გ. ჭილაშვილი

ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

ლექციების კურსი

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი — 1982

512
512,97(049,4)
ჩ 461

ნაშრომი წარმოადგენს მეორე შევსებულ და შესწორებულ გამოცემას. მასში განხილულია ტენზორული აღრიცხვის ყველა საკითხი, რომელთანაც საქმე ექნებათ სტუდენტებს სხვადასხვა დისციპლინის შესწავლისას. ავტორმა გაითვალისწინა ის შენიშვნები და წინადადებები, რომლებიც ამ წიგნის საჯარო განხილვისას გამოითქვა, რის საფუძველზეც ნაშრომს დაემატა ახალი პარაგრაფები, განახლდა საილუსტრაციო მასალა, შეიცვალა ზოგიერთი აღნიშვნა, არსებითად გადამუშავდა რამდენიმე პარაგრაფი.

რედაქტორი გ.ხუციშვილი
რეცენზენტი ჯ.შარიქაძე

Ч $\frac{20402}{М608(06)-82}$

ЧИЛАШВИЛИ ГУРАМ АЛЕКСАНДРОВИЧ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

(курс лекций)
(на грузинском языке)

Издательство Тбилисского университета
Тбилиси 1982

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

" ტენზორული აღრიცხვის ელემენტების " კურსი შეტანილია სავალდებულო დისციპლინად 1974 წელს დამტკიცებულ სასწავლო გეგმაში. თავისი შინაარსით იგი ფიზიკოსებისთვის უცნობი არ იყო, რამდენადაც მისი ნაწილები, როგორც "მათემატიკური დამატება", ისწავლებოდა სხვადასხვა ფიზიკურ დისციპლინებში.

წინამდებარე ლექციების კურსი, რომელიც სასწავლო გეგმის მიხედვით გათვალისწინებულია 18 საათის მოცულობით, ბუნებრივია, არ შეიძლება წარმოადგენდეს ტენზორული აღრიცხვის საფუძვლებს. კურსში განხილულია მხოლოდ ის აუცილებელი საკითხები, რომელთა ცოდნის გარეშე წარმოუდგენელია ისეთ დისციპლინათა შესწავლა, როგორიცაა: მექანიკა, უწყვეტ სხეულთა მექანიკა, ელექტროდინამიკა, ფარდობითობის თეორია და სხვა.

გარკვეული მოსაზრების გამო ტენზორების თვისებები სხვადასხვა განზომილებიან სივრცეში თავიდან დამოუკიდებლად განვიხილეთ, კერძოდ, ჯერ შევისწავლეთ ტენზორების თვისებები სამგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში, შემდეგ – ოთხგანზომილებიან ფსევდოევკლიდურ სივრცეში და ა.შ. გარდა ამისა, ვიგულისხმეთ, რომ სტუდენტებისათვის ვექტორული ალგებრის ელემენტები ცნობილია და მასალის გადმოცემისას თანმიმდევრობა მაინცა და მაინც არ დავიცავით.

მასალის გადმოცემისას არც სისრულეს ვესწრაფოდით და არც მათემატიკური სიმკაცრე წარმოადგენდა ჩვენს მიზანს, ამიტომ იმ სტუდენტებისათვის, რომლებიც არ დაკმაყოფილდებიან წინამდებარე ლექციების კურსში განხილულ საკითხთა მოცულობა, წიგნს დართული აქვს ლიტერატურის სია.

დასასრულს, მადლობას მოვახსენებ პროფ. გ.ხუციშვილს,

პროფ. დ.ვაშაკიძეს, პროფ. თ.კოპალეიშვილს, დოც. რ.კორძაძეს, დოც. ი.მაჩაბელს საყურადღებო შენიშვნებისათვის.

მადლობას მოვახსენებ აგრეთვე პროფესორებს: რ.გამყრელიძეს, დ.კურდღელაძეს, ლ.იბოლაშვილს, დოცენტებს- ჯ.შარიქაძეს, თ.ებანოიძეს და ასისტენტებს ი.ლომიძესა და ო.მესხელიშვილს, რომელთა შენიშვნები გათვალისწინე ლექციების კურსის მეორე გამოცემაში.

§ 1. ვექტორის სივრცე

1. ვექტორის სივრცის ცნება. სკალარული სიდიდეების /ჩვეულებრივი რიცხვების/ გარდა ფიზიკაში გამოიყენება შედა-რებით უფრო რთული ბუნების მათემატიკური ცნებებიც, როგორიცაა: ვექტორები, სპინორები, ტენზორები და სხვა.

ფიზიკა თავისი განვითარების სხვადასხვა ეტაპზე სხვადა-სხვა მათემატიკურ ცნებებს იყენებდა. სათანადოდ ვითარდებოდა მათემატიკის შესაბამისი დარგებიც. აღსანიშნავია, რომ ზოგიერ-თი მათგანის შექმნა და განვითარება ფიზიკის მოთხოვნებმა გა-ნაპირობა. ასე მაგალითად, მექანიკის ჩამოყალიბებამ გამოიწვია დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის წარმოშობა, კვანტუ-რმა მექანიკამ-ოპერატორული და მატრიცული აღრიცხვის განვითა-რება, ფარდობითობის თეორიამ კი ფართოდ გამოიყენა და დახვეწა ტენზორული აღრიცხვის მეთოდები.

წინამდებარე კურსში ჩვენ გვაქვს ერთობ კონკრეტული მი-ზანი. კერძოდ, შევისწავლოთ ვექტორული და ტენზორული აღრიცხვის ძირითად ელემენტებს.

რადგან მატერიალური წერტილი მოძრაობს სივრცეში, ამიტომ ამ მოძრაობის დამახასიათებელი სიდიდეებიც ასევე სივრცეში გა-ნიხილება. ამის გამო, ტენზორული აღრიცხვის შესწავლისას, უპირ-ველეს ყოვლისა, უნდა დავადგინოთ სივრცის თვისებები. რეალური სივრცე, რომელშიაც სხეული მოძრაობს, ან მასთან დაკავშირებულ სხვა მოვლენებს ვაკვირდებით და რომელშიაც ჩვენ ვცხოვრობთ, სამგანზომილებიანია.[1] უხეშად რომ ვთქვათ, ფიზიკური სივრცე არის ის ჭურჭელი, რომელშიაც მოთავსებულია სამყაროს ყველა სხეული და რომელთა ურთიერთქმედების შედეგად ადგილი აქვს

---

1 ხშირად, შემოკლების მიზნით, "სამგანზომილებიანი სივრცის" მაგიერ ვიხმართ "სამსივრცეს", "ოთხგანზომილებიანი სივრცის" ნაცვლად- " ოთხსივრცეს " და ა.შ.

სხვადასხვა მოვლენას. ამიტომ ნებისმიერი რეალური მოვლენა სამგანზომილებიან ფიზიკურ სივრცეში მიმდინარეობს. ფილოსოფიური თვალსაზრისით კი სივრცე არის მატერიის არსებობის უნივერსალური ფორმა.

ფიზიკური მოვლენების აღსაწერად საჭიროა შემოვიტანოთ სივრცის ისეთი მათემატიკური მოდელი /მათემატიკური სივრცე/, რომელიც რაც შეიძლება ზუსტად ასახავს ჩვენი ფიზიკური სივრცის თვისებებს. "მათემატიკური სივრცე" მოწყვეტილია მატერიას, რადგან იგი განიხილება როგორც გარკვეული ობიექტების /"წერტილების"/ სიმრავლე, რომელთაც არავითარი ფიზიკური თვისებები არ გააჩნიათ. ბუნებრივია "მათემატიკურ სივრცეს" მივაწეროთ ისეთი ნიშნები, რომლებიც რაც შეიძლება ადეკვატურად გამოხატავენ ფიზიკური სივრცის გეომეტრიულ თვისებებს. "მათემატიკური სივრცე", რამდენადაც იგი განყენებულია და მოწყვეტილია მატერიას, არასრულია, ამიტომ საკითხი, თუ რომელი მათემატიკური სივრცე უფრო ზუსტად აღწერს რეალური ფიზიკური სივრცის თვისებებს, ექსპერიმენტმა უნდა გადაწყვიტოს.[1]

როგორც ირკვევა, ევკლიდეს სივრცე საკმაოდ კარგად აღწერს სამგანზომილებიანი ფიზიკური სივრცის /ჩვენი სივრცის/ თვისებებს. ამიტომ ფიზიკაში ძირითადად ამ სივრცის განხილვით ისაზღვრებიან, თუმცა, როგორც დადგინდა, ფარდობითობის ზოგად თეორიაში,

---

1 თანამედროვე მათემატიკაში სივრცის ცნება გასცილდა ჩვენი ფიზიკური სივრცის მათემატიკური წარმოდგენის ფარგლებს. დღეს სივრცის ცნება წარმოადგენს მათემატიკის განვითარების ფუნდამენტურ ცნებას; ამასთან, სივრცის ქვეშ ზოგადად ესმით გარკვეული ობიექტების /"წერტილების"/ სიმრავლე, რომლებზედაც დადებულია გარკვეული პირობები. ეს ობიექტები შეიძლება იყოს მრავალნაირი, მაგალითად, ვექტორები, ფერთა სიმრავლე, მექანიკური სისტემის მდგომარეობათა სიმრავლე და სხვა.

თუმცა ჩვენი სივრცე არ წარმოადგენს ევკლიდურს.[1] რეალური სივრცე, მკაცრად რომ ვიმსჯელოთ, ემორჩილება რიმანის გეომეტრიას, რომელიც ევკლიდის სივრცის გარკვეული განზოგადებაა.

სანამ ევკლიდის სივრცეს განვმარტავდეთ, მოვახდინოთ სივრცის არითმეტიზაცია და სივრცის ყოველ წერტილს შევუსაბამოთ გარკვეული რიცხვების ერთობლიობა. კერძოდ, მაგალითად, სამგანზომილებიანი სივრცის ყოველ წერტილს დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში შეგვიძლია შევუსაბამოთ სამი რიცხვი, რომელთაც წერტილის კოორდინატებს უწოდებენ.

როგორც ფიზიკაში, ისე მათემატიკაში, ნაცვლად სამგანზომილებიანი სივრცისა, ხშირად იყენებენ m განზომილებიან $/m>3/$ სივრცეებს, რომლის წერტილთა მდებარეობები განისაზღვრება m რაოდენობის კოორდინატებით. ევკლიდის სივრცის განმარტებას მოვიტანთ სწორედ ამ ზოგად შემთხვევაში.

ვთქვათ, m განზომილებიან სივრცეში გვაქვს ორი წერტილი $X(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_m)$ და $Y(y_1,y_2\ldots\ldots y_m)$, რომელთა შორის მანძილი განვმარტოთ შემდეგი ფორმულით:

$$\rho(X,Y)=\left\{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_m-y_m)^2\right\}^{1/2} \qquad /1.1/$$

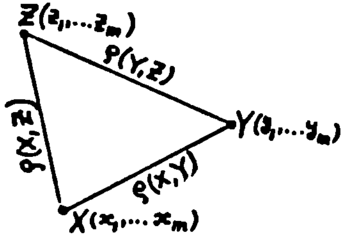
ცხადია, რომ $\rho(X,Y)$ -ს ექნება შემდეგი თვისებები:
1/ $\rho(X,Y)\geq 0$, ამასთან, $\rho(X,Y)=0$ მხოლოდ მაშინ, როცა X და Y წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, 2/ $\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$; ეს არის ე.წ. სიმეტრიის თვისება და 3/ თუ $Z(z_1,z_2\cdots z_m)$ სივრცის მესამე წერტილია, მაშინ ადგილი აქვს სამკუთხედის პირობას:

---

1 პირველად, ევკლიდურისაგან განსხვავებული გეომეტრია შემოტანილი იყო ნ.ლობაჩევსკის მიერ 1826 წელს.

$$\rho(X,Y) \leq \rho(X,Z) + \rho(Z,Y). \qquad /1,2/$$

სივრცეს, რომელშიაც განსაზღვრულია $\rho(X,Y)$ ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებები, უწოდებენ ევკლიდის m განზომილებიან სივრცეს და მას E_m-ით აღნიშნავენ.] ევკლიდის სივრცე წარმოადგენს ე.წ. მეტრიკული სივრცის კერძო შემთხვევას. ზოგადად მეტრიკულ სივრცეს აქვს ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებები, ოღონდ აუცილებელი არ არის $\rho(X,Y)$-ს ჰქონდეს მაინცა და მაინც /1,1/ სახე.



ნახ. 1.

ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ევკლიდის E_m სივრცის E_n ქვესივრცე, სადაც $n<m$. მაგალითად, ჩვენი სივრცის /E_3-სივრცე/ ქვესივრცეები იქნება სიბრტყე / E_2 / და წრფე / E_1 /. აღსანიშნავია, რომ ყველა ეს სივრცე "თვალით დასანახი" სივრცეებია, მაშინ, როცა უფრო მაღალი განზომილების სივრცეები, დაწყებული E_4-დან, მხოლოდ "წარმოდგენით" არსებობენ და მათი "აღქმა" შეუძლებელია.

[ევკლიდის სივრცის თვისებების განსაზღვრა ხელსაყრელი შეიძლება აღმოჩნდეს შემდეგი ფორმულით:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_m^2, \qquad /1,3/$$

რომელიც გამოხატავს მანძილის კვადრატს ორ უსასრულოდ მცირედ დაშორებულ წერტილს შორის, რომელთა კოორდინატებია $/x_1, x_2 \dots x_m/$ და $/x_1+dx_1, x_2+dx_2, \dots, x_m+dx_m/$.]

შემდგომში ამ გამოსახულების განზოგადება დაგვჭირდება სხვა შესაძლო სივრცეების განხილვისათვის, ამიტომ ხელსაყრელი იქნება იგი სხვა სახითაც გადავწეროთ. ამისათვის წინასწარ

შემოვიღოთ კრონეკერის δ_{ik} სიმბოლო, რომელიც შემდეგნაირად არის განმარტებული:

$$\delta_{ik}=1, \quad \text{როცა} \quad i=k \qquad /1,4/$$
$$\delta_{ik}=0, \quad \text{როცა} \quad i\neq k.$$

ამ სიმბოლოს შესანიშნავი თვისებები გააჩნია, რომელთა შორის აღსანიშნავია ფილტრაციის თვისება. განვიხილოთ შემდეგი ჯამი:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i\delta_{ik}=A_1\delta_{1k}+A_2\delta_{2k}+\dots+A_m\delta_{mk}. \qquad /1,5/$$

როცა $k=1$, მაშინ მარჯვენა $\delta_{11}=1$, ყველა დანარჩენი სიმბოლოები კი /1,4/ განმარტებით, ნულის ტოლია; როცა $k=2$, მაშინ ნულისაგან განსხვავდება მხოლოდ მეორე წევრი, რომელიც A_2-ის ტოლი იქნება და ა.შ. ამგვარად, აღნიშნული ჯამი უდრის

$$\sum_{i=1}^{m} A_i\delta_{ik}=A_k; \qquad /1,6/$$

მაშასადამე, δ_{ik} სიმბოლო "აფილტრავს" ჯამს და მასში დატოვებს მხოლოდ იმ წევრს, რომლისთვისაც $i=k$.

ცხადია, რომ $\delta_{ik}=\delta_{ki}$, ე.ი. კრონეკერის სიმბოლო სიმეტრიულია ინდექსების გადასმის მიმართ.

ახლა დავუბრუნდეთ ჩვენს ამოცანას. რადგან ფილტრაციის თვისებით dx_i გამოიხატება შემდეგი ჯამით: $dx_i=\sum_k \delta_{ik}dx_k$, ამიტომ /1,3/ სიგრძის ელემენტისათვის შეგვიძლია დავწეროთ ფორმულა

$$ds^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\delta_{ik}\,dx_i\,dx_k. \qquad /1,7/$$

მივიღეთ კვადრატული ფორმა, რომელსაც δ_{ik} სიმბოლოს ფილტრაციის თვისებით ფაქტიურად აქვს კანონიკური სახე /შეიცავს მხოლოდ dx_i^2-ებს და არ შეიცავს $dx_i\,dx_k\ (i\neq k)$ ტიპის ნამრავლებს/

როცა მოცემული გვაქვს /1,7/ ფორმულით განსაზღვრული სიგრძის ელემენტი, მაშინ ამბობენ, რომ განსაზღვრულია ევკლიდის სივრცის მეტრიკა. უბრალოდ რომ ვთქვათ, ევკლიდის სივრცეს ისეთი მეტრიკული თვისებები აქვს, რომლის მიხედვით ორ წერტილს

წირის" მანძილი წარმოადგენს სხვა სახეს და, მაშასადამე, იგი პითაგორას თეორემით განისაზღვრება.

ზოგად შემთხვევაში, ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ისეთი სივრცეები, რომელთა მეტრიკა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$ds^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} g_{ik}(x_1,x_2,\dots,x_m)\,dx_i\,dx_k. \qquad /1,8/$$

როგორც ვთქვით, ds წარმოადგენს მანძილს ორ უსასრულოდ ახლოს მდებარე წერტილს შორის; როცა ds^2 დადებითად განსაზღვრული, ხოლო $g_{ik}=g_{ki}$-ს, მაშინ /1,8/ მეტრიკით განსაზღვრულ სივრცეს რიმანის სივრცეს უწოდებენ. ამასთან, იგულისხმება, რომ /1,8/ კვადრატულ ფორმას ერთდროულად მთელს სივრცეში არ შეიძლება ქონდეს კანონიკური სახე. g_{ik}-ს მეტრიკულ ტენზორს უწოდებენ.

კერძო შემთხვევაში, როცა მეტრიკული ტენზორი $g_{ik}=const=\delta_{ik}$, მაშინ რიმანის სივრცის განტოლება დაემთხვევა ევკლიდის სივრცის განტოლებას. ამგვარად, /1,7/ განტოლების თანახმად, ევკლიდის სივრცის მეტრიკული ტენზორი ემთხვევა კრონეკერის სიმბოლოს, ე.ი. გამოსახულებას:

$$\delta=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}. \qquad /1,9/$$

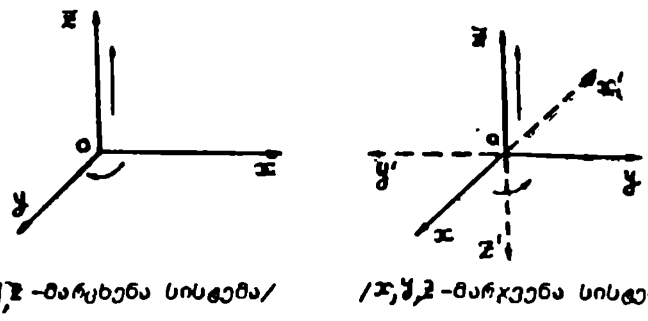
2. კოორდინატთა სისტემა. სივრცეში მატერიალური წერტილის მოძრაობის აღსაწერად აუცილებელია კოორდინატთა სისტემის /ათვლის სისტემის/ შემოღება. ბუნებრივია, ვექტორებისა და ტენზორების განხილვა შეუძლებელია კოორდინატთა სისტემის გარეშე, მაგრამ, როგორც ფიზიკაში ათვლის სისტემის გარეშე მოძრაობის აღწერა შეუძლებელია, ამდენად ტენზორები კოორდინატთა სისტემებთან შეფარდებით უნდა განვიხილოთ. ამიტომ ტენ-

მყარი სხეულის ელემენტებს შეესაბამება გარკვეული კოორდინატთა სისტემებში. კოორდინატთა სისტემის ღერძებად შეგვიძლია ავირჩიოთ ნებისმიერი წირები. ევკლიდის სივრცეში ყველაზე მარტივი სისტემა, რომელიც ძალიან ხშირად გამოიყენება, არის ე.წ. დეკარტის სწორხაზოვანი, მართკუთხა სისტემა. E_3 სივრცეში ამ სისტემას ადგენს ერთ წერტილში /რომელსაც სათავე ეწოდება/ გადაკვეთილი სამი ურთიერთმართობი წრფე, რომლებიც ღერძებს ეწოდებენ. ღერძებს, როგორც წესი, x, y, z -ით აღნიშნავენ, სათავეს კი O-თი. ამ ღერძების მიმართულებანი შეგვიძლია დავახასიათოთ სამი ორტით $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, რომლებსაც რეპერები ეწოდებათ. ნაცვლად $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -სი ჩვენ ხშირად ვისარგებლებთ $\vec{i}_\nu$ აღნიშვნით, სადაც $\nu = 1,2,3$ და $\vec{i}_1 = \vec{i}$, $\vec{i}_2 = \vec{j}$, ხოლო $\vec{i}_3 = \vec{k}$. მაშინ ორტოგონალობის შეგვიძლია დავწეროთ ორთონორმირების შემდეგი პირობა:

$$(\vec{i}_\nu, \vec{i}_\mu) = \delta_{\nu\mu}. \qquad /1,10/$$

სამსივრცეში ერთმანეთისაგან უნდა განვასხვავოთ ე.წ. მარცხენა და მარჯვენა სისტემები.

თუ მარცხენა ბურღის მიმართულება ემთხვევა x-ღერძიდან y ღერძისაკენ უმოკლესი გზით მობრუნებას, მაშინ მარცხენა კოორდინატთა სისტემაში z ღერძი მიმართული უნდა იყოს ბურღის გადაადგილების მიმართულებით. ანალოგიურად, მარჯვენა კოორდინატთა



/x,y,z - მარცხენა სისტემა/ /x,y,z - მარჯვენა სისტემა/

ნახ. 2

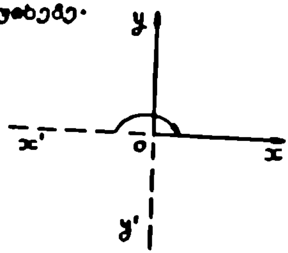
სისტემა შეგვიძლია დავუკავშიროთ მარჯვენა ბურღს. ამასთან,

კოორდინატთა ერთი სისტემა მეორეში გადადის ღერძების არე-კლით სათავის მიმართ, ან ინვერსიის ოპერაციით.

აღსანიშნავია, რომ მარცხენა და მარჯვენა სისტემების შე-თავსება მობრუნებით, სივრციდან გამოსვლის გარეშე, შეუძლებელია. მაგალითად, ნებისმიერი განზომილების კოორდინატთა სისტემის კე-ნტი რაოდენობის ღერძების არეკლით მიიღება სისტემა, რომლის შეთავსება ძველთან მობრუნებით, სივრციდან გამოსვლის გარეშე შეუძლებელია. ასე მაგალითად,/ნახ.3 /, E_1 სივრცეში გვექნება კოორდინატთა სისტემა ერთი Ox-ღერძით. არეკლით მივიღებთ Ox' სისტემას, რომელსაც მობრუნებით ვერ დავამთხვევთ Ox-ს.

ნახ. 3.

მობრუნებისათვის გვჭირდება E_2 სივრ-ცეში /სიბრტყეზე / გამოსვლა. როცა გვაქვს კოორდინატთა სისტემა E_2 სივრ-ცეში /სიბრტყეზე/, მაშინ /ნახ.4 /, ერთ ღერძის არეკლით მივიღებთ ახალ $Ox'y'$ სისტემას, რომელიც ძველ Oxy სისტემას დაემთხვევა სათავის ირგვლივ მობრუნებით π კუთხეზე.



ნახ. 4.

მაგრამ, საკმარისია არეკლით Oxy სისტემის ერთი რომელიმე ღერძი, რომ ახალი სისტემა E_2 სი-ვრციდან გამოუსვლელად, მობრუნე-ბით, ძველზე აღარ დაიყვანოს.

დეკარტის სამგანზომილებიან მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში წერტილის რადიუს-ვექტორი გა-ნისაზღვრება გამოსახულებით:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \qquad /1,11/$$

ან

$$\vec{r} = \sum_{\nu=1}^{3} \vec{i}_\nu x_\nu, \qquad /1,12/$$

სადაც შემოვიღეთ აღნიშვნები $x = x_1, y = x_2$, და $z = x_3$.

ცხადია, რომ რადიუს-ვექტორის კვადრატისათვის მივიღებთ:

$$r^2=\sum_{\nu=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3}(\vec{i}_\nu,\vec{i}_\mu)x_\nu x_\mu = \sum_{\nu}\sum_{\mu}\delta_{\nu\mu}x_\nu x_\mu=\sum_{\nu=1}^{3}x_\nu^2, \qquad /1,13/$$

საიდანაც რადიუს-ვექტორის სიგრძისათვის გვექნება გამოსახულება

$$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}. \qquad /1,14/$$

ამ ფორმულებით შემდეგში ხშირად ვისარგებლებთ.

§ 2. მრუდწირული კოორდინატები

1. ლამეს პარამეტრები. ევკლიდის სივრცეში აუცილებელი არ არის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატების შემოღება. ამ სივრცეში ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ირიბკუთხა სისტემებიც და, ზოგადად შეგვიძლია შემოვიტანოთ, ნებისმიერი მრუდწირული კოორდინატებიც. სხვადასხვა ტიპის ამოცანების ამოხსნისას ხშირად ხელსაყრელია არა დეკარტის მართკუთხა კოორდინატების შემოღება, არამედ მრუდწირულისა, იმ სიმეტრიის შესაბამისად, რომელიც განსახილველ ამოცანას გააჩნია. კოორდინატების შერჩევაზე დამოკიდებულია ამოცანის ამოხსნის სირთულე. ზოგი ამოცანა ერთი ტიპის კოორდინატებში ადვილად ამოიხსნება, ზოგიერთში კი - რთულად.

რიმანის გეომეტრიის განხილვის დროს გამოვიყვანთ ზოგად თანაფარდობებს, რომლებიც ერთიდან მეორე ნებისმიერ კოორდინატებზე გადასვლის საშუალებას მოგვცემენ; მაგრამ საჭიროდ მიგვაჩნია ამ პარაგრაფში მოკლედ განვიხილოთ მრუდწირული კოორდინატები, რამდენადაც მკითხველს, რომელიც არ აპირებს ფარდობითობის ზოგადი თეორიის შესწავლას, შეუძლია რიმანის გეომეტრიის ელემენტებს საერთოდ არ გაეცნოს.

ჩვენი მიზანია იმ ზოგადი ფორმულების გამოყვანა, რომლე-

ზოგ წერტილის დეკარტის / x, y, z / კოორდინატებს აკავშირებენ ნებისმიერ მრუდწირულ კოორდინატებთან. შემდგომში, წერის გამარტივების მიზნით, დეკარტის x, y, z კოორდინატებს აღვნიშნავთ x_1, x_2, x_3-ით, ან შემოკლებით x_i-ით, სადაც $i = 1,2,3$.

შევიყვანოთ მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემა. წერტილის მრუდწირული კოორდინატები აღვნიშნოთ q_i-თი, სადაც $i=1,2,3$. ვიგულისხმოთ, რომ წერტილის დეკარტის კოორდინატებსა და მრუდწირულ კოორდინატებს შორის გვაქვს ცალსახა კავშირი:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \qquad (i=1,2,3) \qquad /2,1/$$

და შებრუნებით

$$q_i = q_i(x_1, x_2, x_3). \qquad /2,2/$$

იმისათვის, რომ /2,1/ ფორმულებიდან შესაძლებელი იყოს /2,2/ ფორმულებზე გადასვლა, როგორც ცნობილია, აუცილებელი და საკმარისია შესაბამისი იაკობიანი ნულის ტოლი არ იყოს, ე.ი.

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} \neq 0. \qquad /2,2'/$$

ამასთან, x_i და q_i კოორდინატების ურთიერთცალსახა კავშირის არსებობის მიზნით ხშირად საჭირო ხდება q_i კოორდინატების ცვლილების არის გარკვეული შეზღუდვა.

ზედაპირებს, რომლებიც დეკარტის მართკუთხა სისტემაში განისაზღვრება ფორმულებით:

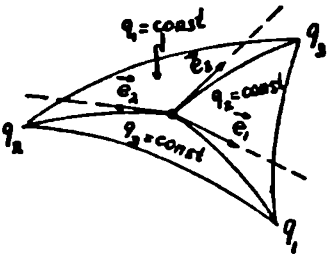
$$q_1(x_1,x_2,x_3)=const, \quad q_2(x_1,x_2,x_3)=const, \quad q_3(x_1,x_2,x_3)=const \qquad /2,3/$$

უწოდებენ საკოორდინატო ზედაპირებს, ხოლო ყოველი ორი საკოორდინატო ზედაპირის გადაკვეთის წირს – საკოორდინატო წირს.[1] საკოორდინატო წირების გადაკვეთის წერტილში გავლებული მხები განსაზღვრავს საკოორდინატო ღერძებს /ნახ.5/ დეკარტის სი-

---

1 იაკობიანის ნულისაგან განსხვავებულობის პირობა განსაზღვრავს იმ ფაქტს, რომ /2,3/ ზედაპირები მხოლოდ ერთ წერტილში იკვეთებიან.

სფეროსაგან განსხვავებით, ამ ღერძებს სხვადასხვა წერტილში სხვადასხვა მიმართულება ექნება.



ნახ.5

ვიპოვოთ ფორმულები, რომლებიც აკავშირებენ წერტილის მრუდწირულ და დეკარტის კოორდინატებს. ამ მიზნით ვიპოვოთ მანძილი ორ უსასრულოდ მცირედ დაშორებულ $m(x_1, x_2, x_3)$ და $m(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$ წერტილებს შორის. ეს მანძილი ტოლი იქნება გამოსახულებით

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} dx_i^2. \qquad /2,4/$$

ახლა ვიპოვოთ dx_i. /2,1/-დან ცხადია, რომ

$$dx_i = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \qquad /2,5/$$

ეს გამოსახულება შევიტანოთ /2,4/-ში. მივიღებთ

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \sum_{\beta} \frac{\partial x_i}{\partial q_\beta} dq_\beta = \qquad /2,6/$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} dq_\alpha dq_\beta \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_\beta} \right).$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$g_{\alpha\beta}(q_1, q_2, q_3) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial q_\beta} \right); \qquad /2,7/$$

შედეგად /2,6/ ასე ჩაიწერება:

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=1}^{3} g_{\alpha\beta}(q_1, q_2, q_3)\, dq_\alpha dq_\beta \qquad /2,8/$$

მრუდე კვადრატული ფორმა, რომელსაც ზოგად შემთხვევაში, არ ექნება კანონიკური სახე.

შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$g_{\alpha\beta}=h^2_{\alpha\alpha}, \quad \text{როცა} \quad \alpha=\beta$$
$$g_{\alpha\beta}=Q_{\alpha\beta}, \quad \text{როცა} \quad \alpha\neq\beta. \qquad (2,9)$$

$h_{\alpha\alpha}$ და $Q_{\alpha\beta}$ ლამეს პარამეტრებს უწოდებენ. ამგვარად, ლამეს პარამეტრებში ელემენტარული სიგრძის კვადრატისათვის გვექნება:

$$ds^2=\sum_{\alpha=1}^{3}h^2_{\alpha\alpha}dq^2_\alpha+\sum_{\alpha\neq\beta=1}^{3}Q_{\alpha\beta}dq_\alpha dq_\beta, \qquad (2,10)$$

სადაც

$$h^2_{\alpha\alpha}=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\right)^2=\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial x_3}{\partial q_\alpha}\right)^2 \qquad (2,11)$$

და

$$Q_{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}\right). \quad (\alpha\neq\beta) \qquad (2,12)$$

მნიშვნელოვანია კავშირის დამყარება მრუდწირული ღერძების $\vec{e}_\alpha$ ორტებსა და დეკარტის მართკუთხა სისტემის $\vec{i}_\alpha$ ორტებს შორის. ამ მიზნით, წერტილის მდებარეობა მრუდწირულ სისტემაში დავახასიათოთ $\vec{r}$ რადიუსვექტორით, რომელიც ფუნქცია იქნება q_1, q_2, q_3 მრუდწირული კოორდინატებისა, ე.ი. $\vec{r}=\vec{r}(q_1,q_2,q_3)$. ვიპოვოთ $\vec{r}$ -ის წარმოებული q_α ცვლადით, ე.ი. $\vec{R}_\alpha=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}$ სიდიდე. რადგან დეკარტის კოორდინატებში $\vec{r}=\sum_\beta \vec{i}_\beta x_\beta$, ამიტომ

$$\vec{R}_\alpha=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}=\sum_{\beta=1}^{3}\vec{i}_\beta\frac{\partial x_\beta}{\partial q_\alpha}. \qquad (2,13)$$

ეს ვექტორი მიმართულია α -ური საკოორდინატო წირის მხებად არგუმენტის ზრდის მიმართულებით. მაშასადამე, $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3$ ვექტორები საკოორდინატო წირებს ეხებიან M -წერტილში (ნახ.6), ამიტომ ეს ვექტორები ყოველ წერტილში ქმნიან არაკომპლანარულ

ვექტორია სისტემას, რომელსაც / q_1, q_2, q_3 / კოორდინატთა სისტემის ბაზისს უწოდებენ. ცხადია, რომ ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლი მოგვცემს:

$$(\vec R_\alpha,\vec R_\beta)=\sum_{\mu,\nu}(\vec i_\mu,\vec i_\nu)\frac{\partial x_\mu}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_\beta}=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial q_\beta}\right), \qquad (2,14)$$

საიდანაც, თუ გავიხსენებთ /2,7/ აღნიშვნას, შეგვიძლია დავწეროთ :

$$g_{\alpha\beta}=(\vec R_\alpha,\vec R_\beta)=\left(\frac{\partial\vec r}{\partial q_\alpha}\frac{\partial\vec r}{\partial q_\beta}\right). \qquad (2,15)$$

მაშასადამე, R_α ვექტორის სიგრძე ტოლი იქნება

$$\vec R_\alpha^{\,2}=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\right)^2=h_{\alpha\alpha}^2, \qquad (2,16)$$

ე.ი. $R_\alpha=h_{\alpha\alpha}$. ახლა, თუ /2,13/ ვექტორს გავყოფთ R_α სიდიდეზე, მივიღებთ q_α მრუდწირული ღერძის ორტს $\vec e_\alpha=\vec R_\alpha/R_\alpha$, ან

$$\vec e_\alpha=\frac{1}{h_{\alpha\alpha}}\frac{\partial\vec r}{\partial q_\alpha}. \qquad (2,17)$$

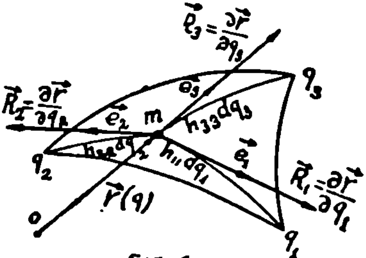
გაშლილი სახით მრუდწირული კოორდინატთა სისტემის $\vec e_\alpha$ ორტებსა და დეკარტის სისტემის $\vec i_\alpha$ ორტებს შორის გვექნება შემდეგი კავშირი:

$$\vec e_\alpha=\frac{1}{h_{\alpha\alpha}}\sum_{\beta=1}^{3}\vec i_\beta\frac{\partial x_\beta}{\partial q_\alpha}. \qquad (2,18)$$

აღსანიშნავია, რომ მრუდწირული $\vec e_\alpha$ ორტების დეკარტის მდგენელები წერტილიდან წერტილში გადასვლისას იცვლება.

ახლა ვიპოვოთ კუთხე საკოორდინატო წირებს შორის. ამისათვის გამოვითვალოთ $(\vec e_\alpha,\vec e_\beta)$ სკალარული ნამრავლი. /2,18 / ფორმულის თანახმად:

$$(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta)=\frac{1}{h_{\alpha\alpha}h_{\beta\beta}}\sum_{j,k}(\vec{i}_j,\vec{i}_k)\frac{\partial x_j}{\partial q_\alpha}\frac{\partial x_k}{\partial q_\beta}; \qquad (2,19)$$



ნახ. 6.

თუ გამოვიყენებთ $\vec{i}_j$ ორტების თვისებას $(\vec{i}_j,\vec{i}_k)=\delta_{jk}$ და ფილტრაციას ჩავატარებთ δ_{jk} -თი, საბოლოოდ გვექნება

$$(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta)=\frac{(\vec{R}_\alpha,\vec{R}_\beta)}{h_{\alpha\alpha}h_{\beta\beta}}=\frac{g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\sqrt{g_{\beta\beta}}} \qquad (2,20)$$

მაშასადამე, ორტებს შორის კუთხის კოსინუსი განისაზღვრება ფორმულით:

$$\cos(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta)=\frac{g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\sqrt{g_{\beta\beta}}}. \qquad (2,21)$$

როცა $g_{\alpha\beta}\equiv Q_{\alpha\beta}=0$ $(\alpha\neq\beta)$, მაშინ $(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta)=0$ და $\vec{e}_\alpha$ ორტები ურთიერთმართობია. ასეთ შემთხვევაში მრუდწირულ კოორდინატებს ორთოგონალური ეწოდება. ამგვარად, მრუდწირული კოორდინატების ორთოგონალობისათვის საჭიროა /2,12/ ტოლობით განსაზღვრული $Q_{\alpha\beta}$ სიდიდე იყოს ნულის ტოლი. თუ $\alpha=\beta$, მაშინ /2,16/-ის გათვალისწინებით /2,20/ მოგვცემს $(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\alpha)=\vec{e}_\alpha^{\,2}=1$ ამიტომ მრუდწირული ორთოგონალური კოორდინატების შემთხვევაში[1] ორტები აკმაყოფილებენ ორთონორმირების შემდეგ პირობას:

$$(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta)=\delta_{\alpha\beta} \qquad (2,22)$$

ვიპოვოთ კუთხე, რომელსაც ადგენს მრუდწირული ღერძის ორტი დეკარტის მართკუთხა სისტემის ღერძებთან. ამ კუთხის კოსინუსი

---

1 მრუდწირული სისტემები შეიძლება იყოს როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა. თუ $\vec{e}_\alpha$ ორტები ყოველ წერტილში ადგენენ სამეულს, მაშინ მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემას მარცხენა სისტემა ეწოდება.

ტოლი იქნება $(\vec{e}_\alpha, \vec{i}_\beta)$ სკალარული ნამრავლისა. რადგან $(\vec{i}_\alpha, \vec{i}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, ამიტომ /2,18/ გამოსახულების $\vec{i}_\beta$ ორტზე გამრავლების შედეგად მივიღებთ:

$$\cos(\vec{e}_\alpha, \vec{i}_\beta) = \frac{1}{h_{\alpha\alpha}} \frac{\partial x_\beta}{\partial q_\alpha}. \qquad /2,23/$$

ფიზიკურ ამოცანებში, როგორც წესი, არაორთოგონალურ კოორდინატებს არ იხილავენ, რადგან თითქმის არ არსებობს ამოცანა, რომლის ზუსტი გადაწყვეტა შესაძლებელი იყოს ამ კოორდინატებში; ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა კი შესაძლებელია დეკარტის კოორდინატებშიც.

მრუდწირულ ორთოგონალურ სისტემაში, /2,10/ ფორმულის თანახმად, სიგრძის ელემენტის კვადრატი უდრის

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} h_{\alpha\alpha}^2 dq_\alpha^2 = h_{11}^2 dq_1^2 + h_{22}^2 dq_2^2 + h_{33}^2 dq_3^2. \qquad /2,24/$$

წირის ელემენტი α-ური საკოორდინატო წირის გასწვრივ ტოლი იქნება:

$$dS_\alpha = h_{\alpha\alpha}\, dq_\alpha, \; (\alpha = 1, 2, 3) \qquad /2,25/$$

ან გაშლილი სახით:

$$dS_1 = h_{11} dq_1, \; dS_2 = h_{22} dq_2, \; dS_3 = h_{33} dq_3. \qquad /2,26/$$

ცხადია, რომ ზედაპირის ელემენტი უნდა განვსაზღვროთ ფორმულით[1]

$$dS_{\alpha\beta} = dS_\alpha dS_\beta = h_{\alpha\alpha} h_{\beta\beta}\, dq_\alpha dq_\beta. \qquad /2,27/$$

---

1. მაგალითად, $q_1 q_2$ საკოორდინატო სიბრტყეში ელემენტარული ფართი, რომელიც შემოფარგლულია q_1, q_2 და $q_1 + dq_1, q_2 + dq_2$ წირების მიერ, ტოლი იქნება: $dS_{12} = dS_1 dS_2 = h_{11} h_{22}\, dq_1 dq_2$.

რადგან თითოეული საკოორდინატო წირის გასწვრივ სიგრძის ელემენტი განისაზღვრება /2,25/-ით, ამიტომ ელემენტარული პარალელეპიპედის მოცულობის მისაღებად საჭიროა ამ სამი ელემენტის გადამრავლება. ამგვარად, მოცულობის ელემენტი მრუდწირულ სისტემაში განისაზღვრება ფორმულით:

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_{11} h_{22} h_{33} dq_1 dq_2 dq_3. \qquad /2,28/$$

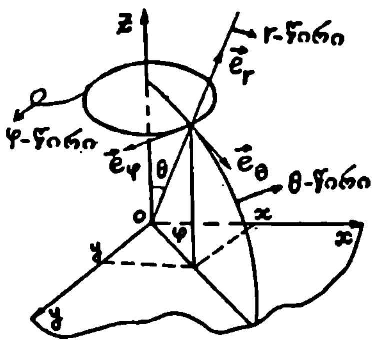
ახლა განვიხილოთ კონკრეტული სახის მრუდწირული ორთოგონალური კოორდინატები.

2. სფერული კოორდინატები. სფერულ კოორდინატებში წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$ კოორდინატებით. ისინი დეკარტის კოორდინატებთან დაკავშირებულია ფორმულებით:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad /2,29/$$
$$z = r\cos\theta.$$

ან, რაც იგივეა

$$x \pm iy = r\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}, \quad z = r\cos\theta. \qquad /2,30/$$



ნახ. 7

θ-კუთხე აითვლება z-ღერძიდან, φ-კი x-დან. $r=const$ წარმოადგენს r-რადიუსიან სფეროს ცენტრით სათავეში; $\theta=const$ გამოხატავს კონუსს სიმეტრიის z-ღერძით და ბოლოს $\varphi=const$ წარმოადგენს z-ღერძით შემოსაზღვრულ ნახევარსიბრტყეს /ნახ.7/. საკოორდინატო წირები კი იქნება r-რადიუსები, θ-მერიდიანები და φ-პარალელები. ამ კოორდინატებში სივრცის ყოველი წერტილის ამოწურვისათვის საჭიროა მრუდწირული კოორდინა -

ნების ცვლილებების არეების გარკვეული შეზღუდვა; კერძოდ, r, θ, φ უნდა იცვლებოდეს საზღვრებში:

$$0 \le r \le \infty, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \qquad /2,31/$$

ლამეს პარამეტრები სფერული კოორდინატების შემთხვევაში ტოლი იქნება:

$$h_{11}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1,$$
$$h_{22}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = r^2; \qquad /2,32/$$
$$h_{33}^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2 \sin^2\theta.$$

სიგრძის ელემენტის კვადრატისათვის გვექნება ფორმულა

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2. \qquad /2,33/$$

სიგრძის ელემენტები ღერძების გასწვრივ ტოლი იქნება:

$$ds_1 = dr, \quad ds_2 = r\,d\theta, \quad ds_3 = r \sin\theta \, d\varphi. \qquad /2,34/$$

მოცულობის ელემენტი კი განისაზღვრება ფორმულით

$$dV = r^2 dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \qquad /2,35/$$

ან,

$$dV = r^2 dr \, d\Omega, \qquad /2,36/$$

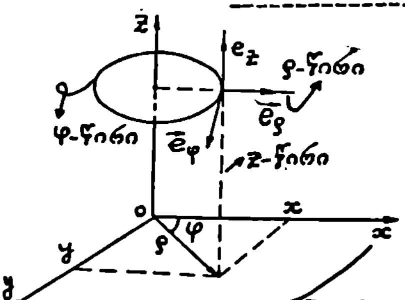
სადაც

$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \qquad /8,37/$$

წარმოადგენს სხეულოვან კუთხეს.

3. ცილინდრული კოორდინატები. ცილინდრული კოორდინატები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z. \qquad /2,38/$$



ნახ. 8.

$\rho = const$ წარმოადგენს წრიულ ცილინდრებს საერთო z ღერძით, $\varphi = const$ არის z-ღერძით შემოსაზღვრული ნახევარსიბრტყე, ხოლო $z = const$ წარმოადგენს z ღერძის მართობულ

სიბრტყეს /ნახ.8/; ამასთან,

$$0\leq\rho\leq\infty,\quad 0\leq\varphi\leq 2\pi,\quad -\infty\leq z\leq+\infty. \qquad /2,39/$$

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ლამეს პარამეტრები ამ შემთხვევაში ტოლია:

$$h_{11}=1,\quad h_{22}=\rho,\quad h_{33}=1. \qquad /2,40/$$

მაშასადამე, სიგრძისა და მოცულობის ელემენტებისათვის ცილინდრულ კოორდინატებში გვექნება:

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2+dz^2 \qquad /2,41/$$

და

$$dV=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz. \qquad /2,42/$$

ადვილად გადავალთ პოლარკოორდინატებზე $q_1=\rho,\ q_2=\varphi$. ამისათვის /2,38/ ფორმულებში საჭიროა დავუშვათ $z=0$; მივიღებთ:

$$x=\rho\cos\varphi,$$
$$y=\rho\sin\varphi. \qquad /2,43/$$

ამ შემთხვევაში, $h_{11}=1,\ h_{22}=\rho$. სიგრძის ელემენტი ტოლია

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2. \qquad /2,44/$$

ფართის ელემენტი კი განისაზღვრება ფორმულით

$$ds=\rho\,d\varphi. \qquad /2,45/$$

4. <u>პარაბოლური კოორდინატები.</u> პარაბოლური კოორდინატები $q_1=\xi,\ q_2=\eta,\ q_3=\varphi$ განისაზღვრება ფორმულებით:

$$x=\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi,$$
$$y=\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi, \qquad /2,46/$$
$$z=\frac{1}{2}(\xi-\eta).$$

ცხადია, რომ

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}(\xi+\eta), \qquad /2,47/$$

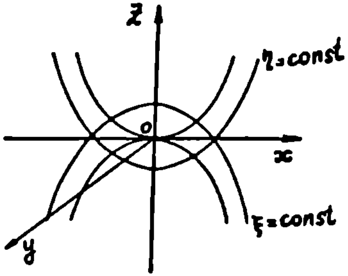
ხოლო

$$\xi=r+z,\quad \eta=r-z,\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}; \qquad /2,48/$$

ამასთან,

$$0 \le \xi \le \infty, \quad 0 \le \eta \le \infty, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \qquad /2,49/$$

რას წარმოადგენენ საკოორდინატო ზედაპირები $\xi=const$, $\eta=const$ და $\varphi=const$? /2,43/ ფორმულებიდან ადვილად მივიღებთ



ნახ. 9

$$\xi=r(1+\cos\theta),$$
$$\eta=r(1-\cos\theta), \qquad /2,50/$$

სადაც θ არის რადიუს-ვექტორის მიერ შედგენილი კუთხე z-ღერძთან / $0 \le \theta \le \pi$ /. თუ ავიღებთ $\eta=const$, გვექნება $r=\frac{const}{1-\cos\theta}$; ეს უკანასკნელი კი წარმოადგენს პარაბოლას, რომლის სიმეტრიის ღერძია z და გახსნილია $\theta=0$ მიმართულებით, ე.ი. $z>0$ მიმართულებით, ხოლო ფოკუსი მდებარეობს სათავეში. $\xi=const$ მოგვცემს $r=\frac{const}{1+\cos\theta}$. ესეც პარაბოლაა, ოღონდ იგი გახსნილია $\theta=\pi$ მიმართულებით, ე.ი. $z<0$ მიმართულებით. რაც შეეხება $\varphi=const$, მას იგივე შინაარსი აქვს, რაც გააჩნდა სფერულ კოორდინატებში, ე.ი. გამოხატავს z ღერძზე გამავალ ნახევარსიბრტყეს. ამგვარად, $\xi=const$ და $\eta=const$ წარმოადგენენ კოაქსიალურ ბრუნვით პარაბოლოიდებს, რომელთა სიმეტრიის ღერძი ემთხვევა z-ღერძს, ხოლო ფოკუსი მდებარეობს სათავეში.

ადვილად გამოვთვლით ლამეს პარამეტრებს პარაბოლური კოორდინატებისათვის. კერძოდ, /2,11/ და /2,46/ ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$h_{11}^2=\frac{\xi+\eta}{4\xi}, \quad h_{22}^2=\frac{\xi+\eta}{4\eta}, \quad h_{33}^2=\xi\eta, \qquad /2,51/$$

ამიტომ სიგრძის ელემენტისათვის გვექნება ფორმულა

$$ds^2=\frac{\xi+\eta}{4\xi}d\xi^2+\frac{\xi+\eta}{4\eta}d\eta^2+\xi\eta\, d\varphi^2. \qquad /2,52/$$

და, სათანადოდ, მოცულობის ელემენტისათვის მივიღებთ

$$dV=\frac{\xi+\eta}{4}\,d\xi\, d\eta\, d\varphi. \qquad /2,53/$$

სრულიად ანალოგიურად შეგვიძლია განვიხილოთ სხვა ორთოგონალური კოორდინატები.

ამოცანა: იპოვეთ /2,7/ ფორმულით განსაზღვრული მეტრიკული ტენზორის სახე სფერულ კოორდინატებში / $q_1=r,\ q_2=\theta,\ q_3=\varphi$ /

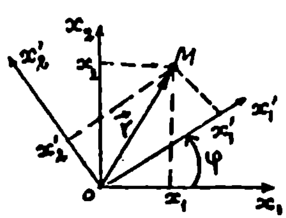
პასუხი:

$$g_{ik}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}.$$

§ 3. წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნები

ტენზორებს ერთიდან მეორე კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლის დროს გარდაქმნის გარკვეული თვისებები გააჩნიათ. კოორდინატთა ზოგადი სახის გარდაქმნებს ჩვენ შემდგომში განვიხილავთ, ახლა კი შემოვისაზღვრებით წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნების შესწავლით.

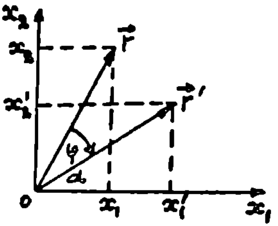
ფიზიკაში იხილავენ წერტილის კოორდინატების გარდაქმნის ორ ეკვივალენტურ მეთოდს. პირველი, როცა წერტილის კოორდინატების გარდაქმნა შედეგია კოორდინატთა სისტემის გადაადგილებისა /მობრუნება, არეკვლა და სხვა/ სივრცეში და მეორე, როცა კოორდინატთა სისტემა უძრავია, ხოლო წერტილის კოორდინატების გარდაქმნა შედეგია ამ წერტილის მდებარეობის განმსაზღვრელი რადიუსვექტორის გადაადგილებისა სივრცეში. პირველ მეთოდში განიხილება ერთი და იგივე რადიუსვექტორი ორ სხვადასხვა კოორდინატთა სისტემაში, მეორეში კი ორი სხვადასხვა რადიუსვექტორი ერთი და იგივე სისტე-



ნახ. 10ა

ბაში. მობრუნების შემთხვევაში ამ ორი მეთოდით გამოწვეული კოორდინატების ცვლილება, სიბრტყის შემთხვევაში, შესაბამისად, მოცემულია 10 ა და 10 ბ ნახაზებზე.

ჯერ განვიხილოთ წერტილის კოორდინატების გარდაქმნის პირველი მეთოდი. ჩვენი მიზნებისათვის საინტერესოა კოორდინატთა სისტემის ისეთი გარდაქმნის შესწავლა, როცა დეკარტის ერთი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა $x_1' x_2' x_3'$ გარკვეული წესით მობრუნებულია მეორე $x_1 x_2 x_3$ სისტემის მიმართ, რომელთანაც მას საერთო სათავე აქვს /ნახ.11/. შემდეგში გარდაქმნილ სისტემას შტრიხიან სისტემას ვუწოდებთ, $x_1 x_2 x_3$-ს კი უძრავს.

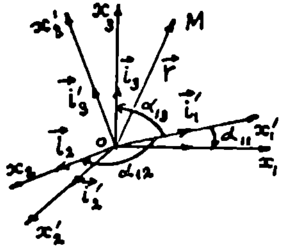


ნახ. 10 ბ.
/კოორდინატთა ცვლილების მეორე მეთოდი/

როგორი კავშირი არსებობს ერთი და იგივე წერტილის (x_1, x_2, x_3) და (x_1', x_2', x_3') კოორდინატებს შორის ამ ორ სისტემაში?

ცხადია, რომ როგორც უძრავ სისტემაში, ისე შტრიხიანში /ნახ.11/ M წერტილის რადიუს-ვექტორი ერთი და იგივე იქნება, ე.ი. $\vec r = \vec r'$ ან, გაშლილი სახით

$$\vec i_1' x_1' + \vec i_2' x_2' + \vec i_3' x_3' = \vec i_1 x_1 + \vec i_2 x_2 + \vec i_3 x_3 . \qquad /3,1/$$



ნახ.11

მართალია, ამ ორ სისტემაში რადიუსვექტორები ერთი და იგივეა, მაგრამ წერტილის კოორდინატები სხვადასხვა იქნება. მათ შორის კავშირის საპოვნელად /3,1/ ტოლობა სკალარულად გავამრავლოთ ჯერ $\vec i_1'$-ზე, შემდეგ $\vec i_2'$ და $\vec i_3'$-ზე. თუ შემოვიღებთ ე.წ. მიმართულების კოსინუსებს: $\cos\alpha_{jk} = (\vec i_j', \vec i_k)$

და გავითვალისწინებთ ორტების $(\vec{e}_j,\vec{e}_k)=\delta_{jk}$ თვისებას, გვექნება:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1\cos\alpha_{11}+x_2\cos\alpha_{12}+x_3\cos\alpha_{13},\\
x_2' &= x_1\cos\alpha_{21}+x_2\cos\alpha_{22}+x_3\cos\alpha_{23}, \qquad /3,2'/\\
x_3' &= x_1\cos\alpha_{31}+x_2\cos\alpha_{32}+x_3\cos\alpha_{33}.
\end{aligned}
$$

მივიღეთ ანალიზურ გეომეტრიაში კარგად ცნობილი გარდაქმნები, რომელიც განხორციელებულია მიმართულების კოსინუსებით. მიმართულების კოსინუსების ნაცვლად შემოვიღოთ $a_{ik}=\cos\alpha_{ik}$ ერთიანი აღნიშვნა და /3,2'/-ის ნაცვლად განვიხილოთ გარდაქმნა:

$$x_i'=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}x_k, \quad (i=1,2,3) \qquad /3,2/$$

რომელშიც a_{ik} კოორდინატებზე დამოკიდებული სიდიდეებია. /3,2/ წარმოადგენს კოორდინატთა წრფივ გარდაქმნას ზოგადი სახით.

a_{ik} კოეფიციენტების ერთობლიობა განსაზღვრავს ე.წ. გარდაქმნის მატრიცას:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}. \qquad /3,3/$$

ამ მატრიცის კერძო მნიშვნელობებისათვის გვექნება სხვადასხვა სახის გარდაქმნები. განვიხილოთ, მაგალითად, ასეთი მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad /3,4/$$

მაშინ /3,2/ დაიყვანება შემდეგ გარდაქმნაზე:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1\cos\varphi+x_2\sin\varphi,\\
x_2' &= -x_1\sin\varphi+x_2\cos\varphi, \qquad /3,5/\\
x_3' &= x_3.
\end{aligned}
$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს უკანასკნელი წარმოადგენს შტრიხიანი სისტე-

მის მობრუნებას x_3 ღერძის ირგვლივ φ კუთხეზე საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. მართლაც, თუ 10 ა ნახაზიდან x_1' და x_2' კოორდინატებს გამოვხატავთ x_1 და x_2 -ით, ადვილად ვნახავთ, რომ

$$a_{11}=\cos\varphi,\ a_{12}=\sin\varphi,\ a_{21}=-\sin\varphi,\ a_{22}=\cos\varphi,\ a_{33}=1,$$

ხოლო დანარჩენი მატრიცული ელემენტები ნულის ტოლი იქნება. a_{ik} ელემენტების ამ მნიშვნელობების გათვალისწინებით კი /3,2/ მოგვცემს /3,5/ გარდაქმნას. იგივე ნახაზიდან ადვილად ვაჩვენებთ, რომ, როცა სისტემის მობრუნება ხდება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, მაშინ კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi, \\ x_2' &= x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi, \\ x_3' &= x_3, \end{aligned} \qquad /3,5'/$$

რომელიც /3,5/-დან მიიღება $\varphi\to-\varphi$ შეცვლით.

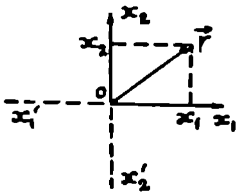
ახლა განვიხილოთ კოორდინატთა გარდაქმნის მეორე მეთოდი. ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატთა სისტემა უძრავია, ხოლო წერტილის რადიუს-ვექტორი $\vec{r}$ მობრუნდება φ კუთხეზე საათის ისრის მოძრაობის თანხვედრილი მიმართულებით. ნახ.1C ბ-დან აშკარაა, რომ $x_1=r\cos(\alpha+\varphi)$, $x_1'=r'\cos\alpha$, $x_2=r\sin(\alpha+\varphi)$, $x_2'=r'\sin\alpha$. ცხადია, მობრუნებისას რადიუს-ვექტორის სიგრძე არ იცვლება $r=r'$ ამიტომ მივიღებთ, რომ კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები მეორე მეთოდის მიხედვითაც ემთხვევა /3,5/ ფორმულებს. თუ რადიუს-ვექტორს მოვაბრუნებდით საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ წერტილის კოორდინატთა გარდაქმნის კანონი დაემთხვეოდა არა /3,5/-ს, არამედ /3,5'/-ს. ამგვარად, ორივე ზემოთ განხილული მეთოდი წერტილის კოორდინატების გარდაქმნის ერთი და იგივე ფორმულებს გვაძლევს, ოღონდ, თუ პირველ მეთოდში

კოორდინატთა სისტემის მობრუნება ხდება საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მეორე მეთოდში რადიუსვექტორის მობრუნება უნდა მოვახდინოთ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით და, პირიქით.

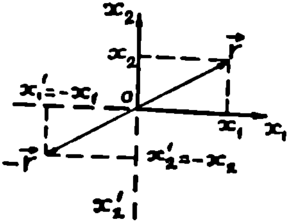
ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ /3,2/ წრფივი გარდაქმნა ასევე შეიცავს მობრუნებას x_1 და x_2 ღერძების მიმართაც. გარდაქმნის მატრიცებს შესაბამისად ექნებათ სახე:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

ადვილი დასანახია, რომ /3,2/ გარდაქმნა შეიცავს კოორდინატთა ღერძების არეკვლასაც სათავის მიმართ. პირველი მეთოდის მიხედვით არეკვლის დროს წერტილის რადიუსვექტორი ადგილზე რჩება, ხოლო ღერძების მიმართულება იცვლება საწინააღმდეგოთი. მეორე მეთოდის თანახმად კი, საკოორდინატო ღერძები ადგილზე რჩება,



ნახ. 12ა



ნახ. 12ბ

ხოლო რადიუსვექტორი $\vec r$ იცვლება $-\vec r$-ით. სიბრტყის შემთხვევაში არეკვლის ოპერაცია ამ ორი მეთოდით ილუსტრირებულია ნახ. 12 ა და 12 ბ-ზე.

ცხადია, რომ კოორდინატთა ღერძების არეკვლას შეესაბამება წერტილის კოორდინატების შემდეგი გარდაქმნა:

$$x_i' = -x_i,\quad (i=1,2,3) \qquad /3.6/$$

სადაც x_i' არის წერტილის კოორდინატები არეკლილ /შტრიხიან/ სისტემაში. მეორე მეთოდის მიხე-

დეითაც გვექნება /3,6/ გარდაქმნა, სადაც x_i' წარმოადგენს არეკვლილი $\vec{r}$ ვექტორის კომპონენტებს უძრავ სისტემაში; მაშა-სადამე, სარკისებურ არეკვლას შეესაბამება გარდაქმნის მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}. \qquad /3,7/$$

აღვნიშნოთ, რომ სარკისებურ არეკვლას ინვერსიასაც უწოდებენ. ცხადია, /3,6/ ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$x_i'=-\sum_{k=1}^{3}\delta_{ik}x_k, \qquad /3,8/$$

საიდანაც ჩანს, რომ ინვერსიის შემთხვევაში გარდაქმნის მატრი-ცის ელემენტები ტოლია შემდეგი გამოსახულების:

$$a_{ik}=-\delta_{ik}. \qquad /3,9/$$

ამგვარად, წერტილის კოორდინატების /3,2/ გარდაქმნა შეი-ცავს მობრუნებას კოორდინატთა ღერძების ირგვლივ და ამ ღერძე-ბის ინვერსიას.

ვიპოვოთ, რა პირობებს აკმაყოფილებენ a_{ik} ელემენტები. ამისათვის გავითვალისწინოთ, რომ $\vec{r}^2=\sum_i x_i^2$ სიდიდე, ე.ი. რადიუსვექტორის სიგრძის კვადრატი, არ უნდა შეიცვალოს იმის მი-ხედვით, თუ რომელ სისტემაში ვიხილავთ მას- უძრავში, თუ მბრუ-ნავში, ე.ი. დაცული უნდა იყოს ტოლობა

$$\sum_{i=1}^{3}x_i^2=\sum_{i=1}^{3}x_i'^2. \qquad /3,10/$$

ამის შესახებ ამბობენ, რომ რადიუსვექტორის სიგრძე ინვარიან-ტულია /უცვლელია/ კოორდინატთა სისტემის მობრუნების მიმართ $|\vec{r}|=|\vec{r}'|$. ცხადია, /3,10/ პირობა გარკვეულ შეზღუდვებს ადებს a_{ik} ელემენტებს. /3,2/ გარდაქმნა შევიტანოთ /3,10/-ის მარჯვენა მხარეში; გვექნება:

$$\sum_i x_i^2=\sum_i\Big(\sum_k a_{ik}x_k\Big)^2=\sum_{i,k}a_{ik}x_k\sum_n a_{in}x_n= \qquad /3,11/$$
$$=\sum_{k,n}x_k x_n\Big(\sum_i a_{ik}a_{in}\Big).$$

ადვილია რომ მივიღოთ, საჭიროა

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ik}a_{in}=\delta_{kn}. \qquad /3,12/$$

მართლაც, ამ ტოლობის /3,11/-ში შეტანით და δ_{kn} სიმბოლოთი ფილტრაციის ჩატარების შედეგად მივიღებთ $\sum_i x_i^2=\sum_i x_i'^2$ იგივეობას. /3,12/-ს უწოდებენ a_{ik} ელემენტების ორთონორმირების პირობას. გაშლილი სახით იგი გვაძლევს შემდეგ ექვს დამოკიდებულებას:

$$\begin{aligned}
&a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2=1,\\
&a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2=1,\\
&a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2=1;\\
&a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}=0,\\
&a_{11}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{33}=0, \qquad /3,12'/\\
&a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33}=0.
\end{aligned}$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ a_{ik} ელემენტები მიმართულების კოსინუსებია, მაშინ /3,12'/ დაემთხვევა იმ ცნობილ პირობებს, რომლებიც მიმართულების კოსინუსებს ედება.

ყოველ /3,2/ ტიპის გარდაქმნას, რომლის გარდაქმნის მატრიცის a_{ik} ელემენტები აკმაყოფილებენ /3,12/ ორთონორმირების პირობას, წრფივ ორთოგონალურ გარდაქმნას უწოდებენ.

ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ /3,2/-ის შებრუნებული გარდაქმნაც, რომელიც წერტილის $/x_1,x_2,x_3/$ კოორდინატებს უძრავ სისტემაში აკავშირებს წერტილის კოორდინატებთან შტრიხიან /მობრუნებულ, არეკლილ და ა.შ./ სისტემაში. ამ მიზნით /3,2/ გარდაქმნა გავამრავლოთ a_{in}-ზე და ავჯამოთ i ინდექსით; გვექნება:

$$\sum_i a_{in}x_i'=\sum_{i,k}a_{in}a_{ik}x_k=\sum_k x_k\sum_i a_{in}a_{ik}; \qquad /3,13/$$

გავითვალისწინოთ /3,12/ ორთონორმირების პირობა და გამოვიყე-
ნოთ δ_{nk} სიმბოლოს ფილტრაციის თვისება, მაშინ მივიღებთ:

$$x_k = \sum_{i=1}^{3} a_{ik} x'_i . \qquad (k=1,2,3) \qquad /3,14/$$

მაშასადამე, შებრუნებული გარდაქმნის მატრიცა /3,3/ მატრიცი-
საგან იმით განსხვავდება, რომ მასში სტრიქონები შეცვლილია
სვეტებით. ასეთ მატრიცას ტრანსპონირებულს უწოდებენ და აღნიშ-
ნავენ $\tilde{A}$ -თი

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} . \qquad /3,15/$$

/3,14/ გარდაქმნის /3,10/-ში შეტანით ადვილად დავამტკიცებთ,
რომ ორთონორმირების პირობა ასეც შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ni} a_{ki} = \delta_{nk} , \qquad /3,16/$$

ამიტომ /3,12/ და /3,16/ ორთონორმირების პირობების გაერთია-
ნებით შეიძლება დავწეროთ:

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ik} a_{in} = \sum_{i=1}^{3} a_{ni} a_{ki} = \delta_{nk} . \qquad /3,17/$$

განვიხილოთ ისევ მობრუნება x_3 ღერძის ირგვლივ. რადგან /3,4/
მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა იქნება

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad /3,18/$$

ამიტომ /3,5/-ის შებრუნებულ გარდაქმნას ექნება სახე

$$x_1 = x'_1 \cos\varphi - x'_2 \sin\varphi ,$$
$$x_2 = x'_1 \sin\varphi + x'_2 \cos\varphi , \qquad /3,18'/$$
$$x_3 = x'_3 ,$$

რომელსაც ასევე ადვილად მივიღებთ /3,5/-დან, თუ x_1, x_2 და

x_3-ს გამოვსახავთ x_1', x_2' და x_3'-ის საშუალებით.[1]

აღსანიშნავია, რომ წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცის დეტერმინანტი $\Delta(a)=\pm 1$. მართლაც, ვიპოვოთ $\Delta^2(a)$. დეტერმინანტთა გამრავლების წესის გამოყენებით /სტრიქონი-სვეტზე/ და a_{ik} ელემენტების ორთონორმირების პირობის გათვალისწინებით გვექნება

$$\Delta(a)\cdot\Delta(a)=\Delta\Big(\sum_{i=1}^{3} a_{ni}\,a_{ik}\Big)=\Delta(\delta_{ik})=1.$$

ასე, რომ, $\Delta^2(a)=1$, ხოლო $\Delta(a)=\pm 1$.

ადვილი დასანახია, რომ გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტი ერთის ტოლია მობრუნების შემთხვევაში:

$$\Delta(a)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1. \qquad /3,19/$$

მართლაც, მობრუნება არის უწყვეტი ოპერაცია, ხოლო იგივური გარდაქმნის $x_i'=x_i=\sum_k \delta_{ik}x_k$ დეტერმინანტი +1-ს უდრის, ამიტომ მობრუნების შესაბამისი დეტერმინანტიც +1-ის ტოლი უნდა იყოს.

რაც შეეხება ინვერსიას, რადგან მისთვის $a_{ik}=-\delta_{ik}$, ამიტომ შესაბამისი დეტერმინანტი -1-ის ტოლია. დეტერმინანტი -1-ის ტოლი იქნება ყოველთვის, როცა აირეკლება კენტი რაოდენობის ღერძები.

მობრუნების შესაბამისი /3,19/ დეტერმინანტი გავშალოთ პირველი სტრიქონის ელემენტების შესაბამის მინორებად; გვექნება:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=1. \qquad /3,20/$$

თუ გავიხსენებთ, რომ /3,16/ პირობის თანახმად $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1$,

---

1 მობრუნება φ კუთხით xy სიბრტყეში შეიძლება დავახასიათოთ გარდაქმნით $u'=ue^{-i\varphi}$, სადაც $u'=x'+iy'$, ხოლო $u=x+iy$. მაშინ შებრუნებული გარდაქმნა გამოიხატება $u=u'e^{i\varphi}$ ფორმულით.

მივიღებთ მნიშვნელოვან დამოკიდებულებებს:

$$a_{11} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23},$$
$$a_{12} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}, \qquad /3,21/$$
$$a_{13} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}.$$

ახლა დავუშვათ, რომ თანმიმდევრულად ხორციელდება ორი წრფივი გარდაქმნა: x_i კოორდინატები გარდაიქმნება x_i'-ში, შემდეგ კი x_i' გარდაიქმნება x_i''-ში. ასე რომ, გვექნება შემდეგი ორი წრფივი გარდაქმნა:

$$x_i' = \sum_k a_{ik} x_k ; \quad x_m'' = \sum_i b_{mi} x_i' . \qquad /3,22/$$

ამ გარდაქმნების შესაბამისი მატრიცები იქნება:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}. \qquad /3,23/$$

/3,22/ ფორმულებიდან მივიღებთ

$$x_m'' = \sum_i \sum_k b_{mi} a_{ik} x_k , \qquad /3,24/$$

რომელიც შემდეგნაირად შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ:

$$x_m'' = \sum_k C_{mk} x_k , \qquad /3,25/$$

სადაც

$$C_{mk} = \sum_i b_{mi} a_{ik} . \qquad /3,26/$$

თუ გავიხსენებთ, რომ a_{ik} და b_{ik} ელემენტებისათვის დაცულია ორთონორმირების პირობები, მაშინ ადვილად ვაჩვენებთ შემდეგი ფორმულის სამართლიანობასაც:

$$\sum_{i=1}^{3} C_{ik} C_{in} = \delta_{kn} , \qquad /3,27/$$

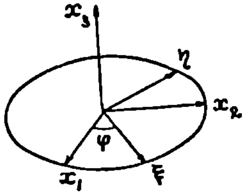
რაც იმის დამადასტურებელია, რომ /3,25/ აგრეთვე წრფივ ორთოგონალურ გარდაქმნას წარმოადგენს; ამასთან, შესაბამისი გარდაქმნის მატრიცა მიიღება გარდაქმნის B და A მატრიცების გამრავლებით, რამდენადაც /3,26/ წარმოადგენს ორი A და B მატრიცათა ნამრავლის ფორმულას; მაშასადამე;

$$C=B\cdot A. \qquad /3,28/$$

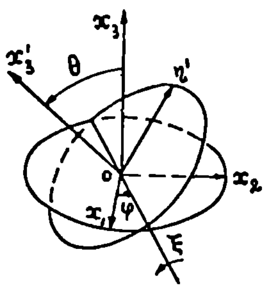
ამგვარად, მივიღეთ, რომ ორი თანმიმდევრული წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნა კვლავ წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნაა, რომლის გარდაქმნის მატრიცა მიიღება ცალკეული გარდაქმნების მატრიცათა გამრავლებით ამასთან, ადვილი შესამოწმებელია, რომ $AB\neq BA$, ამიტომ მატრიცათა გამრავლების დროს დაცული უნდა იყოს გამრავლების რიგი. სრულიად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ თუ თანმიმდევრულად ვატარებთ სამ წრფივ ორთოგონალურ გარდაქმნას, რომელთაგან პირველი ხასიათდება გარდაქმნის A-მატრიცით, მეორე B-თი, ხოლო მესამე C-თი, მაშინ შედეგად კვლავ მიიღება წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნა, რომლის გარდაქმნის მატრიცა იქნება $\mathcal{D}=C\cdot B\cdot A$ და ა.შ.

ეილერის კუთხეები. როგორც ზემოთ დავინახეთ, მობრუნებული /შტრიხიანი/ სისტემის ღერძების ორიენტაციის განსაზღვრა უძრავი სისტემის მიმართ შეიძლება განვახორციელოთ მიმართულების კოსინუსებით, რომელთა რიცხვი ცხრის ტოლია. ასევე ვაჩვენეთ, რომ ამ ცხრა მიმართულების კოსინუსიდან დამოუკიდებელია მხოლოდ სამი. ეს იმას ნიშნავს, რომ საერთო სათავის მქონე ორი სისტემის ურთიერთორიენტაციის დასახასიათებლად საკმარისია მხოლოდ სამი სიდიდე. ფიზიკაში ნაცვლად მიმართულების კოსინუსებისა ხშირად სარგებლობენ სხვა პარამეტრებითაც, რომელთა შორის ყველაზე მნიშვნელოვანია ეილერის კუთხეები. ეილერმა აჩვენა, რომ საერთო სათავის მქონე ერთმანეთის მი-

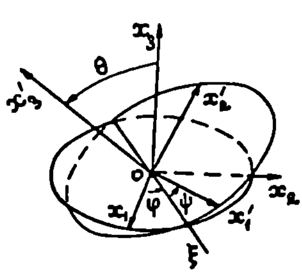
მართ ნებისმიერად ორიენტირებული კოორდინატთა სისტემა შეიძლება ერთმანეთს დავამთხვიოთ სამი მობრუნებით.



ნახ. 13 ა



ნახ. 13 ბ



ნახ. 13 გ

ავიღოთ დეკარტის ორი მართკუთხა სისტემა, რომელთა სათავეები და ღერძები ერთმანეთს ემთხვევა და ვაჩვენოთ, რომ ერთ-ერთ სისტემას მეორის მიმართ სივრცეში ნებისმიერი ორიენტაცია შეიძლება მივცეთ სამი მობრუნებით. ხელსაყრელია ვისარგებლოთ მარჯვენა კოორდინატთა სისტემით. ჯერ განვიხილოთ მობრუნება სისტემის x_3 ღერძის მიმართ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ -კუთხეზე საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. მივიღებთ ახალ $\xi\eta x_3$ სისტემას /ნახ.13 ა/. $O\xi$ ღერძს უწოდებენ კვანძთა ღერძს.

წერტილის კოორდინატებს შორის ამ ორ სისტემაში, ცხადია, გვექნება კავშირი:

$$\begin{aligned} \xi &= x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi, \\ \eta &= -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi, \\ x_3 &= x_3' \end{aligned} \qquad /3,29/$$

შესაბამის გარდაქმნის მატრიცას ექნება სახე:

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad /3,30/$$

მოვაბრუნოთ ახლა.ახალი სისტემა $O\xi$ კვანძთა ღერძის ირგვლივ $0 \leq \theta \leq \pi$ კუთხეზე ისევ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. მივიღებთ $\xi\eta' x_3'$ სისტემას /ნახ.13 ბ /. წერტილის კოორდინატებს შორის $\xi\eta' x_3'$ და $\xi\eta x_3$ სისტემებში გვექნება კავშირი:

$$\begin{aligned}\xi&=\xi',\\ \eta'&=\eta\cos\theta+x_3\sin\theta,\\ x_3'&=-\eta\sin\theta+x_3\cos\theta.\end{aligned} \qquad /3,31/$$

/3,31/-ის შესაბამის გარდაქმნის მატრიცას ასეთი სახე ექნება:

$$A_\theta=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}. \qquad /3,32/$$

ბოლოს, $\xi\eta' x_3'$ სისტემა მოვაბრუნოთ x_3' ღერძის ირგვლივ $0 \leq \psi \leq 2\pi$ კუთხეზე საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. მივიღებთ სისტემას $x_1' x_2' x_3'$, რომელსაც ექნება ნებისმიერი ორიენტაცია უძრავი x_1, x_2, x_3 კოორდინატთა სისტემის მიმართ /ნახ. 13 გ/. წერტილის კოორდინატებს შორის $x_1' x_2' x_3'$ და $\xi\eta' x_3'$ სისტემაში გვექნება კავშირი:

$$\begin{aligned}x_1'&=\xi\cos\psi+\eta'\sin\psi,\\ x_2'&=-\xi\sin\psi+\eta'\cos\psi,\\ x_3'&=x_3.\end{aligned} \qquad /3,33/$$

ეს წრფივი გარდაქმნა ხორციელდება მატრიცით:

$$A_\psi=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad /3,34/$$

φ, θ, ψ -ს ეილერის კუთხეები ეწოდება. ამის შემდეგ ადვილია კავშირის დამყარება წერტილის კოორდინატებს შორის $x_1x_2x_3$ და $x'_1x'_2x'_3$ სისტემებში ეილერის φ, θ, ψ კუთხეების საშუალებით. ამისათვის საკმარისია /3,29/-ით განსაზღვრული ξ და η შევიტანოთ /3,31/-ში, ხოლო ამ უკანასკნელიდან ნაპოვნი ξ, η' და ζ /3,33/-ში; შედეგად მივიღებთ:

$$x'_1=x_1(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta)+x_2(\sin\varphi\cos\psi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi)+ \\ +x_3\sin\theta\sin\psi,$$

$$x'_2=x_1(-\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi\cos\theta)+x_2(-\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta)+ \\ +x_3\sin\theta\cos\psi,$$

$$x'_3=x_1\sin\varphi\sin\theta-x_2\cos\varphi\sin\theta+x_3\cos\theta. \qquad /3,35/$$

როგორც ვხედავთ, წრფივი გარდაქმნა გამოხატულია არა მიმართულების კოსინუსებით, არამედ ეილერის კუთხეებით; ამასთან, ეილერის კუთხეებსა და მიმართულების კოსინუსებს შორის გვაქვს შემდეგი კავშირი:

$$\begin{aligned}
a_{11}&=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta,\\
a_{12}&=\cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi,\\
a_{13}&=\sin\psi\sin\theta,\\
a_{21}&=-\sin\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi,\\
a_{22}&=-\sin\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi,\\
a_{23}&=\cos\psi\sin\theta,\\
a_{31}&=\sin\theta\sin\varphi,\\
a_{32}&=-\sin\theta\cos\varphi,\\
a_{33}&=\cos\theta.
\end{aligned} \qquad (3,36)$$

/3,35/ წრფივი გარდაქმნის მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$A=\begin{pmatrix}\cos\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta\\ -\sin\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta\\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\end{pmatrix} \qquad (3,37)$$

ცხადია, რომ გარდაქმნის ეს მატრიცა წარმოადგენს სამი კერძო

წრფივი გარდაქმნის შესაბამისი /3,30/, /3,32/ და /3,34/ მატ-რიცების ნამრავლს: $A=A_\psi A_\theta A_\varphi$.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ ლიტერატურაში გამოიყენება ეილერის კუთხეების სხვადასხვა განმარტება. ავტორთა ერთი ნაწილი ამ კუთხეებს განმარტავს მარცხენა სისტემაში. ამასთან, ხშირად პირველი მობრუნება აითვლება x_2 ღერძიდან, კუთხეთა ათვლა კი ხდება საათის ისრის მოძრაობის თანხვედრილი მიმართულებით. ცხადია, აღნიშნული სხვადასხვა განმარტება მოვლენის აღწერის დროს ერთი და იგივე ფიზიკურ მნიშვნელობებს მოგვცემს, მაგრამ სხვადასხვა გზით განსაზღვრული ეილერის კუთხეებით გამოთვლილი შედეგების შედარებისას გარკვეული სიფრთხილე გვმართებს.

§ 4. ტ ე ნ ზ ო რ ე ბ ი

ტენზორები დიდ როლს ასრულებენ ფიზიკაში. ისინი განსაკუთრებით ფართოდ გამოიყენება მყარი სხეულის ანიზოტროპული თვისებების შესწავლის დროს, ჰიდროდინამიკაში, ელექტროდინამიკაში, ფარდობითობის თეორიაში და სხვა.

არჩევენ ნულოვანი, პირველი, მეორე და ა.შ. რანგის ტენზორებს. პირველი რანგის ტენზორი ვექტორია, ნულოვანი რანგის ტენზორი კი ჩვეულებრივი რიცხვია- სკალარია და ა.შ. სამგანზომილებიან ევკლიდის სივრცეში ტენზორის კომპონენტების რიცხვი 3^n-ის ტოლია, სადაც n არის ტენზორის რანგი. ამის მიხედვით სკალარს ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში ექნება ერთი კომპონენტი, ვექტორს- სამი მეორე რანგის ტენზორს- ცხრა, მესამე რანგის ტენზორს - 27 და ა.შ.

ტენზორები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც დეკარტის მართკუთხა სისტემაში, ისე ნებისმიერ მრუდწირულ კოორდინატებში. ჯერჯერობით შევისწავლოთ ტენზორების თვისებები დეკარტის სისტემაში.

ტენზორების კომპონენტები ხელსაყრელია გამოვხატოთ ინდექსების საშუალებით. ასე მაგალითად, თუ i, k, l და ა.შ. ინდექსები იღებენ მნიშვნელობებს 1,2,3, მაშინ პირველი რანგის ტენზორის კომპონენტები აღინიშნება A_i-თი, ხოლო მეორე, მესამე და ა.შ. რანგის ტენზორის კომპონენტები T_{ik}, C_{ikl} და ა.შ.

ტენზორების თვისებებს განსაზღვრავს მათი კომპონენტების გარდაქმნის კანონი ერთიდან მეორე კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლის დროს. კერძოდ, დეკარტის მართკუთხა სისტემის შემთხვევაში საჭიროა გავარკვიოთ ტენზორის კომპონენტების ყოფაქცევა წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნების მიმართ.

ასე მაგალითად, A_1, A_2, A_3 სამი სიდიდე ადგენს პირველი რანგის A_i ტენზორს / $i=1,2,3$ /, თუ კოორდინატთა სისტემის მობრუნების დროს ისინი გარდაიქმნებიან, როგორც წერტილის კოორდინატები, ე.ი. კანონით:

$$A'_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} A_k, \qquad /4,1/$$

სადაც A'_i არის ვექტორის კომპონენტები შტრიხიან /მობრუნებულ/ სისტემაში, ხოლო a_{ik} მიმართულების კოსინუსებია. ისინი, როგორც ვიცით, აკმაყოფილებენ ორთონორმირების შემდეგ პირობას:

$$\sum_i a_{ik} a_{in} = \sum_i a_{ni} a_{ki} = \delta_{nk}; \qquad /4,2/$$

თუ გავამრავლებთ /4,1/ ფორმულას a_{in}-ზე, ავიღებთ ჯამს i-თი და მარჯვენა მხარეში გავითვალისწინებთ /4,2/ ორთონორმირების პირობას, δ_{nk} სიმბოლოთი ფილტრაციის ჩატარების შემდეგ მივიღებთ:

$$A_n = \sum_{i=1}^{3} a_{in} A'_i. \qquad /4,3/$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს /4,1/-ის შებრუნებულ გარდაქმნას.

პირველი რანგის ტენზორის კომპონენტები შეიძლება ნათლად გამოვხატოთ ერთსტრიქონიანი ან ერთსვეტიანი მატრიცებით

$$A_i \equiv (A_1, A_2, A_3); \quad A_i \equiv \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}. \qquad /4,4/$$

პირველი რანგის ტენზორის თვისებების შესწავლას შემდეგში კვლავ დავუბრუნდებით, ახლა კი განვიხილოთ მაღალი რანგის ტენ-

ზორები.

ვთქვათ, გვაქვს ორი პირველი რანგის ტენზორი A_i და B_k, შევადგინოთ მათი კომპონენტების ნამრავლი $P_{ik}=A_i B_k$, რომელსაც ვექტორების პირდაპირ ნამრავლს უწოდებენ. ცხადია, რომ $A_i B_k$ იქნება ცხრა სიდიდის ერთობლიობა. ვნახოთ, როგორ გარდაიქმნება ისინი კოორდინატთა სისტემის მობრუნების დროს. რადგან A_i და B_k ვექტორების კომპონენტებია, ამიტომ თითოეული მათგანისათვის გვექნება გარდაქმნის კანონი:

$$A_i'=\sum_{m=1}^{3} a_{im}A_m\,,\qquad B_k'=\sum_{n=1}^{3} a_{kn}B_n\,, \qquad /4,5/$$

და $A_i B_k$ პირდაპირი ნამრავლისათვის შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი გარდაქმნის კანონი:

$$P_{ik}'=A_i'B_k'=\sum_m\sum_n a_{im}a_{kn}A_m B_n \qquad /4,6/$$

ან, რადგან $A_m B_n=P_{mn}$, საბოლოოდ გვექნება

$$P_{ik}'=\sum_m\sum_n a_{im}a_{kn}P_{mn}\,. \qquad /4,7/$$

T_{ik}. [ცხრა სიდიდის ერთობლიობას, რომელიც კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას გარდაიქმნება როგორც ორი ვექტორის პირდაპირი ნამრავლი, ე.ი. კანონით:

$$T_{ik}'=\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} a_{im}a_{kn}T_{mn}\,, \qquad /4,8/$$

უწოდებენ მეორე რანგის ტენზორს. ამასთან] T_{ik}' მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტებია შტრიხიან სისტემაში. ეს ტენზორი შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი ცხრილით:

$$\{T_{ik}\}=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13}\\ T_{21} & T_{22} & T_{23}\\ T_{31} & T_{32} & T_{33}\end{pmatrix}. \qquad /4,9/$$

T_{ik}-ს მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტებს უწოდებენ.

შემდეგში ტენზორს იმავე ასოთი აღვნიშნავთ, როგორც მის კომპონენტებს, ე.ი. $T \equiv \{T_{ik}\}$; ამასთან, როცა ვიტყვით, მოცემულია T_{ik} ტენზორი, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ლაპარაკია $T \equiv \{T_{ik}\}$ კომპონენტების ერთობლიობაზე და არა მის ერთ რომელიმე კომპონენტზე. მეორე რანგის ტენზორის T_{11}, T_{22}, T_{33} კომპონენტებს ტენზორის დიაგონალური კომპონენტები ეწოდება, ხოლო T_{ik} -ს, როცა $i \neq k$ - არადიაგონალური კომპონენტები. როცა მეორე რანგის ტენზორს ნულისაგან განსხვავებული აქვს მხოლოდ დიაგონალური კომპონენტები, მაშინ ტენზორს დიაგონალური ეწოდება, ე. ი.

$$\begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{pmatrix}. \qquad /4,10/$$

განვიხილოთ ელექტრობაში მეორე რანგის ტენზორის გამოყენების მაგალითი. როგორც ცნობილია, ომის კანონი იზოტროპული სხეულებისათვის შემდეგნაირად იწერება:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \qquad /4,11/$$

სადაც $\vec{j}$ არის დენის სიმკვრივე, $\vec{E}$ ელექტრული ველის დაძაბულობა, ხოლო σ -ელექტროგამტარებლობა. ცნობილია, რომ იზოტროპული სხეულებისათვის ელექტროგამტარებლობა სკალარული სიდიდეა. ეს იმას ნიშნავს, რომ დენის სიმკვრივის რომელიმე i -ური კომპონენტი განისაზღვრება მხოლოდ და მხოლოდ ელექტრული ველის დაძაბულობის i -ური კომპონენტით, ე.ი. $j_i = \sigma E_i$. როცა გარემო, რომელშიაც ვიხილავთ დენის გავლას, ანიზოტროპულია, მაშინ დენის სიმკვრივის მდგენელი რომელიმე ღერძზე განისაზღვრება არა მხოლოდ ამ ღერძის შესაბამისი ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორის მდგენელით, არამედ დანარჩენი ორი მდგენელითაც, ე.ი.

$$j_i = \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik} E_k, \qquad /4,12/$$

სადაც,

$$\sigma_{ik}=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}$$ /4,13/

წარმოადგენს ელექტროგამტარებლობის მეორე რანგის ტენზორს. ასევე შეგვიძლია მოვიყვანოთ უამრავი მაგალითი მეორე რანგის ტენზორების გამოყენებისა ფიზიკაში.

ახლა განვსაზღვროთ მაღალი რანგის ტენზორები. მაგალითად, მესამე რანგის Π_{ikl} ტენზორს უწოდებენ $3^3 = 27$ სიდიდის ერთობლიობას, რომლებიც კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას შემდეგი კანონით გარდაიქმნება:

$$\Pi'_{ikl}=\sum_m\sum_n\sum_s a_{im}a_{kn}a_{ls}\Pi_{mns},$$ /4,14/

ე.ი. მესამე რანგის ტენზორის გარდაქმნის კანონი კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას ისეთივეა, როგორც სამი ვექტორის კომპონენტების $A_i B_k C_l$ ნამრავლისა.

სრულიად ანალოგიურად განისაზღვრება ნებისმიერი რანგის ტენზორიც. მაგალად, n-ური რანგის ტენზორი ეწოდება ისეთ 3^n კომპონენტის ერთობლიობას, რომელიც კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას გარდაიქმნება კანონით:

$$\Gamma'_{i_1 i_2\dots i_n}=\sum_{k_1k_2\dots k_n} a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\dots a_{i_nk_n}\Gamma_{k_1k_2\dots k_n}.$$ /4,15/

როგორც ვხედავთ, ტენზორის რანგს განსაზღვრავს იმ ინდექსთა რიცხვი, რომლებიც არ მეორდებიან. ასეთ ინდექსებს თავისუფალ ინდექსებს უწოდებენ. მაგალითად, Λ_{ikl} მესამე რანგის ტენზორია, B_{ikk} – პირველი რანგისა /რადგან k არ არის თავისუფალი ინდექსი; იგი მეორდება!/, C_{ikpmp} იქნება მესამე რანგის ტენზორი და ა.შ. რადგან თითოეული თავისუფალი ინდექსი სამგანზომილებიან სივრცეში იღებს სამ მნიშვნელობას, ამიტომ n რანგის ტენზორს ექნება 3^n – კომპონენტი.

ადვილია /4,8/ გარდაქმნის შებრუნებულის დაწერა. ამისათვის /4,8/ გავამრავლოთ $a_{ip}a_{kt}$ ნამრავლზე და ავჯამოთ ჯამი i და k-თი:

$$\sum_{i,k} a_{ip}a_{kt}T'_{ik} = \sum_{m,n}\sum_{i,k} a_{ip}a_{kt}a_{im}a_{kn}T_{mn}; \qquad /4,16/$$

მარჯვენა მხარეში გამოვიყენოთ a_{ik} კოეფიციენტების ორთონორმირების პირობა, მაშინ გვექნება

$$\sum_{i,k} a_{ip}a_{kt}T'_{ik} = \sum_{m,n}\delta_{pm}\delta_{tn}T_{mn}, \qquad /4,17/$$

საიდანაც ფორმაციის ჩატარების შემდეგ მივიღებთ

$$T_{pt} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ip}a_{kt}T'_{ik}. \qquad /4,18/$$

სრულიად ანალოგიურად გამოვიყენებთ შებრუნებული გარდაქმნის ფორმულებს მაღალი რანგის ტენზორებისათვისაც.

§ 5. მოქმედებანი ტენზორებზე

1. შეკრება. ერთი და იგივე რანგის ტენზორები შეგვიძლია შევკრიბოთ და გამოვაკლოთ ერთმანეთს. თუ, მაგალითად, გვაქვს ორი მეორე რანგის ტენზორი M და N, მაშინ მათი ჯამი ეწოდება ისეთ მეორე რანგის T ტენზორს, რომლის კომპონენტები განისაზღვრება ფორმულით.

$$T_{ik} = M_{ik} + N_{ik}, \qquad /5,1/$$

ე.ი. ერთი და იგივე რანგის ტენზორების შეკრებისას საჭიროა შესაბამისი კომპონენტების შეკრება /იგივე ეხება გამოკლებას/. ის რომ, /5,1/ ფორმულით განსაზღვრული T_{ik} ტენზორია, ადვილი დასამტკიცებელია. რადგან M და N მეორე რანგის ტენზორებია, ამიტომ მათი ჯამი კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას გარდაიქმნება შემდეგი სახით:

$$M'_{ik}+N'_{ik} = \sum_{m,n} a_{im}a_{kn}M_{mn} + \sum_{m,n} a_{im}a_{kn}N_{mn} =$$

$$= \sum_{m,n} a_{im} a_{kn} (M_{mn}+N_{mn}) = \sum_{m,n} a_{im} a_{kn} T_{mn} = T'_{ik}; \qquad /5,2/$$

მაშასადამე, T_{ik} მართლაც მეორე რანგის ტენზორი ყოფილა. აღსანიშნავია, რომ ტენზორების შეკრებისას ჯამში ყველა ინდექსი ერთი და იგივე თანმიმდევრობით უნდა გვხვდებოდეს. ტენზორების შეკრების წესიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ტენზორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ იმავე რანგის ტენზორების ჯამის სახით.

2. სკალარზე გამრავლება. ტენზორის ყველა კომპონენტის ერთი და იგივე λ სკალარზე გამრავლებით მიიღება იმავე რანგის ტენზორი; ამასთან, ტენზორის სკალარზე გამრავლება ასე აღინიშნება:

$$B_i=\lambda A_i, \; T_{ik}=\lambda B_{ik}, \; K_{ikl}=\lambda C_{ikl} \quad \text{და ა.შ.} \qquad /5,3/$$

ამ წესების სამართლიანობა აშკარაა და დამტკიცებას არ მოითხოვს.

3. გამრავლება. განსაკუთრებით საინტერესო ოპერაციას წარმოადგენს ტენზორების გამრავლება. ამასთან, ახლა უკვე მნიშვნელობა არა აქვს ტენზორების რანგს. ნებისმიერი რანგის ტენზორი შეიძლება გავამრავლოთ ნებისმიერი რანგის ტენზორზე. დავამტკიცოთ, რომ ტენზორების გამრავლებისას კვლავ მიიღება ტენზორი, რომლის რანგი ტოლია გადასამრავლებელი ტენზორების რანგების ჯამისა. ის რომ, ორი პირველი რანგის ტენზორის გამრავლებით მეორე რანგის ტენზორი მიიღება, ჩვენ უკვე ვიცით. დავამტკიცოთ ეს დებულება ზოგად შემთხვევაში. ვთქვათ, გვაქვს ორი ტენზორი $A_{i_1i_2\dots i_n}$ და $B_{k_1k_2\dots k_m}$, რომელთაგან პირველის რანგი n-ის ტოლია, მეორისა კი – m-ის. ავიღოთ მათი ნამრავლი:

$$J_{i_1i_2\dots i_n;k_1k_2\dots k_m}=A_{i_1i_2\dots i_n}B_{k_1k_2\dots k_m} \qquad /5,4/$$

და დავამტკიცოთ, რომ J ტენზორის რანგი არის $n+m$. ამისათვის ვიპოვოთ J ტენზორის გარდაქმნის კანონი კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას. გვექნება

$$J'_{i_1 i_2 \dots i_n k_1 k_2 \dots k_m} = \sum_{l_1 l_2 \dots l_n l_{n+1} \dots l_{n+m}} a_{i_1 l_1} a_{i_2 l_2} \dots a_{i_n l_n} a_{k_1 l_{n+1}} \dots$$

$$\dots a_{k_m l_{n+m}} A_{l_1 l_2 \dots l_n} B_{l_{n+1} l_{n+2} \dots l_{n+m}} \qquad /5,5/$$

ან, /5,4/ აღნიშვნის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$J'_{i_1 i_2 \dots i_n k_1 k_2 \dots k_m} = \sum_{l_1 l_2 \dots l_{n+m}} a_{i_1 l_1} a_{i_2 l_2} \dots a_{k_m l_{n+m}} J_{l_1 \dots l_{n+m}}, \qquad /5,6/$$

რომელიც ზუსტად წარმოადგენს $n+m$ რანგის ტენზორის გარდაქმნას. ამგვარად, თუ გვაქვს მეორე რანგის T_{ik} ტენზორი, მისი გამრავლებით პირველი რანგის A_l ტენზორზე, მივიღებთ მესამე რანგის ტენზორს $T_{ik}A_l$, ორი მეორე რანგის ტენზორის გამრავლება მოგვცემს მეოთხე რანგის ტენზორს და ა.შ. ნათელია, რომ $A_i B_k \Pi_{lm}$, $C_{ik} \mathcal{D}_{lm} E_{ns}$ შესაბამისად იქნება მეოთხე და მეექვსე რანგის ტენზორები.

4. ტენზორების დაკეცვა. ასევე საინტერესო ოპერაციას წარმოადგენს ტენზორების დაკეცვა. ტენზორის რომელიმე ორი ინდექსის გატოლებას და ამ ინდექსით აჯამვას ტენზორის დაკეცვას უწოდებენ. ადვილი საჩვენებელია, რომ ტენზორის დაკეცვით მიიღება ახალი ტენზორი, რომლის რანგი ორით ნაკლებია. მეტი სიცხადის მიზნით ეს დებულება დავამტკიცოთ მეორე რანგის ტენზორის მაგალითზე. მეორე რანგის T_{ik} ტენზორის ინდექსები გავუტოლოთ ერთმანეთს და ავჯამოთ; მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{3} T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \equiv Sp\, T. \qquad /5,7/$$

ტენზორის დიაგონალური ელემენტების ჯამს ტენზორის შპურს

/კვალს/ უწოდებენ.[1] დავამტკიცოთ, რომ SpT სკალარული სიდიდეა. ამ მიზნით მეორე რანგის ტენზორის /4,8/ განმარტებაში გავუტოლოთ $i=k$ და ავჯამოთ; გვექნება:

$$\sum_{i=1}^{3} T'_{ii} = \sum_{imn} a_{im} a_{in} T_{mn} = \sum_{m,n} T_{mn} \sum_{i=1}^{3} a_{im} a_{in}. \qquad /5,8/$$

a_{ik} კოეფიციენტების /4,2/ ორთონორმირების პირობის გამოყენებით და δ_{mn} სიმბოლოს ფილტრაციის თვისების გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{3} T'_{ii} = \sum_{i=1}^{3} T_{ii} = SpT, \qquad /5,9/$$

რაც ცხადად ამტკიცებს, რომ დაქვეითების შედეგად მეორე რანგის ტენზორი სკალარად გადაიქცევა. ამავე დროს, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ მეორე რანგის ტენზორის შპურ სკალარული სიდიდეა, ე.ი. იგი წარმოადგენს ინვარიანტულ /უცვლელ/ სიდიდეს კოორდინატთა სისტემის მობრუნების მიმართ. სრულიად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ მესამე რანგის ტენზორის დაქვეითებით მივიღებთ ვექტორს და ა.შ. ქვემოთ მოყვანილი მაგალითები აშკარად გვიჩვენებენ დაქვეითების შედეგად ტენზორის რანგის ორით შემცირებას

$$\sum_{k} \tau_{ikk} = A_i; \quad \sum_{\ell} J_{ik\ell\ell} = G_{ik}; \quad \sum_{k} T_{ik} L_{mk} = N_{im} \quad \text{და ა.შ.}$$

თუ T_{ik} მეორე რანგის ტენზორს გავამრავლებთ A_ℓ ვექტორზე და დავაქვეითებთ, მივიღებთ ახალ ვექტორს:

$$\sum_{k=1}^{3} T_{ik} A_k = B_i. \qquad /5,10/$$

ამ ვექტორს ეწოდება T_{ik} ტენზორისა და A_ℓ ვექტორის სკალარული

[1] Sp არის ორი პირველი ასო გერმანული სიტყვისა "Spur", რომელიც კვალს ნიშნავს. კვალი ხშირად "Tr"-ითაც აღინიშნება /ინგლისური სიტყვის "Trace"-ს /კვალის/ პირველი ორი ასო/.

ნამრავლი. საზოგადოდ, ტენზორების გამრავლებას და შემდეგ დაკ-
ვეცებას ტენზორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება. მაგალითად, M_{ik} და N_{ik} ტენზორების სკალარულ ნამრავლს ექნება სახე

$$C_{im}=\sum_{k} M_{ik}N_{km}. \qquad /5,11/$$

შევნიშნოთ, რომ n-ური რანგის ტენზორი შეგვიძლია დავაკვეცოთ ნებისმიერი ორი ინდექსის მიხედვით. შედეგად, საზოგადოდ, მივიღებთ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ $n-2$ რანგის ტენზორებს.

5. „გაყოფა". როგორც ზემოთ დავინახეთ, ტენზორების ნამრავლი კვლავ ტენზორს გვაძლევს. ახლა დავსვათ შებრუნებული ამოცანა, რომელიც გაყოფის ანალოგიურია. თუ ცნობილია, რომ ტენზორის გამრავლებით რაიმე სიდიდეზე კვლავ ტენზორი მიიღება, მაშინ ეს სიდიდეც ტენზორი იქნება. გარკვეულობის მიზნით დებულება დავამტკიცოთ მეორე რანგის ტენზორის შემთხვევაში.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი ნებისმიერი A_i და B_k ვექტორი და დავუშვათ, რომ მათი სკალარული ნამრავლი T_{ik} სიდიდეზე ნულოვანი რანგის ტენზორია, ე.ი. წარმოადგენს ინვარიანტს. მაშინ T_{ik} იქნება მეორე რანგის ტენზორი. პირობის თანახმად,

$$\sum_{i,k} T_{ik}A_iB_k=\sum_{m,n} T'_{mn}A'_mB'_n.$$

რადგან A_i და B_i ვექტორებია, ამიტომ /4,5/ ფორმულების გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\sum_{i,k}\Big(T_{ik}-\sum_{m,n} T'_{mn}a_{mi}a_{nk}\Big)A_iB_k=0,$$

საიდანაც, რადგან A_i და B_k ნებისმიერი ვექტორებია, მივიღებთ

$$T_{ik}=\sum_{m,n} a_{mi}a_{nk}T'_{mn},$$

რაც მეორე რანგის ტენზორის გარდაქმნის კანონს წარმოადგენს, ე.ი. T_{ik} მართლაც მეორე რანგის ტენზორი ყოფილა.

6. ტენზორების ტოლობა. ერთი და იმავე რანგის ტენზორები ტოლი შეიძლება იყოს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ მათი შესაბამისი კომპონენტები ერთმანეთის ტოლია. ვთქვათ, ორი მეორე რანგის ტენზორი ტოლია ერთ რომელიმე სისტემაში, ე.ი. $Q_{ik}=P_{ik}$. ვაჩვენოთ, რომ ეს ტენზორები ერთმანეთის ტოლი იქნება ნებისმიერ სისტემაში, ე.ი. $Q'_{ik}=P'_{ik}$. დამტკიცებისათვის $Q_{ik}=P_{ik}$ ტოლობა დავწეროთ შტრიხიან სისტემაში; ამისათვის გამოვიყენოთ გარდაქმნის /4,8 / კანონი; მივიღებთ

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{i\alpha} a_{k\beta} Q'_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta} a_{i\alpha} a_{k\beta} P'_{\alpha\beta}. \qquad /5,12/$$

ამ ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ $a_{i\gamma}a_{k\kappa}$-ზე და მოვახდინოთ აჯამვა i და k ინდექსებით. თუ გამოვიყენებთ a_{ik} კოეფიციენტების ორთონორმირების პირობას, გვექნება

$$\sum_{\alpha,\beta} \delta_{\gamma\alpha}\delta_{\kappa\beta} Q'_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta} \delta_{\gamma\alpha}\delta_{\kappa\beta} P'_{\alpha\beta}. \qquad /5,13/$$

ფილტრაციის ჩატარების შემდეგ მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას $Q'_{ik}=P'_{ik}$

ტენზორს ეწოდება ნულოვანი, თუ მისი ყველა კომპონენტი ნულის ტოლია. ამავე დროს, ზემოთ დამტკიცებული დებულების ძალით, თუ ტენზორი ნულის ტოლია ერთ რომელიმე სისტემაში, მაშინ იგი ნულის ტოლი იქნება ნებისმიერ სხვა სისტემაშიც.

ბოლოს მივუთითოთ, რომ თუ ტენზორი არ იცვლება კოორდინატთა ერთი სისტემიდან მეორეში გადასვლის დროს, მაშინ ასეთ ტენზორს ინვარიანტული ეწოდება; მაშასადამე, ტენზორი ინვარიანტული იქნება, თუ $T'_{ik\ldots s}=T_{ik\ldots s}$.

§ 6. ტენზორების სიმეტრია და პოლარობა

ტენზორების სიმეტრია და პოლარობა ტენზორის ერთ-ერთი საინტერესო თვისებაა. ამიტომ ამ თვისებებს დაწვრილებით განვიხი-

ლეთ.

1. <u>სიმეტრია.</u> თუ ტენზორის კომპონენტები აკმაყოფილებენ პირობას, რომ მისი ორი ინდექსის გადასმით ისინი არ იცვლებიან, მაშინ ტენზორს სიმეტრიული ეწოდება. ასე მაგალითად, მეორე რანგის ტენზორი სიმეტრიულია, თუ შესრულებულია ტოლობა.

$$T_{ik} = T_{ki}. \qquad /6,1/$$

მაშასადამე, მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორის დიაგონალის მიმართ სიმეტრიულად განლაგებული კომპონენტები ტოლია. ამის გამო, მეორე რანგის სიმეტრიულ ტენზორს ცხრა კომპონენტიდან დამოუკიდებელი ექნება მხოლოდ ექვსი.

ახლა დავუშვათ, დაცულია ტოლობა:

$$\tau_{ik} = -\tau_{ki}, \qquad /6,2/$$

ე.ი. ინდექსების გადასმისას კომპონენტები ნიშანს იცვლიან. ასეთ ტენზორს ანტისიმეტრიული ტენზორი ჰქვია. ცხადია, რომ ანტისიმეტრიული ტენზორის დიაგონალური კომპონენტები ნულის ტოლია. მართლაც, /6,2/-ში i ინდექსი გავუტოლოთ k-ს, მაშინ $\tau_{ii} = -\tau_{ii}$, ე.ი. $2\tau_{ii} = 0$ და, მაშასადამე, $\tau_{11}=0$, $\tau_{22}=0$, $\tau_{33}=0$ რაც შეეხება დიაგონალის მიმართ სიმეტრიულად განლაგებულ ელემენტებს, ისინი ტოლი არიან და ერთმანეთისაგან ნიშნით განსხვავდებიან. ამიტომ მეორე რანგის ანტისიმეტრიულ ტენზორს აქვს მხოლოდ სამი დამოუკიდებელი კომპონენტი, ე.ი. იმდენი, რამდენიც ვექტორს. ადვილი საჩვენებელია, რომ ასეთი ტენზორი ვექტორის ეკვივალენტურია. ავიღოთ დამოუკიდებელ კომპონენტებად

$$A_1 = \tau_{23}, \; A_2 = \tau_{31}, \; A_3 = \tau_{12}. \qquad /6,3/$$

მეორე რანგის ტენზორის გარდაქმნით, მაგალითად, τ_{23}-ისათვის გვექნება გარდაქმნის კანონი

$$\tau'_{23} = \sum_{m,n} a_{2m} a_{3n} \tau_{mn}. \qquad /6,4/$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მოთავსებული ჯამი გავშალოთ და გამოვიყენოთ $\tau_{mn}=-\tau_{nm}$ პირობა; მივიღებთ:

$$\tau'_{23}=(a_{31}a_{23}-a_{21}a_{33})\tau_{31}+(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\tau_{12}+$$

$$+(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})\tau_{23}. \qquad /6,5/$$

/3,21/ ფორმულების გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\tau'_{23}=a_{12}\tau_{31}+a_{13}\tau_{12}+a_{11}\tau_{23}, \qquad /6,6/$$

რომელიც /6,3/ აღნიშვნებში ასე გადაიწერება:

$$A'_1=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}A_k. \qquad /6,7/$$

იგივე გვექნება დანარჩენი ორი კომპონენტისათვისაც. ამრიგად, $A_i(\tau_{23},\tau_{31},\tau_{12})$ მართლაც წარმოადგენს ვექტორს. ამ ვექტორს უწოდებენ τ_{ik} ანტისიმეტრიული ტენზორის დუალურ ვექტორს.

ავიღოთ კერძო სახის მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი $\tau_{ik}=a_ib_k-a_kb_i$. მისი დუალური ვექტორი იქნება

$$\begin{aligned}A_1&=a_2b_3-a_3b_2,\\A_2&=a_3b_1-a_1b_3,\\A_3&=a_1b_2-a_2b_1,\end{aligned} \qquad /6,8/$$

რომელიც წარმოადგენს $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ვექტორულ ნამრავლს $\vec{A}=[\vec{a},\vec{b}]$.

ზოგად შემთხვევაში ტენზორი არც სიმეტრიულია და არც ანტისიმეტრიული, მაგრამ ნებისმიერი მეორე რანგის ტენზორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ტენზორების ჯამი.

$$T_{ik}=\frac{1}{2}(T_{ik}+T_{ki})+\frac{1}{2}(T_{ik}-T_{ki}). \qquad /6,9/$$

პირველი წევრი:

$$M_{ik}=\frac{1}{2}(T_{ik}+T_{ki}) \qquad /6,10/$$

წარმოადგენს სიმეტრიულ ტენზორს, რადგანაც $M_{ik}=M_{ki}$, მეორე წევრი კი

$$N_{ik}=\frac{1}{2}(T_{ik}-T_{ki}) \qquad /6,11/$$

ანტისიმეტრიულია, რადგან $N_{ik}=-N_{ki}$.

ტენზორის სიმეტრიის ცნება შეიძლება განზოგადდეს ნებისმიერი რანგის ტენზორისათვის /გარდა ნულოვანი და პირველი რანგის ტენზორებისა!/. ამ შემთხვევაში, ტენზორის სიმეტრია და ანტისიმეტრია განიხილება ნებისმიერ ინდექსთა წყვილის მიმართ. ასე მაგალითად, J_{ikl} ტენზორის ანტისიმეტრიულობა ყველა ინდექსის მიმართ ნიშნავს, რომ $J_{ikl}=-J_{kil}=-J_{lki}=-J_{ilk}$ და ა.შ. შესაძლებელია, რომ ტენზორი ზოგიერთი ინდექსის მიმართ ანტისიმეტრიული იყოს, ზოგიერთის მიმართ კი სიმეტრიული. ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ასეთი ტენზორი იგივურად ნულის ტოლი იქნება. მართლაც, ავიღოთ ისეთი A_{ikl} მესამე რანგის ტენზორი, რომელიც ანტისიმეტრიულია I და II ინდექსების მიმართ, დანარჩენი ინდექსების მიმართ კი- სიმეტრიული. მაშინ ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას:

$$A_{ikl}=-A_{kil}=-A_{lik}=-A_{lki}=-A_{ikl}, \qquad /6,12/$$

საიდანაც ჩანს, რომ $A_{ikl}\equiv 0$.

ვაჩვენოთ, რომ M_{ik} სიმეტრიული და N_{ik} ანტისიმეტრიული ტენზორების გამრავლებით და ორჯერ დაჯამებით მიიღება ნული. მართლაც, ორმაგ ჯამში მოვახდინოთ $i \rightleftarrows k$ შეცვლა:

$$\sum_{i,k} M_{ik}N_{ik}=\sum_{i,k} M_{ki}N_{ki}. \qquad /6,13/$$

ახლა გავითვალისწინოთ, რომ $M_{ki}=M_{ik}$ და $N_{ki}=-N_{ik}$, მაშინ:

$$\sum_{i,k} M_{ik} N_{ik} = -\sum_{i,k} M_{ik} N_{ik}, \qquad /6,14/$$

საიდანაც

$$\sum_{i,k} M_{ik} N_{ik} = 0. \qquad /6,15/$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ტენზორების სიმეტრიის თვისება ინვარიანტულია კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის მიმართ. ე.ი. თუ ტენზორი სიმეტრიულია /ანტისიმეტრიულია/ ერთ რომელიმე კოორდინატთა სისტემაში, იგი სიმეტრიული /ანტისიმეტრიული/ იქნება ნებისმიერ სხვა სისტემაშიც. განვიხილოთ მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი $\tau_{ik}=-\tau_{ki}$ და დავწეროთ გარდაქმნის კანონები როგორც τ_{ik}, ისე τ_{ki} ტენზორებისათვის:

$$\tau'_{ik} = \sum_{m,n} a_{im} a_{kn} \tau_{mn}, \qquad /6,16/$$

$$\tau'_{ki} = \sum_{m,n} a_{kn} a_{im} \tau_{nm}. \qquad /6,17/$$

ამ ტოლობების შეკრებით მივიღებთ

$$\tau'_{ik} + \tau'_{ki} = \sum_{m,n} a_{im} a_{kn} (\tau_{mn} + \tau_{nm}). \qquad /6,18/$$

მაგრამ პირობის თანახმად, უშტრიხო სისტემაში $\tau_{mn}=-\tau_{nm}$, ამიტომ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე ნულია, რის გამოც ნულის ტოლი იქნება მარცხენა მხარეც, ე.ი. შტრიხიან სისტემაშიაც $\tau'_{ik}=-\tau'_{ki}$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა. ზუსტად ასევე დამტკიცდება ინვარიანტობა სიმეტრიული ტენზორისათვისაც. ✓

2. <u>პოლარობა</u>. ტენზორების სხვა საინტერესო თვისება არის პოლარობა. ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ წრფივ გარდაქმნებში სისტემის მობრუნების გარდა შედის კოორდინატთა ღერძების ინვერსია /სარკისებური არეკვლა სათავის მიმართ/:

$$x_i' = -\sum_{k=1}^{3} \delta_{ik} x_k, \qquad /6,19/$$

საიდანაც ვხედავთ, რომ ინვერსიის დროს გარდაქმნის მატრიცის ელემენტებს აქვთ მარტივი სახე:

$$a_{ik} = -\delta_{ik} . \qquad /6,20/$$

გამოვარკვიოთ, როგორი კანონით გარდაიქმნება ნებისმიერი რანგის ტენზორი ინვერსიის ოპერაციის დროს. ვთქვათ, გვაქვს n რანგის ტენზორი, მაშინ მისთვის გვექნება შემდეგი წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნა:

$$\tau'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_n k_n} \tau_{k_1 k_2 \dots k_n}, \qquad /6,21/$$

სადაც $\tau'_{i_1 i_2 \dots i_n}$ არის ტენზორი ინვერსიის შედეგად მიღებულ სისტემაში. /6,20/ ფორმულის მიხედვით ინვერსიის დროს

$$a_{i_1 k_1} = -\delta_{i_1 k_1}, a_{i_2 k_2} = -\delta_{i_2 k_2}, \dots a_{i_n k_n} = -\delta_{i_n k_n}, \qquad /6,22/$$

და ელემენტების ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ /6,21/ განმარტებაში და ყველა δ_{ik}-თი მოვახდენთ ფილტრაციას, მივიღებთ

$$\tau'_{i_1 i_2 \dots i_n} = (-1)^n \tau_{i_1 i_2 \dots i_n} . \qquad /6,23/$$

ამგვარად, ინვერსიის ოპერაციის მიმართ ტენზორები ორ კლასად იყოფა. ერთია ლუწი რანგის ტენზორები, ისინი ინვერსიის დროს ნიშანს არ იცვლიან და მეორე- კენტი რანგის ტენზორები, რომლებიც ინვერსიის დროს ნიშანს იცვლიან. ასეთ ტენზორებს ნამდვილ ან პოლარულ ტენზორებს უწოდებენ. ამგვარად, ტენზორს ეწოდება პოლარული, როცა:

$\tau'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \tau_{i_1 i_2 \dots i_n}$, ლუწი რანგის შემთხვევაში; /6,24/

$\tau'_{i_1 i_2 \dots i_n} = -\tau_{i_1 i_2 \dots i_n}$, კენტი რანგის შემთხვევაში

კერძოდ, პირველი რანგის ტენზორს, ე.ი. ვექტორს, ეწოდება ნამდვილი ან პოლარული, როცა ინვერსიის დროს მისი კომპონენტები ნიშანს იცვლიან: $A_i' = -A_i$, ე.ი. ინვერსიის დროს ისინი ისე იქცევიან, როგორც წერტილის კოორდინატები. შესაბამისად, h-რანგის ტენზორი პოლარულია, როცა ინვერსიის დროს იგი ისე იქცევა, როგორც h-პოლარული ვექტორის ნამრავლი. ვთქვათ, გვაქვს ორი პოლარული ვექტორი A_i და B_i. შევადგინოთ პირდაპირი ნამრავლი, მივიღებთ $T_{ik}=A_i B_k$ ტენზორს. რადგან A_i და B_k ნამდვილი ვექტორებია, ამიტომ ინვერსიისას ისინი ნიშანს შეიცვლიან და შედეგად მივიღებთ $T_{ik}' = T_{ik}$ /6,23/-ის თანახმად, ეს ნიშნავს, რომ T_{ik}-ც ნამდვილი ტენზორი იქნება. ამ ტენზორის დაკვეცით მივიღებთ $\sum_i T_{ii} = (\vec{A},\vec{B})$ სკალარულ ნამრავლს, რომელიც ინვერსიის დროს ნიშანს არ შეიცვლის: $(\vec{A},\vec{B})' = (\vec{A},\vec{B})$. მაშასადამე, ორი პოლარული ვექტორის სკალარული ნამრავლი არ იცვლება არც კოორდინატთა სისტემის მობრუნების დროს და არც ინვერსიისას. ასეთ სიდიდეებს ნამდვილ სკალარებს უწოდებენ.

ფიზიკაში ხშირად გვხვდება "შედგენილი ვექტორები", რომელთა კომპონენტები ინვერსიის დროს ნიშანს არ იცვლიან, ე.ი. $A_i' = A_i$. ასეთია, მაგალითად, ორი ნამდვილი /პოლარული/ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი $[\vec{a},\vec{b}]$ მართლაც, ამ ვექტორის კომპონენტებს აქვთ $a_i b_k - a_k b_i$ სახე და, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ პოლარულებია, ე.ი. $a_i' = -a_i$, $b_i' = -b_i$, მაშინ $(a_i b_k - a_k b_i)' = a_i b_k - a_k b_i$ მაშასადამე, ვექტორული ნამრავლის კომპონენტებმა ინვერსიის შემთხვევაში ნიშანი არ შეიცვალეს. ვექტორებს, რომელთა კომპონენტები ინვერსიის დროს ნიშანს არ იცვლიან ფსევდო /ცრუ/ ვექტორებს, ან აქსიალურ ვექ-

ტორებს უწოდებენ.

რადგან ჩვენ დაგვჭირდა აქსიალური ვექტორების შემოტანა, რომლებსაც ინვერსიის ოპერაციის მიმართ ნამდვილი ვექტორებისაგან განსხვავებული თვისებები აქვთ, ამიტომ, ბუნებრივია, შემოვიტანოთ ფსევდო- ან აქსიალური ტენზორების ცნებაც.

აქსიალურს ვუწოდებთ ტენზორს, რომელიც კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას ისევე გარდაიქმნება, როგორც პოლარული ტენზორი, ხოლო ინვერსიისას შემდეგი კანონით:

$$\tau'_{i_1 i_2 \dots i_n} = -\tau_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad \text{ლუწი რანგის შემთხვევაში;}$$
$$\tau'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \tau_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad \text{კენტი რანგის შემთხვევაში.} \qquad /6,25/$$

მაგალითად, მეორე რანგის ტენზორი აქსიალურია, როცა არეკვლისას $T'_{ik} = -T_{ik}$; მესამე რანგის ტენზორის შემთხვევაში კი $\chi'_{ikl} = \chi_{ikl}$ და ა.შ. ცხადია, ეს განმარტება შეიცავს აქსიალური ვექტორის $A_i' = A_i$ განმარტებასაც.

დავუშვათ, რომ A_i და B_K ვექტორიდან ერთი აქსიალურია, მეორე პოლარული, მაშინ $T_{ik} = A_i B_K$ ტენზორი იქნება აქსიალური, რადგანაც კოორდინატთა ღერძების არეკვლისას $T'_{ik} = -T_{ik}$ ამ ტენზორის შპური $\sum_i T_{ii} = (\vec{A}, \vec{B})$ კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას არ შეიცვლება, არეკვლისას კი ნიშანს შეიცვლის: $(\vec{A}, \vec{B})' = -(\vec{A}, \vec{B})$.

სიდიდეებს, რომლებიც კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას არ იცვლებიან, ინვერსიისას კი ნიშანს იცვლიან, ფსევდოსკალარებს უწოდებენ. ამგვარად, სკალარული სიდიდეებიც /ნულოვანი რანგის ტენზორები/ ორ კლასად გაიყო - ნამდვილ და ფსევდოსკალარებად.

ცხადია, რომ რამდენიმე პოლარული ვექტორის პირდაპირი ნამრავლი იქნება პოლარული ტენზორი, ხოლო აქსიალური ვექტორების

პირდაპირი ნამრავლი – პოლარული, თუ ვექტორთა რიცხვი ლუწია და-
აქსიალური, როცა ვექტორთა რიცხვი კენტია. ასევე ცხადია, რომ
პოლარული ტენზორის დაქვეითებით მიიღება პოლარული ტენზორი,
აქსიალური ტენზორის დაქვეითებით კი – აქსიალური.

თუ გავიხსენებთ, რომ გარდაქმნის მატრიცის შესაბამისი
$\Delta(a)$ დეტერმინანტი მობრუნებისათვის ურის $+1$, ხოლო ინვერ-
სიის შემთხვევაში ურის -1-ს, აქსიალური ტენზორისათვის შე-
გვიძლია დავწეროთ გარდაქმნა, რომელიც სწორად ასახავს ტენზო-
რების ყოფაქცევას, როგორც კოორდინატთა სისტემის მობრუნების,
ისე ინვერსიის შემთხვევაში. დავიწყოთ ვექტორით. ცხადია, რომ
აქსიალური ვექტორისათვის შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი გარდა-
ქმნის კანონი:

$$A_i' = \Delta(a) \sum_{k=1}^{3} a_{ik} A_k . \qquad /6,26/$$

მობრუნების დროს $\Delta(a) = +1$ და ეს კანონი ემთხვევა ვექ-
ტორის გარდაქმნის კანონს; როცა ვიხილავთ ინვერსიას, მაშინ
$\Delta(a) = -1$ და რადგან $a_{ik} = -\delta_{ik}$, ამიტომ /6,26/
მოგვცემს აქსიალური ვექტორის განმარტებას $A_i' = A_i$

სრულიად ანალოგიურად მეორე რანგის აქსიალური ტენზორისა-
თვის გვექნება გარდაქმნის კანონი

$$T_{ik}' = \Delta(a) \sum_{m,n} a_{im} a_{kn} T_{mn} , \qquad /6,27/$$

რომელიც ინვერსიისათვის $(\Delta(a) = -1)$ მოგვცემს $T_{ik}' = -T_{ik}$.
სრულიად ანალოგიურად დაიწერება გარდაქმნის კანონი n-ური
რანგის ფსევდოტენზორისათვის; სახელდობრ,

$$\tau'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \Delta(a) \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_n k_n} \tau_{k_1 k_2 \dots k_n} , \qquad /6,28/$$

რომელიც არეკვლისათვის მიიღებს $(\Delta(a)=-1)$

$$\tau'_{i_1 i_2 \dots i_n} = (-1)^{n+1}\tau_{i_1 i_2 \dots i_n}. \qquad /6,29/$$

ცხადია, ეს ფორმულა ემთხვევა /6,25/ განმარტებას.

ბოლოს აღვნიშნოთ, რომ, როცა გვაქვს ტენზორული ტოლობა, მაშინ ტოლობის ორივე მხარეში ტენზორების პოლარობაც ერთნაირი უნდა იყოს. მაშასადამე, შეიძლება მხოლოდ და მხოლოდ ერთნაირი რანგის, სიმეტრიისა და პოლარობის ტენზორების გატოლება.

§ 7. მეორე და მესამე რანგის ერთეულოვანი ტენზორები

მეორე და მესამე რანგის ერთეულოვანი ტენზორები დიდ როლს ასრულებენ პრაქტიკული გამოთვლების დროს, ამიტომ მათ თვისებებს დაწვრილებით განვიხილავთ.

<u>1. მეორე რანგის ერთეულოვანი სიმეტრიული პოლარული ტენზორი</u>. ვაჩვენოთ, რომ ზემოთ შემოტანილი კრონეკერის δ_{ik} სიმბოლო შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მეორე რანგის პოლარული ერთეულოვანი ტენზორი. იგი ერთეულოვანია, რამდენადაც მისი გამრავლება ვექტორზე ვექტორის სიდიდეს არ ცვლის. ეს ჩანს δ_{ik} სიმბოლოს ფილტრაციის თვისებიდან

$$\sum_{k=1}^{3}\delta_{ik}A_k = A_i. \qquad /7,1/$$

განმარტების ძალით, δ_{ik}-ს აქვს მხოლოდ დიაგონალური ელემენტები, რომლებიც ერთის ტოლია

$$\delta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad /7,2/$$

განმარტებიდანვე გამომდინარეობს, რომ δ_{ik} არის ინვარიანტ-

ტული კოორდინატთა სისტემის არჩევის მიმართ, ე.ი. $\delta'_{ik} = \delta_{ik}$. თუ δ_{ik} მართლაც მეორე რანგის ტენზორია, მაშინ იგი უნდა ემორჩილებოდეს შემდეგი გარდაქმნის კანონს:

$$\delta'_{ik} = \sum_{m,n} a_{im} a_{kn} \delta_{mn} \cdot \qquad /7,3/$$

ფილტრაციის თვისების გამოყენებით მივიღებთ

$$\delta'_{ik} = \sum_{m=1}^{3} a_{im} a_{km} \cdot \qquad /7,4/$$

მეორე მხრივ, a_{ik} კოეფიციენტების ორთონორმირების პირობა გვექნება $\delta'_{ik} = \delta_{ik}$ ტოლობა, რაც ამტკიცებს, რომ δ_{ik} მართლაც მეორე რანგის ტენზორია. რადგან $\delta'_{ik} = \delta_{ik}$, ამიტომ δ_{ik} ტენზორი არ შეიცვლება არც არეკვლისას, ე.ი. δ_{ik} ყოფილა პოლარული ტენზორი. გარდა ამისა, განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $\delta_{ik} = \delta_{ki}$, ე.ი. იგი სიმეტრიული ტენზორია. ამგვარად, თუ შევკრებთ ყველა ზემოთქმულს, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ δ_{ik} არის მეორე რანგის სიმეტრიული, პოლარული, ინვარიანტული, ერთეულოვანი ტენზორი.

ავიღოთ სამი ერთეულოვანი δ_{ik} ტენზორის ნამრავლი $\delta_{ik}\delta_{mn}\delta_{ls}$. გვექნება მეექვსე რანგის ტენზორი. მისი სამჯერ დაკეცვებით მივიღებთ სკალარს, რომელიც ტოლი იქნება

$$\sum_{ikl} \delta_{ik}\delta_{kn}\delta_{ni} = \sum_{i,k} \delta_{ik}\delta_{ki} = \sum_{i=1}^{3} \delta_{ii} = 3, \qquad /7,5/$$

რამდენადაც

$$\sum_{i=1}^{3} \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3. \qquad /7,6/$$

δ_{ik} ტენზორის საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ მოცემული T_{ik} მეორე რანგის ტენზორის შებრუნებული ტენზორი T^{-1}_{ik}. სახელდობრ, T^{-1}_{ik} ტენზორს ეწოდება T_{ik} - ს შებრუნებული, თუ მათი სკალარული ნამრავლი ერთეულოვანი ტენზორის ტოლია:

$$\sum_k T_{ik} T^{-1}_{kn} = \sum_k T^{-1}_{ik} T_{kn} = \delta_{in}. \qquad /7,7/$$

ამავე დროს აღვნიშნოთ, რომ როგორც შემდეგში დავინახავთ, მეორე რანგის ტენზორს მაშინ აქვს შებრუნებული, როცა ტენზორის კომპონენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი ნულის ტოლი არ არის[1].

/7,7/ ტოლობის მარჯვენა მხარე, ე.ი. δ_{in} სიმეტრიული, სკალარული ტენზორია, ამიტომ ცხადია, რომ T_{ik} და T^{-1}_{ik} ტენზორებს ექნებათ ერთნაირი სიმეტრია და სკალარობა.[2]

ხშირად ხელსაყრელია ვექტორის კომპონენტებისაგან ისეთი მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორის შედგენა, რომლის შპური ნულის ტოლია. ამგვარ ტენზორს დამოუკიდებელი ექნება მხოლოდ ხუთი კომპონენტი. ასეთი იქნება, მაგალითად, შემდეგი ტენზორი:

$$Q_{ik} = A_i A_k + A_k A_i - \frac{2}{3}\delta_{ik} \sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha^2. \qquad /7,8/$$

მართლაც, $Q_{ik} = Q_{ki}$, ხოლო $SpQ = 0$, რადგან $Sp\delta = 3$. საზოგადოდ, ნებისმიერი მეორე რანგის ტენზორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ე.წ. მარტივ ნაწილებად:

$$T_{ik} = \frac{1}{3}\delta_{ik}\Big(\sum_n T_{nn}\Big) + \Big[\frac{T_{ik}+T_{ki}}{2} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\Big(\sum_n T_{nn}\Big)\Big] + \frac{T_{ik}-T_{ki}}{2}. \qquad /7,9/$$

---

1 საჭიროა გავხსნოთ, რომ $T^{-1}_{ik} \neq \frac{1}{T_{ik}}$, არამედ T^{-1}_{ik} უნდა გავიგოთ, როგორც $(T^{-1})_{ik}$.

2. როცა $T_{ik} = \lambda_k \delta_{ik}$ დიაგონალურია, მაშინ $T^{-1}_{ik} = \frac{1}{\lambda_k}\delta_{ik}$ აგრეთვე დიაგონალურია.

პირველი წევრი არის სკალარისა და ერთეულოვანი δ_{ik} ტენზორის ნამრავლი, ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება - მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორია ნულოვანი შპურით, ხოლო მესამე წევრი წარმოადგენს მეორე რანგის ანტისიმეტრიულ ტენზორს.

შევნიშნოთ, რომ ფიზიკაში ხშირად გამოიყენება მეორე რანგის ნულის ტოლი შპურის მქონე სიმეტრიული ტენზორები. ასე მაგალითად, სისტემის ელექტრული კვადრუპოლური მომენტის ტენზორი გამოისახება ფორმულით

$$\mathcal{D}_{ik}=\sum e(3x_i x_k-\delta_{ik}\vec{r}^{\,2}), \qquad /7.8'/$$

სადაც აჯამვა ხდება ყველა დამუხტული ნაწილაკის მიხედვით /შესაბამისი ინდექსი წერის გამარტივების მიზნით ჩამოშვებულია!/, e არის ნაწილაკის მუხტი, $\vec{r}$ კი მისი რადიუსვექტორი.

2. <u>მესამე რანგის სრულიად ანტისიმეტრიული აქსიალური ერთეულოვანი ტენზორი.</u> ახლა განვიხილოთ ტენზორი, რომელიც ანტისიმეტრიულია ყველა ინდექსის წყვილის მიმართ. სამივრცეში ასეთი ტენზორი არ შეიძლება სამზე მეტი რანგის იყოს. მართლაც, ინდექსების რაოდენობა სამზე მეტი რომ იყოს, რადგან თითოეული ინდექსი ღებულობს 1,2,3 მნიშვნელობას, ამიტომ, მაგალითად, მეოთხე ინდექსი დაემთხვეოდა წინა რომელიმე ინდექსის მნიშვნელობას და ტენზორი, ანტისიმეტრიულობის გამო, ნულის ტოლი იქნებოდა. რაც შეეხება მესამე რანგის ყველა ინდექსის მიმართ ანტისიმეტრიულ ტენზორს ε_{ikl}, მას ოცდაშვიდი კომპონენტიდან ნულისაგან განსხვავებული ექნება მხოლოდ ის ექვსი კომპონენტი, რომელთა ინდექსები i,k,l განსხვავდება ერთმანეთისაგან. ამასთან,

$\varepsilon_{ikl} = +1$, თუ i,k,l გადანაცვლება ლუწია,
$\varepsilon_{ikl} = 0$, თუ რომელიმე ორი ინდექსი ტოლია, /7,9/
$\varepsilon_{ikl} = -1$, თუ i,k,l გადანაცვლება კენტია.

ამრიგად, გვექნება

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \qquad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1. \qquad /7,10/$$

დანარჩენი ოცდაერთი კომპონენტი ნულის ტოლი იქნება. ამასთან,

$$\sum_{ikl} \varepsilon_{ikl}^2 = 6. \qquad /7,11/$$

ცხადია, რომ ε_{ikl} ყველა სისტემაში ერთნაირად განიმარტება, ამიტომ გვექნება $\varepsilon'_{ikl} = \varepsilon_{ikl}$. ვაჩვენოთ, რომ ε_{ikl} მართლაც ტენზორია. ამისათვის იგი უნდა აკმაყოფილებდეს გარდაქმნის შემდეგ კანონს:

$$\varepsilon'_{ikl} = \sum_{mnj} a_{im} a_{kn} a_{lj} \varepsilon_{mnj}. \qquad /7,12/$$

ამ ტოლობის შემოწმება ადვილია უშუალოდ a_{ik} ელემენტების თვისებების გამოყენებით. რამდენადაც ε_{ikl} ანტისიმეტრიული ტენზორია, იმდენად /7,12/ ტოლობის შემოწმება საკმარისია ერთი რომელიმე კომპონენტისათვის, მაგალითად, ε_{123} -ისათვის. გვექნება

$$\varepsilon'_{123} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{33}) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1 = \varepsilon_{123}, \qquad /7,13/$$

ე.ი. $\varepsilon'_{123} = \varepsilon_{123}$ ანალოგიურ ტოლობებს მივიღებთ დანარჩენი ხუთი კომპონენტისათვის და, მაშასადამე, /7,12/-დან გამომდინარე $\underline{\varepsilon'_{ikl} = \varepsilon_{ikl}}$. ამგვარად, ε_{ikl} მართლაც მესამე რანგის ტენზორს წარმოადგენს. რადგან ინვერსიის დროსაც $\varepsilon'_{ikl} = \varepsilon_{ikl}$, ამიტომ ეს ტენზორი ყოფილა აქსიალური; ამგვარად,

ε_{ikl} არის მესამე რანგის, სრულიად ანტისიმეტრიული, ერთეულოვანი, აქსიალური ტენზორი. ამავე დროს, ეს ტენზორი არის ინვარიანტული ტენზორი. ε_{ikl} ტენზორს ლევი-ჩივიტას სიმბოლოსაც უწოდებენ.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ნებისმიერი მესამე რანგის სრულიად ანტისიმეტრიული ტენზორი τ_{ikl} , ე.ი. ტენზორი, რომელიც ნიშანს იცვლის ნებისმიერი ორი ინდექსის გადასმისას, პროპორციულია ε_{ikl} ტენზორისა. აღვნიშნოთ $\tau_{123}=a$, მაშინ, მაგალითად, $\tau_{321}=-\tau_{123}=-a$ და ა.შ. ექვსი ნულისაგან განსხვავებული კომპონენტიდან სამი იქნება a-ს ტოლი, სამი კი $-a$-სი. ასე რომ,

$$\tau_{ikl}=a\,\varepsilon_{ikl}. \qquad /7,14/$$

გავამრავლოთ ეს ტოლობა τ_{ikl} ტენზორზე და ავჯამოთ ყველა ინდექსით, მივიღებთ:

$$\sum_{ikl}\tau_{ikl}^2=a\sum_{ikl}\tau_{ikl}\varepsilon_{ikl}=a^2\sum_{ikl}\varepsilon_{ikl}^2=6a^2. \qquad /7,15/$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარე სკალარია, ამიტომ a^2-იც სკალარი იქნება, ე.ი. კოორდინატთა სისტემის მობრუნების დროს $a'^2=a^2$ საიდანაც $a'=\pm a$

ახლა შევისწავლოთ ლევი-ჩივიტას სიმბოლოს თვისებები. განვიხილოთ მეექვსე რანგის ტენზორი $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{mns}$ და დავაქვეითოთ იგი ორჯერ. მივიღებთ მეორე რანგის ტენზორს $\sum_{k,l}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{mkl}$. ცხადია, რომ ეს ტენზორი, როგორც ორი აქსიალური ტენზორის ნამრავლი, იქნება პოლარული. ამასთან, იგი იქნება სიმეტრიული, რადგან ნიშანს არ იცვლის i და m -ის გადასმის დროს. ადვილი მისახვედრია, რომ ეს ტენზორი პროპორციული უნდა იყოს მეორე რანგის ერთეულოვანი სიმეტრიული და პოლარული δ_{im} ტენ-

ბორისა, ე.ი.

$$\sum_{k,l} \varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{mkl} = C\,\delta_{im}. \qquad /7,16/$$

პროპორციულობის C რიცხვის განსასაზღვრავად /7,16/ დავაკვეცოთ i და m ინდექსების მიმართ; მივიღებთ

$$\sum_{ikl} \varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{ikl} = 3C, \qquad /7,17/$$

რომელიც /7,11/-ის გათვალისწინებით მიგვიყვანს $C=2$. ამგვარად, გვექნება შემდეგ მნიშვნელოვანი დამოკიდებულება

$$\sum_{k,l} \varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{mkl} = 2\delta_{im}. \qquad /7,18/$$

ახლა განვიხილოთ სიდიდე $\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{imn}$. ეს არის მეოთხე რანგის ტენზორი. ცხადია, რომ ეს ტენზორი იქნება პოლარული. გარდა ამისა, იგი იქნება ანტისიმეტრიული k,l და m,n ინდექსების მიმართ; ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{imn} = A\left(\delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}\right). \qquad /7,19/$$

განვსაზღვროთ A კოეფიციენტი. /7,19/ დავაკვეცოთ ორჯერ. ავიღოთ $k=m$ და $l=n$. მარცხენა მხარეში გვექნება ექვსი, ამიტომ

$$\begin{aligned} 6 &= A\Big(\sum_{k}\delta_{kk}\sum_{l}\delta_{ll} - \sum_{m,l}\delta_{ml}\delta_{lm}\Big) = \\ &= A\Big(3\cdot 3 - \sum_{m}\delta_{mm}\Big) = 6A, \end{aligned} \qquad /7,20/$$

ე.ი. $A=1$ და, მაშასადამე, /7,19/ მიიღებს სახეს

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{imn} = \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}. \qquad /7,21/$$

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ $\varepsilon_{ik\ell}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ მეექვსე რანგის ტენზორიც შეგვიძლია გამოვსახოთ კრონეკერის სიმბოლოებით. მართლაც, ეს ნამრავლი არის მეექვსე რანგის პოლარული ტენზორი, რომელიც ანტისიმეტრიულია როგორც i,k,ℓ, ისე μ,ν,λ ინდექსების მიმართ, ამიტომ იგი უნდა გამოიხატოს სამ-სამი კრონეკერის სიმბოლოს ნამრავლის წრფივი კომბინაციებით. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ამ გაშლას აქვს შემდეგი სახე:[1]

$$\varepsilon_{ik\ell}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}=\delta_{i\mu}\delta_{k\nu}\delta_{\ell\lambda}+\delta_{i\nu}\delta_{k\lambda}\delta_{\ell\mu}+\delta_{i\lambda}\delta_{k\mu}\delta_{\ell\nu}-$$
$$-\delta_{i\mu}\delta_{k\lambda}\delta_{\ell\nu}-\delta_{i\lambda}\delta_{k\nu}\delta_{\ell\mu}-\delta_{i\nu}\delta_{k\mu}\delta_{\ell\lambda}. \qquad /7,22/$$

ამ გამოსახულების ერთხელ, ორჯერ და სამჯერ დაკვეცებით მივიღებთ /7,21/, /7,18/ და /7,11/ ფორმულებს.

$\varepsilon_{ik\ell}$ ტენზორი ხშირად გამოიყენება მთელი რიგი გამოსახულებების კომპაქტური ჩაწერისათვის. ასე მაგალითად, დავამტკიცოთ, რომ მეორე რანგის $T_{ik}=-T_{ki}$ ანტისიმეტრიული ტენზორის დუალური ვექტორი $A_i(T_{23},T_{31},T_{12})$ შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$A_i=\frac{1}{2}\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}T_{jk}. \qquad /7,23/$$

ვიპოვოთ, მაგალითად, $A_1=T_{23}$; გვექნება

$$A_1=\frac{1}{2}\left\{\varepsilon_{123}T_{23}+\varepsilon_{132}T_{32}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{T_{23}-T_{32}\right\}=T_{23} \qquad /7,24/$$

---

1. დამახსოვრების მიზნით ამ ფორმულის ჩაწერა ხელსაყრელია დეტერმინანტის სახით:

$$\varepsilon_{ik\ell}\varepsilon_{\mu\nu\lambda}=\begin{vmatrix}\delta_{i\mu} & \delta_{i\nu} & \delta_{i\lambda}\\ \delta_{k\mu} & \delta_{k\nu} & \delta_{k\lambda}\\ \delta_{\ell\mu} & \delta_{\ell\nu} & \delta_{\ell\lambda}\end{vmatrix}.$$

საზოგადოდ, სამგანზომილებიან სივრცეში $n\le 3$ რანგის ანტისიმეტრიულ ტენზორს შეგვიძლია შევუსაბამოთ /$3-n$/ რანგის დუალური ტენზორი. როცა $n=1$, მაშინ $3-n=2$, ე.ი. ვექტორის დუალური იქნება მეორე რანგის ანტისიმეტრიული T_{ik} ტენზორი. გვექნება:

$$T_{jk}=\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ijk}A_i. \qquad /7,24'/$$

ეს ტოლობა მიიღება /7,23/-დან მისი ε_{ips} -ზე გამრავლებით, აჯამვით i -თი და /7,21/ თვისების გამოყენებით. მართლაც,

$$\sum_i \varepsilon_{ips}A_i=\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j,k}\varepsilon_{ips}\varepsilon_{ijk}T_{jk}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{j,k}\left(\delta_{pj}\delta_{sk}-\delta_{pk}\delta_{sj}\right)T_{jk}=\frac{1}{2}\left(T_{ps}-T_{sp}\right)=T_{ps},$$

რაც ნამდვილად ემთხვევა /7,24'/ ტოლობას.

როცა $n=2$, მაშინ მივიღებთ ჩვენს მიერ ადრე განხილულ /7,23/ შემთხვევას, ხოლო როცა $n=3$, მაშინ მესამე რანგის τ_{ikl} ანტისიმეტრიული ტენზორის დუალური ტენზორი იქნება ნულოვანი რანგისა, ე.ი. სკალარი. ამ სკალარს ექნება შემდეგი გამოსახულება $C=\varepsilon_{ikl}\tau_{ikl}$. როცა τ_{ikl} ნამდვილი ტენზორია, მაშინ მისი დუალური ტენზორი ფსევდოსკალარია, ხოლო როცა τ_{ikl} აქსიალურია, მაშინ C იქნება ნამდვილი სკალარი.

ე. <u>დეტერმინანტები.</u> ადვილი საჩვენებელია, რომ მესამე რანგის დეტერმინანტი შეგვიძლია გამოვხატოთ ε_{ikl} ტენზორის საშუალებით. მართლაც b_{ik} ელემენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი ტოლია

$$\sum_{ikl}(\pm)\, b_{i1}b_{k2}b_{l3} \qquad /7,25/$$

ჯამისა, სადაც i,k,l ინდექსები ადგენენ 1,2,3 რიცხვების გა-

დანაცვლებას, ხოლო ნიშანი „+" და „−" აიღება იმისდა მიხედვით, გადანაცვლება ლუწია, თუ კენტი; ამიტომ, ცხადია, რომ ±1 შეგვიძლია შევცვალოთ ε_{ikl} სიმბოლოთი; ამგვარად,

$$\Delta(b)=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}=\sum_{ikl}\varepsilon_{ikl}\, b_{i1} b_{k2} b_{l3}. \qquad /7,26/$$

რადგან დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ იცვლება სტრიქონების სვეტებით შეცვლით, ამიტომ /7,26 / ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\Delta(b)=\sum_{ikl}\varepsilon_{ikl}\, b_{1i} b_{2k} b_{3l}. \qquad /7,27/$$

ცხადია, რომ თუ a_{ik} მიმართულების კოსინუსებია, მაშინ დაცული იქნება შემდეგი ტოლობა:

$$\sum_{mns} a_{im} a_{kn} a_{ls}\varepsilon_{mns}=\varepsilon_{ikl}. \qquad /7,28/$$

ამ ფორმულის სამართლიანობა აშკარაა, რადგან $\varepsilon'_{ikl}=\varepsilon_{ikl}$ და /7,28/ წარმოადგენს ε_{ikl} მესამე რანგის ტენზორის განმარტებას. როცა $i=1, K=2$ და $l=3$, მაშინ /7,26/ განმარტებით მივიღებთ

$$\Delta(a)=\sum_{ikl}\varepsilon_{ikl}\, a_{i1} a_{k2} a_{l3}=1, \qquad /7,29/$$

ე.ი. გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტი მობრუნების შემთხვევაში + 1-ის ტოლია.

ახლა ვაჩვენოთ როგორ გვეხმარება ტენზორები დეტერმინანტების თვისებების შესწავლასა და წრფივი განტოლებათა სისტემის ამოხსნაში. განვიხილოთ მეორე რანგის F_{ik} ტენზორი და შევადგი-

ნით შემდეგი მესამე რანგის ტენზორი:

$$\tau_{\alpha\beta\gamma}=\sum_{ikl}\varepsilon_{ikl}F_{i\alpha}F_{k\beta}F_{l\gamma}. \qquad /7,30/$$

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ $\tau_{\alpha\beta\gamma}$ არის მესამე რანგის სრულიად ანტისიმეტრიული ტენზორი. მართლაც, მაგალითად,

$$\tau_{\beta\alpha\gamma}=\sum_{ikl}\varepsilon_{ikl}F_{i\beta}F_{k\alpha}F_{l\gamma}=\sum_{ikl}\varepsilon_{kil}F_{k\beta}F_{i\alpha}F_{l\gamma}= \qquad /7,31/$$
$$=-\sum_{ikl}\varepsilon_{ikl}F_{i\alpha}F_{k\beta}F_{l\gamma}=-\tau_{\alpha\beta\gamma}$$

და ა.შ. ჩვენ კი ვიცით, რომ მესამე რანგის სრულიად ანტისიმეტრიული ტენზორი პროპორციულია ლევი-ჩივიტას $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ ერთეულოვანი ტენზორისა, ამიტომ

$$\sum_{ikl}\varepsilon_{ikl}F_{i\alpha}F_{k\beta}F_{l\gamma}=a\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}. \qquad /7,32/$$

ავიღოთ $\alpha=1$, $\beta=2$ და $\gamma=3$, მაშინ დეტერმინანტის ჩაწერის /7,26/ ფორმულის ძალით გვექნება $a=\Delta(F)$, სადაც $\Delta(F)$ არის მესამე რანგის დეტერმინანტი:

$$\Delta(F)=\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}=\sum_{ikl}\varepsilon_{ikl}F_{i1}F_{k2}F_{l3}. \qquad /7,33/$$

ამგვარად, გვექნება მნიშვნელოვანი ფორმულა

$$\sum_{ikl}\varepsilon_{ikl}F_{i\alpha}F_{k\beta}F_{l\gamma}=\Delta(F)\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}. \qquad /7,34/$$

ეს გამოსახულება გადავამრავლოთ $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ ტენზორზე და ავჯამოთ $\alpha\beta\gamma$ ინდექსებით. რადგან $\sum\varepsilon^2_{\alpha\beta\gamma}=3!$, ამიტომ მივიღებთ დეტერმინანტის კიდევ ერთ ჩანაწერებას:

$$\Delta(F)=\frac{1}{3!}\sum_{ikl}\sum_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}F_{i\alpha}F_{k\beta}F_{l\gamma}, \qquad /7,35/$$

ე.ი. /7,33/ განმარტებისაგან განსხვავებით ჩვენ შეგვიძლია დამატებით მოვახდინოთ აჯამვა მეორე ინდექსებითაც, ოღონდ საჭირო იქნება შედეგის $3!$ -ზე გაყოფა. ახლა ვიპოვოთ დეტერმინანტის ნებისმიერი ელემენტის შესაბამისი ალგებრული დამატების ფორმულა. დეტერმინანტი რომ გავშალოთ, მაშინ ყოველი F_{ik} ელემენტი, როგორც მამრავლი, შევა რამდენიმე წევრში, თუ ამ მამრავლს ფრჩხილებს გარეთ გავიტანთ, მაშინ ის, რაც ფრჩხილებში დაგვრჩება წარმოადგენს F_{ik} ელემენტის შესაბამის ალგებრულ დამატებას; აღვნიშნოთ იგი $\Delta_{ik}(F)$ -ით. /7,33/ ფორმულის თანახმად F_{i1} ელემენტის ალგებრული დამატება $\Delta_{i1}(F)$ ტოლი იქნება:

$$\Delta_{i1}(F)=\sum_{k,l}\varepsilon_{ikl}F_{k2}F_{l3}. \qquad /7,36/$$

ეს გამოსახულება გადავწეროთ იგივურად

$$\Delta_{i1}(F)=\sum_{k,l}\varepsilon_{123}\varepsilon_{ikl}F_{k2}F_{l3}= \qquad /7,37/$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k,l}\sum_{m,n}\varepsilon_{1mn}\varepsilon_{ikl}F_{km}F_{ln}.$$

მართლაც, ჯამი m და n -ით შეიცავს ორ წევრს

$$\frac{1}{2}\sum_{k,l}\varepsilon_{123}\varepsilon_{ikl}F_{k2}F_{l3}+\frac{1}{2}\sum_{k,l}\varepsilon_{132}\varepsilon_{ikl}F_{k3}F_{l2}. \qquad /7,38/$$

მეორე წევრში თუ მოვახდენთ $k \rightleftarrows l$ შეცვლას და გავითვალისწინებთ, რომ $\varepsilon_{ikl}=-\varepsilon_{ilk}$, მივიღებთ $\sum_{k,l}\varepsilon_{ikl}F_{k2}F_{l3}$, ე.ი. /7,36/ ფორმულას. მაშასადამე, F_{ij} ელემენტის შესაბამისი ალგებრული დამატება განისაზღვრება ფორმულით:

$$\Delta_{ij}(F)=\frac{1}{2}\sum_{k,m}\sum_{l,n}\varepsilon_{jmn}\varepsilon_{ikl}F_{km}F_{ln}. \qquad /7,39/$$

შევადგინოთ შემდეგი ჯამი:

$$\sum_{i=1}^{3}\Delta_{ij}F_{is}=\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{kl}\sum_{mn}\varepsilon_{jmn}\varepsilon_{ikl}F_{is}F_{km}F_{ln}\,; \qquad /7,40/$$

/7, 34/ ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{3}\Delta_{ij}F_{is}=\frac{1}{2}\sum_{m,n}\Delta(F)\varepsilon_{jmn}\varepsilon_{smn}\,, \qquad /7,41/$$

რომელიც /7,18/ ფორმულის გათვალისწინებით მიგვცემს

$$\sum_{i=1}^{3}F_{is}\Delta_{ij}(F)=\Delta(F)\delta_{js} \qquad /7,42/$$

ეს ფორმულა არის დეტერმინანტის სვეტის ელემენტებად გაშლის ცნობილი გამოსახულება. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ სტრიქონის ელემენტების მიხედვით გაშლისათვის გვექნება:

$$\sum_{i=1}^{3}F_{si}\Delta_{ji}(F)=\Delta(F)\delta_{sj}\,. \qquad /7,43/$$

42
/7,24/ და /7,43/ ფორმულები ასე გადავწეროთ:

$$\sum_{i}F_{is}\frac{\Delta_{ij}(F)}{\Delta(F)}=\sum_{i}F_{si}\frac{\Delta_{ji}(F)}{\Delta(F)}=\delta_{sj}\,. \qquad /7,44/$$

ამასთან, ცხადია, რომ ასეთი გარდაქმნა მაშინ შეიძლება, როცა სისტემის დეტერმინანტი $\Delta(F)\neq 0$. ახლა გავიხსენოთ, თუ როგორ განიმარტება მეორე რანგის F_{ik} ტენზორის მებრუნე -

ბული. ჩვენ გვქონდა შემდეგი ფორმულა:

$$\sum_i F_{si} F^{-1}_{ij} = \sum_i F^{-1}_{si} F_{ij} = \delta_{sj} . \qquad /7,45/$$

/7,44/-დან შედარებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$F^{-1}_{ij} = \frac{\Delta_{ji}(F)}{\Delta(F)} . \qquad /7,46/$$

ამ ფორმულით გამოითვლება შებრუნებული მატრიცის კომპონენტები. თვით მატრიცს ექნება სახე:

$$F^{-1}_{ij} = \frac{1}{\Delta(F)} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix} . \qquad /7,46'/$$

ამგვარად, მეორე რანგის მატრიცს რომ შებრუნებული ჰქონდეს, საჭირო ყოფილა მისი კომპონენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი განსხვავებოდეს ნულისაგან.

ახლა განვიხილოთ წრფივი ერთგვაროვანი სისტემა:

$$\sum_{k=1}^{3} F_{ik} A_k = B_i , \qquad /7,47/$$

სადაც F_{ik} მეორე რანგის მატრიცაა, ხოლო A_i და B_i - ვექტორები. მარჯვენა მხარე /ე.ი. $B_i(B_1,B_2,B_3)$ ვექტორი/ ცნობილია; საჭიროა განისაზღვროს უცნობი $A_i(A_1,A_2,A_3)$ ვექტორის კომპონენტები.

ამოხსნის მიზნით /7,47/ სისტემა მარცხნიდან გავამრავლოთ $F^{-1}_{\ell i}$ შებრუნებულ მატრიცაზე, ავჯამოთ i-თი და გავითვალისწი-

ნით /7,45/ პირობა; გვექნება:

$$\sum_{k} \delta_{\ell k} A_{k} = \sum_{i} F^{-1}_{\ell i} B_{i} , \qquad /7,48/$$

საიდანაც

$$A_{\ell} = \sum_{i} F^{-1}_{\ell i} B_{i} \qquad /7,49/$$

ან, /7,46/ ფორმულის თანახმად, ამონახსნისათვის საბოლოო მი-
ვიღებთ:

$$A_{i} = \frac{\sum_{k} \Delta_{ki}(F) B_{k}}{\Delta(F)} , \qquad /7,50/$$

სადაც $\Delta(F)$ სისტემის დეტერმინანტია. ამასთან ცხადია, რომ იგი ნულისაგან უნდა განსხვავდებოდეს. რადგან მინორი დეტერმინანტთან დაკავშირებულია ფორმულით:

$$\Delta_{ki}(F) = \frac{\partial \Delta(F)}{\partial F_{ki}} , \qquad /7,51/$$

ამიტომ /7,50/ ამონახსნი ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$A_{i} = \frac{1}{\Delta(F)} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial F_{ki}} \left(\Delta(F) \right) B_{k} . \qquad /7,52/$$

როცა განტოლებათა სისტემა ერთგვაროვანია, ე.ი. როცა

$$\sum_{k} F_{ik} A_{k} = 0, \qquad /7,53/$$

მაშინ /7,50/-დან ჩანს, რომ ტრივიალურისაგან განსხვავებული ამონახსნის არსებობისათვის საჭიროა სისტემის დეტერმინანტი $\Delta(F)$ ნულის ტოლი იყოს. ამ შემთხვევაში, /7,43/ ფორმულის ძალით:

$$\sum_{K} F_{iK}\,\Delta_{jK}=0, \qquad /7,54/$$

რომლის /7,53/ სისტემასთან შედარებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$A_K=C\,\Delta_{jK}(F), \qquad j=1,2,3 \qquad /7,55/$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივაა. გაშლილად ეს ამონახსნები ასე შეგვიძლია გამოვსახოთ:

$$A_1=C\Delta_{j1}\,,\quad A_2=C\Delta_{j2}\,,\quad A_3=C\Delta_{j3}\,. \qquad /7,56/$$

ნებისმიერი $j=1,2,3$ მნიშვნელობისათვის /7,56/ ამონახსნები აკმაყოფილებს /7,53/ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას. ავიღოთ, მაგალითად, $j=1$; მაშინ გვექნება

$$\frac{A_1}{\Delta_{11}}=\frac{A_2}{\Delta_{12}}=\frac{A_3}{\Delta_{13}}=C\,. \qquad /7,57/$$

როგორც ვხედავთ, ერთგვაროვანი სისტემის შემთხვევაში განისაზღვრება $\vec{A}$ ვექტორის მხოლოდ მიმართულება, სიდიდე კი განუსაზღვრელია; კერძოდ, $A=C\sqrt{\Delta_{j1}^2+\Delta_{j2}^2+\Delta_{j3}^2}$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივაა.

ზემოთ მიღებული ფორმულები გამოვიყენოთ ორი დეტერმინანტის გამრავლების წესის დასადგენად. ვთქვათ, გვინდა ორი მესამე რანგის $\Delta(F)$ და $\Delta(G)$ დეტერმინანტის გამრავლება.

/7,33/ ფორმულის თანახმად

$$\Delta(F)\Delta(G)=\Delta(F)\sum_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}G_{\alpha 1}G_{\beta 2}G_{\gamma 3}. \qquad /7,58/$$

ახლა გავითვალისწინოთ /7,34/ ფორმულა; გვექნება

$$\Delta(F)\Delta(G)=\sum_{\alpha\beta\gamma}\sum_{ikl}\varepsilon_{ikl}(F_{i\alpha}G_{\alpha 1})(F_{k\beta}G_{\beta 2})(F_{l\gamma}G_{\gamma 3}). \qquad /7,59/$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$L_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{3}F_{i\alpha}G_{\alpha j}, \qquad /7,60/$$

მაშინ

$$\Delta(F)\Delta(G)=\sum_{ikl}\varepsilon_{ikl}L_{i1}L_{k2}L_{l3}=\Delta(L). \qquad /7,61/$$

ამგვარად,

$$\Delta(F)\Delta(G)=\Delta(L), \qquad /7,62/$$

სადაც გამრავლების შედეგად მიღებულ დეტერმინანტში L_{ij} ელემენტები განისაზღვრება /7,60/ ფორმულით. მაგალითად, L_{11} ელემენტი ტოლი იქნება

$$L_{11}=F_{11}G_{11}+F_{12}G_{21}+F_{13}G_{31}, \qquad /7,63/$$

ე.ი. ეს ელემენტი ტოლია პირველი დეტერმინანტის პირველი სტრიქონის ელემენტებისა და მეორე დეტერმინანტის პირველი სვეტის შესაბამის ელემენტების ნამრავლთა ჯამისა. ამავე გზით გამოი-

თელება სხვა ელემენტების.

ამოცანები:

1. ექნება თუ არა შებრუნებული

$$A=\begin{pmatrix} aa & ab & ac \\ ba & bb & bc \\ ca & cb & cc \end{pmatrix} \qquad /7,64/$$

მატრიცას.

2. იპოვეთ მესამე რანგის მატრიცის

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad /7,65/$$

შებრუნებული B^{-1} მატრიცის სახე. შეადარეთ ერთმანეთს $Sp(B)$ და $Sp(B^{-1})$.

3. /7,50/ ფორმულის გამოყენებით ამოხსენით წრფივ არაერთ-გვაროვან განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} x+y+2z&=1, \\ x+2y+z&=2, \\ 2x+y+z&=3. \end{aligned} \qquad /7,66/$$

4. იპოვეთ შემდეგი დიაგონალური მატრიცის

$$\Gamma=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad /7,67/$$

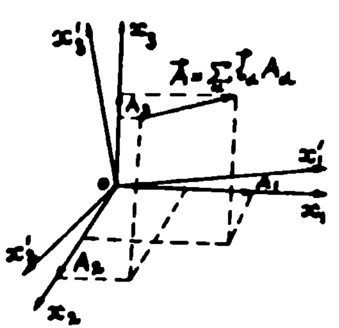
შებრუნებული Γ^{-1} მატრიცა.

§ 8. პირველი რანგის ტენზორები

ახლა დაწვრილებით შევისწავლოთ პირველი რანგის ტენზორის თვისებები. პირველი რანგის ტენზორი, ე.ი. ვექტორი ჩვენ განვსაზღვრეთ, როგორც ისეთი სამი A_1, A_2, A_3 სიდიდის ერთობლიობა, რომლებიც კოორდინატთა სისტემის მობრუნების დროს გარდაიქმნება კანონით

$$A'_\alpha=\sum_{\beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}A_\beta, \qquad (\alpha=1,2,3) \qquad /8,1/$$

სადაც A'_α არის ვექტორის კომპონენტები შტრიხიან სისტემაში, ხოლო $a_{\alpha\beta}$ მიმართულების კოსინუსებია. ახლა ვაჩვენოთ, რომ /8,1/ გარდაქმნები ემთხვევა ვექტორის ჩვეულებრივ გარდაქმნებს, რომლის მიხედვით იგი არის მიმართულების მქონე მონაკვეთი. ავიღოთ რაიმე $\vec A$ ვექტორი, რომლის კომპონენტები $Ox_1x_2x_3$ სისტემაში იყოს A_1, A_2, A_3, ხოლო შტრიხიან სისტემაში A'_1, A'_2, A'_3 /ნახ.14/, მაშინ ვექტორის გარდაქმნებით $Ox_1x_2x_3$ სისტემაში გვექნება



ნახ. 14

$$\vec A=\sum_{\alpha=1}^{3}\vec i_\alpha A_\alpha. \qquad /8,2/$$

იგივე ვექტორი შტრიხიან სისტემაში განსაზღვრულია შემდეგი ფორმულით:

$$\vec A=\sum_{\alpha=1}^{3}\vec i'_\alpha A'_\alpha, \qquad /8,3/$$

სადაც $(\vec i_1,\vec i_2,\vec i_3)$ არის ორტები $Ox_1x_2x_3$ სისტემის ღერძებისა, ხოლო $(\vec i'_1,\vec i'_2,\vec i'_3)$ - შტრიხიანი სისტემისა. რადგან ორივე

ეს კოორდინატთა სისტემა ორთოგონალურია, ამიტომ

$$(\vec{i}_\alpha, \vec{i}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}; \quad (\vec{i}'_\alpha, \vec{i}'_\beta) = \delta_{\alpha\beta}. \qquad /8,4/$$

/8,2/ და /8,3/ ფორმულების თანახმად

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \vec{i}'_\alpha A'_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \vec{i}_\alpha A_\alpha. \qquad /8,5/$$

ეს ტოლობა გავამრავლოთ $\vec{i}'_\beta$ ორტზე და გავითვალისწინოთ /8,4/ პირობები. $\delta_{\alpha\beta}$ სიმბოლოს ფილტრაციის თვისების გამოყენებით გვექნება

$$A'_\beta = \sum_{\alpha=1}^{3} (\vec{i}'_\beta, \vec{i}_\alpha) A_\alpha; \qquad /8,6/$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $(\vec{i}'_\beta, \vec{i}_\alpha) = \cos(\vec{i}'_\beta, \vec{i}_\alpha) = a_{\beta\alpha}$ მიმართულების კოსინუსებია, მაშინ /8,6/ გარდაქმნა დაემთხვევა /8,1/-ს. ვექტორის /8,1/ განსაზღვრას ის უპირატესობა აქვს, რომ ჯერ ერთი, იგი ხელსაყრელია მაღალი რანგის ტენზორების განზოგადებისათვის და მეორე, იგი იძლევა n-განზომილებიანი ვექტორების განხილვის ბუნებრივ განზოგადებას.

ახლა განვიხილოთ ვექტორების სხვადასხვა ტიპის ნამრავლები.

1. ორი ვექტორის პირდაპირი ნამრავლი. განვიხილოთ ორი ვექტორი A_i და B_i. შევადგინოთ მეორე ტიპის ნამრავლი $F_{ik} = A_i B_k$, რომელსაც ეწოდება ორი ვექტორის პირდაპირი ნამრავლი. ჩვენ ვიცით, რომ ეს ნამრავლი გამოსახავს მეორე რანგის ტენზორს. ორი ვექტორის პირდაპირი ნამრავლისაგან ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ სკალარული და ვექტორული ნამრავლები, რომლებსაც ქვემოთ განვიხილავთ.

2. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი. განვიხილოთ ორი ვექტორის პირდაპირი ნამრავლი

$$F_{ik} = A_i B_k \qquad /8,7/$$

და მოვახდინოთ დაქვეითება; გვექნება

$$(\vec{A},\vec{B}) \equiv Sp\,F = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i \,. \qquad /8,8/$$

ამ გამოსახულებას უწოდებენ ორი ვექტორის სკალარულ ნამრავლს. რადგან ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი მეორე რანგის ტენზორის შპური ყოფილა, ამიტომ კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას იგი არ შეიცვლება

$$(\vec{A},\vec{B})' = (\vec{A},\vec{B}) = Inv. \qquad /8,9/$$

ე.ი. წარმოადგენს სკალარულ სიდიდეს. როცა $\vec{A}=\vec{B}$, მაშინ

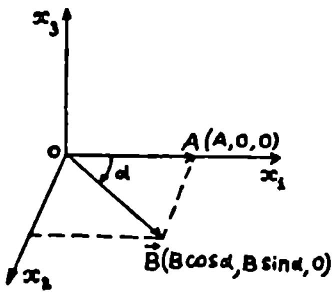
$$(\vec{A},\vec{A}) = \vec{A}^2 = \Big(\sum_{\alpha} \vec{i}_\alpha A_\alpha\Big)\Big(\sum_{\beta} \vec{i}_\beta A_\beta\Big) = \sum_{\alpha,\beta} (\vec{i}_\alpha,\vec{i}_\beta) A_\alpha A_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta = \sum_{\alpha} A_\alpha^2 =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 ,$$

ე.ი. $\vec{A}^2 = \sum_i A_i^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$. მაშასადამე, ვექტორის კვადრატი სკალარული სიდიდეა. $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორები ისე შევარჩიოთ, რომ $\vec{A}$ იდოს x_1 ღერძზე, $\vec{B}$ კი x_1Ox_2 სიბრტყეში, მაშინ $\vec{A} \equiv (A,0,0)$, $\vec{B} \equiv (B\cos\alpha, B\sin\alpha, 0)$, სადაც α არის კუთხე $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორებს შორის /ნახ.15/. ასე, რომ

$$(\vec{A},\vec{B}) = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\alpha , \qquad /8,10/$$



ნახ. 15

როცა $(\vec{A},\vec{B})=0$, მაშინ $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორები ერთმანეთის მართობულია, ხოლო როცა $(\vec{A},\vec{B})=AB$ – ერთმანეთის პარალელური. დეკარტის მართკუთხა სისტემის $\vec{i}_\alpha$ ორტების სკალარული ნამრავლი ტოლი იქნება გამოსახულების $(\vec{i}_\alpha,\vec{i}_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$.

ეს უკანასკნელი შედეგი ჩვენ არაერთხელ გამოვიყენეთ.

3. ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი. ორი ვექტორისაგან ისეთი ნამრავლიც შეგვიძლია შევადგინოთ, რომელიც ვექტორს წარმოადგენს. ორი ვექტორის ვექტორულ ნამრავლს აღნიშნავენ $[\vec{A},\vec{B}]$-ით ან $\vec{A}\times\vec{B}$-ით. /8,7/ ორი ვექტორის პირდაპირი ნამრავლისაგან შევადგინოთ მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი.

$$T_{ik}=A_iB_k-A_kB_i, \qquad /8,11/$$

ვიგულისხმოთ, რომ A_i და B_i პოლარული ვექტორებია, მაშინ ამ ტენზორის დუალური ვექტორი იქნება აქსიალური

$$L_i=\frac{1}{2}\sum_{k,l}\varepsilon_{ikl}T_{kl}. \qquad /8,12/$$

ამ გამოსახულებაში შევიტანოთ /8,11/ განმარტება და გავითვალისწინოთ ε_{ikl} ტენზორის ანტისიმეტრიულობის თვისება;

გვექნება

$$L_i=\frac{1}{2}\sum_{k,l}\varepsilon_{ikl}A_kB_l-\frac{1}{2}\sum_{k,l}\varepsilon_{ikl}A_lB_k=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k,l}\varepsilon_{ikl}A_kB_l+\frac{1}{2}\sum_{k,l}\varepsilon_{ikl}A_kB_l=\sum_{k,l}\varepsilon_{ikl}A_kB_l. \qquad /8,13/$$

ამ L_i-ს უწოდებენ სწორედ $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლის i-ურ კომპონენტს, ე.ი. ვექტორული ნამრავლისათვის გვაქვს შემდეგი განმარტება:

$$[\vec{A},\vec{B}]_i=\sum_{k,l}\varepsilon_{ikl}A_kB_l. \qquad /8,14/$$

მარჯვენა მხარე წარმოადგენს $\varepsilon_{ikl}A_mB_n$ მეხუთე რანგის ტენზორის ორჯერ დაკეცილების შედეგს; ამიტომ $[\vec{A},\vec{B}]$ ვექტორული ნამრავლი წარმოადგენს ვექტორს. ეს შედეგი მივიღოთ სხვა გზითაც. ვექტორის განმარტებით

$$[\vec{A},\vec{B}]'_i=\sum_k a_{ik}[\vec{A},\vec{B}]_k. \qquad /8,15/$$

გავითვალისწინოთ /8,14/ განმარტება; გვექნება

$$[\vec{A},\vec{B}]'_i=\sum_{kmn}a_{ik}\varepsilon_{kmn}A_mB_n. \qquad /8,16/$$

გამოვიყენოთ შებრუნებული გარდაქმნის კანონები $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორებისათვის $A_m=\sum_p a_{pm}A'_p$, $B_n=\sum_s a_{sn}B'_s$ და შევიტანოთ ისინი /8,16/-ში; მივიღებთ:

$$[\vec{A},\vec{B}]'_i=\sum_{kmpns}(a_{ik}a_{pm}a_{sn}\varepsilon_{kmn})A'_pB'_s \qquad /8,17/$$

ან, თუ გავითვალისწინებთ /7,28/ ფორმულას, შეგვიძლია დავწეროთ

$$[\vec{A},\vec{B}]'_i=\sum_{p,s}\varepsilon_{ips}A'_pB'_s=[\vec{A}',\vec{B}']_i, \qquad /8,18/$$

საიდანაც ჩანს, რომ /8,15/ ფორმულა სამართლიანია და, მაშა-სადამე, $[\vec{A},\vec{B}]$ ვექტორული ნამრავლი ვექტორს წარმოადგენს. ამ ვექტორის კომპონენტები /8,14/ ფორმულის თანახმად ჩვეულე-ბრივ აღნიშვნებში ასეთი იქნება:

$$[\vec{A},\vec{B}]_x = A_y B_z - A_z B_y,$$
$$[\vec{A},\vec{B}]_y = A_z B_y - A_y B_z, \qquad /8,19/$$
$$[\vec{A},\vec{B}]_z = A_x B_y - A_y B_x.$$

განვიხილოთ მეორე რანგის კერძო ტიპის ანტისიმეტრიული ტენზორი:

$$L_{ik} = x_i A_k - x_k A_i, \qquad /8,20/$$

სადაც x_i მატერიალური წერტილის კოორდინატებია, A_i კი გარკვე-ული ვექტორი. L_{ik} ტენზორის დუალური ვექტორი

$$L_i = \frac{1}{2}\sum_{kl} \varepsilon_{ikl} L_{kl} = \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} x_k A_l \qquad /8,21/$$

წარმოადგენს $\vec{A}$ ვექტორის მომენტს სათავის მიმართ

$$\vec{L}_A = [\vec{r},\vec{A}]. \qquad /8,22/$$

როცა $A_i = P_i$, სადაც P_i ნაწილაკის იმპულსია, მაშინ $\vec{L}_p = [\vec{r},\vec{p}]$ არის იმპულსის მომენტი, ხოლო როცა $\vec{A} = \vec{F}$, სადაც $\vec{F}$ ძალაა, მაშინ $\vec{L}_F = [\vec{r},\vec{F}]$ იქნება ძალის მომენტი.

რადგან ნებისმიერი $\vec{A}$ ვექტორი იწერება ასე წარმოიდგინე-ბა: $\vec{A} = \sum_\alpha \vec{i}_\alpha A_\alpha$, ამიტომ ვექტორული ნამრავლისათვის გვექნება

$$[\vec{A},\vec{B}] = \sum_{\alpha=1}^{3} \vec{i}_\alpha [\vec{A},\vec{B}]_\alpha = \sum_{\alpha k l} \varepsilon_{\alpha k l} A_k B_l \vec{i}_\alpha, \qquad /8,23/$$

ან თუ გავიხსენებთ მესამე რანგის დეტერმინანტის განმარტებას

ტენზორის საშუალებით, შეგვიძლია დავწეროთ

$$[\vec{A},\vec{B}]=\begin{vmatrix}\vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix} \qquad /8,24/$$

ამ დეტერმინანტის გაშლით პირველი სტრიქონის მინორებად მარტივად მივიღებთ ვექტორული ნამრავლის განმარტებას.

ნათელია, რომ ვექტორულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისება:

$$[\vec{A},\sum_{\alpha=1}^{n}\vec{B}_\alpha]=[\vec{A}_1,\vec{B}_1]+\dots+[\vec{A},\vec{B}_n]=\sum_{\alpha=1}^{n}[\vec{A},\vec{B}_\alpha]. \qquad /8,25/$$

ასევე ცხადია, რომ

$$[\vec{A},\vec{B}]=-[\vec{B},\vec{A}]. \qquad /8,26/$$

მართლაც, განმარტებით

$$[\vec{B},\vec{A}]_i=\sum_{k,l}\varepsilon_{ikl}B_kA_l=\sum_{k,l}\varepsilon_{ilk}B_lA_k=$$
$$=-\sum_{k,l}\varepsilon_{ikl}A_kB_l=-[\vec{A},\vec{B}]_i. \qquad /8,27/$$

/8,26/ თვისების ძალით კი გვექნება

$$[\vec{A},\vec{A}]=0, \qquad /8,28/$$

ე.ი. ვექტორის თავისთავზე ვექტორული ნამრავლი ნულის ტოლია.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ დეკარტის მართკუთხა სისტემის ორტების ვექტორულ ნამრავლს აქვს შემდეგი გამოსახულება:

$$[\vec{i}_\alpha,\vec{i}_\beta]=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\vec{i}_\gamma. \qquad /8,28/$$

ახლა განვიხილოთ ვექტორული ნამრავლის მიმართულება. ამისათვის ვიპოვოთ $\vec{A}$ ვექტორისა და $[\vec{A},\vec{B}]$ ვექტორის სკა-

ლარული ნამრავლი $(\vec{A},[\vec{A},\vec{B}])$. განმარტების ძალით

$$(\vec{A},[\vec{A},\vec{B}])=\sum_{\alpha}A_{\alpha}[\vec{A},\vec{B}]_{\alpha}=$$

$$=\sum_{\alpha}A_{\alpha}\sum_{\beta,\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta}B_{\gamma}=\sum_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha}A_{\beta}B_{\gamma}. \qquad /8,29/$$

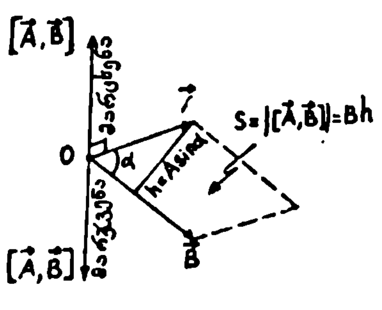
ბოლო ჯამში მოვახდინოთ $\alpha\rightleftarrows\beta$ შეცვლა და გავითვალისწინოთ, რომ $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}=-\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}$, მაშინ მივიღებთ

$$(\vec{A},[\vec{A},\vec{B}])=\sum_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}A_{\beta}A_{\alpha}B_{\gamma}=-(\vec{A},[\vec{A},\vec{B}]), \qquad /8,30/$$

რაც იმის დამადასტურებელია, რომ $(\vec{A}[\vec{A},\vec{B}])=0$; სრულიად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ ნულია აგრეთვე სკალარული ნამრავლი $(\vec{B},[\vec{A},\vec{B}])$. ეს კი ნიშნავს, რომ $[\vec{A},\vec{B}]$ ვექტორი მართობია როგორც $\vec{A}$, ისე $\vec{B}$ ვექტორისა, ე.ი. $[\vec{A},\vec{B}]$ პერპენდიკულარული ყოფილა $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორებზე გავლებული სიბრტყისა. ვიპოვოთ ვექტორული ნამრავლის სიდიდე. ამისათვის, ისევე როგორც სკალარული ნამრავლის განხილვისას, $\vec{A}$ ვექტორი დავამთხვიოთ x_1 ღერძს, $\vec{B}$ კი მოვათავსოთ x_1Ox_2 სიბრტყეში /ნახ.15/. მაშინ ნულისაგან განსხვავებული იქნება მხოლოდ $[\vec{A},\vec{B}]_z=AB\sin\alpha$, ე.ი.

$$[\vec{A},\vec{B}]\equiv(0,0,AB\sin\alpha), \qquad /8,31/$$

სადაც α არის კუთხე $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორებს შორის. ამგვარად,



ნახ.16

$$|[\vec{A},\vec{B}]|=AB\sin\alpha. \qquad /8,32/$$

გეომეტრიულად $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი ტოლი ყოფილა ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობისა. ვნახოთ როგორ განისაზღვრება ამ პარალე-

ლოგრამის ფართი /8,11/ ტენზორის საშუალებით. /8,12/ ფორმულის თანახმად, ამ ფართის კვადრატისათვის გვექნება

$$S^2=\sum_{i=1}^{3} L_i^2=\frac{1}{4}\sum_{i}\sum_{klk'l'}\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{ik'l'}\,T_{kl}\,T_{k'l'}\,; \qquad /8,33/$$

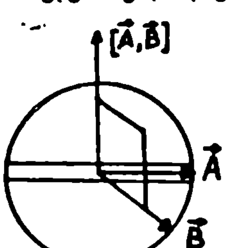
/7,21/ ფორმულის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$S^2=\frac{1}{4}\sum_{kl}\sum_{k'l'}(\delta_{kk'}\delta_{ll'}-\delta_{kl'}\delta_{lk'})T_{kl}T_{k'l'}= \qquad /8,34/$$
$$=\frac{1}{4}\Big(\sum_{kl}T_{kl}^2-\sum_{kl}T_{kl}T_{lk}\Big).$$

რადგან T_{ik} ანტისიმეტრიული ტენზორია, ამიტომ აღნიშნული პარა-ლელოგრამის ფართის კვადრატი ტოლი იქნება

$$S^2=\frac{1}{2}\sum_{k,l}T_{kl}^2\,. \qquad /8,35/$$

როგორც ვხედავთ, ვექტორული ნამრავლის სიდიდე ცალსახადაა განსაზღვრული. მისი მიმართულების განსაზღვრა კი დამატებით პი-რობას მოითხოვს. შევთანხმდეთ და მივიღოთ, რომ მარჯვენა კოორდი-ნატთა სისტემაში ვექტორული ნამრავლის მიმართულება განისაზღ-ვრება მარჯვენა ბურღის წესით, ე.ი. $\vec{A}$ ვექტორის მობრუნებით $\vec{B}$ ვექტორისაკენ უმცირესი კუთხით, მარჯვენა ბურღის გადაადგი-ლების მიმართულება უნდა დაემთხვეს ვექტორული ნამრავლის მიმარ-თულებას /ნახ.16 /. მარცხე-ნა სისტემაში კი ვექტორული ნამრავლის მიმართულება უნდა განისაზღვროს მარცხენა ბურ-ღის წესით.



მარჯვენა ბურღი

ნახ.17

ვექტორული ნამრავლი შე-გვიძლია გამოვიყენოთ ორი ვექტორის პარალელობის პი-

რობის დასადგენად. მართლაც, ორი $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორი პარალელუ-რია, როცა ვექტორული ნამრავლი $[\vec{A},\vec{B}]=0$, რაც /8,19/ ფორმულების თანახმად მოგვცემს

$$\frac{B_1}{A_1}=\frac{B_2}{A_2}=\frac{B_3}{A_3}, \qquad /8,36/$$

ე.ი. ორი ვექტორის პარალელობისათვის საჭიროა მათი კომპონენტები ერთმანეთის პროპორციული იყოს.

ამგვარად, ჩვენ დავინახეთ, რომ ორი ვექტორის პირდაპირი ნამრავლის დაქვეითებით მიიღება ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი $(\vec{A},\vec{B})=\sum_i A_i B_i$, ხოლო ანტისიმეტრიზაციით- ვექტორული ნამრავლი $[\vec{A},\vec{B}]_i=\frac{1}{2}\sum_{k,l}\varepsilon_{ikl}(A_k B_l - A_l B_k)$.

4. ვექტორების შერეული ნამრავლი. ახლა შევისწავლოთ სამი ვექტორის შერეული ნამრავლის თვისებები. შერეული ნამრავლი ეწოდება $\vec{A}$ ვექტორის სკალარულ ნამრავლს $[\vec{B},\vec{C}]$ ვექტორულ ნამრავლზე. იგი, ცხადია, ასე აღინიშნება:

$$(\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]). \qquad /8,37/$$

შერეულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისება:

$$(\vec{A},[\vec{B},\vec{C}])=(\vec{C},[\vec{A},\vec{B}])=(\vec{B},[\vec{C},\vec{A}]); \qquad /8,37'/$$

ე.ი. ვექტორების ციკლური გადასმისას შერეული ნამრავლი არ იცვლება. ამ თვისების დამტკიცება ძნელი არ არის. მართლაც,

$$(\vec{A},[\vec{B},\vec{C}])=\sum_\alpha A_\alpha[\vec{B},\vec{C}]_\alpha=\sum_\alpha A_\alpha\sum_{\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\beta C_\gamma; \qquad /8,38/$$

ამის შემდეგ /8,37'/ თვისება მიიღება $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ ტენზორის სიმეტ-

რიის თვისების გათვალისწინებით. გვექნება

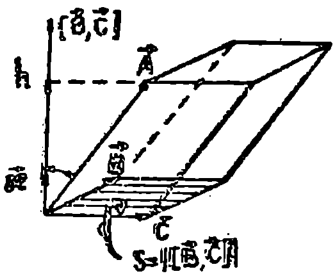
$$\sum_\alpha A_\alpha \sum_{\beta,\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\beta C_\gamma = \sum_\beta B_\beta \sum_{\alpha,\gamma}\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}C_\alpha A_\gamma = \sum_\gamma C_\gamma \sum_{\alpha,\beta}\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}A_\alpha B_\beta \qquad /8,39/$$

რაც ამტკიცებს /8,37¹/ ტოლობის სამართლიანობას.

ცხადია, რომ შერეული ნამრავლი ნულის ტოლი იქნება, თუ ორი ვექტორი ტოლია. მართლაც, /8,37¹/ თვისების ძალით

$$(\vec{A},[\vec{A},\vec{B}])=(\vec{B},[\vec{A},\vec{A}])=0, \qquad /8,40/$$

რადგან ვექტორული ნამრავლი $[\vec{A},\vec{A}]=0$.



ნახ. 18

გეომეტრიულად $(\vec{A},[\vec{B},\vec{C}])$ შერეული ნამრავლი გამოხატავს $\vec{A},\vec{B}$ და $\vec{C}$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობას. მართლაც, $|[\vec{B},\vec{C}]| = BC\sin(\vec{B},\hat{\vec{C}})$ წარმოადგენს პარალელეპიპედის ფუძის ფართს /ნახ.18/, ხოლო $h = A\cos(\vec{A},\hat{\vec{\varkappa}})$, სადაც $\vec{\varkappa}$ ერთეულოვანი ვექტორია $[\vec{B},\vec{C}]$ ვექტორის გასწვრივ, პარალელეპიპედის სიმაღლეს. ახლა ადვილი გასაგებია /8,37¹/ ტოლობის გეომეტრიული შინაარსი: პარალელეპიპედის მოცულობა არ შეიცვლება იმის მიხედვით, თუ რომელ ორ ვექტორზე აგებულ პარალელოგრამს ჩავთვლით ფუძედ და რომელ მესამე ვექტორს სიმაღლედ. როცა სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი ნულის ტოლია, ე.ი. როცა ამ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა უდრის ნულს,

მაშინ ეს სამი ვექტორი კომპლანარულია /ერთ სიბრტყეში მდებარეობს/, საიდანაც, თავის მხრივ, გამომდინარეობს, რომ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია.

ვაჩვენოთ, რომ $(\vec{A},[\vec{B},\vec{C}])$ შერეული ნამრავლი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ დეტერმინანტის სახით. მართლაც,

$$(\vec{A},[\vec{B},\vec{C}])=\sum_{\alpha} A_{\alpha}[\vec{B},\vec{C}]_{\alpha}=\sum_{\alpha} A_{\alpha}\sum_{\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_{\beta}C_{\gamma} \qquad /8,41/$$

ან

$$(\vec{A},[\vec{B},\vec{C}])=\sum_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A_{\alpha}B_{\beta}C_{\gamma}. \qquad /8,42/$$

ეს უკანასკნელი კი არის მესამე რანგის დეტერმინანტის განმარტება; ასე რომ,

$$(\vec{A},[\vec{B},\vec{C}])=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}. \qquad /8,43/$$

განვიხილოთ სამი ვექტორი A_i, B_i, C_i და შევადგინოთ შემდეგი დეტერმინანტი:

$$Q_{ikl}=\begin{vmatrix} A_i & A_k & A_l \\ B_i & B_k & B_l \\ C_i & C_k & C_l \end{vmatrix} \qquad /8,44/$$

ადვილად შევამოწმებთ, რომ Q_{ikl} არის მესამე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი. ის, რომ Q_{ikl} მესამე რანგის ტენზორია, ცხადია, რადგან იგი წარმოადგენს სამი ვექტორის პირდაპირი ნამრავლების წრფივ კომბინაციას. Q_{ikl} ტენზორის ინდექსების შეცვლა ტოლფასია დეტერმინანტში სვეტების შეცვლისა, რაც, როგორც ვიცით, იწვევს დეტერმინანტის ნიშნის ცვლილებას. შევადგინოთ შემდეგი

გამოსახულება:

$$V=\frac{1}{3!}\sum_{ikl}\varepsilon_{ikl}Q_{ikl}, \qquad /8,45/$$

რომელიც წარმოადგენს Q_{ikl} ტენზორის ერთერთ ნულოვანი რანგის ტენზორს. რადგან ინვერსიის დროს $\varepsilon'_{ikl}=\varepsilon_{ikl}$, ხოლო პოლარული A_i, B_i, C_i ვექტორების შემთხვევაში $Q'_{ikl}=-Q_{ikl}$, ამიტომ $V'=-V$, ე.ი. V ყოფილა ფსევდოსკალარი. რადგან Q_{ikl} სრულიად ანტისიმეტრიული ტენზორია, ამიტომ იგი პროპორციული იქნება ε_{ikl} ტენზორისა. მართლაც, /7,14/ ფორმულის თანახმად, $Q_{ikl}=a\varepsilon_{ikl}$. თუ ავიღებთ $i=1$, $k=2$ და $l=3$, მივიღებთ $Q_{123}=a$, სადაც a იქნება /8,43/ დეტერმინანტი. ე.ი. $Q_{ikl}=(\vec{A},[\vec{B},\vec{C}])\varepsilon_{ikl}$. ამ გამოსახულების /8,45/-ში ჩასმით დავინახავთ, რომ $V=(\vec{A},[\vec{B},\vec{C}])$. ამგვარად, /8,45/ ფორმულით გამოსახული ფსევდოსკალარი ყოფილა $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა. თუ $\vec{A}\equiv(dx_1,0,0)$, $\vec{B}\equiv(0,dx_2,0)$, $\vec{C}\equiv(0,0,dx_3)$, მაშინ $dV=dx_1dx_2dx_3$ მოცულობის ელემენტი იქნება ელემენტარული პარალელეპიპედის მოცულობა.

5. <u>სამი ვექტორის ორმაგი ვექტორული ნამრავლი</u>. ახლა შემოვიღოთ ორმაგი ვექტორული ნამრავლი $[\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]]$ და მისთვის დავამტკიცოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი ფორმულა

$$[\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]]=\vec{B}(\vec{A},\vec{C})-\vec{C}(\vec{A},\vec{B}). \qquad /8,46/$$

მარჯვენა მხარის ადვილად დამახსოვრების მიზნით კითხულობენ "ბაც მინუს ცაბ".

დამტკიცების მიზნით განვიხილოთ ორმაგი ვექტორული ნამრავლის i-ური კომპონენტი და გამოვიყენოთ ვექტორული ნამრავლის

/8,14/ ფორმულა; გვექნება

$$[\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]]_i = \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} A_k [\vec{B},\vec{C}]_l = \qquad /8,47/$$

$$= \sum_{klmn} \varepsilon_{ikl}\, \varepsilon_{lmn} A_k B_m C_n .$$

/7,21/ თვისების გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$[\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]]_i = \sum_{kmn} (\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}) A_k B_m C_n , \qquad /8,48/$$

ფილტრაციის ჩატარების შემდეგ დაგვრჩება

$$[\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]]_i = B_i \sum_n A_n C_n - C_i \sum_m A_m B_m , \qquad /8,49/$$

რაც მართლაც ემთხვევა /8,46/ ფორმულას.

6. <u>ვექტორების პოლარობა.</u> მართალია, ტენზორების პოლარობა ზოგადი სახით ადრე განვიხილეთ, მაგრამ მეტი სიცხადის მიზნით ამ საკითხს ვექტორებისათვის ერთხელ კიდევ შევეხებით.

როგორც ვიცით, კოორდინატთა ღერძების ინვერსიას - სარკისებურ არეკვლას სათავის მიმართ, შეესაბამება წერტილის კოორდინატების შემდეგი გარდაქმნა:

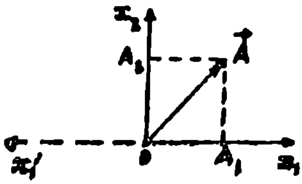
$$x_i' = -x_i = -\sum_k \delta_{ik} x_k . \qquad /8,50/$$

თუ ინვერსიის მიმართ ვექტორის კომპონენტებს იგივე თვისება აქვთ, რაც კოორდინატებს, ე.ი. გარდაიქმნებიან კანონით

$$A_i' = -A_i , \qquad /8,51/$$

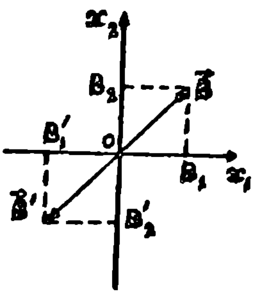
მაშინ $\vec{A}(A_1,A_2,A_3)$ ვექტორს ნამდვილი ანუ პოლარული ეწოდება. გეომეტრიული ინტერპრეტაციის მიზნით განვიხილოთ სიბრტყის შემთხვევა, როდესაც ავიღოთ Ox_1x_2 სისტემა. მართალია, ამ შემთხვევაში ორივე ღერძის არეკვლა მობრუნებაზე დაიყვანება, მაგრამ არეკვლისას ვექტორის ყოფაქცევის საილუსტრაციოდ ანას ახლა

შეიძლება ყურადღება არ მივაქციოთ. სიმარტივისათვის განვიხილოთ $\vec{A}$ ვექტორი, რომლის ბოლო სათავეშია მოთავსებული. არეკვლილ $Ox_1'x_2'$ სისტემაში /ნახ.19/ $\vec{A}$ ვექტორის კომპონენტები არის $(-A_1, -A_2)$, რადგან ვექტორი ღერძების არეკვლისას ადგილზე უნდა დარჩეს.



ნახ.19

მაშასადამე, პოლარული /ნამდვილი/ ვექტორის კომპონენტები ინვერსიის დროს ნიშანს იცვლიან: ნამდვილი ვექტორია, მაგალითად, რადიუსვექტორი $\vec{r}=\sum_{\alpha}\vec{i}_{\alpha}x_{\alpha}$ და მისი დროის მიხედვით წარმოებულები: სიჩქარე $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$, აჩქარება $\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ძალა $\vec{F}=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ და სხვა.



ნახ.20

ახლა დავუშვათ, რომ $\vec{B}$ ვექტორის კომპონენტები ინვერსიის დროს გარდაიქმნება კანონით

$$B_i' = B_i. \qquad /8.52/$$

რადგან არეკვლილ სისტემაში $\vec{B}$ ვექტორის კომპონენტები ნიშანს არ იცვლიან, ეს ნიშნავს, რომ ინვერსიის შემთხვევაში $\vec{B}$ ვექტორი მიმართულებას იცვლის საწინააღმდეგოთ /ნახ.20/. ვექტორებს, რომლის კომპონენტები ინვერსიის დროს ნიშანს არ იცვლიან ფსევდო /ცრუ/ ვექტორები ქვიათ. ასეთ ვექტორებს ხშირად აქსიალურ /ღერძულ/ ვექტორებსაც უწოდებენ. როგორც წესი, აქსიალური ვექტორები "შე-დგენილი" ვექტორებია. ასე მაგალითად, ორი პოლარული ვექტორის

ვექტორული ნამრავლი იქნება აქსიალური. მართლაც, ვექტორული ნამრავლის განმარტებაში

$$[\vec{A},\vec{B}]_i = \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} A_k B_l \qquad /8,53/$$

პირობის თანახმად, ორივე ვექტორი პოლარულია, ε_{ikl} კი – აქსიალური, ამიტომ არეკვლის დროს მივიღებთ

$$[\vec{A},\vec{B}]_i' = \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl}' A_k' B_l' = \sum_{k,l} \varepsilon_{ikl} (-A_k)(-B_l), \qquad /8,54/$$

მაშასადამე,

$$[\vec{A},\vec{B}]_i' = [\vec{A},\vec{B}]_i , \qquad /8,55/$$

რაც ნიშნავს, რომ $[\vec{A},\vec{B}]$ ნამრავლი აქსიალურია. ცხადია, რაკი ვექტორულ ნამრავლში ორივე ვექტორი აქსიალურია, ვექტორული ნამრავლიც აქსიალური იქნება. მაშასადამე, ვექტორული ნამრავლი რომ ნამდვილი ვექტორი იყოს, საჭიროა ერთი ვექტორი ნამდვილი იყოს, მეორე კი აქსიალური. აღსანიშნავია, რომ ნამდვილი ვექტორების მიმართულება განსაზღვრულია თვით მოძრაობის ან ურთიერთქმედების ხასიათით. ასე მაგალითად, სიჩქარის მიმართულება ცალსახად განსაზღვრულია მატერიალური წერტილის მოძრაობის მიმართულებით. იგივე არ შეიძლება ითქვას აქსიალური ვექტორის შესახებ. მაგალითად, კუთხური სიჩქარე ცალსახად არ არის განსაზღვრული ბრუნვით. მისი მიმართულების დასადგენად საჭიროა დამატებითი შეთანხმება. კერძოდ, საჭიროა შეთანხმება იმის შესახებ, თუ რას ეწოდება ბრუნვის დადებითი მიმართულება: იმას, რომელიც ემთხვევა მარჯვენა ბურღის მოძრაობის მიმართულებას, თუ იმას, რომელიც მარცხენა ბურღის მოძრაობის მიმართულების თანხვდენილია. ფიზიკაში ბრუნვის კუთხური სიჩქარის გარდა, სხვა აქსიალური ვექტორებიც გვხვდება. აქსიალურია, მაგალითად, იმპულსის მომენტი $\vec{l}=[\vec{r},\vec{p}]$,

რამდენადაც იგი შედგენილია ორი პოლარული ვექტორისაგან. შემ-დეგი მნიშვნელოვანი აქსიალური ვექტორი არის მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორი. მართლაც, ძალა, რომელიც მოქმედებს e მუ-ხტზე მოძრავს ელექტრომაგნიტურ ველში, არის ე.წ. ლორენცის ძალა

$$\vec{F}=e\vec{\mathcal{E}}+\frac{e}{c}[\vec{v},\vec{\mathcal{H}}], \qquad /8,54/$$

სადაც $\vec{\mathcal{E}}$ ელექტრული ველის დაძაბულობაა, $\vec{v}$ -მუხტის სიჩქარე, $\vec{\mathcal{H}}$-მაგნიტური ველის დაძაბულობა, ხოლო c -სინათლის სიჩქარის სიდიდე. ძალა და სიჩქარე ნამდვილი ვექტორებია, ამიტომ ელექტ-რული დაძაბულობის ვექტორი ნამდვილი ვექტორი იქნება, მაგნიტური ველის დაძაბულობა კი – ფსევდოვექტორი.

ცხადია, რომ ერთნაირი პოლარობის ვექტორების სკალარული ნამრავლი ნამდვილი სკალარი იქნება, სხვადასხვა პოლარობის ვექ-ტორების ნამრავლი კი– ფსევდოსკალარი, ე.ი. სიდიდე, რომელიც არ იცვლება კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას, ხოლო ნიშანს იც-ვლის ინვერსიის დროს. მაგალითად, $(\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}})$ სკალარული ნამრავლი ფსევდოსკალარია, რადგან იგი ნიშანს შეიცვლის ინვერსიისას, ხოლო სიდიდე $(\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{H}})^2$ კვლავ ნამდვილი სკალარი იქნება. აღვნიშ-ნოთ, რომ სამი ნამდვილი ვექტორის შერეული ნამრავლი $(\vec{A},[\vec{B},\vec{C}])$ იქნება ფსევდოსკალარი და, რადგან ეს ნამრავლი გამოსახავს ამ სამ ვექტორზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობას, ამიტომ მო-ცულობა ყოფილა ფსევდოსკალარული სიდიდე.

როგორც § 3-ში მივუთითეთ, ჩვენ შეგვიძლია ნაცვლად კოორ-დინატთა ღერძების ინვერსიისა არეკლა მოვახდინოთ თვით ვექტო-რებისა, სისტემის ღერძები კი უცვლელად დავტოვოთ. მაშინ /8,51/ განმარტება გვეუბნება, რომ ინვერსიის პოლარულმა ვექტორმა მი-მართულება უნდა შეიცვალოს საწინააღმდეგოთ, ე.ი. $\vec{A}\to-\vec{A}$ აქსი-ალური ვექტორის კომპონენტები ინვერსიის დროს არ იცვლება, ამი-ტომ მისთვის გვექნება გარდაქმნა $\vec{B}\to\vec{B}$

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ რადიუს-ვექტორის ინვერსიას $\vec{r}\to-\vec{r}$ სფერულ კოორდინატებში შეესაბამება გარდაქმნა: $r\to r$, $\theta\to\pi-\theta$, $\varphi\to\varphi+2\pi$.

7. <u>ვექტორის ინვარიანტები.</u> ვექტორისაგან შეიძლება შევადგინოთ ერთადერთი ინვარიანტული /სკალარული/ სიდიდე, ე.ი. სიდიდე, რომელიც დამოკიდებული არ იქნება კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე. ასეთ სიდიდეს წარმოადგენს ვექტორის სკალარული ნამრავლი თავის თავზე, ე.ი. ვექტორის სიგრძე $\vec{A}^2=(\vec{A},\vec{A})$. ვექტორისაგან შედგენილი ყველა სხვა ინვარიანტული სიდიდე ფუნქცია იქნება $\vec{A}^2$-ისა.

<u>ერთეულოვანი ვექტორის შემცველი გამოსახულებების გასაშუალოება.</u> ფიზიკური სხვადასხვა ამოცანების ამოხსნის დროს ხშირად გვხვდება ერთეულოვანი ვექტორის შემცველი გამოსახულებების გასაშუალოება; ამიტომ ამ საკითხს დაწვრილებით განვიხილავთ.

ავიღოთ ერთეულოვანი ვექტორი $\vec{n}(n_x,n_y,n_z)$, რომლის სხვადასხვა შესაძლო მიმართულება ტოლალბათიანი იყოს. გავასაშუალოთ ამ ვექტორის მდგენელები ყველა მიმართულების მიხედვით. ამისათვის ხელსაყრელია სფერული კოორდინატების შემოტანა. ცხადია, რომ სფერულ კოორდინატებში $\vec{n}$ ვექტორს ექნება მდგენელები:

$$\begin{aligned} n_x &= \sin\theta\cos\varphi, \\ n_y &= \sin\theta\sin\varphi, \\ n_z &= \cos\theta. \end{aligned} \qquad /8,57/$$

ნებისმიერი $\vec{A}$ ვექტორის რომელიმე მდგენელის საშუალო ყველა მიმართულების მიხედვით შეგვიძლია განვსაზღვროთ ფორმულით[1]:

$$\bar{A}_i=\frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}A_i\,d\Omega}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}d\Omega}, \qquad /8,58/$$

---

1 საშუალოს აღსანიშნავად იყენებენ $\langle A_i\rangle$ სიმბოლოსაც.

სადაც $d\Omega=\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ სხეულოვანი კუთხეა. რადგან სრული სხეულოვანი კუთხე ტოლია 4π -ს, ამიტომ საშუალოსათვის საბოლოო გვექნება ფორმულა:

$$\overline{A_i}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}A_i\, d\Omega. \qquad /8,59/$$

თუკი A_i მუდმივია, მაშინ /8,59/ განმარტებიდან ცხადია, რომ $\overline{A_i}=A_i$, ე.ი. მუდმივის საშუალო ემთხვევა ამ მუდმივს.

ადვილად შევამოწმებთ, რომ $\overline{n_x}=\overline{n_y}=\overline{n_z}=0$. მაგალითად, n_x -ისათვის, მართლაც, გვექნება:

$$\overline{n_x}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\varphi\, d\theta\, d\varphi=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi=0. \qquad /8,60/$$

რადგანაც $\overline{n^2}=n_x^2+n_y^2+n_z^2=1$, იმდენად $\overline{n^2}=\sum_{i=1}^{3}\overline{n_i^2}=1.$

ადვილი მისახვედრია, რომ ნულის ტოლი იქნება აგრეთვე ნებისმიერი კენტი რაოდენობის n_i მდგენელების ნამრავლის საშუალოც, მაგალითად, $\overline{n_i n_k n_l}=0$ და ა.შ. ვიპოვოთ ლუწი რაოდენობის n_i ნამრავლის საშუალო. ამისათვის ჩვენ შეგვიძლია ვისარგებლოთ /8,59/ ფორმულით, მაგრამ იგივეს უფრო ადვილად გავაკეთებთ ტენზორების თვისებების გამოყენებით. ჯერ ვიპოვოთ $\overline{n_i n_k}$. ცხადია, რომ $n_i n_k$ მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორია, ამიტომ იგი პროპორციული იქნება δ_{ik} ტენზორის. რადგან $\overline{\delta_{ik}}=\delta_{ik}$, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\overline{n_i n_k}=C\delta_{ik}, \qquad /8,61/$$

სადაც C არის მუდმივი. ამ მუდმივის განსასაზღვრავად მივახდინოთ /8,61/ ტოლობის ორივე მხარის დაქვეითება. გვექნება

$$\overline{\sum_i n_i^2}=C\sum_i\delta_{ii}=3C=1,$$

საიდანაც $C=1/3$ ამიტომ საბოლოო გვექნება მნიშვნელოვანი ფორმულა

$$\overline{n_i n_k}=\frac{1}{3}\delta_{ik}. \qquad /8,62/$$

ახლა ვიპოვოთ $n_i n_k n_l n_m$ ნამრავლის საშუალო. ეს ნამრავლი იქნება მეოთხე რანგის სიმეტრიული ტენზორი, ამიტომ იგი შეიძლება გამოვხატოთ δ_{ik} ერთეულოვანი ტენზორების საშუალებით. კერძოდ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\overline{(n_i n_k n_l n_m)} = C\left(\delta_{ik}\delta_{lm}+\delta_{im}\delta_{kl}+\delta_{im}\delta_{kl}\right). \qquad /8,63/$$

C -მუდმივის განსასაზღვრავად /8,63/ ფორმულაში ავიღოთ $i=k$, $l=m$ და ავჯამოთ, მივიღებთ

$$\overline{\sum_i n_i^2 \sum_k n_k^2} = C\left(\sum_i \delta_{ii}\sum_l \delta_{ll}+\sum_{i,l}\delta_{il}\delta_{il}+\sum_{i,l}\delta_{il}\delta_{il}\right),$$

საიდანაც $1=C(9+3+3)=15C$. მაშასადამე, $C=1/15$, ამგვარად, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\overline{(n_i n_k n_l n_m)} = \frac{1}{15}\left(\delta_{ik}\delta_{lm}+\delta_{im}\delta_{kl}+\delta_{im}\delta_{kl}\right) \qquad /8,64/$$

და ა.შ. ასევე ვიპოვოთ უფრო დიდი რაოდენობის n_i კომპონენტების ნამრავლთა საშუალოს.

ზემოთ მიღებული ფორმულების საშუალებით შეგვიძლია ვიპოვოთ ზოგი რიგი გამოსახულებების საშუალო, რომლებიც ერთეულოვან ვექტორს შეიცავენ. ვიპოვოთ, მაგალითად, $(\vec n,\vec A)(\vec n,\vec B)$ გამოსახულების საშუალო, სადაც $\vec A$ და $\vec B$ მუდმივი ვექტორებია. მივიღებთ

$$\overline{(\vec n,\vec A)(\vec n,\vec B)} = \overline{\sum_i n_i A_i \sum_k n_k B_k} = \sum_{i,k} A_i B_k \overline{n_i n_k} = \qquad /8,65/$$

$$= \sum_{i,k} A_i B_k \frac{1}{3}\delta_{ik} = \frac{1}{3}\sum_i A_i B_i$$

მაშასადამე,

$$\overline{(\vec n,\vec A)(\vec n,\vec B)} = \frac{1}{3}(\vec A,\vec B). \qquad /8,66/$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $\vec A=\vec B$, მაშინ

$$\overline{(\vec n,\vec A)^2} = \frac{1}{3}A^2. \qquad /8,67/$$

ეს შედეგი სხვანაირადაც შეგვიძლია მივიღოთ. მართლაც,

$$\overline{(\vec{n},\vec{A})^2}=\overline{\vec{n}^2\vec{A}^2\cos^2\theta}=\vec{A}^2\,\overline{\cos^2\theta}; \qquad /8,68/$$

შევნიშნოთ, რომ /8,59/ ფორმულის თანახმად

$$\overline{\cos^2\theta}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\Omega=\frac{1}{3}, \qquad /8,69/$$

$$\overline{\sin^2\theta}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\Omega=\frac{2}{3}, \qquad /8,70/$$

ამიტომ /8,68/ ფორმულა დაემთხვევა /8,67/-ს.

ვიპოვოთ ასეთი ინტეგრალი

$$J=\int(\vec{n},\vec{A})(\vec{n},\vec{B})\,d\Omega. \qquad /8,71/$$

საშუალოს განსაზღვრის ძალით

$$J=4\pi\,\overline{(\vec{n},\vec{A})(\vec{n},\vec{B})}=\frac{4\pi}{3}(\vec{A},\vec{B}). \qquad /8,72/$$

ამგვარად,

$$\iint(\vec{n},\vec{A})(\vec{n},\vec{B})\,d\Omega=\frac{4\pi}{3}(\vec{A},\vec{B}). \qquad /8,73/$$

ახლა განვიხილოთ $\left([\vec{n},\vec{A}][\vec{n},\vec{B}]\right)$ ნამრავლის საშუალო, სადაც $\vec{A}$ და $\vec{B}$ კვლავ მუდმივი ვექტორებია. გამოვიყენოთ ვექტორული ნამრავლის /8,14/ გამოსახულება; გვექნება

$$\begin{aligned}\overline{([\vec{n},\vec{A}][\vec{n},\vec{B}])}&=\overline{\sum_i[\vec{n},\vec{A}]_i[\vec{n},\vec{B}]_i}=\\&=\overline{\sum_i\sum_{k,l}\sum_{m,n}\varepsilon_{ikl}n_kA_l\varepsilon_{imn}n_mB_n}=\\&=\sum_i\sum_{k,l}\sum_{m,n}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{imn}A_lB_n\overline{n_kn_m};\end{aligned} \qquad /8,74/$$

გამოვიყენოთ /8,62/ ფორმულა და /8,74/-ში მივიღებთ ფორმუ-

ცია δ_{km}-ით. მივიღებთ:

$$\overline{\left([\vec n,\vec A],[\vec n,\vec B]\right)}=\frac{1}{3}\sum_{l,n}A_l B_n\sum_{i,k}\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{ikn}\cdot \qquad /8,75/$$

/7,18/ ფორმულის გათვალისწინებით საბოლოოდ გვექნება

$$\overline{\left([\vec n,\vec A],[\vec n,\vec B]\right)}=\frac{2}{3}(\vec A,\vec B)\cdot \qquad /8,76/$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $\vec A=\vec B$, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\overline{[\vec n,\vec A]^2}=\frac{2}{3}\vec A^2. \qquad /8,77/$$

ამ ფორმულის მიღებაც შეიძლება სხვა გზით, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\sin^2\theta=\frac{2}{3}$.

ახლა ვიპოვოთ $(\vec n,\vec A)[\vec n,\vec B]$ ვექტორის საშუალო, $\vec A$ და $\vec B$ მუდმივი ვექტორებისათვის. i-ური კომპონენტისათვის გვექნება

$$\overline{(\vec n,\vec A)[\vec n,\vec B]}_i=\overline{\sum_k n_k A_k\sum_{l,m}\varepsilon_{ilm}n_l B_m}=$$

$$=\sum_k\sum_{l,m}\varepsilon_{ilm}A_k B_m\,\overline{n_k n_l}= \qquad /8,78/$$

$$=\frac{1}{3}\sum_k\sum_{l,m}\varepsilon_{ilm}A_k B_m\delta_{kl}=\frac{1}{3}\sum_{k,m}\varepsilon_{ikm}A_k B_m,$$

საიდანაც საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\overline{(\vec n,\vec A)[\vec n,\vec B]}=\frac{1}{3}[\vec A,\vec B]\cdot \qquad /8,79/$$

კერძო შემთხვევაში, ცხადია, $\overline{(\vec n,\vec A)[\vec n,\vec A]}=0$

ვიპოვოთ კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი გამოსახულება. კერძოდ, გამოვთვალოთ, რის ტოლია $\vec n(\vec n,\vec A)$ ვექტორის საშუალო, როცა $\vec A$ მუდმივი ვექტორია; ცხადია, რომ

$$\overline{\{\vec n(\vec n,\vec A)\}}_i=\overline{n_i\sum_k n_k A_k}=\sum_k A_k\,\overline{n_i n_k}=\frac{1}{3}A_i\;; \qquad /8,80/$$

მაშასადამე,

$$\overline{\vec n(\vec n,\vec A)}=\frac{1}{3}\vec A. \qquad /8,81/$$

დაბოლოს გამოვთვალოთ $[\vec n,[\vec A,\vec n]]$ ორმაგი ვექტორული ნამრავლის საშუალო. "ბაც მინუს ცაბ" ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\overline{[\vec n[\vec A,\vec n]]}=\vec A\,\vec n^2-\overline{\vec n(\vec n,\vec A)}=\vec A-\overline{\vec n(\vec n,\vec A)}; \qquad /8,82/$$

თუ გავითვალისწინებთ /8,81/ ფორმულას, გვექნება

$$\overline{[\vec n,[\vec A,\vec n]]}=\frac{2}{3}\vec A \qquad /8,83/$$

და ა.შ. ასეთივე მეთოდით შეგვიძლია ვიპოვოთ ნებისმიერი გამოსახულების საშუალო.

§ 9. მეორე რანგის ტენზორები

ამ პარაგრაფში შევისწავლით მეორე რანგის ტენზორების ძირითად თვისებებს. ამასთან აღვნიშნოთ, რომ მოვლენების ფიზიკური თვისებების გამოსახატავად ძირითადად გამოიყენება მეორე რანგის ტენზორები. ქვემოთ შემოვისაზღვრებით სიმეტრიული ტენზორებით, რამდენადაც ანტისიმეტრიული ტენზორი ეკვივალენტურია ვექტორისა, ვექტორების თვისებები კი ჩვენ წინა პარაგრაფში განვიხილეთ. გავიხსენოთ მხოლოდ, რომ მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორის დუალური ვექტორი განისაზღვრება ფორმულით

$$A_i=\frac{1}{2}\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}T_{jk}, \qquad /9,1/$$

სადაც $A_i\equiv(T_{23},T_{31},T_{12})$. შევნიშნოთ, რომ, რადგან T_{jk} პოლარული ტენზორია, ე.ი. ინვერსიის დროს $T'_{jk}=T_{jk}$, მაშინ

$$A'_i=\frac{1}{2}\sum_{j,k}\varepsilon'_{ijk}T'_{jk}=\frac{1}{2}\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}T_{jk}=A_i, \qquad /9,2/$$

ე.ი. $\vec{A}$ ვექტორი აქსიალურია. ახლა, როცა ინვერსიისას $T'_{jk}=-T_{jk}$, მაშინ გვექნება $A'_i=-A_i$, ე.ი. დუალური ვექტორი პოლარული იქნება. როგორც ადრე დავამტკიცეთ, შეიძლება პირიქით, T_{ik} ტენზორი განვსაზღვროთ დუალური ვექტორის საშუალებით. სახელდობრ, ამისათვის საჭიროა /9,1/ გავამრავლოთ ε_{imn} ტენზორზე და მოვახდინოთ აჯამვა i ინდექსით; გვექნება

$$\sum_i \varepsilon_{imn} A_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k} T_{jk}\sum_i \varepsilon_{imn}\varepsilon_{ijk}; \qquad /9,3/$$

მარჯვენა მხარეში /7,21/ ფორმულის გამოყენებით და δ_{ik} სიმბოლოებით ფილტრაციის ჩატარების შემდეგ, საბოლოოდ მივიღებთ

$$T_{mn}=\sum_i \varepsilon_{imn}A_i. \qquad /9,4/$$

ახლა განვიხილოთ სიმეტრიული ტენზორები. დავიწყოთ მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორის დიაგონალურ სახეზე დაყვანით.

1. <u>მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორის დაყვანა დიაგონალურ სახეზე.</u> განვიხილოთ მეორე რანგის T_{ik} სიმეტრიული ტენზორი, რომლის კომპონენტები ნამდვილი სიდიდეები იყოს. დავსვათ ასეთი კითხვა, ხომ არ შეიძლება კოორდინატთა სისტემის სათანადო შერჩევით T_{ik} ტენზორი გავხადოთ დიაგონალური, ე.ი. მივცეთ $T_{ik}=\lambda_k\delta_{ik}$ სახე, სადაც λ_k რიცხვებია. ავიღოთ T_{ik}-ს სკალარული ნამრავლი რაიმე $\vec{A}$ ვექტორზე $\sum_k T_{ik}A_k=B_i$ მივიღებთ რაღაც $\vec{B}$ ვექტორს, რომელიც საზოგადოდ არ იქნება $\vec{A}$ ვექტორის პარალელური. $\vec{B}$ ვექტორი $\vec{A}$-ს პარალელური იქნება მხოლოდ იმ სისტემაში, რომელშიაც T_{ik}-ს აქვს დიაგონალური სახე. ამიტომ მოვიქცეთ შებრუნებით. დავუშვათ, რომ შესრულებულია პირობა

$$\sum_{k=1}^{3} T_{ik}A_k=\lambda A_i, \qquad /9,5/$$

სადაც λ რაღაც რიცხვია და გამოვარკვიოთ ამისათვის, რა პირო-

ბები უნდა დაედოს $\vec{A}$ ვექტორსა და λ რიცხვებს. რადგან $A_i=\sum_k \delta_{ik}A_k$, ამიტომ /9,5/ ასე გადაიწერება:

$$\sum_{k=1}^{3}(T_{ik}-\lambda\delta_{ik})A_k=0. \qquad /9,6/$$

ამგვარად, $\vec{A}$ ვექტორისა და λ რიცხვების განსასაზღვრად მივიღეთ წრფივი ერთგვაროვანი ალგებრულ განტოლებათა სისტემა. იმისათვის, რომ მას ჰქონდეს ტრივიალურისაგან განსხვავებული ამონახსნი, საჭიროა სისტემის დეტერმინანტი იყოს ნულის ტოლი, ე.ი.

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad /9,7/$$

ეს უკანასკნელი კი წარმოადგენს კუბურ განტოლებას λ -ს მიმართ; მას საუკუნეობრივი განტოლება ეწოდება. /9,7 /-ს, საზოგადოდ, ექნება სამი $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფესვი. რადგან T_{ik} კომპონენტები ნამდვილი და სიმეტრიული, ამიტომ ეს ფესვებიც ნამდვილი იქნება. დასარწმუნებლად /9,5/ გამოსახულება გავამრავლოთ A_i^* -ზე და ავჯამოთ i - თი; გვექნება

$$\lambda=\frac{\sum_{i,k} T_{ik}A_kA_i^*}{\sum_i |A_i|^2}. \qquad /9,8/$$

ამ გამოსახულების მნიშვნელი ნამდვილი სიდიდეა, ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ მრიცხველიც ნამდვილია. ავიღოთ მრიცხველის კომპლექსურად შეუღლებული და ორმაგ ჯამში მოვახდინოთ $i \rightleftarrows k$ შეცვლა. ასეთი გარდაქმნა, ცხადია, ჯამის მნიშვნელობას არ შეცვლის. გვექნება

$$\Big(\sum_{i,k} T_{ik}A_kA_i^*\Big)^*=\sum_{i,k} T_{ik}A_k^*A_i=\sum_{i,k} T_{ki}A_kA_i^*, \qquad /9,9/$$

და უკანასკნელ ჯამში გამოვიყენებთ $T_{ik}=T_{ki}$ სიმეტრიულობის პირობას, გვექნება

$$\left(\sum_{i,k} T_{ik} A_k A_i^*\right)^* = \sum_{i,k} T_{ik} A_k A_i^*, \qquad /9,10/$$

რაც იმაზე მიგვითითებს, რომ /9,8/ გამოსახულების მრიცხველი ნამდვილია და, მაშასადამე, $\lambda^*=\lambda$ ნამდვილი რიცხვებია. ამ რიცხვებს ტენზორის მთავარ ან საკუთარ მნიშვნელობებს უწოდებენ. λ_α $(\alpha=1,2,3)$ ფესვების მნიშვნელობათა /9,6/-ში შეტანით მივიღებთ განტოლებათა სამ სისტემას

$$\sum_{k=1}^{3}\left(T_{ik}-\lambda_\alpha \delta_{ik}\right)A_k^{(\alpha)}=0, \quad (\alpha=1,2,3) \qquad /9,11/$$

საიდანაც განისაზღვრება სამი ვექტორი $\vec{A}^{(\alpha)}\left(A_1^{(\alpha)}, A_2^{(\alpha)}, A_3^{(\alpha)}\right)$. ამ ვექტორებს ტენზორის საკუთარ ვექტორებს უწოდებენ. რადგან განტოლებათა სისტემა ერთგვაროვანია, ამიტომ ჩვენ შევძლებთ ამ ვექტორების მხოლოდ მიმართულებების განსაზღვრას, სიდიდით კი ისინი განუზღვრელი იქნება. ამასთან, როგორც ალგებრიდან ცნობილია, $A_k^{(\alpha)}$ ამონახსნები პროპორციულია განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტის ალგებრული დამატებებისა, ე.ი.

$$A_1^{(\alpha)}=C\begin{vmatrix} T_{22}-\lambda_\alpha & T_{23} \\ T_{32} & T_{33}-\lambda_\alpha \end{vmatrix} \qquad A_2^{(\alpha)}=C\begin{vmatrix} T_{23} & T_{21} \\ T_{33}-\lambda_\alpha & T_{31} \end{vmatrix},$$

$$A_3^{(\alpha)}=C\begin{vmatrix} T_{21} & T_{22}-\lambda_\alpha \\ T_{31} & T_{32} \end{vmatrix}, \qquad /9,12/$$

სადაც C განუზღვრელი მუდმივია.

დავამტკიცოთ, რომ მიღებული სამი საკუთარი ვექტორი $\vec{A}^{(1)}$, $\vec{A}^{(2)}$, $\vec{A}^{(3)}$, როცა $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3\neq\lambda_1$ ურთიერთმართობულია. ამისა-

თვის დავწეროთ /9,11/ ორი განსხვავებული λ_1 და λ_2 ფესვისა-თვის

$$\sum_{k} T_{ik}A_k^{(1)}=\lambda_1 A_i^{(1)},$$
$$\sum_{k} T_{ik}A_k^{(2)}=\lambda_2 A_i^{(2)}. \qquad /9,13/$$

პირველი განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $A_i^{(2)}$-ზე, მეორე $A_i^{(1)}$-ზე ავჯამოთ i-თი და ერთმანეთს გამოვაკლოთ; მივიღებთ

$$\sum_{i,k} T_{ik}A_i^{(2)}A_k^{(1)}-\sum_{i,k}T_{ik}A_k^{(2)}A_i^{(1)}=(\lambda_1-\lambda_2)\sum_{i=1}^{3}A_i^{(1)}A_i^{(2)}=0, \qquad /9,14/$$

თუ მარცხენა მხარის პირველ ჯამში მოვახდენთ $i\rightleftarrows k$ შეცვლას და გავითვალისწინებთ $T_{ik}=T_{ki}$ პირობას, მაშინ ეს ჯამი მეორე წევრს დაემთხვევა და შედეგად დაგვრჩება

$$(\lambda_1-\lambda_2)\sum_{i=1}^{3}A_i^{(1)}A_i^{(2)}=0. \qquad /9,15/$$

რადგან პირობის თანახმად $\lambda_1\neq\lambda_2$, ამიტომ გვექნება

$$\sum_{i=1}^{3}A_i^{(1)}A_i^{(2)}=(\vec{A}^{(1)},\vec{A}^{(2)})=0, \qquad /9,16/$$

რაც მარტივად ამტკიცებს, რომ $\vec{A}^{(1)}$ პერპენდიკულარულია $\vec{A}^{(2)}$ ვექტორისა. ასევე ვაჩვენებთ ორთოგონალობას მესამე $\vec{A}^{(3)}$ ვექტორთანაც.

ამგვარად, ზოგად შემთხვევაში, როცა საკუთრივი განტოლების ფესვები განსხვავებულია, სიმეტრიული ტენზორისათვის სამი ისეთი ურთიერთმართობული მიმართულება არსებობს, რომ ერთ-ერთი ამ მიმართულების გასწვრივ აღებული ნებისმიერი ვექტორის სკალარული ნამრავლი T_{ik} ტენზორზე მოგვცემს იგივე მიმართულების, ოღონდ განსხვავებული სიდიდის ახალ ვექტორს. ამ სამ მიმართულებას ტენზორის მთავარი ღერძები ეწოდება, ხოლო მთავარ ღერძებთან დაკავშირებულ სიდიდეებს – ტენზორის საკუთარი სიდიდეები /ნახ.21/. როცა რომელიმე ორი ფესვი ტოლია, მაშინ საკუთარი

ვექტორების ორთოგონალობის შესახებ მიღებული დამტკიცება აღარ გამოდგება. მაგალითად, თუ

$$\lambda_1=\lambda_2\equiv\lambda, \qquad /9,17/$$

მაშინ ამ ორი შესაბამისი $\vec{A}^{(1)}$ და $\vec{A}^{(2)}$ ვექტორების ორთოგონალობა აუცილებელი არაა, თუმცა ისინი კვლავ მართობული იქნებიან $\vec{A}^{(3)}$ ვექტორის.

რადგან /9,11/ განტოლებათა სისტემა ერთგვაროვანია, ამიტომ ამ ორი ვექტორის ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია ისევ ამონახსნი იქნება იმავე საკუთარი მნიშვნელობებით. მართლაც, აშკარაა, რომ

$$\vec{A}=c_1\vec{A}^{(1)}+c_2\vec{A}^{(2)} \qquad /9,18/$$

კომბინაცია /9,11/ განტოლებას აკმაყოფილებს, რასაც ადვილად დავრწმუნდებით უშუალო ჩასმით

$$\sum_K(T_{iK}-\lambda\delta_{iK})A_K=c_1\sum_K(T_{iK}-\lambda_1\delta_{iK})A_K^{(1)}+$$
$$+c_2\sum_K(T_{iK}-\lambda_2\delta_{iK})A_K^{(2)}=0. \qquad /9,19/$$

აშკარაა, ყოველი ვექტორი, რომელიც $\vec{A}^{(1)}$ და $\vec{A}^{(2)}$ ვექტორების სიბრტყეში მდებარეობს და გამოისახება ამ ორი ვექტორის წრფივი კომბინაციით, ასევე საკუთარი ვექტორი იქნება. ცხადია, ეს ვექტორი პერპენდიკულარული იქნება $\vec{A}^{(3)}$-ვექტორისა: $(\vec{A}^{(3)},\vec{A})=0$.

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ, რომ $\vec{A}$ ვექტორი მართობია მესამე, განსხვავებული საკუთარი მნიშვნელობის შესაბამისი $\vec{A}^{(3)}$ ვექტორისა, მეორე მხრივ, $\vec{A}$ ვექტორი ყოველთვის შეგვიძლია დავშალოთ ორ ურთიერთმართობ მდგენელად, რომლებიც $\vec{A}^{(3)}$-თან ერთად შეადგენენ სამ ურთიერთმართობულ ღერძთა სისტემას. ამასთან, ცხადია, რომ $\vec{A}$ ვექტორის წარმოდგენა $\vec{A}^{(3)}$-ის მართობ სიბრტყეში ორ მართობულ მდგენელად შესაძლებელია უამრავი გზით, ამიტომ

$\lambda_1=\lambda_2$ დამთხვეული ფესვების შემთხვევაში Ox_1x_2 სიბრტყეში გვექნება მთავარი მიმართულებების უსასრულო სიმრავლე.

ვნახოთ, რა სახე აქვს მეორე რანგის სიმეტრიულ ტენზორს საკუთარ სისტემაში. ზემოთქმულის თანახმად ამ სისტემაში ტენზორს უნდა ჰქონდეს სახე

$$T_{ik}=\lambda_k\delta_{ik}. \qquad /9,20/$$

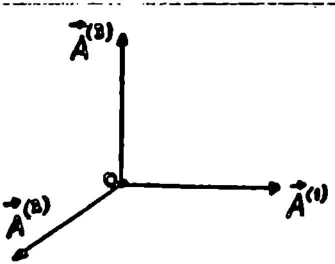
მართლაც, ამ ტენზორის A_k ვექტორზე სკალარული გამრავლებით მივიღებთ იგივე მიმართულების ვექტორს

$$\sum_k T_{ik}A_k=\sum_k \lambda_k\delta_{ik}A_k=\lambda_i A_i. \qquad /9,21/$$

როგორც ვხედავთ, ტენზორის საკუთარ სისტემაში მეორე რანგის სიმეტრიულ ტენზორს ჰქონია დიაგონალური სახე

$$T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}. \qquad /9,22/$$

მაშასადამე, ტენზორის საკუთარ სისტემაზე გადასვლისას ტენზორი დაიყვანება დიაგონალურ სახეზე, დიაგონალზე მოთავსებული იქნება ტენზორის საკუთარი მნიშვნელობები. დეკარტის კოორდინატთა ერთი სისტემიდან მეორეზე გადასვლა ხორციელდება წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნებით, ამიტომ ჩვენ მივიღეთ ასეთი შედეგი: ყოველი ნამდვილი მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორი წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნით შეგვიძლია დავიყვანოთ დიაგონალურ სახეზე.



ნახ. 21

როცა ყველა საკუთარი

მნიშვნელობები ერთმანეთის ტოლია $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \equiv \lambda$, მაშინ $T_{ik} = \lambda\delta_{ik}$ ამ სიდიდის A_i ვექტორზე სკალარული გამრავლების შედეგად მივიღებთ

$$\sum_k T_{ik}A_k = \sum_k \lambda\delta_{ik}A_k = \lambda A_i, \qquad /9,23/$$

ამიტომ, ამ შემთხვევაში, ყველა მიმართულება მთავარ მიმართულებას წარმოადგენს და მათი არჩევა სავსებით ნებისმიერია.

2. <u>მეორე რანგის ტენზორის ინვარიანტები</u>. ფიზიკაში მეტად დიდი მნიშვნელობა აქვს იმის გარკვევას, თუ კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნისას ტენზორის კომპონენტებისაგან შედგენილი რომელი კომბინაცია რჩება ინვარიანტული. განვიხილოთ ნებისმიერი T_{ik} ტენზორი და მისი კომპონენტებიდან შევადგინოთ ყველა შესაძლო სკალარული სიდიდე. ნებისმიერი T_{ik} ტენზორისათვის დავწეროთ საუკუნეობრივი განტოლება[1]

$$\left| T_{ik} - \lambda\delta_{ik} \right| = 0. \qquad /9,24/$$

/9,24/ მესამე რანგის დეტერმინანტი ε_{ikl} ტენზორის საშუალებით ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\sum_{ikl} \varepsilon_{ikl}(T_{1i} - \lambda\delta_{1i})(T_{2k} - \lambda\delta_{2k})(T_{3l} - \lambda\delta_{3l}) = 0. \qquad /9,25/$$

ნამრავლის გაშლის შედეგად მივიღებთ

$$\sum_{ikl} \varepsilon_{ikl}\{T_{1i}T_{2k}T_{3l} + \lambda^2(T_{1i}\delta_{2k}\delta_{3l} + T_{2k}\delta_{1i}\delta_{3l} + T_{3l}\delta_{1i}\delta_{2k}) - \lambda(T_{1i}T_{2k}\delta_{3l} + T_{1i}T_{3l}\delta_{2k} + T_{2k}T_{3l}\delta_{1i}) - \lambda^3\delta_{1i}\delta_{2k}\delta_{3l}\} = 0. \qquad /9,26/$$

---

1. ნებისმიერი ტენზორის შემთხვევაში $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ნამდვილი რიცხვები შეიძლება არც იყოს.

გავითვალისწინოთ, რომ

$$\sum_{ikl} \varepsilon_{ikl} T_{1i} T_{2k} T_{3l} = \Delta(T),$$

$$\sum_{ikl} \varepsilon_{ikl} \left(T_{1i}\delta_{2k}\delta_{3l} + T_{2k}\delta_{1i}\delta_{3l} + T_{3l}\delta_{1i}\delta_{2k}\right) = Sp\,T, \qquad /9,27/$$

$$\sum_{ikl} \varepsilon_{ikl} \left(T_{1i}T_{2k}\delta_{3l} + T_{1i}T_{3l}\delta_{2k} + T_{2k}T_{3l}\delta_{1i}\right) = \Delta_{11}(T) + \Delta_{22}(T) + \Delta_{33}(T),$$

სადაც Δ_{ii} არის T_{ii} ელემენტის შესაბამისი ალგებრული დამატება; კერძოდ,

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix}. \qquad /9,28/$$

ამგვარად, საკუთრივი განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$-\lambda^3 + \lambda^2 Sp\,T - \lambda(\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}) + \Delta(T) = 0, \qquad /9,29/$$

სადაც

$$\Delta(T) = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \qquad /9,30/$$

არის T_{ik} ტენზორის დეტერმინანტი. ცხადია, რომ /9,29/ კუბური განტოლების კოეფიციენტები სკალარული სიდიდეებია, ამიტომ ისინი ტენზორის ინვარიანტებს წარმოადგენენ. ამგვარად, გვექნება შემდეგი ინვარიანტები:

$$I_1 = Sp\,T = \sum_{i=1}^{3} T_{ii},$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^{3} \Delta_{ii}(T), \qquad /9,31/$$

$$I_3 = \Delta(T).$$

/9,31/ ინვარიანტები შეიძლება გამოვსახოთ საკუთრივი განტოლების ფესვებით, ე.ი. ტენზორის საკუთარი მნიშვნელობებით.

ცნობილია, რომ $\quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad /9,32/$

კუბური განტოლების კოეფიციენტები ფესვების საშუალებით განისაზღვრება ფორმულებით:

$$
\begin{aligned}
-a &= r_1 + r_2 + r_3 , \\
b &= r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 , \\
-c &= r_1 r_2 r_3 ,
\end{aligned}
\qquad /9,33/
$$

სადაც r_1, r_2, r_3 კუბური განტოლების ფესვებია. ამიტომ /9,31/ ინვარიანტები $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ფესვების საშუალებით ასე შეგვიძლია გამოვსახოთ:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= Sp\,T = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 , \\
I_2 &= \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 , \\
I_3 &= \Delta(T) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 .
\end{aligned}
\qquad /9,34/
$$

აღვნიშნოთ, რომ I_1, I_2, I_3 ინვარიანტების საშუალებით შეიძლება გამოვსახოთ T_{ik} ტენზორის ინვარიანტების უსასრულო სიმრავლე. ასე მაგალითად, ინვარიანტი იქნება შემდეგი კომბინაცია $I_1^2 - 2I_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ და ა.შ.

სიმეტრიული ტენზორის შემთხვევაში $T_{ik} = T_{ki}$, I_1, I_2, I_3 -ს. ტენზორის პირველი, მეორე და მესამე ინვარიანტები ეწოდება. რადგან საკუთარ სისტემაში სიმეტრიულ ტენზორს აქვს მხოლოდ სამი კომპონენტი, ამიტომ მისგან შეიძლება შევადგინოთ არაუმეტეს სამი დამოუკიდებელი ინვარიანტული ფუნქციისა, ყველა სხვა ინვარიანტი გამოისახება I_1, I_2, I_3 -ის საშუალებით. ასე მაგალითად, $\sum_{i,k} T_{ik}^2$ ინვარიანტი ტოლი იქნება $\sum_{i,k} T_{ik}^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = I_1^2 - 2I_2$ და ა.შ.

თუ გვაქვს მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი F_{ik}, მაშინ ცხადია, რომ მისი შპური იქნება ნულის ტოლი, რადგანაც $F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$, ამიტომ მას ეს ინვარიანტი არ ექნება. მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი ეკვივალენტურია ვექტორის

$$
A_i = \frac{1}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{ikl} F_{kl} ; \qquad /9,35/
$$

ვექტორისაგან კი შეიძლება შევადგინოთ ერთადერთი ინვარიანტი, ესაა მისი კვადრატი; ამგვარად, გვექნება

$$\sum_{i=1}^{3} A_i A_i = \sum_i A_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k} F_{ik}^2 . \qquad /9,36/$$

მაშასადამე, მეორე რანგის ანტისიმეტრიულ F_{ik} ტენზორს ექნება ერთადერთი ინვარიანტი $\sum_{i,k} F_{ik}^2$. /9,24/-დან: $I_1=0$, $I_2=\sum_{i,k}F_{ik}^2=\bar{A}^2$, $I_3=0$, მივიღებთ იგივე შედეგს.

3. <u>მეორე რანგის ტენზორის გეომეტრიული შინაარსი</u>. ტენზორს ვექტორივით მარტივი შინაარსი არ გააჩნია. იგი შეიძლება დავაკავშიროთ ზედაპირთან. განვიხილოთ მეორე რიგის ზედაპირი, რომელიც სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ

$$\sum_{i,k} T_{ik}\, x_i x_k = const. \qquad /9,37/$$

ყოველთვის შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ T_{ik} სიმეტრიული ტენზორია. თუ მას გარკვეული სიმეტრია არა აქვს, მაშინ T_{ik} შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც სიმეტრიული M_{ik} და ანტისიმეტრიული N_{ik} ტენზორების ჯამი. /9,37/-ში კი ანტისიმეტრიული წევრის შესაბამისი ჯამი ნულის ტოლი იქნება, რადგანაც N_{ik} ანტისიმეტრიული და $x_i x_k$ სიმეტრიული ტენზორების სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია. ეს ასეც უნდა ყოფილიყო, რადგან /9,37/ მეორე რანგის ზედაპირი განისაზღვრება ექვსი დამოუკიდებელი პარამეტრით. აღვნიშნოთ, რომ /9,37/ ტოლობას შინაარსი რომ არ იყოს მიკლებული, მარჯვენა მხარის ნიშანი ისეთივე უნდა იყოს, როგორიც $\Delta(T)$ დეტერმინანტისა. მართლაც, მაგალითად, როცა $T_{ik}=-\lambda_k\delta_{ik}$, სადაც $\lambda_k>0$ მივიღებდით $-\sum_k\lambda_k x_k^2<0$, რასაც აზრი არა აქვს. ამ შემთხვევაში მარჯვენა მხარეში საჭირო იქნება მუდმივი იყოს უარყოფითი.

თუ კოორდინატთა ღერძებად ავიღებთ ტენზორის მთავარ მიმართულებებს, მაშინ ტენზორის საკუთარ სისტემაში T_{ik} -ს ექნება დიაგონალური სახე $T_{ik}=\lambda_k\delta_{ik}$ და /9,37/ ფართეული დაიყვანება დიაგონალურ სახეზე

$$\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\lambda_3 x_3^2=const. \qquad /9,38/$$

ფიზიკურ ამოცანებში, როგორც წესი, ტენზორის საკუთარი მნიშვნელობები ნამდვილი რიცხვებია, ამიტომ როცა ყველა საკუთარი მნიშვნელობა განსხვავებულია $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3\neq\lambda_1$, /9,38/ წარმოადგენს სამღერძა ელიფსოიდის კანონიკურ განტოლებას. ამ შემთხვევაში ტენზორს ექნება მხოლოდ სამი მთავარი მიმართულება. როგორც ვხედავთ, ტენზორის დაყვანა დიაგონალურ სახეზე ეკვივალენტურია მეორე რიგის ფართეულის დაყვანისა კანონიკურ სახეზე. როცა $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3\equiv\lambda$, მაშინ $T_{ik}=\lambda\delta_{ik}$ და, რადგან δ_{ik} ინვარიანტული ტენზორია, ამიტომ T_{ik} დიაგონალურ სახეს მიიღებს ყველა სისტემაში. ფართეული გადაიქცევა სფეროდ და ნებისმიერი მიმართულება მთავარი იქნება. როცა $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$, სათანადო ფართეული ბრუნვის ელიფსოიდს გამოხატავს; იგი მიიღება ელიფსის ბრუნვით z-ღერძის ირგვლივ. ყველა მიმართულება, რომელიც მართობია ბრუნვის ღერძისა, იქნება მთავარი მიმართულება. მაშასადამე, მეორე რანგის სიმეტრიულ ტენზორს აქვს ან სამი, ან უსასრულო რაოდენობა მთავარი მიმართულებებისა. ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ ტენზორული ფართეულის შესწავლით გარკვეული დასკვნები შეგვიძლია გავაკეთოთ ტენზორის თვისებების შესახებ.

4. <u>ინერციის ტენზორი:</u> განვიხილოთ ინერციის ტენზორი, როგორც მარტივი მაგალითი მექანიკაში ტენზორების გამოყენებისა. დისკრეტული მყარი სხეულისათვის ამ ტენზორს აქვს შემდეგი

გამოსახულება:

$$I_{ik}=\sum m\left(\vec{r}^{\,2}\delta_{ik}-x_i x_k\right), \qquad /9,39/$$

სადაც m არის მყარი სხეულის შემადგენელი ნაწილაკის მასა. აჯამვა ხდება ამ ნაწილაკების მიხედვით, ხოლო /9,39/ ფორმულაში აჯამვის ინდექსი ჩამოშვებულია. ცხადია, რომ ინერციის ტენზორი სიმეტრიულია $I_{ik}=I_{ki}$, ეს ჩანს იქიდან, რომ იგი შეიცავს ორი სიმეტრიული ტენზორის $\vec{r}^{\,2}\delta_{ik}$ და $x_i x_k$ სხვაობას. ამ ტენზორის დიაგონალური ელემენტები

$$\begin{aligned} I_{11}&=\sum m\left(\vec{r}^{\,2}-x_1^2\right)=\sum m\left(x_2^2+x_3^2\right),\\ I_{22}&=\sum m\left(\vec{r}^{\,2}-x_2^2\right)=\sum m\left(x_1^2+x_3^2\right),\\ I_{33}&=\sum m\left(\vec{r}^{\,2}-x_3^2\right)=\sum m\left(x_1^2+x_2^2\right) \end{aligned} \qquad /9,40/$$

წარმოადგენს მყარი სხეულის ინერციის მომენტებს შესაბამისად x_1, x_2 და x_3 ღერძების მიმართ. ინერციის ტენზორის შპური ტოლი იქნება

$$Sp\,I=2\sum m\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)=2\sum m\vec{r}^{\,2}. \qquad /9,41/$$

ჩვენ შეგვიძლია შევირჩიოთ ინერციის ტენზორის საკუთარი სისტემა, მაშინ, როგორც ვიცით, ინერციის ტენზორი დიაგონალური იქნება. ამ შემთხვევაში დიაგონალურ ელემენტებს /საკუთარ მნიშვნელობებს/ ინერციის მთავარ მომენტებს უწოდებენ.

დავალებები:

1. იპოვეთ /7,64 / მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორის ინვარიანტები.

2. დაიყვანეთ დიაგონალურ სახეზე მეორე რანგის სიმეტრიული /7,65 / ტენზორი და იპოვეთ შესაბამისი ტენზორული ელიფსოიდი.

§ 10. თავისუფალი და მუნჯი ინდექსები

ტენზორულ აღრიცხვაში აინშტაინის მიერ ჯამების აღსანიშნავად შემოღებული იყო ე.წ. მუნჯი ინდექსები. წერის გამარტივების მიზნით ჯამის ნიშანი არ იწერება და განმეორებული ინდექსით, რომელსაც მუნჯი ინდექსი ეწოდება, იგულისხმება აჯამვა ამ ინდექსის ცვლილების მთელ ინტერვალში. მაგალითად, კოორდინატთა წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნა ასე დაიწერება:

$$x_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k \equiv a_{ik} x_k . \qquad /10,1/$$

მაშასადამე, k განმეორებული ინდექსით იგულისხმება აჯამვა ერთიდან სამამდე, ე.ი. k მუნჯი ინდექსია. ასევე, მეორე რანგის ტენზორი გარდაიქმნება ფორმულით

$$T'_{ik} = a_{im} a_{kn} T_{mn} \qquad /10,2/$$

ამ გამოსახულებაში მუნჯი ინდექსებია m და n, რომლითაც ხდება აჯამვა ერთიდან სამამდე. T_{ik} ტენზორის შპური კი ასე ჩაიწერება:

$$SpT = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} . \qquad /10,3/$$

M_{ik} და N_{ik} ტენზორების სკალარულ ნამრავლს ექნება შემდეგი სახე:

$$M_{ik} N_{kj} . \qquad /10,4/$$

აქ მუნჯი ინდექსია k. ცხადია, რომ ვექტორი თავისი კომპონენტების საშუალებით ასე ჩაიწერება $\vec{A} = \vec{i}_\alpha A_\alpha$. მაგალითად, რადიუს-ვექტორისათვის გვექნება $\vec{r} = \vec{i}_\alpha x_\alpha$. რას წარმოადგენს A_i^2 სიდიდე? რადგან $A_i^2 = A_i A_i$, ამიტომ i - მუნჯია და $A_i A_i$ გამოსახულებაში იგულისხმება აჯამვა. ასე რომ,

$$\vec{A}^2 \equiv A_i^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 . \qquad /10,5/$$

ამის მიხედვით რადიუსვექტორის კვადრატი ასე ჩაიწერება:

$$\vec{r}^{\,2} = x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 . \qquad /10,6/$$

ამავე ფორმულის ძალით $(\vec{A},\vec{B}) = A_i B_i$, ხოლო $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ და ა.შ. ჩვენს მიერ ადრე გამოყვანილი ფორმულები ლევი-ჩივიტას ტენზორის გამოყენებით შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$[\vec{A},\vec{B}]_i = \varepsilon_{ikl} A_k B_l , \qquad /10,7/$$

$$\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{mkl} = 2\delta_{im} , \qquad /10,8/$$

$$\varepsilon_{ikl}\,\varepsilon_{imn} = \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm} \qquad /10,9/$$

და ა.შ. საზოგადოდ, სწორ ტენზორულ ტოლობაში არც ერთი ინდექსი არ უნდა გვხვდებოდეს ორზე მეტად. თუ იძულებული გავხდით და რომელიმე ინდექსი ორზე მეტად გამოვიყენეთ, მაშინ მუნჯი ინდექსის შემოღებაზე უმჯობესია ხელი ავიღოთ და ისევ ჯამის ნიშნებით ვისარგებლოთ.

ინდექსს, რომელიც ტენზორულ ტოლობაში ცალად გვხვდება, თავისუფალ ინდექსს უწოდებენ. მაგალითად, /10,7/-ში i იქნება თავისუფალი ინდექსი. /10,8/-ში თავისუფალია i და m ინდექსები და ა.შ. როგორც ვხედავთ, ტენზორის რანგს განსაზღვრავს სწორედ თავისუფალი ინდექსი. ასე მაგალითად, τ_{ikjj} იქნება მეორე რანგის ტენზორი, რადგან მას აქვს ორი თავისუფალი ინდექსი i და k; j ინდექსი კი მუნჯია. კარგად დავიხსომოთ, რომ ნებისმიერ ტენზორულ ტოლობაში დაცული უნდა იყოს თავისუფალი ინდექსების "ტოლობა", ე.ი. რომელი თავისუფალი ინდექსიც გვაქვს ტოლობის ერთ მხარეს, იგივე უნდა გვქონდეს ტოლობის მეორე მხარესაც. F_{ik} მეორე რანგის ტენზორი შეიძლება ტოლი იყოს მხოლოდ იგივე თავისუფალი ინდექსების მქონე ტენზორისა, ასე მაგალითად,

$$F_{ik} = G_{mnimkn} . \qquad /10,10/$$

ამგვარად, ტენზორული ტოლობა მაშინაა შესაძლებელი, როცა ტოლობის ორივე მხარეს ჰქონდეს ინდექსების, პოლარობისა და სიმეტრიის " ტოლობა ".

§ 11. ტენზორები n-განზომილებიან ევკლიდის სივრცეში

1. წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნა n - სივრცეში. აქამდე ჩვენ ვიხილავდით ტენზორებს სამგანზომილებიან სივრცეში; ახლა შევისწავლით ტენზორებს n - განზომილებიან ევკლიდის E_n სივრცეში. ამ სივრცეში შეგვიძლია განვიხილოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და სივრცის ყოველი წერტილის მდებარეობა დავახასიათოთ n - კოორდინატით $x_1, x_2, \dots x_n$. ცხადია, რადიუსვექტორს აგრეთვე n -მდგენელი ექნება $X=X(x_1,x_2,\cdots x_n)$.

ევკლიდის n - განზომილებიანი სივრცის მეტრიკა განისაზღვრება ფორმულით

$$ds^2=dx_i^2=\delta_{ik}dx_i dx_k, \qquad /11,1/$$

რომელიც გამოხატავს ელემენტარული მანძილის კვადრატს E_n სივრცეში. /11,1/-ში i და k მუნჯი ინდექსებია, რომლებიც იღებენ მნიშვნელობებს: 1,2... n, სამომავლოდ, ამ პარაგრაფში მუნჯი ინდექსებით ვიგულისხმებთ აჯამვას 1-დან n-მდე. როგორც ვხედავთ, E_n სივრცის მეტრიკული ტენზორი $g_{ik}=\delta_{ik}$ წარმოადგენს n განზომილებიან კრონეკერის სიმბოლოს, რომელიც n რანგის ერთეულოვანი მატრიცაა. δ_{ik}-ს აქვს ფილტრაციის შემდეგი თვისება:

$$A_i\delta_{ik}=A_k; \qquad (k=1,2,\cdots n). \qquad /11,2/$$

გარდა ამისა, δ_{ik} სიმეტრიულია ინდექსების გადასმის მიმართ.

ფიზიკაში ხშირად გამოიყენება ფსევდოევკლიდური სივრცის ცნებაც. ფსევდოევკლიდური ეწოდება ისეთ სივრცეს, რომლის g_{ik} მეტრიკული ტენზორი δ_{ik} -საგან განსხვავდება იმით, რომ დია-

გონალური ელემენტებიდან ერთ-ერთის ნიშანი მაინც განსხვავდება დანარჩენებისაგან. /11,1/ ფორმულის თანახმად ფსევდოევკლიდურ სივრცეში, განსხვავებით E_n სივრცისაგან, dS^2 დადებითად არარ არის განსაზღვრული. dS^2 შეიძლება იყოს ორივე ნიშნის და ნული. მაგალითად, ფსევდოევკლიდურ სივრცეს განსაზღვრავს შემდეგი მეტრიკული ტენზორი:

$$g_{ik}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}. \qquad /11,3/$$

ავიღოთ E_n სივრცეში რაიმე წერტილი, რომლის კოორდინატები უძრავ და მბრუნავ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში შესაბამისად იყოს $(x_1,x_2\cdots x_n)$ და $(x_1',x_2',\cdots x_n')$, მაშინ წერტილის კოორდინატებს შორის ამ ორ სისტემაში გვექნება შემდეგი კავშირი:

$$x_i'=a_{ik}x_k. \qquad (k=1,2,\cdots n) \qquad /11,4/$$

ცხადია, რომ ეს გარდაქმნა ინვარიანტულს ტოვებს n განზომილებიანი რადიუსვექტორის კვადრატს, ე.ი.

$$x_i^2=x_i'^2, \qquad (i=1,2,\cdots n) \qquad /11,5/$$

ამიტომ a_{ik} მიმართულების კოსინუსები აკმაყოფილებენ ორთონორმირების პირობას

$$a_{im}a_{km}=a_{mi}a_{mk}=\delta_{ik}; \qquad /11,6/$$

მაშასადამე, /11,4/ წარმოადგენს წრფივ ორთოგონალურ გარდაქმნას. გარდაქმნის მატრიცას ექნება სახე

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad /11,7/$$

ამ მატრიცის n-ური რანგის დეტერმინანტი $\Delta(a)$ ტოლი იქნება ერთისა, როცა /11,4/ წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნა შეესაბამება მობრუნებას და ტოლია მინუს ერთისა, როცა /11,4/ წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნა დაიყვანება კენტი რაოდენობის ღერძის არეკვლაზე.

/11,4/-ის შესაბამის შებრუნებულ წრფივ ორთოგონალურ გარდაქმნას ექნება სახე:[1]

$$x_k = a_{ik}\, x'_i. \qquad /11,8/$$

სივრცეში წერტილის რადიუსვექტორი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ერთსვეტიანი ან ერთსტრიქონიანი მატრიცა

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}, \quad X=(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad /11,9/$$

მაშინ /11,4/ წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნა შეგვიძლია დავწეროთ $X'=AX$ სახით, სადაც A არის /11,7/ გარდაქმნის მატრიცა.[2] გაშლილად წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნა ასე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{pmatrix} x'_1\\ x'_2\\ \vdots\\ x'_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & & & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix} \qquad /11,10/$$

2. <u>ვექტორები E_n სივრცეში.</u> ახლა განვმარტოთ ვექტორები E_n სივრცეში. $A_1, A_2, \dots, A_n$ სიდიდეთა ერთობლიობას, რომლებიც კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას გარდაიქმნებიან ისევე,

---

1 ამ შემთხვევაში გარდაქმნის მატრიცა იქნება /11,7/-ის ტრანსპონირებული $\widetilde{A}$.

2 შებრუნებულ გარდაქმნას ექნება სახე $X=\widetilde{A}X'$; ამასთან, $\widetilde{A}A=A^{-1}A=1$.

როგორც კოორდინატები, ე.ი. კანონით

$$A_i' = a_{ik} A_k \qquad (i=1,2,\dots n) \qquad /11,11/$$

უწოდებენ n-განზომილებიან ვექტორს, ან მოკლედ n-ვექტორს. n-ვექტორი იქნება პირველი რანგის ტენზორი.

E_n სივრცეში შემოვიტანოთ $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots, \vec{i}_n$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი. ე.ი. არ მოიძებნება ნულისაგან განსხვავებული ისეთი C_k რიცხვები, რომ შესრულებული იყოს ტოლობა

$$C_k \vec{i}_k = 0. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში $\vec{i}_k$ ვექტორებზე ამბობენ, რომ ისინი წრფივად დამოკიდებულნი არიან. თუ $n=2$, მაშინ წრფივად დამოუკიდებლობა ნიშნავს $\vec{i}_1$ და $\vec{i}_2$-ის არაკოლინიარობას /ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ/, როცა $n=3$, $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ წრფივად დამოუკიდებლობა გვიჩვენებს, რომ ეს ვექტორები არ არიან კომპლანარული /ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობენ/ და, ზოგადად, E_n სივრცეში $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots \vec{i}_n$ ვექტორების წრფივად დამოუკიდებლობა ტოლფასია იმისა, რომ ისინი არ მდებარეობენ / $n-1$ / განზომილებიან ჰიპერსიბრტყეში. ცხადია, E_n სივრცეში $m>n$ რაოდენობის ვექტორი ყოველთვის წრფივად დამოკიდებული იქნება. გეომეტრიულად, წრფივად დამოუკიდებლობა ნიშნავს იმას, რომ ამ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის n განზომილებიანი მოცულობა არ არის ნულის ტოლი. ამგვარად, E_n სივრცეში $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots \vec{i}_n$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორები შეგვიძლია ავირჩიოთ ბაზისად და ნებისმიერი ვექტორი წარმოვიდგინოთ ბაზისის ვექტორების წრფივი კომბინაციის სახით:

$$\vec{A} = \vec{i}_k A_k. \qquad (k=1,2,\dots n) \qquad /11,12/$$

დეკარტის მართკუთხა სისტემაში ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\vec{i}_k$ ერთეულოვანი ვექტორებია და $(\vec{i}_k, \vec{i}_j) = \delta_{kj}$.

ცხადია, რომ n-ვექტორს ზუსტად ისეთივე თვისებები ექნე-

ბა, რაც სამგანზომილებიან ვექტორს. მაგალითად, ორი A_i და B_k ვექტორის სკალარული ნამრავლი განიმარტება ფორმულით

$$A_iB_i=A_1B_1+A_2B_2+\dots+A_nB_n; \qquad /11,13/$$

კერძოდ, ვექტორის სიგრძე ტოლი იქნება $\sqrt{A_iA_i}$ გამოსახულების.

თუ კენტი რაოდენობის ღერძების სარკისებური არეკვლისას ვექტორის შესაბამისი კომპონენტები ნიშანს იცვლიან, მაშინ ასეთ n-ვექტორს პოლარულს უწოდებენ. ფსევდო n-ვექტორებისათვის კი სამართლიანი იქნება გარდაქმნის კანონი

$$A_i'=\Delta(a)a_{ik}A_k. \qquad /11,14/$$

მობრუნების შემთხვევაში $\Delta(a)=1$, ხოლო არეკვლის დროს $\Delta(a)=-1$

ფსევდოევკლიდურ E_n სივრცეში ვექტორები გვექნება სამი ტიპის: ერთი, რომლის კვადრატი დადებითად არის განსაზღვრული $A_i^2>0$, მეორე, რომლის კვადრატი უარყოფითია $A_i^2<0$ და, მესამე, რომლის კვადრატი ნულის ტოლია $A_i^2=0$.

3. ტენზორები E_n სივრცეში. E_n სივრცეში მეორე რანგის ტენზორს ექნება n^2 კომპონენტი და კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას იგი გარდაიქმნება როგორც ორი n-ვექტორის პირდაპირი ნამრავლი; კერძოდ,

$$T'_{ik}=a_{ip}a_{ks}T_{ps} \quad (p,s=1,2,\dots n) \qquad /11,15/$$

ამ ტენზორის შპური იქნება გამოსახულება

$$SpT=T_{ii}=T_{11}+T_{22}+\dots+T_{nn}. \qquad /11,16/$$

ცხადია, რომ SpT ინვარიანტული სიდიდეა.

m რანგის ტენზორი, რომელსაც ექნება n^m კომპონენტი, განისაზღვრება გარდაქმნის კანონით

$$\tau'_{i_1i_2\dots i_m}=a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\dots a_{i_mk_m}\tau_{k_1k_2\dots k_m} \qquad /11,17/$$

სადაც $k_1, k_2, \dots k_m$ მუნჯი ინდექსებია.

m -ური რანგის ფსევდოტენზორი კი განისაზღვრება ფორმულით

$$\Pi'_{i_1 i_2 \dots i_m} = \Delta(a)\, a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_m k_m} \Pi_{k_1 k_2 \dots k_m}. \qquad /11,18/$$

აღვნიშნოთ, რომ /1.,2/ კრონეკერის სიმბოლო წარმოადგენს მეორე რანგის ინვარიანტულ პოლარულ ტენზორს $\delta'_{ik} = \delta_{ik}$, რაშიაც ადვილად დავრწმუნდებით გარდაქმნის კანონის გამოყენებით:

$\delta'_{ik} = a_{im} a_{kn} \delta_{mn} = a_{im} a_{km} = \delta_{ik}$.

როგორც ვხედავთ, ფორმულებს E_n სივრცეში ფორმალურად ისეთივე სახე აქვთ, რაც სამ სივრცეში, ოღონდ ინდექსები ახლა უკვე იცვლებიან ერთიდან n -მდე. ამიტომ ჩვენ აღარ გავიმეორებთ ტენზორების ადრე განხილული თვისებების დამტკიცებას. კერძოდ, აღვნიშნოთ, რომ რანგები ტენზორების გამრავლებით იკრიბება, დაკვეცებით კი - რანგი ორით მცირდება. ასევე განიმარტება ტენზორების სიმეტრია. მაგალითად, მეორე რანგის ტენზორის შემთხვევაში, როცა $T_{ik} = T_{ki}$ ტენზორს სიმეტრიული ჰქვია, ხოლო როცა $P_{ik} = -P_{ki}$ მაშინ ტენზორი ანტისიმეტრიულია. ცხადია, E_n სივრცეში მეორე რანგის სიმეტრიულ ტენზორს ექნება $\frac{n(n+1)}{2}$ დამოუკიდებელი კომპონენტი, ანტისიმეტრიულს კი $\frac{n(n-1)}{2}$.

4. <u>სრულიად ანტისიმეტრიული ერთეულოვანი აქსიალური ტენზორი.</u>

n -სივრცეში სრულიად ანტისიმეტრიული ერთეულოვანი ტენზორი იქნება n -რანგისა. აღვნიშნოთ იგი $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ -ით. ამ ტენზორს ექნება $n!$ ნულისაგან განსხვავებული კომპონენტი, ამასთან, ნახევარს ექნება $+1$ მნიშვნელობა, ნახევარს კი -1 -ის, იმის მიხედვით $i_1 i_2 \dots i_n$ ინდექსების ნებისმიერი განლაგება /როცა დიდი რიცხვი ნაკლების შემდეგ წერია!/ $1, 2, \dots n$ მიიღება ლუწი გადანაცვლებით, თუ კენტი გადანაცვლებით. როცა ორი რომელიმე ინდექსი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ეს ტენზორი ნულის ტოლი იქნება. ამგვარად,

$$\varepsilon^2_{i_1 i_2 \dots i_n} = n! \qquad /11,19/$$

$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ ტენზორის გარდაქმნის კანონს ექნება სახე

$$\varepsilon'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \Delta(a) a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \cdots a_{i_n k_n} \varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_n}. \qquad /11,20/$$

სამგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში განხილულის ანალოგიურად ადვილი დასანახია, რომ n -ური რანგის დეტერმინანტი შეგვიძლია გადავწეროთ ფორმულით

$$\Delta(b) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n}, \qquad /11,21/$$

ან, რაც იგივეა,

$$\Delta(b) = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} b_{1 i_1} b_{2 i_2} \cdots b_{n i_n}. \qquad /11,22/$$

ასევე მარტივად ვაჩვენებთ, რომ

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} b_{i_1 \alpha_1} b_{i_2 \alpha_2} \cdots b_{i_n \alpha_n} = \Delta(b) \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \qquad /11,23/$$

ან, თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს $\varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ ტენზორზე გადავამრავლებთ, მივიღებთ დეტერმინანტის შემდეგ განმარტებასაც:

$$\Delta(b) = \frac{1}{n!} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_n} b_{i_1 k_1} b_{i_2 k_2} \cdots b_{i_n k_n}. \qquad /11,24/$$

/11,20/ განმარტებაში გავითვალისწინოთ /11,23/ ფორმულა, მაშინ გვექნება

$$\varepsilon'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = [\Delta(a)]^2 \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \qquad /11,25/$$

რამდენადაც $\Delta^2(a)=1$. მაშასადამე, $\varepsilon'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ ინვარიანტული ტენზორი ყოფილა.

პრაქტიკული გამოყენების დროს მეტად მნიშვნელოვანია

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_n} \qquad /11,26/$$

$2n$ რანგის ტენზორის და მისგან ყველა შესაძლო დაკვეცებით მიღ-

ებული ტენზორების გამოხატვა კრონეკერის სიმბოლოთა ნამრავლების საშუალებით. ამიტომაც ჩვენ ქვემოთ გამოვიყვანთ ზოგად ფორმულებს /11,26/ ნამრავლისათვის.

აღვნიშნოთ, რომ /11,26/ ტენზორი ანტისიმეტრიულია როგორც i ინდექსების, ისე K ინდექსების მიმართ. ამასთან, თუ i და K ინდექსებში რომელიმე ორი ინდექსი ტოლია, მაშინ /11,26/ ტენზორი ნულის ტოლი იქნება. i და K ინდექსების მიხედვით თითოეული დაქვეითების შედეგად მიიღება ორით ნაკლები რანგის ტენზორი, ხოლო n-ჯერ დაქვეითების ერთი სკალარი, რომელიც /11,19/-ის თანახმად ტოლია $n!$-ის. ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ /11,26/ ტენზორი ტოლია შემდეგი დეტერმინანტის:

$$\delta^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{K_1 K_2 \cdots K_n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1 K_1} & \delta_{i_1 K_2} & \cdots & \delta_{i_1 K_n} \\ \delta_{i_2 K_1} & \delta_{i_2 K_2} & \cdots & \delta_{i_2 K_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \delta_{i_n K_1} & \delta_{i_n K_2} & \cdots & \delta_{i_n K_n} \end{vmatrix}. \qquad /11,27/$$

ამ გამოსახულებას ხშირად კრონეკერის განზოგადებულ დელტა სიმბოლოს უწოდებენ. შევისწავლოთ მისი თვისებები. ცხადია, რომ $\delta^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{K_1 K_2 \cdots K_n}$ როგორც i_ℓ, ისე K_ℓ ინდექსების გადასმისას ნიშანს იცვლის; გარდა ამისა, თუ i_ℓ ან K_ℓ ინდექსებში რომელიმე ორი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ კრონეკერის განზოგადებული სიმბოლო ნულის ტოლი იქნება. განვიხილოთ $\delta^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{1\, 2 \cdots n}$ გამოსახულება. /11,27/ განმარტების თანახმად

$$\delta^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{1\, 2 \cdots n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1 1} & \delta_{i_1 2} & \cdots & \delta_{i_1 n} \\ \delta_{i_2 1} & \delta_{i_2 2} & \cdots & \delta_{i_2 n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{i_n 1} & \delta_{i_n 2} & \cdots & \delta_{i_n n} \end{vmatrix}. \qquad /11,28/$$

ცხადია, რომ ეს დეტერმინანტი ნულისაგან განსხვავდება, როცა $i_1=1, i_2=2, i_3=3, \ldots, i_n=n$, ე.ი. როცა ქვედა და ზედა ინ-

დექსებს ერთნაირი თანმიმდევრობა აქვთ. ამ შემთხვევაში კი $\delta^{i_1 i_2 \dots i_n}_{1\,2 \dots n} = 1$ ანალოგიურად, $\delta^{1\,2 \dots n}_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1$, როცა ზედა და ქვედა ინდექსებს ერთნაირი მიმდევრობა აქვთ. გარდა ამისა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ /II,28/ დეტერმინანტის თვისებით $\delta^{12 \dots n}_{i_1 i_2 \dots i_n} = -1$, როცა $i_1, i_2 \dots i_n$, ინდექსების დასალაგებლად ზედა ინდექსების თანმიმდევრობით საჭიროა კენტი გადანაცვლება. შეგვიძლია დავწეროთ

$$\delta^{i_1 i_2 \dots i_n}_{1\,2 \dots n} = \delta^{1\,2 \dots n}_{i_1 i_2 \dots i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}. \qquad /II,29/$$

მეორე მხრივ ცხადია, რომ ამ ტოლობაში $1, 2, \dots n$ რიცხვები უბრალოდ იმისათვისაა საჭირო, რომ გავიგოთ, როგორი გადანაცვლებით არიან დალაგებული ქვედა ინდექსები ზედას მიმართ /ან პირიქით/. ამიტომ ცხადია, რომ ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას:

$$\delta^{i_1 i_2 \dots i_n}_{1\,2 \dots n}\, \delta^{1\,2 \dots n}_{k_1 k_2 \dots k_n} = \delta^{i_1 i_2 \dots i_n}_{k_1 k_2 \dots k_n}. \qquad /II,30/$$

/II,29/-ის გათვალისწინებით კი გვექნება

$$\delta^{i_1 i_2 \dots i_n}_{k_1 k_2 \dots k_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}\, \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_n}; \qquad /II,31/$$

მაშასადამე, ორი $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ტენზორის ნამრავლი გამოიხატება /II,27/ დეტერმინანტით.

δ_{ik} სიმბოლოების საშუალებით ვიპოვოთ /II,31/ ტენზორის დაქვეითებით მიღებული ახალი ტენზორების გამოსახულებანი. დავიწყოთ $\delta^{i_1 i_2}_{k_1 k_2}$ სიმბოლოს განხილვით. დავაქვეითოთ იგი ორივე ინდექსით, ე.ი. ავიღოთ $i_1 = k_1$ და $i_2 = k_2$ და მოვახდინოთ აჯამვა. გვექნება

$$\delta^{i_1 i_2}_{i_1 i_2} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1 i_1} & \delta_{i_1 i_2} \\ \delta_{i_2 i_1} & \delta_{i_2 i_2} \end{vmatrix} = \delta_{i_1 i_1}\delta_{i_2 i_2} - \delta_{i_1 i_2}\delta_{i_2 i_1}, \qquad /II,32/$$

რადგან $\delta_{i_1 i_1}=n$, ამიტომ

$$\delta^{i_1 i_2}_{i_1 i_2}=n^2-n=n(n-1). \qquad /11,33/$$

ახლა განვიხილოთ $\delta^{i_1 i_2}_{k_1 i_2}$. ცხადია, რომ ეს სიმბოლო პრო-პორციული იქნება $\delta^{i_1}_{k_1}$ -სა, ამიტომ

$$\delta^{i_1}_{k_1}=A\,\delta^{i_1 i_2}_{k_1 i_2}. \qquad /11,34/$$

მარცხნივ გვაქვს ჩვეულებრივი $\delta_{i_1 k_1}$ სიმბოლო. ამიტომ მისი და-კვეცება მოგვცემს n -ს. მეორე მხრივ /11,34/ ტოლობის დაკვეცე-ბით მივიღებთ $n=An(n-1)$, საიდანაც $A=(n-1)^{-1}$ ამგვარად,

$$\delta^{i_1}_{k_1}=\frac{1}{n-1}\,\delta^{i_1 i_2}_{k_1 i_2}. \qquad /11,35/$$

ავიღოთ $\delta^{i_1 i_2 i_3}_{k_1 k_2 k_3}$ მისი სამჯერ დაკვეცებით გვექნება დე-ტერმინანტი:

$$\delta^{i_1 i_2 i_3}_{i_1 i_2 i_3}=\begin{vmatrix} \delta_{i_1 i_1} & \delta_{i_1 i_2} & \delta_{i_1 i_3} \\ \delta_{i_2 i_1} & \delta_{i_2 i_2} & \delta_{i_2 i_3} \\ \delta_{i_3 i_1} & \delta_{i_3 i_2} & \delta_{i_3 i_3} \end{vmatrix}. \qquad /11,36/$$

ამ დეტერმინანტის გაშლით და კრონეკერის სიმბოლოს ფილტრაციის თვის. [illegible]ოყენებით მარტივად ვაჩვენებთ, რომ

$$\delta^{i_1 i_2 i_3}_{i_1 i_2 i_3}=n(n-1)(n-2). \qquad /11,37/$$

ცხადია, რომ $\delta^{i_1 i_2 i_3}_{k_1 k_2 i_3}$ პროპორციული იქნება $\delta^{i_1 i_2}_{k_1 k_2}$ სიმ-ბოლოსი, ე.ი.

$$\delta^{i_1 i_2}_{k_1 k_2}=A_1\,\delta^{i_1 i_2 i_3}_{k_1 k_2 i_3} \qquad /11,38/$$

ორივე მხარის ორჯერ დაჯამების შედეგად მივიღებთ $n(n-1)=$ $=A_1 n(n-1)(n-2)$; მაშასადამე, $A_1=(n-2)^{-1}$, ე.ი.

$$\delta^{i_1 i_2}_{k_1 k_2}=\frac{1}{n-2}\,\delta^{i_1 i_2 i_3}_{k_1 k_2 i_3}. \qquad /11,39/$$

/11,35/ და /11,39/ ფორმულების გაერთიანებით გვექნება

$$\delta^{i_1}_{k_1}=\frac{1}{(n-1)(n-2)}\,\delta^{i_1 i_2 i_3}_{k_1 k_2 i_3}=\frac{(n-3)!}{(n-1)!}\,\delta^{i_1 i_2 i_3}_{k_1 k_2 i_3}. \qquad /11,40/$$

თუ ამ პროცედურას გავაგრძელებთ, ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\delta^{i_1 i_2 \cdots i_j}_{k_1 k_2 \cdots k_j}=\frac{(n-m)!}{(n-j)!}\,\delta^{i_1 i_2 \cdots i_j i_{j+1} \cdots i_m}_{k_1 k_2 \cdots k_j i_{j+1} \cdots i_m}, \qquad /11,41/$$

როცა $m=n$ /11,41/-დან გვექნება მნიშვნელოვანი ფორმულა

$$\delta^{i_1 i_2 \cdots i_j i_{j+1} \cdots i_n}_{k_1 k_2 \cdots k_j i_{j+1} \cdots i_n}=(n-j)!\,\delta^{i_1 i_2 \cdots i_j}_{k_1 k_2 \cdots k_j}. \qquad /11,42/$$

ამასთან, ცხადია

$$\delta^{i_1 i_2 \cdots i_j}_{i_1 i_2 \cdots i_j}=n(n-1)(n-2)\cdots[n-(j-1)]=\frac{n!}{(n-j)!}; \qquad /11,43/$$

როცა $j=n$, მაშინ

$$\delta^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{i_1 i_2 \cdots i_n}=\mathcal{E}^{2}_{i_1 i_2 \cdots i_n}=n!, \qquad /11,44/$$

რომელიც ემთხვევა /11,19/ ფორმულას.

/11,42/-დან ნათელია, რომ

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_j l_{j+1} \dots l_n} \varepsilon_{k_1 k_2 \dots k_j l_{j+1} \dots l_n} = (n-j)! \begin{vmatrix} \delta_{i_1 k_1} & \dots & \delta_{i_1 k_j} \\ \delta_{i_2 k_1} & \dots & \delta_{i_2 k_j} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{i_j k_1} & \dots & \delta_{i_j k_j} \end{vmatrix}. \qquad /11,45/$$

სამგანზომილებიან შემთხვევაში /ე.ი. როცა $i_i, k_i = 1,2,3$/ /11,45/ გამოსახულება მოგვცემს ჩვენთვის ყველა კარგად ცნობილ ფორმულებს:

$$\varepsilon_{ikl} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} = \begin{vmatrix} \delta_{i\mu} & \delta_{i\nu} & \delta_{i\lambda} \\ \delta_{k\mu} & \delta_{k\nu} & \delta_{k\lambda} \\ \delta_{l\mu} & \delta_{l\nu} & \delta_{l\lambda} \end{vmatrix}, \qquad /11,46/$$

$$\varepsilon_{ikl} \varepsilon_{\mu\nu l} = \begin{vmatrix} \delta_{i\mu} & \delta_{i\nu} \\ \delta_{k\mu} & \delta_{k\nu} \end{vmatrix} = \delta_{i\mu}\delta_{k\nu} - \delta_{i\nu}\delta_{k\mu}. \qquad /11,47/$$

5. <u>დუალური ტენზორები</u>. თუ მოცემული გვაქვს m -ური რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი $F_{i_1 i_2 \dots i_m}$, სადაც $m \leq n$, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია მას შევუსაბამოთ $n-m$ რანგის დუალური ტენზორი

$$F^{*}_{i_1 i_2 \dots i_{n-m}} = \frac{1}{m!} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n-m} i_{n-m+1} \dots i_n} F_{i_{n-m+1} i_{n-m+2} \dots i_n} \qquad /11,48/$$

ამასთან, როცა $F_{i_1 i_2 \dots i_m}$ ნამდვილი ტენზორია, მისი დუალური ტენზორი იქნება ფსევდოტენზორი.

სიმეტრიულ ტენზორს დუალური ტენზორი არ აქვს, რადგანაც მისი სკალარული ნამრავლი $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ტენზორთან ნულის ტოლია.

6. <u>ალგებრულ განტოლებათა სისტემების ამოხსნა</u>. განვიხილოთ წრფივ არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა

$$F_{ik} A_k = B_i, \qquad /11,49/$$

სადაც $A_k(A_1, A_2, \dots A_n)$ უცნობი, ხოლო $B_k(B_1, B_2, \dots B_n)$ ცნო-

მილი ვექტორებია./11,49/ გადავწეროთ F^{-1}_{ji} შებრუნებულ ტენ-ზორზე

$$F^{-1}_{ji}F_{ik}A_k = F^{-1}_{ji}B_i\,,$$

ე.ი. /11,50/

$$A_j = F^{-1}_{ji}B_i\,.$$

მეორე მხრივ, შებრუნებული ტენზორი ტოლია

$$F^{-1}_{ji} = \frac{\Delta_{ij}(F)}{\Delta(F)} = \frac{1}{\Delta(F)}\frac{\partial}{\partial F_{ij}}\Delta(F), \qquad /11,51/$$

სადაც $\Delta_{ij}(F)$ ალგებრული დამატებაა, ხოლო $\Delta(F)$ დეტერმინან-ტი. მაშასადამე, ამონახსნი ტოლია

$$A_i = \frac{\Delta_{ki}(F)B_k}{\Delta(F)} = \frac{1}{\Delta(F)}\frac{\partial\Delta(F)}{\partial F_{ki}}B_k\,. \qquad /11,52/$$

სრულიად ანალოგიურად ვიპოვით სხვა მნიშვნელოვან შემთხვევებშიც.

7. <u>მოძრაობის განტოლების კოვარიანტობა</u>. ტენზორული აღრიცხვა დიდად გვეხმარება მოძრაობის განტოლების ე.წ. კოვარიანტუ-ლი ფორმით ჩაწერაში. ამბობენ, რომ ფიზიკური მოვლენის აღ-მწერ მოძრაობის განტოლებას აქვს კოვარიანტული ფორმა, თუ მისი ყველა წევრი გამოხატულია ერთი და იგივე რანგის ტენზორით /სკა-ლარი, ვექტორი, მეორე რანგის ტენზორი და ა.შ./, ე.ი. ერთიდან მეორე კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლისას განტოლების ყველა წევრი გარდაიქმნება ერთნაირად.

იბადება კითხვა, რა საჭიროა მოძრაობის განტოლების კოვარი-ანტული ფორმის მოთხოვნა? ეს მოთხოვნა არის წმინდა ფიზიკური და გამომდინარეობს იქიდან, რომ დამკვირვებლები, რომლებიც სხვადა-სხვა ათვლის სისტემაში იმყოფებიან, ერთი და იგივე მოვლენის შე-სწავლისას ერთსა და იმავე შედეგს უნდა ღებულობდნენ. ე.ი. ფიზი-კის კანონები ინვარიანტული /უცვლელი/ უნდა იყვნენ კოორდინატთა

სისტემის შერჩევის მიმართ.

ბევრია ისეთი გარდაქმნა, რომლის მიმართაც ფიზიკური კანონები ინვარიანტული უნდა იყოს. ასე მაგალითად, ცხადია, რომ ნებისმიერი ფიზიკური კანონის შინაარსი არ უნდა შეიცვალოს, თუ კოორდინატთა სისტემას, რომლის მიმართაც ეს კანონი განიხილება, ორიენტაციას შევუცვლით /მოვაბრუნებთ/, ასევე არ უნდა შეიცვალოს ფიზიკური კანონის შინაარსი იმის მიხედვით, მოვლენას განვიხილავთ მარცხენა, თუ მარჯვენა სისტემაში. ე.ი. ფიზიკური კანონი ინვარიანტული უნდა იყოს საკოორდინატო ღერძების ინვერსიის მიმართ. ჩვენ კი ვიცით, რომ სისტემის მობრუნება და ინვერსია აიწერება წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნებით, ამიტომ ფიზიკის კანონები ინვარიანტული უნდა იყოს წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნების მიმართ.

ვთქვათ, ფიზიკური კანონი გამოხატულია ორი სკალარული სიდიდის ტოლობით $A=B$. ეს ტოლობა ინვარიანტულია სისტემის მობრუნების მიმართ, რამდენადაც სკალარული სიდიდეები არ შეიცვლება კოორდინატთა სისტემის მობრუნების დროს. მაშასადამე, ეს ტოლობა სამართლიანი დარჩება ნებისმიერ მობრუნებულ სისტემაში. ცხადია, იგივეს ექნება ადგილი კოორდინატთა სისტემის ღერძების ინვერსიის დროსაც, ე.ი. $A=B$ ტოლობა სამართლიანი იქნება როგორც მარცხენა, ისე მარჯვენა კოორდინატთა სისტემაში.

ახლა განვიხილოთ ფიზიკური კანონი, რომელიც მათემატიკურად გამოიხატება ორი მეორე რანგის ტენზორის ტოლობით $F_{ik}=T_{ik}$. ახლა უკვე კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას და არეკვლისას შეიცვლება როგორც F_{ik}, ისე T_{ik} ტენზორი. მათი მნიშვნელობები ახალ /მობრუნებულ ან არეკლილ/ სისტემაში აღვნიშნოთ F'_{ik} და T'_{ik}-ით. რადგან ტენზორების თვისების გამო წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნების დროს ტოლობის ორივე მხარე ერთნაირად გარდაიქმნება, ამიტომ გვექნება $F'_{ik}=T'_{ik}$. იგივეს ექნება

ადგილი ნებისმიერი რანგის ტენზორების ტოლობის დროსაც. ამგვარად, ტენზორების ტოლობით გამოსახული ფიზიკური კანონი ინვარიანტული დარჩება კოორდინატთა სისტემის წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნის დროს. ცხადია, რომ ტენზორული ტოლობების ინვარიანტობის თვისება შედეგია იმისა, რომ ტოლობის ყოველი წევრი კოვარიანტულად გარდაიქმნება. ამგვარად, მივიღეთ შემდეგი მნიშვნელოვანი დასკვნა: ფიზიკური კანონების ინვარიანტობისათვის კოორდინატთა სისტემის ნებისმიერი მობრუნებისა და არეკვლის დროს, საჭიროა ამ კანონების გამომხატველ განტოლებათა კოვარიანტობა. ე.ი. მოძრაობის განტოლებაში ყველა წევრი უნდა იყოს ან სკალარი, ან ვექტორი და ა.შ. არ შეიძლება, მაგალითად, რომ მოძრაობის განტოლების ერთი წევრი სკალარით იყოს გამოხატული, მეორე ვექტორით და ა.შ. ასეთ განტოლებას არ შეუძლია ფიზიკური მოვლენა შეესაბამებოდეს, რამდენადაც ამ მოვლენას განსხვავებული სახე ექნებოდა მობრუნებულ და არეკვლილ სისტემებში, რასაც, ცხადია, ადგილი არა აქვს.

ფიზიკაში განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია მოძრაობის განტოლების კოვარიანტობა ინერციული სისტემების არჩევის მიმართ, რაც იმას ნიშნავს, რომ ინერციულ სისტემებში ფიზიკური მოვლენა ეკვივალენტურად უნდა აღიწერებოდეს.

დავუშვათ მოძრაობის განტოლებას ერთ რომელიმე ინერციულ სისტემაში, ვთქვათ, უძრავში, აქვს შემდეგი სახე:

$$\Phi_{\alpha}\left(a_1,a_2,\dots a_n;\frac{\partial a_1}{\partial x_1},\dots\frac{\partial a_2}{\partial x_1},\dots\ \frac{\partial a_n}{\partial x_1},\dots\ ;t\right)=0, \quad /11,53/$$

სადაც a_i და $\frac{\partial a_j}{\partial x_k}$ წარმოადგენენ გარკვეულ ფიზიკურ სიდიდეებს; Φ_{α}, სადაც $\alpha=1,2,3\dots$ აგრეთვე გარკვეული ფუნქციებია. განვიხილოთ მოძრავი ინერციული სისტემა. ამ უკანასკნელში დამკვირვებელი გაზომავს შედეგად a_i $\frac{\partial a_j}{\partial x_k}$-ს ნაცვლად

მიიღებს ახალ a_i' და $\frac{\partial a_j'}{\partial x_k'}$ სიდიდეებს; მაგრამ ბუნების კანონების ინვარიანტული ხასიათის გამო მოძრავ ინერციულ სისტემაში მყოფი დამკვირვებელი a_i' და $\frac{\partial a_j'}{\partial x_k'}$ შორისაც დაამყარებს ზუსტად იმავე კავშირს, რასაც ადგილი ჰქონდა ამ სიდიდეებს შორის უძრავ სისტემაში, ე.ი.

$$\Phi_\alpha\left(a_1', a_2', \dots a_n'; \frac{\partial a_1'}{\partial x_1'}, \dots \frac{\partial a_2'}{\partial x_1'}, \dots \frac{\partial a_n'}{\partial x_1'}, \dots ; t\right) = 0. \qquad /II,54/$$

მაშასადამე, ფიზიკურ სიდიდეებს შორის ნებისმიერი კავშირი გამოხატული უნდა იყოს კოვარიანტული დამოკიდებულებით.

§ 12. ტენზორული ველები სამგანზომილებიან სივრცეში

აქამდის ვიხილავდით ტენზორებს, რომელთა ცვლილება კოორდინატებისა და დროის მიხედვით არ ხდებოდა. ჩვენ უბრალოდ ვუშვებდით, რომ ტენზორის კომპონენტები მუდმივი სიდიდეებია. სინამდვილეში ფიზიკაში ხშირად გვხვდება ტენზორული სიდიდეები, რომლებიც წერტილიდან წერტილში გადასვლისას იცვლებიან. ზოგად შემთხვევაში, ტენზორი შეიძლება იცვლებოდეს დროის მიხედვითაც. ასეთი ტენზორებისათვის ჩვენ დაგვჭირდება წარმოებულებისა და ინტეგრალების შემოტანა, ე.ი. ტენზორული ანალიზის განხილვა.

ტენზორული ალგებრიდან ტენზორულ ანალიზზე გადასვლის ძირითადი აზრი ის არის, რომ ცალკეული ტენზორის ნაცვლად ვიხილავთ ტენზორულ ველს. ტენზორული ანალიზის განხილვის დროს ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ტენზორის რანგი უცვლელია, ხოლო თვით ტენზორი კოორდინატებისა და დროის მიხედვით იცვლება.

განვიხილოთ ევკლიდის E_3 სივრცე და მასში შემოვიღოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები. თუ სივრცის ყოველ წერტილში და დროის t-მომენტში განსაზღვრულია n-ური რანგის ტენზორი $T_{i_1 i_2 \dots i_n}(\vec{r}, t)$, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემული გვაქვს n-ური რანგის ტენზორული ველი. ტენზორული ველი შეიძლება განსაზღვრული იყოს არა მხოლოდ მთელს სივრცეში, არამედ სივრცის სასრულ არეშიაც. ამგვარად, n-ური რანგის ტენზორული ველი განისაზღვრება სივრცისა და დროის 3^n რაოდენობის ფუნქციით. როცა $T_{i_1 i_2 \dots i_n}(\vec{r})$ ტენზორი დროზე ცხადად დამოკიდებული არ არის, მაშინ ტენზორულ ველს სტაციონარული ეწოდება.

სტაციონარული ველი იცვლება მხოლოდ სივრცის ერთი წერტილიდან მეორეში გადასვლისას.

ტენზორულ ველს ეწოდება უწყვეტი, თუ $T_{i_1 i_2 \dots i_n}(\vec{r}, t)$

კომპონენტები x_1, x_2, x_3 ცვლადების უწყვეტი ფუნქციებია. რამდენადაც ტენზორული ველი კოორდინატების ფუნქციაა, იმდენად მისი ისეთი თვისებები, როგორიცაა, მაგალითად, დიაგონალურ სახეზე დაყვანა და სხვა, დამოკიდებული იქნება სივრცის წერტილის შერჩევაზე. თუ ტენზორი სივრცის ერთ რომელიმე წერტილში დაიყვანება დიაგონალურ სახეზე, სხვა წერტილში მას, საზოგადოდ, დიაგონალური სახე არ ექნება. ასევე, ორი ტენზორის შესაკრებად საჭიროა შევადგინოთ ისეთი ჯამური ტენზორი $T_{i_1i_2\dots i_n}(\vec{r},t)=M_{i_1i_2\dots i_n}(\vec{r},t)+$ $+N_{i_1i_2\dots i_n}(\vec{r},t)$, რომელიც სამართლიანი იქნება ველის განსაზღვრის ყოველ წერტილში.

კერძო შემთხვევაში, როცა ტენზორის რანგი $n=0$, გვექნება ველი, რომელიც განსაზღვრულია ერთი სკალარული $\varphi(\vec{r},t)$ ფუნქციით. ასეთ ველს სკალარულს უწოდებენ. სკალარულ ველს ქმნის, მაგალითად, არათანაბრად გამთბარი სხეულის ტემპერატურა და სხვა.

როცა $n=1$, მაშინ ველს ეწოდება ვექტორული, რომელიც განისაზღვრება ერთი ვექტორული $\vec{A}(\vec{r},t)$ ფუნქციით. ვექტორულია, მაგალითად, სიმძიმის ძალთა ველი, მოძრავი სითხის სიჩქარეთა ველი და სხვა.

მეორე რანგის ტენზორული ველი განსაზღვრული იქნება $T_{ik}(\vec{r},t)$ ცხრა ფუნქციით. ასეთი ველის მაგალითებია მყარი სხეულისა და სითხის ძაბვებისა და დეფორმაციების ველები და ა.შ.

რადგან ტენზორული ველის კომპონენტები ჩვეულებრივი ფუნქციებია, ამიტომ შეგვიძლია მათი გაწარმოება და ინტეგრალება, როცა ისინი ამისათვის საჭირო პირობებს აკმაყოფილებენ. მაგალითად, n-ური რანგის ტენზორული ველის კერძო წარმოებული x_1 ცვლადით განსაზღვრული იქნება შემდეგი ფორმულით:

$$\frac{\partial T_{i_1i_2\dots i_n}(\vec{r},t)}{\partial x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{T_{i_1\dots i_n}(x_1+\Delta x_1,x_2,x_3;t)-T_{i_1\dots i_n}(x_1,x_2,x_3,t)}{\Delta x_1}.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება $\dfrac{\partial T_{i_1\cdots i_n}(\vec{r},t)}{\partial x_2}$ და $\dfrac{\partial T_{i_1\cdots i_n}(\vec{r},t)}{\partial x_3}$ წარმოებულები.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\dfrac{\partial T_{i_1 i_2\cdots i_n}(\vec{r},t)}{\partial x_{i_{n+1}}}$ წარმოებული, სადაც $i_1, i_2 \cdots i_{n+1}$ იღებენ მნიშვნელობას $1,2,3,\cdots n$ წარმოადგენს $n+1$ რანგის ტენზორულ ველს. მართლაც, განვიხილოთ ეს წარმოებული მობრუნებულ კოორდინატთა სისტემაში

$$\frac{\partial T'_{i_1 i_2\cdots i_n}(x_1', x_2', x_3'; t)}{\partial x'_{i_{n+1}}}.$$

n-ური რანგის ტენზორის გარდაქმნის კანონის თანახმად

$$T'_{i_1 i_2\cdots i_n}(\vec{r}',t) = a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2}\cdots a_{i_n k_n} T_{k_1 k_2\cdots k_n}(\vec{r},t).$$

x_i' კოორდინატები მობრუნებულ სისტემაში განვიხილოთ როგორც x_i კოორდინატების რთული ფუნქცია, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{\partial T'_{i_1 i_2\cdots i_n}}{\partial x'_{i_{n+1}}} = a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2}\cdots a_{i_n k_n}\frac{\partial T_{k_1 k_2\cdots k_n}}{\partial x_{k_{n+1}}}\,\frac{\partial x_{k_{n+1}}}{\partial x'_{i_{n+1}}}.$$

რადგან კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას კოორდინატები იცვლება /3,14/ კანონით, ამიტომ გვექნება $\dfrac{\partial x_k}{\partial x'_i} = a_{ik}$, მაშასადამე, n-ური რანგის ტენზორული ველის კერძო წარმოებულისათვის გვექნება

$$\frac{\partial T'_{i_1 i_2\cdots i_n}}{\partial x'_{i_{n+1}}} = a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2}\cdots a_{i_n k_n} a_{i_{n+1} k_{n+1}}\frac{\partial T_{k_1 k_2\cdots k_n}}{\partial x_{k_{n+1}}},$$

რაც წარმოადგენს $n+1$ რანგის ტენზორის გარდაქმნის კანონს. ამგვარად, n-ური რანგის ტენზორული ველის $\dfrac{\partial T_{i_1 i_2\cdots i_n}}{\partial x_j}$ წარმოებული $n+1$ რანგის ტენზორულ ველს წარმოადგენს.

როგორც ვხედავთ, $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც

ოპერაცია, რომელიც ტენზორზე მოქმედებისას მის რანგს ერთით ადიდებს.

ჩვენ ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ ტენზორული ველები უწყვეტია და შეიძლება მათი გაწარმოება იმდენჯერ, რამდენჯერაც საჭირო იქნება.

სხვადასხვა რანგის ტენზორული ველები განვიხილოთ ცალ-ცალკე.

1. სკალარული ველი. როგორც აღვნიშნეთ, სკალარული ველი განისაზღვრება ერთი $\Phi(\vec{r},t)=\Phi(x_1,x_2,x_3;t)$ ფუნქციით. სტაციონარული სკალარული ველი $\Phi(\vec{r})$ დროზე ცხადად არ იქნება დამოკიდებული. რამდენადაც $\Phi(\vec{r},t)$ სკალარული ფუნქციაა, იმდენად მისი მნიშვნელობა სივრცის აღებულ წერტილზე არ შეიცვლება კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას, ე.ი. $\Phi'(\vec{r}',t)=\Phi(\vec{r},t)$ ან

$$\Phi'(x_1',x_2',x_3';t)=\Phi(x_1,x_2,x_3;t). \qquad /12,1/$$

ამასთან, x_i' კოორდინატებში იგულისხმება სისტემის მობრუნების შემდეგ მიღებული მნიშვნელობები, ე.ი.

$$x_i'=a_{ik}x_k, \qquad (i=1,2,3) \qquad /12,2/$$

სადაც k მუნჯი ინდექსია. ჩვენ დაგვჭირდება შებრუნებული გარდაქმნაც

$$x_k=a_{ik}x_i'. \qquad /12,3/$$

სტაციონარული სკალარული ველის მაგალითად შეგვიძლია დავასახელოთ წერტილოვანი ელექტრული e მუხტის მიერ შექმნილი ველი

$$\Phi(r)=\frac{e}{r}. \qquad /12,4/$$

ასევე სკალარულია გრავიტაციული ველი, არათანაბრად გამთბარი სხეულის ტემპერატურის $T(\vec{r})$ ველი და სხვა მრავალი.

სკალარული ველი შეგვიძლია დავახასიათოთ ეკვიპოტენციალური ზედაპირებით, რომელთა ყოველ წერტილში Φ ფუნქციას აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა, ე.ი. $\Phi(x_1,x_2,x_3)=const$. კერძო

შემთხვევაში, როცა გვაქვს ტემპერატურის ველი, $T(x_1,x_2,x_3)=const$ უწოდებენ იზოთერმულ ზედაპირებს./12,4/ ველის შემთხვევაში, ეკვიპოტენციალური ზედაპირები იქნებიან კონცენტრირებული სფეროების ოჯახი, რომელთა ცენტრი იმყოფება წერტილში, სადაც მოთავსებულია ელექტრული მუხტი.

განვიხილოთ წარმოებულის ცნება მოცემული მიმართულებით. დავუშვათ, სკალარულ ველს რაიმე m_0 წერტილში აქვს Φ_{m_0} მნიშვნელობა და $\vec{dS}$ ვექტორზე გადაადგილებისას მივდივართ წერტილში, რომელშიაც Φ-ს აქვს მნიშვნელობა Φ_m. ამ გადაადგილების დროს Φ-ს ნაზრდი ტოლი იქნება $\Delta\Phi=\Phi_m-\Phi_{m_0}$. ამ ნაზრდის $|\Delta\vec{S}|\equiv\Delta S$-ზე ფარდობის ზღვარს, როცა $\Delta S\to 0$, ეწოდება Φ ფუნქციის წარმოებული m_0 წერტილში $\vec{S}$ მიმართულებით

$$\frac{\partial\Phi}{\partial S}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Phi_m-\Phi_{m_0}}{\Delta S}. \qquad /12,4/$$

ცხადია, რომ ამ წარმოებულის მნიშვნელობა არსებითად დამოკიდებულია $\vec{S}$-ის მიმართულებაზე და იგი არ უნდა ავურიოთ S პარამეტრით ჩვეულებრივ კერძო წარმოებულთან. როცა მოცემული გვაქვს $T(x_1,x_2,x_3)=const$ იზოთერმული ზედაპირი, მაშინ $\frac{\partial T}{\partial S}$ გვიჩვენებს ტემპერატურის ცვლილებას m_0 წერტილიდან $\vec{S}$ მიმართულებით.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ Φ-ს წარმოებული $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$ წარმოადგენს ვექტორის კომპონენტებს[1,2,3]. ამისათვის, როგორც ვიციით, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$ სიდიდეები გარდაიქმნებიან, როგორც კოორდინა-

---

1. $\vec{i}_\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha}$ რომ ვექტორია, ადვილად დავინახავთ თეორემიდან, რამდენადაც $d\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha}dx_\alpha$ სკალარია, ხოლო $\vec{i}_\alpha dx_\alpha=d\vec{r}$-ვექტორი.
2. ჩვენ ეს შესავალში ზოგადად დავამტკიცეთ, მაგრამ მეტი სიცხადის მიზნით სკალარისათვის ერთხელ კიდევ გავიმეორებთ.
3. $\frac{\partial}{\partial x_i}$-ს ხშირად, შემოკლების მიზნით, ∂_i-თი, ან მძიმის შემდეგ ინდექსით აღნიშნავენ: $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\equiv\partial_i\Phi=\Phi_{,i}$; $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\equiv\partial_k A_i=A_{i,k}$; $\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k\partial x_j}\equiv\partial_k\partial_j A_i=A_{i,kj}$ და ა.შ.

ტები, ე.ი. - /12,2 / ფორმულით.

განვიხილოთ $\Phi(\vec{r})$ ველის წარმოებული ახალ სისტემაში და გავითვალისწინოთ /12,1/ ტოლობა; გვექნება

$$\frac{\partial\Phi'(\vec{r}\,')}{\partial x_i'} = \frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial x_i'}. \qquad /12,5/$$

თუ ჩავთვლით, რომ $\Phi(\vec{r})$ რთული ფუნქციაა x_i' -ის, მაშინ /12,5/ ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i'} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_i'}, \qquad /12,6/$$

სადაც k მუნჯი ინდექსია. /12,4/ და /12,2 / ფორმულების თანახმად

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i'} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} = a_{ik}, \qquad /12,7/$$

ამიტომ /12,6/ მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i'} = a_{ik}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}. \qquad /12,8/$$

ეს უკანასკნელი კი ზუსტად წარმოადგენს ვექტორის გარდაქმნის კანონს. $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$ -ს უწოდებენ $\Phi(\vec{r})$ ფუნქციის გრადიენტის i მდგენელს. გრადიენტის აღსანიშნავად იყენებენ სხვადასხვა აღნიშვნას. ასე მაგალითად, $grad\,\Phi$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{r}}$ და $\nabla\Phi$, სადაც ∇ /ნაბლა/ არის ჰამილტონის ოპერატორი

$$\nabla = \vec{i}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{i}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{i}_3\frac{\partial}{\partial x_3} \equiv \vec{i}_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}. \qquad /12,9/$$

ამგვარად, გრადიენტი აიღება სკალარული ფუნქციიდან და ვექტორს

განსაზღვრავს; ამ ვექტორის კომპონენტებია $\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{r}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1},\frac{\partial\Phi}{\partial x_2},\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)$. გამოვარკვიოთ გრადიენტის მიმართულება. ვიპოვოთ Φ ფუნქციის დიფერენციალი. ცხადია, რომ

$$d\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}dx_i. \quad (i=1,2,3) \qquad /12,10/$$

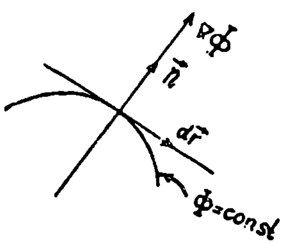
ეს გამოსახულება წარმოადგენს ორი ვექტორის სკალარულ ნამრავლს. ერთია გრადიენტი $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$, მეორე კი $d\vec{r}$; რადგანაც $\vec{r}=\vec{i}_\alpha x_\alpha$, მისი დიფერენციალი ტოლი იქნება $d\vec{r}=\vec{i}_\alpha dx_\alpha$ ამგვარად,

$$d\Phi=(\nabla\Phi,d\vec{r}). \qquad /12,11/$$

დავუშვათ, რომ $d\vec{r}$ ვექტორი ძევს $\Phi(\vec{r})=const$ ეკვიპოტენციალური ზედაპირის მხებ სიბრტყეში, მაშინ ეკვიპოტენციალური ზედაპირის გასწვრივ, რადგან Φ-ს ერთი და იგივე მნიშვნელობები აქვს, $d\Phi$ ნულის ტოლი იქნება

$$d\Phi=(\nabla\Phi,d\vec{r})=0, \qquad /12,12/$$

რაც გვიჩვენებს, რომ გრადიენტი მართობულია ეკვიპოტენციალური ზედაპირისა. გავარკვიოთ როგორია მისი მიმართულება. ამ მიზნით ეკვიპოტენციალური ზედაპირის ნორმალი ვიგულისხმოთ Φ-ს ზრდის მიმართულებით. ავიღოთ $d\vec{r}$ ვექტორი ნორმალის გასწვრივ, ე.ი. Φ-ს ზრდის მიმართულებით. რადგან ამ მიმართულებით $d\Phi>0$, ამიტომ $(\nabla\Phi,d\vec{r})>0$ და $\nabla\Phi$ მიმართული იქნება ისე, საითკენაც Φ იზრდება.



ნახ.22

ამგვარად, Φ ფუნქციის გრადიენტისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial n}\vec{n}; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}=(\vec{n},\nabla)\Phi, \qquad /12,13/$$

სადაც $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ წარმოადგენს Φ ფუნქციის წარმოებულს ნორმალის გასწვრივ, ახალი $\nabla\Phi$ სიდიდე ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ სივრცის ნებისმიერ წერტილში, ამიტომ ჩვენ მივიღებთ $\nabla\Phi$ ვექტორულ ველს.

თუ $V(\vec{r})$ არის ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია /სკალარული ველი/, მაშინ მისგან შეგვიძლია ავაგოთ $\vec{F}=-\nabla V(\vec{r})$ ვექტორული ველი, სადაც $\vec{F}$ არის ძალა. როცა $T(\vec{r})$ არის ერთგვაროვანი, მაგრამ არათანაბრად გამთბარი სხეულის ტემპერატურის ველი, მაშინ ვექტორული ველი $\vec{\tau}=-K\,\nabla T(\vec{r})$ განსაზღვრავს სითბური ნაკადის სიმკვრივეს, რომელიც ვრცელდება გარემოს გამთბარი ნაწილიდან ნაკლებად გამთბარისაკენ; K-ს სითბოგამტარობის კოეფიციენტი ეწოდება.

ახლა ვიპოვოთ ზოგიერთი ფუნქციის გრადიენტი. ვთქვათ, Φ კოორდინატების რთული ფუნქციაა $\Phi=\Phi(u(\vec{r}))$, მაშინ

$$grad_i \Phi(u)=\frac{d\Phi}{du}\frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad /12,14/$$

ე.ი.

$$grad \Phi(u)=\frac{d\Phi}{du}\, grad\, u(\vec{r}). \qquad /12,15/$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $u=r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, გვექნება

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i}{r}. \qquad /12,16/$$

ამგვარად,

$$grad\, r=\vec{i}_\alpha \frac{x_\alpha}{r}=\frac{\vec{r}}{r}. \qquad /12,17/$$

მაშასადამე,

$$\nabla\Phi(\vec{r})=\frac{d\Phi}{dr}\frac{\vec{r}}{r}. \qquad /12,18/$$

თუ ერთეულოვან ვექტორს $\vec{r}$ -ის გასწვრივ აღვნიშნავთ $\bar{r}=\frac{\vec{r}}{r}$ -ით, მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ

$$\nabla\Phi(\vec{r})=\frac{d\Phi}{dr}\bar{r}. \qquad /12,19/$$

კერძო შემთხვევებში გვექნება შემდეგი მნიშვნელოვანი ფორმულები:

$$\operatorname{grad} r^{k}=kr^{k-1}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad /12,20/$$

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^{2}}\frac{\vec{r}}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^{3}}. \qquad /12,21/$$

როცა პოტენციალური ველი აღიწერება $\Phi(r)=-\frac{const}{r}$ ფუნქციით, მაშინ /12,21/ ფორმულის თანახმად ძალისათვის გვექნება

$$\vec{F}=-\operatorname{grad}\Phi=-\frac{const}{r^{3}}\vec{r}. \qquad /12,22/$$

ასეთია, მაგალითად, ნიუტონის მიზიდულობის ძალა, თუ $const\equiv\gamma m_1 m_2$, სადაც m_1 და m_2 ურთიერთქმედი ნაწილაკების მასებია, γ კი - გრავიტაციული მუდმივა.

ვიპოვოთ გრადიენტი $(\vec{A},\vec{r})$ სკალარული ნამრავლისა, როცა $\vec{A}$ მუდმივი ვექტორია. ცხადია, რომ

$$\nabla_i(\vec{A},\vec{r})=\frac{\partial}{\partial x_i}(A_\alpha x_\alpha)=A_\alpha\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_i}=A_\alpha\delta_{\alpha i}=A_i; \qquad /12,23/$$

მაშასადამე,

$$\nabla(\vec{A},\vec{r})=\vec{A}; \qquad (\vec{A}=const). \qquad /12,24/$$

როცა კვლავ $f(u)$ რაიმე ფუნქციაა, სადაც $u=(\vec{A},\vec{r})$, გრადიენტისათვის მივიღებთ

$$\nabla f(u)=\frac{df}{du}\nabla(\vec{A},\vec{r})=\vec{A}\frac{df}{du}. \qquad (\vec{A}=const) \qquad /12,25/$$

კერძო შემთხვევაში, როცა f წარმოადგენს ბრტყელ ტალღას $f=e^{i(\vec{k},\vec{r})}$, სადაც $\vec{k}=const$ ტალღური ვექტორია, გვექნება

$$\nabla e^{i(\vec{k},\vec{r})}=i\vec{k}\,e^{i(\vec{k},\vec{r})} \qquad /12,26/$$

ახლა ვიპოვოთ $grad(f\Phi)$, ცხადია, რომ

$$grad_i(f\Phi)=\frac{\partial}{\partial x_i}(f\Phi)=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}f+\Phi\frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad /12,27/$$

ე.ი.

$$grad(f\Phi)=\Phi\, grad f+f\, grad\Phi. \qquad /12,28/$$

ვიპოვოთ გრადიენტის კვადრატი. ტენზორულ აღნიშვნებში გვექნება

$$\nabla^2=\vec{i}_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\vec{i}_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}=\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}=\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}. \qquad /12,29/$$

ამგვარად, ∇^2 იძლევა ლაპლასის ოპერატორს

$$\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \qquad /12,30/$$

ვიპოვოთ ლაპლასიანი, მაგალითად, $f=e^{i(\vec{k},\vec{r})}$ ბრტყელი ტალღიდან. ცხადია, რომ

$$\Delta e^{i(\vec{k},\vec{r})}=\nabla\left(\nabla e^{i(\vec{k},\vec{r})}\right)=i\vec{k}\left(\nabla e^{i(\vec{k},\vec{r})}\right)=-\vec{k}^2e^{i(\vec{k},\vec{r})} \qquad /12,31/$$

მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $f=e^{i(\vec{k},\vec{r})}$ ბრტყელი ტალღა წარმოადგენს შემდეგი განტოლების ამონახსნს:

$$(\Delta+k^2)f=0, \qquad /12,32/$$

რომელსაც ტალღის განტოლება შეგვიძლია ვუწოდოთ.

მიღებული ფორმულის გამოყენებას დავუბრუნდებით ვექტორულ

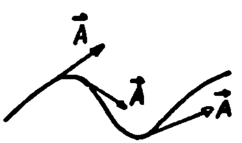
ველის დანახასიათებელი სიდიდეების განხილვის შემდეგ.

2. ვექტორული ველი. ვექტორულ ველს უწოდებენ $\vec{A}(x_1,x_2,x_3;t)$ ვექტორს, რომელიც განსაზღვრულია სივრცის ყოველ წერტილში /ან სივრცის რაიმე სასრულ არეში/ და დროის t მომენტში. თუ $\vec{A}$ ფუნქცია დროს ცხადად არ შეიცავს, მაშინ ვექტორულ ველს სტაციონარული ეწოდება. ვექტორული ველის მაგალითებს წარმოადგენს ელექტრული და მაგნიტური ველები, რომლებიც სათანადოდ ხასიათდებიან ელექტრული $\vec{E}$ და მაგნიტური $\vec{H}$ დაძაბულობებით. ვექტორულ ველს ქმნის სითხის სიჩქარე, რომელიც განიხილება როგორც სივრცისა და დროის ფუნქცია $\vec{v}=\vec{v}(x_1,x_2,x_3;t)$.

ვექტორული ველის გეომეტრიული ინტერპრეტაციისათვის შეგვიძლია შემოვიტანოთ ვექტორული წირის ცნება. ვექტორული წირი ეწოდება წირს, რომელსაც დროის აღნიშნულ მომენტში ყოველ წერტილში მხებად აქვს $\vec{A}(x_1,x_2,x_3;t)$ ვექტორი /ნახ.23/. აღსანიშნავია, რომ სიჩქარის ველის შემთხვევაში ვექტორულ წირებს დენის წირებს უწოდებენ, ხოლო მაგნიტური ველის შემთხვევაში – ძალხაზებს.

განმარტებიდან ცხადია, რომ დენის წირები ემორჩილება შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dx_1}{A_1(\vec{r},t)}=\frac{dx_2}{A_2(\vec{r},t)}=\frac{dx_3}{A_3(\vec{r},t)}, \qquad /12,83/$$



ნახ. 23

რომელიც /8,36/ ფორმულის თანახმად წარმოადგენს $d\vec{r}(dx_1,dx_2,dx_3)$ მხებისა და $\vec{A}(x_1,x_2,x_3;t)$ ვექტორის პარალელობის პირობას.

აღვნიშნოთ, რომ არასტაციონარულ შემთხვევაში დენის წირი არ ემთხვევა ტრაექტორიას. მაგალითისათვის განვიხილოთ მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა. გადატანითი მოძრაობის განმარტებით დროის აღებულ მომენტში მყარი სხეულის ყოველი წერტილის

სიჩქარე სიდიდით და მიმართულებით ერთმანეთის ტოლია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ დენის წირი იქნება სწორი ხაზი, მაშინ, როცა მყარ სხეულს გადატანითი მოძრაობის დროს შეიძლება ჰქონდეს ნებისმიერი ტრაექტორია.

დენის წირები და ტრაექტორიები ერთმანეთს ემთხვევა სტაციონარულ შემთხვევაში. განმარტების თანახმად, სიჩქარე ტოლი იქნება $\dot{x}_i = v_i(x_1,x_2,x_3)$, საიდანაც ტრაექტორიისათვის გვექნება განტოლება

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1,x_2,x_3)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1,x_2,x_3)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1,x_2,x_3)}, \qquad /12,33'/$$

რომელიც დაემთხვევა /12,33/ დენის წირების განტოლებას სტაციონარულ შემთხვევაში.

ახლა ავიღოთ სივრცეში რაიმე l მრუდი, რომელიც არ ემთხვევა ვექტორულ წირს და მის ყოველ წერტილში გავატაროთ ვექტორული წირები. მივიღებთ ფართეულს $\theta(x_1,x_2,x_3)=const$, რომლის ყოველ წერტილში $\vec{A}$ ვექტორი ძევს ზედაპირის მხებ სიბრტყეში. ამ ფართეულს ეწოდება ვექტორული ფართეული. დავწეროთ ამ ფართეულის დიფერენციალური განტოლება. ცხადია, რომ $\vec{A}$ ვექტორი მართობული იქნება $\nabla\theta$ ვექტორის, ამიტომ $(\nabla\theta,\vec{A})=0$ მივიღებთ კერძონაწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1}A_1+\frac{\partial\theta}{\partial x_2}A_2+\frac{\partial\theta}{\partial x_3}A_3=0, \qquad /12,33''/$$

საიდანაც მოიძებნება $\theta(x_1,x_2,x_3)$ ფუნქცია. როცა l -მრუდი ჩაკეტილია, მაშინ ვექტორული ფართეული წარმოადგენს მილისებრ ფართეულს. სიჩქარის ველის შემთხვევაში ამ ფართეულს დენის მილს უწოდებენ.

გამოვარკვიოთ, რა სიდიდეებით შეგვიძლია დავახასიათოთ ვექტორული ველის ფიზიკური თვისებები. შემოვიღოთ ველის ნაკ-

მიებულის ოპერაცია. განვიხილოთ წარმოებული

$$F_{ik}=\frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \qquad /12,34/$$

ვაჩვენოთ, რომ ეს ცხრა სიდიდე გამოხატავს მეორე რანგის ტენზორს. რადგან A_i ვექტორია, ამიტომ კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას იგი გარდაიქმნება კანონით

$$A_i'(\vec{r}\,')=a_{ik}A_k(\vec{r}). \quad (i=1,2,3) \qquad /12,35/$$

ამასთან, იგულისხმება, რომ ძველი კოორდინატები გარდაიქმნება /12,2/ და /12,4/ ფორმულებით. ჩვენ ზემოთ ვაჩვენეთ, რომ $\frac{\partial}{\partial x_i}$ წარმოებული ვექტორის კომპონენტებია, ამიტომ /12,34/ იქნება მეორე რანგის ტენზორი, რამდენადაც იგი წარმოადგენს ორი ვექტორის პირდაპირ ნამრავლს. ამ ტენზორისაგან შეგვიძლია შევადგინოთ ვექტორული ველის დამახასიათებელი ორი სიდიდე. ერთი ამ სიდიდეთაგანი არის ტენზორის შპური, რომელსაც უწოდებენ $\vec{A}$ ვექტორის დივერგენციას[1]

$$Sp\,F=\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}\equiv div\vec{A}. \qquad /12,36/$$

მაშასადამე, $\vec{A}$ ვექტორის დივერგენცია იქნება სკალარული სიდიდე. იგი განსაზღვრავს სკალარულ ველს იმავე არეში, რომელშიაც განსაზღვრულია ვექტორული $\vec{A}$ ველი. რადგან $\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ წარმოადგენს ∇ ოპერატორის მდგენელებს, ამიტომ $div\vec{A}$ შეგვიძლია გამოვხატოთ, როგორც ∇ და $\vec{A}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, ე.ი.

$$div\vec{A}=(\nabla,\vec{A})=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}. \qquad /12,37/$$

---

1 div - პირველი სამი ასოა ფრანგული სიტყვისა divergence, რაც ნიშნავს განშლადობას.

როცა $div\vec{A}=0$, ვექტორულ ველს ეწოდება სოლენოიდური.

ახლა ვიპოვოთ მეორე სიდიდე. ამისათვის მოვახდინოთ F_{ik} ტენზორის ანტისიმეტრიზაცია

$$A_{mn}=\frac{\partial A_n}{\partial x_m}-\frac{\partial A_m}{\partial x_n}. \qquad /12,38/$$

როგორც ვიცით, მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი ვექტორის ეკვივალენტურია. ამ ვექტორს დუალურ ვექტორს უწოდებენ და განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$rot_i\vec{A}=\frac{1}{2}\varepsilon_{imn}\left(\frac{\partial A_n}{\partial x_m}-\frac{\partial A_m}{\partial x_n}\right). \qquad /12,39/$$

$rot\vec{A}$ დუალურ ვექტორს ეწოდება $\vec{A}$ ვექტორის როტორი[1]. რადგან აჯამვის ინდექსების შეცვლისას ორმაგი ჯამი არ იცვლება, ამიტომ

$$\varepsilon_{imn}\frac{\partial A_m}{\partial x_n}=\varepsilon_{inm}\frac{\partial A_n}{\partial x_m}=-\varepsilon_{imn}\frac{\partial A_n}{\partial x_m}. \qquad /12,40/$$

შედეგად /12,32/ განმარტება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$rot_i\vec{A}=\varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}A_l. \qquad /12,41/$$

ცხადია, როცა $\vec{A}$ ნამდვილი ვექტორია, მაშინ $rot\vec{A}$ იქნება აქსიალური და პირიქით.

თუ გავიხსენებთ ვექტორული ნამრავლის განმარტებას

$$[\vec{A},\vec{B}]_i=\varepsilon_{ikl}A_kB_l, \qquad /12,42/$$

მაშინ $rot\vec{A}$-ს i-ური კომპონენტისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$rot_i\vec{A}=[\nabla,\vec{A}]_i=\varepsilon_{ikl}\frac{\partial A_l}{\partial x_k}, \qquad /12,43/$$

---

1 rot – პირველი სამი ასოა ფრანგული სიტყვისა rotation, რაც ნიშნავს ბრუნვას.

ან

$$\mathrm{rot}\,\vec{A}=[\nabla,\vec{A}]=\begin{vmatrix}\vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}, \qquad /12,44/$$

რომელიც გაშლილად ასე ჩაიწერება:

$$\mathrm{rot}\,\vec{A}=\vec{i}_1\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)+\vec{i}_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)+\vec{i}_3\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right). \qquad /12,45/$$

ამგვარად, თუ სკალარული ველის დასახასიათებლად საკმარისი იყო ერთი ვექტორული სიდიდე, სახელდობრ გრადიენტი, ვექტორული ველი ხასიათდება ერთი სკალარული და ერთი ვექტორული სიდიდით, კერძოდ, $\mathrm{div}\,\vec{A}$ და $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ -ით; ამ სიდიდეების ფიზიკურ შინაარსს ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ, როცა მოვიყვანთ ზოგ სხვა სახის განმარტებას, ახლა კი გამოვიყვანოთ ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ფორმულა.

ვაჩვენოთ, რომ $\mathrm{div}\,\vec{r}=3$. მართლაც, რადგანაც $\vec{r}=\vec{i}_\alpha x_\alpha$, ამიტომ $\mathrm{div}\,\vec{r}=\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial x_\alpha}=3$. რაც შეეხება $\mathrm{rot}\,\vec{r}$ -ს, ცხადია, იგი ნულის ტოლი იქნება: $\mathrm{rot}\,\vec{r}=0$.

დავამტკიცოთ, რომ თუ Φ სკალარული ფუნქციაა, მაშინ

$$\mathrm{div}(\vec{A}\Phi)=(\vec{A},\mathrm{grad}\,\Phi)+\Phi\,\mathrm{div}\,\vec{A}. \qquad /12,46/$$

მართლაც,

$$\mathrm{div}(\vec{A}\Phi)=\frac{\partial}{\partial x_i}(\Phi A_i)=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}A_i+\Phi\frac{\partial A_i}{\partial x_i}. \qquad /12,47/$$

ვიპოვოთ რას უდრის $\mathrm{rot}(\Phi\vec{A})$ განმარტებით

$$\mathrm{rot}_i(\Phi\vec{A})=\varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}(\Phi A_l)=\Phi\varepsilon_{ikl}\frac{\partial A_l}{\partial x_k}+\varepsilon_{ikl}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}A_l, \qquad /12,48/$$

საიდანაც

$$\mathrm{rot}(\phi\vec{A})=\phi\,\mathrm{rot}\vec{A}+[\mathrm{grad}\,\phi,\vec{A}]\cdot \qquad /12,48/$$

ადვილად დამტკიცდება, რომ

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi=\Delta\phi. \qquad /12,49/$$

მართლაც,

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi=\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{grad}_i\phi=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}=\Delta\phi. \qquad /12,50/$$

ასევე ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi=0; \qquad /12,51/$$

მართლაც,

$$\mathrm{rot}_i\nabla\phi=\varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\phi}{\partial x_l}=\varepsilon_{ikl}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_k\partial x_l}=0, \qquad /12,52/$$

რადგანაც მივიღეთ ანტისიმეტრიული და სიმეტრიული ტენზორების სკალარული ნამრავლი, რომელიც ნულის ტოლია.

როცა ვექტორული ველის როტორი ნულის ტოლია $\mathrm{rot}\vec{A}=0$, მაშინ $\vec{A}$ ყოველთვის შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც რაიმე სკალარული ϕ ფუნქციის გრადიენტი, ე.ი.

$$\vec{A}=\mathrm{grad}\,\phi. \qquad /12,53/$$

ასეთ ვექტორულ ველს პოტენციალურს უწოდებენ, $\phi(\vec{r})$ -ს კი ვექტორული ველის პოტენციალს.

ახლა დავუშვათ, რომ ვექტორული ველი ისეთია, რომ არა მარტო $\mathrm{rot}\vec{A}=0$, არამედ $\mathrm{div}\vec{A}=0$ მაშინ, თუ /12,53/ ტოლობის ორივე მხრიდან ავიღებთ დივერგენციას და გავითვალისწინებთ /12,49/ ფორმულას, მივიღებთ ლაპლასის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\Delta\phi=0. \qquad /12,54/$$

ამ განტოლების ამოხსნას ჰარმონიული ფუნქცია ეწოდება. ამ ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს არც მინიმუმი და არც მაქსიმუმი. მართლაც, ამისათვის საჭირო იქნებოდა, რომ $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}$ ინარჩუნებდნენ ერთსა და იმავე ნიშანს, რაც გამორიცხულია, რადგან ამ შემთხვევაში /12,54/ დაცული არ იქნებოდა.

ვიპოვოთ $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}$. ცხადია, რომ

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{rot}_i\vec{A}=\varepsilon_{ikl}\frac{\partial^2 A_l}{\partial x_i\partial x_k}=\varepsilon_{kil}\frac{\partial^2 A_l}{\partial x_k\partial x_i}= \qquad /12,55/$$

$$=-\varepsilon_{ikl}\frac{\partial^2 A_l}{\partial x_k\partial x_i}=-\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A};$$

მაშასადამე,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}=0. \qquad /12,56/$$

დავამტკიცოთ შემდეგი ფორმულის სამართლიანობა:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\vec{A}. \qquad /12,57/$$

მართლაც,

$$\operatorname{rot}_i\operatorname{rot}\vec{A}=\varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{rot}_l\vec{A}=\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial A_n}{\partial x_m}, \qquad /12,58/$$

რადგან $\varepsilon_{ikl}=\varepsilon_{lik}$, ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულა:

$$\varepsilon_{lik}\varepsilon_{lmn}=\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km}. \qquad /12,59/$$

გვექნება

$$\operatorname{rot}_i\operatorname{rot}\vec{A}=(\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km})\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_m}A_n=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial A_k}{\partial x_k}-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}A_i=\operatorname{grad}_i\operatorname{div}\vec{A}-\Delta A_i, \qquad /12,60/$$

რაც ამტკიცებს /12,57/ ფორმულის სამართლიანობას.

ახლა ვიპოვოთ $rot[\vec{A},\vec{r}]$, სადაც $\vec{A}$ მუდმივი ვექტორია; გვექნება

$$rot_i[\vec{A},\vec{r}]=\varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_k}[\vec{A},\vec{r}]_l=\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial x_k}A_m x_n; \qquad /12,61/$$

რადგან $\frac{\partial x_n}{\partial x_k}=\delta_{nk}$, ამიტომ ფილტრაციის თვისების გამოყენებით მივიღებთ

$$rot_i[\vec{A},\vec{r}]=\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmk}A_m. \qquad /12,62/$$

რადგან $\varepsilon_{lmk}=\varepsilon_{mkl}$, ხოლო $\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{mkl}=2\delta_{im}$, ამიტომ

$$rot_i[\vec{A},\vec{r}]=2\delta_{im}A_m=2A_i. \qquad /12,63/$$

მაშასადამე, საბოლოოდ შეგვიძლია დავწეროთ

$$rot[\vec{A},\vec{r}]=2\vec{A}. \quad (\vec{A}=const) \qquad /12,64/$$

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ მუდმივი $\vec{A}$ ვექტორისათვის

$$div[\vec{A},\vec{r}]=0. \qquad /12,65/$$

როცა სითხე ბრუნავს მუდმივი $\vec{\omega}=const$ კუთხური სიჩქარით, მაშინ სითხის ხაზოვანი სიჩქარე ტოლია

$$\vec{v}=[\vec{\omega},\vec{r}], \qquad /12,66/$$

საიდანაც

$$rot\,\vec{v}=rot[\vec{\omega},\vec{r}]=2\vec{\omega}. \qquad /12,67/$$

მბრუნავ სითხეში $\vec{\omega}\neq 0$ და, შესაბამისად, $rot\,\vec{v}\neq 0$. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სითხის დინება გრიგალურია. როცა მთელ სითხეში $\vec{\omega}=0$, მაშინ $rot\,\vec{v}=0$ და სითხის დინებას პოტენციალური ეწოდება. ეს ნიშნავს, რომ სიჩქარე გამოიხატება $\Phi(\vec{r})$ პოტენციალის გრადიენტით $\vec{v}=grad\,\Phi(\vec{r})$

ბოლოს დავამტკიცოთ ერთი მნიშვნელოვანი ფორმულის სამართლი-

ანობა; სახელდობრ, თუ $\vec{A}(\vec{r})$ და $\vec{B}(\vec{r})$ ნებისმიერი ვექტორებია, მაშინ

$$\mathrm{grad}(\vec{A},\vec{B})=(\vec{A},\nabla)\vec{B}+(\vec{B},\nabla)\vec{A}+[\vec{A},\mathrm{rot}\vec{B}]+[\vec{B},\mathrm{rot}\vec{A}]. \qquad /12,68/$$

ცხადია, რომ გრადიენტის ოპერაციის უშუალო გამოყენების შედეგად მივიღებდით

$$\mathrm{grad}_i(\vec{A},\vec{B})=\mathrm{grad}_i A_k B_k=A_k\frac{\partial B_k}{\partial x_i}+\frac{\partial A_k}{\partial x_k}B_k, \qquad /12,69/$$

ე.ი. /12,68/ გამოსახულებაში ხელოვნურად შემოტანილია ზედმეტი წევრები, რომლებმაც ერთმანეთი უნდა გააბათილონ. განვიხილოთ $[\vec{A},\mathrm{rot}\vec{B}]$ წევრი, გვექნება

$$[\vec{A},\mathrm{rot}\vec{B}]_i=\varepsilon_{ikl}A_k\,\mathrm{rot}_l\vec{B}=\varepsilon_{ikl}A_k\varepsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial x_m}B_n= \qquad /12,70/$$

$$=\varepsilon_{lik}\varepsilon_{lmn}A_k\frac{\partial B_n}{\partial x_m};$$

გამოვიყენოთ /12,59/ ფორმულა, მაშინ ფილტრაციის ჩატარების შემდეგ დაგვრჩება

$$[\vec{A},\mathrm{rot}\vec{B}]_i=A_n\frac{\partial B_n}{\partial x_i}-A_m\frac{\partial B_i}{\partial x_m}. \qquad /12,71/$$

ცხადია, რომ $\vec{A}$ ვექტორის $\vec{B}$-თი შეცვლით მივიღებთ

$$[\vec{B},\mathrm{rot}\vec{A}]_i=B_n\frac{\partial A_n}{\partial x_i}-B_m\frac{\partial A_i}{\partial x_m}. \qquad /12,72/$$

ამ ორი უკანასკნელი ფორმულის /12,68 /-ში შეტანის შედეგად გვექნება /12,69/ ფორმულა, რაც ამტკიცებს /12,68/-ის სამართლიანობას.

კერძო შემთხვევაში, როცა $\vec{A}=\vec{B}$ /12,68/ ფორმულიდან მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\mathrm{grad}\vec{A}^2=[\vec{A},\mathrm{rot}\vec{A}]+(\nabla,\vec{A})\vec{A}. \qquad /12,73/$$

ამ ფორმულას დიდი გამოყენება აქვს ჰიდროდინამიკაში.

ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი ფორმულების სამართლიანობა:

$$div[\vec{A},\vec{B}] = (\vec{B}, rot\vec{A}) - (\vec{A}, rot\vec{B}) \qquad /12,74/$$

და

$$rot[\vec{A},\vec{B}] = (\vec{B},\nabla)\vec{A} - (\vec{A},\nabla)\vec{B} + \vec{A}\,div\vec{B} - \vec{B}\,div\vec{A}. \qquad /12,75/$$

დამატებით გამოვიყვანოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი დამოკიდებულება, რომლებიც ხშირად გვხვდება სხვადასხვა გამოთვლებში. ვაჩვენოთ, რომ თუ $\vec{A}$ მუდმივი ვექტორია, ხოლო $r=|\vec{r}|$, მაშინ

$$div(\vec{A}r) = (\vec{A},\vec{n}),$$

სადაც $\vec{n}=\frac{\vec{r}}{r}$ ერთეულოვანი ვექტორია $\vec{r}$-ის გასწვრივ. მართლაც,

$$div(\vec{A}r) = \frac{\partial}{\partial x_i}(A_i r) = A_i\frac{\partial r}{\partial x_i} = A_i n_i = (\vec{A},\vec{n}).$$

სრულიად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$rot(\vec{A}r) = [\vec{n},\vec{A}].$$

დაბოლოს დავამტკიცოთ შემდეგი ფორმულის სამართლიანობა:

$$grad\frac{(\vec{A},\vec{r})}{r^3} = -rot\frac{[\vec{A},\vec{r}]}{r^3} = \frac{3\vec{r}(\vec{A},\vec{r})-r^2\vec{A}}{r^5},$$

სადაც $\vec{A}=const$. ჯერ განვიხილოთ მარცხენა მხარე. ცხადია, რომ

$$grad\frac{(\vec{A},\vec{r})}{r^3} = (\vec{A},\vec{r})\,grad\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3}\,grad(\vec{A},\vec{r}) =$$
$$= -\frac{3\vec{r}}{r^5}(\vec{A},\vec{r}) + \frac{1}{r^3}\vec{A} = \frac{r^2\vec{A}-3\vec{r}(\vec{A},\vec{r})}{r^5}.$$

$rot\frac{[\vec{A},\vec{r}]}{r^3}$-ისათვის კი, თუ გამოვიყენებთ /12,48/ ფორმულას, გვექნება

$$rot\frac{[\vec{A},\vec{r}]}{r^3} = -\left[[\vec{A},\vec{r}],\nabla\frac{1}{r^3}\right] + \frac{1}{r^3}rot[\vec{A},\vec{r}];$$

"ბაც მინუს ცაბ" ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\operatorname{rot}\frac{[\vec{A},\vec{r}]}{r^3}=-\frac{3}{r^2}\left\{\vec{A}r^2-\vec{r}(\vec{A},\vec{r})\right\}+\frac{2\vec{A}}{r^3},$$

საიდანაც საბოლოოდ გვექნება

$$\operatorname{rot}\frac{[\vec{A},\vec{r}]}{r^3}=\frac{3\vec{r}(\vec{A},\vec{r})-\vec{A}r^2}{r^5},$$

რაც ამტკიცებს საძიებელ ტოლობას.

გ. <u>მაღალი რანგის ტენზორული ველები</u>. აღვნიშნოთ, რომ სრულიად ანალოგიურად განიხილება უფრო მაღალი რანგის ტენზორული ველებიც. მაგალითად. მეორე რანგის $T_{ik}(\vec{r},t)$ ტენზორული ველი განსაზღვრული იქნება ცხრა სკალარული ფუნქციით. ამ ველის გაწარმოებით შეგვიძლია მივიღოთ მესამე რანგის ტენზორული ველი

$$\frac{\partial T_{ik}(\vec{r},t)}{\partial x_l}. \qquad /12,76/$$

მართლაც, ჩვენ აქ საქმე გვაქვს $\frac{\partial}{\partial x_l}$ ვექტორის ნამრავლთან მეორე რანგის T_{ik} ტენზორთან, რომელიც მესამე რანგის ტენზორი იქნება. ამ ტენზორის დაკვეცება მოგვცემს ვექტორს

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}, \qquad /12,77/$$

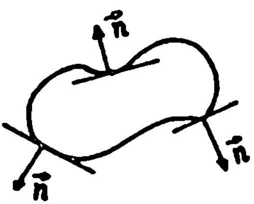
რომელსაც შეგვიძლია ვუწოდოთ მეორე რანგის ტენზორული ველის დივერგენცია. თუ მეორე რანგის ტენზორული ველი ანტისიმეტრიულია $F_{ik}=-F_{ki}$, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ შემდეგი მესამე რანგის სრულიად ანტისიმეტრიული ტენზორული ველი:

$$Q_{ikl}=\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}, \qquad /12,78/$$

რომელიც ნულის ტოლია, როცა რომელიმე ორი ინდექსი ტოლია. სრულიად ანალოგიურად განიხილება უფრო მაღალი რანგის ტენზორული

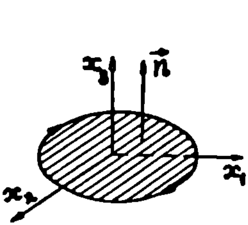
ველების. მაგრამ ფიზიკაში, როგორც წესი, მაღალი რანგის ტენზო-რული ველები იშვიათად გვხვდება.

4. გარე ნორმალი. ველების თეორიაში ნორმალის ცნებას დიდი მნიშვნელობა აქვს. ნორმალი ეწოდება აღებულ წერტილში ზედაპირის მართობულ ვექტორს. ცხადია, რომ ნორმალს ექნება ორი მიმართულება. საჭიროა განისაზღვროს ნორმალის დადებითი მიმართულება. უნდა განვიხილოთ ნორმალის დადებითი მიმართულების განსაზღვრის ორი შემთხვევა. როცა ფართი ჩაკეტილია, მაშინ ნორმალის დადებითი მიმართულება იქნება ის, რომელიც ამ ზედაპირის შემოსაზღვრული მოცულობიდან გარეთ არის მიმართული /ნახ.24/; ამგვარად განმარტებულ ნორმალს გარე ნორმალსაც უწოდებენ.



ნახ. 24.

ღია ზედაპირისათვის კი ნორმალის დადებითი მიმართულების არჩევა დამოკიდებულია ზედაპირის კონტურის შემოვლის მიმართულებაზე. კერძოდ, შევთანხმდეთ და მარჯვენა სისტემაში ნორმალის დადებითი მიმართულება შევუსაბამოთ მარჯვენა ბურღის გადაადგილების მიმართულებას, როცა ბურღს ვაბრუნებთ ზედაპირის კონტურის შემოვლის მიმართულებით. არსებობს სხვა განმარტებებიც. თუ მარჯვენა ხელს მივადებთ კონტურის შემოვლის მიმართულებით, მაშინ გაშლილი ცერი მიუთითებს ნორმალის დადებით მიმართულებას./ნახ.25/ ან კიდევ: თუ ზედაპირის კონტურს ისე შემოვუვლით, რომ ჩვენი სხეულის მიმართულება ემთხვევა ნორმალის დადებით მიმართულებას, მაშინ ზედაპირი უნდა იყოს ხელმარჯვნივ. შემდეგში



ნახ. 25

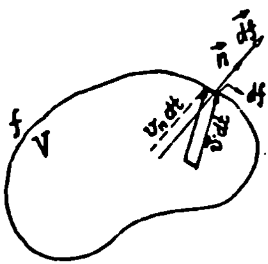
ნორმალის ორტს $\vec n$ -ით აღვნიშნავთ.

5. დივერგენციის ფიზიკური შინაარსი. დივერგენციის ჩვენს მიერ ზემოთ განხილული განმარტება დამოკიდებულია კოორდინატთა არჩევაზე. ხშირად ხელსაყრელია დივერგენციის ე.წ. ინვარიანტული განმარტება, რომელიც აღარ არის დამოკიდებული კოორდინატთა არჩევაზე. ქვემოთ გამოვიყვანთ დივერგენციის ინვარიანტულ ფორმულას და, ამავე დროს, გავარკვევთ მის ფიზიკურ შინაარსს.

შემოვიღოთ მიმართულების მქონე ფართის $\vec{df}$ ელემენტი, რომელიც სიდიდით ელემენტარული df ფართის ტოლია, ხოლო მიმართულებით ემთხვევა გარე ნორმალის მიმართულებას, ე.ი. $\vec{df}=\vec n\, df$.

$$\oint (\vec A, \vec{df}) = \oint_f A_n\, df \qquad /12,79/$$

ინტეგრალს[1] უწოდებენ $\vec A$ ვექტორის ნაკადს V მოცულობიდან გარეთ, ამ მოცულობის შემომსაზღვრელ f-ფართში. ტერმინი ვექტორის ნაკადი ნასესხებია ჰიდროდინამიკიდან, სადაც შეისწავლება სითხეების დინება. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს სითხე, რომელიც იმყოფება V - მოცულობაში. გამოვთვალოთ ამ სითხის ნაკადი მოცულობის შემომსაზღვრელ ჩაკეტილ f -ფართში. გამოვყოთ ზედაპირის ელემენტი. გამოვთვალოთ სითხის ის რაოდენობა,



ნახ.:26

1 რამდენადაც ფართს აქვს ორი განზომილება, ამიტომ f ფართზე გავრცელებული ინტეგრალი არის ორჯერადი ინტეგრალი.

შემდგომში, როგორც მარტივი, ისე ჯერადი ინტეგრალებისათვის გამოვიყენებთ ინტეგრალის მხოლოდ ერთ სიმბოლოს და ვიგულისხმებთ რომ ინტეგრალი იმდენი ჯერადობისაა, რამდენ დიფერენციალსაც შეიცავს იგი, ე.ი.

$$\underbrace{\int\int\cdots\int}_{(n)} f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n \equiv \int f(x_1,x_2,\cdots x_n)\,dx_1\cdots dx_n.$$

რომელიც დროის ერთეულში გამოდის ზედაპირის ამ ელემენტიდან. ცხადია, რომ dt დროში სითხის ყოველი ელემენტი გადაადგილდება $\vec{v}dt$ მანძილზე. ამიტომ dt დროში df -ზე მიაღწევს სითხის ის მასა, რომელიც მოთავსებული იქნება df ფუძისა და $\vec{v}dt$ სიმაღლის მქონე ცილინდრში, ე.ი. $(\vec{v},d\vec{f})dt$ მოცულობის ცილინდრში /ნახ.26/. ასე რომ, სითხე, რომელიც დროის ერთეულში df ელემენტიდან გამოდის, ტოლი იქნება $\rho(\vec{v},d\vec{f})$, სადაც ρ არის სითხის სიმკვრივე. სითხის მთელი ნაკადი, რომელიც f -ზედაპირში გადის, ტოლი იქნება

$$J=\oint_f(\vec{A},d\vec{f}), \qquad /12,80/$$

სადაც $\vec{A}=\rho\vec{v}$ -ს ეწოდება სითხის ნაკადის სიმკვრივე, რადგანაც იგი გამოხატავს დროის ერთეულში გავრცელების პერპენდიკულარულად მოთავსებულ ერთეულოვან ფართში გასული სითხის რაოდენობას. როცა $\rho(\vec{v},d\vec{f})<0$, მაშინ სითხე გარედან მოცულობაში შედის.

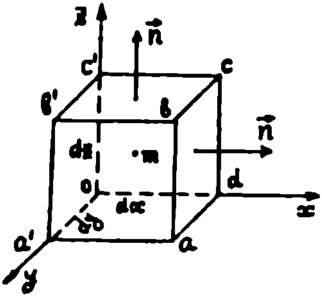
დროის ერთეულში, იგივე რაოდენობის სითხის შემცირება V მოცულობაში, ცხადია, ტოლი იქნება $-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV$ -სი, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV=\oint_f(\vec{A},d\vec{f}). \qquad /12,80'/$$

ამ განტოლებას უწყვეტობის განტოლებას უწოდებენ. ფიზიკურად იგი წარმოადგენს მასის მუდმივობის კანონს. თუ ვიგულისხმებთ, რომ /12,80'/-ში ρ არის მუხტის სიმკვრივე, მაშინ იგი გამოხატავს მუხტის მუდმივობის კანონსაც.

ახლა განვიხილოთ ელემენტარული პარალელეპიპედის მოცულობა $dV=dx\,dy\,dz$, რომლის გეომეტრიული ცენტრი მოვათავსოთ

$m(x_0,y_0,z_0)$ წერტილში /ნახ.27/. განვიხილოთ რაიმე $\vec{A}$ ვექტორის ნაკადი ამ მოცულობიდან გარეთ, პარალელეპიპედის წახნაგებიდან შედგენილ ჩაკეტილ ფარში. $\vec{A}(x,y,z)$ ვექტორის x-მდგენელი დავშალოთ მწკრივად $m(x_0,y_0,z_0)$ წერტილის მახლობლობაში. გვექნება



ნახ.27

$$A_x(x,y,z)=A_x(m)+\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)_m(x-x_0)+\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)_m(y-y_0)+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)_m(z-z_0)+\dots+ \qquad /12,81/$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $\vec{A}$ ვექტორის ნაკადი პარალელეპიპედის მოცულობის შემომსაზღვრელ ზედაპირში, ჯერ ვიპოვოთ ნაკადები ცალკეულ წახნაგებში. განვიხილოთ, მაგალითად $\vec{A}$ ვექტორის ნორმალური კომპონენტის ზედაპირული ინტეგრალი $abcd$ წახნაგზე. რადგან ამ წახნაგზე ნორმალის გასწვრივ მიმართული $\vec{A}$ ვექტორის კომპონენტი ტოლია A_x-ის და ამ წახნაგის ფართია $dydz$, ამიტომ

$$\int\limits_{abcd} A_x df=\left[A_x(m)+\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)_m\frac{dx}{2}\right]dy\,dz+\dots+ \qquad /12,82/$$

/12,82/-ის დანარჩენ წევრებზე $dydz$-ის გამრავლებით მივიღებთ უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე წევრებს, რომლებიც გადავაგდეთ: გარდა ამისა, გავითვალისწინეთ, რომ $abcd$ წახნაგზე $x-x_0=\frac{1}{2}dx$.

გამოვთვალოთ ანალოგიური ინტეგრალი მოპირდაპირე წახნაგისათვის. $\vec{A}$ ვექტორის მდგენელი $a'b'c'o$ წახნაგის გარე ნორმალ-

ზე, ცხადია, $-A_x$-ის ტოლია, ამიტომ

$$-\int\limits_{a'b'c'o} A_x df=-\left[A_x^{(m)}-\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)_m\frac{dx}{2}\right]dy\,dz+\cdots+, \qquad /12,63/$$

სადაც გავითვალისწინეთ, რომ აღნიშნულ წახნაგზე $x-x_0=-x_0=-\frac{dx}{2}$. ამ ორი ზედაპირული ინტეგრალის ჯამი ტოლი იქნება

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)dx\,dy\,dz; \qquad /12,64/$$

ამასთან, რაკი ჩავთვლით m ინდექსი და ვიგულისხმოთ, რომ წარმოებული აიღება $m(x_0,y_0,z_0)$ წერტილში.

ანალოგიურად $aa'b'b$ და მის მოპირდაპირე წახნაგში ნაკადს ექნება მნიშვნელობა

$$\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)dx\,dy\,dz, \qquad /12,65/$$

ხოლო $aa'od$ და მისი მოპირდაპირე წახნაგისათვის -

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz. \qquad /12,66/$$

ასე რომ, $\vec{A}$ ვექტორის სრული ნაკადი $dx\,dy$ მოცულობიდან ამ მოცულობის შემომსაზღვრელ ჩაკეტილ ფართში ტოლი იქნება

$$\oint(\vec{A},d\vec{f})=\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz= \qquad /12,67/$$
$$=\operatorname{div}\vec{A}\,dx\,dy\,dz,$$

საიდანაც, $\vec{A}$ ვექტორის დივერგენცია ასე შეიძლება განვსაზღვროთ:

$$\operatorname{div}\vec{A}=\lim_{dV\to 0}\frac{\oint(\vec{A},d\vec{f})}{dV}. \qquad /12,67/$$

$\oint(\vec{A},d\vec{f})$ ნაკადის ფარდობა dV-მოცულობაზე, რომელიც შეიცავს m

წერტილს, არის ველის დამახასიათებელი თვისება ამ წერტილში გასაშუალებული მოცულობის მიხედვით. ცხადია, რომ რაც უფრო მცირე იქნება მოცულობა, მით უფრო ზუსტად გამოხატავს აღნიშნული ფარდობა ველის თვისებას M -წერტილის მახლობლობაში. ამიტომ ზღვარზე გადასვლით, როცა მოცულობა იკუმშება M -წერტილში $(dV \to 0)$, მივიღებთ $\vec{A}$ ვექტორული ველის დამახასიათებელ ზუსტ სიდიდეს, რომელსაც, გასაგები მიზეზის გამო, განშლადობა ან დივერგენცია ეწოდება. მაშასადამე, $\operatorname{div}\vec{A}$ ყოფილა $\vec{A}$ ვექტორის ნაკადი M წერტილის შემცველი ერთეულოვანი მოცულობიდან ამ მოცულობის შემომსაზღვრელ ზედაპირში. გასაგებია, რომ დივერგენციის ასეთი განმარტება დამოკიდებული არ იქნება კოორდინატთა არჩევაზე.[1] /12,87/ განმარტება სამართლიანი იქნება ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში, ამიტომ მას უწოდებენ დივერგენციის ინვარიანტულ განმარტებას.

6. <u>როტორის ინვარიანტული განმარტება.</u> $\vec{A}$ ვექტორის როტორის ინვარიანტული განმარტება დაკავშირებულია $\vec{A}$ ვექტორის ცირკულაციასთან, რომელიც წარმოადგენს წირით ინტეგრალს ჩაკეტილ კონტურზე:

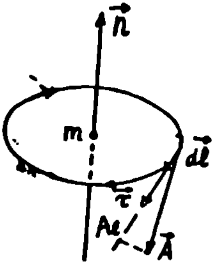
$$\Gamma \equiv \oint_l (\vec{A}, d\vec{l}) = \oint_l A_l \, dl, \qquad /12,88/$$

სადაც $d\vec{l}$ არის წირის ელემენტის ვექტორი, რომელიც სიდიდით ელემენტარული dl სიგრძის ტოლია, ხოლო მიმართულებით ემთხვევა მხების მიმართულებას, ე.ი. $d\vec{l} = \vec{\tau}\, dl$, სადაც $\vec{\tau}$ მხების ორტია. ამასთან, როგორც ზევით აღვნიშნეთ, კონტურის შემოვლის დადებით მიმართულებად მარცხენა კოორდინატთა სისტემაში ითვლება ის, როცა კონტურის შემოვლის მიმართულებით დაბრუნებული მარცხენა ბურღის გადაადგილება ემთხვევა l კონტურით შემოწერილი

---

1 ეს გასაგებია, რადგან არც $\oint(\vec{A}, d\vec{f})$ განსაზღვრული ინტეგრალი და არც მოცულობის სიდიდე კოორდინატთა არჩევაზე დამოკიდებული არ არის.

ფარის ნორმალის დადებით მიმართულებას. /12,88/ ფორმულაში $A_\ell = (\vec{A},\vec{\tau})$. ტერმინი ცირკულაცია ნასესხებია ჰიდროდინამიკიდან, სადაც განიხილება სითხის სიჩქარის ცირკულაცია.



ნახ.28

ავიღოთ რაიმე m წერტილი და მის მახლობლობაში შემოვწეროთ ჩაკეტილი ℓ კონტური, რომელიც ძევს m წერტილზე გამავალ სიბრტყეში /ნახ.28/. განვიხილოთ Γ ცირკულაციის ფარდობა ℓ კონტურის მიერ შემოწერილ f ფართთან. მივიღებთ სიდიდეს, რომელიც მით უფრო ზუსტად დაახასიათებს ველის თვისებებს m წერტილში, რაც უფრო მცირე იქნება f ზღვარში, როცა f ფართი იკუმშება m წერტილში $(f \to 0)$, მივიღებთ m წერტილში ველის დამახასიათებელ ჭეშმარიტ სიდიდეს

$$\lim_{df \to 0} \frac{1}{df} \oint_\ell (\vec{A},\vec{dl}). \qquad /12,89/$$

დივერგენციისაგან განსხვავებით, ეს სიდიდე m წერტილში ველის დამახასიათებელი თვისების გარდა დამოკიდებული იქნება იმ სიბრტყის ორიენტაციაზე, რომელშიაც ძევს ℓ კონტური. ამ სიბრტყის ორიენტაცია შეგვიძლია დავახასიათოთ გარე $\vec{n}$ ნორმალით, რომლის მიმართულება კონტურის შემოვლის დადებით მიმართულებასთან შეფარდებით ზემოთ განვსაზღვრეთ.

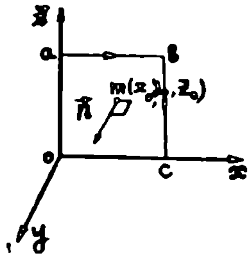
გარე ნორმალის სხვადასხვა მიმართულებისათვის /12,89/-ს ერთი და იგივე m წერტილში ექნება სხვადასხვა მნიშვნელობა. ეს კი ნიშნავს, რომ /12,89/ სიდიდე ცოდილი ვექტორის პროექცია იმ სიბრტყის გარე ნორმალზე, რომელშიაც მოთავსებულია ℓ

კონტური. ამ ვექტორს უწოდებენ $\vec{A}$ ვექტორის როტორს m -წერტილში. ამრიგად, ჩვენ გვექნება შემდეგი განმარტება:

$$\mathrm{rot}_n \vec{A} = (\vec{n}, \mathrm{rot}\vec{A}) = \lim_{df \to 0} \frac{\oint_l (\vec{A}, d\vec{l})}{df}. \qquad /12,90/$$

ცხადია, რომ როტორის ასეთი განმარტება დამოკიდებული არ იქნება კოორდინატების არჩევაზე.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ როტორის /12,90/ განმარტება ემთხვევა /12,45/ განსაზღვრას, რომელიც სულ სხვა გზით გვქონდა მიღებული. ეს ფორმულა გამოვიყვანოთ მარტივ შემთხვევაში, როცა კონტური წარმოადგენს ელემენტარულ ოთხკუთხედს, რომლის მართობია y ღერძისა. კონტურის შემოვლის დადებითი მიმართულება 29-ე ნახაზზე ემთხვევა საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებას. ცირკულაცია ჩაკეტილ $oabco$ კონტურზე დაიყოფა შემდეგ წირით ინტეგრალებად:



ნახ.29

$$\oint (\vec{A}, d\vec{l}) = \int_{oa} A_z dz + \int_{ab} A_x dx - \int_{bc} A_z dz - \int_{co} A_x dx. \qquad /12,91/$$

$m(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი ავიღოთ ოთხკუთხედის გეომეტრიულ ცენტრში და $A_x(x,y,z), A_z(x,y,z)$ მდგენელები გავშალოთ ტეილორის მწკრივებად ამ წერტილის მახლობლობაში. გვექნება:

$$A_x = A_x(m) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)_m (x - x_0) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)_m (z - z_0) + \dots \qquad /12,92/$$

$$A_z = A_z(m) + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_m (x-x_0) + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)_m (z-z_0) + \ldots , \qquad /12,93/$$

სადაც m ინდექსი მიუთითებს, რომ წარმოებულები აიღება $m(x_0,y_0,z_0)$ წერტილში. შემდგომში ამ ინდექსს მივუთითებთ და ვიგულისხმებთ, რომ $\vec{A}$ ვექტორის მდგენელების წარმოებულები უნდა აიღოთ m წერტილში. ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ /12,91/ ფორმულაში და შევინარჩუნოთ დიფერენციალების მხოლოდ პირველი წევრები. გავითვალისწინოთ, რომ Oa მონაკვეთზე $x-x_0=-\frac{1}{2}dx$, ხოლო cb-ზე $x-x_0=\frac{1}{2}dx$; ასევე OC მონაკვეთზე $z-z_0=-\frac{1}{2}dz$, ხოლო ab-ზე $z-z_0=\frac{1}{2}dz$. შედეგად მივიღებთ:

$$\oint_{oabco} (\vec{A},d\vec{l}) = \left[A_z(m) - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]dz + \left[A_x(m) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]dx - \qquad /12,94/$$

$$-\left[A_z(m) + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]dz - \left[A_x(m) - \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\frac{dz}{2}\right]dx .$$

მაშასადამე,

$$\oint (\vec{A},d\vec{l}) = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dx\, dz , \qquad /12,95/$$

რაც /12,90/ განმარტების თანახმად, $df=dx\,dz$ ფართზე გაყოფით და ზღვარზე გადასვლის შედეგად, როცა $df \to 0$, მოგვცემს

$$rot_y \vec{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right). \qquad /12,96/$$

სრულიად ანალოგიურად ვპოვებთ, რომ ცირკულაციები x და z ღერძების მართობულ სიბრტყეებში შესაბამისად ტოლი იქნება

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dy\, dz , \quad \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dx\, dy . \qquad /12,97/$$

ასე რომ, /12,90/ განმარტების თანახმად

$$rot\vec{A} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right), \qquad /12,98/$$

რაც სრულად ემთხვევა ჩვენთვის უკვე ცნობილ /12,45/ გამოსახულებას.

7. ველის სრული და ლოკალური წარმოებული. განვიხილოთ რაიმე ველი. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს სკალარული $\Phi(\vec{r},t)$ ველი. ჩავთვალოთ, რომ სკალარული ველი არასტაციონარულია და, ამავე დროს, იგი დროის მიხედვით იცვლება რადიუს-ვექტორის დროზე დამოკიდებულების გამო: $\vec{r}=\vec{r}(t)$. ვიპოვოთ ასეთი ველის წარმოებული დროით. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}. \quad (i=1,2,3) \qquad /12,99/$$

მაგრამ $v_i=\frac{dx_i}{dt}$ წარმოადგენს სიჩქარეს, ამიტომ გვექნება

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\Phi. \qquad /12,100/$$

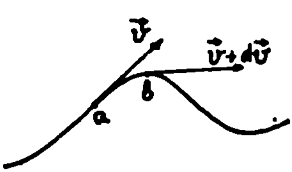
$\frac{d\Phi}{dt}$ -ს უწოდებენ ველის სრულ წარმოებულს. იგი ორი წევრისაგან შედგება. ერთი $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$, რომელიც კერძო წარმოებულის განმარტებით გამოსახავს ველის ცვლილებას სივრცის დაფიქსირებულ $(\vec{r}=const)$ წერტილში. მას ველის ლოკალურ წარმოებულს უწოდებენ. მეორე წევრი შეესაბამება ველის ცვლილებას დროის ერთი და იგივე მომენტში, ერთმანეთისაგან $d\vec{r}=\vec{v}dt$ მანძილზე დაშორებულ ორ წერტილში.

სრულიად ანალოგიურად შეგვიძლია ვიპოვოთ ვექტორული ველის სრული წარმოებული. ვექტორული ველის კლასიკური მაგალითია სითხის სიჩქარეთა ველი $\vec{v}(\vec{r},t)$, რომელიც განიხილება როგორც კოორდინატებისა და დროის ფუნქცია. ამ ველის სრული წარმოებული, ცხადია, ასე გამოისახება

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\vec{v}. \qquad /12,101/$$

პირველი წევრი წარმოადგენს სითხის სიჩქარის ცვლილებას სივრცის აღებულ წერტილში, მეორე წევრი კი გამოწვეულია იმის გამო, რომ სითხის ნაწილაკი $\vec{v}$ სიჩქარით მოძრაობს ტრაექტორიის გასწვრივ.

რათა უფრო მეტი სინათლე შევიტანოთ /12,101/ ფორმულით გამოსახულ სრულ წარმოებულში, იგივე ფორმულა გამოვიყვანოთ სხვა გზით. ვთქვათ, სითხის აღებული ნაწილაკი მოძრაობს $\vec{r}=\vec{r}(t)$ ტრაექტორიის გასწვრივ /ნახ.30/. დავუშვათ, რომ სითხის ეს ნაწილაკი დროის რომელიმე t მომენტში იმყოფება a წერტილში. დროის $t+dt$ მომენტში ეს ნაწილაკი აღმოჩნდება რაიმე b წერტილში. ამ წერტილში ნაწილაკის სიჩქარე იქნება $\vec{v}+d\vec{v}=\vec{v}(\vec{r}+d\vec{r},t+dt)$. ეს უკანასკნელი გავშალოთ მწკრივად და შევინარჩუნოთ პირველი რიგის უსასრულოდ მცირე წევრები. გვექნება



ნახ.30.

$$\vec{v}+d\vec{v}=\vec{v}(\vec{r},t)+\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}},d\vec{r}\right)+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}dt+\dots \qquad /12,102/$$

საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $d\vec{r}=\vec{v}dt$, მივიღებთ /12,101/ ფორმულას.

სრულიად ანალოგიურად ვიპოვით უფრო მაღალი რანგის ტენზორული ველების სრულ წარმოებულსაც. მაგალითად, მეორე რანგის T_{ik} ტენზორული ველისათვის გვექნება

$$\frac{dT_{ik}}{dt}=\frac{\partial T_{ik}}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)T_{ik}. \qquad /12,103/$$

როგორც ჩვენს მიერ გამოყვანილი ფორმულებიდან ჩანს, ველის

სრული წარმოებული წარმოადგენს შემდეგ ოპერატორს:

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v},\nabla). \qquad /12,104/$$

ამ პარაგრაფში მიღებულ ფორმულებს დიდი გამოყენება აქვთ ჰიდროდინამიკაში.

§ 13. ველის დამახასიათებელი სიდიდეების გამოხატვა მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში

ფიზიკის სხვადასხვა დარგებში ამოცანების გადაწყვეტის დროს მეტად მნიშვნელოვანია ველის დამახასიათებელი სიდიდეების გამოხატვა მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში. როგორც ვიცით, ამისათვის საჭიროა ლამეს პარამეტრების გამოყენება. ამ პარაგრაფში ჩვენ შემოვისაზღვრებით სამსივრცით, თუმცა განზოგადება n-განზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს. გარდა ამისა, ლამეს პარამეტრებით სარგებლობის დროს მეტი ინდექსების შემოღება იწვევს გარკვეულ უხერხულობას, ამიტომ ამ პარაგრაფში მათ არ გამოვიყენებთ.

თუ მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებს q_1, q_2, q_3-ით აღვნიშნავთ, მაშინ მრუდწირული წირების გასწვრივ სიგრძის ელემენტები გამოიხატება ფორმულებით:

$$ds_1=h_{11}dq_1,\quad ds_2=h_{22}dq_2,\quad ds_3=h_{33}dq_3. \qquad /13,1/$$

h_{ii} ლამეს პარამეტრები, როგორც ვიცით, განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$h_{ii}^2=\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i}\right)^2. \qquad /13,2/$$

/13,1/ ფორმულების თანახმად, რაიმე Φ ფუნქციის გრადიენტი მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში ასე გამოიხატება:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=\frac{1}{h_{ii}}\frac{\partial\Phi}{\partial q_i},\quad (i=1,2,3). \qquad /13,3/$$

და შემოვიღოთ მრუდწირული საკოორდინატო ღერძების ორტებს

$$\vec{e}_i=\frac{1}{h_{ii}}\sum_{\alpha}\vec{i}_\alpha\frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i}, \quad (i=1,2,3) \qquad /13,4/$$

სადაც $\vec{i}_\alpha(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ დეკარტის მართკუთხა სისტემის ორტებია, მაშინ მრუდწირულ კოორდინატებში გრადიენტისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\nabla=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\vec{e}_\alpha}{h_{\alpha\alpha}}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}; \qquad /13,5/$$

ამასთან, საჭიროა გავიხსენოთ, რომ $\vec{e}_\alpha$ ორტები აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta)=\delta_{\alpha\beta}, \qquad /13,6/$$

$$[\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta]=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\vec{e}_\gamma. \qquad /13,7/$$

განვიხილოთ სფერული კოორდინატები $q_1=r$, $q_2=\theta$, $q_3=\varphi$, მაშინ:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z=r\cos\theta. \qquad /13,8/$$

ამ კოორდინატებში ლამეს პარამეტრები ტოლია:

$$h_{11}=1,\ h_{22}=r,\ h_{33}=r\sin\theta; \qquad /13,9/$$

ამიტომ გრადიენტს ექნება მდგენელები

$$\nabla\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \qquad /13,10/$$

ან ვექტორულად[1]

---

1 დეკარტის მართკუთხა სისტემის $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ორტებისაგან განსხვავებით $\vec{e}_\alpha$ ორტები მუდმივები არ არიან, ამიტომ გამოსახულებების გაწარმოების დროს, რომლებიც შეიცავენ $\vec{e}_\alpha$ ორტებს, უნდა დავიცვათ გარკვეული სიფრთხილე. საილუსტრაციოდ /13,11/-დან იპოვეთ $\Delta=\nabla\cdot\nabla$ ოპერატორი და მიღებული შედეგი შეადარეთ /13,10/ გამოსახულებას.

$$\nabla=\vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\vec{e}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \qquad /13,11/$$

სადაც /13,4/ ფორმულის თანახმად, მრუდწირული ღერძების ორტები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$\begin{aligned}\vec{e}_r&=\vec{i}\sin\theta\cos\varphi+\vec{j}\sin\theta\sin\varphi+\vec{k}\cos\theta,\\ \vec{e}_\theta&=\vec{i}\cos\theta\cos\varphi+\vec{j}\cos\theta\sin\varphi-\vec{k}\sin\theta,\\ \vec{e}_\varphi&=-\vec{i}\sin\varphi+\vec{j}\cos\varphi.\end{aligned} \qquad /13,12/$$

ცილინდრულ კოორდინატებში:

$$\begin{aligned}x&=\rho\cos\varphi,\\ y&=\rho\sin\varphi, \qquad (\rho^2=x^2+y^2).\\ z&=z,\end{aligned} \qquad /13,13/$$

ლამეს პარამეტრები ტოლია:

$$h_{11}=1,\ h_{22}=\rho,\ h_{33}=1. \qquad /13,14/$$

მაშასადამე, გრადიენტს ექნება მდგენელები

$$\nabla\left(\frac{\partial}{\partial\rho},\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad /13,15/$$

ან

$$\nabla=\vec{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\vec{e}_\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}; \qquad /13,16/$$

სადაც:

$$\begin{aligned}\vec{e}_\rho&=\vec{i}\cos\varphi+\vec{j}\sin\varphi,\\ \vec{e}_\varphi&=-\vec{i}\sin\varphi+\vec{j}\cos\varphi,\\ \vec{e}_z&=\vec{k}.\end{aligned} \qquad /13,17/$$

ხოლო პოლარკოორდინატებში $(z=0)$ გვექნება

$$\nabla\left(\frac{\partial}{\partial\rho},\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \qquad /13,18/$$

ორტები განისაზღვრება /13,17/ ფორმულებიდან $\vec{e}_2=0$ დაშვე-ბით.

რამდენადაც გრადიენტი გამოვხატეთ სხვადასხვა კოორდინა-ტებში, ამიტომ ადვილია ველის დამახასიათებელი სხვა სიდიდე-ების გამოხატვაც, მაგრამ ამის ნაცვლად ჩვენ გამოვიყვანთ ზოგად ფორმულებს, რომელთა საშუალებითაც ველის დამახასიათებელი ყველა სიდიდე შეგვიძლია ვიპოვოთ ნებისმიერ მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში. ამისათვის დაგვჭირდება ორი სიდიდის $(\nabla,\vec{e}_i)$ და $[\nabla,\vec{e}_i]$ გამოხატვა მრუდწირულ კოორდინატებში. ამასთან, ცხადია, $(\nabla,\vec{e}_i)=\mathrm{div}\,\vec{e}_i$, ხოლო $[\nabla,\vec{e}_i]=\mathrm{rot}\,\vec{e}_i$. ჯერ ვიპოვოთ ∇q_i /13,5/ ფორმულის თანახმად

$$\nabla q_i=\sum_\alpha \frac{\vec{e}_\alpha}{h_{\alpha\alpha}}\frac{\partial q_i}{\partial q_\alpha}=\sum_\alpha \frac{\vec{e}_\alpha}{h_{\alpha\alpha}}\delta_{\alpha i}=\frac{\vec{e}_i}{h_{ii}}. \qquad /13,19/$$

ამის შემდეგ განვიხილოთ ვექტორული ნამრავლი $[\nabla,\nabla q_i]=0$ გვექნება

$$[\nabla,\nabla q_i]=\left[\nabla,\frac{\vec{e}_i}{h_{ii}}\right]=0. \qquad /13,20/$$

გამოვიყენოთ /12,48/ ფორმულა

$$[\nabla,\phi\vec{A}]=\phi[\nabla,\vec{A}]+[\nabla\phi,\vec{A}]; \qquad /13,21/$$

მივიღებთ

$$\left[\nabla,\frac{\vec{e}_i}{h_{ii}}\right]=\frac{1}{h_{ii}}[\nabla,\vec{e}_i]+\left[\nabla\frac{1}{h_{ii}},\vec{e}_i\right]=0, \qquad /13,22/$$

საიდანაც

$$\frac{1}{h_{ii}}[\nabla,\vec{e}_i]=\left[\vec{e}_i,\nabla\frac{1}{h_{ii}}\right]. \qquad /13,23/$$

ცხადია, რომ

$$\nabla\frac{1}{h_{ii}}=\sum_\alpha \frac{\vec{e}_\alpha}{h_{\alpha\alpha}}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{1}{h_{ii}}\right)=-\sum_\alpha \frac{\vec{e}_\alpha}{h_{\alpha\alpha}h_{ii}^2}\frac{\partial h_{ii}}{\partial q_\alpha}. \qquad /13,24/$$

ამ გამოსახულების /13,23/ ფორმულაში შევიტანოთ და /13;7/-ის გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ $[\nabla, \vec{e}_i]$ -ს გამოსახულებას მრუდწირულ კოორდინატებში

$$[\nabla, \vec{e}_i] = -\sum_{\alpha} \frac{\varepsilon_{i\alpha\beta}\vec{e}_\beta}{h_{ii}h_{\alpha\alpha}} \frac{\partial h_{ii}}{\partial q_\alpha}, \qquad /13,25/$$

საიდანაც გვექნება:

$$\begin{aligned}
[\nabla, \vec{e}_1] &= -\frac{\vec{e}_3}{h_{11}h_{22}} \frac{\partial h_{11}}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_2}{h_{11}h_{33}} \frac{\partial h_{11}}{\partial q_3}, \\
[\nabla, \vec{e}_2] &= \frac{\vec{e}_3}{h_{11}h_{22}} \frac{\partial h_{22}}{\partial q_1} - \frac{\vec{e}_1}{h_{22}h_{33}} \frac{\partial h_{22}}{\partial q_3}, \qquad /13,26/ \\
[\nabla, \vec{e}_3] &= -\frac{\vec{e}_2}{h_{11}h_{33}} \frac{\partial h_{33}}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_1}{h_{22}h_{33}} \frac{\partial h_{33}}{\partial q_2};
\end{aligned}$$

ახლა ვიპოვოთ $(\nabla, \vec{e}_i)$-ს გამოსახულება მრუდწირულ კოორდინატებში. რადგან $\vec{e}_1 = [\vec{e}_2, \vec{e}_3]$, ამიტომ

$$\begin{aligned}
(\nabla, \vec{e}_1) &= (\nabla, [\vec{e}_2, \vec{e}_3]) = \nabla_i [\vec{e}_2, \vec{e}_3]_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{ikl}\, e_{2k} e_{3l} = \qquad /13,27/ \\
&= \varepsilon_{ikl} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} e_{2k}\right) e_{3l} + \varepsilon_{ikl}\, e_{2k} \frac{\partial}{\partial x_i} e_{3l},
\end{aligned}$$

საიდანაც გვექნება

$$(\nabla, \vec{e}_1) = (\vec{e}_3, [\nabla, \vec{e}_2]) - (\vec{e}_2, [\nabla, \vec{e}_3]). \qquad /13,28/$$

/13,26/ ფორმულების დახმარებით ადვილად ვიპოვით, რომ:

$$\begin{aligned}
(\nabla, \vec{e}_1) &= \frac{1}{h_{11}h_{22}h_{33}} \frac{\partial}{\partial q_1}(h_{22}h_{33}), \\
(\nabla, \vec{e}_2) &= \frac{1}{h_{11}h_{22}h_{33}} \frac{\partial}{\partial q_2}(h_{11}h_{33}), \qquad /13,29/ \\
(\nabla, \vec{e}_3) &= \frac{1}{h_{11}h_{22}h_{33}} \frac{\partial}{\partial q_3}(h_{11}h_{22}).
\end{aligned}$$

განვიხილოთ რაიმე $\vec{A}$ ვექტორი. მრუდწირულ კოორდინატებში მას ექნება ასეთი სახე: $\vec{A} = \vec{e}_1 A_1 + \vec{e}_2 A_2 + \vec{e}_3 A_3 = \sum_\alpha \vec{e}_\alpha A_\alpha$, ამიტომ

$$(\nabla, \vec{A}) = \sum_\alpha (\nabla, \vec{e}_\alpha) A_\alpha + \sum_\alpha (\vec{e}_\alpha, \nabla) A_\alpha, \qquad /13,30/$$

საიდანაც /13,29/ და /13,5/ ფორმულების გათვალისწინებით მივი-ღებთ

$$(\nabla,\vec{A})=\frac{1}{h_{11}h_{22}h_{33}}\left\{A_1\frac{\partial}{\partial q_1}(h_{22}h_{33})+A_2\frac{\partial}{\partial q_2}(h_{11}h_{33})+A_3\frac{\partial}{\partial q_3}(h_{11}h_{22})\right\}+\sum_{\alpha}\frac{1}{h_{\alpha\alpha}}\frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\alpha}, \qquad /13,31/$$

რომელსაც საბოლოოდ შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი სახე:

$$div\vec{A}=\frac{1}{h_{11}h_{22}h_{33}}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_{22}h_{33})+\frac{\partial}{\partial q_2}(A_2h_{11}h_{33})+\frac{\partial}{\partial q_3}(A_3h_{11}h_{22})\right\}. \qquad /13,32/$$

მაშასადამე, $div\vec{A}$ გამოსახულია ნებისმიერ მრუდწირულ ორთოგო-ნალურ კოორდინატებში. ახლა გამოვსახოთ ლაპლასის ოპერატორი. ამისათვის ავიღოთ $\vec{A}=\nabla\psi$ და გავითვალისწინოთ, რომ $div\,grad\,\psi=\Delta\psi$. გარდა ამისა, ცხადია, რომ $A_i=(\nabla\psi)_i=\frac{1}{h_{ii}}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}$. ამიტომ ლაპ-ლასიანს ნებისმიერ მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში ექნე-ბა სახე

$$\Delta=\frac{1}{h_{11}h_{22}h_{33}}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_{22}h_{33}}{h_{11}}\frac{\partial}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_{11}h_{33}}{h_{22}}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_{11}h_{22}}{h_{33}}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right\}. \qquad /13,33/$$

ახლა გამოვსახოთ $rot\,\vec{A}=[\nabla,\vec{A}]$. ცხადია, რომ

$$[\nabla,\vec{A}]=[\nabla,\sum_\alpha\vec{e}_\alpha A_\alpha]=\sum_\alpha\left\{[\nabla,\vec{e}_\alpha]A_\alpha-[\vec{e}_\alpha,\nabla A_\alpha]\right\}. \qquad /13,34/$$

ამ გამოსახულებაში შევიტანოთ $[\nabla,\vec{e}_\alpha]$ -ს მნიშვნელობანი /13,26/ ფორმულებიდან და გავითვალისწინოთ /13,5 / გამოსახ-ულება. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$rot\vec{A}=\frac{1}{h_{11}h_{22}h_{33}}\begin{vmatrix} h_{11}\vec{e}_1 & h_{22}\vec{e}_2 & h_{33}\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_{11}A_1 & h_{22}A_2 & h_{33}A_3 \end{vmatrix}. \qquad /13,35/$$

ამგვარად, ჩვენთვის საინტერესო ყველა სიდიდე გამოვსახეთ მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში. კერძო შემთხვევაში სფერულ კოორდინატებში გვაქვს

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(A_r r^2)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}. \qquad /13,36/$$

ცილინდრულ კოორდინატებში კი -

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}. \qquad /13,37/$$

სრულიად ანალოგიურად როტორისათვის სფერულ კოორდინატებში გვექნება ფორმულები:

$$\operatorname{rot}_r\vec{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi},$$

$$\operatorname{rot}_\theta\vec{A}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r},$$

$$\operatorname{rot}_\varphi\vec{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}, \qquad /13,38/$$

ხოლო ცილინდრულ კოორდინატებში

$$\operatorname{rot}_\rho\vec{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}_\varphi\vec{A}=\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho},$$

$$\operatorname{rot}_z\vec{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}. \qquad /13,39/$$

ლაპლასიანისათვის სფერულ კოორდინატებში გვექნება

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\Delta_{\theta,\varphi}}{r^2}, \qquad /13,40/$$

სადაც $\Delta_{\theta,\varphi}$ კუთხეებზე დამოკიდებული ნაწილია

$$\Delta_{\theta,\varphi}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}; \qquad /13,41/$$

$\Delta_{\theta,\varphi}$ -ს ლეჟანდრის ოპერატორსაც უწოდებენ. ბოლოს, ცილინდრულ

კოორდინატებში ლაპლასიანი მიიღებს გამოსახულებას

$$\Delta=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad /13,42/$$

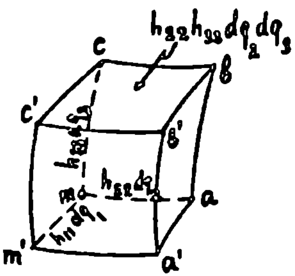
ხოლო პოლარკოორდინატებში

$$\Delta=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \qquad /13,43/$$

ინტერესმოკლებული არ იქნება ვაჩვენოთ, რომ ვექტორული ანალიზის ფორმულების გამოსახვა ნებისმიერ მრუდწირულ კოორდინატებში ასევე ადვილია დივერგენციისა და როტორის ინვარიანტული განმარტებიდან. ვიპოვოთ, მაგალითად, დივერგენციის ფორმულა. რამდენადაც დივერგენცია განისაზღვრება ფორმულით

$$\operatorname{div}\vec{A}=\lim_{dV\to 0}\frac{\oint(\vec{A},d\vec{f})}{dV}, \qquad /13,44/$$

ამდენად საკმარისია მრუდწირულ კოორდინატებში გამოვთვალოთ $\vec{A}$ ვექტორის ნაკადი მცირე მოცულობის პარალელეპიპედში და შევადაროთ ამ პარალელეპიპედის მოცულობასთან. ელემენტარული პარალელეპიპედის მოცულობა მრუდწირულ კოორდინატებში ტოლი იქნება $dV=h_{11}h_{22}h_{33}dq_1dq_2dq_3$. პარალელეპიპედის ერთ-ერთი წვერო მოთავსებულია იმ m წერტილში, რომელშიაც გვაინტერესებს დივერგენციის გამოთვლა /ნახ.31/. გამოვთვალოთ $\vec{A}$ ვექტორის ნაკადი $mcba$ და $m'c'b'a'$ წახნაგებში. ცხადია, რომ $mcba$ წახნაგის ფართი ტოლია $h_{22}h_{33}dq_2dq_3$. თუ ამ გამოსახულებას



ნახ. 31.

გადავამრავლებთ $\vec{A}$ ვექტორის მდგენელზე აღებული ფართის ნორმალის გასწვრივ, მივიღებთ ნაკადს ამ ფართში. ვითვალისწინებთ, რომ mm' საკოორდინატო წირი მიმართულია q_1-ის ზრდის მიმართულებით, მაშინ რადგანაც განხილული წახნაგის გარე ნორმალს აქვს საწინააღმდეგო მიმართულება, ამიტომ $\vec{A}$ ვექტორის წახნაგისადმი ნორმალური მდგენელი იქნება $-A_1$; ამგვარად, $mcba$ წახნაგში ნაკადი ტოლი იქნება

$$-A_1 h_{22} h_{33} dq_2 dq_3; \qquad /13,45/$$

ახლა გამოვთვალოთ ნაკადი მოპირდაპირე $m'c'b'a'$ წახნაგში. ეს წახნაგი პირველისაგან იმით განსხვავდება, რომ მას შეესაბამება q_1 კოორდინატის q_1+dq_1 მნიშვნელობები, მაშინ, როცა q_2 და q_3 კოორდინატები ორივე წახნაგზე ერთი და იგივეა. რადგან ნაკადის ცვლილება dq_1 მანძილზე იქნება $\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_{22} h_{33})dq_1$, ამიტომ $m'c'b'a'$ წახნაგში ნაკადი ტოლია გამოსახულების

$$A_1 h_{22} h_{33} dq_2 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_{22} h_{33}) dq_1 dq_2 dq_3. \qquad /13,46/$$

ორივე განხილულ ზედაპირში ნაკადი ტოლი იქნება /13,45/ და /13,46/-ის ჯამის, ე.ი. სიდიდის

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1 h_{22} h_{33}) dq_1 dq_2 dq_3; \qquad /13,47/$$

სრულიად ანალოგიურად წახნაგთა სხვა წყვილებში ნაკადები ტოლი იქნება

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(A_2 h_{11} h_{33}) dq_1 dq_2 dq_3 \qquad /13,48/$$

და

$$\frac{\partial}{\partial q_3}(A_3 h_{11} h_{22}) dq_1 dq_2 dq_3; \qquad /13,49/$$

მაშასადამე, სრული ნაკადი განისაზღვრება ფორმულით

$$\oint(\vec{A},d\vec{f}) =$$

$$=\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_{22}h_{33})+\frac{\partial}{\partial q_2}(A_2h_{11}h_{33})+\frac{\partial}{\partial q_3}(A_3h_{11}h_{22})\right\}dq_1dq_2dq_3. \qquad /13,50/$$

პარალელეპიპედის მოცულობაზე გაყოფით საბოლოოდ მივიღებთ დივერგენციის გამოსახულებას ნებისმიერ მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში

$$div\vec{A} =$$

$$=\frac{1}{h_{11}h_{22}h_{33}}\left\{\frac{\partial(A_1h_{22}h_{33})}{\partial q_1}+\frac{\partial(A_2h_{11}h_{33})}{\partial q_2}+\frac{\partial(A_3h_{11}h_{22})}{\partial q_3}\right\}, \qquad /13,51/$$

რომელიც ემთხვევა ჩვენს მიერ ზემოთ მიღებულ /13,32/ ფორმულას. სრულიად ანალოგიურად ვიპოვით როტორის გამოსახულებასაც.

§ 14. ინტეგრალური თეორემები

ინტეგრალური თეორემები დიდ როლს ასრულებენ ვექტორულ ანალიზში და ამასთან ფართო გამოყენებას პოულობენ ფიზიკის სხვადასხვა ამოცანის განხილვის დროს. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია გაუს-ოსტროგრადსკის, სტოქსის და გრინის ფორმულები; ამიტომ მათ დაწვრილებით განვიხილავთ.

1. გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა. ავიღოთ რაიმე ვექტორულ $\vec{A}$ ველში სასრული V მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრული იყოს f-ზედაპირით. განვიხილოთ ფართის ვექტორული ელემენტი $d\vec{f}$, რომელიც, როგორც ვიცით, ასე განიმარტება:

$$d\vec{f}=\vec{n}\,df, \qquad /14,1/$$

სადაც $\vec{n}$ ფართის გარე ნორმალია, ხოლო df ელემენტარული ფართის სიდიდე. df_i-ს ექნება მნიშვნელობები $df_1=dx_2dx_3$, $df_2=dx_3dx_1$, $df_3=dx_1dx_2$ ცხადია, რომ $\oint d\vec{f}=0$, სადაც ინტეგრალი აღებულია ჩაკეტილ

ზედაპირზე; შემდგომში განზოგადების მიზნით ხელსაყრელია ფართის ვექტორული ელემენტი დავუკავშიროთ შემდეგ მეორე რანგის ანტისიმეტრიულ ტენზორს:

$$df_{kl}=dx_k^{(1)}dx_l^{(2)}-dx_l^{(1)}dx_k^{(2)}, \qquad /14,2/$$

სადაც $dx_k^{(1)}$ და $dx_k^{(2)}$ ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ვექტორია, ამის შემდეგ ფართის ვექტორული ელემენტი განისაზღვრება როგორც შემდეგი დუალური ვექტორი:

$$df_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}df_{kl}=\varepsilon_{ikl}dx_k^{(1)}dx_l^{(2)}. \qquad /14,3/$$

ცხადია, რომ df_i პერპენდიკულარულია როგორც $dx_k^{(1)}$, ისე $dx_k^{(2)}$ ელემენტის. მართლაც, მაგალითად, $dx_k^{(1)}$-სათვის გვექნება

$$df_i dx_i^{(1)}=\varepsilon_{ikl}dx_i^{(1)}dx_k^{(1)}dx_l^{(2)}=0$$

როგორც ანტისიმეტრიული ε_{ikl} და სიმეტრიული $dx_i^{(1)}dx_k^{(1)}$ ტენზორების სკალარული ნამრავლი. ასევე ცხადია, რომ $df_i dx_i^{(2)}=0$.

ახლა განვიხილოთ ინტეგრალი ჩაკეტილ ზედაპირზე:

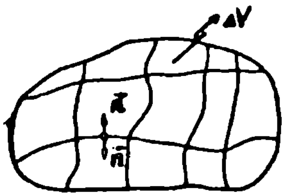
$$\oint(\vec{A},\vec{df})=\oint_f A_n df\equiv J. \qquad /14,4/$$

ვექტორული ანალიზის ძირითადი თეორემა – გაუს-ოსტროგრადსკის თეორემა გვეუბნება, რომ ეს ინტეგრალი შეგვიძლია გარდავქმნათ f ფართით შემოსაზღვრულ V მოცულობაზე გავრცელებულ ინტეგრალში. აღსანიშნავია, რომ /14,4/ ინტეგრალი წარმოადგენს $\vec{A}$ ვექტორის ნაკადს f ფართში.

გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის დამტკიცების მიზნით V მოცულობა დავყოთ ელემენტარულ ΔV მოცულობებად და თითოეული მათგანისათვის გამოვიყენოთ /12,87/ ფორმულა. გვექნება

$$\Delta J=div\vec{A}\cdot\Delta V, \qquad /14,5/$$

სადაც ΔJ არის ელემენტარული ნაკადი ΔV მოცულობის შემომსაზღვრელ ფარში. მიახლოებით /14,5/ გამოსახულების აზრია ყველა ელემენტარული მოცულობის მიხედვით. ყოველი ორი მეზობელი ელემენტარული მოცულობის სასაზღვრო ზედაპირის ერთმანეთის საწინააღმდეგო მიმართული გარე ნორმალი ექნება /ნახ.32/; ამის გამო, შესაბამის ნაკადებს ექნებათ საწინააღმდეგო ნიშნები და ისინი ერთმანეთს გააბათილებენ. მაშასადამე /14,5/-ის მარჯვენა მხარეში ჯამში დარჩება ნაკადი, მხოლოდ V მოცულობის შემომსაზღვრელ გარე ზედაპირზე. მეორეს მხრივ /14,5/-ის მარცხენა მხარის ჯამი, როცა $\Delta V \to 0$, მიგვცემს ინტეგრალს გავრცელებულს მთელ V მოცულობაზე. ასე რომ, საბოლოოდ გვექნება



ნახ. 32

$$\oint_f (\vec{A}, d\vec{f}) = \int_V \operatorname{div} \vec{A} \, dV, \qquad /14,6/$$

რომელსაც გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა ეწოდება. ეს ფორმულა ტენზორულ აღნიშვნებში მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\oint_f df_i A_i = \int_V dV \frac{\partial A_i}{\partial x_i}. \qquad /14,7/$$

ამ ფორმულის საშუალებით შეგვიძლია დავადგინოთ ზედაპირული ინტეგრალის მოცულობითში გარდაქმნის ფორმალური წესი. სახელდობრ, ამისათვის საჭიროა მიახლოებით შემდეგი შეცვლა:

$$df_i \longrightarrow dV \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad /14,8/$$

ან ვექტორულად

$$d\vec{f} \longrightarrow dV \, \nabla. \qquad /14,9/$$

შემდეგში განზოგადების მიზნით ხელსაყრელია ამ გარდაქმნის მივცეთ სხვა სახე. გავამრავლოთ /14,3/ ε_{imn} ტენზორზე და გავითვალისწინოთ $\varepsilon_{imn}\varepsilon_{ikl}$ ნამრავლის გამოსახვა დელტა სიმბოლოებით; გვექნება

$$\frac{1}{2}\left(\delta_{mk}\delta_{nl}-\delta_{ml}\delta_{nk}\right)df_{kl}=dV\,\varepsilon_{imn}\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad /14,10/$$

საიდანაც ფორმალურის ჩატარების შემდეგ დაგვრჩება

$$df_{kl}\rightarrow dV\,\varepsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial x_i}. \qquad /14,11/$$

გარდაქმნის /14,8/ ფორმალური მეთოდის გამოყენებით გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა შეგვიძლია გამოვიყენოთ ნებისმიერი რანგის ტენზორული ველისათვის. მაგალითად, სკალარისათვის გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა ასე დაიწერება:[1]

$$\oint_f \Phi\, d\vec{f}=\int_V dV\,\nabla\Phi, \qquad /14,12/$$

ან, სხვანაირად,

$$\oint \Phi\, d\vec{f}=\int_V \mathrm{grad}\,\Phi\, dV. \qquad /14,13/$$

მეორე რანგის T_{ik} ტენზორული ველისათვის გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულას ექნება სახე

$$\oint T_{ik}\,df_k=\int\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}dV, \qquad /14,14/$$

რომელსაც დიდი გამოყენება აქვს ელექტროდინამიკაში და დრეკადობის თეორიაში.

---

1 /14,12/ შეგვიძლია გამოვიყენოთ გრადიენტის ინვარიანტული განმარტებისათვის; მართლაც, საშუალო მნიშვნელობის ფორმულის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ: $\mathrm{grad}\,\Phi=\lim_{dV\to 0}\frac{1}{dV}\oint_f \Phi\, d\vec{f}$.

ზემოთ დადგენილი ფორმალური მეთოდის გამოყენებით ნებისმიერი ზედაპირული ინტეგრალი ასევე მარტივად გარდაიქმნება მოცულობითში. ასე მაგალითად, ადგილი ექნება შემდეგ ფორმულას:

$$\oint_f [d\vec{f}, \vec{A}] = \int_V dV [\nabla, \vec{A}], \qquad /14,15/$$

ან სხვანაირად

$$\oint_f [d\vec{f}, \vec{A}] = \int_V \operatorname{rot} \vec{A} \, dV. \qquad /14,16/$$

როცა ვექტორული ველი ისეთია, რომ $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, მაშ. ს ველს, რომელსაც აქვს მიყვანილი, სოლენოიდური ჰქვია და გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის ძალით გვექნება

$$\oint_f A_n df = 0. \qquad /14,17/$$

ე.ი. $\vec{A}$ ვექტორის ნაკადი V - მოცულობის შემომსაზღვრელ f ზედაპირში ნულის ტოლია. ვექტორული ანალიზის ერთ-ერთი ფორმულის თანახმად $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0$, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ სოლენოიდური ველისათვის $\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B}$. ამ ტიპის ველია, მაგალითად, მაგნიტური ველი. /14,17/ ფორმულის თანახმად, მაგნიტური ველის ნაკადი ჩაკეტილ ზედაპირში ნულის ტოლია, ე.ი. ნულის ტოლია ამ ველის ძალხაზების ნაკადი, რაც იმას ნიშნავს, რომ რამდენი ძალხაზიც შედის არეში ზედაპირში, იმდენივე გამოდის მისგან, ეს კი იმის მაჩვენებელია, რომ სოლენოიდური ველისათვის მაგნიტური ძალხაზები ჩაკეტილია. აღვნიშნოთ, რომ სოლენოიდურ ველს ხშირად გრიგალურ ველსაც უწოდებენ.

გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის გამოყენებით /12,80'/ უწყვეტობის განტოლებას შეიძლება მივცეთ სხვა სახე. კერძოდ, გვექნება $\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v}\right) dV = 0$, რადგან dV ნებისმიერი მოცულობაა, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0. \qquad /14,18/$$

2. სტოქსის თეორემა. სტოქსის თეორემა ჩაკეტილ წირზე გავრცელებულ ინტეგრალს აკავშირებს ამ წირზე მოჭიმულ ფართზე გავრცელებულ ინტეგრალთან.

ავიღოთ წირის ვექტორული $d\vec{l}$ ელემენტი, რომლის სიდიდე dl წირის ელემენტის ტოლია, ხოლო მიმართულებით წირის მხების მიმართულებას ემთხვევა, ე.ი.

$$d\vec{l}=\vec{\tau}\,dl, \qquad /14,18'/$$

სადაც $\vec{\tau}$ არის მხების ორტი. განვიხილოთ შემდეგი ინტეგრალი ჩაკეტილ l -კონტურზე:

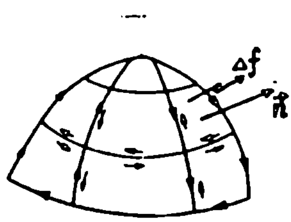
$$\Gamma=\oint_l(\vec{A},d\vec{l})=\oint_l A_l\,dl, \qquad /14,19/$$

სადაც $A_l=(\vec{A},\vec{\tau})$ წარმოადგენს $\vec{A}$ ვექტორის პროექციას მხების მიმართულებაზე. /14,19/ ინტეგრალს, როგორც ადრე მივუთითეთ, $\vec{A}$ ვექტორის ცირკულაცია ეწოდება ჩაკეტილ l კონტურზე. ამასთან, კონტურის შემოვლის დადებითი მიმართულება განსაზღვრული გვაქვს § 12-ში. თუ კონტურს შემოვუვლით საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ ინტეგრალს წინ გაუჩნდება უარყოფითი ნიშანი.

სტოქსის თეორემის გამოყვანის მიზნით გამოვიყენოთ /12,90/ თეორემა. l -კონტურზე მოჭიმული f ფართი დავყოთ ელემენტარულ Δf ელემენტებად /ნახ.33/, მაშინ ამ ელემენტარული ფართისათვის /12,90/ თეორემის ძალით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Delta\Gamma=\mathrm{rot}_n\vec{A}\cdot\Delta f, \qquad /14,20/$$

სადაც $\Delta\Gamma$ არის ელემენტარული ცირკულაცია Δf ფართის შემომსაზღვრელ ჩაკეტილ კონტურზე,



ნახ. 33

ხოლო $\mathrm{rot}_n\vec{A}$ წარმოადგენს $\vec{A}$ ვექტორის მდგენელს Δf ფართის $\vec{n}$

ტარე წირმალზე. ახლა მივაბრუნოთ /14,20/ ფორმის აგებაზე ყველა ელემენტარული ფართის მიხედვით. მარცხენა მხარის აგებისას, ცხადია, ცირკულაციები Δf -ის გამყოფ კონტურებზე ერთმანეთს მოსპობენ, რადგანადაც ყოველი ორი მეზობელი ელემენტარული ფართის გამყოფი წირის შემოვლა ხდება სხვადასხვა მიმართულებით. მაშასადამე, შედეგად დაგვრჩება მხოლოდ ცირკულაცია ℓ კონტურზე. რაც შეეხება ჯამს მარჯვენა მხარეში, ზღვარში, როცა $\Delta f \to 0$, მივიღებთ ინტეგრალს მთელს f ზედაპირზე. ასე რომ, საბოლოოდ გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$$\oint_{\ell} (\vec{A}, d\vec{\ell}) = \int_{f} (\mathrm{rot}\,\vec{A}, d\vec{f}), \qquad /14,21/$$

რომელიც გამოყვანილი იყო სტოქსის მიერ. კონტურული ინტეგრალიდან ზედაპირულ ინტეგრალზე გადასვლის ფორმალური მეთოდის მისაძებნად /14,21/ ფორმულის მარჯვენა მხარის ინტეგრალქვეშა გამოსახულება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$(\mathrm{rot}\,\vec{A}, d\vec{f}) = ([\nabla, \vec{A}], d\vec{f}) = ([d\vec{f}, \nabla], \vec{A}), \qquad /14,22/$$

ამიტომ სტოქსის ფორმულა ასეც შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\oint_{\ell} (d\ell, \vec{A}) = \int_{f} ([d\vec{f}, \nabla], \vec{A}), \qquad /14,23/$$

საიდანაც აშკარად ჩანს ის წესი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს წირითი ინტეგრალი გადავწეროთ ზედაპირულში. კერძოდ, გვექნება

$$d\vec{\ell} \to [d\vec{f}, \nabla], \qquad /14,24/$$

ან ტენზორულ აღნიშვნებში

$$d\ell_i \to \varepsilon_{ik\ell}\, df_k \frac{\partial}{\partial x_\ell} \quad (k,\ell=1,2,3) \qquad /14,25/$$

ამ წესის შენცვლის განზოგადების მიზნით მრავალგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში ხელსაყრელია შემოვიღოთ მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი

$$df_{kl}=df_k\frac{\partial}{\partial x_l}-df_l\frac{\partial}{\partial x_k}\cdot \qquad /14,26/$$

მაშინ dl_i იქნება ამ ტენზორის დუალური ვექტორი, ე.ი.

$$dl_i \to \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\,df_{kl}, \qquad /14,27/$$

რომელიც, ცხადია /14,25/ ფორმულაზე დაიყვანება.

ამ მეთოდით ადვილად ვიპოვით სტოქსის ფორმულის სკალარისათვის. მართლაც, გვექნება

$$\oint_l \Phi\, d\vec{l}=\int_f[d\vec{f},\mathrm{grad}\,\Phi], \qquad /14,28/$$

ხოლო მეორე რანგის ტენზორისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\oint T_{ik}\,dl_k=\int_f \varepsilon_{kmn}\,df_m\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_n} \qquad /14,29/$$

და ა.შ.

ვთქვათ, ვექტორული $\vec{A}$ ველი პოტენციალურია. ეს ნიშნავს, რომ $\mathrm{rot}\,\vec{A}=0$, ხოლო სტოქსის ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\oint(\vec{A},d\vec{l})=0. \qquad /14,30/$$

მაშასადამე, პოტენციალური ველის შემთხვევაში ვექტორული ველის ცირკულაცია ნებისმიერ ჩაკეტილ კონტურზე ნულის ტოლია; ამ შემთხვევაში, შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ ჩაკეტილი ვექტორული წირები არ არსებობენ. მართლაც, დავუშვათ, რომ ვექტორული წირები ჩაკეტილია და $\vec{A}$ და $d\vec{l}$-სათვის ავიღოთ ერთი და იგივე მიმართულება, მაშინ $(\vec{A},d\vec{l})>0$ და დადებითი სიდიდიდან აღებული კონტურული ინტეგრალი ნულს არ უდრის.

ანალოგიურად, როცა $(\vec{A}, d\vec{l})<0$, უარყოფითი სიდიდიდან აღებული ინტეგრალი არ იქნება ნულის ტოლი.

3. გრინის ფორმულები. დაბოლოს გამოვიყვანოთ გრინის ინტეგრალური ფორმულები. ისინი შეგვიძლია გამოვიყვანოთ ოსტროგრადსკის ფორმულიდან

$$\oint_f A_n df = \int_V div\vec{A}\, dV. \qquad /14,31/$$

ვთქვათ, ვექტორული ველი $\vec{A}=\psi\nabla\Phi$, სადაც ψ და Φ სკალარული ფუნქციებია, მაშინ, რადგან A_n არის $\vec{A}$ ვექტორის გეგმილი გარე ნორმალზე, ამიტომ

$$A_n=\psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}. \qquad /14,32/$$

ვექტორული ანალიზის ერთ-ერთი ფორმულის თანახმად

$$div(\psi\nabla\Phi)=(\nabla\psi,\nabla\Phi)+\psi\Delta\Phi. \qquad /14,33/$$

/14,32/ და /14,33/ გამოსახულებების /14,31/-ში შეტანით მივიღებთ გრინის პირველ ფორმულას

$$\oint_f \psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}df=\int_V\left[\psi\Delta\Phi+(\nabla\psi,\nabla\Phi)\right]dV. \qquad /14,34/$$

ამ ფორმულაში მოვახდინოთ $\Phi \rightleftarrows \psi$ შეცვლა; გვექნება

$$\int_f \Phi\frac{\partial\psi}{\partial n}df=\int_V\left[\Phi\Delta\psi+(\nabla\Phi,\nabla\psi)\right]dV. \qquad /14,35/$$

ორი უკანასკნელი ფორმულის წევრ-წევრად გამოკლებით მივიღებთ

$$\oint\left(\psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)df=\int_V(\psi\Delta\Phi-\Phi\Delta\psi)dV, \qquad /14,36/$$

რომლისაც გრინის მეორე ფორმულა ეწოდება. ეს ფორმულა სამარ-თლიანია მაშინაც, როცა V- მოცულობა შემოსაზღვრულია რამდე-ნიმე ზედაპირით. ამ შემთხვევაში ფარდითი ინტეგრალი უნდა გავა-ვრცელოთ V-მოცულობის შემომსაზღვრელ ყველა ზედაპირზე.

როცა Φ და Ψ ფუნქციები ლაპლასის განტოლების ამონა-ხსნებია, ე.ი. როცა

$$\Delta\Phi=0,\ \Delta\Psi=0, \qquad /14,37/$$

მაშინ გრინის მეორე ფორმულა მიიღებს სახეს

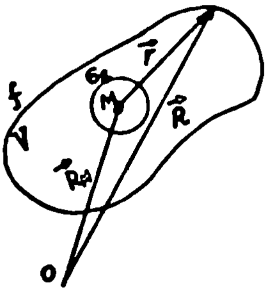
$$\oint_f \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}df=\oint_f \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}df. \qquad /14,38/$$

ამასთან, Ψ და Φ, ასევე $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ და $\frac{\partial\Psi}{\partial n}$ მნიშვნელობე-ბი აიღება მოცულობის შემომსაზღვრელ ფარზე. რამდენადაც გრი-ნის ფორმულა სამართლიანია მაშინაც, როცა V მოცულობა რამდენი-მე ჩაკეტილი ფარით არის შემოსაზღვრული, ამდენად /14,38/ ფორმულას ექნება იგივე თვისება. ეს გარემოება საშუალებას გვაძლევს ლაპლასის განტოლების ნებისმიერი ამოხსნა გამოვხა-ტოთ Ψ და $\frac{\partial\Psi}{\partial n}$ მნიშვნელობებით ზედაპირზე. ამისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $\Psi=\frac{1}{r}$ არის $\Delta\Psi=0$ განტოლების ამონახსნი, სა-დაც $r=|\vec{R}_M-\vec{R}|$ წარმოადგენს V-მოცულობის რომელიმე დაფი-ქსირებული M წერტილის რადიუს-ვექტორს, ხოლო $\vec{R}$ არის f ზედაპირის ნებისმიერი წერტილის რადიუს-ვექტორი /ნახ.34/; როცა $\vec{R}_M=\vec{R}$, მაშინ $r=0$ და $\Psi=\infty$, ამიტომ M წერტილში /14,38/ ფორმულას უშუალოდ ვერ გამოვიყენებთ. ამისათვის მოვი-ქცეთ შემდეგნაირად: M წერტილის ირგვლივ შემოვწეროთ უსასრულოდ მცირე ε რადიუსის სფერო და /14,38/ გამოვიყენოთ იმ მოცულო-ბისათვის, რომელიც შემოსაზღვრულია ორი ჩაკეტილი ზედაპირით ერთი f და მეორე σ_ε. მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი

ფორმულა:

$$\oint_f \Phi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) df + \oint_{\sigma_\varepsilon} \Phi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = \oint_f \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial n} df + \oint_{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma, \qquad /14,39/$$

სადაც უნდა ვიგულისხმოთ, რომ სფეროს რადიუსი $\varepsilon \to 0$.



ნახ.34

განვიხილოთ მარცხენა მხარეში მოთავსებული მეორე წევრი. რადგან

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}, \qquad /14,40/$$

ამიტომ აღნიშნული ინტეგრალის შეფასება მოგვცემს

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{\sigma_\varepsilon} \Phi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = -\Phi(R_M+\varepsilon)\left(\frac{1}{r^2}\right)_{r=\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 = \qquad /14,41/$$
$$= -4\pi \Phi_M ,$$

სადაც $\Phi_M = \Phi(R_M)$ არის Φ ფუნქციის მნიშვნელობა M წერტილში. $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ უწყვეტი სიდიდეა, ამიტომ /14,39/-ის მარჯვენა მხარეში მეორე უსასრულოდ მცირე რადიუსის სფეროზე გავრცელებული ინტეგრალისათვის გვექნება

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_\varepsilon \oint \frac{d\sigma}{r} = 4\pi\varepsilon \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_\varepsilon = 0. \qquad /14,42/$$

მაშასადამე, საბოლოოდ მივიღებთ მნიშვნელოვან ფორმულას

$$\Phi_M = \frac{1}{4\pi} \oint_f \left\{ \Phi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\} df, \qquad /14,43/$$

რომელსაც გრინის მესამე ფორმულას უწოდებენ. ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ ლაპლასის განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი ამ ამონახსნისა და მისი ნორმალური წარმოებულის მნიშვნელობებით მოცულობის შემომსაზღვრელ ზედაპირზე. ამიტომ /14,43/-ს ხშირად ლაპლასის განტოლების ამონახსნის ინტეგრა-

ლურ წარმოდგენასაც უწოდებენ.

როცა M წერტილი აღებული ზედაპირის გარეთ მდებარეობს, მაშინ $\psi=\frac{1}{r}$ ფუნქცია V-მოცულობის ყველა წერტილში უწყვეტი და ჰარმონიული ფუნქციაა, ამიტომ /14,43/ ფორმულაში საჭიროა ავი-ღოთ $\Phi_M=0$

§ 15. ტენზორები ოთხგანზომილებიან ფსევდოევკლიდურ სივრცეში

1. ოთხგანზომილებიანი ფსევდოევკლიდური სივრცე. დიდი მნიშვნელობის გამო ცალკე გამოვყოფთ ტენზორულ აღრიცხვას ოთხგანზომილებიან ფსევდოევკლიდურ სივრცეში. ტენზორულ აღრიცხვას ოთხგანზომილებიან სივრცეში განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს რელატივისტური მექანიკისათვის. ოთხგანზომილებიანი სივრცის შემოღება განაპირობა იმან, რომ ფარდობითობის სპეციალურ თეორიაში დრო და სივრცე ეკვივალენტურად მონაწილეობს, ამიტომაც განიხილება სივრცე, რომელშიც წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება, სამი სივრცული და ერთი დროითი კოორდინატით. ასე, რომ, ოთხსივრცეში, დეკარტის მართკუთხა სისტემაში წერტილის რადიუსვექტორი განისაზღვრება x_1, x_2, x_3, x_4 კოორდინატით, რომელთაგან პირველი სამი ჩვეულებრივი სივრცული კოორდინატია, x_4 კი დაკავშირებულია დროსთან; კერძოდ, $x_4=ict$ წარმოადგენს წარმოსახვით სიდიდეს, სადაც $c=3\cdot10^{10}\,\frac{სმ}{წმ}$ სინათლის სიჩქარის რიცხვითი მნიშვნელობაა სიცარიელეში. ასეთ სივრცეს უწოდებენ მინკოვსკის ან მსოფლიო სივრცეს. მსოფლიო სივრცის წერტილს მსოფლიო წერტილს უწოდებენ. მსოფლიო წერტილის რადიუსვექტორის კვადრატი განისაზღვრება გამოსახულებით [1]

$$x_j^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv -S^2. \qquad /15,1/$$

შემდეგში, როცა კი საქმე გვექნება მინკოვსკის სივრცესთან, გამეორებული ლათინური ინდექსით /მუნჯი ინდექსი/ ვიგულისხმებთ აჯამვას ერთიდან ოთხამდე, ბერძნულით კი ერთიდან სამამდე. ასე რომ, /15,1/ ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$S^2 = -x_j^2 = -x_4^2 - x_\mu^2 = c^2t^2 - \vec{r}^{\,2}. \qquad /15,2/$$

ფიზიკურ სივრცეში, ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში,

---

1 ცხადია, x_j^2 ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ ასეც: $x_j^2 = c^2t^2 - \vec{r}^{\,2}$.

ყველა მოვლენა აიწერება დროში და სივრცეში, რის გამოც ჩვენი შემოღებულ ოთხგანზომილებიან სივრცეში მოვლენა გამოისახება მსოფლიო წერტილით. ამიტომ S შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მანძილი ორ ფიზიკურ მოვლენას შორის, რომელთაგან ერთი ხდება სათავეში, მეორე კი (x_1,x_2,x_3,x_4) წერტილში. ამის გამო S-ს ხშირად ინტერვალსაც უწოდებენ. $S^2=0$ განსაზღვრავს ე.წ. სინათლის კონუსის განტოლებას

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=c^2t^2. \qquad /15,2'/$$

იგი გამოსახავს სინათლის სფერული ტალღის მოძრაობას, რომელიც სხივდება სისტემის სათავიდან $t=0$ მომენტში.

შევისწავლოთ მინკოვსკის სივრცის მეტრიკული თვისებები. თუ ვისარგებლებთ მინკოვსკის კოორდინატებით $x_1,x_2,x_3,x_4=ict$ მაშინ ამ სივრცის მეტრიკა, ცხადია, განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$ds^2=g_{ik}dx_i dx_k, \qquad /15,3/$$

სადაც მეტრიკული ტენზორი $\overset{\circ}{g}_{ik}$ განიმარტება შემდეგნაირად:

$$g_{ik}=-\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}. \qquad /15,4/$$

ხშირად, ნაცვლად მინკოვსკის წარმოსახვითი კოორდინატებისა, შემოაქვთ ნამდვილი კოორდინატები $x_1,x_2,x_3,x_4=ct$, მაშინ /15,3/ გამოსახულებაში მეტრიკულ ტენზორს ექნება სახე

$$g_{ik}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}. \qquad /15,5/$$

როგორც ვხედავთ, ამ სივრცეს ექნება ევკლიდის სივრცის თვისებები, ოღონდ იმ განსხვავებით, რომ ds^2 დადებითად აღარ არის

განსაზღვრული. ამიტომ მინკოვსკის სივრცე იქნება ფსევდოევკლიდური. ამ პარაგრაფში ჩვენ ყველგან ვისარგებლებთ მინკოვსკის წარმოსახვითი კოორდინატებით, როცა $x_4 = ict$

აინშტაინის რელატივისტური მექანიკა ორ პოსტულატს ეყრდნობა: ერთის მიხედვით სინათლის სიჩქარე ყველა ინერციულ სისტემაში ერთნაირია. ამასთან, სიცარიელეში სინათლის სიჩქარეზე მეტი სიჩქარით მოძრაობა დაუშვებელია. მეორე პოსტულატის მიხედვით კი მექანიკის კანონები ერთნაირად ყალიბდება ყველა ინერციულ სისტემაში ან, სხვანაირად, მოძრაობის განტოლება ინვარიანტული რჩება ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს. თუ გვაქვს ორი ინერციული სისტემა- ერთი პირობითად უძრავი /უშტრიხო/ და მეორე /შტრიხიანი/, რომელიც პირველის მიმართ მოძრაობს x_1 ღერძის გასწვრივ მუდმივი $\vec{V}$ სიჩქარით, მაშინ აინშტაინმა აჩვენა, რომ სივრცე-დროითი წერტილის კოორდინატებს შორის ამ ორ სისტემაში გვაქვს შემდეგი კავშირი:

$$x_1' = \frac{x_1 + i\beta x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = \frac{x_4 - i\beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad /15,6/$$

სადაც $\beta = \frac{V}{c}$ ამ ფორმულებს ლორენცის გარდაქმნის ფორმულებს უწოდებენ. მცირე სიჩქარეებისათვის, როცა $V \ll C$, ლორენცის ფორმულები გადადის გალილეის გარდაქმნის კანონში: $x_1' = x_1 - Vt$, $x_2' = x_2, x_3' = x_3, t' = t$

ცხადია, რომ ლორენცის ფორმულების შესაბამის გარდაქმნის მატრიცას ექნება სახე

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad /15,7/$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ლორენცის გარდაქმნები ინვარიან-

ტელ ტოვებს S^2 ინვარიანტს, ე.ი. ორივე სისტემაში $S^2=S'^2$, ან კოორდინატებში

$$x_i^2=x_i'^2. \qquad (i=1,2,3,4) \qquad /15,8/$$

აღსანიშნავია, რომ ლორენცის გარდაქმნები წარმოადგენს კერძო შემთხვევას შემდეგი წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნისა:[1]

$$x_i'=a_{ik}x_k, \qquad (i=1,2,3,4) \qquad /15,9/$$

სადაც a_{ik} გარდაქმნის მატრიცის ელემენტები აკმაყოფილებენ ორთონორმირების პირობებს

$$a_{im}a_{km}=a_{mi}a_{mk}=\delta_{ik}, \qquad /15,10/$$

აქ i და k ღებულობენ 1,2,3, 4 მნიშვნელობებს, ხოლო δ_{ik} კრონეკერის სიმბოლოა ოთხსივრცეში. /15,9/-ის შებრუნებულ გარდაქმნას ექნება გამოსახულება

$$x_k=a_{ik}x_i'. \qquad /15,11/$$

ცხადია, რომ /15,9/ გარდაქმნა ინვარიანტულს ტოვებს /15,8/ ინვარიანტს; ამ გარდაქმნის შესაბამისი დეტერმინანტი, როგორც ვიცით, მობრუნებისათვის +1-ის ტოლია, კენტი რაოდენობის ღერძების ინვერსიისათვის კი −1-ის. აღსანიშნავია, რომ ლორენცის გარდაქმნები ეკვივალენტურია ოთხგანზომილებიან სივრცე-ში x_1Ox_4 სიბრტყეში სათავის ირგვლივ მობრუნებისა წარმოსა-

---

1 მართლაც, თუ /15,9/-ში a_{ik} კოეფიციენტების მნიშვნელობას შევიტანთ /15,7/ მატრიციდან, მივიღებთ ლორენცის /15,6/ გარდაქმნებს.

ხვით კუთხეზე.[1]

ოთხსივრცეში ინვერსიის ოპერაცია უნდა გავიგოთ, როგორც კენტი რაოდენობის კოორდინატთა ღერძების არეკვლა. ჩვენ გამო-ვიყენებთ ინვერსიის ოპერაციას, როცა არეკვლა ხდება სივრცული ღერძებისა, ხოლო დროითი ღერძი x_4 უცვლელი რჩება. ე.ი. ოთხსი-ვრცეში ინვერსიის ოპერაცია იქნება შემდეგი:

$$x_\alpha' = -x_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$
$$x_4' = x_4, \qquad /15,12/$$

ე.ი. ინვერსიას /15,9/ გარდაქმნაში შეესაბამება $a_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$, ხოლო $a_{i4} = \delta_{i4}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

ახლა საინტერესოა გავარკვიოთ როგორი გარდაქმნის კანონე-ბით ხასიათდებიან ტენზორები ოთხგანზომილებიან ფსევდოევკლიდურ სივრცეში, კოორდინატების წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნის დროს.

2. <u>ფიზიკური ოთხვექტორები.</u> განვიხილოთ ოთხი სიდიდე: A_1, A_2, A_3, A_4, რომელთაგან A_4 იყოს წმინდა წარმოსახვითი $A_4^2 = -|A_4|^2$. ვამბობთ, რომ ამ ოთხი სიდიდის ერთობლიობა მინკოვსკის სივრცეში ადგენს ოთხგანზომილებიან ვექტორს A_i $(i=1,2,3,4)$ ან, მოკლედ, ოთხვექტორს, თუ ისინი კოორდინატთა სისტემის მობრუნე-ბისას ისევე გარდაიქმნებიან, როგორც კოორდინატები, ე.ი. /15,9/ კანონით

$$A_i' = a_{ik} A_k . \qquad /15,13/$$

ამასთან A_i' ვექტორის კომპონენტებია შტრიხიან /მობრუნებულ/ სისტემაში, ხოლო a_{ik} განისაზღვრება /15,7/-ით. ინტერვალის ანალოგიით ოთხვექტორის სამ პირველ A_α კომპონენტს უწოდებენ სივრცულს, A_4-ს კი დროითს. აღსანიშნავია, რომ ოთხვექტორის

---

1 ამისათვის საკმარისია შემოვიღოთ აღნიშვნები $\gamma=\cos\theta$, $i\beta\gamma=\sin\theta$, მაშინ /15,6/ მიიღებს სახეს

$x_1' = x_1\cos\theta + x_4\sin\theta$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$, $x_4' = -x_1\sin\theta + x_4\cos\theta$,
რომელიც მარტივ გამოხატავს მობრუნებას $x_1 O x_4$ სიბრტყეში θ კუთხეზე.

ჩვეულებრივი ვექტორის თვისებები აქვს, ოღონდ ერთი განსხვავებით, რომ მეოთხე კომპონენტი წმინდა წარმოსახვითია. /15,12/ გარდაქმნების თანახმად, ოთხვექტორი იქნება პოლარული, თუ ინვერსიის დროს შესრულებულია პირობა $A'_\alpha = -A_\alpha$, $A'_4 = A_4$

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ორი A_i და B_i ვექტორების A_iB_i ნამრავლი სკალარია $A'_iB'_i = A_iB_i$. ცხადია, რომ $A_iA_i = A_i^2$ იქნება ვექტორის კვადრატი, რომელიც იმის გამო, რომ A_4 წმინდა წარმოსახვითია, შეიძლება იყოს დადებითი, უარყოფითი და ნული. როცა ოთხვექტორის კვადრატი

$$A_i^2 = A_\alpha^2 - |A_4|^2 < 0, \quad (\alpha = 1,2,3) \qquad /15,14/$$

მაშინ A_i ოთხვექტორს დროისმაგვარი ეწოდება. როცა

$$A_i^2 = A_\alpha^2 - |A_4|^2 > 0, \quad (\alpha = 1,2,3) \qquad /15,15/$$

მაშინ A_i ოთხვექტორს სივრცისმაგვარი ქვია, ხოლო როცა

$$A_i^2 = A_\alpha^2 - |A_4|^2 = 0, \quad (\alpha = 1,2,3) \qquad /15,16/$$

A_i-ს ნულოვან ანუ სინათლისმაგვარ ვექტორს უწოდებენ.

თუ გამოვიყენებთ a_{ik} ელემენტების /15,7/ მნიშვნელობას, /15,13/ გარდაქმნას ექნება სახე

$$A'_1 = \gamma(A_1 + i\beta A_4), \; A'_2 = A_2, \; A'_3 = A_3, \; A'_4 = \gamma(A_4 - i\beta A_1), \qquad /15,17/$$

რომელსაც შეგვიძლია ვუწოდოთ ლორენცის გარდაქმნები A_i ოთხვექტორისათვის.

რელატივისტურ მექანიკაში შემოჰყავთ ფიზიკური ოთხვექტორები, რომელთა კომპონენტებს ფიზიკური სიდიდეები წარმოადგენენ. ასეთებია, მაგალითად, ენერგია-იმპულსის, დენის ვექტორისა და სხვა ოთხვექტორები.

რელატივისტურ მექანიკაში შემოჰყავთ, მაგალითად, ენერგია-იმპულსის ოთხვექტორი $P_i(\vec{p}, \frac{i}{c}E)$, სადაც $\vec{p}$ ნაწილაკის რე-

ლორენცისეული იმპულსი, E კი- ენერგია:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m\vec{v}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma mc^2; \quad \beta = \frac{v}{c}, \qquad /15,18/$$

სადაც m უძრაობის მასაა, ხოლო $\vec{v}$ -ნაწილაკის სიჩქარე. ცხადია, რომ

$$P_i^2 = \vec{p}^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2c^2 < 0. \qquad /15,19/$$

ამგვარად, ენერგია- იმპულსის ოთხვექტორი ყოფილა დროისმაგვარი ოთხვექტორი. შეგვიძლია განვიხილოთ ტალღური ოთხვექტორი $K_i(\vec{k}, \frac{i}{c}\omega)$, სადაც $\vec{k}$ ტალღური ვექტორია, ω კი წრიული სიხშირე. K_i^2 -ისათვის გვექნება

$$K_i^2 = \vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \qquad /15,20/$$

მაშასადამე, ტალღური ოთხვექტორი ნულოვანი ვექტორი ყოფილა.

ასევე შეგვიძლია შემოვიტანოთ $X(\vec{r}, ict)$ ოთხკოორდინატა, ან ოთხრადიუსვექტორი, რომლის კვადრატი დაემთხვევა ინტერვალის გამოსახულებას $X_i^2 = -S^2 = \vec{r}^2 - c^2t^2$. სიდიდე $X_iK_i = (\vec{k}, \vec{r}) - \omega t$, რომელიც წრფივი ტალღის ფაზას გამოსახავს, იქნება ინვარიანტული სიდიდე.

აღვნიშნოთ, რომ ფსევდოოთხვექტორისათვის გვექნება შემდეგი გარდაქმნის კანონი:

$$A_i' = \Delta(a) a_{ik} A_k, \qquad /15,21/$$

სადაც $\Delta(a)$ გარდაქმნის მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტია. კენტი რაოდენობის ღერძების არეკვლისათვის $\Delta(a) = -1$, განვიხილოთ სამივე სივრცული ღერძის ინვერსია, მაშინ $a_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$,

$a_{i4}=a_{4i}=\delta_{i4}$; ეს კი ნიშნავს, რომ ფსევდოოთხვექტორის სამი სივრცული მდგენელი ინვერსიის დროს არ იცვლება $A'_\alpha=A_\alpha$, დროითი კი იცვლის ნიშანს $A'_4=-A_4$

3. ოთხგანზომილებიანი ტენზორები. ახლა განვიხილოთ ოთხგანზომილებიანი სივრცის ტენზორები ან მსოფლიო-ოთხტენზორები. ცხადია, რომ n რანგის ტენზორს ოთხსივრცეში ექნება 4^n კომპონენტი. კერძოდ, მეორე რანგის ტენზორს ექნება $4^2=16$ კომპონენტი, მესამე რანგისას $4^3=64$ და ა.შ. ცხადია, რომ მეორე რანგის ოთხტენზორი კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას ისევე უნდა გარდაიქმნას, როგორც ორი ოთხვექტორის პირდაპირი ნამრავლი A_iB_k. ამგვარად, მეორე რანგის ოთხტენზორი ეწოდება ისეთ Π_{ik} თექვსმეტ სიდიდის ერთობლიობას, რომლებიც კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას გარდაიქმნებიან კანონით

$$\Pi'_{ik}=a_{im}a_{kn}\Pi_{mn}. \qquad (m,n=1,2,3,4) \qquad /15,22/$$

ასევე განიმარტება მაღალი რანგის ტენზორები. მაგალითად, მესამე რანგის ტენზორისათვის გვექნება გარდაქმნის შემდეგი კანონი:

$$t'_{ikl}=a_{im}a_{kn}a_{ls}t_{mns}. \qquad /15,23/$$

მეორე რანგის ოთხტენზორის შპური ტოლი იქნება

$$Sp\,\Pi=\Pi_{ii}=\Pi'_{ii}, \qquad /15,24/$$

ცხადია, რომ იგი ინვარიანტული სიდიდეა. თუ კერძო შემთხვევაში $\Pi_{ik}=A_iB_k$, მაშინ $Sp\,\Pi=A_iB_i$, რომელიც წარმოადგენს ორი ოთხვექტორის სკალარულ ნამრავლს.

ისევე როგორც სამსივრცეში, ოთხსივრცეშიაც ტენზორის დაქვეითებით რანგი ორით მცირდება, ხოლო ტენზორთა პირდაპირი გამრავლებით რანგები იკრიბება.

მეორე რანგის ტენზორს ეწოდება სიმეტრიული, თუ $\Pi_{ik}=\Pi_{ki}$. ცხადია, მას ექნება ათი დამოუკიდებელი კომპონენტი. მეორე

რანგის სიმეტრიული ტენზორის ნაცვლად მიგვიღია $\delta'_{ik}=\delta_{ik}$ ინვარიანტული ერთეულოვანი ტენზორი, რომელსაც აქვს ფილტრაციის თვისება

$$\delta_{ik}A_k=A_i. \qquad /15,25/$$

ეს არის კრონეკერის კარგად ცნობილი სიმბოლო ოთხგანზომილებიან სივრცეში. ცხადია, რომ მისი შპური $\delta_{ii}=4$.

ანტისიმეტრიული ეწოდება მეორე რანგის ოთხტენზორს, თუ $P_{ik}=-P_{ki}$. ამ ტენზორის დიაგონალური ელემენტები ნულის ტოლია, ამიტომ მას დამოუკიდებელი ექნება მხოლოდ ექვსი კომპონენტი. ცხადია, სამგანზომილებიანისაგან განსხვავებით $P_{ik}=-P_{ki}$ ტენზორი აღარ იქნება ოთხვექტორის ეკვივალენტური. სრულიად ანალოგიურად განიხილება უფრო მაღალი რანგის ტენზორების სიმეტრიის საკითხი.

გარდა ნამდვილი /პოლარული/ ტენზორებისა, ოთხსივრცეში გვხვდება ფსევდოოთხტენზორებიც. მაგალითად, მეორე რანგის ტენზორისათვის გვექნება

$$\tau'_{ik}=\Delta(a)a_{im}a_{kn}\tau_{mn}, \qquad /15,26/$$

სადაც $\Delta(a)=-1$ ინვერსიის შემთხვევაში. ამ განსაზღვრიდან ჩანს, რომ ორი ერთნაირი რანგის ფსევდოტენზორის ჯამი იმავე რანგის ფსევდოტენზორია, ორი ფსევდოტენზორის ნამრავლი ნამდვილი ტენზორია, ხოლო ფსევდოტენზორის ნამრავლი ნამდვილ ტენზორზე ფსევდოტენზორი იქნება. ფსევდოტენზორის დაქვეითებით მიიღება ისევ ფსევდოტენზორი ორით ნაკლები რანგის.

/15,26/ ფორმულის თანახმად მეორე რანგის ფსევდოოთხტენზორის კომპონენტები ინვერსიისას ასეთ სახეს მიიღებენ:

$$\tau'_{\alpha\beta}=-\tau_{\alpha\beta},\ \tau'_{\alpha4}=\tau_{\alpha4},\ \tau'_{4\alpha}=\tau_{4\alpha},\ \tau'_{44}=-\tau_{44}, \qquad /15,27/$$

ე.ი. თუ მეორე რანგის τ_{ik} ოთხტენზორი აქსიალურია, მაშინ

კომპონენტები, რომლებიც 4-იან ინდექსს არ შეიცავენ, ან ამ ინდექსს შეიცავენ ორჯერ, არეკვლის დროს ნიშანს იცვლიან, ხოლო კომპონენტები, რომლებიც 4-იანს შეიცავენ ერთხელ ($\tau_{14},\tau_{24},\tau_{34},\tau_{41},\tau_{42},\tau_{43}$)-ნიშანს არ იცვლიან. პოლარული ტენზორის შემთხვევაში კი გვექნება შებრუნებული სურათი. ცხადია, რომ δ_{ik} ტენზორი იქნება პოლარული. მართლაც, $\delta'_{ik}=a_{im}a_{kn}\delta_{mn}=a_{im}a_{km}=\delta_{ik}$, ე.ი. გარდაიქმნება /15,22/ კანონით.

საზოგადოდ, ოთხტენზორის პოლარობის გარკვევის დროს ხელსაყრელია ტენზორი წარმოვიდგინოთ, როგორც შესაბამისი რაოდენობის და პოლარობის ოთხვექტორების ნამრავლი და ამ ნამრავლისათვის გამოვიყენოთ /15,12 / ოპერაცია. ასე მაგალითად, $\tau_{ik}\sim A_iB_k$ ავბით და /15,12 / ინვერსიის გამოყენებით მივიღებთ ზემოთ დადგენილ წესს.

4. ε_{iklm}-ინვარიანტული აქსიალური ტენზორი. ახლა განვიხილოთ სრულად ანტისიმეტრიული ერთეულოვანი აქსიალური ოთხტენზორი. ცხადია, რომ ასეთი ტენზორი იქნება მეოთხე რანგისა. მართლაც, ყველა მაღალი რანგის ოთხტენზორს ექნებოდა ტოლი ინდექსები, ასეთი ანტისიმეტრიული ტენზორი კი ნულის ტოლია. ε_{iklm} მეოთხე რანგის ერთეულოვან ოთხტენზორს აქვს $+1$-ის, ან -1-ის ტოლი მნიშვნელობა, იმის მიხედვით, i,k,l,m ინდექსებიდან 1,2,3,4 ნესიერი მიმდევრობის მისაღებად საჭიროა ლუწი, თუ კენტი გადანაცვლება. ამ ტენზორს 256 კომპონენტიდან ნულისაგან განსხვავებული ექნება მხოლოდ $4!=24$ კომპონენტი, ამიტომ

$$\hat{\varepsilon}_{iklm}=4! \qquad /15,28/$$

ε_{iklm} კოორდინატების წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნისას ისე იქცევა, როგორც მეოთხე რანგის ინვარიანტული ტენზორი $\varepsilon'_{iklm}=\varepsilon_{iklm}$. მართლაც, ფსევდოტენზორის განმარტების თანახმად გვექნება

$$\varepsilon'_{iklm}=\Delta(a)a_{in}a_{kp}a_{ls}a_{mt}\varepsilon_{npst}. \qquad /15,29/$$

გამოვიყენოთ /11,23/ ფორმულა. ამ ფორმულის თანახმად

$$a_{in}a_{kp}a_{ls}a_{mt}\varepsilon_{npst} = \Delta(a)\,\varepsilon_{ikem}, \qquad /15,30/$$

ამიტომ ნულისაგან განსხვავებული კომპონენტებისათვის გვექნება

$$\varepsilon'_{ikem} = \Delta^2(a)\,\varepsilon_{ikem} = \varepsilon_{ikem}, \qquad /15,31/$$

მაშასადამე, ε_{ikem} ტენზორი მართლაც ყოფილა მეოთხე რანგის სრულიად ანტისიმეტრიული აქსიალური ტენზორი, რომელსაც ერთი და იგივე კომპონენტები აქვს ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში. მას ჩვენ ლევი-ჩივიტას ოთხგანზომილებიანი სივრცის ტენზორი შეგვიძლია ვუწოდოთ.

მოვიყვანოთ რამდენიმე ფორმულა ε_{ikem} ტენზორთა ნამრავლისათვის[1]. $\varepsilon_{ikem}\varepsilon_{jkem}$ არის მეორე რანგის სიმეტრიული პოლარული იზოტენზორი. ამიტომ ცხადია, რომ ეს ტენზორი პროპორციული იქნება δ_{ij} ტენზორის

$$\varepsilon_{ikem}\varepsilon_{jkem} = A\delta_{ij}. \qquad /15,32/$$

ამ ტენზორის დაქვეითებით და /15,20/-ის გათვალისწინებით მივიღებთ $A=3!$; ამგვარად,

$$\varepsilon_{ikem}\varepsilon_{jkem} = 3!\,\delta_{ij}. \qquad /15,33/$$

ასევე ადვილად დამტკიცდება, რომ

$$\varepsilon_{ikem}\varepsilon_{pslm} = 2!\,(\delta_{ip}\delta_{ks} - \delta_{is}\delta_{kp}). \qquad /15,34/$$

5. <u>დუალური ტენზორები</u>. აღვნიშნოთ, რომ ε_{ikem} ტენზორის დახმარებით $n \leq 4$ რანგის ანტისიმეტრიული იზოტენზორი შეგვიძლია დავაკავშიროთ $4-n$ რანგის დუალურ ტენზორთან. რადგან დუალური ტენზორები ჩვენ დაგვჭირდება სივრცის ელემენტების განსაზღვრის დროს, ამიტომ მათ დაწვრილებით შევისწავლით.

---

1 იხ. მსგავსი ფორმულები § 11-ში.

<u>ნულოვანი რანგის დუალური ტენზორი.</u> თუ Ω_{iklm} არის მეოთხე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი, მაშინ მისი დუალური ტენზორი, თანახმად /11,48'/ ფორმულისა, იქნება ნულოვანი რანგის

$$\Omega=\frac{1}{4!}\varepsilon_{iklm}\Omega_{iklm}. \qquad /15,35/$$

განვიხილოთ სპეციალური სახის Ω_{iklm} ტენზორი, რომელიც გამოისახება შემდეგი დეტერმინანტით:

$$\Omega_{iklm}=\begin{vmatrix} A_i & A_k & A_l & A_m \\ B_i & B_k & B_l & B_m \\ C_i & C_k & C_l & C_m \\ D_i & D_k & D_l & D_m \end{vmatrix}. \qquad /15,36/$$

ამ ტენზორის ანტისიმეტრიულობა აშკარაა დეტერმინანტის იმ თვისების გამო, რომლის მიხედვითაც სვეტების ადგილების შეცვლა დეტერმინანტის ნიშნის ცვლილებას იწვევს. ცხადია, რომ Ω_{iklm} ტოლი იქნება გამოსახულების

$$\Omega_{iklm}=\Delta(\Omega)\varepsilon_{iklm}, \qquad /15,37/$$

სადაც $\Delta(\Omega)$ არის შემდეგი დეტერმინანტი:

$$\Delta(\Omega)=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix}. \qquad /15,38/$$

ასე, რომ /15,35/ მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\Omega=\frac{1}{4!}\varepsilon_{iklm}\Delta(\Omega)\varepsilon_{iklm}. \qquad /15,39/$$

რადგანაც $\varepsilon^2_{iklm}=4!$, ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ

$$\Omega=\Delta(\Omega). \qquad /15,40/$$

მაშასადამე, Ω ყოფილა იმ პარალელეპიპედის /ოთხგანზომილებიანი/ მოცულობა, რომელიც აგებულია A_i, B_i, C_i, D_i ვექტორებზე.

/15,35 /-ის თანახმად ცხადია, რომ

$$\Omega^2 = \frac{1}{4!}\Omega_{iklm}\Omega_{iklm} = \frac{1}{4!}\Omega_{iklm}^2 . \qquad /15,41/$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $A_1 \equiv (dx_1,0,0,0)$, $B_2 \equiv (0,dx_2,0,0)$, $C_3 \equiv (0,0,dx_3,0)$ და $D_4 \equiv (0,0,0,dx_4)$, მაშინ ო. ჰიპერკუბის ელემენტარული მოცულობა განსაზღვრული იქნება ფორმულით

$$d\Omega = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 , \qquad /15,42/$$

რომელიც, ცხადია, წარმოადგენს ფსევდოსკალარს.

<u>პირველი რანგის დუალური ტენზორი</u>. ახლა განვიხილოთ მესამე რანგის ანტისიმეტრიული Λ_{ikl} ტენზორი. მისი დუალური ტენზორი იქნება პირველი რანგის

$$l_i = \frac{1}{3!}\varepsilon_{iklm}\Lambda_{klm} . \qquad /15,43/$$

ნამდვილი Λ_{klm} ტენზორისათვის l_i იქნება ფსევდოვექტორი.

განვიხილოთ კერძო სახის მესამე რანგის ყველა ინდექსის მიმართ ანტისიმეტრიული ოთხტენზორი:

$$\Lambda_{ikl} = \begin{vmatrix} A_i & A_k & A_l \\ B_i & B_k & B_l \\ C_i & C_k & C_l \end{vmatrix} , \qquad /15,44/$$

სადაც A_i, B_i, C_i ოთხვექტორებია. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში /15,43/ მიიღებს სახეს

$$l_i = \varepsilon_{iklm} A_k B_l C_m . \qquad /15,45/$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ l_i ვექტორი მართობია სამივე A_i, B_i, C_i ვექტორებისა. მართლაც, გვექნება

$$\begin{aligned} l_i A_i &= \varepsilon_{iklm} A_i A_k B_l C_m = \varepsilon_{kilm} A_k A_i B_l C_m = \\ &= -\varepsilon_{iklm} A_i B_l A_k C_m = -l_i A_i , \end{aligned} \qquad /15,46/$$

ე.ი. მართლაც $A_i l_i = 0$. სრულიად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $B_i l_i = C_i l_i = 0$. მაშასადამე, l_i ოთხვექტორი მართობი ყოფილა A_i, B_i, C_i ოთხვექტორებზე აგებული სამგანზომილებიანი პარალელეპიპედის, რომელიც ოთხგანზომილებიან სივრცეში წარმოადგენს ჰიპერფართეულს. ცხადია, რომ l_i-ს სიგრძე განსაზღვრავს ამ პარალელეპიპედის მოცულობას.

/15,45/ ფორმულა შეგვიძლია გამოვიყენოთ ოთხსივრცის ჰიპერზედაპირის ფართის ელემენტის განსასაზღვრავად. ჰიპერფართეულის უსასრულოდ მცირე ელემენტი dS_i განისაზღვრება მესამე რანგის dS_{ikl} ტენზორით, რომელიც შედგენილია სამი უსასრულოდ მცირე სიგრძის ელემენტის ნამრავლისაგან და რომლის დუალური dS_i ოთხვექტორი განიმარტება /15,43/ ფორმულით

$$dS_i = \frac{1}{3!}\varepsilon_{iklm}\, dS_{klm}. \qquad /15,47/$$

თუ A_1, B_2, C_3 ვექტორების ნაცვლად შესაბამისად ავიღებთ $dx^{(1)}$, $dx^{(2)}$ და $dx^{(3)}$ ელემენტებს, მაშინ /15,45/-დან მივიღებთ

$$dS_i = \varepsilon_{iklm}\, dx_k^{(1)} dx_l^{(2)} dx_m^{(3)}. \qquad /15,48/$$

ამასთან, dx_i ელემენტები ერთმანეთისაგან განსხვავდება, რამდენადაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, dS_i იგივურად ნული გამოვიდოდა. გამოთვლებს ატარებენ /15,48/ ფორმულით, ბოლოს კი ზედა ინდექსს ჩამოშორებენ.

/15,43/ ოთხვექტორი, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, აბსოლუტური მნიშვნელობით ემთხვევა ჰიპერზედაპირის ფართის ელემენტს, ხოლო მიმართულებით ამ ელემენტის პერპენდიკულარულია. აშკარაა, რომ $dx_4 = dx_1 dx_2 dx_3$ წარმოადგენს სამსივრცის მოცულობის ელემენტს, რომელიც არის ჰიპერზედაპირის პროექცია $x_4 = const$ ჰიპერსიბრტყეზე.

მეორე რანგის დუალური ტენზორი. ახლა განვიხილოთ მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი $P_{ik}=-P_{ki}$. მისი დუალური ტენზორიც მეორე რანგისა იქნება, კერძოდ, P_{ik}-ს დუალური P^*_{ik} ტენზორი ასე განიმარტება:

$$P^*_{ik}=\frac{1}{2!}\varepsilon_{ikem}P_{em}. \qquad /15,49/$$

აშკარაა, რომ $P^*_{ik}P_{ik}$ სკალარული ნამრავლი ფსევდოსკალარია. მართლაც,

$$P^*_{ik}P_{ik}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ikem}P_{ik}P_{em} \qquad /15,50/$$

და $P_{ik}P_{em}$ პოლარული და ε_{ikem} ფსევდოტენზორების სკალარული ნამრავლი მართლაც ფსევდოსკალარი იქნება. ადვილი საჩვენებელია, რომ $P^{*2}_{ik}=P^{2}_{ik}$ P^*_{ik} დუალური ტენზორი შეგვიძლია გამოვიყენოთ ორგანზომილებიანი ფართის ელემენტის განსასაზღვრავად.

განვიხილოთ შემდეგი კერძო სახის მეორე რანგის ოთხტენზორი:

$$f_{ik}=A_iB_k-A_kB_i. \qquad /15,51/$$

როგორც სამგანზომილებიან სივრცეში, ისევე ოთხსივრცეშიც f_{ik} გამოსახავს A_i და B_k ოთხვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართის პროექციებს $x_i x_k$ ექვს საკოორდინატო სიბრტყეზე.

შევადგინოთ /15,49/ ტენზორის დუალური ფსევდოტენზორი.

$$f^*_{ik}=\frac{1}{2!}\varepsilon_{ikem}(A_eB_m-A_mB_e)=\varepsilon_{ikem}A_eB_m. \qquad /15,52/$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ f^*_{ik} ორთოგონალურია, როგორც f_{ik} ისე A_i და B_i ვექტორებისა. მართლაც,

$$f^*_{ik}f_{ik}=f^*_{ik}A_k=f^*_{ik}B_i=0. \qquad /15,53/$$

ცხადია, რომ $f^{*2}_{ik}=f^{2}_{ik}$, /15,54/

რომელიც წარმოადგენს აღნიშნული პარალელოგრამის ფართის კვადრატს. კერძო შემთხვევაში, თუ ავიღებთ $A_i = dx_i^{(1)}$ და $B_i = dx_i^{(2)}$, გვექნება

$$df_{ik} = dx_i^{(1)} dx_k^{(2)} - dx_k^{(1)} dx_i^{(2)}. \qquad /15,55/$$

მის დუალურ ტენზორს ექნება გამოსახულება

$$df^*_{ik} = \varepsilon_{iklm} dx_l^{(1)} dx_m^{(2)}. \qquad /15,56/$$

6. მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორის ინვარიანტები. ველის თეორიაში განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს მეორე რანგის ანტისიმეტრიული $F_{ik} = -F_{ki}$ ტენზორის ინვარიანტებს. ვიპოვოთ ეს ინვარიანტები. F_{ik}-ს აქვს ექვსი დამოუკიდებელი კომპონენტი. ამ კომპონენტებისაგან შეგვიძლია შევადგინოთ ორი ინვარიანტი. ერთი იქნება F_{ik} ტენზორის კვადრატი $F_{ik}^2 = Inv$. F_{ik} ტენზორიდან შეგვიძლია შევადგინოთ დუალური ტენზორი $F^*_{ik} = \frac{1}{2}\varepsilon_{iklm} F_{lm}$, მაგრამ ამ ტენზორის კვადრატი, როგორც ზემოთ ვნახეთ, F_{ik}^2-ზე დაიყვანება. კერძოდ, $F^{*2}_{ik} = F^2_{ik}$. ასე რომ, დუალური ტენზორის კვადრატი ახალ ინვარიანტს არ გვაძლევს. მეორე დამოუკიდებელი ინვარიანტი იქნება /15,50/ ტიპის ნამრავლი $\frac{1}{2}\varepsilon_{iklm} F_{ik} F_{lm}$. რადგან ეს სიდიდე იქნება ფსევდოსკალარული. ნამდვილი სკალარის მისაღებად საჭიროა მისი კვადრატის აღება. ამგვარად, F_{ik} ანტისიმეტრიულ ტენზორს ექნება ორი დამოუკიდებელი ინვარიანტი

$$I_1 = F_{ik}^2, \quad I_2 = \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{iklm} F_{ik} F_{lm}\right)^2. \qquad /15,57/$$

ამ ინვარიანტებთან ხშირად გვექნება საქმე ველის თეორიაში.

7. ტენზორული ანალიზი ოთხსივრცეში. ისევე როგორც სამგანზომილებიან სივრცეში, ოთხსივრცეშიაც შეგვიძლია შემოვიღოთ n-ური რანგის ტენზორული ველის ცნება. თუ სივრცის ყოველ წერტილში /ან გარკვეულ სასრულ არეში/ განსაზღვრულია n-ური

რანგის ტენზორი $T_{i_1 i_2 \dots i_n}(x_1,x_2,x_3,x_4)$, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია n-ური რანგის ტენზორული ველი. რადგან $\frac{\partial}{\partial x_j}$ წარმოებულს ვექტორული ხასიათი აქვს, ამიტომ $\frac{\partial}{\partial x_{i_{n+1}}} T_{i_1 i_2 \dots i_n}$ განსაზღვრავს $n+1$ რანგის ტენზორულ ველს.

როცა ოთხტენზორის რანგი $n=0$, მაშინ საქმე გვაქვს $\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)$ სკალარულ ველთან. ჩვენ შეგვიძლია სკალარული ველი დავახასიათოთ ოთხგრადიენტის ვექტორით

$$grad_i \phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \quad (i=1,2,3,4) \qquad /15,58/$$

როცა $n=1$, გვაქვს ოთხვექტორული ველი $A_j(x_1,x_2,x_3,x_4)$, რომლის წარმოებული

$$a_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \qquad /15,59/$$

წარმოადგენს მეორე რანგის ოთხტენზორს; მისი დაქვეითებით მივიღებთ სკალარულ ველს

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4}, \qquad /15,60/$$

რომელსაც ოთხდივერგენციას უწოდებენ. ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ ანტისიმეტრიული ტენზორი

$$A_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}, \qquad /15,61/$$

რომელსაც ანალოგიით როტორი შეგვიძლია ვუწოდოთ.

თუ A_j წარმოადგენს რაიმე სკალარული Φ ფუნქციის გრადიენტს $A_j = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$, მაშინ მისი დივერგენცია მოგვცემს

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\right)\Phi. \qquad /15,62/$$

თუ გავიხსენებთ, რომ $x_4 = ict$, მაშინ

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}=\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\equiv\Box. \qquad /15,63/$$

ამ ოპერატორს იხსენიებიან დალამბერიანს, ან დალამბერის $\Box$ ოპერატორს უწოდებენ /ან შემოკლებით - დალამბერიანი/.

რადგან გვაქვს მეორე რანგის $\tau_{ik}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ტენზორული ველი, მაშინ გაწარმოებით მივიღებთ მესამე რანგის $\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial x_l}$ ტენზორულ ველს; მისი დაყვანებით გვექნება

$$\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial x_k}; \quad (i,k=1,2,3,4) \qquad /15,64/$$

ეს უკანასკნელი განსაზღვრავს ვექტორულ ველს. /15,64/-ს უწოდებენ მეორე რანგის ტენზორული ველის დივერგენციას. თუ მეორე რანგის ტენზორული ველი ანტისიმეტრიულია $F_{ik}=-F_{ki}$, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ მესამე რანგის სრულიად ანტისიმეტრიული-ტენზორული ველი

$$\chi_{ikl}=\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}, \qquad /15,65/$$

რომელიც ნიშანს იცვლის ნებისმიერი ორი ინდექსის გადასმის დროს, ამიტომ $\chi_{ikl}=0$, როცა რომელიმე ორი ინდექსი ტოლია.

რადგან χ_{ikl} მესამე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი ოთხსივრცეში ეკვივალენტურია ოთხვექტორის, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$B_i=\frac{1}{3!}\varepsilon_{iklm}\chi_{klm}, \qquad /15,66/$$

რომელიც /15,65/-ის გათვალისწინებით მიიღებს სახეს

$$B_i=\frac{1}{3!}\varepsilon_{iklm}\left(\frac{\partial F_{lm}}{\partial x_k}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_m}+\frac{\partial F_{mk}}{\partial x_l}\right), \qquad /15,67/$$

საიდანაც ε_{iklm} ტენზორის ანტისიმეტრიულობის ძალით საბოლოოდ გვექნება

$$B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x_k}. \qquad /15,68/$$

8. ინტეგრალური თეორემები. ახლა განვიხილოთ, რა სახეს ღებულობს გაუს-ოსტროგრადსკისა და სტოქსის ფორმულები ოთხგანზომილებიან ფსევდოევკლიდურ სივრცეში. წინასწარ აღვნიშნოთ, რომ ოთხსივრცეში შესაძლებელია შემდეგი ოთხი ტიპის ინტეგრაციის ჩატარება: 1. ინტეგრაცია ოთხგანზომილებიანი სივრცის წირზე. ამ შემთხვევაში ინტეგრაციის ელემენტი იქნება რკალის ელემენტი, ე.ი. dx_i ოთხვექტორი. 2. ინტეგრაცია ორგანზომილებიან ფართზე. ინტეგრაციის ელემენტი იქნება /15,56/ ფორმულით განსაზღვრული df^*_{ik} ელემენტი. 3. ინტეგრაცია სამგანზომილებიან ჰიპერზედაპირზე, ე.ი. სამგანზომილებიან მოცულობაზე; ინტეგრაციის ელემენტი იქნება $dS_i = \varepsilon_{iklm}dx_k^{(1)}dx_l^{(2)}dx_m^{(3)}$, რომელიც განისაზღვრება /15,48/ ფორმულით. ცხადია, რომ $dS_1 = dx_2dx_3dx_4$, $dS_2 = dx_1dx_3dx_4$, $dS_3 = dx_1dx_2dx_4$ დაბოლოს, 4. ინტეგრაცია ოთხგანზომილებიან მოცულობაზე; ინტეგრაციის ელემენტი იქნება $d\Omega = dx_1dx_2dx_3dx_4$ მეტი სიცხადისათვის ცალკე ამოვწეროთ ინტეგრაციის ეს ელემენტები:

dx_i – ინტეგრაცია წირზე,

$df^*_{ik} = \varepsilon_{iklm}dx_l^{(1)}dx_m^{(2)}$ – ინტეგრაცია ორგანზომილებიან ფართზე,

$dS_i = \varepsilon_{iklm}dx_k^{(1)}dx_l^{(2)}dx_m^{(3)}$ ინტეგრაცია სამგანზომილებიან ჰიპერფართზე; /15,69/

$d\Omega = dx_1dx_2dx_3dx_4$ – ინტეგრაცია ოთხგანზომილებიან მოცულობაზე.

გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა შეგვიძლია განვიხილოთ ორ შემთხვევაში. პირველი, როცა ხდება გადასვლა სამგანზომილებიან

ჰიპერფართზე გავრცელებული ინტეგრალიდან ოთხგანზომილებიან მოცულობაზე გავრცელებულ ინტეგრალზე და, მეორე, როცა ორგანზომილებიან ფართითი ინტეგრალიდან გადავდივართ სამგანზომილებიან ჰიპერფართზე გავრცელებულ ინტეგრალზე.

ჯერ განვიხილოთ პირველი შემთხვევა და სამგანზომილებიან ჰიპერფართზე გავრცელებული ინტეგრალი დავაკავშიროთ ოთხგანზომილებიან მოცულობაზე აღებულ ინტეგრალთან. გამოვიყენოთ /14,8 / ფორმულა, რომელიც ოთხგანზომილებიანი სივრცის შემთხვევაში შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad /15,70/$$

სადაც $i=1,2,3,4$, ხოლო dS_i და $d\Omega$ ელემენტები განისაზღვრება /15,78 / ფორმულებით. მაშასადამე, ოთხვექტორისათვის გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულას ექნება სახე

$$\oint_S A_i dS_i = \int_\Omega \frac{\partial A_i}{\partial x_i} d\Omega. \qquad /15,71/$$

ან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $dS_i = \varepsilon_{iklm} dx_k^{(1)} dx_l^{(2)} dx_m^{(3)}$, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_\Omega \frac{\partial A_i}{\partial x_i} d\Omega = \oint_S A_i \varepsilon_{iklm} dx_k^{(1)} dx_l^{(2)} dx_m^{(3)}. \qquad /15,72/$$

მეორე რანგის ოთხტენზორისათვის კი გვექნება ფორმულა

$$\oint_S T_{ik} dS_k = \int_\Omega \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} d\Omega. \qquad /15,73/$$

ახლა განვიხილოთ მეორე შემთხვევა. ინტეგრალი, რომელიც გავრცელებულია ორგანზომილებიან ზედაპირზე, შეიძლება დავუკავშიროთ სამგანზომილებიან ჰიპერფართზე გავრცელებულ ინტეგრალს.

ამისათვის საკმარისია მოვახდინოთ შეცვლა

$$df^*_{ik} \rightarrow \left(ds_i \frac{\partial}{\partial x_k} - ds_k \frac{\partial}{\partial x_i}\right). \qquad /15,74/$$

მარჯვენა მხარე წარმოვადგინეთ სხვაობის სახით, რამდენადაც მარცხნივ გვაქვს df^*_{ik} ანტისიმეტრიული ტენზორი. გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა, მაგალითად, $F_{ik}=-F_{ki}$ ანტისიმეტრიული ტენზორისათვის ასე დაიწერება:

$$\int F_{ik}\, df^*_{ik} = \int \left(ds_i \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} - ds_k \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_i}\right) = 2\int ds_i \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}. \qquad /15,75/$$

ახლა ავიღოთ ოთხგანზომილებიან ჩაკეტილ წირზე გავრცელებული ინტეგრალი და გარდავქმნათ იგი ამ წირზე მოჭიმულ ზედაპირზე გავრცელებულ ინტეგრალში. ეს გარდაქმნა განხორციელდება ფორმულით

$$dx_i \rightarrow df^*_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad /15,76/$$

მაშინ A_i ვექტორისათვის შეგვიძლია დავწეროთ სტოქსის შემდეგი ფორმულა:

$$\oint A_i\, dx_i = \int df^*_{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \qquad /15,77/$$

ინტეგრალურ ფორმულებს ოთხსივრცეში დიდი გამოყენება აქვთ ელექტრომაგნიტური ველის თეორიაში.

9. <u>მაქსველის განტოლებები ტენზორული სახით.</u> როგორც მაგალითი ოთხტენზორების გამოყენებისა, განვიხილოთ მაქსველის გან-

ტოლებები და ჩავწეროთ ისინი ტენზორული სახით. როგორც ცნობილია, ელექტრომაგნიტური ველი აიწერება მაქსველის შემდეგი განტოლებე-ბით:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}=0, \quad \mathrm{div}\,\vec{H}=0; \qquad /15,78/$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad \mathrm{div}\,\vec{E}=4\pi\rho. \qquad /15,79/$$

აქ ფორმულებში $\vec{E}$ ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორია, ხოლო $\vec{H}$ გამოხატავს მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორს. ეს ვექ-ტორები შეგვიძლია დავაკავშიროთ ვექტორულ $\vec{A}$ და სკალარულ φ პოტენციალებთან, ფორმულებით:

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad /15,80/$$
$$\vec{H}=\mathrm{rot}\,\vec{A}.$$

/15,79/-ში $\vec{j}=\rho\vec{v}$, სადაც ρ მუხტის სიმკვრივეა, ხოლო $\vec{v}$ მისი სიჩქარე, გამოხატავს დენის ვექტორს. C სინათლის სიჩქა-რის რიცხვითი მნიშვნელობაა. ცნობილია, რომ $\vec{j}$ და $ic\rho$ ადგენენ დენის ოთხვექტორს $j_i(\vec{j}, ic\rho)$, ისევე როგორც $\vec{A}$ და $i\varphi$ ადგენენ ელექტრომაგნიტური ველის ოთხპოტენციალს $A_i(\vec{A}, i\varphi)$. /15,78/-ს მაქსველის განტოლებების პირველ წყვილს უწოდებენ, /15,79/-ს კი - მეორეს. ამ განტოლებებს ადვილად ჩავწერთ ტენზო-რული სახით, თუ შემოვიღებთ ელექტრომაგნიტური ველის ოთხტენზორს

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}, \quad (i,k=1,2,3,4) \qquad /15,81/$$

სადაც $A_i(\vec{A}, i\varphi)$ ელექტრომაგნიტური ველის ოთხპოტენციალია. ცხადია, რომ F_{ik} მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორია. ადვი-ლად ვიპოვით F_{ik} ტენზორის ცხად სახეს. მაგალითად, F_{12} ტოლი-

ნენტს ექნება გამოსახულება

$$F_{12}=\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}=\mathrm{rot}_z\vec{A}=\mathcal{H}_z\,, \qquad /15,82/$$

ხოლო F_{14}-ისათვის გვექნება

$$F_{14}=\frac{\partial A_4}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_4}=i\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{i}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t}=-i\mathcal{E}_x\,. \qquad /15,83/$$

ანალოგიურად ვპოულობთ სხვა კომპონენტებსაც. ასე, რომ, F_{ik} ტენზორისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{H}_z & -\mathcal{H}_y & -i\mathcal{E}_x \\ -\mathcal{H}_z & 0 & \mathcal{H}_x & -i\mathcal{E}_y \\ \mathcal{H}_y & -\mathcal{H}_x & 0 & -i\mathcal{E}_z \\ i\mathcal{E}_x & i\mathcal{E}_y & i\mathcal{E}_z & 0 \end{pmatrix}. \qquad /15,84/$$

ადვილი საჩვენებელია უშუალო ჩასმით, რომ ელექტრომაგნიტური ველის F_{ik} ტენზორი წარმოადგენს შემდეგი განტოლების ამონახსნს:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}=0. \quad (i,k,l=1,2,3,4) \qquad /15,85/$$

თუ გამოვიყენებთ ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორის /15,84/ გამოსახულებას, დავინახავთ, რომ /15,85/ ეკვივალენტურია /15,78/ მაქსველის განტოლების პირველი წყვილის. /15,68/ ფორმულის გათვალისწინებით /15,85/ ასეც შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\varepsilon_{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x_k}=0. \quad (i,k,l,m=1,2,3,4) \qquad /15,86/$$

სრულიად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ მაქსველის განტოლებათა

მეორე წყვილი F_{ik} ტენზორის საშუალებით შემდეგნაირად გა-
მოიხატება:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}=\frac{4\pi}{c}j_i, \qquad (i,k=1,2,3,4) \qquad /15,87/$$

სადაც $j_i(\vec{j}, ic\rho)$ დენის ოთხვექტორია.

ამგვარად, ტენზორულ აღნიშვნებში მაქსველის განტოლებებს აქვთ სახე:

$$\varepsilon_{ikem}\frac{\partial F_{em}}{\partial x_k}=0, \qquad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}=\frac{4\pi}{c}j_i. \qquad /15,88/$$

მაქსველის განტოლებების ჩასაწერად ცარიელ სივრცეში, ე.ი. როცა მუხტები არა გვაქვს, /15,88/-ში საკმარისია ავიღოთ $j_i=0$.

თუ /15,87/-ს გავაწარმოებთ $\frac{\partial}{\partial x_i}$-ით, მაშინ მარცხენა მხარე $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}F_{ik}=0$ და მივიღებთ $\frac{\partial j_i}{\partial x_i}=0$, რაც გაშლილი სახით მოგვცემს მუხტის მუდმივობის ცნობილ განტოლებას /იხ/12.18./ ფორმულა/

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}=0. \qquad /15,89/$$

ამ განტოლების ფიზიკურ შინაარსს ადვილად გავარკვევთ მოცულობის მიხედვით ინტეგრაციით და გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის გამოყენებით; გვექნება

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV=-\oint_f (\vec{j}, d\vec{f}), \qquad /15,90/$$

ე.ი. V მოცულობაში მოთავსებული მუხტის შემცირება /გადიდება/ ტოლია ამ მოცულობის შემომსაზღვრელ ჩაკეტილ f ზედაპირიდან გამოსული /შესული/ მუხტის რაოდენობის.

ადვილად ვიპოვოთ ელექტრომაგნიტური ველის ინვარიანტებს. /15,57/ ფორმულების თანახმად, /15,84/-ის გათვალისწინებით, გვექნება შემდეგი ორი ინვარიანტი:

$$I_1=\frac{1}{2}F_{ik}^2=(\mathcal{H}^2-\vec{\mathcal{E}}^2), \qquad /15,91/$$

$$I_2=\left(\frac{i}{8}\varepsilon_{iklm}F_{ik}F_{lm}\right)^2=(\vec{\mathcal{H}},\vec{\mathcal{E}})^2. \qquad /15,92/$$

/15,92/ გამოსახულებიდან ჩანს, რომ $(\vec{\mathcal{H}},\vec{\mathcal{E}})$ სკალარული ნამრავლი ინვარიანტული არ არის, რადგანაც $\vec{\mathcal{E}}$ პოლარული ვექტორია, ხოლო $\vec{\mathcal{H}}$ -აქსიალური. ამიტომაც დაგვჭირდა მისი კვადრატში აყვანა. /15,91/ და /15,92 / ფორმულებში $\frac{1}{2}$ და $\frac{i}{8}$ კოეფიციენტები შემოვიღეთ ნორმირების მიზნით.

დაბოლოს, საინტერესოა $F_{ik}=-F_{ki}$ ველის ტენზორისაგან ისეთი სიმეტრიული ტენზორის შედგენა, რომლის კვალი ნულის ტოლი იქნება. ცხადია, ტენზორს, რომელიც ამ პირობას აკმაყოფილებს, ექნება სახე

$$T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_{lk}-\frac{1}{4}\delta_{ik}F_{lm}^2\right). \qquad /15,93/$$

$\frac{1}{4\pi}$ ნამრავლი შერჩეულია ნორმირებისათვის. T_{ik} -ს უწოდებენ ენერგია-იმპულსის ტენზორს. რადგან მისი შპური ნულის ტოლია, ამიტომ მას ექნება მხოლოდ ცხრა დამოუკიდებელი კომპონენტი.

§ 16. რიმანის სივრცე

აქამდე ჩვენ ვსწავლობდით ტენზორულ აღრიცხვას ევკლიდის /ან ფსევდოევკლიდის/ სივრცეში, სადაც არსებობს საშუალება დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შემოღებისა. ამიტომ ჩვენ ვიხილავდით ისეთ ტენზორებს, რომელთა თვისებები განისაზღვრება დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნების მიმართ. ასეთ ტენზორებს შეიძლება ვუწოდოთ წრფივი ორთოგონალური ან დეკარტული ტენზორები. მაგრამ ფიზიკაში გვხვდება შემთხვევები, როცა დეკარტის მართკუთხა სისტემის შემოტანა შეუძლებელია. მაგალითისათვის განვიხილოთ ორგანზომილებიანი სივრცე, რომელიც წარმოადგენს r_0 რადიუსიანი სფეროს ზედაპირს ნულისაგან განსხვავებული სიმრუდით. თანახმად /8,33/ ფორმულისა, ორ უსასრულოდ მცირე დაშორებულ წერტილს შორის მანძილის კვადრატი არ განისაზღვრება პითაგორას თეორემით. რადგან $r_0=const$, ამიტომ იგი ტოლი იქნება გამოსახულების

$$ds^2=r_0^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad /16,1/$$

რომელიც წარმოადგენს წირის ელემენტს სფეროს ზედაპირზე. ე.ი. ორ წერტილს შორის მანძილი ასეთ სივრცეში არ იქნება სწორი ხაზი და, მაშასადამე, დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შემოღებაც შეუძლებელია. ახლა განვიხილოთ n-განზომილებიანი სივრცე, რომელშიაც ორ ერთმანეთისაგან უსასრულოდ მცირე დაშორებულ წერტილს შორის მანძილის კვადრატი განისაზღვრება ფორმულით

$$ds^2=g_{ik}(q^1,q^2,\dots,q^n)\,dq^i dq^k, \qquad /16,2/$$

სადაც q^i $(i=1,2,\cdots n)$ მრუდწირული კოორდინატებია, ხოლო dq^i

მათი დიფერენციალები. აღვნიშნოთ, რომ R_n სივრცეში წერტილის მრუდწირულ კოორდინატებს ყოველთვის q^i აღვნიშნავთ, მაშინ, როცა E_n სივრცეში დეკარტის კოორდინატებისათვის შევინარჩუნებთ x_i აღნიშვნას. ამასთან, გარკვეული მიზეზის გამო, რომელიც შემდეგში გახდება ნათელი, კოორდინატებს ინდექსებს ვუწერთ არა ქვემოთ, არამედ ზემოთ და ამიტომ ისინი ხარისხებში არ უნდა ავურიოთ. როცა ხარისხში აყვანა დაგვჭირდება, მაშინ დავწერთ $(q^i)^n$. $g_{ik}(q^1,q^2...q^n)$ კოორდინატების ფუნქციას მეტრიკული ტენზორი ეწოდება და მას ედება პირობა

$$g_{ik}=g_{ki}. \qquad /16,3/$$

g_{ik} ანტისიმეტრიული ტენზორი რომ იყოს, მაშინ, ცხადია, ds^2 იგივურად ნულის ტოლი იქნებოდა.

როცა /16,2/ კვადრატული ფორმა დადებითად არის განსაზღვრული, მაშინ სივრცეს /16,2/ მეტრიკით უწოდებენ რიმანის სივრცეს და მას R_n-ით აღნიშნავენ. როგორც ვხედავთ, რიმანის სივრცეში ორ წერტილს შორის მანძილი პითაგორის თეორემით კი არ განისაზღვრება, არამედ ამ მანძილს აქვს კვადრატული ფორმის სახე.

აღსანიშნავია, რომ რიმანის სივრცეში შეუძლებელია ისეთი კოორდინატთა სისტემის არჩევა, რომელშიაც g_{ik} მეტრიკული ტენზორი დიაგონალურ სახეზე დაიყვანებოდა მთელ სივრცეში და /16,2/ კვადრატული ფორმა მიიღებდა კანონიკურ სახეს.

შემდეგში ვაჩვენებთ, რომ, მართალია, რიმანის მთელ სივრცეში /16,2/ კვადრატული ფორმის დაყვანა კანონიკურ სახეზე შეუძლებელია, მაგრამ ამის გაკეთება შეიძლება წინასწარ აღებულ ნებისმიერ წერტილში.

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ ელემენტარული მანძილის კვადრატი, როცა წერტილის მდებარეობას ვახასიათებთ არა დეკარტის, არამედ მრუდწირული კოორდინატებით ევკლიდის სივრცეშიც/16,2 / ფორმის გამოსახულებით გამოიხატება. ასე მაგალითად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ E_3 სივრცეში მრუდწირულ კოორდინატებში ds^2 განისაზღვრება /2,8/ ფორმულით, რომელიც ემთხვევა /16,2 / გამოსახულებას, ე.ი. ისეთი შთაბეჭდილება იქმნება, თითქოს რიმანის სივრცე ეს იგივე ევკლიდის სივრცეა, როცა ds^2 განსაზღვრულია მრუდწირულ კოორდინატებში. მაგრამ ეს ასე არ არის. რიმანის სივრცისაგან განსხვავებით, ევკლიდის სივრცეში ყოველთვის მოიძებნება ისეთი სისტემა, რომელშიც /16,2/ კვადრატულ ფორმას მთელ სივრცეში ექნება კანონიკური სახე, ე.ი.

$$ds^2=(dq^1)^2+(dq^2)^2+\dots+(dq^n)^2. \qquad /16,4/$$

/16,4 / შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად.

$$ds^2=\delta_{ik}dq^i dq^k. \qquad /16,5 /$$

მაშასადამე, ევკლიდის სივრცე შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც R_n სივრცის კერძო შემთხვევა, როცა $g_{ik}=\delta_{ik}$.

ამგვარად, შევნიშნოთ, როცა რიმანის სივრცეს განვიხილავთ, ვიგულისხმებთ, რომ /16,2/ კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეზე დაყვანა მთელ სივრცეში შეუძლებელია. ეს კიდევ იმას ნიშნავს, რომ ორ წერტილს შორის მანძილი R_n სივრცეში, საზოგადოდ, სწორ ხაზს აღარ წარმოადგენს.

რადგანაც შემდგომში დაგვჭირდება g_{ik} ტენზორის შებრუნებული ტენზორის განხილვა, იმდენად დამატებით მოვითხოვოთ, რომ g_{ik}-ს დეტერმინანტი $\Delta(g)\neq 0$

ახლა დავსვათ კითხვა - შეიძლება თუ არა რიმანის R_n სივრცის განხილვა, როგორც ევკლიდის E_m ქვესივრცისა, როცა $n\leq m$?

ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად განვიხილოთ E_m სივრცე, რომელშიაც წერტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ $x^1, x^2, \dots x^m$ და დავუშვათ, რომ R_n არის E_m-ის ქვესივრცე, რომელშიაც წერტილის კოორდინატებისათვის გამოვიყენოთ $q^1, q^2, \dots q^n$ აღნიშვნა. ვთქვათ, E_m სივრცისა და R_n ქვესივრცის წერტილის კოორდინატების შორის გვაქვს შემდეგი კავშირი:

$$x^i = x^i(q^1, q^2, \dots q^n). \quad i = 1, 2, \dots m. \qquad /16,6/$$

მაშინ

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^k} dq^k \qquad k = 1, 2, \dots n. \qquad /16,7/$$

და ელემენტარული სიგრძის კვადრატისათვის $dS^2 = dx^i dx^i$ გვექნება

$$dS^2 = g_{ik}(q^1, q^2, \dots q^n)\, dq^i dq^k, \qquad /16,8/$$

სადაც

$$g_{ik} = \frac{\partial x^j}{\partial q^i} \frac{\partial x^j}{\partial q^k}. \qquad j = 1, 2, \dots m. \qquad /16,9/$$

ამასთან, $g_{ik}(q^1, q^2, \dots q^n) = g_{ki}$ გამოსახულება $q^1, q^2, \dots q^n$ ცვლადების ფუნქციაა.

აქ დაწერილი ფორმულებიდან ნათლად ჩანს, რომ ზემოთ დასმული ამოცანა ეკვივალენტურია შემდეგის: /16,9/ გამოსახულება მოცემული $g_{ik}(q^1, q^2, \dots q^n)$ ფუნქციისათვის უნდა განვიხილოთ როგორც განტოლებათა სისტემა და გამოვარკვიოთ, შეიძლება თუ არა მისი საშუალებით ვიპოვოთ /16,6/ დამოკიდებულება, რომელიც განსაზღვრავს E_m სივრცისა და R_n ქვესივრცის წერტილებს შორის შესაბამისობას. რადგან g_{ik} სიმეტრიული ტენზორია, ამიტომ ცხადია, მის დამოუკიდებელ კომპონენტთა რიცხვი $\frac{n(n+1)}{2}$-ის ტოლია. მაშასადამე, /16,9/ წარმოადგენს სისტემას, რომელიც შეიცავს $\frac{n(n+1)}{2}$ განტოლებას. უცნობთა რიცხვი

კი M -ის ტოლია. ამიტომ მოსალოდნელია, რომ /16,9/ სისტემის ამოხსნა შესაძლებელია $m=\frac{n(n+1)}{2}$ შემთხვევაში.

მაშასადამე, როგორც ამბობენ, რიმანის R_n სივრცე შეგვიძლია "ჩავდოთ" ევკლიდის $m=\frac{n(n+1)}{2}$ განზომილებიან სივრცეში. ასე მაგალითად, R_2 შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც $\frac{2\cdot 3}{2}=3$ განზომილებიანი ევკლიდის E_3 სივრცის ქვესივრცე, R_3 როგორც E_6 -ის ქვესივრცე და სხვა. რაც შეეხება R_1-ს, ცხადია, იგი დაემთხვევა E_1 -ს.

აღვნიშნოთ, რომ რიმანის სივრცეში შემოაქვთ ზოგადი მრუდწირული კოორდინატთა სისტემები და წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნების ნაცვლად, რომელიც გვქონდა E_m სივრცეში, იხილავენ ზოგად გარდაქმნებს წერტილის ერთი მრუდწირული კოორდინატებისა მეორეში. ამ გარდაქმნას შემდეგნაირად დაწერთ:

$$q'^j=q'^j(q^1,q^2,\dots,q^n), \qquad /16,10/$$

სადაც $j=1,2,\dots,n$. ამასთან, q^j და q'^j წერტილის მრუდწირული კოორდინატებია ორ განსხვავებულ სისტემაში. /16,10/-ს წერტილოვან გარდაქმნას უწოდებენ. იმისათვის, რომ შესაძლებელი იყოს /16,10/-ის შებრუნებული გარდაქმნის დაწერა, როგორც ცნობილია, შესაბამისი გარდაქმნის იაკობიანი

$$J=\frac{D(q'^1,q'^2,\dots q'^n)}{D(q^1,q^2,\dots q^n)} \qquad /16,11/$$

ნულს არ უნდა უდრიდეს. მომავალში ჩავთვალოთ, რომ ეს პირობა დაცულია.

ფარდობითობის ზოგად თეორიაში გამოიყენება სივრცე- დროის ოთხგანზომილებიანი ფორმალიზმი, ამასთან ეს სივრცე გამრუდებულია. ცნობილია, რომ გრავიტაციული ველის განხილვის დროს ინერციული სისტემებით შემოფარგვლა აღარ შეიძლება. ფარდობითობის ზოგადი თეორიის მიხედვით, გრავიტაციული ველის გათვალისწინე-

მისას ბუნებაში არ არსებობს უპირატესი ათვლის სისტემა. ათვლის სისტემად, გარდა ინერციულისა, შეგვიძლია გამოვიყენოთ ნებისმიერად მოძრავი კოორდინატთა სისტემა. ფარდობითობის ზოგად თეორიაში მოძრაობის განტოლება ინვარიანტულია ნებისმიერი, /16,10 / ტიპის წერტილოვანი გარდაქმნის მიმართ, ე.ი. ერთი ნებისმიერი კოორდინატებიდან მეორეზე გადასვლის დროს.

არაინერციულ სისტემაში ds^2 ოთხგანზომილებიან ინტერვალს აღარ აქვს კანონიკური ფორმა. შეიძლება ჩვენება, რომ იგი განისაზღვრება /16,2 / ტიპის გამოსახულებით, რომელიც არავითარი გარდაქმნით არ დაიყვანება კანონიკურ სახეზე. ამიტომ ფარდობითობის ზოგად თეორიაში იძულებული ვართ გამოვიყენოთ ოთხგანზომილებიანი გამრუდებული სივრცე, რომლის მეტრიკა განისაზღვრება ფორმულით

$$ds^2 = g_{ik}(q^1,q^2,q^3,q^4)\,dq^i dq^k, \qquad /16,12/$$

სადაც $i,k = 1,2,3,4$, ხოლო $q^4=ct$. რამდენადაც /16,12 / აღარ წარმოადგენს კოორდინატების მხოლოდ კვადრატების ჯამს, იმდენად წარმოსახვით $q_4=ict$ ცვლადის შემოღებას არავითარი მნიშვნელობა აღარა აქვს და ამიტომ იგი $q^4=ct$ -თი აღვნიშნეთ. /16,12 / მეტრიკა რიმანის სივრცის მეტრიკისაგან იმით განსხვავდება, რომ ds^2 დადებითად აღარ არის განსაზღვრული. ასეთ სივრცეს რიმანული სივრცე შეიძლება ვუწოდოთ. /16,12/-ში g_{ik} $(i,k=1,2,3,4)$ იქნება ოთხგანზომილებიანი სივრცის მეტრიკული ტენზორი, რომელიც, ცხადია, წარმოადგენს სიმეტრიულ ტენზორს. ამგვარად, არაინერციული სისტემებით სარგებლობის დროს q^1,q^2,q^3,q^4 კოორდინატები იქნება მრუდწირული კოორდინატები და, მაშასადამე, ჩვენ უნდა ვისარგებლოთ გამრუდებული სივრცე-დროით, ე.ი. რიმანული გეომეტრიით.

კერძო შემთხვევაში, როცა საქმე გვაქვს ინერციულ სისტე-

მასთან, ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ოთხგანზომილებიანი ფსევდო-ევკლიდური სივრცე, რომლისთვისაც g_{ik} მეტრიკულ ტენზორს ექნება სახე

$$g_{ik}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad /16,13/$$

ამ მეტრიკას შეესაბამება ინვარიანტი

$$ds^2=(c\,dt)^2-(dq^1)^2-(dq^2)^2-(dq^3)^2. \qquad /16,14/$$

ინერციულ სისტემას ასეთი მეტრიკით უწოდებენ გალილეის სისტემას.

როცა ვიხილავთ გრავიტაციულ ველს, მაშინ არ არსებობს ისეთი გარდაქმნა, რომელიც /16,2/ გამოსახულებას მიიყვანდა /16,14/ სახეზე მთელს სივრცეში. ამიტომ ასეთ სივრცე-დროს გამრუდებულს უწოდებენ. მაგრამ, როგორც აღვნიშნეთ მტკიცდება, რომ თუ მთელი სივრცისათვის g_{ik} ტენზორის დაყვანა დიაგონალურ სახეზე შეუძლებელია, ჩვენ შეგვიძლია იგი დიაგონალურ სახეზე დავიყვანოთ წინასწარ აღებულ ნებისმიერ წერტილში. ე.ი. ამ წერტილში კოორდინატთა სისტემა იქნება გალილეის სისტემა, ხოლო მეტრიკას ექნება /16,13/ სახე, რაც იმას ნიშნავს, რომ მეტრიკული ტენზორის შესაბამისი დეტერმინანტი რეალური სივრცე-დროისათვის უარყოფითი სიდიდეა.

$$\Delta(g)<0. \qquad /16,15/$$

ამგვარად, არაინერციული სისტემების შემოყვანის აუცილებლობასთან დაკავშირებით ოთხგანზომილებიანი რეალური სივრცე /სივრცე-დრო/ ხდება არაევკლიდური. საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ შემდეგი მ გალითი. ვთქვათ, ორი სხეული ეკვატორიდან პოლუსისაკენ მოძრაობს უმოკლესი გზით. ამ შემთხვევაში უმოკლესი გზა იქნება მოძრაობა მერიდიანის გასწვრივ. დამკვირვებელი შეამჩნევს, რომ

პოლუსისაკენ მოძრაობისას სხეულები ერთმანეთს უახლოვდებიან, ამიტომ იგი ჩათვლის, რომ სხეულებს შორის მოქმედებს რაღაც მიზიდულობის ძალა /გრავიტაციული ძალა/. აინშტაინის თანახმად, სინამდვილეში, არავითარი გრავიტაციული ძალა არ არსებობს. დამკვირვებელს ამ ძალის შემოტანა იმიტომ დასჭირდა, რომ მისი წარმოდგენით სივრცე, რომელშიაც სხეულები მოძრაობენ, ევკლიდურია. დამკვირვებელი შეცდომაში შეიყვანა იმ ფაქტმა, რომ რეალური სივრცე ევკლიდური კი არ არის, არამედ რიმანულია, ე.ი. გამრუდებულია. თუ დავუშვებთ, რომ ჩვენი სივრცე ევკლიდურია, მაშინ იძულებული ვიქნებით შემოვიტანოთ გრავიტაციული ძალები, რომლის წარმოშობასაც ვერ ავხსნით. ფარდობითობის ზოგად თეორიაში გრავიტაციული ველი და მასთან დაკავშირებული ეფექტები იმის შედეგია, რომ ჩვენი სივრცე ევკლიდური კი არ არის, არამედ ემორჩილება სივრცე-დროის გამრუდებულ გეომეტრიას, ე.ი. რიმანულ გეომეტრიას. სამყარო რომ ცარიელი იყოს, მაშინ იგი აიწერებოდა ევკლიდის სივრცის მეტრიკით. სამყაროში სხეულების არსებობა იწვევს სივრცის გამრუდებას და სივრცის ევკლიდურობის დარღვევას.

ქვემოთ ჩვენ გარკვეულ მომენტამდე ოთხგანზომილებიანი გამრუდებული სივრცის ნაცვლად განვიხილავთ R_n სივრცეს. ამ სივრცეში შევისწავლით ტენზორული აღრიცხვის ელემენტებს, შემდეგ კი მას გამოვიყენებთ ოთხგანზომილებიანი რიმანული სივრცისათვის.

§ 17. ტენზორული ალგებრა რიმანის სივრცეში

1. კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ტენზორები. შევისწავლოთ ტენზორული ალგებრის ელემენტები n განზომილებიან რიმანის სივრცეში. ამავე დროს, აღვნიშნოთ, რომ ტენზორული ალგებრა შეგვიძლია ავაგოთ ისე, რომ სულაც არ შემოვიტანოთ სივრცის მეტრიკა. სივრცის მეტრიკა თავს იჩენს მხოლოდ ტენზორულ ანალიზში.

ამიტომ ქვემოთ განხილული ტენზორული აღრიცხვა გამოდგება არა მხოლოდ რიმანის სივრცის შემთხვევაში, არამედ ევკლიდის სივრცეშიაც, როცა დეკარტის კოორდინატების ნაცვლად ვიხილავთ ზოგადი სახის მრუდწირულ სისტემებს.

როგორც წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ რიმანის სივრცეში დეკარტის მართკუთხა სისტემის შემოღება არ შეიძლება და არც კოორდინატების წრფივ ორთოგონალურ გარდაქმნებსაა აქვს აზრი. რიმანის სივრცეში განიხილება ერთი ტიპის q^i $(i=1,2,\cdots n)$ მრუდწირული კოორდინატების ზოგადი გარდაქმნა მეორე ტიპის q'^i კოორდინატებში

$$q'^i=q'^i(q^1,q^2,\dots q^n). \quad (i=1,2,\cdots n) \qquad /17,1/$$

ჩვენი მიზანია გამოვარკვიოთ ტენზორების თვისებები /17,1 / ტიპის გარდაქმნების მიმართ.

2. <u>სკალარი</u>. განვმარტოთ ნულოვანი რანგის ტენზორი ანუ სკალარი. ვთქვათ, გვაქვს რაიმე ფუნქცია $f(q^1,q^2,\dots,q^n)$ რომელზედაც ჩავატარეთ /17,1 / გარდაქმნა. შტრიხიანი კოორდინატებისათვის მივიღებთ $f'(q'^1,q'^2,\dots,q'^n)$. თუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(q^1,q^2,\dots q^n)=f'(q'^1,q'^2,\dots q'^n), \qquad /17,2/$$

მაშინ $f(q^1,q^2,\dots q^n)$ ფუნქციას ეწოდება სკალარი. სკალარია, მაგალითად, ჩვეულებრივი რიცხვი; სკალარი იქნება რიმანის კვადრატული ფორმა $dS^2=g_{ik}dq^i dq^k$.

3. <u>კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ვექტორები</u>. გადავიდეთ ვექტორის განსაზღვრაზე. /17,1 / გარდაქმნის თანახმად q'^i დიფერენციალისათვის შეგვიძლია დავწეროთ გარდაქმნის კანონი

$$dq'^i=\frac{\partial q'^i}{\partial q^k}dq^k. \quad (i=1,2,\cdots n) \qquad /17,3/$$

შებრუნებისათვის ხელსაყრელია შემდეგი აღნიშვნების შემოღება:

$$\alpha^i_k = \frac{\partial q'^i}{\partial q^k}, \quad \beta^i_k = \frac{\partial q^i}{\partial q'^k}. \qquad /17,4/$$

ცხადია, რომ α^i_k და β^i_k სიდიდეები კოორდინატების ფუნქციები იქნება. აგრეთვე მისახვედრია, რომ α^i_k და β^i_k გარდაქმნის კოეფიციენტებიდან შედგენილი დეტერმინანტები იაკობიანებს წარმოადგენენ:

$$\Delta(\alpha) = \frac{D(q'^1, q'^2, \dots q'^n)}{D(q^1, q^2, \dots q^n)}, \quad \Delta(\beta) = \frac{D(q^1, q^2, \dots q^n)}{D(q'^1 q'^2 \dots q'^n)}. \qquad /17,5/$$

ამასთან, იაკობიანის თვისებების გამოყენებით ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\Delta(\alpha)\,\Delta(\beta) = 1. \qquad /17,6/$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ გარდაქმნის α^k_i და β^k_i კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ ორთონორმირების პირობებს. ამისათვის წინასწარ შემოვიღოთ სიმბოლო δ^k_i, რომელიც განვმარტოთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \delta^k_i &= 1, \quad \text{როცა} \quad i = k, \\ \delta^k_i &= 0, \quad \text{როცა} \quad i \neq k. \end{aligned} \qquad /17,7/$$

ამ სიმბოლოს ექნება ყველა ის თვისება, რაც ჰქონდა δ_{ik} კრონეკერის სიმბოლოს ევკლიდის სივრცეში. ახლა, თუ გამოვიყენებთ /17,4/ განმარტებას, ადვილად დავინახავთ, რომ

$$\alpha^i_k \beta^m_i = \alpha^m_i \beta^i_k = \delta^m_k, \qquad /17,8/$$

რომელსაც გარდაქმნის კოეფიციენტების ორთონორმირების პირობას უწოდებენ.

ამის შემდეგ ადვილია ვექტორის განმარტება. თუ $A^i(A^1, A^2, \dots A^n)$ n – სიდიდე გარდაიქმნება, როგორც dq^i დიფერენციალები, ე.ი.

/17,3/ კანონით

$$A'^i=\frac{\partial q'^i}{\partial q^k}A^k\equiv\alpha^i_k A^k, \qquad /17,9/$$

მაშინ A^i-ს /ინდექსი ზევით/ უწოდებენ n-განზომილებიან კონ-ტრავარიანტულ ვექტორს.

ადვილად დაინახება /17,9/ გარდაქმნის შებრუნებული. ამ მიზნით /17,9/ გავამრავლოთ β^k_i-ზე და მოვახდინოთ აჯამვა i-თი. მაშინ /17,8/ ორთონორმირების პირობის გათვალისწინებით მივი-ღებთ:

$$A^k=\beta^k_i A'^i. \qquad /17,9'/.$$

ახლა განვიხილოთ რაიმე $\Phi(q^1,q^2,\dots q^n)$ სკალარული ფუნქციის გრადიენტი. ეს ფუნქცია ნაწარმოებადია, როგორც რთული ფუნქცია q'^i-სა q^i-ს საშუალებით, მაშინ მისთვის გვექნება

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q'^i}=\frac{\partial\Phi}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial q'^i}\equiv\beta^k_i\frac{\partial\Phi}{\partial q^k}. \qquad /17,10/$$

$A_i(A_1,A_2\dots A_n)$ n-სიდიდის ერთობლიობას, რომელიც გარდაიქმნება როგორც გრადიენტი, ე.ი. /17,10/ კანონით, უწოდებენ n განზო-მილებიან კოვარიანტულ ვექტორს. მაშასადამე, კოვარიანტული ვექ-ტორი განიმარტება შემდეგი გარდაქმნის კანონით:

$$A'_i=\frac{\partial q^k}{\partial q'^i}A_k\equiv\beta^k_i A_k. \qquad /17,11/$$

შებრუნებულ გარდაქმნას კი ექნება სახე

$$A_k=\alpha^i_k A'_i. \qquad /17,11'/$$

ამგვარად, კონტრავარიანტული ვექტორი გარდაიქმნება კოორ-დინატების დიფერენციალების მსგავსად, კოვარიანტული კი—გრადი-ენტის მსგავსად. რადგანაც q^i კოორდინატების დიფერენციალე-ბი რიმანის სივრცეში თვითონ წარმოადგენენ კონტრავარიანტულ

ვექტორებს, იმდენად თავისთავად კოორდინატების ინდექსები ზემოთ გავაკეთეთ.

აღვნიშნოთ, რომ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში α_i^k და β_i^k გარდაქმნის კოეფიციენტები ერთნაირებია /მიმართულების კოსინუსებია/ და $\alpha_i^k=\beta_i^k=const$, ამიტომ ვექტორის კო და კონტრავარიანტულ მდგენელებს შორის განსხვავება არ არის. მაგრამ უნდა გვახსოვდეს, რომ R_n სივრცეში ან, როცა დეკარტის კოორდინატებიდან გადავდივართ ირიბკუთხოვანზე, მაშინ ვექტორს ექნება როგორც კოვარიანტული, ისე კონტრავარიანტული მდგენელები.

ზემოთ ყველგან განმეორებული ინდექსი მუნჯი ინდექსია და ამ ინდექსით იგულისხმება აჯამვა ერთიდან n-მდე. ყურადღება მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ მუნჯი ინდექსებიდან ერთი ქვედაა ზერია, მეორე- ზემო.

4. კოვარიანტული, კონტრავარიანტული და შერეული ტენზორები.

ახლა უკვე შეგვიძლია ზოგადი რანგის ტენზორების განმარტება. განვსაზღვროთ, მაგალითად, მეორე რანგის ტენზორი. ამასთან, ცხადია, რომ ჩვენ გვექნება როგორც კონტრავარიანტული T^{ik}, ისე კოვარიანტული τ_{ik} ტენზორი. ეს ტენზორები შესაბამისად გარდაიქმნებიან როგორც ორი კონტრავარიანტული და ორი კოვარიანტული ვექტორის პირდაპირი ნამრავლი, ე.ი. კანონით

$$T'^{ik} = \alpha_\mu^i \alpha_\nu^k T^{\mu\nu} \qquad /17,12/$$

და

$$\tau'_{ik} = \beta_i^\mu \beta_k^\nu \tau_{\mu\nu} \qquad /17,13/$$

აქ i და k თავისუფალი ინდექსებია, μ და ν კი - მუნჯი. ცხადია, შესაძლებელია მეორე რანგის ე.წ. შერეული ტენზორის არსებობაც, რომელიც გარდაიქმნება, როგორც კოვარიანტული და

კონტრავარიანტული ვექტორის პირდაპირი ნამრავლი. მეორე მეორე რანგის ტენზორს M_K^i -თი აღნიშნავენ. ამგვარად, M_K^i შერეული ტენზორისათვის გვექნება გარდაქმნის კანონი

$$M'^i_K = \alpha^i_\mu \beta^\nu_K M^\mu_\nu . \qquad /17,14/$$

ანალოგიურად შეგვიძლია განვსაზღვროთ მაღალი რანგის ტენზორები. მაგალითად, Q^S_{iKl} კოვარიანტული ტენზორი i,K,l ინდექსების, ხოლო კონტრავარიანტული S -ინდექსის მიმართ, განისაზღვრება ფორმულით

$$Q'^S_{iKl} = \beta^\mu_i \beta^\nu_K \beta^\rho_l \alpha^S_t Q^t_{\mu\nu\rho} . \qquad /17,15/$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ზემოთ შემოღებული /17,7/ სიმბოლო δ_i^K წარმოადგენს მეორე რანგის შერეულ ინვარიანტულ ტენზორს. δ_i^K კოვარიანტულია i -ინდექსის მიმართ, ხოლო K-ს მიმართ კონტრავარიანტული. დავწეროთ შერეული ტენზორის გარდაქმნის /17,14/ კანონი δ_i^K -სათვის. გვექნება

$$\delta'^K_i = \alpha^K_\mu \beta^\nu_i \delta^\mu_\nu ; \qquad /17,16/$$

გამოვიყენოთ δ_i^K სიმბოლოს ფილტრაციის თვისება

$$\delta_i^K A^{ij} = A^{Kj}, \qquad /17,17/$$

მაშინ /17,16/ მიიღებს სახეს

$$\delta'^K_i = \alpha^K_\mu \beta^\mu_i = \delta^K_i , \qquad /17,18/$$

ე.ი. δ_i^K, მართლაც, მეორე რანგის შერეული, ერთეულოვანი, ინვარიანტული ტენზორი ყოფილა.

ადვილად დავწერთ /17,12/, /17,13/-ის შებრუნებული გარდაქმნის კანონებს. განვიხილოთ, მაგალითად, კოვარიანტული მეორე რანგის ტენზორის შებრუნებული გარდაქმნის კანონი. ამისათვის /17,13/ გავამრავლოთ $\alpha^i_p \alpha^K_t$ ნამრავლზე და ავჯა-

ბით i და K -თი. შედეგად მივიღებთ

$$\tau_{ik}=\alpha_i^{\mu}\alpha_k^{\nu}\tau'_{\mu\nu}, \qquad /17,19/$$

სრულიად ანალოგიურად, მეორე რანგის კონტრავარიანტული ტენზორისათვის გვექნება შებრუნებული გარდაქმნის კანონი

$$T^{ik}=\beta_{\mu}^{i}\beta_{\nu}^{k}T'^{\mu\nu}. \qquad /17,20/$$

5. <u>ტენზორების სიმეტრია</u>. როგორც ვიცით, ტენზორების სიმეტრიის თვისება დამოკიდებული არ არის კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე, ამიტომ რიმანის სივრცეში აზრი აქვს სიმეტრიას ცალკე კოვარიანტული და ცალკე კონტრავარიანტული ინდექსების მიმართ. კერძოდ,

$$T^{ik}=T^{ki}; \quad \tau_{ik}=\tau_{ki} \qquad /17,21/$$

მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორების განმარტებაა, ხოლო

$$D^{ik}=-D^{ki}; \quad G_{ik}=-G_{ki} \qquad /17,22/$$

წარმოადგენს მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორის განსაზღვრას.

რადგან კო და კონტრა ინდექსები სხვადასხვა გარდაქმნის კანონებს ემორჩილებიან, ამიტომ შერეული ტენზორების სიმეტრიის თვისებას ინვარიანტული ხასიათი არ ექნება. მაშასადამე, შერეული ტენზორების სიმეტრიის განხილვას აზრი არა აქვს. ანალოგიურად განიხილება უფრო მაღალი რანგის ტენზორების სიმეტრიის საკითხი.

6. <u>მოქმედებანი ტენზორებზე</u>. ჩვენ შეგვიძლია შევკრიბოთ ერთნაირი რანგის ერთნაირი ვარიანტობის ტენზორები. ამ შემთხვევაში მივიღებთ იგივე ვარიანტობისა და იგივე რანგის ტენზორს. ასე მაგალითად, $C_{ik}=A_{ik}+B_{ik}$; $D^{ikl}=\Pi^{ikl}+Q^{ikl}$,

$M_k^i = Q_k^i + P_k^i$ და ა.შ. აზრი არ ექნება, მაგალითად, ხოლო $A_{ik} + B^{ikl}$ და ა.შ., რაც შეეხება გამრავლებას, ჩვენ შეგვიძლია ნებისმიერი რანგისა და კოვარიანტობის ტენზორების გამრავლება. ასე მაგალითად, $A_i B^k = T_i^k$; $\Gamma^{ik} B_{lm} = C_{lm}^{ik}$; $\gamma_k^i L_n^m = E_{kn}^{im}$ და ა.შ.

როგორც ვხედავთ, ტენზორების გამრავლებით მიიღება ახალი ტენზორი, რომლის რანგი ტოლია ცალკეული ტენზორის რანგების ჯამის. $A_l \tau^{ik} = \varkappa_l^{ik}$ მესამე რანგის შერეული ტენზორია, $A^i B^{klm} = \gamma^{iklm}$ – მეოთხე რანგის კონტრავარიანტული ტენზორი და ა.შ. ამასთან, მნიშვნელოვანია მივუთითოთ, რომ ტენზორების შეკრებას და გამრავლებას აზრი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი აღებულია რიმანის სივრცის ერთსა და იმავე წერტილში.

ანალოგიურად განიხილება ტენზორების დაკეცვა, ოღონდ დაკეცვების დროს გვხვდება გარკვეული სიძნელე. დეკარტის კოორდინატებში ნებისმიერი ორი ვექტორის პირდაპირი ნამრავლის დაკეცვებით მიიღება სკალარი. მრუდწირულ კოორდინატებში კი ეს ასე არ არის. რიმანის სივრცეში არც $A^i B^i$ და არც $A_i B_i$ სკალარს არ წარმოადგენს. ამის დამტკიცება არ არის ძნელი. მართლაც, დავწეროთ $(A_i B_k)' = A_i' B_k'$ ნამრავლის გარდაქმნის კანონი

$$A_i' B_k' = \beta_i^\mu \beta_k^\nu A_\mu B_\nu . \qquad /17,23/$$

მივახდინოთ დაკეცვა; გავუტოლოთ i ინდექსი k-ს და ავჯამოთ; გვექნება

$$A_i' B_i' = \beta_i^\mu \beta_i^\nu A_\mu A_\nu . \qquad /17,24/$$

რამდენადაც $\beta_i^\mu \beta_i^\nu \neq \delta_{\mu\nu}$, იმდენად $A_i' B_i' \neq A_i B_i$, ე.ი. $A_i B_i$ არ არის სკალარი. ასევე ადვილად ვაჩვენებთ, რომ არც $A^i B^i$ არის სკალარი. მეორე მხრივ, განვიხილოთ შერეული ტენზორი $A^i B_k$ მისთვის გვექნება გარდაქმნის კანონი

$$A'_i B'^k = \beta^\mu_i \alpha^k_\nu A_\mu B^\nu. \qquad /17,25/$$

დაკვეცებით მივიღებთ

$$A'_i B'^i = \beta^\mu_i \alpha^i_\nu A_\mu B^\nu = \delta^\mu_\nu A_\mu B^\nu = A_\mu B^\mu. \qquad /17,26/$$

მაშასადამე, $A'_i B'^i = A_i B^i$ ნამრავლი ყოფილა სკალარი. ამიტომ რიმანის სივრცეში დაკვეცების ოპერაცია უნდა განვიხილოთ ერთი კოვარიანტული და ერთი კონტრავარიანტული ინდექსის მიმართ. ასე მაგალითად, τ^{pt}_{iklm}-ის ერთჯერ დაკვეცებით მიიღება ტენზორი τ^{it}_{iklm}, ორჯერ დაკვეცებით τ^{ik}_{iklm}; თითოეული დაკვეცების შემდეგ ტენზორის რანგი ორით მცირდება. ამასთან, დაკვეცება შეგვიძლია მოვახდინოთ ნებისმიერი ერთი ქვედა და ერთი ზედა ინდექსით. ასე მაგალითად, τ^{ps}_{iklm} შეგვიძლია დავაკვეცოთ შემდეგნაირად: τ^{is}_{iklm}, τ^{ks}_{iklm}, τ^{ls}_{iklm}, τ^{ms}_{iklm}, τ^{ps}_{sklm} და ა.შ. ამასთან, საზოგადოდ, დაკვეცებით მიღებული ეს ტენზორები ერთმანეთისაგან განსხვავებული იქნება. რაც შეეხება დაკვეცებას მხოლოდ ზედა ან მხოლოდ ქვედა ინდექსებით, მაგალითად, τ^{pp}_{iklm} ან τ^{ps}_{iilm} და ა.შ. მიიღება სიდიდეები, რომლებიც ტენზორებს არ წარმოადგენენ.

ამიტომ ცხადია, რომ R_n სივრცეში ვექტორის აბსოლუტური მნიშვნელობის კვადრატი არ უდრის ვექტორის კომპონენტების კვადრატების ჯამს. ვექტორის კვადრატი უნდა გავიგოთ, როგორც შემდეგი სკალარული ნამრავლი:

$$A_i A^i = A_1 A^1 + A_2 A^2 + \dots + A_n A^n. \qquad /17,27/$$

ორი სხვადასხვა ვარიანტობის ტენზორის გამრავლებას და დაკვეცებას უწოდებენ ტენზორების სკალარულ ნამრავლს. ასე მაგალითად, $T^{ik}\tau_{jk} = M^i_j$ სკალარული ნამრავლი იქნება M^i_j შერეული ტენზორი, რომლის ერთხელ კიდევ დაკვეცება მოგვცემს

$T^{ik}\tau_{ik}$ სკალარს.

ორ ტენზორს P_{ik} და Q^{lm} ეწოდება ურთიერთშებრუნებული, თუ მათი გადამრავლებით და დაკეცვებით შიგა ინდექსების მიმართ მიიღება მეორე რანგის ერთეულოვანი δ_i^l ტენზორი, ე.ი.

$$P_{ik}Q^{kl}=\delta_i^l, \qquad /17,28/$$

ე.ი.

$$Q^{kl}=(P^{kl})^{-1}. \qquad /17,29/$$

აღვნიშნოთ, რომ კო და კონტრავარიანტული ტენზორებისათვის ასევე სამართლიანია "გაყოფის" თეორემა. ვთქვათ, ცნობილია, რომ $T^{ik}A_iB_k$ სკალარული სიდიდეა, სადაც A_i და B_i ნებისმიერი კოვარიანტული ვექტორებია, მაშინ შეიძლება ჩვენება, რომ T^{ik} მეორე რანგის კონტრავარიანტული ტენზორია. მართლაც, პირობის თანახმად

$$T^{ik}A_iB_k=T'^{mn}A'_mB'_n. \qquad /17,30/$$

რადგან A_i და B_i კოვარიანტული ვექტორებია, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left(T^{ik}-\beta^i_m\beta^k_n T'^{mn}\right)A_iB_k=0. \qquad /17,31/$$

პირობის თანახმად, A_i და B_i ნებისმიერი ვექტორებია, ამიტომ ნულის ტოლობა გვექნება მაშინ, როცა

$$T^{ik}=\beta^i_m\beta^k_n T'^{mn}, \qquad /17,32/$$

ე.ი. T^{ik} მართლაც მეორე რანგის კონტრავარიანტული ტენზორი ყოფილა. თუ, მაგალითად, $G^i_k T_{ij}=A_{kj}$, სადაც T_{ij} და A_{kj} მეორე რანგის კოვარიანტული ტენზორებია, მაშინ G^i_k მეორე რანგის შერეული ტენზორი იქნება.

კონტრა- და კოვარიანტული ტენზორებით სარგებლობის

ყოველთვის უნდა გვახსოვდეს შემდეგი წესი: მუდამ ინდექსებიდან ერთი ზემოთ უნდა იყოს, მეორე- ქვემოთ; ტენზორული ტოლობის დროს თავისუფალი ინდექსები ტოლობის ორივე მხარეში ერთი და იგივე ადგილზე უნდა იყოს მოთავსებული- ქვემოთ ან ზემოთ. ამასთან, ტენზორული ტოლობა ინვარიანტულია კოორდინატთა სისტემის არჩევის მიმართ. კერძოდ, თუ ტენზორი ნულია ერთ რომელიმე სისტემაში, იგი ნულის ტოლი იქნება ნებისმიერ სხვა სისტემაშიც. თუ ფიზიკის რომელიმე კანონი შედეგია ტენზორის კომპონენტების ნულთან ტოლობისა ერთ რომელიმე ათვლის სისტემაში, მაშინ ტენზორის გარდაქმნის კანონი უზრუნველყოფს ამ ტენზორის კომპონენტების ნულთან ტოლობას ნებისმიერ სხვა ათვლის სისტემაში. ჩვენ კი ვიცით, რომ ფიზიკას მხოლოდ ისეთ კანონებთან აქვს საქმე, რომლებიც სამართლიანია ყველა ათვლის სისტემაში. ამიტომაც ტენზორების აქ აღნიშნულ ინვარიანტობის თვისებას ფიზიკისათვის გადამწყვეტი მნიშვნელობა ეძლევა.

7. კონტრავარიანტული მეტრიკული ტენზორი. გავიხსენოთ რიმანის სივრცეში სიგრძის ელემენტის გამოსახულება

$$ds^2 = g_{ik}(q^1, q^2, \dots q^n)\, dq^i dq^k. \qquad /17,33/$$

რადგან ds^2 არის სკალარი, ხოლო $dq^i dq^k$ მეორე რანგის კონტრავარიანტულ ტენზორს წარმოადგენს, ამიტომ "გაყოფის" თეორემის ძალით g_{ik} იქნება მეორე რანგის კოვარიანტული ტენზორი. ჩვენ შეგვიძლია შემოვიღოთ კონტრავარიანტული მეტრიკული ტენზორიც g^{ik}, რომელიც, თუ g_{ik} ტენზორის შესაბამისი დეტერმინანტი $\Delta(g)$ ნულს არ უდრის, შეგვიძლია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$g_{ik}\, g^{km} = \delta_i^m. \qquad /17,34/$$

შებრუნებული ტენზორის განმარტებით ცხადია, რომ

$$g^{ik} = \frac{\Delta_{ki}(g)}{\Delta(g)}, \qquad /17,35/$$

სადაც $\Delta_{ki}(g)$ არის g_{ik} ელემენტის შესაბამისი ალგებრული დამატება. ის, რომ g^{ik} წარმოადგენს მეორე რანგის კონტრავარიანტულ ტენზორს, ჩანს /17,34/ განმარტებით "გაყოფის" წესების გამოყენებით.

დეკარტის კოორდინატებში მეტრიკული ტენზორი g_{ik} ემთხვევა δ_{ik} ტენზორს, ამიტომ $g^{ik}=g_{ik}=\delta_{ik}$, რის გამოც /17,34/ დაიყვანება ტოლობაზე $\delta_{ik}\delta_{km}=\delta_{i}^{m}$, ე.ი. $\delta_{km}=\delta_{k}^{m}$. მეორე მხრივ /17,34/ წარმოადგენს შერეული g_i^k მეტრიკული ტენზორის განმარტებასაც

$$g_{ik}\, g^{km} = g_i^m = \delta_i^m. \qquad /17,36/$$

ცხადია, ამ ტოლობის დაჯამება მოგვცემს $g_{ik}g^{ik}=g_i^i=\delta_i^i=n$, ე.ი. რიმანის სივრცის განზომილებას.

ნათელია, რომ g^{ik} კონტრავარიანტული მეტრიკული ტენზორიც სიმეტრიული იქნება $g^{ik}=g^{ki}$.

საინტერესოა g_{ik} და g^{ik} მეტრიკული ტენზორების გამოსახულებების მოძებნა იმ კერძო შემთხვევაში, როცა რიმანის R_n სივრცე წარმოადგენს ევკლიდის E_m $(m>n)$ სივრცის ქვესივრცეს. დავუშვათ, E_m სივრცეში წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება დეკარტის მართკუთხა $x_i=x^i$ კოორდინატებით, ხოლო რიმანის

სივრცის q^i კოორდინატებზე შეგვიძლია გადავიდეთ ფორმულებით

$$x_i = x_i(q^1, q^2, \dots q^n). \qquad i=1,2,\cdots m. \qquad /17,37/$$

თუ მტრიხიან სისტემად ჩავთვლით დეკარტის სისტემას, მაშინ, ცხადია,

$$g_{ik} = \frac{\partial x^\mu}{\partial q^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial q^k} g'_{\mu\nu}. \qquad /17,38/$$

მაგრამ დეკარტის სისტემაში $g'_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, ამიტომ მივიღებთ

$$g_{ik} = \frac{\partial x^\mu}{\partial q^i}\frac{\partial x^\mu}{\partial q^k}, \qquad \mu = 1,2,\cdots m. \qquad /17,39/$$

რომელიც ემთხვევა /2,7 / ფორმულას E_3 სივრცისათვის.

სრულიად ანალოგიურად კონტრავარიანტული მეტრიკული ტენზორისათვის გვექნება ფორმულა

$$g^{ik} = \frac{\partial q^i}{\partial x^\mu}\frac{\partial q^k}{\partial x^\mu}. \qquad /17,40/$$

ცხადია, რომ $g_{ik}\, g^{km} = g^{ik}\, g_{km} = \delta_i^m$.

კერძო შემთხვევაში, მაგალითად, სფერულ ორთოგონალურ კოორდინატებში, ადვილია ჩვენება, რომ g_{ik} და g^{-1}_{ik} მეტრიკულ ტენზორებს ექნებათ სახე:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}; \quad g^{-1}_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}. \qquad /17,41/$$

გ. კავშირი ერთი და იგივე ტენზორის კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ მდგენელებს შორის. ახლა ვიპოვოთ წესი, რომელიც კოვარიანტული და კონტრავარიანტული სიდიდეების ერთმანეთთან დაკავშირების საშუალებას მოგვცემს. ამისათვის ხელსაყრელია შევთანხმდეთ ერთი და იგივე ტენზორის კო და კონტრა მდგენელები ერთი და იმავე ასოთი აღვნიშნოთ. ასე მაგალითად, A^i და A_i; τ^{ik} და τ_{ik} და ა.შ. ცხადია, რომ აღნიშნული კავშირი უნდა განხორციელდეს მეტრიკული ტენზორის საშუალებით. განვიხილოთ $g_{ik}A^k$ სკალარული ნამრავლის გარდაქმნის კანონი. გვექნება

$$g'_{ik}A'^k = \beta_i^\mu \beta_k^\nu g_{\mu\nu} \alpha_s^k A^s = \beta_i^\mu \delta_s^\nu \left(g_{\mu\nu} A^s\right). \qquad /17,42/$$

ფილტრაციის ჩატარების შემდეგ მივიღებთ

$$\left(g_{ik}A^k\right)' = \beta_i^\mu \left(g_{\mu\nu} A^\nu\right). \qquad /17,43/$$

ეს კი არის $A_i = g_{ik}A^k$ კოვარიანტული ვექტორის გარდაქმნის კანონი. სრულიად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ A^i $g^{ik}A_k$. ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი მნიშვნელოვანი ფორმულები:

$$A^i = g^{ik}A_k, \qquad /17,44/$$

$$A_i = g_{ik}A^k, \qquad /17,45/$$

რომლებიც ერთმანეთთან აკავშირებენ ვექტორის კო და კონტრა მდგენელებს. ჩვენ ვხედავთ, რომ ეს კავშირი ხორციელდება მეტრიკული ტენზორით. კერძო შემთხვევაში, დეკარტის მართკუთხა სისტემაში, მივიღებთ, რომ $A^i = A_i$. ამრიგად, თუ გვსურს ვექტორის ინდექსი მაღლა ავწიოთ, საჭიროა იგი g^{ik} კონტრავარიანტულ ტენზორზე გადავამრავლოთ სკალარულად, ხოლო როცა საჭიროა ინდექსის დაბლა ჩამოტანა, საჭიროა ვექტორის g_{ik} კოვარიანტულ მეტრიკულ ტენზორზე გამრავლება. ასეთივე კავშირი არსე-

ზიბს ტენზორის კომპონენტებს შორისაც. ასე მაგალითად, τ_{ik} ტენზორის გამრავლებით g^{im} ტენზორზე მივიღებთ მეორე რანგის შერეულ ტენზორს

$$\tau_k^{\ m} = g^{im}\tau_{ik}. \qquad /17,46/$$

ასევე გვექნება ფორმულები:

$$T_{im}^{\ j} = g_{ik}T_m^{jk}; \quad M^{ik} = g^{il}g^{km}M_{lm}; \qquad /17,47/$$

$$\Lambda^{ijkl} = g^{ip}g^{j\kappa}g^{k\nu}g^{ls}\Lambda_{p\kappa\nu s} \qquad /17,48/$$

და ა.შ. როგორც ვხედავთ, ტენზორის რამდენი ინდექსის ზევით აწევაც გვინდა, იმდენ კონტრავარიანტულ მეტრიკულ ტენზორზე უნდა გავამრავლოთ იგი სკალარულად. ასევე ტენზორის რამდენი ინდექსის დაბლა დაწევაც გვინდა, ეს ტენზორი იმდენ კოვარიანტულ მეტრიკულ ტენზორზე უნდა გავამრავლოთ სკალარულად. შევნიშნოთ, რომ, თუ მეორე რანგის τ_{ik} ტენზორი სიმეტრიული არ არის, მაშინ საჭიროა ერთმანეთისაგან გავარჩიოთ ორი ტენზორი $\tau^i_{\ k}$ და $\tau_i^{\ k}$, ე.ი. საჭიროა მივუთითოთ ადგილი, საიდანაც ინდექსი ავიტანეთ.

განვიხილოთ სკალარული ნამრავლი A^iB_i. ცხადია, რომ იგი შეგვიძლია გადავწეროთ რამდენიმე სახით; კერძოდ,

$$A_iB^i = g_{ik}A^iB^k = g^{ik}A_iB_k = A^iB_i. \qquad /17,49/$$

ასევე ვექტორის კვადრატისათვის გვექნება

$$A_iA^i = A^iA_i = g_{ik}A^iA^k = g^{ik}A_iA_k. \qquad /17,50/$$

შევნიშნოთ, რომ ტენზორების სკალარულ ნამრავლში რომელიმე მუნჯი ინდექსის ქვემოთ ჩამოწევისას საჭიროა შესაბამისი მუნჯი ინდექსის ზემოთ აწევა. განვიხილოთ, მაგალითად, $A_{ik}B^{ik}$ სკალარული ნამრავლი. გვექნება შემდეგი ფორმულები:

$$A_{ik}=g_{im}g_{kn}A^{mn}; \quad B^{ik}=g^{ip}g^{ks}B_{ps}. \qquad /17,51/$$

მაშასადამე,

$$A_{ik}B^{ik}=g_{im}g_{kn}A^{mn}g^{ip}g^{ks}B_{ps}, \qquad /17,52/$$

რადგან $g_{im}g^{ip}=\delta_m^p$ $g_{kn}g^{ks}=\delta_n^s$, ამიტომ ფორმულის შემდეგ მივიღებთ

$$A_{ik}B^{ik}=A^{ik}B_{ik}. \qquad /17,53/$$

მაშასადამე, ორი მუნჯი ინდექსის მაღლა აწევამ გამოიწვია შესაბამისი ორი მუნჯი ინდექსის დაბლა დაწევა. ასე, რომ, ტენზორთა სკალარულ ნამრავლში მუნჯი ინდექსების აწევ-დაწევაში განსაკუთრებული თავისუფლება გვაქვს.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ თუ დეკარტის მართკუთხა სისტემაში ვექტორის კო და კონტრა მდგენელები ერთმანეთს ემთხვევა, გალილეის სისტემაში კო და კონტრა სიდიდეები მთლად ეკვივალენტური არ არიან. მართლაც, თუ გავიხსენებთ მეტრიკული ტენზორის სახეს, როგორც განსაზღვრულია /16,13/ ფორმულით, მივიღებთ

$$A_1=-A^1, \; A_2=-A^2, \; A_3=-A^3, \; A_4=A_4. \qquad /17,54/$$

ე.ი. დროისმიერი მდგენელები ტოლებია, სივრცისმიერი კი ნიშნით განსხვავდება. ამ სისტემაში ვექტორის კვადრატი განისაზღვრება ფორმულით $A_iA^i=A_4^2-A_1^2-A_2^2-A_3^2$.

9. სრულად ანტისიმეტრიული n-ური რანგის ერთეულოვანი ტენზორი. დეკარტის ორთოგონალურ სისტემაში ჩვენ განსაზღვრული გვქონდა n-ური რანგის სრულად ანტისიმეტრიული ერთეულოვანი, აქსიალური $\varepsilon_{i_1i_2\dots i_n}$ ტენზორი /ლევი-ჩივიტას ტენზორი/. იგი ტოლი იყო +1 ან −1-ის იმის მიხედვით $i_1,i_2,\dots i_n$ ინდექსების გადანაცვლება კენტი იყო, თუ ლუწი. ამავე დროს, ეს ტენზორი იყო ინვარიანტული $\varepsilon'_{i_1i_2\dots i_n}=\varepsilon_{i_1i_2\dots i_n}$. ე.ი. ყველა

კოორდინატთა სისტემაში ქონდა ერთი და იგივე სახე. რიმანის სივრცეში საჭიროა ამ ტენზორის სხვანაირი განმარტება. ვიგულისხმოთ, რომ R_n სივრცე წარმოადგენს E_m სივრცის ქვესივრცეს და, როგორც ზემოთ არაერთხელ გავაკეთეთ, დეკარტის კოორდინატებიდან გადავიდეთ ნებისმიერ მრუდწირულ კოორდინატებზე. ვიგულისხმოთ, რომ $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ წარმოადგენს ტენზორს დეკარტის კოორდინატებში და ვისარგებლოთ $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$-ის კოვარიანტული გარდაქმნის კანონით

$$\varepsilon'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \beta_{i_1}^{j_1} \beta_{i_2}^{j_2} \dots \beta_{i_n}^{j_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n}; \qquad /17,55/$$

გავიხსენოთ n-ური რანგის დეტერმინანტის განმარტება ლევი-ჩივიტას ტენზორის საშუალებით

$$\varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} \beta_{i_1}^{j_1} \beta_{i_2}^{j_2} \dots \beta_{i_n}^{j_n} = \Delta(\beta)\, \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}, \qquad /17,56/$$

სადაც $\Delta(\beta)$ იქნება დეტერმინანტი /იაკობიანი/, რომელიც შედგენილია $\beta_i^k = \frac{\partial q^k}{\partial q'^i}$ ელემენტებისაგან. მაშინ /17,55/ მიიღებს სახეს

$$\varepsilon'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \Delta(\beta)\, \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}, \qquad /17,57/$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მრუდწირულ კოორდინატებზე გადასვლით ლევი-ჩივიტას ტენზორი აღარ დარჩა ინვარიანტული $(\Delta(\beta) \neq 1)$.

$\Delta(\beta)$ იაკობიანი ბუნებრივია დაკავშირებულია მეტრიკულ g_{ik} ტენზორთან. კოვარიანტული მეტრიკული ტენზორისათვის გვაქვს შემდეგი გარდაქმნის კანონი $g'_{ik} = \beta_i^m \beta_k^n g_{mn}$ განვიხილოთ ამ ტოლობის ორივე მხარის დეტერმინანტი. მივიღებთ მნიშვნელოვან ფორმულას, რომელიც განსაზღვრავს მეტრიკული ტენზორის დეტერმინანტის გარდაქმნის კანონს

$$\Delta(g') = \Delta(\beta)\, \Delta(g)\, \Delta(\beta). \qquad /17,58/$$

რადგან /17,6/ ფორმულის ძალით $\Delta(\alpha)\Delta(\beta) = 1$ და /16,11/

პირობის თანახმად $\Delta(\beta)\neq 0$, ამიტომ /17,58/ ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\Delta(g')=\Delta^2(\beta)\Delta(g)=\frac{\Delta(g)}{\Delta^2(\alpha)}. \qquad /17,59/$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ თუ $\Delta(g)\neq 0$ ერთ რომელიმე სისტემაში, იგი ნულისაგან განსხვავებული იქნება სხვა ნებისმიერშიც.

რადგან დეკარტის კოორდინატებში $g_{ik}=\delta_{ik}$, ამიტომ $\Delta(g)=1$ და /17,59/-დან მივიღებთ $\Delta(g')=\Delta^2(\beta)$. მაშასადამე, $\Delta(\beta)=\sqrt{\Delta(g')}$. /17,57/ ფორმულის თანახმად კი გვექნება

$$\varepsilon'_{i_1 i_2\dots i_n}=\sqrt{\Delta(g')}\,\varepsilon_{i_1 i_2\dots i_n}, \qquad /17,60/$$

საიდანაც ჩანს, რომ რიმანის სივრცეში /მრუდწირულ კოორდინატებში/ n-ური რანგის სრულად ანტისიმეტრიული კოვარიანტული აქსიალური ტენზორი შემდეგნაირად უნდა განვსაზღვროთ:

$$e_{i_1 i_2\dots i_n}=\sqrt{\Delta(g)}\,\varepsilon_{i_1 i_2\dots i_n}. \qquad /17,61/$$

ამასთან, უნდა გახსოვდეს, რომ რიმანის სივრცეში ფსევდოტენზორს პოლარული ტენზორისაგან განსხვავებით გარდაქმნის ფორმულაში დაემატება ნიშნის განმსაზღვრელი მამრავლი $\frac{\Delta(\alpha)}{|\Delta(\alpha)|}$, $\frac{\Delta(\beta)}{|\Delta(\beta)|}$, სადაც $|\Delta(\beta)|$ ნიშნავს $\Delta(\beta)$ დეტერმინანტის აბსოლუტურ მნიშვნელობას.

განვსაზღვროთ $e^{i_1 i_2\dots i_n}$ კონტრავარიანტული ლევი-ჩივიტას ტენზორიც. გვექნება

$$e^{i_1 i_2\dots i_n}=g^{i_1 j_1}g^{i_2 j_2}\dots g^{i_n j_n}e_{j_1 j_2\dots j_n}= \qquad /17,62/$$
$$=\sqrt{\Delta(g)}\,g^{i_1 j_1}g^{i_2 j_2}\dots g^{i_n j_n}\varepsilon_{j_1 j_2\dots j_n}.$$

/17,56/ ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$e^{i_1 i_2 \dots i_n} = \sqrt{\Delta(g)}\,\Delta(g^{ik})\,\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \qquad /17,63/$$

რადგან g^{ik} კონტრავარიანტული მეტრიკული ტენზორი g_{ik}-ს შებრუნებულია, ამიტომ $g_{ik}g^{ik}=1$ და $\Delta(g^{ik})=\frac{1}{\Delta(g_{ik})}$. ამის გამო /17,63/ საბოლოოდ მიიღებს ასეთ სახეს:

$$e^{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{1}{\sqrt{\Delta(g)}}\,\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}. \qquad /17,64/$$

ცხადია, რომ სკალარული ნამრავლი

$$e^{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1 i_2 \dots i_n} = n!. \qquad /17,65/$$

ჩვენს მიერ მიღებული ლევი-ჩივიტას კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ტენზორები ისევე შეგვიძლია გამოვიყენოთ მთელი რიგი გამოსახულებების მოკლედ ჩასაწერად, როგორც ამას ვაკეთებდით დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში. ასე მაგალითად, საინტერესოა აღვნიშნოთ, რომ R_3 სივრცეში

$$[\vec{A},\vec{B}]_i = e_{ikl}A^k B^l; \quad [\vec{A},\vec{B}]^i = e^{ikl}A_k B_l, \qquad /17,66/$$

გამოსახულებები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის კო და კონტრავარიანტული მდგენელები შესაბამისად, რამდენადაც ისინი წარმოადგენენ ევკლიდის სივრცეში განსაზღვრული ვექტორული ნამრავლის /8,14/ ფორმულის უშუალო განზოგადოებას.

შევნიშნოთ, რომ ოთხგანზომილებიანი რეალური სივრცე-დროის შემთხვევაში /რიმანული სივრცე/ $\Delta(g)<0$, ამიტომ ამ სივრცეში ლევი-ჩივიტას ტენზორებს ექნებათ გამოსახულება:

$$e_{ikem} = \sqrt{-\Delta(g)}\, \mathcal{E}_{ikem} \,, \qquad /17{,}67/$$

$$e^{ikem} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta(g)}}\, \mathcal{E}_{ikem} \,. \qquad /17{,}68/$$

10. <u>დუალური ტენზორები.</u> ლევი-ჩივიტას ტენზორები შეგვიძლია გამოვიყენოთ დუალური ტენზორების განსასაზღვრავად. ვთქვათ, გვაქვს m -ური რანგის კოვარიანტული ან კონტრავარიანტული ანტისიმეტრიული ტენზორი, მაშინ R_n სივრცეში მას შეგვიძლია შევუსაბამოთ $n-m$ რანგის დუალური ტენზორი. მაგალითად, m -ური რანგის $\tau^{i_1 i_2 \dots i_m}$ კონტრავარიანტულ ტენზორს შეესაბამება შემდეგი კოვარიანტული დუალური ტენზორი:

$$\tau^*_{i_1 i_2 \dots i_{n-m}} = \frac{1}{m!}\, e_{i_1 i_2 \dots i_{n-m} i_{n-m+1} \dots i_n}\, \tau^{i_{n-m+1} \dots i_n} \,, \qquad /17{,}69/$$

ხოლო $\tau_{i_1 i_2 \dots i_m}$ კოვარიანტულ ანტისიმეტრიულ ტენზორს კონტრავარიანტული დუალური ტენზორი:

$$\tau^{*i_1 i_2 \dots i_{n-m}} = \frac{1}{m!}\, e^{i_1 i_2 \dots i_{n-m} i_{n-m+1} \dots i_n}\, \tau_{i_{n-m+1} \dots i_n} \qquad /17{,}70/$$

ან, ეს ფორმულები ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\tau^*_{i_1 i_2 \dots i_{n-m}} = \frac{\sqrt{\Delta(g)}}{m!}\, \mathcal{E}_{i_1 i_2 \dots i_{n-m} i_{n-m+1} \dots i_n}\, \tau^{i_{n-m+1} \dots i_n} \qquad /17{,}71/$$

და

$$\tau^{*i_1 i_2 \dots i_{n-m}} = \frac{1}{m!\sqrt{\Delta(g)}}\, \mathcal{E}_{i_1 i_2 \dots i_{n-m} i_{n-m+1} \dots i_n}\, \tau_{i_{n-m+1} \dots i_n} \,. \qquad /17{,}72/$$

კერძო შემთხვევაში, რეალური სივრცე-დროისათვის მეორე რანგის ანტისიმეტრიულ ტენზორს შეგვიძლია შევუსაბამოთ შემდეგი დუ-

ლური ტენზორები:

$$T^{*}_{ik}=\frac{1}{2}e_{ikem}T^{em}=\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta(g)}\,\varepsilon_{ikem}T^{em}, \qquad /17,73/$$

$$T^{ik*}=\frac{1}{2}e^{ikem}T_{em}=\frac{1}{2\sqrt{-\Delta(g)}}\varepsilon_{ikem}T^{em}. \qquad /17,74/$$

11. <u>მოცულობისა და ფარის ელემენტები</u>. ახლა დავწეროთ მოცულობისა და ფარის ელემენტები რიმანის სივრცეში. ამისათვის განვიხილოთ კერძო სახის n-ური რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი

$$\Omega^{i_1 i_2 \dots i_n}=\begin{vmatrix} A_1^{i_1} A_1^{i_2} & \dots & A_1^{i_n} \\ A_2^{i_1} A_2^{i_2} & \dots & A_2^{i_n} \\ \cdot \quad \cdot & & \\ A_n^{i_1} A_n^{i_2} & \dots & A_n^{i_n} \end{vmatrix}. \qquad /17,75/$$

ამ ტენზორის შესაბამისი დუალური ტენზორი იქნება ნულოვანი რანგისა. მაშასადამე, გვექნება შემდეგი ფსევდოსკალარი:

$$\Omega=\frac{1}{n!}e_{i_1 i_2 \dots i_n}\Omega^{i_1 i_2 \dots i_n}=\sqrt{\Delta(g)}\,\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}A_1^{i_1}A_2^{i_2}\dots A_n^{i_n}. \qquad /17,76/$$

თუ A_j^i ვექტორების ნაცვლად ავიღებთ რიმანის სივრცის კოორდინატების სათანადო დიფერენციალებს, გვექნება

$$d\Omega=\sqrt{\Delta(g)}\,dq^1 dq^2 \dots dq^n, \qquad /17,77/$$

რომელიც წარმოადგენს R_n სივრცის მოცულობის ელემენტს.

ცხადია, რომ რეალური სივრცე-დროის შემთხვევაში მოცულობის ელემენტს ექნება სახე

$$d\Omega=\sqrt{-\Delta(g)}\,dq^1 dq^2 dq^3 dq^4. \qquad /17,78/$$

ახლა შემოვიღოთ ამავე სივრცეში ორგანზომილებიანი და სამგანზომილებიანი ჰიპერზედაპირის ფარის ელემენტები. ჰიპერზედაპირის

ფარის ელემენტი, რომელიც წარმოადგენს სამი უსასრულოდ მცირე მონაკვეთის ნაწილს, გამოიხატება dS^{ikl} მესამე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორით. ამ ტენზორის ნაცვლად ხელსაყრელია მისი დუალური ვექტორის შემოღება

$$dS_i = \frac{1}{3!} e_{iklm} dS^{klm}. \qquad /17,79/$$

თუ გავიხსენებთ, რომ $e_{iklm} = \sqrt{-\Delta(g)}\,\varepsilon_{iklm}$, მაშინ ჰიპერზედაპირის ფარის ელემენტს ექნება სახე

$$dS_i = \frac{1}{6}\sqrt{-\Delta(g)}\,\varepsilon_{iklm}\,dS^{klm}, \qquad /17,80/$$

საიდანაც საბოლოოდ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$dS_i = \sqrt{-\Delta(g)}\,\varepsilon_{iklm}\,dq^k_{(1)}\,dq^l_{(2)}\,dq^m_{(3)}. \qquad /17,81/$$

ეს გამოსახულება ოთხგანზომილებიანი ფსევდოევკლიდური სივრცის ჰიპერზედაპირის ფარის ელემენტისაგან განსხვავდება $\sqrt{-\Delta(g)}$ მამრავლით.

სრულიად ანალოგიურად, თუ df^{ik} არის მეორე რანგის კონტრავარიანტული ტენზორი, რომელიც შედგენილია ორი უსასრულოდ მცირე მონაკვეთის ნაწილისაგან $df^{ik} = dq^i_{(1)}dq^k_{(2)} - dq^i_{(2)}dq^k_{(1)}$ მაშინ ფარის ელემენტი შეგვიძლია გამოვსახოთ მეორე დუალური ტენზორით:

$$df^*_{ik} = \frac{1}{2} e_{iklm}\,df^{lm} = \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta(g)}\,\varepsilon_{iklm}\,df^{lm} \qquad /17,82/$$

ან, საბოლოოდ,

$$df^*_{ik} = \sqrt{-\Delta(g)}\,\varepsilon_{iklm}\,dq^l_{(1)}\,dq^m_{(2)}. \qquad /17,83/$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიაც df^*_{ik} ელემენტი ოთხგანზომილებიანი ფსევდოევკლიდური სივრცის შესაბამისი ელემენტისაგან

$\sqrt{-\Delta(g)}$ მამრავლით განსხვავდება.

ამის შემდეგ ძნელი არ არის ინტეგრალური თეორემების ჩამოყალიბება რიმანის სივრცეში. მაგალითად, გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულას მივიღებთ, თუ შევასრულებთ შეცვლას

$$dS_i \longrightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial q^i}. \qquad /17,84/$$

შედეგად ინტეგრალი გავრცელებული ჰიპერზედაპირზე გარდაიქმნება ამ ზედაპირით "შემოსაზღვრულ" მოცულობაზე გავრცელებულ ინტეგრალში.

12. <u>ტენზორული სიმკვრივეები</u>. დავუშვათ, რომ მოცულობითი ინტეგრალი

$$\int_\Omega L(q^1,q^2,\cdots q^n)\,d\Omega = Inv., \qquad /17,85/$$

სადაც $L(q^1,q^2,\dots q^n)$ წარმოადგენს სკალარულ ფუნქციას, ე.ი.

$$L(q^1,q^2,\dots q^n) = L'(q'^1,q'^2,\dots q'^n), \qquad /17,86/$$

ხოლო $d\Omega$ მოცულობის ელემენტი განისაზღვრება /17,77/ ფორმულით. მაშასადამე, მოვახდინოთ ინტეგრალში ცვლადის გარდაქმნა q^i ცვლადებიდან ახალ q'^i ცვლადებზე. მრავალჯერადი ინტეგრალში ცვლადების გარდაქმნის წესის გამოყენებით გვექნება

$$\int_\Omega L(q^1,q^2,\cdots q^n)\sqrt{\Delta(g)}\,\frac{D(q^1,q^2,\cdots q^n)}{D(q'^1,q'^2,\cdots q'^n)}\,dq'^1 dq'^2\cdots dq'^n. \qquad /17,87/$$

მეორე მხრივ, გამოვიყენოთ /17,86/ და გავითვალისწინოთ /17,59/ ტოლობა, რომლის თანახმად

$$\sqrt{\Delta(g)}\,\frac{D(q^1,q^2,\cdots,q^n)}{D(q'^1,q'^2,\cdots,q'^n)} = \sqrt{\Delta(g')}. \qquad /17,88/$$

მეორედ /17,87/ მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int_{\Omega} L'(q'^1, q'^2, \dots q'^n) \sqrt{\Delta(q')}\, dq'^1 dq'^2 \dots dq'^n, \qquad /17,89/$$

რაც იმას ამტკიცებს, რომ /17,86/ ინტეგრალი მართლაც ინვარიანტული სიდიდეა.

შევნიშნოთ, რომ /17,89/ ინვარიანტულ ინტეგრალში გამოსახულებას

$$\sqrt{\Delta(q)}\, L(q^1, q^2, \dots q^n) \qquad /17,90/$$

უწოდებენ სკალარულ სიმკვრივეს. ანალოგიურად იხილავენ $\sqrt{\Delta(q)}\, A^i(q^1, q^2, \dots q^n)$ ვექტორულ, $\sqrt{\Delta(q)}\, T^{ik}(q^1, q^2, \dots q^n)$ მეორე რანგის ტენზორულ სიმკვრივეებს.

§ 18. კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ვექტორების გეომეტრიული შინაარსი

ამ პარაგრაფში ჩვენ გამოვარკვევთ ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული მდგენელების გეომეტრიულ შინაარსს და ორთოგონალურ მრუდწირულ სისტემაში დავაკავშირებთ მათ ე.წ. ვექტორის ფიზიკურ კომპონენტებთან.

განვიხილოთ რიმანის სივრცე, რომლის მეტრიკა განსაზღვრულია ფორმულით

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dq^\alpha dq^\beta, \quad (\alpha,\beta=1,2,\dots,n) \qquad /18,1/$$

სადაც q^α წერტილის მრუდწირული კოორდინატებია R_n სივრცეში. ქვემოთ, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება ნათქვამი, გამეორებული ინდექსით ვიგულისხმებთ აჯამვას. ილუსტრაციის გამარტივების მიზნით დავუშვათ, რომ R_n სივრცე წარმოადგენს ევკლიდის E_m სივრცის $(m \geq n)$ ქვესივრცეს. E_m სივრცეში წერტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ $x^\alpha = x_\alpha$ -ით, მაშინ, როგორც ვიცით, კოვარიანტული მეტრიკული ტენზორი შეიძლება განვსაზღვროთ ფორმულით

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\nu}{\partial q^\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial q^\beta}, \quad (\nu=1,2,\dots m) \qquad /18,2/$$

ხოლო კონტრავარიანტული მეტრიკული ტენზორისათვის გვექნება

$$g^{\alpha\beta} = g^{-1}_{\alpha\beta} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x_\nu}\frac{\partial q^\beta}{\partial x_\nu}. \qquad /18,3/$$

X. ვექტორის სიგრძე. რიმანის სივრცეში კონტრავარიანტული ვექტორის საშუალებით შევადგინოთ სკალარული გამოსახულება

$$l = (g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta)^{1/2}. \qquad /18,4/$$

ეს სკალარი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში

მივიღებთ ვექტორის სიგრძის ფორმულას

$$l=\sqrt{(A^\alpha)^2}=\sqrt{(A^1)^2+(A^2)^2+(A^3)^2},$$

ამიტომ /18,4/ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც კონტრავარიანტული ვექტორის სიგრძე. იგივე A^i ვექტორის სიგრძე შეიძლება განსაზღვრულ იქნეს ფორმულით

$$l=\left(g^{\alpha\beta}A_\alpha A_\beta\right)^{1/2}, \qquad /18,5/$$

რომელიც ევკლიდის მართკუთხა სისტემაში დაიყვანება იგივე $l=\sqrt{A_\alpha A_\alpha}$ სიდიდეზე.

თუ ვექტორის სიგრძე ერთის ტოლია, მაშინ მას ერთეულოვანი ვექტორი ქვია. ე.ი. A^α იქნება ერთეულოვანი, როცა

$$\left(g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta\right)^{1/2}=1. \qquad /18,6/$$

/18,1/ ფორმულის ds^2-ზე გაყოფით მივიღებთ

$$g_{\alpha\beta}\frac{dq^\alpha}{ds}\frac{dq^\beta}{ds}=1. \qquad /18,7/$$

მაშასადამე,

$$u^\alpha=\frac{dq^\alpha}{ds} \qquad /18,8/$$

ერთეულოვან ვექტორს წარმოადგენს.

2. <u>კუთხე ორ ვექტორს შორის</u>. რიმანის სივრცის ნებისმიერი A^α კონტრავარიანტული ვექტორი ყოველთვის შეგვიძლია შევუსაბამოთ იგივე მიმართულების უსასრულოდ მცირე dq^α ვექტორს, ე.ი.

$$dq^\alpha=kA^\alpha, \qquad /18,9/$$

სადაც k უსასრულოდ მცირე სკალარია. პირობის თანახმად, R_n წარმოადგენს E_m-ის ქვესივრცეს, რაც იმას ნიშნავს, რომ არსებობს ცალსახა კავშირი q^α და x_i კოორდინატებს შორის,

ამიტომ dq^α ვექტორს შეესაბამება dx_α ვექტორი, რომელიც თავის მხრივ პროპორციული იქნება E_m სივრცის რაიმე A^φ_α წრფივი ორთოგონალური /დეკარტის/ ვექტორისა

$$dx^\alpha = KA^\varphi_\alpha. \qquad (\alpha=1,2,\dots m) \qquad /18,10/$$

მეორე მხრივ, თუ x_α -ს განვიხილავთ, როგორც q^α ცვლადების ფუნქციებს, მივიღებთ დავწერთ

$$dx_\alpha = \frac{\partial x_\alpha}{\partial q^\beta} dq^\beta, \qquad (\beta=1,2,\dots n) \qquad /18,11/$$

რომელიც საშუალებას გვაძლევს ურთიერთდავაკავშიროთ A^α და A^φ_α ვექტორები. მართლაც, ამ უკანასკნელში /18,10/ და /18,9/ ფორმულების შეტანით მივიღებთ

$$A^\varphi_\alpha = \frac{\partial x_\alpha}{\partial q^\beta} A^\beta, \qquad /18,12/$$

სადაც $\alpha = 1,2,\dots m$. ამგვარად, რიმანის სივრცის კონტრავა-რიანტულ A^α ვექტორს ეკლიდის E_m სივრცეში შეესაბამება წრფი-ვი ორთოგონალური A^φ_α ვექტორი, რომელიც განისაზღვრება /18,12/ ფორმულით.

ცხადია, რომ R_n სივრცის სხვა რომელიმე B^α ვექტორისა-თვისაც გვექნება იგივე კავშირი. სახელდობრ, თუ B^φ_α არის E_m სივრცის წრფივი ორთოგონალური ვექტორი, მაშინ

$$B^\varphi_\alpha = \frac{\partial x_\alpha}{\partial q^\beta} B^\beta. \qquad (\beta=1,2,\dots n) \qquad /18,13/$$

რადგან A^φ_α და B^φ_α წრფივი ორთოგონალური ვექტორებია, ამიტომ მათ სკალარულ ნამრავლს ექნება სახე $(\vec{A}^\varphi, \vec{B}^\varphi) = A^\varphi_\alpha B^\varphi_\alpha$, ხოლო /18,12/ და /18,13/ ფორმულების გათვალისწინებით მივიღებთ

დავწეროთ

$$(\vec{A}^\varphi,\vec{B}^\varphi) = \frac{\partial x_\alpha}{\partial q^\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial q^\gamma}A^\beta B^\gamma. \qquad /18,14/$$

და გავითვალისწინებთ მეტრიკული ტენზორის /18,2/ განსაზღვრებას, /18,14 / ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$(\vec{A}^\varphi,\vec{B}^\varphi) = g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta = g^{\alpha\beta}A_\alpha B_\beta, \qquad /18,15/$$

მაშასადამე, /17,53 / ფორმულის ძალით

$$(\vec{A}^\varphi,\vec{B}^\varphi) = A^\alpha B_\alpha = A_\alpha B^\alpha.$$

ახლა განვსაზღვროთ კუთხე A^i და B^k ვექტორებს შორის. ამისათვის საკმარისია ვიპოვოთ კუთხე E_m სივრცის $\vec{A}^\varphi$ და $\vec{B}^\varphi$ ვექტორებს შორის. როგორც ცნობილია, $\vec{A}^\varphi$ და $\vec{B}^\varphi$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი განისაზღვრება ფორმულით $\cos\theta = \frac{1}{A^\varphi B^\varphi}(\vec{A}^\varphi,\vec{B}^\varphi)$. მაშასადამე,

$$\cos\theta = \frac{g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta}{\sqrt{g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta}\sqrt{g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta}}, \qquad /18,16/$$

სადაც ჩვენ გავითვალისწინეთ, რომ, მაგალითად, A^φ_α ვექტორის სიგრძე,/18,12/ ფორმულის თანახმად, ტოლი იქნება

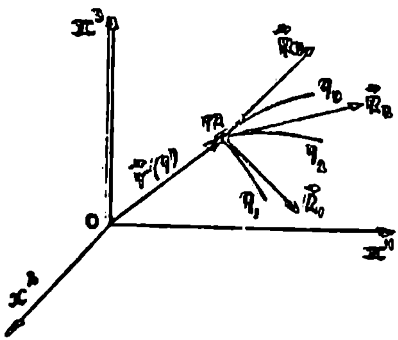
$$(A^\varphi_\alpha A^\varphi_\alpha)^{1/2} = \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial q^\nu}A^\nu\frac{\partial x_\alpha}{\partial q^\mu}A^\mu\right)^{1/2} = (g_{\nu\mu}A^\nu A^\mu)^{1/2}. \qquad /18,17/$$

ე. კავშირი კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ ვექტორებს შორის[1] განვიხილოთ E_3 სივრცე და მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემის მაგალითზე შევისწავლოთ კავშირი ვექტორის კო- და კონტრავარიანტულ მდგენელებს შორის. ამავე დროს, დავაკავშიროთ ისინი ვექტორის ე.წ. ფიზიკურ კომპონენტებთან და დეკარტის წრფივ

---

1 ქვემოთ, აღრევის თავიდან ასაცილებლად, ჯამის აღმნიშვნელ მუნჯ ინდექსებით არ ვისარგებლებთ.

ორთოგონალურ მდგენელებთან. E_3 სივრცეში მრუდწირული კოორდინატები ჩვენ უკვე განვიხილეთ § 52-ში. ამავე დროს, ჩვენ აღარ ვისარგებლებთ ლამეს პარამეტრებით, რამდენადაც მრუდწირული სისტემის ყველა ფორმულის გამოხატვა შეგვიძლია ჩვენთვის უკვე კარგად ცნობილი მეტრიკული $g_{\alpha\beta}$ ტენზორის საშუალებით. დავიხსენოთ ძირითადი ფორმულები. მრუდწირული სისტემის ბაზისი ეწოდება სამი $\vec R_1, \vec R_2, \vec R_3$ არაკომპლანარული ვექტორის ერთობლიობას, რომლებიც ეხებიან საკოორდინატო წირებს გარკვეულ m წერტილში /ნახ.35/. ეს ვექტორები განისაზღვრებიან ფორმულებით



ნახ.35

$$\vec R_\alpha = \frac{\partial \vec r}{\partial q^\alpha}, \quad (\alpha = 1,2,3) \qquad /18,18/$$

სადაც q^1, q^2, q^3 m-წერტილის მრუდწირული კოორდინატებია, ხოლო $\vec r(q)$ მისი რადიუსვექტორი. $\vec R_\alpha$ ვექტორები მრუდწირული სისტემის ერთეულოვან $\vec e_\alpha$ ვექტორებთან ასეა დაკავშირებული:

$$\vec R_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}\, \vec e_\alpha , \qquad /18,19/$$

სადაც $g_{\alpha\alpha}$ /18,2/ მეტრიკული ტენზორის დიაგონალური ელემენტებია. მეტრიკული ტენზორი $\vec R_\alpha$ ბაზისის საშუალებით შემდეგნაირად განიმარტება:

$$g_{\alpha\beta} = (\vec R_\alpha, \vec R_\beta) = \left(\frac{\partial \vec r}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \vec r}{\partial q^\beta}\right); \qquad /18,20/$$

ამავე დროს, გავიხსენოთ, რომ $\vec R_\alpha$-ს კოორდინატების მიხედვით აქვს შემდეგი გამოხატულება:

$$\vec R_\alpha=\sum_{\beta=1}^{3}\vec i_\beta\frac{\partial x_\beta}{\partial q^\alpha}.\quad(\beta=1,2,3) \qquad /18,21/$$

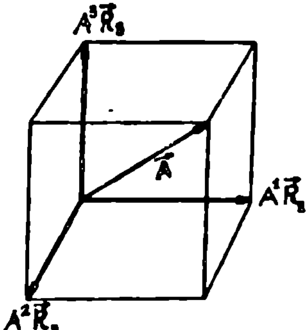
$\vec R_\alpha$ ბაზისში ნებისმიერი $\vec A$ ვექტორი ასე შეგვიძლია წარმოვა-დგინოთ:

$$\vec A=\sum_\alpha \vec R_\alpha A^\alpha,\quad(\alpha=1,2,3) \qquad /18,22/$$

სადაც A^α არის $\vec A$ ვექტორის კონტრავარიანტული მდგენელი. მართლაც, ისევე როგორც ზემოთაც აღვნიშნეთ, ნებისმიერი $\vec A$ ვექტორი შეგვიძლია გამოვსახოთ $\vec A=K\,d\vec r$ ნამრავლის სახით, სადაც K სკალარია. რადგანაც $d\vec r=\sum_\alpha\frac{\partial\vec r}{\partial q^\alpha}dq^\alpha$, იმდენად

$$\vec A=\sum_\alpha\frac{\partial\vec r}{\partial q^\alpha}(K\,dq^\alpha)=\sum_\alpha\vec R_\alpha A^\alpha, \qquad /18,23/$$

სადაც $A^\alpha\equiv K\,dq^\alpha$. ცხადია, რომ $A^1\vec R_1,A^2\vec R_2,A^3\vec R_3$ ვექტორები წარმოადგენენ იმ პარალელეპიპედის წიბოებს, რომლის



ნახ.36

დიაგონალია $\vec A$ ვექტორი /ნახ.36/. რადგან მეტრიკული ტენზორი $g_{\alpha\beta}=(\vec R_\alpha\cdot\vec R_\beta)$, ამიტომ $R_\alpha=\sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ და ამ პარალელეპიპედის წიბოების სიგრძე, ე.ი. $\vec A$ ვექტორის კომპონენტები განისაზღვრებიან ფორმულებით:

$$A^1\sqrt{g_{11}},\ A^2\sqrt{g_{22}},\ A^3\sqrt{g_{33}}. \qquad /18,24/$$

შეუღლებული ბაზისი. ახლა შემოვიღოთ სამი სხვა არაკომპლანარული $\vec R^1, \vec R^2, \vec R^3$ ვექტორი შემდეგი ფორმულებით:

$$\vec R^1=\frac{[\vec R_2,\vec R_3]}{(\vec R_1,[\vec R_2,\vec R_3])},\quad \vec R^2=\frac{[\vec R_3,\vec R_1]}{(\vec R_1,[\vec R_2,\vec R_3])},\quad \vec R^3=\frac{[\vec R_1,\vec R_2]}{(\vec R_1[\vec R_2,\vec R_3])}. \qquad /18,25/$$

სადაც $[\vec R_\alpha, \vec R_\beta]$ ვექტორულ ნამრავლს აღნიშნავს, ხოლო $(\vec R_1[\vec R_2,\vec R_3]) = V$ შერეული ნამრავლი $\vec R_1, \vec R_2, \vec R_3$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობას გამოხატავს. $\vec R^\alpha$ ვექტორების სამეულს შეუღლებულ ბაზისს უწოდებენ. დავადგინოთ $\vec R^\alpha$ ვექტორების თვისებები. ჯერ ერთი, /18,25/ განმარტებიდან, ცხადია, რომ

$$(\vec R^\alpha, \vec R_\beta) = \delta^\alpha_\beta. \qquad /18,26/$$

თუ გავითვალისწინებთ $\vec R_\alpha$-ს /18,18/ გამოსახულებას, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\vec R^\alpha = \frac{\partial q^\alpha}{\partial \vec r} = grad\, q^\alpha, \qquad /18,27/$$

ე.ი. $\vec R^\alpha$ შეუღლებული ბაზისის ვექტორები მართობული ყოფილა $q^\alpha = const$ საკოორდინატო ზედაპირებისა. გაშლილი სახით /18,27/ ასე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\vec R^\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \vec i_\beta \frac{\partial q^\alpha}{\partial x_\beta}. \quad (\alpha=1,2,3) \qquad /18,28/$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ

$$(\vec R^1[\vec R^2,\vec R^3]) = (\vec R_1[\vec R_2,\vec R_3])^{-1} = \frac{1}{V}. \qquad /18,29/$$

მართლაც,

$$(\vec R^1[\vec R^2,\vec R^3]) = \frac{1}{V^3}\left([\vec R_2,\vec R_3][[\vec R_3,\vec R_1][\vec R_1,\vec R_2]]\right);$$

მეორე მხრივ "ბაც მინუს ცაბ " ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$[[\vec R_3,\vec R_1][\vec R_1,\vec R_2]]=\vec R_1([\vec R_3,\vec R_1],\vec R_2)-\vec R_2([\vec R_3,\vec R_1],\vec R_1)=\vec R_1 V.$$

ამ გამოსახულების წინა ფორმულაში შეტანით მივიღებთ

$$(\vec R^1,[\vec R^2,\vec R^3])=\frac{1}{V^2}([\vec R_2,\vec R_3],\vec R_1)=\frac{1}{V};$$

მაშასადამე, /18,29/ ფორმულის სამართლიანობა დამტკიცებულია.

ჩვენ შეგვიძლია პირიქით $\vec R_\alpha$ ბაზისური ვექტორების გამოხატვა შეუღლებული ბაზისის $\vec R^\alpha$ ვექტორების საშუალებით. გვექნება:

$$\vec R_1=\frac{[\vec R^2,\vec R^3]}{(\vec R^1,[\vec R^2,\vec R^3])},\quad \vec R_2=\frac{[\vec R^3,\vec R^1]}{(\vec R^1,[\vec R^2,\vec R^3])},\quad \vec R_3=\frac{[\vec R^1,\vec R^2]}{(\vec R^1,[\vec R^2,\vec R^3])}. \qquad /18,30/$$

ამ ფორმულების გამოყვანა ძნელი არ არის. დავამტკიცოთ, მაგალითად, მესამე ფორმულის სამართლიანობა. ამისათვის /18,25/-ის პირველი გამოსახულება ვექტორულად გავამრავლოთ $\vec R^2$-ზე. მივიღებთ

$$[\vec R^1,\vec R^2]=\frac{1}{V}[[\vec R_2,\vec R_3],\vec R^2]=-\frac{1}{V}\{\vec R_2(\vec R^2,\vec R_3)-\vec R_3(\vec R_2,\vec R^2)\}.$$

/18,26/ ორთოგონალობის ძალით $(\vec R^2,\vec R_3)=0$, ხოლო $(\vec R_2,\vec R^2)=1$. ასე, რომ, $\vec R_3=V[\vec R^1,\vec R^2]$. თუ გავიხსენებთ /18,29/-ს, მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ბაზისის ვექტორებსა და შეუღლებული ბაზისის ვექტორებს შორის კავშირს ახორციელებს მეტრიკული ტენზორი. კერძოდ,

$$\vec R_\alpha=\sum_m g_{\alpha m}\vec R^m,\qquad \vec R^\alpha=\sum_m g^{\alpha m}\vec R_m, \qquad /18,31/$$

სადაც $g^{\alpha m}$ კონტრავარიანტული მეტრიკული ტენზორია. ამასთან,

$$\sum_m g_{\alpha m}g^{m\beta}=\delta_\alpha^\beta. \qquad /18,32/$$

/18,31/ ფორმულების სამართლიანობაში ადვილად დავრწმუნდებით. მართლაც, თუ /18,31/-ის მეორე გამოსახულებას გავამრავლებთ $\vec{R}_\beta$ -ზე, გვექნება

$$(\vec{R}_\beta \cdot \vec{R}^\alpha) = \sum_m g^{\alpha m} (\vec{R}_\beta \cdot \vec{R}_m) = \sum_m g^{\alpha m} g_{\beta m} = \delta^\alpha_\beta, \qquad /18,33/$$

რაც ამტკიცებს /18,31/-ის მეორე ფორმულის სამართლიანობას. ამავე დროს, აღსანიშნავია, რომ /18,31/-ის მეორე ფორმულის $\vec{R}^\beta$-ზე გამრავლებით კონტრავარიანტული მეტრიკული ტენზორისათვის მივიღებთ გამოსახულებას

$$g^{\alpha\beta} = (\vec{R}^\alpha, \vec{R}^\beta); \qquad /18,34/$$

სადაც, ცხადია, რომ $R^\alpha = \sqrt{g^{\alpha\alpha}}$.

მეუღლებული ბაზისის ორტებისათვის $\left(\vec{e}^\alpha = \vec{R}^\alpha / R^\alpha\right)$ გვექნება

$$\vec{e}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}} \sum_{\beta=1}^{3} \vec{i}_\beta \frac{\partial q^\alpha}{\partial x_\beta} \quad (\alpha = 1,2,3) \qquad /18,35/$$

ვიპოვოთ $\vec{e}^\alpha$ მეუღლებული ბაზისის ორტის მიერ შედგენილი კუთხეები დეკარტის მართკუთხა სისტემის ღერძებთან. ამისათვის საკმარისია ვიპოვოთ $(\vec{e}^\alpha, \vec{i}_\beta)$ სკალარული ნამრავლი. გვექნება

$$(\vec{e}^\alpha, \vec{i}_\beta) = \frac{1}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}} \frac{\partial q^\alpha}{\partial x_\beta}. \qquad /18,36/$$

ადვილად ვიპოვით კუთხეს მეუღლებული ბაზისის ორტებს შორისაც. /18,35/ ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$(\vec{e}^\alpha, \vec{e}^\beta) = \frac{1}{\sqrt{g^{\alpha\alpha} g^{\beta\beta}}} \left(\sum_{\mu=1}^{3} \vec{i}_\mu \frac{\partial q^\alpha}{\partial x_\mu} \sum_{\nu=1}^{3} \vec{i}_\nu \frac{\partial q^\beta}{\partial x_\nu} \right),$$

სადაც $(\vec{i}_\mu, \vec{i}_\nu) = \delta_{\mu\nu}$ სიმბოლოთი ფილტრაციის ჩატარებისა და /18,3 / ფორმულის გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ

$$(\vec e^{\alpha}, \vec e^{\beta}) = \frac{g^{\alpha\beta}}{\sqrt{g^{\alpha\alpha} g^{\beta\beta}}}. \qquad /18,37/$$

ცხადია, რომ იგივე ფორმულით გამოიხატება კუთხე შეუღლებული ბაზისის $\vec R^{\alpha}$ ვექტორებს შორისაც.

ბოლოს, /18,26/-დან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$(\vec e_{\alpha}, \vec e^{\beta}) = \delta_{\alpha}^{\beta}. \qquad /18,38/$$

ახლა გამოვიყენოთ შეუღლებული ბაზისი ნებისმიერი $\vec A$ ვექტორის განსასაზღვრავად მდგენელების საშუალებით. ცხადია, გვექნება

$$\vec A = \sum_{\alpha} \vec R^{\alpha} A_{\alpha}, \qquad /18,39/$$

სადაც A_{α} არის $\vec A$ ვექტორის კოვარიანტული კომპონენტები. /18,27/ ფორმულის თანახმად, $\vec A$ ვექტორის მდგენელები აღებულია საკოორდინატო ზედაპირების მართობული ვექტორების სისტემაში.

ვიპოვოთ $\vec A$ ვექტორის ორთოგონალური პროექციები სიგრძე მრუდწირული ღერძების მიმართულებაზე /ე.ი. $\vec R_{\alpha}$ ვექტორებზე/. ამ მიზნით /18,39/ სკალარულად გავამრავლოთ $\vec R_{\beta}$ ბაზისურ ვექტორზე. გვექნება

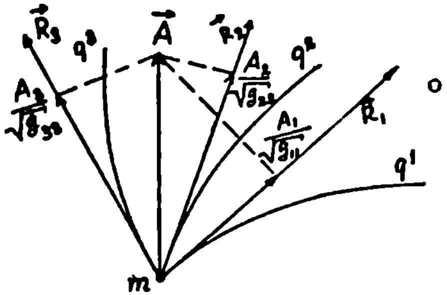
$$(\vec A, \vec R_{\beta}) = \sum_{\alpha=1}^{3} A_{\alpha} (\vec R^{\alpha}, \vec R_{\beta}) = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \delta_{\beta}^{\alpha} = A_{\beta}, \qquad /18,40/$$

საიდანაც $\vec R_{\beta}$ ვექტორის სიდიდეზე გაყოფით და $R_{\beta} = \sqrt{g_{\beta\beta}}$ ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$(\vec A, \vec e_{\alpha}) = \frac{A_{\alpha}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}, \qquad /18,41/$$

სადაც $\vec e_{\alpha}$ არის მრუდწირული α-ღერძის ორტი. მაშასადამე, $\vec A$

ვექტორის ორთოგონალური პროექციის სიგრძე, m -წერტილში/ნახ.37/ მრუდწირული საკოორდინატო წირების მხებებზე, განისაზღვრება /18,41/ ფორმულით. ხოლო, როგორც ქვემოთ ვაჩვენებთ, $A^{\alpha}\sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ არის იმ პარალელეპიპედის წიბოს სიგრძეები, რომლის დიაგონალია $\vec{A}$ ვექტორი.



ნახ.37

რადგან $\vec{A}=\sum_{\alpha}\vec{R}_{\alpha}A^{\alpha}=\sum_{\alpha}\vec{R}^{\alpha}A_{\alpha}$, ამიტომ $\vec{R}_{\beta}$ ვექტორზე სკალარული გამრავლებით მივიღებთ ტოლობას

$$A_{\alpha}=\sum_{\beta}g_{\alpha\beta}A^{\beta}; \qquad /18,42/$$

მაშასადამე, A^{α} და A_{α} ყოფილა მდგენელები ერთი და იგივე $\vec{A}$ ვექტორისა ორ სხვადასხვა ბაზისში. $\vec{A}$ ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტი $\vec{R}_{\alpha}$ ძირითადი ბაზისის მიმართ იგივეა, რაც ამ ვექტორის კოვარიანტული კომპონენტები $\vec{R}^{\alpha}$ შეუღლებულ ბაზისში და, პირიქით. ე.ი. თუ ძირითადი ბაზისის ნაცვლად შეუღლებულ ბაზისს ავიღებთ, მაშინ კოვარიანტული მდგენელები გახდება კონტრავარიანტული და, პირიქით. ამასთან, განსხვავება კო და კონტრავარიანტულ მდგენელებს შორის მოისპობა, როცა ბაზისის ვექტორები წყვილწყვილად ურთიერთმართობია. მართლაც, ამ შემთხვევაში $[\vec{R}_{\alpha},\vec{R}_{\beta}]=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\vec{R}_{\gamma}$ და /18,25/-დან მივიღებთ $\vec{R}^{\alpha}=\vec{R}_{\alpha}$;

აღვნიშნოთ, რომ გარდა კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ვექტორებისა იხილავენ ვექტორის ე.წ. ფიზიკურ მდგენელებს, რომლებიც განისაზღვრებიან ფორმულით

$$\vec{A}=\sum_{\alpha=1}^{3}A^{*}_{\alpha}\vec{e}_{\alpha}. \qquad /18,43/$$

ცხადია, რომ $A^*_\alpha=(\vec{A},\vec{e}_\alpha)$, საიდანაც ჩანს, რომ ვექტორის ფიზიკური კომპონენტები ყოფილა $\vec{A}$ ვექტორის ორთოგონალური პროექციები $\vec{e}_\alpha$ მიმართულებებზე.

საინტერესოა ჩვენს მიერ შერჩეული კოორდინატთა სისტემაში შემოღებული ვექტორების მდგენელების დაკავშირება დეკარტის ორთოგონალურ სისტემაში $\vec{A}$ ვექტორის $A^{\text{დ}}_\alpha$ კომპონენტებთან:

$$\vec{A}=\sum_\alpha A^{\text{დ}}_\alpha \vec{i}_\alpha, \qquad (\alpha=1,2,3) \qquad /18,44/$$

სადაც $\vec{i}_\alpha$ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ორტებია.

დავამყაროთ ახლა კავშირი $\vec{A}$ ვექტორის ფიზიკურ და დეკარტის კომპონენტებს შორის. გამოვიდეთ ტოლობიდან

$$\sum_\alpha A^{\text{დ}}_\alpha \vec{i}_\alpha=\sum_\beta A^*_\beta \vec{e}_\beta . \qquad /18,45/$$

ორივე მხარე სკალარულად გავამრავლოთ $\vec{i}_\alpha$ ორტზე. გვექნება

$$A^{\text{დ}}_\alpha=\sum_\beta A^*_\beta(\vec{i}_\alpha,\vec{e}_\beta). \qquad /18,46/$$

/2,23/ ფორმულის გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ საძიებელ კავშირს

$$A^{\text{დ}}_\alpha=\sum_{\beta=1}^{3}\frac{A^*_\beta}{\sqrt{g_{\beta\beta}}}\frac{\partial x_\alpha}{\partial q^\beta}. \qquad /18,47/$$

ასევე შეგვიძლია ვიპოვოთ კავშირი $\vec{A}$ ვექტორის დეკარტისა და კონტრავარიანტულ კომპონენტებს შორის, თუ გამოვალთ ტოლობიდან

$$\sum_\alpha A^{\text{დ}}_\alpha \vec{i}_\alpha=\sum_\beta A^\beta \vec{R}_\beta . \qquad /18,48/$$

$\vec{i}_\alpha$ ორტზე სკალარულად გამრავლებით და /18,21/ ფორმულის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$A_\alpha^{\text{ф}} = \sum_\beta A^\beta \frac{\partial x_\alpha}{\partial q^\beta}. \qquad /18,49/$$

ცხადია, ეს ფორმულა ემთხვევა /18,2/-ს, რომელიც სხვა მოსაზრებით გამოვიყვანეთ. სრულიად ანალოგიურად დავამყარებთ კავშირს ვექტორის და კოვარიანტულ კომპონენტებს შორის. ამისათვის ვისარგებლოთ ტოლობით

$$\sum_\alpha{}' A_\alpha^{\text{ф}} \vec{i}_\alpha = \sum_\beta A_\beta \vec{R}^\beta, \qquad /18,50/$$

სადაც

$$A_\alpha^{\text{ф}} = \sum_\beta A_\beta \frac{\partial q^\beta}{\partial x_\alpha}. \quad (\beta=1,2,3) \qquad /18,51/$$

ამ ფორმულის მიღების დროს გავითვალისწინეთ $\vec{R}^\beta$ -ს /18,28/ განმარტება.

საინტერესოა კავშირის დამყარება ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტებისა ფიზიკურთან. ამისათვის დავწეროთ ტოლობა

$$\sum_\alpha \vec{R}_\alpha A^\alpha = \sum_\beta A_\beta^* \vec{e}_\beta. \qquad /18,52/$$

ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად გავამრავლოთ $\vec{R}^\gamma$ ვექტორზე. მივიღებთ

$$A^\gamma = \sum_\beta A_\beta^* (\vec{R}^\gamma, \vec{e}_\beta). \qquad /18,53/$$

გავიხსენოთ, რომ $\vec{R}^\gamma = \sqrt{g^{\gamma\gamma}}\, \vec{e}^\gamma$, მაშინ მივიღებთ

$$A^\alpha = \sqrt{g^{\alpha\alpha}}\, A_\alpha^*. \qquad /18,54/$$

სრულიად ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ ვექტორის კოვარიანტულ და ფიზიკურ მდგენელებს შორის გვაქვს შემდეგი კავშირი:[1]

$$A_\alpha=\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\,A^*_\alpha. \qquad /18,55/$$

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ ორთოგონალურ ბაზისში ვექტორის კო, კონტრა და ფიზიკური კომპონენტები ერთმანეთს დაემთხვევა

$$A^*_\alpha=A_\alpha=A^\alpha. \qquad /18,56/$$

შეიძლება დაგვებადოს კითხვა, თუ რა საჭიროა ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული მდგენელების შემოღება, როცა ნებისმიერი ვექტორი ცალსახად განისაზღვრება ფიზიკური კომპონენტების საშუალებით. საქმე ის არის, რომ მრუდწირული კოორდინატების სარგებლობის შემთხვევაში ვექტორის ფიზიკური კომპონენტების გარდაქმნის კანონები მეტად რთულ სახეს ღებულობენ. კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ტენზორების შემოღება კი ამ სიძნელეს თავიდან გვაცილებს.

4. <u>დეკარტის ირიბკუთხა სისტემა</u>. ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული მდგენელები შეგვიძლია განვიხილოთ დეკარტის ირიბკუთხა სისტემაშიც. $\vec{A}$ ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტები განსაზღვრული იქნება ტოლობით

$$\vec{A}=\sum_{\alpha=1}^{3}A^\alpha\vec{R}_\alpha,\quad(\alpha=1,2,3) \qquad /18,57/$$

კერძოდ, რადიუსვექტორისათვის გვექნება

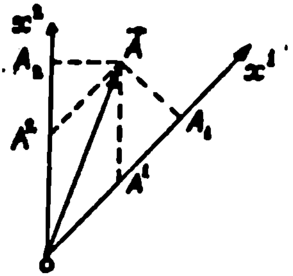
$$\vec{r}=\sum_\alpha x^\alpha\vec{R}_\alpha, \qquad /18,58/$$

---

1. ცხადია, ამ კავშირს ლამეს პარამეტრებში ექნება შემდეგი სახე: $A^*_\alpha=h_{\alpha\alpha}A^\alpha=h^{-1}_{\alpha\alpha}A_\alpha$.

სადაც $\vec{R}_\alpha$ ირიბკუთხა სისტემის ბაზისის ვექტორებია. რაც შეეხება $\vec{A}$ ვექტორის კოვარიანტულ მდგენელებს, ისინი განსაზღვრული იქნებიან შემდეგი სკალარული ნამრავლით:

$$A_\alpha=(\vec{A},\vec{R}_\alpha). \qquad /18,59/$$



ნახ. 38

ნახ. 38-ზე მოცემულია $\vec{A}$ ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული მდგენელები $R_1 = R_2 = 1$ შემთხვევაში სიბრტყეზე. როგორც ვხედავთ, ვექტორის კონტრავარიანტული მდგენელები წარმოადგენენ ირიბკუთხოვან გეგმილებს, კოვარიანტული კი- მართკუთხას.

შეუღლებულ ბაზისში რადიუსვექტორისათვის გვექნება შემდეგი წარმოდგენა:

$$\vec{r}=\sum_{i=1}^{3} x_i \vec{R}^i, \qquad /18,60/$$

სადაც x_i არის $\vec{r}$ ვექტორის კოვარიანტული მდგენელები, ან მდგენელები შეუღლებული ბაზისის კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე.

§ ~~19~~. ტენზორული ანალიზი რიმანის სივრცეში

შევისწავლოთ ტენზორული ანალიზის ელემენტები რიმანის სივრცეში. ჩვენი ძირითადი ამოცანაა ვიპოვოთ ტენზორული ველის წარმოებულები. ამასთან, გვაინტერესებს ტენზორის მხოლოდ ისეთი წარმოებულის მოძებნა, რომელიც აღებული ტენზორული ველიდან ისევ ტენზორს იძლევა. უნდა შევნიშნოთ, რომ რიმანის სივრცეში ეს არც ისე მარტივი ამოცანაა. ევკლიდის სივრცეში, თუ A_i ვექტორის დეკარტის წრფივი ორთოგონალური მდგენელებია, მაშინ მისი

დიფერენციალი dA_i ასევე ვექტორის კომპონენტებია, ხოლო $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ წარმოებული მეორე რანგის ტენზორია, ისევე როგორც n -ური რანგის ტენზორის წარმოებული კოორდინატებით $\frac{\partial}{\partial x_{i_{n+1}}} T_{i_1 \dots i_n}$ არის $n+1$ რანგის ტენზორი. მრუდწირულ კოორდინატებში და, საზოგადოდ, რიმანის სივრცეში, ეს ასე აღარ არის. რიმანის სივრცეში dA_i არ არის ვექტორი, ხოლო $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ – ტენზორი.

ავიღოთ კოვარიანტული A_i ვექტორის ველი, ე.ი. A_i ფუნქციაა $q^1, q^2, \dots q^n$ კოორდინატებისა. ვაჩვენოთ, რომ dA_i არ არის კოვარიანტული ვექტორი. რადგან A_i კოვარიანტული ვექტორია, ამიტომ იგი გარდაიქმნება კანონით

$$A'_i = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q'^i} A_\alpha . \qquad /19,1/$$

ეს გამოსახულება გავადიფერენციალოთ; გვექნება

$$dA'_i = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q'^i} dA_\alpha + \frac{\partial^2 q^\alpha}{\partial q'^i \partial q'^k} A_\alpha \, dq'^k , \qquad /19,2/$$

ცხადია, რომ dA_i მაშინ იქნებოდა კოვარიანტული ვექტორი, თუ იგი გარდაიქმნებოდა კანონით

$$dA'_i = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q'^i} dA_\alpha . \qquad /19,3/$$

/19,2/ ფორმულაში კი გვაქვს მეორე წევრი. იმისათვის, რომ dA_i კოვარიანტული ვექტორი იყოს, საჭიროა

$$\frac{\partial^2 q^\alpha}{\partial q'^i \partial q'^k} = 0 . \qquad /19,4/$$

ეს ტოლობა კი დაცულია, როცა q^α წრფივი ფუნქციაა q'^i -სა. ასეთი შემთხვევა ხორციელდება დეკარტის წრფივ ორთოგონალურ სისტემაში, სადაც სიდიდეთა ტენზორული ხასიათი განსაზღვრულია წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნების მიმართ. რიმანის სივრცეში ჩვენ განვიხილეთ კოორდინატთა ზოგადი გარდაქმნა, ამიტომაც

/19,4/. ზოგად შემთხვევაში, დაცული არ არის და dA_i კოვარიანტულ ვექტორს არ წარმოადგენს. გეომეტრიულად ეს დაკავშირებულია შემდეგ გარემოებასთან: dA_i არის ვექტორთა სხვაობა ორ ერთმანეთისაგან უსასრულოდ მცირე მანძილით დაშორებულ წერტილში. ამ ორ წერტილში კი, გარდაქმნის მატრიცის კოორდინატებზე დამოკიდებულების გამო, გვექნება ვექტორთა სხვადასხვანაირი გარდაქმნის კანონი, ამიტომ dA_i-ში შემავალი ორი ვექტორი არსებითად სხვადასხვა ვექტორებია.

ბუნებრივად ისმება საკითხი dA_i სიდიდეების ისეთი შესწორებისა, რომელიც მოგვცემს A_i ვექტორის ტენზორულ წარმოებულს. ეს არის ტენზორული ანალიზის ძირითადი ამოცანა რიმანის სივრცეში. შემდეგში ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ თურმე მართლაც არსებობს გარდაქმნების შედეგად ახალი ტენზორების მიღების საშუალება.

§ ~~20~~. გეოდეზიური წირი

რიმანის სივრცეში განვიხილოთ რაიმე წირი. ნებისმიერი წირი სივრცეში განისაზღვრება q^i კოორდინატებით, რომლებიც ფუნქციაა ერთი რომელიმე t პარამეტრისა, ე.ი.

$$q^i = q^i(t). \qquad /20,1/$$

t პარამეტრი შეიძლება იყოს სხვადასხვა, მათ შორის წირის რკალის ელემენტი, რომელსაც S ასოთი აღვნიშნავთ.

ავიღოთ რიმანის სივრცის ორი წერტილი a და b და ამ წერტილებს შორის გავავლოთ ნებისმიერი წირები /ნახ.39/. რადგან ეს წირები ერთსა და იმავე a და b წერტილებზე გადის, ამიტომ მათთვის t_a და t_b პარამეტრების მნიშვნელობა ერთნაირი იქნება. დავწეროთ რიმანის სივრცეში ელემენტარული სიგრძის კვადრა-

ნახ.39

რის ფორმულა

$$ds^2 = g_{ik}\,dq^i\,dq^k, \qquad /20,2/$$

რომელიც გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$ds = \sqrt{g_{ik}\,\dot q^i\,\dot q^k}\,dt, \qquad /20,3/$$

სადაც $\dot q^i = \dfrac{dq^i}{dt}$ და $\dot q^k = \dfrac{dq^k}{dt}$. ცხადია, რომ a და b წერტილებს შორის მოთავსებული წირის სიგრძე განსაზღვრული იქნება ინტეგრალით

$$l = \int_{t_a}^{t_b} L(q^i, \dot q^i)\,dt, \qquad /20,4/$$

სადაც $L(q^i, \dot q^i)$-ით აღნიშნულია შემდეგი გამოსახულება:

$$L(q^i, \dot q^i) \equiv \sqrt{g_{ik}(q^1, q^2, \dots q^n)\,\dot q^i\,\dot q^k}. \qquad /20,5/$$

a და b წერტილებზე გამავალ მრუდებს შორის, ცხადია, არსებობს ერთი ყველაზე მცირე სიგრძე. ამ მრუდს გეოდეზიურ წირს უწოდებენ და თავისთავად ცხადია, ამ წირის მიძებნას რიმანის სივრცეში ექნება გარკვეული მნიშვნელობა. გეოდეზიური წირი წარმოადგენს რიმანის სივრცეში ორ წერტილს შორის უმოკლეს მანძილს. ევკლიდის სივრცეში გეოდეზიური წირი იქნება სწორი ხაზი, სფეროს ზედაპირზე- სფეროს დიდი წრის რკალი და ა.შ.

ახლა გამოვიყვანოთ გეოდეზიური წირის დიფერენციალური განტოლება. საჭიროა ვიპოვოთ ისეთი $q^i = q^i(t)$ ფუნქციები, რომლებიც /20,4/ ინტეგრალს მინიმუმს მიანიჭებს. ამ $q^i(t)$ ფუნქციებს ექსტრემალებს უწოდებენ. ამგვარად, ჩვენი ამოცანა დაიყვანება ვარიაციული აღრიცხვის ე.წ. პირდაპირ ამოცანაზე. ექსტრემალების საპოვნელად უნდა მოვითხოვოთ, რომ l-ის ვარიაცია ნულის ტოლი იყოს, ე.ი. $\delta l = 0$. /20,4/-დან გვექნება

$$\delta l=\int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i+\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\delta \dot q^i\right)dt=0. \quad (i=1,2,\dots n) \qquad /20,6/$$

ვარიაციულ აღრიცხვაში მტკიცდება, რომ $\delta\dot q^i=\frac{d}{dt}\delta q^i$, რაც მეორე წევრში ნაწილობითი ინტეგრაციის ჩატარების საშუალებას გვაძლევს. მივიღებთ:

$$\int_{t_a}^{t_b}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\delta\dot q^i dt=\int_{t_a}^{t_b}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\left(\frac{d}{dt}\delta q^i\right)dt=$$

$$=\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\delta q^i\Big|_{t_a}^{t_b}-\int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)\delta q^i dt. \qquad /20,6'/$$

პირობის თანახმად, ყველა წირი a და b წერტილებზე გადის, ამიტომ $q^i(t)$ -ს ვარიაცია ამ წერტილებში ნულის ტოლი იქნება $\delta q^i(t_a)=\delta q^i(t_b)=0$. ამგვარად, /20,6/ მიიღებს სახეს

$$\int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)\delta q^i dt=0, \qquad /20,7/$$

მაგრამ, რადგან t ინტერვალი ნებისმიერია, გვექნება

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)\delta q^i=0. \quad (i=1,2,\dots n) \qquad /20,8/$$

რამდენადაც q^i დამოუკიდებელი ცვლადებია, ამ ჯამის თითოეული წევრი ნულის ტოლი იქნება, საიდანაც მივიღებთ ლაგრანჟ–ეილერის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0. \qquad /20,9/$$

ამ განტოლებიდან განისაზღვრება $q^i = q^i(t)$ ექსტრემალები.
ვიპოვოთ L -ის წარმოებულები q^i და $\dot{q}^i$ -ით; გვექნება

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{1}{2}\left(g_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k\right)^{-1/2}\left\{g_{ik}\delta_{i\alpha}\dot{q}^k + g_{ik}\dot{q}^i\delta_{\alpha k}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2L}\left\{g_{\alpha k}\dot{q}^k + g_{i\alpha}\dot{q}^i\right\} = \frac{g_{\alpha k}\dot{q}^k}{L}; \qquad /20,10/$$

ასევე

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = \frac{1}{2}\left(g_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k\right)^{-1/2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^\alpha}\dot{q}^i\dot{q}^k. \qquad /20,11/$$

წარმოებულების /20,9/ ფორმულაში შეტანით მივიღებთ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{\alpha k}\dot{q}^k}{L}\right) - \frac{1}{2L}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^\alpha}\dot{q}^i\dot{q}^k = 0. \qquad /20,12/$$

აქამდე t იყო ნებისმიერი პარამეტრი. განტოლება საგრძნობლად გამარტივდება, თუ t -ს ნაცვლად ავიღებთ რკალის s -სიგრძეს. ამ შემთხვევაში /20,2/-ის თანახმად გვექნება

$$L = g_{ik}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^k}{ds} = 1, \qquad /20,13/$$

რის გამო, /20,12/ განტოლება მიიღებს მარტივ სახეს

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\alpha k}\frac{dq^k}{ds}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^\alpha}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^k}{ds} = 0 \qquad /20,14/$$

ან,

$$g_{\alpha k}\frac{d^2q^k}{ds^2} + \frac{dg_{\alpha k}}{ds}\frac{dq^k}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^\alpha}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^k}{ds} = 0. \qquad /20,15/$$

მეორე წევრი ასე წარმოვადგინოთ:

$$\frac{dg_{\alpha k}}{ds}\frac{dq^k}{ds}=\frac{\partial g_{\alpha k}}{\partial q^i}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^k}{ds}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha k}}{\partial q^i}+\frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial q^k}\right)\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^k}{ds}. \qquad /20,16/$$

ასე რომ, /20,15/ განტოლებას ექნება გამოსახულება

$$g_{\alpha k}\frac{d^2q^k}{ds^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial q^i}+\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial q^k}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial q_\alpha}\right)\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^k}{ds}=0. \qquad /20,17/$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\Gamma_{\alpha,ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial q^i}+\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial q^k}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^\alpha}\right), \qquad /20,18/$$

მაშინ გეოდეზიური წირის განტოლებას ექნება სახე

$$g_{\alpha k}\frac{d^2q^k}{ds^2}+\Gamma_{\alpha,ik}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^k}{ds}=0. \qquad /20,19/$$

ეს განტოლება გავამრავლოთ $g^{\alpha\gamma}$ კონტრავარიანტულ მეტრიკულ ტენზორზე და გავითვალისწინოთ, რომ $g^{\gamma\alpha}g_{\alpha k}=\delta^{\gamma}_{k}$; გარდა ამისა, შემოვიღოთ ახალი აღნიშვნა

$$\Gamma^{\gamma}_{ik}=g^{\gamma\alpha}\Gamma_{\alpha,ik}, \qquad /20,20/$$

მაშინ საბოლოოდ გვექნება შემდეგი დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{d^2q^\gamma}{ds^2}+\Gamma^{\gamma}_{ik}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^k}{ds}=0, \qquad /20,21/$$

რომელსაც გეოდეზიური წირების განტოლებას უწოდებენ. ამ განტოლებიდან ამოხსნილი $q^i=q^i(s)$ განსაზღვრავს გეოდეზიურ წირს პარამეტრული სახით. $\Gamma_{\alpha,ik}$ და Γ^{β}_{ik} სიდიდეებს ქრისტოფელის სიმბოლური ეწოდებათ. როგორც მოსალოდნელი იყო, გეოდეზი-

ური წირი მთლიანად განსაზღვრულია რიმანის სივრცის მეტრიკული თვისებებით.

§ 21. ქრისტოფელის სიმბოლოების თვისებები

უპირველეს ყოვლისა, თვით განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\Gamma_{\alpha,ik} = \Gamma_{\alpha,ki}, \qquad /21,1/$$

ე.ი. $\Gamma_{\alpha,ik}$ სიმბოლო სიმეტრიულია i,k ინდექსების გადასმის მიმართ. ასევე ცხადია, რომ Γ^{α}_{ik} სიმბოლოც სიმეტრიულია ქვედა ინდექსების გადასმის მიმართ

$$\Gamma^{\alpha}_{ik}=\Gamma^{\alpha}_{ki}. \qquad /21,2/$$

როცა ვიხილავთ ევკლიდის სივრცეს, რომელშიაც შეგვიძლია შემოვიტანოთ დეკარტის სწორკუთხოვანი სისტემა, მაშინ მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები მუდმივი რიცხვებია $g_{ik}=\delta_{ik}$, ამიტომ $\Gamma_{\alpha,ik}=0$ და $\Gamma^{\alpha}_{ik}=0$, მაშინ გეოდეზიური წირების განტოლება დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2}=0, \qquad /21,3/$$

რომლის ამონახსნი წარმოადგენს წრფეს $x_{\alpha}=a_{\alpha}s+b_{\alpha}$, სადაც a_{α} და b_{α} მუდმივებია. მაშასადამე, ევკლიდის სივრცეში ორ წერტილს შორის უმოკლესი მანძილი არის წრფე.

დეკარტის სისტემაში ქრისტოფელის სიმბოლოების ნულთან ტოლობა იმის მაჩვენებელია, რომ ისინი ტენზორებს არ წარმოადგენენ. მართლაც, ტენზორის თვისებით, თუ იგი ნულია ერთ რომელიმე სისტემაში, მაშინ იგი ნულის ტოლი უნდა იყოს სხვა ნებისმიერ სისტემაშიც. ჩვენ კი ვიცით, რომ ქრისტოფელის სიმბოლოები ნულის ტოლია დეკარტის სისტემაში, ხოლო ნულისაგან განსხვავდება მრუდწირულში.

ახლა $\Gamma_{\alpha,ik}$ სიმბოლოები განვსაზღვროთ Γ^{α}_{ik} სიმბოლოს საშუალებით. ე.ი. დავწეროთ /20,20/ ფორმულის შებრუნებული. ამ მიზნით /20,20/ გავამრავლოთ $g_{\beta\gamma}$-ზე და გავითვალისწინოთ, რომ $g_{\beta\gamma} g^{\gamma\alpha} = \delta^{\alpha}_{\beta}$; მივიღებთ

$$g_{\beta\gamma}\Gamma^{\gamma}_{ik} = \delta^{\alpha}_{\beta}\Gamma_{\alpha,ik} = \Gamma_{\beta,ik} ; \qquad /21,4/$$

მაშასადამე, ამ ორ სიმბოლოს შორის კავშირს ახორციელებს მეტრიკული ტენზორი

$$\Gamma_{\beta,ik} = g_{\beta\gamma}\Gamma^{\gamma}_{ik} . \qquad /21,5/$$

ახლა დავაკავშიროთ $\Gamma_{i,\alpha\beta}$ სიმბოლო მეტრიკულ ტენზორთან. ამისათვის ვიპოვოთ $\Gamma_{\alpha,ik}+\Gamma_{i,\alpha k}$ ჯამი. /20,18/ განმარტების თანახმად გვექნება

$$\Gamma_{\alpha,ik}+\Gamma_{i,\alpha k} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial q^{i}} + \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial q^{k}} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^{\alpha}} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^{\alpha}} + \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial q^{k}} - \frac{\partial g_{\alpha k}}{\partial q^{i}}\right\}, \qquad /21,6/$$

საიდანაც მსგავსი წევრების გაბათილების შემდეგ მივიღებთ

$$\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial q^{k}} = \Gamma_{\alpha,ik}+\Gamma_{i,\alpha k} . \qquad /21,7/$$

აღსანიშნავია, რომ ქრისტოფელის სიმბოლოები შეგვიძლია დავაკავშიროთ მეტრიკული ტენზორის $\Delta(g)$ დეტერმინანტთანაც. ამ მიზნით ვიპოვოთ $\frac{\partial}{\partial q^{\alpha}}\Delta(g)$ წარმოებული. დეტერმინანტის გაწარმოების წესით ჯერ ვაწარმოებთ პირველ სტრიქონს, დანარჩენებს უცვლელად ვტოვებთ, შემდეგ მას ვუმატებთ დეტერმინანტს, რომელშიაც გაწარმოებულია მეორე სტრიქონი, დანარჩენი კი უცვლელია და ა.შ. ასე რომ, გვექნება

$$\frac{d\Delta(g)}{dq^{\alpha}} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^{\alpha}}\Delta_{ik}(g), \qquad /21,8/$$

სადაც $\Delta_{ik}(g)$ არის g_{ik} ელემენტის შესაბამისი ალგებრული დამატება. ჩვენ ვიცით, რომ შებრუნებული მატრიცის განმარტებით

$$g^{-1}_{ik}=\frac{\Delta_{ki}(g)}{\Delta(g)}=g^{ik}, \qquad /21,9/$$

ამიტომ

$$\Delta_{ik}(g)=\Delta(g)g^{ki} \qquad /21,10/$$

ასე, რომ,

$$\frac{d\Delta(g)}{dq^{\alpha}}=\Delta(g)g^{ki}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^{\alpha}}. \qquad /21,11/$$

ახლა, თუ გავიხსენებთ /21,7/ ფორმულას, მივიღებთ

$$\frac{d\Delta(g)}{dq^{\alpha}}=\Delta(g)g^{ki}\left\{\Gamma_{k,i\alpha}+\Gamma_{i,k\alpha}\right\}. \qquad /21,12/$$

მეორე მხრივ, /20,20/-ის გამოყენებით გვექნება

$$\frac{d\Delta(g)}{dq^{\alpha}}=\Delta(g)\left\{\Gamma^{i}_{i\alpha}+\Gamma^{k}_{k\alpha}\right\}=2\Delta(g)\Gamma^{k}_{ke}, \qquad /21,13/$$

ე.ი.

$$\frac{d\Delta(g)}{dq^{\alpha}}=2\Delta(g)\Gamma^{k}_{k\alpha}, \qquad /21,14/$$

საიდანაც მივიღებთ შემდეგ მნიშვნელოვან ფორმულას

$$\Gamma^{k}_{k\alpha}=\frac{1}{2\Delta(g)}\frac{d\Delta(g)}{dq^{\alpha}}, \qquad /21,15/$$

ან, საბოლოოდ,

$$\Gamma^{k}_{k\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\Delta(g)}}\frac{\partial}{\partial q^{\alpha}}\sqrt{\Delta(g)}. \qquad /21,16/$$

მაშასადამე, ქრისტოფელის $\Gamma^K_{K\alpha}$ სიმბოლო დაკავშირებულია g_{iK} მეტრიკული ტენზორის $\Delta(g)$ დეტერმინანტთან.

§ 22. ქრისტოფელის სიმბოლოების გარდაქმნის კანონი

ზემოთ ვაჩვენეთ, რომ ქრისტოფელის სიმბოლოები ტენზორები არ არიან. საინტერესოა გამოვარკვიოთ, როგორი კანონით გარდაიქმნებიან ისინი კოორდინატთა ერთი სისტემიდან მეორეზე გადასვლის დროს, ე.ი. საჭიროა დავამყაროთ კავშირი შტრიხიან და უშტრიხო ქრისტოფელის კოეფიციენტებს შორის. ავიღოთ კოორდინატთა ორი სისტემა- შტრიხიანი და უშტრიხო. ამ ორ სისტემაში ერთი და იგივე m წერტილის კოორდინატები შესაბამისად აღვნიშნოთ q'^{α} და q^{α}-თი. გავატაროთ m წერტილზე გეოდეზიური წირი. ცხადია, რომ როგორც q^{α}, ისე q'^{α} დამოკიდებული იქნება წირის S ელემენტზე. რადგან S სკალარია, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{dq'^{\alpha}}{dS}=\frac{\partial q'^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}\frac{dq^{\beta}}{dS}. \qquad /22,1/$$

ეს ტოლობა ერთხელ კიდევ გავაწარმოოთ S-ით. მივიღებთ

$$\frac{d^2q'^{\alpha}}{dS^2}=\frac{\partial^2 q'^{\alpha}}{\partial q^{\beta}\partial q^{\gamma}}\frac{dq^{\gamma}}{dS}\frac{dq^{\beta}}{dS}+\frac{\partial q'^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}\frac{d^2q^{\beta}}{dS^2}. \qquad /22,2/$$

რადგანაც m წერტილი გეოდეზიურ წირზე დევს, ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ გეოდეზიური წირის /20,21 / განტოლება, საიდანაც განვსაზღვრავთ მეორე წარმოებულებს:

$$\frac{d^2q'^{\alpha}}{dS^2}=-\Gamma'^{\alpha}_{iK}\frac{dq'^{i}}{dS}\frac{dq'^{K}}{dS}, \qquad /22,3/$$

$$\frac{d^2q^{\beta}}{dS^2}=-\Gamma^{\beta}_{iK}\frac{dq^{i}}{dS}\frac{dq^{K}}{dS}, \qquad /22,4/$$

მაშინ /22,2 / მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$-\Gamma'^{\alpha}_{ik}\frac{dq'^{i}}{ds}\frac{dq'^{k}}{ds}=\frac{\partial^2 q'^{\alpha}}{\partial q^{\beta}\partial q^{\gamma}}\frac{dq^{\beta}}{ds}\frac{dq^{\gamma}}{ds}-\Gamma^{\beta}_{ik}\frac{dq^{i}}{ds}\frac{dq^{k}}{ds}\frac{dq'^{\alpha}}{dq^{\beta}}, \qquad /22,5/$$

და გამოვიყენებთ /22,1/ ფორმულას, მაშინ

$$\frac{dq'^{i}}{ds}=\frac{\partial q'^{i}}{\partial q^{\beta}}\frac{dq^{\beta}}{ds}; \quad \frac{dq'^{k}}{ds}=\frac{\partial q'^{k}}{\partial q^{\beta}}\frac{dq^{\beta}}{ds}; \qquad /22,6/$$

შედეგად /22,5/ ფორმულა მიიღებს გამოსახულებას

$$\left(\frac{\partial^2 q'^{\alpha}}{\partial q^{\mu}\partial q^{\nu}}+\Gamma'^{\alpha}_{mn}\frac{\partial q'^{m}}{\partial q^{\mu}}\frac{\partial q'^{n}}{\partial q^{\nu}}-\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\frac{\partial q'^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}\right)\frac{dq^{\mu}}{ds}\frac{dq^{\nu}}{ds}=0. \qquad /22,7/$$

$F^{\mu\nu}=\frac{dq^{\mu}}{ds}\frac{dq^{\nu}}{ds}$ წარმოადგენს მეორე რანგის კონტრავარიანტულ სიმეტრიულ ტენზორს. რადგან გეოდეზიური წირი არჩეული გვაქვს სრულ ად ნებისმიერად, ამიტომ $F^{\mu\nu}$ ნებისმიერი ტენზორია. ეს კი, თავის მხრივ, გვიჩვენებს, რომ /22,7/-ში ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება ნულის ტოლი იქნება, ე.ი.

$$\frac{\partial^2 q'^{\alpha}}{\partial q^{\mu}\partial q^{\nu}}-\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\frac{\partial q'^{\alpha}}{\partial q^{\beta}}+\Gamma'^{\alpha}_{mn}\frac{\partial q'^{m}}{\partial q^{\mu}}\frac{\partial q'^{n}}{\partial q^{\nu}}=0. \qquad /22,8/$$

ეს ფორმულა აკავშირებს ქრისტოფელის სიმბოლოებს სხვადასხვა სისტემაში. თუ /22,1 / ფორმულის ნაცვლად გამოვიყენებთ

$$\frac{dq^{\alpha}}{ds}=\frac{\partial q^{\alpha}}{\partial q'^{\mu}}\frac{dq'^{\mu}}{ds} \qquad /22,9/$$

ტოლობიდან, მივიღებთ შებრუნებული გარდაქმნის კანონს

$$\frac{\partial^2 q^{\alpha}}{\partial q'^{\mu}\partial q'^{\nu}}-\Gamma'^{\beta}_{\mu\nu}\frac{\partial q^{\alpha}}{\partial q'^{\beta}}+\Gamma^{\alpha}_{mn}\frac{\partial q^{m}}{\partial q'^{\mu}}\frac{\partial q^{n}}{\partial q'^{\nu}}=0. \qquad /22,10/$$

გარდაქმნის ამ ფორმულებს მივცეთ ისეთი ფორმა, რომლითაც ვსარგებლობდით ტენზორის განსაზღვრისას. ამ მიზნით /22,10/ გავამრავლოთ $\frac{\partial q'^j}{\partial q^\alpha}$ გამოსახულებაზე; გვექნება

$$\Gamma'^{\beta}_{\mu\nu}\delta^j_\beta=\Gamma^\alpha_{mn}\frac{\partial q^m}{\partial q'^\mu}\frac{\partial q^n}{\partial q'^\nu}\frac{\partial q'^j}{\partial q^\alpha}+\frac{\partial^2 q^\alpha}{\partial q'^\mu\partial q'^\nu}\frac{\partial q'^j}{\partial q^\alpha}, \qquad /22,11/$$

საიდანაც

$$\Gamma'^{j}_{\mu\nu}=\Gamma^\alpha_{mn}\frac{\partial q^m}{\partial q'^\mu}\frac{\partial q^n}{\partial q'^\nu}\frac{\partial q'^j}{\partial q^\alpha}+\frac{\partial^2 q^\alpha}{\partial q'^\mu\partial q'^\nu}\frac{\partial q'^j}{\partial q^\alpha}. \qquad /22,12/$$

სრულიად ანალოგიურად ვიპოვით შებრუნებული გარდაქმნის კანონსაც. კერძოდ, გვექნება

$$\Gamma^\alpha_{mn}=\Gamma'^{j}_{\mu\nu}\frac{\partial q^\alpha}{\partial q'^j}\frac{\partial q'^\mu}{\partial q^m}\frac{\partial q'^\nu}{\partial q^n}+\frac{\partial^2 q'^j}{\partial q^m\partial q^n}\frac{\partial q^\alpha}{\partial q'^j}. \qquad /22,13/$$

გარდაქმნის ამ კანონებიდან ჩანს, რომ $\Gamma'^{j}_{\mu\nu}$ არ არის ტენზორი, ამაში კვლავ ხელს გვიშლის $\frac{\partial^2 q^\alpha}{\partial q'^\mu\partial q'^\nu}$ -წარმოებული, რომელიც საზოგადოდ არაა ნულის ტოლი. აღვნიშნოთ, რომ სწორედ ამ წარმოებულის გამო ადრე განხილული dA_i დიფერენციალი არ წარმოადგენს ვექტორს.

<u>გეოდეზიური კოორდინატები.</u> ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ, რომ დეკარტის წრფივ ორთოგონალურ სისტემაში g_{ik} მუდმივი რიცხვებია და ამიტომ ქრისტოფელის სიმბოლოები ნულს უდრის. რიმანის სივრცეში შეუძლებელია ისეთი სისტემის მოძებნა, რომელშიაც ქრისტოფელის სიმბოლოები ყველგან ნული იქნებოდა. მაგრამ, თურმე, ასეთი სისტემის მოძებნა შესაძლებელია წინასწარ აღებულ ნებისმიერ წერტილში. ამ სისტემას უწოდებენ გეოდეზიურ

სისტემას აღებულ წერტილში.

ვთქვათ, გვინდა გეოდეზიურ კოორდინატთა სისტემის შემოღება $q^i=0$ წერტილში. ქრისტოფელის სიმბოლოს მნიშვნელობა ამ წერტილში აღვნიშნოთ $\left(\Gamma^{\alpha}_{mn}\right)_0$-ით. ამ წერტილის მახლობლად /22,13/ გამოსახულებაში შემოვიღოთ ახალი ცვლადი

$$q'^{\alpha}=q^{\alpha}+\frac{1}{2}\left(\Gamma^{\alpha}_{kl}\right)_0 q^k q^l. \qquad /22,14/$$

აქედან ცხადია, რომ

$$\frac{\partial q'^{\alpha}}{\partial q^m}=\delta^{\alpha}_m+\frac{1}{2}\left(\Gamma^{\alpha}_{kl}\right)\left(\delta^k_m q^l+\delta^l_m q^k\right), \qquad /22,15/$$

საიდანაც

$$\left(\frac{\partial q'^{\alpha}}{\partial q^m}\right)_0=\delta^{\alpha}_m. \qquad /22,16/$$

/22,15/ გამოსახულების ერთხელ კიდევ გაწარმოებით გვექნება

$$\frac{\partial^2 q'^j}{\partial q^m \partial q^n}=\frac{1}{2}\left(\Gamma^j_{kl}\right)_0\left(\delta^k_m\delta^l_n+\delta^l_m\delta^k_n\right)=\left(\Gamma^j_{mn}\right)_0; \qquad /22,17/$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\left(\frac{\partial^2 q'^j}{\partial q^m \partial q^n}\frac{\partial q^{\alpha}}{\partial q'^j}\right)_0=\left(\Gamma^{\alpha}_{mn}\right)_0 \qquad /22,18/$$

და /22,13/-ის მხედველობაში მიღებით, ყველა $\Gamma'^{j}_{\mu\nu}$ სიმბოლო ამ წერტილში ნულის ტოლი გახდება. მაშასადამე, ახალი ცვლადები იქნება გეოდეზიური კოორდინატები სათავეში. ერთხელ კიდევ

აღვნიშნოთ, რომ გეოდეზიურ კოორდინატებში ქრისტოფელის სიმბო-ლოები საზოგადოდ კი არ არის ნული, როგორც ეს გვაქვს დეკარტის მართკუთხა სისტემაში, არამედ მხოლოდ ერთ წინასწარ აღებულ წერ-ტილში.

გარდა ამისა, /22.15/ ფორმა გვიჩვენებს, რომ /იხ. მა-გალითად, მეორე რანგის ტენზორის /17.11/ განსაზღვრა/ ნე-ბისმიერი ტენზორის მნიშვნელობა ხსენებულ წერტილში არ შეიცვლე-ბა. მაშასადამე, ამ წერტილში არ შეიცვლება g_{ik} მეტრიკული ტენზორის მნიშვნელობაც. ასე, რომ აღებულ წერტილში, ჩვენ შეგვიძლია ქრისტოფელის სიმბოლოები ნული გავხადოთ და ერთდრო-ულად მეტრიკულ g_{ik} ტენზორსაც მივცეთ გალილეის სახე.

§ 23. ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული

გამოვარკვიოთ, როგორ უნდა ვიპოვოთ ტენზორის წარმოებუ-ლები რიმანის სივრცეში. დეკარტის კოორდინატებში $\frac{\partial \phi}{\partial x_k}$ წა-რმოადგენს ვექტორს, $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ – მეორე რანგის ტენზორს და ა.შ. რიმანის სივრცეში კი $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ აღარ წარმოადგენს მეორე რან-გის ტენზორს. ჩვენი მიზანია, რიმანის სივრცეში ვიპოვოთ ისეთი მეორე რანგის ტენზორი, რომელიც შეასრულებს დეკარტის კოორდინატებში განსაზღვრულ $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ ტენზორის როლს. ამი-სათვის საჭიროა ველის წარმოებულის ახლებური განმარტება. ახლა ამ წარმოებულს ვიპოვით ანალიზურად. შემდეგ პარაგრაფში კი გავარკვევთ მის გეომეტრიულ შინაარსს.

ჯერ განვიხილოთ სკალარული ველი $\Phi(q^1, q^2, \dots q^n)$, თუ Φ-ს განვიხილავთ როგორც $q^1, q^2, \dots q^n$ ცვლადების რთულ ფუნ-ქციას $q'^1, q'^2 \dots q'^n$ ცვლადების საშუალებით, მაშინ შეგვიძლია დავწე-

რომ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q^i} = \frac{\partial \Phi}{\partial q'^k}\frac{\partial q'^k}{\partial q^i}, \qquad /23,1/$$

რომელიც წარმოადგენს კოვარიანტული ვექტორის გარდაქმნის კანონს. ასე რომ, $\frac{\partial \Phi}{\partial q^i}$ იქნება $grad\,\Phi$ -ს განზოგადოება რიმანის სივრცეში, ე.ი. რიმანის სივრცეში სკალარული ფუნქციის წარმოებული ისევე განისაზღვრება, როგორც ევკლიდის სივრცეში.

ახლა ვიპოვოთ კოვარიანტული A_i ვექტორის ტენზორული წარმოებული რიმანის R_n სივრცეში. გავიხსენოთ A_i' ვექტორის ტრანსფორმაციის /19,9/ ფორმულა. იგი გავაწარმოოთ შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial A_i'}{\partial q'^k} = \frac{\partial q^k}{\partial q'^i}\frac{\partial A_k}{\partial q^\nu}\frac{\partial q^\nu}{\partial q'^k} + A_k\frac{\partial^2 q^k}{\partial q'^i \partial q'^k}. \qquad /23,2/$$

როგორც ვხედავთ, მეორე რიგის წარმოებულის გამო $\frac{\partial A_i'}{\partial q'^k}$ -ს არა აქვს ტენზორული ხასიათი. შევეცადოთ /23,2/ ფორმულის შესწორება ისეთნაირად, რომ ვექტორის წარმოებულს ჰქონდეს ტენზორული ბუნება. ამისათვის გამოვიყენოთ /22,10/ ფორმულა, საიდანაც განვსაზღვროთ ჩვენთვის საჭირო მეორე რიგის წარმოებული

$$\frac{\partial^2 q^k}{\partial q'^i \partial q'^k} = \Gamma'^{\nu}_{ik}\frac{\partial q^k}{\partial q'^\nu} - \Gamma^k_{mn}\frac{\partial q^m}{\partial q'^i}\frac{\partial q^n}{\partial q'^k}. \qquad /23,3/$$

შევიტანოთ ეს წარმოებული /23,2 / ფორმულაში; იგი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial A_i'}{\partial q'^k} = \frac{\partial q^j}{\partial q'^i}\frac{\partial q^\nu}{\partial q'^k}\frac{\partial A_j}{\partial q^\nu} + \Gamma'^{\nu}_{ik}\frac{\partial q^k}{\partial q'^\nu}A_k - \Gamma^k_{mn}\frac{\partial q^m}{\partial q'^i}\frac{\partial q^n}{\partial q'^k}A_k, \qquad /23,4/$$

საიდანაც

$$\frac{\partial A_i'}{\partial q'^k} - A_\mu \frac{\partial q^\mu}{\partial q'^\nu}\Gamma'^\nu_{ik} = \left(\frac{\partial A_m}{\partial q^n} - \Gamma^\mu_{mn} A_\mu\right)\frac{\partial q^m}{\partial q'^i}\frac{\partial q^n}{\partial q'^k}; \qquad /23,5/$$

მაგრამ

$$A_\mu \frac{\partial q^\mu}{\partial q'^\nu} = A'_\nu, \qquad /23,6/$$

ამიტომ /23,5/ ფორმულას საბოლოო ექნება ასეთი გამოსახულება:

$$\left(\frac{\partial A_i'}{\partial q'^k} - A'_\nu \Gamma'^\nu_{ik}\right) = \beta_i^m \beta_k^n \left(\frac{\partial A_m}{\partial q^n} - A_\nu \Gamma^\nu_{mn}\right). \qquad /23,7/$$

ეს კი არის ფრჩხილებში მოთავსებული მეორე რანგის ტენზორის გარდაქმნის კანონი, რომელიც გვიჩვენებს, რომ სიდიდე

$$A_{m;n} = \frac{\partial A_m}{\partial q^n} - A_\nu \Gamma^\nu_{mn} \qquad /23,8/$$

წარმოადგენს მეორე რანგის კოვარიანტულ ტენზორს. მაშასადამე, $A_{m,n}$ არის A_m კოვარიანტული ვექტორის კოვარიანტული წარმოებული; ჩვეულებრივი წარმოებულისაგან განსხვავებით, კოვარიანტულ წარმოებულს ასე აღნიშნავენ: $\nabla_n A_m = A_{m;n}$. შევნიშნოთ, რომ წარმოებული აიღება იმ ცვლადით, რომლის ინდექსი $A_{m;n}$-ში წერტილ-მძიმის შემდეგ სწერია.

კოვარიანტული წარმოებულის /23,8/ განმარტებიდან ჩანს, რომ მას აქვს ჩვეულებრივი წარმოებულის შემდეგი თვისებები:

$$\nabla_n (A_m + B_m) = \nabla_n A_m + \nabla_n B_m. \qquad /23,9/$$

თუ C მუდმივია, მაშინ

$$\nabla_n (C A_m) = C \nabla_n A_m. \qquad /23,10/$$

ასევე ნამრავლის წარმოებულისათვის გვექნება

$$\nabla_n(\psi A_m)=\psi\nabla_n A_m+A_m\nabla_n\psi. \qquad /23,11/$$

ამასთან, სკალარის კოვარიანტული წარმოებული, როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, უნდა გავიგოთ, როგორც გამოსახულება

$$\nabla_n\psi=\frac{\partial\psi}{\partial q^n}. \qquad /23,12/$$

ახლა ვიპოვოთ კონტრავარიანტული A^m ვექტორის კოვარიანტული წარმოებული. ამისათვის განვიხილოთ ნებისმიერი B_m კოვარიანტული ვექტორი და შევადგინოთ სკალარული ნამრავლი $\psi=A^mB_m$. კოვარიანტული წარმოებულის /23,11/ თვისების ძალით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\nabla_n\psi=\frac{\partial\psi}{\partial q^n}=B_m(\nabla_n A^m)+A^m(\nabla_n B_m). \qquad /23,13/$$

თანახმად /23,12/ ფორმულისა, $\nabla_n\psi=\frac{\partial\psi}{\partial q^n}$ კოვარიანტული ვექტორია, რის გამოც $\nabla_n A^m$ იქნება მეორე რანგის შერეული ტენზორი. ვიპოვოთ $B_m(\nabla_n A^m)$ გამოსახულება. ცხადია, რომ

$$B_m(\nabla_n A^m)=\nabla_n(A^mB_m)-A^m(\nabla_n B_m). \qquad /23,14/$$

გავითვალისწინოთ /23,8/ ფორმულა, მაშინ $\nabla_n B_m=B_{m;n}$, ხოლო $\nabla_n(A^mB_m)=\frac{\partial}{\partial q^n}(A^mB_m)$, ამიტომ

$$B_m(\nabla_n A^m)=\frac{\partial}{\partial q^n}(A^mB_m)-A^m\left(\frac{\partial B_m}{\partial q^n}-B_\nu\Gamma^\nu_{mn}\right)=$$

$$=A^m\frac{\partial B_m}{\partial q^n}+B_m\frac{\partial A^m}{\partial q^n}-A^m\left(\frac{\partial B_m}{\partial q^n}-B_\nu\Gamma^\nu_{mn}\right), \qquad /23,15/$$

საიდანაც

$$B_m\left(\nabla_n A^m\right)=B_m\left(\frac{\partial A^m}{\partial q^n}+A^\nu\Gamma^m_{\nu n}\right). \qquad /23,16/$$

პირობის თანახმად, B_m ნებისმიერი ვექტორია, ამიტომ

$$A^m_{;n}\equiv\nabla_n A^m=\frac{\partial A^m}{\partial q^n}+A^\nu\Gamma^m_{\nu n}, \qquad /23,17/$$

რომელსაც ეწოდება კონტრავარიანტული ვექტორის კოვარიანტული წარმოებული. როგორც ადრე აღვნიშნეთ, დეკარტის კოორდინატებში $\Gamma^\nu_{mn}=0$, ამიტომ კოვარიანტული წარმოებული ემთხვევა ჩვეულებრივ წარმოებულს.

სრულიად ანალოგიურად ვიპოვით ტენზორის კოვარიანტულ წარმოებულსაც. ვიპოვოთ, მაგალითად, მეორე რანგის კონტრავარიანტული ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული. სიმარტივის. მიზნით დავუშვათ, რომ ამ ტენზორს აქვს კონკრეტული სახე $F^{ik}=A^iB^k$ ამასთან, ცხადია, რომ წარმოებულის ფორმულის გამოყვანისათვის ტენზორის კონკრეტულ სახეს მნიშვნელობა არ ექნება. ვიპოვოთ $\nabla_l F^{ik}$ კოვარიანტული წარმოებული. გვექნება

$$\nabla_l F^{ik}=\nabla_l\left(A^iB^k\right)=B^k\left(\nabla_l A^i\right)+A^i\left(\nabla_l B^k\right). \qquad /23,18/$$

გამოვიყენოთ /23,17/ ფორმულა; მივიღებთ

$$\begin{aligned}\nabla_l F^{ik}&=B^k\left(\frac{\partial A^i}{\partial q^l}+A^\nu\Gamma^i_{\nu l}\right)+A^i\left(\frac{\partial B^k}{\partial q^l}+B^\nu\Gamma^k_{\nu l}\right)=\\&=\frac{\partial}{\partial q^l}\left(A^iB^k\right)+A^\nu B^k\Gamma^i_{\nu l}+A^iB^\nu\Gamma^k_{\nu l},\end{aligned} \qquad /23,19/$$

საიდანაც საბოლოოდ ვიღებთ F^{ik} ტენზორის კოვარიანტული გაწარმოების ფორმულას

$$F^{ik}_{;l} \equiv \nabla_l F^{ik} = \frac{\partial F^{ik}}{\partial q^l} + \Gamma^i_{\nu l} F^{\nu k} + \Gamma^k_{\nu l} F^{i\nu} \qquad /23,20/$$

სრულიად ანალოგიურად ვიღებთ, რომ F_{ik} კოვარიანტული და F^i_k შერეული ტენზორების კოვარიანტული წარმოებული განისაზღვრება ფორმულებით:

$$F_{ik;l} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial q^l} - \Gamma^\nu_{il} F_{\nu k} - \Gamma^\nu_{kl} F_{i\nu}, \qquad /23,21/$$

$$F^i_{k;l} = \frac{\partial F^i_k}{\partial q^l} - \Gamma^\nu_{kl} F^i_\nu + \Gamma^i_{\nu l} F^\nu_k \qquad /23,22/$$

ასევე განისაზღვრება ნებისმიერი რანგის ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული. ამასთან, ცხადია, რომ $A^{i_1 i_2 \dots i_n}_{k_1 k_2 \dots k_s}$ ტიპის შერეული ტენზორისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$$\nabla_l A^{i_1 i_2 \dots i_n}_{k_1 k_2 \dots k_s} = \frac{\partial}{\partial q^l} A^{i_1 i_2 \dots i_n}_{k_1 k_2 \dots k_s} - \Gamma^{\nu_1}_{k_1 l} A^{i_1 i_2 \dots i_n}_{\nu_1 k_2 \dots k_s} -$$

$$- \Gamma^{\nu_2}_{k_2 l} A^{i_1 i_2 \dots i_n}_{k_1 \nu_2 k_3 \dots k_s} - \dots - \Gamma^{\nu_s}_{k_s l} A^{i_1 i_2 \dots i_n}_{k_1 k_2 \dots \nu_s} + \qquad /23,23/$$

$$+ \Gamma^{i_1}_{\mu_1 l} A^{\mu_1 i_2 \dots i_n}_{k_1 k_2 \dots k_s} + \dots + \Gamma^{i_n}_{\mu_n l} A^{i_1 i_2 \dots \mu_n}_{k_1 k_2 \dots k_s},$$

რომელიც თავისთავად განსაზღვრავს ნებისმიერი ტენზორის კოვარიანტულ წარმოებულს.

თუ კოვარიანტულ წარმოებულში მეორე ავწევთ ინდექსს, რომლის მიხედვითაც ხდება გაწარმოება, მივიღებთ კონტრავარიანტულ წარმოებულს. ასე მაგალითად,

$$\nabla^k A_i \equiv A_i^{;k} = g^{kl} A_{i;l}, \qquad /23,24/$$

$$\nabla^k A^i \equiv A^{i;k} = g^{kl} A^i_{;l}. \qquad /23,25/$$

ახლა ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ სიდიდე, რომელიც რიმანის სივრცეში ასრულებს დივერგენციის როლს. ამისათვის /23,17/ -ში მოვახდინოთ დაკეცვა; გვექნება

$$A^m_{;m} = \frac{\partial A^m}{\partial q^m} + \Gamma^m_{\nu m} A^\nu. \qquad /23,26/$$

მაგრამ ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ /იხ./21,16/ ფორმულა/

$$\Gamma^m_{\nu m} = \frac{1}{\sqrt{\Delta(g)}} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \sqrt{\Delta(g)}, \qquad /23,27/$$

ამიტომ

$$A^m_{;n} = \frac{\partial A^m}{\partial q^m} + \frac{A^\nu}{\sqrt{\Delta(g)}} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \sqrt{\Delta(g)}, \qquad /23,28/$$

რომელსაც შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი ფორმა:

$$A^m_{;m} = \frac{1}{\sqrt{\Delta(g)}} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \left(\sqrt{\Delta(g)} A^\nu \right). \qquad /23,29/$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ მეტრიკული g^{ik}, g_{ik} და g^i_k ტენზორების კოვარიანტული წარმოებული ნულის ტოლია /რიჩის თეორემა/, ე.ი. ეს ტენზორები კოვარიანტული გაწარმოების მიმართ

მეტრიკული ტენზორის კოვარიანტული; გვექნება

$$\nabla_l g_{ik} = g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^l} - g_{\nu k}\Gamma^{\nu}_{il} - g_{i\nu}\Gamma^{\nu}_{kl}. \qquad /23,30/$$

მაგრამ /21,5/ ფორმულის ძალით

$$g_{\nu k}\Gamma^{\nu}_{il} = \Gamma_{k,il}\,;$$
$$g_{i\nu}\Gamma^{\nu}_{kl} = \Gamma_{i,kl}. \qquad /23,31/$$

ამიტომ

$$\nabla_l g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{i,kl}. \qquad /23,32/$$

გამოვიყენოთ კრისტოფელის $\Gamma_{\nu,ik}$ სიმბოლოს /20,18/ გამოსახულე-ბა; მივიღებთ

$$\nabla_l g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^l} - \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{il}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{il}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i}\right\}, \qquad /23,33/$$

საიდანაც g_{ik} ტენზორის სიმეტრიულობის გამო მარჯვენა მხარის ყველა წევრი ერთმანეთს მოსპობს. ამგვარად,

$$\nabla_l g_{ik} = g_{ik,l} = 0. \qquad /23,34/$$

სრულიად ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $\nabla_l g^i_k = 0$ მართლაც, განმარტებით

$$\nabla_l g^i_k = \frac{\partial}{\partial q^l} g^i_k - \Gamma^{\nu}_{kl} g^i_{\nu} + \Gamma^i_{\nu l} g^{\nu}_k = -\Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{kl} = 0 \qquad /23,35/$$

რადგანაც $g^i_k = \delta^i_k$ და ამიტომ $\frac{\partial}{\partial q^l} g^i_k = 0$. ასევე მარტივად დამტკიცდება, რომ $\nabla_l g^{ik} = 0.$

§ 24. კოვარიანტული გაწარმოების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

წინა პარაგრაფში განვიხილეთ კოვარიანტული გაწარმოების წესი ანალიზის მეთოდების გამოყენებით. ახლა გამოვარკვიოთ როგორი გეომეტრიული შინაარსი აქვს ამ წარმოებულს და როგორ განვსაზღვროთ იგი გეომეტრიული მეთოდით.

დეკარტის ორთოგონალურ კოორდინატებში A_i ვექტორის დიფერენციალი, რომელიც წარმოადგენს სხვაობას ორ უსასრულოდ მცირე მანძილით დაშორებული წერტილის შესაბამის კომპონენტებს შორის, ე.ი.

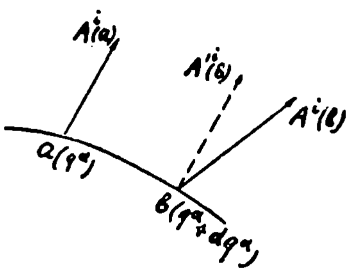
$$dA_i = A_i(q^\alpha + dq^\alpha) - A_i(q^\alpha) \qquad /24,1/$$

წარმოადგენს ვექტორს. ანალოგიური სხვაობა რიმანის სივრცეში, როგორც არაერთხელ აღვნიშნეთ, ვექტორი აღარ არის. ეს გამოწვეულია იმით, რომ რიმანის სივრცეში გარდაქმნის მატრიცა დამოკიდებულია კოორდინატებზე და ამიტომ $A_i(q^\alpha + dq^\alpha)$ და $A_i(q^\alpha)$ სხვადასხვანაირად გარდაიქმნებიან. ამის გამო რიმანის სივრცეში ვექტორის /ტენზორის/ დიფერენციალის საპოვნელად საჭიროა ორივე ვექტორი, რომელთა სხვაობა უნდა ვიპოვოთ, სივრცის ერთსა და იმავე წერტილში იყოს მოთავსებული. ე.ი. ერთ-ერთი ვექტორი უნდა გადავიტანოთ იმ წერტილში, რომელშიაც მდებარეობს მეორე ვექტორი და შემდეგ ვიპოვოთ ამ ვექტორთა სხვაობა, რომლებიც უკვე სივრცის ერთსა და იმავე წერტილში მდებარეობენ. ამასთან, ეს სხვაობა არ დაემთხვევა ამ ვექტორების სხვაობას გადატანამდე, ე.ი. dA_i დიფერენციალს. ამავე დროს, ცხადია, რომ რიმანის გეომეტრიაში დაზუსტებას მოითხოვს, თუ რას ნიშნავს ვექტორის გადატანა ერთიდან მეორე წერტილში. გასაგებია, რომ ერთიდან მეორე წერტილში გადატანის ნებისმიერი

შედეგი არ დამოკიდებება. ბუნებრივია, ვექტორის ერთი წერტილიდან მეორეში გადატანა რიმანის სივრცეში მოვახდინოთ ისეთი წესით, რომელიც კერძო შემთხვევაში დაემთხვევა ვექტორის გადატანის შედეგს დეკარტის მართკუთხა სისტემაში. რამდენადაც დეკარტის სისტემაში ვექტორის დიფერენციალი წარმოადგენს A_i ვექტორის მნიშვნელობათა სხვაობას ორ უსასრულოდ მცირედ დაშორებულ წერტილს შორის, ამიტომ, ერთი ვექტორის გადატანისას წერტილში, რომელშიაც იმყოფება მეორე, მისი კომპონენტები არ უნდა შეიცვალოს. ასეთი რამ კი ხდება ვექტორის თავისი თავის პარალელურად გადატანის შემთხვევაში, ამიტომ რიმანის სივრცეში უნდა ავირჩიოთ გადატანის ის მეთოდი, რომლის თანახმად ვექტორი გადატანისას თავისი თავის პარალელური დარჩება.

ავიღოთ რიმანის სივრცეში ორი წერტილი a და b, რომელთა შესაბამისი კოორდინატები იყოს q^α და $q^\alpha+dq^\alpha$. ამ წერტილებში ავიღოთ კოვარიანტული $A_i(a)$ და $A_i(b)$ ვექტორები. მაშინ dA_i დიფერენციალი ტოლი იქნება

$$dA_i=A_i(b)-A_i(a)=\frac{\partial A_i}{\partial q^\alpha}dq^\alpha \qquad /24,2/$$



ნახ. 40

გადავიტანოთ $A_i(a)$ ვექტორი პარალელურად a-დან b წერტილში. ეს ახალი ვექტორი აღვნიშნოთ $A_i'(b)$-თი /ნახ. 40/. შევადგინოთ სხვაობა

$$DA_i=A_i(b)-A_i'(b)=$$

$$=[A_i(b)-A_i(a)]-[A_i'(b)-A_i(a)]. \qquad /24,3/$$

და შემოვიტანოთ აღნიშვნას

$$\delta A_i=A_i'(b)-A_i(a), \qquad /24,4/$$

მაშინ /24,3/ მიიღებს სახეს

$$DA_i = dA_i - \delta A_i. \qquad /24,5\ /$$

DA_i გამოხატავს ორი ვექტორის სხვაობას, რომლებიც პარალელური გადატანის შემდეგ ერთ წერტილში იმყოფებიან. რადგან dA_i განისაზღვრება /24,2/ ფორმულით, ამიტომ /24,5 /-ში საკმარისია δA_i სიდიდის განსაზღვრა dq^α სიდიდეზე პარალელური გადატანის დროს.

უსასრულოდ მცირე dq^α სიდიდეზე ვექტორის გადატანის დროს δA_i კომპონენტების ცვლილება პროპორციული იქნება თვით A_i კომპონენტებისა. ამასთან ეს ცვლილება A_i კომპონენტებზე დამოკიდებული იქნება წრფივად, რადგანაც $\delta A_i = A_i'(B) - A_i(A)$ სხვაობა წრფივია და, მაშასადამე, ნაზრდიც იგივე კანონით უნდა გარდაიქმნას, რაც A_i ვექტორი. ამგვარად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\delta A_i = \Gamma_{il}^{k} A_k dq^l, \qquad /24,6/$$

სადაც Γ_{il}^{k} არის კოორდინატებზე დამოკიდებული პროპორციულობის კოეფიციენტები, რომელთა სახე დამოკიდებული იქნება კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე. კერძო შემთხვევაში, დეკარტის კოორდინატებში ყველა $\Gamma_{il}^{k} = 0$

თუ /24,2/ და /24,6 / ფორმულებს შევიტანთ /24,5 /-ში, მაშინ მივიღებთ

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial q^l} - \Gamma_{il}^{k} A_k\right) dq^l, \qquad /24,7\ /$$

საიდანაც შეგვიძლია დავწეროთ

$$\nabla_l A_i = \frac{\partial A_i}{\partial q^l} - \Gamma_{il}^{k} A_k \equiv A_{i;l}\,, \qquad /24,8\ /$$

რომელიც ემთხვევა ჩვენს მიერ ადრე გამოყვანილ კოვარიანტული ვექტორის კოვარიანტული გაწარმოების /23,8/ ფორმულას, ოღონდ უნდა დამატებით დავამტკიცოთ, რომ Γ^{k}_{il} კოეფიციენტები ქრისტოფელის სიმბოლოებს წარმოადგენენ. სრულიად ანალოგიურად ვიპოვით უფრო მაღალი რანგის კოვარიანტული ტენზორების კოვარიანტული გაწარმოების ფორმულებსაც.

ჯერ დავამტკიცოთ, რომ Γ^{k}_{il} სიმეტრიულია ქვედა ინდექსების მიმართ, ე.ი. $\Gamma^{k}_{il}=\Gamma^{k}_{li}$ ამისათვის განვიხილოთ $A_{i;l}-A_{l;i}$ სხვაობა. /24,8/ ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$A_{i;l}-A_{l;i}=\frac{\partial A_i}{\partial q^l}-\frac{\partial A_l}{\partial q^i}+\left(\Gamma^{k}_{li}-\Gamma^{k}_{il}\right)A_k. \qquad /24,9/$$

A_i ვექტორი წარმოადგენდეს რომელიმე Φ სკალარული ველის გრადიენტს $A_i=\frac{\partial \Phi}{\partial q^i}$, მაშინ /24,9/ მიიღებს სახეს

$$A_{i;l}-A_{l;i}=\left(\Gamma^{k}_{li}-\Gamma^{k}_{il}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial q^k}. \qquad /24,10/$$

დეკარტის კოორდინატებში მარცხენა მხარე ნულია, რადგანაც კოვარიანტული წარმოებული ჩვეულებრივ წარმოებულს ემთხვევა. მეორე მხრივ, რადგან $A_{i;l}-A_{l;i}$ სხვაობა ტენზორია, ამიტომ იგი ნული იქნება სხვა ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაშიც, საიდანაც დავასკვნით, რომ $\Gamma^{k}_{li}=\Gamma^{k}_{il}$

ახლა კი ვიპოვოთ Γ^{k}_{il} კოეფიციენტების გამოსახულება. გამოვიყენოთ პირობა, რომ მეტრიკული ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული ნულის ტოლია, ე.ი. $\nabla_l g_{ik}=g_{ik;l}=0$ კოვარიანტული ტენზორის კოვარიანტული გაწარმოების /23,21/ ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$g_{ik;l}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^l}-g_{mk}\Gamma^m_{il}-g_{im}\Gamma^m_{kl}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^l}-\Gamma_{k,il}-\Gamma_{i,kl}=0, \qquad /24,11/$$

სადაც

$$\Gamma_{k,il}=g_{mk}\Gamma^m_{il}; \qquad\qquad /24,12/$$
$$\Gamma_{i,kl}=g_{im}\Gamma^m_{kl}.$$

Γ^i_{kl} კოეფიციენტების ქვედა ინდექსების სიმეტრიის გამო გვე-ქნება, რომ $\Gamma_{i,kl}=\Gamma_{i,lk}$.

/24,11/ ფორმულაში i,k,l ინდექსების გადასმით ადვილად დავწერთ სამ ტოლობას:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^l}=\Gamma_{k,il}+\Gamma_{i,kl}, \qquad /24,13/$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial q^k}=\Gamma_{i,kl}+\Gamma_{l,ik}, \qquad /24,14/$$

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i}=\Gamma_{l,ki}+\Gamma_{k,li}, \qquad /24,15/$$

საიდანაც ადვილად ვიპოვით, რომ

$$\Gamma_{i,kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^l}+\frac{\partial g_{il}}{\partial q^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i}\right), \qquad /24,16/$$

ხოლო $\Gamma^i_{kl}=g^{im}\Gamma_{m,kl}$ კოეფიციენტებისათვის გვექნება

$$\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial q^l}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial q^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial q^m}\right), \qquad /24,17/$$

რომელიც მართლაც ემთხვევა ქრისტოფელის სიმბოლოების /20,18/ განმარტებას.

დაბოლოს, ვიპოვოთ კონტრავარიანტული A^i ვექტორის

ცვლილება პარალელური გადატანის დროს. განვიხილოთ ნებისმიერი კოვარიანტული B_i ვექტორი და შევადგინოთ A^iB_i სკალარული ნამრავლი. პარალელური გადატანის დროს სკალარული ნამრავლი არ შეიცვლება, ე.ი. $\delta(A^iB_i)=0$ აქედან $(\delta A^i)B_i+A^i(\delta B_i)=0$. /24,6/ ფორმულის გამოყენებით კი მივიღებთ

$$B_i\delta A^i=-A^i\delta B_i=-A^i\Gamma^k_{il}B_k dq^l. \qquad /24,18/$$

ინდექსების შეცვლით ეს ფორმულა ასე გადაიწერება:

$$B_i\delta A^i=-\Gamma^i_{kl}A^kB_i dq^l. \qquad /24,19/$$

რადგან B_i პირობით ნებისმიერი ვექტორია, ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ

$$\delta A^i=-\Gamma^i_{kl}A^k dq^l. \qquad /24,20/$$

ამ ფორმულით განისაზღვრება კონტრავარიანტული ვექტორის ცვლილება პარალელური გადატანის დროს. /24,20/ ფორმულის გამოყენებით ადვილად ვპოვებთ კონტრავარიანტული ვექტორის კოვარიანტულ წარმოებულსაც. ამისათვის საკმარისია /24,20/ ფორმულის შეტანა $DA^i=dA^i-\delta A^i$ გამოსახულებაში, რომელიც ანალოგიურია /24,5/ სხვაობისა კონტრავარიანტული ვექტორისათვის; dA^i-სათვის კი უნდა შევიტანოთ $dA^i=\frac{\partial A^i}{\partial q^l}dq^l$ გამოსახულება. შედეგად მივიღებთ /23,17/ ფორმულას.

§ 25. რიმანის ტენზორი

შემოვიღოთ ერთი მნიშვნელოვანი ტენზორი, რომელიც დიდ როლს ასრულებს რიმანის გეომეტრიაში. ამ ტენზორს დიდი გამოყენება აქვს ფარდობითობის ზოგად თეორიაში. მას უწოდებენ სიმრუდის ან რიმანის ტენზორს. ჩვენ დავახასიათებთ ამ ტენზორს მხოლოდ ზოგიერთი ძირითადი თვისების დადგენით.

რიმანის ტენზორი შემოდის იმის გამო, რომ ჩვეულებრივი წარმოებულისაგან განსხვავებით კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ წარმოებულებს, საზოგადოდ, კომუტაციის თვისება არ ახასიათებს, ე.ი. $\nabla_k\nabla_l$ ორჯერ კოვარიანტული წარმოებული არ უდრის $\nabla_k\nabla_i$ წარმოებულს. შემოვიტანოთ ე.წ. კომუტატორი

$$\{\nabla_l,\nabla_k\}A_i=(\nabla_l\nabla_k-\nabla_k\nabla_l)A_i \qquad /25,1/$$

და ვაჩვენოთ, რომ რიმანის სივრცეში იგი ნულისაგან განსხვავდება. ამისათვის განვიხილოთ $\nabla_k A_i=A_{i;k}$ კოვარიანტული ვექტორის კოვარიანტული წარმოებული და იგი ერთხელ კიდევ გავაწარმოოთ კოვარიანტულად; მივიღებთ $\nabla_l(\nabla_k A_i)=\nabla_l A_{i;k}=A_{i;k;l}$. რადგან $A_{i;k}$ მეორე რანგის კოვარიანტული ტენზორია, ამიტომ თუ გამოვიყენებთ /23,21/ ფორმულას, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\nabla_l(\nabla_k A_i)=\frac{\partial A_{i;k}}{\partial q^l}-\Gamma^\mu_{il}A_{\mu;k}-\Gamma^\mu_{kl}A_{i;\mu}. \qquad /25,2/$$

ახლა გავითვალისწინოთ $A_{i;k}$ წარმოებულის /23,8/ ფორმულა, მაშინ /25,2/-დან მივიღებთ

$$\nabla_l(\nabla_k A_i)=\frac{\partial}{\partial q^l}\left(\frac{\partial A_i}{\partial q^k}-A_\nu\Gamma^\nu_{ik}\right)-\Gamma^\mu_{il}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial q^k}-A_\nu\Gamma^\nu_{\mu k}\right)-$$
$$-\Gamma^\mu_{kl}\left(\frac{\partial A_i}{\partial q^\mu}-A_\nu\Gamma^\nu_{i\mu}\right). \qquad /25,3/$$

ამ უკანასკნელს შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\nabla_l(\nabla_k A_i)=\frac{\partial^2 A_i}{\partial q^k\partial q^l}-\left(\Gamma^\nu_{ik}\frac{\partial A_\nu}{\partial q^l}+\Gamma^\mu_{il}\frac{\partial A_\mu}{\partial q^k}\right)-\Gamma^\mu_{kl}\frac{\partial A_i}{\partial q^\mu}- \qquad /25,4/$$
$$-\Gamma^\mu_{kl}\Gamma^\nu_{i\mu}A_\nu-\left(\frac{\partial\Gamma^\nu_{ik}}{\partial q^l}-\Gamma^\mu_{il}\Gamma^\nu_{\mu k}\right)A_\nu.$$

ადვილად ვიპოვით $\nabla_k(\nabla_l A_i)$ წარმოებულსაც. ამისათვის საკმარისია /25,4/-ში მოვახდინოთ $l\to k$ შეცვლა. გვექნება

$$\nabla_k(\nabla_l A_i)=\frac{\partial^2 A_i}{\partial q^l\partial q^k}-\left(\Gamma^\nu_{il}\frac{\partial A_\nu}{\partial q^k}+\Gamma^\mu_{ik}\frac{\partial A_\mu}{\partial q^l}\right)-\Gamma^\mu_{lk}\frac{\partial A_i}{\partial q^\mu}-$$

$$-\Gamma^\mu_{lk}\Gamma^\nu_{i\mu}A_\nu-\left(\frac{\partial\Gamma^\nu_{il}}{\partial q^k}-\Gamma^\mu_{ik}\Gamma^\nu_{\mu l}\right)A_\nu. \qquad /25,5/$$

/25,4/ და /25,5/ წარმოებულები შევიტანოთ /25,1/ კომუტატორში; გვექნება

$$\{\nabla_l,\nabla_k\}A_i=R^\nu_{ikl}A_\nu, \qquad /25,6/$$

სადაც

$$R^\nu_{ikl}=\frac{\partial\Gamma^\nu_{il}}{\partial q^k}-\frac{\partial\Gamma^\nu_{ik}}{\partial q^l}+\Gamma^\nu_{\mu k}\Gamma^\mu_{il}-\Gamma^\nu_{\mu l}\Gamma^\mu_{ik}. \qquad /25,7/$$

R^ν_{ikl} – მეოთხე რანგის შერეულ ტენზორს /ერთხელ კონტრავარიანტულ და სამჯერ კოვარიანტულს/ ეწოდება სიმრუდის ან რიმანის ტენზორი. ცხადია, რომ ეს ტენზორი, თუ გავიხსენებთ Γ^l_{ik} ქრისტოფელის სიმბოლოების გამოსახულებას, დამოკიდებული იქნება g_{ik} მეტრიკულ ტენზორზე და მის პირველ და მეორე რიგის წარმოებულებზე.

როგორც /25,6/-დან ჩანს, რიმანის სივრცეში, ზოგადად, $\nabla_l\nabla_k$ და $\nabla_k\nabla_l$ ოპერაციები ერთმანეთისაგან განსხვავებულებია, ე.ი. $\nabla_l\nabla_k\neq\nabla_k\nabla_l$ ან, როგორც ამბობენ, კოვარიანტული გაწარმოების ოპერაციები ∇_l და ∇_k კომუტატური არ არიან.

დეკარტის კოორდინატებში, როგორც ვიცით, კოვარიანტული გაწარმოების ∇_l ოპერატორი ჩვეულებრივ წარმოებულს ემთხვევა,

ამიტომ შვარცის დებულების ძალით /25,6/ კომუტატორი ნულის ტოლი იქნება. მაშასადამე, ნულის ტოლი იქნება რიმანის ტენზორიც $R^{\nu}_{ikl}=0$ აქედან გამომდინარე, ცხადია, რომ ევკლიდის სივრცეში რიმანის ტენზორი ნულის ტოლია, რადგანაც E_n სივრცეში ყოველთვის შეგვიძლია შემოვიღოთ დეკარტის კოორდინატთა სისტემა, რომელშიაც ყველა $\Gamma^{i}_{kl}=0$ პირიქითაც, ადვილი საჩვენებელია, რომ, თუ რიმანის ტენზორი ნულის ტოლია, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია შემოვიტანოთ დეკარტის კოორდინატთა სისტემა, რომელშიაც მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები მუდმივი სიდიდეები იქნება და, მაშასადამე, ჩვენ საქმე გვექნება ევკლიდის სივრცესთან. ამგვარად, თუ აღმოჩნდა, რომ ამა თუ იმ სივრცეში რიმანის ტენზორი $R^{\nu}_{ikl}=0$, მაშინ ეს სივრცე ევკლიდური იქნება. ამგვარად, ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ რიმანის ტენზორი რაოდენობრივად ახასიათებს R_n სივრცის გადახრას ევკლიდური სივრცისაგან.

აშკარაა, რომ რიმანის ტენზორს აქვს სიმეტრიის შემდეგი თვისება:

$$R^{\nu}_{ikl}=-R^{\nu}_{ilk};$$ /25,8/

ამიტომ ნათელია, რომ $R^{\nu}_{ikk}=0$.

გარდა ამისა, ადვილად დავამტკიცებთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ იგივეობას:

$$R^{\nu}_{ikl}+R^{\nu}_{lik}+R^{\nu}_{kli}=0,$$ /25,9/

რომლის სამართლიანობაში ადვილად დავრწმუნდებით უშუალო ჩასმით.

გარდა შერეული R^{ν}_{ikl} ტენზორისა ხშირად სარგებლობენ მეოთხე რანგის კოვარიანტული R_{yikl} ტენზორით, რომელსაც განსაზღვრავენ ტოლობით

$$R_{iklm}=g_{in}R^{n}_{klm}.$$ /25,10/

თუ გავიხსენებთ ქრისტოფელის სიმბოლოების გამოხატვას მეტრიკული ტენზორის საშუალებით, მაშინ /25,10/-ს შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი სახე:

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial q^k\partial q^l}+\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial q^i\partial q^m}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial q^k\partial q^m}-\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial q^i\partial q^l}\right)+$$

$$+g_{\nu\mu}\left(\Gamma^{\nu}_{kl}\Gamma^{\mu}_{im}-\Gamma^{\nu}_{km}\Gamma^{\mu}_{il}\right). \qquad /25,11/$$

ამ გამოსახულების საშუალებით ადვილად დავადგენთ R_{iklm} ტენზორის სიმეტრიის თვისებებს. კერძოდ, ადვილი დასანახია, რომ ეს ტენზორი ანტისიმეტრიულია პირველი ორი და ბოლო ორი ინდექსის გადასმის მიმართ, ე.ი.

$$R_{kilm}=-R_{iklm}, \qquad /25,12/$$

$$R_{ikml}=-R_{iklm}, \qquad /25,13/$$

რაც, თავის მხრივ, გვაძლევს, რომ $R_{iilm}=0$ და $R_{ikll}=0$. გარდა ამისა, R_{iklm} ტენზორი სიმეტრიულია პირველი და მეორე წყვილი ინდექსების გადასმის მიმართ, ე.ი. $R_{iklm}=R_{lmik}$.

სიმრუდის ტენზორიდან დაქვეითებით შეგვიძლია შევადგინოთ მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორი. ამასთან, R_{iklm} ტენზორის დაქვეითება i და k ან l და m ინდექსებით, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ნულს მოგვცემს. მეორე რანგის ტენზორი ასე განვსაზღვროთ:

$$R_{ik}=g^{lm}R_{limk}=g^{lm}g_{l\mu}R^{\mu}_{imk} \qquad /25,14/$$

ან, თუ გავიხსენებთ g_{ik} ტენზორის ორთონორმირების პირობას, გვექნება

$$R_{ik}=R^{m}_{imk}, \qquad /25,15/$$

ხოლო რიმანის ტენზორის /25,7/ ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$R_{ik}=\frac{\partial\Gamma^{l}_{ik}}{\partial q^{l}}-\frac{\partial\Gamma^{l}_{il}}{\partial q^{k}}+\Gamma^{l}_{ik}\Gamma^{m}_{lm}-\Gamma^{m}_{il}\Gamma^{l}_{km}. \qquad /25,16/$$

ადვილი დასანახია, რომ R_{ik} ტენზორი სიმეტრიულია $R_{ik}=R_{ki}$. ამ ტენზორისაგან შევადგინოთ სკალარი

$$R=g^{ik}R_{ik}=g^{ik}g^{lm}R_{limk}. \qquad /25,17/$$

R სიდიდეს უწოდებენ სივრცის სკალარულ სიმრუდეს.

§ 26. ველის დამახასიათებელი სიდიდეების მოძებნა კოვარიანტული წარმოებულის საშუალებით

ვისარგებლოთ ველის კოვარიანტული წარმოებულის განმარტებით და გამოვიყვანოთ ტენზორული ველების დამახასიათებელი სიდიდეების გამოსახულებანი რიმანის სივრცეში.

1. სკალარული ველი. როგორც ვიცით, სკალარული ველი ეწოდება $\Phi(q^1,q^2,\dots,q^n)$ ფუნქციას, რომლის მნიშვნელობა განსაზღვრულია რიმანის სივრცის ყოველ წერტილში. ჩვენ შეგვიძლია შემოვიტანოთ სკალარული ველის გრადიენტის ცნება. ამისათვის უნდა ავიღოთ სკალარული Φ ფუნქციის კოვარიანტული წარმოებული; გვექნება

$$\Phi_{;\alpha}\equiv\nabla_{\alpha}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial q^{\alpha}}, \qquad /26,1/$$

რომელსაც ასეთი სახე ექნება ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში. გრადიენტის კონტრავარიანტულ მდგენელებს მივიღებთ მეტრიკული $g^{\alpha\beta}$ ტენზორის დახმარებით; კერძოდ,

$$\nabla^{\alpha}\Phi=g^{\alpha\beta}\nabla_{\beta}\Phi=g^{\alpha\beta}\frac{\partial\Phi}{\partial q^{\beta}}. \qquad /26,2/$$

2. <u>ვექტორული ველი.</u> კონტრავარიანტული ვექტორული ველი განისაზღვრება $A^i(q^1,q^2,\dots,q^n)$ ვექტორით, რომელიც განსაზღვრულია რიმანის სივრცის ყოველ წერტილში. ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ $\frac{\partial A^i}{\partial q^k}$ არ წარმოადგენს მეორე რანგის შერეულ ტენზორს. ტენზორს მივიღებთ A^i ვექტორის კოვარიანტული წარმოებულის აღებით; სახელდობრ, მივიღებთ

$$\nabla_\alpha A^\beta = A^\beta_{;\alpha} = \frac{\partial A^\beta}{\partial q^\alpha} + A^\gamma \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}. \qquad /26,3/$$

ახლა ვიპოვოთ A^i ვექტორული ველის დივერგენცია. ევკლიდის სივრცის ანალოგიით დივერგენცია განვსაზღვროთ, როგორც $\nabla_\alpha A^\beta$ ტენზორის შპური. გვექნება

$$\nabla_\alpha A^\alpha = \nabla^\alpha A_\alpha = g^{\alpha\beta}\nabla_\beta A_\alpha = \nabla_\alpha\left(g^{\alpha\beta}A_\beta\right). \qquad /26,4/$$

მოვახდინოთ /26,3 / ტენზორის დაქვეითება

$$\nabla_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial q^\alpha} + A^\gamma \Gamma^\alpha_{\alpha\gamma}; \qquad /26,5/$$

მაგრამ /23,27/ ფორმულის თანახმად

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\Delta(g)}}\frac{\partial}{\partial q^\gamma}\left(\sqrt{\Delta(g)}\right), \qquad /26,6/$$

სადაც $\Delta(g)$ მეტრიკული ტენზორის ელემენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტია; გვექნება

$$\nabla_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial q^\alpha} + \frac{A^\gamma}{\sqrt{\Delta(g)}}\frac{\partial}{\partial q^\gamma}\left(\sqrt{\Delta(g)}\right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta(g)}}\frac{\partial}{\partial q^\gamma}\left(A^\gamma\sqrt{\Delta(g)}\right). \qquad /26,7/$$

მაშასადამე, რიმანის სივრცეში დივერგენცია შემდეგი ფორმუ-

ლით განისაზღვრება:

$$\nabla_\alpha A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Delta(g)}}\,\frac{\partial\left(\sqrt{\Delta(g)}\,A^\alpha\right)}{\partial q^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\Delta(g)}}\,\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(\sqrt{\Delta(g)}\,g^{\alpha\beta}A_\beta\right). \qquad /26,8/$$

დეკარტის მართკუთხა სისტემაში $\Delta(g)=const$ და /26,8/-დან მივიღებთ $div\vec{A}=\frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\alpha}$, რაც ემთხვევა ჩვენთვის ცნობილ დივერგენციის განმარტებას.

რადგან ვექტორული ანალიზის ერთ-ერთი ფორმულის თანახმად ლაპლასიანი ტოლია $div\,grad\,\Phi$, ამიტომ, თუ A_α-ს წარმოვიდგენთ, როგორც Φ ფუნქციის გრადიენტს $A_\alpha=\frac{\partial\Phi}{\partial q^\alpha}$, მაშინ /26,8/ ფორმულის საშუალებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\overset{(n)}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{\Delta(g)}}\,\frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(\sqrt{\Delta(g)}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial q^\beta}\right). \qquad (\alpha,\beta=1,2,\dots n) \qquad /26,9/$$

საინტერესოა გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის დაწერა რიმანის სივრცის შემთხვევაში. რადგან გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა ინვარიანტულ ტოლობას გამოხატავს, ამიტომ იგი სამართლიანი იქნება ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში. კერძოდ, რიმანის R_n სივრცეში მას ექნება სახე

$$\int_\Omega \nabla_\alpha A^\alpha\, d\Omega = \oint_f A^\alpha\, df_\alpha . \qquad /26,10/$$

რადგან R_n სივრცეში $d\Omega=\sqrt{\Delta(g)}\,dq^1dq^2\dots dq^n$, ამიტომ /26,8/ ფორმულის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(\sqrt{\Delta(g)}\,A^\alpha\right)dq^1dq^2\dots dq^n = \oint_f A^\alpha\, df_\alpha . \qquad /26,11/$$

ახლა განვსაზღვროთ A_i ველის როტორი. $\frac{\partial A_i}{\partial q_k}$ ტენზორს არ წარმოადგენს, ამიტომ რიმანის სივრცეში საჭიროა გან-

ვიხილოთ $\nabla_i A_k$ ტენზორი, რომლისათვისაც შეგვიძლია შევადგინოთ ანტისიმეტრიული ტენზორი:

$$\Pi_{ik} = \nabla_k A_i - \nabla_i A_k . \qquad /26,12/$$

გავიხსენოთ /23,8/ ფორმულა. მაშინ /26,12/ ტენზორი მიიღებს სახეს

$$\Pi_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial q^k} - A_\alpha \Gamma^\alpha_{ik} - \frac{\partial A_k}{\partial q_i} + A_\alpha \Gamma^\alpha_{ki} . \qquad /26,13/$$

რადგან $\Gamma^\alpha_{ik} = \Gamma^\alpha_{ki}$ ამიტომ

$$\Pi_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial q^k} - \frac{\partial A_k}{\partial q^i} . \qquad /26,14/$$

ამ ტენზორთან შეგვიძლია დავაკავშიროთ A_i ვექტორის როტორი. მაგალითად, რიმანის R_3 სივრცეში $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$-ს კომპონენტებისათვის ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$B^\alpha = \frac{1}{2} e^{\alpha\beta\gamma} \Pi_{\beta\gamma} = e^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial A_\gamma}{\partial q^\beta} . \qquad /26,15/$$

რადგან /17,68/ ფორმულის თანახმად

$$e^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\Delta(g)}} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} , \qquad /26,16/$$

ამიტომ გვექნება

$$B^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Delta(g)}} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial A_\gamma}{\partial q^\beta} \qquad /26,17/$$

დეკარტის კოორდინატებში $\Delta(g) = 1$ და /26,17/ ფორმულა მოგვცემს როტორის ჩვენთვის კარგად ცნობილ განმარტებას.

3. ოთხგანზომილებიანი რიმანული სივრცე. ცალკე განვიხილოთ ოთხგანზომილებიანი რიმანული სივრცე, ე.ი. განმრუდებული სივრცე-დროის შემთხვევა. როგორც აღვნიშნეთ, ამ სივრცეში $\Delta(g)<0$, ამიტომ დივერგენციისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\operatorname{div}\vec{A}=\nabla_j A^j=\frac{1}{\sqrt{-\Delta(g)}}\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\sqrt{-\Delta(g)}\,A^j\right)= \qquad /26,18/$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-\Delta(g)}}\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\sqrt{-\Delta(g)}\,g^{iK}A_K\right),$$

სადაც j და K იცვლება ერთიდან ოთხამდე.

ასევე ლაპლასის ოპერატორისათვის გვექნება

$$\Delta^{(4)}\equiv\Box=\frac{1}{\sqrt{-\Delta(g)}}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\sqrt{-\Delta(g)}\,g^{iK}\frac{\partial}{\partial q^K}\right); \qquad /26,19/$$

ამ სიმბოლოს დალამბერის ოპერატორს /დალამბერიანს/ უწოდებენ.

4. მაქსველის განტოლებები მრუდწირულ კოორდინატებში.

ახლა მაქსველის განტოლებები ჩავწეროთ ნებისმიერ მრუდწირულ კოორდინატებში. ვთქვათ, მაქსველის განტოლებები მოცემული გვაქვს მინკოვსკის ფსევდოევკლიდურ სივრცეში, რომლის მეტრიკა განსაზღვრულია ტენზორით:

$$g_{iK}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad g^{iK}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}. \qquad /26,20/$$

კოორდინატებისათვის ვისარგებლოთ აღნიშვნებით $x^1, x^2, x^3, x^4=ct$.

გავიხსენოთ ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორის გამოსახულება

$$F_{iK}=\frac{\partial A_K}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^K}. \qquad /26,21/$$

რამდენადაც ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობის ელექტრული

და მაგნიტური ვექტორების კომპონენტები უნდა განვსაზღვროთ ფორმულებით:[1]

$$\mathcal{E}_i=-\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}-\frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t},$$

$$\mathcal{H}^i=e^{ikj}\frac{\partial A_j}{\partial x^k}=\frac{\varepsilon_{ikj}}{\sqrt{-\Delta(g)}}\frac{\partial A_j}{\partial x^k}, \qquad /26,21'/$$

იმდენად ოთხპოტენციალის კოვარიანტული მდგენელები უნდა განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: $A_i=A_i(A_1,A_2,A_3,-\varphi)$. რაც შეეხება კონტრავარიანტულ A^i ვექტორს, იგი განისაზღვრება ფორმულით $A^i=g^{i\mu}A_\mu$. ნაშასადამე, $A^i(-A_1,-A_2,-A_3,-\varphi)$. ამგვარად, F_{ik} ტენზორისათვის გვექნება შემდეგი გამოსახულება:

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{H}^3 & -\mathcal{H}^2 & \mathcal{E}_3 \\ -\mathcal{H}^3 & 0 & \mathcal{H}^1 & \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{H}^2 & -\mathcal{H}^1 & 0 & \mathcal{E}_3 \\ -\mathcal{E}_1 & -\mathcal{E}_2 & -\mathcal{E}_3 & 0 \end{pmatrix}. \qquad /26,22/$$

ჩვენ დაგვჭირდება ელექტრომაგნიტური ველის კონტრავარიანტული ტენზორიც. იგი მიიღება ჩვეული ფორმულით

$$F^{ik}=g^{i\mu}g^{k\nu}F_{\mu\nu}. \qquad /26,23/$$

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ F^{ik} მიიღება წარმოდგენილი შემდეგი სახით:

$$F^{ik}=\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{H}_3 & \mathcal{H}_2 & -\mathcal{E}^1 \\ -\mathcal{H}_3 & 0 & \mathcal{H}_1 & -\mathcal{E}^2 \\ \mathcal{H}_2 & -\mathcal{H}_1 & 0 & -\mathcal{E}^3 \\ \mathcal{E}^1 & \mathcal{E}^2 & \mathcal{E}^3 & 0 \end{pmatrix}. \qquad /26,24/$$

აღვნიშნოთ, რომ $\vec{\mathcal{E}}$ და $\vec{\mathcal{H}}$ ელექტრული და მაგნიტური

----

1 იხ. /26,15/ და /25,17/ განმარტება.

დაძაბულობის ვექტორებისათვის ზედა და ქვედა ინდექსების აღე-ბას აზრი აქვს მხოლოდ მრუდწირულ კოორდინატებში.

ადვილად შევამოწმებთ, რომ მაქსველის განტოლებები მინ-კოვსკის სივრცეში, როცა მუხტები არა გვაქვს, ასე ჩაიწერება /იხ./15,88/ ფორმულა/:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}=0, \qquad /26,25/$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^k}=0. \qquad (i,k,l=1,2,3,4) \qquad /26,26/$$

$x^1, x^2, x^3, x^4=ct$ დეკარტის კოორდინატებიდან გადავიდეთ მრუდწირულ q^1, q^2, q^3, q^4 კოორდინატებზე. მაშინ, თუ მინკოვსკის სივრცეში ელემენტარული სიგრძის კვადრატი განისაზღვრებოდა $ds^2=g_{ik}dx^i dx^k$ ფორმულით, მრუდწირულ კოორდინატებში იგივე სიდიდისათვის გვექნება

$$ds^2=g'_{ik}\,dq^i dq^k, \qquad (i,k=1,2,3,4) \qquad /26,27/$$

სადაც g'_{ik} მეტრიკული ტენზორი განისაზღვრება ფორმულით

$$g'_{ik}=\frac{\partial x^\mu}{\partial q^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial q^k}g_{\mu\nu}, \qquad /26,28/$$

g_{ik} კი მოცემულია /26,20/ გამოსახულებით.

ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორს ახალ კოორდინატებში ექნება სახე

$$F'_{ik}=\frac{\partial x^\mu}{\partial q^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial q^k}F_{\mu\nu}, \qquad /26,29/$$

ხოლო ოთხპოტენციალი განისაზღვრება ფორმულით

$$A_i' = \frac{\partial x^\mu}{\partial q^i} A_\mu . \qquad /26,30/$$

მის შემდეგ ცხადია, რომ მრუდწირულ კოორდინატებში, მაქსველის განტოლებები, კოვარიანტული გაწარმოების წესის გამოყენებით, მიიღებენ გამოსახულებას:

$$\nabla_l F_{ik}' + \nabla_k F_{li}' + \nabla_i F_{kl}' = 0, \qquad /26,31/$$

$$\nabla_k F'^{ik} = 0. \qquad /26,32/$$

ამასთან, /26,12/ და /26,14/ ფორმულების თანახმად, ელექტრომაგნიტური ველის ტენზორის სახე მრუდწირულ კოორდინატებზე გადასვლით არ იცვლება

$$F_{ik}' = \nabla_i A_k' - \nabla_k A_i' = \frac{\partial A_k'}{\partial q^i} - \frac{\partial A_i'}{\partial q^k}. \qquad /26,33/$$

თუ გამოვიყენებთ კოვარიანტული გაწარმოების /23,21/ ფორმულას, ადვილად დავინახავთ, რომ ქრისტოფელის სიმბოლოების შემცველი წევრები ერთმანეთს გააბათილებს /გავიხსენოთ, რომ $\Gamma_{ik}^{\mu} = \Gamma_{ki}^{\mu}$!/ და მაქსველის განტოლებების პირველი წყვილისათვის მრუდწირულ კოორდინატებში გვექნება

$$\frac{\partial F_{ik}'}{\partial q^l} + \frac{\partial F_{li}'}{\partial q^k} + \frac{\partial F_{kl}'}{\partial q^i} = 0. \qquad /26,34/$$

/26,26/ განტოლება კი შეგვიძლია გადავწეროთ /23,20/ ფორმულის გამოყენებით. მივიღებთ

$$F'^{ik}{}_{;k} = \frac{\partial F'^{ik}}{\partial q^k} + \Gamma_{\mu k}^{i} F'^{\mu k} + \Gamma_{\mu k}^{k} F'^{i\mu} = 0. \qquad /26,35/$$

რადგან $\Gamma^i_{\mu k}$ სიმბოლო სიმეტრიულია ქვედა ინდექსების მიმართ, ხოლო $F^{ik} = -F^{ki}$, ამიტომ

$$\Gamma^i_{\mu k} F'^{\mu k} = \Gamma^i_{k\mu} F'^{k\mu} = -\Gamma^i_{\mu k} F'^{\mu k} = 0 \qquad / \ 5,36/$$

მაშასადამე გვექნება

$$F'^{ik}{}_{;k} = \frac{\partial F'^{ik}}{\partial q^k} + \Gamma^k_{\mu k} F'^{i\mu} = 0, \qquad /26,37/$$

რომელიც /26,6/ ფორმულის გამოყენებით საბოლოო მიიღებს სახეს

$$F'^{ik}{}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta(q)}} \frac{\partial}{\partial q^k}\left(\sqrt{-\Delta(q)}\, F'^{ik}\right) = 0. \qquad /26,38/$$

ამგვარად, მაქსველის განტოლებათა ორივე წყვილი ჩაიწერება ტენზორული ფორმით ნებისმიერ მრუდწირულ კოორდინატებში.

როცა სივრცეში მუხტებიცა გვაქვს, მაშინ /26,38/ განტოლების მარჯვენა მხარეში ჩნდება გამოსახულება $\frac{4\pi}{c} j^i$, სადაც j^i იქნება დენის ოთხვექტორის კონტრავარიანტული მდგენელები, გამოსახული მრუდწირულ კოორდინატებში.

5. <u>ორთოგონალური კოორდინატები</u>. ახლა, ცოტათ, ვიხილოთ სამგანზომილებიან ევკლიდის სივრცეში მრუდწირული ორთოგონალური კოორდინატები. ფორმალურად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ E_n და R_n სივრცეები ერთმანეთს ემთხვევა. მაშინ რიმანის სივრცე იმით იქნება განსხვავებული ევკლიდის სივრცისაგან, რომ მასში დეკარტის წრფივი ორთოგონალური კოორდინატების ნაცვლად გვექნება მრუდწირული კოორდინატთა სისტემა. ამ შემთხვევაში, მრუდწირული კოორდინატების შემოსაღებად E_n სივრცეში შეგვიძლია ვისარგებლოთ ზემოთ გამოყვანილი ფორმულებით. შემო-

ვისაზღვროთ E_3 სივრცით. ამ სივრცეში შეგვიძლია შემოვიტა-
ნოთ როგორც დეკარტის x^{α}, ისე q^{α} მრუდწირული კოორდინატები.
ამ შემთხვევაში, მეტრიკული ტენზორი დაიყვანება გამოსახულე-
ბაზე

$$g_{\alpha\beta}=\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha}\frac{\partial x^i}{\partial q^\beta}. \qquad /26,39/$$

როცა მრუდწირული კოორდინატები ორთოგონალურია $g_{\alpha\beta}=0$, თუ
$\alpha\neq\beta$, ხოლო

$$g_{\alpha\alpha}=\sum_i\left(\frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha}\right)^2=h^2_{\alpha\alpha}, \qquad /26,40/$$

სადაც $h_{\alpha\alpha}$ ლამეს პარამეტრებია. მეტრიკულ ტენზორს, ამ შემ-
თხვევაში, ექნება სახე

$$g=\begin{pmatrix} h^2_{11} & 0 & 0 \\ 0 & h^2_{22} & 0 \\ 0 & 0 & h^2_{33}\end{pmatrix} \qquad /26,41/$$

ამიტომ, ცხადია, რომ

$$\Delta(g)=h^2_{11}h^2_{22}h^2_{33}. \qquad /26,42/$$

რადგან კონტრავარიანტული მეტრიკული ტენზორი $g^{\alpha\beta}=g^{-1}_{\alpha\beta}$
ამიტომ $g^{\alpha\alpha}=h^{-2}_{\alpha\alpha}$, როცა $\alpha=\beta$ და $g^{\alpha\beta}=0$, როცა
$\alpha\neq\beta$ გარდა ამისა, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ /იხ. § 18/
ორთოგონალურ მრუდწირულ სისტემაში ვექტორის კოვარიანტულ, კონ-
ტრავარიანტულ და ფიზიკურ მდგენელებს შორის არსებობს შემდეგი

კავშირი

$$A_{q^\alpha} = h_{\alpha\alpha} A^\alpha = \frac{1}{h_{\alpha\alpha}} A_\alpha , \qquad /26,42/$$

სადაც $A_{q\alpha}$ არის ვექტორის ფიზიკური მდგენელი, ე.ი. ორთოგო-ნალური მდგენელი q^α მრუდწირულ ღერძზე. /26,43 / ფორმულის თანახმად, გრადიენტის ფიზიკური მდგენელისათვის გვექნება ფორ-მულა

$$(\nabla\phi)_{q^\alpha} = \frac{1}{h_{\alpha\alpha}} \frac{\partial\phi}{\partial q^\alpha} . \qquad /26,44/$$

თუ გამოვიყენებთ დივერგენციის /26,8 / გამოსახულებას, მაშინ E_3 სივრცეში ორთოგონალურ მრუდწირულ კოორდინატებში გვექნება

$$div\vec{A} = \frac{1}{h_{11}h_{22}h_{33}} \left\{ \frac{\partial(h_{22}h_{33}A_{q^1})}{\partial q^1} + \frac{\partial(h_{11}h_{33}A_{q^2})}{\partial q^2} + \frac{\partial(h_{11}h_{22}A_{q^3})}{\partial q^3} \right\} ; \qquad /26,45/$$

ლაპლასიანისათვის კი შეგვიძლია დავწეროთ

$$\Delta = \frac{1}{h_{11}h_{22}h_{33}} \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{h_{22}h_{33}}{h_{11}} \frac{\partial}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{h_{33}h_{11}}{h_{22}} \frac{\partial}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3}\left(\frac{h_{11}h_{22}}{h_{33}} \frac{\partial}{\partial q^3} \right) \right\} . \qquad /26,46/$$

როტორის მდგენელებისათვის კი მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$rot_{q^1}\vec{A} = \frac{1}{h_{22}h_{33}} \left\{ \frac{\partial(h_{33}A_{q^3})}{\partial q^2} - \frac{\partial(h_{22}A_{q^2})}{\partial q^3} \right\} ,$$

$$rot_{q^2}\vec{A} = \frac{1}{h_{11}h_{33}} \left\{ \frac{\partial(h_{11}A_{q^1})}{\partial q^3} - \frac{\partial(h_{33}A_{q^3})}{\partial q^1} \right\} , \qquad /26,47$$

$$\operatorname{rot}_{q_3}\vec{A} = \frac{1}{h_{11}h_{22}}\left\{\frac{\partial(h_{22}A_{q^2})}{\partial q^1} - \frac{\partial(h_{11}A_{q^1})}{\partial q^2}\right\}.$$

ეს ფორმულები § 13-ში გამოყვანილი გვაქვს სხვა გზით. სრულიად ანალოგიურად მოიძებნება ველის დამახასიათებელი სხვა სიდიდე-ებიც

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

I. Акиво М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. Издательство " Наука ", Москва, 1972.

2. Арфкен Г. Математические методы в физике. Атомиздат, Москва, 1970.

3. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа. Издательство ТГУ, Тбилиси, 1967.

4. Гольдфейн И.А. Элементы векторного исчисления, Гостехиздат, Москва, 1948.

5. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Издательство АН СССР, Москва, 1951.

6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, Физматгиз, Москва, 1962.

7. Ли Цзун-Дао, Математические методы в физике. Издательство " Мир ", Москва, 1965.

8. Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ, ГИФМЛ, Москва, 1963.

9. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т.т. I и II Издательство И-Л, Москва, 1958.

10. Мёллер К. Теория относительности. Атомиздат, Москва, 1975.

II. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. Издательство " Наука ", Москва , 1964.

12. Седов Л.И., Механика сплошной среды, т.т. I и II. Издательство " Наука ", М., 1970.

13. Сокольников И. Тензорный анализ. Издательство " Наука", Москва, 1971.

14. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. Издательство " Наука " , Москва, 1965.

15. Фок В.А. Теория пространство времени и тяготения, Госиздат, Москва, 1955.

16. ჩუბაძე ა. ველის თეორიისა და ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები. თბილისი, 1977.

17. მამასახლისოვი ვ., ჭილაშვილი გ. თეორიული ფიზიკა, ნაწილი I, თსუ გამომცემლობა, თბილისი, 1967.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

გამომცემლობის რედაქტორი რ.ბირგაძე
კორექტორი ნ.ქანთარია

სბ 747

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 25.03.82. უე 04416.
საბეჭდი ქაღალდი 60X84. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 18,75. სააღრ.-საგამომც.თაბახი 12,46.
ტირაჟი 800 შეკვეთის № 617
ფასი 65 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,
თბილისი,380028,ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი,1.
Типография Тбилисского университета.