაგალითად, O წერტილია მარჯვნივ; მაშინ O წერტილიდან გაზომილი მანძილი, ამ მიმართულებით იქნება დადებითი, საწინააღმდეგო მიმართულებით — უარყოფითი. s მანძილი ყოველთვის 'არ არის წერტილის მიერ დროის მოცემულ შუალედში განვლილი S გზა. როდესაც წერტილის მიერ განვლილი გზა გამოითვლება ათვლის საწყისიდან ერთი მიმართულებით, მანძილი s არის S გზის ტოლი. თუ, მაგალითად, წერტილი O საწყისიდან მოძრაობისას მიდის M მდებარეობამდე, ხოლო შემდეგ უკუმიმართულებით სელის დროს გაივლის

M_1 მდებარეობას, მაშინ ამ მომენტში მისი კოორდინატა $s = \overline{OM_1}$, ხოლო

მოდრაობის დროში განვლილი მანძილი $\overline{OM} + \overline{OM}_1$ ტოლია, ე. ი. არ უდრის s -ს.

დროის ნებისმიერ მოცემულ მომენტში წერტილს შეუძლია დაიკავოს ტრაექტორიაზე მხოლოდ ერთი მდებარეობა, ამიტომ s მანძილი ათვლის საწყისიდან დროის ფუნქციათა რომელიმე ცალმხრივია:

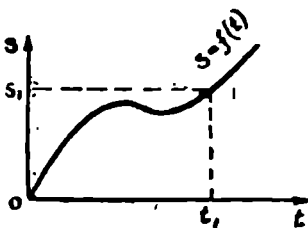
$$s = f(t): \quad (55)$$

ამ განტოლებას, რომელიც გამოხატავს ფუნქციურ დამოკიდებულებას ათვლის საწყისიდან წერტილის (s) მანძილისა და მოძრაობის დასაწყისიდან გავლილ (t) დროს შორის, წერტილის მოცემულ ტრაექტორიაზე მოძრაობის განტოლება ეწოდება.

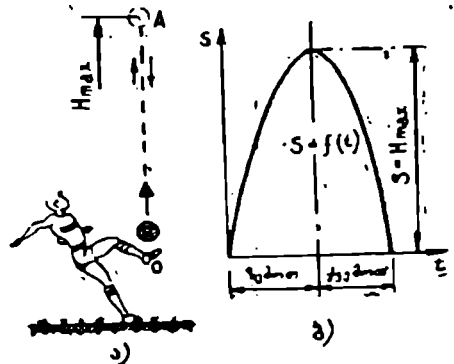
დავუშვათ, ბადრო გასროლილია პორიზონტის მიმართ α კუთხით, $ABCDE$ ბადროს სიმაღლის ცენტრის ტრაექტორიაა (ნახ. 73). ამ შემთხვევაში რომელიმე t დროში, განვლილი გზა, ABC რკალია. თუ მოცემულ ტრაექტორიაზე, მოძრაობის კანონი ცნობილია, ე. ი. s t -ს ცნობილი ფუნქციაა, მაშინ მოძრაობის განტოლების გამოყენებით შეიძლება დროის ნებისმიერ მომენტში გამოვთვალოთ მანძილი, რომელიც გაიარა წერტილმა ათვლის საწყისიდან და ვუჩვენოთ ტრაექტორიაზე მისი მდებარეობა.

წერტილის ტრაექტორია შეიძლება მოცემული იყოს ან ალბერად (მოცემულია მრუდის განტოლება) ან გეომეტრიულად (მაგალითად, უჩვენებენ, რომ სავალდებულო ვარჯიშის შესრულების დროს მოციგურავე მოძრაობს წრეხაზზე $d=11,4$ მ დიამეტრით).

ფუნქცია $s=f(t)$ შეიძლება მოცემული იყოს ტოლობის ან გრაფიკის სახით. მის გრაფიკს ეწოდება მოძრაობის გრაფიკი. იგი შეიძლება ავაგოთ $s=f(t)$ გას-ტოლებით: საჭიროა აღვნიშნოთ, რომ როგორც განტოლება, ასევე



ნახ. 74.



ნახ. 75.

მოძრაობის გრაფიკი საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ გზა, განვლილი წერტილის მიერ ათვლის საწყისიდან. 74-ე ნახაზზე გამოსახუ-

ლი გრაფიკის საშუალებით შეიძლება ვთქვათ, რომ t_1 დროის მომენტში წერტილი საწყისი 0-დან s_1 მანძილზეა. მოცემული გრაფიკი არ არის წერტილის ტრაექტორია.

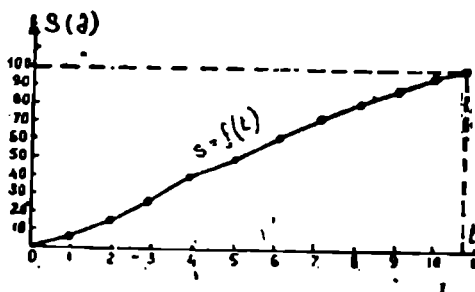
მაგალითი VIII. 1. ბურთი ატყორცნილია ზემოთ საწყისი $V_0 = 29,4$ მ/წმ სიჩქარით. OA ვერტიკალური ხაზი მისი ტრაექტორიაა (ნახ. 75, ა). წერტილის მდებარეობა $s = f(t)$ განსაზღვრება გრაფიკით (ნახ. 75, ბ). $s = f(t)$ გრაფიკი მოძრაობის კანონია.

მაგალითი VIII. 2. 100-მეტრიან დისტანციაზე მორბენლის სიჩქარის შესწავლისას აღნიშნავენ გზას, გავლილს ათლეტის მიერ დროის სხვადასხვა შუალედში. ამ მონაცემების საფუძველზე აგებენ გრაფიკს $s = f(t)$ (ნახ. 76). მართალია, უმრავლეს შემთხვევაში აღნიშნავენ t დროს, რომელიც შეესაბამება განსაზღვრული დისტანციის გავლას.

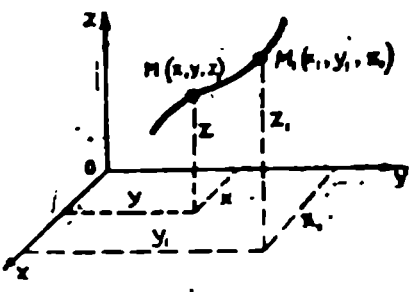
ამრიგად, წერტილის მოძრაობის განსაზღვრის ბუნებრივი ხერხის შემთხვევაში ცნობილი უნდა იყოს: ა) წერტილის ტრაექტორია ათვლის შერჩეულ სისტემაში, ბ) მოძრაობის დასაწყისი და დადებითი მიმართულება, გ) მოცემულ ტრაექტორიაზე წერტილის მოძრაობის კანონი $s = f(t)$ განტოლების ან გრაფიკის სახით.

2. კოორდინატული ხერხი. წერტილის მოძრაობის განსაზღვრის ბუნებრივი ხერხი უბრალო და თვალსაჩინოა. მაგრამ წერტილის ტრაექტორია წინასწარ ყოველთვის არ არის ცნობილი. ამიტომ ხშირად გვინდა სხვა კოორდინატული ხერხის გამოყენება.

M წერტილის მდებარეობა $Oxyz$ ათვლის სისტემის მიმართ (ნახ. 77) შეიძლება განვსაზღვროთ მისი x, y, z კოორდინატებით. წერტილის გადაადგილების დროს ყველა ეს კოორდინატი დროის განმავლობაში



ნახ. 76.



ნახ. 77.

ბაში შეიცვლება: დროის სხვა რომელიმე მომენტში, მაგალითად, t -ში, წერტილის კოორდინატები იქნება x_1, y_1, z_1 და ა. შ. რათა ვიცოდეთ წერტილის მოძრაობის კანონი, რომლის საფუძველზეც შეგვეძლება მისი მდებარეობის განსაზღვრა სივრცეში დროის ნებისმიერ მომენტში, სა-

ჭირთა ვიციოდეთ დროის თითოეულად მომენტისათვის კოორდინატების მნიშვნელობა. ამიტომ აუცილებელია დავეშვათ კოორდინატთა ფუნქციები დროის მიხედვით:

$$x=f_1(t); \quad y=f_2(t); \quad z=f_3(t). \quad (56)$$

ეს განტოლებები წერტილის მოძრაობის განტოლებებია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში. ისინი აღწერენ წერტილის მოძრაობის კანონს მოძრაობის კოორდინატული ხერხით განსაზღვრის დროს.

თუ წერტილი მოძრაობს ერთ სიბრტყეში და ამ სიბრტყეს მივიღებთ ათვლის სისტემად (სიბრტყე Ox), მაშინ გვექნება მოძრაობის მხოლოდ ორი განტოლება:

$$x=f_1(t); \quad y=f_2(t). \quad (57)$$

წერტილის სწორხაზოვანი მოძრაობის დროს, თუ კოორდინატთა Ox ღერძს მივმართავთ მოძრაობის ტრაექტორიით, მოძრაობა აიწეება ერთი განტოლებით:

$$x=f_1(t), \quad (58)$$

როგორც მოძრაობის ბუნებრივი ხერხის შემთხვევაში. უმრავლესი ფიზიკური ვარჯიშების დროს სპორტსმენის სხეულის ცალკეული წერტილის მოძრაობას განიხილავენ; როგორც ბრტყელ მოძრაობას. ე. ი. მოძრაობას, რომელიც შეიძლება განისაზღვროს 57-ე განტოლებით. მხოლოდ უკანასკნელ ხანს ახალი სტერეოგრაფიკული აპარატურის შეშვეობით დაიწყო 56-ე განტოლებების გამოყენება. 56-ე და 57-ე განტოლებები ერთდროულად პარამეტრული ფორმით წერტილის ტრაექტორიის განტოლებები აპარამეტრის როლს ასრულებს დრო. ამიტომ 56-ე ან 57-ე განტოლება შეიცავს წერტილის მოძრაობის ყველა აუცილებელ ინფორმაციას როგორც დროში, ასევე სივრცეში, რომ მივიღოთ ტრაექტორიის განტოლებები ჩვეულებრივი ფორმით, აუცილებელია 56-ე, 57-ე ან 58-ე განტოლებებიდან გამოვირიცხოთ დრო და მოვძებნოთ წერტილის კოორდინატების ურთიერთდამოკიდებულება.

თუ მოძრაობა მოცემულია 56-ე განტოლებით, მაშინ, რადგან ვიცით, რომ $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

ან $ds = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dt$, სადაც

$$x = \frac{dx}{dt}$$

და ა. შ., შეიძლება (იმის გათვალისწინებით, რომ $t=0$ და $s=0$) მივიღოთ:

$$s = \int_0^t \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz \quad (59)$$

ეს განტოლება გამოყენებულია მოძრაობის განსაზღვრის კოორდინატული ხერხიდან ბუნებრივზე გადასვლისათვის.

მაგალითი VIII. 3. სპორტსმენის წყალში ხტომის დროს მისი სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა განისაზღვრება კოორდინატული ფორმით მოძრაობის განტოლებით:

$$x = 3t;$$

$$y = 6,0t - 6,0t^2.$$

საჭიროა მხტომელის სიმძიმის ცენტრის ტრაექტორიის დადგენა.

ამოხსნა: მოვიებნოთ წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია. ამისათვის მოცემული განტოლებებიდან გაშვარცხოთ t . შევნიშნავთ, რომ:

$$t = \frac{x}{3}; \quad t^2 = \frac{x^2}{9}.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები საწყის განტოლებაში y -ისათვის:

$$y = \frac{6x}{3} - \frac{6x^2}{9}, \quad \text{ანუ}$$

$$y = 2x - \frac{2}{3}x^2.$$

მიღებული განტოლება პარაბოლის განტოლებაა. ამ განტოლების გრაფიკი მხტომელის სიმძიმის ცენტრის ტრაექტორიაა (ნახ. 78).

მაგალითი VIII. 4. ბურთის მოძრაობა დახრილ სიბრტყეზე მოცემულია განტოლებებით:

$$x = 8t - 4t^2;$$

$$y = 6t - 3t^2$$

განვსაზღვროთ ბურთის ტრაექტორია და ჩაეწეროთ მოძრაობა ბუნებრივი ხერხით.

ამოხსნა: ტრაექტორიის განსაზღვრისათვის მოცემული განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ t . ამისათვის პირველი განტოლება გავამ-

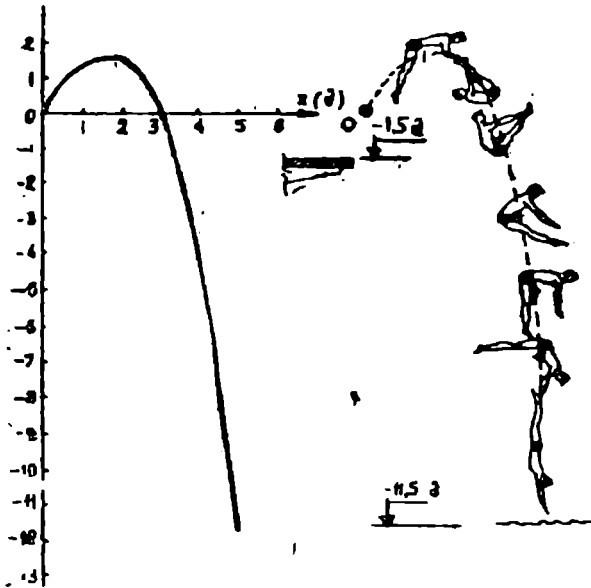
რავლობა 3-ზე, მეორე — 4-ზე და პირველ განტოლებას გამოვაცლოთ მეორე. მივიღებთ:

$$3x - 4y = 3(8t - 4t^2) - 4(6t - 3t^2) = 0.$$

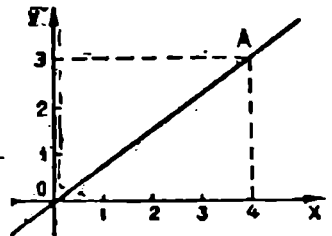
აქედან: $y = \frac{3}{4}x$, მაშასადამე, საძებნი ტრაექტორია სწორი ხაზია (ნახ.

79), რომელიც x ღერძის მიმართ დახრილია α კუთხით, რომლის ტანგენსი $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$.

მოცემული მოძრაობის ხერხით ჩასაწერად ვისარგებლოთ 59-ე ფორმულით, რომელსაც ვაკენებთ ბრტყელი მოძრაობისათვის:



ნახ. 78.



ნახ. 79.

$$s = \int_0^t \sqrt{x^2 + y^2} dt.$$

x და y -ის წარმოებულები: $x = 8 - 8t$; $y = 6 - 6t$
ამიტომ:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t \sqrt{(8-8t)^2 + (6-6t)^2} dt = \int_0^t \sqrt{(10-10t)^2} dt = \\ &= \int_0^t (10-10t) dt = \int_0^t 10 dt - \int_0^t 10t dt = 10t - 5t^2. \end{aligned}$$

ამრიგად, $s = 10t - 5t^2$. ეს არის ბუნებრივი ხერხით ბურთის მოცემული მოძრაობის ჩანაწერი. შევნიშნათ, რომ $t=0$ შემთხვევაში $s=0$;

$t=1$ შემთხვევაში $s=5$. ეს ნიშნავს, რომ 1 წამის შემდეგ ბურთი აიწევა A წერტილში. $t=2$ წმ შემთხვევაში $s=0$. ეს ნიშნავს, რომ 2 წამის შემდეგ ბურთი დახრილ ზედაპირზე დაგორებისას მიაღწევს კოორდინატთა სათავეს. $t>2$ წამის შემთხვევაში s უარყოფითია და მისი აბსოლუტური სიდიდე უწყვეტად იზრდება. ამრიგად, ბურთი აწეული დახრილ ზედაპირზე A წერტილაშტე, გორდება ქვემოთ $s=10t-5t^2$ კანონით.

IX თ ა 30

წერტილის კინემატიკა

§ 42. წერტილის სიჩქარე

წერტილის სიჩქარე ეწოდება ვექტორს, რომელიც განსაზღვრავს ყოველ მოცემულ მომენტში წერტილის მოძრაობის სისწრაფესა და მიმართულებას.

თანაბარი სწორხაზოვანი მოძრაობისათვის წერტილის სიჩქარის განსაზღვრა უფრო ადვილია: ამ შემთხვევაში დამახასიათებელია ის გარემოება, რომ ყრველთვის, დროის ტოლ შუალედებში წერტილი სწორი ხაზის გასწვრივ გადაადგილებებისას გადის ტოლ გზებს. ამიტომ წერტილის მიერ დროის რომელიმე t შუალედში გავლილი S გზის შეფარდება ამ შუალედის სიდიდესთან წერტილის v სიჩქარის მოდულია:

$$v = \frac{S}{t}. \quad (60)$$

ამ შემთხვევაში წერტილის v სიჩქარის ვექტორის მიმართულება ემთხვევა მისი ტრაექტორიის მიმართულებას. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, წერტილის სიჩქარის ვექტორი მიმართულია წერტილის სწორხაზოვანი ტრაექტორიით, მისი მოძრაობის მხარეს.

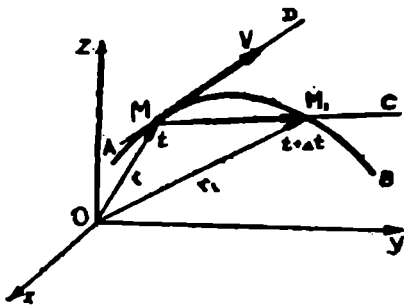
როგორც მე-60 ფორმულდან ჩანს, სიჩქარის განზომილებაა

$$[v] = \frac{\text{სიგრძე}}{\text{დრო}}$$

ნებისმიერი მრუდწირული მოძრაობისათვის წერტილის სიჩქარე განისაზღვრება სხვაგვარად. მაგალითად, M წერტილი მოძრაობს AB ტრაექტორიით (ნახ. 80). დავუშვათ, t დროის მომენტში წერტილი იპერს \vec{r} რადიუს-ვექტორით განსაზღვრულ M მდებარეობას,

ხოლო სხვა ($t + \Delta t$) მომენტში r_1 რადიუს-ვექტორით განსაზღვრულ M_1 მდებარეობას. აქ Δt დროის მცირე ნაშთია.

$\overline{MM_1}$ ვექტორი, რომლის საწყისი ემთხვევა M წერტილს (ე. ი. წერტილის მდებარეობას მოცემული დროის შუალედის დასაწყისში), ხოლო ბოლო M_1 წერტილს (წერტილის მდებარეობას დროის შუალედის ბოლოს) — წერტილის გადაადგილება დროის მოცემულ შუალედში. შესაბამისად წერტილის გადაადგილება $\Delta l = [(t + \Delta t) - t]$ დროის შუალედში განისაზღვრება $\overline{MM_1}$ ვექტორით, რომელსაც შეიძლება ვუწოდოთ წერტილის გადაადგილების ვექტორი. იგი მიმართულია ქორდის გასწვრივ, თუ წერტილი მოძრაობს მრუდწირულად. OMM_1 სამკუთხედიდან ჩანს, რომ $\overline{r} + \overline{MM_1} = \overline{r_1}$, მაშასადამე,



ნ.ბ. 80.

დავუშვათ, რომ M წერტილი მოძრაობს არა $\overline{MM_1}$ რკალზე, არამედ მის MM_1 ქორდაზე, ამასთანავე თანაბრად, Δt დროის შუალედში M მდებარეობიდან იმავე M_1 მდებარეობაში გადაადგილდება. ამ (წარმოსახვითი) მოძრაობის სიჩქარეს ეწოდება წერტილის საშუალო სიჩქარე Δt დროის შუალედში.

საშუალო სიჩქარე $\overline{v_{საშ}}$ იქნება:

$$\overline{v_{საშ}} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (61)$$

რადგან წერტილის $\overline{MM_1}$ გადაადგილება ვექტორია, ამიტომ საშუალო სიჩქარეც $\overline{v_{საშ}}$, როგორც ვექტორი, გაყოფილი სკალარულ Δt სიდიდებზე, ვექტორი იქნება. წერტილის საშუალო სიჩქარე საშუალებას გვაძლევს ვიმსჯელოთ წერტილის მხოლოდ საბოლოო გადაადგილების მიმართულებაზე Δt დროში და გადაადგილების რომელიც საშუალო სიჩქარეზე, მაგრამ იგი ჯერ კიდევ არ გვაძლევს წარმოდგენას წერტილის მოძრაობის ნამდვილ სიჩქარეზე დროის ყოველ მოცემულ მომენტში. წერტილის საშუალო სიჩქარე დამოკიდებულია Δt დროის შუალედზე: რაც უფრო ნაკლებია იგი, მით უფრო ნაკლებია

ცდომილება \overline{MM}_1 რკალის მისი ნომქიმავე MM_1 ქორდით შეცვლის დროს. ამიტომ Δt დროის შუალედის შემცირებასთან ერთად უწყვეტად მცირდება \overline{MM}_1 გადაადგილების სიდიდე, ამავე დროს ფარლობა $\frac{MM_1}{\Delta t}$ მიისწრაფვის რომელიმე განსაზღვრული ზღვრული სიდიდისაკენ, ანუ, როგორც ამბობენ, ზღვრისაკენ.

ეს ზღვარი მ ყ ი ს ი ს ი ჩ ქ ა რ ე ა დროის მოცემულ მომენტში. თუ მას აღვნიშნავთ \overline{v} -თი, მივიღებთ:

$$\overline{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{v_{\text{საშ}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{MM}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t}.$$

\overline{v} ვექტორი მიმართული იქნება წერტილის ტრაექტორიასთან MD მხრების მიმართულებით მისი მოძრაობის მხარეს.

ამ სიჩქარის $|\overline{v}|$ მოდული იქნება:

$$|\overline{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\overline{MM}_1}{\Delta t} \right|, \quad (62)$$

სადაც \overline{MM}_1 , MM_1 ქორდის სიგრძეა. მაგრამ $\frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t}$ ფართობის ზღვარი,

როდესაც $\Delta t \rightarrow 0$, \overline{r} ვექტორის პირველი წარმოებულია t არგუმენტით და აღინიშნება ისევე, როგორც სკალარული ფუნქციის წარმოებული,

$\frac{dr}{dt}$ სიმბოლოთი.

ამის შედეგად

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}. \quad (63)$$

ეს შეიძლება სიტყვებით ასე გამოვსახოთ: წერტილის სიჩქარის ვექტორი, დროის მოცემულ მომენტში წერტილის რადიუს-ვექტორის პირველი წარმოებულის ტოლია დროით.

რადგან MM_1 მკვეთის ზღვრული მიმართულებაა მხები, ამიტომ წერტილის სიჩქარის ვექტორი მოცემულ მომენტში მიმართულია წერტილის ტრაექტორიის მხების მიმართულებით მოძრაობის მხარეს.

თუ მივმართავთ 62-ე თანაფარდობას, შეიძლება ვთქვათ, რომ

$$|\overline{v}| = \frac{d|\overline{MM}_1|}{dt} \quad (64)$$

მაგრამ MM_1 s მანძილია, გავლილი წერტილის მიერ დროის Δt შუალედში, ამიტომ 64-ე თანაფარდობა შეიძლება დავწეროთ ასე:

$$|\overline{v}| = \frac{ds}{dt}. \quad (65)$$

ამრიგად, სიჩქარის რიცხობრივი სიდიდე დროის მოცემულ მომენტში მანძილის პირველი წარმოებულის (მრუდწირული კოორდინატის) ტოლია დროით.

რომ განესაზღვროთ სიჩქარის რიცხობრივი სიდიდე (მოდული) მოძრაობის მოცემული $s=f(t)$ განტოლებით დროის რომელიმე $t=t_1$ მომენტში, საჭიროა ავიღოთ s ფუნქციის წარმოებულს t დროით. წარმოებულის ნაპოვნ გამოსახულებაში უნდა ჩავსვათ t არგუმენტის ნაცვლად დროის იმ მომენტის შესაბამისი კერძო მნიშვნელობა t_1 ; რომლისთვისაც გამოითვლება სიჩქარე. სწორედ მიღებული მნიშვნელობა იქნება განსაზღვრული სიჩქარის მოძულე დროის t_1 მომენტში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი IX. 1: ბურთი ატყორცნილია ვერტიკალურად ზემოთ საწყისი s_0 სიჩქარით. მოძრაობის განტოლება:

$$H = s_0 t - \frac{g t^2}{2},$$

სადაც s_0 29, 4 მ/წმ-ს ტოლია; H — დეღამიწის დონიდან ბურთის აწევის ცვალებადი სიმაღლე; $g=9,8$ მ/წმ².

საჭიროა განესაზღვროთ სიჩქარე დროის $t=2$ წმ მომენტში.

ა მ ო ხ ს ნ ა:

დავადგინოთ H -ის წარმოებულს:

$$v = \frac{dH}{dt} = s_0 - gt.$$

ჩავსვათ მოცემული მნიშვნელობები: $s_0=29,4$ მ/წმ; $g=9,8$ მ/წმ², $t=2$ წმ.

მივიღებთ:

$$v = 29,4 - 9,8 \cdot 2 = 9,8 \text{ მ/წმ.}$$

§ 43. წერტილის სიჩქარის განსაზღვრა მართკუთხა კოორდინატაში ისინი მოძრაობის განტოლებაში

განვიხილოთ xOy სიბრტყეში მოძრაობა, რომელიც მოცემულია განტოლებით $x=f_1(t)$ და $y=f_2(t)$.

დავუშვათ t და $t+\Delta t$ დროის შუალედებში მოძრავე წერტილი

იქერს M და M_1 მდებარეობებს. 81-ე ნახაზზე ეს მდებარეობები აიწერება (x, y) და $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ კოორდინატებით.

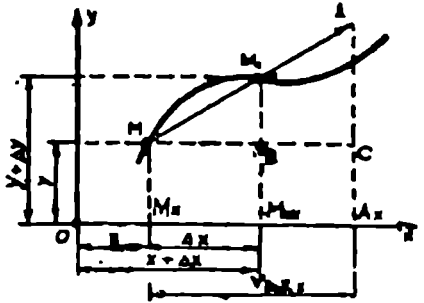
თუ შევეერთებთ MM_1 წერტილებს, მივიღებთ $\overline{MM_1}$ ვექტორს.

საშუალო სიჩქარე $v_{სა}$ დროის ამ შუალედში იქნება:

$$v_{სა} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \overline{MA}.$$

MM_1 ვექტორის Δt -ზე გაყოფით მივიღებთ MA ვექტორს. ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MM_1},$$



ნახ. 81.

მაგრამ $MC = M_x A = (MA)_x = (\overline{v_{სა}})_x$, ხოლო $(\overline{v_{სა}})_x$ \overline{MA} ვექტორის (წერტილის საშუალო სიჩქარის) გეგმილია x ღერძზე, სკალარული სიდიდეა. $MB = M_x M_{1x} = \Delta x \overline{MM_1}$ — ვექტორის გეგმილია x ღერძზე.

$MA = v_{სა} MA_x$ ვექტორის (წერტილის საშუალო სიჩქარის) მოდულია მაგრამ წერტილის საშუალო სიჩქარის ვექტორის მოდული $v_{სა} = \frac{MM_1}{\Delta t}$.

მოცემული მნიშვნელობების პროპორციაში ჩასმით მივიღებთ.

$$\frac{|\overline{v_{სა}}|}{\Delta x} = \frac{\frac{MM_1}{\Delta t}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta t}.$$

აქედან წერტილის საშუალო სიჩქარის გეგმილი x ღერძზე:

$$|\overline{v_{სა}}| = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

$\Delta t \rightarrow 0$ დროს ზღვარზე გადასვლით და წერტილის კუზმარიტი სიჩქარის x ღერძზე გეგმილის $|v_x|$ -ით აღნიშვნით მივიღებთ:

$$|\overline{v_x}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} |\overline{v_{სა}}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (66)$$

ამგვარადვე შეიძლება ვუჩვენოთ, რომ

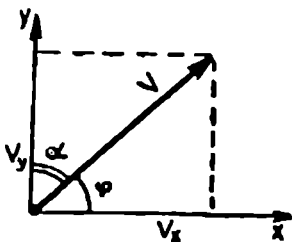
$$|\overline{v_y}| = \frac{dy}{dt}. \quad (67)$$

ეს გვაძლევს სწულილებას ვთქვათ, რომ წერტილის სიჩქარის გეგმილები უძრავ კოორდინატთა დერძებზე მოძრავი წერტილის შესაბამისი კოორდინატების პირველი წარმოებულების ტოლია დროით.

თუ ვიცით ვექტორის გეგმილები ორ უძრავ კოორდინატთა დერძზე, რომელთა სიბრტყეშიც ვექტორი დევს, შეიძლება ვიპოვოთ ყოველი ვექტორისათვის მისი მოდული და მიმართულება. ეს დებულება მართებულია სიჩქარის ვექტორისათვისაც. სიჩქარის ვექტორის მოდული იქნება:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad (68)$$

სიჩქარის ვექტორის მიმართულება ასევე შეიძლება განვსაზღვროთ 82-ე ნახაზის გამოყენებით:



ნახ. 82.

$$\cos \varphi = \cos(\bar{v}, x) = \frac{v_x}{v}$$

$$\cos \alpha = \cos(\bar{v}, y) = \frac{v_y}{v}. \quad (69)$$

საქიროა შევნიშნოთ, რომ (\bar{v}, x) გამოსახულებაში ჩასმულია \bar{v} ვექტორი და მისი გეგმილები. ეს ნიშნავს, რომ ლაპარაკია \bar{v} ვექტორსა და მისი x და y გეგმი-

ლებს შორის კუთხეზე.

თუ წერტილი ასრულებს მოძრაობას არა სიბრტყეში, არამედ ნებისმიერად სივრცეში, მაშინ მისი მოძრაობა განისაზღვრება სამი (56) განტოლებებით, ხოლო სიჩქარე წარმოდგენილი იქნება სიჩქარის სამი v_x , v_y და v_z გეგმილით.

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (70)$$

ამის შესაბამისად v -ს მოდული იქნება (ნახ. 83):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v}$$

ჩვეულებრივ, სპორტული მოძრაობების კვლევის დროს ცდას ატა-

რებენ ისე, რომ შეიძლებოდეს წერტილის მოძრაობის განხილვა მხოლოდ ერთ xOy სიბრტყეში.

მაგალითი 1X. 2. ბადროს მოძრაობა მოცემულია განტოლებებით: 1) $x=8t$; 2) $y=-t^2+8t$ (x და y — მეტრობით, t წამობით).

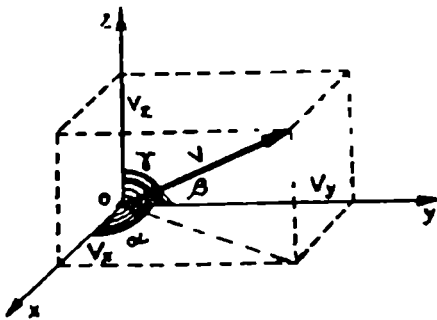
აუცილებელია განვსაზღვროთ: ა) ტრაექტორიის განტოლება; ბ) ფრენის უდიდესი სიმაღლე — H ; გ) ფრენის სიშორე — L ; დ) ტრაექტორიის უმაღლეს წერტილში სიჩქარე v_1 ; ე) ბადროს მიწაზე დაცემის მომენტში v_2 სიჩქარე. პერის წინააღმდეგობა შეიძლება მხედველობაში არ მივიღოთ.¹

ამოხსნა. რომ განვსაზღვროთ ბადროს ფრენის ტრაექტორია $y=$
 $=f(x)$, საჭიროა ბადროს მოძრაობის მოცემული განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ t დრო. პირველი განტოლებიდან განვსაზღვრავთ t -ს, რომელიც $\frac{x}{8}$ -ს ტოლია; t -ს ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ მეორე განტოლებაში, შედეგად ვღებულობთ:

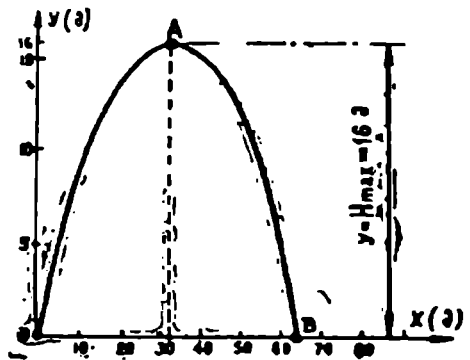
$$y = -t^2 + 8t = -\frac{x^2}{64} + x.$$

ეს განტოლება სწორედ ტრაექტორიის განტოლებაა, ტრაექტორია კი პარაბოლაა. მოცემული განტოლების საფუძველზე შეიძლება განვსაზღვროთ y x -თვის სხვადასხვა მნიშვნელობების მინიკებით:

x	0	10	20	30	32	40	50	60	64
y	0	8,44	13,75	15,95	16	15	11	4,0	0



ნახ. 83.



ნახ. 84.

¹ მძლეოსნობის იარაღების მოძრაობაზე ამოცანათა ამოხსნა პერის წინააღმდეგობის გათვალისწინებით გადმოცემულია ვ. ნ. ტუბევიჩის წიგნში. „სპორტული სროლის თეორია“ (1969).

ამ მნიშვნელობების გამოყენებით ავაგებთ ბადროს ტრაექტორიას (ნახ. 84). იგი კვეთს ლერძს ორ წერტილში, რომელთა კოორდინატები უდრის ნულს ($y=0$). ჩავსვათ y -ის ეს მნიშვნელობა ტრაექტორიის განტოლებაში, მივიღებთ მრუდს x ლერძთან გადაკვეთის წერტილების აბსცისებს:

$$y = x - \frac{x^2}{64} = 0; \quad x \left(1 - \frac{x}{64} \right) = 0.$$

განტოლების მარცხენა მხარე შეიძლება უდრიდეს ნულს, როდესაც $x_1 = 0$. ან როდესაც $\left(1 - \frac{x}{64} \right) = 0$; ამ დროს $x_2 = 64$ მ.

ცხადია, $x_1 = 0$. ეს წერტილი ეკუთვნის ფრენის დასაწყისს, ხოლო x_2 შეესაბამება ბადროს მიწასთან შეხების მომენტს, ფრენის სიგრძე L უდრის:

$$L = x_2 = 64 \text{ მ.}$$

უმალესი A წერტილი, რომელსაც აღწევს ბადრო ფრენის დროს, შეიძლება განვსაზღვროთ, თუ ამ დროს მივიჩნევთ, რომ $H = y_{max}$.

რომ ვიპოვოთ ფუნქციის მაქსიმუმი, საჭიროა მოვძებნოთ მისი პირველი წარმოებული და გავუტოლოთ ნულს:

$$y = x - \frac{x^2}{64};$$

$$y' = 1 - \frac{2x}{64} = 0;$$

$$x = 32 \text{ მ.}$$

მაშასადამე, მაქსიმალური მნიშვნელობა y_{max} იქნება, როდესაც $x = 32$ მ. თუ ამ მნიშვნელობას ჩავსვათ y -ის განტოლებაში მივიღებთ:

$$y_{max} = x - \frac{x^2}{64} = 32 - \frac{(32)^2}{64} = 16 \text{ მ.}$$

$$H = y_{max} = 16 \text{ მ.}$$

რომ ვიპოვოთ ბადროს სიჩქარე, აუცილებელია მოვძებნოთ სიჩქარის გვერდები კოორდინატთა ლერძებზე 70-ე ფორმულების გამოყენებით:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(8t)}{dt} = 8 \text{ (მ/წმ);}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(-t^2 + 8t)}{dt} = -2t + 8 \text{ (მ/წმ)}.$$

აუცილებელია შევნიშნოთ, რომ იარაღის სიჩქარის გეგმილი x ლერძზე მუდმივია და არ არის დამოკიდებული t დროზე. y ლერძზე გეგმილი კი დამოკიდებულია t დროზე.

ტრაექტორიის უმაღლეს წერტილში ბადროს სიჩქარე მიმართულია მასთან მხეზით და x ლერძის პარალელურია. ამიტომ $v_{1y} = 0$; $v_{1x} = 8$ მ/წმ. იგივე შედეგი შეიძლება მივიღოთ სხვა გზით. ცნობილია, რომ უმაღლესი წერტილის კოორდინატებია: $x = 32$ მ; $y = 16$ მ. ამიტომ ადვილად მოიძებნება დრო, რომლის განმავლობაშიც ბაჯრო მიაღწევს A წერტილს 32 და 16 კოორდინატებით. მოძრაობის მოცემულ განტოლებებში $x = 8t$; $y = -t^2 + 8t$. ჩავსვათ: $x = 8t = 32$; $y = -t^2 + 8t = 16$, საიდანაც დავადგენთ $t = 4$. vy -ის გამოსახულებაში $t = 4$ -ის ჩასმით მოვძებნით $v_{1y} = (-2t + 8) = 0$, ე. ო. იმავე შედეგს, როგორც 84-ე ნახაზზე გრაფიკის განხილვისას.

ბადროს v_2 სიჩქარე მიწაზე მისი დაცემის მომენტში შეიძლება განსაზღვრული იყოს ფრენის სიშორის $L = 64$ მ, $x = 8t = 64$ გათვალისწინებით; ამასთან $t = 8$ წმ.

$v_{2x} = 8$ მ/წმ, რადგან $\frac{dx}{dt} = 8$ მ/წმ და არ არის დამოკიდებული დროზე.

$$v_{2y} = (-2t + 8) = (-16 + 8) = -8 \text{ მ/წმ}.$$

ბადროს v_2 სიჩქარის მოდული იქნება:

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = 11,31 \text{ მ/წმ}.$$

v_2 სიჩქარის ვექტორის მიმართულება განისაზღვრება ფორმულით:

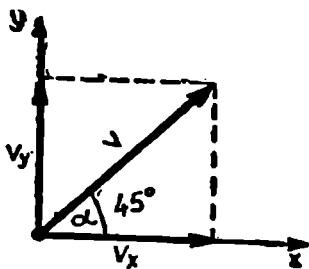
$$\cos(v_2, x) = \frac{v_{2x}}{v_2} = \frac{8}{11,31} = 0,707;$$

$$\angle(v_2, x) = 45^\circ$$

$$\cos(v_2, y) = \frac{v_{2y}}{v_2} = \frac{-8}{11,31} = -0,707;$$

$$\angle(v_2, y) = 135^\circ.$$

თუ წინასწარ მოცემულია მოძრაობის $x = f_1(t)$ და $y = f_2(t)$ განტოლებები, მივიღებთ სხეულის წერტილის მოძრაობაზე დაწერილებით ინფორმაციას.



ნახ. 85.

მაგალითი 1X. 3. შუბი გატყორ-
ცნილია საწყისი 24 მ/წმ სიჩქარით დე-
დამიწის ზედაპირის მიმართ $\alpha = 45^\circ$
კუთხით (ნახ. 85). მოვძებნოთ:

1. მოძრაობის განტოლება კოორდი-
ნატული ფორმით:

$$x = f_1(t) \text{ და } y = f_2(t);$$

2. მოძრაობის ტრაექტორია $y =$
 $= f(x)$;

3. ფრენის სიშორე L ;

4. ფრენის უდიდესი სიმაღლე H_{max} ;

5. ფრენის ხანგრძლივობა t ;

6. სიჩქარე იმ მომენტში, როდესაც წერტილი მიაღწევს H_{max} და დედამიწასთან შეხების დროს. ჰაერის წინააღმდეგობა შეიძლება უგუ-
ლებელყოფოთ.

ამოხსნა: თუ ვიცით ვექტორის \vec{v} სიჩქარე (პირობაში მოცემუ-
ლია, რომ მისი მოდული $|\vec{v}| = 24$ მ/წმ) და α კუთხე, შეიძლება დავადგი-
ნოთ ვექტორის შემდგენები კოორდინატა x და y ღერძებზე.

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v.$$

კუთხე v , x უღრის 45° -ს, ამიტომ

$$v_x = v_y = \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{24}{\sqrt{2}} = 17 \text{ მ/წმ.}$$

თუ ვიცით, რომ შემდგენები $v_x = 17$ მ/წმ და $v_y = 17$ მ/წმ, შეიძ-
ლება დავწეროთ მოძრაობის განტოლებები: $x = 17t$; $y = 17t - 4,9t^2$.
მეორე განტოლების ჩაწერისას აუცილებელია ყურადღება მივაქციოთ
იმას, რომ ვერტიკალურად მოძრაობა შესაძლებელია $(17t)$ საწყისი სიჩ-
ქარისა და სიმძიმის ძალის მოქმედების დროს

$$\left(-\frac{g t^2}{2} = -4,9 t^2 \right).$$

რომ მივიღოთ ტრაექტორიის განტოლება, საჭიროა გამოვრიცხოთ
 x და y -სთვის განტოლებიდან დროს t , რადგან ტრაექტორიის განტო-
ლებაა $y = f(x)$, თუ $x = 17t$ მაშინ $t = \frac{x}{17}$,

$$t^2 = \frac{x^2}{17^2} = \frac{x^2}{289}.$$

ჩავსვათ t -ს მნიშვნელობა y -ის განტოლებაში:

$$y = 17t - 4,9t^2 = x - \frac{x^2}{59}.$$

ეს არის სწორედ შუბის ფრენის ტრაექტორიის განტოლება. ფრენის სიშორეს L x კოორდინატის ტოლი იქნება, როდესაც $y=0$ (მიწასთან შეხების მომენტი)

$$y = x - \frac{x^2}{59} = 0; \quad x \left(1 - \frac{x}{59} \right) = 0.$$

განტოლება შეიძლება იყოს ნულის ტოლი, როდესაც,

$$x = 0, \quad \left(1 - \frac{x}{59} \right) = 0.$$

აქედან დავადგენთ, რომ — $x_1 = 0$ (ეს შეესაბამება ფრენის დასაწყისს) და $x_2 = 59$ მ (ეს კი შეესაბამება მიწასთან შეხებას), $L = x_2 = 59$ მ.

ფრენის მთლიანი დრო t შეიძლება დავადგინოთ $x = 17t$ განტოლებიდან:

$$t = \frac{x}{17} = \frac{59}{17} = 3,47 \text{ წმ.}$$

ფრენის მაქსიმალური სიმაღლე H_{max} შეიძლება მოვძებნოთ, $y = f(x)$ ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობის მოძებნით. რომ ვიპოვოთ x მნიშვნელობა, რომლის დროსაც ფუნქციის მაქსიმუმი, საჭიროა ავიღოთ პირველი წარმოებული x -ით და გავუტოლოთ იგი ნულს:

$$y = x - \frac{x^2}{59};$$

$$y' = 1 - \frac{2x}{59} = 0; \quad x = 29,5 \text{ მ.}$$

თუ ჩავსვათ x -ის ამ მნიშვნელობებს ტრაექტორიის განტოლებაში, დავადგენთ:

$$H_{max} = y_{ax} = x - \frac{x^2}{59} = 29,5 - \frac{29,5^2}{59} = 14,75 \text{ მ.}$$

ნებისმიერ წერტილში სიჩქარე უდრის:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2},$$

სადაც x და y წერტილის კოორდინატებია.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (17t)' = 17 \text{ მ/წმ},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = (17t - 4,9t^2)' = 17 - 9,8t.$$

თუ ვისარგებლებთ $x = 17t$ განტოლებით, მივიღებთ დროს, როდესაც იარაღი მიაღწევს H_{max}

$$t = \frac{x}{17} = \frac{29,5}{17} = 1,75 \text{ წმ}.$$

თუ ვიციტთ ეს დრო, შეიძლება განვსაზღვროთ მოცემული წერტილის შესაბამისი სიჩქარის გვეგმილები. ამიტომ, $v_x = 17 \text{ მ/წმ}$; $v_y = 17 - 9,8t = 17 - 9,8 \cdot 1,75 = 0$.

საბოლოოდ სიჩქარე ფრენის უმაღლეს წერტილში უდრის:

$$v = v_x = 17 \text{ მ/წმ},$$

მიწასთან შეხების დროს წერტილში სიჩქარე უდრის:

$$v_x = 17 \text{ მ/წმ},$$

$$v_y = 17 - 9,8t = 17 - 9,8 \cdot 3,47 = -17 \text{ მ/წმ}.$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{17^2 + (-17)^2} = 24 \text{ მ/წმ}.$$

ამ სიჩქარის ვექტორის დახრის კუთხე $\angle(v, x) = \alpha$ შეიძლება განვსაზღვროთ ასე:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-17}{17} = -1; \quad \alpha = 345^\circ.$$

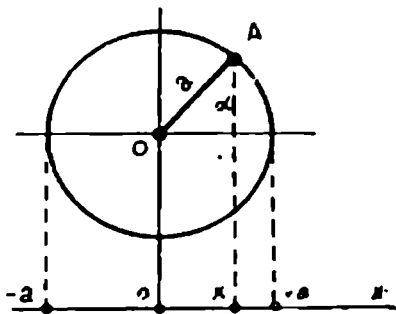
მაგალითი № 4. წერტილი ასრულებს ჰარმონიულ რხევას $x = a \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ კანონით (ნახ. 86). განვსაზღვროთ წერტილის სიჩქარე. ჰარმონიული რხევის მაგალითად შეიძლება განვიხილოთ A წერტილის გვეგმილის Ox ღერძზე გადაადგილება ამ წერტილის თანაბარი ზრუნვის დროს წრეხაზზე - a რადიუსით. T რხევის პერიოდია, ე. ი. დრო, რომლის განმავლობაშიც A წერტილი ასრულებს ერთ შემობრუნებას. სინამდვილეში, a რადიუსსა და Ox ღერძს შორის დროის ნებისმიერ მომენტში კუთხე უდრის $\frac{2\pi}{T}t = \alpha$. აქ $\frac{2\pi}{T}$ — OA რადიუსის კუთხური სიჩქარეა, ანუ წრიული სიხშირე: $\frac{2\pi}{T} = \omega$.

რადიუსის გეგმილი Ox ღერძზე იქნება:

$$x = a \cos \alpha = a \cos \left(\frac{2\pi}{T} t \right) = a \cos \omega t.$$

ამრიგად, მოცემულია მოძრაობის განტოლება $x = f(t)$. რადგან მოძრაობა ხდება ხაზის (Ox ღერძის) გასწვრივ, სიჩქარის გეგმილი x ღერძზე v სიჩქარის ტოლია:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T} a \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) = a \omega \sin \omega t.$$



ნახ. 86.

მოცემულ შემთხვევაში სიჩქარე არის აგრეთვე t -ს ფუნქცია:

$$v = \psi(t).$$

რადგან სინუსი კუთხის მიხედვით შეიძლება შეიცვალოს (-1) -დან $(+1)$ -მდე ზღვრებში, ამიტომ ცხადია, რომ სიჩქარის მაქსიმალური მნიშვნელობა იქნება:

$$v_{\max} = \frac{2\pi a}{T} = a\omega.$$

§41. სიჩქარის ცვლილება დროში

ფიზიკური ვარჯიშების შესრულების პროცესში განსაკუთრებით დიდი მნიშვნელობა აქვს სიჩქარის ცვლებადობას დროში. ამიტომ თუ ვიცით სიჩქარე დროის თითოეულ მოცემულ მომენტში ან ტრაექტორიის განსაზღვრულ წერტილში, შეიძლება ავავოთ გრაფიკები ფუნქციებისათვის

$$v = f(t) \tag{71}$$

ან

$$v = \varphi(S). \tag{72}$$

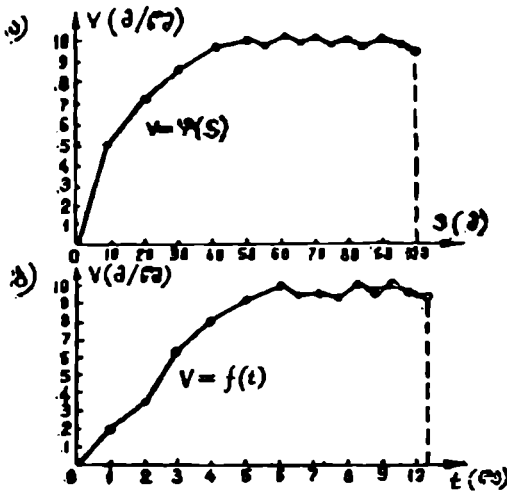
უკანასკნელი გამოსახულება შეიძლება მოცემული იყოს კოორდინატების მეშვეობით:

$$\begin{aligned} v_x &= \varphi_1(S_x), \\ v_y &= \varphi_2(S_x). \end{aligned} \tag{73}$$

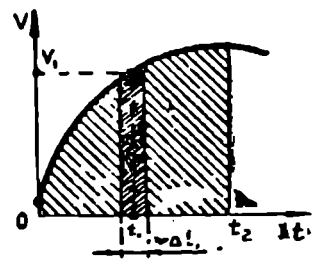
წინა მაგალითში ნაჩვენები იყო, რომ წერტილის გეგმილის Ox ღერძზე გადაადგილების სიჩქარე უწყვეტად იცვლება $-\left(\frac{2\pi}{T}a\right)$ -დან $+\left(\frac{2\pi}{T}a\right)$ -მდე ნულოვან მნიშვნელობაზე გადასვლით.

87, ა ნახაზზე ნაჩვენებია 100 მეტრზე სირბილის დროს სიჩქარის ცვალებადობა გზის შიხედვით. ეს მრუდია $v = \varphi(S)$. სირბილის დროს

სიჩქარის დამოკიდებულება დროზე $v = f(t)$ ნაჩვენებია 87, ბ ნახაზზე. მრუდები ჰგავს ერთმანეთს, მაგრამ ეს შეეხება მხოლოდ მოცემულ მაგალითს.



ნახ. 87.



ნახ. 88.

$V = f(t)$ ფუნქციის მრუდი იწვევს დიდ ინტერესს სირბილის ხალიათის განსაზღვრის თვალსაზრისით; იგი იძლევა პასუხს კითხვაზე, თუ რა სისწრაფითაა მიღწეული აუცილებელი სიჩქარე, როგორ ხდებოდა მისი შენარჩუნება, იზრდებოდა თუ მცირდებოდა სირბილის ბოლოს და ა. შ. ეს მრუდი საინტერესოა კიდევ შემდეგი მოსაზრებებით. 88-ე ნახაზზე მოცემულია $v = f(t)$ გრაფიკი. მართკუთხედს Δt_1 ფუძითა და v_1 სიმაღლით აქვს რიცხობრივად სხეულის მიერ Δt_1 დროში განვლილი გზის (ცნობილი მიახლოებით) ტოლი ფართობი $s_1 \Delta t_1$. საერთოდ კი $v = f(t)$ მრუდით, t -ს ღერძზე t_2 -ის ტოლი მონაკვეთით და ამ მონაკვეთის ბოლოებიდან აღმართული პერპენდიკულარებით შემოსაზღვრული ფართობი სხეულის მიერ t დროში განვლილი მანძილის ტოლია. და შეიძლება წარმოვიდგინოთ ინტეგრალის სახით:

$$S = \int_0^{t_2} v dt \tag{74}$$

თუ გვინდა გავიგოთ განვლილი გზა დროში დაწყებული t_1 -დან t_2 -მდე, მაშინ (74) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$S_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} v dt. \quad (75)$$

დავუშვათ, რომ მიმდინარეობს დაკვირვება სპრინტერის სირბილზე და ავტომატური ხელსაწყო გამოხაზავს $v=f(t)$ მრუდს. მეორე ხელსაწყო (ინტეგრატორს) შეუძლია განსაზღვროს ფართობი, შემოსაზღვრული Ox ლერძითა და მოძრაობის საწყისი და საბოლოო კოორდინატებით. ამრიგად, ცნობილი იქნება არა მარტო სიჩქარე, არა-შეღ S გზაც, განვლილი სპრინტერის მიერ დროის მოცემულ მომენტში.

მაგალითი. IX.5 მოციგურავე ასრულებს სავალდებულო ფიგურას — $D=11,4$ მ დიამეტრის წრეხაზზე v სიჩქარით, რომელიც თანდათან ეცემა $v=v_0 e^{-at}$ ექსპონენციალური დამოკიდებულებით. უკუბიძგის მომენტში საწყისი სიჩქარე $v_0=45$ მწ/მ; $a=0,1$.

განვსაზღვროთ, სპორტსმენს შესწევს თუ არა უნარი მოცემულ საწყისი სიჩქარით შეასრულოს მთლიანი წრე. როგორი სიჩქარე იქნება მთლიანი წრის დამთავრების მომენტში? როგორია მოციგურავეის მაქსიმალური გადაადგილება, თუ მივიჩნევთ, რომ საბოლოო სიჩქარე $v=0,1v_0$?

ამოხსნა. მოციგურავეის გზა მთლიანი წრის დროს: $S=\pi D=3,14 \cdot 11,4=36$ მ.

სპორტსმენის მიერ განვლილი S გზა უდრის:

$$S = \int_0^t v dt.$$

ჩავსვათ სიჩქარის მნიშვნელობა ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ:

$$S = \int_0^t v_0 e^{-at} dt = \frac{1}{a} v_0 [-e^{-at}]_0^t = \frac{1}{a} v_0 [1 - e^{-at}].$$

გზა მოცემულია: $S=36$ მ, ამიტომ:

$$\frac{1}{a} v_0 [1 - e^{-at}] = 36.$$

$a=0,1$ და $v_0=4,5$ მ/წმ მნიშვნელობების ჩასმით, მივიღებთ:

$$\frac{1}{0,1} \cdot 4,5 (1 - e^{-0,1t}) = 36; \quad e^{-0,1t} = 0,2.$$

e^{-x} ფუნქციის ცხრილების გამოყენებით დავადგენთ, რომ ხარისხის მაჩვენებელი $(0,1 t)$ უნდა იყოს $1,61$ -ის ტოლი. აქედან წრეხაზზე მოძრაობის დროს $t=16,1$ წმ.

ახლა შეიძლება განვსაზღვროთ, (როგორი იქნება v სიჩქარე, როდესაც სპორტსმენი გაივლის ერთ წრეს:

$$v = v_0 e^{-\alpha t} = 4,5 e^{-0,1 \cdot 16,1} = 4,5 e^{-1,61} = 4,5 \cdot 0,2 = 0,9 \text{ მ/წმ.}$$

ეს გვაძლევს საშუალებას პასუხი გავცეთ პირველ ორ კითხვას. მოციგურავე აღწერს წრეხაზს $16,1$ წმ-ში და ექნება სიჩქარე $0,9$ მ/წმ.

როგორი სიგრძის S გზის გავლა შეუძლია სპორტსმენს?

ამოცანის პირობის თანახმად, შეიძლება მივიჩნიოთ, რომ პრაქტიკულად მოძრაობა დამთავრებულია, როდესაც $v=0,1$, $v_0=0,1 \cdot 4,5=0,45$ მ/წმ. თუ გამოვიყენებთ $v = v_0 e^{-\alpha t}$ განტოლებას და მასში ჩავსვამთ $v=0,45$ მ/წმ, $v_0=4,5$ მ/წმ, $\alpha=0,1$, ჯამში მივიღებთ:

$$e^{-0,1t} = \frac{v}{v_0} = 0,1.$$

e^{-x} ფუნქციის ცხრილების გამოყენებით დავადგენთ, რომ $0,1 t$ უნდა იყოს $2,3$ -ის ტოლი. ამ დროს $t = \frac{2,3}{0,1} = 23$ წმ, ე. ი. მოძრაობა

პრაქტიკულად დამთავრდება 23 წმ-ის შემდეგ. ეს საშუალებას იძლევა გამოვითვალოთ მოციგურავის მიერ გავლილი გზა მოცემულ დროში.

$$S = \int_0^{23} 4,5 \cdot e^{-0,1t} dt = \frac{4,5}{0,1} \left| -e^{-0,1t} \right|_0^{23} = 45 \left| 1 - e^{-0,1 \cdot 23} \right| = 45(1 - 0,1) = 40,5 \text{ მ.}$$

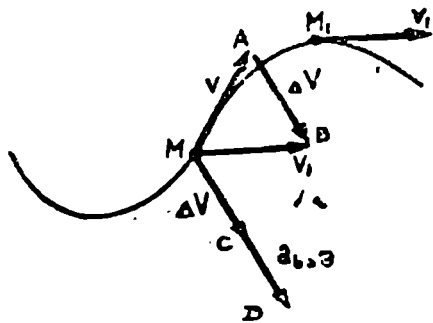
ამრიგად, სპორტსმენს $4,5$ მ/წმ საწყისი სიჩქარის დროს შეუძლია გაიაროს $S=40,5$ მ-ის ტოლი გზა.

§ 45. წერტილის აჩქარება

წერტილის მოძრაობა როგორც მოდულთ, ასევე ვიმარათულებით მუდმივი სიჩქარით ხდება მაშინ, როდესაც სხეულზე მოდებული ძალები ურთიერთწონასწორდება. მაგრამ ამგვარი მოძრაობა არცთუ ხშირად გვხვდება. უმრავლეს შემთხვევაში წერტილის სიჩქარე მუდმივი არ რჩება. სიჩქარის ცვალებადობა შეიძლება მოხდეს ან მოდულთ

(არათანაბარი სწორხაზოვანი მოძრაობა), ან მიმართულებით (არათანაბარი მრუდწირული მოძრაობა), ანდა მოდულითა და მიმართულებით ერთდროულად (არათანაბარი მრუდწირული მოძრაობა). სიჩქარის ვექტორის როგორც მოდულით, ასევე მიმართულებით ცვალებადობის სისწრაფის დამახასიათებელ სიდიდეს აჩქარება ეწოდება.

ვთქვათ, წერტილი მოძრაობს რომელიღაც მრუდწირული ტრაექტორიით (ნახ. 89). t დროის მომენტში იგი იქვანს M მდებარეობას, ხოლო $(t + \Delta t)$ დროში — M_1 -ს, ამ წერტილებში სიჩქარეების v და v_1 ვექტორები მიმართული იქნება ტრაექტორიის მხებში.



ნახ. 89.

განვსაზღვროთ წერტილის სიჩქარის ვექტორის ცვლილება Δv დროში. ამისათვის გადავიტანოთ v_1 ვექტორის საწყისი M წერტილში; v და v_1 ვექტორების A და B ბოლოების შემაერთებელი \overline{AB} ვექტორი ვექტორების $v_1 - v$ სხვაობაა, ამიტომ შეიძლება დავწეროთ, რომ

$$\overline{v_1 - v} = \overline{\Delta v}$$

ასევე მოსახერხებელია გადავიტანოთ M წერტილში $\overline{\Delta v}$ ვექტორიც. იგი წერტილის სიჩქარის ნამატია Δt დროის შუალედში.

სიჩქარის $\overline{\Delta v}$ ნამატის ფარდობა დროის Δt შუალედთან, რომლის განმავლობაშიც ხდებოდა სიჩქარის ცვალებადობა, წერტილის საშუალო აჩქარებაა. მიღებულია საშუალო აჩქარების ვექტორის აღნიშვნა $\overline{a_{საშ}}$ სიმბოლოთი:

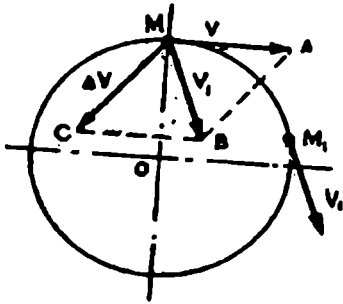
$$\overline{a_{საშ}} = \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\overline{MC}}{\Delta t}$$

\overline{MC} ვექტორის Δt სკალარულ სიდიდეზე გაყოფის დროს ასევე მიიღება ვექტორი, რომელსაც საშუალო აჩქარება ეწოდება.

$\overline{a_{საშ}}$ ვექტორი თავისი მიმართულებით დაემთხვევა \overline{MC} ვექტორს. ამგვარად, დროის მოცემულ შუალედში წერტილის საშუალო აჩქარება ეწოდება ვექტორს, რომელიც წერტილის სიჩქარის დროის რომელიმე

შუალედში ამ შუალედის სიდიდესთან ნამატის შეფარების ტოლია.

საშუალო აჩქარება ($\bar{a}_{\Delta t}$) მიუთითებს სიჩქარის ვექტორის საბოლოო ცვლილებაზე $\Delta \vec{v}$ დროის შუალედში და არ იძლევა წარმოდგენას წერტილის სიჩქარის სიდიდესა და მიმართულების ნამდვილ ცვალებადობაზე დროის თითოეულ მოცემულ მომენტში.



ნახ. 90.

საშუალო აჩქარება ზოგად შემთხვევაში არ არის მუდმივი სიდიდე და დამოკიდებულია Δt ნამატის შერჩეულ სიდიდეზე. მაგრამ Δt ნულთან მიახლოებასთან ერთად საშუალო აჩქარების ვექტორი მიისწრაფვის განსაზღვრული ზღვრისაკენ, რომელიც ახასიათებს წერტილის კეპლერის აჩქარებას დროის მოცემულ მომენტში. წერტილის აჩქარება უდრის:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (76)$$

წერტილის აჩქარება დროის მოცემულ t მომენტში მისი საშუალო აჩქარების ზღვრის ტოლია Δt დროის შუალედში, როდესაც ამ შუალედის სიდიდე მიისწრაფვის ნულისაკენ.

საკირთა შევნიშნოთ, რომ \bar{a} ვექტორი თავისი მიმართულებით არ ემთხვევა $\Delta \vec{v}$ და $\bar{a}_{\Delta t}$ ვექტორებს, რადგან ვექტორი შეესაბამება ზღვრულ მიმართულებას, რომლის მიღწევამდე Δt შუალედის შემცირებასთან ერთად იცვლებოდა $\bar{a}_{\Delta t}$ მიმართულებაც.

წერტილის წრეხაზზე თანაბარი მოძრაობის დროს (ნახ. 90) წერტილის სიჩქარე მოდულით მუდმივია, მაგრამ მიმართულებით ყოველთვის იცვლება. წერტილის სიჩქარის $|v|$ და $|v_1|$ მოდულები t და $(t + \Delta t)$ მომენტებში უდრის ერთმანეთს და $\Delta s = |v_1| - |v| = 0$, მაგრამ ამ სიჩქარეების \vec{v} და \vec{v}_1 ვექტორები სხვადასხვაა.

ამიტომ $\Delta \vec{s} = \vec{v}_1 - \vec{v} = \vec{MB} - \vec{MA} = \vec{MC} \neq 0$. ეს გვაძლევს საფუძველს ვთქვათ, რომ მიუხედავად იმისა, რომ მოდული $|\Delta s| = 0$, წერტილის აჩქარება $\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$ არ უდრის ნულს.

აჩქარება $\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$ არ უდრის ნულს.

¹ შემდგომში წერტილის კეპლერის აჩქარებას ეწოდება წერტილის აჩქარება და აღინიშნება \bar{a} სიმბოლოთი.

აქ ერთხელ კიდევ საჭიროა ხაზი გავუსვათ, რომ აჩქარება ვექტორული სიდიდეა, ხოლო $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ — ვექტორული წარმობებული.

სანამ გადავიდოდეთ წერტილის აჩქარების განსაზღვრის ხერხებზე, აუცილებელია ვთქვათ. აჩქარების განზომილების შესახებ

$$[a] = \left[\frac{\Delta v}{\Delta t} \right] = \frac{\text{სიჩქარე}}{\text{დრო}} = \frac{\text{სიგრძე}}{\text{დრო}} : \text{დრო} = \frac{\text{სიგრძე}}{\text{დრო}^2}.$$

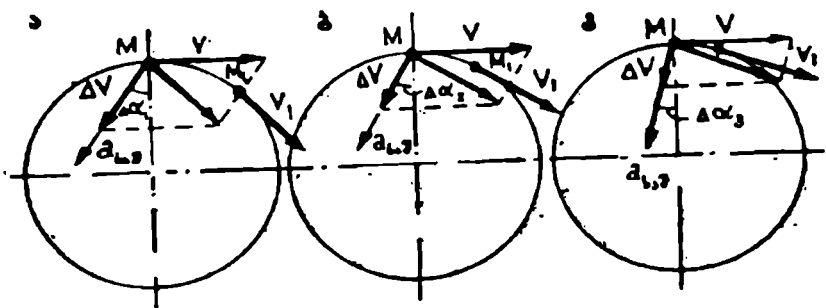
სიგრძისა და დროის ერთეულების შერჩევის მიხედვით აჩქარება გამოისახება მ/წმ²-ობით; სმ/წმ²-ობით და ა. შ. აჩქარების განზომილება ერთეულთა ტექნიკურ სისტემაში და ის სისტემაში ემთხვევა ერთმანეთს.

§ 10. წერტილის აჩქარების განსაზღვრა მრუდწირული მოძრაობის დროს

შეგახსენებთ, რომ ბუნებრივი ხერხით წერტილის განსაზღვრის დროს მისი მოძრაობის განტოლება მოცემული ტრაექტორიით არის

$$S = f(t).$$

მრუდწირული მოძრაობის უფრო მარტივი შემთხვევაა წერტილის მოძრაობა წრეხაზზე. წრეხაზის რკალზე წერტილის მოძრაობის დროს დროის t და $t + \Delta t$ მომენტში წერტილი იკავებს M და M_1 მდებარეობას (ნახ. 91). წერტილის შესაბამისი სიჩქარეებია — v და v_1 . როგორც



ნახ. 91.

უკვე ვთქვით, სიჩქარის ვექტორი კი არ რჩება მუდმივი, არამედ იღებს რომელიღაც $\Delta \vec{v}$ ნამატს. რომ გამოვთვალოთ იგი, საჭიროა ავაგოთ მონაკვეთები, რომლებიც ტოლია და მიმართულებით ემთხვევა $\vec{v}(t$

დროის მომენტებში) და \bar{v}_1 ($t + \Delta t$ დროის შუალედში) სიჩქარის ვექტორულ მიმართულებებს. ამ ვექტორების მიმართულებები ემთხვევა წრეხაზის მხების მიმართულებას იმ ადგილში, სადაც მდებარეობს წერტილი მოცემულ მომენტში. \bar{v}_1 -დან \bar{v} ვექტორის გამოკლებით მივიღებთ $\Delta\bar{v}$ ვექტორს. იგი არ იქნება არც ერთი (\bar{v} და \bar{v}_1) ვექტორის პერპენდიკულარული. მაგრამ თუ Δt შემცირდება და მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაშინ სიჩქარის ნამატიც მიისწრაფვის ნულისაკენ და $\Delta\bar{v}$ ვექტორის მიმართულება ზღვარში $\Delta t \rightarrow 0$ დროს მიისწრაფვის მოთავსდეს სიჩქარის \bar{v} ვექტორის პერპენდიკულარულად. მაშასადამე, \bar{a} აჩქარება სიჩქარის პერპენდიკულარული იქნება და მიმართული იქნება წრის ცენტრისაკენ. თუ განვიხილავთ სიჩქარეების პარალელოგრამს და წრეხაზზე მოძრავ წერტილებს, წარმოვიდგენთ, რომ $\Delta\alpha \rightarrow 0$, მაშინ გამოჩნდება, რომ $\Delta\bar{v}$ ვექტორის მიმართულება მიისწრაფვის გახდეს \bar{v} ვექტორის პერპენდიკულარული და ემთხვევა \bar{a} აჩქარების მიმართულებას (შევადართ ა, ბ, გ მდებარეობები).

91-ე ნახაზიდან ჩანს, რომ მცირე $\Delta\alpha$ -ს დროს

$$\Delta\bar{v} \cong v\Delta\alpha. \quad (77)$$

წერტილის მიერ Δl დროში განვლილი გზა უდრის:

$$v\Delta l \cong R\Delta\alpha. \quad (78)$$

ორი განტოლებიდან $\Delta\alpha$ -ს გამორიცხვით მივიღებთ:

$$\Delta\bar{v} \cong \frac{v^2}{R}\Delta l \quad (79)$$

ახ

$$\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta l} \cong \frac{v^2}{R}$$

ამრიგად, წერტილის წრეხაზზე მუდმივი სიჩქარით მოძრაობის დროს წარმოიქმნება სიჩქარის ნამატი, რომელსაც აქვს მოცემული წრეხაზის მხების ნორმალის მიმართულება: სიჩქარის ამ ცვალებადობას შეესაბამება ე. წ. ნორმალური (ცენტრისკენული) აჩქარება, რომელიც განისაზღვრება გამოსახულებით:

$$|a_n| = \frac{v^2}{R}. \quad (80)$$

მაშასადამე, წრეხაზზე თანაბრად მოძრავი წერტილის აჩქარების

რიცხობრივი სიდიდე რადიუსზე გაყოფილი სიჩქარის კვადრატის ტოლია. აჩქარება მიმართულია წრეხაზის ცენტრისაკენ.

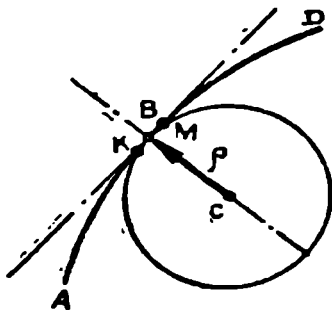
სპორტულ პრაქტიკაში უფრო ხშირად მრუდწირული მოძრაობების ტრაექტორიები არა წრეხაზებია, არამედ რთული მრუდები.

როგორც უკვე ვთქვით, ნებისმიერი მრუდის განხილვის დროს მოსახერხებელია შევარჩიოთ შემდეგი ორიენტირები: მრუდის მხები მოცემულ წერტილში ყოველთვის იქერს განსაზღვრულ მდებარეობას (განისაზღვრება ცალსახად). ეს მდებარეობა ყოველთვის მოსახერხებელია, რადგანაც მოცემულ წერტილში სიჩქარე ყოველთვის მიმართულია მხებით; მხების პერპენდიკულარულია ხაზი, განლაგებული მოცემულ წერტილზე, ნორმალაა. წრეხაზის რადიუსი, გაელებული მხების წერტილში მხების პერპენდიკულარულია.

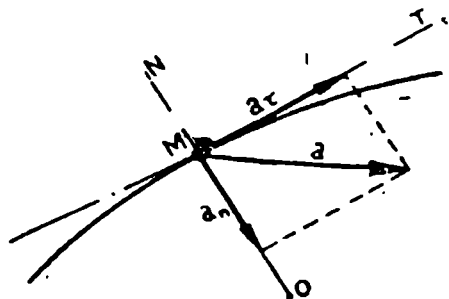
დავუშვათ, რომ წერტილში ტრაექტორიაა რომელიმე ABD მრუდი (ნახ. 92).

განვალაგოთ B წერტილის ორივე მხარეს კიდევ რომელიმე წერტილები, მაგალითად, K და M . გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ სამ წერტილზე ყოველთვის შეიძლება გავატაროთ წრეხაზი და ამავე დროს მხოლოდ ერთი. ვთქვათ, ეს სამი წერტილია K , B და M . გავატაროთ მათზე წრეხაზი ცენტრით C წერტილში. რაც უფრო მცირე იქნება მანძილი K და M წერტილებს შორის, მით უფრო ნაკლებად იქნება განსხვავებული მრუდის KBM ელემენტი ამ წერტილის შესაბამისი წრეხაზის რკალისაგან. ზღვარში K და M წერტილები შემოუსაზღვრელად მიუახლოვდება B წერტილს და ტრაექტორიის უსასრულოდ მცირე ელემენტი — KBM დაემთხვევა წრეხაზის რკალს, ექნება მასთან საერთო მხები B წერტილში.

B , K და M წერტილებზე შემოვლებულ წრეხაზს ეწოდება B წერ-



ნახ. 92.



ნახ. 93.

ტილში მრუდის სიმრუდის წრეხაზი. სიმრუდის წრეხაზის ρ რადიუსს, გატარებულს მრუდის მოცემული წერტილისათვის, ეწოდება მრუდის სიმრუდის რადიუსი ამ წერტილში. სიმრუდის წრის ცენტრს ეწოდება მოცემულ წერტილში მრუდის სიმრუდის ცენტრი.

მრუდის სიმრუდის რადიუსის უებრუნებულ k სიდიდეს მოცემულ წერტილში ეწოდება ამ წერტილში მრუდის სიმრუდე $k = \frac{1}{\rho}$. რაც უფრო ნაკლებადაა გამრუდებული მრუდი

მოცემულ წერტილში, მით მეტია მისი სიმრუდის რადიუსი და მით ნაკლებია სიმრუდე k .

ერთ მრუდს მის სხვადასხვა წერტილში სხვადასხვა სიმრუდე აქვს. სწორ ხაზს სიმრუდე არა აქვს ($k=0$); ამიტომ სწორი ხაზის სიმრუდის რადიუსი $\rho = \infty$. მრუდწირული ტრაექტორიის ნებისმიერად მცირე მონაკვეთი შეიძლება შევცვალოთ შესაბამისი წრეხაზის რკალით და განვსაზღვროთ მისი რადიუსი და, მაშასადამე, ამ მრუდის სიმრუდის ρ რადიუსიც.

განხილულ კერძო შემთხვევაში წერტილის წრეხაზზე თანაბარი მოძრაობის დროს სიჩქარის ნამატის მოდული ნულის ტოლი იყო ($\Delta v = 0$), ხოლო აჩქარება $|a_n| = \frac{v^2}{R}$ და მრავალწილი იყო რადიუსით წრეხაზის ცენტრისაკენ, ანუ ნორმალზე. უფრო ზოგად შემთხვევაში, როდესაც წერტილის ტრაექტორია შეიძლება იყოს ნებისმიერი, ხოლო სიჩქარის მოდული იცვლება დროში, $\Delta v \neq 0$; $\frac{dv}{dt} \neq 0$ წერტილის \overline{a} აჩქარება წარმოდგენილი იქნება ვექტორით, რომლის მიმართულეა განსხვავებულია ნორმალის მიმართულებისაგან (ნახ. 93). დავშალოთ აჩქარების \overline{a} ვექტორი ორ შემდგენად, ერთი მათგანი a_τ მიემართოთ მრუდის მხების მიმართულებით, ხოლო მეორე a_n — ნორმალის მიმართულებით. აჩქარების \overline{a} ვექტორი შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც მისი შემდგენების ჯამი და დავწეროთ:

$$\overline{a} = \overline{a_\tau} + \overline{a_n}. \quad (81)$$

მიღებულია, რომ აჩქარების $\overline{a_\tau}$ შემდგენს ეუწოდოთ, ტანგენციალური, იგი მიმართულებით ემთხვევა წერტილის მოცემული მდებარეობისათვის სიჩქარის მიმართულებას. $\overline{a_n}$ შემდგენს ეწოდება ნორ-

მალური შემდგენი (მიმართულია ნორმალზე), მისი მოდული უდრის $\frac{v^2}{\rho}$ -ს, სადაც სიმრუდის ρ რადიუსია:

თუ წერტილის ტრაექტორია წრეხაზია, მაშინ სიმრუდის რადიუსი წრეხაზის რადიუსის ტოლია.

აჩქარების ტანგენციალური შემდგენის მოდული უდრის:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}. \quad (82)$$

93-ე ნახაზის თანახმად შეიძლება დავწეროთ:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (83)$$

მხები და ნორმალური აჩქარებები ვექტორის გეგმილებაა ორ ურთიერთპერპენდიკულარულ ღერძზე, მხებსა (MT) და ნორმალურზე (ON). ამიტომ შეიძლება განვსაზღვროთ წერტილის \bar{a} აჩქარების არა მარტო მოდული, არამედ \bar{a} ვექტორის მიმართულება.

$$\cos(a, a_{\tau}) = \frac{a_{\tau}}{a} \quad \angle a, a_{\tau} = \alpha; \quad (84)$$

$$\cos(a, a_n) = \frac{a_n}{a}; \quad \angle a, a_n = 90^\circ - \alpha. \quad (85)$$

სასარგებლოა შევნიშნოთ, რომ თუ წერტილის ტრაექტორია სწორი ხაზია, მაშინ სიჩქარე შეიძლება შეიცვალოს მხოლოდ მოდულით. ამავე დროს თუ მოძრაობა არათანაბარია.

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} \neq 0.$$

რადგან სწორი ხაზის სიმრუდის რადიუსი ρ უსასრულობის ტოლია, ამიტომ

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0.$$

მაშასადამე, არათანაბარი სწორხაზოვანი მოძრაობის დროს წერტილს აქვს მხოლოდ ერთი მხები აჩქარება.

როდესაც წერტილი ასრულებს თანაბარ მრუდწირულ მოძრაობას და წერტილის \bar{v} სიჩქარე იცვლება მხოლოდ მიმართულებით, მოდუ-

ლი რჩება. უცვლელი, $|v| = \text{const}$, მხები აჩქარება $a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = 0$; ხოლო ნორმალური აჩქარება $a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$.

მაშასადამე, თანაბარი, მრუდწირული მოძრაობის დროს წერტილს გააჩნია მხოლოდ ერთი ნორმალური აჩქარება.

მე-10 ცხრილში მოცემულია a_{τ} და a_n მნიშვნელობები წერტილის მოძრაობის ხასიათის მიხედვით:

ცხრილი 10

a_{τ} და a_n სიდიდეები წერტილის მოძრაობის ხასიათის მიხედვით

წერტილის მოძრაობის ხასიათი	მხები აჩქარება	ნორმალური აჩქარება
არათანაბარი მრუდწირული	$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} \neq 0$	$a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$
არათანაბარი სწორხაზოვანი	$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} \neq 0$	$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$
თანაბარი მრუდწირული	$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = 0$	$a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$
თანაბარი — წრეხაზზე, რადიუსი	$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = 0$	$a_n = \frac{v^2}{R} = \text{const}$
თანაბარი სწორხაზოვანი	$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} \neq 0$	$a_n = \frac{v^2}{\infty} = 0$

მაგალითი IX. 6. ველომობილი მოძრაობს მოსახვევში $R = 25$ მ რადიუსით, 10 მ/წმ-ის ტოლი მუდმივი მოდულის სიჩქარით. განვსაზღვროთ აჩქარების სიდიდე.

ამოხსნა: მრბოლელი განიცდის მხოლოდ ნორმალურ აჩქარებას, რომელიც განისაზღვრება სიჩქარის ვექტორის მიმართულების ცვალეზადობით. მისი სიდიდე:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{100}{25} = 4 \text{ (მ/წმ}^2\text{)}.$$

მაგალითი IX. 7. გადახრის მცირე კუთხის შემთხვევაში ქანქარის ტვირთი (ნახ. 94) მოძრაობს l რადიუსის წრეხაზზე $s = bs \sin \alpha$

კანონით. ათვლის საწყისია O წერტილი; b და ω მუდმივი სიდიდეებია. ვიპოვოთ ტვირთის სიჩქარე, მხები, ნორმალური. აჩქარებები და ის მდებარეობები, რომლებშიც ეს სიდიდეები ნულის ტოლია.

ამოხსნა: სიჩქარეს ვპოულობთ, როგორც გზის წარმოებულს დროით:

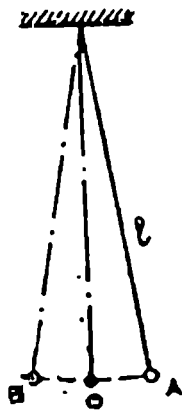
$$v = \frac{ds}{dt} = b\omega \cos \omega t.$$

მხების აჩქარება:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = -b\omega^2 \sin \omega t.$$

ნორმალური აჩქარება:

$$a_n = \frac{v^2}{l} = \frac{d^2 \omega^2}{l} \cos^2 \omega t.$$



ნახ. 94.

მოძრაობის მოცემული კანონიდან გამომდინარეობს, რომ ტვირთი ასრულებს ტრაექტორიის გასწვრივ ჰარმონიულ რხევებს b რკალური ამპლიტუდით. განაპირა მდებარეობებში (ე. ი. A და B წერტილებში) $\sin \omega t = \pm 1$ და შესაბამისად $\cos \omega t = 0$. ამიტომ განაპირა წერტილებში სიჩქარე და ნორმალური აჩქარება ნულის ტოლია; მხებ აჩქარებას კი აქვს მოდულით უდიდესი მნიშვნელობა: $a_{\tau \max} = b\omega^2$. როდესაც ტვირთი გადის ათვლის საწყისს, მაშინ $s=0$ და მაშასადამე $\sin \omega t = 0$, ხოლო $\cos \omega t = 1$. ამ მდებარეობაში, $a_{\tau} = 0$, ხოლო v -ს და a_n -ს მაქსიმალური მნიშვნელობები აქვს:

$$a_{n \max} = \frac{b^2 \omega^2}{l}.$$

შენიშვნა: ამ მაგალითში ნახევნები რხევითი მოძრაობა ძალიან ხშირად გვხვდება ფიზიკური ვარჯიშების შესრულების დროს. ასე, მაგალითად, ღერძზე ან რგოლებზე ტანმოვარჯიშის მიერ ვარჯიშის შესრულების დროს, მისი სხეული ზოგ ამოცანაში შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ფიზიკური ქანქარა. ფიზიკური ვარჯიშის პროცესში სპორტსმენის საყრდენ-მამოძრავებელი აპარატის ცალკეული რგოლი ასრულებს სახსრებში რხევით მოძრაობებს. მაგალითად, ბარძაყი სირბილის დროს შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ფიზიკური ქანქარა, რომელსაც დაკიდების წერტილი აქვს მენჯ-ბარძაყის სახსარში. სირბილში ძალიან მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ აჩქარების მიმარ-

თულება და სიდიდე, რომელთაც განიცდის ქვედა კიდურები. ამ აჩქარებების ცვლილებები განსაზღვრავენ არსებითად სირბილის დინამიკურ სტრუქტურას.

მაგალითი IX. 8. ციგით სწრაფდაშვების დროს სპორტსმენი იწყებს მოძრაობას მომრგვალებაზე $R=40$ მ რადიუსით და $S_1=30$ მ გავლისას, შეიძენს $v_1=36$ კმ/სთ სიჩქარეს. განვსაზღვროთ სპორტსმენის სიჩქარე და აჩქარება ამ გზის შუაში.

ამოხსნა. რადგანაც სპორტსმენი მოძრაობს თანაბრაჩქარებულად და ამავე დროს $v_0=0$, ამიტომ მისი მოძრაობის კანონი (თუ მივიჩნევთ, რომ $S_0=0$) იქნება:

$$S = \frac{1}{2} a_{\tau} t^2,$$

ხოლო მოძრაობის სიჩქარე: $v = a_{\tau} t$.

ამ განტოლებებიდან t -ს გამორიცხვით მივიღებთ $v^2 = 2 a_{\tau} S$. ამოცანის პირობის მიხედვით, როცა $S = S_1$, $v = v_1$. მაშასადამე:

$$a_{\tau} = \frac{v_1^2}{2S_1}.$$

გზის შუაში, როცა $S_2 = \frac{S_1}{2}$, სიჩქარე v_2 უდრის:

$$v_2 = \sqrt{2a_{\tau} S_2} = \sqrt{a_{\tau} S_1} = \frac{v_1}{\sqrt{2}}.$$

ნორმალური აჩქარება ტრაექტორიის ამ ადგილზე უდრის:

$$a_{n2} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{v_1^2}{R}.$$

მთლიანი აჩქარება გზის შუაში

$$a_2 = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_{n2}^2} = \frac{v_1^2}{2} \sqrt{\frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{R^2}}.$$

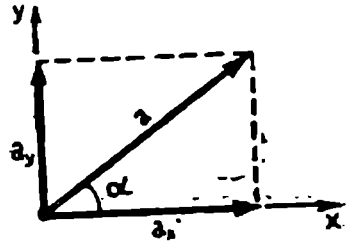
რიცხობრივი სიდიდეების ჩასმით მივიღებთ: $v_2 \approx 7,1$ მ/წმ; $a_2 \approx 2,2$ მ/წმ.

§ 17. წერტილის კოორდინატული ხაზით მოძრაობის
 მოძრაობის აჩქარების განსაზღვრა

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც წერტილი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას, რომელიც მოცემულია განტოლებებით: $x=f_1(t)$; $y=f_2(t)$.
 წერტილის სიჩქარის გეგმილები ამ შემთხვევაში იქნება:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

წერტილის აჩქარება მისი სიჩქარის ცვალებადობის სისწრაფეა და განსაზღვრული იყო, როგორც $\frac{dv}{dt}$. ამიტომ ანალოგიური მსჯელობით სიჩქარის განსაზღვრაზე, როგორც გზის ცვალებადობის სისწრაფეზე, შეიძლება ვთქვათ, რომ აჩქარების გეგმილები უძრავ კოორდინატთა ღერძებზე დროში სიჩქარის შესაბამის კოორდინატთა ღერძებზე გეგმილების პირველი წარმოებულის ან დროში წერტილის შესაბამისი კოორდინატების მეორე წარმოებულის ტოლია.



ნახ. 95.

ამრიგად; წერტილის აჩქარების გეგმილები იქნება

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (86)$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2}. \quad (87)$$

აჩქარების ცნობილი გეგმილებით (\bar{a}_x და \bar{a}_y) შეიძლება განვსაზღვროთ თვით აჩქარება (ნახ. 95). თუ შევკრებთ \bar{a}_x და \bar{a}_y , როგორც ვექტორებს, მივიღებთ \bar{a} აჩქარებას.

(\bar{a})-ს ნოდული იქნება:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} \quad (88)$$

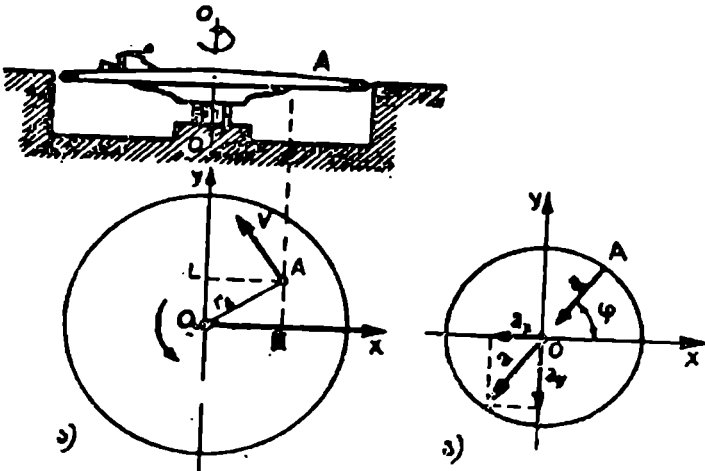
ვექტორის მიმართულება განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\cos \alpha = \cos(\bar{a}, \bar{x}) = \frac{a_x}{a}; \quad (89)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \cos(\overline{a}, \overline{y}) = \frac{a_y}{a} \quad (90)$$

მაგალითი IX. 9. 96, ანახაზე სქემატურად ნაჩვენებია ატრაქციონი „სიცილის ბორბალი“. A ბორბალი — ბაქანი, რომელიც მოწყობილია იატაკის ღონეზე, ბრუნვას იწყებს უძრავი ღერძის გარშემო. მოძრავ ბაქანზე დაწოლილი ან მდგომი ადამიანები აღმოჩნდებიან დიდი აჩქარებების გავლენის ქვეშ.

აუცილებელია გამოვსახოთ მოძრაობის განტოლებები სწორხაზოვან კოორდინატებში და განვსაზღვროთ სიჩქარე და აჩქარება ბაქნის A წერტილში. მანძილი A წერტილიდან OO' ღერძამდე $r_a = 3$ მ'. თავისი ღერძის გარშემო ბაქნის მობრუნების კუთხე იცვლება $\varphi = \omega t$ კანონით.



ნახ. 96.

ამოხსნა: ავიღოთ x და y კოორდინატთა ღერძების სისტემა კოორდინატთა საწყისით O წერტილში. A წერტილის კოორდინატები ამ სისტემაში:

$$x = OK = r \cos \varphi = r \cos \omega t;$$

$$y = OL = r \sin \varphi = r \sin \omega t.$$

სწორედ ეს განტოლებებია A წერტილის მოძრაობის კანონის განტოლებები. A წერტილის სიჩქარის გეგმილები კოორდინატულ ღერძებზე:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -r \omega \sin \omega t;$$

2

$$v_y = \frac{dy}{dt} = r\omega \cos \omega t.$$

A წერტილის სიჩქარის მოდული

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-r\omega \sin \omega t)^2 + (r\omega \cos \omega t)^2} = r\omega.$$

$$v = r\omega; \quad v = 4\omega; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

თუ $T = 15,7$ წმ, მაშინ $\omega = \frac{2 \cdot 3,14}{15,7} = 0,4$ (1/წმ); $v = r = 4 \cdot 0,4 =$

1,6 მ/წმ.

A წერტილის სიჩქარე სიდიდით მუდმივია. სიჩქარის ვექტორის მიმართულება ამ წერტილში შეიძლება განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$\cos(\overline{v}, x) = \frac{v_x}{v} = -\frac{r\omega \sin \omega t}{r\omega} = -\sin \omega t = -\sin \varphi;$$

$$\cos(\overline{v}, y) = \frac{v_y}{v} = \frac{r\omega \cos \omega t}{r\omega} = \cos \omega t = \cos \varphi.$$

A წერტილის აჩქარების გვეგმილები კოორდინატულ ღერძებზე:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = (-r\omega \sin \omega t)' = -r\omega^2 \cos \omega t;$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = (r\omega \cos \omega t)' = -r\omega^2 \sin \omega t.$$

აჩქარების მოდული:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-r\omega^2 \cos \omega t)^2 + (-r\omega^2 \sin \omega t)^2} = r\omega^2;$$

$$a = r\omega^2 = 4 \cdot (0,4)^2 = 4 \cdot 0,16 = 5,4 \text{ მ/წმ}^2.$$

აჩქარება სიდიდით მუდმივია და უდრის: $a = \frac{5,4}{9,8}$ $g = 0,55$ g , ე. ი.

მიწაზე თავისუფალი ვარდნის აჩქარების ნახევარზე ცოტათი მეტია.

აჩქარება, როგორც გაანგარიშებებმა გვიჩვენა, მნიშვნელოვანია. ზღუდვად იმისა, რომ სიჩქარის მოდული მუდმივია $|v| = 4\omega = \text{const}$. ეს აიხსნება იმით, რომ სიჩქარის მიმართულება უწყვეტად იცვლება.

A წერტილის აჩქარების \overline{a} ვექტორის მიმართულება შეიძლება განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$\cos(\bar{a}, x) = \frac{a_x}{a} = \frac{-r\omega^2 \cos\omega t}{r\omega^2} = -\cos\omega t = -\cos\varphi;$$

$$\cos(\bar{a}, y) = \frac{a_y}{a} = \frac{-r\omega^2 \sin\omega t}{r\omega^2} = -\sin\omega t = -\sin\varphi.$$

როგორც 96, ბ ნახაზიდან გამომდინარეობს, აჩქარება \bar{a} მიმართულია OA რადიუსით ცენტრისაკენ.

მაგალითი IX. 10. პარიზონტალური v_0 სიჩქარით გასროლილი სხეულის წერტილი მოძრაობს კანონით, რომელიც განისაზღვრება განტოლებებით:

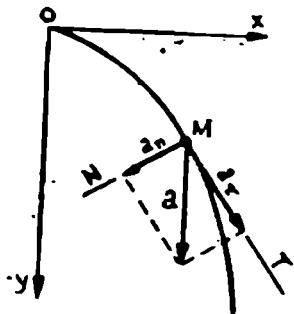
$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} g t^2,$$

სადაც v_0 და g მუდმივი სიდიდეებია.

მოძებნოთ წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია, სიჩქარე და აჩქარება; მისი მხები და ნორმალური აჩქარებები; ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი ნებისმიერ მდებარეობაში მიღებული მნიშვნელობების ამ მდებარეობაში წერტილის სიჩქარით გამოსახვით (ნახ. 97).

ამოხსნა. პირველი განტოლებიდან t -ს განსაზღვრით და მეორე განტოლებაში მისი ჩასმით მივიღებთ:

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$



ნახ. 97.

ამრიგად, წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია პარაბოლაა.

განესაზღვროთ წერტილის სიჩქარეების გეგმილები:

$$v_x = \dot{x} = v_0; \quad v_y = \dot{y} = gt.$$

აქედან:

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}.$$

რომ ვიპოვოთ წერტილის აჩქარება, მოვძებნოთ მისი გეგმილები: $a_x = \ddot{x} = 0$; $a_y = \ddot{y} = g$. შესაბამისად, $a = g$.

საჭიროა ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ წერტილის მოძრაობა აქ არათანაბარია, რადგან თანაბარი მოძრაობის პირობაა არა $a = \text{const}$,

არამედ $a_\tau = \text{const.}$ განხილულ მოძრაობაში კი, როგორც შემდეგ ვა-
მოჩნდება, a_τ არ არის მუდმივი.

აჩქარება გამოისახება ასე:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{g^2 t}{v}.$$

მაგრამ, რადგანაც $v^2 = v_0^2 + g^2 t^2$, $t = \frac{1}{g} \sqrt{v^2 - v_0^2}$.

t -ს ამ მნიშვნელობის გამოყენებით გამოვსახოთ a_τ v -ს საშუა-
ლებით:

$$a_\tau = \frac{g^2 t^2}{v} = g \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v^2}}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ როდესაც $v = v_0$, $a_\tau = 0$. შემდეგ v -ს
გაზრდით a_τ -ს სიდიდე გაიზრდება და $v \rightarrow \infty$ დროს $a_\tau \rightarrow g$. a_n -ს გან-
საზღვრისათვის მიემართოთ გამოსახულებას:

$$a_n^2 = a^2 - a_\tau^2 = g^2 - g^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{v^2}\right) = g^2 \frac{v_0^2}{v^2},$$

$$a_n = \frac{v_0 g}{v}.$$

ამრიგად, საწყის მომენტში (როდესაც $v = v_0$) $a_n = g$, ხოლო შემდ-
გომ v -ს ზრდით a_n -ს სიდიდე მცირდება ზღვარში 0-სკენ სწრაფვით.

ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსი შეიძლება განვსაზღვროთ ფორ-
მულით:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \text{ საიდანაც } \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^3}{v_0 g}.$$

საწყის მომენტში სიმრუდის რადიუსს აქვს უმცირესი მნიშვნელო-
ბა: $\rho_{\text{min}} = \frac{v^2}{g}$, შემდეგ v -ს ზრდით იგი იზრდება, და შესაბამისად,
ტრაექტორიის სიმრუდე მცირდება. $v \rightarrow \infty$ დროს $\rho \rightarrow \infty$, ხოლო სიმ-
რუდე მიისწრაფვის 0-სკენ.

რადგან ვიცით, რა არის წერტილის სიჩქარე და აჩქარება და შეგვიძლია მათი მოძრაობის სხვადასხვა ზერხით განსაზღვრა (ბუნებრივი და კოორდინატული) საინტერესოა განვიხილოთ წერტილის მოძრაობის ზოგიერთი კერძო შემთხვევა:

1. სწორხაზოვანი მოძრაობა. სწორხაზოვანი მოძრაობის დროს წერტილის ტრაექტორია სწორი ხაზია. სწორ ხაზში სიმრუდე არ არსებობს, სიმრუდის რადიუსი $\rho = \infty$. ამიტომ ნორმალური აჩქარება არ არის:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{\infty} = 0$$

წერტილის a აჩქარება მხოლოდ ერთი მხევი აჩქარების ტოლია:

$$a = \bar{a} = \frac{dv}{dt}$$

სწორხაზოვანი მოძრაობის დროს აჩქარება მიმართულია ტრაექტორიის გასწვრივ. ამიტომ მხევის აჩქარება ახასიათებს სიჩქარის რიცხობრივ ცვლილებას.

2. თანაბარი მრუდწირული მოძრაობა. წერტილის თანაბარ მრუდწირულ მოძრაობას უწოდებენ ისეთ მოძრაობას; რომელშიც სიჩქარის რიცხობრივი სიდიდე მუდმივი რჩება: $v = \text{const}$. ამ შემთხვევაში

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0.$$

წერტილის მთელი აჩქარება განისაზღვრება მხოლოდ ერთი ნორმალური აჩქარებით: $\bar{a} = a_n = \frac{v^2}{\rho}$. \bar{a} ვექტორი მიმართულია წერტილის ტრაექტორიის ნორმალით. აჩქარება ვიტარდება მხოლოდ სიჩქარის მიმართულების ცვლილების შედეგად, ამიტომ ნორმალური აჩქარება ახასიათებს მიმართულებით სიჩქარის ცვლადობას.

ასეთი მოძრაობის მაგალითია უროს მოძრაობა. დამყარებულ რეჟიმში, როდესაც ხაზოვანი სიჩქარე უკვე მეტად აღარ მატულობს.

წერტილის s სიჩქარე ამ შემთხვევაში უდრის: $v = \frac{ds}{dt}$. ეს გვაძლევს საშუალებას განვსაზღვროთ dt დროში წერტილის მიერ განვლილ გზა: $ds = v dt$.

დავუშვათ, მოძრაობის საწყის მომენტში ($t=0$) წერტილი კოორდინატთა საწყისიდან S_0 მანძილზეა. რომ მოვძებნოთ წერტილის მიერ განვლილი გზა t სასრულ დროში, აუცილებელია მიღებული განტოლება გავაინტეგრელოთ. ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებიდან განსაზღვრული ინტეგრალების შესაბამის საზღვრებში ალებით მივიღებთ.

$$\int_{S_0}^S dS = \int_0^t v dt.$$

ინტეგრალის ქვეშ ინდექსი უჩვენებს, რომ გზა ათვლილია რომელიმე საწყისი მნიშვნელობიდან. ინტეგრების შედეგად $v = c \operatorname{const}$ გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\int_{S_0}^S dS = \int_0^t v dt; \quad |S|_{S_0} = |vt|'_0; \\ S - S_0 = vt \quad \text{ან} \quad S = S_0 + vt. \quad (91)$$

თუ დავუშვებთ, რომ $S_0 = 0$, ე. ი. გზის ათვალი დაიწყო მოძრაობის დასაწყისში, მაშინ t დროში წერტილის მიერ განვლილი გზა იქნება:

$$S = vt.$$

შესაბამისად; თანაბარი მოძრაობის დროს წერტილის მიერ განვლილი გზა იზრდება დროის პროპორციულად, ხოლო მოძრაობის სიჩქარე დროსთან გზის შეფარდების ტოლია.

3. თანაბარი სწორხაზოვანი მოძრაობა. როდესაც სწორხაზოვანი მოძრაობა თანაბარია, მაშინ $v = \operatorname{const}$ და $a_c = \frac{dv}{dt} = 0$. შესაბამისად წერტილის თანაბარი სწორხაზოვანი მოძრაობისას აჩქარება უდრის სულს:

$$\overline{a} = \overline{a_c} + \overline{a_n} = 0.$$

აქ, როგორც წინა შემთხვევაში, $S = S_0 + vt$; $S_0 = 0$; $S = vt$; $v = \frac{S}{t} = \operatorname{const}$ დროს.

4. თანაბარცვლადი მრუდწირული მოძრაობა. თანაბარცვლადი ეწოდება წერტილის ისეთ მრუდწირულ მოძრაობას, რომლის დროსაც მხრების აჩქარება ყოველთვის მუდმივ სიდიდედ რჩება; $a_c = \operatorname{const}$.

ამ მოძრაობის კანონი $S=f(t)$ შეიძლება განისაზღვროს ასე: დავუშვათ, რომ $t=0$ დროს $S=S_0$; $v=v_0$, სადაც v_0 წერტილის საწყისი სიჩქარეა. მხების აჩქარება უდრის:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}.$$

შესაბამისად, $dv = a_{\tau} dt$.

პირობის თანახმად, $a_{\tau} = \text{const}$. თუ გავაინტეგრალეთ ტოლობის ორივე მხარეს

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_{\tau} dt = a_{\tau} \int_0^t dt,$$

მივიღებთ $v - v_0 = a_{\tau} t$, ან $v = v_0 + a_{\tau} t$.

რადგან ვიცით, რომ $v = \frac{dS}{dt}$, მივიღებთ:

$$\frac{dS}{dt} = v_0 + a_{\tau} t \quad \text{ან} \quad dS = (v_0 + a_{\tau} t) dt.$$

მეორეჯერ ინტეგრებით მივიღებთ წერტილის თანაბარცვლად მრუდწირულ მოძრაობას:

$$S = S_0 + v_0 t + a_{\tau} \frac{t^2}{2}. \quad (92)$$

თუ მრუდწირული მოძრაობისას სიჩქარის მოდული დროის მიხედვით იზრდება, მაშინ მოძრაობას ეწოდება აჩქარებულნი, ხოლო თუ მცირდება — შენელებული.

რადგან სიჩქარის მოდულის ცვალებადობას ახასიათებს მხების აჩქარება, ამიტომ მოძრაობა იქნება აჩქარებული, თუ v და a_{τ} სიდიდეებს აქვს ერთნაირი ნიშნები, და შენელებული, თუ მათ აქვთ სხვადასხვა ნიშანი.

სპორტულ მოძრაობებში ხშირად გვხვდება ისეთი მოძრაობები, რომელთა კანონში გზა t უფრო მეტი რიგის ფუნქციაა, ვიდრე 2.

5. სწორხაზოვანი არათანაბარცვლადი მოძრაობა. განვიხილოთ სწორხაზოვანი მოძრაობა, რომლის კანონში გზა t^2 -ს ფუნქციაა. დავუშვათ, $a_{\tau} = \text{const}$; $a_{\tau} = a$; $\frac{da}{dt} = k = \text{const}$; $dt = k dt$.

ტოლობის ორივე ნაწილის გაინტეგრებით

$$\int_{a_0}^a da = \int_0^t k dt; \quad a - a_0 = kt,$$

მივიღებთ, რომ აჩქარება უდრის: $a = a_0 + kt$.

მაგრამ აჩქარება არის $\frac{dv}{dt}$, ამიტომ

$$\frac{dv}{dt} = kt + a_0$$

აბ $dv = (kt + a_0)dt$;

ამ გამოსახულების ორივე ნაწილის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t (kt + a_0)dt; \quad v - v_0 = a_0t + \frac{kt^2}{2}$$

$$v = v_0 + a_0t + \frac{kt^2}{2}.$$

რადგან ვიცით, რომ წერტილის სიჩქარე არის $\frac{dS}{dt}$, მივიღებთ:

$$\frac{dS}{dt} = \left(v_0 + a_0t + \frac{kt^2}{2} \right)$$

აბ

$$dS = \left(v_0 + a_0t + \frac{kt^2}{2} \right) dt.$$

ამ გამოსახულების ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int_{S_0}^S dS = \int_0^t \left(v_0 + a_0t + \frac{kt^2}{2} \right) dt;$$

$$S = S_0 + v_0t + \frac{a_0t^2}{2} + \frac{kt^3}{6}.$$

იმ შემთხვევებში, როდესაც $S_0 = 0$; $v_0 = 0$; $a_0 = 0$.

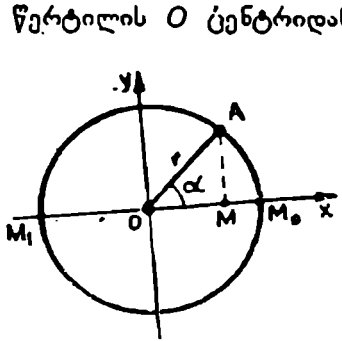
$$S = \frac{kt^3}{6}.$$

6. ჰარმონიული რხევა. განვიხილოთ წერტილის სწორხაზოვანი

მოძრაობა, რომლის დროსაც კოორდინატა საწყისიდან მისი დაშორება x იცვლება დროში შემდეგი კანონით:

$$x = r \cos \omega t. \quad (93)$$

დაეუვათ, რომ A წერტილი (ნახ. 98) ასრულებს თანაბარ მოძრაობას წრეწირზე r რადიუსით. ამ დროს წერტილის გეგმილი მოძრაობს Ox ღერძზე. ამ გეგმილის სიდიდე უდრის $r \cos \alpha$, სადაც $\alpha = \omega t$. ამ დროს წერტილი M ასრულებს რხევას $M_0(x = +r)$ და $M_1(x = -r)$ მდებარეობას შორის, რომელიც აიწერება განტოლებით $x = r \cos \omega t$. ასეთ რხევებს ეწოდება მარტივი ჰარმონიული რხევები.



ნახ. 98. |

წერტილის O ცენტრიდან უდიდესი დაშორების ტოლ r სიდიდეს ეწოდება რხევის ამპლიტუდა. $t = 0$ დროს წერტილი $M_0(x = +r)$ მდებარეობაშია, შემდეგ t -ს ზრდასთან ერთად წერტილი მარცხნივ გადაადგილდება, ნულოვანი მდებარეობის გავლით იგი აღწევს $M_1(x = -r)$ მდებარეობას, შემდეგ კვლავ გადაადგილდება მარჯვნივ და t_1 მომენტში, რომლისთვისაც $\cos \omega t = +1$, ე. ი. როდესაც $\omega t_1 = 2\pi$, იკავებს M_0 მდებარეობას. შემდგომში აღწერილი ციკლი მეორდება.

დროის $t_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ შუალედი, რომლის განმავლობაშიც წერტილი ასრულებს ერთ მთლიან რხევას, ჩვეულებრივად აღინიშნება T ასოთი და ეწოდება რხევის პერიოდს:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

$f = \frac{1}{T}$ სიდიდეს, რომელიც წერტილის 1 წამში შესრულებული რხევის რიცხვის ტოლია, ეწოდება რხევის ხაზოვანი სიხშირე. თუ T -ს განზომილებაა დრო (წამები), მაშინ განზომილება

$$[f] = \frac{1}{(\text{დრო})} = \frac{1}{\text{წმ}} = \text{წმ}^{-1}.$$

სიდიდე ω რხევის წრბული სიხშირეა. ისიც ასევე

იზომება წმ¹-ობით. რომ განვსაზღვროთ რხევის სიჩქარე და აჩქარება (რიცხობრივი სიდიდეები), საჭიროა ავიღოთ x -ის t -ით წარმოებულები:

$$v = v_x = (r \cos \omega t)' = -r \omega \sin \omega t;$$

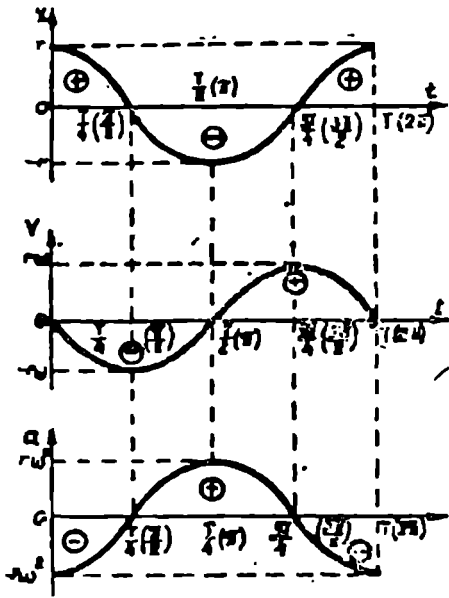
$$a = v_x' = (r \cos \omega t)'' = -r \omega^2 \cos \omega t.$$

საინტერესო და უკიდურესად მნიშვნელოვანია აღვნიშნოთ, რომ წერტილის როგორც სიჩქარე, ასევე აჩქარებაც დროში ცვლილებისას ასრულებს პარმონიულ რხევებს. რხევითი მოძრაობის გზის (x), სიჩქარისა (v) და აჩქარების (a) სიდიდეების გრაფიკები ნაჩვენებია 99-ე ნახაზზე.

§ 10. წარბილის კინემატიკის კვლევა გრაფიკული დიფერენცირების კეთილდღი

მექანიკაში გრაფიკული დიფერენცირების წესი ემყარება შემდეგ მათემატიკურ დამოკიდებულებებს:

1. თუ წარმოებული დადებითია, მაშინ ფუნქცია იზრდება. მაგალითად, თუ აჩქარება დადებითია, მაშინ სიჩქარე იზრდება.
2. თუ წარმოებული უარყოფითია, მაშინ ფუნქცია მცირდება. მაგალითად, თუ წარმოებული უარყოფითია, მაშინ გზა მცირდება (მოძრაობა მიდის საწინააღმდეგო მხარეს).
3. თუ ფუნქცია მუდმივია, მაშინ მისი წარმოებული ნულის ტოლია. მაგალითად, სიჩქარე მუდმივია—აჩქარება არ არის.
4. ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობების (მაქსიმუმი და მინიმუმი) შემთხვევაში წარმოებული ნულს უდრის. მაგალითად, თუ სიჩქარემ მიაღწია მაქსიმუმს რომელიმე წერტილში, მაშინ მანამდე იგი იზრდებოდა, ნოლო შემდეგ დაიწყო კლება. ამრიგად, მოცემული წერტილი ახასიათებს აჩქარებიდან შენელებაზე გადასვლას, შესაბამისად, მასში აჩქარება უდრის ნულს.
5. „გადალუნვის“ წერტილებში ფუნქციის წარმოებულს აქვს მაქსიმალური ან მინიმალური მნიშვნელობა. ფუნქციის „გადალუნვის“ წერტილი აღნიშნავს მხების ამ ფუნქციის ხაზთან დახრის კუთხის ტანგენსის მატებას ან შემცირებას. თვით მხების დახრის კუთხის ტანგენსი ახასიათებს წარმოებულს.
6. თუ წარმოებული მუდმივია, მაშინ ფუნქცია სწორხაზოვანია. მაგალითად, თუ აჩქარება მუდმივია, მაშინ სიჩქარე იცვლება სწორხაზოვანი კანონით. თუ წარმოებული სწორხაზოვანია, მაშინ ფუნქცია მეორე რიგის მრუდია. თუ წარმოებული მეორე რიგის მრუდია, მაშინ ფუნქცია მესამე რიგის მრუდია და ა. შ.



ნახ. 92.

ამ წესების შემოწმება ძნელი არ არის, თუ განვიხილავთ, მაგალითად, 99-ე ნახაზზე წარმოდგენილ დამოკიდებულებებს.

გრაფიკული დიფერენცირების მეშვეობით შეიძლება მოძრაობის მოცემული კანონით ავაგოთ სიჩქარისა და აჩქარების გრაფიკები. სპორტულ კვლევებში გზის გრაფიკი მიიღება კინოგადაღების ან სხვა ფაქტიური მასალების დამუშავების საფუძველზე. რუკა — საზომზე გაზომვის შედეგად მივიღებთ: $S=S(t)$; $x=x(t)$; $y=y(t)$. ამიტომ $S=S(t)$ -ს დიფერენცირებით ეპოულობთ სიჩქარის გრაფიკს: $v=f(t)$, ან $x=x(t)$ $y=y(t)$ დიფერენცირებით ვღებულობთ $\dot{x}=v_x$ და $\dot{y}=v_y$, სა-

დაც v_x და v_y სიჩქარის გეგმილებია x და y ღერძებზე.

განმეორებადი დიფერენცირება საშუალებას მოგვცემს მივიღოთ აჩქარების გრაფიკები დროის მიხედვით.

გრაფიკული დიფერენცირების ხერხები შედარებით მარტივია და, თუ ზოგიერთი ჩვევა გვაქვს მცირე დროს გვართმევს. უფრო მარტივია „ნამატის მეთოდი“. იგი დამყარებულია იმაზე, რომ საკმაოდ მცირე Δt ინტერვალის დროს შესასწავლი წერტილის სიჩქარე და აჩქარება იიღება ცვალებადად დაახლოებით სწორხაზოვანი კანონით, ხოლო საშუალო სიჩქარე და საშუალო აჩქარება, გამოთვლილი ამ ინტერვალისათვის, ემთხვევა მათ ჰემშარიტ მნიშვნელობებს ინტერვალის შუალედში. განვიხილოთ ეს მეთოდი უბრალო მაგალითით.

ავიღოთ $S=S(t)$ მრუდის მცირე მონაკვეთი (ნახ. 100). გამოვყოთ აბსცისთა ღერძზე 2—3, 3—4, 4—5 მონაკვეთები; თითოეული მონაკვეთის სიგრძე უდრის 2 სმ-ს. აბსცისთა ღერძზე გადაზომილია დრო: 1 სმ = μ_1 წმ = 0,05 წმ, შესაბამისად მასშტაბი $\mu_1=0,05$. ორდინატთა ღერძზე გადაზომილია გზა მეტრობით: 1 სმ = 2 მ = μ_2 მ, ამიტომ $\mu_2=2$.

მივიჩნიოთ, რომ $v_{საშ} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, საშუალო მნიშვნელობა მივაკუთვნოთ

მონაკვეთის შუა წერტილს. 2—3 მონაკვეთისათვის $\Delta S_{2-3} = S_3 - S_2 = 3,3$ სმ — 1,5 სმ = 1,8 სმ. 2¹ წერტილიდან მოსახერხებელია გავავ-

ლოთ აბსცისთა. ღერძის პარალელური ხაზი, მაშინ მონაკვეთი 3¹¹—3¹ იქნება ΔS_{3-2} -ის ტოლი. ცხადია, a წერტილზე მიკუთვნებული $v_{სა,ა}$, რომელიც 2—3 მონაკვეთის შუაშია, $\frac{\Delta S_{3-2}}{\Delta t}$ -ს ტოლი იქნება. $v_{სა,ა}$ -ს რიცხვითი მნიშვნელობა დამოკიდებულია მხოლოდ ამ გრაფიკის გამოხაზვის დროს მოცემულ მასშტაბებზე.

რადგან Δt -ს განმსაზღვრელი 2—3, 3—4 მონაკვეთები ერთმანეთის ტოლია, ამიტომ სიჩქარის სიდიდე დამოკიდებულია მხოლოდ ΔS სიდიდეზე.

$v_{სა,ა}$ -ს სიჩქარისათვის μ_v მასშტაბი, განსაზღვრული მე-100 ნახაზის მონაკვეთებით, უდრის:

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t \Delta t} = \frac{2}{0,005 \cdot 2} = 20 \text{ (მ/წმ/სმ)}$$

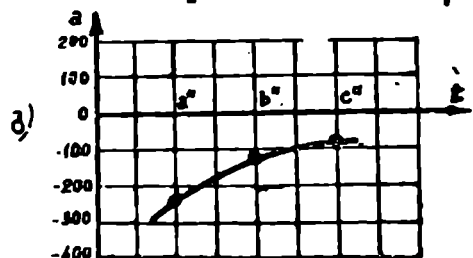
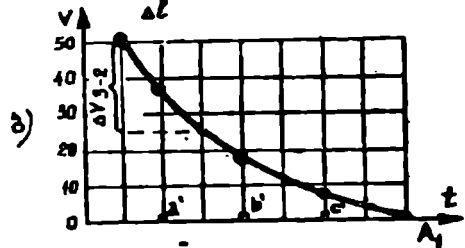
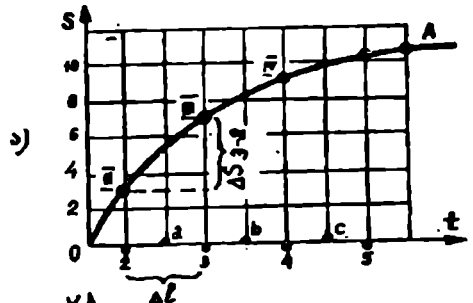
ეს საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ სიჩქარე a 2—3 მონაკვეთზე. მდებარე წერტილისათვის, b წერტილისათვის — 3—4 მონაკვეთზე, c წერტილისათვის — 4—5 მონაკვეთზე ა. შ.

$$v_{3-2} = \Delta S_{3-2} \mu_v = 1,8 \cdot 20 = 36 \text{ მ/წმ};$$

$$v_{4-3} = \Delta S_{4-3} \mu_v = 0,8 \cdot 20 = 16 \text{ მ/წმ};$$

$$v_{5-4} = \Delta S_{5-4} \mu_v = 0,4 \cdot 20 = 8 \text{ მ/წმ}.$$

სიჩქარის გრაფიკის გამოხაზვისათვის საჭიროა შევარჩიოთ მასშტაბი ორდინატთა ღერძისათვის. მაგალითად, სიჩქარეების გამოთვლილი სიდიდეებიდან გამომდინარე, მივიღებთ $\mu = 10$, ე. ი. 1 სმ — 10 მ/წმ. გამოთვლილი სიჩქარეების სიდიდეები გადავზომოთ a' , b' , c' და ა. შ. წერტილებზე გამავალ ვერტიკალურებზე (იხ. ნახ. 100, ბ).



ნახ. 100.

მე-100, ა და მე-100, ბ ნახაზების ერთ ფურცელზე განლაგება, საშუალებას მოგვცემს მივიღოთ აბსცისთა ღერძზე A_1 წერტილი (ნახ. 100, ბ). რადგანაც მრუდის ექსტრემუმს (მოცემულ შემთხვევაში მრუდის A წერტილში მაქსიმუმს, ნახ. 100, ა) შეესაბამება ნულის ტოლი წარმოებული, ამიტომ

$$v = \frac{dS}{dt} = 0.$$

მაშასადამე, თუ A წერტილიდან (ნახ. 100, ა) დაეუშვებთ აბსცისთა ღერძზე პერპენდიკულარს (ნახ. 100, ბ), მაშინ მათი გადაკვეთის A_1 წერტილი შეესაბამება $v=0$ მნიშვნელობას.

ხელახლა მიღებული მრუდი ყოველთვის უნდა შევამოწმოთ ექსტრემუმებზე (მაქსიმუმებსა და მინიმუმებზე) საწყისი დიფერენცირებადი მრუდით. ეს საშუალებას მოგვცემს მოვძებნოთ დამატებითი საყრდენი (საიმედო) წერტილები.

ზუ სიჩქარეების მიღებულ მრუდს $v=f(t)$ (ნახ. 100, ბ) ხელახლა გაავადიფერენცირებთ, მაშინ მივიღებთ საკლავი წერტილის აჩქარების მრუდს, რადგან

$$a = \frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

რომ მიიღონ აჩქარების მრუდი $a=f(t)$, ისევე იქცევიან, როგორც სიჩქარეების განსაზღვრის დროს.

მრუდზე (ნახ. 100, ბ) ΔS_{0-2} , ΔS_{4-3} სწვობები საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ a , b , c წერტილებისათვის აჩქარების მნიშვნელობა. განვსაზღვროთ აჩქარების მასშტაბი μ_a , 100, ბ ნახაზის მრუდისათვის, ფორმულით:

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_t \Delta t}.$$

μ_t და Δt მნიშვნელობები ადრინდელი, უცვლელად დარჩა: $\mu_t = 0,05$; $\Delta t = 2,0$. ნახაზზე მასშტაბი ორდინატთა ღერძებზე: 1 სმ = 10 მ/წმ, ამიტომ $\mu_v = 10$.

$$\mu_a = \frac{10}{0,05 \cdot 2,5} = 100 \text{ (მ/წმ}^2\text{/სმ)}.$$

a' წერტილისათვის $a = \Delta v_{3-2} \mu_a = -2,5 \times 100 = -250 \text{ მ/წმ}^2$.

b' წერტილისათვის $\Delta v_{4-3} = -1,3$ სმ; $a = \Delta v_{4-3} \mu_a = -1,3 \cdot 100 = -130 \text{ მ/წმ}^2$ და ა. შ.

ამ წერტილებისათვის აჩქარებები უარყოფითია, რადგანაც სიჩქარის მრუდი კლებულობს.

მყარი სხეულის კინემატიკა

§ 50. წინსვლითი მოძრაობა

კინემატიკაში, ისევე როგორც სტატიკაში, განიხილავენ აბსოლუტურად მყარ სხეულებს, სხეულის ორ ნებისმიერ წერტილს შორის მანძილს უცვლელად მიიჩნევენ. მყარი სხეულის კინემატიკის ამოცანაა უპირველეს ყოვლისა მოძრაობის მოცემა და მეორეც, მთლიანი სხეულის, ასევე სხეულის თითოეული წერტილის მოძრაობის კინემატიკური მახასიათებლების შესწავლა.

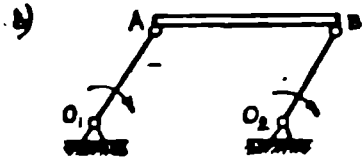
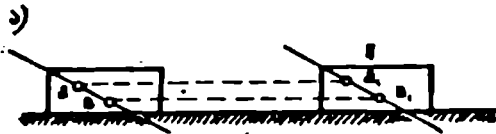
მყარი სხეულის ყველაზე უფრო უმარტივესი მოძრაობაა წინსვლითი. მყარი სხეულის წინსვლით მოძრაობას უწოდებენ ისეთ მოძრაობას, რომლის დროსაც ამ სხეულთან უცვლელად დაკავშირებული ყოველი სწორი ხაზი მოძრაობს დარჩება თავისი თავის პარალელური. წინსვლითი მოძრაობა არ უნდა ავურიოთ სწორხაზოვანში. სხეულის წინსვლითი მოძრაობის დროს მისი წერტილების ტრაექტორიები შეიძლება იყოს ნებისმიერი მრუდი ხაზები. განვიხილოთ წინსვლითი მოძრაობის მაგალითები.

1. თუ A სხეული (ნახ. 101,ა) გადაადგილდება პორიზონტალურ ზედაპირზე სწორი ხაზის გასწვრივ I მდებარეობიდან II მდებარეობაში, მაშინ მისი ყველა წერტილის ტრაექტორია იქნება სწორი ხაზები და შესაბამისად სწორი ხაზი, გავლებული a და b წერტილებზე, გადაადგილდება თავისი თავის პარალელურად.

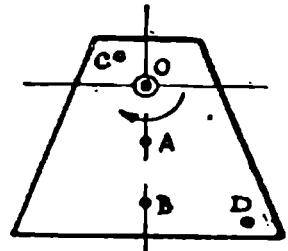
2. 101-ე ბ ნახაზზე ნაჩვენებია მექანიზმი, რომელსაც ეწოდება საულლი. AB სხეული O_1A და O_2B ($O_1A = O_2B$) მრუდმხარების პრუენის დროს ასრულებს წინსვლით მოძრაობას, რადგან ამ სხეულში გავლებული ნებისმიერი სწორი ხაზი დარჩება თავისი თავის პარალელური. AB სხეულის ყველა წერტილი მოძრაობს წრეხაზზე.

ტერმინი „წინსვლითი მოძრაობა“ გამოიყენება მხოლოდ სხეულების მოძრაობისათვის, მისი გამოყენება წერტილის მოძრაობისათვის არ შეიძლება. წინსვლითი მოძრაობის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება: მყარი სხეულის წინსვლითი მოძრაობის დროს მისი ყველა წერტილი მოძრაობს ერთნაირ და პარალელურად განლაგებულ ტრაექტორიებზე და დროის თითოეულ მოცემულ მომენტში აქვთ ტოლი სიჩქარეები და ტოლი აჩქარებები. ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ სხე-

ულის წინსვლითი მოძრაობა სავსებით განისაზღვრება მისი რომელიმე ერთი წერტილის მოძრაობით.



ნახ. 101.



ნახ. 102.

მაშასადამე, მყარი სხეულის წინსვლითი მოძრაობის შესწავლა დაიყვანება წერტილის მოძრაობის შესწავლაზე, ე. ი. წერტილის კინემატიკის იმ ამოცანებზე, რომლებიც უკვე იყო განხილული.

აუცილებელია შევნიშნოთ, რომ სხეულის სიჩქარესა და აჩქარებაზე ლაპარაკი (როცა ვიცით ერთი წერტილის სიჩქარე და აჩქარება) შეიძლება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ამ სხეულის მოძრაობა წინსვლითია. სხეულის ყველა სხვა ტიპის მოძრაობის დროს ამის გაკეთება არ შეიძლება, ვინაიდან სხეულის სხვადასხვა წერტილს სხვადასხვა სიჩქარე და აჩქარება აქვს. მაგალითად, 102-ე ნახაზზე ნაჩვენებია O წერტილის გარშემო მბრუნავი ფირფიტის მოძრაობა. A , B , C და D წერტილებს სხვადასხვა სიჩქარე და აჩქარება აქვს.

§ 51. ბრუნვითი მოძრაობა

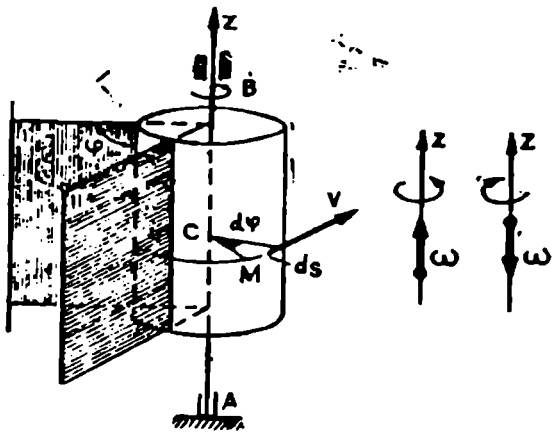
ბრუნვითი მოძრაობა ეწოდება მყარი სხეულის ისეთ მოძრაობას, რომლის დროს მდსი რომელიმე ორი წერტილი ყოველთვის უძრავი რჩება.

103-ე ნახაზზე ნაჩვენებია სხეული, რომელიც ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას. A და B უძრავ წერტილებზე გამავალ AB — სწორს ეწოდება ბრუნვის ღერძი. ყველა წერტილი, რომელიც ბრუნვის ღერძს მიეკუთვნება, უძრავი იქნება; სხეულის ყველა დანარჩენი წერტილი აღწერს წრეხაზებს, რომელთა სიბრტყეები ბრუნვის ღერძის პერპენდიკულარულია, ხოლო ცენტრები დევს ამ ღერძზე.

რომ განვსაზღვროთ მბრუნავი სხეულის მდებარეობა, საჭიროა



ნახ. 103.



ნახ. 104.

ბრუნვის AZ ღერძზე გავატაროთ ორი სიბრტყე: I — უძრავი, II — თითქოსდა შექრილი მბრუნავ სხეულში და ამიტომაც მასთან ერთად წბრუნავი (ნახ. 104). ამ ორი სიბრტყის არსებობა საშუალებას გვაძლევს გამოვსახოთ ცალსახად სხეულის მდებარეობა მათ შორის ფკუთხით. ფკუთხეს უწოდებენ სხეულის მობრუნების კუთხეს. მას მიიჩნევენ დადებითად, თუ იგი გადაზომილია უძრავი სიბრტყიდან საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, დამკვირვებლისათვის, რომელიც უცქერს O ღერძის დადებითი ბოლოდან, და უარყოფითად, თუ დამკვირვებელი დაინახავს სიბრტყის მოძრაობას საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

შეგახსენებთ, რომ კუთხეების გრადუსებში გაზომვასთან ერთად მექანიკაში იყენებენ რადიანულ გაზომვას. α კუთხის სიდიდე — ნებისმიერი წრეხაზისათვის ცენტრალური — იზომება ამ კუთხის საყრდენი რკალის l სიგრძის შეფარდებით ამ წრეხაზის r რადიუსის სიგრძესთან: $\alpha = \frac{l}{r}$. ამ დროს განზომილების ერთეულად მიღებულია რადიანი — კუთხე, რომელიც ცენტრალურია რკალისათვის, რომლის სიგრძე წრეხაზის რადიუსის ტოლია. 1 რადიანი $\frac{180}{\pi} = 57^{\circ}17'44''$ -ის ტოლია. $1^{\circ} = 0,01745$ რადიანს. ერთი განზომილებიდან მეორეზე გადასვლა ხდება ფორმულებით:

$$\alpha^{\circ} = \frac{180}{\pi} \alpha \quad (\text{რადიანები}); \quad \alpha \text{ (რადიანები)} = \frac{\pi}{180} \alpha^{\circ}.$$

კერძოდ, $360^\circ = 2\pi$ რად; $180^\circ = \pi$ რად. $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ რად.

რომ ვიცოდეთ სხეულის მღებარეობა ღრვის ნებისმიერ მომენტში, საჭიროა ვიცოდეთ φ კუთხის დამოკიდებულება t დროზე:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (94)$$

94-ე განტოლება გამოხატავს სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის კანონს და ეწოდება სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის განტოლება.

მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის ძირითადი კინემატიკური მახასიათებლებია მისი კუთხური სიჩქარე და კუთხური აჩქარება ϵ .

დავეშვათ, სხეულმა შეასრულა შემობრუნება $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ კუთხით $\Delta t = t_1 - t_0$ დროის შუალედში. მისი საშუალო კუთხური სიჩქარე დროის ამ შუალედში იქნება:

$$\omega_{\text{სა}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

კუთხური სიჩქარე დროის მოცემულ t მომენტში $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ სიდიდის ზღვარია, რომელსაც Δt დროის შუალედი მიისწრაფვის ნულისაკენ.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ან} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (95)$$

მაშასადამე, სხეულის კუთხური სიჩქარე დროის მოცემულ მომენტში რიცხობრივად ტოლია მობრუნების კუთხის პირველი წარმოებულისა დროით.

ω -ს წინ ნიშანი განსაზღვრავს სხეულის ბრუნვის მიმართულებას; საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ ბრუნვის დროს $\omega > 0$, ხოლო როდესაც ბრუნვა ხდება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, მაშინ $\omega < 0$.

როგორც ცნობილია, კუთხეები იზომება რადიანებით, დრო-წამებით. ამიტომ კუთხური სიჩქარის განზომილება იქნება:

$$|\omega| = \left[\frac{\text{კუთხე}}{\text{დრო}} \right] = \left[\frac{\text{რადიანი}}{\text{წამი}} \right]$$

რადგან რადიანი $\frac{\text{რკალის სიგრძე}}{\text{რადიუსი}} = \frac{\text{სიგრძე}}{\text{სიგრძე}}$ შეუარღების ტოლია,

ამიტომ კუთხური სიჩქარის განზომილება იქნება:

$$|\omega| = \left[\frac{\text{რადიანი}}{\text{წამი}} \right] = \frac{1}{\text{წმ}}.$$

სხეულის კუთხური სიჩქარე შეიძლება გამოვსახოთ ω ვექტორის სახით, რომლის რიცხობრივი სიდიდე უდრის $|\omega| = \frac{d\varphi}{dt}$ და რომელიც

მიმართულია ბრუნვის ღერძის გასწვრივ იმ მხარეს, საიდანაც ბრუნვა ხანს საათის ისრის მიმართულების საწინააღმდეგო მხარეს (იხ. ნახ. 104). ასეთი ვექტორი განსაზღვრავს კუთხური სიჩქარის $|\omega|$ მოდულს, ღერძს, რომლის გარშემო ხდება ბრუნვა, და ამ ღერძის გარშემო ბრუნვის მიმართულებას.

კუთხური აჩქარება წარმოდგენას გვაძლევს სხეულის კუთხური სიჩქარის ცვალებადობაზე დროის მიმდინარეობაში. დავუშვათ, სხეულის კუთხური სიჩქარე შეიცვალა $\omega_1 - \omega$ -ს ტოლი $\Delta\omega$ სიდიდით $t_1 - t$ -ს ტოლი Δt დროის შუალედში, ამ დროს სხეულის საშუალო კუთხური აჩქარება $\Delta\omega$ დროში რიცხობრივად იქნება:

$$\bar{\omega}_{\text{ს.ა.}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

სხეულის კუთხური აჩქარება დროის მოცემულ t მომენტში ტოლი იქნება ზღვრისა, რომლისკენაც მიისწრაფვის $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ სიდიდე, როდესაც

Δt მიისწრაფვის ნულისაკენ. მაშასადამე, $\epsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$ ცნობილია, რომ ω თავის მხრივ, უდრის:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

ამიტომ

$$\epsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (96)$$

სხეულის კუთხური აჩქარება დროის მოცემულ მომენტში რიცხობრივად ტოლია კუთხური სიჩქარის პირველი წარმოებულისა ან სხეულის მობრუნების კუთხის მეორე წარმოებულისა დროით.

კუთხური აჩქარების განზომილება შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად:

$$\varepsilon = \left[\frac{\text{სიჩქარე}}{\text{დრო}} \right] = \left[\frac{\frac{\text{რაღიანი}}{\text{წამი}}}{\frac{\text{წამი}}{\text{წამი}}} \right] = \left[\frac{\text{რაღიანი}}{\text{წამი}^2} \right] = \frac{1}{\text{წმ}^2}$$

კუთხური აჩქარება შეიძლება წარმოვიდგინოთ \vec{e} ვექტორის სახით, რომელიც მიმართულია სხეულის ბრუნვის ღერძის გასწვრივ.

თუ ω კუთხური სიჩქარის მოდული იზრდება, ე. ი. ხდება სხეულის აჩქარებული ბრუნვა, $\vec{\omega}$ და \vec{e} ვექტორების მიმართულებები ემთხვევა ერთმანეთს; სხეულის შენელებულ ბრუნვის დროს $\vec{\omega}$ და \vec{e} ვექტორები მიმართულია ერთმანეთის საწინააღმდეგო მხარეს. ω და e ვექტორები ეკუთვნის სრიალა ვექტორებს.

§ 52. თანაბარი და თანაბარცვლადი ბრუნვა

თანაბარი ეწოდება სხეულის ისეთ ბრუნვას, რომლის დროსაც სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე ყოველთვის მუდმივი რჩება:

$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}$ ან $d\varphi = \omega dt$ თუ მივიჩნევთ, რომ $t=0$ შემთხვევაში $\varphi=0$, ტოლობის ორივე ნახევრის გაინტეგრირებაში

$$\int_0^\varphi d\varphi = \omega \int_0^t dt. \quad (97)$$

მივიღებთ: $\varphi = \omega t$.

თანაბარი ბრუნვის დროს, როდესაც $\omega = \text{const}$,

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

პრაქტიკაში ბრუნვის ω კუთხურ სიჩქარეს განსაზღვრავენ ბრუნთარიცხვით წუთში, ამ სიდიდის n ბრ/წთ-ით აღნიშვნით. ერთი მთლიანი ბრუნვის დროს სხეული შემობრუნდება 2π კუთხით, n ბრუნვის დროს — $2\pi n$ -ით, ე. ი. $\varphi = 2\pi n$. ეს შემობრუნება ხდება $t=1$ წუთსა ან 60 წამში, ამიტომ

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60}.$$

სხეულის ზოგიერთი სახით ბრუნვის დროს კუთხური სიჩქარე ω არ რჩება მუდმივი, ამიტომ კუთხური აჩქარებაც $e \neq 0$. დავუშვათ, გან-

სახილველ შემთხვევაში სხეულის კუთხური აჩქარება მოძრაობის დროს მუდმივი რჩება: $\epsilon = \text{const}$. ბრუნვას ასეთი მოძრაობის შემთხვევაში ეწოდება თანაბარაჩქარებულს. მოვიძებნოთ ამ ბრუნვის კანონი. დავუშვათ, რომ დროის საწყის მომენტში $t=0$, კუთხე $\varphi=0$, ხოლო კუთხური სიჩქარე $\omega=\omega_0$. ვნ-ე ფორმულიდან გვაქვს $d\omega = \epsilon dt$.

თუ გავაინტეგრალებთ ამ განტოლების მარცხენა მხარეს ω_0 -დან ω -მდე ზღვრებში, ხოლო მარჯვენა მხარეს 0-დან t -მდე, მივიღებთ:

$$\omega - \omega_0 = \epsilon t; \quad (98)$$

$$\omega = \omega_0 + \epsilon t.$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება ტოლობაში

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = (\omega_0 + \epsilon t),$$

მივიღებთ: $d\varphi = (\omega_0 + \epsilon t) dt$.

შეორეჯერ გაინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int_0^\varphi d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \epsilon t) dt; \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{\epsilon t^2}{2}. \quad (99)$$

თუ კუთხურ სიჩქარეს $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ და ϵ აქვს ერთნაირი ნიშნები, ბრუნვა თანაბარაჩქარებულს იქნება; თუ სხვადასხვა — თანაბარ-შენელებულს.

როგორც ჩანს, სპორტული ვარჯიშების ძალიან მკვეთრი მოძრაობის აღწერის დროს კუთხური აჩქარების სიდიდე $\epsilon = \text{const}$. დავუშვათ, რომ $\frac{d\epsilon}{dt} = k$ ე. ი. $d\epsilon = k dt$ სამჯერ თანმიმდევრული გაინტეგრებით მივიღებთ ამ ცვლადი ბრუნვითი მოძრაობის კანონს:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\epsilon_0 t^2}{2} + \frac{k t^3}{6}.$$

$$\varphi_0 = 0; \quad \omega_0 = 0; \quad \epsilon_0 = 0 \text{ დროს } \varphi = \frac{k t^3}{6}.$$

მაგალითი X. I. სალტოს შესრულების დროს ტანმოვარჯიშის კუთხური სიჩქარე 11 რად/წმ-ს ტოლია. რა დრო სჭირდება ტანმოვარჯიშეს ერთი მთლიანი ბრუნვის შესასრულებლად?

ამოხსნა: ცნობილია, რომ $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ ან $\omega = 2\pi N$, სადაც

N — ბრუნთა რიცხვია 1 წამში.

$$\omega = 2\pi N = 11 \text{ (რად/წმ);}$$

აქედან განვსაზღვროთ 1 წამში ბრუნთა რიცხვი $N: N = \frac{11}{2\pi} = 1,75$
ბრ/წთ.

ერთ მთლიან მობრუნებას დასჭირდება დრო

$$t = \frac{1}{N} = \frac{1}{1,75} = 0,57 \text{ (წმ).}$$

მაგალითი X. 2. ტყორცნის დასაწყისში ბადრო ასრულებს 380 ბრ/წთ-ს. განვსაზღვროთ მისი კუთხური სიჩქარე.

ამოხსნა:

$$n = 380 \frac{\text{ბრ}}{\text{წთ}} \omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 380}{60} = 40 \frac{\text{რად}}{\text{წმ}}.$$

§ 58. მარჯნაპი სხაულის წარბილთა სიჩქარეები და აჩქარებები

უკვე აღვნიშნეთ, რომ სხეულის მხოლოდ წინსვლითი მოძრაობის დროს მისი ტრაექტორიის, სიჩქარისა და აჩქარების დახასიათება შეიძლება ერთი წერტილის მონაცემებით. მოძრაობის ყველა სხვა შემთხვევაში სხეულის სხვადასხვა წერტილს სხვადასხვა სიჩქარე და აჩქარება აქვს.

განვიხილოთ მყარი სხეული, რომელიც ბრუნავს AZ ღერძის გარშემო (ნახ. 103). ავიღოთ ბრუნვის ღერძიდან r მანძილზე მდებარე M წერტილი. სხეულის ბრუნვისას M წერტილი აღწერს წრეხაზს r რადიუსით, რომლის სიბრტყე ბრუნვის ღერძის პერპენდიკულარულია, ხოლო ცენტრი თვით ღერძზეა.

dt დროის განმავლობაში, როდესაც სხეული ასრულებს $d\varphi$ კუთხით შემობრუნებას, M წერტილი გადაადგილდება თავისი ტრაექტორიის გზის ელემენტარულ $ds = r d\varphi$ მონაკვეთზე. მისი ცოდნის შემთხვევაში შეგვიძლია განვსაზღვროთ M წერტილის სიჩქარე:

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt}$$

ან

$$v = r\omega$$

(100)

რომ განასხვავონ v სიჩქარე სხეულის კუთხური სიჩქარისაგან, მას უწოდებენ M წერტილის ხაზოვან ან წრიულ სიჩქარეს.

მყარი მბრუნავი სხეულის ხაზოვანი სიჩქარე რიცხობრივად ტოლია სხეულის კუთხური სიჩქარის ნამრავლისა სხეულის ამ წერტილის ბრუნვის ღერძამდე მანძილზე. ხაზოვანი სიჩქარე მიმართულია M წერტილის მიერ აღწერილი წრეხაზის მხების მიმართულებით. ეს მიმართულება ბრუნვის Q ღერძზე და M წერტილის რადიუსზე გამავალი AZ სიბრტყის პერპენდიკულარული იქნება. M წერტილის აჩქარება განისაზღვრება ისევე, როგორც მრუდწირული მოძრაობის დროს:

$$d\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

განხილულ შემთხვევაში $\rho = r$.

კუთხურ სიჩქარეებზე გადასვლით მივიღებთ:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon; \quad (101)$$

$$a_n = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2. \quad (102)$$

M წერტილის მთლიანი აჩქარება იქნება

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{r^2\varepsilon^2 + r^2\omega^4}$$

ან

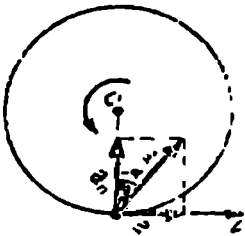
$$a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (103)$$

მთლიანი აჩქარების \vec{a} ვექტორით და წერტილის მიერ აღწერილი წრეხაზის რადიუსით შედგენილი კუთხე, μ კუთხეა (ნახ. 105), რომლის ტანგენსი უდრის:

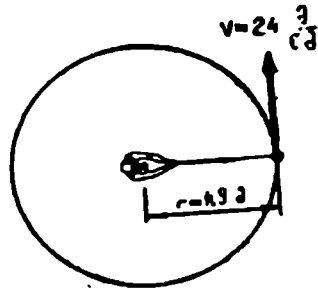
$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|a_\tau|}{|a_n|}. \quad (104)$$

ამ ტოლობაში $a_\tau = r\varepsilon$ და $a_n = r\omega^2$ მნიშვნელობების ჩასმით მივიღებთ:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|a_\tau|}{|a_n|} = \frac{r\varepsilon}{r\omega^2} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (105)$$



ნახ. 105.



ნახ. 106.

მაგალითი X. 3. ურო ტყორცისათვის ღებულობს აუცილებელ სიჩქარეს: $v=24$ მ/წმ 4 მთლიანი შემობრუნების დროს. ვაპოვოთ აჩქარება e , a და $1g \mu$, თუ მოძრაობას თანაბარაჩქარებულად მივიჩნევთ. უროს სახელურის სიგრძე 1,2 მ-ია (ნახ. 106).

ამოხსნა: რადგან ურო მოძრაობს თანაბარაჩქარებულად, მოძრაობის კანონი შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{e t^2}{2},$$

$$\omega = \omega_0 + e t.$$

მოცემულ შემთხვევაში საწყისი კუთხური სიჩქარე $\omega_0 = 0$. მაშასადამე, $\omega = e t$. ამოცანის პირობის მიხედვით მაქსიმალური ხაზოვანი სიჩქარე უდრის: $v = r \omega = 24$ მ/წმ; $r = 1,9$ მ ($1,2 + 0,7$), რადგანაც რადიუსი შედგება უროს სახელურის სიგრძისა და მტყორცნელის ხელისაგან. ამიტომ კუთხური სიჩქარე ω იქნება

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{24,0}{1,9} = 12,6 \text{ რად/წმ.}$$

ამოცანის პირობის მიხედვით ურო აკეთებს 4 მთლიან ბრუნს, ამიტომ

$$\varphi = 2\pi n = 2\pi \cdot 4 = 8\pi.$$

მოძრაობის კანონების გამოყენებით შეიძლება ჩავწეროთ:

$$1) \omega = e t; \quad e t = 12,6 \text{ (რად/წმ);}$$

$$2) \varphi = \frac{e t^2}{2}; \quad \frac{e t^2}{2} = 8\pi.$$

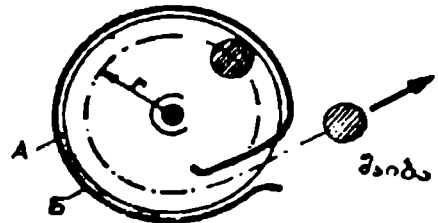
ამრიგად, გვაქვს ორი განტოლება ორი უცნობით: l და e . პირველი განტოლებიდან ვპოულობთ, რომ $l = \frac{12,6}{e}$. l -ს ამ მნიშვნელობას ჩავსვამთ მეორე განტოლებაში:

$$e\left(\frac{12,6}{e}\right)^2 = 16\pi; \quad e = \frac{(12,6)^2}{16\pi} = 3,1 \frac{\text{რად}}{\text{წმ}^2}.$$

უროს განშლის l დროს დავადგენთ ასე:

$$l = \frac{12,6}{e} = \frac{12,6}{3,1} = 4,1 \text{ წმ}.$$

მაგალითი X. 4. ჰოკეისტის საეარჯიშო აპარატი შედგება ადისკოსაგან, რომელიც აკეთებს n ბრ/წთ-ს და მოთავსებულია გარსაცმში (ბ) გამოსაშვები არხით. შაიბები იტვირთება გარსაცმის არხში და გამოიტყორცნება არხიდან $v = 40$ მ/წმ ხაზოვანი სიჩქარით. განვსაზღვროთ დისკოს ბრუნთა რიცხვი, თუ დისკოს რადიუსი შაიბის ცენტრის განლაგების ადგილში 0,25, 0,30 და 0,35 მ-ის ტოლია. შეიძლება მივიჩნიოთ, რომ შაიბა დისკოზე არ სრიალდება (ნახ. 107).



ნახ. 107.

ამოხსნა: ხაზოვანი სიჩქარე $v = \omega r = \frac{2\pi n}{60} r$;

$$n = \frac{60 v}{2\pi r} \text{ (ბრ/წთ);}$$

როცა $r_1 = 0,25$ მ,

$$n_1 = \frac{60 v}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} = \frac{60 \cdot 40}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_1} = 383 \frac{1}{r_1} = 1550 \text{ ბრ/წთ};$$

როცა $r_2 = 0,30$ მ,

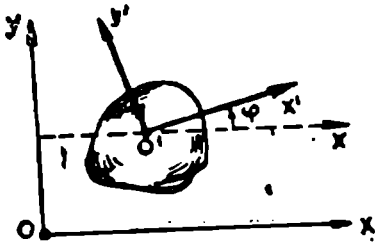
$$n_2 = 383 \cdot \frac{1}{0,30} = 1275 \text{ ბრ/წთ};$$

როცა $r_3 = 0,35$ მ,

$$n_3 = 383 \cdot \frac{1}{0,35} = 1100 \text{ ბრ/წთ}$$

მყარი სხეულის ბრტყელპარალელური მოძრაობა ეწოდება ისეთ მოძრაობას, რომლის დროს სხეულის თითოეული წერტილის დაშორება მოცემული უძრავი სიბრტყიდან მუდმივი რჩება, ან სხვაგვარად — ისეთ მოძრაობას, რომლის დროს სხეულის ყველა წერტილი მოძრაობს მოცემული უძრავი სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეებში.

დავუშვათ, რომელიმე ბრტყელი ფიგურა მოძრაობს ნახაზის სიბრტყეში (ნახ. 108). მივაკუთვნოთ, ეს მოძრაობა Oxy უძრავ კოორდინატთა სისტემას; გარდა ამისა, თვით ფიგურაზე ავიღოთ მასთან უცვლელად დაკავშირებული და მასთან ერთად მოძრავი კოორდინატთა $O'x'y'$ ლერძები. ცხადია, მოძრავი ფიგურის უძრავ სიბრტყეზე მდებარეობა განისაზღვრება მოძრავი ლერძების მდებარეობით უძრავი Oxy ლერძების მიმართ, ხოლო ეს უკანასკნელი განისაზღვრება მოძრავი O' საწყისის მდებარეობით, ე. ი. x_0 და y_0 კოორდინატებით და φ მობრუნების კუთხით, რომელსაც ავითვლით Ox ლერძიდან საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. აქედან გამომდინარეობს, რომ ბრტყელი ფიგურის მდებარეობა სავსებით განსაზღვრული იქნება, თუ დროის ყოველი მომენტისათვის ცნობილი იქნება x_0 , y_0 და φ მნიშვნელობები.



ნახ. 108.

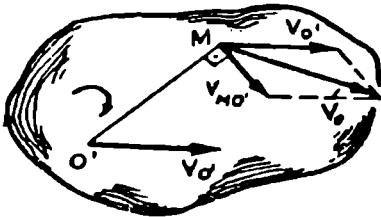
ბრტყელი ფიგურის მოძრაობის დროს მოძრავი საწყისი კოორდინატები x_0 და y_0 და კუთხე φ , რომლებიც იცვლებიან დროის განმავლობაში, t -ს ცალსახა და უწყვეტი ფუნქციებია, ე. ი.

$$x_0 = f_1(t); \quad y_0 = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t). \quad (106)$$

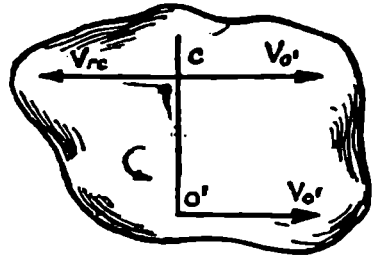
ეს განტოლებები სავსებით განსაზღვრავს ბრტყელი ფიგურის მოძრაობას და ეწოდებათ ბრტყელი ფიგურის თავის სიბრტყეში მოძრაობის განტოლებები, ანუ, რაც იგივეა, მყარი სხეულის ბრტყელპარალელური მოძრაობის განტოლებები.

ბრტყელი ფიგურის მოძრაობა ზოგად შემთხვევაში შეიძლება დავშალოთ მოძრაობებად: 1. წინსვლითად — ნებისმიერად შერჩეული პოლუსის სიჩქარის ტოლი სიჩქარით და 2. ბრუნვითად — ამ პოლუსის გარშემო.

მოდრავი ბრტყელი ფიგურის ყოველი (M) წერტილის სიჩქარე ორი სიჩქარის: 1) ამ ფიგურის ნებისმიერად შერჩეული O' წერტილის სიჩქარისა და 2) O' წერტილის გარშემო M წერტილის ბრუნვის დროს სიჩქარის ვექტორული ჯამის ტოლია (ნახ. 109).



ნახ. 109.



ნახ. 110.

ამასთან დაკავშირებით ისმის კითხვა, აქვს თუ არა ფიგურას ისეთი წერტილი, რომლის სიჩქარე მოცემულ მომენტში ნულის ტოლია და როგორ მოვძებნოთ ასეთი წერტილი? ზოვადბრუნოთ ნახევარსწორი, რომლითაც მიმართულია s_0 სიჩქარე (ნახ. 110), სწორი კუთხით O' წერტილის გარშემო ფიგურის ბრუნვის მიმართულებით და შემდეგ გადაბრუნებულ ნახევარსწორზე გადავზომოთ $O'C = \frac{v_{O'}}{\omega}$ მო-

ნაკვეთი, ე. ი. მონაკვეთი, რომელიც ფიგურის კუთხურ სიჩქარესთან O' წერტილის ხაზოვანი სიჩქარის შეფარდების ტოლია.

ტილი იქნება საძებნი წერტილი. მართლაც, მისი სიჩქარე ორი სიჩქარის: s_0 სიჩქარისა და O' წერტილის გარშემო ბრუნვის მოძრაობის სიჩქარის ვექტორის ჯამის ტოლია. ბრუნვის სიჩქარე $O'C$ -ს პერპენდიკულარია და მოდულით უდრის $v_{rc} = \omega \cdot O'C$. როგორც 110-ე ნახაზიდან ჩანს, ეს ორი სიჩქარე მიმართულია ერთ სწორ ხაზზე საწინააღმდეგო მიმართულებით და ამიტომ:

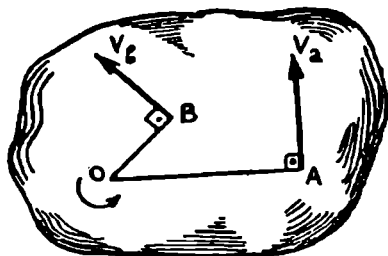
$$v_c = v_{O'} - \omega O'C = v_{O'} - \omega \frac{v_{O'}}{\omega} = 0.$$

ამრიგად, C წერტილის სიჩქარე, რომელსაც სიჩქარეების მყისი ცენტრი ეწოდება, მოცემულ მომენტში ნულის ტოლია. ამიტომ მოძრავ ბრტყელ ფიგურაში სიჩქარეების განაწილება ამ მომენტში, ცხადია, ისეთივეა, როგორიც უძრავი C წერტილის გარშემო ფიგურის ბრუნვის დროს. მართლაც, ბრტყელი ფიგურის მოძრაობის წინსვლით და ბრუნვით მოძრაობებად დაშლისას O' წერტილი შეიძლება ავირჩიოთ ნებისმიერად; თუ მოძრაობის დაშლის დროს O'

წერტილის ნაცვლად შევარჩევთ C წერტილს, მაშინ, ნათქვამის თანახმად, ფიგურის ნებისმიერი M წერტილის სიჩქარისათვის გვექნება:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_{MC},$$

სადაც v_{MC} M წერტილის სიჩქარეა ფიგურის C წერტილის გარშემო ბრუნვის დროს. მაგრამ $v_C = 0$, ამიტომ $v_M = v_{MC}$, ე. ი. ფიგურის



ნახ. 111.

ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე მოცემულ მომენტში მოდულით და მიმართულებებით იმ სიჩქარის ტოლია, რომელიც აქვს იმავე მომენტში ამ წერტილს C წერტილის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის დროს. ამიტომ უძრავი სიბრტყის იმ წერტილს, რომელსაც ემთხვევა მოცემულ მომენტში სიჩქარეების მყისი ცენტრი,

ფიგურის ბრუნვის მყისი ცენტრი ეწოდება.

თუ დროის მოცემულ მომენტში ბრუნვის მყისი ცენტრის მდებარეობა მოძებნილია და ამ მომენტისათვის ფიგურის კუთხური სიჩქარე ცნობილია, მაშინ ფიგურის ყველა წერტილის სიჩქარე განისაზღვრება ძალიან უბრალოდ: როგორც უკვე ვთქვით, თითოეული წერტილის სიჩქარე მოდულით და მიმართულებით მყისი ცენტრის გარშემო ამ წერტილის ბრუნვის სიჩქარის ტოლი იქნება. მაგალითად, მოძრავი ფიგურის A და B წერტილებისათვის (ნახ. 111). გვექნება: $v_a = CA \cdot \omega$ და $v_a \perp CA$, $v_b = CB \cdot \omega$ და $v_b \perp CB$.

აქედან გამომოდინარეობს, რომ ფიგურის ბრუნვის მყისი ცენტრი ამ ფიგურის ნებისმიერი ორი წერტილის სიჩქარეების ვექტორების დასაწყისიდან აღმართულ პერპენდიკულარების გადაკვეთის წერტილშია.

სპორტში ბრტყელპარალელური მოძრაობები ძალიან ხშირია; არსებითად, ასეთი მოძრაობაა, რომელთა დროსაც სპორტსმენის სხეული გრძივი ღერძის გარშემო არ ბრუნავს.

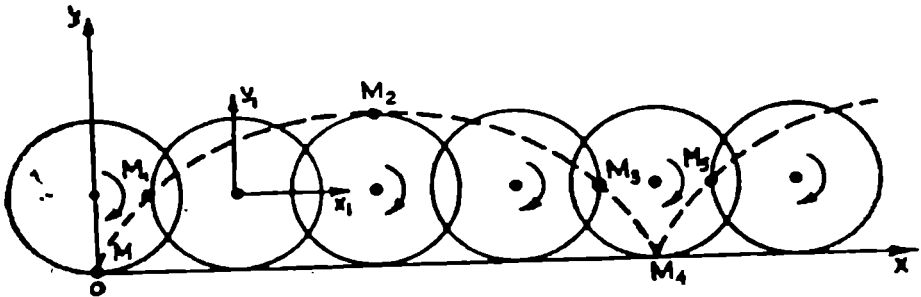
წერტილის შედგენილი მოძრაობა

§ 55. წერტილის აბსოლუტური, ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობები

ზოგიერთ შემთხვევაში წერტილის მოძრაობა უძრავ კოორდინატთა სისტემის მიმართ (ათვლის სისტემა) მოსახერხებელია განვიხილოთ, როგორც რთული, ორი ერთდროული მოძრაობისაგან შედგენილი.

წერტილის მოძრაობას ათვლის მოძრავი სისტემის მიმართ ფარდობითი მოძრაობა ეწოდება. მოძრავი ათვლის სისტემის წერტილის მოძრაობას უძრავი ათვლის სისტემის მიმართ წარმტანი მოძრაობა ეწოდება.

მრავალი ფიზიკური ვარჯიში შედგება რთული მოძრაობებისაგან. მაგალითად, M წერტილი ველოსიპედის სატერფულის ღერძზე (ნახ. 112) ასრულებს მოძრაობას დედამიწის მიმართ $MM_1M_2M_3M_4$ მრუდ-



ნახ. 112.

ზე, რომელსაც ციკლოიდი ეწოდება. ეს მოძრაობა შეიძლება მივიჩნიოთ ორი მარტივი მოძრაობისაგან: ველოსიპედის ჩარჩოს მიმართ წერტილის წრეხაზზე მოძრაობისა და წერტილის მოძრავ ველოსიპედთან ერთად გადატანითი მოძრაობისაგან შედგენილად. M წერტილის წრეული მოძრაობა ველოსიპედის ჩარჩოს მიმართ ფარდობითი მოძრაობაა, ხოლო ველოსიპედზე დამაგრებული M წერტილის მოძრაობა — წარმტანი მოძრაობა. M წერტილის მოძრაობა დედამიწის მიმართ აბსოლუტური (მარტუულტირებელი) მოძრაობა იქნება.

სხვა მაგალითი ასეთია. ადამიანი მოძრაობს სარკინიგზო ვაგონის იატაკზე, რომელიც, თავის მხრივ, ლიანდაგზე გადაადგილდება.

ადამიანის მოძრაობა ვაგონის იატაკის მიმართ იქნება ფარდობითი მოძრაობა, ვაგონის წერტილის მოძრაობა ლიანდაგების მიმართ — წარმტანი. ადამიანის მოძრაობა ლიანდაგების მიმართ — აბსოლუტური

| ან: ტანმოვარჯიშე ასრულებს ვარჯიშს რგოლებზე ქანაობის დროს. ტანმოვარჯიშის სხეულის რომელიმე წერტილის მოძრაობა რგოლების მიმართ ფარდობითია, რგოლებზე პირობითად ხისტად დამაგრებული სხეულის მოძრაობა დედამიწის მიმართ — წარმტანია, ტანმოვარჯიშის სხეულის შერჩეული წერტილის მოძრაობა დედამიწის მიმართ — აბსოლუტური.

ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობების განსაზღვრებიდან გამომდინარე, შეიძლება მივეუთითოთ მოძრაობის შესწავლის შემდეგი მეთოდი. წერტილის ფარდობითი მოძრაობის შესწავლისათვის საჭიროა აზრობრივად შევწყვიტოთ წარმტანი მოძრაობა და განვიხილოთ იგი შემდგომ წერტილის აბსოლუტური მოძრაობის წესებითა და კანონებით. თუ აუცილებელია წერტილის წარმტანი მოძრაობის შესწავლა, საჭიროა აზრობრივად შევაჩეროთ წერტილის ფარდობითი მოძრაობა და განვიხილოთ იგი აბსოლუტურ მოძრაობაში წერტილის კინემატიკის ფორმულირებით.

ახლა შემოვიტანოთ რამოდენიმე დამატებითი ცნება.

მოცემული წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე ($\overline{v_{abs}}$) და აბსოლუტური აჩქარება ($\overline{a_{abs}}$) ეწოდება მის სიჩქარესა და აჩქარებას ათვლის უძრავი სისტემის მიმართ.

მოცემული წერტილის ფარდობითი სიჩქარე ($\overline{v_{ფარ}}$) და ფარდობითი აჩქარება ($\overline{a_{ფარ}}$) ეწოდება მის სიჩქარესა და აჩქარებას ათვლის მოძრავი სისტემის მიმართ.

წარმტანი სიჩქარე ($\overline{v_{წარმტ}}$) და წარმტანი აჩქარება ($\overline{a_{წარმტ}}$) ეწოდება ათვლის მოძრავ სისტემასთან უცვლელად დაკავშირებულ იმ წერტილის სიჩქარესა და აჩქარებას ათვლის უძრავი სისტემის მიმართ, რომელსაც ემთხვევა დროის მოცემულ მომენტში მოძრავი წერტილი.

ათვლის მოძრავი სისტემის წინსვლითი მოძრაობის დროს მასთან დაკავშირებული ყველა წერტილის სიჩქარე და აჩქარება ერთნაირია. მოძრავი წერტილის წარმტანი სიჩქარე და წარმტანი აჩქარება არ არის დამოკიდებული ათვლის მოძრავი სისტემის მიმართ მის მდებარე-

რეობაზე, ამიტომ მათში უნდა ვიგულისხმოთ ათვლის მოძრავი სისტემის სიჩქარე და აჩქარება ათვლის უძრავი სისტემის მიმართ.

თუ ათვლის მოძრავი სისტემის მოძრაობა ათვლის უძრავი სისტემის მიმართ განსხვავებულია წინსვლითი მოძრაობისაგან, წერტილის წარმტანი სიჩქარისა და წარმტანი აჩქარების განსაზღვრა რთულდება.

§ 56. სიჩქარეთა შეკრება შედგენილი მოძრაობის დროს

უკვე აღვნიშნეთ, რომ შედგენილი მოძრაობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ ორი მოძრაობის — ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობის სახით. რადგან ეს ვიციტ შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ წერტილის აბსოლუტური სიჩქარე მისი წარმტანი და ფარდობითი სიჩქარეების გეომეტრიული ჯამის ტოლია:

$$\overline{v_{ab}} = \overline{v_{fa}} + \overline{v_{fa}} \quad (107)$$

მაგალითად, რკინიგზის სწორხაზოვან უბანზე ურიკა უძრავი XOy კოორდინატთა სისტემის მიმართ გადაადგილდება v_{fa} სიჩქარით. ურიკაზე მორბის ადამიანი v_{fa} სიჩქარით, ამავე დროს v_{fa} და v_{fa} სიჩქარეების მიმართულებები ერთმანეთს ემთხვევა. ცხადია, ადამიანი დედამიწის ან (რაც იგივეა) XOy კოორდინატების მიმართ გადაადგილდება, $\overline{v_{ab}} = \overline{v_{fa}} + \overline{v_{fa}}$ სიჩქარით. აბსოლუტური სიჩქარის ($\overline{v_{ab}}$) დასადგენად საჭიროა შევკრიბოთ ორი ვექტორი: $\overline{v_{fa}}$ და $\overline{v_{fa}}$, ე. ი. შევასრულოთ გეომეტრიული შეკრება. 113-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ეს ვექტორები დროის რომელიმე მომენტში. თუ გადატანითი და ფარდობითი სიჩქარეების მოდულები და მათ შორის კუთხე α ცნობილია, მაშინ აბსოლუტური სიჩქარის მოდული შეიძლება დავადგინოთ კოსინუსების თეორემის გამოყენებით:

$$v_{ab} = \sqrt{v_{fa}^2 + v_{fa}^2 + 2v_{fa} \cdot v_{fa} \cdot \cos \alpha}$$

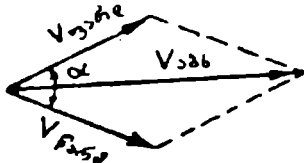
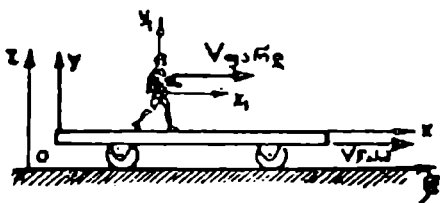
თუ $\overline{v_{fa}}$ და $\overline{v_{fa}}$ ვექტორების მიმართულებები ერთმანეთის პერპენდიკულარულია, მაშინ $\alpha = 90^\circ$, $\cos \alpha = 0$ და

$$v_{ab} = \sqrt{v_{fa}^2 + v_{fa}^2}$$

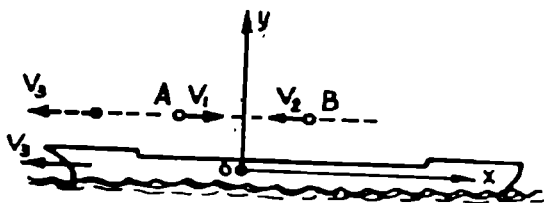
თუ $\overline{v_{fa}}$ და $\overline{v_{fa}}$ ვექტორები მიმართულია ერთ სწორ ხაზზე ერთი მიმართულებით, მაშინ $\alpha = 0$ და $\overline{v_{ab}} = \overline{v_{fa}} + \overline{v_{fa}}$. ამ ვექ-

ტორთა ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულების შემთხვევაში
 $\overline{v_{აბს}} = \overline{v_{წარ}} - \overline{v_{ფარ}}$; ამავე დროს $\overline{v_{აბს}}$ ვექტორი უდიდესი შემდეგ-
 ნის მხარესაა მიმართული.

მაგალითი XI. 1. საზღვაო ლაინერის ჩოგბურთის მოედანზე



ნახ. 113.



ნახ. 114.

A მოთამაშისათვის v_3 და v_1 სიჩქარეები მიმართულია ერთ სწორ ხაზზე საწინააღმდეგო მიმართულებებით, ამიტომ $\overline{v_{აბს}} = \overline{v_{წარ}} - \overline{v_{ფარ}} = 5 + 30 = 25$ მ/წმ. B მოთამაშისათვის v_3 და v_2 სიჩქარეებს ერთნაირი მიმართულებები აქვთ, ამიტომ $\overline{v_{აბს}} = \overline{v_{წარ}} + \overline{v_{ფარ}} = -5 - 30 = -35$ მ/წმ.

§ 57. აჩქარებათა შეკრება შედგენილი მოძრაობის დროს

აჩქარებათა შეკრების ყველაზე მარტივი შემთხვევაა, როდესაც ათვლის მოძრავი სისტემის მოძრაობა წინსვლითია: წერტილის აბსოლუტური აჩქარება წარმტანი და ფარდობითი აჩქარებების გეომეტრიული ჯამის ტოლია.

როდესაც წარმტანი მოძრაობა წინსვლითი არ არის, აბსოლუტური აჩქარებისათვის მივიღებთ ფორმულას:

$$\overline{a_{\text{abs}}} = \overline{a_{\text{წარმტანი}}} + \overline{a_{\text{ფარდობითი}}} + 2(\overline{\omega \times v_{\text{წარმტანი}}}). \quad (108)$$

ასეთ შემთხვევაში წერტილის აბსოლუტური აჩქარება შეიკრიბება სამი აჩქარებისაგან: წარმტანი ($a_{\text{წარმტანი}}$), ფარდობითი ($a_{\text{ფარდობითი}}$) და $2(\overline{\omega \times v_{\text{წარმტანი}}})$ -ს ტოლი აჩქარებისაგან, რომელსაც ეწოდება კორიოლისის აჩქარება. თუ კორიოლისის აჩქარებას a_h -თი აღვნიშნავთ, მივიღებთ:

$$a_h = 2(\overline{\omega \times v_{\text{წარმტანი}}}). \quad (109)$$

მაშასადამე, $\overline{a_{\text{abs}}} = \overline{a_{\text{წარმტანი}}} + \overline{a_{\text{ფარდობითი}}} + a_h$.

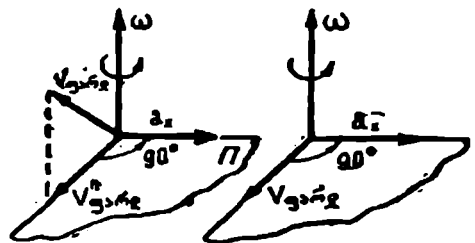
კორიოლისის აჩქარების ფიზიკური არსი შეიძლება ავხსნათ შემდეგი მავალით. მსროლელი ისერის მბრუნავ ტირში და ყოველთვის ითვალისწინებს მიზანში მოხვედრის რომელიღაც წინსწრებას. წინსწრების აუცილებლობის ახსნა მაყურებლისათვის, რომელიც ამ მბრუნავ ტირში, ე. ი. ათვლის მოძრაე, არაინერციულ სისტემაში იმყოფება, შეუძლებელია. თუ მაყურებელი ტირის გარეთაა (ათვლის უძრავ, ინერციულ სისტემაში), მაშინ მისთვის ყველაფერი სწრაფად ხდება ნათელი: სანამ ტყვია მიჰქრის მსროლელიდან მიზნისაკენ, მიზანი ასწრებს შემობრუნებას რომელიღაც კუთხით, რომელიც სწორედ სროლის დროს საჭიროებს გარკვეულ წინსწრებას.

ამრიგად, კორიოლისის აჩქარების გაგება ესაკიროება მაყურებელს, რომელიც იმყოფება ათვლის არაინერციულ სისტემაში. ამ აჩქარებით შეიძლება ახსნან ინერციის იმ ძალთა წარმოქმნა, რომლებიც უზრუნველყოფენ სროლის დროს ტყვიის გადახრას.

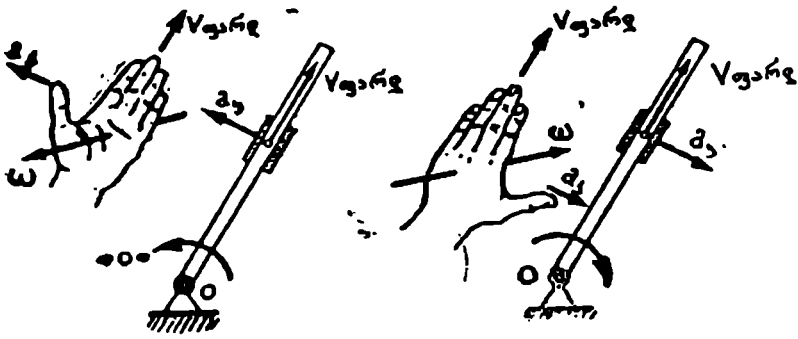
115-ე ნახაზზე ნაჩვენებია კორიოლისის აჩქარების ვექტორი. ამ ვექტორის მოდული განისაზღვრება გამოსახულებით:

$$a_h = 2\omega v_{\text{წარმტანი}} \sin\theta. \quad (110)$$

კორიოლისის აჩქარების მიმართულების დასადგენად შეიძლება ვისარგებლოთ მარცხენა ხელის წესით: თუ მარცხენა ხელის მტევანს ისე



ნახ. 115.

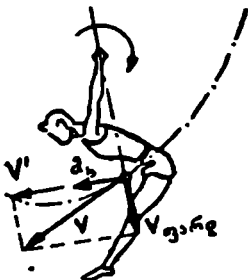


ნახ. 116.

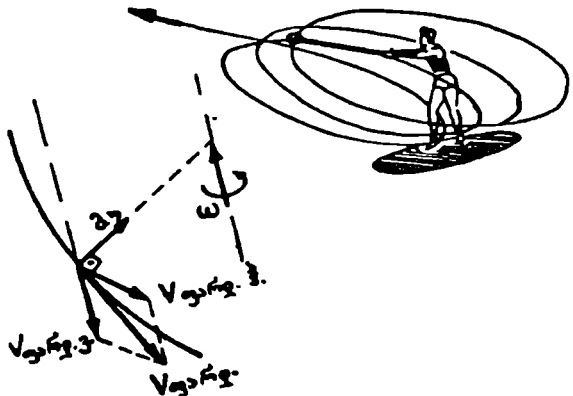
მოვათავსებთ, რომ წარმტანი მოძრაობის კუთხური სიჩქარის ვექტორი გამოდიოდეს ხელისგულიდან, ხოლო თითები (ცერის გარდა) უჩვენებდეს ფარდობითი მოძრაობის სიჩქარის მიმართულებას, მაშინ ცერი გვიჩვენებს კორიოლისის აჩქარების ვექტორის მიმართულებას (ნახ. 116). კორიოლისის აჩქარება ყოველთვის ბრუნვის ღერძის პერპენდიკულარულია. თუ $v_{\text{ფარ}} \parallel \omega$, მაშინ $\Theta = 0$, ან $\Theta = 180^\circ$ და მაშასადამე, $\sin \Theta = 0$, ამიტომ $a_k = 0$, ე. ი. ამ შემთხვევაში კორიოლისის აჩქარება ნულის ტოლი ხდება. 117-ე და 118-ე ნახაზებზე ნაჩვენებია სპორტული მოძრაობების მაგალითები, რომელთა შესრულების დროს კორიოლისის აჩქარება წარმოიქმნება.

მაგალითი XI. 2. აკრობატის სხეულს თავისუფალ ფრენაში აქვს სიჩქარეების მყისი ცენტრი P წერტილში.

ცნობილია, რომ აკუთხური სიჩქარე მოცემულ განსახილველ

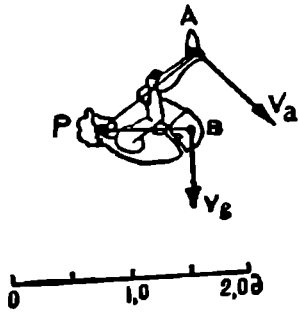


ნახ. 117.

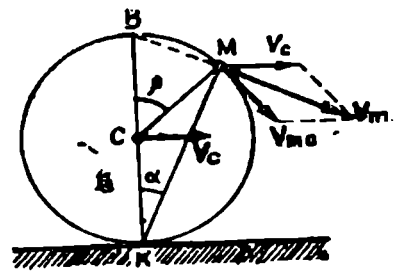


ნახ. 118.

მომენტში 6,4 რად/წმ-ს ტოლია. განესაზღვროთ A და B წერტილებში შესაბამისი \overline{v}_a და \overline{v}_b სიჩქარეები. სხელი ბრუნავს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით. PA და PB მანძილების განსაზღვრისათვის მოცემულია მასშტაბი (ნახ. 119).



ნახ. 119.



ნახ. 120.

ამოხსნა: განესაზღვრავთ მანძილებს $PA=1,1$ მ; $PB=0,75$ მ. $v=\omega r$ ფორმულით გამოვითვლით სიჩქარეებს A და B წერტილებში;

$$v_a = \omega r = \omega PA = 6,4 \cdot 1,1 = 7,15 \text{ მ/წმ};$$

$$v_b = \omega r = \omega PB = 6,4 \cdot 0,75 = 4,8 \text{ მ/წმ};$$

A და B წერტილებიდან სიჩქარეები მიმართულია მარჯვნივ 90° კუთხით.

მაგალითი XI. 3. დავადგინოთ გზის სწორხაზოვან უბანზე სრიალის გარეშე მგორავი რენის თელის¹ ფერსოს M წერტილის სიჩქარე (ნახ. 120), თუ თელის C ცენტრის სიჩქარე ტოლია $v=4$ მ/წმ, ხოლო $\angle BKM = \alpha$. თელის დიამეტრი $d=2R=1,93$ მ.

ამოხსნა. C წერტილის სიჩქარე მოცემულია $v_c=4$ მ/წმ, ამიტომ უფრო მოსახერხებელია ეს წერტილი მივიღოთ პოლუსად. მაშინ ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე ტოლი იქნება: $\overline{v}_i = \overline{v}_c + \overline{v}_{ic}$, სადაც \overline{v}_{ic} ყოველთვის პერპენდიკულარულია i და C წერტილების შემაერთებელი iC ხაზის. M წერტილისათვის: $\overline{v}_m = \overline{v}_c + \overline{v}_{mc}$.

არსებობს კიდევ ერთი საინტერესო წერტილი K . ეს ათას თელისა და ფართობის შეხების წერტილი იმ პირობით, რომ სრიალი არ არსებობს, დროის მოცემულ მომენტში K წერტილში სიჩქარე უდრის

¹ სატანეარჩიშო თელები (რენის) ვესტიბულარული აპარატის სავარჯიშო, ახალი გამოდის შემდეგი დიამეტრებით: 1,73; 1,83 და 1,93 მ.

ნულს $\overline{v}_k = 0$. ამასთან ერთად, \overline{v}_k წერტილის სიჩქარე შეიძლება განვსაზღვროთ ფორმულით: $\overline{v}_k = \overline{v}_c + \overline{v}_{kc}$.

თუ $\overline{v}_k = 0$, მაშინ $\overline{v}_c + \overline{v}_{kc} = 0$. $|\overline{v}_{kc}| = |\overline{v}_c|$ და მიმართულია KC -ს პერპენდიკულარულად v_c სიჩქარის საწინააღმდეგო მხარეს, მეორე მხრივ, KC თვლის რადიუსია, რომელიც უდრის $0,96$ მ-ს. ვიცით, რომ $|\overline{v}_{kc}| = |v_c|$, მივიღებთ

$$\omega = \frac{|v_c|}{R} = \frac{4}{0,96} = 4 \text{ რად/წმ.}$$

M წერტილის სიჩქარე შეიძლება განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$\overline{v}_m = \overline{v}_c + \overline{v}_{mc} = \overline{v}_c + \omega R;$$

$$|\overline{v}_m| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \text{ მ/წმ.}$$

\overline{v}_m KM მონაკვეთის პერპენდიკულარულია.

\overline{v}_m სიჩქარის განსაზღვრა შეიძლება სხვა მსჯელობის საფუძველზე. K წერტილი მოცემულ მომენტში უძრავია, ამიტომ იგი სიჩქარეების მყისი ცენტრია. M წერტილის \overline{v}_m სიჩქარე: $\overline{v}_m = \omega KM$. KM -ს დავადგენთ მართკუთხა KMB სამკუთხედიდან: $KM = KB \cdot \cos \alpha = 2R \cos \alpha$.

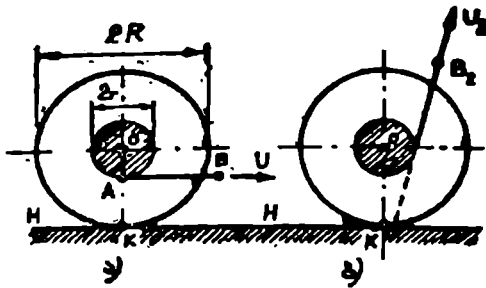
მაგალითი XI. 4. R რადიუსიანი კოჭი მიგორავს HH ჰორიზონტალურ ზედაპირზე სრიალის გარეშე (ნახ. 121). კოჭის საშუალო r რადიუსიან ცილინდრულ ნაწილზე დანეეულია ძაფი, რომლის ბოლო B გადაადგილდება u სიჩქარით ჰორიზონტალური მიმართულებით მარჯვნივ. განვსაზღვროთ კოჭის ღერძის გადაადგილების v სიჩქარე.

ამოხსნა: პირველ რიგში აუცილებელია ვიცოდეთ, საით გადაადგილდება კოჭი, თუ გამოვწვეთ მის ძაფს.

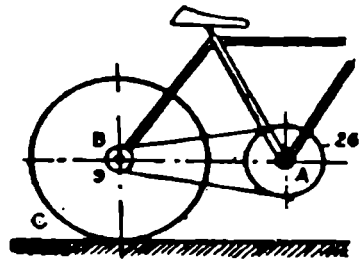
კოჭის სიბრტყესთან შეხების K წერტილი დროის მოცემული მომენტისათვის უძრავია და, მაშასადამე, შეიძლება მივიღოთ სიჩქარეების მყის ცენტრად.

$$v_c = \omega KA = \omega(R-r); \quad \omega = \frac{v_c}{R-r} = \frac{u}{R-r};$$

$$v_o = \omega KO = \omega R = \frac{u}{R-r} R.$$



ნახ. 121.



ნახ. 122.

კუთხური სიჩქარე ქმნის ბრუნვას, მიმართულს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, რის შედეგადაც კოჭი მარჯვნივ გადაადგილდება.

საკმარისია შევცვალოთ ძაფის ბოლოს (u_2) სიჩქარის მიმართულება (ნახ. 125, ბ) რომ კოჭის ცენტრმა იმოძრაოს მარცხნივ. რატომ ხდება ასე?

მაგალითი XI. 5. ველოსიპედის ჯაჭვური გადაცემა (ნახ. 122) შედგება 26 კბილიანი A ვარსკვლავზე შემოხვეული ჯაჭვისაგან და 9 კბილიანი B ვარსკვლავისაგან, რომელიც უცვლელადაა დაკავშირებული 0,7 დიამეტრის მქონე უკანა თვალთან. განვსაზღვროთ ველოსიპედის სიჩქარე, თუ A ვარსკვლავი ასრულებს წამში ერთ ბრუნვას, ხოლო C თვალი ამ დროს სწორხაზობრივად გორავს სრიალის გარეშე.

ამოხსნა: განვსაზღვროთ B ვარსკვლავის კუთხური სიჩქარე ω_2 მის ცენტრთან ახლოს, თუ ვიცით, რომ A ვარსკვლავის კუთხური სიჩქარე მისი ცენტრის გარშემო $\omega_1 = 1$ ბრ/წმ.

ცხადია, კუთხური სიჩქარეების ფარდობა კბილების n_1 და n_2 რიცხვთა ფარდობის ტოლი იქნება:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_1}{n_2}; \quad \omega_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \omega_1 = \frac{26}{9} \cdot 1 = \frac{26}{9} \text{ ბრ/წმ} = \frac{26}{9} \cdot 2\pi \text{ 1/წმ.}$$

თვლის C წერტილის სიჩქარე იქნება:

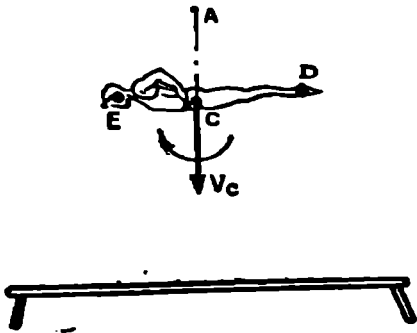
$$v_c = \omega r = \frac{26}{9} \cdot 2\pi \cdot \frac{0,7}{2} = 6,35 \text{ მ/წმ.}$$

ანუ 22,87 კმ/სთ.

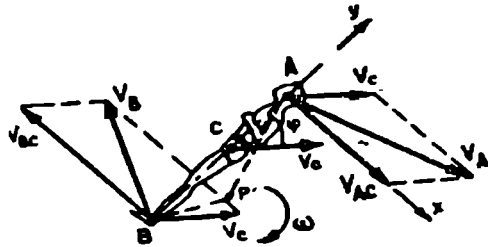
მაგალითი XI. 6. ბატუტზე სალტოს შესრულების დროს მოხილი სპორტსმენი იწყებს ჩამოვარდნას რომელიღაც A წერტილიდან

ნულის ტოლი საწყისი სიჩქარით; ამ დროს იგი ბრუნავს სიმძიმის ცენტრის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით; $\omega = 11,5$ რად/წმ (ნახ. 123). განესაზღვროთ სიჩქარე E და D წერტილებში, რომლებიც დაშორებულია სიმძიმის C ცენტრიდან $0,8$ და $0,9$ მ-ით, როდესაც ED ხაზი პორიზონტალურია. როდესაც C წერტილის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლი იყო, ED ხაზი ვერტიკალთან შეადგენდა $\varphi = 45^\circ$ კუთხეს.

ამოხსნა: სპორტსმენის სხეულის ვარდნა ხდება 45° -ით შემობრუნებისათვის საჭირო დროის განმავლობაში, რაც შეესაბამება



ნახ. 123.



ნახ. 124.

$$\varphi = \frac{2\pi}{360} \cdot 45 = \frac{\pi}{4} \text{ რად.}$$

ამ კუთხის გავლის დრო:

$$t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\pi/4}{11,5} = 0,07 \text{ წმ.}$$

სიმძიმის ცენტრის სიჩქარე იმ მომენტში, როდესაც სხეულის ღერძი პორიზონტალური იქნება, შეადგენს:

$$\overline{v_c} = gt = 9,8 \cdot 0,7 = 0,685 \text{ მ/წმ.}$$

D წერტილის სიჩქარე უდრის: $\overline{v_d} = \overline{v_c} + \omega(CD) = 0,685 + (-11,5 \cdot 0,8) = 9,885 \text{ მ/წმ.}$

E წერტილის სიჩქარე უდრის: $\overline{v_e} = \overline{v_c} + \omega(CE) = 0,685 + (-11,5 \cdot 0,8) = -9,715 \text{ მ/წმ.}$ v_e სიჩქარე მიმართულია ვერტიკალურად ზემოთ, v_d -ს სიჩქარე — ვერტიკალურად ქვემოთ.

მაგალითი XI. 7. ტემპიანი სალტოს დროს ერთ-ერთ მომენტში აკრობატის სხეულის მოძრაობა შედგება წინსვლითი და ბრუნვითი

მოდრაობებისაგან (ნახ. 124). ამ დროს C წერტილი, რომელიც შეიძლება მივიღოთ პოლუსად, მოძრაობს მარჯვნივ $v_c = 44$ მ/წმ სიჩქარით, სხეულის კუთხური სიჩქარე $\omega = 11$ რად/წმ. განვსაზღვროთ A და B წერტილის სიჩქარე, აგრეთვე სიჩქარეების მყისი ცენტრი. პოლუსიდან A და B წერტილებამდე მანძილი უდრის $0,8$ მ. v_c ვექტორი მიმართულია AC მონაკვეთთან $\varphi = 45^\circ$ კუთხით.

ამოხსნა: A წერტილში სიჩქარე უდრის: $\overline{v}_a = \overline{v}_c + \overline{\omega}AC$. სიჩქარე $\overline{v}_c = 4$ მ/წმ და მიმართულია პორიზონტალურად. ვექტორი \overline{v}_c გადავიტოთ A წერტილში. სიჩქარე მიმართულია AC მონაკვეთის პერპენდიკულარის გასწვრივ და უდრის: $\overline{v}_{AC} = \omega AC = 11,08 = 8,8$ მ/წმ. v_a შეიძლება განისაზღვროს გრაფიკულად (როგორც 121-ე ნახაზზე) ან ანალიზურად¹.

ლიტერატურა

I ნაწილი

Донской Д. Д. Биомеханика с основами спортивной хетники. ФИС, 1971, стр. 81—108, 167—180.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. М., «Наука», 1967, стр. 15—137.

Хайкин С. Э. Физические основы механики. М., «Наука», 1971, стр. 11—30, 64—122.

II ნაწილი

Донской Д. Д. Биомеханика с основами спортивной техники. ФИС, 1971, стр. 62—80.

Петров В. А. Методические указания к биомеханическому анализу спортивной техники. Л., ГДОИФК им. П. Ф. Лесгафта, 1970, стр. 3—21.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. М., «Наука», 1967, стр. 138—241.

Хайкин С. Э. Физические основы механики. М., «Наука», 1971, стр. 81—63.

¹ გადავზომა ანალიზური ამოხსნა დამოუკიდებლად შეასრულოთ.

დინამიკა

XII თავი

დინამიკის შესავალი

§ 56. დინამიკის საბანი და მისი ძირითადი ანოტაციები

დინამიკა შეისწავლის მატერიალური სხეულების მექანიკურ მოძრაობასა და მათზე მოქმედ ძალებს შორის დამოკიდებულებას.

დინამიკის შესწავლა იწყება ჩვეულებრივად მატერიალური წერტილის მოძრაობის როგორც ყველაზე მარტივი ობიექტის, შესწავლით.

ზოგჯერ კონკრეტული კვლევის პირობებში უგულებელყოფენ სხეულის მნიშვნელოვან ზომებსაც კი. მაგალითად, სხეულის წინსვლითი მოძრაობის დროს ყველა მისი წერტილი, მოძრაობს ერთნაირად და სხეულის მოძრაობის განსაზღვრისათვის, საკმარისია ვიცოდეთ მისი ერთი რომელიმე წერტილის მოძრაობა. სხეულის სიმძიმის ცენტრი მოძრაობს, როგორც მატერიალური წერტილი, რომელშიც თავმოყრილია სხეულის მთლიანი მასა და რომელზეც მოდებულია ყველა მასზე მოქმედი ძალა. ამიტომ წინსვლითად მოძრაობს სხეული დინამიკაში განიხილება, როგორც წერტილი, რომელიც მოთავსებულია სხეულის სიმძიმის ცენტრში და ამ სხეულის მასის ტოლია მასით. იმ შემთხვევებში, როდესაც მოძრაობს სხეულის მასის უგულებელყოფა შეუძლებელია, საჭიროა აზრობრივად დაეყოს იგი მცირე ნაწილებად და მივიჩნიოთ ისინი მატერიალურ წერტილებად. ყოველი სხეული ან ერთად შეერთებული რამდენიმე სხეული, ჩვეულებრივ, განიხილება, როგორც მატერიალური წერტილების ერთობლიობა. ერთმანეთთან ქმედებულ კუთხეებს

დების ტოლოზის კანონით ურთიერთმოქმედი მატერიალური წერტილების ერთობლიობას ეწოდება მატერიალური წერტილების მექანიკური სისტემა ან უბრალოდ მექანიკური სისტემა.

ამრიგად, მექანიკურ სისტემაში თითოეული წერტილის მოძრაობა და მისი მდებარეობა სივრცეში დამოკიდებულია სხვა წერტილების მოძრაობისა და სივრცეში მდებარეობაზე. იმასთან დაკავშირებით, რომ შესწავლის საგანი შეიძლება იყოს მატერიალური წერტილი ან მატერიალური წერტილების სისტემა, დინამიკა იყოფა მატერიალური წერტილის დინამიკად და მექანიკური სისტემის დინამიკად. აბსოლუტურად მყარი სხეულის მოძრაობა, რომელიც შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მატერიალური წერტილების სისტემა, რომელთა შორის მანძილები უცვლელია, შეისწავლება მექანიკური სისტემის დინამიკაში.

დინამიკა უპირველეს ყოვლისა წყვეტს შემდეგ ორ ამოცანას:

1. მატერიალური წერტილის ან სისტემის მოცემული მოძრაობის მიხედვით ამ წერტილსა ან სისტემაზე მოქმედი ძალების განსაზღვრა.
2. მატერიალურ წერტილსა ან სისტემაზე მოქმედი მოცემული ძალების მიხედვით ამ წერტილის ან სისტემის მოძრაობის კანონის განსაზღვრა.

§ 58. დინამიკის ძირითადი კანონები

დინამიკას საფუძვლად უდევს კანონები, რომლებიც დადგენილია სხეულების მოძრაობაზე ცდებისა და დაკვირვებების განზოგადების შედეგად. ეს კანონები პირველად დაადგინა ისააკ ნიუტონმა (1643 — 1727).

პირველი კანონი (ინერციის კანონი), რომელიც გალილეის ეკუთვნის, (1638), გამოითქმება ასე: გარეშე ზემოქმედებისაგან აბსოლურად უმოძრაო მატერიალური წერტილი ინარჩუნებს სიმშვიდის მდგომარეობას ან თანაბარ და სწორხაზოვან მოძრაობას მანამ, სანამ მასზე მოდებული ძალები არ აიძულებს მას შეიცვალოს ეს მდგომარეობა.

მოძრაობას, რომელსაც ასრულებს წერტილი ძალების არარსებობის დროს, ეწოდება ინერციით მოძრაობა. ინერციის კანონი მიუთითებს მატერიის ერთ-ერთ ძირითად თვისებაზე — უცვლელად მოძ-

1. ნიუტონის ძირითადი შრომაა „ზუნების ფილოსოფიის მათემატიკური საწყობები“ (1687), რომელიც რუსულად თარგმნა აკად. ა. ნ. კრილოვმა.

რაობდეს. სიმშვიდის მდგომარეობა განიხილება, როგორც ინერციით მოძრაობის კერძო შემთხვევა (სიჩქარე ნულს უდრის).

ათვის სისტემას, რომლის მიმართაც სრულდება ინერციის კანონი, ეწოდება ათვის ინერციული სისტემა.

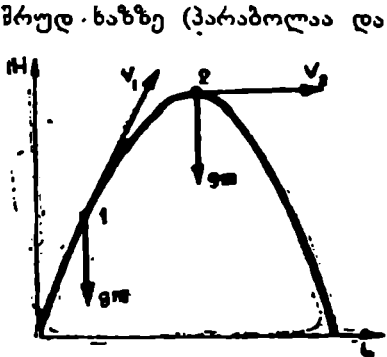
უშავლესი ტექნიკური ამოცანების გადასაწყვეტად ინერციულად შეიძლება მივიჩნიოთ ისეთი ათვის სისტემა, რომელიც ხისტადაა დაკავშირებული დედამიწასთან.

მეორე კანონი (დინამიკის ძირითადი კანონი) მატერიალური წერტილის აჩქარება მასზე მოდებული ძალის პროპორციულია და ემთხვევა მის მიმართულებას. ამ კანონს აქვს სხვა ფორმულირება: წერტილის მასის ნამრავლი აჩქარებაზე, რომელსაც იგი ღებულობს მოცემული ძალის მოქმედებით, ამ ძალის მოდულის ტოლია; აჩქარების მიმართულება ემთხვევა ძალის მიმართულებას.

მათემატიკურად ეს კანონი შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ტოლობით:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (111)$$

აუცილებელია ყურადღება მივაქციოთ, რომ, მეორე კანონის თანახმად, ძალის მიმართულებას ემთხვევა აჩქარების მიმართულება და არა თვით მოძრაობის მიმართულება (სიჩქარის მიმართულება). იგივე გაშობდინარეობს 111-ე ფორმულიდანაც, რადგანაც მის მარცხენა ნაწილში \vec{a} ვექტორია, m — სკალარი; მარჯვენა მხარეში \vec{F} ვექტორია, შესაბამისად \vec{a} და \vec{F} ვექტორებს ერთნაირი მიმართულებები აქვს. მოძრაობის მიმართულება ზოგად შემთხვევაში არ ემთხვევა წერტილზე მოდებული ძალის მიმართულებას. მაგალითად, პორიზონტის მიმართ კუთხით გასროლილი სხეული მოძრაობს



ნახ. 125.

შრუდ. ხაზზე (პარაბოლაა და ყოველთვის იცვლის მოძრაობის მიმართულებას, მაშინ როდესაც წერტილზე მოქმედი სიმძიმის ძალა და მისგან მინიჭებული აჩქარება ყოველთვის ვერტიკალურად ქვემოთაა მიმართული (ნახ. 125).

მოდებული ძალის მიმართულება დაემთხვევა მოძრაობის მიმართულებას.



ნახ. 136.

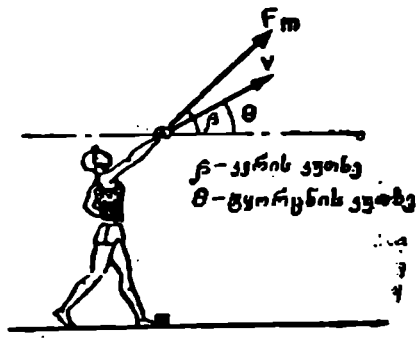
ბას იმ შემთხვევაში, თუ იგი მოქმედებს თავისუფალ წერტილზე, რომელიც ამ მომენტამდე სიმშვიდის მდგომარეობაში იმყოფებოდა.

დაეუშვათ, მაგალითად, რომელიმე წერტილი M მოძრაობს თანაბრად და სწორხაზოვნად Ox ღერძის გასწვრივ მიმართული v სიჩქარით (ნახ. 126). მოვლოთ ამ წერტილზე მისი მოძრაობის მიმართულეებით მოქმედი ძალა. ამით წერტილის მოძრაობის მიმართულეება არ შეიცვლება, მაგრამ მისი სიჩქარის მოდული გაიზარდება. თუ M წერტილზე მოვდებთ ძალას საწინააღმდეგო მიმართულეებით, მაშინ წერტილის სიჩქარე შემცირდება და შეინარჩუნებს თავის მიმართულეებას.

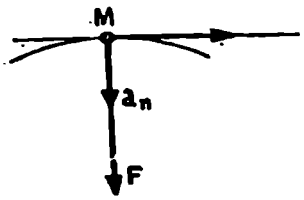
ბირთვის კერის დროს სპორტსმენის ხელისგან ბირთვის მოკილების წინა მომენტში მას აქვს უკვე განსაზღვრული სიჩქარე. ამიტომ ბირთვზე ბიძგის მომენტში მოდებული F_m ძალის მიმართულეება და ბირთვის მოძრაობის მიმართულეება v ერთმანეთს არ ემთხვევა (ნახ. 127).

თუ M წერტილზე იმოქმედებს (ნახ. 128) წერტილის მოძრაობის მიმართულეების პერპენდიკულარული F ძალა, მას ექნება მხოლოდ ნორმალური აჩქარება a_n , მხების აჩქარება კი ნულის ტოლი ექნება. შესაბამისად, წერტილის მოძრაობა აღარ იქნება სწორხაზოვანი ($a \neq 0$).

ყოველდღიური გამოცდილებიდან ცნობილია, რომ ერთი და იგივე ძალა სხვადასხვა სხეულს ანიჭებს სხვადასხვა აჩქარებას. აჩქარების მოდული დამოკიდებულია არა მარტო მოქმედი ძალის მოდულზე, არამედ სხეულის მასაზეც. სხეულის მასას უწოდებენ მისი ინერტიული მასის საზომს, რიცხობრივად გამოსახულს სხეულზე მოქმედი ძალის მოდულის შეფარდებით მის მიერ გამოწვეულ აჩქარებასთან. პრაქტიკაში სხეულის მასას ხშირად განსაზღვრავენ სხეულის სიძი-



ნახ. 127.



ნახ. 128.

მის ძალის მნიშვნელობით. მაგრამ იგი იცვლება ადგილის იმ გეოგრაფიული განედის მიხედვით, რომელშიც ხდება აწონა. სხეულის მასა კი უცვლელი სიდიდეა, აქედან გამომდინარეობს, რომ სხეულის წონა არ შეიძლება მივიღოთ მისი მასის ზუსტ საზომად. დედანიწის ყოველ მოცემულ პუნქტში ყველა სხეული ვარდება სიციხელებში ერთნაირი აჩქარებით. ამ (გ) აჩქარების მოძული ისეთივე დამოკიდებულებაშია დაკვირვების ადგილთან, როგორშიც სხეულის სიმძიმის ძალა (წონა); რადგანაც სხეულის სიმძიმის ძალის შეფარდება მისი თავისუფალი ვარდნის აჩქარებასთან მუდმივი სიდიდეა, ამიტომ სწორედ ამ ფარდობას იღებენ სხეულის მასის საზომად.

თუ აღვნიშნავთ სხეულის მასას m -ით, მისი სიმძიმის ძალას Q -თი და თავისუფალი ვარდნის აჩქარებას g -თი, მივიღებთ:

$$m = \frac{Q}{g}. \quad (112)$$

მესამე კანონი (ქმედებისა და უკუქმედების ტოლობის კანონი). ძალები, რომლებითაც ერთმანეთზე მოქმედებს ორი მატერიალური წერტილი, სიდიდით ტოლია და მიმართულია ურთიერთსაწინააღმდეგო მხარეს ერთ სწორ ხაზზე. ეს კანონი განხილულია 11 გვერდზე.

ძალების დამოუკიდებელი მოქმედების კანონი: აჩქარება, რომელსაც იღებს მატერიალური წერტილი მასზე რამდენიმე ძალის ერთდროული მოქმედების დროს, იმ აჩქარების გეომეტრიული ჯამის ტოლია, რომელთაც იგი მიიღებდა მოცემული ძალებიდან თითოეულის ცალ-ცალკე მოქმედებით.

დავეშვათ—წერტილზე, რომლის მასა m -ის ტოლია, ერთდროულად მოქმედებს $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ ძალები და ანიჭებს მას \vec{a} აჩქარებას. აჩქარება, რომელსაც ანიჭებს წერტილს მოცემული ძალებიდან თითოეული მასზე ცალ-ცალკე მოქმედების დროს, აღვნიშნოთ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ -ით. ძალების დამოუკიდებლობის კანონი საშუალებას გვაძლევს ვთქვათ, რომ $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_n$

თუ გავამრავლებთ მოცემული ტოლობის ორივე ნაწილს სკალარულ მამრავლ m -ზე (წერტილის მასა), მივიღებთ:

$$m\vec{a} = m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + m\vec{a}_3 + \dots + m\vec{a}_n \quad (113)$$

დინამიკის მეორე კანონის თანახმად, $m\bar{a}_1 = \bar{F}_1$; $m\bar{a}_2 = \bar{F}_2$; $m\bar{a}_3 = \bar{F}_3, \dots, m\bar{a}_n = \bar{F}_n$, ამიტომ 113-ე განტოლება შეიძლება დავწეროთ:

$$m\bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n = \bar{R}, \quad (114)$$

სადაც \bar{R} მოცემულ წერტილზე მოდებული ძალების სისტემის ტოლქმედია და მათი გეომეტრიული ჯამის ტოლია, ე. ი. $m\bar{a} = \bar{R}$.

შესაბამისად დინამიკის ნაწილის ამოცანებში წერტილში მოდებულ ძალთა სისტემა შეიძლება შევცვალოთ ერთი ტოლქმედით, ისევე როგორც სტატიკის ამოცანებში.

§ 80. ერთეულთა სისტემა

მექანიკაში მიღებულია ერთეულთა ორი სისტემა — ტექნიკური და ფიზიკური (საერთაშორისო სისტემა — ის). სიდიდეების განზომილების ერთეულებია სამი ძირითადი ერთეული, რომლებიც განსაზღვრავენ ერთეულთა სისტემას. ორი ძირითადი ერთეულია: სიგრძის ერთეული (L) და დროის ერთეული (T). მესამე ძირითად ერთეულად მიიღება ძალის ერთეული ან მასის ერთეული (M). სხვა სიდიდეები, როგორც არის სიჩქარე, აჩქარება და სხვა ძირითადი ერთეულების წარმოებულებია, მაგალითად, სიჩქარეს აქვს განზომილება — $\frac{\text{სიგრძე}}{\text{დრო}}$,

ე. ი. სიჩქარის ერთეულია ორი ძირითადი ერთეულის: სიგრძის ერთეულისა და დროის ერთეულის წარმოებულები: $L^1 T^{-1}$. ძალის მოდული და მასა დაკავშირებულია ერთმანეთთან გარკვეული დამოკიდებულებით, რომელიც გამოიხატება დინამიკის ძირითადი განტოლებით $\bar{F} = m\bar{a}$. მაშასადამე, ძალისა და მასის გასაზომად (დამოუკიდებელ) ერთეულად შეიძლება მივიღოთ მხოლოდ ერთ-ერთი მათგანი, ხოლო მეორე სიდიდის ერთეული იქნება წარმოებული სამი ძირითადი ერთეულიდან.

ერთეულთა ტექნიკურ სისტემას საფუძვლად უდევს ერთეულები: სიგრძის L , ძალისა F და დროის T . ძირითადია ძალის ერთეული, ხოლო მასის ერთეული წარმოებულია.

ერთეულთა ფიზიკური სისტემის ძირითად ერთეულად მიღებულია მასის ერთეული, ხოლო ძალის ერთეული წარმოებული სიდიდეა.

1. ერთეულთა ტექნიკური სისტემა.¹ ამ სისტემაში ძირითადი ერთეულებია:

¹ მოცემულ დამხმარე სახელმძღვანელოში წარმოდგენილია ერთეულთა ტექნიკური სისტემაში შესრულებული გაანგარიშებები, ხოლო გაანგარიშებათა შედეგები უფრო ხშირად მოცემულია ტექნიკურ სისტემასა და ის სისტემაშიც.

თეულებია: სიგრძის ერთეული — მეტრი (მ), დროის ერთეული — წამი (წმ), ძალის ერთეული — კილოგრამი (კგ). ამ ერთეულთა სისტემაში მასის განზომილება განისაზღვრება დინამიკის ძირითადი განტოლებიდან:

$$მასა = \frac{ძალა}{აჩქარება} = \frac{ძალა \cdot დრო^2}{სიგრძე}$$

მასის ერთეულს ტექნიკურ სისტემაში ეწოდება მასის ტექნიკური ერთეული (ან შემოკლებით მ. ტ. ე). ამრიგად, 1 მ. ტ. ე. = 1 კგ · წმ²/მ.

მასის ტექნიკური ერთეული ისეთი მასაა, რომელსაც 1 კგ-ის ტოლი ძალა ანიჭებს 1 მ/წმ-ის ტოლ აჩქარებას.

თუ ვიცით სხეულის სიმძიმის Q ძალა და სიმძიმის ძალის აჩქარება g დედამიწის ზედაპირზე მოცემულ ადგილში, შეიძლება დავადგინოთ სხეულის 112-ე ფორმულით:

$$m = \frac{Q}{g}$$

რადგან სიმძიმის Q ძალისა და g აჩქარების ცვალებადობა დედამიწის სხვადასხვა პუნქტისათვის მცირეა, საშუალო მნიშვნელობად მიიღებენ $g = 9,81$ მ/წმ².

ტექნიკურ ერთეულებში სხეულის მასის დასადგენად საჭიროა კილოგრამებით გამოხატული სხეულის წონა გავყოთ 9,81 მ/წმ²-ზე.

$$m = \frac{Q}{9,81} \text{ კგ} \cdot \text{წმ}^2/\text{მ} = \frac{Q}{9,81} \text{ მ. ტ. ე.}$$

2. ერთეულთა ფიზიკური სისტემა (იხ). ამ სისტემაში მექანიკური, სიდიდეების გაზომვისათვის ძირითად ერთეულებად მიღებულია: სიგრძის ერთეული — მეტრი (მ), დროის ერთეული — წამი (წმ) და მასის ერთეული — კილოგრამი (კგ).

ძალის განზომილება განისაზღვრება დინამიკის ძირითადი განტოლებიდან:

$$ძალა = მასა \cdot აჩქარება = \frac{მასა \cdot სიგრძე}{დრო^2}$$

იხ სისტემაში, ძალის ერთეულს ეწოდებენ ნიუტონს (ნ). ძალის ერთეულის ძირითადი ერთეულების საშუალებით გამოსახვისათვის

საჭიროა 111 ფორმულაში ჩავსვათ მასის ერთეული — 1 კგ, სიგრძის ერთეული — 1 მ და დროის ერთეული — 1 წმ. ანრიგად, $1 მ = 1 კგმ/წმ^2$; ნიუტონი ძალაა, რომელიც 1 კგ მასას ანიჭებს $1 მ/წმ^2$ აჩქარებას. 112-ე ფორმულიდან $Q = mg$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $g = 9,81 მ/წმ^2$ აჩქარების დროს $m = 1$ კგ მასის მქონე სხეულის წონა იქნება $1 \cdot 9,81 = 9,81$ კგმ/წმ² = 9,81 ნ.

§ 61. მექანიკურ სისტემაზე მოქმედი ძალების კლასიფიკაცია

მექანიკური სისტემის მატერიალურ წერტილებზე მოქმედი ყველა ძალა შეიძლება დაეყოთ ორ სახედ: 1) მოცემულ (აქტიური) ძალებად, რომელთა გამოსახულებები ცნობილია დროის, სისტემის მოძრავი მატერიალური წერტილების მდებარეობისა და მათი სიჩქარეებთან დამოკიდებულების მიხედვით, ასე რომ ამ დამოკიდებულებების დასადგენად საჭირო არ არის ვიცოდეთ მოცემული სისტემის ნოდრაობა; 2) ბმების რეაქციებად (თუ სისტემაზე დადებულია ზოგიერთი ბმა), მაგალითად, ზედაპირის რეაქციად, რომელზედაც იძულებულია იმოდროს სისტემის მოცემულმა მატერიალურმა წერტილმა ძაფის რეაქციად, რომლითაც შეერთებულია სისტემის ორი წერტილი, სახსრის რეაქციად, რომლის საშუალებითაც დამაგრებულია მყარი სხეული და რომელიც მოცემული სისტემის შემადგენლობაშია და ა. შ. ეს ძალები წინასწარ, სისტემის მოძრაობის გამოკვლევამდე, უცნობია (ზოგიერთ შემთხვევაში, როგორც უკვე ნათქვამი იყო სტატიკის ნაწილში, შეიძლება წინასწარ მითითებული იყოს რეაქციის მხოლოდ მიმართულება).

სისტემის მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალები შეიძლება კლასიფიცირებული იყოს სხვა ნიშნის მიხედვითაც, სახელდობრ: 1) შინაგან ძალებად, ე. ი. ძალებად, რომლებითაც მოცემული სისტემის მატერიალური წერტილები მოქმედებს ერთმანეთზე და 2) გარეგან ძალებად, ე. ი. ძალებად, რომლებითაც მოქმედებს სხეულები ან მატერიალური წერტილები მოცემულ სისტემაზე და არ მიეკუთვნება მას. ძალების ამ კლასიფიკაციას აქვს დიდი მნიშვნელობა სისტემის დინამიკაში.

მაგალითად, მორბენალზე მოქმედებს გარეგანი ძალები (საკუთარი წონა, სარბენი ბილიკის საფარის რეაქცია) და შინაგანი ძალები (კუნთების ძალები). იგივე ძალები შეიძლება კლასიფიცირებული იყოს სხვანაირად: სხეულის წონა და კუნთების ძალები მოცემული ძალებია, ხოლო საფარის რეაქცია ბმის რეაქციაა. ერთი და იგივე ძალა შეიძლება განვიხილოთ როგორც გარეგანი და როგორც შინაგან-

ნი ძალები ამოცანის პირობის მიხედვით. მაგალითად, კუნთთა ძალები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ქვედა კიდურების მოძრაობას, საჭიროა განვიხილოთ, როგორც გარეგანი მენჯის, წვივის მიმართ, როდესაც ლაპარაკია ამ რგოლების მოძრაობაზე ზურგის მიმართ, ან როგორც შინაგან მთლიანი სხეულის მიმართ, როდესაც განვიხილავთ მისი მოძრაობა მთლიანად.

ქმედება-უკუქმედების კანონის თანახმად, შინაგანი ძალები ყოველთვის წყვილ-წყვილად ტოლია მოდულით და მიმართულია საწინააღმდეგოდ, რადგანაც თვითონ ურთიერთქმედებებია მოცემული ნეკანიკური სისტემის მატერიალურ წერტილებს შორის.

§ 62. მექანიკური მუშაის დინამიკური მახასიათება

სტატიკის ნაწილში ლაპარაკი იყო მექანიკურ ბმებსა და მათი განსაზღვრის ზოგიერთ მეთოდზე სხეულის წონასწორობის პირობებში. ბმების რეაქციათა დინამიკური ანალიზის დროს აუცილებელია ზოგიერთი დამატებითი ცნება.

სტაციონარული (სკლერონომული) ბმები ისეთი ბმებია, რომელთა რეაქციები დროში არ იცვლება.

არასტაციონარული (რენომული) ბმები ისეთი ბმებია, რომელთა რეაქციები დროის ცხადი ფუნქციებია.

იდეალური ბმები სტაციონარული ბმებია, რომელთა ყველა რეაქციის მუშაობის ჯამი სისტემის ელემენტარული გადაადგილებისას ნულის ტოლია. მაგალითად, თუ ბმა ზედაპირია, რომელზეც ხახუნი შეიძლება უგულვებლევყოთ (მაგალითად სახსრის ზედაპირი), მაშინ სხეულების ასეთ ზედაპირზე გადაადგილების რეაქციების მუშაობა ნულის ტოლია.

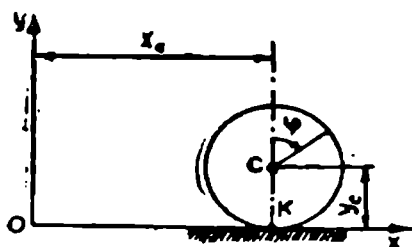
გეომეტრიული ბმები ისეთი ბმებია, რომლებიც ზღუდავენ სივრცეში სისტემის წერტილების მხოლოდ მდებარეობას და არა მათ სიჩქარეებს. მაგალითად, ძაფი ფიზიკური ქანჭარისათვის გეომეტრიული ბმაა. ჩონჩხის ცალკეული ძვლის სახსრებში ბმები გეომეტრიული ბმებია. სახსრის გარშემო მდებარე კუნთებს შეუძლია შეასრულოს ორმაგი როლი: იყოს გეომეტრიული და არაგეომეტრიული ბმები სპორტსმენის გადაადგილების ამოცანისა და კოორდინატების მიხედვით.

კინემატიკური (დიფერენციული) ბმები ისეთი ბმებია, რომლებიც ზღუდავენ არა მარტო კოორდინატებს, არამედ სიჩქარეებსაც.

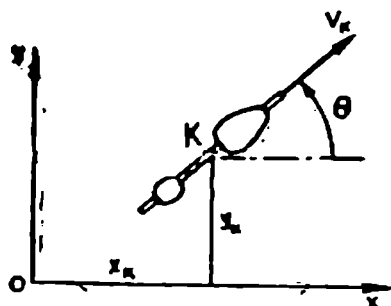
კოლონომური ბმები ეწოდება დიფერენციულ ინტეგრებად და გეომეტრიულ ბმებს.

აქ აქოლონომური ბმები ეწოდება დიფერენციულ არაინტეგრებად ბმებს.

მაგალითი XII. 1. R რადიუსიანი თვალი გორავს სრიალის გარეშე სწორხაზოვან ლიანდაგზე (ნახ. 129). თვის მოძრაობა ბრტყელპარალელურია, სივრცეში მდებარეობა განისაზღვრება x_c, y_c კოორდინატებით და φ კუთხით. აქ $y_c = R$ (გეომეტრიული ბმა). რადგან K წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლია, ამიტომ: $\dot{x}_c = R\dot{\varphi}$ ან $\dot{x}_c - R\dot{\varphi} = 0$ (კინემატიკური, ანუ დიფერენციალური ბმა). ამ ბმის განტოლება შეიძლება გავაინტეგროთ და მივიღოთ \dot{x}_c -ს დამოკიდებულება φ -ზე: $x_c - R\varphi = \text{const.}$ ბმის ინტეგრებადობა მიუთითებს იმაზე, რომ ეს სისტემა პოლონომურია.



ნახ. 129.



ნახ. 130.

მაგალითი XII. 2. მოციგურავე მოძრაობს ერთ ციგურაზე სიჩქარით, რომლის ცვალებადობის კანონია: $v_k = at$; დაეუშვათ, რომ ციგურის პირი იჭრება ყინულში და ციგურის მოძრაობა მასი პერპენდიკულარული სიბრტყის მიმართულებით გამოირიცხულია (ნახ. 130). ასეთი დაშვება საკიროებს რომ v_k სიჩქარე ყოველთვის იყოს ციგურის პირის სიბრტყეში. ამას მივყავართ x_k, y_k კოორდინატებისა და Θ -ს შემდეგ თანაფარდობებთან:

$$x_k = at \cos\Theta; \quad y_k = at \sin\Theta.$$

მოცემული განტოლებები, თუ Θ არ არის მუდმივი კუთხე, არ შეიძლება ინტეგრებული იყოს. მაშასადამე, განხილული სისტემა არაპოლონომურია. ასეთი სისტემის მოძრაობის აღწერა ძალიან გართულებულია, იმისათვის, რომ ბმების განტოლებები იყოს ინტეგრებადი, აუცილებელია Θ კუთხე განვსაზღვროთ დროის ფუნქციით. ამი-

სათვის საჭიროა მათემატიკურად აღვწეროთ ციგურის პირის მიერ ყინულის მსხვერველდობის პირობა. სპორტში ეს ამოცანა რამდენადმე მარტივდება, რადგან არის საშუალება წინასწარ მოცემული იყოს ფუნქცია $\Theta(t)$, როგორც „ადგილის პროგრამა“, ე. ი. ფიგურულ სრიალში მოცემულია ცნობილი ფიგურა, რომელიც უნდა შეასრულოს სპორტსმენმა.

XIII თავი

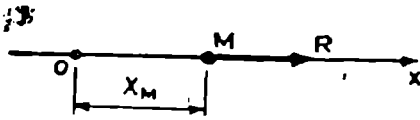
წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები და მათი ინტეგრაცია

§ 53. წერტილის სწორხაზოვანი მოძრაობა

წერტილის სწორხაზოვანი მოძრაობის დროს მისი სიჩქარე და აჩქარება ყოველთვის მიმართულია ერთი სწორი ხაზის გასწვრივ. ძალის მოქმედება მიმართულებით ემთხვევა სიჩქარესა და აჩქარებას.

დავუშვათ, M მატერიალურ წერტილზე მოქმედებს $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_i$ ძალები $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ ტოლქმედით (ნახ. 131). წერტილის მდებარეობა ტრაექტორიაზე განისაზღვრება x კოორდინატით. ამ შემთხვევაში დინამიკის ამოცანაა, რომ \vec{R} -ის ცოდნით დავადგინოთ წერტილის მოძრაობის კანონი, ე. ი. $x = f(t)$.

როგორც ცნობილია, მექანიკის ძირითადი კანონი შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ტოლობით $m\vec{a} = \vec{F}$ ან, თუ სხეულზე მოქმედებს რამდენიმე ძალა, ტოლობით $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i = \vec{R}$.



ნახ. 131.

მატერიალური წერტილის x გადაადგილება აუცილებელია დავაკავშიროთ მასზე მოქმედ F ძალასთან, წინა ტოლობის ორივე მხარის Ox ღერძზე დაგეგმილებით შევიღებთ:

$$ma_x = R_x \quad (115)$$

ვიცით, რომ $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, a_x შევცვალოთ $\frac{d^2x}{dt^2}$ სიდიდით:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{ix} \quad (116)$$

განტოლებებს, რომლებშიც შედის დამოუკიდებელი ცვლადი, საცდენი ფუნქცია და წარმოებული ან მათი დიფერენციალები, ეწოდება დიფერენციალური განტოლებები. 116-ე განტოლებაში საძებნი x სიდიდე წარმოებულის ნიშნის ქვეშაა. სწორედ ეს არის წერტილის სწორხაზოვანი მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება.

მოცემული განტოლება შეიძლება შევცვალოთ ორი დიფერენციალური განტოლებით, რომლებიც შეიცავენ პირველ წარმოებულს.

ჩადგანაც $v_x = \frac{dx}{dt}$ - სიჩქარის გეგმილია, შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= \Sigma F_{ix} \\ \frac{dx}{dt} &= v_x \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

რომ მოვებნოთ წერტილის მოძრაობის კანონი, ე. ი. $x=f(t)$, აუცილებელია გავაინტეგრროთ დიფერენციალური განტოლება. მიღებულ ამოხსნაში გვექნება ნებისმიერი მუდმივი C_1 , ჩადგან $\int l(x) dx = \varphi(x) + C_1$. მეორეჯერ ინტეგრებით მიღებულ ამოხსნაში გვექნება ორი მუდმივი c_1 და c_2 , რომელთა მნიშვნელობები უნდა განისაზღვროს. ამისათვის აუცილებელია მხედველობაში მივიღოთ დამატებითი, ანუ, როგორც ამბობენ, საწყისი პირობები: დროის საწყის მომენტში წერტილის მდებარეობა და სიჩქარე.

სწორხაზოვანი მოძრაობის შემთხვევაში მოცემულ საწყის პირობებს ექნება შემდეგი სახე: $t=0$ შემთხვევაში $x=x_0$; $v_x = v_0$ ან $t=0$ შემთხვევაში $\dot{x}=0$; $v_x = 0$.

საწყისი პირობების ცოდნით დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრების შემდეგ შეიძლება c_1 და c_2 მუდმივების სიდიდეების განსაზღვრა. მაგალითად, დავუშვათ, წერტილზე მოქმედებს F ძალა მუდმივი მოდულით და მიმართულებით. მოძრაობის განტოლებას ექნება ასეთი სახე:

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x. \quad (118)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ F_x მუდმივი სიდიდეა, 118-ე განტოლება შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$dv_x = \frac{F_x}{m} dt.$$

ამ გამოსახულების ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int dv_x = \int \frac{F_x}{m} dt,$$

$$v_x + c' = \frac{1}{m} F_x t + c''.$$

ან

$$v_x = \frac{1}{m} F_x t + (c'' - c').$$

მუდმივი სიდიდე $|c'' - c'|$ შეიძლება აღვნიშნოთ c_1 -ით და მაშინ

$$v_x = \frac{1}{m} F_x t + c_1.$$

ზაგრამ $v_x = \frac{dx}{dt}$, ამიტომ:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} F_x t + c_1. \quad (119)$$

გავამრავლოთ განტოლების ორივე მხარე dt -ზე:

$$dx = \left(\frac{1}{m} F_x t + c_1 \right) dt.$$

ამ გამოსახულების ინტეგრებით

$$\int dx = \int \left(\frac{1}{m} F_x t + c_1 \right) dt$$

მივიღებთ:

$$x = \frac{1}{2m} F_x t^2 + c_1 t + c_2. \quad (120)$$

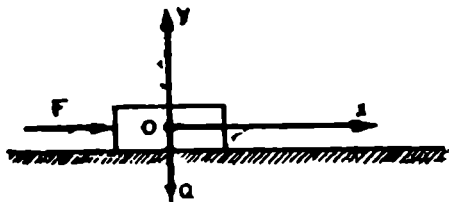
მიღებული შედეგი 116-ე განტოლების ზოგადი ამონახსნია.

ამოცანის განსაზღვრული კერძო ამოხსნისათვის აუცილებელია ვიცოდეთ c_1 და c_2 მუდმივების კონკრეტული მნიშვნელობები. მივცეთ საწყისი პირობები: „დავუშვათ, $t=0$ შემთხვევაში, $x=x_0$ და $v_x = v_0$; რადგან $t=0$ შემთხვევაში $v_x = \frac{dx}{dt} = v_0$, ამიტომ 119-ე და 120-ე განტოლებებში შესაბამისი ჩასმებით მივიღებთ: $v_0 = c_1$; $x_0 = c_2$.

c_1 და c_2 მიღებული მნიშვნელობების 120-ე განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2m} F_1 t^2. \quad (121)$$

როგორც 121-ე განტოლებიდან გამომდინარეობს, მატერიალური წერტილი მუდმივი F ძალის მოქმედებით ასრულებს თანაბარ-
ცვლად მოძრაობას. მოძრაობის შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრებით შეიძლება გადავწყვიტოთ სპორტული მოძრაობების მექანიკის საინტერესო და პრაქტიკულად მნიშვნელოვანი ამოცანები. ტიპურ ამოცანებში მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალა დამოკიდებულია დროზე: $F = f(t)$; განვლილ მანძილზე $F = f(s)$; სიჩქარეზე: $F = f(v)$ და ა. შ.



ნახ. 132.

შაგალითი XIII. 1. სიმუხის მღვმარეობაში Q წონის სხეული იწყებს მოძრაობას პორიზონტალური სიბრტყის გასწვრივ F ძალის მოქმედებით, რომლის სიდიდე იზრდება დროის პროპორციულად $F = kt$ კანონით, დავადგინოთ სხეულის მოძრაობის კანონი.

ამოხსნა: ათელის საწყისად შევარჩიოთ წერტილი O სხეულის საწყის მდებარეობაში (ნახ. 132) და მივმართოთ Ox ღერძი მოძრაობის მხარეს. საწყისი პირობები იქნება: $t=0$ შემთხვევაში $x=0$; $v_x=0$. სხეულზე მოქმედი ძალა, $F_x = F = kt$. ამიტომ ტოლობა $m\bar{a} = \bar{F}$ შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\frac{Q}{g} \cdot \frac{dv_x}{dt} = kt.$$

შემდეგ ტოლობის ორივე ნაწილის dt -ზე გამრავლებით მივიღებთ:

$$dv_x = \frac{kg}{Q} t dt.$$

ამ გამოსახულების ინტეგრებით მივიღებთ:

$$v_x = \frac{kg}{Q} \cdot \frac{t^2}{2} + c_1.$$

რადგან $t=0$ შემთხვევაში $v_x = 0$, ამიტომ შესაბამისი ჩასმის შესრულებით მივიღებთ, რომ $c_1 = 0$ უდრის ნულს.

შევეცვალოთ $x = \frac{dx}{dt}$, ტოლობის ორივე ნაწილის dt -ზე გამრავლებით მივიღებთ:

$$dx = \frac{kg}{2Q} l^2 dt.$$

მეორეჯერ ინტეგრებით მივიღებთ:

$$x = \frac{kg}{6Q} l^3 + c_2.$$

საწყისი მონაცემების $l=0$; $x=0$ ჩასმა გვიჩვენებს, რომ $c_2=0$. ზაბოლოოდ გვაქვს:

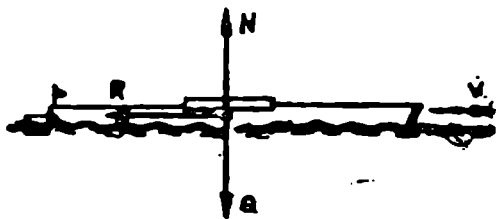
$$x = \frac{kg}{6Q} l^3.$$

მიღებული განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ სხეულის მიერ განვლილი გზა დროის კუბის პროპორციული იქნება. ძალის ზრდის ასეთ ხასიათს ვხვდებით რომელიმე სისტემის „გაქანების“ მომენტში (მაგალითად, კელოსიპედის, ბადროს, უროს „გაქანების დროს) და ა. შ.

მაგალითი XIII. 2. 15 კგ წონის აკადემიური ნიჩბოსნის ნავს უბიძგეს და მიანიჭეს საწყისი $v_0=3,0$ მ/წმ სიჩქარე. წყლის წინააღმდეგობის ძალა მცირე სიჩქარეების დროს სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია და უდრის $R=\mu v$, სადაც $\mu=1$ კგ წმ/მ $\left(9,8 \frac{\text{ნ}\cdot\text{წმ}}{\text{გ}}\right)$.

განვსაზღვროთ, რა დროის შემდეგ შემცირდება ნავის სიჩქარე ორჯერ და რა მანძილს გაივლის ნავი ამ დროის განმავლობაში.

საჭიროა მხედველობაში მივიღოთ, რომ ძალა, რომელმაც მიანი-



ნახ. 133.

ჭა ბიძგი ნავს, მოქმედებდა მასზე $l=0$ დროს მომენტამდე. ნავმა მიიღო v_0 სიჩქარე, როგორც ამ ძალის მოქმედების შედეგი, $l=0$ მომენტიდან ნავზე მოქმედებს (ნახ. 133). აქტიური ძალა Q — სიმძიმის

1 წინააღმდეგობის სიდიდე, რომელსაც განიცდის სხეული, შეიძლება ზოგადი სახით წარმოვადგინოთ ფორმულით: $R=\mu v^n$. თუ R -ს გავზომავთ ის სისტემაში (ნ), მაშინ μ (რომელიმე მუდმივი სიდიდე) გაიზომება ნ·წმ/მ-ში; v (მოდრაობის ფარდობითი სიჩქარე) — მ/წმ-ში. ხარისხის მაჩვენებელი n დამოკიდებულია v -ს სიდიდეზე და სპორტული პრაქტიკის დამახასიათებელი სიჩქარეებისათვის მიიღება 1—3 ზღვრებში.

ძალა; რეაქციული ძალები N და R წარმოიქმნება ნავზე წყლის მოქმედების შედეგად.

ამოხსნა: გამოვდივართ დინამიკის ძირითადი განტოლებიდან:

$$\sum F_{ix} = -R = -\mu v.$$

რამდენადაც $v_x = v$, $m \frac{dv}{dt} = -\mu v.$

მანამ, სანამ გავაინტეგრებთ ამ განტოლებას, საჭიროა დავეყოთ ცვლადები:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m} dt.$$

შემდეგ, თუ გავაინტეგრებთ განტოლებას

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m} \int_0^t dt.$$

და მივიღებთ მხედველობაში, რომ $t=0$ შემთხვევაში $v=v_0$, მივიღებთ:

$$\ln v - \ln v_0 = -\frac{\mu}{m} t.$$

აქედან ვღებულობთ:

$$t = \frac{m}{\mu} \ln \frac{v_0}{v}.$$

ამოცანის პირობის თანახმად, საჭიროა ვიპოვოთ დრო $t=t_1$, როდესაც $v=0,5 v_0$.

$$t_1 = \frac{m}{\mu} \ln \frac{v_0}{0,5 v_0} = \frac{m}{\mu} \ln 2 = 0,69 \frac{m}{\mu}.$$

$$t_1 = 0,69 \frac{15}{g \cdot 1} = 1,05 \text{ წმ.}$$

რაციონალურია განვიხილოთ S გზის განსაზღვრისათვის ძირითადი განტოლება დავწეროთ ასე:

$$m \frac{dv_1}{dt} = -\mu v.$$

შემდეგ, თუ საჭიროა მოვძებნოთ სიჩქარის დამოკიდებულება x კო-

ორდინატისა და არა t დროზე, ან თუ თვით ძალები დამოკიდებულია x -ზე, ამ განტოლებას გარდავსახავთ მისი $\frac{dx}{dt}$ -ზე გამრავლებით:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v.$$

თუ შევცვლით $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} v$, მივიღებთ:

$$mv = \frac{dv}{dx} = -\mu v.$$

ამ განტოლების v -ზე შეკვეცით და იმის მხედველობაში მიღებით, რომ $x=0$ დროს $v=v_0$, გვექნება:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^x -\frac{\mu}{m} dx;$$

და

$$x = \frac{-(v-v_0)m}{\mu}$$

თუ მივიჩნევთ, რომ $v=0,5 v_0$, დავადგენთ, რომ ნავი სიჩქარის ნახევარჯერ შემცირებზს დროს გაივლის გზას, რომელიც უღრის:

$$x_1 = \frac{mv_0}{2\mu} = \frac{15 \cdot 3}{g \cdot 2} = 2,25 \text{ მ.}$$

შენიშვნა: ეს ამოცანა საინტერესოა იმით, რომ ნავის წონის მისი საწყისი v_0 სიჩქარის (მისი გამოთვლით) ცოდნით, t_1 დროის რეგისტრირებით შეიძლება ექსპერიმენტულად გამოვთვალოთ μ კოეფიციენტი და R წინააღმდეგობა. პრაქტიკამ ცხადყო, რომ ნავის წინააღმდეგობის განსაზღვრის ეს მეთოდი ბუქსირების მეთოდზე მნიშვნელოვნად უფრო მოსახერხებელია და უფრო ზუსტია განსაკუთრებით შეზეთვის ხარისხის განსაზღვრის დროს, როცა აუცილებელია გაზომვის დიდი სიზუსტე.

§ 84. სხეულის მოძრაობის წინააღმდეგობის გარეშე

სხეულის ვარდნა ჰაერში. სპორტში ძალიან ხშირად ვხვდებით სხეულის მოძრაობას წინააღმდეგობის გარეშე, მაგალითად; პარაშუტი. ხტომის, წყალში ხტომისა და ტრამპლინიდან სპორტსმე-

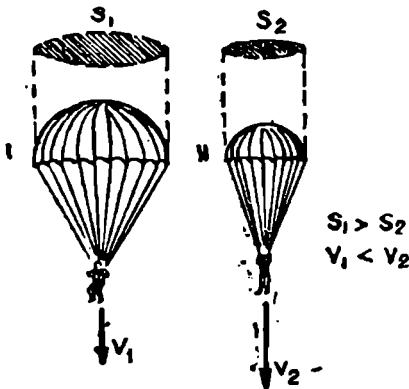
ნის ხტომის დროს. რომელიმე გარემოში მოძრაობის დროს სხეულა. განიცდის წინააღმდეგობას, რომელიც დამოკიდებულია სხეულის ფორმასა და ზომებზე, მის მოძრაობის სიჩქარეზე, აგრეთვე თვით გარემოს თვისებებზე. ჰაერში სხეულის ვარდნის დროს წინააღმდეგობის R ძალა შეიძლება გამოითვალოს ფორმულით:

$$R = \frac{1}{2} C_x \rho S v^2 = K v^2, \quad (122)$$

სადაც ρ გარემოს სიმკვრივეა (ჰაერისათვის $15^\circ C$ ტემპერატურაზე და ვერცხლისწყლის სვეტის 760 მმ წნევის დროს $\rho = \frac{1}{8} \cdot \frac{\text{კგ} \cdot \text{წმ}^2}{\text{მ}^4}$,

ანუ $1,23 \frac{\text{წმ}^2}{\text{მ}^4}$).

ფართობი S სხეულის გეგმილის ფართობია სიბრტყეზე მოძრაობის მიმართულების პერპენდიკულარულად (ზოგჯერ მას უწოდებენ მიდელის ფართობს), როგორც ნაჩვენებია 134-ე ნახაზზე. გუმბათისებური პარაშუტის გეგმილის ფართობი მეორე შემთხვევაში ნაკლები იქნება, ვიდრე პირველში.



ნახ. 134.



ნახ. 135.

C_x — წინააღმდეგობის უგანზომილებო კოეფიციენტი, რომელიც დამოკიდებულია სხეულის ფორმაზე.

დავუშვათ, სხეული ვარდება შედარებით მცირე სიმალიდან, როცა ჰაერის ρ სიმკვრივე და სხეულის წონა Q შეიძლება მუდმივად მივიჩნიოთ. კოორდინატის Ox ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვემოთ (ნახ. 135). საჭიროა განვსაზღვროთ როგორ შეიცვ-

ლება სხეულის ვარდნის სიჩქარე განვიღობო x გზის მიხედვით $v_0=0$ საწყისი სიჩქარის დროს.

ვარდნილ სხეულზე მოქმედებს ძალები Q — სხეულის წონა და R — წინააღმდეგობის ძალა. ამიტომ შეიძლება დავწეროთ განტოლება:

$$\sum F_{ix} = Q - R.$$

რადგანაც საინტერესოა v -ს დამოკიდებულება x -ზე, განტოლება უფრო მოსახერხებელია დავწეროთ ასე:

$$mv \frac{dv}{dx} = Q - R;$$

$$\frac{Q}{g} v \frac{dv}{dx} = Q - Kv^2 \quad \text{ანუ}$$

$$v \frac{dv}{dx} = g \left(1 - \frac{Kv^2}{Q} \right).$$

აღვნიშნოთ $\frac{K}{Q} = \frac{1}{a^2}$,

მაშინ განტოლებას ექნება ასეთი სახე:

$$v \frac{dv}{dx} = g \left(1 - \frac{v^2}{a^2} \right);$$

დავყოთ ცვლადები

$$\frac{v dv}{a^2 - v^2} = \frac{g}{a^2} dx.$$

განტოლების ორივე ნაწილის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int \frac{v dv}{a^2 - v^2} = \frac{g}{a^2} \int dx,$$

$$-\frac{1}{2} \ln(a^2 - v^2) = \frac{g}{a^2} x + c_1.$$

რადგან $x=0$ შემთხვევაში $v=0$, ამიტომ $c_1 = \frac{1}{2} \ln a^2$; ამ მნიშვნელობის ჩასმით მივიღებთ:

$$\ln \frac{a^2 - v^2}{a^2} = -2 \frac{g}{a^2} x$$

ან

$$\frac{a^2 - v^2}{a^2} = e^{-2 \frac{g}{a^2} x}$$

აქედან დავადგენთ:

$$v = a \sqrt{i - e^{-2\frac{g}{a^2}x}} \quad (123)$$

ეს გამოსახულება განვლილი გზის მოხედვით ჰაერში ვარდნილი სხეულის სიჩქარის ცვალებადობის კანონია. ვარდნილი სხეულის

მიერ განვლილი გზის ზრდასთან ერთად $e^{-2\frac{g}{a^2}x}$ სიდიდე მცირდება და მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც x ხდება საკმაოდ დიდი ($x \rightarrow \infty$). ამ დროს ვარდნის სიჩქარე იზრდება და ისწრაფვის მუდმივი a სიდიდისაკენ, რომელიც მოცემული სხეულის ვარდნის ზღვრული სიჩქარეა ($v_{\text{ზღვ.}}$).

ადამიანის სხეულისათვის ვარდნის ზღვრული სიჩქარეა 60 მ/წმ. ამიტომ როგორი სიმაღლიდანაც უნდა ვარდებოდეს ადამიანი, მისი ვარდნის სიჩქარე არ გადააქარბებს ამ მნიშვნელობას. როდესაც ადამიანი პარაშუტით ხტება, მოძრაობის წინააღმდეგობა პარაშუტის გახსნის შემდეგ მკვეთრად იზრდება მისი დიდი ზომებისა და გუმბათისებრი ფორმის გამო. ამიტომ ზღვრული სიჩქარე 5—6 მ/წმ და შეესაბამება ისეთ სიჩქარეს, როგორიც მიიღწევა უპარაშუტოდ დაახლოებით 2 მ-დან ხტომის დროს. |

მე-11 ცხრილში წარმოდგენილია ადამიანის სხეულის ზოგიერთი აეროდინამიკური მახასიათებელი.

ქ

ც ხ რ ი ღ 11

რ მიადელი მუშა გარემოში (ρ) და წინააღმდეგობის კოეფიციენტი

სპორტული სპეციალიზაცია	მადელი S (მ^2)	C_x -ს საშუალო მნიშვნელობები
წყალში ხტომა (ძირითადი დგომიდან)	0,05—0,1	0,01—0,03
სათხილამურო სპორტი	0,3—1,0	0,5—0,9
ციგურები სრბოლის სპორტი	0,35—0,5	0,9—1,1
ველოსპორტი	0,4—0,5	0,7—0,9

მაგალითი XIII, 3 სპორტსმენი ხტება წყალში კოშკიდან ($h=10$ მ) ვერტიკალური მდებარეობის შენარჩუნებით („ჭარისკაცულად“). განვსაზღვროთ მისი ვარდნის სიჩქარე წყალში ჩასვლის მომენტში. სპორტსმენის წონა $Q=70$ კგ.

ამოხსნა: სიჩქარე განისაზღვრება 123-ე ფორმულით:

$$v = a \sqrt{1 - e^{-\frac{2g}{a^2}h}}$$

სადაც

$$a^2 = \frac{Q}{K}; \quad K = \frac{C_x S \rho}{2}$$

C_x და S მნიშვნელობები მოცემულია მე-11 ცხრილში.
ამივილოთ

$$\rho = \frac{1}{8}; \quad S = 0,1 \text{ მ}^2; \quad C_x = 0,02.$$

აქედან დავადგენთ, რომ:

$$K = \frac{1}{2} \rho C_x S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot 0,1 \cdot 0,02 = 1,25 \cdot 10^{-4}$$

განვსაზღვროთ ფორმულაში შემავალი კოეფიციენტების მნიშვნელობები:

$$a^2 = \frac{Q}{K} = \frac{70}{1,25 \cdot 10^{-4}} = 5,6 \cdot 10^5; \quad a = 7,5 \cdot 10^2;$$

$$\frac{2g}{a^2} \cdot h = \frac{20 \cdot 10}{5,6 \cdot 10^5} = 3 \cdot 7 \cdot 10^{-4}$$

$$v = 7,5 \cdot 10^2 \sqrt{1 - e^{-\frac{2 \cdot 10}{5,6 \cdot 10^5} \cdot 10}} = 13,5 \text{ მ/წმ.}$$

სიჩქარე მატერიალური წერტილისათვის სივრცეში (ჰაერის წინააღმდეგობის გაუთვალისწინებლად) ტოლი იქნებოდა:

$$v = \sqrt{2gh} = 14,0 \text{ მ/წმ.}$$

რთული ხტომების დროს მიღელი და C_x რთული ცვლადი სიდიდეებია და მნიშვნელოვნად მეტია, ვიდრე განხილულ მაგალითში, ამიტომ რთული ხტომების დროს სიჩქარეც კლებულობს მეტად.

მაგალითი: XIII. 6. როგორც აღვნიშნეთ, ადამიანის ზღვრული სიჩქარე დიდი სიმაღლიდან ვარდნის დროს არ აღემატება 60 მ/წმ-ს. განვსაზღვროთ $C_x S$ სიდიდე ამ შემთხვევისათვის. 123-ე

ფორმულაში h -ს ზრდასთან ერთად $he^{-\frac{2g}{a^2}h}$ სიდიდე კლებულობს

და, როდესაც $h \rightarrow \infty$, $e^{-\frac{2g}{a^2}h} \rightarrow 0$.

ამ დროს ვარდნის სიჩქარე v იზრდება და მიისწრაფვის მუდმივი სიდიდისაკენ, რომელიც უდრის:

$$a = \sqrt{\frac{Q}{K}}, \text{ ამიტომ } v_{\text{საყ}} = a = \sqrt{\frac{2Q}{C_x \rho S}}$$

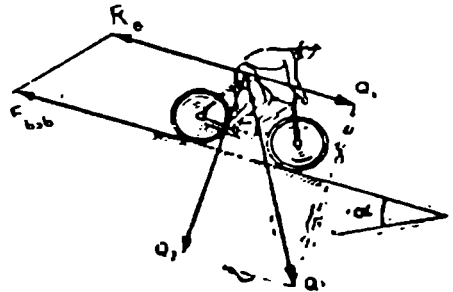
ამოცანის პირობით $v = 60$ მ/წმ; $Q = 70$ კგ. აქედან:

$$S \cdot C_x = \frac{2Q}{\rho v_{\text{საყ}}^2} = \frac{2 \cdot 70}{\frac{1}{8} \cdot 60^2} = \frac{1120}{3600} = 0,31.$$

SC_x -ის დიდი მნიშვნელობა უპირველეს ყოვლისა აიხსნება დიდი მიდელით, ვარდნის დროს ადამიანი, სხვადასხვა პოზას ლებულობს; გარდა ამისა, მიდელი იზრდება დიდი თბილი ტანსაცმლის ხარჯზე; C_x სიდიდეც მკვეთრად მატულობს.

ველომობილელის დაშვება დაღმართზე. დაღმართზე ველომობილელის დაშვების დროს ველოსიპედსა და სპორტსმენზე შოკმედებს სიმძიმის ძალა Q და წინააღმდეგობის ძალები $F_{\text{წინ}}$, დაეშალოთ Q ძალა შემდგენებად:

ერთ-ერთი მათგანი $Q_2 = Q \cos \alpha$ და მიმართულია N ნორმალის ზედაპირის მიმართულებით, მეორე $Q_1 = Q \sin \alpha$ და მიმართულია გზის საფარის პარალელურად. იგი ქმნის ველოსიპედის გაქანებას. ხახუნის ძალა $F_{\text{ხახ}}$ და ჰაერის წინააღმდეგობა R , მიმართულია გზის საფარის პარალელურად (ნახ. 136).



ნახ. 136.

ჩაეწეროთ მოძრაობის განტოლება:

$$am = Q \sin \alpha - f Q \cos \alpha - R, \tag{124}$$

სადაც Q ველოსიპედისა და ველომობილელის წონაა, m — ამ სისტემის მასა, f — ხახუნის კოეფიციენტი, R — ჰაერის წინააღმდეგობა. ძალა $f Q \cos \alpha$ გორვის ხახუნის წინააღმდეგობაა. ეს სიდიდე კარგი ტრასის შემთხვევაში არ არის დამოკიდებული მოძრაობის სიჩქარეზე. თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ $\cos \alpha$ 0-დან 30° -მდე ზღვრებში იცვლება უმნიშვნელოდ (1,000—0,866), ძალიან ხშირად მიიჩნევენ, რომ გორვის წინააღმდეგობა fQ -ს ტოლია. კარგი გზისათვის (ას-

ფალტი) $f=0,004$, ცულისათვის (რეყუენილი) f იზრდება $0,008$ — $0,01$ -მდე.

ჰაერის წინააღმდეგობა (R_x) უდრის:

$$R_x = \frac{C_x S \rho}{2} v^2$$

მივიჩნით, რომ C_x , S და ρ მოცემული ველოსიპედისათვის უცვლელი სიდიდეებია. თუ $C_x=0,8$, $S=0,5$, $\rho=0,125$, მაშინ

$$\frac{C_x S \rho}{2} = \frac{0,8 \cdot 0,5 \cdot 0,125}{2} = 0,025.$$

$C_x=0,6$ შემთხვევაში

$$\frac{C_x S \rho}{2} = 0,039.$$

ამიტომ შეიძლება მივიჩნით, რომ ჰაერის წინააღმდეგობა $R_x = 0,022v^2$.

აქ საჭიროა აღვნიშნოთ, რომ v მოძრაობის ფარდობითი სიჩქარეა, ჰაერის ნაკადების დიდი სიჩქარით გადაადგილების დროს (ქარი) v -ს სიდიდე არ შეესაბამება ველომობოლელის მოძრაობის სიჩქარეს.

მიღებული მნიშვნელობების 124-ე განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$am = Q \sin \alpha - 0,004 \cdot Q - 0,022v^2. \quad (125)$$

როდესაც მოქმედი ძალები ნულის ტოლია, ველოსიპედი იმოძრაებს მუდმივი სიჩქარით და მაქსიმალური იქნება იმ პირობით, რომ დაშვება ხდება თავისუფლად და ველომობოლელი „არ მუშაობს“.

$$\begin{aligned} Q \sin \alpha - 0,004 Q - 0,022v^2 &= 0, \\ 0,022v^2 &= Q(\sin \alpha - 0,004), \end{aligned}$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{Q(\sin \alpha - 0,004)}{0,022}} \text{ მ/წმ.} \quad (126)$$

126-ე ფორმულა ზოგჯერ მოსახერხებელია დავწეროთ სხვა სახით:

$$v_{max} = \sqrt{Q} \cdot \sqrt{\frac{\sin \alpha - 0,004}{0,022}} \text{ მ/წმ.} \quad (127)$$

თუ $\alpha = 10^\circ$ ($\sin 10^\circ = 0,174$) და ველომობოლელის წონა ველოსიპედთან ერთად 90 კგ-ია, მაქსიმალური სიჩქარე იქნება:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{90 \cdot (0,174 - 0,004)}{0,022}} = 24,4 \text{ მ/წმ} = 95 \text{ კმ/სთ.}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ აჩქარება

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

125-ე განტოლება შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = Q(\sin\alpha - 0,004) - 0,022v^2. \quad (128)$$

ან სხვა ფორმით:

$$mv \cdot \frac{dv}{dx} = Q(\sin\alpha - 0,004) - 0,022v^2, \quad (129)$$

ანდა:

$$\frac{Q}{g} v \cdot \frac{dv}{dx} = Q(\sin\alpha - 0,004) - 0,022v^2, \quad (130)$$

აღნიშნოთ:

$$(\sin\alpha - 0,004) k^2\text{-ით, ხოლო}$$

$$\frac{Qk^2}{0,022} = a^2.$$

130-ე განტოლებაში ამ აღნიშვნების შეტანით მივიღებთ:

$$\frac{Q}{g} v \frac{dv}{dx} = Qk^2 - \frac{Qk^2}{a^2} v^2 \quad \text{ან} \quad (131)$$

$$v \frac{dv}{dx} = gk^2 \left(\frac{a^2 - v^2}{a^2} \right).$$

ცვლადების დაყოფის შემდეგ მივიღებთ:

$$-v \cdot \frac{dv}{a^2 - v^2} = -\frac{gk^2}{a^2} dx.$$

თუ ავიღებთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილის ინტეგრალს

$$-\int v \frac{dv}{a^2 - v^2} = -\frac{gk^2}{a^2} \int dx$$

(მარცხენა მხარის ინტეგრალი უბრალო ცხრილის ინტეგრალია, იგი ყველა მოკლე ცნობარის ცხრილებშია),
მივიღებთ:

$$\ln(a^2 - v^2) = -\frac{2gk^2}{a^2}x + c_1 \quad (132)$$

$x=0$ შემთხვევაში სიჩქარე $v=0$. შესაბამისად, $\ln a^2 = c_1$.
 c_1 -ის ამ მნიშვნელობის ჩასმით 132-ე განტოლებაში მივიღებთ:

$$\ln(a^2 - v^2) = -\frac{2gk^2}{a^2}x + \ln a^2;$$

ან

$$\begin{aligned} \ln \frac{a^2 - v^2}{a^2} &= -\frac{2gk^2}{a^2}x \\ \frac{a^2 - v^2}{a^2} &= e^{-\frac{2gk^2}{a^2}x} \\ v &= a \sqrt{1 - e^{-\frac{2gk^2}{a^2}x}}, \end{aligned} \quad (133)$$

მაგრამ $k^2 = (\sin \alpha - 0,004)$, ხოლო

$$a^2 = \frac{Qk^2}{0,022}; \quad a = \sqrt{\frac{Qk^2}{0,022}} = \sqrt{\frac{Q(\sin \alpha - 0,004)}{0,022}},$$

$$\cdot \cdot \cdot x \rightarrow \infty \quad v \rightarrow v_{\max} = a.$$

მაშასადამე,

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{Q(\sin \alpha - 0,004)}{0,022}}$$

ამიტომ 133-ე ფორმულა შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$v = v_{\max} \sqrt{1 - e^{-\frac{-2g(\sin \alpha - 0,004)}{v_{\max}^2}x}} \quad (134)$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ, თუ როგორ იცვლება v სიჩქარე გარბენის სიგრძის მიხედვით x -ის ზრდის დროს

$$e^{-\frac{-2g(\sin \alpha - 0,004)v_{\max}^{-2}}{x}}$$

სიდიდე მცირდება და $x \rightarrow \infty$ დროს მიისწრაფვის ნულისაკენ. ამავე დროს ველომრბოლელის სიჩქარე ზღვარში მიისწრაფვის დაშვების მოცემული პირობების შემთხვევაში v_{\max} -ის ტოლი მულმივი სიდიდისაკენ.

ზარისხის მაჩვენებელი

$$\frac{2g(\sin\alpha - 0,004)}{v_{\max}^2} \cdot x = \left[\sqrt{\frac{Q \cdot (\sin\alpha - 0,004)}{0,022}} \right]^2 \cdot x =$$

$$= \frac{2g \cdot 0,022}{Q} = x \cdot \frac{0,432}{Q} x.$$

შემდგომი გაანგარიშებისათვის მიზანშეწონილია ავაგოთ დამხმარე მე-12 ცხრილი.

ცხრილი 12

გასაანგარიშებელი ცხრილი

	$\sin\alpha - 0,004$	$\sqrt{\frac{\sin\alpha - 0,004}{0,022}}$	v_{\max} სიჩქარე (როცა $Q = 90$ კგ)	
			მ/წმ	კმ/სთ
5°	0,083	1,95	18,5	66
10°	0,170	2,8	26,6	95
15°	0,255	3,4	32,3	115
20°	0,338	3,78	35,8	129
25°	0,419	3,92	37,2	134
30°	0,496	4,16	39,4	142

ზარისხის ამ მაჩვენებლის 134-ე ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ:

$$v = v_{\max} \sqrt{1 - e^{-\frac{0,432}{Q} \cdot x}} \quad (\text{მ/წმ}). \quad (135)$$

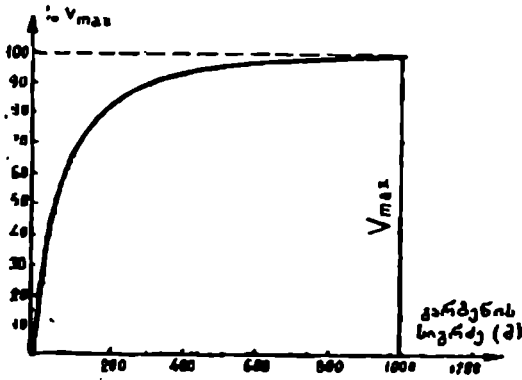
საინტერესოა სიჩქარის ცვალებადობა დაღმართზე x სიგრძის მიხედვით. მოცემული ველომრბოლელისათვის $Q = \text{const.}$ დაეუშვათ, როგორც აღრე, $Q = 90$ კგ. ამ დროს $\frac{0,432}{Q} \cdot x = 0,0048 x$.

შევადგინოთ გასაანგარიშებელი მე-13 ცხრილი.

ვახანგარიშებელი ცხრილი

x მ-ობით	$0,0048 x$	$e^{-0,0048x}$	$1-e^{-0,0048x}$	$\sqrt{1-e^{-0,0048x}}$
0	0	1	0	0
10	0,048	0,950	0,050	0,024
50	0,240	0,787	0,213	0,468
100	0,480	0,619	0,381	0,617
300	1,440	0,262	0,738	0,859
500	2,400	0,091	0,909	0,953
1000	4,800	0,008	0,992	0,996

მე-13 ცხრილიდან და 137-ე ნახაზიდან ჩანს, როგორი სის-



ნახ. 137.

წრაფით: იზრდება სიჩქარე დაღმართის დასასრულს: $x=500$ მ შემთხვევაში სიჩქარე ზღვრულთან ახლოსაა. საინტერესოა გამოვიკვლიოთ (v) სიჩქარის ცვლილება (t) დროის მიხედვით, ე. ი. ვიპოვოთ ანალიზური გამოსახულება $v=f(t)$ ფუნქციისათვის.

ამისათვის 125-ე განტოლება $ma = Q(\sin \alpha - 0,004) - 0,022v^2$ უნდა გარდავსახოთ შემდეგ განტოლებად:

$$\frac{Q}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = Qk^2 - \frac{Qk^2}{a^2} v^2$$

ან

$$\frac{dv}{dt} = gk^2 \left(\frac{a^2 - v^2}{a^2} \right)$$

დავყოთ ცვლადები

$$\frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{gk^2}{a^2} dt$$

და ამ ტოლობის ორივე ნაწილის ინტეგრებით

$$\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \int \frac{gk^2}{a^2} dt$$

(მარცხენა მხარე წარმოდგენილია ცხრილის ინტეგრალით) მივიღებთ:

$$\frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{v}{a} = \frac{gk^2}{a^2} t + c_1.$$

$t=0$ შემთხვევაში $v=0$ და $c_1=0$. შესაბამისად:

$$\operatorname{Arcth} \frac{v}{a} = \frac{gk^2}{a} t.$$

რადგან

$$\begin{aligned} a &= v_{\max}, \\ \operatorname{Arcth} \frac{v}{v_{\max}} &= \frac{gk^2}{v_{\max}} t. \end{aligned} \quad (136)$$

ფუნქციას Arcth არკტანგენსი (უკუჰიპერბოლური ფუნქცია)¹ ეწოდება. თუ $y = \operatorname{Arcth} x$, მაშინ x არის $\operatorname{th} y$ ჰიპერბოლური ტანგენსი), $x = \operatorname{th} y$;

$$\operatorname{th} y = \frac{\sinh y}{\cosh y}; \quad \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

რადგანაც უნდა გავიგოთ, თუ როგორ იცვლება (v) სიჩქარე (t) დროის მიხედვით, ამიტომ 136-ე განტოლებით მოცემული და მოკიდებულება, საჭიროა წარმოვადგინოთ $v = f(t)$ სახით:

$$\frac{v}{v_{\max}} = \operatorname{th} \left(\frac{gk^2}{v_{\max}} t \right).$$

ან

$$v = v_{\max} \operatorname{th} \left(\frac{gk^2}{v_{\max}} t \right). \quad (137)$$

ვადევნოთ თვალყური, როგორ იცვლება (v) სიჩქარე გაქანების პერიოდში (t) დროის მიხედვით. $\alpha = 10^\circ$ დახრის კუთხისათვის $v_{\max} = 26,6$ მ/წმ (იხ. მე-12 ცხრილი).

¹ ცხრილებში, ჰიპერბოლური, ისევე როგორც ჩვეულებრივი ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისათვის მოცემულია სხვადასხვა ცნობარში (მ. ნ. ბრონშტეინი და კ. ა. სემენდიაევი. «Справочник по математике для инженеров и учащихся в вузах»; А. К. Митропольский. «Краткие математические таблицы» და სხვ.).

$$gk^2 = 9,81(\sin 10^\circ - 0,004) = 9,81 \cdot 0,170 = 1,67;$$

$$\frac{gk^2}{v_{\max}} = \frac{1,67}{26,6} = 0,063 \text{ განგარიშება წარმოდგენილია მე-14 ცხრილში.}$$

ცხრილი 14

გასანგარიშებელი ცხრილი

t (წმ)	$\frac{gk^2}{v_{\max}} t$	$\text{th}\left(\frac{gk^2}{v_{\max}} t\right)$
0	0	0,00
1	0,06	0,06
5	0,31	0,30
10	0,61	0,57
15	0,94	0,74
20	1,26	0,85
25	1,57	0,92
30	1,87	0,95
40	2,50	0,99

ამ ცხრილის მონაცემები წარმოდგენილია გრაფიკის სახით $v = f(t)$ 138-ე ნახაზზე. ასეთივე სახით შეიძლება გამოვიკვლიოთ სიჩქარე ნებისმიერი დახრის კუთხისათვის.

მაგალითი XIII. 5. განესაზღვროთ სიჩქარე, რომელსაც მიადწევს ველომობილო (სატერაფულის მოძრაობის გარეშე) $\alpha = 20^\circ$ დაღმართზე დაშვებიდან 20 წმ-ის შემდეგ, თუ მისი წონა უდრის 80 კგ-ს, ხოლო ველოსიპედის წონა 10 კგ-ს.

როგორია შესაძლებელი მაქსიმალური სიჩქარე?

ამოხსნა:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{Q(\sin \alpha - 0,004)}{0,022}} = \sqrt{\frac{90(0,342 - 0,004)}{0,022}} = 35,8 \text{ მ/წმ.}$$

სიჩქარე v დაშვების დაწყების მომენტიდან შეიძლება გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$v = v_{\max} \text{th}\left(\frac{gk^2}{v_{\max}} t\right);$$

$$v = 35,8 \text{th}\left[\frac{9,81(\sin 20^\circ - 0,004)}{28,8} \cdot 20\right] = 35,8 \text{th}(2,3) = 35,8 \cdot 0,98 = 35,3 \text{ მ/წმ.}$$

საინტერესოა T_0 დროის განსაზღვრა, რომლის გავლის შემდეგ სიჩქარე მაქსიმუმს აღწევს. დროის ამ მომენტისათვის (137) ფორმულას აქვს ასეთი სახე:

$$\frac{v}{v_{\max}} = \text{th} \left(\frac{gk^2}{v_{\max}} \cdot T_0 \right) = 1$$

ან

$$\frac{gk^2}{v_{\max}} \cdot T_0 = \text{Azch}1 = 3,8;$$

$$T_0 = \frac{3,8 \cdot v_{\max}}{9,81 \cdot k^2} = \frac{38 \cdot v_{\max}}{9,81 \cdot (\sin \alpha - 0,004)} \quad (138)$$

მოცემულ მაგალითში:

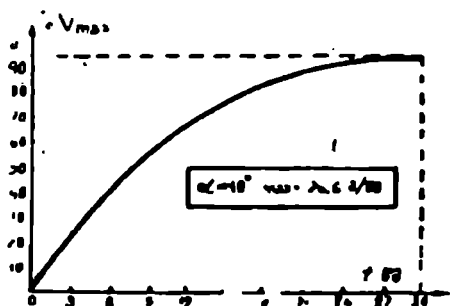
$$T_0 = \frac{3,8 \cdot 35,8}{9,81(\sin 20^\circ - 0,004)} = 40 \text{ წმ.}$$

მაგალითი XIII. 6. რა დროის შემდეგ მიადწევს $\alpha = 10^\circ$ დახრის დაღმართზე ველომრბოლელის სიჩქარე v_{\max} -ს თუ მისი წონა 80 კგ-ია, ხოლო ველოსიპედისა — 10 კგ?

ამოხსნა. ცნობილია, რომ $\alpha = 10^\circ$ შემთხვევაში $v_{\max} = 26,6$ მ/წმ. 138-ე ფორმულის გამოყენებით დავადგენთ:

$$T_0 = \frac{3,8 \cdot v_{\max}}{9,81 \cdot (\sin \alpha - 0,004)} = \frac{0,39 \cdot v_{\max}}{\sin 10^\circ - 0,004} = \frac{0,39 \cdot 26,6}{0,170} = 61 \text{ წმ.}$$

შენიშვნა: დრო 61 წმ შედარებით დიდია. 30 წამის (იხ. ნახ. 138) განმავლობაში სიჩქარე აღწევს $0,95 v_{\max}$ -ს და თითქმის ამდენივე დრო (61,0 წმ-30. წმ-31,0 წმ) ჰკირდება სიჩქარის $0,05 v_{\max}$ -მდე გაზრდას, ამიტომ, ალბათ, უფრო რაციონალურია განვსაზღვროთ T -ის არა თეორიული მნიშვნელობა, არამედ რომელიმე ნაკლები დრო, რომლის განმავლობაშიც ველომრბოლელი აღწევს ზღვრულის ახლოს სიჩქარეს.



ნახ. 138.

ამსათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ფორმულა:

$$\operatorname{th} \left| \frac{gk^2}{v_{\max}} \cdot T \right| - \frac{v}{v_{\max}} = 0,95.$$

ასეთ შემთხვევაში

$$\frac{gk^2}{v_{\max}} \cdot T = \operatorname{Arcth} 0,95 = 1,83.$$

$$T = \frac{1,83 v_{\max}}{9,81(\sin\alpha - 0,004)} = \frac{0,187 \cdot v_{\max}}{\sin\alpha - 0,004}. \quad (139)$$

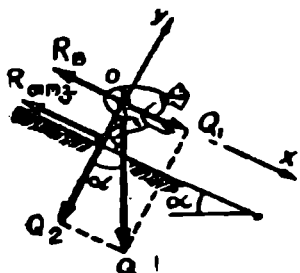
XIII. 6 მაგალითის 139-ე ფორმულით ამოხსნის შედეგად მივიღებთ გაქანების (T) დროს:

$$T = \frac{0,187 \cdot v_{\max}}{\sin\alpha - 0,004} = \frac{0,187 \cdot 26,6}{0,170} = 29 \text{ წმ.}$$

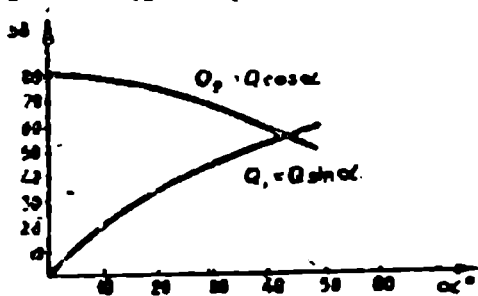
მოთხილამურის დაშვება მთიდან. დახრილი სიბრტყის სახის მქონე მთიდან მოთხილამურის დაშვების (სწორხაზოვანი დაშვება) დროს. მასზე მოქმედებს ძალები: Q — სიმძიმის ძალა, $R_{\text{თოვ}}$ — ხაზუნის წინააღმდეგობა თოვლის ზედაპირზე და R_f — ჰაერის წინააღმდეგობა — ძალა, მოდებული სიმძიმის ცენტრში. დაშვების ზედაპირის მხრიდან რეაქცია N მიმართულია დაშვების ხაზის პერპენდიკულარულად.

დავუშვათ, Ox ღერძი მიმართულია დაშვების ხაზის გასწვრივ, ხოლო Oy ღერძი მის პერპენდიკულარულად (ნახ. 139). დავშალოთ სიმძიმის Q ძალა ორ შემდგენად, ერთი (Q_1), მიმართული დახრის პარალელურად, ხოლო მეორე (Q_2) — მის პერპენდიკულარულად ამ შემდგენთა სიდიდეები დამოკიდებულია დახრის სიმკვეთრეზე, რომელსაც ახასიათებს α კუთხე (ნახ. 140). დახრის მაქსიმალურად დასაშვებ კუთხეს (α_{\max}) იღებენ 45° -ის ტოლს.

დახრის პარალელური Q_1 ძალის სიდიდე განსაზღვრავს მეთხილამურის მოძრაობის სიჩქარეს. იგი იზრდება დახრის α კუთხის



ნახ. 139.



ნახ. 140.

თითქმის პარალელურად. სრიალის ზედაპირის პერპენდიკულარული Q_2 ძალის სიდიდე იცვლება უმნიშვნელოდ დახრის კუთხის ცვლილებასთან ერთად და შეიძლება ვთქვათ, რომ მცირე კუთხეების შემთხვევაში (20° -მდე) მუდმივი რჩება.

მთხილამურის მოძრაობის თოვლის საწინააღმდეგო ძალა ($R_{\text{თოვ}}$) დამოკიდებულია: 1) თხილამურ-თოვლის — R_1 ხახუნის ძალაზე; 2) ძალაზე, რომელიც იხარჩება ცხვირის ნაკეცის წინ თოვლის გუნდის დასაძლევად, — R_2 ; 3) ძალაზე, რომელიც გადალახავს თხილამურის მიერ გამოწვეული თოვლის წინააღმდეგობას — R_3 ; 4) ძალაზე, რომელიც გადალახავს თხილამურებისა და დამაგრების გამოშვებული ნაწილების გვერდით ხახუნს, — R_4 ; ამრიგად:

$$R_{\text{თოვ}} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4. \quad (140)$$

უმრავლეს შემთხვევაში R_2 , R_3 და R_4 ძალები სლალომისა და სწრაფდაშვების დროს კარგად, დატკეპნილ მკვირვ თოვლზე შეიძლება უგულებელვყოთ.

მაშინ თხილამურები-თოვლის ხახუნის ძალა იქნება:

$$R_{\text{თოვ}} = R_1 = Q_2 f = Q \cos \alpha f.$$

ხახუნის კოეფიციენტი f დამოკიდებულია თოვლის საფარის მდგომარეობაზე, პერის წინააღმდეგობაზე, თხილამურების სახეზე, შეზეთვის ხარისხსა და თოვლზე თხილამურის სრიალის სიჩქარეზე. უკანასკნელ შემთხვევაში ხახუნის ხასიათი შეიძლება გახდეს „მშრალიდან“ „სველი“. სველი ხახუნის დროს მოძრაობის წინააღმდეგობის სიდიდეზე მოქმედებს მოხახუნე ზედაპირის წყლით დასველება. ხახუნის R წინააღმდეგობა უდრის:

$$R = \eta S \frac{v}{\delta}. \quad (141)$$

სადაც η სიბლანტეა (კგ წმ/მ²) (წყლისათვის $\eta = 1$);

v — ფარდობითი სიჩქარე (მ/წმ);

S — მოხახუნე ზედაპირების შეხების ფართობი (მ²);

δ — წყლის ფენის სისქე, რომელიც ასველებს მოხახუნე ზედაპირებს (მ);

R — ხახუნის ძალა (კგ).

თავის მხრივ, ხახუნის R ძალა დამოკიდებულია დატვირთვაზე (ხვედრით დაწნევაზე): $P = \frac{N}{S}$ (კგ/სმ²). რადგან დამსველებელი

სითხის შრის სისქე δ , P დაწნევის ფუნქციაა. ამიტომ ხახუნის R ძალა დამოკიდებულია Q_2 ძალაზე: $R = |Q_2$, მაგრამ ამავე დროს η , δ , P და v სიდიდეების ფუნქციაა:

$$R = \Phi\left(\frac{\eta v}{P \delta}\right).$$

მეთხილამურის მოძრაობისადმი ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა R_1 დამოკიდებულია მისი სხეულის ზომებსა და ფორმაზე, ჰაერის სიმკვრივესა და (მნიშვნელოვნად) სხეული — ჰაერის ფარდობითი გადაადგილების სიჩქარეზე.

წინააღმდეგობის R ძალა შეიძლება წარმოდგენილი იყოს შემდეგი გამოსახულებით:

$$R_1 = C_x S \frac{\rho v^2}{2}; \quad (142)$$

სადაც v მეთხილამურის მოძრაობის სიჩქარეა (მ/წმ):

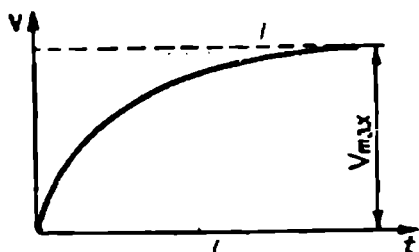
S — სხეულის გეგმილის ფართობი სიჩქარის მიმართულების პერპენდიკულარულ სიბრტყეში (m^2);

C_x — აეროდინამიკური კოეფიციენტი, რომელიც დამოკიდებულია სხეულის ფორმასა და ზედაპირის მდგომარეობაზე, მის ორიენტირებაზე მოძრაობის მიმართულების მიმართ: ρ — ჰაერის მასობრივი სიმკვრივე (კგ წმ³/მ³).

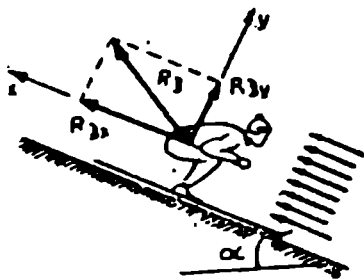
ქანობზე მეთხილამურის მოძრაობის დასაწყისში მისი სიჩქარე მცირეა, ხოლო შემდეგ ზრდას იწყებს. თუ წინააღმდეგობის ძალა არ იქნებოდა, მაშინ იგი უსაზღვროდ გაიზრდებოდა. მეთხილამურის სიჩქარის განვითარებას ეწინააღმდეგება ჰაერის წინააღმდეგობისა და სრიალის წინააღმდეგობის ძალები. ძალა, რომელიც იწვევს მოძრაობის აჩქარებას, Q_1 ძალისა და წინააღმდეგობის R ძალის სხვაობის ტოლია, ამიტომ

$$ma = Q_1 - R, \quad (143)$$

სადაც a აჩქარებაა, m — მეთხილამურის მასა. v სიჩქარის ზრდასთან ერთად იზრდება R წინააღმდეგობაც; ამის შედეგად დგება ისეთი პომენტო, როდესაც R ძალა Q_1 ძალის ტოლი იქნება, ე. ი. $Q_1 - R = 0$. მაშინ მეთხილამურე განაგრძობს მოძრაობას მუდმივი V_{max} სიჩქარით (ნახ. 141). თუ მივიღებთ, რომ მეთხილამურის მოძრაობის R წინააღმდეგობა შედგება ჰაერის R_1 წინააღმდეგობისა და სრიალის R_2 წინააღმდეგობისაგან. მაშინ დროის ამ პომენტებისთვის, როდესაც სიჩქარე მიაღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას:



ნახ. 141.



ნახ. 142.

$$Q_1 - R_1 - R_1 = 0. \quad (144)$$

რადგან

$$Q_1 = Q \sin \alpha, \quad R_1 = Q \cos \alpha,$$

$$R_x = \frac{C_x S \rho}{2} v_{max}^2,$$

ამიტომ შესაბამისი ჩასმების შემდეგ მივიღებთ:

$$Q \sin \alpha - Q \cos \alpha = \frac{C_x S \rho}{2} v^2.$$

v_{max} მიმართ ამ განტოლების ამოხსნით მივიღებთ:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2Q(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{C_x S}}. \quad (145)$$

მეთხილამურის გეგმილის ფართობი სიჩქარის მიმართულების პერპენდიკულარულ სიბრტყეზე, დამოკიდებულია მეთხილამურის სიმაღლეზე, მის ფიგურაზე, ტანსაცმლის ხასიათსა და დაშვების დროს დგომზე (ნახ. 142).

Q-70 კგ წონის, 170 სმ სიმაღლისა და ჩვეულებრივი სპორტულ-ტანსაცმლიანი მამაკაცის მაღალი დგომის დროს სხეულის გეგმილის S ფართობი 0,8—1,0 მ² ზღვრებშია. მე-15 ცხრილში მოცემულია მეთხილამურის სხეულის საშუალო ფართობები:

აეროდინამიკური კოეფიციენტი C_x გამოითვლება ფორმულით:

$$C_x = 2c \frac{h^2}{S}, \quad (146)$$

სადაც C კოეფიციენტია, მიღებული ცდით მოდელის აეროდინამიკურ მილში გაქრევის დროს,

h — ადამიანის სიმაღლე (მ).

მეთხილამურის ხვეულის გეგმილის S ფართობი სიჩქარის მართულების პერპენდიკულარულ ხიზტყეზე

დგომი	S(მ²)	ფართობი ტანსაცმლის შემოტმასნილი შემთხვევაში (მ²)!
მაღალი	0,8—1,0	0,68—0,85
საშუალო	0,6—0,8	0,51—0,68
დაბალი	0,4—0,6	0,34—0,50

S — გეგმილის ფართობი (მ²).

მაღალი დგომის დროს, როდესაც $h=1,7$ მ, $C=0,14$;

$$C_x = 2C \frac{h^2}{S} = 2 \cdot 0,14 \frac{(1,7)^2}{1,0} = 0,8.$$

როდესაც მეთხილამურის ზურგი დახრილია წინ, ჰაერის წინა-დამდევობის R_x ძალა იცვლის თავის მიმართულებას (იხ. ნახ. 142). თუ ამ ძალას დავშლით შემდგენებად ლერქების მიმართ, დავადგენთ, რომ $R_{x\alpha}$ ამუხრუჭებს მეთხილამურის მოძრაობას, ხოლო $R_{x\beta}$ შემდგენი აწევს მეთხილამურეს ზემოთ, ამცირებს ამით Q_2 -ის სიდიდეს.

ამ ამწევი ძალის სიდიდე უდრის:

$$R_{x\beta} = \frac{C_y S \rho}{2} v^2, \tag{147}$$

ე. ი. ამწევი ძალაც დამოკიდებულია აეროდინამიკურ C_y კოეფიციენტზე, გეგმილის ფართობზე, ჰაერის სიმკვრივეზე და (ძალიან) v სიჩქარეზე.

მე-16 ცხრილში მოცემულია C_x და C_y კოეფიციენტების მნიშვნელობები მეთხილამურის სხვადასხვა დგომისათვის.

C_x და C_y კოეფიციენტები მეთხილამურის სხვადასხვა დგომისათვის

დგომი	ზურგის დახრის კუთხე α (გრადუსები)	აეროდინამიკური კოეფიციენტი	
		C_x	C_y
მაღალი	80—90	0,75—0,80	0,25
საშუალო	70—50	0,70—0,75	0,15—0,2
დაბალი	60—70	0,65—0,70	0,2—0,3
ცივგურებით შარბოლეო ¹	0	0,55—0,65	0,3—0,4

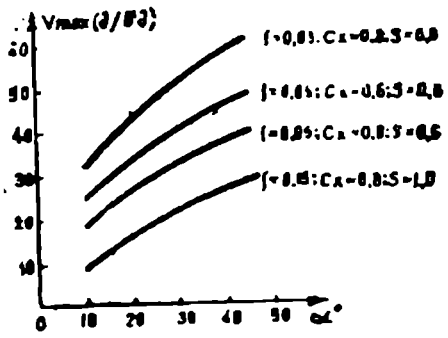
¹ ტანსაცმლის ტიპა შეიძლება გავლენა მოახდინოს S ფართობის სიდიდეზე 10—15%-ის ფარგლებში.

ჰაერის მასიური სიმკვრივე ნორმალურ პირობებში, ე. ი. როდესაც ჰაერის წნევა ვ. წყ. სვეტი: 760 მმ-ის ტოლია და მისი ტემპერატურა კი $+15^{\circ}\text{C}$ უდრის: $\rho = 0,123 \text{ კგ-წმ}^3/\text{მ}^3$.

ადგილმდებარეობის სიმაღლის, ჰაერის ტემპერატურისა და სიმკვრივის მიხედვით ρ იცვლება და შეიძლება გამოეთვალათ შესაბამისი ფორმულებით ან განვსაზღვროთ ცხრილებით.¹ $H = 2500 \text{ მ}$ სიმაღლის შემთხვევაში ჰაერის სიმკვრივე მცირდება $0,10 \text{ კგ-წმ}^3/\text{მ}^3$ -მდე.

ამრიგად, მეთხილამურის მაქსიმალური შესაძლო სიჩქარე (v_{max}) მთიდან დაშვებისას, როგორც 146-ე ფორმულიდან ჩანს, დამოკიდებულია მის Q წონაზე, ხახუნის კოეფიციენტზე f , C_x , ρ S კოეფიციენტებზე. 143-ე ნახაზზე მოცემულია დახრის სიკვეთრეზე v_{max} -ის დამოკიდებულების გრაფიკი f , C_x და S -ის სხვადასხვა მნიშვნელობის შემთხვევაში.

მთიდან მეთხილამურის დაშვების დროს მოძრაობის შესასწავლად აუცილებელია შევადგინოთ მოძრაობის განტოლება. მივმართოთ Ox ღერძი დაშვების ზედაპირის გასწვრივ, Oy ღერძი — ზედაპირის ნორმალის მიმართულებით. გამარტივების მიზნით შეიძლება მივიღოთ, რომ f კოეფიციენტი მუდმივი სიდიდეა: $f = \text{const}$. აეროდინამიკური კოეფიციენტი $C_x = 0$, ე. ი. მეთხილამურეზე მოქმედი აწევის ძალა ძალიან მცირეა და იგი შეიძლება უგულებელვყოთ.



ნახ. 143.

ამ პირობებში მოძრაობის განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$ma = Q_1 - R_1 - R_2$$

ან

$$ma = Q \sin \alpha - \frac{C_x \rho S}{2} v^2 - Q f \cos \alpha \tag{148}$$

რომ მივიღოთ v -ს დამოკიდებულება x -ზე, შევადგინოთ დიფერენციალური განტოლება

$$mv \frac{dv}{dx} = \Sigma F_{ix} \tag{149}$$

¹ იხ. ტექნიკურ და ფიზიკურ ცნობარებში.

$v_x = v$ — გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\frac{Q}{g} v \cdot \frac{dv}{dx} = (Q \sin \alpha - Q \cos \alpha) - \frac{C_{x\rho} S}{2} v^2 \quad (150)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$Q \sin \alpha - Q \cos \alpha = Qk^2,$$

აგრეთვე:

$$\frac{2Qk^2}{C_{x\rho} S} = a^2 \quad (151)$$

მაშინ 150-ე განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{Q}{g} v \frac{dv}{dx} = Qk^2 - \frac{C_{x\rho} S}{2} v^2 \quad (152)$$

განტოლების ორივე ნაწილის $\frac{Q}{g}$ გაყოფით მივიღებთ:

$$v \frac{dv}{dx} = gk^2 \frac{a^2 - v^2}{a^2}.$$

ცვლადების დაყოფის შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{v dv}{a^2 - v^2} = \frac{gk^2}{a^2} dx.$$

ავიღებთ ორივე ნაწილის ინტეგრალს მათი — 1-ზე გამრავლებით:

$$-\int \frac{v dv}{a^2 - v^2} = -\frac{gk^2}{a^2} \int dx; \text{ რის შედეგად მივიღებთ:}$$

$$\ln(a^2 - v^2) = \frac{2gk^2}{a^2} x + c_1. \quad (153)$$

$x=0$ შემთხვევაში $v=0$, მაშასადამე; $\ln a^2 = c_1$. ჩავსვათ 153-ე განტოლებაში c_1 -ის მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$\ln(a^2 - v^2) = -\frac{2gk^2}{a^2} x + \ln a^2;$$

$$\ln \frac{a^2 - v^2}{a^2} = -\frac{2gk^2}{a^2} x$$

ან

$$\frac{a^2 - v^2}{a^2} = e^{-\frac{2gk^2}{a^2} x}$$

აქედან საბოლოოდ დავადგენთ:

$$a^2 - v^2 = a^2 e^{-\frac{2gk^2}{a^2}x}$$

$$v = a \sqrt{1 - e^{-\frac{2gk^2}{a^2}x}} \quad (154)$$

ეს ფორმულა ახასიათებს მეთხილამურის სიჩქარის ცვლილებას მის მიერ განვლილი x გზის მიხედვით.

x -ის გაზრდით $e^{-\frac{2gk^2}{a^2}x}$ სიდიდე მცირდება, მიისწრაფვის $x \rightarrow \infty$ შემთხვევაში ნულიაკენ. მეთხილამურის დაშვების (v) სიჩქარე იზრდება და მიისწრაფვის ზღვარში a მუდმივი სიდიდისაკენ, რომელიც დაშვების ზღვრული სიჩქარეა (v_{\max}) მოძრაობის მოცემულ პირობებში.

$\frac{2Qk^2}{C_{xp}S} = a^2$ ტოლობიდან დავადგენთ, რომ

$$v_{\max} = a = \sqrt{\frac{2Qk^2}{C_{xp}S}}$$

რადგან ვიცით, რომ $k^2 = \sin\alpha - f\cos\alpha$ მივიღებთ:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2Q(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{C_{xp}S}} \quad (155)$$

v_{\max} -ის მიღწევის შემდეგ მეთხილამურე იმოდრავებს მუდმივი სიჩქარით: $v_{\max} = \text{const.}$ სიჩქარის შუალედი მნიშვნელობები შეიძლება გამოვთვალოთ ასე:

$$v = v_{\max} \sqrt{1 - e^{-\frac{2gk^2}{v_{\max}^2}x}} \quad (156)$$

შ ა გ ა ლ ი თ ი XIII. 7. განვსაზღვროთ მეთხილამურის დაშვების ზღვრული სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ მისი წონა თხილამურებთან ერთად $Q = 70$ კგ, $S = 0,6$ მ², $C_x = 0,8$, $f = 0,05$, $\alpha = 20^\circ$, $\rho = 0,125$.

ა მ თ ხ ს ნ ა: საჭიროა დაშვების ზღვრული სიჩქარე განისაზღვროს 155-ე ფორმულით იმის გათვალისწინებით, რომ $\sin 20^\circ = 0,342$, $\cos 20^\circ = 0,940$.

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2Q(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{C_x \rho S}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 70 \cdot (0,342 - 0,05 \cdot 0,94)}{0,8 \cdot 0,125 \cdot 0,6}} = 288 \text{ მ/წმ} \quad (108 \text{ კმ/სთ}).$$

მაგალითი XIII. 8. განვსაზღვროთ მეთაილამურის დაშვების ზღვრული სიჩქარე, თუ ცნობილია, რომ მისი წონა თხილამურებთან ერთად $Q=70$ კგ; $S=0,6$ მ², $C_x=0,8$; $f=0,1$; $\alpha=10^\circ$; $\rho=0,125$.

ამოხსნა. $\sin\alpha = \sin 10^\circ = 0,174$,
 $\cos\alpha = \cos 10^\circ = 0,985$.

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2Q(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{C_x \rho S}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 70 \cdot (0,174 - 0,1 \cdot 0,985)}{0,8 \cdot 0,125 \cdot 0,6}} = 13,3 \text{ მ/წმ} \quad (48 \text{ კმ/სთ}).$$

მაგალითი XIII. 9. დავადგინოთ დაშვების სიჩქარე x მანძილზე, რომელიც უდრის 10, 20, 40, 80, 160, 320 და 640 მ-ს იმ პირობით, რომ $Q=70$ კგ; $S=0,6$ მ²; $C_x=0,8$; $f=0,05$; $\alpha=30^\circ$; $\rho=0,125$.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ 156-ე ფორმულა:

$$v = v_{\max} \sqrt{1 - e^{-\frac{2gk^2}{v_{\max}^2} x}}$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2Q(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{C_x \rho S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 70 \cdot 0,457}{0,8 \cdot 0,125 \cdot 0,6}} = 39,6 \text{ მ/წმ}.$$

მოსახერხებელია $-\frac{2gk^2}{v_{\max}^2} x$ -ის ტოლი ხარისხის მაჩვენებლის აღნიშვნა Ax -ით. ამ შემთხვევაში მოცემულია x მანძილის მნიშვნელობები; A სიდიდე მუდმივი რჩება.

ცნობილია, რომ $k^2 = (\sin\alpha - f\cos\alpha)$; $k^2 = (\sin 30^\circ - 0,05 \cos 30^\circ) = (0,5 - 0,05 \cdot 0,866) = 0,457$.

A -ს რიცხობრივი მნიშვნელობა იქნება:

$$A = \frac{2gk^2}{v_{\max}^2} = \frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,457}{(39,6)^2} = \frac{8,96}{1560} = 0,00574.$$

განგარიშებები მოცემულია მე-17 ცხრილში.

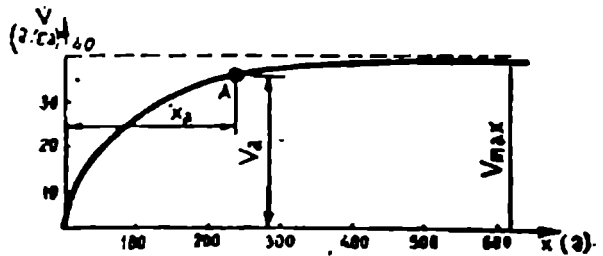
გახანგარიშებელი ცხრილი

x (მ)	Ax	e^{-Ax}	$1 - e^{-Ax}$	$v \sqrt{1 - e^{-Ax}}$	v (მ/წმ)
10	0,057	0,942	0,058	0,24	9,2
20	0,114	0,896	0,104	0,32	12,7
40	0,229	0,794	0,216	0,47	18,6
80	0,459	0,631	0,369	0,69	24,2
100	0,574	0,568	0,432	0,79	31,4
320	1,837	0,165	0,835	0,91	36,0
640	3,674	0,025	0,975	0,98	39,0

გახანგარიშებათა შედეგები, რომლებიც მოცემულია მე-17 ცხრილის უკანასკნელ სვეტში, გადატანილია გრაფიკზე (ნახ. 144), რომლიდანაც ჩანს, რომ გზის გავლასთან ერთად დაშვების (v) სიჩქარე მაქსიმალურს უახლოვდება ($v_{max} = 39,6$ მ/წმ).

შენიშვნები: ცხადია, მნიშვნელოვანია სლალომისტმა იცოდეს x მანძილი, რომლის დროსაც სიჩქარე ისე სწრაფად აღარ იზრდება. პრაქტიკულად ეს ხდება v_{max} -ის მისაღწევად აუცილებელ $1/3$ გზაზე.

155-ე და 156-ე ფორმულების კვლევის შედეგად მიღებულია მონაცემები გზის სიგრძეზე, რომელიც უნდა გაიაროს მეთხილამურებმა, სანამ მიაღწევს მაქსიმალურ სიჩქარეს.



ნახ. 144.

თუ განტოლებას

$$ma = Q \sin \alpha - \frac{C_x \rho S}{2} v^2 - Q f \cos \alpha,$$

იმის გათვალისწინებით, რომ

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

წარმოვადგენთ სხვა სახით, სახელდობრ:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = Q(\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{C_x \rho S}{2} v^2,$$

შაშინ მისი ამოხსნით შეიძლება მივიღოთ t დრო, რომლის გავლის შემდეგ სპორტსმენი მიაღწევს მაქსიმალურ v_{max} სიჩქარეს. ფორმულას ასეთი სახე აქვს:

$$t = \frac{\sqrt{\frac{2Q(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{C_x \rho S}}}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)} \quad (157)$$

$(\sin\alpha - f\cos\alpha) = k^2$ და $g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = gk^2$ გამოსახულებები გხედება ძალიან ხშირად, ხოლო მათში შემავალი α და f პარამეტრები ვარიირებს არც თუ ფართო ზღვრებში. ამ სიდიდეების მნიშვნელობები მოცემულია მე-18 ცხრილში.

ც ხ რ ი ლ . 18

k^2 და gk^2 მნიშვნელობები α და f -ს მიხედვით

α	f	$(\sin\alpha - f\cos\alpha)$	$g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
10°	0,03	0,171	1,66
	0,05	0,169	1,64
	0,10	0,076	0,73
20°	0,15	0,026	0,23
	0,03	0,339	3,24
	0,05	0,327	3,21
	0,10	0,248	2,40
30°	0,15	0,201	1,95
	0,03	0,497	4,82
	0,05	0,496	4,81
	0,10	0,491	4,76
40°	0,15	0,487	4,72
	0,03	0,641	6,21
	0,05	0,639	6,20
	0,10	0,635	6,16
	0,15	0,631	6,12

მაგალითი X-III. 10. განვსაზღვროთ, რა დროის შემდეგ მიაღწევს $Q=70$ კგ წონის მეთხილამურე, რომელიც ეშვება $\alpha=30^\circ$ დახრის მთიდან, მაქსიმალურ სიჩქარეს, თუ $f=0,05$; $S=1$, $C_x=0,8$ და $\rho=0,125$.

ამოხსნა: 157-ე ფორმულაში $(\sin\alpha - f\cos\alpha)$ და $g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$ სათანადო მნიშვნელობების ჩასმით, რომლებიც შეიძლება ამოვიღოთ მე-18 ცხრილიდან, მივიღებთ:

$$t = \frac{3 \sqrt{\frac{2Q(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{C_x \rho S}}}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)} = \frac{3 \sqrt{\frac{2 \cdot 70 \cdot 0,496}{0,8 \cdot 1,125 \cdot 1}}}{4,81} = 19,7 \text{ მ/წმ.}$$

როგორც ჩანს, მნიშვნელობა აქვს არა მარტო t დროს, არამედ რომელიმე t_1 დროსაც, როდესაც სიჩქარე უკვე აღარ მატულობს. მაგალითად, A წერტილის სიჩქარის შესაბამისი დრო (იხ. ნახ. 144). ეს დრო 2—4-ჯერ ნაკლებია t დროზე, რომელიც საჭიროა v_{\max} -ის მისაღწევად.

მაგალითი XIII. 11. სათხილამურო ტრამპლინის მთის გაქანების სწორხაზოვან უბანს აქვს სიგრძე $x=40$ მ, დახრის კუთხე $\alpha=40^\circ$. განვსაზღვროთ, რა სიჩქარეს აღწევს სპორტსმენი ამ უბნის გავლის შემდეგ, თუ მისი სხეულის წონა თხილამურებთან ერთად $Q=70$ კგ; $f=0,05$; $S=0,6$; $C_x=0,8$; $\rho=0,125$.

ამოხსნა. მოცემულ პირობებში მაქსიმალური შესაძლებელი სიჩქარე უდრის:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2Q(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{C_x \rho S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 70 \cdot 0,639}{0,8 \cdot 0,125 \cdot 0,6}} = 38,8 \text{ მ/წმ.}$$

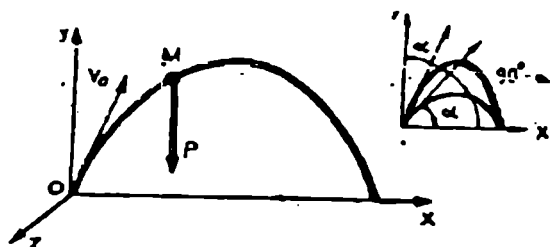
საძებნი სიჩქარე განისაზღვრება 156-ე ფორმულით:

$$\begin{aligned} v &= v_{\max} \sqrt{1 - e^{-\frac{2gk^2}{v_{\max}^2} x}} = 38,8 \cdot \sqrt{1 - e^{-\frac{-2g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \cdot 40}{38,8^2}}} \\ &= 38,8 \cdot \sqrt{1 - e^{-\frac{-12,4 \cdot 40}{38,8^2}}} = 38,8 \cdot \sqrt{1 - e^{-0,33}} \\ &= 38,8 \cdot 0,53 = 20,6 \text{ მ/წმ.} \end{aligned}$$

§ 66. პორიზონტის მიმართ კუთხით გატყორცნილი სხეულის მოძრაობა

პორიზონტის მიმართ კუთხით გატყორცნილი სხეულის მოძრაობა, გამოიკვლევა საწყისი v_0 ნულოვანი სიჩქარით მძღვეოსნობის ტყორცნებისა და სხვადასხვა სპორტული ნახტომის ანალიზისათვის.

მოცემულ წერტილზე m მასით (ნახ. 145) მოქმედებს მხოლოდ P ძალა (ჰაერის წინააღმდეგობა მხედველობაში არ მიიღება). ამ ძა-



ნახ. 145.

ლის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე: $P_x = 0$; $F_y = -P = -mg$; $F_x = 0$.

მაშასადამე:

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0; \quad m \frac{dv_y}{dt} = -mg; \quad m \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

მეორე განტოლების $\frac{dv_y}{dt} = -g$ სახით გამოყენებით, მისი ორივე ნაწილის dt -ზე გამრავლებით და შემდეგ ინტეგრებით მივიღებთ:

$$dv_y = -g dt.$$

$$v_y = -gt + c_2.$$

პირველი და მესამე განტოლებების ინტეგრება გვაძლევს: $v_x = c_1$; $v_z = c_3$ (ე. ი. სიჩქარეები მუდმივია, რადგან მათი წარმოებულები — აჩქარებები ნულის ტოლია).

$t=0$ შემთხვევაში $x=0$; $y=0$; $z=0$.

მაშასადამე, $v_{x0} = v_0 \cos \alpha$; $v_{y0} = v_0 \sin \alpha$; $v_{z0} = 0$.

ამრიგად, $v_x = c_1 = v_0 \cos \alpha$ $v_y = c_2 = v_0 \sin \alpha$

ან

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha; \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt.$$

ინტეგრებით მივიღებთ:

$$x = v_0 t \cos \alpha + c_4;$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} + c_5.$$

$t=0$ შემთხვევაში $x=y=0$. მაშასადამე, $c_4 = c_5 = 0$ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \quad (158)$$

ამ განტოლებით შეგვიძლია გამოვიკვლიოთ წერტილის მოძრაობა კინემატიკის მეთოდით. განვსაზღვროთ წერტილის ტრაექტორია. ამისათვის 158-ე განტოლებიდან გამოვრიცხოთ t დრო და მოვიძებნოთ

y -ის დამოკიდებულება x -ზე; $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$.

$$y = xtga - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (159)$$

მოცემულ შემთხვევაში ტრაექტორიის განტოლება პარაბოლის განტოლებაა. განვსაზღვროთ ფრენის სიშორე, ე. ი. x , როცა $y=0$:

$$x = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha t g \alpha}{g}$$

ან (რადგან $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$)

$$l = x_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (160)$$

ცნობილია, რომ $\sin 2\alpha = \sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\beta$, სადაც $2\beta = 180^\circ - 2\alpha$; $\beta = 90^\circ - \alpha$. ამიტომ $\beta = 90^\circ - \alpha$ კუთხით სხეულის გატყორცვის დროს ფრენის სიშორე იგივე იქნება (იხ. ნახ. 145). განვსაზღვროთ ტრაექტორიის სიმაღლე, ე. ი. y სიშორის ნახევრის ტოლი x -ის შემთხვევაში:

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha.$$

ამიტომ

$$y = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha t g \alpha - \frac{g v_0^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha g^2} = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha - \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

ამრიგად

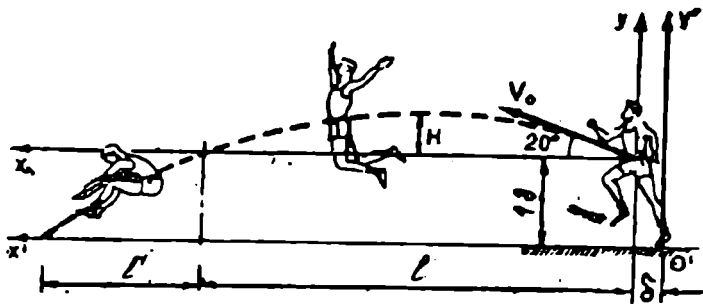
$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \quad (161)$$

მაგალითი XIII. 12. დაუშვათ სიგრძეზე ხტომის დროს სპორტსმენის სხეულის ფრენის საწყისი (v_0) სიჩქარე 8 მ/წმ-ს ტოლია და მიმართულია $\alpha = 20^\circ$ კუთხით. დავადგინოთ ხტომის სიგრძე და ათლეტის ს. ს. ც. მაქსიმალური სიმაღლე, თუ უკუბიძგის ბოლოს ეს სიმაღლე 1 მ-ის ტოლი იყო (ნახ. 146).

ამოხსნა: განვსაზღვროთ საწყისი სიჩქარის გეგმილები x და y დერძებზე.

$$v_{x0} = v_0 \cos \alpha = 8 \cos 20^\circ = 7,45 \text{ მ/წმ.}$$

$$v_{y0} = v_0 \sin \alpha = 8 \sin 20^\circ = 2,72 \text{ მ/წმ.}$$



ნახ. 146.

158-ე ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ: $x = v_0 t \cos \alpha = 7,45t$;

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{g t^2}{2} = 2,72t - 4,9t^2.$$

ამ განტოლებიდან t -ს გამორიცხვით დავადგენთ დამოკიდებულებას $x = x(y)$, ე. ი. ს. ს. ც. -ის ტრაექტორიას:

$$t = \frac{x}{7,45}; \quad y = 2,72 \frac{x}{7,45} - \frac{4,9x^2}{7,45^2}.$$

$y = 0,365x - 0,088x^2$. ეს პარაბოლის განტოლებაა. დავადგინოთ y -ის წარმოებული:

$$y' = 0,365 - 0,18x.$$

როდესაც ათლეტის სხეულის ს. ს. ც. აიწევა მაქსიმალურ სიმაღლეზე, მისი სიჩქარის ვერტიკალური შემდგენი გაუტოლდება ნულს: $y' = 0$. ე. ი. $0,365 - 0,18x = 0$. ამ მდებარეობას შეესაბამება $x = 2$ მ. მაშასადამე. ნახტომის სიგრძე $l = 2x = 4$ მ. ეს მნიშვნელობა შეიძლება დავადგინოთ 160-ე ფორმულის მეშვეობითაც:

$$l = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = \frac{8^2}{9,8} \sin 40^\circ = 4 \text{ მ.}$$

ნახტომის ეს სიგრძე ფაქტიური არ არის. ნახტომის რეალური სიგრძე იქნება l' აიღიდით მეტი (იხ. ნახ. 146). ამიტომ ნახტომის რეალური სიგრძის განსაზღვრისათვის მიზანშეწონილია ვისარგებლოთ ტრაექტორიის განტოლებით, $y = -1$ მ შემთხვევაში x -ის მნიშვნელობის მოძებნით. მოცემულ მაგალითში მიიღება კვადრატული განტოლება: $0,365x - 0,088x^2 + 1 = 0$, ანუ $x^2 - 4x - 11,3 = 0$. ამ განტოლების ამოხსნა:

$$x = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-11,3)} = 2 \pm 2,7;$$

$$x_1 = -0,7 \text{ (მ); } x_2 = 4,7 \text{ (მ).}$$

როგორც 146-ე ნახაზიდან ჩანს, x_1 არის l' , ხოლო x_2 — ნახტომის სიგრძე, შემცირებული 8 სიდიდით.

განვსაზღვროთ სპორტსმენის სხეულის ს. ს. ც. აწევის სიმაღლე ხტომის ფრენის ფაზაში:

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha = \frac{8^2}{2 \cdot 9,81} \sin^2 20^\circ = 0,37 \text{ მ.}$$

ეს მნიშვნელობა შეიძლება მივიღოთ ტრაექტორიის განტოლების გამოყენებითაც. ამისათვის აუცილებელია გამოვთვალოთ y , როცა $x = \frac{l}{2} = 2$. $H = y_{\max} = 0,365 \cdot 2 - 0,088 \cdot 2^2 = 0,37$ მ.

მაგალითი XIII. 13. დავუშვათ, რომ სიმაღლეზე, ხტომა სრულდება $v_0 = 5$ მ/წმ საწყისი სიჩქარის დროს, რომლის ვექტორი მიმართულია $\alpha = 80^\circ$ კუთხით. განვსაზღვროთ ს. ს. ც. -ის ტრაექტორია და ხტომის სიმაღლე.

ამოხსნა: საწყისი სიჩქარის გეგმილები კოორდინატა ღერძებზე:

$$v_{x_0} = v_0 \cos 80^\circ = 5 \cdot 0,17 = 0,85 \text{ მ/წმ;}$$

$$v_{y_0} = v_0 \sin 80^\circ = 5 \cdot 0,98 = 4,9 \text{ მ/წმ.}$$

მასსადამე, $x = v_{x_0} t = 0,85t$; $y = v_{y_0} t - \frac{gt^2}{2} = 4,9t - 4,9t^2$.

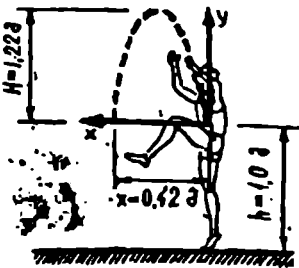
მხტომელის სხეულის ს. ს. ც. -ის ტრაექტორია:

$$y = \frac{4,9}{0,85} x - \frac{4,9x^2}{0,85^2}; \quad y = 5,75x - 6,8x^2.$$

სიჩქარე y ღერძის მიმართულებით: $y = 5,75 - 13,6x$. იმ მომენტში, როდესაც მოცემული სიჩქარე ნულს პიაღწევს. $y = 0 = 5,75 - 13,6x$. სიგრძე $x = 0,42$ მ (ნახ. 147). ამ დროს ათლეტის სხეულის ს. ს. ც. -ს აწევის სიმაღლე $H' = y = 5,74 \cdot 0,42 - 6,8 \cdot 0,42^2 = 1,22$ მ.

ხტომის საერთო სიმაღლე შეადგენს: $H = H' + h = 1,22 + 1,0 = 2,22$ მ.

მაგალითი XIII. 14. განვსაზღვროთ ბირთვის ფრენის სიშორე, როცა ის გატ-



ნახ. 147.

ყორცნილია ადგილიდან კერის დროს $v_0 = 12,5$ მ/წმ-თა და $\alpha_0 = 42^\circ$ კუთხით..

ამოხსნა: ბირთვის ფრენის სიშორე მისი კერის დროს სასტარტო გაქანების გარეშე დამოკიდებულია სამ სიდიდეზე: v_0 -ზე, α_0 -სა და h_0 -ზე გამოშვების სიმაღლეზე, მძლეოსნობის იარაღების ფრენის სიშორის განსაზღვრისათვის შეიძლება ვისარგებლოთ მიახლოებითი ფორმულით:

$$L' = \frac{v_0^2}{g} + h_0. \quad (162)$$

ამავე დროს უნდა გვახსოვდეს, რომ ჰაერის წინააღმდეგობა ამცირებს ფრენის სიშორეს საშუალოდ 0,9%-ით.

თუ მივიღებთ $h_0 = 2,1$ მ, მაშინ:

$$L' = \frac{12,5^2}{9,81} + 2,1 = 18,0 \text{ მ.}$$

ფაქტიური სიგრძე ჰაერის წინააღმდეგობის გათვალისწინებით: $L = 18,0 - 18,0 \cdot 0,009 = 17,8$ მ.

შენიშვნა: სპორტული ტყორცნების ტექნიკის შესწავლამ (ვ. ნ. ტუტევიჩი) ცხადყო, რომ ბირთვის ფრენის სიშორე დამოკიდებულია გეოგრაფიულ განედსა და ზღვის დონიდან ადგილმდებარეობის სიმაღლეზე. კერძოდ, ეკვატორთან ბირთვი (ისევე როგორც მძლეოსნობის სხვა იარაღები) ფრენს 0,4—0,5%-ით უფრო შორს. ზღვის დონიდან 2 კმ სიმაღლეზე ყველა იარაღის ფრენის სიშორე, ბადროს გარდა, მატულობს 0,5%-ით (ბადროს ფრენის სიშორე სიმაღლის ზრდასთან ერთად მცირდება).

XIV თავი

წარბილის მოძრაობის ზოგადი თეორემა

§ 88. სწავა მოძრაობის რაოდენობასა და კინეტიკურ ენერჯიამ

დინამიკის ზოგადი თეორემები თვალსაჩინო და მარტივ დამოკიდებულებებს ამყარებს მატერიალური სხეულის მოძრაობის ძირითად დინამიკურ მახასიათებლებს შორის და ამიტომ სპორტული მოძრაობების შესწავლის შესაძლებლობას იძლევა. მექანიკური მოძრა-

ობის ძირითადი დინამიკური მახასიათებლებია მოძრაობის რაოდენობა და კინეტიკური ენერჯია.¹

წერტილის მოძრაობის რაოდენობა ეწოდება ვექტორს, რომელიც ტოლია წერტილის მასის ნამრავლისა მისი სიჩქარის ვექტორზე.

წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ვექტორის მიმართულება ემთხვევა მისი სიჩქარის ვექტორის მიმართულებას; მოდული ტოლია წერტილის მასის ნამრავლისა, წერტილის სიჩქარის მოდულზე. მოძრაობის რაოდენობის განზომილებაა:

$$\begin{aligned} (\text{მოძრაობის რაოდენობა}) &= (\text{მასა} \cdot \text{სიჩქარე}) = \left(\frac{\text{ძალა} \cdot \text{დრო}^2}{\text{სიგრძე}} \cdot \frac{\text{სიგრძე}}{\text{დრო}} \right) = \\ &= (\text{ძალა} \cdot \text{დრო}). \end{aligned}$$

ერთეულთა ტექნიკურ სისტემაში მოძრაობის რაოდენობა იზომება კილოგრამ-წამობით (კგწმ), ხოლო ის სისტემაში — ნიუტონ-წამობით (ნწმ).

წერტილის კინეტიკური ენერჯია ეწოდება სკალარულ სიდიდეს, რომელიც ტოლია წერტილის მასის ნამრავლისა მისი სიჩქარის კვადრატის ნახევარზე.

კინეტიკური ენერჯიის განზომილებაა:

$$\begin{aligned} (\text{კინეტიკური ენერჯია}) &= (\text{მასა} \cdot \text{სიჩქარე}^2) = \left(\frac{\text{ძალა} \cdot \text{დრო}^2}{\text{სიგრძე}} \cdot \frac{\text{სიგრძე}^2}{\text{დრო}^2} \right) = \\ &= (\text{ძალა} \cdot \text{სიგრძე}). \end{aligned}$$

ერთეულთა ტექნიკურ სისტემაში კინეტიკური ენერჯია იზომება კილოგრამმეტრობით (კგმ) (აქ — კგ კილოგრამ-ძალაა), ის სისტემაში კგმ²/წმ²-ობით (აქ კგ — კილოგრამ-მასაა).

მოქმედებას, რომელსაც ახდენს სხეულზე ძალა დროის რომელიმე შუალედში, ახასიათებს ძალის იმპულსი. იმპულსს დროის უსასრულოდ მცირე dt შუალედში უწოდებენ ძალის ელემენტარულ იმპულსს. ეს არის ვექტორული სიდიდე, ტოლი ძალის ვექტორის ნამრავლისა დროის ელემენტარულ შუალედზე:

$$d\vec{I} = \vec{F} dt. \quad (163)$$

$d\vec{I}$ ვექტორი მიმართულებით ემთხვევა \vec{F} ძალას. ნებისმიერი ძა-

¹ აქ მოცემულია ამ მახასიათებლების განსაზღვრება, დამყარებული მათი განზომილის ხერხზე. უფრო მოგვიანებით ნათელი გახდება მათი ფიზიკური არსა.

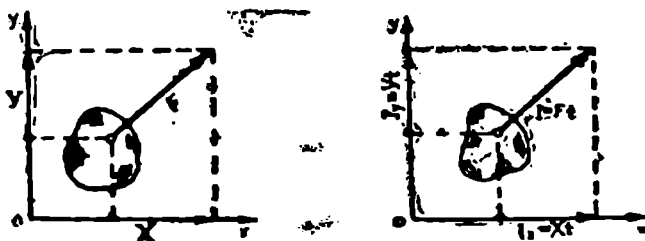
ლის იმპულსი დროის სასრულ შუალედში განისაზღვრება, როგორც ძალის ელემენტარული იმპულსების ინტეგრალი:

$$I = \int_0^t \bar{F} dt. \quad (164)$$

კერძო შემთხვევაში, როდესაც \bar{F} ძალა მუდმივია (მოდულით და მიმართულებით),

$$I = \bar{F}t. \quad (165)$$

იმის გამო, რომ ძალის \bar{I} იმპულსის მიმართულება და \bar{F} ძალის მიმართულება ერთნაირია, ძალის იმპულსის მოდულის გამოსათვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ მისი გეგმილები (ნახ. 148), როგორც ძალის მოდულის განსაზღვრის დროს.



ნახ. 148.

დროის რომელიმე შუალედში მუდმივი ძალის იმპულსის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე ტოლია ამ ძალის შესაბამისი გეგმილების ნამრავლისა დროის მოცემულ შუალედზე.

$$I_x = Xt; \quad I_y = Yt, \quad (166)$$

სადაც X და Y F ძალის გეგმილებია შესაბამის ღერძებზე.

ძალის იმპულსს აქვს მოძრაობის რაოდენობის განზომილების ანალოგიური განზომილება: (ძალის იმპულსი) = (ძალა · დრო). ამიტომ იგი იზომება ისევე, როგორც მოძრაობის რაოდენობა: ერთეულთა ტექნიკურ სისტემაში კილოგრამ-წამოვით (კგწმ), ხოლო ის სისტემაში — ნიუტონ-წამოვით.

წერტილი, რომელსაც აქვს m მასა, მოძრაობს მასზე მოდებული ძალის მოქმედებით AB ტრაექტორიაზე (ნახ. 149) რომელიც უძრავი კოორდინატთა სისტემის მიმართ. დროის საწყის მომენტში, როდესაც $t=0$, ამ წერტილს ექვრა M_0 მდებარეობა და ჰქონდა v_0 სიჩქარე. t_1 დროის მომენტში იგი იქვრს M_1 მდებარეობას და აქვს სიჩქარე v_1 . $m\bar{a} = \bar{F}$ ვექტორული ტოლობის გეგმილი კოორდინატთა x ღერძზე:

$$ma_x = F_x = X. \quad (167)$$

აჩქარების გეგმილი Ox ღერძზე ტოლია წერტილის სიჩქარის გეგმილის პირველი წარმოებულისა დროით იმავე ღერძზე:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

ამ მნიშვნელობის 167-ე განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$m \frac{dv_x}{dt} = X.$$

მუდმივი მამრავლი m შეიძლება შევიტანოთ დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ:

$$\frac{d}{dt}(mv_x) = X \quad (168)$$

ეს ტოლობა შეიძლება გავავრცელოთ ძალის გეგმილზე სხვა კოორდინატთა ღერძების მიმართ და ჩამოვაყალიბოთ უფრო ზოგადი სახით ასე:

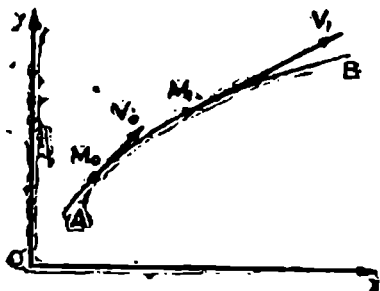
წერტილის მოძრაობის რაოდენობა წარმოებულის დროით რომელიმე ღერძზე ტოლია წერტილზე მოქმედი ძალის გეგმილისა იმავე ღერძზე.

გავამრავლოთ 168-ე ტოლობის ორივე მხარე dt -ზე:

$$d(mv_x) = X dt.$$

მოცემულ ზღვრებში ($t=0$; $t=t_1$) ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int_{v_{x0}}^{v_{x1}} d(mv_x) = \int_0^{t_1} X dt.$$



ნახ. 149.

ტოლობის მარცხენა მხარეში ინტეგრების ზღვრები იქნება v_{x_0} და v_{x_1} . ე. ი. სიჩქარეები, რომლებიც შეესაბამებიან $t=0$; $t=t_1$ დროს. მუდმივი F ძალის გეგმილი X მუდმივი სიდიდეა, ამიტომ იგი შეიძლება გამოვიტანოთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ. $d(mv_x)$ -ის ინტეგრალი mv_x -ის ტოლია, ამრიგად:

$$m|v_x|_{v_{x_0}}^{v_{x_1}} = X|t|_0^{t_1}$$

ინტეგრალის ზღვრების ჩასმის შემდეგ მივიღებთ:

$$mv_{x_1} - mv_{x_0} = X t_1 = I_x. \quad (169)$$

ანალოგიურად y ღერძზე გეგმილებში:

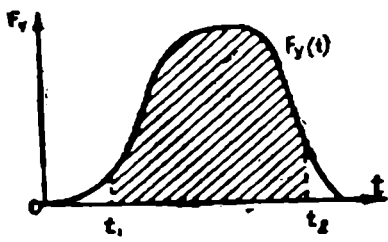
$$mv_{y_1} - mv_{y_0} = Y t_1 = I_y. \quad (170)$$

169-ე და 170-ე განტოლებები მიუთითებს იმაზე, რომ წერტილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილება რომელიმე ღერძზე ტოლია წერტილზე იმავე დროში მოქმედი ძალის იმპულსის გეგმილისა იმავე ღერძზე.

ეს დებულება არის სწორედ მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის თეორემა. x ღერძის გასწვრივ წერტილის სწორხაზოვანი მოძრაობის დროს თეორემა გამოისახება ერთი განტოლებით (169).

ნავარაუდები იყო, რომ ლაპარაკია თავისუფალ მატერიალურ წერტილზე. მაგრამ ნათქვამი შეიძლება მივაკუთვნოთ ყოველ არათავისუფალ მატერიალურ წერტილსაც, რომლის მოძრაობა შეზღუდულია ბმებით, თუ მას მოვაშორებთ აზრობრივად ბმებს და მათ მოქმედებას შევცვლით ამ ბმების რეაქციებით.

წერტილის მოძრაობის რაოდენობის თეორემა საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ სპორტული მოძრაობების მექანიკაში ისეთი ამოცანები, რომლებშიც მყარდება დამოკიდებულება მატერიალური წერტილის მასას (ან წონას) და მის სიჩქარეს შორის მოძრაობის საწყის და ბოლო მომენტებში, ძალასა და მისი მოქმედების დროს შორის.



ნახ. 150.

ნავარაუდები იყო, რომ F ძალა და მისი გეგმილი ნებისმიერ ღერძებზე მუდმივი იყო. სინამდვილეში მრავალი სპორტული ამოცანის ამოხსნის დროს ძალა დროის მიხედვით იცვლება: $F=f(t)$. 150-ე ნახაზზე მოცემულია F ძალის გეგმილი ვერტიკალურ ღერძზე სპრინტერის სტარტის კალაპოტებიდან უკუბიძგის დროს. ამ შემთხვევაში ძალის იმპულსის გეგმილი y ღერძზე იქნება:

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y(t) dt. \quad (171)$$

$F_y(t)$ მრუდით აღწერილი ფართობი განსაზღვრული ინტეგრალის ტოლია (171). 170-ე გამოსახულება ამ შემთხვევისათვის შეიძლება დაიწეროს:

$$mv_{y1} - mv_{y0} = \int_{t_1}^{t_2} F_y(t) dt.$$

რადგანაც უკუბიძგის დასაწყისში v_{y0} სიჩქარე ნულის ტოლი იყო, მივიღებთ:

$$mv_{y1} = \int_{t_1}^{t_2} F_y(t) dt.$$

მაშასადამე, საბოლოო სიჩქარე უკუბიძგის შემდეგ დამოკიდებულია მხოლოდ $\int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$ სიდიდეზე და არ არის დამოკიდებული იმპულსის მრუდის ფორმაზე.

ამ იდეალიზებულ შემთხვევაზე, როდესაც მხედველობაში არ არის მიღებული სხვადასხვა ბმა, ყოველთვის არ არის შესაძლებელი ორიენტირება პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას, მათ შორის სპორტულ ლოკომოციებში უკუბიძგის ფაზის ანალიზის დროსაც.

მაგალითი XIV. 1. მეთხილამურეს, რომელიც მივიდა დაღმართთან, ჰქონდა სიჩქარე $v_0 = 1,5$ მ/წმ; დაღმართზე მან დახარჯა 2 წმ. განვსაზღვროთ სპორტსმენის სიჩქარე დაღმართის ბოლოში, თუ მისი წონა თხილამურებით $Q = 80$ კგ, კუთხე $\alpha = 30^\circ$ -ის ტოლია. ხახუნი და ჰაერის წინააღმდეგობა შეიძლება უგულებელვყოთ.

ამოხსნა: რადგან სხეულის Q წონა წონასწორდება სრიალის სიბრტყის ნორმალური რეაქციით, ამიტომ გლუვ ზედაპირზე მოძრაობის დროს მოცემულ სხეულზე მოქმედი ყველა ძალის ტოლქმედი

იქნება შასზე მოდებული Q_x ძალა, რომელიც Q ძალის შემდგენია და უდრის:

$$X = Q_x = Q \sin \alpha = 80 \cdot 0,5 = 40 \text{ კგ (395 ნ.)}$$

შოძრაობის რაოდენობაზე თეორემის გამოყენებით, შეიძლება დავწეროთ:

$$mv_1 - mv_0 = Xt, \quad \text{საიდანაც:}$$

$$v_1 = \frac{mv_0 + Xt}{m} = 1,5 + 10 = 11,5 \text{ მ/წმ.}$$

მაგალითი: XIV. 2. ლადოგის ტბაზე მოზარდებს შორის ჩატარდა ციგურებზე სრიალი იალქნით. დავუშვათ, ციგურებით მორბენალი მოძრაობს გლუვ ყინულზე $v_0 = 1$ მ/წმ სიჩქარით. ამ დროს ქარის დაქროლა (10 მ/წმ სიჩქარით) მოქმედებს ციგურებით მორბენალზე და იალქანზე 3 წამის განმავლობაში. მე-19 ცხრილის მონაცემების გამოყენებით, განვსაზღვროთ ციგურებით მორბენლის სიჩქარე (v) მესამე წამის ბოლოს, თუ ცნობილია, რომ იალქნის ფართობია $1,5 \text{ მ}^2$ და იგი მიმართულია ქარის მიმართულების პერპენდიკულარულად; ციგურებით მორბენლის წონა $Q = 68,5$ კგ. წინააღმდეგობა ციგურები-ყინული შეიძლება უგულებელვყოთ.

ამოხსნა: შეიძლება გამოვიყენოთ ფორმულა:

$$mv_{x_1} - mv_{x_0} = Xt,$$

სადაც მოცემულ შემთხვევაში $v_{x_0} = v_0 = 1$ მ/წმ; $v_{x_1} = v_1$; $X = F$. დასადგენი სიჩქარე v_1 განისაზღვრება ასე:

$$v_1 = \frac{Xt}{m} + v_0.$$

ცხრილი 19

ხაცნობარო ცხრილი

ქარის ხასიათი	ქარის სიჩქარე (მ/წმ)	ზედაპირის 1 მ ² ფართობზე მოქმედი ძალა		
		(კგ)	(ნ)	
ძალიან სუსტი...	0,50	0,040	0,395	
	1,00	0,140	1,38	
	2,00	0,540	5,32	
	სუსტი	3,00	1,050	10,4
		4,0	2,170	21,2
		5,0	2,910	28,7
		6,0	4,870	48,0
	ძლიერი	8,0	6,430	63,5
10,0		13,540	134,0	
14,0		23,000	228,0	
20,0		46,520	460,0	

ილქნის 2 მ² ფართობისა და ქარის 10 მ/წმ სიჩქარის შემთხვევაში

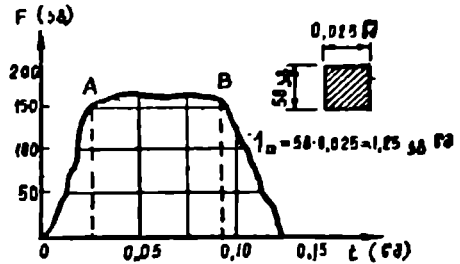
$$F = 13,54 \cdot 1,5 = 20,3 \text{ კგ (2006).}$$

განვსაზღვრავთ დასადგენ სიჩქარეს:

$$v_1 = \frac{20,3 \cdot 3}{\frac{68,5}{1,8}} + 1 = 9,7 \text{ მ/წმ} = 35 \text{ კმ/სთ.}$$

სიჩქარე 9,7 მ/წმ რამდენადმე გადიდებულია იმიტომ, რომ მხედველობაში არ იყო მიღებული წინააღმდეგობის ძალები.

მაგალითი XIV. 3. 151-ე ნახაზზე მოცემულია სპრინტერის კალაპოტებიდან უკუბიძგის ძალის მრუდი, მიღებული ტენზოდინამომეტრულ დანადგარზე. განვსაზღვროთ უსაყრდენო მოძრაობის საწყისი სიჩქარე v_1 , თუ სპორტსმენის წონა $Q = 60$ კგ.



ნახ. 151.

ამოხსნა. მიღებული მრუდი თითქმის სიმეტრიულია და პირობითად შეიძლება მივიღოთ ტრაპეციად, რომლის ქვედა ფუძე 5 სმ-ის ტოლია, ზედა კი — 3 სმ-ის ტოლი. ტრაპეციის ფართობი $\frac{(5+3)}{2} \cdot 3 = 12$ სმ² · 1სმ ფართობის ერთეული შეესაბამება: 50კგ · 0,025 წმ = 1,25 კგ/წმ-ს. ტრაპეციის მთლიანი ფართობი შეესაბამება: 1,25 · 12 სმ² = 15 კგ/წმ-ის (148 ნ/წმ), ამიტომ:

$$I = \int_0^{0,125} F dt = 15 \text{ კგ/წმ.}$$

169-ე განტოლების გამოყენებით მივიღებთ:

$$mv_1 - mv_0 = \int F dt.$$

რადგან $v_0 = 0$, ხოლო $\int F dt = 15$ კგ/წმ, ამიტომ $mv_1 = 15$ კგ/წმ.

თუ მივიჩნევთ, რომ $m = \frac{60}{9,8} = 6$ მ. ტ. ე., მივიღებთ:

$$v_1 = \frac{15}{m} \cong 2,5 \text{ მ/წმ.}$$

მაგალითი XIV. 4 ადამიანი ხტება $h=2,3$ მ სიმალიდან საწყისი სიჩქარის გარეშე. მიწასთან შეხების ამორტიზაციის ფაზა გრძელდება $t=0,10$ წმ (სიჩქარის 0-მდე დაცემის დრო). განვსაზღვროთ საყრდენის რეაქციის საშუალო სიდიდე.

ამოხსნა: სხეულზე მოქმედების ძალები: სიმძიმის ძალა, მიმართული ვერტიკალურად ქვემოთ, და საყრდენის რეაქცია N , რომელიც იცვლება 0,10 წმ-ის განმავლობაში და ასევე მიმართულია ვერტიკალურად, მაგრამ ზემოთ.

169-ე განტოლების გამოყენებით მივიღებთ:

$$mv_1 - mv_0 = I = Xt.$$

საწყისი სიჩქარე v_0 დამოკიდებულია მოედნის სიმაღლეზე ადამიანის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობის დონის ზემოთ (მისი საშუალო მნიშვნელობა 80 სმ-ია). ამიტომ:

$$h' = 2,30 - 0,80 = 1,50 \text{ მ};$$

$$v_0 = \sqrt{2gh'} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,50} = 5,45 \text{ მ/წმ}.$$

ადამიანზე მოქმედი ძალა უდრის: $X = Q - N$. ამ მნიშვნელობის ძირითად ფორმულაში ჩასმით მივიღებთ:

$$mv_1 - mv_0 = (Q - N)t$$

აქედან:

$$N = \frac{mv_0}{t} + Q.$$

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ $Q = 70$ კგ, $m = \frac{70}{g} = 7$ მ. ტ. ე... მივიღებთ:

$$N = \frac{7 \cdot 5,45}{0,1} + 70 = 451,5 \text{ კგ} \cdot (4450\text{ნ});$$

ფარლობას $\frac{N}{Q} = \frac{451,5}{70} = 0,45$ დინამიკურობის საშუალო

კოეფიციენტი ეწოდება. საყრდენის რეაქციის N სიდიდეზე მნიშვნელოვნად მოქმედებს მიწასთან შეხების დრო. გადატვირთვის შემცირება მიიღწევა სხვადასხვა საფენის და ქსოვილის გამოყენებით, რომლებსაც მიწასთან შეხების მომენტში დეფორმირების უნარი შესწევთ და ამით ზრდიან მის დროს.

მუშაობა ძალის მოქმედების ეფექტია, რომელიც გამოიხატება წერტილის ან სხეულის კინეტიკური ენერჯიის ცვლილებით.

თუ \vec{F} მუდმივი ძალის მოდების წერტილი მოძრაობს სწორი ხაზით, რომელიც ემთხვევა ძალის მოქმედების ხაზს. მაშინ ამ ძალის მუშაობა ტოლია მისი მოდულის ნამრავლისა წერტილის მიერ განვლილი S გზის სიგრძეზე, აღებულს განსაზღვრული ნიშნით (პლუსი ან მინუსი).

თუ მუშაობას აღვნიშნავთ A -თი, მაშინ

$$A = FS \text{ ან } A = -FS \quad (172)$$

მუშაობა დადებითია, თუ ძალის მიმართულება ემთხვევა წერტილის მოძრაობის მიმართულებას, ან უარყოფითია, თუ ძალა მიმართულია წერტილის მოძრაობის საწინააღმდეგო მხარეს.

მუშაობის განზომილება გამოიხატება ასე: $(A) = (\text{ძალა} \cdot \text{სიგრძე})$. ამიტომ ერთეულთა ტექნიკურ სისტემაში იზომება კილოგრამმეტრობით (კგმ), ხოლო CGS სისტემაში — ჯოულობით $1 \text{ კგმ} = 9,8 \text{ ჯ}$.

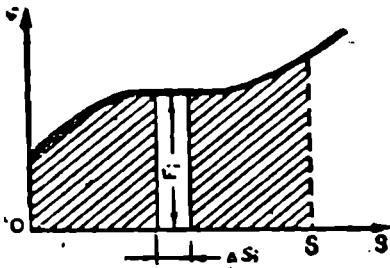
დავუშვათ, რომ F ძალის მოდული ცვლადი სიდიდეა. ასეთ შემთხვევაში S გზაზე მუშაობის გამოსათვლელად საჭიროა ეს გზა დავეყოთ n ძალიან მცირე $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \dots, \Delta S_n$ უბნებად. ძალის ცვალებადი მოდულის მნიშვნელობები თითოეული ამ უბნის დასაწყისში აღვნიშნოთ F_1, F_2, \dots, F_n -ით. რადგან უბანი ΔS_i ძალიან მცირეა. ამიტომ F_i სიდიდე მასზე დაახლოებით შეიძლება მივიჩნიოთ მუდმივად (მით უფრო მეტი სიზუსტით, რაც ნაკლებია ΔS_i . ამიტომ ΔS_i გზაზე ელემენტარული მუშაობა, 172-ე ტოლობის თანახმად, იქნება:

$$F_i \Delta S_i \text{ ან } -F_i \Delta S_i \quad (173)$$

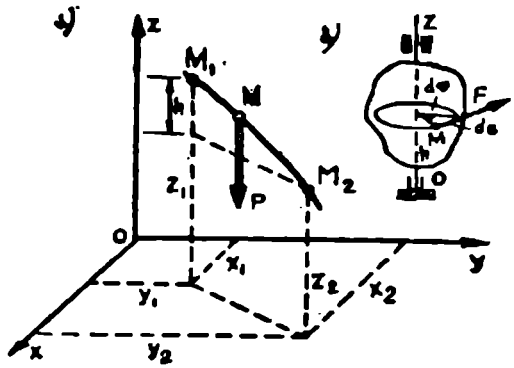
თუ ავიღებთ ამ ელემენტარული მუშაობის ჯამს და შემდეგ გადავალთ ზღვარზე $n \rightarrow \infty$ და $\Delta S_i \rightarrow 0$ შემთხვევაში, მივიღებთ ცვლადი ძალის მუშაობას საბოლოო S გზაზე. ზღვარში ეს ჯამი გამოიხატება განსაზღვრული ინტეგრალით და შესაბამისად იქნება:

$$A = \lim \sum_{i=1}^n F_i \Delta S_i = \int_0^S F dS. \quad (174)$$

ეს ტოლობა ნიშნავს, რომ მუშაობა რიცხობრივად შეიძლება დახასიათდეს ფართობით. შემოსაზღვრული $F = F(S)$ ხაზით, აბსცისთა. ღერძითა და ორდინატებით (ნახ. 152).



ნახ. 152.



ნახ. 153.

სიმძიმის ძალის მუშაობა. დავუშვათ, P წონის M მატერიალური წერტილი გადაადგილდა რომელიღაც მრუდწირულ ტრაექტორიაზე $M_1(x_1, y_1, z_1)$ მდებარეობიდან $M_2(x_2, y_2, z_2)$ მდებარეობაში (ნახ. 153, ა). P ძალის გეგმილი კოორდინატთა ღერძებზე იქნება: $X=0$, $Y=0$ და $Z=-P$ (z ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად ზემოთ). მაშასადამე, ამ ძალის ელემენტარული მუშაობა იქნება: $Xdx + Ydy + Zdz = -Pdz$, ხოლო მუშაობა საბოლოო M_1M_2 გზაზე:

$$A_z = - \int_{z_1}^{z_2} P dz = P(z_1 - z_2).$$

თუ მივიჩნევთ, რომ $z_1 - z_2 = h$ მივიღებთ

$$A_z = Ph. \quad (175)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ მატერიალურ წერტილზე მოქმედი სიმძიმის ძალის მუშაობა არ არის დამოკიდებული არც გზის სიგრძეზე, არც ამ წერტილის ტრაექტორიის სახეზე და ტოლია მისი წონის ნამრავლისა საწყის და საბოლოო მდებარეობებში მისი სიმაღლეების სხვაობაზე, ამავე დროს ეს სიმაღლეები აითვლება ნებისმიერად შერჩეული ჰორიზონტალური სიბრტყიდან.

მზრუნავ სხეულზე მოდებული ძალების მუშაობა. F ძალის ელემენტარული მუშაობა (ნახ. 153, ბ) იქნება: $dA = FdS = Fhd\varphi$. აქ $dS = Fd\varphi$ სადაც $d\varphi$ მობრუნების კუთხეა. მაგრამ Fh მზრუნავი მომენტია, ამიტომ $dA = M_{\text{ზრ}} d\varphi$. მაშასადამე, სასრული φ კუთხით

მობრუნების დროს მუშაობა იქნება: $A = \int_0^{\varphi} M d\varphi$, ხოლო მუდ-

მივი მომენტის შემთხვევაში

$$A = M\varphi \quad (176)$$

ეს ფორმულა 175-ე ფორმულის ანალოგიურია; აქ ძალის როლს ასრულებს მბრუნავი მომენტი, ხოლო გზა განისაზღვრება კუთხური გადაადგილებით:

ხახუნის ძალის მუშაობა. თუ P წონის წერტილი ნოდრად სწორხაზოვნად არაგლუვ პორიზონტალურ ზედაპირზე, მაშინ ხახუნის ძალის მუშაობა S გზაზე გამოისახება ასე:

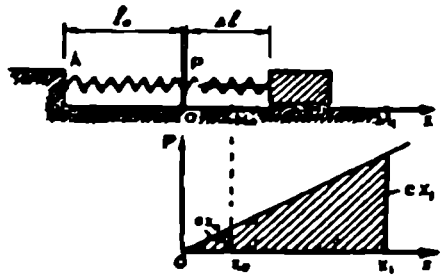
$$A_{\text{ს}} = -fPS, \quad (177)$$

სადაც f ხახუნის კოეფიციენტია.

დრეკადი სხეულის დეფორმაციის მუშაობა. 154-ე ნახაზზე ნაჩვენებია დრეკადი ზანბარის დაგრძელება მოღებული გარე ძალის მიხედვით. გარე ძალის მუშაობა რიცხობრივად შინაგანი დრეკადი ძალის მუშაობის ტოლია და განისაზღვრება ნახაზზე დაშტრიხული სამკუთხედის ფართობით.

ამიტომ:

$$A_{\text{გ}} = \frac{1}{2} p \cdot l. \quad (178)$$



ნახ. 154.

ჰუკის კანონის თანახმად, დრეკადი ძალა შეიძლება გამოეხატოს Δl დაგრძელებით და ზანბარის c სიხისტით:

$$P = c\Delta l. \quad (179)$$

ზანბარის სიხისტე c ძალაა, რომელიც უნდა მოედოთ ზანბარას, რათა იგი დაეაგრძელოთ სიგრძის ერთეულით. სიხისტის განზომილებაა: $[C] = \left| \frac{\text{ძალა}}{\text{სიგრძე}} \right|$. ამრიგად, სიხისტე იზომება კგ/მ-ობით,

კგ/სმ-ობით ან (ის სისტემაში) ნ/მ-ობით. 179-ე გამოსახულების გამოყენებით დრეკადი სხეულის დეფორმაციის მუშაობა შეიძლება გამოვითვალოთ ფორმულით:

$$A_{\text{გ}} = \frac{1}{2} c\Delta l^2. \quad (180)$$

ცნება დეფორმაციის მუშაობაზე ძალიან უნიშვნელოვანია კუნთური შეკუმშვის მექანიზმის ანალიზისათვის.

მატერიის ერთ-ერთი ძირითადი მახასიათებელია ენერგია. სხეულის ენერგიაში გულისხმობენ მის უნარს შეასრულოს მუშაობა. არჩევენ მექანიკური ენერგიის ორ სახეს: პოტენციურსა და კინეტიკურს.

ენერგიას, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ სხეულთა ურთიერთმდებარეობაზე, პოტენციური ეწოდება (ლათინური სიტყვიდან *potentatus*, რაც ნიშნავს დაფარულს, შესაძლებელს; მოცემულ შემთხვევაში ფარულს რაღაც მომენტამდე). იგი იზომება იმ მუშაობით, რომელიც შეუძლია შეასრულოს სხეულმა მოცემული მდებარეობიდან სხვა რომელიმე მდებარეობაში მისი გადაადგილების დროს. მაგალითად, Q წონის სხეულს, მოთავსებულს დედამიწის ზედაპირიდან h სიმაღლეზე, ამ ზედაპირის მიმართ აქვს Qh ნამრავლის ტოლი პოტენციური ენერგია. მოცემული სიდიდე ტოლია მუშაობისა, რომელიც შეუძლია სხეულს შეასრულოს h სიმაღლიდან დედამიწის ზედაპირის დონეზე დაშვების დროს. ამ შემთხვევაში მუშაობა სრულდება სიმძიმის ძალით.

მაგრამ სისტემას შეუძლია ჰქონდეს პოტენციური ენერგია იმ შემთხვევაშიც, თუ მისი მდებარეობის შეცვლის დროს მოქმედებენ სხვა ძალები, მაგალითად, დრეკადობის ძალები. პოტენციური ენერგია აქვს დრეკად დეფორმირებულ სხეულს, მაგალითად: დაჭიმულ ან შეკუმშულ ზამბარას, დაძაბულ კუნთს და ა. შ. დრეკადობის ძალებს, აღძრულ სხეულის დეფორმაციის დროს, შეუძლიათ შეასრულონ გარკვეული მუშაობა სხეულის ფორმის აღდგენის დროს. მაგალითად, გაღუნულ ფიბერგლასის ჰოკს აქვს პოტენციური ენერგიის მარაგი, რომელიც სპორტსმენმა შეიძლება გამოიყენოს ხტომის სიმაღლის მოსამატებლად.

კინეტიკური ენერგია ეწოდება სხეულის ენერგიას, რომელიც დამოკიდებულია მის მექანიკურ მოძრაობაზე. იგი იზომება იმ მუშაობით, რომელიც შეუძლია შეასრულოს მოძრაე სხეულს მისი დამუხრუჭების დროს, დამოკიდებულია მხოლოდ სხეულის მასაზე და სიჩქარეზე.

კინეტიკურ ენერგიას აქვს იგივე განზომილება, როგორც ძალის მუშაობას; ერთეულთა ტექნიკურ სისტემაში კინეტიკური ენერგია იზომება კილოგრამეტრებით (კგმ), ხოლო ის სისტემაში — ჯოულობით (ჯ).

დავუშვათ, m მასის მქონე მატერიალური M წერტილი მასზე მოდებული F ძალით სწორხაზოვნად მოძრაობს (ნახ. 155). F ძალა წერტილს ანიჭებს \bar{a} აჩქარებას. \bar{F} ძალისა და \bar{a} აჩქარების ვექტორები ყოველთვის ემთხვევა მიმართულებით; მოცემულ შემთხვევაში ეს შეეხება წერტილის \bar{v} სიჩქარის ვექტორის მიმართულებას. F ძალის მოქმედების შედეგად M წერტილის სიჩქარე იზრდება.



ნახ. 155.

a -ს რიცხობრივი სიდიდე ტოლია სიჩქარის რიცხობრივი სიდიდის წარმოებულისა დროით:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (181)$$

თუ a -ს გამოვსახავთ $\frac{dv}{dt}$ -ით და ტოლობას ორივე მხარეს გავამრავლებთ M წერტილის უსასრულოდ მცირე dS გადაადგილებაზე, მივიღებთ

$$m \frac{dv}{dt} dS = F dS. \quad (182)$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარე შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$m \frac{dv}{dt} dS = m \frac{dS}{dt} dv = m v dv.$$

ცნობილია, რომ წარმოებული $\frac{dS}{dt}$ წერტილის სიჩქარის მოდულის ტოლია. ამრიგად, 182-ე ტოლობა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$m v dv = \bar{F} dS.$$

უძვე ნათქვამი იყო, რომ F ძალის მოქმედებით M წერტილზე მიკუთვნებულ სიჩქარე იზრდება; ამავე დროს M წერტილის გადაადგილებით ძალა ასრულებს მუშაობას.

მოცემული ტოლობის ორივე მხარის ინტეგრებით, თუ შევარჩევთ ინტეგრების ზღვრებს v_0 -დან (რაც შეესაბამება წერტილის საწყისი სიჩქარის მოდულს, როდესაც მის მიერ განვლილი S გზა ნულის ტოლია) წერტილის საბოლოო v სიჩქარემდე (რაც შეესაბამება

იმ მომენტს, როდესაც წერტილის შიერ განვლილი გზა S -ს ტოლია), მივიღებთ:

$$\int_{v_0}^v m v dv = \int_0^s F ds.$$

ინტეგრალი, რომელიც მოცემული ტოლობის მარჯვენა მხარეზეა, წერტილზე მისი მოძრაობის S -ის ტოლგზაზე მოდებული F ძალის A მუშაობაა. მოცემულ ზღვრებში ინტეგრების ჩატარებით მივიღებთ:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A. \quad (183)$$

ეს ტოლობა მიუთითებს იმაზე, რომ მატერიალური წერტილის კინეტიკური ენერჯიის ნამატრომელებზე ტოლია მასზე მოდებული ძალის მუშაობისა იმავე გზაზე. სწორედ მოცემული ფორმულირებაა მატერიალური წერტილის კინეტიკური ენერჯიის თეორემა.

თუ მატერიალური წერტილის მოძრაობა ხორციელდება მასზე მოდებული არა ერთი, არამედ რამდენიმე ძალის მოქმედებით, მაშინ 183-ე განტოლებაში A მუშაობაში უნდა ვიგულისხმოთ ამ ძალების ტოლქმედის მუშაობა.

თუ მოცემული მატერიალური წერტილი მასზე მოდებული რალაც ძალების, მაგალითად, წინააღმდეგობის ძალების მოქმედებით ჩერდება (მისი საბოლოო სიჩქარე $v=0$), 183-ე განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = A.$$

საინტერესოა განტოლების ანალიზი $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A$.

დაეუშვათ, რომ სხეულზე მოქმედებს ორი საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალა: წვეის ძალა $F_{წვ}$ და წინააღმდეგობის ძალა $F_{წა}$. სხეულის B წერტილიდან C წერტილში გადასვლის დროს დაიხარჯება მუშაობა, რომელიც უდრის $F_{წვ} \cdot S$. ამ მუშაობის ერთი ნაწილი დაიხარჯება წინააღმდეგობის დაძლევაზე ($F_{წა} \cdot S$), ხოლო მეორე — სიჩქარის გაზრდაზე, რადგან C წერტილში სიჩქარე v მეტი იქნება v_0 სიჩქარეზე (B წერტილში). ამის გამო, თუ წერტილზე მოდებული მამოძრავებელი ძალების მუშაობა წინააღმდეგობის ძალების მუშაობაზე მეტი იქნება, მაშინ ტოლობის მარჯვენა მხარე დადებითი იქნება. მაშასადამე, ტოლობის მარცხენა მხარეც დადებითი იქნება.

თი უნდა იყოს. ამრიგად, მოცემულ შემთხვევაში წერტილის კინეტიკური ენერგია და სიჩქარე იზრდება.

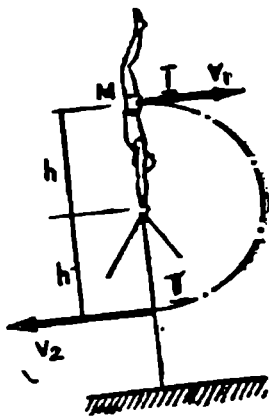
თუ მამოძრავებელი ძალების მუშაობა წინააღმდეგობის ძალების მუშაობის ტოლი იქნება, მაშინ ტოლობის მარჯვენა მხარე ნულის ტოლი იქნება. ამ შემთხვევაში წერტილის კინეტიკური ენერგია და სიჩქარე უცვლელი რჩება.

თუ მამოძრავებელი ძალების მუშაობა აღმოჩნდება წინააღმდეგობის ძალების მუშაობაზე ნაკლები, მაშინ ტოლობის მარჯვენა მხარე უარყოფითი უნდა იყოს. აქედან გამომდინარეობს, რომ წერტილის კინეტიკური ენერგია და სიჩქარე მცირდება.

წერტილის კინეტიკური ენერგიის თეორემა საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ძალების მუშაობა ერთი ადგილიდან მეორეზე წერტილის გადასვლის დროს - იმ შემთხვევებშიც კი, როდესაც მუშაობის უშუალო გამოთვლა შეუძლებელია. ამ თეორემის გამოყენებით ამოცანების ამოხსნის დროს აუცილებელია ვიცოდეთ წერტილის მასა და მისი სიჩქარის მოდული საწყის და საბოლოო მდებარეობებში.

შეიძლება ამოვხსნათ სხვა ამოცანაც — მოვძებნოთ წერტილის სიჩქარის მოდული ერთ-ერთ მდებარეობაში, თუ ცნობილია წერტილზე მოდებული ძალების მუშაობა, მისი მასა და სიჩქარე მის სხვა მდებარეობაში.

მაგალითი X-IV. 5. ტანმოვარჯიშის მაკეტი (ნახ. 156) ეშვება I მდებარეობიდან საწყისი სიჩქარის გარეშე. მაკეტის სიმძიმის ცენტრი M წერტილშია კადონის გრიფთან $h = 1,2$ მ მანძილზე. ტანმოვარჯიშის მაკეტის წონა $Q = 70$ კგ. განვსაზღვროთ მაკეტის სიმძიმის ცენტრის v_2 სიჩქარე II მდებარეობაში. გრიფზე ხახუნი და ჰაერის წინააღმდეგობა შეიძლება უგულებელვყოთ.



ნახ. 156.



ნახ. 157.

ამოხსნა: M წერტილის გადაადგილება I მდებარეობიდან II-ში ხდება სიმძიმის Q ძალის მოქმედებით. მატერიალური წერტილის კინეტიკური ენერგიის თანახმად:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = A.$$

სიმძიმის ძალის მუშაობა A_g უდრის: $A_g = 2hQ$.

M წერტილის v_1 სიჩქარე I მდებარეობაში ნულის ტოლია, ამიტომ:

$$\frac{mv_2^2}{2} = 2hQ;$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{4hQ}{m}} = \sqrt{4hg} = \sqrt{4 \cdot 1,2 \cdot 9,8} = 6,8 \text{ მ/წმ.}$$

M წერტილი მოძრაობს წრეხაზზე $r = h = 1,2$ მ რადიუსით. ამის ცოდნით შეიძლება განვსაზღვროთ მოძულის კუთხური სიჩქარე:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{v}{h} = \frac{6,8}{2,2} = 5,66 \text{ რად/წმ.}$$

მაგალითი XIV. 6. მეთხილამურე მოძრაობს დაღმართზე 26 კმ/სთ სიჩქარით და გადადის გზის ჰორიზონტალურ ნაწილზე. წინააღმდეგობის R ძალა $3,0$ კგ-ის ტოლად მივიჩნევთ (წინააღმდეგობის ყველა სხვა ძალის უგულვებლყოფით) და განვსაზღვროთ, რა S მანძილზე (გასრიალების სიგრძე) და ჰორიზონტალური გზის დასაწყისიდან რა t_1 დროის შემდეგ გაჩერდება სპორტსმენი, თუ იგი გადაადგილებისათვის არავითარ ღონეს არ ხმარობს და მოძრაობს მხოლოდ ინერციით. მეთხილამურის წონა $Q = 80$ კგ.

ამოხსნა: მეთხილამურეს განვიხილავთ, როგორც მატერიალურ წერტილს, რომელზეც მოქმედებს (ნახ. 157) ძალები: Q — სიმძიმის ძალა და R — წინააღმდეგობის ძალა.

გასრიალების S სიგრძის განსაზღვრისათვის ვიყენებთ წერტილის კინეტიკური ენერჯის თეორემას:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

ამოცანის პირობის თანახმად, მეთხილამურის საწყისი სიჩქარე $v_0 = 36$ კმ/სთ $= 10$ მ/წმ, საბოლოო სიჩქარე $v_1 = 0$. A მუშაობა მეთხილამურეზე მოდებული R ძალის მუშაობის ტოლია: $A = RS = -3S$.

მოცემული შემთხვევისათვის კინეტიკური ენერჯის განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -RS.$$

აქედან:

$$S = \frac{mv_0^2}{2R} = \frac{80}{9.81} \cdot \frac{10^2}{2 \cdot 3} = 136 \text{ მ.}$$

დამუხრუქების (t) დროის განსაზღვრისათვის შეიძლება ვისარგებლოთ წერტილის მოძრაობის რაოდენობის თეორემით. თუ მეთხილამურის მოძრაობის მიმართულებას x ღერძის მიმართულებად მივიღებთ, შეიძლება დავწეროთ 169-ე განტოლება: $mv_1 - mv_0 = I_x$.

მოცემულ შემთხვევაში $v_1 = 0$, $v_0 = 10$ მ/წმ. მეთხილამურზე მოქმედი ძალა, მოცემული პირობით, მუდმივია, ამიტომ:

$$-I = -mv_0 = -tR;$$

$$t = \frac{mv_0}{R} = \frac{8 \cdot 10}{9.8 \cdot 3} \approx 27,2 \text{ წმ.}$$

მაგალითი XIV. 7. ბურთი გატყორცნილია პორიზონტის მიმართ კუთხით საწყისი v_0 სიჩქარით. დავადგინოთ ბურთის სიჩქარე იმ მომენტში, როდესაც იგი ავა H სიმაღლეზე.

ამოხსნა: ბურთზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა $P = mg$, ამ ძალის მუშაობა ბურთის H სიმაღლეზე გადაადგილების დროს: $A = mgH$. წერტილის კინეტიკური ენერჯის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ:

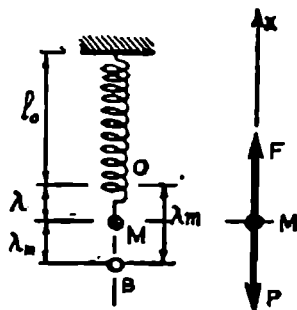
$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgH.$$

აქედან დასადგენი სიჩქარე:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gH}.$$

მაგალითი XIV. 8. P წონის ტვირთი ჰკიდია ზამბარაზე (ნახ. 158) და ეშვება საწყისი სიჩქარის გარეშე. დავადგინოთ უდიდესი მანძილი, რომელზეც დაეშვება ტვირთი, თუ ზამბარის სიხისტე C ცნობილია.

ამოხსნა: დავუშვათ, საწყის მომენტში ტვირთი O წერტილშია. ტვირთის შუალედი მდებარეობა აღვნიშნოთ M -ით, ხოლო ყველაზე ქვედა მდებარეობა, რომელიც შეესაბამება ზამბარის მაქსიმალურ წაგრძელებას B -თი. თუ ზამბარის დაგრძელებას შუალედ მდებარეო-



ნახ. 158.

ბამდე აღენიშნავთ λ -თი, ხოლო შის მაქსიმალურ დაგრძელებას λ_m -ით, მაშინ $OM = \lambda$ და $OB = \lambda_m$. ტვირთზე მოქმედებს ორი ძალა: წონა P და ზამბარის რეაქცია F , მიმართული ზემოთ. F ძალა განისაზღვრება ფორმულით $F = c\lambda$. რადგან ტვირთის სიჩქარე O და B წერტილებში ნულის ტოლია, ამიტომ (კინეტიკური ენერჯის თეორემით) P და F ძალების მუშაობა OB გზაზე ნულის ტოლია:

$$A = -P\lambda_m + \int_0^{\lambda_m} F \cdot dS = -P\lambda_m + \int_0^{\lambda_m} c\lambda d\lambda = -P\lambda_m + \frac{1}{2} c\lambda_m^2,$$

მაშასადამე,

$$-P\lambda_m + \frac{1}{2} c\lambda_m^2 = 0.$$

აქედან:

$$\lambda_m = \frac{2P}{c}.$$

ტვირთის წონასწორობის მდებარეობაში P და F ძალები მოდულით ტოლია. თუ ზამბარის ამ მდებარეობის შესაბამის სტატიკურ წაგრძელებას აღენიშნავთ λ_{st} -ით, მაშინ $c\lambda_{st} = P$.

საიდანაც $\lambda_{st} = \frac{P}{c}$

და, მაშასადამე, $\lambda_m = 2\lambda_{st}$.

შენიშვნა: ანალოგიურ შედეგამდე შეიძლება მოვიდეთ, თუ განვიხილავთ ზამბარის ნაცვლად კოქს, ლეროს ან ძაფს. მსგავსი ამოცანები შეიძლება შეგხვდეს სპორტსმენის სხედასხვან იარაღთან (კადონთან, ძელებთან, შტანგასთან, ლატანთან და ა. შ.) ურთიერთქმედების შესწავლისას, აგრეთვე შეკუმშვის მექანიკურ თეორიაში.

§71. მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის

ამჟამინდის თეორემა

მოძრაობის რაოდენობის მომენტი O წერტილის მიმართ შეიძლება წარმოვადგინოთ ისევე, როგორც ძალის მომენტი, \overline{ms} ვექტორზე \overline{r} რადიუს-ვექტორის ვექტორული ნამრავლის სახით, ე. ი:

$$K_0 = M_0(\overline{ms}) = \overline{r} \times \overline{ms}. \quad (184)$$

\overline{mv} მოძრაობის რაოდენობის მოცემული O წერტილის მიმართ მომენტ-სა და ამ წერტილზე გაშვებული რომელიმე ღერძის მიმართ მომენტ-ს. შორის ისეთივე დამოკიდებულებაა, როგორც F ძალის იმავე მომენტებს შორის. ამიტომ K_0 ვექტორის ვეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე იმავე ღერძების მიმართ, მოძრაობის რაოდენობის მომენტების ტოლია, ე, ი.

$$K_{0x} = m_x(mv); \quad K_{0y} = m_y(mv); \quad K_{0z} = m_z(mv) \quad (185)$$

მომენტების თეორემა დამტკიცებულია თეორიული მექანიკის კურსებში. ღერძის მიმართ მომენტების თეორემა ასეთია: მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის წარმოებული დროით რომელიმე უძრავი ღერძის მიმართ ტოლია ამ წერტილზე მოქმედი ძალის მომენტისა და იმავე ღერძის მიმართ.

ამ თეორემას გამოხატავს განტოლებები:

$$\frac{dK_x}{dt} = m_x(F), \quad \frac{dK_y}{dt} = m_y(F), \quad (186)$$

$$\frac{dK_z}{dt} = m_z(F).$$

მომენტების წერტილის მიმართ თეორემა ფორმულირდება ასე: მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის წარმოებული დროით რომელიმე უძრავი O ცენტრის მიმართ ტოლია ამ წერტილზე მოქმედი ძალის მომენტისა იმავე ცენტრის მიმართ:

$$\frac{dK_0}{dt} = \overline{M}_0 \quad (187)$$

§ აბაჩარიანის წარბილის ენერჯისა და მოძრაობის მუდმივობის კანონები

მატერიალური წერტილის ენერჯისა და მოძრაობის შენარჩუნების კანონები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც კინეტიკური ენერჯის, მოძრაობის რაოდენობისა და მოძრაობის რაოდენობის მომენტის თეორემათა შედეგები.

ენერჯის მუდმივობის კანონი: მატერიალური წერტილის პოტენციურ ველში მოძრაობისას კინეტიკური და პოტენციური ენერჯების ჯამი მუდმივი რჩება. ამ კანონის მათემატიკური გამოსახულებაა:

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = \text{const.} \quad (188)$$

მოდრაობის რაოდენობის მუდმივობის კანონი: თუ წერტილზე არ მოქმედებს არავითარი გარეშე ძალები, მაშინ მისი მოძრაობის რაოდენობა მუდმივი რჩება. მართლაც, თუ 169-ე განტოლებაში $X=0$, მაშინ $mv_{1x} - mv_{0x} = 0$, ანუ

$$mv_{1x} = mv_{0x}. \quad (189)$$

მოდრაობის რაოდენობის მომენტის მუდმივობის კანონი: თუ მოქმედი ძალის მომენტი რომელიმე უძრავი ღერძის მიმართ ყოველთვის ნულის ტოლია, მაშინ მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი ამ ღერძის მიმართ მუდმივი რჩება. მართლაც, თუ 187-ე გამოსახულებაში $M=0$ მაშინ,

$$K_0 = \text{const.}$$

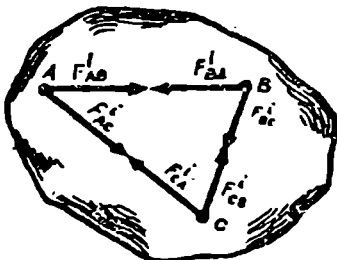
(თუ წარმოებული ნულის ტოლია, მაშინ ფუნქცია მუდმივია).

XV თავი

სისტემის დინამიკის ელემენტები

§ 78. სისტემის შინაგანი ძალების მთავარი ვეპტორი და მთავარი მომენტი

159-ე ნახაზზე წარმოდგენილია უბრალო სისტემა, რომელიც შედგება A , B და C წერტილებისაგან. ცნობილია, რომ ორ ნებისმიერ მატერიალურ წერტილს შორის ურთიერთქმედება ყოველთვის ტოლია მოდულით და საწინააღმდეგოა მიმართულებით. ძალა F'_{AB} , რომლითაც A წერტილი მოქმედებს B წერტილზე, ცხადია, იქნება



ნახ. 159.

მოდულით ტოლი და მიმართულებით საწინააღმდეგო F'_{AB} ძალისა, რომლითაც B წერტილი მოქმედებს A წერტილზე. ძალა F'_{BC} რომლითაც B წერტილი მოქმედებს C წერტილზე, იქნება მოდულით ტოლი და მიმართულებით საწინააღმდეგო F'_{CB} ძალისა, რომლითაც C წერტილი მოქმედებს B წერტილზე. თავის მხრივ, $F'_{CA} = -F'_{AC}$. მოცემული სისტემის ყველა

წერტილის შორის ურთიერთქმედების ძალთა წყვილ-წყვილად კომბინირებით (სისტემის შინაგანი ძალები) დავადგინოთ, რომ ყოველგვარი სისტემის შინაგანი ძალების გეომეტრიული ჯამი (ე. ი. მათი მთავარი ვექტორი) ნულის ტოლია:

$$\sum \bar{F}_k^i = 0. \quad (191)$$

სისტემის შინაგანი ძალების ნებისმიერ ღერძზე გეგმირების ჯამი ასევე ნულის ტოლია:

$$\sum X_k^i = 0; \quad \sum Y_k^i = 0; \quad \sum Z_k^i = 0. \quad (192)$$

მიღებულ შედეგებს დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს და გაცილებით ამარტივებს სისტემასთან, მათ შორის სხეულთან, დაკავშირებული საკითხების კვლევას. ზოგ შემთხვევაში სხეულის მოძრაობის განხილვისას შინაგან ძალებს არ ითვალისწინებენ.

ანალოგიურად შეიძლება ცხადვყოთ, რომ ყველა შინაგანი ძალის მომენტების ვექტორული ჯამი (მთავარი მომენტი) ნებისმიერი ცენტრისა და ღერძის მიმართ, ნულის ტოლია:

$$\begin{aligned} \sum m_x(F^i) &= 0; & \sum m_y(F^i) &= 0; \\ \sum m_z(F^i) &= 0; & \sum m_o(F^i) &= 0. \end{aligned} \quad (193)$$

ეს განტოლებები ცხადყოფს, რომ შინაგანი ძალების მომენტი არ ახდენს გავლენას მთლიანად სისტემის მოძრაობაზე. -

§ 74. სისტემის მოძრაობის რაოდენობის აუდიოვობის კანონი

სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ეწოდება მისი მექანიკური მოძრაობის საზომს, რომელიც სისტემის ყველა წერტილის მოძრაობის რაოდენობათა ვექტორების გეომეტრიული ჯამის ტოლია:

$$J = \sum \overline{m_i v_i}, \quad (194)$$

სადაც m_i სისტემის რომელიმე წერტილის მასაა,

v_i — ამ წერტილის სიჩქარის ვექტორი.

რადგან სისტემაში შემავალი წერტილის ან სხეულის მოძრაობის რაოდენობა, ვექტორია, ამიტომ შეიძლება ვილაპარაკოთ ამ ვექტორის გეგმილზე კოორდინატთა რომელიმე ღერძზე. ცნობილია, რომ ვექტორების გეომეტრიული ჯამი ნებისმიერ ღერძზე ტოლია ვექტორების, შემდგენთა გეგმილების ალგებრული ჯამისა იმავე ღერძზე, ამიტომ:

$$x^J = \sum m_x v_{ix} \quad (195)$$

სისტემის მოძრაობის რაოდენობის გეგმილი რომელიმე ღერძზე ტოლია სისტემის ყველა წერტილის მოძრაობის რაოდენობების გეგმილების ალგებრული ჯამისა ამავე ღერძზე.

როგორც ცნობილია, ერთი მატერიალური წერტილისათვის მოძრაობის რაოდენობის გეგმილის წარმოებულნი რომელიმე ღერძზე ტოლია ძალის გეგმილისა იმავე ღერძზე ე. ი.:

$$\frac{d}{dt} m v_x = X, \quad (196)$$

სადაც X წერტილზე მოქმედი ყველა ძალის ტოლქმედის გეგმილია.

რაციონალურია, სისტემის წერტილზე მოქმედი ყველა ძალა დავყოთ გარეგან და შინაგან ძალებად. m_i მასის მქონე რომელიმე i -ურ წერტილზე მოდებული გარეგანი ძალების ტოლქმედის გეგმილი ღერძზე აღვნიშნოთ X_i^e -ით, ხოლო იმავე წერტილზე მოდებულა შინაგანი ძალების ტოლქმედის გეგმილი იმავე ღერძზე X_i^i -ით, მოცემული წერტილის სიჩქარის გეგმილი ღერძზე აღვნიშნოთ v_{ix} -ით. ამის შემდეგ 196-ე გამოსახულება შეიძლება დავწეროთ ასე:

$$\frac{d}{dt} m_i v_{ix} = X_i^e + X_i^i.$$

მთელი სისტემისათვის, მისი ცალკეული ელემენტის მოძრაობის რაოდენობების გეგმილების შეჯამებით, მივიღებთ:

$$\sum \frac{d}{dt} m_i v_{ix} = \sum X_i^e + \sum X_i^i \quad (197)$$

რადგან ყველა შინაგანი ძალის გეგმილების ჯამი ნებისმიერ ღერძზე ნულის ტოლია ($\sum X_i^i = 0$), 197-ე ტოლობა შეიძლება დავწეროთ ასე:

$$\sum \frac{d}{dt} m_i v_{ix} = \sum X_i^e.$$

მისი მარცხენა მხარე $m_i v_{ix}$ წარმოებულების ჯამია დროით. რადგან ვიცით, რომ იგი შემდგენთა ჯამის წარმოებულის ტოლია, წილებული გამოსახულება შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$\frac{d}{dt} \sum m_i v_{ix} = \sum X_i^e \quad (198)$$

სხვაგვარად რომ ვთქვათ, სისტემის მოძრაობის რაოდენობის წარმოებული რომელიმე უძრავ ღერძზე ტოლია სისტემაზე მოქმედი ყველა გარეგანი ძალის გეგმილების ჯამისა იმავე ღერძზე.

თუ გარეგანი ძალების გეგმილების ჯამი რომელიმე ღერძზე, მაგალითად Ox ღერძზე, ნულის ტოლია, მაშინ $\Sigma X_i^g = 0$;

$$\frac{d}{dt} \sum m_i v_{ix} = 0.$$

ასეთი ტოლობა შესაძლებელია, თუ აღებულია მუდმივი სიდიდის წარმოებული.

სხვაგვარად რომ ვთქვათ, მოცეულ სიტუაციაში სადიფერენციალურ გამოსახულება $\Sigma m_i v_{ix}$ უნდა იყოს მუდმივი სიდიდე:

$$\Sigma m_i v_{ix} = \text{const.} \quad (199)$$

თუ სისტემის ყველა გარეგანი ძალის გეგმილების ჯამი რომელიმე უძრავ ღერძზე ნულის ტოლია, მაშინ სისტემის მოძრაობის რაოდენობის გეგმილი იმავე ღერძზე მუდმივი სიდიდეა.

ამავე დროს სისტემაზე მოქმედი გარეგანი ძალების გეომეტრიული ჯამი შეიძლება არც იყოს ნულის ტოლი. მაგალითად, თუ სისტემაზე მოქმედებს მხოლოდ ვერტიკალური ძალები, მაშინ მათი გეგმილების ჯამი ჰორიზონტალურ ღერძზე ნულის ტოლია, ხოლო მათი გეომეტრიული ჯამი არ არის ნულის ტოლი. თუ სისტემის ყველა გარეგანი ძალის გეომეტრიული ჯამი ნულის ტოლია ($\Sigma F_i^g = 0$), მაშინ ამ ძალების გეგმილების ჯამიც ნებისმიერ ღერძზე აუცილებლად ნულის ტოლი იქნება. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში სისტემის მოძრაობის რაოდენობის გეგმილები ნებისმიერ ღერძზე მუდმივი სიდიდეები იქნება.

განხილული დებულებებიდან, რომლებიც წარმოდგენილია (197), (198) და (199) განტოლებებით, გამომდინარეობს სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მუდმივობის კანონი:

თუ სისტემაზე არაერთი გარეგანი ძალები არ მოქმედებს, მაშინ სისტემის მოძრაობის რაოდენობა მუდმივი რჩება. ამ კანონიდან ჩანს, რომ შინაგანი ძალებს არ ძალუძს შეცვალოს სისტემის საერთო მოძრაობის რაოდენობა.

თუ განვიხილავთ სპორტსმენის სხეულს, როგორც დამოუკიდებელ სისტემას, რომელიც ასრულებს სივრცეზე ხტომას x ღერძის მიმართულებით, მაშინ დედამიწისაგან მოწყვეტის შემდეგ მასზე მოქმედებს არსებითად მხოლოდ ერთი გარეგანი სიმძიმის Q ძალა, რომელიც მუდმივი

რჩება თავისუფალი ფრენის მთელი დროის განმავლობაში.
ამ შემთხვევაში

$$\frac{d}{dt} = \sum m_i v_{ix} = 0.$$

მაშასადამე, სხეულის მოძრაობა თავისუფალი ფრენის დროს განისაზღვრება მთლიანად სხეულის სიმძიმის ძალით და საწყისი სიჩქარით. შინაგან ძალებს არ შეუძლიათ შეცვალონ ამ სისტემის მოძრაობის რაოდენობა.

შაშხანა და ტყვია ერთი სისტემაა; დენტის აირთა წნევა გასროლის დროს შინაგანი ძალა იქნება. ტყვიისათვის რაღაც რაოდენობით მოძრაობის მინიჭების შემდეგ იგი ერთდროულად შაშხანას ანიჭებს ისეთივე რაოდენობით მოძრაობას, მიმართულს საწინააღმდეგო მხარეს (ეს იწვევს მოვლენას, რომელსაც ეწოდება შაშხანის უკუცემა). გასროლის დროს წარმოქმნილი მოძრაობის რაოდენობათა ჯამი ნულის ტოლი იქნება.

როცა ლაბარაკი იყო სისტემის მოძრაობის რაოდენობაზე, იგულისხმებოდა, რომ იგი იზოლირებულია (ჩაკეტილია), ე. ი. არ ეხება სხვა სხეულებს, რომლებიც მოცემულ სისტემას არ მიეკუთვნებიან. არაიზოლირებულ (გაშლილ) მექანიკურ სისტემებში შინაგან ძალებს, სისტემის ცალკეული ნაწილების მოძრაობების გამოწვევისას გარეშე სხეულებთან ურთიერთქმედების შედეგად შეუძლიათ გამოიწვიონ გარეგანი ძალები ბმების რეაქციების სახით, ხოლო მათ, თავის მხრივ, შეცვალონ სისტემის მოძრაობის რაოდენობა.

მაგალითი XV. 1. პორიზონტალურად მდებარე $Q_1 = 4,5$ კგ წონის სპორტული შაშხანიდან გასროლილია $Q_2 = 0,007$ კგ წონის ტყვია $V_2 = 450$ მ/წმ სიჩქარით. განესაზღვროთ შაშხანის უკუცემა (მისი სიჩქარე), თუ იგი მკიდროდ არ არის მიღებული მხარზე.

ამოხსნა. გასროლამდე შაშხანისა და ტყვიის სიჩქარეები ნულის ტოლი იყო, შესაბამისად სისტემის (შაშხანა და ტყვია) მოძრაობის რაოდენობაც ნულის ტოლი იყო:

$$\sum m_i v_i = m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = 0.$$

დენტის აირთა წნევა შაშხანის არხში სისტემაზე მოქმედი შინაგანი ძალაა. გარეგანი ძალებია შაშხანის, ტყვიის წონები და საყრდენის რეაქცია. ეს ძალები ვერტიკალურია. ამიტომ მათი გეგმილების ჯამი პორიზონტალურ Ox ღერძზე ნულის ტოლია: $\sum X_i^0 = 0$.

ამ შემთხვევაში მოძრაობის რაოდენობების ჯამი Ox ღერძზე უნდა იყოს უცვლელი როგორც გასროლამდე, ასევე გასროლის შემ-

დეგ. გასროლამდე ეს სიდიდე უდრიდა ნულს. იგი შენარჩუნებულია გასროლის შემდეგაც: $\sum m_i v_i = m_2 v_2 + m_1 v_1 = 0$.

$$\frac{4.5}{g} v_1 + \frac{0.007 \cdot 450}{g} = 0.$$

$$v_1 = -\frac{0.007 \cdot 450}{4.5} = 0,7 \text{ მ/წმ.}$$

§ 75. სისტემის კინეტიკური ენერჯიის თეორემა

სისტემის კინეტიკური ენერჯია ეწოდება სისტემის ყველა მატერიალური წერტილის კინეტიკური ენერჯიების ჯამს (სისტემის კინეტიკურ ენერჯიას აღნიშნავენ T ასოთი):

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} \quad (200)$$

მატერიალური წერტილის კინეტიკური ენერჯიის თანახმად, ერთი მატერიალური წერტილისათვის

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A,$$

სადაც $\frac{mv^2}{2}$ და $\frac{mv_0^2}{2}$ წერტილის კინეტიკური ენერჯიებია შესაბამისად რომელიმე გზის ბოლოს და დასაწყისში, A — წერტილზე მოდებული ძალის მუშაობაა იმავე გზაზე.

სისტემის ყველა წერტილისათვის

$$\sum \frac{m_k v_k^2}{2} - \sum \frac{m_k v_{0k}^2}{2} = \sum A.$$

თუ აღვნიშნავთ სისტემის $\sum \frac{m_k v_k^2}{2}$ კინეტიკურ ენერჯიას მის

დასაწყის მდებარეობაში T_0 -თი და სისტემის $\sum \frac{m_k v_k^2}{2}$ კინეტიკურ ენერჯიას მის ბოლო მდებარეობაში T -თი, მივიღებთ:

$$T - T_0 = \sum A. \quad (201)$$

სისტემის კინეტიკური ენერჯიის ცვლილება მისი ერთი მდებარეობიდან მეორეში გადაადგილებისას სისტემაზე მისი გადაადგილებისას მოქმედი ყველა მძრეველი ძალის მუშაობათა ჯამის ტოლია. მოცე-

მულ ძალებში იგულისხმება როგორც გარეგანი, ასევე შინაგანი ძალები. ყველა ძალის მიერ შესრულებული ΣA მუშაობის ჯამის განსაზღვრის დროს აუცილებელია გავითვალისწინოთ შემდეგი.

1. მყარი სხეულის ყოველგვარი გადაადგილების დროს მისი ყველა შინაგანი ძალის მუშაობის ჯამი ნულის ტოლია, რადგან ამ სისტემაში მის წერტილებს შორის მანძილები არ იცვლება. !

2. სისტემის ყოველგვარი გადაადგილების დროს იდეალური ბმების რეაქციების მუშაობების ჯამი, რომლებიც დაიშვება ამ ბმით, ნულის ტოლია.

მაგალითად, იდეალურ გლუვ პორიზონტალურ ზედაპირზე მდებარე სხეულის ბმის რეაქცია მიმართულია სხეულის, გადაადგილების ნორმალის მიმართულებით, ამიტომ

$$A = R \cos 90^\circ = 0.$$

თუ ბმები იდეალური არ არის, ე. ი. მათში ხახუნის უგულებელყოფა შეუძლებელია, მაშინ სისტემაზე მოდებული ძალთა მუშაობების ჯამში ჩართება ხახუნის ძალების მუშაობაც.

თავისუფალ ფრენაში მოძრაობის დროს პრინციპულად შეუძლებელია ადამიანის სხეული განვიხილოთ, როგორც მყარი სხეული. მაგრამ ძალიან ხშირად გამარტივების მიზნით ამას მაინც აკეთებენ. გარდა ამისა, დიდი სიჩქარეებით მოძრაობის დროს (მიუხედავად იმისა, რომ აშკარა ბმები თითქოს არ არსებობს) აუცილებელია ჰაერის გარემოს წინააღმდეგობის გათვალისწინება.

§ 70. მყარი სხეულის კინეტიკური ენერჯია სხვადასხვა სახით მოძრაობის დროს

მრავალი ამოცანის ამოხსნის დროს საჭირო ხდება მოძრავი მყარი სხეულის კინეტიკური ენერჯიის განსაზღვრა. ამიტომ ეს საკითხი დამოუკიდებლად უნდა განვიხილოთ მყარი სხეულის სხვადასხვა სახით მოძრაობის დროს. |

წინსვლითი მოძრაობა. მყარი სხეულის წინსვლითი მოძრაობისას მისი ყველა წერტილის სიჩქარეები ყოველ მოცემულ მომენტში ერთ-მანეთის ტოლია, ამიტომ სხეულის კინეტიკური ენერჯია ხდრის:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_k.$$

სხეულის ყველა წერტილის მასების ჯამი Σm_k მყარი სხეულის მასაა M , ამიტომ

$$T = \frac{Mv^2}{2} . \quad (202)$$

წინსვლითად მოძრავი მყარი სხეულის კინეტიკური ენერჯია ტოლია სხეულის მასის ნამრავლისა მისი სიჩქარის კვადრატის ნახევარზე.

202-ე ფორმულით გამოითვლება აგრეთვე კინეტიკური ენერჯია ნებისმიერი სისტემისა, რომელიც ისე მოძრაობს, რომ მისი ყველა წერტილის სიჩქარეთა მოდულები ერთნაირია (მაგალითად, ცენტრალური ღერძის გარშემო მბრუნავი თხელი გვერგვის კინეტიკური ენერჯია).

ბრუნვითი მოძრაობა. სხეულის უძრავი ღერძის გარშემო ბრუნვის დროს სხეულის ნებისმიერი k -ური წერტილის v_k სიჩქარის მოდული ტოლია სხეულის ω კუთხური სიჩქარის ნამრავლისა მოცემული წერტილის ბრუნვის ღერძიდან r_k დაშორებაზე.

სხეულის კინეტიკური ენერჯია:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k (\omega r_k)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k r_k^2 .$$

ჯამი $m_k r_k^2$ სხეულის ინერციის მომენტია (J) მისი ბრუნვის ღერძის გარშემო (დაწვრილებით იხ. § 85). მაშასადამე, სხეულის მოცემული მოძრაობის დროს მისი კინეტიკური ენერჯია უდრის:

$$T = \frac{J\omega^2}{2} . \quad (203)$$

უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულის კინეტიკური ენერჯია ტოლია სხეულის ბრუნვის ღერძის გარშემო ინერციის მომენტის ნახევრის ნამრავლისა კუთხურ სიჩქარის კვადრატზე.

ბრტყელპარალელური მოძრაობა. სხეულის ბრტყელპარალელური მოძრაობის დროს მისი ყველა წერტილი მოძრაობს რომელიღაც უძრავი სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში. თუ მოცემულია ფიგურის კუთხური სიჩქარე ω და \bar{v}_c სხეულის სიმძიმის ცენტრის სიჩქარე, მაშინ შეიძლება დავადგინოთ ფიგურის სიჩქარეების მყისი ცენტრის მდებარეობა. როგორც ცნობილია (იხ. § 54), იგი მდებარეობს ფიგურის რომელიმე წერტილიდან აღმართულ, ამ წერტილის სიჩქარის მიმართულების პერპენდიკულარზე, ისეთ მანძილზე, რომელიც ფიგურის კუთხურ სიჩქარესთან მოცემული წერტილის ხაზოვანი სიჩქარის შეფარდების ტოლია.

ამრიგად, დროის მოცემული მომენტისათვის სხეულის კინეტიკ-

კუონი ენერგია შეიძლება განვსაზღვროთ როგორც სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის კინეტიკური ენერგია, ფორმულით:

$$T = \frac{J_p \omega^2}{2}, \quad (204)$$

სადაც J_p სხეულის ინერციის მომენტია P წერტილზე გამავალი მისი ბრუნვის მყისი ღერძის მიმართ (ნახ. 160).

მაგრამ 204-ე ფორმულის გამოყენება სხეულის კინეტიკური ენერჯიის განსაზღვრისათვის მისი ბრტყელპარალელური მოძრაობის დროს მოუხერხებელია, რადგან დროის ყოველი მომენტისათვის აუცილებელია განვსაზღვროთ სხეულის ბრუნვის მყისი ცენტრის მდებარეობა და გამოვითვალთ სხეულის მოცემული მდებარეობის შესაბამისი ინერციის მომენტი. პარალელური ღერძების მიმართ ინერციის მომენტების თეორემის გამოყენებით (იხ. § 87) შეიძლება დავწეროთ:

$$J_p = J_c + M(PC)^2 = J_c + M \frac{v_c^2}{\omega^2}, \quad (205)$$

სადაც J_c სიმძიმის ცენტრზე გამავალი და მყისი ღერძის პარალელური ღერძის მიმართ ინერციის მომენტია, M — სხეულის მასა, PC — მანძილი მოცემულ პარალელურ ღერძებს შორის, $\frac{v_c}{\omega}$ — სიჩქარე.

204-ე ფორმულაში 205-ე განტოლებიდან აღებული J_p -ს მნიშვნელობის ჩასმით მივიღებთ:

$$T = \frac{J_p \omega^2}{2} = \left(J_c + M \frac{v_c^2}{\omega^2} \right) \frac{\omega^2}{2}.$$

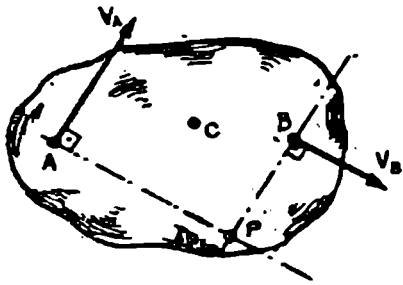
ფრჩხილების გახსნით და შეკვეციით მივიღებთ:

$$T = \frac{M v_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}.$$

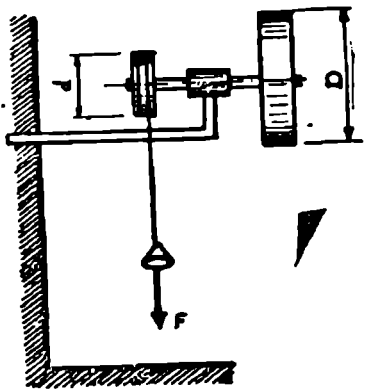
ამ განტოლების მარჯვენა მხარეში ორი შესაყრებია $\frac{M v_c^2}{2}$ და $\frac{J_c \omega^2}{2}$, რომელთაგან პირველი განსაზღვრავს სხეულის კინეტიკურ ენერჯიას გადატანითი მოძრაობის დროს, ხოლო მეორე მისი ბრუნვის დროს. ამიტომ შეიძლება ვთქვათ, რომ სხეულის კინეტიკური ენერგია მისი ბრტყელპარალელური მოძრაობის დროს ტოლია სხეულის კინეტიკური ენერჯიისა და მისი მასის ცენტრის ისეთი სიჩქარით

ბრტყელპარალელური მოძრაობისას, რომელიც შეერთებულია მასის ცენტრზე გამავალი ღერძის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის კინეტიკურ ენერჯიასთან.

მაგალითი X-V. 2. კონსოლებზე დამაგრებულია სავარჯიშო მოწყობილობა (ნახ. 161), რომელიც შედგება მქნევარასა და ბორბლისაგან, ამ უკანასკნელზე დახვეულია ბაგირი.



ნახ. 160.



ნახ. 161.

რა ძალითაა საჭირო ბაგირის დაჭიმვა, რომ 10 ბრუნის შემდეგ მქნევარამ დაიწყოს ბრუნვა 90 ბრ/წმ სიჩქარით? მქნევარა დამზადებულია თუჯისაგან. მქნევარას დიამეტრი $D=40$ სმ, სისქე $\delta=10$ სმ, ბორბლის დიამეტრი $d=20$ სმ. ბორბლის წონა და ხახუნის წინააღმდეგობა შეიძლება უგულებელყვით.

ამოხსნა. დასადგენი ძალის განსაზღვრა შეიძლება სისტემის კინეტიკური ენერჯიის თეორემის გამოყენებით:

$$T - T_0 = \sum A.$$

მქნევარას კინეტიკურ ენერჯიას მისი მუშაობის განსახილველი პერიოდის ბოლოს დავადგენთ 204-ე ფორმულით: $T = \frac{J\omega^2}{2}$. რადგან საწყის მომენტში მქნევარა უძრავი იყო, მისი კინეტიკური ენერჯია:

$$T_0 = \frac{J\omega_0^2}{2} = 0,$$

ე. ი. $T = \sum A$. მაშასადამე მქნევარას კინეტიკური ენერჯია იცვლება მხოლოდ მასზე მოდებული მუდმივი მამბრუნი - მომენტის ხარჯზე, რომლის მუშაობა, 176-ე ფორმულის თანახმად უდრის:

$$A = M_{\text{გა}} \varphi = F \frac{d}{2} \varphi,$$

რადგან $M_{\text{გა}} = F \frac{d}{2}$, სადაც $\frac{d}{2} F$ ძალის მხარია.

ამრიგად, კინეტიკური ენერჯიის განმსაზღვრელი განტოლება მი-
იღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{J\omega^2}{2} = F \frac{d}{2} \varphi.$$

აქედან მაბრუნნი მომენტი:

$$M_{\text{გა}} = F \frac{d}{2} = \frac{J\omega^2}{2\varphi}; \quad F = \frac{J\omega^2}{d\varphi}.$$

მქნევარას ინერციის J მომენტს განვსაზღვრავთ ფორმულით:

$$J = \frac{MR^2}{2};$$

$$R = \frac{D'}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ სმ} = 0,2 \text{ მ.}$$

$$M = \frac{\rho}{g} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot z = \frac{7800}{9,8} \pi \cdot \frac{(0,40)^2}{4} \cdot 0,10 = 10 \text{ (მ. ტ. ე.)}$$

მაშასადამე, ინერციის მომენტი:

$$J = \frac{MR^2}{2} = \frac{10 \cdot (0,2)^2}{2} = 0,2 \text{ კგ მწმ}^2.$$

მქნევარას კუთხური სიჩქარე:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 90}{30} = 3\pi \text{ რად/წმ.}$$

კუთხე, რომლითაც შემობრუნდება მქნევარა, 10 ბრუნის შეს-
რულების შემდეგ უდრის: $\varphi = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$ რად. ამ მომენტების გა-
მოყენებით დავადგენთ. ძალას, რომლითაც უნდა გამოვექაჩოთ ბაგი-
რი, რომ მქნევარამ დაიწყოს ბრუნვა 90 ბრ/წთ სიჩქარით:

$$F = \frac{J\omega^2}{d\varphi} = \frac{0,2 \cdot (3\pi)^2}{0,2 \cdot 20\pi} = 1,4 \text{ კგ (13,85).}$$

ასეთი მოწყობილობები შეიძლება გამოვიყენოთ ვარჯიშის პრო-

ცესში. პირდაპირი დინამომეტრი შეიძლება შეეცვალოს ბრუნვის მრისხველებსა და ელექტროწამშობების ჩვენების აღრიცხვით.

მაგალითი XV. 3. სალტოს. შესრულებისას ტანმოვარჯიშე ბრუნავს მისი სხეულის სიმძიმის ცენტრში გამავალი ღერძის გარშემო $\omega = 14$ რად/წმ კუთხური სიჩქარით. ამ ღერძის გარშემო სხეულის ინერციის მომენტი $J = 1,8$ კგ მწმ. როგორია სხეულის კინეტიკური ენერჯია? რა სიმაღლეზე შეიძლებოდა სპორტსმენის სიმძიმის ცენტრის აწევბ, თუ ბრუნვის კინეტიკურ ენერჯიას გამოვიყენებთ ამ მიზნისათვის? ტანმოვარჯიშის სხეულის წონა 70,5 კგ-ის ტოლია.

ამოხსნა. მბრუნავი სხეულის კინეტიკური ენერჯიის განმსაზღვრელი ფორმულის გამოყენებით დავადგენთ:

$$T = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{1,8 \cdot (14)^2}{2} = 176 \text{ კგმ (1740 ჯ).}$$

სიმძიმის ცენტრის აწევის H სიმაღლე შეიძლება დავადგინოთ, თუ ვიცით, რომ აწევებზე დახარჯული A მუშაობა QH -ის ტოლია და უნდა იყოს T -ს ტოლი. აქედან:

$$A = QH = T;$$

$$H = \frac{T}{Q} = \frac{176}{70,5} = 2,5 \text{ მ.}$$

§ 77. სისტემის მექანიკური ენერჯიის მუდმივობის კანონი

თეორიულ მექანიკაში დამტკიცებულია, რომ სისტემის პოტენციურ ძალურ ველში გადაადგილების დროს ამ ველის ძალთა მუშაობის ჯამი ძალური ფუნქციის შესაბამისი სისტემის ბოლო და საწყისი მდებარეობების მნიშვნელობათა სხვაობის ტოლია; ე. ი.

$$\sum A_F = \int_1^{(II)} dU = U_2 - U_1 \quad (206)$$

ამის მაგალითად დავადგინოთ ძალური ფუნქცია სიმძიმის ძალის ველისათვის. თუ z ღერძს მივმართავთ ვერტიკალურად ზემოთ, მაშინ მივიღებთ:

$$X_k = Y_k = 0; \quad Z_k = -m_k g (k = 1, 2, \dots, n).$$

მაშასადამე,

$$dU = \sum_{k=1}^n (X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k) = - \sum_{k=1}^n m_k g dz_k =$$

$$= -g \sum_{i=1}^n m_k dz_k.$$

ამ გამოსახულების ინტეგრებით მივიღებთ:

$$U = -g \sum_{k=1}^n m_k z_k + \text{const.}$$

მაგრამ, როგორც ცნობილია,

$$\sum_{k=1}^n m_k z_k = M z_c,$$

სადაც M მთელი სისტემის მასაა, z_c — ამ სისტემის სიმძიმის C ცენტრის კოორდინატა, ამიტომ $U = -Mgz_c + \text{const.}$

სისტემის მოცემული მდებარეობის შესაბამის პოტენციურ ენერჯიას უწოდებენ მუშაობას, რომელსაც ასრულებს F_k ძალების ველი სისტემის მოცემული მდებარეობიდან რომელიღაც „ნულოვან“ მდებარეობაში გადაადგილებისას. თუ პოტენციურ ენერჯიას აღვნიშნავთ Π -თი, მაშინ ამ განსაზღვრებისა და 206-ე განტოლების საფუძველზე მივიღებთ:

$$\Pi = U_0 - U. \quad (207)$$

201-ე და 207-ე ტოლობების საფუძველზე სისტემის კინეტიკური ენერჯიის თეორემის გამომხატველი განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს: $T - T_0 = U_0 - U$.

აქედან

$$T + U = T_0 + U_0 = \text{const.} \quad (208)$$

ეს განტოლება გამოხატავს სისტემის მექანიკური ენერჯიის მუდმივობის კანონს: სისტემის მოძრაობის დროს პოტენციურ ძალურ ველში სხეულის კინეტიკური და პოტენციური ენერჯიების ჯამი, რომელსაც ეწოდება სერთო მექანიკური ენერჯია, მუდმივი რჩება.

§ 78. სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის (კინეტიკური მომენტის) მუდმივობის კანონი

წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის თეორემის ანალოგიურად (იხ. § 71) შეიძლება დავამტკიცოთ სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ორი თეორემა.

1. თეორემა. სისტემის კინეტიკური მომენტის წარმოებული დრო-

ით რომელიმე უძრავი წერტილის მიმართ ტოლია ამ სისტემაზე მოქმედი გარეგანი ძალების მთავარი მომენტისა იმავე წერტილის მიმართ, ე. ი.

$$\frac{dk}{dt} = M_0. \quad (209)$$

II თეორემა. სისტემის კინეტიკური მომენტის წარმოებული დროით რომელიმე უძრავი ღერძის მიმართ ტოლია ამ სისტემაზე მოქმედი გარეშე ძალების მთავარი მომენტისა იმავე ღერძის მიმართ, ე. ი.

$$\begin{aligned} \frac{dk_x}{dt} &= M_x; & \frac{dk_y}{dt} &= M_y; \\ \frac{dk_z}{dt} &= M_z. \end{aligned} \quad (210)$$

ახლა დაეუშვათ, რომ $M=0$, მაშინ $\frac{dK_0}{dt} = 0$; $k_0 = \text{const}$.

უკანასკნელი ტოლობა გამოხატავს სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის მუდმივობის კანონს წერტილის მიმართ: თუ სისტემაზე მოქმედი გარეგანი ძალების მთავარი მომენტი მოცემული უძრავი წერტილის მიმართ ყოველთვის ნულის ტოლია, მაშინ სისტემის კინეტიკური მომენტი იმავე წერტილის მიმართ მუდმივი რჩება.

თუ 210-ე ფორმულებში $M_x = M_y = M_z = 0$, მაშინ $K_x = \text{const}$; $K_y = \text{const}$; $K_z = \text{const}$, ე. ი. თუ სისტემაზე მოქმედი გარეგანი ძალების მთავარი მომენტი მოცემული უძრავი ღერძის მიმართ ყოველთვის ნულის ტოლია, მაშინ სისტემის კინეტიკური მომენტი იმავე ღერძის მიმართ მუდმივი რჩება. ასე ფორმულირდება ღერძის მიმართ სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის მუდმივობის კანონი.

79. სისტემის მასების ცენტრის მოძრაობის თეორემა

მატერიალური წერტილების სისტემის მასების ცენტრი ან ინერციის ცენტრი ეწოდება გეომეტრიულ C წერტილს, რომლის მდებარეობა განისაზღვრება შემდეგი კოორდინატებით:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum m_k x_k}{M}; & y_c &= \frac{\sum m_k y_k}{M}; \\ z_c &= \frac{\sum m_k z_k}{M}, \end{aligned} \quad (211)$$

სადაც m_k სისტემის ერთი ნებისმიერი წერტილის მასაა, x_k, y_k, z_k — ამ წერტილის კოორდინატები; $\sum m_k x_k, \sum m_k y_k, \sum m_k z_k$ — ალგებრული ჯამები, შედგენილი თითოეული მოცემული სისტემის მასის ნამრავლით მის შესაბამის კოორდინატებზე; M — მთელი სისტემის მასა.

სხეულის მასების ცენტრის განმსაზღვრელი ფორმულებიდან ადვილად შეიძლება გადასვლა სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების განმსაზღვრელ ფორმულებზე: რადგან წერტილის წონა q mg -ს ტოლია, საკმარისია ტოლობის მარჯვენა მხარის პრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ g -ზე

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum q_k x_k}{Q}; & y_c &= \frac{\sum q_k y_k}{Q}; \\ z_c &= \frac{\sum q_k z_k}{Q}. \end{aligned} \tag{212}$$

211-ე და 212-ე ფორმულების შედარებიდან გამომდინარეობს, რომ უცვლელი სისტემის სიმძიმის ცენტრი ერთგვარად მისი მასების ცენტრს (ინერციის ცენტრს). მიუხედავად ამისა, სისტემის სიმძიმის ცენტრის ცნება განსხვავებულია მისი მასების ცენტრის ცნებისაგან.

უცვლელი სისტემის სიმძიმის ცენტრი წერტილია, რომელზეც გადის მოცემული სისტემის ყველა მატერიალური წერტილის ან სხეულის სიმძიმის ძალების ტოლქმედი. როდესაც უცვლელ სისტემაში იგულისხმება სპორტსმენის სხეული, მაშინ მხედველობაში აქვთ, რომ სხეულის რგოლების მდებარეობა უცვლელია. როგორც კი შეიცვლება სხეულის პოზა, მაშინვე იცვლება სხეულის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობაც. ამიტომ სიმძიმის ცენტრის ცნება მისაღებია მხოლოდ უცვლელი (დროის რომელიმე მონაკვეთში) სისტემისათვის, რომლებზეც სიმძიმის ძალა მოქმედებს. სხვაგვარადაა საქმე მასების ცენტრის მიმართ. ძალების მოქმედების ხასიათის მიუხედავად (დედამიწაზე არსებული ყველა სიჩქარისათვის), სხეულის მასა უცვლელია. მასების ცენტრის მდებარეობა, რომელიც განისაზღვრება 211-ე ფორმულებით, დამოკიდებულია მხოლოდ მოცემული სისტემის შედგენილი წერტილების ან სხეულის მასების განაწილებაზე და სრულიადაც არ არის დამოკიდებული თუ როგორი ძალები მოქმედებს მასზე.

განვიხილოთ სისტემის მოძრაობა.

სისტემის მასების ცენტრის კოორდინატის განმსაზღვრელი ფორმულა

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M}$$

შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$$M x_c = \sum m_k x_k,$$

სადაც M მთელი სისტემის მასაა. x_c — მოძრავი სისტემის მასე-ბის ცენტრის დროში ცვალებადი კოორდინატა, m_k — სისტემის ერთ-ერთი k -ური წერტილის ან სხეულის მასა, და x_k — სისტე-მის ამ წერტილის ან სხეულის სიმძიმის ცენტრის დროში ცვალება-დი კოორდინატა. თუ ავიღებთ მოცემული ტოლობის ორივე ნაწილის წარმოებულებს დროში, მივიღებთ:

$$M \frac{dx_c}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_k x_k = \sum m_k \frac{dx_k}{dt}.$$

მაგრამ $\frac{dx_c}{dt}$ წარმოებულ მასების ცენტრის სიჩქარის V_{cx} -ს

გეგმილია x ღერძზე, ხოლო $\frac{dx_k}{dt}$ წარმოებულ სისტემის k -ური წერტილის ან სხეულის ცენტრის სიჩქარის V_{kx} -ს გეგმილია იმავე ღერძზე.

შესაბამისი ცვლილებების ჩატარებით მივიღებთ:

$$\sum m_k v_{kx} = M v_{cx}. \quad (213)$$

იგივე გვექნება, თუ ავიღებთ გეგმილებს რომელიმე სხვა ღერძზე. ამიტომ შეიძლება ვთქვათ, რომ სისტემის მოძრაობის რაოდენობის გეგმილი რომელიმე ღერძზე ტოლია ამ სისტემის მასების ცენტრის მოძრაობის რაოდენობის გეგმილისა იმავე ღერძზე, თუ ვივარაუდებთ, რომ ამ ცენტრშია თავმოყრილი სისტემის მთელი მასა.

კვლავ გავადიფერენციალოთ 213-ე ტოლობის ორივე ნაწილი. რად-ვან სიჩქარის წარმოებულ დროით $\frac{dv_{cx}}{dt}$ ტოლია ამ წერტილის იმავე ღერძზე აჩქარების a_{cx} გეგმილისა, ამიტომ მივიღებთ:

$$\frac{d}{dt} \sum m_k v_{kx} = M \frac{dv_{cx}}{dt} = M a_{cx}. \quad (214)$$

მეორე მხრივ, 198-ე ფორმულის თანახმად: ¹

$$\frac{d}{dt} \sum m_k v_{kx} = m \sum x_k^e. \quad (215)$$

214-ე და 215-ე განტოლებების საფუძველზე შეიძლება დავწეროთ:

$$Ma_{cx} = \sum X_k^e.$$

ანალოგიურად მასების ცენტრის ორი სხვა y_c და z_c კოორდინატისათვის მივიღებთ:

$$\begin{aligned} Ma_{cy} &= \sum Y_k^e, \\ Ma_{cz} &= \sum Z_k^e. \end{aligned} \quad (216)$$

თუ გავაერთიანებთ 215-ე და 216-ე ტოლობებს, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} Ma_{cx} &= \sum X_k^e, \\ Ma_{cy} &= \sum Y_k^e, \\ Ma_{cz} &= \sum Z_k^e. \end{aligned} \quad (217)$$

217-ე ტოლობების მარცხენა მხარეები სისტემის მასის ნამრავლის გეგმილებია მისი მასების ცენტრის აჩქარების ვექტორზე; მარჯვენა მხარეები — სისტემაზე მოქმედი ყველა გარეგანი ძალის ვექტორების გეომეტრიული ჯამის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე. მაშასადამე, 217-ე განტოლება ერთი ვექტორული ტოლობაა

$$M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e, \quad (218)$$

სადაც \vec{a}_c — სისტემის მასების ცენტრის აჩქარების ვექტორია, ხოლო \vec{F}_k^e ყველა გარეგანი ძალის გეომეტრიული ჯამის ვექტორი.

თუ მიღებულ განტოლებებს შევადარებთ ცალკეული მატერიალური წერტილის დინამიკის ძირითად განტოლებას, დავინახავთ, რომ მასების ცენტრის მოძრაობის განტოლება მასის მატერიალური M წერტილის მოძრაობის განტოლებაა, როცა ამ წერტილზე მოდებულია სისტემაზე მოქმედი ყველა გარეგანი ძალა.

სისტემის მასების ცენტრის მოძრაობის თეორემა ასე ფორმულირდება: წერტილების ან სხეულების სისტემის მასების ცენტრი მოძრაობს როგორც მატერიალური წერტილი, რომლის მასა მთელი სისტემის მასის ტოლია და რომელზეც მოდებულია მოცემულ სისტემაზე მოქმედი ყველა გარეგანი ძალა.

მყარი სხეულის წინსვლითი მოძრაობის დროს მისი მასების ცენტრი, რომელიც ემთხვევა სიმძიმის ცენტრს, ისევე მოძრაობს, რო-

გორც ამ სხეულის ყველა დანარჩენი წერტილი. ამიტომ, სხეულის მასების ცენტრის მოძრაობის განსაზღვრით, განვსაზღვრავთ მთელი სხეულის მოძრაობასაც. ამრიგად, სხეულის წინსვლითი მოძრაობის კვლევის დროს იგი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მატერიალური წერტილი მისი სიმძიმის ცენტრში მთელი მასის თავმოყრით და სხეულზე მოქმედი ყველა გარეგანი ძალის მასში გადატანით.

თუ სხეული მოძრაობს ბრტყელპარალელურად, მაშინ ეს რთული მოძრაობა შეიძლება დავშალოთ წინსვლით მოძრაობად სიმძიმის ცენტრთან ერთად და ბრუნვითად-სიმძიმის ცენტრის გარშემო. წინსვლითი მოძრაობა, როგორც სხეულის რთული მოძრაობის ნაწილი, შეიძლება განვსაზღვროთ 218-ე განტოლებით. აქედან გამომდინარეობს, რომ სხეული შეიძლება მივიღოთ მატერიალურ წერტილად მისი არაწინსვლითი მოძრაობის შემთხვევაში, მაგრამ მხოლოდ მაშინ, როდესაც ამ მოძრაობის ბრუნვითი ნაწილი არ განიხილება, მაგალითად, აკრობატიკული მოძრაობების შემსრულებელი ტანმოვარჯიშის სხეულის სიმძიმის ცენტრის ტრაექტორიის შესწავლის დროს.

მასის ცენტრის მოძრაობის 218-ე განტოლებაში სისტემის შინაგანი ძალები არ შედის. აქედან გამომდინარეობს, რომ სისტემის შინაგანი ძალები არ მოქმედებს მისი მასების ცენტრის მოძრაობაზე.

აკრობატის უსაყრდენო მდებარეობაში მოძრაობისას მასზე მოქმედებს ხოლოდ ერთი ძალა—სიმძიმის ძალა, რომელიც მუდმივი რჩება თავისუფალი ფრენის მთელი დროის განმავლობაში. ამიტომ სიმძიმის ცენტრის ტრაექტორია საყრდენიდან უკუბიძგის შემდეგ წინასწარ განსაზღვრულია საყრდენზე აკრობატის მოქმედებით. მექანიკური სისტემის შინაგანმა ძალებმა არ შეიძლება შეცვალოს ეს ტრაექტორია. სხეულის პოზის შეცვლისას, მათ შესწევთ უნარი შეცვალონ მხოლოდ სიმძიმის ცენტრის გარშემო ბრუნვითი მოძრაობის ხასიათი.

თუ გარეგანი ძალების ჯამი ნულის ტოლია, ე. ი.

$$\Sigma F_{\text{გ}} = 0,$$

მაშინ, როგორც 218-ე განტოლებიდან გამომდინარეობს, მასის ცენტრის აჩქარებაც ნულის ტოლია: $a_c = 0$

მაშასადამე, მასების ცენტრი მოძრაობს თანაბრად სწორხაზოვნად ან სიმშვიდის მდგომარეობაშია.

პრაქტიკულად უფრო საინტერესოა სხვა შემთხვევა, როდესაც გარეგანი ძალების ჯამი ანუ არის ნულის ტოლი, მაგრამ ამ ძალების გეგმილები რომელიმე ღერძზე ნულის ტოლია.

განტოლებაში

$$M a_{\text{cx}} = \Sigma X_{\text{გ}} = 0$$

სისტემის მასების ცენტრის აჩქარების გეგმილი. *Ox* ლერძზე ნულის ტოლია და, მაშასადამე, მასების ცენტრი ამ ლერძების გასწვრივ თანაბრად მოძრაობს.

უკვე ნათქვამი იყო, რომ იარაღების მოძრაობის დროს (მაგალითად, ბირთვის კვრის დროს) თავისუფალი ფრენისას იარაღზე მოქმედებს მხოლოდ ერთი სიმძიმის ძალა, რომლის გეგმილი ჰორიზონტალურ ლერძზე ნულის ტოლია (იხ. § 65): ამის გამო ბირთვის მასების ცენტრის გეგმილი ამ ლერძზე თანაბრად მოძრაობს. თუ საწყის მომენტში მასების ცენტრის სიჩქარის გეგმილი მოცემულ ლერძზე ნულის ტოლია, მაშინ იგი რჩება ნულის ტოლი სისტემის მოძრაობის მთელი დროის განმავლობაში.

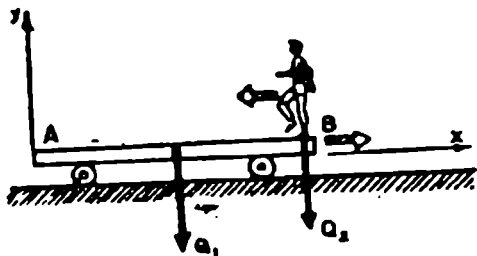
მოვიყვანოთ კიდევ რამდენიმე მაგალითი.

ერთადერთი გარეგანი ძალა, მოქმედი იარაღზე. ფრენისას, ზარალის სიმძიმის ძალაა (ჰაერის წინააღმდეგობა შეიძლება უგულებელდევყოთ). ამიტომ მისი სიმძიმის ცენტრი მოძრაობს პარაბოლით, როგორც ყოველი მატერიალური წერტილი, გასროლილი კუთხით ჰორიზონტის მიმართ. ფრენისას იარაღის გასკდომის დროს ნამსხვრევები გაიფანტება სხვადასხვა მხარეს, მაგრამ მათი მასების ცენტრი განაგრძობს აღრინდელ მოძრაობას მანამ, სანამ თუნდაც, ამ ნამსხვრევთაგან ერთი არ მიაღწევს დედამიწას, იარაღის გასკდომის დროს აღძრული ძალები არსობრივად შინაგანი ძალებია და ამიტომაც მათ არ ძალუძთ შეცვალონ იარაღის მასების ცენტრის მოძრაობა.

ადამიანს, რომელიც დგას აბსოლუტურად გლუვ ჰორიზონტალურ ზედაპირზე, არ შეუძლია თვითონ გადაადგილდეს ჰორიზონტალური მიმართულებით. ეს იდეალიზებული მაგალითი შეიძლება დავინახოთ (გარკვეული მიახლოებით), თუ ადამიანს, რომელმაც არ იცის ციგურებით სრიალი, დავაყენებთ იდეალურად გლუვ ყინულზე. გარეგანი ძალები ისეთი სიტემისათვის, როგორც არის ადამიანი, იქნება ადამიანის წონა და გლუვი ჰორიზონტალური ზედაპირის ნორმალური რეაქცია. ორივე ეს ძალა ვერტიკალურია და ამიტომ მათი გეგმილებების ჯამი ნებისმიერ ჰორიზონტალურ ლერძზე ნულის ტოლია. ადამიანის სიმძიმის ცენტრის აჩქარების გეგმილი ამავე ლერძზე ნულს უდრის. თუ ადამიანი დასაწყისში იდგა უძრავად, მაშინ არავითარი შინაგანი ძალებით არ შეიძლება მისი სიმძიმის ცენტრის გადაადგილება. როგორც კი ადამიანი გამოწვევს წინ ერთ ფეხს, მეორე ფეხი მაშინვე გაიწევა უკან და, მაშასადამე, საერთო სიმძიმის ცენტრი დარჩება წინანდელ ადგილზე. ადამიანის გადაადგილება ჰორიზონტალურ ზედაპირზე შესაძლებელია მხოლოდ ხახუნის შედეგად აღძრული გარეშე ჰორიზონტალური ძალით. არაგლუვი ზედაპირის შემთხვევაში, როდესაც ადამიანი გამოსწევს ერთ ფეხს წინ,

მეორეს არ შეუძლია უკან გადაადგილება, რადგან ხელს უშლის ფეხის გულის ზედაპირთან ხახუნი.

მაგალითი XV. 4. ბაქანს შეუძლია გადაადგილდეს ხახუნის გარეშე ჰორიზონტალურად განლაგებულ ლიანდაგებზე, მაგრამ მოცემულ მომენტში სიმშვიდის მდგომარეობაშია (ნახ. 162). მასზე მდგომი ადამიანი გადის მისი ერთი ბოლოდან მეორეში. განვსაზღვროთ, რა მანძილზე გადაადგილდება ამ დროს ბაქანი, თუ მისი წონა $Q_1 = 280$ კგ, სიგრძე $l = 10$ მ, ადამიანის წონა $Q_2 = 70$ კგ.



ნახ. 162

ამოხსნა: ადამიანთან ერთად ბაქანზე მოქმედებს მხოლოდ ვერტიკალური გარეგანი ძალები Q_1 და Q_2 , აგრეთვე საყრდენების ნორმალური რეაქციები. მათი გეგმილების ჯამი ჰორიზონტალურ x ღერძზე ნულის ტოლია:

$$\Sigma F_{x} = Q_1 + Q_2 - (R_1 + R_2) = 0.$$

ამიტომ მასების ცენტრის მოძრაობის თეორემის საფუძველზე სისტემის (ბაქანი-ადამიანი) მასების ცენტრის ჰორიზონტალური სიჩქარე მუდმივი უნდა იყოს. რადგან დასაწყისში სისტემა უძრავი იყო, ამიტომ მისი მასების ცენტრი უძრავი უნდა დარჩეს ადამიანის გადაადგილების დროსაც.

კოორდინატების უძრავ საწყისად შეიძლება ავიღოთ A ვერტიკალის საწყისი მდებარეობა. სისტემის მასების ცენტრის აბსცისა სისტემის პირველ საწყის მდებარეობაში უდრის:

$$x_1 = \frac{Q_1 \frac{l}{2} + Q_2 l}{Q_1 + Q_2}.$$

დავუშვათ, რომ B ბოლოდან A ბოლოში ადამიანის გადაადგილების დროს ბაქანი გადაადგილება მარჯვნივ S მანძილზე. მაშინ სისტემის სიმძიმის ცენტრის აბსცისა მის ახალ მდებარეობაში (კოორდინატთა იმავე საწყისის შემთხვევაში) იქნება:

$$x_{2c} = \frac{Q_1 \left(S + \frac{l}{2} \right) + Q_2 S}{Q_1 + Q_2}.$$

ჩადგან სისტემის სიმძიმის ცენტრი უძრავი რჩება, ამიტომ $x_{10} = x_{20}$ აქედან მივიღებთ:

$$\frac{Q_1 \frac{l}{2} + Q_2 l}{Q_1 + Q_2} = \frac{Q_1 \left(s + \frac{l}{2} \right) + Q_2 s}{Q_1 + Q_2}$$

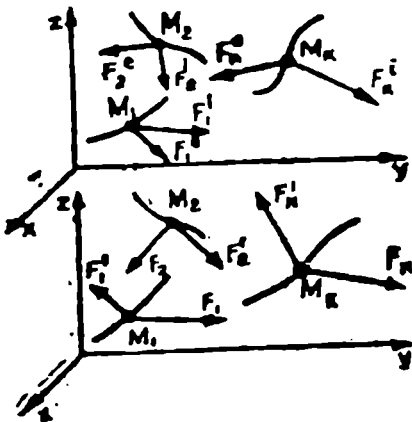
ამ განტოლების S -ს მიმართ ამოხსნით მივიღებთ:

$$S = \frac{Q_2 l}{Q_1 + Q_2} = \frac{70 \cdot 10}{280 + 70} = 2,5 \text{ მ.}$$

§ 80. მატერიალური სისტემის მოძრაობის დინამიკის საფუძვლები

ცნობილია, რომ მატერიალური სისტემის წერტილებზე მოქმედი ყველა ძალა შეიძლება დავეყოს ორ ჯგუფად, თანაც ორნაირი სახით: გარეგან და შინაგან ძალებად, ან მოცემულ ძალებად და ბმების კავშირებად. მატერიალური სისტემის მოძრაობის დინამიკის განტოლებები ასევე შესაძლებელია ჩავწეროთ ორი ხერხით.

წარმოვიდგინოთ მატერიალური სისტემა შედგენილი k მატერიალური წერტილებისაგან: M_1, M_2, \dots, M_k (ნახ. 163, ა). დავეყოს სისტემის წერტილებზე მოდებული ყველა ძალა გარეგან და შინაგან ძალებად. M_1 წერტილზე მოდებული ყველა გარეგანი ძალის ტოლქმედი. აღვნიშნოთ F_1^e -ით. ამავე წერტილზე მოდებული ყველა შინაგანი ძალის ტოლქმედი — F_1^i -ით; სხვა დანარჩენ წერტილებზე მოდებული გარეგანი და შინაგანი ძალის ტოლქმედი შესაბამისად



ნახ. 163.

$F_2^e, F_2^i, \dots, F_n^e, F_n^i$. აღვნიშნოთ M_1, M_2, \dots, M_n წერტილების კოორდინატები $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$ -ით. სისტემის თითოეული წერტილისათვის შეიძლება დავწეროთ მოძრაობის სამი დინამიკის განტოლება. თუ ავიღებთ რომელიმე M_n ($n=1, 2, \dots, n$) წერტილს და აღვნიშნავთ ამ წერტილზე მოდებული F_n^e და F_n^i ძალების გეგმილებს X_n^e, Y_n^e, Z_n^e და X_n^i, Y_n^i, Z_n^i -ით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} m_n \ddot{x}_n &= X_n'' + X_n' \\ m_n \ddot{y}_n &= Y_n'' + Y_n' \\ m_n \ddot{z}_n &= Z_n'' + Z_n' \end{aligned} \quad (219)$$

ახლა წარმოვიდგინოთ მატერიალური სისტემა, შედგენილი M_1, M_2, \dots, M_n წერტილებისაგან (163, ბ), და დავყოთ ამ წერტილებზე მოქმედი ყველა ძალა მოცემულ ძალებად და ბმების რეაქციებად. აღვნიშნოთ M_1 წერტილზე მოდებული ყველა მოცემული ძალის ტოლქმედი F_1 -ით, ამ წერტილზე მოდებული ყველა ბმის რეაქციის ტოლქმედი F_1' -ით, სხვა წერტილებისათვის შემოვიღოთ ანალოგიური აღნიშვნები: $F_2, F_2', \dots, F_n, F_n'$. თუ ავიღებთ კოორდინატა x, y, z ღერძებს და აღვნიშნავთ M_n წერტილზე მოქმედი F_n და F_n' ძალების გეგმილებს X_n, Y_n, Z_n და X_n', Y_n', Z_n' -ით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} m_n \ddot{x}_n &= X_n + X_n' \\ m_n \ddot{y}_n &= Y_n + Y_n' \\ m_n \ddot{z}_n &= Z_n + Z_n' \end{aligned} \quad (220)$$

თუ სისტემის ყველა წერტილზე მოქმედი ყველა ძალა ცნობილი იქნება, მაშინ 219-ე და 220-ე განტოლებების ინტეგრება (ამოხსნა) მოცემული ძალების მოქმედებით მიგვიყვანდა სისტემის განსაზღვრულ მოძრაობამდე. მაგრამ უმრავლეს შემთხვევაში სისტემის მატერიალურ წერტილთა რიცხვი იმდენად დიდია (ადამიანის სხეულისათვის $n = \infty$), რომ ამ განტოლების გამოყენება პრაქტიკულად განუხორციელებელია. გარდა ამისა, ცნობილია, რომ ბმების რეაქციები არსებითად დამოკიდებულია სისტემის მოძრაობაზე და ამიტომ შესაძლებელია განისაზღვროს თვით სისტემის მოძრაობის შესწავლის შემდეგ. ამიტომ მოცემული განტოლებების პრაქტიკული მნიშვნელობა დიდად არ არის. მექანიკის გამოყენებით ნაწილებში უფრო მოხერხებულია სხვა განტოლებები (იხ, § 90), რომლებიდანაც გამოირიცხულია შინაგანი ძალები ან ბმების რეაქციები.

§ 81. ღალაფამარის პრინციპი

განვიხილოთ მოცემულ სისტემის რომელიმე M_n წერტილი. ამ წერტილზე მოქმედებს მოცემული F_n ძალა და ბმის რეაქცია N_n . თუ ამ წერტილზე მოვდებთ კიდევ ბნერციის ძალას $F_n^{\text{ბნ}}$,

შოდულით წერტილის მასის მის აჩქარებაზე ნამრავლის ტოლს და შიშართულს აჩქარების საწინააღმდეგოდ, მაშინ ეს სამი ძალა ურთიერთგაწონასწორდება. იგივე შეიძლება ითქვას სისტემის ყველა დანარჩენი წერტილის მიმართაც, ე. ი.:

$$F_k = N_k + F_k^* = 0 (k=1, 2, \dots, n) \quad (221)$$

აქედან მივიღივართ დასკვნამდე: თუ ნებისმიერ მომენტში მოცემული სისტემის თითოეულ მატერიალურ წერტილზე მოვდებთ ამ წერტილის ინერციის ძალას, მაშინ ყველა წერტილის ინერციის ძალა გაწონასწორდება სისტემაზე მოქმედი მოცემული ძალებით და ბმების რეაქციებით. სწორედ ეს არის დალამბერის პრინციპი სისტემისათვის.

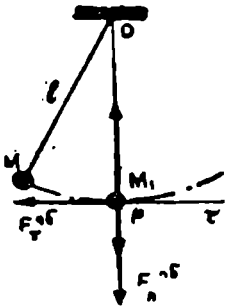
ამრიგად, ინერციის ძალების შეტანით შეიძლება დინამიკის ამოცანებში შევადგინოთ განტოლება იმავე ფორმით, როგორც სტატიკის ამოცანებში, იმის გათვალისწინებით, რომ ვინაიდან მოცემული ძალები, ბმების რეაქციები და ინერციის ძალები ურთიერთწონასწორდება, ამიტომ ყველა ამ ძალის ჯამი ნებისმიერ ღერძზე და მათი მომენტების ჯამი ნებისმიერი წერტილის ან ნებისმიერი ღერძის მიმართ ნულის ტოლია. ამავე დროს საჭიროა გავითვალისწინოთ, რომ თუ ეს განტოლებები შედგენილია მთლიანად მთელი სისტემისათვის, მაშინ შინაგანი ძალები მათში, რა თქმა უნდა, არ შევა. დალამბერის პრინციპს ძალიან დიდი მნიშვნელობა აქვს, რადგან იგი დინამიკური ამოცანების ამოხსნის ზოგად მეთოდს იძლევა. ამ მეთოდით განსაკუთრებით მოსახერხებელია ვისარგებლოთ ბმების დინამიკური რეაქციების, ე. ი. ისინი რეაქციების განსასაზღვრავად, რომლებიც აღიძვრებიან სისტემის მოძრაობის დროს.

„ინერციის ძალის“ ცნების გამოყენებისას უნდა გვახსოვდეს ვისი ორგვარი მნიშვნელობა. არსებობს რეალური ინერციის ძალა და ფიქტიური (დალამბერის) ინერციის ძალა. რეალური ინერციის ძალა ყოველთვის მოდებულობა ბმებზე და მიმართულია აჩქარების საწინააღმდეგოდ. მაგალითად, თუ ფინალური გაქანების დროს ბირთვი მოძრაობს დადებითი \bar{a} აჩქარებით, მაშინ რეალური ინერციის ძალა მოქმედებს სპორტსმენის ხელზე, კუმშავს ხელს და უდრის $F_p^* = -ma$. დალამბერის პრინციპში კი შეტანილია ფიქტიური ინერციის ძალა: $\bar{F}_{დღ}^* = -ma$, მაგრამ მოდებულობა სხეულზე, რომელსაც ენიჭება აჩქარება (მოცემულ შემთხვევაში ბირთვი).

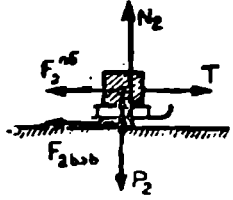
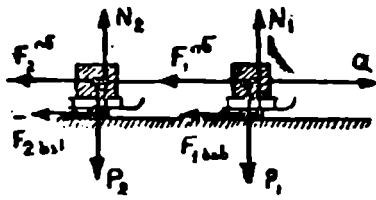
მაგალითი XV. 5. დავადგინოთ ქანქარას ძაფის დაჭიმულობა (ნახ. 164.).

ამოხსნა: სხეულზე მოქმედებს T ძალობი (ძაფის დაჭიმულობა)

და P —სხეულის წონა. სხეულს მიუვერთოთ მხები და ნორმალური ინერციის ძალები. დალამბერის პრინციპის შესაბამისად, სხეული წონასწორობაში იქნება. მაშინ ყველა ძალის გეგმილების ჯამი ვერტიკალურ ღერძზე იქნება:



ნახ. 164.



ნახ. 165.

$$T - P - F_n^{oe} = 0; \quad F_n^{oe} = \frac{mv^2}{l}$$

$T = \frac{mv^2}{l} + P$ ძაღის დასადგენი დაქიჟლობაა. აქ v ტვირთის

სიჩქარეა, რომელიც შეიძლება განვსაზღვროთ მატერიალური წერტილის კინეტიკური ენერჯიის ცვლილების თეორემის საფუძველზე.¹

მაგალითი XV. 6. მარხილებიანი მატარებლის ბუქსირება ხდება Q ძალით (ნახ. 165). პირველი მარხილის წონაა P_1 , მეორესი P_2 . განვსაზღვროთ მარხილების აჩქარება და მათი დამაკავშირებელი გვარლის დაქიჟლობა. ხახუნის კოეფიციენტი ცნობილია.

ამოხსნა: განვსაზღვროთ ინერციის ძალები, რადგან მარხილები მოძრაობს a აჩქარებით, $F_{1ხახ} = fP_1$; $F_{2ხახ} = fP_2$. დალამბერის პრინციპის შესაბამისად, მოცემული ძალების, ბმების რეაქციებისა და ინერციის ძალების მოქმედებით სისტემა წონასწორობაში უნდა იყოს. ამიტომ ყველა ძალის ჯამი პორიზონტალურ ღერძზე იქნება:

$$Q - f(P_1 + P_2) - \frac{1}{g}(P_1 + P_2)a = 0,$$

აქედან

$$a = g \left(\frac{Q}{P_1 + P_2} - f \right).$$

¹ დამოუკიდებლად განსაზღვრეთ.

ცხადია მარხილებიანი მატარებელი იმოძრავებს, თუ $I < \frac{Q}{P_1 + P_2}$.

დაჭიმულობის T ძალის განსაზღვრისათვის საჭიროა დავანაწევროთ სისტემა და განვიხილოთ პირველ-მარხილზე მოქმედი ძალები. დავაგვიგმილოთ ეს ძალები ჰორიზონტალურ ღერძზე:

$$T - P_2 - \frac{P_2}{g} a = 0.$$

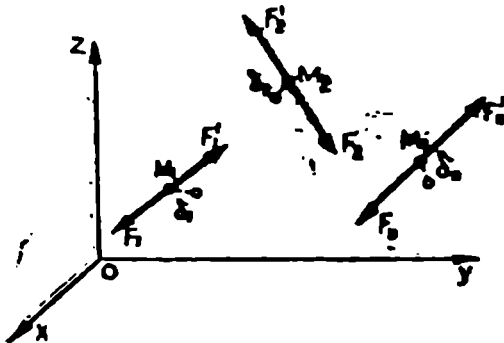
a -ს მნიშვნელობის ჩასმით და მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$T = \frac{QP_2}{P_1 + P_2}.$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ მარხილების შემაერთებელი გვარლის დაჭიმულობა არ არის დაპოკიდებული ხახუნის ძალასა და კოეფიციენტზე.

§ 82. შესაძლო გადაადგილების პრინციპი

როგორც აღვნიშნეთ, დინამიკის ძირითადი ამოცანა შეიძლება და-



ნახ. 166.

ვიყვანოთ შესაბამისი სტატიკის ამოცანამდე, სისტემის წერტილების ინერციის ძალების შეტანით. სტატიკის ამოცანების ამოხსნისათვის ყველაზე ზოგად ხერხს იძლევა შესაძლო გადაადგილების პრინციპი. ამ ხერხის გამოყენება თანაბრად შეიძლება ნებისმიერი სისტემის წონასწორობის საკითხებისათვის.

წარმოვიდგინოთ მატერიალური M_1, M_2, \dots, M_n სისტემა, რომელიც წონასწორობაშია მასზე მოდებული ძალების მოქმედებით (ნახ. 166). სისტემის წერტილებზე მოქმედი ყველა ძალა დავყოთ მოცემულ ძალებად და ბმების რეაქციებად. თითოეულ წერტილზე მოდებული მოცემული ძალების ტოლქმედი აღვნიშნოთ F_1, F_2, \dots, F_n -ით, ბმების რეაქციების ტოლქმედი F'_1, F'_2, \dots, F'_n -ით რადგან ვარაუდით M_1, M_2, \dots, M_n წერტილებიდან თითოეული

წონასწორობაშია, ამიტომ F_1 ძალა უნდა გაწონასწორდეს F' ძალით, F_2 ძალა F'_2 ძალით და ა. შ. აქედან გამომდინარეობს, რომ F_1 და F'_1 ძალები ტოლია და მიმართულია ერთ სწორ ხაზზე საწინააღმდეგო მხარეს. იგივე შეეხება F_2 და F'_2 , F_3 და F'_3 და ა. შ. ძალებს.

აზრით დაძვრათ სისტემა მის მიერ დაკავებული წონასწორობის მდებარეობიდან და მივყეთ მას რომელიმე შესაძლო გადაადგილება (სისტემის „შესაძლო“ გადაადგილება ეწოდება ყოველი ისეთი უმნიშვნელო მცირე გადაადგილებას, რომელიც დაიშვება მასში არსებული ბმებით).¹ აღვნიშნოთ M_1, M_2, \dots, M_n წერტილების უმნიშვნელოდ მცირე გადაადგილებები $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ -ით და გამოეთვალეთ ყველა ძალის მუშაობა (როგორც მოცემულის, ასევე ბმების რეაქციების) სისტემის განსახილველ გადაადგილებაზე.

რადგან F და F' ძალები ტოლია და მიმართულია საწინააღმდეგო მხარეს, ამიტომ, ამ ძალების მიერ შესრულებელი მუშაობა δ_1 გადაადგილებაზე რიცხობრივად ერთნაირია. და განსხვავდება ნიშნით; მუშაობის ჯამი ნულის ტოლია. იგივე შეიძლება ვთქვათ F_2 და F'_2 ძალების მუშაობის შესახებ δ_2 გადაადგილებაზე და ა. შ. აქედან გამომდინარეობს ტოლობები:

$$F_1 \delta_1 \cos(F_1, \delta_1) + F'_1 \delta_1 \cos(F'_1, \delta_1) = 0;$$

$$F_2 \delta_2 \cos(F_2, \delta_2) + F'_2 \delta_2 \cos(F'_2, \delta_2) = 0;$$

$$F_n \delta_n \cos(F_n, \delta_n) + F'_n \delta_n \cos(F'_n, \delta_n) = 0.$$

თუ შევკრებთ ამ ტოლობებს წევრ-წევრად, მივიღებთ:

$$\sum F_i \delta_i \cos(F_i, \delta_i) + \sum F'_i \delta_i \cos(F'_i, \delta_i) = 0.$$

დავუშვათ, რომ სისტემაში ყველა ბმა იდეალურია, ხახუნის ძალები, თუ ისინი არსებობენ, მივაკუთვნოთ მოცემულ ძალებს. ასეთ შემთხვევაში სისტემის ყოველ შესაძლო გადაადგილებაზე ბმების რეაქციათა მუშაობების ჯამი, გამოთვლილ მცირე სიდიდეებამდე სიმცირის 1-ლი რიგის (ჩათვლით) სიზუსტით, ნულის ტოლია. შესაბამისად, სიზუსტის ამ ხარისხის შემოფარგვლით შეიძლება წინა განტოლებაში ამოვავლოთ მეორე წევრი. მაშინ მივიღებთ განტოლებას:

¹ საჭიროა აღვნიშნოთ, რომ სისტემის გადაადგილება, რომელზედაც ლაპარაკია, სრულიად არ არის გამოწვეული სისტემის წერტილებზე მოქმედი ძალებით; ეს ძალები ვარაუდით ურთიერთწონასწორდება და სისტემის არაერთარ გადაადგილებას არ იწვევს. მხედველობაშია მხოლოდ სისტემის აზრობრივი გადაადგილება მისი წონასწორობის მდებარეობიდან.

$$\sum F_i \delta_i \cos(F_i, \delta_i) = 0.$$

მაშასადამე, თუ სისტემაში ყველა ბმა იდეალურია, მაშინ მისაწონასწორობის პირობა შეიძლება გამოისახოს შემდეგი სახით: წონასწორობის მდებარეობიდან სისტემის ყოველგვარ შესაძლო გადაადგილებაზე მოცემული ძალების მუშაობათა ჯამი, გამოთვლილი მცირე სიდიდეებამდე სიმცირის 1-ლი რიგის (ჩათვლით) სიზუსტით, ნულის ტოლია. ამ პრინციპს ეწოდება შესაძლო გადაადგილებების პრინციპი, მის გამომხატველ განტოლებას მუშაობის განტოლება.

შესაძლო გადაადგილებების პრინციპი მექანიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი და ძირითადი პრინციპია. სტატიკის ყველა თეორემა შეიძლება გამოყვანილი იყოს მისგან, როგორც შედეგი. შესაძლო გადაადგილების პრინციპს აქვს საყოველთაო მნიშვნელობა არა მარტო წონასწორობის, არამედ მოძრაობის შესახებ მოძღვრებაშიც. ამავდროს მას ძალიან დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს: მისი გამოყენებით შეიძლება მექანიკის მრავალი საკითხის უფრო მარტივი ამოხსნა, რადგან შესაძლო გადაადგილების პრინციპის გამომხატველი მუშაობის განტოლებიდან ავტომატურად გამოირიცხება ბმების ყველა რეაქცია.

მუშაობის განტოლებას შეიძლება მივცეთ რამდენადმე სხვა სახე, თუ ვისარგებლებთ ელემენტარული მუშაობის ცნობილი სამწევრიანი გამოსახულებით. ავიღოთ მართკუთხა კოორდინატული x, y, z , ღერძები და აღვნიშნოთ F_i ძალის გეგმილები ამ ღერძებზე X_i, Y_i, Z_i, F_i -ით, ხოლო M_i წერტილის კოორდინატები x_i, y_i, z_i -ით, ამ კოორდინატების ნამატი, როდესაც M_i წერტილი მიიღებს δ გადაადგილებას, აღვნიშნოთ $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ -ით. მაშინ:

$$F_i \delta_i \cos(F_i, \delta_i) = X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i.$$

მუშაობის განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

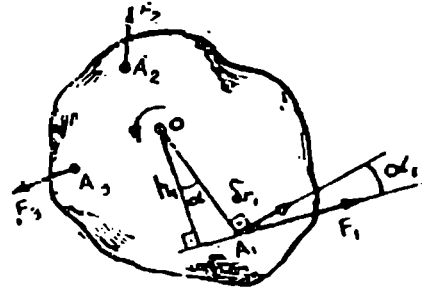
$$\sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0. \quad (222)$$

განტოლებას ასეთი სახით უწოდებენ სტატიკის ზოგად განტოლებას. მას მნიშვნელობა აქვს თეორიულ კვლევებში; ირაქტიკაში უფრო მოსახერხებელია პირველსაწყისი განტოლებით სარგებლობა.

მაგალითი XV. 7. განვსაზღვროთ შესაძლო გადაადგილების პრინციპის საფუძველზე ბერკეტის წონასწორობის პირობა.

დაუშვათ, მყარი სხეული, დამაგრებული ცილინდრული O სახს-

რის საშუალებით, სხეულის ბრუნვის ღერძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში (ნახაზის სიბრტყეში, ნახ. 167) განლაგებული F_1 ძალების სისტემის მოქმედების ქვეშაა. მივცეთ სხეულს შესაძლო გადაადგილება, ე. ი. მოვებრუნოთ იგი ნახაზის სიბრტყის პერპენდიკულარული O ღერძის გარშემო, ნებისმიერი ელემენტარული $\delta\varphi$ კუთხით. ამ დროს სხეულის A_1 წერტილი მიიღებს OA_1 -ს პერპენდიკულარული მიმართულებით და მოდულით $OA_1\delta\varphi$ ტოლ δz_1 გადაადგილებას. ამ წერტილზე მოდებული ძალის ელემენტარული მუშაობა იქნება:



ნახ. 167.

$$\delta A_1 = F_1 \cos \alpha_1 |\delta r_1| = F_1 \cdot OA_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \delta\varphi,$$

სადაც α_1 კუთხეა F_1 და δr_1 შორის. თუ O წერტილიდან დაეუშვებთ F_1 ძალის მოქმედების ხაზზე h_1 პერპენდიკულარს, მაშინ $h_1 = OA_1 \sin \alpha_1$ და ამიტომ $\delta A_1 = F_1 h_1 \delta\varphi$.

მაგრამ $F_1 h_1$ ნამრავლი ძალის მომენტია O ღერძის მიმართ, მაშასადამე, $\delta A_1 = m_0(F_1) \delta\varphi$.

ყველა ძალის ელემენტარული მუშაობის ჯამი, მოდებული, ბერკეტზე, შესაბამისად ასე გამოისახება:

$$\sum \delta A_i = \sum m_0(F_i) \delta\varphi = \delta\varphi \sum m_0(F_i).$$

ამ ჯამის ნულთან გატოლებით მივიღებთ ბერკეტის წონასწორობის პირობას: $\delta\varphi = \sum m_0(F_i) = 0$, ანუ, რადგან $\delta\varphi \neq 0$, $\sum m_0(F_i) = 0$:

მაშასადამე, იმისათვის, რომ ბერკეტი მოცემულ მდებარეობაში უძრავად დარჩეს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მასზე მოდებული ყველა ძალის მომენტების ჯამი მისი ბრუნვის ღერძის მიმართ ნული ტოლი იყოს.

§ 88. დინამიკის ზოგადი განტოლება

დალამბერის პრინციპის თანახმად, მექანიკურ სისტემაზე მოქმედა მოცემული ძალები, ამ სისტემის მატერიალური წერტილების ბმების რეაქციები და ინერციის ძალები ყოველ მოცემულ მომენტში წო-

¹ ვექტორი მიმართულია იმ წრეხაზის რკალის მხების მიმართულებით, რომელსაც აღწერს წერტილი, ხოლო მისი მოდული ამ ელემენტარულ რკალის სიგრძის ტოლია.

ნასწორობაშია. შესაძლო გადაადგილებების პრინციპიდან გამომდინარეობს, რომ ყველა ამ ძალის ელემენტარული მუშაობის ჯამი სისტემის ყოველგვარი გადაადგილების დროს ნულის ტოლია. სრულყოფილი ბმების შემთხვევაში (ამ ბმების რეაქციათა მუშაობების ჯამი ყოველთვის ნულის ტოლია) მოცემული ძალებისა და ინერციის ძალების ელემენტარული მუშაობების ჯამი ნულის ტოლი იქნება სისტემის ნებისმიერი შესაძლო გადაადგილების დროს, ე. ი.

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \Sigma(F_x^{\text{ინ}}\delta x + F_y^{\text{ინ}}\delta y + F_z^{\text{ინ}}\delta z) = 0,$$

სადაც δx , δy და δz აღნიშნავს სისტემის წერტილების შესაძლო გადაადგილებების გეგმილების კოორდინატთა ლერძებზე X , Y , Z — მოცემული ძალების გეგმილებია და $F_x^{\text{ინ}}$, $F_y^{\text{ინ}}$, $F_z^{\text{ინ}}$ — ინერციის ძალების გეგმილები იმავე ლერძებზე. მაგრამ ინერციის ძალების გეგმილები კოორდინატთა ლერძებზე გამოისახება ასე:

$$F_x^{\text{ინ}} = -ma_x = -m \frac{d^2x}{dt^2}; \quad F_y^{\text{ინ}} = -ma_y = -m \frac{d^2y}{dt^2};$$

$$F_z^{\text{ინ}} = -ma_z = -m \frac{d^2z}{dt^2},$$

სადაც m მატერიალური წერტილის მასაა, ხოლო a_x , a_y და a_z მისი აჩქარების გეგმილებია კოორდინატთა ლერძებზე. ამიტომ წინა განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\Sigma \left[\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0. \quad (223)$$

მექანიკის ორი ძირითადი პრინციპიდან — დალამბერის პრინციპიდან და შესაძლო გადაადგილებების პრინციპიდან გამომდინარე, ამ განტოლებას ეწოდება დინამიკის ზოგადი განტოლება. სტატიკის ზოგადი 222-ე განტოლებიდან იგი მხოლოდ იმით განსხვავდება, რომ მოცემული ძალების კოორდინატთა ლერძებზე გეგმილების გარდა, მასში შედის კიდევ ინერციის ძალების გეგმილები იმავე ლერძებზე.

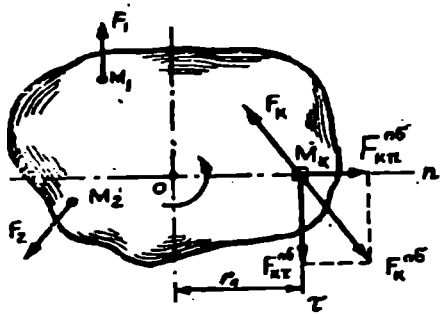
ამრიგად, ინერციის ძალების შეტანით და 223-ე განტოლების გამოყენებით შესაძლო გადაადგილებების პრინციპი დინამიკის ამოცანებშიც გამოვიყენოთ.

ბრუნვითი მოძრაობა ძალიან ბევრი ფიზიკური ვარჯიშის ელემენტია. იგი გვხვდება ტანვარჯიშისა და აკრობატიკის უმეტეს ვარჯიშებში, წყალში ხტომების, ციგურებზე ფიგურული სრილის დროს და ა. შ.

განვიხილოთ უძრავი Z ღერძის გარშემო მბრუნავი მყარი სხეული მასზე მოდებული F_1, F_2, \dots, F_n ძალების მოქმედებით (ნახ. 168). უძრავი ღერძის მქონე სხეულის წონასწორობისათვის აუცილებელია, რომ მასზე მოდებული ყველა აქტიური F_1, F_2, \dots, F^n ძალის მომენტების ალგებრული ჯამი ღერძის გარშემო ნულის ტოლი იყოს: $\sum m_z(\bar{F}_k) = 0$; წინააღმდეგ შემთხვევაში სხეული იბრუნებს Z ღერძის გარშემო რომელიღაც ϵ კუთხური აჩქარებით:

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

მბრუნავი სხეულის ϵ კუთხური აჩქარება ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი კინემატიკური მახასიათებელია. მისი განსაზღვრისათვის იყენებენ დალამბერის პრინციპს და სხეულზე მოდებულ აქტიურ ძალებს პარაბოლად დაუმატებენ მისი ყველა ნაწილაკის ინერციის ძალას. მაშინ შეიძლება მივიჩნიოთ, რომ სისტემა თითქოს და წონასწორობაშია. ამ დროს სხეულზე მოდებული აქტიური ძალების და მისი ყველა ნაწილაკის ინერციის ძალთა მომენტების ჯამი სხეულის ბრუნვის ღერძის გარშემო ნულის ტოლი უნდა იყოს.



ნახ. 168.

რომ გამოვითვალოთ ინერციის ძალები, დავყოთ მოცემული სხეული m_k მასის მქონე ნაწილაკებად (იხ. ნახ. 168) (თითოეული ასეთი ნაწილაკი ღერძიდან z_k მანძილზეა).

თითოეულ ნაწილაკზე მიკუთვნებული ინერციის ძალა, იქნება $\bar{F}_k^{in} = m_k \bar{a}$. დავშალოთ იგი შემდგენებად: ცენტრიდანულად, მოდულით $F_{kn}^{in} = m_k r_k^2 \omega^2$ -ს ტოლად და ცენტრიდან რადიუსის გასწვრივ მიმართულად, და მხებდად, მოდულით $F_{kt}^{in} =$

$\equiv m_k r_k$ -ს ტოლად და შიშართულად რადიუსის პერპენდიკულარულად მხები აჩქარების საწინააღმდეგო მხარეს. რადგან სხეულზე მოდებული F_1, F_2, \dots, F_n ძალების მთავარი მომენტი დადებითია (ამ ძალების მოქმედებით სხეული ბრუნავს საათის ისრის მიმართულების საწინააღმდეგოდ), კუთხური აჩქარებაც ასევე დადებითი იქნება.

რადგან ინერციის ცენტრიდანული ძალები კვეთს სხეულის ბრუნვის ღერძს, ამიტომ მათი მომენტები ამ ღერძის მიმართ ნულის ტოლია. ერთი ნაწილაკისათვის ინერციის ძალის მხები შემდგენი, ვეძლევეს სხეულის ბრუნვის ღერძის მიმართ $m_z (F_{kz}^{n6}) \equiv -F_{kz}^{n6} z = -m_k r_k^2 \varepsilon$ მომენტს.

სხეულის ყველა ელემენტარული ნაწილაკის ინერციის ძალთა მომენტების ჯამი იქნება:

$$\sum m_z (F_{kz}^{n6}) = -\sum F_{kz}^{n6} z = -\sum m_k r_k^2 \varepsilon.$$

სხეულის კუთხური აჩქარება ε შეიძლება გამოვიტანოთ ჯამის ნიშნის გარეთ, როგორც საერთო მამრავლი, რადგან იგი ერთნაირია ყველა ელემენტარული ნაწილაკისათვის.

ტოლობის მარჯვენა მხარე შედგება ორი მამრავლისაგან. ε და $\sum m_k r_k^2$ უკანასკნელი მბრუნავი სხეულის მახასიათებელი სიდიდეა და ღერძის გარშემო ბრუნვის ინერციის მომენტი ეწოდება. მას აღნიშნავენ I -თი.

რომელიმე ღერძის მიმართ სხეულის ინერციის მომენტი ეწოდება სიდიდეს, რომელიც იზომება სხეულის თითოეული ნაწილაკის მასის მოცემულ ღერძამდე ამ ნაწილაკის მანძილის კვადრატზე ნამრავლის ჯამით.

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ მბრუნავი სხეულის ინერციის მომენტზე ლაპარაკის დროს აუცილებელია ვუჩვენოთ, თუ რომელი ღერძის ან წერტილის მიმართ გამოითვლება I -ს მნიშვნელობა, რადგან გამოსახულებაში შემავალი და ინერციის მომენტის განმსაზღვრელი r_k ახასიათებს თითოეული ელემენტარული მასიდან დაცილებას ბრუნვის ღერძამდე ან წერტილამდე.

სხეულის მატერიალური ნაწილაკების ინერციის ძალთა მომენტების ჯამი ახლა შეიძლება დავწეროთ ასე:

$$\sum m_z (F_{kz}^{n6}) = -I \varepsilon. \quad (224)$$

სხეულის წონასწორობისათვის აუცილებელია, რომ ყველა ძალის როგორც აქტიური, ასევე ინერციის მომენტების ჯამი ნულის ტოლი

იყოს. ამიტომ ინერციის ძალების მომენტების ჯამის დამატებით სხეულზე მოდებული ყველა აქტიური ძალის მომენტის ჯამზე მივიღებთ ტოლობას:

$$\sum m_i(F_k) + \sum m_i(F_k^i) = \sum m_i(F_k) - I\epsilon = 0.$$

სხეულის ბრუნვის z ღერძის მიმართ სხეულზე მოდებული ყველა აქტიური ძალის მომენტების ალგებრულ ჯამს ეწოდება მამბრუნი მომენტი და აღინიშნება $M_{z, z}$ -ით.

$$M_{z, z} = \sum m_i(F_k). \quad (225)$$

ახალი აღნიშვნების შეტანით მივიღებთ $M_{z, z} - I\epsilon = 0$ ან

$$M_{z, z} = I\epsilon. \quad (226)$$

უძრავი ღერძის გარშემო მბრუნავი სხეულისათვის მამბრუნი მომენტი ტოლია სხეულის ამ ღერძის მიმართ ინერციის მომენტისა გამრავლებული სხეულის კუთხურ აჩქარებაზე.

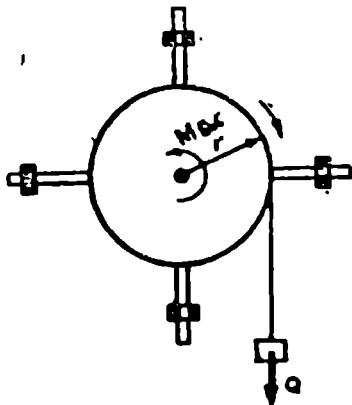
226-ე განტოლება მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის დინამიკის ძირითადი განტოლებაა.

თუ სხეული ბრუნავს განსაზღვრული ღერძის გარშემო, მაშინ მისთვის ინერციის მომენტი მუდმივი სიდიდეა. ამიტომ თუ მამბრუნი მომენტიც მუდმივია, მაშინ კუთხური სიჩქარეც იქნება მუდმივი სიდიდე, ე. ი. სხეული ასრულებს თანაბარ-ცვლად ბრუნვას.

თუ სხეულზე მოდებული მამბრუნი მომენტი $M_{z, z}$ ნულის ტოლია, მაშინ სხეულის კუთხური აჩქარება ϵ ასევე ნულის ტოლია. ამიტომ სხეული ან ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით. ან რჩება სიმშვიდის მდგომარეობაში.

სხეულზე შეიძლება მოქმედებდეს სხედასხვა მამბრუნი მომენტი. მაგალითად, ობერბეკის ქანქარაში ლილვზე (ნახ. 169) მოქმედებს ორი საწინააღმდეგოდ მიმართული მომენტი: მომენტი $M_{z, z} = -Qz$ აბრუნებს სისტემას საათის ისრის მიმართულებით; მომენტი $M_{z, z}$ ეწინააღმდეგება ამ ბრუნვას. თუ ჯამი $\Sigma(M_{z, z} + M_{z, z})$ ნულის ტოლი იქნება, მაშინ ლილვი იბრუნებს თანაბრად.

თუ მამოძრავებელი ძალების მომენტი წინააღმდეგობის ძალების მო-



ნახ. 169.

შენტზე მეტია, მაშინ ლილვი იბრუნებს აჩქარებულად, თუ მამოძრაებელი ძალების მომენტი წინააღმდეგობის ძალების მომენტზე ნაკლებია, მაშინ ლილვი იბრუნებს შენელებულად.

მე-20 ცხრილიდან ჩანს, რომ თავისი სტრუქტურის მიხედვით სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის დინამიკის ძირითადი განტოლება მატერიალური წერტილის დინამიკის ძირითადი განტოლების მსგავსად (ანუ, რაც იგივეა, სხეულის წინსვლითი მოძრაობისათვის): $\overline{F} = m\overline{a}$.

სხეულის ინერციის მომენტი მისი ბრუნვითი მოძრაობის დროს ასრულებს იმავე როლს, რასაც მასა წინსვლითი მოძრაობის დროს. ისევე როგორც სხეულის მასა წინსვლითი მოძრაობისას მისი ინერტულობის საზომია, ასევე მოცემული ღერძის მიმართ სხეულის ინერციის მომენტი მისი ინერტულობის საზომია ამ ღერძის მიმართ ბრუნვითი მოძრაობის დროს.

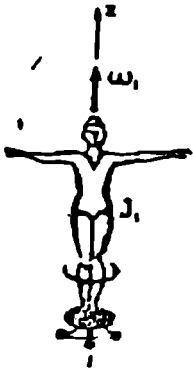
ცხრილი 20

შუარი სხეულის წინსვლითი და ბრუნვითი მოძრაობების მახასიათებლები

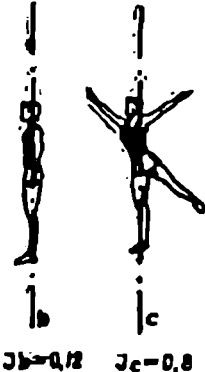
წინსვლითი მოძრაობა	ბრუნვითი მოძრაობა
ძალა F	ძალების მომენტი $m(F)$
მასა m	ინერციის მომენტი I
სიჩქარე v	კუთხური სიჩქარე ω
აჩქარება a	კუთხური აჩქარება ϵ
დინამიკის ძირითადი განტოლება	დინამიკის ძირითადი განტოლება
$\overline{F} = m\overline{a}$	$M_{\text{საა}} = J\epsilon$

თუ მოცემულია მამბრუნნი მომენტი ($M_{\text{საა}}$), რომელიც მუდმივი რჩება ($M_{\text{საა}} = I\epsilon = \text{const}$), მაშინ კუთხური აჩქარება ϵ იქნება დამოკიდებული I სიდიდეზე: იგი მით უფრო ნაკლები იქნება, რაც მეტია ბრუნვის ღერძის გარშემო სხეულის ინერციის მომენტი.

მიუხედავად იმისა, რომ ინერციის მომენტი თითქოს ასრულებს მასის (ინერტულობის) როლს ბრუნვით სისტემაში, აუცილებელია მივუთითოთ სხეულის მასისაგან მის განსხვავებაზე. სხეულის მასა მისთვის მუდმივი სიდიდეა. მაშინ, როდესაც სხეულის ინერციის მომენტი დამოკიდებულია არა მარტო თვით ბრუნვის მასაზე, არამედ ბრუნვის ღერძის მიმართ მასის განაწილებაზეც. ეს კარგად ილუსტრირდება ეუკოვსკია



ნახ. 170.



ნახ. 171.

სკამის დახმარებით (ნახ. 170). აღამიანს, რომელიც დგას ბრუნვით მოძრაობაში, მოყვანილ სკამზე, შეუძლია შეცვალოს მისი კუთხური სიჩქარე სხეულის მასის განაწილების ცვლილებით; ამით კი შესაბამისად შეცვალოს მისი ბრუნვის ლერძის გარშემო სისტემის ინერციის მომენტი. სისტემის ბრუნვა აჩქარდება, თუ აღამიანი მიიახლოვებს ხელებს მკერდთან, და, პირიქით, შენელებს, თუ იგი დააშორებს მათ ბრუნვის ლერძიდან.

აღამიანის სხეულის ინერციის მომენტი მისი სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ლერძის გარშემო შეიცვლება სხეულის პოზის შეცვლით (ნახ. 171).¹

§ 86. აღამიანის სხეულის ინერციის მომენტის განსაზღვრა

რომელიმე ლერძის, მაგალითად z-ის მიმართ მყარი სხეულის ინერციის მომენტის განსაზღვრისათვის (ნახ. 172), საჭიროა დავეოთ მთელი სხეული მცირე ნაწილაკების ძალიან დიდ n რიცხვად; შემდეგ მივიღოთ ჯამი სხეულის თითოეული ნაწილაკის მასის ნამრავლისა ამ ნაწილაკის z ლერძიდან დაშორების კვადრატზე და გამოვიტვალოთ ამ ჯამის ზღვარი იმ ვარაუდით, რომ ნაწილაკების n რიცხვი მიისწრაფვის უსასრულობოსაკენ, ხოლო თითოეული ნაწილაკის მასა — ნულისაკენ.

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow 0}} (m_1 z_1^2 + m_2 z^2 + \dots + m_n z_n^2) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow 0}} \sum m_k z_k^2$$

¹ ინერციის მომენტის რიცხვითი მნიშვნელობები მოცემულია კვ. მ. წმ²-ობით.

ზვირად სიტყვა „ზღვარს“ გამოტოვებენ და სხეულის ინერციის მომენტს მისი რომელიმე ღერძის გარშემო განსაზღვრავენ უბრალოდ როგორც ჭამს. შედგენილს სხეულის თითოეული ნაწილაკის მასის ნამრავლით ამ ნაწილაკის მოცემულ ღერძამდე მანძილის კვადრატზე:

$$I = \sum m_i z_i^2. \quad (227)$$

ინერციის მომენტის განზომილებაა, $[I] = (\text{მასა} \cdot \text{სიგრძე}^2)$. ის სისტემაში ინერციის მომენტი იზომება კილოგრამმეტრკვადრატობით (კგმ²). ერთეულთა ტექნიკურ სისტემაში ინერციის მომენტის განზომილებაა $[I] = \frac{\text{ძალა} \cdot \text{დრო}^2}{\text{სიგრძე}} \cdot \text{სიგრძე}^2 = (\text{ძალა} \cdot \text{სიგრძე} \cdot \text{დრო}^2)$.

ამრიგად, ერთეულთა ტექნიკურ სისტემაში ინერციის მომენტი იზომება კილოგრამმეტრწამკვადრატობით (კგმწმ²).

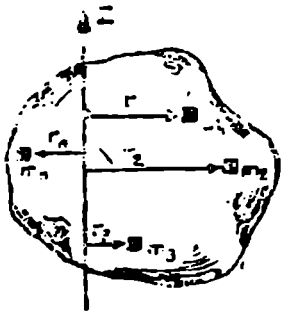
ზოგჯერ ასახელებენ ცნებას „ინერციის რადიუსი“. ამისათვის სხეულის ინერციის მომენტის ღერძის მიმართ წარმოადგენენ ინერციის რადიუსად წოდებულ რომელიმე მონაკვეთის სიგრძის კვადრატზე მასის ნამრავლის სახით სხეულის მოცემული ღერძის მიმართ:

$$I = Mr^2.$$

თუ სხეულის ინერციის მომენტი ღერძის მიმართ ცნობილია, მაშინ სხეულის ინერციის რადიუსი ამ ღერძის მიმართ იქნება:

$$r = \sqrt{\frac{I}{M}}. \quad (228)$$

სხეულის ინერციის რადიუსი მოცემული ღერძის გარშემო ტოლია მანძილისა მოცემული ღერძიდან წერტილამდე, რომელშიაც, თავი უნდა მოეუყაროთ სხეულის მთელ მასას, რომ მივიღოთ ამ წერტილის მოცემული ღერძის მიმართ სხეულის ინერციის მომენტის ტოლი ინერციის მომენტი.



ნახ. 172.

ზოგ შემთხვევებში აუცილებელი ხდება სხეულის რომელიმე ღერძის მიმართ ინერციის მომენტის ცოდნით განესაზღვროთ მომენტი სხვა ღერძის მიმართ. მაგალითად, ცდის საშუალებით ადვილად მოვიხებნით I_{z_1} ინერციის მომენტს ღერძის მიმართ, რომლის გარშემო ხდება სისტემის რხევა, მაშინ როდესაც სპორტული მოძრაობების

კვლევის დროს საინტერესოა ვიციოდეთ ინერციის მომენტი Z ღერძის მიმართ. ამ ამოცანის ამოხსნას იძლევა ჰიუგენსის თეორემა: სხეულის ინერციის მომენტი I_{Z_1} ნებისმიერი ღერძის მიმართ ტოლია ამ სხეულის I_Z ინერციის მომენტისა Z ღერძის მიმართ. რომელიც მოცემულის პარალელურია და გადის სხეულის სიმძიმის ცენტრზე. დამატებული სხეულის M მასის ნამრავლი მოცემულ ღერძებს შორის I მანძილის კვადრატზე:

$$I_{Z_1} = I_Z + MI^2 \quad (229)$$

მაგალითი XV. 8. ადამიანის სხეულის ინერციის მომენტი მის სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ უდრის: $I_z = 1,7$ კგმ².

განვსაზღვროთ ადამიანის სხეულის ინერციის მომენტი Z_1 ღერძის მიმართ, თუ ღერძებს შორის მანძილი $I = 1,00$ მ. სხეულის წონა $Q = 73,5$ კგ.

ამოხსნა. ჰიუგენსის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ:

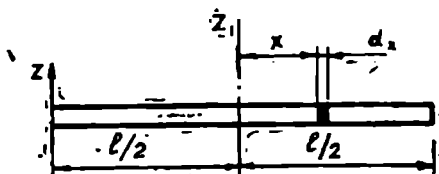
$$I_{Z_1} = I_Z + MI^2 = 1,7 + \frac{73,5 \cdot 1^2}{9,8} = 9,2 \text{ კგმ}^2.$$

განვიხილოთ ერთგვაროვანი სხეულების ინერციის მომენტის განსაზღვრა გასაანგარიშებელი მეთოდით.

1. დავუშვათ, მოცემულია მუდმივი განივკვეთის ფართის სწორი ერთგვაროვანი თხელი ღერო AB , რომლის განივი ზომები მცირეა მის სიგრძესთან შედარებით. საჭიროა გამოვითვალოთ ინერციის მომენტი ღეროს ბოლოზე გამავალი Z ღერძის მიმართ (ნახ. 173).



ნახ. 173.



ნახ. 174.

გამოვეყოთ ღეროდან ძალიან მცირე dx სიგრძის მონაკვეთი, რომელიც მოთავსებულია Z ღერძიდან x მანძილზე. მისი მასა dm იქნება:

$$dm = \rho dx, \quad (230)$$

სადაც ρ ღეროს ხაზოვანი სიმკვრივეა (ღეროს სიგრძის ერ-

თეულზე მოსული მასა). გამოყოფილი ელემენტარული ნაწილაკის dl ინერციის მომენტი აქნება:

$$dI_z = x^2 dm. \quad (231)$$

რომ მივიღოთ მთელი ღეროს ინერციის მომენტი I_z ღერძის მიმართ, აუცილებელია ეს გამოსახულება გავინტეგრელოთ:

$$I_z = \int_0^l x^2 dm = \int_0^l \rho x^2 dx = \rho \int_0^l x^2 dx = \frac{\rho l^3}{3}.$$

მთელი ღერძის ρl -ს ტოლი მასა აღვნიშნოთ M -ით და ღეროს ინერციის მომენტის მიღებულ გამოსახულებაში ამ სიდიდის ჩასმით საბოლოოდ მივიღებთ:

$$I_z = \frac{Ml^2}{3}. \quad (232)$$

2. ღეროს ინერციის მომენტი ღეროს სიმძიმის ცენტრზე გამავალი განივი z_1 ღერძის მიმართ (ნახ. 174) შეიძლება მივიღოთ ისევე, როგორც წინა მაგალითში:

$$I_{z_1} = 2 \int_0^{l/2} \rho x^2 dx = 2\rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{l/2} = \frac{\rho l^3}{12} = \frac{Ml^2}{12}.$$

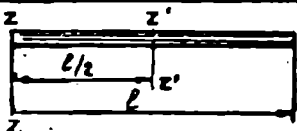
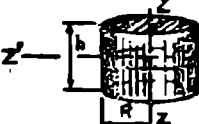
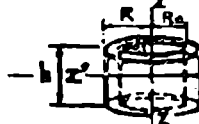

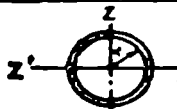
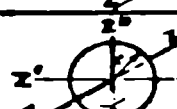

იგივე გამოსახულება შეიძლება მივიღოთ ჰიუგენის თეორემის გამოყენებით: $I_{z_1} = I_z + Ml_1^2$, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $I_z = \frac{Ml^2}{3}$ ინერციის მომენტია ღეროს ბოლოზე გამავალი z ღერძის მიმართ; I_z — ღეროს ინერციის მომენტი z_1 ღერძის მიმართ, რომელიც პარალელურია z ღერძს და გადის ღეროს სიმძიმის ცენტრში; M — ღეროს მასა; $\frac{l}{2}$ — პარალელურ z და z_1 ღერძებს შორის მანძილი.

ღეროს დასადგენი ინერციის მომენტი:

$$I_{z_1} = I_z - M \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{Ml^2}{2} - M \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{Ml^2}{12}. \quad (233)$$

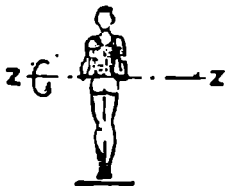



თუ პრინციპულად ასევე მოვიქცევით, შეიძლება გამოვიტვალოთ სწორი ფორმის სხვადასხვა სხეულის ინერციის მომენტი (ცხრ. 21).

ზოგიერთი სხეულის ინერციის მომენტები ცხრილი 21

სხეული	ინერციის მომენტები	
	J_z	$J_{z'}$
 <p>ღერო</p>	$\frac{Ml^2}{3}$	$\frac{Ml^2}{12}$
 <p>მთლიანი ცილინდრი</p>	$\frac{MR^2}{2}$	$\frac{M}{12}(h^2+3R^2)$
 <p>ღრუ ცილინდრი</p>	$\frac{M(R^2+R_0^2)}{2}$	—
 <p>მთლიანი სფერო</p>	$0,4MR^2$	$0,4MR^2$
 <p>ღრუ სფერო.</p>	$\frac{2}{3}Mr^2$	$\frac{2}{3}Mr^2$
 <p>წრიული ზღოლი</p>	Mr^2	—
 <p>დისკო</p>	$\frac{Mr}{4}$	—

აღამიანის სხეულის ინერციის მომენტს დიდი მნიშვნელობა აქვს სპორტული მოძრაობების ანალიზისათვის. ჩვეატაროთ აღამიანის ინერციის I მომენტის გაანგარიშება. „სტანდარტული აღამიანის“ წონა $Q=70$ კგ, სიმაღლე $H=1,78$. ამ სხეულს შეესაბამება $H=1,78$ სიმაღლის, $d=23$ სმ დიამეტრის, $\rho=1\frac{2}{3}$ სიმკვრივის, $M=$

აქამაინის სხეულის (ნორმალური აღნაგობის ძამა-
 ყაყები 0-70 სვ. H=1,7 მ) ინერციის მომენტები (ჯმნმ²)

პოზიციის აღწერა და ზღვრული ინერციის მომენტი	კენტირემენტალური ვანსაბოლოები	ცენტრული ძრვით გამოანგარიშებული
	1,25-1,51	1,70
 <p>Z ღერძი ⊥ ნახაზის სიბრტყის</p>	0,45-0,80	0,60
	0,10-0,15	0,17
	0,20-0,25	0,25

$$= \frac{70}{9,81} = 7,13 \text{ მ. ტ. ე. ეკვივალენტური ცილინდრი.}$$

175-ე ნახაზზე ნაჩვენებია ცილინდრი, რომელიც ბრუნავს სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის გარშემო. ცილინდრის ინერციის მომენტი უდრის:

$$I_z = \frac{2 \left(\frac{M}{2} \frac{H}{2} \right)^2}{3} = \frac{M \cdot 1,7^2}{2} = 1,7 \text{ კგმ}^2 = 16,8 \text{ კგმ}^2.$$

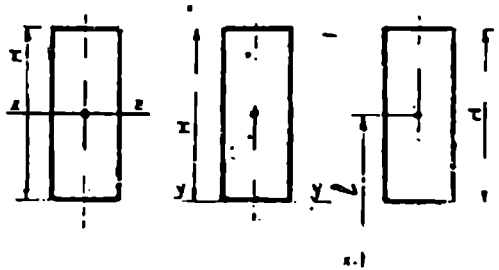
თუ y ღერძი გადის ცილინდრის ფსკერზე (ე. ი. ადამიანის თავის ან ფეხისგულის ღონეზე), მაშინ ინერციის მომენტი I_y უდრის:

$$I_y = \frac{MH^2}{3} = 6,8 \text{ კგმ}^2.$$

„დიდი ბრუნვის“ პოზიციაში ინერციის მომენტი იქნება:

$$I_x = I_z + MH^2 = 1,7 + 7,13 \cdot (1,2)^2 = 12,3 \text{ კგმ}^2.$$

ეს გასაანგარიშებელი მონაცემები საკმაოდ კარგად ემთხვევა ექსპერიმენტულ მონაცემებს (ცხრ. 22). ადამიანის სხეულის ინერციის მომენტის საორიენტაციო მნიშვნელობები გვიჩვენებს, რომ ფიზიკური ვარჯიშების პროცესში ინერციის მომენტის მნიშვნელობა შეიძლება რამდენიმეჯერ შეიცვალოს.



ნახ. 175.

ადამიანის სხეულის ინერციის მომენტების განსაზღვრის ექსპერიმენტული მეთოდებია: საქანელას მეთოდი, მონოფილარული დაკიდების მეთოდი და გრუბითი რხევების მეთოდი.

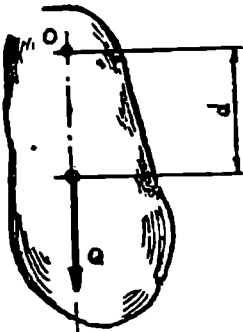
საქანელას (ფიზიკური ქანქარას) მეთოდი. მყარ სხეულს, დამაგრებულს პორიზონტალურ ღერძზე ისე, რომ მას შეუძლია ღერძის მიმართ საკუთარი წონის მოქმედებით ქანაობა, ფიზიკური ქანქარა ეწოდება. (ნახ. 176).

თუ I_0 ამ სხეულის ინერციის მომენტია (0) ღერძის მიმართ, d — მანძილი ღერძიდან ქანქარას ცენტრამდე, მაშინ მცირე რხევების პერიოდი:

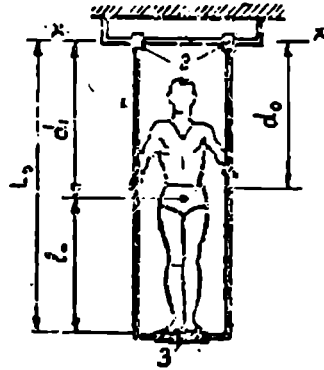
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Qd}}$$

მაშასადამე, თუ განვსაზღვრავთ რხევების T პერიოდს, მაშინ სხეულის Q წონისა და სიმძიმის ცენტრის (d) მდებარეობის ცოდნით შეიძლება განვსაზღვროთ სხეულის ინერციის მომენტი I :

$$I = Qd \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \quad (234)$$



ნახ. 176.



ნახ. 177.

ხელსაწყო, რომელსაც იყენებენ ლაბორატორიებში ადამიანის სხეულის ინერციის მომენტის განსაზღვრისათვის (ნახ. 177), შედგება ჩარჩოსაგან (1), რომელიც ჰკიდია ჰორიზონტალურ $x-x$ ღერძზე ბურთულა საკისრების მეშვეობით (ამიტომ ხაზუნი ჩარჩო — ღერძი პრაქტიკულად ნულამდეა დაყვანილი). ჩარჩოს სიმძიმის ცენტრის მდებარეობა ცნობილია, სიმძიმის ცენტრიდან $x-x$ ღერძამდე მანძილი d -ს ტოლია, ჩარჩოს (საქანელას) წონაც ცნობილია: Q_0 საქანელას T_0 პერიოდის გაზომვით შეიძლება განვსაზღვროთ საქანელას ინერციის მომენტი I_x^0 , $x-x$ ღერძის მიმართ.

ჩარჩოს ქვედა ნაწილზე დამაგრებულია მოედანი (3), რომელზეც დგება ადამიანი. საჭიროა მისი სხეულის ინერციის მომენტის I_x' დადგენა. ადამიანის წონა Q_1 და ს. ს. ც.-ს მდებარეობა l_0 ცნობილია წინასწარი გაზომვებით. l_0 სიდიდით შეიძლება განვსაზღვროთ ადამიანის სიმძიმის ცენტრი $x-x$ ღერძის მიმართ, $d_1 = L_0 - l_0$. ახლა გვაქვს სისტემა (საქანელა + ადამიანი), რომლის წონა $Q_{სისტ} = Q_0 + Q_1$; მანძილი $x-x$ ღერძიდან სისტემის სიმძიმის ცენტრამდე უდრის:

$$d_{სისტ} = \frac{Q_0 d_0 + Q_1 d_1}{Q_0 + Q_1}.$$

ვაიძულეთ სისტემა იქნას და განვსაზღვროთ პერიოდი $T_{სისტ}$ აგრეთვე სისტემის ინერციის მომენტი.

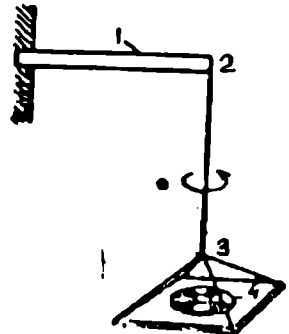
$$I_x^* = (Q_0 + Q_1) \cdot d_{სისტ}^2 \left(\frac{T_{სისტ}}{2\pi} \right)^2.$$

სისტემის I_x^* ინერციის მომენტი საქანელას I_x^0 ინერციის მომენტისა და I_x' ადამიანის ინერციის მომენტის ჯამის ტოლია. აქედან მივიღებთ $I_x' = I_x^* - I_x^0$. საქანელას მეთოდი მარტივია და მოსახერხებელი. მისი უარყოფითი მხარეა ადამიანის ს. ს. ც. -ს წინასწარი განსაზღვრის აუცილებლობა.

თუ ვიცით $x-x$ ღერძის მიმართ I_x' ინერციის მომენტი, შეიძლება ფორმულით განვსაზღვროთ სხვა პარალელური ღერძის მიმართ, მაგალითად, ადამიანის სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ I_y' ინერციის მომენტი.

მონოფილარული დაკიდების მეთოდი. მონოფილარული ეწოდება დაკიდებას ერთი ძაფის სახით (რამდენიმე ძაფის დაკიდების სხვა სისტემისაგან განსხვავებით).

ხელსაწყო (ნახ. 178) შედგება კედელზე ზისტად დამაგრებული ბრჭენისაგან (1), ამ უკანასკნელზე უძრავად ჩამაგრებული მავთულის (2) და ჩარჩოსაგან, რომელიც დამაგრებულია მავთულის ქვედა ბოლოზე (3). ჩარჩოზე შეიძლება დაკვიდოთ საკვლევი დეტალი, მაგალითად ბადრო (4).



ნახ. 178.

სისტემას (დაკიდება-დეტალი) შეიძლება მივიანიჭოთ გრეხითი რხევები. ამ დროს რხევის პერიოდი განისაზღვრება დაგრეხილი მავთულის დრეკადობის ძალებისა და საკვლევი სხეულის ინერციის ძალების ურთიერთქმედებით. თუ სხეული სიმეტრიულია, დალაშქვრის პრინციპის საფუძველზე შეიძლება დავწეროთ შემდეგი განტოლება: $M_e + M_0 = 0$; სადაც M_e მავთულის დრეკადობის ძალების მომენტი; M_0 — ინერციის ძალების მომენტი. სათანადო ჩასმებით და მიღებული განტოლების ამოხსნით დავადგენთ, რომ გრეხითი რხევების T_0 პერიოდი:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{I_0 k} \quad (235)$$

აქედან სხეულის დასადგენი ინერციის მომენტი ექნება:

$$I_0 = \frac{T_0^2 k}{4\pi^2} = \frac{T_0^2}{39,44} k,$$

სადაც k კონსტანტაა, დამოკიდებული მათულის ზომებსა და მასა-
ლაზე, რომლისგანაც იგი დამზადებულია.

k -ს მნიშვნელობა შეიძლება განვსაზღვროთ იმ საგნის დაკიდებით, რომლის ინერციის მომენტი ცნობილია:

$$k = I_0 \frac{39,44}{T_0^2}, \quad I_0 = \frac{k T_0^2}{39,44} \quad (236)$$

პრაქტიკულად მათულზე ყოველთვის ჰკიდია რომელიმე სხეული, რომლის ინერციის მომენტი (I_0) ცნობილია. სწორედ მასზე ჰკიდებენ სხეულს, რომლის ინერციის მომენტის განსაზღვრაა საჭირო.

სისტემის ინერციის მომენტი (დაკიდება + საკვლევი სხეული) უდ-
რის:

$$I_{სსს} = I_0 + I_1 = k \frac{T_{სსს}^2}{39,44} \quad (237)$$

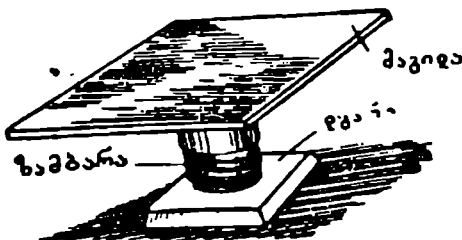
273-ე განტოლების 236-ე განტოლებაზე წევრ-წევრად გაყოფით
დავადგენთ:

$$\frac{I_0 + I_1}{I_0} = \frac{T_{სსს}^2}{T_0^2}.$$

აქედან

$$I_1 = I_0 \left(\frac{T_{სსს}^2}{T_0^2} - 1 \right). \quad (238)$$

გრეხითი რხევების მეთოდი. მოცემული ღერძის მიმართ სხეულის
ინერციის მომენტის განსაზღვრა მის სხვადასხვა მდებარეობაში ყვე-



ნახ. 179.

ლაზე უფრო მოსახერხებელია, თუ ადამიანს მოცემულ პოზი-
ში დაეწვენთ მაგიდის ჰორი-
ზონტალურ სახურავზე და შე-
ეუთავსებთ მაგიდის ღერძის
ღერძსა და იმ ღერძს, რომლის
მიმართაც განისაზღვრება სხე-
ულის ინერციის მომენტი (ნახ.
179).

სისტემაზე მაგიდა-საკვლევი სხეული მოქმედებს ორი ურთიერთ-საწინააღმდეგო მომენტი: სპირალური ზამბარით შექმნილი დრეკადი ძალების $M_{\text{დრეკა}}$ მომენტი და ინერციის ძალებით შექმნილი $M_{\text{ინერცია}}$ მომენტი. მაგიდის ინერციის მომენტი:

$$I_0 = k \frac{T_0^2}{39,44} \quad (239)$$

ადამიანის ინერციის მომენტი:

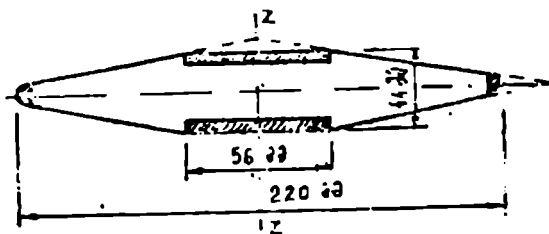
$$I_1 = I_0 \left(\frac{T_{\text{სიტ}}^2}{T_0^2} - 1 \right) \quad (240)$$

მაგალითი XV. 9. განვსაზღვროთ ბურთის ინერციის მომენტი I_z მის დიამეტრზე გამავალი ღერძის გარშემო, თუ ბურთის დამეტრი $2r = 22$ სმ: წონა $Q = 0.450$ კგ.

ამოხსნა: მიგვაჩნია, რომ ბურთის მთელი მასა განლაგებულია ზედაპირზე. სფერული გარსისათვის ინერციის მომენტი (იხ. ცხრ. 21).

$$J_z = \frac{2Mr^2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{0,45}{9,8} (0,11)^2 = 3,7 \cdot 10^{-4} \text{ კგმ}^2.$$

მაგალითი XV. 10. 180-ე ნახაზზე მოცემულია სატყორცნო ბადროს ჭრილი. განვსაზღვროთ Z ღერძის მიმართ ბადროს ინერციის მომენტი. ბადროს ზომები აქმყოფილებს მანაკაბი-სათვის შეჯიბრების წესებს.



ნახ. 180.

ამოხსნა: განვსაზღვროთ ბადროს წონა. ფერსო და ფირფიტე-

ბი გაკეთებულია ფოლადისაგან, $\rho = 7,8$ გ/სმ³; ბადროს ფსკერი მუხისაა, $\rho = 10$ გ/სმ³. ფერსოს კვეთი 1,38 სმ²-ის ტოლია; ფერსოს მოცულობა დაახლოებით უდრის ფერსოს სიგრძეს (როცა მისი დიამეტრია 20,8 სმ), გამრავლებული კვეთზე: $V_{\text{ფ}} = 20,8 \cdot \pi \cdot 1,38 = 91$ სმ³. ფერსოს წონა: $Q_{\text{ფ}} = \rho V_{\text{ფ}} = 7,8 \cdot 91 = 830$ გ (0,83 კგ). ფირფიტების მოცულობა:

$$V_{\text{ფირფიტე}} = 2 \frac{\pi D^2}{4} h = 2 \cdot \frac{3,14(5,60)^2 \cdot 0,4}{4} = 19,4 \text{ სმ}^3,$$

ფირფიტების წონა: $Q_{ფირ} = \rho V_{ფირ} = 7,8 \cdot 19,4 = 151 \text{ გ} = 0,151 \text{ კგ}$.
 ბადროს ხის ნაწილების მოცულობისა და წონის განსაზღვრისათვის გავაგრძელოთ ნახაზზე ბადროს დახრილი ხაზები ჰორიზონტალურ ღერძთან გადაკვეთამდე. მაშინ ბადროს ხის ნაწილი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც კონუსი. მისი ქვედა ფუძის დიამეტრია $d = 27 \text{ სმ}$. კონუსის სიმაღლე $h = 2,7 \text{ სმ}$.

$$V_{კონ} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{h}{3} = \frac{3,14 \cdot (27)^2 \cdot 2,7}{12} = 575 \text{ სმ}^3.$$

ხის ნაწილის მოცულობა შედგება 2 ასეთი კონუსისაგან, ამიტომ

$$2V_{კონ} = 2 \cdot 575 = 1030 \text{ სმ}^3;$$

$\rho = 1,0 \text{ გ/სმ}^3$ შემთხვევაში ხის წონა $Q_{ხე} = \rho \cdot 2V_{კონ} = 1 \cdot 1030 = 1030 \text{ გ}$. ბადროს საერთო წონა:

$$Q_{ბად} = 830 + 151 + 1030 = 2010 \text{ გ}.$$

z ბრუნვის ღერძის მიმართ ბადროს ინერციის მომენტი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ინერციის მომენტების ჯამი: $I_{ფ}$ — ფერსოს ინერციის მომენტი, $2I_{დისკო}$ — დისკოების ინერციის მომენტი.

$I_{ხე}$ — ბადროს ხის ნაწილის ინერციის მომენტი. $I_z = I_{ფ} + I_{დისკო} + I_{ხე}$.

რკინის ფერსოს ინერციის მომენტის განსაზღვრის დროს შეიძლება მივიჩნიოთ, რომ მთელი მისი მასა თავმოყრილია რომელიმე საშუალო დიამეტრის (მოცემულ შემთხვევაში $\varnothing = 10,4 \text{ სმ}$) რგოლში. რგოლის ინერციის მომენტი. $I_z = M_A z^2$.

მოცემულ შემთხვევაში: $M_A = \frac{0,830}{9,8}$; $r = 10,4 \text{ სმ} = 0,104 \text{ მ}$.

$$I_z = \frac{0,83}{9,8} (0,104)^2 = \frac{0,83}{9,8} \cdot 0,0108 = 0,00091 \text{ კგმ}^2 = 9,1 \cdot 10^{-4} \text{ კგმ}^2$$

ხის ნაწილის ინერციის მომენტი:

$$I_{ხე} = 2I_{კონ} = 2 \cdot \frac{3}{10} Mz^2 = 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1,030}{2 \cdot 9,8} (0,135)^2 = 0,00057 \text{ კგმ}^2 = 5,7 \cdot 10^{-4} \text{ კგმ}^2.$$

ლითონის დისკოს ინერციის მომენტი ძალიან მცირეა, ამიტომ მისი სიდიდე შეიძლება უგულებელვყოთ. ამრიგად, გვაქვს $I_z = 0,00091 + 0,00057 = 0,00148 \text{ კგმ}^2 = 14,8 \cdot 10^{-4} \text{ კგმ}^2$.

შენიშვნები: თუ ბადროს ჭარბ მასას თავს მოვეუყრით ფერსოზე, მაშინ მისი ინერციის მომენტი მნიშვნელოვნად მეტი იქნება. ბადროს მასის თავმოყრით მის ღერძთან და მძიმე შენადნობების ალებით ($\rho = 19 \text{კგ/სმ}^3$) შეიძლება I_z შევამციროთ $3 \cdot 10^{-4}$ კგმ²-მდე.

საინტერესოა განვსაზღვროთ კინეტიკური ენერგია, თუ ცნობილია, რომ ბადრო აკეთებს 500 ბრ/წთ-მდე.

$$\omega = \frac{500}{60} \cdot 2\pi = 52.3 \text{ რად/წმ.}$$

$$T_{\text{კინ}} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{0,00148 \cdot 52.3^2}{2} = 2 \text{კგმ.}$$

როგორც ჩანს, ფერსოს და ლითონის კონფიგურაციის შეცვლით შეიძლება ბადროს ინერციის მომენტის შეცვლა ისე, რომ ზომები და წონა შეჯიბრებათა წესების მოთხოვნათა ფარგლებში დარჩეს.

ლიტერატურა

ლი ნ ა წ ი ლ ი

Донской Д. Д. Биомеханика с основами спортивной техники. ФИС, 1971, стр. 81—114.

Петров В. А. Методические указания к биомеханическому анализу спортивной техники. Л., ГДОИФК им. П. Ф. Лесгафта, 1970, стр. 22—50.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. М., «Наука», 1967, стр. 242—472.

Хайкин С. Э. Физические основы механики. М., «Наука», 1971, стр. 122—205, 297—310, 332—459.

შესავალი	3
§ 1. ზოგადი მექანიკის საგანი და მეთოდი	3
§ 2. მექანიკის ძირითადი კანონები	8
§ 3. ძალის ცნება	10
§ 4. სკალარული და ვექტორული სიდიდეები	11

I ნ ა წ ი ლ ი . ს ტ ა ტ ი კ ა

I თ ა ვ ი . სტატიკის შესავალი	13
§ 5. სტატიკის საგანი და აქსიომები	13
§ 6. კაუჩიუმის ბმები და რეაქციები	15
II თ ა ვ ი . კრებადი ძალების ბრტყელი სისტემა	20
§ 7. ერთ წერტილზე მოდებული ორი ძალის შეკრება	20
§ 8. ძალის დაშლა ორ კრებად შემდგენად	21
§ 9. ძალური მრავალკუთხედი	23
§ 10. ვექტორის განსაზღვრა მისი გეგმილებით	25
§ 11. ვექტორთა გეომეტრიული ჯამის გეგმილი ღერძზე	27
§ 12. კრებადი ძალების ბრტყელი სისტემის ტოლქმედის განსაზღვრა	28
§ 13. კრებადი ძალების ბრტყელი სისტემის წონასწორობის პირობები	29
§ 14. კრებადი ძალების ბრტყელი სისტემის წონასწორობაზე ამოცანათა ამოხსნა	30
III თ ა ვ ი . პარალელური ძალები. წყვილძალა და ძალთა მომენტები	35
§ 15. პარალელური ძალების შეკრება. წყვილძალა და მისი მოქმედება სხეულზე	35
§ 16. წყვილძალების შეკრება	37
§ 17. ძალის მომენტი წერტილის მიმართ	38
§ 18. ძალის მომენტი ღერძის მიმართ	40
§ 19. ბერკეტები. ბერკეტის წონასწორობა	41
§ 20. შედგენილი ბერკეტები	42
IV თ ა ვ ი . სიბრტყეზე ნებისმიერად განლაგებულ ძალთა სისტემა	47
§ 21. ძალის დაყვანა წერტილზე	47
§ 22. ძალების ბრტყელი სისტემის დაყვანა მოცემულ წერტილზე	48
§ 23. ძალების ბრტყელი სისტემის წონასწორობის განტოლება	50
§ 24. პარალელური ძალების ბრტყელი სისტემის წონასწორობის განტოლებები	52
§ 25. ნებისმიერი ძალების სივრცითი სისტემის წონასწორობის განტოლებები	53
§ 26. ძალების ბრტყელი სისტემის წონასწორობაზე ამოცანების ამოხსნის თანამიმდევრობა	54
V თ ა ვ ი . ხახუნი	59
§ 27. ხახუნის სახეები	59
§ 28. სრიალის ხახუნი	60
§ 29. ხახუნის კუთხე და კონუსი	60
§ 30. გორვის ხახუნი	66
VI თ ა ვ ი . სხეულის სიმძიმის ცენტრი	68
§ 31. ცნება პარალელური ძალების ცენტრის შესახებ	68
§ 32. მყარი სხეულის სიმძიმის ცენტრი	70
§ 33. სხეულთა სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრა	73
§ 34. ადამიანის სხეულის სიმძიმის ცენტრის შესახებ	77
§ 35. ადამიანის სხეულის სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრა	78
VII თ ა ვ ი . წონასწორობის მდგრადობა	80
§ 36. ცნება სხეულის წონასწორობის მდგრადობის შესახებ	80
§ 37. საყრდენი წერტილის ან ბრუნვის ღერძის მქონე სხეულის წონასწორობის მდგრადობა	81
§ 38. სიბრტყეზე დაყრდნობილი სხეულის წონასწორობის მდგრადობა	82
§ 39. ადამიანის სხეულის წონასწორობის სტატიკური მდგრადობა	84

II ნ ა წ ი ლ ი . კ ი ნ ე მ ა ტ ი ა

VIII	თ ა ე ი . კინემატიკის შესავალი	89
	§ 40. ძირითადი ცნებები	89
	§ 41. წერტილის მოძრაობის განსაზღვრის ბერებები	91
IX	თ ა ე ი . წერტილის კინემატიკა	
	§ 42. წერტილის სიჩქარე	97
	§ 43. წერტილის სიჩქარის განსაზღვრა მართკუთხა კოორდინატებში მისი მოძრაობის განტოლებებით	100
	§ 44. სიჩქარის ცვლილება დროში	109
	§ 45. წერტილის აჩქარება	112
	§ 46. წერტილის აჩქარების განსაზღვრა მრუდწირული მოძრაობის დროს	115
	§ 47. წერტილის კოორდინატული ხერხით მოცემული მოძრაობის აჩქარების განსაზღვრა	123
	§ 48. წერტილის მოძრაობის კურო შემთხვევები	128
	§ 49. წერტილის კინემატიკის კვლევა გრაფიკული დიფერენცირების მეთოდით	133
X	თ ა ე ი . მუარი სხეულის კინემატიკა	137
	§ 50. წინსვლითი მოძრაობა	137
	§ 51. ბრუნვითი მოძრაობა	138
	§ 52. თანაბარი და თანაბარცვლადი ბრუნვა	142
	§ 53. მბრუნავი სხეულის წერტილთა სიჩქარეები და აჩქარებები	144
	§ 54. მუარი სხეულის ბრტყელპარალელური მოძრაობა	148
XI	თ ა ე ი . წერტილის შედგენილი მოძრაობა	151
	§ 55. წერტილის აბსოლუტური, ფარდობითი და წარმტანი მოძრაობები	151
	§ 56. სიჩქარეთა შეკრება შედგენილი მოძრაობის დროს	153
	§ 57. აჩქარებების შეკრება შედგენილი მოძრაობის დროს	154
	ლიტერატურა	161

III ნ ა წ ი ლ ი . დ ი ნ ა მ ი კ ა

XII	თ ა ე ი . დინამიკის შესავალი	162
	§ 58. დინამიკის საგანი და მისი ძირითადი ამოცანები	162
	§ 59. დინამიკის ძირითადი კანონები	163
	§ 60. ერთეულთა სისტემები	167
	§ 61. მექანიკურ სისტემაზე მოქმედი ძალების კლასიფიკაცია	169
	§ 62. მექანიკური ბმების დინამიკური დახასიათება	170
XIII	თ ა ე ი . წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები და მათი ინტეგრება	172
	§ 63. წერტილის სწორხაზოვანი მოძრაობა	172
	§ 64. სხეულის მოძრაობის წინააღმდეგობის გარემოში	178
	§ 65. პირიზონტის მიმართ კუთხით გატყორცნილი სხეულის მოძრაობა	203
XIV	თ ა ე ი . წერტილის მოძრაობის ზოგადი თეორემები	208
	§ 66. ცნება მოძრაობის რაოდენობისა და კინეტიკურ ენერჯიაზე	208
	§ 67. მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის თეორემა	211
	§ 68. მუშაობა	217
	§ 69. პოტენციური და კინეტიკური ენერჯია	220
	§ 70. მატერიალური წერტილის კინეტიკური ენერჯიის თეორემა	221
	§ 71. მატერიალური წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის თეორემა	226
	§ 72. მატერიალური წერტილის ენერჯიისა და მოძრაობის მუდმივობის კანონი	227
XV	თ ა ე ი . სისტემის დინამიკის ელემენტები	228
	§ 73. სისტემის შინაგანი ძალების მთავარი ვექტორი და მთავარი მომენტი	228
	§ 74. სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მუდმივობის კანონი	229
	§ 75. სისტემის კინეტიკური ენერჯიის თეორემა	233

§ 76. მყარი სხეულის კინეტიკური ენერგია სხედასხვა სახით მოძრაობის დროს	234
§ 77. სისტემის მექანიკური ენერგიის მუდმივობის კანონი	239
§ 78. სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის (კინეტიკური მომენტის) მუდმივობის კანონი	240
§ 79. სისტემის მასების ცენტრის მოძრაობის თეორემა	241
§ 80. მატერიალური სისტემის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები	248
§ 81. ღალაშბერის პრინციპი	249
§ 82. შესაძლო გადაადგილებების პრინციპი	252
§ 83. დინამიკის ზოგადი განტოლება	255
§ 84. დინამიკის ძირითადი განტოლება მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობისათვის	257
§ 85. ადამიანის სხეულის ინერციის მომენტის განსაზღვრა	261
ლიტერატურა	273

Петров Валентин Александрович
Гагин Юрий Александрович
МЕХАНИКА СПОРТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ
(На грузинском языке)

ИБ № 794

რედაქტორი ც. შინდაგორიძე, მხატვრული რედაქტორი ე. ქიშშარაძე
ტექნედაქტორი ნ. დოგუზაშვილი, კორექტორი ლ. შვანგირაძე.

გადაეცა წარმოებას 16. 05. 80. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 29. 07. 83. ქალაქის
ზომა 60×90¹/₁₆, საბეჭდი ქაღალდი № 2. ნაბეჭდი თაბახი 17,25. სააღრიცხვო-საგა-
მომცემლო თაბახი 13,13. ტირაჟი 2.000. შეკვ. № 6499.

ფასი 80 კპ.

გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი, მარჯანიშვილის ქ. № 5.
Издательство «Ганатлеба». Тбилиси, ул. Марджанишвили, 5.
1983

საქართველოს სსრ გამომცემლობათა, პოლიგრაფიისა
და წიგნის ვაჭრობის საქმეთა სახელმწიფო კომიტეტის
ქუთაისის პოლიგრაფიული საწარმოო ვაერთიანება
ქ. ქუთაისი, ი. ქავკავაძის პროსპექტი, 33.

Кутанское полиграфическое производственное объединение
Государственного комитета по делам издательства, полиграфии и
книжной торговли Грузинской ССР
г. Кутаиси, пр. И. Чавчавадзе, 33.