

ა.ასგვახაგუროვი

სამშენებლო მექანიკა

III ნაწილი

გაეოგრაფიკა ცოდნა

თბილისი - 1963

წინასიტყვაობა

წინამდებარე წიგნში მოცემულია საშენებლო კონსტრუქციების გაანგარიშების მეთოდები მდგრადობაზე და დინამიკურ დატვირთვებზე.

ღეროვანი სისტემების მუშაობის ხასიათის შესწავლას გრძივ მკუმშავ ძალებზე და დინამიკურ დატვირთვებზე დიდი თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს, რადგან ხშირად ამ დატვირთვების არასწორად გათვალისწინება იწვევს ნაშენთა დანგრევას.

წიგნის შინაარსი მთლიანად პასუხობს საშენებლო და სატრანსპორტო ფაკულტეტებისათვის მიღებულ პროგრამას და არ არის გადატვირთული პროგრამის გარეშე მასალით.

წიგნის შედგენის დროს ჩვენ დავიცავით საშენებლო მექანიკის ჩვენი კურსის მეთოდური წყობა — თეორიულ მეთოდებთან ერთად მოყვანილია პრაქტიკული მაგალითები და სავარჯიშო ამოცანები. ყოველ მაგალითს ან ამოცანას გარკვეული თავისებურება ახასიათებს და ეფიქრობთ, რომ ამ სახით წიგნი მნიშვნელოვნად შეამსუბუქებს თეორიული მასალის ათვისებას.

წიგნის შედგენისას ვისარგებლეთ მრავალწლის მანძილზე სატრანსპორტო და საშენებლო ფაკულტეტზე ჩვენ მიერ წაკითხული ლექციებით.

წიგნში ფართოდ არის გამოყენებული საშენებლო მექანიკის ძირითადი მეთოდები — ძალთა და გადაადგილებათა მეთოდი — რომლებიც შესწავლილი იყო საშენებლო მექანიკის ელემენტარულ კურსში.

წიგნში განხილულია ნაშენთა მდგრადობისა და დინამიკის ძირითადი საკითხები, რომლებიც უმთავრესად მშენებლებს აინტერესებთ და იმედი გვაქვს, რომ ის სარგებლობას მოუტანს როგორც სტუდენტებს ისე ინჟინრებს.

დიდ მადლობას მოვასხენებ საშენებლო მექანიკის კათედრის გამგეს პროფ. მ. მიქელაძეს, რომლის დახმარებითაც დაჩქარდა ამ წიგნის გამოცემა.

ულრმეს მადლობას ვუძღვნი საქ. მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსს ო. ონიავილისს, რომელიც დამეხმარა საქმიან შენიშვნებით წიგნის რედაქტირების დროს.

მადლობას მოვასხენებ საყურადღებო შენიშვნებისათვის დოც. რ. ლორთქიფანიძეს და დოც. შ. რთველაძეს, რომლებმაც გადაიკითხეს ხელნაწერი და ინფ. კ. რუხაძეს, რომელიც დამეხმარა ამოცანების გადაწყვეტაში.

ყოველგვარ საქმიან შენიშვნებს ავტორი მიიღებს მადლობით და გაითვალისწინებს წიგნის შემდგომი გამოცემისათვის.

ავტორი

ნ ა შ ე ნ თ ა ა ნ ბ ა რ ი შ ი მ ღ გ რ ა დ ო ბ ა ზ ე

თ ა ვ ი I

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

§ I საართო ცნობები ნაშენთა მდგარდობაზე

შესაძლებელია ძლიერმა ქარმა გადააბრუნოს სახილო ფერმა, შესაძლებელია აგრეთვე საყრდენი კედლის გადაბრუნება მიწის დაწოლით. ამ შემთხვევაში ნაშენი ინარჩუნებს თავის პირვანდელ ფორმას და ჩვენ ვამბობთ, რომ ნაშენმა დაკარგა მდგარდობა, როგორც მთლიანმა მყარმა ტანმა. მდგარდობის დაკარგვის ეს შემთხვევა ჩვენ შესწავლილი გვაქვს და მას წინამდებარე ნაშრომში არ განვიხილავთ.

ჩვენ განვიხილავთ მდგარდობის დაკარგვის უფრო მნიშვნელოვან მოვლენას, რომელიც დაკავშირებულია გარე ძალების მიერ გამოწვეულ დეფორმირებულ მდგომარეობაზე.

ჩვეულებრივი ანგარიში სიმტკიცეზე უმეტეს შემთხვევაში არ იძლევა მთლიან წარმოდგენას ნაშენის საიმედო მუშაობის შესახებ. შესაძლებელია ძაბვები არ აღემატება დასაშვებ ზღვრებს, მაგრამ ნაშენის საიმედო მუშაობა მაინც არ არის უზრუნველყოფილი. ამ შემთხვევაში ნაშენი შეიძლება გამოვიდეს წყობიდან არა სიმტკიცის დაკარგვის, არამედ განვითარებული დეფორმაციების გამო.

გრძელი, დრეკადი სწორი ღერო, რომელზეც მოქმედებს ცენტრალურად მოდებული გრძივი მკუმშავი ძალა, შეიძლება გამრუდდეს და პირვანდელმა წონასწორობის სწორხაზოვანმა ფორმამ დაკარგოს მდგარდობა. ეს არის მდგარდობის დაკარგვის უმარტივესი შემთხვევა — ცენტრალური კუმშვის მდგარდობის დაკარგვა. ამ ამოცანის შესწავლა დაკავშირებულია ლეონარდ ვილერის სახელთან, რომელმაც 1744 წ. თეორიულად დაასაბუთა ე. წ. კრიტიკული ძალის არსებობა და ამით საფუძველი ჩაუყარა მდგარდობის თეორიას.

ცენტრალური კუმშვის მდგარდობის დაკარგვა წარმოადგენს მთელი რიგი ნაშენების მდგარდობის დაკარგვის მოვლენის ტიპურ მაგალითს. ამ შემთხვევებში ჩვენ ვამბობთ, რომ მდგარდობის დაკარგვა ხდება ეილერის მიხედვით და სათანადო კრიტიკულ ძალას ეილერის ძალა ეწოდება.

ეილერმა დაასაბუთა რომ მკუმშავი ძალის მცირე მნიშვნელობის დროს ღერო ინარჩუნებს თავის პირვანდელ სწორხაზოვან ფორმას, ხოლო თუ მკუმშავი ძალა გადაცდა რალაც სიდიდეს, რომელსაც კრიტიკული ძალა ეწოდება, მაშინ ღერო ველარ ეწინააღმდეგება გაღუნვას და წონასწორობის სწორხაზოვანი ფორმა გადადის წონასწორობის მრუდხაზოვან ფორმაში. ამ მოვლენას

მდგრადობის დაკარგვა ეწოდება. მდგრადობის დაკარგვა საზოგადოდ წარმოადგენს შიგა და გარე ძალებს შორის წონასწორობის დარღვევას.

ცენტრალური მკუმშვის მდგრადობის დაკარგვის შემთხვევას მიეკუთვნება: მრგვალი მილის, წრიული თაღის ან სფერული გარსის მდგრადობის დაკარგვა, რომელზეც მოქმედებს ჰიდროსტატიკური დაწოლა; პარაბოლური თაღის მდგრადობის დაკარგვა, რომელზეც თანაბრადგანაწილებული დატვირთვა მოქმედებს, ჩარჩოების მდგრადობის დაკარგვა კვანძური დატვირთვის მოქმედების დროს, შეკუმშული ფილის მდგრადობის დაკარგვა და სხვა.

მნიშვნელოვანია არა მარტო ცალკეული ლეროების, არამედ ლეროვანი სისტემების მდგრადობის თეორიის შესწავლა. ნაშენის ცალკეული ელემენტების მდგრადობა არ ნიშნავს მის საერთო მდგრადობის უზრუნველყოფას. საინჟინრო ნაშენების ავიაციების უმრავლესობა, რომლებსაც ადგილი ჰქონდა მსოფლიოში, გამოწვეულია მდგრადობის დაკარგვით და ამიტომ ნაშენი დაგეგმარების დროს უნდა შემოწმდეს როგორც სიმტკიცეზე, ისე მდგრადობაზე.

§ 2. მდგრადობის დაკარგვის მოვლენის კლასიფიკაცია

მდგრადობის დაკარგვის მოვლენა, რომელიც ხასიათდება შიგა და გარე ძალების წონასწორობის დარღვევით, გაიყოფა ორ ქვეფაღ: პირველი სახის მდგრადობის დაკარგვა, რომელსაც ეწოდება მდგრადობის დაკარგვა ეილერის მიხედვით და მეორე სახის მდგრადობის დაკარგვა ან ნაშენის ზიდვის უნარის დაკარგვა. პირველი სახის მდგრადობის დაკარგვის დროს მკუმშვაში ძალის თანდათანობითი ზრდა იწვევს სისტემის დეფორმაციის უეცარ განვითარებას და წონასწორობის ახალ ფორმაში გადასვლას. მაშასადამე, პირველი სახის მდგრადობის დაკარგვას იწვევს ისეთი კრიტიკული ძალები, რომლებიც შეესაბამებიან წონასწორობის გარკვეულ, ახალ ფორმებს. წონასწორობის ფორმა დამოკიდებულია მკუმშვაში ძალის სიდიდეზე, მისი რაოდენობრივი ზრდა იწვევს წონასწორობის თვისობრივ შეცვლას — წონასწორობის სწორხაზოვანი ფორმა გადადის მრუდხაზოვან ფორმაში. ეს არის პირველი სახის მდგრადობის დაკარგვის ძირითადი ნიშნები.

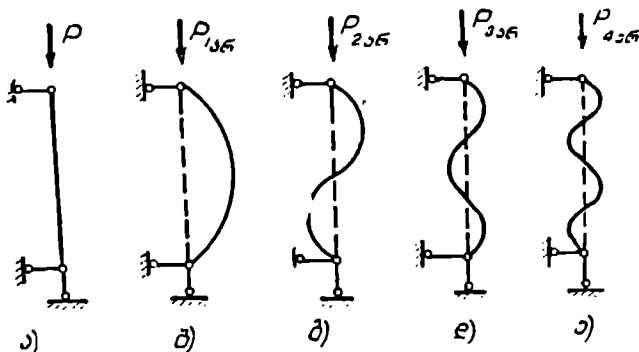
ძალის ცვლის პროცესი განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითზე. ორი ბოლოთი სახსრისადაც ჩამაგრებულ ძელზე მოქმედებს მკუმშვაში ძალა P (ნახ.

1 ა). თუ ძალა $P < P_{1კ}$ $= \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ და თუ დეფორმაციის გამომწვევი სხვა არა-

ვითარი მიზეზი არ არსებობს, შესაძლებელია წონასწორობის ერთად ერთი სწორხაზოვანი ფორმა (ნახ. 1 ა). რადგან P ძალის მოშორების შემდეგ ღერო დაუბრუნდება პირვანდელ მდგომარეობას, ამიტომ ეს არის მდგრადი ფორმა. როდესაც $P = P_{1კ}$ ადგილი აქვს პირველ კრიტიკულ მდგომარეობას და ამ შემთხვევაში გარდა წონასწორობის სწორხაზოვანი ფორმისა მოსალოდნელია წონასწორობის გაღუნული ფორმა (ნახ. 1 ბ). მაშასადამე, თუ $P > P_{1კ}$ (და $P < P_{2კ}$), ადგილი აქვს წონასწორობის ორ ფორმას — სწორხაზოვანს და მრუდხაზოვანს (გადაღუნვის წერტილის გარეშე); პირველი არის არამდგრადი, მეორე კი მდგრადი.

როცა $P = P_{2კრ} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$ ადგილი აქვს მეორე კრიტიკულ მდგომარეობას

და მოსალოდნელია წონასწორობის კიდევ ახალი გალუნული ფორმა (ნახ. 1 გ). მაშასადამე, თუ $P_{2კრ} > P > P_{კრ}$ ადგილი აქვს წონასწორობის სამ ფორმას—სწორხაზოვანს, ნახევარ ტალღაზე გალუნულს და ორ ნახევარ ტალღაზე გალუ-



ნახ. 1.

ნულს. ამ შემთხვევაში გალუნვა ნახევარ ტალღაზე მდგრადია, დანარჩენი კი არამდგრადი.

როდესაც $P_{4კრ} > P > P_{3კრ}$ მივიღებთ წონასწორობის კიდევ ახალ ფორმას (ნახ. 1 დ). აქაც და P ძალის შემდეგი ზრდის შემთხვევაშიც წონასწორობის მდგრადი ფორმა იქნება მხოლოდ ნახევარ ტალღაზე გალუნული ფორმა. მოყვანილი შედეგი სამართლოდ ღეროს ბოლოების ჩამაგრების სხვა შემთხვევაშიც.

როდესაც $P = P_{1კრ} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ თეორიულად ღერო არ გაიღუნება, პრაქტიკულად კი აუცილებლად გაიღუნება, რადგან ყოველთვის არსებობს შემთხვევითი მიზეზები: საწყისი სიმრუდე, მასალის არაერთგვაროვნება, ექსცენტრისიტეტი და სხვა. პრაქტიკული ანგარიშებისათვის მნიშვნელობა აქვს პირველ (უმცირეს) კრიტიკულ ძალას.

წინა პარაგრაფში ჩამოთვლილი შემთხვევები, მდგრადობის დაკარგვის პირველ სახეს ეკუთვნის. მეორე სახის მდგრადობის დაკარგვის დროს დეფორმაციები ვითარდებიან თანდათანობით. ამ შემთხვევაში ადგილი არა აქვს დეფორმაციის უეცარ ზრდას და ახალი ტიპის დეფორმაციების წარმოშობას როგორც პირველი სახის მდგრადობის დაკარგვისას. დეფორმაციის ზრდას ადგილი აქვს იმის გამო, რომ გარე ძალებსა და შინაგან ძალებს შორის სტატიკური წონასწორობის დაცვა შეუძლებელი ხდება. წონასწორობის დაცვა მაშინ გახდება შესაძლებელი, როდესაც შევამცირობთ გარე ძალებს.

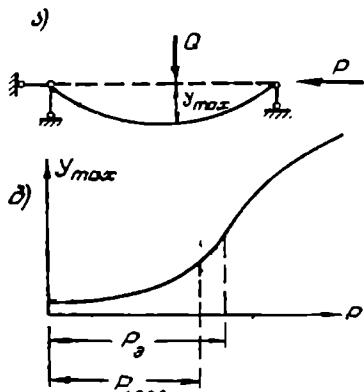
მდგრადობის დაკარგვის ამ შემთხვევაში სისტემის წინააღმდეგობის უნა-

რი დეფორმაციის ზრდისადმი იზრდება თანდათანობით, მიადწევეს მაქსიმალურ მნიშვნელობას, შემდეგ მცირდება, რის გამოც დეფორმაციები სწრაფად იზრდება.

ნაშენის დარღვევა ხდება დეფორმაციის მნიშვნელოვნად გაზრდის შედეგად, რომლის დროსაც ადგილი არა აქვს დეფორმაციის თვისობრივ ცვლილებას და წონასწორობის სხვადასხვა ფორმებს.

მეორე სახის მდგრადობის დაკარგვის მაგალითს წარმოადგენს ღერო, რომელზეც მოქმედებს გრძივი მკუმშავი ძალა P და განივი ძალა Q (ნახ. 2 ა).

დაუშვათ P ძალა იზრდება თანდათანობით, ხოლო Q მუდმივია. დამოკიდებულება ჩალუნვასა და P შორის მოცემულია ნახაზზე (ნახ. 2 ბ). როდესაც P ძალა მიუახლოვდება ეილერის კრიტიკულ ძალას $P_{\text{კრიტ}}$, ჩალუნვა იმდენად დიდი იქნება, რომ მაქსიმალური ძაბვები მიადწევეს სიმტკიცის ზღვარს და ღერო დაირღვევა. მაშასადამე, მრღვევი ძალა $P_{\text{სიმტკ}} < P_{\text{კრიტ}}$. ამიტომ სიმტკიცის



ნახ. 2.

მეორე სახის მდგრადობის დაკარგვის შემთხვევა წარმოადგენს სისტემის ზიდვის უნარის დაკარგვას.

მეორე სახის მდგრადობის დაკარგვას აქვს ადგილი აგრეთვე ჩარჩოებში როდესაც მოქმედებს არაკენძური ძალები, თაღებში რომელთა ღერძი არ ემთხვევა წნევის მრუდს, ფერმებში და საზოგადოდ ნაშენებში, როდესაც ადგილი აქვს კუმშვის და განივი ღუნვის ერთდროულ მოქმედებას.

§ 3. წონასწორობის მდგრადი და არამდგრადი ფორმები და მათი ანალიზური მანევრალაგი

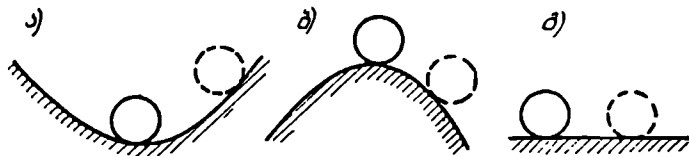
როგორც ცნობილია, ანსხვავებენ წონასწორობის სამ ფორმას: მდგრადს, არამდგრადს და განურჩევითს.

წონასწორობის მდგომარეობას ეწოდება მდგრადი, თუ რაიმე მოქმედებით წონასწორობის მდგომარეობიდან მცირე სიდიდით გადაადგილებული ტანი ამ მოქმედების მოშორების შემდეგ დაუბრუნდება თავის პირვანდელ მდგომარეობას.

წონასწორობის მდგომარეობას ეწოდება არამდგრადი, თუ წონასწორობის მდგომარეობიდან რაიმე მცირე შესაძლო გადაადგილების შემთხვევაში გადაადგილების მიზეზის მოშორების შემდეგ ტანი კი არ დაუბრუნდება თავის პირვანდელ მდგომარეობას, არამედ უფრო მეტად დაშორდება.

წონასწორობის მდგომარეობას ეწოდება განურჩევითი, თუ ამ მდგომარეობიდან მცირე შესაძლო გადაადგილების შემდეგ ტანი კვლავ რჩება წონასწორობაში.

მდგრადი, არამდგრადი და განურჩევითი წონასწორობის მდგომარეობის მაგალითი ნაჩვენებია მე-3 ნახაზზე. თუ ნახაზს დაეაკვირდებით ადვილად შე-
ვამჩნევთ, რომ ჩახნექილ ზედაპირზე მოთავსებული სფერო იმყოფება მდგრად
წონასწორობაში (ნახ. 3 ა), ხოლო ამოხნექილ ზედაპირზე მოთავსებული სფერ-



ნახ. 3.

რო — არამდგრად წონასწორობაში (იხ. ნახ. 3 ბ). პირველ შემთხვევაში წონასწო-
რობიდან გამოყვანილი სფერო დაუბრუნდება თავის პირვანდელ მდგომარეო-
ბას, მეორეში კი უფრო მეტად დაშორდება. პორიზონტალურ ზედაპირზე
მოთავსებული სფერო იმყოფება განურჩევით წონასწორობაში (ნახ. 3 გ).

პირველ შემთხვევაში (ნახ. 3 ა) სფეროს წონასწორობის მდგომარეობი-
დან გამოყვანის დროს მისი მდებარეობის ენერგია იზრდება და, მაშასადამე,
წონასწორობის მდგრადი მდგომარეობის დროს სისტემის პოტენციალ-
ური ენერგია მინიმალურია.

მეორე შემთხვევაში (ნახ. 3 ბ) სფეროს წონასწორობის მდგომარეობიდან
გამოყვანისას მისი მდებარეობის ენერგია მცირდება და, მაშასადამე, წონასწო-
რობის არამდგრადი მდგომარეობის დროს სისტემის პოტენციალური
ენერგია მაქსიმალურია.

მესამე შემთხვევაში, როდესაც სფერო მოთავსებულია სიბრტყეზე (ნახ.
3 გ), ნებისმიერი გადაადგილების დროს, სისტემის პოტენციალური
ენერგია უცვლელია. ეს არის ღირიხლეს პრინციპი.

როგორც ვხედავთ, პოტენციალური ენერგიის ცვლილების მიხედვით ჩვენ
შეგვიძლია გამოვარკვეოთ წონასწორობის ფორმა მდგრადია, თუ არამდგრადი.

შესაძლო გადაადგილების პრინციპის თანახმად სისტემა იმყოფება წონა-
სწორობაში, თუ მოქმედი ძალების მუშაობა უსასრულოდ მცირე ნებისმიერ
შესაძლო გადაადგილებაზე ნულის ტოლია. მყარ ტანებისგან განსხვავებით, აქ
ჩვენ უნდა ავიღოთ გარე და შიგა ძალების მუშაობათა ჯამი:

$$U = V + T = 0. \quad (1)$$

შესაძლო გადაადგილების პრინციპი საზღვრავს წონასწორობის მდგომარეობას,
მაგრამ არ იძლევა პასუხს მდგრადია იგი თუ არამდგრადი. წონას-
წორობის მდგრადი ფორმის გამოვლენა წარმოებს ზემოთ მოყვანილი ღირიხ-
ლეს პრინციპით. თუ გამოვიყენებთ ფუნქციის გამოცდის მეთოდს, მაშინ ეს
პრინციპი მათემატიკურად ასე გამოიხატება:

წონასწორობა მდგრადია, თუ

$$\frac{d^2U}{d\delta^2} > 0, \quad (2)$$

წონასწორობა არამდგრადია, თუ

$$\frac{d^2U}{d\delta^2} < 0, \quad (3)$$

წონასწორობა განუჩრჩევიტია, თუ

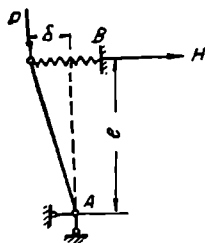
$$\frac{d^2U}{d\delta^2} = 0, \quad (4)$$

სადაც δ არის განზოგადებული კოორდინატა.

ვინაიდან კრიტიკულ მდგომარეობას შეესაბამება განუჩრჩევიტო წონასწორობა, ამიტომ კრიტიკული ძალა განისაზღვრება (4) ფორმულით.

ზემოთ განხილულ შემთხვევაში წონასწორობის მდგრადობა დამოკიდებული არ იყო სფეროს წონაზე, მაგრამ საინჟინრო ნაშენებში ჩვენ ვხვდებით უმთავრესად ისეთ შემთხვევებს, სადაც მდგრადობა დამოკიდებულია მოქმედი ძალის სიდიდეზე — მცირე ძალის შემთხვევაში წონასწორობა მდგრადია, ხოლო დიდი ძალის შემთხვევაში არამდგრადი.

ძალის იმ მნიშვნელობას, რომლის დროსაც წონასწორობა მდგრადი მდგომარეობიდან გადადის არამდგრად მდგომარეობაში ეწოდება კრიტიკული ძალა. აქ მოქმედი ძალა ნაკლებია კრიტიკულზე წონასწორობა მდგრადია და თუ მეტი არამდგრადი.



ნახ. 4.

განვიხილოთ მაგალითი. აბსოლუტურად ხისტ ვერტიკალურ AB ძელზე, რომლის ერთი ბოლო სახსროვნად არის ჩამაგრებული მეორე კი დრეკად, მოქმედებს მკუშმავი ძალა P (ნახ. 4). ძალის მცირე მნიშვნელობის დროს ძელის ვერტიკალური მდგომარეობა იქნება მდგრადი, რადგან რაიმე მიზეზით გადაადგილების შემთხვევაში ზამბარის გავლენით ძელი დაუბრუნდება თავის ვერტიკალურ მდგომარეობას. აქ შესაძლებელია ძელმა დაკარგოს მდგრადობა, როგორც მთლიანმა ხისტმა ელემენტმა.

დაუშვათ რაიმე დამატებითი მიზეზით ძელის ზედა ბოლომ მიიღო მცირე გვერდითი გადაადგილება δ . დრეკადი საყრდენის რეაქცია H იქნება გადაადგილების პროპორციული:

$$H = c \cdot \delta, \quad (5)$$

სადაც c არის პროპორციულობის კოეფიციენტი და მას დრეკადი საყრდენის სიხისტის კოეფიციენტი ეწოდება (ერთეული გადაადგილებით გამოწვეული რეაქცია).

ზემოთ ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ მდგრადობის დაკარგვის მოვლენა ხასიათდება წონასწორობის დარღვევით შიგა და გარე ძალებს შორის. რადგანაც სისტემა ხასიათდება ერთი თავისუფლების ხარისხით (გადაადგილება δ), ამიტომ გვექნება წონასწორობის ერთი განტოლება:

$$P \cdot \delta - Hl = 0. \quad (6)$$

თუ ამ ფორმულაში შევიტანთ H მნიშვნელობას მივიღებთ:

$$(P - cl)\delta = 0, \quad (7)$$

სადაც შესაძლებელია სამი შემთხვევა:

$$1) P \delta < Hl, \quad 2) P \delta > Hl, \quad 3) P \delta = Hl.$$

პირველ შემთხვევაში წონასწორობას ექნება ადგილი მხოლოდ მაშინ, თუ $\delta = 0$, ე. ი. გადაადგილების გამოწვევი მიზეზის მოშორების შემდეგ ძელი დაუბრუნდება პირვანდელ მდგომარეობას და წონასწორობა მდგრადია. მეორე შემთხვევაში, რადგან P ძალის მომენტი მეტია H მომენტზე A წერტილის მიმართ, ძელი არ დაუბრუნდება თავის ვერტიკალურ მდგომარეობას და წონასწორობა არამდგრადია. მესამე შემთხვევაში წონასწორობას ექნება ადგილი მნიშვნელოვანი მცირე მნიშვნელობის დროს და მასთანადავე წონასწორობა განუჩივრდება.

კრიტიკული ძალის სიდიდეს მივიღებთ წონასწორობის განუჩივრებით მდგომარეობიდან, როდესაც მდგრადი მდგომარეობა გადადის არამდგრად მდგომარეობაში:

$$P_{კრ} = cl. \quad (8)$$

შემდეგში, წონასწორობის განუჩივრებით მდგომარეობას ჩავთვლით სისტემის კრიტიკულ მდგომარეობად.

§ 4 კრიტიკული ძალის განსაზღვრის სტატისტიკური მეთოდი

არსებობს კრიტიკული ძალის განსაზღვრის ორი ძირითადი მეთოდი: სტატისტიკური და ენერგეტიკული. სხვა მეთოდები ამ ორი მეთოდის სახეცვლილებას წარმოადგენს.

სტატისტიკური ან შეკუმშული ღეროს გაღუნული ღერძის განტოლების უშუალო ინტეგრირების მეთოდი, რომელიც დაკავშირებულია ეილერის სახელთან, ფართოდ იხმარება ღეროების მდგრადობის შესწავლისას.

მდგრადობის დაკარგვის მომენტში დრეკადი სისტემა მიიღებს უსასრულოდ მცირე გაღუნვას. ამ გაღუნული მდგომარეობისათვის ვადგენთ წონასწორობის დიფერენციალურ განტოლებას და ვექვთ მოქმედი ძალის იმ მინიმალურ მნიშვნელობას, რომლის დროსაც სისტემა შეინარჩუნებს უსასრულოდ მცირე გაღუნვას. სხვანაირად, რომ ვთქვათ ვადგენთ განუჩივრებით წონასწორობის პირობას. მიღებული დიფერენციალური განტოლება გამოხატავს შიდა და გარე ძალების მომენტების ტოლობას ყველა წერტილში.

ჩვენ ვიხილავთ ისეთ იდეალურად დრეკად ღეროებს, რომელთათვისაც დაუტოვია ჰუკის კანონი

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (9)$$

და სამართლიანია ბრტყელი კვეთის ჰიპოტეზა. გარდა ამისა, განსახილავ ღეროს ღერძს ვთვლით უკუმშად.

მიღებულ დიფერენციალურ განტოლების ინტეგრებისას გაჩნდება მუდმივები, რომელთა ამოსახსნელად ვაძგენთ სასაზღვრო პირობებს.

სასაზღვრო პირობების შედგენა გვაძლევს იმდენ ერთგვაროვან განტოლებას რამდენი უცნობი მუდმივიც გვექნება.

საერთო შემთხვევაში, ბოლოების ნებისმიერი ჩამაგრების დროს, ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას ექნება შემდეგი სახე:

$$\left. \begin{aligned} \checkmark \quad C_1 a_{11} + C_2 a_{12} + C_3 a_{13} + \dots + C_n a_{1n} &= 0, \\ C_1 a_{21} + C_2 a_{22} + C_3 a_{23} + \dots + C_n a_{2n} &= 0, \\ C_1 a_{31} + C_2 a_{32} + C_3 a_{33} + \dots + C_n a_{3n} &= 0, \\ &\vdots \\ C_1 a_{n1} + C_2 a_{n2} + C_3 a_{n3} + \dots + C_n a_{nn} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ამ სისტემის მთავარ დეტერმინანტს, თუ აღვნიშნავთ Δ -თი მაშინ უცნობებზე განისაზღვრება კრამერის ფორმულის საშუალებით:

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta}; & C_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta}; & C_3 &= \frac{\Delta_3}{\Delta}; & C_n &= \frac{\Delta_n}{\Delta}. \end{aligned} \right.$$

დეტერმინანტი Δ_i მაშინ მიიღება, თუ Δ დეტერმინანტის i სვეტს შევცვლით თავისუფალი წევრების სვეტით.

ვინაიდან (10) განტოლებათა სისტემის თავისუფალი წევრები ნულის ტოლია, ამიტომ

$$\checkmark \quad \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \dots = \Delta_n = 0.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\Delta \neq 0$ მივიღებთ ტრივიალურ (ნულოვან) გადაწყვეტას:

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 &= C_2 = C_3 = \dots = C_n = 0. \end{aligned} \right.$$

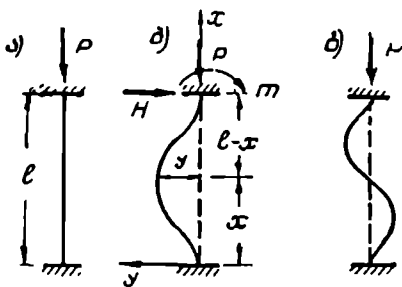
ეს არის ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემის ერთ-ერთი შესაძლო გადაწყვეტა. ვინაიდან C_1, C_2, C_3, \dots მუდმივები ღუწვის ელემენტებია, ამიტომ ყველა ისინი ერთდროულად არ შეიძლება ნულის ტოლი იყოს. წინააღმდეგ შემთხვევაში ღუწვას არ ექნება ადგილი და, ცხადია, მდგომარეობაც არ იქნება კრიტიკული.

დეფორმირებულ მდგომარეობას რომ ჰქონდეს ადგილი, საჭიროა ერთი ან რამდენიმე მუდმივი განსხვავდებოდეს ნულისაგან. ამას მივიღებთ მხოლოდ მაშინ, თუ (10) განტოლებათა სისტემის მთავარი დეტერმინანტი ნულის ტოლი იქნება:

$$\checkmark \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

ზემოაღნიშნული განტოლება R, EI და l სიდიდეებს ერთმანეთთან აკავშირებს და ახასიათებს P ძალის იმ მნიშვნელობებს, რომლებსაც შეესაბამება წონასწორობის გაღუნული ფორმები. მე-11 განტოლებას მდგრადობის განტოლება ეწოდება. ამ განტოლების ფესვები განსაზღვრავს კრიტიკული ძალის მნიშვნელობებს. პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს მინიმალურ კრიტიკულ ძალას, ე. ი. იმ ძალას, რომელიც შეესაბამება მე-11 განტოლების უმცირეს დადებით ფესვს. მაშასადამე, საბოლოოდ ამოცანა დიფერენციალური მდგრადობის განტოლების მინიმალური ფესვის მოძებნაზე.

განვიხილოთ მაგალითი. ორი ბოლოთი ხისტად ჩამოგრძელებულ ძელზე მოქმედებს მკუმშიაი ძალა P (ნახ. 5 ა). ვთქვათ მოქმედი ძალა შეესაბამება კრიტიკულ მდგომარეობას. ამ შემთხვევაში ძელი მიიღებს უსასრულოდ მცირე გადაადგილებას და საყრდენებზე გაჩნდება რეაქციები (ნახ. 5 ბ).



ნახ. 5.

უნდა აღინიშნოს, რომ დრეკადი ღეროს დეფორმირებული მდგომარეობა დახასიათებულია უსასრულოდ ბევრი გეომეტრიული პარამეტრით. მაგალითად, გაღუნული ღერძის საპოვნელად საჭიროა ვიცოდეთ y იმდენი მნიშვნელობა, რამდენი წერტილის აღებაც შეიძლება ძელზე. ამ შემთხვევაში ჩვენ საქმე გვაქვს ისეთ სისტემასთან, რომელსაც აქვს უსასრულოდ ბევრი თავისუფლების ხარისხი. ამოცანა მარტივდება იმით, რომ განტოლებათა სისტემის მაგიერ ვადგენთ ერთ დიფერენციალურ განტოლებას.

დაეწეროთ გაღუნული ღერძის დიფერენციალური განტოლება:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M.$$

შევიტანოთ მლუნავი მომენტის მნიშვნელობა

$$M = -Py - H(l - x) - m,$$

მივიღებთ:

$$EI y'' + Py = -H(l - x) - m. \quad (12)$$

ეს განტოლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$y'' + k^2 y = -\frac{H}{EI} (l - x) - \frac{m}{EI}, \quad (13)$$

სადაც

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (14)$$

მე-13 განტოლება წარმოადგენს მეორე რიგის წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის საერთო ინტეგრალი იქნება:

$$y = y_0 + y_1,$$

სადაც y_0 წარმოადგენს ერთგვაროვანი განტოლების $y'' + k^2 y = 0$ გადაწყვეტას: $y_0 = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$ და y_1 კი მე-13 განტოლების კერძო გადაწყვეტას.

კერძო გადაწყვეტა ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$y_1 = ax + b.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა მე-13 განტოლებაში, მივიღებთ:

$$a = \frac{H}{P} \text{ და } b = -\frac{Hl}{P} - \frac{m}{P}.$$

მაშასადამე,

$$y_1 = -\frac{H}{P}(l-x) - \frac{m}{P}.$$

საბოლოოდ მე-13 განტოლების საერთო ინტეგრალი იქნება:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{H}{P}(l-x) - \frac{m}{P}. \quad (15)$$

მე-15 განტოლება შეიცავს ოთხ უცნობ სიდიდეს: C_1 , C_2 , $\frac{H}{P}$ და $\frac{m}{P}$, რომელთა განსასაზღვრავად საჭიროა ოთხი სასაზღვრო პირობა:

$$\left. \begin{array}{l} \text{როცა } x=0, y=0 \text{ და } y'=0, \\ \text{როცა } x=l, y=0 \text{ და } y'=0. \end{array} \right\} \quad (16)$$

ამ პირობების შედგენა მოგვცემს ოთხ ერთგვაროვან განტოლებას:

$$C_2 - \frac{H}{P}l - \frac{m}{P} = 0,$$

$$C_1 k + \frac{H}{P} = 0,$$

$$C_1 \sin kl + C_2 \cos kl - \frac{m}{P} = 0,$$

$$C_1 k \cos kl - C_2 k \sin kl + \frac{H}{P} = 0.$$

მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -l & -1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & 0 & -1 \\ k \cos kl & -k \sin kl & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

დეტერმინანტი გაშალთ მეორე პწკარის მიხედვით, მივიღებთ:

$$\Delta = k \begin{vmatrix} 1 & -l & -1 \\ \cos kl & 0 & -1 \\ -k \sin kl & 1 & 0 \end{vmatrix} (-1)^2 + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ k \cos kl & k \sin kl & 0 \end{vmatrix} (-1)^2 =$$

$$= kl \sin kl - 2(1 - \cos kl) = 0.$$

ტრიგონომეტრიული გარდაქმნის შემდეგ მდგრადობის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\sin \frac{kl}{2} \left(\frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} - \sin \frac{kl}{2} \right) = 0. \quad (17)$$

ეს განტოლება გაიყოფა ორ ნაწილად:

$$\sin \frac{kl}{2} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} - \sin \frac{kl}{2} = 0. \quad (19)$$

მე-18 განტოლების უმცირესი დადებითი ფესვი ტოლია:

$$kl = 2\pi. \quad (20)$$

მე-19 განტოლება გადაწეროთ შემდეგი სახით:

$$\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \frac{kl}{2}. \quad (21)$$

ამ ტრანსცედენტური განტოლების უმცირესი ფესვი იქნება (იხ. § 6):

$$kl = 8,986. \quad (22)$$

მე-18 განტოლებას შეესაბამება ძელის სიმეტრიული გადაღუნვა (ნახ. 5 ბ) და, მაშასადამე მდგრადობის დაკარგვის სიმეტრიული ფორმა გვაძლევს kl მინიმალურ მნიშვნელობას და სათანადოდ მინიმალურ კრიტიკულ ძალას:

$$P_{კრ} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}. \quad (23)$$

21-ე განტოლებას შეესაბამება მდგრადობის დაკარგვა ირიბად სიმეტრიული ფორმით (ნახ. 5 გ).

§ 5. კრიტიკული ძალის განსაზღვრის ანალიტიკური მეთოდი

მე-3 პარაგრაფში, უბრალო მაგალითის საფუძველზე, ჩვენ გავარჩიეთ მდგრადი და არამდგრადი წონასწორობის ენერგეტიკული ნიშნები.

მდგრადი წონასწორობის ყველაზე უფრო საერთო ნიშანს იძლევა დირიხლეს თეორემა: წონასწორობის მდგომარეობაში სისტემის პო-

ტენციალური ენერჯია აღწევს მინიმალურ ან მაქსიმალურ მნიშვნელობას, გადაადგილებულ მდგომარეობასთან შედარებით. თუ მინიმალურია წონასწორობა — მდგრადია და თუ მაქსიმალური — არამდგრადი.

განსახილავ დეფორმირებულ სისტემას შეიძლება ქონდეს ერთი ან მრავალი თავისუფლების ხარისხი. თავისუფლების ხარისხი წარმოადგენს გეომეტრიული პარამეტრების რიცხვს, რომელთა საშუალებითაც გამოისახება სისტემის დეფორმირებული მდგომარეობა.

დაუშვათ, დეფორმირებულ მდგომარეობაში სისტემას აქვს n თავისუფლების ხარისხი, ე. ი. მისი მდგომარეობა განისაზღვრება $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ პარამეტრით.

სისტემის პოტენციალური ენერჯია ამ პარამეტრების ფუნქციაა:

$$U = F(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n).$$

ექსტრემუმის მათემატიკური პირობა იქნება:

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \delta_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial \delta_n} = 0. \quad (24)$$

წონასწორობა მდგრადია, თუ U მეორე წარმოებული დადებითია

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \delta_1^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_2^2} > 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_n^2} > 0.$$

არამდგრადია, თუ U მეორე წარმოებული უარყოფითია

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \delta_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_2^2} < 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_n^2} < 0.$$

განუჩიევითი წონასწორობის (მდგრადი და არამდგრადი წონასწორობის საზღვარი) დროს

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \delta_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_2^2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \delta_n^2} = 0.$$

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ არამდგრადი წონასწორობის პირობა პოტენციალური ენერჯიის მაქსიმალურობის შესახებ, იმ შემთხვევაში, როდესაც სისტემას მრავალი თავისუფლების ხარისხი აქვს, ყოველთვის არ არის დაცული¹.

თუ სისტემას აქვს ერთი თავისუფლების ხარისხი, მაშინ სისტემის კრიტიკული მდგომარეობა განისაზღვრება ორი განტოლებით:

$$\frac{dU}{d\delta} = 0 \quad \text{ან} \quad \frac{d^2 U}{d\delta^2} = 0. \quad (24')$$

კრიტიკული ძალა შეიძლება განისაზღვროს წონასწორობის კერძო თეორემიდანაც, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

¹ Н. О. Монсеев, Очерки развития теории устойчивости, Гостехиздат, 1949 г.

განურჩევითი წონასწორობის დროს ამ მდგომარეობიდან გამოყენების შემთხვევაში სისტემის პოტენციალური ენერჯია უცვლელია (იხ. § 3), ე. ი. ენერჯიის ნაზრდი

$$\Delta U = 0. \quad (25)$$

ზემოაღნიშნული თეორემა სამართლანაა იმ შემთხვევაში, როდესაც კუმშვის დეფორმაციის ენერჯია მხედველობაში არ არის მიღებული, ე. ი. თუ ღერო უქუშშია. ეს დაშვება კი საფუძვლად უდევს ჩვენს ანგარიშებს. რადგანაც კრიტიკულ მომენტში ცენტრალურად შეკუმშული ღრეკადი ღერო მიიღებს უსასრულოდ მცირე გაღუნვას, ამიტომ ენერჯიის ნაზრდი შედგება ორი ნაწილისაგან:

- 1) გარე მკუმშავი ძალის მდებარეობის ენერჯიის ცვლილების T -საგან და
 - 2) ღუნვის შინაგანი ძალების ენერჯიის ცვლილების V -საგან.
- მაშასადამე,

$$\Delta U = T + V = 0. \quad (26)$$

პოტენციალური ენერჯიის გამოთვლის დროს ჩვენ კარგად უნდა გვახსოვდეს, რომ ღრეკადი სისტემის პოტენციალური ენერჯია არის ის მუშაობა, რომელსაც სრულებს სისტემაზე მოქმედი გარე და შიგა ძალები, მისი დეფორმირებული მდგომარეობიდან საწყის არადეფორმირებულ მდგომარეობაში გადასვლის დროს.

ამიტომ გარე ძალების პოტენციალური ენერჯია ყოველთვის უარყოფითა და ძალისა და გადაადგილების (განვლილი გზის) ნამრავლის ტოლია. შიგა ძალების პოტენციალური ენერჯია ყოველთვის დადებითია და ძალისა და სათანადო გადაადგილების ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

26-ე ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

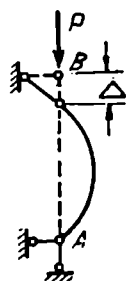
$$\left. \begin{aligned} V - T &= 0 \\ \text{ან } T &= V, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

რომელიც წარმოადგენს მდგრადობის განტოლებას.

27-ე ფორმულით სარგებლობა უფრო მარტივია, ვიდრე 24-ე ფორმულით და ამიტომ ჩვენც ამ ფორმულას გამოვიყენებთ.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი. სახსროვანად ჩამოგრძელებულ ძელზე მოქმედებს შეყურსული ძალა P (ნახ. 6). კრიტიკულ მდგომარეობაში B წერტილი გადაადგილდება Δ სიდიდით. ძელი თუ დაუბრუნდება საწყის სწორხაზოვან მდებარეობას, მაშინ P ძალა შეასრულებს მუშაობას (P ძალა მუდმივია):

$$T = P \cdot \Delta.$$



ნახ. 6.

1 იხ. ასტეატუროვი. სამშენებლო მექანიკა, ნაწ. II, § 5.

რადგანაც ჩვენ ვეხილავთ უკუშეღებულ ღეროს, რომლის სიგრძე უცვლელია, ამიტომ Δ მრუდისა და მისი ქორდის სიგრძეების სხვაობის ტოლია:

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^l (ds - dx) = \int_0^l (\sqrt{dx^2 + dy^2} - dx) = \\ &= \int_0^l (\sqrt{1+(y')^2} - 1) dx = \int_0^l [(1+(y')^2)^{\frac{1}{2}} - 1] dx. \end{aligned}$$

თუ გავშლით მწკრივად და დავტოვებთ ორ პირველ წევრს, მივიღებთ:

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx.$$

მაშასადამე,

$$T = \frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx. \quad (28)$$

შიგა ძალების ცვლილების პოტენციალური ენერგია ღუნეის ენერჯიის ტოლია და განისაზღვრება ფორმულით:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dx}{EI}.$$

როგორც ცნობილია

$$M = \pm EI y''.$$

საბოლოოდ

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dx. \quad (29)$$

T და V მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ 27-ე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$P_{კრ} = EI \frac{\int_0^l (y'')^2 dx}{\int_0^l (y')^2 dx}. \quad (30)$$

უკანასკნელი ფორმულა სამართლიანია ღეროს ბოლოების ნებისმიერი ჩამაგრების შემთხვევაში.

ენერგეტიკული მეთოდით კრიტიკული ძალის გასაგებათ საჭიროა ვიცო-

დეთ გაღუნული ღერძის განტოლება. თუ გაღუნული ღერძის განტოლება ისეა შერჩეული, რომ ზუსტად ემთხვევა იმ მრუდს, რომლითაც ნამდვილად იღუნება ღერო, მაშინ კრიტიკული ძალის მიღებული მნიშვნელობა იქნება ზუსტი. უმეტეს შემთხვევაში ამ მრუდის მოხაზულობა უცნობია და ამიტომ ამოცანის გადაწყვეტა წარმოებს მიახლოებით.

წინასწარ ვირჩევთ გაღუნული ღერძის განტოლებას, რომელიც შეიძლება ზუსტად არ დაემთხვეს ნამდვილ მრუდს, მაგრამ აუცილებლად უნდა დააკმაყოფილოს ღეროს ბოლოების პირობები.

მაგალითად, სახსროვანად დაყრდნობილი ძელისათვის გვექნება: როცა $x=0$ და $x=l$, მაშინ $y=0$ და $y''=0$ ($M=0$).

ამ შემთხვევისათვის, თუ გაღუნული ღერძის განტოლებას ავირჩევთ სინუსოიდის სახით

$$y = \delta \sin \frac{\pi x}{l},$$

მაშინ

$$y' = \frac{\delta \pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l},$$

$$y'' = -\frac{\delta \pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l},$$

$$\int_0^l (y')^2 dx = \frac{\delta^2 \pi^2}{l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{\delta^2 \pi^2}{l^2} \cdot \frac{l}{2},$$

$$\int_0^l (y'')^2 dx = \frac{\delta^2 \pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{\delta^2 \pi^4}{l^4} \cdot \frac{l}{2}.$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები 30-ე ფორმულაში, მივიღებთ:

$$P_{\text{კ}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (31)$$

ვინაიდან გაღუნული ღერძის განტოლებად ავირჩიეთ ისეთი მრუდი, რომლითაც სინამდვილეში იღუნება ძელი, ამიტომ მივიღეთ კრიტიკული ძალის ზუსტი მნიშვნელობა.

გადავწყვიტოთ იგივე ამოცანა დირიხლეს პრინციპით (ფორ. 24'). საერთო პოტენციალური ენერგია (ან ენერგიის ნაზრდი ΔU)

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx.$$

ინტეგრალების მნიშვნელობების შეტანის შემდეგ

$$U = \frac{EI \pi^4}{4l^3} \xi^2 - P \frac{\pi^2}{4l} \xi^2. \quad (32)$$

მაშასადამე, U ფუნქციაა δ -სი.
ექსტრემუმის პირობა მოგვცემს:

$$\frac{dU}{d\delta} = \frac{EI \pi^4}{2l^3} \delta - \frac{P \pi^2}{2l} \xi = 0.$$

იმის გასარკვევად თუ როგორია წონასწორობა — მდგრადი, არამდგრადი თუ განუჩრჩევითი, საჭიროა განისაზღვროს მეორე წარმოებული:

$$\frac{d^2U}{d\delta^2} = \frac{EI \pi^4}{2l^3} - \frac{P \pi^2}{2l}.$$

როცა

$$P < \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

მაშინ

$$\frac{d^2U}{d\delta^2} > 0$$

და ადგილი აქვს მდგრად წონასწორობას. როცა

$$P > \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

მაშინ

$$\frac{d^2U}{d\delta^2} < 0$$

და წონასწორობა არამდგრადია.

როცა

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

მაშინ

$$\frac{d^2U}{d\delta^2} = 0$$

(δ ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის) და წონასწორობა განუჩრჩევითია.

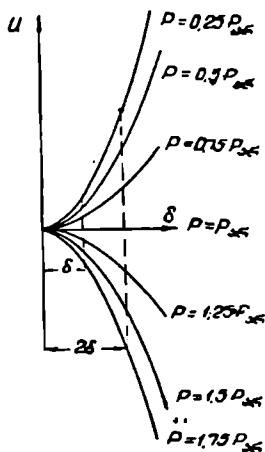
32-ე ფორმულა გვიჩვენებს, რომ პოტენციური ენერჯია U არის δ კვადრატული ფუნქცია და P მუდმივი მნიშვნელობის დროს იცვლება პარაბოლის ცვლილების კანონის საფუძველზე.

U გამოსახულება შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$U = A \left(1 - \frac{P}{P_{კრ}} \right) \delta^2. \quad (33)$$

ამ გამოსახულების საფუძველზე $\frac{P}{P_{კრ}}$ ფარდობის სხვადასხვა მნიშვნელო-

ბისათვის მე-7 ნახაზზე აგებულია U ცვლილების გრაფიკი δ მიხედვით. ამ ნახაზიდან ჩანს, რომ P რაც უფრო ახლოა კრიტიკულ ძალასთან (როცა $P < P_{კრ}$), მით უფრო ნაკლები ენერგიაა დაგროვილი ძელში და მაშასადამე მით უფრო ადვილია მისი გალუნვა წონასწორობის სწორხაზოვან მდგომარეობიდან.



ნახ. 7.

როცა $P = P_{კრ}$, მაშინ ძელის გასაღუნად არ არის საჭირო ენერგიის დახარჯვა. თუ $P > P_{კრ}$, მაშინ პოტენციალური ენერგია უარყოფითია, რაც იმას ნიშნავს, რომ გალუნული მდგომარეობის შესანარჩუნებლად საჭიროა საწინააღმდეგო ნიშნის ენერგიის დახარჯვა.

**სწორხაზოვანი შეკუმშული ღრეკადი ღეროების
მდგრადობა**

§ 8. ერთმალისანი ღეროების მდგრადობა. ძირითადი შემთხვევაები
(ეილერის ამოცანა)

✓✓

1. ორი ბოლოთი სახსროვნად ჩამაგრებული ძელი იკუმშება ცენტრალურად მოდებული ძალით (ნახ. 8 ა). ღერო იდეალურად სწორხაზოვანია. თუ P ძალა მცირეა ($P < P_{კ}$) ღერო შეინარჩუნებს სწორხაზოვან ფორმას და ადგილი ექნება მხოლოდ უბრალო ცენტრალურ კუმშვას. თუ ამ მდგომარეობაში ძელზე გამოქმედეთ განივი ძალა Q , მაშინ ძელი გაიღუნება, მაგრამ Q ძალის მოშორებისთანავე უბრუნდება თავის სწორხაზოვან მდგომარეობას, მაშასადამე ისეთ მდგომარეობას როცა $P < P_{კ}$ ღეროს სწორხაზოვანი ფორმა მდგრადია. თუ P ძალას თანდათანობით ვაგზრდით, მაშინ ის მიაღწევს კრიტიკულ მნიშვნელობას $P_{კ}$. ამ შემთხვევაში ძელის სწორხაზოვანი ფორმა აღარ იქნება მდგრადი და განივი ძელის მოდების შედეგად მიღებული გაღუნვა აღარ მოიწიბობა. როგორც ვხედავთ კრიტიკული ძალა არის ის მინიმალური ძალა,

რომელსაც შეუძლია ღერო ამყოფოს უსასრულოდ მცირე სიდიდით გაღუნულ მდგომარეობაში.

გაღუნული ღერძის დიფერენციალური განტოლებაა:

$$EIy'' = M.$$

მღუნავი მომენტი

$$M = -Py.$$

მაშასადამე,

$$EIy'' + Py = 0$$

ნახ. 8.

ან
სადაც

$$y'' + k^2y = 0, \tag{34}$$

$$K = \sqrt{\frac{P}{EI}}. \tag{35}$$

მე-34 განტოლების ინტეგრალი იქნება:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx. \quad (36)$$

სასაზღვრო პირობები:

$$\left. \begin{array}{l} \text{როცა } x=0 \quad y=0, \\ \text{როცა } x=l \quad y=0, \end{array} \right\} \quad (37)$$

მოგვცემს

$$\left. \begin{array}{l} C_2 = 0, \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0. \end{array} \right\} \quad (38)$$

$C_1 = C_2 = 0$ გვაძლევს ტრივიალურ გადაწყვეტას, რაც იმას ნიშნავს, რომ გაღუნვის არა აქვს ადგილი. მდგრადობის განტოლების მისაღებად 38-ე განტოლების დეტერმინანტი გაუტოლოთ ნულს:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin kl & \cos kl \end{vmatrix} = 0,$$

საიდანაც

$$\sin kl = 0. \quad (39)$$

ამ ტრანსცენდენტული განტოლების ფესვები იქნება:

$$kl = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi. \quad (40)$$

ეს არის ღეროს კრიტიკული მდგომარეობის პირობა.

თუ k მნიშვნელობას 35-ე განტოლებაში შევიტანთ, მივიღებთ:

$$P_{jkr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}. \quad (41)$$

გაღუნული ღერძის განტოლება იქნება:

$$y = C_1 \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (42)$$

როგორც ვხედავთ, ჩვენ მივიღეთ უსასრულოდ ბევრი კრიტიკული მდგომარეობა, რომლებსაც შეესაბამებათ თავისი კრიტიკული ძალა და მდგრადობის დაკარგვის ფორმები.

ამრიგად,

$$\text{როცა } n=1 \quad P_{1kr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{და } y = C_1 \sin \frac{\pi}{l} x,$$

$$\text{როცა } n=2 \quad P_{2kr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{და } y = C_1 \sin \frac{2\pi}{l} x.$$

როცა $n=3$ $P_{აკრ} = \frac{9\pi^2 EI}{l^2}$ და $y = C_1 \sin \frac{3\pi}{l} x$

და ა. შ.

მდგრადობის დაკარგვის ფორმები ნაჩვენებია 1 ნახაზზე.

მოკმედი ძალა გადაცდება თუ არა კრიტიკული ძალის უმცირეს მნიშვნელობას, ღერო გადადის წონასწორობის არამდგრად მდგომარეობაში და ირღვევა. ამიტომ, პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს უმცირეს კრიტიკულ ძალას:

$$P_{აკრ} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

პირველ კრიტიკულ ძალას შეესაბამება ვალუნვა სინუსოიდის ნახევარ ტალღაზე (ნახ. 8 ბ) მეორეს ორ ნახევარ ტალღაზე, მესამეს სამ ნახევარ ტალღაზე და ა. შ. მხოლოდ პირველი ფორმა იქნება მდგრადი. ყველა დანარჩენი ფორმები იქნება არამდგრადი.

2. ღეროს ერთი ბოლო ხისტად არის ჩამაგრებული, მეორე კი თავისუფალია (ნახ. 9 ა). როდესაც P ძალა მიაღწევს კრიტიკულ მნიშვნელობას ძელი მიიღებს უსასრულოდ მცირე ვალუნვას (ნახ. 9 ბ). თავისუფალი ბოლოს გადაადგილება იყოს δ .

მლუნავი მომენტი ნებისმიერ კვეთში ტოლია:

$$M = P(\delta - y)$$

ვალუნული ღერძის დიფერენციალური განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$EI y'' = P(\delta - y) \quad (42)$$

თუ აღვნიშნავთ, რომ

$$K = \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad (43)$$

მაშინ (42) განტოლება დაიწერება შემდეგნაირად:

$$y'' + k^2 y = k^2 \delta \quad (44)$$

მივიღებთ არაერთგვაროვანი ხაზობრივი დიფერენციალური განტოლება, რომლის საერთო ინტეგრალი იქნება:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta \quad (45)$$

სასაზღვრო პირობებია:

$$\begin{aligned} \text{როცა } x=0 \quad y=0 \quad \text{და } y'=0, \\ \text{როცა } x=l \quad y=\delta. \end{aligned} \quad (46)$$

მივიღებთ სამ აზაერთგვაროვან განტოლებას:

$$\left. \begin{aligned} C_2 + \delta &= 0, \\ C_1 k &= 0, \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

გვაქვს სამი უცნობი: C_1, C_2 და δ .

მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 0 \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = k \cos kl = 0. \quad (48)$$

რადგან $k \neq 0$, ამიტომ

$$\cos kl = 0. \quad (49)$$

უკანასკნელი განტოლების ფესვებია:

$$kl = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, \frac{(2n+1)\pi}{2}. \quad (50)$$

45-ე განტოლებაში, თუ შევიტანთ C_1 და C_2 მნიშვნელობებს, მივიღებთ გაღუნული ღერძის განტოლებას:

$$y = \delta (1 - \cos kx). \quad (51)$$

გვექნება მრავალი კრიტიკული ძალა და მათი შესაბამისი მდგრადობის დაკარგვის ფორმები.

$$\text{როცა } n=0 \quad P_{1კრ} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad \text{და} \quad y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi}{2l} x \right),$$

$$\text{როცა } n=1 \quad P_{2კრ} = \frac{9\pi^2 EI}{4l^2} \quad \text{და} \quad y = \delta \left(1 - \cos \frac{3\pi}{2l} x \right),$$

$$\text{როცა } n=2 \quad P_{3კრ} = \frac{25\pi^2 EI}{l^2} \quad \text{და} \quad y = \delta \left(1 - \cos \frac{5\pi}{2l} x \right)$$

და ა. შ.

უმცირესი კრიტიკული ძალა იქნება:

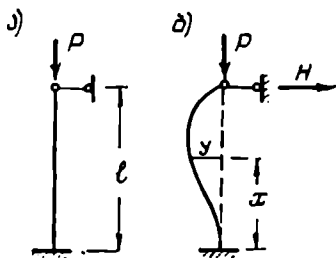
$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}. \quad (52)$$

დანარჩენ ძალებს პრაქტიკული მნიშვნელობა არა აქვთ.

მდგრადობის დაკარგვის ფორმებიდან (ნახ. 9) პირველი არის მდგრადი, დანარჩენი კი არამდგრადია. არამდგრადი ფორმები შეიძლება ვაქციოთ მდგრადად, თუ გადაღუნვის წერტილებში მოუწყობთ ბმებს.

8. ღეროს ერთი ბოლო ჩამავრებულია ხისტად, მეორე კი დაყრდნობილია სახსროვნად (ნახ 10 ა). კრიტიკულ მომენტში ღერო მიიღებს უსასრულოდ მცირე გაღუნვას და საყრდენებზე გაჩნდება რეაქციები.

მლუნავი მომენტი



ნახ. 10.

$$M = -Py - H(l-x).$$

გაღუნული ღერძის დიფერენციალური განტოლება იქნება:

$$EJy'' = -Py - H(l-x)$$

$$\text{ან } y'' + k^2y = -\frac{H}{EI}(l-x). \quad (53)$$

არაერთგვაროვანი (53) განტოლების საერთო ინტეგრალი იქნება (იხ. § 4):

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{H}{P}(l-x). \quad (54)$$

54-ე განტოლებაში შედის სამი უცნობი C_1 , C_2 და $\frac{H}{P}$, რომელთა ამოსახსნელად საჭიროა სამი სასაზღვრო განტოლების შედგენა:

$$\left. \begin{array}{l} \text{როცა } x=0 \quad y=0 \text{ და } y'=0 \\ \text{როცა } x=l \quad y=0 \end{array} \right\} \quad (55)$$

მივიღებთ სამ ერთგვაროვან განტოლებას:

$$\left. \begin{array}{l} C_2 - \frac{H}{P} l = 0, \\ C_1 k + \frac{H}{P} = 0, \\ C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0. \end{array} \right\} \quad (56)$$

მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -l \\ k & 0 & 1 \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

ღეტერმინანტის გაშლის შემდეგ მივიღებთ:

$$\operatorname{tg} kl = kl. \quad (57)$$

§ ზემოაღნიშნული ტრანსცენდენტული განტოლება შეიძლება გადავწყვიტოთ

გრაფიკულად, თუ ავაგებთ ტანგენსოიდის ხაზს. ტანგენსოიდის ხაზებისა და $y = kl$ სწორი ხაზის გადაკვეთის წერტილები მოგვცემს (57) განტოლების ფესვებს (ნახ. 11). შეიძლება ვისარგებლოთ ტანგენსების ცხრილითაც. ამ შემთხვევაში უნდა ვიპოვოთ არგუმენტის ის მნიშვნელობა, რომლის ტანგენსი ტოლი იქნება თვითონ არგუმენტის რადიანებში.

57-ე განტოლების უმცირესი ფესვი იქნება:

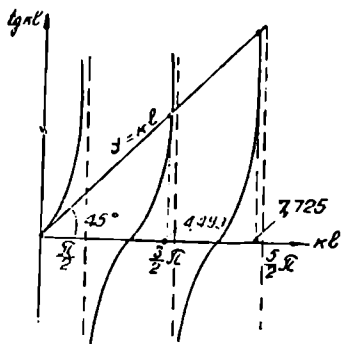
$$kl = 4,493.$$

კრიტიკული ძალა

$$P_{კრ} = k^2 EI = \frac{20,19 EI}{l^2} \quad (58)$$

ან

$$P_{კრ} = \frac{2,046 \pi^2 EI}{l^2}. \quad (58')$$



ნახ. 11.

4. ორი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული ძელი ჩვენ განვიხილეთ მე-4 პარაგრაფში და მივიღეთ:

$$P_{კრ} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}.$$

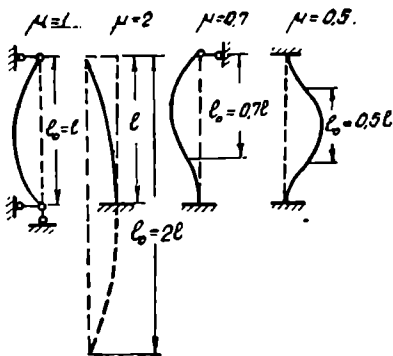
ჩამაგრების ნებისმიერი შემთხვევისათვის კრიტიკული ძალა შეიძლება გამოისახოს საერთო სახით:

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}, \quad (59)$$

სადაც $l_0 = \mu l$ ეწოდება ღეროს დაყვანილი სიგრძე, ხოლო μ — დაყვანილი სიგრძის კოეფიციენტი.

მე-12 ნახაზზე ნაჩვენებია ღეროს დაყვანილი სიგრძე სხვადასხვა შემთხვევისათვის. თუ სახსროვანად ჩამაგრებულ ძელს (ეილერის ძირითადი შემთხვევა) ჩავთვლით ძირითად შემთხვევად, მაშინ დაყვანილი სიგრძე წარმოადგენს ძელის სიგრძის იმ ნაწილს, რომელიც იმყოფება ძირითად შემთხვევის პირობებში. გეომეტრიულად l_0 არის სინუსოიდის ნახევარ ტალღის სიგრძე.

დაყვანილი სიგრძის კოეფიციენტის მნიშვნელობები მოყვანილია მე-12 ნახაზზე.



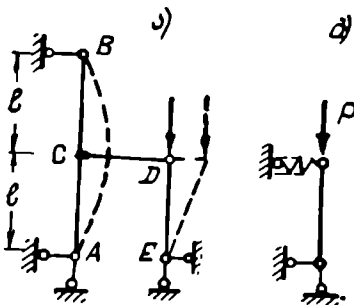
ნახ. 12.

¹ დაყვანილი სიგრძის ცნება შემოიღო პროფ. იასინსკიმ.

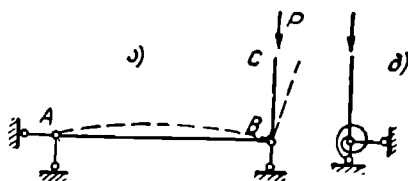
§ 7. დრეკად და ჩამაგრებული ღეროების მდგომარეობა

იდეალურად ხისტი საყრდენების განხორციელება პრაქტიკულად ძალიან ძნელია, ამიტომ საინჟინრო პრაქტიკაში ჩვენ ვხვდებით ისეთ ნაშენებს, სადაც საყრდენები გადაადგილდებიან ხაზობრივად ან მობრუნდებიან. ამ შემთხვევაში საყრდენები უნდა ჩაეთვალოს დრეკად დაყრდნობილად ან დრეკად ჩამაგრებულად. ხშირად საყრდენების დრეკადობა მნიშვნელოვან გავლენას ახდენს კრიტიკულ ძალაზე.

მაგალითად, ED ღეროს (ნახ. 13 ა) D საყრდენი დრეკად დაყრდნობილად უნდა განვიხილოთ, რადგან CD ღეროს შეუძლია გადაადგილდეს ჰორიზონტალურად. ED ღეროს საანგარიშო სქემა მე-13 ბ ნახაზზეა ნაჩვენები.



ნახ. 13.



ნახ. 14.

CB ღეროს (ნახ. 14 ა) B საყრდენი დრეკად ჩამაგრებულად უნდა ჩაეთვალოს, რადგან მას AB კოქის დეფორმაციის გამო შეუძლია მობრუნდეს. CB ღეროს საანგარიშო სქემა ნაჩვენებია მე-14 ბ ნახაზზე.

გავარჩიოთ დრეკად ჩამაგრების რამდენიმე კონკრეტული მაგალითი.

1. ღეროს ქვედა ბოლო დრეკად არის ჩამაგრებული, ზედა კი თავისუფალია (ნახ. 15). ამოცანა წყდება ხისტად ჩამაგრებული ძელის ანალოგიურად.

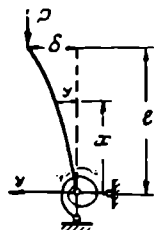
განსხვავება არის მხოლოდ სასაზღვრო პირობებში. ჩამაგრების დრეკადობა დახასიათებულია ერთეული მობრუნების კუთხისაგან გამოწვეული მომენტი c -თი (ჩამაგრების სიხისტე), მაშინ მთლიანი მობრუნების კუთხისაგან გამოწვეული მომენტი $c \cdot y'_{x=0}$ ტოლია. მაშასადამე, $c y'_{x=0} = P\delta$,

საიდანაც
$$y'_{x=0} = \frac{P\delta}{c} \quad (60)$$

ზემოაღნიშნული ტოლობა არის დრეკადი ჩამაგრების პირობა.

ამრიგად, სასაზღვრო პირობები იქნება:

$$\left. \begin{aligned} \text{როცა } x=0 \quad y=0 \quad \text{და } y' = \frac{P\delta}{c} \\ \text{როცა } x=l \quad y=\delta. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$



ნახ. 15.

გაღწეული ღერძის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალი იქნება (ფორ. 45):

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta.$$

61-ე პირობების საფუძველზე მივიღებთ:

$$C_2 + \delta = 0,$$

$$C_1 k = \frac{P\delta}{c},$$

$$C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0.$$

თუ P მაგიერ შევიტანთ $P = k^2 EI$, მივიღებთ სამ ერთგვაროვან განტოლებას:

$$C_2 + \delta = 0,$$

$$C_1 k - \frac{k^2 EI}{c} \delta = 0,$$

$$C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0.$$

მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & -\frac{k^2 EI}{c} \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

დეტერმინანტის გაშლის შემდეგ მივიღებთ:

$$kl \operatorname{tg} kl = \frac{cl}{EI}. \quad (62)$$

რადგანაც c აქვს განზომილება $\frac{1}{\text{მ}^2}$, ამიტომ (62) განტოლების მარჯვენა და მარცხენა ნაწილები უგანზომილებო სიდიდეებია. 62-ე განტოლების მარჯვენა ნაწილი შედგება. აღენიშნოთ:

$$\frac{cl}{EI} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad kl = z,$$

მაშინ 62-ე განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

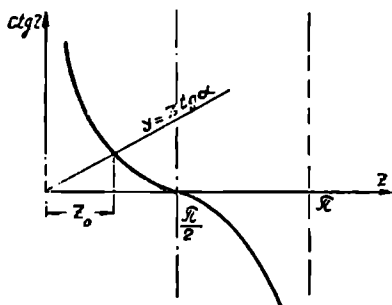
$$z \operatorname{tg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

ან

$$z \operatorname{tg} \alpha = c \operatorname{tg} z. \quad (63)$$

ეს განტოლება შეიძლება გადავწყვიტოთ გრაფიკულად, თუ ავაგებთ კოტანგენსიოდის ხაზს და $y = z \operatorname{ctg} \alpha$ სწორ ხაზს. ამ ორი ხაზის გადაკვეთის წერტილები მოგვცემს განტოლების ფესვებს (ნახ. 16).

როგორც ნახაზიდან ჩანს z_0 ყოველთვის ნაკლებია $\frac{\pi}{2}$ -ზე და ამიტომ



ნახ. 16.

კრიტიკული ძალაც ნაკლები იქნება ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული ძელის კრიტიკულ ძალზე $-\frac{\pi^2 EI}{4 l^2}$.

ხისტი ჩამაგრების შემთხვევაში $c = \infty$ და (63) განტოლება მოგვცემს ($\operatorname{ctg} \alpha = 0$):

$$\operatorname{ctg} z = 0,$$

$$z = kl = \frac{\pi}{2},$$

საიდანაც

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}.$$

z შუალედი მნიშვნელობის საპოვნელად საჭიროა საყრდენის სიხისტის c ცოდნა.

2. ღეროს ზედა ბოლო სახსროვანად არის დაყრდნობილი, ქვედა კი ღრეკადადაა ჩამაგრებული (ნახ. 17). ეს ამოცანა წყდება მე-ნ პარაგრაფის მე-3 ამოცანის ანალოგიურად.

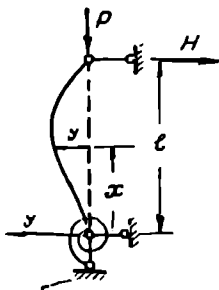
მღუნავი მომენტი $M = -Py - H(l-x)$.

გაღუნული ღერძის დიფერენციალური განტოლების (53) საერთო ინტეგრალი იქნება:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{H}{P}(l-x). \quad (64)$$

თუ ერთეული მობრუნების კუთხისაგან გამოწვეულ მღუნავ მომენტს ჩამაგრების ადგილზე c აღვნიშნავთ (ჩამაგრების სიხისტე), მაშინ წინა ამოცანის ანალოგიურად სასაზღვრო პირობები იქნება:

$$\left. \begin{array}{l} \text{როცა } x=0 \quad y=0 \quad \text{და } y' = -\frac{Hl}{c}, \\ \text{როცა } x=l \quad y=0, \end{array} \right\} \quad (65)$$



ნახ. 17.

სადაც Hl არის მღუნავი მომენტი ჩამაგრებაში.

(65) პირობის გამოყენება მოგვცემს:

$$C_2 - \frac{H}{P}l = 0,$$

$$C_1 k + \frac{H}{P} = -\frac{Hl}{c},$$

$$C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0.$$

თუ P შევცვლით $P = k^2 EI$ გამოსახულებით, მაშინ უკანასკნელი განტოლებები გადიწერება შემდეგი სახით:

$$C_2 - \frac{H}{P} l = 0,$$

$$C_1 k + \frac{H}{P} \left(1 + \frac{k^2 EI}{c} \right) = 0,$$

$$C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0.$$

ამ განტოლებებში C_1 , C_2 და $\frac{H}{P}$ უცნობებია.

მდგრადობის განტოლება დაიწერება შემდეგი სახით:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -l \\ k & 0 & \left(1 + \frac{k^2 EI}{c} \right) \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

აქედან

$$\operatorname{tg} kl = \frac{kl}{1 + \frac{EI}{cl} (kl)^2}. \quad (66)$$

თუ აღვნიშნავთ, რომ

$$kl = z,$$

$$\frac{EI}{cl} = A,$$

მაშინ

$$\operatorname{tg} z = \frac{z}{1 + Az^2}.$$

ამ განტოლების ფესვების მოძებნა უმჯობესია ეაწარმოოთ გრაფიკულად — ავაგოთ ტანგენსიოიდის ხაზი და $y = \frac{z}{1 + Az^2}$ მრუდი, მათი გადაკვეთის წერტილები მოგვცემენ საძიებელ ფესვებს.

ხისტი ჩამაგრების შემთხვევაში $c = \infty$ და მივიღებთ 57-ე ფორმულას:

$$\operatorname{tg} kl = kl.$$

სახსროვანი ჩამაგრების დროს $c = 0$ და გვექნება:

$$\operatorname{tg} kl = 0$$

ან

$$\sin kl = 0.$$

რაც ემთხვევა (39) განტოლებას.

მაშასადამე, საძიებელი არგუმენტი მოთავსებულია $\pi < kl < 4.493$ ზღვრებში. 12

8. ღეროს ორივე ბოლო დრეკადად არის ჩამაგრებული (ნახ. 18). ორივე ბოლოს სიხისტის კოეფიციენტი c ერთი და იგივეა. კრიტიკულ მომენტში საყრდენებზე გაჩნდება ერთნაირი მომენტები და ამიტომ რეაქციის პორიზონტალური მდგენელი $H=0$.

მღუნავი მომენტი

$$M = -Py - m.$$

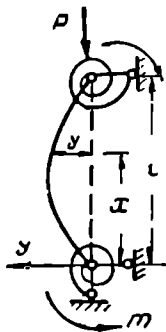
გაღუნული ღერძის დიფერენციალური განტოლება და მისი ინტეგრალი იქნება:

$$EIy'' + Py = -m,$$

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{m}{P}, \quad (67)$$

სადაც

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$



ნახ. 18.

სასაზღვრო პირობები იქნება:

$$\left. \begin{array}{l} \text{როცა } x=0 \quad y=0, \quad y' = -\frac{m}{c} \\ \text{როცა } x=l \quad y=0, \quad y' = \frac{m}{c} \end{array} \right\} \quad (68)$$

რადგანაც სამი უცნობი გვაქვს (C_1 , C_2 და m), ამიტომ გამოვიყენოთ პირველი სამი პირობა, მივიღებთ:

$$C_2 - \frac{m}{P} = 0,$$

$$C_1 k + \frac{m}{c} = 0,$$

$$C_1 \sin kl + C_2 \cos kl - \frac{m}{P} = 0.$$

მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{k^2 EI} \\ k & 0 & \frac{1}{c} \\ \sin kl & \cos kl & -\frac{1}{k^2 EI} \end{vmatrix} = 0.$$

P მაგიერ შეტანილია $k^2 EI$.

დეტერმინანტის გაშლის შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{1}{c} \sin kl + \frac{1}{kEI} (1 - \cos kl) = 0.$$

ტრიგონომეტრიული გარდაქმნის შემდეგ გვექნება:

$$\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = -\frac{kl}{2} \cdot \frac{2EI}{cl}. \quad (69)$$

თუ ღერო ორივე საყრდენით სახსროვნად არის დაყრდნობილი, მაშინ სიხისტის კოეფიციენტი $c=0$ და

$$\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = -\infty, \quad \frac{kl}{2} = \frac{\pi}{2},$$

საიდანაც

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

თუ ორივე ბოლო ხისტად არის ჩამაგრებული, მაშინ $c=\infty$ და

$$\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = 0, \quad \frac{kl}{2} = \pi,$$

საიდანაც

$$P_{კრ} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}.$$

c ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის კრიტიკული ძალა მოთავსებული იქნება ამ ორ სიდიდეს შორის და მოიძებნება გრაფიკულად 69-ე ფორმულით.

4. ღეროს ზედა ბოლო დრეკადად არის დაყრდნობილი, ქვედა კი ხისტად (ნახ. 19). დრეკად საყრდენს შეუძლია გადაადგილდეს ჰორიზონტალურად, რის გამო წარმოიშვება საყრდენი რეაქცია H , რომელიც საყრდენის გადაადგილების პროპორციულია. თუ ერთეული გადაადგილებით გამოწვეულ რეაქციას (ძალას ზამბარში) აღვნიშნავთ c -თი (საყრდენის სიხისტე), მაშინ

$$H = \delta c.$$

მღუნავი მომენტა ნებისმიერ კვეთში

$$M = P(\delta - y) - \delta c(l - x).$$

გალუნული ღერძის დიფერენციალური განტოლება

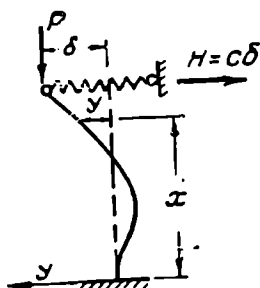
$$EI y'' = P(\delta - y) - \delta c(l - x)$$

გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$y'' + k^2 y = \frac{\delta P}{EI} \left[1 - \frac{c(l-x)}{P} \right], \quad (70)$$

სადაც

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$



ნახ. 19.

70-ე განტოლების საერთო ინტეგრალი იქნება:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta \left[1 - \frac{c(l-x)}{P} \right]. \quad (71)$$

სასაზღვრო პირობები იქნება:

$$\left. \begin{array}{l} \text{როცა } x=0 \quad y=0 \quad \text{და } y'=0, \\ \text{როცა } x=l \quad y=\delta. \end{array} \right\} \quad (72)$$

ამ პირობების საფუძველზე მივიღებთ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას:

$$C_2 + \delta \left(1 - \frac{cl}{EI k^2} \right) = 0,$$

$$C_1 k - \delta \frac{c}{k^2 EI} = 0,$$

$$C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0.$$

P მაგვიერ შეტანილია $P = k^2 EI$.

მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \left(1 - \frac{cl}{k^2 EI} \right) \\ k & 0 & \frac{c}{k^2 EI} \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

დეტერმინანტის გახსნის შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{c}{k^2 EI} \sin kl - k \left(1 - \frac{cl}{k^2 EI} \right) \cos kl = 0.$$

ეს განტოლება შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\operatorname{tg} kl = kl - \frac{k^3 EI}{c},$$

ან საბოლოოდ

$$\operatorname{tg} kl = kl - \frac{EI}{cl^3} (kl)^3. \quad (73)$$

73-ე განტოლება გადაწვევით გრაფიკულად. ავსვით ტანგენსიონის ხაზი და $y = z - \frac{EI}{cl^3} z^3$ მრუდი, რომელთა გადაკვეთის წერტილები მოგვცემს (73) განტოლების ფესვებს. თუ დეროს ზედა ბოლო თავისუფალია, მაშინ $c=0$ და (73) განტოლება მოგვცემს:

$$\cos kl = 0,$$

$$\text{საიდანაც } kl = \frac{\pi}{2} \quad \text{და} \quad P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}.$$

თუ ძელის ზედა ბოლო ხისტ ღეროზეა დაყრდნობილი, მაშინ $c=\infty$ და (73) განტოლება მოგვეცემს:

$$\operatorname{tg} kl = kl$$

და

$$P_{კრ} = \frac{(4,493)^2 EI}{l^2}.$$

მაშასადამე, kl არგუმენტი მოთავეებულია $\frac{\pi}{2} < kl < 4,493$ ზღვრებში.

5. ღეროს ზედა ბოლო დაყრდნობილია ღრეკადად, ქვედა კი ღრეკადად ჩამაგრებულია (ნახ. 20).

ზედა საყრდენის სიხისტის კოეფიციენტი აღვნიშნოთ c -თი, ქვედა საყრდენის კი α -თი.

წონასწორობის დიფერენციალური განტოლების საერთო ინტეგრალი (ფორმ. 71) იქნება ისეთივე, როგორც წინა შემთხვევაში:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta \left[1 - \frac{c(l-x)}{P} \right].$$

საყრდენი მომენტი

$$m = \delta(c l - P).$$

სასაზღვრო პირობები იქნება:

$$\left. \begin{aligned} \text{როცა } x=0 \quad y=0, \quad y' = -\frac{m}{\alpha} = -\frac{\delta(c l - P)}{\alpha}, \\ \text{როცა } x=l \quad y=\delta. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

ეს პირობები მოგვეცემს:

$$C_2 + \delta \left(1 - \frac{c l}{P} \right) = 0,$$

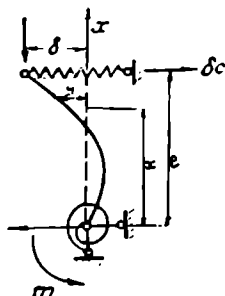
$$C_1 k + \delta \frac{c}{P} = -\delta \frac{(c l - P)}{\alpha},$$

$$C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0.$$

მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \left(1 - \frac{c l}{P} \right) \\ k & 0 & \left(\frac{c}{P} + \frac{c l - P}{\alpha} \right) \\ \sin kl & \cos kl & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \sin kl \left(\frac{c}{P} + \frac{c l - P}{\alpha} \right) + \cos kl \left(k - \frac{k l c}{P} \right) = 0,$$



ნახ. 20.

$$\operatorname{tg} kl = \frac{\frac{klc}{P} - k}{\frac{c}{P} + \frac{cl - P}{\alpha}} \quad (75)$$

ამ ფორმულიდან ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ ზემოთ განხილული შემთხვევების მდგრადობის განტოლებები, თუ (75) ფორმულაში შევიტანთ მნიშვნელობებს:

1) $\alpha = \infty$ (ძელის ქვედა ბოლო ხისტად არის ჩამაგრებული, ზედა კი ღრეკადად, ნახ. 19), მივიღებთ:

$$\operatorname{tg} kl = kl - \frac{EI}{c l^3} (kl)^3;$$

2) $c = \infty$ (ძელის ზედა ბოლო სახსროვანად არის დაყრდნობილი, ქვედა კი ღრეკადად ჩამაგრებული ნახ. 17):

$$\operatorname{tg} kl = \frac{kl}{1 + \frac{EI}{\alpha l} (kl)^2} \quad (\text{იხ. ფორ. 66});$$

3) $c = 0$ (ძელის ზედა ბოლო თავისუფალია, ქვედა კი ჩამაგრებულია ღრეკადად, ნახ. 15), გვექნება:

$$kl \operatorname{tg} kl = \frac{\alpha l}{EI} \quad (\text{იხ. 62 ფორ.});$$

4) $c = 0, \alpha = \infty$ (ძელის ზედა ბოლო თავისუფალია, ქვედა კი ხისტად ჩამაგრებული, ნახ. 9), მივიღებთ:

$$\operatorname{tg} kl = \infty, \quad \text{ან} \quad \cos kl = 0;$$

5). $c = \infty, \alpha = 0$ (ძელის ორივე ბოლო სახსროვანად არის დაყრდნობილი, ნახ. 8), მივიღებთ:

$$\operatorname{tg} kl = 0 \quad \text{ან} \quad \sin kl = 0.$$

6. ძელის ზედა ბოლო ღრეკადად არის დაყრდნობილი, ქვედა კი სახსროვანად (ნახ. 21 ა). თუ ზედა საყრდენის სიხისტის კოეფიციენტი c ტოლია (ერთეული გადაადგილებით გამოწვეული რეაქცია), მაშინ

$$M = P(\delta - y) - \delta c(l - x).$$

გალუნული ღერძის საერთო ინტეგრალი იქნება:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta \left[1 - \frac{c}{P} (l - x) \right].$$

სასაზღვრო პირობებია:

$$\left. \begin{array}{l} \text{როცა } x=0 \quad y=0 \quad \text{და} \quad y''=0 \quad (M=0), \\ \text{როცა } x=l \quad y=\delta. \end{array} \right\} \quad (76)$$

76-ე პირობების საფუძველზე მივიღებთ: _

$$C_2 + \delta \left(1 - \frac{cl}{P}\right) = 0,$$

$$C_2 k^2 = 0,$$

$$C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0.$$

მდგრადობის განტოლება იქნება (რადგან $C_2 = 0$):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \left(1 - \frac{cl}{P}\right) \\ \sin kl & 0 \end{vmatrix} = \sin kl \left(1 - \frac{cl}{P}\right) = 0. \quad (77)$$

კრიტიკული ძალა განისაზღვრება ორი განტოლებით:

$$\left. \begin{aligned} \sin kl &= 0, \\ P_{კრ} &= \frac{\pi^2 EI}{l^2} \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

და

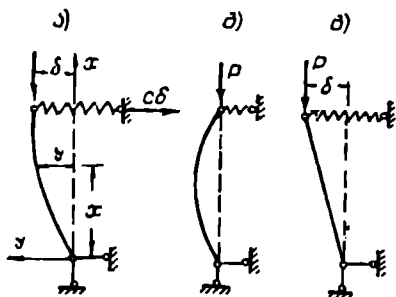
$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{cl}{P}\right) &= 0, \\ P_{კრ} &= cl. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

კრიტიკული ძალის მიღებული ორი მნიშვნელობიდან საანგარიშო იქნება მინიმალური.

პირველ შემთხვევაში დრეკადი საყრდენის სიხისტე საკმარისად დიდი და ძელი ისე გაიღუნება, როგორც სახსროვანად ჩამაგრებული (ელემენტის ძირითადი შემთხვევა. ნახ. 21 ბ).

მეორე შემთხვევაში, სიხისტის კოეფიციენტს აქვს ისეთი მნიშვნელობა, რომ მდგრადობის დაკარგვა ხდება უბრალო გადაბრუნებით, როგორც მთლიანი ხისტი ელემენტის (ნახ. 21 გ). მაშასადამე, თუ სიხისტის კოეფიციენტი

$$c > \frac{\pi^2 EI}{l^3}, \quad (80)$$



ნახ. 21.

მაშინ მდგრადობის დაკარგვა ხდება გრძივი ღუნვის გამო და კრიტიკული ძალა განისაზღვრება (78) ფორმულით. თუ

$$c < \frac{\pi^2 EI}{l^3}, \quad (81)$$

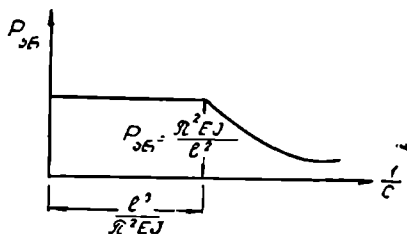
მაშინ მდგრადობის დაკარგვა ხდება ძელის გადაბრუნებით და კრიტიკული ძალა განისაზღვრება (79) ფორმულით.

$P_{კრ}$ და $\frac{1}{c}$ შორის დამოკიდებულების გრაფიკი ნაჩვენებია 22-ე ნახაზზე.

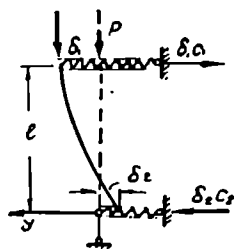
$$c = \frac{\pi^2 EI}{l^3} \quad (82)$$

ტოლობა იძლევა სიხისტის კოეფიციენტის იმ ზღვრულ მნიშვნელობას, რომლის ზრდის შემდეგ კრიტიკული ძალა უცვლელია.

სიხისტის ამ მნიშვნელობას კრიტიკული სიხისტე ეწოდება.



ნახ. 22.



ნახ. 23.

7. ღეროს ორივე ბოლო დაურდნობილია დრეკადად (ნახ. 23). ზედა საყრდენის სიხისტის კოეფიციენტი და გადაადგილება აღენიშნოთ c_1 და δ_1 , ქვედა საყრდენის— c_2 და δ_2 . სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი.

მლუნავი მომენტი

$$M = P(\delta_1 - y) - c_1 \delta_1 (l - x).$$

გაღუნული ღერძის დიფერენციალური განტოლების საერთო ინტეგრალი იქნება ისეთივე, როგორც წინა შემთხვევაში:

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \delta \left[1 - \frac{c_1(l-x)}{P} \right].$$

ღეროს ბოლოებზე გვექნება პირობები:

$$\left. \begin{aligned} \text{როცა } x=0 \quad y = -\delta_2 \text{ და } y'' = 0 \quad (M=0), \\ \text{როცა } x=l \quad y = \delta_1. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

წონასწორობის განტოლება მოგვცემს:

$$c_1 \delta_1 = c_2 \delta_2 \quad \text{ან} \quad \delta_2 = \frac{c_1}{c_2} \delta_1.$$

(83) პირობების საფუძველზე გვექნება:

$$B + \delta_1 \left(1 - \frac{c_1 l}{P} \right) = -\delta_2,$$

$$-Bk^2 = 0, \quad B = 0,$$

$$A \sin kl + B \cos kl = 0.$$

თუ შევიტანთ δ_2 -ს მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$\delta_1 \left(1 - \frac{c_1 l}{P} + \frac{c_1}{c_2} \right) = 0,$$

$$A \sin kl = 0.$$

ეს განტოლებები დაკმაყოფილდება ორ შემთხვევაში:

$$\text{თუ } \sin kl = 0 \text{ და}$$

$$\text{თუ } 1 - \frac{c_1 l}{P} + \frac{c_1}{c_2} = 0.$$

პირველიდან მივიღებთ

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad (85)$$

მეორედან

$$P_{კრ} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} l = \frac{l}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}}. \quad (86)$$

კრიტიკული ძალის ორი მნიშვნელობიდან საანგარიშო იქნება მინიმალური. ისე, როგორც წინა ამოცანაში, პირველ შემთხვევაში მდგრადობა დაიკარგება გრძივი ღუნვის გამო, მეორეში კი უბრალო გადაბრუნებით. მე-6 და მე-7 ამოცანა მარტივად გადაწყდება წონასწორობის განტოლებებით (იხ. § 14).

$\sqrt{\quad}$
§ 8. ღარიბის მდგრადობა რამდენიმე მახვილი ძალის მოქმედების დროს

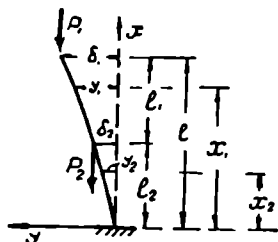
ძელზე, რომლის ქვედა ბოლო ხისტად ჩამაგრებულია, ზედა ბოლო კი თავისუფალი, მოქმედებს ორი მკუშმაკი ძალა P_1 და P_2 (ნახ. 24). ძელი შედგება ორი უბნისაგან. დავწეროთ მღუნავი მომენტის და გაღუნული ღერძის დიფერენციალური განტოლება ორივე უბნისათვის:

$$M_1 = P_1(\delta_1 - y_1),$$

$$M_2 = P_1(\delta_1 - y_1) + P_2(\delta_2 - y_2),$$

$$EI y_1'' + P_1 y_1 = P_1 \delta_1,$$

$$EI y_2'' + (P_1 + P_2) y_2 = P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2. \quad (86)$$



ნახ. 24.

აღვნიშნოთ:

$$k_1 = \sqrt{\frac{P_1}{EI}} \text{ და } k_2 = \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{EI}}. \quad (87)$$

86-ე განტოლებების საერთო ინტეგრალები იქნება:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= C_1 \sin k_1 x + C_2 \cos k_1 x + \delta_1, \\ y_2 &= C_3 \sin k_2 x + C_4 \cos k_2 x + \frac{P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2}{P_1 + P_2}. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

მულტიპლიკაციის განსაზღვრავად გამოვიყენოთ შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$\left. \begin{aligned} 1) \text{ როცა } x=0 \quad y'_2=0, & \quad 3) \text{ როცა } x=l_2 \quad y'_1=y'_2, \\ 2) \text{ როცა } x=l_1 \quad y_1=\delta_1 & \quad 4) \text{ როცა } x=l_2 \quad y_1''=y_2''. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

(89) განტოლებები მოგვცემს:

$$C_3 k_2 = 0 \quad \text{და} \quad C_3 = 0.$$

$$C_1 \sin k_1 l + C_2 \cos k_1 l = 0,$$

$$C_1 k_1 \cos k_1 l_2 - C_2 k_1 \sin k_1 l_2 = -C_4 k_2 \sin k_2 l_2,$$

$$-C_1 k_1^2 \sin k_1 l_2 - C_2 k_1^2 \cos k_1 l_2 = -C_4 k_2^2 \cos k_2 l_2.$$

მაშასადამე, C_1 , C_2 და C_4 უცნობების გასაგებად გვექნება სამი ერთგვაროვანი განტოლება:

$$C_1 \sin k_1 l + C_2 \cos k_1 l = 0,$$

$$C_1 k_1 \cos k_1 l_2 - C_2 k_1 \sin k_1 l_2 + C_4 k_2 \sin k_2 l_2 = 0,$$

$$C_1 k_1^2 \sin k_1 l_2 + C_2 k_1^2 \cos k_1 l_2 - C_4 k_2^2 \cos k_2 l_2 = 0.$$

მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin k_1 l & \cos k_1 l & 0 \\ \cos k_1 l_2 & -\sin k_1 l_2 & \frac{k_2}{k_1} \sin k_2 l_2 \\ \sin k_1 l_2 & \cos k_1 l_2 & -\frac{k_2^2}{k_1^2} \cos k_2 l_2 \end{vmatrix} = 0.$$

უანასენელი სეექტის კოეფიციენტები შევკვეთოთ $\frac{k_2}{k_1}$ -ზე, მაშინ დეტერმინანტის გაშლის შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{k_2}{k_1} \cos k_2 l_2 (\sin k_1 l \sin k_1 l_2 + \cos k_1 l \cos k_1 l_2) -$$

$$- \sin k_2 l_2 (\sin k_1 l \cos k_1 l_2 - \cos k_1 l \sin k_1 l_2) = 0.$$

გარდაქმნის შემდეგ გვექნება:

$$\operatorname{tg} k_1 l_1 \operatorname{tg} k_2 l_2 = \frac{k_2}{k_1}. \quad (90)$$

თუ გვეცოდინება ძალის მოდების წერტილები და $\frac{P_2}{P_1}$ ფარდობა, მაშინ

90-ე განტოლებიდან ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ კრიტიკული ძალა. მაგალითად, თუ $P_2=0$, მაშინ $l_1=0$, $l_2=l$ და $k_1=k_2=k$.

90-ე განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 0 \cdot \operatorname{tg} kl &= -1, \\ \operatorname{tg} kl &= \infty, \quad \cos kl = 0. \end{aligned}$$

ეს უკანასკნელი მოგვცემს:

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}.$$

თუ $P_2=3P_1$ და $l_1=l_2=\frac{l}{2}$, მაშინ $k_1=\sqrt{\frac{P_1}{EI}}$, ხოლო

$$k_2 = \sqrt{\frac{P_1+P_2}{EI}} = 2\sqrt{\frac{P_1}{EI}} = 2k_1.$$

90-ე განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\operatorname{tg} \frac{k_1 l}{2} \cdot \operatorname{tg} k_1 l = 2.$$

თუ აღვნიშნავთ, რომ $\frac{k_1 l}{2} = z$, მაშინ მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} 2z = 2. \quad (91)$$

შევიტანოთ

$$\operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z},$$

მივიღებთ: $2 \operatorname{tg}^2 z = 1$, $\operatorname{tg} z = 0,707$.

ცხრილებიდან ვიპოვით:

$$z = 0,6155, \quad k_1 l = 1,231,$$

$$P_{1კრ} = \frac{(1,231)^2 EI}{l^2} = \frac{1,515 EI}{l^2},$$

$$P_{2კრ} = 3 P_{1კრ} = \frac{4,545 EI}{l^2}.$$

მაუხედავად იმისა, რომ სისტემაზე ორი შეყურსული ძალა მოქმედობდა, ამოცანის გადაწყვეტამ მაინც მოითხოვა საკმარის გამოთვლების შესრულება. უფრო მეტი ძალის მოქმედების შემთხვევაში უცნობების რიცხვი მნიშვნელოვნად იზრდება და მდგრადობის განტოლების შესადგენად საჭიროა მაღალი რიგის დეტერმინანტის გაშლა, რაც ღიდალ ართულებს ამოცანის გადაწყვეტას. ასეთ შემთხვევებში უმჯობესია ამოცანა გადავწყვიტოთ პროფ. ა. კობოზის მიახლოებითი მეთოდით.

განვიხილოთ ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული ძელის დატვირთვის ორი შემთხვევა: პირველზე მოქმედებს ძალა P , მეორეზე — $P_0 = \alpha P$ (ნახ. 25). პირველში კრიტიკული ძალა იქნება:

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}, \quad (ა)$$

მეორეში

$$P_{0კრ} = \alpha P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}. \quad (ბ)$$

რას უდრის α , თუ ორივე შემთხვევაში კრიტიკული ძალა ერთნაირია, ე. ი. ისინი ერთდროულად კარგავენ მდგრადობას.

(ა) და (ბ) ფორმულების შედარება მოგვცემს:

$$\alpha = \left(\frac{l_1}{l}\right)^2. \quad (92)$$

მაშასადამე, ღეროს ნებისმიერ სიმაღლეზე მოქმედი ძალა P_i ჩვენ შევიძლია გადავიტანოთ ძელის ზედა



ნახ. 25.

ბოლოზე შემცირებული სიდიდით:

$$P_i \left(\frac{l_i}{l}\right)^2$$

მაგალითად, თუ ღეროზე მოქმედებს რამდენიმე ძალა, მაშინ ყველა ძალის მოქმედება შეიყვლება ერთი პირობითი ძალით, რომელიც იმოქმედებს ღეროს ბოლოზე:

$$P_0 = P_1 \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + P_2 \left(\frac{l_2}{l}\right)^2 + P_3 \left(\frac{l_3}{l}\right)^2 + \dots$$

კრიტიკული ძალა იქნება:

$$P_{0კრ} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}.$$

მაშასადამე,

$$P_1 \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 + P_2 \left(\frac{l_2}{l}\right)^2 + P_3 \left(\frac{l_3}{l}\right)^2 + \dots = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}, \quad (93)$$

საიდანაც განისაზღვრება კრიტიკული ძალის სიდიდე.

ზემოთ განხილული ორი ძალის მოქმედების შემთხვევაში გვექნება:

$$3P_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + P_1 = \frac{\pi^2 EI}{4l^2},$$

$$\frac{7}{4} P_1 = \frac{\pi^2 EI}{4l^2},$$

აქედან

$$P_{1კრ} = \frac{\pi^2 EI}{7 l^2} = 1,41 \frac{EI}{l^2},$$

$$P_{2კრ} = 3 P_{1კრ} = \frac{3 \pi^2 EI}{7 l^2} = 4,23 \frac{EI}{l^2}.$$

კრიტიკული დატვირთვა ღეროზე იქნება:

$$P_1 + P_2 = 4 P_1 = 5,64 \frac{EI}{l^2}.$$

ზუსტი ფორმულით მიღებულ კრიტიკულ ძალისაგან განსხვავდება 7%.

პროფ. ნ. მიტროპოლსკიმ

განავითარა კორობოვის მიახლოებითი წესი და იგი მთლიანი ნებისმიერი კანონით განაწილებული მკუშშავი დატვირთვისათვის გამოიყენა.

26 ა ნახაზზე ნაჩვენებ ძელზე მოქმედებს მთლიანი დატვირთვა. დატვირთვის განაწილების ეპიურა გამოსახულია 26 ბ ნახაზზე.

ელემენტარული ძალა $q(x)dx$ რომელიც მოქმედებს ჩამაგრებიდან x მანძილზე, უნდა შეიცვალოს ძელის ბოლოზე მოქმედ ელემენტარული ძალით:

$$dP_0 = q(x) dx \left(\frac{x}{l} \right)^2.$$

ძელის ბოლოზე გადატანილი ყველა ელემენტარული ძალების ჯამი იქნება:

$$P_0 = \int q(x) dx \left(\frac{x}{l} \right)^2 = \frac{1}{l^2} \int x^2 dF,$$

სადაც

$$dF = q(x) dx.$$

ინტეგრალის სიდიდე წარმოადგენს დატვირთვის ეპიურის ინერციის მომენტს ჰორიზონტალური ღერძის მიმართ— I_0 .

მაშასადამე,

$$P_0 = \frac{I_0}{l^2}.$$

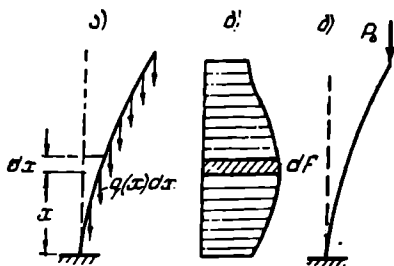
მეორე მხრივ

$$P_{0კრ} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}.$$

საბოლოოდ:

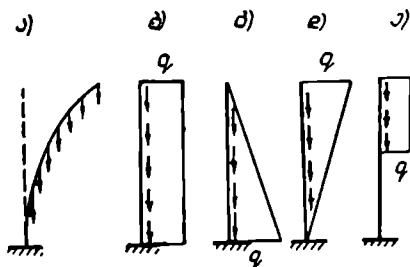
$$\frac{I_{0კრ}}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}.$$

(94)



ნახ. 26.

ნებისმიერი კანონით განაწილებული მკუმშავი დატვირთვის კრიტიკული სიდიდის საპოვნელად უნდა ავაგოთ ამ დატვირთვის ეპიურა და გამოვთვალოთ მისი ინერციის მომენტი ქვედა ბოლოზე გატარებული ლერძის მიმართ და შევიტანოთ 94-ე ფორმულაში.



ნახ. 27.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი (ნახ. 27). თანაბრად განაწილებული ტვირთის მოქმედების დროს (საკუთარი წონის გავლენა), ეპიურის ინერციის მომენტი

$$I_{0კრ} = \frac{ql^3}{3}.$$

თუ ამ სიდიდეს შევიტანოთ 94-ე ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\frac{1}{l^2} \frac{ql^3}{3} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2},$$

აქედან

$$(ql)_{კრ} = \frac{3}{4} \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

თუ დატვირთვის ეპიურა წარმოადგენს სამკუთხედს (ნახ. 27 გ), მაშინ

$$I_{0კრ} = \frac{ql^3}{12}$$

94-ე ფორმულა მოგვცემს:

$$\frac{1}{l^2} \frac{ql^3}{12} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2},$$

საიდანაც

$$\left(\frac{ql}{2}\right)_{კრ} = \frac{3}{2} \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

შებრუნებული სამკუთხედისათვის (ნახ. 27 დ)

$$I_{0კრ} = \frac{ql^3}{4},$$

ხოლო 94-ე განტოლება მოგვცემს:

$$\frac{1}{l^2} \frac{ql^3}{4} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2},$$

საიდანაც

$$\left(\frac{ql}{2}\right)_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{2 l^2}.$$

როდესაც თანაბრად განაწილებული ტვირთი მოქმედებს ძელის სიგრძის ნაწილზე (ნახ. 27 ე), მაშინ

$$I_{0კრ} = \frac{9 ql^3}{32},$$

$$\frac{1}{l^2} \frac{9ql^3}{32} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

სიღანაყ

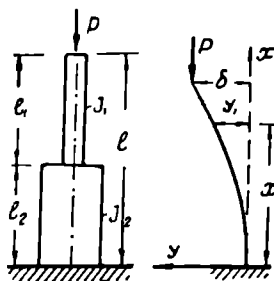
$$\left(\frac{ql}{2}\right)_{კრ} = \frac{4}{9} \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



წ 9. ცვლადი კვეთის მქონე ღეროების მდგარლობა

შეკუმშული ღეროები ხშირად ცვლადი კვეთისაა. ტოლწინაობის ძელის მსგავსად, ღერო ეკონომიურია, თუ მისი განივი კვეთი მლუნავი მომენტის ეპიურის პროპორციულად იცვლება. უმთავრესად ორი სახის ამოცანები გვხვდება, განივი კვეთი იცვლება საფეხურებით და განივი კვეთი იცვლება უწყვეტად. პირველი ამოცანა შედარებით მარტივად წყდება, მაშინ, როდესაც მეორე ამოცანის გადაწყვეტისას საქმე გვაქვს ცვლად კოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებებთან.

1. განვიხილოთ საფეხურებიანი ძელი. ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებულ ძელზე მოქმედებს მკუმშავი ძალა P . ზედანაწილის სიხისტე აღენიშნოს: EI_1 , ქვედასი — EI_2 (ნახ. 28). ამოცანა გადაწყვეით დიფერენციალური განტოლების უშუალო ინტეგრების მეთოდით. თითოეულ უბანს ექნება თავისი დიფერენციალური განტოლება:



ნახ. 28.

$$\left. \begin{aligned} EI_1 y_1'' + P y_1 &= P\delta, \\ EI_2 y_2'' + P y_2 &= P\delta. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

ახლა თუ აღენიშნავთ, რომ $k_1 = \sqrt{\frac{P}{EI_1}}$, ხოლო $k_2 = \sqrt{\frac{P}{EI_2}}$, მაშინ

(95) განტოლების ინტეგრალები იქნება:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= C_1 \sin k_1 x + C_2 \cos k_1 x + \delta, \\ y_2 &= C_3 \sin k_2 x + C_4 \cos k_2 x + \delta. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

სასაზღვრო პირობები იქნება:

$$\left. \begin{aligned} \text{როცა } x=0 \quad y_2' &= 0, \\ \text{როცა } x=l \quad y_1 &= \delta, \\ \text{როცა } x=l_2 \quad y_1 &= y_2 \text{ და } y_1' = y_2'. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

ამ პირობების შედგენა მოგვცემს:

$$\begin{aligned} C_3 &= 0, \\ C_1 \sin k_1 l + C_2 \cos k_1 l &= 0, \\ C_1 \sin k_1 l_2 + C_2 \cos k_1 l_2 - C_4 \cos k_2 l_2 &= 0, \\ C_1 k_1 \cos k_1 l_2 - C_2 k_1 \sin k_1 l_2 + C_4 k_2 \sin k_2 l_2 &= 0. \end{aligned}$$

ამ განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი ვაუტოლოთ ნულს:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin k_1 l & \cos k_1 l & 0 \\ \sin k_1 l_2 & \cos k_1 l_2 & -\cos k_2 l_2 \\ \cos k_1 l_2 & -\sin k_1 l_2 & k_2 \sin k_2 l_2 \\ & & k_1 \sin k_2 l_2 \end{vmatrix} = 0.$$

დეტერმინანტის გაშლის შემდეგ მივიღებთ:

$$\operatorname{tg} k_1 l_1 \operatorname{tg} k_2 l_2 = \frac{k_1}{k_2}. \quad (98)$$

თუ გვეცოდინება I_1 და I_2 ფარდობა, შევძლებთ ვიპოვოთ (98) განტოლების ფესვები.

98-ე ფორმულა შეიძლება გამოიყენოთ სახსროვანად დაყრდნობილი ძელის შემთხვევაშიც (ნახ. 29), თუ კვეთი სიმეტრიულად იცვლება და ზომები აღნიშნულია ისე როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები.

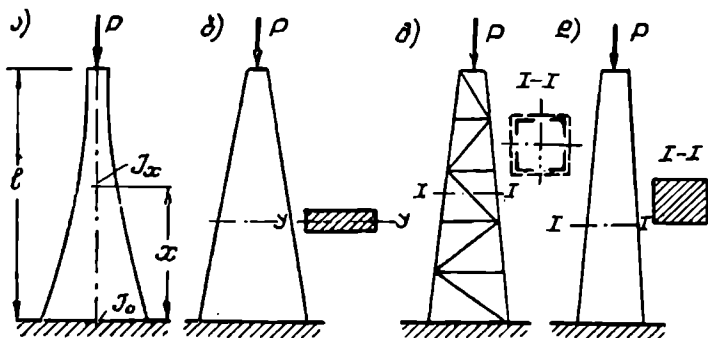
2. ღეროების ანგარიში მდგრადობაზე, რომელთა ინერციის მომენტი იცვლება მაჩვენებლიანი კანონით (ნახ. 30) რთულია, მოითხოვს სპეციალურ ფუნქციების ცოდნას და ჩვენ მას აქ არ განვიხილავთ.

30-ე ანახაზზე ნაჩვენებ დგარში ინერციის მომენტი იცვლება კანონით:

$$I_x = I_0 \left(1 + a \frac{x}{l} \right)^n \quad (99)$$

ნახ. 29.

თუ n მიეცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობას, მივიღებთ სხვადასხვა ტიპის ღეროებს. მაგალითად, თუ $n=1$, მაშინ მივიღებთ



ნახ. 30.

თხელი ღგარის შემთხვევას (როდესაც მისი სისქე მუდმივია და იცვლება მხოლოდ სიგანე (ნახ. 30 ბ). რადგან ღგრო აქ მდგრადობას დაკარგავს $y-y$ ღერძის მიმართ, ამიტომ ინერციის მომენტის ცვლილება პირველ ხარისხში ხდება.

თუ $n=2$, გვექნება მილისებრი კვეთის მქონე შედგენილი ღვარის შემთხვევა (ნახ. 30 გ). ამის წარმოდგენა ადელია, თუ დაეწერთ ინერციის მომენტის ფორმულას მიახლოებით:

$$I_x = 4F \left(\frac{h_x}{2} \right)^2 = Fh_x^2,$$

სადაც F არის ერთი კუთხედის განივი კვეთის ფართობი.

თუ ღერო პირამიდალური კვეთისაა (ნახ. 30 დ), მაშინ $n=4$.

ჩამოთვლილი შემთხვევებისათვის, რომლებსაც მეტი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვთ, გამოყვანილია კრიტიკული ძალების გამოსათვლელი ფორმულები, რომლებიც მოყვანილია სამშენებლო მექანიკის გაფართოებულ კურსებში.

§ 10. განივი ძალის გავლენა კრიტიკულ ძალაზე

ზემოთ განხილულ შემთხვევებში მხედველობაში არ ეილებდით განივი ძალის გავლენას და ყოველთვის ვიყენებდით გაღუნული ღერძის (სიმრუდის) მიახლოებით განტოლებას. შედგენილ ღეროებში განივი ძალა მნიშვნელოვან გავლენას ახდენს კრიტიკულ ძალაზე და მხედველობაში უნდა იყოს მიღებული. განვიხილოთ კრიტიკული ძალის გავლენა მთლიანი კვეთის მქონე ღეროზე.

დაუშვათ, რომ სახსროვანად დაყრდნობილ ძელზე მოქმედებს მკუმშავი ძალა P (ნახ. 31). ძელის გაღუნვის გამო ნებისმიერ კვეთში იმოქმედებს:

გრძივი ძალა $N \approx P$,

მღუნავი მომენტი $M = Py$ და

განივი ძალა $Q = P \frac{dy}{dx}$.

გაღუნული ღერძის დიფერენციალური განტოლება შედგება ორი ნაწილისაგან:

$$y'' = y_1'' + y_2'' \quad (100)$$

პირველი წევრი წარმოადგენს მღუნავი მომენტისაგან გამოწვეულ სიმრუდეს და ტოლია:

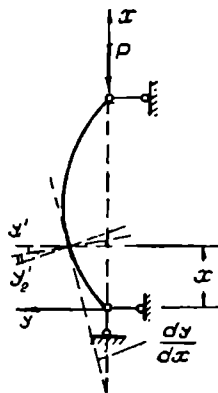
$$y_1'' = \frac{M}{EI}$$

მეორე წევრი კი წარმოადგენს განივი ძალისაგან გამოწვეულ სიმრუდეს. განივი ძალა იწვევს ძვრის დეფორმაციას, რომელიც იმავე დროს არის გაღუნული ღერძის მხეხბა და x ღერძს შორის კუთხე. თუ ძვრის დეფორმაციას აღვნიშნავთ γ -თი, მაშინ გვექნება:

$$\gamma = \frac{dy_2}{dx}$$

ჩვენ ვიცით, რომ ძვრის კუთხე

$$\gamma = \frac{nQ}{GF}$$



ნახ. 31.

სადაც n არის განივი კვეთის ფორმის ცვლილების კოეფიციენტი,
 G —ძერის მოდული.
 მაშასადამე,

$$y_2' = \gamma = \frac{nQ}{GF} = \frac{n}{GF} P \frac{dy}{dx}.$$

აქედან

$$y_2'' = \frac{n}{GF} P \frac{d^2y}{dx^2}.$$

y_1'' და y_2'' მნიშვნელობები შევიტანოთ მე-100 განტოლებაში, მივიღებთ:

$$y'' = y_1'' + y_2'' = \frac{M}{EI} + \frac{n}{GF} P y'' \quad (101)$$

ან

$$y'' \left(1 - \frac{n}{GF} P \right) = \frac{M}{EI}. \quad (102)$$

ჩვენ შემთხვევაში $M = -Py$ და ამისათვის უკანასკნელი განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$y'' \left(1 - \frac{nP}{GF} \right) EI + Py = 0.$$

თუ აღვნიშნავთ, რომ

$$k_0 = \sqrt{\frac{P}{\left(1 - \frac{nP}{GF} \right) EI}}, \quad (103)$$

მაშინ

$$y'' + k_0^2 y = 0. \quad (104)$$

უკანასკნელი განტოლების ინტეგრალი იქნება:

$$y = C_1 \sin k_0 x + C_2 \cos k_0 x.$$

სასაზღვრო პირობები $x=0$ $y=0$, $x=l$ $y=0$, მოგვეცემს მდგრადობის განტოლებას:

$$\sin k_0 l = 0,$$

საიდანაც

$$k_0 l = \pi.$$

თუ ამ ფორმულაში შევიტანოთ k_0 მნიშვნელობას (ფორ. 103), მივიღებთ:

$$\frac{P_{კრ}}{\left(1 - \frac{nP_{კრ}}{GF} \right) EI} l^2 = \pi^2,$$

აქედან

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \frac{1}{1 + \frac{n}{GF} \frac{\pi^2 EI}{l^2}} = P_0 \frac{1}{1 + \frac{n}{GF} P_0}. \quad (105)$$

როგორც ვხედავთ, განივი ძალა ამცირებს ეილერის კრიტიკულ ძალას.

გამოვარკვეით შესწორების მნიშვნელობა. $\frac{P_3}{F} = \sigma_{კ}$ სიდიდე წარმოადგენს კრიტიკულ ძაბვას და არ უნდა გადაჭარბოს ღინების ზღვარს.

თუ მივიღებთ: ფოლადის ღინების ზღვარს $\sigma_{კ} = 2000$ კგ/სმ², ძერის მოდულს $G = 800000$ კგ/სმ², და $n \approx 1$, მაშინ

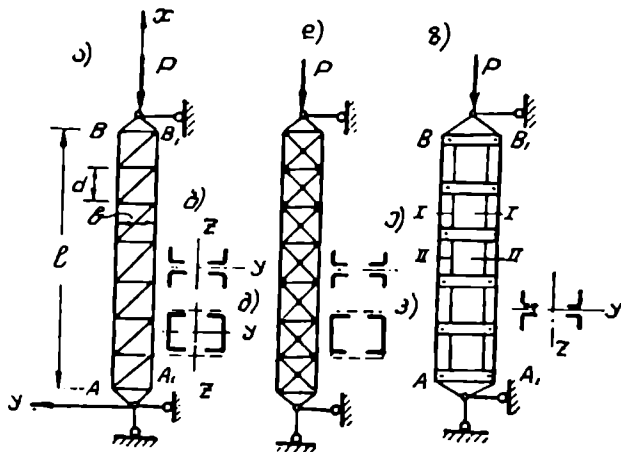
$$\frac{1}{1 + n \frac{\sigma_{კ}}{G}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{400}}$$

განივი ძალის გავლენა კრიტიკულ ძალაზე მთლიანი კვეთის მქონე ძელებისათვის უმნიშვნელოა და მხედველობაში არ მიიღება.

5 (11) შადგანილი ღეროების მდგრადობა (11)

თუ ორ პარალელურ ღეროს ერთმანეთთან გისოსით ან პორიზონტალური ფურცლებით დავაკავშირებთ, მივიღებთ შედგენილ ღეროებს (ნახ. 32). ასეთ ღეროებში კრიტიკული ძალის სიდიდე დამოკიდებულია არა მარტო ღეროს განივი კვეთის ზომებზე, არამედ გისოსის ელემენტების ზომებზეც.

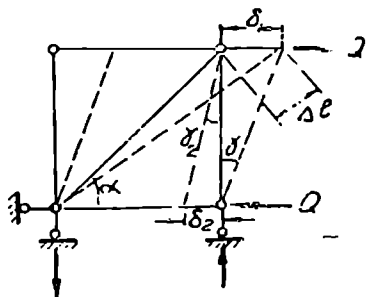
შედგენილ ღეროებში კრიტიკული ძალა ყოველთვის ნაკლებია, ვიდრე იმავე სიღიდის განივი კვეთის მქონე მთლიან ღეროებში. ამ საკითხისადმი უწყურადღებობამ გამოიწვია მთელი რიგი კატასტროფები, მნიშვნელოვანი მათ შორის იყო კვებეის გიგანტური ხიდის დანგრევა ამერიკაში. ამ გარემოებამ



ნახ. 32.

დააჩქარა მეცნიერული გამოკვლევები, რომლებიც მიახლოებით წყვეტენ შედგენილი ღეროების ანგარიშს მდგრადობაზე. ეს მეთოდები დამაკმაყოფილებელ შედეგს იძლევა იმ შემთხვევაში, თუ გისოსის კვანძებს შორის მანძილი d ღეროს მთელ სიგრძესთან შედარებით მცირეა. კონკრეტულად, პანელების რიცხვი ხუთზე მეტი უნდა იყოს.

განვიხილოთ ეს მიახლოებითი მეთოდი, რომელიც პროფ. ს. ტიმოშენკოს სახელთან არის დაკავშირებული. წარმოვიდგინოთ ღერო, რომლის ორი სარტყელი AB და A_1B_1 დაკავშირებულია ერთმანეთთან გისოსით (ნახ. 32 ა). შემაერთებელი გისოსი განივ კვეთზე ნაჩვენებია წყვეტილი ხაზით. თუ ღეროს ღუნვა ხდება axz სიბრტყეში, ე. ი. შემაერთებელი გისოსის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში, მაშინ ღეროს მუშაობაზე გისოსი გავლენას არ ახდენს და განიხილება როგორც მთლიანი კვეთის მქონე ღერო.



ნახ. 33.

ახლა განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როდესაც ღუნვა ხდება axy სიბრტყეში. ღეროების შეერთება ჩვეულებრივ სახსროვანად. ამ შემთხვევაში გისოსის დეფორმაცია ხდება განივი ძალის გავლენით. ღეროდან გამოვყოთ ერთი პანელი და მასზე ვამოქმედოთ განივი ძალა Q (ნახ. 33). გამოვთვალოთ ძვრის კუთხე γ . თუ მხედველობაში არ მივიღებთ სარტყელების დეფორმაციას, მაშინ ძვრის კუთხეს იწვევს გისოსის დეფორმაცია—დიაგონალის წაგრ-

ძელება და პორიზონტალური ღეროს შეკუმშვა.

მაშასადამე,

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2.$$

33-ე ნახ. გამომდინარე ცხადია, რომ

$$\gamma_1 = \frac{\delta_1}{d} \quad \text{და} \quad \gamma_2 = \frac{\delta_2}{d},$$

სადაც δ_1 არის დიაგონალის წაგრძელებით გამოწვეული გადაადგილება,

δ_2 — პორიზონტალური ღეროს შეკუმშვა.

Q ძალისაგან გამოწვეული ძალები:

$$\text{დიაგონალში} \quad S_1 = \frac{Q}{\cos \alpha},$$

$$\text{ღეროში} \quad S_2 = -Q.$$

დიაგონალის განივი კვეთის ფართობი იყოს F_1 , პორიზონტალური ღეროსი— F_2 , მაშინ დიაგონალის წაგრძელება

$$\Delta l = \frac{S_1 d}{EF_1 \sin \alpha}.$$

ღეროს შეკუმშვა

$$\delta_2 = \frac{Qb}{EF_2} = \frac{Q}{EF_2} \frac{d}{\tan \alpha},$$

$$\delta_1 = \frac{\Delta l}{\cos \alpha} = \frac{Qd}{EF_1 \cos^2 \alpha \sin \alpha}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\gamma = \frac{Q}{E} \left(\frac{1}{F_1 \cos^2 \alpha \sin \alpha} + \frac{1}{F_2 \operatorname{tg} \alpha} \right).$$

ერთეული განივი ძალისაგან ($Q=1$) გამოწვეული ძერის კუთხე იქნება:

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{E} \left(\frac{1}{F_1 \cos^2 \alpha \sin \alpha} + \frac{1}{F_2 \operatorname{tg} \alpha} \right). \quad (106)$$

წინა პარაგრაფში მივიღეთ:

$$\gamma = \frac{n}{GF} Q,$$

სადაც $\frac{n}{GF} = \bar{\gamma}$ არის ერთეული განივი ძალისაგან გამოწვეული ძერის კუთხე.

მაშასადამე, კრიტიკული ძალის გამოსათვლელად ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ (105) ფორმულა, თუ მასში $\frac{n}{GF}$ სიდიდის მაგიერად (106) ფორმულით გამოსახულ ერთეულ განივი ძალით გამოწვეულ ძერის კუთხეს შევიტანთ. ამრიგად, კრიტიკული ძალა

$$\sqrt{P_{კრ}} = P_3 \frac{1}{1 + \frac{P_3}{E} \left(\frac{1}{F_1 \cos^2 \alpha \sin \alpha} + \frac{1}{F_2 \operatorname{tg} \alpha} \right)} \quad (107)$$

P_3 გამოსახულებაში I არის დგარის განივი კვეთის ინერციის მომენტი.

107-ე ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ სხვადასხვა გისოსის შემთხვევაშიც. მაგალითად, თუ გისოსი შედგება ერთმაგი დიაგონალისაგან და კვეთი მილისებრია (ნახ. 32 გ), მაშინ F_1 და F_2 მაგიერ სათანადოდ შევიტანთ $2F_1$ და $2F_2$. თუ გისოსი შედგება ჯვარედინა დიაგონალისაგან და კვეთი ორტესებრია (ნახ. 32 ე), მაშინ F_1 მაგიერ შევიტანთ $2F_1$. მილისებრი კვეთის შემთხვევაში (ნახ. 32 ვ)— $4F_1$, და $2F_2$.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც ღეროს ორი AB და A_1B_1 სარტყელი ერთმანეთთან ჰორიზონტალური ფურცლების საშუალებით არის შეერთებული (ნახ. 32 ზ). კრიტიკული ძალის გამოთვლის მეთოდის ისეთივე იქნება, როგორც წინა შემთხვევაში, ე. ი. უნდა გამოვთვალოთ ერთეული განივი ძალისაგან ($Q=1$) გამოწვეული ძერის კუთხე და შევიტანოთ 105-ე ფორმულაში $\frac{n}{GF}$ მამრავლის მაგიერ.

გამოვეთ დგარის ელემენტარული ნაწილი I—I და II—II კვეთებით და მისი დეფორმაცია, როგორც მთლიანი ხისტი ელემენტის დეფორმაცია ისე განვიხილოთ (ნახ. 34). დაუვიათ, რომ გაღალუნვის წერტილები იმყოფება პანელის შუაში, ე. ი. კვეთის ადგილებში, მაშინ ამ წერტილებში იმოქმედებს მხოლოდ განივი ძალები ($M=0$).

ნახაზიდან გამომდინარე ცხადია, რომ ძერის კუთხე

$$\bar{\gamma} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{0,5 d},$$

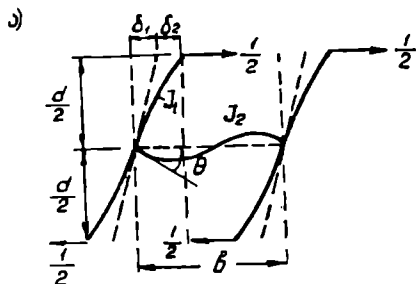
სადაც δ_1 არის პორიზონტალური ფერკლის გაღუნვისაგან გამოწვეული გადაადგილება,

δ_2 — სარტყელის გაღუნვისაგან გამოწვეული გადაადგილება.

პორიზონტალური ღეროს ბოლოების მობრუნების კუთხე, რომელზეც მოკმედებენ $\frac{1 \cdot d}{2}$ მომენტები (ნახ. 34 ბ) ტოლია:

$$\theta = \frac{bd}{12 EI_2},$$

სადაც I_2 არის პორიზონტალური ფერკლის ინერციის მომენტი. გადაადგილება



$$\delta_1 = \frac{d}{2} \theta = \frac{bd^2}{24 EI_2}.$$

გადაადგილება δ_2 კონსოლური კოქის ჩაღუნვის ტოლია (ნახ. 34 გ):

$$\delta_2 = \frac{1}{3 EI_1} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2} \right)^3 = \frac{d^3}{48 EI_1},$$

სადაც I_1 არის სარტყლის ინერციის მომენტი.

ხოლო, თუ δ_1 და δ_2 მნიშვნელობებს შევიტანთ $\bar{\gamma}$ გამოსახულებაში მივიღებთ ძვრის კუთხეს:

$$\bar{\gamma} = \frac{bd}{12 EI_2} + \frac{d^2}{24 EI_1}.$$

ნახ. 34.

ძვრის კუთხის ეს მნიშვნელობა შევიტანოთ 105-ე ფორმულაში $\frac{n}{GF}$ კოეფიციენტის მაგივრად, მივიღებთ კრიტიკულ ძალას შემდეგი სახით:

$$P_{კრ} = P_3 \frac{1}{1 + P_3 \left(\frac{bd}{12 EI_2} + \frac{d^2}{24 EI_1} \right)}. \quad (108)$$

108-ე ფორმულაში $P_3 = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, სადაც l ღეროს მთელი კვეთის ინერციის

მომენტია z ღერძის მიმართ. კერძო შემთხვევაში, როდესაც პორიზონტალური ღეროს სიხისტე გაცილებით შეტია სარტყლის სიხისტეზე, შეგვიძლია მივიღოთ $EI_2 = \infty$ და კრიტიკული ძალა განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$P_{კრ} = P_3 \frac{1}{1 + P_3 \frac{d^2}{24 EI_1}} = \frac{P_3}{1 + \frac{\pi^2 I d^2}{l^2 24 I_1}}. \quad (109)$$

ამ ფორმულაში შევცვალოთ:

$$\frac{I}{l^2} = \frac{F r^2}{l^2} = \frac{F}{\lambda^2},$$

$$\frac{I_1}{d^2} = \frac{F_1 r_1^2}{d^2} = \frac{F r_1^2}{2 d^2} = \frac{F}{2} \frac{1}{\lambda_1^2}.$$

აქ მიღებულია:

$$F_1 = \frac{F}{2}, \quad \frac{l}{r} = \lambda \quad \text{და} \quad \frac{d}{r_1} = \lambda_1,$$

სადაც λ არის მთელი ღეროს მოქნილობა,

λ_1 — ერთი შტოს (სარტყელის) მოქნილობა.

ყოველივე ამის შემდეგ 109-ე ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$P_{კრ} = \frac{P_3}{1 + \frac{\pi^2 \lambda_1^2}{12 \lambda^2}} = \frac{P_3}{1 + 0,83 \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2}}. \quad (110)$$

თუ 0,83 შევცვლით ერთეულით, მაშინ

$$P_{კრ} = P_3 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda_1^2}. \quad (111)$$

კრიტიკული ძაბვა

$$\sigma_{კრ} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 + \lambda_1^2}. \quad (111')$$

ნორმების მიხედვით, შედგენილ ღეროებში დასაშვები ძაბვების შემამკრებელი კოეფიციენტის გამოთვლა წარმოებს პირობითი მოქნილობით:

$$\lambda_0 = \sqrt{\lambda^2 + \lambda_1^2}.$$

ამას ადვილად გავიგებთ, თუ 111'-ე ფორმულას შევადარებთ 115-ე ფორმულას.

§ 12. სფორი ძალეების მდგრადობის ზუსტი თეორიის ზოგიერთი შედეგი

აქამდე განხილულ შემთხვევებში კრიტიკული ძალის განსაზღვრას საფუძვლად ედო გაღუნული ღერძის მიახლოებითი წრფივი დიფერენციალური განტოლება:

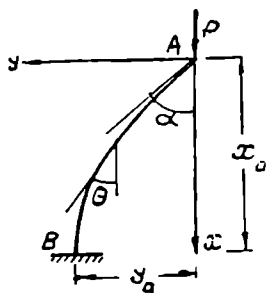
$$y'' = \frac{M}{EI}. \quad (112)$$

ამის გამო მიღებული განტოლებები არ იძლევიან საშუალებას განისაზღვროს ღეროს მაქსიმალური ჩაღუნვა δ . საერთოდ იგი განუზღვრელი იყო. 112-ე განტოლება არ იძლევა საშუალებას მივიღოთ წონასწორობის მდგრადი ფორმები, როდესაც ძალა პირველ კრიტიკულ ძალაზე მეტია. იმისათვის რომ განისაზღვროს ღეროს ჩაღუნვები საჭიროა მივმართოთ ზუსტ გადაწყვეტას,

რომელიც დამყარებულია გაღუნული ღეროს ზუსტ, არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებაზე:

$$\frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{EI}. \quad (113)$$

ამ განტოლების ამოხსნა დაიყვანება ელიფსურ ინტეგრალებზე და საკმარის გამოთვლებს მოითხოვს. ჩვენ აქ მოვიყვანთ საბოლოო შედეგებს. ერთი ბოლოთი ჩამაგრებულ ძელისათვის (ნახ. 35) გვექნება:



$$kl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (114)$$

სადაც

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad p = \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = p \sin \varphi = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi.$$

ნახ. 35.

114-ე განტოლების მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს ელიფსურ ინტეგრალს, რომლის

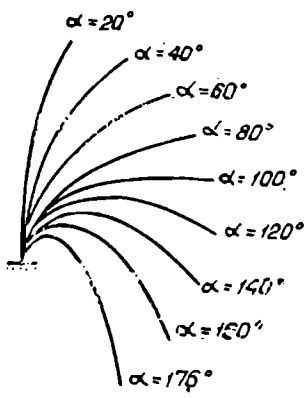
სიდიდე დამოკიდებულია p და α მნიშვნელობებზე და უშუალოდ ცხრილებიდან განისაზღვრება. შემდეგ ვიპოვით $P_{კრ}$.

მცირე ჩაღუნვის შემთხვევაში P და α მცირე სიდიდეებია და შეგვიძლია მივიღოთ $p = \alpha = 0$, მაშინ

$$kl = \frac{\pi}{2} \quad \text{და} \quad P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2},$$

ე. ი. მივიღეთ ეილერის ფორმულა.

1 ცხრილში მოყვანილია $\frac{P}{P_{კრ}}$ ფარდობების მნიშვნელობები α სხვადასხვა სიდიდისათვის. ამავე ცხრილში მოყვანილია x_a და y_a მნიშვნელობები. დრეკადი მრუდის ფორმები ერთი თავით ჩამაგრებული ძელისათვის (1 ცხრილში მოყვანილი შემთხვევებისათვის) ნაჩვენებია 36-ე ნახაზზე. ადვილად შევამჩნევთ, რომ ძალის უმნიშვნელო გაზრდა კრიტიკულზე ზევით იწვევს მნიშვნელოვან ჩაღუნვებს.



ნახ. 36.

მიღებული შედეგები შეიძლება გავრცელდეს სახსროვანად ჩამაგრებულ ძელისთვისაც. ამ შემთხვევაში 36-ე ნახაზზე მოყვანილი მრუდები წარმოადგენენ მთლიანი მრუდის ნახევრებს.

α	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	170°
$\frac{P}{P_{კრ}}$	1,015	1,063	1,152	1,293	1,518	1,884	2,541	4,029	9,116
$\frac{x_a}{l}$	0,97	0,881	0,741	0,560	0,349	0,123	-0,107	-0,340	-0,577
$\frac{y_n}{l}$	0,220	0,422	0,593	0,719	0,792	0,803	0,750	0,625	0,421

37-ე ნახაზზე მოყვანილია გაღუნული ღერძის მოხაზულობები $P > P_{კრ}$ სხვადასხვა შემთხვევისათვის. ზედა ნახაზი ეკუთვნის სახსროვნად ჩამაგრებულ ძელს, ქვედა—ხისტად ჩამაგრებულს.

1. კუთხე α მცირეა. P ძალა მცირე სიდიდით ჭარბობს $P_{კრ}$;

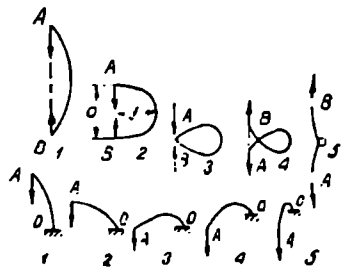
2. კუთხე $\alpha = 90^\circ$. ძალა $P = 1,39 P_{კრ}$. უდიდესი ჩაღუნვის ისარი $f = 0,8348 a$;

3. კუთხე $\alpha = 130^\circ 41'$, ღეროს ბოლოები ერთმანეთს ემთხვევა. $P = 2,17 P_{კრ}$;

4. კუთხე $\alpha > 130^\circ 41'$. ღეროს ბოლოები დასცილდნენ ერთმანეთს, A წერტილი იმყოფება B ქვემოთ;

5. P ძალის შემდგომი ზრდა შეეკუმშულ ღეროს გაკეიმულად აქცევს. შუაში რჩება მარყუჟი.

ზემოთ განხილულ გაღუნული ღერძის ფორმებს, მხოლოდ თეორიულ მნიშვნელობა აქვს, რადგან ისინი შესაძლებელია მხოლოდ დრეკადობის მალა-ლი ზღვარის მქონე წერილი ელემენტებისათვის, რომლებიც თითქმის არ გვხვდება საინჟინრო პრაქტიკაში.



ნახ. 37.

§ 3. ვილიარის ფორმულების გამოყენების ზღვრები. სფორი ძალის მდგომარეობა დრეკადობის ზღვრებს ზემოთ

გაღუნული ღერძის დიფერენციალური განტოლება (ფორ. 112), რომელიც საფუძვლად უდევს ყველა ზემოთ განხილულ ამოცანებს, სამართლიანია იმ შემთხვევაში, როდესაც ძაბვები არ სცილდება დრეკადობის ზღვრებს, ე. ი. ადგილი აქვს პუკის კანონს. ამიტომ მიღებული ფორმულებიც სამართლიანია მხოლოდ დრეკადობის ზღვრებში.

სახსროვნად ჩამაგრებულ ძელის შემთხვევაში

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

და სათანადო კრიტიკული ძაბვა

$$\sigma_{კრ} = \frac{P_{კრ}}{F} = \frac{\pi^2 E}{l^2} \frac{I}{F} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (115)$$

სადაც r არის ინერციის მინიმალური რადიუსი,
 λ — მოქნილობა.

პროპორციულობის ზღვარი აღენიშნოთ $\sigma_{კრ}$.
 ეილერის ფორმულა ვარგისია, თუ

$$\sigma_{კრ} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{კრ},$$

აქედან

$$\lambda^2 \geq \frac{\pi^2 E}{\sigma_{კრ}}.$$

თუ გვეცოდინება მასალის დრეკადობის მოდული E და პროპორციულობის ზღვარი $\sigma_{კრ}$, შეგვიძლია დავადგინოთ მოქნილობის ზღვრული მნიშვნელობა, სანამდისაც შეიძლება ეილერის ფორმულის გამოყენება. მაგალითად, ფოლადისათვის, თუ $E = 21\,000\,000$ კგ/სმ², $\sigma_{კრ} = 2000$ კგ/სმ², მივიღებთ: $\lambda \geq 105$.

მაშასადამე, ფოლადისათვის ეილერის ფორმულის გამოყენება შეიძლება თუ მოქნილობა $\lambda > 105$.

თუ მოქნილობა ზღვრულ მნიშვნელობაზე ნაკლებია, მაშინ ძაბვები კარბობენ დრეკადობის ზღვარს და კრიტიკულ ძალაზე გავლენას ახდენს პლასტიკური დეფორმაციები.

სწორი ძელის მდგრადობის თეორია დრეკადობის ზღვრებს ზემოთ დამუშავებული იყო ენგესერისა და კარმანის მიერ.

ენგესერ-კარმანის თეორიის მიხედვით კრიტიკული ძალა გამოითვლება ფორმულით:

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 E_0 I}{l^2}, \quad (116)$$

სადაც E_0 იუნგის მოდულის E მაგიერ შედის ე. წ. დაყვანილი (ან ენგესერ-კარმანის) დრეკადობის მოდული.

დაყვანილი მოდული გამოითვლება შემდეგი მოსაზრების საფუძველზე.

წარმოვიდგინოთ ფოლადის შეკუმშული დერო, რომელიც ემორჩილება ჰუკის კანონს გარკვეულ ზღვრებში (ნახ. 38). B წერტილამდე დამოკიდებულება ძაბვასა და დეფორმაციას შორის ჩვეულებრივ ჰუკის ფორმულით გამოისახება:

$$\sigma = E \varepsilon$$

ახ

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \operatorname{tg} \alpha.$$

დრეკადობის ზღვრებს ზემოთ, მასალის დრეკადობის მოდული დამოკიდებულია ძაბვის სიდიდეზე, ცვალებადია და შეიძლება გამოვსახოთ ტოლობით:

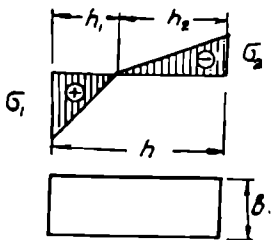
$$E_\sigma = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{tg} \alpha.$$

გავიხსენოთ მასალათა გამძლეობიდან გერსტენერის კანონი, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ განტვირთვის დროს $\sigma = f(\epsilon)$ მრუდი არ გაყვება ABC და წავა სწორხაზობრივად ისე, როგორც ნაჩვენებია ნახაზზე (CD). რადგან $CD \parallel AB$, ამიტომ განტვირთვის შემთხვევაში დრეკადობის მოდული იუნგის მოდულის E ტოლი იქნება.

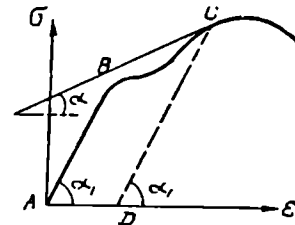
ჩვენ ვხედავთ, რომ დრეკადობის ზღვრებს ზემოთ, ეტყვით C წერტილისათვის, გვექნება დრეკადობის ორი მოდული: დატვირთვის შემთხვევაში E_2 , ხოლო განტვირთვის შემთხვევაში იუნგის მოდული E .

წარმოვიდგინოთ, რომ შეკუმშულმა ღერომ ($P=P_k$), მიიღო უსასრულოდ მცირე გაღუნვა რის შედეგად წარმოიშევა მღუნავი მომენტი, რომლის გავლენით მკუმშავი ძაბვები ამოზნექილ მხარეს შემცირდება, შეზნექილ მხარეს კი გაიზარდება. ამოზნექილი მხარე განტვირთა, ჩაზნექილი კი დაიტვირთა. ამიტომ კვეთის განტვირთულ ნაწილისათვის დრეკადობის მოდული იქნება E , დატვირთული ნაწილისათვის კი— E_2 . განვიკეთში დრეკადობის ორი მოდულის არსებობა პირველად პროფ. ფ. იასინსკიმ აღნიშნა.

თუ მივიღებთ: საფუძვლად ბრტყელი კვეთის ჰიპოთეზას, მაშინ ლუნვისაგან გამოწვეული ძაბვების ეპიურა ისეთივე იქნება როგორც 39-ე ნახაზზეა ნაჩვენები. მაქსიმალური გამჭიმავი ძაბვა



ნახ. 39.



ნახ. 38.

$$\sigma_1 = E\epsilon_1 = E \frac{h_1}{\rho}$$

მაქსიმალური მკუმშავი ძაბვა

$$\sigma_2 = E_2\epsilon_2 = E_2 \frac{h_2}{\rho}$$

სადაც ρ არის სიმრულის რადიუსი.

ნეიტრალური ღერძი აღარ გადის კვეთის სიმძიმის ცენტრზე, როგორც ამას ადვილი ჰქონდა ლუნვის დროს დრეკადობის ზღვრებში. მისი მდებარეობა განისაზღვრება წონასწორობის პირობიდან: გამჭიმავი და მკუმშავი ძალების ჯამი ნულის ტოლი უნდა იყოს.

სწორკუთხა განივი კვეთის შემთხვევაში მივიღებთ:

$$\frac{\sigma_1 h_1 b}{2} = \frac{\sigma_2 h_2 b}{2}$$

თუ შევიტანთ σ_1 და σ_2 მნიშვნელობებს, გვექნება:

$$E h_1^2 = E_2 h_2^2$$

გარდა ამისა

$$h_1 + h_2 = h$$

ამ ორი განტოლებიდან ვიპოვით h_1 და h_2 :

$$h_1 = \frac{h\sqrt{E\sigma}}{\sqrt{E + \sqrt{E\sigma}}}, \quad h_2 = \frac{h\sqrt{E}}{\sqrt{E + \sqrt{E\sigma}}}.$$

შინაგანი ძალების მომენტი მლუნავი მომენტის ტოლი უნდა იყოს:

$$M = \frac{\sigma_1 b h_1}{2} \cdot \frac{2}{3} h_1 + \frac{\sigma_2 b h_2}{2} \cdot \frac{2}{3} h_2 = \frac{\sigma_1 b h_1 h}{3}.$$

σ_1 , σ_2 და h_1 მნიშვნელობის შეტანის შემდეგ მივიღებთ:

$$M = \frac{E h_1^2 b h}{3 \rho} = \frac{b h^3}{12 \rho} \frac{4 E E \sigma}{(\sqrt{E + \sqrt{E\sigma}})^2}.$$

თუ აღვნიშნავთ, რომ

$$E_0 = \frac{4 E E \sigma}{(\sqrt{E + \sqrt{E\sigma}})^2}, \quad (117)$$

მივიღებთ გაღუნული ღერძის ჩვეულებრივ განტოლებას:

$$M = \frac{E_0 I}{\rho} = E_0 I \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (118)$$

ან მიახლოებით

$$E_0 I y'' = M. \quad (119)$$

ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ:

სახსროვნად ჩამაგრებული ძელისათვის

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 E_0 I}{l^2},$$

ხოლო საზოგადოდ

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 E_0 I}{l_0^2}, \quad (120)$$

სადაც $l_0 = \mu l$ არის ღეროს დაყვანილი სიგრძე.

როგორც ვხედავთ, ელერის ფორმულები შეიძლება იმ შემთხვევაშიც გამოვიყენოთ, როცა ძაბვები კარბობს დრეკადობის ზღვარს, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ იუნგის მოდულის მაგიერ ფორმულებში შევიტანთ დაყვანილ მოდულს E_0 .

დაყვანილი მოდული შეიძლება გამოითვალოს ნებისმიერი ფორმის განივი კვეთისათვის საერთო ფორმულით:

$$E_0 = \frac{E I_1 + E \sigma I_2}{I}. \quad (121)$$

I_1 და I_2 არის ნეიტრალური ღერძის მარცხნივ და მარჯვნივ მდებარე ნაწილის ინერციის მომენტები.

კრიტიკული ძალის გამოთვლის შემდეგ, ვიპოვიტ კრიტიკულ ძაბვას შემდეგი ფორმულით:

$$\sigma_{კრ} = \frac{P_{კრ}}{F} = \frac{\pi^2 E_0 I}{l_0^2} = \frac{\pi^2 E_0}{\lambda^2}. \quad (122)$$

ამრიგად, როცა $\lambda > 105$ კრიტიკული ძაბვა განისაზღვრება 115-ე ფორმულით და როცა $\lambda < 105$, 122-ე ფორმულით.

კრიტიკული ძაბვები დრეკადობის ზღვრების ზემოთ შეიძლება განისაზღვროს ემპირიული ფორმულებითაც.

კრიტიკული ძალის ან კრიტიკული ძაბვის გამორკვევის შემდეგ შეგვიძლია დავწეროთ შეკუმშული ღერძის საანგარიშო ფორმულა:

საანგარიშო ძალა

$$P \leq \frac{P_{კრ}}{n}, \quad (123)$$

სადაც n არის უშიშროების ან მარაგის კოეფიციენტი.

123-ე ფორმულა შეიძლება გარდავქმნათ.

საანგარიშო ძაბვა

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \frac{P_{კრ}}{n F} = \frac{1}{n} \sigma_{კრ}.$$

მარაგის კოეფიციენტის სიდიდე იღება როგორც გაქიმვის დროს

$$n = \frac{\sigma_{დრ}}{[\sigma]},$$

სადაც $\sigma_{დრ}$ არის დროებითი წინაღობა გაქიმვაზე.

მაშასადამე,

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \frac{\sigma_{კრ}}{\sigma_{დრ}} [\sigma].$$

თუ აღვნიშნავთ, რომ

$$\frac{\sigma_{კრ}}{\sigma_{დრ}} = \varphi, \quad (124)$$

მაშინ

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi [\sigma]. \quad (125)$$

ფ კოეფიციენტს ეწოდება დასაშვები ძაბვების შემამცირებელი კოეფიციენტი კუმშვის დროს და 124-ე ფორმულით გამოითვლება, თუ მასში შევეიტანთ $\sigma_{კრ}$ მნიშვნელობას 115-ე ან 122-ე ფორმულიდან.

ფ მნიშვნელობა შეიძლება გამოითვალოს ემპირიული ფორმულებითაც. ფ სიდიდე დამოკიდებულია λ -ზე და მოცემულია ცხრილებში.

§ 14. მაგალითები შეკვეთული სწორი ძალის
კრიტიკული ძალის განსაზღვრავა

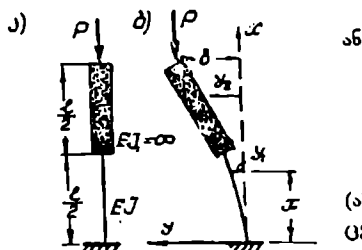
1. მაგალითი. შევადგინოთ მდგრადობის განტოლება და განსაზღვროთ კრიტიკული ძალა ნახაზზე ნაჩვენები შემთხვევისათვის (ნახ. 40 ა).

გადაწყვეტა. კრიტიკულ მდგომარეობაში ძელი მიიღებს უსასრულოდ მცირე გაღუნვას (ნახ. 40 ბ).

მღუნავი მომენტი პირველ და მეორე უბანში იქნება სათანადოდ:

$$M_1 = P(\delta - y_1), \quad M_2 = P(\delta - y_2).$$

გაღუნული ლერძის დიფერენციალური განტოლებები იქნება:



ნახ. 40.

$$EI y_1'' = P(\delta - y_1)$$

$$EI y_1'' + P y_1 = P\delta, \quad (a)$$

$$y_2'' = \frac{M_2}{EI_2} = \frac{M_2}{\infty} = 0. \quad (b)$$

(a) და (b) განტოლებების ინტეგრება მოგეცემს:

$$y_1 = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta,$$

$$y_2 = C_3 x + C_4,$$

სადაც

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

სასაზღვრო პირობები იქნება:

1. როცა $x=0$ $y_1=0$,
2. $x=0$ $y_1'=0$,
3. როცა $x=\frac{l}{2}$ $y_1=y_2$,
4. $y_1'=y_2'$,
5. როცა $x=l$ $y_2=\delta$.

ეს პირობები მოგეცემს შემდეგ განტოლებებს:

$$C_2 + \delta = 0,$$

$$C_1 k = 0,$$

$$C_1 = 0,$$

$$C_2 \cos \frac{kl}{2} + \delta = C_3 \frac{l}{2} + C_4,$$

$$-C_2 k \sin \frac{kl}{2} = C_3,$$

$$\delta = C_3 l + C_4.$$

საიდანაც

მიღებული განტოლებები გადაწეროთ შემდეგი სახით:

$$C_3 + \delta = 0,$$

$$C_2 \cos \frac{kl}{2} - C_3 \frac{l}{2} - C_4 + \delta = 0,$$

$$C_2 k \sin \frac{kl}{2} + C_3 = 0,$$

$$C_3 l + C_4 - \delta = 0.$$

მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cos \frac{kl}{2} & -\frac{l}{2} & -1 & 1 \\ k \sin \frac{kl}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

დეტერმინანტი გაეშალოთ პირველი პწკარის მიხედვით, მივიღებთ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{l}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ l & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cos \frac{kl}{2} & -\frac{l}{2} & -1 \\ k \sin \frac{kl}{2} & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - 1 - \cos \frac{kl}{2} + kl \sin \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \sin \frac{kl}{2} = 0.$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \frac{1}{\frac{kl}{2}}.$$

ამ განტოლების ფესვი იქნება $\frac{kl}{2} = 0,86$.

$$P_{კრ} = \frac{0,74 \cdot 4EI}{l^3} = \frac{2,96 EI}{l^3}.$$

2. მაგალითი. განვსაზღვროთ კრიტიკული ძალა ორი ბოლოთი სახსრ-
ვნად ჩამაგრებული საფეხურიანი კვეთის მქონე ძელში (ნახ. 41 ა).

გადაწვევება. მღუნავი მომენტი პირველ და მეორე უბანში იქნება:

$$M_1 = -Py_1, \quad M_2 = -Py_2.$$

გალუნული ლერძის დიფერენციალური განტოლებების

$$EI_1 y_1'' + P y_1 = 0,$$

$$EI_2 y_2'' + P y_2 = 0,$$

ინტეგრალებია:

$$y_1 = C_1 \sin k_1 x + C_2 \cos k_1 x,$$

$$y_2 = C_3 \sin k_2 x + C_4 \cos k_2 x,$$

სადაც

$$k_1 = \sqrt{\frac{P}{EI_1}} \quad \text{და} \quad k_2 = \sqrt{\frac{P}{EI_2}}.$$

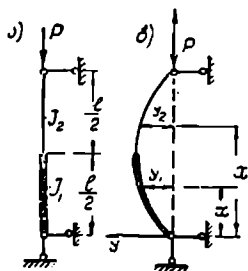
სასაზღვრო პირობებია:

$$1. \text{ როცა } x=0 \quad y_1=0,$$

$$2. \text{ როცა } x=l \quad y_2=0,$$

$$3. \text{ როცა } x=\frac{l}{2} \quad y_1=y_2,$$

$$4. \text{ როცა } x=\frac{l}{2} \quad y_1'=y_2'.$$



ნახ. 41.

მივიღებთ:

$$C_2=0,$$

$$C_3 \sin k_2 l + C_4 \cos k_2 l = 0,$$

$$C_1 \sin \frac{k_1 l}{2} - C_3 \sin \frac{k_2 l}{2} - C_4 \cos \frac{k_2 l}{2} = 0,$$

$$C_1 k_1 \cos \frac{k_1 l}{2} - C_3 k_2 \cos \frac{k_2 l}{2} + C_4 k_2 \sin \frac{k_2 l}{2} = 0.$$

ამ განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი გაუტოლოთ ნულს:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sin k_2 l & \cos k_2 l \\ \sin \frac{k_1 l}{2} & -\sin \frac{k_2 l}{2} & -\cos \frac{k_2 l}{2} \\ \frac{k_1}{k_2} \cos \frac{k_1 l}{2} & -\cos \frac{k_2 l}{2} & \sin \frac{k_2 l}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

დეტერმინანტის გაშლის და ტრიგონომეტრიული გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$k_1 \operatorname{tg} \frac{k_2 l}{2} = -k_2 \operatorname{tg} \frac{k_1 l}{2}$$

ან

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{k_1 l}{2}}{k_1} = -\frac{\operatorname{tg} \frac{k_2 l}{2}}{k_2}.$$

ეს არის მდგრადობის განტოლება. გავარჩიოთ კერძო შემთხვევები:

1. $I_1 = \infty$, მაშინ $k_1 = 0$ და

$$\lim_{k_1 \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{k_1 l}{2}}{k_1} = \frac{\frac{k_1 l}{2}}{k_1} = \frac{l}{2}.$$

მივიღებთ:

$$\frac{l}{2} = - \frac{\operatorname{tg} \frac{k_2 l}{2}}{k_2},$$

აქედან

$$\operatorname{tg} \frac{k_2 l}{2} = - \frac{k_2 l}{2}.$$

ცხრილებიდან ვიპოვიტ:

$$\frac{k_2 l}{2} = 2,02$$

და

$$P_{კრ} = \frac{16,32 EI}{l^2}.$$

2. $I_2 = \infty$ და $k_2 = 0$, ანალოგიურად მივიღებთ:

$$P_{კრ} = \frac{16,32 EI}{l^2}.$$

3. $I_1 = I_2 = I$, მაშინ $k_1 = k_2 = k$.

მდგრადობის განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{2k \operatorname{tg} \frac{kl}{2}}{k \operatorname{tg} \frac{kl}{2}} = 0.$$

ეს განტოლება კმაყოფილდება ორ $\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = 0$ და $\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \infty$ შემთხვევაში.

უკანასკნელი იძლევა მინიმალურ ფესვს $\frac{kl}{2} = \frac{\pi}{2}$ და $P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$.

8. მაგალითი. გადავიტანოთ P ძალა სიმაღლის შუაში და გამოვთვალოთ კრიტიკული ძალა წინა მაგალითისათვის (ნახ. 42).

გადაწყვეტა. მღუნავეი მომენტი პირველ და მეორე უბანში იქნება:

$$M_1 = -Py_1 + \frac{P\delta}{l}x,$$

$$M_2 = - \frac{P\delta}{l}(l-x).$$

გალუნული ღერძების განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$y_1'' + k_1^2 y_1 = \frac{P\delta}{EI_1} x,$$

$$y_2'' = -\frac{1}{EI_2} \frac{P\delta}{l} (l-x) = -\frac{k_2^2 \delta}{l} (l-x),$$

სადაც

$$k_1 = \sqrt{\frac{P}{EI_1}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{P}{EI_2}}.$$

ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ:

$$y_1 = C_1 \sin k_1 x + C_2 \cos k_1 x + \frac{\delta}{l} x,$$

$$y_2 = -\frac{k_2^2 \delta}{6l} (3lx^2 - x^3) + C_3 x + C_4.$$

სასაზღვრო პირობები იქნება:

$$\text{როცა } x=0 \quad y_1=0,$$

$$\text{როცა } x=l \quad y_2=0,$$

$$\text{როცა } x=\frac{l}{2} \quad y_1=\delta, \quad y_2=0 \quad \text{და} \quad y_1' = y_2'.$$

მივიღებთ:

$$C_2=0,$$

$$C_3 l + C_4 - \delta \frac{k_2^2 l^2}{3} = 0,$$

$$C_1 \sin \frac{k_1 l}{2} - \frac{\delta}{2} = 0,$$

$$C_3 \frac{l}{2} + C_4 - \delta \frac{48 + 5k_2^2 l^2}{48} = 0,$$

$$C_1 k_1 \cos \frac{k_1 l}{2} - C_3 + \delta \frac{8 + 3k_2^2 l^2}{8l} = 0.$$

მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & l & 1 & -\frac{k_2^2 l^2}{3} \\ \sin \frac{k_1 l}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{l}{2} & 1 & -\frac{48 + 5k_2^2 l^2}{48} \\ k_1 \cos \frac{k_1 l}{2} & -1 & 0 & \frac{8 + 3k_2^2 l^2}{8l} \end{vmatrix} = 0.$$

გავშალოთ პირველი სვეტის მიხედვით.

$$-\sin \frac{k_1 l}{2} \begin{vmatrix} l & 1 & -\frac{k_2^2 l^2}{3} \\ l & 1 & -\frac{48+5 k_2^2 l^2}{48} \\ -1 & 0 & \frac{8+3 k_2^2 l^2}{8 l} \end{vmatrix} -$$

$$-k_1 \cos \frac{k_1 l}{2} \begin{vmatrix} l & 1 & -\frac{k_2^2 l^2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ l & 1 & -\frac{48+5 k_2^2 l^2}{48} \end{vmatrix} = 0.$$

გაშლის შემდეგ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\operatorname{tg} \frac{k_1 l}{2} = \frac{6 k_1 l}{k_2^2 l^2 - 36}.$$

თუ ინერციის მომენტი მთელი ღეროსათვის ერთნაირია, ე. ი. $I_1 = I_2 = I$, მაშინ $k_1 = k_2 = k$ და მდგრადობის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\operatorname{tg} \frac{k l}{2} = \frac{6 k l}{k^2 l^2 - 36}.$$

ცხრილების საშუალებით ვიპოვიტ:

$$k l = 4,32 \text{ და } P_{\text{კრ}} = \frac{(4,32)^2 E I}{l^2} = \frac{18,7 E I}{l^2} = 1,9 \frac{\pi^2 E I}{l^2}.$$

როდესაც $I_1 = \infty$, მაშინ $k_1 = 0$ და

$$\lim_{k_1 \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{k_1 l}{2}}{k_1 l} = \frac{\frac{k_1 l}{2}}{k_1 l} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{k_2^2 l^2 - 36}. \quad \text{აქედან } k_2^2 l^2 = 48.$$

და

$$P_{\text{კრ}} = \frac{48 E I_2}{l^2}.$$

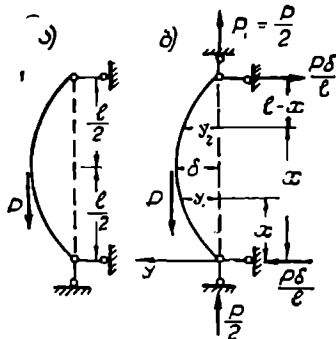
როდესაც $I_2 = \infty$, მაშინ $k_2 = 0$ და მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\operatorname{tg} \frac{k_1 l}{2} = -\frac{k_1 l}{6},$$

$$k_1 l = 4,916 \text{ და } P_{კრ} = \frac{24,17 EI_1}{l^2}.$$

4. მაგალითი. შევადართო ერთმანეთს კრიტიკული ძალები სახსროვანად მოძრავად და სახსროვანად უძრავად ჩამაგრებული ძელების შემთხვევაში, როდესაც ძალა მოქმედებს სიმალლის შუაში (ნახ. 43 ა, ბ).

გადაწყვეტა პირველი შემთხვევა განხილულია წინა მაგალითში და



ნახ. 43.

კრიტიკული ძალა $P_{კრ} = \frac{1,9 \pi^2 EI}{l^2}$.

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა. ეს ამოცანა სტატიკურად ურყვევია, მაგრამ რადგანაც კრიტიკულ მდგომარეობაში ადგილი აქვს უსასრულოდ მცირე გაღუნვას, ამიტომ შეგვიძლია მივიღოთ, რომ $P_1 = \frac{P}{2}$ ისე,

როგორც სწორი ძელის შემთხვევაში.

მღუნვაე მომენტებია:

$$M_1 = -\frac{P}{2} y_1 + \frac{P\delta}{l} x,$$

$$M_2 = \frac{P}{2} y_2 - \frac{P\delta}{l} (l-x).$$

გაღუნული ღერძის დიფერენციალური განტოლება პირველ და მეორე უბნისათვის უქნება:

$$EI y_1'' + \frac{P}{2} y_1 = \frac{P\delta}{l} x,$$

$$EI y_2'' - \frac{P}{2} y_2 = -\frac{P\delta}{l} (l-x).$$

აღნიშნოთ:

$$k = \sqrt{\frac{P}{2EI}}.$$

მივიღებთ:

$$y_1 = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \frac{2\delta}{l} x,$$

$$y_2 = C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx + \frac{2\delta}{l} (l-x).$$

სასაზღვრო პირობებია:

$$\text{როცა } x=0 \quad y_1=0,$$

$$\text{როცა } x=l \quad y_2=0,$$

$$\text{როცა } x=\frac{l}{2} \quad y_1=\delta \text{ და } y_2=\delta.$$

მიიღებთ:

$$\begin{aligned} C_2 &= 0, \\ C_3 \operatorname{sh} kl + C_4 \operatorname{ch} kl &= 0, \\ C_1 \sin \frac{kl}{2} &= 0, \\ C_3 \operatorname{sh} \frac{kl}{2} + C_4 \operatorname{ch} \frac{kl}{2} &= 0. \end{aligned}$$

მდგრადობის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sh} kl & \operatorname{ch} kl \\ \sin \frac{kl}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh} \frac{kl}{2} & \operatorname{ch} \frac{kl}{2} \end{vmatrix} = \sin \frac{kl}{2} \left(\operatorname{sh} \frac{kl}{2} \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2} \right) = 0.$$

მიიღებთ მდგრადობის ორ განტოლებას:

$$\begin{aligned} 1) \quad \sin \frac{kl}{2} &= 0, \\ 2) \quad \operatorname{sh} \frac{kl}{2} \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl \operatorname{ch} \frac{kl}{2} &= 0 \end{aligned}$$

ან

$$\operatorname{tgh} kl = \operatorname{tgh} \frac{kl}{2}.$$

ეს უკანასკნელი იძლევა ნულოვან ფესვს $k=0$ და არ გამოგადგება, რაც იმას ნიშნავს, რომ ზედა, გაჭიმული უბანი არ გაილუნება.

პირველი განტოლება მოგვცემს:

$$\frac{kl}{2} = \pi, \quad P_{კრ} = \frac{8\pi^2 EI}{l^2}.$$

განხილული ორი შემთხვევისათვის კრიტიკული ძალების ფარდობა იქნება:

$$\frac{8}{1,9} = 4,21.$$

მაშასადამე, ზედა საყრდენის გადაადგილების მოსპობამ კრიტიკული ძალა ოთხჯერ გაზარდა.

ნ. მაგალითი. შევადგინოთ მდგრადობის განტოლება სახსროვნად დაყრდნობილ კონსოლიან ძელისათვის (ნახ. 44).

გადაწყვეტა. მლუნავი მომენტებია:

$$M_1 = P(-y_1) + \frac{P\delta}{l}x,$$

$$M_2 = P(\delta - y_2).$$

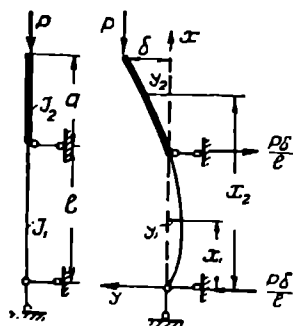
გაღუნული ლერძის დიფერენციალური განტოლებები პირველ და მეორე უბნისათვის იქნება:

$$EI_1 y_1'' + P y_1 = \frac{P\delta}{l} x,$$

$$EI_2 y_2'' + P y_2 = P\delta.$$

აღნიშნოთ: $k_1 = \sqrt{\frac{P}{EI_1}}$ და $k_2 = \sqrt{\frac{P}{EI_2}}$.

დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრება მოგვცემს:



ნახ. 44

$$y_1 = C_1 \sin k_1 x + C_2 \cos k_1 x + \frac{\delta}{l} x,$$

$$y_2 = C_3 \sin k_2 x + C_4 \cos k_2 x + \delta.$$

სასაზღვრო პირობებია:

1. როცა $x=0$ $y=0$,
2. როცა $x=l$ $y_1=0$,
3. როცა $x=l$ $y_2=0$,
4. როცა $x=l+a$ $y_2=\delta$,
5. როცა $x=l$ $y_1'=y_2'$.

მივიღებთ:

$$C_2 = 0,$$

$$C_1 \sin k_1 l + \delta = 0,$$

$$C_3 \sin k_2 l + C_4 \cos k_2 l + \delta = 0,$$

$$C_3 \sin k_2(l+a) + C_4 \cos k_2(l+a) = 0,$$

$$C_1 k_1 \cos k_1 l - C_3 k_2 \cos k_2 l + C_4 k_2 \sin k_2 l + \frac{\delta}{l} = 0.$$

მდგრადობის დამახასიათებელი განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin k_1 l & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sin k_2 l & \cos k_2 l & 1 \\ 0 & \sin k_2(l+a) & \cos k_2(l+a) & 0 \\ \frac{k_1}{k_2} \cos k_1 l & -\cos k_2 l & \sin k_2 l & \frac{1}{k_2 l} \end{vmatrix} = 0.$$

გაეშალოთ პირველი სვეტის მიხედვით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} & \sin k_1 l \begin{vmatrix} \sin k_2 l & \cos k_2 l & 1 \\ \sin k_2(l+a) & \cos k_2(l+a) & 0 \\ -\cos k_2 l & \sin k_2 l & \frac{1}{k_2 l} \end{vmatrix} - \\ & - \frac{k_1}{k_2} \cos k_1 l \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin k_2 l & \cos k_2 l & 1 \\ \sin k_2(l+a) & \cos k_2(l+a) & 0 \end{vmatrix} = \\ & = \sin k_1 l \left[\frac{1}{k_2 l} \sin k_2 l \cos k_2(l+a) + \sin k_2 l \sin k_2(l+a) + \right. \\ & \quad \left. + \cos k_2 l \cos k_2(l+a) - \frac{1}{k_2 l} \cos k_2 l \sin k_2(l+a) \right] - \\ & - \frac{k_1}{k_2} \cos k_1 l [\sin k_2 l \cos k_2(l+a) - \sin k_2(l+a) \cos k_2 l] = 0. \end{aligned}$$

გარდაკმნის შემდეგ მივიღებთ:

$$\sin k_1 l \left(\cos k_2 a - \frac{1}{k_2 l} \sin k_2 a \right) = - \frac{k_1}{k_2} \cos k_1 l \sin k_2 a.$$

აქედან

$$\frac{\operatorname{tg} k_1 l}{k_1 l} = \frac{\sin k_2 a}{\sin k_2 a - k_2 l \cos k_2 a},$$

ან

$$\frac{\operatorname{tg} k_1 l}{k_1 l} = \frac{1}{1 - k_2 l \operatorname{ctg} k_2 a}. \quad (a)$$

მიღებული განტოლება არის მდგრადობის განტოლება ინერციის მომენტების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის.

გავარჩიოთ კერძო შემთხვევები:

$$1) I_1 = \infty \text{ ან } k_1 = 0,$$

$$\lim_{k_1 \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} k_1 l}{k_1 l} = \frac{k_1 l}{k_1 l} = 1.$$

(ა) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$1 - k_2 l \operatorname{ctg} k_2 a = 1,$$

საიდანაც

$$\operatorname{ctg} k_2 a = 0, \quad k_2 a = \frac{\pi}{2}$$

და

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 E I_2}{a^2}.$$

მივიღეთ ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული და მეორე ბოლოთი თავისუფალი ძელის შემთხვევა (ნახ. 9).

2) როცა $a=0$, მივიღებთ ორი ბოლოთი სახსროვნად ჩამაგრებულ ძელს. ამ შემთხვევაში (ა) განტოლება მოგვცემს:

$$\operatorname{tg} k_1 l = 0, \quad k_1 l = \pi$$

და

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI_1}{l^2}.$$

3) $I_1 = I_2 = I$ და მაშასადამე $k_1 = k_2 = k$. როცა $a=l$ მივიღებთ:

$$\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = \frac{1}{1 - kl \operatorname{ctg} kl}.$$

ამ განტოლების გადაწყვეტა მოგვცემს: $kl = 1,165$ და

$$P_{კრ} = (1,165)^2 \frac{EI}{l^2} = 1,36 \frac{EI}{l^2}.$$

როცა $a = \frac{l}{2}$ მივიღებთ:

$$\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = \frac{1}{1 - \frac{kl}{\operatorname{tg} \frac{kl}{2}}}.$$

ამ განტოლების მინიმალური ფესვი იქნება:

$$kl = 1,802$$

და

$$P_{კრ} = (1,802)^2 \frac{EI}{l^2} = 3,25 \frac{EI}{l^2}.$$

6. მაგალითი. განვსაზღვროთ კრიტიკული ძალა და დრეკადი საყრდენის კრიტიკული სიხისტის კოეფიციენტი (ნახ. 45).

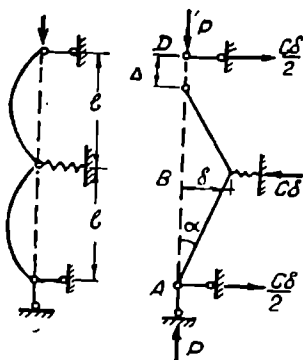
გადაწყვეტა. ამ ამოცანის ამოხსნისას მოსალოდნელია მდგრადობის დაკარგვის ორი შემთხვევა: ერთი გრძივი ღუნვის გამო,

თუ დრეკადი საყრდენის სიხისტე დიდია (ნახ. 45 ა) და მეორე დრეკადი საყრდენის დაჭლოდით, სადაც ლეროები მობრუნდებიან როგორც მთლიანი ხისტი ელემენტები (ნახ. 45 ბ).

პირველ შემთხვევაში

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

მეორე შემთხვევაში კრიტიკული ძალა გამოეთვალეთ წონასწორობის განტოლებით. დრეკად საყრდენზე გაჩნდება რეაქცია $C\delta$, სადაც c სიხისტის კოეფიციენტია.



ნახ. 45.

$$-P\delta + \frac{c\delta}{2}l = 0,$$

აქედან

$$P_{კრ} = \frac{cl}{2}.$$

კრიტიკული სიხისტე განისაზღვრება განტოლებით:

$$\frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{cl}{2},$$

საიდანაც

$$c_{კრ} = \frac{2\pi EI}{l^3}.$$

იგივე ამოცანა გადავწყვიტოთ ენერგეტიკული მეთოდით, 27-ე ფორმულის საშუალებით:

$$T = V.$$

რადგან დრეკადი საყრდენის რეაქცია თანდათანობით იზრდება 0-დან $c\delta$ -მდე, ამიტომ შიგა ძალების (დრეკადი საყრდენის რეაქციის) მუშაობა

$$V = \frac{c\delta \cdot \delta}{2} = \frac{c\alpha^2 l^2}{2}.$$

P ძალის მოდების წერტილის გადაადგილება

$$\Delta = 2(l - l \cos \alpha) = 2l(1 - \cos \alpha) = 2l \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 4l \frac{\alpha^2}{4} = \alpha^2 l.$$

გარე P ძალის მუშაობა

$$T = P\Delta = P\alpha^2 l,$$

$$P\alpha^2 l = \frac{c\alpha^2 l^2}{2},$$

საიდანაც

$$P_{კრ} = \frac{cl}{2}.$$

7. მაგალითი. განესაზღვროთ კრიტიკული ძალა 46-ე ნახაზზე მოყვანილ ჩარჩოსათვის.

გადაწყვეტა. თუ მდგრადობის დაკარგვა მოხდა AB ღეროს გრძივი ღუნვის გამო, მაშინ $P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$.

მდგრადობის დაკარგვა შეიძლება მოხდეს DE ღეროს გაღუნვისაგან და ამ შემთხვევაში AB ღერო მობრუნდება, როგორც მყარი ტანი (ნახ. 46 ბ).

AB ძელის საანგარიშო სქემა ნაჩვენებია 46-ე გ ნახაზზე. BD რიგელში განვითარებული ძალა ან B დრეკადი საყრდენის რეაქცია $c\delta$ ტოლია, სადაც c სიხისტის კოეფიციენტი (ერთეული გადაადგილებით გამოწვეული ძალა).

DE კონსოლური ძელის D წერტილის გადაადგილება

$$\delta = \frac{c\delta(2l)^3}{3EI} = \frac{c\delta 8l^3}{3EI},$$

საიდანაც

$$c = \frac{3EI}{8l^3}.$$

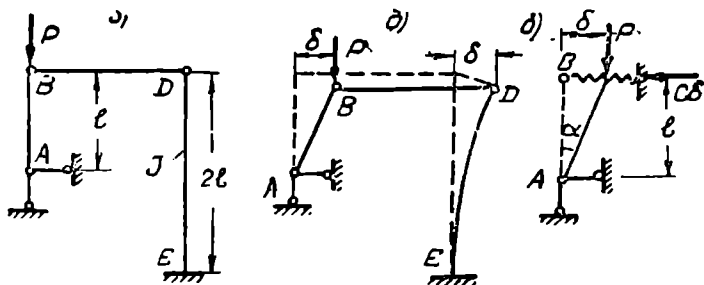
თუ გარე და შიგა ძალების მომენტების ჯამს A წერტილის მიმართ გაუტოლებთ ერთმანეთს, მივიღებთ:

$$P_{\text{გარ}}\delta = c\delta \cdot l,$$

საიდანაც

$$P_{\text{გარ}} = cl = \frac{3EI}{8l^2}.$$

იგივე ამოცანა შეიძლება გადავწყვიტოთ გარე და შიგა ძალების მუშაობათა ერთმანეთთან გატოლებით.



ნახ. 46.

P ძალის მოღებვის წერტილის გადაადგილება

$$\Delta = l - x = l - \sqrt{l^2 - \delta^2} = l - l\sqrt{1 - \alpha^2} \approx \frac{1}{2}\alpha^2 l.$$

P გარე ძალის მუშაობა

$$T = P \cdot \Delta = \frac{P\alpha^2 l}{2}.$$

შიგა ძალების მუშაობა

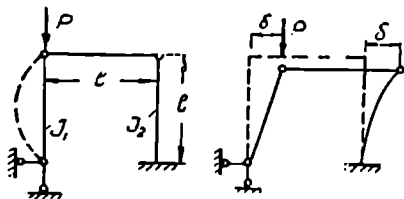
$$V = \frac{c\delta \cdot \delta}{2} = \frac{c\alpha^2 l^2}{2}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{P_{\text{გარ}}\alpha^2 l}{2} = \frac{c\alpha^2 l^2}{2},$$

$$P_{კრ} = cl = \frac{3EI}{8l^2}$$

8. მაგალითი. 47-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მდგრადობის დაკარგვის ორი ფორმა. ვიპოვოთ I_1 და I_2 შორის დამოკიდებულება, რომლის დროსაც კრიტიკული ძალა ორივე შემთხვევაში ერთნაირი იქნება.



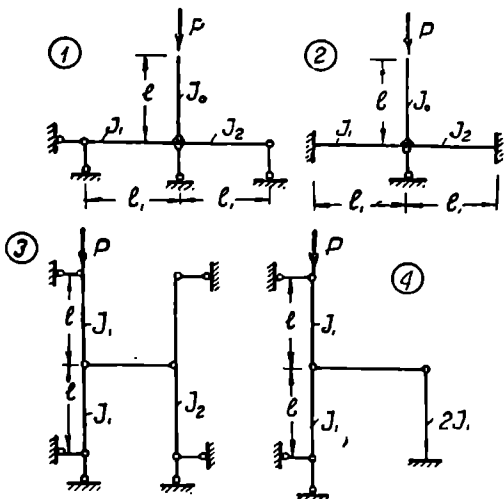
ნახ. 47.

პასუხი: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{3}{\pi^2}$.

9. მაგალითი. აირჩეს დგარის საანგარიშო სქემა, შედგეს მდგრადობის განტოლება და განისაზღვროს ჩამაგრების სიხისტის კოეფიციენტი 48-ე ნახაზზე მოყვანილი სისტემებისათვის.

მითითება. პირველი და მეორე მაგალითის დგარების ჩამაგრების სიხისტის კოეფიციენტის გამოთვლისას ვისარგებლოთ რეაქციების ცხრილით, სათანადო შესწორებით ($\varphi_1 = \varphi_2 = 1$. იხ. ცხრილი 3).

მითითება. პირველი და მეორე მაგალითის დგარების ჩამაგრების სიხისტის კოეფიციენტის გამოთვლისას ვისარგებლოთ რეაქციების ცხრილით, სათანადო შესწორებით ($\varphi_1 = \varphi_2 = 1$. იხ. ცხრილი 3).



ნახ. 48.

პასუხები:

1. მდგრადობის განტოლება $kl \operatorname{tg} kl = \frac{cl}{EI_0}$,

სიხისტის კოეფიციენტი $c = \frac{3EI_1 + 3EI_2}{l_1}$;

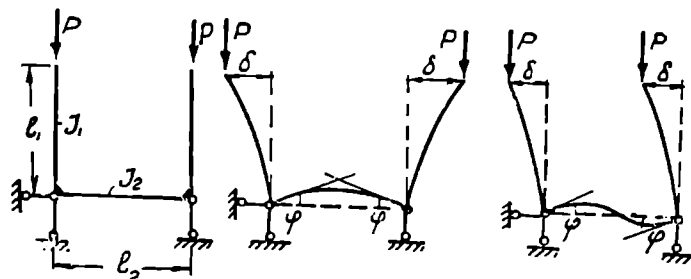
2. მდგრადობის განტოლება იგივეა (იხ. 1 მაგალითი),

$$\text{სიხისტის კოეფიციენტი } c = \frac{4 E(I_1 + I_2)}{l_1};$$

3. კრიტიკული ძალა $P_{კრ} = \frac{cl}{2} = \frac{3 EI_2}{l^2}$,

$$\text{სიხისტის კოეფიციენტი } c = \frac{6 EI_2}{l^3};$$

4. კრიტიკული ძალა $P_{კრ} = \frac{3 EI_1}{l^2}$.



ნახ. 49.

10. მაგალითი. შეედგინოთ მდგრადობის განტოლებები სიმეტრიული და ირიბად სიმეტრიული გალუნვის შემთხვევაში (ნახ. 49).

პასუხი. მდგრადობის განტოლება ორივე შემთხვევაში იქნება:

$$kl_1 \operatorname{tg} kl_1 = \frac{cl_1}{EI_1}.$$

სიხისტის კოეფიციენტი (ერთეული მობრუნებით გამოწვეული მომენტი) სიმეტრიული გალუნვის დროს $c = \frac{2 EI_2}{l_2}$, ხოლო ირიბადსიმეტრიული გალუნვის შემთხვევაში

$$c = \frac{6 EI_2}{l_2}.$$

11. მაგალითი. 50-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მდგრადობის დაკარგვის ორი შესაძლებელი შემთხვევა.

რას უნდა უდრიდეს l_2 თუ ორივე შემთხვევაში კრიტიკული ძალა ერთნაირია.

გადაწყვეტა. პირველ შემთხვევაში

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{l_1^2} = \frac{\pi^2 EI}{(l-l_2)^2}.$$

(ა)

შეორე შემთხვევაში მღუნავი მოპენტო

$$M = -Py + \frac{P\delta}{l_1}(l-x).$$

გალუნული ღერძის დიფერენციალური განტოლება იქნება:

$$EIy'' + Py = \frac{P\delta}{l_1}(l-x).$$

ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \frac{\delta}{l_1}(l-x).$$

სასაზღვრო პირობები იქნება:

$$\text{როცა } x=0 \quad y=0 \quad \text{და} \quad y'=0,$$

$$\text{როცა } x=l_2 \quad y=\delta.$$

მივიღებთ:

$$C_2 + \frac{l}{l_1}\delta = 0,$$

$$C_1 k - \frac{\delta}{l_1} = 0,$$

$$C_1 \sin kl_2 + C_2 \cos kl_2 = 0.$$

მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{l}{l_1} \\ k & 0 & -\frac{1}{l_1} \\ \sin kl_2 & \cos kl_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{kl}{l_1} \cos kl_2 - \frac{1}{l_1} \sin kl_2 = 0,$$

საიდანაც

$$\operatorname{tg} kl_2 = kl. \quad (\delta)$$

პირველ და მეორე შემთხვევაში კრიტიკული ძალები რომ ერთნაირი იყოს k კოეფიციენტი უნდა უდროდეს:

$$k = \sqrt{\frac{P_{კრ}}{EI}} = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{l_1^2 EI}} = \frac{\pi}{l_1} = \frac{\pi}{l-l_2}.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა მდგრადობის (ბ) განტოლებაში:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi l_2}{l-l_2} = \frac{\pi l}{l-l_2}$$

ან

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \frac{l_2}{l}}{1 - \frac{l_2}{l}} = \frac{\pi}{1 - \frac{l_2}{l}}.$$

$\frac{l_2}{l}$ ფარდობას მიეკეთ სხვადასხვა მნიშვნელობა და გამოეთვალით ტოლობის ორივე მხარე. მივიღებთ, რომ იმ განტოლებას აკმაყოფილებს მნიშვნელობა:

$$\frac{l_2}{l} = 0,30.$$

თუ $l_2 > 0,3l$ მდგრადობის დაკარგვა მოხდება მეორე ფორმით და კრიტიკული ძალა გამოითვლება (ბ) განტოლებით. თუ $l_2 < 0,3l$ მდგრადობის დაკარგვა მოხდება პირველი ფორმით და კრიტიკული ძალა გამოითვლება (ა) ფორმულით.

დაუშვათ $l_2 = 0,5l_1$ და $l = 1,5l_1$, მაშინ

$$\operatorname{tg} \frac{kl_1}{2} = \frac{3}{2} kl_1.$$

ცხრილებიდან ვიპოვით: $\frac{kl_1}{2} = 1,324$. ხოლო

$$P_{კრ} = \frac{(2,648)^2 EI}{l_1^2} = \frac{7 EI}{l_1^2}$$

12 მაგალითი. 51-ე ნახაზზე წარმოდგენილ სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი. განვსაზღვროთ კრიტიკული ძალა და კრიტიკული სიხისტის კოეფიციენტი.

გადაწყვეტა. თუ მდგრადობის დაკარგვა მოხდა გრძივი ღუნვის გამო, მაშინ $P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$. დრეკადი სა-

ყრდენების არსებობამ შეიძლება გამოიწვიოს მდგრადობის დაკარგვა ისე, როგორც ნაჩვენებია ნახაზზე, ე. ი. მდგრადობა დაკარგოს როგორც მთლიანმა მუარმა ტანმა. დრეკადი საყრდენების სიხისტის კოეფიციენტები სათანადოდ იყოს c_1 და c_2 .

კრიტიკული ძალა განვსაზღვროთ წონასწორობის განტოლებებით.

დრეკადი საყრდენების რეაქციები ტოლია:

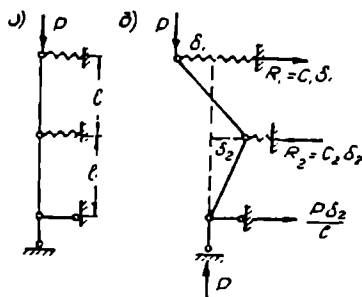
$$R_1 = \frac{P}{l} (\delta_1 + \delta_2),$$

$$R_2 = \frac{P}{l} (\delta_1 + 2\delta_2).$$

რეაქციები გამოვსახოთ სიხისტის კოეფიციენტებით:

$$R_1 = c_1 \delta_1 = \frac{P}{l} (\delta_1 + \delta_2),$$

$$R_2 = c_2 \delta_2 = \frac{P}{l} (\delta_1 + 2\delta_2).$$



ნახ. 51.

უკანასკნელი განტოლებები გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\left(c_1 - \frac{P}{l}\right) \delta_1 - \frac{P}{l} \delta_2 = 0,$$

$$\frac{P}{l} \delta_1 + \left(\frac{2P}{l} - c_2\right) \delta_2 = 0.$$

მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(c_1 - \frac{P}{l}\right) & -\frac{P}{l} \\ \frac{P}{l} & \left(\frac{2P}{l} - c_2\right) \end{vmatrix} = 0.$$

დეტერმინანტის გაშლის შემდეგ მივიღებთ:

$$P^2 - Pl(2c_1 + c_2) + c_1 c_2 l^2 = 0,$$

$$P_{კრ} = \frac{l(2c_1 + c_2)}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2(2c_1 + c_2)^2}{4} - c_1 c_2 l^2} =$$

$$= \frac{l(2c_1 + c_2)}{2} \pm \frac{l}{2} \sqrt{4c_1^2 + c_2^2}.$$

პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს მინიმალურ კრიტიკულ ძალას:

$$P_{კრ} = \frac{l(2c_1 + c_2)}{2} - \frac{l}{2} \sqrt{4c_1^2 + c_2^2}.$$

თუ დრეკადი საყრდენების სიხისტე ერთნაირია $c_1 = c_2 = c$,

მაშინ

$$P_{კრ} = \frac{cl}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

კრიტიკული სიხისტე გამოითვლება განტოლებიდან:

$$\frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{cl}{2}(3 - \sqrt{5}),$$

საიდანაც

$$c_{კრ} = \frac{2\pi^2 EI}{l^3(3 - \sqrt{5})}.$$

სწორი შეკუმშულ-გალუნული ღრეკადი ღეროების
მდგრადობა

§ 15. საართო შენიშვნა და ამოცანის გააფუჟების მეთოდი

შესაეალში აღენიშნეთ, რომ შეკუმშულ-გალუნული ღეროს მდგრადობის დაკარგვა ხდება არა იმ სახით როგორც შეკუმშული ღეროსი. აქ აღგილი აქეს ღეროს ზიდვის უნარის დაკარგვას, ე. ი. მეორე რიგის მდგრადობის დაკარგვას. ამ შემთხვევაში, განივი მლუნავი ძალის მოქმედების გამო, ღუნვის ღეფორმაცია თავიდანვე ვითარდება. ჩვეულებრივი განივი ღუნვის დროს კოჭის ჩალუნვა გავლენას არ ახდენს შინაგან ძალებზე (M, Q) და მას მხედველობაში არ იღებენ. თუ კოჭზე განივ ძალასთან ერთად გრძივი მკუმშავი ძალა მოქმედებს, მაშინ ღეფორმაციები მნიშვნელოვან გავლენას ახდენენ მლუნავ მომენტზე და განივ ძალებზე. ქვევით ჩვენ ვნახავთ, რომ როდესაც გრძივი მკუმშავი ძალა მიუახლოვდება ე. წ. კრიტიკულ ძალას, მაშინ ჩალუნვები და მასთან ერთად მლუნავი მომენტი და განივი ძალაც უსასრულობას მიუახლოვდება.

ამიტომ, შეკუმშულ-გალუნული ღეროს ზიდვის უნარი განისაზღვრება ან მაქსიმალური ჩალუნვების, ან მაქსიმალური მომენტების და ძაბვების მიხედვით.

კუმშვისა და ღუნვის ერთდროული მოქმედების დროს ამოცანის გადაწყვეტის მსვლელობა ასეთი იქნება: ვწერთ გალუნული ღერძის დიფერენციალის განტოლებას:

$$Ely'' = M.$$

მლუნავი მომენტის გამოსახულებაში შევა გრძივი მკუმშავი ძალა და განივი მლუნავი ძალები. მივიღებთ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის საერთო ინტეგრალი შედგება საერთო და კერძო ინტეგრალებისაგან. სასაზღვრო პირობების შედგენა გვაძლევს არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} C_1 a_{11} + C_2 a_{12} + C_3 a_{13} + \dots + C_n a_{1n} &= A_1, \\ C_1 a_{21} + C_2 a_{22} + C_3 a_{23} + \dots + C_n a_{2n} &= A_2, \\ &\vdots \\ C_1 a_{n1} + C_2 a_{n2} + C_n a_{n3} + \dots + C_n a_{nn} &= A_n. \end{aligned} \tag{126}$$

უცნობები განისაზღვრება კრამერის განტოლებებიდან:

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad C_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \tag{127}$$

შეკუმშული ღეროებისაგან განსხვავებით (იხ. § 14) აქ $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$, ... $\Delta_n \neq 0$ და ჩაღუნვა, რომ უსასრულოდ დიდი იყოს საჭიროა ყველა ან რამდენიმე კოეფიციენტი C_1, C_2, \dots იქცეს უსასრულობად. ამას მივალწევთ, თუ 126-ე განტოლების მთავარი დეტერმინანტი Δ იქცევა ნულად ($\Delta=0$).

როგორც ვხედავთ, კუმშვისა და ღუნვის ერთდროული მოქმედების შემთხვევაში მდგრადობის განტოლების შედგენა ისევე წარმოებს, როგორც ცენტრალური კუმშვის დროს. აქ კრიტიკული ძალა იქნება ის ძალა, რომლის დროსაც დეფორმაციები იღებენ უსასრულოდ დიდ მნიშვნელობებს.

§ 18. მასანობრივი კოშხა

ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებულ ძელზე მოქმედებს ექსცენტრიულად მოდებული მკუმშავი ძალა P (ნახ. 52).

მღუნავი მომენტი

$$M = P(\delta + e - y).$$

გაღუნული ღერძის დიფერენციალური განტოლება იქნება:

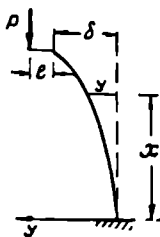
$$\begin{aligned} \text{ან} \quad EIy'' &= P(\delta + e - y) & (128) \\ EIy'' + Py &= P(\delta + e). \end{aligned}$$

ამ განტოლების საერთო ინტეგრალი

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \delta + e, \quad (129)$$

სადაც

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (130)$$



ნახ. 52.

სასაზღვრო პირობები იქნება:

$$\text{როცა } x=0 \quad y=0 \quad \text{და} \quad y'=0,$$

$$\text{როცა } x=l \quad y=\delta.$$

თუ 129-ე განტოლებაში შევიტანთ სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ:

$$C_2 + \delta + e = 0, \quad (\alpha)$$

საიდანაც

$$C_2 = -(\delta + e).$$

$$C_1 k = 0, \quad \text{საიდანაც } C_1 = 0, \quad (\beta)$$

$$\delta = C_2 \cos kl + \delta + e.$$

აქედან

$$C_2 \cos kl = -e. \quad (\gamma)$$

C_1 და C_2 მნიშვნელობები შევუტანოთ y გამოსახულებაში, მივიღებთ:

$$y = (\delta + e)(1 - \cos kx). \quad (131)$$

(გ) განტოლებაში, თუ შევიტანთ C_2 მნიშვნელობას ვიპოვიტ ბ:

$$\delta = \frac{e(1 - \cos kl)}{\cos kl}.$$

ამ უკანასკნელს თუ შევიტანთ 131-ე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$y = \frac{e}{\cos kl} (1 - \cos kx). \quad (132)$$

ეს განტოლება გვიჩვენებს, რომ y იზრდება გაცილებით სწრაფად, ვიდრე P .

როდესაც $\cos kl = 0$, მაშინ $y = \infty$. ამ შემთხვევაში $kl = \frac{\pi}{2}$ და

$$P = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = P_{კრ}.$$

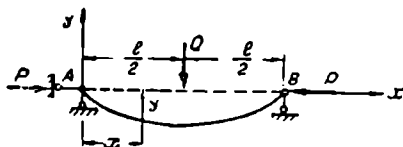
ამავე შედეგს მივიღებთ, თუ (ა) და (გ) განტოლების დეტერმინანტს გაუტოლებთ ნულს:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \cos kl & 0 \end{vmatrix} = \cos kl = 0.$$

✓ ✓

§ 17. მაქსიმალური ჩაღუნვაი და მოკიდები შაპოშულ-გაღუნულ ღარიში.

1. ორ საყრდენზე მდებარე სახსროვანად დაყრდნობილი კოჭის შუაში მოქმედებს განივი ძალა Q და გრძივი მკუშმშავეი ძალა P (ნახ. 53). დეფორმაცია სიმეტრიულია და ამიტომ ვიხილავთ მარცხენა უბანს. მლუნავი მომენტი მარცხენა უბანში ($x < \frac{l}{2}$)



ნახ. 53.

$$M = \frac{Q}{2}x + Py.$$

რადგანაც კოჭი ქვემოთ იღუნება, ამიტომ y უარყოფითია და მლუნავი მომენტი

$$M = \frac{Q}{2}x - Py.$$

გაღუნული ღერძის დიფერენციალურ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$EIy'' + Py = \frac{Q}{2}x.$$

ამ განტოლების საერთო ინტეგრალი იქნება:

$$y = C_1 \sin kx - C_2 \cos kx + \frac{Q}{2P} x. \quad (133)$$

სასაზღვრო პირობებია:

$$\text{როცა } x=0 \quad y=0,$$

$$\text{როცა } x=\frac{l}{2} \quad y'=0$$

(შუაში გაღუნული ღერძის მხები პორიზონტალურია)
მივიღებთ:

$$C_2 = 0,$$

$$C_1 k \cos \frac{kl}{2} + \frac{Q}{2P} = 0,$$

საიდანაც

$$C_1 = - \frac{Q}{2Pk \cos \frac{kl}{2}}.$$

გაღუნული ღერძის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$y = \frac{Q}{2P} \left(x - \frac{\sin kx}{k \cos \frac{kl}{2}} \right). \quad (134)$$

მაქსიმალურ ჩაღუნვას ადგილი ექნება მალის შუაში $x = \frac{l}{2}$:

$$y_{max} = \frac{Q}{2Pk} \left(\frac{kl}{2} - \frac{\sin \frac{kl}{2}}{\cos \frac{kl}{2}} \right). \quad (135)$$


სიმარტივისათვის აღვნიშნოთ:

$$\frac{kl}{2} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = u, \quad (136)$$

მაშინ

$$y_{max} = \frac{Q}{2Pk} (u - \operatorname{tg} u) = - \frac{Ql^3}{48EI} \frac{3(\operatorname{tg} u - u)}{u^3}. \quad (137)$$

$\frac{Ql^3}{48EI}$ მამრაველი წარმოადგენს Q ძალისაგან გამოწვეულ ჩაღუნვას შუაში.

მეორე მამრაველი იძლევა გრძივი მკუმშავი ძალის გავლენას ჩაღუნვაზე და მოცემულია ცხრილებში u სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. 

მღუნავი მომენტი გამოითვლება ფორმულით¹:

¹ კოორდინატა ღერძები ისეა არჩეული, რომ $EIy'' = +M$.

$$M = EI y''.$$

მაქსიმალურ მომენტს მივიღებთ თუ შევიტანთ $x = \frac{l}{2}$.

134-ე განტოლებიდან მივიღებთ:

$$M_{max} = \frac{EI Q k}{2P} \operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \frac{Ql}{4} \frac{\operatorname{tg} u}{u}. \quad (138)$$

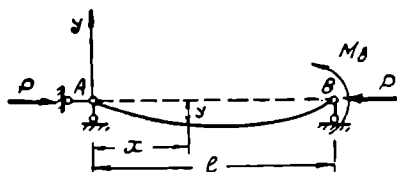
მაქსიმალური მღუნავი მომენტი განივი ძალისაგან გამოწვეული მღუნავი მომენტისა და $\frac{\operatorname{tg} u}{u}$ კოეფიციენტის ნამრავლის ტოლია. თუ P ძალა მცირეა, მაშინ u მცირეა. როცა მკუმშავი ძალა არ მოქმედებს, მაშინ $u=0$ და კოეფიციენტები¹

$$\frac{3(\operatorname{tg} u - u)}{u^3} = \frac{\operatorname{tg} u}{u} = 1.$$

მიღებული კოეფიციენტები უსასრულოდ იზრდებიან, როდესაც u უახლოვდება $\frac{\pi}{2}$. როდესაც $u = \frac{\pi}{2}$, მაშინ 136-ე განტოლებიდან მივიღებთ:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = P_{კრ}. \quad (139)$$

მაშასადამე, მაქსიმალური ჩაღუნვა და მომენტი იზრდება უსასრულოდ, როდესაც მკუმშავი ძალა უახლოვდება ეილერის კრიტიკულ ძალას².



ნახ. 54.

2. შეკუმშულ დეროზე მოქმედებს წყვილი ძალა M_b (ნახ. 54). მღუნავი მომენტი x -კვეთში

$$M = \frac{M_b}{l} x - Py.$$

წონასწორობის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალი იქნება:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \frac{M_b}{Pl} x.$$

სასაზღვრო პირობები:

$$x=0 \quad y=0,$$

$$x=l \quad y=0,$$

მოგვეძებს:

$$y = \frac{M_b}{P} \left(\frac{x}{l} - \frac{\sin kx}{\sin kl} \right). \quad (140)$$

მღუნავი მომენტი

¹ განუსაზღვრელობას გავხსნით ლობიტალის წესით.

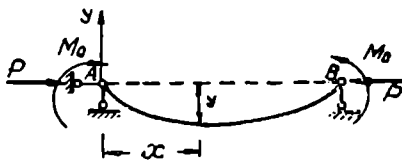
$$M = EIy'' = M_0 \frac{\sin kx}{\sin kl}.$$

მაღის შუაში

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{M_0 l^2}{16EI} \frac{2}{u^3} \left(1 - \frac{1}{\cos u} \right), \\ M &= \frac{M_0}{2} \frac{1}{\cos u}. \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

შუაში მღუნავი მომენტი და ჩაღუნვა არ არის მაქსიმალური, მაგრამ მიღებული ფორმულები მაინც იძლევიან საშუალებას გავარკვიოთ ის ძალა, რომელიც იწვევს უსასრულოდ დიდ ჩაღუნვას და მომენტს.

3. შეკუმშული ღეროს ბოლოებზე მოქმედებს ორი ტოლი მომენტი (ნახ. 55). მღუნავი მომენტი



ნახ. 55.

$$M_x = M_0 - Py$$

(მეორე წვერი აღებულია მინუსით ვინაიდან y უარყოფითია).
გაღუნული ღერძის განტოლება

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \frac{M_0}{P}.$$

სასაზღვრო პირობებია:

$$\begin{aligned} x=0 \quad y &= 0, \\ x = \frac{l}{2} \quad y' &= 0. \end{aligned}$$

მაქსიმალური ჩაღუნვა და მღუნავი მომენტი მაღის შუაში იქნება:

$$\left. \begin{aligned} y_{max} &= \frac{M_0 l^2}{8EI} \frac{2(\cos u - 1)}{u^2 \cos u}, \\ M_{max} &= M_0 \frac{1}{\cos u}. \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

როდესაც u უახლოვდება $\frac{\pi}{2}$, მაშინ y_{max} და M_{max} უახლოვდება უსასრულობას.

$$\text{როცა } u = \frac{\pi}{2} \quad P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = P_{კრ}.$$

ზემოთ განხილული შემთხვევა წარმოადგენს ექსცენტრიულ კუმშვას, როდესაც ორივე მხარეს ექსცენტრისიტეტი ერთნაირია.

წინა პარაგრაფში გამოყვანილი ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ კუმშვისა და ღუნვის ერთდროული მოქმედების დროს ჩალუნები და მომენტები შეიძლება გამოვსახოთ საერთო სახით:

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 A(u), \\ M &= M_0 B(u), \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

სადაც y_0 და M_0 წარმოადგენს მხოლოდ განივი ძალებისაგან გამოწვეულ ჩალუნებს და მომენტს განსახილავ კვეთში.

$A(u)$ და $B(u)$ სიდიდეები დამოკიდებულია დატვირთვის და საყრდენების ჩამაგრების ხასიათზე და u ცვლილებით 0-დან გარკვეულ სიდიდემდე ერთეულიდან უსასრულობამდე იცვლება.

კრიტიკული ძალა გამოითვლება ფორმულით:

$$P_{კრ} = \frac{4u^2 EI}{l^2} \quad \text{ან} \quad P_{კრ} = \frac{v^2 EI}{l^2},$$

სადაც $v = 2u$

(შემდეგში ამ აღნიშვნასთან გვექნება საქმე).

სახსროვანად დაყრდნობილი კოჭებისათვის $u = \frac{\pi}{2}$, ერთი ბოლოთი ჩამაგრებული და მეორეთი თავისუფალი ძელისათვის $u = \frac{\pi}{4}$, ხოლო ორი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული ძელისათვის $u = \pi$.

სახსროვანად დაყრდნობილი კოჭისათვის $A(u)$ ფუნქცია მიახლოებით ტოლია¹:

$$A(u) = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{კრ}}}. \quad (144)$$

მაშასადამე,

$$y = y_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{კრ}}}. \quad (145)$$

მაქსიმალური ჩალუნვა შუაში

$$f = f_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{კრ}}}. \quad (146)$$

მნიშვნელის მეორე წევრი გამოსახავს მკუმშავი P ძალის გავლენას ჩა-

¹ Н. М. Беляев. Сопротивление материалов; С. П. Тимошенко. Устойчивость упругих систем, გვ. 43.

ღუნვაზე. თუ $\frac{P}{P_{კრ}}$ ფარდობა მცირეა, მაშინ მისი გავლენაც უმნიშვნელოა. როდესაც P ძალა უახლოვდება $P_{კრ}$, მაშინ ჩაღუნვა ძალიან სწრაფად იზრდება და უტოლდება უსასრულობას $P=P_{კრ}$ დროს. ჩაღუნვის გამოთვლა 146-ე ფორმულით შეიძლება მაშინ, როდესაც P არ არის $P_{კრ}$ -თან მიახლოებული. მაქსიმალური მღუნავი მომენტი იქნება:

$$M = M_0 + Pf = M_0 + \frac{Pf_0}{1 - \frac{P}{P_{კრ}}}. \quad (147)$$

მაგალითად, როდესაც ძალა მოქმედებს კოქის შუაში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} M_{max} &= \frac{Pl}{4} + \frac{P \frac{Pl^3}{48EI}}{1 - \frac{P}{P_{კრ}}} = \frac{Pl}{4} \left[1 + \frac{0,82 \frac{P}{P_{კრ}}}{1 - \frac{P}{P_{კრ}}} \right] = \\ &= \frac{Pl}{4} \frac{1 - 0,18 \frac{P}{P_{კრ}}}{1 - \frac{P}{P_{კრ}}}. \end{aligned}$$

თუ კოქის ორივე საყრდენზე ტოლი მომენტი მოქმედებს (ნახ. 55), მაშინ

$$M_{max} = M_0 + \frac{P \frac{M_0 l^2}{8EI}}{1 - \frac{P}{P_{კრ}}} = M_0 \frac{1 + 0,23 \frac{P}{P_{კრ}}}{1 - \frac{P}{P_{კრ}}}$$

თუ კოქზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტერტიი q ინტენსიურობით, მაშინ

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{Pql^4}{384EI} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{კრ}}} = \frac{ql^2}{8} \frac{1 + 0,028 \frac{P}{P_{კრ}}}{1 - \frac{P}{P_{კრ}}}.$$

როდესაც $\frac{P}{P_{კრ}}$ ფარდობა მცირეა, მაშინ მაქსიმალური მომენტი მიახლოებით გამოითვლება ფორმულით:

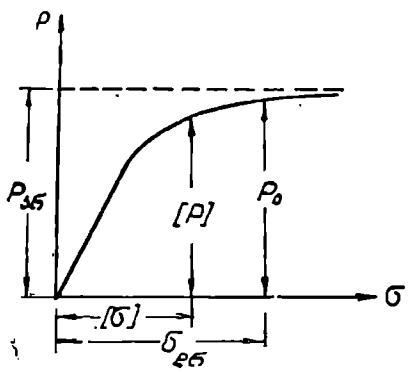
$$M = M_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{კრ}}}. \quad (148)$$

კუმშვისა და ღუნვის ერთდროული მოვლენის დროს ძაბვები მოქმედი ძალების არაპროპორციულია და ძალებზე სწრაფად იზრდება. ამას ადვილად შევამჩნევთ, თუ ავაგებთ $\sigma = f(P)$ გრაფიკს (ნახ. 56).

ამ შემთხვევაში სიმტკიცის ჩვეულებრივი ფორმულა, რომელიც დასაშვებ ძაბვებზეა დამოკიდებული, არასაიმედოა. მართლაც, სიმტკიცის პირობა დასაშვები ძაბვებით გამოისახება ასე:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{დრ}}{n}$$

სადაც n არის სიმტკიცის მარაგი. ნახაზიდან გამომდინარე დასაშვები ძაბვა შეიძლება ავიღოთ საკმარისი მარაგით. ვთქვათ $[\sigma] = \frac{\sigma_{დრ}}{1,5}$, მაშინ როცა დასაშვები ძალა სახიფათოს უახლოვდება და მარაგი არასაკმარისია. ამის გამო, ანგარიში უნდა ვაწარმოოთ არა დასაშვები ძაბვებით, არამედ დასაშვები დატვირთვებით.



ნახ. 56.

ამ შემთხვევაში, როგორც ცნობილია, სიმტკიცის პირობა იქნება:

$$P \leq [P] = \frac{P_0}{n} \tag{149}$$

თუ ზღვრული მკუმშავი ძალა და მომენტი $n[P]$ და $n[M]$ იქნება, მაშინ მაქსიმალური ძაბვა გამოწვეული მკუმშავი ძალისა და მომენტის ერთდროული მოქმედებით:

$$\sigma_{დრ} = \frac{nP}{F} + \frac{n(M_0 + Pf)}{W}$$

საიდანაც

$$\frac{\sigma_{დრ}}{n} = [\sigma] = \frac{P}{F} + \frac{M_0 + Pf}{W}$$

ვინაიდან განვითარებული ძაბვები დასაშვებზე ნაკლები უნდა იყოს, ამიტომ სიმტკიცის პირობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{P}{F} + \frac{M_0 + Pf}{W} \leq [\sigma] \tag{150}$$

სადაც M_0 არის განვი ძალებისაგან გამოწვეული მღუნავი მომენტი.

პროფ. კ. ზავრიევის მიხედვით 150-ე ფორმულაში შემავალი მაქსიმალური ჩაღუნვა გამოითვლება ფორმულით:

$$f = \frac{nf_0}{1 - n \frac{P}{P_{კრ}}} \tag{151}$$

ჩარჩოების ანგარიში მდგრადობაზე ქალთა მეთოდით

§ 10. შორის ფორმულა შაქმულ-გალუნული ლარტაინათვის

ჩვენ ვიციტ შორის ძირითადი ფორმულა, რომლის საშუალებითაც ვსაზღვრავთ გადაადგილებებს, როდესაც სისტემაზე მოქმედებს მხოლოდ განივი ძალები. მდგრადობის შესწავლის დროს სისტემაზე განივ ძალებთან ერთად მოქმედებს გრძივი ძალები და ამიტომ გადაადგილებები დამოკიდებულია როგორც განივი, ისე გრძივ მკუმშვ ძალებზე. აქ განივი ძალები ის ძალებია, რომლებიც ვითარდებიან კრიტიკულ მომენტში, ე. ი. უსასრულოდ მცირე დეფორმაციის დროს და ისინი ძალიან მცირე სიდიდეებია. ამის გამო ჩვენ გამოვიყენებთ ძალთა დამოუკიდებლობის პრინციპს, რომელიც გრძივი და განივი ძალების მოქმედების დროს სპეციფიკურ სახეს იღებს და შემდეგში მდგომარეობს: თუ ღეროზე მოქმედებს გრძივი ძალა P და Q_1 და Q_2 განივი ძალები, მაშინ გაღუნული ღერძის ორდინატა y წარმოადგენს P და Q_1 ძალების მოქმედებით მიღებულ გაღუნული ღერძის ორდინატისა y_1 და P და Q_2 ძალების მოქმედების შედეგად მიღებული ორდინატის y_2 ჯამს:

$$y = y_1 + y_2.$$

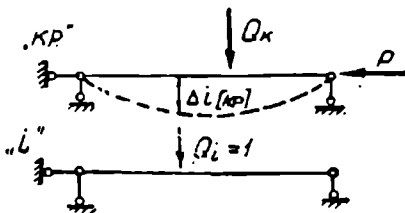
აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ P და Q ძალებისაგან გამოწვეული გადაადგილება

$$\Delta = Q\delta,$$

სადაც δ არის P და $Q=1$ ძალების ერთდროული მოქმედებით გამოწვეული გადაადგილება, რაც მე-17 წ-ში მიღებული ფორმულებიდანაც ნათლად ჩანს.

ეს პრინციპი საშუალებას იძლევა გამოვიყენოთ სამშენებლო მექანიკის ძირითადი თეორემები და მათ შორის შორის თეორემა შეკუმშულ-გალუნულ ღეროებში.

შორის განზოგადოებული თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს მუშაობათა ურთიერთობის პრინციპიდან. განვიხილოთ ძალების მოქმედების ორი მდგომარეობა: გრძივი და განივი ძალის ერთდროული მოქმედება („ kP “) და ერთეული ძალის („ i “) მდგომარეობა (ნახ. 57). ამ ორი მდგო-



ნახ. 57.

მარეობისათვის შევადგინოთ მუშაობათა ურთიერთობის ფორმულა შემდეგი სახით:

$$T_{i(kp)} = V_{(kp)l} \quad (152)$$

$T_{i(kp)}$ წარმოადგენს „ i “ მდგომარეობის გარე ძალების მუშაობას „ kp “ მდგომარეობის ძალებისაგან გამოწვეულ გადაადგილებებზე, ხოლო $V_{(kp)l}$ კი — „ kp “ მდგომარეობის შიგა ძალების მუშაობას „ i “ მდგომარეობის შინაგან გადაადგილებებზე.

თუ მხედველობაში არ მივიღებთ განივი და გრძივი ძალების გავლენას მუშაობებზე, მაშინ

$$T_{i(kp)} = 1 \cdot \Delta_{i(kp)l}$$

$$V_{(kp)l} = \int \frac{M_i M_{(kp)} dx}{EI}$$

თუ შევიტანთ ამ გამოსახულებებს 152-ე ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\Delta_{i(kp)} = \int \frac{M_i M_{(kp)} dx}{EI} \quad (153)$$

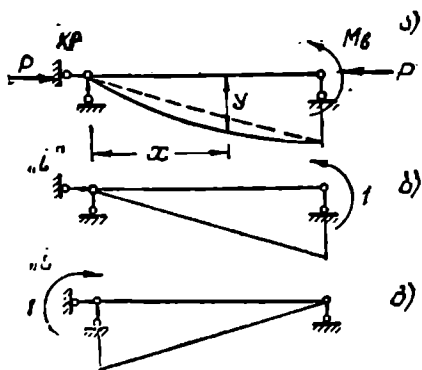
სადაც M_i არის მხოლოდ განივი ერთეული ძალისაგან გამოწვეული მღუნავი მომენტი,

$M_{(kp)}$ — განივი და გრძივი ძალების ერთდროული მოქმედებით გამოწვეული მღუნავი მომენტი.

ამ უქანასკნელის გამოსათვლელად საჭიროა ვიცოდეთ გაღუნული ღერძის განტოლება, რომელიც ჯერ არ ვიცით და რომელსაც ვეძებთ.

მორის განზოგადებული ფორმულის (153) ამოხსნა ზოგადად შეიძლება, თუ მასში შევიტანთ გაღუნული ღერძის განტოლებას ზოგადად $y=f(x)$. თვალსაჩინოებისათვის უმჯობესია 153-ე განტოლება ამოეხსნათ ცალკეული კერძო შემთხვევებისათვის, რომელთა გაღუნული ღერძის განტოლება უკვე ცნობილია.

სახსროვანად დაყრდნობილი შეკუმშული კოჭის მარჯვენა ბოლოზე მოქმედებს შეყურსული მომენტი (ნახ. 58). ვიპოვოთ ჯერ მარჯვენა საყრდენის მობრუნების კუთხე, შემდეგ კი მარცხენა საყრდენის. მარჯვენა საყრდენის მობრუნების კუთხის საპოვნელად განვიხილოთ მდგომარეობა: „ kp “ (ნახ. 58 ა) და „ i “ (ნახ. 58 ბ).



ნახ. 58.

$$M_{(kp)} = \frac{M_b}{l} x - P \cdot y = M_b \frac{\sin kx}{\sin kl}$$

ერთეული მომენტისაგან გამოწვეული მლუნავი მომენტი

$$M_l = \frac{1}{l} x.$$

მომენტების მნიშვნელობები შევიტანოთ 153-ე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \Delta_{i(kp)} &= -\frac{M_b}{EI l \sin kl} \int_0^l x \sin kx \, dx = \frac{M_b}{EI l \sin kl} \left[\frac{\sin kx}{k^2} - \frac{x \cos kx}{k} \right]_0^l = \\ &= \frac{1}{EI} \frac{M_b}{l \sin kl} \left(\frac{\sin kl}{k^2} - \frac{l \cos kl}{k} \right) = \frac{M_b}{EI k^2 l} (1 - kl \operatorname{ctg} kl) = \\ &= \frac{M_b l}{3 EI} \frac{3}{k^2 l^2} (1 - kl \operatorname{ctg} kl). \end{aligned}$$

საბოლოოდ

$$\Delta_{i(kp)} = \frac{M_b}{3 EI} \frac{3}{v^2} (1 - v \operatorname{ctg} v), \quad (154)$$

სადაც

$$v = kl = l \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (155)$$

თუ აღნიშნავთ, რომ

$$\alpha(v) = \frac{3}{v^2} (1 - v \operatorname{ctg} v), \quad (156)$$

მაშინ, მობრუნების კუთხე მარჯვენა საყრდენზე

$$\Delta_{i(kp)} = \frac{M_b l}{3 EI} \alpha(v). \quad (157)$$

იგივე შედეგს მივიღებთ, თუ გვაწარმოებთ 140-ე განტოლებას.

მარცხენა საყრდენის მობრუნების კუთხის განსასაზღვრავად განვიხილოთ „kp“ (ნახ. 58 ა) და „l“ (ნახ. 58, გ) მდგომარეობები:

$$M_{i(kp)} = M_b \frac{\sin kx}{\sin kl},$$

$$M_l = 1 - \frac{1}{l} x.$$

მობრუნების კუთხე მარცხენა საყრდენზე:

$$\begin{aligned} \Delta_{i(kp)} &= \frac{M_b}{EI \sin kl} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin kx \, dx = \\ &= \frac{M_b}{EI \sin kl} \left[-\frac{\cos kl}{k} + \frac{1}{k} - \left(\frac{\sin kl}{lk^2} - \frac{\cos kl}{k} \right) \right] = \\ &= \frac{M_b}{EI \sin kl} \left(\frac{1}{k} - \frac{\sin kl}{lk^2} \right) = \frac{M_b l}{EI (kl)^2} \left(\frac{kl}{\sin kl} - 1 \right). \end{aligned}$$

საბოლოოდ

$$\Delta_{i(kp)} = \frac{M_b l}{6EI} \frac{6}{v^2} \left(\frac{v}{\sin v} - 1 \right). \quad (158)$$

თუ აღვნიშნავთ, რომ

$$\beta(v) = \frac{6}{v^2} \left(\frac{v}{\sin v} - 1 \right), \quad (159)$$

მაშინ მობრუნების კუთხე მარცხენა საყრდენზე

$$\Delta_{i(kp)} = \frac{M_b l}{6EI} \beta(v). \quad (160)$$

მიღებული 157-ე და 160-ე ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ შეკუმშულ-გალუნულ სახსროვანად დაყრდნობილ ლეროებში გადაადგილების გამოსათვლელად საკმარისია ავაგოთ მდუნავი მომენტის ეპიურები გრძივი ძალების მხედველობაში მიუღებლად, გადამრავლება შევასრულოთ ვერეშჩაგინის წესით და მიღებული შედეგები გადავმრავლოთ $\alpha(v)$ კოეფიციენტზე, თუ სამკუთხედის წვეროები ერთ მხარესაა მოქცეული და $\beta(v)$ -ზე, თუ სხვადასხვა მხარესაა მოქცეული. \downarrow

ანალოგიურ შედეგს მივიღებთ კონსოლური კოქის შემთხვევაშიც, იმ განსხვავებით, რომ აქ კოეფიციენტებს სხვა მნიშვნელობები აქვთ:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(v) &= \frac{3}{v^2} \left(\frac{\operatorname{tg} v}{v} - 1 \right), \\ \theta_2(v) &= \frac{3}{v^2} \left(1 + v \operatorname{tg} v - \frac{2}{\cos v} + \frac{\operatorname{tg} v}{v} \right), \\ \theta_3(v) &= \frac{6}{v^2} \left(\frac{1}{\cos v} - \frac{\operatorname{tg} v}{v} \right). \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

შორის ინტეგრალის მნიშვნელობები სხვადასხვა შემთხვევისათვის მოყვანილია მე-2 ცხრილში.

კოეფიციენტების გამოსათვლელად შედგენილია ცხრილი v სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის.

თუ $v=0$, ე. ი. გრძივი ძალა არ მოქმედებს, მაშინ ყველა კოეფიციენტი ერთეულის ტოლია:

$$\alpha(v) = \beta(v) = \theta_1(v) = \theta_2(v) = \theta_3(v) = 1$$

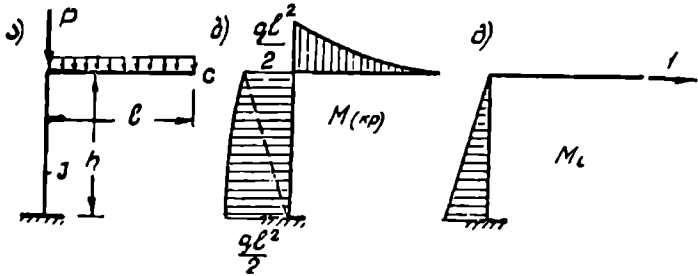
მაგალითი. განვსაზღვროთ C წერტილის ჰორიზონტალური გადაადგილება (ნახ. 59). ავაგოთ ორი მდგომარეობის ეპიურა: P და q ძალების ერთდროული მოქმედებით გამოწვეული $M_{(kp)}$ და ერთეული ძალისაგან გამოწვეულ M_1 (ნახ. 59 ბ, გ).

მე-2 ცხრილის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\Delta_{i(kp)} = \frac{1}{3EI} \frac{ql^2 hl}{2} \theta_1(v) + \frac{1}{6EI} \frac{ql^2}{2} hl \theta_3(v) =$$

$$= \frac{ql^3 h}{12EI} [2\theta_1(v) + \theta_3(v)].$$

$M_{(kp)}$ ეპიურა ნახაზზე პუნქტირით, ორი სამკუთხედით არის წარმოდგენილი



ნახ. 59.

ცხრილი 2

შორის ინტეგრალის ცხრილი, $EI \Delta_{i(kp)} = \int M_i M_{(kp)} dx$

	$\frac{h_1 h_2 l}{6} \beta(v)$	$\frac{h_2 h_3}{3} \alpha(v)$
	$\frac{h_1 h_2 l}{3} \theta_1(v)$	$\frac{h_2 h_3 l}{6} \theta_3(v)$
	$\frac{h_1 h_2 l}{6} \theta_2(v)$	$\frac{h_2 h_3 l}{3} \theta_2(v)$

§(ქძ) ძირითადი დაზოგავანი ჩარჩოვანის ანგარიშის დროს

ძალთა მეთოდის (ასევე გადაადგილებათა მეთოდის) გამოყენება ჩარჩოვანის საანგარიშოდ მდგრადობაზე საშუალებას იძლევა ამოცანა გადაეწყვიტოს საერთო კანონიკური სახით, სადაც საჭირო არ იქნება დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნა. კრიტიკულ მდგომარეობაში ჩარჩო მიიღებს უსასრულოდ მცირე დეფორმაციას, რის გამოც ხდება შიგა ძალების ცვლილებები. ვითარდება მომენტები, იცვლება გრძივი და განივი ძალები. ანგარიშის გამარტივების მიზნით განიხილებიან ისეთი დატვირთვები, რომლებიც არ იწვევენ ღეროების განივ ღუნვას, ე. ი. კვანძოვანი დატვირთვები. გარდა ამისა მიღებულია შემდეგი დაშვებები: ღეროები ითვლება უკუმშად, ე. ი. მხედველობაში არ მიიღება: გრძივი დეფორმაციები; ღეროს დეფორმირებული ღერძის სიგრძე (ქორდა) პირვანდელი სიგრძის ტოლია, ე. ი. კვანძებს შორის მანძილი უცვლელია; დეფორმაციები კრიტიკულ მომენტში არ იწვევს გრძივი ძალების ცვლილებას; ისე, როგორც ყოველთვის გადაადგილებები გამოითვლება გრძივი ძალების მხედველობაში მიუღებლად.

§ 21. ძირითადი სისტემის შარჩავა, მდგრადობის განტოლების შედგენა და ამოცანის გადაწყვეტის მსვლელობა

ჩარჩოების ანგარიში მდგრადობაზე ძალთა მეთოდით ძირითადად ისევე ხდება, როგორც საზოგადოდ სტატიკურად ურკვევი სისტემის ძალთა მეოლით ანგარიშის დროს.

ზედმეტი ბმების მოშორებით ჩვენ მივიღებთ სტატიკურად რკვევად ძირითად სისტემას. მდგრადობაზე ანგარიშის დროს განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიექცეს ძირითადი სისტემის არჩევას. ძირითადი სისტემა ისე უნდა ავირჩიოთ, რომ რაც შეიძლება მარტივად გამოითვლოს კანონიკური განტოლების კოეფიციენტები—გადაადგილებები.

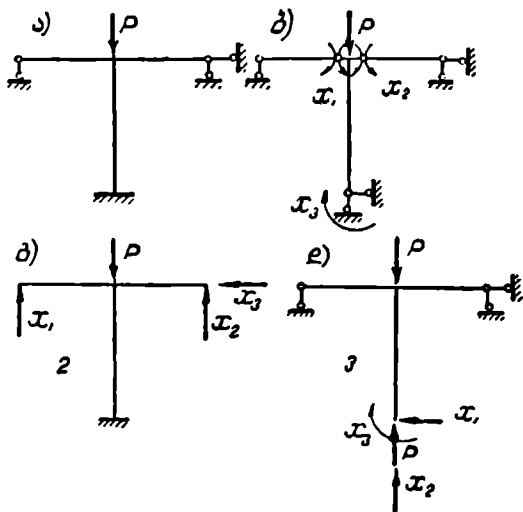
გადაადგილებების გამოთვლა მარტივდება, თუ სტატიკურად რკვევად ძირითად სისტემაში ის ღეროები, რომლებზეც გრძივი მკუმშავი ძალები მოქმედებენ, წარმოადგენენ ორი ბოლოთი სახსროვანად დაყრდნობილ ან ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებულ ძელებს. პირველ შემთხვევაში გადაადგილებები უფრო მარტივად გამოითვლება, ვიდრე მეორეში და, ამიტომ უპირატესობაც მას უნდა მიეკუთვნოს.

ძირითადი სისტემა ისე უნდა ავირჩიოთ, რომ გრძივი მკუმშავი ძალა განივ ძალად არ გადაიქცეს, რადგან ამ შემთხვევაში გადაადგილების განსაზღვრა ძალიან რთულდება.

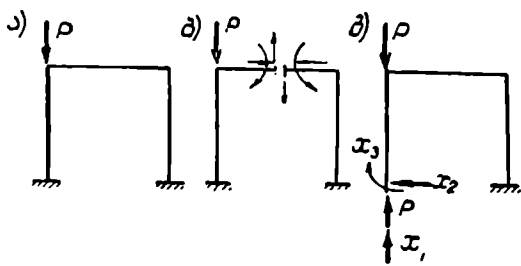
გავარჩიოთ რამდენიმე მაგალითი. მე-60 ა ნახაზზე ნაჩვენებია სამჯერ სტატიკურად ურკვევი ჩარჩო, რომლის ვერტიკალურ ღეროზე მოქმედებს მკუმშავი ძალა P . ამავე ნახაზზე ნაჩვენებია ძირითადი სისტემის ვარიანტები. პირველ ვარიანტში შეკუმშული ღერო სახსროვანად დაყრდნობილია, მეორეში კი ხისტად არის ჩამაგრებული. პირველ შემთხვევაში კანონიკური განტოლების კოეფიციენტების გამოთვლა უფრო მარტივია. მესამე ვარიანტი ძალიან რთულდება გადაადგილების გამოთვლას და საანგარიშოდ არ უნდა იყოს არჩეული.

მეორე მაგალითი ნაჩვენებია 61-ე ნახაზზე. საანგარიშოდ არჩეული უნდა იყოს პირველი ვარიანტი. რადგანაც საანგარიშო ჩარჩოზე გარე ძალები კვან-

ძებნება მოდებული, ამიტომ იბადება საკითხი უცნობების ბუნების შესახებ. ჩვენ კარგად ვიცით, რომ კვანძებში მოდებული ძალები გადაეცემათ მხოლოდ იმ ღეროებს, რომლებზეც მოქმედებენ და არაუკეთეს არაა მომენტებს არ ანეიტარებენ ჩარჩოში. საქმე იმაშია, რომ კრიტიკულ მომენტში, როდესაც მკუეშაი



ნახ. 60.



ნახ. 61.

ძალა თავის კრიტიკულ მნიშვნელობას მიაღწევს შეკუმშული ღერო მიიღებს უსასრულოდ მცირე გაღუნვას და ამის შედეგად ჩარჩოს ელემენტებში (ბმებში) მცირე შინაგანი ძალები წარმოიშობება. ზედმეტ უცნობებად სწორედ ეს ძალები გვაქვს არჩეული.

მაგალითად, 61-ე გ ნახაზზე წარმოდგენილ ძირითად სისტემაში მარცხენა საყრდენის ვერტიკალური რეაქცია მდგრადობის დაკარგვის მომენტში $P + X_1$ ტოლია. აქ X_1 ზედმეტი უცნობია.

მაშასადამე, ზედმეტ უცნობებად მიღებულია ის მცირე ძალები, რომლებიც წარმოიშევიან მდგრადობის დაკარგვის მომენტში.

ძირითადი სისტემის არჩევის შემდეგ ვწერთ ძალთა მეთოდის კანონიკურ განტოლებებს. ძირითად სისტემაზე განივი ძალები არ მოქმედებენ და ამიტომ ტვირთისგან გამოწვეული გადაადგილებები ნულის ტოლი იქნება.

კანონიკურ განტოლებათა სისტემა იქნება ერთგვაროვანი:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \dots + X_n \delta_{1n} &= 0, \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \dots + X_n \delta_{2n} &= 0, \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \dots + X_n \delta_{3n} &= 0, \\ \vdots & \\ X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + X_3 \delta_{n3} + \dots + X_n \delta_{nn} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

ამ განტოლების ტრივიალური ფესვები $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0$ იმას ნიშნავს, რომ მოქმედი მკუმშავი ძალები კრიტიკულზე ნაკლებია და, მაშასადამე მდგომარეობა არაკრიტიკულია.

მდგრადობის დაკარგვის მომენტში უცნობები ნულისაგან უნდა განსხვავდებოდეს, ამას მაშინ ექნება ადგილი როდესაც 162-ე განტოლებათა სისტემის მთავარი დეტერმინანტი ნულის ტოლი იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & \delta_{2n} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \dots & \delta_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (163)$$

ზემოაღნიშნული განტოლება მდგრადობის განტოლებაა.

ყურადღება უნდა მიექციოთ იმ გარემოებას, რომ ჩარჩოზე მოქმედებს არა ერთი, არამედ რამდენიმე ძალა. თითოეული შეკუმშული ღეროს კრიტიკული ძალა დამოკიდებულია არა მარტო ჩარჩოს კონსტრუქციაზე და ღეროების სიხისტეზე, არამედ თვითმკუმშავი ძალების ფარდობაზეც კრიტიკულ მომენტში.

სისტემის კრიტიკული მდგომარეობა ხასიათდება კრიტიკული პარამეტრით $\beta_{კ}$. რადგან ვგულისხმობთ, რომ მდგრადობის დაკარგვა ხდება ყველა მკუმშავი ძალის ერთდროული ზრდით, ამიტომ კრიტიკულ მდგომარეობას იმ შემთხვევაში ექნება ადგილი, თუ მოქმედ P_1, P_2, P_3, \dots ძალებს ერთ და იგივე კოეფიციენტებზე $\beta_{კ}$ გადივამრავლებთ. მაშასადამე, ჩარჩო იქნება კრიტიკულ მდგომარეობაში, როდესაც მასზე მოქმედებს ძალები:

$$P_1 \beta_{კ}, P_2 \beta_{კ}, P_3 \beta_{კ} \text{ და ა. შ.}$$

ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ კრიტიკული პარამეტრი $\beta_{კ}$, რომლის გადამრავლება სათანადო მკუმშავ ძალებზე მოგვცემს კრიტიკულ ძალებს. თუ მოცემულია მკუმშავი ძალების სიდიდეები ან მათი ფარდობები $P_1 : P_2 : P_3 = m_1 : m_2 : m_3$, მაშინ ამავე ფარდობას ექნება ადგილი კრიტიკულ მომენტში და ჩვენ შეგვიძლია უშუალოდ განვსაზღვროთ კრიტიკული ძალები შეკუმშულ ღეროებისათვის.

თითოეულ შეკუმშულ ღეროს ექნება თავისი არგუმენტი v_i :

$$v_1 = \sqrt{\frac{P_1}{EI_1}} l_1, \quad v_2 = \sqrt{\frac{P_2}{EI_2}} l_2, \quad v_3 = \sqrt{\frac{P_3}{EI_3}} l_3, \dots$$

მაგრამ, რადგანაც ცნობილია, მოცემული ძალების ფარდობანი, ამიტომ ეს არგუმენტები შეიძლება გამოვსახოთ ერთი რომელიმე არგუმენტით, ვთქვათ v -ით.

ამ შემთხვევაში კანონიკური განტოლების კოეფიციენტები ერთი არგუმენტის ფუნქცია იქნება

$$b_{ik} = f(v)$$

და მდგრადობის 163-ე განტოლებაშიც ერთი უცნობი v შევა.

163-ე განტოლების უმცირესი ფესვი მოგვცემს v იმ მნიშვნელობას, რომლითაც განისაზღვრება კრიტიკული ძალა სათანადო ღეროში. v საშუალებით განვსაზღვრავთ დანარჩენ არგუმენტებს v_1, v_2, \dots და სათანადო კრიტიკულ ძალებს ღეროებში:

$$P_{კრ.} = \frac{v^2 EI}{l^2}, \quad P_{1კრ.} = \frac{v_1^2 EI_1}{l_1^2}, \quad P_{2კრ.} = \frac{v_2^2 EI_2}{l_2^2}.$$

ვიციტ რა კრიტიკული ძალები ან არგუმენტები განვსაზღვრავთ შეკუმშული ღეროების თავისუფალ სიგრძეებს შემდეგი ტოლობიდან:

$$P_{კრ.} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} = \frac{v^2 EI}{l^2},$$

საიდანაც

$$l_0 = \frac{\pi}{v} l = \mu l. \quad (164)$$

l_0 მიხედვით ვიპოვიტ მოქნილობას λ და დასაშვები ძაბვების შემამკირებელ კოეფიციენტს φ . ამით ჩარჩოს ანგარიში მდგრადობაზე დამთავრებული იქნება.

LL

§ 22. ჩარჩოს ანგარიშის მაგალითები მდგრადობაზე ძალთა მეთოდით

ძალთა მეთოდის გამოყენება ჩარჩოების საანგარიშოდ მდგრადობაზე გავარჩიოთ კონკრეტულ მარტივ მაგალითებზე.

— 1 მაგალითი. შევადგინოთ მდგრადობის განტოლება და განვსაზღვროთ კრიტიკული ძალა (ნახ. 62 ა).

გადაწყვეტა. ძირითადი სისტემა და ერთეული ძალებისაგან გამოწვეული ეპიურები მოცემულია 62-ე ბ, გ, დ ნახაზზე.

კანონიკური განტოლება იქნება:

$$X_1 b_{11} + X_2 b_{12} = 0,$$

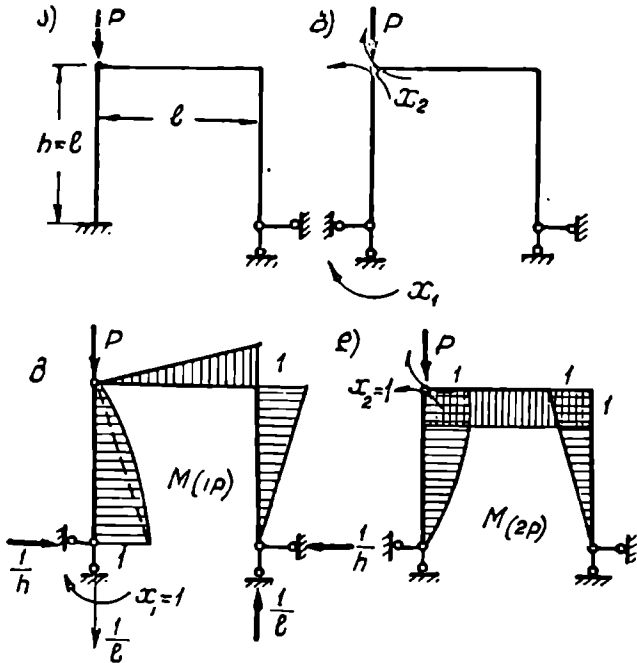
$$X_2 b_{21} + X_1 b_{22} = 0.$$

მდგრადობის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} = \delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2 = 0.$$

კანონიერი განტოლების კოეფიციენტების გამოთვლისას, შეცდომა რომ არ დაუშვათ, სიფრთხილე გეპარათებს. მორის განზოგადებული ფორმულის საფუძველზე გვექნება:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_{(1p)} dx}{EI}, \quad \delta_{22} = \int \frac{M_2 M_{(2p)} dx}{EI}, \quad \delta_{12} = \int \frac{M_1 M_{(2p)} dx}{EI}.$$



ნახ. 62.

δ_{11} საპოვნელად ორი ეპიურის კომბინაცია ისე უნდა მოვახდინოთ როგორც $X_1=1$ -საგან გამოწვეული M_1 ეპიურისა და $X_1=1$ და P ძალის ერთდროული მოქმედებით გამოწვეული $M_{(1p)}$ ეპიურის კომბინაცია. ასევე δ_{22} გამოსათვლელად $X_2=1$ -საგან გამოწვეული ეპიურა M_2 უნდა გადავამრავლოთ $X_2=1$ და P ძალისაგან გამოწვეულ $M_{(2p)}$ ეპიურაზე.

δ_{12} საპოვნელად M_1 ეპიურას ვამრავლებთ $M_{(2p)}$ ეპიურაზე. თუ ვანგარიშობთ δ_{21} :

$$\delta_{21} = \int \frac{M_2 M_{(1P)} dx}{EI}$$

მაშინ პირიქით $X_1=1$ და P ძალისაგან გამოწვეულ ეპიურას $M_{(1P)}$ ვამრავლებთ M_2 -ზე.

როგორც ვხედავთ, თითოეული კოეფიციენტის საპოვნელად საჭიროა ორი ეპიურის აგება, მაგრამ რადგან მკუშშივე ძალის გავლენა გადაადგილებაზე $\alpha(v)$ და $\beta(v)$ კოეფიციენტებით გამოისახება (იხ. 156 და 159 ფორმულები), ამიტომ ავაგებთ მხოლოდ $M_{(1P)}$ და $M_{(2P)}$ ეპიურებს. M_1 და M_2 ეპიურებს ექნებათ ისეთივე სახე, როგორც $M_{(1P)}$ და $M_{(2P)}$, მხოლოდ ეპიურის მრუდხაზოვანი უბანი შეიცვლება სწორხაზოვანით:

$$EI \delta_{11} = \frac{h}{3} + \frac{l}{3} + \frac{h}{3} \alpha(v) = \frac{l}{3} [2 + \alpha(v)],$$

$$EI \delta_{22} = \frac{h}{3} + l + \frac{h}{3} \alpha(v) = \frac{l}{3} [4 + \alpha(v)],$$

$$EI \delta_{12} = -\frac{h}{3} - \frac{l}{2} + \frac{h}{6} \beta(v) = \frac{l}{6} [\beta(v) - 5].$$

კოეფიციენტების მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ მდგრადობის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$4[2 + \alpha(v)][4 + \alpha(v)] - [\beta(v) - 5]^2 = 0,$$

საიდანაც

$$\beta(v) = 2\sqrt{[2 + \alpha(v)][4 + \alpha(v)]} + 5.$$

I ცხრილის (იხ. დანართი) საშუალებით, შერჩევის გზით ვიპოვოთ:

$$v = \pi, \quad P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

დაყვანილი სიგრძის კოეფიციენტი $\mu = 1$.

2 მაგალითი. ორი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებულ ჩარჩოს ორივე დგარზე მოქმედებს მკუშშივე ძალა P (იხ. 63 ა).

ვიპოვოთ კრიტიკული მდგომარეობა.

გადაწყვეტა. ძირითადი სისტემა და ერთეული ძალისაგან გამოწვეული ეპიურები ნაჩვენებია ნახაზზე. ეინაიდან X_2 და X_3 უცნობები სიმეტრიულია X_1 კი ირიბადსიმეტრიული, ამიტომ კანონიკურ განტოლებათა სისტემა გაიყოფა ორ ნაწილად:

$$X_1 \delta_{11} = 0,$$

$$X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} = 0,$$

$$X_2 \delta_{23} + X_3 \delta_{33} = 0.$$

ამ შემთხვევაში ჩვენ უნდა გამოვიყვლიოთ ორივე განტოლების დეტერმინანტი და ორივე შემთხვევისათვის ვიპოვოთ კრიტიკული არგუმენტი v . პირველი ტოლობიდან მდგრადობის განტოლება იქნება:

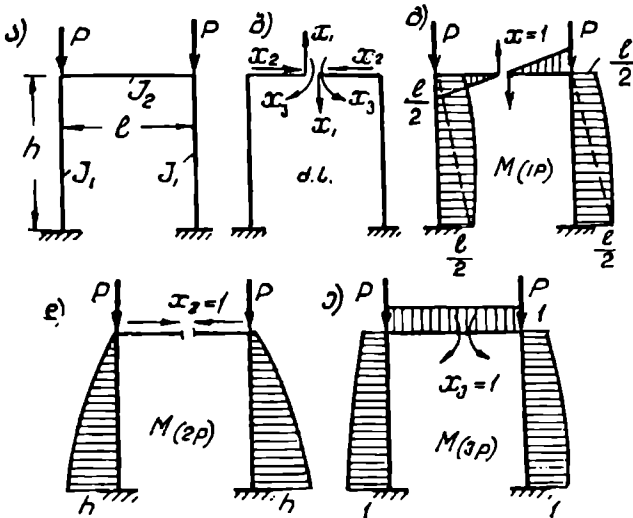
$$\delta_{11} = 0,$$

(ა)

მეორედან

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \delta_{22} \delta_{33} - \delta_{23}^2 = 0. \quad (\text{ბ})$$

ა) განტოლება შეესაბამება მდგრადობის დაკარგვას ირიბადსიმეტრიული გალუნვით, (ბ) განტოლება კი — სიმეტრიული გალუნვით. ორი მდგომარეობიდან საანგარიშო ის იქნება, რომელიც მოგვეცემს მინიმალურ კრიტიკულ ძალას:



ნახ. 63.

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{l^3}{12EI_2} + \frac{2hl^2}{12EI_1} \left[\theta_2(v) + \frac{1}{2} \theta_3(v) + \theta_1(v) + \frac{1}{2} \theta_3(v) \right] = \\ &= \frac{l^3}{12EI_2} + \frac{hl^2}{6EI_1} [\theta_1(v) + \theta_2(v) + \theta_3(v)]. \end{aligned}$$

თუ ზემოაღნიშნულ ტოლობაში 161-ე ფორმულებიდან შევიტანთ კოეფიციენტების მნიშვნელობებს, მივიღებთ:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{12EI_2} + \frac{hl^2}{EI_1} \cdot \frac{\operatorname{tg} v}{2v}.$$

მდგომარეობის განტოლება იქნება:

$$\frac{l^3}{12EI_2} + \frac{hl^2}{EI_1} \frac{\operatorname{tg} v}{2v} = 0,$$

$$\frac{1}{6} - \frac{l}{h} \frac{I_1}{I_2} + \frac{\operatorname{tg} v}{v} = 0.$$

თუ აღვნიშნავთ, რომ

$$n = \frac{l}{h} \frac{I_1}{I_2},$$

მდგრადობის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$n v + 6 \operatorname{tg} v = 0. \quad (2)$$

თუ რიგელი უსასრულოდ ხისტია ($I_2 = \infty$), მაშინ $n = 0$ და $\operatorname{tg} v = 0$, საიდანაც $v = \pi$. თუ $I_2 = 0$ (რიგელი სახსროვნად არის შეერთებული), მაშინ $n = \infty$ და მივიღებთ $\operatorname{tg} v = \infty$, საიდანაც $v = \frac{\pi}{2}$.

მაშასადამე, ირიბადსიმეტრიული დეფორმაციის შე მთხვევაში არგუმენტა $\frac{\pi}{2} < v < \pi$. ზღვრებში იცვლება.

თუ $l = h$, $I_1 = I_2$, მაშინ $n = 1$ და მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$v + 6 \operatorname{tg} v = 0.$$

v ვიპოვით თანდათანობითი შერჩევით I ცხრილიდან (იხ. დანართი):

$$v = 2,71.$$

დაყვანილი სიგრძის კოეფიციენტი

$$\mu = \frac{3,14}{2,71} = 1,16.$$

გავარჩიოთ მეორე შემთხვევა—მდგრადობის დაკარგვა სიმეტრიული გაღუნვით:

$$\delta_{22} = 2 \frac{lh^2}{3EI_1} \theta_1(v),$$

$$\delta_{33} = \frac{l}{EI_2} + \frac{2h}{3EI_1} [2\theta_1(v) + 2\theta_2(v) + \theta_3(v)],$$

$$\delta_{23} = \frac{h^2}{3EI_1} [2\theta_1(v) + \theta_3(v)].$$

თუ მივიღებთ, რომ $l = h$, $I_1 = I_2$, მაშინ შეკვეცის შემდეგ (ბ) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{2}{3} \theta_1(v) \left\{ 1 + \frac{2}{3} [2\theta_1(v) + 2\theta_2(v) + \theta_3(v)] \right\} - \frac{1}{9} [2\theta_1(v) + \theta_3(v)]^2 = 0.$$

საბოლოოდ

$$\theta_3(v)^2 = \theta_1(v) [6 + 4\theta_1(v) + 8\theta_2(v)].$$

შერჩევის გზით ვიპოვით:

კრიტიკულ ძალას იძლევა ირიბად სიმეტრიული გაღუნვა.

რთულ შემთხვევებში, როდესაც შესაძლებელია უცნობთა დაჭგუფება, ანალოგიურად ვიქცევით, ე. ი. ვადგენთ მდგრადობის ორ განტოლებას სიმეტრიული და ირიბად სიმეტრიული უცნობებისათვის და ეპოულობთ კრიტიკულ არგუმენტებს v ორივე შემთხვევისათვის. მინიმალური იქნება საანგარიშო.

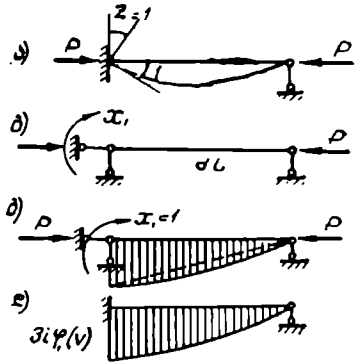
ძალთა მეთოდით ჩარჩოების ანგარიში მდგრადობაზე უმეტეს შემთხვევაში რთულია და მოითხოვს დიდ გამოთვლებს, რაც მნიშვნელოვნად ამცირებს მის პრაქტიკულ გამოყენებას. რთული ამოცანები შედარებით მარტივად წყდება გადაადგილებათა მეთოდით, რომელსაც ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ.

ჩარჩოების ანგარიში მდგრადობაზე გადაადგილებათა მეთოდით

§ 23. რაჟიანის გამოთვლა შავაშულ-გალუნულ ლარიაში

გადაადგილებათა მეთოდით მდგრადობის ამოცანის გადაწყვეტის დროს ჩვენ დაგვიჩნდება ვიცილეთ ერთეული გადაადგილებით გამოწვეული რეაქციები. ამ რეაქციებზე გავლენას ახდენს მკუშში გრძივი ძალის მოქმედება. გრძივი ძალების მოქმედება გამოისახება კოეფიციენტებით, რომლებიც უნდა გადავრავლდეს გრძივი ძალების მოქმედების გარეშე მიღებულ რეაქციებზე.

გამოვიყვანოთ ეს ფორმულები ზოგიერთი შემთხვევისათვის. წარმოვიდგინოთ ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული და მეორეთი სახსროვნად დაყრდნობილი კოჭი (ნახ. 64). ვიპოვოთ ჩამაგრების ერთეული კუთხით მობრუნებით ($z=1$) გამოწვეული მომენტი ჩამაგრების ადგილზე. ანგარიში შევასრულოთ ძალთა მეთოდით. ძირითადი სისტემა ნაჩვენებია 64-ე ნახაზზე.



ნახ. 64.

საყრდენის ერთეული კუთხით მობრუნებით გამოწვეული გადაადგილება X_1 მიმართულებით

$$\Delta_1 = -1.$$

δ_{11} გამოსათვლელად გამოვიყენოთ 157-ე ფორმულა ან მე-2 ცხრილი:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^l \alpha(v) dv.$$

თუ შევიტანთ კანონიკურ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$X_1 = \frac{3EI}{l} \frac{1}{\alpha(v)}.$$

აღნიშნოთ, რომ

$$\varphi_1(v) = \frac{1}{\alpha(v)} = \frac{v^2}{3(1 - v \operatorname{ctg} v)}$$

საბოლოოდ მომენტი ჩამაგრების ადგილზე

$$X_1 = \frac{3EI}{l} \varphi_1(v). \quad (165)$$

მღუნავი მომენტის ეპიურა ნაჩვენებია 64-ე დანახაზე.

როგორც ვიცი*, გრძივი ძალის გაულების გარეშე საყრდენი მომენტი $\frac{3EI}{l}$ ტოლია. ასევე შეგვიძლია ვიანგარიშოთ რეაქციები სხვა შემთხვევები-

სათვისაც, თუ მხოლოდ განივი ძალების მოქმედების შედეგად მიღებულ ფორმულებს გადავამრავლებთ სათანადო კოეფიციენტებზე. რეაქტიული ძალების (მომენტები, რეაქციები) სიდიდეები მოყვანილია მე-3 ცხრილში.

კოეფიციენტებს შემდეგი მნიშვნელობები აქვთ:

$$v = kl = \sqrt{\frac{P}{EI}} l,$$

$$\varphi_1(v) = \frac{v^2}{3(1 - v \operatorname{ctg} v)},$$

$$\varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)},$$

$$\varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)},$$

$$\varphi_4(v) = \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right),$$

$$\gamma_{11}(v) = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)}, \quad \gamma_{12}(v) = \gamma_{11}\left(\frac{v}{2}\right),$$

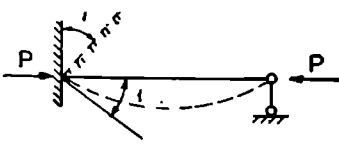

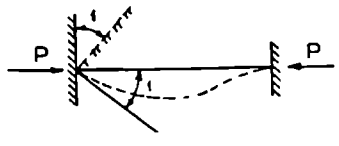
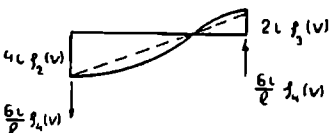
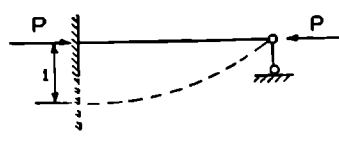

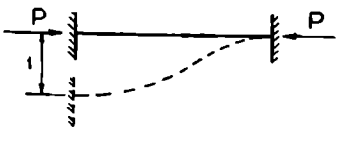
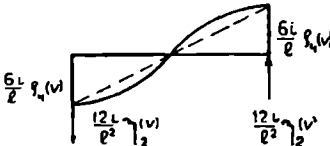
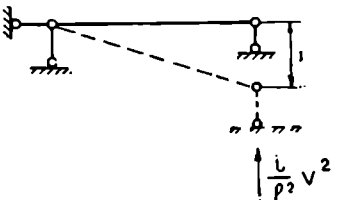
ამ კოეფიციენტების სიდიდეები v სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის მოყვანილია II ცხრილში (იხ. დანართი).

ს.ს

— § 24. ძირითადი სისტემის უარჩევან და მდგრადობის განმარტების უაღრესად

გადაადგილებათა მეთოდის გამოყენება ჩარჩოების მდგრადობის შესასწავლად მნიშვნელოვნად ამარტივებს ამოცანის გადაწყვეტას და მრავალი ამოცანის ამოხსნის საშუალებას იძლევა. ჩარჩოს ანგარიშს მდგრადობაზე გადაადგილებათა მეთოდით ძირითადი სისტემის შერჩევით ვიწყებთ. ძირითადი სისტემის

* ა. ასტეატუროვი, საშენებლო მექანიკა, ნაწ. II, ცხრილი 20.

გადაადგილების შემთხვევა	ეპიურა და რეაქციების სიდიდეები
	
	
	
	
	<p style="text-align: center;">$i = \frac{El}{l}$</p>

შერჩევა ისევე ხდება, როგორც ჩარჩოს ჩვეულებრივი ანგარიშის დროს. უცნობებად ვიღებთ ჩარჩოს კვანძების მობრუნების კუთხეებს და ხაზობრივ გადაადგილებებს, რომლებიც ვითარდებიან კრიტიკულ მდგომარეობაში. დამატებითი ბმების (ჩამაგრებების) შემოტანით, რომლებიც კვანძებს მოუსპობს მობრუნების და ხაზობრივი გადაადგილებების საშუალებას, მივიღებთ ძირითად სისტემას. უცნობთა რიცხვი და მათსადაშე, შემოსატანი ბმების რაოდენობა განისაზღვრება ისევე, როგორც ჩვეულებრივი სტატიკურად ურყევეი ჩარჩოს ანგარიშის დროს და მასზე აქ არ შევჩერდებით. უცნობთა სიდიდეები განისაზღვრება კანონიკური განტოლებებით, რომლებიც გამოხატავენ შემოტანილი ჩამაგრებების უარყოფას.

რადგანაც ჩარჩოზე მოქმედებს კვანძური ძალები, ამიტომ ტვირთისაგან გამოწვეული რეაქციები შემოტანილ ბმებში ნულის ტოლია და კანონიკური განტოლებები ერთგვაროვანი იქნება:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + \dots + Z_n r_{1n} &= 0, \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + \dots + Z_n r_{2n} &= 0, \\ Z_1 r_{n1} + Z_2 r_{n2} + Z_3 r_{n3} + \dots + Z_n r_{nn} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

არატრიალურ ფესვებს მივიღებთ, თუ 166-ე განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლი იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (167)$$

ეს არის მდგრადობის განტოლება. კოეფიციენტები, როგორც ძალთა მეთოდის შემთხვევაში, აკმაყოფილებენ ურთიერთობის პრინციპს:

$$r_{ik} = r_{ki}.$$

დეტერმინანტის მინიმალური ფესვი მოგვცემს საძიებელ გადაწყვეტას. L

§ 26. ჩარჩოს ანაბრივის მახალითაზი მდგრადობაზე გადაადგილებათა მეთოდით

1 მაგალითი. 65-ე ნახაზზე მოყვანილია ჩარჩოს ორი სქემა. შევადაროთ მათი კრიტიკული ძალები ერთმანეთს.

გადაწყვეტა. ძირითადი სისტემები და ერთეული მობრუნების კუთხეებისაგან გამოწვეული მომენტების ეპიურა ორივე შემთხვევაში ნაჩვენებია ნახაზზე.

ორივე შემთხვევაში გვექნება ერთი უცნობი Z_1 და კანონიკური განტოლება შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$Z_1 r_{11} = 0.$$

მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$r_{11} = 0.$$

მარცხენა ჩარჩოსათვის

$$r_{11} = 6i + 4i\varphi_2(v)$$

და

$$6i + 4i\varphi_2(v) = 0,$$

საიდანაც

$$\varphi_2(v) = -1.5.$$

მე-II ცხრილიდან მივიღებთ:

$$v = 5.53.$$

კრიტიკული ძალა

$$P_{კრ} = \frac{v^2 EI}{l^2} = \frac{5.53^2 EI}{l^2} = \frac{30.56 EI}{l^2}$$

მარჯვენა ჩარჩოსათვის მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$r_{11} = 8i + 4i\varphi_2(v) = 0,$$

საიდანაც

$$\varphi_2(v) = -2.$$

მე-II ცხრილიდან ვიპოვიტ არგუმენტის მნიშვნელობას:

$$v = 5.67.$$

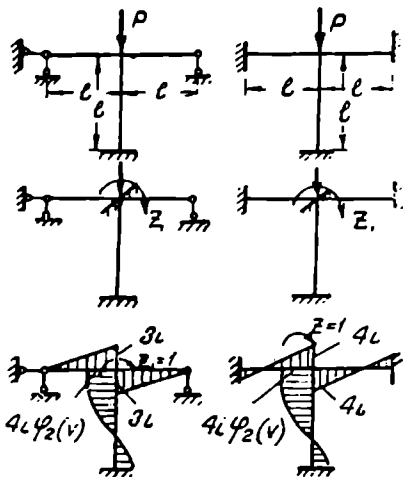
კრიტიკული ძალა

$$P_{კრ} = \frac{v^2 EI}{l^2} = \frac{5.67^2 EI}{l^2} =$$

$$= 32.15 \frac{EI}{l^2}$$

კრიტიკული ძალების ფარდობა ტოლია:

$$\frac{32.15}{30.56} = 1.05.$$



ნახ. 65.

ნაპირა საყრდენების ჩამაგრებების შეცვლამ კრიტიკული ძალა 5% შეცვალა.

შემაჯალითი. შევედგინოთ მდგრადობის განტოლება და განვსაზღვროთ კრიტიკული ძალა ორმალიანი ჩარჩოსათვის (ნახ. 66). გამოვთვალოთ დგარის დაყვანილი სიგრძე.

ამოხსნა. ძირითადი სისტემა და ერთეული გადაადგილებებისაგან გამოწვეული ეპიურები ნაჩვენებია 66-ე გ. დ ნახაზებზე:

$$v = l \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad i = \frac{EI}{l}.$$

კანონიერი განტოლების კოეფიციენტები:

$$r_{11} = 7i + 4i\varphi_2(v),$$

$$r_{22} = 8i,$$

$$r_{12} = 2i.$$

კანონიკური განტოლება დაიწერება ასე:

$$Z_1[7i+4i\varphi_2(v)]+Z_22i=0,$$

$$Z_12i+Z_28i=0.$$

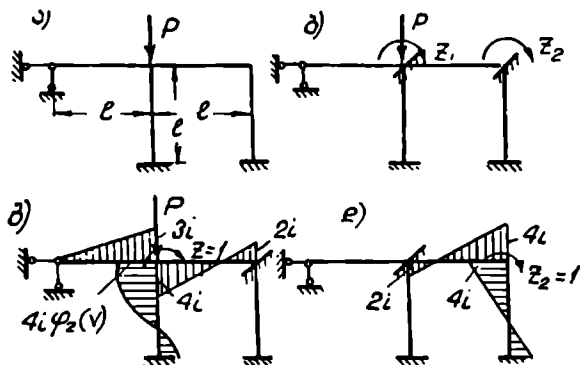
მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7+4\varphi_2(v) & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

საიდანაც

$$[7+4\varphi_2(v)]8 - 4 = 0,$$

$$\varphi_2(v) = -\frac{13}{8} = -1,65.$$



ნახ. 66.

II ცხრილიდან ვიპოვით:

$$v = 5,58$$

და

$$P_{\text{კრ}} = \frac{5,58^2 EI}{l^2} = \frac{31,14 EI}{l^2}$$

დგარის დაყვანილი სიგრძის კოეფიციენტი

$$\mu = \frac{3,14}{5,58} = 0,56.$$

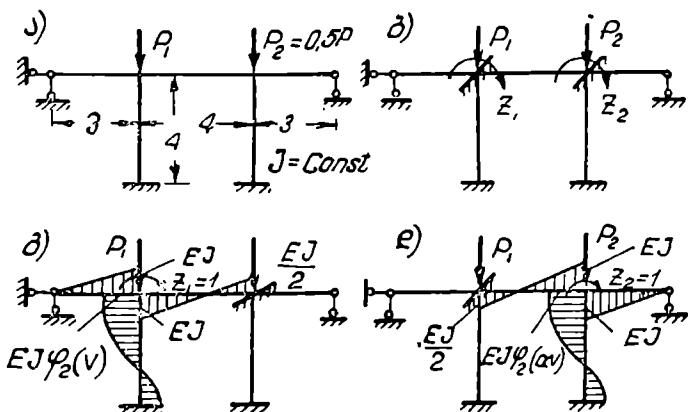
3 მაგალითი. ჩარჩოს დგარები იყუმშება P_1 და $P_2=0,5P_1$ ძალით (ნახ. 67). ვიპოვოთ კრიტიკული ძალა და დაყვანილი სიგრძის კოეფიციენტები.

გადაწყვეტა. ძირითადი სისტემა და ერთეული გადაადგილებებისაგან გამოწვეული ეპიურები ნაჩვენებია 67-ე ბ, გ, დ ნახაზებზე.

ამ შემთხვევაში ღვარების არგუმენტები იქნება სხვადასხვა:

$$v_1 = l \sqrt{\frac{P_1}{EI}} = v,$$

$$v_2 = l \sqrt{\frac{P_2}{EI}} = l \sqrt{\frac{0,5P}{EI}} = \sqrt{0,5} v = \alpha v.$$



ნახ. 67.

ერთეული ეპიურებებიდან ვიპოვოთ:

$$r_{11} = 2EI + EI\varphi_2(v),$$

$$r_{22} = 2EI + EI\varphi_2(\alpha v),$$

$$r_{12} = 0,5EI.$$

თუ კოეფიციენტებს წინასწარ EI -ზე, შევკვეცავთ, მაშინ მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 + \varphi_2(v) & 0,5 \\ 0,5 & 2 + \varphi_2(\alpha v) \end{vmatrix} = 0.$$

დეტერმინანტის გახსნის შემდეგ მივიღებთ:

$$\varphi_2(v)\varphi_2(\alpha v) + 2\varphi_2(\alpha v) + 2\varphi_2(v) + 3,75 = 0. \quad (\alpha)$$

ამ განტოლების გადაწყვეტა მიმდევრობითი მიახლოების გზით ხდება. ეს საზღვრების მოძებნისათვის მოვიქცეთ ასე:

$$\begin{aligned} \text{ჩერ მივიღოთ } v_1 &= v_2 = v, \\ \text{შემდეგ } v_1 &= v_2 = \alpha v. \end{aligned}$$

საძიებელი არგუმენტის მნიშვნელობა მოთავსებული იქნება მათ შორის.

მაშასადამე, გვექნება ორი განტოლება:

$$\varphi_2^2(v) + 4\varphi_2(v) + 3,75 = 0, \quad (ბ)$$

$$\varphi_2^2(\alpha v) + 4\varphi_2(\alpha v) + 3,75 = 0. \quad (გ)$$

(ბ) განტოლების ფესვები იქნება:

$$\varphi_2'(v) = -1,5, \quad \varphi_2''(v) = -2,5.$$

პირველი იძლევა არგუმენტის მინიმალურ მნიშვნელობას:

$$v' = 5,53.$$

(გ) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\varphi_2(\alpha v) = -1,5 \text{ და სათანადოთ}$$

$$\alpha v'' = 5,53,$$

აქედან

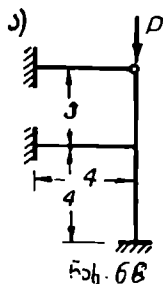
$$v'' = \frac{5,53}{\sqrt{0,5}} = \frac{5,53}{0,707} = 7,85.$$

საძიებელი v მოთავსებულია $5,53 < v < 7,85$ ზღვრებში.
თანდათანობითი შერჩევით ვიპოვოთ

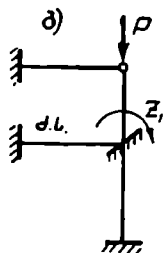
$$v = 5,60 \text{ და } P_{კრ} = 31,36 \frac{EI}{l^2}$$

კრიტიკული ძალა მეორე ლეროსათვის იქნება:

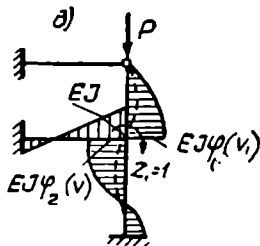
$$P_{კრ} = \frac{(\alpha v)^2 EI}{l^2} = 15,68 \frac{EI}{l^2}.$$



ნახ. 68



ნახ. 68.



დაყვანილი სიგრძის კოეფიციენტები

$$\mu_1 = \frac{3,14}{5,60} = 0,56, \quad \mu_2 = \frac{3,14}{3,96} = 0,79.$$

1 მაგალითი. განესაზღვროთ კრიტიკული ძალა და დაყვანილი სიგრძის კოეფიციენტები 68-ე ნახაზზე წარმოდგენილი ჩარჩოსათვის.

გადაწყვეტა. ზედა და ქვედა ღვარს ექნებათ სხვადასხვა არგუმენტები. ქვედა ღვარისათვის

$$v_1 = 4 \sqrt{\frac{P}{EI}} = v,$$

ზედა ღვარისათვის

$$v_2 = 3 \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{3}{4} v = \alpha v.$$

ძირითადი სისტემა და ერთეული გადაადგილებისაგან გამომწვეული ეპიურები ნაჩვენებია ნახაზზე.

$$r_{11} = [\varphi_1(\alpha v) + \varphi_2(v) + 1] EI.$$

მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\varphi_1(\alpha v) + \varphi_2(v) + 1 = 0.$$

II ცხრილიდან შერჩევით ვიპოვით:

$$v_1 = v = 4,82,$$

$$v_2 = 0,75 \cdot 4,82 = 3,62.$$

კრიტიკული ძალა და დაყვანილი სიგრძის კოეფიციენტი ქვედა ღვარში

$$P_{კრ} = \frac{4,82^2}{4^2} EI = 1,205 EI \quad \mu = \frac{\pi}{v_1} = 0,65,$$

ზედა ღვარში

$$P_{კრ} = \frac{3,62^2}{3^2} EI = 1,205 EI \quad \mu = \frac{\pi}{v_2} = 0,87.$$

ზედა და ქვედა ღვარისათვის კრიტიკული ძალები და დაყვანილი სიგრძეები ერთნაირია.

5 მაგალითი. განვიხილოთ ერთმალაინი ორივე ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული ჩარჩო. (ნახ. 69).

ამოხსნა. უნდა გამოვიყენოთ ჩარჩოს სიმეტრია. სიმეტრიის გამოყენების უფლება გვაქვს მხოლოდ მაშინ, თუ დატვირთვაც სიმეტრიულია. ამ შემთხვევაში მდგრადობის დაკარგვა შეიძლება მოხდეს, როგორც სიმეტრიული, ისე ირიბადსიმეტრიული გაღუნვით. გაღუნვის ორივე ფორმა უნდა იყოს შესწავლილი.

გამოვიყენოთ დაჭრუფების მეთოდი და დაეჯგუფოთ კვანძის მობრუნების კუთხეები სიმეტრიულ და ირიბად სიმეტრიულ მობრუნების კუთხეებად. ჰორიზონტალური გადაადგილება Z_2 მოგვცემს ირიბად სიმეტრიულ ეპიურას. მაშასადამე, გვექნება ერთი სიმეტრიული უცნობი Z_1 და ორი ირიბად სიმეტრიული Z_2 და Z_3 . ძირითადი სისტემა და ერთეული გადაადგილებისაგან გამომწვეული ეპიურები ნაჩვენებია 69-ე ნახაზზე.

კანონიკური განტოლება. გაიყოფა ორ ნაწილად:

$$Z_1 r_{11} = 0,$$

$$Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} = 0,$$

$$Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} = 0.$$

პირველი განტოლება შეესაბამება სიმეტრიულ დეფორმაციას, მეორე-- ირიბადსიმეტრიულს.

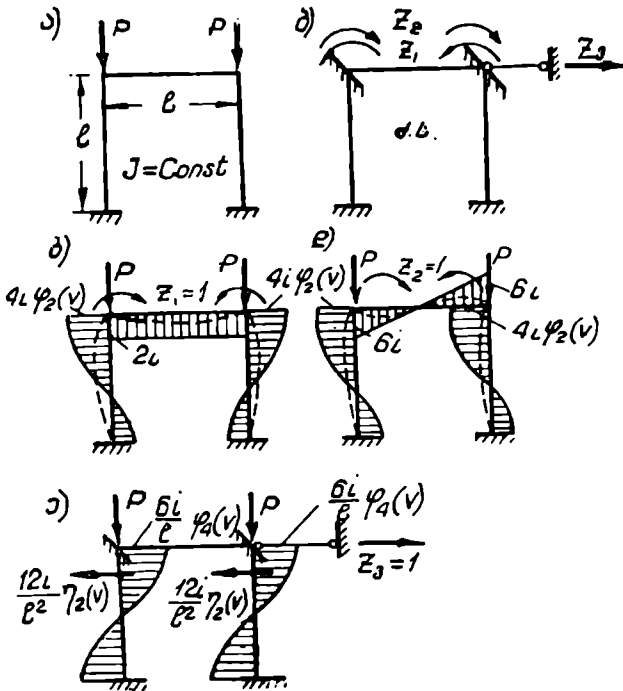
მდგრადობის განტოლებები იქნება:

პირველ შემთხვევაში

$$r_{11} = 0, \quad (ა)$$

მეორე შემთხვევაში

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_{22} & r_{23} \\ r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (ბ)$$



ნახ. 69.

69-ე გ ნახაზიდან უშუალოდ ვიპოვოთ:

$$r_{11} = 2 [4i\varphi_2(v) + 2i].$$

თუ შევიტანთ (ა) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$2[4i \varphi_2(v) + 2i] = 0,$$

საიდანაც

$$\varphi_2(v) = -0,5.$$

II ცხრილიდან მივიღებთ:

$$v = 5,02.$$

ეპიურებიდან მივიღებთ (ნახ. 69, დ, ე):

$$r_{22} = 2[4i \varphi_2(v) + 6i],$$

$$r_{33} = \frac{24}{l^2} i \eta_2(v),$$

$$r_{23} = \frac{12i}{l} \varphi_4(v).$$

თუ ამ მნიშვნელობებს (ბ) განტოლებაში შევიტანთ და $\frac{i^2}{l^2}$ -ზე შევკვეცავეთ, მივიღებთ:

$$48\eta_2(v) [4\varphi_2(v) + 6] - 144\varphi_4^2(v) = 0,$$

საიდანაც

$$\varphi_4^2(v) = \frac{1}{3} [4\varphi_2(v) + 6] \eta_2(v).$$

შერჩევის გზით ვიპოვიით:

$$v = 2,71.$$

ეს ამოცანა ჩვენ გადაწყვეტიტთ ძალთა მეთოდით და როგორც ვხედავთ შედეგები ემთხვევა ერთმანეთს. მინიმალურ კრიტიკულ ძალას იძლევა მდგრადობის დაკარგვის ირიბად სიმეტრიული ფორმა.

6 მაგალითი. ორსართულიანი ჩარჩოს ზედა რიგელზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი ინტენსიურობით q .

ვიპოვოთ კრიტიკული დატვირთვა (ql)_{კრ}.

დაწოლა დგარზე $P = \frac{5}{4} ql$ (როგორც უკვე კოჭის შუა საყრდენისათვის

(ნახ. 70).

გადაწყვეტა. ძირითადი სისტემა და ერთეული გადაადგილებებისაგან გამომწვეული ეპიურები ნაჩვენებია ნახაზზე. კენძების წონასწორობის პირობიდან ვიპოვიით:

$$r_{11} = 2EI + EI \varphi_2(v),$$

$$r_{22} = 2EI + 2EI \varphi_2(v),$$

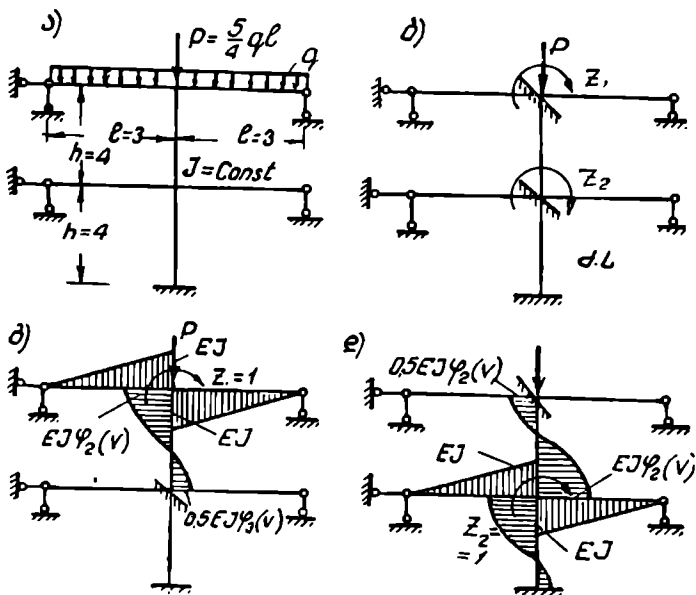
$$r_{12} = r_{21} = 0,5EI \varphi_3(v).$$

მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11} r_{22} - r_{12}^2 = 0. \quad (ა)$$

თუ მივიღებთ, რომ $EI=1$ და კოეფიციენტების მნიშვნელობებს შევიტანთ (ა) განტოლებაში, მაშინ

$$\Delta = [2 + \varphi_2(v)] [1 + \varphi_2(v)]^2 - 0,25\varphi_3^2(v) = 0.$$



ნახ. 70.

ს მივცეთ, სხვადასხვა მნიშვნელობა და გამოთვალოთ დეტერმინანტის სიდიდე. v მნიშვნელობა, რომელიც დეტერმინანტს აქცევს ნულად იქნება საძიებელი კრიტიკული არგუმენტი. ანგარიში შესრულებულია ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში.

	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	Δ
4,8	-0,2572	2,1056	5,9
4,9	-0,3612	2,2377	3,34
5,0	-0,4472	2,3924	0,56
5,03	-0,5151	2,4443	0
5,1	-0,6099	2,5757	-2,32

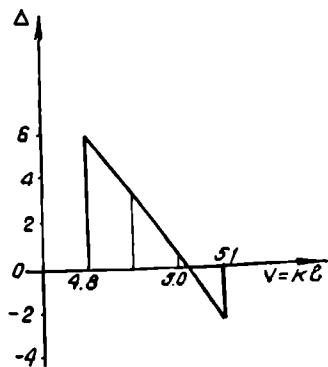
სანგარიშო არგუმენტის პოვნის დასაჩქარებლად ხშირად უმჯობესია ავა-
ჯოთ $\Delta = F(v)$ მრუდი, რომლის გადაკვეთის წერტილი პორიზონტალურ ღერძ-
თან მოგვცემს საძიებელ $v = kl$ (ნახ. 71).

$$P_{კრ} = \frac{v^2 EI}{h^2} = \frac{(5,03)^2 EI}{4^2} = 1,58 EI.$$

$$P_{\text{კბ}} = \frac{5}{4} ql = 1,58 EI,$$

საიდანაც

$$(ql)_{\text{კბ}} = 1,26 EI.$$



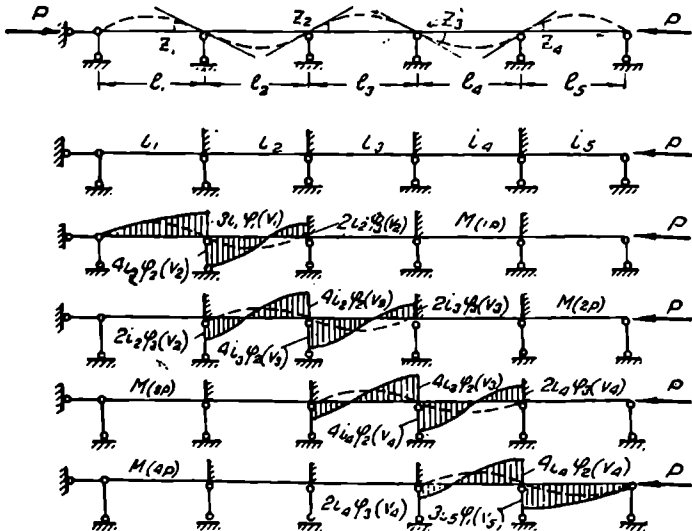
ნახ. 71.

ხისტ და ღრეკად საყრდენებზე მდებარე უბრი კოჭის
ანგარიში მდგრადობაზე

✓ ✓

§ 25. ხისტ საყრდენებზე მდებარე უბრი კოჭის ანგარიში მდგრადობაზე

უბრი კოჭის ანგარიში მდგრადობაზე პრინციპულად არავითარ სირთულეს არ წარმოადგენს, მაგრამ მდგრადობის განტოლების ფესვების ამოხსნა საკმაოდ ბევრი გამოთვლების შესრულებას მოითხოვს. ხისტ საყრდენებზე მდებარე უბრი კოჭის ანგარიში შეიძლება როგორც ძალთა მეთოდით, ისე გადაადგილებათა მეთოდით. პირველ შემთხვევაში ჩვენ მივიღებთ სამ მომენტთა განტოლებას, მეორეში კი სამი კუთხის განტოლებას. გადაადგილებათა მეთოდის კანონიკური განტოლებების შედგენა უფრო მარტივია, ვიდრე ძალთა მეთოდის კანონიკური განტოლების და ამიტომ მიზანშეწონილია გადაადგილებათა მეთოდის გამოყენება. განვიხილოთ ხუთშალიანი უბრი კოჭი (ნახ. 72). როდესაც მკუშშია ძალა P მიღწევს კრიტიკულ მნიშვნელობას, მაშინ კოჭი მიიღებს



უსასრულოდ მცირე გაღუნვას, და წარმოიშევა მობრუნების კუთხეები საყრდენებზე z_1, z_2, z_3, z_4 , რომლებიც მივიღოთ უცნობებად. კანონიკური განტოლება იქნება სამწვერა ერთგვაროვანი:

$$\begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} &= 0, \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} &= 0, \\ Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + Z_4 r_{34} &= 0, \\ Z_3 r_{43} + Z_4 r_{44} &= 0. \end{aligned} \quad (168)$$

მდგრადობის განტოლებას მივიღებთ, თუ ამ განტოლების მთავარ დეტერმინანტს გაუტოლებთ ნულს.

განვიხილოთ მუდმივი კვეთის მქონე არატოლმალისანი კოჭი. გრძივი სისხტეები იქნება:

$$i_1 = \frac{EI}{l}, \quad i_2 = \frac{EI}{l_2}, \quad i_3 = \frac{EI}{l_3}, \quad i_4 = \frac{EI}{l_4}, \quad i_5 = \frac{EI}{l_5}.$$

არგუმენტები იქნება:

$$\begin{aligned} v_1 &= kl_1 = l_1 \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad v_2 = l_2 \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad v_3 = l_3 \sqrt{\frac{P}{EI}}, \\ v_4 &= l_4 \sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad v_5 = l_5 \sqrt{\frac{P}{EI}}. \end{aligned}$$

კანონიკური განტოლების კოეფიციენტებს ექნებათ შემდეგი მნიშვნელობები:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 3i_1 \varphi_1(v_1) + 4i_2 \varphi_2(v_2), \\ r_{22} &= 4i_2 \varphi_2(v_2) + 4i_3 \varphi_2(v_3), \\ r_{33} &= 4i_3 \varphi_2(v_3) + 4i_4 \varphi_2(v_4), \\ r_{44} &= 3i_4 \varphi_1(v_5) + 4i_4 \varphi_2(v_4), \\ r_{12} &= 2i_2 \varphi_3(v_2), \\ r_{23} &= 2i_3 \varphi_3(v_3), \\ r_{34} &= 2i_4 \varphi_3(v_4). \end{aligned}$$

ტოლი მალეების შემთხვევაში არგუმენტები $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5$ და კოეფიციენტები $r_{11} = r_{44}$; $r_{22} = r_{33}$, $r_{12} = r_{23} = r_{34}$ რის გამოც ამოცანა მარტივდება.

თუ კოჭი სიმეტრიულია უნდა გამოვიყენოთ უცნობთა დაჯგუფების მეთოდი, ან განტოლებაში შევიტანოთ $Z_1 = -Z_4$ და $Z_2 = -Z_3$, რითაც ამოცანა მნიშვნელოვნად გამარტივდება.

განვიხილოთ მუდმივკვეთისანი არატოლმალისანი უქრი კოჭი (ნახ. 73). ამავე ნახაზზე ნაჩვენებია ძირითადი სისტემა და $M_{(1)}$ ეპიურა.

კანონიკური განტოლებიდან

$$Z_1 r_{11} = 0.$$

მივიღებთ მდგრადობის განტოლებას:

$$r_{11} = 0.$$

ნახაზიდან გამოვლინარე

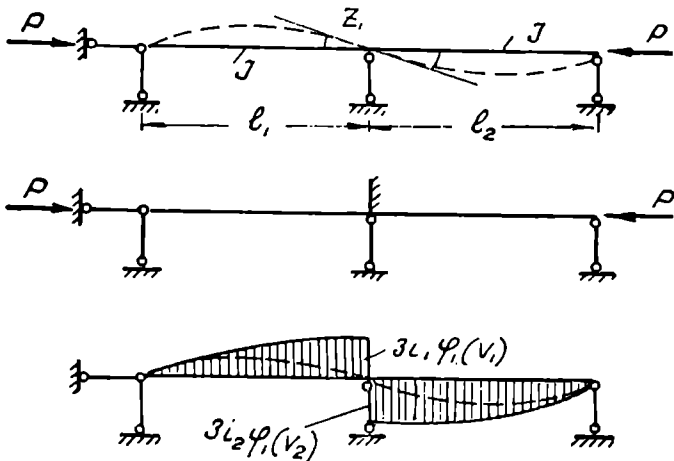
$$r_{11} = -3i_1 \varphi_1(v_1) + 3i_2 \varphi_1(v_2).$$

მაშასადამე,

$$3i_1 \varphi_1(v_1) + 3i_2 \varphi_1(v_2) = 0, \quad (169)$$

არგუმენტები

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= kl_1 = \sqrt{\frac{P}{EI}} l_1 = v, \\ v_2 &= kl_2 = \sqrt{\frac{P}{EI}} l_2 = \frac{l_2}{l_1} v. \end{aligned} \right\} \quad (170)$$



ნახ. 73.

169-ე განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{1}{l_1} \varphi_1(v) + \frac{1}{l_2} \varphi_1\left(\frac{l_2}{l_1} v\right) = 0$$

ან

$$\varphi_1(v) + \frac{l_1}{l_2} \varphi_1\left(\frac{l_2}{l_1} v\right) = 0. \quad (171)$$

$\frac{l_2}{l_1}$ ფარლობას მიეკუთვნება სხვადასხვა მნიშვნელობა და განესაზღვროთ 171-ე

განტოლების ფესვები თანდათანობითი შერჩევის გზით; მიღებული დამოკიდებულება l_2 და ν შორის გამოვსახოთ გრაფიკულად (ნახ. 74).

როდესაც $l_2=0$ (ან $l_1=0$), მაშინ 171-ე განტოლებიდან

$$\varphi_1(\nu)=\infty \text{ და } \nu=4,493,$$

რაც ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული და მეორეთი სახსროვნად დაყრდნობილი ძელის მდგრადობის განტოლების ფესვია (§ 6, ფორ. 57). ეს ასეც უნდა ყოფილიყო, რადგან ორი ერთმანეთთან უსასრულოდ ახლოს მოთავსებული სახსროვანი საყრდენი არ იძლევა კუთხურ გადაადგილებას, ე. ი. ხისტი ჩამაგრების ეკვივალენტურია.

როდესაც $l_1=l_2$, მაშინ

$$\varphi_1(\nu)=0 \text{ და } \nu=\pi,$$

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (172)$$

ადვილად შევამჩნევთ, რომ კრიტიკული ძალა ორმალიანი კოქისათვის, თუ $l_1 > l_2$

მოთავსებულია $\frac{\pi^2 EI}{l_2^2} > P_{კრ} > \frac{\pi^2 EI}{l_1^2}$ ზღვრებში.

გავარჩიოთ სამმალიანი მუდმივკვეთიანი უჭრი კოქი (ნახ. 75). კოქი დაკარგავს მდგრადობას მხოლოდ სიმეტრიული გაღუნვით და ამიტომ

$$Z_1 = -Z_2.$$

კანონიკური განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$Z_1(r_{11} - r_{12}) = 0,$$

$$Z_2(r_{22} - r_{21}) = 0.$$

ორივე განტოლება ერთ და იგივე კრიტიკულ ძალას მოგვცემს. მდგრადობის განტოლება იქნება:

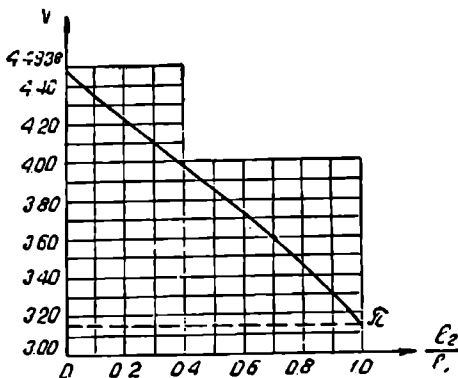
$$r_{11} - r_{12} = 0. \quad (ა)$$

ნახაზიდან უშუალოდ მივიღებთ:

$$r_{11} = 3i \varphi_1(\nu) + 4i \varphi_2(\nu),$$

$$r_{12} = 2i \varphi_3(\nu).$$

მიღებულ კოეფიციენტებს თუ შევიტანთ (ა) განტოლებაში და შევკვავათ i -ზე, გვექნება:



ნახ. 74.

$$3\varphi_1(v) + 4\varphi_2(v) - 2\varphi_3(v) = 0. \quad (173)$$

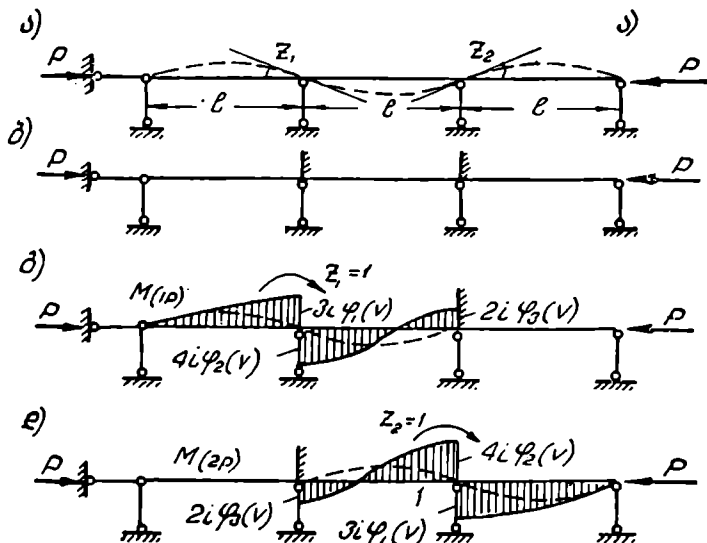
ამ განტოლებას ამოვხსნით შერჩევის გზით.
არგუმენტის უმცირესი მნიშვნელობა ტოლია:

$$v = kl = \pi,$$

აქედან

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (174)$$

საზოგადოდ, ტოლმალაინი და მულდმიეკვეთიანი უჭრი კოჭებისათვის კრიტიკული ძალა გამოითვლება 174-ე ფორმულით, ე. ი. როგორც უბრალო სახსროვანად დაყრდნობილი კოჭისათვის.



ნახ. 75.

vv

§ 27. ორმალაინი უჭრი კოჭი ერთი ფრეკადი საყრდენით

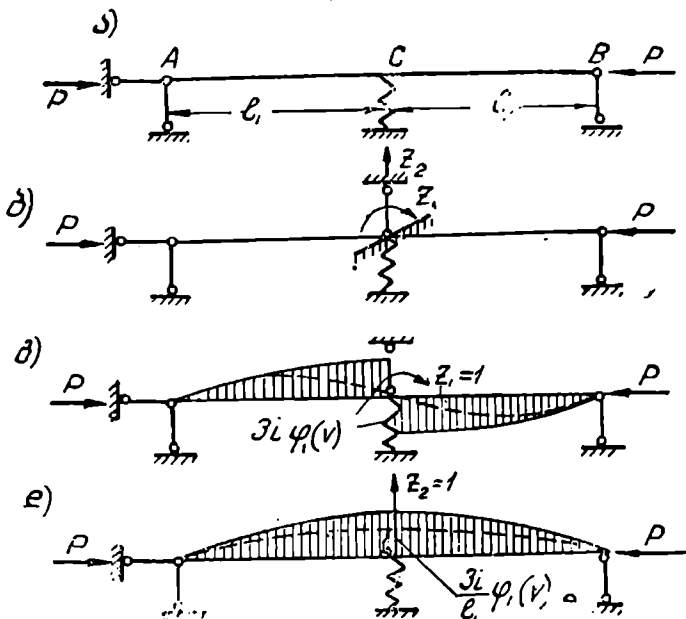
განვსაზღვროთ ტოლმალაინი უჭრი კოჭის კრიტიკული ძალა, თუ ამ კოჭის შუა საყრდენი დრეკადია (ნახ. 76 ა). გამოვიყენოთ გადაადგილებათა მეთოდი. შუაღედ C საყრდენს საშუალება აქვს კუთხური და ხაზობრივი გადაადგილების და, ამიტომ ძირითადი სისტემის არჩევისას საჭიროა ბისტი ჩამაგრების და ღეროს შემოტანა. პირველი მოსაზრებები მობრუნების კუთხეს, მეორე კი ხაზობრივ გადაადგილებას (ნახ. 76 ბ).

ერთეული გადაადგილებისაგან გამოწვეული ეპიურები ნაჩვენებია 76-ე გ, დ, ნახაზზე.

დრეკადი საყრდენის სიხისტე, ე. ი. ექვთეული გადაადგილებით გამოწვეული ზამბარის რეაქცია აღენიშნოთ c .

76-ე გ. დ, ნახაზიდან უშუალოდ მივიღებთ:

$$r_{11} = 2 \cdot 3i \varphi_1(v) = 6i \varphi_1(v).$$



ნახ. 76.

$Z_2=1$ -საგან გამოწვეული რეაქციული მომენტი ფიქტიურ ჩამაგრებაში ტოლია ნულის, ე. ი.

$$r_{12} = 0.$$

$Z_2=1$ გადაადგილებიდან გამოწვეული რეაქცია ფიქტიურ ლეროში შედგება ორი ნაწილისაგან: ხისტად ჩამაგრებულ საყრდენის გადაადგილებით გამოწვეული რეაქცია, რომელიც ტოლია $2 \frac{3i}{l_1^2} \eta_1(v)$ (§ 23, ცხრილი 3) და ზამბარის რეაქციისაგან, რომელიც ტოლია c .

მაშასადამე,

$$r_{22} = 2 \frac{3i}{l_1^2} \eta_1(v) + c.$$

კანონიკური განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$Z_1 r_{11} = 0,$$

$$Z_2 r_{22} = 0.$$

მდგრადობის განტოლებები იქნება:

$$r_{11} = 0,$$

$$r_{22} = 0$$

ან

$$6i \varphi_1(v) = 0,$$

$$\frac{6i}{l_1^3} \eta_1(v) + c = 0.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\varphi_1(v) = 0, \quad (175)$$

$$\eta_1(v) = -\frac{cl_1^3}{6EI}. \quad (176)$$

175-ე განტოლებას შეესაბამება კოქის გაღუნვა ირიბადსიმეტრიულად, ამ შემთხვევაში დრეკადი საყრდენი არ გადაადგილდება და კრიტიკულ ძალას ექნება ისეთივე მნიშვნელობა, როგორც ხისტ საყრდენებზე მდებარე კოქის დროს:

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{l_1^2}.$$

176-ე განტოლებას შეესაბამება კოქის გაღუნვა სიმეტრიულად და კრიტიკული ძალის სიდიდე დამოკიდებულია დრეკადი საყრდენის სიხისტის კოეფიციენტ c -ზე.

c გარკვეული მნიშვნელობისათვის II ცხრილის საშუალებით ვიპოვით კრიტიკულ ძალას. მიღებულ ორ მნიშვნელობიდან საანგარიშო იქნება მინიმალური. განვსაზღვროთ კრიტიკული სიხისტე $c_{კრ}$, ე. ი. სიხისტის კოეფიციენტის ის მნიშვნელობა, რომლის ზრდის შემდეგ კრიტიკული ძალა უცვლელია. ორივე შემთხვევაში კრიტიკული ძალა იქნება ერთმანეთის ტოლი, თუ $v = \pi$, რასაც შეესაბამება $\eta_1(v) = -\frac{\pi^2}{3}$ (იხ. II ცხრილი). 176-ე განტოლებიდან მივიღებთ:

$$-\frac{\pi^2}{3} = -\frac{cl_1^3}{6EI}$$

და

$$c_{კრ} = \frac{2EI \pi^2}{l_1^3}. \quad (177)$$

თუ $c > c_{კრ}$, მაშინ დრეკადი საყრდენის სიხისტე გავლენას აღარ ახდენს კრიტიკულ ძალაზე.

განხილული შემთხვევა, ორმალიანი კოქი შუალედი დრეკადი საყრდენით, ხშირად შეგვხვდება საინჟინრო კონსტრუქციების ანგარიშის დროს. მაგალითად, ჯვარედინგისოსიანი ფერმის ირიბანის საანგარიშო სქემა მდგრადობაზე, როდესაც მისი გაღუნვა ხდება ფერმის სიბრტყის პერპენდიკულარულად, ასეთივე იქნება.

განვიხილოთ გაუ.ეურავის ფერმის ერთი პანელი (ნახ. 77), რომლის ერთი ირიბანი იკუმშება P ძალით (ძალვა ღეროში), მეორე კი დაუტვირთავია. როდესაც ირიბანი ილუნება ფერმის სიბრტყის პერპენდიკულარულად, შემხედარი ირიბანი წარმოადგენს დრეკად საყრდენს. დრეკადი საყრდენის სიხისტის კოეფიციენტი c იქნება ძალის ის სიდიდე, რომელიც იწვევს DE კოკის ერთეულ ხა-ლუნვას C წერტილში:

$$1 = \frac{c l^3}{48 E I_1},$$

საიდანაც

$$c = \frac{48 E I_1}{l^3}.$$

ამ მნიშვნელობას, თუ შევიტანთ 176-ე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\eta_1(v) = -\frac{c l_1^3}{6 E I_2} = -\frac{48 E I_1}{6 E I_2} \cdot \frac{l_1^3}{l^3} = -\frac{I_1}{I_2}$$

II ცხრილიდან ვიპოვით არგუმენტის სიდიდეს v .

თუ $I_1 = I_2 = I$, მაშინ $\eta_1(v) = -1$ და $v = 2,2$.

$$2,2 = k l_1 = \sqrt{\frac{P}{EI}} l_1,$$

აქედან

$$P_{კრ} = \frac{(2,2)^2 EI}{l_1^2} = 19,36 \frac{EI}{l^2}.$$

ეს იქნება საანგარიშო კრიტიკული ძალა.

დაყვანილი სიგრძე

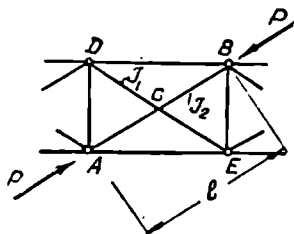
$$l_0 = \frac{\pi}{4,4} l = 0,714 l.$$

§ 28. სამშალიანი უარი კოკი ორი ღრეკადი საყრდენით

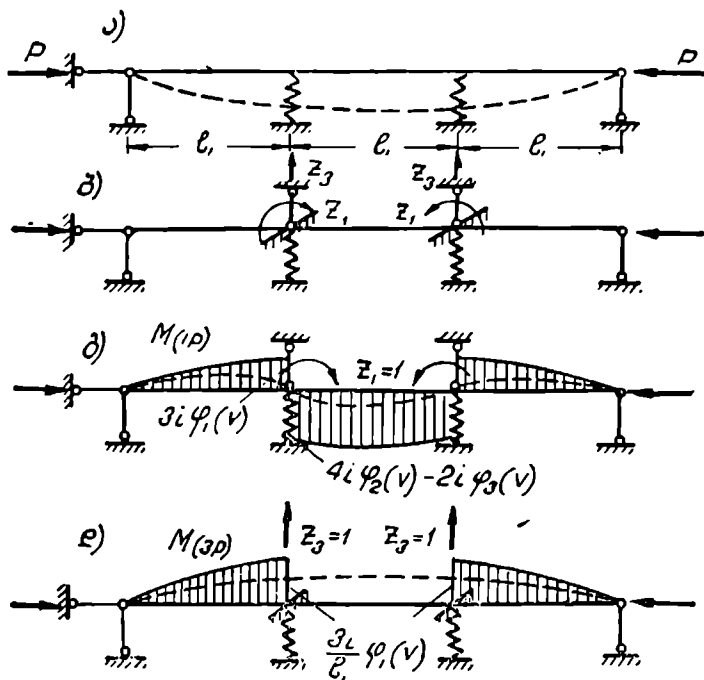
ამოცანის გადაწყვეტის მსვლელობა იქნება ისეთივე, როგორც ერთი დრეკადი საყრდენის შემთხვევაში. სამშალიან კოკში გვექნება ოთხი უცნობი—ორი კუთხური და ორი ხაზობრივი გადაადგილება. დრეკადი საყრდენების სიხისტის კოეფიციენტები ერთნაირია. განვიხილოთ ტოლმშალიანი კოკი (ნახ. 78 ა). უცნობები დეაჯგუფოთ სიმეტრიულ (Z_1, Z_3) და ირიბად სიმეტრიულ (Z_2, Z_4), უცნობებად. სიმეტრიული უცნობები და ერთეული გადაადგილებებისაგან გამოწვეული ეპიურები გამოსახულია 78-ე ნახაზზე, ირიბად სიმეტრიული უცნობები და მათგან გამოწვეული ეპიურები კი 79-ე ნახაზზე. ამ ეპიურების საფუძველზე გვექნება:

$$r_{11} = 2i [3\varphi_1(v) + 4\varphi_2(v) - 2\varphi_3(v)],$$

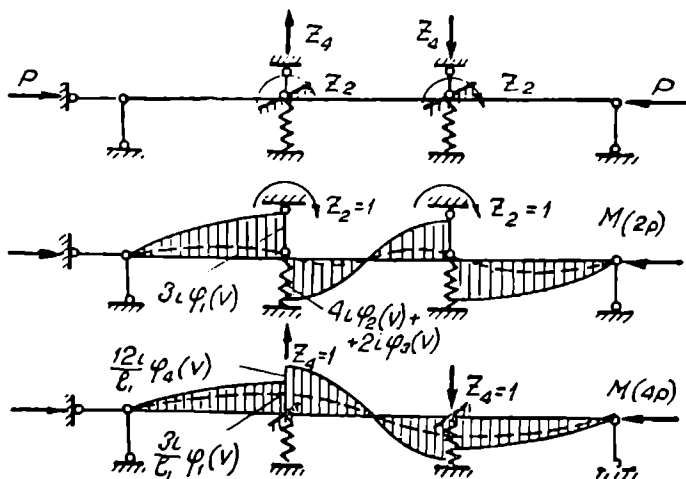
$$r_{33} = 2 \left[\frac{3i}{l_1^2} \eta_1(v) + c \right] = \frac{6i}{l_1^2} \eta_1(v) + 2c,$$



ნახ. 77.



63b. 78.



63b. 79.

$$r_{13} = 2 \frac{3i}{l_1} \varphi_1(v) = \frac{6i}{l_1} \varphi_1(v),$$

$$r_{22} = 2i [3\varphi_1(v) + 4\varphi_2(v) + 2\varphi_3(v)],$$

$$r_{44} = 2i \left[\frac{3}{l_1^2} \eta_1(v) + \frac{12}{l_1^2} \eta_2(v) + \frac{c}{i} \right],$$

$$r_{24} = 2i \left[\frac{3}{l_1} \varphi_1(v) - \frac{12}{l_1} \varphi_4(v) \right].$$

უნდა შევადგინოთ მდგრადობის ორი განტოლება:
სიმეტრიული უცნობებისათვის

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{13} \\ r_{31} & r_{33} \end{vmatrix} = r_{11} r_{33} - r_{13}^2 = 0$$

და ირიბად სიმეტრიული უცნობებისათვის

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_{22} & r_{24} \\ r_{42} & r_{44} \end{vmatrix} = r_{22} r_{44} - r_{24}^2 = 0.$$

თუ შევიტანთ ამ განტოლებებში კოეფიციენტების მნიშვნელობებს, შეკვეცის შემდეგ სიმეტრიული უცნობებისათვის მივიღებთ:

$$[3\varphi_1(v) + 4\varphi_2(v) - 2\varphi_3(v)] \left[\eta_1(v) + \frac{cl_1^3}{3EI} \right] - 3\varphi_1^2(v) = 0. \quad (178)$$

ირიბად სიმეტრიული უცნობებისათვის.

$$[3\varphi_1(v) + 4\varphi_2(v) + 2\varphi_3(v)] \left[\eta_1 + 4\eta_2 + \frac{cl_1^3}{3EI} \right] - 3[\varphi_1(v) - 4\varphi_4(v)]^2 = 0. \quad (179)$$

178-ე და 179-ე განტოლებები უმჯობესია გადავწვიტოთ გრაფიკულად. შევიტანოთ სიხისტის კოეფიციენტის მნიშვნელობა c და $v = kl_1$ სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის გამოვთვალოთ (178) და (179) განტოლებების (დეტერმინანტების) მნიშვნელობები და ავაგოთ $\Delta = f(v)$ გრაფიკი. v მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება $\Delta = 0$, მოგვცემს საანგარიშო არგუმენტს.

კრიტიკული ძალა განისაზღვრება ფორმულიდან:

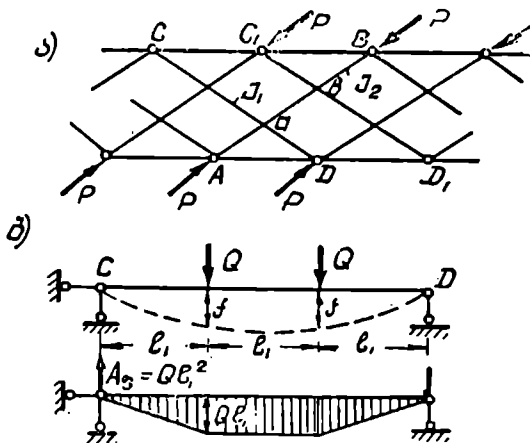
$$v = kl_1 = \sqrt{\frac{P}{EI}} l_1,$$

საიდანაც

$$P_{კრ} = \frac{v^2 EI}{l_1^2}.$$

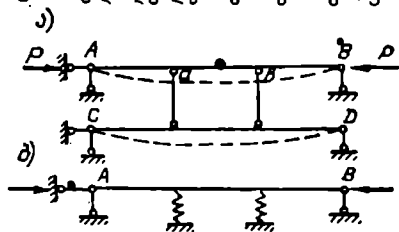
შესწავლილი შემთხვევის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რთულ გისოსიანი ფერმის შეკუმშული AB ირიბანი, რომლის შუა a და b საყრდენი დრეკალია (ნახ. 80).

დრეკად საყრდენებს ქმნიან დაღმავალი ირიბანები CD და C_1D_1 , როდესაც ღუნვა ხდება ფერპის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში. თუ ჩავთვლით რომ ირიბანების გადაკვეთის წერტილებში რეაქციები ერთნაირია, მაშინ სიხისტის კოეფიციენტის გამოსათვლელად უნდა განვიხილოთ ორ საყრდენზე მდებარე კოჭი დატვირთული ორი შეყურსული ძალით Q (ნახ. 80 ბ). ძალის ის სიდიდე,



ნახ. 80.

რომელიც მოგვცემს ერთეულ ჩაღუნვას $f=1$, იქნება საძიებელი კოეფიციენტი c . გადაადგილება ვიპოვოთ გრაფიკული მეთოდით.



ნახ. 81.

იქედან

$$f = \frac{M_{\text{ფ}}}{EI} = \frac{Q}{EI_1} \left(l_1^3 - \frac{l_1^3}{6} \right) = \frac{5Ql_1^3}{6EI_1}$$

$$1 = \frac{5cl_1^3}{6EI_1}$$

$$c = \frac{6EI_1}{5l_1^3} = \frac{162EI_1}{5l_1^3}$$

ჩვენ არ მივიღეთ მხედველობაში ის გარემოება, რომ დაღმავალი ირიბანები იჭიმებიან და ამით დრეკადი საყრდენის სიხისტე იზრდება. ეს შედის სიმტკიცის მარაგში.

მეორე მაგალითს წარმოადგენს 81-ე ნახაზზე წარმოდგენილი კონსტრუქცია

ცია. AB უჭრი კოჭის დრეკადი საყრდენები იქნება a და b , რომლებიც გადაადგილდებიან CD ქვედა კოჭის ჩაღუნვის გამო. სიხისტის კოეფიციენტი აქაც ისევე გამოითვლება, როგორც წინა შემთხვევაში. კოჭის საანგარიშო სქემა ნაჩვენებია 81-ე ბ ნახაზზე.

— § 20. ღრეკად ფუძეზე მდებარე კოჭის მდგარდოგა

თუ ღერო დაყრდნობილია უსასრულოდ ბევრ დრეკად საყრდენზე (ნახ. 82 ა), მაშინ ღეროს ფუძე შეგვიძლია შევცვალოთ ერთი უწყვეტი დრეკადი ფუძით. ღეროს გაღუნვას წინააღმდეგობას უწევს დრეკადი ფუძე, სადაც განვითარდება რეაქციის განივი ძალები. ფუს-ვინკლერის ჰიპოთეზის საფუძველზე დრეკადი ფუძის გავლენა ღეროზე შეგვიძლია შევცვალოთ რეაქციის ძალებით, რომლებიც ჩაღუნვის პროპორციულია:

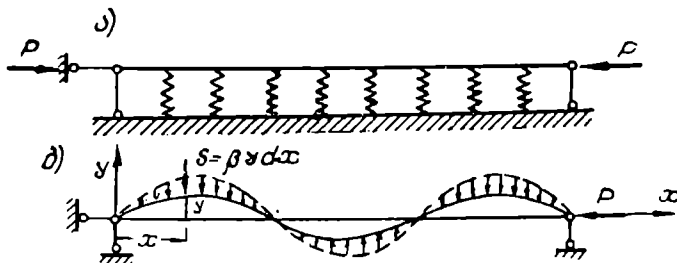
$$q = -\beta y. \quad (180)$$

სიგრძის dx ელემენტზე მოსული რეაქცია იქნება (ნახ. 82, ბ):

$$S = q \cdot dx = -\beta y dx. \quad (181)$$

β ეწოდება დრეკადი ფუძის მოდული (საგების კოეფიციენტი) და წარმოადგენს ფუძის რეაქციის სიდიდეს ერთეულ სიგრძეზე, როცა ჩაღუნვა ერთეულის ტოლია. მისი განზომილებაა კგ/სმ².

კრიტიკული ძალა განვსაზღვროთ ენერგეტიკული მეთოდით, რომელიც ყველაზე მარტივად წყვეტს ამოცანას.



ნახ. 82.

კრიტიკულ მომენტში გაჩდება ღუნვის პოტენციალური ენერგია, რომელიც შედგება ორი ნაწილისაგან: ღეროს ღუნვის ენერგიისაგან (ფორ. 29)

$$V_1 = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dx$$

და დრეკადი ფუძის დეფორმაციის ენერგიისაგან

$$V_2 = \int_0^l \frac{\beta y dx \cdot y}{2} = \frac{\beta}{2} \int_0^l y^2 dx.$$

P ძალის მუშაობა Δ გადაადგილებაზე ტოლია (ფორ. 28):

$$T = P\Delta = \frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx.$$

27-ე ფორმულის საფუძველზე გვექნება:

$$\frac{EI}{2} \int (y'')^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_0^l y^2 dx = \frac{P}{2} \int (y')^2 dx$$

საიდანაც

$$P_{კრ} = \frac{EI \int_0^l (y'')^2 dx + \beta \int_0^l y^2 dx}{\int_0^l (y')^2 dx}. \quad (182)$$

ამ განტოლების ამოსახსნელად საჭიროა ვიყოფეთ გაღუნული ღერძის განტოლება. ვთქვათ, ძელი გაიღუნა სინუსოიდური მრუდით n ნახევარ ტალღაზე

$$y = a \sin \frac{n \pi x}{l}, \quad (183)$$

მაშინ

$$\int_0^l y^2 dx = a^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n \pi x}{l} dx = \frac{a^2 l}{2},$$

$$\int (y')^2 dx = \frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} \int_0^l \cos^2 \frac{n \pi x}{l} dx = \frac{\pi^2 a^2 n^2}{2l},$$

$$\int (y'')^2 dx = \frac{a^2 \pi^4 n^4}{l^4} \int \sin^2 \frac{n \pi x}{l} dx = \frac{a^2 \pi^4 n^4}{2l^3}.$$

მიღებული სიდიდეები შევიტანოთ 182-ე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \left(n^2 + \frac{\beta l^4}{n^2 \pi^4 EI} \right). \quad (184)$$

თავიდან მივიღეთ, რომ ძელი იღუნება n ნახევარ ტალღაზე, ნამდვილად კი ნახევარ ტალღების რიცხვი n დამოკიდებულია დრეკადი ფუძის საგების კოეფიციენტ β -ზე.

თუ β უმნიშვნელოა, მაშინ კრიტიკული ძალის მინიმალურ მნიშვნელობას მივიღებთ ერთი ნახევარი ტალღით გაღუნვის შემთხვევაში ($n=1$). თუ β თანდათანობით გაეზრდით, მაშინ მივიღებთ ისეთ მდგომარეობას, როდესაც ძელი გაიღუნება სინუსოიდის ორ ნახევარ ტალღაზე. ზღერული მნიშვნელობის შემთხვევაში ერთ ნახევარ ტალღაზე გაღუნვის შესაბამისი კრიტიკული ძალა ტოლი იქნება ორ ნახევარ ტალღაზე გაღუნვის შესაბამის კრიტიკული ძალისა. β -ეს მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება კრიტიკული ძალის ორ სიდიდეს განისაზღვრება 184-ე ფორმულიდან თუ მივიღებთ, რომ სათანადოდ $n=1$ და $n=2$:

$$1 + \frac{\beta l^4}{\pi^4 EI} = 4 + \frac{\beta l^4}{4\pi^2 EI},$$

აქედან

$$\beta = \frac{4\pi^4 EI}{l^4}.$$

თუ

$$\beta < \frac{4\pi^4 EI}{l^4}$$

გაღუნვა მოხდება ნახევარ ტალღაზე გადაღუნვის წერტილის გარეშე და კრიტიკული ძალა განისაზღვრება ფორმულით:

$$P_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

თუ

$$\beta > \frac{4\pi^4 EI}{l^4}$$

გაღუნვა მოხდება ორ ნახევარ ტალღაზე და კრიტიკული ძალა განისაზღვრება 184-ე ფორმულით.

საერთო შემთხვევაში, n ნახევარ ტალღით გაღუნვის შესაბამის კრიტიკული ძალა $n+1$ ნახევარ ტალღით გაღუნვის შესაბამის კრიტიკული ძალის ტოლი უნდა იყოს:

$$n^2 + \frac{\beta l^4}{\pi^4 EI} = (n+1)^2 + \frac{\beta l^4}{(n+1)^2 \pi^4 EI},$$

საიდანაც

$$n^2(n+1)^2 = \frac{\beta l^4}{\pi^4 EI}. \quad (185)$$

თუ კოჭის ზომები და ფუძის საგების კოეფიციენტი ცნობილია, მაშინ 185-ე ფორმულით, ვიპოვით ნახევარ ტალღათა რიცხვს n , ხოლო 184-ე ფორმულით კი—კრიტიკულ ძალას. იმ შემთხვევაში, როდესაც β დიდია ნახევარ ტალღათა რიცხვი n დიდია და 185-ე ფორმულა შეიძლება შეიცვალოს შემდეგი ფორმულით:

$$n^4 = \frac{\beta l^4}{\pi^4 EI}. \quad (186)$$

კრიტიკული ძალა განისაზღვრება ფორმულით:

$$P_{კრ} = \frac{2\pi^2 EI}{l^2} n^2 = \frac{2\pi^2 EI}{\left(\frac{l}{n}\right)^2} = \frac{2\pi^2 EI}{l_0^2}, \quad (187)$$

სადაც l_0 არის ნახევარი ტალღის სიგრძე და გამოითვლება ფორმულით:

$$\frac{l}{n} = \pi \sqrt[4]{\frac{EI}{\beta}}. \quad (188)$$

ამ პარაგრაფში მიღებული შედეგები ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ დრეკად საყრდენებზე მდებარე კოჭის საანგარიშოდ, თუ კოჭი მოთავსებულია ტოლი მანძილებით დაშორებულ დრეკად საყრდენებზე. თუ ნახევარ ტალღაზე მოთავსდება არანაკლები სამი დრეკადი საყრდენისა, მაშინ ეს მიახლოებითი მეოთხედი საკმარის სიზუსტეს იძლევა. ჩვენ ვნახეთ, რომ დრეკად საყრდენებზე მოთავსებული კოჭის ანგარიში საკმარის გამოთვლებს მოითხოვს და ამიტომ დრეკადი საყრდენების შეცვლა დრეკადი ფუძით საკმარის გაამარტივებს ამოცანის გადაწყვეტას.

ამ შემთხვევაში, დრეკადი ფუძის საგების კოეფიციენტი გამოითვლება ფორმულით:

$$\beta = \frac{c}{a},$$

სადაც c არის ცალკეული საყრდენების სიხისტის კოეფიციენტი,

a — საყრდენებს შორის მანძილი.

§ 80. ღია ხიდის ზედა სარტყელის მდგრადობა
(ფ. იასინსკის ამოცანა)

განვიხილოთ ლითონის ღია ხიდი, რომლის ზედა სარტყელს არ აქვს მოწყობილი პორიზონტალური ბმები. ფერმის ქვედა სარტყელზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი (ნახ. 83). შევისწავლოთ ფერმის ზედა სარტყელის მდგრადობა ფერმის სიბრტყის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში. ზედა სარტყელს გადაეცემა მკუმშავი ძალები ირიბნების საშუალებით. ირიბნების ძალები იცვლება განივი ძალის პროპორციულად, ამიტომ მკუმშავი ძალა იზრდება შუიდან საყრდენების მიმართულებით შემდეგი ფორმულით:

$$S = Q \operatorname{ctg} \alpha.$$

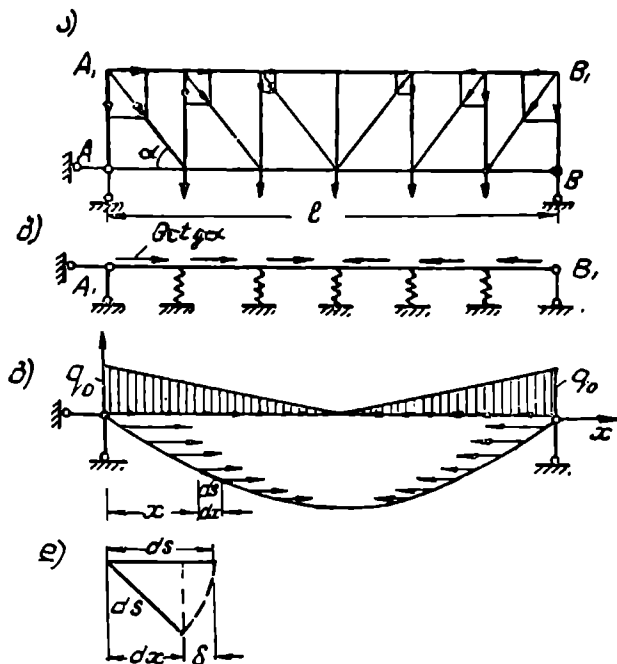
AA_1 და BB_1 საყრდენ დგარებს ყოველთვის მეტი სიხისტე აქვს, ვიდრე შუა დგარებს და ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ჩათვალოთ, რომ A_1 და B_1 წერტილები ფერმის პერპენდიკულარული მიმართულებით არ გადაადგილდებიან. A_1B_1 სარტყელის გაღუნვას ფერმის სიბრტყის პერპენდიკულარულად ეწინააღმდეგება დგარები, რომლებიც შეიძლება განხილული იყოს როგორც დრეკადი საყრდენები. ზედა სარტყელის საანგარიშო სქემა ნაჩვენებია 83-ე ნახაზზე. იასინსკიმ დრეკადი საყრდენები შეცვალა მთლიანი დრეკადი ფუძით, რაც საკმარის

სად ზუსტ გადაწყვეტას იძლევა იმ შემთხვევაში, როდესაც პანელების რიცხვი ოთხს სჭარბობს. თუ დრეკადი საყრდენების სიხისტის კოეფიციენტი იქნება c , მაშინ დრეკადი ფუძის მოდული ან საგების კოეფიციენტი გამოითვლება ფორმულით:

$$\beta = \frac{c}{d}$$

სადაც d არის პანელის სიგრძე.

ამოცანის გადაწყვეტისას ვგულისხმობთ, რომ ზედა სარტყელის კვეთი მალის მთელ სიგრძეზე მუდმივია და შუალედი დგარების სიხისტე ერთნაირი.



ნახ. 83.

დრეკადი ფუძის საგების კოეფიციენტის გამოსათვლელად საჭიროა განისაზღვროს c , ე. ი. ძალის ის სიდიდე, რომელიც საჭიროა დრეკადი საყრდენის (დგარის ბოლო წერტილის) ერთეული სიდიდით გადასადგილებლად.

თუ განვიხილავთ ნახეარჩარჩოს (ნახ. 84), მაშინ მისი ზედა ბოლოს გადაადგილება გამოითვლება ფორმულით:

$$\delta = \frac{R_0 h^3}{3EI_1} + \frac{R_0 h^2 b}{2EI_2} = R_0 \left(\frac{h^3}{3EI_1} + \frac{h^2 b}{2EI_2} \right).$$

თუ მივიღებთ, რომ $\delta=1$, მაშინ

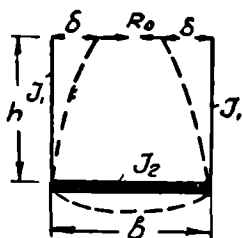
$$R_0 = c = \frac{1}{\frac{h^3}{3EI_1} + \frac{h^2b}{2EI_2}}$$

საგების კოეფიციენტი

$$\beta = \frac{c}{d} = \frac{1}{d \left(\frac{h^3}{3EI_1} + \frac{h^2b}{2EI_2} \right)}, \quad (189)$$

სადაც I_1 და h არის ღვარის ინერციის მომენტი და სიმაღლე.

I_2 და b — განივი კოჭის ინერციის მომენტი და მალის სიგრძე.



ნახ. 84.

რადგან განივი კოჭის ინერციის მომენტი ღვარის ინერციის მომენტზე ბევრჯერ მეტია, ამიტომ 189-ე ფორმულის მნიშვნელის მეორე წევრი, რომელიც გამოსახავს განივი კოჭის დეფორმაციის გავლენას გადაადგილებაზე, მხედველობაში არ მივიღოთ, მაშინ:

$$\beta = \frac{1}{dh^3} = \frac{3EI_1}{dh^3}. \quad (189')$$

საყრდენების დრეკადი ფუძით შეცვლასთან ერთად, მკუმშივე შეყურსული ძალები, რომლებიც იცვლება

Q პროპორციულად, შევცვალოთ სამკუთხედის კანონით განაწილებული ტვირთით (ნახ. 83 გ).

ზემოაღნიშნული ამოცანა შეგვიძლია მარტივად გადავწყვიტოთ ენერგეტიკული მეთოდით შემდეგი ფორმულის საფუძველზე:

$$V_1 + V_2 = T, \quad (190)$$

სადაც V_1 არის კოჭის ღუნვის დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია,

V_2 — დრეკადი ფუძის დეფორმაციის ენერგია,

T — გარე დატვირთვის მუშაობა.

დატვირთვის ინტენსიურობა იცვლება კანონით:

$$q_x = q_0 \left(1 - \frac{2x}{l} \right),$$

სადაც q_0 არის დატვირთვის ინტენსიურობა საყრდენზე.

ნებისმიერ x კვეთის მარჯვნივ მოთავსებული ღერძული მკუმშივე ძალა

$$P_x = \int_x^l q_0 \left(1 - \frac{2x}{l} \right) dx$$

$A_1 B_1$ სარქველი ვიქონი შედგად გადაადგილება მარცხნივ უძრავ საყრდენაკენ. ე ვაფიფილი ხელი, არქველი, ელიქეტიების მობრუნების ხარჯზე, ხოლო სარქველი სიგრძე უცვლელი რჩება.

ds ელემენტი მობრუნდება რალაც კუთხით და გადაადგილდება A_1 საყრდენისაკენ δ სიდიდით (ნახ. 83 დ, იხ. § 5):

$$\delta = ds - dx = \frac{1}{2} (y')^2 dx.$$

P_x ძალა ამ გადაადგილებაზე შესრულებს მუშაობას:

$$dT = -P_x \frac{1}{2} (y')^2 dx$$

ან

$$dT = -\frac{1}{2} (y')^2 dx \int_0^l q_0 \left(1 - \frac{2x}{l}\right) dx = \frac{q_0}{2l} x(l-x) (y')^2 dx.$$

გრძივი მკუმშავი ძალების მთელი მუშაობა, რომელიც შესრულდება ყველა ელემენტის დახრის შედეგად იქნება:

$$T = \frac{q_0}{2l} \int_0^l x(l-x) (y')^2 dx. \quad (191)$$

ღუნვის დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია

$$V_1 = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dx. \quad (192)$$

დრეკადი ფუძის დეფორმაციის ენერგია

$$V_2 = \frac{\beta}{2} \int_0^l y^2 dx. \quad (193)$$

შევიტანოთ T , V_1 და V_2 მნიშვნელობები 190-ე ფორმულაში, მივიღებთ მდგრადობის განტოლებას:

$$\frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_0^l y^2 dx = \frac{q_0}{2l} \int_0^l x(l-x) (y')^2 dx,$$

აქედან

$$\left(\frac{q_0 l}{4}\right)_{კრ} = \frac{l^3}{4} \frac{EI \int_0^l (y'')^2 dx + \beta \int_0^l y^2 dx}{\int_0^l x(l-x) (y')^2 dx}. \quad (194)$$

ს. ტიმოშენკომ გაღუნული ღერძის განტოლებად მიიღო ტრიგონომეტრიული მწკრივი

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad (195)$$

და განსაზღვრა:

$$\left(\frac{q_0 l}{4}\right)_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \quad (196)$$

სადაც დაყვანილი სიგრძის კოეფიციენტი

$$\mu = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2\left(\frac{\pi^2}{3} - 1\right)}{1 + \gamma}} \quad (197)$$

და

$$\gamma = \frac{\beta l^4}{\pi^4 EI}. \quad (198)$$

μ მნიშვნელობა $B^2 = \frac{\beta l^4}{16 EI}$ კოეფიციენტის მიხედვით მოცემულია მე-4 ცხრილში.

ცხრილი 4

დაყვანილი სიგრძის კოეფიციენტი μ

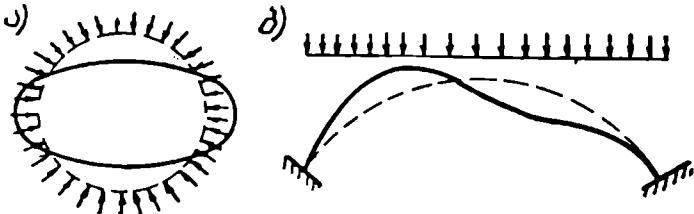
B^2	0	5	10	15	22,8	56,5	100	162,8	200	300	500
μ	0,696	0,524	0,443	0,396	0,363	0,324	0,290	0,259	0,246	0,225	0,204

თაღების მდგრადობა

§ 87 სწავროთ სწოვაპი მდგრადობის დაკარგვის შესახებ
თაღაჴი

თაღის დეფორმაციის მდგრადობის ორი შემთხვევა უნდა გავარჩიოთ. პირველი, როდესაც თაღზე მოქმედებს ისეთი ძალები, რომლებიც იწვევს თაღის ცენტრალურ კუმშვას. ამას მაშინ აქვს ადგილი როდესაც თაღის ღერძი ემთხვევა წნევის მრუდს. მაგალითად, მრგვალი რგოლი ან წრიული თაღი ჰიდროსტატიკური დაწოლის მოქმედების შემთხვევაში და პარაბოლური თაღი თანაბრად განაწილებული ვერტიკალური დატვირთვის დროს. ამ შემთხვევებში, თუ დატვირთვა გარკვეულ ზღვარზე ნაკლებია, თაღი ინარჩუნებს თავის პირვანდელ მოხაზულობას (თუმცა ცენტრალური კუმშვის გამო თაღის ღერძის სიგრძე რამდენადმე მცირდება). დატვირთვის გარკვეული მნიშვნელობის დროს თაღის პირვანდელი ფორმა აღარ იქნება მდგრადი და გაიღუნება. დატვირთვის ამ სიღიღეს კრიტიკული ძალა ეწოდება.

ჩაკეტილი რგოლი კრიტიკულ მომენტში მიიღებს ელიფსის ფორმას (ნახ. 85 ა), თაღი კი გაიღუნება ორ ნახევარ ტალღაზე (ნახ. 85 ბ). განხილული შემთხვევა წარმოადგენს პირველ სახის ან ცენტრალური კუმშვის მდგრადობის დაკარგვას. თუ თაღის ღერძი არ ემთხვევა წნევის მრუდს, ე. ი. თაღი განიცდის კუმშვა-ღუნვას, მაშინ დეფორმაციის მდგრადობის დაკარგვა ხდება



ნახ. 85.

მეორე სახით ან ხდება თაღის ზიდვის უნარის დაკარგვა. რადგანაც თაღის ღერძი დატვირთვის სხვადასხვა შემთხვევაში არ ემთხვევა წნევის მრუდს, ამიტომ თაღების მდგრადობის დაკარგვა უმთავრესად ხდება მეორე სახით. ხილებ-

ში თალის ღერძს ისე ირჩევენ, რომ იგი მეტად მიუახლოვდეს ძირითადი დატვირთვებისაგან გამოწვეულ წნევის მრუდს და ამიტომ ძირითად დეფორმაციადაც ცენტრალური კუმშვა უნდა ჩაითვალოს.

წრიული თაღების ანგარიში მდგრადობაზე უფრო მარტივია, ვიდრე პარაბოლური და რადგანაც დამრეც თაღებში კრიტიკული ძალის სიდიდე ნაკლებად არის დამოკიდებული თალის მი ხაზულობაზე, ამიტომ წრიული თაღისათვის მიღებულ შედეგებს პარაბოლურ თაღებშიც იყენებენ.

§ 32. წრიული და მხირა სივრულის ძაღვების ზაღუნული ღერძის დიფერენციალური ზანზონება

მცირე სივრულის ძელიდან ზამოვეოთ ეღემენტი, რომელმაც უარყოფითი მომენტის მოქმედების შედეგად მიიღო რაღაც დეფორმაცია (ნახ. 86). სივრულის რადიუსი დეფორმაციაზე იეოს r_0 და დეფორმაციის შემდეგ r .

ნებისმიერი mn ზოკოს ფარღობითი დეფორმაცია

$$\epsilon = \frac{y}{r_0 + y} = \frac{\delta(d\theta)}{d\theta} \quad (ა)$$

პუკის ფორმულის საფუძველზე ძაღვა

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{y}{r_0 + y} \frac{\delta(d\theta)}{d\theta} \quad (ბ)$$

მომენტების ჯამი ნეიტრალური ღერძის მიმართ მოგვეძმს:

$$M = \int_F \sigma y dF = E \frac{\delta(d\theta)}{d\theta} \int \frac{y^2 dF}{r_0 + y} \quad (გ)$$

მცირე სივრულის ძეღებისათვის

$$\int \frac{y^2 dF}{r_0 + y} \cong \frac{I}{r_0} \quad (დ)$$

(ა) და (დ) ფორმუღების საფუძველზე მივიღებთ:

$$\frac{\delta(d\theta)}{d\theta} = \frac{Mr_0}{EI} \quad (ე)$$

86-ე ნახაზიდან ზამომდინარე ცხადია, რომ

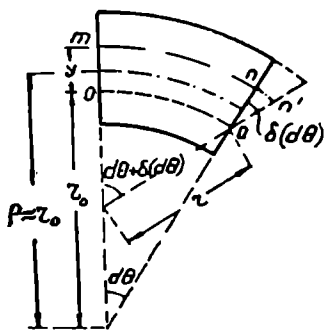
$$r_0 d\theta = r(d\theta + \delta(d\theta)),$$

საიღანაც

$$\frac{\delta(d\theta)}{d\theta} = \frac{r_0 - r}{r} \quad (ვ)$$

(ე) და (ვ) ზანტოღებები მოგვეძმენ:

$$\frac{r_0 - r}{r} = \frac{Mr_0}{EI}$$



ნახ. 86.

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{M}{EI}$$

დადებითი მომენტის მოქმედების შემთხვევაში

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = - \frac{M}{EI} \quad (199)$$

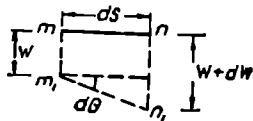
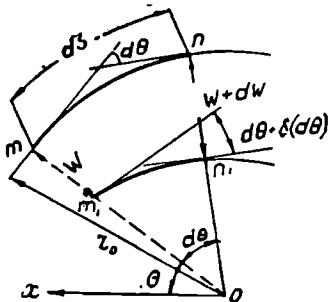
ამ ფორმულის საფუძველზე, რომელიც საერთოდ ცნობილია მასალათა გამძლეობიდან, ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყვანოთ გაღუნული ლერძის დიფერენციალური განტოლება.

შევისწავლოთ რა რადიუსს შორის მოთავსებული $mn=ds$ ელემენტის დეფორმაცია (ნახ. 87).

ამ ელემენტის საწყისი სიგრძე და სიმრუდე იქნება:

$$ds = r_0 d\theta \quad \text{და} \quad \frac{1}{r_0} = \frac{d\theta}{ds} \quad (200)$$

m წერტილის რადიალური გადაადგილება იყოს w , ხოლო n წერტილის $w+dw$. გადაადგილება ითვლება დადებითად, თუ მიმართულია სიმრუდის ცენტრისაკენ. დეფორმაციის შედეგად m წერტილი მხების მიმართულებითაც გადაადგილდება, მაგრამ ჩვენ მას მხედველობაში არ ვღებულობთ. მაშასადამე, ჩავთვალოთ, რომ mn მონაკვეთმა დეფორმაციის შემდეგ მიიღო m_1n_1 მდებარეობა. ამ შემთხვევაში mn სიმრუდე დეფორმაციის შემდეგ იქნება იგივე, რაც m_1n_1 სიმრუდე. რადგანაც დეფორმაციის შემდეგ $d\theta$ (აჩრდი იქნება $\delta(d\theta)$) და $mn - \delta(ds)$, ამიტომ ახალი სიმრუდე



ნახ. 87.

სადაც $d\theta + \delta(d\theta)$ არის m_1 და n_1 მხებს შორის მოთავსებული კუთხე, $ds + \delta(ds) - m_1n_1$ სიგრძე.

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta + \delta(d\theta)}{ds + \delta(ds)} \quad (201)$$

თუ ელემენტარულ მონაკვეთებს mn და m_1n_1 ჩავთვლით სწორ ხაზებად, მაშინ კუთხე m_1 წერტილში მხებსა (m_1n_1 სწორსა) და om პერპენდიკულარს შორის იქნება $d\theta$, რომელიც ტოლია:

$$d\theta = \frac{w + dw - w}{ds} = \frac{dw}{ds} = \frac{\frac{dw}{ds} ds}{ds} = \frac{dw}{ds} \quad (202)$$

$d\theta$ კუთხის ნაზრდი

$$\delta(d\theta) = - \frac{d^2w}{ds^2} ds \quad (203)$$

omn და om_1n_1 სექტორების მსგავსობიდან, მივიღებთ:

$$\frac{ds}{r_0} = \frac{ds + \delta(ds)}{r_0 - w},$$

საიდანაც

$$ds + \delta(ds) = ds \left(1 - \frac{w}{r_0} \right). \quad (ლ)$$

მიღებული მნიშვნელობები (კ) და (ლ) შევიტანოთ (თ) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta + \frac{d^2w}{ds^2} ds}{ds \left(1 - \frac{w}{r_0} \right)} = \frac{\frac{d\theta}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2}}{1 - \frac{w}{r_0}}.$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში (ზ) გამოსახულებას, გვექნება:

$$\frac{1}{r} \left(1 - \frac{w}{r_0} \right) = \frac{1}{r_0} + \frac{d^2w}{ds^2}$$

ან

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{w}{rr_0} + \frac{d^2w}{ds^2}.$$

თუ მივიღებთ $rr_0 \approx r_0^2$, მაშინ

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{w}{r_0^2} + \frac{d^2w}{ds^2}. \quad (მ)$$

თუ შევიტანთ ამ მნიშვნელობებს 199-ე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{r_0^2} = -\frac{M}{EI}.$$

თუ შევცვლით ცვლადებს, მაშინ

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds}, \quad \frac{d^2w}{ds^2} = \frac{d^2w}{d\theta^2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2$$

და

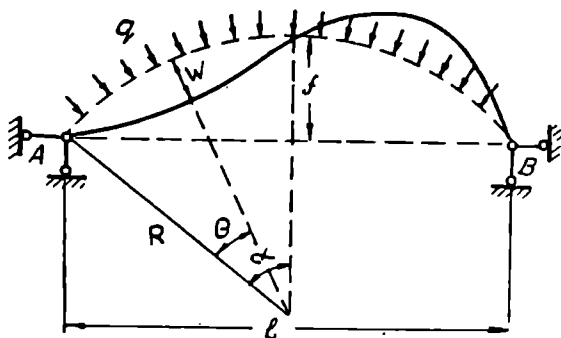
$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r_0},$$

მივიღებთ გაღუნული ღერძის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = -\frac{Mr_0^2}{EI}. \quad (200)$$

მივიღეთ ბუსინესკის ცნობილი განტოლება მცირე სიმრუდის ძელებისათვის. თუ შევიტანთ $r_0 = \infty$, მივიღებთ სწორი ძელის გაღუნული ღერძის დიფერენციალურ განტოლებას.

ჰიდროსტატიკური დაწოლის შემთხვევაში წრიული თაღის ღერძი ემთხვევა წნევის მრუდს და, თუ მხედველობაში არ მივიღებთ თაღის დრეკად შეკუმშვას, ყველა კვეთში ადგილი აქვს ცენტრალურ კუმშვას. როდესაც დატვირთვის ინტენსიურობა q მიაღწევს კრიტიკულ მნიშვნელობას $q_{კრ}$, თაღი კარგავს მდგარობას და მიიღებს უსასრულოდ მცირე გაღუნვას (ნახ. 88).



ნახ. 88.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ წრიულ თაღში ჰიდროსტატიკური დაწოლის დროს, ნორმალური ძალა თაღის ნებისმიერ კვეთში მუდმივია:

$$N = qR.$$

დეფორმაციის შემდეგ ნორმალური ძალა იმოკმედებს ექსცენტრიულად და მღუნავი მომენტი ნებისმიერ კვეთში

$$M = Nw = qRw,$$

სადაც w არის თაღის ღერძის გადაადგილება რადიალური მიმართულებით.

ბუსინესკის განტოლება (200) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = -\frac{qR^3 w}{EI}$$

ან

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{qR^3}{EI}\right) w = 0.$$

თუ აღვნიშნავთ

$$k = \sqrt{1 + \frac{qR^3}{EI}} \quad (201)$$

დიფერენციალური განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + k^2 w = 0. \quad (202)$$

202-ე ერთგვაროვანი განტოლების ინტეგრალი იქნება:

$$y = C_1 \sin k\theta + C_2 \cos k\theta. \quad (203)$$

ირიბად სიმეტრიული დეფორმაციის შემთხვევაში (ნახ. 88) გადღუნვის წერტილი შუაშია და სასაზღვრო პირობები იქნება:

$$1) \text{ როცა } \theta=0 \quad w=0,$$

$$2) \text{ როცა } \theta=\alpha \quad w=0.$$

მივიღებთ

$$C_2=0,$$

$$C_1 \sin k\alpha=0.$$

$C_1 \neq 0$, რადგან ეს მოგვცემს ტრივიალურ გადაწყვეტას, მაშასადამე
 $\sin k\alpha=0$.

მინიმალურ კრიტიკულ დატვირთვის მოგვცემს ტოლობა:

$$k\alpha=\pi$$

ან

$$\alpha \sqrt{1 + \frac{qR^3}{EI}} = \pi,$$

აქედან

$$q_{კრ} = \frac{EI}{R^3} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) = K \frac{EI}{R^3}, \quad (204)$$

სადაც

$$K = \frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1.$$

კრიტიკული გრძივი ძალა იქნება:

$$N_{კრ} = q_{კრ} R = \frac{EI}{R^2} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) = K \frac{EI}{R^2}. \quad (204')$$

მე-5 ცხრილში მოყვანილია K სიდიდეები α კუთხის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის.

ცხრილი 5

K სიდიდე ორხახსრიანი თაღისათვის						
2α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
K	143	35	15	8	4,76	3

კერძო შემთხვევაში, ნახევარწრიული თაღისათვის $\alpha = \frac{\pi}{2}$ და მივიღებთ:

$$q_{კრ} = 3 \frac{EI}{R^3}. \quad (204'')$$

ზემოაღნიშნული ფორმულა სამართლიანია მრგვალი ჩაკეტილი რგოლისათვისაც. უმცირეს კრიტიკულ ძალას იძლევა ირიზად სიმეტრიული გაღუნვა და ამიტომ გაღუნვის სიმეტრიულ ფორმას ჩვენ არ ვიხილავთ.

დამრეცი თაღებისათვის, როდესაც α მცირე სიდიდეა 204-ე ფორმულაში ერთიანი შეიძლება უკუვაგდოთ და კრიტიკული დატვირთვა გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$q_{კრ} = \frac{\pi^2 EI}{R^3 \alpha^2}.$$

სათანადოდ კრიტიკული გრძივი ძალა იქნება:

$$N_{კრ} = q_{კრ} R = \frac{\pi^2 EI}{R^2 \alpha^2}.$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ

$$R \alpha = \frac{S}{2},$$

სადაც S არის თაღის რკალის სიგრძე, მაშინ

$$N_{კრ} = \frac{4 \pi^2 EI}{S^2}. \quad (205)$$

მეშასადამე, დამრეცი თაღებისათვის $\left(\frac{f}{l} \leq \frac{1}{4}\right)$ კრიტიკული გრძივი ძალა თაღში გამოითვლება, როგორც სახსროვნად ჩამაგრებულ ძელში სიგრძით $\frac{S}{2}$. როგორც ეხედეთ დაბალ ორსახსრიან თაღში კრიტიკული ძალა ოთხჯერ შეტია, ვიდრე თაღის გასწორებული სიგრძის მქონე სახსროვნად დაყრდნობილ სწორ კოჭში. ეს წესი შეიძლება გამოვიყენოთ აგრეთვე ბოლოების ჩამაგრების სხვა შემთხვევებშიც და პარაბოლურ თაღებშიც. ეს არის თაღის გასწორების პრინციპი, რომელიც აღნიშნული იყო პროფ. ი. შტაერმანის მიერ.

§ 84. წრიული უსახსრო თაღის ანაბარიზი მდგარდობაზე ჰიპროსტატიკური დაწოლის დროს

ისე როგორც ორსახსრიან თაღში, აქაც თაღის ღერძი ემთხვევა წნევის მრუდს და ადგილი აქვს ცენტრალურ კუმშვას. როდესაც დატვირთვა მიადწევს კრიტიკულ მნიშვნელობას თალი გაიღუნება, როგორც ეს 89-ე ა ნახაზზეა ნაჩვენები.

ირიზად სიმეტრიული დეფორმაციის დროს გადაღუნვის წერტილი იქნება კლიტეში და საყრდენებზე განვითარებული მომენტები ერთმანეთის ტოლია. უსახსრო თალი ვაქციოთ ორსახსრიანად და საყრდენებზე ვამოქმედოთ უცნობი მომენტები M_0 (ნახ. 89 ბ).

მლუნავი მომენტი ნებისმიერ კვეთში კლიტიდან x მანძილზე შედგება ორი ნაწილისაგან. ორსახსრიანი თაღის მლუნავ მომენტს მიმატებული საყრდენი მომენტებისაგან გამოწვეული დამატებითი მომენტი

$$M = qRw + \frac{2M_0}{l} \left(\frac{l}{2} - x \right) - M_0 = qRw - M_0 \frac{2x}{l}.$$

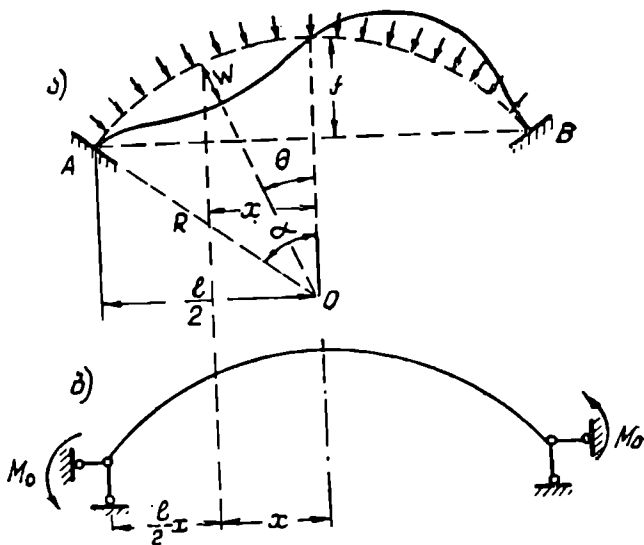
როგორც ნახაზიდან ჩანს

$$x = R \sin \theta,$$

$$l = 2R \sin \alpha$$

და ამიტომ მღუნავი მომენტი ნებისმიერ კვეთში

$$M = qRw - M_0 \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}.$$



ნახ. 89.

გაღუნული ღერძის დიფერენციალური განტოლება (200) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{d^2 w}{d \theta^2} + w = - \frac{R^2}{EI} \left(qRw - M_0 \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \right)$$

ან

$$\frac{d^2 w}{d \theta^2} + w \left(1 + \frac{R^2 q}{EI} \right) = \frac{M_0 R^2}{EI} \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}.$$

აღნიშნოთ:

$$k = \sqrt{1 + \frac{R^2 q}{EI}}, \quad (206)$$

$$A = \frac{M_0 R^2}{EI \sin \alpha}.$$

მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + k^2 w = A \sin \theta. \quad (207)$$

არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ინტეგრალი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$w_1 = B \sin \theta.$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევითვალთ 207-ე განტოლებაში, ვიპოვით B :

$$-B \sin \theta + k^2 B \sin \theta = A \sin \theta,$$

საიდანაც

$$B = \frac{A}{k^2 - 1}.$$

მთლიანი ინტეგრალი იქნება:

$$w = C_1 \sin k\theta + C_2 \cos k\theta + \frac{A}{k^2 - 1} \sin \theta. \quad (208)$$

ინტეგრალის მუდმივების C_1 , C_2 და A გასაგებად შევადგინოთ სასაზღვრო პირობები:

1. როცა $\theta = 0$ $w = 0$,

2. როცა $\theta = \alpha$ $w = 0$,

3. როცა $\theta = \alpha$ $\frac{dw}{d\theta} = 0$ (რადგან $\frac{dw}{ds} = 0$).

მივიღებთ:

$$C_2 = 0,$$

$$C_1 \sin k\alpha + \frac{A}{k^2 - 1} \sin \alpha = 0,$$

$$C_1 k \cos k\alpha + \frac{A}{k^2 - 1} \cos \alpha = 0.$$

C_1 და A რომ ნულისაგან განსხვავდებოდეს ამ განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი უნდა გაუტოლოთ ნულს:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin k\alpha & \frac{1}{k^2 - 1} \sin \alpha \\ k \cos k\alpha & \frac{1}{k^2 - 1} \cos \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

თუ შევკვეცავთ მეორე სვეტის კოეფიციენტებს და გავშლით დეტერმინანტს, მივიღებთ:

$$\sin k\alpha \cos \alpha - k \cos k\alpha \sin \alpha = 0$$

ან
$$\operatorname{tg} k\alpha = k \operatorname{tg} \alpha, \quad (209)$$

რაც მდგრადობის განტოლებაა და ამოიხსნება ტანგენსების ცხრილის საშუალებით შერჩევის გზით.

206-ე განტოლებიდან შივილებთ:

$$q_{კრ} = \frac{EI}{R^3} (k^2 - 1) = K \frac{EI}{R^3} \quad (210)$$

სადაც

$$K = k^2 - 1.$$

კრიტიკული გრძივი ძალა

$$N_{კრ} = q_{კრ} R = \frac{EI}{R^2} (k^2 - 1) = K \frac{EI}{R^2} \quad (210')$$

მე-6 ცხრილში მოყვანილია K მნიშვნელობები α კუთხის სხვადასხვა სიდიდისათვის.

ცხრილი 6

K სიდიდე უსახსრო თაღისათვის						
2 α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
K	194,0	73,3	32,4	18,1	11,5	8,0

ისე როგორც ორსახსრიან თაღში, უსახსრო დამრეც თაღშიც $\left(\frac{f}{l} \leq \frac{1}{4}\right)$

შეიძლება გამოიყენოთ მიახლოებითი ფორმულა, რომელიც ემყარება თაღის გასწორების პრინციპს. ნახვეართალი შეიძლება წარმოვიდგინოთ ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებულ და მეორეთი სახსროვნად დაყრდნობილ სწორ ძელად (ნახ. 10) და გამოვთვალოთ კრიტიკული გრძივი ძალა მიახლოებით:

$$N_{კრ} = \frac{2.046 \pi^2 EI}{\left(\frac{S}{2}\right)^2} \approx \frac{8 \pi^2 EI}{S^2} \quad (211)$$

უსახსრო თაღში კრიტიკული ძალა ორჯერ უფრო მეტია, ვიდრე ორივე ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებულ სწორ ძელში, რომელსაც თაღის გასწორებულ სიგრძის მალი აქვს.

§ 25. წრიული სამსახსრიანი თაღის მდგრადობა ჰიდროსტატიკური დაწოლის დროს

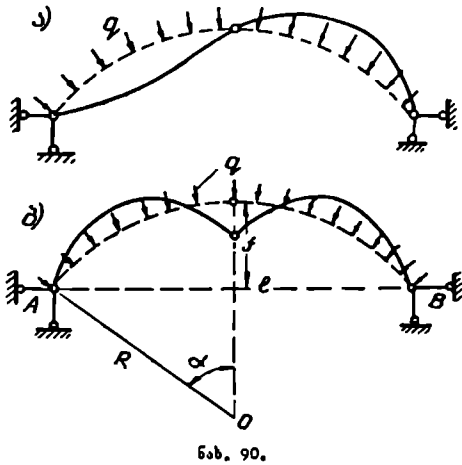
სამსახსრიანი თაღში ისე, როგორც ორსახსრიან და უსახსროში, თაღის ღერძი ემთხვევა წნევის მრუდს და ადგილი აქვს ცენტრალურ კუმშვას. ჰიდროსტატიკური დაწოლის დროს სამსახსრიანი თაღის მდგრადობის დაკარგვა მოსალოდნელია ორი ფორმით—ირიბად სიმეტრიული (ნახ. 90 ა) და სიმეტრიული (ნახ. 90 ბ). პირველ შემთხვევაში კრიტიკული დატვირთვა გამოითვლება ისევე, როგორც ორსახსრიან თაღში (ფორ. 204).

თეორიულად და ცდებით დამტკიცებულია, რომ სიმეტრიული ფორმით გაღუნვის შემთხვევაში კრიტიკული ძალა გაცილებით უფრო ნაკლებია, ვიდრე 204-ე ფორმულით მიღებული ძალა. მდგრადობის დაკარგვის მეორე ფორმის შესწავლის საფუძველზე, მიღებულია:

$$q_{j,r} = \frac{4u^2 - \alpha^2}{\alpha^2} \frac{EI}{R^3}, \quad (212)$$

სადაც α არის ცენტრალური კუთხის ნახევარი,

$$u = \frac{k\alpha}{2} - \text{მდგრადობის განტოლების } \frac{\text{tg } u - u}{u^3} = \frac{4(\text{tg } \alpha - \alpha)}{\alpha^3} \text{ ფესვი.}$$



ნახ. 90.

თუ აღვნიშნავთ, რომ

$$K = \frac{4u^2 - \alpha^2}{\alpha^2},$$

მაშინ

$$q_{j,r} = K \frac{EI}{R^3}, \quad (212')$$

$$N_{j,r} = q_{j,r} R = K \frac{EI}{R^2}.$$

შეღარების მიზნით, მდგრადობის კოეფიციენტის K მნიშვნელობა ყველა განხილულ თაღებისათვის (α დამოკიდებულებით) მოყვანილია მე-7 ცხრილში.

K მნიშვნელობები ცხრილი 7

2α თაღი	30°	60°	90°	120°	150°	180°
უსახსრო	294,0	73,3	32,4	18,1	11,5	8,0
ორსახსრიანი	143,0	32,0	15,0	8,0	4,76	3,0
სამსახსრიანი	108,0	27,6	12,0	6,75	4,32	3,0

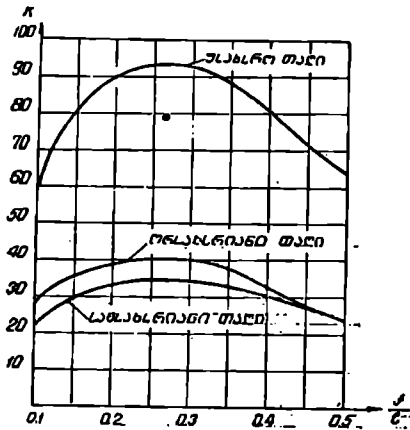
მე-8 ცხრილში მოყვანილია მდგრადობის კოეფიციენტის K მნიშვნელობები $\frac{f}{l}$ ფარლობაზე დამოკიდებულებით.

K მნიშვნელობები

თალი	$\frac{f}{l}$				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
უსახსრო	58,9	90,4	93,4	80,7	64,0
ორსახსრიანი	28,4	39,3	40,9	32,8	24,0
სამსახსრიანი	22,2	33,5	34,9	30,2	24,0

K სიდიდე $\frac{f}{l}$ ფარდობის შუალედი მნიშვნელობისათვის შეიძლება განი-

საზღვროს გრაფიკით (ნახ. 91). გარდა ამისა ეს გრაფიკი ნათელ წარმოდგენას იძლევა, თუ როგორ მოქმედებს საყრდენების ჩამაგრება თალის მუშაობაზე და კრიტიკულ დატვირთვაზე.



ნახ. 91.

§ 20. დრეკად ჩამაგრებული წრიული თალის მდგრადობა
ვიდროსტატიკური დაწოლის დროს

დრეკად ჩამაგრებული თალის გაღუნული ლერძის დიფერენციალური განტოლება ხისტად ჩამაგრებულის მსგავსია. მისი საერთო ინტეგრალი იქნება (ფორ. 208):

$$y = C_1 \sin k\theta + C_2 \cos k\theta + \frac{A}{k^2 - 1} \sin \theta. \quad (213)$$

ხისტად ჩამაგრებული თალისაგან განსხვავებით აქ საყრდენებს შეუძლიათ მობრუნდნენ და ამიტომ სასაზღვრო პირობები იქნება სხვა.

92-ე ნახაზზე ნაჩვენებია დრეკად ჩამაგრებული თალის ძირითადი სისტემა. საყრდენებზე მოქმედებს M_0 მომენტები.

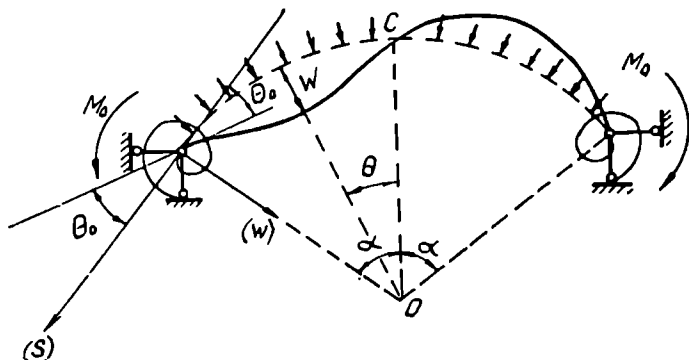
თუ განვიხილავთ მდგრადობის დაკარგვის ირობად სიმეტრიულ ფორმას, მაშინ სასაზღვრო პირობები იქნება:

1. როცა $\theta=0$, $w=0$,
2. როცა $\theta=\alpha$ $w=0$,
3. როცა $\theta=\alpha$ $\frac{dw}{ds} = -\theta_0$.

უკანასკნელი პირობა მოგვცემს:

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{dw}{ds} \cdot \frac{ds}{d\theta} = -\theta_0 \cdot R,$$

სადაც θ_0 არის დრეკადი საყრდენის მოპრუნების კუთხე.



ნახ. 92.

ნიშანი მინუსი აღებულია იმიტომ, რომ θ_0 კუთხე იზომება (S) ღერძის (w) ღერძისაკენ ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

თუ ერთეული მოპრუნების კუთხით გამოწვეულ მომენტს ჩამაგრების ადგილზე აღვნიშნავთ c (დრეკადი საყრდენის სიხისტე), მაშინ მთლიანი მომენტი

$$M_0 = c\theta_0, \text{ აქედან } \theta_0 = \frac{M_0}{c}.$$

მესამე პირობა გამოისახება ასე:

$$\text{როცა } \theta=\alpha, \text{ მაშინ } \frac{dw}{d\theta} = -\frac{M_0}{c}.$$

პირველი სასაზღვრო პირობა მოგვცემს:

$$C_2 = 0.$$

მეორე და მესამე პირობა მოგვცემს:

$$C_1 \sin k\alpha + \frac{A}{k^2 - 1} \sin \alpha = 0,$$

$$C_1 k \cos k\alpha + \frac{A}{k^2 - 1} \cos \alpha = -\frac{M_0}{c} R.$$

ამ ფორმულაში შევიტანოთ A მნიშვნელობა (იხ. § 34)

$$A = \frac{M_0 R^2}{EI \sin \alpha}$$

და გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$C_1 \sin k\alpha + M_0 \frac{R^2}{EI(k^2 - 1)} = 0,$$

$$C_1 k \cos k\alpha + M_0 \left[\frac{R^2}{EI(k^2 - 1)} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{R}{c} \right] = 0.$$

მდგრადობის განტოლება იქნება:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin k\alpha & \frac{R^2}{EI(k^2 - 1)} \\ k \cos k\alpha & \left[\frac{R^2}{EI(k^2 - 1)} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{R}{c} \right] \end{vmatrix} = 0.$$

საბოლოოდ, გამარტივების შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{(k^2 - 1)EI}{Rc} = k c \operatorname{tg} k\alpha$$

აბ

$$1 = \operatorname{tg} \alpha \left[k c \operatorname{tg} k\alpha - \frac{EI(k^2 - 1)}{Rc} \right]. \quad (214)$$

ამ განტოლების მინიმალური ფესვი მოგვცემს საანგარიშო k .

კრიტიკული ძალა გამოითვლება ფორმულით (ფორ. 210):

$$q_{კრ} = \frac{EI}{R^2} (k^2 - 1). \quad (215)$$

214-ე განტოლებიდან შეგვიძლია მივიღოთ მდგრადობის განტოლება ხისტად ჩამაგრებული და ორსახსრიანი თალისათვის, თუ სათანადოდ შევიტანოთ, რომ

$$c = \infty \text{ და } c = 0.$$

§ 17) პარაბოლური თალის მდგრადობა ვერტიკალური თანაბრად- განაწილებული ტვირთის მოქმედების დროს

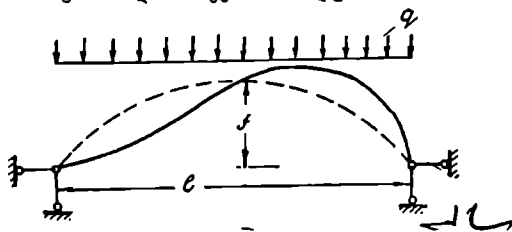
პარაბოლური თალის ღერძი თანაბრად განაწილებული ტვირთის მოქმედების შემთხვევაში ემთხვევა წნევის მრუდს და თალი განიცდის ცენტრალურ კუმშვას. აქ ადგილი აქვს პირველი სახის მდგრადობის დაკარგვას, ე. ი. ცენტრალური კუმშვის მდგრადობის დაკარგვას (ნახ. 93). მდგრადობის თეორიის განხილვა და შესწავლა პარაბოლურ თალებში მოითხოვს რთულ დიფერენციალურ განტოლებების გადაწყვეტას და დაკავშირებულია მათემატიკურ სირთულესთან. ჩვენ მოვიყვანოთ საბოლოო შედეგებს, რომლებიც მიღებულია აკად. ა. დინიკის, პროფ. ა. ლოკშინის და სხვათა მიერ.

კრიტიკული დატვირთვა ყველა სახის თალისათვის გამოვსახოთ ერთი ფორმულით:

$$q_{კრ} = K \frac{EI}{l^3} \cdot D \quad (216)$$

K კოეფიციენტის მნიშვნელობები მუდმივი კვეთის მქონე თაღებისათვის მოცემულია მე-9 ცხრილში.

სამსახსრიანი თალისათვის მოცემულია K ორი მნიშვნელობა: ერთი, როდესაც მდგრადობის დაკარგვა ხდება სიმეტრიული ფორმით, მეორე როდესაც მდგრადობის დაკარგვა ხდება ირიბად სიმეტრიული ფორმით. მიღებული ორი მნიშვნელობიდან საანგარიშოდ აირჩევა მინიმალური.



ნახ. 93.

ცხრილი 9

K მნიშვნელობები

$\frac{f}{l}$	უხასხრო თალი	ორსახსრიანი თალი	სამსახსრიანი თალი	
			სიმეტრიული გაღუნვა	ირიბად სიმეტრიული გაღუნვა
0,1	60,7	28,5	22,5	28,5
0,2	101,0	45,4	39,6	45,4
0,3	115,0	46,5	47,3	46,5
0,4	111,0	43,9	49,2	43,9
0,5	97,4	38,4	—	38,4

ხილვებში ხმარობენ უმთავრესად ცვლადი კვეთის მქონე თაღებს, სადაც კრიტიკული ძალის გამოთვლა რთულდება. ზოგიერთი შემთხვევისათვის ეს ამოცანა გადაწყვეტილია და ჩვენ შეგვიძლია მოვიყვანოთ საბოლოო შედეგები.

პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს შემთხვევებს:

$$I = \frac{I_0}{\cos \varphi} \quad \text{და} \quad d = \frac{d_0}{\cos \varphi} \quad \left(\text{ან } I = \frac{I_0}{\cos^2 \varphi} \right),$$

სადაც I_0 და d_0 წარმოადგენს ინერციის მომენტს და კვეთის სიმაღლეს კლიტეში, ხოლო φ —თალის ლერძის მხების დახრის კუთხეს ჰორიზონტთან.

მე-10 ცხრილში მოყვანილია K მნიშვნელობები ორსახსრიანი თალისათვის, როცა კვეთის ინერციის მომენტი იცვლება ფორმულით:

$$I = \frac{I_0}{\cos \varphi}.$$

K მნიშვნელობები

$\frac{f}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
K	29,74	50,48	60,15	62,0	59,80

თუ შევადარებთ ამ მნიშვნელობებს მუდმივი კვეთის მქონე ორსახსრიანი თაღის მდგრადობის კოეფიციენტებს (მე-9 ცხრილი), შევამჩნევთ, რომ კვეთის ზრდა კლიტიდან ქუსლისაკენ საგრძნობლად ზრდის კრიტიკულ ძალას.

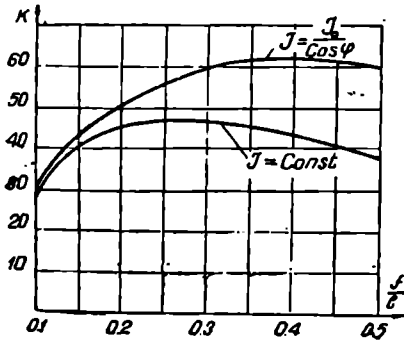
მე-10 ცხრილი გვიჩვენებს, რომ მაქსიმალურ კრიტიკულ ძალას იძლევა $\frac{f}{l}=0,4$ ფარდობა.

მდგრადობის კოეფიციენტის სიდიდე უსახსრო თაღისათვის, როცა კვეთი იცვლება $I = \frac{I_0}{\cos \varphi}$ და $I = \frac{I_0}{\cos^2 \varphi}$ განტოლებით მოყვანილია მე-11 ცხრილში.

ცხრილი 11

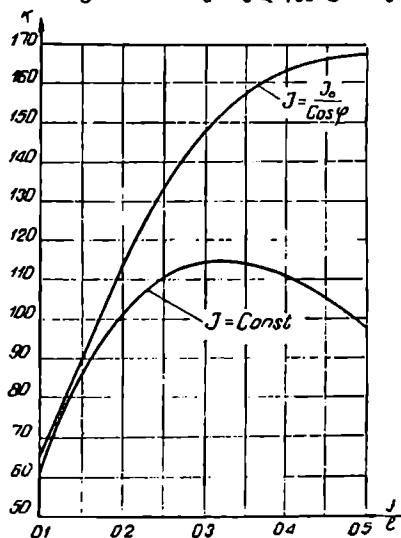
$\frac{f}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$I = \frac{I_0}{\cos \varphi}$	62,54	113,59	147,07	163,52	167,54
$I = \frac{I_0}{\cos^2 \varphi}$	65,77	136,92	214,48	296,73	381,83

94-ე ნახაზზე მოყვანილია კრიტიკული კოეფიციენტის (K) ცვლილების გრაფიკი პარაბოლური ორსახსრიანი თაღისათვის, ხოლო 95-ე ნახაზზე კი — პარაბოლური უსახსრო თაღისათვის. გრაფიკების საშუალებით შეიძლება განისაზღვროს კრიტიკული დატვირთვები შუალედი მნიშვნელობებისათვის.



ნახ. 94.

დაბალ თაღებში კრიტიკული დატვირთვის სიდიდე ნაკლებად არის დამოკიდებული თაღის მოხაზულობაზე და ამიტომ პარაბოლური თაღებისათვის მიღებული შედეგები შეიძლება გამოვიყენოთ სხვა შემთხვევებშიც. კრიტიკული დატვირთვის გამოთვლა შეიძლება გამარტივდეს, თუ გამოვიყენებთ გრაფიკულ მეთოდს, ე. ი. გამოგვეყენოთ მაქსიმალური ჩაღუნვის ფორმულა კრიტიკულ მომენტში (გაღუნვის ფორმას წინასწარ ვირჩევთ) და ვადგენთ მდგრადობის პირობას. მაშასადამე, გადაადგილების მამრავლს უტოლებთ ნულს. გადაადგილების გამოთვლა უმჯობესია შევასრულოთ დრეკადი ტვირთების საშუალებით. ამ მეთოდით პროფ. ა. სმირნოვმა გადაწყვიტა მთელი რიგი ამოცანები.

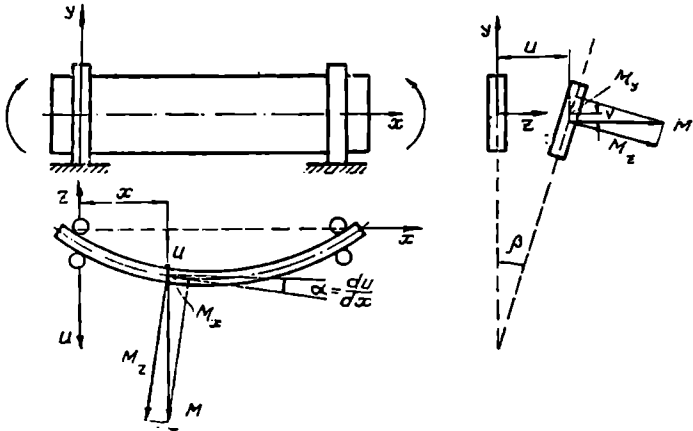


ნახ. 95.

ლუნვის ბრტყელი ფორმის მდგრადობა
(კოჭების გვერდითი გამოღუნვა)

§ 28. ბრტყელი, ვიწრო, სწორკუთხა ფორმის (ზოლის) მდგრადობა სუფთა ლუნვის დროს

ვიწრო სწორკუთხა ზოლის ბოლოებში, თავის სიბრტყეში, მოქმედებს ორი წყვილი ძალა M (ნახ. 96). როდესაც M მიაღწევს თავის კრიტიკულ მნიშვნელობას $M_{კრ}$, ზედა სარტყელში განვითარებული მკუმშავი ძაბვების გამო



ნახ. 96.

ლუნვის ბრტყელი ფორმა აღარ იქნება მდგრადი და ზოლი გამოიღუნება გვერდ-ზე ისე, როგორც ნაჩვენებია ნახაზზე. ბრტყელი ლუნვის მაგიერ მოხდება ლუნვა ორ სიბრტყეში ვერტიკალურ xy და ჰორიზონტალურ xz სიბრტყეში. გარდა ამისა, ადგილი ექნება გრენასაც x ღერძის ირგვლივ. ასეთ შემთხვევებს უწოდებენ ლუნვის ბრტყელი ფორმის მდგრადობის დაკარგვას. ეს მოვლენა ეკუთვნის მდგრადობის დაკარგვას პირველი სახით (ეილერის მიხედვით).

კრიტიკულ მომენტში ადგილი აქვს მცირე გვერდით გამოღუნვას და წყვილძალის ის მინიმალური მნიშვნელობა, რომელიც შესძლებს ამ მდგო-

მარეობის შენარჩუნებას M_{κ} იქნება. კრიტიკული მომენტის გასაგებად გამოვიყენოთ სტატიკური მეთოდი, ე. ი. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები. ზოლის საყრდენები ისეა მოწყობილი, რომ არ ეწინააღმდეგება xy სიბრტყეში მობრუნებას, ხოლო x პერპენდიკულარულ სიბრტყეში ეწინააღმდეგება, ე. ი. გრეხის კუთხე ნულის ტოლია.

მღუნავი მომენტი წარმოვიდგინოთ ვექტორად, რომელიც წყვილძალის პერპენდიკულარულია და დაეშალოთ სამ მდგენელად: x ღერძის მიმართულებით M_x (მგრეხავი მომენტი) და y, z ღერძების მიმართულებით M_y და M_z მდგენელებად (მღუნავი მომენტები). β კუთხის სიმკირის გამო

$$M_y = M \sin \beta = M \beta, \quad M_z = M \cos \beta = M,$$

$$M_x = M \sin \alpha = M \frac{du}{dx}.$$

მივიღეთ წონასწორობის სამი განტოლება—ორი ღუნვის დიფერენციალური განტოლება, მესამე კი გრეხის წონასწორობის დიფერენციალური განტოლება.

თუ EI_y არის ზოლის სიხისტე y ღერძის მიმართ,

EI_z — ზოლის სიხისტე z ღერძის მიმართ,

GC — გრეხის სიხისტე,

როგორც ცნობილია, სწორკუთხა კვეთისათვის

$$C = \frac{bh^3}{3} \left(1 - 0,63 \frac{b}{h} \right).$$

დიფერენციალური განტოლებები დაიწერება შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{aligned} EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} &= M_z = M, \\ EI_y \frac{d^2 u}{dx^2} &= -M_y = -M \beta, \\ GC \frac{d \beta}{dx} &= M_x = M \frac{du}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (217)$$

ნიშნები მიღებულია სათანადოდ კოორდინატთა ღერძების აღებული მიმართულებების და მომენტების ნიშნის მიხედვით (v მიმართულია ზევით და M_z დადებითია. u მიმართულია ქვევით და M_y დადებითია).

მესამე განტოლებაში აღებულია დადებითი ნიშანი იმიტომ, რომ u -ს ზრდასთან ერთად იზრდება β . $\frac{du}{dx}$ და $\frac{d\beta}{dx}$ ერთნაირი ნიშნები აქვთ.

კრიტიკული ძალის გასაგებათ საკმარისია ორი უკანასკნელი განტოლება. ამ ორი განტოლებიდან გამოვრიცხოთ u , ამისათვის მესამე განტოლება გავაწარმოთ x -ით:

$$GC \frac{d^2 \beta}{dx^2} = M \frac{d^2 u}{dx^2}.$$

შევიტანოთ მეორე განტოლებაში, მივიღებთ:

ან

$$GC \frac{d^2 \beta}{dx^2} = - \frac{M^2}{EI_y} \beta$$

თუ

$$GC \frac{d^2 \beta}{dx^2} + \frac{M^2}{EI_y} \beta = 0.$$

მაშინ

$$k = M \sqrt{\frac{1}{EI_y GC}}, \quad (218)$$

$$\frac{d^2 \beta}{dx^2} + k^2 \beta = 0. \quad (219)$$

ამ განტოლების ინტეგრალი იქნება:

$$\beta = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx. \quad (220)$$

სასაზღვრო პირობებია:

$$\text{როცა } x=0 \quad \beta=0,$$

$$\text{როცა } x=l \quad \beta=0,$$

რაც თავს მხრივ მოგვცემს:

$$C_2 = 0,$$

$$C_1 \sin kl = 0.$$

$C_1 \neq 0$, რადგან ამ შემთხვევაში $\beta=0$ და გვერდით გამოლუნვას ადგილი არ აქვს.

მაშასადამე,

$$\sin kl = 0. \quad (221)$$

მინიმალურ კრიტიკულ ძალას მოგვცემს არგუმენტის მნიშვნელობა

$$kl = \pi.$$

218-ე ფორმულის საფუძველზე მივიღებთ:

$$M_{კრ} \sqrt{\frac{1}{EI_y GC}} = \pi,$$

საიდანაც

$$M_{კრ} = \frac{\pi \sqrt{EI_y GC}}{l} = \frac{\pi EI_y}{l} \sqrt{\frac{GC}{EI_y}}. \quad (222)$$

ხისტად ჩამაგრებული ზოლისათვის კრიტიკული მომენტი იქნება:

$$M_{კრ} = \frac{2 \pi EI_y}{l_y} \sqrt{\frac{GC}{EI_y}}. \quad (223)$$

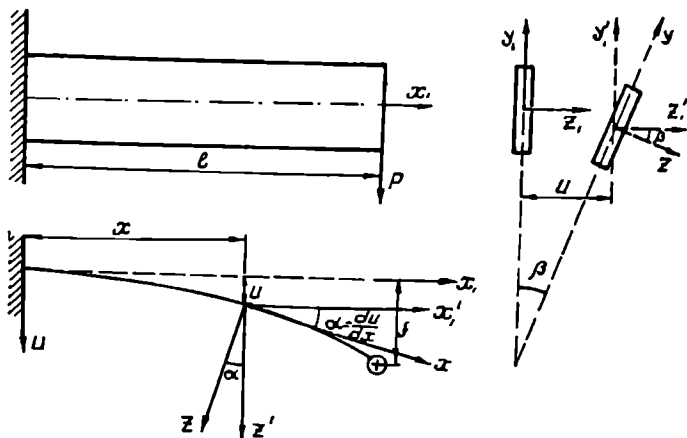
§ 20. ერთი ბოლოთი ჩააპირებული კონსოლური ვიწრო სწორკუთხა სწორკუთხა ფურცლის სახით, სწორკუთხა ფურცლის (ზოლის) მდგრადობა

განვიხილოთ კონსოლური კოჭი ვიწრო სწორკუთხა ფურცლის სახით, რომელზეც მოქმედებს შეუქრსული ძალა P (ნახ. 97). როდესაც P ძალა მიადლევს თავის კრიტიკულ მნიშვნელობას კოჭი გამოიღუნება გვერდზე და ვერტიკალურ ღუნვას დაემატება პირიზონტალური ღუნვა და გრეხა.

პირიზონტალური ღუნვის და გრეხვის დიფერენციალური განტოლებები იქნება:

$$\left. \begin{aligned} EI_y \frac{d^2 u}{dx^2} &= -M_y, \\ GC \frac{d\beta}{dx} &= M_x. \end{aligned} \right\} \quad (224)$$

M_x და M_y გამოთვლილი უნდა იყოს x და y ღერძების მიმართ, რომელთა მიმართულებებიც ცვალებადია მაღის მთელ სიგრძეზე და დამოკიდებულია დეფორმაციაზე. ავირჩიოთ დამხმარე x_1', y_1', z_1' ღერძები, რომლებიც საწყისი ღერძების x_1, y_1, z_1 პარალელურებია.



ნახ. 97.

M_x, M_y და M_z მომენტების მისაღებად ჯერ უნდა გამოვთვალოთ მომენტები დამხმარე ღერძების მიმართ, შემდეგ კი მიღებული მომენტები დავაგეგმილოთ x, y, z ღერძებზე.

მომენტები x_1', y_1' და z_1' ღერძების მიმართ იქნება:

$$M_{x_1'} = -P(l - u),$$

$$M_{y_1'} = 0,$$

$$M_{z_1'} = P(l - x).$$

დავაგეგმილოთ x და y ღერძებზე:

$$M_x = M_{x_1'} \cos(x_1' x) + M_{z_1'} \cos(z_1' x),$$

$$M_y = M_{x_1'} \cos(x_1' y) + M_{z_1'} \cos(z_1' y),$$

$$\cos(x_1' x) = \cos \alpha = 1,$$

$$\cos(z_1' x) = \sin \alpha = \alpha = \frac{du}{dx},$$

$$\cos(x_1' y) = \cos 90^\circ = 0,$$

$$\cos(z_1' y) = \sin \beta = \beta.$$

მაშასადამე,

$$M_x = -P(f-u) - P(l-x) \frac{du}{dx},$$

$$M_y = P(l-x) \beta.$$

მომენტების მნიშვნელობები შევიტანოთ (224) განტოლებაში:

$$EI_y \frac{d^2 u}{dx^2} = -P(l-x) \beta,$$

$$GC \frac{d\beta}{dx} = P(l-x) \frac{du}{dx} - P(f-u).$$

ჰეორე განტოლება გაეწარმოოთ x -ით

$$GC \frac{d^2 \beta}{dx^2} = P(l-x) \frac{d^2 u}{dx^2}$$

და შევიტანოთ პირველში

$$\frac{EI_y GC}{P(l-x)} \frac{d^2 \beta}{dx^2} + P(l-x) \beta = 0$$

ან

$$\frac{d^2 \beta}{dx^2} + \frac{P^2(l-x)^2}{EI_y GC} \beta = 0. \quad (225)$$

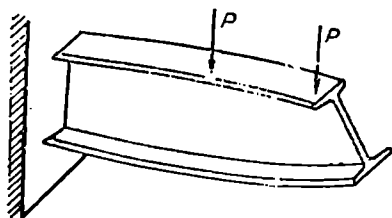
ზემოაღნიშნული განტოლების ინტეგრალი მოიძებნება უსასრულო მწკრივების საშუალებით. მოგვეყვას საბოლოო შედეგი:

$$P_{კრ} = \frac{4,013 EI_y}{l^2} \sqrt{\frac{GC}{EI_y}}. \quad (226)$$

§ 40. ორბინიანი კოვის ლუნვის ბრტყელი ფორმის მდგრადობა

ისე, როგორც წინა შემთხვევებში აქაც, თუ კოჭზე მოქმედებს მღუნავი ძალები, რომლებიც მოთავსებულია კოჭის კედლის სიბრტყეში, შეიძლება მოხდეს ლუნვის ბრტყელი ფორმის მდგრადობის დაკარგვა, ე. ი. მოხდეს კოჭის გვერდითი გამოღუნვა. ვერტიკალურ ლუნვას დაემატება ლუნვა პორიზონტალურ სიბრტყეში და გრება (ნახ. 98), რის გამოც კვეთი მობრუნდება β კუთხით (ნახ. 99).

აღნიშნული ამოცანის გადაწყვეტა წინა ამოცანის ანალოგიურად ხდება, იმ განსხვავებით, რომ აქ უნდა დაემატოს მხები ძაბვები, რომლებიც გაჩნდება გრების შედეგად გამოწვეული თაროების პორიზონტალური ლუნვით. მდგრადობის



ნახ. 98.

დობის მომენტში წარმოშობილი ვარე მგრეხავი მომენტი გაწონასწორდება მისგანვე განვითარებული შინაგანი მხეები ძაბვების მომენტით და თაროების ღუნვისაგან წარმოშობილი მხეები ძალების მომენტით.

პირველი

$$M_1 = GC \frac{d\beta}{dx},$$

სადაც β არის გრეხის კუთხე და $C = \frac{1}{3} \Sigma b \delta^3$.

მეორე

$$M_2 = Ql,$$

სადაც Q არის ღუნვისგან გამოწვეული განივი ძალა თაროებში.

კვეთის β კუთხით მობრუნებით ზედა და ქვედა თაროს ცენტრები გადაადგილდება კვეთის ცენტრის მიმართ $u_1 = \pm \frac{h}{2} \beta$ სიღლით.

თუ მხედველობაში მივიღებთ ეურაკესკის ფორმულას, მაშინ განივი ძალა, რომელიც მოქმედებს ერთ თაროზე იქნება:

$$Q = -EI_1 \frac{d^3 u_1}{dx^3} = -EI_1 \frac{h}{2} \frac{d^3 \beta}{dx^3},$$

სადაც $I_1 = \frac{8b^3}{12}$ არის თაროს

ინერციის მომენტი.

მთლიანი მგრეხავი მომენტი

ტოლია:

$$M_x = M_1 + M_2 = GC \frac{d\beta}{dx} - EI_1 \frac{h^2}{2} \frac{d^3 \beta}{dx^3}. \quad (227)$$

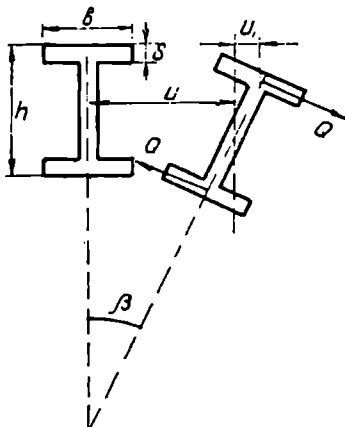
მიღებული ფორმულა ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ დატვირთვის სხვადასხვა შემთხვევისათვის. მაგალითად, სუფთა ღუნვის დროს გეჰონდა 217-ე ფორმულა.

ღუნვის დიფერენციალური განტოლება პორიზონტალური ღერძის მიმართ

$$EI_y \frac{d^2 u}{dx^2} = -M_y = -M \beta$$

და გრეხის დიფერენციალური განტოლება

$$GC \frac{d\beta}{dx} = M_x = M \frac{du}{dx}.$$



ნახ. 99.

ამ უკანასკნელ განტოლებაში შვეიტანოთ 227-ე ფორმულიდან M_x მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$GC \frac{d\beta}{dx} - EI_1 \frac{h^2}{2} \frac{d^2\beta}{dx^2} = M \frac{du}{dx}.$$

გავაწარმოთ x -ით

$$GC \frac{d^2\beta}{dx^2} - EI_1 \frac{h^2}{2} \frac{d^3\beta}{dx^3} = M \frac{d^2u}{dx^2}$$

და შვეიტანოთ $\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{M\beta}{EI_y}$ მნიშვნელობა,

მივიღებთ:

$$\frac{d^4\beta}{dx^4} - \frac{2GC}{h^2 EI_1} \frac{d^2\beta}{dx^2} - \frac{2M^2}{E^2 I_y I_1 h^2} \beta = 0.$$

ეს არის წრფივი მუდმივკოეფიციენტის დიფერენციალური განტოლება, რომლის საერთო ინტეგრალი იქნება:

$$\beta = C_1 \sin mx + C_2 \cos mx + C_3 \operatorname{sh} nx + C_4 \operatorname{ch} nx,$$

სადაც

$$m^2 = \frac{GC}{h^2 EI_1} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2M^2 h^2 I_1}{G^2 C^2 I_y}} \right),$$

$$n^2 = \frac{GC}{h^2 EI_1} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2M^2 h^2 I_1}{G^2 C^2 I_y}} \right).$$

თუ საყრდენების ჩამაგრება ისეთი იქნება, როგორც ეს 96-ე ნახაზზეა ნაჩვენები, მაშინ სასაზღვრო პირობები შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\text{როცა } x=0 \quad \beta=0 \quad \text{და} \quad \frac{d^2\beta}{dx^2}=0,$$

$$\text{როცა } x=l \quad \beta=0 \quad \text{და} \quad \frac{d^2\beta}{dx^2}=0.$$

ეს პირობები მოგვცემს მდგრადობის განტოლებას:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin ml & 2 \operatorname{sh} nl \\ m^2 \sin ml & 2 n^2 \operatorname{sh} nl \end{vmatrix} = 0,$$

საიდანაც

$$(n^2 + m^2) \sin ml \operatorname{sh} nl = 0.$$

ეს განტოლება დაკმაყოფილება როცა $\sin ml = 0$.

უმცირესი ფესვი იქნება:

$$ml = \pi.$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$M_{კრ} = \frac{\pi EI_y}{l} \sqrt{\frac{GC}{EI_y} \left(1 + \frac{\pi^2}{\gamma} \right)}, \quad (228)$$

სადაც

$$\gamma = \frac{2GC l^2}{EI_1 h^2}.$$

228-ე ფორმულა შეიძლება გადაიწეროს ასე:

$$M_{კრ} = K \frac{1}{l^2} \sqrt{EI_1 GC}. \quad (229)$$

მდგრადობის კოეფიციენტის მნიშვნელობა მოცემულია მე-12 ცხრილში.

ცხრილი 12

γ	0,1	1,0	2	4	8	16	32	100
K	31,4	10,36	7,66	5,85	4,70	4,0	3,59	3,29

მოვიყვანოთ საბოლოო შედეგები სხვა სახის დატვირთვისათვის. კერძოდ, თუ კოჭზე მოქმედებს შეყურსული ძალა მალის შუაში, მაშინ

$$P_{კრ} = K \frac{1}{l^2} \sqrt{EI_y GC},$$

ხოლო თუ კოჭზე მოქმედებს მთლიანი თანაბრად განაწილებული ტვირთი, მაშინ

$$(q_b)_{კრ} = K_1 \frac{1}{l^2} \sqrt{EI_y GC}.$$

K და K_1 მნიშვნელობები მოყვანილია მე-13 ცხრილში.

ცხრილი 13

γ	0,4	4	8	16	32	64	160	400	∞
K	86,4	31,9	25,6	21,8	19,6	18,3	17,5	17,20	16,93
K_1	143	53,0	42,6	36,3	32,6	30,5	29,4	28,6	28,3

γ შუალედი მნიშვნელობისათვის მდგრადობის კოეფიციენტი გამოითვლება ინტერპოლაციით.

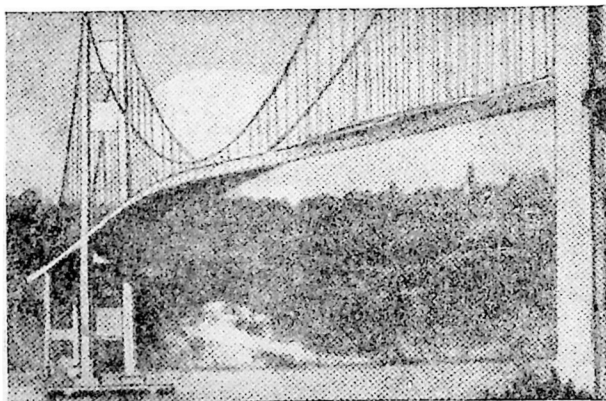
ნაშენთა ანგარიში დინამიკურ ლაბირთვაზე

თ ა ვ ი IX

საერთო ცნობები და ნაშენთა დინამიკის მეთოდები

§(41) ნაშენთა დინამიკის საბანი და ძირითადი ამოცანები

როგორც ვიცი, ძალები მოქმედების ხასიათის მიხედვით შეიძლება იყოს სტატიკური და დინამიკური. ძალის სტატიკური მოქმედების დროს ინერციის ძალები ან სულ არ ვითარდება, ან ვითარდება იმდენად მცირე სიდიდის, რომ მხედველობაში არ მიიღება. დინამიკურა ძალები ისეთი ძალებია, რომლებიც ნაშენზე მოქმედებს უცბად მთელი სიდიდით (დარტყმები) ან იცვლის სიდიდეს და მიმართულებას დროის მიხედვით. დინამიკური ძალების მოქმედების დროს ნაშენი იწყებს რხევას და განვითარებული ინერციის ძალები იმდენად დიდია, რომ მხედველობაში უნდა მივიღოთ. რად-



ნახ. 100.

განაც დინამიკური დატვირთვები იცვლება დროის მიხედვით, ამიტომ განვითარებული დეფორმაციები და ძალები დროის ფუნქციებია.

ნაშენთა დინამიკის ძირითად ამოცანას შეადგენს დინამიკური ძალებისაგან გამოწვეული მაქსიმალური დეფორმაციების და ძალების განსაზღვრა და მათ საფუძველზე ნაშენის დასაშვები ზომების შერჩევა. უნდა აღინიშნოს, რომ, თუ ნაშენთა ანგარიშის მეთოდები სტატიკურ დატვირთვებზე კარგადაა შესწავლილი და მათი გამოყენება კონკრეტულ შემთხვევებში არ იწვევს

არავითარ სირთულეს და მისაწვდომია ყველა ინჟინრისათვის, ნაშენთა ანგარიშის მეთოდები დინამიკურ დატვირთვებზე ჭერ კიდეც არ არის საბოლოოდ ჩამოყალიბებული და ცალკეულ შემთხვევებში მათი გამოყენება მნიშვნელოვან სირთულეს იწვევს. ამიტომ, ხშირად დინამიკური დატვირთვების გაელენას ნაშენზე გამოსახავენ დინამიკური კოეფიციენტის საშუალებით, რომელიც უმეტეს შემთხვევაში ექსპერიმენტალურად განისაზღვრება.

დინამიკური ეფექტის არასწორად განსაზღვრამ შეიძლება გამოიწვიოს ნაშენის დანგრევა. მაგალითად ტაკომის (ამერიკა) ვიგანტური ხიდის (სიგრძე 855 მ) დანგრევა მოხდა ე. წ. პარამეტრული რეზონანსის გამო. მე-100 ნახაზე მოყვანილია ტაკომის ხიდის რხევის სურათი დანგრევის წინ ნახეარი საათით აღრე¹.

§ 4. დინამიკური დატვირთვაი და მათი თავისებურებანი

პრაქტიკაში გვხვდება მრავალი სახის დინამიკური დატვირთვები. მათ შორის მნიშვნელოვანია:

1) დარტყმითი დატვირთვა, რომელიც მოქმედებს ნაშენის გარკვეულ ფიქსირებულ წერტილებში დარტყმების სახით (მცირე ხნით). ასეთი სახის დარტყმით დატვირთვებს იძლევა ორთქლის უროების მოქმედება, ტვირთის უეცარი მოქმედება ნაშენზე ავარიის დროს ან, მაგალითად ჯვავის მოქმედება ნაშენზე, აფეთქებების ტალღების მოქმედება, მოძრავი შემადგენლობის ბორბლის დარტყმები რელსების პირაპირებზე და სხვა. ეს უკანასკნელი წარმოადგენს პერიოდულ დატვირთვას, რომელიც მეორდება დროის გარკვეულ შუალედში;

2) ვიბრაციული დატვირთვა, რომლის სიდიდეც პერიოდულად იცვლება. ასეთ დატვირთვებს ქმნის სხვადასხვა სახის მანქანების და დანადგარების მუშაობა. მდებარეობის მიხედვით უძრავი მანქანები, სხვადასხვა გაუწონასწორებელი მასებით, ბრუნვის დროს იძლევა დროის მიხედვით ცვალებად დატვირთვებს, რომლებიც მოქმედებენ ნაშენზე სხვადასხვა სახით;

3) მოძრავი დატვირთვა, რომელიც მოძრაობს ნაშენზე და იცვლება დროის მიხედვით. ასეთ დატვირთვებს ქმნის მატარებლის მოძრაობა ხიდზე, ხიდური კრანები და სხვა. გარკვეული სიჩქარით მოძრავი დატვირთვა ქმნის სხვადასხვა სახის დინამიკურ ეფექტს, როგორც არის დარტყმები რელსების პირაპირებზე, ვიბრაციული ძალები გამოწვეული მოძრავი შემადგენლობის მასების გაუწონასწორებლობის და მათი ურთიერთ მოქმედების გამო.

ამიტომ ჯამური დინამიკური ეფექტის განსაზღვრა წარმოადგენს დიდ სირთულეს;

4) სეისმიური დატვირთვა, რომელიც ნაშენს გადაეცემა მიწისძვრის შედეგად განვითარებული ბიძგებისა და დარტყმების სახით.

ზემოთ მოყვანილი დინამიკური დატვირთვები შეიძლება მივყუთვნოთ დარტყმით ან ვიბრაციულ დატვირთვას და ამიტომ ნაშენის გაანგარიშებაც ამ ორი სახის დატვირთვაზე უნდა შესრულდეს.

დარტყმითი ძალების მოქმედების შედეგის გამორკვევა შედარებით მარტივია, რადგან იგი დამოკიდებულია დარტყმის ცოცხალი ძალის სიდიდეზე და ნაშენის სიხისტეზე.

¹ არსებობს მეტად საინტერესო დოკუმენტური ფილმი ტაკომის ხიდის რხევისა და დანგრევის შესახებ.

ვიბრაციული დატვირთვის თავისებურებას წარმოადგენს ის, რომ მისი შედეგი შეიძლება გამოვლინდეს უფრო მეტი სიდიდით არა დატვირთვის მოქმედების მახლობლად, არამედ მისგან მოშორებულ ადგილებში. ვიბრაციულმა დატვირთვამ შეიძლება მეზობელი დაუტვირთავი ნაშენის რხევა და დარღვევაც კი გამოიწვიოს. ამ მოვლენის მიზეზი ის არის, რომ ყოველი ნაშენი წარმოადგენს რეზონატორს და შესაძლებელია ვიბრაციული დატვირთვის რხევის ტონი დაემთხვეს ნაშენის რხევის ტონს.

ვიბრაციული დატვირთვა სახიფათოა ნაშენისათვის კიდევ იმის გამო, რომ მისგან გამოწვეული ძალები და დეფორმაციები არ არის დატვირთვის ინტენსიურობის პროპორციული. ერთ შემთხვევაში დატვირთვებმა შეიძლება გამოიწვიოს დიდი ძალები და დეფორმაციები, მეორე შემთხვევაში კი—პირიქით დიდმა დატვირთვებმა შეიძლება გამოიწვიოს მცირე ძალები და დეფორმაციები. ესეც ნაშენის რეზონანტორული თვისებების გამო ხდება. ამ მოვლენების შესასწავლად საჭიროა ნაშენის დინამიკური ანგარიშის შესრულება, რაც ნაშენის რხევების გამოკვლევასა და შესწავლაში მდგომარეობს. რეზონანსის მოვლენას ნაშენებში უნდა ვერიოდოთ.

ჩვენ შევისწავლით იდეალურად დრეკად ხისტ ნაშენებს, რომლებიც რხევის დროს მცირე გადაადგილებას იღებს და განვითარებული ძაბვები არ სცილდება დრეკადობის ზღვარს. ძალთა დამოუკიდებლობის და პროპორციულობის პრინციპიც ძალაში რჩება.

§ 13. ნაშენთა დინამიკის ძირითადი მეთოდები

დინამიკური ანგარიშების ძირითადი მეთოდები ემყარება დალაგების პრინციპს, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: მოძრაობის მდგომარეობა ნებისმიერ მომენტში შეიძლება განვიხილოთ წონასწორობის მდგომარეობად თუ ტანზე მოქმედ ძალებს დაუმატებთ ინერციის ძალებს. მაშასადამე, დინამიკური წონასწორობის განტოლებები, წარმოადგენს სტატიკის განტოლებების განზოგადებას, ე. ი. ტანზე მოქმედი ძალები წონასწორდება ინერციის ძალებით. ნიუტონის კანონის თანახმად ინერციის ძალა წარმოადგენს მოძრავი ტანის მასისა და შებრუნებული ნიშნით აღებულ მისი აჩქარების ნამრავლს.

დინამიკური წონასწორობის განტოლებების პირველი ჯგუფი სიბრტყეზე (მოქმედი ძალების გეგმილების ჯამი სათანადო ღერძებზე) გამოისახება შემდეგნაირად:

$$\sum X - m \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$\sum Y - m \frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

სადაც X, Y არის მოქმედი ძალების გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე, m —ტანის მასა.

ბრუნვითი წონასწორობის განტოლება z ღერძის მიმართ იქნება:

$$\sum M_z - I \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0,$$

სადაც M_z არის მოქმედი გარე ძალების მომენტების ჯამი z ღერძის მიმართ, I —მასის ინერციის მომენტი ბრუნვის z ღერძის მიმართ, θ —მობრუნების კუთხე ბრუნვის z ღერძის მიმართ.

როგორც ცნობილია, მასის ინერციის მომენტი გამოისახება ინტეგრალით:

$$I = \int r^2 dm_x$$

სადაც r არის მასის dm ელემენტის ცენტრიდან ბრუნვის ცენტრამდე მანძილი. ჩაწერის გამარტივების მიზნით, ხშირად, მოყვანილ განტოლებებს გამო-სახავენ შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X - m\ddot{x} &= 0, \\ \Sigma Y - m\ddot{y} &= 0, \\ \Sigma M_z - I\ddot{\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

რადგანაც დალაშქრის პრინციპის თანახმად, მოძრავ სისტემაზე მოქმედი ყველა ძალა (მოცემული რეაქციისა Z და ინერციის) გაწონასწორებულ ძალ-თა სისტემას ქმნის, ამიტომ დინამიკური ამოცანების გადაწყვეტა შეიძლება მოვახდინოთ შესაძლო გადაადგილების პრინციპის საფუძველზეც. ბრტყელი ამოცანის შემთხვევაში, მოქმედი ძალების მუშაობა უსასრულოდ მცირე შესა-ძლო გადაადგილებებზე, რომელიც ნულის ტოლი უნდა იყოს, გამოისახება შემდეგი სახით:

$$\Sigma [(X - m\ddot{x})\delta_x + (y - m\ddot{y})\delta_y] = 0, \quad (2)$$

სადაც δ_x და δ_y არის შესაძლო გადაადგილების გეგმილები x და y ღერძებზე. შესაძლო გადაადგილების ამ განზოგადებული პრინციპის (ფორ. 2) სა-ფუძველზე მიიღება მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები (ლაგრანჟის განტოლებები), რომელთა რიცხვი განსაზღვრავს სისტემის თავისუფლების ხარისხის ტოლია.

დინამიკური ამოცანების გადასაწყვეტად ხშირად იყენებენ ენერგეტიკულ პრინციპს, რომელიც ენერჯის შენახვის კანონს ემყარება:

$$U + V = \text{const}, \quad (3)$$

სადაც U არის სისტემების პოტენციალური ენერჯია,

V — კინეტიკური ენერჯია.

სისტემის პოტენციალური ენერჯია გამოითვლება ან გარე ძალების საშუა-ლებით

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i \quad (4)$$

(სადაც Δ_i წარმოადგენს გადაადგილებას სათანადო ძალის მიმართულებით), ან შიგა ძალების საშუალებით

$$U = \frac{1}{2} \sum \left(\int \frac{M^2 ds}{EI} + \int \frac{N^2 ds}{EF} + k \int \frac{Q^2 ds}{GF} \right). \quad (5)$$

სისტემის კინეტიკური ენერჯია (ცოცხალი ძალა) შეეუტრსული მასების შემთხვევაში გამოითვლება ფორმულით:

$$V = \frac{1}{2} \Sigma m v^2, \quad (6)$$

ხოლო მთლიანი განაწილებული მასების შემთხვევაში—ინტეგრალით:

$$V = \frac{1}{2} \int v^2 dm, \quad (6')$$

სადაც v არის მასის სიჩქარე,

dm — ელემენტარული მასა.

ბრუნვითი რხევების დროს ენერჯიის გამოსათვლელი ფორმულები სახეს იცვლის.

ენერგეტიკულ მეთოდზეა დაფუძნებული მთელი რიგი მიახლოებითი მეთოდები, რომლებსაც ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ.

§ 44. ^{ს/ვ} დრეკადი სისტემების თავისუფლების ხარისხი

რხევითი პროცესების შესწავლა დამოკიდებულია განსახილავი სისტემების თავისუფლების ხარისხზე.

დრეკადი სისტემის თავისუფლების ხარისხი ეწოდება დამოუკიდებელ გეომეტრიულ პარამეტრების რიცხვს,

რომლითაც განისაზღვრება სისტემის ყველა მასის მდებარეობა ნებისმიერად გადაადგილებული მდგომარეობის დროს. რადგანაც ნაშენის შემადგენელი ელემენტები წარმოადგენს განაწილებულ მასებს, ამიტომ სისტემის მდებარეობის გასაგებად საჭიროა ყველა მასის კოორდინატის ცოდნა და მაშასადამე, რეალური ნაშენის თავისუფლების ხარისხი უსასრულობის ტოლია. ამ სახით ამოცანის გადაწყვეტა მეტად რთულია და საანგარიშო სქემის შერჩევისას მიმართავენ მთელ რიგ პირობით გამარტივებას, რის საფუძველზეც ჩვენ განვიხილავთ ერთი, ორი და მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემებს.

101-ე ნახაზზე მოყვანილია ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემები, რომელთა რხევის ფორმის განსაზღვრავად საკმარისია ერთი პარამეტრის ცოდნა. თუ კოჭის მასა უმნიშვნელოა შეყურსულ მასასთან შედარებით (უწონო კოჭი) (ნახ. 101 ა, ბ), მაშინ ამ კოჭის დრეკადი ხაზის გასაგებად საკმარისია ერთი პარამეტრის y (მასის გადაადგილების) ცოდნა. ზამბარაზე ჩამოკიდული ხისტი ტანის (ნახ. 101 გ), რომლის მასა ზამბარის მასასთან შედარებით ძალიან დიდია, გადაადგილებული მდებარეობა განისაზღვრება ერთი y კოორდინატით და წარმოადგენს აგრეთვე ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სხეულს.

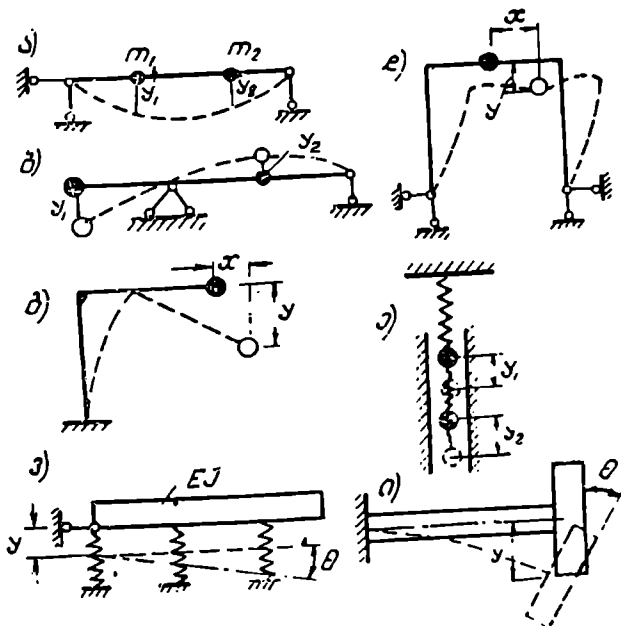
ამავე ჯგუფს ეკუთვნის აბსოლუტურად ხისტი AB ძელი (ნახ. 101 დ),

ნახ. 101.

რომლის ერთი საყრდენი უძრავია, დანარჩენი კი ღრეკალი. სისტემის გადაადგილებული მდგომარეობის გასაგებად საკმარისია ერთი კოორდინატის— ძელის მობრუნების კუთხის θ ცოდნა.

101-ე ე ნახაზზე მოყვანილია უსასრულო სიხისტის მქონე ძელი, რომელზეც მოქმედებს რამდენიმე მასა. აქაც სისტემის მდებარეობა განისაზღვრება ერთი პარამეტრით—ძელის ღრეკის მობრუნების კუთხით θ (ზამბარების მასებს მხედველობაში არ ვიღებთ).

ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონეა აგრეთვე მქნევარა, რომელიც დამაგრებულია უწონო ხისტად ჩამაგრებულ ლილეზე (ნახ. 101 ე) და რომელსაც შეუძლია შეასრულოს ბრუნვითი მოძრაობა ღრეკის ირგვლივ. მქნევარის მდებარეობა განისაზღვრება მობრუნების კუთხით. 101-ე ი ნახაზზე მოყვანილი სისტემის მდებარეობა განისაზღვრება ერთი პარამეტრით y .



ნახ. 102.

ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების მოძრაობა გამოისახება ერთი ფუნქციის საშუალებით:

$$y = y(t)$$

აბ

$$\theta = \theta(t).$$

102-ე ნახაზზე წარმოდგენილია ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემები, რომელთა გადაადგილებული მდებარეობის საპოვნელად საჭიროა ორი გეომეტრიული პარამეტრის ცოდნა. 102-ე ა, ბ ნახაზზე მოყვანილ უწონო კოჭზე მოქმედებს ორი შეყუთრული მასა და სისტემის გადაადგილებული

მდგომარეობა განისაზღვრება y_1 და y_2 გადაადგილების საშუალებით.

ჩარჩოს ერთი შეყურსული მასით (ნახ. 102 გ, დ) აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი, რადგან მისი დეფორმირებული მდგომარეობა განისაზღვრება ორი x და y კოორდინატით.

102-ე ე ნახაზზე გამოსახული სისტემა შედგება ორი მასისა და ორი ზამბარისაგან, რადგან ზამბარების მასა უმნიშვნელოა, ამიტომ ამ სისტემასაც ორი თავისუფლების ხარისხი აქვს.

დრეკად საყრდენებზე მდებარე ხისტ დისკოს (ნახ. 102 ვ) გადაადგილებული მდებარეობის საპოვნელათაც საჭიროა ორი კოორდინატის (y და θ) ცოდნა. 102-ე ი ნახაზზე მოყვანილ სისტემის განხილვისას უნდა გვახსოვდეს, რომ ტვირთის მობრუნების დროს განვითარებული მომენტის უგულვებლყოფა არ შეიძლება და ამიტომ ტვირთის მდებარეობა განისაზღვრება გადაადგილების და მობრუნების კუთხის საშუალებით (y და θ), მაშასადამე, ამ სისტემასაც ორი თავისუფლების ხარისხი აქვს.

საზოგადოდ, ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების მოძრაობა განისაზღვრება ორი ფუნქციის საშუალებით:

$$y_1 = y_1(t), \quad y_2 = y_2(t)$$

ან

$$y = y(t) \quad \text{და} \quad \theta = \theta(t).$$

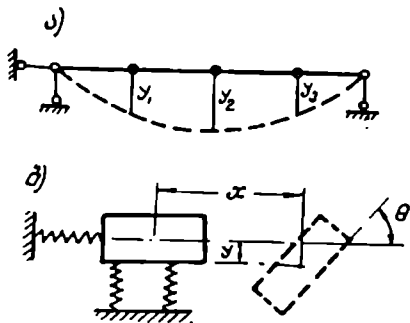
სამი თავისუფლების ხარისხის მქონეა 103-ე ა, ბ ნახაზზე

წარმოდგენილი სისტემები, რადგან მათი გადაადგილებული მდგომარეობის საპოვნელად საჭიროა სათანადოდ y_1, y_2, y_3 და x, y და θ კოორდინატების ცოდნა.

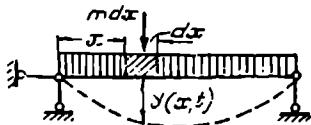
ყოველგვარი სისტემა თანაბრად განაწილებული მასით (ნახ. 104) შეიძლება წარმოვიდგინოთ უსასრულო რაოდენობის ელემენტარულ mdx მასებად და ამიტომ მისი თავისუფლების ხარისხი უსასრულობის ტოლია.

თავისუფლების ხარისხის შეუცდომლად გამოსარკვევად შეიძლება მოვიქცეთ ასე: ბმების მოწყობის საშუალებით სისტემის ყველა მასას მოუხსნოთ გადაადგილების საშუალება. ბმების ის მინიმალური რიცხვი, რომელიც საჭირო გახდება ყველა მასის დასამაგრებლად მოგვეცემს თავისუფლების ხარისხს.

მაგალითად, 105-ე ა, ბ ნახაზზე მოყვანილი ჩარჩოების ერთი მახის გადაადგილების მოსასპობად საჭიროა ორ-ორი ლერო, რადგან მასებს შეუძლიათ გადაადგილდნ ორი მიმართულებით. 105-ე გ ნახაზზე წარმოდგენილი ჩარჩოს სამი მასის გადაადგილების მოსასპობად საჭიროა 4 ლერო, რადგან m_1 და m_2 მასებს შეუძლიათ გადაადგილდნ მხოლოდ პორიზონტალურად. განხილულ



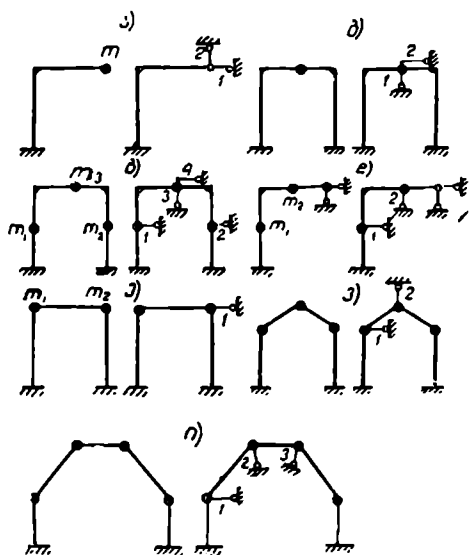
ნახ. 103.



ნახ. 104.

შემთხვევებში გადაადგილების მოსასპობად საკირო მშენებლის რიცხვი სკარბობს მასების რიცხვს და მაშასადამე, თავისუფლების ხარისხი მასების რიცხვზე მეტია.

105-ე დ და ე ნახაზზე მოყვანილია სისტემები ორ-ორი მასით,



ნახ. 105.

პირველს აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი, მეორეს—ერთი. როგორც ვხედავთ, პირველ შემთხვევაში თავისუფლების ხარისხი ემთხვევა მასების რიცხვს, მეორეში კი მასზე ნაკლებია. მასების რიცხვი აღმატება თავისუფლების ხარისხს 105-ე ვ, ი ნახაზზე წარმოდგენილ სისტემებშიც.

განხილულ მაგალითებიდან ცხადია, რომ თავისუფლების ხარისხი ყოველთვის არ ემთხვევა მასების რიცხვს, ერთ შემთხვევაში ნაკლებია მასზე, მეორეში კი მეტია.

უნდა აღინიშნოს, რომ რეალური დრეკადი სისტემის განხილვა ამა თუ იმ თავისუფლების ხარისხით პირობითია და დამოკიდებულია დინამიკური ძალების ხა-

სიათზე. ჩვენ, რომ მიგველო მხედველობაში მოხდეს, მაშინ თავისუფლების ხარისხი მნიშვნელოვნად გაიზარდებოდა.

საანგარიშო სქემის არჩევა და, მაშასადამე თავისუფლების ხარისხი, დამოკიდებულია აგრეთვე ანგარიშის სიზუსტეზე, რომელიც დაიშევა ამა თუ იმ ნაშენისათვის.

რხევითი პროცესების შესწავლა დამოკიდებულია თავისუფლების ხარისხზე და რთულდება მის ზრდასთან ერთად და ამიტომ დაიწყოთ ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების შესწავლით. ამ უმარტივესი ამოცანის განხილვა საშუალებას მოგვცემს შევისწავლოთ ზოგიერთი საერთო კანონები, რომელსაც ადგილი ექნება რთულ შემთხვევებშიც.

თ ა ვ ი X

ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების თავისუფალი რხევა



§ 46. ღრეპაღ უფონო სისტემაჲა მოჰყვადი ტვირთის თავისუფალი რხევა

რეალურ სისტემისაგან განსხვავებით ჩვენ განვიხილოთ ე. წ. კონსერვატიული სისტემა ე. ი. ისეთი სისტემა, სადაც ადგილი არა აქვს რხევების შემსუსტებელ ფაქტორებს (შიგა და გარე ხახუნი, გარემოს წინააღმდეგობა).

ვთქვათ, რომ ორ საყრდენზე მდებარე კოჭზე მოქმედებს ძალა $P=mg$. დრეკადი დეფორმაციის განვითარების შემდეგ ტვირთი მიიღებს გარკვეულ მდებარეობას 1 (ნახ. 106). ამ მდგომარეობაში ტვირთი იმყოფება წონასწორობაში— P ძალას აწონასწორებს დეფორმაციისადმი წინააღმდეგობის ძალა S .

დაუშვათ, რომ წინააღმდეგობის ძალა S პროპორციულია გადაადგილების $S=c\Delta$, რომელსაც ყოველთვის გადაადგილების საწინააღმდეგო მიმართულება აქვს.

თუ ჩავთვლით რომ $\Delta=1$, მაშინ $S=c$. ამრიგად, კოეფიციენტი c წარმოადგენს ძალას, რომელსაც შეუძლია გამოიწვიოს ერთეულის ტოლი გადაადგილება თავისივე მიმართულებით.

თუ გამოვიყენებთ გადაადგილების აღნიშვნებს, რომელიც მიღებულია სამშენებლო მექანიკაში, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\Delta = P\delta_{11} = c\delta_{11} = 1,$$

საიდანაც

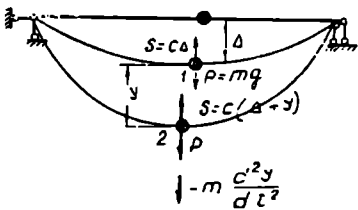
$$c = \frac{1}{\delta_{11}}. \tag{7}$$

კოეფიციენტი c ახასიათებს სისტემის სიხისტეს და მას სიხისტის კოეფიციენტი ეწოდება.

მასის წონასწორობის პირობა პირველ (გაჩერებულ) მდგომარეობაში მოგვცემს:

$$c\Delta - P = 0. \tag{8}$$

ტვირთი რაიმე ძალით ერთი წამით გამოვიყვანოთ წონასწორობის მდგო-



ნახ. 106.

მარეობიდან და ეს ძალა იმწამსვე მოვაშორით. სისტემა დაიწყებს რხევას წონასწორობის მდგომარეობის ირგვლივ. ასეთ რხევას თავის უფალი რხევა ეწოდება.

განვიხილოთ მოძრავი ტვირთის დინამიკური წონასწორობის პირობა რომელიმე მომენტში, როცა ტვირთი გადაადგილდა 2 წერტილში y მანძილით (ნახ. 106).

ამ მომენტში ტვირთზე მოქმედებს: წინააღმდეგობის ძალა $c(\Delta + y)$, ტვირთის წონა P და დაღმარების პრინციპის თანახმად, ტვირთის ინერციის ძალა $-m \frac{d^2 y}{dt^2}$. მაშასადამე,

$$c(\Delta + y) - P - \left(-m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0.$$

მე-8 ფორმულის თანახმად მივიღებთ:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + cy = 0. \quad (9)$$

საზოგადოდ, წინააღმდეგობის საწყისი ძალა $c\Delta$ და P ერთმანეთს აწონასწორებს და შემდეგში დინამიკური წონასწორობის განტოლების შედგენისას მხედველობაში აღარ მივიღებთ.

ამრიგად, მოძრავ ძალაზე ნებისმიერ მომენტში მოქმედებს ორი ურთიერთ გამაწონასწორებელი ძალა: დეფორმაციისადმი წინააღმდეგობის ძალა $S = cy$ და ინერციის ძალა $-m \frac{d^2 y}{dt^2}$.

მე-9 განტოლება გადაწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c}{m} y = 0.$$

საბოლოოდ, კონსერვატიული სისტემის თავისუფალი რხევის განტოლება იქნება:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \varphi^2 y = 0, \quad (10)$$

სადაც

$$\varphi^2 = \frac{c}{m} = \frac{1}{m\delta_{11}} = \frac{g}{P\delta_{11}} = \frac{g}{\Delta_{\text{სტ}}}. \quad (11)$$

$\Delta_{\text{სტ}}$ წარმოადგენს სისტემის სტატიკურ გადაადგილებას $P = mg$ ძალის გასწვრივ.

მე-10 განტოლების საერთო ინტეგრალი იქნება:

$$y = C_1 \sin \varphi t + C_2 \cos \varphi t. \quad (12)$$

ინტეგრალის მუდმივები C_1 და C_2 განისაზღვრება საწყისი პირობებიდან, რომლებიც წინასწარ იქნება მოცემული ამოცანის ხასიათის მიხედვით. ვთქვათ საწყის მომენტში ადგილი აქვს როგორც გადაადგილებას, ისე სიჩქარეს, ე. ი. როცა $t=0$, მაშინ

$$y = y_0 \quad \text{და} \quad \frac{dy}{dt} = v_0.$$

მე-12 განტოლებიდან მივიღებთ:

$$C_1 = \frac{y_0}{\varphi} \quad \text{და} \quad C_2 = y_0.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ მე-12 განტოლებაში გვექნება:

$$y = \frac{y_0}{\varphi} \sin \varphi t + y_0 \cos \varphi t. \quad (13)$$

გადაადგილების გამოსახულების გამარტივების მიზნით შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_0}{\varphi} &= A \cos \lambda, \\ y_0 &= A \sin \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

მაშინ მივიღებთ:

$$y = A \cos \lambda \cdot \sin \varphi t + A \sin \lambda \cdot \cos \varphi t = A \sin(\varphi t + \lambda).$$

მაშასადამე, გადაადგილება გამოისახება ფორმულით:

$$y = A \sin(\varphi t + \lambda). \quad (15)$$

თუ y ამ გამოსახულებას შევიტანთ მე-10 განტოლებაში დავრწმუნდებით, რომ ეს არის მისი ამონახსნი.

ამრიგად, მე-12 (ან მე-13) და მე-15 განტოლებები წარმოადგენს ერთი და იგივე მე-10 დიფერენციალური განტოლების გადაწყვეტას. წერტილის მოძრაობას (რომელიც ემორჩილება მე-12 ან მე-15 განტოლებას) უბრალო კარმონიული რხევა ეწოდება.

ამრიგად, ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე მასის თავისუფალი რხევა კარმონიული რხევაა.

მე-14 განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{y_0^2 + \frac{y_0^2}{\varphi^2}} \\ \operatorname{tg} \lambda &= \frac{y_0 \varphi}{y_0}, \quad \text{ან} \quad \lambda = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y_0 \varphi}{y_0}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ძირითადი ცნებები. მე-15 განტოლების საშუალებით შეიძლება აიგოს კარმონიული რხევის გრაფიკი (ნახ. 107).

როცა $t=0$, მაშინ $y = A \sin \lambda = y_0$,

ე. ი. ადგილი აქვს საწყის გადაადგილებას. λ წარმოადგენს რხევის საწყის ფაზას და გამოითვლება მე-16 განტოლებიდან.

რხევითი პრაციესი შეორდება და უბრუნდება პირვანდელ ფაზას ყოველ $\frac{2\pi}{\varphi}$ წაშში.

მართლაც, თუ მე-15 განტოლებაში t მაგიერ შევიტანთ $t_1 = t + \frac{2\pi}{\varphi}$ მივიღებთ იმავე გადაადგილებას:

$$y = A \sin \left[\varphi \left(t + \frac{2\pi}{\varphi} \right) + \lambda \right] = A \sin(2\pi + \varphi t + \lambda) = A \sin(\varphi t + \lambda).$$

დროს, რომლის განმავლობაშიც სრულდება რხევის ერთი მთლიანი ციკლი და წერტილი უბრუნდება საწყის მდგომარეობას, რხევის პერიოდი ეწოდება.

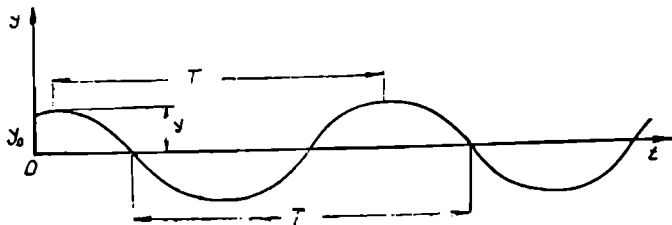
მაშასადამე, რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{\varphi} \quad (17)$$

ამ გამოსახულებიდან მივიღებთ:

$$\varphi T = 2\pi.$$

φ წარმოადგენს რხევათა მთლიანი ციკლების რიცხვს 2π სეკუნდის განმავლობაში და მას რხევის სიხშირე ეწოდება¹.



ნახ. 107.

როგორც ვხედავთ, რხევის სიხშირე, რომელსაც ხშირად წრიულ სიხშირეს უწოდებენ

$$\varphi = \frac{2\pi}{T}. \quad (18)$$

მოდრავი წერტილის უდიდეს გადახრას წონასწორობის მდგომარეობიდან A რხევის ამპლიტუდა ეწოდება და გამოითვლება მე-16 ფორმულით. ამპლიტუდა ახასიათებს რხევის ტალღის სიმაღლეს.

ამპლიტუდის გაორკეცებულ სიდიდეს რხევის გაქანება ეწოდება.

თუ მივიღებთ, რომ საწყის მომენტში გადაადგილებას არა აქვს ადგილი, ე. ი. როცა $t=0$ და $y=0$, მაშინ საწყისი ფაზა $\lambda=0$ და $A = \frac{y_0}{\varphi}$, რხევის განტოლება კი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$y = A \sin \varphi t = \frac{y_0}{\varphi} \sin \varphi t. \quad (19)$$

ამ განტოლებით მიღებული გრაფიკი ნაჩვენებია 108-ე ნახაზზე.

თავისუფალი რხევის ძირითად დამახასიათებელ სიდიდეებს წარმოადგენს რხევის სიხშირე და პერიოდი. შემდეგში ენახეთ, რომ მათი საშუალებით ჩვენ შევასრულებთ სისტემის დინამიკურ ანგარიშს.

საბოლოოდ შეგვიძლია დავწეროთ:

რხევის სიხშირე (წრიული სიხშირე)

$$\varphi = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{10}}} \frac{1}{\varphi_{\text{შ}}}, \quad (20)$$

¹ რხევათა რიცხვს ერთ სეკუნდში პერტი ეწოდება.

რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{\varphi} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{m\delta_{11}} = \sqrt{\frac{\Delta_{\text{სტ}}}{g}} \text{ წმ.} \quad (21)$$

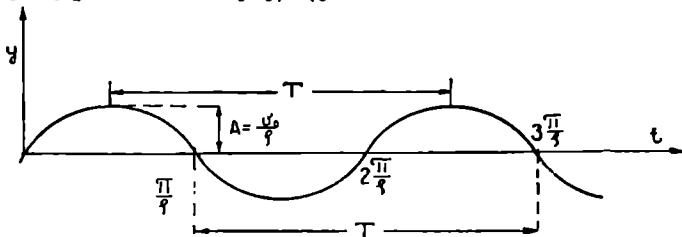
თუ დროის ერთეულად მივიღებთ წუთს (მინუტს) მაშინ, რხევათა რიცხვი წუთში

$$n = \frac{60}{T} = \frac{60}{2\pi} \varphi = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{სტ}}}} \quad (22)$$

ან მიახლოებით

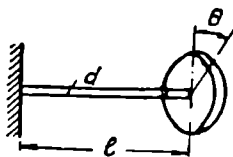
$$n \approx \frac{300}{\sqrt{\Delta_{\text{სტ}}}}. \quad (22')$$

n ტექნიკური სიხშირე ეწოდება.



ნახ. 109.

მე-20 ფორმულიდან ცხადია, რომ თუ სიხისტე მუდმივია, მაშინ რხევის სიხშირე მცირდება მასის (ჩალუნვის) ზრდით და იზრდება სიხისტის ზრდასთან ერთად (მასა მუდმივია). მაშასადამე, ერთი და იგივე P ძალის შემთხვევაში რაც უფრო მეტია კოქის სიხისტე მით უფრო ხშირად ხდება რხევა.



ნახ. 109.

გრეხითი რხევა. განვიხილოთ უწონო ლილევი, რომლის ერთ ბოლოზე მიმაგრებულია მქნევარა (ნახ. 109). მქნევარა თავის სიბრტყეში დაეტვირთოთ მგრეხავი მომენტი და შემდეგ მაშინვე მოვხსნათ. მქნევარა ლილვთან ერთად შეასრულებს თავის უფალ გრეხით რხევას. სისტემას აქვს ერთი თავისუფლების ხარისხი, რადგან მქნევარას მდგომარეობა ნებისმიერ მომენტში განისაზღვრება

მობრუნების კუთხით θ . ლილვის სიხისტის კოეფიციენტი გრეხაზე იყოს c . ამ შემთხვევაში c წარმოადგენს მგრეხავ მომენტს, რომელიც გამოიწვევს ერთეულ მობრუნების კუთხეს (ერთ რადიანას).

ლილვის გრეხისადმი წინააღმდეგობის მომენტი, რომელიც ლილვისაგან გადაეცემა მქნევარას იქნება $c\theta$. დინამიკური წონასწორობის პრინციპის თანახმად ეს მომენტი უნდა გააწონასწოროს ინერციის ძალის მომენტმა ლილვის ღერძის მიმართ (იხ. ფორ. 1):

$$-I \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

მაშასადამე, რ დინამიკური წონასწორობის, ან მოძრაობის განტოლება იქნება:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + c\theta = 0,$$

სადაც I არის მქნევარას მასის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ. განხილულ შემთხვევაში სიხისტის კოეფიციენტი განისაზღვრება გრუნის კუთხის ფორმულიდან

$$\theta = \frac{Ml}{GI_p} = \frac{cl}{GI_p} = 1,$$

საიდანაც

$$c = \frac{GI_p}{l} = \frac{\pi d^4 G}{32 l}.$$

G და I_p ძვრის მოდული და ინერციის პოლარული მომენტია. თუ აღვნიშნავთ, რომ

$$\varphi^2 = \frac{c}{I}, \quad (23)$$

მაშინ, მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \varphi^2\theta = 0, \quad (24)$$

რომელიც ისეთივეა, როგორც მე-10 განტოლება, იმ განსხვავებით, რომ აქ ცვლადია მობრუნების კუთხე θ .

საწყის პირობებად მივიღოთ: როცა $t=0$ $\theta=\theta_0$ (საწყისი მობრუნების კუთხე)

და $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}_0$ (საწყისი კუთხური სიჩქარე).

24-ე განტოლების ინტეგრალი საბოლოოდ მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\theta = \theta_0 \cos \varphi t + \frac{\dot{\theta}_0}{\varphi} \sin \varphi t. \quad (25)$$

გრუნითი რხევის სიხშირე იქნება:

$$\varphi = \sqrt{\frac{c}{I}}. \quad (26)$$

მქნევარას მასის ინერციის მომენტი

$$I = \int r^2 dm = \frac{PR^2}{2g} = \frac{PD^2}{8g},$$

სადაც P და D არის მქნევარას წონა და დიამეტრი.

26-ე ფორმულაში შევიტანოთ c და I მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$\varphi = \sqrt{\frac{GI_p}{II}} = \frac{d^2}{2D} \sqrt{\frac{\pi Gg}{Pl}}. \quad (26')$$

რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{\varphi} = 2\pi \sqrt{\frac{II}{GI_p}} = \frac{4\pi D}{d^2} \sqrt{\frac{Pl}{\pi Gg}}. \quad (27)$$

§ 40. მაგალითები თავისუფალი რხევის სიხშირის განსაზღვრება

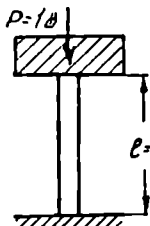
1 მაგალითი. ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამკვრებულ ხის ძელზე მოქმედებს ძალა $P=1000$ კგ (ნახ. 110).

განესაზღვროთ თავისუფალი გრძივი რხევების რიცხვი წამში. ძელის ზომები იყოს 10×10 სმ, $l=2$ მ. დრეკადობის მოდული $E=100000$ კგ/სმ². ძელის წონა უგულებელვყოთ.

გადაწყვეტა. თავისუფალი რხევების რიცხვი გამოითვლება მე-20 ფორმულით:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{სტ}}}}$$

რადგანაც ჩვენ ვიხილავთ გრძივ რხევებს, ამიტომ აქ $\Delta_{\text{სტ}}$ იქნება ძელის გრძივი დეფორმაცია P ძალისაგან გამოწვეული:



$$\Delta_{\text{სტ}} = \frac{Pl}{EF} = \frac{1000 \cdot 200}{100000 \cdot 100} = 0,02 \text{ სმ.}$$

სიმძიმის ძალის აჩქარება

$$g = 981 \frac{\text{სმ}}{\text{წმ}^2},$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{981}{0,02}} = 222 \frac{1}{\text{წმ}}.$$

ნახ. 110.

სიხშირის პერიოდი

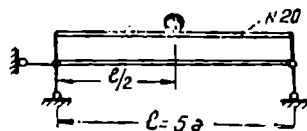
$$T = \frac{2\pi}{\varphi} = \frac{2 \cdot 3,14}{222} = 0,028 \text{ წმ.}$$

2 მაგალითი. ორ საყრდენზე მდებარე კოჭის შუაში მოთავსებულია ძრავი $P=1000$ კგ წონით (ნახ. 111). კოჭის მალის სიგრძე $l=500$ სმ. ორტესებრივ კვეთის (№ 20) ინერციის მომენტი $I=2500$ სმ⁴, დრეკადობის მოდული $E=2100000$ კგ/სმ².

განესაზღვროთ თავისუფალი რხევის სიხშირე და პერიოდი. კოჭის საკუთარი წონა უგულებელვყოთ.

გადაწყვეტა. კოჭის ჩალუნვა შუაში

$$\Delta_{\text{სტ}} = \frac{Pl^3}{48EI}$$



ნახ. 111.

სიხშირე

$$\varphi = \sqrt{\frac{48EI/g}{Pl^3}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 2500 \cdot 981}{1000 \cdot 500^3}} = 44,5 \frac{1}{\text{წმ}}.$$

რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{\varphi} = \frac{6,28}{44,5} = 0,141 \text{ წმ.}$$

ტექნიკური სიხშირე, ე. ი. რხევათა რიცხვი ერთ წუთში

$$n = \frac{60}{T} = \frac{60}{0,141} = 426 \text{ რხევა/წუთში.}$$

8 მაგალითი. ფერმის ქვედა შუა კვანძზე მოქმედებს შეყურსული ძალა $P=2$ ტ. ყველა ღეროს განივი კვეთის ფართობი ერთნაირია და $F=10$ სმ² (ნახ. 112). ფერმის საკუთარი წონა უგულებელვყოთ.

განესაზღვროთ თავისუფალი რხევის სიხშირე.

გადაწყვეტა. სიხშირე გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}$$

გადაადგილება P ძალის ქვეშ, გამოწვეული ერთეული ძალისაგან, გამოითვლება ფორმულით:

$$\delta_{11} = \sum \frac{N_1^2 S}{EF}$$

სადაც N_1 არის ერთეული ძალით გამოწვეული ძალვა ფერმის ნებისმიერ ღეროში.

S — ღერის სიგრძე.

სათანადო ანგარიშის შესრულების შემდეგ მივიღებთ:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EF} [0,5^2 \cdot 400 \cdot 2 + 2(-0,5\sqrt{2})^2 \cdot 200\sqrt{2} + 2(0,5\sqrt{2})^2 \cdot 200\sqrt{2} + 1 \cdot 400] = \frac{1168}{EF}$$

$$m = \frac{P}{g} = \frac{2000}{981} = 2,04 \frac{\text{კგ} \cdot \text{წმ}^2}{\text{სმ}}$$

$$EF = 2100000 \cdot 10 = 2,1 \cdot 10^7 \text{ კგ.}$$

სიხშირე

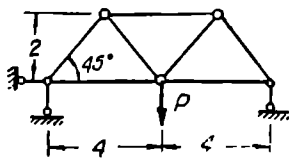
$$\varphi = \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^7}{2,04 \cdot 1168}} = 77 \frac{1}{\text{წმ}}$$

რხევის პერიოდი

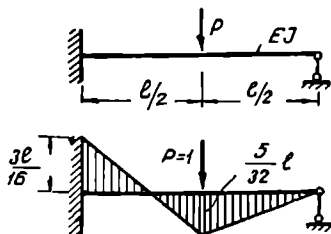
$$T = \frac{2\pi}{\varphi} = \frac{6,28}{77} = 0,081 \text{ წმ.}$$

რხევათა რიცხვი წუთში

$$n = \frac{60}{T} = \frac{60}{0,081} = 740 \text{ რხევა/წუთში.}$$



ნახ. 112.



ნახ. 113.

4 მაგალითი. ვიპოვოთ სტატიკურად ურკვევი კოქის თავისუფალი რხევის სიხშირე (ნახ. 113). კოქის მასა უგულებელვყოთ.

გადაწყვეტა. ავაგოთ $P=1$ ძალით გამოწვეული მღუნავი მომენტის

ეპიურა სტატკურად ურკვევ სისტემაში (ნახ. 113 ბ). ამ ეპიურის გადა-
მრავლება თავისთავზე ვერუშჩაგინის წესით მოგვცემს გადაადგილებას:

$$\delta_{11} = \frac{7l^3}{768 EI}$$

თავისუფალი რხევის სიხშირე

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{768 EI}{7 ml^3}} = \frac{16}{l} \sqrt{\frac{3 EI}{7 ml}}$$

5 მაგალითი. ორმალიან უკრ კოჭზე ხისტი ბერკეტის საშუალებით
მოქმედებს m მასა (ნახ. 114), რომელიც გამოყვანილია წონასწორობის მდგო-
მარეობიდან პორიზონტალური მიმარ-
თულებით. კოჭის მასა უგულვებლევით.

განვსაზღვროთ კოჭის თავისუფა-
ლი რხევის სიხშირე.

გადაწყვეტა. ამოცანა შეიძლე-
ვა გადაწედეს ორი გზით: პირველი,
თუ განვიხილავთ m მასის ბრუნვით
მოძრაობას B წერტილის ირგვლივ
(ნახაზზე წყვეტილი ხაზით ნაჩვენებია
კოჭის გადაადგილებული მდგომარეობა)
და გამოვთვლით ბრუნვითი რხევის სიხ-
შირეს 26-ე ფორმულით:

$$\varphi = \sqrt{\frac{c}{I}}$$

სადაც სიხისტის კოეფიციენტი c იქნება
მომენტი, რომელიც გამოიწვევს ერთე-
ულ მობრუნების კუთხეს, ხოლო I კი

მასის ინერციის მომენტი ბრუნვითი ღერძის მიმართ $I = mh^2$;

მეორე, თუ გამოვთვლით ხაზობრივი რხევის სიხშირეს ფორმულით:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}$$

სადაც δ_{11} არის ერთეული პორიზონტალური ძალისაგან გამოწვეული გადაად-
გილება თავისივე მიმართულებით (m მასა ვერტიკალურად არ გადაადგილდება).

სისტემა ერთჯერ სტატკურად ურკვევია და მისი ანგარიში არავეითარ
სირთულეს არ წარმოადგენს. 114-ე ბ ნახაზზე მოყვანილია ერთეული ძალი-
საგან გამოწვეული ეპიურა, რომლის საფუძველზეც მივიღებთ:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_1} \frac{hl}{4} \frac{2}{3} \frac{h}{2} 2 = \frac{h^2 l}{6 EI_1}$$

სიხშირე

$$\varphi = \sqrt{\frac{6 EI_1}{mh^2 l}}$$

6 მაგალითი. აბსოლუტურად ხისტ კოჭზე, რომლის შუა საყრდენი დრეკადი, მოქმედებს შეეყურსული მასა m (ნახ. 115.) დრეკადი საყრდენის სიხისტე იყოს c (ერთეული გადაადგილების შესაბამის რეაქცია).

გამოთვალეთ თავისუფალი რხევის სიხშირე.

გადაწყვეტა. სისტემაზე გამოქმედოთ ერთეული ძალა და გამოთვალოთ გადაადგილება P ძალის გასწვრივ (ნახ. 115 ბ). დრეკადი საყრდენის გადაადგილება განისაზღვრება განტოლებით:

$$c \cdot y = R,$$

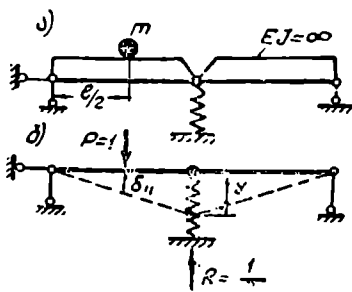
$$y = \frac{R}{c} = \frac{1}{2c}.$$

როგორც ნახაზიდან ჩანს

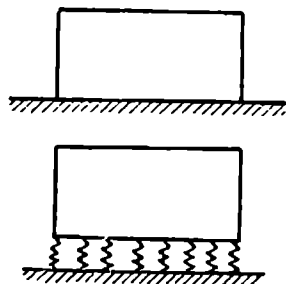
$$\delta_{11} = \frac{y}{2} = \frac{1}{4c}.$$

სიხშირე

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{4c}{m}} = 2 \sqrt{\frac{c}{m}}.$$



ნახ. 115.



ნახ. 116.

7 მაგალითი. გრუნტის დრეკადი შეეკუმშვის კოეფიციენტი $k=0,5$ კგ/სმ². საძირკვლის წონა $P=10$ ტ და ფართობი $F=1$ მ² (ნახ. 116).

განესაზღვროთ საძირკვლის საყუთარი რხევის სიხშირე.

გადაწყვეტა. გრუნტი წარმოვიდგინოთ, როგორც ზამბარა. რომლის სიხისტის კოეფიციენტი იქნება kF . სისტემაზე აქვს ერთი თავისუფლების ხარისხი და ვერტიკალური რხევის სიხშირე განისაზღვრება ფორმულით:

$$\varphi = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{kF}{m}} = \sqrt{\frac{0,5 \cdot 10000 \cdot 981}{10000}} = 22 \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

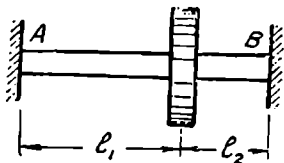
ტექნიკური სიხშირე

$$n = \frac{60}{T} = \frac{60}{2\pi} \varphi = \frac{60}{6,28} 22 = 210 \text{ რხევა/წუთში.}$$

8 მაგალითი. ორი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებულ ლილეზე, რომლის დიამეტრი ტოლია d , მოწყობილია ბორბალი. ბორბლის მასის ინერციის მომენტი ლილვის ღერძის მიმართ იყოს I .

განესაზღვროთ ბორბლის გრეხითი რხევის სიხშირე (ნახ. 117).

გადაწყვეტა. ამოცანა სტატიკურად ურკვევია, რადგან გვაქვს ორი უცნობი M_A და M_B საყრდენი მგრეხავი მომენტი. მათ გასაგებად შევადგინოთ ორი განტოლება:



ნახ. 117.

სტატიკური

$$M - M_A - M_B = 0 \quad (ა)$$

და გეომეტრიული

$$\theta_a = \theta_b,$$

ე. ი. გრეხის კუთხეები ღეროს მარცხენა და მარჯვენა უბანზე ერთმანეთის ტოლია:

$$\frac{M_A l_1}{GI_p} = \frac{M_B l_2}{GI_p}. \quad (ბ)$$

(ა) და (ბ) განტოლებების გადაწყვეტა მოგვცემს:

$$M_A = \frac{M l_2}{l}, \quad M_B = \frac{M l_1}{l}.$$

გრეხის კუთხე მასის მოდების ადგილზე

$$\theta = \frac{M_A l_1}{GI_p} + \frac{M_B l_2}{GI_p} = M \frac{l_1 l_2}{l GI_p}.$$

აქედან, ლილვის სიხისტის კოეფიციენტი გრეხაზე

$$c = \frac{l GI_p}{l_1 l_2}.$$

გრეხის სიხშირე

$$\varphi = \sqrt{\frac{c}{I}} = \sqrt{\frac{l GI_p}{I l_1 l_2}}.$$

სავარჯიშო ამოცანები

განისაზღვროს თავისუფალი რხევის სიხშირე 118-ე ნახაზზე მოყვანილი ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემისათვის. სისტემის წონა მხედველობაში არ მიიღება:

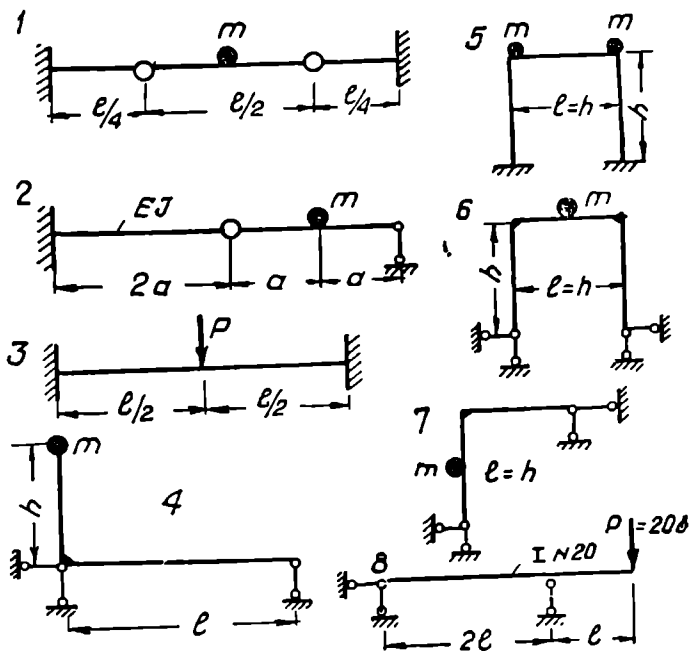
- პასუხები: 1. $\varphi = \sqrt{\frac{192 EI}{m l^3}}$, 2. $\varphi = \sqrt{\frac{6 EI}{17 a^3 m}}$,
 3. $\varphi = \sqrt{\frac{192 EI g}{p l^3}}$, 4. $\varphi = \sqrt{\frac{3 EI}{(h^2 + l^2) m}}$,

$$5. \varphi = \sqrt{\frac{84 EI}{5 mh^3}}$$

$$6. \varphi = \sqrt{\frac{1600 EI}{39 l^3 m}}$$

$$7. \varphi = \sqrt{\frac{1536 EI}{23 l^3 m}}$$

$$8. \varphi = \sqrt{\frac{g EI}{\rho l^3}}$$



ნახ. 118.

§ 47. თავისუფალი მიღწეული რხევა

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით თავისუფალ კონსერვატიულ რხევას, ე. ი. როდესაც არავითარი არადრეკადი ფაქტორები მოძრაობას არ ეწინააღმდეგებოდა. ამ შემთხვევაში გამოდის, რომ თავისუფალი რხევა გაგრძელდება მუდმივად ყოველგვარი შესუსტების გარეშე. სინამდვილეში რხევით პროცესში ყოველთვის აქვს ადგილი არადრეკად ფაქტორებს (შინაგან ხახუნს, ხახუნს შეერთებებში და საყრდენ ნაწილებში, გარემოს წინააღმდეგობას), რომლებიც ეწინააღმდეგება მოძრაობას, თანდათანობით ასუსტებს მას და ბოლოს სრულებით აქრობს. ასეთ რხევებს მიღწეული რხევა ეწოდება. მიღწეული ძალების ბუნების შესახებ მრავალი გამოკვლევა და ჰიპოთეზა არსებობს მაგრამ ზუსტად ჯერ კიდევ არ არის დადგენილი მისი ბუნება.

ამჟამად, მიღწეული რხევის საერთოდ მიღებული თეორია დამყარებულია ჰიპოთეზაზე, რომლის თანახმად შინაგანი წინააღმდეგობის არა-

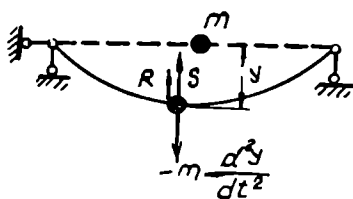
12. ა. ასტეატუროვი

დრეკადი ძალები გადაადგილების სიჩქარის პროპორციულია:

$$R = k \frac{dy}{dt}, \quad (28)$$

სადაც k არის წინააღმდეგობის კოეფიციენტი.

წინააღმდეგობის ძალა ყოველთვის მიმართულია მოძრაობის სიჩქარის საწინააღმდეგო მხარეს.



ნახ. 119.

განვიხილოთ ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემა (ნახ. 119). გადაადგილებულ მასაზე ნებისმიერ მომენტში იმოქმედებს:

დრეკადი წინააღმდეგობის ძალა

$$S = cy,$$

მოძრაობის წინააღმდეგობის ძალა

$$R = k \frac{dy}{dt},$$

ინერციის ძალა

$$I = -m \frac{d^2y}{dt^2}.$$

დინამიკური წონასწორობის პირობა იქნება:

$$S + R - I = 0.$$

თუ შევიტანთ ძალების მნიშვნელობებს მივიღებთ შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + cy = 0.$$

დრეკადი წინააღმდეგობის (S) და მოძრაობის წინააღმდეგობის (R) ძალებს ერთნაირი მიმართულება აქვთ.

აღვნიშნოთ:

$$\frac{k}{2m} = \varepsilon, \quad \varphi^2 = \frac{c}{m}. \quad (29)$$

მიღებული რხევის დიფერენციალური განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dy}{dt} + \varphi^2 y = 0. \quad (30)$$

კოეფიციენტი ε ახასიათებს გარემოს წინააღმდეგობას, რომელიც იწვევს რხევის მილევას და მას მილევების კოეფიციენტი ეწოდება. მილევების კოეფიციენტი დამოკიდებულია როგორც მასალაზე, ისე რხევის პერიოდზე და განისაზღვრება ექსპერიმენტულად.

მიღებული ერთგვაროვანი ხაზობრივი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების გადაწყვეტა უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$y = A e^{\lambda t}, \quad (31)$$

ამ გამოსახულების შეტანა 30-ე განტოლებაში მოგვცემს:

$$Ae^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + \varphi^2) = 0,$$

რომლის მახასიათებელი განტოლება იქნება:

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + \varphi^2 = 0. \quad (32)$$

ეს განტოლება მოგვცემს ორ ფესვს:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \varphi^2}, \\ \lambda_2 &= -\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \varphi^2}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

30-ე განტოლების საერთო ინტეგრალი იქნება:

$$y_1 = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (34)$$

მიღების კოეფიციენტი ε მნიშვნელოვნად ნაკლებია რხევის სიხშირეზე φ და ამიტომ $\sqrt{\varepsilon^2 - \varphi^2} < 0$ და ფესვები იქნება წარმოსახვითი:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\varepsilon + i\sqrt{\varphi^2 - \varepsilon^2} = -\varepsilon + i\varphi_1, \\ \lambda_2 &= -\varepsilon - i\sqrt{\varphi^2 - \varepsilon^2} = -\varepsilon - i\varphi_1. \end{aligned}$$

შევიტანოთ 34-ე ფორმულაში, მივიღებთ:

$$y = e^{-\varepsilon t} (A_1 e^{i\varphi_1 t} + A_2 e^{-i\varphi_1 t}).$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში ეილერის ფორმულებს:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1 t} &= \cos \varphi_1 t + i \sin \varphi_1 t, \\ e^{-i\varphi_1 t} &= \cos \varphi_1 t - i \sin \varphi_1 t, \end{aligned}$$

გვექნება:

$$y = e^{-\varepsilon t} [(A_1 + A_2) \cos \varphi_1 t + i(A_1 - A_2) \sin \varphi_1 t]$$

ან

$$y = e^{-\varepsilon t} (B_1 \cos \varphi_1 t + B_2 \sin \varphi_1 t), \quad (35)$$

სადაც

$$B_1 = A_1 + A_2 \quad \text{და} \quad B_2 = i(A_1 - A_2).$$

აღნიშნოთ: $B_1 = A \sin \lambda$ და $B_2 = A \cos \lambda$, მაშინ მიღებული რხევის 35-ე განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

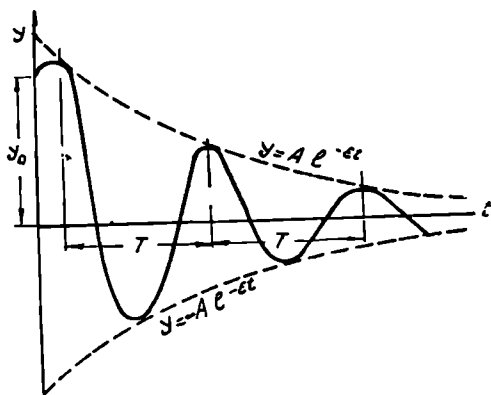
$$y = A e^{-\varepsilon t} \sin(\varphi_1 t + \lambda), \quad (36)$$

სადაც

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{B_1^2 + B_2^2}, \\ \operatorname{tg} \lambda &= \frac{B_1}{B_2} \quad \text{ან} \quad \lambda = \operatorname{arctg} \frac{B_1}{B_2}, \\ \varphi_1 &= \sqrt{\varphi^2 - \varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

φ_1 არის თავის უფალი მიღებული რხევის სიხშირე.

36-ე განტოლება გვიჩვენებს, რომ მიღებული რხევის ამპლიტუდა $Ae^{-\epsilon t}$ არ არის მუდმივი და თანდათანობით მცირდება t ზრდასთან ერთად. მიღებული რხევის გრაფიკი წარმოდგენილია მე-120 ნახაზზე.



ნახ. 120.

რხევის დამახასიათებელი მუდმივების (A , λ) გამოსარკვევად გამოვიყენოთ საწყისი პირობები

$$\text{როცა } t=0 \quad y=y_0 \quad \text{და} \quad \frac{dy}{dt}=v_0.$$

35-ე ან 36-ე განტოლების საფუძველზე მივიღებთ:

$$y_0 = A \sin \lambda = B_1 \quad (\text{ა})$$

$$v_0 = -\epsilon y_0 + \varphi_1 A \cos \lambda,$$

აქედან

$$A \cos \lambda = B_2 = \frac{v_0 + \epsilon y_0}{\varphi_1}. \quad (\text{ბ})$$

(ა) და (ბ) განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{(v_0 + \epsilon y_0)^2}{\varphi_1^2}}, \quad (38)$$

$$\lambda = \arctg \frac{y_0 \varphi_1}{v_0 + \epsilon y_0}. \quad (39)$$

თუ ცნობილია ϵ კოეფიციენტი და საწყისი პარამეტრები მიღებული განტოლებების საშუალებით შეგვიძლია მთლიანად დავახასიათოთ მიღებული რხევა. მიღებული რხევის სიხშირე φ_1 ნაკლებია არამიღვევადი რხევის სიხშირეზე φ , რხევის პერიოდი კი პირიქით მეტია არამიღვევადი რხევის პერიოდზე.

მიღებული რხევის განტოლების საშუალებით შეიძლება განისაზღვროს მიღების კოეფიციენტი ϵ .

დავწერათ რხევის ამპლიტუდის ორი მეზობელი მნიშვნელობა I_n და I_{n+T} მომენტისათვის:

$$y_n = A e^{-\varepsilon I_n},$$

$$y_{n+1} = A e^{-\varepsilon(I_n+T)}.$$

მათი ფარდობა მოგვცემს:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = e^{\varepsilon T} = \text{const.} \quad (40)$$

მაშასადამე, ორი მეზობელი ამპლიტუდის ფარდობა მუდმივი სიდიდეა. მე-40 განტოლების გალოგარითმება მოგვცემს:

$$\varepsilon T = I_n \left(\frac{y_n}{y_{n+1}} \right) = \gamma. \quad (41)$$

γ სიდიდეს მილევის ლოგარითმული დეკრემენტი ეწოდება.

მილევის კოეფიციენტი ε და სათანადო ლოგარითმული დეკრემენტა განისაზღვრება ექსპერიმენტულად.

როგორც აღვნიშნეთ, მილევალი რხევის სიხშირე ნაკლებია, არამილევალი რხევის სიხშირეზე (ფორ. 37), მაგრამ, საინჟინრო ნაშენებისათვის, კოეფიციენტი ε იცვლება მცირე ზღვრებში და ამიტომ Φ_1 უმნიშვნელოდ განსხვავდება φ -საგან და შეიძლება მივიღოთ $\Phi_1 = \varphi$.

მაშასადამე, სიხშირის გამოთვლის დროს გარემოს წინააღმდეგობა შეიძლება მხედველობაში არ იქნეს მიღებული.

მაგალითად, თუ მეზობელი ამპლიტუდების ფარდობა

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = e^{\varepsilon T} = 2,0,$$

მაშინ მილევის დეკრემენტი $\gamma = \varepsilon T = I_n 2 = 0,693$,
საიდანაც

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{T} = \frac{0,693}{T}.$$

რხევის პერიოდი $T = \frac{2\pi}{\varphi_1}$ და ამიტომ

$$\varepsilon = \frac{0,693}{2\pi} \varphi_1 = 0,11 \varphi_1.$$

კოეფიციენტის ეს მნიშვნელობა შეეიტანოთ თავისუფალი მილევალი რხევის სიხშირის გამოსახულებაში, მივიღებთ:

$$\Phi_1 = \sqrt{\varphi^2 - \varepsilon^2} = \sqrt{\varphi^2 - (0,11 \varphi_1)^2},$$

საიდანაც

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{1,012}} \varphi = 0,994 \varphi.$$

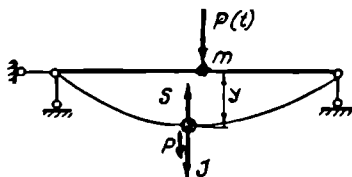
ისეთმა ჩვენებამ მილევადაც კი, როგორც ჩვენ მივიღეთ $\left(\frac{y_n}{y_{n+1}} = 2 \right)$, მოგვცა სიხშირის ცვლილება მხოლოდ 0,6 პროცენტით.

თ ა ვ ი XI

ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების
იძულებითი რხევა

✓✓
§ 48. იძულებითი რხევა თავისუფალ არეში
(არაღრეპაალი წინაღობის გარეშე)

წინა თავში ჩვენ განვიხილეთ სისტემის თავისუფალი რხევა, როდესაც რხევის გამომწვევი მიზეზი მოქმედებისთანავე არის მოშორებული. ეხლა ჩვენ უნდა განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როდესაც რხევის მთელი პროცესის განმავლობაში სისტემაზე მოქმედებს $P(t)$ ძალა, რომელიც იცვლება დროის მიხედვით მოცემული კანონით. ამ ძალას რხევის აღმძვრელ ძალას უწოდებენ, ხოლო რხევას — იძულებით რხევას.



ნახ. 121.

განვიხილოთ m მასის იძულებითი რხევა, როდესაც მასზე მოქმედებს აღმძვრელი ძალა $P(t)$ (ნახ. 121).

m მასის დინამიკური წონასწორობის პირობა დაიწერება შემდეგი სახით:

$$S - I - P(t) = 0.$$

ამ განტოლებაში, თუ შევიტანთ დრეკადი წინააღობის და ინერციის ძალის მნიშვნელობებს მივიღებთ:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + cy = P(t)$$

ან

$$\frac{dy^2}{dt^2} + \varphi^2 y = \frac{1}{m} P(t), \quad (42)$$

სადაც $\varphi = \sqrt{\frac{c}{m}}$ არის თავისუფალი რხევის სიხშირე.

მიღებული არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალი შედგება ორი ნაწილისაგან: ერთგვაროვანი განტოლების საერთო y_1 და არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ინტეგრალისაგან y_2 . მაშასადამე,

$$y = y_1 + y_2.$$

ერთგვაროვანი განტოლების

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \varphi^2 y_1 = 0$$

ინტეგრალი ჩვენ უკვე გვექონდა განსაზღვრული (ფორ. 12 ან 15):

$$y_1 = C_1 \sin \varphi t + C_2 \cos \varphi t. \quad (43)$$

წრფივი დიფერენციალური განტოლებების თეორიიდან ცნობილია, რომ $P(t)$ ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის კერძო ინტეგრალი დაიწერება შემდეგი სახით:

$$y_2 = \frac{1}{m\varphi} \int_0^t P(u) \sin \varphi(t-u) du. \quad (44)$$

u წარმოადგენს ინტეგრატორს ცვლადს და საბოლოოდ, ზღვრების შეტანის შემდეგ y_2 გამოსახულებაში აღარ შევა. 44-ე განტოლება, რომ 42-ე განტოლების კერძო ინტეგრალია დაეწმუნდებით უშუალო ჩასმის გზით.

ამრიგად, 42-ე განტოლების საერთო ინტეგრალი იქნება:

$$y = C_1 \sin \varphi t + C_2 \cos \varphi t + \frac{1}{m\varphi} \int_0^t P(u) \sin \varphi(t-u) du. \quad (45)$$

პირველი ორი წევრი გამოსახავს სისტემის თავისუფალ რხევას, უკანასკნელი წევრი—იძულებით რხევას. მთლიანად 45-ე განტოლება გვაძლევს ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის რხევას, როდესაც მასზე მოქმედებს აღმძვრელი ძალა $P(t)$.

ინტეგრალის მუდმივები განისაზღვრება საწყის პირობებიდან. როცა $t=0$

$y_1 = y_0$ და $\frac{dy_1}{dt} = v_0$. ამ შემთხვევაში კერძო ინტეგრალში არ შევა მუდმივები და გვექნება:

$$y_2 = 0 \text{ და } \frac{dy_2}{dt} = 0.$$

ეს არის კერძო გადაწყვეტის ძირითადი თვისება.

ამრიგად, საწყის მომენტში, როცა $t=0$ კერძო ინტეგრალი და მისი წარმოებული ნულად იქცევა.

მაშასადამე, მივიღებთ:

$$C_1 = \frac{v_0}{\varphi}, \quad C_2 = y_0.$$

$0 < t < t_0$ დროის მონაკვეთში ადგილი ექნება მხოლოდ (y_0, v_0) საწყისი პირობებით გამოწვეულ თავისუფალ რხევას, ხოლო როცა $t > t_0$ წარმოიშვევა იძულებითი რხევები და მთლიანი რხევის განტოლება დაიწერება შემდეგი სახით:

$$y = \frac{v_0}{\varphi} \sin \varphi t + y_0 \cos \varphi t + \frac{1}{m\varphi} \int_0^t P(u) \sin \varphi(t-u) du. \quad (46)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც საწყისი პირობები ნულის ტოლია $y_0 = 0$ და $v_0 = 0$, ადგილი აქვს მხოლოდ იძულებით რხევას (ფორ. 44). გავარჩიოთ აღმძვრელი ძალის კერძო შემთხვევები.

1. უეცრად მოდებული მუდმივი აღმძვრელი ძალის მოქმედება. ვთქვათ აღმძვრელი ძალა მუდმივია და მშვიდად მყოფ ნაწილაკზე ($y_0=0$ და $v_0=0$) მოქმედებს უეცრად $t=0$ მომენტში და შემდეგ რჩება მუდმივი, ე. ი.

$$P(t) = P = \text{const.}$$

46-ე განტოლებიდან მივიღებთ:

$$y = \frac{1}{m\varphi} \int_0^t P \sin \varphi(t-u) du = \frac{P}{m\varphi^2} (1 - \cos \varphi t),$$

ვინაიდან $m\varphi^2 = c$ და $P = c\Delta_{სტ}$, ამიტომ

$$y = \Delta_{სტ} (1 - \cos \varphi t), \quad (47)$$

სადაც $\Delta_{სტ}$ არის P ძალით გამოწვეული სტატიკური გადაადგილება.

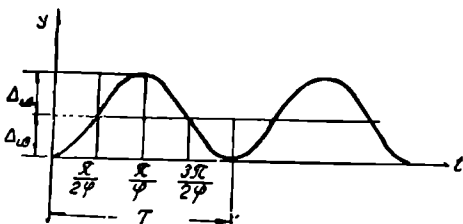
47-ე განტოლებით მიღებული მოძრაობის გრაფიკი ნაჩვენებია 122-ე ნახაზზე.

დინამიკური გადაადგილების ფარდობა სტატიკურზე

$$\mu = \frac{y}{\Delta_{სტ}} = 1 - \cos \varphi t$$

დამოკიდებულია ძალის მოქმედების ხანგრძლიობაზე და პერიოდულად იცვლება.

უცებ მოდებული ძალისაგან გამოწვეული გადაადგილება ორჯერ მეტია



ნახ. 122.

იმევე ძალით გამოწვეულ სტატიკურ გადაადგილებაზე და სათანადოთ ძალებიც ორჯერ მეტი იქნება ვიდრე ძალის სტატიკური მოქმედების დროს.

თუ მხედველობაში მივიღებთ არადრეკად წინააღმდეგობას, მაშინ ეს ფარდობა შემცირდება.

2. ჰარმონიულად ცვლადი აღმძვრელი ძალის მოქმედება. პრაქტიკაში ასეთი ძალების მოქმედებას ხშირად აქვს ადგილი და ამიტომ მისი შესწავლა უფრო მეტადაა საჭირო. წარმოვიდგინოთ, რომ მოქმედებს პერიოდული ჰარმონიული ვიბრაციული ძალა

$$P(t) = P_0 \sin \varphi t. \quad (48)$$

ასეთ ძალას მოგვეცემს, მაგალითად მანქანის რომელიმე ნაწილის ბრუნვა, რომლის მასა ექსცენტრულად არის მიმაგრებული ბრუნვის ცენტრის მიმართ (ნახ. 123).

თუ ცენტრიდანულ ძალას აღვნიშნავთ P_0 , მაშინ მისი ვერტიკალური მდგენელი, რომელიც იწვევს განივ რხევას იქნება:

$$P_t = P_0 \sin \theta t,$$

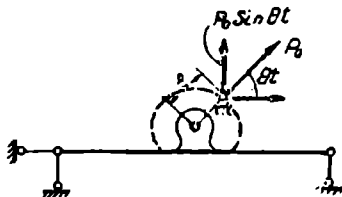
სადაც θ არის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე ($\theta = \frac{2\pi}{60} n$, აქ n არის მანქანის ბრუნთა რიცხვი წუთში).

თუ მასის ცენტრისკენული აჩქარება იქნება $\theta^2 e$ მაშინ ცენტრიდანული ძალა გამოითვლება ფორმულით:

$$P_0 = m \theta^2 e.$$

48-ე გამოსახულებაში P_0 წარმოადგენს აღმქვრელი ძალის ამპლიტუდას, ხოლო θ კი ამ ძალის სიხშირეს.

როგორც ვხედავთ, აღმქვრელი ძალის მოქმედების შემთხვევაში რხევა შედგება ორი ნაწილისაგან — საკუთარი და იძულებითი რხევისაგან. იძულებითი რხევა წარმოდგენილია 46-ე განტოლების მესამე წევრით:



ნახ. 123.

$$y = \frac{1}{m\varphi} \int_0^t P(u) \sin \varphi(t-u) du. \quad (49)$$

შევიტანოთ $P(t)$ ძალის მნიშვნელობა $P(t) = P(u) = P_0 \sin \theta u$, მივიღებთ:

$$y = \frac{P_0}{m\varphi} \int_0^t \sin \theta u \sin \varphi(t-u) du.$$

ინტეგრების შემდეგ გვექნება¹:

$$y = \frac{P_0}{m(\varphi^2 - \theta^2)} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\varphi} \sin \varphi t \right).$$

იმავ შემდეგ მივიღებთ, თუ $P(t)$ ძალის გამოსახულებას შევიტანოთ რხევის დიფერენციალურ განტოლებაში (42)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \varphi^2 y = \frac{P_0}{m} \sin \theta t$$

და გავაინტეგრებთ.

კერძო ინტეგრალი წარმოვიდგინოთ $y_2 = f_0 \sin \theta t$ სახით, რომლის შეტანა დიფერენციალურ განტოლებაში მოგვცემს:

$$-f_0 \theta^2 \sin \theta t + \varphi^2 f_0 \sin \theta t = \frac{P_0}{m} \sin \theta t,$$

¹ $\sin \theta u \sin \varphi(t-u) = \frac{1}{2} \{ \cos[(\theta + \varphi)u - \varphi t] - \cos[(\theta - \varphi)u + \varphi t] \}$

აქედან

$$f_0 = \frac{P_0}{m(\varphi^2 - \theta^2)},$$

$$y_2 = \frac{P_0}{m(\varphi^2 - \theta^2)} \sin \theta t.$$

საერთო ინტეგრალი იქნება:

$$y = C_1 \sin \varphi t + C_2 \cos \varphi t + \frac{P_0}{m(\varphi^2 - \theta^2)} \sin \theta t. \quad (50)$$

მუდმივებს ვიპოვით საწყის პირობებიდან:

$$\text{როცა } t=0 \text{ მაშინ } y=0 \text{ და } \frac{dy}{dt}=0,$$

მივიღებთ:

$$C_2 = 0,$$

$$C_1 = -\frac{P_0 \theta}{m \varphi (\varphi^2 - \theta^2)}.$$

საბოლოოდ 50-ე განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$y = \frac{P_0}{m(\varphi^2 - \theta^2)} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\varphi} \sin \varphi t \right). \quad (51)$$

51-ე განტოლება გვიჩვენებს, რომ პერიოდული ძალის მოქმედების შემთხვევაში ვითარდება რთული რხევა, რომელიც შედგება ორი ნაწილისაგან: 1) იძულებითი რხევისაგან აღმძვრელი ძალის სიხშირით θ -ით და 2) იძულებითი რხევისაგან საკუთარი რხევის სიხშირით φ -ით. ამ უკანასკნელს ხშირად თავისუფალ რხევას უწოდებენ. მაშასადამე, რხევითი მოძრაობის გრაფიკის მისაღებად საჭიროა შევეკრიბოთ სინუსოიდის ორი ხაზი θ და φ სიხშირით.

თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ თავისუფალი რხევა, არადრეკადი ძალების გავლენით, დროთა განმავლობაში ჩქარა ქრება, მაშინ საკმარისია განვიხილოთ მხოლოდ წმინდა იძულებითი რხევა:

$$y = \frac{P_0}{m(\varphi^2 - \theta^2)} \sin \theta t. \quad (52)$$

რაგორც ვხედავთ ჰარმონიული აღმძვრელი ძალის მოქმედების დროს იძულებითი რხევა ხდება აღმძვრელი ძალის სიხშირით. აღმძვრელი ძალა იძულებს ნაშენს იმოძრაოს თავისი ცვლილების კანონით.

რხევის ამპლიტუდა

$$A = \frac{P_0}{m(\varphi^2 - \theta^2)} = \frac{P_0}{m\varphi^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\varphi^2} \right)}$$

და იგი დამოკიდებულია P_0 ინტენსიობაზე და სიხშირეთა ფარდობაზე.

ზემოთ გეჰონდა აღნიშნული, რომ $m\varphi^2=c$ და $\Delta_{\text{სტ}}=\frac{P_0}{c}$.

იძულებითი რხევის ამპლიტუდა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$A=\Delta_{\text{სტ}}\frac{1}{1-\left(\frac{\theta}{\varphi}\right)^2}=\Delta_{\text{სტ}}\mu. \quad (53)$$

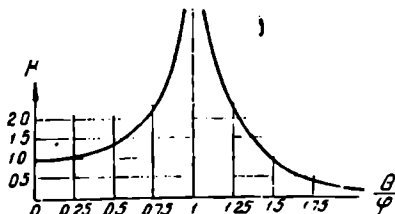
რადგან ამპლიტუდა წარმოადგენს მაქსიმალურ გადაადგილებას რხევის დროს, ამიტომ კოეფიციენტი μ გამოსახავს მაქსიმალური დინამიკური გადაადგილების ფარდობას სტატიკურ გადაადგილებაზე

$$\mu=\frac{A}{\Delta_{\text{სტ}}}=\frac{\Delta_{\text{დინ.}}}{\Delta_{\text{სტ}}}=\frac{1}{1-\left(\frac{\theta}{\varphi}\right)^2} \quad (54)$$

და მას დინამიკური კოეფიციენტი ეწოდება. 54-ე ფორმულა გეჩვენებს, რომ თუ მხედველობაში არ მივიღებთ მიღევად ფაქტორებს, დინამიკური კოეფიციენტი დამოკიდებულია მხოლოდ სიხშირეთა ფარდობაზე. თუ დინამიკური კოეფიციენტი ცნობილია, მაშინ შეგვიძლია თავისუფლად შევასრულოთ ნაშენის დინამიკური ანგარიში, რადგან როგორც გადაადგილებები ისე დეფორმაციები და ძაბვები დინამიკური კოეფიციენტის პროპორციულად იზრდება.

8. დინამიკური კოეფიციენტის გამოკვლევა. რეზონანსი. დინამიკური კოეფიციენტის ცვლილება იწვევს იძულებითი რხევის ამპლიტუდის ცვლილებას. შევისწავლოთ ამ ცვლილების ხასიათი.

124-ე ნახაზზე მოყვანილია დინამიკური კოეფიციენტის ცვლილების გრაფიკი სიხშირეთა ფარდობის ცვლილების მიხედვით. μ ლერძზე მოზომილია დინამიკური კოეფიციენტის აბსოლუტური მნიშვნელობა.



ნახ. 124.

თუ აღმძვრელი ძალის სიხშირე θ თავისუფალი რხევის სიხშირე φ -ზე მნიშვნელოვნად ნაკლებია, მაშინ $\left(\frac{\theta}{\varphi}\right)^2$ ერთთან შედარებით ძალიან მცირეა და შეგვიძლია მივიღოთ $\mu=1$.

როდესაც θ უახლოვდება φ , მაშინ დინამიკური კოეფიციენტი სწრაფად იზრდება და სიხშირეთა ტოლობის ($\theta=\varphi$) დროს იქცევა უსასრულოდ $\mu=\infty$.

იმის გამო, რომ იძულებითი და თავისუფალი რხევის სიხშირე ერთმანეთს ემთხვევა ადგილი აქვს რეზონანსს. რეზონანსის მდგომარეობა ნაშენისათვის სახიფათოა.

თუ $\theta>\varphi$ დინამიკური კოეფიციენტი და, მაშასადამე, იძულებითი რხევის ამპლიტუდა ნიშანს იცვლის, ე. ი. რხევა მოწინააღმდეგე ფაზაში ხდება (ფაზა იცვლება 2π -ით). ამ შემთხვევაში დინამიკური კოეფიციენტის აბსო-

ლუტური მნიშვნელობა სწრაფად მცირდება. თუ $\theta = \varphi\sqrt{2}$ დინამიკური კოეფიციენტი ერთის ტოლია და თუ $\theta > \varphi\sqrt{2}$, მაშინ ერთზე ნაკლებია. ეს იმას ნიშნავს, რომ დინამიკური ძალის გავლენა სტატიკური ძალის გავლენაზე ნაკლებია. თუ იძულებითი რხევის სიხშირე θ უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის, მაშინ კოეფიციენტი μ და სათანადო ამპლიტუდა მიისწრაფვის ნულისაკენ, ე. ი. სისტემა არაეითარ რხევას არ განიცდის.

რეზონანსის მოვლენა გავარჩიოთ უფრო დაწვრილებით. იძულებითი რხევის განტოლებაში (51) შევიტანოთ $\theta = \varphi$ და მივიღებთ განუზღვრელობას:

$$y = \Delta_{სტ} \frac{0}{0}.$$

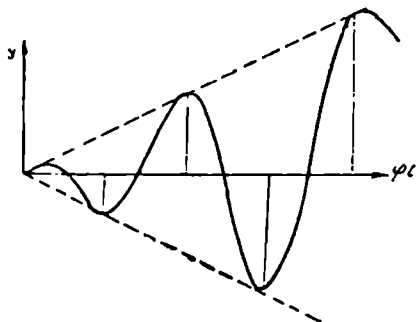
განუზღვრელობა გავხსნათ ლობიტალის წესით, მივიღებთ:

$$y = \Delta_{სტ} \frac{t \cos 0 t - \frac{1}{\varphi} \sin \varphi t}{-\frac{2\theta}{\varphi^2}} = \frac{\sin \varphi t - \varphi t \cos 0 t}{\frac{2\theta}{\varphi}},$$

ხოლო თუ ზემოაღნიშნულ ტოლობაში შევიტანოთ $\theta = \varphi$, მაშინ

$$y = \Delta_{სტ} \frac{1}{2} (\sin \varphi t - \varphi t \cos \varphi t). \quad (55)$$

რხევის გრაფიკი, რომელიც წარმოდგენილია 125-ე ნახაზზე გვიჩვენებს, რომ რეზონანსის შემთხვევაში რხევის ამპლიტუდა იზრდება დროის პროპორციულად. თავისთავად ცხადია, რომ ამპლიტუდის ასეთი უსაზღვრო ზრდა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა ადგილი არა აქვს რხევის საწინააღმდეგო არადრეკად ძალებს. სინამდვილეში კი მიღევალი ძალების გავლენით ამპლიტუდა დროთა განმავლობაში მცირდება. ამ საკითხს უფრო დეტალურად განვიხილავთ მომდევნო პარაგრაფში.



ნახ. 125.

§ 49. იძულებითი მიღევალი რხევა (არადრეკადი წინააღმდეგობის გაძლევა)

არადრეკადი წინააღმდეგობის ძალების მოქმედება მნიშვნელოვან გავლენას ახდენს იძულებითი რხევის ამპლიტუდაზე და რადგანაც რეალურად ასეთი ძალები ყოველთვის არსებობს, ამიტომ საჭიროა მათი შესწავლა.

მიღევალი იძულებითი რხევის დიფერენციალური განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს (იხ. ფორ. 30):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\epsilon \frac{dy}{dt} + \varphi^2 y = \frac{1}{m} P(t), \quad (56)$$

სადაც ε არის მილევის კოეფიციენტი.

მიღებული არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების მთლიანი ინტეგრალი შედგება ერთგვაროვანი განტოლების საერთო და კერძო ინტეგრალისაგან.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როდესაც ნაშენზე მოქმედებს ჰარმონიულად ცვლადი აღმძვრელი ძალა $P(t) = P_0 \sin \theta t$. მილევადი იძულებითი რხევის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2z \frac{dy}{dt} + \varphi^2 y = \frac{P_0}{m} \sin \theta t. \quad (57)$$

როგორც ვიცით, ამ განტოლების საერთო ინტეგრალი იქნება (იხ. ფორ. 36):

$$y_1 = A e^{-\varepsilon t} \sin(\varphi_1 t + \lambda),$$

რომელიც წარმოადგენს თავისუფალი მილევადი რხევის განტოლებას.

არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ინტეგრალი, რომელიც მოგვცემს იძულებითი რხევის განტოლებას, ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$y_2 = C_1 \sin \theta t + C_2 \cos \theta t. \quad (58)$$

შვეიტანოთ ეს გამოსახულება 57-ე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\left(C_1 \varphi^2 - C_1 \theta^2 - 2C_2 \varepsilon \theta - \frac{P_0}{m} \right) \sin \theta t + (C_2 \varphi^2 - C_2 \theta^2 + 2C_1 \varepsilon \theta) \cos \theta t = 0.$$

ეს განტოლება დაკმაყოფილებული უნდა იყოს t ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, რასაც ადგილი ექნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ $\sin \theta t$ და $\cos \theta t$ კოეფიციენტები ნულის ტოლი იქნება, ე. ი.

$$C_1 \varphi^2 - C_1 \theta^2 - 2C_2 \varepsilon \theta - \frac{P_0}{m} = 0,$$

$$C_2 \varphi^2 - C_2 \theta^2 + 2C_1 \varepsilon \theta = 0.$$

ამ განტოლებათა სისტემის გადაწყვეტა C_1 და C_2 -ს მიმართ მოგვცემს:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{P_0}{m} \frac{\varphi^2 - \theta^2}{(\varphi^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2 \theta^2}, \\ C_2 &= -\frac{P_0}{m} \frac{2\varepsilon \theta}{(\varphi^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2 \theta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

მაშასადამე, იძულებითი რხევის განტოლება იქნება:

$$y_2 = \frac{P_0}{m} \frac{\varphi^2 - \theta^2}{(\varphi^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2 \theta^2} \sin \theta t - \frac{P_0}{m} \frac{2\varepsilon \theta}{(\varphi^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2 \theta^2} \cos \theta t. \quad (60)$$

თუ აღვნიშნავთ, რომ

$$C_1 = C \cos \rho,$$

$$C_2 = C \sin \rho,$$

მაშინ 58-ე ან მე-60 განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$y_2 = C \cos \rho \sin \theta t + C \sin \rho \cos \theta t = C \sin(\theta t + \rho). \quad (61)$$

იძულებითი რხევის ამპლიტუდა

$$C = \frac{P_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\varphi^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\theta^2}} = \Delta_{\text{სტ}} \frac{\varphi^2}{\sqrt{(\varphi^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\theta^2}}. \quad (62)$$

რხევის ფაზა განისაზღვრება განტოლებიდან:

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{C_2}{C_1} = - \frac{2\varepsilon\theta}{\varphi^2 - \theta^2}. \quad (63)$$

მიღებული იძულებითი რხევის მთლიანი ინტეგრალი იქნება:

$$y = y_1 + y_2 = A e^{-\varepsilon t} \sin(\varphi_1 t + \lambda) + C \sin(\theta t + \rho). \quad (64)$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, პირველი წევრი იძლევა თავისუფალ მიღევად რხევას. მისი ამპლიტუდა სწრაფად მცირდება და ამიტომ გარკვეული დროის შემდეგ აღვილი აქვს მხოლოდ სტაბილურ იძულებით რხევებს, რომლის სიხშირე ემთხვევა აღმძვრელი ძალის სიხშირეს. იგი მოცემულია განტოლებით:

$$y \approx C \sin(\theta t + \rho).$$

რადგან მიღევის კოეფიციენტი ε არ არის ნულის ტოლი, ამიტომ ρ არ არის ნულის ტოლი და იძულებითი რხევა მიმდინარეობს გადაადგილებულ ფაზით აღმძვრელ ძალასთან შედარებით.

იძულებითი რხევის ამპლიტუდის ფორმულა (62) გადაეწეროს შემდეგი სახით:

$$C = \Delta_{\text{სტ}} \frac{\varphi^2}{\sqrt{(\varphi^2 - \theta^2)^2 + 4\varepsilon^2\theta^2}} = \Delta_{\text{სტ}} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\varphi^2}\right)^2 + \frac{4\varepsilon^2\theta^2}{\varphi^4}}}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ (ფორ. 41)

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\varphi_1} \quad \text{და} \quad \varphi_1 \approx \varphi,$$

მაშინ

$$\varepsilon = \frac{\gamma\varphi}{2\pi},$$

ხოლო ამპლიტუდა

$$C = \Delta_{\text{სტ}} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\varphi^2}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\pi^2} \frac{\theta^2}{\varphi^2}}}. \quad (65)$$

დინამიკური კოეფიციენტი

$$\mu = \frac{C}{\Delta_{\text{სტ}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\varphi^2}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\pi^2} \frac{\theta^2}{\varphi^2}}}, \quad (66)$$

სადაც φ არის თავისუფალი რხევის სიხშირე,

θ — იძულებითი რხევის სიხშირე,

γ — მილევის დეკრემენტი.

იძულებითი მილევალი რხევის დინამიკური კოეფიციენტი დამოკიდებულია არა მარტო სიხშირეების ფარდობაზე, როგორც ამას ადგილი ჰქონდა არა-მილევად იძულებით რხევებში, არამედ მილევის დეკრემენტზეც. თუ მივიღებთ, რომ ადგილი არ აქვს მილევას, ე. ი. $\gamma=0$, მაშინ 66-ე ფორმულა დაემთხვევა 54-ე ფორმულას. მილევის დეკრემენტის, ან არადრეკადი წინალობის ზრდა იწვევს დინამიკური კოეფიციენტის შემცირებას.

იძულებითი მილევალი რხევის შემთხვევაში დინამიკური კოეფიციენტი არ იქცევა უსასრულოდ აღმქრელი ძალის სიხშირის არცერთი მნიშვნელობის დროს. რეზონანსის შემთხვევაში ($\theta=\varphi$) დინამიკურ კოეფიციენტს სასრულო მნიშვნელობა აქვს. მაშასადამე, ამ პარაგრაფში მიღებული შედეგები პრინციპულად განსხვავდება წინა პარაგრაფში მიღებული შედეგებისაგან.

დინამიკური კოეფიციენტის მნიშვნელობა $\frac{\theta}{\varphi}$ ფარდობისა და γ სხვადასხვა

მნიშვნელობისათვის მოცემულია 126-ე ნახაზზე. ნახაზიდან ცხადია, რომ თუ აღმქრელი ძალის სიხშირე θ მცირეა საკუთარი რხევის სიხშირესთან შედარებით, მაშინ დინამიკური კოეფიციენტი ერთს უახლოვდება და პირიქით, თუ θ ძალიან დიდია φ -თან შედარებით, მაშინ დინამიკური კოეფიციენტი ძალიან მცირეა. მილევალი ფაქტორები ამცირებენ დინამიკურ კოეფიციენტს, მხოლოდ რეზონანსის მახლობლად. მაქსიმალურ მნიშვნელობას დინამიკური კოეფიციენტი აღწევს როცა ფარდობა $\frac{\theta}{\varphi}$ უმნიშვნელოდ განსხვავდება ერთისაგან, მაგრამ

მახლოებით შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ მაქსიმუმს ადგილი აქვს, როცა $\theta=\varphi$, მაშინ

$$\mu_{max} \approx \frac{\pi}{\gamma} = \frac{\varphi}{2\varepsilon}. \quad (67)$$

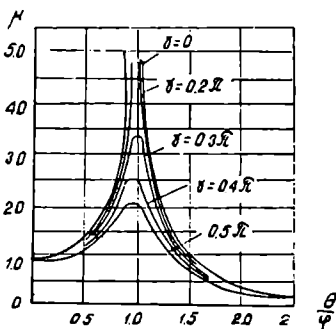
განვიხილოთ რხევის ფაზის ცვლილება. ზემოთ ვნახეთ, რომ იძულებითი რხევა მიმდინარეობს გადაადგილებული ფაზით აღმქრელ ძალასთან შედარებით ρ სიდიდით.

ფაზის გადაადგილება განისაზღვრება 63-ე ფორმულით:

$$\operatorname{tg} \rho = -\frac{2\varepsilon\theta}{\varphi^2 - \theta^2}.$$

რეზონანსის დროს ($\theta=\varphi$)

$$\operatorname{tg} \rho = -\infty \text{ და } \rho = -\frac{\pi}{2}.$$



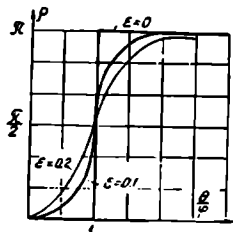
ნახ. 126.

ამრიგად, რეზონანსის დროს იძულებითი რხევის ფაზა ჩამორჩება აღმძვრელი ძალის ფაზას $\frac{\pi}{2}$ სიდიდით რაც იმას ნიშნავს, რომ როდესაც აღმძვრელი ძალა მაქსიმალურ ან მინიმალურ მნიშვნელობას აღწევს, სისტემის გადაადგილება ნულის ტოლია (ფაზის გადაადგილება ხდება $\frac{1}{4}$ პერიოდით).

თუ $\frac{\theta}{\varphi} < 1$, მაშინ $\varepsilon \rho$ და, მაშასადამე, ფაზის გადაადგილება (ფაზათა სხვაობა) უარყოფითია, ე. ი. იძულებითი რხევა ჩამორჩება აღმძვრელი ძალის ცვლილებას.

როცა $\frac{\theta}{\varphi} > 1$, მაშინ $\varepsilon \rho$ და ფაზის გადაადგილება დადებითია, ე. ი. იძულებითი რხევა ასწრებს აღმძვრელი ძალის ცვლილებას. ფაზის ცვლილების სურათი $\frac{\theta}{\varphi}$ ფარდობის და ε ცვლილებაზე დამოკიდებულებით მოცემულია

127-ე ნახაზზე.



ნახ. 127.

ფაზის გადაადგილება იცვლება ნულიდან (როცა აღმძვრელი ძალის სიხშირე მცირეა) π -მდე (როდესაც აღმძვრელი ძალის სიხშირე ძალიან დიდია საკუთარი რხევის სიხშირეზე). თუ მიღევს არ აქვს ადგილი ($\varepsilon=0$), მაშინ ფაზის გადაადგილება 0-დან π -მდე (როცა $\theta=\varphi$) უცვლელად ხდება.

§ 50. პრაქტიკული მითითებები

ჩვენ შევისწავლეთ ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების რხევები. ვინაიდან პრაქტიკაში უფრო ხშირად საქმე გვაქვს ვიბრაციულ ძალებთან, ამიტომ გავარჩიეთ ძირითადად პარამონიული ძალების მოქმედება. ნაშენის დინამიკური ანგარიში უპირატესად მდგომარეობს დინამიკური კოეფიციენტის დადგენაში, რომლის პროპორციულადაც იზრდება სტატიკური ძალებისაგან გამოწვეული ძალებები. გარდა ამისა საჭიროა რხევის ხასიათის შესწავლა.

ჩვენ ვიცით, რომ მაქსიმალურ დინამიკურ ეფექტს ადგილი აქვს რეზონანსის დროს, ე. ი. როდესაც აღმძვრელი ძალის სიხშირე ტოლია საკუთარი რხევის სიხშირის $\theta=\varphi$. ამ დროს ნაშენი შეიძლება წყობიდან გამოვიდეს. ამიტომ ნაშენი ისე უნდა იყოს დაპროექტებული, რომ სიხშირეები არ უახლოვდებოდეს ერთმანეთს. მოკლედ, ნაშენი არ უნდა მუშაობდეს რეზონანსის ზონაში.

აღმძვრელი ძალის სიხშირე დამოკიდებულია დანადგარის ბრუნვათა რიცხვზე, რომელიც ამუშავების დროს ნულიდან საბოლოო სიდიდემდე იზრდება და გაჩერების შემთხვევაში კი პირიქით თანდათანობით მცირდება. ამიტომ თავისუფალი რხევის სიხშირე, რომ არ დაემთხვეს მანქანის სიხშირეს არც ამუშავების და არც გაჩერების დროს, საჭიროა თავისუფალი რხევის სიხშირე მეტი იყოს აღმძვრელი ძალის სიხშირეზე. მიღებულია, რომ თავისუფალი რხევის სიხშირე მეტი უნდა იყოს ძალის სიხშირეზე სულ მცირე 30% -ით.

არსებობს რეზონანსულ მოვლენასთან ბრძოლის მრავალი საშუალება, რომელიც განხილულია სპეციალურ ლიტერატურაში.

წინა §-ში ენახეთ, რაჲ მილევის ძალების გავლენა მნიშვნელოვანია მხოლოდ რეზონანსის მახლობლად და რადგანაც რეზონანსის მოვლენა დაუშვებელია ამიტომ მილევის ძალების გავლენა დინამიკურ კოეფიციენტზე მხედველად არა არ მოიქება, რაჲ საგრძნობლად ამარტივებს საანგარიშო ფორმულების შედგენას.

გამონაკლასა შეადგენა ექაპლათიკიაში მყოფი ნაშენების გადაანგარიშება დინამიკურ დატვირთვებზე. აქ შესაძლებელია, რომ ნაშენი მუშაობდეს რეზონანსის ზონაში და ამიტომ მილევის ძალების გავლენა მხედველობაში უნდა მივიღოთ.

მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემებში საკითხი პრინციპულად ასევე იქნება დასმული, მხოლოდ იმ განახევებით, რომ აქ საჭიროა არა ერთი, არამედ მრავალი სიხშირის გამოთვლა.

მაშასადამე, ნაშენის დინამიკურა ანგარიში, რაჲ შესრულდეს საჭიროა გამოითვალოს საკუთარი რხევის სიხშირე და შემდეგ დინამიკური კოეფიციენტი.

§ 51. დინამიკური ანგარიშის მაგალითები ვიბრაციულ დატვირთვაზე

მ მაგალითი. ორსაყრდენზე მდებარე კოქის შუაში მოთავსებული ძრავი $P=1000$ კგ წონით, რომლის ბრუნვათა რიცხვი წუთში $n=400$. განვითარებული ცენტრიდანული ძალის ვერტკალური მდგენელი $P(t)=P_0 \sin \nu t$. აღმძვრელი ძალის ამპლიტუდა $P_0=500$ კგ.

განვსაზღვროთ დინამიკური კოეფიციენტი მილევის ძალების გაუთვალისწინებლად და გათვალისწინებით. მილევის კოეფიციენტი $\varepsilon = 0,8 \frac{1}{\sqrt{g}}$. კოქის ზომები ავიღოთ მე-2 მაგალითიდან (§ 46)..

გადაწყვეტა. თავისუფალი რხევის სიხშირე (იხ. მე-2 მაგალითი)

$$\varphi = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{სტ}}} = 44,5 \frac{1}{\sqrt{g}}$$

აღმძვრელი ძალის სიხშირე (ბრუნვათა რიცხვი 2π წამში)

$$0 = \frac{n}{60} 2\pi = \frac{n\pi}{30} = \frac{400 \cdot 3,14}{30} = 41,8 \frac{1}{\sqrt{g}}$$

დინამიკური კოეფიციენტი მილევის გაუთვალისწინებლად (ფორ. 54)

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\varphi^2}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{41,8}{44,5}\right)^2} = \frac{1}{0,12} = 8,3.$$

ახლა გამოვთვალოთ დინამიკური კოეფიციენტი მილევის გათვალისწინებით.

თავისუფალი მილევადი რხევის სიხშირე (ფორ. 37)

$$\varphi_1 = \sqrt{\varphi^2 - \varepsilon^2} = \sqrt{44,5^2 - 0,8^2} = 44,5 \frac{1}{\sqrt{g}}$$

თავისუფალი რხევის სიხშირე თითქმის არ იცვლება.

საკუთარი რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{\varphi} = 0,141 \text{ წმ.}$$

მილევის დეკრემენტი

$$\gamma = \varepsilon T = 0,8 \cdot 0,141 = 0,113.$$

დინამიკური კოეფიციენტი (ფორ. 66)

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\varphi^2}\right)^2 + \frac{\gamma^2 \theta^2}{\pi^2 \varphi^2}}} = \frac{1}{\sqrt{0,12^2 + \frac{0,113^2}{3,14^2} \cdot 0,88}} \\ &= \frac{1}{0,1245} = 8,05. \end{aligned}$$

მაშასადამე, მილევის გავლენა დინამიკურ კოეფიციენტზე უმნიშვნელოა. მაქსიმალური მღუნავი მომენტი კოქის შუაში გამოითვლება ფორმულით:

$$M_{max} = \frac{Pl}{4} + \frac{P_0 l}{4} \mu.$$

როგორ შეიცვლება დინამიკური კოეფიციენტი, თუ ძრავის ბრუნვათა რიცხვი წუთში $n=426$.

ამ შემთხვევაში ძალის სიხშირე

$$\theta = \frac{n\pi}{30} = \frac{426 \cdot 3,14}{30} = 44,5 \frac{1}{\text{წმ}}$$

და ადგილი აქვს რეზონანსს.

მილევის გაუთვალისწინებლად

$$\mu = \infty,$$

მილევის გათვალისწინებით (ფორ. 67)

$$\mu = \frac{\pi}{\gamma} = 39,2.$$

10 მაგალითი. ხისტ ფილაზე, რომელიც მოთავსებულია ოთხ ბეტონის დგარზე, მოქმედებს სტატიკური დატვირთვა (ძრავის წონა) $P=20$ ტ და ვიბრაციული ძალა $P(t)=P_0 \sin \theta t = 2 \sin \theta t$ (ნახ. 128). ძრავის ბრუნვათა რიცხვი წუთში $n=1000$. დგარის სიმაღლე $l=200$ სმ, განივი კვეთის ფართობი $F=100$ სმ², დრეკადობის მოდული $E=200\,000$ კგ/სმ².

განესაზღვროთ დინამიკური კოეფიციენტი.

გადაწყვეტა. სტატიკური გადაადგილება — ამ შემთხვევაში დგარის გრძივი კუმშვა

$$\Delta_{st} = \frac{Pl}{4EF} = \frac{20\,000 \cdot 200}{4 \cdot 200\,000 \cdot 100} = 0,05 \text{ სმ.}$$

თავისუფალი რხევის სიხშირე

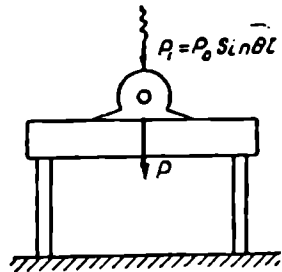
$$\varphi = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{სტ}}}} = \sqrt{\frac{981}{0,05}} = 140 \frac{1}{\text{წმ}}.$$

აღმძვრელი ძალის სიხშირე

$$\theta = \frac{n}{30} \pi = \frac{1000}{30} 3,14 = 104 \frac{1}{\text{წმ}}.$$

დინამიკური კოეფიციენტი

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\varphi^2}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{104}{140}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{0,45} = 2,22. \end{aligned}$$



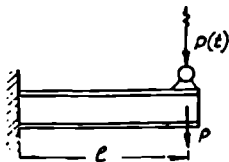
ნახ. 128.

საანგარიშო მკუმშავი ძალა დგარისათვის

$$P_{\text{საანგ.}} = \frac{P}{4} + \frac{P_0}{4} \mu.$$

11 მაგალითი. ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებული ორტისებრი კოქის ბოლოზე მოთავსებულია ძრავი $P=2\text{ტ}$ წონით (ნახ. 129). ძრავის ბრუნვათა რიცხვი წუთში $n=800$, კოქის მალის სიგრძე $l=1\text{მ}$, ინერციის მომენტი $I=2500\text{ სმ}^4$ ($N\# 20$), ვიბრაციული ძალის ამპლიტუდა $P_0=0,2\text{ტ}$.

შევამოწმოთ კოქის სიმტკიცე.



ნახ. 129.

გადაწყვეტა. საკუთარი რხევის სიხშირე

$$\begin{aligned} \varphi &= \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{სტ}}}} \sqrt{\frac{3EIg}{Pl^3}} = \\ &= \sqrt{\frac{3 \cdot 2,1 \cdot 10^9 \cdot 2500 \cdot 981}{2000 \cdot 100^3}} = 87 \frac{1}{\text{წმ}}. \end{aligned}$$

იძულებითი რხევის სიხშირე

$$\theta = \frac{n}{30} \pi = \frac{800}{30} 3,14 = 83,6 \frac{1}{\text{წმ}}.$$

კოქის მდგომარეობა რეზონანსს უახლოვდება რაც დაუშვებელია.

თუ კოქის კვეთს გავზრდით, საკუთარი რხევის სიხშირე გაიზრდება. ავიღოთ ორტისებრი $N\# 22$ კოქი, $I=2831\text{ სმ}^4$:

$$\varphi = \sqrt{\frac{3EIg}{Pl^3}} = 93 \frac{1}{\text{წმ}}.$$

დინამიკური კოეფიციენტი

$$\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\varphi}\right)^2} = 5.$$

მაქსიმალური მღუნავი მომენტი

$$M_{max} = (P + P_0 \mu) l = (2 + 0,2 \cdot 5) \cdot 3 = 3 \text{ ტ}$$

ძაბვა

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{300\,000}{2\,831} \cdot 11 = 1\,160 \frac{\text{კგ}}{\text{სმ}^2}.$$

12 მაგალითი. ჩარჩოს რაგელზე დადგმულია ელექტრომობტორი $G=1,5$ ტ წონით (ნახ. 130). ჩარჩოს განივი კვეთი მუდმივია და შედგება ორი ორტუსებრი № 14 კოქისაგან ($I=1264$ სმ²). მობტორის ბრუნთა რიცხვი წუთში $n=800$. გაუწონასწორებელი ნაწილის წონა $P=220$ კგ. ექსცენტრის რადიუსი $e=0,28$ სმ.

განესაზღვროთ: საკუთარი რხევის სიხშირე, დინამიკური ჩაღუნვა და ძაბვები სახიფათო კვეთში. ჩარჩოს საკუთარი წონა უგულებელვყოთ.

გ ა და წ ყ ვ ე ტ ა. იძულებითი რხევის სიხშირე

$$\theta = \frac{\pi}{30} n = \frac{3,14}{30} \cdot 800 = 83,6 \frac{1}{\text{წმ}}.$$

გაუწონასწორებელი ნაწილის მასა

$$m = \frac{P}{g} = \frac{220}{981} = 0,224 \text{ კგ. წმ}^2/\text{სმ}.$$

მობტორის მასა

$$m = \frac{1\,500}{981} = 1,53 \text{ კგ. წმ}^2/\text{სმ}.$$

ცენტრიდანული აღმძვრელი ძალა გამოითვლება ფორმულით:

$$P_0 = m \theta^2 e = 0,224 \cdot 83,6^2 \cdot 0,28 = 440 \text{ კგ.}$$

აღმძვრელი ძალის ვერტიკალური მდგენელი

$$P(t) = P_0 \sin \theta t = 440 \sin \theta t.$$

საკუთარი რხევის სიხშირის გასაგებად საჭიროა განისაზღვროს მობტორის წონით გამოწვეული რიგელის შუაწერტილის ვერტიკალური გადაადგილება (სტატიკური). ჭერ უნდა ვიანგარაშოთ სტატიკურად ურკვევი სისტემა და ავაკოთ G ძალისაგან გამოწვეული მღუნავი მომენტის ეპიურა (ნახ. 131 ა). გადაადგილება გამოეთვალათ ფორმულით:

$$\Delta_{10} = \Delta_{1\text{სტ}} = \int \frac{M_0^{(1)} M_1^{(0)}}{EI} dx,$$

სადაც $M_G^{(1)}$ არის G ძალისაგან გამოწვეული ზომენტი სტატიკურად ურყევე სისტემაში (ნახ. 131 ა),

$M_1^{(0)}$ — კი რიგელის შუა წერტილზე მოქმედ ერთეულ ძალისაგან გამოწვეული მომენტი ნებისმიერ სტატიკურად რყეველ სისტემაში (ნახ. 131 ბ).

$M_G^{(1)}$ და $M_1^{(0)}$ ეპიურის კომბინაცია ვერეშჩაგინის წესით მო გვემს:

$$\Delta_{\Delta\sigma} = \frac{23 Gl^3}{1536 EI} =$$

$$= \frac{23 \cdot 1500 \cdot 300^3}{1536 \cdot 2,1 \cdot 10^9 \cdot 1264} = 0,256 \text{ სმ.}$$

საკუთარი რხევის სახშირე

$$\varphi = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\Delta\sigma}}} = \sqrt{\frac{981}{0,256}} =$$

$$= 62,5 \frac{1}{\text{წმ}}.$$

რეზონანსს აღვილი არა აქვს.

ძულეებითი რხევის ამპლიტუდა (მაქსიმალური ჩალუნვა)

$$A = \frac{P_0}{m\varphi^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\varphi}\right)^2} = \frac{440}{1,53 \cdot 62,5^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{83,6}{62,5}\right)^2} =$$

$$= -0,0737 \cdot 1,27 = -0,093 \text{ სმ.}$$

ნიშანს მნიშვნელობა არა აქვს.

მთლიანი ჩალუნვა რიგელის შუაში

$$y = 0,256 + 0,093 = 0,349 \text{ სმ.}$$

დინამიკური კოეფიციენტი

$$\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\varphi}\right)^2} = 1,27.$$

სანგარიშო მლუნავი მომენტი რიგელის შუაში

$$M_{max} = \frac{Gl}{4} + \frac{P_0 l}{4} \mu = \frac{l}{4} (G + P_0 \mu) = \frac{300}{4} (1500 + 440 \cdot 1,27) =$$

$$= 154500 \text{ კგ სმ.}$$

მაქსიმალური ძაბვა

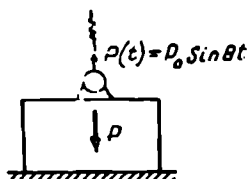
$$\sigma_{max} = \frac{154500 \cdot 7}{1264} = 855 \frac{\text{კგ}}{\text{სმ}^2}.$$

18 მაგალითი. განვსაზღვროთ ძრავისაგან გამოწვეული ძაბვები ზაძირ-

კვლის ფუძეზე (ნახ. 132). ვიბრაციული ძალა $P(t)=1,5 \sin \theta t$, ბრუნვათა რიცხვი წუთში $n=250$. ყველა საჭირო მონაცემები ავიღოთ მე-7 მაგალითიდან. გადაწყვეტა. საკუთარა რხევის სიხშირე (იხ. მე-7 მაგალითი)

$$\Phi = 22 \frac{1}{\text{წმ}}$$

იძულებითი რხევის სიხშირე



ნახ. 132.

$$\theta = \frac{n}{30} \pi = \frac{250}{30} 3,14 = 26,2 \frac{1}{\text{წმ}}$$

დინამიკური კოეფიციენტი მიღების მხედველობაში მართლმდებლად

$$\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\Phi}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{26,2}{22}\right)^2} = 2,44.$$

ძაბვა ფუძეზე

$$\sigma_{\text{ღიბ.}} = \frac{P + P_0 \mu}{F} = \frac{10000 + 1500 \cdot 2,44}{10000} = 13,7 \text{ კგ/სმ}^2.$$

ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების რხევა

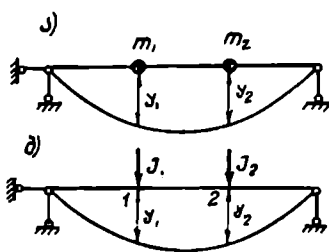
§ 53. თავისუფალი რხევა უფინალო არეში

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემებს. მაგრამ პრაქტიკაში, როგორც ეს ზემოთ იყო აღნიშნული, ხშირად შეგვხვდება ორი და უფრო მეტი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემები.

რხევის (მოძრაობის) დიფერენციალური განტოლების მისაღებად ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ცალკეული მასის წონასწორობის პირობა დალამბერის პრინციპის საფუძველზე, როგორც ეს გავაკეთეთ ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემისათვის.

იმევე შედეგს მივიღებთ თუ შევადგენთ გადაადგილებათა განტოლებებს იმ სახით, რა სახითაც ვაღებდით ძალთა მეთოდის კანონიკურ განტოლებებს.

განვიხილოთ უწონო დრეკადი კოჭი, რომელზეც მოქმედებს ორი შეყურსული ძალა სათანადოდ m_1 და m_2 მასით (ნახ. 133 ა). თუ რაიმე მიზეზით სისტემას გამოვიყვანთ წონასწორობის მდგომარეობიდან, იგი დაიწყებს რხევას. პირველი და მეორე წერტილის გადაადგილება წონასწორობის მდგომარეობიდან აღენიშნოთ y_1 და y_2 . წარმოვიდგინოთ, რომ m_1 და m_2 მასა მოშორებულია კოჭიდან. ამ შემთხვევაში უმასო სისტემაზე იმოქმედებს ინერციის ძალები I_1 და I_2 (ნახ. 133 ბ), ხოლო რხევის პროცესი პირობით განვიხილოთ, როგორც ამ ძალებისაგან გამოწვეული გადაადგილება.



ნახ. 133.

დაეწერათ I_1 და I_2 ძალისაგან გამოწვეული 1 და 2 წერტილის გადაადგილება:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= I_1 \delta_{11} + I_2 \delta_{12}, \\ y_2 &= I_1 \delta_{21} + I_2 \delta_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

ინერციის ძალები:

$$I_1 = -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2},$$

$$I_2 = -m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2}.$$

გადაადგილებები აღნიშნულია ისე როგორც ძალთა მეთოდით ანგარიშის დროს. პირველი ინდექსი გვიჩვენებს გადაადგილების ადგილს, მეორე—გამომწვევე მიზეზს. δ_{11} არის 1 წერტილზე მოქმედი ერთეული ძალისაგან გამოწვეული გადაადგილება ამავე ძალის მიმართულებით; δ_{22} არის მე-2 წერტილის გადაადგილება გამოწვეული ამავე წერტილზე მოქმედი ერთეული ძალისაგან; δ_{21} წარმოადგენს მე-2 წერტილზე მოქმედ ერთეულ ძალისაგან გამოწვეულ 1 წერტილის გადაადგილებას. I_1 და I_2 მნიშვნელობები შევიტანოთ 68-ე ფორმულაში და ყველა წევრი გადავიტანოთ ტოლობის მარცხნივ, მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \delta_{11} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \delta_{12} \frac{d^2 y_2}{dt^2} + y_1 &= 0, \\ m_1 \delta_{21} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \delta_{22} \frac{d^2 y_2}{dt^2} + y_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

ჩვენ მივიღეთ ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის თავისუფალი რხევის განტოლება. მიღებული ერთგვაროვანი განტოლებების კერძო გადაწყვეტა წარმოვიდგინოთ ჰარმონიული რხევის სახით:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A_1 \sin(\varphi t + \lambda), \\ y_2 &= A_2 \sin(\varphi t + \lambda). \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

y_1 და y_2 გაწარმოება ორჯერ t -თი მოგვცემს:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -A_1 \varphi^2 \sin(\varphi t + \lambda),$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = -A_2 \varphi^2 \sin(\varphi t + \lambda).$$

მიღებული გამოსახულებები შევიტანოთ 69-ე განტოლებაში და შეკვეცოთ $\sin(\varphi t + \lambda)$ -თი, მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} (m_1 \delta_{11} \varphi^2 - 1) A_1 + m_2 \delta_{12} \varphi^2 A_2 &= 0, \\ m_2 \delta_{21} \varphi^2 A_1 + (m_2 \delta_{22} \varphi^2 - 1) A_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

ამ განტოლების ტრივიალური ფესვები $A_1 = A_2 = 0$ იმას ნიშნავს, რომ რხევის არა აქვს ადგილი. რხევას რომ ჰქონდეს ადგილი განტოლების ფესვები ნულისაგან უნდა განსხვავდებოდეს. ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით, სისტემის მთავარი ლეტერმინანტი უნდა იყოს ნულის ტოლი:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (m_1 \delta_{11} \varphi^2 - 1) & m_2 \delta_{12} \varphi^2 \\ m_2 \delta_{21} \varphi^2 & (m_2 \delta_{22} \varphi^2 - 1) \end{vmatrix} = 0. \quad (72)$$

ლეტერმინანტის გაშლა მოგვცემს:

$$(m_1 \delta_{11} \varphi^2 - 1)(m_2 \delta_{22} \varphi^2 - 1) - m_1 m_2 \delta_{12}^2 \varphi^4 = 0 \quad (73)$$

ან

$$m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \varphi^4 - (m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22}) \varphi^2 + 1 = 0. \quad (73')$$

მიღებული განტოლება (73 ან 73') წარმოადგენს თავის უფალი რხევის განტოლებას, რომლითაც განისაზღვრება სიხშირე φ .

ბიკვადრატულ განტოლებიდან ეიპოვით სიხშირის კვადრატის ორ ფესვს:

$$\varphi_1^2 = \frac{m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} - \sqrt{(m_1 \delta_{11} - m_2 \delta_{22})^2 + 4 m_1 m_2 \delta_{12}^2}}{2 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)},$$

$$\varphi_2^2 = \frac{m_1 \delta_{11} + m_2 \delta_{22} + \sqrt{(m_1 \delta_{11} - m_2 \delta_{22})^2 + 4 m_1 m_2 \delta_{12}^2}}{2 m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2)},$$

საიდანაც განისაზღვრება ორი სიხშირე — უმცირესი φ_1 და უდიდესი — φ_2 .

თუ დავაკვირდებით ფორმულას, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ფესვს-ქვეშა გამოსახულება დადებითია და, მაშასადამე φ_1^2 და φ_2^2 ნამდვილი ფესვებია.

რადგანაც φ^2 გამოსახულების მეორე წევრი პირველზე ნაკლებია, ამიტომ მისი ორივე ფესვი დადებითია.

ამრიგად, ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის რხევა წარმოებს ორი სიხშირით φ_1 და φ_2 და ამიტომ 69-ე განტოლების კერძო გადაწყვეტას შეიძლება ჰქონდეს ორი ფორმა:

$$y_1' = A_1 \sin(\varphi_1 t + \lambda_1) \text{ და } y_1'' = B_1 \sin(\varphi_2 t + \lambda_2),$$

$$y_2' = A_2 \sin(\varphi_1 t + \lambda_1) \text{ და } y_2'' = B_2 \sin(\varphi_2 t + \lambda_2).$$

საერთო ინტეგრალში უნდა გაერთიანდეს რხევის ორივე ფორმა (ტონი). რადგან 69-ე განტოლება წრფივია, ამიტომ კერძო ინტეგრალების ჯამი მისი გადაწყვეტა იქნება.

მაშასადამე, საერთო ინტეგრალი y_1 და y_2 გადაადგილებისათვის დაიწერება შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A_1 \sin(\varphi_1 t + \lambda_1) + B_1 \sin(\varphi_2 t + \lambda_2), \\ y_2 &= A_2 \sin(\varphi_1 t + \lambda_1) + B_2 \sin(\varphi_2 t + \lambda_2). \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

71-ე განტოლება აკავშირებს ერთმანეთთან რხევის A_1 და A_2 ამპლიტუდებს:

$$\frac{A_2}{A_1} = - \frac{m_1 \delta_{11} \varphi^2 - 1}{m_2 \delta_{12} \varphi^2} = - \frac{m_2 \delta_{21} \varphi^2}{m_2 \delta_{22} \varphi^2 - 1} = \rho. \quad (75)$$

თუ 75-ე განტოლებაში შევიტანთ უმცირეს სიხშირეს φ_1 , მივიღებთ რხევის პირველი ფორმის ამპლიტუდებს შორის ფარდობას:

$$\frac{A_2}{A_1} = - \frac{m_1 \delta_{11} \varphi_1^2 - 1}{m_2 \delta_{12} \varphi_1^2} = \rho_1. \quad (76)$$

თუ იმავე განტოლებაში შევიტანთ უდიდეს სიხშირეს φ_2 , მივიღებთ რხევის მეორე ფორმის ამპლიტულებს შორის ფარლობას:

$$\frac{B_2}{B_1} = -\frac{m_1 \delta_{11} \varphi_2^2 - 1}{m_2 \delta_{12} \varphi_2^2} = \rho_2. \quad (77)$$

74-ე განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A_1 \sin(\varphi_1 t + \lambda_1) + B_1 \sin(\varphi_2 t + \lambda_2), \\ y_2 &= \rho_1 A_1 \sin(\varphi_1 t + \lambda_1) + \rho_2 B_1 \sin(\varphi_2 t + \lambda_2). \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

ამ განტოლებაში შედის ოთხი უცნობი — A_1 , A_2 ამპლიტულები და რხევის λ_1 და λ_2 ფაზები, რომლებიც განისაზღვრება საწყისი პირობებიდან. ოთხი უცნობის გასაგებად საჭიროა ოთხი პირობა. მაგალითად, როცა $t = 0$, მაშინ

$$y_1 = y_1^0, \quad y_2 = y_2^0,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = v_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = v_2.$$

ერთხელ კიდევ აღვნიშნოთ, რომ ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემას აქვს თავისუფალი რხევის ორი სიხშირე და თითოეულ სიხშირეს შეესაბამება რხევის თავისი ფორმა.

შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ $\rho_1 > 0$ და $\rho_2 < 0$. პირველ შემთხვევაში (ამპლიტულების ფარლობა დადებითია) m_1 და m_2 მასა გადაადგილება ერთ და იგივე მხარეს, ხოლო მეორე შემთხვევაში კი (ამპლიტულების ფარლობა უარყოფითია) სხვადასხვა მხარეს.

რთული მოძრაობა, რომელიც მოცემულია 74-ე განტოლებით და ნაჩვენებია 134-ე ანახაზზე წარმოადგენს უმცირესი სიხშირის შესაბამის რხევის ფორმისა (ნახ. 134 ბ) და უდიდესი სიხშირის რხევის შესაბამის ფორმის (ნახ. 134 გ) ჯამს. რხევის ფორმებს, რომლებიც შეესაბამება მოცემულ სიხშირეს რხევის მთავარი ან ნორმალური ფორმები ეწოდება.

უმცირესი სიხშირის (φ_1) შესაბამის ფორმას ეწოდება პირველი მთავარი ფორმა, ხოლო უდიდესი სიხშირის (φ_2) შესაბამ ფორმას — მეორე მთავარი ფორმა.

134-ე ბ, გ ანახაზზე წარმოდგენილია რხევის პირველი და მეორე მთავარი ფორმა. როგორც აღვნიშნეთ, პირველ შემთხვევაში მასები მოძრაობს ერთი მიმართულებით მეორეში — სხვადასხვა მიმართულებით. \downarrow

მთავარი ფორმები ურთიერთ ორთოგონალურებია, ე. ი. თუ პირველი ფორმა მთელ სიგრძეზე ერთნიშნაანია, მაშინ მეორე ფორმა ორნიშნაანი უნდა იყოს. დაუსვათ რხევის პირველმა და მეორე ფორმამ მიიღო მაქსიმალური გადახრა (ნახ. 134 ბ, გ), ამ მომენტში პირველი სისტემა იქნება დატვირთული ინერციის $m_1 A_1 \varphi_1^2$ და $m_2 \rho_1 A_1 \varphi_1^2$ ძალებით, ხოლო მეორე სისტემა კი ინერციის $m_1 B_1 \varphi_2^2$ და $m_2 \rho_2 B_1 \varphi_2^2$ ძალებით.

ამ ორი მდგომარეობისათვის დავწეროთ მუშაობათა ურთიერთობის პრინციპი, ე. ი. პირველი მდგომარეობის ძალების მუშაობა მეორე მდგომარეობის

გადაადგილებებზე გაუტოლოთ მეორე მდგომარეობის ძალების მუშაობას პირველი მდგომარეობის გადაადგილებებზე, მივიღებთ:

$$m_1 A_1 \varphi_1^2 B_1 + m_2 \rho_1 A_1 \varphi_1^2 \rho_2 B_1 = m_1 B_1 \varphi_2^2 A_1 + m_2 \rho_2 B_1 \varphi_2^2 \rho_1 A_1$$

ან

$$(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)(m_1 A_1 B_1 + m_2 A_1 B_1 \rho_1 \rho_2) = 0.$$

რადგან φ_1 და φ_2 სიხშირე ერთმანეთის ტოლი არ არის, ამიტომ

$$m_1 A_1 B_1 + m_2 A_1 B_1 \rho_1 \rho_2 = 0. \quad (79)$$

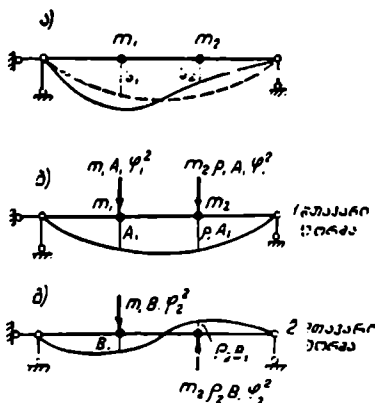
ეს არის რხევის ორი სხვადასხვა მთავარი ფორმის ორთოგონალურობის პირობა. 79-ე განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\rho_1 \rho_2 = -\frac{m_1}{m_2}. \quad (80)$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა ამყარებს კავშირს მთავარი ფორმების ρ_1 და ρ_2 მახასიათებლებს შორის.

თუ რხევის პირველი მთავარი ფორმის ამპლიტუდების ρ_1 ფარდობა ცნობილია და დადებითია, ამ შემთხვევაში შეგვიძლია გავიგოთ რხევის მეორე მთავარი ფორმის ამპლიტუდების ფარდობა ρ_2 , რომელიც უარყოფითია.

იმ შემთხვევაში, როდესაც სისტემაზე სიმეტრიულად მოქმედებს ორი ერთმანეთის ტოლი მასა, ე. ი. $m_1 = m_2 = m$ და $\delta_{11} = \delta_{22}$, მაშინ



ნახ. 134.

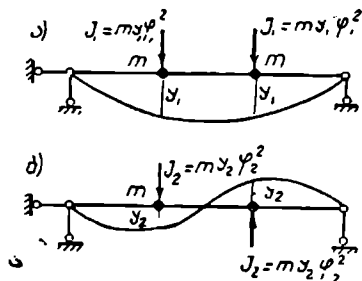
$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^2 &= \frac{1}{m(\delta_{11} + \delta_{12})}, \\ \varphi_2^2 &= \frac{1}{m(\delta_{11} - \delta_{12})}. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

ამ მნიშვნელობების 76-ე და 77-ე განტოლებაში შეტანა მოგვცემს:

$$\rho_1 = 1, \rho_2 = -1.$$

რხევის პირველი მთავარი ფორმა იქნება სიმეტრიული, ე. ი. ორივე მასების გადახრა ერთნაირია და ერთი მიმართულებით ხდება, ხოლო მეორე ფორმა კი ირიბად სიმეტრიული, ე. ი. ორივე მასის გადახრა და სხვადასხვა მიმართულებით ხდება.

სიმეტრიულ ნაშენებში, როდესაც მასები სიმეტრიულად არის განლაგებული, ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის ანგარიში შეიძლება დავივიანოთ ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის ანგარიშზე. ამის მიღება შეიძლება, თუ ინერციულ ძალებს დავაჯგუფებთ სიმეტრიულ და ირიბად სიმეტრიულ ძალებად, როგორც ძალთა მეთოდით ანგარიშის დროს. ძალები და გადაადგილებები იქნება განზოგადებული (ჯგუფური). ძალების დაჯგუფების მიზანია არამთავარი გადაადგილების δ_{12} ნულად ქცევა.



ნახ. 135.

135-ე ა ნახაზზე ნაჩვენებია სიმეტრიული ძალების მოქმედება, ხოლო 135-ე ბ ნახაზზე — ირიბად სიმეტრიული ძალების მოქმედება. ძალების ქვეშ გადაადგილებები ერთნაირია და ამიტომ როგორც პირველ ისე მეორე შემთხვევაში თითო უცნობი გვექნება.

I_1 ჯგუფური ინერციული ძალისაგან გამოწვეული გადაადგილება იქნება:

$$2y_1 = \delta_{11}I_1. \quad (ა)$$

I_2 ჯგუფური ინერციული ძალისაგან გამოწვეული გადაადგილება

$$2y_2 = \delta_{22}I_2, \quad (ბ)$$

სადაც δ_{11} და δ_{22} არის ორი ერთეული ძალის ერთდროული მოქმედებით გამოწვეული ჯგუფური გადაადგილება.

შევიტანოთ (ა) და (ბ) გამოსახულებებში ინერციული ძალების მნიშვნელობები:

$$I_1 = my_1\varphi_1^2,$$

$$I_2 = my_2\varphi_2^2,$$

მივიღებთ:

$$2y_1 = \delta_{11}my_1\varphi_1^2,$$

$$2y_2 = \delta_{22}my_2\varphi_2^2,$$

საიდანაც

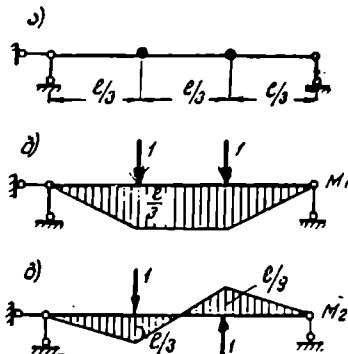
$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^2 &= \frac{2}{m\delta_{11}}, \\ \varphi_2^2 &= \frac{2}{m\delta_{22}}. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

იმავე შედეგს მივიღებთ თუ 81-ე ფორმულაში შევიტანთ $\delta_{12} = 0$ და მთავარ გადაადგილებებს შევცვლით ჯგუფური მთავარი გადაადგილების ნახევარით. ჩვენ მივიღეთ სიხშირეების ფორმულები გაცილებით უფრო მარტივად ვიღარე წინა პარაგრაფში (ფორ. 81). 81-ე და 82-ე ფორმულები ერთმანეთს ტოლფასია.

მაგალითად, თუ მასები მოთავსებულია მალის მესამედზე, გვექნება (ნახ. 136):

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1^2 dx}{EI} = \frac{5}{81} \frac{l^3}{EI},$$

$$\delta_{22} = \int \frac{M_2^2 dx}{EI} = \frac{1}{242} \frac{l^3}{EI}.$$



ნახ. 136.

ამ მნიშვნელობებს თუ შევიტანთ 82-ე განტოლებაში მივიღებთ:

$$\varphi_1 = 5,69 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}},$$

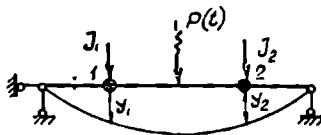
$$\varphi_2 = 22,04 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

§ 64. იძულებითი რხევა უწინააღრესი არეში

სისტემის ნებისმიერ წერტილზე მოქმედებს პარამონიული ვიბრაციული ძალა $P(t) = P_0 \sin \theta t$. რხევის პროცესი ისე, როგორც წინა პარაგრაფში, შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც უწინააღრესი სისტემაზე მოქმედი ინერციული I_1, I_2 ძალებისა და ვიბრაციული $P(t)$ ძალისაგან გამოწვეული გადაადგილება (ნახ. 137).

1 და 2 წერტილებში ერთეული ვიბრაციული ძალისაგან $P(t) = 1$ გამოწვეულ გადაადგილებებს თუ აღვნიშნავთ δ_{1p} და δ_{2p} , მაშინ y_1 და y_2 გადაადგილება გამოისახება შემდეგი სახით (იხ. ფორ. 68):

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= I_1 \delta_{11} + I_2 \delta_{12} + P(t) \delta_{1p}, \\ y_2 &= I_1 \delta_{21} + I_2 \delta_{22} + P(t) \delta_{2p}. \end{aligned} \right\} (83)$$



ნახ. 137.

თუ შევიტანთ ინერციის ძალების მნიშვნელობებს მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \delta_{11} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \delta_{12} \frac{d^2 y_2}{dt^2} + y_1 &= \delta_{1p} P_0 \sin \theta t, \\ m_1 \delta_{21} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \delta_{22} \frac{d^2 y_2}{dt^2} + y_2 &= \delta_{2p} P_0 \sin \theta t. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

მივიღეთ არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება.

ამ განტოლებათა სისტემის ინტეგრალი შედგება ორი ნაწილისაგან: ერთ-გვაროვანი განტოლების საერთო ინტეგრალისა, რომელიც მოცემულია 78-ე განტოლებით და არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ინტეგრალისაგან. პირველი წარმოადგენს თავისუფალ რხევის განტოლებას და ჩქარა ქრება არადრეკადი წინაღობის ძალების მოქმედებით, როგორც ამას ადგილი ქონდა ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემებში. კერძო ინტეგრალი კი იძლევა იძულებით რხევას, რომელიც წარმოადგენს სტაციონალურ მოძრაობას. კერძო ინტეგრალი მივიღოთ შემდეგი სახით:

$$y_1 = C_1 \sin \theta t,$$

$$y_2 = C_2 \sin \theta t.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ იძულებითი რხევა ხდება მოქმედი ძალის სიხშირით. y_1 და y_2 მნიშვნელობები შევიტანოთ 84-ე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} (m_1 \delta_{11} \theta^2 - 1) C_1 + m_2 \delta_{12} \theta^2 C_2 &= -\delta_{1p} P_0, \\ m_1 \delta_{21} \theta^2 C_1 + (m_2 \delta_{22} \theta^2 - 1) C_2 &= -\delta_{2p} P_0. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

მივიღეთ ორი განტოლება ორი უცნობით, საიდანაც განისაზღვრება C_1 და C_2 ამპლიტუდის მნიშვნელობა:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{P_0 [m_2 \delta_{12} \theta^2 \delta_{2p} - (m_2 \delta_{22} \theta^2 - 1) \delta_{1p}]}{(m_1 \delta_{11} \theta^2 - 1)(m_2 \delta_{22} \theta^2 - 1) - m_1 m_2 \delta_{12}^2 \theta^4}, \\ C_2 &= \frac{P_0 [m_1 \delta_{21} \theta^2 \delta_{1p} - (m_1 \delta_{11} \theta^2 - 1) \delta_{2p}]}{(m_1 \delta_{11} \theta^2 - 1)(m_2 \delta_{22} \theta^2 - 1) - m_1 m_2 \delta_{12}^2 \theta^4}. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

ამ გამოსახულებების მნიშვნელი წარმოადგენს 85-ე განტოლების მთავარ დეტერმინანტს და თუ აქ მ შევცვლით თავისუფალი რხევის სახშირით θ , მაშინ იგი დაემთხვევა 71-ე განტოლების დეტერმინანტს, რომელიც 72-ე განტოლების თანახმად ნულის ტოლია.

მასასადაშე, თუ აღმძვრელი ძალის სიხშირე თავისუფალი რხევის სიხშირის ($\theta = \varphi_1$ ან $\theta = \varphi_2$) ტოლია, მაშინ C_1 და C_2 გამოსახულების მნიშვნელი გაუტოლდება ნულს და ამპლიტუდები იქცევა უსასრულოებად, ე. ი. ადგილი ექნება რეზონანსს.

რეზონანსთა რიცხვი ემთხვევა სიხშირეთა რიცხვს, ან სისტემის თავი-

სუფლების ხარისხს. არადრეკადი წინააღმდეგობის ძალების (მილევის ძალების) გათვალისწინება ამცირებს საკუთარ რხევათა სიხშირეს და რეზონანსის დროს ამპლიტუდა იქნება არა უსასრულოდის, არამედ სასრულო, მაგრამ საკმაოდ დიდი სიდიდის, როგორც ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემებში.

რეზონანსი სახიფათოა ნაშენისათვის და როგორც აღნიშნული იყო საკუთარი რხევის სიხშირე 30 %-ით უნდა აღემატებოდეს იძულებითი რხევის სიხშირეს, ამ შემთხვევაში უმცირეს სიხშირეს. თუ ნაშენი მუშაობს სარეზონანსო რეჟიმზე, რასაც ზოგჯერ ადგილი აქვს, მაშინ ამპლიტუდები უნდა გამოეთვალეთ რხევის მილევის ძალების გათვალისწინებით.

რხევის ამპლიტუდების გამოთვლის შემდეგ ვანგარიშობთ ინერციულ ძალების მაქსიმალურ მნიშვნელობებს ფორმულით:

$$I_i = m_i \theta^2 C_i.$$

ვიბრაციული ძალისაგან გამოწვეული მღუნავი მომენტი გამოითვლება ფორმულით:

$$M = M_p + I_1 M_1 + I_2 M_2,$$

სადაც M_p არის ვიბრაციული ძალის ამპლიტუდისაგან (P_0) გამოწვეული მღუნავი მომენტი,

M_1 და M_2 — ერთეული ინერციული ძალებისაგან გამოწვეული მღუნავი მომენტები.

უფრო ზოგადად ძალების გამოთვლა გარჩეულია მე-60 პარაგრაფში.

§ 56. ვიბრორაჰამრობის მოწყობის პრინციპი

ვიბრორაჰამრობი წარმოადგენს მოწყობილობას, რომელიც ამცირებს რხევის ამპლიტუდებს. განვიხილოთ ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემა — ზამბარებზე ჩამოკიდებული ორი მასა (ნახ. 138). ვთქვათ რხევის პროცესში პირველმა მასამ მიიღო y_1 გადაადგილება, ხოლო მეორემ — y_2 . მეორე მასაზე მოქმედებს ვიბრაციული ძალა $P(t) = P_0 \sin \theta t$. ზედა ზამბარის დრეკადი წინააღმდეგობის ძალა იქნება: $S_1 = c_1 y_1$, ქვედასი — $S_2 = c_2 (y_2 - y_1)$. c_1 და c_2 ზამბარების სიხისტის კოეფიციენტებია.

m_1 და m_2 მასაზე მოქმედი ძალები, რომელსაც ადგილი ექნება მოძრაობის დროს, ნაჩვენებია 138-ე გნახაზზე. შევადგინოთ პირველი და მეორე მასის დინამიკური წონასწორობის (მოძრაობის) პირობა, მივიღებთ:

$$-I_1 - S_2 + S_1 = 0,$$

$$-I_2 + S_2 - P(t) = 0.$$

ძალების გამოსახულების შეტანის შემდეგ გვექნება:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + c_1 y_1 - c_2 (y_2 - y_1) &= 0, \\ m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} + c_2 (y_2 - y_1) &= P_0 \sin \theta t. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

როგორც წინა პარაგრაფში, ამ განტოლების კერძო გადაწყვეტა მივიღოთ შემდეგი სახით:

$$y_1 = A_1 \sin \theta t,$$

$$y_2 = A_2 \sin \theta t.$$

ამ მნიშვნელობების შეტანა 87-ე განტოლებაში და $\sin \theta t$ -ზე შეკვეცა მოგვცემს:

$$A_1(c_1 + c_2 - m_1\theta^2) - A_2c_2 = 0,$$

$$-A_1c_1 + A_2(c_2 - m_2\theta^2) = P_0.$$

საიდანაც

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{P_0 c_2}{(c_1 + c_2 - m_1 \theta^2)(c_2 - m_2 \theta^2) - c_2^2}, \\ A_2 &= \frac{P_0 (c_1 + c_2 - m_1 \theta^2)}{(c_1 + c_2 - m_1 \theta^2)(c_2 - m_2 \theta^2) - c_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

თუ მეორე ზამბარის სიხისტეს ისე შევარჩევთ, რომ

$$c_2 = m_1 \theta^2 - c_1, \quad (89)$$

მაშინ A_1 და A_2 ამპლიტუდა მიიღებს შემდეგ მნიშვნელობას:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{P_0}{c_2}, \\ A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მეორე მასა, რომელზეც ვიბრაციული ძალა მოქმედებს უძრავია, ხოლო პირველი მასა მოძრაობს

$$A_1 = -\frac{P_0}{c_2} \text{ ამპლიტუდით.}$$

ეს შედეგი საფუძვლად უდევს რხევის ჩამქრობი მოწყობილობების ვიბროჩამქრობების მოწყობას.

პრაქტიკულად, ვიბროჩამქრობები სხვადასხვა შემთხვევაში სხვადასხვა კონსტრუქციულ გადაწყვეტას პოულობენ, რომლებიც გარჩეულია სპეციალურ ლიტერატურაში. კერძოდ მანქანის რესორები ამ პრინციპით კეთდება.

§ 50. ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების ანგარიშის მაგალითები

14 მაგალითი. გამოეთვალათ ორმალიანი უწონო უკრი კოქის რხევის სიხშირე. მასები მოთავსებულია მალის შუაში $m_1 = m_2 = m$ (ნახ. 139).

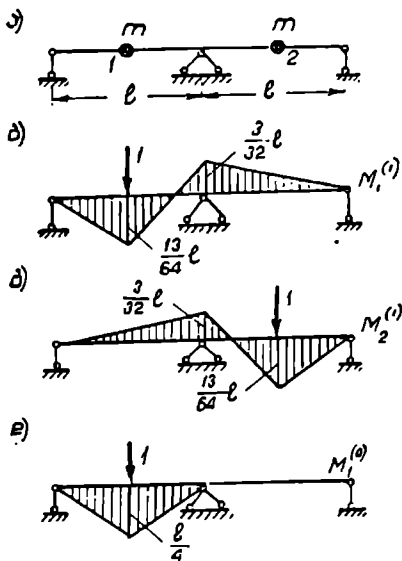
გადაწყვეტა. სისტემა სტატიკურად ურკვევია და ამიტომ წინასწარ

განგარიშებული უნდა იყოს ერთეულ ძალებზე (ნახ. 139 ბ, გ). მალის შუაში მოქმედი ერთეული ძალისაგან გამოწვეული საყრდენი მომენტი $M = \frac{3}{32} l$.

ერთეული გადაადგილებების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ფორმულა:

$$\delta_{ik} = \int \frac{M_i^{(1)} M_k^{(0)} dx}{EI},$$

სადაც $M_i^{(1)}$ არის i წერტილზე მოქმედ ერთეულ ძალისაგან გამოწვეული მომენტი სტატიკურად ურკვევ სისტემაში,
 $M_k^{(0)}$ — k წერტილზე მოქმედი ერთეულ ძალისაგან გამოწვეული მომენტი ნებისმიერ სტატიკურად რკვევად სისტემაში.



ნახ. 139.

$M_1^{(1)}$, $M_2^{(1)}$ და $M_1^{(0)}$ ეპიურების კომბინაცია ვერეშჩაგინის წესით მოგვ-
 ცემს:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \int \frac{M_1^{(1)} M_1^{(0)} dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{13l}{64} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} + \right. \\ \left. + \frac{l^2}{16} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{13}{64} l - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{32} l \right) \right] = \frac{23 l^3}{1536 EI},$$

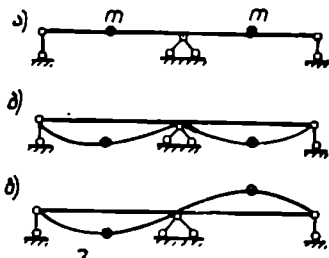
$$\delta_{21} = \delta_{12} = \int \frac{M_2^{(1)} M_1^{(0)} dx}{EI} = - \frac{1}{EI} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{32} l = - \frac{3}{512} \frac{l^3}{EI}.$$

გადაადგილებების მნიშვნელობები შევიტანოთ თავისუფალი რხევის განტოლებაში (72) ან რადგან სიმეტრიული ამოცანა შევიტანოთ 81-ე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\varphi_1^2 = \frac{1}{m(\delta_{11} + \delta_{12})} = \frac{768 EI}{7 ml^3}, \quad \varphi_1 = 10,47 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}},$$

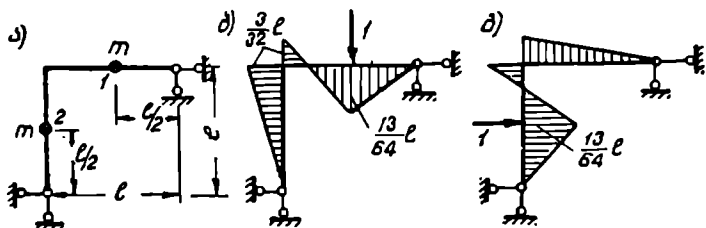
$$\varphi_2^2 = \frac{1}{m(\delta_{11} - \delta_{12})} = \frac{768 EI}{16 ml^3}, \quad \varphi_2 = 6,93 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

პირველი სიხშირე შეესაბამება შუა საყრდენის მიმართ სიმეტრიულ გაღუნვას (ნახ. 140 ბ) მეორე კი ირიბადსიმეტრიულ გაღუნვას (ნახ. 140 გ).



ნახ. 140.

გამოწვეული მღუნავი მომენტის ეპიურები მოყვანილია 141-ე ბ, გ ნახაზზე. ეს ეპიურები მე-14 ამოცანის ეპიურებს ემთხვევა და სიხშირეებსაც ისეთივე მნიშვნელობები ექნება, როგორც წინა ამოცანაში.



ნახ. 141.

16 მაგალითი. უკრ კონსოლიან კოჭის კონსოლებზე სიმეტრიულად მოქმედებს ერთნაირი მასები $m_1 = m_2 = m$ (ნახ. 142 ა).

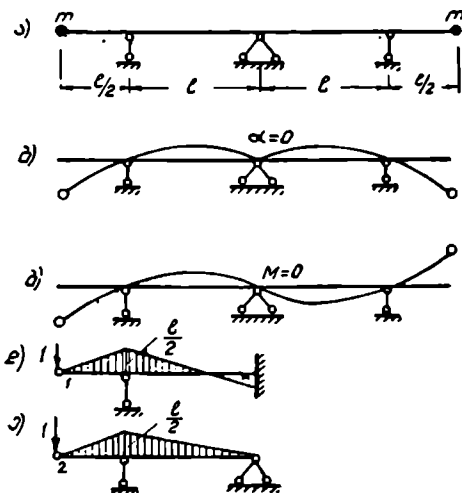
ვიპოვოთ თავისუფალი რხევის სიხშირე.

გადაწყვეტა. რხევა დავშალოთ სიმეტრიულ და ირიბად სიმეტრიულ რხევებად (ნახ. 142 ბ, გ). ნახაზიდან ცხადია, რომ პირველ შემთხვევაში გაღუნული ღერძი სიმეტრიულია შუა საყრდენის მიმართ და კოჭის თითო ნახევარი იმყოფება ერთი ბოლოთი ხისტად ჩამაგრებულ და მეორეთი დაყრდნო-

ბილ კოქის პირობებში, რომელზეც ერთი შეუერსული მასა მოქმედებს (ნახ. 142 დ). მეორე შემთხვევაში გადაღუნვის წერტილი შუა საყრდენზეა და ამიტომ სიხშირის საბოენლად საყმარისია განვიხილოთ კოქის თითო ნახევარი, როგორც მარტივი სახსროენად დაყრდნობილი კონსოლიანი კოქი (ნახ. 142 ე).

142-ე დ, ე ნახაზზე მოყვანილია ერთეული ძალებისაგან გამოწვეული მღუნავი მომენტის ეპიურები, რომელთა საფუძველზე ერთეული ძალისაგან გამოწვეული კონსოლის ბოლო წერტილის ჩაღუნვა, სიმეტრიული რხევის დროს

$$\delta_{11} = \frac{5 l^3}{48 EI}.$$



ნახ. 142.

ირიბად სიმეტრიული რხევის დროს

$$\delta_{22} = \frac{l^3}{8 EI}.$$

მაშასადამე, სიმეტრიული რხევის სიხშირე

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{48 EI}{5 ml^3}} = 3,1 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

ირიბად სიმეტრიული რხევის სიხშირე

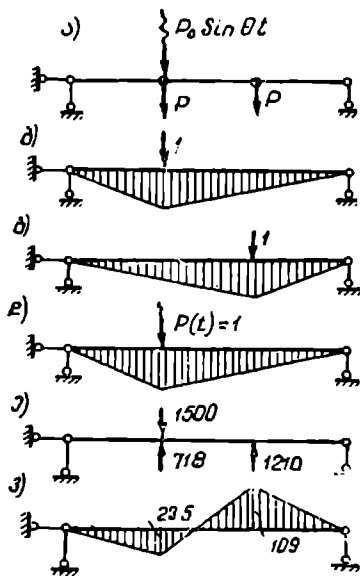
$$\varphi_2 = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{22}}} = \sqrt{\frac{8 EI}{ml^3}} = 2,83 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

ძირითად ფორმას იძლევა ირიბად სიმეტრიული რხევა.

17 მაგალითი. ორ საყრდენზე მდებარე კოქზე მოთავსებულია ორი ძრავი თითოეული $P = 8$ ტ წონით (ნახ. 143).

გამოვთვალოთ საყუთარი რხევის სიხშირე და შევასრულოთ კოქის ვიბრაციული ანგარიში იმ შემთხვევაში, როდესაც მუშაობს მხოლოდ პირველი

ძრავი, რომელიც ანეიტარებს დამატებით პარმონიულ ძალას $P(t) = P_0 \sin \theta t = 1,5 \sin \theta t$. ძრავის ბრუნვათა რიცხვი წუთში $n = 600$, $l = 6$ მ, $I = 23850$ სმ⁴, $E = 2,1 \cdot 10^8$ კგ/სმ².



ნახ. 143.

გადაწყვეტა. ავავთ ერთეული ძალებისაგან გამოწვეული ეპიურები M_1 , M_2 და $P(t) = 1$ ძალისაგან გამოწვეული M_p ეპიურა (ნახ. 143 ბ, გ, დ). გადაადგილებები

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \delta_{22} = \frac{4 l^3}{243 EI} = \\ &= \frac{4 \cdot 600^3}{243 \cdot 2,1 \cdot 10^8 \cdot 23850} = \\ &= 0,7 \cdot 10^{-4} \frac{\text{სმ}}{\text{კგ}}, \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = \frac{7 l^3}{486 EI} = \\ &= \frac{4 \cdot 600^3}{486 \cdot 2,1 \cdot 10^8 \cdot 23850} = \\ &= 0,62 \cdot 10^{-4} \frac{\text{სმ}}{\text{კგ}}. \end{aligned}$$

ერთეული ვიბრაციული ძალისაგან გამოწვეული გადაადგილებები

$$\delta_{1p} = \frac{4 l^3}{243 EI} = 0,7 \cdot 10^{-4} \frac{\text{სმ}}{\text{კგ}}; \quad \delta_{2p} = \frac{7 l^3}{486 EI} = 0,62 \cdot 10^{-4} \frac{\text{სმ}}{\text{კგ}},$$

ძრავის მასა

$$m = \frac{8000}{981} = 8,13 \frac{\text{კგ სმეკ}^2}{\text{სმ}},$$

იძულებითი რხევის სახშირი

$$\omega = \frac{\pi}{30} n = \frac{3,14}{30} 600 = 62,8 \frac{1}{\text{წმ}}.$$

თავისუფალი რხევის სიხშირეები გამოითვლება 81-ე ფორმულით:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sqrt{\frac{486 EI}{15 ml^3}} = 5,69 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} = 5,69 \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^8 \cdot 23850}{8,13 \cdot 600^3}} = \\ &= 30,6 \frac{1}{\text{წმ}}, \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \sqrt{\frac{486 EI}{m l^3}} = 22.04 \sqrt{\frac{EI}{m l^3}} = 119 \frac{1}{\sqrt{g}}$$

იძულებითი რხევის ამპლიტუდები C_1 და C_2 განისაზღვრება 86-ე ფორმულით, რომლის მნიშვნელი

$$\Delta = (m \delta_{11} \theta^2 - 1)(m \delta_{22} \theta^2 - 1) - m^2 \delta_{12}^2 \theta^4 = (8,13 \cdot 62,8^2 \cdot 0,7 \cdot 10^{-4} - 1)^2 - (8,13 \cdot 62,8^2 \cdot 0,62 \cdot 10^{-4})^2 = 1,56 - 4 = -2,44.$$

C_1 მრიცხველი

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= P_0 [m \delta_{12} \theta^2 \delta_{2p} - (m \delta_{22} \theta^2 - 1) \delta_{1p}] = \\ &= 1500 [8,13 \cdot 62,8^2 \cdot 0,62^2 \cdot 10^{-8} - (8,13 \cdot 62,8^2 \cdot 0,7 \cdot 10^{-4} - 1) 0,7 \cdot 10^{-4}] = \\ &= 1500 (1,23 \cdot 10^{-4} - 0,865 \cdot 10^{-4}) = 0,0547. \end{aligned}$$

C_2 მრიცხველი

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= P_0 [m \delta_{21} \theta^2 \delta_{1p} - (m \delta_{11} \theta^2 - 1) \delta_{2p}] = \\ &= 1500 [8,13 \cdot 62,8^2 \cdot 0,62 \cdot 10^{-4} \cdot 0,7 \cdot 10^{-4} - (8,13 \cdot 62,8^2 \cdot 0,7 \cdot 10^{-4} - 1) \cdot \\ &\quad \cdot 0,62 \cdot 10^{-4}] = 1500 (1,384 \cdot 10^{-4} - 0,765 \cdot 10^{-4}) = 0,093 \end{aligned}$$

რხევის ამპლიტუდები

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0,0547}{-2,44} = -0,0225 \text{ სმ,}$$

$$C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0,093}{-2,44} = -0,0381 \text{ სმ.}$$

ნიშანი მინუსი გვიჩვენებს, რომ რხევა ხდება აღმქვრელი ძალის საწინააღმდეგო ფაზაში და სათანადო ინერციულ ძალებსაც აღმქვრელი ძალის საწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ.

მაქსიმალური გადაადგილების (ამპლიტუდების) გამოთვლის შემდეგ ესაზღვრავთ ინერციულ ძალებს (მათ ამპლიტუდებს):

$$I_1 = m \theta^2 C_1 = -8,13 \cdot 62,8^2 \cdot 0,0225 = -718 \text{ კგ,}$$

$$I_2 = m \theta^2 C_2 = -8,13 \cdot 62,8^2 \cdot 0,0381 = -1210 \text{ კგ.}$$

დინამიკურ მღუნავ მომენტებს გამოვთვლით ძალთა დამოუკიდებლობის პრინციპის საფუძველზე.

დინამიკური მომენტები პირველ და მეორე ძალის ქვეშ იქნება:

$$M_1 = -\frac{2}{9} l \cdot 718 - \frac{1}{9} l \cdot 1210 + \frac{2}{9} l P_0 = l (-159 - 135 + 333,3) l =$$

$$= 39,3 l = 23500 \text{ კგ სმ},$$

$$M_2 = -\frac{1}{9} l 718 - \frac{2}{9} l \cdot 1210 + \frac{1}{9} l P_0 = l (-79,8 - 269 +$$

$$+ 166,6) l = -182,2 l = -109000 \text{ კგ სმ}.$$

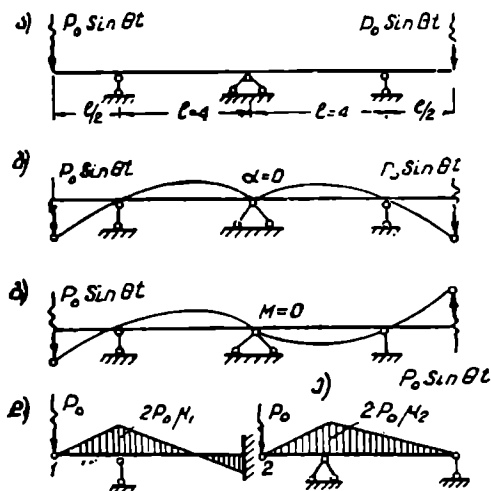
ეპიურა ნაჩვენებია 143-ე ვ ნახაზზე.

18 მაგალითი. განვიხილოთ მე-16 ამოცანა. უკრ კონსოლიან კოჭზე სიმეტრიულად მოთავსებულია ორი ძრავი თითოეული $P = 3$ ტ წონით (ნახ. 144).

გავარჩიოთ ძრავების მუშაობის ორი შემთხვევა: 1. ორივე ძრავი მუშაობს სინქრონულად ერთ და იგივე მიმართულებით (ნახ. 144 ბ); 2. ძრავები მუშაობენ სხვადასხვა მიმართულებით ირიბად სიმეტრიულად, ე. ი. ფაზათა გადაადგილება π ტოლია (ნახ. 144 გ). $l = 4$ მ, $E = 2,1 \cdot 10^8$ კგ/სმ², $I = 9850$ სმ⁴ (ორტესებრი კოჭი № 30). სიხისტე $EI = 2068,5 \cdot 10^8$ კგ სმ². მასა

$$m = \frac{3000}{981} = 3,06 \frac{\text{კგ წმ}^2}{\text{სმ}},$$

ძრავის ბრუნვათა რიცხვი წუთში $n = 250$. ძალის ამპლიტუდა $P_0 = 1$ ტ.



ნახ. 144.

შევასრულოთ კოჭის ეიბრაციული ანგარიში.

გადაწყვეტა. სიმეტრიული რხევა დაიყვანება ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სტატიკურად ურყევე კოჭის რხევაზე (ნახ. 144 დ). ირიბად სი-

მეტრიული რხევაც დაიყვანება ერთი თავისუფლებას ხარისხის მქონე სისტემაზე (ნახ. 144 ე). ერთეული ძალისაგან გამოწვეული კონსოლის ბოლო წერტილის ჩაღუნვა, სიმეტრიული რხევის შემთხვევაში (იხ. მე-16 ამოცანა)

$$\delta_{11} = \frac{5l^3}{48EI},$$

ხოლო ირიბად სიმეტრიულ რხევის დროს

$$\delta_{22} = \frac{l^3}{8EI}.$$

სიმეტრიული თავისუფალი რხევის სიხშირე

$$\varphi_1 = 3,1 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} = 3,1 \sqrt{\frac{2068,5 \cdot 10^9}{3,06 \cdot 400^3}} = 31,93 \frac{1}{\text{წმ}}.$$

ირიბად სიმეტრიული თავისუფალი რხევის სიხშირე

$$\varphi_2 = 2,83 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} = 29,2 \frac{1}{\text{წმ}}$$

იძულებითი რხევის სიხშირე

$$\theta = \frac{\pi}{30} n = \frac{3,14}{30} 250 = 26,2 \frac{1}{\text{წმ}}.$$

დინამიკური კოეფიციენტი სიმეტრიული რხევის შემთხვევაში

$$\mu_1 = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\varphi_1}\right)^2} = 3,08.$$

დინამიკური კოეფიციენტი ირიბად სიმეტრიული რხევის შემთხვევაში

$$\mu_2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\varphi_2}\right)^2} = 3,92.$$

მაქსიმალურ დინამიკურ მღუნავ მომენტს იძლევა ირიბად სიმეტრიული რხევა:

$$M_{max} = P_0 \frac{l}{2} \mu_2 = 2 P_0 \mu_2.$$

144-ე დ, ე ნახაზზე მოყვანილია დინამიკური მღუნავი მომენტის ეპიურა.

19 მაგალითი. სიმეტრიულ ჩარჩოს რიგელზე დადგმულია გაუწონასწორებელი ძრავი $G = 1,2$ ტ წონით. ბრუნვათა რიცხვი წუთში $n = 600$. გაუწონასწორებელი ნაწილის წონა $P = 200$ კგ, ექსცენტრის რადიუსი $e = 0,30$ სმ. (ნახ. 145).

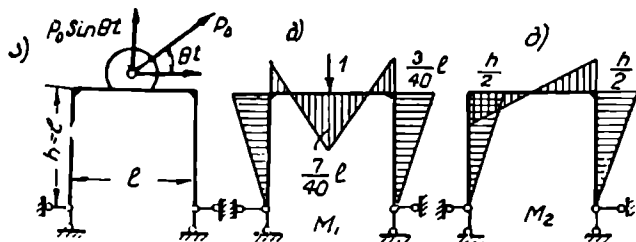
განვსაზღვროთ: 1. თავისუფალი რხევის სიხშირე ვერტიკალური და ჰორიზონტალური მიმართულებით,

2. დინამიკური ჩაღუნვა და ძაბვები სახიფათო კვეთში. ჩარჩოს კვეთის ინერციის მომენტი $I = 1138 \text{ სმ}^4$, $l = l_1 = 3 \text{ მ}$. ჩარჩოს წონა უგულებელვყოთ. გადაწყვეტა. გაუწონასწორებელი ნაწილის მასა

$$m = \frac{P}{g} = \frac{200}{981} = 0,204 \frac{\text{კგ წმ}^2}{\text{სმ}}$$

ძრავის მასა

$$m = \frac{1200}{981} = 1,22 \frac{\text{კგ წმ}^2}{\text{სმ}}$$



ნახ. 145.

იძულებითი რხევის სიხშირე

$$\theta = \frac{\pi}{30} n = \frac{3,14}{30} 600 = 62,8 \frac{1}{\text{წმ}}$$

ცენტრიდანული ძალის ამპლიტუდა

$$P_0 = m \theta^2 e = 0,204 \cdot 62,8^2 \cdot 0,30 = 242 \text{ კგ.}$$

აღმძვრელი ძალის გეგმილები:

$$P(t) = P_0 \sin \theta t = 242 \cdot \sin \theta t,$$

$$P(t) = P_0 \cos \theta t = 242 \cos \theta t.$$

სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი და მასზე მოქმედებს ვერტიკალური და ჰორიზონტალური ინერციული ძალა. საჭიროა განისაზღვროს რიგელის შუა წერტილის (მასის მოდების წერტილი) ვერტიკალური და ჰორიზონტალური გადაადგილება.

145-ე ბ, გ ნახაზზე მოყვანილია ერთეული ძალებისაგან გამოწვეული ძღუნავი მომენტის ეპიურები სტატიკურად ურკვევ სისტემაში. ამ ეპიურების საფუძველზე მივიღებთ:

$$\delta_{11} = \frac{n l^3}{960 EI}, \quad \delta_{22} = \frac{l^3}{4 EI}, \quad \delta_{12} = 0.$$

რადგანაც სიმეტრიულ და ირიბად სიმეტრიულ რხევისთან გვაქვს საქმე,

ამიტომ თავისუფალი რხევის სიხშირე ვერტიკალური მიმართულებით

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{960 EI}{1,22 \cdot 11 l^3}} = 8,84 \sqrt{\frac{EI}{l^3}}.$$

ჰორიზონტალური მიმართულებით

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{m \delta_{22}}} = \sqrt{\frac{4 EI}{1,22 l^3}} = 1,82 \sqrt{\frac{EI}{l^3}}.$$

თუ შევიტანთ

$$\sqrt{\frac{EI}{l^3}} = 9,4,$$

მივიღებთ:

$$\varphi_1 = 8,84 \cdot 9,4 = 83 \frac{1}{\text{წმ}},$$

$$\varphi_2 = 1,82 \cdot 9,4 = 17,1 \frac{1}{\text{წმ}}.$$

დინამიკური კოეფიციენტი ვერტიკალურ რხევის დროს

$$\mu_1 = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\varphi_1}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{62,8}{83}\right)^2} = 2,33.$$

დინამიკური კოეფიციენტი ჰორიზონტალური რხევის შემთხვევაში

$$\mu_2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{62,8}{17,1}\right)^2} = -0,08.$$

იძულებითი ვერტიკალური რხევის ამპლიტუდა

$$A = \frac{P_0}{m \varphi_1^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\varphi_1}\right)^2} = - \frac{242}{1,22 \cdot 83^2} \cdot 2,33 = -0,066 \text{ სმ.}$$

ნიშანს მნიშვნელობა არა აქვს.

იძულებითი ჰორიზონტალური რხევის ამპლიტუდა

$$A = \frac{P_0}{m \varphi_2^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\varphi_2}\right)^2} = - \frac{242}{1,22 \cdot 17,1^2} \cdot 0,08 = -0,055 \text{ სმ.}$$

საანგარიშო მღუნავი მომენტი რიგელის შუაში

$$M_{max} = \frac{7}{40} l(G + P_0 \mu_1) = \frac{7 \cdot 300}{40} (1200 + 242 \cdot 2,33) = 92500 \text{ კგ სმ.}$$

ჰორიზონტალური რხევის შემთხვევაში მაქსიმალურ მღუნავ მომენტს ადგილი აქვს ჩარჩოს კვანძებში:

$$M_{max} = \frac{3}{40} LG + \frac{h}{2} P_0 \mu_2 = \frac{3 \cdot 300 \cdot 1200}{40} + \frac{300 \cdot 242 \cdot 0,08}{2} =$$

$$= 27000 + 2920 = 29920 \text{ კგსმ.}$$

რაგორც ვხედავთ ჰორიზონტალური რხევა და, მაშასადამე, ჰორიზონტალური ვიბრაციული ძალა, იძლევა მინიმალურ მღუნავ მომენტს.

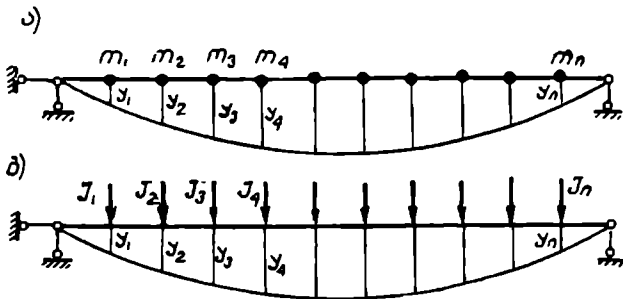
როდესაც ვიბრაციული ძალის ჰორიზონტალური მდგენელი აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას, მაშინ მისი ვერტიკალური მდგენელი ნულის ტოლია და ამიტომ სისტემაზე მოქმედებს მხოლოდ სტატიკური ვერტიკალური და ვიბრაციული ჰორიზონტალური ძალები.

თავი XIII

მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების რხევა

§ 57. თავისუფალი რხევა უწინაღო არაუი

ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების შესწავლისას გამოყენებული მეთოდი შეიძლება გავაერთიანოთ მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემებზეც. წარმოვიდგინოთ უწონო კონსერვატიული დრეკადი კოჭი, რომელზეც მოქმედებს n შეუურსული მასა (ნახ. 146). თუ რაიმე მიზეზით სისტემას გამოვიყვანთ წონასწორობის მდგომარეობიდან და ამ მიზეზს მაშინვე მოვაშორებთ, მაშინ სისტემა დაიწყებს თავისუფალ რხევას. m_1, m_2, \dots, m_n მასის მოძებნის წერტილების გადაადგილება წონასწორობის მდგომარეობიდან



ნახ. 146.

აღვნიშნოთ y_1, y_2, \dots, y_n . მასების გადაადგილებული მდგომარეობის საპოვნელად საჭიროა ვიცოდეთ n დამოუკიდებელი პარამეტრი: y_1, y_2, \dots, y_n , ე. ი. სისტემას აქვს n თავისუფლების ხარისხი.

ვთქვათ, რომ m_1, m_2, \dots, m_n მასა გამოყოფილია კოჭიდან, მაშინ უმასო სისტემაზე იმოქმედებს ინერციის I_1, I_2, \dots, I_n ძალები (ნახ. 146 ბ) და რხევითი პროცესი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ამ ძალებისაგან გამოწვეული გადაადგილება.

ძალთა დამოუკიდებლობის პრინციპის თანახმად თითოეული წერტილის გადაადგილება გამოისახება შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= I_1 \delta_{11} + I_2 \delta_{12} + I_3 \delta_{13} + \dots + I_n \delta_{1n}, \\ y_2 &= I_1 \delta_{21} + I_2 \delta_{22} + I_3 \delta_{23} + \dots + I_n \delta_{2n}, \\ &\vdots \\ y_n &= I_1 \delta_{n1} + I_2 \delta_{n2} + I_3 \delta_{n3} + \dots + I_n \delta_{nn}. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

გადაადგილებები აღნიშნულია ისე, როგორც ძალთა მეთოდით ანგარიშის დროს. მაგალითად, δ_{1k} წარმოადგენს k წერტილზე მოქმედ ერთეულ ძალისაგან გამოწვეულ i წერტილის გადაადგილებას. სათანადო წერტილებზე მოქმედი ინერციის ძალების მნიშვნელობები

$$I_1 = -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}, \quad I_2 = -m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2}, \dots, \quad I_n = -m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2},$$

შევიტანოთ 91-ე განტოლებაში და ყველა წვერი გადავიტანოთ ტოლობის ცალ მხარეს, მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \delta_{11} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \delta_{12} \frac{d^2 y_2}{dt^2} + m_3 \delta_{13} \frac{d^2 y_3}{dt^2} + \dots + m_n \delta_{1n} \frac{d^2 y_n}{dt^2} + y_1 &= 0 \\ m_1 \delta_{21} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \delta_{22} \frac{d^2 y_2}{dt^2} + m_3 \delta_{23} \frac{d^2 y_3}{dt^2} + \dots + m_n \delta_{2n} \frac{d^2 y_n}{dt^2} + y_2 &= 0 \\ \dots & \\ m_1 \delta_{n1} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \delta_{n2} \frac{d^2 y_2}{dt^2} + m_3 \delta_{n3} \frac{d^2 y_3}{dt^2} + \dots + m_n \delta_{nn} \frac{d^2 y_n}{dt^2} + y_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

ჩვენ მივიღეთ n თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის თავისუფალი რხევის დიფერენციალური განტოლება. ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის განტოლების ანალოგიურად 92-ე ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის კერძო ინტეგრალს ვეძებთ ჰარმონიული რხევის სახით:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A_1 \sin(\varphi t + \lambda), \\ y_2 &= A_2 \sin(\varphi t + \lambda), \\ \dots & \\ y_n &= A_n \sin(\varphi t + \lambda). \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

გავწარმოთ ორჯერ t -თი:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -A_1 \varphi^2 \sin(\varphi t + \lambda), \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= -A_2 \varphi^2 \sin(\varphi t + \lambda), \\ \dots & \\ \frac{d^2 y_n}{dt^2} &= -A_n \varphi^2 \sin(\varphi t + \lambda). \end{aligned}$$

y -ბისა და მათი წარმოებულების მნიშვნელობები შევიტანოთ 92-ე განტოლებებში, და $\sin(\varphi t + \lambda)$ -ზე შევკვეცოთ, მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} (m_1 \delta_{11} \varphi^2 - 1) A_1 + m_2 \delta_{12} \varphi^2 A_2 + \dots + m_n \delta_{1n} \varphi^2 A_n &= 0, \\ m_1 \delta_{21} \varphi^2 A_1 + (m_2 \delta_{22} \varphi^2 - 1) A_2 + \dots + m_n \delta_{2n} \varphi^2 A_n &= 0, \\ \dots & \\ m_1 \delta_{n1} \varphi^2 A_1 + m_2 \delta_{n2} \varphi^2 A_2 + \dots + (m_n \delta_{nn} \varphi^2 - 1) A_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

მიღებული ერთგვაროვანი წრფივი განტოლების ტრივიალური ფესვები $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$, იმის მაჩვენებელია, რომ რხევა არ ხდება. რხევას, რომ ჰქონდეს ადგილი ამპლიტუდები ნულისაგან უნდა განსხვავდებოდნენ. ეს კი შესაძლებელია მაშინ როცა 94-ე განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი ნულად იქცევა:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (m_1 \delta_{11} \varphi^2 - 1) m_2 \delta_{12} \varphi^2 \cdot \dots \cdot m_n \delta_{1n} \varphi^2 \\ m_1 \delta_{21} \varphi^2 (m_2 \delta_{22} \varphi^2 - 1) \cdot \dots \cdot m_n \delta_{2n} \varphi^2 \\ \dots \\ m_1 \delta_{n1} \varphi^2 m_2 \delta_{n2} \varphi^2 \cdot \dots \cdot (m_n \delta_{nn} \varphi^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (95)$$

გადაადგილებები და მასები ყოველთვის ცნობილია და ამიტომ 95-ე განტოლების გაშლით მივიღებთ n -ური რიგის ალგებრულ განტოლებას φ^2 მიმართ. ამ განტოლების გადაწყვეტა მოგვცემს φ^2 -ის n მნიშვნელობას, საიდანაც მივიღებთ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ სიხშირეებს. დამტკიცებულია, რომ 95-ე განტოლების ყველა ფესვი ნამდვილი და დადებითია.

ჩვენ ვხედავთ, რომ n თავის უფლების ხარისხის მქონე სისტემის თავისუფალი რხევა იძლევა n სიხშირეს. ამ სიხშირეების ერთობლიობას სიხშირეთა სპექტრი ეწოდება.

ჩვეულებრივ სიხშირეები დანომრილია მისი ზრდის მიხედვით—პირველი არის უმცირესი, უკანასკნელი კი უდიდესი, ე. ი.

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \dots < \varphi_n.$$

თითოეულ სიხშირეს შეესაბამება რხევის თავისი ფორმა.

φ_1 შესაბამ ფორმას ეწოდება პირველი მთავარი ფორმა ან პირველი ტონი, φ_2 შესაბამ ფორმას მეორე მთავარი ფორმა ან მეორე ტონი და ა. შ.

დაუბრუნდეთ 95-ე განტოლებას. ეს წარმოადგენს თავისუფალი რხევის განტოლებას და მას სიხშირეთა მახასიათებელი განტოლება ან საუკუნეობრივი განტოლება ეწოდება.

მალაო რიგის ალგებრული განტოლების ზუსტი ფესვების განსაზღვრა მეტად რთულია და ზოგიერთ შემთხვევებში პრაქტიკულად შეუძლებელია. ამიტომ არის რომ საუკუნეობრივი განტოლების გადაწყვეტის გამარტივებას ღიდი მნიშვნელობა ენიჭება. ამოცანის გადაწყვეტას გამარტივებს ის გარემოება, რომ უმეტეს შემთხვევაში პრაქტიკული ანგარიშისათვის არ არის საჭირო ყველა მისი ფესვის (სიხშირის) განსაზღვრა. საკმარისია მხოლოდ მინიმალური სიხშირის ცოდნა.

საუკუნეობრივი განტოლებიდან მინიმალური სიხშირის განსაზღვრის მეთოდი გარჩეულია სპეციალურ ლიტერატურაში.

94-ე განტოლებიდან განისაზღვრება როგორც რხევის სიხშირეები ასევე ამპლიტუდები ან მათი ფარდობები.

თუ 94-ე განტოლებაში შევიტანთ φ მნიშვნელობას, მივიღებთ განტოლებას საიდანაც განისაზღვრება A_1, A_2, \dots, A_n ამპლიტუდები ან მათი ფარდობები:

$$p_{21} = \frac{A_2}{A_1}, \quad p_{31} = \frac{A_3}{A_1}, \quad \dots, \quad p_{n1} = \frac{A_n}{A_1}.$$

ეს ფარდობები განსაზღვრავს პირველ მთავარ ფორმას.

92-ე განტოლების კერძო ინტეგრალი (ფორ. 93) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$y_1 = A_1 \sin(\varphi_1 t + \lambda_1),$$

$$y_2 = A_2 \sin(\varphi_1 t + \lambda_1) = \rho_{21} A_1 \sin(\varphi_1 t + \lambda_1),$$

$$y_3 = A_3 \sin(\varphi_1 t + \lambda_1) = \rho_{31} A_1 \sin(\varphi_1 t + \lambda_1),$$

$$y_n = A_n \sin(\varphi_1 t + \lambda_1) = \rho_{n1} A_1 \sin(\varphi_1 t + \lambda_1).$$

თუ იმავე განტოლებაში შევიტანთ φ_2 სიდიდეს მივიღებთ ამპლიტუდების სხვა $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$, მნიშვნელობებს, ან მათ ფარდობებს:

$$\rho_{22} = \frac{B_2}{B_1}, \quad \rho_{32} = \frac{B_3}{B_1}, \quad \dots, \quad \rho_{n2} = \frac{B_n}{B_1},$$

რომლებიც განსაზღვრავს რხევის მეორე მთავარ ფორმას.

92-ე განტოლების კერძო ინტეგრალი (ფორ. 93) დაიწერება შემდეგი სახით:

$$y_1 = B_1 \sin(\varphi_2 t + \lambda_2),$$

$$y_2 = B_2 \sin(\varphi_2 t + \lambda_2) = \rho_{22} B_1 \sin(\varphi_2 t + \lambda_2),$$

$$y_3 = B_3 \sin(\varphi_2 t + \lambda_2) = \rho_{32} B_1 \sin(\varphi_2 t + \lambda_2),$$

$$y_n = B_n \sin(\varphi_2 t + \lambda_2) = \rho_{n2} B_1 \sin(\varphi_2 t + \lambda_2)$$

და ასე შემდეგ, ყოველ სიხშირეს შეესაბამება თავისი ამპლიტუდები და, მაშასადამე, რხევის სათანადო მთავარი ფორმა.

φ_n სიხშირის შესაბამისი რხევის ამპლიტუდები აღენიშნოთ N_1, N_2, \dots, N_n . საერთო ინტეგრალში უნდა გაერთიანდეს რხევებს ყველა ფორმა და რადგან 92-ე განტოლება წრფივია, ამიტომ ცხადია, რომ კერძო ინტეგრალების ჯამი მისი გადაწყვეტა იქნება.

ამრიგად, 92-ე განტოლების საერთო ინტეგრალი დაიწერება შემდეგი სახით:

$$y_1 = A_1 \sin(\varphi_1 t + \lambda_1) + B_1 \sin(\varphi_2 t + \lambda_2) + \dots + N_1 \sin(\varphi_n t + \lambda_n),$$

$$y_2 = \rho_{21} A_1 \sin(\varphi_1 t + \lambda_1) + \rho_{22} B_1 \sin(\varphi_2 t + \lambda_2) + \dots + \rho_{2n} N_1 \sin(\varphi_n t + \lambda_n),$$

$$y_n = \rho_{n1} A_1 \sin(\varphi_1 t + \lambda_1) + \rho_{n2} B_1 \sin(\varphi_2 t + \lambda_2) + \dots + \rho_{nn} N_1 \sin(\varphi_n t + \lambda_n)$$

}

(96)

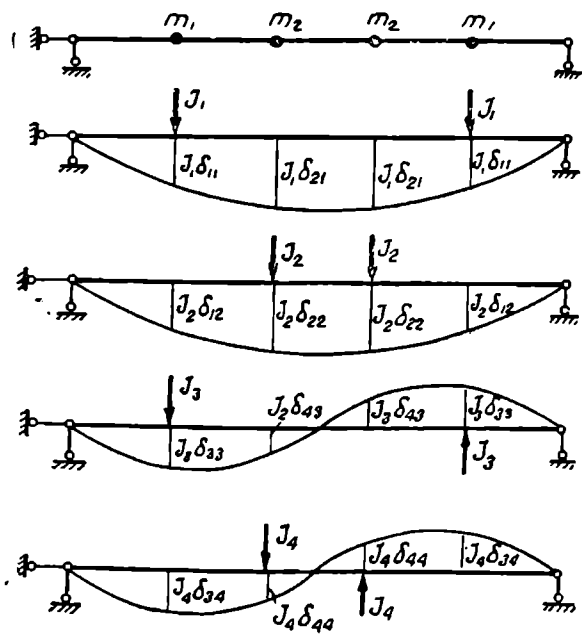
96-ე განტოლება გამოხატავს თავისუფალი რხევის კანონს და გვიჩვენებს, რომ თითოეული მასა მოძრაობს რთული მრავალტონიანი რხევის კანონით.

52-ე პარაგრაფში, ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების შესწავლისას, დავამტკიცეთ, რომ პირველი და მეორე მთავარი ფორმა ურთიერთ-ორთოგონალურია. ეს თეორემა შეიძლება გავრცელდეს მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემებზეც, ე. ი. რხევის ნებისმიერი ორი მთავარი

რი ფორმა ურთიერთობით გონაღარია. რაც იმას ნიშნავს, რომ ორ დრეკად ხაზს მთელ სიგრძეზე არ უნდა ჰქონდეს ერთნაირი ნიშანი. თუ სისტემა სიმეტრიულია და მასებზე სიმეტრიულად არის განაწილებული, მაშინ მთავარი ფორმები სიმეტრიული და ირიბად სიმეტრიული იქნება.

§ 58. სიმეტრიის გამოყენება

ნაშენის სიმეტრიის გამოყენებამ ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემებში მნიშვნელოვანი გამარტივება მოგვცა. ასეთივე გამარტივებას მივიღებთ იმ შემთხვევაშიც, როდესაც თავისუფლების ხარისხი ნებისმიერია. ინერციის ძალები დაეაჯგუფოთ სიმეტრიულ და ირიბად სიმეტრიულ ძალებად ისე, როგორც ჩარჩოების ანგარიშის დროს ვახდენდით ძალთა მეთოდით. ამ შემთხვევაში ძალები და გადაადგილებები იქნება ჯგუფური (განზოგადებული). წარმოვიდგინოთ ოთხი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემა (ნახ. 147 ა). ინერციის ძალების დაჯგუფება მოგვცემს I_1, I_2 სიმეტრიულ (ნახ. 147 ბ, გ) და I_3, I_4 ირიბად სიმეტრიულ ძალებს (ნახ. 147 დ, ე). უცნობებად მივიღოთ ჯგუფუ-



ნახ. 147.

რი ძალებისაგან გამოწვეული გადაადგილებები. დაჯგუფების შედეგად მივიღებთ:

$$\delta_{13} = \delta_{14} = \delta_{23} = \delta_{24} = 0.$$

ამიტომ გადაადგილებებს სიმეტრიული ძალების მიმართულებით მოგვცემს

მხოლოდ სიმეტრიული ძალები, ხოლო ირიბად სიმეტრიული ძალების მიმართულებით — მხოლოდ ირიბად სიმეტრიული ძალები.

I_1 და I_2 ძალებისაგან გამოწვეულ განზოგადებული (ჩგუფური) გადაადგილება I_1 ძალის მიმართულებით იქნება:

$$2y_1 = I_1 \delta_{11} + I_2 \delta_{12},$$

ასევე I_2 ძალის მიმართულებით

$$2y_2 = I_1 \delta_{21} + I_2 \delta_{22}.$$

მიღებულ განტოლებებში შევიტანოთ ინერციის ძალების მნიშვნელობები, მივიღებთ:

$$2y_1 = -m_1 \delta_{11} \frac{d^2 y_1}{dt^2} - m_2 \delta_{12} \frac{d^2 y_2}{dt^2},$$

$$2y_2 = -m_1 \delta_{21} \frac{d^2 y_1}{dt^2} - m_2 \delta_{22} \frac{d^2 y_2}{dt^2}.$$

საბოლოოდ

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_1}{2} \delta_{11} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{m_2}{2} \delta_{12} \frac{d^2 y_2}{dt^2} + y_1 &= 0, \\ \frac{m_1}{2} \delta_{21} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{m_2}{2} \delta_{22} \frac{d^2 y_2}{dt^2} + y_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

ანალოგიურ განტოლებას მივიღებთ ირიბად სიმეტრიული უცნობებისათვისაც.

97-ე განტოლება წარმოადგენს თავისუფალი რხევის განტოლებას ჩგუფური უცნობების შემთხვევაში. ეს განტოლება განსხვავდება 92-ე განტოლებისაგან $\frac{1}{2}$ კოეფიციენტი. მაშასადამე, ჩგუფური უცნობების შესაბამისი საუ-

კუნობრივი განტოლების მისაღებად საკმარისია მასებს დაეწეროს $\frac{1}{2}$ კოეფიციენტი. განხილულ შემთხვევისათვის ჩვენ გვქვნება ორი საუკუნეობრივი განტოლება: პირველში შევა მხოლოდ სიმეტრიულ, უცნობები, მეორეში—ირიბად სიმეტრიული.

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{m_1}{2} \delta_{11} \varphi^2 - 1 & \frac{m_2}{2} \delta_{12} \varphi^2 \\ \frac{m_1}{2} \delta_{21} \varphi^2 & \left(\frac{m_2}{2} \delta_{22} \varphi^2 - 1 \right) \end{pmatrix} \right| = 0,$$

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{m_3}{2} \delta_{33} \varphi^2 - 1 & \frac{m_4}{2} \delta_{34} \varphi^2 \\ \frac{m_3}{2} \delta_{43} \varphi^2 & \left(\frac{m_4}{2} \delta_{44} \varphi^2 - 1 \right) \end{pmatrix} \right| = 0.$$

თუ განტოლებაში აღმოჩნდა სიმეტრიული ან ირიბად სიმეტრიული არა-
 ჯგუფური უცნობი, მაშინ მის შესაბამ მასას არ დაეწერება $\frac{1}{2}$ კოეფიციენტი.

ჯგუფურ გადაადგილებებს ეიპოვით ჩვეულებრივად, სათანადო ერთეული
 ეპიურების საშუალებით.

ჩვენ შევისწავლეთ მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე კონსერვა-
 ტიული სისტემების თავისუფალი რხევები. არადრეკალი წინააღმდეგობის და-
 ლების გაელენა რხევის პროცესზე შეისწავლება ისევე, როგორც ერთი თავი-
 სუფლების ხარისხის მქონე სისტემებში (იხ. § 47). მიღებული რხევის ძირი-
 თადი განტოლებების მისაღებად ყველა მასაზე დამატებით უნდა ვამოქმედოთ
 წინააღმდეგობის ძალა. მიღებული რხევის სიხშირეთა გასაგებად φ^2 მიმართ
 მივიღებთ იმავე სახის საუკუნეობრივ განტოლებას, როგორსაც არამიღვეალი
 რხევის შემთხვევაში.

მიღებული რხევის სიხშირე დაკავშირებულია არამიღვეალი რხევის სიხში-
 რესთან ფორმულით:

$$\varphi_i' = \sqrt{\varphi_i^2 - \varepsilon^2}, \quad (98)$$

ე. ი. ისეთნაირად, როგორც ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემებში
 (იხ. ფორ. 37) და ამიტომ ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის მი-
 ლევადი რხევის ფორმულები სამართლიანია მრავალი თავისუფლების ხარისხის
 მქონე სისტემისათვისაც.

§ 50. იძულებითი რხევები უწინაღო არეში

წარმოვიდგინოთ, რომ n თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემაზე მოქ-
 მედებს ვიბრაციულ ძალთა ჯგუფი ერთნაირი წრიული სიხშირით θ :

$$P_1(t) = P_1 \sin \theta t, \quad P_2(t) = P_2 \sin \theta t, \dots, \quad P_k(t) = P_k \sin \theta t.$$

მოძრაობის დიფერენციალური განტოლების შესაღვენად ისე მოვიქცეთ,
 როგორც ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემებში. რხევის პროცესი
 შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც უწინა სისტემაზე მოქმედი ინერციული
 I_1, I_2, \dots, I_n ძალებისა და ვიბრაციული $P_1(t), P_2(t), \dots, P_k(t)$ ძალებისაგან
 გამოწვეული გადაადგილება. ვიბრაციული ძალებისაგან გამოწვეული i წერტი-
 ლის სტატიკური გადაადგილება აღვნიშნოთ:

$$\begin{aligned} \Delta_{ip}(t) &= P_1(t) \delta_{i1} + P_2(t) \delta_{i2} + P_3(t) \delta_{i3} + \dots + P_k(t) \delta_{ik} = \\ &= (P_1 \delta_{i1} + P_2 \delta_{i2} + P_3 \delta_{i3} + \dots + P_k \delta_{ik}) \sin \theta t = \\ &= \Delta_{ip} \sin \theta t, \end{aligned} \quad (99)$$

სადაც Δ_{ip} არის დინამიკური ძალების სტატიკური მოქმედებით გამოწვეული
 i წერტილის გადაადგილება.

იძულებითი რხევის დიფერენციალური განტოლება დაიწერება შემდეგი
 სახით:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \delta_{11} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \delta_{12} \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \dots + m_n \delta_{1n} \frac{d^2 y_n}{dt^2} + y_1 &= \Delta_{1p} \sin \theta t, \\ m_1 \delta_{21} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \delta_{22} \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \dots + m_n \delta_{2n} \frac{d^2 y_n}{dt^2} + y_2 &= \Delta_{2p} \sin \theta t, \\ m_1 \delta_{n1} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + m_2 \delta_{n2} \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \dots + m_n \delta_{nn} \frac{d^2 y_n}{dt^2} + y_n &= \Delta_{np} \sin \theta t. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

ამ განტოლებათა სისტემის საერთო ინტეგრალი იძლევა თავისუფალი რხევის განტოლებას, რომელიც ჩქარა ქრება მიღების ძალების გავლენით. კერძო ინტეგრალი კი იძლევა წმინდა იძულებით რხევას, რომელიც სტაციონარულია.

კერძო ინტეგრალს ისეთივე სახე ექნება, როგორც მე-100 განტოლების მარჯვენა მხარეს:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= C_1 \sin \theta t, \\ y_2 &= C_2 \sin \theta t, \\ y_n &= C_n \sin \theta t, \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

სადაც C_1, C_2, \dots, C_n არის მასების რხევის ამპლიტუდები.

101-ე გამოსახულება და მათი მეორე წარმოებულები შევიტანოთ მე-100 განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} (m_1 \delta_{11} \theta^2 - 1)C_1 + m_2 \delta_{12} \theta^2 C_2 + \dots + m_n \delta_{1n} \theta^2 C_n + \Delta_{1p} &= 0, \\ m_1 \delta_{21} \theta^2 C_1 + (m_2 \delta_{22} \theta^2 - 1)C_2 + \dots + m_n \delta_{2n} \theta^2 C_n + \Delta_{2p} &= 0, \\ m_1 \delta_{n1} \theta^2 C_1 + m_2 \delta_{n2} \theta^2 C_2 + \dots + (m_n \delta_{nn} \theta^2 - 1)C_n + \Delta_{np} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

ამ განტოლებიდან განისაზღვრება იძულებითი რხევის C_1, C_2, \dots, C_n ამპლიტუდები, რომელთა საშუალებითაც შეგვიძლია გამოვთვალოთ ყველა ინერციული ძალა.

ინერციული ძალები აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას ვიბრაციულ ძალებთან ერთად როცა $\sin \theta t = 1$. მაგალითად, ინერციული ძალის გამოსახულებიდან

$$I_i = -m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = m_i \theta^2 C_i \sin \theta t.$$

თუ ინერციული ძალების ამპლიტუდებს აღვნიშნავთ

$$Z_i = m_i \theta^2 C_i,$$

მაშინ 102-ე განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 \left(\delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^3} \right) + Z_2 \delta_{12} + \dots + Z_n \delta_{1n} + \Delta_{1p} &= 0, \\ Z_1 \delta_{21} + Z_2 \left(\delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2} \right) + \dots + Z_n \delta_{2n} + \Delta_{2p} &= 0, \\ Z_1 \delta_{n1} + Z_n \delta_{n2} + \dots + Z_n \left(\delta_{nn} - \frac{1}{m_n \theta^2} \right) + \Delta_{np} &= 0. \end{aligned} \right\} (103)$$

ეს განტოლება ძალთა მეთოდის კანონიკური განტოლების ანალოგიურია და მას ინერციული ძალების კანონიკური განტოლება ეწოდება.

განსხვავება იმაშია, რომ აქ მთავარი გადაადგილებები გამოითვლება ფორმულით:

$$\delta^*_{ii} = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2}.$$

ინერციული ძალების განსაზღვრის შემდეგ გადავიღოთ შიგა ძალებისა და გადაადგილებების განსაზღვრაზე.

სიმეტრიული სისტემის ანგარიშის დროს, როდესაც მასებიც სიმეტრიულად არის განლაგებული, ანგარიშის გამარტივების მიზნით, უმჯობესია მოვახდინოთ ინერციული ძალების დაჭკუფება სიმეტრიულ და ირიბად სიმეტრიულ უცნობებად ისევე, როგორც თავისუფალი რხევის განტოლების შედგენის დროს.

თუ სიმეტრიული ან ირიბად სიმეტრიული უცნობი ჭკუფურია, მაშინ მთავარი გადაადგილებები გამოითვლება ფორმულით:

$$\delta^*_{ii} = \delta_{ii} - \frac{1}{\frac{m_i \theta^2}{2}}.$$

დანარჩენი კოეფიციენტები გამოითვლება ჩვეულებრივად.

ამრიგად, ჩვენ მივიღებთ შემდეგ გამარტივებებს:

1. მთლიანი კანონიკური განტოლება გაიყოფა ორ დამოუკიდებელ ნაწილად, ერთში შევა სიმეტრიული ინერციული ძალები, მეორეში — ირიბად სიმეტრიული;

2. სიმეტრიული ვიბრაციული დატვირთვა ნულად აქცევს ირიბად სიმეტრიულ უცნობებს და პირიქით, ირიბად სიმეტრიული ვიბრაციული დატვირთვა სიმეტრიულ უცნობებს;

3. რეზონანსს ექნება ადგილი მხოლოდ მაშინ თუ სიმეტრიული ვიბრაციული დატვირთვის სიხშირე დაემთხვევა სიმეტრიული დეფორმაციის შესაბამ თავისუფალი რხევის სიხშირეს, ან თუ ირიბად სიმეტრიული ვიბრაციული დატვირთვის სიხშირე დაემთხვევა ირიბად სიმეტრიული დეფორმაციის შესაბამ თავისუფალი რხევის სიხშირეს.

როგორც აღენიშნეთ ვიბრაციული ძალების მოქმედების დროს მხედველობაში ვიღებთ მხოლოდ წმინდა იძულებით რხევებს. ამიტომ ნაშენზე იმოქმედებს მოცემული ვიბრაციული ძალები, რომელთა ამპლიტუდები ცნობილია და ამ ძალებისაგან გამოწვეული ინერციული ძალები Z_1, Z_2, \dots, Z_n განისაზღვრებიან 103-ე განტოლებიდან.

რადგანაც ვიბრაციული ძალები და ინერციული ძალები ერთდროულად აღწევენ თავიანთ მაქსიმალურ მნიშვნელობებს, ამიტომ დინამიკური ანგარიში დაიყენება სტატიკურ ანგარიშზე.

მაქსიმალური ძალები, ძალა და მოუკიდებლობის პრინციპის საფუძველზე, გამოითვლება ფორმულებით:

$$\left. \begin{aligned} M_{max} &= M_p + M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + \dots + M_n Z_n, \\ N_{max} &= N_p + N_1 Z_1 + N_2 Z_2 + \dots + N_n Z_n, \\ Q_{max} &= Q_p + Q_1 Z_1 + Q_2 Z_2 + \dots + Q_n Z_n, \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

სადაც M_p, N_p და Q_p არის დინამიკური ძალების ამპლიტუდების სტატიკური მოქმედებით გამოწვეული მღუნავი მომენტი, გრძივი და განივი ძალა,

M_i, N_i და $Q_i - Z_i = 1$ ძალისაგან გამოწვეული მღუნავი მომენტი, გრძივი და განივი ძალა.

თუ განსახილავი სისტემა სტატიკურად ურკვევია, მაშინ M_p, N_p, Q_p და M_i, N_i, Q_i ძალები წარმოადგენს სტატიკურად ურკვევი სისტემის ძალებს. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში წინასწარ საჭიროა შევასრულოთ სტატიკურად ურკვევი სისტემის ანგარიში.

მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების ანგარიშის დროს, ისე, როგორც ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე ნაშენებში, მხედველობაში უნდა გვქონდეს რეზონანსის წარმოშობის საშიშროება.

კანონიკური განტოლებიდან (103) ინერციული ძალების ამპლიტუდები განისაზღვრება შემდეგი სახით:

$$Z_1 = -\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad Z_2 = -\frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad Z_n = -\frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad (105)$$

სადაც Δ არის კანონიკურ განტოლებათა სისტემის მთავარი დეტერმინანტი.

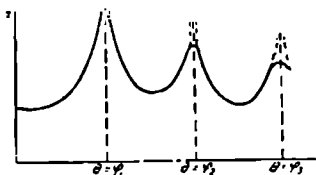
იმ შემთხვევაში, როდესაც აღმძვრელი ძალის სიხშირე θ გაუტოლდება თავისუფალ რხევის სიხშირეს φ , მაშინ დეტერმინანტი Δ გაუტოლდება საუკუნებრივი განტოლების დეტერმინანტს (ფორ. 95) და, მაშასადამე, ნულად იქცევა. ეს კი ნიშნავს, რომ ინერციული ძალები მიიღებს უსასრულოდ დიდ მნიშვნელობებს, და ადგილი აქვს რეზონანსს.

სისტემა დახასიათებულია თავისუფალი რხევის იმდენი სიხშირით რამდენი თავისუფლების ხარისხიც აქვს და ამიტომ მოსალოდნელია რამდენიმე სახის რეზონანსი (ნახ. 148).

რხევის მილევის ძალების გათვალისწინება ამცირებს ძალების (რხევის) ამპლიტუდებს და $Z=f(\theta)$ გრაფიკი მიიღებს ისეთ მოხაზულობას, როგორც ნახაზე ნაჩვენებია.

სისტემის შემოწმებისას რეზონანსზე მხედველობაში უნდა გვქონდეს, რომ

საკუთარი რხევის სიხშირის გაზრდა შესაძლებელია ნაშენის სიხისტის, მასის და სქემის შეცვლის გზით. მნიშვნელობა აქვს აგრეთვე ვიბროჩამქრობების მოწყობას.



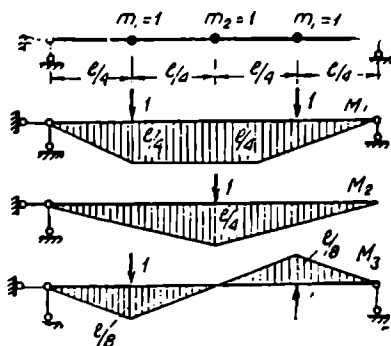
ნახ. 148.

§ 11. მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების

დინამიკური ანალიზის მათემატიკა

20 მაგალითი. ორ საყრდენზე მდებარე კოჭი დატვირთული სამი ერთნაირი მასით (ნახ. 149) ეიპოვოთ თავისუფალი რხევის სიხშირეები.

გადაწყვეტა. ანგარიშის გამარტივების მიზნით დავაჩვენოთ უცნობები. გვექნება ორი სიმეტრიული და ერთი ირიბად სიმეტრიული უცნობი. ჩვეუური ერთეული ძალებისაგან გამოწვეული ეპიურები ნაჩვენებია 149-ე ნახაზზე:



ნახ. 149.

$$\delta_{11} = \frac{4l^3}{96EI}, \quad \delta_{22} = \frac{2l^3}{96EI},$$

$$\delta_{12} = \frac{11}{4} \frac{l^3}{96EI}$$

საუწყუნებრივი განტოლება სიმეტრიული უცნობებისათვის დაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{m_1}{2} \delta_{11} \varphi^2 - 1 \right) & m_2 \delta_{12} \varphi^2 \\ \frac{m_1}{2} \delta_{21} \varphi^2 & (m_2 \delta_{22} \varphi^2 - 1) \end{vmatrix} = 0.$$

რადგანაც მეორე უცნობი დაჩვენებული არ არის, ამიტომ მის მასას $\frac{1}{2}$ კოეფიციენტი არ უწერია.

დეტერმინანტის გაშლის შემდეგ მივიღებთ:

$$\left(\frac{1}{2} \frac{4l^3}{96EI} \varphi^2 - 1\right) \left(\frac{2l^3}{96EI} \varphi^2 - 1\right) - \frac{121}{32} \frac{l^6}{96^2(EI)^2} \varphi^4 = 0.$$

აღენიშნოთ

$$\frac{l^3}{96EI} = a,$$

მივიღებთ:

$$(2a\varphi^2 - 1)(2a\varphi^2 - 1) - \frac{121}{32} a^2 \varphi^4 = 0.$$

გაშლის შემდეგ გვექნება:

$$0,22a^2 \varphi^4 - 4a \varphi^2 + 1 = 0,$$

საიდანაც

$$\varphi_1 = 4,93 \sqrt{\frac{EI}{l^3}},$$

$$\varphi_2 = 41,6 \sqrt{\frac{EI}{l^3}}.$$

საუკუნეობრივი განტოლება ირიბად სიმეტრიული უცნობებისათვის იქნება:

$$\left| \frac{m_1}{2} \delta_{33} \varphi^2 - 1 \right| = 0.$$

გადაადგილება

$$\delta_{33} = \frac{l^3}{192EI}.$$

ჩასმის შემდეგ მივიღებთ:

$$\varphi_3^2 = \frac{384EI}{l^3},$$

$$\varphi_3 = 19,595 \sqrt{\frac{EI}{l^3}}.$$

21 მაგალითი. შევასრულოთ წინა მაგალითის დინამიკური ანგარიში, თუ შუა მასაზე მოქმედებს ვიბრაციული ძალა

$$P(t) = P_0 \sin \theta t = 1000 \sin \theta t \quad (\text{ნ.ხ. } 150).$$

ძალის სიგრძე $l=4$ მ, მასა $m=4 \frac{\text{კგ} \sqrt{\text{მ}^2}}{\text{სმ}}$, ვიბრაციული ძალის სიხშირე

$$\theta = 100 \frac{1}{\sqrt{\text{მ}}}, \text{ კოქის სიხისტე } EI = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 23800 = 5 \cdot 10^{10} \text{ კგმ}^2.$$

გადაწყვეტა. ინერციული ძალების დაჭვუფების შედეგად გვექნება ორი სიმეტრიული Z_1 , Z_2 და ერთი ირიბად სიმეტრიული Z_3 უცნობი. სიმეტრიული დატვირთვის გამო $Z_3=0$.

წინა მაგალითის შედეგებს თუ გამოვიყენებთ გვექნება:

$$\delta_{11} = \frac{4l^3}{96EI}, \quad \delta_{22} = \frac{2l^3}{96EI}, \quad \delta_{12} = \frac{11}{4} \frac{l^3}{96EI}$$

სატვირთო წევრები

$$\Delta_{1p} = P_0 \delta_{12} = \frac{11}{4} \frac{l^3}{96EI} P_0 = 2,75 \frac{l^3}{96EI} P_0,$$

$$\Delta_{2p} = P_0 \delta_{22} = \frac{2l^3}{96EI} P_0.$$

ინერციული ძალების კანონიკური განტოლებები (103) დაიწერება შემდეგი სახით:

$$Z_1 \left(\delta_{11} - \frac{1}{\frac{m_1}{2} \theta^2} \right) + Z_2 \delta_{12} + \Delta_{1p} = 0,$$

$$Z_1 \delta_{21} + Z_2 \left(\delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2} \right) + \Delta_{2p} = 0.$$

რადგანაც Z_1 ჯგუფური უცნობია, ამიტომ მისი მასა მრავლდება $\frac{1}{2}$ კოეფიციენტზე.

$$\frac{EI}{m \theta^2 l^3} = \frac{5 \cdot 10^{10}}{4 \cdot 100^2 \cdot 400^3} = \frac{1,875}{96}.$$

$$\delta_{11} - \frac{1}{\frac{m}{2} \theta^2} = \frac{l^3}{EI} \left(\frac{4}{96} - \frac{2EI}{m \theta^2 l^3} \right) = \frac{l^3}{EI} \left(\frac{4}{96} - \frac{3,75}{96} \right) = \frac{0,25}{96} \frac{l^3}{EI},$$

$$\delta_{22} - \frac{1}{m \theta^2} = \frac{l^3}{EI} \left(\frac{2}{96} - \frac{1EI}{m \theta^2 l^3} \right) = \frac{l^3}{EI} \left(\frac{2}{96} - \frac{1,875}{96} \right) = \frac{0,125}{96} \frac{l^3}{EI}$$

$\frac{l^3}{96EI}$ -ზე შეკვეთის შემდეგ კანონიკური განტოლებები მიიღებს შემდეგ

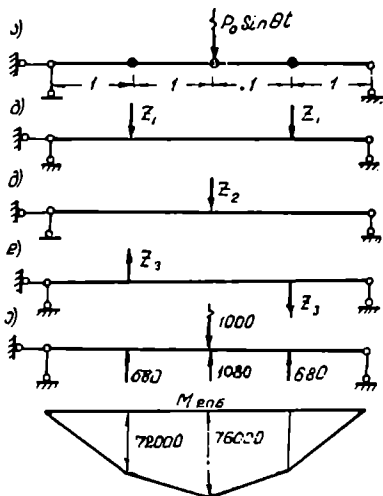
სახეს:

$$0,25Z_1 + 2,75Z_2 + 2,75P_0 = 0,$$

$$2,75Z_1 + 0,125Z_2 + 2P_0 = 0,$$

საიდანაც

$$Z_1 = -0,68P_0 = -680 \text{ კგ},$$



ნახ. 150.

$$Z_2 = -1,08P_0 = -1080 \text{ კგ.}$$

P_0 , Z_1 და Z_2 ძალებისაგან გამოწვეული ეპიურა (დინამიკური ეპიურა) ნაჩვენებია 150-ე ნახაზზე.

ჩალუნვა შუა წერტილში გამოითვლება $Z_2 = m\theta^2 y$ გამოსახულებიდან:

$$y = \frac{Z_2}{m\theta^2} = \frac{1080}{4 \cdot 100^2} = 0,027 \text{ სმ.}$$

საკუთარი რხევის სიხშირეები (წინა მაგალითში მიღებული გეჰერცა $m=1$)

$$\varphi_1 = 4,93 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} = 2,465 \sqrt{\frac{EI}{l^3}} = 69,5 \frac{1}{\text{წმ}},$$

$$\varphi_2 = 41,6 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} = 20,8 \sqrt{\frac{EI}{l^3}} = 576 \frac{1}{\text{წმ}}$$

22 მაგალითი. განესაზღვროთ ორსახსრიანი ჩარჩო's თავისუფალი რხევის სიხშირე. ჩარჩოს გრძივი მასა \bar{m} და სისხტე EI მუდმივია. რიგელის მასა წარმოედგინოთ ორ შეყურსულ მასად, თითოეული $\frac{\bar{m}l}{2}$ სიდიდით, ხოლო დგა-

რის მასა კი ერთ შეყურსულ მასად $\bar{m}h$ (ნახ. 151 ა). მივიღოთ: $l=h$.

გადაწყვეტა. სისტემას აქვს ხუთი თავისუფლების ხარისხი. ჩარჩოს რხევა შეიძლება იყოს სიმეტრიული და ირიბად სიმეტრიული. განვიხილოთ ცალ-ცალკე სიმეტრიული (ნახ. 151 ბ) და ირიბად სიმეტრიული (ნახ. 151 გ) რხევა. პირველ შემთხვევაში რიგელის შუა წერტილი არ მობრუნდება და გადაადგილდება მხოლოდ ვერტიკალურად, ამიტომ სისტემის თითოეული ნახევარი შეგვიძლია განვიხილოთ ისე, როგორც იგი ნაჩვენებია 151-ე დ ნახაზზე.

ირიბად სიმეტრიული რხევის დროს რიგელის შუაში მომენტი ტოლია ნულის და სისტემის თითო ნახევარი იმუშავებს ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია 151-ე ე ნახაზზე. სიმეტრიული რხევის დროს სისტემას ექნება ორი თავისუფლების ხარისხი, ხოლო ირიბად სიმეტრიული რხევის დროს — სამი. ასეთივე შედეგს მივიღებთ თუ გამოვიყენებთ დაჯგუფების მეთოდს.

ჯერ განვიხილოთ სიმეტრიული რხევა. 151-ე ვ, ზ ნახაზზე მოყვანილია ერთეული ძალებისაგან გამოწვეული ეპიურები (სისტემა ერთჯერ სტატიკურად ურკვევია). ამ ეპიურების საფუძველზე მივიღებთ (სიმარტივისათვის ერთერთი ეპიურა ავიღოთ სტატიკურად რკვევად სისტემაში):

$$\delta_{11} = \frac{77}{240} \frac{l^3}{16EI}, \quad \delta_{22} = \frac{241}{240} \frac{l^3}{16EI}, \quad \delta_{12} = -\frac{81}{240} \frac{l^3}{16EI}.$$

საუკუნეობრივი განტოლება დაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} \varphi^2 - 1 & m_2 \delta_{22} \varphi^2 \\ m_1 \delta_{21} \varphi^2 & (m_2 \delta_{22} \varphi^2 - 1) \end{vmatrix} = 0.$$

თუ აღვნიშნავთ $\frac{\bar{m}l^4}{240 \cdot 16EI} = a$, მაშინ საუკუნეობრივი განტოლება გაღა-

წერება ასე:

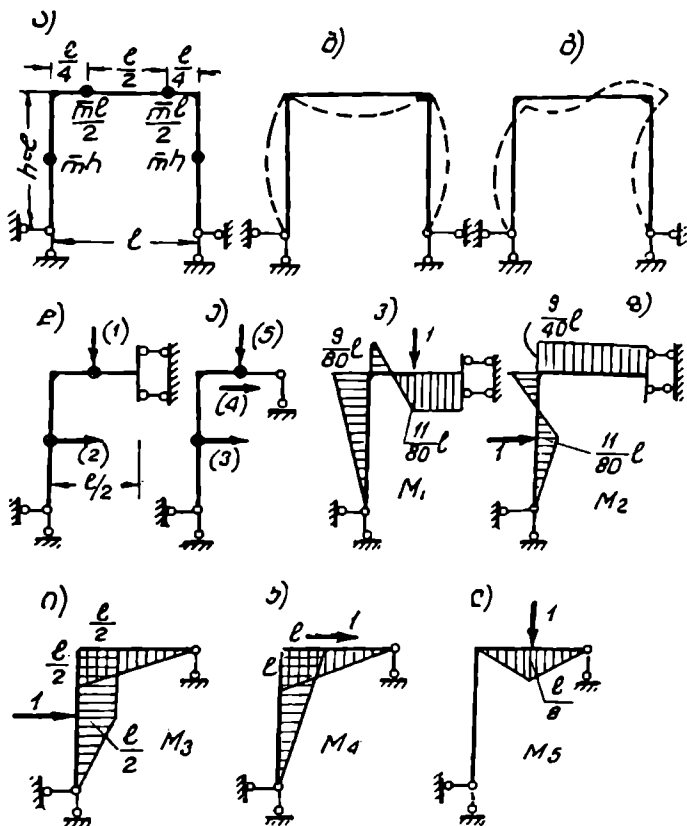
$$\begin{vmatrix} (38,5a\varphi^2 - 1) & -81a\varphi^2 \\ -40,5a\varphi^2 & (241a\varphi^2 - 1) \end{vmatrix} = 0.$$

გაშლის შემდეგ მივიღებთ:

$$6010a^2\varphi^4 - 279,5a\varphi^2 + 1 = 0,$$

საიდანაც

$$\varphi_1 = \frac{7,35}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \varphi_2 = \frac{12,8}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$



ნახ. 151.

ირიბად სიმეტრიული რხევის შემთხვევაში, როგორც აღვნიშნეთ. გვექნება სამი თავისუფლების ხარისხი, დგარის მასის პორიზონტალური გადაადგილება, რიგელის მასის პორიზონტალური და ვერტიკალური გადაადგილება. ინერციულ ძალებს ექნებათ ამ გადაადგილებების მიმართულებები.

151-ე ი, კ, ლ ნახაზზე მოყვანილია ერთეული ძალებისაგან გამოწვეული ეპიურები, რომელთა საფუძველზე მივიღებთ:

$$\delta_{33} = \frac{5}{24} \frac{l^3}{EI}, \quad \delta_{44} = \frac{l^3}{2EI}, \quad \delta_{55} = \frac{l^3}{384EI},$$

$$\delta_{24} = \frac{5l^3}{16EI}, \quad \delta_{35} = \frac{l^3}{128EI}, \quad \delta_{45} = \frac{l^3}{64EI}.$$

საუქუნეობრივი განტოლება დაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{vmatrix} (\bar{m}l \delta_{33} \varphi^2 - 1) & \frac{\bar{m}l}{2} \delta_{24} \varphi^2 & \frac{\bar{m}l}{2} \delta_{35} \varphi^2 \\ \bar{m}l \delta_{24} & \left(\frac{\bar{m}l}{2} \delta_{44} \varphi^2 - 1 \right) & \frac{\bar{m}l}{2} \delta_{45} \varphi^2 \\ \bar{m}l \delta_{35} \varphi^2 & \frac{\bar{m}l}{2} \delta_{45} \varphi^2 & \left(\frac{\bar{m}l}{2} \delta_{55} \varphi^2 - 1 \right) \end{vmatrix} = 0.$$

გავშალოთ დეტერმინანტი და შემოვიტანოთ $x = \frac{\bar{m}l^4}{EI} \varphi^2$ აღნიშვნა,

მივიღებთ კუბიკურ განტოლებას:

$$3,5x^3 - 4436x^2 + 542208x - 1179648 = 0.$$

ამ განტოლების ფესვების საპოვნელად მოვიქცეთ ასე: x მივცეთ 1; 1,5; 2; 2,5 მნიშვნელობები და ა. შ. მანამ სანამ დეტერმინანტი ნიშანს არ შეიცვლის. უკანასკნელ ორ მნიშვნელობას შორის კვლავ მივცეთ x შუალედი მნიშვნელობები მანამ სანამ განტოლება არ იქცევა ნულად.

შეიძლება აიგოს $\Delta = f(x)$ მრული, რომლის გადაკვეთა x ღერძთან მოგვცემს x საძიებელ მნიშვნელობას. ამ ოპერაციის შესრულების შემდეგ მივიღებთ პირველ მნიშვნელობას:

$$x = 2,216 = \frac{\bar{m}l^4}{EI} \varphi^2,$$

საიდანაც მინიმალური სიხშირე

$$\varphi = \frac{1,489}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}.$$

როგორც ვხედავთ ირიბად სიმეტრიული დეფორმაცია იძლევა მინიმალურ სიხშირეს.

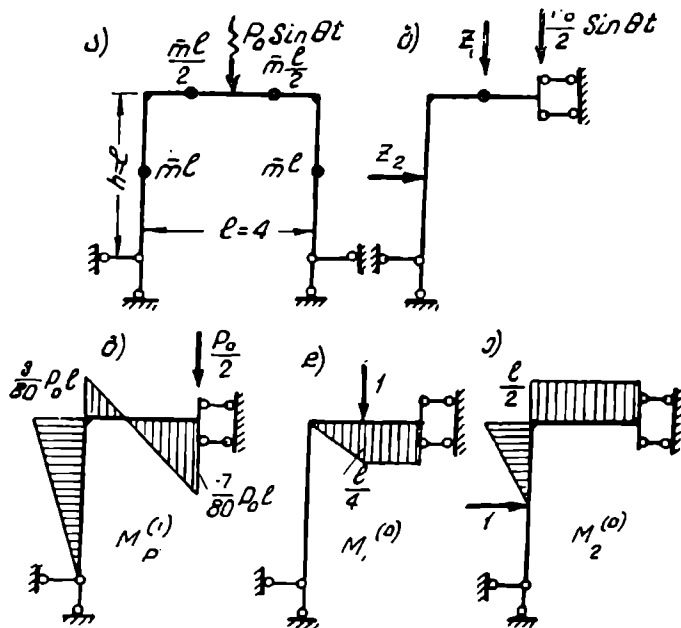
28 მაგალითი. აიგოს დინამიკური მლუნავი მომენტის ეპიურა თუ წინა მაგალითის ჩარჩოს შუაში მოქმედებს ვიბრაციული ძალა $P(t) = P_0 \sin \theta t = 2000 \sin \theta t$ (ნახ. 152 ა). ვიბრაციული ძალის სიხშირე $\theta = 80 \frac{1}{\text{წმ}}$, $l = 4$ მ. სიხისტე $EI = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 11900 = 2,5 \cdot 10^{10}$ კგმ² = $2,5 \cdot 10^6$ კგმ², გრძივი მასა (ორტესებრი კოეი № 33)

$$\bar{m} = 5,45 \frac{\text{კგ წმ}^2}{\text{მ}^2}$$

გადაწყვეტა. რადგანაც ვიბრაციული ძალა სიმეტრიულია, ამიტომ ირიბად სიმეტრიული ინერციული ძალები ნულის ტოლი იქნება. ისე, როგორც წინა მაგალითში ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ნახევარი ჩარჩო ნახევარი ვიბრაციული ძალით (ნახ 152 ბ). გვექნება ორი Z_1 და Z_2 უცნობი.
გამოვიყენოთ წინა მაგალითის შედეგები:

$$\delta_{11} = \frac{77}{240 \cdot 16} \frac{l^3}{EI}, \quad \delta_{22} = \frac{241}{240 \cdot 16} \frac{l^3}{EI}, \quad \delta_{12} = -\frac{81}{240 \cdot 16} \frac{l^3}{EI}.$$

P_0 ძალისაგან გამოწვეული ეპიურა მოყვანილია 152-ე გ ნახაზზე. სტეკერთო გ-



ნახ. 152.

დადგილების საპონენლად ავაგოთ ერთეულ ძალებისაგან გამოწვეული ეპიურები სტატეურად რკვევად სისტემაში (ნახ. 152 დ, ე):

$$\Delta_{1p} = \int \frac{M_p^{(1)} M_1^{(a)} dx}{EI} = \frac{7 P_0 l^3}{240 \cdot 16 EI},$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{M_p^{(1)} M_2^{(a)} dx}{EI} = \frac{54 P_0 l^3}{2 \cdot 10 \cdot 16 EI}$$

ინერციული ძალების კანონიკური განტოლება იქნება:

$$Z_1 \left(\delta_{11} - \frac{1}{\frac{ml}{2} \theta^2} \right) + Z_2 \delta_{12} + \Delta_{1p} = 0,$$

$$Z_1 \delta_{21} + Z_2 \left(\delta_{22} - \frac{1}{\frac{ml}{2} \theta^2} \right) + \Delta_{2p} = 0.$$

კოეფიციენტები:

$$\delta_{11} - \frac{1}{\frac{ml}{2} \theta^2} = \frac{77 l^3}{240 \cdot 16EI} - \frac{1}{5,45 \cdot 2 \cdot 80^2} = \frac{l^3}{240 \cdot 16EI} \left(77 - \frac{240 \cdot 16 \cdot 2,5 \cdot 10^6}{5,45 \cdot 2 \cdot 80^2 \cdot 400^3} \right) = \frac{l^3}{240 \cdot 16EI} (77 - 2140) = -2063 \frac{l^3}{240 \cdot 16EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{l^3}{240 \cdot 16EI} (241 - 1070) = -829 \frac{l^3}{240 \cdot 16EI}.$$

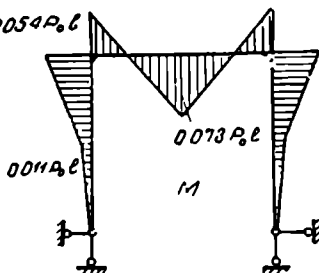
შეკვეცის შემდეგ კანონიერი განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$-2063Z_1 + 81Z_2 + 9P_0 = 0,$$

$$81Z_1 - 829Z_2 + 54P_0 = 0.$$

გაღწვეტის შემდეგ მივიღებთ:

$$Z_1 = 0,00695P_0 = 13,9 \text{ კგ}, \quad Z_2 = 0,0656P_0 = 131,2 \text{ კგ}.$$



ნახ. 153.

ჯამური მღუნავი მომენტის ეპიურა აიკება ფორმულით:

$$M = M_p + M_1 Z_1 + M_2 Z_2.$$

M_1 და M_2 ეპიურები ნაჩვენებია 151-ე ვ, ზ ნახაზზე, ხოლო M_p 152-ე გ ნახაზზე. ჯამური ეპიურა მოყვანილია 153-ე ნახაზზე.

მთლიანი უწყვეტი მასის მქონე სისტემების რხევა

§ 52. მუდმივი კავთის მქონე ლაროების გრძელი თავისუფალი რხევა

აქამდე განხილული სისტემები შეიცავდა გარკვეული რაოდენობის მასებს და მათი თავისუფლების ხარისხიც სასრულო რიცხვით გამოისახებოდა. სინამდვილეში სისტემა მთლიანი, უწყვეტი მასის მქონეა და მისი ასეთი სქემატიზაცია ნაშენის დინამიკური ანგარიშის მიახლოებით სურათს იძლევა. მთლიანი უწყვეტი მასის მქონე სისტემის თავისუფლების ხარისხი უსასრულობის ტოლია.

რადგანაც თავისუფალი რხევის სიხშირეთა რიცხვი და სათანადო რხევის მთავარი ფორმები თავისუფლების ხარისხს ემთხვევა, ამიტომ მთლიანი უწყვეტი მასის მქონე სისტემების თავისუფალ რხევათა რიცხვი და სათანადოდ, რხევის მთავარი ფორმები უსასრულობის ტოლია.

გრძელი რხევის დიფერენციალური განტოლების შედგენისას ჩვენ მივიღოთ ორი ძირითადი დაშვება; პირველი, ღეროს განიკვეთი რჩება ბრტყლად და მეორე, ამ კვეთზე მოთავსებული ნაწილაკები არ განიცდის განივ რხევას.

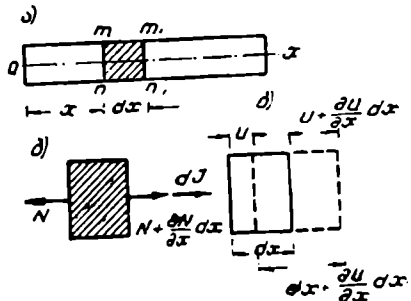
გამოვყოთ ღეროდან mn და m_1n_1 კვეთებს შორის მოთავსებული ელემენტი (ნახ. 154). თუ მარცხენა mn კვეთის გრძივ გადაადგილებას აღვნიშნავთ u , მაშინ მისი მეზობელი m_1n_1 კვეთის გადაადგილება იქნება:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

dx ელემენტის აბსოლუტური წაგრძელება იქნება

$\frac{\partial u}{\partial x} dx$, ხოლო ფარდობითი წაგრძელება

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$



ნახ. 154.

ღეროს განივი კვეთის ფართობი და დრეკადობის მოდული იყოს F და E .

ნებისმიერ mn კვეთში განითარებული დრეკადი გრძივი ძალა იქნება:

$$N = EF\epsilon = EF \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{ა}$$

კვეთის გადაადგილება u დამოკიდებულია, როგორც x კოორდინატზე, ისე

l დროზე. მაშასადამე, გრძივი ძალა N დამოკიდებულია x და t . გამოყოფილ ელემენტზე (ნახ. 154 გ) მოქმედებს გრძივი ძალები N და $N + \frac{\partial N}{\partial x} dx$.

მოძრაობის განტოლება დალამბერის პრინციპის თანახმად დაიწერება შემდეგი სახით:

$$-N + \left(N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right) = dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ან

$$\frac{\partial N}{\partial x} dx = dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

თუ შევიტანთ ელემენტის მასისა $dm = \rho F dx$ (ρ არის მასის სიმკვრივე) და N მნიშვნელობას, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (106)$$

სადაც

$$a^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (107)$$

გრძივი რხევის განტოლების ინტეგრების ერთერთი მეთოდი მდგომარეობს იმაში, რომ 106-ე განტოლების გადაწყვეტას წარმოვიდგინოთ ორი ფუნქციის ნამრავლის სახით:

$$u = X(x)T(t), \quad (108)$$

სადაც $X(x)$ მხოლოდ x ფუნქციაა და $T(t)$ მხოლოდ t -სი.

108-ე გამოსახულება შევიტანოთ 106-ე ფორმულაში, მივიღებთ:

$$X(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = a^2 T(t) \frac{d^2 X(x)}{dx^2}$$

ან

$$\frac{\frac{d^2 T(t)}{dt^2}}{T(t)} = a^2 \frac{\frac{d^2 X(x)}{dx^2}}{X(x)}.$$

ტოლობის მარცხენა ნაწილი დამოკიდებულია მხოლოდ t და მარჯვენა ნაწილი კი მხოლოდ — x . ეს ტოლობა ერთმანეთის ტოლი იქნება, თუ მარცხენა და მარჯვენა ნაწილი ერთ და იგივე მუდმივ სიდიდეს გაუტოლდება. ეს მუდმივი აღვნიშნოთ — φ^2 . მაშასადამე,

$$\frac{\frac{d^2 T(t)}{dt^2}}{T(t)} = -\varphi^2, \quad a^2 \frac{\frac{d^2 X(x)}{dx^2}}{X(x)} = -\varphi^2.$$

საიდანაც მივიღებთ ორ განტოლებას:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \varphi^2 T(t) &= 0, \\ \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{\varphi^2}{a^2} X(x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

ამ განტოლებათა ინტეგრალი იქნება:

$$T = A \sin \varphi t + B \cos \varphi t, \quad (110)$$

$$X = C \sin \frac{\varphi}{a} x + D \cos \frac{\varphi}{a} x. \quad (111)$$

A, B, C, D მუდმივები და φ სიხშირე განისაზღვრება საწყისი და სასაზღვრო პირობებიდან. რადგანაც სიხშირეთა რიცხვი უსასრულოდ დიდია, და ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება თავისი ფუნქციები T და X , ამიტომ 110-ე და 111-ე ფორმულები კერძო ამოხსნას იძლევა. მთლიანი გადაწყვეტა დაიწერება შემდეგი სახით:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) T_i(t). \quad (112)$$

X_i ფუნქცია დამოკიდებულია მხოლოდ x და იგი განსაზღვრავს რხევის ფორმას. მას ფუნდამენტალურ ფუნქციას უწოდებენ. ფუნდამენტალური ფუნქცია ორთოგონალურია, ე. ი. როცა $i \neq k$

$$\int_0^l X_i(x) X_k(x) dx = 0.$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები:

1. ღერო თავისუფალი ბოლოებით (ნახ. 154, ა).

ამ შემთხვევაში ღეროების ბოლოებში გრძივი ძალა ნულის ტოლია, $N=0$ და (ა) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = 0. \quad (ბ)$$

(ბ) განტოლებაში 108-ე განტოლებიდან შევიტანოთ u გამოსახულება, მივიღებთ:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} = T(t) \frac{dX(x)}{dx} = 0.$$

ეს შესაძლებელია მაშინ, თუ $\frac{dX(x)}{dx} = 0$.

ანალოგიურად მივიღებთ მეორე პირობასაც.

მაშასადამე, X ფუნქციამ უნდა დააკმაყოფილოს პირობები:

$$\left(\frac{dX(x)}{dx}\right)_{x=0} = 0 \text{ და } \left(\frac{dX(x)}{dx}\right)_{x=l} = 0. \quad (2)$$

111-ე განტოლებიდან (2) განტოლებაში შევიტანოთ X მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$C=0,$$

$$-D \frac{\Phi}{a} \sin \frac{\Phi}{a} l = 0,$$

საიდანაც

$$\sin \frac{\Phi l}{a} = 0. \quad (113)$$

ეს არის ღეროს გრძივი რხევის სიხშირეთა განტოლება.

113-ე განტოლება დაკმაყოფილდება როცა

$$\frac{\Phi l}{a} = n\pi,$$

საიდანაც სიხშირე

$$\varphi = n \frac{\pi a}{l}, \quad (114)$$

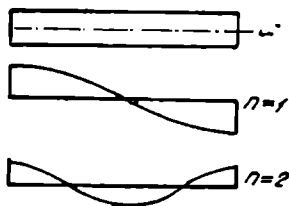
სადაც $n=1, 2, 3, \dots$

უმცირეს სიხშირეს მივიღებთ როცა $n=1$, მაშინ

$$\varphi_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (115)$$

ამრიგად, მივიღეთ საკუთარი რხევის უსასრულოდ ბევრი სიხშირე, რომლებსაც შეესაბამებათ რხევის თავიანთი ფორმები. ეს ფორმები განისაზღვრება განტოლებით:

$$X = D \cos \frac{n\pi}{l} x.$$



ნახ. 155.

რხევის ფორმები $n=1$ და $n=2$ მნიშვნელობისათვის ნაჩვენებია 155-ე ნახაზზე.

თუ შევაჯამებთ ნორმალურ რხევებს, რომელიც შეესაბამება თითოეულ სიხშირეს, მივიღებთ ღეროს გრძივი რხევას საერთო სახით:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{l} x \left(A \sin \frac{n\pi a}{l} t + B \cos \frac{n\pi a}{l} t \right). \quad (116)$$

A და B მუდმივები განისაზღვრება მოძრაობის საწყისი პირობებიდან.

2. ერთი ბოლოთი ჩამაგრებული ღერო.
სასაზღვრო პირობები იქნება:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \text{ როცა } x=0, u=0 \text{ და} \\ 2. \text{ როცა } x=l, \frac{\partial u}{\partial x}=0. \end{array} \right\} \quad (ა)$$

პირველი და მეორე პირობა მოგვცემს:

$$\left. \begin{array}{l} \text{როცა } x=0, \text{ მაშინ } X(x)=0 \text{ და} \\ \text{როცა } x=l, \text{ მაშინ, } \frac{dX(x)}{dx}=0. \end{array} \right\} \quad (ბ)$$

111-ე განტოლებიდან (ბ) განტოლებაში შევიტანოთ X გამოსახულება, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} D &= 0, \\ C \frac{\varphi}{a} \cos \frac{\varphi}{a} l &= 0. \end{aligned}$$

ერთდროულად C და D არ შეიძლება ნულის ტ.ლი იყოს, მაშასადამე,

$$\cos \frac{\varphi l}{a} = 0, \quad (117)$$

საიდანაც

$$\varphi = \frac{(2n-1)\pi a}{2l}$$

და სადაც $n=1, 2, 3, \dots$

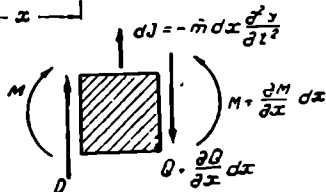
§ 88. მუდმივი კვეთის მქონე კოჭის განივი თავისუფალი რხევა

მივიღოთ, რომ კოჭის განივი კვეთის ზომები მის სიგრძესთან შედარებით მცირეა და რხევა ხდება ღუნვის მთავარ სიბრტყეში. კოჭიდან გამოვიყოთ dx ელემენტი (ნახ. 156) და განვიხილოთ მისი წონასწორობის პირობა. გამოყოფილ ნაწილზე იმოქმედებს შინაგანი დრეკადობის ძალები — განივი ძალა და მღუნავი მომენტი. ამ ძალებთან ერთად ამოკვეთილ ნაწილზე მოქმედებს ინერციის ძალა

$$dI = -m dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

სადაც m არის კოჭის გრძივი მასა (მასის ინტენსიურობა),

y — დინამიკური ჩაღუნვის ორდინატა, რომელიც ორი ცვლადის ფუნქციაა $y=f(x,t)$. გამოყოფილ ელემენტზე მოქმედი ძალების გეგმილების ჯამი ვერტიკალურ ღერძზე მოგვცემს:



ნახ. 156.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx - dI = 0.$$

ინერციის ძალის მნიშვნელობის შეტანის შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (ა)$$

ელემენტზე მოქმედი ძალების მომენტების ჯამი მოგვცემს (მეორე რიგის მცირეს უგულებელვყოფთ):

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q. \quad (ბ)$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა გაეწარმოთ და შევიტანოთ (ა) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (118)$$

გაღუნული ღერძის დიფერენციალურ განტოლებიდან

$$EI y'' = M.$$

შევიტანოთ M -ის მნიშვნელობა 118-ე განტოლებაში მივიღებთ:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (119)$$

აბ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{m} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (119')$$

მივიღეთ მუდმივი კვეთის მქონე კოქის თავისუფალი რხევის განტოლება.

119-ე განტოლების გადაწყვეტა წარმოვიდგინოთ ორი ფუნქციის ნამრავლის სახით, ისე, როგორც წინა პარაგრაფში, სადაც ერთი მხოლოდ x ფუნქცია იქნება, მეორე კი მხოლოდ t :

$$y(x, t) = X(x)T(t). \quad (120)$$

119-ე განტოლების წევრები მიიღებს შემდეგ სახეს (ინდექსები გამოტოვებულია):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= X \frac{d^2 T}{dt^2}, \\ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} &= T \frac{d^4 X}{dx^4}. \end{aligned}$$

ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ 119'-ე განტოლებაში, მივიღებთ:

$$X \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{EI}{m} T \frac{d^4 X}{dx^4} = 0,$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = - \frac{EI}{m} \frac{d^4 X}{dx^4}. \quad (121)$$

ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილი მხოლოდ t ფუნქციაა, მარჯვენა ნაწილი კი — x და ისინი მუდმივად ერთმანეთის ტოლი უნდა იყოს. ეს შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ორივე ნაწილი ცალ-ცალკე მუდმივი სიდიდის ტოლი იქნება. აღნიშნოთ ეს სიდიდე — φ^2 . შემდეგში აღმოჩნდება, რომ φ თავისუფალი რხევის სიხშირეა. მაშასადამე, 121-ე განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \varphi^2 T = 0, \quad (122)$$

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - \frac{m\varphi^2}{EI} X = 0. \quad (123)$$

კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება (119) გაიყოს ორ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებად, რომლებიც ცალ-ცალკე ამოიხსნება.

122-ე განტოლების ინტეგრალი იქნება:

$$T = A \sin \varphi t + B \cos \varphi t, \quad (124)$$

რომელიც გვიჩვენებს, რომ რხევა φ სიხშირით ხდება.

123-ე განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - K^4 X = 0, \quad (125)$$

სადაც

$$K = \sqrt[4]{\frac{m\varphi^2}{EI}}. \quad (126)$$

125-ე განტოლების საერთო ინტეგრალი, როგორც ცნობილია, დაიწერება შემდეგი სახით:

$$X = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx. \quad (127)$$

C_1, C_2, C_3 და C_4 მუდმივები განისაზღვრება ცალკეულ კერძო შემთხვევებში სასაზღვრო პირობებით.

127-ე განტოლება (სადაც X ფუნქციაა x კოორდინატის) განსაზღვრავს რხევის მთავარ ფორმას. განსახილავ ამოცანას აქვს უსასრულოდ ბევრი სიხშირე და სათანადოდ რხევის უსასრულოდ ბევრი ფორმა. თითოეულ სიხშირეს შესაბამება თავისი T და X ფუნდამენტალური ფუნქცია.

ყველა კერძო ამონახსნს თუ შევითანთ მე-120 განტოლებაში მივიღებთ საერთო გადაწყვეტას, რომელიც წარმოადგენს ყველა მთავარ რხევათა შეკრებას:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) T_i(t). \quad (128)$$

სასაზღვრო პირობებზე დამოკიდებულია კოქის ბოლოების დამაგრების ხასიათზე.

თუ კოქის ბოლო სახსროვნად არის დაყრდნობილი, მაშინ ამ ბოლოზე ჩაღუნვა და მღუნავი მომენტი ნულის ტოლია, ე. ი.

$$y=XT=0,$$

$$M=EI \frac{d^2y}{dx^2}=EI \frac{d^2X}{dx^2} T=0.$$

ეს შესაძლებელია, თუ

$$X=0 \text{ და } \frac{d^2X}{dx^2}=0. \quad (129)$$

ხისტად ჩამაგრებულ კოქის ბოლოზე ნულის ტოლია ჩაღუნვა და მობრუნების კუთხე, ე. ი.

$$y=X \cdot T=0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dX}{dx} T=0.$$

მაშასადამე, სასაზღვრო პირობები იქნება:

$$X=0, \quad \frac{dX}{dx}=0. \quad (130)$$

თუ კოქის ბოლო თავისუფალია, მაშინ

$$Q=EI \frac{d^3y}{dx^3}=EIT \frac{d^3X}{dx^3}=0$$

და

$$M=EIT \frac{d^2X}{dx^2}=0.$$

სასაზღვრო პირობა იქნება:

$$\frac{d^2X}{dx^2}=0, \quad \frac{d^3X}{dx^3}=0. \quad (131)$$

სიხშირეთა განტოლების შედგენის მსველელობა გავარჩიოთ კონკრეტულ მაგალითებზე.

1. სახსროვნად დაყრდნობილი კოქი (ნახ. 157). ამ შემთხვევისათვის სასაზღვრო პირობები მოცემულია 129-ე განტოლებით. სულ გვექნება 4 პირობა:

$$\text{როცა } x=0 \quad 1) X=0 \text{ და } 2) \frac{d^2X}{dx^2}=0,$$

$$\text{როცა } x=l \quad 3) X=0 \text{ და } 4) \frac{d^2X}{dx^2}=0.$$

პირველი პირობის შეტანა 127-ე განტოლებაში მოგვცემს:

$$C_3+C_4=0. \quad (a)$$

მეორე წარმოებული დაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 (-C_1 \sin kx - C_2 \cos kx + C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx).$$

მეორე პირობა მოგვცემს:

$$-C_2 + C_4 = 0.$$

(ბ)

(ა) და (ბ) განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$C_2 = C_4 = 0.$$

მესამე და მეოთხე პირობის თანახმად გვექნება:

$$\left. \begin{aligned} C_1 \sin kl + C_3 \operatorname{sh} kl &= 0, \\ -C_1 \sin kl + C_3 \operatorname{sh} kl &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\gamma)$$

C_1 და C_3 განსხვავდება ნულისაგან, თუ ამ განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლი იქნება:

$$\begin{vmatrix} \sin kl & \operatorname{sh} kl \\ -\sin kl & \operatorname{sh} kl \end{vmatrix} = 0,$$

საიდანაც

$$2 \sin kl \operatorname{sh} kl = 0.$$

მაშასადამე, სიხშირეთა განტოლება იქნება:

$$\sin kl \operatorname{sh} kl = 0.$$

როდესაც $kl \neq 0$, მაშინ $\operatorname{sh} kl \neq 0$, ამიტომ სიხშირეთა განტოლება დაიწერება შემდეგი სახით:

$$\sin kl = 0, \quad (132)$$

საიდანაც $kl = n\pi$, ($n=1, 2, 3, \dots$).

126-ე განტოლების საფუძველზე მივიღებთ:

$$\Phi = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}. \quad (133)$$

(გ) განტოლებიდან ცხადია, რომ $C_2 = 0$ და C_4 კი შეიძლება ჰქონდეს ნებისმიერი მნიშვნელობა.

ფუნდამენტალური ფუნქცია მიიღებს შემდეგ სახეს (ფორ. 127):

$$X = C_1 \sin kx = C_1 \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (134)$$

მაშასადამე, სიხშირის ყოველ მნიშვნელობას (ფორ. 133) შეესაბამება რხევის თავისი ფორმა. განხილულ შემთხვევაში სიხშირის ნომერა n ერთდროულად გვიჩვენებს სინუსოიდის ნახევარ ტალღათა რიცხვს. უნდა აღინიშნოს, რომ გაღუნული ღერძის ფორმა, ე. ი. სათანადო სიხშირის შესაბამი რხე-

ვის ფორმა, არ არის დამოკიდებული დროზე და ყოველთვის ერთნაირია. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ყოველ საკუთარ სიხშირეს შეესაბამება თავისი მდგარი ტალღა.

ჩვეუის პირველი სამი ფორმა (მდგარი ტალღა), რომელიც შეესაბამება $n=1$, $n=2$ და $n=3$ მოყვანილია 157-ე ნახაზზე.

დიფერენციალური განტოლების საერთო ამოხსნა იქნება:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x (A_n \sin \varphi t + B_n \cos \varphi t). \quad (135)$$

2. ერთი ბოლოთი ზისტად ჩამაგრებული კონსოლი (ნახ. 158). სასაზღვრო პირობები იქნება (ფორ. 130 და 131):

$$\text{როცა } x=0 \quad 1) X=0, \quad 2) \frac{dX}{dx}=0.$$

$$\text{როცა } x=l \quad 3) \frac{d^2X}{dx^2}=0, \quad 4) \frac{d^3X}{dx^3}=0.$$

პირველი და მეორე პირობა მოგვცემს:

$$C_3 + C_4 = 0, \quad C_4 = -C_3.$$

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_2 = -C_1.$$

X წარმოებულები იქნება:

$$\frac{d^2X}{dx^2} = k^2 (-C_1 \sin kx - C_2 \cos kx +$$

$$+ C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx),$$

$$\frac{d^3X}{dx^3} = k^3 (-C_1 \cos kx + C_2 \sin kx +$$

$$+ C_3 \operatorname{ch} kx + C_4 \operatorname{sh} kx).$$

ნახ. 158.

შესაშე და მეოთხე პირობის თანახმად

$$-C_1 \sin kl - C_2 \cos kl + C_3 \operatorname{sh} kl + C_4 \operatorname{ch} kl = 0,$$

$$-C_1 \cos kl + C_2 \sin kl + C_3 \operatorname{ch} kl + C_4 \operatorname{sh} kl = 0.$$

ამ განტოლებებში შევიტანოთ C_4 და C_3 მნიშვნელობები, მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} C_1(\sin kl + \operatorname{sh} kl) + C_2(\cos kl + \operatorname{ch} kl) &= 0, \\ C_1(\cos kl + \operatorname{ch} kl) - C_2(\sin kl - \operatorname{sh} kl) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (დ)$$

სიხშირეთა მახასიათებელი განტოლების მისაღებად ამ განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი გაუტოლოთ ნულს:

$$(\sin kl + \operatorname{sh} kl)(\sin kl - \operatorname{sh} kl) + (\cos kl + \operatorname{ch} kl)^2 = 0.$$

საბოლოოდ გვექნება:

$$\cos kl \operatorname{ch} kl = -1. \quad (136)$$

ამ ტრანსცენდენტური განტოლების ფესვები იქნება:

$$k_1 l = 1,875; k_2 l = 4,694; k_3 l = 7,855; k_4 l = 10,996.$$

თავისუფალი რხევის სიხშირეები განისაზღვრება 126-ე ფორმულის საშუალებით:

$$\varphi_i = k_i^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}. \quad (137)$$

რხევის ფორმების მისაღებად (დ) განტოლებიდან უნდა გამოეთვალოთ მუდმივები და შევიტანოთ 127-ე განტოლებაში. 158-ე ნახაზზე მოყვანილია $n=1$ და $n=2$ შესაბამის მდგარი ტალღები.

თავისუფალი რხევის სიხშირის გამოთვლის მიახლოებითი მეთოდები

§ 64. დაყვანილი მასის მეთოდი

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით სიხშირეთა გამოთვლის ზუსტ მეთოდებს, რომელთა გამოყენება, მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების საანგარიშოდ, დაკავშირებულია ძალიან დიდ არითმეტიკულ გამოთვლებთან. უსასრულოდ ბევრი თავისუფლების ხარისხის შემთხვევაში, როგორც ვნახეთ, საჭიროა სათანადო ტრანსცენდენტული განტოლების გადაწყვეტა. ეს ამოცანა გადაულახავ სირთულეს იწვევს ცვალებადი მასის და სიხისტის დროს.

ანგარიშის გამარტივების მიზნით მიმართავენ მიახლოებით მეთოდებს. გამარტივებები წარმოებს ძირითადად ორი გზით: 1) გალუნული ლერძის ისეთი განტოლების მოძებნის, რომელიც ახლოს იქნება რხევის დროს მიღებულ მრუდთან და 2) საანგარიშო სქემის გამარტივებით, რომელიც მდგომარეობს განაწილებული მასის ცალკეულ შეუურსულ მასით შეცვლაში.

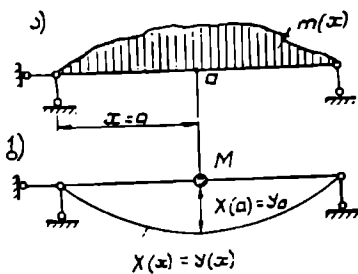
დაყვანილი მასის მეთოდი იმაში მდგომარეობს, რომ განაწილებულ მასას ვცვლით ერთი ან რამდენიმე მასით, რითაც მცირდება განსახილავი სისტემის თავისუფლების ხარისხი. ეს შეეცალა ისე უნდა მოხდეს, რომ მან საკმარისად ზუსტად გამოსახოს მოცემული სისტემის დინამიკური მუშაობის ხასიათი.

ამისათვის საჭიროა შემცვლელმა მასამ, რომელსაც აღვნიშნავთ M -ით, სისტემას მისცეს რხევის ისეთი უმცირესი სიხშირე, რომელსაც მოგვეძებდა განაწილებული მასა.

ვთქვათ მოცემულია რაიმე სისტემა, რომელზეც მოქმედებს

განაწილებული მასა $m(x)$ (ნახ. 159 ა). შეეცვალოთ მთელი მასა ერთი შეუურსული მასით M -ით, რომელიც იმოქმედებს იმავე (უწონო) სისტემის რომელიმე a წერტილზე (ნახ. 159 ბ).

დაყვანილი მასის სიდიდე განისაზღვრება იმ პირობიდან, რომ ორივე მდგომარეობის კინეტიკური ენერჯია ერთნაირი იყოს რხევის ყველა მომენტში.



ნახ. 159.

ვთქვათ, რომ ნებისმიერი სიხშირის შესაბამის რხევის ფორმა განაწილებული მასის შემთხვევაში, ე. ი. დამდგარი ტალღა, მოცემულია განტოლებით:

$$y(x, t) = X(x)T(t).$$

$X(x)$ დამოკიდებულია მხოლოდ x , ხოლო $T(t)$ მხოლოდ t -ზე.

y წარმოებული t -თი მოგვეცემს სიჩქარეს:

$$v = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = X(x) \frac{dT(t)}{dt}.$$

მოცემული სისტემის კინეტიკური ენერგია

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \bar{m}(x) v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{dT}{dt} \right)^2 \int_0^l \bar{m}(x) X^2 dx. \quad (a)$$

უწონო სისტემის, რომელზეც მოქმედებს M შეეყურსული მასა, კინეტიკური ენერგია იქნება:

$$V_1 = \frac{1}{2} M v^2,$$

სადაც v არის მასის მოდების წერტილის აჩქარება და

$$v = \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)_{x=a} = X(a) \frac{dT}{dt}.$$

მაშასადამე,

$$V_1 = \frac{1}{2} M X^2(a) \left(\frac{dT}{dt} \right)^2, \quad (b)$$

სადაც $X(a)$ არის M მასის მოდების წერტილის ჩალუნვა.

(ა) და (ბ) ფორმულების განტოლება მოგვეცემს:

$$M = \frac{\int_0^l \bar{m}(x) X^2 dx}{X^2(a)}. \quad (138)$$

სიმარტივისათვის აღვნიშნოთ, რომ

$$X(x) = y(x) \text{ და } X(a) = y_a.$$

ამ შემთხვევაში გვექნება:

$$M = \frac{1}{y_a^2} \int_0^l \bar{m}(x) y^2(x) dx. \quad (139)$$

მოდმივი მასის შემთხვევაში

$$M = \frac{\bar{m}}{y_a^2} \int_0^l y^2(x) dx. \quad (140)$$

როგორც ვხედავთ დაყვანილი მასის მისაღებად საჭიროა ვიცოდეთ კოქის გაღუნული ღერძის განტოლება რხევის დროს და მასის მოდების წერტილის მდებარეობა. ამ უკანასკნელს იღებენ უდიდესი ჩალუნვის ქვეშ. რაც შეეხება გაღუნული ღერძის ფორმას, იგი უცნობია და შეარჩეული უნდა იყოს რაიმე გარკვეული მოსაზრების საფუძველზე. პირველ რიგში მან უნდა დააკმაყოფი-

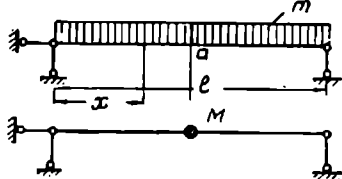
ლოს საყრდენი ჩამაგრებების პირობები და მისი ცვლილების ხასიათი უნდა ემთხვეოდეს გალუნვის ნამდვილ ფორმას. გალუნული ლერძის ფორმის სიჭუსტეს არსებითი მნიშვნელობა არა აქვს. უმეტეს შემთხვევაში გალუნვის ფორმად ($y(x)$) იღებენ სტატიკური დატვირთვით გამოწვეულ ჩალუნვის ხაზს.

დაყვანილი მასის განსაზღვრის შემდეგ თავისუფალი რხევის სიხშირე გამოითვლება (როგორც ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემებში) ფორმულით:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{M \delta_{11}}}, \quad (141)$$

სადაც δ_{11} არის M მასის ადგილზე მოქმედი ერთეული ძალისაგან გამოწვეული გადაადგილება.

გავარჩიოთ მაგალითი. ორ საყრდენზე მდებარე კოჭზე მოქმედებს მთლიანი თანაბრად განაწილებული ტვირთი (ნახ. 160). ეს ტვირთი შევცვალოთ შეყურსული მასით, რომელიც იმოქმედებს უწონო კოჭის შუაში.



ნახ. 160.

გავარჩიოთ რამდენიმე შემთხვევა:

1. რხევის ფორმად მივიღოთ კოჭის შუაში მოქმედი ერთეული სტატიკური ძალისაგან გამოწვეული ჩალუნვის ხაზი:

$$y(x) = \frac{1}{48EI} (3l^2x - 4x^3).$$

ჩალუნვა შუაში

$$y_a = y_{l/2} = \frac{l^3}{48EI}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ მე-140 განტოლებაში, მივიღებთ:

$$M = \frac{2\bar{m}}{l^3} \int_0^{l/2} (3l^2x - 4x^3)^2 dx = \frac{17}{35} \bar{m} l.$$

თავისუფალი რხევის სიხშირე გამოითვლება 141-ე ფორმულით:

$$\varphi = \sqrt{\frac{35 \cdot 48EI}{17 \bar{m} l^4}} = \frac{9,92}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}.$$

სიხშირის ზუსტი მნიშვნელობა მოცემულია 133-ე ფორმულით ($n=1$):

$$\varphi = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} = \frac{9,87}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}.$$

განსხვავება შეადგენს 0,5%.

2. რხევის ფორმად მივიღოთ ერთეული ინტენსიურობის თანაბრად განაწილებული სტატიკური ტვირთისაგან გამოწვეული ჩალუნვის ხაზი:

$$y(x) = \frac{1}{24EI} (l^3x - 2lx^3 + x^4).$$

ჩალუნვა შუაში

$$y_a = y_{l/2} = \frac{5l^4}{384EI}.$$

დაყვანილი მასა

$$M = \frac{384^2 \bar{m}}{24^2 \cdot 25l^8} \int_0^l (l^3 x - 2lx^3 + x^4)^2 dx = \frac{384^2 \cdot 31 \bar{m} l}{24^2 \cdot 25 \cdot 630} = 0,504 \bar{m} l.$$

ერთეული გადაადგილება

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{48EI}.$$

რხევის სიხშირე

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{M \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{48EI}{0,504 \bar{m} l^4}} = \frac{9,76}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}.$$

განსხვავება შეადგენს 0,9%.

3. რხევის ფორმა სინუსოიდური მრუდია:

$$y = y_{l/2} \sin \frac{\pi}{l} x.$$

დაყვანილი მასა

$$M = \bar{m} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx = \frac{\bar{m} l}{2}.$$

141-ე განტოლება მოგვცემს:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{M \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{48EI}{0,5 \bar{m} l^4}} = \frac{9,81}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}.$$

განსხვავება შეადგენს 0,7%.

ამ მაგალითიდან ჩანს, რომ დაყვანილი მასის მეთოდმა შეიძლება მოგვეცეს სიხშირის როგორც გადიდებული ისე შემცირებული მნიშვნელობა.

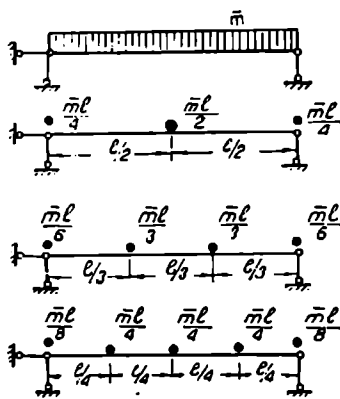
როგორც ვხედავთ, დაყვანილი მასის მეთოდი იძლევა საკმაოდ ზუსტ მიახლოებას ორ საყრდენზე მდებარე კოქის შემთხვევაში, სადაც მთლიანი თანაბარი დატვირთვის დროს დაყვანილი მასა კოქის მთელი მასის ნახევრის ტოლია.

§ 66. მთლიანი განაწილებული მასის შემავალ შემუხრული მასებით

იდი გამოყენება აქვს პრაქტიკაში განაწილებული მასის შეცვლას ცალკეული შეყურსული მასებით. ეს მეთოდი წარმატებით შეიძლება გამოვიყენოთ, როგორც კოქების ისე ჩარჩოების, ფერმების და სხვა სისტემების საანგარიშოდ.

მთლიანი მასის შეცვლა შეყურსული მასებით საშუალებას იძლევა უსასრულოდ ბევრი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემა ვანვიხილოთ, როგორც ერთი ან რამდენიმე თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემა. უმკობესია მთლიანი განაწილებული მასა დავყოთ ტოლ ნაწილებად.

განვიხილოთ ორ საყრდენზე მდებარე კოქი, რომელზეც მოქმედებს თანაბრად განაწილებული მასა. შევცვალოთ ეს მასა ერთი, ორი და სამი შეყურსული მასით (ნახ. 161) და გამოვთვალოთ რხევის სიხშირეები.



ნახ. 161.

1. თანაბრად განაწილებული მასის შემთხვევაში სიხშირის ზუსტი მნიშვნელობები გამოითვლება 133-ე ფორმულით:

$$\varphi_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{9,87}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

$$\varphi_2 = \frac{39,48}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

$$\varphi_3 = \frac{88,83}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

2. შუაში მოქმედი ერთი შეყურსული მასის $M = \frac{\bar{m}l}{2}$ შემთხვევაში სიხშირე

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{M \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{48EI}{0,5\bar{m}l^4}} = \frac{9,81}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

3. ორი სიმეტრიული შეყურსული მასის $M = \frac{\bar{m}l}{3}$ მოქმედების დროს (იხ. § 53) სიხშირეები

$$\varphi_1 = \frac{9,86}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \varphi_2 = \frac{38,2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

4. სამი შეყურსული მასის $m = \frac{\bar{m}l}{4}$ მოქმედების შემთხვევაში სიხშირეები (იხ. მე-20 მაგალითი)

$$\varphi_1 = \frac{9,86}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \varphi_2 = \frac{39,2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \varphi_3 = \frac{83,2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

თუ შევადარებთ მიღებულ მნიშვნელობებს დავინახავთ, რომ ცდომილება უმნიშვნელოა, განსაკუთრებით პირველ სიხშირეებს შორის. ასე, რომ მთლიანი მასა ერთი მასითაც რომ შეიცვალოს ცდომილება 1% არ გადააჭარბებს.

§ 55. მიხაბერაძის მიხაბერაძის მეთოდი

მიმდევრობითი მიხაბერაძის მეთოდი საშუალებას იძლევა შევადაროთ მიღებული მიხაბერაძის სიხშირე და სიხშირე გამოვთვალოთ სასურველი მიხაბერაძით. ავიღოთ კოქი, რომელზეც მოქმედებს რამდენიმე შეყურსული ძალა და რომელიც ასრულებს თავისუფალ რხევას. კოქის ნებისმიერი წერტილის გადაადგილება გამოისახება განტოლებით (რხევის განტოლება):

$$y_i(t) = A_i \sin(\varphi t + \lambda),$$

სადაც A_i არის i წერტილის უდიდესი გადაადგილება—ამპლიტუდა.

წარმოვიდგინოთ, რომ სისტემაში მიიღო მაქსიმალური (განაპირა) გადაადგილებული მდგომარეობა. ამ შემთხვევაში, ინერციის ძალა, რომელიც გამოითვლება ფორმულით:

$$-m_i \frac{d^2 y_i(t)}{dt^2} = m_i A_i \varphi^2 \sin(\varphi t + \lambda)$$

მიიღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას და $m_i \varphi^2 A_i$ ტოლი იქნება.

ღერძის მაქსიმალური (განაპირა—გადაადგილებული) მდგომარეობა გამოისახება განტოლებით:

$$y_i = A_i.$$

თუ ინერციის ძალებს მივიღებთ გარე ძალებად, მაშინ ეს მდგომარეობა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც სტატიკური $P_i = m_i \varphi^2 A_i$ ძალების მოქმედებით გამოწვეული გაღუნვა (ნახ. 162 ა). ამასთან ერთად განვიხილოთ მეორე ფიქტიური მდგომარეობა სადაც იმავე სისტემაზე იმავე წერტილებში მოქმედებს φ^2 -ჯერ შემცირებული $m_i A_i$ ძალები. ორივე შემთხვევაში ძალები ერთნაირად არის განლაგებული და რადგანაც პირველში ძალები φ^2 -ჯერ მეტია, ვიდრე მეორეში, ამიტომ ამ ძალებისაგან გამოწვეული ჩაღუნვები და ძალები φ^2 -ჯერ მეტი იქნება ვიდრე მეორე შემთხვევაში.

მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\varphi^2 = \frac{Z_1}{Z_2}, \quad (142)$$

სადაც Z_1 და Z_2 არის სათანადოდ პირველი და მეორე მდგომარეობის ფაქტორის სიდიდეები.

თუ პირველი მდგომარეობის ძალებს აღვნიშნავთ:

$$S_i^I = P_i = m_i \varphi^2 A_i,$$

მეორე მდგომარეობის ძალებს კი

$$S_i^{II} = m_i A_i,$$

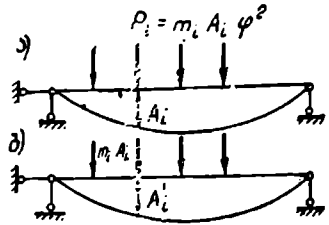
მაშინ φ^2 განისაზღვრება, როგორც ძალების ფარდობა:

$$\varphi^2 = \frac{S_i^I}{S_i^{II}} \quad (143)$$

ან ამ ძალებისაგან გამოწვეული გადაადგილებათა ფარდობა:

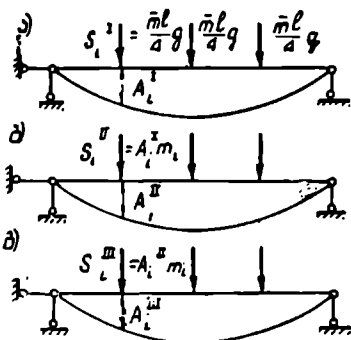
$$\varphi^2 = \frac{A_i}{A_i^I}. \quad (144)$$

მაქსიმალური დინამიკური გადაადგილების ხაზი (ნახ. 162 ა) არ არის



ნახ. 162.

ცნობილი და ამიტომ უშუალოდ A_i ამპლიტუდის გაგებაც არ შეგვიძლია. ამიტომ პრაქტიკულად იქცევიან ასე: წინასწარ ირჩევენ გაღებული ღერძის განტოლებას და ეძებენ სიხშირეს, რომელიც ახლოს იქნება მის ჰერმარიტ მნ-შენელობასთან, თანდათანობით მიახლოების გზით. საგალითად, თანაბრად განაწილებული მასა გავყოთ ტოლშეყურსულ მასებად და მათი შესაბამისი ძალები მივიღოთ პირველ მიახლოებად:



ნახ. 163.

$$S_i^I = \frac{\bar{m}l}{4} g = m_i g \quad (\text{ნახ. 163 ა}).$$

ავაგოთ ამ ძალებისაგან გამოწვეული ჩაღუნვის ხაზი. გადაადგილება i ძალის ქვეშ აღენიშნოთ A_i^I და ეს იყოს პირველი მიახლოება. ამ ჩაღუნვის ხაზის საფუძველზე გამოვთვალოთ ახალი შეყურსული ძალები $m_i A_i^I$ და ეს ძალები ჩავოყალოთ მეორე მიახლოებად $S_i^{II} = m_i A_i^I$ (ნახ. 163 ბ).

ავაგოთ ამ ძალებისაგან გამოწვეული ჩაღუნვის ხაზი. გადაადგილება i ძალის ქვეშ აღენიშნოთ A_i^{II} და ეს იყოს მეორე მიახლოება. მეორე მიახლოებული გაღუნული ღერძის საფუძველზე გამოვთვალოთ ახალი შეყურსული ძალები $S_i^{III} = m_i A_i^{II}$, რომლებიც ჩაივლება მესამე მიახლოებად (ნახ. 163 გ) და ასე შემდეგ.

მიღებული ძალების ან გადაადგილებების საშუალებით 143-ე. ან 144-ე ფორმულის საფუძველზე გამოვთვალოთ სიხშირეებს.

პირველი მიახლოებით

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{S_i^I}{S_i^{II}}} = \sqrt{\frac{g}{A_i^I}},$$

მეორე მიახლოებით

$$\varphi_2 = \sqrt{\frac{S_i^{II}}{S_i^{III}}} = \sqrt{\frac{A_i^I}{A_i^{II}}},$$

მესამე მიახლოებით

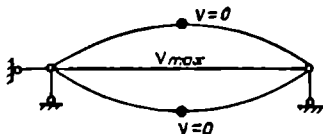
$$\varphi_3 = \sqrt{\frac{S_i^{III}}{S_i^{IV}}} = \sqrt{\frac{A_i^{II}}{A_i^{III}}}.$$

ანგარიშის პროცესი გაგრძელდება მანამ, სანამ ორი მომდევნო სიხშირე არ დაემთხვევა ან არ დაუახლოვდება ერთმანეთს.

პროცესის დასრულების დაჩქარების მიზნით $A_i^I, A_i^{II}, A_i^{III}, \dots$ ჩაღუნვები უნდა ავიღოთ იმ წერტილში სადაც უფრო დიდი ჩაღუნვაა მოსალოდნელი, მაგალითად შუაში.

მხოლოდ უმცირესი (ძირითადი) სიხშირის გამოთვლა წარმოადგენს მიმდევრობითი მიახლოების უარყოფით მხარეს. მიმდევრობითი მიახლოების მართლის ლეტალური დამუშავება ეკუთვნის აკადემიკოს კ. ზაქარიას.

ენერგეტიკული მეთოდი ითვლება ერთერთ ძირითად მიხსლოებით მე-
თოდად. რომელიც ემყარება ენერჯიის შენახვის კანონს. ძნელი არ არის იმის
წარმოადგენა, რომ რხევის პროცესში კინეტიკური ენერჯია გადადის პოტენ-
ციალურ ენერჯიაში და ირქით. წონასწორობის მდგომარეობიდან მაქსიმალ-
ურად გადახრის მომენტში მასის სიჩ-
ქარე $v=0$ და, მაშასადამე, კინეტიკუ-
რი ენერჯია ნულის ტოლია (ნახ. 164).
პოტენციალური ენერჯია კი აღწევს თა-
ვის მაქსიმალურ მნიშვნელობას.



ნახ. 164.

იმ მომენტში, როდესაც მასა წო-
ნასწორობის მდგომარეობაშია სიჩქარე
მაქსიმალურა, ე. ი. კინეტიკური ენერ-
ჯია აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას, პოტენციალური ენერჯია კი ნულის
ტოლია. როგორც ვხედავთ, მოძრაობის პროცესში ერთი სახის ენერჯია განუ-
წყვეტად გადადის მეორე სახის ენერჯიაში.

რხევის ნებისმიერ მომენტში, ენერჯიის შენახვის კანონის თანახმად, კი-
ნეტიკური და პოტენციალური ენერჯიების ჯამი მუდმივი სიდიდეა:

$$U + V = \text{const},$$

სადაც V არის კინეტიკური ენერჯია,

U — პოტენციალური.

ენერჯია, რომ გამოეთვალათ საჭიროა წინასწარ ვიცოდეთ გაღუნული
ღერძის განტოლება.

დაუშვათ, რომ სისტემის ნებისმიერი წერტილის გადაადგილება, რომე-
ლიც შეესაბამება ერთ გარკვეულ სიხშირეს მოცემულია განტოლებით:

$$y(x, t) = A \sin(\varphi t + \lambda) = y(x) \sin(\varphi t + \lambda).$$

კარგად უნდა გვახსოვდეს, რომ ზემოაღნიშნულ განტოლებაში $y(x, t)$ წარმო-
ადგენს წერტილის (რომლის აბსცისა x ტოლია) გადაადგილებას t მომენტში,
ხოლო $A = y(x)$ წარმოადგენს რხევის ფორმას, ე. ი. ამპლიტუდურ გადაად-
გილებას.

კინეტიკური ენერჯია გამოითვლება ფორმულით:

$$V = \frac{1}{2} \int m v^2 dx.$$

თუ შევიტანთ სიჩქარის მნიშვნელობას

$$v = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y(x) \varphi \cos(\varphi t + \lambda),$$

მივიღებთ:

$$V = \frac{1}{2} \varphi^2 \cos^2(\varphi t + \lambda) \int_0^l m(x) y^2(x) dx.$$

კინეტიკური ენერგია მიაღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას, როდესაც

$$\cos(\varphi t + \lambda) = 1,$$

$$V_{max} = \frac{1}{2} \varphi^2 \int_0^l m(x) y^2(x) dx. \quad (145)$$

პოტენციალური ენერგია გამოითვლება ფორმულით:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \sin^2(\varphi t + \lambda) \int_0^l EI \left(\frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right)^2 dx.$$

პოტენციალური ენერგია იქნება მაქსიმალური როდესაც $\sin(\varphi t + \lambda) = 1$.

$$U_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (146)$$

145-ე და 146-ე გამოსახულება გაუტოლოთ ერთმანეთს, მივიღებთ სიხშირის კვადრატის მნიშვნელობას:

$$\varphi^2 = \frac{\int_0^l EI \left(\frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l m(x) y^2(x) dx}. \quad (147)$$

მულტიპლი სიხისტის შემთხვევაში

$$\varphi^2 = EI \frac{\int_0^l [y''(x)]^2 dx}{\int_0^l m(x) y^2(x) dx}. \quad (148)$$

თუ სისტემაზე მოქმედებს შეყურსული მასები (ნახ. 165), მაშინ

$$\varphi^2 = EI \frac{\int_0^l [y(x)''']^2 dx}{\sum m_i A_i^2}. \quad (148')$$

თუ რხევის ქვეშარბიტი ფორმა $y(x)$ ცნობილია მაშინ მიღებული ფორმულიები მოგვცემს სიხშირის ზუსტ მნიშვნელობას. მაგრამ, რადგანაც $y(x)$ წინასწარ არ არის ცნობილი, ამიტომ იგი უნდა აირჩეს რაიმე მოსაზრების საფუძველზე.

გალუნული ღერძის განტოლება $y(x)$ შეიძლება აირჩეს მუდმივი მამრავლის სიზუსტით, რადგან $y(x)$ ნებისმიერ რიცხვზე გადამრავლებით შედეგი არ იცვლება (φ^2 გამოსახულებაში მუდმივები იკვეცება). გალუნული ღერძის განტოლებამ აუცილებლად უნდა დააკმაყოფილოს ბოლოების პირობები.

თუ პოტენციალურ ენერჯიას გამოვსახავთ გარე ძალების მიერ შესრულებულა მუშაობით, მაშინ ენერგეტიკული მეთოდის გამოყენება მარტივდება. გარე $m(x)g$ ძალის მაქსიმალური მუშაობა

$$T_{max} = \frac{1}{2} \int m(x)g y(x) dx. \quad (149)$$

145-ე და 149-ე ფორმულების გატოლება მოგვცემს:

$$\varphi^2 = g \frac{\int_0^l m(x) y(x) dx}{\int_0^l m(x) y^2(x) dx}. \quad (150)$$

თუ კოქის სიგრძეზე მასა მუდმივია, მაშინ ფორმულა საკონკრეტოდ მარტივდება:

$$\varphi^2 = g \frac{\int_0^l y(x) dx}{\int_0^l y^2(x) dx}. \quad (151)$$

ამ უახსენებელი ფორმულის გამოყენებისას საჭიროა გალუნული ღერძის განტოლება $y(x)$ დაემთხვეს mg დატვირთვისაგან გამოწვეულ ჩალუნვის ხაზს, რადგან 149-ე განტოლება მხოლოდ ამ შემთხვევაშია სამართლიანი.

თუ სისტემაზე მოქმედებს შეუუტრსული P_1, P_2, \dots ძალები მაშინ გარე ძალების მუშაობა გამოითვლება ფორმულით:

$$T = \frac{1}{2} \sum P_i A_i.$$

კინეტიკური ენერჯია დაიწერება შემდეგი სახით (ფორ. 145):

$$V = \frac{1}{2} \varphi^2 \sum m_i A_i^2.$$

ამ ორი სიდიდის გატოლებით მივიღებთ:

$$\varphi^2 = \frac{\sum P_i A_i}{\sum m_i A_i^2}. \quad (152)$$

თუ შევიტანთ $P_i = m_i g$ ძალების მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$\varphi^2 = g \frac{\sum m_i A_i}{\sum m_i A_i^2}. \quad (153)$$

ამ ფორმულებში A_1 წარმოადგენს P_1 შეყურსული ძალებისაგან გამოწვეულ ჩაღუნვას სათანადო ძალების ქვეშ (ნახ. 165).

მაგალითი 1. გაეარჩიოთ ორ საყრდენზე მდებარე მუდმივი კვეთის მქონე კოქი, რომელზეც მოქმედებს თანაბრად განაწილებული ტვირთი $q = mg$ ინტენსიურობით.

ჩაღუნვის განტოლებად $y(x)$ მივიღოთ ამ დატვირთვისაგან გამოწვეული გაღუნული ღერძის განტოლება:

$$y(x) = \frac{q}{24EI} (l^3x - 2lx^3 + x^4).$$

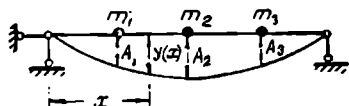
148-ე ფორმულის მრიცხველი

$$\int_0^l [y''(x)]^2 dx = \left(\frac{q}{2EI}\right)^2 \int_0^l (x^2 - lx)^2 dx = \frac{l^5}{30} \left(\frac{q}{2EI}\right)^2.$$

148-ე განტოლების მნიშვნელი

$$\bar{m} \int_0^l y^2(x) dx = \left(\frac{q}{24EI}\right)^2 \bar{m} \int_0^l (l^3x - 2lx^3 + x^4)^2 dx = \left(\frac{q}{24EI}\right)^2 \frac{31}{630} \bar{m} l^9.$$

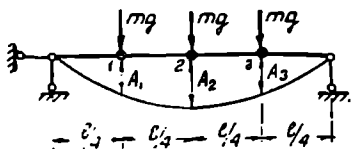
მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ 148-ე განტოლებაში, მივიღებთ:



$$\varphi^2 = EI \frac{630 \cdot 24^2}{30 \cdot 31 \cdot 4 \bar{m} l^4},$$

საიდანაც

$$\varphi = \frac{9,87}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$



ნახ. 165. 166.

ემთხვევა ზუსტ მნიშვნელობას.

მაგალითი 2. მუდმივი კვეთის მქონე კოქზე მოქმედებს სამი ტოლი შეყურსული ძალა (ნახ. 166). გამოვთვალოთ თავისუფალი რხევის სიხშირე (ნახ. 166), რისთვისაც გამოვიყენოთ 153-ე ფორმულა.

ერთეული ძალებისაგან გამოწვეული გადაადგილებები ტოლია:

$$\delta_{11} = \delta_{33} = \frac{9l^3}{768EI}, \quad \delta_{22} = \frac{16l^3}{768EI},$$

$$\delta_{12} = \delta_{23} = \frac{11l^3}{768EI}, \quad \delta_{13} = \frac{7l^3}{768EI}.$$

ამ გადაადგილებების საფუძველზე მივიღებთ:

¹ Н. М. Беляев, Сопротивление материалов, гл. 359.

$$A_1 = \bar{m}g(\delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14}) = \frac{\bar{m}gl^3}{EI} \cdot \frac{27}{768},$$

$$A_2 = \bar{m}g(\delta_{22} + \delta_{21} + \delta_{23}) = \frac{\bar{m}gl^3}{EI} \cdot \frac{38}{768},$$

$$A_3 = A_1.$$

153-ე განტოლების მრიცხველი

$$\sum m_i A_i = \bar{m} (A_1 + A_2 + A_3) = \frac{\bar{m}^2 g l^3}{EI} \cdot \frac{92}{768},$$

მნიშვნელი

$$\sum m_i A_i^2 = \bar{m} \left(\frac{\bar{m}gl^3}{EI} \right)^2 \frac{27^2 + 38^2 + 27^2}{768^2} = \bar{m} \left(\frac{\bar{m}gl^3}{EI} \right)^2 \frac{2902}{768^2},$$

სიხშირეთა კვადრატი

$$\varphi^2 = g \frac{\sum m_i A_i}{\sum m_i A_i^2} = \frac{EI}{m l^3} \frac{92 \cdot 768}{2902},$$

საიდანაც

$$\varphi = 4,93 \sqrt{\frac{EI}{m l^3}}$$

თითქმის ემთხვევა ზუსტ მნიშვნელობას (მე-20 მაგალითი).

§ 23. საანგარიშო სქემის შერჩევა ჩარჩოებისა და თაღების ანგარიშის დროს

ჩარჩო, როგორც ყველა ლეროვანი სისტემა, წარმოადგენს მთლიანი, განაწილებული მასის მქონე კონსტრუქციას და მისი თავისუფლების ხარისხი უსასრულოდ დიდია. სიხშირეთა ზუსტი ანგარიში ჩარჩოში მეტად რთულ ამოცანას წარმოადგენს და ამიტომ საჭიროა მისი მიახლოებითი ანგარიშის საშუალებების გამოხატვა. ასეთ საიმედო საშუალებას წარმოადგენს მთლიანი განაწილებული მასის შეცვლა შეყურსული მასებით, რომელიც გარჩეული იყო 65-ე პარაგრაფში. ეს მეთოდი საკმარის სიზუსტეს იძლევა და წარმატებით გამოიყენება, როგორც თავისუფალი რხევის სიხშირის გამოსათვლელად ისე ვიბრაციული ანგარიშის შესასრულებლად.

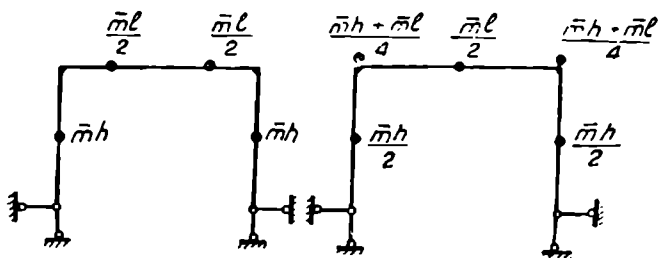
საანგარიშო სქემის შერჩევის დროს მასები ისე უნდა იყოს განაწილებული, რომ მივიღოთ დინამიკური მუშაობის რაც შეიძლება ზუსტი სურათი.

სიმეტრიულ ჩარჩოში მასები არჩეული უნდა იყოს სიმეტრიულად.

მაგალითად, ორსახსრიანი ჩარჩოს თავისუფალი რხევის სიხშირის გამოსათვლელი საანგარიშო სქემა შეიძლება აირჩეს, ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია 167-ე ა, ბ ნახაზზე. პირველ სქემას აქვს ხუთი თავისუფლების ხარისხი, მეორეს—ოთხი და ანგარიშის გასამარტივებლად უნდა გამოვიყენოთ სიმეტრია, როგორც ეს მე-13 თავში გვექონდა გარჩეული.

იმავე ჩარჩოს ანგარიში ვიბრაციულ ძალაზე, რომელიც რიგელის შუაშია, შეიძლება შესრულდეს მარტივად, თუ P ძალა დიდია ღეროს საკუთარ

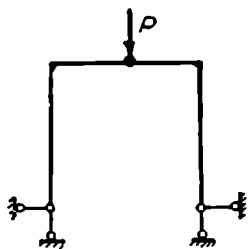
წონასთან შედარებით, ჩარჩოს ჩაეთვლით უწონოდ და განვიხილავთ როგორც ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემას (ნახ. 168). რადგანაც აქ ჩვენ მოგვიხდება სიმეტრიული და ირიბად სიმეტრიული დეფორმაციების ცალ-ცალკე



ნახ. 167.

განხილვა, ამიტომ ამოცანა დაიყვანება ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემაზე.

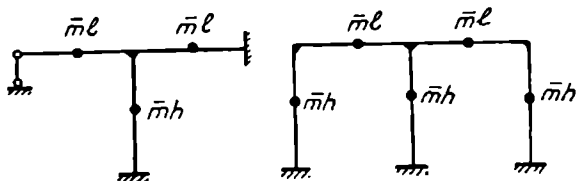
169-ე ნახაზზე მოყვანილია ჩარჩოს საანგარიშო სქემები. პირველ შემთხვევაში სისტემას აქვს სამი თავისუფლების ხარისხი (რიგელის მასები პორიზონტალურად არ გადაადგილდება), მეორეში კი ექვსი (რიგელის მასები პორიზონტალურად ერთი და იგივე სიდიდით გადაადგილდება).



ნახ. 168.

თაღების ანგარიშის დროსაც უნდა მივმართოთ გამარტივებას. თალი შეეცვალოთ ტეხილი ჩარჩოთი და ჩარჩოს კვანძებში ვამოქმედოთ შეეურსულა მასები (ნახ. 170). რაც უფრო მეტ ნაწილად იქნება დაყოფილი მით უფრო ზუსტ შედეგს მივიღებთ. შედარებითი ანგარიშები გვიჩვენებს, რომ დაბალ თაღებში პირველი თავისუფალი სიბჟირის გამოსათვლელად, საკმარისია თალი წარმოვიდგინოთ ტეხილ ჩარჩოდ,

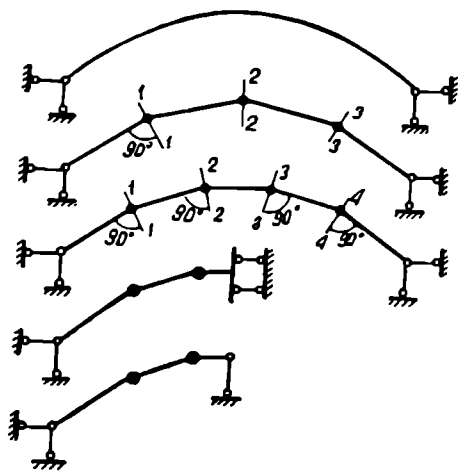
სადაც თალის ღერძზე მიმაგრებული მასები გადაადგილდება თალის ღერძის პერპენდიკულარულად, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახაზზე. ამოცანა გამარტივ-



ნახ. 169.

260

დება, თუ განვიხილავთ სიმეტრიულ და ირიბად სიმეტრიულ დეფორმაციებს ცალ-ცალკე ან დაეჭვუფებთ უცნობებს. ამ შემთხვევაში საკმარისია განვიხილოთ ნახევართაღი ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახაზზე.



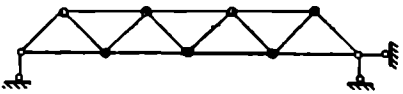
ნახ. 170.

ფერმის თავისუფალი რხევა და დინამიკური ანგარიში

§ 60 სიხშირათა ძირითადი განოლევაები

ფერმა ასრულებს რთულ რხევით მოძრაობას. გარდა იმისა, რომ ფერმას, როგორც ერთ მთლიან სისტემას, აქვს რხევის მრავალი ფორმა, მისი ცალკეული ღეროებიც საკუთარი ღერძების ირგვლივ ასრულებენ საკუთარ რხევას მთელ ფერმასთან ერთად. ექსპერიმენტალურად დამტკიცებულია, რომ ცალკეული ღეროების საკუთარ რხევებს არა აქვს დიდი მნიშვნელობა და ამოცანის შესწავლისას იღებენ, რომ ფერმის ღეროები რხევის დროს ინარჩუნებენ თავის სწორხაზოვან ფორმას.

თუ დაუშვებთ, რომ ფერმის ღეროების მასები თანაბრად ნაწილდება კვანძებს შორის, მაშინ ფერმა შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც კვანძებში თავმოყრილ მასებისაგან შედგენილი უწონო სისტემა (ნახ. 171). რადგანაც თითოეული კვანძის მდებარეობა მოძრაობის დროს განისაზღვრება ორი კოორდინატით, ამიტომ არჩეული საანგარიშო სქემის თავისუფლების ხარისხი თავის სიბრტყეში ტოლია გაორკეცებული კვანძების რიცხვს მინუს სამი (საყრდენი ღეროების რიცხვი).



ნახ. 171.

თითოეული შუალედი კვანძისათვის შეგვიძლია შევადგინოთ მოძრაობის (დინამიკური წონასწო-

- რობის) ორი განტოლება. საყრდენი კვანძები უძრავია და ანგარიშში არ შევა. თითოეულ კვანძზე მოქმედებს სამი კატეგორიის ძალა:
- 1) სტატიკური კვანძოვანი ძალა და ამ ძალებისაგან გამოწვეული სტატიკური ძალები ფერმის ღეროებში. ეს ძალები ერთმანეთს აწონასწორებენ და დინამიკური წონასწორობის განტოლებებში არ შევლენ;
 - 2) ინერციის ძალები, რომლის პორიზონტალური და ვერტიკალური მდგენელებია:

$$-m \frac{d^2 x_i}{dt^2} \quad \text{და} \quad -m \frac{d^2 y_i}{dt^2};$$

3) ინერციის ძალებისაგან გამოწვეული ძალები ფერმის ღეროებში. შემოვიღოთ აღნიშვნები (ნახ. 172):

m_i არის i კვანძის მასა (კვანძში შემავალი ღეროების მასათა ნახევარჯამი პლიუს კვანძური ძალის მასა),

N_{ik} —ძალეა i და k კვანძის შემაერთებელ ღეროში, რომელიც რხევით გამოწვეული გადაადგილების შედეგად ვითარდება (ინერციული ძალები),

S_{ik} — i და k კვანძების შემაერთებელი ღეროს სიგრძე,

α_{ik} — ik ღეროს დახრის კუთხე პორიზონტთან,

x_i, y_i — i კვანძის გადაადგილების პორიზონტალური და ვერტიკალური მდგენელი.

ამ აღნიშვნების შემდეგ შეგვიძლია შევადგინოთ კვანძის დინამიკური წონასწორობის პირობა:

$$\left. \begin{aligned} -m_i \frac{dx_i}{dt^2} - \sum_n N_{ik} \cos \alpha_{ik} &= 0, \\ -m_i \frac{dy_i}{dt^2} - \sum_n N_{ik} \sin \alpha_{ik} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

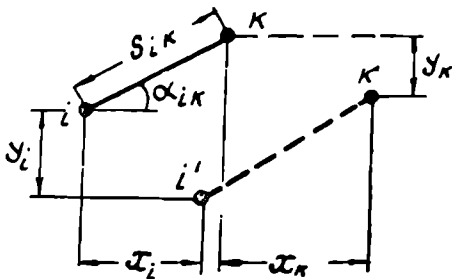
ჯამი გავრცელებული უნდა იყოს i კვანძში შემავალ ყველა n ღეროზე.

მოძრავ საყრდენისათვის დაიწერება ერთი განტოლება მოძრაობის მიმართულების მიხედვით.

154-ე განტოლებაში უცნობებია N_{ik} ძალები და x_i და y_i გადაადგილებები. განტოლებების ამოხსნა, რომ შეეძლოს საჭიროა ინერციული ძალები N_{ik} შევცვალოთ x_i და y_i გადაადგილებებით.

ჰუკის ფორმულის თანახმად

$$N_{ik} = \frac{EF_{ik}}{S_{ik}} \Delta_{ik},$$



ნახ. 172.

სადაც Δ_{ik} არის ღეროს აბსოლუტური წაგრძელება.

თუ მხედველობაში არ მივიღებთ მაღალი რიგის მცირეებს, ღეროს აბსოლუტური წაგრძელება გამოითვლება ფორმულით:

$$\Delta_{ik} = (x_k - x_i) \cos \alpha_{ik} + (y_k - y_i) \sin \alpha_{ik}.$$

მაშასადამე,

$$N_{ik} = \frac{EF_{ik}}{S_{ik}} [(x_k - x_i) \cos \alpha_{ik} + (y_k - y_i) \sin \alpha_{ik}].$$

ამ გამოსახულებას, თუ შევიტანთ 154-ე განტოლებაში მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} -m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - \sum_n \frac{EF_{ik}}{S_{ik}} [(x_k - x_i) \cos \alpha_{ik} + (y_k - y_i) \sin \alpha_{ik}] \cos \alpha_{ik} &= 0, \\ -m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - \sum_n \frac{EF_{ik}}{S_{ik}} [(x_k - x_i) \cos \alpha_{ik} + (y_k - y_i) \sin \alpha_{ik}] \sin \alpha_{ik} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (155)$$

მივიღეთ ერთობლივი წრფივი დიფერენციალური განტოლებები, რომელთა გადაწყვეტა მოიძებნება შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= u_i \sin(\varphi t + \lambda), \\ y_i &= v_i \sin(\varphi t + \lambda). \end{aligned} \right\} \quad (156)$$

ამ გამოსახულების მეორე წარმოებულები იქნება:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= -u_i \varphi^2 \sin(\varphi t + \lambda), \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= -v_i \varphi^2 \sin(\varphi t + \lambda). \end{aligned}$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები 155-ე განტოლებაში მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} m_i u_i \varphi^2 - \sum_n \frac{E F_{ik}}{S_{ik}} [(u_k - u_i) \cos \alpha_{ik} - (v_k - v_i) \sin \alpha_{ik}] \cos \alpha_{ik} &= 0, \\ m_i v_i \varphi^2 - \sum_n \frac{E F_{ik}}{S_{ik}} [(u_k - u_i) \cos \alpha_{ik} + (v_k - v_i) \sin \alpha_{ik}] \sin \alpha_{ik} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (157)$$

მიღებული ერთგვაროვანი განტოლების ფესვები, რომ ნულისაგან განსხვავდებოდეს საჭიროა u დი v უცნობების კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი ნულის ტოლი იყოს. ასე მიიღება სინშირეთა განტოლება. რადგანაც, ფერმის კვანძების რიცხვი საკმაოდ დიდია, ამიტომ დეტერმინანტის ამოხსნა პრაქტიკულად შეუძლებელი ხდება. 157-ე განტოლების გადაწყვეტა წარმოებს¹ მოახლოებითი მეთოდების საშუალებით. ეს მეთოდები განხილულია მომდევნო პარაგრაფებში.

§ 70. ენერგეტიკული მეთოდი

ფერმის საანგარიშო სქემა რხევაზე წარმოვიდგინოთ როგორც კვანძებში თავმოყრილი m_i მასებისაგან შედგენილი უწონო სისტემა (ნახ. 171). ფერმის კვანძების რიცხვი იყოს n . ფერმის კინეტიკური ენერგია

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 \right]. \quad (158)$$

ამ განტოლებაში $\frac{dx_i}{dt}$ და $\frac{dy_i}{dt}$ წარმოადგენს ნებისმიერი i კვანძის ჰორი-

ზონტალური და ვერტიკალური გადაადგილებების სიჩქარეებს.

156-ე განტოლების საფუძველზე გამოვთვალოთ სიჩქარეები, შევიტანოთ ისინი 158-ე განტოლებაში და მამრავლი $\cos(\varphi t + \lambda)$ გაუტოლოთ ერთეულს; მივიღებთ მაქსიმალურ კინეტიკურ ენერგიას:

$$V_{max} = \frac{1}{2} \varphi^2 \sum_{i=1}^n m_i (u_i^2 + v_i^2), \quad (159)$$

სადაც u_i და v_i არის გადაადგილების ამპლიტუდები.

მაქსიმალური პოტენციალური ენერგია, გამოსახული გარე ძალების მუშაობის საშუალებით, იქნება¹:

$$T_{max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i v_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i g v_i. \quad (160)$$

თუ გაუტოლებთ ერთმანეთს 159-ე და მე-160 ფორმულებს, მივიღებთ:

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i g v_i}{\sum_{i=1}^n m_i (u_i^2 + v_i^2)}. \quad (161)$$

თუ მხედველობაში არ მივიღებთ ფერმის კვანძების პორიზონტალურ გადაადგილებებს, მაშინ

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i g v_i}{\sum_{i=1}^n m_i v_i^2}. \quad (162)$$

მიღებულ ფორმულებში კვანძების ვერტიკალური გადაადგილების მნიშვნელობები უცნობია, რომელთა გამოსათვლელად ისევე უნდა მოვიქცეთ როგორც კოჭების შემთხვევაში: ფერმას ეტვირთავთ ისეთი სტრუქტურული დატვირთვით, რომელიც გამოიწვევს დაახლოებით ისეთი ფერმის ჩაღუნვას, რასაც იძლევა პირველი სიხშირის შესაბამისი დინამიკური ვალუნვა. ასეთ დატვირთვად მიიღება ფერმის საკუთარი წონა.

ფერმის კვანძების ვერტიკალური გადაადგილებები ჩვეულებრივ განისაზღვრება სამშენებლო მექანიკის მეთოდების საშუალებით, უმჯობესია ღრეკადი ტვირთების გამოყენება.

§ 71. ფერმის შეიკვლა აკვივალენტური კოხით

ფერმას ვცვლით მთლიანი კვეთის მქონე კოხით, რომლის სიხისტე უნდა იყოს ფერმის სიხისტის ეკვივალენტური. ეკვივალენტურობა იმაში მდგომარეობს, რომ ფერმისა და კოხის ჩაღუნვა შუაში ერთმანეთის ტოლი უნდა იყოს. ამ პირობიდან განვსაზღვრავთ ეკვივალენტური კოხის ინერციის მომენტს. ფერმის ჩაღუნვა შუაში გამოითვლება ფორმულით:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n N_i N_i \rho \frac{S_i}{E F_i}, \quad (163)$$

სადაც N_i არის ფერმის შუაში მოქმედი ერთეული ძალისაგან გამოწვეული ძალვა ნებისმიერ i ღეროში,

$N_i \rho$ — დატვირთვისაგან გამოწვეული ძალვა იმავე ღეროში.

¹ კვანძზე მოქმედი ძალები მიმართულია ვერტიკალურად და ამიტომ მუშაობაც აღებულია ვერტიკალურ გადაადგილებებზე.

თუ ფერმის წონას ჩავთვლით თანაბრად განაწილებულად მალის მთელ სიგრძეზე, მაშინ თანაბრად განაწილებული ტვირთისაგან გამოწვეული ეკვივალენტური კოქის ჩალუნვა შუაში

$$\Delta = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI} \quad (164)$$

გაუტოლოთ ჩალუნვები ერთმანეთს:

$$\frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI} = \sum_1^n N_i N_i^p \frac{S_i}{EF_i}$$

საიდანაც ინერციის მომენტი

$$I = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{\sum_1^n N_i N_i^p \frac{S_i}{F_i}} \quad (165)$$

ეკვივალენტური კოქის ინერციის მომენტის განსაზღვრის შემდეგ 133-ე ფორმულით შეგვიძლია გამოვთვალოთ სიხშირე (სახსროვანად დაყრდნობილ კოქისათვის)

$$\varphi = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

შევიტანოთ ამ ფორმულაში ინერციის მომენტის და მასის $\bar{m} = \frac{q}{g}$ მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$\varphi = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{5}{384} \frac{EI^4 g}{\sum_1^n N_i N_i^p \frac{S_i}{F_i}}} = 1,13 \sqrt{\frac{g}{\sum_1^n N_i N_i^p \frac{S_i}{EF_i}}}$$

ან

$$\varphi = 1,13 \sqrt{\frac{g}{\Delta}} \quad (166)$$

ამ ფორმულით სრულიად მარტივად განისაზღვრება სიხშირე ფერმებში.

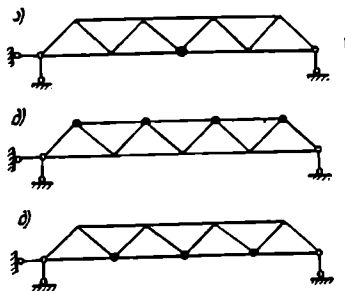
§ 25. ზარმის მასის უმცველ ერთი ან რამდენიმე უზარსული მასით

64-ე პარაგრაფში შევისწავლეთ დაყვანილი მასის მეთოდი, რომელიც დამაკმაყოფილებელ შედეგს იძლევა კოქებში. ეს მეთოდი ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ფერმებშიც. ორ საყრდენზე მდებარე ფერმის შემთხვევაში (ნახ. 173 ა) ფერმის მთლიანი მასის ნახევარი უნდა მოვათავსოთ შუაში (მეორე ნახევარი გადაეცემა საყრდენებს) და სიხშირე გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{M \delta_{11}}} \quad (167)$$

სადაც δ_{11} არის ერთეული ძალისაგან გამოწვეული ფერმის შუა წერტილის გადაადგილება.

რიცხობრივი ანგარიშები გვიჩვენებს, რომ თუ ღეროების მასებს გადა-
 კიტანთ ფერმის ზედა ან ქვედა კონძებზე (ნახ. 173 ბ, გ) რხევის სიხშირე
 უმნიშვნელოდ შეიცვლება. ამ გამარტივების, გამოყენებისას მასები გადატა-
 ნილი უნდა იყოს იმ სარტყელზე, რომელზეც მოწყობილია სავალი ნაწილი.



ნახ. 173.

§ 78. ფერმის დინამიკური ანგარიში

ფერმის დინამიკური ანგარიში წარმოებს კანონიკური განტოლებების სა-
 შუალებით (ფორ. 103). აქ გადაადგილებები გამოითვლება ფორმულით:

$$\delta_{ik} = \sum N_i N_k \frac{S}{EF}.$$

რადგანაც ფერმის მთელი მასა გადატანილია ფერმის ერთერთ სარტყელზე,
 ამიტომ კიბრაციული ძალებიც ამ სარტყელზე იქნება მოთავსებული. ინერცი-
 ული ძალების განსაზღვრის შემდეგ ვანგარიშობთ მაქსიმალურ ძალებს ფერ-
 მის ღეროებში, შემდეგი ფორმულით:

$$N_{max} = N_p + N_1 Z_1 + N_2 Z_2 + \dots + N_n Z_n,$$

სადაც N_p არის ვიბრაციული ძალების ამპლიტუდებისაგან გამოწვეული ძალე-
 ნებისმიერ ღეროში,

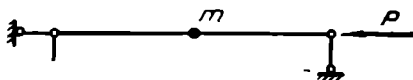
N_1, N_2, N_3, \dots — სათანადო ერთეული ინერციული ძალებისაგან ($Z_1=1, Z_2=1, \dots$)
 გამოწვეული ძალები ფერმის იმავე ღეროში.

რეზონანსი რასაკვირველია ფერმებშიც არ დაიშვება.

შეკუმშულ-გალუნული ღეროს განივი რხევა. ღეროს დინამიკური მდგრადობა

§ 74. ხახროვანად დაზარდობილი შეკუმშულ-გალუნული ღეროს თავისუფალი რხევა

აქამდე განხილულ შემთხვევებში სისტემაზე მოქმედებდა მხოლოდ განივი ძალები. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც სისტემაზე განივ ძალებთან ერთად მოქმედებს გრძივი შეკუმშავი მუდმივი ძალა (ნახ. 174). გრძივი შეკუმშავი ძალის მოქმედება ზრდის კოქის ჩალუნვას და, მაშასადამე, ამცირებს ღეროს სიხისტის კოეფიციენტს. გამოვთვალოთ ეს კოეფიციენტი.



ნახ. 174.

შეკუმშულ-გალუნული კოქის შემთხვევაში ძაქსიმალური ჩალუნვა გამოითვლება ფორმულით (იხ. § 18):

$$\Delta = \Delta_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{კრ}}}, \quad (168)$$

აქედან სიხისტის კოეფიციენტი (განივი ძალა რომელიც იწვევს ერთეულ გადაადგილებას) გამოისახება შემდეგი სახით:

$$c = c_0 \left(1 - \frac{P}{P_{კრ}} \right), \quad (169)$$

სადაც c_0 არის კოქის სიხისტის კოეფიციენტი გრძივი ძალის გავლენის გარეშე, $P_{კრ}$ — ეილერის კრიტიკული ძალა.

განსახილავ ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემისათვის თავისუფალი რხევის განტოლება მიიღებს ისეთივე სახეს, როგორც განივი ძალის მოქმედების შემთხვევაში:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \varphi^2 y = 0.$$

თავისუფალი რხევის სიხშირეს ექნება შემდეგი მნიშვნელობა:

$$\varphi = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c_0}{m} \left(1 - \frac{P}{P_{კრ}} \right)} = \sqrt{\frac{c_0}{m}} \sqrt{1 - \frac{P}{P_{კრ}}}.$$

მაშასადამე, მუდმივი გრძივი ძალის მოქმედების დროს განივი რხევის სიხშირე

$$\varphi = \varphi_0 \sqrt{1 - \frac{P}{P_{კრ}}}, \quad (170)$$

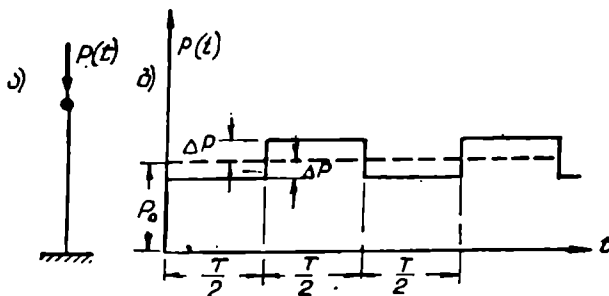
სადაც $\varphi_0 = \sqrt{\frac{c_0}{m}}$ არის შეუქუმშივე ღეროს განივი რხევის სიხშირე.

როდესაც მკუმშივე ძალა ტოლია კრიტიკული ძალის $P = P_{კრ}$, მაშინ საკუთარი რხევის სიხშირე $\varphi = 0$. რაც იმას ნიშნავს, რომ მდგრადობის დაკარგვის მომენტში განივი საკუთარი რხევის სიხშირე ნულის ტოლია.

170-ე ფორმულა შეიძლება გამოვიყენოთ კოქის ჩამაგრების სხვა შემთხვევებშიც, თუ შევიტანთ φ_0 სათანადო მნიშვნელობებს.

§ 75. ღეროს დინამიკური მდგრადობა

წარმოვიდგინოთ ხისტად ჩამაგრებული ძელი, რომელზეც ცენტრალურად მოქმედებს მკუმშივე გრძივი პერიოდულად ცვლადი $P(t)$ ძალა (ნახ. 175). ამ შემთხვევაში კოქის განივი სიხისტის კოეფიციენტი იქნება დროის პერიოდული ფუნქცია. თუ სიხისტის კოეფიციენტს აღვნიშნავთ $c(t)$ -თი, მაშინ ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის ძოდრადობის დიფერენციალური განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:



ნახ. 175.

დული ფუნქცია. თუ სიხისტის კოეფიციენტს აღვნიშნავთ $c(t)$ -თი, მაშინ ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის ძოდრადობის დიფერენციალური განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c(t)}{m} y = 0. \quad (171)$$

მივიღეთ დროის მიხედვით პერიოდულად ცვლადი კოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება. ამ განტოლებით მიღებულ რხევის კვაზიპარამონიული რხევა ეწოდება.

ასეთი სისტემების (რომელთა პარამეტრები პერიოდულად იცვლება დროის მიხედვით) თავისებურებას შეადგენს ის გარემოება რომ, როდესაც რხევა იზრდება უსაზღვროდ შეიძლება ადგილი ჰქონდეს განსაკუთრებულ სარეზონანსურ ფენომენებს.

ნანსო მდგომარეობას — პარამეტრულ რეზონანს. კვაზიპარმონიულ რხევის განხილული მაგალითი წარმოადგენს ღინამიკური მდგრადობის უმარტივეს ამოცანას.

წარმოვიდგინოთ, რომ გრძივი ძალა $P(t)$ იცვლება საფეხურებიანი კანონით (ნახ. 175 ბ). მკუმშავი ძალის საშუალო მნიშვნელობა, რომელშიც შედის ტვირთის წონა mg , აღენიშნოთ P_0 . $P(t)$ ძალის ცვლილების ამპლიტუდა იყოს ΔP . 169-ე ფორმულის თანახმად, სიხისტის კოეფიციენტი ღუნვის დროს

$$c(t) = c_0 \left(1 - \frac{P_0 \pm \Delta P}{P_{კრ}} \right). \quad (172)$$

$c(t)$ მნიშვნელობა შევიტანოთ განივი რხევის განტოლებაში (ფორ. 171), მივიღებთ:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c_0}{m} \left(1 - \frac{P_0 \pm \Delta P}{P_{კრ}} \right) y = 0. \quad (173)$$

ეს განტოლება შეიძლება გადაწეროს შემდეგი სახით:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c_0}{m} \left(1 - \frac{P_0}{P_{კრ}} \right) \left(1 \mp \frac{\Delta P}{P_{კრ} - P_0} \right) y = 0.$$

მეორე წევრას პირველი მამრავლი წარმოადგენს სიხისტის კვადრატს მუდმივი გრძივი ძალის მოქმედების დროს ($\Delta P = 0$):

$$\varphi = \sqrt{\frac{c_0}{m} \left(1 - \frac{P_0}{P_{კრ}} \right)}.$$

აღენიშნოთ:

$$\mu = \frac{\Delta P}{P_{კრ} - P_0},$$

მაშინ განივი რხევის განტოლება იქნება:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \varphi^2 (1 \mp \mu) y = 0. \quad (174)$$

კოეფიციენტი μ გვიჩვენებს $P(t)$ ძალის ცვლილების სიდიდეს და მას $P(t)$ ძალის პულსაციის კოეფიციენტი ეწოდება.

როდესაც მკუმშავი ძალა მუდმივია $P(t) = P_0$ და $\Delta P = 0$, მაშინ პულსაციის კოეფიციენტი $\mu = 0$. თუ მოქმედი ძალა გაუტოლდა კრიტიკულ ძალას $P_0 + \Delta P = P_{კრ}$, მაშინ პულსაციის კოეფიციენტი $\mu = 1$. ნახაზიდან ჩანს, რომ როდესაც $0 < t < \frac{T}{2}$, მაშინ $\mu < 0$ და 174-ე განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \varphi^2 (1 - \mu) y_1 = 0. \quad (175)$$

როდესაც $\frac{T}{2} < t < T$, მაშინ $\mu > 0$ და 174-ე განტოლება მოგვეცემს:

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} + \varphi^2 (1 + \mu) y_2 = 0. \quad (176)$$

მივიღეთ ორი მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლება.

თუ აღვნიშნავთ, რომ

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^2 &= \varphi^2 (1 - \mu), \\ \varphi_2^2 &= \varphi^2 (1 + \mu), \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

მაშინ

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \varphi_1^2 y_1 &= 0, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \varphi_2^2 y_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (178)$$

ამ განტოლებათა ინტეგრალი იქნება:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= C_1 \sin \varphi_1 t + D_1 \cos \varphi_1 t, \\ y_2 &= C_2 \sin \varphi_2 t + D_2 \cos \varphi_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (179)$$

ინტეგრალის მუდმივების გასაგებად საჭიროა ოთხი პირობა.

ორი ნახევარპერიოდის საზღვარზე, როდესაც $t = \frac{T}{2}$, გვექნება:

$$1) y_1 = y_2 \text{ და } 2) \frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dt}.$$

დანარჩენ ორ პირობად მივიღოთ, რომ მთლიანი T პერიოდის გასვლის შემდეგ გადაადგილება y და სიჩქარე $\frac{dy}{dt}$ იზრდება λ -ჯერ, ე. ი.

$$3) \lambda y_1(0) = y_2(T),$$

$$4) \lambda \left(\frac{dy_1}{dt} \right)_{t=0} = \left(\frac{dy_2}{dt} \right)_{t=T}$$

ცხადია, რომ შემდეგ პერიოდში გადაადგილება და სიჩქარე იმდენჯერვე გაიზრდება, ე. ი.

$$\lambda^2 y(0) = y(2T),$$

$$\lambda^2 \left(\frac{dy}{dt} \right)_{t=0} = \left(\frac{dy}{dt} \right)_{t=2T} \text{ და ა. შ.}$$

თუ კოეფიციენტი λ აბსოლუტური სიდიდით ერთზე მეტია, მაშინ რხევის ამპლიტუდა უსაზღვროდ გაიზრდება და მაშასადამე, მოძრაობა იქნება არამდგრადი.

აღნიშნული პირობები მოგვცემს შემდეგ ოთხ განტოლებას:

$$\left. \begin{aligned} C_1 \sin \frac{\varphi_1 T}{2} + D_1 \cos \frac{\varphi_1 T}{2} &= C_2 \sin \frac{\varphi_2 T}{2} + D_2 \cos \frac{\varphi_2 T}{2}, \\ C_1 \varphi_1 \cos \frac{\varphi_1 T}{2} - D_1 \varphi_1 \sin \frac{\varphi_1 T}{2} &= C_2 \varphi_2 \cos \frac{\varphi_2 T}{2} - D_2 \varphi_2 \sin \frac{\varphi_2 T}{2}, \\ \lambda D_1 &= C_2 \sin \varphi_2 T + D_2 \cos \varphi_2 T, \\ \lambda C_1 \varphi_1 &= C_2 \varphi_2 \cos \varphi_2 T - D_2 \varphi_2 \sin \varphi_2 T. \end{aligned} \right\} \quad (180)$$

ყველა წვერი, რომ გადავიტანოთ ტოლობის ერთ მხარეს მივიღებთ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას C_1, D_1, C_2 და D_2 მიმართ. ამ კოეფიციენტებს ექნებათ ნულისაგან განსხვავებული მნიშვნელობები, თუ მე-180 განტოლებათა სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლი იქნება:

$$\begin{vmatrix} \sin \frac{\varphi_1 T}{2} & \cos \frac{\varphi_1 T}{2} & -\sin \frac{\varphi_2 T}{2} & -\cos \frac{\varphi_2 T}{2} \\ \varphi_1 \cos \frac{\varphi_1 T}{2} & -\varphi_1 \sin \frac{\varphi_1 T}{2} & -\varphi_2 \cos \frac{\varphi_2 T}{2} & \varphi_2 \sin \frac{\varphi_2 T}{2} \\ 0 & \lambda & -\sin \varphi_2 T & -\cos \varphi_2 T \\ \varphi_1 \lambda & 0 & -\varphi_2 \cos \varphi_2 T & \varphi_2 \sin \varphi_2 T \end{vmatrix} = 0. \quad (181)$$

დეტერმინანტის გაშლის შემდეგ მივიღებთ შემდეგ კვადრატულ განტოლებას λ მიმართ:

$$\lambda^2 - 2\lambda S + 1 = 0, \quad (182)$$

სადაც

$$S = \cos \frac{\varphi_1 T}{2} \cos \frac{\varphi_2 T}{2} - \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{2\varphi_1\varphi_2} \sin \frac{\varphi_1 T}{2} \sin \frac{\varphi_2 T}{2}. \quad (183)$$

ამ ფორმულების საშუალებით ცალკეულ კერძო შემთხვევებისათვის გამოითვლება λ მნიშვნელობა.

182-ე განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\lambda = S \pm \sqrt{S^2 - 1}. \quad (184)$$

ამ განტოლებიდან ჩანს, რომ λ ექნება ნამდვილი მნიშვნელობა მხოლოდ იმ შემთხვევაში როცა $|S| \geq 1$. გარდა ამისა როცა $|S| > 1$, მაშინ ერთ-ერთი ფესვი აბსოლუტური სიდიდით ერთზე მეტია $|\lambda| > 1$ და რხევა იქნება მზარდი.

როგორც ვხედავთ მოძრაობა იქნება არამდგრადი თუ

$$|S| > 1.$$

არამდგრადობის ზონის საზღვრები გამოითვლება განტოლებიდან:

$$\left| \cos \frac{\varphi_1 T}{2} \cos \frac{\varphi_2 T}{2} - \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{2\varphi_1\varphi_2} \sin \frac{\varphi_1 T}{2} \sin \frac{\varphi_2 T}{2} \right| = 1. \quad (185)$$

თუ შევიტანოთ φ_1 და φ_2 მნიშვნელობებს (ფორ. 177), მივიღებთ:

$$\left| \cos \frac{\pi}{k} \sqrt{1-\mu} \cos \frac{\pi}{k} \sqrt{1+\mu} - \sqrt{1-\mu^2} \sin \frac{\pi}{k} \sqrt{1-\mu} \sin \frac{\pi}{k} \sqrt{1+\mu} \right| = 1, \quad (186)$$

სადაც

$$k = \frac{2\pi}{\varphi T} = \frac{\theta}{\varphi}, \quad (187)$$

ხოლო ამ უკანასკნელში $\theta = \frac{2\pi}{T}$ არის გრძივი მკუშში ძალის სიხშირე,

ჟ — განივი თავისუფალი რხევის სიხშირე მუდმივი მკუმშავი ძალის მოქმედების დროს.

თუ ΔP ძალიან მცირეა, მაშინ პულსაციის კოეფიციენტი μ ერთთან შედარებით უმნიშვნელოა და შეიძლება უგულებელვყოთ. არამდგრადობის 186-ე განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\left| \cos^2 \frac{\pi}{k} - \sin^2 \frac{\pi}{k} \right| = 1$$

ან

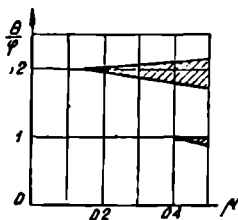
$$\left| \cos \frac{2\pi}{k} \right| = 1. \quad (188)$$

ეს განტოლება დაკმაყოფილდება მხოლოდ k პარამეტრის შემდეგ მნიშვნელობების დროს:

$$k = 2, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \dots, \quad (189)$$

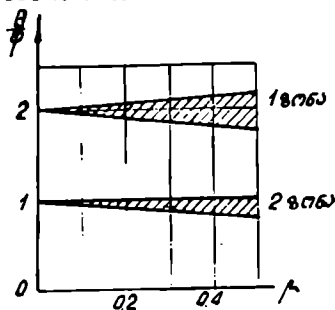
რაც იმას ნიშნავს, რომ პარამეტრის ამ მნიშვნელობების დროს ადგილი აქვს რეზონანსს (პარამეტრულ რეზონანსს).

186-ე განტოლების საშუალებით μ (ან $\frac{P_0}{P_{კრ}}$) და $\frac{\theta}{\varphi}$ კოორდინატებში შეიძლება აიგოს დინამიკური არამდგრადობის ზონა. 176-ე ნახაზზე ნაჩვენებია არამდგრადობის პირველი ორი ზონა ($k=2$ და $k=1$ შესაბამის).



ნახ. 177.

მიღვეალი რხევის შემთხვევაში, როცა მხედველობაში ვიღებთ არადრეკადი წინალობის ძალებს, არამდგრადობის ზონა მნიშვნელოვნად მცირდება (ნახ. 177) და პირველ ზონას ეძლევა მთავარი მნიშვნელობა. მეორე ზონა კი იშვინად მცირდება, რომ პრაქტიკულ ინტერესს აღარ წარმოადგენს.



ნახ. 176.

ნაშენთან ანგარიში დარტყმებზე

§ 78. ძირითადი მოსაზრებანი

დარტყმითი ძალების მოქმედებას ნაშენზე პრაქტიკაში ძალიან ხშირად ეხედებით. მაგალითად, საკედ მოწყობილობებში, წიღებში—ყინულის-დარტყმები ბურჯებზე, ბორბლებისაგან გამოწვეული დარტყმები რელსის პირაპირებზე, ძალიდან ჩამოვარდნილი სხეულების დარტყმები დრეკად ნაშენებზე, სეის-მური ძალების მოქმედება ნაშენებზე და სხვა.

დარტყმით ძალებზე ანგარიშის დროს საჭიროა განისაზღვროს ამ ძალებისაგან გამოწვეული დეფორმაციები და ძაბვები.

დარტყმითი ძალები თავისი მოქმედების ხასიათის მიხედვით მრავალნაირია და ამიტომ სხვადასხვა ძეთოდით შეისწავლება.

დარტყმითი ძალა ძირითადად იწვევს ორ: სახის მოვლუნას—ნაშენის, როგორც ერთი მთლიანი სისტემის რხევას და დარტყმის ახლოს განვითარებულ ადგილობრივ დეფორმაციებს და ძაბვებს.

ადგილობრივი დეფორმაციების გათვალისწინება დარტყმის მოვლენის შესასწავლად წარმოადგენს მეტად რთულ ამოცანას და მის გადასაწყვეტად მიმართავენ მიახლოებით ძეთოდებს, რომელიც გამოიხატება დარტყმის მოვლენის გამარტივებულად წარმოდგენაში. ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ ზისტ დარტყმებს, ე. ი. ადგილობრივ დეფორმაციებს უგულებელყოფთ.

განსახილავთ რეალურად ნაშენი, როგორც ვიცით წარმოადგენს მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემას, მაგრამ ანგარიშის გამარტივების მიზნით ვანგარიშობთ როგორც ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონეს.

დარტყმის მოვლენა წარმოადგენს დიდი სიჩქარის მქონე მოძრავე მასის დაჭახებას ნაშენზე, როდესაც ნაშენის სიჩქარე იცვლება ძალიან მცირე დროის განმავლობაში. დარტყმის დროს შეჭახებულ სხეულებს შორის ვითარდება ურთიერთმოქმედი დიდი ძალები და დამჭახებელი სხეულის სიჩქარე ძალიან ჩქარა ქრება. ბოლოს როცა სიჩქარე ნულად იქცევა სხეული ჩერდება. აქედან გამომდინარეობს, რომ დამჭახებელ სხეულზე მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით მოქმედებს დიდი აჩქარება ან რეაქციის ძალა $P=ma$, სადაც m დამჭახებელი სხეულის მასაა, a — აჩქარება. ცხადია, რომ დაჭახებულ სხეულზე (ნაშენზე) იმოქმედებს იმავე სიდიდის შებრუნებული მიმართულების ძალა — დამაჭახებელი სხეულის ინერციის ძალა.

წარმოვიდგინოთ, რომ ორ სყარდენზე მდებარე კოქზე h სიმაღლიდან ეცემა ძალი $P = mg$ (ნახ. 178). კოქის მასა ჩვეულებით ვარდნილი სხეულის მასასთან შედარებით უმნიშვნელოდ. ამ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია ჩავთვალოთ რომ დარტყმა ხდება უწონო კოქზე.

ვარდნილი (დამჭახებელი) სხეულის სიჩქარე კოქთან შეხების მომენტში გამოითვლება ფორმულით:

$$v = \sqrt{2gh},$$

აქედან

$$n = \frac{v^2}{2g}$$

თუ სხეულის ვარდნის სიმაღლეს გამოვთვლით ამ ფორმულით, მაშინ დარტყმის მოვლენა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სხეულის თავისუფალი ვარდნა რომელიმე გარკვეული სიმაღლიდან. დარტყმა ჩვეულებით არადრეკადად, ე. ი. მასა კოქს არ შორდება და მოძრაობს როგორც ერთი მთლიანი მასა ერთი სიჩქარით.

ეთქვას, რომ დარტყმის შემდეგ კოქი გაიღუნა, რომლის განაპირა — მაქსიმალური მდგომარეობა ნაჩვენებია 178-ე ნახაზზე. დარტყმის წერტილის მაქსიმალური ჩაღუნვა იყოს y . ამ მომენტში სხეული გაჩერებულია და მისი სიჩქარე და კინეტიკური ენერჯია ნულის ტოლია. ვარდნილი სხეულის მუშაობა $h + y$ გადაადგილებაზე მთლიანად (დანაკარგებს არ ვიღებთ მხედველობაში) გადავა კოქის ღუნვის პოტენციალურ ენერჯიაში.

ვარდნილი სხეულის კინეტიკური ენერჯია

$$V = \frac{mv^2}{2} = \frac{P}{2g} 2g(h+y) = P(h+y).$$

პოტენციალური ენერჯია გამოვსახოთ შიგე დრეკადი წინაღობის ძალის მუშაობით. დრეკადი წინაღობის ძალა ტოლია cy , სადაც c სიხისტის კოეფიციენტი (ერთეული გადაადგილების შესაბამის ძალა) და გამოითვლება ფორმულით:

$$c = \frac{1}{\delta_{11}}$$

პოტენციალური ენერჯია

$$U = \frac{cy \cdot y}{2} = \frac{y^2}{2\delta_{11}}$$

მაშასადამე,

$$\frac{y^2}{2\delta_{11}} = P(h+y),$$

ნახ. 178.

საიდანაც

$$y = P \delta_{11} + \sqrt{(P \delta_{11})^2 + 2P \delta_{11} h}. \quad (190)$$

თუ აღვნიშნავთ რომ $P \delta_{11} = \Delta_{სტ}$, რომელიც წარმოადგენს P ძალისაგან გამოწვეულ დარტყმის წერტილის სტატიკურ გადაადგილებას, მაშინ უკანასკნელი ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$y = \Delta_{სტ} + \sqrt{\Delta_{სტ}^2 + 2 \Delta_{სტ} h} \quad (191)$$

ან

$$y = \Delta_{სტ} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{სტ}}} \right). \quad (191')$$

ფრჩხილებში მოთავსებულ სიდიდეს დარტყმის დინამიკური კოეფიციენტი ეწოდება.

თუ აღვნიშნავთ, რომ

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{სტ}}}, \quad (192)$$

მაშინ დინამიკური ჩალუნვა

$$y = \Delta_{სტ} \mu. \quad (193)$$

თუ ვარდნის სიმაღლის მაგივრად მოცემულია სიჩქარე v მაშინ დინამიკური კოეფიციენტის გამოსახულებაში უნდა შევიტანოთ პირობითი სიმაღლის h მნიშვნელობა, მივიღებთ:

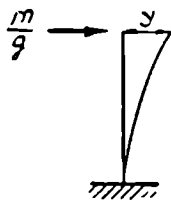
$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \Delta_{სტ}}}. \quad (193')$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც ტვირთი კი არ ვარდება რომელიმე სიმაღლიდან, არამედ უეცრად მოქმედებს კოჭზე, ე.ი. $h=0$ (ან $v=0$), მივიღებთ:

$$\mu = 2 \text{ და } y = 2 \Delta_{სტ} \quad (194)$$

უეცრად მოდებულ ძალა იწვევს გაორკეცებულ ჩალუნვას. ეს არის დინამიკური ჩალუნვის მინიმალური მნიშვნელობა, ყველა დანარჩენ შემთხვევაში დინამიკური კოეფიციენტი ორზე მეტია.

თუ დარტყმა ხდება ჰორიზონტალური მიმართებულებით (ნახ. 179), მაშინ კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ტოლობა მოგვცემს (სიმძიმის ძალა y გადაადგილებაზე მუშაობას აღარ შეასრულებს):



$$\frac{m v^2}{2} = \frac{y^2}{2 \delta_{11}},$$

საიდანაც

$$y = \sqrt{m \delta_{11} v^2} = \sqrt{\frac{\Delta_{სტ}}{g} v^2} = \Delta_{სტ} \frac{v}{\sqrt{g \Delta_{სტ}}}$$

ან

$$y = \mu \Delta_{სტ},$$

ნახ. 179.

სადაც ღინამიკური კოეფიციენტი

$$\mu = \frac{v}{\sqrt{g \Delta s \sigma}} \quad (195)$$

რადგან შინაგანი ძალებების სიდიდე ჩაღუნვის პროპორციულია, ამიტომ ღინამიკური მღუნაეი მომენტი განისაზღვრება ფორმულით:

$$M = M_{სტ} \mu, \quad (196)$$

სადაც $M_{სტ}$ არის ძალის სტატიკური მოქმედებით გამოწვეული მღუნაეი მომენტი.

§ 78. კოპის მასის ვაჰუნა

წინა პარაგრაფში მიღებული ფორმულები მიახლოებითია, რადგან ჩვენ განვიხილეთ უწონო კოკი, რომლის მასა უგულვებელყავით. უფრო ზუსტად ფორმულების მასალებად საჭიროა კოკის მასის მხედველობაში მიღება. თუ წარმოვიდგენთ რომ კოკის მასა დარტყმის წერტილზეა თავმოყრილი, მაშინ დარტყმის საანგარიშო სქემა ასეთი იქნება: უწონო კოკზე მოთავსებული დაყვანილი მასა M განიცდის მოძრაეი m მასის დარტყმას (ნახ. 180).

ამ შემთხვევაშიც ჩავთვალოთ, რომ შეხების მომენტიდანეე ორივე მასა არ შორდება ერთმანეთს და მოძრაობს როგორც ერთი მთლიანი მასა ერთი საერთო ω სიჩქარით.

მოძრაობის რაოდენობის მუდმივობის კანონის თანახმად მოძრაობის რაოდენობა დარტყმამდე და დარტყმის შემდეგ ერთმანეთის ტოლია, ე. ი.

$$mv = (m + M)\omega,$$

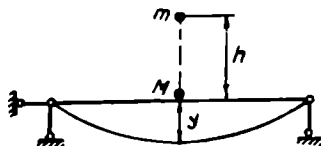
საიდანაც სიჩქარე დარტყმის შემდეგ

$$\omega = \frac{m}{m + M} v. \quad (197)$$

პოტენციალური ენერგია $\frac{y^2}{2\delta_{11}}$ ტოლი უნდა იყოს დარტყმის დამთავრების მომენტში მიღებული კინეტიკური ენერგიისა და P ძალის მუშაობის (y გადაადგილებაზე) ჯამისა, ე. ი.

$$\frac{(m + M)\omega^2}{2} + Py = \frac{y^2}{2\delta_{11}}$$

თუ შევიტანთ ω მნიშვნელობას და ყველა წევრს გადავიტანთ ტოლობის ცალ მხარეს, მივიღებთ:



ნახ. 180.

$$y^2 - 2\Delta_{\text{სტ}}y - \frac{m^2\delta_{11}}{m+M}v^2 = 0,$$

საიდანაც

$$y = \Delta_{\text{სტ}} + \sqrt{\Delta_{\text{სტ}}^2 + \frac{m^2\delta_{11}}{m+M}v^2}.$$

ეს უკანასკნელი შეიძლება გადაწეროთ შემდეგი სახით:

$$y = \Delta_{\text{სტ}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{\text{სტ}}} \frac{m}{m+M}} \right). \quad (198)$$

დინამიკური კოეფიციენტი

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{\text{სტ}}} \frac{m}{m+M}}. \quad (199)$$

თუ სიჩქარეს გამოვსახავთ ვარდნის სიმაღლით h , მაშინ

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{სტ}}} \frac{m}{m+M}}. \quad (200)$$

კოჭზე მოქმედი საანგარიშო ძალა გამოითვლება ფორმულით:

$$P_{\text{საანგა.}} = Mg + \mu P. \quad (201)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც დარტყმა ხდება პორიზონტალური მიმართულებით (ნახ. 179) კინეტიკური და პოტენციალური ენერჯიის ტოლობა მოგვცემს:

$$\frac{(m+M)w^2}{2} = \frac{y^2}{2\delta_{11}}.$$

თუ შევიტანთ w მნიშვნელობას, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$y = \Delta_{\text{სტ}} \frac{v}{\sqrt{\Delta_{\text{სტ}} g \left(1 + \frac{M}{m} \right)}} = \mu \Delta_{\text{სტ}}. \quad (202)$$

დინამიკური კოეფიციენტი

$$\mu = \frac{v}{\sqrt{\Delta_{\text{სტ}} g \left(1 + \frac{M}{m} \right)}}. \quad (203)$$

დაყვანილი მასის მისაღებად დარტყმის დროს ერთმანეთს უტოლებენ არა კინეტიკურ ენერჯიებს (ყოცხალ ძალებს), როგორც ეს გაკეთებული იყო 64-ე პარაგრაფში, არამედ მოძრაობის რაოდენობებს, ე. ი.

$$Mv_0 = \int m v dx,$$

სადაც v_a არის დარტყმის წერტილის სიჩქარე, v — სიჩქარე ნებისმიერ წერტილში.

მაშასადამე,

$$M = \frac{\int m v dx}{v_a} \quad (204)$$

თუ კოჭზე მოქმედებს მთლიანი, თანაბრად განაწილებული მასა \bar{m} ინტენსიურობით, მაშინ დაყვანილი მასა

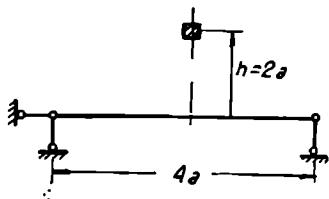
$$M = \frac{2}{\pi} \bar{m} l = 0,637 \bar{m} l.$$

დარტყმის შემთხვევაში დაყვანის კოეფიციენტი უფრო მეტია, ვიდრე კოჭის რხევის სიხშირის გამოთვლის დროს.

§ 70. ლატუშაძე ანაბარიშის მაგალითი

24 მაგალითი. ორტესებრ კვეთის მქონე კოჭზე 2 მეტრის სიმაღლიდან ეცემა 50 კგ ტვირთი (ნახ. 181). კოჭის $l = 21720$ სმ ($N = 40$), $E = 2,1 \cdot 10^8$ კგ/სმ², გრძივი მეტრის წონა $q = 67,6$ კგ/მ.

განვსაზღვროთ უდიდესი ჩალუნვა და ძაბვები.



ნახ. 181.

გადაწყვეტა. დინამიკური კოეფიციენტი კოჭის მასის მხედველობაში მიუღებლად გამოითვლება 192-ე ფორმულით:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{სტ}}}$$

სტატიკური ჩალუნვა

$$\Delta_{სტ} = \frac{Pl^3}{48 EI} = \frac{50 \cdot 400^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^8 \cdot 21720} = 0,0015 \text{ სმ.}$$

რადგანაც ჩალუნვა ძალიან მცირეა კოჭის სიმაღლესთან შედარებით ამიტომ დინამიკური კოეფიციენტი გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$\mu = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{სტ}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200}{0,0015}} = 519.$$

დინამიკური ჩალუნვა

$$y = \mu \Delta_{\text{სტ}} = 0,78 \text{ სმ.}$$

მაქსიმალური დინამიკური მღუნავი მომენტი

$$M = M_{\text{სტ}} \mu = \frac{Pl}{4} \mu = \frac{50 \cdot 400}{4} \cdot 0,78 = 2600000 \text{ კგსმ.}$$

მაქსიმალური ნორმალური ძაბვა

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{2600000 \cdot 20}{21720} = 2390 \text{ კგსმ}^2.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ კოქის მასას, მაშინ დინამიკური კოეფიციენტი გამოითვლება მე-200 ფორმულით:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{სტ}}} \frac{m}{m+M}}$$

ან მიახლოებით

$$\mu = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{\text{სტ}}} \frac{m}{m+M}}.$$

კოქის მთლიანი წონა $Q = 67,6 \cdot 4 = 270,4 \text{ კგ.}$

კოქის დაყვანილი მასა $M = 0,637 \frac{270,4}{g} = \frac{172}{g}.$

ეარდნილი სხეულის მასა $m = \frac{50}{g}$

მაშასადამე,

$$\mu = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{\text{სტ}}} \frac{m}{m+M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200}{0,0015} \frac{50}{222}} = 245.$$

მღუნავი მომენტი

$$M = \frac{50 \cdot 400}{4} \cdot 245 = 1250000 \text{ კგსმ.}$$

ნორმალური ძაბვა

$$\sigma = \frac{1250000}{21720} \cdot 20 = 1130 \text{ კგსმ}^2.$$

როგორც ვხედავთ ნაშენის მასის მხედველობაში მიღება მნიშვნელოვნად ამცირებს ძაბვებს.

25 მაგალითი. ორმალიან უკრი კოქის ერთერთი მალის შუაში ეცემა ძალა $P = 100 \text{ კგ}$, სიჩქარით $v = 100 \text{ სმ/წმ}$ (ნახ. 182). კოქის $l = 17310 \text{ სმ}$ (ორტესებრი კეეთი № 36), $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ კგ/სმ}^2$.

განესაზღვროთ დინამიკური კოეფიციენტი.

გადაწყვეტა. დინამიკური კოეფიციენტი გამოითვლება 194-ე ფორმულით:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{l}{\Delta_{\text{სტ}}} \frac{v^2}{g}}$$

182-ე ბ ნახაზზე მოყვანილია უკრი კოქის მღუნავი მომენტის ეპიურა ძალის სტატიკური მოკმედების დროს. 182-ე ბ, გ ნახ. ეპიურების კომბინაცია მოგვეცემს ჩაღუნვას კოქის შუაში:

$$\Delta_{სტ} = \frac{23 Pl^3}{1536 EI}$$

მაშასადამე,

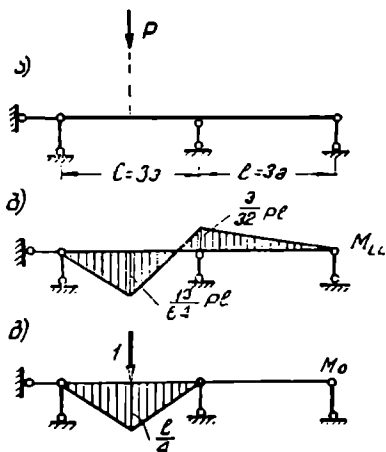
$$\begin{aligned} \mu &= 1 + \sqrt{1 + \frac{1536 EI}{23 Pl^3} \frac{v^2}{g}} = \\ &= 1 + \sqrt{1 + \frac{1536 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 17310}{23 \cdot 100 \cdot 300^3} \frac{100^2}{981}} = 97. \end{aligned}$$

28 მაგალით¹. ხის ოთხი ხიმინჯისაგან ხეცად შეკრული პაკეტი ჩასმულია მდინარის ფსკერზე. მდინარის ფსკერდან 2 მ სიმაღლეზე პაკეტს ევახება ყინული 2000 კგ ძალით (ნახ. 183). დინების სიჩქარე $v=100$ სმ/წმ. პაკეტის ინერციის მომენტი $I=79,5 \cdot 10^4$ სმ⁴ (ხიმინჯის დამეტრი $d=20$ სმ), დრეკადობის მოდული $E=1,2 \cdot 10^5$ კგ/სმ². ხიმინჯები ჩატეველთ ღრნარის ძირის სიმაღლეზე ჩამაგრებულია.

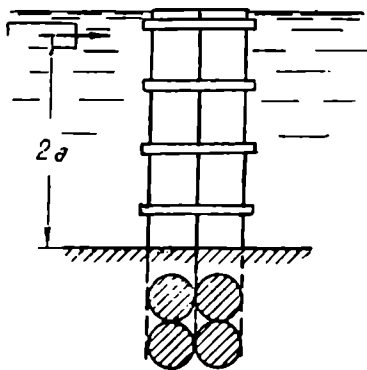
განესაზღვროთ ყინულის დარტყმისაგან გამოწვეული ძაბვები ხიმინჯებში.

გადაწყვეტა. ყინულის დაწოლისაგან გამოწვეული პაკეტის როგორც კონსოლის სტატიკური ჩაღუნვა

$$\Delta_{სტ} = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{2000 \cdot 200^3}{3 \cdot 1,2 \cdot 10^5 \cdot 79,5 \cdot 10^4} = 0,056 \text{ სმ.}$$



ნახ. 182.



ნახ. 183.

¹ Бернштейн С. А. Основы динамики сооружения, 1941.

დინამიური კოეფიციენტი

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \Delta_{\text{სტ}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{100^2}{981 \cdot 0,056}} = 14,5.$$

მაქსიმალური დინამიური მღუნავი მომენტი

$$M_{\text{max}} = M_{\text{სტ}} \mu = 2000 \cdot 200 \cdot 14,5 = 5800000 \text{ კგსმ}.$$

მაქსიმალური ნორმალური ძაბვა

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{5800000}{79,5 \cdot 10^4} 30 = 219 \text{ კგსმ}^2.$$

ვინაიდან ძაბვა დასაშვებზე მნაშენელოვნად მეტია, ამიტომ ხიმინჯები დარტყმებისაგან უნდა დავიცვათ, ე. ი. უნდა მოეწყოს ყინულმჭკრელი.

v	$\alpha(v)$	$\beta(v)$	$\theta_1(v)$	$\theta_2(v)$	$\theta_3(v)$	$tg(v)$
0.00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,00000
0.20	1,0027	1,0042	1,0163	1,0065	1,0178	0,20271
0.40	1,0107	1,0188	1,0683	1,0252	1,0768	0,42279
0.60	1,0249	1,0437	1,1686	1,0622	1,1901	0,68414
0.80	1,0455	1,0800	1,3456	1,1256	1,3900	1,02964
1.00	1,0737	1,1304	1,6722	1,2395	1,7605	1,55741
1.10	1,0912	1,1617	1,9491	1,3344	1,0750	1,96476
1.20	1,1114	1,1979	2,3822	1,4806	2,5677	2,57215
1.30	1,1345	1,2396	3,1435	1,7342	3,4347	3,60210
1.40	1,1610	1,2878	4,8082	2,2832	5,3332	5,79789
1.50	1,1915	1,3534	11,2013	4,3740	12,6292	14,10142
$\pi/2$	1,2159	1,3880	∞	∞	∞	∞
1.60	1,2266	1,4078	-26,2445	-7,8214	-30,1204	-3423254
1.70	1,2673	1,4830	-5,7378	-1,1299	-6,7141	-7,69660
1.80	1,3147	1,5710	-3,1308	-0,8271	-3,7410	-4,28626
1.90	1,3704	1,6750	-2,1133	+0,0701	-2,5805	-2,92710
2.00	1,4365	1,7993	-1,5694	0,2575	-1,9658	-2,18504
2.02	1,4512	1,8270	-1,4903	0,2858	-1,8762	
2.04	1,4664	1,8558	-1,4179	0,3115	-1,7044	
2.06	1,4822	1,8858	-1,3516	0,3355	-1,7196	
2.08	1,4987	1,9168	-1,2905	0,3579	-1,6506	
2.10	1,5158	1,9494	-1,2342	0,3788	-1,5872	-1,70985
2.12	1,5336	1,9831	-1,1820	0,3983	-1,5286	
2.14	1,5521	2,0184	-1,1335	0,4166	-1,4741	
2.16	1,5713	2,0552	-1,0884	0,4339	-1,4235	
2.18	1,5914	2,0935	-1,0464	0,4503	-1,3764	
2.20	1,6124	2,1336	-1,0069	0,4659	-1,3323	-1,37382
2.22	1,6343	2,1754	-0,9700	0,4807	-1,2911	
2.24	1,6572	2,2194	-0,9354	0,4948	-1,2527	
2.26	1,6812	2,2654	-0,9028	0,5083	-1,2165	
2.28	1,7062	2,3135	-0,8721	0,5212	-1,1824	
2.30	1,7325	2,3641	-0,8431	0,5336	-1,1504	-1,11921
2.32	1,7601	2,4171	-0,8157	0,5456	-1,1202	
2.34	1,7891	2,4731	-0,7897	0,5572	-1,0917	
2.36	1,8195	2,5320	-0,7651	0,5684	-1,0649	
2.38	1,8516	2,5939	-0,7418	0,5792	-1,0394	
2.40	1,8854	2,6596	-0,7196	0,5897	-1,0151	-0,91601
2.42	1,9212	2,7287	-0,6985	0,5999	-0,9921	
2.44	1,9589	2,8021	-0,6784	0,6098	-0,9703	
2.46	1,9989	2,8798	-0,6592	0,6195	-0,9497	
2.48	2,0413	2,9624	-0,6409	0,6291	-0,9301	
2.50	2,0864	3,0502	-0,6234	0,6385	-0,9114	-0,74702

ν	$\alpha(\nu)$	$\beta(\nu)$	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$	$lg(\nu)$
2,52	2,1343	3,1438	-0,6067	0,6477	-0,8936	
2,54	2,1855	3,2437	-0,5907	0,6566	-0,8767	
2,56	2,2402	3,3508	-0,5753	0,6654	-0,8606	
2,58	2,2988	3,4657	-0,5606	0,6742	-0,8451	
2,60	2,3618	3,5890	-0,5465	0,6828	-0,8304	-0,60160
2,62	2,4295	3,7220	-0,5329	0,6913	-0,8164	
2,64	2,5027	3,8659	-0,5199	0,6997	-0,8030	
2,66	2,5819	4,0218	-0,5073	0,7081	-0,7902	
2,68	2,6680	4,1914	-0,4952	0,7164	-0,7780	
2,70	2,7619	4,3766	-0,4836	0,7246	-0,7663	-0,47273
2,72	2,8646	4,5795	-0,4723	0,7328	-0,7551	
2,74	2,9778	4,8029	-0,4615	0,7410	-0,7444	
2,76	3,1027	5,0499	-0,4511	0,7491	-0,7342	
2,78	3,2414	5,3245	-0,4410	0,7573	-0,7244	
2,80	3,3963	5,6315	-0,4313	0,7654	-0,7151	-0,35553
2,82	3,5704	5,9770	-0,4218	0,7736	-0,7062	
2,84	3,7676	6,3685	-0,4127	0,7817	-0,6976	
2,86	3,9928	6,8160	-0,4039	0,7898	-0,6894	
2,88	4,2525	7,3322	-0,3953	0,7980	-0,6816	
2,90	4,5550	7,9343	-0,3870	0,8063	-0,6742	-0,24641
2,92	4,9121	8,6455	-0,3790	0,8146	-0,6670	
2,94	5,3401	9,4982	-0,3712	0,8229	-0,6603	
2,96	5,8622	10,5383	-0,3636	0,8313	-0,6538	
2,98	6,5134	11,8386	-0,3563	0,8398	-0,6476	
3,00	7,3486	13,5057	-0,3492	0,8483	-0,6417	-0,14255
3,02	8,4593	15,7219	-0,3422	0,8569	-0,6361	
3,04	10,0049	18,8116	-0,3355	0,8657	-0,6308	
3,06	12,3096	23,4176	-0,3289	0,8746	-0,6258	
3,08	16,1105	31,0160	-0,3227	0,8835	-0,6210	
3,10	23,5659	45,9234	-0,3165	0,8926	-0,6165	-0,04162
3,12	44,8321	88,5422	-0,3103	0,9018	-0,6122	
3,14	600,1900	1199,1629	-0,3044	0,9111	-0,6082	
π	∞	∞	-0,3040	0,9119	-0,6079	
3,16	-51,2692	-103,7576	-0,2987	0,9206	-0,6045	
3,18	-24,2541	-49,7313	-0,2931	0,9303	-0,6009	
3,20	-15,7398	-32,7063	-0,2876	0,9401	-0,5976	+0,05847
3,22	-11,5688	-24,3683	-0,2823	0,9501	-0,5946	
3,24	-9,0929	-19,4202	-0,2771	0,9602	-0,5917	
3,26	-7,4532	-16,1447	-0,2720	0,9705	-0,5891	
3,28	-6,2872	-17,8166	-0,2670	0,9811	-0,5868	
3,30	-5,4154	-12,0770	-0,2621	0,9920	-0,5846	0,15975
3,32	-4,7371	-10,7282	-0,2574	1,0031	-0,5826	
3,34	-4,1964	-9,6516	-0,2527	1,0143	-0,5809	
3,36	-3,7552	-8,7726	-0,2482	1,0258	-0,5795	
3,38	-3,3887	-8,0419	-0,2437	1,0377	-0,5783	
3,40	-3,0787	-7,4248	-0,2394	1,0499	-0,5772	0,26442

ν	$\alpha(\nu)$	$\beta(\nu)$	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$	$\lg(\nu)$
3,42	-2,8129	-6,8968	-0,2351	1,0623	-0,5764	
3,44	-2,5820	-6,4396	-0,2308	1,0750	-0,5758	
3,46	-2,3798	-6,0405	-0,2267	1,0880	-0,5755	
3,48	-2,2017	-5,6888	-0,2227	1,1014	-0,5753	
3,50	-2,0433	-5,3769	-0,2187	1,1152	-0,5751	0,37470
3,52	-1,9015	-5,0081	-0,2148	1,1294	-0,5757	
3,54	-1,7737	-4,8477	-0,2109	1,1440	-0,5764	
3,56	-1,6581	-4,6215	-0,2071	1,1591	-0,5773	
3,58	-1,5530	-4,4160	-0,2034	1,1747	-0,5783	
3,60	-1,4572	-4,2292	-0,1997	1,1907	-0,5797	0,49347
3,62	-1,3693	-4,0581	-0,1961	1,2073	-0,5814	
3,64	-1,2882	-3,9011	-0,1926	1,2244	-0,5833	
3,66	-1,2132	-3,7563	-0,1891	1,2421	-0,5855	
3,68	-1,1435	-3,6227	-0,1856	1,2605	-0,5880	
3,70	-1,0787	-3,4990	-0,1821	1,2795	-0,5908	0,62473
3,72	-1,0184	-3,3839	-0,1787	1,2992	-0,5939	
3,74	-0,9620	-3,2768	-0,1753	1,3197	-0,5974	
3,76	-0,9092	-3,1769	-0,1720	1,3409	-0,6012	
3,78	-0,8595	-3,0835	-0,1687	1,3630	-0,6053	
3,80	-0,8128	-2,9961	-0,1654	1,3861	-0,6099	0,77356
3,82	-0,7687	-2,9140	-0,1622	1,4101	-0,6149	
3,84	-0,7271	-2,8369	-0,1590	1,4351	-0,6203	
3,86	-0,6876	-2,7643	-0,1557	1,4613	-0,6261	
3,88	-0,6502	-2,6959	-0,1525	1,4887	-0,6324	
3,90	-0,6147	-2,6313	-0,1493	1,5174	-0,6392	0,94742
3,92	-0,5809	-2,5703	-0,1461	1,5474	-0,6466	
3,94	-0,5486	-2,5126	-0,1429	1,5789	-0,6545	
3,96	-0,5178	-2,4580	-0,1397	1,6121	-0,6631	
3,98	-0,4884	-2,4062	-0,1365	1,6470	-0,6723	
4,00	-0,4603	-2,3570	-0,1332	1,6838	-0,6823	1,15782
4,02	-0,4333	-2,3103	-0,1300	1,7227	-0,6930	
4,04	-0,4074	-2,2660	-0,1267	1,7639	-0,7045	
4,06	-0,3825	-2,2237	-0,1233	1,7075	-0,7169	
4,08	-0,3586	-2,1836	-0,1199	1,8538	-0,7304	
4,10	-0,3355	-2,1454	-0,1165	1,9030	-0,7449	1,42353
4,12	-0,3133	-2,1089	-0,1130	1,9555	-0,7606	
4,14	-0,2919	-2,0741	-0,1094	2,0115	-0,7775	
4,16	-0,2712	-2,0410	-0,1057	2,0716	-0,7960	
4,18	-0,2511	-2,0094	-0,0120	2,1362	-0,8160	
4,20	-0,2317	-1,9792	-0,0981	2,2057	-0,8378	1,77778
4,22	-0,2129	-1,9504	-0,0940	2,2808	-0,8615	
4,24	-0,1947	-1,9229	-0,0899	2,3619	-0,8875	
4,26	-0,1769	-1,8966	-0,0855	2,4505	-0,9161	
4,28	-0,1697	-1,8715	-0,0809	2,5471	-0,9475	
4,30	-0,1430	-1,8475	-0,0760	2,6529	-0,9821	2,28585
4,32	-0,1267	-1,8246	-0,0708	2,7694	-1,0206	
4,34	-0,1107	-1,8028	-0,0653	2,8983	-1,0634	
4,36	-0,0952	-1,7819	-0,0594	3,0417	-1,1114	
4,38	-0,0799	-1,7619	-0,0529	3,2026	-1,1653	
4,40	-0,0652	-1,7429	-0,0459	3,3836	-1,2265	3,09632

v	$\alpha(v)$	$\beta(v)$	$\theta_1(v)$	$\theta_2(v)$	$\theta_3(v)$	$\epsilon(v)$
4.42	-0.0508	-1.7247	-0.0381	3.5893	-1.2963	
4.44	-0.0366	-1.7074	-0.0295	3.8251	-1.3767	
4.46	-0.0227	-1.6909	-0.0197	4.0982	-1.4701	
4.48	-0.0090	-1.6752	-0.0085	4.4179	-1.5800	
4.50	+0.0044	-1.6603	+0.0045	4.7980	-1.7110	4.63733
4.52	0.0176	-1.6461	0.0199	5.2568	-1.8695	
4.54	0.0305	-1.6326	0.0386	5.8218	-2.0652	
4.56	0.0432	-1.6198	0.0617	6.5351	-2.3129	
4.58	0.0558	-1.6076	0.0915	7.4633	-2.6359	
4.60	0.0682	-1.5962	0.1314	8.7218	-3.0745	3.86018
4.62	0.0804	-1.5854	0.1878	10.5224	-3.7036	
4.64	0.0925	-1.5752	0.2748	13.3219	-4.6812	
4.66	0.1044	-1.5656	0.4272	18.2566	-6.4065	
4.68	0.1162	-1.5567	0.7664	29.2848	-10.2671	
4.70	0.1279	-1.5483	2.1964	75.9101	-26.5889	80.71480
3/2 π	0.1351	-1.5434	∞	∞	∞	
4.72	0.1395	-1.5405	-3.8833	-122.3641	+42.8875	
4.74	0.1510	-1.5333	-1.1534	-33.4764	11.7120	
4.76	0.1624	-1.5267	-0.7162	-19.2440	6.7321	
4.78	0.1738	-1.5207	-0.5370	-13.4298	4.6983	
4.80	0.1851	-1.5152	-0.4390	-10.2705	+3.5933	-11.38487
4.82	0.1964	-1.5103	-0.3771	-8.2851	2.9006	
4.84	0.2076	-1.5060	-0.7343	-6.9219	2.4251	
4.86	0.2188	-1.5022	-0.3028	-5.9272	2.0786	
4.88	0.2300	-1.4689	-0.2785	-5.1700	1.8154	
4.90	0.2412	-1.4963	-0.2593	-4.5743	1.6085	-5.26749
4.92	0.2524	-1.4941	-0.2435	-4.0927	1.4417	
4.94	0.2636	-1.4926	-0.2303	-3.6939	1.3045	
4.96	0.2748	-1.4916	-0.2192	-3.3629	1.1896	
4.98	0.2861	-1.4912	-0.2096	-3.0797	1.0921	
5.00	0.2975	-1.4914	-0.2011	-2.8355	1.0083	-3.38052
5.02	0.3089	-1.4922	-0.1937	-2.6231	0.9356	
5.04	0.3204	-1.4936	-0.1872	-2.4350	0.8725	
5.06	0.3320	-1.4954	-0.1811	-2.2694	0.8157	
5.08	0.3437	-1.4981	-0.1757	-2.1235	0.7658	
5.10	0.3555	-1.5014	-0.1707	-1.9912	0.7211	-2.44939
5.12	0.3674	-1.5053	-0.1662	-1.8719	0.6809	
5.14	0.3795	-1.5099	-0.1620	-1.7632	0.6446	
5.16	0.3918	-1.5152	-0.1581	-1.6644	0.6116	
5.18	0.4042	-1.5212	-0.1545	-1.5740	0.5816	
5.20	0.4169	-1.5280	-0.1512	-1.4908	0.5541	-1.88564
5.22	0.4298	-1.5355	-0.1480	-1.4141	0.5288	
5.24	0.4429	-1.5438	-0.1450	-1.3431	0.5056	
5.26	0.4562	-1.5529	-0.1422	-1.2771	0.4841	
5.28	0.4698	-1.5629	-0.1396	-1.2158	0.4642	
5.30	0.4838	-1.5738	-0.1370	-1.1585	0.4458	-1.50128
5.32	0.4981	-1.5857	-0.1346	-1.1049	0.4286	
5.34	0.5128	-1.5986	-0.1324	-1.0547	0.4126	
5.36	0.5278	-1.6124	-0.1302	-1.0074	0.3977	
5.38	0.5433	-1.6274	-0.1281	-0.9629	0.3837	
5.40	0.5592	-1.6436	-0.1261	-0.9209	0.3706	-1.21754

ν	$\alpha(\nu)$	$\beta(\nu)$	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$	$\lg(\nu)$
5.42	0.5756	-1.6610	-0.1242	-0.8812	0.3583	
5.44	0.5925	-1.6797	-0.1223	-0.8436	0.3167	
5.46	0.6100	-1.6998	-0.1205	-0.8079	0.3358	
5.48	0.6282	-1.7214	-0.1188	-0.7740	0.3255	
5.50	0.6470	-1.7446	-0.1171	-0.7417	0.3158	-0.99558
5.52	0.6666	-1.7694	-0.1155	-0.7110	0.3066	
5.54	0.6870	-1.7961	-0.1139	-0.6816	0.2979	
5.56	0.7083	-1.8248	-0.1124	-0.6535	0.2897	
5.58	0.7305	-1.8555	-0.1110	-0.6267	0.2819	
5.60	0.7538	-1.8886	-0.1096	-0.6010	0.2745	-0.81394
5.62	0.7783	-1.9242	-0.1082	-0.5763	0.2675	
5.64	0.8040	-1.9624	-0.1068	-0.5526	0.2608	
5.66	0.8311	-2.0037	-0.1055	-0.5298	0.2544	
5.68	0.8597	-2.0481	-0.1042	-0.5079	0.2484	
5.70	0.8901	-2.0961	-0.1030	-0.4868	0.2426	-0.65973
5.72	0.9224	-2.1481	-0.1018	-0.4664	0.2371	
5.74	0.9567	-2.2045	-0.1006	-0.4468	0.2319	
5.76	0.9934	-2.2657	-0.0994	-0.4278	0.2269	
5.78	1.0327	-2.3323	-0.0983	-0.4095	0.2221	
5.80	1.0750	-2.4050	-0.0972	-0.3917	0.2176	-0.52467
5.82	1.1207	-2.4845	-0.0961	-0.3745	0.2132	
5.84	1.1702	-2.5718	-0.0951	-0.3578	0.2090	
5.86	1.2240	-2.6679	-0.0941	-0.3416	0.2051	
5.88	1.2829	-2.7743	-0.0931	-0.3258	0.2012	
5.90	1.3476	-2.8924	-0.0921	-0.3105	0.1976	-0.40311
5.92	1.4190	-3.0241	-0.0911	-0.2956	0.1942	
5.94	1.4984	-3.1719	-0.0901	-0.2812	0.1908	
5.96	1.5873	-3.3387	-0.0892	-0.2670	0.1876	
5.98	1.6870	-3.5284	-0.0883	-0.2532	0.1846	
6.00	1.8015	-3.7455	-0.0874	-0.2398	0.1817	-0.29101
6.02	1.9323	-3.9966	-0.0865	-0.2267	0.1789	
6.04	2.0842	-4.2902	-0.0856	-0.2138	0.1762	
6.06	2.2628	-4.6366	-0.0847	-0.2013	0.1736	
6.08	2.4760	-5.0527	-0.0839	-0.1890	0.1712	
6.10	2.7289	-5.5609	-0.0831	-0.1769	0.1689	0.18527
6.12	3.0573	-6.1949	-0.0823	-0.1651	0.1666	
6.14	3.4686	-7.0071	-0.0815	-0.1535	0.1645	
6.16	4.0126	-8.0854	-0.0807	-0.1422	0.1625	
6.18	4.7665	-9.5830	-0.0799	-0.1310	0.1606	
6.20	5.8812	-11.8030	-0.0791	-0.1200	0.1588	0.08337
6.22	7.7007	-15.4327	-0.0783	-0.1092	0.1570	
6.24	11.2034	-22.4274	-0.0776	-0.0985	0.1552	
6.26	20.7419	-41.5016	-0.0768	-0.0880	0.1537	
6.28	149.828	-299.6568	-0.0761	-0.0776	0.1522	
2 π	∞	∞	-0.0760	-0.0760	0.1520	0.00000

ν	$\Phi_1(\nu)$	$\Phi_2(\nu)$	$\Phi_3(\nu)$	$\Phi_4(\nu)$	$\tau_1(\nu)$	$\tau_2(\nu)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,20	0,9973	0,9986	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,40	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9362	0,9840
0,60	0,9756	0,9881	1,0061	0,9941	0,8556	0,9541
0,80	0,9567	0,9787	1,0111	0,9895	0,7434	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9798	0,5131	0,8790
1,20	0,8998	0,9511	1,0251	0,9756	0,4198	0,8556
1,30	0,8814	0,9424	0,0296	0,9714	0,3181	0,8306
1,40	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8025
1,50	0,8393	0,9226	1,0403	0,9620	0,0893	0,7745
$\pi/2$	0,8225	0,9149	1,0445	0,9561	0	0,7525
1,60	0,8153	0,9116	1,0463	0,9567	-0,0380	0,7434
1,70	0,7891	0,8998	1,0529	0,9510	-0,1742	0,7102
1,80	0,7609	0,8871	1,0600	0,9449	-0,3191	0,6749
1,90	0,7297	0,8735	1,0676	0,9383	-0,4736	0,6375
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,02	0,6891	0,8560	1,0777	0,9299	-0,6710	0,5899
2,04	0,6819	0,8530	1,0795	0,9285	-0,7053	0,5817
2,06	0,6747	0,8499	1,0613	0,9277	-0,7398	0,5734
2,08	0,6672	0,8468	1,0831	0,9255	-0,7749	0,5650
2,10	0,6597	0,8437	1,0850	0,9260	-0,8103	0,5565
2,12	0,6521	0,8405	1,0868	0,9225	-0,8465	0,5480
2,14	0,6443	0,8372	1,0887	0,9210	-0,8822	0,5394
2,16	0,6364	0,8339	1,0907	0,9195	-0,9188	0,5307
2,18	0,6284	0,8306	1,0926	0,9180	-0,9557	0,5220
2,20	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,22	0,6119	0,8239	1,0966	0,9148	-1,0309	0,5041
2,24	0,6034	0,8204	1,0988	0,9132	-1,0691	0,4951
2,26	0,5948	0,8170	1,1009	0,9116	-1,1077	0,4860
2,28	0,5861	0,8134	1,1029	0,9100	-1,1457	0,4768
2,30	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	-1,1861	0,4675
2,32	0,5681	0,8063	1,1072	0,9066	-1,2260	0,4581
2,34	0,5589	0,8026	1,1095	0,9049	-1,2663	0,4486
2,36	0,5496	0,7989	1,1117	0,9032	-1,3069	0,4391
2,38	0,5401	0,7952	1,1140	0,9015	-1,3480	0,4295
2,40	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3896	0,4198
2,42	0,5205	0,7877	1,1188	0,8991	-1,4316	0,4101
2,44	0,5105	0,7838	0,1212	0,8963	-1,4743	0,4002
2,46	0,5003	0,7799	0,1236	0,8945	-1,5169	0,3902
2,48	0,4899	0,7760	1,1261	0,8927	-1,5602	0,3802
2,50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	-1,6040	0,3701
2,52	0,4685	0,7679	1,1311	0,8890	-1,6383	0,3598
2,54	0,4576	0,7638	1,1337	0,8871	-1,6929	0,3495
2,56	0,4464	0,7596	1,1363	0,8852	-1,7381	0,3391
2,58	0,4350	0,7555	1,1390	0,8833	-1,7838	0,3286
2,60	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,62	0,4116	0,7470	1,1445	0,8795	-1,8765	0,3075
2,64	0,3996	0,7427	1,1473	0,8776	-1,9236	0,2968
2,66	0,3873	0,7383	1,1501	0,8756	-1,9712	0,2860
2,68	0,3748	0,7339	1,1530	0,8736	-2,0193	0,2751

u	$\varphi_1(u)$	$\varphi_2(u)$	$\varphi_3(u)$	$\varphi_4(u)$	$\eta_1(u)$	$\eta_2(u)$
2.70	0.3621	0.7294	1,1559	0.8716	-2.0679	0.2641
2.72	0.3491	0.7249	1,1589	0.8696	-2.1170	0.2531
2.74	0.3358	0.7204	1,1619	0.8676	-2.1667	0.2420
2.76	0.3223	0.7158	1,1650	0.8655	-2.2169	0.2307
2.78	0.3085	0.7111	1,1681	0.8634	-2.2676	0.2192
2.80	0.2944	0.7064	1,1712	0.8613	-2.3189	0.2080
2.82	0.2801	0.7016	1,1744	0.8592	-2.3707	0.1968
2.84	0.2654	0.6967	1,1777	0.8571	-2.4231	0.1850
2.86	0.2505	0.6918	1,1810	0.8550	-2.4760	0.1734
2.88	0.2352	0.6869	1,1844	0.8528	-2.5296	0.1616
2.90	0.2195	0.6819	1,1878	0.8506	-2.5838	0.1498
2.92	0.2036	0.6768	1,1913	0.8484	-2.6385	0.1379
2.94	0.1878	0.6717	1,1948	0.8462	-2.6939	0.1261
2.96	0.1706	0.6665	1,1984	0.8439	-2.7499	0.1138
2.98	0.1535	0.6613	1,2020	0.8416	-2.8066	0.1016
3.00	0.1361	0.6560	1,2057	0.8393	-2.8639	0.0893
3.02	0.1182	0.6506	1,2095	0.8370	-2.9219	0.0770
3.04	0.1000	0.6452	1,2133	0.8347	-2.9805	0.0646
3.06	0.0812	0.6398	1,2172	0.8323	-3.0400	0.0520
3.08	0.0621	0.6343	1,2212	0.8299	-3.0991	0.0394
3.10	0.0424	0.6287	1,2252	0.8275	-3.1609	0.0267
3.12	0.0223	0.6230	1,2292	0.8251	-3.2225	0.0139
3.14	0.0017	0.6173	1,2334	0.8227	-3.2848	0.0011
π	0	0.6168	1,2336	0.8224	-3.2898	0
3.16	-0.0195	0.6115	1,2376	0.8203	-3.3480	-0.0118
3.18	-0.0412	0.6057	1,2419	0.8178	-3.4120	-0.0249
3.20	-0.0635	0.5997	1,2463	0.8153	-3.4768	-0.0380
3.22	-0.0864	0.5937	1,2507	0.8128	-3.5425	-0.0512
3.24	-0.1100	0.5876	1,2552	0.8102	-3.6092	-0.0646
3.26	-0.1342	0.5815	1,2597	0.8076	-3.6767	-0.0780
3.28	-0.1591	0.5753	1,2644	0.8050	-3.7453	-0.0915
3.30	-0.1847	0.5691	1,2691	0.8024	-3.8147	-0.1051
3.32	-0.2111	0.5628	1,2739	0.7998	-3.8852	-0.1187
3.34	-0.2383	0.5564	1,2788	0.7972	-3.9568	-0.1324
3.36	-0.2663	0.5499	1,2838	0.7945	-4.0295	-0.1463
3.38	-0.2951	0.5433	1,2889	0.7918	-4.1032	-0.1602
3.40	-0.3248	0.5366	1,2940	0.7891	-4.1781	-0.1742
3.42	-0.3555	0.5299	1,2992	0.7863	-4.2540	-0.1884
3.44	-0.3873	0.5231	1,3045	0.7835	-4.3318	-0.2026
3.46	-0.4202	0.5162	1,3099	0.7807	-4.4107	-0.2169
3.48	-0.4542	0.5092	1,3155	0.7779	-4.4910	-0.2313
3.50	-0.4894	0.5021	1,3212	0.7751	-4.5727	-0.2457
3.52	-0.5259	0.4950	1,3270	0.7723	-4.6560	-0.2602
3.54	-0.5638	0.4878	1,3328	0.7695	-4.7410	-0.2748
3.56	-0.6031	0.4805	1,3387	0.7667	-4.8276	-0.2894
3.58	-0.6439	0.4731	1,3447	0.7638	-4.9160	-0.3042
3.60	-0.6862	0.4656	1,3508	0.7609	-5.0062	-0.3191
3.62	-0.7303	0.4580	1,3571	0.7580	-5.0984	-0.3340
3.64	-0.7763	0.4503	1,3635	0.7550	-5.1928	-0.3491
3.66	-0.8243	0.4425	1,3700	0.7520	-5.2895	-0.3643
3.68	-0.8745	0.4345	1,3766	0.7488	-5.3886	-0.3797

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3,70	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7457	-5,4903	-0,3951
3,72	-0,9819	0,4184	1,3903	0,7425	-5,5947	-0,4107
3,74	-1,0395	0,4102	1,3973	0,7393	-5,7020	-0,4263
3,76	-1,0999	0,4019	1,4044	0,7361	-5,8124	-0,4420
3,78	-1,1034	0,3935	1,4217	0,7329	-5,9262	-0,4578
3,80	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3,82	-1,3009	0,3764	1,4267	0,7265	-6,1650	-0,4895
3,84	-1,3754	0,3677	1,4344	0,7232	-6,2906	-0,5056
3,86	-1,4543	0,3588	1,4423	0,7199	-6,4208	-0,5217
3,88	-1,5380	0,3498	1,4503	0,7166	-6,5561	-0,5379
3,90	-1,6468	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6968	-0,5542
3,92	-1,7214	0,3315	1,4667	0,7099	-6,8435	-0,5706
3,94	-1,8227	0,3221	1,4752	0,7065	-6,9972	-0,5871
3,96	-1,9310	0,3126	1,4838	0,7031	-7,1582	-0,6037
3,98	-2,0473	0,3030	1,4928	0,6996	-7,3274	-0,6204
4,00	-2,1725	0,2933	1,5018	0,6961	-7,5058	-0,6372
4,02	-2,3074	0,2834	1,5110	0,6926	-7,6942	-0,6541
4,04	-2,4547	0,2734	1,5204	0,6891	-7,8924	-0,6710
4,06	-2,6142	0,2632	1,5301	0,6855	-8,1087	-0,6881
4,08	-2,7888	0,2559	1,5400	0,6819	-8,3376	-0,7053
4,10	-2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5839	-0,7225
4,12	-3,1915	0,2318	1,5604	0,6747	-8,8496	-0,7398
4,14	-3,4262	0,2210	1,5709	0,6710	-9,1394	-0,7573
4,16	-3,6877	0,2101	1,5816	0,6673	-9,4562	-0,7749
4,18	-3,9824	0,1990	1,5925	0,6635	-9,8065	-0,7925
4,20	-4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	-10,196	-0,8103
4,22	-4,6970	0,1762	1,6160	0,6559	-10,633	-0,8281
4,24	-5,1369	0,1646	1,6267	0,6521	-11,129	-0,8460
4,26	-5,6516	0,1528	1,6387	0,6482	-11,701	-0,8641
4,28	-6,2607	0,1409	1,6510	0,6443	-12,367	-0,8822
4,30	-6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	-13,158	-0,9004
4,32	-7,8956	0,1165	1,6767	0,6364	-14,116	-0,9188
4,34	-9,0306	0,1040	1,6899	0,6324	-15,309	-0,9372
4,36	-10,503	0,0912	1,7033	0,6284	-16,840	-0,9557
4,38	-12,523	0,0781	1,7170	0,6243	-18,918	-0,9744
4,40	-15,330	0,0648	1,7310	0,6202	-21,783	-0,9931
4,42	-19,703	0,0513	1,7452	0,6161	-26,215	-1,0119
4,44	-27,349	0,0376	1,7602	0,6119	-33,920	-1,0309
4,46	-44,148	0,0237	1,7754	0,6077	-50,779	-1,0499
4,48	-111,57	0,0096	1,7910	0,6034	-118,26	-1,0691
4,50	+227,80	-0,0048	1,8070	0,5991	+221,05	-1,0884
4,52		-0,0194	1,8234	0,5948		-1,1077
4,54		-0,0343	1,8402	0,5905		-1,1271
4,56		-0,0495	1,8575	0,5861		-1,1457
4,58		-0,0650	1,8752	0,5817		-1,1662
4,60		-0,0807	1,8933	0,5772		-1,1861
4,62		-0,0969	1,9119	0,5727		-1,2060
4,64		-0,1133	1,9310	0,5684		-1,2250
4,66		-0,1301	1,9507	0,5635		-1,2461
4,68		-0,1472	1,9710	0,5589		-1,2663

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4,70		-0,1646	1,9919	0,5543		-1,2865
3/2 π		-0,1755	2,0052	0,5514		-1,2992
4,72		-0,1824	2,0134	0,5496		-1,3069
4,74		-0,2005	2,0355	0,5449		-1,3274
4,76		-0,2190	2,0582	0,5402		-1,3480
4,78		-0,2379	2,0816	0,5354		-1,3586
4,80		-0,2572	2,1056	0,5305		-1,3896
4,82		-0,2770	2,1304	0,5255		-1,405
4,84		-0,2973	2,1506	0,5205		-1,4316
4,86		-0,3181	2,1824	0,5155		-1,4528
4,88		-0,3394	2,2096	0,5105		-1,4743
4,90		-0,3612	2,2377	0,5054		-1,4954
4,92		-0,3834	2,2667	0,5003		-1,5169
4,94		-0,4061	2,2966	0,4951		-1,5385
4,96		-0,4293	2,3275	0,4899		-1,5602
4,98		-0,4530	2,3594	0,4846		-1,5821
5,00		-0,4772	2,3924	0,4793		-1,6040
5,02		-0,5022	2,4266	0,4739		-1,6261
5,04		-0,5280	2,4620	0,4685		-1,6483
5,06		-0,5545	2,4986	0,4630		-1,6706
5,08		-0,5818	2,5365	0,4576		-1,6929
5,10		-0,6099	2,5757	0,4520		-1,7155
5,12		-0,6338	2,6164	0,4464		-1,7381
5,14		-0,5685	2,6587	0,4407		-1,7609
5,16		-0,6999	2,7027	0,4350		-1,7838
5,18		-0,7306	2,7485	0,4292		-1,8078
5,20		-0,7630	2,7961	0,4234		-1,8299
5,22		-0,7964	2,8454	0,4175		-1,8532
5,24		-0,8310	2,8968	0,4116		-1,8765
5,26		-0,8668	2,9504	0,4056		-1,9000
5,28		-0,9039	3,0064	0,3996		-1,9236
5,30		-0,9423	3,9648	0,3931		-1,9477
5,32		-0,9821	3,1257	0,3873		-1,9712
5,34		-1,0233	3,1893	0,3811		-1,9952
5,36		-1,0660	3,2559	0,3748		-2,0193
5,38		-1,1103	3,3267	0,3685		-2,0435
5,40		-1,1503	3,3989	0,3621		-2,0679
5,42		-1,2043	3,4757	0,3556		-2,0924
5,44		-1,2544	3,5563	0,3491		-2,1170
5,46		-1,3067	3,6409	0,3425		-2,1418
5,48		-1,3612	3,7298	0,3358		-2,1667
5,50		-1,4181	3,8234	0,3291		-2,1917
5,52		-1,4777	3,9222	0,3223		-2,2169
5,54		-1,5402	4,0267	0,3154		-2,2422
5,56		-1,6059	4,1374	0,3085		-2,2676
5,58		-1,6751	4,2549	0,3015		-2,2932
5,60		-1,7481	4,3794	0,2944		-2,3189
5,62		-1,8252	4,5118	0,2873		-2,3447
5,64		-1,9065	4,6526	0,2801		-2,3707
5,66		-1,9920	4,8026	0,2727		-2,3969
5,68		-2,0833	4,9629	0,2654		-2,4231

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
5,70		-2,1804	5,1346	0,8520		-2,4495
5,72		-2,2833	5,3190	0,2505		-2,4760
5,74		-2,3944	5,5173	0,2429		-2,5027
5,76		-2,5130	5,7314	0,2352		-2,5296
5,78		-2,6406	5,9628	0,2374		-2,5466
5,80		-2,7777	6,2140	0,2195		-2,5838
5,82		-2,9262	6,4873	0,2116		-2,6111
5,84		-3,0876	6,7859	0,2036		-2,6385
5,86		-3,2634	7,1132	0,1955		-2,6601
5,88		-3,4562	7,4738	0,1873		-2,6939
5,90		-3,6678	7,8726	0,1790		-2,7218
5,92		-3,9018	8,3163	0,1706		-2,7499
5,94		-4,1603	8,8122	0,1621		-2,7782
5,96		-4,4547	9,3706	0,1535		-2,8066
5,98		-4,7816	10,004	0,1448		-2,8352
6,00		-5,1589	10,727	0,1361		-2,8639
6,02		-5,5845	11,561	0,1272		-2,8928
6,04		-6,0653	12,534	0,1182		-2,9219
6,06		-6,6753	13,683	0,1091		-2,9512
6,08		-7,3699	15,060	0,0999		-2,9805
6,10		-8,2355	16,739	0,0906		-3,0102
6,12		-9,2939	18,832	0,0812		-3,0400
6,14		-10,646	21,511	0,0717		-3,0699
6,16		-12,440	25,065	0,0621		-3,0991
6,18		-14,921	29,999	0,0523		-3,1304
6,20		-18,594	37,308	0,0424		-3,1609
6,22		-24,575	49,255	0,0324		-3,1916
6,24		-36,100	72,272	0,0223		-3,2225
6,26		-67,436	135,03	0,0121		-3,2535
6,28		-492,67	984,32	0,0017		-3,2848
2 π		$-\infty$	$+\infty$	0		-3,2898

ლიტერატურა

1. Ананьев И. В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем, Москва, 1946.
2. Гольденблат И. И. и Сизов А. Ш. Справочник по расчету строительных конструкций на устойчивость и колебания, Москва, 1952.
3. Бернштейн С. А. Основы динамики сооружений, Москва, 1941.
4. Динник А. Н. Устойчивость упругих систем, Москва, 1950.
5. Динник А. Н. Продольный изгиб, Москва, 1939.
6. Завриев К. С. Динамика сооружения, Москва, 1946.
7. Корноухов Н. В. Прочность и устойчивость стержневых систем, Москва, 1949.
8. Коробов А. П. Приближенный способ расчета стоек постоянного и переменного сечения. Ростовский институт инженеров транспорта, 1935.
9. Лейтес С. Д. Устойчивость сжатых стальных стержней, Москва, 1954.
10. Митропольский Н. М. Приближенная формула расчета стержней продольно-поперечный изгиб. Труды МИИТ, вып. 78, 1953.
11. Прокофьев И. П. и Смирнов А. Ф. — Теория сооружений, III, Москва, 1948.
12. Рабинович И. М. Курс строительной механики, ч. II, Москва, 1954.
13. Ржаницин А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем, Москва, 1955.
14. Смирнов А. Ф. Устойчивость и колебания сооружений, Москва, 1958.
15. Снитко Н. К. Устойчивость стержневых систем, Москва, 1952.
16. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем, Москва, 1955.
17. Штаерман И. Я. и Пиковский А. А. Основы теории устойчивости строительных конструкций, Москва, 1939.
18. Палкович П. Ф. Строительная механика корабля, Ленинград, 1941.
19. Завриев К. С. Карцивадзе Г. Н. Устойчивость и динамика сооружений, Тбилиси, 1959.
20. Пономарев С. Д. др. Расчеты на прочность в машиностроении, т. III, Москва, 1959.
21. Снитко Н. К. Методы расчета сооружений на вибрацию и удар, Ленинград, 1953.
22. Тимошенко С. П. — Теория колебаний в инженерном деле, Москва, 1959.
23. Филиппов А. П. Колебания упругих систем, Киев, 1956.
24. Сборник задач по теории сооружений под редакцией проф. И. М. Рабиновича, Москва, 1950.
25. Пановко Я. Г. — Основы прикладной теории упругих колебаний, Москва, 1957.
26. Бабаков Н. М. Теория колебаний, Москва, 1958.
27. Безухов Н. Н. Динамика сооружений в примерах и задачах, Москва, 1947.
28. Гогенемзер К. и Прагер В. Динамика сооружений, Москва, 1936.
29. Сехинашвили Э. А. Инженерный метод расчета упругих систем на свободные колебания, Тбилиси, 1960.
30. ასტუაყაძე რ. ა. თ. სამშენებლო მექანიკა, ნაწ. II, თბილისი, 1956 წ.
31. რაზმაძე გ. ბ. დარტუმის თეორიის საინჟინრო საკითხები, თბილისი, 1959 წ.

სარჩევნი

წინასიტყვაობა

3

პირველი განყოფილება

ნაშენთა ანგარიში მდგრადობაზე

თაეი I

შესავალი

- | | |
|--|----|
| § 1. საერთო ცნობები ნაშენთა მდგრადობაზე | 5 |
| § 2. მდგრადობის დაკარგვის მოელენის კლასიფიკაცია | 5 |
| § 3. წონასწორობის მდგრადი და არამდგრადი ფორმები და მათი ანალიზური მაჩვენებლები | 6 |
| § 4. კრიტიკული ძალის განსაზღვრის სტატიკური მეთოდი | 8 |
| § 5. კრიტიკული ძალის განსაზღვრის ენერგეტიკული მეთოდი | 11 |

თაეი II

სწორსაზოვანი შეკუმშული დრეკადი ღეროების მდგრადობა

- | | |
|--|----|
| § 6. ერთმალაინი ღეროების მდგრადობა. ძირითადი შემთხვევები (ეილერის ამოცანა) | 22 |
| § 7. დრეკადად ჩამავრებული ღეროების მდგრადობა | 28 |
| § 8. ღეროების მდგრადობა რამდენიმე შეკუმშავი ძალის მოქმედების დროს | 39 |
| § 9. ცელადი კვეთის მქონე ღეროების მდგრადობა | 45 |
| § 10. განივი ძალის გავლენა კრიტიკულ ძალაზე | 47 |
| § 11. შედგენილი ღეროების მდგრადობა | 49 |
| § 12. სწორი ძელების მდგრადობის ზუსტი თეორიის ზოგიერთი შედეგი | 53 |
| § 13. ეილერის ფორმულების გამოყენების ზღვრები. სწორი ძელების მდგრადობა დრეკადობის ზღვრებს ზემოთ | 55 |
| § 14. მაგალითები შეკუმშული სწორი ძელების კრიტიკული ძალის განსაზღვრაზე | 60 |

თაეი III

სწორი შეკუმშულ-გაღუნული დრეკადი ღეროების მდგრადობა

- | | |
|---|----|
| § 15. საერთო შენ-შენა და ამოცანის გადაწყვეტის მეთოდი | 79 |
| § 16. ექსცენტრიული კუმშვა | 77 |
| § 17. მაქსიმალური ჩაღუნვები და მომენტები შეკუმშულ-გაღუნულ ღეროში | 80 |
| § 18. ჩაღუნვების და მომენტების მიახლოებითი ანგარიში. საანგარიშო ძაბვების გამოთვლა | 84 |

თაეი IV

ჩარჩოების ანგარიში მდგრადობაზე ძალთა მეთოდით

- | | |
|---|----|
| § 19. მობის ფორმულა შეკუმშულ-გაღუნულ ღეროებისათვის | 91 |
| § 20. ძირითადი დაშვებები ჩარჩოების ანგარიშის დროს | 92 |
| § 21. ძირითადი სისტემის შერჩევა, მდგრადობის განტოლების შედგენა და ამოცანის გადაწყვეტის შედეგობა | 92 |
| § 22. ჩარჩოს ანგარიშის მაგალითები მდგრადობაზე ძალთა მეთოდით | 95 |

თაეი V

ჩარჩოების ანგარიში მდგრადობაზე გადაადგილებათა მეთოდით

- | | |
|--|-----|
| § 23. რეაქციების გამოთვლა შეკუმშულ-გაღუნულ ღეროებში | 101 |
| § 24. ძირითადი სისტემის შერჩევა და მდგრადობის განტოლების შედგენა | 102 |
| § 25. ჩარჩოს ანგარიშის მაგალითები მდგრადობაზე გადაადგილებათა მეთოდით | 104 |

თავი VI

ხისტ და დრეკად საურდენებზე მდებარე უკრი კოკის ანგარიში მდგრადობაზე

§ 26. ხისტ საურდენებზე მდებარე უკრი კოკის ანგარიში მდგრადობაზე	114
§ 27. ორშალიანი უკრი კოკი ერთი დრეკადი საურდენით	119
§ 28. სამშალიანი უკრი კოკი ორი დრეკადი საურდენით	121
§ 29. დრეკად ფუძეზე მდებარე კოკის მდგრადობა	125
§ 30. ლია ხიდის ზედა სარტყლის მდგრადობა (ფ. იასინსკის ამოცანა)	128

თავი VII

თაღების მდგრადობა

§ 31. საერთო ცნობები მდგრადობის დაკარგვის შესახებ თაღებში	133
§ 32. წრიული და მკირე სიმრუდის თაღების გაღუნული ლერძის დიფერენციალური განტოლება	134
§ 33. წრიული ორსახსრიანი თაღის ანგარიში მდგრადობაზე ჰიდროსტატიკური დაწოლის დროს	137
§ 34. წრიული უსახსრო თაღის ანგარიში მდგრადობაზე ჰიდროსტატიკური დაწოლის დროს	139
§ 35. წრიული სამსახსრიანი თაღის მდგრადობა ჰიდროსტატიკური დაწოლის დროს	142
§ 36. დრეკად ჩამაგრებული წრიული თაღის მდგრადობა ჰიდროსტატიკური დაწოლის დროს	144
§ 37. პარაბოლური თაღის მდგრადობა ევრტიკალური თანაბრად განაწილებული ტვირთის მოქმედების დროს	146

თავი VIII

ლუნვის ბრტყელი ფორმის მდგრადობა (კოკების გვერდითი გამოღუნვა)

§ 38. გრძელი, ვიწრო, სწორკუთხა ფურცლის (ზოლის) მდგრადობა სუფთა ლუნვის დროს	150
§ 39. ერთი ბოლოთი ჩამაგრებული კონსოლური ვიწრო სწორკუთხა ფურცლის (ზოლის) მდგრადობა	152
§ 40. ორტივები კოკის ლუნვის ბრტყელი ფორმის მდგრადობა	154

მეორე განყოფილება

ნაშენთა ანგარიში დინამიკურ დატვირთვებზე

თავი IX

საერთო ცნობები და ნაშენთა დინამიკის მეთოდები

§ 41. ნაშენთა დინამიკის საგანი და ძირითადი ამოცანები	158
§ 42. დინამიკური დატვირთვები და მათი თავისებურებანი	159
§ 43. ნაშენთა დინამიკის ძირითადი მეთოდები	160
§ 44. დრეკადი სისტემების თავისუფლების ხარისხი	162

თავი X

ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების თავისუფალი რბევა

§ 45. დრეკად უწონო სისტემაზე მოქმედი ტვირთის თავისუფალი რბევა	166
§ 46. მავალითები თავისუფალი რბევის სიხშირის განსაზღვრაზე	172
§ 47. თავისუფალი მიღეადი რბევა	177

თავი XI

ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების იძულებითი რბევა

§ 48. იძულებითი რბევა თავისუფალ არეში (არადრეკადი წინალობის გარეშე)	182
§ 49. იძულებითი მიღეადი რბევა (არადრეკადი წინალობის გაკლენა)	188
§ 50. პარატიკული მითითებები	192
§ 51. დინამიკური ანგარიშის მავალითები ვიბრაციულ დატვირთვაზე	193

თავი XII

ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების რბევა

§ 52. თავისუფალი რბევა უწინალო არეში	199
§ 53. სიმეტრიის გამოყენება	204
§ 54. იძულებითი რბევა უწინალო არეში	205
§ 55. ვიბროჩამჭრობის მოქმედების პრინციპი	207
§ 56. ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების ანგარიშის მავალითები	208

თ ა ე ი · X I I I

მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების რხევა

§ 57. თავისუფალი რხევა უწინალო არეში	219
§ 58. სიმეტრიის გამოყენება	223
§ 59. იძულებითი რხევები უწინალო არეში .	225
§ 60. შიგა ძალების განსაზღვრა და ანგარიშის საერთო მსვლელობა ვიბრაციულ დატვირთვაზე	228
§ 61. მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემების დინამიკური ანგარიშის მაგალითები .	229

თ ა ე ი X I V

მთლიანი უწყვეტი მასის მქონე სისტემების რხევა

§ 62. მუდმივი კვეთის მქონე ღეროების გრძივი თავისუფალი რხევა	237
§ 63. მუდმივი კვეთის მქონე კოჭის განივი თავისუფალი რხევა .	241

თ ა ე ი X V

თავისუფალი რხევის ხიზშირის გამოთვლის მიახლოებითი მეთოდები

§ 64. დაყვანილი მასის მეთოდი	248
§ 65. მთლიანი განაწილებული მასის შეცვლა შეყურსული მასებით	251
§ 66. მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი	252
§ 67. ენერგეტიკული მეთოდი	255
§ 68. საანგარიშო სქემის შერჩევა ჩარჩოებისა და თალების ანგარიშის დროს	259

თ ა ე ი X V I

ფერმის თავისუფალი რხევა და დინამიკური ანგარიში

§ 69. სიხშირეთა ძირითადი განტოლებები	262
§ 70. ენერგეტიკული მეთოდი	264
§ 71. ფერმის შეცვლა ეკვივალენტური კოჭით	265
§ 72. ფერმის მასის შეცვლა ერთი ან რამდენიმე შეყურსული მასით	266
§ 73. ფერმის დინამიკური ანგარიში	267

თ ა ე ი X V I I

შეკუმშულ-გალუნული ღეროს განივი რხევა. ღეროს დინამიკური მდგრადობა

§ 74. სახსროვნად დაყრდნობილი შეკუმშულ-გალუნული ღეროს თავისუფალი რხევა	268
§ 75. ღეროს დინამიკური მდგრადობა	269

თ ა ე ი X V I I I

ნაშენთა ანგარიში — დარტყმებზე

§ 76. ძირითადი მოსაზრებები	274
§ 77. განივმდუნავი დარტყმის გავლენა უწონო კოჭზე	275
§ 78. კოჭის მასის გავლენა	277
§ 79. დარტყმებზე ანგარიშის მაგალითები	279
დანართი	283
ლიტერატურა	293