მურმან კინწურაშვილი

მათემატიკის ცნობარი

აბიტურიენტებისა და სკოლის მოსწავლეთათვის

თეორიული საკითხები

მურმან კინწურაშვილი

მათემატიკის ცნობარი

(აბიტურიენტებისა და სკოლის მოსწავლეთათვის)

თეორიული საკითხები

თბილისი 2024

ვუძღვნი ჩემს პედაგოგებს : ლერი ჩიქობავას (-რეპეტიტორი სერტიფიცირებული მასწავლებელი;) და გოგი ფანცულაიას (საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სრული პროფესორი) ნათელ ხსოვნას.

წინასიტყვაობა

ძვირფასო მეგობრებო!

წინამდებარე ცნობარში თავმოყრილია ის ძირითადი ცნებები, წინადადებები და ფორმულები, რომლებიც ჩვენი სკოლების საბაზო და საშუალო საფეხურის მოსწავლეებს გარკვეულ მეგზურობას გაუწევს მათემატიკის შესწავლისას.
წიგნი ოთხი ნაწილისაგან შედგება 1. არითმეტიკა და ალგებრა; 2. გეომეტრია; 3.მონაცემთა ანალიზი, კომბინატორიკა, ალბათობა და მათემატიკური სტატისტიკა; 4. მოკლე ცნობარი და ცხრილები.

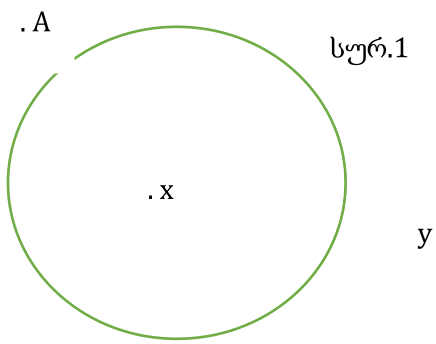
მე შევეცადე ცნობარში შეტანილი თითოეული საკითხის ფორმულირებას მოსწავლეთათვის გასაგებ ენაზე. წიგნი დალაგებულია 2024 წლის ერთიანი ეროვნული გამოცდის პროგრამის მიხედვით. ამ წიგნით სარგებლობა შეუძლია მათემატიკით დაინტერესებულ ნებისმიერ მოსწავლეს,როგორც მყისიერი ინფორმაციის მისაღებად, ასევე ადრე მიღებული ცოდნის განსამტკიცებლად და სისტემაში მოსაყვანად.
ცნობარში დამტკიცების გარეშე წარმოდგენილია თეორემები.
აბიტურიენტებს ეს ცნობარი ცოდნის მობილიზებასა და სრულყოფაში დაეხმარება, რაც მათემატიკაში ერთიანი ეროვნული გამოცდის ჩასაბარებლად არის აუცილებელი. ცნობარი სასარგებლო იქნება მათთვისაც, ვინც ზოგად უნარებს აბარებს.
მასწავლებლებს საშუალება ექნებათ , ამ კომპაქტური ცნობარის დახმარებით მოკლე დროში გაამეორებინონ მოსწავლეებს განვლილი მასალა. ცნობარი განსაკუთრებით გამოადგება დამამთავრებელი კლასის ნებისმიერ მოსწავლეს საგნის გამეორებაში, მინიმალური კომპეტენციის გადალახვაში.
მოკლედ თქვენ წინაშეა მათემატიკის ცნობარის-ელექტრონული ვერსია.

გისურვებთ წარმატებებს!

ალგებრა

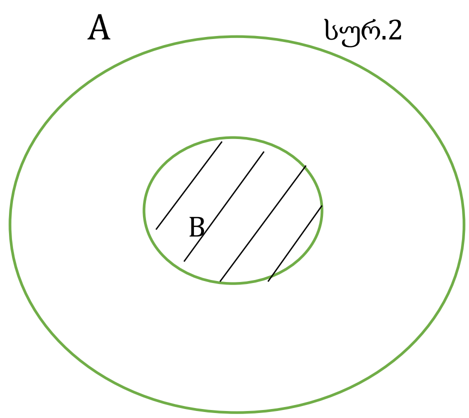
1.სიმრავლეები. ოპერაციები სიმრავლეებზე.

სიმრავლე-ესაა რაიმე ნიშნის ქვეშ გაერთიანებული ობიექტების ერთობლიობა. ამ ობიექტებს სიმრავლის ელემენტები ეწოდება. სიმრავლეებს ხშირად გამოსახავენ **ეილერ-ვენის** დიაგრამებით:



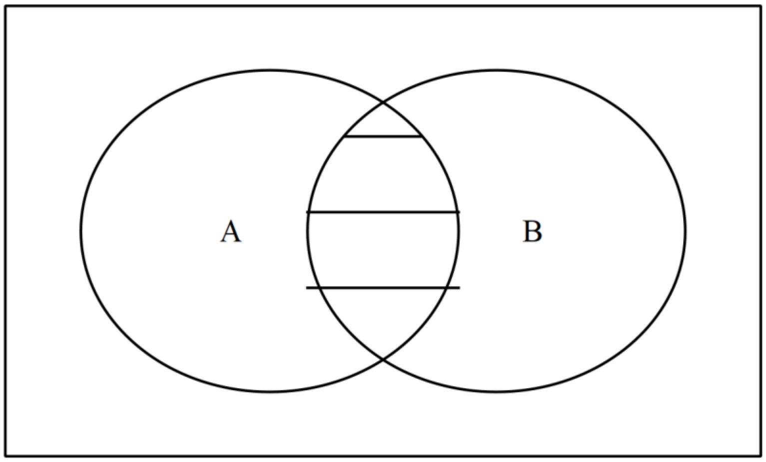
სურ.1

სურ.1-ის მიხედვით, $x \in A$, $y \notin A$.



სურ.2

სურ.2-ის მიხედვით, B სიმრავლე არის A სიმრავლის ქვესიმრავლე: $B \subset A$.



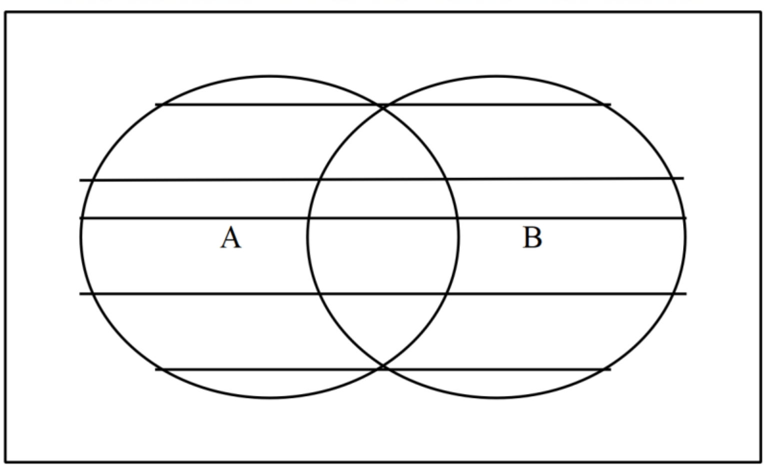
სურ.3

A და B სიმრავლეების თანაკვეთაა ყველა იმ x ელემენტისგან შედგენილი სიმრავლე, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის A-ს და B-ს. (სურ3).

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

A და B სიმრავლეების გაერთიანებაა ყველა იმ x ელემენტისაგან შედგენილი სიმრავლე, რომლებიც ეკუთვნის მხოლოდ A-ს, ან მხოლოდ B-ს, ან ორივეს ერთად (სურ. 4)

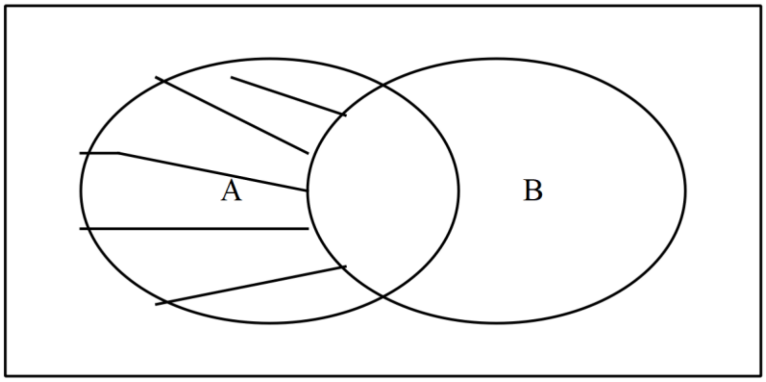
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



სურ. 4

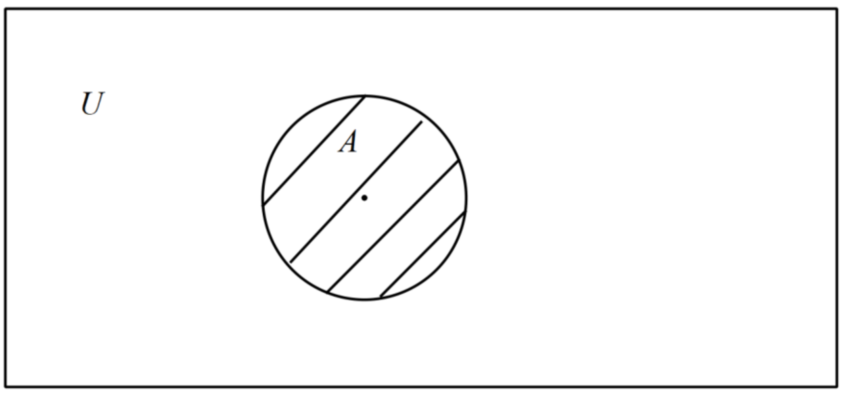
A და B სიმრავლეების სხვაობაა ყველა იმ x ელემენტისგან შედგენილი სიმრავლე, რომლებიც ეკუთვნის მხოლოდ A-ს და არ ეკუთვნის B-ს (სურ.5)

$$A\backslash B=\{x | x \in A,\ x \notin B\}$$



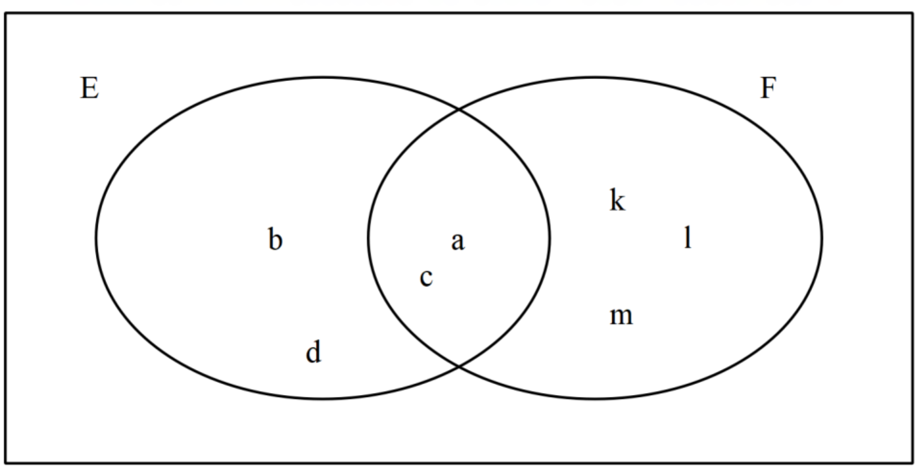
სურ 5

მე-6 სურათის მიხედვით, $A \subset U$. $U\backslash A$ **სიმრავლეს ეწოდება A სიმრავლის დამატება** U სიმრავლეში და ასე აღინიშნება $\bar{A}$, ხოლო U სიმრავლეს ეწოდება **უნივერსალური სიმრავლე.**
თუ $A \subset B$ და $B \subset A \Rightarrow A = B$. სიმრავლეს, რომელიც არცერთ ელემენტს არ შეიცავს **ცარიელი სიმრავლე ეწოდება** და ასე აღინიშნება $\emptyset$.



სურ. 6

E={a;b;c;d} და F={a;c;k;l;m} სიმრავლეებისათვის (სურ.7) n(E)=4 (ელემენტების რაოდენობა) და n(F)=5.

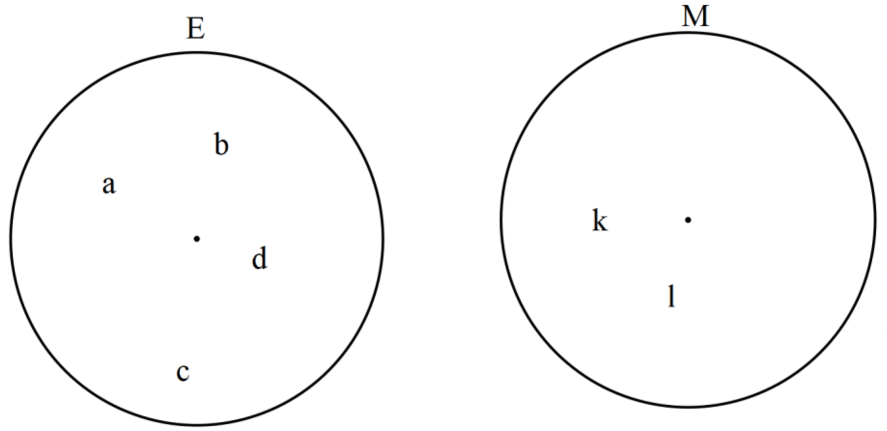


სურ7

$E \cap F = \{a; c\}$, $E \cup F = \{a; b; c; d; k; l; m\}$, *ანუ* $n(E \cap F) = 2$ *და* $n(E \cup F) = 7$;

რადგან $n(E \cap F) \neq \emptyset$, ადგილი ექნება ტოლობას: $n(E \cup F) = n(E) + n(F) - n(E \cap F)$.

E={a;b;c;d} და M={k;l} სიმრავლეებისათვის (სურ.8)



სურ. 8

E$\cap M = \emptyset$, E$\cup M = \{a; b; c; d; k; l\}$; რადგან n(E)=4, n(M)=2 და n(E$\cap M) = 0$, ადგილი ექნება ტოლობას: n(E$\cup M) = n(E) + n(M) = 6$.

თუ A, B და C ნებისმიერი სიმრავლეებია, მაშინ სამართლიანია ტოლობა:

$$n(A\cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

სიმრავლეებზე მოქმედებების ზოგიერთი თვისება:

$A \cup B = B \cup A$; $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup A = A$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap \emptyset = \emptyset$;

$A \cup \emptyset = A$; $A \cap U = A$; $A \cup U = U$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$; $A \cup \bar{A} = U$; $\overline{\emptyset} = U$; $\overline{U} = \emptyset$; $(\overline{\overline{A}}) = A$;

$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$; $(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$.

სიმრავლეს ეწოდება სასრული (უსასრულო), თუ იგი შედგება ელემენტების სასრული (უსასრულო) რაოდენობისაგან. სასრულ სიმრავლეს ეწოდება **დალაგებული სიმრავლე,** თუ ცნობილია რომელია მისი 1-ლი ელემენტი, მე-2 ელემენტი და ა.შ.

ნებისმიერი სასრული n-ელემენტიანი (n=0;1;2;3;4;5;...) **სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაოდენობაა 2^n.**

2. ნატურალური რიცხვები.მარტივი და შედგენილი რიცხვები.გამყოფი და ჯერადი.

თვლის შედეგად მიღებულ რიცხვებს **ნატურალური რიცხვები ეწოდება.** ნატურალური რიცხვები ქმნიან ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს რომელიც N ლათინური ასოთი აღინიშნება. N={1,2,3,...}. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. უმცირესი ელემენტია რიცხვი 1, ხოლო უდიდესი ელემენტი არ გააჩნია. ზრდის მიხედვით დალაგებული ნატურალური რიცხვები ქმნიან ე.წ. **ნატურალურ რიცხვთა რიგს.**

0;2;4;6;8 ციფრებს **ლუწი ციფრები** ეწოდება, ხოლო 1;3;5;7;9 ციფრებს **-კენტი ციფრები**.ლუწი ციფრებით დაბოლოებულ რიცხვებს **ლუწი რიცხვები ეწოდება;** მათი ზოგადი აღნიშვნაა 2n(n≥ 1) . კენტი ციფრებით დაბოლოებულ რიცხვებს **კენტი რიცხვები ეწოდება;** მათი ზოგადი აღნიშვნაა 2n-1(n≥ 1).

N სიმრავლეზე განსაზღვრულია **ხუთი ძირითადი მოქმედება:** შეკრება; გამოკლება; გამრავლება; გაყოფა; ახარისხება.

შეკრება. m და n ნატურალური რიცხვების ჯამი ეწოდება რიცხვს, რომელიც ნატურალურ რიცხვთა 1;2;3;...n;...რიგში m რიცხვიდან n ერთეულით მარჯვნივ მდებარეობს. m და n რიცხვებს ეწოდება შესაკრებები.

შეკრების თვისებებია:

გადანაცვლებადობა: m+n=n+m;

ჯუფთებადობა: (m+n)+k=m+(n+k), k∈ N;

რიცხვისთვის ნულის მიმატება: m+0=m.

გამოკლება. m და n ნატურალური რიცხვების (m>n) სხვაობა ეწოდება ისეთ k ნატურალურ რიცხვს, რომლისთვისაც n რიცხვის მიმატებით მიიღება m რიცხვი; ანუ m-n=k⇔ $k + n = m$; თუ m=n, მაშინ m-n=0. m და n რიცხვებს ეწოდება შესაბამისად **საკლები და მაკლები.**

გამრავლება. m და n ნატურალური რიცხვების ნამრავლი ეწოდება n რაოდენობის შესაკრებთა ჯამს, რომელთაგან თითოეული n-ის ტოლია. m და n რიცხვებს ეწოდება თანამამრავლები.

გამრავლების თვისებებია:

გადანაცვლბადობა: m$\cdot n = n \cdot m$;

ჯუფთებადობა: $(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$;

განრიგებადობა: (m+n)$\cdot k = mk + nk$;

რიცხვის ერთზე გამრავლება: $m \cdot 1 = m$;

რიცხვის ნულზე გამრავლება: $m \cdot 0 = 0$.

გაყოფა. m და n ნატურალური რიცხვების განაყოფი ეწოდება ისეთ k ნატურალურ რიცხვს, რომლის n რიცხვზე გამრავლებით მიიღება m. იგულისხმება, რომ m≥ n;

ანუ m:n=k ⇔ k$\cdot n = m$; თუ m=n, მაშინ m:n=1. m და n რიცხვებს ეწოდება შესაბამისად **გასაყოფი და გამყოფი.**

m ნატურალური რიცხვის 1-ზე გაყოფით იგივე m რიცხვი მიიღება.

0-ის რაიმე ნატურალურ რიცხვზე გაყოფით ისევ ნული მიიღება. **0-ზე გაყოფა არ შეიძლება.**

m; n; k∈ N რიცხვებისთვის სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

თუ m იყოფა n-ზე და n იყოფა k-ზე, მაშინ m იყოფა k-ზე; 72 იყოფა 24-ზე, 24 იყოფა 8-ზე⇒72 იყოფა 8-ზე.

თუ m და n რიცხვებიდან -თითოეული იყოფა k რიცხვზე, მაშინ m+n და m-n (m>n) იყოფა k რიცხვზე; 80 იყოფა 16-ზე, 64 იყოფა 16-ზე⇒ (80+64):16=9; (80-64):16=1.

თუ m და n რიცხვებიდან მხოლოდ ერთი იყოფა k რიცხვზე, მაშინ m+n და m-n (m>n) არ იყოფა k რიცხვზე; 120 იყოფა 15-ზე, 100 არ იყოფა 15-ზე⇒120+100=220 არ გაიყოფა 15-ზე; 120-100=20 არ გაიყოფა 15-ზე.

თუ m და n რიცხვებიდან (შეიძლება ორზე მეტი რიცხვის აღებაც) ერთი მაინც იყოფა k რიცხვზე, მაშინ mn ნამრავლიც გაიყოფა k რიცხვზე; 7$\cdot$ 15 $\cdot$ 22 $\cdot$ 29 გაიყოფა 11-ზე, რადგან 22 იყოფა 11-ზე.

ახარისხება. a რიცხვის n-ური ხარისხი (a∈ $N, n \in N$) ეწოდება n რაოდენობის თანამამრავლის ნამრავლს, რომელთაგან თითოეული a-ს ტოლია: $a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n-ჯერ}$

ნატურალური რიცხვის ციფრული ჩანაწერი შედგება თანრიგებისაგან, ხოლო თანრიგები ერთიანდება კლასებად; რიცხვი სამასოცდახუთი მილიარდ ასორმოცდახუთი მილიონ ორასოთხმოცდათვრამეტი ათას ექვსასორმოცდაშვიდი ასე წარმოიდგინება:

მილიარდების კლასი			მილიონების კლასი			ათასეულების კლასი			ერთეულების კლასი		
3	2	5	1	4	5	2	9	8	6	4	7
ასეულ მილიარდების თანრიგი	ათეულ მილიარდების თანრიგი	ერთეულ მილიარდების თანრიგი	ასეულ მილიონების თანრიგი	ათეულ მილიონების თანრიგი	ერთეულ მილიონების თანრიგი	ასეულ ათასეულების თანრიგი	ათეულ ათასეულების თანრიგი	ერთეულ ათასეულების თანრიგი	ასეულების თანრიგი	ათეულების თანრიგი	ერთეულების თანრიგი

ქვემოთ მოყვანილია ორნიშნა, სამნიშნა, ოთხნიშნა, ხუთნიშნა რიცხვების ზოგადი ჩანაწერები სათანრიგო შესაკრებათა ჯამის სახით.

$\overline{ab}=10a+b$; $\overline{abc}=100a+10b+c$; $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d$;

$\overline{abcde}=10000a+1000b+100c+10d+e.$

დამრგვალება. რიცხვი 2125307 სათანრიგო შესაკრებათა ჯამის სახით ასე გამოისახება:

$2125307=2\cdot 10^6+1\cdot 10^5+2\cdot 10^4+5\cdot 10^3+3\cdot 10^2+0\cdot 10^1+7.$

თუ დასამრგვალებელი თანრიგის შესაბამისი ციფრის მომდევნო ციფრი მეტია ან ტოლი 5-ზე, დასამრგვალებელი ციფრი 1 ერთეულით იზრდება, ხოლო მისი მომდევნო ციფრები 0-ებით შეიცვლება; თუ დასამრგვალებელი ციფრის მომდევნო ციფრი 5-ზე ნაკლებია, მაშინ დასამრგვალებელი ციფრი უცვლელი რჩება, მისი მომდევნო ციფრები კი 0-ებით შეიცვლება;

1<u>2</u>5≈ 130 (ამ მაგალითშიც და ქვემოთაც ხაზგასმულია დასამრგვალებელი თანრიგის შესაბამისი ციფრები); <u>1</u>25≈ 100; <u>3</u>825≈ 4000; 3<u>2</u>985≈ 33000.

ნატურალურ რიცხვს, რომელიც უნაშთოდ იყოფა მოცემულ რიცხვზე, ამ რიცხვის **ჯერადი** ეწოდება. რიცხვის ჯერადების რაოდენობა უსასრულოა. მაგ., 2-ის ჯერადია ყველა ლუწი რიცხვი.

ნატურალური რიცხვს , რომელზედაც უნაშთოდ იყოფა მოცემული რიცხვი, ამ რიცხვის **გამყოფი** ეწოდება. მაგ., 6-ის გამყოფებია: 1;2;3;6.

ნატურალურ რიცხვს ეწოდება მარტივი, რომელსაც მხოლოდ ორი გამყოფი აქვს-თავისი თავი და 1; მარტივი რიცხვებია:2;3;5;7;11;13;17;19;23;...

ნატურალურ რიცხვს ეწოდება შედგენილი, რომელსაც ორზე მეტი გამყოფი აქვს; ასეთი რიცხვებია: 4; 6; 8; 9; 10;...

რიცხვი 1 არც მარტივია, არც შედგენილი.

2-ზე იყოფა ყველა ლუწი რიცხვი.

3-ზე იყოფა მხოლოდ ის ნატურალური რიცხვი, რომლის ციფრთა ჯამიც იყოფა 3-ზე; 48→ $4+8=12$; 114→1+1+4=6; 135→1+3+5=9.

4-ზე იყოფა ის ნატურალური რიცხვი, რომლის ჩანაწერის ბოლო ორი ციფრით შედგენილი რიცხვი იყოფა 4-ზე ან ბოლოვდება ორი ნულით. მაგ., 5476→76:4=19; 156→56:4=14; 1600→ბოლოვდება ორი ნულით 1600:4=400.

5-ზე იყოფა მხოლოდ ის ნატურალური რიცხვი, რომელიც ბოლოვდება 5-ით ან 0-ით; მაგ. 5;10;15;20;... და ა.შ.

6-ზე იყოფა ის ნატურალური რიცხვი, რომელიც ლუწია და იყოფა 3-ზე.(ციფრთა ჯამი იყოფა 3-ზე) მაგ., 912→ 9+1+2=12; 1512→1+5+1+2=9; 40002→4+2=6.

7-ზე იყოფა ის ნატურალური რიცხვი, რომლის ერთეულების წინ მდგომ რიცხვს გამოკლებული გაორკეცებული ერთეულების ციფრი იყოფა 7-ზე; მაგ. 595→59-10=49; 196→19-12=7; 896→89-12=77.

8-ზე იყოფა ის ნატურალური რიცხვი, რომლის ჩანაწერის ბოლო 3 ციფრით შედგენილი რიცხვი იყოფა 8-ზე; მაგ.11800→800:8=100; 2056→56:8=7; 1632→632:8=79.

9-ზე იყოფა მხოლოდ ის ნატურალური რიცხვი, რომლის ციფრთა ჯამიც იყოფა 9-ზე; მაგ. 27→2+7=9; 126→1+2+6=9; 783→7+8+3=18:9=2.

10-ზე იყოფა 0-ით დაბოლოებული ყველა რიცხვი: 10;20;30...

11-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვი, რომლის კენტ ადგილებზე მდგომ ციფრთა ჯამი უდრის ლუწ ადგილებზე მდგომ ციფრთა ჯამს, ან განსხვავდება რიცხვით, რომელიც იყოფა 11-ზე. მაგ. 1562 იყოფა 11-ზე, რადგან 1+6=5+2. 19272506 იყოფა 11-ზე, რადგან 1+2+2+0=5, 9+7+5+6=27 და 27-5=22 იყოფა 11-ზე.

სამართლიანია შემდეგი დებულებები: p^n რიცხვის გამყოფთა რაოდენობა, სადაც p,n∈ N, ამასთან p მარტივი რიცხვია, ტოლია (n+1)-ის.

$p^n q^m$ რიცხვის გამყოფთა რაოდენობა, სადაც p,q,n,m∈ N, ამასთან p და q მარტივი რიცხვებია, ტოლია (n+1)(m+1)-ის. ანალოგიურად მოხდება გამყოფთა რიცხვის დადგენა ნებისმიერი რაოდენობის მარტივ მამრავლთა ხარისხების ნამრავლის შემთხვევაში.

ორი ან რამდენიმე რიცხვის უდიდესი საერთო გაყოფი (უსგ) ეწოდება ამ რიცხვების საერთო გამყოფებს შორის უდიდესს. უდიდესი საერთო გამყოფი D ლათინური ასოთი აღინიშნება.

ორი ან რამდენიმე რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის საპოვნელად ეს რიცხვები უნდა დაიშალოს მარტივ მამრავლებად, შემდეგ საჭიროა ამოიწეროს ამ რიცხვებისათვის საერთო მამრავლები და ერთმანეთზე გადამრავლდეს; მაგ ვიპოვოთ უსგ(72;120)=?

72	2	120	2
36	2	60	2
18	2	30	2
9	3	15	3
3	3	5	5
1		1	

72=$2^3 \cdot 3^2$ 120=$2^3 \cdot 3 \cdot 5$ უსგ(72;120)= $2^3 \cdot 3 = 24$ D(72;120)=24.

ორი ნატურალური რიცხვის უსგ-ს მოძებნა შეიძლება უფრო მარტივი ხერხით-მხოლოდ გამოკლების შესრულებით. მისი მოძებნის ალგორითმი ასეთია: 1) ვიპოვოთ მოცემული ორი რიცხვის სხვაობა; 2) მოცემული ორი რიცხვისა და მათი სხვაობიდან ავარჩიოთ ორი უმცირესი რიცხვი და ვიპოვოთ მათი სხვაობა; ეს პროცესი გავაგრძელოთ მანამ, სანამ არ მივიღებთ ორ ერთნაირ რიცხვს. მაგ., უსგ(72 და 120)=24

120-72=48; 72-48=24; 48-<u>24</u>=<u>24.</u>

ორ ნატურალურ რიცხვს ეწოდება ურთიერთმარტივი , (თანამარტივი) თუ მათ არა აქვთ საერთო მარტივი გამყოფი. ურთიერთმარტივი რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი 1-ის ტოლია; ასეთი რიცხვებია: 4 და 5; 8 და 9; 15 და 26 და ა.შ.

ორი ან რამდენიმე რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი (უსჯ) ეწოდება ამ რიცხვების საერთო ჯერადებს შორის უმცირესს.

ორი ან რამდენიმე რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადის საპოვნელად ეს რიცხვები უნდა დაიშალოს მარტივ მამრავლებად; შემდეგ საჭიროა ამოიწეროს ერთ-ერთი რიცხვის ყველა მამრავლი, მიეწეროს მას მეორე რიცხვის ყველა ის მამრავლი, რომელიც ამოწერილი მამრავლებისაგან განსხვავებულია, შემდეგ მიეწეროს მესამე რიცხვის ის მამრავლები, რომლებიც არ გვხვდება ამოწერილ მამრავლებში და ა.შ. ამოწერილი მამრავლების ნამრავლი იქნება მოცემული რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი; უმცირესი საერთო ჯერადი აღინიშნება K ლათინური ასოთი. მაგ. უსჯ(90; 140)=?

90	2	140	2
45	3	70	2
15	3	35	5
5	5	7	7
1		1	

$90=2\cdot 3^2\cdot 5$ $140=2^2\cdot 5\cdot 7$ უსჯ$(90;140)=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=1260$ $K(90;140)=1260$.

ორი ან რამდენიმე ურთიერთმარტივი რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი ტოლია ამ რიცხვების ნამრავლის. უსჯ (8;11;15)=$8\cdot 11\cdot 15=1320$

ნებისმიერად აღებული a და b რიცხვებისთვის სამართლიანია ფორმულა

უსგ(a და b)=$\dfrac{a\cdot b}{\text{უსჯ}(a \text{ და } b)}$

ნაშთიანი გაყოფა. თუ a ნატურალური რიცხვის b ნატურალურ რიცხვზე გაყოფისას, სადაც a>b, b რიცხვი ზუსტი ნატურალური ოდენობით ვერ მოთავსდა a რიცხვში და დარჩა კიდევ b-ზე ნაკლები არაუარყოფითი მთელი რიცხვი, მაშინ იტყვიან, რომ ადგილი აქვს **ნაშთიან გაყოფას.** ეს ფაქტი ასე ჩაიწერება a:b=q (ნაშთი=r), a,b,q$\in N$, r შეიძლება იყოს როგორც ნატურალური, ასევე 0-ის ტოლი. $0\leq r<b$. **q რიცხვს ეწოდება არასრული განაყოფი.** აქედან გამომდინარე სამართლიანია შემდეგი ტოლობა a=bq+r.

მაგ. 20:6=3(ნაშთი =2)$\Rightarrow 20=6\cdot 3+2$

30:5=6 (ნაშთი=0) $\Rightarrow 30=5\cdot 6$

3:8=0 (ნაშთი=3) $\Rightarrow 3=0\cdot 8+3$.

მოცემული m ნატურალური რიცხვისთვის ($m\neq 1$) მთელ რიცხვთა Z სიმრავლეზე განსაზღვრულია ფუნქცია, რომელიც ყოველ მთელ რიცხვს m-ზე გაყოფისას მიღებულ ნაშთს შეუსაბამებს. $\boldsymbol{Z_m}$ **–ით აღნიშნულია** m-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთების სიმრვლე-m მოდულით ნაშთების სიმრავლე. მაგ., როდესაც m=5$\Rightarrow Z_5=\{0;1;2;3;4\}$. ამ შემთხვევაში მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ზემოთ ნახსენები ფუნქცია ყოველ მთელ რიცხვს შეუსაბამებს ამავე რიცხვის 5-ზე გაყოფით მიღებულ ნაშთს. აქედან გამომდინარე, მთელ რიცხვთა სიმრავლე შეიძლება დაიყოს **არათანამკვეთ ქვესიმრავლეებად-კლასებად,** რომელთა

ელემენტებიც შესაბამისად 5k; 5k+1; 5k+2; 5k+3; 5k+4 ($k \in Z$) სახის რიცხვებია. Z_5 სიმრავლეში შემოიღეს შეკრებისა და გამრავლების მოქმედებები. **ორი ნაშთის ჯამი** (ნამრავლი) უწოდეს იმ ნაშთს, რომელიც ამ რიცხვების ჩვეულებრივი შეკრებისას (გამრავლებისას) მიღებული ჯამის (ნამრავლის) m-ზე გაყოფისას მიიღება.

ნაშთების შეკრებისა და გამრავლების ნიმუშები მითითებულია ქვემოთ მოცემულ ცხრილებზე. მოდული m=5:

ნაშთები	2 და 3	2 და 4	2 და 1	4 და 3	1 და 3
ნაშთების ჯამი (ჩვეულებრივი)	5	6	3	7	4
ნაშთების ჯამი (ნაშთების არითმეტიკაში)	0	1	3	2	4

ნაშთები	2 და 3	2 და 4	2 და 1	4 და 3	3 და 3
ნაშთების ნამრავლი (ჩვეულებრივი)	6	8	2	12	9
ნაშთების ნამრავლი (ნაშთების არითმეტიკაში)	1	3	2	2	4

ნაშთიან გაყოფასთან დაკავშირებული რამდენიმე დებულება:

1. თუ a და b რიცხვების რაიმე m რიცხვზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი ერთი და იგივე რიცხვია, მაშინ a-b სხვაობა იქნება m-ის ჯერადი;

a:m=k(ნაშთი=r) და b:m=l(ნაშთი=r), ანუ a=mk+r და b=ml+r, მაშინ a-b=m(k-l).

2. რამდენიმე შესაკრების ჯამის m რიცხვზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი არ შეიცვლება, თუ ერთი შესაკრები მაინც შეიცვლება სხვა ისეთი რიცხვით, რომელიც m-ზე გაყოფისას იგივე ნაშთს იძლევა, რასაც ეს შესაკრებები; გამოთვლების ჩატარების გარეშე შემდეგი ჯამის 7+38+72+141 5-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთის საპოვნელად საკმარისია 2+3+2+1=8 ჯამის 5-ზე გაყოფით მიღებული ნაშთის პოვნა; ეს იქნება 3.

3. რამდენიმე თანამამრავლის ნამრავლის m რიცხვზე გაყოფით მიღებული ნაშთი არ შეიცვლება, თუ ერთი თანამამრავლი მაინც შეიცვლება სხვა ისეთი რიცხვით, რომელიც m-ზე გაყოფისას იგივე ნაშთს იძლევა, რასაც ეს თანამამრავლი; გამოთვლების ჩატარების გარეშე შემდეგი ნამრავლის $12 \cdot 13 \cdot 149$ 5-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთის საპოვნელად საკმარისია $2 \cdot 3 \cdot 4$ ნამრავლის 5-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთის პოვნა; ეს იქნება 4.

უარყოფითი მთელი რიცხვის ნატურალურ რიცხვზე გაყოფისას მიღებული დადებითი ნაშთის პოვნა. ამ დროს გამოიყენება შემდეგი წესი: თუ გასაყოფს მივუმატებთ გამყოფის ჯერად რიცხვს, ნაშთი არ იცვლება. მაგ., -13-ის 2-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი იქნება -13-ს მიმატებული 2-ის ჯერადი ისეთი რიცხვი, რომ ჯამში დადებითი რიცხვი მივიღოთ; მაგ., $-13+2 \cdot 8 = 3$, შემდეგ მიღებული ჯამი გავყოთ კვლავ 2-ზე, რის შედეგადაც მიიღება დადებითი ნაშთი 1.

მეორე ხერხი . -13:2=-7 (ნაშთი=1)   -15:6=-3(ნაშთი=3)

$$\begin{array}{r} -13 \\ -14 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -15 \\ -18 \\ \hline 3 \end{array}$$

ხარისხის ბოლო ციფრის პოვნა. ნატურალური რიცხვის ბოლო ციფრი არის მისი 10-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი; მაგ., 258^{100}-ის ბოლო ციფრის დასადგენად გასათვალისწინებელია, რომ 258 და 8 10-ზე გაყოფისას ერთსა და იმავე ნაშთს იძლევა; აქიდან გამომდინარე, 258^{100}-ს და 8^{100}-ს ერთი და იგივე ბოლო ციფრი აქვთ; 8^1 ბოლოვდება 8-ით, 8^2-4-ით; 8^3-2-ით, 8^4-6-ით, შემდეგ პერიოდულად გამეორდება 8;4;2 და 6; 4-ის ჯერად ადგილებზე ბოლო ციფრია 6⇒ 258^{100}-ის ბოლო ციფრი იქნება 6.

3. მთელი რიცხვები

ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლეში ყოველთვის შესაძლებელია შეკრების ოპერაციის შესრულება, ე. ი. ნებისმიერი ორი ნატურალური რიცხვის ჯამი კვლავ ნატურალური რიცხვია. რაც შეეხება გამოკლებას, ეს ოპერაცია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში ყოველთვის არ სრულდება. მაგალითად, არ არსებობს ნატურალური რიცხვი, რომელიც

$2-5$ ოპერაციის შედეგია. გამოკლების ოპერაცია რომ ყოველთვის შესაძლებელი იყოს, შემოვიღოთ ე. წ. მთელი უარყოფითი რიცხვები_ნატურალური რიცხვები აღებული “_” ნიშნით. ამრიგად, -1, -2, -3,... მთელი უარყოფითი რიცხვებია. n და – n რიცხვებს მოპირდაპირე რიცხვები ეწოდება. ე. ი. 1 და –1, 2 და –2, 3 და –3 და ა. შ. მოპირდაპირე რიცხვებია. მიღებულია, რომ თუ $m \in N$, მაშინ $-(-m)=m$.

განსაზღვრება. ნატურალურ რიცხვებს, მათ მოპირდაპირე რიცხვებს და ნულს მთელი რიცხვები ეწოდება. მთელ რიცხვთა სიმრავლე Z ასოთი აღინიშნება. ცხადია,

რომ $N \subset Z$. ჩავთვალოთ, რომ ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვი მეტია ნებისმიერ მთელ უარყოფით რიცხვზე, ხოლო -m>-n ($m,n \in N$), თუ m<n. მაგალითად, 3>-5, 0>-2, -3>-7.

შემოვიღოთ ძირითადი მოქმედებები მთელ რიცხვებზე.

1. **შეკრება.** თუ ორივე შესაკრები არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, მათი ჯამი არაუარყოფითია. თუ შესაკრები რიცხვებიდან ერთი მაინც უარყოფითია, მაშინ შეკრების ოპერაცია განისაზღვრება შემდეგნაირად:

ა) $(-m)+(-n)=-(m+n)$;

ბ) $(-m)+0=0+(-m)=-m$

გ) $m+(-n)=-n+m=\begin{cases} m-n, & \text{როცა } m>n; \\ -(n-m), & \text{როცა } m<n \\ 0, & \text{როცა } m=n \end{cases}$ სადაც $m,n \in N$

მაგალითად., (-7)+(-3)=-(7+3)=-10; 4+(-9)=-(9-4)=-5

იმისათვის, რომ შევკრიბოთ რამდენიმე მთელი რიცხვი, საჭიროა ჯერ შევკრიბოთ პირველი ორი რიცხვი , მიღებულ ჯამს დავუმატოთ შემდეგი რიცხვი და ა.შ.

2. **გამოკლება.** a და b მთელი რიცხვების სხვაობა ეწოდება ისეთ x რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას b+x=a და a-b სიმბოლოთი აღინიშნება. შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ a-b=a+(-b) ; საიდანაც ცხადია, რომ

მთელ რიცხვთა სიმრავლეში გამოკლების ოპერაცია ყოველთვის სრულდება.

მაგ., 2-5=2+(-5)=-(5-2)=-3.

3. **გამრავლება**. თუ გადასამრავლებელი რიცხვებიდან ერთი მაინც უარყოფითია, მაშინ გარავლების ოპერაცია განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

ა) (-m)n=m(-n)=-(mn)

ბ) (-m)(-n)=mn

გ) (-m)· 0=0·(-m)=0, სადაც m,n$\in N$.

მაგ. (-3) ·2=-(3·2)=-6; (-4)(-5)=4·5=20

იმისათვის, რომ გადავამრავლოთ რამდენიმე მთელი რიცხვი, საჭიროა ჯერ გადავამრავლოთ პირველი ორი რიცხვი , მიღებული ნამრავლი გავამრავლოთ შემდეგ რიცხვზე და ა.შ.

4. **გაყოფა**. a და b$\neq$ 0 მთელი რიცხვების განაყოფი (ფარდობა) ეწოდება ისეთ x რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას b ·x=a და a:b სიმბოლოთი აღინიშნება. 0-ზე გაყოფა არ განისაზღვრება.

თუ m,n$\in N$ მაშინ:

ა) (-m):n=m:(-n)=-(m:n);

ბ) (-m):(-n)=m:n'

გ) 0:(-m)=0. მაგალითად (-12):3=-(12:3)=-4; 10:(-2)=-(10:2)=-5; (-21):(-7)=21:7=3.

4.რაციონალური რიცხვები წილადები და ათწილადები.

თუ 1 მთელი დაყოფილია n (n$\in N, n \neq 1$) თანატოლ ნაწილად, მაშინ თითოეული ასეთი ნაწილი აღინიშნება $\frac{1}{n}$ სიმბოლოთი; ხოლო თუ აღნიშნული ნაწილი აღებულია m-ჯერ (m$\in N$), მაშინ მიღებული რიცხვი აღინიშნება $\frac{m}{n}$ სიმბოლოთი. $\frac{m}{n}$ რიცხვს ეწოდება წილადი რიცხვი, ან უბრალოდ ჩვეულებრივი წილადი. m-ს ეწოდება წილადის მრიცხველი, n-ს -წილადის მნიშვნელი. თუ m<n, წილადს ეწოდება წესიერი, თუ m≥n წილადს ეწოდება არაწესიერი. 1 მთელი ჩვეულებრივი წილადის სახით ასე წარმოიდგინება: 1=$\frac{n}{n}$;

$\frac{4}{7}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{11}{20}$ -წესიერი წილადებია; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{9}{3}$; $\frac{5}{5}$ –არაწესიერი წილადებია.

თუ არაწესიერი წილადის მრიცხველი უნაშთოდ იყოფა მნიშვნელზე, მაშინ წილადი ნატურალურ რიცხვს წარმოადგენს. $\frac{10}{5} = 2$; $\frac{15}{3} = 5$; $\frac{8}{8} = 1$.

თუ არწესიერი წილადის მრიცხველი უნაშთოდ არ იყოფა მნიშვნელზე, მაშინ წილადის წარმოდგენა შეიძლება შერეული რიცხვის სახით, რომელიც შედგება მთელი და წილადი ნაწილისაგან; მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფით მიღებული განაყოფი იქნება მთელი, ნაშთი-წილადი ნაწილის მრიცხველი, მნიშვნელი იგივე რჩება; მაგ., $\frac{7}{4}$ –ის შერეული რიცხვის სახით წარმოდგენა შემდეგნაირად მოხდება:

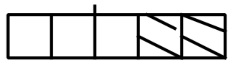
7:4=1(ნაშთი=3) $\Rightarrow \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$.

შერეული რიცხვის არაწესიერ წილადად გადაქცევისას საჭიროა მთელი რიცხვის ნამრავლს წილადი ნაწილის მნიშვნელზე მიემატოს მრიცხველი, მიღებული ჯამი იქნება ახალი წილადის მრიცხველი, მნიშვნელი-იგივე რჩევა. მაგ., $2\frac{4}{5}=\frac{2\cdot5+4}{5} = \frac{14}{5}$.

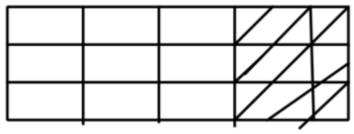
$\frac{m}{n}$ და $\frac{n}{m}$ წილადებს ეწოდება **ურთიერთშებრუნებული რიცხვები;** მათი ნამრავლი ყოველთვის ერთის ტოლია. $\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m}$ =1. მაგ. $\frac{3}{8}$ და $\frac{8}{3}$; 7 და $\frac{1}{7}$.

წილადის ძირითადი თვისება. $\frac{m}{n}$ წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის ერთსა და იმავე ნატურალურ რიცხვზე გამრავლებით ან გაყოფით მიიღება მისივე ტოლი წილადი;

$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$. m,n,k$\in N$; $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$



$\frac{2}{5}$



$\frac{6}{15} = \frac{6:3}{15:3} = \frac{2}{5}$ $\frac{6}{15}$

წილადის მრიცხველისა და მნიშვნელის გაყოფას ერთსა და იმავე ნატურალურ რიცხვზე **წილადის შეკვეცა** ეწოდება: $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

წილადების შედარება. ტოლმნიშვნელიანი წილადებიდან ისაა მეტი, რომლის მრიცხველიც მეტია; $\frac{5}{11} < \frac{9}{11}$; $\frac{7}{12} > \frac{5}{12}$.

ტომლმრიცხველიანი წილადებიდან ისაა მეტი, რომლის მნიშვნელიც ნაკლებია; $\frac{7}{8} > \frac{7}{10}$; $\frac{9}{15} < \frac{9}{14}$.

სხვადასხვამნიშვნელიანი წილადების შედარებისას საჭიროა მათი დაყვანა საერთო მნიშვნელზე ან საერთო მრიცხველზე. $\frac{3}{4}$ და $\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{15}{20} < \frac{16}{20}$; ან $\frac{12}{16} < \frac{12}{15}$.

წილადების გაერთმნიშვნელიანება. წილადების საერთო მნიშვნელზე დასაყვანად ჯერ პოულობენ ამ წილადების მნიშვნელების უმცირეს საერთო ჯერადს, რომელიც იქნება თითოეული წილადის საერთო მნიშვნელი; შემდეგ თითოეული წილადისათვის გამოითვლიან დამატებით მამრავლს, რომელიც მიიღება საერთო მნიშვნელის გაყოფით თითოეული წილადის მნიშვნელზე; ბოლოს თითოეული განხილული წილადის მრიცხველს ამრავლებენ დამატებით მამრავლზე.

$\frac{7}{12}$ –ის და $\frac{5}{16}$-ის ერთნაირ მნიშვნელზე დასაყვანად პოულობენ უსჯ(12;16)=48, საიდანაც $\Rightarrow \frac{7}{12} = \frac{28}{48}$; $\frac{5}{16} = \frac{15}{48}$. ანალოგიური წესით მოხდება წილადების საერთო მრიცხველზე დაყვანაც.

მოქმედებები წილადებზე.

ტოლმნიშვნელიანი წილადების შეკრებისას (გამოკლებისას) მნიშვნელი უცვლელი რჩება, ხოლო მრიცხველები იკრიბება (აკლდება); $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$ $(a > b)$

$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$; $\frac{8}{9} - \frac{7}{9} = \frac{1}{9}$; $1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

სხვადასხვამნიშვნელიანი წილადების შეკრებისას (გამოკლებისას) კერ ეს წილადები უნდა გაერთმნიშვნელიანდეს და შემდეგ შეიკრიბოს (გამოაკლდეს)

$\frac{3}{10} + \frac{5}{12} = \frac{18}{60} + \frac{25}{60} = \frac{43}{60}$; $\frac{7}{12} - \frac{5}{18} = \frac{21}{36}$-$\frac{10}{36} = \frac{11}{36}$

შერეული რიცხვების შეკრებისას ცალ-ცალკე იკრიბება მთელი და წილადი ნაწილები;

$3\frac{3}{5} + 2\frac{1}{5}$=$5\frac{4}{5}$; $5\frac{7}{8} + 3\frac{5}{12} = 5\frac{21}{24} + 3\frac{10}{24} = 8\frac{31}{24} = 9\frac{7}{24}$.

შერეული რიცხვების გამოკლებისას (იგულისხმება, რომ საკლები არ აღემატება მაკლებს) ცალ-ცალკე უნდა გამოაკლდეს ერთმანეთს მთელი და წილადი ნაწილები;

$10\frac{7}{11} - 4\frac{5}{11} = 6\frac{2}{11}$; $9\frac{7}{8} - 5\frac{3}{4} = 9\frac{7}{8} - 5\frac{6}{8} = 4\frac{1}{8}$; $10\frac{3}{4} - 7\frac{5}{6} = 10\frac{9}{12} - 7\frac{10}{12} = 9\frac{21}{12} - 7\frac{10}{12} = 2\frac{11}{12}$

10-$7\frac{3}{5} = 9\frac{5}{5} - 7\frac{3}{5} = 2\frac{2}{5}$

მთელი რიცხვის წილადზე გამრავლებისას მთელი მრავლდება წილადის მრიცხველზე, მნიშვნელი კიუცვლელი რჩება; a$\cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$; $5 \cdot \frac{4}{15} = \frac{5 \cdot 4}{15} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$;

წილადის წილადზე გამრავლებისას მიიღება წილადი, რომლის მრიცხველი აღნიშნული წილადების მრიცხველების ნამრავლია, ხოლო მნიშვნელი-აღნიშნული წილადების მნიშვნელების ნამრავლი:

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{vd}$; $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2\cdot3}{3\cdot4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

ეს წესი ვრცელდება ნებისმიერი რაოდენობით აღებული წილადების გამრავლებისას.

ურთიერთშებრუნებული რიცხვების ნამრავლი 1-ის ტოლია; $\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}=1$; $\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{5}=1$; $9\cdot\frac{1}{9}=1$.

შერეული რიცხვების გამრავლებისას ჯერ ეს რიცხვები უნდა გამოისახოს არაწესიერი წილადების სახით და შემდეგ ზემოთ აღნიშნული წესით გადამრავლდეს:

$$5\frac{3}{4}\cdot1\frac{4}{23}=\frac{5\cdot4+3}{4}\cdot\frac{1\cdot23+4}{23}=\frac{23}{4}\cdot\frac{27}{23}=\frac{27}{4};\ 4\frac{2}{5}\cdot1\frac{9}{11}=\frac{22}{5}\cdot\frac{20}{11}=8.$$

რიცხვის წილადი ნაწილის საპოვნელად ეს რიცხვი უნდა გამრავლდეს მოცემულ წილადზე

20-ის $\frac{3}{5}$=$20\cdot\frac{3}{5}=\frac{60}{5}=12$;

წილადის 0-ზე გამრავლებით 0 მიიღება.

წილადის მთელ რიცხვზე გაყოფისას წილადის მნიშვნელი მრავლდება აღნიშნულ მთელ რიცხვზე, მრიცხველი კი რჩება უცვლელი (იგულისხმება, რომ მთელი რიცხვი ნულისაგან განსხვავებულია);

$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b\cdot c}$; $\frac{2}{3}:5=\frac{2}{3\cdot5}=\frac{2}{15}$;

მთელი რიცხვის წილადზე გაყოფისას მთელი მრავლდება წილადის შებრუნებულზე: $a:\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$;

$10:\frac{4}{5}=10\cdot\frac{5}{4}=\frac{10\cdot5}{4}=12\frac{1}{2}$.

წილადის წილადზე გაყოფისას პირველი წილადი მრავლდება მეორის შებრუნებულზე;

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$; $\frac{5}{6}:\frac{2}{3}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{2}=1\frac{1}{4}$;

შერეული რიცხვების გაყოფისას ჯერ ეს რიცხვები უნა გამოისახოს არაწესიერი წილადების სახით და შემდეგ ზემოთ აღნიშნული წესით შესრულდეს გაყოფა;

$2\frac{4}{5}:1\frac{3}{4}=\frac{14}{5}:\frac{7}{4}=\frac{14}{5}\cdot\frac{4}{7}=1\frac{3}{5}$.

0-ის წილადზე გაყოფით 0 მიიღება.

0-ზე გაყოფა არ შეიძლება.

რიცხვის საპოვნელად წილადი ნაწილის მიხედვით ეს რიცხვი უნდა გაიყოს მოცემულ წილადზე;

რიცხვი, რომლის $\frac{3}{4}$ ტოლია 18-ის, შემდეგნაირად გამოითვლება: $18:\frac{3}{4}=18\cdot\frac{4}{3}=24$.

წილადი $\frac{m}{n}\,(m\in N, n\in N)$ გვიჩვენებს, თუ m რიცხვი n რიცხვის რა ნაწილია.

3 რა ნაწილია 10-ის?-$\frac{3}{10}$.

წილადს, რომლის მნიშვნელი გამოისახება 10-ის ნატურალური ხარისხით, **ათწილადი ეწოდება.**

ათწილადი შედგება ორი ნაწილისაგან: მძიმის მარცხნივ იწერება მთელი ნაწილი, მარჯვნივ -წილადი ნაწილი; $\frac{7}{10}=0{,}7$; $\frac{9}{100}=0{,}09$; $\frac{341}{100}=3{,}41$; $\frac{1945}{1000}=1{,}943$.

ათწილადში მძიმის მარჯვნივ მდგომ ციფრებს ათწილადი ნიშნები ეწოდება; პირველ ციფრს ეწოდება მეათედი, მეორეს-მეასედი, მესამეს-მეათასედი, მეოთხეს-მეათიათასედი და ა.შ.

ათწილადისთვის მარჯვნივ ნულების მიწერით ათწილადი არ შეიცვლება: 15,6=15,60=15,600=15,6000.

ათწილადის ჩაწერა სათანრიგო ერთეულების მიხედვით:

$$12{,}9234=1\cdot10+2+\frac{9}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{4}{10000}=10\cdot1+2+0{,}9+0{,}02+0{,}003+0{,}0004.$$

დამრგვალება. თუ დასამრგვალებელი სათანრიგო ერთეულის შესაბამის ციფრს მოსდევს 5 ან მასზე მეტი ციფრი (5-ზე ნაკლები ციფრი), მაშინ აღნიშნული ციფრი 1-ით იზრდება(უცვლელი რჩება) და მისი მომდევნო ციფრები ნულებით შეიცვლება; $0{,}\underline{3}52\approx0{,}4$; $7{,}527\approx7{,}53$; $12{,}92\underline{3}4\approx12{,}923$; $1\underline{2}{,}923\approx13$.

ორი ათწილადის შედარებისას ჯერ უნდა მოხდეს მათი მთელი ნაწილების შედარება, მთელი ნაწილების ტოლობის შემთხვევაში ერთმანეთს ადარებენ მათი წილადი ნაწილების შესაბამის სათანრიგო ერთეულებს:

15,123<20,3;   12,07<12,1; 265,265>265,246.

ათწილადების შეკრება-გამოკლებისას ისე უნდა მოხდეს ათწილადების ერთმანეთის ქვეშ მიწერა, რომ მძიმე მძიმის ქვეშ აღმოჩნდეს და შეიკრიობოს (გამოაკლდეს) როგორც ნატურალური რიცხვები:

$$\begin{array}{r} 25,907 \\ +\ 7,450 \\ \hline 33,357 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28,30 \\ -\ 15,95 \\ \hline 12,35 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18,000 \\ -\ 7,152 \\ \hline 10,848 \end{array}$$

ათწილადის 10-ზე (100-ზე;1000-ზე და ა.შ.) გამრავლებისას მძიმე გადადის ერთი ციფრით (2 ციფრით, 3 ციფრით და ა.შ.) მარჯვნივ; თუკი ათწილადი ნიშნების რაოდენობა არასაკმარისია, დაიწერება 0-ები:

3,42·10=34,2; 0,7·10=7; 12,543·100=1254,3; 0,12753·1000=127,53; 1,25·100=125; 0,38·1000=380.

ათწილადის ათწილადზე ან მთელ რიცხვზე გამრავლებისას საჭიროა ისინი გადამრავლდეს ერთმანეთზე როგორც ნატურალური რიცხვები; მიღებულ შედეგში მარჯვნიდან მძიმით გამოიყოს იმდენი ციფრი, რამდენი ათწილადი ნიშანიცაა ერთად მოცემულ რიცხვებში;

3·1,6=4,8;

$$\begin{array}{r} 18,5 \\ \times\ 0,13 \\ \hline +\ \ 5\,5\,5 \\ 185\ \ \\ \hline 2,405 \end{array}$$

ათწილადის 10-ზე (100-ზე; 1000-ზე და ა.შ.) გაყოფისას მძიმე გადადის 1 ციფრით (2 ციფრით, 3 ციფრით და ა.შ.) მარცხნივ; თუ მძიმის მარცხნივ ციფრების რაოდენობა არასაკმარისია, დაიწერება 0-ები:

23,5:10=2,35; 23,5:100=0,235; 23,5:1000=0,0235; 0,7:10=0,07; 0,7:100=0,007; 0,7:1000=0,0007

ათწილადის მთელ რიცხვზე გაყოფისას ჯერ ათწილადის მთელი ნაწილი უნდა გაიყოს მოცემულ რიცხვზე, რის შედეგადაც მიიღება განაყოფის მთელი ნაწილი; შემდეგ იწერება მძიმე; ნაშთს მიეწერება გვერდით პირველი ათწილადი ნიშანი, მიღებული რიცხვი იყოფა მოცემულ მთელ რიცხვზე, რაც იძლევა განაყოფის პირველ ათწილად ნიშანს; ყოველი შემდეგი ათწილადი ნიშნის მიღება ხდება ანალოგიურად;

$$\begin{array}{l} \ \ 12,8:4=3,2 \\ -\,12 \\ \hline \ \ \ \ 8 \\ -\ \ 8 \\ \hline \ \ \ \ 0 \end{array}$$

ათწილადის ათწილადზე გაყოფისას ჯერ გამყოფს მძიმეს ჩამოაშორებენ, ხოლო გასაყოფში მძიმე გადააქვთ იმდენი ციფრით მარჯვნივ, რამდენი ათწილადი ნიშანიც იყო გამყოფში; შეიძლება გასაყოფისთვის 0-ების მიწერაც გახდეს საჭირო; ამის შემდეგ გაყოფა ჩატარდება ზემოთ აღნიშნული წესით;

ათწილადის ჩვეულებრივ წილადად გადაქცევისას პირველ რიგში იწერება მთელი ნაწილი (თუკი ის 0 არაა), მას გვერდით უნდა მიეწეროს წილადი, რომლის მრიცხველია მოცემული რიცხვის ათწილადი ნიშნებისაგან შედგენილი რიცხვი, ხოლო მნიშვნელში დაიწეროს 1-იანი იმდენი 0-ით, რამდენი ათწილადი ნიშანიცაა მოცემულ ათწილადში; $0,7=\frac{7}{10}$; $2,09=2\frac{9}{100}$; $35,23=35\frac{23}{100}$ და ა.შ.

ჩვეულებრივი წილადის ათწილადად გადაქცევისას საჭიროა მრიცხველი გაიყოს მნიშვნელზე;

$\frac{7}{16} = 7 \,|\, 16$

$\begin{array}{r|l} 7\,0 & 0{,}4375 \\ -64 & \\ \hline 60 & \\ -48 & \\ \hline 120 & \\ -112 & \\ \hline 80 & \\ -80 & \\ \hline 0 & \end{array}$

ხანდახან ხდება, რომ ჩვეულებრივი წილადის ათწილადად გადაქცევისას მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფით **უსასრულო ათწილადი მიიღება:**

$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ $\quad \frac{17}{36} = 0{,}47222\ldots$ $\quad \frac{2}{7} = 0{,}28571428571428\ldots$

ზემოთ ჩატარებული მოქმედებების შედეგად მიღებულ ათწილადებს პერიოდული ათწილადები ეწოდება, ხოლო რიცხვს, ან რიცხვთა წყვილს (ან რიცხვთა სამეულს და ა.შ.), რომელიც მეორდება,- **პერიოდი.** ეს ათწილადები შემდეგნაირად გამოისახება:

0,333...=0,(3) (0 მთელი და 3 პერიოდში); 0,47222...=0,47(2) (0 მთელი, 47 და 2 პერიოდში); 0,285714...=0,(285714) (0 მთელი 285714 პერიოდში);

0,(3) და 0,(285714) ათწილადებს **წმინდა პერიოდული ათწილადები** ეწოდება, ხოლო 0,47(2) **- შერეული პერიოდული ათწილადი.**

წმინდა პერიოდული ათწილადის ჩვეულებრივ წილადად გადაქცევისთვის საჭიროა მრიცხველში დაიწეროს პერიოდი, მნიშვნელში კი იმდენი 9-იანისაგან შედგენილი რიცხვი, რამდენი ციფრიცაა პერიოდში;

შერეული პერიოდული ათწილადის ჩვეულებრივ წილადად გადაქცევისას საჭიროა მძიმიდან პერიოდის ბოლომდე რიცხვს გამოაკლდეს რიცხვი მძიმიდან პერიოდამდე; ამ სხვაობას წერენ მრიცხველის ადგილას; მნიშვნელად იღებენ რიცხვს, რომელიც გამოსახულია იმდენი 9-იანით, რამდენი ციფირცაა პერიოდში და იმდენი 0-ით, რამდენი ციფრიცაა მძიმესა და პერიოდს შორის;

$0{,}(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$; $\quad 2,(48) = 2\frac{48}{99} = 2\frac{16}{33}$; $\quad 12{,}6(1) = 12\frac{61-6}{90} = 12\frac{55}{90} = 12\frac{11}{18}$; $\quad 0{,}47(2) = \frac{472-47}{900} = \frac{425}{900} = \frac{17}{36}$

თუკი უკვეცი წილადის მნიშვნელს არა აქვს 2-საგან და 5-საგან განსხვავებული მარტივი მამრავლი, მაშინ მოცემული წილადი გადაიქცევა სასრულ ათწილადად. **თუ უკვეცი წილადის მნიშვნელის** მარტივ მამრავლებად დაშლა არ შეიცავს 2-სა და 5-ს, მაშინ წილადი გადაიქცევა წმინდა პერიოდულ ათწილადად. **თუ უკვეცი წილადის მნიშვნელის** დაშლა სხვა მამრავლებთან ერთად შეიცავს თანამამრავლად 2-ს ან 5-ს, მაშინ წილადი გადაიქცევა შერეულ პერიოდულ ათწილადად.
თუ გავითვალისწინებთ, რომ ყოველი სასრული ათწილადი შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც უსასრულო პერიოდული, პერიოდით ნული ან პერიოდით 9, შეიძლება დავასკვნათ, რომ ნებისმიერი წილადი გამოისახება უსასრულო პერიოდული ათწილადის საშუალებით.
ამრიგად, რაციონალური რიცხვი შემდეგნაირადაც შეიძლება განისაზღვროს: უსასრულო პერიოდულ ათწილადს რაციონალური რიცხვი ეწოდება.

5. ირაციონალური რიცხვები. ნამდვილი რიცხვები.

ზოგიერთი სიდიდეების გასაზომად საკმარისი არ არის რაციონალური რიცხვები. კერძოდ, არსებობენ მონაკვეთები, რომელთა სიგრძე რაციონალური რიცხვით არ გამოისახება. ასეთია მაგალითად, იმ კვადრატის დიაგონალი, რომლის გვერდის სიგრძე ერთეულის ტოლია. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ ამ კვადრატის დიაგონალის სიგრძე რაციონალური რიცხვით გამოისახება, მაშინ იგი წარმოიდგინება $\frac{p}{q}$ უკვეცი წილადის სახით და მართებულია ტოლობა $(\frac{p}{q})^2 = 2$ აქედან $p^2 = 2q^2$, ამიტომ p^2 ლუწი რიცხვია და მაშასადამე ლუწი იქნება p-ც.(რადგან კენტი რიცხვის კვადრატი ყოველთვის კენტია). ე.ი. p=2k, სადაც k∈N და $p^2 = 2q^2$ ტოლობიდან მივიღებთ $4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$, ე.ი. q^2 ლუწი რიცხვია და ლუწი იქნება q-ც. მივიღეთ, რომ p და q ლუწი რიცხვებია, ეს კი ეწინააღმდეგება დაშვებას, რომ $\frac{p}{q}$ უკვეცი წილადია. ამრიგად, ზემოთაღნიშნული კვადრატის დიაგონალის სიგრძის გამოსახვა რაციონალური რიცხვით შეუძლებელია. როგორც ვნახეთ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია. ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ არ არსებობს რაციონალური რიცხვები, რომელთა კვადრატებია 3, 5, 6, 7 და ა. შ. ასეთი რიცხვები ეკუთვნიან ე. წ. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს.

რადგან ასეთი რიცხვები არ არიან რაციონალური, ამიტომ მათი წარმოდგენა უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით შეუძლებელია.

განსაზღვრება. უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადს ირაციონალური რიცხვი ეწოდება.

ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე I ასოთი აღინიშნება.

მაგალითად, ირაციონალურია უსასრულო ათწილადი 0,101001000100001..., რომლის ჩანაწერში პირველი 1-იანის შემდეგ არის ერთი ნული, მეორე 1-იანის შემდეგ_ორი ნული და ა. შ.

განსაზღვრება. რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება და R ასოთი აღინიშნება.

ცხადია, რომ ზემოთ განხილულ N, Z_0 , Z, Q და R რიცხვთა სიმრავლეებს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება:

N ⊂ Z_0 ⊂ Z ⊂ Q ⊂ R .

ნამდვილ რიცხვთა შედარება. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ნამდვილი რიცხვი ან რაციონალურია ან ირაციონალური. რადგან ყოველი რაციონალური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით, ხოლო ირაციონალური_უსასრულო არაპერიოდული ათწილადის სახით, ამიტომ შეიძლება დავასკვნათ, რომ ყოველი ნამდვილი რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ უსასრულო ათწილადის სახით შემდეგნაირად: $a = a_0, a_1, a_2, a_3$ ..., სადაც $a_0 \in Z$, ხოლო ყოველი $a_k (k = 1,2,3, \dots)$ წარმოადგენს ერთ-ერთს შემდეგი ციფრებიდან 0,1,2,3,5,6,7,8 და 9 ორ $a = a_0, a_1, a_2, a_3$ ..., და $b = b_0, b_1, b_2, b_3$ ... ნამდვილ რიცხვს ტოლი ეწოდება, თუ $a_k = b_k$ ნებისმიერი k∈ $Z_0 -$ ისათვის.

ვთქვათ a და b არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვებია. ამბობენ, რომ a<b თუ ყოველი $0 \leq i < k$-სათვის $a_i = b_i$ და $a_k < b_k$. თუ $a \geq 0$ ხოლო b<0, მაშინ a>b. თუ a<0 და b<0, მაშინ a>b როცა -a<-b.

მოქმედებები ნამდვილ რიცხვებზე. არაუარყოფით $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ ... რიცხვის ათწილადი მიახლოება ნაკლებობით, სიზუსტით $\frac{1}{10^n}$ ეწოდება $a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ რიცხვს ხოლო ათწილადი მიახლოება მეტობით სიზუსტით $\frac{1}{10^n}$ $a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$ რიცხვს.

უარყოფითი $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ ... რიცხვის ათწილადი მიახლოება ნაკლებობით (მეტობით) სიზუსტით $\frac{1}{10^n}$ -მდე, ეწოდება -$a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ რიცხვის $\frac{1}{10^n}$ -სიზუსტით მეტობით (ნაკლებობით) მიახლოების მოპირდაპირე რიცხვს.

ნამდვილი x რიცხვის ათწილადი მიახლოება ნაკლებობით სიზუსტით $\frac{1}{10^n}$ – მდე ავღნიშნოთ x_n – ით, ხოლო მეტობით x_n'-ით. მაგალითად x=3,24174... რიცხვის ათწილადი მიახლოება სიზუსტით $\frac{1}{10^4}$ნაკლებობით არის $x_4 = 3.2417$, ხოლო მეტობით x_4'=3,2418. x=-5,7138... რიცხვის ათწილადი მიახლოება სიზუსტით $\frac{1}{10^3}$ ნაკლებობით არის $x_3 = -5{,}714$, ხოლო მეტობით $x_3' = -5{,}713$.

ნამდვილ რიცხვთა შედარების წესიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ნამდვილი x რიცხვისათვის $x_n \le x \le x_n'$; მტკიცდება, რომ ნებისმიერი x და y ნამდვილი რიცხვებისათვის არსებობს ერთადერთი z ნამდვილი რიცხვი, ისეთი, რომ ყოველი n∈ Z_0 რიცხვისათვის სრულდება უტოლობა: $x_n + y_n \le z \le x_n' + y_n'$ ასეთ z რიცხვს ეწოდება x და y რიცხვების ჯამი და x+y სიმბოლოთი აღინიშნება. მტკიცდება, რომ ნებისმიერი x და y არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვებისათვის არსებობს ერთადერთი z ნამდვილი რიცხვი, ისეთი, რომ ყოველი n∈ N რიცხვისათვის სრულდება უტოლობა: $x_n y_n \le z \le x_n' y_n'$ ასეთ z რიცხვს ეწოდება x და y რიცხვების ნამრავლი და xy სიმბოლოთი აღინიშნება. თუ ორი ნამდვილი რიცხვიდან ერთი მაინც უარყოფითია, მაშინ მათი ნამრავლი განიმარტება შემდეგნაირად: (-x)y=-(xy); (-x)(-y)=xy; სადაც x>0, y>0.

რამდენიმე ნამდვილი რიცხვის ჯამი და ნამრავლი განისაზღვრება შესაბამისად ორი ნამდვილი რიცხვის ჯამისა და ნამრავლის საშუალებით, ისევე როგორც მთელი რიცხვებისათვის. ნამდვილი რიცხვების გამოკლება და გაყოფა განისაზღვრება, როგორც შესაბამისად შეკრებისა და გამრავლების შებრუნებული მოქმედებები.

ჩამოვაყალიბოთ ნამდვილ რიცხვთა ძირითადი თვისებები:

I. დალაგების თვისებები:

1. ნებისმიერი ორი a და b ნამდვილი რიცხვისათვის სრულდება ერთი და მხოლოდ ერთი შემდეგი თანაფარდობებიდან: a=b, a>b, a<b.
2. თუ a<b, მოიძებნება ისეთი c რიცხვი, რომ a<c<b.

II. შეკრების თვისებები

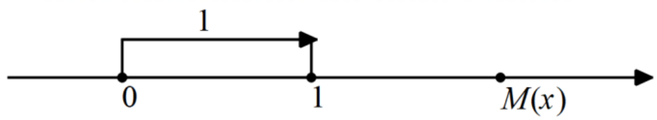
1. a+b=b+a (შეკრების კომუტაციურობა);
2. (a+b)+c=a+(b+c) (შეკრების ასოციაციურობა);
3. a+0=a;
4. a+(-a)=0 (a და -a მოპირდაპირე რიცხვებია);
5. თუ a=b, მაშინ a+c=b+c, სადაც c ნემისმიერია.

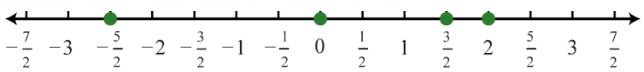
III. გამრავლების თვისებები.

1. ab=ba (გამრავლების კომუტაციურობა);
2. (ab)c=a(bc) (გამრავლების ასოციაციურობა);
3. a· 1=a;
4. a·0=0;
5. თუ a=b, მაშინ ac=bc;
6. a·$\frac{1}{a} = 1$, $(a \ne 0)$, (a და $\frac{1}{a}$ ურთიერთშებრუნებული რიცხვებია);
7. (a+b)c=ac+bc (შეკრების დისტრიბუციულობა გამრავლების მიმართ).

6. რიცხვითი ღერძი

წრფეს, რომელზედაც ფიქსირებულია რაიმე O წერტილი (სათავე), არჩეულია დადებითი მიმართულება და სიგრძის ერთეული (მასშტაბი), **რიცხვითი ღერძი** ანუ **რიცხვითი წრფე** ეწოდება.





რიცხვითი ღერძის ყოველ M წერტილს შეიძლება შევუსაბამოთ ერთადერთი ნამდვილი x რიცხვი და პირიქით. ეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შეიძლება დამყარდეს შემდეგი წესით: x=$|OM|$ (OM მონაკვეთის სიგრძეს), თუ O-დან M -საკენ მიმართულება ემთხვევა ღერძის მიმართულებას და x=$-|OM|$-წინააღმდეგ შემთხვევაში. ამ x რიცხვს M წერტილის კოორდინატი ეწოდება. ის ფაქტი, რომ x რიცხვი M წერტილის კოორდინატია, ასე ჩაიწერება: M(x). ცხადია, რომ O სათავის კოორდინატია ნული. მოცმულია წერტილი ღერძზე ნიშნავს, რომ მოცემულია წერტილის კოორდინატი.

შემდგომში ნამდვილ რიცხვსა და მის შესაბამის წერტილს ღერძზე გავაიგივებთ.

7. რიცხვითი შუალედები.

განსაზღვრება. ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $a \leq x \leq b$, ჩაკეტილი შუალედი (სეგმენტი) ეწოდება და [a;b] სიმბოლოთი აღინიშნება, ე.ი [a;b]={x:x∈ $R, a \leq x \leq b$}, ანალოგიურად (a;b)={x: x∈ R,a<x<b} სიმრავლეს ღია შუალედი (ინტერვალი) ეწოდება , ხოლო [a;b)={x: x∈ $R, a \leq x < b$}, (a;b]={x: x∈ $R, a < x \leq b$} სიმრავლეებს ნახევრად ღია შუალედები ეწოდება. a და b რიცხვებს განხილული შუალედების საზღვრები ან ბოლოები ეწოდება, ხოლო b-a რიცხვს შუალედის სიგრძე ეწოდება.

განსაზღვრება. ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას x≥ a, უსასრულო შუალედი ეწოდება და [a;+∞) სიმბოლოთი აღინიშნება,

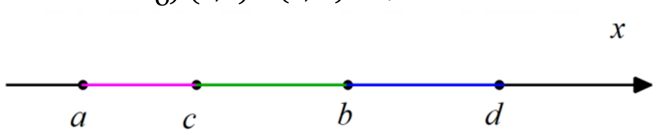
ე.ი. [a;+∞) $= \{x: x \in R, x \geq a\}$. უსასრულო შუალედებს წარმოადგენენ აგრეთვე შემდეგი სიმრავლეები : (a;+ ∞)={ $x: x \in R, x > a\}$; (-∞; $b] = \{x: x \in R, x \leq b\}$; $(-\infty; b) = \{x: x \in R, x < b\}$.

ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეც უსასრულო შუალედს წარმოადგენს და იგი ასე აღინიშნება:

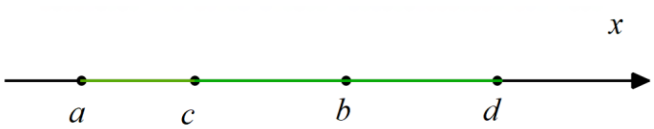
R=(-∞; +∞).ა) (a;b]∩ $(c; d] = (c; b]$

ბ) (a;b]∪ $(c; d] = (a; d]$

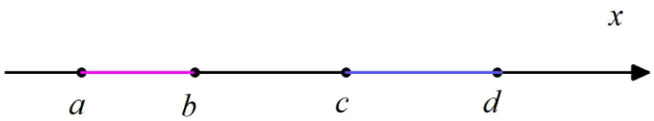
გ) (a;b)∩ $(c; d) = \emptyset$



ა)



ბ)



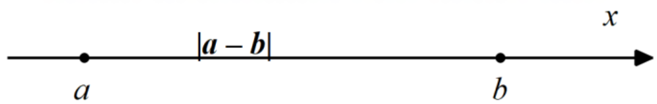
გ)

8. რიცხვის მოდული

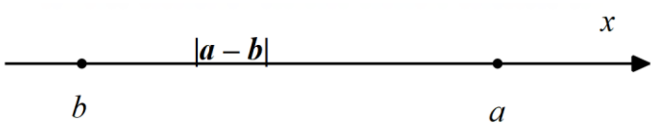
განსაზღვრება. ნამდვილი a რიცხვის მოდული (აბსოლუტური მნიშვნელობა) ეწოდება თვით ამ რიცხვს, თუ იგი არაუარყოფითია, მის მოპირდაპირე რიცხვს, თუ იგი უარყოფითია და $|a|$სიმბოლოთი აღინიშნება, ე.ი. $|a| = \begin{cases} a, \text{თუ } a \geq 0; \\ -a, \text{ თუ } a < 0. \end{cases}$

მაგალითად $|13| = 13$; $|-7| = 7$; $|0| = 0$.

გეომეტრიულად ნამდვილი რიცხვის მოდული წარმოადგენს მანძილს რიცხვითი წრფის სათავიდან ამ რიცხვის შესაბამის წერტილამდე.



b-a თუ b>a



a-b, თუ a>b.

$\rho(a;b) = |a-b| = 0$ თუ a=b.

1. ორი რიცხვის ჯამის მოდული არ აღემატება ამ რიცხვების მოდულების ჯამს ე.ი. $|a+b| \leq |a| + |b|$

2. თუ a და b ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ: $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

3. ორი რიცხვის ნამრავლის მოდული უდრის ამ რიცხვების მოდულების ნამრავლს, ე.ი. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

4. a და b რიცხვების (b≠ 0) ფარდობის მოდული ამ რიცხვების მოდულების ფარდობის ტოლია, ე.ი. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, სადაც b≠ 0.

9.ნატურალური რიცხვების წარმოდგენა სხვადასხვა პოზიციურ სისტემაში.

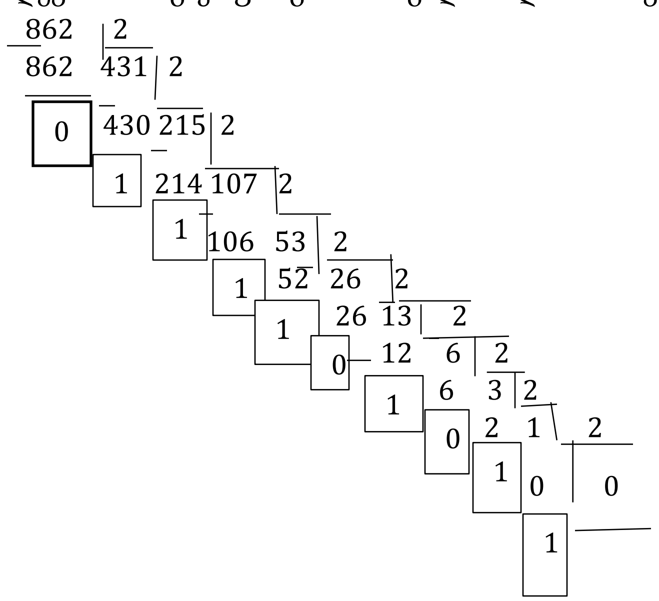
რადგან ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა, ამიტომ შეუძლებელია ყოველი მათგანისათვის განსხვავებული სიმბოლოს შერჩევა. პრაქტიკულად უფრო მოსახერხებელია ნატურალურ რიცხვთა ჩაწერის ეგრეთ წოდებული პოზიციური სისტემები. ეს სისტემები გულისხმობენ სასრული რაოდენობის სიმბოლოთა მეშვეობით ჩაიწეროს ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი, სიმბოლოთა ურთიერთმდებარეობის (პოზიციის) გათვალისწინებით. იმისდა მიხედვით, თუ რამდენ ძირითად სიმბოლოს ავირჩევთ, გვექნება რიცხვის ჩაწერის „ორობითი"; „რვაობითი"; „ათობითი" და ა.შ. სისტემები. ყველაზე უფრო გავრცელებულია ათობითი სისტემა, სადაც გამოიყენება Z_0 სიმრავლის ათი ელემენტი: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, რომელთაც ციფრები ეწოდება. მაგალითად, რიცხვი

7256 შედგება ოთხი ციფრისაგან, რომლებიც თავისი მდებარეობის (პოზიციის) მიხედვით მიუთითებენ, რომ რიცხვი შედგება 6 ერთეულის, 5 ათეულის, 2 ასეულის და 7 ათასეულისაგან, ე.ი. რიცხვი 7256 გაშლილი ფორმით ასე წარმოიდგინება 7256=$7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6$.

ათობითი სისტემის გარდა ძირითადად ხმარებაშია აგრეთვე „ორობითი” და „რვაობითი” სისტემები. ორობითი სისტემის შემოღება დაკავშირებულია ელექტრონულ-გამომთვლელი მანქანის ელემენტების ორ მდგრად მდგომარეობასთან – სადენი ან ატარებს დენს, ან არ ატარებს, რაც მხოლოდ ორი ძირითადი სიმბოლოს გამოყენების საშუალებას იძლევა. ამ სისტემაში ნებისმიერი რიცხვის ჩასაწერად გამოიყენება Z_0 სიმრავლის ორი ელემენტი: 0 და 1. მაგალითად, სისტემის ფუძე „ორი” გამოისახება როგორც „10”. ამ რიცხვისათვის ერთის მიმატებით მიიღება 11. ე.ი. რიცხვი 3-ის ორობითი ჩანაწერი; კიდევ ერთი ერთეულის დამატებით მივიღებთ რიცხვს, რომლის ორობით სისტემაში ჩასაწერად საჭიროა ახალი თანრიგის დამატება, რის შედეგადაც მივიღებთ 100-ს, რიცხვი 4-ის ორობით ჩანაწერს და ა.შ. ნატურალურ რიცხვთა პირველი 15 ელემენტის ორობითი ჩანაწერი მოყვანილია შემდეგ ცხრილში:

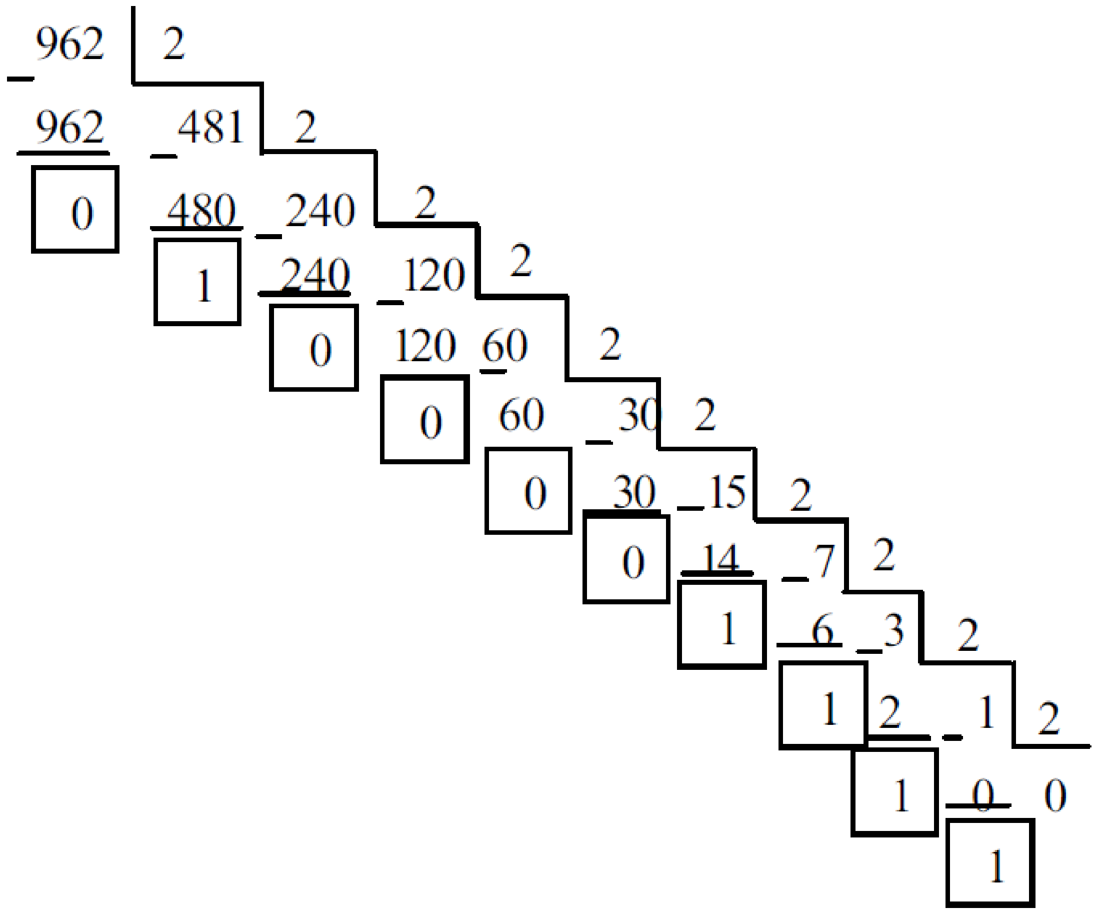
$1_{10} = 1_2$	$5_{10} = 101_2$	$9_{10} = 1001_2$	$13_{10} = 1101_2$	$17_{10} = 10001_2$
$2_{10} = 10_2$	$6_{10} = 110_2$	$10_{10} = 1010_2$	$14_{10} = 1110_2$	$18_{10} = 10010_2$
$3_{10} = 11_2$	$7_{10} = 111_2$	$11_{10} = 1011_2$	$15_{10} = 1111_2$	$19_{10} = 10011_2$
$4_{10} = 100_2$	$8_{10} = 1000_2$	$12_{10} = 1100_2$	$16_{10} = 10000_2$	$20_{10} = 10100_2$

რიცხვის ათობითი სისტემიდან ორობითში გადაყვანის ალგორითმი სრულდება ფუძეზე – 2-ზე, მიმდევრობით გაყოფის გზით. მაგალითად 862-სთვის გვაქვს:



გაყოფის შედეგად მიღებული 0,1,1,1,1,0,1,0,1,1 ნაშთების მიმდევრობა, აღებული შებრუნებული რიგით, გვაძლევს ორობით სისტემაში რიცხვ 862-ის გამოსახულებას ე.ი.
$862_{10} = 1101011110_2$ აღნიშნული რიცხვი გაშლილი ფორმით შემდეგნაირად ჩაიწერება
862=$1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$

როგორც აქედან ჩანს რიცხვის ორობითი ჩანაწერი შეიცავს ციფრთა გაცილებით მეტ რაოდენობას, ვიდრე ათობითი, რაც რიცხვის ზრდასთან ერთად უფრო შესამჩნევი ხდება. სავსებით ანალოგიურად, რიცხვის ათობითი სისტემიდან რვაობითში გადასაყვანად, სადაც გამოიყენება Z_0 სიმრავლის 8 ელემენტი:0,1,2,3,4,5,6,7, მივმართავთ ახალ ფუძეზე-8-ზე მიმდევრობით გაყოფას:



ე.ი. $962_{10} = 1702_8$

როგორც უკვე აღინიშნა, ელექტრონულ-გამომთვლელ მანქანაში რიცხვები ჩაიწერება ორობითი სისტემით, თუმცა მანქანაში ჩასაშვებად გამზადებული საწყისი მონაცემები ყოველთვის ათობით სისტემაშია მოცემული. მათი ორობით სისტემაში გადასაყვანად უფრო მოსახერხებელია ისინი ჯერ რვაობით სისტემაში ჩავწეროთ, შემდეგ კი თითოეული ციფრი შევცვალოთ ზემოთ მოყვანილი ცხრილის მეშვეობით ორობითი ჩანაწერით, ამასთან უნდა ვიგულისხმოთ, რომ თითოეულ ციფრს სამი თანრიგი (ტრიადა) შეესაბამება, გარდა შესაძლებელია უკიდურესი მარცხენა ციფრისა, თუ იგი ოთხზე ნაკლებია. მაგალითად: რადგან $2_{10} = 010_2$; $0_{10} = 000_2$; $7_{10} = 111_2$; $1_{10} = 1_2$, ამიტომ $962_{10} = 1702_8 = 1.111.000.010_2$ ძველი ფუძიდან ახალ ფუძეზე გადასვლის ოპერაციას **„კოდირება“**

ეწოდება, ხოლო შებრუნებულ ოპერაციას-„**დეკოდირება**“. დეკოდირების ოპერაცია სრულდება შემდეგნაირად:

$1111000010_{\ 2} = 1\cdot2^9 + 1\cdot2^8 + 1\cdot2^7 + 1\cdot2^6 + 0\cdot2^5 + 0\cdot2^4 + 0\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 0\cdot2^0$=512+256+128+64+0+0+0+0+2+0=962_{10}.

რვაობითი სისტემის გამოყენებით შეიძლება მისი შესრულება უფრო სწრაფად

$1.111.000.010_2 = 1702_8 = 1\cdot8^3 + 7\cdot8^2 + 0\cdot8^1 + 2\cdot8^0 = 512 + 448 + 2 = 962_{10}$

n=$b_m t^m + b_{m-1}t^{m-1} + \cdots + b_1 t + b_0$; b_0 არის n-ის t-ფუძეზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი, b_1 არის ამ გაყოფსას მიღებული განაყოფის (ცხადია, თუ ნაშთი ნული არ არის, ეს განაყოფი არასრული იქნება) t ფუძეზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი და ა.შ. ნაშთების მიმდევრობა დალაგებული მარჯვნიდან მარცხნივ, მოგვცემს t-ობით გაშლას. b_0 , b_1,... b_m იღებს მნიშვნელობებს 0,1,2,3,...,t-1. ამასთანავე $b_m \neq 0$. მაშინ $(\overline{b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0})_t$-არის n-ის t-ობითი გაშლა. მაგალითად ცავწეროთ 123 სხვადასხვა სისტემაში:

132=$1\cdot3^4 + 1\cdot3^3 + 2\cdot3^2 + 2\cdot3 + 0 = (11220)_3$ (სამობითი სისტემა)

132=$1\cdot5^3 + 0\cdot5^2 + 1\cdot5 + 2 = (1012)_5$ (ხუთობითი სისტემა)

132=$2\cdot7^2 + 4\cdot7 + 6 = (246)_7$ (შვიდობითი სისტემა)

123=11 ·12+0=$(110)_{12}$ (12-ობითი სისტემა)

თუ გვსურს t-ობით სსტემაში მოცემული რიცხვი ჩავწეროთ q-ობით სისტემაში (t და q ნატურალური რიცხვებია t>1; q>1) მაშინ საკმარისია ჯერ გადავიდეთ ათობით სისტემაზე, შემდეგ q-ობით სისტემაზე.

შეკრება და გამოკლება ნებისმიერ პოზიციურ სისტემაში იმავე წესებით მიმდინარეობს, რაც ათობითში. საკმარისია წინასწარ ერთნიშნა რიცხვების შეკრების ცხრილი შევადგინოთ.

შეკრების ცხრილი ორობით სისტემაში

+	0	1
0	0	1
1	1	10_2

შეკრების ცხრილი სამობით სისტემაში

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10_3
2	2	10_3	11_3

შეკრების ცხრლი 8-ობით სისტემაში:

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10_8
2	2	3	4	5	6	7	10_8	11_8

3	3	4	5	6	7	10_8	11_8	12_8
4	4	5	6	7	10_8	11_8	12_8	13_8
5	5	6	7	10_8	11_8	12_8	13_8	14_8
6	6	7	10_8	11_8	12_8	13_8	14_8	15_8
7	7	10_8	11_8	12_8	13_8	14_8	15_8	16_8

ცხრილის შედგენისას შეიძლება რიცხვები ათობითში შევკრიბოთ და შემდეგ გადავიყვანოთ სასურველ სისტემაში-მაგალითად 7+7=14, $14=16_8$, რადგან 7 ერთეული და 7 ერთეული არის 14 ერთეული, რომელიც შედგება 8 ერთეულისა და 6 ერთეულისგან, 8 ერთეული 9-ობით სისტემაში არის 10.

ქვეშმიწერითი შეკრება ორობით და სამობით სისტემაში:

$$\begin{array}{r} 111\,011_2 \\ +\quad 11\,101_2 \\ \hline 1011\,000_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 121\,011_3 \\ +\quad 22\,121_3 \\ \hline 2\,20\,202_3 \end{array}$$

ქვეშმიწერითი გამოკლებისას ვსარგებლობთ შეკრების ცხრილით

$$\begin{array}{r} 3712_8 \\ -\ 645_8 \\ \hline 3045_8 \end{array}$$

$5_8+5_8=12_8$; ე.ი. $12_8-5_8=5_8$, $10_8-4_8=4_8$ და ა.შ.

რიცხვების გამრავლებისას ვისარგებლებთ ერთნიშნა რიცხვების გამრავლების ცხრილით. ქვემოთ წარმოდგენილია ცხრილები, როცა ფუძე t=2,3,8.

t=2

x	0	1
0	0	0
1	0	1

t=3

x	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11_3

t=8

x	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

ეს ცხრილი შეიძლება ასეც მივიღოთ: მაგალითად, ვთქვათ ვამრავლებთ 3-ობით სისტემაში 3-ს და 2-ს: 3·2, ანუ უნდა ვიპოვოთ ჯამი II II II. მას ასე დავაჯგუფებთ: III III, ე. ი. $3\cdot2=20_3$ თუმცა შეიძლება ასეც მოვიქცეთ. გავამრავლოთ რიცხვები ათობით სისტემაში, შემდეგ ჩავწეროთ ჩვენთვის სასურველ სისტემაში. მაგალითად 5·7=35, 35=4·8+3; $35_{10}=43_8$, ე.ი. $5_8\cdot7_8=43_8$.

გაყოფის დროსაც ვიყენებთ გამრავლების ცხრილს და გაყოფა ისევე სრულდება, როგორც ათობით სისტემაში.

$$
\begin{array}{r}
35_8 \\
\times\ 47_8 \\
\hline
313 \\
+\ 164 \\
\hline
2153_8
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr|l}
515515_8 & & 157_8 \\
\cline{3-3}
-\ 515 & & \\
\cline{1-1}
515 & & 3003_8 \\
-\ 515 & & \\
\cline{1-1}
0 & &
\end{array}
$$

გავიხსენოთ, რომ წილადურ რიცხვებს სასრული, ან უსასრულო პერიოდული ათწილადების გამოყენებით ჩავწერდით. ამ შემთხვევაში ათობითი პოზიციური სისტემა გამოიყენება. მაგალითად $\frac{73}{64}=1+\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{6}{10^4}+\frac{2}{10^5}+\frac{5}{10^6}$ შეიძლება ეს წილადი 8-ობით სისტემაში ჩავწეროთ $\frac{73}{64}=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}$. ამ ჯამს ეწოდება $\frac{73}{64}$ –ის 8-ობითი გაშლა და მას ასეც ჩავწერთ $(1,11)_8$.

8-ობითი გაშლის მიღება ასეც შეიძლება: ჩავწერთ 73-ს და 64-ს 8-ობით სისტემაში და შევასრულებთ გაყოფას: $\frac{73}{64}=\frac{(111)_8}{(100)_8}$

$$
\begin{array}{r|l}
(111)_8 & (100)_8 \\
\cline{2-2}
-\ 100 & 1,11 \\
\cline{1-1}
110 & \\
-\ 100 & \\
\cline{1-1}
100 & \\
-\ 100 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

თუმცა გაყოფა 1-ითა და ნულებით შედგენილ რიცხვზე შეიძლება იმავე წესით ვაწარმოოთ, როგორც 10-ის ფუძის შემთხვევაში. ნებისმიერი t ფუძის შემთხვევაშიც ყოველი წილადი რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ სასრული ან უსასრულო პერიოდული t-ობითი გაშლით. მაგალითად $\frac{1}{3}$ -ის ორობითი გაშლაა $\frac{1}{3}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots=0,010101\ldots$ ამ გაშლის მიხედვით $\frac{1}{3}$ პერიოდული სახით ასე ჩაიწერება $\frac{1}{3}=0,(01)_2$. ამ ჩანაწერს წმინდა პერიოდული გაშლა შეიძლება ვუწოდოთ. $\frac{1}{4}$ –ის ორობითი გაშლა ასე ჩაიწერება: $\frac{1}{4}=0,01_2$

ყოველი პერიოდული გაშლა რაიმე რაციონალური რიცხვის ჩანაწერია.

მაგალითად $1,(10)_2$ შეიძლება ასე ჩავწეროთ: $1+\frac{(10)_2}{(11)_2}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$.

ირაციონალურ რიცხვებს ვერ ჩავწერთ პერიოდული გაშლის გამოყენებით, მათ არაპერიოდული გაშლა შეესაბამება.

10. პროპორცია

განსაზღვრება. ორი ფარდობის ტოლობას $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ($b\neq 0; d\neq 0$) პროპორცია ეწოდება. a-სა და d-ს პროპორციის კიდურა წევრები, ხოლო b-სა და c-ს შუა წევრები ეწოდება.

თუ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ პროპორციის ორივე მხარეს გავამრავლებთ bd-ზე, მივიღებთ ad=bc. ეს ტოლობა გამოსახავს

პროპორციის ძირითად თვისებას: პროპორციის კიდურა წევრების ნამრავლი უდრის შუა წევრების ნამრავლს.
პროპორციის ძირითადი თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ პროპორციის შუა წევრი უდრის კიდურა წევრების ნამრავლს გაყოფილს მეორე შუა წერვზე, ხოლო კიდურა წევრი კი-შუა წევრების ნამრავლს გაყოფილს მეორე კიდურა წევრზე. იგივე თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ პროპორციაში შესაძლებელია გადავანაცვლოთ მისი შუა ან კიდურა წევრები. მაგალითად პოპორციიდან $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,მიიღება შემდეგი პროპორციები: $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$; $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$. ყოველი პროპორციიდან გარკვეული გარდაქმნებით, შეიძლება მივიღოთ ე.წ. წარმოებული პროპორციები. მაგალითად თუ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ პროპორციის ორივე მხარეს დავუმატებთ 1-ს მივიღებთ: $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$;
ანალოგიურად 1-ის გამოკლებით მიიღება შემდეგი პროპორცია: : $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$;
თუ ამ ტოლობებს წევრ-წევრად გავყოფთ ერთმანეთზე მივიღებთ: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$;
ანალოგიურად მიიღება შემდეგი წარმოებული პროპორციები: $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$; $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$; $\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$.
ტოლ ფარდობათა თვისება. ვთქვათ მოცემულია რამდენიმე ტოლი ფარდობა: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$, მაშინ $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$.

პროპორციული დაყოფა. დავყოთ რაიმე a რიცხვი $m_1, m_2, \dots, m_k$ დადებითი რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად ნიშნავს, ვიპოვოთ ისეთი $a_1, a_2, \dots, a_k$ რიცხვები რომელთა ჯამი a-ს ტოლია და შესრულებულია პირობა: $\frac{a_1}{m_1}=\frac{a_2}{m_2}=\cdots=\frac{a_k}{m_k}$. რაიმე რიცხვი რომ დავყოთ მოცემული რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად, საჭიროა იგი გავყოთ მოცემული რიცხვების ჯამზე და განაყოფი გავამრავლოთ თითოეულზე ამ რიცხვებიდან. მაგალითად 72 დავყოთ 2-ის 3-ისა და 7-ის პროპორციულ ნაწილებად. ვთქვათ საძიებელი რიცხვებია a_1, a_2 და a_3, მაშინ $a_1=\frac{72\cdot 2}{2+3+7}=12$;

$a_2=\frac{72\cdot 3}{12}=18$; $a_3=\frac{72\cdot 7}{12}=42$. მაშასადამე 2-ის შესაბამისი პროპორციული რიცხვია 12; 3-ის 18 და 7-ის 42.

რაიმე რიცხვის მოცემული რიცხვების უკუპროპორციულ ნაწილებად დასაყოფად საჭიროა ეს რიცხვი გაიყოს მოცემული რიცხვების შებრუნებული რიცხვების ჯამზე და მიღებული განაყოფი გამრავლდეს თითოეულ მოცემულ რიცხვზე. ე.ი. რიცხვი უნდა დავყოთ ამ რიცხვების შებრუნებული რიცხვების პირდაპირპროპორციულ ნაწილებად.
მაგ., 35-ის დასაყოფად 2-ისა და 3-ის უკუპროპორციულ ნაწილებად შემდეგნაირად იქცევიან
$35:(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=42 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 42=21;\ \frac{1}{3}\cdot 42=14.$
ორ სიდიდეს შორის დამოკიდებულებას ეწოდება პირდაპირპროპორციული(ან უბრალოდ პროპრციული), თუ ერთი სიდიდის რამდენჯერმე გაზრდა (შემცირება) იწვევს მეორე სიდიდის იმდენჯერვე გაზრდას (შემცირებას).
მუდმივი სიჩქარის პირობებში სხეულის მიერ გავლილი მანძილის დამოკიდებულება დროზე არის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება, ანუ დრო და გავლილი მანძილი ამ შემთხვევაში პირდაპირპროპორციული სიდიდეებია.
მაგალითი: ველოსიპედისტის მოძრაობის სიჩქარეა 12კმ/სთ. ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მითითებულია ველოსიპედისტის მიერ აღნიშნული სიჩქარით დროის გარკვეულ მომენტში გავლილი მანძილი:

t, სთ	1	2	3	4	5	6	7	8
S, კმ	12	24	36	48	60	72	84	96

პირდაპირპროპორციული სიდიდეების შეფარდება სხვადასხვა წყვილთა შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის ერთ და იგივეა, ანუ $\frac{1}{12}=\frac{2}{24}=\frac{3}{36}=\frac{4}{48}=\frac{6}{72}=\frac{7}{84}=\frac{8}{96}$

ორ სიდიდეს შორის დამოკიდებულებას ეწოდება უკუპროპორციული, თუ ერთი სიდიდის რამდენჯერმე გაზრდა (შემცირება) იწვევს მეორე სიდიდის იმდენჯერვე შემცირებას (გაზრდას).

უკუპროპორციული დამოკიდებულება სიჩქარესა და დროს შორის, როდესაც სხეულის მიერ გავლილი მანძილი მუდმივია-ანუ სიჩქარე და დრო უკუპროპორციული სიდიდეებია.

მაგალითი. მოტოციკლისტს უნდა გაევლო 120 კმ. ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მითითებულია დამოკიდებულება მოტოციკლისტის სიჩქარესა და მის მიერ დახარჯულ დროს შორის აღნიშნული მანძილის გავლის შემთხვევაში:

v კმ/სთ	20	30	40	50	60
t, სთ	6	4	3	2,4	2

უკუპროპორციული სიდიდეების ნამრავლი სხვადასხვა წყვილთა შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის ერთი და იგივეა. ანუ 20· 6=30·4=40·3=50·2,4=60·2

განვიხილოთ ასეთი ამოცანა. 26-კაციანმა ბრიგადამ 20 დღეში 180ტ კარტოფილი ამოიღო. რამდენ კარტოფილს ამოიღებს 12-კაციანი ბრიგადა 28 დღეში?

ამოხსნა

ამოცანის პირობა შეიძლება ასე გადავწეროთ

16 კაცი-20 დღე-180 ტ

12 კაცი-28 დღე-x ტ

x=$\frac{12\cdot28\cdot180}{16\cdot20}=\frac{60480}{320}=189$ ტ. პას: 189 ტონა

ორი ერთნაირი ტუმბოს ერთდროული გამოყენებით, სავსე აუზიდან წყალი 15 საათში ამოიტუმბება . რა დრო დასჭირდება 5 ასეტსავე ტუმბოს იმავე სავსე აუზიდან წყლის ამოსატუმბად?

ამოხსნა

ავღნიშნოთ x-ით დრო, რომელიც 5 ტუმბოს დასჭირდება. ვადგენთ შემდეგ სქემას

2 ტუმბო-15 სთ

5 ტუმბო-x სთ.

ამ შემთხვევაში უკუპროპორციულ სიდიდეებთან გვაქვს საქმე-მათი ნამრავლი მუდმივი სიდიდეა, ანუ გვაქვს ტოლობა 5x=2· 15 x=$\frac{2\cdot15}{5}=6$ (სთ) ჩანაწერი პროპორციის სახით ასე შეიძლება ჩავწეროთ $\frac{5}{2}=\frac{15}{x}$

ვთქვათ 8 ერთნაირი კაბის შეკერვაზე 22 მეტრი ქსოვილი დაიხარჯა. რამდენი მეტრი ქსოვილი იქნება საჭირო 5 ისეთივე კაბის შესაკერად?

ამოხსნა

ვთქვათ 5 კაბის შესაკერად x მ ქსოვილია საჭირო. პირობა მოკლედ ასე ჩავწეროთ:

8 კაბა-22 მ

5 კაბა-x მ

გვაქვს პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება ამიტომ გვექნება შემდეგი პროპორცია

$\frac{8}{5} = \frac{22}{x}$ საიდანაც x=13.75 (მ)   პას:13,75 მ.

11. რიცხვის პროცენტი და ნაწილი

განსაზღვრება. რიცხვის მეასედ ნაწილს მისი პროცენტი ეწოდება. რიცხვის 1 პროცენტი 1% სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო k პროცენტი-k% სიმბოლოთი. K%=$\frac{k}{100}$; 1 %=$\frac{1}{100}$.

პროცენტებზე განიხილება შემდეგი **სამი ტიპის ამოცანა:**

1. რიცხვის რაიმე პროცენტის პოვნა. იმისათვის რომ ვიპოვოთ რიცხვის k%, საჭიროა ეს რიცხვი გავამრავლოთ $\frac{k}{100}$-ზე. მაგალითად 150-ის 20%=150$\cdot\frac{20}{100}$=30.

2. რიცხვის პოვნა პროცენტის საშუალებით. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ რომელი რიცხვის k% -ს წარმოადგენს მოცემული რიცხვი, საჭიროა იგი გავამრავლოთ $\frac{100}{k}$-ზე. მაგალითად რიცხვი რომლის 12% არის 18, უდრის 150-ს. რადგან 18$\cdot\frac{100}{12} = 150$.

3. ორი რიცხვის პროცენტული ფარდობის პოვნა. იმისათვის, რომ დავადგინოთ ერთი რიცხვი მეორის რამდენ პროცენტს შეადგენს, საჭიროა მათი ფარდობა გავამრავლოთ 100-ზე. მაგალითად 18 წარმოადგენს 150-ის 12%-ს, რადგან $\frac{18}{150}\cdot 100 = 12$.

იმისათვს, რომ დადგინდეს a რიცხვი რამდენი პროცენტით მეტია b რიცხვზე (a>b), შეფარდება $\frac{a-b}{b}$ უნდა გამრავლდეს 100%-ზე.

მაგ. რამდენი პროცენტითაა მეტი 60 45-ზე?

$\frac{60-45}{45}\cdot 100\% = \frac{100}{3}$%-ით.

იმისათვის რომ დადგინდეს b რიცხვი რამდენი პროცენტითაა ნაკლები a რიცხვზე (a>b), შეფარდება $\frac{a-b}{a}$ უნდა გამრავლდეს 100%-ზე.

მაგ. რამდენი პროცენტითაა ნაკლები 45 60-ზე?

$\frac{60-45}{60}\cdot 100\% = 25\%$-ით.

რაიმე მთელის ორი ან მეტი ტოლი ერთობლიობისაგან შემდგარ **სიმრავლეს, ნაწილი ეწოდება.**

ნაწილის გამოსახვა ხდება წილადების სახით. მაგ. წილადი $\frac{3}{7}$ აღნიშნავს, რომ მოცემული მთელი გაყოფილია 7 ტოლ ნაწილად, საიდანაც აღებულია 3 ნაწილი და შესაბამისად დარჩენილია 4 ნაწილი. შესაბამისად თუ მოცემული მთელი შედგება პირობითად 35 ტოლი ერთეულისაგან მაშინ მისი $\frac{3}{7}$ ნაწილი არია 35$\cdot\frac{3}{7}$=15 ერთეული.

ნაწილებზე განიხილება სამი ტიპის ამოცანა.

1) რიცხვის ნაწილის პოვნა.

რაიმე რიცხვის ნაწილი რიცხვი რომ ვიპოვოთ, მოცემული მთელი რიცხვი უნდა გავამრავლოთ წილადურ ნაწილზე.

მაგ. 240-ის $\frac{5}{8}$ ნაწილი ტოლია $240\cdot\frac{5}{8} = 150$.

2) რიცხვის პოვნა მისი ნაწილის მიხედვით.

მთელი რიცხვი რომ ვიპოვოთ მისი ნაწილი რიცხვის მიხედვით, მოცემული ნაწილი რიცხვი უნდა

გავყოთ წილადურ ნაწილზე.
მაგ. იპოვეთ რიცხვი, რომლის $\frac{5}{8}$ ნაწილი ტოლია 150-ის. x =150: $\frac{5}{8}$=240.

3) ერთი რიცხვი მეორე რიცხვის რა ნაწილს შეადგენს.
რომ გავიგოთ ერთი რიცხვი მეორე რიცხვის რა ნაწილს შეადგენს, ნაწილი რიცხვი უნდა შევაფარდოთ მთელ რიცხვთან.
მაგ. რიცხვი 150 რა ნაწილს შეადგენს 240-ის? $\frac{150}{240}=\frac{5}{8}$ ნაწილი.
ნაწილებზე ამოცანებში მოიცემა სამი სიდიდე: 1. მთელი რიცხვი 2. ნაწილი რიცხვი. 3. წილადური ნაწილი. ნაწილი რიცხვი შესაძლებელია იყოს მთელ რიცხვზე ნაკლებიც, მეტიც და მისი ტოლი.
თუ ნაწილი რიცხვი ნაკლებია მთელ რიცხვზე, მაშინ წილადური ნაწილი გამოისახება წესიერი წილადის სახით.
თუ ნაწილი რიცხვი მეტია მთელ რიცხვზე, მაშინ წილადური ნაწილი გამოისახება არაწესიერი წილადის სახით.
თუ ნაწილი რიცხვი ტოლია მთელი რიცხვის, მაშინ წილადური ნაწილი ტოლია ერთის.

მაგ. მასწავლებელმა მოსწავლეებს დავალებად მისცა 20 ამოცანა, საიდანაც პირველმა მოსწავლემ ამოხსნა 16 ამოცანა, მეორე მოსწავლემ დამატებით კიდევ 4 ამოცანა, ხოლო მესამემ მოსწავლემ კი ამოხსნა 20 ამოცანა. დავალების რა ნაწილი შეუსრულებია თითოეულ მოსწავლეს?
I მოსწავლე $\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$ ნაწილი

II მოსწავლე $\frac{24}{20}=\frac{6}{5}$ ნაწილი.

III მოსწავლე $\frac{20}{20}=1$ მთელი.

12. რამდენიმე რიცხვის არითმეტიკული საშუალო

მოცემული რიცხვების საშუალო არითმეტიკული (საშუალო) ეწოდება ამ რიცხვთა ჯამი გაყოფილი მათსავე რაოდენობაზე. $V_{საშ}$-თი აღინიშნება. $V_{საშ}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.
მაგ. რიცხვების 8;-5;4;12;0;7 საშუალო არითმეტიკული იქნება: $\frac{8+(-5)+4+12+0+7}{6}=\frac{26}{6}=4\frac{1}{3}$.
შესაბამისად რიცხვთა ჯამი ტოლია მათი საშუალო გამრავლებული მათსავე რაოდენობაზე, ხოლო რიცხვთა რაოდენობა ტოლია მათი ჯამი გაყოფილი მათსავე საშუალოზე.
a ლიტრი x%-იანი და b ლიტრი y%-იანი ხსნარების შერევით მიიღება p%=$\frac{ax+by}{a+b}$ % პროცენტული კონცენტრაციის ხსნარი.
a ლიტრი x^0-იანი და b ლიტრი y^0-იანი წყლის შერევით მიიღება ნარევის ტემპერატურა: $t^0{}_{საშ}=\frac{ax^0+by^0}{a+b}$

$t_1V_1=S_1$; $t_2V_2=S_2$; $V_{საშ}=\frac{S_1+S_2}{t_1+t_2}$

n რიცხვის ჰარმონიული საშუალო: $V_h=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$.
n რიცხვის გეომეტრიული საშუალო: $V_g=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$

13. ხარისხი ნატურალური და მთელი მაჩვენებლით.

a რიცხვის n-ური ხარისხი (n≠ 1) a^n ეწოდება n რაოდენობის მამრავლის ნამრავლს, რომელთაგან თითოეული a-ს ტოლია. a-ს ეწოდება ხარისხის ფუძე, n-ს კი ხარისხის მაჩვენებელი.

$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n-ჯერ}$ a∈ $R, n \in N, n \geq 2$

დადებითი რიცხვის ნებისმიერი ნატურალური ხარისხი დადებითია. უარყოფითი რიცხვის ლუწმაჩვენებლიანი ხარისხი დადებითია, ხოლო კენტმაჩვენებლიანი ხარისხი-უარყოფითი.

თუ m,n∈ N, ხოლო a,b∈ R, მაშინ მართებულია ტოლობები:

ტოლფუძიანი ხარისხების ნამრავლი : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

ტოლფუძიანი ხარისხების განაყოფი: $a^m : a^n = a^{m-n}$; $m > n$; $a \neq 0$

ხარისხის ხარისხი : $(a^m)^n = a^{mn}$;

ხარისხი ნულის ტოლი მაჩვენებლით $a^0 = 1$;

ნამრავლის ხარისხი $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

წილადის ხარისხი $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ b≠ 0.

a∈ R და n∈ N რიცხვებისათვის სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები $a^1 = a$; $1^n = 1$; $0^n = 0$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$. ზემოთ ჩამოთვლილი ტოლობები სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც m და n ნებისმიერი მთელი რიცხვებია. a∈ $R, n \in Z$.

14. ერთწევრი და მრავალწევრი.

რამდენიმე თანამამრავლის ნამრავლს, რომელთაგან თითოეული არის რიცხვი, ან ცვლადის ხარისხი ნატურალური მაჩვენებლით, **ერთწევრი** ეწოდება. მაგალითად **ერთწევრებია** $6b^2c$; $5x^3 7y$; $-\frac{3}{8}aa^2c^4$.

ერთწევრს, რომლის პირველი მამრავლი წარმოადგენს რიცხვს, ხოლო ყველა სხვა თანამამრავლი განსხვავებული ცვლადების ხარისხებია, **სტანდარტული სახის ერთწევრი ეწოდება.** ზემოთ მოყვანილი ერთწევრებიდან პირველი ჩაწერილია სტანდარტული სახით, ხოლო მეორისა და მესამის სტანდარტული სახე იქნება შესაბამისად $35x^3y$ და $-\frac{3}{8}a^3c^4$. სტანდარტული სახის ერთწევრის რიცხვით მამრავლს ერთწევრის კოეფიციენტი ეწოდება. ერთწევრებს ეწოდება მსგავსი, თუ ისინი ერთი და იგივეა ან მხოლოდ კოეფიციენტებით განსხვავდებიან. მაგალითად x^2y, $0{,}8x^2y$ და $-5x^2y$ მსგავსი ერთწევრებია. მსგავსი ერთწევრების ჯამი არის მოცემულ ერთწევრთა მსგავსი ერთწევრი, რომლის კოეფიციენტი უდრის შესაკრებ ერთწევრთა კოეფიციენტების ჯამს.ერთწევრის ხარისხი ეწოდება მასში შემავალი ცვლადების ხარისხის მაჩვენებელთა ჯამს. მაგალითად $9ab^2x^3$ ერთწევრის ხარისხი არის 1+2+3=6.

რამდენიმე ერთწევრის ჯამს მრავალწევრი ეწოდება. მაგალითად $7xy^3 + 0{,}1ab$ და $5a^2b - 3ac + a^2b -$

$2aab$ მრავალწევრებია.

მრავალწევრს, რომლის თითოეული წევრი ჩაწერილია სტანდარტული სახით და მსგავსი წევრები შეკრებილია, სტანდარტული სახის მრავალწევრი ეწოდება. ზემოთ მოყვანილი მრავალწევრებიდან პირველი სტანდარტული სახით არის ჩაწერილი, ხოლო მეორის სტანდარტული სახეა $4a^2b-3ac$.

მრავალწევრის ხარისხი, ანუ რიგი ეწოდება მასში შემავალი ერთწევრების ხარისხებს შორის უდიდესს. მაგალითად $2xyz-x^2+xy^3+12$ მრავალწევრის რიგია 4.

რამდენიმე მრავალწევრი რომ შევკრიბოთ, საჭიროა შევკრიბოთ მათში შემავალი ყველა ერთწევრი. მრავალწევრს რომ მრავალწევრი გამოვაკლოთ, საჭიროა საკლების წევრებს მივუმატოთ მაკლების ყველა წევრი, აღებული მოპირდაპირე ნიშნით. **მრავალწევრი რომ ერთწევრზე გავამრავლოთ,** საჭიროა მრავალწევრის ყოველი წევრი გავამრავლოთ ერთწევრზე და მიღებული შედეგები შევკრიბოთ. **მრავალწევრი რომ მრავალწევრზე გავამრავლოთ,** საჭიროა ერთ-ერთი მრავალწევრი გავამრავლოთ მეორის ყველა წევრზე და მიღებული შედეგები შევკრიბოთ.

მაგ. (8a-7b)+(-2a+2b)-(a-3b)=8a-7b-2a+2b-a+3b=5a-2b; -7x(2xy-3x+y)=$-14x^2y+21x^2-7xy$;
$(8x^3-5x):2x=4x^2-2{,}5$; (3a-2b)(a+5b)=$3a^2+15ab-2ab-10b^2=3a^2+13ab-10b^2$.

მრავალწევრის მრავალწევრზე გაყოფა ნიშნავს ისეთი მესამე მრავალწევრის (ერთწევრის) მოძებნას, რომელიც გამრავლებული გამყოფზე მოგვცემს გასაყოფს. შევნიშნოთ, რომ ეს ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. იმისათვის, რომ მრავალწევრი გავყოთ მრავალწევრზე, საჭიროა მოვიქცეთ შემდეგნაირად: დავალაგოთ ორივე მრავალწევრი ერთიდაიმავე ცვლადის კლებად ხარისხებად; განაყოფის პირველი წევრის მისაღებად გასაყოფის პირველი წევრი გავყოთ გამყოფის პირველ წევრზე; გასაყოფს გამოვაკლოთ გამყოფის და განაყოფის პირველი წევრის ნამრავლი, რაც მოგვცემს ნაშთს; მიღებული ნაშთი დავალაგოთ იგივე ცვლადის კლებად ხარისხებად; განაყოფის მეორე წევრის მისაღებად ნაშთის პირველი წევრი გავყოთ გამყოფის პირველ წევრზე, პირველ ნაშთს გამოვაკლოთ გამყოფისა და განაყოფის მეორე წევრის ნამრავლი, რაც მოგვცემს მეორე ნაშთს და ა. შ. გაყოფის პროცესი შევწყვიტოთ, როგორც კი ნაშთის ხარისხი არჩეული ცვლადის მიმართ ნაკლები გახდება გამყოფის ხარისხზე. კერძოდ, თუ ნაშთში მივიღებთ ნულს, მაშინ გაყოფა სრულდება უნაშთოდ.
$4x^3y-8xy^2+12x^5y-2y^3+3x^4y^2+x^2y^2$ მრავალწევრი გავყოთ $4x+y$ მრავალწევრზე.

ზემოთ ჩამოყალიბებული წესის თანახმად მივიღებთ:

$$
\begin{array}{l|l}
12x^5y+3x^4y^2+4x^3y+x^2y^2-8xy^2-2y^3 & 4x+y \\
\hline
12x^5y+3x^4y^2 & 3x^4y+x^2y-2y^2 \\
\hline
\quad 4x^3y+x^2y^2-8xy^2-2y^3 & \\
\quad 4x^3y+x^2y^2 & \\
\hline
\qquad -8xy^2-2y^3 & \\
\qquad -8xy^2-2y^3 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

ამრიგად $(4x^3y-8xy^2+12x^5y-2y^3+3x^4y^2+x^2y^2):(4x+y)=3x^4y+x^2y-2y^2$

განსაზღვრება. მრავალწევრს, რომელიც მხოლოდ ერთ ცვლადს შეიცავს, ერთი ცვლადის შემცველი მრავალწევრი ეწოდება. ერთი ცვლადის შემცველი n –ური რიგის მრავალწევრის ზოგადი სახეა:

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ სადაც $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ კოეფიციენტები ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია $(a_0 \neq 0)$. $a_0x^n - \mathit{b}$ მრავალწევრის უფროსი წევრი, ხოლო a_n -ს თავისუფალი წევრი ეწოდება. თუ მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიციენტი1-ის ტოლია, მაშინ მას დაყვანილი სახის მრავალწევრი ეწოდება.

ერთი ცვლადის შემცველი მრავალწევრის ფესვი ეწოდება ცვლადის იმ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც მრავალწევრის მნიშვნელობა ნულის ტოლია.

ამგვარად x_0 არის $P_n(x)$ მრავალწევრის ფესვი, თუ $P_n(x) = 0$. შეიძლება ჩვენება, რომ ნებისიერი p(x) და t(x) მრავალწევრებისათვის მოიძებნება ისეთი q(x) და r(x) მრავალწევრები, რომ

p(x)= q(x)· t(x)+ r(x), სადაც r(x) მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია t(x)-ის ხარისხზე, ან r(x)=0. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ p(x) მრავალწევრი იყოფა t(x)-ზე ნაშთით r(x) და განაყოფი არის q(x)· თუ r(x)=0, მაშინ გაყოფა ხდება უნაშთოდ.

თეორემა (ბეზუ). p(x) მრავალწევრის (x-a) ორწევრზე გაყოფით მიღებული r ნაშთი ტოლია p(x) მრავალწევრის მნიშვნელობისა, როცა x=a, ე.ი. r=p(a).

შედეგი. იმისათვის, რომ p(x) მრავალწევრი უნაშთოდ გაიყოს (x-a)-ზე აუცილებელი და საკმარისია, რომ a რიცხვი იყოს p(x)-ის ფესვი.

მაგ. გაყოფის შეუსრულებლად ვიპოვოთ p(x)=$5x^6 + 4x^4 - x^3 + 2x + 1$ მრავალწევრის (x+1)ორწევრზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი.

ამოხსნა. ბეზუს თეორემის თანახმად r=p(-1)= $5(-1)^6 + 4(-1)^4 - (-1)^3 + 2(-1) + 1 = 9$.

15. შემოკლებული გამრავლების ფრომულები.

ორი წევრის ჯამის კვადრატი: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ორი წევრის სხვაობის კვადრატი: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ორი წევრის კვადრატების სხვაობა:$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

ორი წევრის ჯამის კუბი: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ორი წევრის სხვაობის კუბი: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

ორი წევრის კუბების ჯამი: $a^3 + b^3 = (a+b)(\ a^2 - ab + b^2)$

ორი წევრის კუბების სხვაობა: $a^3 - b^3$=(a-b)($a^2 + ab + b^2$)

სამი წევრის ჯამის კვადრატი: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

სამი წევრის სხვაობის კვადრატი: $(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ac$

$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$

$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$

ნიუტონის ბინომის ფორმულა n$\in N$:

$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n; \quad n \in N$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-1} + b^{n-1}), \quad n \in N.$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

ნახაზზე ნაჩვენებია ნატურალური რიცხვებისაგან შედგენილი ცხრილი, რომელსაც პასკალის სამკუთხედი ეწოდება.

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

16. მრავალწევრის დაშლა მამრავლებად.

საერთო მამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გატანა. თუ მრავალწევრში შემავალი ერთწევრები შეიცავს ერთსა და იმავე მამრავლს, მაშინ საერთო მამრავლი შეიძლება გავიდეს ფრჩხილებს გარეთ;

$4x^2y-6xy^2=2xy(2x-3y)$; $7m(x-y)-5(x-y)=(x-y)(7m-5)$

დაჯგუფება. მრავალწევრის წევრები უნდა დალაგდეს ჯგუფებად ისე, რომ თითოეული ჯგუფიდან მოხდეს საერთო მამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გატანა, შემდეგ თუ მიღებულ ჯგუფებსაც აღმოაჩნდებათ საერთო მამრავლი, კიდევ ჩატარდეს საერთო მამრავლის ფრჩხილებს გარეთ გატანა;

$3mx-6nx-ym+2ny=3x(m-2n)-y(m-2n)=(m-2n)(3x-y)$

შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენება.

$\frac{9}{4}x^2-y^2=\left(\frac{3}{2}x-y\right)\left(\frac{3}{2}x+y\right)$; $25m^2-10mn+n^2=(5m-n)^2$.

მამრავლებად დაშლის შერეული ხერხი.

$7x^2-14xy+7y^2=7(x-y)^2$; $m^3-9m=m(m-3)(m+3)$.

17. რაციონალური გამოსახულება.

ცვლადიანი გამოსახულება არის ისეთი გამოსახულება, რომელიც ცვლადს შეიცავს. (I) 0.2a (II)-3x-15; (III) $\frac{a+2}{a-5}$; (I) და (II) გამოსახულებებში შემავალი ცვლადების მაგივრად შეიძლება ნებისიერი კონკრეტული რიცხვების ჩასმა, ხოლო (III) გამოსახულება აზრს კარგავს, როცა a=5; აქედან გამომდინარეობს, რომ (I) და (II) გამოსახულებებში შემავალი ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეა R, ხოლო (III) გამოსახულებაში შემავალი ცვლადის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეა R\{5}. (I) და (II) გამოსახულებებს ეწოდება მთელი გამოსახულებები; ხოლო (III) გამოსახულებას-რაციონალური გამოსახულება(რაციონალური წილადი).

რაციონალური წილადის მრიცხველის და მნიშვნელის გამრავლებით (გაყოფით) ნულისაგან განსხვავებულ მრავალწევრზე მოცემული რაციონალური წილადი არ იცვლება.

$(\frac{y}{y^2-1}+\frac{2}{y+1}):\frac{3y-2}{5y+5}$; რაციონალური გამოსახულების გამარტივება მოხდება უშუალოდ

გამოსახულებაში მითითებული მოქმედებების თანმიდევრობით ჩატარების შედეგად, რაც საბოლოოდ $\frac{5}{y-1}$-ის ტოლი ხდება.

იგივეობა. იგივური გარდაქმნა. მოცემული ორი ტოლობიდან (I) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ და (II) $p^9:p^6=p^3$, (I) სრულდება მასში შემავალი ცვლადების ნებისიერი მნიშვნელობისათვის, (II) კი-არა- p$\neq$ 0; მაგრამ ორივე ტოლობა შესრულდება მათში შემავალი ცვლადების ნებისმიერი დასაშვები მნიშვნელობებისათვის.

ორი გამოსახულების ტოლობას, რომელიც სამართლიანია მათში შემავალი ცვლადების ნებისმიერი დასაშვები მნიშვნელობებისათვის, იგივეობა ეწოდება, გამოსახულებებს კი იგივურად ტოლი გამოსახულებები. (I) და (II) ტოლობები იგივეობებია.

იმ გარდაქმნას, რომლის შედეგადაც მიიღება მოცემული გამოსახულებების იგივურად ტოლი გამოსახულება, **იგივური (იგივი) გარდაქმნა ეწოდება.**

18. n-ური ხარისხის ფეხვი, არითმეტიკული ფესვი.

განსაზღვრება. n-ური ხარისხის ფესვი a ნამდვილი რიცხვიდან, n∈ N, n>1, ეწოდება ისეთ x რიცხვს, რომლის n-ური ხარისხი a-ს ტოლია, ე.ი. $x^n=a$. როდესაც n ლუწი რიცხვია, მაშინ $a\geq 0$.
როდესაც n კენტი რიცხვია, მაშინ a ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

n-ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვი არაუარყოფითი a რიცხვიდან ეწოდება არაუარყოფით რიცხვს, რომლის n ხარისხიც a-ს ტოლია; ეს ასე აღინიშნება: $\sqrt[n]{a}$.

თუ n კენტი რიცხვია და a<0, მაშინ $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{-|a|}=-\sqrt[n]{|a|}$; $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}|a|, \text{როდესაც n ლუწია}\\ a, \text{როდესაც n კენტია.}\end{cases}$

მაგ. $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{0,49}=0,7$; $\sqrt{0}=0$; $\sqrt[4]{81}=3$; $\sqrt[3]{27}=3$; $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}=-\sqrt[3]{\frac{8}{125}}=-\frac{2}{5}$; $\sqrt[5]{0,00032}=0,2$

ხშირად ფესვის ნაცვლად ხმარობენ ტერმინს ,,რადიკალი“. ფესვის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a,\ k \in N$, ხოლო $\sqrt[2k]{a^{2k}} = \begin{cases} a, \text{ როცა } a \geq 0 \\ -a, \text{ როცა } a<0, \end{cases}$, $k \in N$

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$, კერძოდ $\sqrt{a^2} = |a|$; ცხადია, რომ თუ გამოსახულებას $\sqrt[n]{a}$ აზრი აქვს, მართებულია ტოლობა $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

ამრიგად , როდესაც $a \geq 0$ გამოსახულებას $\sqrt[n]{a}$ ყოველთვის აქვს აზრი და მისი მნიშვნელობა არაუარყოფითია.

არითმეტიკული ფესვის თვისებები:

$m,n,k \in N$ a და b არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვებია:

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad b \neq 0$

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$

$\sqrt{a + b\sqrt{c}}$- სახის გამოსახულებას, სადაც $a,b,c \in Q$, ორმაგი რადიკალი ეწოდება.

$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ გამოსახულების გათავისუფლება გარე რადიკალისგან შესაძლებელია ორმაგი რადიკალის ფორმულით: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

კვადრატული ფესვის ამოღება ნატურალური რიცხვიდან კალკულატორის გარეშე

ჩამოვაყალიბოთ ნატურალური რიცხვიდან კვადრატული ფესვის

ამოღების წესი:

1. დავყოთ მოცემული რიცხვი მარჯვნიდან მარცხნივ ისე, რომ თითოეულ დანაყოფში აღმოჩნდეს ორ-ორი ციფრი, გარდა შესაძლებელია მარცხნიდან პირველისა (მასში შეიძლება აღმოჩნდეს ერთი ციფრიც).

2. ვიპოვოთ უდიდესი ციფრი, რომლის კვადრატი არ აღემატება მარცხნიდან პირველ დანაყოფში მდგომ რიცხვს. ნაპოვნი ციფრი წარმოადგენს ფესვის პირველ ციფრს.

3. ვიპოვოთ რიცხვი, რომელიც მიიღება თუ სხვაობას პირველ დანაყოფში მდგომ რიცხვსა და ფესვის პირველი ციფრის კვადრატს შორის მივუწერთ მეორე დანაყოფს.

4. ფესვის მეორე ციფრს წარმოადგენს ის უდიდესი ციფრი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: ამ ციფრის ნამრავლი რიცხვზე, რომელიც მიიღება გაორკეცებული პირველი ციფრისადმი საძიებელი ციფრის მიწერით, არ უნდა აღემატებოდეს წინა ეტაპზე ნაპოვნ რიცხვს. ვიპოვოთ სხვაობა აღნიშნულ რიცხვებს შორის, მივუწეროთ მას შემდეგი დანაყოფი და პროცესი გავაგრძელოთ ანალოგიურად.

თუ უკანასკნელ ეტაპზე ნაპოვნი სხვაობა აღმოჩნდა ნული, მაშინ ნაპოვნი ციფრებისაგან შედგენილი რიცხვი წარმოადგენს კვადრატულ ფესვს მოცემული რიცხვიდან. წინააღმდეგ შემთხვევაში კვადრატული ფესვი მოცემული რიცხვიდან არ არის ნატურალური რიცხვი. პრაქტიკულად კვადრატული ფესვის ამოღების პროცესი მოსახერხებელია ჩაიწეროს ისე, როგორც ნაჩვენებია შემდეგ მაგალითზე: $\sqrt{7"31"70"25}=2705$

4

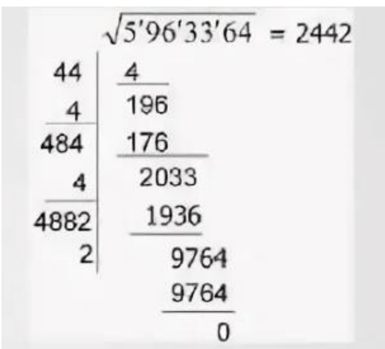
x 47 | 331

7 | 329

5405 | 27025 აქ რადგან 54-ზე მხოლოდ 0-ის მიწერა მოვახდინეთ ფესვშიც 0

5 | 27025 ავტომატურად გადავიტანეთ.

0



19. რაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხი.

თუ a>0 და r=$\frac{m}{n}$ რაციონალური რიცხვია (m$\in Z, n \in N, n \neq 1$), მაშინ $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ თვისებები:

$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{k}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{k}}$;

$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{k}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{k}}$;

$(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{k}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{k}}$;

$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$;

$(a : b)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$; b$\neq 0$.

$a^0 = 1$; $a^1 = a$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$.

20. ალგებრული გამოსახულება

რიცხვთა და იმ ნიშანთა ერთობლიობას, რომლებიც გვიჩვენებენ, თუ რა მოქმედებები და რა მიმდევრობით უნდა იქნას შესრულებული ამ რიცხვებზე, **რიცხვითი გამოსახულება ეწოდება.**

მაგალითად (125-11,5)·2; $\frac{0,17+4^2}{3\cdot4-12}$ და ა.შ.

მითითებული მოქმედებების შესრულებით მივიღებთ რიცხვს, რომელსაც რიცხვითი გამოსახულების მნიშვნელობა ეწოდება. მოყვანილი რიცხვითი გამოსახულებებიდან მეორეს აზრი არა აქვს, რადგან მოქმედებათა შესრულების პროცესში გვხვდება ნულზე გაყოფა. საზოგადოდ, ყოველ რიცხვით გამოსახულებას აქვს ერთადერთი რიცხვითი მნიშვნელობა ან არა აქვს აზრი.

გამოსახულებას, რომელიც ცვლადს შეიცავს, **ცვლადის შემცველი გამოსახულება ეწოდება.** ცვლადის შემცველი გამოსახულების მნიშვნელობა დამოკიდებულია მასში შემავალი ცვლადების რიცხვით მნიშვნელობებზე.

მაგალითად. $\frac{x+5y}{x-3y}$; როცა x=4 და y=1 გამოსახულების მნიშვნელობა 9-ის ტოლია. როცა როცა x=3 და y=1 გამოსახულებას აზრი არა აქვს. იმისდა მიხედვით, თუ რამდენ ცვლადს შეიცავს გამოსახულება, მას შეიძლება აზრი ჰქონდეს (განსაზღვრული იყოს) რიცხვთა რაიმე სიმრავლეზე, რიცხვთა წყვილების, სამეულების და ა. შ. სიმრავლეზე. ზემოთ განხილული გამოსახულება განსაზღვრულია ყველა იმ (x,y) წყვილთა სიმრავლეზე, სადაც $x\neq 3y$.

ალგებრულ მოქმედებათა საშუალებით (შეკრება, გამოკლება,
გამრავლება, გაყოფა, ახარისხება,ამოფესვა) ურთიერთდაკავშირებული ასოებისა
და რიცხვებისაგან შედგენილ გამოსახულებას **ალგებრული გამოსახულება ეწოდება**.ე.ი.გამოსახულებას რომელიც შედგება მუდმივისა და ცვლადებისაგან ასევე მათემატიკური ოპერაციებისაგან ეწოდება ალგებრული გამოსახულება. ალგებრული გამოსახულება შეიძლება იყოს მთელი, წილადური, ირაციონალური. თუ გამოსახულება არ შეიცავს ცვლადიან გამოსახულებაზე გაყოფას და ფესვის ამოღებას მაშინ გამოსახულებას მთელი გამოსახულება ეწოდება. თუ გვქავს ცვლადის შემცველ გამოსახულებაზე გაყოფა მაშინ გამოსახულებას წილადური ეწოდება. თუ გამოსახულებაში გვხვდება ცვლადიანი გამოსახულებიდან ფესვის ამოღება მაშინ გამოსახულებას ეწოდება ირაციონალური გამოსახულება.

ალგებრული გამოსახულება ტოლობის ნიშანს არ შეიცავს.

ალგებრული გამოსახულების მნიშვნელობა დამოკიდებულია მასში შემავალი ცვლადების რიცხვით მნიშვნელობაზე. გამარტივებების შედეგად ალგებრული გამოსახულებების წარმოდგენა შესაძლებელია ეკვივალენტური ფორმით, რაც გამოთვლებს , გამარტივებული ჩანაწერების წარმოებას უწყობს ხელს.

ალგებრული გამოსახულების გარდაქმნისათვის და მისი რიცხვითი მნიშვნელობის პოვნისათვის განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი, ვიპოვოთ $\frac{(x^2-64)\cdot(3y-4)}{(x-8)}$ ალგებრული გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობა თუ x=10 y=2. ჯერ გავამარტივოთ ალგებრული გამოსახულება $\frac{(x^2-64)\cdot(3y-4)}{(x-8)}=\frac{(x-8)(x+8)(3y-4)}{(x-8)}$=(x+8)(3y-4) ჩავსვათ რიცხვითი მნიშვნელობები მივიღებთ (10+8)($3\cdot 2-4$) =18·2=36.

21. რიცხვის ლოგარითმი

განსაზღვრება. $a^x = b$ განტოლების ამონახსნს, სადაც a>0, a$\neq$ 1 b>0, უწოდებენ b რიცხვის ლოგარითმს a ფუძით. b რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით (a>0, a$\neq$ 1) ეწოდება ხარისხის მაჩვენებელს, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ a, რომ მივიღოთ b და $\log_a b$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ე.ი. x=$\log_a b$.

მაგ. $\log_5 25 = 2$, რადგან $5^2 = 25$; $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$, რადგან $(\frac{1}{3})^{-2} = 9$.

ლოგარითმის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს $a^{\log_a b}$=b იგივეობა, რომელსაც ძირითადი ლოგარითმული იგივეობა ეწოდება. იმ შემთხვევაში, როდესაც ლოგარითმის ფუძე a=10 ან a=e, b (e არის ნეპერის რიცხვი რომელიც მიახლოებით e$\approx$ 2,718281 ... $\neq 2,72 -$ ის *ტოლია*)რიცხვის ლოგარითმი შესაბამისად lgb და $\ln b$ სიმბოლოთი აღინიშნება. $lgb -$ ს რიცხვის ათობითი ლოგარითმი ხოლო $\ln b$-ს ნატურალური ლოგარითმი ეწოდება. პრაქტიკაში უფრო ხშირად გამოიყენება სწორედ ასეთი სახის ლოგარითმები, რომელთა მნიშვნელობების გამოსათვლელად არსებობს სპეციალური ცხრილები. **მოვიყვანოთ ლოგარითმის ძირითადი თვისებები:**

1. $\log_a b$ გამოსახულებას აზრი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა b>0.

2. ერთის ლოგარითმი ნებისიერი ფუძით ნულის ტოლია. მართლაც, რადგან $a^0 = 1$, ამიტომ $\log_a 1 = 0$.

3. თუ ლოგარითმის ფუძე ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია, მაშინ ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვის ლოგარითმი დადებითია, ხოლო ერთზე მეტი რიცხვის ლოგარითმი კი-უარყოფითი.

4. თუ ლოგარითმის ფუძე ერთზე მეტი რიცხვია, მაშინ ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვის ლოგარითმი უარყოფითია, ხოლო ერთზე მეტი რიცხვის ლოგარითმი-დადებითი.

5. ფუძის ლოგარითმი ერთის ტოლია. მართლაც, რადგან a^1=a, ამიტომ $\log_a a$=1.

ნამრავლის, ფარდობის და ხარისხის ლოგარითმი:

$\log_a(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \cdots + \log_a x_n,\ x_1 > 0, x_2 > 0, ... x_n > 0.$

$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$, სადაც $x_1 > 0, x_2 > 0$.

$\log_a x^k = k \log_a x$, სადაც x>0.

$\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (ამ თვისებას ლოგარითმის ერთი ფუძიდან მეორეზე გადასვლა ჰქვია.)

თუ რაიმე გამოსახულება შედგენილია დადებითი რიცხვებისაგან გამრავლების, გაყოფისა და ახარისხების ოპერაციებით, მაშინ ზემოთ დამტკიცებული თვისებების თანახმად შეიძლება ამ გამოსახულების ლოგარითმის გამოსახვა მასში შემავალი რიცხვების ლოგარითმების საშუალებით.

ასეთ გარდაქმნას **გალოგარითმება ეწოდება.**

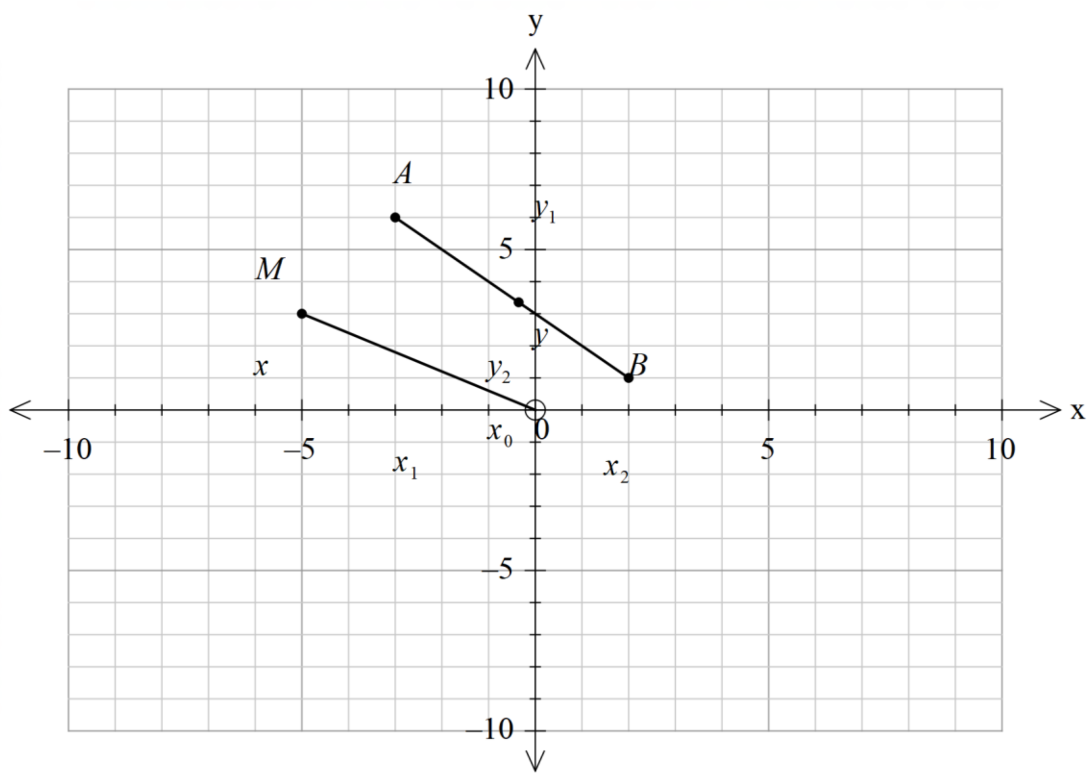
$\log_c x = \frac{2}{3}\log_c a - \frac{2}{5}\log_c b$ რისი ტოლია x?

$\log_c x = \log_c \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[5]{b^2}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[5]{b^2}}$ მოცემული გამოსახულების მიმართ ჩატარებულ გარდაქმნას **პოტენცირება ეწოდება.**

22. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე და სივრცეში

საერთო სათავის მქონე და ერთი და იმავე მასშტაბის ორი ურთიერთმართობული **რიცხვითი ღერძი** ქმნის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას სიბრტყეზე. O წერტილს **კოორდინატთა სათავე ეწოდება,** ღერძებს-საკოორდინატო ღერძები; კერძოდ, OX ღერძს ეწოდება **აბსცისათა ღერძი,** OY **ღერძს-ორდინატთა ღერძი.** ორივე ღერძზე ისრით მითითებულია დადებითი მიმართულება. (იხ სურათი)

სიბრტყეზე ნებისმიერი წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება ორი კოორდინატით.



საკოორდინატო სიბრტყეზე ნებისმიერად აღებული M წერტილიდან საკოორდინატო ღერძების მიმართ ავლებენ მართობულ წრფეებს; ამ წრფეების OX და OY ღერძებთან გადაკვეთისას მიღებული წერტილების კოორდინატები-x და y იქნება შესაბამისად M წერტილის აბსცისა და ორდინატი; M წერტილი კოორდინატებში ასე წარმოიდგინება M(x;y).

აბსცისათა ღერძზე მდებარე ნებისმიერი წერტილის ორდინატი 0-ის ტოლია. ორდინატთა ღერძზე მდებარე ნებისმიერი წერტილის აბსცისა 0-ის ტოლია.

მანძილი საკოორდინატო სიბრტყის $A(x_1;y_1)$ და $B(x_2;y_2)$ წერტილებს შორის გამოითვლება ფორმულით: $|AB| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. მანძილი სიბრტყის M(x;y) წერტილიდან **კოორდინატთა სათავემდე გამოითვლება ფორმულით** $|MO| = \sqrt{x^2+y^2}$.

თუ $c(x_0;y_0)$ **წერტილი არის AB მონაკვეთის შუაწერტილი,** მაშინ c წერტილის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით: $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$

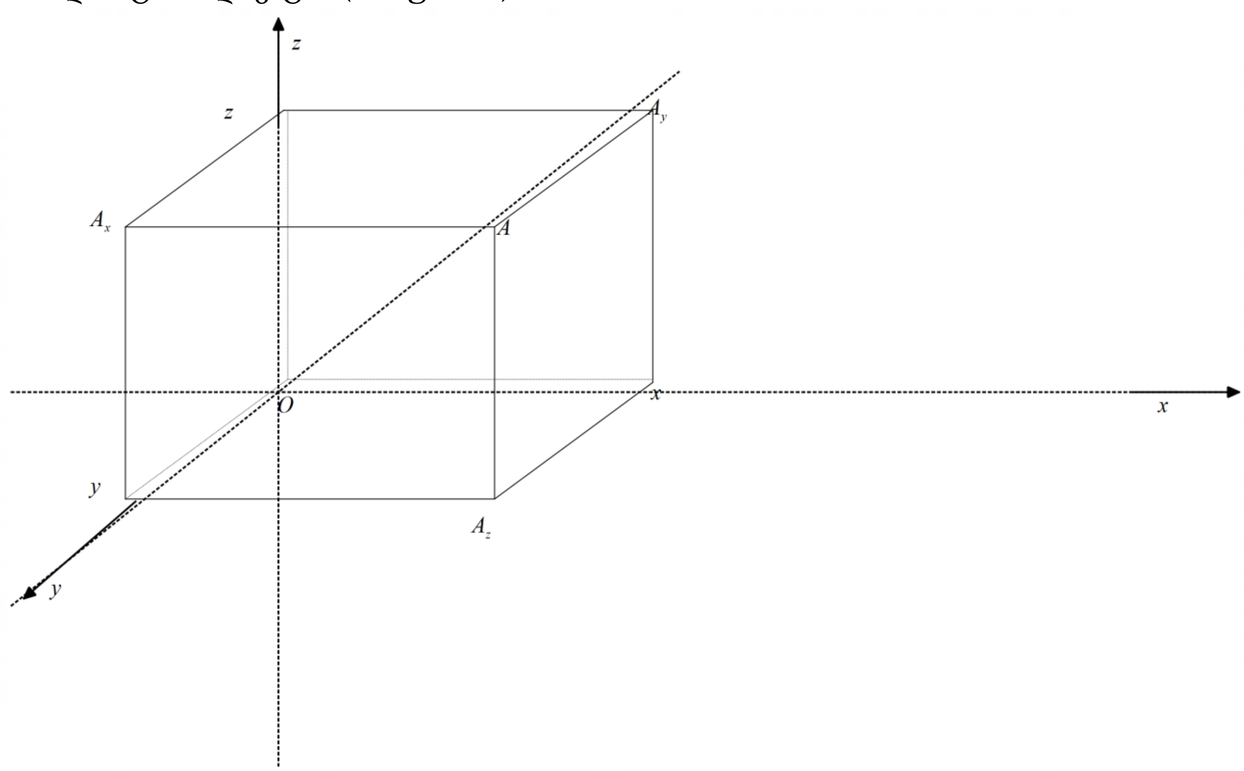
მონაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით.

თუ საკოორდინატო სიბრტყეზე მდებარე მონაკვეთი ბოლოებით $A(x_1;y_1)$ და $B(x_2;y_2)$, $C(x_c;y_c)$ წერტილით იყოფა შეფარდებით $\frac{AC}{BC} = \lambda$ $(\lambda > 0)$, მაშინ C წერტილის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით: $x_c = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_c = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში.

სივრცეში მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას ქმნის ერთ წერტილში გამავალი, ერთი და იმავე მასშტაბის, ურთიერთმართობული OX, OY და OZ წრფეები. მათ საკოორდინატო ღერძები ეწოდება, O წერტილს კი-კოორდინატთა სათავე. ამ სამი საკოორდინატო ღერძიდან ყოველი ორი ქმნის სიბრტყეს. ყოველ ღერძზე შერჩეულია დადებითი მიმართულება.

სივრცეში ნებისმიერად აღებულ A წერტილზე ავლებენ OX, OY და OZ ღერძების პარალელურ წრფეებს, რომლებიც XOY, XOZ და YOZ სიბრტყეებს კვეთს შესაბამისად $A_z(x;y)$, $A_y(x;z)$ და $A_x(y;z)$ წერტილებში. სამეული (x,y,z) წარმოადგენს A წერტილის კოორდინატებს XYZ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში. x კოორდინატს ეწოდება აბსცისა, y კოორდინატს-ორდინატი, z კოორდინატს -აპლიკატი. (იხ.სურათი)



სივრცის ნებისმიერ ორ $M(x_1;y_1;z_1)$ და $N(x_2;y_2;z_2)$ წერტილს შორის მანძილი გამოითვლება **ფორმულით** $|\boldsymbol{MN}| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

მანძილი სივრცის F(x;y;z) წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე გამოითვლება ფორმულით

$|FO| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

თუ E(x_0; y_0; z_0) წერტილი წარმოადგენს MN მონაკვეთის (M(x_1; y_1; z_1) ; N(x_2; y_2; z_2)) **შუაწერტილს, მისი კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით:**

$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$, $z_0 = \frac{z_1+z_2}{2}$.

თუ სივრცეში მდებარე რაიმე მონაკვეთი ბოლოებით- M(x_1; y_1; z_1) და N(x_2; y_2; z_2), E(x_λ; y_λ; z_λ) წერტილით იყოფა შეფარდებით $\frac{ME}{NE} = \lambda$ $(\lambda > 0)$, მაშინ E წერტილის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით: $x_\lambda = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y_\lambda = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$; $z_\lambda = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

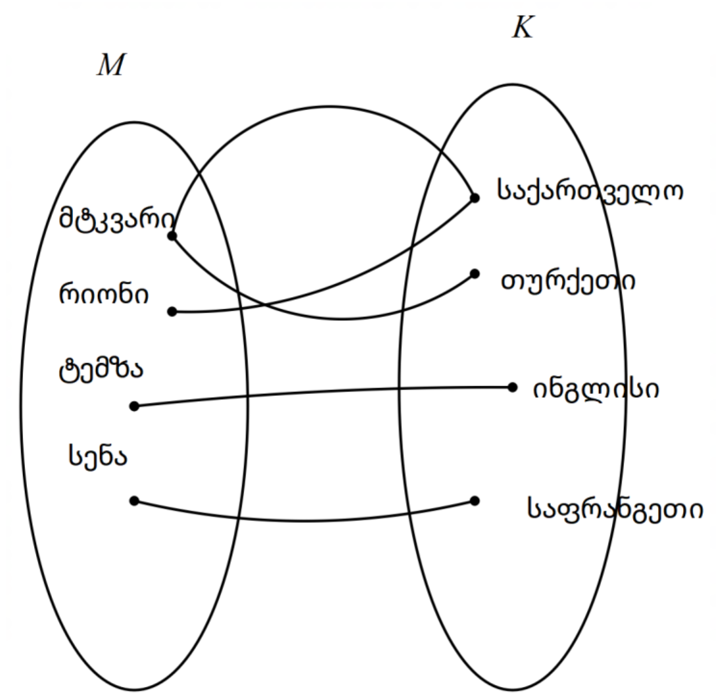
წერტილის მდებარეობა XOY სიბრტყეზე განისაზღვრება კოორდინატებით (x;y;0). XOZ სიბრტყეზე-კოორდინატებით (x;0;z), ხოლო YOZ სიბრტყეზე -(0;y;z) კოორდინატებით.

23. ფუნქცია. ფუნქციის გრაფიკი.ფუნქციათა კომპოზიცია.

შესაბამისობა ორ სიმრავლეს შორის.

მოცემულია ორი სიმრავლე M და K. M არის მდინარეთა სიმრავლე M={მტკვარი, რიონი, ტემზა,სენა} , ხოლო K-იმ ქვეყნების სიმრავლე, სადაც ეს მდინარეები გადის: K={ საქართველო, თურქეთი, ინგლისი, საფრანგეთი}.

ამ სიმრავლეებს შორის დამყარებულია ასეთი თანადობა: ყოველ მდინარეს შეესაბამება ქვეყანა, სადაც ის გადის. აღნიშნული შესაბამისობა გამოისახება შემდეგი სქემით:

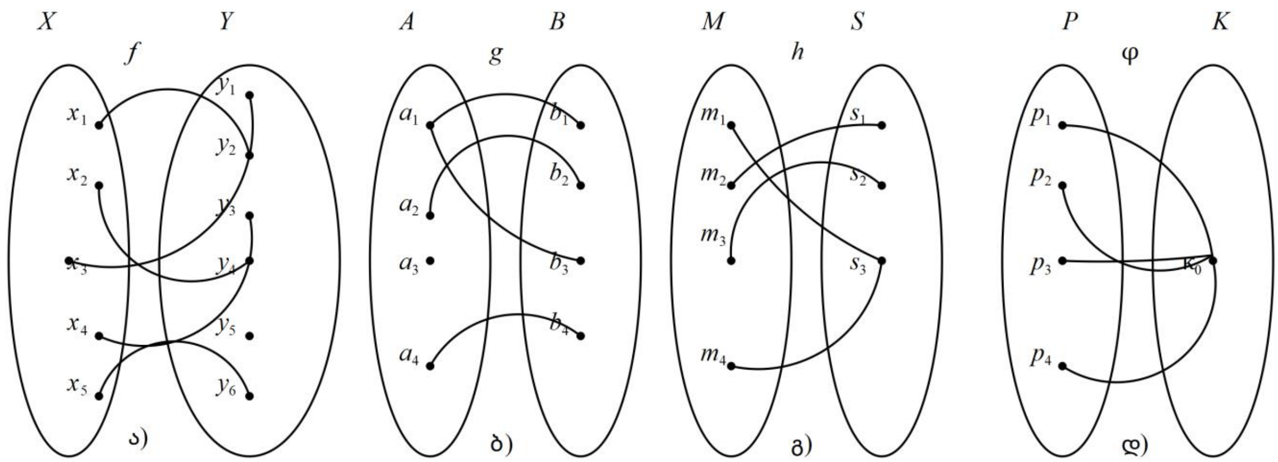


ეს შესაბამისობა შეიძლება აღინიშნოს რაიმე ასოთი, მაგ f-ით. მოცემული f შესაბამისობის მიხედვით M სიმრავლის ერთ-ერთ ელემენტს -ტემზას შეესაბამება K სიმრავლის ელემენტი-ინგლისი. ასეთ შემთხვევაში იტყვიან, რომ ინგლისი არის ტემზის სახე f შესაბამისობის მიხედვით, ხოლო ტემზა არის ინგლისის წინა სახე ამ შესაბამისობის დროს. აღნიშნული f შესაბამისობის მიხედვით, M სიმრავლის

ელემენტების სახეების სიმრავლე არის M სიმრავლის სახე, ამ შემთხვევაში ესაა K სიმრავლე; ხოლო K სიმრავლის ელემენტების წინა სახეების სიმრავლე არის K სიმრავლის წინა სახე, ამ შემთხვევაში ესაა M სიმრავლე.

ორ სიმრავლეს შორის რაიმე შესაბამისობას, როდესაც პირველი სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება მეორე სიმრავლის არაუმეტეს ერთი ელემენტისა, ფუნქცია (ასახვა) ეწოდება.

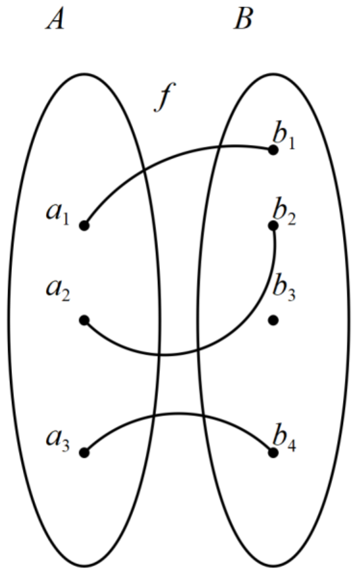
ქვემოთ გამოსახული შესაბამისობებიდან ფუნქციებია f, h და φ, g შესაბამისობა არაა ფუნქცია.



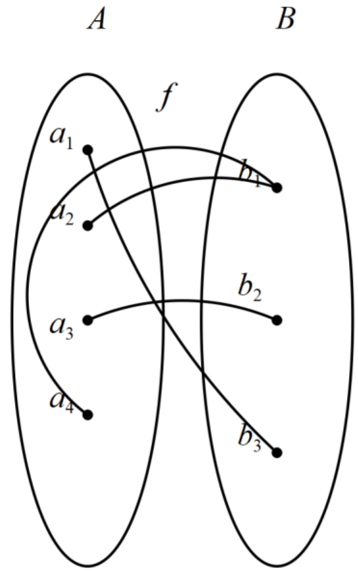
ფუნქციის (ასახვის) განსაზღვრის არე ეწოდება იმ სიმრავლეს, საიდანაც ხდება ასახვა, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე ეწოდება განსაზღვრის არის ყველა ელემენტის სახეთა სიმრავლეს.
ა) სქემის მიხედვით f ფუნქციის (ასახვის) **განსაზღვრის არეა X სიმრავლე;** მნიშვნელობათა სიმრავლეა Y სიმრავლის იმ ელემენტების სიმრავლე, რომლებიც X სიმრავლის ელემენტების სახეებს წარმოადგენს. ასეთ შემთხვევაზე იტყვიან რომ მოცემულია **f ასახვა X-დან Y სიმრავლეში.** გ) სქემის მიხედვით h ფუნქციის (ასახვის) განსაზღვრის არეა M სიმრავლე, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა-S სიმრავლე. ამ შემთხვევაში იტყვიან, რომ მოცემულია **h ასახვა M-დან S სიმრავლეზე.**
დ) სქემის მიხედვით φ ფუნქციის (ასახვის) განსაზღვრის არეა P სიმრავლე, მნიშვნელობათა სიმრავლე-K სიმრავლე. **ფუნქციის განსაზღვრის არე აღინიშნება D ასოთი, მნიშვნელობათა სიმრავლე-E ასოთი.**

სპეციალური სახის ზოგიერთი ასახვა (ფუნქცია).

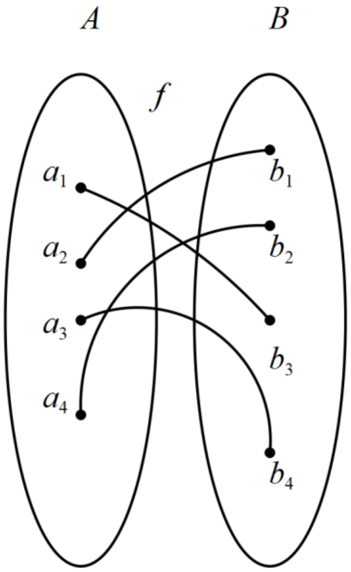
რაიმე f ასახვას (ფუნქციას) A-დან B სიმრავლეში ეწოდება **ინექციური ასახვა** (ან უბრალოდ ინექცია), თუ A სიმრავლის ნებისმიერ ორ განსხვავებულ a_1 და a_2 ელემენტს B სიმრავლის სხვადასხვა b_1 და b_2 ($b_1 \neq b_2$) ელემენტები შეესაბამება; (იხ.სქემა ე))



ე



ვ



ზ

რაიმე f ასახვას (ფუნქციას) A-დან B სიმრავლეში ეწოდება **სიურექციული** ასახვა (ან უბრალოდ სიურექცია), თუ B სიმრავლის ნებისმიერი b ელემენტისათვის მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი a ელემენტი A სიმრავლიდან, რომლის შესაბამისი ელემენტიც იქნება b; იხ.სქემა ვ).

თუ რომელიმე f ასახვა (ფუნქცია) A-დან B-სიმრავლეში არის **სიურექციული** და ამავე დროს არის **ინექციურიც**, მაშინ იტყვიან, რომ f ასახვა A-დან B-ში **არის ბიექციური ასახვა** (ან უბრალოდ ბიექცია). ასეთ ასახვას ურთიერთცალსახა ასახვასაც უწოდებენ; იხ. სქემა ზ).

თუ ფუნქციის განსაზღვრის არე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეს წარმოადგენს და ფუნქციის მნიშვნელობებიც ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ აღნიშნულ ფუნქციას რიცხვითი ფუნქციას უწოდებენ.

ნებისმიერი რიცხვითი ფუნქცია შეიძლება გამოისახოს **ფორმულის მეშვეობით (ანალიზურად)** იგულისხმება, რომ X და Y ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლეებია. თუ f ფუნქცია ისეთია, რომ X სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება Y სიმრავლის ის ელემენტი, რომელიც მიიღება X სიმრავლის დასახელებული ელემენტისათვის 3-ის მიმატებით, მაშინ f ფუნქცია შეიძლება გამოისახოს შემდეგი ფორმულით: $f(x)=x+3$.

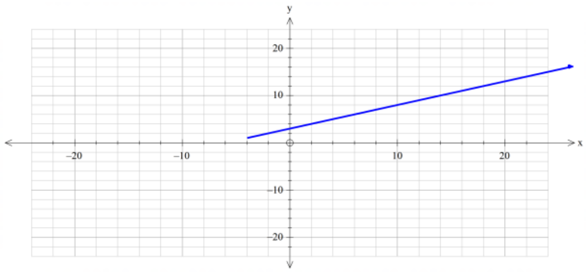
იგივე ფუნქცია შეიძლება ასეც გამოისახოს: $y=x+3$. x და y ცვლადებია; x არის დამოუკიდებელი ცვლადი, მას არგუმენტს უწოდებენ; y არის x-ზე დამოკიდებული ცვლადი, მას ფუნქციას უწოდებენ. x-ს ვაძლევთ მნიშვნელობას რის შედეგადაც y მიიღებს შესაბამის მნიშვნელობას:$y=f(x)$ არის ფუნქციის ნიშვნელობა.

ფუნქცია შეიძლება გამოისახოს **ცხრილის სახითაც:**

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1	2	0	-1	1	2	1

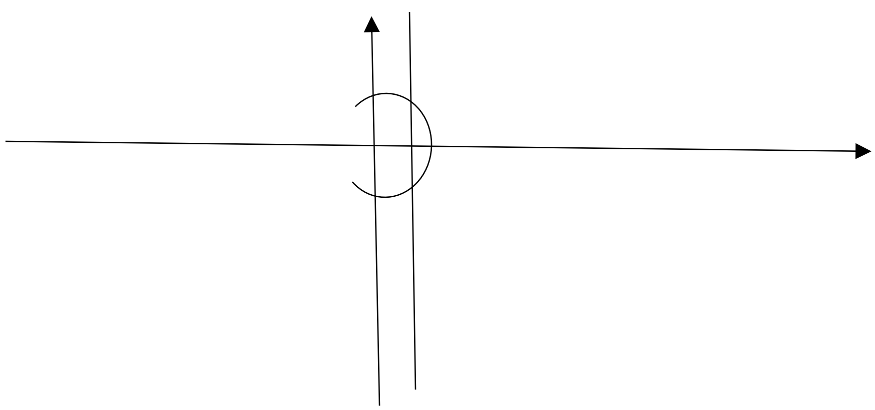
რაიმე f ფუნქციის გამოსახვა შეიძლება საკოორდინატო სიბრტყეზეც. ფუნქციის გამოსახვას **საკოორდინატო სიბრტყეზე ფუნქციის გრაფიკული გამოსახვა ეწოდება;** ხოლო საკოორდინატო სიბრტყის (x,f(x)) წერტილთა სიმრავლე f ფუნქციის გრაფიკს წარმოადგენს.

$y=0{,}5x+3$, $x\in[-4;+\infty)$ ფუნქციის გრაფიკია შემდეგი სხივი



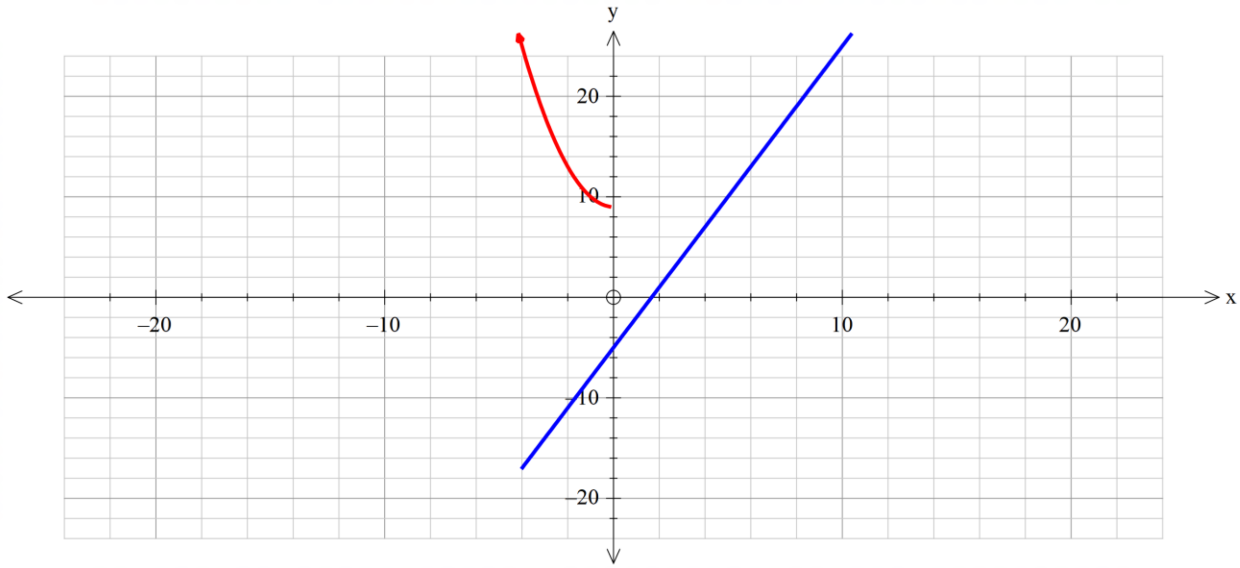
წინამდებარე გრაფიკზე მდებარე ყოველი წერტილის კოორდინატების $y=0{,}5x+3$ ფორმულაში ჩასმით მიიღება ჭეშმარიტი ტოლობა.

ქვემოთ მოცემულ ნახაზებზე გამოსახული წირი და წრფე არ წარმოადგენს ფუნქციათა გრაფიკებს, რადგან x-ის ერთ მნიშვნელობას y-ის ერთზე მეტი მნიშვნელობა **შეესაბამება(ვერტიკალის წესი):**



ფუნქცია შეიძლება მოცემული იყოს რამდენიმე განსხვავებული გამოსახულებების მეშვეობითთაც:

$$f(x)=\begin{cases} 3x-5, & x\geq 0 \\ x^2+9, & x<0 \end{cases}$$



თუ ფუნქცია მოცემულია ფორმულით და არაა მითითებული მისი განსაზღვრის არე, მაშინ იგულისხმება, რომ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არგუმენტის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლისთვისაც ფორმულას აზრი აქვს.

f ფუნქციას ეწოდება ზრდადი, რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი $x_1 < x_2$ რიცხვებისათვის სრულდება უტოლობა $f(x_1) < f(x_2)$.

მაგ. ზრდადი ფუნქციებია $f(x) = x + 3$; $g(x) = 5x - 1$; $\varphi(x) = 2x^3$.

f ფუნქციას ეწოდება კლებადი რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი $x_1 < x_2$რიცხვებისათვის სრულდება უტოლობა $f(x_1) > f(x_2)$.

მაგ. კლებადი ფუნქციებია: $g(x) = -2x$; $f(x) = -5x^3$; $\varphi(x) = -x + 8$.

თუ ფუნქცია ზრდადი ან კლებადია, მაშინ იგი თავის ყოველ მნიშვნელობას მხოლოდ ერთხელ მიიღებს.

შეიძლება ფუნქცია არც ზრდადი იყოს და არც კლებადი; მაგ $f(x) = -3$. აღნიშნული ფუნქცია არის მუდმივი ფუნქცია.

f ფუნქციას ეწოდება მუდმივი რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x_1 და x_2 რიცხვებისათვის სრულდება ტოლობა: $f(x_1) = f(x_2)$.

ფუნქცია არის ლუწი, თუ მისი განსაზღვრის არე სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ და არგუმენტის ნიშნის შეცვლა არ იწვევს ფუნქციის ნიშნის შეცვლას; $f(-x) = f(x)$.

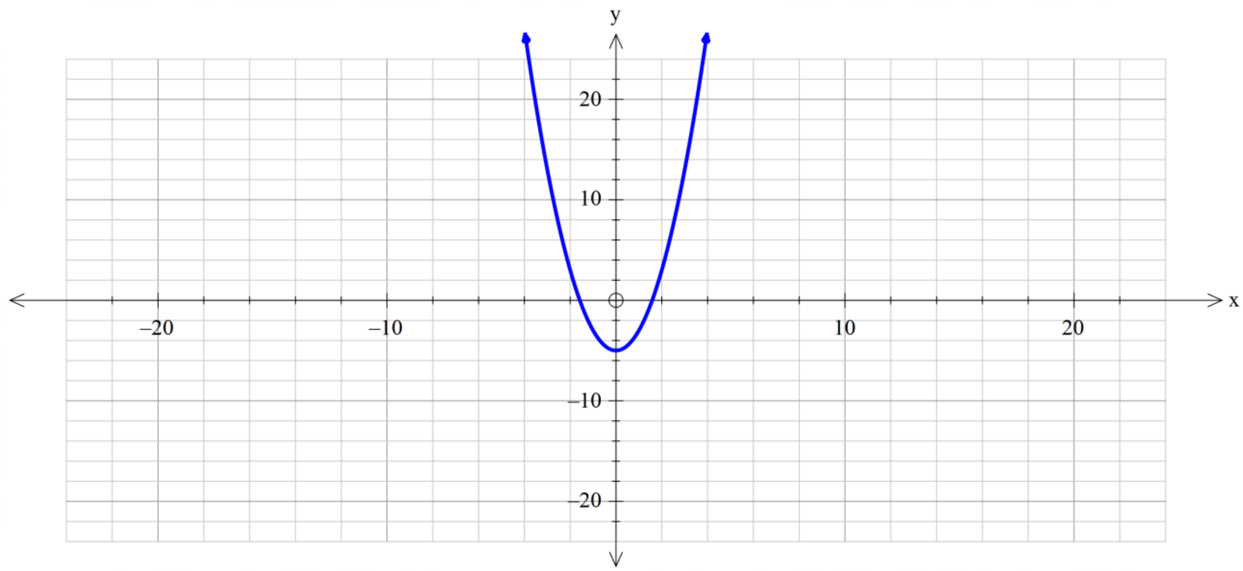
ფუნქცია არის კენტი, თუ მისი განსაზღვრის არე სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ და არგუმენტის ნიშნის შეცვლა იწვევს ფუნქციის ნიშნის შეცვლას: $f(-x) = -f(x)$.

ფუნქცია $f(x) = 2x^2 - 5$ არის ლუწი, რადგან $f(-x) = 2(-x)^2 - 5 = 2x^2 - 5 = f(x)$;

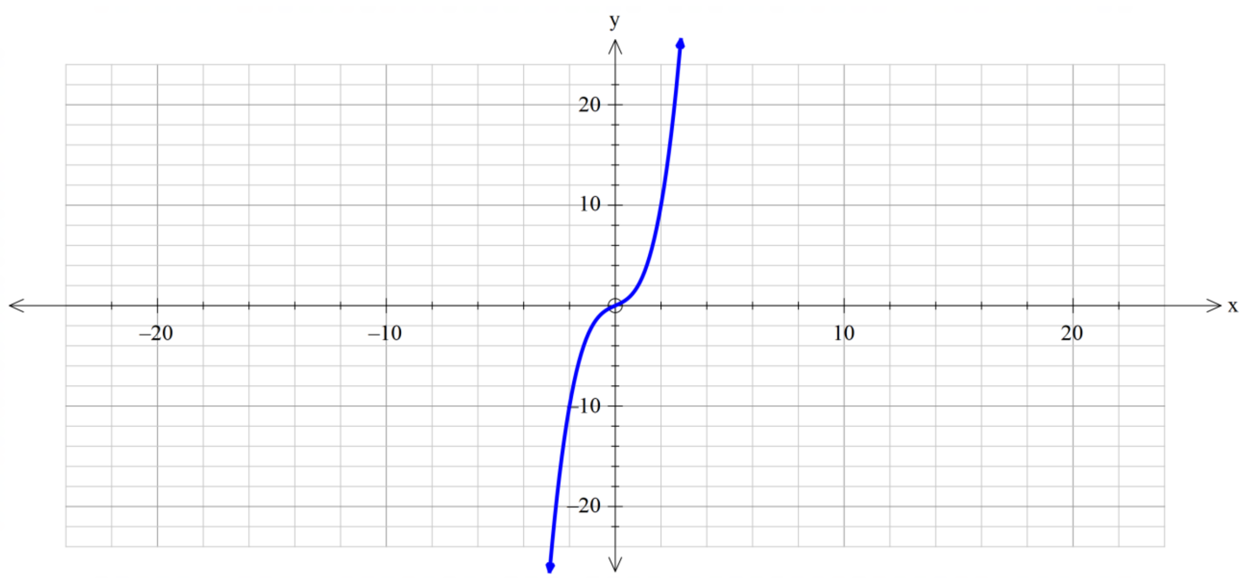
ფუნქცია $g(x) = x^3 + x$ კენტია, რადგან $g(-x) = (-x)^3 - x = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -g(x)$;

$f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციათა გრაფიკებია:

$f(x) = 2x^2 - 5$



$g(x) = x^3 + x$

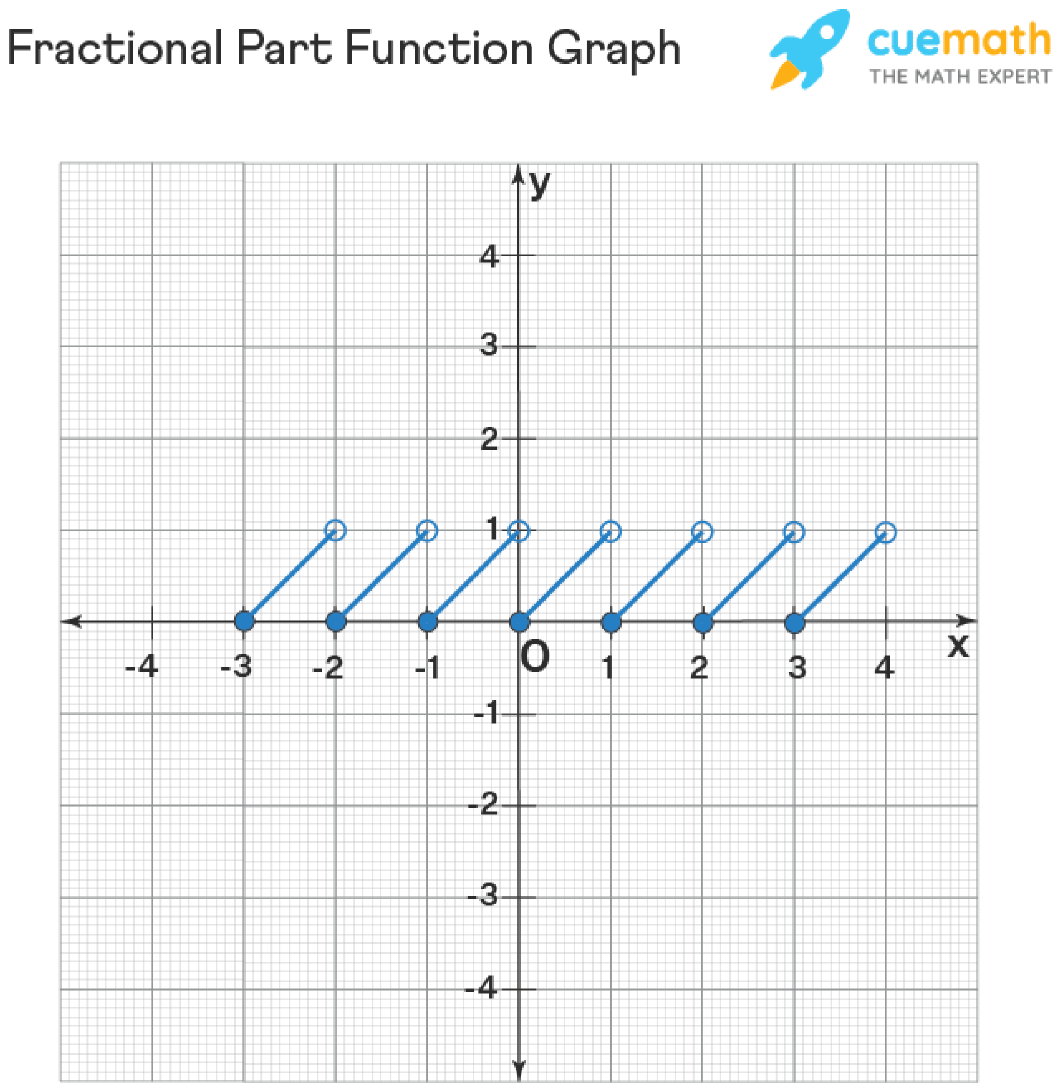


ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია OY ღერძის მიმართ. კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

შეიძლება ფუნქცია არც ლუწი იყოს და არც კენტი. მაგ,. $y = 3x - 5$; $y = x^2 - 3x + 2$

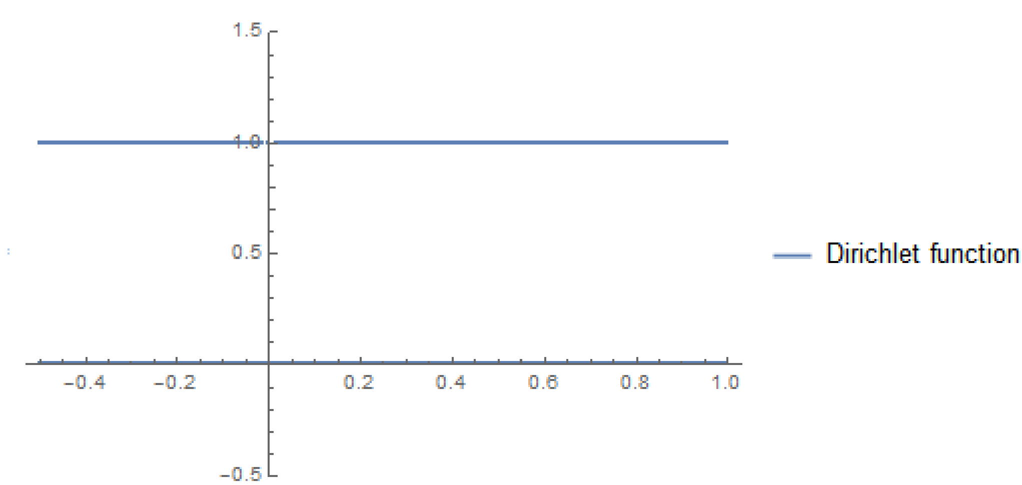
ფუნქცია არის პერიოდული, თუ არსებობს ისეთი დადებითი T რიცხვი, რომ არგუმენტისათვის მისი რამდენჯერმე მიმატება (გამოკლება) არ გამოიწვევს ფუნქციის მნიშვნელობის შეცვლას. T რიცხვს ეწოდება ფუნქციის პერიოდი. $f(x \pm Tn) = f(x)$, $n \in N, x \pm Tn$ ეკუთვნის ფუნქციის განსაზღვრის არეს.

პერიოდული ფუნქციის მაგალითია $y = \{x\}$ ფუნქცია, სადაც $\{x\}$ არის x რიცხვის წილადი ნაწილი. ამ ფუნქციის პერიოდია ნებისმიერი მთელი რიცხვი. უმცირესი დადებითი პერიოდი 1-ის ტოლია. მისი გრაფიკი წარმოდგენილია შემდეგ სურათზე



პერიოდული ფუნქციის მაგალითია დირიხლეს ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ როდესაც } x\in Q \\ 1, \text{ როდესაც } x\in I; \end{cases}$$



მისი პერიოდია ნებისმიერი რაციონალური r რიცხვი: $f(x+r)=f(x)$. **დირიხლეს ფუნქციას** უმცირესი დადებითი პერიოდი არ აქვს.

არგუმენტის იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც ფუნქციის მნიშვნელობას ნულის ტოლად აქცევენ, **ფუნქციის ნულები ეწოდება.** ფუნქციის ნულები -ესაა მოცემული ფუნქციის გრაფიკის და OX ღერძის საერთო წერტილების აბსცისები. y=f(x) ფუნქციის ნულებია $f(x)$=0 განტოლების ფესვები.

y=sinx ფუნქციას უამრავი ნული აქვს; y=3x-5 ფუნქციას მხოლოდ ერთი ნული აქვს; $y=x^2-3x+2$ ფუნქციას ორი ნული აქვს; $y=\frac{2}{x}$ ფუნქციას ნულები არ აქვს.

რაიმე f ფუნქციის ნიშანმუდმივობის შუალედებია $f(x)>0$ და $f(x)<0$ უტოლობების ამონახსნთა სიმრავლეები; ყოველ ასეთ შუალედში გრაფიკი ან მხოლოდ OX ღერძის ზემოთაა, ან -მხოლოდ ქვემოთ; პირველ შემთხვევაში ეს შუალედი წარმოადგენს **დადებითობის შუალედს,** მეორე **შემთხვევაში-უარყოფითობის შუალედს.**

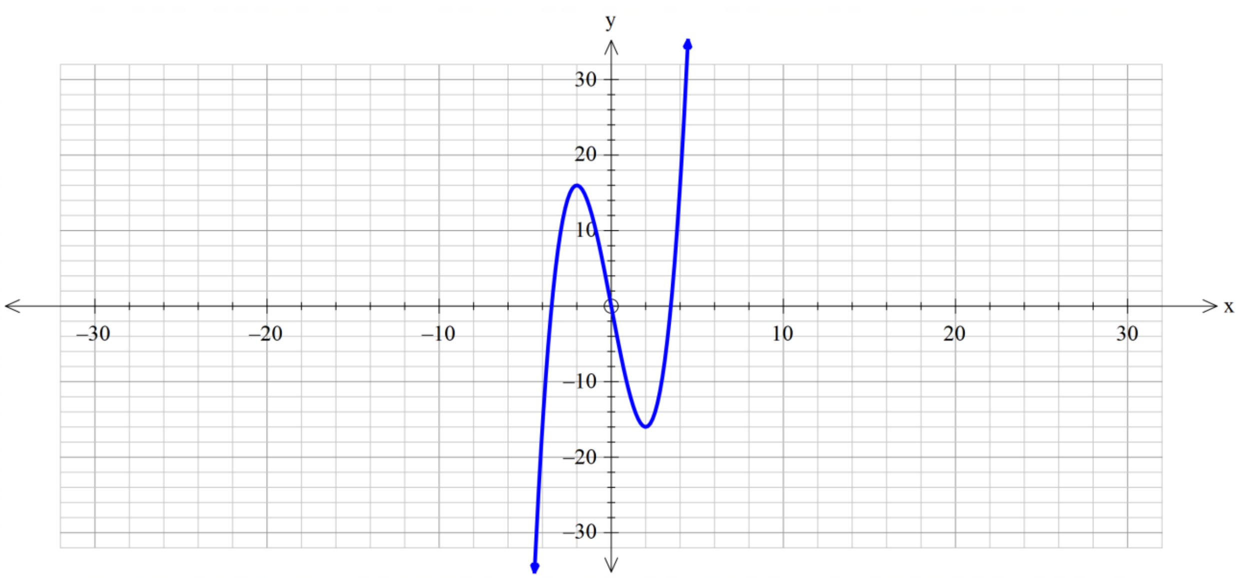
x_0 წერტილს ეწოდება რაიმე f ფუნქციის **მაქსიმუმის წერტილი,** თუ ნებისმიერი x რიცხვისათვის x_0-ის შემცველი რაიმე ღია შუალედიდან (მიდამოდან) $f(x)\le f(x_0)$.

x_0 წერტილს ეწოდება რაიმე f ფუნქციის **მინიმუმის წერტილი,** თუ ნებისმიერი x რიცხვისათვის x_0-ის შემცველი რაიმე ღია შუალედიდან (მიდამოდან) $f(x)\ge f(x_0)$.

ფუნქციის მინიმუმისა და მაქსიმუმის წერტილებს **ექსტრემუმის წერტილები** ეწოდება.

შეიძლება მოხდეს, რომ მაქსიმუმის წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა ნაკლები იყოს მინიმუმის წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობაზე.

ფუნქციის უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობა არის ფუნქციის ის მნიშვნელობა, რომელსაც არ აღემატება (რომელზე ნაკლები არაა) ფუნქციის ნებისმიერი სხვა მნიშვნელობა.



წინამდებარე სურათზე გამოსახულია y=x^3-12x ფუნქციის გრაფიკი. ფუნქციის ნულებია: x=0; $\pm2\sqrt{3}$;
დადებითობის შუალედია $(-2\sqrt{3};0)\cup(2\sqrt{3};+\infty)$; **უარყოფითობის შუალედია** $(-\infty;-2\sqrt{3})\cup(0;2\sqrt{3})$
x=-2 და x=2 წერტილები შესაბამისად მოცემული ფუნქციის **მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებია:**
$f(-2)=16,\ f(2)=-16$. მოცემული ფუნქციის **კლებადობის შუალედია**[-2;2] რიცხვითი შუალედი, **ხოლო ზრდადობის შუალედებია** $(-\infty;-2]$ და $[2;+\infty)$ რიცხვითი შუალედები.

მაგრამ $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ არ იქნება მოცემული ფუნქციის ზრდადობის შუალედი, რადგან ამ სიმრავლის $x_1=-2$ და $x_2=2$ $\ x_1<x_2$ წერტილებისთვის $f(x_1)>f(x_2)$

f ფუნქციას ეწოდება ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, თუ არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x რიცხვისთვის $f(x) \le M$ ($f(x) \ge M$).

ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, თუ ის შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ასევე ქვემოდან. y=sinx ფუნქცია შემოსაზღვრული ფუნქციაა, რადგან $-1 \le sinx \le 1$;

$y = ax^2$ ფუნქცია, როდესაც a>0 (a<0), ქვემოდან (ზემოდან) შემოსაზღვრულია.

თუ ფუნქცია არაა შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, მას შემოუსაზღვრელ ფუნქციას უწოდებენ: $f(x) = 3x - 1$ ფუნქცია შემოუსაზღვრელია.

თუ რაიმე შესაბამისობით სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება ისევ ეს ელემენტი, მაშინ მოცემულ შესაბამისობას **იგივური ასახვა (ფუნქცია) ეწოდება** და აღინიშნება I ასოთი. **იგივური ასახვის** მაგალითია რაიმე გეომეტრიული ფიგურის 360⁰-იანი კუთხით მობრუნება-$R_o^{360^0}$(მობრუნების ცენტრია კოორდინატთა სათავე).

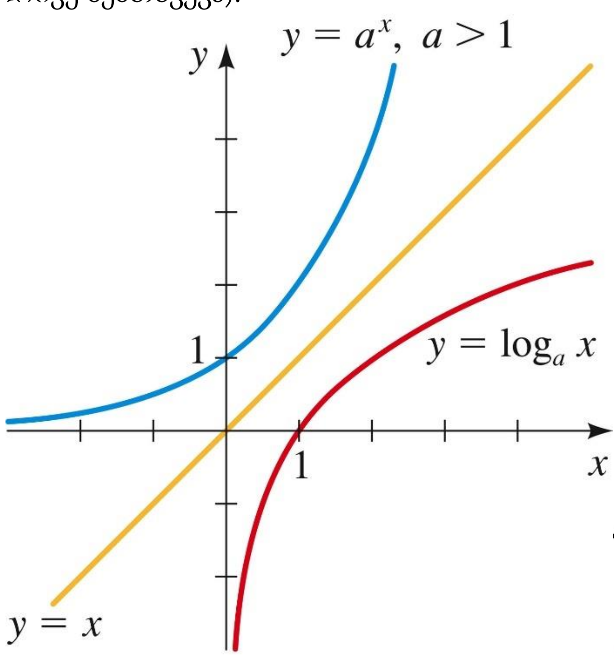
შექცეული ფუნქცია. ვთქვათ მოცემულია f ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა X, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა Y. თუ რაიმე შესაბამისობით Y სიმრავლის ყოველ ელემენტს X სიმრავლის ის ელემენტი შეესაბამება, რომელსაც f ასახვით Y სიმრავლის აღნიშნული ელემენტი შეესაბამებოდა (ანუ f ფუნქცია არის ბიექცია), მაშინ იტყვიან, რომ მოცემულია f ფუნქციის შექცეული ფუნქცია და აღინიშნება f^{-1} სიმბოლოთი. f ფუნქციას **კი შექცევადი ფუნქციას უწოდებენ.**

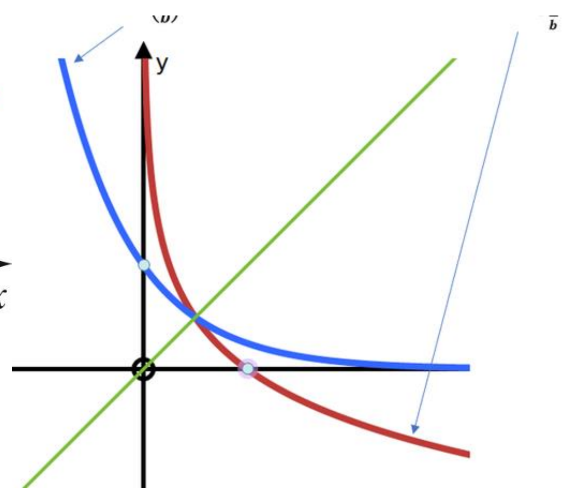
f^{-1} ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება Y, მნიშვნელობათა სიმრავლე -X.

f და f^{-1} ფუნქციებს ურთიერთშექცეულ ფუნქციებს უწოდებენ.

შექცეული გააჩნია მხოლოდ ისეთ ფუნქციას, რომელიც მთელ თავის განსაზღვრის არეზე ყოველ მნიშვნელობას იღებს მხოლოდ ერთხელ.

ურთიერთშექცეულ ფუნქციათა გრაფიკები სიმეტრიულია y=x წრფის მიმართ. ურთიერთშექცეული ფუნქციებია $y = a^x$ და $y = \log_a x$ ფუნქციები. ქვემოთ მოცემულ სურათზე გამოსახულია მათი გრაფიკები (ორივე შემთხვევა): 0<a<1 ცისფერი- $y = a^x$;წითელი- $y = \log_a x$





ფუნქციათა კომპოზიცია. თუ f და g მოცემული ფუნქციებია, მაშინ f და g ფუნქციათა კომპოზიცია გამოისახება $(gof)(x)$ სიმბოლოთი და წარმოადგენს g(f(x)) ფუნქციას;

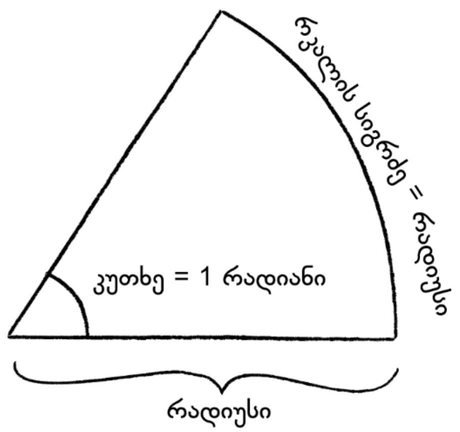
f(x)=2x-1 და g(x)=3x² ფუნქციების შემთხვევაში $(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x-1) = 3(2x-1)^2$

$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(3x^2) = 2 \cdot 3x^2 - 1 = 6x^2 - 1$

შეიძლება ფუნქციათა კომპოზიციის მნიშვნელობის პოვნაც, მაგალითად, როდესაც x=1;

$(gof)(1) = 3(2 \cdot 1 - 1)^2 = 3;$ $(fog)(1) = 5.$

24. კუთხის გრადუსული და რადიანული ზომა.



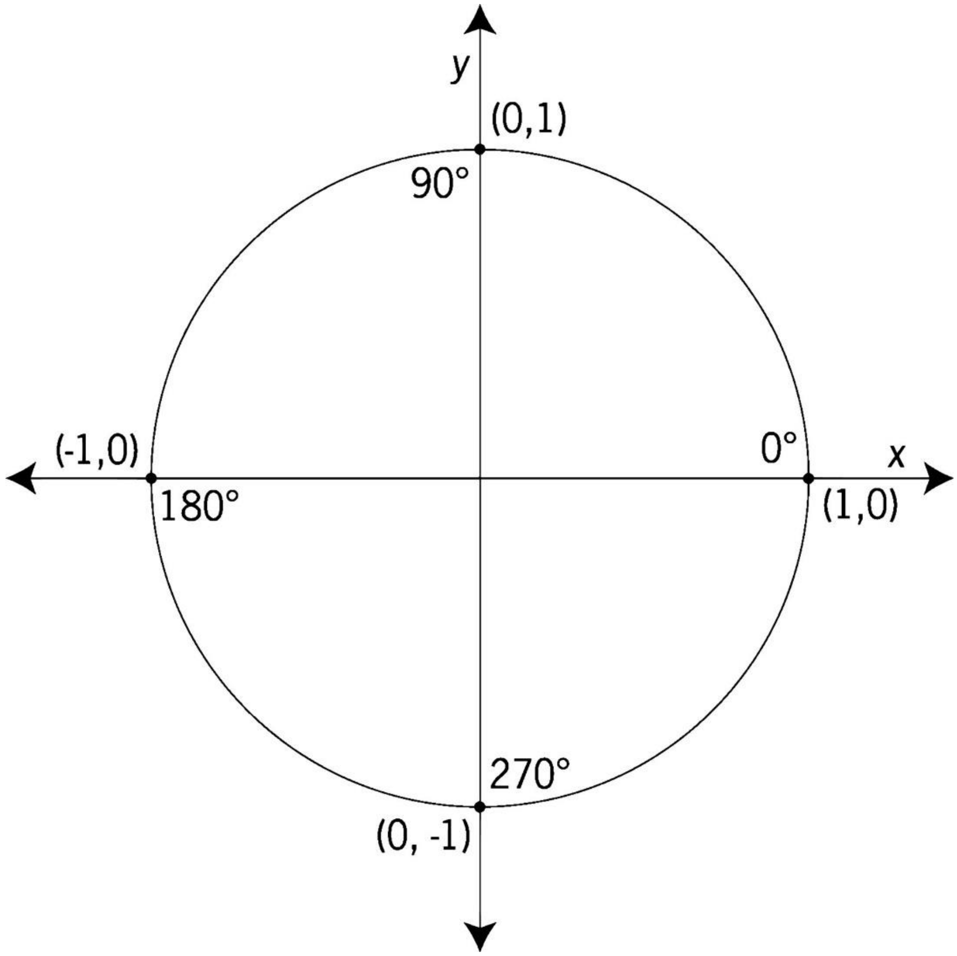
რადიანი უდრის წრის ორ რადიუსს შორის არსებულ კუთხეს, როლის მომჭიმავი რკალის სიგრძეც რადიუსის ტოლია. **1 რადიანი=**$(\frac{\mathbf{180}}{\boldsymbol{\pi}})^{\mathbf{0}} \approx \mathbf{57^0}$ შესაბამისად $\mathbf{1^0} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{180}} = \mathbf{0,017}$ **რადიანი.**

შესაბამისად, კუთხის გრადუსული ზომის რადიანულ ზომაში გამოსახვისათვის , მოცემული გრადუსული ზომა უნდა გავამრავლოთ $\frac{\pi}{180}$ –ზე, ხოლო კუთხის რადიანული ზომის გრადუსულ ზომაში გამოსახვისათვის, მოცემული რადიანული ზომა უნდა გავამრავლოთ $\frac{180}{\pi}$-ზე.

მაგალითად: $150^0 = 150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ რადიანი; $\frac{2\pi}{3}$რადიანი=$\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 120^0$.

25. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები: სინუსი, კოსინუსი და ტანგენსი.

წრეწირს რომლის სათავე საკოორდინატო სიბრტყის სათავეა, ხოლო რადიუსი ერთი ერთეულის ტოლია, **ერთეულოვანი წრეწირი ეწოდება.** სათავე: O(0;0) რადიუსი :R=1



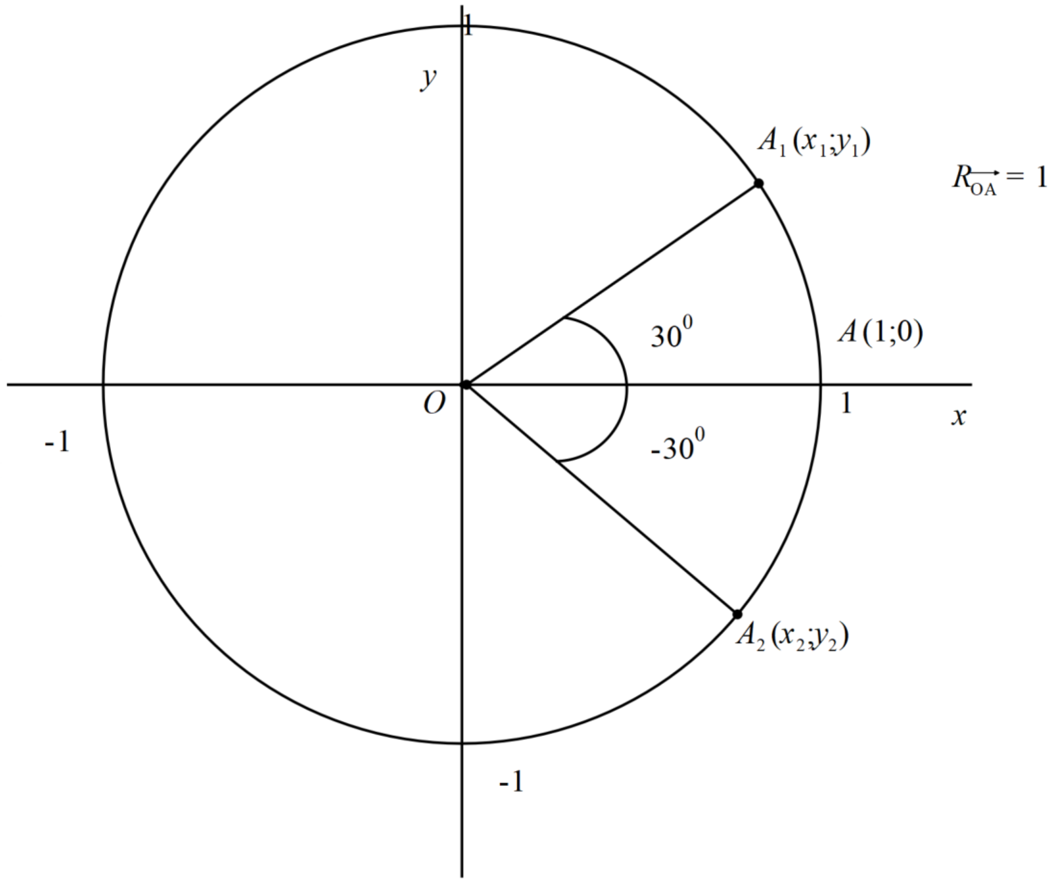
ყოველი ერთეულოვანი წრეწირის სიგრძე 2π ერთეულის ტოლია. $C=2\pi$.
ყოველი ერთეულოვანი წრეწირის ფართობი π ერთეულის ტოლია, $S=\pi$.

განვიხილოთ ერთეულოვანი წრეწირი, რომლის რადიუსია OA მონაკვეთი, ამასთან A წერტილის კოორდინატებია A(1;0). OA რადიუსს ვუწოდოთ საწყისი რადიუსი. თუ მოცემულ საწყის რადიუს გდავაადგილებთ საათის ისრის მოძრაობის **საწინააღმდეგო მიმართულებით(ანუ** ox ღერძის ზედა ნახევარსიბრტყეში), მაშინ მობრუნების კუთხე ითვლება დადებითად. ასეთ მობრუნებას **მზარდი კუთხის მიმართულებით მობრუნებასაც უწოდებენ.**

ე.ი. OA საწყისი რადიუსი აისახება OA_1 რადიუსში.

თუ მოცემულ საწყის რადიუსს გადავაადგილებთ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით (ანუ ox ღერძის ქვედა **ნახევარსიბრტყეში), მაშინ მობრუნების კუთხე ითვლება უარყოფითად.**

ე.ი. OA საწყისი რადიუსი აისახება OA_2 რადიუსში.



განვიხილოთ ერთეულოვანი წრეწირი, რომლის საწყისი რადიუსია OA, ამასთან A წერტილის კოორდინატებია A(1;0). მოცემული OA საწყისი რადიუსის O სათავის მიმართ, α დადებითი მახვილი კუთხით ($0^0 < \alpha < 90^0$) მობრუნებისას A(1;0) წერტილი აისახება $A_1(x;y)$ წერტილში, ხოლო OA საწყისი რადიუსი აისახება OA_1 რადიუსში.$A_1(x;y)$ წერტილიდან აბსცისათა და ორდინატთა ღერძებამდე მანძილები შესაბამისად მისი ორდინატის და აბსცისას ტოლია. ე.ი. $A_1B=y$ და $OB=x$. მივიღეთ მართკუთხა სამკუთხედი OA_1B, რომლის ერთ-ერთი მახვილი კუთხეა α, კათეტებია x და y, ხოლო ჰიპოტენუზა ერთი ერთეულის ტოლია.

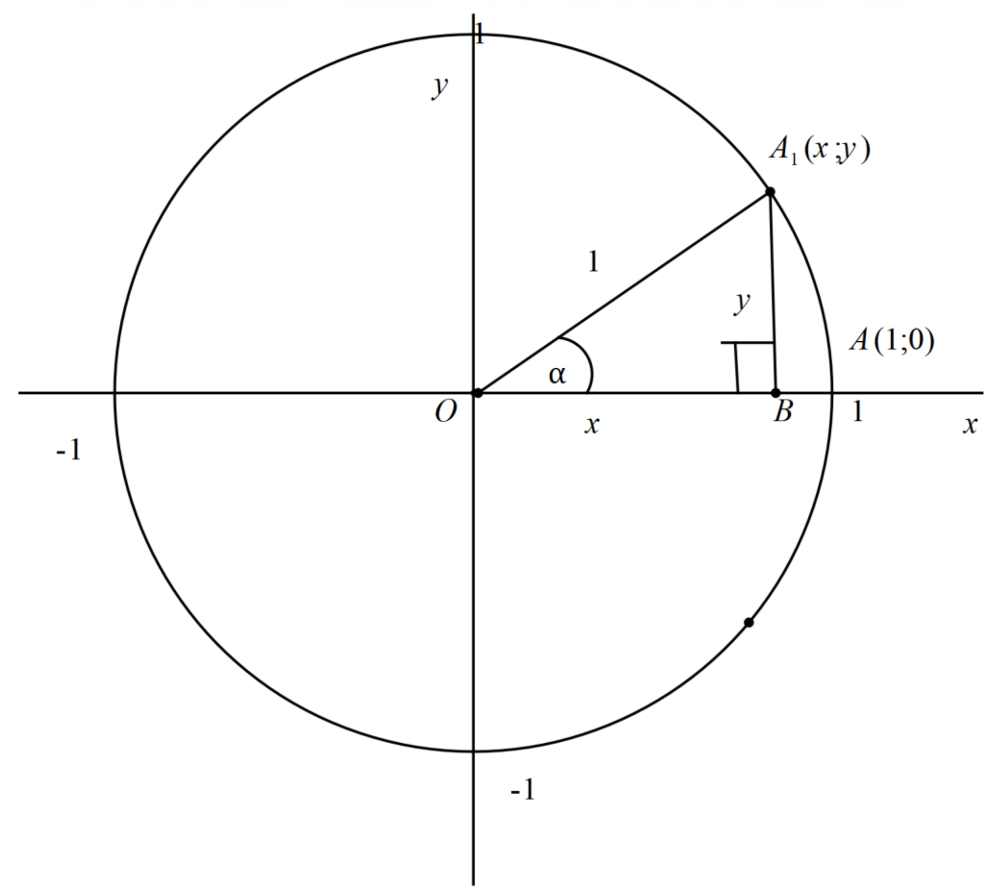
ვიცით, რომ მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდება ჰიპოტენუზასთან, ამ კუთხის სინუსის ტოლია. შესაბამისად, მოცემულ შემთხვევაში მივიღებთ, რომ α ნამდვილი რიცხვის სინუსი ეწოდება $A_1(x;y)$ წერტილის ორდინატს. ე.ი. $\sin\alpha=y$.

აგრეთვე, ვიცით რომ მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის მიმდებარე კათეტის შეფარდება ჰიპოტენუზასთან ამ კუთხის კოსინუსის ტოლია. შესაბამისად, მოცემულ შემთხვევაში მივიღებთ, რომ α ნამდვილი რიცხვის კოსინუსი ეწოდება $A_1(x;y)$ წერტილის აბსცისას. ე.ი. $\cos\alpha=x$.

აგრეთვე, ვიცით რომ მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდება მიმდებარე კათეტთან ამ კუთხის ტანგენსის ტოლია. შესაბამისად მოცემულ შემთხვევაში მივიღებთ, რომ α ნამდვილი რიცხვის ტანგენსი ეწოდება $A_1(x;y)$ წერტილის ორდინატისა და აბსცისის ფარდობას. ე.ი. $tg\alpha = \frac{y}{x}$, ანუ $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ $(cos\alpha \neq 0)$.

აგრეთვე, ვიცით რომ მართკუთხა საკუთხედში მახვილი კუთხის მიმდებარე კათეტის შეფარდება მოპირდაპირე კათეტთან ამ კუთხის კოტანგენსის ტოლია. შესაბამისად მოცემულ შემთხვევაში მივიღებთ, რომ

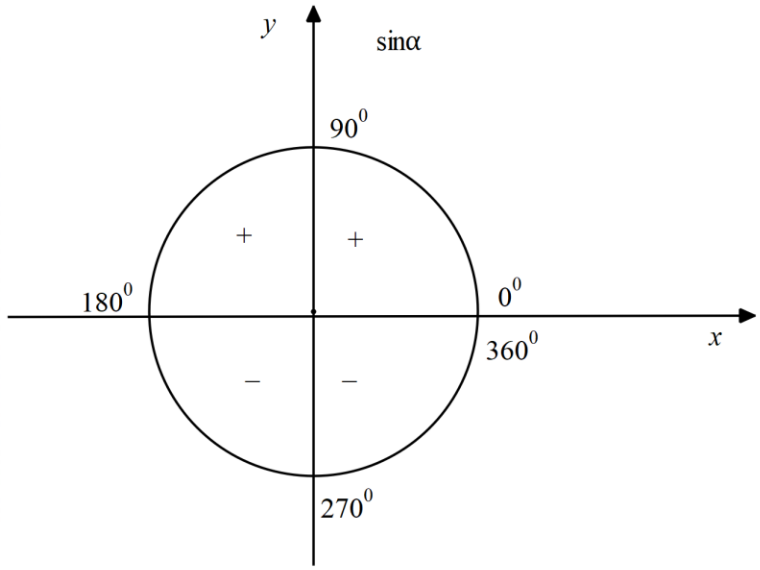
α ნამდვილი რიცხვის კოტანგენსი ეწოდება $A_1(x; y)$ წერტილის აბსცისას და ორდინატის ფარდობას.
ე.ი. $ctg\alpha = \frac{x}{y}$, ანუ $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$.

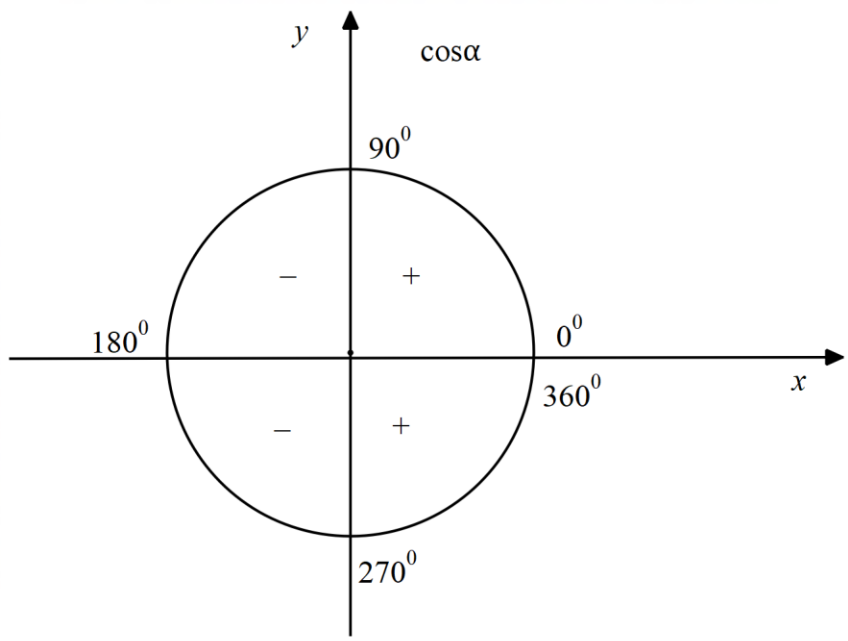


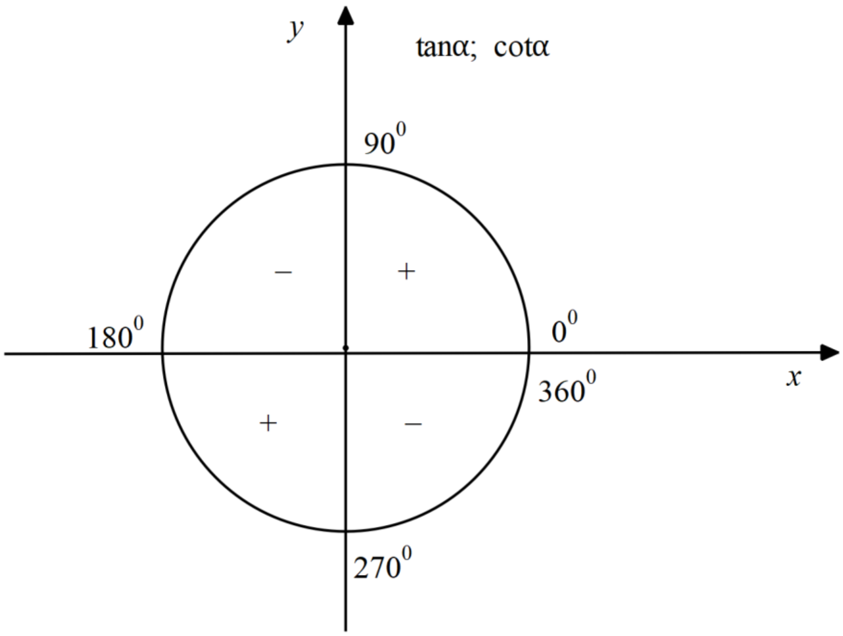
დამოკიდებულებები ერთიდაიგივე არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის. ძირითადი ტრიგონომეტრიული ფორმულები

1.$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$; 2. $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$; 3. $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$; 4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$; 5. $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$; 6. $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ნიშნები საკოორდინატო მეოთხედებში.

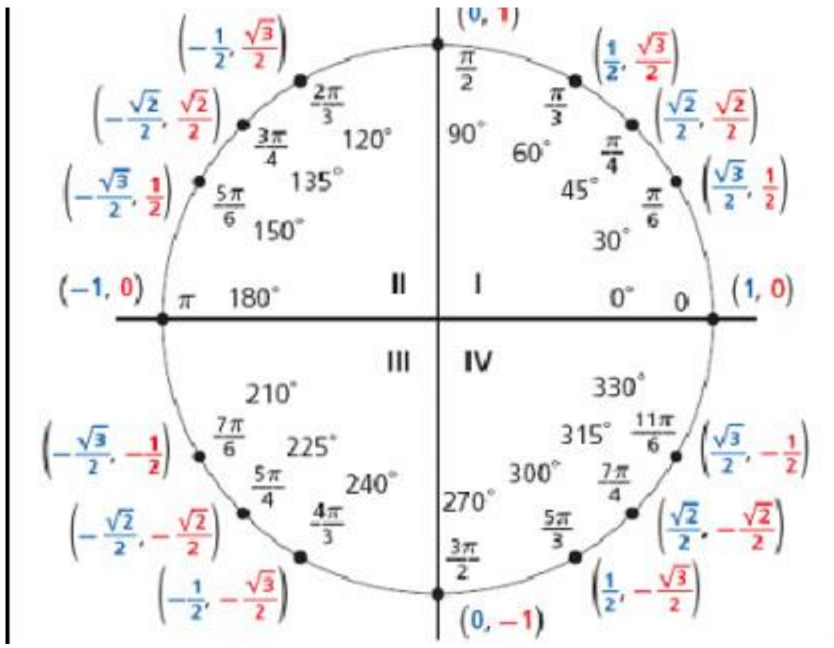

y
sinα
90⁰
180⁰
0⁰
360⁰
x
270⁰
+
+
–
–


y
cosα
90⁰
180⁰
0⁰
360⁰
x
270⁰
–
+
–
+



სინუსის, კოსინუსის, ტანგენსის და კოტანგენსის მნიშვნელობები $0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$

rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
degree	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o	270^o	360^o
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0
cot	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-



დაყვანის ფორმულები:

$$\sin(x \pm \frac{\pi}{2}) = \pm\cos(x) \qquad \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x) \qquad \sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$$
$$\cos(x \pm \frac{\pi}{2}) = \mp\sin(x) \qquad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x) \qquad \cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$$
$$\tan(x \pm \frac{\pi}{2}) = \mp\cot(x) \qquad \tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot(x) \qquad \tan(x \pm \pi) = \tan(x)$$
$$\csc(x \pm \frac{\pi}{2}) = \pm\sec(x) \qquad \csc(\frac{\pi}{2} - x) = \sec(x) \qquad \csc(x \pm \pi) = -\csc(x)$$
$$\sec(x \pm \frac{\pi}{2}) = \mp\csc(x) \qquad \sec(\frac{\pi}{2} - x) = \csc(x) \qquad \sec(x \pm \pi) = -\sec(x)$$
$$\cot(x \pm \frac{\pi}{2}) = \mp\tan(x) \qquad \cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan(x) \qquad \cot(x \pm \pi) = \cot(x)$$

y=sinx ფუნქციის თვისებები:

1. $x \in R \Leftrightarrow D(y) = R$

2. $y \in [-1; 1] \Leftrightarrow E(y) = [-1; 1]$

3. ფუნქცია კენტია: sin(-x)=-sinx

4. ფუნქცია პერიოდულია, უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π (sin(x+$2\pi n$)=sinx, n$\in Z$)

5.მოცემული ფუნქცია ზრდადია IV და I საკოორდინატო მეოთხედებში ანუ [-$\frac{\pi}{2}$;$\frac{\pi}{2}$] შუალედში;კლებადია II და III საკოორდინატო მეოთხედებში, ანუ [$\frac{\pi}{2}$;$\frac{3\pi}{2}$] შუალედში.

6. ფუნქციის ნულებია არგუმენტის πn (n∈ Z) მნიშვნელობები.

y=cosx ფუნქციის თვისებები:

1. $x \in R \Leftrightarrow D(y) = R$

2. $\in [-1;1] \Leftrightarrow E(y) = [-1;1]$

3. ფუნქცია ლუწია: cos(-x)=cosx

4. ფუნქცია პერიოდულია, უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π (cos(x+$2\pi n$)=cosx, n∈ Z)

5. .მოცემული ფუნქცია ზრდადია III და IV საკოორდინატო მეოთხედებში ანუ [-π; 0] შუალედში;კლებადია I და II საკოორდინატო მეოთხედებში, ანუ $[0;\pi]$ შუალედში.

6. ფუნქციის ნულებია არგუმენტის $\frac{\pi}{2} + \pi n$ (n∈ Z) მნიშვნელობები.

y=tgx ფუნქციის თვისებები:

1. $x \in R\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\} \Leftrightarrow D(y) = R\backslash\ \{\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\}$

2. $y \in R \Leftrightarrow E(y) = R$;

3. ფუნქცია კენტია: tg(-x)=-tgx

4. ფუნქცია პერიოდულია, უმცირესი დადებითი პერიოდია π (tg(x+ πn)=tgx, n∈Z);

5. მოცემული ფუნქცია ზრდადია მთელ თავის განსაზღვრის არეზე;

6. ფუნქციის ნულებია არგუმენტის πn (n∈Z) მნიშვნელობები.

y=ctgx ფუნქცია და მისი გრაფიკი

1. $x \in R\backslash\{\pi n, n \in Z\} \Leftrightarrow D(y) = R\backslash\ \{\pi n, n \in Z\}$

2. . $y \in R \Leftrightarrow E(y) = R$;

3. ფუნქცია კენტია: ctg(-x)=-ctgx;

4. ფუნქცია პერიოდულია, უმცირესი დადებითი პერიოდია π ((ctg(x+ πn)=ctgx, n∈Z);

5. მოცემული ფუნქცია კლებადია მთელ თავის განსაზღვრის არეზე;

6. . ფუნქციის ნულებია არგუმენტის $\frac{\pi}{2} + \pi n$ (n∈Z) მნიშვნელობები.

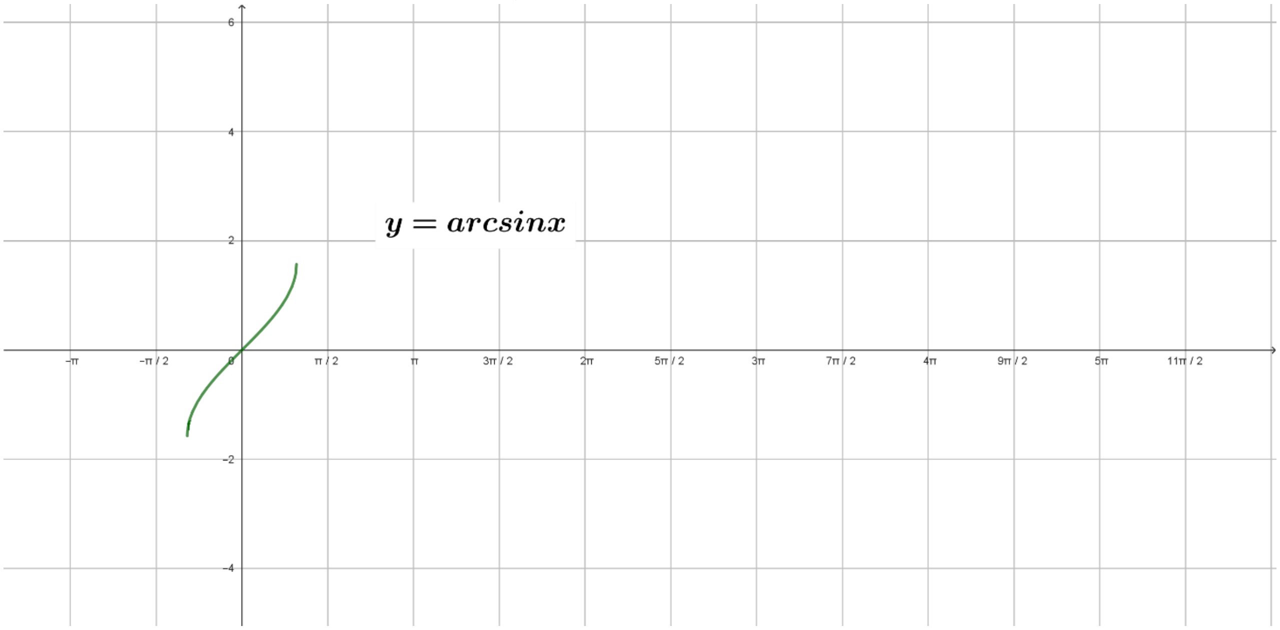
შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები:

y=sinx ფუნქცია ზრდადია $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ შუალედში; ამიტომ არსებობს მისი შექცეული ფუნქცია ამ შუალედში, რომელსაც არკსინუსი ეწოდება და ასე გამოისახება: arcsinx. აქედან გამომდინარე y=arcsinx ფუნქციის განსაზღვრის არე D=[-1;1], ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე E=$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

თუ $a \in [-1;1]$, მაშინ arcsine არის კუთხე $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ შუალედიდან, რომლის სინუსიც a-ს ტოლია; ანუ sin(arcsina)=a. arcsin(-x)=-arcsinx, ამიტომ y=arcsinx ფუნქცია კენტია.

y=arcsinx ფუნქცია ზრდადია, როგორც ზრდადი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. მისი გრაფიკი სიმეტრიულია y=sinx ფუნქციის გრაფიკისა y=x წრფის მიმართ(როგორც ურთიერთშექცეულ ფუნქციათა გრაფიკები)

y=arcsinx ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე:

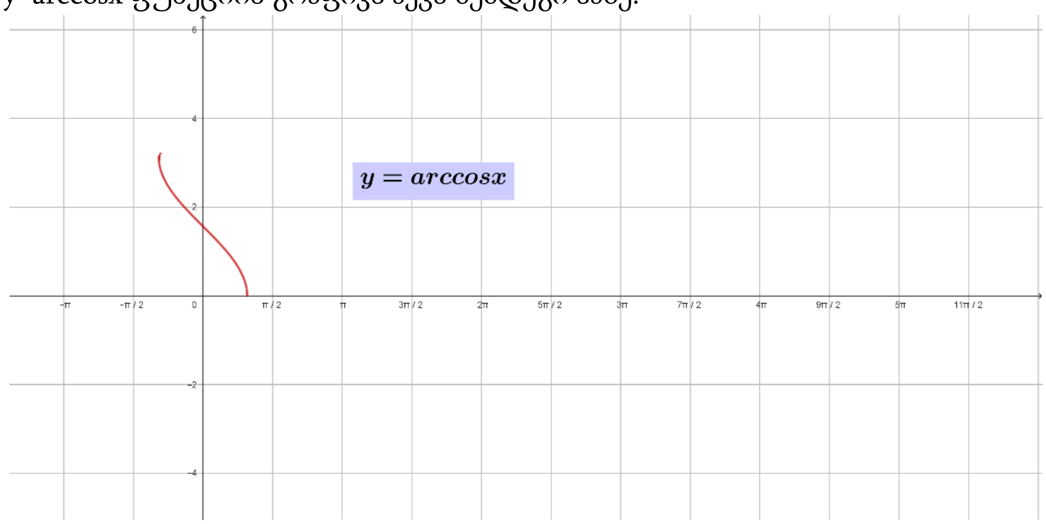


y=cosx ფუნქცია კლებადია $[0;\pi]$ შუალედში; ამიტომ არსებობს მისი შექცეული ფუნქცია ამ შუალედში, რომელსაც არკკოსინუსი ეწოდება და ასე გამოისახება: arccosx. აქედან გამომდინარე y=arccosx ფუნქციის განსაზღვრის არე D=[-1;1], ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე E=$[0;\pi]$.

თუ $a \in [-1;1]$, მაშინ arccosa არის კუთხე $[0;\pi]$ შუალედიდან , რომლის კოსინუსიც a-ს ტოლია; ანუ cos(arccosa)=a.   arccos(-x)= π-arccosx.

y=arccosx ფუნქცია კლებადია, როგორც კლებადი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. მისი გრაფიკი სიმეტრიულია y=cosx ფუნქციის გრაფიკისა y=x წრფის მიმართ (როგორც ურთიერთშექცეული ფუნქციების გარფიკები).

y=arccosx ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე:



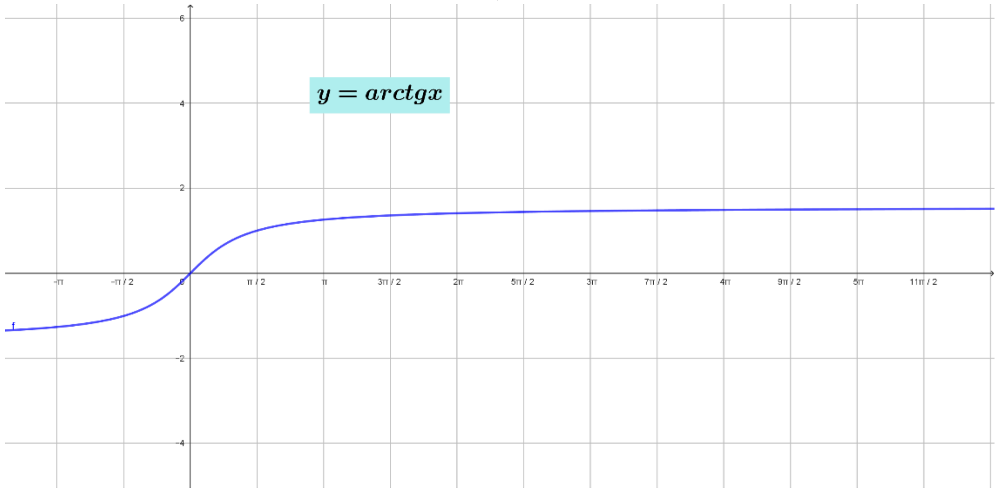
y=tgx ფუნქცია ზრდადია $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ შუალედში; ამიტომ არსებობს მისი შექცეული ფუნქცია ამ შუალედში, რომელსაც არკტანგენსი ეწოდება და ასე გამოისახება: arctgx. აქედან გამომდინარე y=arctgx ფუნქციის განსაზღვრის არე D=R, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე E=$(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.

ნებისმიერი ნამდვილი a რიცხვისათვის arctga არის კუთხე $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ შუალედიდან, რომლის ტანგენსიც a-ს

ტოლია; ანუ tg(arctga)=a, arctg(-x)=-arctgx, ამიტომ y=arctgx ფუნქცია კენტია.

y=arctgx ფუნქცია ზრდადია, როგორც ზრდადი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. მისი გრაფიკი სიმეტრიულია y=tgx ფუნქციის გრაფიკისა y=x წრფის მიმართ (როგორც ურთიერთშექცეულ ფუნქციათა გრაფიკები).

y=arctgx ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე:

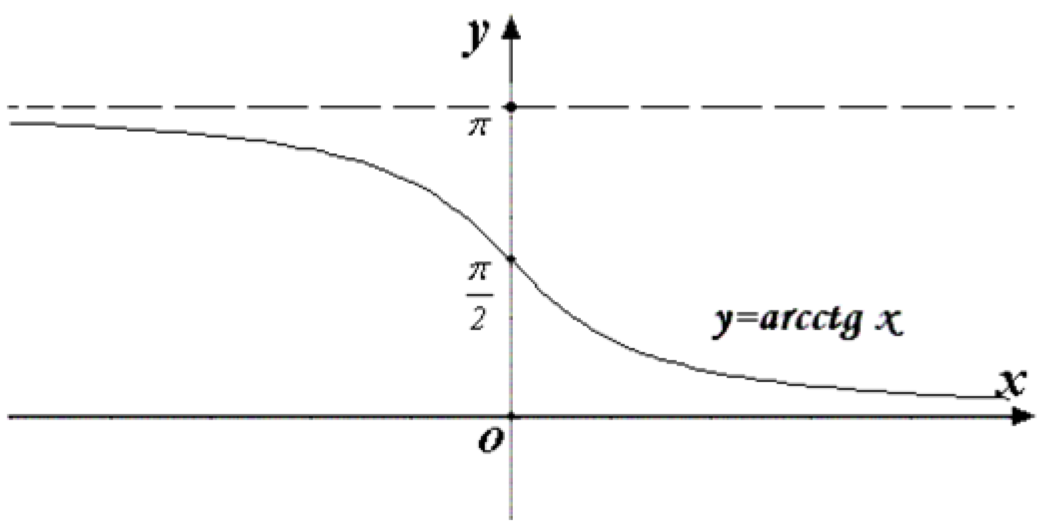


y=ctgx ფუნქცია კლებადია $(0;\pi)$ შუალედში; ამიტომ არსებობს მისი შექცეული ფუნქცია ამ შუალედში, რომელსაც არკკოტანგენსი ეწოდება და ასე გამოისახება: arcctgx. აქედან გამომდინარე y=arcctgx ფუნქციის განსაზღვრის არე D=R, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე $E=(0;\pi)$.

ნებისმიერი ნამდვილი a რიცხვისათვის arcctga არის კუთხე $(0;\pi)$ შუალედიდან, რომლის კოტანგენსიც a-ს ტოლია; ანუ ctg(arcctga)=a, arcctg(-x)=π-arcctgx.

y=arcctgx ფუნქცია კლებადია, როგორც კლებადი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. მისი გრაფიკი სიმეტრიულია y=ctgx ფუნქციის გრაფიკისა y=x წრფის მიმართ (როგორც ურთიერთშექცეულ ფუნქციათა გრაფიკები).

y=arcctgx ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე:



$$\arcsin x=\begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2},\ x\in[0;1] \\ -\arccos\sqrt{1-x^2},\ \ x\in[-1;0] \\ arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1;1) \\ arcctg\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ x\in(0;1] \\ -\pi+arcctg\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ x\in[-1;0) \end{cases}$$

$$\arccos x=\begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2},\ x\in[0;1] \\ \pi-\arcsin\sqrt{1-x^2},\ \ x\in[-1;0] \\ arctg\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \qquad x\in(0;1] \\ \pi+arctg\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ x\in[-1;0) \\ arcctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1;1) \end{cases}$$

$$arctgx=\begin{cases} \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x\in R \\ \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x\geq 0 \\ -\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad x<0 \\ arcctg\frac{1}{x}, \qquad x>0 \\ -\pi+arcctg\frac{1}{x}, \quad x<0 \end{cases}$$

$$arcctgx=\begin{cases} \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x\geq 0 \\ \pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x<0 \\ \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad x\in R \\ arctg\frac{1}{x}, \qquad x>0 \\ \pi+arctg\frac{1}{x}, \quad x<0 \end{cases}$$

arcsinx+arccosx=$\frac{\pi}{2}$, arctgx+arcctgx=$\frac{\pi}{2}$.

26. განტოლება, განტოლებათა სისტემა.

ცვლადის შემცველ ტოლობას **განტოლება** ეწოდება. იმის მიხედვით, თუ რამდენ ცვლადს შეიცავს განტოლება, იგი შეიძლება იყოს ერთცვლადიანი, ორცვლადიანი და ა.შ. ax=b ტოლობა, სადაც a,b$\in R$, x ცვლადია, **ერთცვლადიან განტოლებას წარმოადგენს.**

ცვლადის იმ მნიშვნელობას, რომელიც მოცემულ ერთცვლადიან განტოლებას გადააქცევს ჭეშმარიტ ტოლობად, განტოლების **ამონახსნი (ფესვი)** ეწოდება; x+3=5 განტოლების ამონახსნია 2.

განტოლებას შეიძლება ჰქონდეს ერთი ან რამდენიმე ამონახსნი, ან საერთოდ არ ჰქონდეს ამონახსნი.

თუ განტოლება შეიცავს ერთზე მეტ ცვლადს, მაშინ მისი ამონახსნი ეწოდება ისეთ დალაგებულ წყვილს, დალაგებულ სამეულს და ა.შ, რომელიც მოცემულ განტოლებას ჭეშმარიტ ტოლობად გადააქცევს.

განტოლების ამოხსნა ნიშნავს განტოლების ამონახსნთა სიმრავლის პოვნას.

ერთი და იმავე ცვლადების შემცველ განტოლებებს ეწოდება ტოლფასი, თუ მათ აქვთ ამონახსნთა ერთი და იგივე სიმრავლე. მოცემული განტოლებისაგან თავისი ტოლფასი განტოლება მიიღება განტოლების ორივე მხარისათვის რაიმე რიცხვის ან ცვლადიანი გამოსახულების მიმატებით (გამოკლებით): განტოლების ერთი მხარიდან მეორეში რაიმე წევრის მოპირდაპირე ნიშნით გადატანით; განტოლების ორივე მხარის გამრავლებით (გაყოფით) რაიმე არანულოვან რიცხვზე ან ცვლადიან გამოსახულებაზე, რომელიც განსაზღვრულია მასში შემავალი ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის.

რამდენიმე ცვლადის შემცველ განტოლებათა სასრულ სიმრავლეს განტოლებათა სისტემა ეწოდება.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2\mathrm{x}+b_2y=c_2 \end{cases}$$ სადაც $a_1;\ b_1;\ c_1;\ a_2;b_2;\ c_2 \in R,\ x$ და y ცვლადებია.

განტოლებათა სისტემის ამონახსნი არის ამ სისტემაში შემავალი ყველა განტოლების საერთო ამონახსნი. სისტემის ყველა ამონახსნის ერთობლიობას სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე ეწოდება. სისტემის ამოხსნა ნიშნავს მოცემული სისტემის აონახსნთა სიმრავლის პოვნას.

ერთი და იგივე ცვლადების შემცველი სისტემებს ეწოდება ტოლფასი, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ერთნაირია.

განტოლებათა მოცემული სისტემის ტოლფასი სისტემა მიიღება, როდესაც სისტემის რომელიმე განტოლებას ცვლიან თავისი ტოლფასი განტოლებით: ერთი განტოლებიდან გამოსახავენ რომელიმე ცვლადს და ჩასვამენ სისტემის სხვა განტოლებაში; რომელიმე განტოლებას ცვლიან ამავე განტოლებისა და სისტემის სხვა განტოლების შეკრების (გამოკლების) შედეგად მიღებული ახალი განტოლებით.

27. ერთუცნობიანი წრფივი განტოლებები

kx+b=0 სახის განტოლებას, სადაც k და b მუდმივი რიცხვებია, ხოლო x-ცვლადია, წრფივი ერთუცნობიანი განტოლება ეწოდება. განტოლების ამონახსნია y=kx+b წრფივი ფუნქციის გრაფიკის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისა.

მოცემულ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, როდესაც k$\neq$ 0, ხოლო b ნებისმიერი რიცხვია; ამ

შემთხვევაში განტოლების ამონახსნი გამოისახება შემდეგნაირად: x=-$\frac{b}{k}$; მოცემულ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი (ანუ x∈ $\emptyset$), როდესაც k=0, ხოლო b≠ 0; მოცემულ განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი (ანუ x∈ R) როდესაც k=b=0; 0· $x = 0$ ⇒x∈ R.

თუ წრფივი ფუნქციის არგუმენტის მნიშვნელობებს ერთი და იმავე a ერთეულით გავზრდით , მაშინ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობები ka ერთეულით შეიცვლება (გაიზრდება, თუ k>0 და შემცირდება თუ k<0) სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც: თუ არგუმენტის მუდმივი ნაზრდის შემთხვევაში ფუნქციის შესაბამისი ნაზრდები ტოლია, მაშინ ეს ფუნქცია წრფივი ფუნქციაა.
ერთზე მეტი უცნობის შემცველ განტოლებას, რომლის ამონახსნებსაც მთელ რიცხვებში ვეძებთ, დიოფანტეს განტოლება ეწოდება. საზოგადოდ განვიხილოთ my-nx=c⇒y=$\frac{n}{m}x + \frac{c}{m}$ სადაც n,c∈ $Z, m \in N$ ვთქვათ ამ განტოლების ამონახსნია წყვილი $(x_0; y_0)$; $x_0; y_0 \in Z$ მაშინ ამ განტოლების მთელი ამონახსნები მიიღება ფორმულით $\begin{cases} x = x_0 + mk \\ y = y_0 + nk, \quad k \in Z \end{cases}$

28.ერთუცნობიანი კვადრატული განტოლებები.

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ **განტოლებას,** სადაც a, b, c-მუდმივი რიცხვებია, $a \neq 0$, ხოლო x ცვლადია, კვადრატული განტოლება ეწოდება. a –ს ეწოდება პირველი კოეფიციენტი, b-ს -მეორე კოეფიციენტი, c-ს თავისუფალი წევრი.

კვადრატული განტოლების ფესვებს პოულობენ- x=$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;
$b^2 - 4ac$ გამოსახულებას ეწოდება კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი და D ასოთი აღინიშნება.
განიხილება სამი შემთხვევა:
I. თუ D>0, კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი განსხვავებული ფესვი: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$;

II. თუ D=0, კვადრატულ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი (ორი ტოლი ფესვი):$x = -\frac{b}{2a}$;
III. თუ D<0, კვადრატულ განტოლებას არა აქვს ნამდვილი ფესვები.
არსებობს $ax^2 + bx + c = 0$ კვადრატული განტოლების ამოხსნის კიდევ ერთი ფორმულა, რომელსაც იყენებენ მხოლოდ მაშინ, როდესაც b კოეფიციენტი ლუწი რიცხვია; მოცემული კვადრატული განტოლებისათვის ადგენენ დისკრიმინანტის შემცველ შემდეგ გამოსახულებას $D_1 = (\frac{b}{2})^2 - ac$; ფესვის ფორმულას ექნება ასეთი სახე : $x = \frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{D_1}}{a}$.
თუ $ax^2 + bx + c = 0$ კვადრატული განტოლების b და c კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც (ან ორივე) ნულის ტოლია, მაშინ ასეთ კვადრატულ განტოლებას ეწოდება არასრული კვადრატული განტოლება.
თუ კვადრატულ განტოლებაში x^2-ის კოეფიციენტი a=1, მაშინ კვადრატულ განტოლებას ეწოდება დაყვანილი კვადრატული განტოლება და ასე გამოისახება: $x^2 + px + q = 0$. თუ აღნიშნული განტოლების დისკრიმინანტი არაუარყოფითია, მისი ფესვები ასეთი სახეს იღებს: $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.
ვიეტის თეორემა. თუ $ax^2 + bx + c = 0$ კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი არაუარყოფითია, მაშინ მოცემული განტოლების ფესვების მიმართ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
როდესაც $ax^2 + bx + c = 0$ კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი არაუარყოფითია, სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

თუ $\frac{c}{a} < 0$, მაშინ კვადრატული განტოლების ფესვები სხვადასხვანიშნიანია; ამასთან თუ $-\frac{b}{a} > 0$ $\left(-\frac{b}{a} < 0\right)$, მოდულით დიდი ფესვი დადებითია (უარყოფითია).
თუ $\frac{c}{a} > 0$, მაშინ კვადრატული განტოლების ფესვები ერთნაირნიშნიანია; ამასთან თუ $-\frac{b}{a} > 0$ $\left(-\frac{b}{a} < 0\right)$, ფესვები დადებითია (უარყოფითია).

29. კვადრატული სამწევრი.

$ax^2 + bx + c$ გამოსახულებას, სადაც a, b, c-მუდმივი რიცხვებია, $a \neq 0$, ხოლო x ცვლადია,კვადრატული სამწევრი ეწოდება.
კვადრატული სამწევრის დისკრიმინანტი იგივეა, რაც შესაბამისი კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი; მისი ფესვებიც იგივეა, რაც შესაბამისი კვადრატული განტოლების ფესვები. მოცემული კვადრატული სამწევრის მამრავლებად დაშლა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც D≥ 0;

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

ანუ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
განვიხილოთ მაგალითი: $2x^2 + 3x - 2 = 2(x + 2)(x - 0{,}5) = (x + 2)(2x - 1)$.

30. ორუცნობიანი ალგებრულ განტოლებათა სისტემები.

რამდენიმე ცვლადის შემცველი განტოლებების სასრულ სიმრავლეს **განტოლებათა სისტემა** ეწოდება.
ვიტყვით, რომ მოცემულია n ცვლადიანი m განტოლების სისტემა, თუ იგი შეიცავს n რაოდენობის ცვლადს და m რაოდენობის განტოლებას.
განტოლებათა სსისტემის ამონახსნი ეწოდება მოცემულ სისტემაში შემავალი ყოველი განტოლების საერთო ამონახსნს, ანუ სისტემის ამონახსნში მასში შემავალ ყოველ განტოლებას აქცევს ჭეშმარიტ ტოლობად.
სისტემის ყველა ამონახსნთა ერთობლიობას, განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე ეწოდება.
განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ნიშნავს, მისი ამონახსნთა სიმრავლის პოვნას, ან იმის დადგენას, რომ მოცემულ სისტემას ამონახსნი არ გააჩნია.
განტოლებათა სისტემის ამონახსნი, იქიდან გამომდინარე თუ რამდენ ცვლადიანია მოცემული სისტემა, წარმოადგენს რიცხვთა დალაგებულ წყვილს, სამეულს და ა.შ....
თუ სისტემა არის ორცვლადიანი, ხოლო ცვლადები აღნიშნულია x და y სიმბოლოებით, მაშინ სისტემის

ამონახსნია რიცხვთა დალაგებული წყვილი (წყვილები) $(x;y)$
თუ სისტემა არის სამცვლადიანი, ხოლო ცვლადები აღნიშნულია x, y და z სიმბოლოებით, მაშინ სისტემის ამონახსნია რიცხვთა დალაგებული სამეული (სამეულები) $(x;y;z)$

განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე შეიძლება იყოს 1) სასრული სიმრავლე 2) უსასრულო სიმრავლე, 3) ცარიელი სიმრავლე.

თუ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი ცარიელი სიმრავლეა, მაშინ სისტემას არათავსებადი ეწოდება. ამონახსნთა სიმრავლის არსებობის შემთხვევაში კი სისტემას თავსებადი ეწოდება.

ერთიდაიმავე ცვლადების შემცველ განტოლებათა სისტემებს ეწოდებათ ტოლფასი, თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ერთიმეორის ტოლია, როდესაც თითოეული ამონახსნი დალაგებულია ერთიდაიგივე თანმიმდევრობით.

სისტემის ამოხსნის პროცესში, მოცემული სისტემა თანდათან იცვლება მისი ტოლფასი მარტივი სისტემით, მანამ სანამ არ ვიპოვით მოცემული სისტემის ამონახსნს.

სისტემის ამოხსნის პროსეში გამოიყენება შემდეგი **თვისებები**: 1) თუ სისტემის ერთ-ერთ ან ყოველ განტოლებას შევცვლით მისი ტოლფასი განტოლებით, მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტემას.2) თუ სისტემის ერთ-ერთი განტოლებიდან ერთ-ერთ ცვლადს გამოვსახავთ დანარჩენი წევრებით და მიღებულ გამოსახულებას ჩავსვამთ სხვა განტოლებაში, მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტემას.
3) თუ სისტემის ნებისმიერ განტოლებას შევცვლით განტოლებით, რომელიც მიიღება მისი მიმატებით ან გამოკლებით ამ სისტემის სხვა ნებისმიერ განტოლებასთან, მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტემას.
განტოლებათა სისტემის განტოლებების შეკრება-გამოკლებისას, მოცემულ განტოლებათა წევრები ჯგუფდება (იკრიბება და აკლდება) წევრ-წევრად.
4) თუ სისტემის თითოეულ განტოლებას გავამრავლებთ ან გავყოფთ ნულის არატოლ, ნებისმიერ, თუნდაც ერთიმეორესგან განსხვავებულ რიცხვებზე, მივიღებთ მოცემული სისტემის ტოლფას სისტემას.

წრფივი ორუცნობიანი განტოლებათა სისტემა მოიცემა შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$a_1; a_2;\ b_1; b_2;\ c_1; c_2 \in R$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია ხოლო x და y ცვლადებია. a_1 და a_2 x-ცვლადის კოეფიციენტებია; b_1 და b_2 -y ცვლადის კოეფიციენტებია, ხოლო c_1 და c_2 -თავისუფალი წევრებია.

თუ $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \neq \frac{c_2}{c_1}$ მაშინ მოცემული **სისტემის ამონახსნი ∅ სიმრავლეა.**

თუ $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1}$ და $\frac{c_2}{c_1}$ ნებისმიერია , მაშინ მოცემული სისტემის ამონახსნია **(x;y) რიცხვთა ერთადერთი წყვილი.**

თუ $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$ მაშინ მოცემულ სისტემას აქვს **უამრავი ამონახსნი.**

წრფივ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნისთვის ვიყენებთ შემდეგ ხერხებს: 1) ჩასმის ხერხი; 2) ალგებრული შეკრების ხერხი; 3) გრაფიკული ხერხი.

თუ განტოლებათა სისტემის ერთ-ერთი ან ყოველი განტოლების ერთი მაინც რომელიმე ცვლადი მოცემულია ხარისხის მაჩვენებლით ვიტყვით, რომ სახეზეა არაწრფივ განტოლებათა სისტემა.

არაწრფივ განტოლებათა სისტეის ამოხსნისთვის გამოიყენება როგორც ალგებრული შეკრების და ჩასმის მეთოდები, აგრეთვე აღნიშვნის მეთოდი, ცალკეულ განტოლებათა გაერთმნიშვნელიანება და შესაძლებელია განტოლებათა ერთიმეორეზე გაყოფაც. ხოლო თუ განტოლებათა სისტემის ერთი მაინც განტოლება მოცემულია ნამრავლის ნულთან ტოლობით, მაშინ მოცემულ თითოეულ თანამამრავლს ცალ-ცალკე გავუტოლებთ ნულს და ამოვხსნით. განვიხილოთ სისტემა სადაც ერთი განტოლება წრფივია, ხოლო მეორე განტოლების ხარისხი არ აღემატება ორს.

$$\begin{cases} y-2x=4 \\ x^2-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+4 \\ x^2-2x-4-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+4 \\ x^2-2x-8=0 \end{cases}$$

კვადრატული განტოლების ფესვებია: -2 და 4

შესაბამისად y_1 და y_2 ტოლია 0 და 12. ე.ი. სისტემის ამონახსნია: (-2;0) და (4;12) რიცხვთა დალაგებული წყვილი.

31. ამოცანები განტოლებისა და განტოლებათა სისტემის შედგენაზე.

მოსწავლემ კომპიუტერის კლავიატურაზე გეგმით გათვალისწინებულ დროში უნდა აკრიფოს სიტყვათა გარკვეული რაოდენობა. ის წუთში 15 სიტყვას კრეფს. თუკი წუთში 5 სიტყვით მეტს აკრეფს, მოსწავლე მთელ სამუშოას შეასრულებს გათვალისწინებულზე 12 წუთით ადრე. რა დროში უნდა დაემთვარებინა მოსწავლეს მთელი სამუშაო გეგმის მიხედვით?

ამოხსნა

ვთქვათ, მოსწავლეს მთელი სამუშაოს შესრულება გეგმის მიხედვით უნდა დაემთავრებინა x წუთში. მაშინ მთელი სამუშაო, ანუ ასაკრეფი სიტყვების რაოდენობა იქნებოდა 15x. თუკი მოსწავლე წუთში 15+5=20 სიტყვას აკრეფს, მაშინ ის მთელი სამუშოას შესრულებას (x-12) წუთს მოანდომებს, რის გამოც ასაკრეფი სიტყვების რაოდენობა 20(x-12)-ის ტოლი იქნება. აქედან გამომდინარე, შედგება განტოლება 15x=20(x-12) რომლის ამოხსნის შედეგად მიიღება x=48. პას: მოსწავლეს გეგმის მიხედვით სამუშაო უნდა შეესრულებინა 48 წუთში.

თზომავალმა მდინარის დინების მიმართულებით 3 საათში 81 კ გაიარა, ხოლო მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით 2 საათში -46 კმ. იპოვეთ თზომავალის საკუთარი სიჩქარე და მდინარის დინების სიჩქარე.

ამოხსნა

ვთქვათ, თზომავალის საკუთარი სიჩქარეა xკმ/სთ, ხოლო მდინარის დინების სიჩქარე კი-y კმ/სთ. აქედან გამომდინარე, თზომავალის სიჩქარე მდინარის დინების მიმართულებით იქნება (x+y)კმ/სთ, ხოლო მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით (x-y)კმ/სთ. ამოცანის პირობის თანახმად, თზომავალი მდინარის დინების მიმართულებით 3 საათში გაივლიდა 3(x+y)=81 კმ-ს, ხოლო მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით 2 საათში 2(x-y)=46 კმ-ს, ანუ შედგება ასეთი სისტემა:

$$\begin{cases} 3(x+y)=81 \\ 2(x-y)=46 \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია რიცხვთა წყვილი (25;2)

პას: თზომავალის საკუთარი სიჩქარეა 25 კმ/სთ; მდინარის დინების სიჩქარეა 2 კმ/სთ.

32. რიცხვითი უტოლობები

თუ a,b$\in R$ რიცხვებისათვის a>b (a≥b) ან a<b (a≤b) უტოლობა სრულდება, მას ეწოდება ჭეშმარიტი რიცხვითი უტოლობა.

>-ით ან <-ით გამოსახულ უტოლობებს ეწოდება მკაცრი უტოლობები, ხოლო ≥-ით ან ≤-ით გამოსახულ უტოლობებს არამკაცრი უტოლობები.

რიცხვითი უტოლობების თვისებები. a,b,c,d$\in R$, $n \in N$:

1. a>b ⇒b<a;

2. a>b, b>c ⇒ a>c; უტოლობის ამ თვისებას **ტრანზიტულობა ეწოდება;**

3. a>b, c-რაიმე რიცხვია ⇒a+c>b+c;

4. a>b, c>0⇒ ac>bc;
a>b, c<0 ⇒ ac<bc;

5. a>b და a,b-ერთნაირნიშნიანია⇒ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

6. a>b, c>d⇒a+c>b+d;

7. a>b, c<d⇒a-c>b-d;

8. თუ a,b,c,d დადებითი რიცხვების შემთხვევაში a>b და c>d⇒ ac>bd;

9. თუ a და b დადებითი რიცხვების შემთხვევაში a>b, ხოლო n∈N (n>1) ⇒ $a^n > b^n$;

10. თუ a და b დადებითი რიცხვების შემთხვევაში a>b, ხოლო n∈N (n>1) ⇒ $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

რამდენიმე მნიშვნელოვანი უტოლობა.

1. $|a+b| \leq |a| + |b|$, სადაც a∈R, b∈R, ტოლობა მიიღება მხოლოდ მაშინ, როდესაც a და b ერთნაირნიშნიანი რიცხვებია.

2. a+$\frac{1}{a} \geq 2$, სადაც a>0; ტოლობა მიიღება, როდესაც a=1.

3. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, სადაც a>0,b>0; ტოლობა მიიღება როდესაც a=b. $\sqrt{ab}$ ეწოდება ორი რიცხვის გეომეტრიული საშუალო, $\frac{a+b}{2}$-კი ორი რიცხვის არითმეტიკული საშუალო.

4. 1:$\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \leq \sqrt{ab}$, სადაც a>0,b>0; ტოლობა მიიღება, როდესაც a=b. 1:$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{2ab}{a+b}$ სიდიდეს ორი რიცხვის ჰარმონიული საშუალო ეწოდება. ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას
1:$\frac{1}{n}(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}) \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

5. $\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right| \leq \sqrt{\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}{n}}$ სადაც $a_1, a_2, \ldots a_n \in R$, ტოლობა მიიღება იმ შემთხვევაში, როდესაც $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

6. $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leq \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+\cdots+{b_n}^2}$

7. **ჩებიშევის უტოლობა.**

თუ $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ და $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \le \frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}$$

ხოლო თუ $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ და $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$ სრულდება უტოლობა

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \ge \frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{n}.$$

33. უტოლობა, უტოლობათა სისტემა.

გამომდინარე იქედან, თუ რამდენ ცვლადს შეიცავს, უტოლობა შეიძლება იყოს ერთცვლადიანი, ორცვლადიანი და ა.შ.

ერთცვლადიანი უტოლობის ამონახსნი ეწოდება ცვლადის იმ მნიშვნელობას, რომელიც მოცემულ უტოლობას ჭეშმარიტ რიცხვით უტოლობად აქცევს. თუ უტოლობა შეიცავს ერთზე მეტ ცვლადს, მაშინ მისი ამონახსნი ეწოდება რიცხვთა დალაგებულ წყვილს, დალაგებულ სამეულს და ა.შ., რომელიც მოცემულ უტოლობას ჭეშმარიტ რიცხვით უტოლობად აქცევს.

უტოლობის ამონახსნები ჩაიწერება რიცხვითი შუალედის სახით, ან რაიმე რიცხვთა, რიცხვთა წყვილების, რიცხვთა სამეულებია და ა.შ. სიმრავლის სახით (სიმრავლე გამოსახულია ელემენტების ჩამოთვლით), ან ცარიელი სიმრავლის სახით.

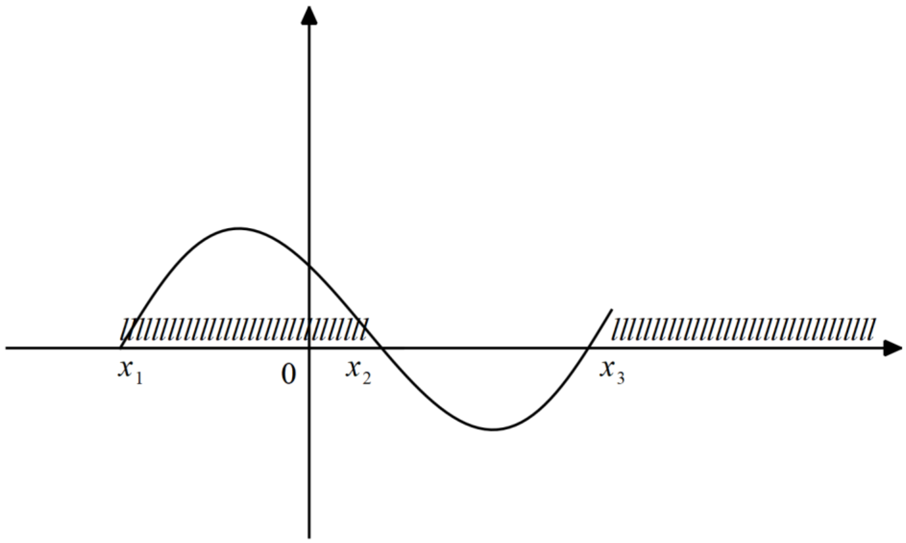
უტოლობის ამოხსნა-ნიშნავს მისი ყველა ამონახსნის სიმრავლის პოვნას.

ერთი და იმავე ცვლადების შემცველ უტოლობებს **ეწოდება ტოლფასი,** თუ მათი ამონახსნთა სიმრავლეები ერთნაირია.

მოცემული უტოლობის ტოლფასი უტოლობა მიიღება უტოლობის ორივე მხარისათვის რაიმე რიცხვის ან ცვლადიანი გამოსახულების მიმატებით (გამოკლებით); უტოლობის ერთი მხარიდან მეორეში რომელიმე წევრის მოპირდაპირე ნიშნით გადატანით; უტოლობის ყველა წევრის რაიმე დადებით რიცხვზე გამრავლებით (გაყოფით).

ნებისმიერ ერთცვლადიან უტოლობას შეიძლება ჰქონდეს $f(x) > 0 (\ge 0)$ან $f(x) < 0 (\le 0)$ სახე.

$f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა OX ღერძის იმ წერტილთა აბსცისების სიმრავლე, რომელთათვისაც y=f(x) ფუნქციის გრაფიკის წერტილები OX ღერძის ზემოთ (ქვემოთ) მდებარეობენ:



$x \in (x_1; x_2) \cup (x_3; +\infty)$ მეორე შემთხვევაში $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; x_3)$

ერთი და იმავე ცვლადების შემცველ უტოლობათა სასრული სიმრავლე არის უტოლობათა სისტემა.
ერთცვლადიან უტოლობათა სისტემა შეიძლება წარმოდგენილი იყოს შემდეგი სახით:

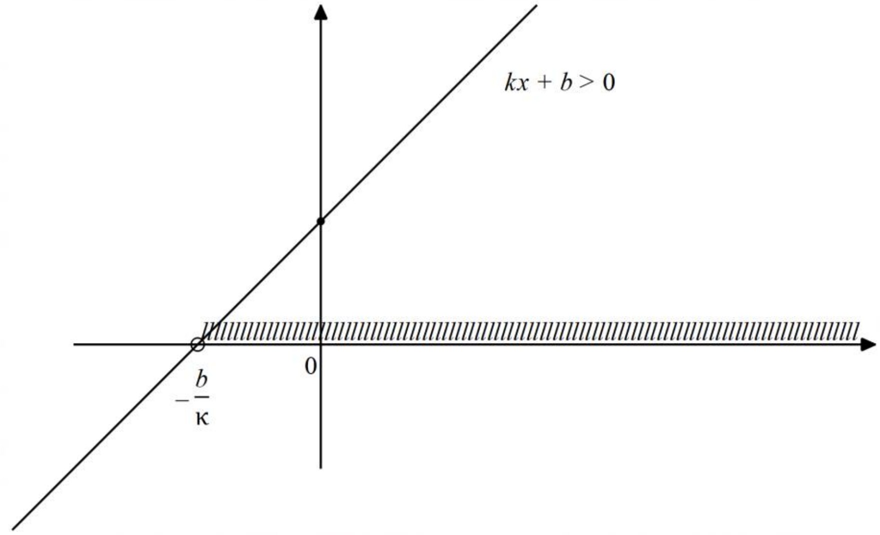
$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

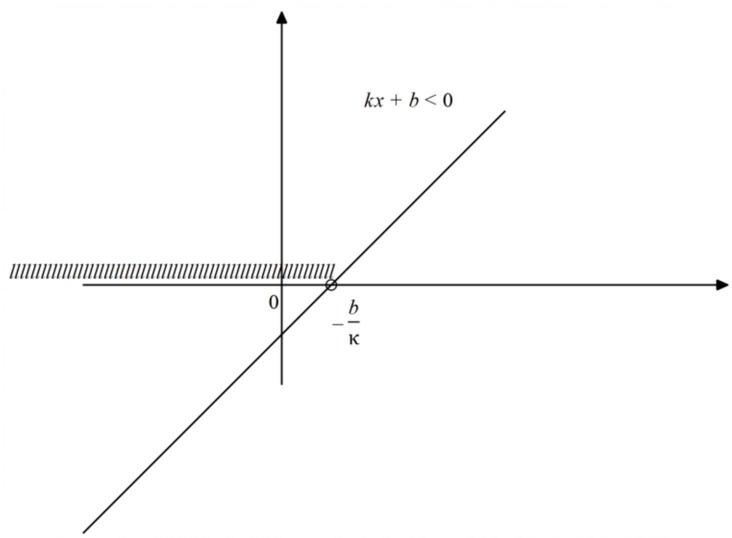
უტოლობათა სისტემის ამონახსნი ეწოდება ამ სისტემაში შემავალი უტოლობების საერთო ამონახსნთა სიმრავლეს. უტოლობათა სისტემის ამოხსნა ნიშნავს მისი ამონახსნთა სიმრავლის პოვნას.
თუ სისტემაში შემავალი ერთი უტოლობა მაინც შეიცვლება თავისი ტოლფასი უტოლობით, მიიღება უტოლობათა მოცემული სისტემის ტოლფასი სისტემა.

34. ერთუცნობიანი უტოლობები და უტოლობათა სისტემები.

kx+b>0 (≥0) და kx+b<0 (≤ 0) უტოლობებს, სადაც k,b∈ R , ხოლო x ცვლადია, **წრფივი ერთცვლადიანი უტოლობები ეწოდება.**
როდესაც k>0 და kx+b>0⇔ x>- $\frac{b}{k}$; როდესაც k<0 და kx+b>0 ⇔ x<- $\frac{b}{k}$; როდესაც k=0 და kx+b>0 ,უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა ∅ (თუ b<0), ან R (თუ b>0);

გეომეტრიულად k>0 შემთხვევა შემდეგნაირად გამოისახება:





kx+b>0 უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე აღნიშნულ პირობებში შეიძლება წარმოდგენილი იყოს $(-\frac{b}{k}; +\infty)$ რიცხვითი ინტერვალის სახით. kx+b<0 უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე აღნიშნულ პირობებში შეიძლება წარმოდგენილი იყოს $(-\infty; -\frac{b}{k})$ რიცხვითი ინტერვალის სახით.

წრფივი ერთცვლადიანი უტოლობების სასრულ სიმრავლეს წრფივ ერთცვლადიან უტოლობათა სისტემა ეწოდება.

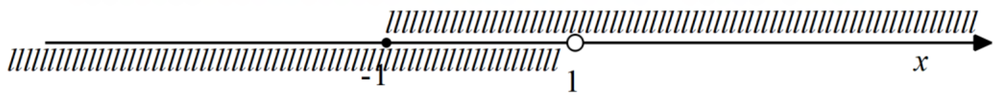
სისტემაში შემავალი ყველა უტოლობის **ამონახსნთა სიმრავლეების თანაკვეთა** წარმოადგენს უტოლობათა მოცემული სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეს.

$\begin{cases} x+5<8 \\ -2x+3\le5 \end{cases}$ წრფივ უტოლობათა სისტემა, უტოლობათა თვისებების გათვალისწინებით, დაიყვანება თავის ტოლფას სისტემაზე:

$$\begin{cases} x<1 \\ x\ge-1 \end{cases}$$

ამ უტოლობებით გამოსახული ინტერვალები დაშტრიხულია ერთსა და იმავე რიცხვით ღერძზე; მათი

თანაკვეთის შედეგად მიიღება [-1;1) ინტერვალი, რომელიც წარმოადგენს მოცემული სისტემის ამონახსნთა სიმრავლეს.



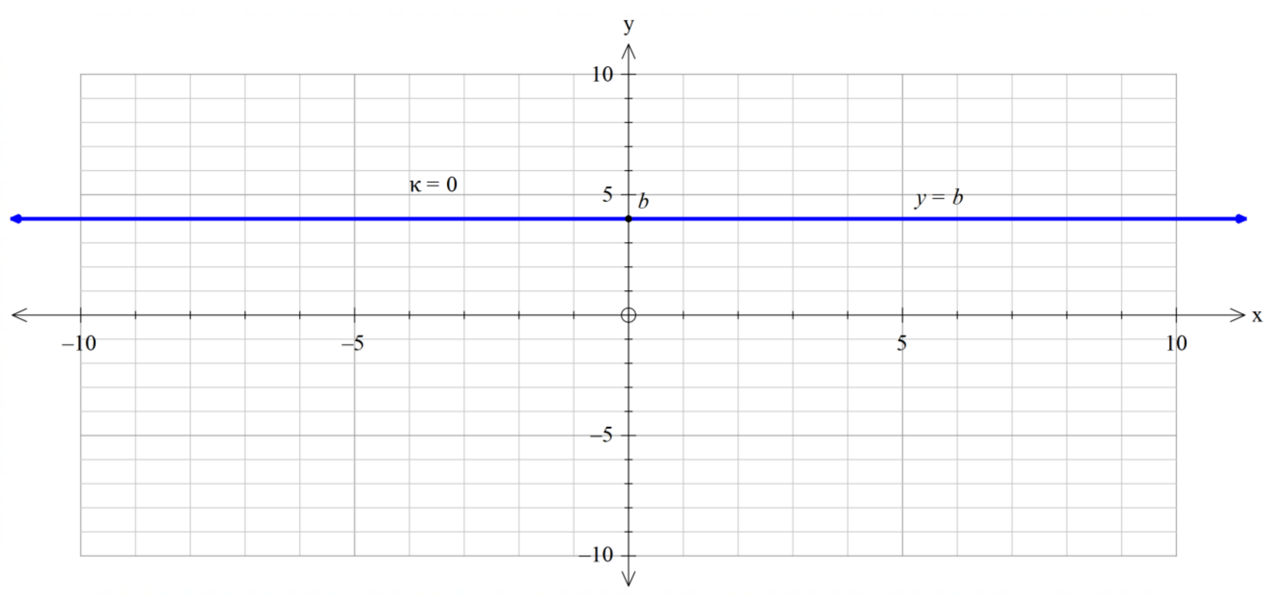
ორმაგი უტოლობა. $-12<2x+3<5$ ორმაგი უტოლობა, უტოლობათა თვისებების გათვალისწინებით, დაიყვანება თავის ტოლფას უტოლობაზე $-7,5<x<1$, ანუ მოცემული უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლე იქნება რიცხვითი შუალედი $(-7,5;1)$. განხილული ორმაგი უტოლობის ამოხსნა შეიძლებოდა დაყვანილიყო უტოლობათა შემდეგი სისტემის ამოხსნაზე:

$$\begin{cases} 2x+3<5 \\ 2x+3>-12 \end{cases}$$

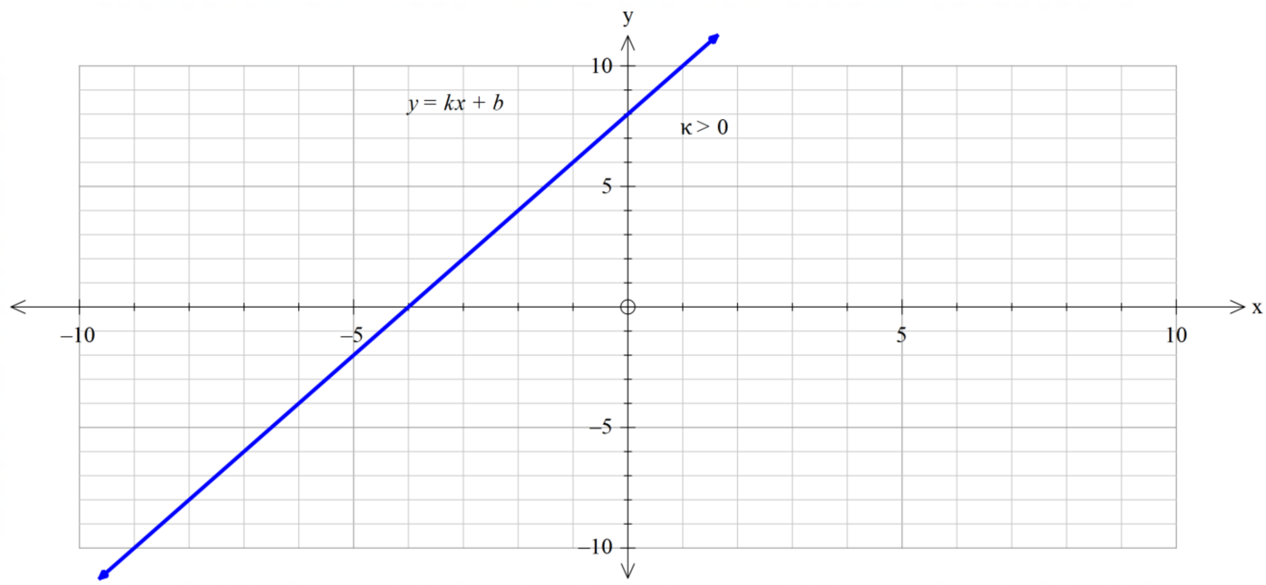
35. წრფივი, კვადრატული, ხარისხოვანი, მაჩვენებლიანი, ლოგარითმული, ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მათი გრაფიკები.

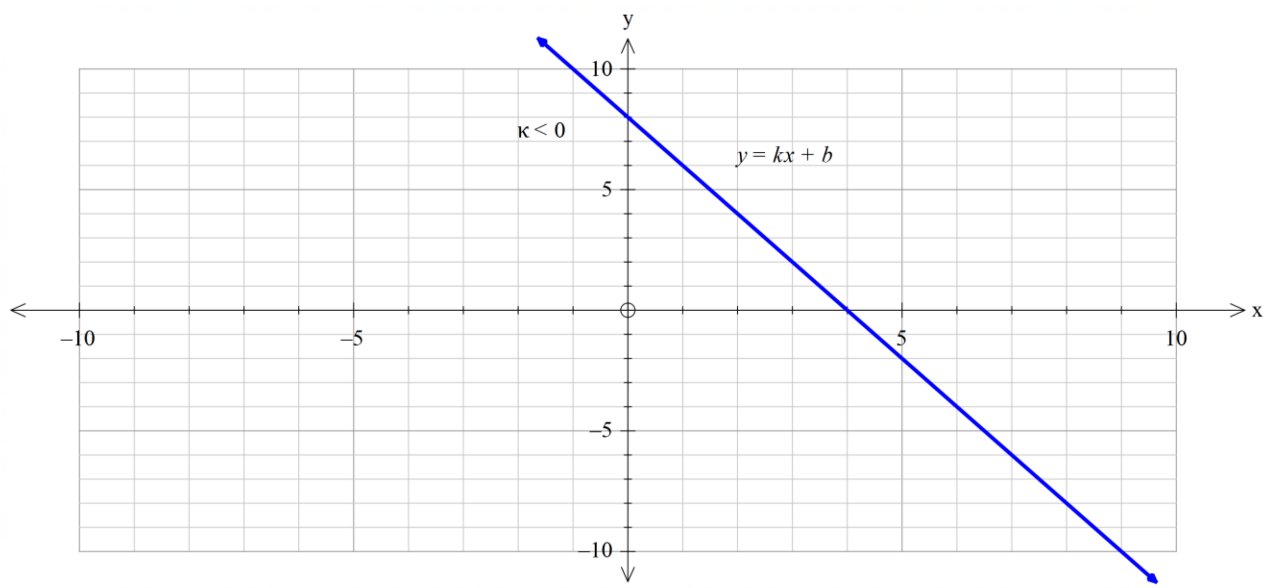
***y = kx + b* სახის ფუნქციას,** სადაც k და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, წრფივი ფუნქცია ეწოდება.ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე.

თუ k=0, მაშინ წრფივი ფუნქცია მიიღებს შემდეგ სახეს y=b, ე.ი. ამ შემთხვევაში ის მუდმივი ფუნქციაა.



როცა k>0, მაშინ y=kx+b ფუნქცია ზრდადია, ხოლო როცა k<0 ფუნქცია კლებადია. ამრიგად y=kx+b ფუნქცია მონოტონურია.

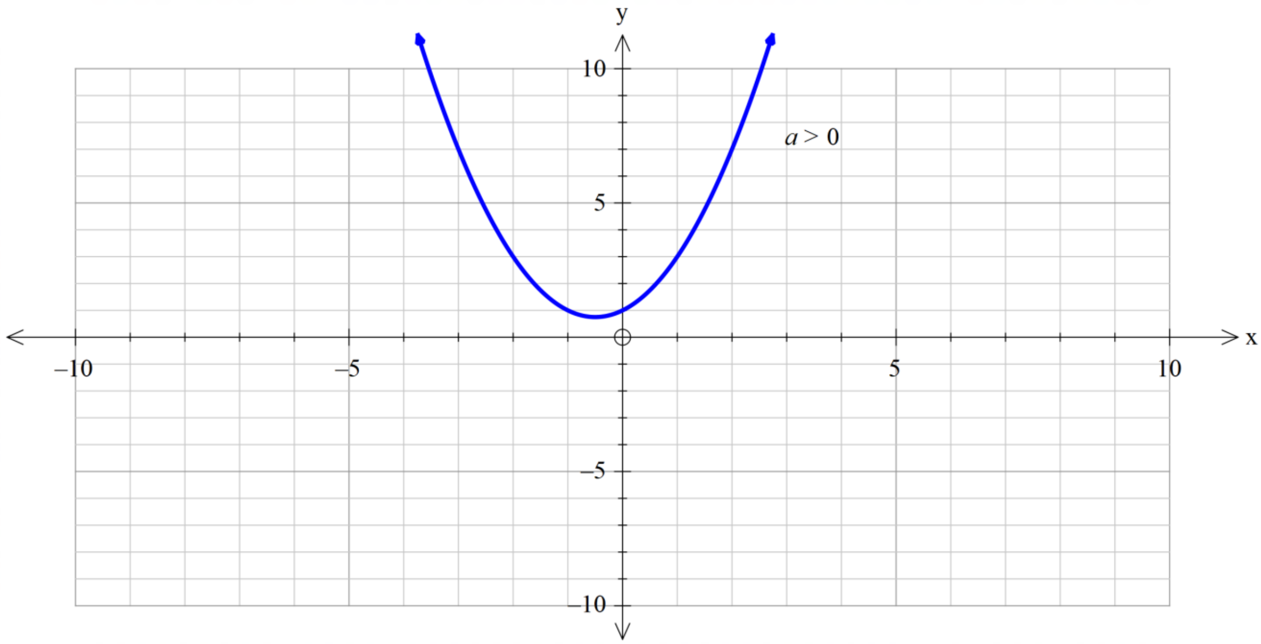


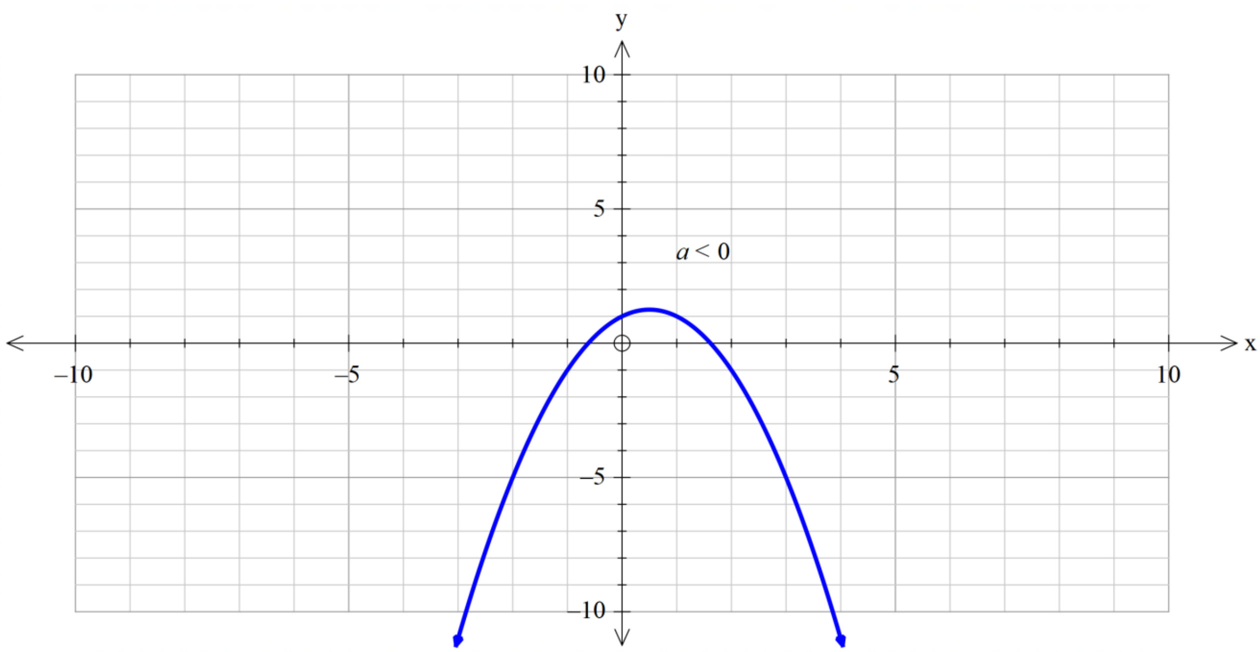


$y = ax^2 + bx + c$ ფუნქციას სადაც $a \neq 0$ კვადრატული ფუნქცია ეწოდება. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. როცა b=c=0, მაშინ y= ax^2. ეს ფუნქცია ლუწია, ამიტომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია OY ღერძის მიმართ.

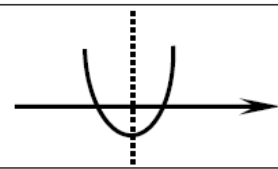
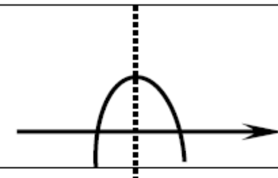
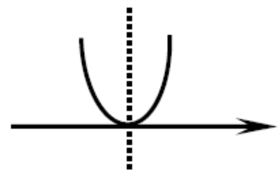
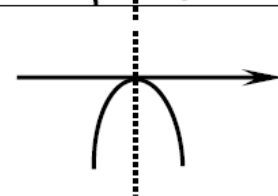
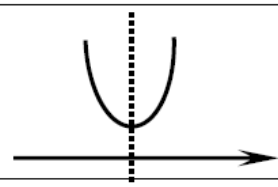
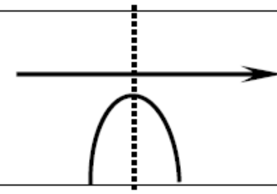
თუ a>0, მაშინ E(y)=[0;+∞) . ფუნქცია კლებადია (-∞; 0] შუალედში, ხოლო ზრდადია [0;+ ∞) შუალედში.

თუ a<0, მაშინ E(y)=(- ∞;0] ამ შემთხვევაში ფუნქცია ზრდადია (-∞;0] შუალედში, ხოლო კლებადია [0;+ ∞) შუალედში.

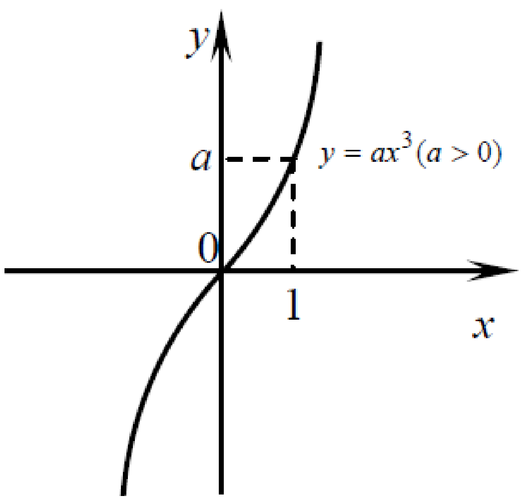


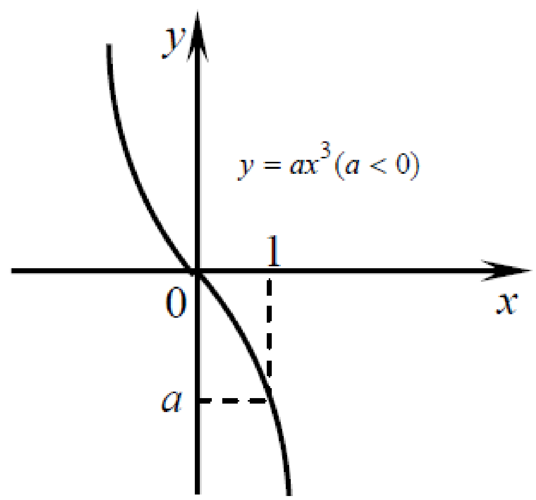


ქვედა სურათზე აბსცისათა ღერძის მიმართ კვადრატული ფუნქციის გრაფიკი მდებარეობის ექვსი შესაძლო შემთხვევაა გამოსახული.

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$		
$D = 0$		
$D < 0$		

$y = ax^3$ თუ a>0 ეს ფუნქცია ზრდადია, ხოლო თუ a<0 ფუნქცია კლებადია. მისი გრაფიკი წარმოადგენს ე.წ. კუბურ პარაბოლას. იხ. ნახაზი

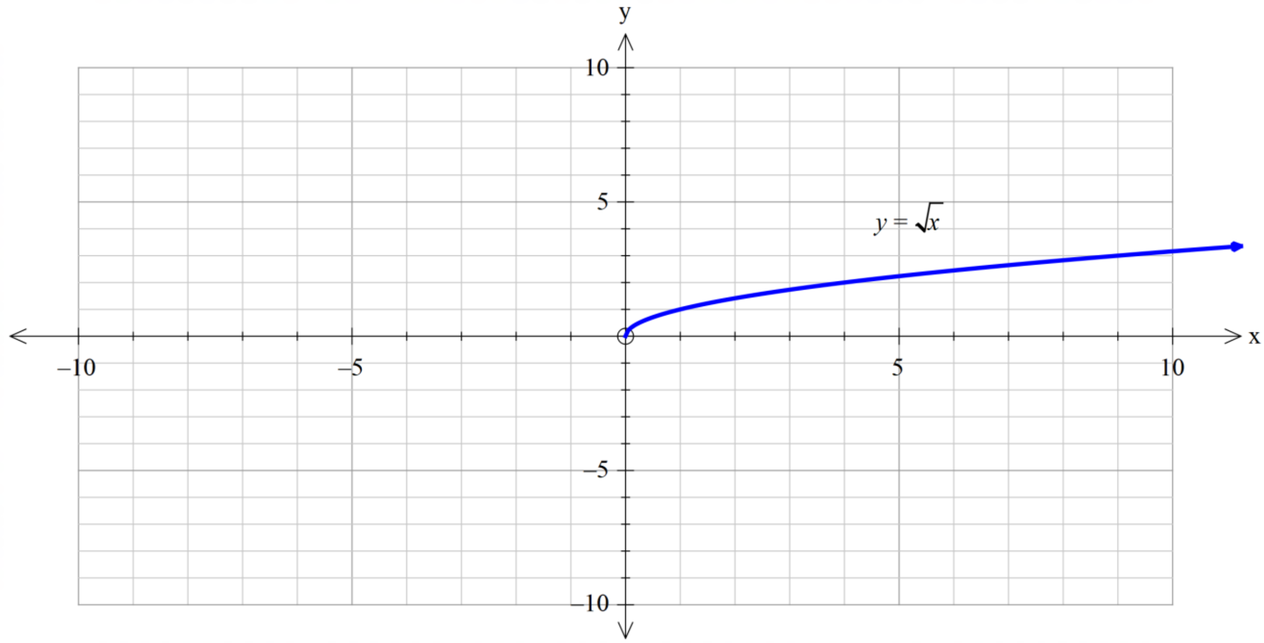




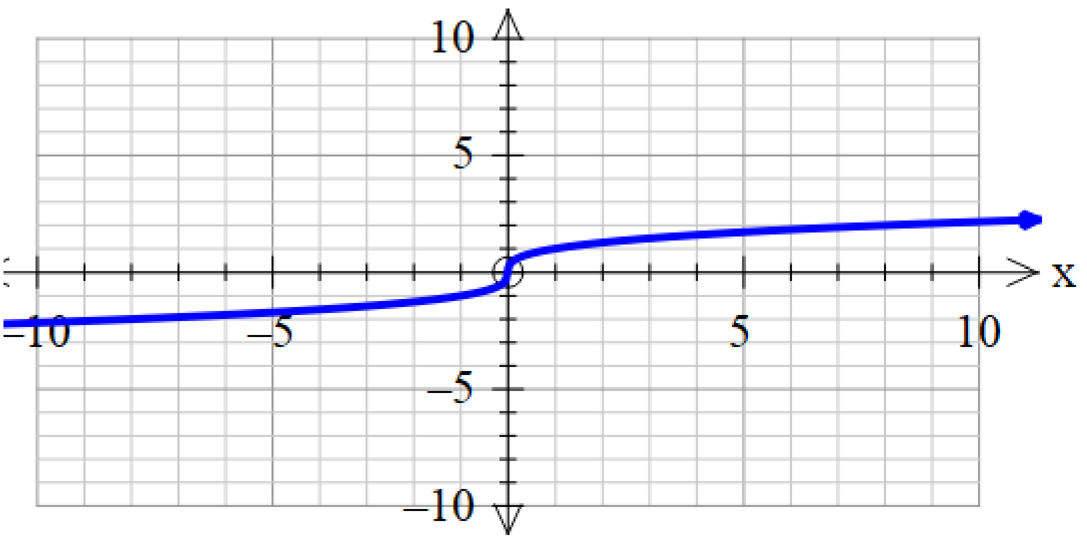
y=$\sqrt[n]{x}$ n∈ N განიხილება ორი შემთხვევა როდესან n ლუწი რიცხვია და როცა n კენტი რიცხვია.

ა) n ლუწი რიცხვია; მაშინ D(y)=[0;+∞); E(y)=[0;+∞), ფუნქცია არც ლუწია არც კენტი, ფუნქცია ზრდადია მთელ

განსაზღვრის არეზე; ფუნქციას აქვს ერთადერთი ნული x=0. როდესაც n=2, ფუნქციას აქვს ასეთი სახე:



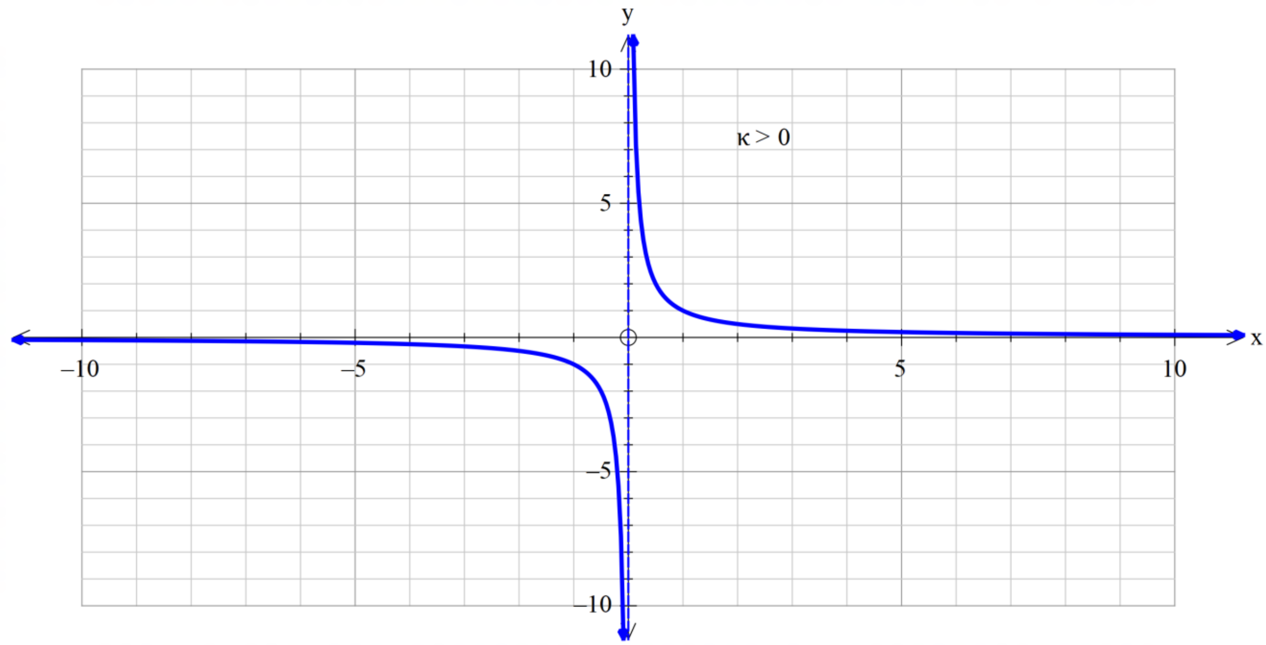
ბ) n კენტი რიცხვია: მაშინ D(y)=R; E(y)=R; ფუნქცია კენტია; ფუნქცია ზრდადია მთელ განსაზღვრის არეზე, ფუნქციას აქვს ერთადერთი ნული x=0. როცა n=3 ფუნქციას აქვს ასეთი სახე y=$\sqrt[3]{x}$ მისი გრაფიკია:

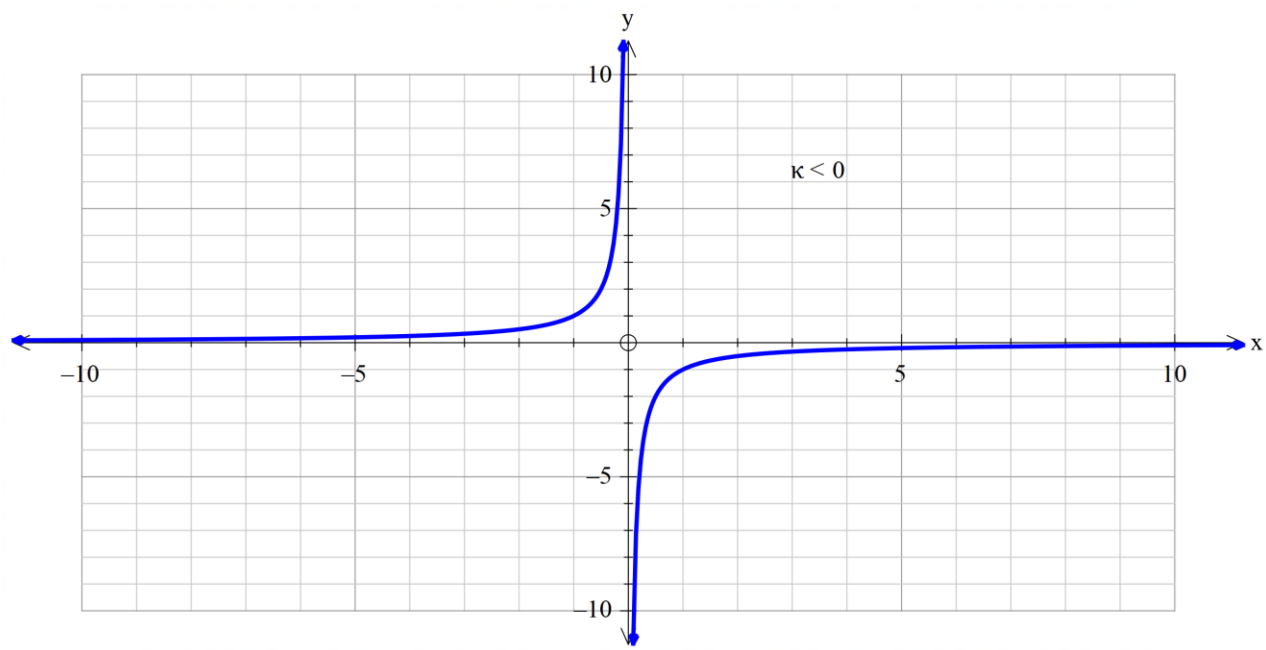


$y=\frac{k}{x}$ (k≠ 0) ფუნქციის განსაზღვრის არეა: D(y)=R\{0}, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა: E(y)=R\{0}

$y=\frac{k}{x}$ ⇒k=xy. მოცემული ფუნქცია კენტია თავის განსაზღვრის არეზე; $y=\frac{k}{x}$ ფუნქციის გრაფიკს ეწოდება ჰიპერბოლა. ჰიპერბოლას შეიძლება ჰქონდეს ორი სხვადასხვა მდებარეობა (ორივე შემთხვევაში ჰიპერბოლა სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ).

როცა k>0 ფუნქცია კლებადია მთელ თავის განსაზღვრის არეზე. როცა k<0 ფუნქცია ზრდადია მთელ თავის განსაზღვრის არეზე.





ფუნქციას ნულები არა აქვს

y>0, როდესაც x∈(0;+∞) k>0 შემთხვევა y>0, როდესაც x∈(-∞; 0) k<0 შემთხვევა

y<0, როდესაც x∈(-∞; 0) y<0, როდესაც x∈(0;+∞;)

$y = a^x$ მაჩვენებლიანი ფუნქცია არის ისეთი ფუნქცია, რომელიც ცვლადს შეიცავს ხარისხის მაჩვენებელში.

$y = a^x, a > 0, a \neq 1$ მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებები:

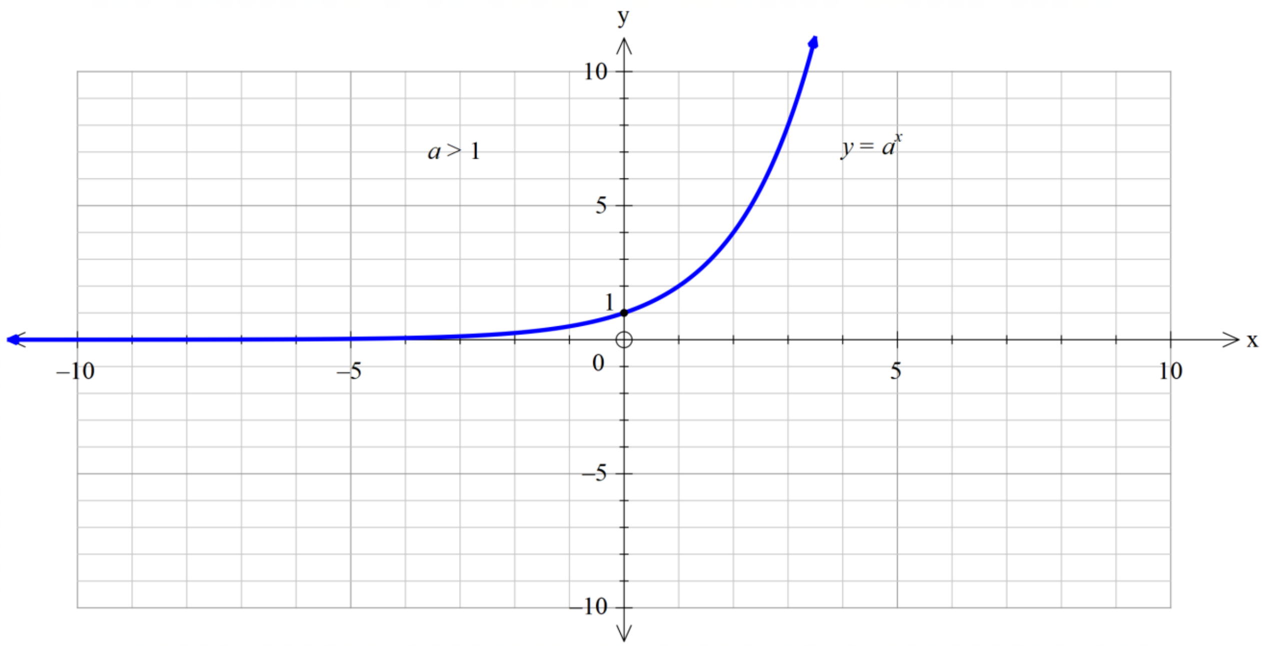
1. $x \in R \Leftrightarrow D(y) = R$;

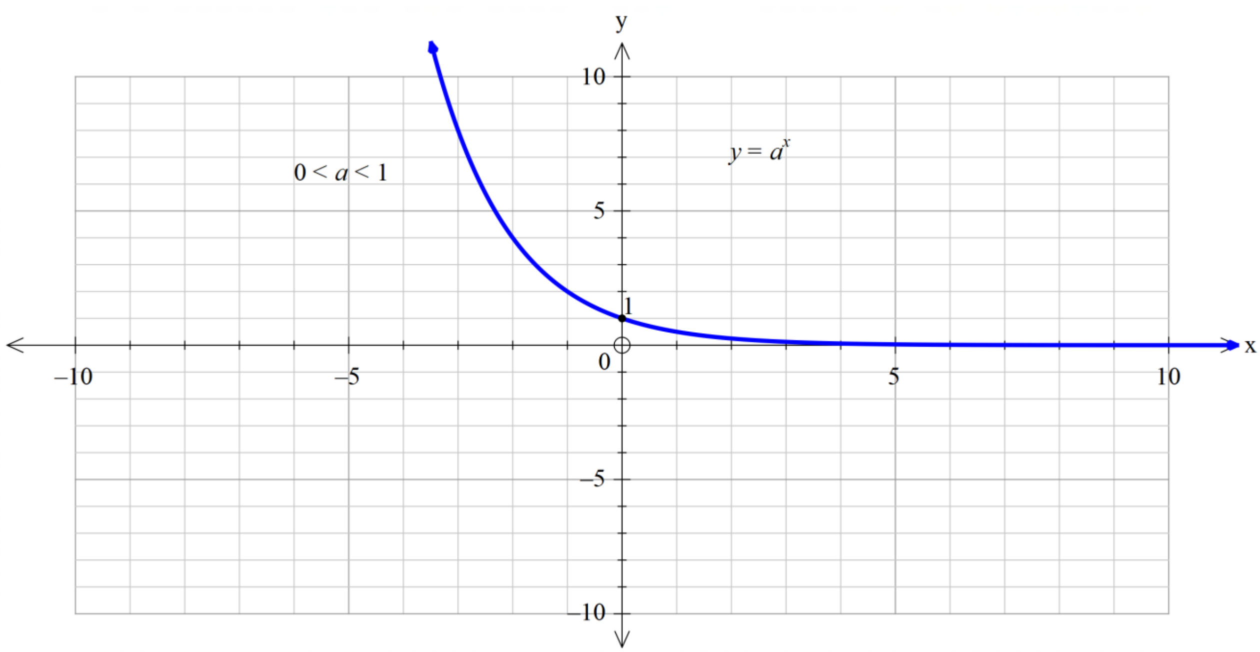
2. $y \in (0; +\infty) \Leftrightarrow E(y) = (0; +\infty)$;

3. ფუნქცია არც ლუწია, არც-კენტი;

4. ზრდადია როდესაც a>1. კლებადია როდესაც 0<a<1;

5. ფუნქციას არა აქვს ნულები
ქვემოთ მოყვანილია ორივე შემთხვევის გრაფიკი





ლოგარითმულ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე: $y = \log_a x, a > 0$ ესაა მაჩვენებლიანი ფუნქციის $y = a^x$ შექცეული ფუნქცია. ლოგარითმული ფუნქციის თვისებები:

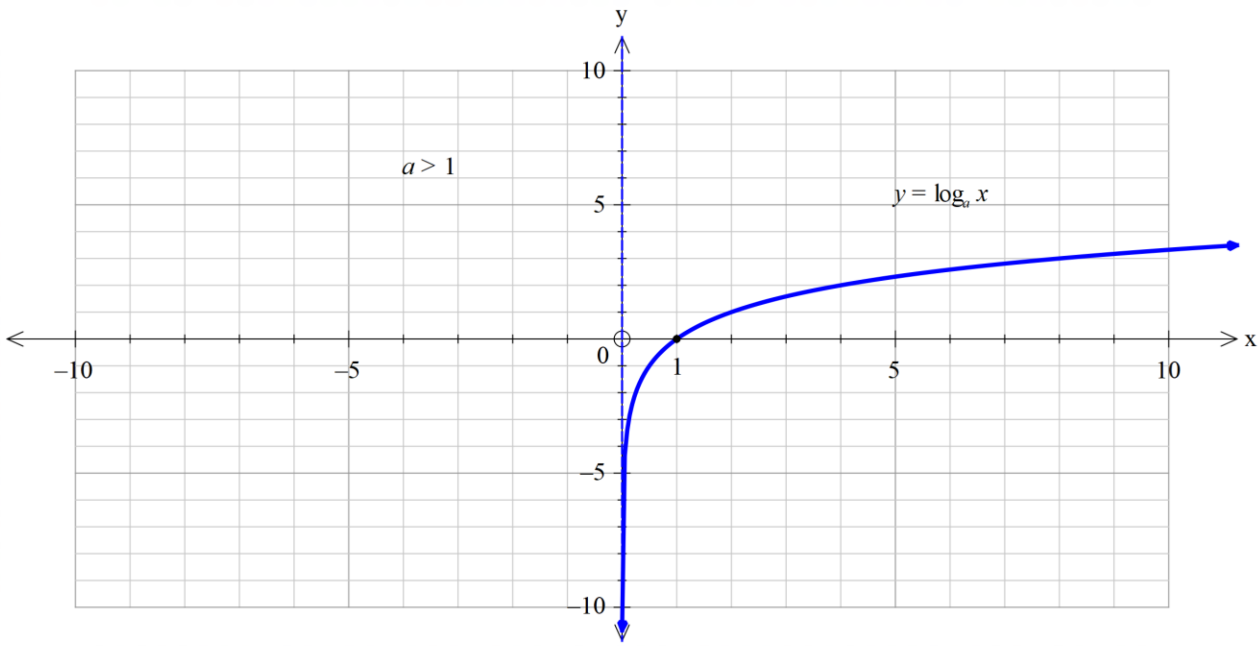
1. $x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow D(y) = (0; +\infty)$;

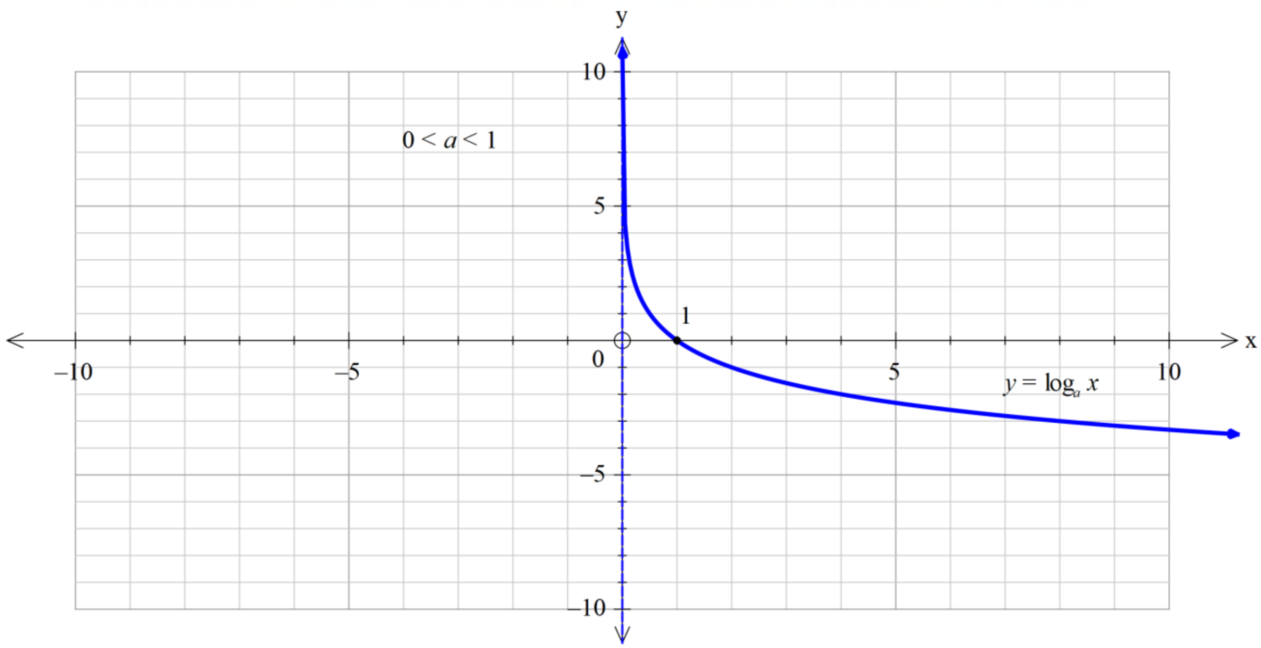
2. $y \in R \Leftrightarrow E(y) = R$;

3. ფუნქცია არც ლუწია, არც-კენტი;

4. ზრდადია, როდესაც a>1. კლებადია როდესაც 0<a<1

5. ფუნქციას აქვს ერთადერთი ნული: x=1.





y=sinx ფუნქციის თვისებები:

1. $x \in R \Leftrightarrow D(y) = R$

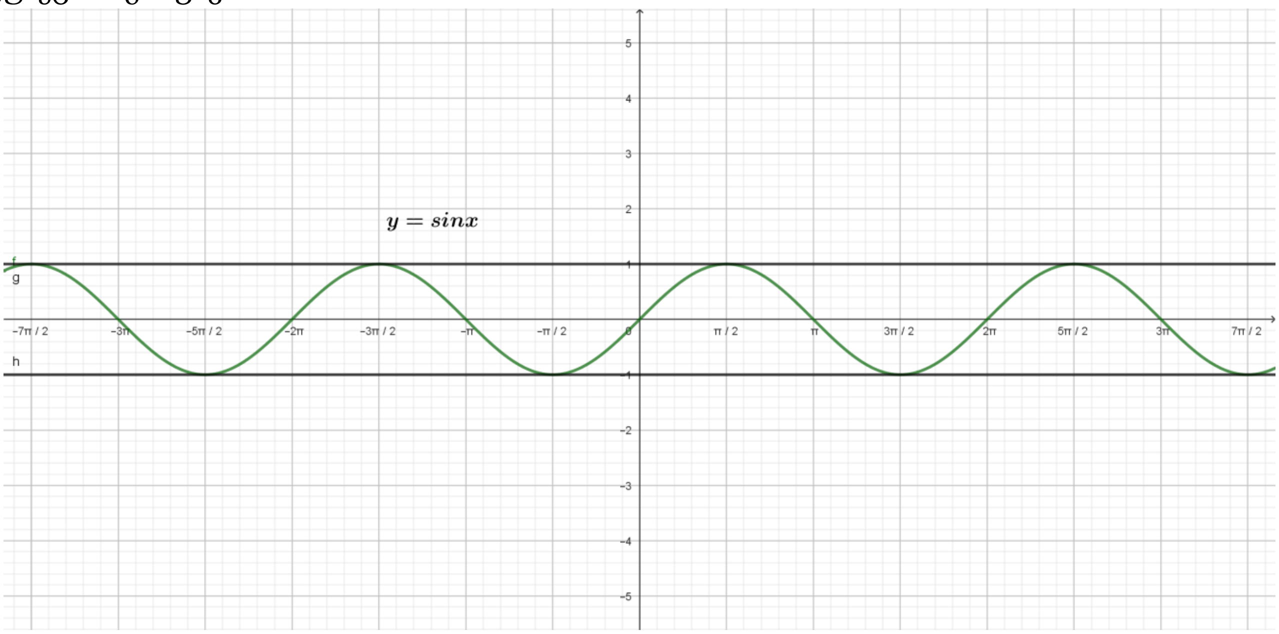
2. $y \in [-1; 1] \Leftrightarrow E(y) = [-1; 1]$

3. ფუნქცია კენტია: sin(-x)=-sinx

4. ფუნქცია პერიოდულია, უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π (sin(x+$2\pi n$)=sinx, n∈ Z) ამ გრაფიკს სინუსოიდა ეწოდება. ის სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

5.მოცემული ფუნქცია ზრდადია IV და I საკოორდინატო მეოთხედებში ანუ [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$] შუალედში;კლებადია II და III საკოორდინატო მეოთხედებში, ანუ [$\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$] შუალედში.

6. ფუნქციის ნულებია არგუმენტის πn (n∈ Z) მნიშვნელობები. ქვემოთ სურთზე გამოსახულია y=sinx ფუნქციის გრაფიკი.



y=cosx ფუნქციის თვისებები:

1. $x \in R \Leftrightarrow D(y) = R$

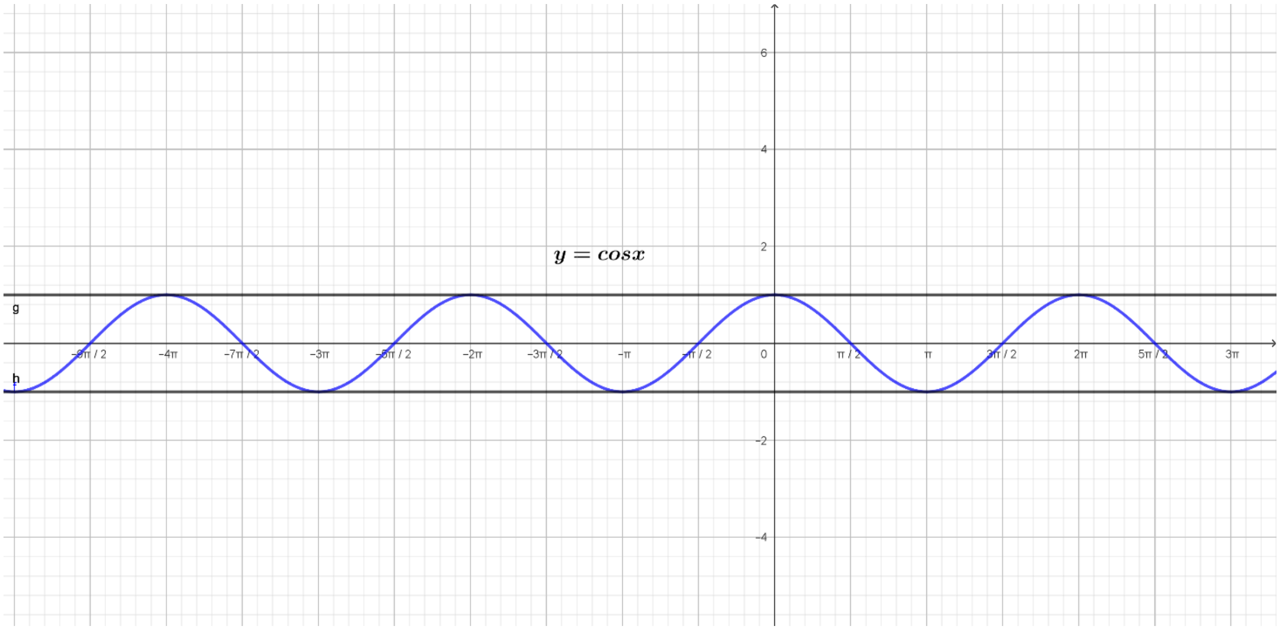
2. $\in [-1; 1] \Leftrightarrow E(y) = [-1; 1]$

3. ფუნქცია ლუწია: cos(-x)=cosx ფუნქციის გრაფიკს კოსინუსოიდა ეწოდება.ის სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ.

4. ფუნქცია პერიოდულია, უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π (cos(x+$2\pi n$)=cosx, n∈ Z)

5. .მოცემული ფუნქცია ზრდადია III და IV საკოორდინატო მეოთხედებში ანუ [-π; 0] შუალედში;კლებადია I და II საკოორდინატო მეოთხედებში, ანუ $[0; \pi]$ შუალედში.

6. ფუნქციის ნულებია არგუმენტის $\frac{\pi}{2} + \pi n$ (n∈ Z) მნიშვნელობები. ქვემოთ სურთზე გამოსახულია y=cosx ფუნქციის გრაფიკი.



y=tgx ფუნქციის თვისებები:

1. $x \in R\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\} \Leftrightarrow D(y) = R\backslash\{\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\}$

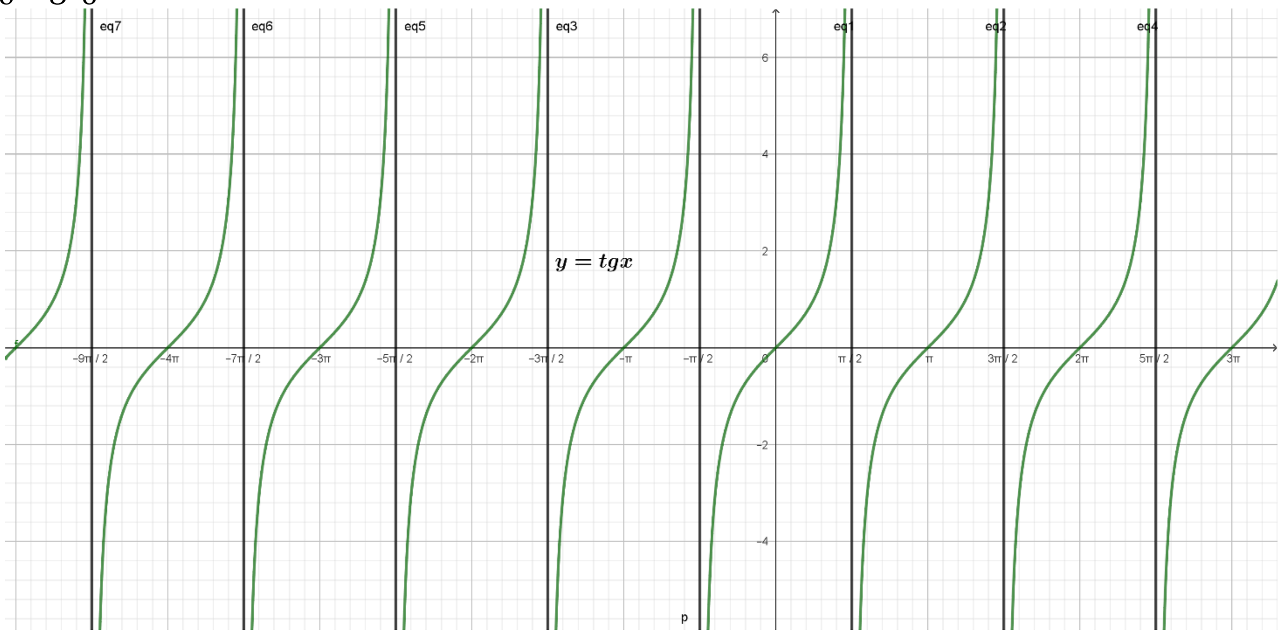
2. $y \in R \Leftrightarrow E(y) = R$;

3. ფუნქცია კენტია: tg(-x)=-tgx გრაფიკს ტანგენსოიდა ეწოდება.

4. ფუნქცია პერიოდულია, უმცირესი დადებითი პერიოდია π (tg(x+ πn)=tgx, n∈Z);

5. მოცემული ფუნქცია ზრდადია მთელ თავის განსაზღვრის არეზე;

6. ფუნქციის ნულებია არგუმენტის πn (n∈Z) მნიშვნელობები. ქვემოთ სურთზე გამოსახულია y=tgx ფუნქციის გრაფიკი.



y=ctgx ფუნქცია და მისი გრაფიკი

1. $x \in R\setminus\{\pi n, n \in Z\} \Leftrightarrow D(y) = R\setminus\{\pi n, n \in Z\}$

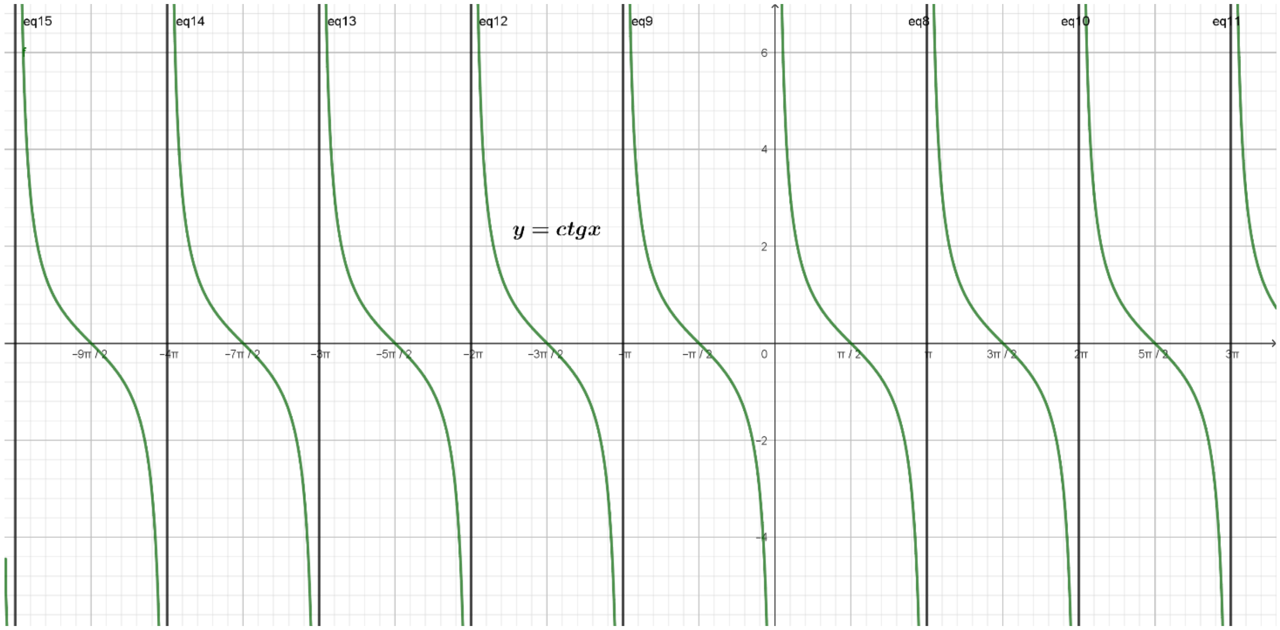
2. . $y \in R \Leftrightarrow E(y) = R;$

3. ფუნქცია კენტია: ctg(-x)=-ctgx; ფუნქციის გრაფიკს კოტანგენსოიდა ეწოდება.

4. ფუნქცია პერიოდულია, უმცირესი დადებითი პერიოდია π ((ctg(x+ πn)=ctgx, n∈Z);

5. მოცემული ფუნქცია კლებადია მთელ თავის განსაზღვრის არეზე;

6. . ფუნქციის ნულებია არგუმენტის $\frac{\pi}{2} + \pi n$ (n∈Z) მნიშვნელობები.ქვემოთ სურთზე გამოსახულია y=ctgx ფუნქციის გრაფიკი.



36. ირაციონალური განტოლებები

განტოლებას, რომელიც ფესვის ქვეშ ცვლადს შეიცავს, ირაციონალური განტოლება ეწოდება.

$\sqrt{f(x)} = a, \ \ a > 0 \Leftrightarrow f(x) = a^2$. ამ უკანასკნელი განტოლების ამონახსნები იქნება $\sqrt{f(x)} = a$ განტოლების ამონახსნები.

$\sqrt{f(x)} = a, \ a < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$

$\sqrt{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = 0$, რომლის ამონახსნები იქნება $\sqrt{f(x)} = 0$ განტოლების ამონახსნები.

მაგალითები:

1. $\sqrt{2x-6} = 1 \Rightarrow 2x - 6 = 1 \Rightarrow x = 3{,}5;$

2. $\sqrt{x^2-4} = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

3. $\sqrt{5+2x} = -3 \Rightarrow x \in \emptyset$

4. $\sqrt{2-x} = x \Rightarrow 2 - x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2; \ x_2 = 1.$

მიღებული მნიშვნელობების მოცემულ განტოლებაში ჩასმით აღმოჩნდება, რომ -2 ვერ იქნება განტოლების ფესვი-ის გარეშე ფესვია. მოცემული განტოლების ამონახსნია მხოლოდ 1.

37.მაჩვენებლიანი განტოლებები და უტოლობები

განტოლებას, რომელიც ცვლადს შეიცავს ხარისხის მაჩვენებელში მაჩვენებლიანი განტოლება ეწოდება.

$a^x = b, \ a > 0, a \neq 1, b > 0$ წარმოადგენს უმარტივეს მაჩვენებლიან განტოლებას, რომლის ამონახსნია $x = \log_a b$. როდესაც b≤ 0, მაჩვენებლიან განტოლებას ამონახსნი არა აქვს. მაჩვენებლიანი განტოლების ამოხსნა

ხშირად დაიყვანება $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ განტოლების ამოხსნაზე, რომელიც ტოლფასია $f(x) = g(x)$ განტოლებისა.
მაგალითები:

1. $5^x = \frac{1}{125}$,
$5^x = 5^{-3} \Rightarrow x = -3;$

2. $9^{2x-1} - 27^x = 0$,
$3^{2(2x-1)} = 3^{3x} \Rightarrow 2(2x-1) = 3x \Rightarrow x = 2;$

3. $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ განტოლების ამოსახსნელად შემოაქვთ აღნიშვნა $3^x = t$. მოცემული მაჩვენებლიანი განტოლების შესაბამის კვადრატულ განტოლებას ექნება ასეთი სახე: $t^2 - 4t + 3 = 0$; მისი ამონახსნებია $t_1 = 1$ და $t_2 = 3$; აღნიშვნების გათვალისწინებით $3^x = 1$ და $3^x = 3 \Rightarrow x = 0$ და $x = 1$.

უტოლობას, რომელიც ხარისხის მაჩვენებელში ცვლადს შეიცავს, მაჩვენებლიანი უტოლობა ეწოდება.
$a^x > b$ $(\geq)$ და $a^x < b$ $(\leq)$, სადაც a>0, $a \neq 1$, წარმოადგენს უმარტივეს მაჩვენებლიან უტოლობებს.
$a^x > b$; თუ $b \leq 0 \Rightarrow x \in R$; თუ $b > 0 \Rightarrow x < \log_a b$, როდესაც $0 < a < 1$; და $x > \log_a b$, როდესაც $a > 1$.
$a^x < b$; $b \leq 0 \Rightarrow x \in \emptyset$; $b > 0 \Rightarrow x > \log_a b$, როდესაც $0 < a < 1$ და $x < \log_a b$, როდესაც $a > 1$;
$a^{f(x)} > (<) a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > (<) g(x)$, როდესაც $0 < a < 1$; $f(x) > (<) g(x)$, როდესაც $a > 1$.

მაგალითები.
1. $7^{3x-5} \geq 7^x \Leftrightarrow 3x - 5 \geq x \Rightarrow x \in [2{,}5; +\infty);$

2. $0{,}8^{7-3x} < 0{,}8^{x+1} \Leftrightarrow 7 - 3x > x + 1 \Rightarrow x \in (-\infty; 1{,}5);$

3. $2 \cdot 3^{2x} - 3^x - 15 \leq 0$ უტოლობის ამოსახსნელად შემოაქვთ აღნიშვნა: $3^x = t$; მოცემული მაჩვენებლიანი უტოლობის შესაბამისი კვადრატული უტოლობაა: $2t^2 - t - 15 \leq 0$, რომლის ამონახსნტა სიმრავლეა [-2,5;3], ანუ 3^x ფუნქციის მნიშვნელობები მიეკუთვნებიან აღნიშნულ ინტერვალს; მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებების გათვალისწინებით, შეიძლება შემდეგი დასკვნის გაკეთება: $3^x \in (0; 3] \Leftrightarrow 3^x \leq 3 \Rightarrow x \leq 1$, ანუ მოცემული მაჩვენებლიანი უტოლობის ამონახსნთა სიმრავლეა (-∞; 1].

38.ლოგარითმული განტოლებები და უტოლობები

განტოლებას, რომელიც ცვლადს შეიცავს ლოგარითმის ნიშნის ქვეშ, ლოგარითმული განტოლება ეწოდება.
$\log_a x = b$, სადაც a>0, a≠ 1, არის უმარტივესი ლოგარითმული განტოლება, რომლის ამონახსნია a^b
ლოგარითის თვისებებზე დაყრდნობით, ლოგარითმული განტოლება ხშირად შემდეგ სახეზე დაიყვანება:
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ან $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$.
ლოგარითმული განტოლებების ამოხსნისას გასათვალისწინებელია შემდეგი პირობები:
1. თუ a>0 და a≠ 1, მაშინ $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

2. თუ $\varphi(x) > 0$ და $\varphi(x) \neq 1$, მაშინ
$\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

ორივე შემთხვევაში $f(x) > 0$ და $g(x) > 0$ უტოლობები განსაზღვრავს განტოლების დასაშვებ მნიშვნელობათა

სიმრავლეს.

ლოგარითმული განტოლების ამოხსნისას დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლის პოვნა აღარ იქნება საჭირო, თუ ფესვების ნაპოვნი მნიშვნელობების მოცემულ განტოლებაში ჩასმით შემოწმდება მიღებული ტოლობის სამართლიანობა.

მაგალითები:

1. $\log_2 x = -3$

$x=2^{-3}$

$x=\frac{1}{8}$;

2. $\log_{\sqrt{2}} x - 4 = 0 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} x = 4 \Rightarrow x = (\sqrt{x})^4 \Rightarrow x = 4$;

3. $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}}(2x-5) \Rightarrow x = 2x - 5 \Rightarrow x = 5$;

4. $\lg(x^2 - 3x + 2) = \lg(x-1) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3.$

$x=1$ ამონახსნი არ აკმაყოფილებს მოცემულ ლოგარითმულ განტოლებას (ის გარეშე ფესვია), ამიტომ აღნიშნულ განტოლებას აქვს ერთადერთი ფესვი: $x=3$.

უტოლობას, რომელიც ცვლადს შეიცავს ლოგარითმული ფუნქციის ნიშნის ქვეშ, ლოგარითმული უტოლობა ეწოდება.

$\log_a x > b$ $(\geq)$ და $\log_a x < b$ $(\leq)$, სადაც $a>0$, $a \neq 1$, წარმოადგენს უარტივეს ლოგარითმულ უტოლობებს.

$\log_a x > b$: თუ $0<a<1 \Rightarrow$ფუნქცია კლებადია, მისი განსაზღვრის არეა $(0;+\infty) \Rightarrow 0<x<a^b$; თუ $a>1 \Rightarrow$ფუნქცია ზრდადია, მისი განსაზღვრის არეა $(0;+\infty) \Rightarrow x>a^b$.

$\log_a x < b$: თუ $0<a<1 \Rightarrow$ ფუნქცია კლებადია, მისი განსაზღვრის არეა $(0;+\infty) \Rightarrow x>a^b$; თუ $a>1 \Rightarrow$ფუნქცია ზრდადია, მისი განსაზღვრის არეა $(0;+\infty) \Rightarrow 0<x<a^b$.

ლოგარითმის თვისებების საფუძველზე ლოგარითმული უტოლობები ხშირად შემდეგ სახეზე დაიყვანება:

$\log_a f(x) > (<) \log_a g(x)$: თუ $0<a<1$, მაშინ $\log_a f(x) > (<) \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<(>)g(x); \end{cases}$

თუ $a>1$, მაშინ $\log_a f(x) > (<) \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>(<)g(x) \end{cases}$

$\log_{\varphi(x)} f(x) > (<) \log_{\varphi(x)} g(x)$:

თუ $0<\varphi(x)<1$, მაშინ $\log_{\varphi(x)} f(x) > (<) \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<(>)g(x) \end{cases}$

თუ $\varphi(x)>1$ მაშინ $\log_{\varphi(x)} f(x) > (<) \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>(<)g(x). \end{cases}$

ორივე შემთხვევაში ($\varphi(x) > 1$ და $0 < \varphi(x) < 1$) $f(x) > 0$ და $g(x) > 0$ უტოლობები განსაზღვრავს დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს.

მაგალითები:

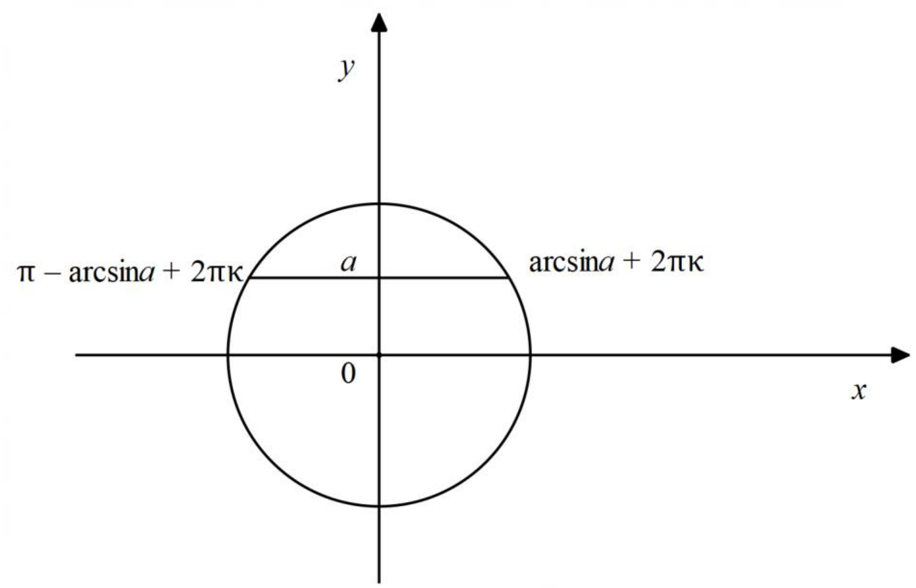
1. $\log_3 x < 3$ მოცემული უტოლობა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:
$\log_3 x < \log_3 3^3 \Rightarrow 0 < x < 27$;

2. $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+4)$ მოცემული უტოლობის ტოლფასი უტოლობათა სისტემაა:

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ 3x+4>0 \\ 2x-1<3x+4, \end{cases}$$ რომლის ამონახსნთა სიმრავლეა (0,5;+∞);

39. ტრიგონომეტრიული განტოლებები

sinx=a განტოლება ($|a| \le 1$) მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია $x = (-1)^k arcsina + \pi k, k \in Z$
ამ ფორმულაში გაერთიანებულია შემდეგი ამონახსნები $\pi - arcsina + 2\pi k; k \in Z$ და $arcsina + 2\pi k, k \in Z$



კერძო შემთხვევები:

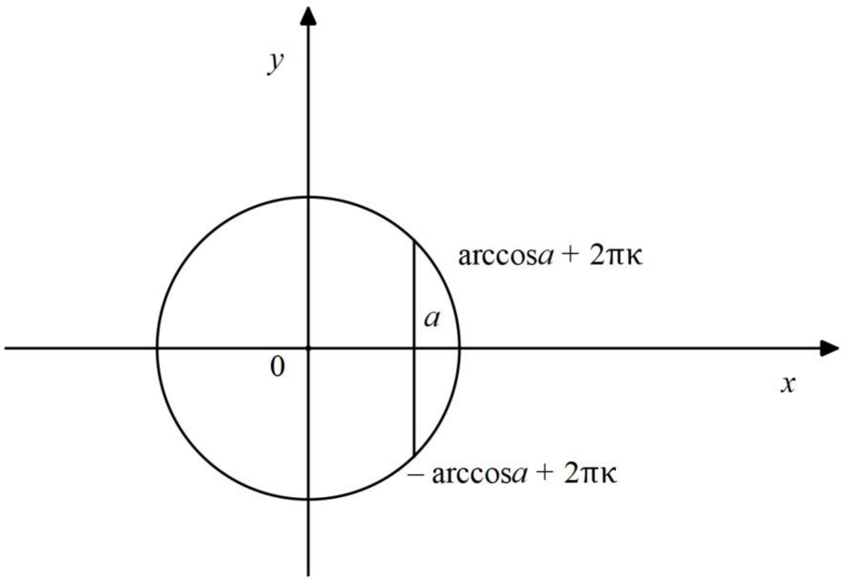
თუ a=0 ⇒sinx=0 ⇒x=πk, k∈ Z;

თუ a=1⇒sinx=1⇒x=$\frac{\pi}{2} + 2\pi$k, k∈ Z;

თუ a=-1⇒sinx=-1⇒x=$-\frac{\pi}{2} + 2\pi$k, k∈ Z; ან x=$\frac{3\pi}{2} + 2\pi$k, k∈ Z.

cosx=a განტოლება ($|a| \le 1$) მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია: $x = \pm arccosa + 2\pi k, k \in Z$;

ამ ფორმულაში გაერთიანებულია სურათზე მითითებული ამონახსნები.



arccosa+$2\pi k, k \in Z$; $-arccosa + 2\pi k, k \in Z$

კერძო შემთხვევები: თუ a=0⇒ $cosx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

თუ a=1⇒ $cosx = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, k \in Z$;

თუ a=-1⇒ $cosx = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in Z$;

tg(x)=a განტოლება ($a \in R$) მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია $x = arctga + \pi k, k \in Z$;
მაგ. მოცემულია განტოლება tgx=$\sqrt{3} \Rightarrow x = arctg\sqrt{3} + \pi k, k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

ctgx=a განტოლება ($a \in R$) მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნია x=arcctga+ $\pi k, k \in Z$;
მაგალითად. მოცემულია განტოლება ctgx=-1; $\Rightarrow x = arcctg(-1) + \pi k, k \in Z \Rightarrow x = \pi - arcctg1 + \pi k, k \in Z \Rightarrow$ $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

ტრიგონომეტრიული უტოლობები: უტოლობას, რომელიც ცვლადს შეიცავს ტრიგონომეტრიული ფუნქციის ნიშნის ქვეშ, ტრიგონომეტრიული უტოლობა ეწოდება. უმარტივესი სახის ტრიგონომეტრიული უტოლობებია: sinx>a,sinx≥ a cosx>a,$cosx \geq a$, sinx<a,$sinx \leq a$, cosx<a,$cosx \leq a$, tgx>a,$tgx \geq a$, tgx<a,$tgx \leq a$, ctgx>a, $ctgx \geq a$, $ctgx < a, ctgx \leq a$. ქვემოთ მოყვანილია რამდენიმე უმარტივესი ტრიგონომეტრიული უტოლობის ამონახსნთა ნიმუშები:

1) $sinx > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} -1 \leq a < 1 \\ arcsina + 2\pi k < x < \pi - arcsina + 2\pi k, \quad k \in Z \\ a < -1 \\ -\infty < x < +\infty \\ a \geq 1 \\ x \in \emptyset \end{array}\right.$

2) sinx<a $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} -1 \leq a < 1 \\ \pi - arcsina + 2\pi k < x < 2\pi + arcsina + 2\pi k, \quad k \in Z \\ a \leq -1 \\ x \in \emptyset \\ a > 1 \\ -\infty < x < +\infty \end{array}\right.$

3) cosx>a $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 \le a < 1 \\ -arccosa + 2\pi k < x < arccosa + 2\pi k,\ k \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} a < -1 \\ -\infty < x < +\infty \end{cases} \\ \begin{cases} a \ge 1 \\ x \in \emptyset \end{cases} \end{array}\right.$

4) cosx<a $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \le -1 \\ x \in \emptyset \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ -\infty < x < +\infty \end{cases} \\ \begin{cases} -1 < a \le 1 \\ arccosa + 2\pi k < x < 2\pi - arccosa + 2\pi k,\ k \in Z \end{cases} \end{array}\right.$

5) tgx>a $\Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < a < +\infty \\ arctga + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z \end{cases}$

6) tgx<a $\Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < a < +\infty \\ -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < arctga + \pi k,\ \ k \in Z \end{cases}$

7) $sinx \ge a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < a < 1 \\ arcsina + 2\pi k \le x \le \pi - arcsina + 2\pi k,\ \ k \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} a \le -1 \\ -\infty < x < +\infty \end{cases} \\ \begin{cases} |a| > 1 \\ x \in \emptyset \end{cases} \end{array}\right.$

8) $sinx \le a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < a < 1 \\ -\pi - arcsina + 2\pi k \le x \le arcsina + 2\pi k,\ \ k \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} a < -1 \\ x \in \emptyset \end{cases} \\ \begin{cases} a \ge 1 \\ -\infty < x < +\infty \end{cases} \end{array}\right.$

9) $cosx \ge a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < a < 1 \\ -arccosa + 2\pi k \le x \le arccosa + 2\pi k,\ \ k \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} a \le -1 \\ -\infty < x < +\infty \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ x \in \emptyset \end{cases} \end{array}\right.$

10) $cosx \le a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < a < 1 \\ arccosa + 2\pi k \le x \le 2\pi - arccosa + 2\pi k,\ \ k \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} a < -1 \\ x \in \emptyset \end{cases} \\ \begin{cases} a \ge 1 \\ -\infty < x < +\infty \end{cases} \end{array}\right.$

11) $tgx \ge a \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < a < +\infty \\ arctga + \pi k \le x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z \end{cases}$

12) $tgx \le a \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < a < +\infty \\ -\frac{\pi}{2} + \pi k < x \le arctga + \pi k,\ \ k \in Z \end{cases}$

13) $ctgx > a \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < a < +\infty \\ \pi k < x < arcctga + \pi k,\ \ k \in Z \end{cases}$

14) $ctgx \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < a < +\infty \\ \pi k < x \leq arcctga + \pi k, \;\; k \in Z \end{cases}$

15) $ctgx < a \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < a < +\infty \\ arcctga + \pi k < x < \pi + \pi k, \;\; k \in Z \end{cases}$

16)) $ctgx \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < a < +\infty \\ arcctga + \pi k \leq x < \pi + \pi k, \;\; k \in Z \end{cases}$

40. რიცხვითი მიმევრობა

რიცხვითი მიმდევრობა არის ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე.
f მიმდევრობა, რომლის მნიშვნელობებია $y_1, y_2, \dots, y_n$, ...სიმბოლოებით ან მხოლოდ (y_n)სიმბოლოთი; y_1-ს ეწოდება მიმდევრობის პირველი წევრი, y_2-ს-მეორე წევრი,...,y_n-ს -n-ური წევრი, ანუ ზოგადი წევრი.
მიმდევრობა შეიძლება იყოს სასრულიც და უსასრულოც.

მიმდევრობის მოცემის ხერხებია:

1. სასრული მიმდევრობა შეიძლება იყოს მოცემული წევრთა ჩამოთვლით (ჩამოთვლისას წევრთა ნომრები ზრდის მიხედვით უნდა იყოს დალაგებული): $x_1 = 8;\ x_2 = 5;\ x_3 = 4;\ x_4 = 0;\ x_5 = -5;$

2. მიმდევრობა შეიძლება მოცემული იყოს აღწერით; მაგ., მიმდევრობის ყოველი წევრი შეიძლება ტოლი იყოს შესაბამისი ნომრის კვადრატის: $a_1 = 1;\ a_2 = 4;\ a_3 = 9$ და ა.შ.;

3. მიმდევრობა შეიძლება მოცემული იყოს ფორმულით, რომლის საშუალებითაც გამოითვლება მიმდევრობის ყველა წევრი: თუ (b_n) მიმდევრობა მოცემულია ფორმულით $b_n = 3n - 5$, მაშინ $b_1 = -2;\ b_2 = 1$ და ა.შ.
b_n წარმოადგენს მიმდევრობის n-ურ წევრს;

4. მიმდევრობა შეიძლება მოცემული იყოს რეკურენტული წესით, ანუ მიმდევრობის ერთი ან რამდენიმე საწყისი წევრისა და ფორმულის სახით, რომლის მეშვეობითაც შესაძლებელია მიმდევრობის დანარჩენი წევრების პოვნა; მაგ., თუ $x_1 = -2,\ x_{n+1} = 5x_n + 4, n \geq 1$, მაშინ $x_2 = -6;\ x_3 = -26$ და ა.შ.
მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი დაწყებული მესამედან წინა ორი წევრის ჯაის ტოლია, ფიბონაჩის მიმდევრობა ეწოდება.
მაგ., მიმდევრობა 1;1;2;3;5;8;13;21;**...ფიბონაჩის მიმდევრობას წარმოადგენს.** აღნიშნული მიმდევრობა გამოისახება რეკურენტული წესით: (a_n): $a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ \ (n > 2)$
მიმდევრობას, რომლის ზოგადი წევრი მოცემულია $x_n = a$ ფორმულით, **მუდმივი** მიმდევრობა ეწოდება.
მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი (კლებადი), როდესაც მისი ყველა წევრი, დაწყებული მეორიდან, წინა წევრზე მეტია (ნაკლებია). ზრდად და კლებად მიმდევრობებს **მონოტონური მიმდევრობები** ეწოდება.
(x_n) მიმდევრობას ეწოდება ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ მიმდევრობის ყველა წევრისათვის სამართლიანია უტოლობა $x_n \leq M$ $(x_n \geq M)$
თუ მიმდევრობა ზემოდანაც და ქვემოდანაც შემოსაზღვრულია, მას **შემოსაზღვრული** მიმდევრობა ეწოდება.
a რიცხვს ეწოდება (x_n) მიმდევრობის ზღვარი, თუ ყოველი დადებითი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ ნებისმიერი ნატურალური n>N-თვის შესრულდება უტოლობა
$|x_n - a| < \varepsilon$. და ვწერთ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ მიღებული ორმაგი უტოლობა ნიშნავს, რომ $\forall \varepsilon > 0$-თვის არსებობს ისეთი N ნომერი, რომლიდანაც დაწყებული მიმდევრობის ყველა წევრი

მდებარეობს $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ ინტერვალში. $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ ინტერვალს a რიცხვის ε მიდამოს უწოდებენ. ε მიდამოს გარეთ კი მოთავსებული იქნება მიმდევრობის წევრთა მხოლოდ სასრული რაოდენობა.
მიმდევრობის ზღვრის განმარტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია: a რიცხვს ეწოდება (x_n) მიმდევრობის ზღვარი, თუ $\forall\varepsilon>0$-თვის ∃N ნომერი რომ მიმდევრობის ყოველი x_n წევრი n>N-ისათვის. მოთავსებული იქნება $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ მიდამოში.

რიცხვით მიმდევრობას, რომელსაც ზღვარი აქვს კრებადი, ხოლო რომელსაც ზღვარი არა აქვს, განშლადი ეწოდება.

თეორემა: თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ და $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ მაშინ სრულდება:

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=a-b$ $\lim\limits_{n\to\infty}kx_n=ka$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n-\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ $\lim\limits_{n\to\infty}(kx_n)=k\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

თუ b≠ 0, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{y\to\infty}y_n}$, თუ $\lim\limits_{y\to\infty}y_n\neq 0$

(x_n) მიმდევრობას ეწოდება უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა , თუ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$; თუ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, მაშინ x_n მიმდევრობას უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა ეწოდება.
ვიტყვით, რომ (x_n) მიმდევრობის ზღვარი არის $+\infty$, თუ ნებისმიერი დადებითი A რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ როცა n>N სრულდება $x_n>A$ და წერენ: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

41. არითმეტიკული პროგრესია

(a_n) რიცხვით მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორიდან, მიიღება წინა წევრისგან ერთი და იმავე d რიცხვის დამატებით, **არითმეტიკული პროგრესია** ეწოდება.
d რიცხვს არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობას უწოდებენ.
არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი წევრი (n-ური წევრი) **გამოითვლება ფორმულით**
$a_n=a_{n-1}+d$ ან $a_n=a_1+(n-1)d$.
არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი **გამოითვლება ფორმულებით:**
$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$; $S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$; $S_n=\frac{2a_n-(n-1)d}{2}\cdot n$
არითმეტიკული პროგრესიის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორიდან ტოლია წინა და მომდევნო წევრების არითმეტიკული საშუალოსი: $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$.
არითმეტიკული პროგრესია **ზრდადია,** როდესაც d>0, ხოლო **კლებადია**, როდესაც d<0, **მუდმივია** როდესაც d=0.
თუ a_m და a_n არითმეტიკული პროგრესიის წევრებია $(m\neq n)$, მაშინ d-ს გამოთვლა შეიძლება შემდეგი ფორმულით:

d=$\frac{a_m-a_n}{m-n}$ (m>n).

42. გეომეტრიული პროგრესია

არანულოვანი რიცხვების (b_n) მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორიდან, მიიღება წინა წევრის ერთსა და იმავე q რიცხვზე გამრავლებით, **გეომეტრიული პროგრესია** ეწოდება.

q რიცხვი არის გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი; $q \neq 0$;

გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრი (n-ური წევრი) **გამოითვლება ფორმულით:**

$b_n = b_{n-1} \cdot q$ ან $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამის **გამოსათვლელი ფორმულებია**:

$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$ ან $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$.

გეომეტრიული პროგრესიის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორიდან, ტოლია წინა და მომდევნო წევრების გეომეტრიული საშუალოსი: $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

დადებითწევრებიანი გეომეტრიული პროგრესია **ზრდადი**ა, როდესაც q>1, ხოლო **კლებადია,** როდესაც 0<q<1; უარყოფითწევრებიანი გეომეტრიული პროგრესია ზრდადია, როდესაც 0<q<1, ხოლო კლებადია, როდესაც q>1.

თუ q=1, მაშინ პროგრესია შედგება ერთი და იმავე წევრებისაგან და პირველი n წევრის ჯამი ასეთ სახეს მიიღებს: $S_n = nb_1$.

(b_n) გეომეტრიულ პროგრესიას , რომლის მნიშვნელის (q) მოდული 1-ზე ნაკლებია $|q| < 1$, უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესია ეწოდება.

აღნიშნული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი გამოითვლება ფორმულით:

$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} \Leftrightarrow S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ ამ უკანასკნელის ზღვარი, როდესაც n⟶ ∞, წარმოადგენს **უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამს. მივიღებთ ფორმულას:** $\boldsymbol{S = \frac{b_1}{1-q}}$ **რომელსაც** უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამს უწოდებენ.

43. კომბინატორიკის ელემენტები

კომბინატორიკა მათემატიკის ნაწილია. ის შეისწავლის სასრული სიმრავლის ელემენტებისგან კომბინაციების შედგენის და მათი დათვლის ხერხებს.

კომბინატორიკის ძირითადი წესებია: შეკრების წესი და გამრავლების წესი.

შეკრების წესი: თუ არსებობს რაიმე a ელემენტის შერჩევის n შესაძლებლობა და a-სგან განსხვავებული რაიმე b ელემენტის შერჩევის m შესაძლებლობა, მაშინ არსებობს a ან b ელემენტის შერჩევის (n+m) შესაძლებლობა.

თუ მოცემულია რაიმე A და B სასრული სიმრავლე და $A \cap B = \emptyset$, მაშინ ელემენტების რაოდენობა $A \cup B$-ში ტოლია A და B სიმრავლეებში ელემენტების ოდენობების ჯამისა:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

ეს ფორმულა სამართლიანია ნებისმიერი რაოდენობის არათანამკვეთი სასრული სიმრავლეებისათვის:

$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_k)$

თუ $A \cap B \neq \emptyset$, მაშინ ელემენტების რაოდენობა $A \cup B$-ში გამოითვლება ფორმულით

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

გამრავლების წესი: ვთქვათ , ერთმანეთის მიმდევრობიტ უნდა შესრულდეს ორი მოქმედება. პირველი

მოქმედება შეიძლება შესრულდეს m ხერხით, ამის შემდეგ მეორე მოქმედება უნდა შესრულდეს n ხერხით მაშინ ორივე მოქმედება ერთად შეიძლება შესრულდეს mxn ხერხით.

თუ საჭიროა ერთმანეთის მიმდევრობით შესრულდეს k მოქმედება, ამასთან პირველი n_1 ხერხით, ამის შემდეგ მეორე n_2 ხერხით და ა.შ. k მოქმედებამდე, მაშინ ყველა მოქმედება ერთად შეიძლება შესრულდეს $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ ხერხით.

n ელემენტიან სიმრავლეს, რომლის ელემენტები რაიმე წესით 1,2,...,n რიცხვებითაა გადანომრილი, დალაგებული სიმრავლე ეწოდება. დალაგება მდგომარეობს იმაში, რომ რომელიმე ელემენტს მიენიჭება ნომერი 1 (იწერება პირველ ადგილზე). სხვა რომელიმეს -ნომერი 2 (იწერება მეორე ადგილზე) და ა.შ. დალაგებული სიმრავლის ჩაწერისას იხმარება მრგვალი ფრჩხილები, რომელთა შორისაც მოთავსებულია მოცემული რიგით დალაგებული ელემენტები. დალაგებული n-ეული აღინიშნება ასე: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

(a;b)-დალაგებული ორეულია , (a;b;c)-დალაგებული სამეულია, (a;b;c;d)-დალაგებული ოთხეულია და ა.შ.

ორი დალაგებული სიმრავლე ტოლია მხოლოდ მაშინ, თუ ისინი შედგებიან ერთი და იმავე ელემენტებისგან და ერთი და იმავე წესით არიან დალაგებული (გადანომრილი).

გადანაცვლება. n ელემენტიან სასრულ სიმრავლეში ელემენტების ნებისმიერ დალაგებას გადანაცვლება ეწოდება და აღინიშნება P_n −ით. $P_n = n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

პირველი n ნატურალური რიცხვის n ფაქტორიალი ეწოდება და აღინიშნება n!

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ 0!=1; 1!=1; 2!=2 ; 3!=6 და ა.შ.

საბოლოოდ მივიღეთ, რომ $P_n = n!$

წყობა. სასრული სიმრავლის დალაგებულ ქვესიმრავლეებს წყობა ეწოდება. n ელემენტიან სიმრავლეში m ელემენტიანი დალაგებული ქვესიმრავლეების რაოდენობა აღინიშნება A_n^m-ით და გამოითვლება ფორმულით

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}; \qquad A_n^0 = 1,\ A_n^n = n!$$

n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა რაოდენობაა 2^n.

ჯუფთება: სასრული სიმრავლის ქვესიმრავლეს ჯუფთება ეწოდება. n-ელემენტიან სიმრავლეში m ელემენტიანი ქვესიმრავლეების რაოდენობა აღინიშნება C_n^m −ით და გამოითვლება ფორმულით

$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$ ანუ $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

ჯუფთებათა რიცხვის თვისებებია:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$ $(0 \le m \le n)$

2) $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

n ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტებისგან შედგენილ m ელემენტიან დალაგებულ სიმრავლეს, რომელშიც შესაძლებელია მეორდებოდეს ერთი და იგივე ელემენტები, ეწოდება n ელემენტიდან m ელემენტიანი წყობა განმეორებით. ასეთ წყობათა რიცხვი $\overline{A_n^m}$-ით აღინიშნება . $\overline{A_n^m} = n^m$.

ამრიგად მოცემული $(\overbrace{a, a, \ldots, a}^{\alpha}, \overbrace{b_1, \ldots b_{n-\alpha}}^{n-\alpha})$ n-ეულისათვის შესაძლ გადანაცვლებათა რაოდენობა იქნება: $k = \frac{n!}{\alpha!}$

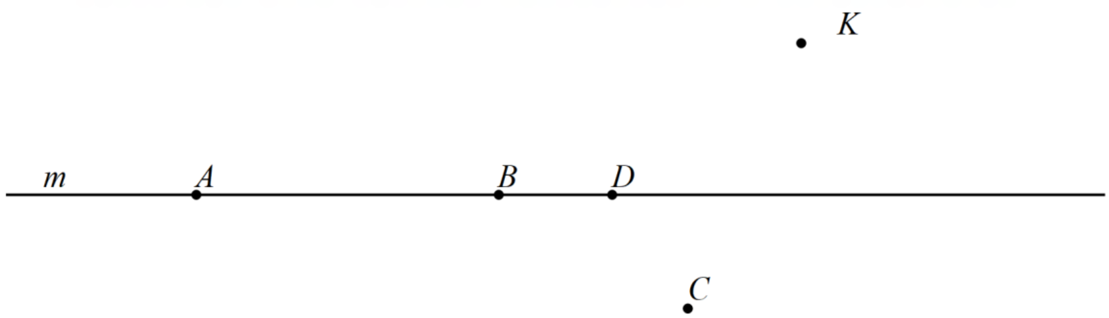
საზოგადოდ, თუ a ასო მეორდება α-ჯერ, b-β-ჯერ...., p-λ-ჯერ; მაშინ n-ეულისათვის შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვი k, ტოლია $k = \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!}$

გეომეტრია

პლანიმეტრია

1. წერტილი, წრფე. სხივი, მონაკვეთი, ტეხილი 2.მონაკვეთის სიგრძე, ტეხილის სიგრძე.

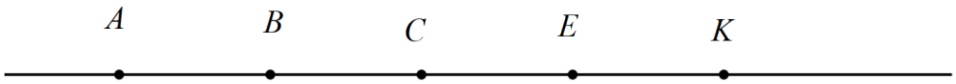
პლანიმეტრია არის გეომეტრიის ის ნაწილი, რომელიც სიბრტყეში მდებარე ფიგურებს შეისწავლის.
უმარტივესი გეომეტრიული ფიგურებია: წერტილი, წრფე, სიბრტყე. წერტილებს აღნიშნავენ ლათინური ანბანის დიდი ასოებით, წრფეს-ორი დიდი ან ერთი პატარა ლათინური ასოთი. სიბტყეებს უმეტეს შემთხვევაში აღნიშნავენ ბერძნული ანბანის ასოებით ($\alpha; \beta; \gamma; \ldots$)



სურ1.

სურ.1-ზე გამოსახული წრფე აღინიშნება როგორც m წრფე ან AB წრფე (AD წრფე; BD წრფე). წრფეს არც სათავე აქვს, არც-ბოლო. წრფე უსასრულოა.
წერტილებისა და წრფეების მიკუთვნების აქსიომები.
1. არსებობს სიბრტყის წერტილები, რომლებიც მოცემულ წრფეს ეკუთვნის და რომლებიც არ ეკუთვნის. სურ.1-ის მიხედვით $A \in m,\ B \in m,\ D \in m,\ C \notin m,\ K \notin m.$

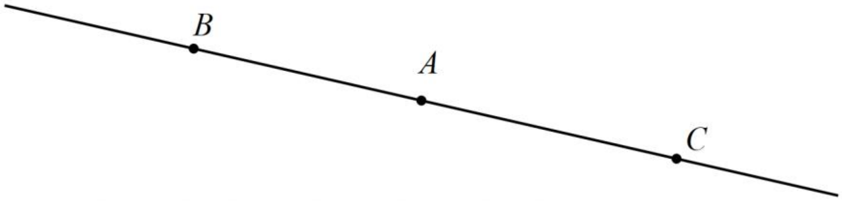
2. სიბრტყის ორ მოცემულ წერტილზე მხოლოდ ერთი წრფე გაივლება.
სიბრტყის ნებისმიერ წერტილზე უამრავი წრფის გავლება შეიძლება.
წრფესა დასიბრტყეზე წერტილთა მდებარეობის აქსიომები.
აქსიომა1. წრფეზე ნებისმიერად აღებული სამი წერტილიდან ერთი მდებარეობს დანარჩენ ორს შორის. სურ.1-ის მიხედვით, m წრფეზე B წერტილი მდებარეობს A და D წერტილებს შორის.
წრფის იმ ნაწილს, რომელიც წრფეზე მდებარე ორ წერტილს შორისაა, თვით ამ წერტილების ჩათვლით, მონაკვეთი ეწოდება. აღნიშნული ორი წერტილი მონაკვეთის ბოლოებს წარმოადგენს. სურ.1-ზე გამოსახული AB მონაკვეთის ბოლოებია A და B წერტილები. მონაკვეთის სიგრძეა მის ბოლოებს შორის მანძილი.
წრფის იმ ნაწილს, რომელიც წრფეზე ნებისმიერად აღებული წერტილიდან, თვით ამ წერტილის ჩათვლით, რომელიმე ერთ მხარეს მდებარეობს, სხივი ეწოდება. დასახელებულ წერტილს სხივის სათავე ეწოდება; სხივს ბოლო არა აქვს. სხივის აღნიშვნისას პირველ ადგილზე იწერება სათავის შესაბამისი წერტილი, შემდეგ-ამ სხივზე მდებარე ნებისმიერი წერტილი.



სურ2.

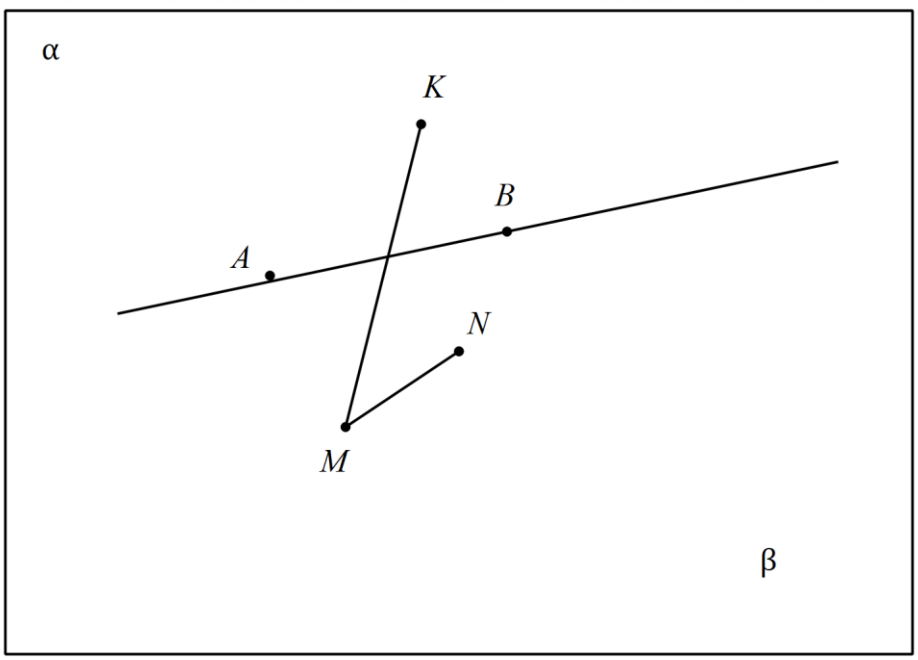
სურ.2-ზე წარმოდგენილი ერთ-ერთი სხივი AB შეიძლება გამოისახოს როგორც AC, AE, AK და ა.შ. A წერტილი არის თითოეული დასახელებული სხივის სათავე. სხივი შეიძლება პატარა ლათინური ასოთიც იყოს გამოსახული; მაგ. a; b; c; d და ა.შ.

საერთო სათავის მქონე სხივებს, რომლებიც ერთ წრფეზე მდებარეობენ, დამატებითი სხივები ეწოდება. სურ.3-ზე გამოსახულია AB და AC დამატებითი სხივები



სურ.3

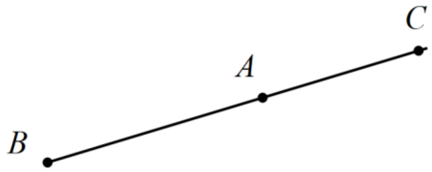
აქსიომა 2. წრფე სიბრტყეს ორ ნახევარსიბრტყედ ყოფს (სურ.4)



სურ.4

თუ რაიმე ორი წერტილი ერთი და იმავე წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეშია, მაშინ ამ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი წრფეს არ გადაკვეთს, ხოლო თუ ეს ორი წერტილი ამ წრფის მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეშია, ამ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი წრფეს გადაკვეთს . მე-4 სურათის მიხედვით , MK მონაკვეთი გადაკვეთს AB წრფეს (M$\in \beta, K \in \alpha$), MNმონაკვეთი კი-არა (M$\in \beta, N \in \beta$).

მონაკვეთის გაზომვის აქსიომა. მონაკვეთის სიგრძე ტოლია იმ მონაკვეთების სიგრძეთა ჯამისა, რომლებადაც ის იყოფა ნებისმიერი წერტილით. მე-5 სურათის მიხედვით BC=AB+AC

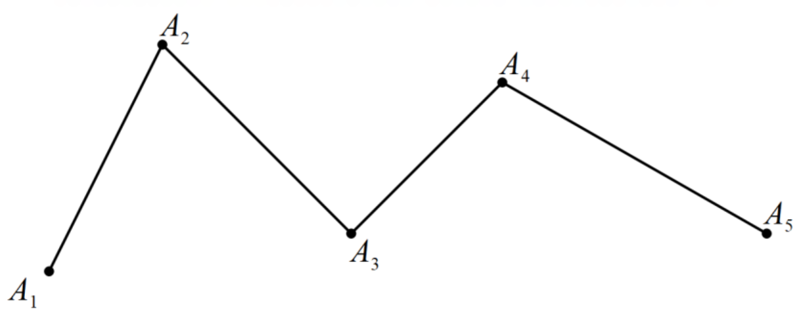


სურ.5

მონაკვეთის გადადების აქსიომა. ყოველ სხივზე მისი სათავიდან შეიძლება გადაიდოს მოცემული დადებითი სიგრძის მხოლოდ ერთი მონაკვეთი.

ტეხილი. ფიგურას, რომელიც შედგება $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ წერტილებისაგან და მათი მიმდევრობით შემაერთებელი $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ მონაკვეთებისაგან, ტეხილი ეწოდება. აღნიშნულ წერტილებს ტეხილის წვეროები ეწოდება, ხოლო აღნიშნულ მონაკვეთებს-ტეხილის მდგენები.

მე-6 სურათზე გამოსახულია $A_1A_2A_3A_4A_5$ ტეხილი. A_1 და A_5 წვეროებს ტეხილის ბოლოები ეწოდება. რადგან ეს ტეხილი ერთ სიბრტყეზე მდებარეობს (მისი ყველა მდგენი ერთ სიბრტყეზე ძევს), ამიტომ ეს არის ბრტყელი ტეხილი.



სურ.6

თუ ტეხილის ბოლოები შეერთებულია მონაკვეთით, ტეხილს ეწოდება შეკრული. (სურ.7ა;სურ.7ბ)

ტეხილის სიგრძე ტოლია მისი მდგენების სიგრძეთა ჯამის.

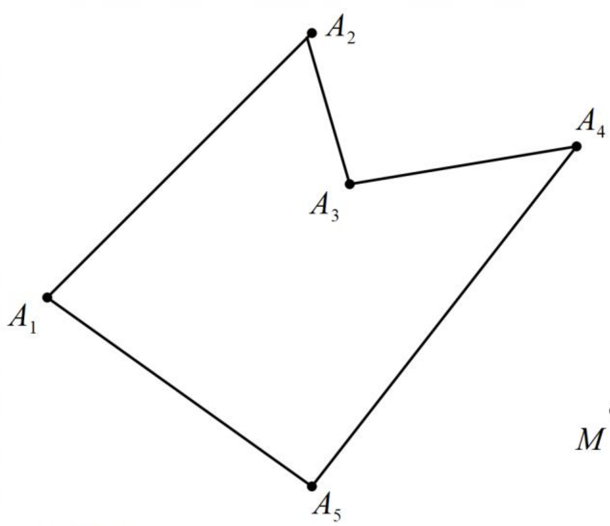
მარტივი ტეხილი ეწოდება ისეთ ტეხილს, რომლის არამეზობელ მდგენებს არა აქვთ საერთო წერტილი.

მე-6, მე-7 ა და მე-7 ბ სურათებზე გამოსახული სამივე ტეხილი არის მარტივი ტეხილი.

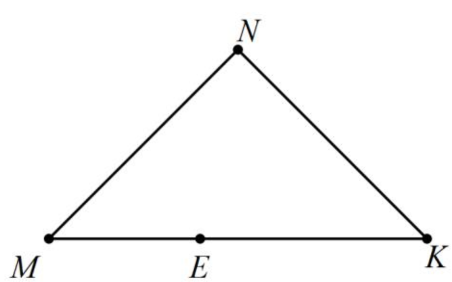
მარტივი ტეხილის ბოლოებს შორის მანძილი არ აღემატება ტეხილის სიგრძეს. მაგ. მე-6 სურათის მიხედვით $A_1A_5 \leq A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5$.

შეკრული ტეხილის ნებისმიერი მდგენის სიგრძე არ აღემატება დანარჩენი მდგენების სიგრძეთა ჯამს.

მე-8 სურათზე გამოსახული ორი ტეხილიდან არცერთი არაა მარტივი.

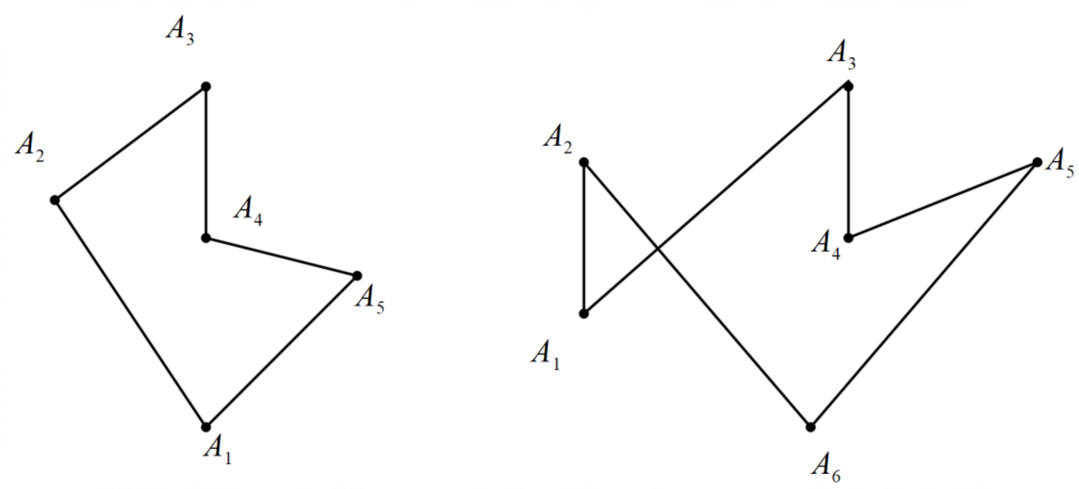


სურ.7 ა



სურ.7.ბ

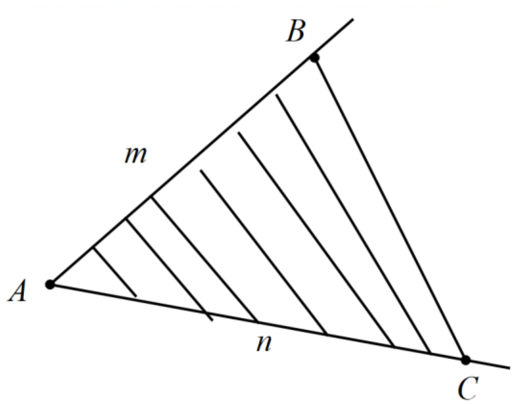
მრავალკუთხედს ამოზნექილი ეწოდება, თუ იგი მისი ნებისმიერი გვერდის შემცველი წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს. მე-7 ნახაზზე გამოსახულია ამოზნექილი მრავალკუთხედი ხოლომე-8 ნახაზზე არაამოზნექილი მრავალკუთხედი (ჩაზნექილი)



სურ.8.

3. კუთხე, კუთხის გრადუსული ზომა, მართი,მახვილი, ბლაგვი და გაშლილი კუთხეები.

კუთხე არის სიბრტყის ნაწილი, რომელიც შედგება ერთი სათავიდან გამოსული ორი სხივისა და ამ სხივებით შემოსაზღვრული სიბრტყის ნაწილისაგან. ნახაზზე გამოსახული დაშტრიხული კუთხე აღინიშნება როგორც $\angle A$, ან $\angle BAC$ ($\angle CAB$). A წერტილს ეწოდება კუთხის წვერო, AB და AC სხივებს -კუთხის გვერდები.
კუთხე შეიძლება ორი პატარა ლათინური ასოთიც იყოს გამოსახული. თუ AB და AC სხივები შესაბამისად m და n ასოებითაა გამოსახული, მაშინ სურათზე აღნიშნული კუთხე ჩაიწერება როგორც $\angle(mn)$.



ნახაზზე გამოსახული სიბრტყის ორივე ნაწილი, დაშტრიხული და დაუშტრიხავი, კუთხეს წარმოადგენს. მათგან უფრო ხშირად იმ კუთხეს განიხილავენ, რომელიც BC მონაკვეთს მთლიანად შეიცავს.

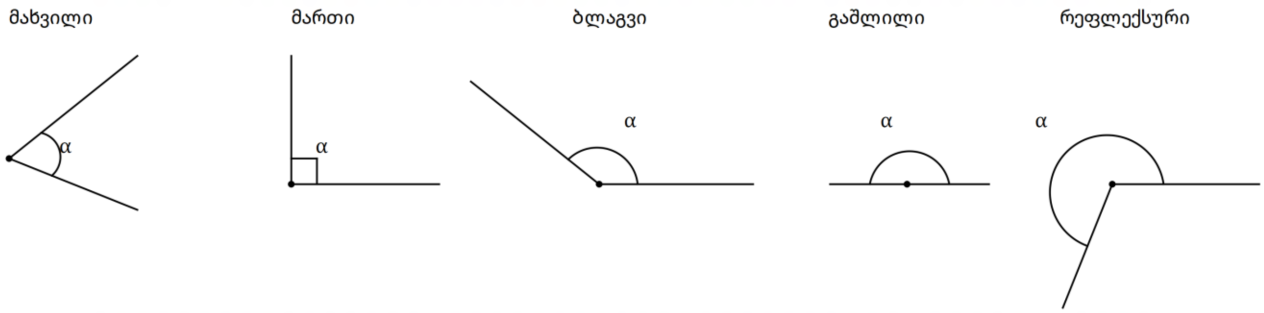
კუთხეს, რომლის გვერდები დამატებითი სხივებია, გაშლილი კუთხე ეწოდება.

სურ1.

სურ.1-ზე გამოსახული AOB კუთხე გაშლილი კუთხეა.

კუთხის საზომ ერთეულად ხშირ შემთხვევაში გამოიყენება გრადუსი. 1 გრადუსი ასე აღინიშნება: 1^0.
1 გრადუსი წარმოადგენს გაშლილი კუთხის $\frac{1}{180}$ ნაწილს. გაშლილი კუთხის გრადუსული ზომაა 180^0.
არსებობს კუთხის საზომი სხვა უფრო მცირე ერთეულები: მინუტი, სეკუნდი. გრადუსის $\frac{1}{60}$ ნაწილს ეწოდება მინუტი; 1 მინუტი ასე გამოისახება: $1'$. მინუტის $\frac{1}{60}$ ნაწილს ეწოდება სეკუნდი; 1 სეკუნდი კი ასე გამოისახება: $1''$.

კუთხეთა სახეები:



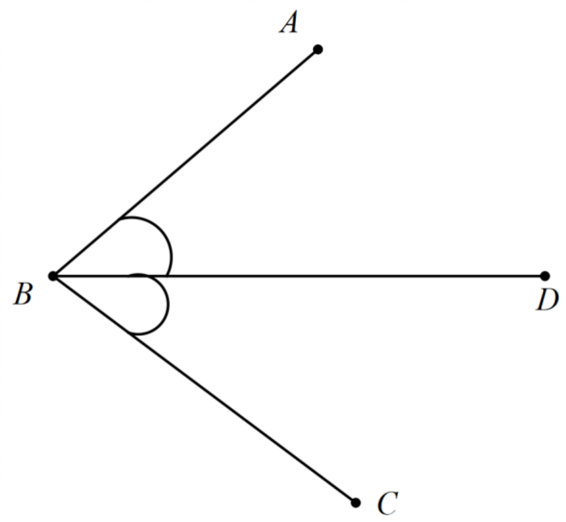
$0^0 < \alpha < 90^0$ $\alpha = 90^0$ $90^0 < \alpha < 180^0$ $\alpha = 180^0$ $180^0 < \alpha < 360^0$

კუთხეთა გრადუსული ზომები ხშირად ბერძნული ასოებით გამოისახება.

4.კუთხის ბისექტრისა

კუთხის წვეროდან გამოსულ სხივს, რომელიც კუთხის გვერდებს შორის გადის და კუთხეს ორ ტოლ ნაწილად ჰყოფს, კუთხის ბისექტრისა ეწოდება. მე-3 სურათზე გამოსახულია ABC კუთხის BD ბისექტრისა,

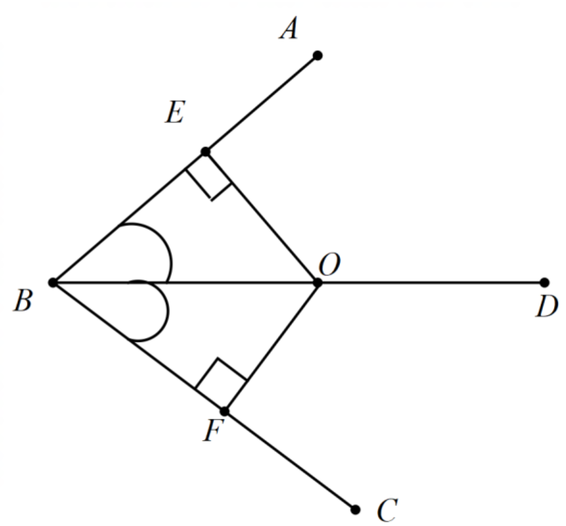
$\angle ABD = \angle CBD.$



სურ3.

კუთხის ბისექტრისის თვისება.

თეორემა. კუთხის ბისექტრისის ნებისმიერი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული კუთხის გვერდებიდან.
სურ4-ის მიხედვით BD არის ABC კუთხის ბისექტრისა; $O \in BD, OE \perp AB, OF \perp CB \Rightarrow OE = OF.$

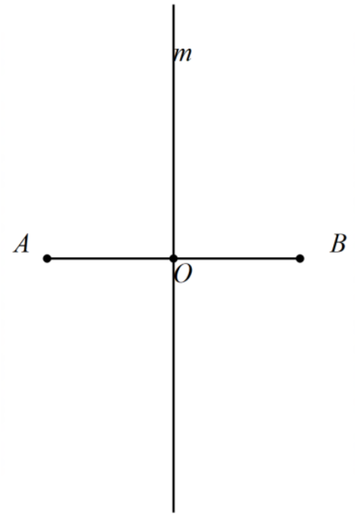


სურ.4

სამართლიანია შებრუნებული თეორემაც: კუთხის გვერდებიდან ტოლი მანძილით დაშორებულ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი წარმოადგენს ამ კუთხის ბისექტრისას.

5. მონაკვეთის შუამართობი

წრფეს რომელიც გადის მონაკვეთის შუაწერტილზე და მისი მართობულია მონაკვეთის შუამართობი ეწოდება.
მონაკვეთის შუამართობის თვისება: მონაკვეთის შუამართობი ეს არის სიბრტყის ყველა იმ წერტილის სიმრავლე, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული მონაკვეთის ბოლოებიდან. (იხ.სურ.5)



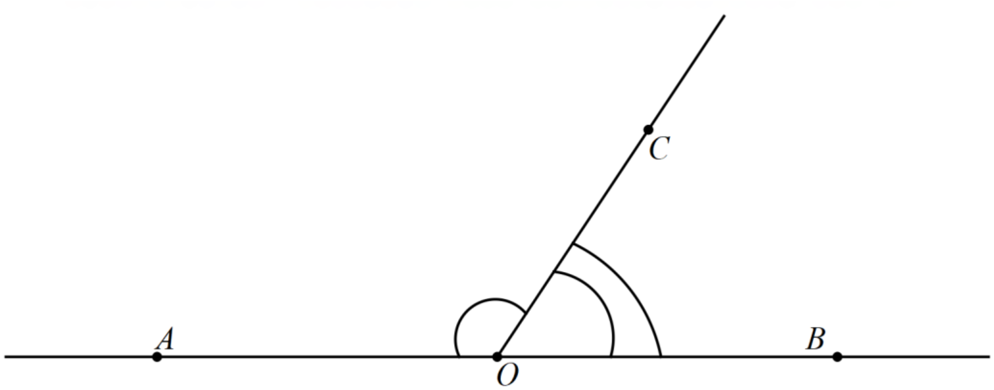
სურ.5. AO=OB, $m \perp AB$,

ამ შემთხვევაში შეგვიძლია დავასაბუთოთ, რომ m წრფის ყოველი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული მონაკვეთის ბოლოებიდან. თუ m წრფეზე ავიღებთ ნებისმიერ k წერტილს, მაშინ KA=KB.

პირიქით თუ წერტილი თანაბრადაა დაშორებული მონაკვეთის ბოლოებიდან მაშინ შეგვიძლია დავასაბუთოთ, რომ ეს წერტილი აუცილებლად მდებარეობს AB მონაკვეთის შუამართობზე.

6. მოსაზღვრე და ვერტიკალური კუთხეები.

ორ კუთხეს ეწოდება მოსაზღვრე, თუ მათ ერთი გვერდი საერთო აქვთ, დანარჩენი ორი გვერდი კი დამატებითი სხივებია. მე-6 სურათის მიხედვით $\angle AOC$ და $\angle BOC$ მოსაზღვრე კუთხეებია.

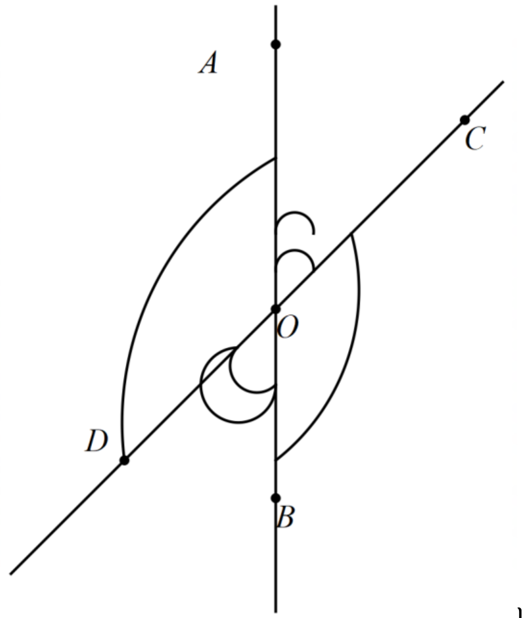


სურ.6

თეორემა. მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180^0-ის ტოლია; $\angle AOC + \angle BOC = 180^0$.

ორ კუთხეს ეწოდება ვერტიკალური, თუ ერთი კუთხის გვერდები მეორე კუთხის გვერდების დამატებითი სხივებია.

მე-7 სურათზე წარმოდგენილია ვერტიკალური კუთხეების ორი წყვილი:$\angle AOC$ და $\angle BOD$; $\angle AOD$ და $\angle BOC$.



სურ.7

თეორემა. ვერტიკალური კუთხეები ტოლია; $\angle AOC = \angle BOD$; $\angle AOD = \angle BOC$.

აღნიშნული ოთხივე კუთხე ერთად ქმნის სრულ კუთხეს. სრული კუთხის გრადუსული ზომაა 360^0.

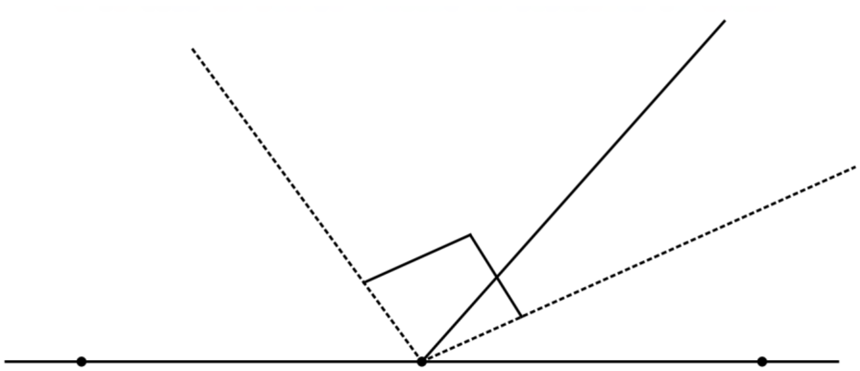
სიბრტყეზე მდებარე ორი წრფე შეიძლება გადაიკვეთოს მხოლოდ ერთ წერტილში.

კუთხე ორ წრფეს შორის ეწოდება ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან უმცირესი კუთხის გრადუსულ ზომას.

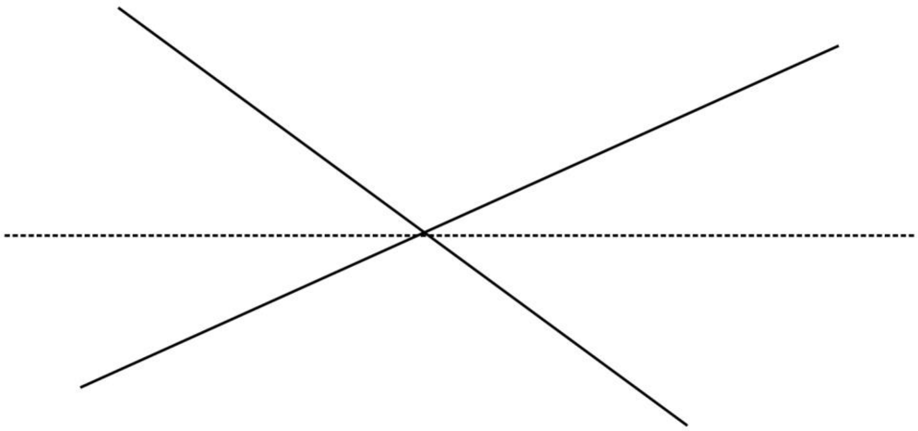
მოსაზღვრე კუთხეების ბისექტრისებით შედგენილი კუთხე მართია.

ვერტიკალური კუთხეების ბისექტრისებით შედგენილი კუთხე გაშლილია.

(სურ.8 და სურ.9)



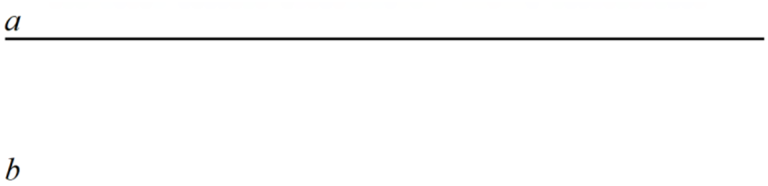
სურ.8



სურ.9

7. წრფეთა პარალელობა. ორი წრფის მესამე წრფით გადაკვეთისას მიღებული კუთხეები.

ერთ სიბრტყეში მდებარე ორ წრფეს ეწოდება პარალელური, თუ ისინი ერთმანეთს არ კვეთს. (სურ.10)



სურ.10

სურ.10-ის მიხედვით a და b პარალელური წრფეებია; ეს ფაქტი ასე ჩაიწერება: $a \parallel b$

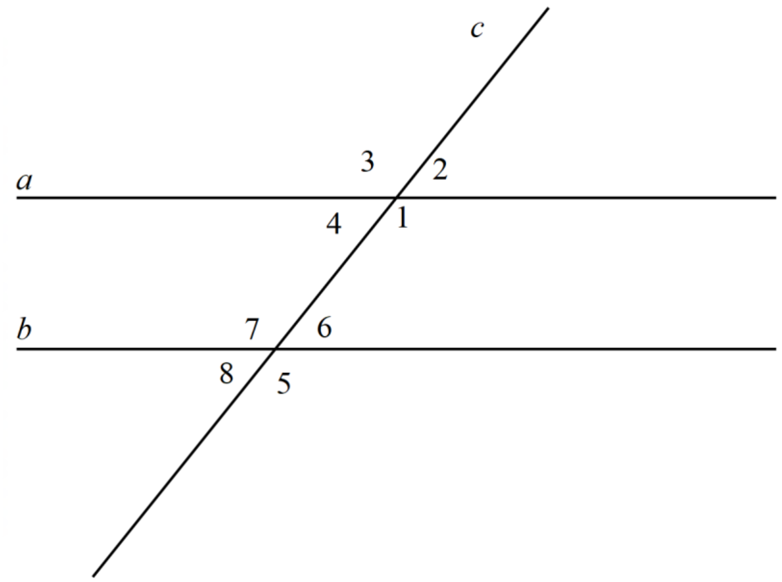
წრფეთა პარალელურობის აქსიომა. წრფეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება ამ წრფის პარალელური არაუმეტეს ერთი წრფის გავლება.

ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიიღება 8 კუთხე. (სურ.11.) კუთხეთა წყვილებს $\angle 1$ და $\angle 7, \angle 4$ *და* $\angle 6$ შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ეწოდება.

კუთხეთა წყვილებს $\angle 1$ და $\angle 6, \angle 4$ *და* $\angle 7$ შიგა ცალმხრივად მდებარე კუთხეები ეწოდება.

მოსაზღვრე კუთხეების თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეების ერთი წყვილის კუთხეები ტოლია, მაშინ მეორე წყვილის კუთხეებიც ტოლია, ხოლო შიგა ცალმხრივად მდებარე კუთხეების თითოეული წყვილის კუთხეების ჯამი 180^0-ს უდრის და პირიქით.

თეორემა. ორი პარალელური წრფის მესამეთი გადაკვეთისას შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია და შიგა ცალმხრივად მდებარე კუთხეების ჯამი 180^0-ის ტოლია.



სურ. 11.

$\angle 1 = \angle 7,\ \angle 4 = \angle 6, \angle 1 + \angle 6 = 180^0,\ \angle 4 + \angle 7 = 180^0$

თეორემა (წრფეთა პარალელურობის I ნიშანი). თუ ორი წრფე ამავე სიბრტყეში მდებარე მესამე წრფის პარალელურია, მაშინ ეს ორი წრფე ურთიერთპარალელურია.

თეორემა (წრფეთა პარალელურობის II ნიშანი) . თუ ორი წრფის (a და b) მესამეთი (c) გადაკვეთისას მიღებული შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია, ან შიგა ცალმხრივად მდებარე კუთხეების ჯამი 180^0-ის ტოლია, მაშინ მოცემული ორი წრფე პარალელურია.

ორი პარალელური წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებული შიგა ცალმხრივად მდებარე კუთხეების ბისექტრისებს შორის კუთხე მართია.

თუ ორი წრფე მესამე წრფის მართობულია, მაშინ ეს ორი წრფე პარალელურია. თუ წრფე მართობულია ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთის, მაშინ ის მეორე წრფის მართობულიც იქნება.

პარალელურგვერდებიანი კუთხეები ტოლია,ან მათი გრადუსულ ზომათა ჯამი უდრის 180^0-ს.

მართობულგვერდებიანი კუთხეები ტოლია, ან მათი გრადუსულ ზომათა ჯამი უდრის 180^0-ს.

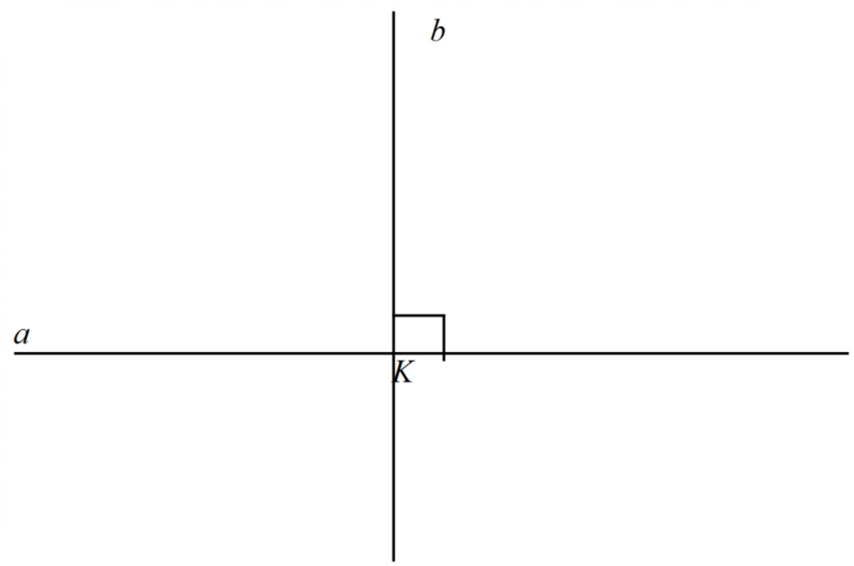
წერტილთა გეომეტრიული ადგილი ეწოდება სიბრტყის ყველა იმ წერტილის სიმრავლეს, რომელთაც გარკვეული თვისება გააჩნიათ.

8. კუთხე ორ წრფეს შორის. წრფეთა მართობულობა. მართობი, დახრილი და გეგმილი. მანძილი წერტილიდან წრფემდე.

კუთხე ორ წრფეს შორის ეწოდება ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან უმცირესი კუთხის გრადუსულ ზომას.

თუ ორი წრფის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან ერთ-ერთი მართია, მაშინ დანარჩენი სამი კუთხეც მართია.

თეორემა. ყოველი წრფის ნებისმიერ წერტილზე გაივლება მოცემული წრფის მართობული მხოლოდ ერთი წრფე. სურ.12.



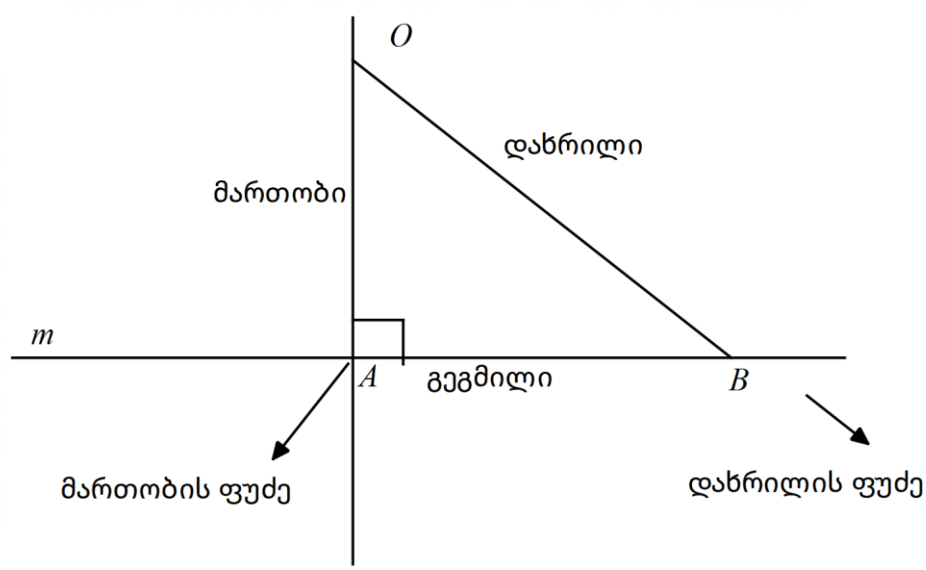
სურ 12.

თეორემა. მოცემული წრფის გარეთ მდებარე წერტილზე გაივლება ამ წრფის მართობული მხოლოდ ერთი წრფე.

მოცემული წერტილიდან რაიმე წრფისადმი გავლებული მართობი ეწოდება ამ წერტილიდან მოცემული წრფისადმი გავლებული მართობული წრფის მონაკვეთს წრფესთან გადაკვეთამდე; წრფესთან გადაკვეთის A წერტილს ეწოდება მართობის ფუძე. (სურ.13)

მოცემული წერტილიდან რაიმე წრფისადმი გავლებული დახრილი ეწოდება მონაკვეთს, რომელიც ამ წერტილს წრფის ნებისმიერ წერტილთან აერთებს და მართობისგან განსხვავდება. წრფეზე მდებარე დახრილის B ბოლოს დახრილის ფუძე ეწოდება.

მართობისა და დახრილის ფუძეების შემაერთებელ მონაკვეთს ეწოდება დახრილის გეგმილი. მოცემულ წრფეზე მანძილი წერტილიდან წრფემდე ეწოდება ამ წერტილიდან მოცემული წრფისადმი გავლებული მართობის სიგრძეს. წრფის ნებისმიერი ორი წერტილიდან ამ წრფის პარალელურ წრფემდე მანძილები ტოლია.



სურ.13

ვთქვათ M_0 სიბრტყის ნესბისმიერი წერტილია, მანძილი წერტილიდან წრფემდე გამოითვლება ფორმულით

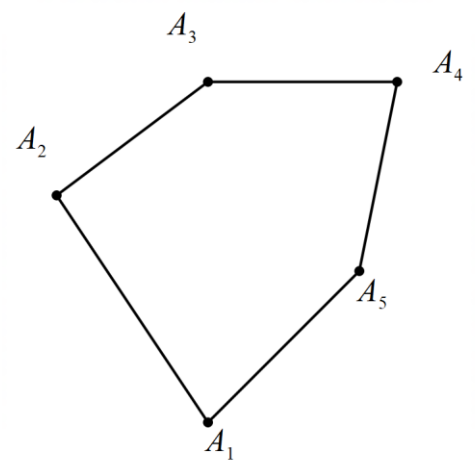
$$\rho(M_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

9. მრავალკუთხედი და მისი ელემენტები: გვერდი, წვერო, კუთხე, დიაგონალი. მრავალკუთხედის პერიმეტრი.

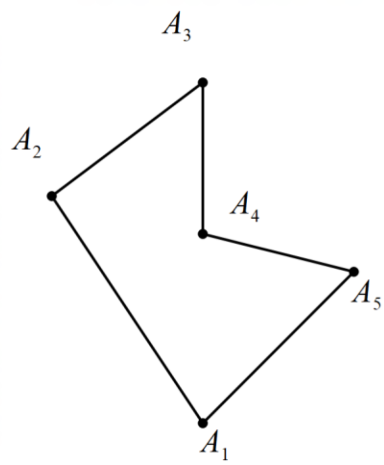
$A_1A_2A_3 \dots, A_{n-1}A_n$ მარტივი შეკრული ტეხილი, რომლის ნებისმიერი ორი მეზობელი მდგენი ერთ წრფეზე არ ძევს , წარმოადგენს მრავალკუთხედს. $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ ტეხილით განსაზღვრული მრავალკუთხედი მითითებული ტეხილის წვეროების თითოჯერ ჩამოთვლით აღინიშნება;მაგალითად ასე: $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ მრავალკუთხედს ხშირად n-კუთხედსაც უწოდებენ.$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ წერტილებს n-კუთხედის წვეროები ეწოდება, ხოლო $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ მონაკვეთებს - n-კუთხედის გვერდები. მრავალკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხეს, რომელიც მრავალკუთხედის სიბრტყეშია, მრავალკუთხედის შიგა კუთხე ან უბრალოდ მრავალკუთხედის კუთხე ეწოდება. n-კუთხედის გვერდებს, რომელთაც საერთო წვერო აქვთ, მეზობელი გვერდები ეწოდება. (A_1A_2 და A_2A_3), ხოლო იმ გვერდებს, რომელთაც საერთო წვერო არ აქვთ-არამეზობელი გვერდები. (A_1A_2 და A_3A_4).

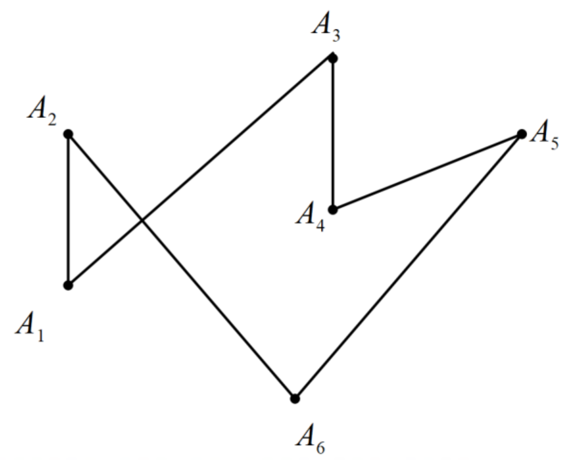
n-კუთხედის წვეროებს, რომლებიც ერთი და იმავე გვერდის ბოლოებს წარმოადგენს, მეზობელი წვეროები ეწოდება (A_1 და A_2), ხოლო წვეროებს, რომლებიც ერთი და იმავე გვერდის ბოლოები არაა-არამეზობელი წვეროები. (A_1 და A_3).

n-კუთხედს აქვს n რაოდენობის გვერდი და n რაოდენობის კუთხე. n-კუთხედს ეწოდება ამოზნექილი, თუ მოცემული n-კუთხედი მდებარეობს თავისი რომელიმე ერთი გვერდის შემცველი წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში. თუ მოცემული n-კუთხედი არ აკმაყოფილებს აღნიშნულ პირობებს, მას ეწოდება არაამოზნექილი. წინამდებარე წიგნში განხილულია მხოლოდ ამოზნექილი მრავალკუთხედები.



ამოზნექილი მრავალკუთხედი.





არაამოზნექილი მრავალკუთხედი (ჩაზნექილი).

მრავალკუთხედის პერიმეტრი ეწოდება მისი ყველა გვერდის სიგრძეთა ჯამს.

მრავალკუთხედში ორი არამეზობელი გვერდის შემაერთებელ მონაკვეთს **მრავალკუთხედის დიაგონალი** ეწოდება.

10. ამოზნექილი მრავალკუთხედი.

n-კუთხედს ეწოდება ამოზნექილი, თუ მოცემული n-კუთხედი მდებარეობს თავისი რომელიმე ერთი გვერდის შემცველი წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში. თუ მოცემული n-კუთხედი არ აკმაყოფილებს აღნიშნულ პირობებს, მას ეწოდება არაამოზნექილი. წინამდებარე წიგნში განხილულია მხოლოდ ამოზნექილი მრავალკუთხედები.

თეორემა. ნებისმიერი ამოზნექილი n-კუთხედის **შიგა კუთხეების ჯამია** $180^0 \cdot (n-2)$.

ამოზნექილი n-კუთხედის დიაგონალების რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით: $\frac{n(n-3)}{2}$.

ამოზნექილი n-კუთხედის გარე კუთხე ეწოდება მისი რომელიმე კუთხის მოსაზღვრე კუთხეს.

თეორემა. ამოზნექილი n-კუთხედის თითოეულ წვეროსთან თითო-თითოდ აღებული გარე კუთხეების გრადუსულ ზომათა ჯამი 360⁰-ის ტოლია.

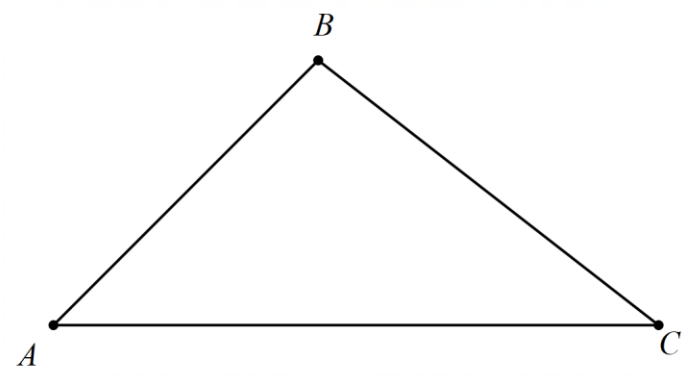
წესიერ n-კუთხედის თითოეული კუთხის გრადუსული ზომაა : $\frac{180^0 \cdot (n-2).}{n}$

n-კუთხედის პერიმეტრი ეწოდება მისი ყველა გვერდის სიგრძეთა ჯამს.

11. სამკუთხედები და მისი ელემენტები:გვერდი, კუთხე,წვერო, მედიანა,ბისექტრისა, სიმაღლე.

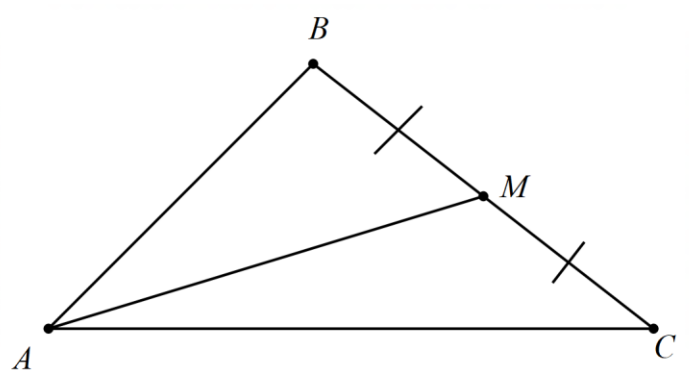
სამკუთხედი ეწოდება ფიგურას, რომელიც შედგება ერთ წრფეზე არამდებარე სამი წერტილისგან და ამ წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთებისაგან. ამ სამ წერტილს ეწოდება სამკუთხედის წვეროები,

კუთხეებს წვეროსთან მდებარე კუთხეები. (ცხადია სამკუთხედს გააჩნია სამი კუთხე.) ხოლო მონაკვეთებს- სამკუთხედის გვერდები. (სურ1.) სურ1-ზე წარმოდგენილი სამკუთხედი ასე გამოისახება ΔABC



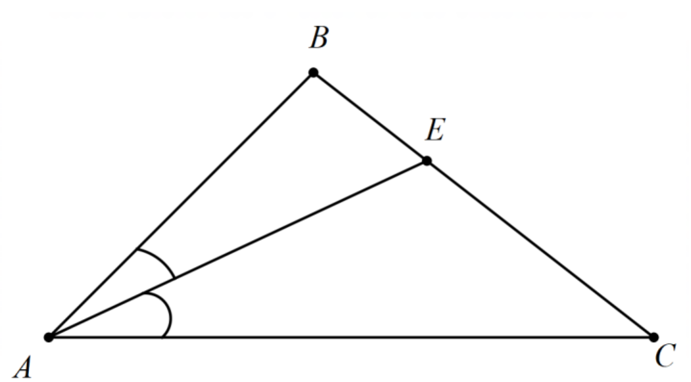
სურ.1.

სამკუთხედის მედიანა ეწოდება მონაკვეთს, რომელიც სამკუთხედის წვეროს მისი მოპირდაპირე გვერდის შუაწერტილთან აერთებს. მე-2 სურათზე AM არის ABC სამკუთხედის მედიანა.



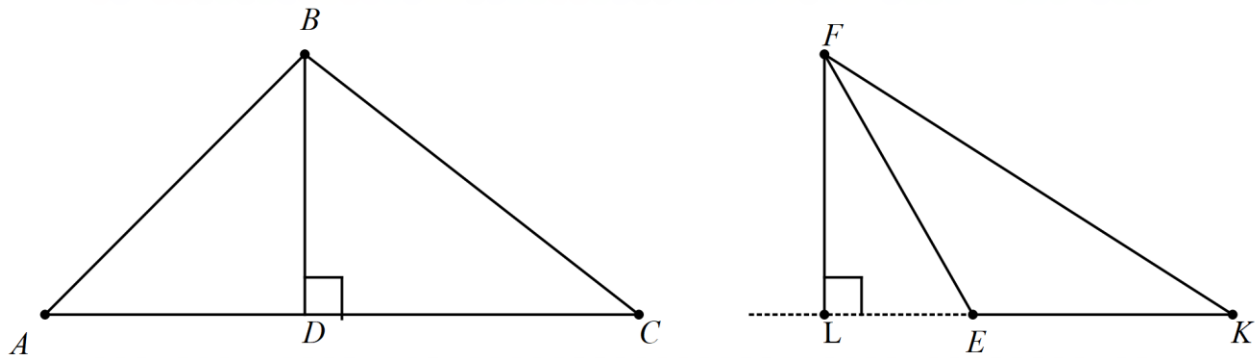
სურ.2

სამკუთხედის ბისექტრისა ეწოდება მოცემული სამკუთხედის რომელიმე კუთხის ბისექტრისის მონაკვეთს ამ კუთხის მოპირდაპირე გვერდთან გადაკვეთამდე. მე-3 სურათზე AE არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისა.



სურ.3

სამკუთხედის სიმაღლე ეწოდება სამკუთხედის რომელიმე წვეროდან მოპირდაპირე გვერდზე ან ამ გვერდის გაგრძელებაზე დაშვებულ მართობს. მე-4 სურათის მიხედვით , BD და FL სიმაღლეებია, ანუ BD ⊥ AC და FL ⊥ EK .

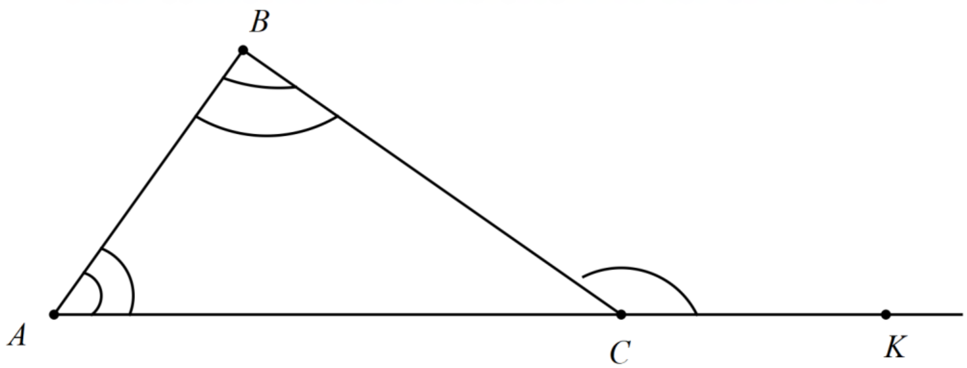


სურ.4

12. სამკუთხედის კუთხეები.

თეორემა. სამკუთხედის კუთხეების გრადუსულ ზომათა ჯამი 180^0-ის ტოლია. $\angle A+\angle B+\angle C=180^0$

სამკუთხედის რომელიმე კუთხის მოსაზღვრე კუთხეს სამკუთხედის გარე კუთხე ეწოდება.



სურ.5

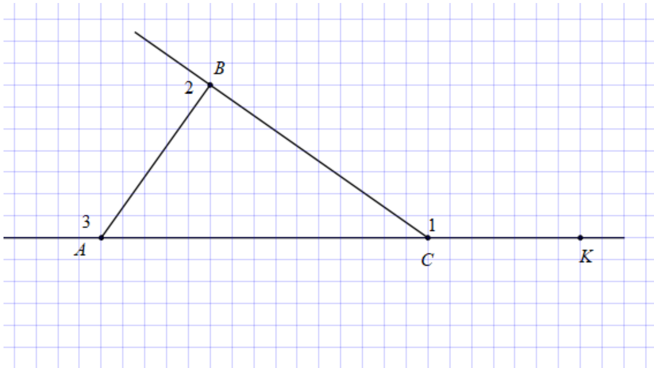
$\angle BCK$ წარმოადგენს ABC სამკუთხედის გარე კუთხეს. $\angle BCK=\angle A+\angle B$

თეორემა. სამკუთხედის გარე კუთხე ტოლია მისი არამოსაზღვრე ორი შიგა კუთხის ჯამის.

თეორემა. სამკუთხედის გარე კუთხე მეტია მის არამოსაზღვრე თითოეულ შიგა კუთხეზე.

$\angle BCK>\angle A;\ \angle BCK>\angle B$

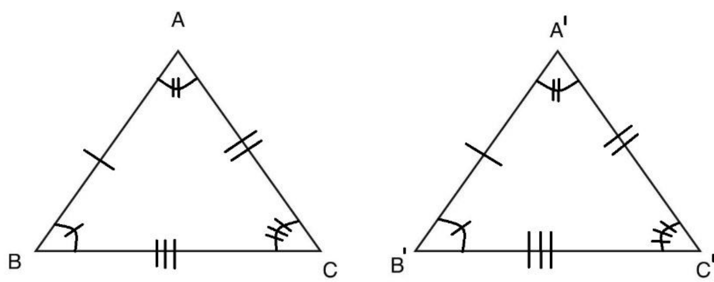
სამკუთხედის სამივე წვეროსთან თითო-თითოდ აღებულ გარე კუთხეთა გრადუსული ზომების ჯამი 360^0-ის ტოლია. (სურ.6)

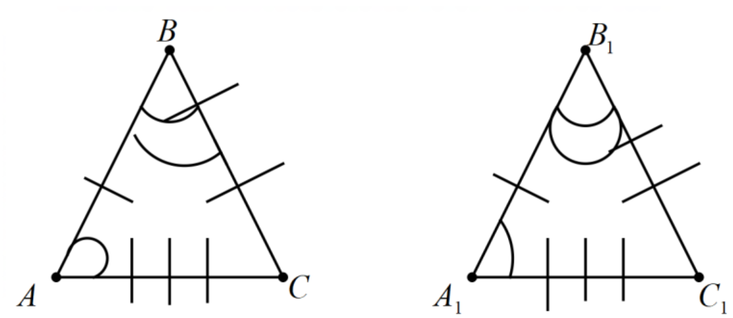


სურ .6 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^0$.

13. სამკუთხედების ტოლობა.

ორ სამკუთხედს ეწოდება ტოლი, თუ მათი შესაბამისი გვერდები და შესაბამისი კუთხეები ტოლია.
მე-7 სურათის მიხედვით AB=A_1B_1; $BC = B_1C_1$; $AC = A_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$;
ანუ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. სამკუტხედის ტოლი სამკუთხედის არსებობის აქსიომა. ნებისმიერი სამკუთხედისთვის არსებობს მისი ტოლი სამკუთხედი, რომელსაც მოცემული მდებარეობა აქვს მოცემული სხივის მიმართ.



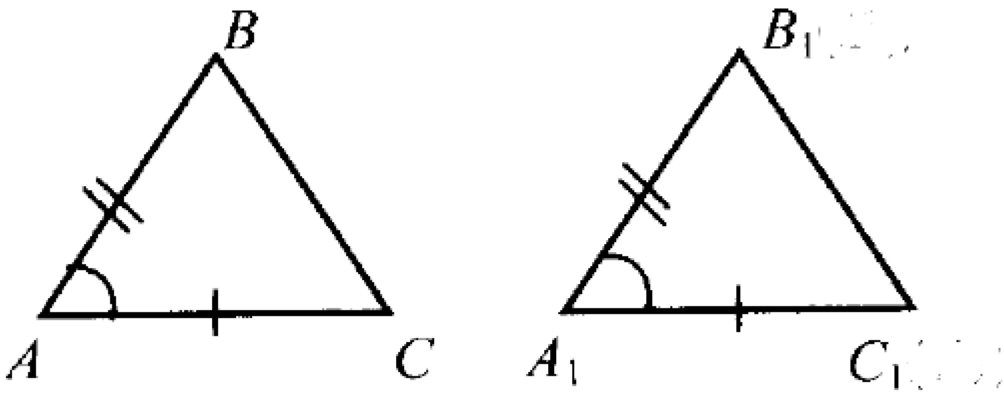


სურ.7

სამკუთხედების ტოლობის (I) ნიშანი.

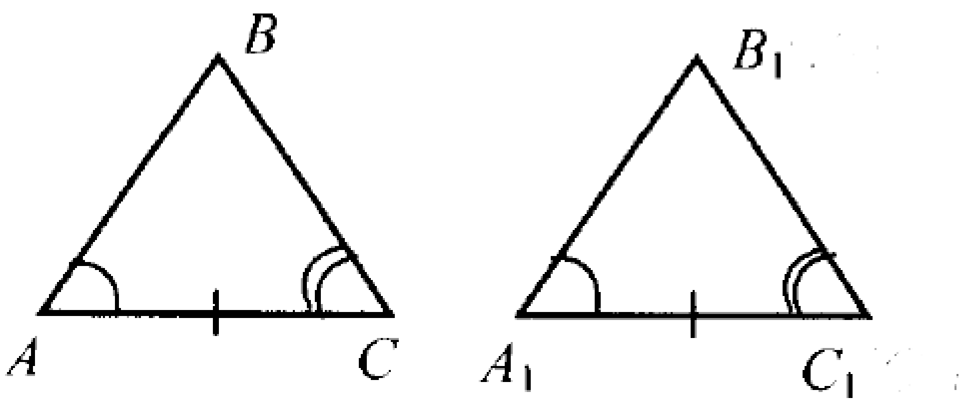
თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის ორი გვერდის და მათ შორის მდებარე კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (სურ.8)

სურ.8



სამკუთხედების ტოლობის (II) ნიშანი.

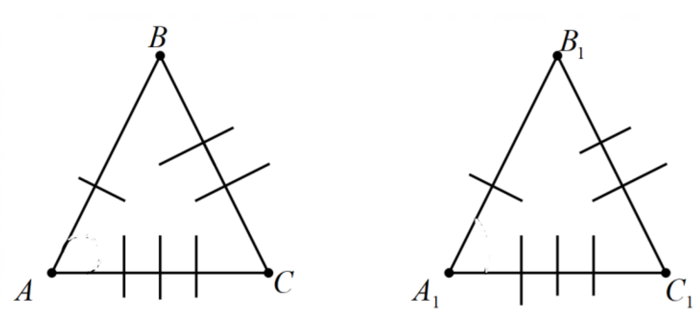
თუ ერთი სამკუთხედის ერთი გვერდი და მასთან მდებარე კუთხეები შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის ერთი გვერდისა და მასთან მდებარე კუთხეების, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.
$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (სურ. 9)



სურ.9

სამკუთხედების ტოლობის (III) ნიშანი.

თუ ერთი სამკუთხედის სამი გვერდი შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის სამი გვერდის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (სურ.10)

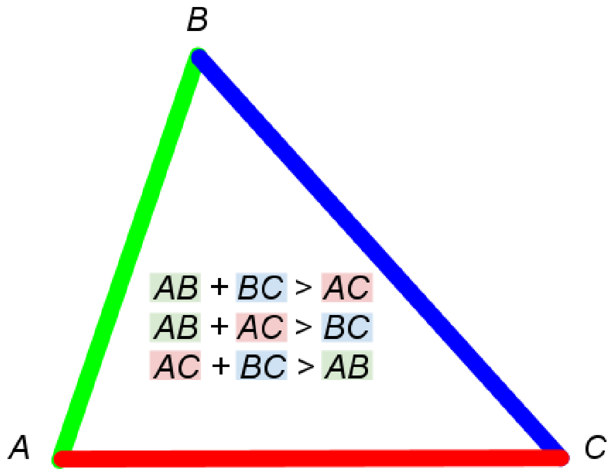


სურ.10

14. სამკუთხედის უტოლობა.

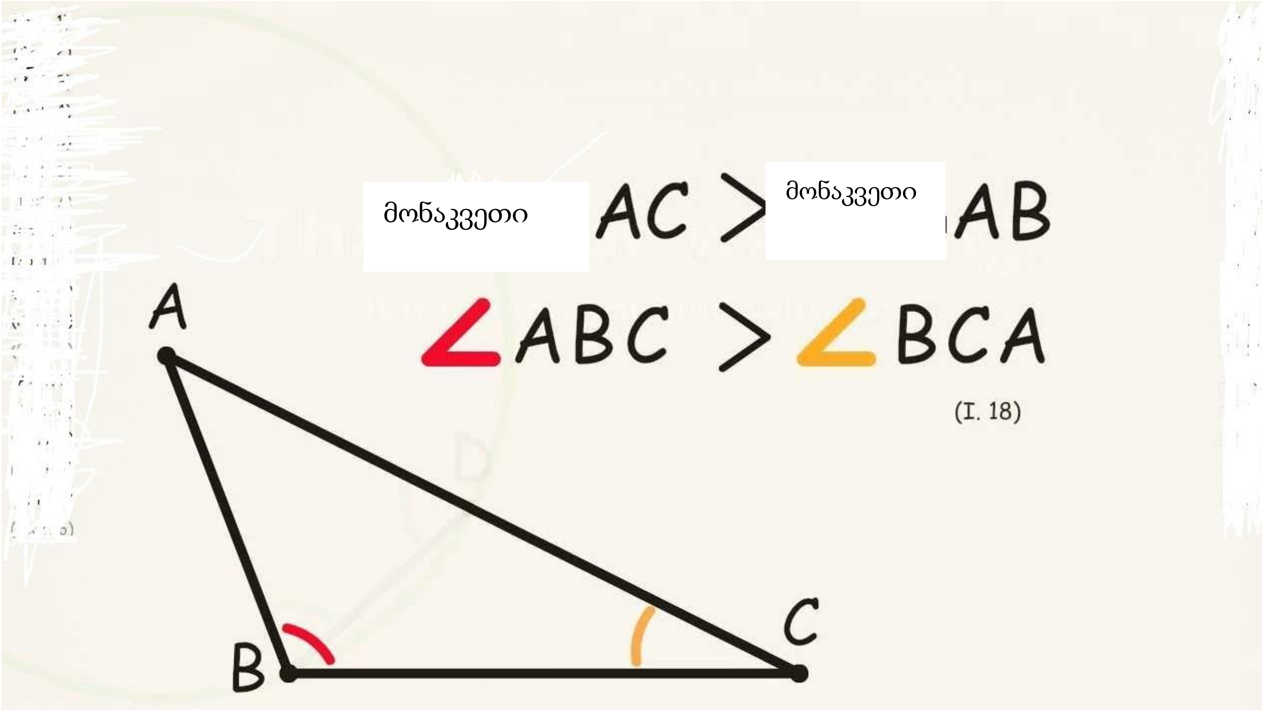
იმისათვის, რომ მოცემული სიგრძის AB, BC და AC მონაკვეთებით აიგოს სამკუთხედი, საჭიროა სამივე მონაკვეთის მიმართ შესრულდეს **სამკუთხედის უტოლობა:**

$|BC - AC| < AB < BC + AC,\quad |AB - BC| < AC < AB + BC,\quad |AB - AC| < BC < AB + AC.$



15. დამოკიდებულებანი სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის.

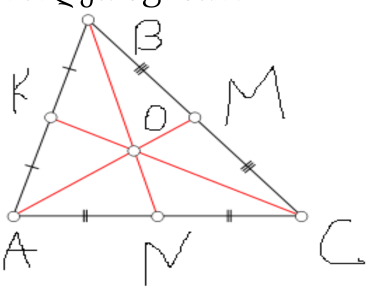
სამკუთხედში დიდი გვერდის პირდაპირ დიდი კუთხე ძევს და პირიქით დიდი კუთხის პირდაპირ დიდი გვერდი ძევს.

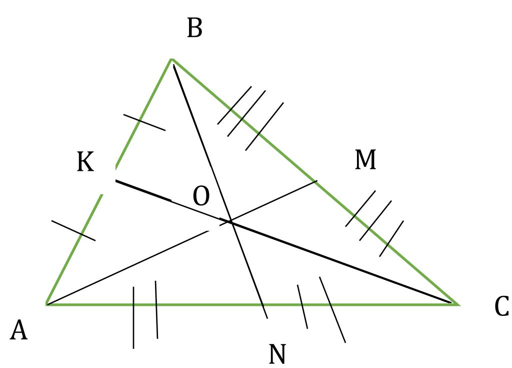


16.სამკუთხედის მედიანა

თეორემა. სამკუთხედის სამივე მედიანა ერთ წერტილში იკვეთება შეფარდებით 2:1 წვეროს მხრიდან.

იხილეთ სურათი.



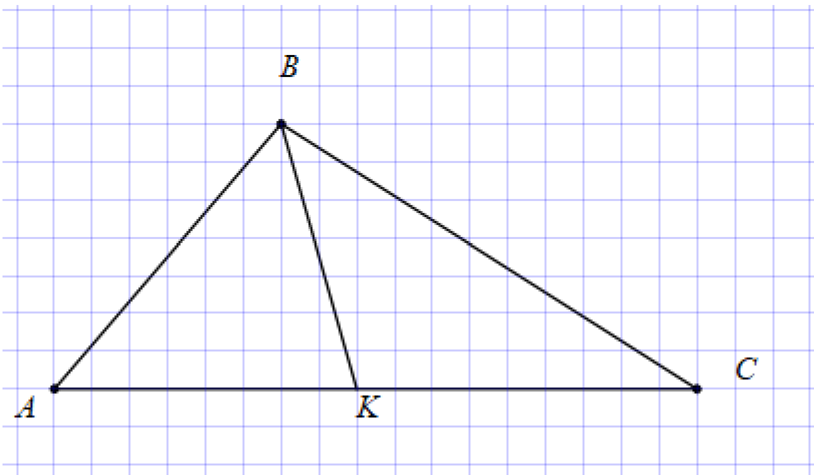


სურათის მიხედვით AO:OM=BO:ON=CO:OK=2:1

17. სამკუთხედის ბისექტრისა

თეორემა. სამკუთხედის რომელიმე კუთხის ბისექტრისა ამ კუთხის მოპირდაპირე გვერდს ჰყოფს თავისი შემადგენელი გვერდების პროპორციულ ნაწილებად; სურათის მიხედვით AK:KC=AB:BC

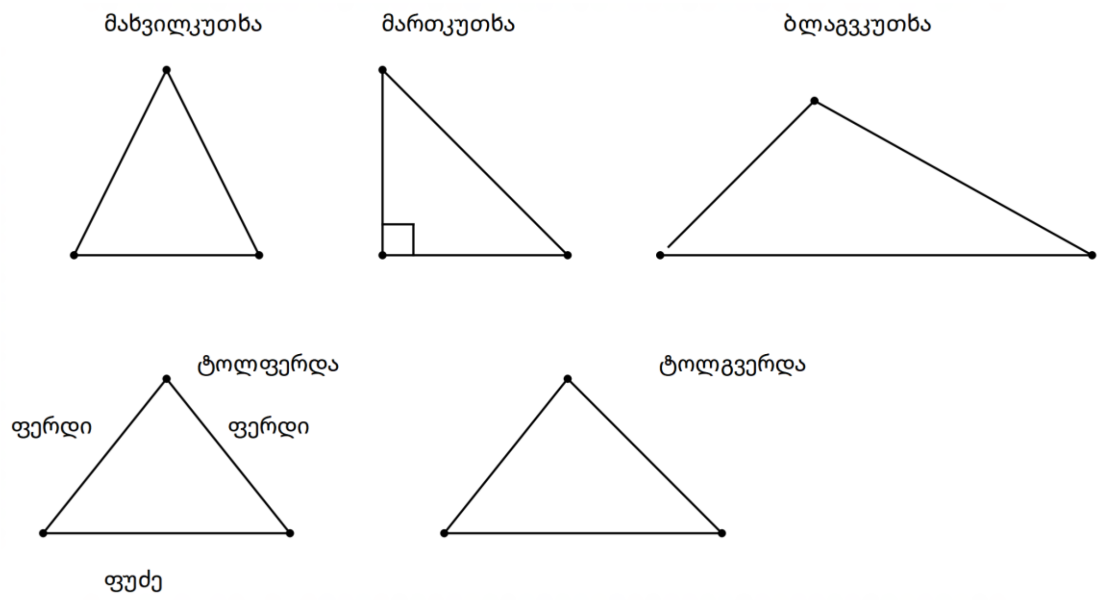
BK ბისექტრისის სიგრძე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით $BK^2 = AB \cdot BC - AK \cdot KC$ (იხ.სურათი)



$$\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}$$

18. სამკუთხედის კერძო სახეები: მართკუთხა,მახვილკუთხა,ბლაგვკუთხა, ტოლფერდა, ტოლგვერდა სამკუთხედები.

სამკუთხედს, რომლის სამივე კუთხე მახვილია, მახვილკუთხა სამკუთხედი ეწოდება.
სამკუთხედს, რომლის ერთ-ერთი კუთხე მართია მართკუთხა სამკუთხედი ეწოდება.
სამკუთხედს, რომლის ერთ-ერთი კუთხე ბლაგვია ბლაგვკუთხა სამკუთხედი ეწოდება.
სამკუთხედს, რომლის ორი გვერდი ტოლია ტოლფერდა სამკუთხედი ეწოდება.ტოლ გვერდებს ფერდები ეწოდება, ხოლო მესამე გვერდს-ფუძე.
სამკუთხედს, რომლის სამივე გვერდი ტოლია, ტოლგვერდა სამკუთხედი ეწოდება. (იხ.სურ.1)



სურ.1

19. ტოლფერდა სამკუთხედი.

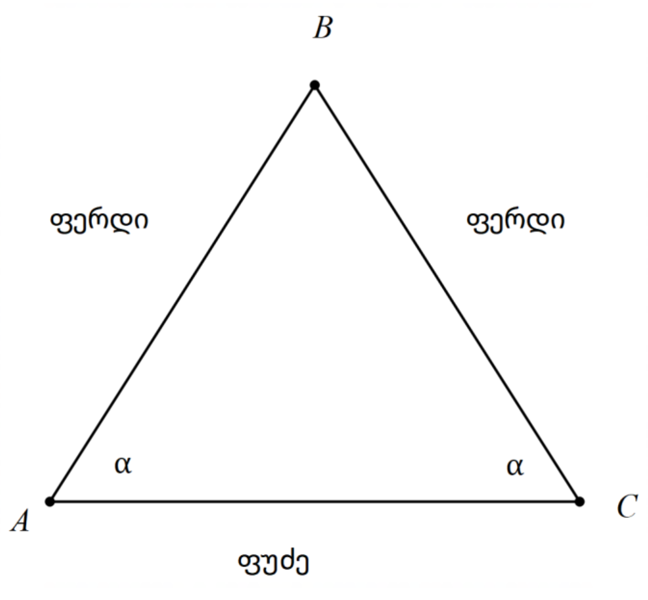
თეორემა. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.

სამართლიანია ამ თეორემის შებრუნებული თეორემაც:

თუ სამკუთხედში ორი კუთხე ტოლია, მაშინ ის ტოლფერდაა.

თეორემა. სამკუთხედში ტოლი გვერდების წინ ტოლი კუთხეები მდებარეობს და პირიქით.

თეორემა. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძისადმი გავლებული მედიანა ბისექტრისაცაა და სიმაღლეც.



20. მართკუთხა სამკუთხედი.

მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის შემადგენელ გვერდებს კათეტები ეწოდება, ხოლო მართი კუთხის მოპირდაპირე გვერდს-ჰიპოტენუზა. მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხეების ჯამი 90^0-ის ტოლია.
თეორემა. მართკუთხა სამკუთხედში 30^0-იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი ტოლია ჰიპოტენუზის ნახევრის.

$$BC = \frac{AB}{2}$$

სამართლიანია **შებრუნებული თეორემაც**. თუ მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია მაშინ ეს მახვილი კუთხე 30^0-ის ტოლია.

თეორემა. მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზისადმი გავლებული მედიანა ტოლია ჰიპოტენუზის ნახევრის.

სამართლიანია შებრუნებული თეორემაც.

მართკუთხა სამკუთხედის ტოლობის I ნიშანი.

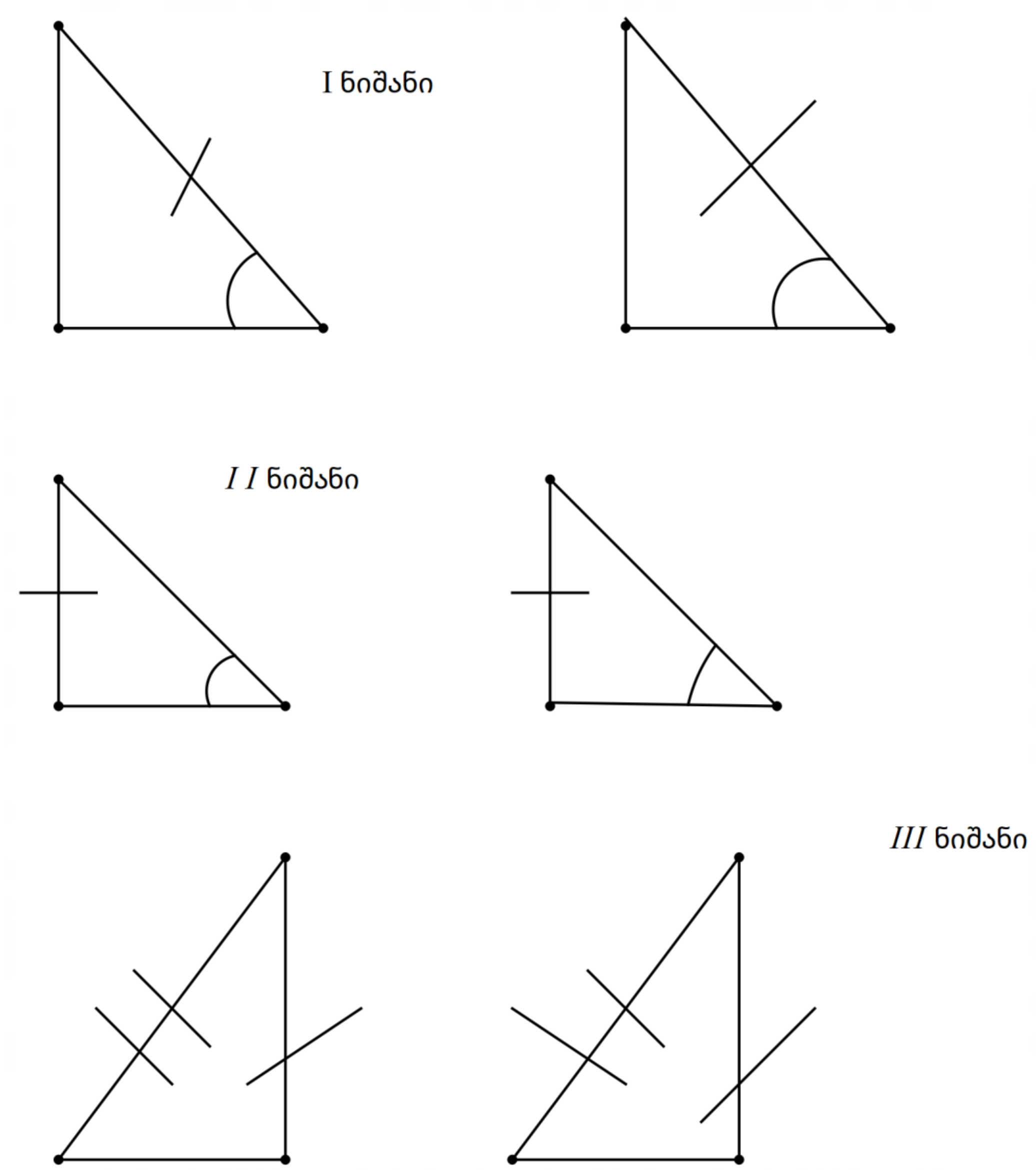
თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა და მახვილი კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზისა და მახვილი კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.

მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის II ნიშანი.

თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი და მოპირდაპირე მახვილი კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის კათეტის და მოპირდაპირე მახვილი კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია.

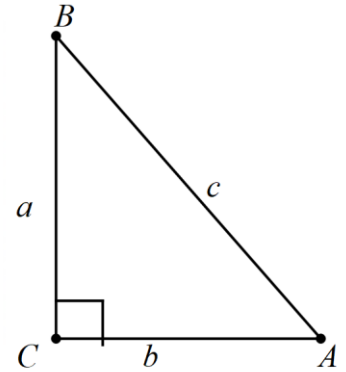
მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის III ნიშანი.

თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა და კათეტი შესაბამისად ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის და კათეტის, მაშინ ეს სამკუთხედები ტოლია. (იხ სურათი 2)



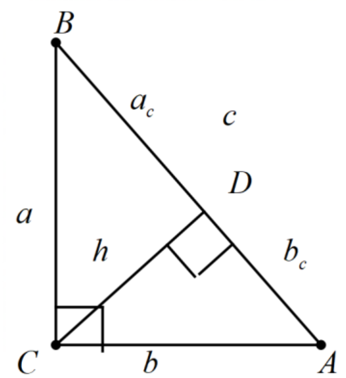
სურ.2

მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის სინუსი არის ამ კუთხის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდება ჰიპოტენუზასთან; $sinA = \frac{a}{c}$, $sinB = \frac{b}{c}$.
მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის კოსინუსი არის ამ კუთხის მიმდებარე კათეტის შეფარდება ჰიპოტენუზასთან; $cosA = \frac{b}{c}$; $cosB = \frac{a}{c}$.
მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის ტანგენსი არის ამ კუთხის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდება მიმდებარე კათეტთან; $tgA = \frac{a}{b}$; $tgB = \frac{b}{a}$;
მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის კოტანგენსი არის ამ კუთხის მიმდებარე კათეტის შეფარდება მოპირდაპირე კათეტთან: $ctgA = \frac{b}{a}$; $ctgB = \frac{a}{b}$. (იხ.სურ.3)



სურ.3.

ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე ტოლია კათეტების ნამრავლი შეფარდებული ჰიპოტენუზასთან.
$h = \frac{a \cdot b}{c}$
ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლის კვადრატი ტოლია კათეტების გეგმილების ნამრავლის;
$h^2 = a_c \cdot b_c$
თითოეული კათეტის კვადრატი ტოლია ჰიპოტენუზის ნამრავლისა ამ კათეტის გეგმილზე;
$a^2 = c \cdot a_c$ და $b^2 = c \cdot b_c$. (იხ.სურ.4)



სურ.4

21. პითაგორას თეორემა.

პითაგორას თეორემა. მართკუთხა სამკუთხედში ჰიპოტენუზის კვადრატი ტოლია კათეტების კვადრატების ჯამის; $c^2 = a^2 + b^2$

ადგილი აქვს პითაგორას თეორემის შებრუნებულ თეორემას. თუ სამკუთხედში ერთი გვერდის კვადრატი ტოლია დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამის, მაშინ ეს სამკუთხედი მართკუთხაა.

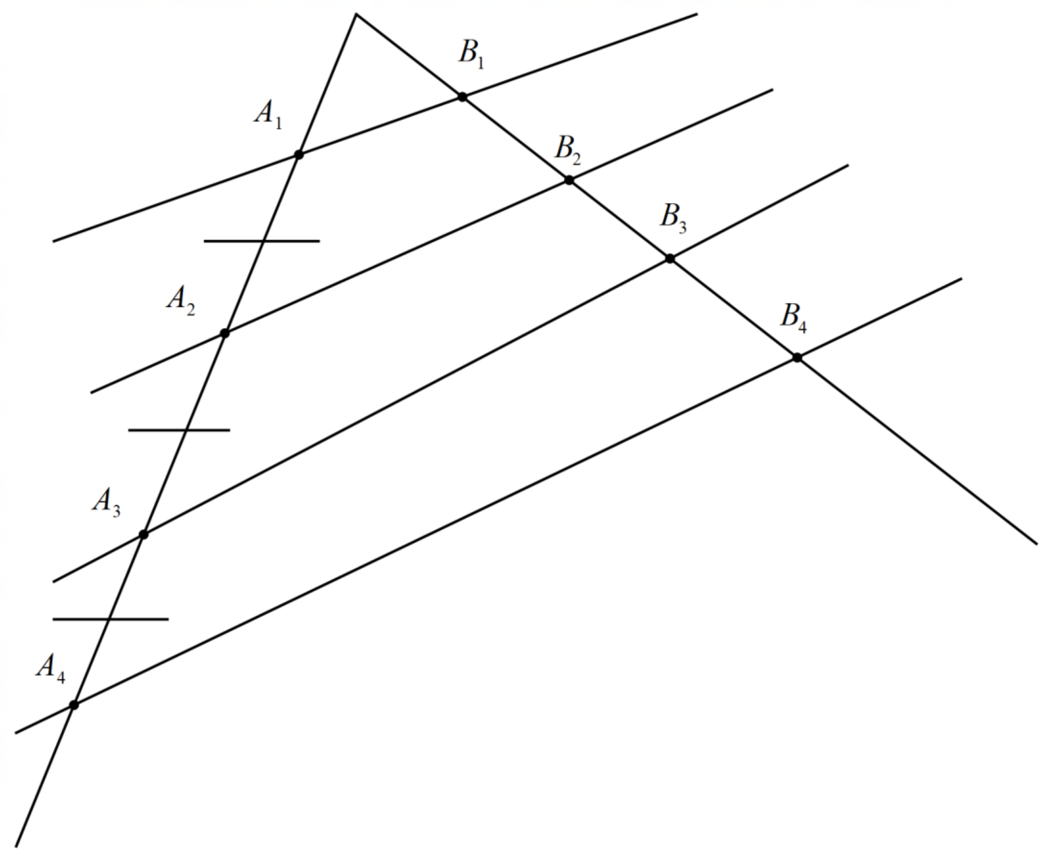
სურ.4-ზე დაყრდნობით h წარმოადგენს მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზისადმი გავლებულ სიმაღლეს. a_c *და* b_c გამოსახავენ შესაბამისად a და b კათეტების გეგმილებს ჰიპოტენუზაზე.

სურ. 4-ზე დაყრდნობით ადგილი აქვს შემდეგ შემოკლებულ ფორმულებს პითაგორას თეორემიდან გამომდინარე: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$; b=$\sqrt{c^2 - a^2}$; c=$\sqrt{a^2 + b^2}$.

22. თალესის თეორემა.

თეორემა თალესი. თუ კუთხის ერთ გვერდზე ერთმანეთის მიმდევრობით გადავდებთ ტოლი სიგრძის მონაკვეთებს და ამ მონაკვეთების ბოლოებიდან კუთხის მეორე გვერდის გადაკვეთამდე გავავლებთ პარალელურ წრფეებს, მაშინ კუთხის მეორე გვერდზეც ტოლი მონაკვეთები ჩამოიჭრება; ანუ $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4,\ \ A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4 \Rightarrow B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$.

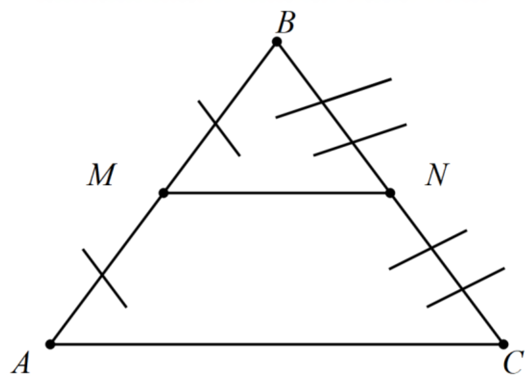
შედეგი. თუ კუთხის ერთ გვერდზე გადავდებთ მონაკვეთებს, რომელთა სიგრძეები გარკვეული რიცხვების პროპორციულია და ამ მონაკვეთების ბოლოებიდან კუთხის მეორე გვერდის გადაკვეთამდე გავავლებთ პარალელურ წრფეებს, მაშინ კუთხის მეორე გვერდზე მიღებული მონაკვეთების სიგრძეები მოცემული რიცხვების პროპორციული იქნება; ანუ მე-5 სურათის მიხედვით თუ $A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_4 = m : n : k$ სადაც m, n და k რაიმე დადებითი რიცხვებია და $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4 \Rightarrow B_1B_2 : B_2B_3 : B_3B_4 = m : n : k$



სურ.5

23. სამკუთხედის შუახაზი.

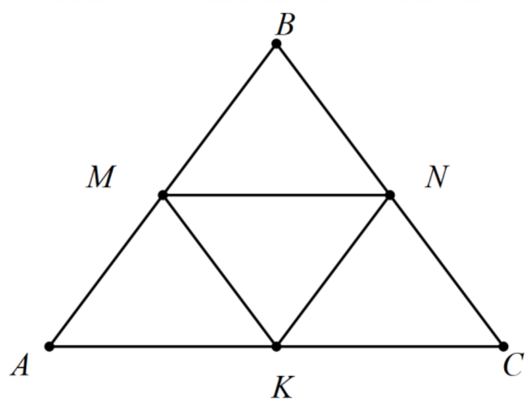
სამკუთხედის შუახაზი ეწოდება სამკუთხედის რომელიმე ორი გვერდის შუაწერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს; MN მონაკვეთი ABC სამკუთხედის შუახაზია (სურ.6)



სურ.6

სამკუთხედის შუახაზის თვისება: სამკუთხედის შუახაზი მესამე გვერდის პარალელურია და მისი ნახევრის ტოლია; მე-6 ნახაზის მიხედვით $MN \parallel AC$; $MN = \frac{1}{2}AC$.

სამივე შუახაზის გავლების შედეგად სამკუთხედი ოთხ ტოლ სამკუთხედად დაიყოფა. (სურ.7)



სურ.7

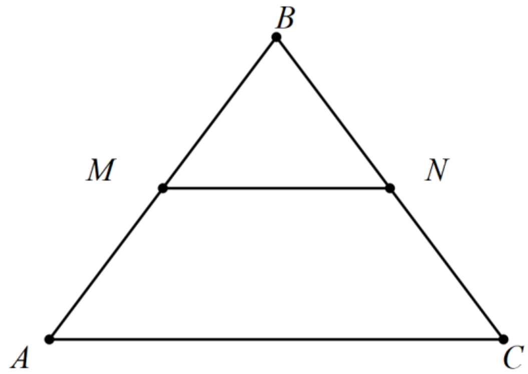
24. სამკუთხედების მსგავსება.

ორ სამკუთხედს ეწოდება მსგავსი, თუ მათი შესაბამისი კუთხეები ტოლია და შესაბამისი გვერდები- პროპორციული. თუ $\frac{AB}{A_1B_1}$ შეფარდება რაიმე k (k>0) რიცხვის ტოლია, მაშინ იტყვიან, რომ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ მსგავსების კოეფიციენტით k.

სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

თეორემა. სამკუთხედში მისი რომელიმე გვერდის პარალელური წრფის გავლებით სამკუთხედის გვერდები პროპორციულ ნაწილებად იყოფა $MN \parallel AC \Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{BN}{CN}$,

თეორემა. სამკუთხედში მისი რომელიმე გვერდის პარალელური წრფის გავლებით მიიღება მოცემული სამკუთხედის მსგავსი სამკუთხედი. $MN \parallel AC \Rightarrow \Delta MBN \sim \Delta ABC$ იხილეთ სურათი



სამკუთხედების მსგავსების I ნიშანი.

თუ ერთი სამკუთხედის ორი კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის ორი კუთხის, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია.$\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1 \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

სამკუთხედების მსგავსების II ნიშანი.

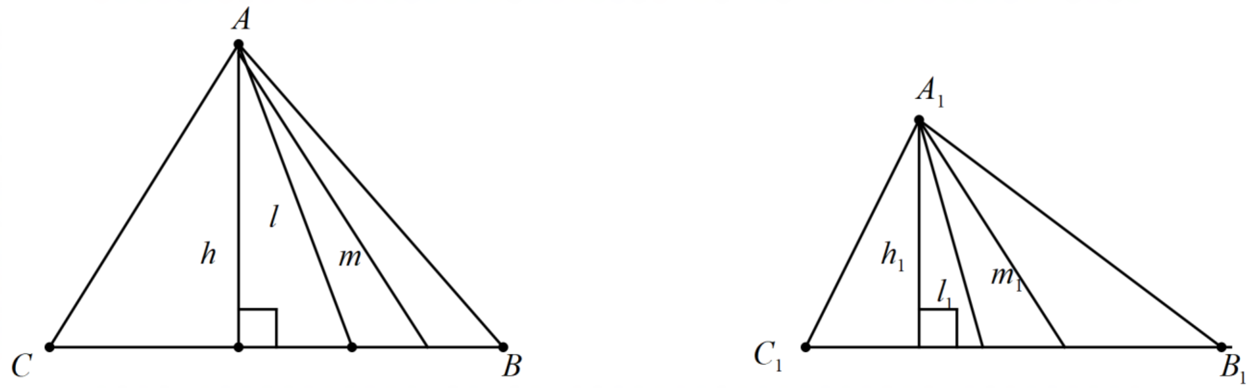
თუ ორ სამკუთხედს თითო-თითო კუთხე ტოლი აქვს, ხოლო ამ კუთხეების შემადგენელი გვერდები პროპორციულია, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია. $\angle A = \angle A_1, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

სამკუთხედების მსგავსების III ნიშანი.

თუ ერთი სამკუთხედის გვერდები შესაბამისად მეორე სამკუთხედის გვერდების პროპორციულია, მაშინ ეს სამკუთხედები მსგავსია. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}\frac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

თუ სამკუთხედები მსგავსია, მაშინ მათი პერიმეტრების შეფარდება მსგავსების კოეფიციენტის ტოლია, ხოლო ფართობების შეფარდება-მსგავსების კოეფიციენტის კვადრატის; შესაბამისი გვერდების მიმართ გავლებული მედიანების შეფარდება მსგავსების კოეფიციენტის ტოლია; შესაბამისი გვერდების მიმართ გავლებულ სიმაღლეთა შეფარდება მსგავსების კოეფიციენტის ტოლია; შესაბამისი კუთხეების ბისექტრისების შეფარდება მსგავსების კოეფიციენტის ტოლია.
სურ. 8-ის მიხედვით თუ h და h_1 არის შესაბამისად AC და A_1C_1 გვერდების მიმართ გავლებული სიმაღლეები, m და m_1-იმავე გვერდების მიმართ გავლებული მედიანები, ხოლო l და l_1-შესაბამისად B და B_1 კუთხეების ბისექტრისები, მაშინ ადგილი ექნება შემდეგ თანაფარდობებს:

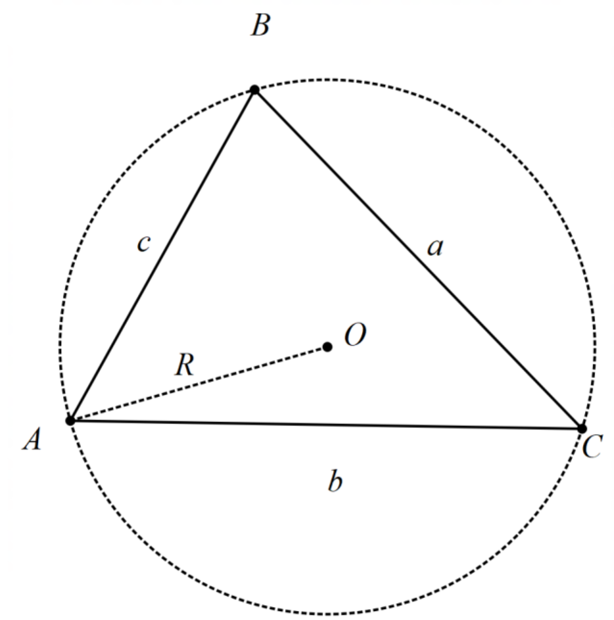
$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}}$=k; $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = k^2$; $\frac{h}{h_1} = k$; $\frac{m}{m_1} = k$; $\frac{l}{l_1} = k$.



სურ.8

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ $\frac{AB}{A_1B_1} = k.$

25. სინუსების თეორემა



სამკუთხედის გვერდები მათი მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პროპორციულია. მოცემული სურათის მიხედვით, $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$.

სამკუთხედის ნებისმიერი გვერდის შეფარდება მისი მოპირდაპირე კუთხის სინუსთან ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრის ტოლია.

$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$=2R.

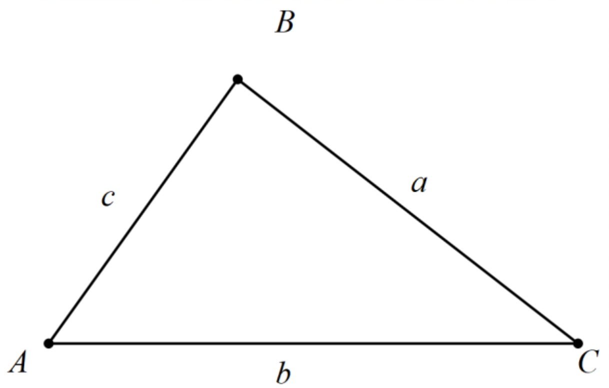
26. კოსინუსების თეორემა.

სამკუთხედის რომელიმე გვერდის კვადრატი ტოლია დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს გამოკლებული გაორკეცებული ნამრავლი ამ ორი გვერდისა მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსზე:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cosA$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cosB$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cosC$



შედეგი. თუ მოცემული სამკუთხედის გვერდების სიგრძეებია a, b და c, სადაც $a \leq b \leq c$, მაშინ იმის გარკვევა-როგორი სახისაა (კუთხეების მიხედვით) მოცემული სამკუთხედი, მოხდება შემდეგი წესით

თუ $c^2 < a^2 + b^2 \Rightarrow$სამკუთხედი მახვილკუთხაა;

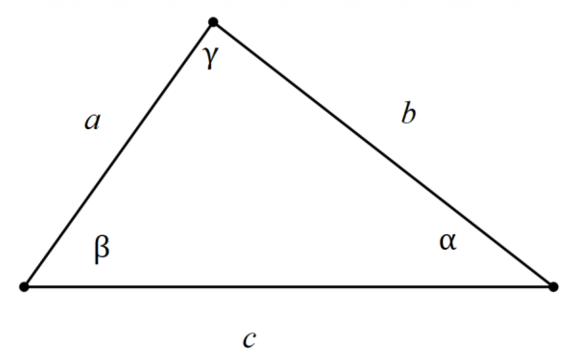
თუ $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$ სამკუთხედი მართკუთხაა;

თუ $c^2 > a^2 + b^2 \Rightarrow$სამკუთხედი ბლაგვკუთხაა.

კოსინუსების თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ სამკუთხედში ნებისმიერი გვერდისადმი გავლებული მედიანის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, სადაც a, b და c სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო m_a-a გვერდისადმი გავლებული მედიანის სიგრძე.

27. სამკუთხედების ამოხსნა.

სამკუთხედის ამოხსნა ნიშნავს, მისი ცნობილი კუთხეებისა და გვერდების მიხედვით, ვიპოვოთ უცნობი გვერდები და კუთხეები. სამკუთხედის გვერდები ავღნიშნოთ a, b და c-თი, ხოლო გვერდების მოპირდაპირე კუთხეები შესაბამისად α, β და γ-თი (იხ.ნახაზი). ვაჩვენოთ, რომ სამკუთხედის ამოხსნა შესაძლებელია, თუ მისი გვერდებიდან და კუთხეებიდან ცნობილია სამი, რომელთაგან ერთი მაინც გვერდია. განვიხილოთ ყველა შესაძლო შემთხვევა.



1. მოცემულია სამკუთხედის გვერდი და ორი კუთხე. ვიპოვოთ მესამე კუთხე და დანარჩენი ორი გვერდი.
 ამოხსნის გზა. რადგან სამკუტხედის კუთხეების ჯამი 180^0-ია, ამიტომ მესამე კუთხე, მოცემული კუთხეებით გამოისახება. როცა გვეცოდინება გვერდი და სამივე კუთხე, სინუსების თეორემის მიხედვით ვიპოვით დანარჩენ ორ გვერდს. ამოცანას ყოველთვის აქვს ამონახსნი და მასთან ერთადერთი. ცხადია, მოცემული ორი კუთხის ჯამი 180^0-ზე ნაკლები უნდა იყოს. ამონახსნის ერთადერთობა სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნიდან გამომდინარეობს.

2. მოცემულია ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე.ვიპოვოთ დანარჩენი ორი კუთხე და მესამე გვერდი.
 ამოხსნის გზა. კოსინუსების თეორემით ვიპოვით მესამე გვერდს. ახლა, რადგან გვაქვს სამი გვერდი, კოსინუსების თეორემით შეიძლება დანარჩენი კუთხეების კოსინუსების, ე.ი. თვით კუთხეების გამოთვლა. ამოცანას ყოველთვის აქვს ამონახსნი და მასთან ერთადერთი. ამონახსნის ერთადერთობა სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნიდან გამომდინარეობს.

3. მოცემულია ორი გვერდი, მაგალითად a და b და ერთ-ერთი მათგანის მოპირდაპირე კუთხე, მაგალითად α. ვიპოვოთ დანარჩენი ორი კუთხე და მესამე გვერდი.
 ამოხსნის გზა. სინუსების თეორემით ვიპოვით $\sin\beta$. $\sin\beta$-ს მიხედვით ვიპოვით მის შესაბამის β_1 და β_2 კუთხეებს. ამ კუთხეებიდან ავიღებთ ერთს ან ორივეს იმის გათვალისწინებით, რომ a და b გვერდებიდან მეტი გვერდის პირდაპირ მეტი კუთხე ძევს. როცა უკვე ცნობილია α და β კუთხეები, ვიპოვით γ=180^0-$\alpha - \beta$ კუთხეს, შემდეგ კი სინუსების თეორემის მიხედვით -c გვერდს. წინა ორი ამოცანისაგან განსხვავებით ამ ამოცანას შეიძლება არ ჰქონდეს ამონახსნი, ჰქონდეს ერთი ან ორი ამონახსნი.

4. მოცემულია სამკუთხედის სამი გვერდი. ვიპოვოთ მისი კუთხეები.
 ამოხსნის გზა. კოსინუსების თეორემით ვიპოვით ერთ-ერთ კუთხეს. ანალოგიურად ვიპოვით მეორე კუთხეს, მესამე კუთხეს კი-ნაპოვნი კუთხეების საშუალებით. ამ ამოცანას მაშინ აქვს ამონახსნი , როცა უდიდესი გვერდი დანარჩენი ორი გვერდის ჯამზე ნაკლებია.
შევნიშნოთ, რომ თუ სამკუთხედი მართკუთხაა, საკმარისია გამოვიყენოთ ცნობილი თანაფარდობები სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის.

28. პარალელოგრამი.

 ოთხკუთხედს, რომლის მოპირდაპირე გვერდები წყვილ-წყვილად პარალელურია, პარალელოგრამი ეწოდება. (იხ. სურათი 1)

თვისებები:

1. პარალელოგრამის ერთ გვერდთან მიმდებარე კუთხეების ჯამია 180^0

$\angle A + \angle B = 180^0, \quad \angle B + \angle C = 180^0$ და ა.შ. (სურათი1)

2. პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია;

AB=DC, AD=BC (სურათი 1)

3. პარალელოგრამის მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია;

$\angle A = \angle C, \ \angle B = \angle D$ (სურათი 1)

4. დიაგონალი პარალელოგრამს ორ ტოლ სამკუთხედად ჰყოფს; $\Delta ABC = \Delta ADC$ (სურ2)

5.პარალელოგრამის დიაგონალები გადაკვეთისას ერთმანეთს შუაზე ჰყოფს.

AO=OC, BO=OD (სურ3,)

6. პარალელოგრამის ერთ გვერდთან მიმდებარე კუთხეების ბისექტრისებით შექმნილი კუთხე მართია

$\angle AKB = 90^0$ (სურ.4)

სამართლიანია შემდეგი დებულება:

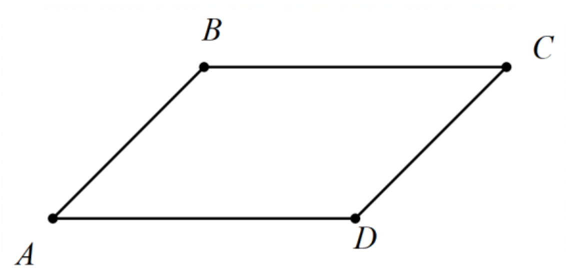
პარალელოგრამში რომელიმე კუთხის ბისექტრისის გავლებით ტოლფერდა სამკუთხედი შეიქმნება; ABCD პარალელოგრამში AE ბისექტრისაა; ამიტომ AB=BE (სურ5)

პარალელოგრამის წვეროდან მოპირდაპირე გვერდისადმი (ან გვერდის გაგრძელებისადმი) გავლებულ მართობულ მონაკვეთს პარალელოგრამის სიმაღლე ეწოდება. სურ6-ის მიხედვით BE და BF ABCD პარალელოგრამის სიმაღლეებია.

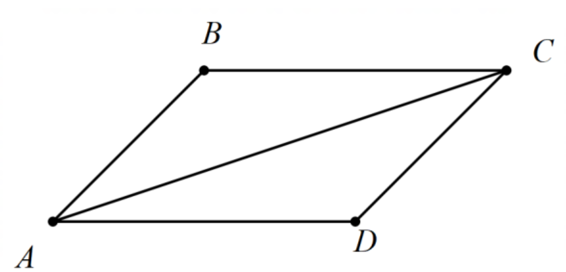
პარალელოგრამის გვერდები შესაბამისი სიმაღლეების უკუპროპორციულია

$\frac{AD}{CD} = \frac{BF}{BE}$ (სურ.6)

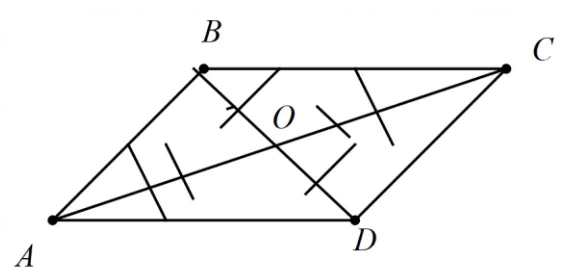
პარალელოგრამის ბლაგვი (მახვილი) კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლეებით შექმნილი კუთხე პარალელოგრამის მახვილი (ბლაგვი) კუთხის ტოლია; სურ.6-ის მიხედვით $\angle EBF = \angle A$.



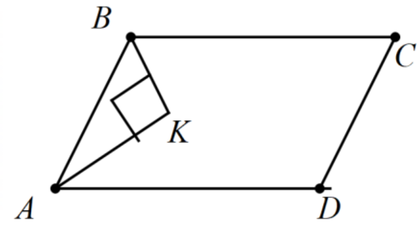
სურათი 1.



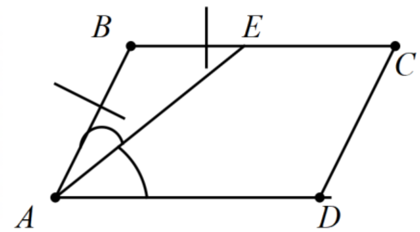
სურათი 2.



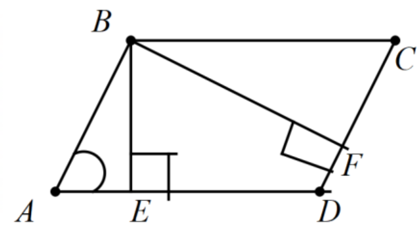
სურათი 3.



სურათი 4.



სურათი 5.

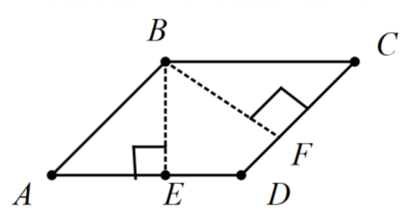


სურათი.6

პარალელოგრამის დიაგონალების სიგრძეების კვადრატების ჯამი მისი გვერდების სიგრძეების კვადრატების ჯამის ტოლია $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$
პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი პარალელოგრამის სიმეტრიის ცენტრია .

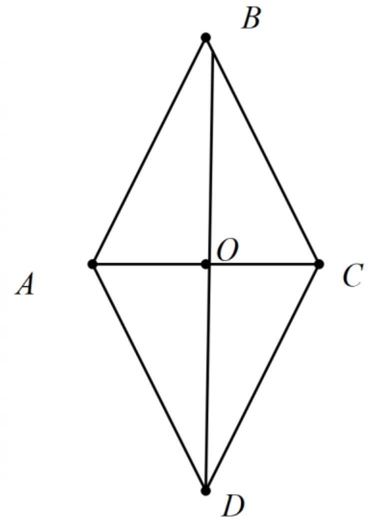
29. რომბი.

პარალელოგრამს, რომლის ყველა გვერდი ტოლია, რომბი ეწოდება. (სურ.7)



სურ.7

რომბს აქვს ყველა ის თვისება, რაც გააჩნდა პარალელოგრამს. საკუთრივ რომბის თვისებებია:
რომბის დიაგონალები მართი კუთხით იკვეთება. $AC \perp BD$ (სურ.8)
რომბის დიაგონალები რომბის კუთხეების ბისექტრისებს წარმოადგენს; $\angle ABD = \angle CBD, \angle BAC = \angle DAC.$
რომბი შედგება ოთხი ტოლი მართკუთხა სამკუთხედისაგან (სურ.8)
რომბის სიმაღლეები ტოლია; BE=BF (სურ.7)
რომბის პერიმეტრი გამოითვლება ფორმულით P=4a, სადაც a რომბის გვერდის სიგრძეა.



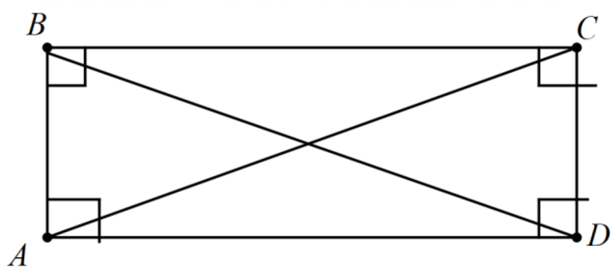
სურათი.8.

30. მართკუთხედი, კვადრატი.

მართკუთხედი ეწოდება ისეთ პარალელოგრამს, რომლის ყველა კუთხე მართია (სურ.9)

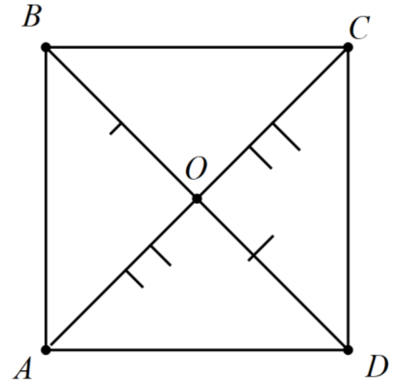

სურ.9

მართკუთხედს აქვს ყველა ის თვისება, რაც გააჩნდა პარალელოგრამს, საკუთრივ მართკუთხედის თვისებაა:
მართკუთხედის დიაგონალები ტოლია; AC=BD (იხ. სურ 10)



სურ.10

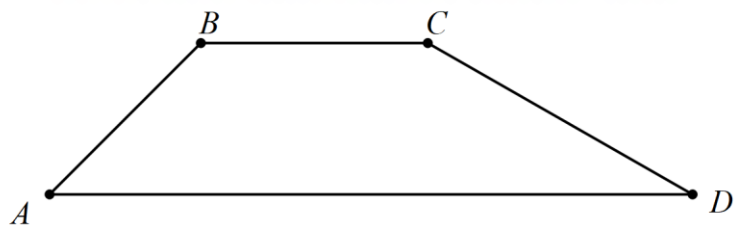
კვადრატი ეწოდება ისეთ მართკუთხედს, რომლის ყველა გვერდი ტოლია (სურ.11) კვადრატს აქვს ყველა ის თვისება, რაც გააჩნდა პარალელოგრამს, რომბს და მართკუთხედს.



სურ.11.

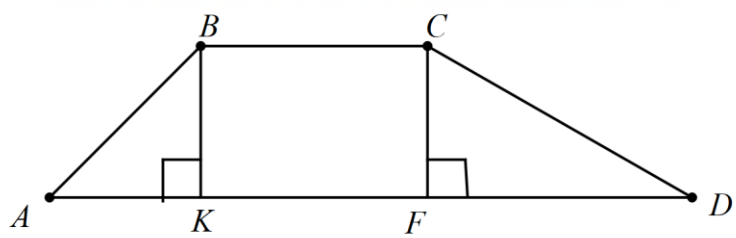
31. ტრაპეცია და მისი ელემენტები: ფუძე, ფერდი, სიმაღლე.ტრაპეციის შუახაზი.

ტრაპეცია ეწოდება ისეთ ოთხკუთხედს, რომლის ორი მოპირდაპირე გვერდი პარალელურია, დანარჩენი ორი გვერდი-არა. პარალელურ გვერდებს ეწოდება ტრაპეციის ფუძეები, არაპარალელურ გვერდებს- ტრაპეციის ფერდები. სურ.12 -ის მიხედვით ABCD ტრაპეციაში AD და BC გვერდები ფუძეებია (AD$\parallel$ BC), AB და CD გვერდები -ფერდები.



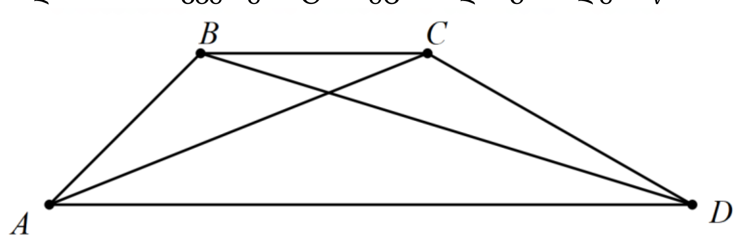
სურ.12

ტრაპეციის ერთ-ერთი ფუძის ნებისიერი წერტილიდან მეორე ფუძის შემცველი წრფისადი დაშვებულ მართობს ტრაპეციის სიმაღლე ეწოდება; მე-13 სურთის მიხედვით BK, CF ტრაპეციის სიმაღლეა.



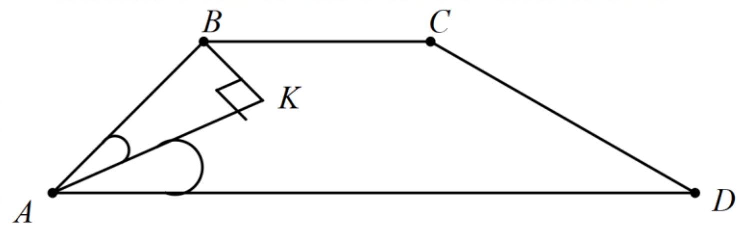
სურ.13

AC და BD მონაკვეთები ტრაპეციის დიაგონალებს წარმოადგენს (სურ.14)



სურ.14

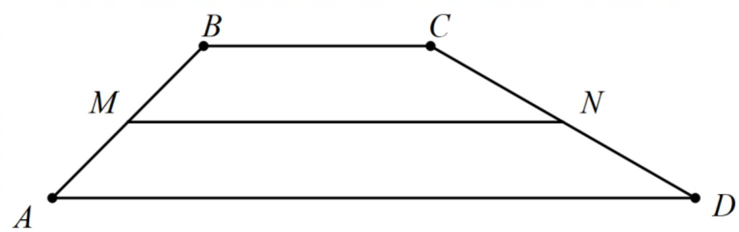
სამართლიანია შემდეგი დებულებები:
ტრაპეციის ფერდთან მიმდებარე კუთხეების ჯამი 180^0-ის ტოლია. $\angle A + \angle B = 180^0$
ტრაპეციის ფერდთან მიმდებარე კუთხეების ბისექტრისებით შექმნილი კუთხე მართია; $\angle AKB = 90^0$ (სურ.15)



სურ.15.

ტრაპეციის შუახაზი ეწოდება მონაკვეთს, რომელიც ტრაპეციის ფერდების შუაწერტილებს აერთებს. (სურ.16)

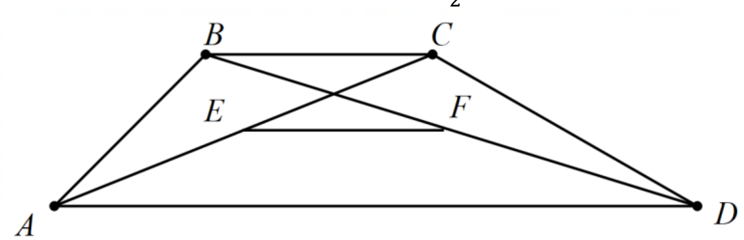
ტრაპეციის შუახაზის თვისება. ტრაპეციის შუახაზი ფუძეების პარალელურია და მათი ნახევარჯამის ტოლია.



სურ.16

AM=MB; CN=ND; MN||AD; MN=$\frac{BC+AD}{2}$ იხილით.სურ.16

ტრაპეციის დიაგონალების შუაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის სიგრძე ტრაპეციის ფუძეთა ნახევარსხვაობის ტოლია; $EF = \frac{AD-BC}{2}$ (სურ.17)

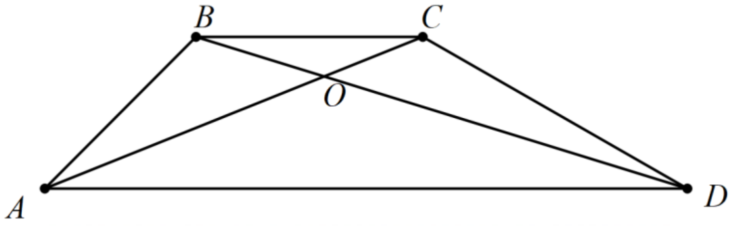


სურ.17

32-33. ტრაპეციის კერძო სახეები: ტოლფერდა ტრაპეცია, მართკუთხა ტრაპეცია. . ტოლფერდა ტრაპეციის თვისებები.

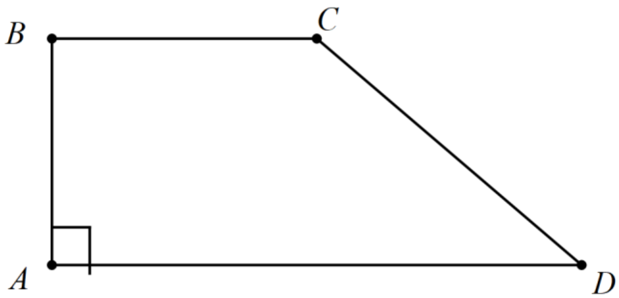
ტრაპეციას ტოლფერდა ეწოდება, თუ მისი ფერდები ტოლი სიგრძისაა; AB=CD (სურ.18)
სამართლიანია შემდეგი დებულებები:
ტოლფერდა ტრაპეციაში ფუძეებთან მდებარე კუთხეები ტოლია; $\angle A = \angle D, \ \angle B = \angle C$

ტოლფერდა ტრაპეციაში დიაგონალები ტოლია; AC=BD; აგრეთვე $\Delta AOB = \Delta COD$



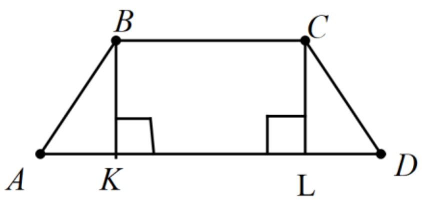
სურ.18.

ტრაპეციას ეწოდება მართკუთხა, თუ მისი ერთ-ერთი ფერდი ფუძეების მართობულია; AC$\perp BC$; $AB \perp AD$ სურ.19



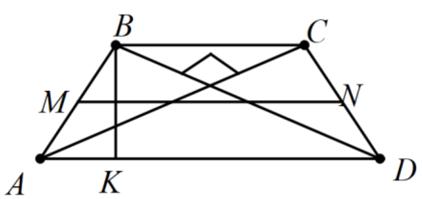
სურ.19.

თუ ABCD ტოლფერდა ტრაპეციაა, სადაც MN შუახაზია, ხოლო BK და CL-სიმაღლეები, მაშინ AK=DL=$\frac{AD-BC}{2}$, *ხოლო* $MN = AL = KD$. სურ.20.



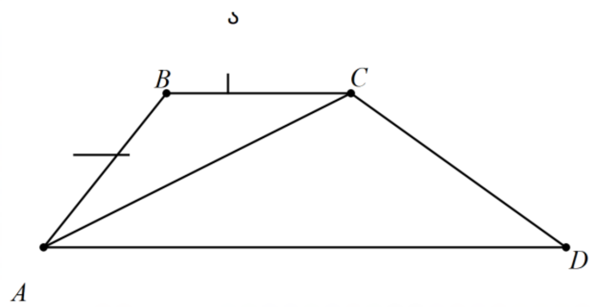
სურ.20

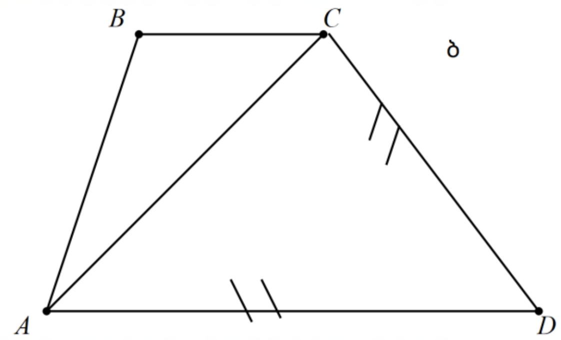
ტოლფერდა ტრაპეციაში, სადაც დიაგონალები ურთიერთმართობულია, სიმაღლე შუახაზის ტოლია. 21-ე სურათის მიხედვით BK=MN=$\frac{AD+BC}{2}$



სურ.21

თუ ტრაპეციის დიაგონალი მოცემული ტრაპეციის მახვილი (ბლაგვი) კუთხის ბისექტრისაა, მაშინ ამ კუთხესთან მდებარე გვერდი ტრაპეციის მცირე (დიდი) ფუძის ტოლია.(სურ.22 ა და ბ)





სურათი 22.

34. ბრტყელი ფიგურის ფართობი.

ფიგურას ეწოდება ბრტყელი რომელსაც აქვს მხოლოდ ორი განზომილება: სიგრძე და სიგანე. მათ არა აქვთ სიღრმე ან სისქე და შეიძლება მთლიანად იყოს წარმოდგენილი ბრტყელ ზედაპირზე.

ბრტყელი ფიგურის ფართობი მისი შემადგენელი ნაწილების ფართობების ჯამის ტოლია.

ფიგურას ეწოდება მარტივი, თუ მისი დაყოფა შესაძლებელია სასრული რაოდენობის სამკუთხედებად (სამკუთხა არეებად) . მარტივი ფიგურის ფართობის თვისებებია:

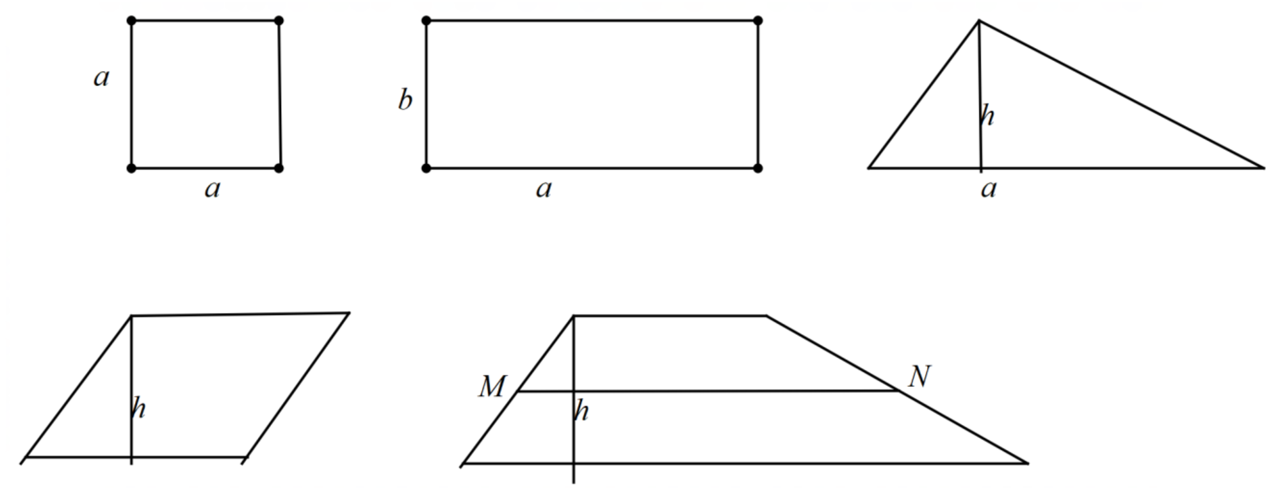
ყოველ ფიგურას გარკვეული (დადებითი) ფართობი აქვს;

ტოლ ფიგურებს ტოლი ფართობები აქვთ;

მთელი ფიგურის ფართობი მისი ნაწილების ფართობთა ჯამის ტოლია.

შეიძლება ფიგურები ტოლი არ იყოს, მაგრამ ჰქონდეთ ტოლი ფართობები. ტოლი ფართობების მქონე ფიგურებს ტოლდიდი ფიგურები ეწოდება.

35.კვადრატის, მართკუთხედის, სამკუთხედის, პარალელოგრამის, რომბის და ტრაპეციის ფართობი.



სურ.1

სურათ 1-ზე წარმოდგენილი ბრტყელი ფიგურების ფართობებია:

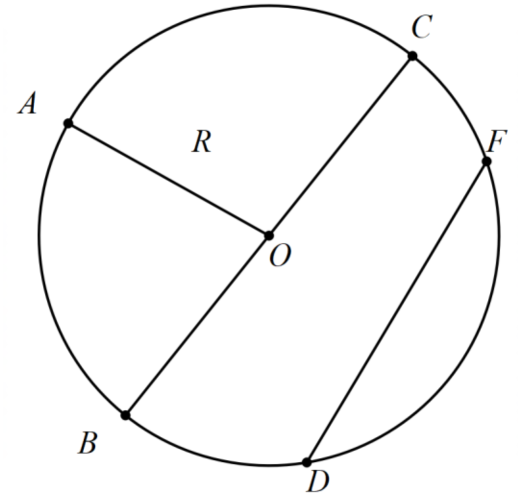
$S_{კვ} = a^2$; $S_{მართ} = a \cdot b$; $S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot h$; $S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sin\alpha$; $S_\Delta = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$;სადაც $p = \frac{a+b+c}{2}$; $S_\Delta = \frac{a^2 sinB \cdot sinC}{2sinA}$; $S_\Delta = \frac{b^2 \cdot sinA}{2sinB \cdot sinC}$; $S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_\Delta = \frac{abc}{4R}$ სადაც R სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია; $S_\Delta = \frac{P_\Delta \cdot r}{2}$, სადაც $P_\Delta = a + b + c$, r სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია.

$S_{პარალელოგ} = a \cdot h$; $S_{პარალელოგ} = ab \cdot sin\alpha$; $S_{პარალელოგ} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot sin\alpha$; სადაც α დიაგონალებს შორის კუთხეა. პარალელოგრამი დიაგონალებით იყოფა ოთხ ტოლდიდ სამკუთხედად ამიტომ $S_{პარალელოგ} = 4S_\Delta$

$S_{რომბ} = a \cdot h$; $S_{რომბ} = a^2 sin\alpha$; $S_{რომბ} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$; $S_{ტრაპ} = \frac{a+b}{2} \cdot h$; $S_{ტრაპ} = MN \cdot BK$; შუახაზი გამრავლებული სიმაღლეზე. თუ ტრაპეცია ტოლფერდაა და მისი დიაგონალები ურთიერთმართობულია, მაშინ ტრაპეციის ფართობი სიმაღლის კვადრატის ტოლია (სიმაღლე შუახაზის ტოლია) S=h^2, ABCD ტრაპეციაში $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta DBC}$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$; $\Delta AOD \sim \Delta BOC$; მსგავსების კოეფიციენტი აღნიშნულია რაიმე k (k>0) რიცხვით. თუ $S_{\Delta BOC} = S$, მაშინ $S_{\Delta AOD} = k^2 S$, ხოლო $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD} = kS$ (გათვალისწინებულია საერთო სიმაღლის მქონე სამკუთხედების ფართობთა შეფარდება); ამიტომ $S_{ABCD} = (k+1)^2 S$

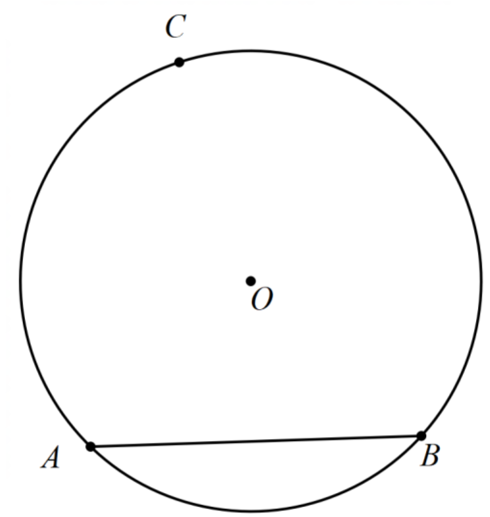
36. წრეწირი, წრე და მათი ელემენტები: ცენტრი, რადიუსი, დიამეტრი, ქორდა, რკალი, სექტორი, სეგმენტი.

წრეწირი ეწოდება სიბრტის მოცემული წერტილიდან ტოლი მანძილით დაშორებულ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს. მოცემულ წერტილს წრეწირის ცენტრი ეწოდება, ხოლო მანძილს წრეწირის ცენტრიდან წრეწირის რაიმე წერტილამდე წრეწირის რადიუსი. იხ.სურათი 2.



სურ.2

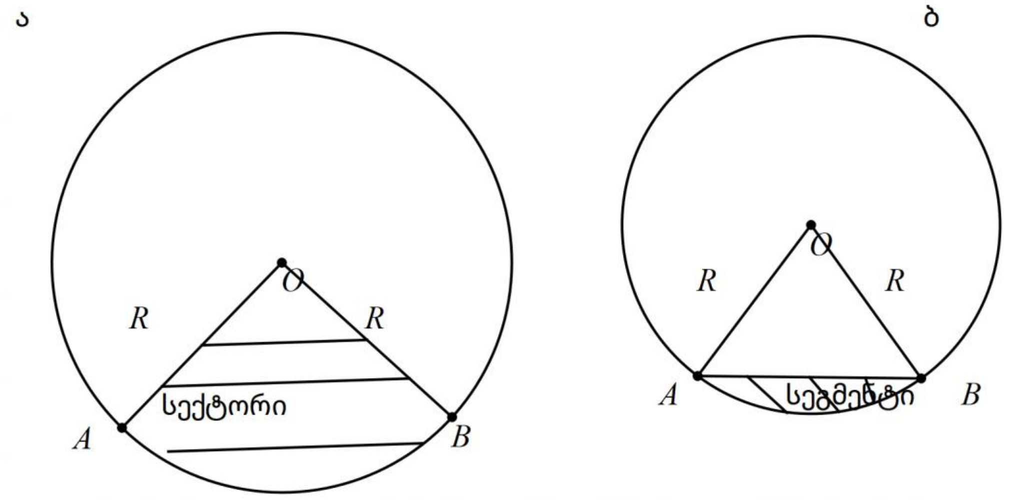
სურ.2 -ზე გამოსახულია წრეწირი ცენტრით O წერტილში, OA რადიუსია.
წრეწირის ორი ნებისმიერი წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთს ქორდა ეწოდება. სურ.2-ის მიხედვით DF ქორდაა, წრეწირის ცენტრზე გამავალ ქორდას დიამეტრი ეწოდება, სურ.2-ზე BC დიამეტრია.დიამეტრი ორი რადიუსის ტოლია, D=2R. წრეწირის ნაწილს რკალი ეწოდება და ასე აღინიშნება ,,$\overset{\frown}{AB}$ " ; $\overset{\frown}{AC}$; $\overset{\frown}{CF}$ და ა.შ. რკალის ჩაწერა შეიძლება სამი (ან მეტი) ასოთიც, მაგ $\overset{\frown}{ACF}$. წრეწირი მისი ნებისმიერი ორი წერტილით ორ ნაწილად იყოფა; მაშინ იტყვიან, რომ ამ წერტილების შემაერთებელი ქორდა ჭიმავს თითოეულ მიღებულ რკალს. ერთი და იმავე ქორდით მოჭიმულ რკალებს დამატებითი რკალები ეწოდება. მე-3 სურათის მიხედვით AB და ACB რკალები დამატებითი რკალებია.



სურ.3

წრეწირით შემოსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილს თვით ამ წრეწირის ჩათვლით წრე ეწოდება.
წრიული სექტორი არის წრის ნაწილი, რომელიც შემოსაზღვრულია ორი რადიუსითა და რკალით.
წრიული სეგმენტი არის წრის ნაწილი, რომელიც შემოსაზღვრულია ქორდითა და რკალით.

(იხ. სურ 4 ა და ბ)



C ასოთი აღნიშნულია წრეწირის სიგრძე; C=$\pi D = 2\pi R$; $\pi \approx 3{,}14$ (მუდმივი რიცხვია)

n^0-იანი ცენტრული კუთხის შესაბამისი რკალის სიგრძეა: $l = \frac{\pi R n^0}{180^0}$

1 რადიანი არის ცენტრული კუთხე, რომლის შესაბამისი რკალის სიგრძე რადიუსის სიგრძის ტოლია, ანუ R=$\frac{\pi R n^0}{180^0} = 1$ რადიანი=$\frac{180^0}{\pi} \approx 57^0$; $1^0 = \frac{\pi}{180}$რადიანი$\approx$ 0.017 რადიანი. მაშინ აქიდან გამომდინარე, რკალის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა მიიღებს ასეთ სახეს: $l = R\alpha$, სადაც α −თი გამოსახულია რკალის შესაბამისი ცენტრული კუთხის რადიანული ზომა.

თეორემა. ქორდისადმი მართობული დიამეტრი ქორდასა და მის მიერ მოჭიმულ რკალს შუაზე ჰყოფს.

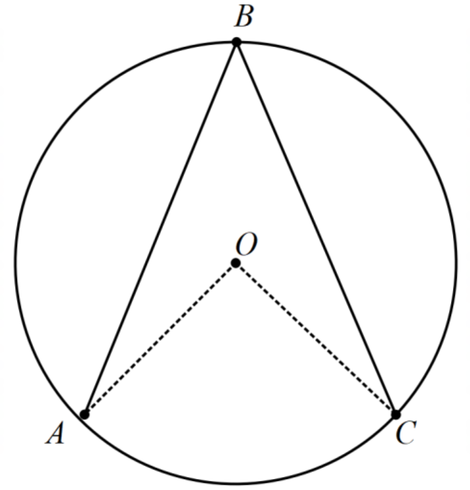
$AB \perp CD \Rightarrow AE = EB,\ \breve{AD} = \breve{DB}$. სამართლიანია შებრუნებული თეორემაც.

წრეწირის რკალის გრადუსული ზომა ეწოდება შესაბამისი ცენტრული კუთხის გრადუსულ ზომას.

$\breve{AB} = \angle AOB$

37. ცენტრალური და ჩახაზული კუთხეები

კუთხეს, რომლის წვერო წრეწირზე მდებარეობს, ხოლო გვერდები წრეწირს გადაკვეთს, ჩახაზული კუთხე ეწოდება. $\angle ABC$ ჩახაზული კუთხეა სურ.5



სურ.5

თეორემა. ჩახაზული კუთხის გრადუსული ზომა ტოლია იმ რკალის გრადუსული ზომის ნახევრის, რომელსაც იგი ეყრდნობა. $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (სურ.5)

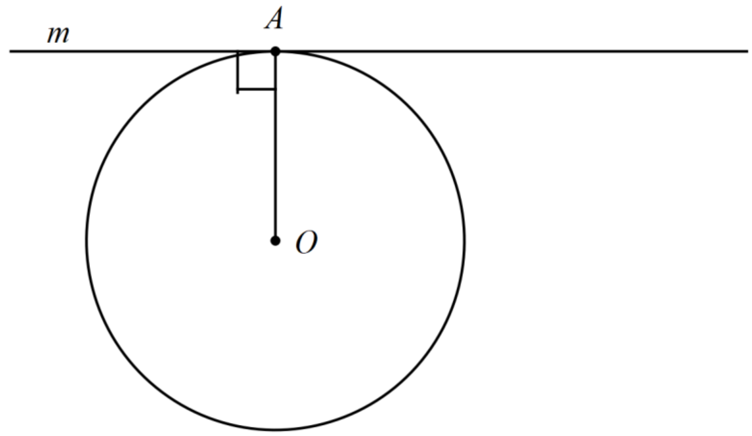
ჩახაზული კუთხის გრადუსული ზომა ტოლია თავისი შესაბამისი ცენტრული კუთხის გრადუსული ზომის ნახევრის. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$ (სურ.5)

კუთხეს, რომლის წვერო წრეწირის ცენტრია, ხოლო გვერდები წრეწირს გადაკვეთს, ცენტრული კუთხე ეწოდება. $\angle AOC$ ცენტრული კუთხეა (სურ.5)

წრეწირის რკალის გრადუსული ზომა ეწოდება შესაბამისი ცენტრული კუთხის გრადუსულ ზომას. $\overset{\frown}{AB} = \angle AOB.$

38. წრეწირის მხები და მკვეთი.

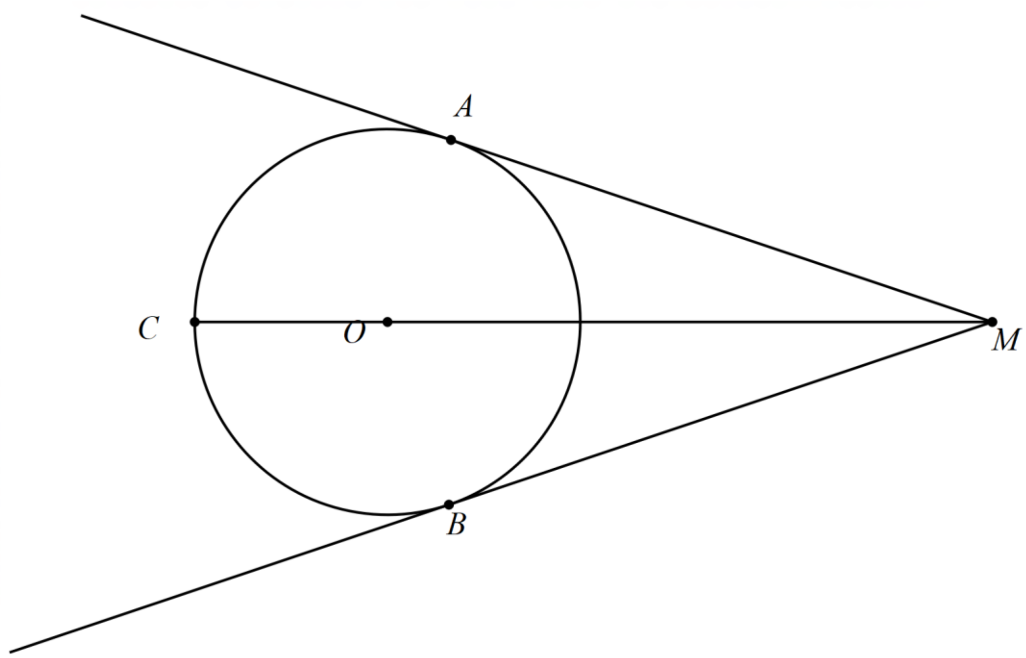
თუ წრფე წრეწირს ეხება მხოლოდ ერთ წერტილში მაშინ ამ წრფეს ეწოდება **წრეწირის მხები.** წრეწირის მხები შეხების წერტილში გავლებული რადიუსის მართობულია. $OA \perp m$ (სურ.6)



სურ.6

თუ წრფე წრეწირს კვეთს ორ წერტილში, მაშინ ამ წრფეს ეწოდება **წრეწირის მკვეთი.**

სამართლიანია შემდეგი დებულება : მოცემული წერტილიდან ერთი და იმავე წრეწირისადმი გავლებული მხებების მონაკვეთები ტოლი სიგრძისაა. (იგულსიხმება მოცემული წერტილიდან წრეწირთან შეხების წერტილებამდე მანძილები) MA=MB. (სურ. 7)



სურ.7

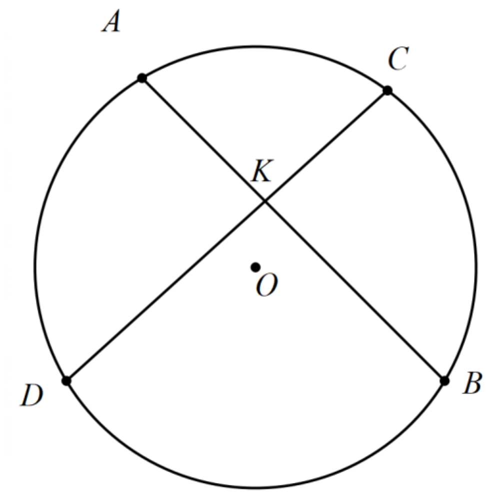
მოცემული წერტილიდან (M) წრეწირის ცენტრზე (O) გამავალი მკვეთი (MC) იმავე წერტილიდან გავლებული მხებებით შექმნილი კუთხის ($\angle AMB$) ბისექტრისას წარმოადგენს.

როდესაც წრეწირები ერთმანეთს ეხება, შეხების წერტილში შესაძლებელია საერთო მხების გავლება; გარე შეხების შემთხვევაში წრეწირების ცენტრები საერთო მხების სხვადასხვა მხარესაა, ხოლო შიგა შეხების შემთხვევაში-საერთო მხების ერთ მხარეს.

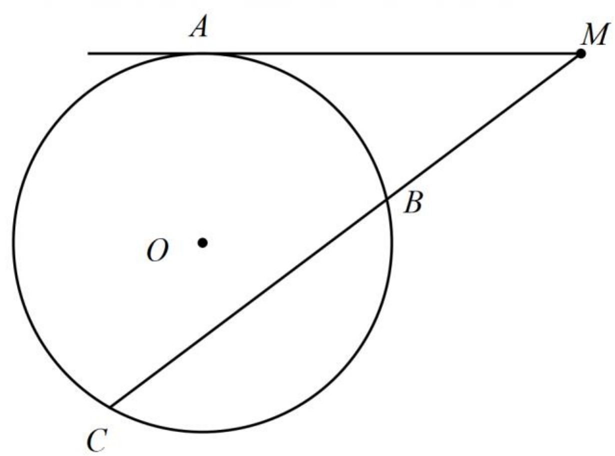
როდესაც ორი წრეწირი ერთმანეთს გარეთ მდებარეობს, მაშინ მათ აქვთ ორი საერთო შიგა მხები და ორი საერთო გარე მხები.

გადამკვეთი ქორდების თვისება. ორი ურთიერთგადამკვეთი ქორდის მონაკვეთების ნამრავლი ერთმანეთის ტოლია; AK$\cdot KB = CK \cdot KD$ სურ.8

ერთი წერტილიდან გავლებული მხებისა და მკვეთის თვისება. თუ სიბრტყის რაიმე წერტილიდან ერთი და იმავე წრეწირისადმი გავლებულია მხები და მკვეთი, მაშინ მხების მონაკვეთის სიგრძის კვადრატი ტოლია მკვეთის მონაკვეთის ნამრავლისა მისი გარე ნაწილის სიგრძეზე; $MA^2 = MB \cdot MC$ (სურ.9)



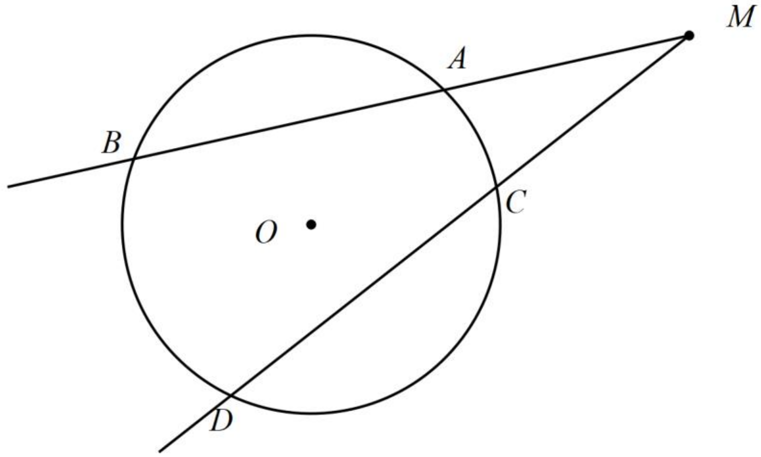
სურ8.



სურ.9

ერთი წერტილიდან გავლებული მკვეთების თვისება. თუ სიბრტყის რაიმე წერტილიდან ერთი და იმავე წრეწირისადმი გავლებულია მკვეთები, მაშინ მკვეთის სიგრძის ნამრავლი მისივე გარე ნაწილის სიგრძეზე-

ყველა მკვეთისათვის ერთი და იგივე რიცხვის ტოლია; $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ (სურ.10)



სურ.10

როდესაც ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს მათ საერთო გარე მხებსა და რადიუსებს შორის არსებობს გარკვეული დამოკიდებულება:

$MN = EO = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$

ორი წრეწირის ურთიერთმდებარეობა; (სურ.10ა)

ორი წრეწირი ერთმანეთის გარეთ მდებარეობს და არა აქვთ საერთო წერტილი $OO_1 > R_1 + R_2$;

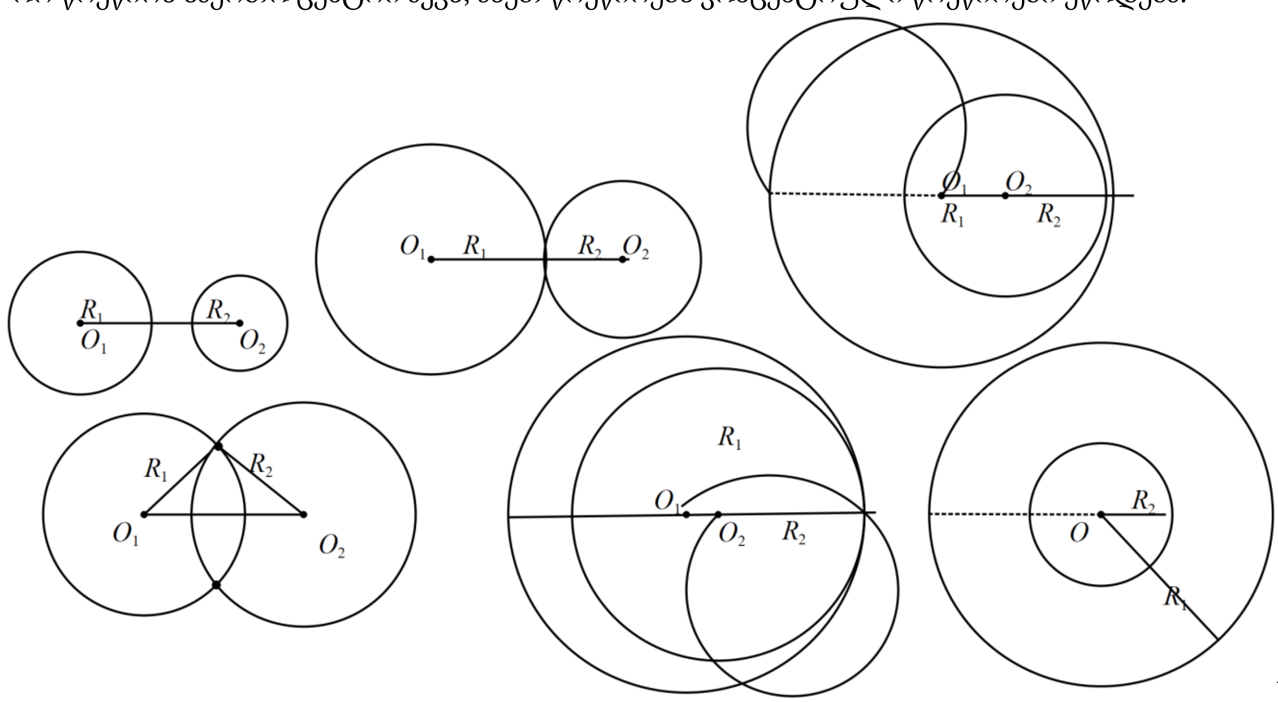
ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს: $OO_1 = R_1 + R_2$;

ორი წრეწირი კვეთს ერთმანეთს (მხოლოდ ორ წერტილში ხდება კვეთა); $|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 + R_2$;

ორი წრეწირი შიგნიდან ეხება ერთმანეთს; $OO_1 = |R_1 - R_2|$

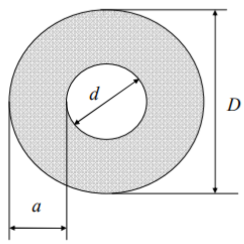
ერთი წრეწირი მეორის შიგნით მდებარეობს და არა აქვთ საერთო წერტილი $O_1O_2 < |R_1 - R_2|$;

ორ წრეწირს საერთო ცენტრი აქვს, ასეთ წრეწირებს კონცენტრული წრეწირები ეწოდება.



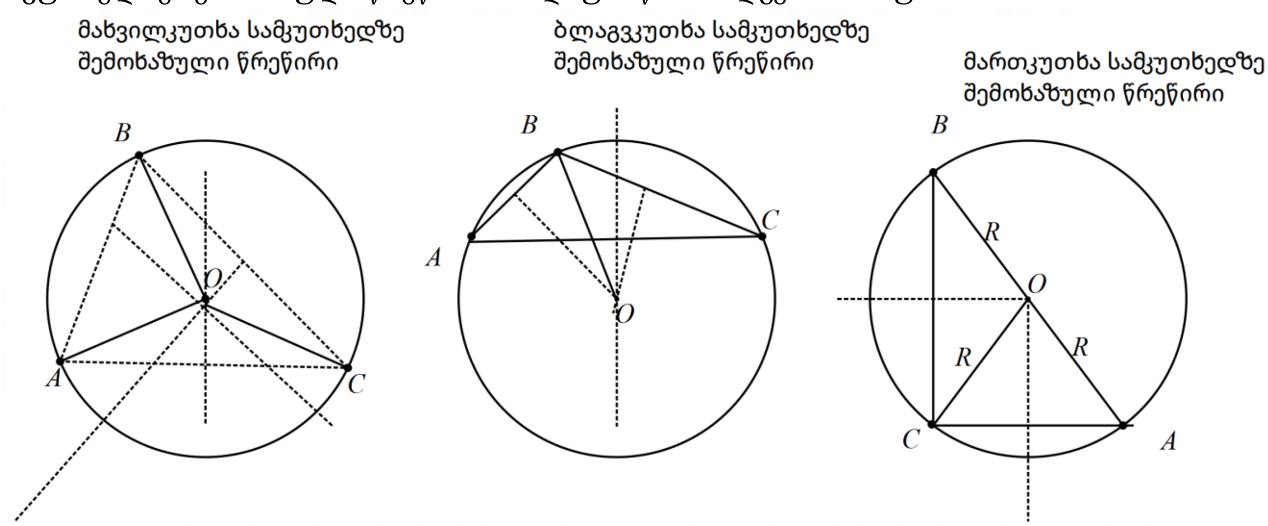
სურ.10ა

წრიული რგოლის ფართობი გამოითვლება ფორმულით: $S = \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2)$, სადაც D დიდი წრისდიამტერია, ხოლო d პატარა წრის დიამეტრი.



39. სამკუთხედში ჩახაზული და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირები.

წრეწირს ეწოდება სამკუთხედზე შემოხაზული, თუ ის სამკუთხედის სამივე წვეროზე გაივლის. ყოველ სამკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა. სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი არის ამ სამკუთხედის გვერდების შუამართობების გადაკვეთის წერტილი. ამ წერტილის სამკუთხედის სამივე წვეროსთან შეერთებით მიღებული თითოეული მონაკვეთი (ტოლი სიგრძისაა სამივე) მოცემულ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსს წარმოადგენს. იხ. სურათი 11.

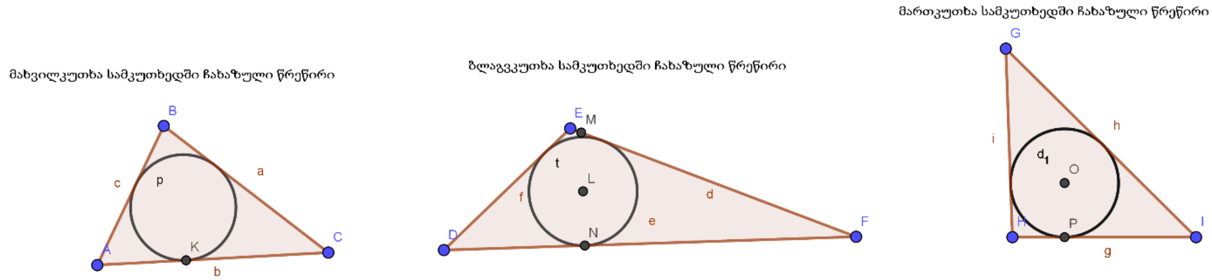


სურ.11

მართკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია; $R = \frac{c}{2}$

წრეწირს ეწოდება საკუთხედში ჩახაზული, თუ ის სამკუთხედის სამივე გვერდს ეხება.

ყოველ სამკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრი არის სამკუთხედის კუთხეთა ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი. ამ წერტილიდან სამკუთხედის სამივე გვერდის მიმართ გავლებული თითოეული მართობი (სამივე ტოლი სიგრძისაა) წარმოადგენს მოცემულ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსს. (იხ. სურ 12).



სურ.12

მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი გამოითვლება ფორმულით: $r = \frac{a+b-c}{2}$.

სამკუთხედში ჩახაზული და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსების გამოსათვლელი ფორმულები: $r = \frac{2s}{a+b+c}$; $R = \frac{abc}{4s}$; $R = \frac{a}{2sinA}$, სადაც A -a გვერდის მოპირდაპირე კუთხეა.

40. წესიერი მრავალკუთხედები. წესიერ მრავალკუთხედებში ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირები.

წესიერ n-კუთხედზე შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსების გამოსახვა n-კუთხედის გვერდით.

წესიერ n-კუთხედში შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა. წესიერ n-კუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა.

წესიერ n-კუთხედზე შემოხაზულ და მასში ჩახაზულ წრეწირებს საერთო ცენტრი აქვთ.

AB-წესიერი n-კუთხედის გვერდია.

თუ AB=a$\Rightarrow AE = \frac{a}{2}$; $\angle AOB = \frac{360^0}{n} \Rightarrow \angle AOE = \frac{180^0}{n}$; $AO = R$-შემოხაზული წრეწირის რადიუსია, ხოლო OE=r-ჩახაზული წრეწირის რადიუსი. წესიერ n-კუთხედზე შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსები a გვერდის საშუალებით შემდეგნაირად გამოისახება:

$R = \frac{a}{2sin\frac{180^0}{n}}$ და $r = \frac{a}{2tg\frac{180^0}{n}}$ წესიერ n-კუთხედზე შემოხაზული და ჩახაზული წრეწირების რადიუსებს შორის არსებობს ასეთი თანაფარდობა: r=Rcos$\frac{180^0}{n}$.

წესიერი სამკუთხედის შემთხვევაში: $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}, R = 2r$.

წესიერი ოთხკუთხედის შემთხვევაში: R=$\frac{a}{\sqrt{2}}$; $r = \frac{a}{2}$;

წესიერი ექვსკუთხედის შემთხვევაში: R=a; r=$\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

41. წესიერი მრავალკუთხედების ფართობი

წესიერი n-კუთხედის ფართობის გამოთვლა შემოხაზული წრეწირის რადიუსით

$S_n = \frac{1}{2} nR^2 sin\frac{360^0}{n}$; $\alpha = \frac{360^0}{n}$.

წესიერი n-კუთხედის ფართობის გამოთვლა ჩახაზული წრეწირის რადიუსით

$S_n = \frac{1}{2} nR^2 tg\frac{180^0}{n}$; $\alpha = \frac{180^0}{n}$.

42. წრიული სექტორისა და წრის ფართობი.

$S_{წრ} = \pi R^2$; $S_{სექტ.} = \frac{\pi R^2 n^0}{360^0}$ ან $S_{სექტ.} = \frac{1}{2} R^2 \alpha$, სადაც α არის სექტორის ცენტრული კუთხის რადიანული ზომა.
$S_{სეგ.} = S_{დიდი\ სექტ.AOB} \pm S_{\Delta AOB} = \frac{\pi R^2 n^0}{360^0} \pm S_{\Delta AOB}$. ,,-" ნიშანი უნდა ავიღოთ მაშინ, როცა $\alpha < 180^0$-ზე, ,,+" ნიშანი კი მაშინ , როცა $\alpha > 180^0$.

43. გეომეტრიული გარდაქმნები სიბრტყეზე.

სიბრტის რაიმე A წერტილის სიმეტრიული წერტილი l წრფის მიმართ ეწოდება ისეთ A' წერტილს, რომელიც მდებარეობს l წრფის მართობულ AA' წრფეზე და l წრფიდან იმავე მანძილითაა დაშორებული, როგორითაც A წერტილი. AO=A'O. A' წერტილის სიმეტრიული წერტილი l წრფის მიმართ იქნება A წერტილი. l წრფეს ეწოდება სიმეტრიის ღერძი A და A' წერტილებს ღერძულ-სიმეტრიულ წერტილებს უწოდებენ. აღნიშნულ გარდაქმნას (ასახვას) ღერძული სიმეტრია ეწოდება და აღინიშნება S_l −ით (l სიმეტრიის ღერძია). მონაკვეთი ღერძული სიმეტრიით აისახება თავისივე ტოლ მონაკვეთზე. აღნიშნული სიმეტრიით კუთხე გადადის თავისივე ტოლ კუთხეში. ღერძული სიმეტრიის შემთხვევაში ფიგურის ზომები არ იცვლება. ღერძულ-სიმეტრიული ფიგურები ტოლია.

სიმეტრიის ღერძზე მდებარე რაიმე წერტილის სიმეტრიული წერტილი ამავე ღერძის მიმართ არის თვით ეს წერტილი; მას ღერძული სიმეტრიის უძრავი წერტილი ეწოდება.

არსებობს გეომეტრიული ფიგურები, რომელთაც აქვთ სიმეტრიის ღერძი (ზოგს- არაერთი). ფიგურებს რომელთაც აქვთ სიმეტრიის ღერძი ღერძულ-სიმეტრიული ფიგურები ეწოდება.

ღერძულ-სიმეტრიული ფიგურებია: მართკუთხედი (აქვს სიმეტრიის ორი ღერძი-გვერდების შუამართობები); წრე (აქვს სიმეტრიის უამრავი ღერძი-ცენტრზე გამავალი ნებისმიერი წრფე); კვადრატი (აქვს სიმეტრიის ოთხი ღერძი-გვერდების შუამართობები და დიაგონალებზე გამავალი წრფეები); რომბი (აქვს სიმეტრიის ორი ღერძი-დიაგონალებზე გამავალი წრფეები); ტოლგვერდა სამკუთხედი (აქვს სიმეტრიის სამი ღერძი-მედიანების შემცველი წრფეები), ტოლფერდა სამკუთხედი (აქვს სიმეტრიის ერთი ღერძი-ფუძისადმი

გავლებული მედიანის შემცველი წრფე); ტოლფერდა ტრაპეცია (აქვს სიმეტრიის ერთი ღერძი-ფუძეების შუაწერტილებზე გამავალი წრფე); წრფე (აქვს სიმეტრიის უამრავლი ღერძი-თვით ეს წრფე და ამავე წრფის ნებისმიერად აღებულ წერტილში გამავალი მისი მართობული წრფე); მონაკვეთი (აქვს სიმეტრიის ორი ღერძი-შუამართობი და თვით ამ მონაკვეთზე გამავალი წრფე).

სიბრტის რაიმე A წერტილის სიმეტრიული წერტილი O წერტილის მიმართ ეწოდება ისეთ A' წერტილს, რომელიც მდებარეობს OA სხივის დამატებით სხივზე და O წერტილიდან იმავე მანძილითაა დაშორებული, როგორითაც A წერტილი; AO=A'O. A' წერტილის სიმეტრიული წერტილი O წერტილის მიმართ იქნება A წერტილი. O წერტილს ეწოდება სიმეტრიის ცენტრი. A და A' წერტილებს ცენტრულ-სიმეტრიულ წერტილებს უწოდებენ. აღნიშნულ გარდაქმნას ცენტრული სიმეტრია ეწოდება და აღინიშნება S_o-თი. (O წერტილი სიმეტრიის ცენტრია.)

ცენტრული სიმეტრიით წრფე გადადის თავის პარალელურ წრფეში, მონაკვეთი -თავის ტოლ (და პარალელურ) მონაკვეთში, კუთხე-თავის ტოლ კუთხეში.

ცენტრული სიმეტრიის შემთხვევაში ფიგურის ზომები არ იცვლება. ცენტრულ-სიმეტრიული ფიგურები ტოლია.

სიმეტრიის ცენტრის სიმეტრიული წერტილი თავისი თავის მიმართ იქნება თვით ეს წერტილი; მას ცენტრული სიმეტრიის უძრავი წერტილი ეწოდება.

არსებობს გეომეტრიული ფიგურები, რომელთაც აქვთ სიმეტრიის ცენტრი. ფიგურას , რომელსაც აქვს სიმეტრიის ცენტრი, ცენტრულ-სიმეტრიული ფიგურა ეწოდება. ცენტრულ-სიმეტრიული ფიგურებია: წრფე (აქვს სიმეტრიის უამრავი ცენტრი-ამავე წრფეზე მდებარე ნებისმიერი წერტილი); მონაკვეთი (აქვს სიმეტრიის ერთი ცენტრი-ამავე მონაკვეთის შუაწერტილი); წრე (აქვს სიმეტრიის ერთი ცენტრი-თავისივე ცენტრი); პარალელოგრამი (აქვს სიმეტრიის ერთი ცენტრი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი); მართკუთხედი; კვადრატი; რომბი (უკანასკნელ სამ ფიგურას, ისევე როგორც პარალელოგრამს, აქვს სიმეტრიის ერთი ცენტრი-დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი)

OX ღერძის **მიმართ (აბსცისათა ღერძის) მიმართ სიმეტრია -$\boldsymbol{S_x}$ აღინიშნება** $S_x(A(x;y) = A'(x;-y))$

OY ღერძის მიმართ **სიმეტრია აღინიშნება $\boldsymbol{S_y}$** $- S_y(A(x;y) = A''(-x;y))$

O(0;0) წერტილის **მიმართ სიმეტრია აღინიშნება $\boldsymbol{S_o}$ −თი** და $S_o(A(x;y) = A'''(-x;-y)$

ფიგურის **პარალელური გადატანა-ესაა** მოცემული ფიგურის ყოველი წერტილის გადატანა ერთი და იგივე მანძილზე, ერთი და იგივე მიმართულებით. $T_{\overrightarrow{PQ}(m;n)}$პარალელური გადატანა, ანუ პარალელური გადატანა რაიმე $\overrightarrow{PQ}$ მიმართული მონაკვეთის (ვექტორის) მიხედვით, K(x;y) წერტილს გადაიყვანს ისეთ $K'(x';y')$ წერტილში, რომლის კოორდინატები შემდეგნაირად გამოისახება: $x' = x + m;\ \ y' = y + n$

იგივე პარალელური გადატანა შეიძლება ასედაც იყოს მოცემული T(x;y)→(x+m;y+n), ან კიდევ ასე: T(0;0)→(m;n). პარალელური გადატანის დროს რაიმე მონაკვეთი გადავა მისივე ტოლ და პარალელურ მონაკვეთში. პარალელური გადატანისას წრფე თავის პარალელურ წრფეში გადადის. პარალელური გადატანისას კუთხე თავის ტოლ კუთხეში. ანუ პარალელური გადატანის შედეგად ფიგურის ზომები არ იცვლება.

ფიგურის პარალელური გადატანის შედეგად მიირება მისივე ტოლი ფიგურა.

თუ O არის სიბრტყის მოცემული წერტილი, ხოლო α -მოცემული კუთხე, მაშინ E წერტილი O წერტილის მიმართ α კუთხით მობრუნების შედეგად გადადის F წერტილში. O წერტილს ეწოდება მობრუნების ცენტრი, α კუთხეს -მობრუნების კუთხე.

მობრუნების კუთხე ითვლება დადებითად, თუ მობრუნება ხდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

მობრუნების კუთხე ითვლება უარყოფითად, თუ მობრუნება ხდება საათის ისრის მოძრაობის

მიმართულებით. მობრუნება აღინიშნება R_O^{α}-თი.

180^0-იანი კუთხით მობრუნება -ესაა ცენტრული სიმეტრია. როდესაც მობრუნების კუთხე 360^0-ია (სრული ბრუნი), მაშინ სხივი (საიდანაც ხდება მობრუნების კუთხის გადადება) დაუბრუნდება თავის საწყის მდებარეობას; ასეთ შემთხვევაში მობრუნების კუთხე შეიძლება 0^0-ად ჩაითვალოს; ეს იგივური ასახვაა. თუ α მობრუნების კუთხეა, სადაც 180^0< α<360^0 მაშინ α კუთხით მობრუნება შეიძლება შეიცვალოს ($\alpha - 360^0$)-იანი კუთხით მობრუნებით; მაგ 330^0-იანი კუთხით მობრუნება შეიცვლება -30^0-იანი კუთხით მობრუნებით.

ნებისმიერი კუთხით მობრუნების შემთხვევაში მობრუნების ცენტრი უძრავია-თავისთავში აისახება.

ნებისმიერი კუთხით მობრუნების შემთხვევაში მონაკვეთი თავის ტოლ მონაკვეთში გადადის.

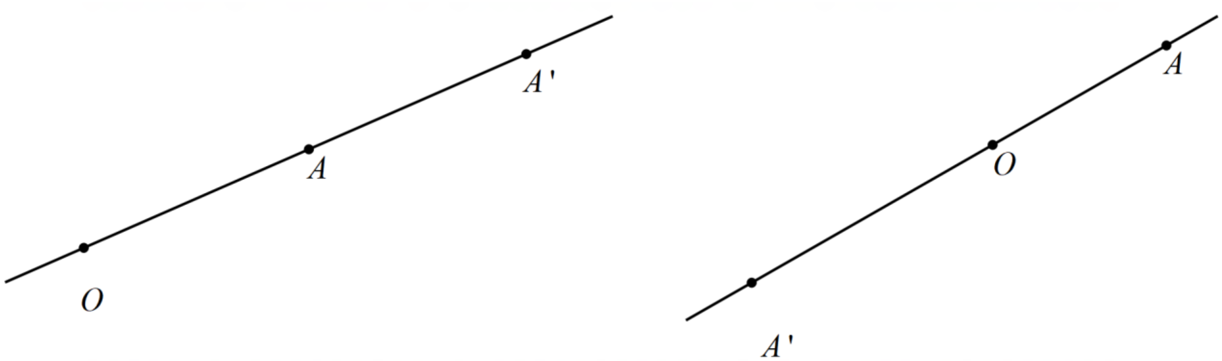
F ფიგურის ისეთ გარდაქმნას F' ფიგურად როდესაც მისი ყოველი X წერტილი აღნიშნული წესით გადადის F' ფიგურის X' წერტილში, O ცენტრის მიმართ მოცემული ფიგურის α კუთხით მობრუნება ეწოდება.

თუ $R_O^{\alpha}(X) = X'$ და $R_O^{\alpha}(Y) = Y' \Rightarrow X'Y' = XY$ ანუ მობრუნების შედეგად ფიგურის ზომები არ იცვლება. მოცემული ფიგურის მობრუნების შედეგად მიიღება მისივე ტოლი ფიგურა.

გეომეტრიულ გარდაქმნას , რომელსაც მოცემული ფიგურა გადაჰყავს თავის ტოლ ფიგურაში, გადაადგილება ეწოდება. ღერძული და ცენტრული სიმეტრიები, პარალელური გადატანა, მობრუნება- თითოეული მათგანი გადაადგილებას წარმოადგენს.

ჰომოთეტია O(0;0) ცენტრითა და k ($k \neq 0$) კოეფიციენტით-H_O^k სიბრტყის A(x;y) წერტილს გადაიყვანს ამავე სიბრტის ისეთ $A'(x'; y')$ წერტილში, რომლის კოორდინატები შემდეგნაირად გამოისახება: $x' = kx;\ y' = ky$.

თუ k>0, A' წერტილი მდებარეობს OA სხივზე; თუ k<0, A' წერტილი მდებარეობს OA სხივის დამატებით სხივზე (სურ.13) OA'=$|k| \cdot OA$



სურ.13

თუ k=1, მაშინ H_O^1 ჰომოთეტია არის იგივური ასახვა (ასახვა თავისთავში). თუ k=-1, მაშინ H_O^{-1} ჰომოთეტია არის ცენტრული სიმეტრია.

H_O^k ჰომოთეტიით F ფიგურა გადადის F' ფიგურაში რადგან F' ფიგურის ყოველი წერტილი მიიღება F ფიგურის თითოეული წერტილისაგან აღნიშნული ჰომოთეტიით. F და F' ფიგურებს ჰომოთეტიური ფიგურები ეწოდება.

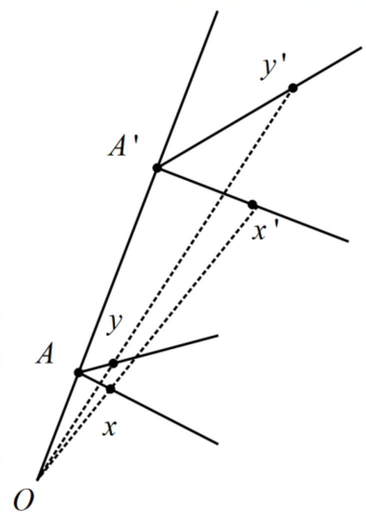
თუ F ფიგურა F' ფიგურის ჰომოთეტიურია k კოეფიციენტით, მაშინ F' ფიგურა იქნება F ფიგურის ჰომოთეტიური $\frac{1}{k}$ კოეფიციენტით $H_O^{\frac{1}{k}}$. ნებისმიერი ჰომოტეტიის დროს ჰომოთეტიის ცენტრი უძრავია.

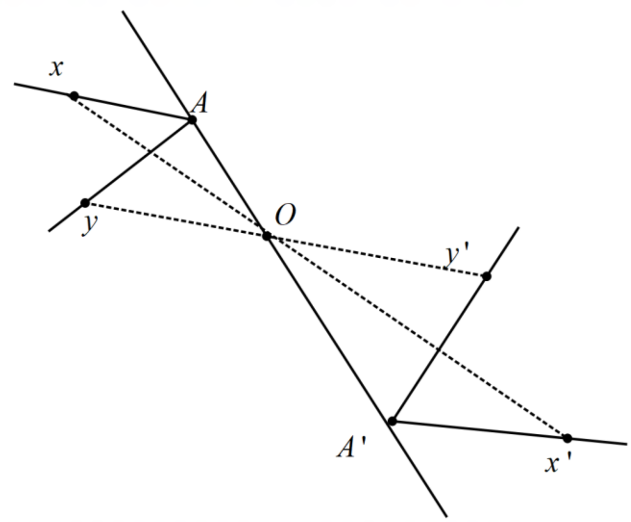
თუ H_O^k ჰომოთეტიისას $|k| > 1$, მაშინ ფიგურის ზომები $|k|$-ჯერ იზრდება; ხოლო თუ H_O^k ჰომოთეტიისას 0<$|k|$<1, მაშინ ფიგურის ზომები $\frac{1}{|k|}$-ჯერ იზრდება ($|k|$-ჯერ მცირდება).

ჰომოთეტია არ წარმოადგენს გადაადგილებას.

ჰომოთეტიით წრფე აისახება თავის პარალელურ წრფეში. თუ წრფე გადის ჰომოთეტიის ცენტრზე, მაშინ **ჰომოთეტიით** ეს წრფე თავისთავში აისახება. H_O^k k>0 ჰომოთეტიით სხივი თავის თანამიმართულ სხივზე

აისახება, ხოლო H_O^k, k<0 ჰომოთეტიით-თავის საწინააღმდეგო მიმართულ სხივზე.
თუ H_O^k, k>0 ჰომოთეტიით კუთხის A წვერო A' წერტილზე აისახება.მაშინ AX და AY სხივები შესაბამისად თავის თანამიმართულ AX' და AY' სხივებზე აისახება, ხოლო კუთხე XAY-თავის ტოლ $X'A'Y'$ კუთხეზე.
H_O^k, k<0 ჰომოთეტიით კუთხის A წვერო A' წერტილზე აისახება, მაშინ AX და AY სხივები შესაბამისად თავის საწინააღმდეგო მიმართულ AX' და AY' სხივებზე აისახება, ხოლო XAY კუთხე-თავის ტოლ $X'A'Y'$ კუთხეზე.
(იხ. სურ.14)





სურ.14

თუ სიბრტყის რაიმე M(x;y) წერტილი $H_A^k(x_0; y_0)$ ჰომოთეტიით გადადის ამავე სიბრტყის $M'(x'; y')$ წერტილში, მიიღება კოორდინატთა გარდაქმნის შემდეგი ფორმულები:
$x' = kx + x_0(1-k)$; $y' = ky + y_0(1-k)$, თუ ჰომოთეტიის A($x_0; y_0$) ცენტრი კოორდინატთა სათავეა, მაშინ ეს ფორმულები ასეთ სახეს მიიღებს: $x' = kx$; $y' = ky$.

სტერეომეტრია

1. წერტილი, წრფე და სიბრტყე სივრცეში

სტერეომეტრია არის გეომეტრიის ნაწილი, რომელიც შეისწავლის ფიგურებს სივრცეში.
სტერეომეტრიის ძირითადი აქსიომებია:
1. ყოველ სამ წერტილზე, რომლებიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობს, გაივლება მხოლოდ ერთი სიბრტყე.

2. თუ ორ სიბრტყეს აქვს საერთო წერტილი, მაშინ მათ აქვთ საერთო წრფე, რომელიც ამ წერტილზე გადის. ორი სიბრტყისათვის საერთო წრფეს ამ სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფე ეწოდება.

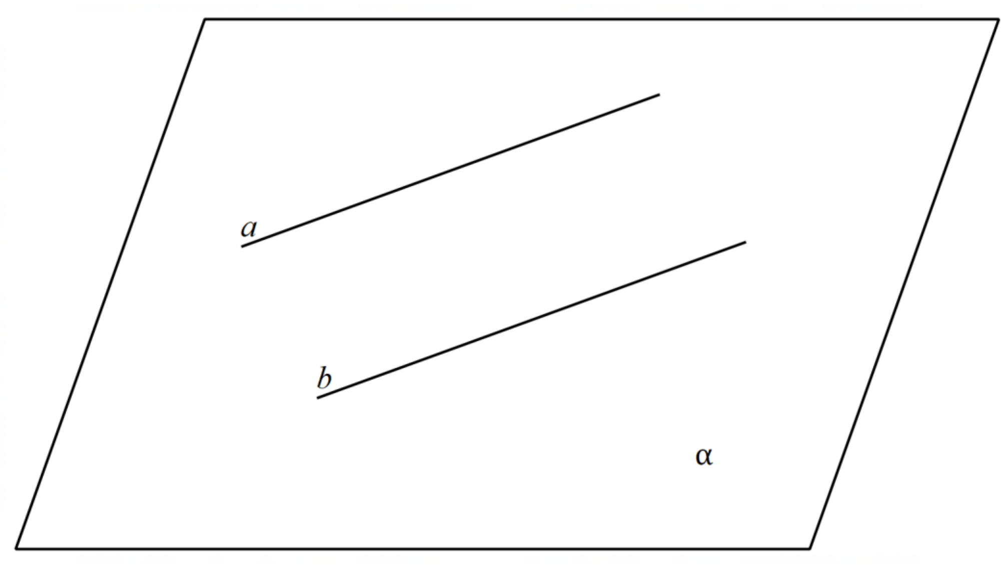
3. თუ წრფის ორი წერტილი ეკუთვნის მოცემულ სიბრტყეს, მაშინ ამ წრფის ყოველი წერტილი ეკუთვნის იმავე სიბრტყეს.

4. სივრცეში არსებობს ოთხი წერტილი, რომლებიც არ ეკუთვნის ერთ სიბრტყეს.
ამ აქსიომების საფუძველზე მტკიცდება შემდეგი დებულებების სამართლიანობა:
1. წრფესა და მის გარეთ მდებარე წერტილზე შეიძლება მხოლოდ ერთი სიბრტყის გავლება.

2. ორ ურთიერთგადამკვეთ წრფეზე შეიძლება მხოლოდ ერთი სიბრტყის გავლება.

2.წრფეთა ურთიერთგანლაგება სივრცეში.

ორ წრფეს ეწოდება პარალელური, თუ ისინი ერთსა და იმავე სიბრტყეში მდებარეობს და ერთმანეთს არ კვეთს. $a \parallel b$ (სურ.1)



სურ.1

სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

წრფეზე არამდებარე წერტილზე გაივლება ამ წრფის პარალელური მხოლოდ ერთი წრფე.

წრფეთა პარალელურობის ნიშანი. თუ ორი წრფე ცალ-ცალკე მესამე წრფის პარალელურია, მაშინ ისინი ურთიერთპარალელურია.

თუ ორი წრფე ერთ სიბრტყეში არ მდებარეობს და ერთმანეთს არ კვეთს, მათ აცდენილი წრფეები ეწოდება.

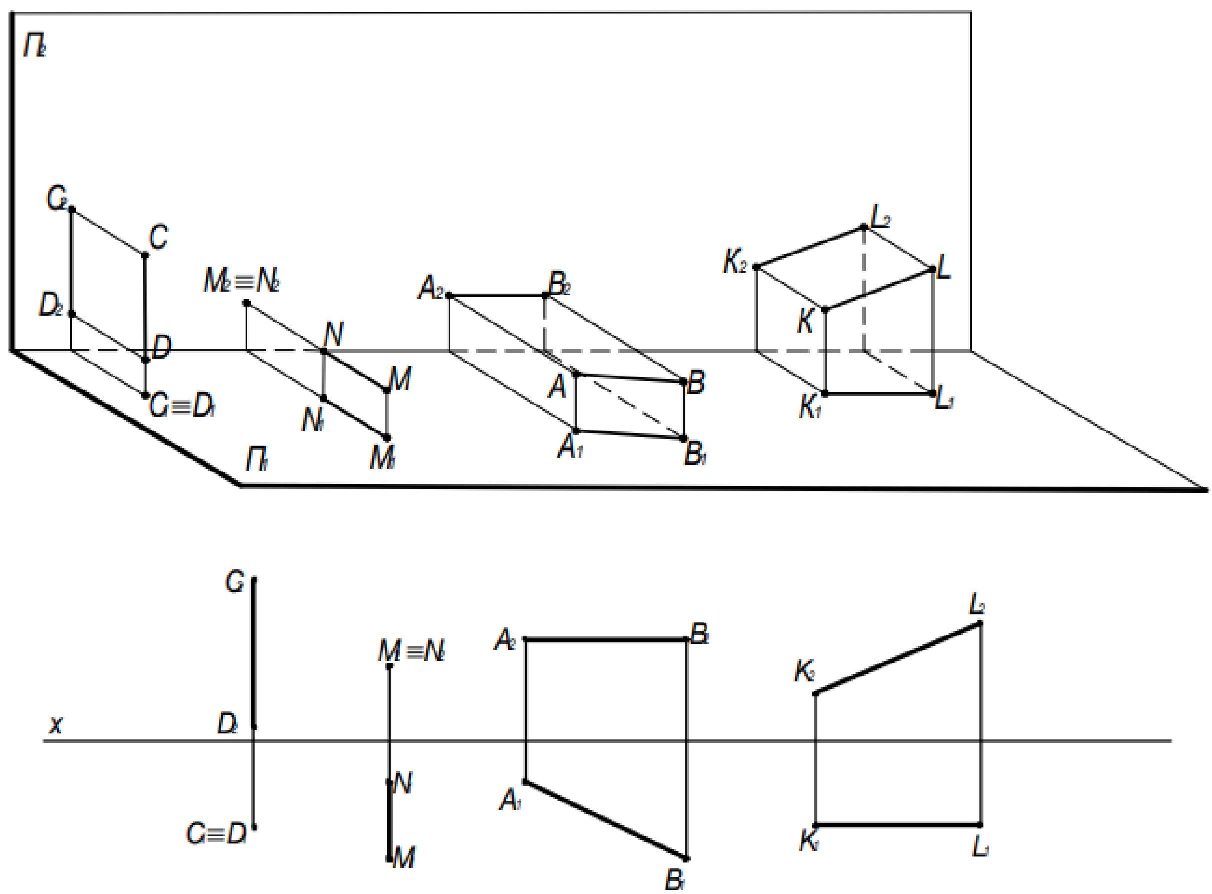
ორ წრფეს ეწოდება ურთიერთმართობული, თუ ისინი მართი კუთხით იკვეთება.

კუთხე ორ ურთიერთგადამკვეთ წრფეს შორის არის წრფეთა ურთიერთგადაკვეთის შედეგად მიღებული კუთხეებიდან უმცირესის გრადუსული ზომა.

პარალელურ წრფეებს შორის კუთხის გრადუსული ზომაა 0^0; ურთიერთმართობულ წრფეებს შორის კუთხის გრადუსული ზომაა 90^0. დანარჩენ შემთხვევაში კუთხე იცვლება 0^0-დან 90^0-მდე. კუთხე ორ აცდენილ წრფეს შორის ეწოდება იმ კუთხეს, რომელსაც სივრცის რაიმე წერტილზე მოცემული წრფეების პარალელურად გამავალი ორი წრფე შეადგენს ერთმანეთთან.

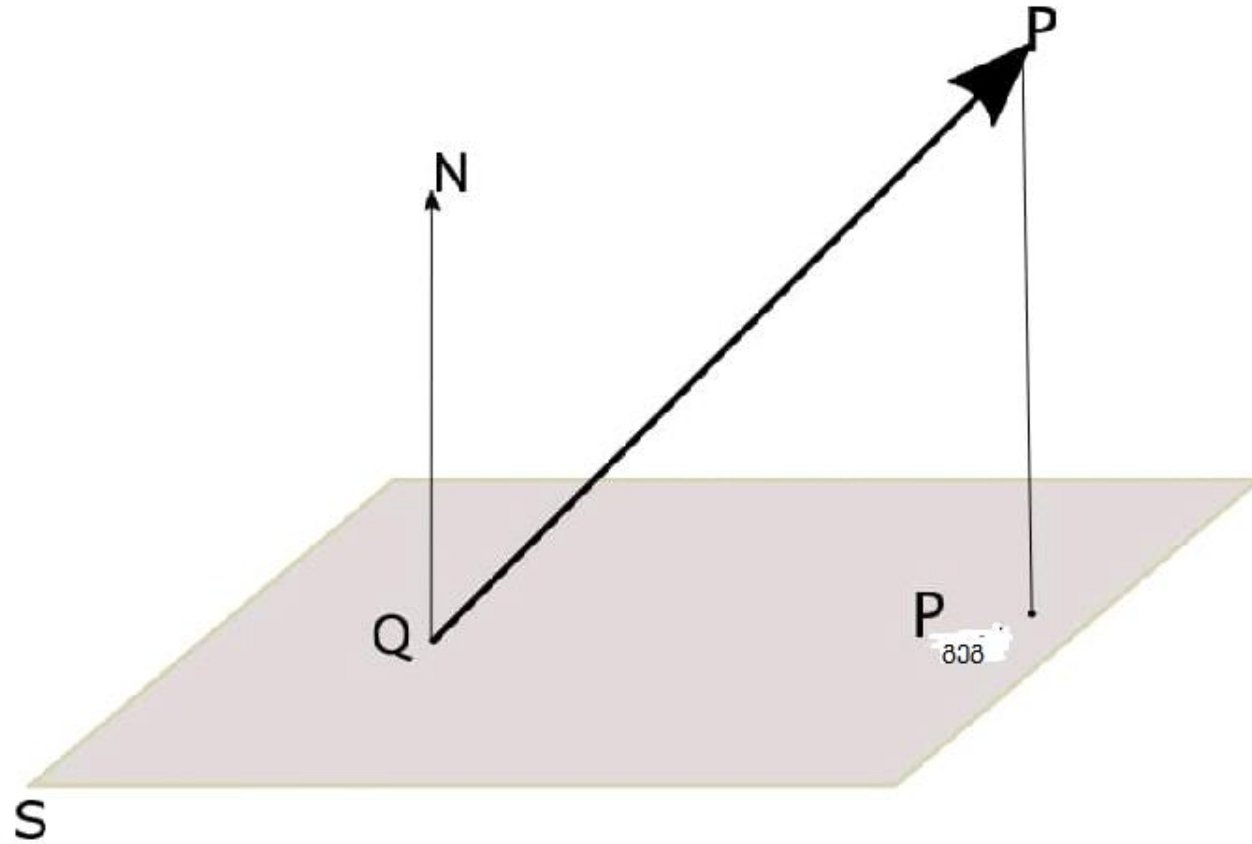
3. წერტილის, წრფის, მონაკვეთის ორთოგონალური დაგეგმილება სიბრტყეზე.

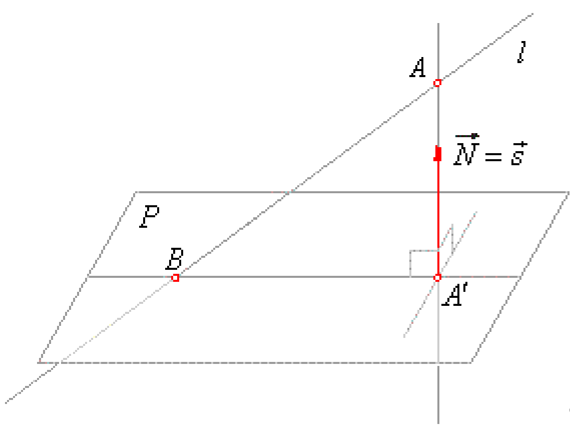
წერტილის, წრფის, მონაკვეთის ორთოგონალურ დაგეგმილებას სიბრტყეზე გავეცნოთ (სურ.2) -ის მიედვით.



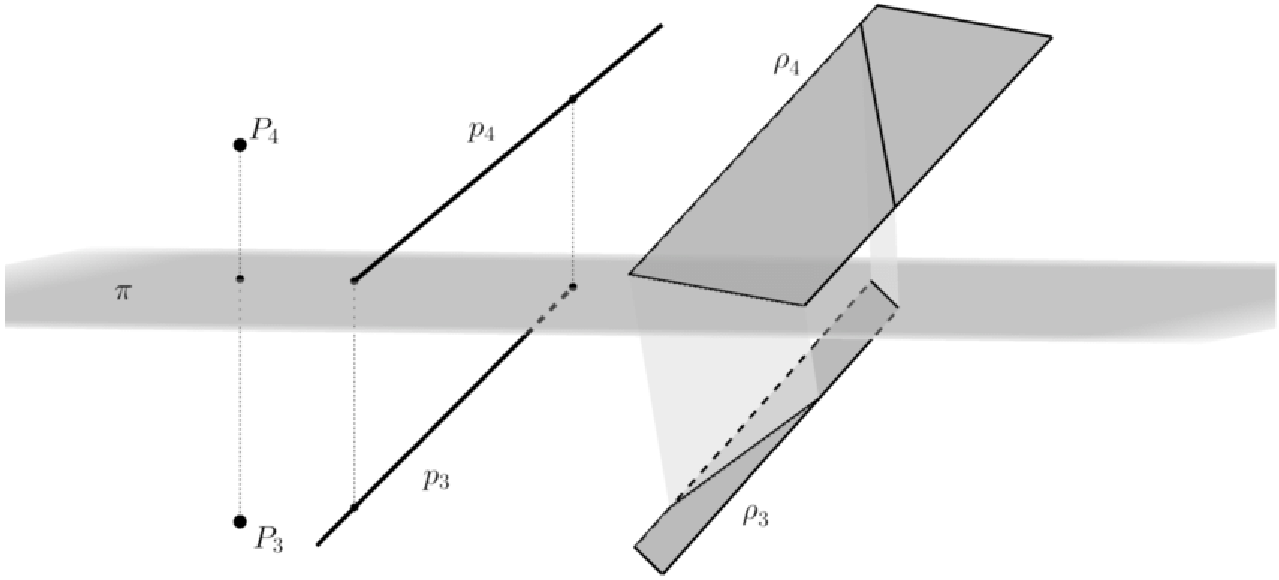
სურ.2

წერტილის ორთოგონალური გეგმილი





წრფის გეგმილი



ვთქვათ a წრფე კვეთს მოცემულ α სიბრტყეს, X' არის სივრცის რაიმე წერტილი, რომელიც არ ეკუთვნის a წრფეს. ამ X' წერტილზე a წრფის პარალელური a' წრფე გავავლოთ.a' წრფეც კვეთს α-ს და ვთქვათ გადაკვეთის წერტილია X. მაშინ X-ს ვუწოდოთ X' წერტილის პარალელური გეგმილი α სიბრტყეზე.(a წრფის პარალელურად დაგეგმილებისას). თუ X' ეკუთვნის a წრფეს, მაშინ X' -ის პარალელური გეგმილი α სიბრტყეზე a წრფის α სიბრტყესთან გადაკვეთის წერტილს ვუწოდოთ. (სურ.2ა) ცხადია, თუ a წრფეს მისი პარალელური წრფით შევცვლით, დაგეგმილების შედეგი არ შეიცვლება. ამიტომ შეიძლება ვთქვათ, რომ პარალელური დაგეგმილება მაგეგმილებელი წრფეების მიმართულებით მიმდინარეობს. თუ X' წერტილი α სიბრტყეზეა, მაშინ მისი პარალელური გეგმილი α-ს მკვეთი ნებისმიერი წრფის მიმართულებით თავად X'-ია.
 პარალელური დაგეგმილების საყურადღებო კერძო შემთხვევაა ე.წ. ორთოგონალური (მართობული) დაგეგმილება-ამ შემთხვევაში მაგეგმილებელი წრფე მართობულია α სიბრტყის. წარმოვადგინოთ პარალელური დაგეგმილების ძირითადი თვისებები.

თვისება1. წრფის პარალელური გეგმილი სიბრტყეზე არის წრფე ან წერტილი.

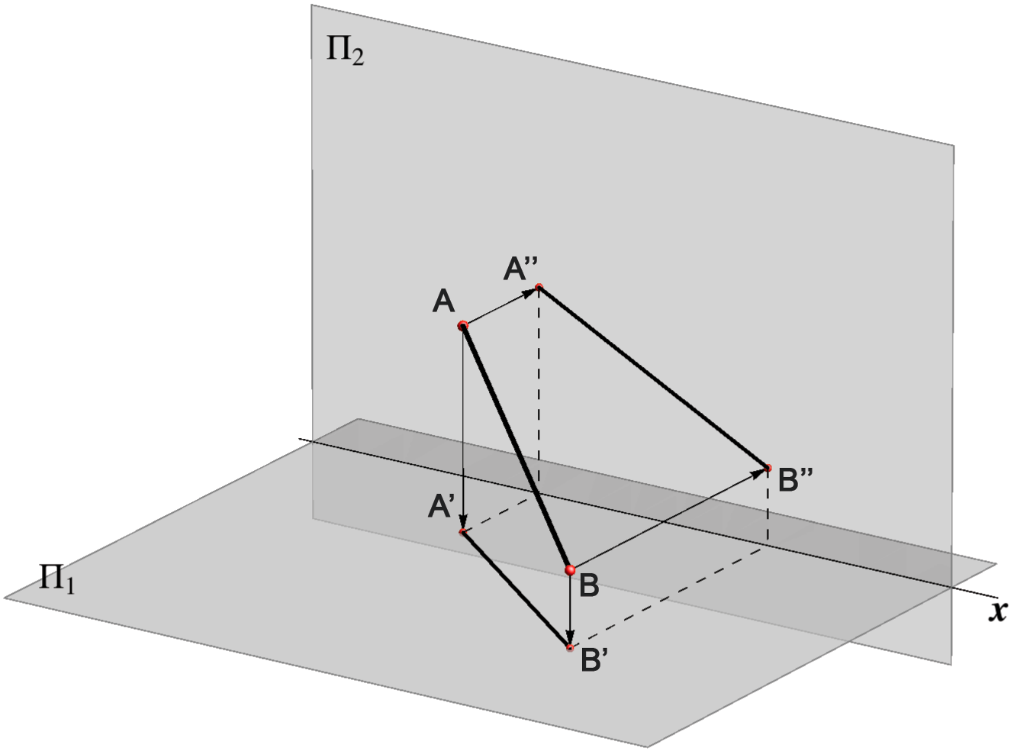
თვისება 2. პარალელური წრფეების გეგმილები პარალელური წრფეები, ერთი რაიმე წრფე, ან ცალკეული წერტილებია.

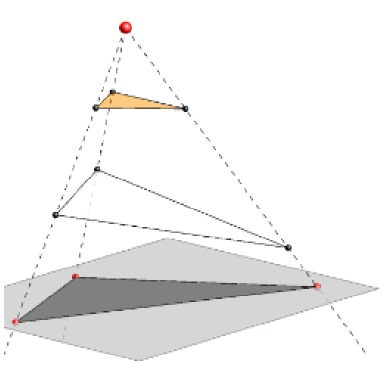
თვისება3. თუ $A'C'$ წრფე არ არის α სიბრტყეზე მაგეგმილებელი a წრფის პარალელური და B' წერტილი ყოფს $A'C'$ მონაკვეთს რაიმე შეფარდებით $\frac{A'B'}{B'C'} = k$, მაშინ პარალელური დაგეგმილებისას B'-ის გეგმილი-B წერტილი ამავე შეფარდებით ყოფს $A'C'$ მონაკვეთის გეგმილს -AC მონაკვეთს : $\frac{AB}{BC} = k$.

თეორემა: მოცემულ სიბრტყეზე მრავალკუთხედის ორთოგონალური გეგმილის ფართობი უდრის დასაგეგმილებელი მრავალკუთხედის ფართობისა და მრავალკუთხედისა და მისი გეგმილის სიბრტყეებს შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლს. $S_{გეგ} = S \cdot cos\varphi$ (სურ2. ბ)

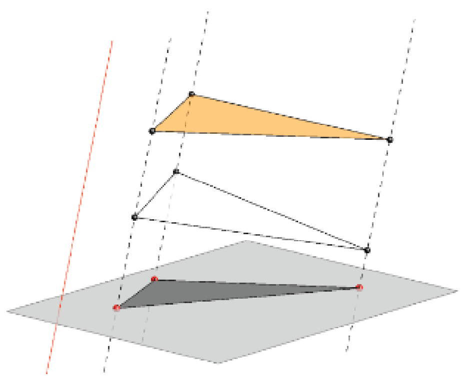
წრფის ორთოგონალური პროექცია სიბრტყეზე არის წრფე ან წერტილი. თუ წრფე სიბრტყის პერპენდიკულარულია, მისი პროექცია არის წერტილი.

მონაკვეთის ორთოგონალური გეგმილი სიბრტყეზე არის მონაკვეთი.

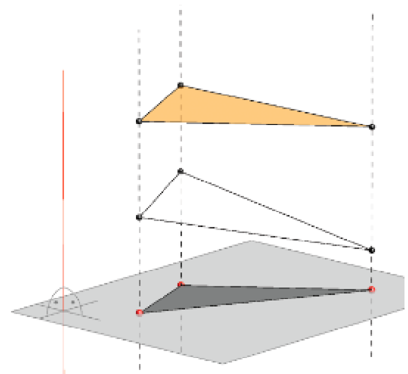




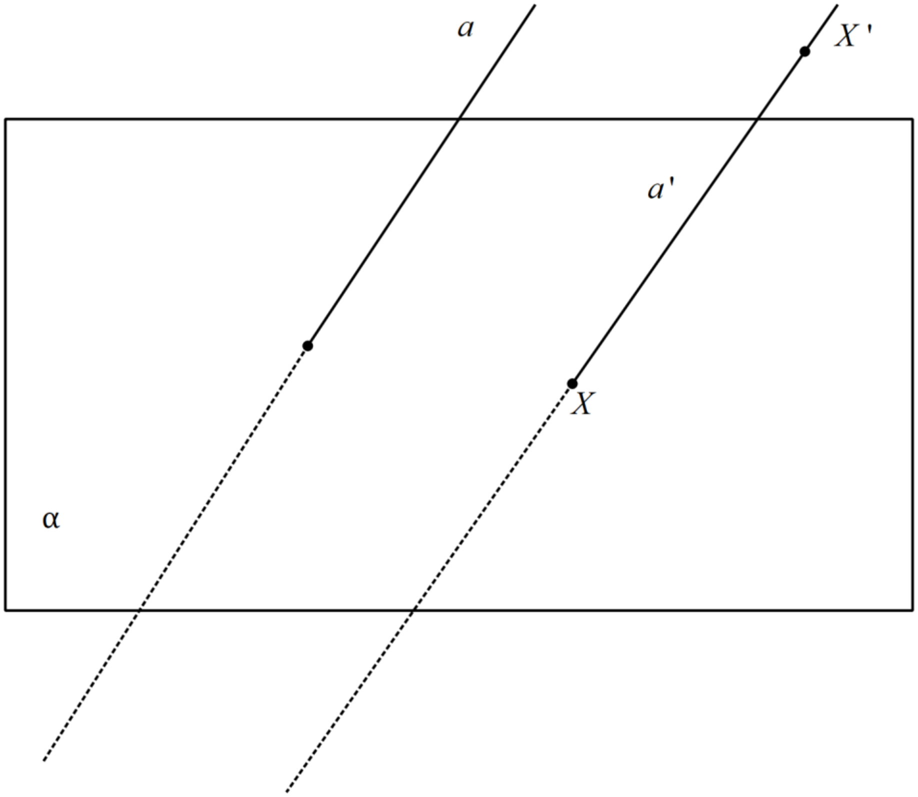
ცენტრული პროექცია



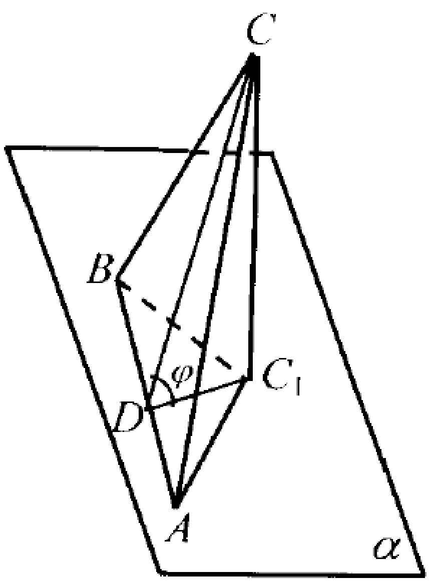
ირიბი პარალელური პროექცია

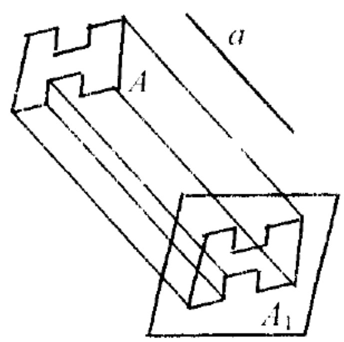


ორთოგონალური პროექცია



სურ.2ა





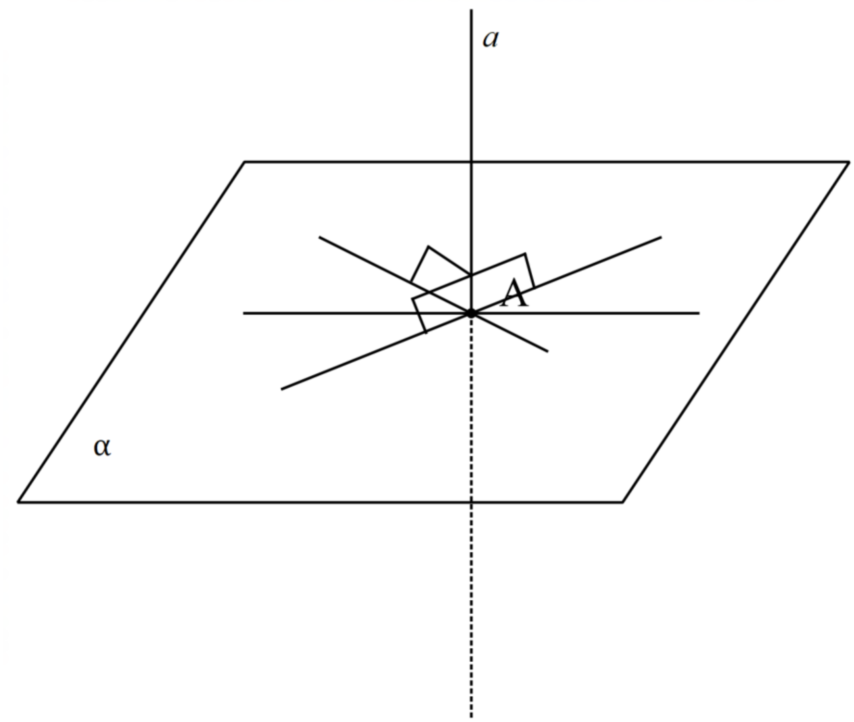
სურ.2.ბ

4. წრფისა და სიბრტყის მართობულობა

1. წრფესა და სიბრტყეს არა აქვთ საერთო წერტილი (წრფე სიბრტყეს არ კვეთს)

2. წრფეს და სიბრტყეს აქვთ მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი (წრფე გადაკვეთს სიბრტყეს)

3. წრფესა და სიბრტყეს აქვთ უამრავი საერთო წერტილი (წრფე სიბრტყეზე მდებარეობს).
სიბრტყის გადამკვეთ წრფეს ეწოდება ამ სიბრტყის მართობული, თუ ის გადაკვეთის წერტილში გავლებული და ამ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი წრფის მართობულია; $a \perp \alpha$ (სურ.3)



სურ.3

სამართლიანია შემდეგი თეორემები-წრფისა და სიბრტყის მართობულობის ნიშნები.

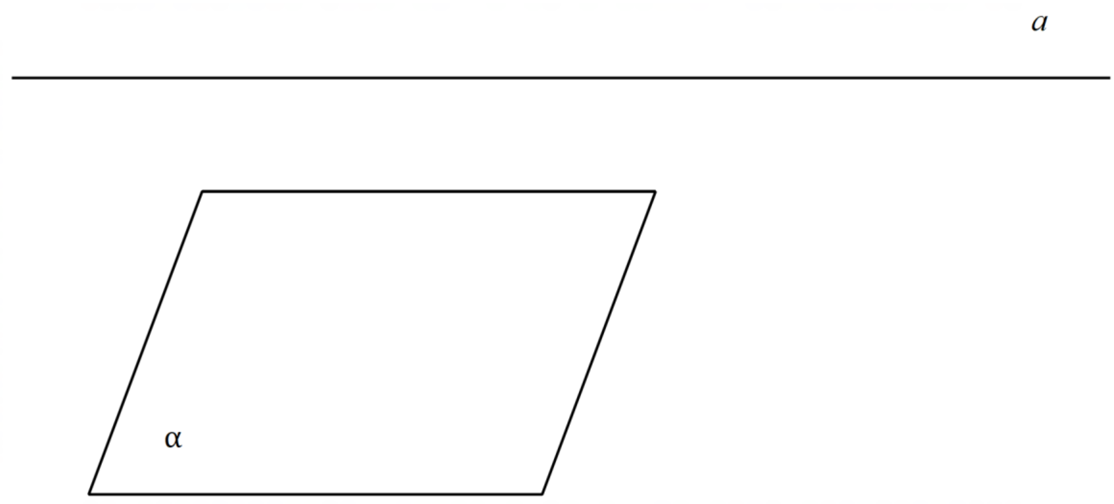
თეორემა. თუ a წრფე კვეთს α სიბრტყეს და გადაკვეთის წერტილში გავლებული და ამ სიბრტყეში მდებარე b და c წრფეების მართობულია, მაშინ a წრფე α სიბრტყის მართობულია, მაშინ a წრფე α სიბრტყის მართობულია. ანუ თუ a კვეთს α-ს, b,c∈ α, $a \perp b,\ a \perp c \Rightarrow a \perp \alpha$.

თეორემა. თუ სიბრტყე ორი ურთიერთპარალელური წრფიდან ერთ-ერთის მართობულია, მაშინ ის მეორე წრფის მართობულიცაა. $a \parallel b, a \perp \alpha \Rightarrow b \perp \alpha$.

თეორემა. თუ ორი წრფე ერთი და იმავე სიბრტყის მართობულია, მაშინ ისინი პარალელურია.
$a \perp \alpha,\ \ b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$.

5. წრფისა და სიბრტყის პარალელობა.

წრფეს და სიბრტყეს ეწოდება პარალელური, თუ ეს წრფე ამ სიბრტყეს არ კვეთს; ეს ასე ჩაიწერება: $a \parallel \alpha$ (სურ.4)

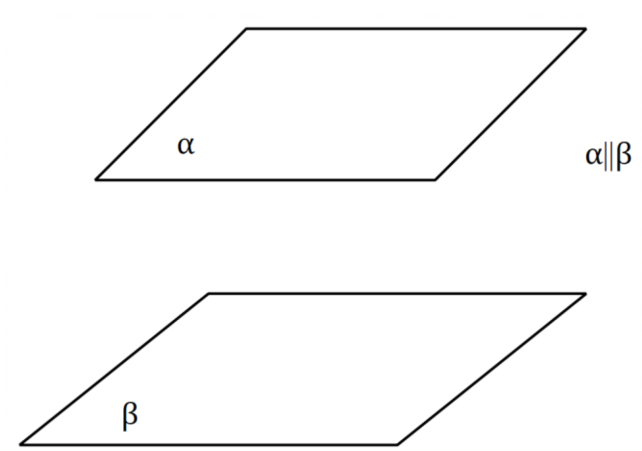


სურ.4

წრფისა და სიბრტყის პარალელურობის ნიშანი. თუ მოცემული წრფე არ ეკუთვნის მოცემულ სიბრტყეს და ამ სიბრტყეზე მდებარე რომელიმე წრფის პარალელურია, მაშინ ის თვით ამ სიბრტყის პარალელურია. სამართლიანია ამ დებულების შებრუნებული დებულებაც.

6. სიბრტყეთა პარალელობა.

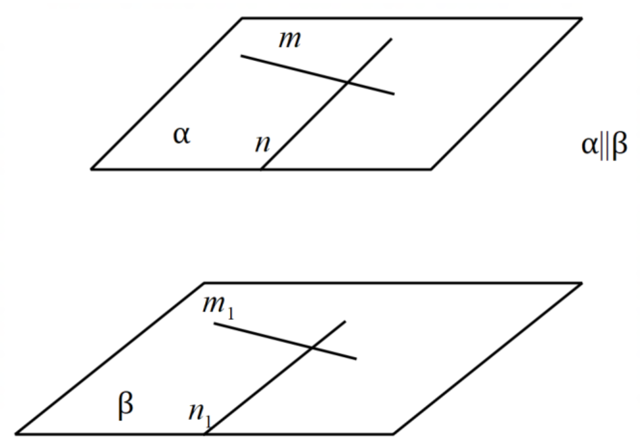
ორ სიბრტყეს ეწოდება პარალელური, თუ ისინი ერთმანეთს არ კვეთს. $\alpha \parallel \beta$. (სურ.5)



სურ.5

სიბრტყეთა პარალელურობის ნიშნები.

თეორემა. თუ ერთი სიბრტყეზე მდებარე ორი გადამკვეთი წრფე პარალელურია მეორე სიბრტყეზე მდებარე ორი გადამკვეთი წრფის, მაშინ ეს სიბრტყეები პარალელურია; ანუ თუ $m, n \in \alpha, m_1, n_1 \in \beta$ და $m \parallel m_1, n \parallel n_1 \Rightarrow \alpha \parallel \beta$. (სურ.6)

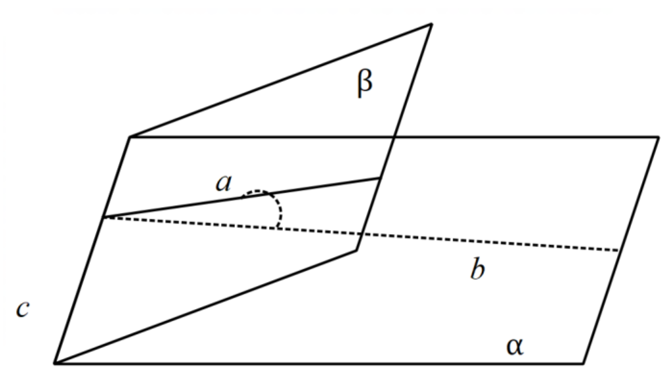


სურ. 6

თეორემა. თუ ორი სიბრტყე ერთი და იმავე წრფის მართობულია, მაშინ ეს სიბრტყეები პარალელურია.

7. კუთხე სიბრტყეებს შორის.

მე-7 სურათის მიხედვით α და β სიბრტყეების გადაკვეთის c წრფეზე გავლებულია ამავე წრფის მართობული γ სიბრტყე, რომელიც α და β სიბრტყეებს შესაბამისად a და b წრფეებზე კვეთს; ამ წრფეებს შორის კუთხეს ეწოდება კუთხე ორ მოცემულ სიბრტყეს შორის. ორ სიბრტყეს შორის კუთხე არაა დამოკიდებული მკვეთი სიბრტყის შერჩევაზე.

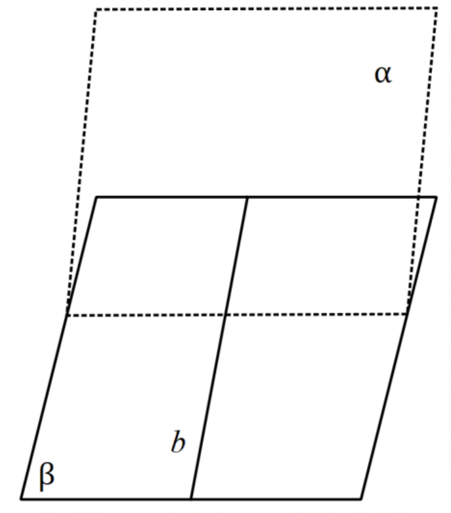


სურ.7.

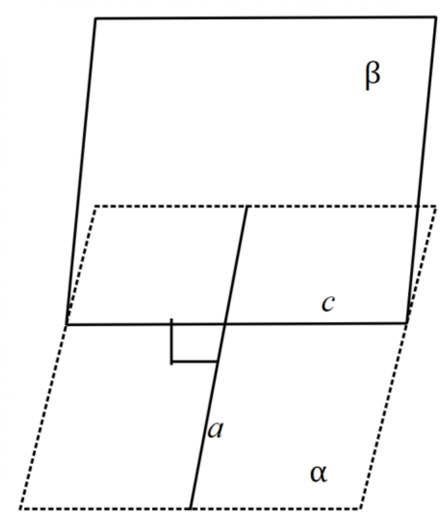
8. სიბრტყეთა მართობულობა.

ორი სიბრტყის მართობულობის ნიშანი. თუ სიბრტყე გადის მეორე სიბრტყის მართობულ წრფეზე, მაშინ ეს სიბრტყეები ურთიერთმართობულია; მე-8 სურათის მიხედვით $b \perp \alpha,\ b \in \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$.

ორი ურთიერთმართობული სიბრტყიდან ერთ-ერთ მათგანში გავლებული მოცემული სიბრტყეების ურთიერთგადაკვეთის წრფის მართობული წრფე მეორე სიბრტყის მართობულიც იქნება. $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = c$
$a \in \alpha, a \perp c \Rightarrow a \perp \beta$. (სურ.9)



სურ.8

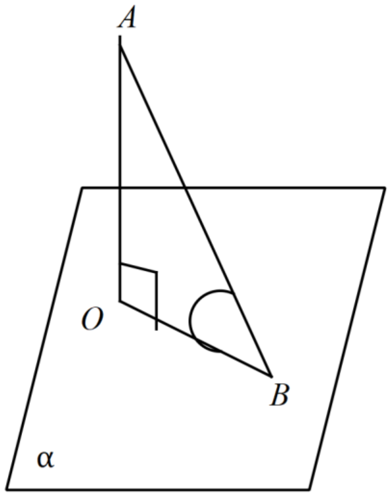


სურ.9

9. მონაკვეთი, მართობი და დახრილი. მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე.

A წერტილიდან α სიბრტყის მიმართ გავლებული მართობული წრფის მონაკვეთს, რომელიც A წერტილს სიბრტყის O წერტილთან აერთებს, AO მართობი ეწოდება. O წერტილს მართობის ფუძე ეწოდება. AO

მართობის სიგრძე არის მანძილი A წერტილიდან α სიბრტყემდე. (სურ.10)



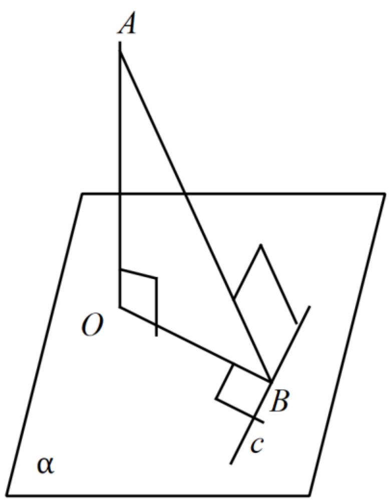
სურ.10

A წერტილიდან α სიბრტყის მიმართ გავლებულ ნებისმიერ მონაკვეთს, რომელიც მართობი არაა, დახრილი ეწოდება. AB მონაკვეთი არის დახრილი, რომელიც გავლებულია A წერტილიდან α სიბრტყისადმი. B წერტილს დახრილის ფუძე ეწოდება. (სურ.10).

α სიბრტყისადმი გავლებული AO მართობისა და AB დახრილის ფუძეთა შემაერთებელ OB მონაკვეთს ეწოდება AB დახრილის გეგმილი α სიბრტყეზე.

სამი მართობის თეორემა.

თუ სიბრტყეზე მდებარე რაიმე წრფე დახრილის (გეგმილის) მართობულია, მაშინ ეს წრფე გეგმილის (დახრილის) მართობულიცაა. $c \in \alpha,\ c \perp AB \Rightarrow c \perp OB$ სურ.11

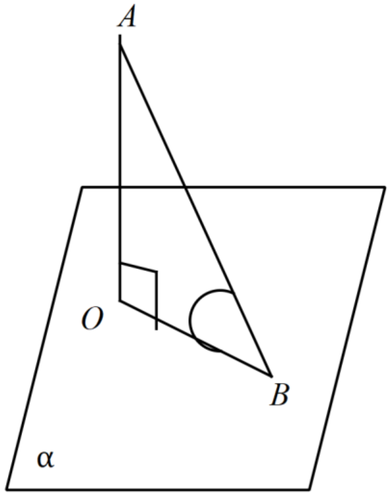


სურ.11

თუ წრფე სიბრტყის პარალელურია, მაშინ მათ შორის კუთხე 0^0-ად ითვლება.

10. კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის.

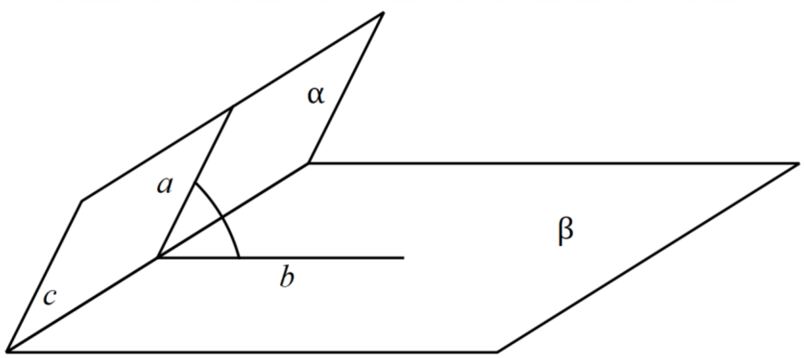
კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის არის კუთხე დახრილსა და მის გეგმილს შორის. სურ.12



სურ.12 $\angle ABO$

11. ორწახნაგა კუთხე. ორწახნაგა კუთხის ზომა.

წრფეს, რომელიც ერთი და იმავე სიბრტყის ორი ნახევარსიბრტყისათვის საერთოა, ნახევარსიბრტყის საზღვარი ეწოდება. საერთო საზღვრის მქონე ორი ნახევარსიბრტყით შექმნილ ფიგურას ორწახნაგა კუთხე ეწოდება. სურ.13.



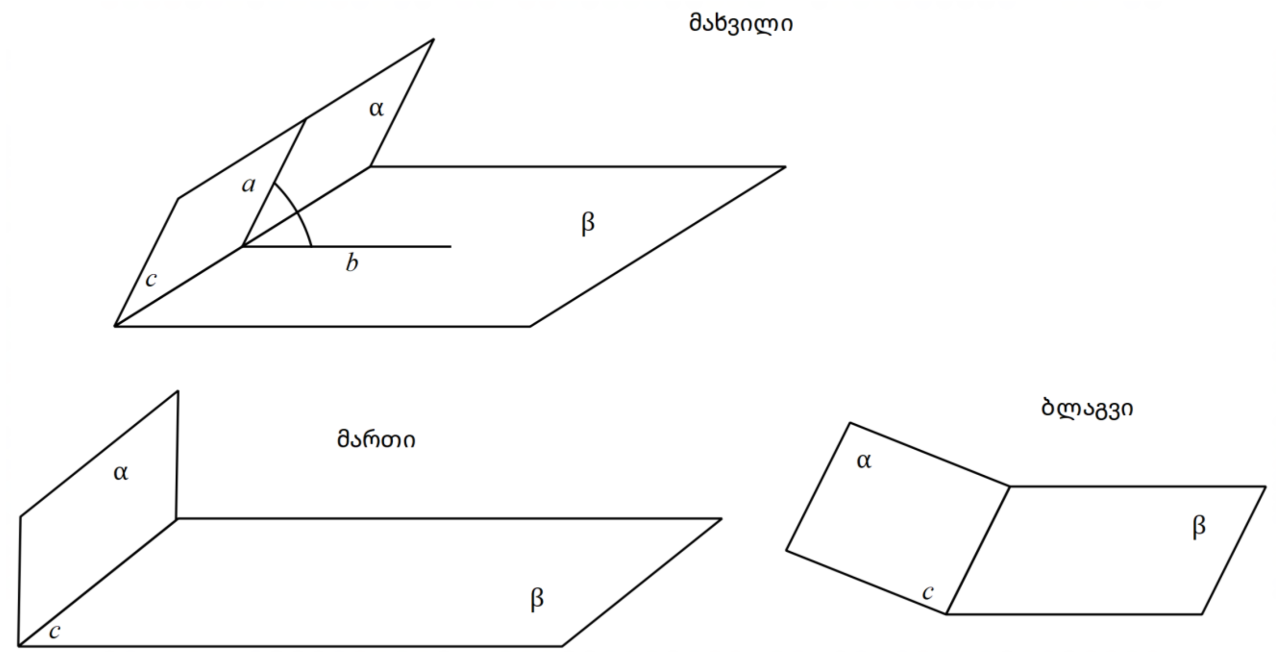
სურ.13

α და β სიბრტყეებს ეწოდება წახნაგები, საერთო c წრფეს (საზღვარს)-ორწახნაგა კუთხის წიბო. სურ.13-ის მიხედვით, კუთხეს რომელსაც ადგენს c წრფის ნებისმიერი წერტილიდან ამ წრფისადმი მართობულად გავლებული და შესაბამისად α და β სიბრტყეებში მდებარე a და b წრფეები, ეწოდება მოცემული **ორწახნაგა კუთხის შესაბამისი** ხაზოვანი კუთხე.

ორწახნაგა კუთხე შეიძლება იყოს მახვილი, მართი და ბლაგვი. სურ.14

ორწახნაგა კუთხის ზომად ითვლება მისი შესაბამისი ხაზოვანი კუთხის გრადუსული ზომა.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა. ტოლ ორწახნაგა კუთხეებს ტოლი ხაზოვანი კუთხეები შეესაბამება. მართებულია შებრუნებული თეორემაც.



სურ.14

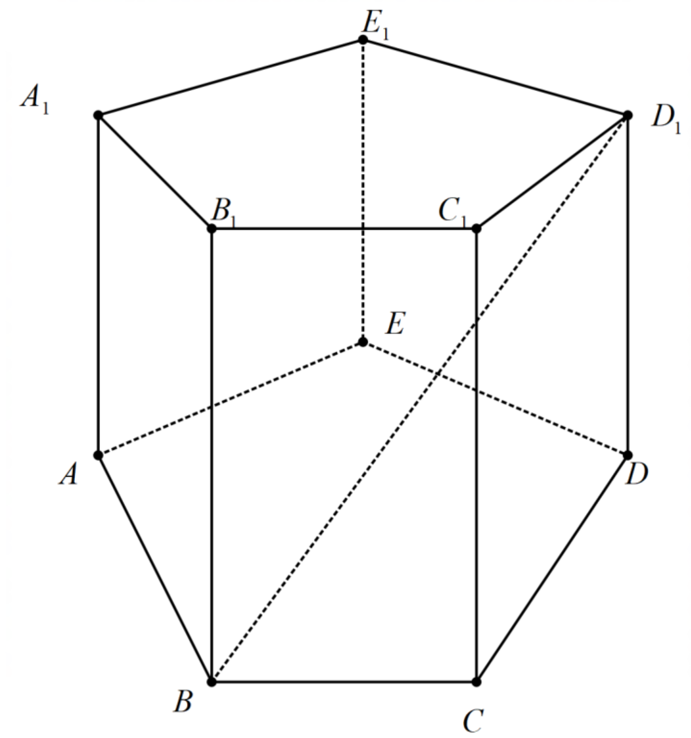
12. მრავალწახნაგა და მისი ელემენტები (წვერო, წიბო, წახნაგი)

მრავალწახნაგა ეწოდება სხეულს, რომელიც მრავალკუთხედებითაა შემოსაზღვრული. (სურ.1)
ამ მრავალკუთხედებს ეწოდება წახნაგები, ამ წახნაგების წვეროებს-მრავალწახნაგას წვეროები, ხოლო ამ წახნაგების გვერდებს-მრავალწახნაგას წიბოები.

არსებობს ფორმულა (ეილერის ფორმულა), რომლის მეშვეობითაც გამოსახულია გარკვეული ურთიერთშესაბამისობა ნებისმიერი მრავალწახნაგა სხეულის წიბოების, წახნაგების და წვეროების ოდენობებს შორის: $k=l+f-2$, სადაც k, l და f ასოებით აღნიშნულია შესაბამისად მრავალწახნაგას წიბოების,

$l+f-k=2$ თუ წახნაგებს ავღნიშნავთ a-თი წვეროებს b-თი ხოლო წიბოებს c-თი მაშინ იგივე ფორმულა ასეთ სახეს მიიღება $a+b-c=2$.

წახნაგების და წვეროების ოდენობები.

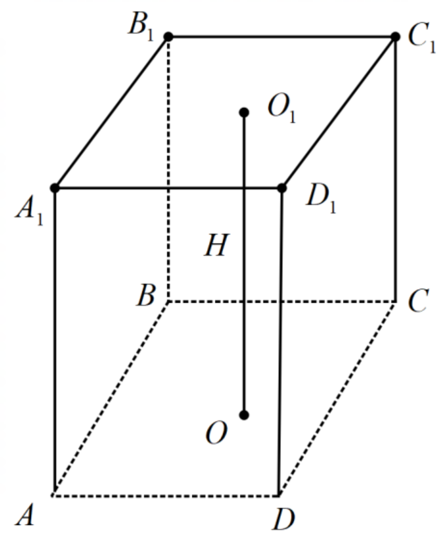


სურ.1

მრავალწახნაგას დიაგონალი არის იმ ორი წვეროს შემაერთებელი მონაკვეთი, რომლებიც ერთ წახნაგზე არ მდებარეობს (BD_1 *მონაკვეთი*). მრავალწახნაგას ეწოდება ამოზნექილი, თუ მისი ყველა დიაგონალი მრავალწახნაგას შიგნით მდებარეობს.

13. პრიზმა და მისი ელემენტები
(ფუძე, გვერდითი წახნაგი, გვერდითი წიბო, სიმაღლე, დიაგონალი)

პრიზმა არის ისეთი მრავალწახნაგა, რომლის წახნაგებიდან ორი არის პარალელურ სიბრტყეებზე მდებარე ტოლი n-კუთხედი-პრიზმის ფუძეები, ხოლო დანარჩენი წახნაგები, რომელთაც გვერდით წახნაგებს უწოდებენ-პარალელოგრამებია. მე-2 სურათზე გამოსახულია ABCD$A_1B_1C_1D_1$ ოთხკუთხა პრიზმა; პრიზმის სიმაღლეა მისი ერთ-ერთი ფუძის რომელიმე წერტილიდან მეორე ფუძისადმი გავლებული მართობი ($OO_1 = H$). პრიზმის იმ წიბოებს, რომლებიც ფუძეების გვერდებს არ წარმოადგენენ გვერდითი წიბოები ეწოდება. წიბოების ბოლოებს პრიზმის წვეროები.ყველა გვერდითი წიბო ერთმანეთის პარალელურია. მონაკვეთს, რომელიც ერთ წახნაგზე არამდებარე ორ წვეროს აერთებს, პრიზმის დიაგონალი ეწოდება.



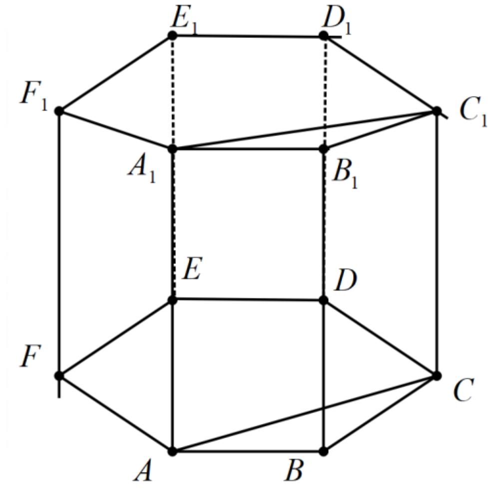
სურ.2

კავალიერის პრინციპი. თუ ორი სხეული შესაძლებელია ისე მოვათავსოთ, რომ ნებისმიერი სიბრტყე, რომელიც რაიმე მოცემული სიბრტყის პარალელურია და კვეთს ამ სხეულებს, კვეთაში გვაძლევს ტოლდიდ ფიგურებს, მაშინ ასეთ სხეულთა მოცულობები ტოლია.

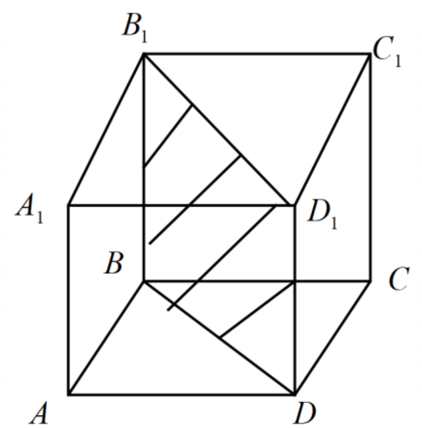
14. პრიზმის კერძო სახეები (მართი პრიზმა, წესიერი პრიზმა, მართი პარალელეპიპედი, მართკუთხა პარალელეპიპედი, კუბი) მართი პრიზმის დიაგონალური კვეთა.

პრიზმის კერძო სახეა პარალელეპიპედი-პრიზმა, რომლის ფუძეები პარალელოგრამებია. (სურ.2)
პარალელეპიპედს აქვს 4 დიაგონალი, რომლებიც ერთ წერტილში იკვეთება და გადაკვეთისას შუაზე იყოფა. პარალელეპიპედს, რომლის გვერდითი წახნაგები მართკუთხედებია, მართი პარალელეპიპედი ეწოდება. მართი პარალელეპიპედის დიაგონალები წყვილ-წყვილად ტოლია; თუ მართი პარალელეპიპედის ფუძეები მართკუთხედებია, მას მართკუთხა პარალელეპიპედი ეწოდება.
მართკუთხა პარალელეპიპედს არაპარალელური წიბოების სიგრძეებს მისი განზომილებები ეწოდება. მართკუთხა პარალელეპიპედს აქვს სამი (a;b;c) განზომილება.
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, სადაც d ასოთი გამოსახულია მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალის სიგრძე.
მართკუთხა პარალელეპიპედის ოთხივე დიაგონალი ტოლია. მართკუთხა პარალელეპიპედის სიმეტრიის ღერძებია მოპირდაპირე წახნაგების დიაგონალების გადაკვეთის წერტილებზე გამავალი წრფეები.
თუ პრიზმის გვერდითი წახნაგები მართკუთხედებია, მას მართი პრიზმა ეწოდება. მართ პრიზმას, რომლის ფუძეები წესიერი n-კუთხედებია, წესიერი პრიზმა ეწოდება. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმა არის ისეთი მართკუთხა პარალელეპიპედი, რომლის ფუძეები კვადრატებია.
კუბი არის წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის კერძო სახე. კუბის ყველა წახნაგი კვადრატია; კუბის სამივე განზომილება ერთმანეთს ემთხვევა. კუბის სიმეტრიის ღერძებია მოპირდაპირე წახნაგების დიაგონალების გადაკვეთის წერტილებზე გამავალი წრფეები. კუბის სიმეტრიის ცენტრია მისი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. თუ კუბის წიბოს სიგრძე a-ს ტოლია, ხოლო კუბის დიაგონალების სიგრძე d, მაშინ ადგილი აქვს მათ შორის ასეთ დამოკიდებულებას: $d^2 = 3a^2$.
მართი პრიზმის სიმაღლეა მისი რომელიმე გვერდითი წიბო. მე-3 ნახაზზე გამოსახულ მართ ექვსკუთხა პრიზმაში ფუძეების AC და A_1C_1 პარალელურ დიაგონალებზე სიბრტყის გავლების შედეგად მიღებულ

კვეთას (AA_1C_1C მართკუთხედს) ეწოდება მართი ექვსკუთხა პრიზმის დიაგონალური კვეთა.



სურ.3.



სურ.4

სურ.4-ზე გამოსახულ მართ ოთხკუთხა პრიზმაში გავლებულია ერთ-ერთი დიაგონალური კვეთა (BB_1D_1Dმართკუთხედი).

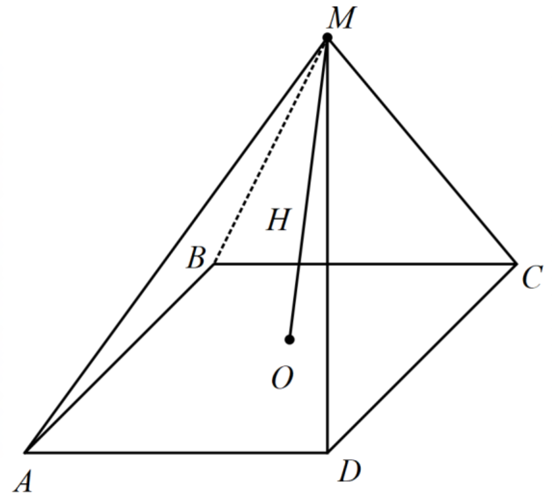
15. პირამიდა და მისი ელემენტები (წვერო, გვერდითი წიბო, ფუძე, გვერდითი წახნაგი, სიმაღლე).

პირამიდა არის მრავალწახნაგა, რომლის ერთი წახნაგი (ფუძე) n-კუთხედია, დანარჩენი წახნაგები (გვერდითი წახნაგები) -საერთო წვეროს მქონე სამკუთხედები.

პირამიდის გვერდითი წახნაგების საერთო წვეროს პირამიდის წვერო ეწოდება. პირამიდის წვეროდან ფუძის სიბრტყისადმი გავლებულ მართობს პირამიდის სიმაღლე ეწოდება.

სამკუთხა პირამიდას ტეტრაედრი ეწოდება.

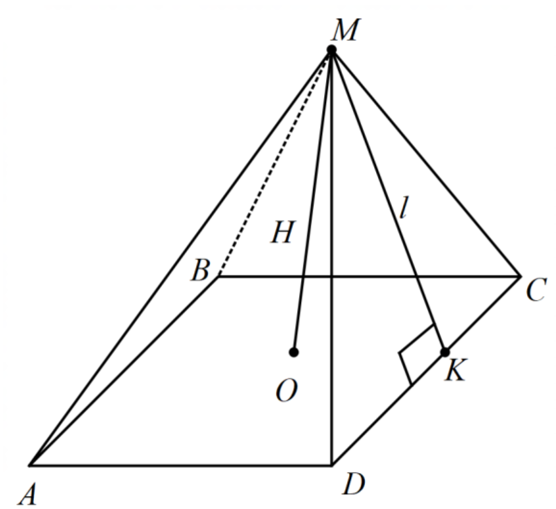
(სურათი 5.)



სურ.5

16. წესიერი პირამიდა. აპოთემა

თუ პირამიდის ფუძე წესიერი n-კუთხედია და გვერდითი წიბოები ტოლია, მაშინ პირამიდას ეწოდება წესიერი n-კუთხა პირამიდა. წესიერი პირამიდის გვერდით წახნაგში (გვერდითი წახნაგები ტოლფერდა სამკუთხედებია) პირამიდის წვეროდან გავლებულ სიმაღლეს წესიერი პირამიდის აპოთემა (l) ეწოდება. სურ.6



სურ.6

17.ცილინდრი და მისი ელემენტები (რადიუსი, მსახველი, ფუძეები, სიმაღლე, ცილინდრის ღერძი). ცილინდრის ღერძული კვეთა.

თუ პარალელური წრფეები კვეთენ ორი პარალელური სიბრტყიდან ერთ-ერთში მდებარე წრეს, მაშინ სხეულს, შექმნილს ამ პარალელურ წრფეებზე მდებარე ყველა იმ მონაკვეთით, რომლებიც მოთავსებულია

პარალელურ სიბრტყეებს შორის, ცილინდრი ეწოდება. (სურ.7)
მონაკვეთს, რომლის ერთი ბოლო ამ წრეწირზეა, ცილინდრის მსახველი ეწოდება. (L). ცილინდრის ზედაპირი შედგება პარალელურ სიბრტყეებზე მდებარე ორი ტოლი წრეწირისაგან, რომელთაც ცილინდრის ფუძეები ეწოდება და გვერდითი ზედაპირისაგან.

ცილინდრის რადიუსი ეწოდება ცილინდრის ფუძის (R) რადიუსს. ცილინდრის ერთი ფუძის ნებისმიერი წერტილიდან მეორე ფუძისადმი გავლებულ მართობს ცილინდრის სიმაღლე ეწოდება (H).

ცილინდრს ეწოდება მართი, თუ ცილინდრის მსახველი ფუძეების მართობულია.
მართი ცილინდრი შეიძლება განიმარტოს, როგორც მართკუთხედის თავისი რომელიმე გვერდის გარშემო ბრუნვის შედეგად მიღებული სხეული. მართ ცილინდრს სიმოკლისათვის უწოდებენ, უბრალოდ, ცილინდრს. (სურ.8)

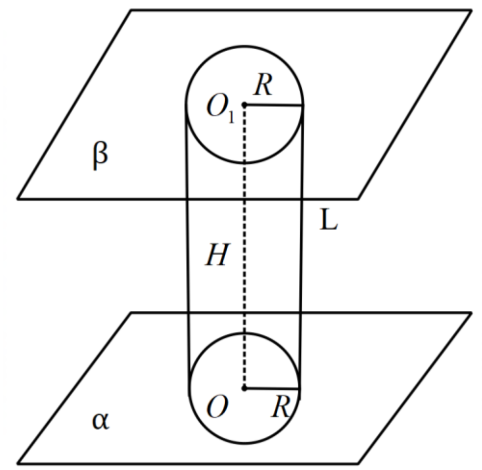
მართი ცილინდრის მსახველი (L) ცილინდრის სიმაღლის (H) ტოლია.

ცილინდრის ფუძეთა ცენტრების შემაერთებელი მონაკვეთის შემცველ წრფეს (OO_1) ცილინდრის ღერძი ეწოდება. ის მსახველების პარალელურია.

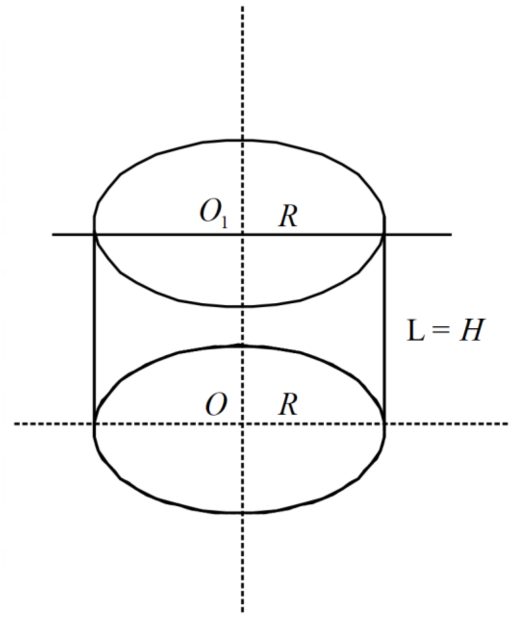
ცილინდრის ღერძზე გამავალი სიბრტყით მიღებულ კვეთას ცილინდრის ღერძული კვეთა ეწოდება.

ცილინდრის ღერძული კვეთა მართკუთხედს წარმოადგენს (ABCD)

ცილინდრის მსახველზე ღერძული კვეთის მართობულად გავლებულ სიბრტყეს ცილინდრის მხები სიბრტყე ეწოდება.



სურ.7



სურ.8

როდესაც ცილინდრს კვეთს მისი ღერძის პარალელური სიბრტყე, კვეთაში მიღებული ფიგურა წარმოადგენს მართკუთხედს. როდესაც ცილინდრს კვეთს მისი ფუძის პარალელური სიბრტყე ღერძის მართობულად, კვეთაში მიღებული ფიგურა წარმოადგენს წრეწირს.

18. კონუსი და მისი ელემენტები (წვერო, ფუძე, მსახველი, სიმაღლე). კონუსის ღერძული კვეთა.

სხეულს შექმნილს ყველა იმ მონაკვეთისაგან, რომლებიც რაიმე წრის ყოველ წერტილს სხვა სიბრტყეში მდებარე რომელიმე ერთ წერტილთან აერთებს, კონუსი ეწოდება. (სურ.9)

აღნიშნულ წრეს კონუსის ფუძე ეწოდება, ხოლო სხვა სიბრტყეში მდებარე ზემოთ ნახსენებ წერტილს (M)- კონუსის წვერო. მონაკვეთს, რომელიც წრეწირის წერტილს კონუსის წვეროსთან აერთებს, კონუსის მსახველი (l) ეწოდება. კონუსის ფუძის რადიუსს (r) კონუსის რადიუსი ეწოდება.

კონუსის წვეროდან ფუძის სიბრტყისადმი გავლებულ მართობს (h) კონუსის სიმაღლე ეწოდება.

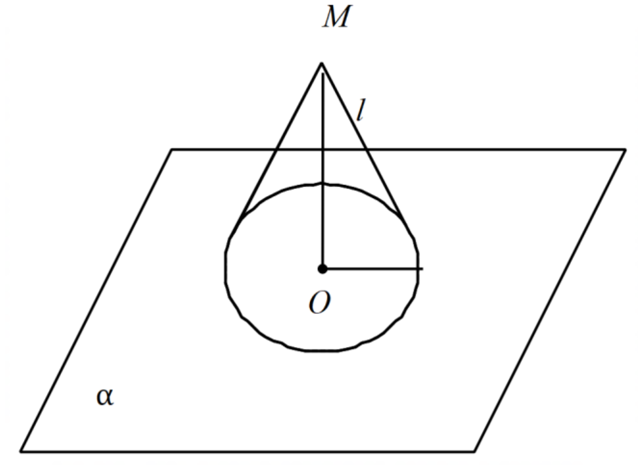
კონუსს ეწოდება მართი, თუ კონუსის წვეროსა და ფუძის ცენტრზე გამავალი წრფე ფუძის მართობულია.

ამ წრფეს ეწოდება კონუსის ღერძი. მართი კონუსი შეიძლება განიმარტოს, როგორც მართკუთხა სამკუთხედის თავისი რომელიმე კათეტის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეული.

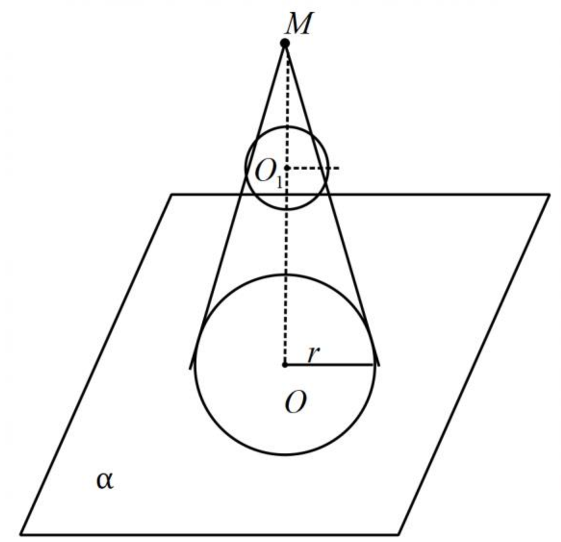
მართ კონუსს სიმოკლისათვის უწოდებენ, უბრალოდ, კონუსს. კონუსის ღერძზე გამავალი სიბრტყით მიღებულ კვეთას კონუსის ღერძული კვეთა ეწოდება.

კონუსის ღერძული კვეთა ტოლფერდა სამკუთხედია. კონუსის მსახველზე ღერძული კვეთის მართობულად გავლებულ სიბრტყეს კონუსის მხები სიბრტყე ეწოდება.

კონუსის მკვეთი სიბრტყე, რომელიც ღერძის მართობულადაა გავლებული, კონუსის გვერდით ზედაპირს კვეთს წრეწირზე, რომლის ცენტრი კონუსის ღერძზე მდებარეობს. (სურ.10)



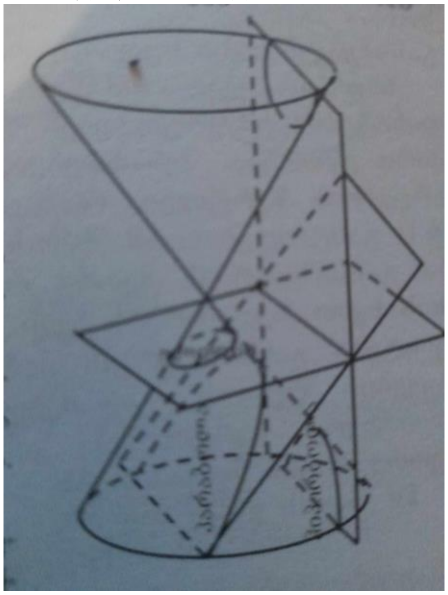
სურ.9



სურ.10

წირს, რომელიც მიიღება კონუსის სიბრტყით გადაკვეთისას, კონუსის კვეთა ეწოდება. როდესაც მკვეთი სიბრტყე კონუსის ღერძის მართობულია, კვეთაში მიღებული წირი წარმოადგენს წრეწირს, როდესაც მკვეთი სიბრტყე კვეთს კონუსის ყველა მსახველს და არაა ღერძის მართობული, კვეთაში მიღებული შეკრული წირი წარმოადგენს ელიფსს. როდესაც მკვეთი სიბრტყე კვეთს კონუსის ფუძეს და გადის წვეროზე, კვეთაში მიღებული ფიგურა წარმოადგენს სამკუთხედს. როდესაც მკვეთი სიბრტყე კონუსის ღერძის პარალელურია, კვეთაში მიღებული წირი წარმოადგენს ჰიპერბოლას. როდესაც მკვეთი სიბრტყე კონუსის მსახველის

პარალელურია, კვეთაში მიღებული წირი წარმოადგენს პარაბოლას.

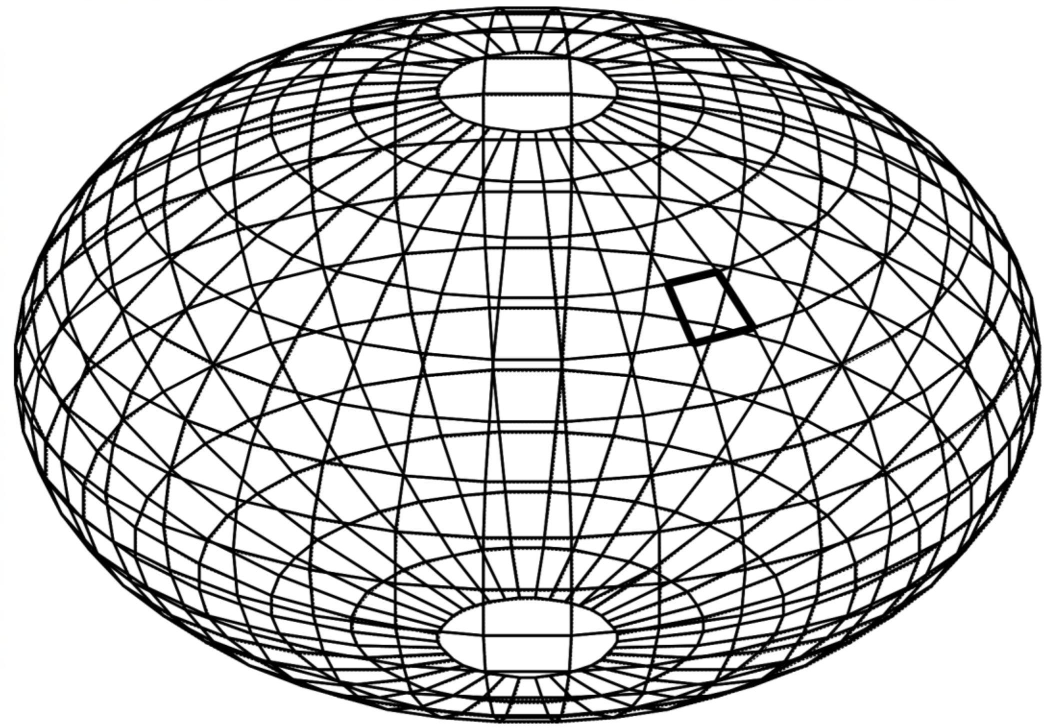


19. ბირთვი, სფერო და მათი ელემენტები (ცენტრი, რადიუსი, დიამეტრი)

სივრცის რომელიმე O წერტილიდან მოცემული R მანძილით დაშორებულ წერტილთა სიმრავლეს სფერო ეწოდება. O წერტილს სფეროს ცენტრი ეწოდება, R მანძილს კი-სფეროს რადიუსი. (სურ.11)

სფერო მიიღება ნახევარწრეწირის ბრუნვით თავისი დიამეტრის გარშემო. სფეროს ნებისმიერი კვეთა სიბრტყით არის წრეწირი.სფეროს გააჩნია მხები სიბრტყე და მხები წრფე, მათ სფეროსთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვთ. შეხების წერტილში გავლებული რადიუსი მხები სიბრტყის მართობულია.

სფეროთი შემოსაზღვრულ სივრცით სხეულს (სფეროს წერტილების ჩათვლით) ბირთვი ეწოდება. ბირთვის ცენტრი არის სფეროს ცენტრი. ბირთვის რადიუსი არის სფეროს რადიუსი, ბირთვის დიამეტრი-სფეროს დიამეტრი. ბირთვი მიიღება ნახევარწრის ბრუნვით თავისი დიამტერის გარშემო.

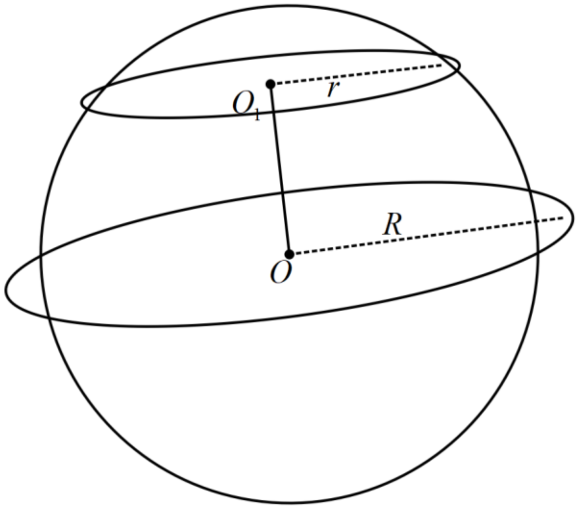


სურ.11

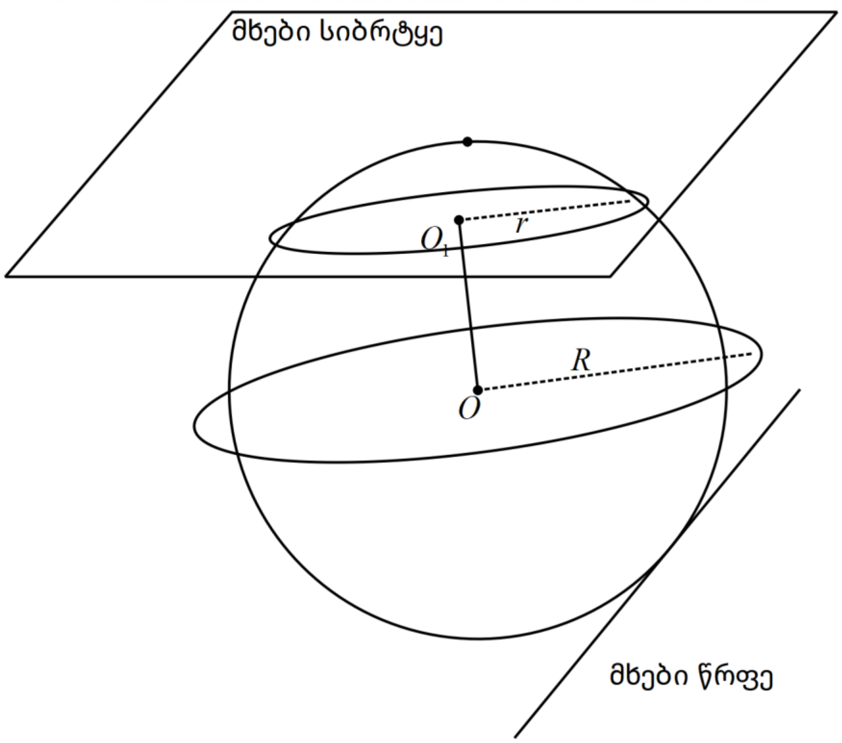
20. ბირთვის მხები სიბრტყე. ბირთვის კვეთა სიბრტყით.

სფეროს გააჩნია მხები სიბრტყე და მხები წრფე, მათ სფეროსთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვთ. სფეროსთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვთ. შეხების წერტილში გავლებული რადიუსი მხები სიბრტყის მართობულია. თუ მკვეთი სიბრტყე სფეროს ცენტრზე გადის, მას დიამეტრალური კვეთა ეწოდება.
ბირთვის ნებისმიერი კვეთა არის წრე. ცენტრიდან ტოლად დაშორებული კვეთები ტოლია. ორი კვეთიდან უდიდესი ცენტრიდან უფრო ახლოსაა. (სურ.12) (სურ.13)
ბირთვის ცენტრზე გამავალ მკვეთ სიბრტყეს დიამეტრული წრე ეწოდება(იგივეა, რაც დიამეტრული კვეთა) მას დიდ წრესაც უწოდებენ, მის შესაბამის წრეწირს კი-დიდ წრეწირს. ორი დიდი წრეწირი გადაკვეთისას ერთმანეთს შუაზე ჰყოფს. თუ R ბირთვის რადიუსია, ხოლო r -მკვეთი სიბრტყის რადიუსი მაშინ

d(OO_1)მანძილი ბირთვის ცენტრიდან მცირე წრის ცენტრამდე ტოლია: $d = \sqrt{R^2 - r^2}$.



სურ.12



სურ.13

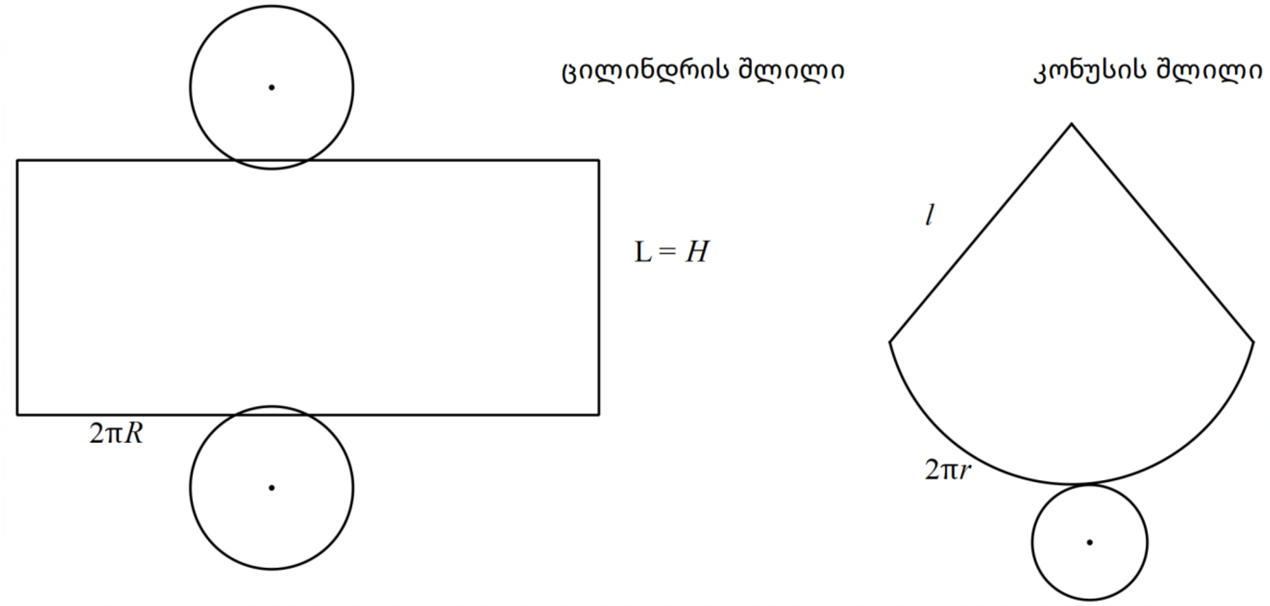
21. სხეულის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი

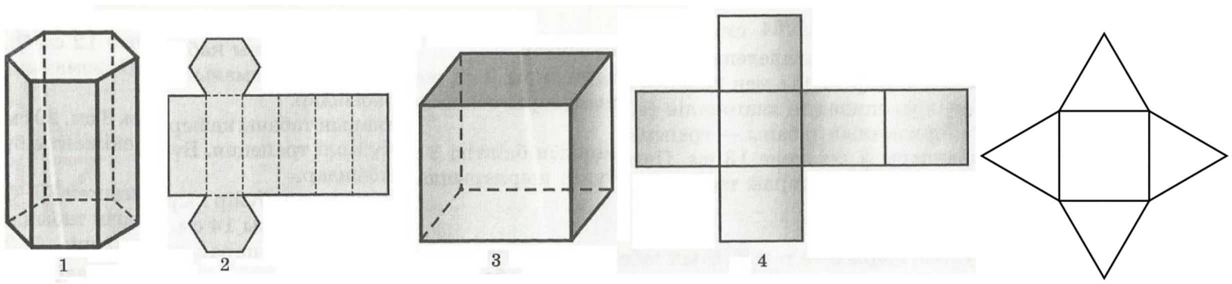
პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობია მისი ყველა გვერდითი წახნაგის ფართობთა ჯამი.
პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობია მისი ორივე ფუძისა და გვერდითი ზედაპირის ფართობთა ჯამი.
ნებისმიერი მართი პრიზმის შემთხვევაში სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:
$S_{სრ.ზედ.} = S_{გვ.} + 2S_{ფუძ.}$; $S_{გვ.} = P_{ფუძის} \cdot H$
აქედან გამომდინარე, მართკუთხა პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი შემდეგი ფორმულებით გამოითვლება: $S_{სრ.ზედ.} = 2(ab + bc + ac)$; $S_{გვ.} = 2(ac + bc)$; კუბის ზედაპირის ფართობი შემდეგნაირად გამოისახება: $S = 6a^2$.
წესიერი n-კუთხა პირამიდისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:
$S_{სრ.ზედ.} = S_{გვ.} + S_{ფუძის}$; $S_{გვ.} = \frac{1}{2} P_{ფუძის} \cdot l$
ცილინდრის ზედაპირის ფართობია ორივე ფუძის ფართობისა და გვერდითი ზედაპირის ფართობთა ჯამი.
$S_{სრ.ზედ.} = 2\pi R^2 + S_{გვ.}$; $S_{გვ.} = 2\pi RL$
კონუსის ზედაპირის ფართობია ფუძის ფართობისა და გვერდითი ზედაპირის ფართობთა ჯამი.
სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:
$S_{სრ.ზედ.} = \pi r^2 + S_{გვ.}$; $S_{გვ.} = \pi rl$
ბირთვით შემოსაზღვრული სფეროს ფართობია S=$4\pi R^2$

პრიზმის მოცულობა (V) მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია
V=$S_{ფუძის} \cdot H$
აქედან გამომდინარე მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა მისი სამივე განზომილების ნამრავლის ტოლია. V=$a \cdot b \cdot c$
კუბის მოცულობა : V=a^3
პირამიდის მოცულობა: V=$\frac{1}{3} S_{ფუძისა} \cdot H$
ცილინდრის მოცულობა: $V = \pi R^2 \cdot H$
კონუსის მოცულობა: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$
ბირთვის მოცულობა: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

22. კუბის, მართკუთხა პარალელეპიპედის , მართი პრიზმის, პირამიდის, ცილინდრის და კონუსის შლილები.

სურათზე გამოსახულია შლილები

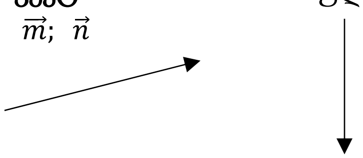




პირამიდის შლილი

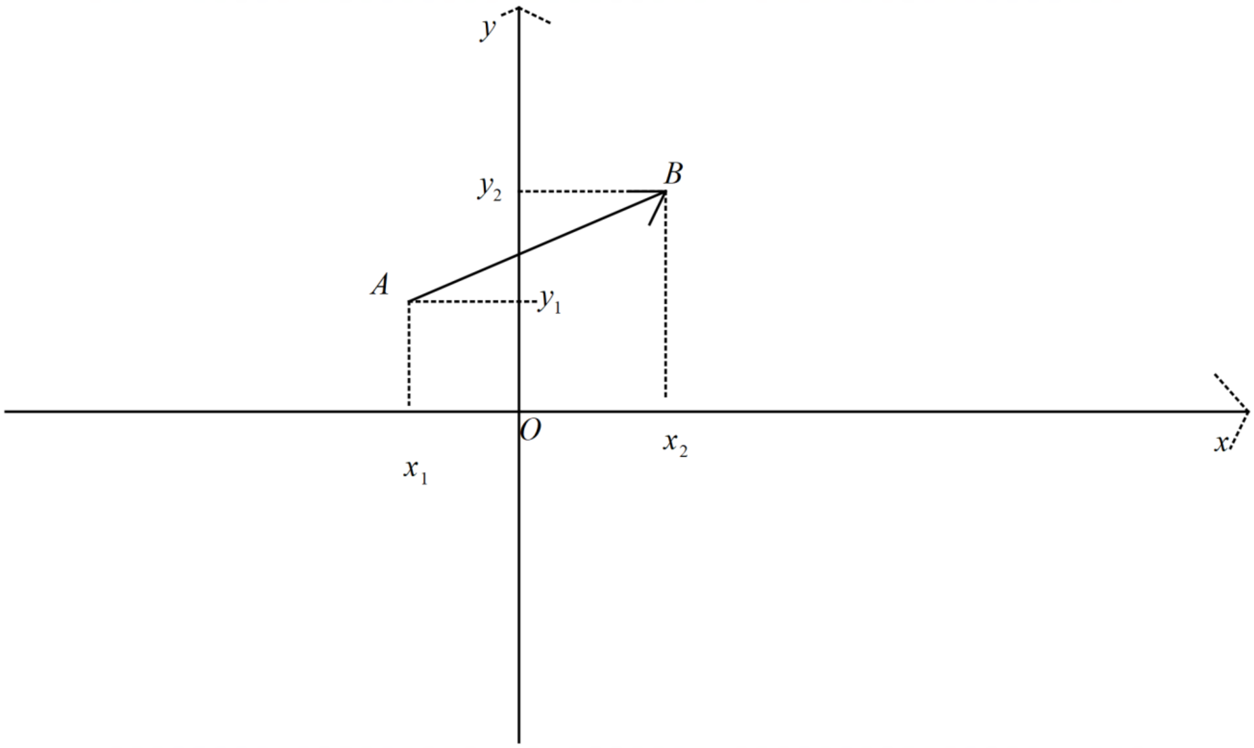
23. ვექტორები სიბრტყეზე და სივრცეში.

ვექტორი არის მიმართული მონაკვეთი. ვექტორს აღნიშნავენ ერთი მცირე ლათინური ასოთი, თავზე ისრით. $\vec{m}$; $\vec{n}$



ზოგჯერ ვექტორი გამოისახება ორი დიდი ლათინური ასოთი (ასევე თავზე ისრით):

A ⟶ B Aწერტილს ეწოდება $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის სათავე, B წერტილს-$\overrightarrow{AB}$ ვექტორის ბოლო. (სურ 1.)



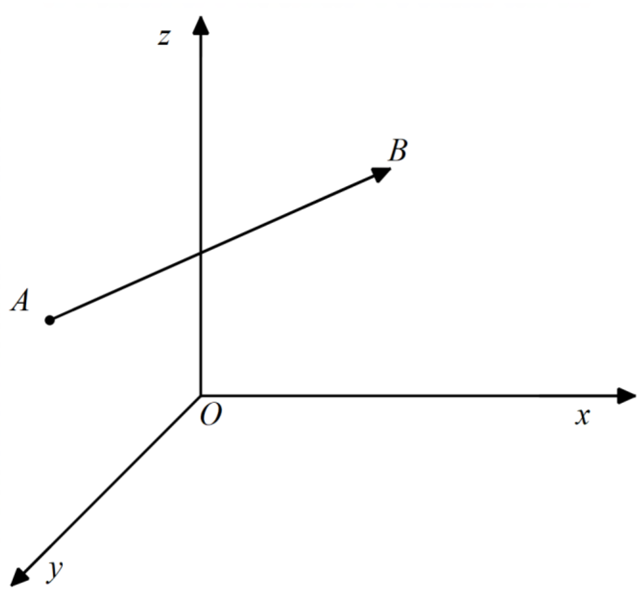
სურ.1

თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი მოცემულია სიბრტყეზე, მაშინ მისი A$(x_1 y_1)$ სათავისა და B$(x_2 y_2)$ ბოლოს მიხედვით $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი გამოისახება კოორდინატებით: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. მოცემული ვექტორის სიგრძე იქნება:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

თუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი მოცემულია სივრცეში (სურ.2) , ანუ A$(x_1; y_1; z_1)$ და B$(x_2; y_2; z_2)$, მაშინ მოცემული ვექტორის კოორდინატებია: $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, ხოლო მოცემული ვექტორის სიგრძე იქნება:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.



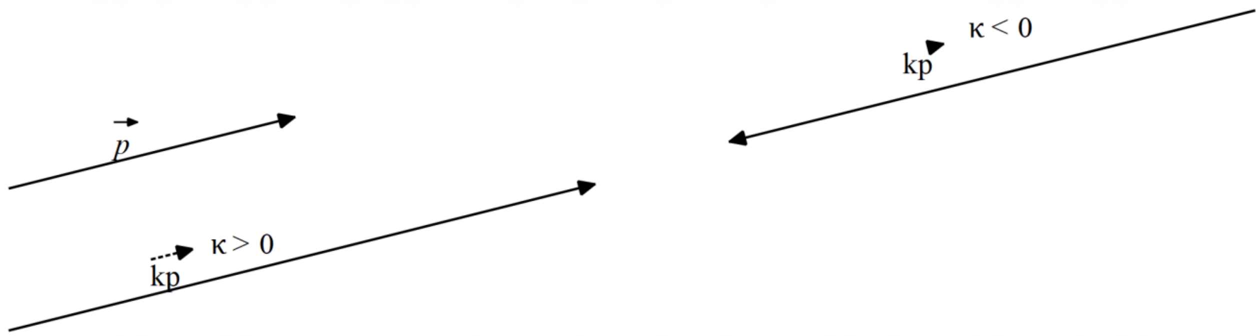
სურ.2

ორ ვექტორს ეწოდება ტოლი, თუ ისინი ტოლი სიგრძისაა და თანამიმართულია.

ორ ვექტორს ეწოდება ურთიერთმოპირდაპირე, თუ ისინი ტოლი სიგრძისაა და საპირისპიროდ არიან

მიმართული. ტოლ ვექტორებს შესაბამისი კოორდინატები ტოლი აქვთ. მოპირდაპირე ვექტორების შესაბამისი კოორდინატები მოპირდაპირე რიცხვებია.

$\vec{p}$ ვექტორის რაიმე k რიცხვზე გამრავლებით მიიღება მისი თანამიმართული $k\vec{p}$ *ვექტორი*, თუ k>0; თუ k<0 მიიღება საპირისპიროდ მიმართული $k\vec{p}$ ვექტორი. (სურ.3)



სურ.3

ვექტორის რაიმე რიცხვზე გამრავლებისას ვექტორის კოორდინატები მრავლდება ამ რიცხვზე:

$k \cdot \vec{p}(p_1; p_2) = k\vec{p}(kp_1; kp_2)$ *სიბრტყეზე*, $k \cdot \vec{p}(p_1; p_2; p_3) = k\vec{p}(kp_1; kp_2; kp_3)$ *სივრცეში*.

კოლინეარული ვექტორების კოორდინატებისათვის სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ სიბრტყეზე; $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ სივრცეში.

ორი ვექტორის ჯამი და სხვაობა. ორი ვექტორის გეომეტრიული შეკრების წესი.

$\vec{p}(p_1; p_2) \pm \vec{q}(q_1; q_2) = \vec{p} \pm \vec{q}(p_1 \pm q_1; p_2 \pm q_2)$ ანალოგიურ ტოლობებს ექნება ადგილი თუ ვექტორები აღებულია სივრცეში. $\vec{p}(p_1; p_2; p_3) \pm \vec{q}(q_1; q_2; q_3) = \vec{p} \pm \vec{q}(p_1 \pm q_1; p_2 \pm q_2; p_3 \pm q_3)$

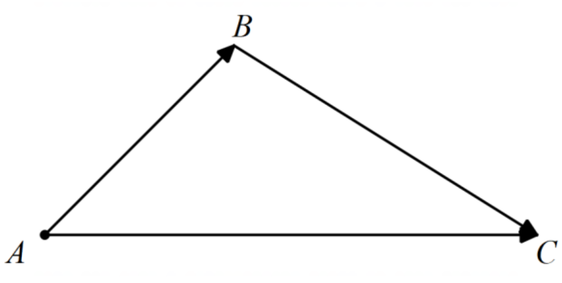
$\vec{0}$ -ნულვექტორი არის ისეთი ვექტორი, რომლის სათავე და ბოლო ერთმანეთს ემთხვევა.

$|\vec{0}| = 0.$ $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$, სადაც k რაიმე მუდმივი რიცხვია. სამართლიანია შემდეგი ვექტორული ტოლობები:

$\vec{p} + \vec{q} = \vec{q} + \vec{p}$; $(\vec{p} + \vec{q}) + \vec{r} = \vec{p} + (\vec{q} + \vec{r})$; $\vec{p} + \vec{0} = \vec{p}$

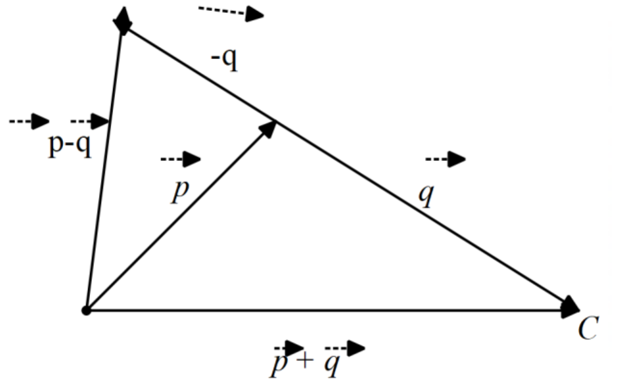
$k(\vec{p} + \vec{q}) = k\vec{p} + k\vec{q}$; $(k + l)\vec{p} = k\vec{p} + l\vec{p}$

ერთ წრფეზე არამდებარე ორი ვექტორის შეკრებისას პირველი ვექტორის ბოლოს მოსდებენ მეორე ვექტორის სათავეს; ახალმიღებული ვექტორის (ჯამის) სათავე და ბოლო შესაბამისად იქნება პირველი ვექტორის სათავე და მეორე ვექტორის ბოლო. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ სურ.4 **შეკრების სამკუთხედის წესი**



სურ.4

მე-5 სურათზე მითითებულია ორი ვექტორის (ერთ წრფეზე არამდებარე) სხვაობა.

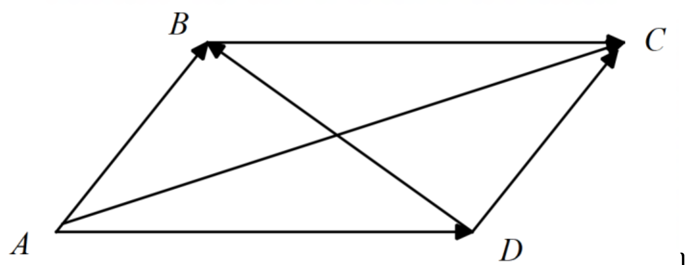


სურ. 5

ვექტორების შეკრების **პარალელოგრამის წესი.**

საერთო სათავის მქონე და ერთ წრფეზე არამდებარე ორი ვექტორის ჯამია ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიდი დიაგონალი, რომელსაც იგივე სათავე აქვს, რაც აღნიშნულ ვექტორებს.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ ხოლო $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$ (სურ.6)



სურ.6

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება ამ ვექტორების სიგრძეთა ნამრავლს მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსზე. თუ მოცემულია $\vec{p}(p_1;p_2),\vec{q}(q_1;q_2)$ და $\alpha=\angle(\vec{p};\vec{q}),0^0\le\alpha\le180^0$,

მაშინ $\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot cos\alpha$ მოცემული $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი კოორდინატებში შემდეგნაირად გამოისახება: $\vec{p}\cdot\vec{q}=p_1\cdot q_1+p_2\cdot q_2$. ამ ფორმულებით გამოისახება **კუთხე ორ ვექტორს** შორის: $cos\alpha=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}\Rightarrow cos\alpha=\frac{p_1\cdot q_1+p_2\cdot q_2}{\sqrt{{p_1}^2+{p_2}^2}\cdot\sqrt{{q_1}^2+{q_2}^2}}$

თუ არანულოვან $\vec{p}$ და $\vec{q}$ ვექტორებს შორის მდებარე კუთხის კოსინუსი ნულის ტოლია, ნიშნავს, რომ ამ კუთხის გრადუსული ზომა 90^0, ანუ $\vec{p}\perp\vec{q}$. $\vec{p}\perp\vec{q}\Rightarrow\vec{p}\cdot\vec{q}=0$

ანუ ურთიერთმართობული ვექტორების სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის თვისებები. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2$; $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, როდესაც ან $\vec{a}=0$, ან $\vec{b}=0$, ან $\vec{a}\perp\vec{b}$;

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$; $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}(m\vec{b})=m(\vec{a}\vec{b})$.

$\vec{a}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი $\vec{b}$ ვექტორზე, სადაც $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარული ვექტორებია, ეწოდება ისეთ $\vec{c}$ ვექტორს, რომელიც განსაზღვრულია შემდგი სამი პირობით:

1. $|\vec{c}\,|=|\vec{a}\,|\cdot|\vec{b}\,|\cdot\sin(\vec{a},\wedge\vec{b}\,)$;

2. $\vec{c}$ ვექტორი მართობულია $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვეტორებით განსაზღვრული სიბრტყის;

3. $\vec{c}$ ვექტორის მიმართულება ისეთია, რომ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ მარცხენა სამეულია.

$\vec{a}$ ვექტორის $\vec{b}$ ვექტორზე ვექტორული ნამრავლი აღინიშნება $\vec{a}$ x $\vec{b}$ ან $[\vec{a}\,,\vec{b}]$ სიმბოლოთი.

ვექტორულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. ვექტორული ნამრავლი ანტიკომუტაციურია: $[\vec{a}\,,\vec{b}]=-[\vec{b}\,,\vec{a}]$

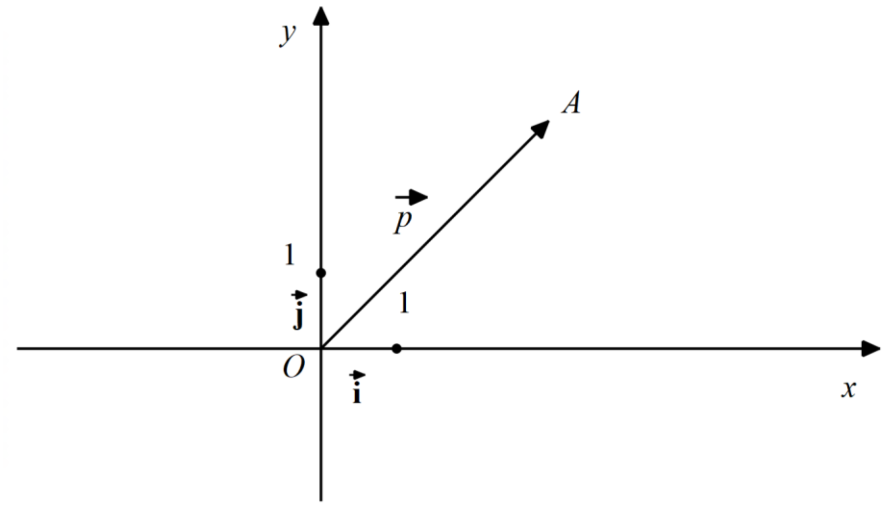
2. $[\overrightarrow{\lambda a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \overrightarrow{\lambda b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$

3. $[\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$ და $[\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$

4. $[\vec{i}, \vec{i}] = [\vec{j}, \vec{j}] = [\vec{k}, \vec{k}] = 0$

საკოორდინატო ღერძების მიმმართველი ვექტორები-**ორტები.**

მე-7 სურათის მიხედვით OX ღერძის მიმმართველი ვექტორია $\vec{i}(1;0)$, ხოლო OY ღერძის მიმმართველი ვექტორია $\vec{j}(0;1)$, $|\vec{i}| = 1;\quad |\vec{j}| = 1.$ $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ვექტორები ერთეულოვან ვექტორებს წარმოადგენს; მათ ორტები ეწოდებათ.



სურ.7

სიბრტყეზე და სივრცეში აღებული ნებისმიერი $\vec{p}$ ვექტორი შეიძლება გამოისახოს $\vec{i}$ და $\vec{j}$ $(\vec{k})$ვექტორების მეშვეობით. $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$; $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $|\vec{i}| = 1;\quad |\vec{j}| = 1\ \ |\vec{k}| = 1.$

მონაცემთა ანალიზი, ალბათობა და სტატისტიკა

1. მონაცემების თვალსაჩინოდ წარმოდგენის ხერხები.

სტატისტიკა არის მეცნიერება მონაცემების შეგროვებისა და მათი ანალიზის შესახებ.

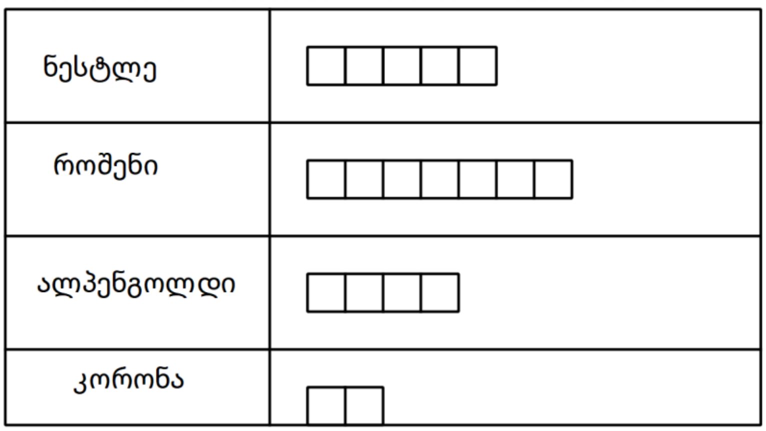
მონაცემებს ეწოდება დისკრეტული, თუ შესაძლებელია მათი დათვლა (მაგ., მოსწავლის მიერ მიღებული ქულები, წვიმიანი დღეების რაოდენობა და ა.შ.)

მონაცემებს ეწოდება უწყვეტი, თუ შესაძლებელია მათი გაზომვა (მაგ. წიგნის მასა; სახლის სიმაღლე, ტესტირებისთვის საჭირო დრო და ა.შ.)

მონაცემების დიდი რაოდენობის შემთხვევაში მოსახერხებელია მათი წარმოდგენა ცხრილების და გრაფიკების სახით.

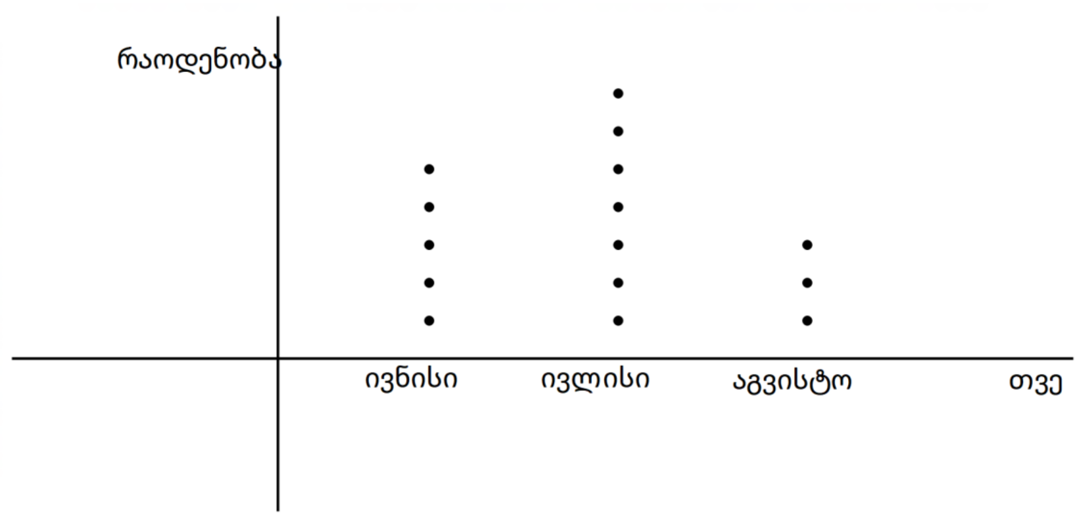
მონაცემთა წარმოდგენის ხერხები:

პიქტოგრამა-ეს არის ნახატების გამოყენებით მონაცემების წარმოდგენა. ცხრილში მოცემულია მარკეტში 1 დღეში გაყიდული შოკოლადის ფილების რაოდენობა. (სურ.1)



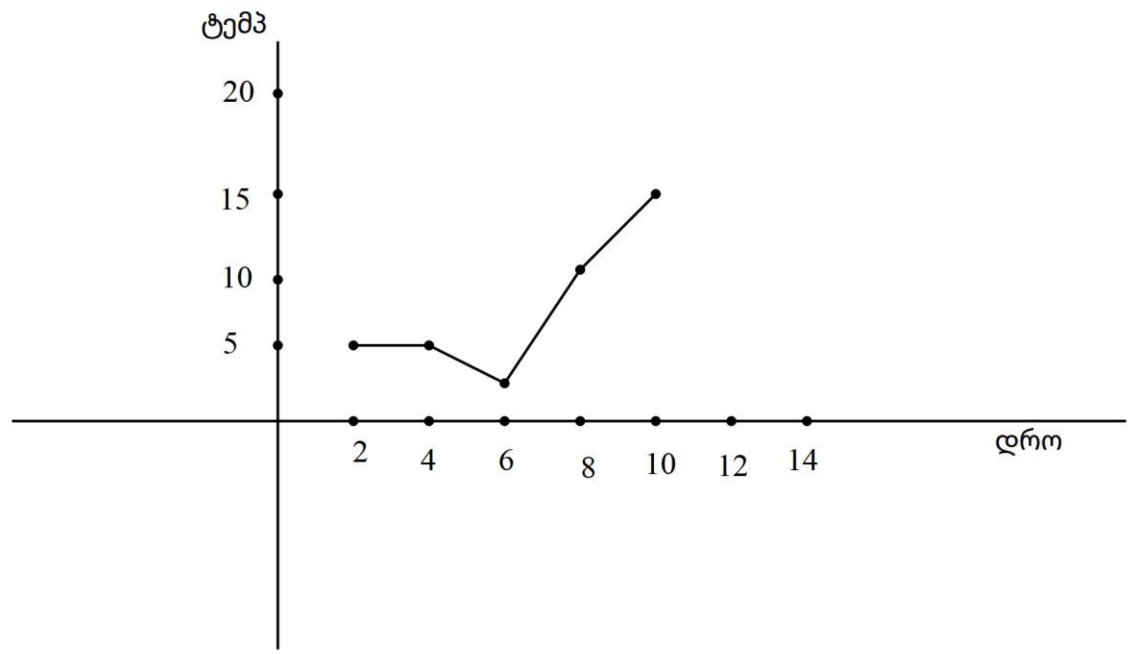
სურ.1

წერტილოვანი დიაგრამა გვიჩვენებს გიორგის მიერ ზაფხულში წაკითხული წიგნების რაოდენობას. (სურ.2)



სურ.2

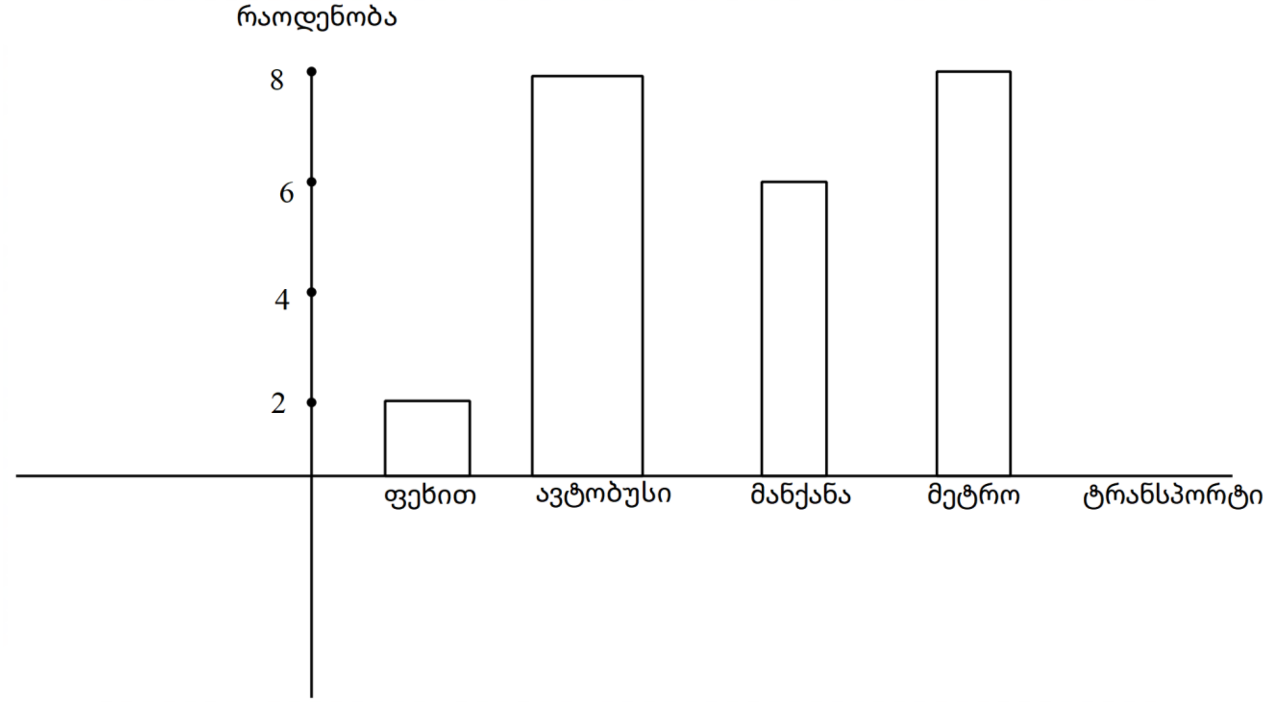
ხაზოვან დიაგრამაზე წარმოდგენილია ტემპერატურის ცვლილების დინამიკა 2 საათიდან -10 საათამდე დროის განმავლობაში. (სურ.3)



სურ.3

სვეტოვანი დიაგრამით წარმოდგენილი მონაცემები მიიღება სხვადასხვა სტატისტიკური კვლევების შედეგად. კერძოდ, დიაგრამაზე ჩანს სტუდენტების სახლიდან უნივერსიტეტამდე სხვადასხვა ტრანსპორტით

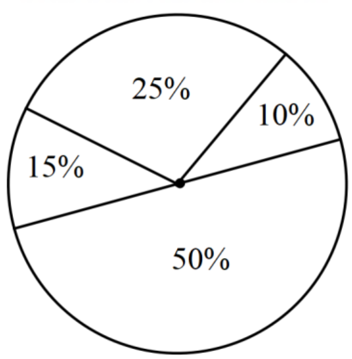
მგზავრობის კვლევის შედეგი. (სურ.4)



სურ.4

წრიულ დიაგრამაზე მოცემულია სასწავლო-სამეცნიერო კონფერენციაში მონაწილე მოსწავლეთა პროცენტული მაჩვენებლები რეგიონების მიხედვით (თბილისი 50%, აჭარა 25%, სამეგრელო 15%, ქვემო ქართლი 10%)

წრიულ დიაგრამაზე კარგად ჩანს თანაფარდობა ნაწილებს შორის. თითოეული სექტორის შესაბამისი ცენტრული კუთხე მოცემული მონაცემების პროპორციულია. (სურ.5)

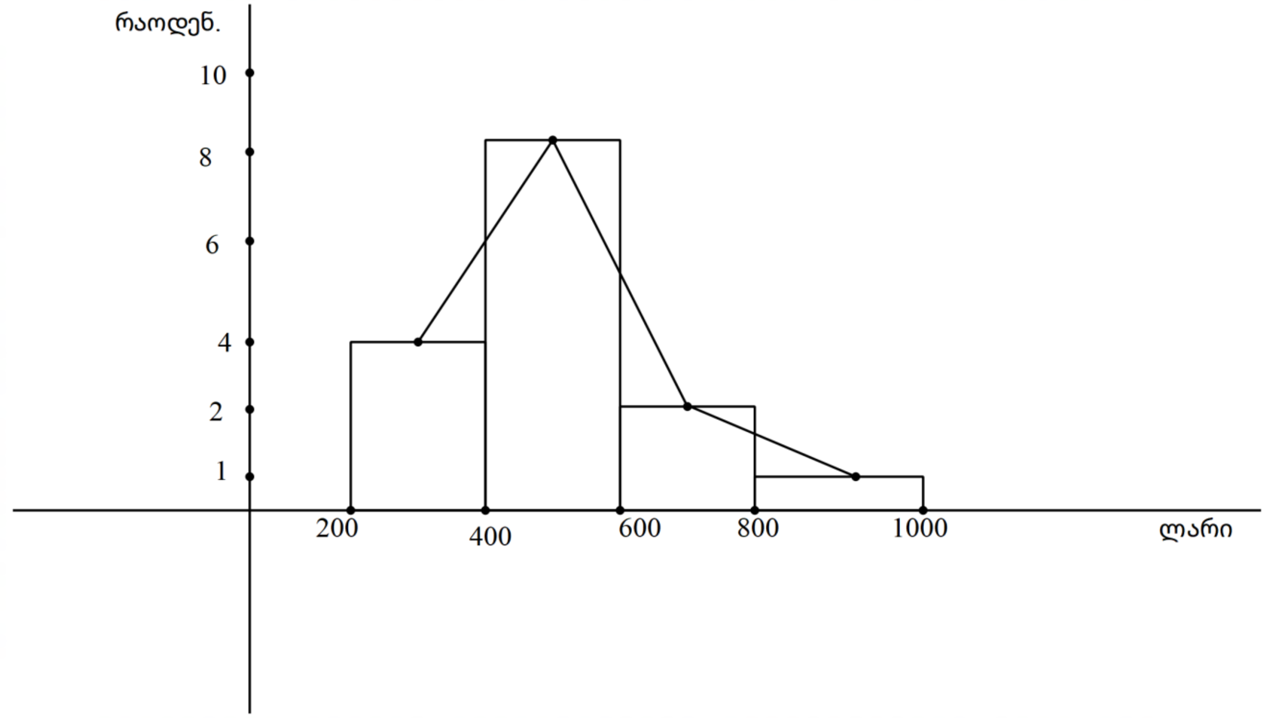


სურ.5

ჰისტოგრამა არის ისეთი სვეტოვანი დიაგრამა, რომელიც აგებულია სიხშირეების მიხედვით დაჯგუფებული მონაცემების ანუ ინტერვალების გამოყენებით.

ქვემოთ მოცემული ჰისტოგრამა გვიჩვენებს ერთ-ერთი ფირმის თანამშრომელთა ხელფასების განაწილებას. (სურ.6)

ჰისტოგრამის მართკუთხედების შუაწერტილების შეერთებით მიღებულ ტეხილს **პოლიგონი** ეწოდება.



სურ.6

400-600 ინტერვალს, სადაც ყველაზე მეტი მონაცემია თავმოყრილი, მოდალური კლასი ჰქვია.

დაგროვილ (კუმულაციურ) სიხშირეთა განაწილების წირი **ოგივა** კარგად წარმოაჩენს საშუალო მონაცემებს და მათ განაწილებას.

მონაცემთა დამუშავებისათვის საჭიროა მათი კლასიფიკაცია.

სიხშირე ეწოდება რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს მონაცემთა ერთობლიობაში თითოეული მონაცემის რაოდენობას.

ფარდობითი სიხშირე არის მონაცემის სიხშირის შეფარდება მონაცემთა საერთო რაოდენობასთან.

ზრდის მიხედვით დალაგებულ მონაცემებს **ვარიაციული მწკრივი** ჰქვია.

მონაცემთა ვარიაციულ მწკრივში მონაცემების პოზიციის მახასიათებელია **რანგი**. მოცემული მონაცემის **რანგი** გვიჩვენებს, თუ ვარიაციულ მწკრივში მოცემული მონაცემი რამდენზეა მეტი და რამდენზე ნაკლები. თუ მწკრივში რამდენჯერმე გვხვდება ერთი და იგივე მონაცემი, მისი რანგი ტოლია ამ მონაცემების ნომრების არითმეტიკული საშუალოსი.

2. მონაცემთა რიცხვითი მახასითებლები

სიხშირე ეწოდება რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს მონაცემთა ერთობლიობაში თითოეული მონაცემის რაოდენობას.
ფარდობითი სიხშირე არის მონაცემის სიხშირის შეფარდება მონაცემთა საერთო რაოდენობასთან.

მონაცემთა შემაჯამებელი რიცხვითი მახასიათებლებია: მოდა, მედიანა, საშუალო, დიაპაზონი, საშუალო კვადრატული გადახრა.
მოდა ეწოდება იმ რიცხვს, რომელიც მონაცემთა ერთობლიობაში ყველაზე ხშირად მეორდება.
მედიანა ეწოდება ზრდადობით დალაგებული მონაცემების შუა წევრს (როცა მონაცემტა რაოდენობა კენტია) ან შუა ორი წევრის ნახევარჯამს (როცა მონაცემთა რაოდენობა ლუწია)
საშუალო ეწოდება რიცხვს, რომელიც მიიღება მონაცემების ჯამის გაყოფით მათსავე რაოდენობაზე.
დიაპაზონი მონაცემთა გაფანტულობის საზომია და ეწოდება სხვაობას უდიდეს და უმცირეს მონაცემებს შორის.
საშუალო კვადრატული გადახრა არის გადახრების კვადრატების საშუალოდან არითმეტიკული კვადრატული ფესვი.
გადახრა-ესაა სხვაობა მონაცემსა და მონაცემთა საშუალოს შორის.

განვიხილოთ მაგალითი: მოცემულია რიცხვთა მიმდევრობა: 10;3;0;3;10;8;10;4
3-ის სიხშირეა -2. 3-ის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.
3-ის ფარდობითი სიხშირის პროცენტული რაოდენობაა $\frac{2}{8}\cdot 100\% = 25\%$
მოდა:10
მედიანა: 0;3;3;4;8;10;10;10 მედიანაა $\frac{4+8}{2}=6$.
საშუალო =(0+3+3+4+8+10+10+10):8=48:8=6 m=6.
დიაპაზონი: 10-0=10.
საშუალო კვადრატული გადახრა.

a	0	3	3	4	8	10	10	10
a-m	-6	-3	-3	-2	2	4	4	4
$(a-m)^2$	36	9	9	4	4	16	16	16

საშუალო კვადრატული გადახრა=$\sqrt{(36+9+9+4+4+16+16+16):8}=\sqrt{110:8}=\sqrt{13{,}75}\approx 3{,}71$

ამოცანა. ავეჯის ფაბრიკის ხელმძღვანელობამ გადაწყვიტა შეამოწმოს მაგიდის მწარმოებელ სხვადასხვა საამქროში ყოველ საათში წარმოებული მაგიდების რაოდენობებსა და მუშების რაოდენობებს შორის კავშირი. ყველა ის მნიშვნელობა, რომელიც ამ კავშირის წრფივობის მახასიათებლის -კორელაციის კოეფიციენტის გამოთვლას სჭირდება, ცხრილით არის წარმოდგენილი.

x_i მუშების რაოდენობა	y_i მაგიდების რაოდენობა	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})$
12	20	-9,3	86,49	-21,2	449,44	197,16
30	60	8,7	75,69	18,2	353,44	163,56
15	27	-6,3	39,69	-14,2	201,64	89,46

24	50	2,7	7,29	8,8	77,44	23,76
14	21	-7,3	53,29	-20,2	408,04	147,46
18	30	-3,3	10,89	-11,2	125,44	36,96
28	61	6,7	44,89	19,8	392,04	132,66
26	54	4,7	22,09	12,8	163,84	60,16
19	32	-2,3	5,29	-9,2	84,64	21,16
27	57	5,7	32,49	15,8	249,64	90,06
Σ=213	$\Sigma = 412$		Σ=378,1		Σ=2505,6	Σ=962,4

$|r| \leq 1$ რაც უფრო ახლოსაა 1 თან მით უფრო კონცენტრირებულია წერტილები რაიმე წრფის მახლობლად. თუ კორელაცია 1-ის ტოლია მაშინ წერტილები ერთ წრფეზეა განლაგებული. ამ შემთხვევაში სრულყოფილია წრფივი კავშირი. (კარლ-პირსონი თანამედროვე სტატისტიკის ფუძემდებელი 1857-1936 ცნობილი ინგლისელი მათემატიკოსი. მან დიდი წვლილი შეიტანა ბიოლოგიისა და ფსიქოლოგიის კვლევაშიც)

$r = \frac{962,4}{\sqrt{378.1 \cdot 2505.6}} = 0.989;$ ე.ი. $\mathbf{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$

კორელაციის გამოთვლა უფრო მარტივია სპეციალური კალკულატორით რომელიც ამ მოცემულია შემდეგ საიტზე კორელაციის კოეფიციენტი

cov(x,y)=$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x - \bar{x})(y - \bar{y})$-შერჩევითი კოვარიაცია

$r = \frac{cov(x,y)}{S_x S_y}$ $S_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$, $S_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$ სტანდარტული გადახრაა.

სტანდარტული გადახრის ფორმულა $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$

x	3	7	7	9	3	3	3
x-5	-2	2	2	4	-2	-2	-2
$(x-5)^2$	4	4	4	16	4	4	4

ამ ერთობლიობის სტანდარტული გადახრაა $\sqrt{\frac{4+4+4+16+4+4+4}{7}} = \sqrt{\frac{40}{7}}$ ≈2,39.

სტანდარტული გადახრის დათვლა უფრო მარტივია თუ გამოვიყენებთ შესაბამის კალკულატორს სტანდარტული გადახრა

3. ალბათობის თეორიის ელემენტები.

ალბათობის თეორია მათემატიკის ნაწილია. ის შეისწავლის შემთხვევით პროცესებს და მათ მათემატიკურ მოდელირებას. ალბათობის თეორიის პირველად ცნებას **ხდომილობა** წარმოადგენს.

ელემენტარული ხდომილობა არის რაიმე შემთხვევითი ექსპერიმენტის შედეგი. შემთხვევითი

ექსპერიმენტებია-კარტის დასტიდან კარტის ამოღება, მონეტის აგდება, ყუთში ჩაყრილი ბურთულებიდან ერთ-ერთის ამოღება, კამათლის გაგორება... თითოეული ამ ექსპერიმენტის შედეგი ელემენტარული ხდომილობაა.

შეუძლებელია ხდომილობა, რომელიც მოცემული ექსპერიმენტის ჩატარებისას არ შეიძლება განხორციელდეს.

აუცილებელია ხდომილობა, რომელიც მოცემული ექსპერიმენტის ჩატარებისას ყოველთვის განხორციელდება.

არათავსებადია ხდომილობები, რომლებიც ერთდროულად არ შეიძლება განხორციელდეს (საერთო ელემენტარული ხდომილობა არა აქვთ).

ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე არის რაიმე შემთხვევითი ხდომილობების არათავსებადი შედეგების სიმრავლე და აღინიშნება Ω-თი.

A ხდომილობის საწინააღმდეგო $\bar{A}$ არის ხდომილობა, რომელიც განხორციელდება მაშინ, როცა განხორციელდება A. $A + \bar{A} = \Omega$

A და B ხდომილობების ჯამი ეწოდება იმ ელემენტარული ხდომილობებისაგან შედგენილ C ხდომილობას, რომლებიც ეკუთვნიან ან A-ს ან B-ს ან ორივეს და ასე ჩაიწერება: $C = A \cup B$ ან $C = A + B$.

A და B ხდომილობების ნამრავლი ეწოდება იმ ელემენტარული ხდომილობებისაგან შედგენილ C ხდომილობას, რომელიც ეკუთვნის როგორც A-ს, ასევე B-ს და ასე ჩაიწერება:

$$C = A \cap B \text{ ან } C = A \cdot B \ .$$

A და B ხდომილობების სხვაობა ეწოდება იმ ელემენტარული ხდომილობებისაგან შედგენილ C ხდომილობას, რომლებიც ეკუთვნის A-ს და არ ეკუთვნის B-ს და ასე ჩაიწერება:

$C = A \backslash B$ ან $C = A - B$.

ნებისმიერი A ელემენტარული ხდომილობის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით $P(A) = \frac{m}{n}$, სადაც m არის A ხდომილობის ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რიცხვი, n-ელემენტარულ ხდომილობათა მთლიანი რაოდენობა. $m \le n$.ნებისმიერი ხდომილობის ალბათობა მოთავსებულია 0-სა და 1-ს შორის. $0 \le P(A) \le 1$.

$P(A) = 1$, თუ A აუცილებელი ხდომილობაა.

$P(A) = 0$, თუ A შეუძლებელი ხდომილობაა.

წყვილ-წყვილად არათავსებად ხდომილობებს ეწოდება ხდომილობათა სრული სისტემა, თუ მათი ალბათობათა ჯამი 1-ის ტოლია.

ორი არათავსებადი ხდომილობის ჯამის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

A და B ხდომილობები დამოუკიდებელი ხდომილობებია, თუ სრულდება პირობა $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

ორი თავსებადი ხდომილობის ჯამის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

პირობითი ალბათობა: A ხდომილობის ალბათობა იმ პირობით, რომ განხორციელდა B ხდომილობა, გამოითვლება ფორმულით $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$ ან $P(A|B) = \frac{n(A \cdot B)}{n(B)}$, სადაც $n(A \cdot B)$ და $n(B)$-ხდომილობათა რაოდენობებს აღნიშნავს. შესაბამისად გვაქვს ნამრავლის ალბათობის ფორმულები:

$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B)$; ან $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A)$ ეს ფორმულები სამართლიანია ნებისმიერი ოდენობის თანამამრავლის შემთხვევაში.

თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ და პირობითი ალბათობა გამოითვლება ფორმულით: $P(A|B) = P(A)$.

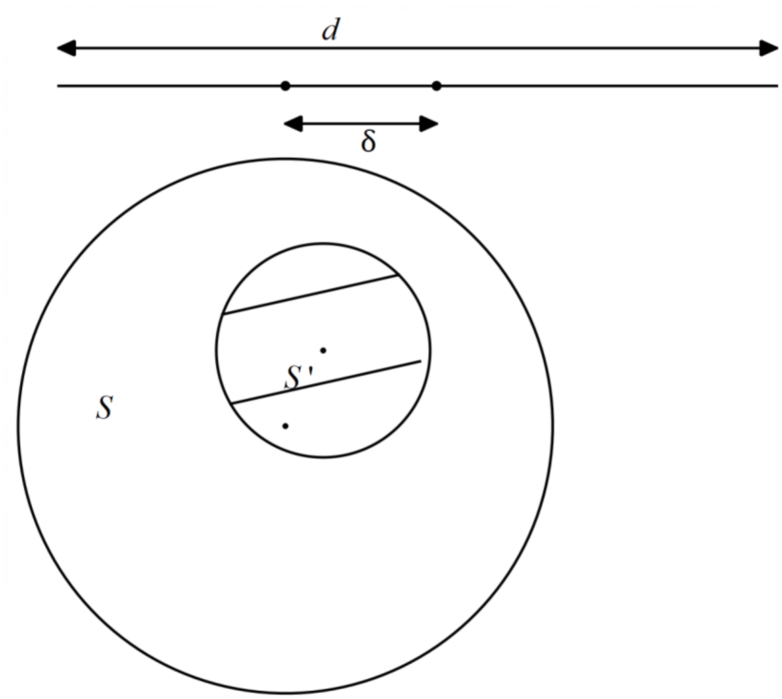
იაკობ ბერნულის ფორმულა $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

ბერნულის თეორემა: თუ n განმეორებითი, დამოუკიდებელი ცდიდან თითოეულში A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა p-ს ტოლია, ხოლო A ხდომილობის განხორციელების სიხშირე S_n-ია, მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის $(P\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon) < \frac{P(1-p)}{n\varepsilon^2} < \frac{1}{4n\varepsilon^2}$ ეს იმას ნიშნავს , რომ ,,წარმატებათა“ ფარდობითი სიხშირე ,,ახლოსაა“ ,,წარმატების“ p ალბათობასთან, როცა n→ ∞.(n-ის ზრდასთან ერთად უტოლობის მარჯვენა მხარე $\frac{1}{4n\varepsilon^2}$ მიისწრაფის ნულისაკენ).

გეომეტრიული ალბათობა. ალბათობა იმისა, რომ d სიგრძის მონაკვეთზე შემთხვევით შერჩეული წერტილი მოხვდება δ სიგრძის მონაკვეთზე, გამოითვლება ფორმულით: $\frac{\delta}{d}$.

ანალოგიურად განისაზღვრება გეომეტრიული ალბათობა ბრტყელ ფიგურებში.

წერტილის მოხვედრის ალბათობა S ფიგურაში არის $\frac{S^*}{S}$ (სურათი. 7)



სურ.7

ზომის ერთეულები

1. სიგრძის ერთეულები:

1 სმ=10 მმ
1 დმ=10სმ=100 მმ

1 მ=10 დმ=100სმ=1000 მმ

1კმ=1000 მ=10000 დმ=100000 სმ=1000000 მმ

2. ფართობის ერთეულები:

1 სმ^2=100 მმ^2

1 დმ^2=100 სმ^2=10000 მმ^2

1 მ^2=100 დმ^2=10000 სმ^2=1000000 მმ^2

1 კმ^2=1000000 მ^2

1 ჰა=10000 მ^2

1 ა=100 მ^2

1 ჰა=100 ა

1 აკრი =4046,86 მ^2

3. მოცულობის ერთეულები:

1 სმ^3=1000 მმ^3

1 დმ^3=1000 სმ^3=1000000 მმ^3

1 მ^3=1000 დმ^3=1000000 სმ^3=1000000000 მმ^3

1 დმ^3=1 ლიტრი.

4. მასის ერთეულები:

1 გ=1000 მგ

1 კგ=1000 გ=1000000 მგ

1 ც=100 კგ=100000 გ

1 ტ=10 ც= 1000 კგ=1000000 გ

5. დროის ერთეულები:

1 სთ=60 წთ=3600 წმ

1 წთ=60 წმ

1 კვირა =7 დღე-ღამე

1 დღე-ღამე= 24 სთ

1 წელიწადი =12 თვე= 365 (366) დღე-ღამე

1 საუკუნე= 100 წელიწადი

6. სიჩქარის ერთეულები:

1 კმ/სთ=$\frac{50}{3}$ მ/წთ=$\frac{5}{18}$ მ/წმ

1 მ/წმ=3,6 კმ/სთ

1 მ/წთ=0,06 კმ/სთ.

1 მ/წთ=0,0166666667 მ/წმ

1 მ/წმ=60 მ/წთ

მოკლე ცნობარი

შემოკლებული გამრავლების ფორმულები:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ ან $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^2 + b^2 = (a \pm b)^2 \mp 2ab$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

ნიუტონის ბინომის ფორმულა
$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n$

პროპორციები:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad ad = bc.$

$\frac{d}{c} = \frac{c}{a}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$

$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}, \quad \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}, \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$, (იგულისხმება ცვლადების დასაშვები მნიშვნელობები)

ხარისხის თვისებები:

a>0, b>0, m,n,$\in R$

1) $a^0 = 1$; 2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 3) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$

4) $(a^m)^n = a^{mn}$; 5) $(ab)^n = a^n . b^n$; 6) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$; $b \neq 0$. 7) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$

არითმეტიკული ფესვის თვისებები:

$a \geq 0, \ b \geq 0, \ n > 1, \ k > 1$

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ 2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$ 3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ 4) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ 5) $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$

6) $(\sqrt[n]{a})^n = a$ 7) $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$, თუ $0 \leq a < b$ 8) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$ 9) $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$

10) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $n \in N$, $m \in Z$.

რიცხვის მთელი და წილადი ნაწილი.

x რიცხვის მთელი ნაწილი ეწოდება მთელ რიცხვს, რომელიც მეტია (x-1)-ზე და არ აღემატება x-ს; ანუ x რიცხვის მთელი ნაწილი-ესაა უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება x-ს.

x რიცხვის **მთელი ნაწილი** აღინიშნება [x] სიმბოლოთი.

x რიცხვის წილადი ნაწილი ეწოდება x რიცხვისა და მისი მთელი ნაწილის სხვაობას; ის აღინიშნება {x} სიმბოლოთი. ადგილი აქვს შემდეგ **ტოლობას {x}=x-[x].**

პროცენტი. მარტივი და რთული დარიცხვის პროცენტი.

k%=$\frac{k}{100}$; m-ის k%=$\frac{mk}{100}$;

მარტივი დარიცხვის პროცენტის ფორმულა S=p(1+rt)

რთული დარიცხვის პროცენტის ფორმულა S=$p(1+r)^t$; S=$p(1+\frac{r}{n})^{nt}$

t-წელი; n-წელიწადში დარიცხვების რაოდენობა;r-საპროცენტო განაკვეთი; p-საწყისი თანხა; S-დაგროვილი თანხა.

პროცენტული ცვლილება=$\frac{\text{ფასების სხვაობა}}{\text{საწყისი ფასი}}\cdot 100\%$

მოდული:

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, \text{ თუ } a\geq 0 \\ -a, \text{ თუ } a<0 \end{cases}$$

$|a|\geq 0$ $\quad |a|-|b|\leq|a+b|\leq|a|+|b|$; $\quad |-a|=|a|$; $|a-b|=|b-a|$; $|a|^2=a^2$.

პროგრესიები:

არითმეტიკული პროგრესია:

$a_n=a_1+d(n-1)$, $\quad d=a_n-a_{n-1}$,

$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_k+a_{n-k+1}$

$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=\frac{2a_n-d(n-1)}{2}\cdot n$

$a_n+a_m=a_p+a_q$, სადაც m+n=p+q.

გეომეტრიული პროგრესია.

$b_n=b_1q^{n-1}$, $\;{b_n}^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$, $\;b_1\cdot b_n=b_2\cdot b_{n-1}=\cdots=b_k\cdot b_{n+k+1}$, $\quad q=\frac{b_n}{b_{n-1}}$.

$S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, $q\neq 1$ $\qquad b_n\cdot b_m=b_p\cdot b_q$, სადაც m+n=p+q.

უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის ჯამი:

$S=\frac{b_1}{1-q}$ $\qquad |q|<1$

თეორემა: თუ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ და $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ მაშინ სრულდება:

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

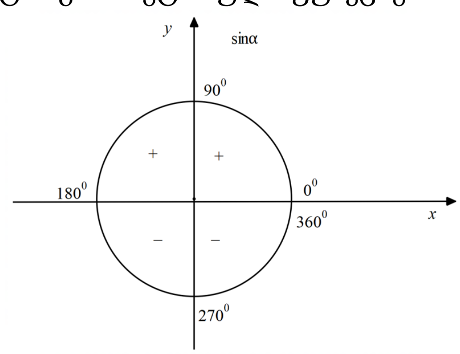
$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$ $\lim\limits_{n\to\infty} kx_n = ka$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ $\lim\limits_{n\to\infty}(kx_n) = k\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

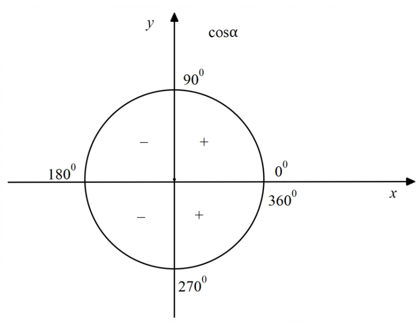
თუ b≠ 0, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{y\to\infty} y_n}$, თუ $\lim\limits_{y\to\infty} y_n \neq 0$

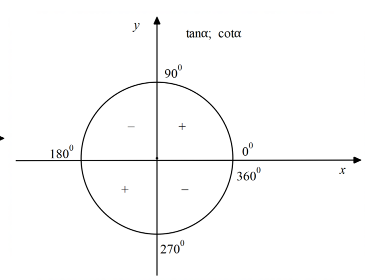
ორუცნობიანი არაწრფივი განტოლება არის P(x;y)=0 სახის განტოლება, სადაც P(x;y) წარმოადგენს ერთზე მეტი ხარისხის მრავალწევრს.
 ორუცნობიან არაწრფივ განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი. გეომეტრიულად ორუცნობიანი არაწრფივი განტოლების ამონახსნია სიბრტყის იმ (x_0, y_0) წერტილთა სიმრავლე, რომელთა კოორდინატების მოცემულ განტოლებაში ჩასმით მიიღება სწორი ტოლობა.
 რამდენიმე ცვლადის შემცველ განტოლებას ეწოდება **ერთგვაროვანი განტოლება,** როდესაც მასში შემავალი ცვლადების ხარისხები ან ხარისხების ჯამი ერთი და იგივეა. ერთგვაროვან განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი. მაგ. $4x^2 - xy + 6y^2 = 5$
ორუცნობიან არაწრფივ განტოლებათა სისტემა-ესაა ერთად აღებული x და y ცვლადების შემცველი ორი განტოლება, რომელთაგან ერთი მაინც არაწრფივია. აღნიშნული სისტემის ამოხსნა შესაძლებელია როგორც ჩასმის, ასევე ალგებრული შეკრების ხერხით;შეიძლება დამხმარე ცვლადის შემოტანა; სისტემის ამოხსნა შესაძლებელია გრაფიკულადაც. გეომეტრიულად ზემოთ აღნიშნულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნია ყველა ის (x,y) წყვილი, რომელიც წარმოადგენს სისტემაში შემავალი განტოლებებით გამოსახულ გეომეტრიულ ფიგურათა საერთო წერტილების კოორდინატებს. ორუცნობიან არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ერთ-ერთი სახეა ერთგვაროვან (ორუცნობიან) განტოლებათა სისტემა, რომლის თითოეული განტოლება წარმოადგენს x და y ცვლადების შემცველ ერთგვაროვან განტოლებას.

ტრიგონომეტრია:

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნიშნები







ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ლუწ-კენტოვნება

sin(-α)=-sin α, cos(-α)=cos α, tg(-α)=-tg α, ctg(-α)=-ctg α.

ძირითადი ტრიგონომეტრიული იგივეობები: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z.$

1.$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$; 2. $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$; 3. $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$; 4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$; 5. $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$; 6. $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$

ორი არგუმენტის ჯამისა და სხვაობის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები:

$\sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha cos\beta \pm cos\alpha sin\beta$

$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \mp sin\alpha sin\beta$

$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \pm tg\alpha tg\beta}$.

ორმაგი და სამმაგი არგუმენტის ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ფორმულები:

$sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$; $sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha$, $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 = 1 - 2sin^2\alpha$; $cos3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\alpha$; $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$.

ნახევარი არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ფორმულები:

$sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}}$, $cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\alpha}{2}}$; $tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}}$, $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\alpha}{1 + cos\alpha}$, $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\alpha}{sin\alpha}$

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა გამოსახვა $tg\frac{\alpha}{2}$-ის საშუალებით:

$sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}$, $cos\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}$, $tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}$

ერთსახელა ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ჯამის წარმოდგენა ნამრავლის სახით:

$sin\alpha \pm sin\beta = 2sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$,

$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha + \beta}{2} cos\frac{\alpha - \beta}{2}$,

$cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha + \beta}{2} sin\frac{\alpha - \beta}{2}$

$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{cos\alpha cos\beta}$.

ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნამრავლის გარდაქმნა ჯამად:

$sin\alpha cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$

$cos\alpha cos\beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$

$sin\alpha sin\beta = \frac{1}{2}(cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

ტრიგონომეტრიულ განტოლებათა ამოხსნა:

1. sinx=a

თუ $|a| > 1 -$ ამონახსნი არ აქვს.

თუ $|a| \leq 1$, მაშინ $x = (-1)^n arcsina + \pi n,\ n \in Z.$

კერძო შემთხვევები:

როცა sinx=1, მაშინ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

როცა sinx=0, მაშინ $x = \pi n,\ n \in Z.$
როცა sinx=-1, მაშინ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

2. cosx=a.
თუ $|a| > 1$-ამონახსნი არა აქვს.
თუ $|a| \leq 1$,მაშინ $x = \pm arccosa + 2\pi n,\ \ n \in Z.$
კერძო შემთხვევები
როცა cosx=1, მაშინ x=$2\pi n,\ \ n \in Z.$
როცა cosx=0, მაშინ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$
როცა cosx=-1, მაშინ $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$

3. tgx=a, x=arctga+ $\pi n,\ \ n \in Z.$

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციების მნიშვნელობათა ცხრილი:

rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
degree	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o	270^o	360^o
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0
cot	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-

დაყვანის ფორმულები:

α	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
sinα	cosα	cosα	sinα	-sinα	-cosα	-cosα
cosα	sinα	- sinα	- cosα	-cosα	-sinα	sinα
tgα	ctgα	- ctgα	-tgα	tgα	ctgα	-ctgα

არსებობს უამრავი α კუთხე, სადაც sinx ღებულობს a-ს ტოლ მნიშვნელობას. ამ კუთხეთა ერთობლიობა აღინიშნება სიმბოლოთი arcsina და იკითხება ასე ,,არკსინუს a"-კუთხე, რომლის სინუსი არის a. arcsinx არის sinx-ის შექცეული ფუნქცია. სამართლიანია ფორმულა:

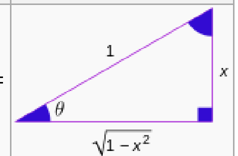
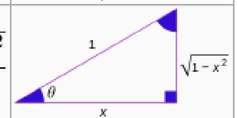
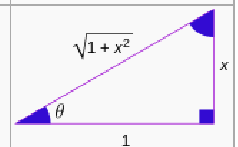
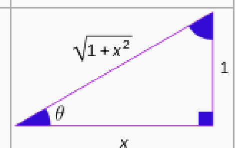
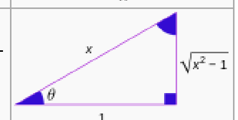
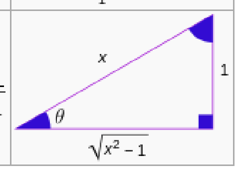
arcsinx=$(-1)^k arcsinx+\pi k, k\in Z.$ განსაზღვრის თანახმად sin(arcsinx)=x

arccosx=$\pm arcosx+2\pi k,\ \ k\in Z.$ განსაზღვრის თანახმად cos(arccosx)=x

arctgx=arctgx+$\pi k,\ \ k\in Z.$ განსაზღვრის თანახმად tg(arctgx)=x

arcctgx=arcctgx+ $\pi k,\ \ k\in Z.$. განსაზღვრის თანახმად ctg(arcctgx)=x

შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციებისთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	**Diagram**
$\arcsin x$	$\sin(\arcsin x)=x$	$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$	$\tan(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$	$\cos(\arccos x)=x$	$\tan(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	
$\arctan x$	$\sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\arctan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\tan(\arctan x)=x$	
$\operatorname{arccot} x$	$\sin(\operatorname{arccot} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\operatorname{arccot} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\tan(\operatorname{arccot} x)=\frac{1}{x}$	
$\operatorname{arcsec} x$	$\sin(\operatorname{arcsec} x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\cos(\operatorname{arcsec} x)=\frac{1}{x}$	$\tan(\operatorname{arcsec} x)=\sqrt{x^2-1}$	
$\operatorname{arccsc} x$	$\sin(\operatorname{arccsc} x)=\frac{1}{x}$	$\cos(\operatorname{arccsc} x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\tan(\operatorname{arccsc} x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	

arcsinx+arccosx=$\frac{\pi}{2}$; arctgx+arcctgx=$\frac{\pi}{2}$.

სხვადასხვა სახის ტრიგონომეტრიული განტოლების ამოხსნა

ერთარგუმენტიანი განტოლება.

თუ განტოლებაში შემავალ ყველა ტრიგონომეტრიულ ფუნციას ერთი და იგივე არგუმენტი აქვს, მაშინ ასეთ განტოლებას ერთარგუმენტიანი განტოლება ეწოდება. არსებობს ასეთი ტიპის განტოლების ამოხსნის სამი ძირითადი ხერხი:

1. დამხმარე კუთხის ხერხი;
2. უნივერსალური ჩასმა;
3. გაერთგვაროვნება.

ამ ხერხების გამოყენებით მოცემული ტრიგონომეტრიული განტოლება დაიყვანება ერთ ან რამდენიმე უმარტივეს ტრიგონომეტრიულ განტოლებაზე.

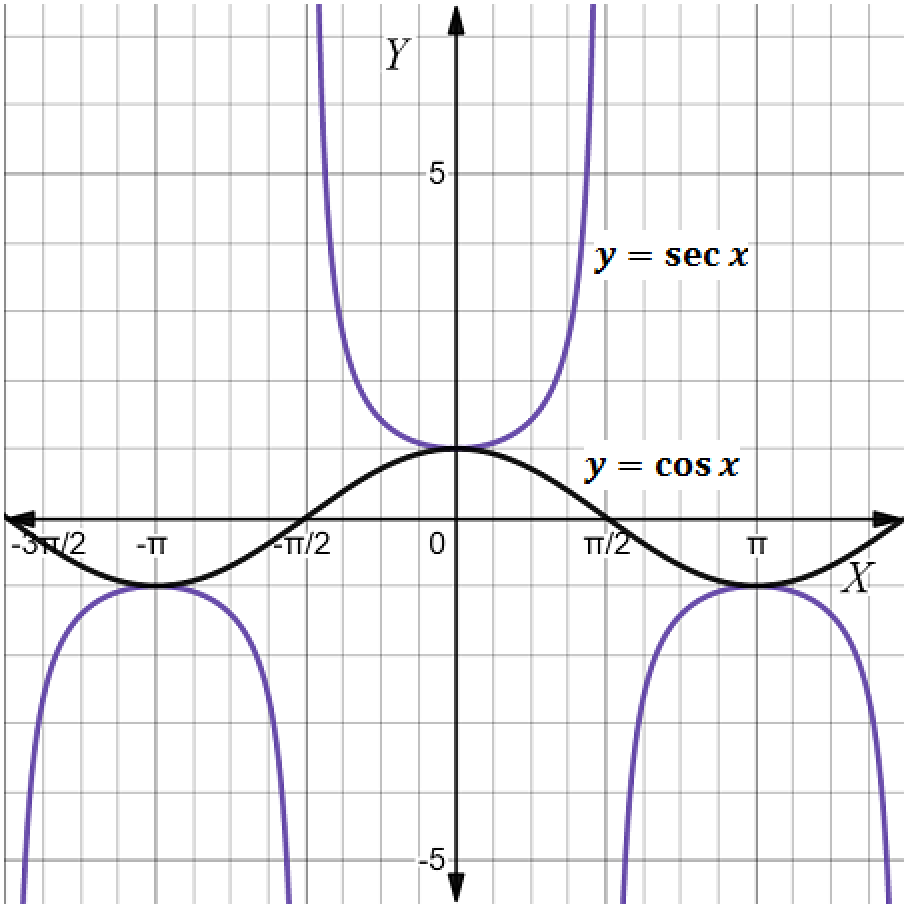
α კუთხის სეკანსი ეწოდება რადიუსის ფარდობას M წერტილის აბსცისასთან.

secα=$\frac{R}{x}$ (sec$\alpha=\frac{1}{cos\alpha}$).

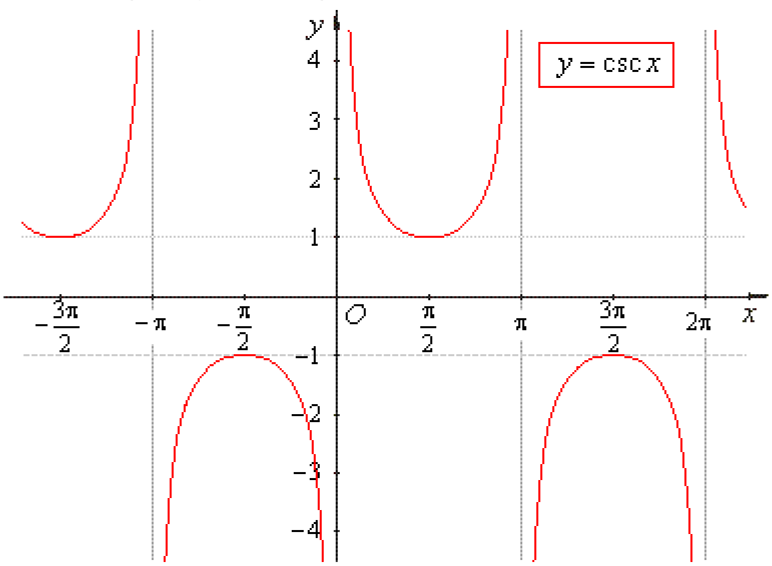
α კუთხის კოსეკანსი ეწოდება რადიუსის ფარდობას M წერტილის ორდინატასთან .

cosec$\alpha=\frac{R}{y}$ $(cosec\alpha=\frac{1}{sin\alpha})$; ცხადია $|sec\alpha|\geq 1$; $|cosec\alpha|\geq 1$.

y=secx ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე:



y=cosecx ფუნქციის გრაფიკს აქვს სახე:



ლოგარითმები:

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \;\; (a > 0,\; b > 0 \;\; a \neq 1)$

$a^{\log_a b} = b, \;\; \log_a 1 = 0, \;\; \log_a a = 1, \quad \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c \;\; (c > 0),$

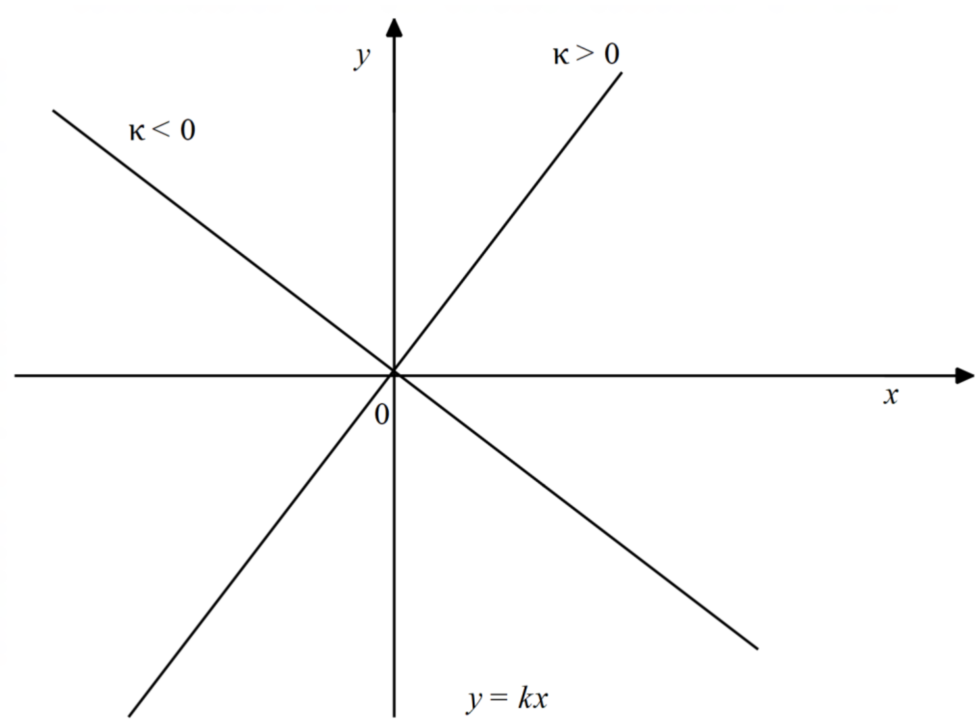
$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \quad (c > 0)$

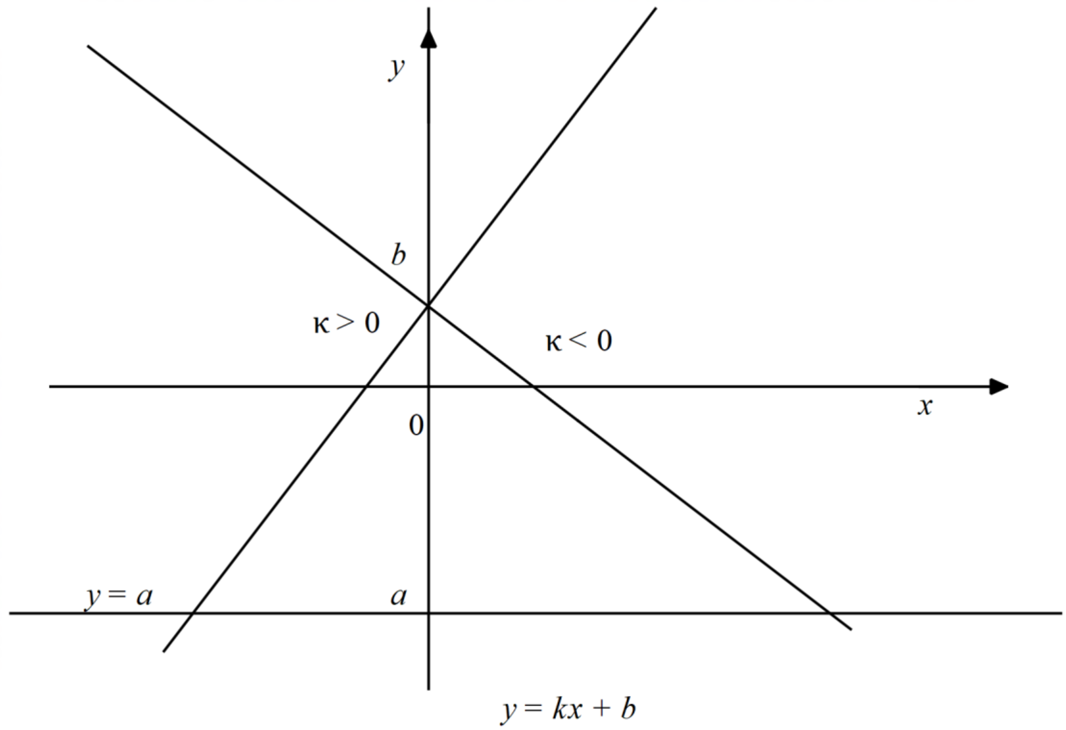
$\log_a b^k = k \log_a b \;\; ; \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (c \neq 1)$

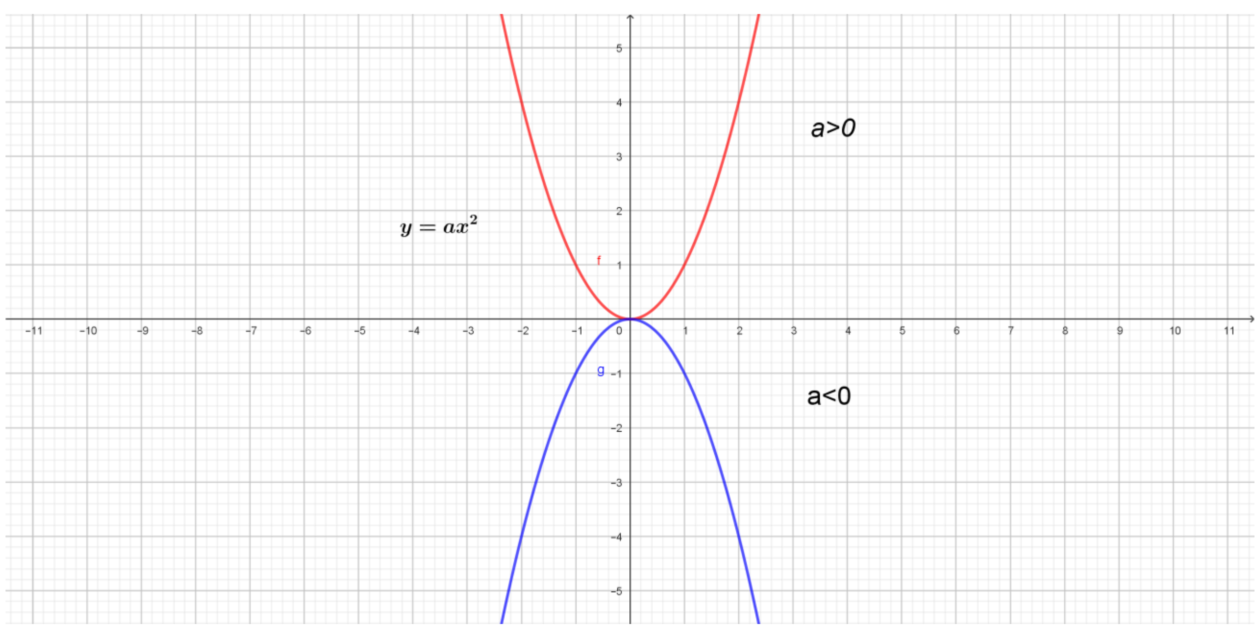
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad (b \neq 1)$

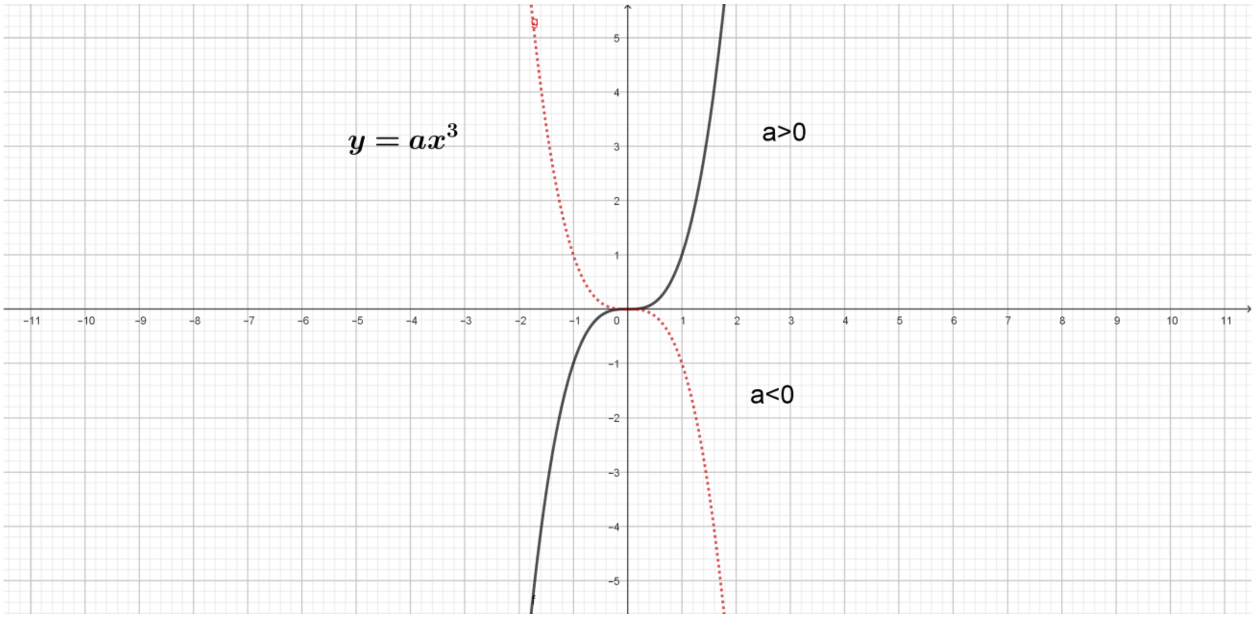
$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b \quad (n \neq 0)$

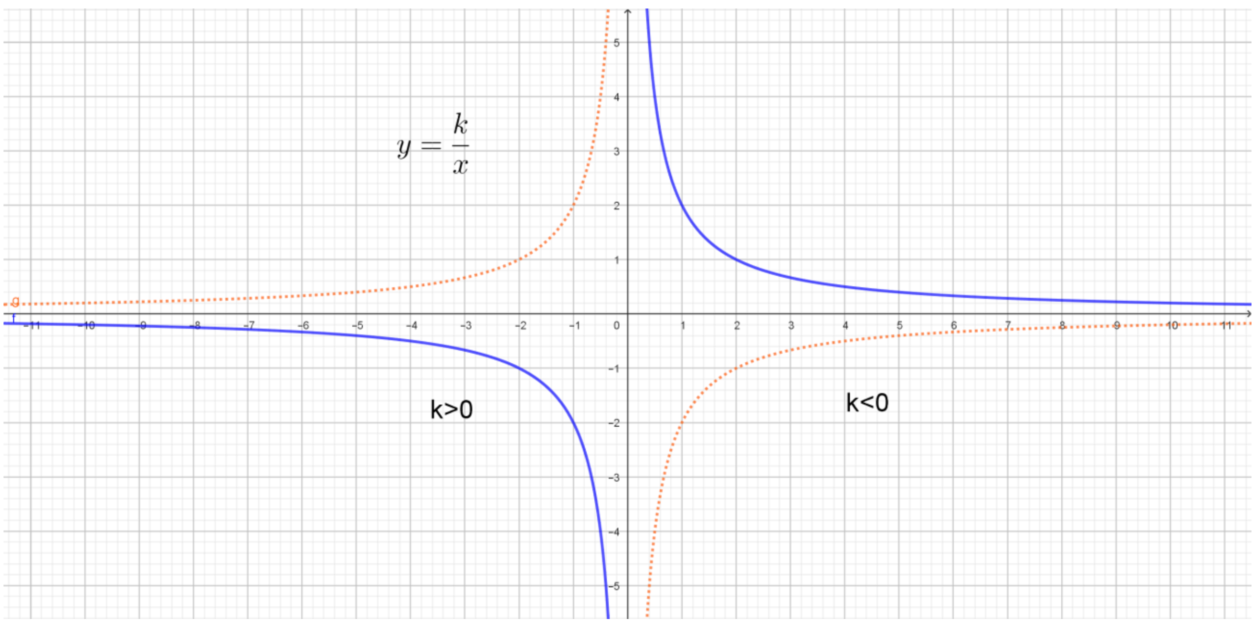
ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის გრაფიკი:

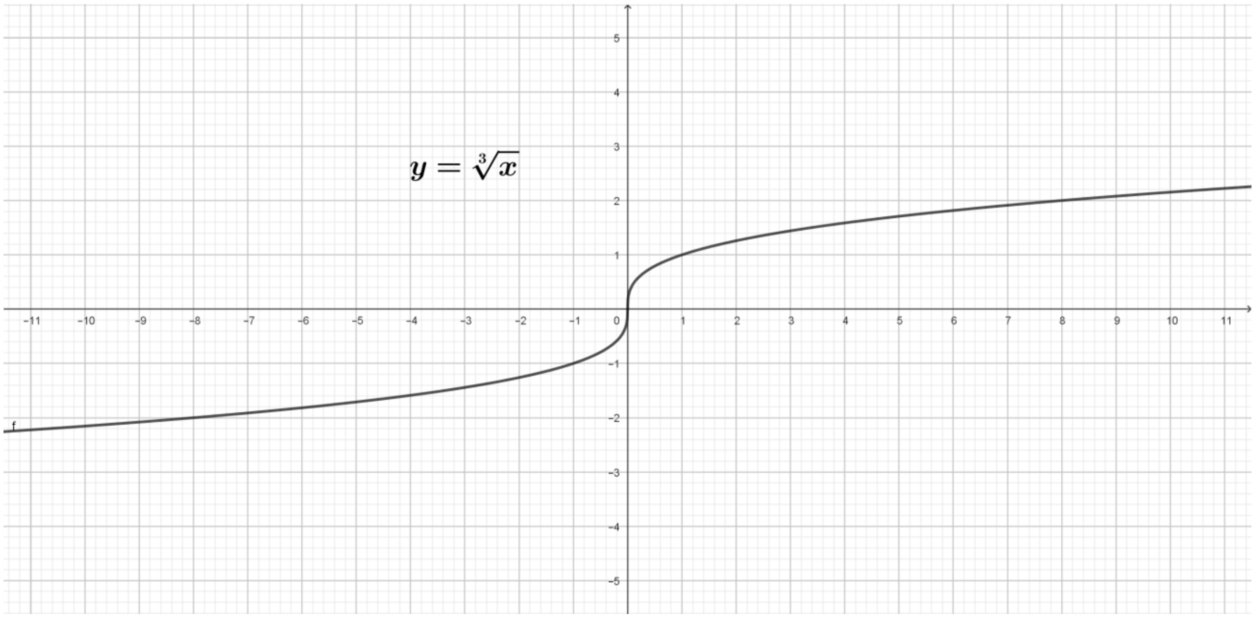


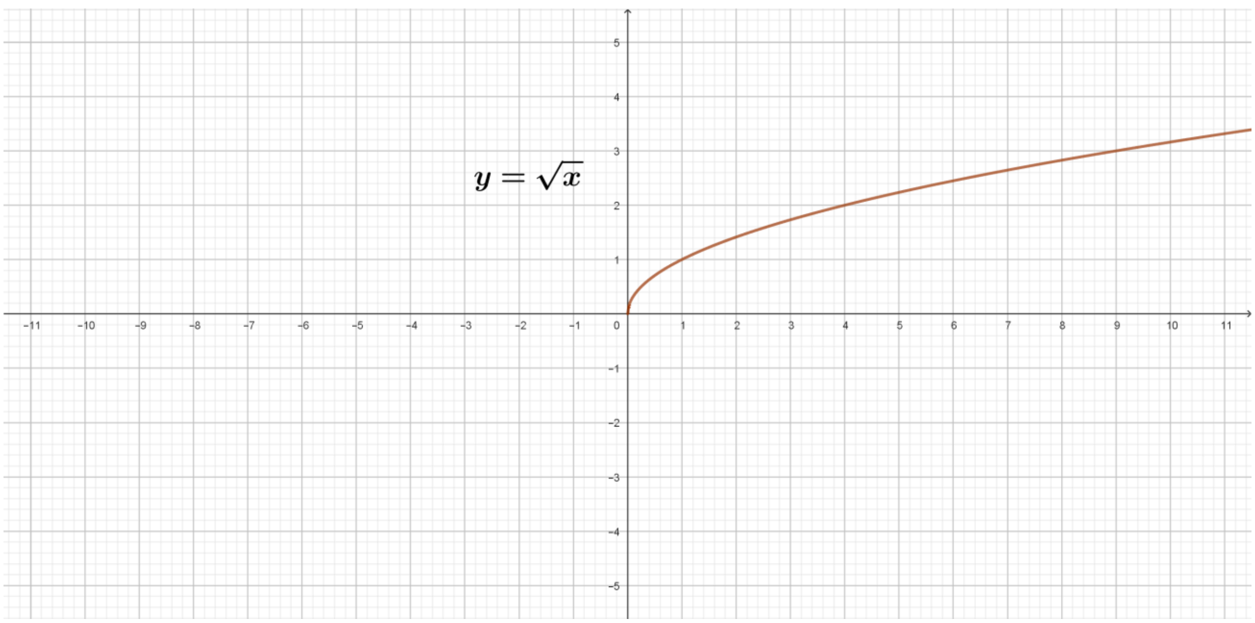

y
b
κ > 0
κ < 0
x
0
y = a
a
y = kx + b

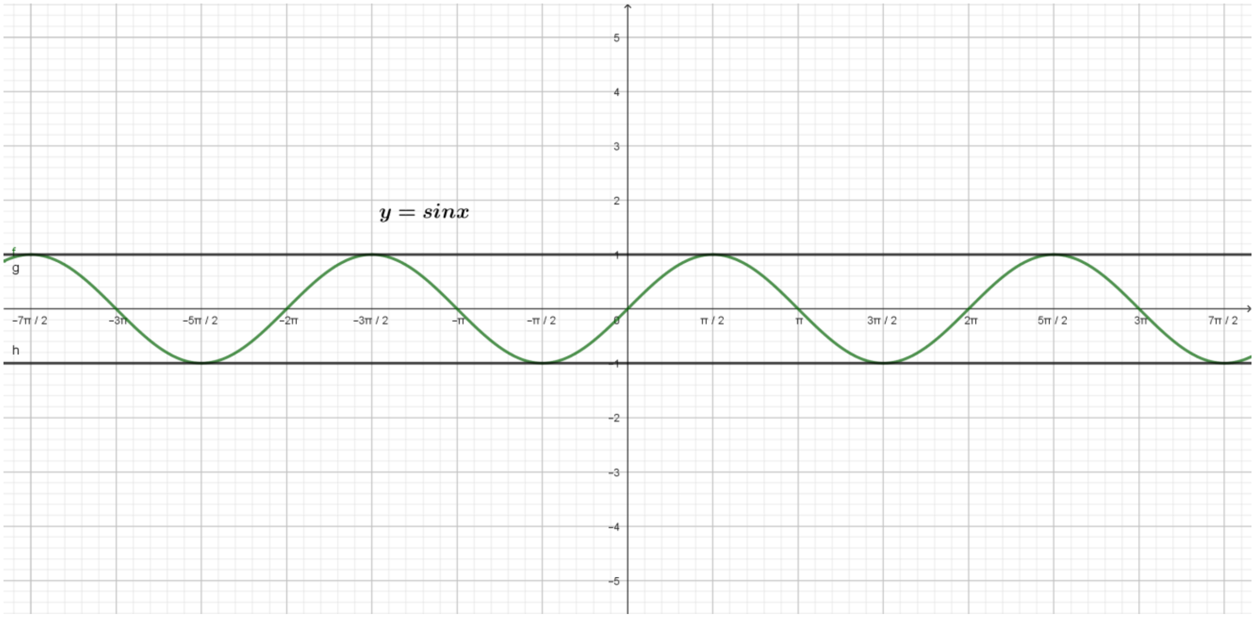

a>0
y = ax²
a<0
f
g

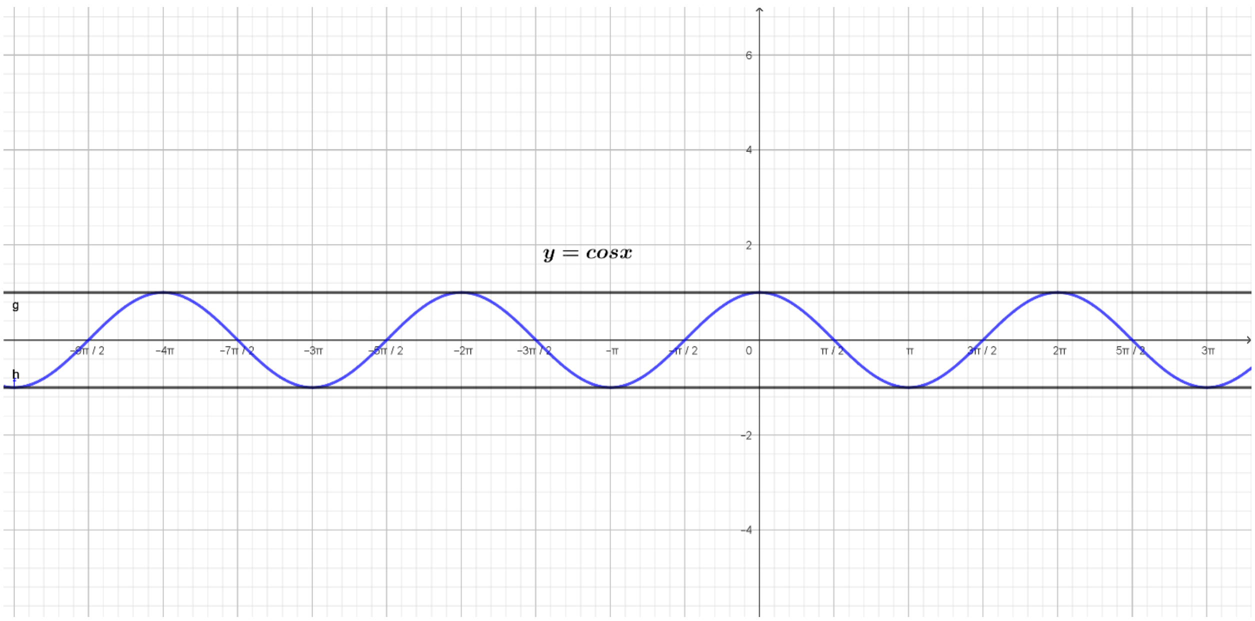

$y = ax^3$
a>0
a<0

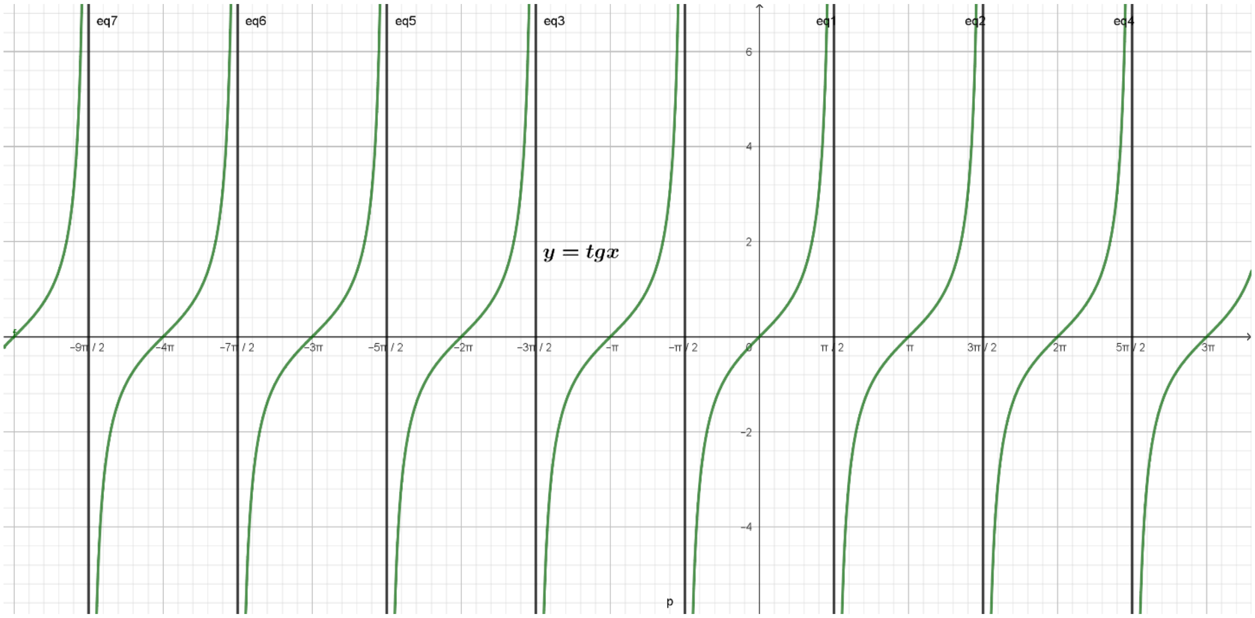

$y = \frac{k}{x}$
k>0
k<0

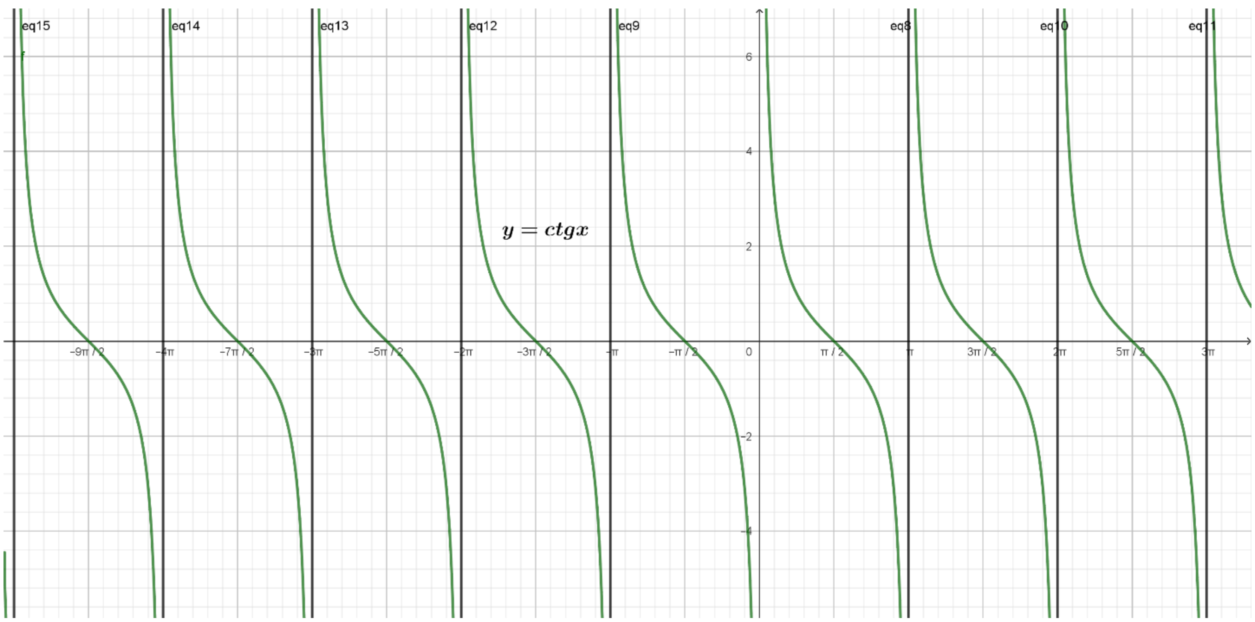

$y = \sqrt[3]{x}$

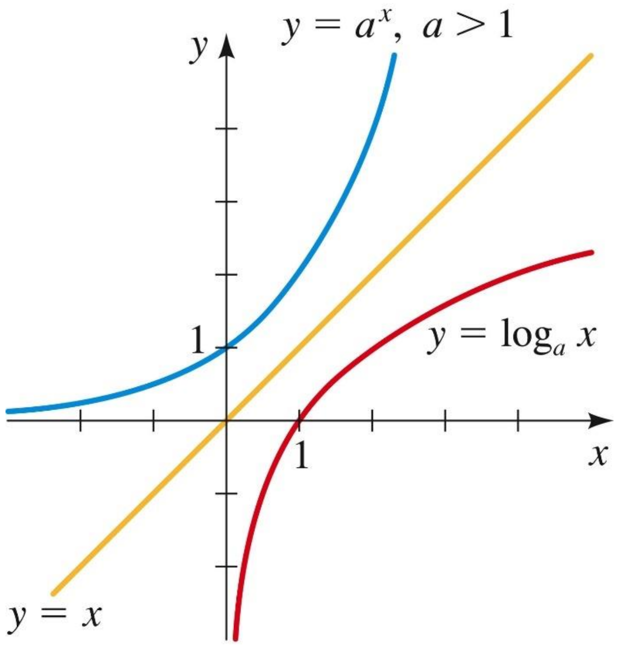

$y = \sqrt{x}$


$y = sinx$


$y = cosx$


eq7
eq6
eq5
eq3
eq1
eq2
eq4
$y = tgx$
p


eq15
eq14
eq13
eq12
eq9
eq8
eq10
eq11
$y = ctgx$



კვადრატული განტოლება:

$ax^2 + bx + c = 0$

D=$b^2 - 4ac$

როცა D=0, მაშინ $x = -\frac{b}{2a}$.

როცა D>0, მაშინ $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

როცა D<0, მაშინ ნამდვილი ამონახსნი არ აქვს.

როცა b=2k, მაშინ $D_1 = k^2 - ac$, $x = \frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$

კვადრატული სამწევრის მამრავლებად დაშლა:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ თუ D>0

$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, თუ D=0.

ვიეტის ფორმულები:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

კარდანო-ტარტალიას ფორმულები:

$x^3 + px + q = 0$

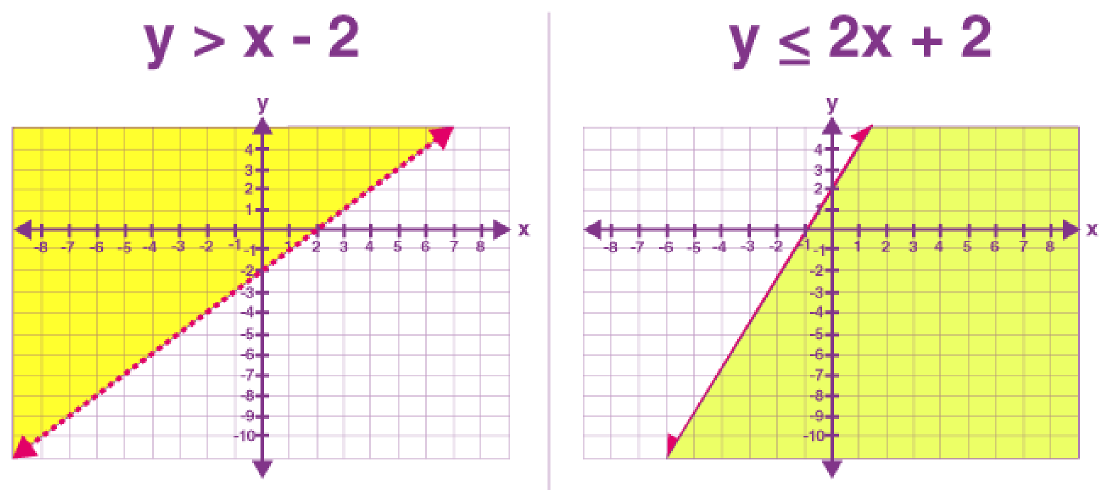
x=$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

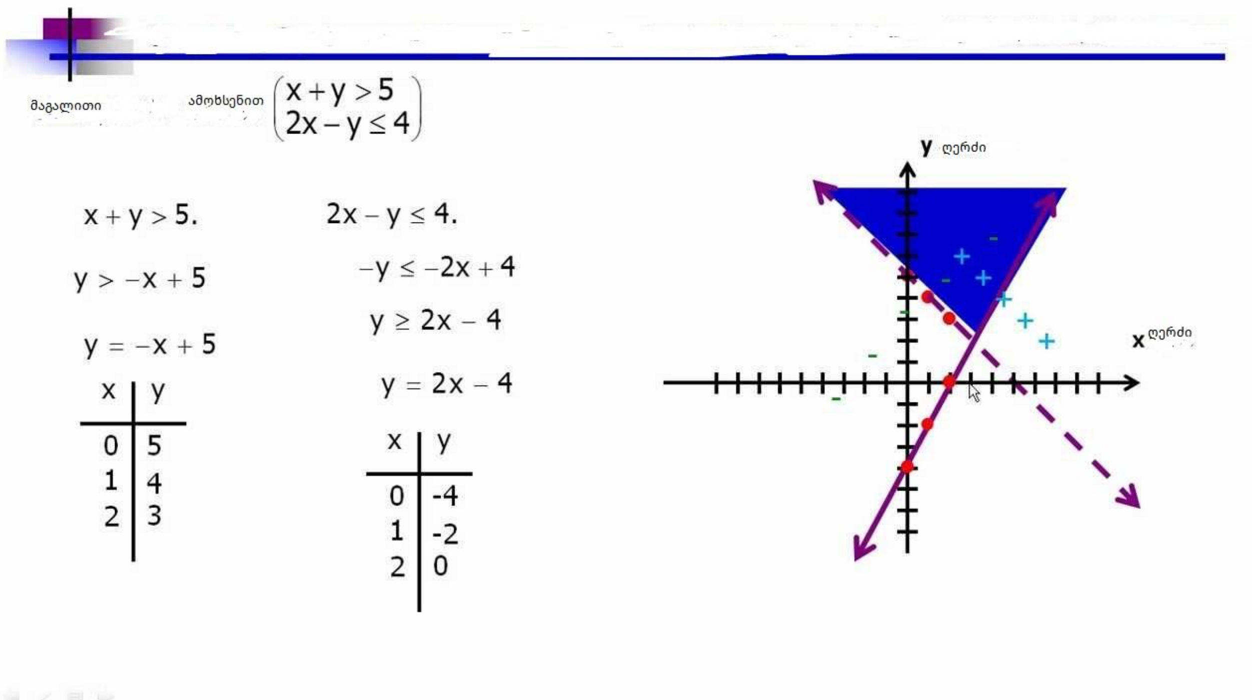
განტოლების ან განტოლებათა სისტემის ამოხსნადობის საკითხის გარკვევა, ამონახსნთა რაოდენობის დადგენა ხდება განტოლებაში ან განტოლებათა სისტემაში შემავალი კოეფიციენტის (კოეფიციენტების) მნიშვნელობის მიხედვით. კოეფიციენტი რაიმე ასოთია აღნიშნული; მას პარამეტრი ეწოდება. პარამეტრმა შეიძლება მიიღოს სხვადასხვა რიცხვითი მნიშვნელობა.

პარამეტრის შემცველი განტოლების (განტოლებათა სისტემის) ამოხსნა ნიშნავს იმის გარკვევას, თუ პარამეტრის რა მნიშვნელობისთვის აქვს (ან არა აქვს) განტოლებას (ან

განტოლებათა სისტემას) ამონახსნი, ამონახსნთა რაოდენობის დადგენას პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის, ფესვების ყველა შესაძლო მნიშვნელობების პოვნას და თითოეული მათგანისთვის პარამეტრის იმ მნიშვნელობის მითითებას, რომლის დროსაც ეს გამოსახულება განტოლების ფესვს წარმოადგენს. ანალოგიურად შეიძლება მსჯელობა პარამეტრის შემცველი უტოლობისა და უტოლობათა სისტემის შემთხვევაში.

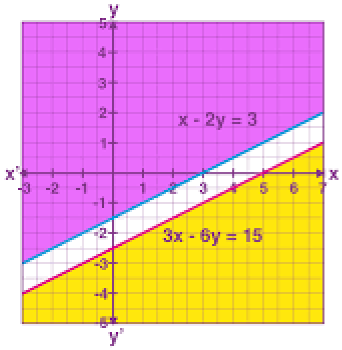
ორუცნობიანი უტოლობა.ორუცნობიან უტოლობათა სისტემა.

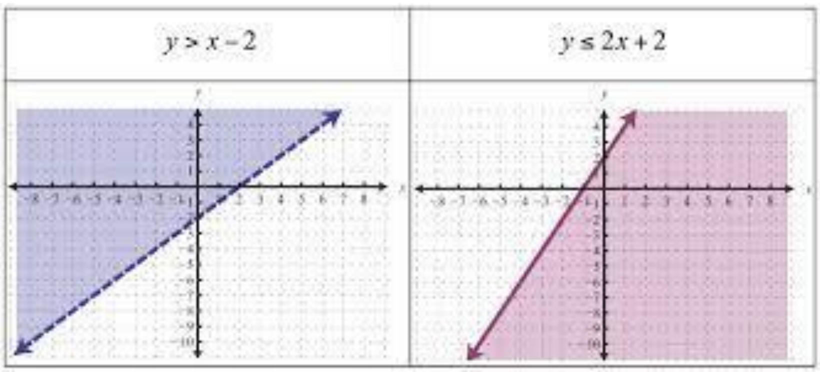


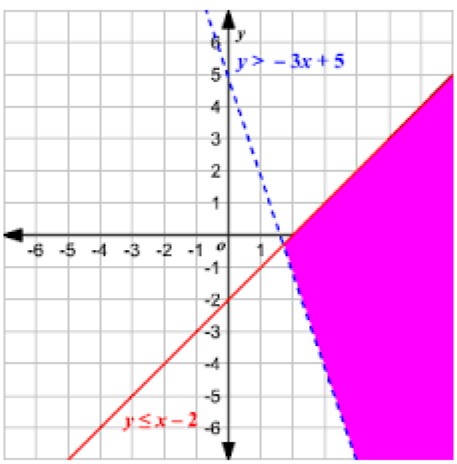


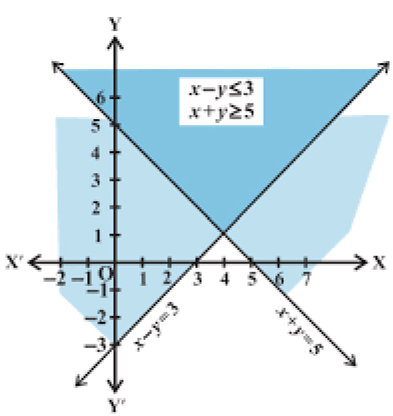
x	y
0	5
1	4
2	3

x	y
0	-4
1	-2
2	0


x - 2y = 3
3x - 6y = 15


$y > x-2$
$y \le 2x+2$


$y > -3x+5$
$y \le x-2$


$x-y \le 3$
$x+y \ge 5$
$x-y=3$
$x+y=5$

კომბინატორიკა

$P_{\boldsymbol{n}} = n!,\ \ A_n^1 = n,\ \ \ A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m\ \ 1 \le m < n,\ \ A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-m+1),$

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m},$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}\ \ (0 \le m \le n)$$

$$A_n^1 = 1,\ \ C_n^0 = 1,\ \ P_0 = 1.$$

ალბათობა და სტატისტიკა :

სიხშირე ეწოდება რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს მონაცემთა ერთობლიობაში თითოეული მონაცემის რაოდენობას.
ფარდობითი სიხშირე არის მონაცემის სიხშირის შეფარდება მონაცემთა საერთო რაოდენობასთან.

რიცხვითი მონაცემების მახასიათებლებს : საშუალოს, მოდასა და მედიანას ამ რიცხვითი მონაცემების **ცენტრალური ტენდენციის საზომები** ეწოდება.
მონაცემთა შემაჯამებელი რიცხვითი მახასიათებლებია: მოდა, მედიანა, საშუალო, დიაპაზონი, საშუალო კვადრატული გადახრა.
მოდა ეწოდება იმ რიცხვს, რომელიც მონაცემთა ერთობლიობაში ყველაზე ხშირად მეორდება.
მედიანა ეწოდება ზრდადობით დალაგებული მონაცემების შუა წევრს (როცა მონაცემტა რაოდენობა კენტია) ან შუა ორი წევრის ნახევარჯამს (როცა მონაცემთა რაოდენობა ლუწია)
საშუალო ეწოდება რიცხვს, რომელიც მიიღება მონაცემების ჯამის გაყოფით მათსავე რაოდენობაზე.
დიაპაზონი მონაცემთა გაფანტულობის საზომია და ეწოდება სხვაობას უდიდეს და უმცირეს მონაცემებს შორის.
საშუალო კვადრატული გადახრა არის გადახრების კვადრატების საშუალოდან არითმეტიკული კვადრატული ფესვი.
გადახრა-ესაა სხვაობა მონაცემსა და მონაცემთა საშუალოს შორის.

ალბათობის თეორია მათემატიკის ნაწილია. ის შეისწავლის შემთხვევით პროცესებს და მათ მათემატიკურ მოდელირებას. ალბათობის თეორიის პირველად ცნებას **ხდომილობა** წარმოადგენს.
ელემენტარული ხდომილობა არის რაიმე შემთხვევითი ექსპერიმენტის შედეგი. შემთხვევითი ექსპერიმენტებია-კარტის დასტიდან კარტის ამოღება, მონეტის აგდება, ყუთში ჩაყრილი ბურთულებიდან ერთ-ერთის ამოღება, კამათლის გაგორება... თითოეული ამ ექსპერიმენტის შედეგი ელემენტარული ხდომილობაა.
შეუძლებელია ხდომილობა, რომელიც მოცემული ექსპერიმენტის ჩატარებისას არ შეიძლება განხორციელდეს.
აუცილებელია ხდომილობა, რომელიც მოცემული ექსპერიმენტის ჩატარებისას ყოველთვის განხორციელდება.
არათავსებადია ხდომილობები, რომლებიც ერთდროულად არ შეიძლება განხორციელდეს (საერთო ელემენტარული ხდომილობა არა აქვთ).
ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე არის რაიმე შემთხვევითი ხდომილობების არათავსებადი შედეგების

სიმრავლე და აღინიშნება Ω-თი.

A ხდომილობის საწინააღმდეგო $\bar{A}$ არის ხდომილობა, რომელიც განხორციელდება მაშინ, როცა განხორციელდება A. $A + \bar{A} = \Omega$

A და B ხდომილობების ჯამი ეწოდება იმ ელემენტარული ხდომილობებისაგან შედგენილ C ხდომილობას, რომლებიც ეკუთვნიან ან A-ს ან B-ს ან ორივეს და ასე ჩაიწერება: $C = A \cup B$ ან $C = A + B$.

A და B ხდომილობების ნამრავლი ეწოდება იმ ელემენტარული ხდომილობებისაგან შედგენილ C ხდომილობას, რომელიც ეკუთვნის როგორც A-ს, ასევე B-ს და ასე ჩაიწერება:

$C = A \cap B$ ან $C = A \cdot B$.

A და B ხდომილობების სხვაობა ეწოდება იმ ელემენტარული ხდომილობებისაგან შედგენილ C ხდომილობას, რომლებიც ეკუთვნის A-ს და არ ეკუთვნის B-ს და ასე ჩაიწერება:

$C = A \backslash B$ ან $C = A - B$.

ნებისმიერი A ელემენტარული ხდომილობის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით $P(A) = \frac{m}{n}$, სადაც m არის A ხდომილობის ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რიცხვი, n-ელემენტარულ ხდომილობათა მთლიანი რაოდენობა. $m \leq n$.ნებისმიერი ხდომილობის ალბათობა მოთავსებულია 0-სა და 1-ს შორის. $0 \leq P(A) \leq 1$.

$P(A) = 1$, თუ A აუცილებელი ხდომილობაა.

$P(A) = 0$, თუ A შეუძლებელი ხდომილობაა.

წყვილ-წყვილად არათავსებად ხდომილობებს ეწოდება ხდომილობათა სრული სისტემა, თუ მათი ალბათობათა ჯამი 1-ის ტოლია.

ორი არათავსებადი ხდომილობის ჯამის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

A და B ხდომილობები დამოუკიდებელი ხდომილობებია, თუ სრულდება პირობა $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

ორი თავსებადი ხდომილობის ჯამის ალბათობა გამოითვლება ფორმულით

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

პირობითი ალბათობა: A ხდომილობის ალბათობა იმ პირობით, რომ განხორციელდა B ხდომილობა, გამოითვლება ფორმულით $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$ ან $P(A|B) = \frac{n(A \cdot B)}{n(B)}$, სადაც $n(A \cdot B)$და $n(B)$-ხდომილობათა რაოდენობებს აღნიშნავს. შესაბამისად გვაქვს ნამრავლის ალბათობის ფორმულები:

$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B)$; ან $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A)$ ეს ფორმულები სამართლიანია ნებისმიერი ოდენობის თანამამრავლის შემთხვევაში.

თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ და პირობითი ალბათობა გამოითვლება ფორმულით: $P(A|B) = P(A)$.

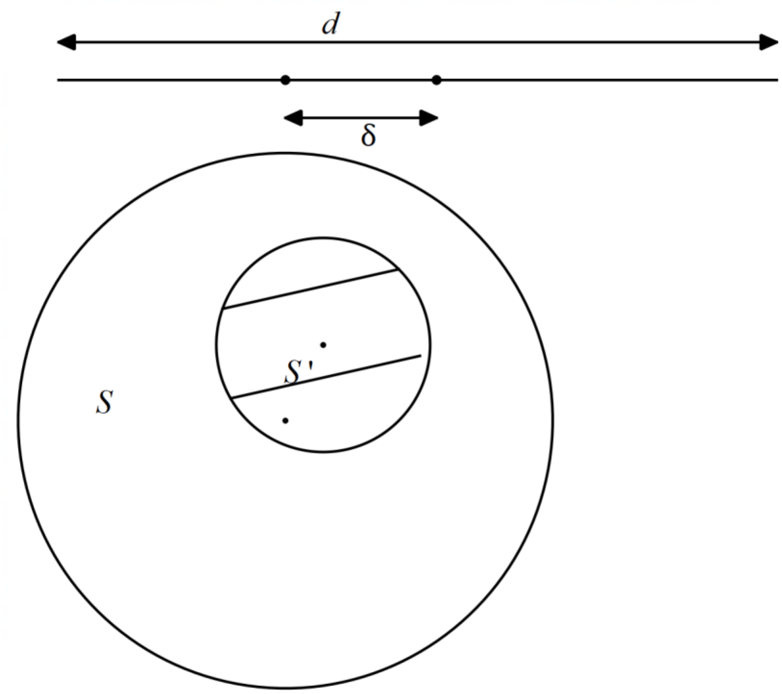
იაკობ ბერნულის ფორმულა: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

ბერნულის თეორემა: თუ n განმეორებითი, დამოუკიდებელი ცდიდან თითოეულში A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა p-ს ტოლია, ხოლო A ხდომილობის განხორციელების სიხშირე S_n-ია, მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის $(P\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon) < \frac{P(1-p)}{n\varepsilon^2} < \frac{1}{4n\varepsilon^2}$ ეს იმას ნიშნავს , რომ ,,წარმატებათა“ ფარდობითი სიხშირე ,,ახლოსაა“ ,,წარმატების“ p ალბათობასთან, როცა n→ ∞.(n-ის ზრდასთან ერთად უტოლობის მარჯვენა მხარე $\frac{1}{4n\varepsilon^2}$ მიისწრაფის ნულისაკენ).

გეომეტრიული ალბათობა. ალბათობა იმისა, რომ d სიგრძის მონაკვეთზე შემთხვევით შერჩეული წერტილი მოხვდება δ სიგრძის მონაკვეთზე, გამოითვლება ფორმულით: $\boldsymbol{\frac{\delta}{d}}$.

ანალოგიურად განისაზღვრება გეომეტრიული ალბათობა ბრტყელ ფიგურებში.

წერტილის მოხვედრის ალბათობა S ფიგურაში არის $\frac{S^*}{S}$ (სურათი. 7)



სურ.7

გეომეტრია.

პლანიმეტრია:

სამკუთხედი:

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

$|b-c| < a < b+c$

$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$, $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$ (m_a მედიანაა, h_a სიმაღლეა, l_a ბისექტრისაა, p ნახევარპერიმეტრია)

$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$

$S = \frac{1}{2}ab\sin C$, $S = rp$, $S = \frac{abc}{4R}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA, \quad \frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R.$

მართკუთხა სამკუთხედი:

$a^2 + b^2 = c^2, \quad h^2 = a_c \cdot b_c, \quad a^2 = c \cdot a_c, \quad b^2 = c \cdot b_c, \quad r = \frac{a+b-c}{2}, \; R = \frac{c}{2}, \; S = \frac{ab}{2}$

$h_a = b, \; h_b = a, \; h_c = \frac{ab}{c}, \quad m_c = R = \frac{c}{2},$

$a = csinA = ccosB, \quad c = \frac{a}{sinA} = \frac{a}{cosB} = \frac{b}{sinB} = \frac{b}{cosA}, \quad a = btgA.$

წესიერი სამკუთხედი:

$a = R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}r \qquad p = 3a, \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \; R = \frac{a}{\sqrt{3}}, \; r = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \; S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

ოთხკუთხედები:

$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot sin\alpha$

შემოხაზული ოთხკუთხედები:

a+c=b+d, S=$\frac{a+b+c+d}{2} \cdot r$

ჩახაზული ოთხკუთხედი:

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^0$, S= $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$;

სადაც p=$\frac{a+b+c+d}{2}$, $ac + bd = d_1 \cdot d_2$

პარალელოგრამი:

$AB \parallel CD, \; BC \parallel AD, \; AB = CD, \; BC = AD, \; \angle A = \angle C, \; \angle B = \angle D, \; \angle A + \angle B = 180^0$

$AO = OC, \; BO = OD, \; \Delta ABC = \Delta CDA, \; \Delta BCD = \Delta DAB, \; {d_1}^2 + {d_2}^2 = 2(a^2 + b^2)$

$S = \frac{d_1 d_2 sin\varphi}{2}, \; S_1 = S_2 = S_3 = S_4$

$S = AD \cdot BE = CD \cdot BF, \quad S = AD \cdot AB \cdot sinA$

რომბი:

$d_1 \perp d_2, \angle 1 = \angle 2, \; r = \frac{h}{2} = \frac{d_1 d_2}{4a}, \quad S = \frac{d_1 d_2}{2}, \; S = ah = 2ar = a^2 sin\alpha.$

მართკუთხედი:

$d_1 = d_2, \quad S = ab = \frac{d^2 sin\varphi}{2}.$

კვადრატი:

$a = R\sqrt{2} = 2r, \quad p = 4a, \; d = a\sqrt{2}, \; R = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad r = \frac{a}{2}, \quad S = a^2 = \frac{d^2}{2}$

ტრაპეცია:

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = EF \cdot h = \frac{d_1 d_2 sin\varphi}{2}$ სადაც d_1 და d_2 დიაგონალებია.

როცა $AB = CD \Rightarrow AK = \frac{a-b}{2}$; $EF = KD = \frac{a+b}{2}$.
როცა $AC \perp BD \Longrightarrow$h=$\frac{a+b}{2}$, $S = h^2$.

წესიერი ექვსკუთხედი:

$a = R = \frac{2}{\sqrt{3}}r$

$p = 6a = 6R = \frac{12}{\sqrt{3}}r$

r=$\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$,

$S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2 = 2\sqrt{3}r^2$

წრეწირი:

წრეწირის სიგრძე: C=2πR
წრის ფართობი: S=πR^2
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ წრეწირის განტოლება
$x^2 + y^2 \leq r^2$ უტოლობით გამოსახული გეომეტრიული ფიგურაა r-რადიუსიანი წრე.

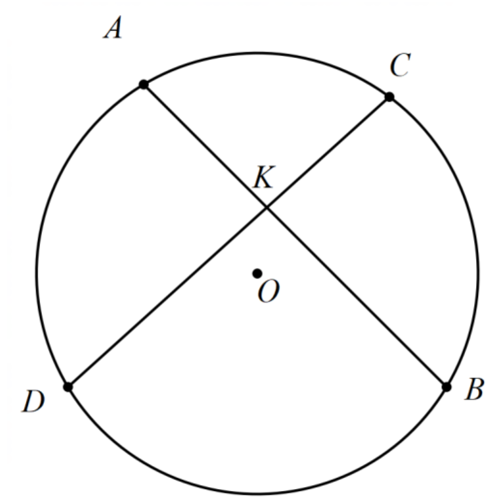
წრიული სექტორის ფართობი: S=$\frac{\pi R^2}{360^0} \cdot n^0$

რკალის სიგრძე: $l = \frac{\pi R}{180^0} \cdot n^0$

წრიული სეგმენტის ფართობი: $S = \frac{\pi R^2}{360^0} \cdot n^0 \pm \frac{1}{2}R^2 sinn^0$

ჩახაზული კუთხე:
$\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\gamma$

სადაც γ-თი აღნიშნულია l რკალის გრადუსული ზომა.

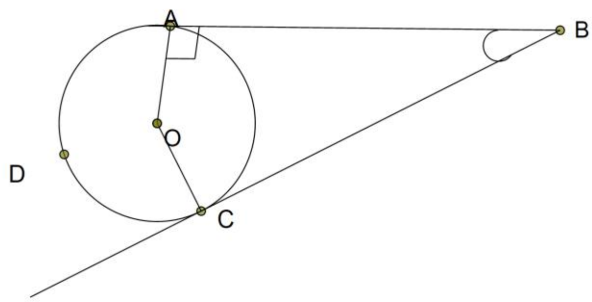


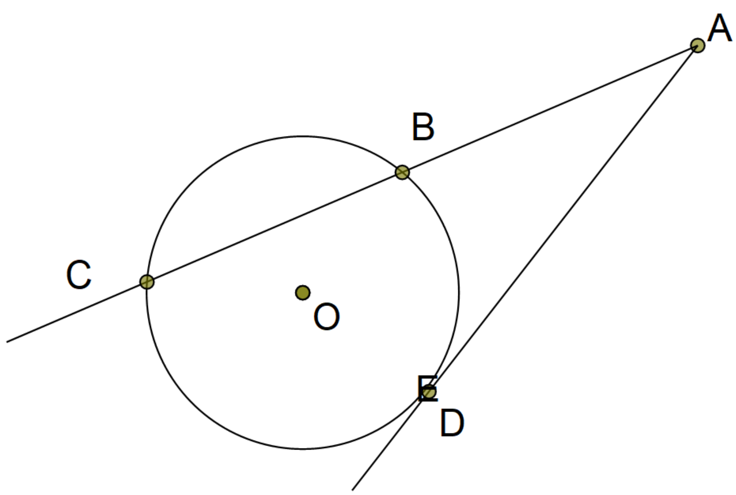
$\alpha = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CB})$, $AK \cdot KB = CK \cdot KD$

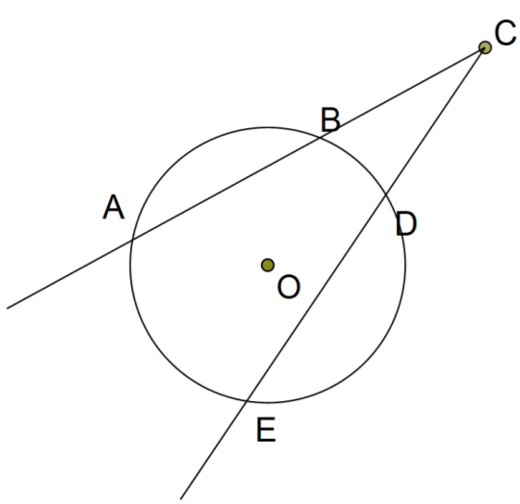
$OA \perp AB$, $AB = BC$, $\alpha = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ADC} - \overset{\frown}{AC})$

$\alpha = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{BD}\right)$, $AD^2 = AC \cdot AB$

$\alpha = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{BD}\right)$, $AC \cdot BC = EC \cdot CD$







სიბრტყის განტოლება. $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
მოცემულ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება. $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$
წრფის ზოგადი სახის განტოლება: Ax+By+C=0
წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით: y=kx+b
წრფის კანონიკური განტოლება: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$
წრფის პარამეტრული განტოლება: $\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases}$

ვექტორები:

ვექტორების შეკრება: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
ვექტორების გამოკლება: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$
ვექტორის დაშლა ორი არაკოლინეარული ვექტორის მიხედვით: $\vec{C}=x\vec{a}+y\vec{b}$
ვექტორის დაშლა სამი არაკომპლანარული ვექტორის მიხედვით: $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$
ვექტორის შეკრება და გამოკლება კოორდინატებში:
$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2)$
ვექტორის გამრავლება რიცხვზე: $\lambda\vec{a}=(\lambda x;\lambda y;\lambda z)$
ვექტორის სიგრძე: $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
მანძილი ორ წერტილს შორის: $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.
სკალარული ნამრავლი:
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\alpha;\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$
ვექტორებს შორის მდებარე კუთხის კოსინუსი:
$$cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}\cdot\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2}}$$
ვექტორების მართობულობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა:
$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\quad x_1y_1+x_2y_2=0$
ვექტორის მდებარეობა სიბრტყეზე განისაზღვრება ორი კოორდინატით: აბსცისა (x) და ორდინატი (y), აპლიკატი (z) ნულის ტოლია.

სტერეომეტრია:

პრიზმა.

დახრილი პრიზმა:
l-გვერდითი წიბო, $P_{კკ}$-პერპენდიკულარული კვეთის პერიმეტრი $S_{კკ}$-პერპენდიკულარული კვეთის ფართობი. $S_{გვ}=P_{კკ}\cdot l,\ V=S_{კკ}\cdot l=S_{ფ}\cdot H,\ \ S_{სრ}=S_{გვ}+2S_{ფ}$
მართი პრიზმა:

$S_{გვ} = P_{ფ} \cdot H, \quad V = S_{ფ} \cdot H, \quad S_{სრ} = S_{გვ} + 2S_{ფ}$

მართკუთხა პარალელეპიპედი:

a, b, c-განზომილებებია, d-დიაგონალი
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad V = abc, \quad V = S_{ფ} \cdot c, \quad S_{სრ} = 2(ab + ac + bc).$

კუბი:

a-წიბოს სიგრძეა, d-დიაგონალი.
$d = a\sqrt{3}, \quad V = a^3, \quad S_{სრ} = 6a^2.$

პირამიდა:

$S_{სრ} = S_{გვ} + S_{ფ}, \quad V = \frac{1}{3} S_{ფ} \cdot H$

წესიერი პირამიდა:

l-აპოთემაა, p-ფუძის პერიმეტრი.
$S_{გვ} = \frac{1}{2} p \cdot l, \qquad S_{სრ} = S_{გვ} + S_{ფ}.$

წაკვეთილი პირამიდა:

$\boldsymbol{S_1}$ ***და*** $\boldsymbol{S_2}$ ფუძეების ფართობებია.
$S_{სრ} = S_{გვ} + S_1 + S_2$

$V = \frac{1}{3} H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$

წესიერი წაკვეთილი პირამიდა

p_1 *და* p_2 ფუძეების პერიმეტრებია:
$S_{გვ} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)l$

ცილინდრი:
R-ცილინდრის ფუძის რადიუსია, H-სიმაღლე.
$S_{გვ} = 2\pi RH, \quad V = \pi R^2 H, \quad S_{სრ} = 2\pi R(R + H).$

კონუსი:

R-კონუსის ფუძის რადიუსი. L-მსახველი, H-სიმაღლე.
$S_{გვ} = \pi Rl, \quad V = \frac{1}{3}\pi R^2 H, \quad S_{სრ} = \pi R(R + l)$

წაკვეთილი კონუსი:
R_1 *და* R_2 ფუძეების რადიუსებია. l -მსახველი.
$S_{სრ} = \pi(R_1 + R_2)l + \pi({R_1}^2 + {R_2}^2),$
$S_{გვ} = \pi(R_1 + R_2)l,$ V=$\frac{1}{3}\pi H({R_1}^2 + R_1 R_2 + {R_2}^2)$

ბირთვი და სფერო:
$\boldsymbol{S} = 4\pi R^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3$

სფერული სეგმენტი:
$S = 2\pi Rh, \quad V = \pi h^2 (R - \frac{1}{3}h)$

სფერული სექტორი:

$S = \pi R(2h + \sqrt{2Rh - h^2}),\ \ V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$

სფერული შრე (სფერული სარტყელი):

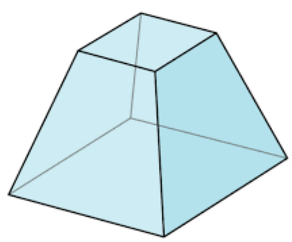
h-სარტყლის სიმაღლე.

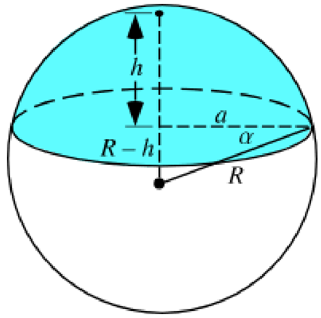
$S = 2\pi Rh, \qquad V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi({r_1}^2 + {r_2}^2)h.$

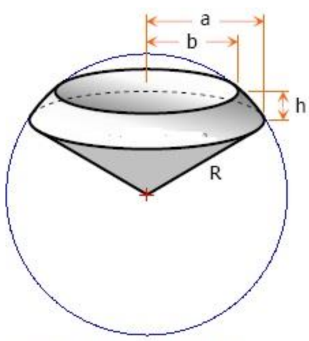
სფეროს განტოლება: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

ბირთვი გამოისახება უტოლობით: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \le r^2$

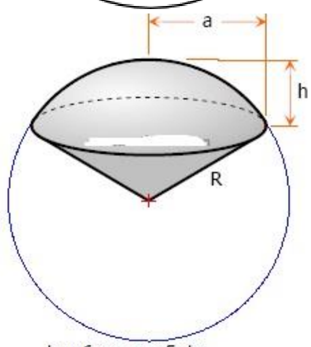
წაკვეთილი პირამიდა



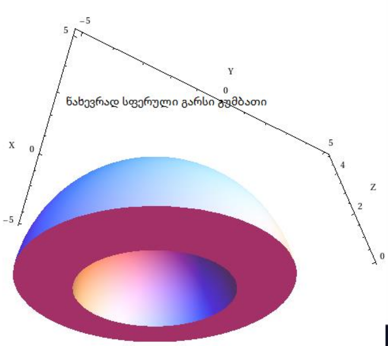


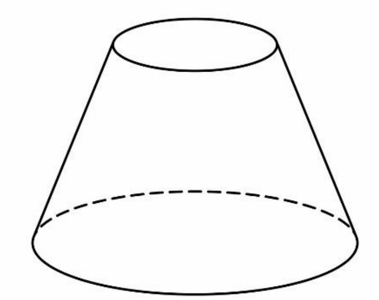


ღია სფერული სექტორი



სფერული კონუსი





წაკვეთილი კონუსი

წინსართი დიდი რიცხვებისათვის:

დეკა (დკ)-10

ჰექტო (ჰ)-10^2

კილო (კ)-10^3

მეგა (მგ)-10^6

გიგა (გ)-10^9

ტერა (ტ)-10^{12}

წინსართი მცირე რიცხვებისათვის:

დეცი (დ)-10^{-1}

სანტი (ს)-10^{-2}

მილი (მ)-10^{-3}

მიკრო (მკ)-10^{-6}

ნანო (ნ)-10^{-9}

პიკო (პკ)-10^{-12}

ლათინური ანბანი				
A,a-ა B,b-ბე C,c-ცე D,d-დე E,e-ე F,f-ეფ	G,g-ჟე H,h-ჰაშ I,i-ი J,j-ჟი K,k-კა L,l-ელ	M,m-ემ N.n-ენ O,o-ო P,p-პე Q,q-ქუ R,r-ერ	S,s-ეს T,t-ტე U,u-უ V,v-ვე	W,w-დუბლ-ვე X,x-იქს Y,y-იგრეკ Z,z-ზეტ

ბერძნული ანბანი				
Α, α-ალფა Β, β -ბეტა Γ, γ -გამა Δ, δ -დელტა Ε, ε -ეფსილონ Ζ, ζ -ძეტა	Η, η -ეტა Θ, θ -თეტა Ι, ι -იოტა Κ, κ -კაპა Λ, λ -ლამბდა Μ, μ -მიუ	Ν, ν -ნიუ Ξ, ξ -ქსი Ο, o -ომიკრონ Π, π -პი Ρ, ρ -რო Σ, σ -სიგმა	Τ, τ -ტაუ Υ, υ -იფსილონ Φ, φ -ფი Χ, χ -ხი	Ψ, ψ -ფსი Ω, ω -ომეგა

მარტივ რიცხვთა ცხრილი 1 დან 1000 მდე:

	2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
281	283	293	307	311	313	317	331	337	347
349	353	359	367	373	379	383	389	397	401
409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499	503	509	521	523
541	547	557	563	569	571	577	587	593	599
601	607	613	617	619	631	641	643	647	653
659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
733	739	743	751	757	761	769	773	787	797
809	811	821	823	827	829	839	853	857	859
863	877	881	883	887	907	911	919	929	937
941	947	953	967	971	977	983	991	997	

კვადრატების ცხრილი:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

კუბების ცხრილი:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729
1	1000	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859
2	8000	9261	10648	12167	13824	15625	17576	19683	21952	24389
3	27000	29791	32768	35937	39304	42875	46656	50653	54872	59319
4	64000	68921	74088	79507	85184	91125	97336	103823	110592	117649
5	125000	132651	140608	148877	157464	166375	175616	185193	195112	205379
6	216000	226981	238328	250047	262144	274625	287496	300763	314432	328509
7	343000	357911	373248	389017	405224	421875	438976	456533	474552	493039
8	512000	531441	551368	571787	592704	614125	636056	658503	681472	704969
9	729000	753571	778688	804357	830584	857375	884736	912673	941192	970299

კვადრატული ფესვების ცხრილი:

x	$\sqrt{x}$	x	$\sqrt{x}$	x	$\sqrt{x}$	x	$\sqrt{x}$
1	1.000	26	5.099	51	7.141	76	8.718
2	1.414	27	5.196	52	7.211	77	8.775
3	1.732	28	5.292	53	7.280	78	8.832
4	2.000	29	5.385	54	7.348	79	8.888
5	2.236	30	5.477	55	7.416	80	8.944
6	2.449	31	5.568	56	7.483	81	9.000
7	2.646	32	5.657	57	7.550	82	9.055
8	2.828	33	5.745	58	7.616	83	9.110
9	3.000	34	5.831	59	7.681	84	9.165
10	3.162	35	5.916	60	7.746	85	9.220
11	3.317	36	6.000	61	7.810	86	9.274
12	3.464	37	6.083	62	7.874	87	9.327
13	3.606	38	6.164	63	7.937	88	9.381
14	3.742	39	6.245	64	8.000	89	9.434
15	3.873	40	6.325	65	8.062	90	9.487
16	4.000	41	6.403	66	8.124	91	9.539
17	4.123	42	6.481	67	8.185	92	9.592
18	4.243	43	6.557	68	8.246	93	9.644
19	4.359	44	6.633	69	8.307	94	9.695
20	4.472	45	6.708	70	8.367	95	9.747
21	4.583	46	6.782	71	8.426	96	9.798
22	4.690	47	6.856	72	8.485	97	9.849
23	4.796	48	6.928	73	8.544	98	9.899
24	4.899	49	7.000	74	8.602	99	9.950
25	5.000	50	7.071	75	8.660		

კუბური ფესვების ცხრილი:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	1,25992	1,44225	1,5874	1,70998	1,81712	1,91293	2	2,08008
1	2,15443	2,22398	2,28943	2,35133	2,41014	2,46621	2,51984	2,57128	2,62074	2,6684
2	2,71442	2,75892	2,80204	2,84387	2,8845	2,92402	2,9625	3	3,03659	3,07232
3	3,10723	3,14138	3,1748	3,20753	3,23961	3,27107	3,30193	3,33222	3,36198	3,39121
4	3,41995	3,44822	3,47603	3,5034	3,53035	3,55689	3,58305	3,60883	3,63424	3,65931
5	3,68403	3,70843	3,73251	3,75629	3,77976	3,80295	3,82586	3,8485	3,87088	3,893
6	3,91487	3,9365	3,95789	3,97906	4	4,02073	4,04124	4,06155	4,08166	4,10157
7	4,12129	4,14082	4,16017	4,17934	4,19834	4,21716	4,23582	4,25432	4,27266	4,29084
8	4,30887	4,32675	4,34448	4,36207	4,37952	4,39683	4,414	4,43105	4,44796	4,46475
9	4,4814	4,49794	4,51436	4,53065	4,54684	4,5629	4,57886	4,5947	4,61044	4,62607

სინუსისა და კოსინუსის ცხრილი გრადუსების მიხედვით:

sin	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'	cos	1'	2'	3'
											0.0000	90°			
0°	0.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89°	3	6	9
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88°	3	6	9
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87°	3	6	9
3°	0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86°	3	6	9
4°	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0.0872	85°	3	6	9
5°	0.0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84°	3	6	9
6°	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83°	3	6	9
7°	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82°	3	6	9
8°	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81°	3	6	9
9°	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	0.1736	80°	3	6	9
10°	0.1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79°	3	6	9
11°	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78°	3	6	9
12°	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	77°	3	6	9
13°	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76°	3	6	8
14°	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	0.2588	75°	3	6	8
15°	0.2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74°	3	6	8
16°	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73°	3	6	8
17°	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72°	3	6	8
18°	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71°	3	6	8
19°	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0.3420	70°	3	5	8
20°	0.3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69°	3	5	8
21°	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68°	3	5	8
22°	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67°	3	5	8
23°	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66°	3	5	8
24°	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	0.4226	65°	3	5	8
25°	0.4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64°	3	5	8
26°	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63°	3	5	8
27°	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62°	3	5	8
28°	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61°	3	5	8
29°	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0.5000	60°	3	5	8
30°	0.5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59°	3	5	8
31°	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58°	2	5	7
32°	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57°	2	5	7
33°	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56°	2	5	7
34°	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	0.5736	55°	2	5	7
35°	0.5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	0.5878	54°	2	5	7
36°	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53°	2	5	7
37°	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52°	2	5	7
38°	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51°	2	5	7
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	0.6428	50°	2	4	7
40°	0.6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49°	2	4	7
41°	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48°	2	4	7
42°	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47°	2	4	6
43°	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	8909	6921	6934	6947	46°	2	4	6
44°	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	0.7071	45°	2	4	6
45°	0.7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193	44°	2	4	6
46°	7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	43°	2	4	6
47°	7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	7431	42°	2	4	6

48°	7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	7547	41°	2	4	6
49°	7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	0.7660	40°	2	4	6
50°	0.7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	7771	39°	2	4	6
51°	7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	7880	38°	2	4	5
52°	7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	7986	37°	2	4	5
53°	7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	8090	36°	2	3	5
54°	8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	0.8192	35°	2	3	5
55°	0.8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	8290	34°	2	3	5
56°	8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	8387	33°	2	3	5
57°	8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	8480	32°	2	3	5
58°	8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	8572	31°	2	3	5
59°	8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	0.8660	30°	1	3	4
60°	0.8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	29°	1	3	4
61°	8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	28°	1	3	4
62°	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	27°	1	3	4
63°	8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	26°	1	3	4
64°	8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	0.9063	25°	1	3	4
65°	0.9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	9135	24°	1	2	4
66°	9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205	23°	1	2	3
67°	9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9256	9272	22°	1	2	3
68°	9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	9336	21°	1	2	3
69°	9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9383	9391	0.9397	20°	1	2	3
70°	9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	0.9455	19°	1	2	3
71°	9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	18°	1	2	3
72°	9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563	17°	1	2	3
73°	9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613	16°	1	2	2
74°	9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	0.9659	15°	1	2	2
75°	9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	9703	14°	1	1	2
76°	9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	9744	13°	1	1	2
77°	9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	9781	12°	1	1	2
78°	9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	9816	11°	1	1	2
79°	9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	0.9848	10°	1	1	2
80°	0.9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	9877	9°	0	1	1
81°	9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	9903	8°	0	1	1
82°	9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	9925	7°	0	1	1
83°	9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	9945	6°	0	1	1
84°	9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	9962	5°	0	1	1
85°	9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9976	4°	0	0	1
86°	9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	9986	3°	0	0	0
87°	9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	9994	2°	0	0	0
88°	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0.9998	1°	0	0	0
89°	9998	9999	9999	9999	9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0°	0	0	0
90°	1.0000														
sin	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	**cos**	1'	2'	3'

ტანგენსისა და კოტანგენსის ცხრილი გრადუსების მიხედვით:

tg	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'	ctg	1'	2'	3'
											0	90°			
0°	0,000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89°	3	6	9
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88°	3	6	9
2°	0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	87°	3	6	9
3°	0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	86°	3	6	9
4°	0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0,0875	85°	3	6	9
5°	0,0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	84°	3	6	9
6°	1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	83°	3	6	9
7°	1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	82°	3	6	9
8°	1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	81°	3	6	9
9°	1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	0,1763	80°	3	6	9
10°	0,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79°	3	6	9
11°	1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78°	3	6	9
12°	2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77°	3	6	9
13°	2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76°	3	6	9
14°	2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	0,2679	75°	3	6	9
15°	0,2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74°	3	6	9
16°	2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73°	3	6	9
17°	3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72°	3	6	10
18°	3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71°	3	6	10
19°	3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	0,3640	70°	3	7	10
20°	0,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69°	3	7	10
21°	3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68°	3	7	10
22°	4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67°	3	7	10
23°	4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66°	3	7	10
24°	4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	0,4663	65°	4	7	11
25°	0,4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64°	4	7	11
26°	4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63°	4	7	11
27°	5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62°	4	7	11
28°	5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61°	4	8	11
29°	5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	0,5774	60°	4	8	12
30°	0,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59°	4	8	12
31°	6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58°	4	8	12
32°	6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57°	4	8	12
33°	6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56°	4	8	13
34°	6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	0,7002	55°	4	9	13
35°	0,7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54°	4	8	13
36°	7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53°	5	9	14°
37°	7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52°	5	9	14
38°	7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	51°	5	9	14
39°	8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	0,8391	50°	5	10	15
40°	0,8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	0,8693	49°	5	10	15
41°	8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48°	5	10	16
42°	9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47°	6	11	16
43°	9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	0,9657	46°	6	11	17
44°	9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1,0000	45°	6	11	17
45°	1,0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	0355	44°	6	12	18
46°	0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	0724	43°	6	12	18

47°	0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	1106	42°	6	13	19
48°	1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	1504	41°	7	13	20
49°	1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	1,1918	40°	7	14	21
50°	1,1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	2349	39°	7	14	22
51°	2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	2799	38°	8	15	23
52°	2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	3270	37°	8	16	24
53°	3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	3764	36°	8	16	25
54°	3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	1,4281	35°	9	17	26
55°	1,4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	4826	34°	9	18	27
56°	4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	5399	33°	10	19	29
57°	5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	6003	32°	10	20	30
58°	6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	6643	31°	11	21	32
59°	6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	1,7321	30°	11	23	34
60°	1,732	1,739	1,746	1,753	1,760	1,767	1,775	1,782	1,789	1,797	1,804	29°	1	2	4
61°	1,804	1,811	1,819	1,827	1,834	1,842	1,849	1,857	1,865	1,873	1,881	28°	1	3	4
62°	1,881	1,889	1,897	1,905	1,913	1,921	1,929	1,937	1,946	1,954	1,963	27°	1	3	4
63°	1,963	1,971	1,980	1,988	1,997	2,006	2,014	2,023	2,032	2,041	2,05	26°	1	3	4
64°	2,050	2,059	2,069	2,078	2,087	2,097	2,106	2,116	2,125	2,135	2,145	25°	2	3	5
65°	2,145	2,154	2,164	2,174	2,184	2,194	2,204	2,215	2,225	2,236	2,246	24°	2	3	5
66°	2,246	2,257	2,267	2,278	2,289	2,3	2,311	2,322	2,333	2,344	2,356	23°	2	4	5
67°	2,356	2,367	2,379	2,391	2,402	2,414	2,426	2,438	2,450	2,463	2,475	22°	2	4	6
68°	2,475	2,488	2,5	2,513	2,526	2,539	2,552	2,565	2,578	2,592	2,605	21°	2	4	6
69°	2,605	2,619	2,633	2,646	2,66	2,675	2,689	2,703	2,718	2,733	2,747	20°	2	5	7
70°	2,747	2,762	2,778	2,793	2,808	2,824	2,840	2,856	2,872	2,888	2,904	19°	3	5	8
71°	2,904	2,921	2,937	2,954	2,971	2,989	3,006	3,024	3,042	3,06	3,078	18°	3	6	9
72°	3,078	3,096	3,115	3,133	3,152	3,172	3,191	3,211	3,230	3,251	3,271	17°	3	6	10
73°	3,271	3,291	3,312	3,333	3,354	3,376							3	7	10
							3,398	3,42	3,442	3,465	3,487	16°	4	7	11
74°	3,487	3,511	3,534	3,558	3,582	3,606							4	8	12
							3,630	3,655	3,681	3,706	3,732	15°	4	8	13
75°	3,732	3,758	3,785	3,812	3,839	3,867							4	9	13
							3,895	3,923	3,952	3,981	4,011	14°	5	10	14
tg	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	**ctg**	1'	2'	3'

სარჩევი

ალგებრა:

გეომეტრია

პლანიმეტრია:

სტერეომეტრია:

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. ვ.ჭელიძე; ნ.ლომჯარია;გ.ხახუბია; მათემატიკა აბიტურიენტებისთვის (1972წ.)

2. ა. ბუაძე; თ. ზანდუკელი; ო.მელაძე; ს.შათაშვილი; მათემატიკა უმაღლესში შემსვლელთათვის (1986 წ.)

3. ს.თოფურია; ვ.ხოჭოლავა; გ.აბესაძე; ზ.მეტრეველი მათემატიკა I და II ნაწილი (2009 წ)

4. მ.სკანავის საერთო რედაქციით მათემატიკის ამოცანათა კრებული (1976 წ)

5. გ.გოგიშვილი; თ.ვეფხვაძე; ი.მებონია; ლ.ქურჩიშვილი გავიმეოროთ მათემატიკა (2003წ)

6. ქ.კეკელია, მ.კახელიშვილი, ლ.კერესელიძე სასკოლო ცნობარი მათემატიკაში (2016წ)

7.ნოდარ მაჭარაშვილი მათემატიკა I და II ნაწილი (2019წ)

8. ნ.რიბკინი გეომეტრია (1960წ)

9. ი.მაკარიჩევი და სხვები ალგებრა (1987წ)

10. პ.ლარიჩევი ალგებრა (1965 წ. და 1972 წ.)

შენიშვნების და რეკომენდაციებისთვის დაუკავშირდით ავტორს:
Email: murman.kintsurashvili@gmail.com
სოციალური ქსელი „facebook”: murman.kintsurashvili
ტელ: 551-14-50-65

4 862049 875522