

**ოპტიმალური და  
ადაკტური სისტემები**

**A. Gugushvili, V. Salukvadze, V. Chichinadze**

# **Optimal and Adaptive Systems**

**Georgian Technical University  
Tbilisi 1997**

**საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი**

**ა. გუგუშვილი, გ. სალუქვაძე, ვ. ჭიჭინაძე**

# **ოპტიმალური და ადაკური სისტემები**

**დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ  
სტუ-ს სასწავლო-მეთოდური  
საბჭოს მიერ**

**გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“**

**თბილისი 1997**

უ ა კ 519.6(075.8)

## ა.გუგუშვილი, მ.სალუქვაძე, ვ. ჭიჭინაძე

ოპტიმალური და ადაპტური სისტემები. თბილისი.: სტუ-ს გამომცემლობა. 1997. - ნაწ.1  
-290გვ., ნაწ.2-437გვ., ნაწ.3-318გვ

წიგნი წარმოადგენს სახელმძღვანელოს კურსისათვის - ოპტიმალური და ადაპტური სისტემები. შეიცავს ექსტრემალური ამოცანების გადაწყვეტის ძირითად მეთოდებს. მოყვანილია ამ მეთოდების თეორიული დასაბუთება და მათი მოკლე დახასიათება. განხილულია სასრული რიცხვის ცვლადების მქონე ფუნქციის მინიმიზაციის საკითხები, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებით აღწერილი პროცესების ოპტიმალური და ადაპტური მართვა. სახელმძღვანელოში განხილულია, აგრეთვე, სტოქასტიკური ფილტრაციის მეთოდები. მოკლედაა მოცემული შემთხვევითი პროცესებისა და სტოქასტიკური შეფასებების საფუძვლები.

წიგნი გათვლილია მკითხველთა ფართო წრისათვის: ინჟინრებისათვის, ასპირანტებისათვის, სტუდენტებისათვის და მათთვის, ვისაც სურს დაეუფლოს ოპტიმალური და ადაპტური სისტემების თანამედროვე თეორიას და პრაქტიკულ გამოყენებას.

## Гугушвили А. Ш. Салуквадзе М. Е. Чичинадзе В. К.

Оптимальные и адаптивные системы. - Тбилиси. Изд-во ГТУ, 1997 ч.1-290с., ч2-437с., ч.3-318с.

Книга представляет собой учебник по курсу - Оптимальные и адаптивные системы. Содержит основные методы решения экстремальных задач. Приводятся теоретическое обоснование и краткие характеристики этих методов. Рассматриваются задачи минимизации функции конечного числа переменных, задачи оптимального и адаптивного управления процессами, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Книга содержит теорию и методы стохастической фильтрации. В ней дан обзор линейных систем, изложены основы теорий случайных процессов и стохастического оценивания.

Книга предназначена для широкого круга читателей: студентов, аспирантов, инженеров, а также специалистов, интересующихся с применением методов оптимального и адаптивного управления для решения задач анализа и синтеза различных теоретических и практических задач управления.

რეცენზენტები:

ტ.მ.დ. პროფ. ნ. ლომინაძე

ტ.მ.დ. ა. თოფჩიშვილი

© გამომცემლობა "ტიქნიკური უნივერსიტეტი", 1997წ.

## ნაწილი მეორე

### დინამიკური სისტემების ოპტიმალური მართვა

შესავალი.....	11
ოპტიმალური მართვის ძირითადი ამოცანები.....	11
<b>თავი მეშვიდე</b> .....	<b>15</b>
ვარიაციული აღრიცხვის თეორია.....	15
7.1. შესავალი.....	15
7.2. ვარიაციული აღრიცხვის ძირითადი ცნებები.....	21
7.3. ვარიაციული ამოცანა, ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა. ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება.....	40
7.4. ლეჟანდრის პირობა.....	49
7.5. ეილერ-ლაგრანჟის განტოლების ზოგადი სახე.....	52
7.6. ფუნქციონალი, რომელიც დამოკიდებულია მრავალი ცვლადის ფუნქციაზე.....	56
7.7. ფუნქციონალი, რომელიც დამოკიდებულია მაღალი რიგის წარმოებულებზე.....	58
7.8. ვარიაციული ამოცანები პირობით ექსტრემუმზე.....	62
7.9. ვარიაციული აღრიცხვის იზოპერიმეტრული ამოცანა.....	70
7.10. ფუნქციონალის ექსტრემუმი მოძრავი საზღვრებით.....	77
7.11. ტეხილი ექსტრემალები. ეეიერშტრას-ერდმანის პირობა.....	90
7.12. ეილერის განტოლების კანონიკური ფორმა.....	94
7.13. ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები.....	96
7.14. ეილერ-ლაგრანჟის მეთოდი ოპტიმალური მართვის	

თეორიაში. ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა. მაგალითი.....	104
7.15. ვარიაციული აღრიცხვის მეთოდების გამოყენების მაგალითები.....	109
7.16. ოპტიმალური მართვის სისტემა და მართვის ოპტიმალური კანონის მონახვა.....	119

**თავი მერვე**.....123

ოპტიმალური მართვის ზოგადი ამოცანა.....	123
8.1. შეუშფოთებელი და შეშფოთებული მოძრაობები.....	123
8.2. ოპტიმალური მართვის ამოცანათა ორი ჯგუფი.....	128
8.3. ოპტიმალური სისტემის ზოგადი სტრუქტურა.....	134
8.4. ოპტიმალური მართვის თეორიის ძირითადი არსი.....	135

**თავი მეცხრე**.....144

ოპტიმალური ტრაექტორიის დაპროგრამების ამოცანა. მაქსიმუმის პრინციპი.....	144
9.1. ზოგადი განმარტებები.....	144
9.2. ზოგადი ამოცანის დასმა.....	148
9.3. მაქსიმუმის პრინციპი.....	150
9.4. ოპტიმალური სწრაფქმედების ამოცანა.....	154
9.5. ოპტიმალური სწრაფქმედების წრფივი ამოცანა.....	159
9.6. მეორე რიგის მაგალითები.....	163
9.7. მაიერის ამოცანა.....	192
9.8. უპილოტო თვითმფრინავის ფრენა.....	196
9.9. ოპტიმალური მართვის არაგლუვი ამოცანა.....	206
9.10. ოპტიმალური მართვის არაგლუვი ამოცანის გადაწყვეტა დემიანოვ-რუბინოვის კვასიდი- ფერენციალის საშუალებით.....	227
9.11. ოპტიმალური მართვის არაგლუვი ამოცანის გადაწყვეტა	

კლარკის სუბდიფერენციალის საშუალებით .....	237
9.12 ოპტიმიზაციის დინამიკური ამოცანების გადაწყვეტა	
Ψ- გარდქმნის მეთოდით.....	246
<b>თავი მათე</b> .....	256
<b>ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანა</b> .....	256
10.1. ზოგადი ამოცანის დასმა.....	256
10.2. ამოხსნა ლაგრანჟის მამრაველთა მეთოდით .....	258
10.3. ამოხსნა მაქსიმუმის პრინციპის მეთოდით .....	260
10.4. ოპტიმალობის საკმარისობის პირობის თეორემა.....	262
10.5. წრფივ-კვადრატული ამოცანა.....	265
10.6. წრფივ-კვადრატული ამოცანის ამოხსნა ლაგრანჟის მამრაველთა მეთოდით.....	266
10.7. წრფივ-კვადრატული ამოცანის ამოხსნა მაქსიმუმის პრინციპით .....	278
10.8. წრფივ-კვადრატული ამოცანის ამოხსნა ოპტიმალობის საკმარისობის თეორემის საფუძველზე.....	281
10.9. თანამგზავრის სტაბილიზაცია მოცემული მიმართულებით .....	290
<b>თავი მეთერთმეტი</b> .....	296
<b>დინამიკური პროგრამირების მეთოდი</b> .....	296
11.1. შესავალი. ოპტიმალობის პრინციპი .....	296
11.2. დინამიკური პროგრამირების მეთოდის დისკრეტული ვარიანტი. მაგალითები.....	299
11.3. დინამიკური პროგრამირების მეთოდის უწყვეტი ამოცანა. ბელმანის განტოლება. მაგალითები.....	314
11.4. დინამიკური პროგრამირების მეთოდი მაქსიმალური სწრაფქმედების ამოცანაში.....	324

11.5. წრფივი ოპტიმალური სისტემის სინთეზი თვისობრიობის კვადრატული კრიტერიუმით. მაგალითები.....	329
11.6. დინამიკური პროგრამირების მეთოდი, როგორც ოპტიმალობის საკმარისი პირობა.....	338
11.7. კვადრატული ოპტიმიზაცია, საკმარისობის პირობა.....	342
11.8. კროტოვის საკმარისობის პირობა.....	347
11.9. ოპტიმალური მართვის მეთოდების შედარება.....	355

**თავი მეთორმეტი.....362**

<b>ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანა.....</b>	<b>362</b>
12.1. შესავალი.....	362
12.2. პრობლემის ზოგადი მიმოხილვა.....	363
12.3. პრობლემის ზოგადი მათემატიკური დასმა.....	367
12.4. ოპტიმალური ტრაექტორიის დაპროგრამების ამოცანა ვექტორული კრიტერიუმის შემთხვევაში.....	368
12.5. მეორე რიგის საილუსტრაციო მაგალითი.....	378
12.6. რაკეტის ოპტიმალური აფრენა სივრცის მოცემულ წერტილში.....	388
12.7. რაკეტის ვერტიკალური აფრენა უჰაერო სივრცეში.....	397
12.8. წრფივი პროგრამირების ამოცანა.....	406
12.9. დაგეგმვის ამოცანა მეტალურგიულ წარმოებაში.....	414
ლიტერატურა.....	425



# ნაწილი მეორე

ღინამიკური სისტემების  
ოპტიმალური მართვა



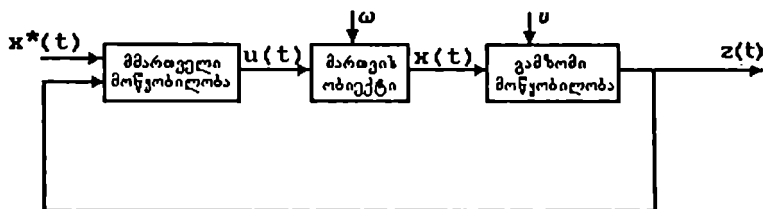
# ნაწილი მეორე

## დინამიკური სისტემების ოპტიმალური მართვა

### შესავალი

ოპტიმალური მართვის ძირითადი ამოცანები

ზოგადად ავტომატური მართვის სისტემა შესდგება რამდენიმე ძირითადი ელემენტისაგან (კვანძისაგან)



ნახ.7.1

გამზომი მოწყობილობების საშუალებით ინფორმაცია ობიექტის შესახებ გადაეწოდება მმართველი მოწყობილობის შესასვლელს. ასეთ სისტემებს უწოდებენ უკუკავშირიან სისტემებს, ანუ შეკრულ (შეკრულ) სისტემებს. თუ ასეთი ინფორმაცია არ მიეწოდება მმართველი მოწყობილობის შესასვლელს, სისტემას უწოდებენ გახსნილ სისტემას. ობიექტის მდგომარეობა დროის ყოველ მომენტში ხასიათდება  $x_1, \dots, x_n$  ცვლადებით, რომელსაც უწოდებენ მდგომარეობის კოორდინატებს. მოხერხებულია ისინი ჩავთვალით  $n$  განზომილებიანი მდგომარეობის ვექტორის  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  კოორდინატებად. გამზომი მოწყობილობა იძლევა ინფორმაციას ობიექტის მდგომარეობის შესახებ. თუ გაზომვის  $z(t)$  ვექტორის მიხედვით შეიძლება მოიძებნოს  $x(t)$  მდგომარეობის ყველა მნიშვნელობები, მაშინ სისტემა იქნება მთლიანად დაკვირვებადი. თუ მდგომარეობის რომელიმე ნაწილის  $x_i(t)$  აღდგენა არ

ხდება  $z(t)$  გაზომვის შედეგად, სისტემა არის არასრულად დაკვირვებადი. მმართველი მოწყობილობა გამოიმუშავებს მმართველ ზემოქმედებებს  $u(t)$ . ასეთი მმართველი ზემოქმედებები შეიძლება იყოს რამდენიმე. ამიტომ იგულისხმება, რომ  $u(t)$  არის  $r$  განზომილებიანი  $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_r(t)\}$  ვექტორი.

მმართველი მოწყობილობის შესასვლელზე მიეწოდება  $x^0$  დავალება, რომელიც შეიცავს ინფორმაციას იმის შესახებ, თუ როგორი უნდა იყოს ობიექტის მდგომარეობა-ეგრეთწოდებული ობიექტის "სასურველი" მდგომარეობა.

მართვის ობიექტზე მოქმედებს შემშფოთი ზემოქმედება  $w(t)$ , რომელიც წარმოადგენს დატვირთვას, ან ხმაურს. ობიექტის კოორდინატების გაზომვა შემთხვევითი  $v(t)$  ცდომილებით, ხდება გამზომი მოწყობილობების საშუალებით, რომელსაც უწოდებენ გაზომვის ხმაურს.

მმართველი მოწყობილობის ამოცანაა ისეთი  $M(t)$  მმართველი ზემოქმედების გამოიმუშავება, რომ ავტომატური სისტემის ფუნქციონირება მთლიანობაში იყოს საუკეთესო, გარკვეული აზრით.

დამატებითი სიძნელეები, ტექნიკური ამოცანების გადაწყვეტისას, წარმოიშობა, როდესაც მართვის ფუნქციებზე დადებული შეზღუდვები. რეალური ამოცანების გადაწყვეტისას ეს საკვებით კანონზომიერია. არ შეიძლება ფიზიკური სიდიდეების უსასრულოდ ცვლილება.

განვიხილოთ ოპტიმალური მართვის ამოცანის საკითხის მათემატიკური ფორმულირება. დაუშვათ, რომ ობიექტი აღიწერება შემდეგი ვექტორული დიფერენციალური განტოლებით

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) . \quad (7.1)$$

$x - n$ -განზომილებიანი მდგომარეობის ვექტორია.

$u - r$ -განზომილებიანი მართვის ვექტორია.

$f(x, u) - n$ - განზომილებიანი ვექტორია.

$u$ -მართვის ფუნქციაზე დადებულია შეზღუდვები. ვუშვებთ, რომ მართვის მნიშვნელობები ეკუთვნის რომელიღაც შეკრულ  $U$  არეს. ე.ი.  $u \in U$  დროის ნებისმიერ მომენტში. მაგალითად, თუ მართვის ვექტორი აკმაყოფილებს უტოლობებს

$$-1 \leq u_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad (7.2)$$

მაშინ მართვის  $u$  არე წარმოადგენს  $r$ -განზომილებიან კუბს.

ვუწოდოთ დასაშვები მართვა ისეთ უბან-უბან უწყვეტ  $u(t)$  ფუნქციას, რომლის მნიშვნელობები დროის ყოველ მომენტში ეკუთვნიან მართვის  $U$  არეს და შეიძლება ჰქონდეთ პირველი რიგის წყვეტები.

ისმის კითხვა: რატომ არ შეიძლება შევიზღუდოთ უწყვეტი ფუნქციებით? შემდეგში ჩვენ ვნახავთ, რომ ოპტიმალური მართვის უმარტივეს შემთხვევებშიც კი ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ უბან-უბან უწყვეტი მართვებით.  $f(x, y)$  ფუნქცია უნდა იყოს უწყვეტი თავის არგუმენტების მიმართ და უნდა ჰქონდეს უწყვეტი წარმოებულები  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ცვლადების მიმართ.

მართვის პროცესის თვისობრიობა ხასიათდება კრიტერიუმით, ანუ აირჩევა ფუნქციონალი

$$I(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u) dt \quad (7.3)$$

$F(x, u)$ -უწყვეტი ფუნქციაა და აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ცვლადების მიმართ.

ოპტიმალური მართვის ძირითადი ამოცანა შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოყალიბდეს:  $x$  ფაზურ სივრცეში მოცემულია ობიექტის საწყისი  $x_0$  და საბოლოო  $x^1$  მნიშვნელობები ყველა დასაშვებ  $u(t)$  მართვებს შორის, რომელთათვის (7.1) სისტემის ტრაექტორია გადის საწყის და საბოლოო მდგომარეობებზე (თუ ასეთი მართვები არსებობენ), აუცილებელია შეირჩეს ისეთი, რომლისთვისაც ფუნქციონალი

$$I(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u) dt \quad (7.4)$$

იღებს მინიმალურ მნიშვნელობას. აქ  $x(t)$ -არის (7.1) განტოლების ამონახსნი, საწყისი  $x(t_0) = x_0$  პირობით და შესა-

ბამისი  $u(t)$  მართვით.  $t_1$ -არის დროის მომენტი, რომლისთვისაც  $x(t_1) = x_1$ .

ოპტიმალური მართვის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა ოპტიმალური რეგულატორის სინთეზის ამოცანა, ე.ი.  $u$  ოპტიმალური მართვის განსაზღვრა, როგორც ფუნქცია  $z$  დაკვირვებისა, ან როგორც ფუნქცია ობიექტის  $x$  მდგომარეობის ვექტორისა.

იმის მიხედვით თუ როგორია  $F(x, u)$  ინტეგრალქვეშა გამოსახულება, შეიძლება მივიღოთ ოპტიმიზაციის სხვადასხვა კრიტერიუმები, რომლებიც გამოიყენებიან ოპტიმალური ავტომატური სისტემების პროექტირებისას.

ერთ-ერთი ყველაზე გავრცელებული კრიტერიუმია მართვის ობიექტის  $x_0$  საწყისი მდგომარეობიდან  $x_1$  საბოლოო მდგომარეობაში გარდამავალი პროცესის დროის ოპტიმიზაცია. ეს კრიტერიუმი (7.3) ფუნქციონალის კერძო შემთხვევაა, როდესაც  $F(x, u) \equiv 1$ , მაშინ

$$I(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 \quad (7.4)$$

ფართო გავრცელება ჰპოვა ე.წ. "კვადრატულმა" კრიტერიუმმა, რომელიც შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$I(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} (x^T Q(t)x + u^T R(t)u) dt + x^T(t_1) E x(t_1), \quad (7.5)$$

სადაც  $Q(t)$ ,  $R(t)$ ,  $E$  -სიმეტრიული მატრიცებია შესაბამისად  $(n \times n)$ ,  $(r \times r)$ ,  $(n \times n)$  განზომილების,  $T$ -ტრანსპონირების ოპერაციაა. აღნიშნული მატრიცების ელემენტების შერჩევა განსაზღვრავს ავტომატური მართვის სისტემის თვისობრიობის ისეთ ტექნიკურ მაჩვენებლებს, როგორიცაა გადარეგულირება, გარდამავალი პროცესის დრო და ასე შემდეგ. კვადრატული კრიტერიუმის საშუალებით შეიძლება გადაწყდეს ოპტიმალური რეგულატორის სინთეზის ამოცანა.

კიდევ ერთი ფუნქციონალი

$$I(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^r \beta_j |u_j| dt, \quad (7.6)$$

სადაც  $\beta_j \geq (j = 1, 2, \dots, r)$  წონითი ფუნქციებია, ითვალისწინებს მართვაზე მუშა სხეულის ხარჯს. ამოცანებს, როდესაც (7.6) ფუნქციონალის მინიმიზაცია ხდება, უწოდებენ საწვავის ხარჯის მართვის სისტემის ოპტიმიზაციის ამოცანებს. ასეთი ამოცანები წარმოიშობიან კოსმოსური აპარატების მართვისას, საფრენ აპარატებში საწვავის რაოდენობის ეკონომიისას და ასე შემდეგ.

ამა თუ იმ კრიტერიუმის არჩევა ხდება ტექნიკური მახასიათებლების გათვალისწინებით და ძირითადად დამოკიდებულია დამპროექტებლის გამოცდილებაზე.

## თავი მეშვიდე

### ვარიაციული აღრიცხვა

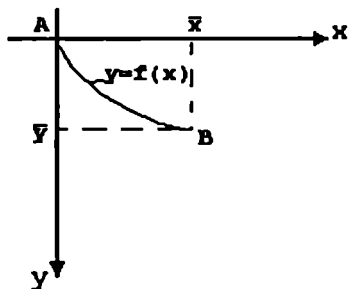
#### § 7.1 შესავალი

ვარიაციულმა აღრიცხვამ განვითარება დაიწყო 1696 წლიდან, როდესაც ი. ბერნულიმ ჩამოაყალიბა ამოცანა ბრახისტოხრონის შესახებ.

ამოცანა ბრახისტოხრონზე

სიტყვა "ბრახისტოხრონი" შედგება ორი სიტყვისაგან, რომელთა თარგმანია "უმოკლესი" და "დრო".

ეს ამოცანა 1696წ. ი.ბერნულის გამოკვლევების შემდეგ იქცა ვარიაციული თეორემების ჩამოყალიბების საფუძვლად. ვთქვათ, ვერტიკალურ სიბრტყეში მოცემულია ორი  $A$  და  $B$  წერტილი (ნახ.7.2), რომლებიც ერთ ვერტიკალზე არ მდებარეობენ.



ნახ..7.2

ეს წერტილები შეიძლება შეერთდეს სხვადასხვა მრუდებით (მათ შორის წრფით). დაუშვათ, რომ  $A$  წერტილში მოთავსებულია  $m$  მასის მატერიალური წერტილი, რომელიც სიმძიმის ძალის მოქმედებით შეიძლება სხვადასხვა მრუდებით "დაგორდეს"  $A$  წერტილიდან  $B$  წერტილში. გეომეტრიული ამოცანა ბრაზისტოხრონის შესახებ მდგომარეობს ისეთი მრუდის მოძებნაში (თუ ის არსებობს), რომელზეც მატერიალური წერტილი მიაღწევს  $B$  წერტილს უმოკლეს დროში. ამ მრუდს უწოდებენ ბრაზისტოხრონს.

ამოცანის მათემატიკური ფორმულირებისათვის შემოვიტანოთ სწორკუთხა კოორდინატთა სისტემა. მისი სათავე მოვათავსოთ  $A$  წერტილში. ორდინატთა ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად ჰვეით. აღნიშნოთ  $B$  წერტილის კოორდინატები  $(\bar{x}, \bar{y})$ . ამოცანის პირობის თანახმად მატერიალური წერტილი იწყებს მოძრაობას  $A(0,0)$  წერტილიდან საწყისი სიჩქარის გარეშე. ამიტომ ენერჯის შენახვის კანონის თანახმად

$$\frac{mv^2}{2} = mgy,$$

სადაც  $v$  -სიჩქარეა,  $y$  -მატერიალური წერტილის კოორდინატია,  $g$  -თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაა

$$v = \sqrt{2gy}.$$



$y = y(x)$  ის მრუდია, რომელზეც მოძრაობს მატერიალური წერტილი.  $s$ -აღნიშნით გავლილი მანძილი,  $t$ -დრო, მაშინ შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{dt}$$

მაშასადამე,

$$dt = \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{\sqrt{2gy}}$$

ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ

$$T = \int_0^T dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\bar{x}} \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{\sqrt{y}}$$

სადაც  $T$  ის დროა, როდესაც მატერიალური წერტილი მოძრაობს  $y = y(x)$  გასწვრივ ( $0 \leq x \leq \bar{x}$ )  $A$  წერტილიდან  $B$  წერტილში.  $T$  არის ფუნქციონალი, რომელიც განსაზღვრულია  $y = y(x)$  სახის მრუდების სიმრავლეზე, აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს

$$y(0) = 0, \quad y(\bar{x}) = \bar{y}.$$

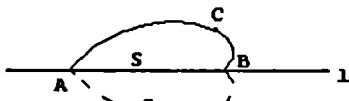
პირველი ვარიაციული ამოცანები გვხვდება ლეგენდებში დიდონას შესახებ. მოგაგონებთ მას, ის მოცემულია რომელი პოეტის ვერგილიუსის პოემაში "ენეიდა".

ფინიკიის დედოფალი დიდონა და მასთან ერთად ქალაქ ტირის მცხოვრებთა მცირე ჯგუფი, რომლებიც გაექცნენ ტირანს-დიდონას ძმას, დატოვეს მშობლიური ქალაქი და ბედნიერების საძიებლად ეწვივნენ აფრიკის ერთ-ერთ რაიონს (კერძოდ ტუნისის ყურეს). დიდონამ და მისმა თანმხლებლებმა გადაწყვიტეს აქ დაეარსებინათ დასახლება. ამას რასაკვირველია ადგილობრივ მცხოვრებლებში დიდი ენთუზიაზმი არ გამოუწვევია. დედოფალმა შესძლო დაერწმუნებინა ადგილობრივი ბელადი იარბა, რომ მისთვის დაეთმო მიწის ის ნაწილი, რომელსაც შემოწერს ხარის ტყავი. ბელადი უცებ ვერ მიხვდა ფინიკიელი ქალის ეშმაკობას. დიდონამ ხარის ტყავისაგან გააკეთა გრძელი ქაშარი, შემოფარგლა დიდი ტერიტორია და დაარსა ქალაქი კართაგენი. ყველაფერი ეს ხდებოდა 825 წ. ჩვენს წელთაღრიცხვამდე.

ანალიზის შემდეგ ისმება ოპტიმიზაციის ორი ამოცანა

1. დიდონას პირველი ამოცანა.

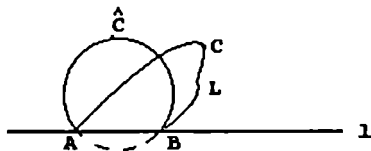
ყველა  $L$  სიგრძის რკალებს შორის, რომელსაც შეიცავს ქვესიბრტყე, შეზღუდული  $l$  წრფით და  $A, B \in l$  ბოლოებით, ვიპოვოთ ისეთი, რომელიც  $[AB]$  მონაკვეთთან ერთად შემოზღუდავს  $s$  მაქსიმალური ფართის ფიგურას (ნახ.7.3.)



ნახ.7.3

2. დიდონას მეორე ამოცანა

ქვესიბრტყეში მდებარე ყველა  $L$  სიგრძის რკალებს შორის შეზღუდული,  $l$  წრფით და  $A, B \in l$  მოცემული ბოლოებით, ვიპოვოთ ისეთი, რომელიც  $[AB]$  მონაკვეთთან ერთად შემოზღუდავს მაქსიმალური ფართის ფიგურას. (ნახ.7.4)



ნახ.7.4

1744 წელს ფრანგმა მეცნიერმა პიერ ლუი მორო დე მოპერტუიმ წამოაყენა პრინციპი, რომელიც ცნობილი გახდა როგორც უმცირესი მოქმედების პრინციპი. 1746 წელს მოპერტუიმ გამოაქვეყნა შრომა, "მოძრაობის და უძრაობის კანონები, გამოყვანილი მეტაფიზიკური პრინციპიდან". ეს მეტაფიზიკური პრინციპი დაყარებულია მოსაზრებებზე, რომ ბუნება ყოველთვის მოქმედებს უდიდესი ეკონომიით. ამ დებულებიდან გამომდინარე მოპერტუიმ გააკეთა შემდეგი დასკვნა: თუ ბუნებაში ხდება გარკვეული ცვლილებები, მაშინ სრული

მოქმედება, რომელიც აუცილებელია ამ ცვლილების განსახორციელებლად უნდა იყოს მინიმალურად შესაძლებელი.

პარალელურად და დამოუკიდებლად 1744 წელს ლეონარდ ეილერმა გამოაქვეყნა მკაცრი დამტკიცება იმისა, რომ უმცირესი მოქმედების პრინციპი შეიძლება გამოყენებული იყოს კონსერვატორული ძალების ველში მატერიალური წერტილის მოძრაობის აღსაწერად, ისეთისა, მაგალითად, როგორცაა პლანეტების მოძრაობა მზის გარშემო. ეილერმა აგრეთვე წარმოადგინა ჰიპოთეზა, რომ ყველა მოვლენისათვის სამყაროში შეიძლება ვიპოვოთ თავისი მაქსიმუმის და მინიმუმის წესი, რომელსაც ის ექვემდებარება. ეს შენიშვნა გამოჩნდა მისი სახელგანთქმული შრომის დამატებაში 1743წ. "მრუდი წირების მოძებნის მეთოდები, რომლებიც ექვემდებარებიან მაქსიმუმის ან მინიმუმის თვისებებს"-ვარიაციული აღრიცხვის პირველ სახელმძღვანელოში. როდესაც 1746 წელს მოპერტუიმ გამოაქვეყნა თავის ნაშრომი უმცირესი მოქმედების პრინციპზე, მან უკვე კარგად იცოდა ეილერის შედეგები, ვინაიდან ისინი მოკლედ აღწერა თავის ნაშრომში, მაგრამ შემდეგ დაამატა: "ეს შენიშვნები ჩემი პრინციპის ლამაზი გამოყენებაა პლანეტების მოძრაობის მიმართ", ამით მან სცადა დაემტკიცებინა თავისი პრიორიტეტი.

ეილერმა უარი თქვა თავის პრიორიტეტზე, რისთვისაც გაკრიტიკებული იყო ზოგიერთი მეცნიერების ისტორიკოსის მიერ. ჩვენ აღარ შევუდგებით დაწვრილებით მსჯელობას იმ მწვავე კამათის შესახებ, რომელიც წარმოებდა უმცირესი მოქმედების პრინციპის აღმოჩენის პრიორიტეტის შესახებ. (პრეტენზიებს აცხადებდნენ აგრეთვე კიონიგი და ლეიბნიცი).

მოპერტუიმ თავისი პრინციპი ააგო ღმერთის სრულყოფილებაზე. აპრობაცია გააკეთა ძალიან მცირე მაგალითებზე, ხოლო ზოგიერთი ბოლომდე არ იქნა გამოკვლეული. აღმოჩნდა, რომ უმცირესი მოქმედების პრინციპი ყოველთვის არ არის სწორი.

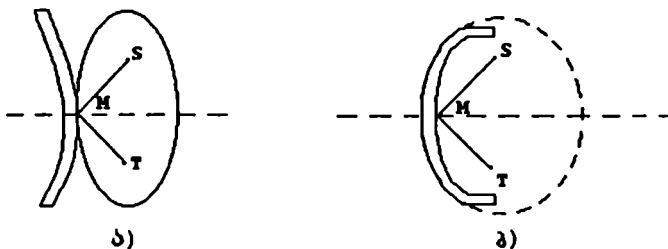
განვიხილოთ მაგალითი, რომელიც მოიყვანა მოპერტუიმ-სინათლის არეკვლა. აქ უმცირესი მოქმედების პრინციპს მიეყვართ დასკვნამდე, რომ სინათლის სხივი "ამოიჩივებს" ყველა შესაძლო მარშრუტებიდან-წყაროდან მიმდებამდე იმ მარშრუტს, რომელსაც სჭირდება უმცირესი დრო. (ეს არის ფერმას პრინციპი). თუ სინათლე ვრცელდება ერთგვაროვან გარემოში, მაშინ მინიმუმის პრინციპს მიეყვართ მარტივ

წესთან: სინათლის სხივი ვრცელდება უმოკლესი მანძილით, რომელიც შეაერთებს წყაროს და მიმღებს.

განვიხილოთ ერთგვაროვან გარემოში მოთავსებული სფერული სარკე.  $S$  წყარო და  $T$  მიმღები არიან სიმეტრიულად განლაგებული სფეროს ცენტრში გამავალი  $e$  წრფის მიმართ.  $S$  წყაროდან გამოშვებული  $SMT$  სხივის ტრაექტორია ხასიათდება  $M$  წერტილში. არეკვლის ტრაექტორია ხასიათდება  $M$  წერტილში არეკვლის სარკით და დაკერის  $T$  მიმღებით. უნდა გამოვიყენოთ ცნობილი წესი: დაცემის კუთხე ტოლია არეკვლის კუთხისა. (ნახ.7.5-ზე) მოცემულია ორი სიტუაცია: ამოზნექილი სარკე (ნახ.7.5.ა) და ჩაზნექილი სარკე (ნახ.7.5.ბ). ორივე შემთხვევაში  $M$  წერტილი წარმოადგენს სარკის და  $I$  წრფის გადაკვეთის წერტილს. გავატაროთ  $M$  წერტილზე ელიფსი ფოკუსებით  $S$  და  $T$  წერტილებში. თუ  $M_1$ -არის ელიფსის გარეთ მდებარე ნებისმიერი წერტილი.  $M_2$ -მის შიგნით, ხოლო  $M$ -ზედ ელიფსზე,  $S$  და  $T$  ფოკუსებია, მაშინ

$$|M_1S| + |M_1T| = |MS| + |MT| > |M_2S| + |M_2T|.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ამოზნექილი სარკის შემთხვევაში  $SMT$  ტრაექტორიას აქვს უმცირესი სიგრძე, ხოლო ჩაზნექილი სარკისათვის ეს ყოველთვის ასე არ არის (ნახ.7.5.ბ).  $S$  წყარო და  $T$  მიმღები სიმეტრიულდება სფეროს ცენტრის მიმართ. როგორც ჩანს ნებისმიერი გზა  $SM_2T$ , მოკლეა ვიდრე  $M_2 \rightarrow M_1$  გზა.



ნახ.7.5

ამრიგად, ბუნების მოქმედება (მინიმალური თუ მაქსიმალური) დამოკიდებულია სარკის ფორმაზე. ბევრმა მეცნიერმა აჩვენა, რომ მოპერტუის პრინციპი არის არაკორექტულად ფორმულირებული. მიუხედავად ამისა, ბუნების მოვლენების ოპტიმალობას დიდი ადგილი უკავია ფიზიკაში. ამ იდეამ ჩამოაყალიბა ვარიაციული აღრიცხვა, რომლის ფუძემდებლად ითვლებიან ლაგრანჟი და სამი შვეიცარიელი მათემატიკოსი ბაზელიდან: მემბი იოჰან და იაკობ ბერნულები და იოჰან ბერნულის მოწაფე-ლეონარდ ეილერი.

## § 7.2 ვარიაციული აღრიცხვის ძირითადი ცნებები

ვარიაციული აღრიცხვის ძირითადი ამოცანაა იმ ფუნქციების მოძებნა, რომლებიც მინიჭებენ ზოგიერთ სიდიდეებს ექსტრემუმს (მაქსიმუმს), დამოკიდებულს ამ ფუნქციებზე. [6], [12], [25], [45], [50], [66], [93], [104].

ვთქვათ, მოცემულია  $M$  კლასის  $y(x)$  ფუნქციები. თუ ყოველ ფუნქციას რომელიმე კანონით შეესაბამება გარკვეული  $I$  რიცხვი, მაშინ ამბობენ, რომ  $M$  კლასში განსაზღვრულია ფუნქციონალი. ფუნქციონალი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ფუნქციის განზოგადებული ცნება. მასში ფუნქცია ასრულებს დამოუკიდებელი ცვლადის როლს. ფუნქციონალი აღინიშნება კვადრატული ფრჩხილებით, ან ერთი ასოთი არგუმენტის გარეშე. მაგალითად

$$I = I[y(x)] = \int_0^1 y(x) dx \quad ; \quad (7.1)$$

$$1) \quad y(x) = x, I[x] = \int_0^1 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad ;$$

$$2) \quad y(x) = x^2, I[x^2] = \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \quad ;$$

$$3) \quad y(x) = \frac{1}{x+1}, I\left[\frac{1}{x+1}\right] = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln 2.$$

ყოველ ინტეგრირებად  $y(x)$  ფუნქციას შეესაბამება რიცხვი.

ფუნქციონალის შეიძლება იყოს მრუდის სიგრძე. რანეხი-ლოთ  $x, y$  სიბრტყეში მრუდები, რომლებიც აერთებენ  $x = 0; y = 0$  და  $x = 1; y = 1$  წერტილებს. დავუშვათ, რომ ამ მრუდების განტოლებები მოცემულია  $y = y(x)$  სახით. მაშინ მრუდის სიგრძის უსასრულოდ მცირე  $ds$  ელემენტი ტოლია

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad (7.2)$$

ხოლო მრუდის სიგრძე ტოლია ინტეგრალის

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (7.3)$$

აქ ფუნქციონალის დამოკიდებულია არამარტო  $y(x)$  ფუნქციაზე, არამედ მის  $y'(x)$  წარმოებულზეც.

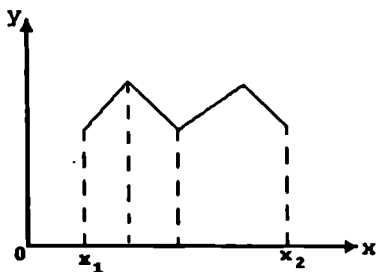
ფუნქციონალის უფრო განზოგადებული სახეა გამოსახულება

$$I = \int_a^b F(x; y; y') dx, \quad (7.4)$$

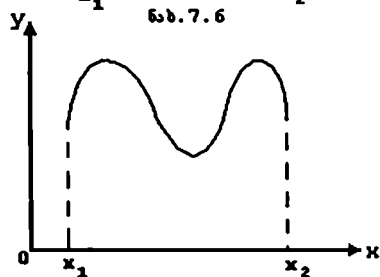
შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ ძირითადად (7.4) ტიპის ფუნქციონალს.

ისმება ამოცანა: მოიძებნოს  $y(x)$  ფუნქცია, რომლისთვისაც (7.4) ინტეგრალს აქვს ექსტრემალური მნიშვნელობა (მაქსიმუმი ან მინიმუმი).

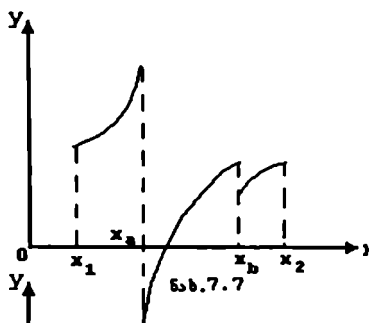
ყველაზე ბუნებრივია, რომ მოვძებნოთ ექსტრემუმი უწყვეტი ფუნქციების კლასში. ამ ფუნქციების კლასს მიეკუთვნებიან ფუნქციები, რომელთაც არა აქვთ წყვეტა, მდორედ გადადიან ერთი მნიშვნელობიდან მეორეში. (7.6 ნახაზზე) მოცემული უწყვეტი ფუნქციის სახე.



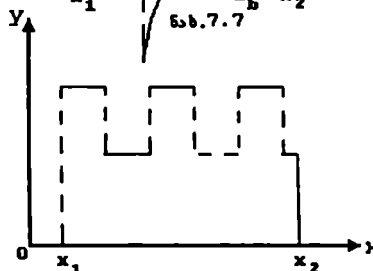
ნახ. 7.6



ნახ. 7.8



ნახ. 7.7



ნახ. 7.9

(ნახ. 7.7) მოცემულია ფუნქციები, რომლებსაც აქვთ წყვეტები ან უსასრულო მნიშვნელობები, როდესაც წყვეტის წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა მიისწრაფის უსასრულობისაკენ, ან კიდევ სასრულო მნიშვნელობები (ნახტომები).

მიზანშეწონილია მოვეძებნოთ ფუნქციონალის ექსტრემუმი უფრო ვიწრო კლასის ფუნქციებში, არა მარტო უწყვეტი, არამედ პირველი რიგის წარმოებულის მქონე ფუნქციებშიც. ასეთ ფუნქციებს უწოდებენ გლუვ ფუნქციებს (ნახ. 7.8). შეიძლება აგრეთვე გამოვიყენოთ უბან-უბან წვრფივი ფუნქციები (ნახ. 7.9). ძირითადად გამოვიყენებთ ბოლო ორი სახის ფუნქციებს.

ფუნქციონალის ექსტრემუმის მოძებნისას ერთმანეთთან უნდა შედარდეს ფუნქციონალის მნიშვნელობები ორი "მახლობელი" ფუნქციებისათვის. დავაზუსტოთ ფუნქციის "მახლობლობა". დავუშვათ, რომ მოცემულია ორი ფუნქცია შესაბამისი განტოლებებით:

$$y = y(x); \quad y_1 = y_1(x) . \quad (7.5)$$

ამ ფუნქციებს შორის მანძილი ვუწოდოთ სხვაობის მოდულის  $|y_1(x) - y(x)|$  მაქსიმუმს.  
 ფუნქციონალი

$$I = \int_a^b F(x, y; \dot{y}) dx \quad (7.6)$$

დამოკიდებულია არამარტო  $y$  ფუნქციაზე, არამედ მის  $\dot{y}(x)$  წარმოებულზეც. ამიტომ ფუნქციონალის მნიშვნელობები ფუნქციებისათვის, რომელთა შორის მანძილი მცირეა, (ნაკლებია ვიდრე წინასწარ მოცემული  $\epsilon$  რიცხვი) შეიძლება ძალიან განსხვავდებოდეს ერთმანეთისაგან. მოვიყვანოთ მაგალითი. ავიღოთ ფუნქციონალი

$$I = \int_0^{\pi} \dot{y}^2(x) dx \quad (7.7)$$

და განვიხილოთ ფუნქცია

$$y = \frac{1}{n} \sin x, \quad (7.8)$$

რომლის მანძილი აბსცისთა ღერძიდან (ე.ი.  $y = 0$ ) ტოლია  $1/n$  და მიისწრაფის ნულისაკენ  $n$ -ის შეუზღუდავი ზრდისას. ფუნქციონალის მნიშვნელობა არის დამოკიდებული  $n$ -ზე და ტოლია  $\pi/2$ , ხოლო  $y = 0$  ფუნქციისათვის ფუნქციონალის მნიშვნელობა ნულის ტოლია.

ამრიგად, "მახლობელი" ფუნქციებისათვის ფუნქციონალის მნიშვნელობები მკვეთრად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

ვუწოდოთ  $n$ -ური რიგის მახლობელი ფუნქციები თუ სრულდება პირობები:

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y(x)| &\leq \epsilon, \\ |\dot{y}_1(x) - \dot{y}(x)| &\leq \epsilon_1, \\ - - - - - \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$|y_1(n) - y^n(x)| \leq \epsilon_n.$$



მაშასადამე, ნულოვანი "მახლობელი" ფუნქციები არის "მახლობლობა" ამ ფუნქციებს შორის, პირველი რიგის "მახლობელი" ფუნქციებისათვის სამართლიანია

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y(x)| &\leq \varepsilon, \\ |\dot{y}_1(x) - \dot{y}(x)| &\leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (7.10)$$

ჩვენს განსახილველ მაგალითში,  $y_1 = \frac{1}{n} \sin x$  და  $y = 0$ , ნულოვანი რიგის მანძილი მიისწრაფის ნულისაკენ, როდესაც  $n \rightarrow \infty$ , ხოლო პირველი რიგის მანძილისათვის

$$\max |y_1(x) - y(x)| = \max |\cos nx - 0| = 1 \quad (7.11)$$

ნულისაკენ არ მიისწრაფის. ამიტომ ფუნქციონალის მნიშვნელობები სხვადასხვა მრუდეებზე, იმყოფებიან ერთმანეთის მიმართ პირველი რიგის მახლობლობაში. (7.7) ფუნქციონალის მნიშვნელობები აგრეთვე იქნებიან მახლობლები.

როდესაც საუბარია ფუნქციონალის ექსტრემუმზე მახლობელ ფუნქციებზე უნდა ვიცოდეთ რომელი მახლობელი ფუნქციებისთვისაა ეს სამართლიანი: ნულოვანი მახლობელი, თუ  $n$  რიგის მახლობელი ფუნქციებისათვის.

თუ  $I[y(x)]$  ფუნქციონალი აღწევს მინიმუმს ან მაქსიმუმს სხვა მრუდებთან შედარებით  $y = y_0(x)$  მრუდზე და სხვაობის მოდული  $|y(x) - y_0(x)|$  არის მცირე სიდიდე, მაშინ ასეთ მინიმუმს ან მაქსიმუმს უწოდებენ ძლიერს.

თუ ფუნქციონალი  $I[y(x)]$  აღწევს  $y = y_0(x)$  მრუდზე მინიმუმს ან მაქსიმუმს მხოლოდ იმ მრუდთან შედარებით, რომელიც ახლოსაა  $y = y_0(x)$  ფუნქციასთან პირველი რიგის მახლობლობის მიხედვით, ე.ი. უნდა გათვალისწინებული იყოს არა მარტო მახლობელი ფუნქციების ორდინატების მნიშვნელობა, არამედ წარმოებულების მნიშვნელობაც. ასეთ მინიმუმს ან მაქსიმუმს უწოდებენ სუსტს.

ცხადია, რომ თუ  $y = y_0(x)$ -ზე მიიღწევა ძლიერი მინიმუმი ან მაქსიმუმი, მით უფრო მიიღწევა სუსტი ექსტრემუმი. თუ მრუდი მახლობელია  $y = y_0(x)$  მრუდის პირველი რიგის მახლობლობით, მაშინ ის მახლობელია

ნულოვანი რიგის მახლობლობითაც. მაგრამ თუ პირიქითაა, ეს მსჯელობა იქნება არასწორი.

ყველა  $y(x)$  ფუნქციები შეიძლება განვიხილოთ როგორც ფუნქციონალური სივრცის ელემენტები. იგულისხმება, რომ ეს სივრცეები ნორმირებულია, ე.ი. სივრცის ყველა  $y$  ელემენტს შეესაბამება არაუარყოფითი  $\|y\|$  რიცხვი, რომელსაც უწოდებენ ნორმას. ამასთან სრულდება შემდეგი პირობები:

$$1) \|y\| \geq 0, \text{ ამასთან } \|y\| = 0 \text{ როდესაც } y = 0$$

$$2) \|\alpha y\| = |\alpha| \|y\|, \text{ სადაც } \alpha \text{-არის რიცხვი.}$$

$$3) \|y_1 + y_2\| \leq \|y_1\| + \|y_2\| \text{ სამკუთხედის უტოლობა.}$$

ფუნქციონალურ სივრცეში მანძილი  $y_1$  და  $y_2$  ელემენტებს შორის განისაზღვრება ტოლობით

$$\rho(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|. \quad (7.12)$$

ჩვენ განვიხილავთ შემდეგ ფუნქციონალურ სივრცეებს:

1.  $C$  ფუნქციონალური სივრცე, რომელიც წარმოადგენს უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლეს, განსაზღვრულს  $[a, b]$  არეში. ნორმა ამ სივრცეში გამოითვლება ფორმულით

$$\|y(x)\| = \max_{x \in [a, b]} |y(x)|. \quad (7.13)$$

2.  $C_1$  ფუნქციონალური სივრცე, რომელიც შესდგება  $[a, b]$  არეში უწყვეტი ფუნქციისაგან და ამავე არეში აქვს უწყვეტი პირველი წარმოებული.

ნორმას აქვს სახე

$$\|y(x)\|_1 = \max_{x \in [a, b]} |y(x)| + \max_{x \in [a, b]} |y'(x)|.$$

3.  $C_n$  ფუნქციონალური სივრცე, რომელიც შესდგება  $[a, b]$  არეში უწყვეტი ფუნქციებისაგან და ამავე არეში  $n$  რიგამდე უწყვეტი წარმოებულებისაგან. ნორმას აქვს სახე

$$\|y(x)\|_n = \sum_{k=0}^n \max_{x \in [a, b]} |y^k(x)|. \quad (7.14)$$

ადგილი შესაძლებელია, რომ ნორმები  $C_1, C_n$  სივრცეებში აკმაყოფილებენ ზემოთ ჩამოთვლილ სამ პირობას.

შემოვიტანოთ ფუნქციონალის უწყვეტობის ცნება.  $I[y]$  ფუნქციონალს უწოდებენ  $y_0$  წერტილში უწყვეტს, თუ ნებისმიერი  $\varepsilon > 0$  რიცხვისათვის შეიძლება მიუთითოთ ისეთი რიცხვი  $\delta(\varepsilon, y_0) > 0$ , რომ  $\|y - y_0\| \leq \delta$  დროს სამართლიანია პირობა  $|I[y] - I[y_0]| \leq \varepsilon$ .  $I[y]$  უწოდებენ უწყვეტს  $G$  არეში, თუ უწყვეტია არეს ყველა წერტილში. დაეუშვათ,  $R$  წრფივი ნორმირებული სივრცეა, მასზე მოცემულია  $I[y]$  ფუნქციონალი. ამ ფუნქციონალს უწოდებენ წრფივს, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

ა) ფუნქციონალის განსაზღვრის არედან ნებისმიერი  $y_1$  და  $y_2$  ფუნქციებისათვის სრულდება

$$f(y_1 + y_2) = f(y_1) + f(y_2). \quad (7.15)$$

ბ) ნებისმიერი  $\alpha$  რიცხვისათვის სამართლიანია

$$I(\alpha y) = \alpha I(y) \quad (7.16)$$

ჩვენ ძირითადად გამოვიყენებთ უწყვეტ წრფივ ფუნქციონალებს.

შემოვიტანოთ ფუნქციონალის დიფერენცირებადობის და დიფერენციალის ცნებები.  $I[y]$  ფუნქციონალს, განსაზღვრულს წრფივ ნორმირებულ  $R$  სივრცეში, უწოდებენ დიფერენცირებადს  $y_0 \in R$  წერტილში, თუ არსებობს წრფივი  $h$  ნაზრდის მიმართ,  $\varphi_1(y_0, h)$  ფუნქციონალი, მაშინ  $y_0$  ფუნქციის ნებისმიერი დასაშვები  $h \in R$  ნაზრდისათვის ფუნქციონალს აქვს სახე:

$$\Delta I[y_0, h] = I[y_0 + h] - I[y_0] = \varphi_1[y_0, \alpha] + \alpha[y_0, h]\|h\|,$$

ამასთან

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \alpha[y_0, h] = 0.$$

$h$  ნაზრდის მიმართ წრფე  $\varphi_1(y_0, h)$  ფუნქციონალს უწოდებენ  $I[y]$  ფუნქციონალის დიფერენციალს, ან მის პირველ ვარიაციას. პირველი ვარიაცია აღემატება

$$\varphi_1[y_0, h] = \delta I[h].$$

$I[y]$  ფუნქციონალის არის დიფერენცი-რებადი  $R$  ფუნქციონალური სივრცის რომელიღაც  $G$  არეში, თუ დიფერენცი-რებადია ამ არეს ყველა წერტილში. ფუნქციონალური ანალიზში  $\varphi_1(y_0, h)$  წრფე ფუნქციონალს უწოდებენ ძლიერ დიფერენციალს (ფრეშეს დიფერენციალი). სუსტი დიფერენციალი (გატოს დიფერენციალი) გამოითვლება შემდეგნაირად: დავაფიქსირით ფუნქციები  $y_0(x)$  და  $h_0(x)$ .  $y(x)$  ფუნქცია ჩაეწეროს შემდეგი სახით

$$y(x) = y_0(x) + th_0(x),$$

სადაც  $t$ -ნამდვილი ცვლადია.  $I[y]$  დიფერენციალის სუსტი დიფერენციალი  $y_0$  წერტილში ეწოდება ზღვარს

$$DI[y_0, h] = \left. \frac{d}{dt} I[y_0 + th_0] \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I[y_0 + th_0] - I[y_0]}{t}. \quad (7.17)$$

თუ  $I[y]$  ფუნქციონალს აქვს  $y_0$  წერტილში ძლიერი დიფერენციალი, მაშინ მას აქვს სუსტიც, ამასთან ეს დიფერენციალები თანხვედრიან ერთმანეთს. ძლიერი დიფერენციალის არსებობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} \Delta I[y_0, h] &= I[y_0 + th_0] - I[y_0] = \delta I[y_0, th_0] + 0(th_0) = \\ &= t\delta I[y_0, h_0] + 0(th_0), \end{aligned}$$

სადაც

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{0(z)}{\|z\|} = 0,$$

მაშინ

$$DI[y_0, h] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t\delta I[y_0, h_0] + 0(th_0)}{t} = \delta I[y_0, h_0]. \quad (7.18)$$

რაც ამტკიცებს ჩვენს მსჯელობას. უნდა აღინიშნოს, რომ თუ  $I[y]$  ფუნქციონალი არის დიფერენცირებადი (აქვს ძლიერი დიფერენციალი) ყველა  $y$ -თვის, რომლებიც ეკუთვნიან  $G$  არეს, მაშინ  $F(t) = I[y_0 + th_0]$  ფუნქცია დიფერენცირებადია  $t$  ყველა მნიშვნელობისათვის რომლისთვისაც  $y_0 + th_0 \in G$ , ამასთან

$$\dot{F}(t) = \delta I[y_0, h_0].$$

სანამ განვიხილავდეთ რამდენიმე მაგალითს, გავიხსენოთ ზოგიერთი განსაღვრებები, რომლებიც დაგვეხმარებიან მაგალითების ამოხსნაში.

ყველა  $f(t)$  ზომადი ფუნქციების კლასი, რომელთათვის  $|f(t)|^p$  ( $p > 0$ ) ინტეგრებადია  $[a, b]$  მონაკვეთში აღნიშნოთ  $L^p[a, b]$ . თუ ცნობილია რომელ მონაკვეთში მიმდინარეობს ინტეგრირება, გამოიყენება გამარტივებული აღნიშვნა  $L^p$   $L$  მაგივრად გამოიყენება  $L$ .

$x(t) \in L^p[a, b]$  ფუნქციათა კლასი შეიძლება ჩავთვალოთ წრფივ სივრცედ, თუ შემოვიტანთ ნორმას

$$\|x\| = \|x\|_{L^p} = \left\{ \int_a^b |x(t)|^p dt \right\}^{1/p}$$

$L^p$  სივრცეში ნორმას აქვს მარტივი ფიზიკური შინაარსი. მაგალითად, თუ  $p = 2$ , მაშინ ნორმა

$$\|x\|_2 = \int_a^b |x(t)|^2 dt$$

წარმოადგენს ენერგიას, რომელიც გამოიყოფა წრედში დენის გავლისას ერთეულოვან წინააღმდეგობაზე.  $p = 1$  შემთხვევაში ნორმა

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt$$

ექვივალენტურია მუხტისა, რომელიც გროვდება ერთეულოვან კონდენსატორზე, მასში დენის გავლისას.  $p \rightarrow \infty$  შემ-

თხვევაში მივიღებთ ზომადი ფუნქციების  $L^{\infty}$  სივრცეს, რომელთაგანაც თვითოეული შეზღუდულია.

ზომადი ფუნქციის განსაზღვრა. შეუღლებული და თვითშეუღლებული ოპერატორები

თუ წრფივი ნორმირებული სივრცე კრებადობის თვალსაზრისით არის სრული ნორმის, მაშინ მას უწოდებენ ბანახის სივრცეს და აღნიშნავენ  $B$ .

ვთქვათ,  $X$  და  $Y$  აღნიშნავენ ორ ბანახის სივრცეს, შესაბამისად  $x$  და  $y$  ელემენტებით. თუ მოცემულია კანონი, რომლის მიხედვითაც თვითოეულ  $x \in X$  შეესაბამება რომელიღაც  $y \in Y$  ელემენტი, მაშინ ამბობენ, რომ  $x$  განსაზღვრულია ოპერატორით  $y = A(x)$   $Y$  არსებობის არეთი.  $F$  ოპერატორს, რომლის არსებობის არეა რიცხვთა სიმრავლე (ე.ი. სივრცე-რიცხვითი წრფეა) უწოდებენ ფუნქციონალს.

ვთქვათ წრფივი  $A$  ოპერატორი მოქმედებს  $X$  ნორმირებული სივრციდან  $Y$  ნორმირებულ სივრცეში. წრფივი ფუნქციონალი  $Y$  სივრცეში აღენიშნოთ  $f$ -ით. სხვანაირად რომ ვთქვათ  $f$  წარმოადგენს  $\bar{Y}$  შეუღლებული სივრცის ელემენტს. ნებისმიერი  $x \in X$  მივიღოთ  $F(x) = f[A(x)]$ .

მიღებული ფუნქციონალი წარმოადგენს  $f$  ფუნქციონალის და  $A$  ოპერატორის ნამრავლს, ე.ი.  $F = fA$ . ვინაიდან  $F$  წრფივია, ამიტომ

$$\|F\| \leq \|f\| \|A\|.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველ  $f \in Y$  ფუნქციონალს შესაბამეა რომელიღაც  $F \in X$  ფუნქციონალი.  $A^*$  ოპერატორს, რომელიც რეალიზაციას უკეთებს ამ თანათარღობას, უწოდებენ  $A$ -ს მიმართ შეუღლებულ ოპერატორს. ამრიგად  $F = A^*(f)$  იგივეა რაც  $F(x) = f[A(x)]$ , ან  $A^*(f) = f(A)$ .

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ  $A^*$  არის წრფივი ოპერატორი, ამასთან  $\|A\| = \|A^*\|$

მაგალითისათვის ავიღოთ  $L^p$  ( $p > 1$ ) სივრცეში ინტეგრალური ოპერატორი უწყვეტი ბირთვით

$$y = A(x) = \int_0^{\tau} k(t, \tau) x(\tau) d\tau$$

მივიღოთ მხედველობაში, რომ  $(f \in \bar{L}^p) = L^q, p^{-1} + q^{-1} = 1$

$$f(y) = \int_0^{\tau} \varphi(t) y(t) dt \quad \varphi \in L^q \quad \text{ე.ი. გვეჭნება}$$

$$\begin{aligned} f[A(x)] &= \int_0^{\tau} \varphi(t) \int_0^{\tau} k(t, \tau) x(\tau) d\tau dt = \int_0^{\tau} \left[ \int_0^{\tau} k(t, \tau) \varphi(t) dt \right] x(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{\tau} \psi(\tau) x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

ამრიგად, შეუღლებული  $A^*$  ოპერატორი მიიღებს სახეს  $F = A^*(f)$ ,

$$A^*(\varphi) = \psi(\tau) = \int_0^{\tau} k^*(\tau, t) \varphi(t) dt = \int_0^{\tau} k(\tau, t) \varphi(t) dt$$

ჰილბერტის სივრცეში ზოგადი ფუნქციონალური წარმოდგენის სკალარულ ნამრავლს  $F(x) = (x, \nu)$  ( $\|F\| = \|\nu\|$ ). ამრიგად, ჩვენ მივიღეართ დასკვნამდე, რომ  $A$  და  $A^*$  ოპერატორები დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან თანაფარდობით  $(A(x), y) = (x, A^*(y))$ . თუ  $A^* = A$  მაშინ ამ ოპერატორს უწოდებენ თვითშეუღლებულ ოპერატორს. ზევით განხილული ინტეგრალური ოპერატორისათვის თვითშეუღლების პირობა შემდეგი სახით შეიძლება წარმოვადგინოთ  $k(t, \tau) = k(\tau, t)$ . თუ  $A_1 A_2$ -თვითშეუღლებული ოპერატორებია, მაშინ თვითშეუღლებულია ჯამიც  $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ , სადაც  $\lambda_1 \lambda_2$ -ნამდვილი

რიცხვებია. თვითშეუღლებულია აგრეთვე ნამრავლებიც  $A_1 A_2$  და  $A_2 A_1$ , თუ ეს ოპერატორები კომუტატიურია.

წრფივი სივრცის კლასს, რომელშიც განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლი, უწოდებენ ჰილბერტის სივრცეს და აღნიშნავენ  $H$ .

ჰილბერტის სივრცე განსაზღვრება შემდეგი აქსიომებით:

1.  $H$  არის წრფივი სივრცე ე.ი.  $x, y \in X$  ;

ა)  $x + y = y + x$  .

ბ)  $(x + y) + z = x + (y + z)$  .

2. ელემენტების ყოველ წყვილს  $x, y \in X$  შეესაბამება (ზოგადად კომპლექსური)  $(x, y)$  რიცხვი, რომელსაც უწოდებენ ამ ელემენტების სკალარულ ნამრავლს. ამასთან სრულდება შემდეგი პირობები:

ა)  $(y, x) = \overline{(x, y)}$  .

(ხაზი ნიშნავს რიცხვის კომპლექსურად შეუღლებულს).

ბ)  $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y)$  ,

სადაც  $\alpha_1$  და  $\alpha_2$  ნამდვილი ან კომპლექსური რიცხვებია .

გ)  $(x, x) \geq 0$  .

დ)  $(x, x) = 0$  , როდესაც  $x = 0$  .

3.  $H$  სივრცე არის სრული.

$x$  და  $y$  ვექტორებს უწოდებენ ორთოგონალურს თუ  $(x, y) = 0$  .

$H$  სივრცის კონკრეტული მაგალითია  $C_2$  სივრცე, სადაც  $x = (x_1, x_2 \dots)$ ,  $y = (y_1, y_2 \dots)$  ვექტორების სკალარულ ნამრავლს აქვს სახე

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k .$$

მწკრივის კრებადობა გამომდინარეობს შვარცის უტოლობიდან.

მეორე მაგალითია  $L^2$  სივრცე. თუ მივიღებთ მხედველობაში



$$(x, y) = \int_a^b x(t)\bar{y}(t)dt \quad .$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ სკალარულ ნამრავლს აქვს თვისებები:

ა)  $(\alpha x, \alpha x) = |\alpha|^2 (x, x)$ ;

ბ)  $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$ ;  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

მაგალითი 7.1.

დაეუშვათ, რომ  $I[y]$  არის ფუნქციონალი  $L^2[a, b]$  მნიშვნელობით  $R$ -ში და გამოითვლება გამოსახულებით

$$I[y] = \int_a^b [y(x)]^2 dx \quad \forall y \in L^2[a, b] \quad ,$$

მაშინ გვაქვს, რომ  $\forall \varphi \in L^2[a, b]$ . აქ შემოვიტანოთ აღნიშვნები:  $y(x) = y_0(x)$ ,  $\theta = t$ ,  $h_0 = \varphi(x)$ ;

წარმოვადგინოთ გატოს ინტეგრალი

$$\frac{I[y + \theta\varphi] - I[y]}{\theta} = \int_a^b \varphi [2y + \theta\varphi] dx \rightarrow 2 \int_a^b y\varphi(x)$$

და მაშასადამე  $\delta I[y, \varphi]$  არის წრფივი და უწყვეტი  $\varphi$ -ს მიმართ, ვინაიდან

$$\delta I[y, \varphi] = \int_a^b 2y\varphi dx = (2y, \varphi) \quad .$$

მაშასადამე,  $I'[y] = 2y$ . ამ გამოსახულებას უწოდებენ  $I[y]$  ფუნქციონალის გრადიენტს.

მაგალითი 7.2 .

ეხლა დაეუშვათ, რომ  $I[y]$  არის  $H^1[a, b]$  ფუნქციონალი  $R$ -ში, განისაზღვრება ფორმულით

$$I[y] = \int_a^b y^2 dx \quad \forall y \in H'[a, b] .$$

აქ აღნიშვნები იგივეა, რაც წინა მაგალითში. ისევ გვექნება

$$\delta I(y, \varphi) = 2 \int_a^b y \varphi dx$$

მივიღეთ წრფივი გამოსახულება  $\varphi$  მიმართ.

ვინაიდან სკალარული ნამრავლი  $H'[a, b]$  განისაზღვრება

ფორმულით  $(y, w) = \int_a^b (yw + \frac{dy}{dx} \frac{dw}{dx}) dx$ . როგორც წინა მა-

გალითში გრადიენტი არ არის  $2y$ -ის ტოლი, ამიტომ დიდი მნიშვნელობა აქვს რომელ სივრცეშია აღებული ფუნქციონალის მნიშვნელობა.

ლაგრანჟის ზოგადი ამოცანა. მაიერის და ბოლცის ამოცანები

ვარიაციულ აღრიცხვაში არის სამი ძირითადი პრობლემა

1. ლაგრანჟის ამოცანა .
2. მაიერის ამოცანა .
3. ბოლცის ამოცანა .

განვიხილოთ ეს ამოცანები ცალკე.

ლაგრანჟის ამოცანა.

მოცემულია:

1. დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\dot{x}_i = f_i(x, u, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad , \quad (7.19)$$

ან უფრო ზოგად სახეში

$$\varphi_i(x, \dot{x}, u, t) = 0 \quad , \quad (7.20)$$

სადაც  $x - n + 1$  განზომილების ვექტორია

$u - r + 1$  განზომილების ვექტორია

2. საწყისი პირობები

$$x_i(t_0) = a_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.21)$$

3. კრიტერიუმი

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(x, u, t) dt, \quad (7.22)$$

სადაც  $F(x, u, t)dt$  არის თავისი არგუმენტის უწყვეტი ფუნქცია.

საჭიროა ვიპოვოთ ის  $u(t)$  ფუნქცია, ყველა  $u(t)$  ფუნქციებს შორის, რომელიც ანიჭებს მინიმუმს  $I$  ფუნქციონალს და აკმაყოფილებს (7.19)-(7.21) გამოსახულებებს.

მაიერის ამოცანა.

მოცემულია:

1. დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა (7.12)
2. საწყის პირობათა სისტემა (7.21) .
3. საბოლოო პირობათა სისტემა

$$x_j(t_f) = b_j, \quad (7.23)$$

სადაც  $j$  ეკუთვნის მთელ რიცხვთა რომელიღაც ქვესიმრავლეს  $1, 2, \dots, n$ ;  $t_f$ -წინასწარ არ არის მოცემული.

4. კრიტერიუმი

$$I = G(x, u, t)|_{t_0}^{t_f} \quad (7.24)$$

საჭიროა მოიძებნოს ყველა  $u(t)$  ფუნქციათა შორის, ის  $u(t)$  ფუნქცია, რომელიც მინიმიზაციას უკეთებს  $I$ , აკმაყოფილებს პირობებს (7.19), (7.20), (7.23). განსაკუთრებული შემთხვევაა როდესაც კრიტერიუმს აქვს სახე

$$I = G(t)|_{t_0}^{t_f} = t_f - t_0. \quad (7.25)$$

ამოცანა დადის იმ გარდაქმნებზე, რომლებიც საჭიროა უმოკლეს დროში საწყისი მდგომარეობის სასურველ საბოლოო მდგომარეობამდე მიყვანისათვის.

ამ ამოცანას ოპტიმალურ მართვაში უწოდებენ ამოცანას სწრაფმოქმედების შესახებ.

ბოლცის ამოცანა.

მოცემულია:

1. (7.19) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა .
2. (7.21) საწყის პირობათა სისტემა .

3. (7.23) საბოლოო პირობათა სისტემა  
 4. კრიტერიუმი

$$I = G(x, u, t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t) dt \quad (7.26)$$

საკირა მოიძებნოს ყველა  $u(t)$  ფუნქციითა შორის, ის  $u(t)$  ფუნქცია, რომელიც მინიმიზაციას უკეთებს  $I$ -ს აკმაყოფილებს (7.19), (7.21), (7.23) პირობებს.

როგორც ჩანს ბოლცის ამოცანა უფრო ზოგადი ამოცანაა. შეიძლება შემოვიტანოთ დამხმარე ცვლადები, რომლებიც გარდაქმნიან ლანგრანჟის ამოცანას ბოლცის ამოცანაში, ან მაიერის ამოცანაში და პირიქით. ოპტიმალურ მართვაში არის ამოცანები, რომლებიც პირველი შეხედვით თითქოს არ ეკუთვნიან ზემოთ ჩამოთვლილ ამოცანებს, მაგრამ გარკვეული მათემატიკური ხერხის გამოყენების შემდეგ პირველყოფილი ამოცანა შეიძლება დავიყვანოთ ამ სამ ამოცანაზე. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები.

მაგალითი 7.3

განვიხილოთ კრიტერიუმის მინიმიზაციის ამოცანა

$$I = \int F(x, \dot{x}, t) dt \quad (7.27)$$

$x$  და  $\dot{x}$  საბოლოო მნიშვნელობები მოცემულია. ვინაიდან ინტეგრალქვეშ გვხვდება უცნობი ფუნქციის მეორე წარმოებული, ამიტომ ის კონკრეტულად არ თანხვდება ზემოთ ჩამოთვლილ ამოცანებს. მაგრამ ის შეიძლება დავიყვანოთ ლანგრანჟის ამოცანაზე, თუ შემოვიტანთ დამხმარე ცვლადს  $y = \dot{x}$

მაშინ (7.27) გამოსახულება მიიღებს სახეს

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, t) dt \quad (7.28)$$

ე.ი. ამოცანა დავიყვანეთ ლანგრანჟის ამოცანაზე.

მაგალითი 7.4.

(ლანგრანჟის ამოცანის დაყვანა მაიერის ამოცანაზე)  
 განვიხილოთ შემდეგი ფუნქციონალის მინიმიზაციის ამოცანა

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, t) dt \quad (7.29)$$

$x$  საბოლოო მნიშვნელობები მოცემულია.

(7.29) გამოსახულება დაიყვანება (7.22)-ზე, თუ დაეუშვებთ, რომ  $\dot{x} = u$ . ლაგრანჟის ეს ამოცანა დაიყვანება მაიერის ამოცანაზე, თუ შემოვიტანთ დამხმარე ცვლადს  $x_{n+1}$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F(x, \dot{x}, t) \quad (7.30)$$

სადაც  $x$ -არის  $n$  განზომილებიანი ვექტორი.

ამრიგად ამოცანა დაყვანილია შემდეგი გამოსახულების მინიმიზაციაზე.

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}_{n+1}(t) dt = x_{n+1}(t) \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (7.31)$$

ეს არის მაიერის ტიპის ამოცანა.

მაგალითი 7.5. (ამოცანა, რომელიც შეიცავს უტოლობებს) განვიხილოთ შემდეგი კრიტერიუმის მინიმიზაცია

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, t) dt \quad (7.32)$$

$x$  საბოლოო მნიშვნელობები მოცემულია.  $\dot{x}$  აკმაყოფილებს შეზღუდვებს უტოლობის სახით

$$a \leq \dot{x} \leq b \quad (7.33)$$

მინიმიზაციის ამოცანა შეიძლება დაიყვანოს ლანგრანჟის ამოცანაზე, თუ შეზღუდვებს უტოლობის სახით, შევცვლით ტოლობის სახის შეზღუდვებზე

$$\varphi(\dot{x}, y) = (\dot{x} - a)(b - \dot{x}) - y^2 = 0 \quad (7.33)$$

სადაც  $y$  არის ნამდვილი დამხმარე ცვლადი.

მაგალითი 7.6.

(ქიმიური პროცესის მართვის ამოცანა) [132]

განვიხილოთ ქიმიური რეაქტორი სარევეთ. რეაქტორის გამარტოვებული პრინციპიალური სქემა მოცემულია (ნახ.7.10). რეაქტორში მიმდინარე პროცესები აღიწერებიან განტოლებებით

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1 - (f_1 + f_2 - e^{\alpha_1 - \beta_1 / x_1})x_1; \\
 \dot{x}_2 &= (1 - x_1 - x_2)e^{\alpha_1 - \beta_1 / x_1} - (f_1 + f_2)x_2; \\
 \dot{x}_3 &= H_1 x_1 e^{\alpha_1 - \beta_1 / x_1} + H_2 (1 - x_1 - x_2)e^{\alpha_2 - \beta_2 / x_2} + f_1 (T_1 - x_3) + \\
 &\quad + f_2 (T_2 - x_3) + u,
 \end{aligned}
 \tag{7.35}$$

სადაც:

$f_1, f_2, c_1$  და  $c_2$  კომპონენტების სიჩქარეებია.

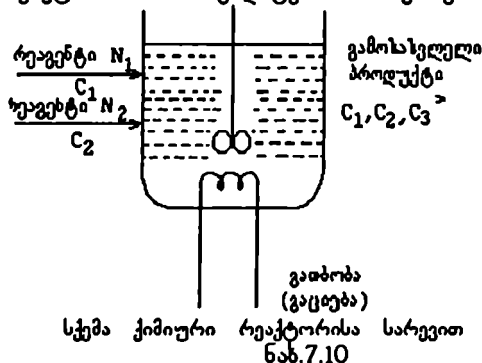
$T_1, T_2$  — მათი ტემპერატურებია.

$x_3$  — რეაქტორის ტემპერატურაა.

$x_1, x_2$  — რეაქტორის მდგომარეობებია.

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  — მუდმივებია.

$u$  — არის რეაქტორის თბოგადაცემის სიჩქარე.



თვისობრიობის კრიტერიუმს, რომელიც განსაზღვრავს რეაქტორის წარმადობას აქვს სახე

$$\begin{aligned}
 I = \int_{t_0}^{t_f} \{ [p_{02}(1 - x_1 - x_2) + p_{03}x_2](f_1 + f_2) - p_{11}f_1 - \\
 - p_{12}f_2 - g(u) \} dt,
 \end{aligned}
 \tag{7.36}$$

სადაც  $p_{02}$  და  $p_{03}$  — არის რეაქტორის გამოსასვლელზე  $c_2$  და  $c_3$  კომპონენტების შეფასებები.

$P_{j1}$  და  $P_{j2}$ —რეაქტორის შესასვლელზე  $c_1$  და  $c_2$  კომპონენტების შეფასებებია.

$g(u)$ —არის მართვის ფასი, რომელიც შეიცავს გაზურების ან გაცივების ფასს და შეზღუდვებს, რომელიც მოცემულია  $u$  მართვაზე.

ამოცანა დადის ისეთი  $u$  თბოგაცვლის სიჩქარის განსაზღვრაზე, რომელიც ანიჭებს, მაქსიმუმს (7.36), (7.35) გამოსახულებებს. საწყისი  $x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0)$  პირობების გათვალისწინებით. ნათელია, რომ საქმე გვაქვს ლაგრანჟის ამოცანასთან.

მაგალითი 7.7.

(სწრაფქმედების შესახებ).

სისტემა აღიწერება განტოლებათა სისტემით

$$\dot{y}_j = f_j(y_1 \dots y_n, u_1 \dots u_r, t) \quad j = \overline{1, n}$$

გადავიყვანოთ სისტემა მინიმალურ  $T$  დროში საწყისი

$$y_j(0) = y_{j0} \text{ მდგომარეობიდან საბოლოო } y_j(T) = y_j, \quad j = \overline{1, n}$$

მდგომარეობაში დასაშვები  $u_k, k = \overline{1, r}$  მართვით. ფუნქციონალს

$$\text{აქვს სახე } I = \int_0^T dt = T \text{ ამ ამოცანის განსაკუთრებულობა}$$

იმაშია, რომ ფიქსირებულია ფაზური ტრაექტორიის ბოლოები, მაგრამ თავისუფალია დრო.  $t = T\tau$  ცვლადის შეცვლით სწრაფქმედების ამოცანა გარდაიქმნება მაიერის ტიპის ორწერტილოვან ამოცანად. მართლაც,

$$\frac{dy_j}{d\tau} = T f_j(y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_r, T\tau),$$

$$\frac{dT}{d\tau} = 0.$$

ახალი დამოუკიდებელი ცვლადი  $\tau$  იცვლება ფიქსირებულ მონაკვეთში  $0 \leq \tau \leq 1$ .

საწყისი და საბოლოო პირობები რჩებიან უცვლელნი, ხოლო ფუნქციონალი იღებს სახეს  $T(1) \rightarrow \min$ . ოპტიმალურ

მართვაში ცვლადების გარდაქმნის მეთოდი გამოიყენება ფიქსირებულ ინტერვალში სწრაფქმედების ამოცანის მაიერის ამოცანაში გარდასაქმნელად, ამოცანის გადასაწყვეტად ხშირად გამოიყენება კომპიუტერი.

§ 7.3. ვარიაციული ამოცანის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა. ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება

გამოვარკვეოთ თუ რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს  $y(x)$  ფუნქცია იმისთვის რომ, ნებისმიერ ფუნქციაზე გადასვლისას ფუნქციონალის ნაზრდი იყოს დადებითი. სწორედ ეს პირობები მოგვცემენ საშუალებას შემდეგში მოიძებნოს ის ფუნქციები, რომლებიც ანიჭებენ ფუნქციონალს ექსტრემუმს.

სიმარტივისათვის, რომ შეგვეძლოს უგულველყოთ მაღალი რიგის მცირეები, უნდა შევადაროთ განსახილველი  $y(x)$  ფუნქცია არა ნებისმიერ ფუნქციას, არამედ მასთან მახლობელ ფუნქციებს, რისთვისაც ჩვენ დაგვჭირდება მახლობელი ფუნქციის ცნების დაზუსტება.

დავუშვათ რომელიღაც გლუვ მრუდზე, რომელიც გადის  $a$  და  $b$  წერტილებზე, მიიღწევა ფუნქციონალის სუსტი ფარდობითი მინიმუმი

$$I = \int_a^b F(x; y, y') dx. \quad (7.37)$$

$F(x; y, y')$  ფუნქცია არის უწყვეტი და აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები ყველა არგუმენტის მიმართ მეორე რიგის წარმოებულის ჩათვლით. წყვეტის შემთხვევები მოითხოვს დამატებით შენიშვნებს.

განვსაზღვროთ, თუ რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს  $y(x)$  ფუნქცია, რომელზედაც მიიღწევა მინიმუმი. გადავიღეთ  $y(x)$  ფუნქციიდან სხვა  $y + \alpha \eta$  ფუნქციაზე, სადაც  $\alpha$ -რიცხვია, ხოლო

$\eta(x)$ -ნებისმიერი გლუვი ფუნქციაა, რომელიც ექვემდებარება პირობებს

$$\eta(a) = \eta(b) = 0. \quad (7.38)$$



ფუნქციონალის ნაზრდს აქვს სახე

$$\Delta I = \int_a^b F(x, y + \alpha \eta, \dot{y} + \alpha \dot{\eta}) dx - \int_a^b F(x, y, \dot{y}) dx. \quad (7.39)$$

ის არის  $\alpha$ -ს ფუნქცია.

დავშალოთ ფუნქციონალის ნაზრდის გამოსახულება ტეილორის მწკრივად  $\alpha$  ხარისხების მიხედვით

$$\Delta I = \alpha \frac{dI}{d\alpha} + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2 I}{d\alpha^2} + \dots \quad (7.40)$$

$\alpha \frac{dI}{d\alpha}$  გამოსახულება, სადაც წარმოებული  $\frac{dI}{d\alpha}$  არის

ალებული  $\alpha = 0$  შემთხვევაში, აღინიშნება  $\delta I$  და უწოდებენ  $I$  ფუნქციონალის პირველ ვარიაციას. ამრიგად, პირველი ვარიაცია ეს არის ფუნქციონალის ნაზრდის მთავარი, წრფი-

ვი ნაწილი. ანალოგიურად,  $\frac{\alpha^2}{2} \frac{d^2 I}{d\alpha^2}$  აღინიშნება  $\delta^2 I$  და უწოდებენ მეორე ვარიაციას.

როდესაც  $\alpha \rightarrow 0$ , მაღალ ხარისხიანი წევრები უფრო სწრაფად მცირდებიან, ვიდრე წრფივი წევრი და მისი ნიშანი განსაზღვრავს ფუნქციონალის ნაზრდის ნიშანს. ე.ი. მცირე  $\alpha$ -ს დროს

$$\Delta I \approx \delta I. \quad (7.41)$$

ვინაიდან,  $y(x)$  ფუნქციაზე მიიღწევა ფუნქციონალის ექსტრემუმი,  $\Delta I$  არ შეიძლება იყოს უარყოფითი. ე.ი. სრულდება პირობა

$$\Delta I \approx \delta I = \alpha \frac{dI}{d\alpha} \geq 0. \quad (7.42)$$

იმისთვის, რომ (7.42) სრულდებოდეს  $\alpha$ -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისას (დადებითისაც და უარყოფითისაც), აუცილებელია ტოლობა

$$\frac{dI}{d\alpha} = 0. \quad (7.43)$$

ამრიგად, ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა პირველი ვარიაციის ნულთან გატოლება.

$$\int_a^b \frac{dI}{d\alpha} = \int_a^b \frac{d}{d\alpha} F(x; y + \alpha \eta, \dot{y} + \alpha \dot{\eta}) dx = \int_a^b \left[ \frac{dF}{dy} \frac{d(y + \alpha \eta)}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{d(y + \alpha \eta)}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \frac{d(\dot{y} + \alpha \dot{\eta})}{d\alpha} \right] dx = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{\eta} \right] dx. \quad (7.44)$$

(7.44) გამოსახულების მეორე უმსაქრების მიმართ მოვახდინოთ ნაწილობრივი ინტეგრირება

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \dot{\eta} dx = F_y \eta \Big|_a^b - \int_a^b \eta \frac{\partial}{\partial x} F_y dx. \quad (7.45)$$

შემოვიტანოთ შემოკლებითი აღნიშვნა

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad F_{\dot{y}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}. \quad (7.46)$$

თუ გავითვალისწინებთ (7.38), მივიღებთ

$$\int_a^b F_y \dot{\eta} dx = - \int_a^b \eta \frac{d}{dx} F_y dx. \quad (7.47)$$

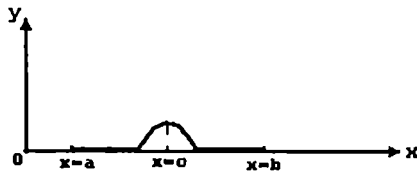
და პირველი ვარიაცია

$$\delta I = \int_a^b \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} \right) \alpha \eta dx. \quad (7.48)$$

გამოვიყენოთ ლაგრანჟის ლემა: თუ უწყვეტ  $M(x)$  ფუნქციას აქვს თვისება, რომ ნებისმიერი  $\eta(x)$  გლუვი ფუნქციისათვის

$$\int_a^b M(x) \eta(x) dx = 0, \quad (7.49)$$

მაშინ აუცილებლად  $M(x) = 0$  ყველა  $x(a \leq x \leq b)$ . აევუშვათ საწინააღმდეგო, ერთ-ერთ  $c$  წერტილში ( $a \leq x \leq b$ )  $M(c) > 0$ .  $\eta(x)$  შევარჩიოთ ისეთი, რომ  $c$  მიდამოში ნულზე მეტია, ხოლო ინტერვალის სხვა მნიშვნელობებზე ნულის ტოლია. (ნახ.7.11)



ნახ.7.11

მაშინ  $M(x)\eta(x)$  ნამრავლი იქნება დადებითი  $c$ -ს მიდამო-  
ში და ნულის ტოლია ინტერვალის სხვა მნიშვნელობებში.  
(7.49) ინტეგრალი არ იქნება ნულის ტოლი, რაც ეწინააღ-  
მდეგება ლემის პირობებს. ლემა დამტკიცებულია. ლაგრანჟის  
ლემის საფუძველზე (7.48) განტოლებიდან შეიძლება გაკეთდეს  
მნიშვნელოვანი დასკვნა: თუ  $y(x)$  ფუნქცია ანიჭებს ექს-  
ტრემუმს ფუნქციონალს

$$\int_a^b F(x, y, y') dx,$$

მაშინ აუცილებელია, რომ

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (7.50)$$

(7.50) განტოლებას უწოდებენ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებას  
და ის ცენტრალურ როლს თამაშობს ვარიაციულ აღრიც-  
ხვაში. მისი მნიშვნელობა მდგომარეობს იმაში, რომ მისი  
დახმარებით ფაქტიურად შეიძლება განისაზღვროს ფუნქცია,  
რომელზედაც მიიღწევა ექსტრემუმი. ეილერ-ლაგრანჟის გან-  
ტოლების ამოხსნას უწოდებენ ექსტრემალს.

განიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 7.8.

საჭიროა განისაზღვროს უმოკლესი  $y(x)$  მრუდი, რომე-  
ლიც აერთებს სიბრტყის ორ  $(0,0)$  და  $(1,1)$  წერტილს.  
მრუდის სიგრძე გამოითვლება ინტეგრალით

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

გ.ი.  $F = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$ ;  $F_y = 0$ ;  $F_{\dot{y}} = \frac{-\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}$  და ეილერის გან-

ტოლება იღებს სახეს  $\ddot{y} = 0$ ;  $y = cx + c_1$ .

$c, c_1$ -ინტეგრების მუდმივებია და განისაზღვრებიან სასაზღვრო პირობებიდან.

მაგალითი 7.9.

ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციონალის ექსტრემალი

$$I[y(x)] = \int_0^1 \frac{1}{\dot{y}} dx,$$

სასაზღვრო პირობებია  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$ .

ამოხსნა. ეილერის განტოლებაა  $F_y - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} = 0$ ,  $F = \frac{1}{\dot{y}}$ ;

$$\frac{dF}{dy} = 0; \quad \frac{dF}{d\dot{y}} = \text{const.}$$

ვინაიდან  $\frac{dF}{d\dot{y}} = -(\dot{y})^{-2}$ , მაშინ  $\dot{y} = k$ .

$k$ -არის მუდმივა. ამრიგად,

$y = kx + y(0)$ . სასაზღვრო პირობა სრულდება  $k = 1$  შემთხვევაში. ამიტომ ამონახსნი ტოლია  $y = x$ .

მაგალითი 7.10.

გამოვიკვლიოთ ფუნქციონალი

$$I = \int_1^2 (\dot{y} + x^2 \dot{y}^2) dx.$$

სასაზღვრო პირობებისას  $y(1) = 1$ ,  $y(2) = 2$ .

გამოვთვალოთ წარმოებულები  $F_y = 0$ ,

$$F_{\dot{y}} = 1 + 2x^2 \dot{y}; \quad F_{\ddot{y}} = 2x^2.$$

ენაიდან განსახილველ ინტერვალში  $1 \leq x \leq 2$ , ფუნქციონალი არის არაგადაგვარებული და ექსტრემალზე მიიღწევა ფუნქციონალის მინიმუმი. ეილერის განტოლებიდან

$$\frac{d}{dx}(1 + 2x^2 \dot{y}) = 0,$$

$$1 + 2x^2 \dot{y} = c_1,$$

$$\dot{y} = \frac{c_1 - 1}{2x^2};$$

$$y = \int \frac{c_1 - 1}{2x^2} dx = -\frac{c_1 - 1}{2} \left[ \frac{1}{x} + c_2 \right].$$

სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ  $c_1 = -2; c_2 = 3$

ექსტრემალის განტოლებას აქვს სახე

$$y = 3 - \frac{2}{x}.$$

მაგალითი 7.11.

ვიპოვოთ  $y(x)$  რომელიც დროის  $t_0$  და  $t_1$  მომენტებში გადის  $y_0$  და  $y_1$  წერტილებში და რომელზედაც ფუნქციონალს აქვს ექსტრემუმი

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (\dot{y}^2 + \tau^2 y^2) dt.$$

$\tau$ -მოცემული რიცხვია

$$F = \dot{y}^2 + \tau^2 y^2,$$

$$F_y = 2y; \quad F_{\dot{y}} = 2\tau^2 \dot{y}.$$

ეილერის განტოლებათა

$$\ddot{y} - \frac{1}{\tau^2} y = 0.$$

განტოლების ამონახსნია

$$y(t) = c_1 e^{t/\tau} + c_2 e^{-t/\tau}$$

$c_1$  და  $c_2$  მოსაძებნად შევადგინოთ განტოლებები

$$y_0 = c_1 e^{t_0/r} + c_2 e^{-t_0/r}$$

$$y_1 = c_1 e^{t_1/r} + c_2 e^{-t_1/r}$$

$$c_1 = \frac{y_0 e^{-t_1/r} - y_1 e^{-t_0/r}}{e^{(t_0-t_1)/r} - e^{-(t_0-t_1)/r}}$$

$$c_2 = \frac{y_1 e^{t_1/r} - y_0 e^{t_0/r}}{e^{(t_0-t_1)/r} - e^{-(t_0-t_1)/r}}$$

მაგალითი 7.12.

ვიპოვოთ ფუნქციონალის ექსტრემუმი

$$I = \int_0^{\pi} (y^2 + 2y \sin x) dx.$$

სასაზღვრო პირობებია  $y(0) = 0$ ;  $y(\pi) = 0$ .

ვინაიდან  $F_{yy} = 2 > 0$ , ექსტრემალზე მიიღწევა ფუნქციონალის მინიმუმი.

ეილერის განტოლებაა

$$F_{yy} - 2 \sin x = 0.$$

მის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე

$$y = \sin x + c_1 x + c_2.$$

$c_1$  და  $c_2$  განსაზღვრისათვის შევადგინოთ ორი განტოლება.

$$y(0) = c_2 = 2;$$

$$y(\pi) = c_1 \pi + c_2 = 0 \quad \text{საიდანაც} \quad c_1 = c_2 = 0.$$

საბოლოოდ მივიღებთ ექსტრემალის განტოლებას  $y = \sin x$ . ადვილი სანახავია, რომ სასაზღვრო პირობები სრულდება.

ნეგატიური მაგალითი 7.13 [7].

ეხლა განვიხილოთ ეილერის ამოცანა, რომლის ოპტიმალურობა თუ არაოპტიმალურობა დამოკიდებულია საწყის პარამეტრებზე.

გვაქვს ფუნქციონალი

$$I = \int_0^T (u^2 - x^2) dt \rightarrow \min, \quad (7.51)$$

$$\dot{x} = u \quad x(0) = X(T) = 0. \quad (7.52)$$

$T$ -მოცემულია, მაგრამ წინასწარ არ ვაფიქსირებთ. ეილერის განტოლებას აქვს სახე

$$\ddot{x} + x = 0. \quad (7.53)$$

შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$p^2 + 1 = 0. \quad (7.54)$$

მისი ფესვებია  $p_{1,2} = \pm j$ .

(7.53) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნია

$$x(t) = A \cos t + B \sin \omega t, \quad (7.55)$$

სადაც  $A$  და  $B$  ინტეგრირების მუდმივებია.

სასაზღვრო პირობის  $x(0) = 0$  მხედველობაში მიღებისას  $x(0) = A = 0$ , საიდანაც

$$u(t) = B \sin t.$$

მეორე სასაზღვრო პირობიდან  $x(T) = 0$ , გვექნება

$$x(T) = B \sin T = 0.$$

შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1. თუ  $T = k\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , მაშინ  $B = 0$ , ვინაიდან  $\sin T \neq 0$ .

2. თუ  $T = k\pi$ , მაშინ სასაზღვრო პირობა  $x(T) = 0$ .

კმაყოფილდება ნებისმიერი  $B$ -თვის, ვინაიდან  $\sin T = 0$ .

თუ  $T = k\pi$ , მაშინ გვაქვს  $x = B \sin t$  ექსტრემალების უსასრულო სიმრავლე.

ამგვარად, გვაქვს სამი შემთხვევა:

1.  $T < \pi$  გვაქვს ერთადერთი ექსტრემალი  $x(t) = 0$ .

2.  $T < \pi$  გვაქვს  $x(t) = B \sin t$  ექსტრემალების უსასრულო რაოდენობა.  $B$ -ნებისმიერი მნიშვნელობის ამპლიტუდაა.

3.  $2\pi > T < \pi$  გვაქვს ერთადერთი ნულოვანი ექსტრემალი და ა. შ.

ვიპოვოთ ამ შემთხვევებში (7.51) ფუნქციონალის ექსტრემალი.

პირველ და მესამე შემთხვევებში  
 $I(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ .

მეორე შემთხვევაში

$$\bar{x} = b \sin t, \quad \bar{u} = B \cos t.$$

$$\bar{I} = \int_0^T (\bar{u}^2 - \bar{x}^2) dt = B^2 \int_0^T (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = B^2 \int_0^{k\pi} \cos 2t dt = 0.$$

ვაჩვენოთ, რომ  $T > \pi$  ნულოვანი ექსტრემალი არ არის ოპტიმალური. ამისათვის უნდა დავამტკიცოთ, რომ  $I < 0$ .

სინუსოიდა  $x = B \sin t$   $t = \frac{\pi}{2}$  წერტილში გაგვკრათ ვერტიკალზე შუაში და წავანაცვლოთ ის მარჯვენა ნახევარში  $T$  წერტილამდე.

აგებული ტრაექტორიის განტოლებაა

$$B \sin t, \quad \text{თუ} \quad t \leq \frac{\pi}{2};$$

$$B, \quad \text{თუ} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq t_1 = T - \frac{\pi}{2};$$

$$B \sin(t + T - \pi), \quad \text{თუ} \quad t > t_1 = T - \frac{\pi}{2}.$$

გამოვთვალოთ ამ შემთხვევაში ფუნქციონალი

$$x^* = I^*(x) = \int_0^T [(\dot{x}^*)^2 - (x^*)^2] dt.$$

ინტეგრირების მონაკვეთი დავყოთ სამ ნაწილად

$$I^* = \int_0^{\pi/2} [(x^*)^2 - (x^*)^2] dt + \int_{\pi/2}^{t_1} [(\dot{x}^*)^2 dt - (x^*)^2] dt + \int_{t_1}^T [(\dot{x}^*)^2 dt - (x^*)^2] dt.$$

ვინაიდან ინტეგრალქვეშა გამოსახულებები არ არიან დროზე დამოკიდებული, პირველი და მესამე შეიძლება გავაერთიანოთ, მივიღებთ



$$I^* = \int_0^{\pi} B^2 (\cos^2 t - \sin^2 t) + \int_{\pi/2}^{T-\pi/2} (-B^2) dt = -B^2 (T - \pi) < 0.$$

$(x^*, u^*)$  პროცესი არის დასაშვები. ის აკმაყოფილებს (7.52), (7.53). ფუნქციონალი (7.51) არის უარყოფითი, ე.ი.  $T > \pi$  მივიღეთ  $(x^*, u^*)$  პროცესი. დასაშვებებს შორის,  $I^*$  საუკეთესო მნიშვნელობა, ვიდრე  $I = 0$  შემთხვევაში. მაშასადამე, ნაპოვნი  $x(t)$  ექსტრემალი არ შეესაბამება ოპტიმალურ პროცესს. გარკვეული სიძნელეების დაძლევის შედეგად შეიძლება ნაჩვენები იყოს  $T > \pi$  შემთხვევაში,  $x(t)$  ექსტრემალის ოპტიმალურობა.

#### § 7.4. ლეჟანდრის პირობა

იმისთვის, რომ  $y(x)$  ფუნქციამ მიანიჭოს

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

ფუნქციონალს ექსტრემუმი, აუცილებელია ეილერ-ლაგრანჟის განტოლების გარდა სრულდებოდეს კიდევ ერთი პირობა-ლეჟანდრის პირობა. ეს პირობა გვაძლევს საშუალებას გავარჩიოთ ფუნქციონალის მინიმუმი და მაქსიმუმი. როგორც ცნობილია, ფუნქციონალის ნაზრდის წრფივი ნაწილის ნიშანი დამოკიდებულია მეორე ვარიაციის ნიშანზე

$$\delta^2 I = \frac{\alpha^2}{2} \frac{d^2 I}{d\alpha^2}, \quad (7.56)$$

სადაც  $\alpha$  მუდმივაა.

იმისათვის, რომ ფუნქციონალს ჰქონდეს მინიმუმი  $y(x)$  ფუნქციონალზე, აუცილებელია  $\delta^2 I \geq 0$  უტოლობის შესრულება, ხოლო მაქსიმუმისათვის  $\delta^2 I \leq 0$ . მაგრამ

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{d\alpha^2} &= \int_a^b \frac{d^2}{d\alpha^2} F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx = \\ &= \int_a^b (F_{yy} \eta^2 + 2F_{yy'} \eta \eta' + F_{y'y'} \eta'^2) dx. \end{aligned} \quad (7.57)$$

ვარიაციის მეორე წევრი ნაწილობრივი ინტეგრირების მეთოდის გამოყენების შემდეგ მიიღებს სახეს

$$2 \int_a^b F_{yy'} \eta \eta' dx = \int_a^b F_{y'y'} d\eta^2 = F_{y'y'} \eta^2 \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y'y'} \eta^2 dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} F_{y'y'} \eta^2 dx. \quad (7.58)$$

მაშასადამე,

$$\frac{d^2 I}{d\alpha^2} = 2 \int_a^b (p\eta^2 + R\eta'^2) dx, \quad (7.59)$$

სადაც

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} (F_{yy} - \frac{d}{dx} F_{y'y'}); \\ R &= \frac{1}{2} F_{y'y'}. \end{aligned}$$

ვინაიდან  $\eta(x)$  არის ნებისმიერი ფუნქცია, იმისათვის რომ შესრულდეს უტოლობა  $\frac{d^2 I}{d\alpha^2} \geq 0$ , აუცილებელია  $F_{y'y'} \geq 0$ . მართლაც, შეიძლება შეირჩეს ისეთი  $\eta(x)$  ფუნქცია, რომ  $\eta^2$  იყოს მცირე სიდიდე, ხოლო  $\eta'^2$  — დიდი სიდიდე. ამისათვის უნდა შევარჩიოთ აბსოლუტური მნიშვნელობით მცირე სიდიდე, მაგრამ სწრაფად ცვალებადი. ასეთი ფუნქციისათვის მეორე ვარიაციის ნიშანი თანხვედება  $F_{y'y'}$  ნიშანს და ჩვენ მივიღევათ შემდეგ აუცილებელ პირობამდე (ლეჟანდრის პირობა): იმისათვის, რომ ფუნქციონალი

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (7.60)$$

აღწევდეს მინიმუმს  $y(x)$  ფუნქციაზე აუცილებელია შეს-  
რულდეს უტოლობა

$$F_{y'y'} \geq 0. \quad (7.61)$$

მაქსიმუმისათვის აუცილებელია

$$F_{y'y'} \leq 0. \quad (7.62)$$

როდესაც  $F_{y'y'} = 0$  შესაძლებელია ექსტრემალს ჰქონდეს  
ტეხილის სახე, ხოლო თუ  $F_{y'y'} \equiv 0$ , მაშინ საქმე გვაქვს  
გადაგვარებულ ექსტრემუმთან, რომელიც ხასიათდება განსა-  
კუთრებული თვისებებით.

მაგალითი 7.14.

მოცემულია ფუნქციონალი

$$I[y] = \int_0^2 (y^4 + y^2) dx.$$

ექსტრემალის განტოლებაა

$$y = c_1 x + c_2.$$

სასაზღვრო პირობის გათვალისწინებით

$$y = 2x + 1$$

ლეჟანდრის პირობა ექსტრემალისათვის

$$F_{y'y'} = 12y^2 + 2.$$

ექსტრემალის ყველა წერტილში

$$y = 2x + 1;$$

$$F_{y'y'} = 50 > 0.$$

მივიღეთ ძლიერი მინიმუმის პირობა.

საძიებელი ექსტრემალი ის იქნება, რომელიც გადის მო-  
ცემულ წერტილებზე. ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი,  
ვინაიდან ორ ნებისმიერ წერტილზე, რომლებიც მდებარეობენ  
ნახევარსიბრტყის ზედა ნაწილში, გადის მხოლოდ ერთადერ-  
თი ნახევარწრე ცენტრით  $0x$  ღერძზე.

§ 7.5. ეილერ-ლაგრანჟის განტოლების ზოგადი სახე

მოვახდინოთ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლების მეორე წევრის სრული დიფერენცირება

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (7.63)$$

$F_{y'}$  არის სამი არგუმენტის  $x, y$ , და  $y'$  ფუნქცია, ხოლო  $y$  და  $y'$  თავის მხრივ  $x$ -ის ფუნქციებია. მაშასადამე,

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} \quad (7.64)$$

და ეილერის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$F_y - F_{y'} x - F_{y'} y - F_{y'} y' = 0. \quad (7.65)$$

ზოგად შემთხვევაში ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება მეორე რიგის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებაა. როგორც აღვნიშნეთ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლების ამონახსნს უწოდებენ ექსტრემალს.

ზოგად შემთხვევაში (7.65) განტოლების ამოხსნა გაძნელებულია. განვიხილოთ ზოგიერთი კერძო შემთხვევები, როდესაც ინტეგრირება მარტივდება.

1.  $F$  არ არის დამოკიდებული  $y$ -ზე. მაშინ (7.65) აქვს სახე

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

საიდანაც

$$F_{y'} = const. \quad (7.66)$$

განტოლება არის პირველი რიგის. მისი ინტეგრირება გვაძლევს ექსტრემალს.

მაგალითი 7.15.

იმ მრუდებს შორის, რომელიც აერთებს  $A(1,3)$  და  $B(2,5)$  წერტილებს, ვიპოვოთ ის, რომელზედაც მიიღწევა ექსტრემუმი ფუნქციონალისა

$$I[y(x)] = \int_1^2 \dot{y}(x)(1 + 2x^2 \dot{y}(x)) dx.$$

ვილერის განტოლებას აქვს სახე  $\frac{d}{dx} F_y(x, y) = 0$ ,

$$\frac{d}{dx} (1 + 4x^2 \dot{y}^2) = 0,$$

$$1 + 4x^2 \dot{y} = c_1.$$

მაშინ

$$\dot{y} = \frac{c_1 - 1}{2x^2}; \quad y(x) = \frac{c_1}{x} + c_2, \quad \text{სადაც } c_1 = -\frac{1}{2}c_1.$$

განვსაზღვროთ  $c_1$  და  $c_2$  შევადგინოთ სისტემა

$$3 = c_1 + c_2,$$

$$5 = \frac{c_1}{2} - c_2.$$

საიდანაც  $c_1 = -4$ ,  $c_2 = 7$ .

საძიებელი ექსტრემალია  $y(x) = 7 - \frac{4}{x}$ .

2.  $F$  არ არის  $x$ -ზე დამოკიდებული, ე.ი.  $F = F(y, \dot{y})$  მაშინ (7.65) აქვს სახე

$$F_y - F_{\dot{y}} \dot{y} - F_{\dot{y}} \dot{y} = 0. \quad (7.67)$$

გაეამრავლოთ გამოსახულება  $\dot{y}$ . შედეგი, რომელიც ადვილად შეიძლება შემოწმდეს, ტოლია

$$\frac{d}{dx} (F - \dot{y} F_{\dot{y}}) = 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$F - \dot{y} F_{\dot{y}} = c. \quad (7.68)$$

ბოლო გამოსახულებას უწოდებენ (7.65) განტოლების პირველ ინტეგრალს.

მაგალითი 7.16.

ვიპოვოთ ფუნქციონალის ექსტრემალი

$$I[y(x)] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y^2}}{y} dx,$$

რომელიც გადის ზედა ნაწევარსიბრტყის მოცემულ  $(a, A)$  და  $(b, B)$  წერტილებში. ეილერის განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{\sqrt{1+y^2}}{y} - y \frac{y}{y\sqrt{1+y^2}} = c_1.$$

გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$y\sqrt{1+y^2} = \tilde{c}_1, \text{ სადაც } \tilde{c}_1 = \frac{1}{c_1}.$$

მოვახდინოთ ბოლო გამოსახულების ინტეგრირება, მივიღებთ  $(x+c_2)^2 + y^2 = \tilde{c}_1^2$  წრეწირების ოჯახს ცენტრით  $ox$  ღერძზე.

3.  $F$  დამოკიდებულია მარტო  $y$ -ზე, ე.ი.  $F = F(y)$ . მაშინ (7.65) აქვს სახე

$$\frac{d}{dx} F_y = 0 \text{ ან } y = 0. \quad (7.69)$$

$$F_y(y) = c_1 \text{ საიდანაც } y = c_1.$$

$$y = c_1 x + c_2. \quad (7.70)$$

მაგალითი 7.17.

ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციონალის ექსტრემალი

$$I[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1+y^2} dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

ეს ფუნქციონალი განსაზღვრავს მრუდის უმოკლეს სიგრძეს, რომელიც აერთებს  $(a, A)$  და  $(b, B)$  წერტილებს.

ამოხსნა. ეილერის განტოლებას აქვს სახე

$$y(x) = 0,$$

$$y(x) = c_1 x + c_2.$$

ექსტრემალი, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს  $y(a) = A$  და  $y(b) = B$  ცხადია არის წრფე, რომელიც გადის  $(a, A)$  და  $(b, B)$  წერტილებზე:

$$y = \frac{B - A}{b - a}(x - a) + A.$$

4.  $F$  არ არის დამოკიდებული  $y$ -ზე ე.ი.  $F = F(x, y)$ . ეილერის განტოლებაა

$$F_y = 0, \quad (7.71)$$

მაგალითი 7.18.

მოიძებნოს ფუნქციონალის ექსტრემუმი

$$I = \int_1^3 (3x - y)y dx,$$

$$y(1) = 1; \quad u(3) = 4.$$

$F = (3x - y)y$ , ე.ი. არ არის დამოკიდებული  $y$ -ზე. პილერის განტოლებას აქვს სახე

$$3x - 2y = 0.$$

ეს არის ალგებრული განტოლება  $y$ -ის მიმართ

$$y = \frac{3x}{2}.$$

მიღებული ექსტრემალი არ გადის სასაზღვრო წერტილებზე და ვარიაციულ ამოცანას არა აქვს ამოხსნა. თუ სასაზღვრო პირობებს შემდეგი სახისას ავიღებთ

$$y(1) = \frac{3}{2}; \quad y(3) = \frac{9}{2},$$

მაშინ ექსტრემალი გაივლის მოცემულ წერტილებზე. მრუდი

$y = \frac{3x}{2}$  იქნება ამოცანის ამოხსნა.

5.  $F$  არის  $y$ -ზე წრფივად დამოკიდებული

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'. \quad (7.72)$$

ეილერის განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0. \quad (7.73)$$

მიღებული განტოლება არის სასრული. მრუდი, რომელიც მიიღება ამოხსნის შემდეგ, ზოგადად, რომ ითქვას არ აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს და ვარიაციულ ამოცანას არა აქვს ამოხსნა უწყვეტი ფუნქციების კლასში.

თუ  $xoy$  სიბრტყის  $D$  არეში  $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0$ , მაშინ

გამოსახულება  $F(x, y, y') = M(x, y)dx + N(x, y)dy$  არის სრული დიფერენციალი და ფუნქციონალს აქვს სახე

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx = \int_{(a, A)}^{(b, B)} M dx + N dy. \quad (7.74)$$

ის არ არის დამოკიდებული მანძილის ინტეგრირებაზე. ფუნქციონალი  $I[y(x)]$  ერთიდაიგივეა ყველა მრუდეებზე. ვარიაციული ამოცანა კარგავენ აზრს.

### § 7.6. ფუნქციონალი, რომელიც დამოკიდებულია მრავალი ცვლადის ფუნქციაზე

განვიხილოთ ფუნქციონალი, რომელიც დამოკიდებულია  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ფუნქციებზე

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n; y_1', \dots, y_n') dx \dots \quad (7.75)$$

დაუშვათ, რომ ფუნქციონალის ექსტრემუმი არსებობს და ის მიიღწევა  $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$  ფუნქციებზე. დავაფიქსიროთ ყველა ფუნქციები, გარდა ერთისა. მაგალითად  $y_1 = y_1(x)$ , რომელსაც მივცეთ ნაზრდი  $\delta y_1 = y_1(x)$ , მაშინ (7.75) ფუნქციონალის ვარიაცია დამოკიდებულია ერთ ფუნქციაზე და როგორც წინა პარაგრაფში,  $\delta I = 0$  პირობიდან გამომდინარეობს ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება  $y_1(x)$  ფუნქციისათვის



$$\frac{dF}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_1} = 0. \quad (7.76)$$

ასეთივე მსჯელობა შეიძლება ჩავატაროთ ყველა დანარჩენი უცნობი ფუნქციებისათვის და საბოლოოდ მივიღებთ (7.75) ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობებს ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებათა სისტემის სახით:

$$F_{y_1} - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}_1} = 0, \\ \text{-----} \quad (7.77)$$

$$F_{y_n} - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}_n} = 0.$$

მაგალითი 7.19.

განვიხილოთ მრუდი  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$  სამგანზომილებიან სივრცეში. მისი სიგრძე ტოლია

$$e = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dx$$

და წარმოადგენს ფუნქციონალს, რომელიც დამოკიდებულია ორ უცნობ  $y = y(x)$  და  $z = z(x)$  ფუნქციაზე. ეილერის განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = c_1, \quad \frac{\dot{z}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = c_2,$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$y = c_1 x + c_3.$$

$$z = c_2 x + c_4.$$

ე.ი. ექსტრემალები სივრცეში წარმოადგენენ წრფეებს. ეხლა განვიხილოთ დამტკიცების გარეშე ლეჟანდრის პირობა: იმისათვის, რომ ექსტრემალზე მიიღწიოს ფუნქციონალის მინიმუმი, აუცილებელია შესრულდეს შემდეგი უტოლობები

$$F_{y'y} \geq 0; \begin{vmatrix} F_{y'y} & F_{y'y_1} \\ F_{y'y_1} & F_{y'y_1 y_1} \end{vmatrix} \geq 0, \dots \begin{vmatrix} F_{y'y} & F_{y'y_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{y'y_1} & F_{y'y_1 y_1} & \dots \end{vmatrix} \geq 0. \quad (7.78)$$

(7.78) პირობას უწოდებენ ლეჟანდრ-კლებშის პირობას. მაქსიმუმის პირობებისათვის უტოლობებს აქვთ შეზღუდული ნიშნები.

თუ ფუნქციონალი არის დამოკიდებული ორ  $y(x)$  და  $z = z(x)$  ცვლადზე, მაშინ ლეჟანდრის პირობებს აქვთ სახე

$$F_{y'y} \geq 0; \quad F_{y'y} F_{zz} - F_{y'z} F_{zy'} \geq 0$$

და ჩვენს მიერ განხილულ მაგალითში გვექნება

$$F_{y'z} = F_{zy'} = \frac{yz}{(1+y^2+z^2)^{3/2}};$$

$$F_{y'y} = \frac{1+z^2}{(1+y^2+z^2)^{3/2}}; \quad F_{zz} = \frac{1+y^2}{(1+y^2+z^2)^{3/2}};$$

$$F_{y'y} F_{zz} - F_{y'z} F_{zy'} = \frac{1}{\sqrt{(1+y^2+z^2)}} > 0.$$

ე.ი. ექსტრემალზე ნამდვილად მიიღწევა მინიმუმი.

### § 7.7. ფუნქციონალი, რომელიც დამოკიდებულია მაღალი რიგის წარმოებულებზე

ვარიაციულ აღრიცხვაში გვხვდება ფუნქციონალები, რომლებიც დამოკიდებული არიან არამარტო პირველი რიგის, არამედ მაღალი რიგის წარმოებულებზე.

დავუშვათ ფუნქციონალს აქვს სახე

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y; y_1, y_2, \dots, y^{(n)}) dx, \quad (7.79)$$

მაშინ სამართლიანია პუასონის განტოლება

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y_1} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y_2} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y_n} = 0. \quad (7.80)$$

(7.80) განტოლება განზოგადებული ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებათა მაღალი რიგის წარმომავლებსათვის.

მაგალითი 7.20.

ვიპოვოთ ფუნქციონალის ექსტრემალი

$$I[y(x)] = \int_0^1 (360x^2 y - \dot{y}^2) dx,$$

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad \dot{y}(1) = 2,5$$

ამოხსნა -

ეილერ-პუასონის განტოლებას აქვს სახე

$$360x^2 + \frac{d^2}{dx^2}(-2\dot{y}) = 0, \quad y^{(iv)} = 180x^2$$

მისი ამოხსნაა

$$y(x) = \frac{1}{2}x^6 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4.$$

დამტკიცება. სიმარტივისათვის შემოვისაზღვრით მეორე რიგის წარმომავლით

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, \dot{y}, \ddot{y}) dx. \quad (7.81)$$

მივუმატოთ  $y(x)$  ფუნქციას  $\delta y$  ვარიაცია, ისეთი, რომ  $x = x_0$  და  $x = x_1$  როგორც  $\delta y$ , ისევე  $\delta \dot{y}$  ნულის ტოლია. ფუნქციონალის ნაზრდის წრფივი ნაწილი ტოლია

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y + F_{\dot{y}} \delta \dot{y} + F_{\ddot{y}} \delta \ddot{y}) dx. \quad (7.82)$$

ნაწილობრივი ინტეგრირების წესის გამოყენების შემდეგ გვექნება

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_{\dot{y}} \delta \dot{y} dx = F_{\dot{y}} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{\dot{y}} \delta y dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y dx = F_y \delta y|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_y \delta y dx = F_y \delta y|_{x_0}^{x_1} - \frac{d}{dx} F_y \delta y|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} F_y \delta y dx.$$

(7.83)

(7.83) გამოსახულების არაინტეგრალური წევრები ნულის ტოლია, მაშინ გვეჩვენება

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_y + \frac{d^2}{dx^2} F_y) \delta y dx, \quad (7.84)$$

ვინაიდან ექსტრემუმის აუცილებელი პირობაა პირველი ვარიაციის ნულთან გატოლება, ხოლო  $\delta y$ -არის ნებისმიერი. მაშინ  $\delta I = 0$  გამომდინარეობს (7.80) განტოლება. სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$c_1 = \frac{3}{2}, c_2 = -3, c_3 = 1, c_4 = 0.$$

საძიებელ ექსტრემალს აქვს სახე

$$y(x) = \frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^3 - 3x^2 + x.$$

მაგალითი 7.21.

ვიპოვოთ ფუნქციონალის ექსტრემუმი

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (y^2 + \tau^4 \dot{y}^2) dt.$$

სასაზღვრო პირობებია

$$y(t_0) = x_0; \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0; x(t_1) = x_1, \dot{x}(t_1) = \dot{x}_1.$$

$$F = y^2 + \tau^4 \dot{y}^2$$

$$F_y = 2y; F_{\dot{y}} = 2\tau^4 \dot{y}; F_y = 0.$$

ეილერ-პუასონის განტოლებაა

$$y + \tau^4 y^{(4)} = 0.$$

ამ განტოლების მახასიათებელი განტოლებაა

$$\tau^4 p^4 + 1 = (\tau^2 p^2 - \sqrt{2}\tau p + 1)(\tau^2 p^2 + \sqrt{2}\tau p + 1) = 0.$$

მისი ფესვებია

$$p_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}\tau} \pm j \frac{1}{\sqrt{2}\tau},$$

$$p_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{2}\tau} \pm j \frac{1}{\sqrt{2}\tau}.$$

ფუნქციონალის ექსტრემალს აქვს სახე

$$y(t) = c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{2}\tau}(1+j)t} + c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}\tau}(1-j)t} + c_3 e^{\frac{1}{\sqrt{2}\tau}(1+j)t} + c_4 e^{-\frac{1}{\sqrt{2}\tau}(1-j)t}$$

$$c_i \quad (i = \overline{1,4}).$$

გამოითვლება საწყისი პირობებიდან.

მაგალითი 7.22.

მოიძებნოს შემდეგი ფუნქციონალის ექსტრემუმი

$$I = \int_0^1 (2x^2 + \dot{y}) dx,$$

სასაზღვრო პირობებია  $y(0) = 0; y(1) = 0; \dot{y}(1) = 1. \quad n = 2,$

ამიტომ ეილერ-პუასონის განტოლებას აქვს სახე

$$2x^2 - 2y^{(IV)}(t) = 0.$$

აქედან  $y^{(IV)} = x^2$  ოთხჯერადი ინტეგრირების შედეგად მივიღებთ

$$y(x) = x^6 / 360 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4.$$

სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით

$$c_4 = 0, \quad c_3 = 1, \quad c_2 = -359 / 120, \quad c_1 = 179 / 90.$$

საბოლოოდ მივიღებთ ექსტრემალის განტოლებას

$$y(x) = x^6 / 360 + 179x^3 / 90 + 359x^2 / 120 + x.$$

ლევანდრის პირობაა

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2 < 0$$

და ექსტრემალზე მიიღება ფუნქციონალის მაქსიმუმი.

§ 7.8. ვარიაციული ამოცანები პირობით ექსტრემუმზე

ძალიან ხშირად ტექნიკაში გვხვდება ისეთი ვარიაციული ამოცანები, რომ ფუნქციები, რომლებზედაც მიიღწევა ფუნქციონალის ექსტრემუმი, თვითონ არიან დამოკიდებული დამატებით პირობებზე (კავშირის განტოლებები). მარტივ ამოცანად შეიძლება წარმოვიდგინოთ ორ წერტილს შორის უმოკლესი მანძილის მოძებნა, ე.ი. შემდეგი სახის ინტეგრალის მინიმუმი

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx. \quad (7.85)$$

იმ პირობის გათვალისწინებით, რომ მრუდი, რომელიც აერთიანებს ამ წერტილებს, მდებარეობს ზედაპირზე, მაგალითად, სფეროზე

$$z^2 + x^2 + y^2 - R^2 = 0. \quad (7.86)$$

$y$  და  $x$ -ის გათვალისწინებით (7.86)-დან შეიძლება განისაზღვროს  $z$ . შევიტანოთ (7.85)-ში და შემდეგ მოვიძებნოთ ერთი ცვლადის ჩვეულებრივი ფუნქციონალის ექსტრემუმი.

არსებობს ერთი მარტივი მნემონური წესი, (თეორემა)[7]: იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ფუნქციონალის ექსტრემუმი

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x; y, y', z, z') dx, \quad (7.87)$$

კავშირის განტოლებისას

$$\varphi(x, y, z) = 0. \quad (7.88)$$

უნდა შემოვიტანოთ დამხმარე ფუნქციონალი

$$F^* = F + \lambda(x)\varphi(x, y, z), \quad (7.89)$$

სადაც  $\lambda(x)$ -ჯერჯერობით ჩვენთვის უცნობი ფუნქციაა. ჩვეულებრივი მეთოდებით უნდა მოიძებნოს ფუნქციონალის ექსტრემუმი

$$I^* = \int_{x_0}^{x_1} F^* dx. \quad (7.90)$$

სულ საჭიროა მოიძებნოს სამი უცნობი ფუნქცია:  $y(x), z(x)$  და  $\lambda(x)$ . მათი განსაზღვრისათვის (7.90) ფუნ-

ქციონალის გათვალისწინებით, უნდა ვისარგებლოთ ეილერ-  
-ლაგრანჟის ორი განტოლებით

$$F_y^* - \frac{d}{dx} F_y^* = F_y - \frac{d}{dx} F_y + \varphi_y \lambda(x) = 0;$$

$$F_z^* - \frac{d}{dx} F_z^* = F_z - \frac{d}{dx} F_z + \varphi_z \lambda(x) = 0$$
(7.91)

და კავშირის (7.87) განტოლებით. ამ განტოლებებიდან ვიპოვიტ  $\lambda(x)$  ფუნქციას, რომელსაც უწოდებენ ლაგრანჟის მამრავლს.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ ფუნქციონალის ექსტრემუმი მიიღწევა  $y(x), z(x)$  ფუნქციებზე. მივუმატოთ ამ ფუნქციებს ნულისაგან განსხვავებული ვარიაციები  $\delta y$  და  $\delta z$ ,  $x_0$  წერტილის მცირე მიდამოში ( $x_0 < x_e < x_1$ ) აღვნიშნოთ

$$\sigma_1 = \int_{x_0}^{x_1} \delta y dx; \sigma_2 = \int_{x_0}^{x_1} \delta z dx.$$
(7.92)

განვსაზღვროთ ფუნქციონალის ვარიაცია  $y(x), z(x)$  მრუდეებიდან  $y + \delta y, z + \delta z$  მრუდეებზე გადასვლისას.

ვარიაციის ოპერაციის შესრულება გვაძლევს

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_y) \delta y dx + \int_{x_0}^{x_1} (F_z - \frac{d}{dx} F_z) \delta z dx =$$

$$= F_y - \frac{d}{dx} F_y \Big|_{x=x_0} \sigma_1 + F_z - \frac{d}{dx} F_z \Big|_{x=x_0} \sigma_2.$$
(7.93)

ვარიაციული  $y = y(x) + \delta y; z = z(x) + \delta z$  მრუდეები, როგორც, საწყისები, უნდა მდებარეობდნენ ზედაპირზე, ე.ი. უნდა აკმაყოფილებდნენ (7.88) პირობას.

$$\int_{x_0}^{x_1} [\varphi(x; y + \delta y; z + \delta z) - \varphi(x; y; z)] dx = \int_{x_0}^{x_1} (\varphi_y \delta y + \varphi_z \delta z) dx =$$

$$= \varphi_y \Big|_{x=x_0} \sigma_1 + \varphi_z \Big|_{x=x_0} \sigma_2 = 0.$$

(7.94)

დავუშვათ, რომ ერთ-ერთი  $\varphi_y$  და  $\varphi_z$  კოეფიციენტებიდან განსხვავებულია ნულისაგან, გვექნება

$$\sigma_2 = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z} \sigma_1. \quad (7.95)$$

შვეიტანოთ (7.95) (7.93)-ში, მივიღებთ

$$\delta I = \left[ F_y - \frac{d}{dx} F_y - \frac{\varphi_y}{\varphi_z} \left( F_z - \frac{d}{dx} F_z \right) \right] \sigma_1, \quad (7.96)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$F_y - \frac{d}{dx} F_y - \frac{\varphi_y}{\varphi_z} \left( F_z - \frac{d}{dx} F_z \right) = 0, \quad (7.97)$$

ან

$$\frac{F_y - \frac{d}{dx} F_y}{\varphi_y} = \frac{F_z - \frac{d}{dx} F_z}{\varphi_z} \quad (7.98)$$

(7.98) ტოლობა სრულდება ნებისმიერი  $x$ -თვის, ( $x_0 \leq x \leq x_1$ ), ამიტომ აღნიშნოთ (7.98)-ის მარჯვენა და მარცხენა მხარეები  $\lambda(x)$ -თი, მივიღებთ (7.91). ამით მწმონური სქემა დამტკიცებულია.

ეს წესი სამართლიანია იმ შემთხვევებშიც, როდესაც გვაქვს (7.86) ტიპის რამდენიმე განტოლება. ამ შემთხვევაში

$$F^* = F(x, y_i, \dot{y}_i) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j(x, y). \quad (7.99)$$

იგივე წესი სამართლიანია, როდესაც კავშირის განტოლება შეიცავს საძიებელი ფუნქციის წარმოებულს, ე.ი. გვაქვს დიფერენციალური განტოლება

$$\varphi(x, y, \dot{y}; z, \dot{z}) = 0. \quad (7.100)$$

ასეთ ამოცანას უწოდებენ ლაგრანჟის ზოგად ამოცანას. მწმონური წესი ვრცელდება აგრეთვე ტრანსვერსალობის პირობის მოძებნაზეც. ამ შემთხვევაშიც

$$F^* = F + \lambda \varphi. \quad (7.101)$$



მაგალითი 7.23.

ვიპოვოთ უმოკლესი მანძილი  $A(1, -1, 1)$  და  $B(2, 1, -1)$  წერტილებს შორის, რომლებიც მდებარეობენ ზედაპირზე

$$15x - 7y + z - 22 = 0. \quad (7.102)$$

ამოხსნა. მანძილი  $\varphi(x, y, z) = 0$  ზედაპირის ორ წერტილს შორის განისაზღვრება ფორმულით

$$e = \int_x^{x_1} \sqrt{1 + y^2 + z^2} dx. \quad (7.103)$$

ვიპოვოთ  $e$  მინიმუმი  $\varphi(x, y, z) = 0$  პირობის გათვალისწინებით. ჩვენს შემთხვევაში

$$x_0 = 1, x_1 = 2 \quad \varphi(x, y, z) = 15x - 7y + z - 22. \quad (7.104)$$

შვედგინოთ დამხმარე ფუნქციონალი

$$I^* = \int_1^2 [\sqrt{1 + y^2 + z^2} + \lambda(x)(15x - 7y + z - 22)] dx. \quad (7.105)$$

ვიღერის განტოლებებს აქვთ სახე

$$F_{y_i}^* - \frac{d}{dx} F_{\dot{y}_i}^* = 0; \quad (106)$$

$$\lambda(x)(-7) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + y^2 + z^2}} \right) = 0; \quad (7.107)$$

$$\lambda(x) \cdot 1 - \frac{d}{dx} \left( \frac{\dot{z}}{\sqrt{1 + y^2 + z^2}} \right) = 0. \quad (7.108)$$

ამოცხნათ მიღებული განტოლებები კავშირის გატოლების გათვალისწინებით

$$15x - 7y + z - 22 = 0. \quad (109)$$

საძიებელი  $y(x)$  და  $z(x)$  ფუნქციები აკმაყოფილებენ შემდეგ სასაზღვრო პირობებს

$$y(1) = -1, y(2), z(1) = 0, z(2) = -1. \quad (7.110)$$

გავამრავლოთ (7.107) 7-ზე და ავჯამოთ (7.105)-თან, მივიღებთ

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\dot{y} + 7\dot{z}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) = 0, \quad (7.111)$$

საიდანაც

$$\frac{\dot{y} + 7\dot{z}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = c_1. \quad (7.112)$$

(7.109) მივიღებთ

$$\dot{z} = 7\dot{y} - 15. \quad (7.113)$$

შევიტანოთ ეს გამოსახულება (7.112)-ში. შემდეგ ამოვხსნათ მიღებული დიფერენციალური განტოლება. მივიღებთ

$$y(x) = c_1 x + c_2. \quad (7.114)$$

სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით  $c_1 = 2, c_2 = -3$ ,

$$y(x) = 2x - 3. \quad (7.115)$$

(7.113)-დან (7.115) გათვალისწინებით

$$z(x) = 1 - x, \quad (7.116)$$

$$\lambda(x) = 0.$$

საძიებელი მანძილი  $e = \int_1^2 \sqrt{1 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dx = \sqrt{6}$ .

წინა მაგალითის მსგავსია შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 7.24.

ვიპოვოთ უმოკლესი მანძილი  $\varphi(x, y, z) = 0$  ზედაპირის ორ წერტილს  $A(x_0, y_0, z_0)$  და  $B(x_1, y_1, z_1)$  შორის. როგორც ცნობილია ეს მანძილი გამოითვლება ფორმულით

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \dot{y}^2(x) + \dot{z}^2(x)} dx:$$

უნდა ვიპოვოთ მინიმალური  $e$  მანძილი  $\varphi(x, y, z) = 0$  პირობის გათვალისწინებით.

დაშვებარე ფუნქციონალს აქვს სახე

$$e^* = \left[ \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \dot{y}^2(x) + \dot{z}^2(x)} dx + \lambda(x) \varphi(x, y, z) \right] dx.$$

შევადგინოთ ეილერის განტოლებები

$$\lambda(x) \varphi_y - \frac{d}{dx} \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2(x) + \dot{z}^2(x)}} = 0;$$

$$\lambda(x) \varphi_z - \frac{d}{dx} \frac{\dot{z}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2(x) + \dot{z}^2(x)}} = 0;$$

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

ამ განტოლებებიდან განისაზღვრებიან

$$y = y(x), \quad z = z(x) \quad \text{და} \quad \lambda(x).$$

მაგალითი 7.25.

განვიხილოთ ამოცანა

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7.117)$$

$$x(0) = 0, \quad x(T) = 1, \quad (7.118)$$

$$\int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \min, \quad (7.119)$$

სადაც  $a$  და  $T$  მოცემული მუდმივებია. ეილერის განტოლებებს აქვთ სახე

$$\dot{\varphi} = -a\varphi(t), \quad -2\lambda_0 u(t) - \varphi(t) = 0. \quad (7.120)$$

$$\varphi(0) = -\lambda_1, \quad \varphi(T) = \lambda_2. \quad (7.121)$$

თუ  $\lambda_0 = 0$ , მაშინ (7.120) ფორმულაზე დაყრდნობით ფუნქცია  $\varphi(t) \equiv 0$ . ამიტომ (7.121)-ს თანახმად მუდმივები  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ , ე.ი. ლაგრანჟის ფუნქცია მამრავლები  $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \varphi(t))$  ერთდროულად ნულის ტოლია, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე,  $\lambda_0$ -ის მნიშვნელობა უნდა ავიღოთ ნებისმიერი უარყოფითი რიცხვი. დავუშვათ  $\lambda_0 = -1/2$  მაშინ (7.120)-ის თანახმად  $u(t) = \varphi(t)$ . შევიტანოთ ეს გამოსახულება (7.117)-ში, გვექნება

$$x(t) = \lambda_1 \int_0^t e^{a(t-2s)} ds.$$

დავუშვათ, რომ  $t = T$  და თუ ვისარგებლებთ პირობით  $x(T) = 1$ , მივიღებთ

$$\lambda_1 = -2a[e^{aT} - e^{-aT}]^{-1} \quad (7.122)$$

ოპტიმალურ  $u_0(t)$ -ს აქვს სახე

$$u_0(t) = 2ae^{-at}[e^{aT} - e^{-aT}]^{-1} \quad (7.123)$$

ამ მართვის შესაბამისი ტრეკტორიის განტოლებას აქვს სახე

$$x(t) = [e^{aT} - e^{-aT}][e^{at} - e^{-at}]^{-1} \quad (7.124)$$

(7.123), (7.124) ფორმულები სამართლიანია ნებისმიერი  $a$ -თვის. კერძოდ, თუ  $a = 0$ , ლოპიტალის წესის გამოყენებით გვექნება  $u_0(t) = 1/T$ ,  $x(t) = t/T$ .

მაგალითი 7.26. [86].

განვსაზღვროთ სისტემის წრფივი ოპტიმალური მართვა, რომლის გადაცემის ფუნქციაა

$$w(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

თვისობრიობის მაჩვენებელს აქვს სახე

$$I = \int_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{9}u^2) dt,$$

სასაზღვრო პირობებია

$$x(0) = x_0 \text{ და } x(\infty) = 0.$$

აღნიშნოთ სისტემის გამოსასვლელი  $x_1$ -ით, მისი წარმოებული  $\dot{x}_1 = x_2$ . მაშინ სისტემის განტოლებას აქვს სახე

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u.$$

ლაგრანჟის განუზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდის გამოყენების შემდეგ გვექნება

$$F^* = x_1^2 + x_2^2 + \frac{u^2}{9} + \lambda_1(x_1 - x_2) + \lambda_2(\dot{x}_2 - x_1 - u).$$

ვილერ-ლაგრანჟის განტოლებებს აქვთ სახე

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u; \quad \lambda_1 = 2x_1 + \lambda_2; \quad \lambda_2 = 2x_2 + \lambda_1,$$

სადაც  $u = \frac{9\lambda_2}{2}$  დამხმარე განტოლებაა, რომელიც მიღებულია განტოლებიდან

$$2d(t)u - \sum_{j=1}^n b_j(t)\lambda_j = 0.$$

გამოვრიცხოთ  $u$  და სისტემა წარმოვადგინოთ მატრიცული სახით.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 9/2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

მახასიათებელი განტოლებაა

$$p^4 - 7p^3 + 10 = 0.$$

მისი ფესვებია

$$p_{1,2} = \pm\sqrt{2}, \quad p_{3,4} = \pm\sqrt{5}.$$

გამოსასვლელი  $x_1$  კოორდინატი ტოლია

$$x_1 = \alpha_1 e^{-\sqrt{2}t} + \alpha_2 e^{-\sqrt{5}t}$$

მაშინ  $x_2 = \dot{x}_1$  და განმსაზღვრელი განტოლების გათვალისწინებით გვექნება

$$x_2 = \dot{x}_1 = -\sqrt{2}\alpha_1 e^{-\sqrt{2}t} + \sqrt{5}\alpha_2 e^{-\sqrt{5}t},$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{9}u = \frac{2}{9}(\dot{x}_2 + x_1) = \frac{2}{9}\alpha_1 e^{-\sqrt{2}t} + \frac{4}{3}\alpha_2 e^{-\sqrt{5}t}$$

გამოვსახოთ  $\lambda_2$   $x$  ვექტორის გამოსასვლელი მდგენელე-  
ბით. ეს შეიძლება თუ  $\alpha_1 e^{-\sqrt{2}t}$  და  $\alpha_2 e^{-\sqrt{5}t}$  განვსაზღვრავთ  
 $x_1$  და  $x_2$  გამოსახულებებიდან.

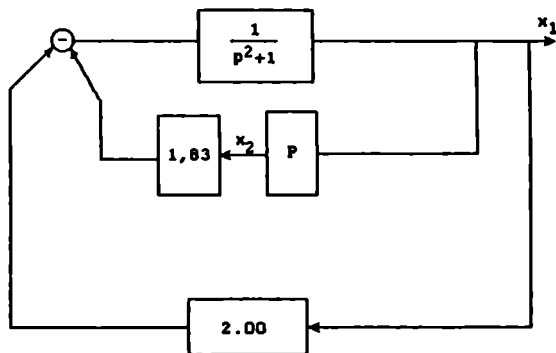
$$\alpha_1 e^{-\sqrt{2}t} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}(\sqrt{5}x_1 + x_2),$$

$$\alpha_2 e^{-\sqrt{5}t} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}(\sqrt{2}x_1 + x_2),$$

მაშინ  $\lambda_2$  ტოლია  $\lambda_2 = -0,445 - 0,406x^2$

$$u = \frac{9}{2}\lambda_2 = -2x_1 - 1,83x_2.$$

ოპტიმალური მართვის მოწყობილობის საბოლოო სტრუქ-  
ტურა მოცემულია (ნახ.7.12).



ნახ.7.12

## § 7.9. ვარიაციული აღრიცხვის იზოპერიმეტრული ამოცანა

პირობითი ექსტრემუმის ამოცანებში პირობები, რომლებ-  
საც ეჭვმდებარებიან საძიებელი ფუნქციები, შეიძლება მოცე-  
მული იყოს ინტეგრალურ ფორმებში. საძიებელია ფუნქცი-  
ონალის ექსტრემუმი

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, \dot{y}) dx, \quad (7.125)$$

როდესაც კავშირის განტოლებებს აქვს სახე

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} k(x, y, \dot{y}) dx \quad (7.126)$$

და შეინარჩუნება მოცემული მნიშვნელობა  $I_{10}$ , ასეთ ამოცანებს უწოდებენ იზოპერიმეტრულს: ყველა თანაბარი სიგრძის მრუდებს შორის (ერთნაირი პერიმეტრის) ვიპოვოთ მრუდი, რომელიც შემოსაზღვრავს მაქსიმალურ ფართს.

იზოპერიმეტრული ამოცანა შეიძლება დავიყვანოთ ლაგრანჟის ამოცანაზე. აღვნიშნოთ

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x_1} k(x, y, \dot{y}) dx. \quad (7.127)$$

მივიღებთ

$$\dot{\varphi} = k(x, y, \dot{y}). \quad (7.128)$$

ე.ი. დავდივართ ლაგრანჟის შემდეგ ამოცანაზე: ვიპოვოთ  $y(x)$  და  $\varphi(x)$  ფუნქციები, რომლებიც ექსტრემუმს ანიჭებენ ფუნქციონალს

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, \dot{y}) dx.$$

მხედველობაში მისაღებია (7.126) კავშირის განტოლება. შუალედურ ფუნქციას აქვს სახე

$$F_y^* = F + \lambda(x)(\dot{\varphi} - k). \quad (7.129)$$

ვიღერის განტოლებებია

$$F_y^* - \frac{d}{dx} F_y^* = 0; \quad (7.130)$$

$$F_y^* - \frac{d}{dx} F_{\dot{\varphi}}^* = -\frac{d}{dx} \lambda = 0. \quad (7.131)$$

(7.131) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ  $\lambda = const$  შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგი წესი: თუ  $y(x)$  ფუნქცია ანიჭებს ფუნქციონალს ექსტრემუმს

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx.$$

კავშირის განტოლებას აქვს სახე

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} k_i(x, y, y') dx, \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad \text{მაშინ } y(x) \text{ აკმაყოფი-}$$

ლებს ეილერის განტოლებას  $F'_y - \frac{d}{dx} F'_y = 0$ ,

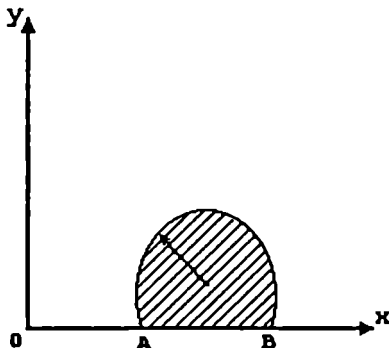
სადაც

$$F^* = F + \lambda_{01} k_1 + \lambda_{02} k_2 + \dots + \lambda_{0n} k_n;$$

$\lambda_{0i}$ -მუდმივი რიცხვებია.

მაგალითი 7.27.

$A$  და  $B$  წერტილის შემაერთებელ ყველა  $e$  სიგრძის მრუდეებს შორის, ვიპოვოთ მრუდი, რომელიც  $AB$  მონაკვეთთან ერთად შეზღუდავს მაქსიმალურ ფართს. (ნახ.7.13)



ნახ.7.13

$y(x)$  ფუნქციის მიერ შემოსაზღვრული ფართი ტოლია



$$I = \int_a^b y(x) dx.$$

საძიებელია  $y(x)$  ის მიერ შემოსაზღვრული მაქსიმალური ფართი შემდეგი პირობების გათვალისწინებით

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \ell,$$

$$y(a) = y(b) = 0.$$

შუალედურ ფუნქციას აქვს სახე

$$F^* = y + \lambda_0 \sqrt{1 + y'^2}$$

ეილერის განტოლებაა

$$F^* - y'F_y^* = c_1,$$

ე.ი.

$$y + \lambda_0 \sqrt{1 + y'^2} - \lambda_0 \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1,$$

საიდანაც

$$y = c_1 - \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

ან

$$(y - c_1)^2 = \frac{\lambda_0^2}{1 + y'^2}.$$

ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ

$$(x - c_1)^2 = (y - c_1)^2 = \lambda_0^2.$$

ეს არის  $\lambda_0^2$  რადიუსის წრის განტოლება. ამრიგად, მაქსიმალურ ფართს შემოწერს წრის ნაწილი.  $c_1, c_2$  და  $\lambda_0$  უცნობი მუდმივები განისაზღვრება სამი პირობიდან: წრე უნდა გადიოდეს  $A, B$  წერტილებში და მანძილი  $A$  და  $B$  წერტილებს შორის უნდა იყოს  $\ell$ -ის ტოლი.

დიდონას ამოცანა განვიხილოთ შემდეგი ვარიაციული ამოცანა უძრავი ბოლოებით: შევეერთოთ  $y = y(x) \geq 0$  ( $-x_0 \leq x \leq x_0$ )  $e$  სიგრძის მრუდით ორი წერტილი  $(-x_0, 0)$  და  $(x_0, 0)$  ისეთნაირად, რომ ბრტყელი არე, შემოსაზღვრული ამ მრუდით, იყოს მაქსიმალური.

ამოცანის მათემატიკური ფორმალიზება შემდეგშია:  
 ამოცანის ფუნქციონალს აქვს სახე

$$I[y] = - \int_{x_0}^{x_1} y(x) dx,$$

შეზღუდვებს

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y^2(x)} dx = e,$$

ამასთან  $e \geq 2x_0$  (წინააღმდეგ შემთხვევაში ამოცანას არა აქვს ამოხსნა). სრულდება სასაზღვრო პირობები  $y(-x_0) = y(x_0) = 0$ . ჩავწეროთ ამ ამოცანისათვის ეილერ-

ლაგრანჟის ამოცანა 
$$-\lambda_0 - \frac{d}{dx} \frac{\lambda_1 y}{\sqrt{1 + y^2}} = 0.$$

თუ  $\lambda_0 = 0$ , აქედან გამომდინარეობს  $\dot{y} = const$ , ე.ი.  $y \equiv 0$  ერთადერთი ამონახსნია, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს. ეს შესაძლებელია მხოლოდ  $e = 2x_0$ . აუშვათ  $\lambda_0 = 1$ ,  $\lambda_1 = \lambda \in R$ . ეილერ-ლაგრანჟის განტოლების ინტეგრირება გვაძლევს

$$\frac{\lambda y}{\sqrt{1 + y^2}} = x - c_1,$$

სადაც  $c_1 = const$  ამონახსნი  $y$  მიმართ გვაძლევს

$$y = \pm \frac{x - c_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2}},$$

საიდანაც

$$y - c_2 = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2},$$

ან

$$(x - c_1)^2 + c_2^2 = \lambda^2$$

მივიღებთ წრეწირების ოჯახს. გავითვალისწინოთ სასაზღვრო პირობები და შეზღუდვები

$$(-x_0 - c_1)^2 + c_2^2 = \lambda^2,$$

$$(x_0 - c_1)^2 + c_2^2 = \lambda^2,$$

$$\lambda \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2}} = e,$$

საიდანაც ვიპოვით

$$c_1 = 0, c_2^2 = \lambda^2 - x_0^2, \arcsin \frac{x_0}{\lambda} = \frac{e}{2\lambda}. \quad (7.132)$$

ბოლო განტოლებას  $\lambda$ -ს მიმართ აქვს ამონახსნი მხოლოდ  $e \leq \pi x_0$  შემთხვევაში.

ამრიგად,  $2x_0 < e \leq \pi x_0$  ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. ეს არის რკალი  $|\lambda|$  რადიუსის წრეწირისა, ცენტრით წერტილში  $(0, -|c_2|)$ , სადაც  $c_2$  და  $\lambda$  განისაზღვრებიან (7.132) განტოლებებიდან. მიღებული რკალები არიან დიდონას ამოცანის ამონახსნები.

მაგალითი 7.28.

ვიპოვოთ ექსტრემალი იზოპერიმეტრულ ამოცანაში

$$I[y(x), z(x)] = \int_0^1 (y^2 + z^2 - 4xz - 4z) dx,$$

$$y(0) = 0, z(0) = 0, y(1) = 1, z(1) = 1,$$

შემდეგი პირობის გათვალისწინებით

$$\int_0^1 (y^2 - xy - z^2) dx = 2.$$

ამოხსნა. შევადგინოთ დამხმარე ფუნქციონალი

$$F^* = \int_0^1 [\dot{y}^2 + \dot{z}^2 - 4xz - 4z + \lambda(y^2 - xy - z^2)] dx.$$

ვილერის განტოლებებს აქვთ სახე

$$-\frac{d}{dx}(2\dot{y} + 2\lambda\dot{y} - \lambda x) = 0;$$

$$-4 - \frac{d}{dx}(2\dot{z} - 4x - 2\lambda\dot{z}) = 0.$$

მათი ამოხსნა გვაძლევს

$$y(x) = \frac{\lambda x^2 + 2c_1 x}{4(1 + \lambda)} + c_2.$$

$$z(x) = \frac{c_3 x}{2(1 - \lambda)} + c_4.$$

სასაზღვრო პირობების გათვალისწინება გვაძლევს

$$c_1 = \frac{3\lambda + 4}{4(1 + \lambda)}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 2(1 - \lambda), \quad c_4 = 0.$$

მაშასადამე,

$$y(x) = \frac{\lambda x^2 + (3\lambda + 4)x}{4(1 + \lambda)};$$

$$z(x) = x.$$

განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ იზოპერიმეტრული პირობა.

ვინაიდან  $y(x) = \frac{2\lambda x + 3\lambda + 4}{4(1 + \lambda)}$ , ხოლო  $z(x) = 1$ , მივიღებთ

$$\int_0^1 \left[ \frac{(2\lambda x + 3\lambda + 4)^2}{16(1 + \lambda)^2} - \frac{(2\lambda x + 3\lambda + 4)x}{4(1 + \lambda)} - 1 \right] dx = 2,$$

საიდანაც გარკვეული გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ განტოლებას  $\lambda$ -ს განსაზღვრისათვის:

$$\frac{1}{3}(23\lambda^2 + 46\lambda + 24) = 48(\lambda^2 + 2\lambda + 1).$$

აქედან  $\lambda_1 = -\frac{10}{11}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{12}{11}$ . თუ შევიტანთ  $\lambda_2 = -\frac{12}{11}$  იზოპერიმეტრულობის პირობაში ადვილად დავინახავთ, რომ ის არ სრულდება. ხოლო  $\lambda_1 = -\frac{10}{11}$  აკმაყოფილებს იზოპერიმეტრულობის პირობას. საძიებელი ექსტრემალი აკმაყოფილებს განტოლებებს

$$y(x) = \frac{7x - 5x^2}{2};$$

$$z(x) = x.$$

§ 7.10. ფუნქციონალის ექსტრემუმში მოძრავი საზღვრებით,

მაგალითები.

განვიხილოთ ფუნქციონალი:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx.$$

მაგრამ წინა ამოცანებისაგან განსხვავებით დასაშვები მრუდების  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  ბოლოები არა ფიქსირებული, ე.ი. ისინი შეიძლება გარკვეული ტრაექტორიით გადაადგილდნენ. ვთვლით, რომ დასაშვები მრუდები ეკუთვნიან  $C$  კლასს. სიმარტივისათვის დაუშვათ, რომ  $(x_0, y_0)$  ფიქსირებულია, ხოლო მეორე ბოლო  $(x_1, y_1)$  არის თავისუფალი. ამ დაშვებისას თუ რომელიმე  $y = f(x)$  ფუნქციაზე მიიღწევა ფუნქციონალის ექსტრემუმში, მაშინ ასეთი მრუდი იქნება ექსტრემალი ფიქსირებული სასაზღვრო ამოცანისათვის. ინა-იდან შედარება ხდება მრუდებისა, რომლებსაც აქვთ იგივე ბოლოები რაც  $y = f(x)$  მრუდს და აგრეთვე მრუდებისა  $C_1$  კლასიდან თავისუფალი მეორე  $(x_1, y_1)$  ბოლოთი. მაშასადამე,  $y = f(x)$  ექსტრემალი აკმაყოფილებს ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას. ე.ი. არის

ვილერ-ლაგრანჟის განტოლების ამონახსნი. როგორც ვიცით, ვილერის განტოლების ამონახსნი შეიცავს ორ ინტეგრირების მუდმივას:

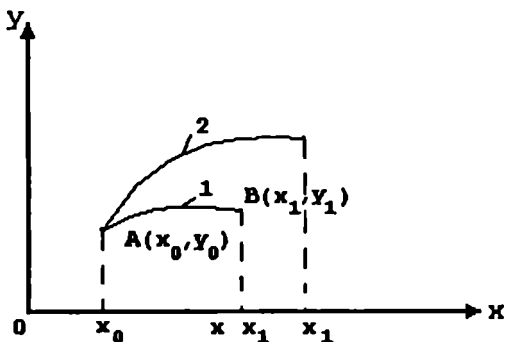
$$y = y(x, c_1, c_2). \quad (7.133)$$

$c_1, c_2$ -ის განსაზღვრისათვის უნდა გამოვიყენოთ სასაზღვრო პირობები. მაგრამ ცნობილია მხოლოდ ერთი  $y_0 = y(x_0, c_1, c_2)$ , მეორე უნდა განისაზღვროს  $\delta I = 0$  პირობიდან.

განვიხილოთ საკითხი: თუ როგორ უნდა მოიძებნოს ნაკლებული პირობა. შევიტანოთ (7.133) ფუნქციონალის გამოსახულებაში, მივიღებთ:

$$I = I(y(x_1, c_1, c_2)). \quad (7.134)$$

ამრიგად, ფუნქციონალი გადაიქცევა  $c_1, c_2$  და  $x_1$  ფუნქციად. ფუნქციონალის ვარიაცია  $\delta I$  თანხვედბა მისგან მიღებული ფუნქციის დიფერენციალს. ვინაიდან მრუდის ერთი ბოლო  $(x_0, y_0)$  დამაგრებულია, ხოლო მეორე ბოლო  $(x_1, y_1)$  თავისუფალია, შესაძლებელია ექსტრემალის მეორე ბოლოს ვარიაციები ვილერის განტოლების ამონახსნა (ნახ.7.14).



ნახ.7.14

ექსტრემალები, რომლებიც გადიან  $A$  წერტილზე, წარმოქმნიან კონას, რომელიც ანალიზურად განისაზღვრება, როგორც  $y = y(x, c_1)$ .  $I$  ფუნქციონალი ამ მრუდებზე გარ-

დაიქმნება  $x$  და  $c_1$  ფუნქციებად. კონის მრუდეებს შორის განვიხილავთ მახლობელ მრუდეებს. ამრიგად, ფუნქციონალის ნაზრდი ტოლია:

$$\Delta I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (7.135)$$

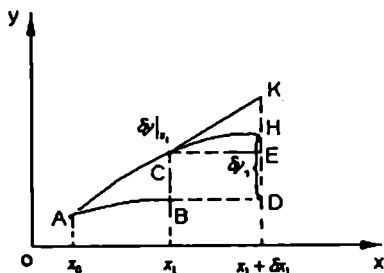
თუ (7.135)-ში პირველი შესაყრების მიმართ გამოვიყენებთ თეორემას საშუალოს შესახებ, შეგვეძლება ინტეგრალქვეშა გამოსახულება დავშალოთ ტეილორის მწკრივად და თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ კონის მრუდეები ეილერის განტოლების ამონახსნებია, (7.135) მიიღებს სახეს:

$$\Delta I = F(x_1, y_1, y')|_{x_1} \delta x_1 + F_{y'} \delta y|_{x_1} + \varepsilon. \quad (7.136)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ  $\delta y|_{x_1} \neq \delta y_1$ , ვინაიდან  $\delta y|_{x_1}$  - არის ორდინატის ნაზრდი  $x = x_1$  დროს, როდესაც  $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$  წერტილებზე გამავალი 1 ექსტრემალიდან გადავდივართ  $(x_0, y_0), (x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$  წერტილებზე გამავალ 2 ექსტრემალზე.

(7.15 ნახაზზე) მოცემულია, რომ:

$$\delta y_1 = \delta y|_{x_1} + y'|_{x_1} \delta x_1 - \varepsilon_1. \quad (7.137)$$



ნახ.7.15

(7.136) განტოლება (7.137)-ის გათვალისწინებით მიიღებს სახეს:

$$\Delta I = F(x, y, \dot{y})|_{x_1} \delta x_1 + F_{\dot{y}} [\delta y_1 - \dot{y}|_{x_1} \delta x_1] + \varepsilon - \varepsilon_1,$$

$$\text{ან, } \delta I = [F(x, y, \dot{y})|_{x_1} - F_{\dot{y}} \dot{y}|_{x_1}] \delta x_1 + F_{\dot{y}} \delta y_1 = 0. \quad (7.138)$$

(7.138) გამომდინარეობს ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობიდან. ვინაიდან, ვარიაციები  $\delta x_1$  და  $\delta y_1$  არიან დამოუკიდებელი და შეუძლიათ მიიღონ ნებისმიერი მნიშვნელობები, მაშინ (7.138)-დან მივიღებთ

$$[F(x, y, \dot{y}) - F_{\dot{y}} \dot{y}]_{x_1} = 0. \quad (7.139)$$

$$F_{\dot{y}}|_{x_1} = 0.$$

(7.139) არის საკმარისი პირობა  $x$  და  $c_1$  მოსაძებნად. ამრიგად, მოცემულ ამოცანაში  $(x_1, y_1)$  თავისუფალი ბოლო-თი და ნებისმიერი  $c_2$  და  $x_1$  მუდმივებით, განისაზღვრება (7.139) განტოლებათა სისტემის და  $y_0 = y(x_0, c_1, c_2)$  პირობის ერთობლივი ამოხსნის შედეგად.

ახლა განვიხილოთ დამოკიდებული ვარიაციების შემთხვევა, როდესაც მარჯვენა სასაზღვრო წერტილი გადაადგილდება  $y = \psi(x)$  მრუდზე ე.ი.  $y_1 = \psi(x_1)$ , მაშინ  $\delta y_1 \approx \psi'|_{x_1} \delta x_1$ . ევითანოთ  $\delta y_1$ -ის მნიშვნელობა (7.139)-ში, მივიღებთ განტოლებას

$$[F(x, y, \dot{y}) + -F_{\dot{y}}(\psi' - \dot{y})]_{x_1} = 0, \quad (7.140)$$

რომელიც  $y = \psi(x)$  განტოლებასთან,  $y = y(x_1, c_1, c_2)$  პირობასთან ერთად  $x = x_0$  შემთხვევაში გვაძლევს საშუალებას მოიძებნოს  $c_1, c_2$  და  $x_1$ . (7.140) განტოლებას უწოდებენ ტრანსვერსალობის განტოლებას. ტრანსვერსალობის პირობა ამყარებს დამოკიდებულებას  $y = \psi(x)$  და  $y = y(x)$  ფუნქციების საკუთხო კოეფიციენტებს შორის. თუ მარცხენა სასაზღვრო წერტილი  $(x_0, y_0)$  აგრეთვე მოძრაობს რომელიღაც  $y = \varphi(x)$  მრუდზე ე.ი.  $y_0 = \varphi(x_0)$ , მაშინ თუ ჩავატარებთ ანალოგიურ მსჯელობას, როგორც წინა შემთხვევაში, მივიღებთ ტრანსვერსალობის პირობას



$$\left[ F(x, y, \dot{y}) + F_y(\phi - \dot{y}) \right]_{x_0} = 0. \quad (7.141)$$

მიღებული შედეგები შეიძლება განვაზოგადოთ სამგანზომილებიანი სივრცისათვის.

მაგალითი 7.29.

ვიპოვოთ უმოკლესი მანძილი  $y = x^2$  პარაბოლასა და  $y = x - 5$  წრფეს შორის. მრუდის სიგრძე, რომელიც აერთიანებს სიბრტყეში ორ  $(x_0, y_0)$  და  $(T, y(T))$  წერტილს, განისაზღვრება ფორმულით

$$I = \int_{x_0}^T \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx.$$

ჩვენს შემთხვევაში  $(x_0, y_0)$  და  $(T, y(T))$  წერტილები უცნობია და საჭიროა მოიძებნოს ფუნქციონალის მინიმუმი, როდესაც ექსტრემალის ერთი ბოლო მოძრაობს  $y = x^2$  მრუდზე, ხოლო მეორე  $y = x - 5$  წრფეზე. მაშასადამე, ვიღერის განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right) = 0;$$

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c;$$

$$\dot{y} = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} = c_1;$$

ამიტომ

$$y(x) = c_1 x + c_2; \quad c_1 \text{ და } c_2 \text{ — მუდმივი სიდიდეებია.}$$

შევიტანოთ  $y(x)$  მნიშვნელობები

$$y_0 = \varphi_0(x_0); \quad y(x_1) = \psi(x_1).$$

მივიღებთ

$$c_1 x_0 + c_2 = x_0^2; \quad c_1 T + c_2 = T - 5;$$

$$\sqrt{1 + c_1^2} - c_1(c_1 - 2x_0) / \sqrt{1 + c_1^2} = 0;$$

$$\sqrt{1+c_1^2} - c_1(c_1 - 1) / \sqrt{1+c_1^2} = 0.$$

ამ სისტემის ამოხსნის შემდეგ მივიღებთ

$$c_1 = -1; c_2 = 3/4; x_0 = \frac{1}{2}; T = \frac{23}{8}.$$

საბოლოოდ ექსტრემალი აღიწერება განტოლებით

$$y(x) = -x + 3/4.$$

ლევანდრის პირობაა

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 1/(\sqrt{1+y})^3 > 0.$$

ე.ი. ფუნქციონალს აქვს მინიმუმი. მინიმალური მანძილია

$$I = \int_{1/2}^{23/8} \sqrt{1+c_1^2} dx = 19\sqrt{2}/8.$$

მაგალითი 7.30.

ვიპოვოთ უმოკლესი მანძილი ორ მრუდს  $y = \varphi(x)$  და  $y = \psi(x)$  შორის. ეს ამოცანა დაიყვანება შემდეგი ინტეგრალის მინიმუმის მოძებნაზე

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y^2} dx.$$

ექსტრემალის განტოლებაა  $y = c_1 x + c_2$ . ჩავწეროთ ტრანსვერსალობის პირობა, მაგალითად მარჯვენა ბოლოსათვის.

$$F = \sqrt{1+y^2} \quad F_y = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}};$$

$$\sqrt{1+y^2} + (\psi - y) \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \Big|_{x_1} = 0;$$

$$\frac{1+y^2\psi' - y^2}{\sqrt{1+y^2}} \Big|_{x=x_1} = 0;$$

$$1 + \psi' \Big|_{x=x_1} = 0;$$

ეს არის ორთოგონალობის პირობა ექსტრემალისა  $y = \psi(x)$  მრუდის მიმართ. ასეთივეა ორთოგონალობის პირობა ექსტრემალსა და  $y = \varphi(x)$  მრუდს შორის. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ექსტრემალი უნდა იყოს ორთოგონალური  $y = \varphi(x)$  და  $y = \psi(x)$  მრუდეების მიმართ.

მაგალითი 7.31.

ვიპოვოთ უმოკლესი მანძილი  $A(1,1,1)$  წერტილიდან  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  სფერომდე.

ამოხსნა. ამოცანა დადის შემდეგი ფუნქციონალის ექსტრემუმის მოძებნაზე

$$I[y, z] = \int_{x_1}^1 \sqrt{1 + y^2(x) + z^2(x)} dx,$$

სადაც  $B(x, y, z)$  წერტილი მდებარეობს სფეროზე. ფუნქციონალის ექსტრემალეზია

$$y = c_1 x + c_2;$$

$$z = c_3 x + c_4.$$

$A(1,1,1)$  წერტილის კოორდინატების გათვალისწინებით

$$c_1 + c_2 = 1;$$

$$c_3 + c_4 = 1.$$

ტრანსვერსალობის პირობაა

$$\left[ \sqrt{1 + y^2 + z^2} - \frac{y^2}{\sqrt{1 + y^2 + z^2}} + \left( \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} - \dot{z} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\dot{z}}{\sqrt{1 + y^2 + z^2}} \right] \Big|_{x=x_1} = 0,$$

$$\left[ \frac{y}{\sqrt{1+y^2+z^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+y^2+z^2}} \frac{(-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right]_{x=x_1} = 0,$$

საიდანაც მცირე გარდაქმნების შედეგად გვექნება

$$\left. \begin{aligned} z_1 - c_3 x_1 &= 0 \\ c_1 z_1 - c_3 y_1 &= 0 \end{aligned} \right\}'$$

სადაც  $x_1, y_1, z_1$  — საძიებელი  $B$  წერტილის კოორდინატებია.  $B(x_1, y_1, z_1)$  წერტილზე გამავალი ექსტრემალების განტოლებებია

$$y_1 = c_1 x_1 + c_2;$$

$$z_1 = c_3 x_1 + c_4.$$

მაშინ მივიღებთ

$$c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 1, c_4 = 0.$$

ე.ი. ექსტრემალის განტოლებებია

$$y = x;$$

$$z = x.$$

ვინაიდან  $B(x_1, y_1, z_1)$  უნდა მდებარეობდეს სფეროზე, ამიტომ გვექნება

$$x_1^2 + x_1^2 + x_1^2 = 1.$$

ე.ი.

$$x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

ამრიგად, მივიღებთ ორ წერტილს

$$B_1 \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right);$$

$$B_2 \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

ადვილი სანახავია, რომ ექსტრემალი, რომელიც აერთიანებს  $A$  წერტილს  $B_1$  წერტილთან, ანიჭებს ფუნქციონალს

$$I[y, z] = \int_{x_1}^1 \sqrt{1 + y_2^2 + z^2} dx$$

მინიმუმს და იგი ტოლია

$$I_{\min} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \sqrt{1 + 1 + 1} dx = \sqrt{3} - 1,$$

ხოლო ექსტრემალი, რომელიც  $A$  წერტილს  $B_2$  წერტილთან აერთიანებს, იძლევა მაქსიმუმს

$$I_{\max} = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \sqrt{3} dx = \sqrt{3} + 1.$$

შენიშვნა. ტრანსვერსალობის პირობის მიღებისას

$F(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  ადვილი სანახავია, რომ ტრანსვერსალობის პირობა არ იცვლება თუ

$$F(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

გეომეტრიული პირობიდან გამომდინარე ექსტრემალი

$$y = x;$$

$$z = x,$$

ორთოგონალურია  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  სფეროსი.

მაგალითი 7.32.

ვიპოვოთ მრუდი, რომელზედაც შემდეგ ფუნქციონალს

$$I[y] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y^2}}{x} dx$$

აქვს ექსტრემუმი.

სასაზღვრო პირობებია: მარცხენა ბოლოში  $y(0) = 0$ , ხოლო მარჯვენა ეკუთვნის  $y = -x + 2$  წრფეს.

ექსტრემალეების ოჯახის განტოლებაა

$$(y - c_2)^2 + x^2 = \frac{1}{c_1^2}.$$

თუ გამოვიყენებთ პირობას  $y(0) = 0$ , მივიღებთ  $c_2^2 = \frac{1}{c_1^2}$ .

ექსტრემუმების განტოლებას ექნება სახე

$$(y - c_2)^2 + x^2 = c_2^2$$

$c_2$  — განისაზღვრება ტრანსფერსალობის პირობით მარჯვენა ბოლოზე. ტრანსფერსალობის პირობა გადავა ორთოგონალობის პირობაზე. გვექნება

$$2y(y - c_2) + 2x = 0,$$

საიდანაც

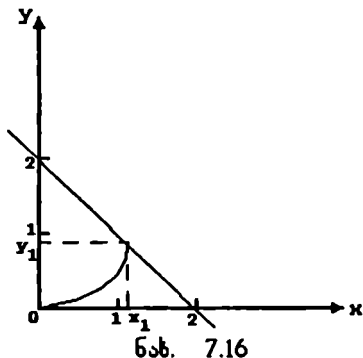
$$\dot{y} = -\frac{x}{y - c_2} = 1.$$

შემდეგი სისტემის

$$y - c_2 = -x, \quad y = -x + 2$$

ამოხსნა გვაძლევს  $c_2 = 2$ . საძიებელი მრუდის განტოლებაა

$$(y - 2)^2 + x^2 = 4; \quad \text{ნახეთ (ნახ.7.16).}$$



ეხლა განვიხილოთ ერთი პრაქტიკული წესი, მოძრავ საზღვრებიანი ამოცანის გადასაწყვეტად [7].

1. შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L(x(t), t_0, t_1, \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} \lambda_0 F(t, x, \dot{x}) dt + \sum_{i=0}^m \lambda_i \Psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

(7.142)

სადაც  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in R^{m+1}$  — ლაგრანჟის მამრავლებია.

2. ამოვიწყოთ აუცილებელი პირობები:

ა) ეილერის განტოლება

$$-\frac{d}{dt} \lambda_0 \hat{F}_x(t) + \lambda_0 \hat{F}_{\dot{x}}(t) = 0 \quad (7.143)$$

ბ) ტრანსვერსალობის პირობა  $x$ -ის მიხედვით

$$\lambda_0 \hat{F}_x(\hat{t}_0) = \hat{e}_{x_0}, \quad \lambda_0 \hat{F}_x(\hat{t}_1) = -\hat{e}_{x_1}, \quad (7.144)$$

სადაც

$$e = e(t_0, x_0, t_1, x_1) = \sum_{i=0}^m \lambda_i \psi_i(t_0, x_0, t_1, x_1).$$

გ) სტანიონარულობის პირობები  $t_0$  და  $t_1$  მიხედვით

$$\hat{L}_{t_0} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_0 \hat{F}(t_0) + \sum_{i=0}^m \lambda_i (\hat{\psi}_{t_0} + \hat{\psi}_{x_0} \hat{x}(\hat{t}_0)) = 0, \quad (7.145)$$

$$\hat{L}_{t_1} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_0 \hat{F}(\hat{t}_1) + \sum_{i=0}^m \lambda_i (\hat{\psi}_{t_1} + \hat{\psi}_{x_1} \hat{x}(\hat{t}_1)) = 0. \quad (7.146)$$

(სტაციონარულობის პირობა ამოიწერება მწოლოდ მოძრავი ბოლოებისათვის).

$\hat{x}$ -ნიშნავს იმას, რომ ამოცანაში მიიღწევა აბსოლუტური ან ლოკალური ექსტრემუმი.

3. ვიპოვოთ, დასაშვები ექსტრემალები, ე.ი. ეილერის განტოლების ამონახსნები, რომლებიც დასაშვები ფუნქციებია და აკმაყოფილებენ ბ), გ) პირობებს არანულოვანი ლაგრანჟის ვექტორული მამრავლებით. საინტერესოა განვიხილოთ შემთხვევები  $\lambda_0 = 0$  და  $\lambda_0 \neq 0$  მეორე შემთხვევაში  $\lambda_0$  შეიძლება ერთს გაუტოლოთ, ან რომელიმე სხვა ნულისაგან განსხვავებულ მუდმივას.

4. ვიპოვოთ ამონახსნი დასაშვებ ექსტრემალებში ან დამტკიცდეს, რომ ამონახსნი არ არსებობს.

ვაჩვენოთ, რომ ეს წესი შედგენილია ლაგრანჟის პრინციპის შესაბამისად. მართლაც, შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L(x(t), t_0, t_1, \lambda) = \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt + \sum_{i=0}^m \lambda_i \psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)),$$

ამოცანიდან

$L(x(t), t_0, t_1, \lambda) \rightarrow \text{extr } x(t)$  მიხედვით (ბოლცის ამოცანა), გამომდინარეობენ აუცილებელი ა), ბ) პირობები, ხოლო ამოცანიდან  $L(\hat{x}(t), \hat{t}_0, \hat{t}_1, \lambda) \rightarrow \text{extr } t_0$  და  $t_1$  მიხედვით, გამომდინარეობს გ) აუცილებელი პირობა. ვინაიდან ეილერის განტოლება არის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება, მისი ამონახსნი შეიცავს ორ ინტეგრირების მუდმივას. გვაქვს  $m$  რაოდენობის  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ლაგრანჟის განუზღვრელი კოეფიციენტები, ამრიგად თუ გავითვალისწინებთ ორი მოძრავი საზღვრის ინტეგრირებას, გვაქვს  $m+4$  უცნობი. მათ მოსაძებნად ჩვენ გვაქვს  $m+4$  განტოლება:  $m$  პირობა  $\psi_i(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ), ორი ტრანსვერსალობის პირობა და ორი სტაციონარულობის პირობა  $t_k$  ( $k = 0, 1$ ) მიხედვით.

მაგალითი 7.33.

ვიპოვოთ ფუნქციონალის ექსტრემუმი მოძრავი საზღვრით

$$I[y(x)] = \int_0^T (\dot{x}^2 - x + 1) dt \rightarrow \text{extr},$$

$$x(0) = 0.$$

ამოხსნა. ლაგრანჟის ფუნქციას აქვს სახე

$$L = \int_0^T \lambda_0 (\dot{x}^2 - x + 1) dt + \lambda x(0).$$

ეილერის განტოლებაა

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0, \quad F = \lambda_0 (\dot{x}^2 - x + 1);$$

$$\lambda_0 (2\ddot{x} + 1) = 0.$$



ტრანსვერსალობის პირობაა  $e$ -თვის  $x$ -ის მიხედვით  
 $e = \lambda x(0), \hat{F}_x(0) = \hat{e}_{x(0)}, \hat{F}_x(\hat{T}) = -\hat{e}_{x(\hat{T})} \Leftrightarrow 2\lambda_0 \dot{x}(0) = \lambda,$

$$2\lambda_0 \dot{x}(\hat{T}) = 0;$$

სტაციონალურობის პირობაა  $T$ -ს მიხედვით

$$\hat{L}(\hat{T}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 (\dot{x}^2(\hat{T}) - x(\hat{T}) + 1) = 0.$$

თუ  $\lambda_0 = 0$ , მაშინ ტრანსვერსალობის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ლაგრანჟის ფუნქციის კოეფიციენტი  $\lambda = 0$ . ა-

ვუშვათ  $\lambda_0 = 1$  მაშინ ეილერის განტოლებიდან  $\ddot{x} = -\frac{1}{2}$ ;

მისი ამონახსნია

$$x = -\frac{t^2}{4} + c_1 t + c_2.$$

ვინაიდან  $x(0) = 0$ , მაშინ  $c_2 = 0$ . უცნობი  $c_1$  და  $\hat{T}$  განსაზღვრისათვის გვაქვს ორი განტოლება  $\dot{x}(\hat{T}) = 0$  და  $\dot{x}^2(\hat{T}) - x(\hat{T}) + 1 = 0$ . მათი ამოხსნა გვაძლევს  $\hat{T} = 2, c_1 = 1$ .

ჩვენ გვაქვს მხოლოდ ერთი დასაშვები ექსტრემალი განსახილველ  $[0, 2]$  მონაკვეთში.

$$\hat{x} = -\frac{t^2}{4} + t.$$

ვაჩვენოთ, რომ  $(\hat{x}(t), \hat{T})$  არა აქვს ლოკალური ექსტრემ-

უმში. მართლაც  $\hat{x}(t) = t - \frac{t^2}{4}$  ფუნქციისათვის

$$\begin{aligned} L(\hat{x}(t)) &= \int_0^T (\dot{\hat{x}}^2 - \hat{x} + 1) dt = \int_0^T \left( \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{t^2}{4}\right) + 1 \right) dt = \\ &= \frac{(T-2)^3}{6} + \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

როდესაც  $T$  ახლოსაა  $\hat{T} = 2$ , ფუნქციონალი  $L(\hat{x}(t), T)$  შეიძლება იყოს როგორც  $L(\hat{x}(t), \hat{T})$ -ზე ნაკლები, ასევე  $L(\hat{x}(t), \hat{T})$ -ზე მეტი.

ავილოთ თანმიმდევრობა წყვილისა  $x_n(t) = t$ ,  $T_n = n$ ; მაშინ  $L(\hat{x}(t), \hat{T}) \rightarrow \infty$ , როდესაც  $n \rightarrow \infty$  ეს იმას ნიშნავს, რომ ამოცანის რიცხობრივი მაჩვენებელი  $S_{\min} = -\infty$ . ცხადია, რომ  $S_{\max} = +\infty$ .

### § 7.11. ტეხილი ექსტრემალები. ვეიერშტრას-ურდმანის პირობა

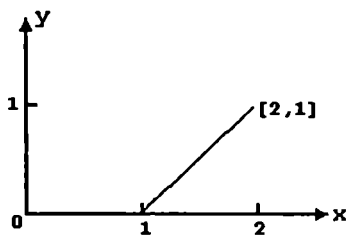
არსებობენ ისეთი ფუნქციონალები, რომელთა ექსტრემუმი მიიღწევა გლუვი მრუდეების კლასის გარეთ, კერძოდ მრუდეების კლასში, რომელთაც აქვთ ტეხილი ხასიათი. განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$I = \int_0^2 y^2 (1-y) dx,$$

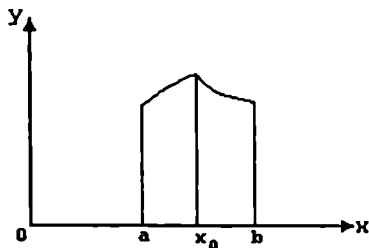
სასაზღვრო პირობებით

$$y(0) = 0; \quad y(2) = 1.$$

ფუნქციონალი შეზღუდულია ქვევიდან 0 მნიშვნელობით და ეს მნიშვნელობა მიიღწევა ან  $y = 0$  ფუნქციაზე, ან  $y = x + c$  ფუნქციაზე (რომლისთვისაც  $1 - y = 0$ ). მაგრამ აღნიშნული ფუნქციები არ აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს და ფუნქციონალის ნულთან ტოლობა მიიღწევა ტეხილით შედგენილ მრუდზე. ( $y = 0; x = 1$ ) წერტილში გათვალისწინებულია  $y = 0$  და  $y = x - 1$  მრუდეები. (ნახ.7.17ა).



ნახ. 7.17(ა)



ნახ. 7.17(ბ)

ნებისმიერ გლუვ მრუდზე, რომელიც აერთებს  $(0,0)$  და  $(2,1)$  წერტილებს, ფუნქციონალის მნიშვნელობა ნულზე მეტია, და მინიმუმი არ მიიღწევა. ტეხილის წერტილებს შორის მრუდეებზე მიიღწევა ექსტრემუმი, აკმაყოფილებს ეილერის განტოლებას. მაგრამ ფუნქციის მთლიანი განსაზღვრისათვის, რომელზედაც მიიღწევა ექსტრემუმი, საჭიროა იმ პარამეტრების ცოდნა, რომლებიც სრულდება ტეხილის წერტილებში.

სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ მრუდს, რომელზედაც მიიღწევა შემდეგი ფუნქციონალის ექსტრემუმი

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

აქვს ერთი ტეხილი  $x_0$  წერტილში  $a$  და  $b$  შორის (ნახ 7.17ბ).

წარმოვადგინოთ ეს ინტეგრალი ორი ინტეგრალის ჯამის სახით

$$I = \int_a^{x_0} F(x, y, y') dx + \int_{x_0}^b F(x, y, y') dx$$

და გამოვთვალოთ თითოეულის ვარიაცია ცალცალკე. აითოვუღ  $[a, x_0]$  და  $[x_0, b]$  მონაკვეთებზე  $y(x)$  მრუდეები წარმოადგენენ ექსტრემალებს და მაშასადამე, ფუნქციონალის ვარიაციიდან გამომდინარე გვექნება

$$\left. \begin{aligned} \delta I_1 &= F_y \Big|_{x=x_0-0} \delta y_0 + (F - yF_y) \Big|_{x=x_0-0} \delta x_0 \\ \delta I_2 &= F_y \Big|_{x=x_0-0} \delta y_0 + (F - yF_y) \Big|_{x=x_0+0} \delta x_0 \end{aligned} \right\}$$

სადაც  $x = x_0 - 0$  სიმბოლო ნიშნავს, რომ წარმოებულები აიღება იმ  $x$ -თვის, რომლებიც მარცხნიდან მიისწრაფიან  $x_0$  წერტილისაკენ, ხოლო  $x = x_0 + 0$  სიმბოლო ნიშნავს, რომ წარმოებულები აიღება იმ  $x$ -თვის, რომლებიც მიისწრაფიან მარჯვნიდან  $x_0$ -კენ.

ექსტრემუმის აუცილებელი პირობაა პირველი ვარიაციის ნულთან ტოლობა ე.ი.

$$\delta I = \delta I_1 + \delta I_2 = 0.$$

მაშასადამე,

$$\left( F_y \Big|_{x=x_0-0} - F_y \Big|_{x=x_0+0} \right) \delta y_0 + \left[ (F - yF_y) \Big|_{x=x_0-0} - (F - yF_y) \Big|_{x=x_0+0} \right] \times \delta x_0 = 0.$$

აქედან  $\delta x_0$  და  $\delta y_0$ -ის ნებისმიერი მნიშვნელობის გამო გამოძინარეობს, რომ

$$\left. \begin{aligned} (F_y) \Big|_{x=x_0-0} &= (F_y) \Big|_{x=x_0+0}, \\ (F - yF_y) \Big|_{x=x_0-0} &= (F - yF_y) \Big|_{x=x_0+0} \end{aligned} \right\} \quad (7.147)$$

(7.147) პირობებს უწოდებენ ვეიერშტრას-ურდმანის პირობებს. ეს პირობები საშუალებას იძლევიან განისაზღვროს ის მუდმივები, რომლებიც აკლია ექსტრემალების განტოლებებს.

ვეიერშტრას-ურდმანის პირობა იძლევა საშუალებას დავაზუსტოთ ეილერის თეორემის მნიშვნელობა. ეილერის თეორემა ამტკიცებს, რომ თუ ექსტრემუმი არსებობს და მიიღწევა უბან-უბან გლუვი ფუნქციების კლასში, მაშინ ის მიიღწევა მხოლოდ ექსტრემალზე. მაგრამ ექსტრემალები უამრავია. ეილერის თეორემა ღიად ტოვებს იმის შესაძლებლობას, რომ მრუდი, რომელზედაც მიიღწევა ფუნქციონალის ექსტრემუმი, შედგენილია ექსტრემალების რკალებისაგან, შესაბამება ინტეგრირების მუდმივების სხვადასხვა მნიშვნელობებს და დაკავშირებულია ტეხილთან, ან შედგენილია ეილერის განტოლების სხვადასხვა ამონახსნებისაგან, თუ მას აქვს ეს ამონახსნები.

ვეიერშტრას-ერდმანის პირობა საშუალებას იძლევა დაედლი-  
 ოთ ეს განუზღვრელობა. ტეხილები შეიძლება არსებობდეს  
 იმ შემთხვევაში, როდესაც  $F_{yy} = 0$ , ან თვითონ  $F$  ფუნ-  
 კცია განიკდის წვეტას და ტეხილის კუთხე შეიძლება  
 იყოს ისეთი, რომ სრულდებოდეს ვეიერშტრას-ერდმანის პი-  
 რობები.

მრუდს, შედგენილს ეილერის განტოლების ამონახსნებისაგან  
 ისეთნაირად, რომ შესრულდებოდეს ვეიერშტრას-ერდმანის პი-  
 რობები, უწოდებენ ტეხილ ექსტრემალს.

მაგალითი 7.34.

განვიხილოთ ამოცანა იმ მრუდის მოძებნისა, რომელიც  
 გადის წერტილებზე  $x=0, y=0$  და  $x=2, y=1$  და  
 ანიჭებს მინიმუმს ფუნქციონალს

$$I = \int_0^2 (y^2 - 2y^2 y' + y^2 y'') dx.$$

ამ შემთხვევაში

$$F_y = 2y^2(y' - 1); \quad F_{yy} = 2y^2$$

ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებას აქვს სახე

$$F - y'F_y = c,$$

ე.ი.

$$y^2(1 - y'^2) = c,$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ  $y=0$ , ან  $y' = \pm \sqrt{1 - \frac{c}{y^2}}$ .

ამრიგად, ეილერის განტოლებას აქვს რამდენიმე ამონახსნი.  
 თუ  $F_{yy} = 0$   $y=0$  შემთხვევაში, მაშინ აბცისთა ღერძზე შე-  
 იძლება იყოს ტეხილის წერტილები, რომლებზეც შეუღლდე-  
 ბიან ეილერ-ლაგრანჟის განტოლების სხვადასხვა ამონახსნები.

ვეიერშტრას-ერდმანის პირობიდან გამომდინარე, ექსტრემა-  
 ლისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს  $y' = \pm \sqrt{1 - \frac{c}{y^2}}$  პირობას

შეუღლების წერტილში  $y=0$  ამონახსნით უნდა იყოს  
 $y-1=0$  ე.ი.  $c=0$ . ნამდვილად, თუ  $c \neq 0$ , მაშინ ტეხი-

ლის წერტილის მარჯვნიდან  $F - yF_y = y^2(1 - y^2) = c$ , ხოლო მარცხნიდან  $F - yF_y = y^2(1 - y^2) = 0$ , ვინაიდან  $y = 0$ . ამრიგად, ფუნქციონალის

$$I = \int_0^2 (y^2 - 2y^2y' + y^2y'^2) dx.$$

მინიმუმი მიიღწევა ტეხილ მრუდზე.  $0 \leq x \leq 1$  პირობა გვაძლევს  $y = 0$ , ხოლო  $1 \leq x \leq 2$  გვაძლევს  $y = x - 1$ . ამოცანა ხდება ცხადი თუ ფუნქციონალს წარმოვადგენთ შემდეგი სახით

$$I = \int_0^2 (y^2(1 - 2y'))^2 dx.$$

## § 7.12. ეილერის განტოლების კანონიკური ფორმა

როგორც ცნობილია, თუ მოცემული გვაქვს ფუნქციონალი, რომელიც დამოკიდებულია  $y_i(x)$  ( $i = 1 \dots n$ ) ფუნქციებზე.

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx. \quad (7.148)$$

მის შესაბამის ეილერის განტოლებათა სისტემას აქვს სახე

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 \quad (i = 1 \dots n). \quad (7.149)$$

ეს სისტემა ყოველთვის შეიძლება დავიყვანოთ პირველი რიგის  $2n$  განტოლებათა სისტემაზე. ამისათვის უნდა შემოვიტანოთ კანონიკური ცვლადები  $y_i$  და

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial y_i'}, \quad (i = 1 \dots n).$$

ეუწოდოთ ჰამილტონის ფუნქცია (ან ჰამილტონიანი) გამოსახულებას

$$H = -F + \sum_{i=1}^n \dot{y}_i p_i. \quad (7.150)$$

მის დიფერენციალს აქვს სახე

$$dH = -dF + \sum_{i=1}^n \dot{y}_i dp_i + \sum_{i=1}^n p_i d\dot{y}_i - \frac{\partial F}{\partial x} dx - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} d\dot{y}_i + \sum_{i=1}^n \dot{y}_i dp_i. \quad (7.151)$$

ვინაიდან  $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} = p_i$ , ამიტომ მესამე და მეოთხე შესაყრე-ბები გაბათილდებიან და გვექნება

$$dH = -\frac{\partial F}{\partial x} dx = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i + \sum_{i=1}^n \dot{y}_i dp_i. \quad (7.152)$$

სრული დიფერენციალის განსაზღვრის თანხმად, ფორმულაში შესაბამისი ცვლადების მიხედვით  $dx, dy_i$  და  $dp_i$  დიფერენციალების წინ უნდა იყოს  $H$  კერძო წარმოებულები. ე.ი.

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = -\frac{\partial H}{\partial \dot{y}_i}; \quad \dot{y}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (7.153)$$

ვისარგებლოთ (7.148) ფუნქციონალისათვის (7.153) განტო-ლებით და ჩავწეროთ სიმეტრიული  $y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n$   $2n$  ფუნქციებისათვის

$$\frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (7.154)$$

რომელგზაც უწოდებენ ეილერის განტოლების კანონიკურ ფორმას.

მაგალითი 7.35.

ფუნქციონალისათვის  $\int_a^b \dot{y}^2 dx$ ,

$$\text{გვაქვს } H = -\dot{y}^2 + \dot{y}2\dot{y} = \dot{y}^2 \quad p = \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 2\dot{y} \quad \text{ე.ი.} \quad H = \frac{p^2}{4}.$$

ვილერის კანონიკურ განტოლებებს აქვთ სახე

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{2}.$$

ამოხსნის შედეგად მივიღებთ  $p = c_1$ ;

$$y = \frac{c_1}{2}x + c_2.$$

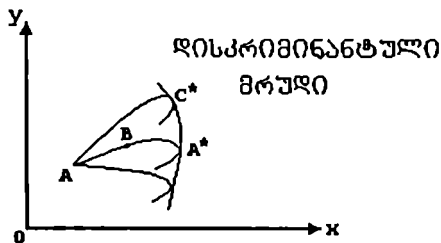
§ 7.13. ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები

წინა პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობები. კლასიკურ ვარიაციულ აღრიცხვის თეორიაში დიდი ადგილი აქვს დათმობილი ფუნქციონალის

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx. \quad (7.155)$$

ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობების შესწავლას. აგებულია იაკობის თეორია-ცენტრალურ ველში ექსტრემალის ჩართვის აუცილებელი პირობა. ექსტრემალების ცენტრალური ველი განისაზღვრება  $A(x_0, y_0)$  წერტილით და ოჯახის მომვლები  $c^0$ -დისკრიმინანტა მრუდით. იაკობის საკმარისი პირობები იძლევიან საშუალებას,  $AB$  გამოსაკვლევინ ექსტრემალისათვის, აიგოს ისეთი ცენტრალური ველი, რომ მის მცირე მიდამოში სხვა ექსტრემალები  $AB$  ექსტრემალთან არ გადაიკვეთებიან (ნახ.7.18)





ნახ.7.18

ე.ი.  $A$ -ს შეუღლებული  $A^*$  წერტილი მდებარეობს  $AB$  ექსტრემალის გარეთ.

ექსტრემალების ველი

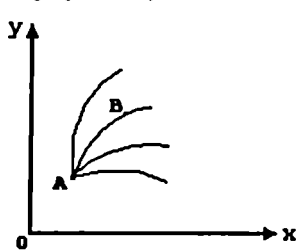
ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა თეორიულად გაცილებით რთული ამოცანაა, ვიდრე აუცილებელი პირობა. კერძოდ, უნდა განვიხილოთ არა ცალკეული ექსტრემალეები, არამედ ექსტრემალეების ოჯახი. მარტივი ფუნქციონალისათვის

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx.$$

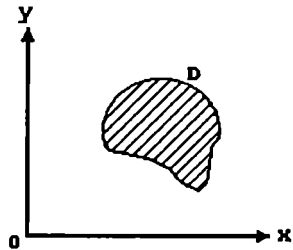
ვილერის განტოლების ამონახსნი წარმოქმნის მრუდების ოჯახს  $y = y(x, c_1, c_2)$  რომელიც დამოკიდებულია  $c_1$  და  $c_2$  მუდმივებზე. ეს მუდმივები განისაზღვრება  $A$  და  $B$  წერტილებში მრუდის გავლით. თუ ექსტრემალი გადის მხოლოდ  $A$  წერტილზე, მაშინ მივიღებთ ექსტრემალეების კონას, გამომავალს  $A$  წერტილიდან (ნახ.7.19). მათ შორის იქნება ექსტრემალიც, რომელიც გადის  $B$  წერტილში.

ეხლა შემოვიტანოთ ცნება "ველი". თუ მრუდების ოჯახი, დამოკიდებულია ერთ პარამეტრზე, განლაგებულია რომელიღაც  $D$  არეში ისეთნაირად, რომ არეს ყოველ წერტილში გადის ოჯახის მხოლოდ ერთი მრუდი, მაშინ ამბობენ, რომ ეს ოჯახი  $D$  არეში ქმნის ველს (უფრო ზუსტად-საკუთრივ ველს).

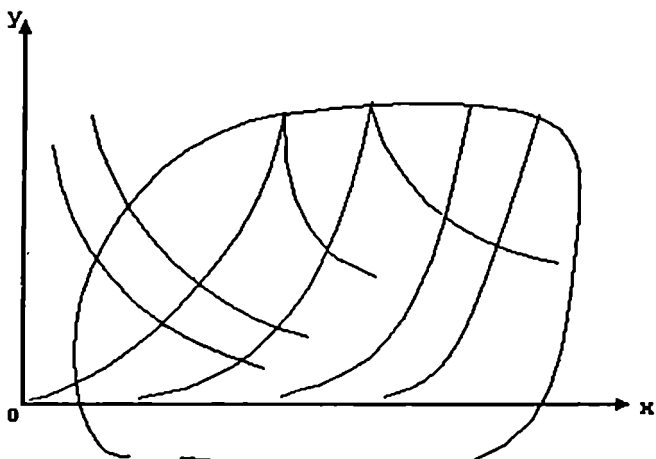
განვიხილოთ პარაბოლური წრფეების ოჯახი  $y = x + c$  სიბრტყის ნებისმიერ ნაწილში. ისინი წარმოქმნიან ველს (ნახ.7.20). პირიქით პარაბოლების ოჯახი  $y = (x + c)^2$  (ნახ.7.21) ზედა ნახევარსიბრტყეში არ წარმოქმნის ველს: აქვს ვერტიკალური გარეშე ოჯახის ორი წევრი.



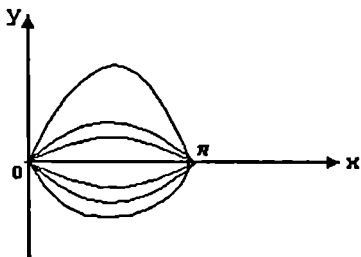
ნახ.7.19



ნახ.7.20



ნახ.7.29



ნახ.7.22

აუცილებელია, ვიპოვოთ უმოკლესი მანძილი  $A$  და  $B$  წერტილებს შორის. ექსტრემალეებია  $y = c_1 x + c_2$ . თუ დავაფიქსირებთ  $A$  წერტილს (მაგალითად  $x = 0, y = 0$ ), მაშინ მივიღებთ წრფეების ოჯახს, რომლებიც იწყებიან ერთი წერტილიდან  $y = c_1 x$ . ეს ოჯახი წარმოქმნის ველს, ვინაიდან სიბრტყის ყველა წერტილში გადის ოჯახის ერთი მრუდი (გარდა ველის ცენტრისა  $x = 0, y = 0$ ). ასეთ ველს უწოდებენ ცენტრალურს.

ექსტრემალეები ფუნქციონალისა

$$I = \int_a^b (y^2 - \dot{y}^2) dx \quad ,$$

არის სინუსოიდები

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

ექსტრემალეების კონა, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეში  $y = c_1 \sin x$  წარმოქმნის ველს (ცენტრალურს), თუ  $-\pi < x < \pi$  (ნახ.7.22) და არ წარმოქმნის ველს, თუ  $x \geq \pi$  ან  $x \leq -\pi$  წერტილებში  $x = -\pi$  ექსტრემალეები გადაიკვეთებიან.

იაკობის ანალიზური პირობაა: მოცემული ექსტრემალის ექსტრემალეების ცენტრალურ ველში ჩასართავად ცენტრით  $A(x_0, y_0)$  წერტილში, საკმარისია, რომ იაკობის განტოლების ამონახსნი  $W(x)$

$$F_{yy} w + F_{y\dot{y}} \dot{w} - \frac{d}{dx} [F_{y\dot{y}} w + F_{\dot{y}\dot{y}} \dot{w}] = 0, \quad (7.156)$$

$x_0 < x \leq x_1$  დროს არ უნდა უდრიდეს ნულს. თუ ეს პირობა შესრულებულია, მაშინ ფუნქციონალის სუსტი და ძლიერი ექსტრემუმის საკითხი წყდება ვეიერშტრასის საკმარისი პირობიდან. ამ პირობის გამოყენების დამტკიცებელია, რომ ფუნქციონალის  $\Delta I$  ნაზრდი მიიღებს სახეს

$$\Delta I = \int_{x_0}^{x_1} E(x, y, \dot{y}) dx, \quad (7.157)$$

სადაც

$$E(x, y, \dot{y}, p) = F(x, y, \dot{y}) - F(x, y, p) - (\dot{y} - p)F_p(x, y, p) \quad (7.158)$$

არის ვეიერშტრასის ფუნქცია;  $p$ —საკუთხე კოეფიციენტი.

ფუნქციონალის სუსტი ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები  $y(x)$  ექსტრემალისათვის შემდეგში მდგომარეობს:

ა)  $c$  მრუდი არის ექსტრემალი, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს.

ბ) სრულდება იაკობის პირობა. ე.ი.  $y = f(x)$  შეიძლება ჩაირთოს ექსტრემალის ველში.

გ) ვეიერშტრასის  $E(x, y, \dot{y}, p)$  ფუნქცია არ იცვლის ნიშანს  $x, y$  წერტილებში ყველა დასაშვები  $f(x)$  ფუნქციებისათვის, რომლებიც ახლოსაა  $c$  მრუდთან და  $p(x, y)$  მახლობელი  $\dot{y}$  მნიშვნელობებისათვის. ამ პირობების შესრულებისას, თუ

$$E(x, y, \dot{y}, p) \geq 0, \quad (7.159)$$

მაშინ  $y = f(x)$  ექსტრემალზე გვექნება სუსტი მინიმუმი, ვინაიდან  $\Delta I \leq 0$ . თუ

$$E(x, y, \dot{y}, p) \leq 0, \quad (7.160)$$

მაშინ  $y = f(x)$  ექსტრემალზე გვექნება ძლიერი მაქსიმუმი.

ფუნქციონალის ძლიერი ექსტრემუმის საკმარისი პირობები  $y = f(x)$  ექსტრემალისათვის გულისხმობს აგრეთვე იაკობის პირობის შესრულებას  $y = f(x)$  ფუნქციისათვის. რაც შეეხება ვეიერშტრასის ფუნქციას  $E(x, y, \dot{y}, p)$  ის არ იცვლის ნიშანს ყველა დასაშვებ  $f(x)$  მრუდეებზე, რომლებიც მახ-

ლობელი არიან  $c$  მრუდის ( $x$  და  $y$  წერტილის მიხედვით), ნებისმიერი  $y$  მნიშვნელობისას. ამასთან თუ  $E(x, y, y, p) \geq 0$ , მაშინ  $y = f(x)$  ექსტრემალზე გვაქვს ძლიერი მინიმუმი. ხოლო  $E(x, y, y, p) \leq 0$ , მაშინ  $y = f(x)$  ექსტრემალზე გვექნება ძლიერი მაქსიმუმი.

ვეიერშტრასის ფუნქციის ნიშნის დადგენა მარტივ შემთხვევაშიც კი რთული ამოცანაა. გამოვიყენოთ ლეჟანდრის საკმარისი პირობები, რომლის საშუალებითაც შეიძლება განისაზღვროს  $I$  ფუნქციონალის მინიმუმი (მაქსიმუმი), მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ინტეგრალქვეშა  $F(x, y, y)$  ფუნქციას აქვს  $y$  მესამე რიგის წარმოებულნი. ვისარგებლებთ რა ამ პირობით,  $F(x, y, y)$  ფუნქცია დავშალოთ ტეილორის მწკრივად  $(x, y, p)$  წერტილის მიდამოში ( $y - p$ ) ნაზრდით.

$$F(x, y, y) = F(x, y, p) + (y - p)F_y \Big|_{y=p} + \frac{1}{2} F_{yy} \Big|_{y=q} (y - p)^2, \quad (7.161)$$

სადაც  $p < q < y$  მესამე წევრი მაღალი რიგის მცირეა.

შევიტანოთ (7.148) განტოლებაში  $F(x, y, y)$ -ის მნიშვნელობა, მივიღებთ

$$F(x, y, y, p) = \frac{1}{2} F_{yy} \Big|_{y=q} (y - p)^2 \quad (7.162)$$

მაშასადამე,

$$\text{sign} E(x, y, y, p) = \text{sign} F_{yy} \Big|_{y=q}. \quad (7.163)$$

თუ  $E_{yy} \Big|_{y=p} \neq 0$  უწყვეტობის გამო ის განსხვავებულია

ნულისაგან  $y = f(x)$  ექსტრემალის არეში და ინარჩუნებს ნიშანს  $p$ -ს მახლობელი  $q$  მნიშვნელობისათვის. მაშინ ვეიერშტრასის საკმარისი პირობა სუსტი მინიმუმისათვის (მაქსიმუმისათვის), შეიძლება შეიცვალოს ლეჟანდრის გაძლიერებული საკმარისი პირობით

$$F_{yy} \Big|_{y=p} \geq (\leq 0). \quad (7.164)$$

ძლიერი მინიმუმისათვის (მაქსიმუმისათვის) ვეიერშტრასის პირობა შეიძლება შეიცვალოს ლეჟანდრის პირობით

$$F_{y''} \Big|_{y=p} \geq 0 (\leq 0). \quad (7.165)$$

იმ წერტილებში, რომლებიც ახლოს არიან  $y = f(x)$  ექსტრემალთან  $x$  და  $y$  მიხედვით, ნებისმიერი  $q$ . თუ მაგალითად,  $F_{y''}$  არ არის  $F_{y''}$ -ზე დამოკიდებული.

მაგალითი 7.36.

გამოვიკვლიოთ ექსტრემუმზე ფუნქციონალი

$$I[y(x)] = \int_0^a y^3 dx; \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b. \\ a > 0, \quad b > 0.$$

ექსტრემალის განტოლებაა

$$y = c_1 x + c_2 \quad \text{ექსტრემუმში მიიღწევა} \quad y = \frac{b}{a} x \quad \text{წრფეზე.}$$

$y = c_1 x + c_2$  წრფეების კონა ცენტრით  $(0,0)$  წერტილში წარმოქმნის ცენტრალურ ველს, რომელიც შეიცავს ექსტრემალს  $y = \frac{b}{a} x$ . ვეიერშტრასის ფუნქციას აქვს სახე

$$E(x, y, p, \dot{y}) = \dot{y}^3 - p^3 - 3p^2(\dot{y} - p) = (\dot{y} - p)^2(\dot{y} + 2p).$$

$$y = \frac{b}{a} x \quad \text{ექსტრემალზე ველის დახრია} \quad p = \frac{b}{a} > 0. \quad \text{თუ } \dot{y}$$

მიიღებს  $p = \frac{b}{a}$  მახლობლობის მნიშვნელობას, მაშინ  $y = \frac{b}{a} x$  და მაშასადამე, სუსტი ექსტრემუმის ყველა პირობა შესრულებულია. ამრიგად,  $y = \frac{b}{a} x$  ექსტრემალზე მიიღწევა სუსტი ექსტრემუმი.

მაგალითი 7.37.

გამოვიკვლიოთ ექსტრემუმზე ფუნქციონალი

$$I[y(x)] = \int_0^1 (x + 2y + \frac{1}{2} \dot{y}^2) dx;$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

ამოხსნა. ამ ფუნქციონალისათვის ეილერის განტოლებას აქვს სახე  $\ddot{y} = 2$  ექსტრემუმებს აქვთ პარაბოლების სახე

$$y = x^2 + c_1x + c_2.$$

სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით

$$y = x^2 - x$$

იაკობის პირობას აქვს სახე

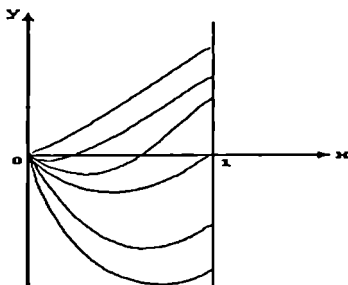
$$-\frac{d}{dx}(u) = 0 \quad \text{ან} \quad \ddot{u} = 0,$$

$$u(x) = c_1x + c_2.$$

პირობა  $u(0) = 0$  გვაძლევს  $c_2 = 0$  ვინაიდან  $u(x) = c_1x$   $c_1 \neq 0$  არსად  $[0,1]$  მონაკვეთში არ უტოლდება ნულს,  $x = 0$  წერტილის გარდა, ამიტომ იაკობის პირობა სრულდება და ექსტრემალი

$$y = x^2 - x$$

შეიძლება ჩავთვოთ ექსტრემუმების ცენტრალურ ველში ცენტრით  $O(0,0)$  წერტილში, სახელდობრ  $y = x^2 + cx$  ოჯახში (ნახ.7.23)



ნახ.7.23

ვეერშტრასის ფუნქციას აქვს სახე

$$E(x, y, p, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{y} - p)^2.$$

აქედან ჩანს, რომ ნებისმიერი  $\dot{y}$ -თვის

$$E(x, y, p, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{y} - p)^2 \geq 0.$$

მაშასადამე,  $y = x^2 - x$  ექსტრემალზე მოცემული ფუნქციონალი აღწევს ძლიერ მაქსიმუმს, რომელიც ტოლია

$$I[x^2 - x] = \frac{1}{3}.$$

§ 7.14. ეილერ-ლაგრანჟის მეთოდი ოპტიმალური მართვის თეორიაში. ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა [43], [113]

სისტემა აღიწერება არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებით

$$\dot{y} = f(t, y, u) \quad (7.166)$$

საწყისი მდგომარეობა მოცემულია:  $y(t_0) = y_0$ .  $t \in [t_0, t_1]$  მართვის დროის ინტერვალში. ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ მოიძებნოს  $u = u(t)$  მართვის ექტორ-ფუნქცია, რომელიც ფუნქციონალს ანიჭებს მინიმუმს

$$I = \int_0^{t_1} F(y, u, t) dt + G(y(t_1), t_1). \quad (7.167)$$

ამრიგად, განიხილება ბოლცის ამოცანა.  $u(t)$  მართვის ფუნქცია ეკუთვნის ღია სიმრავლეს და მისი კომპონენტები დროის უწყვეტი ფუნქციებია.

ეილერ-ლაგრანჟის ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში:

ა) ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით შეავდგინოთ გაფართოებული ფუნქციონალი

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(y, u, t) + \lambda^T (f(y, u, t) - \dot{y}) dt + G(y(t_1), t_1). \quad (7.168)$$

შემოვიტანოთ ფუნქცია

$$H = F(y, u, t) + \lambda^T (f(y, u, t)), \quad (7.169)$$



მაშინ

$$I = \int_{t_0}^{t_1} [F(y, u, t, \lambda) + \lambda^T \dot{y}] dt + G(y(t_1), t_1). \quad (7.170)$$

$\int_{t_0}^{t_1} \lambda^T \dot{y} dt$  ნაწილობრივი ინტეგრირებისას გაფართოებული ფუნქციონალი ჩაეწეროს შემდეგი სახით

$$I = G(y(t_1), t_1) + \lambda^T(t_1)y(t_1) - \lambda^T(t_0)y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} [H(y, u, t, \lambda) + \dot{\lambda}^T y] dt.$$

ბ) გაფართოებული ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა  $\delta I = 0$ . წარმოვადგინოთ ვილერ-ლაგრანჟის განტოლება

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0; \quad \dot{\lambda}^T = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad (7.172)$$

საბოლოო პირობით

$$\lambda^T(t_1) = \left. \frac{dG}{dy} \right|_{t_1} \quad (7.173)$$

გ) უნდა ამოიხსნას ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანა:  $\dot{y} = f(y, u, t)$  (7.174)

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y}; \quad (7.175)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad \lambda(t_1) = \left. \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right|_{t_1} \quad (7.176)$$

ორწერტილოვანი ამოცანების ამოხსნის შესახებ ქვევით გვექნება საუბარი.

იმისათვის, რომ გაფართოებულმა ფუნქციონალმა მიაღწიოს მინიმუმს ორწერტილოვან ამოცანაში, აუცილებელი პირობაა ფუნქციონალის მეორე ვარიაცია  $\delta^2 I > 0$  სადაც

$$\delta^2 I = \frac{1}{2} \left[ \delta y^T, \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \delta y \right]_{t_1} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[ (\delta y^T, \delta u^T y) s(y, u, t) \left( \frac{\delta y}{\delta u} \right) \right] dt; \quad (7.177)$$

$$s(y, u, t) = \begin{bmatrix} H''_{yy} & H''_{yu} \\ H''_{yu} & H''_{uu} \end{bmatrix}. \quad (7.178)$$

$\delta u$  და  $\delta y$  დაკავშირებულია განტოლებით

$$\frac{d}{dt}(\delta y) = f'_y \delta y + f'_u \delta u, \quad \delta y(t_0) = 0. \quad (7.179)$$

თუ  $F$  და  $f$  ცხადად არ არიან დამოკიდებული დროზე და  $u$  ოპტიმალურია, მაშინ პირველი ინტეგრალი  $H = const.$  ახლა შევჩერდეთ თუ როგორი იხსნება ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანები.

განვიხილოთ ე.წ. წრფივ-კვადრატული ამოცანა, ე.ი.

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)v, \quad (7.180)$$

სადაც  $A(t)$  და  $B(t)$  მატრიცებია.

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [x^T p(t)x + u^T G(t)u] dt + \frac{1}{2} x^T(t_1) s_1 x(t_1), \quad (7.181)$$

სადაც  $p(t)$ ,  $s_1$  — არაუარყოფითად განსაზღვრული მატრიცებია.

$G(t)$  — დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა.

ამ შემთხვევაში ფუნქცია

$$H(x, v, \lambda) = \frac{1}{2} x^T p(t)x(t) + \frac{1}{2} v^T G(t)u(t) + \lambda^T [A(t)x + B(t)v]. \quad (7.182)$$

(7.175) განტოლებიდან ვიპოვოთ ოპტიმალური მართვის ფორმულა

$$v^0 = -G^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t). \quad (7.183)$$

(7.183)-ს გათვალისწინებით (7.175) მიიღებს სახეს

$$\dot{x} = A(t)x - B(t)G^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t), \quad (7.184)$$

$$\dot{\lambda} = p(t)x - A(t)\lambda, \quad (7.185)$$

სასაზღვრო პირობებით

$$x(t_0) = x_0, \lambda(t_0) = s_1 x(t_0). \quad (7.186)$$

ორწერტილოვანი სასაზღვრო (7.184), (7.186) ამოცანა ამოიხსნება, მაგალითად "გარეკვის" მეთოდით. თუ დავეყრდნობით (7.186) გამოსახულებას, დროის ნებისმიერი მომენტისათვის  $t \in [t_0, t_1]$

$$\lambda(t) = s(t)x(t). \quad (7.187)$$

შევადგინოთ  $s(t)$  მატრიცისათვის განტოლება. ამისათვის გამოვიყენოთ (7.184). მივიღებთ რიკატის მატრიცულ განტოლებას

$$\dot{S} - SA + A^T S - SBG^{-1}B^T S + P = 0, \quad (7.188)$$

საბოლოო პირობით

$$s(t_1) = s_1. \quad (7.189)$$

ამოვხსნათ (7.188), (7.189) კოშის ამოცანა, მივიღებთ

$$\lambda(t_0) = s(t_0)x(t_0). \quad (7.190)$$

ამის შემდეგ  $x(t_0) = x_0$  და (7.189) გათვლისწინებით ამოვხსნათ (7.184) განტოლებისათვის კოშის ამოცანა. ამრიგად, ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანა დავეყვანეთ კოშის ორ ამოცანაზე.

ამ მეთოდის დასახელება იმაში მდგომარეობს, რომ საბოლოო პირობები "გადაიყვანება" საწყისში.

თუ ფუნქციონალის ინტეგრალური ნაწილი დამოკიდებულია მხოლოდ მართვაზე, (მატრიცა  $p(t) \equiv 0$ ) და ამოცანა სტაციონარულია, ე.ი.  $A, B, G$  მატრიცები შედგენილია მუდმივი ელემენტებისაგან, მაშინ რიკატის განტოლება ხდება ერთგვაროვანი და შეიძლება მოიძებნოს მისი ამონახსნი. მართლაც შემოვიტანოთ საძიებელი მატრიცის შეცვლა  $S = M^{-1}$  ან  $SM = E$ , მაშინ მატრიცის მიმართ მივიღებთ წრფივ განტოლებას

$$\dot{M} = AM - MA^T + BG^{-1}B^T, \quad (7.191)$$

საბოლოო პირობით

$$M(t) = S_1^{-1}. \quad (7.192)$$

(7.191) განტოლების ამონახსნია

$$M = e^{-At} c e^{-At}, \quad (7.193)$$

სადაც  $c$  — ნებისმიერი მუდმივების მატრიცაა. ნებისმიერი მუდმივების ვარიაციის მეთოდის დახმარებით მოიძებნება (7.191) განტოლების ამონახსნი

$$M(t) = e^{-At} c e^{-At} + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} B G^{-1} B^T e^{-A(t-\tau)} d\tau \quad (7.194)$$

სხვა მეთოდი, რომელიც შეიძლება გამოვიყენოთ ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისათვის, ეს არის ნიუტონის მეთოდი.

მოცემულია ვექტორის  $\lambda(t_0): \lambda_j(t_0) = \alpha_j^0$  საწყისი მიახლოება და ამოიხსნება (7.174) განტოლებისათვის კოშის ამოცანა  $[t_0, t_1]$  დროის ინტერვალში.

$t = t_1$  მომენტში ამოწმებენ (7.176) საბოლოო პირობას. თუ ის არ სრულდება, მაშინ შემოაქვთ გაუთანხმებლობა

$$X_0^{(j)} = \left\| \lambda_j(t_1) - \frac{\partial G}{\partial x_j} \Big|_{t_1} \right\|^2, \quad X_0 = \{X_0^{(1)} \dots X_0^{(n)}\} \quad (7.195)$$

გამოიყენება თანამიმდევრული მიახლოების მეთოდი. ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ ვიპოვოთ  $x_0$  ფუნქციის ნულები, დამოკიდებული  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  —ზე.

თუ დაუშვებთ, რომ  $\alpha_j^{(1)} = \alpha_j^{(0)} + \delta_{ij}$ ,  $j = \overline{1, n}$  სადაც  $\delta_{ij}$  — მცირე დამატებებია, მაშინ

$$X_1 = X_0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha_j} X_{0\alpha_j^0} \delta_{ij}. \quad (7.196)$$

(7.196) ფორმულის ნულთან გატოლების პირობიდან მიიღება  $\delta_{ij}$ . ამოირჩევა  $n$  წრფივ განტოლებათა სისტემა  $\delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{1n}$  —ის მიმართ.

აღვნიშნოთ

$$A_0(\alpha) = \left[ \frac{\partial x^{(j)}}{\partial \alpha_i} \Big|_{\alpha_i^0} \right]. \quad (7.197)$$

$\delta_1 = \{\delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{1n}\}$  განსაზღვრისათვის განტოლებები ჩაიწერება შემდეგ სახით

$$A_0(\alpha^0)\delta_1 = -X_0, \quad \delta_1 = -A_0^{-1}X_0. \quad (7.198)$$

გამოითვლება პირველი მიახლოება  $\alpha^{(1)} = \alpha^{(0)} + \delta_1$  ხდება მთელი პროცედურის გამეორება. საბოლოოდ მივიღებთ იტერაციების საბოლოო სურათს

$$\delta_k = A_{k-1}^{-1}X_{k-1}, \quad \alpha^{(k)} = \alpha^{(k-1)} + \delta_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (7.199)$$

ყოველ იტერაციის ბიჯზე გამოითვლება  $A(\alpha)$  მატრიცა და ხდება მისი შებრუნება.

მეთოდის კრებადობა განისაზღვრება ძირითადად მისი საწყისი მიახლოებით. კარგი შერჩევისას იტერაციის პროცესი სწრაფად კრებადია. სიძნელეა საწყისი მიახლოების მოძებნა.

§ 7.15. ვარიაციული აღრიცხვის მეთოდების გამოყენების მაგალითები

განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითებზე ვარიაციული აღრიცხვის ზოგიერთი მეთოდის გამოყენების შესაძლებლობები.

მაგალითი 7.38 [66].

მულტივი დენის ელექტრული ამძრავი.

მულტივი დენის ელექტრული ამძრავისათვის დენის და სიჩქარის საუკეთესო დიაგრამების ამოსარჩევად, გამოვიყენოთ ვარიაციული აღრიცხვის მეთოდი. ეს ამძრავი გამოვიყენოთ ექსკავატორის პლატფორმის მობრუნებისათვის. ელექტრული ამძრავის დანიშნულებაა პლატფორმის კუთხური გადაადგილების გამომუშავება, რომელიც უზრუნველყოფს ციციხის მოძრაობას გრუნტის ამოღების ადგილიდან მის გადმოტვირთვის ადგილამდე. საწყის და საბოლოო მომენტებში პლატფორმის კუთხური სიჩქარე ნულის ტოლია.

განვიხილოთ ელექტროამძრავის ძირითადი განტოლება-ღერძზე მომენტების წონასწორობის განტოლება

$$c_\phi I \Phi_{kk} = j \frac{d\omega}{dt} + M_\phi, \quad (7.200)$$

სადაც  $I$  — ელექტროძრავის ღუზის დენია,  $\Phi_{\mu}$  — სასარგებლო რეზულტირებული მაგნიტური ნაკადი,  $C_{\Phi}$  — მუდმივი კოეფიციენტი,  $j$  — ელექტროძრავის და შემსრულებელი მექანიზმის ინერციის მომენტი, დაყვანილი ელექტრული ძრავის ღერძზე.  $\omega$  — ღუზის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა,  $M_{\Sigma}$  — წინააღმდეგობის მომენტი.

მიზანშეწონილია გადავიდეთ ფარდობით ერთეულებზე მივიღოთ რა ღუზის დენის მაგნიტური ნაკადის, სიჩქარის და მომენტის ერთეულებად მათი ნომინალური მნიშვნელობები, ხოლო დროის ერთეულად — დროის მექანიკური მუდმივა

$$T_2 = \frac{jw_{\Sigma}}{M} \quad (7.201)$$

რიცხობრივად ტოლი ამძრავის გაქანების დროისა ნულიდან ბრუნვის ნომინალური სიხშირის მნიშვნელობამდე გამოწვეული ნომინალური მბრუნავი მომენტის მოქმედებით. იწინაიდან ელექტრომწიფობილობების კატალოგებში მოყვანილია არა ინერციის მომენტი, არამედ ქნევის მომენტი  $CD^2$  მაშინ (7.201) გადავწეროთ სახეში

$$T_2 = \frac{CD^2 n_n}{375 M_H} \quad (7.202)$$

სადაც  $T_M$  — სეკუნდებშია,  $CD^2$  კგ.მ<sup>2</sup>,  $n_n$  — ბრ/წთ,  $M_H$  — ვ.მ.

(7.202) ფორმულა გამოიყენება ფარდობითი ერთეულებიდან აბსოლუტურ ერთეულებზე გადასვლისას.

შემოვიტანოთ ახალი ცვლადები

$$i = \frac{i}{i_B}, \quad \Phi = \frac{\Phi_{\mu}}{\Phi}, \quad v = \frac{w}{w_H}, \quad \mu = \frac{M_{\Sigma}}{M_H}, \quad \tau = \frac{t}{T_M}.$$

(7.200) განტოლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$i\phi = \frac{dv'}{d\tau} + \mu. \quad (7.203)$$

დამოუკიდებელი აღგზნების ძრავებისათვის მაგნიტური ნაკადი შეიძლება ჩავთვალოთ მუდმივ სიდიდედ:  $\Phi = 1$ , მაშინ (7.203) მიიღებს სახეს

$$i = v + \mu. \quad (204)$$

თუ მობრუნების კუთხის ერთეულად ავიღებთ კუთხეს, რომელიც გადის  $t = T_3$  დროში ნომინალური ბრუნვის სიხშირეს, მაშინ ფარდობით ერთეულებში მობრუნების კუთხე  $\alpha$  ტოლია

$$\alpha = \int_0^T \nu d\tau. \quad (7.205)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ  $\alpha$  შეიძლება იყოს ან გადაადგილების მანძილი, ან მობრუნების კუთხე. ორივე შემთხვევაში უგანზომილებო ფარდობით ერთეულებში.

ფარდობით ერთეულებში კარგვები ლუზაში გამოისახება შემდეგი ინტეგრალით

$$Q = \int_0^T i^2 d\tau. \quad (7.206)$$

იმისათვის, რომ არ მოხდეს ლუზის გრაგნილის გადახურება  $Q$  არ უნდა იყოს ზღვრულ მნიშვნელობაზე მეტი, რომელიც აიღება ცხრილებიდან.

ეხლა მოვახდინოთ ამოცანის მათემატიკური ფორმულირება: ვიპოვოთ  $i(\tau)$  და  $\nu(\tau)$  ფუნქციები, დაკავშირებული ერთმანეთთან (7.200) განტოლებით. ისინი ანიჭებენ (7.206) ინტეგრალს მინიმუმს, მოცემული (7.205) გამოსახულებისას და სასაზღვრო პირობებისას.

შეიძლება კიდევ სხვანაირად ჩამოყალიბდეს ამოცანა: ვიპოვოთ დენის და სიჩქარის დიაგრამები ე.ი.  $i(\tau)$  და  $\nu(\tau)$  ფუნქციები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ციცივის გადაადგი-

ლებას მინიმალურ დროში, ე.ი.  $T = \int_0^T dt$  ინტეგრალის მინი-

მუმს. მოცემული (7.205) და (7.206) ინტეგრალებისას და  $\nu(0) = \nu_1$ ,  $\nu(\tau) = \nu_2$  სასაზღვრო პირობებისას და (7.203) კავშირის განტოლებისას (მაქსიმალური სწრაფქმედების ამოცანა).

ამრიგად, დენის და სიჩქარის საუკეთესო დიაგრამების განსაზღვრა დადის ლაგრანჟის ვარიაციულ ამოცანაზე.

(7.204) განტოლებიდან გამომდინარე სიჩქარის ოპტიმალური დიაგრამის განსაზღვრა დავიყვანოთ იზოპერიმეტრულ ამოცანაზე. ვინაიდან პირველი ფორმულირების დროს საკმა-

რისია ვიპოვოთ  $v(\tau)$ , რომელიც მინიმუმს ანიჭებს ინტეგრალს

$$T = \int_0^{\tau} (v' + \mu)^2 d\tau \quad (7.208)$$

მოცემული

$$\alpha = \int_0^{\tau} v d\tau. \quad (7.209)$$

გვაქვს იზოპერიმეტრული ამოცანა შუალედური ფუნქციით

$$L_1 = (v' + \mu)^2 + \lambda_0 v. \quad (7.210)$$

მაქსიმალური სწრაფქმედებისათვის შუალედურ ფუნქციას აქვს სახე

$$L_2 = 1 + \lambda_1 (v' + \mu) + \lambda_2 v. \quad (7.211)$$

მარტივი შემთხვევისათვის განვსაზღვროთ ოპტიმალური დიაგრამის ფორმა, როდესაც წინააღმდეგობის მომენტი ელექტროძრავის ღერძზე მუდმივია ე.ი.  $\mu = \mu_0 = const.$   $L_1$ -თვის ეილერის განტოლებას აქვს სახე

$$2\ddot{v} - \lambda_0 = 0 \quad (7.212)$$

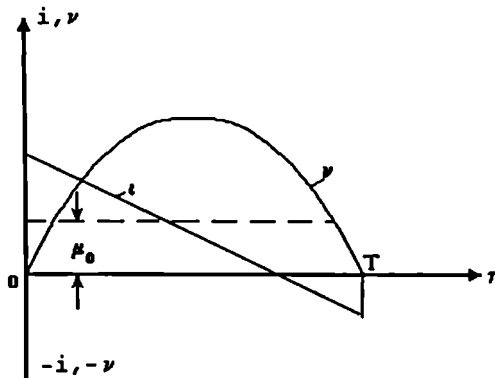
$L_2$ -თვის

$$2\lambda_1 \ddot{v} - \lambda_2 = 0 \quad (7.213)$$

(7.212) და (7.213) განტოლებების ამონახსნი ერთი და იგივე მრუდეების ოჯახია-პარაბოლები.

ამრიგად, სიჩქარის ოპტიმალური დიაგრამა პარაბოლაა, ხოლო ღუზის დენის ოპტიმალურ დიაგრამას აქვს წრფივი ხასიათი. (ნახ.7.24)





ნახ. 7.24

ვრცლად განვიხილოთ პირველი ფორმულირება—მინიმალური კარგეები ლუზაში. (7.212) ვილერის განტოლების ამონახსნია

$$v = c_1 + c_2 \tau + \frac{\lambda_0}{4} \tau^2 \quad (7.214)$$

საში  $c_1, c_2$  და  $\lambda_0$ -ის განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ საში პირობა

$$v(0) = v_1, v(T) = v_2 \quad \text{და} \quad \int_0^T v \, d\tau = \alpha. \quad (7.215)$$

პირველი განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ  $c_1 = v_1$ . ხოლო შემდეგი ორი განტოლებიდან

$$v_2 = v_1 + c_2 T + \frac{\lambda_0}{4} T^2, \quad (7.216)$$

$$\alpha = v_1 T + \frac{c_2 T^2}{2} + \frac{\lambda_0 T^3}{12},$$

ვპოულობთ:

$$c_2 = \frac{6\alpha - 4\nu_1 T - 2\nu_2 T}{T^2};$$

$$\lambda_2 = \frac{24\alpha - 12(\nu_1 + \nu_2)T}{T}.$$
(7.217)

კერძოდ, როდესაც  $\nu_1 = \nu_2 = 0$  გვექნება

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{6\alpha}{T^2} \left( \tau - \frac{\tau^2}{T} \right) \\ i &= \mu_0 + \frac{6\alpha}{T^2} - \frac{12\alpha}{T^3} \tau \end{aligned} \right\}.$$
(7.218)

$i$ -ის გათვალისწინების შემდეგ  $Q$  მიიღებს

$$Q = \frac{12\alpha^2}{T^2} + \mu_0^2 T$$

ლაჟანდრის პირობაა

$$L_{1\dot{\nu}} = 2 > 0.$$
(7.219)

ამრიგად, ექსტრემალებზე მიიღწევა  $Q$ -ს მინიმუმი.

თუ ოპტიმალური მართვისას ბრუნვის სიხშირე გადის ნულზე, ამოხსნა რთულდება იმით, რომ წინააღმდეგობის სტატიკური მომენტი, შექმნილი ხახუნის ძალების მიერ, აღარ არის მუდმივი. მართლაც, ხახუნის ძალების მიერ შექმნილი მომენტი შეიძლება ჩავთვალოთ აბსოლუტური მნიშვნელობით მუდმივად, მაგრამ იცვლის თავის ნიშანს, სიჩქარის ნიშნის შეცვლასთან ერთად.

ასეთ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე არანულოვანი სასაზღვრო პირობებისას, მაგალითად, თუ  $v(0) = \nu_1 < 0$  და საჭიროა პირველად დავამუხრუჭოთ შემსრულებელი მექანიზმის მოძრაობა, ხოლო შემდეგ გადავადგილოთ საწინააღმდეგო მხარეს.  $\nu < 0$  დროს  $i = \dot{\nu} - \mu_0$  (ხახუნი ეხმარება მექანიზმის დამუხრუჭებას),  $\nu > 0$  დროს  $i = \dot{\nu} + \mu_0$  (ხახუნი ხელს უშლის გაქანებას). მაშასადამე, ამ შემთხვევაში  $L_1$  წარმოადგენს წვეტიან ფუნქციას

$$L_1 = (\dot{\nu} + \mu_0 \operatorname{sign} \nu)^2 + \lambda_0 \nu,$$
(7.220)

სადაც  $sign v$  აღნიშნავს ფუნქციას, რომელსაც აქვს ნახტომი  $v = 0$  დროს.  $sign v = +1$ , როდესაც  $v > 0$  და  $sign v = -1$   $v < 0$  შემთხვევაში. ჩვენს ექსტრემალს გააჩნია ტეხილი  $v = 0$  წერტილში და აკმაყოფილებს ვეიერშტრას-ერდმანის განტოლებას.

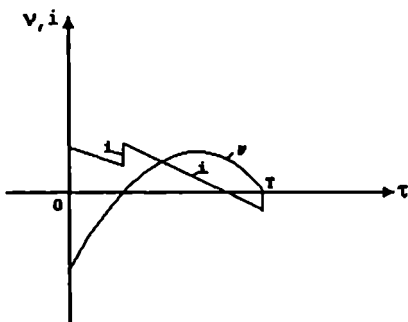
ტეხილის წერტილიდან მარცხნივ გვექნება

$$L_1 - \dot{v} L_{1\dot{v}} = \mu_0^2 + \lambda_0 v - \dot{v}^2, \quad (7.221)$$

ხოლო მარჯვნივ

$$L_1 - \dot{v} L_{1\dot{v}} = \mu_0^2 + \lambda_0 v - \dot{v}^2. \quad (7.222)$$

თუ გავუტოლებთ ამ განტოლებებს ერთმანეთს, თითქოს ადგილი არა აქვს ტეხილს. ამ შემთხვევაში სიჩქარის მრუდი  $v(\tau)$  წარმოადგენს გლუვ ფუნქციას, ხოლო ღუზის დენი სიჩქარის ნულზე გავლისას უნდა განიცდიდეს ნახტომს (ნახ.7.25).



ნახ.7.25

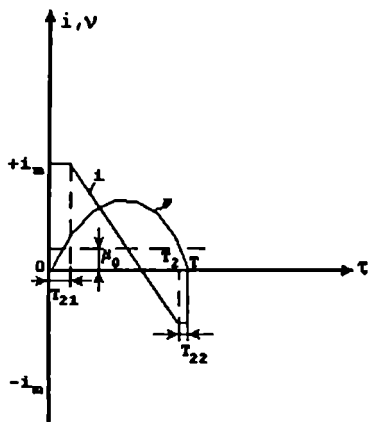
ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც შეზღუდვაა დადებული ღუზის დენზე

$$|i| \leq i_m. \quad (7.223)$$

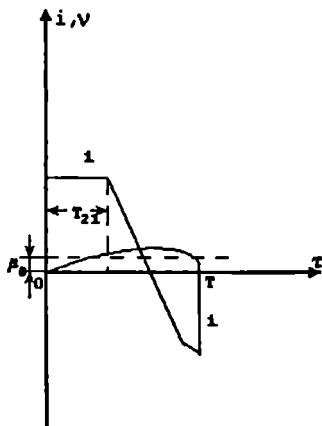
ვინაიდან საძიებელი ფუნქციაა  $v(\tau)$ , ამიტომ უტოლობა ადებს შეზღუდვას მის წარმოებულებზე

$$|\dot{v} + \mu_0| \leq i_m. \quad (7.224)$$

დენის ოპტიმალურ დიაგრამას აქვს სახე (ნახ.7.26), ხოლო დიდი  $\mu_0$  იხილეთ (ნახ.7.27),



ნახ.7.26



ნახ.7.27

განისაზღვროს გადასვლის წერტილები ექსტრემალიდან საზღვრისაკენ. დავიწყოთ იმ შემთხვევიდან, როდესაც ასეთი წერტილი ორია (ნახ.7.26).  $v(0) = v(T)$  პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_0^T (i - \mu) d\tau = 0. \quad (7.225)$$

მეორე მხრიდან

$$\int_0^T (i - \mu) d\tau = \int_0^{T_1} i_m d\tau + \int_{T_1}^{T_2} i d\tau - \int_{T_2}^T i_m d\tau - \int_0^T \mu_0 d\tau. \quad (7.226)$$

ვინაიდან

$$\int_{T_1}^{T_2} i d\tau = 0, \quad (7.227)$$

ამიტომ

$$i_m (T_{21} - T_{22}) = \mu_0 T \quad (7.228)$$

ესლა მოვახდინოთ ლუზის დენის კვადრატის ინტეგრირება უბნებზე 0-დან  $T_1$ -მდე,  $T_1$ -დან  $T_2$ -მდე,  $T_2$ -დან  $T$ -მდე, მივიღებთ:

$$Q = \frac{1}{3} i_m^2 T + \frac{2}{3} i_m^2 (T_{21} + T_{22}). \quad (7.229)$$

ესარგებლობთ რა (7.201) და (7.202) ფორმულებით საბოლოოდ შეიძლება განისაზღვროს  $T_{21}$  და  $T_{22}$

$$\left. \begin{aligned} T_{21} &= \frac{3Q_0}{4i_m^2} - \frac{T}{4} + \frac{\mu_0 T}{2i_m}; \\ T_{22} &= \frac{3Q_2}{4i_m^2} - \frac{T}{4} - \frac{\mu_0 T}{2i_m} \\ T_{21} + T_{22} &= \frac{1}{2} \left( \frac{3Q_0}{i_m^2} - T \right) \end{aligned} \right\}. \quad (7.230)$$

თუ (7.230) ფორმულაში აღმოჩნდება, რომ  $T_{21} + T_{22} > 0$ , მაგრამ  $T_{22} < 0$  ეს ნიშნავს, რომ გვაქვს საზღვრიდან ექსტრემალზე გადასვლის ერთი წერტილი (ნახ.7.27). ამ შემთხვევაში (7.230) ფორმულა აღარ გამოდგება  $T_{21}$ -ის გამოსათვლელად. საჭიროა ცალკე გამოკვლევა. დენის დიაგრამის პირველ მონაკვეთზე (ნახ.7.27)  $i = i_m$   $v = (i_m - \mu_0)\tau$ , მეორე მონაკვეთზე  $i = i_m - \alpha\tau$ ,

$$v = (i_m - \mu_0)\tau T_{21} + (i_m - \mu_0)\tau - \frac{a}{2}\tau^2$$

$a$  კოეფიციენტი განისაზღვრება  $v(T) = 0$  პირობიდან.

ვინაიდან ლუზაში კარგვები პირველ უბანზე  $i_m^2 T_{21}$  ტოლია, ხოლო მეორე ეტაპზე ინტეგრალისა

$$\int_{T_{21}}^T (i_m - a\tau)^2 d\tau, \quad (7.231)$$

ამიტომ  $a$  კოეფიციენტის მნიშვნელობის ჩასმისას საშუალება გვეძლევა განისაზღვროს  $T_{21}$  მოცემული  $Q, i_m, T, \mu_0$  სიდიდეების გათვალისწინებით:

$$T_{21} = T \left( 1 - \frac{4 i_m^2 T - 2 i_m \mu_0 T + \mu_0^2 T}{3 i_m^2 T - 2 i_m \mu_0 T + Q} \right). \quad (7.232)$$

(7.230) და (7.232) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ დენის ოპტიმალური დიაგრამა არსებითად დამოკიდებულია თანაფარდობაზე  $i_m$  ღუზის დენსა, დაშვებული კომპუტაციის პირობებსა და ღუზის დენზე  $i = Q/T$  დაშვებული გახურებისა.

$$\text{თუ} \quad i_m \geq \sqrt{3} \sqrt{\frac{Q}{T}},$$

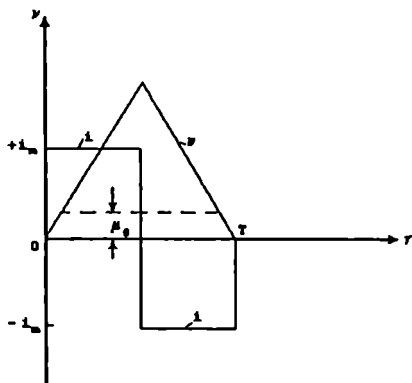
მაშინ საზღვარზე გამაეალი ოპტიმალური დიაგრამის უბნის სიგრძე, ნულის ტოლია. წარმადობის მაქსიმუმი მიიღწევა ექსტრემალზე.

$$\text{თუ} \quad \sqrt{\frac{Q}{T}} < i_m < \sqrt{3} \sqrt{\frac{Q}{T}},$$

მაშინ ექსტრემუმში მიიღწევა შერეულ მრუდზე, შედგენილი ექსტრემალის ნაჭრისა და არეს საზღვრის ნაჭრისაგან. და ბოლოს,

$$\text{თუ} \quad i_m \leq \sqrt{3} \sqrt{\frac{Q}{T}},$$

ექსტრემალის უბნის სიგრძე ხდება ნულის ტოლი, ღუზის დენი  $\tau = \tau_{21}$  მნიშვნელობისას ნახტომით გადადის  $i = i_m$ -დან  $i = -i_m$ -ზე (ნახ.7.28).



ნახ.7.28

$T_{21}$  და  $T_{22}$  შეიძლება განისაზღვროს (7.230) ფორმულის საშუალებით,  $T_{21} + T_{22} = T$  -ს გათვალისწინებით გვექნება:

$$T_{21} = \frac{T}{2} + \frac{\mu_0 T}{2i_m}; \quad T_{22} = \frac{T}{2} - \frac{\mu_0 T}{2i_m}. \quad (7.233)$$

### § 7.16. ოპტიმალური მართვის სისტემა და მართვის ოპტიმალური კანონის მონახვა

მართვის სისტემის ოპტიმალური კანონის მონახვა შეიძლება განხორციელდეს ე.წ. ვილერ-ლაგრანჟის განტოლებების გამოყენების საფუძველზე. ოპტიმიზაციის ამოცანა მართვის სისტემის შემთხვევაში მდგომარეობს იმაში, რომ მოინახოს ისეთი დროის  $u^*(t)$  ფუნქცია, რომლის დროსაც ფუნქციონალი  $I[y(t), u(t), t]$  ღებულობს თავის მინიმალურ ან მაქსიმალურ მნიშვნელობას და როდესაც როგორც მართვის კანონი  $u(t)$  ისე გამოსავალი  $y(t)$  სიდიდე აკმაყოფილებენ გარკვეულ პირობებს. მაშასადამე უნდა მოინახოს ისეთი მართვის კანონი  $u^*(t) \in u(t) \in U$ , რომლის დროსაც ფუნ-

ქიონალი  $I = \int_0^T f(y(t), \dot{y}(t), u(t)) dt$  ლებულობს მაქსიმალურ ან მინიმალურ მნიშვნელობას და სრულდება შემდეგი პირობები:

$$\dot{y}(t) = \varphi[y(t), u(t)],$$

$$\varphi[y(t), u(t)] = 0.$$

ეს ორი უკანასკნელი ტოლობა ფაქტიურად შეზღუდვების კლასს მიეკუთვნებიან.

ამ ამოცანის გადაწყვეტის კლასიკური მეთოდები ემყარებიან ე.წ. ეილერ-ლავრანეს ცნობილ განტოლებებს. შამ-წუხაროდ ასეთი მიდგომა ემყარება აუცილებლობის პირობას, რომელიც სულაც არ არის საკმარისი. სხვანაირად რომ ვთქვათ ეილერ-ლავრანეს მეთოდის საშუალებით ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ ისეთი წერტილი, რომელიც თითქოს უნდა იყოს ექსტრემუმის წერტილი. სინამდვილეში შეიძლება მოხდეს ისე, რომ აღნიშნული წერტილი იყოს ე.წ. უნაგირა წერტილი და არა ექსტრემუმი.

დავუშვათ გვაქვს რაღაც მართვის სისტემა, რომლის დინამიკა აღიწერება განტოლებით

$$\dot{y}(t) = \Phi[y(t), u(t)],$$

სადაც  $y$  და  $u$  ვექტორებია. დავუშვათ ფუნქციონალს, რომლის ექსტრემუმსაც ვეძებთ აქვს შემდეგი სახე

$$I = \Theta[y(t_1), t_1] + \int_{t_0}^{t_1} f[y(t), u(t), t] dt.$$

ამ განტოლებაში მარჯვენა მხარის პირველი წევრი შეესაბამება ფუნქციის მნიშვნელობას ბოლო წერტილში. თუ უკანასკნელ განტოლებას გავამრავლებთ  $\lambda(t)$  მამრავლზე, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ ახალ  $\bar{I}$  ფუნქციონალს.



$$\bar{I} = \Theta[y(t_1), t_1] + \int_0^{t_1} \{f[y(t), u(t), t] + \lambda^T(t)[\Phi(y(t), u(t), t) - \dot{y}(t)]\} dt.$$

თუ მოვხდენთ ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ბოლო წევრის ნაწილობრივ ინტეგრირებას, მივიღებთ

$$\bar{I} = \Theta[y(t_1), t_1] - \lambda^T(t_1)y(t_1) + \lambda^T(t_0)y(t_0) + \int_0^{t_1} \{f[y(t), u(t), t] + \lambda^T(t)\Phi[y(t), u(t), t]\} + \dot{\lambda}^T(t)y(t)\} dt.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$H[y(t), u(t), \lambda(t), t] = f[y(t), u(t), t] + \lambda^T(t)\Phi[y(t), u(t), t].$$

$H[y(t), u(t), \lambda(t), t]$ -ს უწოდებენ ჰამილტონის ფუნქციას. მაშასადამე,

$$\dot{I} = \Theta[y(t_1), t_1] - \lambda^T(t_1)y(t_1) + \lambda^T(t_0)y(t_0) + \int_0^{t_1} \{h[y(t), u(t), t] + \dot{\lambda}^T(t)y(t)\} dt.$$

განვიხილოთ  $\bar{I}$  ფუნქციონალის ვარიაცია

$$\delta \bar{I} = \left[ \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \lambda^T \right) \delta y \right]_{t=t_1} + [\lambda^T \delta y]_{t=t_0} + \int_0^{t_1} \left[ \left( \frac{\delta h}{\delta y} + \dot{\lambda}^T \right) \delta y + \frac{\partial h}{\partial u} \delta u \right] dt.$$

ავიჩინოთ  $\lambda(t)$  მამრავლი ისე, რომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ფრჩხილქვეშა გამოსახულება გახდეს ნულის ტოლი, ანუ

$$\dot{\lambda}^T = -\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda^T \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

გარდა ამისა ავიღოთ სასაზღვრო პირობა

$$\lambda^T(t_1) = \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{t=t_1}$$

$$\text{მაშინ } \delta \bar{I} = \lambda^T(t_0) \delta y(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H}{\partial u} \delta u dt.$$

*I* ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა მდგომარეობს იმაში, რომ ნულის ტოლი უნდა იყოს  $\delta I$  ნებისმიერი  $\delta u$  ვარიაციის დროს. მაშასადამე, უნდა შესრულდეს პირობა

$$\lambda^T(t) = \frac{\partial \theta(t)}{\partial y},$$

$$\lambda = -\frac{\partial h}{\partial u} - \lambda^T \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial h}{\partial u} = 0.$$

იმისათვის, რომ განისაღვროს ის  $u^*(t)$ , როდესაც ფუნქციონალი *I* აღწევს სტაციონალურ მნიშვნელობას (ვინაიდან არ გვაქვს იმის გარანტია, რომ მოვნახოთ *I* ფუნქციონალის ექსტრემუმი) უნდა ამოიხსნას დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგი სისტემა

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t];$$

$$\dot{\lambda}^T(t) = -\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \lambda - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^T$$

სადაც  $u(t)$  განისაღვრება შემდეგი პირობებიდან

$$\frac{\partial h}{\partial u} = 0 \text{ ანუ } \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \lambda + \left(\frac{\partial L}{\partial u}\right)^T = 0. \text{ სასაზღვრო პირობე-}$$

ბი სხვადასხვაა. ზოგი მოცემულია  $t = t_0$  მომენტისათვის, სხვები როდესაც  $t = t_f$ ,  $x(t_0)$  მოცემულია, ხოლო

$$\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^T$$

## თავი მეორე

### ოპტიმალური მართვის ზოგადი ამოცანა

ოპტიმალური მართვის ამოცანა მკიდროდაა დაკავშირებული ვარიაციული აღრიცხვის თეორიასთან. მართალია, ვარიაციული აღრიცხვის თეორიის უპირველესი ამოცანის, ე.წ. „ბრაქისტოქრონის ამოცანის“ დასმისა და გადაწყვეტის შემდეგ თითქმის სამი ასეული წელიწადი გავიდა, ამ თეორიის იდეებმა თავის სრულყოფას მხოლოდ ჩვენი საუკუნის ორმოცდაათიან წლებში მიაღწიეს. ვარიაციული აღრიცხვის იდეები დაგვირგვინდა ლ.პონტრიაგინის "მაქსიმუმის პრინციპისა" და რ.ბელმანის "დინამიკური პროგრამირების" მეთოდების შექმნით. [28], [68], [146] ამ მეთოდების გამოყენებით შესაძლებელი გახდა მართვის თეორიის არაკლასიკური, ურთულესი პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტა. აღნიშნულმა მეთოდებმა ბიძგი მისცეს, აგრეთვე, სხვა მეთოდების შექმნას ოპტიმალური მართვის ამოცანების გადასაწყვეტად. ასეთებად ჩაითვლებიან ნ.კრასოვსკის "მომენტთა მეთოდი", ალიოტოვის "ანალიზური კონსტრუირების მეთოდი" და სხვა [6], [113], [52], [77].

ოპტიმალური მართვის ამოცანები ორ ჯგუფად იყოფიან. ვიდრე მათ შესაჩებ ვისაუბრებთ დეტალურად, განვიხილოთ ის ფიზიკური მოძრაობები, რომელთა საფუძველზეც ხდება ასეთი კლასიფიკაცია.

#### § 8.1. შეუშფოთებელი და შეშფოთებული მოძრაობები

ავტომატური მართვის სისტემის შექმნის პრობლემა წარმოიშვა გასული საუკუნის დასაწყისში. ჯერ კიდევ, ავტომატიკის განვითარების გარიჟრაჟზე, იქმნებოდა სეადასხვა ტიპის რეგულიატორები, რომლებიც გამომგონებელთა წმინდა ინჟინრულ ინტუიციასზე იყო დაფუძნებული. მოგვიანებით განვითარება დაიწყო თეორიამ, რომელიც სწავლობდა ობიექტის დამყარებული მდგომარეობის რეალიზაციის პრობლემას. მეტწილად სისტემის წონასწორობის მდგომარეობას იკვლევდნენ. როგორც წესი, ასეთ გამოკვლევებს წინ უსწრებდა სისტემის მათემატიკური მოდელის შედგენა, ანუ ფაზურ სივრცე-

ში ობიექტის მოძრაობის აღმწერი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ჩაწერა. ასეთი განტოლებები ზოგადი სახით ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\dot{x}(t) = X(x(t), u(t)). \quad (8.1)$$

აქ  $n$ -განზომილების ვექტორი  $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$  აღწერს სისტემის მდგომარეობას დროის ნებისმიერ  $t$  მომენტში;  $r$ -განზომილების ვექტორი  $u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)\}$  მმართველ ანუ სისტემაზე ზემოქმედების ფუნქციას წარმოადგენს; ვექტორი

$$X(x(t), u(t)) = \{X_1(x(t), u(t)), X_2(x(t), u(t)), \dots, X_n(x(t), u(t))\}$$

სისტემაზე მოქმედ განზოგადოებულ ძალას ახასიათებს;

$$t \in T = [t_1, t_f], \quad \text{როდესაც } t_f < \infty, \quad \text{და } t \in T = [t_1, t_f),$$

როდესაც  $t_f = \infty$ . ყველა ვექტორი მხოლოდ ნამდვილ მნიშვნელობებს ღებულობს.

განტოლება (8.1) კოორდინატული ფორმით შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\dot{x}_k(t) = X_k(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_2(t)), \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (8.2)$$

ეს განტოლებები, როგორც ზევით აღვნიშნეთ, უნდა წარმოადგენდეს სამართი ობიექტის მოძრაობის ზუსტ, უარეს შემთხვევაში, რეალურთან საკმაოდ მიახლოებულ აღწერას.

ბუნებრივია, სისტემის დამყარებული მდგომარეობა გამოირიცხავს  $x(t)$  ვექტორის რაიმე გადახრას მოცემული  $x^*(t)$  მნიშვნელობიდან. ეს ნიშნავს  $\dot{x}(t) = 0$  პირობის შესრულებას, ანუ  $\dot{x}_1(t) = 0, \dot{x}_2(t) = 0, \dots, \dot{x}_n(t) = 0$  პირობების ერთდროულად შესრულებას. ამრიგად, რომელიმე დამყარებული მდგომარეობის მისაღწევად, უნდა ამოვხსნათ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა

$$X_k(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (8.3)$$

რა თქმა უნდა, ამ განტოლებათა სისტემის ფესვები უნდა ვეძებოთ ფიქსირებული  $u_1, u_2, \dots, u_r$  მნიშვნელობებისათვის.

ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით ვლებულობთ შესაბამისი დამყარებული მდგომარეობის პარამეტრების მნიშვნელობებს.

ასეთი ამოცანები რეგულირების სტატიკის სფეროს განეკუთვნება.

ვკვთ, (8.3) განტოლებათა სისტემის ამონახსენს ფიქირებული  $u_1, u_2, \dots, u_r$  მნიშვნელობებისათვის აქვს შემდეგი სახე:

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n = x_n^0. \quad (8.4)$$

ასე მიღებული მნიშვნელობების შესაბამის დამყარებულ მდგომარეობას სამართი სისტემის შეუშფოთებელი მოძრაობა ეწოდება.

ეხლა განვიხილოთ რომელიმე დამყარებული მდგომარობის ანუ მოძრაობის რეალიზაციის საკითხი. მმართველი ფუნქციების მოცემული არედან ავირჩიოთ ისეთი  $u^0(t) =$

$= \{u_1^0(t), u_2^0(t), \dots, u_r^0(t)\}$  მმართველი ფუნქცია, რომელიც მოგვეცემს (8.2) განტოლების ჩვენთვის სასურველ ამონახსნს წინასწარ მოცემული სასაზღვრო პირობების დაცვით. ეს ამონახსნი ახასიათებს სამართი ობიექტის დინამიკას და სისტემის მოძრაობა ორი ვექტორით  $u = u^0[t, (i, f)]$ ,

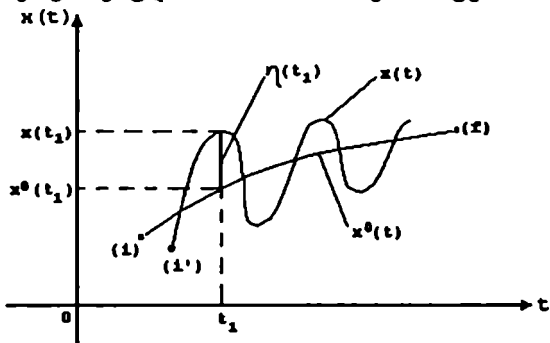
$x = x^0[t, (i, f)]$  აღიწერება (გამოსახულება  $(i, f)$  სიმბოლურად გამოსახავს მოძრაობის ტრაექტორიის სასაზღვრო პირობებს). ასეთი მოძრაობა წინასწარ დაპროგრამებული მოძრაობაა, ეს ისეთი მოძრაობაა, რომელიც ჩვენს სურვილს შეესაბამება. ამ მოძრაობასაც ისევე როგორც (8.4) მოძრაობასაც, პირობითად შეიძლება სამართი სისტემის შეუშფოთებელი მოძრაობა ეწოდოს. ცხადია, რომ მოძრაობა (8.4) ამ მოძრაობის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს.

შეუშფოთებელი მოძრაობა ზოგადად (8.2) განტოლებათა სისტემით აღიწერება.

ისმის კითხვა: როგორ უზრუნველყოთ პროგრამული, შეუშფოთებელი მოძრაობის  $u = u^0[t, (i, f)]$ ,  $x = x^0[t, (i, f)]$  ფიზიკური რეალიზაცია? აქ ვაწყდებით გარკვეულ სიძნელეებს. საქმე იმაში გახლავთ, რომ შეუძლებელია სამართი ობიექტის საწყისი მდგომარეობის აბსოლუტურად ზუსტად განსაზღვრა, რის გამოც, რაც არ უნდა ზუსტად განვახორციე-

ლოთ მართვის პროგრამა  $u^0[t, (i, f)]$ , სისტემის რეალური მოძრაობა აუცილებლად გადაიხრება სასურველი  $x^0[t, (i, f)]$  პროგრამიდან. ეს გადახრა მით უფრო მეტი იქნება, რაც მეტი უზუსტობა გვექნება საწყისი  $(i)$  მნიშვნელობის განსაზღვრასა თუ გაზომვაში. ამან შეიძლება სისტემის არამდგრადობაც გამოიწვიოს.

გამოვიყენოთ იდეა: შევისწავლოთ სისტემის რეალური  $x(t)$  მოძრაობის სასურველ, პროგრამულ, შეუშფოთებელ  $x^0[t, (i, f)]$  მოძრაობიდან გადახრის ცვლილება დროში. ამას ეფუძნება შეშფოთებული მოძრაობის განმარტება (ნახ.8.1).



ნახ.8.1

სისტემის რეალური მდგომარეობის გადახრა პროგრამული მოძრაობიდან გამოვსახოთ  $n$ -განზომილებიანი  $\eta(t) = \{\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t)\}$  ვექტორით. შემოვიტანოთ, აგრეთვე,  $r$ -განზომილებიანი  $\xi(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_r(t)\}$  ვექტორი, რომელიც მმართველი ფუნქციის  $u(t)$  რეალური მნიშვნელობის პროგრამული  $u^0[t, (i, f)]$  მნიშვნელობიდან გადახრას ახასიათებს. ამის შემდეგ სისტემის რეალური მოძრაობა შეიძლება აღიწეროს ორი ახალი ვექტორით:

$$x(t) = x^0(t) + \eta(t), \quad (8.5)$$

$$u(t) = u^0(t) + \xi(t).$$

$\eta(t)$  ვექტორის არანულოვანი მნიშვნელობები ახასიათებენ სისტემის მოძრაობის გადახრის სიდიდეს სასურველი, პროგრამული მოძრაობიდან. იგი აღწერს მოძრაობას, რომელსაც სისტემის შეუფოთებული მოძრაობა ეწოდება.

ბუნებრივია სისტემის კონსტრუქტორის მისწრაფება, რათა მიღწეულ იქნეს დროის გარკვეული  $t^*$  მომენტისათვის ტოლობები

$$\eta_1(t^*) = \eta_2(t^*) = \dots = \eta_n(t^*) \equiv 0 \quad (8.6)$$

და ასეთი მდგომარეობა შენარჩუნებულ იქნეს მართვის პროცესის მთელი შემდგომი დროის განმავლობაში. სწორედ ამ მიზნისათვის პროგრამულ  $u^0[t, (i, f)]$  მართვასთან ერთად

შემოტანილია დამატებითი სამართი ზემოქმედება  $\xi(t)$  ვექტორ-ფუნქციის სახით, რომელმაც უნდა უზრუნველყოს შეუფოთებული მოძრაობის ჩაქრობა, რეალური მოძრაობის პროგრამულთან დამთხვევა, ანუ (8.6) გამოსახულების შესრულება.

უნდა აღინიშნოს, რომ  $\eta(t) \equiv 0$  შემთხვევაში უნდა შესრულდეს  $\xi(t) \equiv 0$  პირობაც. ნულიდან განსხვავებული ზემოქმედებები  $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_r(t)$  უნდა იქნეს შემოტანილი მხოლოდ  $\eta(t) \neq 0$  შემთხვევაში.

შეუფოთებული მოძრაობის აღმწერი განტოლება მიიღება შეუფოთებელი მოძრაობის განტოლებიდან, კერძოდ (8.2) განტოლებათა სისტემაში (8.5) გამოსახულებების ჩასმით. ასეთი ოპერაციის განხორციელებით მივიღებთ განტოლებათა სისტემას

$$\eta_k(t) = Y_k(\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_r(t)), \quad (8.7)$$

$$(k = 1, \dots, n),$$

სადაც  $Y_k(\eta, \xi) = X(x^0 + \eta, u^0 + \xi) - \dot{x}_k^0, \quad (k = 1, \dots, n).$

$X_1, X_2, \dots, X_n$  ფუნქციების მწკრივებად გაშლის შემთხვევაში, განტოლებათა სისტემა (8.7) შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\eta_k(t) = \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} \eta_\alpha(t) \sum_{\beta=1}^n m_{k\beta} \xi_\beta(t) + \theta_k(\eta, \xi), \quad (k = 1, \dots, n). \quad (8.8)$$

აქ  $b_{k\alpha} = \left( \frac{\partial X_k}{\partial x_\alpha} \right)'$ ,  $m_{k\beta} = \left( \frac{\partial X_k}{\partial u_\beta} \right)'$  ზედა ინდექსი "ვარსკვლავი"

მიგვანიშნებს, რომ ეს გამოსახულებები გამოთვლილია მოცემული  $x^0[t, (i, f)]$ ,  $u^0[t, (i, f)]$  პროგრამის მიხედვით.  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  ფუნქციები წარმოადგენენ მწკრივების მაღალი ხარისხის წევრების ერთობლიობას.

ფაქტობრივად, (8.5) ფორმულები განსაზღვრავს კოორდინატთა სისტემის სათაის უბრალო გადატანას ფაზური სივრცის წერტილში კოორდინატებით  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ . ცხადია,

(8.2) განტოლებათა სისტემის ამონახსნს  $x = x^0[t, (i, f)]$  შეესაბამება (8.7) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი  $\eta_1(t) \equiv 0, \eta_2(t) \equiv 0, \dots, \eta_n(t) \equiv 0$ .

ამრიგად, თუ  $t = 0$  მომენტში  $\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t)$  ფუნქციებს გააჩნიათ ნულისაგან განსხვავებული საწყისი მნიშვნელობები  $\eta_{10}, \eta_{20}, \dots, \eta_{n0}$  (ერთ რომელიმეს მაინც), მოცემული  $\xi(t)$  ფუნქციის შესატყვისი (8.7) განტოლებათა სისტემის ცალსახა და უწყვეტი ამონახსნი განსაზღვრავს შემოთავაზებულ მოძრაობას.

## § 8.2. ოპტიმალური მართვის ამოცანათა ორი ჯგუფი

ავტომატური მართვის თანამედროვე სისტემები, უმრავლეს შემთხვევაში, წარმოადგენენ ურთულეს ელექტრომექანიკურ მოწყობილობებს, რომლებიც შედგებიან ობიექტისაგან, მაპროგრამებელი მოწყობილობისა და რეგულიატორისაგან. მაპრო-



გრამებელი მოწყობილობის დანიშნულებაა განსაზღვროს და გათვალოს სისტემის მოძრაობის ისეთი პროგრამა, რომლის განხორციელებაც სასურველია სისტემაში, აგრეთვე, ამ პროგრამის განხორციელება. რეგულიატორის დანიშნულებას კი მაპროგრამებელი მოწყობილობის მიერ გათვლილი სასურველი მოძრაობის (რომელიმე დამყარებული თუ მოცემული კანონის მიხედვით ცვლადი მდგომარეობის) უზრუნველყოფა წარმოადგენს.

ამრიგად, პროგრამული მართვის პროცესი წარმოადგენს სამართი სისტემის ობიექტის იძულებას იმოძრაოს წინასწარ გათვლილი რეჟიმით, ხოლო რეგულირების პროცესი კი რეგულიატორის მიერ ამ რეჟიმიდან ნებისმიერი შესაძლო გადახრის წინააღმდეგ მიმართული მოქმედების პროცესია.

ავტომატური მართვის თეორიის ერთერთი ძირითადი ამოცანა მართვის პროცესის დროში მიმდინარეობის შესწავლაა. იგი მათემატიკური მეთოდებით ხორციელდება და ეფუძნება დოგმას, რომ ავტომატური მართვის ყოველი სისტემა აღიწერება გარკვეული მათემატიკური მოდელით, რომელიც ზოგადად (8.1) ვექტორული განტოლებით გამოისახება. რადგანაც  $x_1, x_2, \dots, x_n$  კოორდინატთა ფაზურ სივრცეში მოძრაობის ტრაექტორიის სახე  $u_1, u_2, \dots, u_r$  მმართველი ფუნქციების არჩევასთანაა მჭიდროდ დაკავშირებული, ბუნებრივია, აღიძვრება სურვილი ასეთი არჩევანის საფუძველზე განვხორციელოთ სასურველი მოძრაობის პროცესი, განვხორციელოთ საუკეთესო პროცესი გარკვეული კრიტერიუმის მიხედვით, ანუ ოპტიმალური პროცესი. ასეთი შეიძლება იყოს პროცესი, რომელიც საუკეთესო იქნება სწრაფქმედების თვალსაზრისით, ანუ სისტემის მიერ საწყისი მდგომარეობიდან წინასწარ დასახული მდგომარეობის უსწრაფეს დროში მიღწევა. ოპტიმალობის აზრი შეიძლება იყოს, აგრეთვე, სისტემის მიერ წინასწარ დასახული მდგომარეობის მიღწევა ენერჯიის მინიმალური დანახარჯებით ან სხვა სასურველი მაჩვენებლებით. ყოველი კონკრეტული ტექნიკური ამოცანის გადაწყვეტისას სისტემის ოპტიმალობაში შეიძლება ჩაქსოვილი იქნეს სხვადასხვა აზრი განსახორციელებელი მიზნის შესაბამისად.

ოპტიმალური მართვის სისტემების აგება ყოველთვის დაკავშირებულია მონათესავე მათემატიკური ამოცანების გადაწყვეტასთან, რომლებიც შეიძლება დაეყუთ ორ ჯგუფად. პირველ ჯგუფს განეკუთვნებიან ამოცანები, რომლებიც დაკავში-

რებულია შეუშფოთებელი, პროგრამული მოძრაობის რეჟიმის განსაზღვრასა და გათვლასთან. ამ დროს იძებნება ავტომატური მართვის ისეთი პროგრამა, რომლის დროსაც მიღებული შეუშფოთებელი მოძრაობა იძენს სასურველ თვისებებს, ოპტიმალურს წინასწარ არჩეული კრიტერიუმის მიხედვით. ასეთი სისტემები ხასიათდება მართვის რეჟიმის ოპტიმალობით. ამ ჯგუფის ამოცანებს ოპტიმალური ტრაექტორიის დაპროგრამების ამოცანები ეწოდება.

მეორე ჯგუფის ამოცანებში იძებნება სისტემის რეგულირების ისეთი კანონი, რომელიც შეშფოთებული მოძრაობის (ანუ გარდამავალი პროცესის) სასურველ თვისებებს უზრუნველყოფს. რეგულირების ასეთი სისტემები ოპტიმალურნი არიან გარდამავალი პროცესის მიხედვით. ამ ჯგუფის ამოცანებს ოპტიმალური რეგულიატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანები ეწოდება. რა თქმა უნდა, ეს ამოცანები ოპტიმალური სისტემის სინთეზის ამოცანებია, უფრო სწორედ, ანალიზური, მათემატიკური სინთეზის ამოცანები. ამიტომაც ეწოდა მათ ასეთი განსხვავებული სახელი. სამეცნიერო ლიტერატურაში ამოცანის ავტორის, აკადემიკოს ა.ლიოტოვის საპატივსაცემოდ "ლიოტოვის ამოცანა"-საც უწოდებენ.

სამართი ობიექტის, ოპტიმალური მაპროგრამებელი მოწყობილობისა და ოპტიმალური რეგულიატორის ერთობლიობა ავტომატური მართვის ოპტიმალურ სისტემას ქმნის.

პირველი ჯგუფის ამოცანა მათემატიკურად ასე იხმის:

დაუშვათ სისტემის შეუშფოთებელი მოძრაობა აღიწერება (8.2) განტოლებათა სისტემით და ამ განტოლებების მარჯვენა მხარეები  $X_1, X_2, \dots, X_n$  უწყვეტი ფუნქციებია

$x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r$  ცვლადთა მიმართ, ხოლო უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ცვლადთა მიმართ.

მოცემული გვაქვს საწყისი და სასრულო პირობები

$$(i): x_k(t_0) = x_{k0} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (8.9)$$

$$(f): x_k(T) = x_{kT} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

სადაც  $x_{k0}, x_{kT}, (k = 1, 2, \dots, n)$ , ნამდვილ რიცხვებს წარმოადგენენ. ფუნქციები  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$

განსაზღვრულია დროის ინტერვალზე  $t_0 \leq t \leq T$ , სადაც  $T$  ფიქსირებული არ არის (ზოგიერთ კონკრეტულ ამოცანაში შეიძლება  $T$  ფიქსირებული იყოს).

მოცემული გვაქვს შეზღუდვები  $x(t)$  და  $u(t)$  ვექტორებზე, რაც ზოგადი სახით შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$R_\alpha(x(t), u(t)) \geq 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m). \quad (8.10)$$

განსაზღვრულია დასაშვებ მართვათა კლასი  $U$ . დასმული ამოცანის ხასიათიდან გამომდინარე, სამართი ფუნქციები  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  შეიძლება იყვნენ უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციები, უბან-უბან დიფერენცირებადი ფუნქციები და ა.შ. ასეთი ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (8.10) შეზღუდვებს, იწოდებიან დასაშვებ მართვებად. პრაქტიკაში ხშირია შემთხვევები, როდესაც (8.10) შეზღუდვებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$|u_k(t)| \leq \bar{u}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (8.11)$$

სადაც  $\bar{u}_k$  - მოცემული მუდმივი სასრულო რიცხვებია. ასეთი შეზღუდვები ბუნებრივია და მიუთითებენ, რომ სამართი ორგანოს კოორდინატები შეუძლებელია ლეზულობდნენ ნებისმიერ მნიშვნელობებს. ეს კოორდინატები შეზღუდულია და ზღვრის მიღწევისას საყრდენს ებჯინებიან.

მოცემული გვაქვს ოპტიმალობის კრიტერიუმი, რომელიც მათემატიკურად ზოგადი ფუნქციონალის სახით სიმბოლურად ასე ჩაიწერება:

$$I(u) = \phi [x(t), u(t), t]. \quad (8.12)$$

ეს ფუნქციონალი მათემატიკურად აღწერს კონსტრუქტორის სურვილს სისტემაში მიმდინარე პროცესის საუკეთესოდ განხორციელების შესახებ. კონკრეტულ "საუკეთესო სურვილს" კონკრეტული (8.12) ფუნქციონალი შეესაბამება.

ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: დასაშვებ მართვათა  $U$  კლასიდან ამოვიჩიოთ ისეთი სამართი ვექტორ-ფუნქცია

$u^0(t) = \{u_1^0(t), u_2^0(t), \dots, u_r^0(t)\}$ , რომელიც (8.2), (8.9) განტოლებათა სისტემის ამონახსნთან ერთად (8.12) ფუნქციონალს მინიჭებს ოპტიმალურ (მინიმალურს ან მაქსიმალურს ამოცანის ფიზიკური არსიდან გამომდინარე) მნიშვნელობას.

სხვა სიტყვებით, ვეძებთ ისეთ  $u^0(t) \in U$  სამართ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს რა (8.10) შეზღუდვებს, გავძლევს (8.2) განტოლებათა სისტემის ისეთ  $x^0(t)$  ამონახსნს, რომელიც აკმაყოფილებს (8.9) სასაზღვრო პირობებს, (8.10) შეზღუდვებს და, ამავე დროს, ორივე ერთად (8.12) ფუნქციონალს ოპტიმალურ მნიშვნელობას ანიჭებს. წინასწარ ვუშვებთ, რომ ფუნქციები  $X_k, R_\alpha, \phi$  ისეთი სახისაა, რომ დასმული ამოცანის ამოხსნა ერთადერთია და შეიძლება მათი განსაზღვრა შემდეგი ფორმით

$$\begin{aligned} x(t) &= x^0[t, (i, f)], \\ u(t) &= u^0[t, (i, f)], \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \tag{8.13}$$

წინასწარ შეიძლება ვთქვათ, რომ თუ  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$  უწყვეტი ფუნქციებია, მაშინ  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  ფუნქციები გლუვი ფუნქციების კლასს მიეკუთვნებიან; თუ კი ფუნქციები  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$  უბან-უბან უწყვეტია, მაშინ  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , უბან-უბან გლუვი ფუნქციები იქნებიან.

ამრიგად, ფუნქციები (8.13) სამართი სისტემის მიერ  $i$  საწყისი მდგომარეობიდან ( $f$ ) საბოლოო მდგომარეობის მიღწევის ოპტიმალურ ((8.12) ფუნქციონალის აზრით) პროგრამას აღწერს. როგორც ზევით აღვნიშნეთ, ასეთი ამონახსნი სისტემის შეუშფოთებელ მოძრაობას აღწერს.

მეორე ჩგუფის ამოცანის მათემატიკური ფორმულირება თითქმის არ განსხვავდება ზემოთ მოყვანილი პირველი ჩგუფის ამოცანის მათემატიკური ფორმულირებისაგან, მაგრამ მათ შორის მნიშვნელოვანი ფიზიკური შინაარსის განსხვავებაა. მეორე ჩგუფის ამოცანებში შეშფოთებულ მოძრაობასთან გვაქვს საქმე და, ამავე დროს, ამონახსნს ვეძებთ უკუკავშირის კანონის სახით.

განვიხილოთ შეშფოთებული მოძრაობა, რომელიც (8.7) განტოლებათა სისტემით აღიწერება და  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  ფუნქციები ისეთივე თვისებებისაა, როგორც  $X_1, X_2, \dots, X_k$  ფუნქციები თავისი ცვლადების მიმართ.

მოცემული გვაქვს საწყისი შეშფოთება

$$(i): \eta_k(t_0) = \eta_{k0}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (8.14)$$

სადაც  $\eta_{k0}$  მოცემული სასრული რიცხვია. ბუნებრივია შეშფოთებული მოძრაობის ჩახშობის პროცესი უნდა განვიხილოთ დროის  $t_0 \leq t < \infty$  ინტერვალზე და სისტემის საბოლოო მდგომარეობა განისაზღვროს, როგორც

$$(f): \eta_k(\infty) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (8.15)$$

მოცემული გვაქვს შეზღუდვები  $\eta(t)$  და  $\xi(t)$  ვექტორებზე, რაც ზოგადი სახით შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$N_\alpha(\eta(t), \xi(t)) \geq 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, m. \quad (8.16)$$

კონკრეტულ შემთხვევაში, მაგალითად, იგი შეიძლება გარეგულირებას გამორიცხავდეს.

მოცემული გვაქვს ოპტიმალობის კრიტერიუმი, რომელიც კონკრეტულად შეიძლება ინტეგრალური ფუნქციონალის სახით ჩაიწეროს

$$I(\xi) = \int_0^\infty (\omega(\eta(t), \xi(t), \dot{\xi}(t), t)) dt. \quad (8.48)$$

ეს ფუნქციონალი მიიჩნევა სისტემის ხარისხის სრულყოფის მაჩვენებლად, იგი შეშფოთებული მოძრაობის, გარდამავალი პროცესის ხარისხის საზომია. რეგულირების კანონის საფუძველზე უნდა განხორციელდეს (8.17) ფუნქციონალის მინიმიზაცია.

რეგულირების კანონს ვეძებთ ჩაკეტილი სახით

$$F(\eta(t), \xi(t), \dot{\xi}(t), t) = 0. \quad (8.18)$$

ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: ვიპოვოთ ისეთი რეგულირების კანონი დიფერენციალური (ალგებრული) განტოლებების სახით, რომლის საფუძველზე აგებული რეგულატორი, ჩართული (8.7) განტოლებათა სისტემით აღწერილ ობიექტთან, უზრუნველყოფს (8.7), (8.18) ჩაკეტილი სისტემის მდგრადობას და (8.17) ფუნქციონალის მინიმუმს (8.16) გამოსახულებით შეზღუდულ არეში წარმოშობილი ყველა მოსალოდნელი შეშფოთებული მოძრაობის დროს.

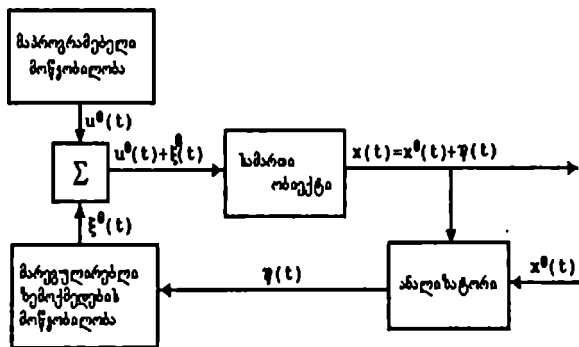
სხვა სიტყვებით, ვეძებთ უკუკავშირის კანონს, რომლის დროსაც ჩაკეტილ სისტემაში ხორციელდება მდგრადი გარდამავალი პროცესი გარკვეულწილად შეზღუდული შეშფოთებე-

ბის დროს და ეს პროცესი საუკეთესოა (8.17) კრიტერიუმის თვალსაზრისით.

### § 8.3. ოპტიმალური სისტემის ზოგადი სტრუქტურა

როგორც წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ, ავტომატური მართვის ოპტიმალური სისტემა შედგება სამართი ობიექტისაგან, ოპტიმალური მაპროგრამებელი მოწყობილობისა და ოპტიმალური რეგულიატორისაგან. სქემატურად იგი გამოსახულია (ნახ.8.2).

მაპროგრამებელი მოწყობილობა ოპტიმალური ტრაექტორიის დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნის საფუძველზე გამოიმუშავებს  $u^0(t)$  სამართ ზემოქმედებას. ანალიზატორი და მარეგულირებელი ზემოქმედების მოწყობილობა ოპტიმალური რეგულიატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანის ამოხსნის საფუძველზე გამოიმუშავებს დამატებით  $\xi^0(t)$  ზემოქმედებას. ასეთი დამატებითი ზემოქმედების გამოიმუშავება აუცილებელია არანულოვანი საწყისი შეშფოთებით (ან გარე შემაშფოთებელი ძალით) გამოწვეული  $\eta(t)$  შეშფოთებული მოძრაობის ჩასაქრობად.



ნახ.8.2.

§ 8.4 ოპტიმალური მართვის თეორიის ძირითადი არსი

ოპტიმალური მართვის ძირითადი არსი მდგომარეობს იმაში, რომ მოიძებნოს ჩვენთვის უცნობი მართვის ფუნქცია  $u(t)$ , რომელიც მოქმედებს მართვის სისტემაზე და რომლის დროსაც მინიმალურ ან მაქსიმალურ მნიშვნელობას იღებს ე.წ. ოპტიმალობის კრიტერიუმი  $I = [x(t), u(t), t]$  და როდესაც დაკმაყოფილებულია დინამიკის განტოლება  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ , სადაც  $x(t)$   $n$ -განზომილებიანი და  $u(t)$   $m$ -განზომილებიანი ვექტორ-ფუნქციებია. როგორც ზევით იყო აღნიშნული ოპტიმალობის კრიტერიუმი  $I = [x(t), u(t), t]$  არის მართვის სისტემის გარკვეული მაჩვენებლების ამსახველი ფუნქციონალი.  $I$  შეიძლება ასახავდეს დროს, მოძრაობის გარკვეული ტრაექტორიის, სისტემის დინამიკის შეფასებას, საწვავის ან მართვის სისტემის მიერ მოხმარებული ენერჯიის რაოდენობას და სხვა. ოპტიმალური მართვის ძირითადი იდეები ეყრდნობა ცნობილ ვარიაციულ მეთოდებს, რომლებიც კლასიკური თეორიის მეთოდებს მიეკუთვნება. ეს მეთოდები შესწავლილია მეშვიდე თავში. განვიხილოთ ესლა ოპტიმალური მართვის სისტემა, რომელიც აღიწერება დინამიკის განტოლებით

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad (8.19)$$

სადაც  $x(t)$  არის სიდიდე, რომლის მართვაც ხორციელდება,  $u(t)$  მართვის კანონია, რომელიც მოქმედებს სისტემაზე და სიძიებელი ფუნქციაა,  $t$  არის დრო. თუ მივიღებთ მხედველობაში სასაზღვრო მნიშვნელობებს, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ამოცანის  $x(t_0)$  არის საწყისი მნიშვნელობა, ხოლო  $\varphi[x(t_f), t_f]$  არის ფუნქცია, რომელიც აფასებს სისტემის მდგომარეობას მართვის ინტერვალის  $[t_0, t_f]$  ბოლო წერტილში, ( $t_0 \leq t \leq t_f$ ). როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ოპტიმალური მართვის პრობლემა მდგომარეობს ისეთი  $u(t)$  ფუნქ-

ციის მოძებნაში, როდესაც  $I$  ფუნქციონალი დებულობს მაქსიმალურ ან მინიმალურ მნიშვნელობას. შევადგინოთ ახალი ფუნქციონალი  $\bar{I}$

$$\bar{I} = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{I[x(t), u(t), t] + \lambda^T(t) \{f(x(t), u(t), t) - \dot{x}\}\} dt, \quad (8.20)$$

სადაც  $\lambda(t)$  არის ლაგრანჟის მამრავლი. ეს მამრავლი არ არის რიცხვი, როგორც იყო სტატიკური ოპტიმიზაციის შემთხვევაში, არამედ იგი ვექტორ-ფუნქციაა.  $\lambda^T(t)$  ტრანსპონირებული ვექტორია. ისევე როგორც სტატიკური ოპტიმიზაციის შემთხვევაში  $\bar{I}$  ფუნქციონალის ოპტიმუმი ემთხვევა  $I$  ფუნქციონალის ოპტიმალურ მნიშვნელობას [8.19] შეზღუდვების დროს. ეს დებულება თავის დროზე დაამტკიცეს ბლიზმა და მაკშეინმა, [10], [24]. ხოლო შემდეგ, სხვა გზით, ლ.პონტრიაგინმა, ვბოლტიანსკიმ, რ. გამყრელიძემ და ე.მიშენკომ [68].

შემოვიტანოთ დამხმარე ფუნქცია, ე.წ. ჰამილტონიანი

$$H[x(t), u(t), \lambda(t), t] = I[x(t), u(t), t] + \lambda^T(t) f[x(t), u(t), t]. \quad (8.21)$$

ჟეანასკნელი გამოსახულების ნაწილობრივი ინტეგრირებას და შედეგის (8.20) გამოსახულებაში შეტანით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \bar{I} = & \varphi[x(t_f), t_f] - \lambda^T(t_f)x(t_f) + \lambda^T(t_0)x(t_0) + \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \{H[x(t), u(t), t] + \dot{\lambda}^T(t)x(t)\} dt. \end{aligned} \quad (8.22)$$

განვიხილოთ ჟეანასკნელი გამოსახულების ვარიაცია, როდესაც ადგილი აქვს მართვის ვექტორის  $u(t)$ -ს ვარიაციას.  $t_0$  და  $t_f$  ფიქსირებულია. გვექნება



$$\delta \bar{I} = \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \lambda^T \right) \delta x \right]_{t=t_f} + [\lambda^T \delta x]_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right] dt. \quad (8.23)$$

ავირჩიოთ მამრავლი  $\lambda(t)$  ისეთი, რომ კოეფიციენტები  $\delta x(t)$ ,  $\delta x(t_f)$  უკანასკნელ გამოსახულებაში გაუტოლდეს ნულს, მაშინ

$$\dot{\lambda}^T = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial I}{\partial x} - \lambda^T \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (8.24)$$

შემდეგი სასაზღვრო პირობების დროს:

$$\lambda^T(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}. \quad (8.25)$$

ამ შემთხვევაში გვექნება:

$$\delta \bar{I} = \lambda^T(t_0) \delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial u} \delta u dt. \quad (8.26)$$

გამოსახულება  $\delta \bar{I}$  არის  $\bar{I}$  კრიტერიუმის პირველი ვარიაცია, ხოლო  $\lambda^T(t_0)$  არის იმ კრიტერიუმის გრადიენტი,  $x(t_0)$  რომელიც არ შეიცავს შეზღუდვებს ე.ი.

$\left\{ \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} I[x(t), u(t), t] dt \right\}$  გამოსახულების გრადიენტი

$x(t_0)$ -ის მიხედვით და ეს იმ შემთხვევაში თუ  $u(t)$  ფიქსირებულია ანუ  $\delta u = 0$ .  $\lambda(t)$  ფუნქციას ხშირად ეძახიან

$\bar{I}$  კრიტერიუმის შემამოფოთებელ ფუნქციას.

თუ ვართ ექსტრემუმის წერტილში უნდა ადგილი ჰქონდეს

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_f. \quad (8.27)$$

განტოლებებს (8.24), (8.25), და (8.26)-ს უწოდებენ ვილერ-ლაგრანჟის განტოლებებს. იმისათვის, რომ მოვხვედეთ ლოკალური მინიმუმის წერტილში არაა საკმარისი  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$  პირობის დაკმაყოფილება, საჭიროა, რომ ფუნქციონალის მეორე ვარიაცია  $\delta^2 \bar{I}$  არ იყოს უარყოფითი სიდიდით (დადებითი მაქსიმუმის შემთხვევაში)  $\delta u$ -ის ყველა მნიშვნელობისათვის, ე.ი.

$$\begin{aligned} \delta^2 \bar{I} = & \frac{1}{2} \left[ \delta x^T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \delta x \right]_{t=t_0}^{t=t_f} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[ \delta x^T, \delta u^T \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix} dt \geq 0, \end{aligned} \quad (8.28)$$

როდესაც  $\delta(\dot{x} - f) = 0$ ,

ან

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u, \quad \delta x(t_0) = 0. \quad (8.29)$$

საბოლოოდ შეგვიძლია დავასკვნათ: იმისათვის, რომ მოინახოს  $u(t)$  მართვის კანონი, როდესაც შეფასების  $I$  კრიტერიუმში სტაციონარულია (მაქსიმალური, მინიმალური ან იმყოფება ე.წ. უნაგირა წერტილში), საჭიროა ამოიხსნას დიფერენციალური განტოლებათა შემდეგი სისტემა

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]; \quad (8.30)$$

$$\dot{\lambda}(t) = - \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^T \lambda - \left( \frac{\partial I}{\partial x} \right)^T \quad (8.31)$$

სადაც  $u(t)$  განისაზღვრება შემდგომი პირობებიდან

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \text{ ანუ } \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \lambda + \left(\frac{\partial I}{\partial u}\right)^T = 0. \quad (8.32)$$

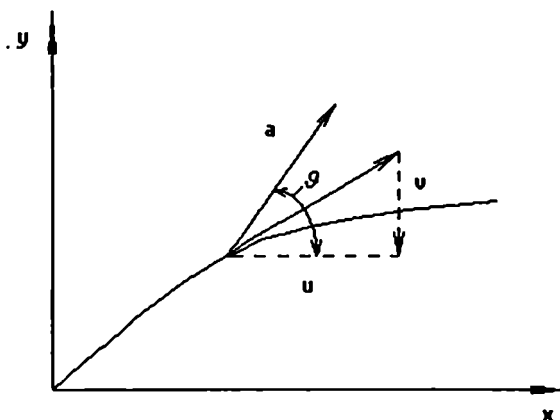
სასაზღვრო პირობები (8.30) და (8.31) განტოლებებისათვის სხვადასხვაა, ზოგი მოცემულია  $t = t_0$  პირობებისათვის, ხოლო სხვები როდესაც  $t = t_f$ . მოცემულია  $x(t_0)$ ,

$$\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^T \quad (8.33)$$

განვიხილოთ მაგალითები [24].

მაგალითი 8.1.

თანამგზავრის ორბიტაზე გასვლის მაქსიმალური სიჩქარის განსაზღვრა. განვიხილოთ მატერიალური წერტილი, რომლის მასაა  $m$  და როდესაც მასზე მოქმედებს  $P = ma$  წვეის ძალა. დავუშვათ, რომ მოძრაობა ხორციელდება სიბრტყეზე. შემოვიტანოთ კოორდინატთა სისტემა  $oxy$ . მატერიალური წერტილის სიჩქარის კომპონენტები არიან  $u$  და  $v$ . წვეის ძალის მიმართულების კუთხე არის  $\varphi(t)$  წერტილის მოძრაობა აღიწერება შემდეგი განტოლებებით (ნახ 8.3.)



ნახ. 8.1

$$\dot{u} = a \cos \varphi;$$

$$\dot{v} = a \sin \varphi;$$

$$\dot{x} = u;$$

$$\dot{y} = v.$$

სადაც  $a$  რეაქტიული აჩქარება ცნობილი ფუნქციაა. განტოლებები  $\lambda_x$  განსასაზღვრავად ამ შემთხვევაში მეტად მარტივია და

$$\dot{\lambda}_u = -\lambda_x, \quad \dot{\lambda}_v = -\lambda_y, \quad \dot{\lambda}_x =, \quad \dot{\lambda}_y = 0.$$

ამ განტოლებების ინტეგრირება გვაძლევს

$$\lambda_u = -c_1 t + c_3, \quad \lambda_v = -c_2 t + c_4, \quad \lambda_x = 0, \quad \lambda_y = c_2,$$

სადაც  $c_1, c_2, c_3$  და  $c_4$  მუდმივებია. თუ საჭიროა მოვახდინოთ ფუნქციის ოპტიმიზაცია, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ ინტეგრალის ბოლო წერტილზე, მაშინ  $I \equiv 0$  და ჰამილტონიანი ტოლი იქნება

$$H = \lambda_u a \cos \varphi + \lambda_v a \sin \varphi + \lambda_x u + \lambda_y v.$$

თუ  $a$  მუდმივი სიდიდეა, მაშინ ჰამილტონიანიც მუდმივი სიდიდე იქნება ოპტიმალურ ტრაექტორიაზე. ამ შემთხვევაში ოპტიმალობის პირობა იქნება

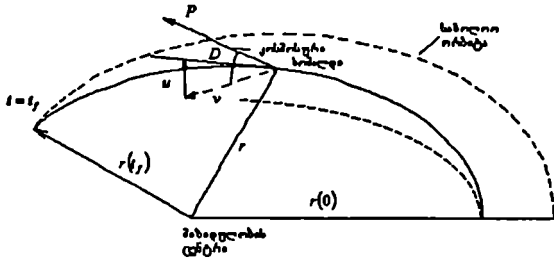
$$\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_u \sin \varphi + \lambda_v \cos \varphi = 0.$$

მაშასადამე, ოპტიმალური მართვა ტოლი იქნება

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda_v}{\lambda_u} = \frac{-c_2 t + c_4}{-c_1 t + c_3}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{-c_2 t + c_4}{-c_1 t + c_3}.$$

მაგალითი 8.2.

თანამგზავრის ერთი წრიული ორბიტიდან მეორე, მაქსიმალური რადიუსის მქონე წრიულ ორბიტაზე გადასვლის ტრაექტორიის მონახვა. ამოცანა გულისხმობს მონახვას თანამგზავრის მართვის  $\psi(t)$  ფუნქცია, როდესაც თანამგზავრი მოცემული წრიული საწყისი ორბიტიდან უნდა გადავიდეს მაქსიმალური რადიუსის მქონე წრიულ ორბიტაზე. ძრავას მუშაობის დრო  $t_f$  მოცემულია. (ნახ. 8.4). მოყვანილია ორბიტიდან ორბიტაზე გადასვლის სქემა.



ნახ 8.4.

$r$  — კოსმოსური ხომალდის რადიალური მანძილი მიზიდულობის ცენტრიდან.

$u$  — სიჩქარის რადიალური კომპონენტი.

$v$  — სიჩქარის ტანგენციალური კომპონენტი.

$m$  — კოსმოსური ხომალდის მასა.

$\dot{m} = \text{const}$  — საწვავის ხარჯი (იგი მუდმივია).

$g$  — წვევის ძალის მიმართულების კუთხე.

$\mu$  — მიზიდულობის ცენტრის გრავიტაციული მუდმივია.

თანახმად მოყვანილი აღნიშვნებისა შეიძლება ამოცანა ჩამოყალიბდეს შემდეგნაირად: საჭიროა მოინახოს  $v(t)$  ფუნქცია, რომლის დროსაც  $r(t_f) = \max$ , როდესაც

$$\dot{r} = u, \quad (8.34)$$

$$\dot{u} = -\frac{g^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{P \sin \vartheta}{m_0 - |\dot{m}|t}, \quad (8.35)$$

$$\dot{v} = -\frac{uv}{r} + \frac{P \cos \vartheta}{m_0 - |\dot{m}|t}. \quad (8.36)$$

შემდეგი სასაზღვრო პირობების დროს

$$r(0) = r_0, \quad (8.37)$$

$$u(0) = 0, \quad (8.38)$$

$$v(0) = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}, \quad (8.39)$$

$$\psi_1 = u(t_f) = 0, \quad (8.40)$$

$$\psi_2 = v(t_f) - \sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}} = 0. \quad (8.41)$$

შევადგინოთ ჰამილტონის ფუნქცია

$$H = \lambda_r u - \lambda_u \left( \frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{P \sin \vartheta}{m_0 - |m|t} \right) + \lambda_v \left( -\frac{uv}{r} + \frac{P \cos \vartheta}{m_0 - |m|t} \right), \quad (8.42)$$

ხოლო  $\varphi$  ფუნქციას აქვს სახე:

$$\varphi = r(t_f) + v_1 u(t_f) + v_2 \left[ \vartheta(t_f) - \sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}} \right].$$

ამ შემთხვევაში აუცილებელი პირობები (8.31), (8.32), და

$\psi_1[x(t_f), t_f] = 0$  მიიღებენ სახეს

$$\dot{\lambda}_r = -\lambda_u \left( -\frac{v^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r^3} \right) - \lambda_v \left( \frac{uv}{r^2} \right), \quad (8.43)$$

$$\dot{\lambda}_u = -\lambda_r + \lambda_v \frac{v}{r}, \quad (8.44)$$

$$\dot{\lambda}_v = -\lambda_u \frac{2v}{r} + \lambda_r \frac{u}{r}, \quad (8.45)$$

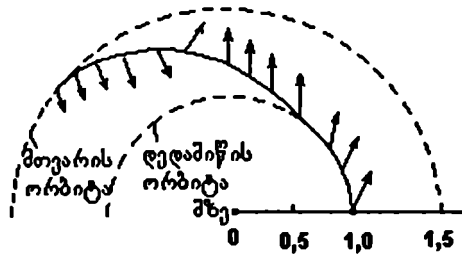
$$0 = (\lambda_u \cos \varphi + \lambda_v \sin \vartheta) \frac{P}{m_0 - |m|t} \Rightarrow \operatorname{tg} \phi = \frac{\lambda_u}{\lambda_v}, \quad (8.46)$$

$$\lambda_r(t_f) = 1 + \frac{v_1 \sqrt{\mu}}{2[r(t_f)]^{3/2}}, \quad (8.47)$$

$$\lambda_u(t_f) = v_1, \quad (8.48)$$

$$\lambda_v(t_f) = v_2. \quad (8.79)$$

ექვსი (8.34), (8.35), (8.36), (8.44), (8.45) და (8.46) დიფერენციალური განტოლება უნდა ამოხსნას ისე, რომ დაკმაყოფილდეს ექვსი (8.37), (8.38), (8.39), (8.47), (8.48), (8.49) სასაზღვრო პირობა.  $v_1$  და  $v_2$  უნდა ამორჩეული იყოს ისე, რომ დაკმაყოფილდეს ორი (8.40), (8.41) სასაზღვრო პირობა. აღნიშნული ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა გვაძლევს შემდეგ სურათს (ნახ. 8.5.)



ნახ 8.5.

# თავი მეცხრე

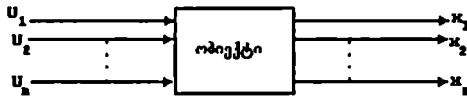
ოპტიმალური ტრაექტორიის დაპროგრამების ამოცანა.  
მაქსიმუმის პრინციპი

## § 9.1. ზოგადი განმარტებები

განვიხილავთ სამართ ობიექტს, რომელიც აღიწერება (8.1) ვექტორული განტოლებით, კერძოდ, განტოლებათა სისტემით

$$\dot{x}_k(t) = X_k(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)), \quad k=1, \dots, n. \quad (9.1)$$

როგორც ავტომატური მართვის თეორიაშია მიღებული, ასეთი ობიექტი სტრუქტურულად შემდეგნაირად გამოისახება (ნახ.9.1):



ნახ.9.1

ფაზური კოორდინატები  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  ხშირად იწოდებიან გამოსავალ ცვლადებად, ხოლო სამართი ფუნქციები  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  კი—შესავალ ცვლადებად. ხშირად ვამბობთ, რომ ობიექტის შესავალზე მიეწოდება ფუნქციები  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ , გამოსავალზე კი ვღებულობთ  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  ფუნქციებს.

როგორც წინა თავში აღვნიშნეთ, ობიექტის მოძრაობის სრული აღწერისათვის საჭიროა მისი საწყისი მდგომარეობის ცოდნა, ე.ი. საწყის  $t_0$  მომენტში ფაზურ სივრცეში შესაბამისი წერტილის მოცემა, რომელიც

$$x_0 = x(t_0) = \{x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)\}$$

ვექტორით აღიწერება და ვექტორული სამართი ფუნქციის  $u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)\}$  წინასწარ ამორჩევა. ამ ვექტორულ ფუნქციას შემოკლებით, უბრალოდ, მართვა ეწოდება.

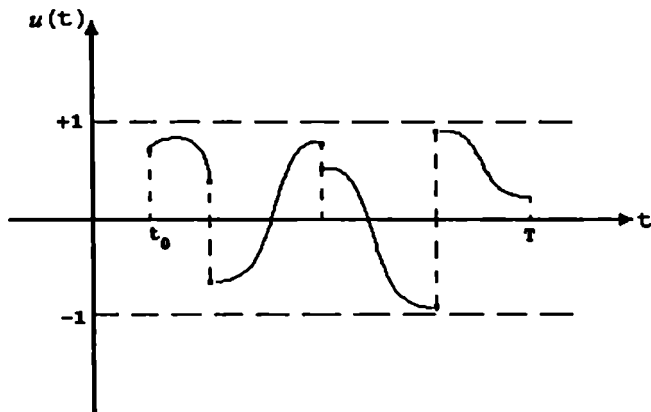


$x_0$  ვექტორისა და  $u(t)$  ვექტორ-ფუნქციის მოცემით ობიექტის მოძრაობა (9.1) განტოლებათა სისტემით ცალსახად განისაზღვრება. ეს მოძრაობა სხვა არაფერია, თუ არა ფაზურ სივრცეში ფაზური წერტილის მიერ, რომელიც ობიექტის მდგომარეობას აღწერს დროის ფიქსირებულ მომენტში, გარკვეული წირის შემოწერა. ამ წირს ფაზური ტრაექტორია ეწოდება.

ვექტორულ ფუნქციათა წყვილს  $(u(t), x(t))$  მართვის პროცესს, ან უბრალოდ პროცესს უწოდებენ. ამრიგად, მართვის პროცესი შედგება  $u(t)$  მართვისა და მისი შესატყვისი  $x(t)$  ფაზური ტრაექტორიის ერთობლიობისაგან. იგი საესებით განსაზღვრულია, თუ მოცემული გვაქვს  $u(t)$  მართვა და საწყისი ფაზური მდგომარეობა  $x_0 = x(t_0)$ .

როგორც წინა თავში აღენიშნეთ,  $u(t)$  სამართი ვექტორ-ფუნქციის ამორჩევა ხორციელდება დასაშვებ მართვათა არედან. ეს არე შეიძლება იყოს ნებისმიერი ჩაკეტილი სიმრავლე რგანზომილების მქონე ევკლიდეს სივრციდან, რომლის საზღვრებშიც უნდა იყოს მოთავსებული  $u(t)$  ვექტორ-ფუნქციის მნიშვნელობა დროის ნებისმიერ მომენტში, მთელი მართვის პროცესის დროს. (8.11) ფორმულით მოცემული შეზღუდვები, რომელიც, ფაქტობრივად, რგანზომილებიან კუბს განსაზღვრავს, კარგად ასახავს ისეთ შემთხვევებს, როდესაც მართვა ხდება, მაგალითად, ძრავაში მიწოდებული საწვავის რაოდენობით, ტემპერატურით, ძაბვით და სხვა. ცხადია, რომ შეუძლებელია მათ მიიღონ რაც შეიძლება დიდი მნიშვნელობები. აღნიშნულ სიმრავლეს, საიდანაც ამორჩევა სამართი ფუნქციები, შეიძლება ჰქონდეს სხვადასხვა სირთულის გეომეტრიული ფორმა. ორგანზომილებიანი  $u(t)$  ვექტორის დროს ასეთი არე შეიძლება წრეწირი იყოს  $(u_1(t))^2 + (u_2(t))^2 = 1$ , შეიძლება მას ელიფსის ფორმაც ჰქონდეს. ეს დამოკიდებულია ობიექტის სამართი ნაწილის ტექნიკურ კონსტრუქციაზე. ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ ტექნიკური ხასიათის ამოცანების გადაწყვეტისას ეს არე ჩაკეტილ ჰესივრცეს წარმოადგენს და  $u(t)$  ფუნქციის მნიშვნელობები შეიძლება ამ არის საზღვარზეც მდებარეობდეს.

გარდა ამისა, წინა თავში იყო აღნიშნული, რომ, ამოცანის ხასიათიდან გამომდინარე, მართვის ფუნქციაზე დამატებით შეზღუდვას ვახდენთ, ვირჩევთ მას გარკვეული კლასის ფუნქციებიდან. წინამდებარე თავში განსახილველი ამოცანის გადაწყვეტისას ასეთ კლასად მიჩნეულია უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციების კლასი, რომლებსაც გააჩნიათ პირველი რიგის წვეტების სასრულო რაოდენობა. სხვა სიტყვებით, ასეთი ფუნქციები შედგებიან სასრულო რაოდენობის უწყვეტი ნაწილებისაგან (ნახ.9.1) და წვეტას საწყის  $t_0$  და საბოლოო  $T$  მომენტებში არ განიცდიან.



ნახ.9.2.

ასეთი ფუნქციები უზრუნველყოფენ არაინერციულ მართვას, ანუ სამართი ფუნქციის მყისიერი გადართვის შესაძლებლობას დროის მოცემულ მომენტში ერთი მნიშვნელობიდან მეორე მნიშვნელობაზე, ერთი ზღვრული მნიშვნელობის ნახტომით შეცვლას მეორე ზღვრული მნიშვნელობით.

ოპტიმალობის კრიტერიუმში განვიხილოთ ზოგადი ინტეგრალური ფუნქციონალის სახით

$$I(u) = \int_{t_0}^T f(x(t), u(t)) dt, \quad (9.2)$$

სადაც ფუნქცია  $f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$  უწყვეტი ფუნქციაა უწყვეტი  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i=1, \dots, n$  კერძო წარმოებულებით.

კერძო შემთხვევაში, როდესაც ფუნქცია  $f(x(t), u(t)) \equiv 1$ , ფუნქციონალი (9.2) ლებულობს შემდეგ სახეს

$$I(u) = \int_{t_0}^T dt = T - t_0 \quad (9.3)$$

და ასეთი ფუნქციონალის მინიმიზაცია სისტემის მოძრაობის დროის მინიმიზაციას წარმოადგენს. ოპტიმალური მართვის ამოცანას (9.3) ფუნქციონალის შემთხვევაში სწრაფქმედების ამოცანა ეწოდება. რა თქმა უნდა, ასეთ შემთხვევაში დროის საბოლოო მომენტი  $T$  ფიქსირებული არ არის, იგი თავისუფალია.

როდესაც ფუნქცია  $f(x(t), u(t)) = \dot{x}_i(t)$ , სადაც ფუნქცია  $x_i(t)$  სისტემის მოძრაობის ტრაექტორიის პროექციაა ფაზური სივრცის  $i$ -ურ ღერძზე, მაშინ ფუნქციონალი (9.2) იღებს სახეს

$$I(u) = \int_{t_0}^T \dot{x}_i(t) dt = x_i(T) - x_i(t_0) \quad (9.4)$$

და ასეთი ფუნქციონალის მაქსიმიზაცია ფიქსირებული დროის  $T - t_0$  მონაკვეთში  $x_i(t)$  კოორდინატის მაქსიმიზაციას წარმოადგენს. თუ ეს კოორდინატა სისტემის მიერ გავლილ მანძილს გამოხატავს, მაშინ ამოცანა სისტემის მიერ  $x(t_0)$  საწყისი მდგომარეობიდან მოძრაობისას წინასწარ ფიქსირებული  $T$  მომენტისათვის მაქსიმალური მანძილის გაელაში მდგომარეობს. რა თქმა უნდა, ასეთ შემთხვევაში  $x_i(t)$  ფუნქციის მნიშვნელობა  $T$  მომენტში ფიქსირებული არ არის, იგი თავისუფალია, ანუ  $x_{i,T}$  სიდიდე, როგორც ეს (8.9) ფორმულით იყო მოცემული, ამოცანის დასმისას აღარ იქნება წინასწარ დაფიქსირებული. ამოცანის არსი თვით ამ სიდიდის მაქსიმიზაციაშია.

## § 9.2. ზოგადი ამოცანის დასმა

ამრიგად, მოცემული გვაქვს:

1 ობიექტი, რომლის მოძრაობა აღიწერება (9.1) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით;

2 ობიექტის მოძრაობის განმსაზღვრელი საწყისი  $x_0 = x(t_0)$  და საბოლოო  $x_T = x(T)$  პირობები (8.9) ფორმულების სახით;

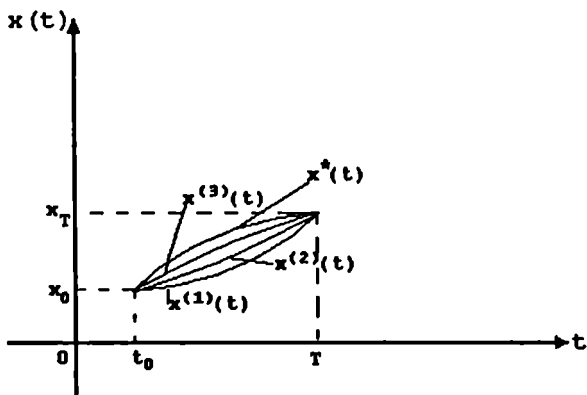
3 დასაშვებ მართვათა კლასი  $U$ , რომელიც შედგება უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციებისაგან, რომელსაც გააჩნიათ სასრულო რაოდენობის პირველი რიგის წყვეტები, ამავე დროს, აკმაყოფილებენ (8.11) პირობას;

4 ოპტიმალობის კრიტერიუმი (9.2) ფუნქციონალის სახით. ოპტიმალური მართვის ზოგადი ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  კოორდინატთა ფაზურ სივრცეში

მოცემულია ორი წერტილი,  $x_0 = x(t_0) = \{x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)\}$

და  $x_T = x(T) = \{x_1(T), x_2(T), \dots, x_n(T)\}$ . ყველა დასაშვებ მართვებს  $u = u(t)$  შორის,  $u(t) \in U$ , რომლებსაც (9.1) განტოლებათა სისტემის თანახმად ფაზური წერტილი  $x_0$  მდგომარეობიდან გადაყვას  $x_T$  მდგომარეობაში (რა თქმა უნდა, თუ ასეთი მართვა არსებობს), ვიპოვოთ ისეთი  $u^*(t)$  მართვა, რომლის დროსაც ფუნქციონალი (9.2) მიიღებს რაც შეიძლება მცირე, მინიმალურ მნიშვნელობას.

აქ ფუნქცია  $x(t)$  (9.1) განტოლებათა სისტემის ამონახსნია  $x_0 = x(t_0)$  საწყისი პირობის საფუძველზე, იგი  $u(t)$  მართვას შეესაბამება, ხოლო  $T$   $x(t)$  ტრაექტორიის  $x_T = x(T)$  წერტილზე გავლის მომენტი. ეს შეიძლება ვიზუალურად ასე წარმოვიდგინოთ (ნახ.9.3):



ნახ.9.3

$x^{(1)}(t)$  ტრაექტორიას გვაძლევს  $u^{(1)}(t) \in U$  მართვა.  $u^{(1)}(t) = \{u_1^{(1)}(t), u_2^{(1)}(t), \dots, u_r^{(1)}(t)\}$  ისეთი ვექტორ-ფუნქციაა, რომელიც (9.1) განტოლებათა სისტემაში ჩასმის შედეგად გვაძლევს ისეთ ამონახსნს, რომელიც იწყება  $x_0$  წერტილში და გადის  $x_T$  წერტილზე. ასეთ  $u^{(1)}(t)$  მართვას და  $x^{(1)}(t)$  ტრაექტორიას შეესაბამება (9.2) ფუნქციონალის გარკვეული რიცხვითი მნიშვნელობა, ვთქვათ  $I^{(1)}$ .

ანალოგიურად,  $x^{(2)}(t)$  ტრაექტორიას გვაძლევს  $u^{(2)}(t) \in U$  მართვა და ამ დროს (9.2) ფუნქციონალი  $I^{(2)}$  მნიშვნელობას ლებულობს,  $x^{(3)}(t)$  ტრაექტორიას გვაძლევს  $u^{(3)}(t) \in U$  მართვა და ამ დროს (9.2) ფუნქციონალი  $I^{(3)}$  მნიშვნელობას ლებულობს და ა.შ. ასეთი მართვების რაოდენობა უსასრულოა. აი ამათ შორის ვეძებთ ისეთ  $u^*(t) \in U$  მართვას, რომლის შესატყვისი  $I^*$  მნიშვნელობა უმცირესი იქნება  $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}, \dots, I^{(\infty)}$  მნიშვნელობებს შორის. ასეთი მართვა ოპტიმალურია (9.2) ფუნქციონალის თვალსაზრისით,

ხოლო მისი შესატყვისი ტრაექტორია  $x^*(t)$  ოპტიმალური მოძრაობის ტრაექტორიაა.

### § 9.3 მაქსიმუმის პრინციპი

წინა პარაგრაფში დასმული ამოცანის ამოხსნა ხორციელდება თეორემით, რომელსაც "მაქსიმუმის პრინციპი" ეწოდება. ამ თეორემის ფორმულირებისათვის საჭიროა შემოვიტანოთ დამხმარე ვექტორ-ფუნქცია  $\psi(t)$   $n+1$  კოორდინატით  $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{n+1}(t)$ , რომლებიც განისაზღვრებიან შემდეგი განტოლებათა სისტემით:

$$\dot{\psi}_i(t) = - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial X_k(x(t), u(t))}{\partial x_i} \psi_k, \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (9.5)$$

აქ

$X_k = X_k(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  
 (9.1) განტოლებათა სისტემის მარჯვენა ნაწილებია, ხოლო ფუნქცია  $X_{n+1} = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$  (9.2) ფუნქციონალის ინტეგრალქვეშა ფუნქციაა.

წარმოვიდგინოთ ფუნქციონალი (9.2), როგორც ინტეგრალი ცვლადი ზედა ზღვრით და აღვნიშნოთ იგი  $x_{n+1}(t)$  ფუნქციით, ანუ

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t f(x(t), u(t)) dt = \int_{t_0}^t X_{n+1}(x(t), u(t)) dt.$$

ფუნქცია  $x_{n+1}(t)$  შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც

$$\dot{x}_{n+1}(t) = X_{n+1}(x(t), u(t)) \quad (9.6)$$

განტოლების ამონახსნი საწყისი პირობით

$$x_{n+1}(t_0) = 0. \quad (9.7)$$

გავერთიანოთ განტოლება (9.6) განტოლებათა (9.1) სისტემასთან. მივიღებთ  $n+1$  განზომილების განტოლებათა სისტემას

$$\dot{x}_i = X_i(x(t), u(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (9.8)$$

რომლის სასაზღვრო პირობები (8.9) და (9.7) ფორმულებით გამოისახება.  $x_{n+1}(t)$  ფუნქციის საბოლოო მნიშვნელობა  $x_{n+1}(T)$  თავად (9.2) ფუნქციონალის მნიშვნელობაა, ანუ  $x_{n+1}(T) = I(u)$ .

$x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  სივრცეში  $(x_1(T), x_2(T), \dots, x_n(T), 0)$  წერტილზე  $(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$  ღერძის პარალელურად გამავალ წრფეს ეუწოდოთ  $\Pi$  წრფე. ასეთ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (9.8) სისტემის  $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n+1}(t)\}$  ამონახსნი  $t = T$  მომენტში გადის წერტილზე, რომელიც  $\Pi$  წრფეზე მდებარეობს და აქვს კოორდინატა  $x_{n+1} = I$ . ეხლა შეიძლება ოპტიმალობის ამოცანა ასე ჩამოვაყალიბოთ:  $n+1$  განზომილებიან ფაზურ სივრცეში მოცემულია წერტილი  $x(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0), 0)$  და წრფე  $\Pi$ . ყელა დასაშვებ მართვათა შორის  $u = u(t) \in U$ , რომელთა დროსაც (9.8) განტოლებათა სისტემის ამოხსნით განსაზღვრული ტრაექტორია,  $x(t_0)$  საწყისი მნიშვნელობით, გადაკვეთს  $\Pi$  წრფეს, ვიპოვოთ ისეთი  $u^*(t)$  მართვა, რომლის დროსაც ასეთი გადაკვეთა მოგვეცემს  $x_{n+1}(T)$  სიდიდის მინიმალურ მნიშვნელობას.

განტოლებათა სისტემა (9.5) წრფივი და ერთგვაროვანია. ამიტომ, ნებისმიერი  $\psi(t_0) = \{\psi_1(t_0), \psi_2(t_0), \dots, \psi_{n+1}(t_0)\}$  საწყისი მნიშვნელობისათვის (9.5) განტოლებათა სისტემას ერთადერთი  $\psi(t)$  ამონახსნი გააჩნია დროის მთელ მონაკვეთზე  $t_0 \leq t \leq T$ , რომელზეც  $u(t)$  და  $x(t)$  ფუნქციებია განსაზღვრული.

როგორც (9.8) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი  $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n+1}(t)\}$ , ასევე (9.5) განტოლებათა ამონახსნი  $\psi(t) = \{\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{n+1}(t)\}$  უწყვეტ ფუნქციებს წარმოადგენენ, მათ აქვთ უწყვეტი წარმოებულები დროის მთელ მონაკვეთზე, გარდა იმ მომენტებისა, სადაც  $u(t)$  ფუნქცია წყვეტებს განიცდის.

შემოვიტანოთ  $x(t), \psi(t)$  და  $u(t)$  ცვლადების ფუნქცია  $H(\psi, x, u)$  შემდეგი სახით:

$$H(\psi, x, u) = (\psi \dot{x}) = (\psi \cdot X(x, u)) = \sum_{\alpha=1}^{n+1} \psi_{\alpha} X_{\alpha}(x, u). \quad (9.9)$$

ამ ფუნქციის მეშვეობით (9.8) და (9.5) განტოლებათა სისტემები შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი ჰამილტონის სისტემის სახით:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (9.10)$$

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (9.11)$$

ამრიგად, ნებისმიერი  $u(t), t_0 \leq t \leq T$  დასაშვები მართვისა და  $x(t_0)$  საწყისი პირობის შესაბამისად შესაძლებელია (9.10) განტოლებათა სისტემის მეშვეობით

$x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n+1}(t)\}$  ტრაექტორიის პოვნა. შემდეგ,  $u(t)$  და  $x(t)$  ფუნქციების შესაბამისად (9.11) განტოლებათა სისტემის მეშვეობით შესაძლებელია  $\psi(t) = \{\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{n+1}(t)\}$  ფუნქციის განსაზღვრა.

უნდა შევნიშნოთ, რომ  $X_1(x, u), X_2(x, u), \dots, X_{n+1}(x, u)$  ფუნქციებიდან  $x(t)$  ფუნქციის  $x_{n+1}(t)$  კოორდინატაზე არცერთი არ არის დამოკიდებული, მაშასადამე, არც  $H$  ფუნქცია იქნება მასზე დამოკიდებული.

$\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{n+1}(t), x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  ფუნქციების ფიქსირებული მნიშვნელობებისათვის  $H(\psi, x, u)$  ფუნქცია გადაიქცევა  $u \in U$  პარამეტრის ფუნქციად. ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა ზუსტი ზედა ზღვარი აღვნიშნოთ  $M(\psi, x)$  სიდიდით:

$$M(\psi, x) = \sup_{u \in U} H(\psi, x, u). \quad (9.12)$$

თუ  $H$  უწყვეტი ფუნქციის ზუსტი ზედა ზღვარი მიიღწევა  $U$  არის რომელიმე წერტილში, მაშინ  $M(\psi, x)$



არის  $H$  ფუნქციის მაქსიმუმი ფიქსირებული  $\psi$  და  $x$  მნიშვნელობების დროს.

ჩამოყალიბოთ "მაქსიმუმის პრინციპი", რომელიც ოპტიმალობის აუცილებელ პირობას წარმოადგენს.

თეორემა 9.1. დავუშვათ  $u^*(t), t_0 \leq t \leq T$  ისეთი დასაშვები მართვაა, რომ მისი შესატყვისი ტრაექტორია ((9.10) სისტემის ამონახსნი)  $t_0$  მომენტში  $x(t_0)$  წერტილიდან გამოსული  $T$  მომენტში გადის  $x_{n+1}$  ღერძის პარალელურად  $(x_1(T), x_2(T), \dots, x_n(T), 0)$  წერტილზე გამავალ  $\Pi$  წირის რომელიმე წერტილზე.  $u^*(t)$  მართვისა და  $x^*(t)$  ტრაექტორიის ოპტიმალობისათვის აუცილებელია (9.11) სისტემის დამაკმაყოფილებელი ისეთი არანულოვანი უწყვეტი  $\psi(t) = \{\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_{n+1}(t)\}$  ვექტორ-ფუნქციის არსებობა, რომ:

1. ნებისმიერ  $t$  მომენტში,  $t_0 \leq t \leq T$ , ფუნქცია  $H(\psi(t), x(t), u)$  მაქსიმუმს აღწევს  $u = u^*(t)$  წერტილში, ე.ი.

$$H(\psi(t), x(t), u^*(t)) = M(\psi(t), x(t)); \quad (9.13)$$

2. საბოლოო  $T$  მომენტში ადგილი აქვს 
$$\psi_{n+1}(T) \leq 0, M(\psi(T), x(T)) = 0. \quad (9.14)$$

შენიშვნა: მეორე პირობა სრულდება ნებისმიერი  $t, t_0 \leq t \leq T$ , მომენტისათვის.

დაინტერესებულ მკითხველს შეუძლია აღნიშნული თეორემის დამტკიცებას გაეცნოს მონოგრაფიაში [68].

ზემოთფორმულირებული თეორემა "მაქსიმუმის პრინციპი" საშუალებას იძლევა  $x_0 = x(t_0)$  წერტილში დაწყებული და  $\Pi$  წრფის რომელიმე წერტილში დამთავრებული ყველა ტრაექტორიიდან და მათი შესაბამისი  $u(t)$  მართვებიდან გამოვყოთ ცალკეული ტრაექტორიები და მართვები, რომლებიც თეორემის პირობებს აკმაყოფილებენ.

მართლაც, გვაქვს  $2n+3$  დამოკიდებულება (9.10), (9.11), (9.13) ფორმულების სახით  $2n+3$  ცვლადებს  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n+1}, u$  შორის. როდესაც  $u$  რ-განზომილების

ექტორია, მაშინ (9.13) გამოსახულება  $r$  რაოდენობის ცალ-ცალკე გამოსახულებებად იშლება. ერთი სიტყვით, საძებნ ცვლადთა განსაზღვრისათვის გვაქვს მათ შორის დამოკიდებულებათა მთლიანი სისტემა. შემდეგ, (9.10) და (9.11) გამოსახულებები ერთად წარმოადგენენ  $2n+2$  რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომელთა ამოხსნაც  $2n+2$  პარამეტრზეა (საწყის მნიშვნელობებზე) დამოკიდებული, ხოლო (9.13) გამოსახულება ალგებრული სახისაა. ამ  $2n+2$  პარამეტრიდან ერთი შეიძლება ნებისმიერი სიდიდით იყოს, რადგანაც  $\psi_i(t)$ ,  $i=1,2,\dots,n+1$  ფუნქციები განსაზღვრულია საერთო მამრავლის სიზუსტით ( $H$  ფუნქცია ხომ  $\psi(t)$  ფუნქციის მიმართ ერთგვაროვანია). (8.9), (9.7) გამოსახულებები გვაძლევენ  $2n+1$  პარამეტრის განსაზღვრის საშუალებას.

#### § 9.4. ოპტიმალური სწრაფქმედების ამოცანა

ამ შემთხვევაში ზოგადი ამოცანა (იხ. 9.2.) შეიცვლება მხოლოდ იმით, რომ მე-4 პუნქტში ოპტიმალობის კრიტერიუმში მოცემული გვექნება (9.3) ფუნქციონალის სახით, ანუ ეუშვებთ, რომ

$$f(x(t), u(t)) \equiv 1. \quad (9.15)$$

როგორც ზევით აღვნიშნეთ, ასეთ შემთხვევაში დროის საბოლოო მომენტი  $T$  ფიქსირებული არ არის, იგი თავისუფალია. ფაქტობრივად, ამოცანა  $T$  სიდიდის მინიმიზაციაში მდგომარეობს.

რა თქმა უნდა,  $T$  სიდიდის მნიშვნელობა  $x(t)$  ტრაექტორიაზეა დამოკიდებული, რომელიც თავად  $u(t)$  მართვის ფუნქციის ამორჩევით განისაზღვრება. ამრიგად, სამართლიანი იქნება შემოვიტანოთ ფაზურ სივრცეში  $n$  ცვლადის ფუნქცია  $T(x) = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . სიმარტივისათვის დავუშვათ, რომ  $T(x)$  ფუნქცია უწყვეტია და გააჩნია უწყვეტი კერძო წარმოებულები გარდა  $x_T = x(T)$  წერტილისა.

ასეთ შემთხვევაში ადგილი აქვს თეორემას, რომელიც იძლევა ოპტიმალური სწრაფქმედების ამოცანის გადაწყვეტას.

თეორემა 9.2. დავუშვათ,  $u^*(t) \in U$  დროის  $t_0 \leq t \leq T$  მონაკვეთზე განსაზღვრული მართვის ფუნქციაა, როდესაც (9.1) განტოლებათა სისტემით აღწერილი მოძრაობის ტრაექტორია ფაზურ სივრცეში  $x(t_0) = \{x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)\}$  საწყისი წერტილიდან გადაყავს  $x(T) = \{x_1(T), \dots, x_n(T)\}$  წერტილში. თუ ეს გადასვლა ხდება მინიმალური დროის მონაკვეთში (ე.ი. თუ  $u^*(t)$  ოპტიალური მართვაა სწრაფქმედების თვალსაზრისით), მაშინ აუცილებელია  $t_0 \leq t < T$  მონაკვეთზე ისეთი არანულოვანი  $\psi(t) = \{\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)\}$  ვექტორ-ფუნქციის არსებობა, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებათა სისტემას

$$\dot{\psi}_k(t) = -\frac{\partial H(\psi, x, u)}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (9.16)$$

სადაც

$$H(\psi, x, u) = \sum_{i=1}^n \psi_i \cdot X_i(x, u), \quad (9.17)$$

და შემდეგი პირობების შესრულება:

1 ნებისმიერ  $t$  მომენტში,  $t_0 \leq t < T$ , ადგილი აქვს მაქსიმუმის პირობას

$$H(\psi(t), x(t), u^*(t)) = \max_{u(t) \in U} H(\psi(t), x(t), u(t)) \quad (9.18)$$

2 ნებისმიერ  $t$  მომენტში,  $t_0 \leq t < T$ , ადგილი აქვს ტოლობას

$$H(\psi(t), x(t), u^*(t)) \equiv 1. \quad (9.19)$$

ამ თეორემის დამტკიცებას დაინტერესებული მკითხველი შეიძლება გაეცნოს მონოგრაფიაში [153].

თუ ამ თეორემაში  $\psi(t)$  ფუნქციასა და (9.18) პირობას განვიხილავთ დროის მთელ მონაკვეთზე  $t_0 \leq t \leq T$  ( $T$  მომენტის ჩათვლით) და (9.19) პირობას შევცვლით უფრო სუსტი მოთხოვნით

$$H(\psi(T), x(T), u^*(T)) \geq 0, \quad (9.20)$$

მაშინ ასეთი თეორემის სახით ჩამოყალიბებული "მაქსიმუმის პრინციპი" სამართლიანი გახდება  $T(x)$  ფუნქციაზე რაიმე შეზღუდვის გარეშე.

როგორც ვხედავთ, თეორემა საკმარისად რთულადაა ფორმულირებული. გარდა ძირითადი ცვლადებისა (ფაზური კოორდინატები  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , სამართი ფუნქციები  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ ) თეორემაში შემოტანილია დამხმარე ცვლადები  $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$ , რომლებიც ამოცანის დასმასში არ მონაწილეობენ. მიუხედავად ამისა, "მაქსიმუმის პრინციპი" იძლევა საკმარის ინფორმაციას დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად.

როგორც წინა პარაგრაფში ვიმსჯელებთ, აქაც შეიძლება ვთქვათ, რომ ყველა ფაზური ტრაექტორიიდან, რომლებიც იწყებიან  $x(t_0)$  ფაზურ წერტილში და გადიან  $x(T)$  ფაზურ წერტილში, "მაქსიმუმის პრინციპი" საშუალებას იძლევა გამოვყოთ ცალკეული, ე.წ. იზოლირებული ტრაექტორიები, რომლებიც თეორემაში ჩამოყალიბებულ აუცილებელ პირობებს აკმაყოფილებენ. მხოლოდ ეს ცალკეული, იზოლირებული ტრაექტორიები შეიძლება აღმოჩნდნენ ოპტიმალური, რადგან თეორემა იძლევა ოპტიმალობის არა საკმარის, არამედ მხოლოდ აუცილებელ პირობებს. თუ კი, კერძო შემთხვევაში, ასეთი ტრაექტორია მხოლოდ ერთი აღმოჩნდა, რა თქმა უნდა, ის ოპტიმალური იქნება. სხვა შემთხვევაში ასეთი ტრაექტორიები მხოლოდ "ეკვიპოტანიალად" ჩაითვლებიან ოპტიმალურობაში.

სწრაფქმედების ამოცანაში მოსაძებნია  $2n + r$  უცნობი ფუნქცია  $x_1(t), \dots, x_n(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)$ . მათ საპოვნელად "მაქსიმუმის პრინციპი" გვაძლევს ასეთივე რაოდენობის დამოკიდებულებებს ამ ფუნქციებს შორის. ესენია დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები (9.1) და (9.16), თითოეული  $n$  რიგის, და  $r$  რაოდენობის ალგებრული განტოლება, რომელსაც გვაძლევს (9.18) გამოსახულება. მართლაც, თუ  $u(t)$  წერტილი  $U$  არეში შიგა წერტილია, მაშინ (9.18) პირობის შესასრულებლად აუცილებელია შესრულდეს პირობები

$$\left. \frac{\partial H(\psi(t), x(t), u)}{\partial u_\alpha} \right|_{u=u(t)} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, r. \quad (9.21)$$

თუ  $u(t)$  წერტილი  $U$  მრავალწახნაგას  $(r-1)$  განზომილების წახნაგზე ძევს, მაშინ უნდა შესრულდეს  $u(t)$  წერტილის ამ წახნაგისათვის მიკუთვნების პირობა (ეს მოგვეცემს ერთ გამოსახულებას), ხოლო (9.18) პირობის შესასრულებლად  $H$  ფუნქციის კერძო წარმოებულები ამ წახნაგის ყველა მიმართულებით ნული უნდა იყოს (ეს გვაძლევს  $r-1$  გამოსახულებას). ალგებრულ გამოსახულებათა რაოდენობა ასევე იქნება  $r$ , თუ სხვა განზომილების წახნაგს ავიღებთ. ერთი სიტყვით, (9.18) მაქსიმუმის პირობა ყველა შემთხვევაში, როდესაც არე  $r$ -განზომილებისაა, იშლება  $r$  რაოდენობის ალგებრულ გამოსახულებად.

ამრიგად, ამოცანაში უცნობ ფუნქციათა რაოდენობა ტოლია მათ შორის დამოკიდებულებათა გამოსახულებების რაოდენობისა. ამიტომ, ყველა ამ უცნობი ფუნქციის მოძებნა შესაძლებელი იქნება, თუ მოცემული გვექნება  $x(t)$  და  $\psi(t)$  ვექტორ-ფუნქციათა კოორდინატების საწყისი მნიშვნელობები  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0), \psi_1(t_0), \dots, \psi_n(t_0)$ . როგორც უკვე ვთქვით, გვაქვს  $2n$  რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა (9.1), (9.16) და  $r$  ალგებრული გამოსახულება (9.21). ამოხსნა, რომელსაც გვაძლევს (9.1), (9.16) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, დამოკიდებული იქნება  $2n$  პარამეტრზე, რომლებიც  $x(t)$  და  $\psi(t)$  ვექტორ-ფუნქციის კოორდინატების საწყისი მნიშვნელობებით განისაზღვრებიან. ამ პარამეტრებისაგან ერთ-ერთი უმნიშვნელოა, რადგანაც  $H$  ფუნქცია წრფივი და ერთგვაროვანია  $\psi(t)$  ფუნქციის კოორდინატების მიმართ და თეორემის პირობები არ შეიცვლება, თუ  $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$  ფუნქციებს გავამრავლებთ ერთ საერთო მუდმივ დადებით მამრავლზე. სხვა სიტყვებით,  $\psi_1(t_0), \psi_2(t_0), \dots, \psi_n(t_0)$  სიდიდეები განსაზღვრულია საერთო დადებითი მამრავლის სიზუსტით. ამიტომ, სიმარტივისათვის ერთერთი მათგანი შეიძლება წინასწარ ჩავთვალოთ ერთის ტოლად,  $\psi_1(t_0) = 1$ .  $\psi(t)$  ვექტორის დანარჩენი

კოორდინატების საწყისი მნიშვნელობები უცნობია, არა გვაქვს მოცემული. სამაგიეროდ მოცემული გვაქვს  $x_1(T), x_2(T), \dots, x_n(T)$  მნიშვნელობები.

ამრიგად, მთლიანი განტოლებათა (9.1), (9.16), (9.21) სისტემის ამოხსნა დამოკიდებულია  $2n-1$  პარამეტრზე. ეს  $2n-1$  პარამეტრი უნდა გამოვიყენოთ ისე, რომ  $x(t)$  ტრაექტორია  $t_0$  მომენტში გადიოდეს  $x(t_0)$  წერტილზე და რომელიღაც უცნობ  $T > t_0$  მომენტში კი  $x(T)$ -წერტილზე. უცნობი სიდიდე  $T$ , აგრეთვე, არის პარამეტრი, რომელიც განსაზღვრავს მთლიანი სისტემის ამოხსნას, ასე რომ, საბოლოო ჯამში მნიშვნელოვანი პარამეტრების რაოდენობა გვექნება  $2n$ .

$x(t)$  ტრაექტორიის  $x(t_0)$  და  $x(T)$  წერტილებზე გავლის პირობა გვაძლევს  $2n$  დამოკიდებულებას, რაც სასვებით საკმარისია  $2n$  პარამეტრის განსაზღვრისათვის.

აი ასეთი გზით განისაზღვრებიან ის ცალკეული ტრაექტორიები, რომლებიც გადიან  $x(t_0)$  და  $x(T)$  წერტილებზე და შეიძლება იყვნენ ოპტიმალური, მხოლოდ ისინი აკმაყოფილებენ ოპტიმალობის აუცილებელ პირობებს, რომლებიც თეორემაშია ჩამოყალიბებული.

კერძოდ, თუ თეორემის პირობებს აკმაყოფილებს მხოლოდ ერთი რომელიმე  $x(t)$  ტრაექტორია, რომელიც  $x(t_0)$  და  $x(T)$  წერტილებზე გადის, და ამავე დროს, გარკვეული ტექნიკური მოსაზრებით შეგვიძლია ვივარაუდოთ ასეთი ტრაექტორიის არსებობა, მაშინ ეს ტრაექტორია ოპტიმალურად შეიძლება მივიჩნიოთ. საერთოდ ოპტიმალური ტრაექტორიის არსებობის მათემატიკური საკითხი მეტად რთულია და მნიშვნელოვანი. კერძო შემთხვევაში, როდესაც წრფივ სისტემებთან გვაქვს საქმე, ოპტიმალური სწრაფქმედების ამოცანისთვის იგი გადაწყვეტილია.

ამოცანის ძირითადი სირთულე მდგომარეობს როგორ გამოვიყენოთ  $x_1(T), x_2(T), \dots, x_n(T)$  სიდიდეები  $\psi(t)$  ვექტორის კოორდინატების საწყისი მნიშვნელობების სანაცვლოდ.

§ 9.5. ოპტიმალური სწრაფქმედების  
წრფივი ამოცანა

განვიხილოთ სამართი სისტემა, რომლის ობიექტის მოძრაობა აღიწერება წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემით

$$\dot{x}_k(t) = \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} x_\alpha(t) + \sum_{\beta=1}^r m_{k\beta} u_\beta(t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (9.22)$$

როგორც წინა პარაგრაფებში, აქაც  $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$  ფაზური ვექტორია, ხოლო  $u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)\}$  კი მართვის ვექტორი. კოეფიციენტები  $b_{k\alpha}, m_{k\beta}, k = 1, \dots, n, \alpha = 1, \dots, n, \beta = 1, \dots, r$  მოცემული მუდმივი სასრულო რიცხვებია, ხოლო დრო  $t \in [0, T]$  (ე.ი. საწყის მომენტად ვიღებთ  $t_0 = 0$ )

დაუშვათ, რომ მართვის ვექტორის თითოეული კოორდინატა  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  მთელი განსაზღვრული დროის შუალედში წარმოადგენს ცალკეულ მართვას, რომლის ცვლილებების არე არ არის დამოკიდებული დანარჩენი კოორდინატების მნიშვნელობებზე, და მოცემული გვაქვს შეზღუდულ არეში

$$|u_\beta(t)| \leq \bar{u}_\beta, \quad \beta = 1, 2, \dots, r, \quad (9.23)$$

სადაც  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r$  მოცემული დადებითი მუდმივებია.

(9.23) გამოსახულებები  $r$ -განზომილების პარალელეპიპედს გვაძლევს ევკლიდეს სივრცეში.

$B$  და  $M$  მატრიცების შემოღების შემდეგ

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1r} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nr} \end{vmatrix}, \quad (9.24)$$

განტოლებათა სისტემა (9.22) ვექტორული სახით ასე ჩაიწერება:

$$\dot{x}(t) = Bx(t) + Mu(t). \quad (9.25)$$

ფაზურ სივრცეში საწყის და საბოლოო წერტილებად ავირჩიოთ

$$x_a(0) = x_{a0}, \quad x_a(T) = 0, \quad (9.26)$$

სადაც  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$  მოცემული სასრულო რიცხვებია. პირობები (9.26) გვიჩვენებს, რომ სისტემის მოძრაობის ტრაექტორია ფაზური სივრცის მოცემული წერტილიდან გვინდა გადავიდეს ამ სივრცის სათავეში. სხვა სიტყვებით, სისტემა  $x_0$  მდგომარეობიდან გვინდა გადავიყვანოთ ნულოვანი წონასწორობის მდგომარეობაში.

წინა პარაგრაფების შესაბამისად, განვიხილავთ  $u(t)$  დასაშვებ მართვათა  $U$  კლასს, რომელიც შედგება უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციებისაგან სასრულო რაოდენობის პირველი რიგის წევრებით (გარდა საწყის და საბოლოო მომენტებში), განსაზღვრულს  $0 \leq t \leq T$  მონაკვეთზე და შეზღუდულს (9.23) გამოსახულებით.

(9.3) ფუნქციონალის მსგავსად განვიხილავთ ოპტიმალობის კრიტერიუმს

$$I(u) = \int_0^T dt = T \quad (9.27)$$

ყოველივე ზემოთქმულის შემდეგ, ოპტიმალური სწრაფქმედების წრფივი ამოცანა ასე ჩამოყალიბდება:

ჯელა დასაშვებ მართვათა შორის ვიპოვოთ ისეთი მართვა  $u^*(t) \in U$ , რომელიც (9.22) წრფივი განტოლებათა სისტემით აღწერილი ობიექტის მოძრაობის ტრაექტორიას ფაზური სივრცის  $x(0) = \{x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)\}$  ფიქსირებული



წერტილიდან უმოკლეს დროში გადაიყვანს ნულოვანი წონასწორობის მდგომარეობაში ( $x(T) = 0$ ).

რა თქმა უნდა, ამ ამოცანის ამოხსნა შეიძლება თეორემის საფუძველზე, რომელიც წინა პარაგრაფშია მოცემული. თეორემის გამოყენება აქ გაცილებით ადვილდება მოძრაობის განტოლების წრფივი სახის გამო. კერძოდ, ფუნქცია  $H(\psi(t), x(t), u(t))$  ლებულობს სახეს

$$H = \sum_{k=1}^n \psi_k(t) \left[ \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} x_\alpha(t) + \sum_{\beta=1}^r m_{k\beta} u_\beta(t) \right], \quad (9.28)$$

რის საფუძველზეც (9.16) განტოლებათა სისტემაც წრფივია და ჩაიწერება, როგორც

$$\dot{\psi}_k(t) = - \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha k} \psi_\alpha(t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (9.29)$$

მისი ვექტორული სახეა

$$\dot{\psi}(t) = -B^* \psi(t),$$

სადაც  $B^*$  ტრანსპონირებული  $B$  მატრიცაა.

მაქსიმუმის პირობა (9.18) დროის მთელ  $0 \leq t \leq T$  მონაკვეთზე შეიძლება ასე ჩაეწეროს

$$\sum_{k=1}^n \psi_k(t) \sum_{\beta=1}^r m_{k\beta} u_\beta(t) = \max_{u_r(t) \in U} \sum_{k=1}^n \psi_k(t) \sum_{\beta=1}^r m_{k\beta} u_\beta(t), \quad \gamma = 1, 2, \dots, r, \quad (9.30)$$

რადგანაც (9.28) გამოსახულების მიხედვით ფუნქცია  $H$  ცხადად დამოკიდებულია  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  ფუნქციებზე მხოლოდ მეორე შესაკრების ხარჯზე.

ამავე დროს, პირობა (9.20), რომელიც (9.19) პირობის ნაცვლად გამოიყენება, საერთოდ საჭირო აღარ ხდება, რადგანაც განსახილველ ამოცანაში იგი ავტომატურად სრულდება და ზედმეტი გამოდის. მართლაც, ვინაიდან

$x(T) = \{0, 0, \dots, 0\}$  სასაზღვრო პირობა გვაქვს, (9.28) გამოსახულებაში პირველი შესაკრები  $t = T$  მომენტში ყოველთვის ნოლი იქნება. ამ გამოსახულების მეორე შესაკრები კი

(9.30) პირობის მიხედვით არ შეიძლება იყოს უარყოფითი, რადგანაც  $u_1 = u_2 = \dots = u_r = 0$  დროს ადგილი აქვს

$$\left. \sum_{k=1}^n \psi_k(t) \sum_{\beta=1}^r m_{k\beta} u_\beta(t) \right|_{u_i=0} = 0 \quad (9.31)$$

და, რა თქმა უნდა, ამ გამოსახულების მაქსიმუმი უარყოფითი ვერ იქნება. ამრიგად, დამოკიდებულება

$H(\psi(T), x(T), u'(T)) \geq 0$  წრფივი ოპტიმალური სწრაფქმედების ამოცანაში ყოველთვის სრულდება.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს დასკვნა: დაეუშვათ  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  დასაშვები მართვაა, რომელსაც (9.22)

განტოლებათა სისტემით აღწერილი ობიექტი მოცემული  $x(0)$  მდგომარეობიდან გადაყავს წონასწორობის მდგომარე-

ობაში  $x(T) = 0$ . ეს მართვა აკმაყოფილებს მაქსიმუმის პრინციპს, თუ არსებობს (9.29) განტოლებათა სისტემის

არატრივიალური ამონახსნი  $\psi(t)$ , რომლისთვისაც სრულდება მაქსიმუმის პირობა (9.30) დროის ყოველ  $0 \leq t \leq T$

მომენტში.

ამრიგად,  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , მართვის ოპტიმალობისათვის აუცილებელია, რომ იგი აკმაყოფილებდეს მაქსიმუმის პრინციპს.

ნიშანდობილია ის ფაქტი, რომ მაქსიმუმის პრინციპი ოპტიმალური სწრაფქმედების წრფივი ამოცანისათვის წარმოადგენს არა მარტო აუცილებელ პირობას, არამედ საკმარისსაც, თუ კი ადგილი აქვს

$$M\omega, BM\omega, B^2M\omega, \dots, B^{n-1}M\omega \quad (9.32)$$

ვექტორების წრფივად დამოუკიდებლობის ფაქტს, სადაც  $\omega$  არის  $U$  მრავალწახნაგას რომელიმე წიბოს პარალელური ვექტორი.

(9.32) ვექტორების წრფივად დამოკიდებულების შემთხვევაში ვამბობთ, რომ ამოცანა გადაგვარებულია.

ამრიგად, შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი

თეორემა: დაეუშვათ  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , დასაშვები მართვა გადაუგვარებელ ამოცანაში და მას ობიექტი (9.22)  $x(0)$

მდგომარეობიდან გადაყავს წონასწორობის მდგომარეობაში  $x(T)=0$ . ასეთი დასაშვები მართვის ოპტიმალობისათვის (სწრაფქმედების თვალსაზრისით) აუცილებელი და საკმარისია იგი აკმაყოფილებდეს მაქსიმუმის პირობას (9.30).

ამ თეორემის დამტკიცებასაც დაინტერესებული მკითხველი შეიძლება გაეცნოს ლიტერატურაში [68].

### § 9.6. მეორე რიგის მაგალითები

განვიხლოთ საილუსტრაციოდ ე.წ. სინთეზის ამოცანა. [68] შევისწავლოთ  $m$  მასის მქონე სხეულის სწორხაზოვანი მოძრაობა (იხ.ნახ.9.4).



ნახ.9.4.

თუ მოძრაობის ტრაექტორიის კოორდინატას აღვნიშნავთ  $x$ -ით, მოძრაობის სიჩქარე გვექნება  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ . დაუშვათ, ამ სხეულზე მოქმედებენ ხახუნის, დრეკადი და წვევის ძალები. ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად ამ სხეულის მოძრაობა დროში ჩაიწერება დიფერენციალური განტოლებით.

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx + u, \quad (9.33)$$

სადაც  $-b\dot{x}$  ხახუნის ძალაა,  $-kx$ -დრეკადი ძალაა და  $u$  ძრავის მიერ განვითარებული წვევის ძალაა.

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნებს

$$x(t) = x_1(t), \quad \dot{x}(t) = x_2(t), \quad (9.34)$$

მაშინ მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება (9.33) შეიძლება ჩაწეროს დიფერენციალურ განტოლებათა სისტე-  
მით

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u. \end{cases} \quad (9.35)$$

აქ  $x_1, x_2$  ფაზური კოორდინატებია, ხოლო  $u$  -სამართი პარამეტრი. (9.35) განტოლებათა სისტემა ფაზური კოორდინატების დროში ცვლილებას აღწერს სამართი პარამეტრის შემოქმედების შედეგად. სხვა სიტყვებით, ეს განტოლებათა სისტემა ფაზურ სიბრტყეზე ფაზური წერტილის მოძრაობის კანონს წარმოადგენს.

მაგალითი 9.1.

დავუშვათ ზემოთ განხილული სხეულის მოძრაობაში სხეულის მასა  $m=1$ , ხახუნისა და დრეკადი ძალები არ მონაწილეობენ (ანუ  $b=0, k=0$ ) და სამართი პარამეტრი შეზღუდულია გამოსახულებით  $|u| \leq 1$ . ასეთი დაშვებების შემდეგ, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ვინილაეთ ჰორიზონტალურ წრფეზე თავისუფლად, ხახუნის გარეშე მოძრავ მატერიალურ წერტილს, რომელზეც მოქმედებს ძრავის წევის ძალა  $u$ , სადაც  $|u| \leq 1$ . ასეთ შემთხვევაში ფაზური წერტილის მოძრაობის კანონი (9.35) მიიღებს სახეს

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad (9.36)$$

$$-1 \leq u(t) \leq +1. \quad (9.37)$$

ასეთი ობიექტისათვის განვიხილოთ ოპტიმალური სწრაფ-ქმედების ამოცანა ფაზური წერტილის  $x_0 = \{x_{10}, x_{20}\}$  წერტილიდან  $x_T = \{x_1(T), x_2(T)\} = \{0, 0\}$  საბოლოო წერტილში (ნულოვანი წონასწორობის მდგომარეობაში) გადასაყვანად. ჩიზიკური აზრით ეს ნიშნავს  $x_{10}$  მდგომარეობაში მყოფი  $x_{20}$  სიჩქარის მქონე მატერიალური წერტილი უმოკლეს დროში იქნეს მოყვანილი ათვლის საწყის წერტილში ნულოვანი

სიჩქარით (ანუ მოყვანილ იქნას და გაჩერდეს ათელის საწყის წერტილში)

გამოვიყენოთ ზემოთ მოყვანილი თეორემა. შემოვიტანოთ დამხმარე ფუნქციები  $\psi_1(t)$  და  $\psi_2(t)$ .  $H$  ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე (იხ. (9.28))

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2, u) &= \psi_1 \cdot \dot{x}_1 + \psi_2 \dot{x}_2 = \\ &= \psi_1 x_2 + \psi_2 u. \end{aligned} \quad (9.38)$$

$\psi_1(t), \psi_2(t)$  ფუნქციებისათვის მსგავსად (9.29) განტოლებებისა (საწყისი იხ. განტოლებები (9.16)) გვექნება

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{\psi}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1(t). \end{cases} \quad (9.39)$$

ამ განტოლებათა ამოხსნის შედეგად ვღებულობთ

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= c_1, \\ \psi_2(t) &= -c_1 t + c_2, \end{aligned} \quad (9.40)$$

სადაც  $c_1$  და  $c_2$  ინტეგრირების მუდმივებია და უნდა განისაზღვრონ  $\psi_1(t)$  და  $\psi_2(t)$  ფუნქციების საწყისი  $\psi_1(0)$  და  $\psi_2(0)$  მნიშვნელობების ხარჯზე. ამოცანის დასმაში  $\psi_1(0)$  და  $\psi_2(0)$  მნიშვნელობები მოცემული არა გვაქვს, მათი მაგივრობა უნდა გასწიონ  $x(t)$  ვექტორის მნიშვნელობებმა  $T$  საბოლოო მომენტში, რომლებიც ამოცანის დასმაში ფიგურირებენ. ერთი სიტყვით, განტოლებები (9.39) უნდა ამოიხსნას (9.36) განტოლებებთან ერთად, როგორც ერთიანი სისტემა (ამ შემთხვევაში მეოთხე რიგის), და მათი ამოხსნისათვის გამოყენებული იქნეს პირობები

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10}, & x_2(0) &= x_{20}, \\ x_1(T) &= 0, & x_2(T) &= 0. \end{aligned} \quad (9.41)$$

მაქსიმუმის პირობას (9.30) ექნება შემდეგი სახე:

$$\psi_2(t)u^*(t) = \max_{u \in U} \psi_2(t)u(t), \quad (9.42)$$

(იგივეა რაც  $H(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2 u^*) = \max_{u \in U} [\psi_1 x_2 + \psi_2 u]$ ).

ფუნქცია  $u(t)$  რომ განსაზღვრული იყოს ღია არეში, მაშინ შეიძლება (9.42) პირობის საფუძველზე დაგვეწერა

$$\frac{\partial}{\partial u} (\psi_2(t), u(t)) = \psi_2(t) \equiv 0, \quad (9.43)$$

მაგრამ  $u(t)$  მოცემულია ჩაკეტილ (9.37) არეში. ამავ დროს,  $\psi_2(t) \equiv 0$  ((9.40) გამოსახულებების მიხედვით) იწვევს  $c_1 = 0$ , რაც თავის მხრივ გვაძლევს  $\psi_1(t) \equiv 0$ . თეორემის შინაარსის მიხედვით კი  $\psi(t) = \{\psi_1(t), \psi_2(t)\}$  ვექტორ-ფუნქცია არანულოვანი უნდა იყოს. ამრიგად, გამოსახულება (9.43) არ გამოდგება.

მაქსიმუმის პირობა (9.42), გათვალისწინებით იმისა, რომ  $u(t)$  ფუნქცია შეზღუდულია (9.37) გამოსახულებით, გვაძლევს

$$\begin{cases} u^*(t) = +1, & \text{თუ } \psi_2(t) > 0, \\ u^*(t) = -1, & \text{თუ } \psi_2(t) < 0. \end{cases} \quad (9.44)$$

გამოსახულება (9.44) შეიძლება ასეც ჩაიწეროს

$$u^*(t) = \text{sign } \psi_2(t). \quad (9.45)$$

აქედან შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა: ოპტიმალური მართვა  $u^*(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  წარმოდგენს უბან-უბან მუდმივ ფუნქციას, რომელიც ლეზულობს  $\pm 1$  მნიშვნელობებს და შედგება არაუმეტეს ორი ინტერვალისაგან (რადგანაც ფუნქცია  $\psi_2(t)$  წრფივია და მან ნიშანი მხოლოდ ერთხელ შეიძლება შეიცვალოს  $0 \leq t \leq T$  მონაკვეთზე).

ახლა ვნახოთ როგორ ფაზურ ტრაექტორიებს გვაძლევს განტოლებათა სისტემა (9.36) სამართი  $u(t)$  ფუნქციის სხვადასხვა მნიშვნელობების დროს. როდესაც,  $u(t) \equiv +1$ , მაშინ (9.36) განტოლებებიდან გვაქვს

$$\frac{dx_1}{dx_2} = x_2, \quad (9.46)$$

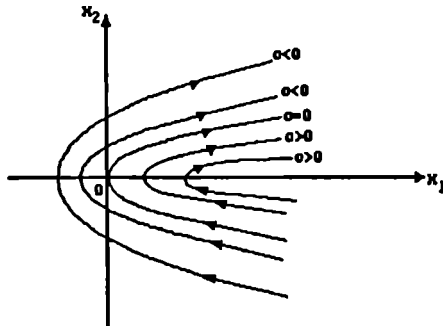
საიდანაც ვღებულობთ

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + c, \quad (9.47)$$

სადაც  $c = \text{const}$ . ამრიგად, ფაზური ტრაექტორია, რომელიც  $u(t) \equiv +1$  მართვას შეესაბამება, წარმოადგენს პარაბოლას (9.47). ასეთი პარაბოლების ოჯახი მოცემულია (ნახ.9.5), თითოეულ მათგანს განსაზღვრავს  $c$  მუდმივას მნიშვნელობა.

ასეთ პარაბოლებზე ფაზური წერტილი მოძრაობს ქვევლან ზევით, რადგანაც  $\dot{x}_2 = u(t) \equiv 1 > 0$  (ნახაზზე ნაჩვენებია ისრებით).

ფაზური ტრაექტორია კი, რომელიც  $u(t) \equiv -1$  მართვას შეესაბამება, აგრეთვე, პარაბოლას წარმოადგენს, მხოლოდ  $x_2$  ღერძის მიმართ სიმეტრიულად შებრუნებულს. მართლაც, (9.46) განტოლების ნაცვლად გვექნება



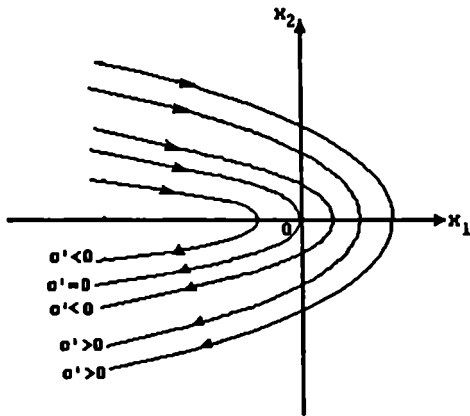
ნახ.9.5

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -x_2 \quad (9.48)$$

და (9.47) ამონახსნის ნაცვლად

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + c'. \quad (9.49)$$

(4.49) პარაბოლათა ოჯახი გამოსახულია (ნახ. 9.6.).



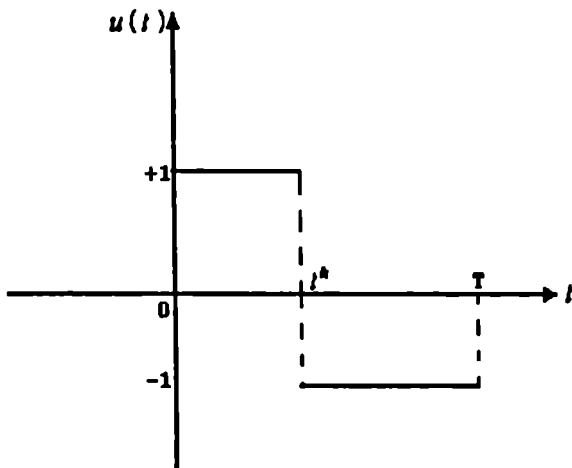
ნახ.9.6

ასეთ პარაბოლებზე ფაზური წერტილი მოძრაობს ზევიდან ქვევით, რადგანაც  $\dot{x}_2 = u(t) \equiv -1 < 0$ .

როგორც უკვე ითქვა, ოპტიმალური მართვა  $u^*(t)$  შედგება არაუმეტეს ორი ინტერვალისაგან და ამ ინტერვალზე ღებულობს მხოლოდ ზღვრულ მნიშვნელობებს,  $+1$  ან  $-1$ .

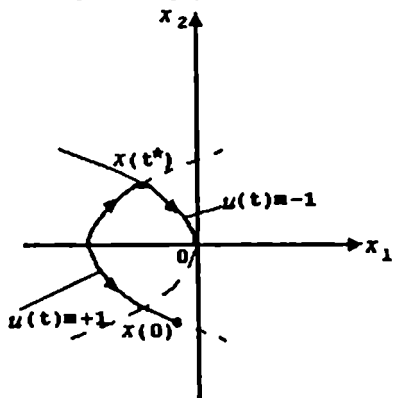
თუ ოპტიმალური მართვა  $u^*(t)$  დასაწყისში, პირველ ინტერვალზე, არის  $+1$ , ხოლო მომდევნო ინტერვალზე  $-1$  (იხ.ნახ.9.7),





ნახ.9.7

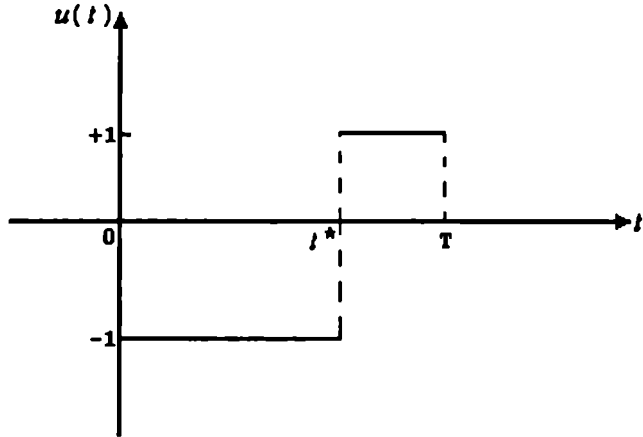
მაშინ ასეთი მართვის შესატყვისი ფაზური ტრაექტორია შედგება ორი პარაბოლის ნაჭრებისაგან, რომელთაგანაც მეორე ნაჭერი იმ პარაბოლას ეკუთვნის, რომელიც გადის ნულოვან წერტილში, კოორდინატთა სათავეზე (რადგანაც უნდა დაკმაყოფილდეს (9.41) სასაზღვრო პირობები). ასეთი ფაზური ტრაექტორია გამოსახულია (ნახ. 9.8.).



ნახ.9.8

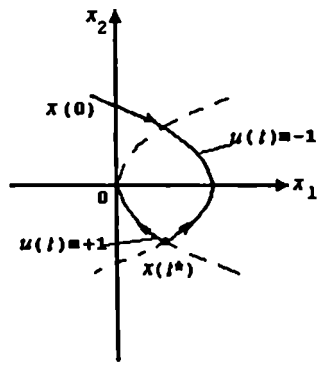
$t^*$  მომენტში ხდება  $u(t)$  ფუნქციის  $+1$  მნიშვნელობიდან  $-1$  მნიშვნელობაზე გადართვა და, შესაბამისად, ფაზური ტრაექტორიაც ერთი პარაბოლიდან გადაინაცვლებს მეორეზე, კოორდინატთა სათავეში მიმავალ პარაბოლაზე.

თუ ოპტიმალურ მართვას ექნება პირიქით მნიშვნელობები (ნახ.9.9),



ნახ.9.9

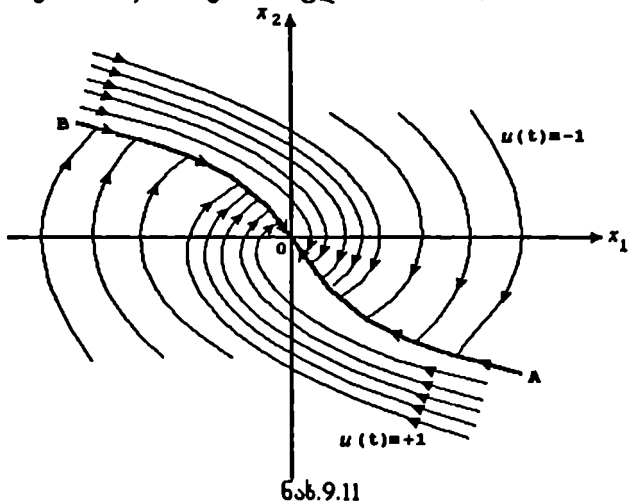
მაშინ შესატყვის ფაზურ ტრაექტორიას ექნება სახე (ნახ.9.10).



ნახ.9.10

$t^*$  მომენტში ხდება  $u(t)$  ფუნქციის  $-1$  მნიშვნელობიდან  $+1$  მნიშვნელობაზე გადასვლა და, შესაბამისად, ფაზური ტრაექტორიის ერთი პარაბოლიდან მეორე პარაბოლაზე გადასაცვლება.

ნებისმიერი საწყისი  $x(0)$  წერტილის შესაბამისი ფაზური ტრაექტორიების ოჯახი გამოსახულია (ნახ.9.11).



ამ ნახაზზე  $AO$  არის  $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2$  (იხ.(9.47), როდესაც

$c = 0$ ) პარაბოლის ქვედა ნახევარი,  $BO$  კი  $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2$  (იხ.(9.49), როდესაც  $c = 0$ ) პარაბოლის ზედა ნახევარი.

თუ საწყისი  $x(0)$  წერტილი  $AOB$  მრუდის ზევით მდებარეობს, მაშინ ფაზურმა წერტილმა უნდა იმოძრაოს ჭერ  $u(t) \equiv -1$  მართვის ზემოქმედებით, ხოლო  $AO$  რკალზე მოხვედრის შემდეგ  $u(t) \equiv +1$  მართვის ზემოქმედებით; თუ საწყისი  $x(0)$  წერტილი  $AOB$  ხაზის ქვევით მდებარეობს, მაშინ პირიქით, ფაზურმა წერტილმა ჭერ უნდა  $u(t) \equiv +1$  მართვის ზემოქმედებით იმოძრაოს, ხოლო

$BO$  რკალზე მოხვედრის შემდეგ კი  $u(t) \equiv -1$  მართვის ზემოქმედებით. ამ შემთხვევებში მართვა ორინტერვალშია. თუ საწყისი  $x(0)$  წერტილი  $AO$  რკალზე მდებარეობს, მაშინ გადართვა საჭირო აღარ არის და ფაზური წერტილი მოძრაობს მხოლოდ  $U(t) \equiv +1$  მართვის ზემოქმედებით; თუ საწყისი  $x(0)$  წერტილი  $BO$  რკალზე მდებარეობს, არც მაშინაა გადართვა საჭირო და მოძრაობა მხოლოდ  $u(t) \equiv -1$  მართვით ხორციელდება. ასეთ შემთხვევებში მართვა ერთინტერვალშია. ყველა შემთხვევაში მართვა ხორციელდება კოორდინატთა სთავეში მისულამდე.

აი ასეთია ამ კონკრეტულ ამოცანაში ოპტიმალური მართვა  $u^*(t)$  და მისი შესაბამისი ოპტიმალური მოძრაობის ტრაექტორია  $x^*(t)$ .

როგორც (ნახ. 9.11.) ჩანს ნებისმიერი საწყისი  $x(0)$  წერტილიდან კოორდინატთა სთავეში მოსვლის უსასრულოდ მრავალი გზა არსებობს, (9.47) და (9.49) პარაბოლებიდან ერთმანეთზე გადართვებით, მაგრამ ასეთი გზა, არაუმეტეს ერთი გადართვით, მხოლოდ ერთადერთია და ზუსტად ასეთი ტრაექტორია და შესაბამისი მართვა აკმაყოფილებენ თეორემის პირობებს.

ამოცანის საბოლოო ამონახსნის მისაღებად საჭიროა  $t^*$  და  $T$  მნიშვნელობების განსაზღვრა. რა თქმა უნდა, ეს სიდიდეები დამოკიდებული იქნებიან ობიექტის საწყის მდგომარეობაზე, ანუ  $x_1(0)$  და  $x_2(0)$  სიდიდეებზე.

ყველთვის შეიძლება გამოითვალოს ობიექტის მდგომარეობის მოცემული საწყისი მნიშვნელობა  $x(0) = \{x_1(0), x_2(0)\}$  მდებარეობს  $AOB$  ხაზის ზევით თუ ქვევით (ნახ.9.11), ვინაიდან ამ ხაზის განტოლება მოცემული გვაქვს.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ობიექტის მდგომარეობის საწყისი მნიშვნელობა მდებარეობს  $AOB$  ხაზის ქვევით, ე.ი. ოპტიმალური მართვის პირველი ინტერვალია  $u^*(t) \equiv +1$ ,  $0 \leq t \leq t^*$  (ნახ.9.7), მეორე ინტერვალი კი  $u^*(t) \equiv -1$ ,  $t^* \leq t \leq T$ .

პირველ ინტერვალზე  $t \in [0, t^*]$  განტოლებები (9.36)  
გეაძლევენ ამოხსნას

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + x_2(0)t + x_1(0), \\ x_2(t) = t + x_2(0). \end{cases} \quad (9.50)$$

ინტერვალის ბოლოს,  $t^*$  მომენტში, გვექნება

$$\begin{cases} x_1(t^*) = \frac{1}{2}t^{*2} + x_2(0)t^* + x_1(0), \\ x_2(t^*) = t^* + x_2(0). \end{cases} \quad (9.51)$$

მეორე ინტერვალზე  $t \in [t^*, T]$  განტოლებები (9.36)  
იძლევიან ამოხსნას

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 + x_2(t^*)t + x_1(t^*), \\ x_2(t) = -t + x_2(t^*), \end{cases} \quad (9.52)$$

რადგანაც ამ ინტერვალზე სისტემისათვის საწყისი მდგომარეობა არის  $x(t^*) = \{x_1(t^*), x_2(t^*)\}$ . ამიტომ, (9.52) ტოლობები (9.51) ტოლობების გამოყენებით მიიღებენ ასეთ სახეს

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 + (t^* + x_2(0))t + \left(\frac{1}{2}t^{*2} + x_2(0)t^* + x_1(0)\right), \\ x_2(t) = -t + (t^* + x_2(0)). \end{cases} \quad (9.53)$$

ამ ტრაექტორიამ რომელიღაც  $t = t_1$  მომენტში უნდა გაიაროს კოორდინატთა სათავეში. ასე რომ, ამ მომენტში (9.53) ტოლობები ასეთ სახეს მიიღებენ

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{2}t_1^2 + (t^* + x_2(0))t_1 + \left(\frac{1}{2}t^{*2} + x_2(0)t^* + x_1(0)\right), \\ 0 = -t_1 + (t^* + x_2(0)). \end{cases} \quad (9.54)$$

აქვე უნდა აღვნიშნოთ, რომ  $t_1$  არის. მეორე ინტერვალის ხანგრძლივობა და იგი პირველი ინტერვალის ხან-

გრძლივობასთან ერთად, რომელიც  $t^{\circ}$  უდრის, გვაძლევს მთელი მოძრაობის დროს

$$T = t^{\circ} + t_1. \quad (9.55)$$

გამოსახულებები (9.54) წარმოადგენენ განტოლებათა სისტემას  $t^{\circ}$  და  $t_1$  უცნობების მიმართ, მათი ამოხსნა ელემენტალურად ხორციელდება. კერძოდ, ამ გამოსახულებათა მეორე ტოლობა გვაძლევს დამოკიდებულებას

$$t_1 = t^{\circ} + x_2(0), \quad (9.56)$$

ორივე ერთად კი კვადრატულ განტოლებას

$$t^{\circ 2} + 2x_2(0)t^{\circ} + \left(x_1(0) + \frac{1}{2}x_2^2(0)\right) = 0. \quad (9.57)$$

აქედან

$$t^{\circ} = -x_2(0) \pm \sqrt{\frac{1}{2}x_2^2(0) - x_1(0)}. \quad (9.58)$$

როგორც აღვნიშნეთ, ვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც  $x(0)$  წერტილი მდებარეობს  $AOB$  ხაზის ქვევით (ნახ.9.11). განვიხილოთ სხვადასხვა სიტუაციები.

I  $x(0)$  წერტილი მდებარეობს  $AO$  ხაზზე, ანუ ადგილი აქვს ტოლობას  $x_1(0) = \frac{1}{2}x_2^2(0)$  მაშინ გამოსახულება (9.58)

გვაძლევს  $t^{\circ} = -x_2(0) > 0$  (ვინაიდან  $x(0)$  მეოთხე კვადრანტშია). ამ დროს მართვა ხორციელდება მხოლოდ ერთ ინტეგრალზე, გადართვის გარეშე,  $t^{\circ}$  და  $T$  მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან.

II  $x(0)$  წერტილი მდებარეობს  $AO$  ხაზის ქვევით მეოთხე კვადრანტში, ანუ ადგილი აქვს

$x_1(0) < \frac{1}{2}x_2^2(0)$ ,  $x_1(0) > 0$ ,  $x_2(0) < 0$  ასეთ დროს (9.58) ფორმულაში ფესვქვეშა გამოსახულება დადებითია და ვღებულობთ

$t_1^{\circ} = -x_2(0) + \sqrt{\dots} > 0$ ,  $t_2^{\circ} = -x_2(0) - \sqrt{\dots} > 0$ ,  $t_1^{\circ} > t_2^{\circ}$ . მეორე მნიშვნელობა,  $t_2^{\circ}$  გვიჩვენებს დროს, რომლის დროსაც ფაზური წერტილი აღმოჩნდება  $OB$  პარაბოლის სიმეტრიულ, ქვედა შტოზე,

რომლიც მესამე კვადრანტში იქნება მოთავსებული. ამრიგად, გადართვის მომენტი  $t^{\circ}$  ოპტიმალური მართვისას იქნება  $t^{\circ} = t_1^{\circ}$ .

III  $x(0)$  წერტილი მდებარეობს  $OB$  ხაზის ქვევით მესამე კვადრანტში, ანუ ადგილი აქვს  $-x_1(0) > \frac{1}{2}x_2^2(0)$ ,  $x_1(0) < 0$ ,  $x_2(0) < 0$ . ამ დროს (9.58) ფორმულაში ფესქვეშა გამოსახულება დადებითია და მეტია  $x_2^2(0)$ -ზე. ამიტომ, აქაც  $t^{\circ} = t_1^{\circ} > 0$ . რაც შეეხება  $t_2^{\circ}$ , იგი უარყოფითი სიდიდეა.

IV.  $x(0)$  წერტილი მდებარეობს  $OB$  ხაზის ქვევით მეორე კვადრანტში, ანუ ადგილი აქვს  $-x_1(0) > \frac{1}{2}x_2^2(0)$ ,  $x_1(0) < 0$ ,  $x_2(0) > 0$ . ამ დროსაც (9.58) გამოსახულების მეორე მნიშვნელობა  $t_2^{\circ} < 0$ . ამიტომ,  $t^{\circ} = t_1^{\circ} > 0$ . როგორც ვხედავთ, ყველა შემთხვევაში გვაქვს

$$t^{\circ} = t_1^{\circ} = -x_2(0) + \sqrt{\frac{1}{2}x_2^2(0) - x_1(0)}. \quad (9.59)$$

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც ობიექტის მდგომარეობის საწყისი მნიშვნელობა  $x(0)$  მდებარეობს  $AOB$  ხაზის ზევით (ნახ.9.11), ე.ი. ოპტიმალური მართვის პირველი ინტერვალია  $u^{\circ}(t) \equiv -1$ ,  $0 \leq t \leq t^{\circ}$ , მეორე ინტერვალ კი  $u^{\circ}(t) \equiv +1$ ,  $t^{\circ} \leq t \leq T$  (ნახ.9.9).

ანალოგიურად ზემოთ განხილული შემთხვევისა, პირველ ინტერვალზე (9.50), (9.51) ფორმულების ნაცვლად გვექნება

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 + x_2(0)t + x_1(0), \\ x_2(t) = -t + x_2(0), \end{cases} \quad (9.60)$$

$$\begin{cases} x_1(t^\circ) = -\frac{1}{2}t^{\circ 2} + x_2(0)t^\circ + x_1(0), \\ x_2(t^\circ) = -t^\circ + x_2(0). \end{cases} \quad (9.61)$$

მეორე ინტრევალზე  $t \in [t^\circ, T]$  მოძრაობის ტრაექტორიის საწყისი მნიშვნელობებია (9.61), რის გამოც ეს მოძრაობა (9.53) ფორმულების ნაცვლად აღიწერება შემდეგი სახით

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + (-t^\circ + x_2(0))t + \left(-\frac{1}{2}t^{\circ 2} + x_2(0)t^\circ + x_1(0)\right), \\ x_2(t) = t + (-t^\circ + x_2(0)). \end{cases} \quad (9.62)$$

ამ ინტერვალის ბოლო მომენტისათვის  $t = t_1$  ( $t_1$  მეორე ინტერვალის ხანგრძლივობაა,  $t_1 = T - t^\circ$ ) ადგილი უნდა ჰქონდეს  $x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0$ . ანალოგიურად (9.54) ფორმულები-სა გვექნება განტოლებათა სისტემა  $t_1$  და  $t^\circ$  უცნობების მიმართ.

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2}t_1^2 + (-t^\circ + x_2(0))t_1 + \left(-\frac{1}{2}t^{\circ 2} + x_2(0)t^\circ + x_1(0)\right), \\ 0 = t_1 + (-t^\circ + x_2(0)). \end{cases} \quad (9.63)$$

ამ განტოლებებიდან (9.56) და (9.58) გამოსახულებების მსგავსად მივიღებთ

$$t_1 = t^\circ - x_2(0), \quad (9.64)$$

$$t^\circ = x_2(0) \pm \sqrt{x_1(0) + \frac{1}{2}x_2^2(0)}. \quad (9.65)$$

განვიხილოთ სიტუაციები:

I  $x(0)$  წერტილი მდებარეობს  $BO$  ხაზზე, ანუ

ადგილი აქვს ტოლობას  $x_1(0) = -\frac{1}{2}x_2^2(0)$ . მაშინ გამოსახუ-

ლება (9.65) გვაძლევს  $t^\circ = x_2(0) > 0$  (ვინაიდან  $x(0)$  მეორე კვადრანტშია). ამ დროს მართვა ხორციელდება მხოლოდ



ერთ ინტერვალზე, გადართვის გარეშე,  $t^*$  და  $T$  მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან.

II  $x(0)$  წერტილი მდებარეობს  $BO$  ხაზის ზევით მეორე კვადრანტში, ანუ ადგილი აქვს

$-x_1(0) < \frac{1}{2}x_2^2(0)$ ,  $x_1(0) < 0$ ,  $x_2(0) > 0$ . ამ დროს (9.65) ფორმულაში

ფესვებში გამოსახულება დადებითია და ნაკლებია  $x_2^2(0)$ -ზე. ასე რომ, ვლებულობთ  $t_1^* = x_2(0) + \sqrt{\dots} > 0$ ,  $t_2^* = x_2(0) - \sqrt{\dots} > 0$ ,  $t_1^* > t_2^*$ .

მეორე მნიშვნელობა,  $t_2^*$ , გვიჩვენებს დროს, რომლის დროსაც ფაზური წერტილი აღმოჩნდება  $AO$  პარაბოლის სიმეტრიულ, ზედა შტოზე, რომელიც პირველ კვადრანტშია მოთავსებული. ამრიგად, გადართვის მომენტი ოპტიმალური მართვისას იქნება  $t^* = t_1^*$ .

III  $x(0)$  წერტილი მდებარეობს  $AO$  ხაზის ზევით პირ-

ველ კვადრანტში, ანუ ადგილი აქვს  $x_1(0) > \frac{1}{2}x_2^2(0)$ ,  $x_1(0) > 0$ ,

$x_2(0) > 0$ . ამ დროს (9.65) ფორმულაში ფესვებში გამოსახულება დადებითია და მეტია  $x_2^2(0)$ -ზე. ამიტომ, აქაც

$t^* = t_1^* > 0$ .  $t_2^*$  უარყოფითი სიდიდეა.

IV  $x(0)$  წერტილი მდებარეობს  $AO$  ხაზის ზევით

მეოთხე კვადრანტში, ანუ ადგილი აქვს  $x_1(0) > \frac{1}{2}x_2^2(0)$ ,

$x_1(0) > 0$ ,  $x_2(0) < 0$ . ამ დროსაც (9.65) გამოსახულების მეორე მნიშვნელობა  $t_2^* < 0$ . ამიტომ,  $t^* = t_1^* > 0$ .

როგორც ვხედავთ, ყველა შემთხვევაში გვაქვს

$$t^* = t_1^* = x_2(0) + \sqrt{x_1(0) + \frac{1}{2}x_2^2(0)}. \quad (9.66)$$

ამრიგად, (ნახ. 9.7.) გამოსახული ოპტიმალური მართვის დროს გადართვის მომენტი  $t^*$  გამოითვლება (9.59) ფორ-

მულით, ხოლო  $T$  სიდიდე (9.55), (9.50), (9.59) ფორმულე-  
ბის ხარჯზე, ანუ

$$T = -x_2(0) + 2\sqrt{\frac{1}{2}x_2^2(0) - x_1(0)}. \quad (9.67)$$

(ნახ. 9.9.) გამოსახული ოპტიმალური მართვის დროს გა-  
დართვის მომენტი  $t^*$  გამოითვლება (9.66) ფორმულით, ხო-  
ლო  $T$  სიდიდე (9.55), (9.64), (9.66) ფორმულების ხარჯზე,  
ანუ

$$T = x_2(0) + 2\sqrt{x_1(0) + \frac{1}{2}x_2^2(0)}. \quad (9.68)$$

განხილული მაგალითის ამოხსნის პასუხი იქნება:  
ოპტიმალური მართვა საწყისი წერტილიდან, რომელიც  
 $AOB$  ხაზის (ნახ.9.11) ქვევით მდებარეობს არის

$$u^*(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t \leq t^*, \\ -1, & t^* \leq t \leq T, \end{cases} \quad \text{სადაც } t^* \text{ და } T$$

სიდიდეები, შესაბამისად, გამოითვლებიან (9.59) და (9.67)  
ფორმულებით;

ოპტიმალური მართვა საწყისი წერტილიდან, რომელიც  
 $AOB$  ხაზის (ნახ.9.11) ზევით მდებარეობს არის

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq t^*, \\ +1, & t^* \leq t \leq T, \end{cases} \quad \text{სადაც } t^* \text{ და } T \text{ სიდიდეები}$$

შესაბამისად გამოითვლებიან (9.66) და (9.68) ფორმულებით;  
ოპტიმალური მართვა საწყისი წერტილიდან, რომელიც  
 $AO$  ხაზზე (ნახ.9.11) მდებარეობს არის

$$u^*(t) \equiv +1, \quad 0 \leq t \leq t^* = T = -x_2(0);$$

ოპტიმალური მართვა საწყისი წერტილიდან, რომელიც  
 $BO$  ხაზზე (ნახ.9.11) მდებარეობს არის

$$u^*(t) \equiv -1, \quad 0 \leq t \leq t^* = T = x_2(0).$$

შევნიშნავთ, რომ თუ მართვის ფუნქციაზე (9.37) შეზ-  
ღუდვის ნაცვლად გვნიხილავთ (9.23) ტიპის შეზღუდვას,  
კერძოდ

$$|u(t)| \leq \bar{u} = \text{const},$$

მაშინ, ელემენტარული გამოთვლების თანახმად, (9.59) და (9.66) ფორმულების ნაცვლად გადართვის  $t^{\circ}$  მომენტის გამოსათვლელად შესაბამისად გვექნება შემდეგი ფორმულები

$$t^{\circ} = -\frac{x_2(0)}{u} + \sqrt{\frac{1}{2} \frac{x_2^2(0)}{u^2} - \frac{x_1(0)}{u}},$$

$$t^{\circ} = \frac{x_2(0)}{u} + \sqrt{\frac{1}{2} \frac{x_2^2(0)}{u^2} + \frac{x_1(0)}{u}},$$

ხოლო მეორე ინტერვალის ხანგრძლივობის ფორმულების (9.56), (9.64) ნაცვლად შესაბამისად გვექნება

$$t_1 = t^{\circ} + \frac{x_2(0)}{u},$$

$$t_1 = t^{\circ} - \frac{x_2(0)}{u}.$$

### მაგალითი 9.2.

განვიხილოთ წინა მაგალითი დრეკადი ძალის მოქმედების დროს, ანუ (9.35) განტოლებებში  $k = 1$ . დანარჩენი პირობები იგივეა. ასეთ დროს (9.35) განტოლებათა სისტემას ექნება შემდეგი სახე

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u. \end{cases} \quad (9.69)$$

ანალოგიურად წინა მაგალითისა, ვიხილავთ მატერიალური წერტილის მოძრაობას ფაზურ სიბრტყეზე და მოცემული  $x(0) = \{x_1(0), x_2(0)\}$  საწყისი წერტილიდან კოორდინატთა სათავეში მისი უსწრაფესად, მინიმალურ დროში მოსვლის ამოცანას.

$H$  ფუნქციას ექნება სახე (ნაცვლად (9.38) გამოსახულებისა)

$$H(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2, u) = \psi_1 x_2 - \psi_2 x_1 + \psi_2 u, \quad (9.70)$$

რომლის მაქსიმუმის პირობაც (9.37) შეზღუდვის გათვალისწინებით იგივეა, რაც განხილულ მაგალითში, ანუ

$$u'(t) = \text{sign} \psi_2(t). \quad (9.71)$$

განტოლებებს (9.39), რომლებიც  $\psi(t) = \{\psi_1(t), \psi_2(t)\}$  ვექტორ-ფუნქციას განსაზღვრავენ, განსხვავებული სახე ექნებათ, კერძოდ

$$\begin{cases} \psi_1(t) = \psi_2(t), \\ \psi_2(t) = -\psi_1(t). \end{cases} \quad (9.72)$$

განტოლებათა ეს სიტემა შეიძლება ჩაიწეროს  $\psi_2(t)$  ფუნქციის მიმართ როგორც

$$\ddot{\psi}_2(t) + \psi_2(t) = 0. \quad (9.73)$$

თეორემის პირობებში არაფერია თქმული  $\psi_1(0)$  და  $\psi_2(0)$  მნიშვნელობების შესახებ. მათ ნაცვლად ფაზური ვექტორის  $x_1(T)$  და  $x_2(T)$  მნიშვნელობები უნდა გამოვიყენოთ. განტოლება (9.73) აღწერს არამილევად რხევას და მისი ამოხსნაა

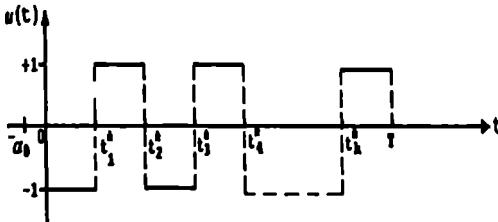
$$\psi_2(t) = A \sin(t - \alpha_0), \quad (9.74)$$

სადაც  $A > 0$  რხევის ამპლიტუდაა,  $\alpha_0$  კი რხევის ფაზა.

მაქსიმუმის პირობა (9.71) მიიღებს სახეს

$$u'(t) = \text{sign} \psi_2(t) = \text{sign}(A \sin(t - \alpha_0)) = \text{sign}(\sin(t - \alpha_0)). \quad (9.75)$$

ამრიგად, ოპტიმალურ მართვას შეიძლება ასეთი სახე ჰქონდეს (ნახ.9.12):



ნახ.9.12

ცხადია,  $u(t)$  ფუნქციის მნიშვნელობა საწყის ეტაპზე დამოკიდებულია  $\alpha_0$  სიდიდეზე. ნახაზზე  $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ ,  $t_1^* = \pi - \alpha$ ,  $t_2^* = 2\pi - \alpha, \dots, t_k^* = k\pi - \alpha$ ,  $T = k\pi - \alpha + \beta$  ( $\beta$  უკანასკნელი მონაკვეთის ხანგრძლივობაა). როდესაც  $\alpha_0 > \frac{\pi}{2}$ , მაშინ მართვა დაიწყება  $U(t) = +1$  ფუნქციით (შემოვიფარგლოთ  $\alpha_0 \in [0, \pi]$ ).

ამ ამოცანაში შეუძლებელია დადგინდეს გადართვების რიცხვი  $k$  წინასწარ, როგორც ეს წინა მაგალითში იყო შესაძლებელი. აქ გადართვების რიცხვი დამოკიდებულია სისტემის საწყის მდგომარეობაზე. ასევე საწყის მდგომარეობაზეა დამოკიდებული მართვა დაიწყება  $+1$  ზემოქმედებით, თუ  $-1$  ზემოქმედებით.

ახლა განვიხილოთ ფაზური წერტილის მოძრაობის შესაძლებელი ვარიანტები ფაზურ  $(x_1, x_2)$  სიბრტყეზე. ამისათვის ჭერ განვიხილოთ დამხმარე სისტემა, კერძოდ, (9.69) სისტემაში დაუშვათ  $u(t) \equiv 0$ , ანუ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases} \quad (9.76)$$

რომლის ამოხსნაცაა

$$x_1(t) = -R \cos(t + \gamma), \quad x_2(t) = R \sin(t + \gamma), \quad (9.77)$$

სადაც  $R \geq 0$ ,  $0 \leq \gamma < 2\pi$ .

ამრიგად, დამხმარე სისტემის (9.76) ფაზური ტრაექტორიები წარმოადგენენ წრეწირებს ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, რომლის განტოლებაცაა

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2. \quad (9.78)$$

(9.77) ფორმულებიდან ჩანს, რომ ფაზური წერტილის (9.78) წრეწირზე მოძრაობა ხორციელდება საათის ისრის მიმართულებით, თანაბრად,  $2\pi R$  სიჩქარით. (ერთი შემოწერა  $2\pi$  დროში). ამიტომ,  $\pi$  დროის მონაკვეთში ფაზური

წერტილი საათის ისრის მიმართულებით შემოწერს ზუსტად ნახევარ წრეწირს (ნახ.9.13)

ახლა დავუბრუნდეთ (9.69) განტოლებათა სისტემას. როგორც (9.75) გვიჩვენებს  $u^*(t)$  დებულობს მხოლოდ  $+1$  და  $-1$  სიდიდეებს. როდესაც  $u = +1$ , მაშინ (9.69) სისტემა დებულობს სახეს

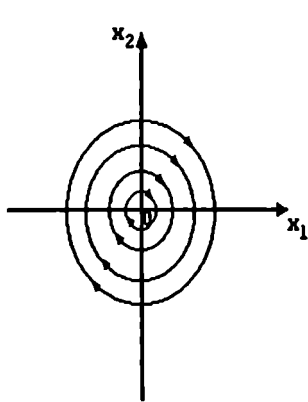
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 1, \end{cases} \quad (9.79)$$

რომელიც სავსებით იდენტურია სისტემისა

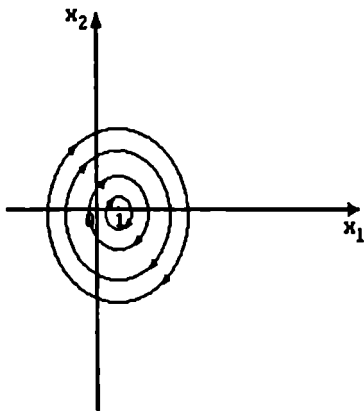
$$\begin{cases} \frac{d(x_1(t) - 1)}{dt} = x_2(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = -(x_1(t) - 1). \end{cases} \quad (9.80)$$

ანალოგიურად (9.76) სისტემისა, (9.80) სისტემის ფაზური ტრაექტორიებიც წრეწირებს წარმოადგენენ ცენტრით  $(1,0)$  წერტილში, რომელთა განტოლებაა (ნახ.9.14)

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = R^2. \quad (9.81)$$



ნახ. 9.13.



ნახ. 9.14.

ამ წრეწირებზეც მოძრაობა თანაბარია და ხორციელდება საათის ისრის მიმართულებით.

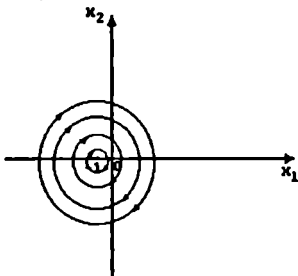
როდესაც  $x = -1$ , სისტემა (9.69), ანალოგიურად (9.80) განტოლებისა, შეგვიძლია ჩავწეროთ, როგორც

$$\begin{cases} \frac{d(x_1(t)+1)}{dt} = x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -(x_1(t)+1), \end{cases} \quad (9.82)$$

რაც გვიჩვენებს, რომ ფაზური წერტილის მოძრაობა ხორციელდება წრეწირზე

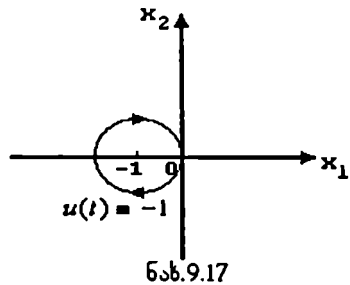
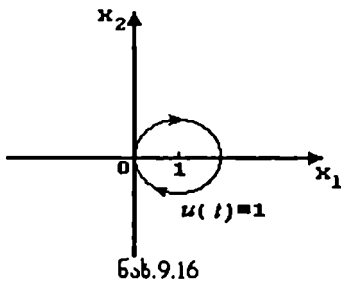
$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = R^2 \quad (9.83)$$

ცენტრით  $(-1, 0)$  წერტილში. მოძრაობა თანაბარია, საათის ისრის მიმართულებით და  $\pi$  დროის მონაკვეთში წერტილი შემოწერს ზუსტად წრეწირის ნახევარს (ნახ.9.15).



ნახ. 9.15.

როგორც ზევით აღვნიშნეთ, ფაზური ტრაექტორია უნდა მოვიდეს კოორდინატთა სათავეში. კოორდინატთა სათავეში გადის მხოლოდ ერთეულოვანი რადიუსის მქონე წრეწირები (ნახ.9.16 და ნახ.9.17)

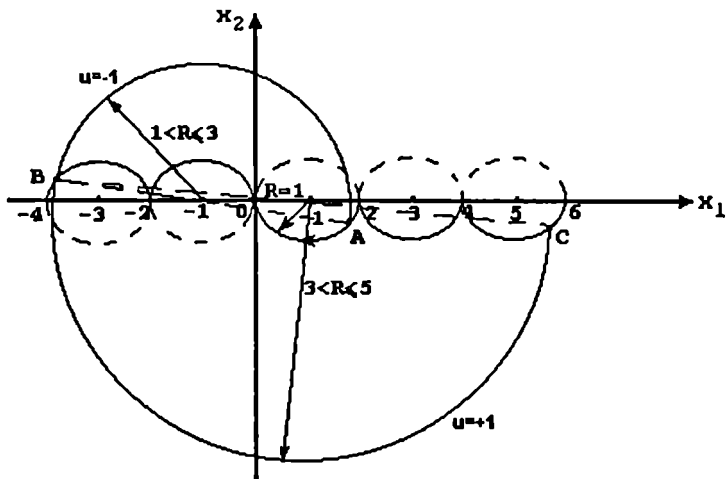


(ნახ.9.16) შეესაბამება მართვას  $u(t) = +1$ , ხოლო (ნახ.9.17) მართვას  $u(t) = -1$ .

ამრიგად, ტრაექტორია რომ მოვიდეს კოორდინატა სათავეში, ერთადერთი გზაა იგი მოხვდეს რომელიმე ერთეულლოვანი რადიუსის მქონე წრეწირზე (ნახ.9.16 და 9.17) და აქ მოხდეს გადაართვა. როგორც მაქსიმუმის პრინციპი გვაძლევს, ოპტიმალური მართვა  $u^*(t)$  უბან-უბან მუდმივი ფუნქციაა და განისაზღვრება  $sign(\sin(t - \alpha_0))$  გამოსახულების მიხედვით, ღებულობს რიგრიგობით  $+1$  და  $-1$  მნიშვნელობებს ყოველ  $\pi$  სიგრძის დროის ინტერვალზე.

დავუშვათ, ფაზური წერტილის საწყისი მდგომარეობა ისეთია, რომ უკანასკნელ ინტერვალზე  $T - t_k^*$  (ნახ.9.12) მას უწევს  $u(t) = +1$  მართვით მოძრაობა (ნახ.9.16). რა თქმა უნდა, აქ ლაპარაკი უნდა იყოს ამ წრეწირის მხოლოდ ქვედა ნახევარზე, რადგანაც ყოველი  $\pi$  ინტერვალის შემდეგ, თეორემის პირობების მიხედვით, მართვის ნიშანი უნდა შეიცვალოს. ამრიგად, ბოლო ინტერვალზე მოძრაობა ხორციელდება  $R=1$  რადიუსის მქონე ქვედა ნახევარწრეწირზე და მასზე შეიძლება მოვხვდეთ ასევე ნახევარწრეწირზე მოძრაობით, რომლის ცენტრი მდებარეობს  $(-1,0)$  წერტილში. აღენიშნოთ ასეთი მოხვედრის წერტილი, ანუ ამ ორი ნახევარწრეწირის საერთო წერტილი  $A$  ასოთი (ნახ.9.18).





ნახ.9.18

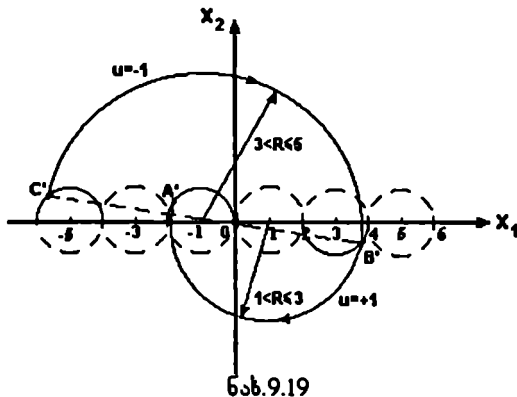
ამ წერტილში მოსვლამდე ფაზური წერტილი მოძრაობს  $\pi$  დროის განმავლობაში  $u(t) = -1$  მართვის ზემოქმედებით. რა თქმა უნდა, ამას შეესაბამება BA ნახევარწრეწირი, B წერტილი A წერტილის სიმეტრულია  $(-1,0)$  წერტილთან შეფარდებით. BA ნახევარწრეწირის რადიუსი  $1 < R \leq 3$  დამოკიდებულია A წერტილის მდებარეობაზე.

B წერტილში მოხვედრა ასევე მხოლოდ ნახევარწრეწირზე მოძრაობით შეიძლება, რომლის ცენტრიც  $(1,0)$  წერტილშია და რომელიც ხორციელდება  $u(t) = +1$  მართვით დროის  $\pi$  მონაკვეთში. ამ ნახევარწრეწირის რადიუსი დამოკიდებულია B წერტილის მდებარეობაზე ერთეულოვანი რადიუსის მქონე იმ წრეწირის ზედანახევარზე, რომლის ცენტრის კოორდინატებია  $(-3,0)$ . იგი მერყობს  $3 < R \leq 5$ . B წერტილში მოხვედრა მხოლოდ C წერტილიდან შეიძლება, რომელიც B წერტილის სიმეტრიულია  $(1,0)$  წერტილთან შეფარდებით.

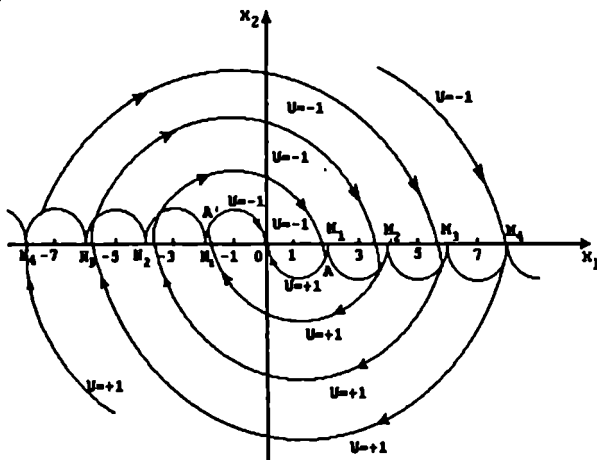
C წერტილშიც მოსვლა ასევე ნახევარწრეწირზე მოძრაობითაა შესაძლებელი  $u(t) = -1$  მართვით დროის  $\pi$  მონაკვეთში, რომლის ცენტრიც  $(-1,0)$  წერტილში იქნება. ცხადია მისი რადიუსი იქნება  $5 < R \leq 7$ .

ასე შეიძლება გაგრძელდეს მთელ  $(x_1, x_2)$  სიბრტყეზე.

თუ უკანასკნელ ინტერვალზე  $T-t_k^*$  (ნახ.9.12.) ფაზურ წერტილს უწევს  $u(t) = -1$  მართვით მოძრაობა, მაშინ მსჯელობა იგივე რჩება და (ნახ.9.18.) მსგავსად ვლებულობთ მის სიმეტრიულ სარაოს (ნახ.9.19.).



(ნახ.9.18.) და (ნახ.9.19.) გვაძლევენ საერთო სურათს (ნახ.9.20.).



ნახ.9.20

ამრიგად, შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა: თუ საწყისი  $x(0)$  წერტილი მოთავსებულია  $\dots M_3 M_2 M_1 O N_1 N_2 N_3 \dots$  წირის ზევით, რომელიც შედგენილია  $R=1$  რადიუსის მქონე უსასრულო რაოდენობის ნახევარწრეწირებით (ნახ.9.20), მაშინ ფაზური წერტილის ოპტიმალური მოძრაობა (სწრაფმოქმედების თვალსაზრისით) იწყება  $u=-1$  მართვით და მიმდინარეობს მისი ზემოქმედებით სანამ იგი არ მოხვდება  $\dots M_3 M_2 M_1 O$  წირზე. ამ წირზე მოხვედრისთანავე ხდება გადართვა  $u=+1$  მართვაზე და ასეთი მართვა მიმდინარეობს დროის  $\pi$  მონაკვეთის მანძილზე. ზუსტად ამ დროში ფაზური წერტილი ხვდება  $O N_1 N_2 N_3 \dots$  წირზე. აქ მოხვედრისთანავე ხდება გადართვა ისევ  $u=-1$  მართვაზე და ასე შემდეგ, ვიდრე არ მოხვდება კოორდინატთა სათავეში.

ფაზური წერტილის მოძრაობა  $\dots M_3 M_2 M_1 O N_1 N_2 N_3 \dots$  წირის ზევით ყოველთვის მიმდინარეობს  $u=-1$  მართვით, ხოლო მოძრაობა ამ წირის ქვევით ყოველთვის  $u=+1$  მართვით. თუ საწყისი  $x(0)$  წერტილი მოთავსებულია  $\dots M_3 M_2 M_1 O N_1 N_2 N_3$  წირის ქვევით, მაშინ ოპტიმალური მართვა იწყება  $u=+1$  ფუნქციით და ისევე, როგორც წინა შემთხვევაში მოძრაობა ამ წირის ქვევით მიმდინარეობს  $u=+1$  მართვით, ხოლო ზევით კი მიმდინარეობს  $u=-1$  მართვით. ფაზური ტრაექტორიის ბოლო მონაკვეთს წარმოადგენს  $O M_1$  ან  $O N_1$  ნახევარწრეწირის რკალი, რომელთაც ფაზური წერტილი კოორდინატთა სათავეში მიყავს.

უნდა შევნიშნოთ, რომ ფაზური სიბრტყის ნებისმიერი წერტილიდან კოორდინატთა სათავეში მოხვედრის ერთადერთი გზა არსებობს, რომელიც მაქსიმუმის პრინციპის თეორემას აკმაყოფილებს. ეს ტრაექტორია ოპტიმალურია და მას ოპტიმალური მართვა ახორციელებს.

ზოგადად ოპტიმალური მართვა შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$u^*(t) = \begin{cases} +1, & OM_1M_2M_3 \dots \text{წირზე და } \dots M_3M_2M_1ON_1N_2N_3 \dots \\ & \text{წირის ქვევით;} \\ -1, & ON_1N_2N_3 \dots \text{წირზე და } \dots M_3M_2M_1ON_1N_2N_3 \dots \\ & \text{წირის ზევით.} \end{cases}$$

(9.84)

როგორ განესაზღვროთ გადართვების რაოდენობა, გადართვების მომენტების მნიშვნელობები და მართვის ხანგრძლივობა, ანუ  $k, t_1^*, t_2^*, \dots, t_k^*, T$  სიდიდეები? ცხადია, რომ ყოველივე მათგანის მნიშვნელობა დამოკიდებულია  $x(0) = \{x_1(0), x_2(0)\}$  საწყისი წერტილის მდებარეობაზე, ანუ  $x_1(0)$  და  $x_2(0)$  სიდიდეების მნიშვნელობებზე.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც  $x(0)$  წერტილი I კვადრანტშია. ეს წერტილი განსაზღვრავს წრეწირის რადიუსს, რომელზედაც იგი მდებარეობს, შემდეგი ფორმულით

$$(x_1(0) + 1)^2 + x_2^2(0) = R^2 \quad (9.85)$$

რადგანაც ამ დროს მართვა  $U(t) = -1$ . ამ წრეწირის ცენტრია  $(-1, 0)$  წერტილი. ამრიგად, მოძრაობა მიმდინარეობს წრეწირზე, რომელიც (9.83) ფორმულით აღიწერება და რომლის რადიუსიც განსაზღვრულია (9.85) ფორმულით, ანუ

$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = R^2 = (x_1(0) + 1)^2 + x_2^2(0). \quad (9.86)$$

მოძრაობა (9.86) წრეწირზე უნდა განხორციელდეს ვიდრე თაზური წერტილი არ მოხვდება  $\dots M_3M_2M_1O$  წირზე, მის რომელიმე ნახევარწრეწირზე (ნახ.9.20). ამ ნახევარწრეწირების ცენტრები მოთავსებულია  $(1,0), (3,0), (5,0), \dots, (2n-1,0), \dots$  წერტილებში, სადაც  $n$  გვიჩვენებს ამ ნახევარწრეწირების ნუმერაციას კოორდინატთა სათავიდან მარჯვნივ. ასეთივე ნახევარწრეწირებისაგან შედგება  $ON_1N_2N_3 \dots$  წირი, მათი ცენტრები მოთავსებულია  $(-1,0), (-3,0), (-5,0), \dots, (-(2n'-1),0), \dots$  წერტი-

ლებში.  $n'$  გვიჩვენებს ამ ნახევარწრეწირების რიგით ნომერს კოორდინატთა სათავიდან მარცხნივ. ამ ნახევარწრეწირების რადიუსი ყოველთვის ერთის ტოლია.

ახლა საჭიროა დადგინდეს რომელ, მერამდენე ნახევარწრეწირს გადაკვეთს ფაზური წერტილი, რომელიც (9.86) წრეწირზე მოძრაობს საათის ისრის მიმართულეებით. ამის დადგენა იოლია. როდესაც  $x_2 = 0$ , მაშინ  $x_1 = R - 1$  (იხ. ჩორმულა (9.86)).  $R$  ცნობილია და გამოსახულია  $x_1(0)$  და  $x_2(0)$  სიდიდეებით.  $x_1$ -ის მნიშვნელობა მოგვეცემს ამ ნახევარწრეწირის  $n$  რიგით ნომერს, რის შედეგადაც დადგინდება ამ ნახევარწრის ცენტრი და შეგვეძლება დავწეროთ შეესაბამისი წრეწირის განტოლება

$$(x_1 - (2n - 1))^2 + x_2^2 = 1. \quad (9.87)$$

ყოველივე ეს ნათლად ჩანს (ნახ.9.20.)  $x_1$  სიდიდე, რომელიც უდრის  $R - 1$ , მოხედება რომელიმე ნახევარწრეწირის დიამეტრზე, ამით ვპოულობთ ამ ნახევარწრეწირის რიგით ნომერს და, შესაბამისად, ცენტრსაც.

(9.86) და (9.87) განტოლებების საერთო ამონახსენს, ანუ ამ ორი წრეწირის საერთო წერტილს გვაძლევს მათი ერთობლივი ამოხსნა. მართლაც, ვლებულობთ

$$x_1 = \frac{1}{4n} (R^2 + 4n^2 - 4n - 1),$$

$$x_2 = -\sqrt{R^2 - \left( \frac{R^2 + 4n^2 - 1}{4n} \right)^2} \quad (9.88)$$

(9.88) წერტილში უნდა მოხდეს მართვის ფუნქციის შეცვლა, ანუ გადართვა მართვაზე  $u(t) = \pm 1$ , ამას შეესაბამება დროის მომენტი  $t = t_1$ .

როგორ გამოვიანგარიშოთ მისი მნიშვნელობა? ამისათვის საჭიროა დავადგინოთ რა მანძილს გადის (9.86) წრეწირზე ფაზური წერტილი მოცემული საწყისი  $x(0)$  მნიშვნელობიდან (9.88) წერტილამდე, ანუ  $\{x_1(t^*), x_2(t^*)\}$  წერტილამდე. სხვა სიტყვებით, რა კუთხით შემობრუნდება რადიუსი ამ

რკალის გავლისას. ვინაიდან ფაზური წერტილი თანაბრად მოძრაობს და  $x_1$  ლერძის გასწვრივ  $2R$  მანძილის გავლას  $\pi$  დროს ანდომებს, მაშინ  $x_1(t_1^\circ) - x_1(0)$  მანძილის გავლას მოანდომებს

$$t_1^\circ = \frac{x_1(t_1^\circ) - x_1(0)}{2R} \pi \quad (9.89)$$

დროს. ამრიგად, პირველი გადართვა ხდება  $t_1^\circ$  მომენტში, რომელიც (9.89) ფორმულით გამოითვლება.

$t_1^\circ$  მომენტიდან ფაზური წერტილი მოძრაობს  $u(t) = +1$  მართვის ზემოქმედებით (9.81) წრეწირზე, ცენტრით  $(+1, 0)$  წერტილში, ვიდრე არ მოხდება  $ON_1N_2N_3 \dots$  წირზე, შემოწერს ნახევარწრეწირს, რომელსაც დროის  $\pi$  შუალედს ანდომებს. ამრიგად, შემდგომი გადართვა უნდა მოხდეს

$$t_2^\circ = t_1^\circ + \pi = \left( \frac{x_1(t_1^\circ) - x_1(0)}{2R} + 1 \right) \pi \quad (9.90)$$

მომენტში.

ასევე გამოითვლება შემდეგი გადართვების მომენტებიც, კერძოდ,

$$t_k^\circ = t_1^\circ + (k-1)\pi = \left( \frac{x_1(t_1^\circ) - x_1(0)}{2R} + K-1 \right) \pi, \quad (9.91)$$

სადაც  $k$  ფაქტობრივად ტოლია  $n$  რიცხვისა და გვიჩვენებს იმ ნახევარწრეწირის ნომერს, რომელზედაც მოხდა პირველი გადართვა. ეს ნათლად ჩანს (ნახ.9.20.)-ზე.

ბოლო ეტაპზე, როდესაც ფაზური წერტილი მოძრაობს  $OM_1$  ან  $N_1O$  ნახევარწრეწირების რკალზე (ნახ.9.20) დრო, რომელიც დასჭირდება კოორდინატთა სათავეში მისვლას, ანუ  $T - t_k^\circ$  (ნახ.9.12), გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$T - t_k^\circ = \pi - \frac{|x_2(t_1^\circ)|}{2R} \pi. \quad (9.92)$$

ეს იქედან ჩანს, რომ წერტილი ერთეულოვანი რადიუსის მქონე ნახევარწრეწირზე, სადაც პირველი გადართვა ხდება, სიმეტრიულია ერთეულოვანი რადიუსის მქონე ნახევარწრეწირის იმ წერტილისა, რომელზედაც ბოლო გადართვა ხდება. (9.92) ფორმულაში მეორე წევრი გვიჩვენებს დროს, რომელიც სჭირდება პირველი გადართვის წერტილში მისასვლელად  $x_2(t)$  კოორდინატას ნულოვანი მდგომარეობიდან. ასე, რომ რკალი  $M_1A$  თუ რკალი  $N_1A$  ზუსტად ისეთი სიგრძისაა, რომელიც გამოიყოფა  $x(t_1^*) = \{x_1(t_1^*), x_2(t_1^*)\}$  წერტილით  $n$  რიგის ნახევარწრეწირზე, ანუ ამ ნახევარწრეწირის მარჯვენა ნაწილის სიგრძის ტოლია.

(9.92) და (9.91) გამოსახულებებიდან ვღებულობთ  $T$  სიღღეს

$$T = \left( \frac{x_1(t_1^*) - x_1(0) - |x_2(0)|}{2R} + K \right) \pi.$$

ეხლა კი (9.84) გამოსახულება, როდესაც  $x(0)$  პირველ კვადრანტშია და  $k$  კენტი რიცხვია, შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$u^*(t) = \begin{cases} +1, & t_1^* \leq t \leq t_2^*, \quad t_3^* \leq t \leq t_4^*, \dots, t_k^* \leq t \leq T, \\ -1, & 0 \leq t \leq t_1^*, \quad t_2^* \leq t \leq t_3^*, \quad t_4^* \leq t \leq t_5^*, \dots, t_{k-1}^* \leq t \leq t_k^*. \end{cases}$$

ლუწი  $k$ -ს შემთხვევაში გვეჩვენა

$$u^*(t) = \begin{cases} +1, & t_1^* \leq t \leq t_2^*, \quad t_3^* \leq t \leq t_4^*, \dots, t_{k-1}^* \leq t \leq t_k^* \\ -1, & 0 \leq t \leq t_1^*, \quad t_2^* \leq t \leq t_3^*, \dots, t_k^* \leq t \leq T. \end{cases}$$

სისტემის საწყისი მდგომარეობის  $x(0) = \{x_1(0), x_2(0)\}$  სხვა შემთხვევების განხილვა მკითხველისათვის მიგვინდია.

## § 9.7. მაიერის ამოცანა

მაიერის ვარიაციული ამოცანის სახით შეიძლება ჩაიწეროს ოპტიმალური დაპროგრამების მრავალი სხვადასხვა ტიპის ამოცანა, რომელთაც პრაქტიკული ინტერესი გააჩნიათ. ასეთი სახით ამოცანის ჩაწერა გარკვეულწილად აადვილებს მის ამოხსნას, უფრო მოხერხებულს ხდის მაქსიმუმის პრინციპის თეორემის გამოყენებას. ამ დროს ოპტიმალური მართვის ამოცანებს ერთგვაროვანი სტრუქტურა გააჩნიათ, შესაძლებელია მათემატიკური გარდაქმნების სტანდარტიზაცია, რაც მეტად მნიშვნელოვანია გამოყენებითი ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად.

როგორც ყველა ვარიაციული ამოცანის, ასევე მაიერის ამოცანის დასმაც მდგომარეობს ადეკვატურ მათემატიკურ გამოსახულებათა ზუსტ ფორმულირებაში იმისა, თუ რა გვაქვს მოცემული და რა უნდა ვიპოვოთ.

მაიერის ამოცანაში სიტყვა "მოცემულია" ნიშნავს შემდეგს:

1. სამართი ობიექტის მოძრაობის აღმწერი მათემატიკური მოდელი დიფერენციალური განტოლებების სახით, ამ განტოლებების განსაზღვრის არე და დროის ინტერვალი;

2. სასაზღვრო პირობები;

3. ოპტიმალობის განმსაზღვრელი ფუნქციონალი.

ვიდრე ვიტყვოდეთ რა უნდა ვეძიოთ, დავაკონკრეტოთ მოცემულობა. განვიხილოთ მოდელი, რომელიც წარმოადგენს კომის ნორმალური ფორმით ჩაწერილ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას  $z_1(t), \dots, z_{n+r}(t)$  ფუნქციებისათვის

$$\dot{z}_k = \omega_k(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+r}, z_{n+1}, \dots, z_{n+r}), \quad k = 1, \dots, n. \quad (9.93)$$

ეს განტოლებები განსაზღვრულია დროის  $[0, T]$  მონაკვეთზე და რომელიღაც მოცემულ ღია ან ჩაკეტილ არეში

$$N(z_1, \dots, z_{n+r}) \geq 0. \quad (9.94)$$

$\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , გლუვი ფუნქციებია მისი არგუმენტების მიმართ.

როგორც ვხედავთ, განტოლებათა სისტემა  $n$ -რიგისაა, შეიცავს  $n+r$  რაოდენობის ფუნქციებს, ანუ განტოლებათა



რაოდენობა ნაკლებია საძებნ ფუნქციათა რაოდენობაზე.  $z_{n+1}(t), \dots, z_{n+r}(t)$  ფუნქციები შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც მართვის ფუნქციები. ამრიგად, განტოლებათა სისტემა (9.93) შეიცავს მართვის ფუნქციებსაც  $z_{n+1}(t), \dots, z_{n+r}(t)$  ფუნქციების სახით და მათ წარმოებულსაც. ასეთი განტოლებათა სისტემით აღიწერება მრავალი ამოცანა საფრენი სისტემების მოძრაობის შესახებ, სადაც ობიექტზე მოქმედი ძალები დამოკიდებულია როგორც მმართველი ორგანოების მდგომარეობაზე, ასევე ამ მდგომარეობათა ცვლილების სიჩქარეზე.

გავიხსენოთ, რომ ოპტიმალური დაპროგრამების ამოცანას ჩვენ ვიხილავთ განტოლებათა სისტემით (9.1), რომელიც (8.10) გამოსახულებებით შეზღუდულ არეშია განსაზღვრული.

განტოლებათა სისტემა (9.93) ადვილად შეიძლება ჩაიწეროს (9.1) განტოლების სახით, თუ შემოვიღებთ ახალ ცვლადებს

$$\dot{z}_{n+a} = u_a, \quad a = 1, \dots, r,$$

და აღნიშნებს

$$\omega_{n+a} = u_a, \quad a = 1, \dots, r.$$

მართლაც, ასეთ შემთხვევაში (9.93) განტოლებები მიიღებენ სახეს

$$\dot{z}_k = \omega_k(z_1, \dots, z_{n+r}, u_1, \dots, u_r), \quad k = 1, \dots, n+r. \quad (9.95)$$

ფაქტობრივად, გაიზარდა ფაზურ კოორდინტთა რაოდენობა და, შესბამისად, განტოლებათა რიცხვიც.  $z = \{z_1, \dots, z_{n+r}\}$  ფორმალურად წარმოგვიდგება ფაზური ვექტორის სახით, ხოლო  $u = \{u_1, \dots, u_r\}$  კი - მართვის ვექტორის სახით.

სასაზღვრო პირობები, როგორც ზევით, აქაც შეიძლება ჩაიწეროს სიმბოლური სახით

$$(i, f) = 0, \quad (9.96)$$

სადაც  $i$  ნიშნავს პირობას  $t = 0$  (ანუ საწყის) მომენტში, ხოლო  $f$  ნიშნავს პირობას  $t = T$  (ანუ საბოლოო) მომენტში.

მაიერის ამოცანაში ოპტიმალობის განმსაზღვრელი ფუნქციონალი ჩაიწერება გლუვი სკალარული ფუნქციის

$$G = G(z_1(t), \dots, z_{n+r}(t)) \quad (9.97)$$

სასაზღვრო მნიშვნელობათა სხვაობის სახით, კერძოდ

$$\Delta G = G(z)|_T - G(z)|_{t=0}. \quad (9.98)$$

ფუნქცია (9.97) განსაზღვრულია (9.94) არეში და  $t \in [0, T]$  დროის მონაკვეთზე.

უბან-უბან გლუვი  $z(t)$  ფუნქციების სიმრავლეს, რომელზედაც განსაზღვრულია (9.98) ფუნქციონალი და რომლებიც აკმაყოფილებენ (9.95) განტოლებათა სისტემას და (9.96) სასაზღვრო პირობებს, ვუწოდოთ შესადაარებელი წირები, ან უბრალოდ, დასაშვები წირები.

დასაშვები წირები მიიღება დროის  $t \in [0, T]$  მონაკვეთზე განსაზღვრული  $u_1(t), \dots, u_r(t)$  ფუნქციების ამორჩევით, რომლებსაც ვირჩევთ უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციების კლასიდან (9.94) შეზღუდვების გათვალისწინებით. ასეთი ფუნქციები დასაშვები მართვებია, მათაც დასაშვები წირები შეიძლება ვუწოდოთ.

ეხლა მაიერის ვარიაციული ამოცანა ასე ჩამოყალიბდება: ყველა დასაშვებ  $u(t), z(t)$  წირებს შორის ვიპოვოთ ისეთი წყვილი  $(u^0(t), z^0(t))$ , რომელიც (9.98) ფუნქციონალს მინიმუმს მიანიჭებს.

ამოცანის ამოხსნა, თუ ის საერთოდ არსებობს, გვაძლევს ოპტიმალურ ფუნქციებს

$$\begin{cases} z_k = z_k^0(t, (i, f)), & k = 1, \dots, n+r, \\ u_\alpha = u_\alpha^0(t, (i, f)), & \alpha = 1, \dots, r. \end{cases} \quad (9.99)$$

ეს ამოხსნა დამოკიდებულია სასაზღვრო პირობებზე და გამოსახულია პარამეტრული ფორმით.

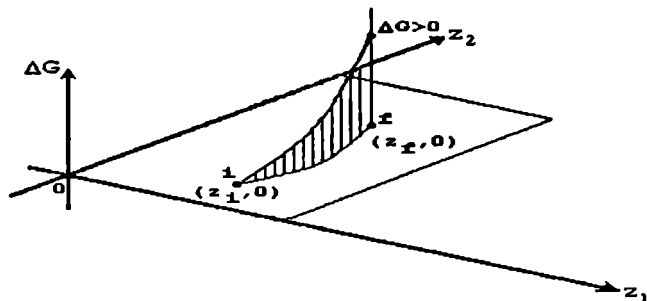
ფაქტობრივად, გამოსახულებები (9.99) აღწერენ სისტემის ოპტიმალურ ((9.98) ფუნქციონალის აზრით) მოძრაობას, პროგრამულ მოძრაობას, პროგრამულ ტრაექტორიას.

ეს ამოცანა არაკლასიკურ ვარიაციულ ამოცანათა კლასს განეკუთვნება, რადგანაც იგი შეზღუდულ (9.94) არეშია

დასმული. თუ (9.94) შეზღუდვებს მოეხსნით, მაშინ ამოცანა კლასიკურ სახეს მიიღებს.

ამოცანას ასეთი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია აქვს:

განვიხილოთ  $n+r+1$  განზომილებიანი სივრცე  $z$  და  $\Delta G$  კოორდინატებით (ნახ.9.21)



ნახ.9.21

$(z_r, 0)$  წერტილში ავღმართოთ  $z$  სიბრტყის პერპენდიკულარული წრფე, ამ წრფეზე გადავზომოთ  $\Delta G$  სიდიდე. ნებისმიერ დასაშვებ  $u(t)$  მართვას და მის შესაბამის  $z(t)$  დასაშვებ წირს შეესაბამება  $\Delta G$  სიდიდის გარკვეული მნიშვნელობა, ანუ გარკვეული წერტილი აღმართულ პერპენდიკულარზე. ისეთი დასაშვები მართვა  $u^0(t)$  და შესაბამისი  $z^0(t)$  ტრაექტორია უნდა ვიპოვოთ, რომელთა დროსაც  $\Delta G$  მონაკვეთი მინიმალური იქნება.

დასმული ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას შემდეგი თეორემის საფუძველზე.

თეორემა 9.3. იმისათვის, რომ  $u^0(t), z^0(t)$  ფუნქციებმა მიანიჭონ ძლიერი მინიმუმი (9.98) ფუნქციონალს მაიერის ამოცანაში, აუცილებელია ისეთი არანულოვანი უწყვეტი  $\psi(t) = \{\psi_1(t), \dots, \psi_{n+r}(t)\}$  ვექტორ-ფუნქციის არსებობა, რომელიც განსაზღვრულია დიფერენციალური განტოლებებით

$$\dot{\psi}_k(t) = -\frac{\partial H}{\partial z_k}, \quad k = 1, \dots, n+r, \quad (9.100)$$

სადაც

$$H(\psi, z, u) = \psi \cdot \omega = \sum_{\alpha=1}^{n+r} \psi_{\alpha} \cdot \omega_{\alpha}, \quad (9.101)$$

და სრულდება შემდეგი პირობები:

1 ფუნქცია  $H(\psi, z, u)$  აღწევს თავის მაქსიმუმს  $u(t)$  ცვლადის მიხედვით,

2 სრულდება ტრანსვერსალობის პირობა

$$[\delta G - H \delta t + \psi \cdot \delta z]' = 0. \quad (9.102)$$

თეორემის დამტკიცებას მკითხველი შეიძლება გაეცნოს მონოგრაფიაში [52].

შევნიშნავთ, რომ მართალია თეორემა გვაძლევს ოპტიმალობის მხოლოდ აუცილებელ პირობებს, მაგრამ კერძო შემთხვევაში, როდესაც  $G$  და  $H$  ფუნქციები წრფივი სახის ფუნქციებია  $z(t), u(t)$  ცვლადების მიმართ, თეორემის პირობები ასევე ოპტიმალობის საკმარის პირობებსაც წარმოადგენენ.

თეორემის გამოყენების ილუსტრაცია ჩავატაროთ კონკრეტულ ამოცანაზე საფრენი აპარატის მოძრაობის შესახებ.

## § 9.8. უპილოტო თვითმფრინავის ფრენა

გარკვეული ჰიპოტეზებისა და დაშვებების შედეგად, როგორებიცაა, მაგალითად, მოძრაობა მიმდინარეობს ვერტიკალურ სიბრტყეზე, თვითმფრინავი განიხილება როგორც მატერიალური წერტილი, დედამიწა ბრტყელია და მისი ბრუნვა უგულვებელყოფილია, ატმოსფერო გამოორიცხულია და სიმძიმის ძალის აჩქარება მუდმივია, თვითმფრინავზე მოქმედებს რეაქტიული ძალა, რომელსაც უინერციო ძრავა აწვითარებს და სხვა, თვითმფრინავის მოძრაობა აღიწერება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებების სისტემით:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{y} = v, \\ \dot{u} = \frac{c\beta}{m} \cos \omega, \\ \dot{v} = \frac{c\beta}{m} \sin \omega - g, \\ \dot{m} = -\beta. \end{cases} \quad (9.103)$$

აქ  $x(t)$  და  $y(t)$  თვითმფრინავის ჰორიზონტალურად და ვერტიკალურად გადაადგილების კოორდინატებია,  $u(t)$  და  $v(t)$ , შესაბამისად, მათი სიჩქარეებია,  $m$ -თვითმფრინავის მასაა,  $\omega$ -წევის ძალის ვექტორის კუთხეა ჰორიზონტთან. რეაქტიული ძალა გამოსახულია ფორმულით  $T = c\beta$ , სადაც  $c > 0$  მოცემული მუდმივი კოეფიციენტი, ხოლო  $\beta$  საწვავის ხარჯია.  $g$ -სიმძიმის ძალის აჩქარებაა.

ეს განტოლებები განსაზღვრულია  $N \geq 0$  არეში, რომელიც კონკრეტულად ასე გამოიყურება:

$$0 \leq \beta \leq \bar{\beta}, \quad y \geq 0. \quad (9.104)$$

ამ შეზღუდვების გარეშე ამოცანა კარგავს ფიზიკურ არსს.  $\bar{\beta}$ -წინასწარ მოცემული მუდმივი სიდიდეა.

ეს განტოლებები, ასევე განსაზღვრულია დროის სასრულო მონაკვეთზე  $t \in [0, T]$ , სადაც  $T$  სიდიდე უცნობია და მისი წინასწარ მოცემა შეუძლებელია

მოცემულ ამოცანაში  $z(t)$  ვექტორი წინა პარაგრაფის ენაზე ხუთ კოორდინატას შეიცავს  $z(t) = \{x(t), y(t), u(t), v(t), m(t)\}$ , ხოლო მართვის ფუნქცია  $u(t)$  ორ კოორდინატას

$$u(t) = \{\beta(t), \omega(t)\}$$

ამოცანის სასაზღვრო პირობები მისი ფიზიკური არსიდან გამომდინარეობენ:

$$i: \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad m(0) = m_0. \quad (9.105)$$

მარჯვენა სასაზღვრო პირობა დამოკიდებულია ამოცანის არსზე, მის შინაარსზე. თუ ვიხილავთ მოძრაობას რომელიმე დაფიქსირებულ წერტილამდე განსახილველ სიბრტყეზე, ბუნებრივია, მოცემული უნდა იყოს ამ წერტილის კოორდინატები, ხოლო თვითმფრინავის საბოლოო მასის მნიშვნელობა თავისუფალი უნდა იყოს (იგულისხმება საწვავის ხარჯი). თუ გვინდა შევისწავლოთ მოძრაობა თვითმფრინავის მაქსიმალურად შორს გადადგილებაზე ფიქსირებული საწვავის ხარჯზე, მაშინ პორიზონტალური კოორდინატას მნიშვნელობა  $t = T$  მომენტში თავისუფალი უნდა იყოს.

განვიხილოთ, მაგალითისათვის, თვითმფრინავის ფრენა მაქსიმალურ მანძილზე. ასეთ შემთხვევაში ბუნებრივია

$$f : \quad x(T) = ?, \quad y(t) = 0, \quad u(T) = ?, \quad (9.106)$$

$$v(T) = ?, \quad m(T) = m_T.$$

$m_T - m_0$  განსაზღვრავს საწვავის ხარჯს, რომელიც წინასწარ მოცემულია, რადგანაც მოცემულია ორივე  $m_T$  და  $m_0$  სიდიდე.  $y(T) = 0$  ბუნებრივი პირობაა თვითმფრინავის დეღამიწაზე დაჯდომისათვის.

როგორც ვთქვით, ოპტიმალობის პირობას მაქსიმალურ მანძილზე გაფრენა წარმოადგენს. ამ შემთხვევაში ფუნქცია  $G$  უნდა წარმოვიდგინოთ, როგორც  $G = -x$ . დასაშვები წირები იჭებიან უბან-უბან გლუვი  $x(t), y(t), u(t), v(t), m(t)$  და უბან-უბან უწყვეტი  $\beta(t), \omega(t)$  ფუნქციები. ასეთ ფუნქციებზე განსაზღვრულია ოპტიმალობის ფუნქციონალი

$$\Delta G = -x_T, \quad (9.107)$$

რომლის მინიმიზაციაც ტოლფასია მაქსიმალურ მანძილზე გადაფრენისა, რასაც ნიშანი "მინუსი" გვაძლევს.

ამოცანა მგომარეობს შემდეგში: დასაშვებ წირებს შორის ვიპოვოთ ისეთი, რომელიც (9.107) ფუნქციონალს მინიმალურ მნიშვნელობას მიანიჭებს. ფიზიკურად ეს ნიშნავს, რომ ვიპოვოთ მოცემული რაოდენობის საწვავის ხარჯვის ისეთი პროგრამა, რომლის დროსაც საფრენი აპარატი გაფრინდება მაქსიმალურ მანძილზე.

ამოცანა მაიერის ტიპისაა, ამოცხნათ წინა პარაგრაფში ჩამოყალიბებული თეორემის გამოყენებით. პირველ რიგში შე-

ვადგინოთ  $H$  ფუნქცია (9.101) ფორმულის შესაბამისად (9.103) განტოლებათა სისტემისათვის:

$$H = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, x, y, u, v, m, \beta, \omega) =$$

$$= u\psi_1 + v\psi_2 + \left(\frac{c\beta}{m} \cos\omega\right)\psi_3 + \left(\frac{c\beta}{m} \sin\omega - g\right)\psi_4 - \beta\psi_5 = \quad (9.108)$$

$$= u\psi_1 + v\psi_2 - g\psi_4 + K_\beta\beta,$$

სადაც გამოყენებულია შემდეგი აღნიშვნები

$$K_\beta = \frac{c}{m} K_\omega - \psi_5, \quad K_\omega = \Psi_3 \cos\omega + \psi_4 \sin\omega. \quad (9.109)$$

წინასწარ ვიტყვით, რომ  $K_\beta$  და  $K_\omega$  ფუნქციები მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ ამოცანის ამოხსნის პროცესში.

შემდეგ (9.100) ფორმულის შესაბამისად დავეწერთ განტოლებათა სისტემა  $\psi_1(t), \dots, \psi_5(t)$  ფუნქციებისათვის:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = 0, \\ \dot{\psi}_3 = -\psi_1, \\ \dot{\psi}_4 = -\psi_2, \\ \dot{\psi}_5 = \frac{c\beta}{m^2} K_\omega. \end{cases} \quad (9.110)$$

დავეწერთ (9.102) ფორმულის შესაბამისი ტრანსვერსალობის პირობა მოცემული შემთხვევისათვის. გვექნება:

$$\left[ (\psi_1 - 1)\delta x - H\delta + \psi_2\delta y + \psi_3\delta u + \psi_4\delta v + \psi_5\delta m \right]_{t=0}^{t=T} = 0. \quad (9.111)$$

თეორემის მიხედვით  $H$  ფუნქცია მაქსიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს  $\beta$  და  $\omega$  ცვლადების მეშვეობით.

$\beta(t)$  ცვლადის მიხედვით, რომელიც (9.104) შეზღუდვებს უნდა აკმაყოფილებდეს,  $H$  ფუნქცია მაქსიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს  $\beta(t)$  ფუნქციის შემდეგი სახით განსაზღვრის შემთხვევაში:

$$\begin{cases} \beta = \bar{\beta}, & \text{როდესაც } K_\beta > 0, \\ \beta = 0, & \text{როდესაც } K_\beta < 0. \end{cases} \quad (9.112)$$

ეს პირდაპირ გამომდინარეობს (9.108) გამოსახულებიდან.

$\omega(t)$  ცვლადის მიხედვით, რომელიც შეზღუდული არ არის,  $H$  ფუნქციის მაქსიმუმისათვის საჭიროა შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$\frac{\partial H}{\partial \omega} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \omega^2} < 0,$$

რაც გვაძლევს შემდეგ გამოსახულებებს:

$$\frac{c\beta}{m}(\psi_4 \cos \omega - \psi_3 \sin \omega) = 0,$$

$$-\frac{c\beta}{m}K_\omega < 0.$$

აქედან კი პირდაპირ გამომდინარეობს, რომ

$$\psi_3 \sin \omega = \psi_4 \cos \omega, \quad K_\omega > 0. \quad (9.113)$$

ამრიგად, ამოცანის გადაწყვეტისათვის მოცემულ (9.103), (9.105), (9.106) გამოსახულებებთან ერთად გვაქვს თეორემის შინაარსიდან გამომდინარე გამოსახულებები (9.109)–(9.113) ფორმულების სახით. მათი ერთობლივი ამოხსნით ვიპოვით ოპტიმალურ მართვას და მის შესაბამის ოპტიმალური ფრენის ტრექტორიას.

გვაქვს 10 დიფერენციალური განტოლება (9.103) და (9.110) სისტემების სახით. მათი ინტეგრირებისას წარმოიშობა 10 თავისუფალი მუდმივა  $c, \alpha, \beta, \dots, m$ , რომლებიც უნდა განისაზღვროს. მეტერთმეტე უცნობი მუდმივა არის  $T$ , რომელიც ასევე უნდა განისაზღვროს. ეს თერთმეტი უცნობი უნდა განესაზღვროთ სასაზღვრო და ტრანსვერსალური პირობების გამოყენებით. ასეთ პირობათა რაოდენობაც ზუსტად თერთმეტი იქნება. მართლაც, (9.105) და (9.106) სასაზღვრო პირობები შეიძლება ცალკე, ტრანსვერსალობის პირობა კი ოთხ პირობად იშლება.

ვინაიდან სიდიდეები  $x, y, u, v, m, t$  მარცხენა ბოლოზე ფიქსირებულია, ხოლო სიდიდეები  $y$  და  $m$  ასევე ფიქსირე-



ბულია მარჯვენა ბოლოზეც, ტარნეფრსალობის პირობა (9.111) მიიღებს შემდეგი ტოლობის სახეს

$$\left[ (\psi_1 - 1) \delta x - H \delta x + \psi_3 \delta u + \psi_4 \delta v \right]^{t=T} = 0,$$

რომელიც  $\delta x, \delta x', \delta u, \delta v$  ვარიაციების ნებისმიერი მნიშვნელობის გამო შესრულდება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც

$$\psi_1(T) = 1, H|_{t=T} = 0, \psi_3(T) = 0, \psi_4(T) = 0. \quad (9.114)$$

(9.110) განტოლებათა სისტემის პირველი ოთხი განტოლების ამოხსნა გვაძლევს

$$\psi_1(t) = c_1, \psi_2(t) = c_2, \psi_3(t) = c_3 - c_1 t, \psi_4(t) = c_4 - c_2 t, \quad (9.115)$$

სადაც  $c_1, c_2, c_3, c_4$  მუდმივებია და უნდა განისაზღვროს.

(4.114) გამოსახულების დახმარებით (9.115) ფორმულები გვაძლევს

$$c_1 = 1, c_3 = T, c_4 = c_2 T, \quad (9.116)$$

$$\psi_3(t) = T - t, \psi_4(t) = c_2(T - t).$$

ძრავის წევის ძალის მიმართულების კუთხე პორიზონტთან განისაზღვრება (9.113) ფორმულით, როგორც

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{\psi_4(t)}{\psi_3(t)}, \quad \cos \alpha = \frac{+\psi_3}{K_*}, \quad \sin \alpha = \frac{+\psi_4}{K_*}, \quad (9.117)$$

რომელიც (9.116) და (9.109) ფორმულების გამოყენების შედეგად იღებს სახეს

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = c_2, \quad K_* = \sqrt{\psi_3^2 + \psi_4^2} \quad (9.118)$$

(9.112) და (9.118) ფორმულები გვაძლევს საწვავის ხარჯისა და წევის ძალის მიმართულების შეცვლის პროგრამას, რომლებიც უზრუნველყოფენ ოპტიმალურ მოძრაობას. კერძოდ

$$\begin{cases} \beta = \bar{\beta}, & \text{როდესაც } K_\beta > 0, \\ \beta = 0, & \text{როდესაც } K_\beta < 0, \\ \operatorname{tg} \alpha = c_2, & K_* = \sqrt{\psi_3^2 + \psi_4^2}. \end{cases} \quad (9.119)$$

შეენიშნავთ, რომ  $K_*$  ყოველთვის დადებითია.

ამრიგად, ოპტიმალური მოძრაობა ხორციელდება წვეის ძალის მნიშვნელობების ცვლილებით ერთი სასაზღვრო მნიშვნელობიდან მეორე სასაზღვრო მნიშვნელობაზე და პირიქით, სადაც გადამრთველი ფუნქციის როლის  $K_p$  გამოსახულება ასრულებს, უფრო სწორედ ამ გამოსახულების ნიშანი.

ოპტიმალური მართვის (9.119) პროგრამის სრულყოფილად წარმოდგენისათვის საჭიროა განისაზღვროს დროის მომენტები, როდესაც იცვლებიან საწვავის ხარჯვის სიდიდეები, ანუ განისაზღვროს დროის ის მომენტები, როდესაც იცვლის ნიშანს  $K_p$  ფუნქცია. (9.109) ფორმულის პირველი ტოლობისა და (9.110) სისტემის ბოლო განტოლების საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\dot{K}_p = \left( \frac{c}{m} - \frac{c\beta}{m^2} \right) K_\omega = A K_\omega, \quad (9.120)$$

ცხადია,  $A > 0$ , რადგანაც საწვავის ხარჯი ყოველთვის თვითმფრინავის მასაზე ნაკლებია.

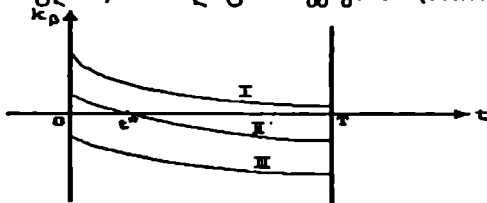
თვითმფრინავის მოძრაობა, რა თქმა უნდა, დაიწყება  $\beta = \bar{\beta}$  მართვით, შემდეგ მოხდება გადართვა  $\beta = 0$  მართვაზე, ანუ ძრავის გამორთვა, შემდეგ ისევ ჩართვა მაქსიმალურ რეჟიმზე და ა.შ. ვნახოთ, რამდენი ინტერვალისაგან იქნება შემდგარი მართვა ჩვენს შემგებვევაში.

გამოსახულება  $K_\omega = \sqrt{\psi_3^2 + \psi_4^2}$  (9.116) ფორმულების დახმარებით მიიღებს სახეს  $K_\omega = (T-t)\sqrt{1+c^2}$ , რის შემდეგაც (9.120) განტოლება ასე ჩაიწერება

$$\dot{K}_p = -A\sqrt{1+c^2} < 0. \quad (9.121)$$

ამრიგად, მივიღეთ რომ ფუნქცია  $K_p$  მონოტონურად კლებადი ფუნქცია  $[0, T]$  ინტერვალზე. ეს კი გვიჩვენებს, რომ ოპტიმალური მართვის კანონს (9.119) მხოლოდ ერთი გადართვა ექნება. აღენიშნოთ დროის ეს მომენტი  $t^*$  ნიშნით.

ნებისმიერი  $0 \leq \beta \leq \bar{\beta}$  დროს, (9.121) ფუნქცია უარყოფითია. ამიტომ  $K_\beta(t)$  ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ერთ-ერთი სახე, მრუდისა, რომლიც ნაჩვენებია (ნახ.9.22.)



ნახ.9.22

დაუშვათ, თვითმფრინავის საწვავის მარაგია  $m_0 - m_T$ . მეორე მრუდის შემთხვევაში მთელი ეს მარაგი იხარჯება მაქსიმალური  $\bar{\beta}$  სიჩქარით დროს  $[0, t^*]$  მონაკვეთზე. პირველი მრუდის შემთხვევაში საწვავის მოცემული მარაგი საკმარისი არ არის, ხოლო მესამე მრუდის შემთხვევაში საწვავი საჭირო არ არის საერთოდ. ცხადია ოპტიმალურ მართვას მეორე მრუდი შეესაბამება. ამ მრუდის ანალიზური სახე იოლად მოიძებნება (9.121) ფუნქციის ინტეგრირების შედეგად. მას შემდეგი სახე აქვს:

$$K_\beta(t) = \frac{c}{\beta} \sqrt{1+c_2^2} \ln \frac{m_0 - \beta t}{m_0 - \beta t^*}, \quad t \in [0, t^*], \quad (9.122)$$

$$K_\beta(t) = \frac{c}{m_T} \sqrt{1+c_2^2} (t^* - t), \quad t \in [t^*, T].$$

როგორც აღვნიშნეთ,  $K_\omega$  ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$K_\omega = (T-t) \sqrt{1+c_2^2} \quad (9.123)$$

როგორც ვხედავთ იგი წრფივი ფუნქციაა და გადართვის წერტილებს არ შეიცავს.

ამრიგად, ოპტიმალურ მართვას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} \beta = \bar{\beta}, & t \in [0, t^*], \\ \beta = 0, & t \in [t^*, T], \\ t g \omega = c_2, & t \in [0, T], \end{cases} \quad (9.124)$$

რომლის საფუძველზეც ფრენის პროგრამა შედგება 2 ეტაპისაგან. პირველ ეტაპზე ხდება მთელი საწვავის მაქსიმალური სიჩქარით წვა დროის  $[0, t^*]$  მონაკვეთზე, მეორე ეტაპზე ფრენა გრძელდება გამორთული ძრავით დროის  $[t^*, T]$  მონაკვეთზე. მთელი ფრენის მანძილზე წვევის ძალის პორიზონტთან დახრის კუთხე მუდმივია.

როგორც ეხედავთ, გაჩნდა კიდევ ერთი, რიგით მეთორმეტე უცნობი სიდიდე  $t^*$ , რომელიც უნდა ვიპოვოთ სხვა სიდიდეებთან ერთად.

ახლა მოვახდინოთ (9.103.) სისტემის ინტეგრირება. პირველ ეტაპზე, როდესაც  $\beta = \bar{\beta}$ ,  $t \in [0, t^*]$ , (9.105.) საწყისი პირობების

შესაბამისად (4.103) განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იქნება

$$m(t) = m_0 - \bar{\beta}t,$$

$$u(t) = c \cdot \cos \omega \cdot \ln \frac{m_0}{m_0 - \bar{\beta}t},$$

$$v(t) = -gt + \sin \omega \cdot \ln \frac{m_0}{m_0 - \bar{\beta}t},$$

$$x(t) = \frac{c \cos \omega}{\beta} \left[ m_0 + (m_0 - \bar{\beta}t) \left( \ln \left( 1 - \frac{\bar{\beta}t}{m_0} \right) - 1 \right) \right],$$

$$y(t) = \frac{c \sin \omega}{\beta} \left[ m_0 + (m_0 - \bar{\beta}t) \left( \ln \left( 1 - \frac{\bar{\beta}t}{m_0} \right) - 1 \right) \right] - \frac{gt^2}{2}.$$

(9.125)

ეს ამოხსნა სამართლიანია  $t \in [0, t^*]$  ინტერვალზე.  $t^*$  მომენტში ამ ამოხსნათა მნიშვნელობები  $m(t^*)$ ,  $u(t^*)$ ,  $v(t^*)$ ,  $x(t^*)$ ,  $y(t^*)$  უნდა გამოვიყენოთ საწყისი მნიშვნელობების სახით (9.103) განტოლებათა სისტემის მეორე ეტაპზე ამოხსნისათვის, როდესაც  $\beta = 0$ . ეს არის პირობა  $x(t)$ ,

$y(t), u(t), v(t), m(t)$  ფუნქციების უწყვეტობისა  $t^{\circ}$  მომენტში. მეორე ეტაპზე გვექნება

$$\begin{cases} m(t) = m(t^{\circ}) = m_T, \\ u(t) = u(t^{\circ}), \\ v(t) = v(t^{\circ}) - gt, \\ x(t) = x(t^{\circ}) + u(t^{\circ})t, \\ y(t) = y(t^{\circ}) + v(t^{\circ})t - \frac{gt^2}{2}, \\ t \in [0, T - t^{\circ}]. \end{cases} \quad (9.126)$$

(9.125) ფორმულების პირველი გამოსახულება გვაძლევს  $t^{\circ}$  სიდიდის მნიშვნელობას, კერძოდ  $t^{\circ}$  მომენტში გვაქვს

$$m(t^{\circ}) = m(T) = m_T = m_0 - \bar{\beta}t^{\circ},$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ

$$t^{\circ} = \frac{m_0 - m_T}{\bar{\beta}}. \quad (9.127)$$

ახლა გამოვთვალოთ სიდიდე  $T$  ვინაიდან  $y(T) = 0$ , (9.126) გამოსახულების ბოლო ტოლობა გვაძლევს

$$y(t^{\circ}) + v(t^{\circ})(T - t^{\circ}) - \frac{g}{2}(T - t^{\circ})^2 = 0.$$

აქ  $y(t^{\circ})$  და  $v(t^{\circ})$  სიდიდეები, შესაბამისად, გამოთვლილია (9.125) ფორმულებიდან, როდესაც  $t = t^{\circ}$  ამ განტოლების ამოხსნით ვღებულობთ

$$T = t^{\circ} + \frac{1}{g} \left[ v(t^{\circ}) + \sqrt{v^2(t^{\circ}) + 2gy(t^{\circ})} \right]. \quad (9.128)$$

გამოვთვალოთ  $c_2$  მუდმივა. ამისათვის გამოვიყენოთ ტრანსვერსალობის (9.114) პირობებიდან ერთერთი პირობა, კერძოდ  $H|_{t=T} = 0$ . (9.108) ტოლობის საფუძველზე გვექნება

$$H_{t^*, T}^{\dagger} = u(T)\psi_1(T) + v(T)\psi_2(T) - g\psi_4(T) + K_p(T)\beta(T) = 0,$$

რომელიც, (9.115), (9.116) გამოსახულებებისა და  $\beta(T) = 0$  გათვალისწინებით, ლებულობს სახეს  $u(T) + v(T)c_2 = 0$ , საიდანაც

$$c_2 = -\frac{u_T}{v_T} = -\frac{u(t^*)}{v(t^*) - g(T - t^*)}. \quad (9.129)$$

ბოლო ტოლობა დაწერილია (9.126) ტოლობების საფუძველზე. ამრიგად, ოპტიმალური ფრენის პროგრამა (9.124) მთლიანად განსაზღვრულია.

(9.107) ფუნქციონალის მნიშვნელობა, ანუ მაქსიმალური  $x(T)$  სიდიდის მნიშვნელობას ვიპოვით (9.126) ფორმულების შესაბამისი ტოლობიდან:

$$x(T) = x_T = x(t^*) + u(t^*)(T - t^*).$$

ამით დასმული ამოცანის ამოხსნა მთავრდება. ფორმულები (9.124)-(9.129) საფუძველზე ცალსახად იძლევიან როგორც ოპტიმალური მართვის პროგრამას, ასევე შესაბამის ოპტიმალურ ტრაექტორიას, რომელთა განსაზღვრაც კონკრეტულ რიცხობრივ მაგალითზე უნდა ჩატარდეს.

როგორც პარაგრაფის სათაური გვიჩვენებს, ჩვენ განვიხილეთ უპილოტო თვითმფრინავის ფრენის შემთხვევა, სადაც თვითმფრინავის უსაფრთხო დაჯდომას ყურადღება არ ექცეოდა. მკითხველს ვთავაზობთ განვიხილოთ შემთხვევა თვითმფრინავის უსაფრთხო დაჯდომის შესახებ. ამ შემთხვევაში თვითმფრინავის ვერტიკალური სიჩქარე დაფრენის მომენტში ნული უნდა იყოს. ამოცანის დასმაში უნდა შეიცვალოს სასაზღვრო პირობები, კერძოდ, (9.106) გამოსახულებაში პირობა  $v(T) = ?$  უნდა შეიცვალოს პირობით  $v(T) = 0$ .

## § 9.9. ოპტიმალური მართვის არაგლუვი ამოცანები

ნიუტონის და ლეიბნიცის მიერ შემოტანილი წარმოებულის ცნებამ და შემდეგ დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის განვითარებამ გამოიწვია რამდენიმე საუკუნის განმავლობაში ბუნებისმეტყველებისა და ზუსტი მეცნიერების

მკვეთრი განვითარება. თანამედროვე პირობებში კლასიკური "გლუვი" მათემატიკური ანალიზი აღარაა საკმარისი ტექნიკაში, ეკონომიკაში და თვითონ მათემატიკაშიც ახალი პრობლემების გადასაწყვეტად. დგება არაგლუვი პროცესების დრო (ერა). პირველი სერიოზული იერიში არაგლუვ ფუნქციებზე მიიტანა პ.ჩებიშევი. ახლა შეიძლება ვილაპარაკოთ არაგლუვ ანალიზზე, როგორც ჩამოყალიბებაში მყოფ მეცნიერებაზე. უოგიერთი მათგანი (ამოზნეილი ფუნქციების სუბდიფერენციალური აღრიცხვა, მინიმაქსის თეორია) ასე თუ ისე ჩამოყალიბებულია, სხვები ჩამოყალიბების სტადიაშია.

არაგლუვი ანალიზი შეისწავლის საკმარად რთული კლასის ასახვის და სიმრავლეების აპროქსიმაციის საკითხებს. შემდეგში განსაზღვრულობისათვის გვექნება საუბარი ნამდვილ  $f$

ფუნქციაზე, განსაზღვრულს ღია  $X \subset R^n$  სიმრავლეში. ასეთი ფუნქციის აპროქსიმაციას ანხორციელებენ ორი ცვლადის

$\varphi(x, g)$  ფუნქციით, განსაზღვრულს  $X \times R^n$  ამასთან  $X$  უწოდებენ წერტილს, ხოლო  $g$ -ს მიმართულებას. როდესაც საუბრობენ აპროქსიმაციაზე, მხედველობაში იღებენ, რომ

სხვაობა  $f(x + ag) - f(x) \approx \alpha \varphi(x, g)$ . მიახლოების ხასიათი

და მისი სიზუსტე დამოკიდებულია გამოყენებული აპროქსიმაციის სახეზე და რასაკვირველია განსახილველი ფუნქციის სირთულეზე. შემდეგში ძირითადად გამოყენებული იქნება პირველი რიგის აპროქსიმაცია. ასეთი აპროქსიმაციის ტიპური მაგალითია წარმოებული მიმართულების მიხედვით

$$f(x, g) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} (f(x + ag) - f(x)) \quad (9.130)$$

(იგულისხმება, რომ შესაბამისი ზღვარი არსებობს). გლუვი ფუნქციების შემთხვევაში გამოიყენება წრფივი ანალიზი. თუ (9.130) წარმოებული წვეტილია  $X$  მიხედვით, აპროქსიმაცია არის არაწრფივი.

ერთერთი მოთხოვნა აპროქსიმაციის მიმართ, მდგომარეობს მიმართულების მიხედვით პირველი ხარისხის დადებით ერთგვაროვნებაში, ე.ი  $\varphi(x, g)$  აპროქსიმაციას აქვს თვისება

$$\varphi(x, \lambda g) = \lambda \varphi(x, g), \quad \forall \lambda > 0. \quad (9.131)$$

ასეთი აპროქსიმაციის მაგალითებია წარმოებულები მიმართულების მიხედვით და კლარკის ზედა და ქვედა წარმოებულები.

თეორიულ კლევებში, რომლებშიც გამოიყენება არაგლუვი ანალიზი, ხელსაყრელია საქმე გვექონდეს აპროქსიმაციებთან, რომლებიც ყოველთვის არსებობენ, განსახილველი სივრცის ყველა ფუნქციისათვის. ამ მეთოდების პრაქტიკული გამოყენება გულისხმობს საჭირო აპროქსიმაციის მოძებნას ფართო კლასის ფუნქციებისათვის. ხშირად ეს ორი სურვილი ერთმანეთის საწინააღმდეგოა. ასე მაგალითად, როდესაც ვინილავთ კლარკის სუბდიფერენციალს და დემიანოვ-რუბინოვის კვაზიდიფერენციალს. კლარკის სუბდიფერენციალი არსებობს ლიპშიცის ყველა ფუნქციისათვის, მაგრამ მისი მოძებნა პრაქტიკულად გაძნელებულია. ამასთან, მიუხედავად იმისა, რომ არა თუ ყველა ლიპშიცის ფუნქცია კვაზიდიფერენცირებადია, კვაზიდიფერენცირებადი ფუნქციების კლასი საკმაოდ ფართოა და შეიძლება მათი კვაზიდიფერენციალის მოძებნა.

მოვიყვანოთ არაგლუვი დინამიკის რამდენიმე მაგალითი.

1. განვიხილოთ ეკონომიკური მაგალითი.

ვთქვათ,  $q(p)$  - მოთხოვნის ფუნქციაა ფირმის პროდუქციაზე.  $p$  - ერთეულოვანი პროდუქციის ფასია.

$Q$  - აღნიშნოთ ფირმის მიერ გამოშვებული პროდუქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა. მაშინ პროდუქციის მოცულობა, რომელიც შეუძლია ფირმას გაყიდოს  $p$  ფასით, ტოლია

$$\min\{q(p), Q\}, \quad (9.132)$$

ასე რომ ფირმის მიერ გამოშვებულ შეზღუდულ მოცულობას აქვს მოთხოვნის არაგლუვი ფუნქცია.

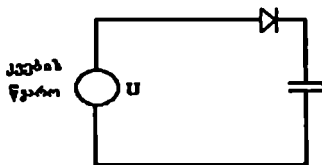
2. განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი, რომელიც დაკავშირებულია ზოგიერთ ზღრუბლოვანი მნიშვნელობასთან. წარმოვიდგინოთ კაშხალი, რომელშიც წყლის დონე ირხევა დროის მიხედვით (მაგალითად, წყლის მოქცევისაგან ან სხვა მიზეზებისაგან). თუ  $n(t)$  წყლის დონეა კაშხალში  $t$  მომენტში და  $n_0$  კაშხალის სიმაღლეა, მაშინ წყლის რაოდენობა, რომელიც გადაიდურება კაშხალის ზევით პროპორციულია  $f(t)$ , სადაც

$$f(t) = \max\{n(t) - n_0, 0\} \cdot \quad (9.133)$$



ცხადია, რომ ზოგად შემთხვევაში  $f$  — არადიფერენცირებადი ფუნქციაა, მიუხედავად იმისა, რომ  $n(t)$  დიფერენცირებადია.

3. ბევრ მარტივ მოდელს აქვთ არა მარტო არაწრფივი, არამედ არაგლუვი დინამიკა. მაგალითად, განვიხილოთ ელექტრული სქემა, შემდგარი დიოდისაგან, კონდენსატორისაგან და კვების წყაროსაგან (ნახ.9.23.) დიოდი წარმოადგენს რეზისტორს, რომლის წინააღმდეგობა დამოკიდებულია დენის მიმართულებაზე. თუ  $I$ -დენის სიდიდეა,  $V$ -ძაბვა დიოდზე, ადგილი აქვს ომის კანონის არაწრფივ ვარიანტს



ნახ.9.23

$$I = \begin{cases} V/R_+ & \text{თუ } V \geq 0, \\ V/R_- & \text{თუ } V \leq 0, \end{cases}$$

სადაც  $R_+$ ,  $R_-$  სხვადასხვა დადებითი მუდმივებია. თუ  $x$  ძაბვაა კონდენსატორზე, კირჰოფის განტოლების გამოყენებით ამ სისტემის აღმწერ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$\dot{x} = \begin{cases} \alpha(u - x), & x \leq u, \\ -\beta(x - u), & x \geq u, \end{cases} \quad (9.134)$$

სადაც  $\alpha, \beta$  დადებითი მუდმივებია ( $\alpha > \beta$ ).

$[0, T]$  მონაკვეთზე უნდა ამოირჩეს  $u(\cdot)$  ისეთნაირად.

რომ მოხდეს  $\frac{1}{2} \int_0^T I(t) \rightarrow U(t)$  მინიმიზაცია და სასაზღვრო პირობების შესრულება

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T \quad (9.135)$$

განვიხილოთ ზოგიერთი მათემატიკური ცნებები და განსაზღვრებები, რომლებიც დაგვეკირდებიან არაგლუვი დინამიკის სისტემის ოპტიმალური მართვისათვის.

$\Omega \subset R^n$  სიმრავლეს ეწოდება ამოზნექილი, თუ თანათარღობები  $x, y \in \Omega$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta = 1$ , იწვევენ  $\alpha x + \beta y \in \Omega$ .

ეთქვათ,  $x$ -ამოზნექილი  $\Omega$  სიმრავლის შინაგანი წერტილია, რომელზედაც განსაზღვრულია ამოზნექილი  $f$  ფუნქცია. სიმრავლეს

$$\underline{\partial}f(x) = \left\{ \nu \mid f(y) - f(x) \geq (\nu, y - x) \quad \forall y \in \Omega \right\} \quad (9.136)$$

ეწოდება  $x$  წერტილში  $f$  ფუნქციის სუბდიფერენციალი.

$\underline{\partial}f(x)$  დიფერენციალი წარმოადგენს არაცარიელ ამოზნექილ კომპაქტურ სიმრავლეს. ის განისაზღვრება ფუნქციის ყოფაქცევით  $x$  წერტილის მახლობლობაში. ე.ი ნებისმიერი  $\delta > 0$  სრულდება ტოლობა

$$\underline{\partial}f(x) = \left[ \nu \in R^n \mid f(y) - f(x) \geq (\nu, y - x) \quad \forall y \in B_\delta(x) \right], \quad (9.137)$$

სამართლიანია წარმოდგენა

$$f(x) = \max_{y \in \Omega} (f(y) + (\nu(y), x - y)), \quad (9.138)$$

სადაც  $\nu(y)$   $\underline{\partial}f(y)$  სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტია. ამოზნექილ  $f$  ფუნქციას აქვს  $x$  წერტილში  $f'(x, g)$  წარმოებული ნებისმიერი მიმართულებით და სამართლიანია ტოლობა

$$f'(x, g) = \max_{g \in \underline{\partial}f(x)} \cdot \quad (9.139)$$

მრავალნიშნა ასახვა  $x \mapsto \underline{\partial}f(x)$  ნახევრად უწყვეტია ქვევინდ.

$f$  ფუნქციას ეწოდება ჩაზნექილი, თუ  $(-f)$  ამოზნექილი ფუნქციაა. თუ  $f$  ჩაზნექილი ფუნქციაა, მაშინ სიმრავლეს  $x$  წერტილში

$$\bar{\partial}f(x) = \left\{ \vartheta \in R^n \mid f(y) - f(x) \leq (\vartheta, y - x) \quad \forall y \in \Omega \right\} \quad (9.140)$$

ეწოდება  $f$  ფუნქციის სუბდიფერენციალი.

კონუსი ეწოდება სიმრავლეს, რომელიც ყოველ  $x$  წერტილთან ერთად შეიცავს მთელ სხივს  $\{\lambda x | \lambda \geq 0\}$ . უწყვეტ  $P$  ფუნქციას, განსაზღვრულს ამოზნექილ შეკრულ  $k$  კონუსზე, ეწოდება სუბწრფივი თუ ის არის სუბადიტიური  $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$  ყველა  $x, y \in k$  და პირველი რიგის დადებითად ერთგვაროვანია  $P(\lambda x) = \lambda P(x)$  ყველა  $x \in k, \lambda \geq 0$ . გასაგებია, რომ სუბწრფივი ფუნქცია ამოზნექილია და  $P(0_n) = 0$ . ამოზნექილი დადებითად ერთგვაროვანი ფუნქცია სუბწრფივია.  $P$  ფუნქციის  $\underline{\partial}P$  სუბდიფერენციალი ეწოდება მის სუბდიფერენციალს ნულში:  $\underline{\partial}P = \underline{\partial}P(0_n)$ . ამრიგად,

$$\underline{\partial}P = \{g \in R^n | (g, x) \leq P(x) \quad \forall x \in k\}. \quad (9.141)$$

თუ  $k = R^n$  (ყველაზე ინტენსიური შემთხვევა), მაშინ  $\underline{\partial}P$  ამოზნექილი კომპაქტია და  $P$  ფუნქცია შეიძლება აღვადგინოთ თავისი სუბდიფერენციალით შემდეგი ფორმულით

$$P(x) = \max_{g \in \underline{\partial}P} (g, x) \quad (9.142)$$

$q$  ფუნქციას ეწოდება სუპერწრფივი, თუ  $P = -q$  სუბწრფივი ფუნქციაა. სუპერწრფივი  $q$  ფუნქციის  $\bar{\partial}q$  სუპერდიფერენციალი მოცემული ამოზნექილ  $k \in R^n$  კონუსზე, განისაზღვრება ტოლობით

$$\bar{\partial}q = \{g \in R^n | (g, x) \geq q(x) \quad \forall x \in k\}. \quad (9.143)$$

ვთქავთ,  $f$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $R^n$  და იღებს მნიშვნელობებს  $\bar{R} = R \cup \{-\infty, \infty\}$  გაფართოებულ რიცხვით წრფეზე. შემოვიტანოთ შემდეგი განსაზღვრებები: სიმრავლეს

$$\text{dom} f = \{x \in R^n | |f(x)| < +\infty\} \quad (9.144)$$

ეწოდება  $f$  ფუნქციის ეფექტური სიმრავლე, ხოლო სიმრავლებს

$$\text{gr} f = \{[x, \mu] \in R^n \times R | \mu = f(x)\}, \quad (9.145)$$

$$\text{epi } f = \{[x, \mu] \in R^n \times R \mid \mu \geq f(x)\}, \quad (9.146)$$

$$\text{hyp } f = \{[x, \mu] \in R^n \times R \mid \mu \leq f(x)\}, \quad (9.147)$$

შესაბამისად ამ ფუნქციის გრაფიკი, ზეგრაფიკი, ქვეგრაფიკი [38], [48].  
სიდიდეს

$$f_D^\uparrow(x, g) = \overline{\lim}_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} (f(x + \alpha g) - f(x)) \quad (9.148)$$

უწოდოთ  $f$  ფუნქციის დინის ზედა წარმოებული  $x$  წერტილში  $g$  მიმართულებით. აღნიშნოთ, რომ (9.148) ზღვარი ყოველთვის არსებობს. მაგრამ არაა საეალდებულო იყოს სასრულო. სიდიდეს

$$f_D^\downarrow(x, g) = \underline{\lim}_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\alpha} (f(x + \alpha g) - f(x)) \quad (9.149)$$

უწოდებენ  $f$  ფუნქციის დინის ქვედა წარმოებულს  $x$ -წერტილში  $g$  მიმართულებით. ზღვარს

$$f'(x, g) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} (f(x + \alpha g) - f(x)), \quad (9.150)$$

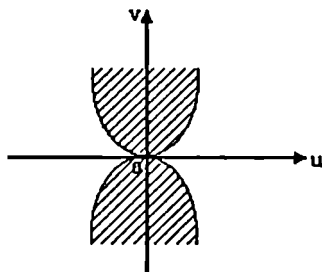
თუ ის არსებობს უწოდებენ  $x$  წერტილში  $f$  ფუნქციის წარმოებულს  $g$  მიმართულებით. ზოგჯერ ამ ზღვარს უწოდებენ დინის წარმოებულს და აღნიშნავენ  $f'_D(x, g)$ . წარმოებული მიმართულების მიხედვით არის ძირითადი ინსტრუმენტი ფუნქციის აპროქსიმაციისათვის. ზღვარს

$$\lim_{\alpha \downarrow 0, g \rightarrow g} \frac{1}{\alpha} (f(x + \alpha g) - f(x)) \quad (9.151)$$

უწოდება ადამარის წარმოებული. ცხადია, რომ ადამარის წარმოებულის არსებობიდან გამომდინარეობს დინის წარმოებულის არსებობა. ამასთან ორივე წარმოებულები ერთმანეთს თანხვედებიან. ამიტომ ორივე სახის წარმოებულების აღნიშვნისათვის გამოიყენება ერთნაირი სიმბოლოები. თუ მაინც და მაინც საჭიროა მათი განსხვავება, (9.151) აღნიშნოთ  $f'_H(x, g)$  წარმოებული ადამარის მიხედვით.

მაგალითი 9.3.

განვიხილოთ სიბრტყეზე  $\Omega$  სიმრავლე  $(U, v)$  კოორდინატებით (ნახ.9.24).  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ , სადაც  $\Omega_1$  ამოზნექილი სიმრავლეა, შეზღუდული  $v = u^2$  პარაბოლით,  $\Omega_2$  ამოზნექილი სიმრავლეა, შეზღუდული  $v = -u^2$ ,  $\Omega_3$  ამ პარაბოლის საერთო მხებია  $x_0(0,0)$  წერტილში.



ნახ.9.24

ვთქვათ,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x \in \Omega, \\ -1, & \text{თუ } x \notin \Omega; \end{cases}$$

ადვილი სანახავია, რომ  $f$  დიფერენცირებადია  $x_0$  წერტილში მიმართულების მიხედვით,  $f'(x_0, g) = 0$  ყველა  $g$ -თვის. ამასთან  $f$  ფუნქცია წყვეტილია ნულოვან წერტილში.

გავიხსენოთ  $v$  ვექტორს ეწოდება  $x$  წერტილში წარმოებული გატოს მიხედვით, თუ ნებისმიერი  $g \in R^n$  სრულდება

$$f(x + \alpha g) = f(x + \alpha(g, v) + O(g(\alpha))),$$

$$\text{სადაც } \frac{1}{\alpha} O(g(\alpha)) \rightarrow 0, \quad (9.152)$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, გატოს წარმოებული ეს დინის წრფივი წარმოებულია. ცხადია, რომ  $x$  წერტილში

$f$  ფუნქციის წარმოებული გატოს მიხედვით თანხედება  $\nabla f(x)$  გრადიენტს.

ამბობენ, რომ  $f$  დიფერენცირებადია  $x$  წერტილში ფრეშეს მიხედვით. თუ სამართლიანია პირობა

$$f(x + v) = f(x) + (\nabla f(x), v) + O(v),$$

$$\text{სადაც } \frac{O(v)}{\|v\|} \rightarrow 0 \quad (9.153)$$

თანაბრად დიფერენცირებადობის პირობის

$$\frac{1}{\|v\|} |f(x + v) - f(x) - f'_x(v)| \rightarrow 0$$

თანაბრად ეს ნიშნავს, რომ  $f$  თანაბრად დიფერენცირებადია მიმართულების მიხედვით, ამასთან მოყვანილი  $f'_x$  წარმოებული წრფეცა და მაშასადამე უწყვეტიცაა [38]. აქვე მოყვანილია თეორემა, რომელიც გვიჩვენებს, რომ დიფერენცირება ფრეშეს მიხედვით ტოლია წრფევი დიფერენცირებისა ადამარის მიხედვით.

ზოგიერთი დაშვებისას დინის მიხედვით დიფერენცირებას მოსდევს დიფერენცირება ადამარის მიხედვით.

### კლარკის სუბდიფერენციალი [48].

ვთქვათ,  $x$  — რომელიღაც ჭვესიმრავლეა  $R^n$  სივრცეში.  $f$  — ნებისმიერი ნამდვილი ფუნქციაა, განსაზღვრული  $x$ -ზე და  $x \in \text{cl}x$ . დავუშვათ

$$\overline{f}(x) = \inf_{\delta > 0} \sup_{\|x' - x\| < \delta, x' \in X} f(x') \quad (9.154)$$

$$\underline{f}(x) = \sup_{\delta > 0} \inf_{\|x' - x\| < \delta, x' \in X} f(x') \quad (9.155)$$

$\bar{f}$  და  $\underline{f}$  ფუნქციებს უწოდებენ შესაბამისად  $x$  სიმრავლეზე  $f$  ფუნქციის ზედა და ქვედა რეგულარიზაციას. სამართლიანია ტოლობები

$$\bar{f}(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\substack{|x'-x| < \delta \\ x' \in X}} f(x') \quad , \quad (9.156)$$

$$\underline{f}(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} \inf_{\substack{|x'-x| < \delta \\ x' \in X}} f(x') \quad . \quad (9.157)$$

გაეხსენოთ, რომ  $f$  ფუნქციის ზედა და ქვედა ზღვრები, განსაზღვრული  $X$ -ზე,  $x \in c\ell X$  წერტილში შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$\overline{\lim}_{x' \rightarrow x} f(x') = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\substack{|x'-x| < \delta \\ x' \in X, x' \neq x}} f(x') \quad , \quad (9.158)$$

$$\underline{\lim}_{x' \rightarrow x} f(x') = \lim_{\delta \downarrow 0} \inf_{\substack{|x'-x| < \delta \\ x' \in X, x' \neq x}} f(x') \quad . \quad (9.159)$$

აქედან ადვილად გამომდინარეობს, რომ

$$\bar{f}(x) = \max \left( f(x), \overline{\lim}_{x' \rightarrow x} f(x') \right), \quad (9.160)$$

$$\underline{f}(x) = \min \left( f(x), \underline{\lim}_{x' \rightarrow x} f(x') \right) \quad . \quad (9.161)$$

ცხადია, რომ

$$\underline{f}(x) \leq f(x) \leq \bar{f}(x) \quad . \quad (9.162)$$

დაუმტკიცებლად მოვიტანოთ შემდეგი წინადადებები.

წინადადება 9.1. ნებისმიერი  $f$  ფუნქციისათვის მისი  $\bar{f}$  ზედა რეგულარიზაცია ნახევრად უწყვეტია ზევიდან, ხოლო ქვედა რეგულარიზაცია  $\underline{f}$  ნახევრად უწყვეტია ქვევიდან.

წინადადება 9.2 თუ  $f_1(x)$  ნახევრად უწყვეტია ზევიდან და  $f_1(x) \geq f(x)$  ყველა  $x$ -თვის, მაშინ  $f_1(x) \geq \bar{f}(x)$ . თუ

$f_2(x)$ . ნახევრად უწყვეტი ფუნქციაა ჰევიდან და  $f_2(x) \leq f(x)$  ყველა  $x$ , მაშინ  $f_2(x) \leq \underline{f}(x)$ .

წინადადება 9.3. სამართლიანია ტოლობები

$$\overline{f}_D^\uparrow(x, g) = \lim_{x' \rightarrow x, \alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} (f(x' + \alpha g) - f(x')), \quad (9.163)$$

$$\underline{f}_D^\downarrow = \lim_{x' \rightarrow x, \alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} (f(x' + \alpha g) - f(x')), \quad (9.164)$$

შეენიშნოთ, რომ

$\overline{\lim}_{x' \rightarrow x} f_D^\uparrow(x', g)$  წარმოადგენს განმეორებით ზედა ზღვარს

$$\overline{\lim}_{x' \rightarrow x} \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} (f(x' + \alpha g) - f(x')).$$

ვინაიდან  $\overline{f}_D^\uparrow(x, g) = \max(f_D^\uparrow(x, y)) \overline{\lim}_{x' \rightarrow x} f_D^\uparrow(x', g)$ , მაშინ 3 წინადადება გვიჩვენებს, რომ როდესაც  $f_D^\uparrow(x, g) \leq \overline{\lim}_{x' \rightarrow x} f_D^\uparrow(x', g)$  ორმაგი ზედა ზღვარი

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{1}{\alpha} (f(x' + \alpha g) - f(x'))$$

თანხვდება აღნიშნულ განმეორებით ზედა ზღვარს. რიცხვებს

$$f_{c_1}^\uparrow(x, g) = \lim_{x \rightarrow x', \alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} (f(x' + \alpha g) - f(x')), \quad (9.166)$$

$$f_{c_1}^\downarrow(x, g) = \lim_{x \rightarrow x', \alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} (f(x' + \alpha g) - f(x')) \quad (9.167)$$

შესაბამისად უწოდებენ კლარკის ზედა და ქვედა წარმოებულებს

წინადადება 9.4. ყოველი  $g$ -თვის  $x \mapsto f_{c_1}(x, g)$  ფუნქცია ნახევრად უწყვეტია ზევიდან, ხოლო  $x \mapsto f_{c_1}(x, g)$  ფუნქცია ნახევრად უწყვეტია ქვევიდან.

წინადადება 9.5. ყოველი  $x$ -თვის  $g \mapsto f_{c_1}(x, g)$  ფუნქცია სუბწრფივია, ხოლო  $g \mapsto f_{c_1}^\uparrow(x, g)$  სუპერწრფივია.



წინადადება 9.6. ადგილი აქვს ტოლობას

$$f_{\epsilon}(x-g) = (-f)_{\epsilon}^{\dagger}(x, g). \quad (9.168)$$

ამოზნეკილი კომპაქტი, რომელიც ერთდროულად  $x$  წერტილში სუბდიფერენციალია კლარკის ზედა წარმოებულის და  $x$  წერტილში სუპერდიფერენციალია კლარკის ქვედა წარმოებულისა, ეწოდება  $x$  წერტილში  $f$  ფუნქციის კლარკის სუბდიფერენციალი. აღინიშნება  $\mathcal{A}_{\epsilon} f(x)$  სიმბოლოთი. ამრიგად, განსაზღვრის თანახმად

$$f_{\epsilon}^{\uparrow}(x, g) = \max_{\ell \in \mathcal{A}_{\epsilon} f(x)} (\ell, g), \quad (9.169)$$

$$f_{\epsilon}^{\downarrow}(x, g) = \min_{\ell \in \mathcal{A}_{\epsilon} f(x)} (\ell, g) \quad (9.170)$$

კლარკის სუბდიფერენციალის ელემენტებს  $x$  წერტილში უწოდებენ  $f$  ფუნქციის განზოგადოებულ გრადიენტებს.

წინადადება 9.7. სამართლიანია ტოლობა

$$f_{\epsilon}^{\uparrow} = -f_{\epsilon}^{\downarrow}(x-g) \quad (9.171)$$

წინადადება 9.8. მრავალნიშნა ასახვა  $x \rightarrow \mathcal{A}_{\epsilon} f(x)$

ნახევრადუწყვეტია ქვევიდან.

კლარკის ზედა და ქვედა წარმოებულები წარმოადგენენ შესაბამისად  $f'(x, g)$  წარმოებულის სუბწრფივ მაჟორანტას და სუპერწრფივ მინორანტას.

წინადადება 9.9. თუ  $f$  ფუნქცია  $x$  წერტილში დიფერენცირებადია გატოს მიხედვით, მაშინ  $\nabla f(x) \in \mathcal{A}_{\epsilon} f(x)$ .

განსაზღვრა 9.1.  $f$  ფუნქციას, განსაზღვრულს  $R^n$  სივრცის  $X$  ღია სიმრავლეში, ეწოდება კვაზიდიფერენცირებადი  $x \in X$  წერტილში თუ ის დიფერენცირებადია ამ წერტილში მიმართულების მიხედვით და მისი წარმოებული  $f'_x(g)$  შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$f'_x(g) = \max_{n \in I} (h, g) + \min_{n \in I'} (h, g), \quad (9.172)$$

სადაც  $U, V$  ამოზნეკილი კომპაქტური სიმრავლეებია  $R^n$ -ში. დაუშვათ

$$\begin{aligned} \underline{f}_x(g) &= \max_{n \in U} (h, g), & \bar{f}_x(g) &= \min_{n \in V} (h, g), \\ \ell(g) &= \underline{f}_x(g) + \bar{f}_x(g) \end{aligned} \quad (9.173)$$

გასაგებია, რომ  $\underline{f}_x$  სუბწრფივია, ხოლო  $\bar{f}_x$  — სუპერწრფივი ფუნქციაა, ამიტომ  $f'_x(g) = \ell(g)$  წარმოადგენს  $L$  ფუნქციების სივრცის ელემენტს, წარმოადგენილს სუბწრფივი და სუპერწრფივი ჯამების სახით.

განსაზღვრა 9.2. ვთქვათ,  $f$  ფუნქცია კვაზიდიფერენცირებადია  $x$  წერტილში.  $[U, V]$  ამოზნექილი კომპაქტების ექვივალენტური წყვილის კლასს აქვს თვისება, რომ

$$f'_x(g) = \max_{n \in U} (h, g) + \min_{n \in V} (h, g) \quad \forall g \in R^n, \quad (9.174)$$

და მას ეწოდება  $x$  წერტილში  $f$  ფუნქციის კვაზიდიფერენციალი, აღინიშნება  $Df(x)$ . სიმრავლეების ყოველ წყვილს რომლებიც ეკუთნიან ამ კლასს უწოდებენ აგრეთვე კვაზიდიფერენციალს და აღნიშნავენ ისევ  $Df(x)$  სიმბოლოთი. ამან არ უნდა მიგვიყვანოს გაუგებრობამდე. თუ

$Df(x) = [U, V]$ , მაშინ  $U$  სიმრავლეს ვუწოდოთ  $x$  წერტილში  $f$  ფუნქციის სუბდიფერენციალი და აღვნიშნოთ  $\underline{\partial}f(x)$  სიმბოლოთი.  $V$  სიმრავლეს უწოდოთ  $x$  წერტილში

$f$  ფუნქციის სუპერდიფერენციალი და აღვნიშნოთ  $\bar{\partial}f(x)$ .

ამრიგად,  $Df(x) = [\underline{\partial}f(x), \bar{\partial}f(x)]$ .  $\underline{\partial}f(x)$  და  $\bar{\partial}f(x)$  სიმრავლეები არ შეიძლება განვიხილოთ ცალკადაც. აზრი აქვს მხოლოდ  $Df(x) = [\underline{\partial}f(x), \bar{\partial}f(x)]$  წყვილს როგორც კლასის ექვივალენტური წყვილის წარმომადგენელს.

$f$  ფუნქციის კვაზიდიფერენცირებადობა  $x$  წერტილში ნიშნავს, რომ  $f$  ფუნქციას აქვს წარმოებულ მიმართულებების მიხედვით ამ წერტილში და აღნიშნული წარმოებულ შეიძლება გამოვსახოთ წრფივი ფუნქციებით,

$$Df(x) = [\underline{\partial}f(x), \bar{\partial}f(x)]$$

კვაზიდიფერენციალის საშუალებით და შემდეგი ფორმულის გამოყენებით

$$f'(x, g) = \max_{n \in J(x)} (n, g) + \min_{n \in J(x)} (n, g) \quad (9.175)$$

მივუთითოთ კვაზიდიფერენცირებადი ფუნქციების თვისებებზე თეორემა 9.4. 1) ვთქვათ,  $f_1$  და  $f_2$  ფუნქციები კვაზიდიფერენცირებადია  $x$  წერტილში. მაშინ ამ ფუნქციების ჯამი და ნამრავლი  $x$  წერტილში კვაზიდიფერენცირებადია, ამასთან

$$D(f_1 + f_2)(x) = Df_1(x) + Df_2(x), \quad (9.176)$$

$$D(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x)Df_2(x) + f_2(x)Df_1(x). \quad (9.177)$$

სხვა სიტყვებით, თუ  $[\underline{\partial}f_1(x), \bar{\partial}f_1(x)]$ ,  $[\underline{\partial}f_2(x), \bar{\partial}f_2(x)]$   $x$ -წერტილში  $f_1$  და  $f_2$  ფუნქციების კვაზიდიფერენციალებია, მაშინ  $f_1 + f_2$ ,  $f_1 f_2$  ფუნქციების კვაზიდიფერენციალები

$$[\underline{\partial}(f_1 + f_2)(x), \bar{\partial}(f_1 + f_2)(x)],$$

$$[\underline{\partial}(f_1 \cdot f_2)(x), \bar{\partial}(f_1 \cdot f_2)(x)],$$

გამოითვლება ფორმულებით

$$\underline{\partial}(f + f)(x) = \underline{\partial}f_1(x) + \underline{\partial}f_2(x), \quad (9.178)$$

$$\bar{\partial}(f_1 + f_2)(x) = \bar{\partial}f_1(x) + \bar{\partial}f_2(x), \quad (9.179)$$

$$\underline{\partial}(f_1 \cdot f_2)(x) = \begin{cases} f_1(x)\underline{\partial}f_2(x) + f_2(x)\underline{\partial}f_1(x), & \text{თუ } f_1(x) \geq 0, f_2(x) \geq 0 \\ f_1(x)\bar{\partial}f_2(x) + f_2(x)\underline{\partial}f_1(x), & \text{თუ } f_1(x) \leq 0, f_2(x) \geq 0 \\ f_1(x)\underline{\partial}f_2(x) + f_2(x)\bar{\partial}f_1(x), & \text{თუ } f_1(x) \leq 0, f_2(x) \leq 0 \\ f_1(x)\bar{\partial}f_2(x) + f_2(x)\bar{\partial}f_1(x), & \text{თუ } f_1(x) \geq 0, f_2(x) \leq 0 \end{cases} \quad (9.180)$$

$$\bar{\partial}(f_1 \cdot f_2)(x) = \begin{cases} f_1(x)\bar{\partial}f_2(x) + f_2(x)\bar{\partial}f_1(x), & \text{თუ } f_1(x) \geq 0, f_2(x) \geq 0, \\ f_1(x)\partial f_2(x) + f_2(x)\bar{\partial}f_1(x), & \text{თუ } f_1(x) \leq 0, f_2(x) \geq 0, \\ f_1(x)\partial f_2(x) + f_2(x)\bar{\partial}f_1(x), & \text{თუ } f_1(x) \leq 0, f_2(x) \leq 0, \\ f_1(x)\bar{\partial}f_2(x) + f_2(x)\partial f_1(x), & \text{თუ } f_1(x) \geq 0, f_2(x) \leq 0. \end{cases}$$

2) ვთქვათ,  $f$  ფუნქცია კვაზიდიფერენცირებადია  $x$  წერტილში. მაშინ ნებისმიერი ნამდვილი  $\lambda$ -თვის ფუნქცია  $\lambda f$  აგრეთვე ამ წერტილშიც კვაზიდიფერენცირებადია, ამასთან

$$D(\lambda f)(x) = \lambda Df(x). \quad (9.182)$$

სხვა სიტყვებით, თუ  $[\underline{\partial}f(x), \bar{\partial}f(x)]$ ,  $x$  წერტილში  $f$  ფუნქციის კვაზიდიფერენციალია, მაშინ  $\lambda f$  ფუნქციის  $[\underline{\partial}(\lambda f)(x), \bar{\partial}(\lambda f)(x)]$  კვაზიდიფერენციალისათვის ამ წერტილში სამართლიანია ტოლობა

$$\underline{\partial}(\lambda f)(x) = \begin{cases} \lambda \underline{\partial}f(x), & \text{თუ } \lambda \geq 0, \\ \lambda \bar{\partial}f(x), & \text{თუ } \lambda \leq 0, \end{cases} \quad (9.183)$$

$$\bar{\partial}(\lambda f)(x) = \begin{cases} \lambda \bar{\partial}f(x), & \text{თუ } \lambda \geq 0, \\ \lambda \underline{\partial}f(x), & \text{თუ } \lambda \leq 0, \end{cases} \quad (9.184)$$

3) ვთქვათ,  $f$  ფუნქცია კვაზიდიფერენცირებადია  $x$  წერტილში, ამასთან  $f(x) \neq 0$ . დავუშვათ,  $\left(\frac{1}{f}\right)(x') = \frac{1}{f(x')}$ , სადაც  $x'$  წერტილია  $f$  განსაზღვრის არედან, რომელშიც  $f(x') \neq 0$ . მაშინ  $\frac{1}{f}$  ფუნქცია კვაზიდიფერენცირებადია  $x$  წერტილში და

$$D\left(\frac{1}{f}\right)(x) = -\frac{1}{f^2(x)} Df(x). \quad (9.185)$$

სხვა სიტყვებით, თუ  $\left[\underline{\partial} \frac{1}{f}(x), \bar{\partial} \frac{1}{f}(x)\right]$   $x$  წერტილში  $f$  ფუნქციის კვაზიდიფერენციალია, მაშინ ამ წერტილში კვაზიდიფერენციალისათვის სრულდება ტოლობა

$$\underline{\partial} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = -\frac{1}{f^2(x)} \bar{\partial} f(x), \quad (9.186)$$

$$\bar{\partial} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = -\frac{1}{f^2(x)} \underline{\partial} f(x), \quad (9.187)$$

იმისათვის, თუ როგორ აიღება მინიმუმი და მაქსიმუმი გამოვიყენოთ შემდეგი თეორემა

თეორემა 9.5 [38]. ვთქვათ,  $f_1, \dots, f_m$  ფუნქციები განსაზღვრულია ღია  $X$  სიმრავლეში და კვაზიდიფერენცირებადია  $x \in X$  წერტილში. ვთქვათ, შემდეგში

$\varphi_1(x) = \max_{i \in I: m} f_i(x)$ ,  $\varphi_2(x) = \min_{i \in I: m} f_i(x)$  მაშინ  $\varphi_1$  და  $\varphi_2$

კვაზიდიფერენცირებადია  $x$  წერტილში და

$$D\varphi_1(x) = \left[\underline{\partial} \varphi_1(x), \bar{\partial} \varphi_1(x)\right], \quad (9.188)$$

$$D\varphi_2(x) = \left[\underline{\partial} \varphi_2(x), \bar{\partial} \varphi_2(x)\right], \quad (9.189)$$

სადაც

$$\underline{\partial} \varphi_1 = C0 \cup \left( \bigcup_{k \in R(x)} \left[ \underline{\partial} f_k(x) - \sum_{i \in R(x), i \neq k} \bar{\partial} f_i(x) \right] \right) \quad (9.190)$$

$$\bar{\partial} \varphi_1(x) = \sum_{k \in R(x)} \bar{\partial} f_k, \quad \underline{\partial} \varphi_2(x) = \sum_{k \in Q(x)} \underline{\partial} f_k(x) \quad (9.191)$$

$$\bar{\partial} \varphi_2(x) = C0 \cup \left( \bigcup_{k \in Q(x)} \left[ \bar{\partial} f_k(x) - \sum_{i \in Q(x), i \neq k} \underline{\partial} f_i(x) \right] \right) \quad (9.192)$$

აქ

$[\underline{\rho} f_k(x), \bar{\rho} f_k(x)]$   $x$  წერტილში  $f_k$  ფუნქციის კვაზიდიფერენციალია,  $R(x) = \{i \in I | f_i(x) = \varphi_i(x)\}$ ,

$$Q(x) \{i \in I | f_i(x) = \varphi_2(x), I = 1:n\}$$

დამტკიცება: შემოვისაზღვროთ მარტო  $\varphi_1$  ფუნქციით. ლიპშიცის პირობის გათვალისწინება გვიჩვენებს, რომ ეს ფუნქცია დიფერენცირებადია მიმართულების მიხედვით, ამასთან

$$(\varphi_1)'(x, g) = \max_{i \in R(x)} f'_i(x, g). \quad (9.193)$$

$\ell_i(g) = f_i(x, g)$  ფუნქციები იმყოფებიან  $L$  სივრცეში, ამავე სივრცეში შედიან წინადადებიდან  $\ell(g) = \max_{i \in R(x)} \ell_i(g)$  ფუნქციებიც. ეს გარემოება და (9.193) ფორმულასთან ერთად გვიჩვენებს, რომ  $\varphi_1$  ფუნქცია არის კვაზიდიფერენცირებადი. (9.190), (9.191), (9.192) ფორმულები უშუალოდ გამომდინარეობენ ზემოთქმულიდან.

განვიხილოთ დამტკიცების გარეშე შტრასენის ცნობილი თეორემის სასრულო განზომილებიანი ვარიანტი [38].

თეორემა 9.6. ვთქვათ,  $(S, \Sigma, \mu)$ -სივრცეა ალბათური ზომით,  $P(s, x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $S \times R^n$ -ზე, ამასთან  $P(s, \cdot): x \rightarrow P(s, x)$  სუბწრფივია ყველა  $S$ -ზე,

$$P(\cdot, x): S \rightarrow P(s, x)$$

ფუნქცია ზომადია ყველა  $x$ -თვის, ფუნქცია  $\|P\|: S \rightarrow \|P(S, \cdot)\|$  აჯამვადია ( $\|P(S, \cdot)\| = \max_{|s|=1} |P(s, g)|$  სუბწრფივი  $P(S, \cdot)$  ფუნქციის ნორმაა), მაშინ ფუნქცია

$$P(g) = \int_S P(S, g) d\mu(S) \quad (9.194)$$

სუბწრფივია. ამასთან  $\omega = (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)})$  ვექტორი შედის  $\underline{\rho} P$  სუბდიფერენციალში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდეს-

საც მოიძებნება ისეთი  $s \rightarrow \omega(s)$  ფუნქცია, (სადაც

$\omega(s) = (\omega^{(1)}(s), \dots, \omega^{(n)}(s))$ , რომ

1.  $\omega(s) \in \underline{P}(s, \cdot)$  თითქმის ყველა  $s$ -თვის,

2.  $s \rightarrow \omega^{(i)}(s)$  ზომადია ყველა  $i$ -თვის,

3.  $\omega^{(i)} = \int_s \omega^{(i)}(s) d\mu(s)$ . (9.195)

დავუბრუნდეთ  $f(s, x)$  ფუნქციას. ვთქვათ,  $f'(s, x, g) - f(s, x)$  ფუნქციის წარმოებულა.  $x$  წერტილში  $g$  მიმართულებით. ვინაიდან  $f(s)$ -კვაზიდიფერენცირებადი ფუნქციაა, ამიტომ სამართლიანია წარმოდგენა

$$f'(s, x, g) = P(s, g) + q(s, g), \quad (9.196)$$

სადაც ფუნქცია  $P(s, \cdot): g \rightarrow P(s, g)$  სუბწრფივია, ხოლო ფუნქცია  $q(s, \cdot): g \rightarrow q(s, g)$  სუპერწრფივია. წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად სამართლიანია ტოლობა

$$f(s, x + \alpha g) = f(s, x) + \alpha (P(s, g) + q(s, g)) + O_{s, x, g}(\alpha), \quad (9.197)$$

სადაც

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} O_{s, x, g}(\alpha) = 0. \quad (9.198)$$

წინადადება 9.11. ვთქვათ,  $O_{s, g}$  ფუნქცია განსაზღვრულია (9.197) და ხასიათდება თვისებებით, რომ

$$\frac{1}{\alpha} \int_s O_{s, x, g}(\alpha) d\mu(s) \rightarrow 0.$$

ყველა  $g \in R^r$  შემდეგში დავუშვათ, რომ არსებობს ისეთი (9.196) დაშლა, რომ  $P(s, g)$  და  $q(s, g)$  ფუნქციები ზომადია ყველა  $g$ -თვის. და ამის გარდა  $s \mapsto \|P(s, \cdot)\|$  აჯამვადია, მაშინ ფუნქცია

$$\varphi(x) = \int_s f(x, s) d\mu(s)$$

კვაზიდიფერენცირებადია  $x$  წერტილში და მისი კვაზიდიფერენციალი  $D\varphi(x)$  თანხვდება სიმრავლეთა წყვილს  $[\underline{\partial}\varphi(x), \overline{\partial}\varphi(x)]$ , სადაც  $\underline{\partial}\varphi(x)$  (შესაბამისად,  $\overline{\partial}\varphi(x)$ )

შესდგება ყველა იმ  $\omega = (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)})$  ვექტორებისაგან, რომელთათვის არსებობს შემდეგეთვისებრიანი ფუნქცია

$$\omega(s) = (\omega^{(1)}(s) \dots \omega^{(n)}(s)):$$

1.  $\omega(s) \in \underline{\partial}P(s, \cdot)$  (შესაბამისად,  $\omega(s) \in \overline{\partial}q(s, \cdot)$ ) თითქმის ყველა  $s$ ,

2. ფუნქცია  $s \mapsto \omega^{(i)}(s)$  ზომადია  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

3.  $\omega^{(i)} = \int_S \omega^{(i)} d\mu(s).$

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი კვაზიდიფერენციალის მოსაძებნად

მაგალითი 9.4

ვთქვათ

$$f(x) = |x|, \quad x \in R^1, \quad x_0 = 0.$$

გვაქვს

$$f(x) = \max\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\} = \max_{i \in I} \varphi_i(x),$$

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = -x, \quad I = \{1, 2\}$$

ცხადია, რომ  $R(x_0) = \{1, 2\}$ .  $\varphi_1$  და  $\varphi_2$  ფუნქციები გლუვია.

ავიღოთ  $D\varphi_1(x_0) = [\underline{\partial}\varphi_1(x_0), \overline{\partial}\varphi_1(x_0)]$ ,  $D\varphi_2(x_0) =$

$[\underline{\partial}\varphi_2(x_0), \overline{\partial}\varphi_2(x_0)]$ , სადაც

$$\underline{\partial}\varphi_1(x_0) = \{\varphi_1'(x_0)\} = \{1\}; \quad \overline{\partial}\varphi_1(x_0) = \{0\},$$

$$\underline{\partial}\varphi_2(x_0) = \{\varphi_2'(x_0)\} = \{-1\}; \quad \overline{\partial}\varphi_2(x_0) = \{0\}.$$

(9.190), (9.191), (9.192) ფორმულების თანახმად გვაქვს

$$Df(x_0) = [\underline{\partial}f(x_0), \overline{\partial}f(x_0)], \quad (9.199)$$

სადაც



$$\begin{aligned} \underline{\partial}f(x_0) &= CO\{\underline{\partial}\varphi_1(x_0) - \bar{\partial}\varphi_2(x_0), \underline{\partial}\varphi_2(x_0) - \bar{\partial}\varphi_1(x_0)\} = \\ &= CO\{\{1\}, \{-1\}\} = [-1, 1]. \end{aligned}$$

$$\bar{\partial}f(x_0) = \bar{\partial}\varphi_1(x_0) + \bar{\partial}\varphi_2(x_0) + \bar{\partial}\varphi_2(x_0) = \{0\} + \{0\} = \{0\}.$$

თუ  $D\varphi_1(x_0)$  და  $D\varphi_2(x_0)$  ავიღებთ წყვილს

$$D\varphi_1(x_0) = [\underline{\partial}\varphi_1(x_0), \bar{\partial}\varphi_1(x_0)],$$

$$D\varphi_2(x_0) = [\underline{\partial}\varphi_2(x_0), \bar{\partial}\varphi_2(x_0)],$$

სადაც

$$\underline{\partial}\varphi_1(x_0) = \{0\}, \quad \bar{\partial}\varphi_1(x_0) = \{\varphi_1'(x_0)\} = \{1\},$$

$$\underline{\partial}\varphi_2(x_0) = \{\varphi_2'(x_0)\} = \{-1\}, \quad \bar{\partial}\varphi_2(x_0) = \{0\},$$

მაშინ მივიღებთ

$$Df(x_0) = [\underline{\partial}f(x_0), \bar{\partial}f(x_0)], \quad (9.200)$$

სადაც

$$\underline{\partial}f(x_0) = CO\{\underline{\partial}\varphi_1(x_0) - \bar{\partial}\varphi_2(x_0), \underline{\partial}\varphi_2(x_0) - \bar{\partial}\varphi_1(x_0)\} =$$

$$= CO\{\{0\} - \{0\}, \{-1\} - \{1\}\} = CO\{\{0\}, \{-2\}\} = [-2, 0],$$

$$\bar{\partial}f(x_0) = \bar{\partial}\varphi_1(x_0) + \bar{\partial}\varphi_2(x_0) = \{1\} + \{0\} = \{1\}.$$

ცხადია, რომ (9.199) და (9.200) წყვილები ეკვივალენტურია.  $x \neq 0$  წერტილებისათვის გვაქვს

$$f(x) = \begin{cases} +x, & x > 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

ამიტომ შეგვიძლია ავიღოთ

$$Df(x) = [\underline{\partial}f(x), \bar{\partial}f(x)],$$

სადაც

$$\underline{\partial}f(x) = \begin{cases} \{1\}, & x > 0, \\ \{-1\}, & x < 0. \end{cases}$$

$$\bar{\partial}f(x) = \{0\}, \quad \forall x \neq 0.$$

გავერთიანოთ (9.199) და (9.200), შეიძლება ავიღოთ

$$Df(x) = [\underline{\partial}f(x), \bar{\partial}f(x)],$$

სადაც

$$\underline{\partial}f(x) = \begin{cases} \{1\}, & x > 0, \\ \{-1\}, & x < 0, \\ [-1, 1], & x = 0, \end{cases}$$

$$\bar{\partial}f(x) = \{0\} \quad \forall x \in R',$$

მაგალითი 9.5.

ვთქვათ,  $x \in R'$

$$f(x) = \text{sat}X \begin{cases} x & |x| \leq 1, \\ 1 & x > 1, \\ -1 & x < -1. \end{cases}$$

დავუშვათ  $\varphi_1(x) = x$ ,  $\varphi_2(x) = 1$ ,  $\varphi_3(x) = -1$ ,

$\varphi_4(x) = \max\{\varphi_1(x), \varphi_3(x)\}$ . ადვილი სანახავია, რომ

$$f(x) = \min\{\varphi_2(x), \varphi_4(x)\}.$$

ვინაიდან  $\varphi_1, \varphi_2$  და  $\varphi_3$  ფუნქციები ლიფერენცირებადია, ამიტომ

$$D\varphi_1(x) = [\{1\}, \{0\}], \quad D\varphi_2(x) = [\{0\}, \{0\}],$$

$$D\varphi_3(x) = [\{0\}, \{0\}]$$

მაშინ (9.191)-(9.192) ფორმულების თანახმად

$$D\varphi_4(x) = [\underline{\partial}\varphi_4(x), \bar{\partial}\varphi_4(x)],$$

სადაც

$$\underline{\partial}\varphi_4(x) = \begin{cases} \{1\}, & x > -1, \\ \{0\}, & x < -1, \\ [0, 1], & x = -1 \end{cases} \quad \bar{\partial}\varphi_4(x) = \{0\}$$

გამოვიყენოთ (9.191) (9.192) ფორმულები საბოლოოდ მივღებთ

$$Df(x) = [\underline{\partial}f(x), \bar{\partial}f(x)],$$

სადაც

$$\underline{\partial}f(x) = \begin{cases} \{0\}, & |x| > 1 \\ [0,1], & x = -1 \\ \{1\}, & x \in (-1,1] \end{cases} \quad \bar{\partial}f(x) = \begin{cases} \{0\}, & x \neq 1 \\ [-1,0], & x = 1 \end{cases}$$

§ 9.10. ოპტიმალური მართვის არაგლუვი ამოცანის გადაწყვეტა დემიანოვ-რუბინოვის კვაზიდიფერენციალის საშუალებით

ვთქვათ, ობიექტის მოძრაობა აღიწერება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემით

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (9.201)$$

$$x(0) = x_0 \in R^n. \quad (9.202)$$

სადაც

$x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$  - მდგომარეობის ვექტორია,  $u = (u_1, \dots, u_r) \in R^r$  - მართვის ფუნქციაა,  $f = (f_1, \dots, f_n) \in R^n$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$  ფიქსირებულია.

$N$  - აღნიშნოთ  $r$  - განზომილების ვექტორ-ფუნქციები, მოცემული  $[0, T]$ -ში და უბან-უბან უწყვეტი (მარჯვნიდან). დავეუშვათ

$$U = \{u \in N \mid u(t) \in V \quad \forall t \in [0, T]\},$$

სადაც  $V \subset R^r$  - კომპაქტური სიმრავლეა.  $U$  სიმრავლეს უწოდებენ დასაშვებ მართვას, ხოლო ნებისმიერ  $u \in U$  - მართვას.  $f$  ვექტორ-ფუნქცია წინასწარ მოცემულია უწყვეტია  $x$  და  $u$  მიხედვით  $X \times U \times [0, T]$ -ზე, იქ აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას  $x$  მიხედვით, უბან-უბან უწყვეტი

ფუნქციაა  $I$  მიხედვით, ყოველი მისი კომპონენტა დიფერენცირებადია  $x$  მიმართულებით. მაშინ ნებისმიერი  $u \in U$  არსებობს (9.201), (9.202) სისტემის ერთადერთი  $x(t) = x(t, u)$  ამონახსნი  $[0, T]$  მონაკვეთში.

საჭიროა მოვახდინოთ ფუნქციონალის მინიმიზაცია

$$I[u] = \Phi(x(t, u)), \quad (9.203)$$

სადაც  $\Phi(x)$  არის ლიპშიცის ფუნქცია დიფერენცირებადი მიმართულების მიხედვით. დავუშვათ, რომ

$$u^* \in U, \quad I[u^*] = \min_{u \in U} I[u]. \quad (9.204)$$

ნაკრები  $\{x^*, u^*\}$  სადაც  $x^*(t) = x(t, u^*)$  უწოდებენ ოპტიმალურ პროცესს,  $x^*(t)$ —ოპტიმალურ ტრაექტორიას,  $u^*(t)$ —ოპტიმალურ მართვას.

განვიხილოთ  $I[u]$  ფუნქციონალის მინიმუმის არსებობის აუცილებელი პირობა.

ვთქვათ,  $u^* \in U$  არის რომელიღაც მართვა (საექვო ექსტრემუმზე). მოვახდინოთ  $u^*$  მართვის ვარიაცია, გვექნება

$$u_\varepsilon = u^* + \Delta u_\varepsilon \in U, \quad \varepsilon > 0 \quad (9.205)$$

$\Delta u$  ფუნქციას უწოდებენ  $u^*$  მართვის ვარიაციას. დავუშვათ  $x_\varepsilon(t) = x(t, u_\varepsilon)$ ,  $x^* = x(t, u^*)$ . თუ არსებობს ზღვარი

$$h(t) \equiv (h_1(t), \dots, h_n(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [x(t, u_\varepsilon) - x(t, u^*)], \quad (9.206)$$

მაშინ  $h$  ვექტორ-ფუნქციას უწოდებენ ტრაექტორიის ვარიაციას, გამოწვეულს მართვის ვარიაციით. თუ გამოვიყენებთ მართვის სხვადასხვა ვარიაციებს მივიღებთ ტრაექტორიების სხვადასხვა ვარიაციებს

1. ნემსისებური ვარიაცია. დავუშვათ

$$\Delta U_\varepsilon(t) = \begin{cases} y - u^*(t) & t \in [\theta, \theta + \varepsilon], \\ 0 & t \notin [\theta, \theta + \varepsilon], \end{cases} \quad (9.207)$$

სადაც  $y \in V$ ,  $\theta \in [0, T]$ -არის  $u^*$ , მართვის უწყვეტობის წერტილი (მარჯვნიდან)  $\varepsilon > 0$ .  $\Delta u_\varepsilon(t)$  უწოდებენ მართვის ნემსისებურ ვარიაციას. ცხადია, რომ  $h(t) = 0 \quad \forall t \in [0, \theta]$ . როდესაც  $t > \theta + \varepsilon$ . გვექნება

$$x_\varepsilon(t) = x(t, U_\varepsilon) = x_0 + \int_0^\theta f(x^*(\tau), U^*(\tau)) d\tau + \\ + \int_\theta^{\theta+\varepsilon} f(x_\varepsilon(\tau), y, \tau) d\tau + \int_{\theta+\varepsilon}^t f(x_\varepsilon(\tau), u^*(\tau)) d\tau.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა  $g_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}(x_\varepsilon(t) - x^*(t))$ . ვინაიდან  $f_i$  ( $i \in 1:n$ ) დიფერენცირებადია მიმართულების მიხედვით, ამიტომ

$$f_i(x_\varepsilon(t), u^*(t), t) = f_i(x^*(t) + \varepsilon g_\varepsilon(t), u^*(t), t) = \\ = f_i(x^*(t), u^*(t), t) + \varepsilon \frac{\partial f_i(x^*(t), u^*(t), t)}{\partial g_\varepsilon(t)} + \\ + O_i(\varepsilon, g_\varepsilon(t), t) \quad \forall i \in 1:n, \quad t > \theta + \varepsilon.$$

აქ

$$\frac{\partial f_i(x^*, u^*, t)}{\partial g} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [f_i(x^* + \alpha g, y^*, t) - f_i(x^*, u^*, t)].$$

მაშინ  $t > \theta + \varepsilon$  შემთხვევისას

$$\frac{1}{\varepsilon}(x_\varepsilon^{(i)} - x^{(i)}(t)) = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \int_\theta^{\theta+\varepsilon} [f_i(x_\varepsilon(\tau), y, \tau) - f_i(x^*(\tau), u^*(\tau), \tau)] d\tau + \int_{\theta+\varepsilon}^t \left[ \varepsilon \frac{\partial f_i(x^*(\tau), u^*(\tau), \tau)}{\partial g_\varepsilon(\tau)} + \theta(\varepsilon, g_\varepsilon(\tau), \tau) \right] d\tau \right\}, \quad \forall i \in 1:n.$$

(9.208)

შემოვიტანოთ აღნიშვნა  $\frac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial g} = F^{(i)}(t, g) \quad i \in 1:n$  და-  
ვუშვათ, რომ

1.  $F^{(i)}(t, g)$ ,  $i \in 1:n$  ზომადია  $t$  მიხედვით ნებისმიერი ფიქსირებული  $g$ -თვის.

2.  $F^{(i)}(t, g)$   $i \in 1:n$  უწყვეტია  $g$  მიხედვით, ნებისმიერი ფიქსირებული  $t \in [0, T]$ .

3. ნებისმიერ  $k \subset R^{n+1}$  კომპაქტზე  $F^{(i)}(t, g)$  ფუნქციები შეზღუდულია

4.  $F^{(i)}(t, g)$  ფუნქცია ლიპშიცისებურია  $g$  მიხედვით

5.  $\theta_i(\varepsilon, t, g) \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \rightarrow 0$  თანაბარია  $t \in [0, T]$  მიხედვით

6. ნებისმიერი  $\bar{g} \in R^n$  მოიძებნება ისეთი რიცხვები  $\varepsilon_0$  და  $\delta > 0$ , რომ  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $g \in R_g(\bar{g}) = \{g \mid \|g - \bar{g}\| < \delta\}$  შესრულებულია უტოლობა

$$|O_i(\varepsilon, t, g)| < \varepsilon \delta,$$

მაშინ შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ (9.206)-ში არსებობს ზღვარი და ამასთან

$$h^{(i)}(t) = \int_{\theta}^t \frac{\partial f_i(x^*(\tau), u^*(\tau), \tau)}{\partial h(\tau)} d\tau + f_i(x^*(\theta), y, \theta) - f_i(x^*(\theta), u^*(\theta), \theta) \quad (i \in 1:n). \quad (9.209)$$

(9.209) გამოსახულება ეკვივალენტურია შემდეგი დიფერენციალური განტოლების

$$\dot{h}^{(i)}(t) = \frac{\partial f_i(x^*(t), u^*(t), t)}{\partial h(t)}, \quad \forall t \geq \theta, \quad (9.210)$$

საწყისი პირობით

$$h^{(i)}(\theta) = \Delta_y f_i(x^*(\theta), u^*(\theta), \theta). \quad (9.211)$$

აქ

$$\Delta_{y_i} f_i(x^*, u^*, \theta) = f_i(x^*, y_i, \theta) - f_i(x^*, u^*, \theta).$$

$\forall$  -ნიშნავს "თითქმის ყველასათვის" შეგახსენებთ, რომ

$$h(t) = 0 \quad \forall t < 0. \quad (9.212)$$

(9.210) სისტემის ამონახსნი არსებობს და ერთადერთია.

2. მრავალწერტილიანი ნემსისებური ვარიაცია.

დაუშვათ

$$\Delta U_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} Y_i - U^*(t), & t \in [\theta_{i-1}, \theta_i + \varepsilon \ell_i) \quad \forall i \in 1:m, \\ 0, & t \notin \bigcup_{i=1:m} [\theta_{i-1}, \theta_i + \varepsilon), \end{cases}$$

$$\forall i \geq 1:m,$$

სადაც  $Y_i \in V$ ,  $\theta_i \in [0, T]$   $\ell_i \geq 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\forall i \in 1:m$ .

$m$ -ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია.

მოვიყვანოთ საბოლოო შედეგი:

$$\dot{h}^0_i(t) = \frac{\partial f(x^*(t), U^*(t), t)}{\partial h_i(t)} \quad (\forall t \geq 1), \quad (9.213)$$

საწყისი პირობით

$$h_i(\theta_{i-1}) = h_{i-1}(\theta_i) + \ell_i \Delta_{y_i} f(x^*(\theta_i), U^*(\theta_i), \theta_i). \quad (9.214)$$

(9.213), (9.214) სისტემის ამოხსნა შესაძლებელია.

ოპტიმალობის აუცილებელი პირობა [38]

თოვრემა 9.7. იმისათვის, რომ მართვა  $u^* \in U$  იყოს ოპტიმალური მართვა, აუცილებელია, რომ

$$\frac{\partial \Phi(x^*(T))}{\partial h(T)} \geq 0 \quad (9.215)$$

$h(T)$  ტრაექტორიის ყველა დასაშვებ ვარიაციისათვის. იმისათვის, რომ მივიღოთ კონსტრუქციული აუცილებელი პირობა ვისარგებლოთ  $f_i$  და  $\Phi$  სპეციფიკური თვისებებით და მართვის სხვადასხვა ვარიაციებით.

თავდაპირველად განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც  $f_i$ -გლუვია  $x$  მიხედვით და ამორჩეულია ნემსისებური ვარიაცია. მაშინ მართვას აქვს შემდეგი სახე

$$\dot{h}(t) = \frac{\partial f(x^*(t), u^*(t), t)}{\partial x} h(t) \quad \forall, t \geq 0, \quad (9.216)$$

საწყისი პირობით

$$h'(0) = \Delta, f_i(x^*(0), u^*(0), 0). \quad (9.217)$$

დავადგინოთ ოპტიმალობის აუცილებელი პირობა ამოცანისათვის

$$u^* \in U, \quad I[u^*] = \min_{u \in U} I(u).$$

ვინაიდან  $I(u) = \Phi(x(t), u)\Phi(x)$  ფუნქცია დიფერენცირებადია მიმართულების მიხედვით და არის ლიპშიციისებური, მაშინ ვისარგებლოთ ყველა განხილული ვარიაციებით

$$x_\varepsilon(t) = x^*(t) + \varepsilon h(t) + O(\varepsilon, t), \quad (9.218)$$

სადაც  $\frac{O(\varepsilon, t)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0$  თანაბარია  $t$  მიხედვით. გვექნება

$$\begin{aligned} I(u_\varepsilon) &= \Phi(x^*(T) + \varepsilon h(T) + O(\varepsilon, T)) = \Phi(x^*(T)) + \\ &+ \varepsilon \frac{\partial \Phi(x^*(T))}{\partial h(T)} + O(\varepsilon, T). \end{aligned} \quad (9.219)$$

აქედან გამომდინარეობს კოშის ფორმულის თანახმად შემდეგი რეზულტატი

$$h(T) = Y(T)Y^{-1}(0) \Delta, f_i(x^*(0), u^*(0), 0), \quad (9.220)$$

სადაც  $Y(T)$  (9.216) განტოლებათა სისტემის ამონახსნის ფუნდამენტალური მატრიცაა, ე.ი.

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= \frac{\partial f(x^*(t), u^*(t), t)}{\partial x} Y(t), \\ Y(0) &= E. \end{aligned} \quad (9.221)$$



( $E$  ერთეულოვანი მატრიცა). დავუშვათ, რომ  $\Phi$  ფუნქცია კვაზიდიფერენცირებადია  $x^*(T)$  წერტილში. მაშინ (9.215) აქვს სახე

$$\frac{\partial \Phi(x^*(T))}{\partial h(T)} = \max_{\theta \in \underline{\partial} \Phi(x^*(T))} (\vartheta, h(T)) + \min_{\omega \in \overline{\partial} \Phi(x^*(T))} (\omega, h(T)), \quad (9.222)$$

სადაც  $[\underline{\partial} \Phi(x^*(T)), \overline{\partial} \Phi(x^*(T))]$  -  $\Phi$  ფუნქციის კვაზიდიფერენციალია  $x^*(T)$  წერტილში. (9.220) და (9.222) გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(x^*(T))}{\partial h(T)} &= \max_{\theta \in \underline{\partial} \Phi(x^*(T))} \left( (Y(T)Y^{-1}(\theta))^T \vartheta, \Delta, f(x^*, u^*, \theta) \right) + \\ &+ \min_{\omega \in \overline{\partial} \Phi(x^*(T))} \left( (Y(T)Y^{-1}(\theta))^T \omega, \Delta, f(x^*, u^*, \theta) \right), \end{aligned}$$

დავუშვათ

$$\Psi_\vartheta(\theta) = (Y(T)Y^{-1}(\theta))^T \vartheta, \quad \vartheta \in \underline{\partial} \Phi(x^*(T)),$$

$$\Psi_\omega(\theta) = (Y(T)Y^{-1}(\theta))^T \omega, \quad \omega \in \overline{\partial} \Phi(x^*(T)).$$

ადელი სანახავია, რომ  $\Psi_\vartheta(\theta)$  ფუნქცია აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას

$$\frac{d\Psi_\vartheta(\theta)}{d\theta} = - \frac{\partial f^T(x^*, u^*, \theta)}{\partial x} \Psi_\vartheta(\theta), \quad \theta \leq T \quad (9.223)$$

საწყისი პირობებით

$\Psi_\vartheta(T) = \vartheta, \quad \vartheta \in \underline{\partial} \Phi(x^*(T)),$  (9.224) ხოლო  $\Psi_\omega(\theta)$  - სისტემას

$$\frac{d\Psi_\omega(\theta)}{d\theta} = - \frac{\partial f^T(x^*, u^*, \theta)}{\partial x} \Psi_\omega(\theta), \quad \theta \leq T, \quad (9.225)$$

საწყისი პირობით

$$\Psi_\omega(T) = \omega \quad \omega \in \overline{\partial} \Phi(x^*(T)). \quad (9.226)$$

ამ შემთხვევაში სამართლიანია თეორემა

თეორემა 9.8. იმისათვის, რომ  $u^* \in U$  მართვა იყოს ოპტიმალური აუცილებელია, რომ

$$\min_{y \in Y} \left[ \max_{\theta \in \Theta(x^*(T))} \Delta_y H(x^*, u^*, \Psi_\theta, \theta) + \min_{\omega \in \Theta(x^*(T))} \Delta_y H(x^*, u^*, \Psi_\omega, \theta) \right] = 0, \quad \forall \theta \in [0, T], \quad (9.227)$$

სადაც

$$H(x, u, \Psi, \theta) = (f(x(\theta), u(\theta), \theta), \Psi(\theta)), \quad (9.227)$$

$$\Delta_y H(x^*, u^*, \Psi, \theta) = H(x^*, Y, \Psi, \theta) - H(x^*, u^*, \Psi, \theta)$$

არის პონტრიავინის მაქსიმუმის პრინციპის განზოგადოებული პირობა.  $H$ -არის ჰამილტონის ფუნქცია,  $\Psi_\theta(t)$  და  $\Psi_\omega$ -შეუღლებული ფუნქციებია. თუ გამოვიყენებთ მრავალწერტილოვან ნემსისებურ ვარიაციას მივიღებთ აუცილებელ პირობას.

თეორემა 9.9. იმისათვის, რომ  $u^* \in U$  მართვა იყოს ოპტიმალური აუცილებელია, რომ

$$\inf_{u \in U} \left\{ \max_{\theta \in \Theta(x^*(T))} \int_0^T \Delta_U H(x^*(\tau), u^*(\tau), \Psi_\theta(\tau), \tau) d\tau + \min_{\omega \in \Theta(x^*(T))} \int_0^T \Delta_U H(x^*(\tau), u^*(\tau), \Psi_\omega(\tau), \tau) d\tau \right\} = 0. \quad (9.228)$$

ამოზნეკილი მართვის ფუნქციათა  $U$  სიმრავლისათვის და  $x$  და  $u$  მიხედვით გლუვი  $f(x, u)$  ფუნქციისათვის, შეიძლება მივიღოთ გაწრფივებული აუცილებელი პირობა.

თეორემა 9.10. იმისათვის, რომ მართვა  $u^* \in U$  იყოს ოპტიმალური, აუცილებელია, რომ

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \max_{\omega \in \Phi(x^*(\tau))} \int_0^T \left( \frac{\partial H(x^*(\tau), u^*(\tau), \Psi_\omega(\tau), \tau)}{\partial u}, u(\tau) - u^*(\tau) \right) d\tau + \min_{\omega \in \Phi(x^*(\tau))} \int_0^T \frac{\partial H(x^*(\tau), u^*(\tau), \Psi_\omega(\tau), \tau)}{\partial \omega}, u(\tau) - u^*(\tau) d\tau \right\} = 0. \quad (9.229)$$

თუ  $\Phi$  — გლუვი ფუნქციაა, მაშინ (9.227), (9.228) პირობები ექვივალენტურია. არაგლუვ შემთხვევაში (9.228) შეიძლება აღმოჩნდეს უფრო "ძლიერი".

მაგალითი 9.6.  
განვიხილოთ სისტემა

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(1)} &= U, \\ \dot{x}^{(2)} &= -x^{(1)} + U, \end{aligned}$$

საწყისი პირობით

$$\begin{aligned} x^{(1)}(0) &= x^{(2)}(0) = 0, \\ x &= (x^{(1)}, x^{(2)}) \in R^2, \\ U &\in R'. \end{aligned}$$

მოცემულია ფუნქციონალი

$$I[u] = \Phi(x(1, u)) = |\sin x^{(1)}(1, u)| - |\sin x^{(2)}(1, u)|,$$

ვიპოვოთ  $\Phi$  ფუნქციის კვაზილიფერენტიალი  $x_0 = (0, 0) = 0$  წერტილში

$$\Phi(x) = |\sin x^{(1)}| - |\sin x^{(2)}|,$$

$$\begin{aligned} D\Phi(x_0) &= [C0\{(\cos \theta; 0), (-\cos 0; 0)\}; C0\{(0; \cos 0), (0; -\cos 0)\}] = \\ &= [C0\{(1, 0), (-1, 0)\}; C0\{(0, 1), (0, -1)\}] \end{aligned}$$

ვთქვათ,  $V = [-1, 1]$  ავიღოთ  $\tilde{u}(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$ , მაშინ  
 $\tilde{x}(t) = x(t, \tilde{u}) = (0, 0) \quad \forall t \in [0, 1]$   
 $I[\tilde{U}] = 0.$

$\Psi_g$  და  $\Psi_\omega$  ფუნქციები (9.223) და (9.225) გათვალისწინებით აკმაყოფილებენ პირობას

$$\begin{cases} \dot{\Psi}^{(1)} = 2x^{(1)}\Psi^{(2)}, \\ \dot{\Psi}^{(2)} = 0. \end{cases}$$

ამიტომ  $\Psi_g(\theta) = (g^{(1)}, g^{(2)})$ ,

$$\Psi_\omega(\theta) = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}) \quad \forall \theta \in [0,1].$$

გვეჩვენება

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}, \Psi_g, \theta) = H(\tilde{x}, \tilde{u}, \Psi_\omega, \theta) = 0 \quad \forall (\theta) \in [0,1],$$

$$H(\tilde{x}, u, \Psi_g, \theta) = g^{(1)}u + g^{(2)}u^2, \quad (9.230)$$

$$H(\tilde{x}, u, \Psi_\omega, \theta) = \omega^{(1)}u + \omega^{(2)}u^2,$$

პირველად შევამოწმოთ (9.227) პირობა

$$\max_{g \in \Phi(0)} (g^{(1)}y + g^{(2)}y^2) + \min_{\omega \in \Phi(0)} (\omega^{(1)}y + \omega^{(2)}y^2) =$$

$$\max\{-y, y\} + \min\{-y^2, y^2\} = |y| - y^2 \geq 0 \quad \forall y \in [-1,1], \quad \forall \theta \in [0,1],$$

ე.ი. (32) პირობა სრულდება.

ახლა შევამოწმოთ (9.229) პირობა. (9.230)-დან გამომდინარეობს

$$\frac{\partial H(\tilde{X}, \tilde{u}, \Psi_g, \theta)}{\partial u} = g^{(1)},$$

$$\frac{\partial H(\tilde{X}, \tilde{u}, \Psi_\omega, \theta)}{\partial u} = \omega^{(1)},$$

$$\max_{g \in \Phi(0)} \int_0^1 g^{(1)}u(\theta) d\theta + \min_{\omega \in \Phi(0)} \int_0^1 \omega^{(1)}u(\theta) d\theta =$$

$$\max \left\{ \int_0^1 u(\theta) d\theta, - \int_0^1 u(\theta) d\theta \right\} = \left| \int_0^1 U(\theta) d\theta \right| \geq 0 \quad \forall u \in U,$$

ე.ი. (9.229) პირობა სრულდება. ვაჩვენოთ, რომ (9.228) პირობა არ სრულდება. ავიღოთ

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1/2] \\ -1 & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

მაშინ

$$\begin{aligned} & \inf_{u \in U} \left\{ \max_{\vartheta \in \Phi(0)} \int_0^1 (\vartheta^{(1)} u(\theta) + \vartheta^{(2)} u^2(\theta)) d\theta + \min_{\omega \in \Phi(0)} \int_0^1 (\omega^{(1)} u(\theta) + \right. \\ & \left. + \omega^{(2)} u^2(\theta)) d\theta \right\} \leq \max_{\vartheta \in \Phi(0)} \int_0^1 (\vartheta^{(1)} u(\theta) + \vartheta^{(2)} u^{-2}(\theta)) d\theta + \\ & + \min_{\omega \in \Phi(0)} \int_0^1 (\omega^{(1)} \bar{u}(\theta) + \omega^{(2)} u^{-2}(\theta)) d\theta = \max \left\{ \int_0^1 \bar{u}(\theta) d\theta, - \right. \\ & \left. - \int_0^1 \bar{U}(\theta) d\theta \right\} + \min \left\{ \int_0^1 \bar{U}^2(\theta) d\theta, - \int_0^1 \bar{u}^2(\theta) d\theta \right\} = \\ & = \left| \int_0^1 \bar{u}(\theta) d\theta \right| - \int_0^1 \bar{U}^2(\theta) d\theta = -1 < 0, \end{aligned}$$

ე.ი. პირობა (9.228) არ სრულდება. ამრიგად, (9.228) პირობის საშუალებით ჩვენ შევძელით დაგვედგინა, რომ  $\bar{U}$  მართვა არ არის ოპტიმალური, იმ დროს, როდესაც (9.227) და (9.229) პირობებით ეს ვერ შევძელით.

§ 9.11. ოპტიმალური მართვის არაგლუვი ამოცანის გადაწყვეტა კლარკის სუბდიფერენციალის საშუალებით

არაგლუვ ოპტიმიზაციას საფუძვლად უდევს არაგლუვი ანალიზი. არაგლუვ ანალიზს საქმე აქვს ფუნქციებთან, რომლებიც არადიფერენცირებადია ჩვეულებრივი გაგებით და სათავეები უნდა ვეძებოთ ამოზნექილ ანალიზში. სახელდობრ, ამოზნექილი ფუნქციებისათვის იქნა შემოტანილი განზოგადოებული გრადიენტის ან სუბგრადიენტის ცნება და განიხილებოდა სუბდიფერენციალი, როგორც სუბგრადიენტების სიმ-

რავლე. ამ ცნებებმა ფუნდამენტალური როლი ითამაშეს ოპტიმიზაციის ბევრ ამოცანაში, რომლებშიც გამოიყენება ამოზნექილი ფუნქციები [38], [48], [140].

ფკლარკის ნაშრომებში გრადიენტის და სუბდიფერენციალის ცნება შემოტანილია ნებისმიერი ლოკალური ლიპშიცი-სებური ფუნქციებისათვის. მიუხედავად ამ თეორიის სიახლისა იგი მრავალმხრივ გამოყენებას ჰპოვებს სადაც კი გვხვდება არაგლუვი ფუნქციები. აღსანიშნავია კლარკის თეორიით მაქსიმუმის პრინციპის განზოგადება სისტემებისათვის, რომლებიც აღიწერებიან არაგლუვი დიფერენციალური განტოლებებით. კიდევ ერთხელ შევჩერდეთ ოპტიმალური მართვის და ვარიაციული აღრიცხვის ძირითად ამოცანებზე.

ჩამოვაყალიბოთ ვარიაციული აღრიცხვის ძირითადი ამოცანა: რომელიდაც  $x$  ფუნქციების სიმრავლეზე, რომლებიც ასახავენ  $[a, b]$  მონაკვეთს  $R^n$ -ში, ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციონალის მინიმუმი

$$I = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt. \quad (9.231)$$

ვარიაციული აღრიცხვის განვითარების სამასწლოვან ისტორიაში ძირითადი დაშვება მდგომარეობდა  $L$  ფუნქციის სიგლუვეში (მოთხოვნა იყო მისი მეოთხე რიგის კერძო წარმოებულის არსებობაში). ვარიაციული აღრიცხვის ფართოდ ცნობილი ფიქსირებული ბოლოების ამოცანაში, იგულისხმება, რომ დასაშვები  $x$  ფუნქციები უნდა აკმაყოფილებდნენ პირობებს  $x(a) = x_0$  და  $x(b) = x_1$ , სადაც  $x_0$  და  $x_1$  წინასწარ მოცემულია.

ვარიაციული აღრიცხვის შემდეგი კლასიკური ამოცანაა ბოლცის ამოცანა, რომელშიც მიზნის ფუნქციას აქვს სახე

$$I = \ell(x(a), x(b)) + \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt. \quad (9.232)$$

გუწოდოთ მრუდი, აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას რომელიც ასახავს  $[a, b]$  მონაკვეთის  $R^n$ -ში. პირველ პარადიგმად განვიხილოთ (9.232) მრუდეებზე ფუნქციონალის მინიმუმის მოძებნის ამოცანა. ეს აღენიშნოთ როგორც  $P_b$  ამოცანა.

$P_b$  ამოცანა გაცილებით ფართოა ვიდრე ბოლცის კლასიკური ამოცანა, ვინაიდან  $\ell$  და  $L$  ფუნქციებმა შეიძლება მიიღონ  $+$  და  $-$  მნიშვნელობა. მაგალითად,  $\ell$  განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$\ell(u, \varphi) = \begin{cases} 0, & u = x_0, \varphi = x_1, \\ -\infty & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში.} \end{cases} \quad (9.233)$$

მაშინ (9.232) ფუნქციონალის მინიმიზაცია ეკვივალენტურია (9.231) ფუნქციონალის მინიმიზაციისა,  $x(a) = x_0$ ,  $x(b) = x_1$  შეზღუდვების გათვალისწინებით. ამრიგად, ამოცანა ფიქსირებული ბოლოებით არის  $P_b$ -ს კერძო შემთხვევა. ასევე განისაზღვრება  $L$  ფუნქცია, შემდეგი შეზღუდვების გათვალისწინებით

$$g(x(t), \dot{x}(t)) \leq 0, \quad a \leq t \leq b. \quad (9.234)$$

ოპტიმალური მართვის მეორე პარადიგმა ჩამოყალიბდა ჩვენი საუკუნის 40-50 წლებში. ვთქვათ ტერმინი „მართვა“ შეესაბამება ნებისმიერ  $u(t)$  ფუნქციას რომელიც მოცემულია იმ კლასის ფუნქციებიდან, რომლებიც ასახავენ  $[a, b]$  მონაკვეთს მოცემულ  $u \subset R^m$  სიმრავლეში. ყოველ  $u$  მართვასთან დაკავშირებულია რომელიღაც  $x$  მრუდი (ე.წ. ტრაექტორია), ამონახსნი შემდეგი დიფერენციალური განტოლებისა:

$$\dot{x}(t) = \varphi(x(t), u(t)), \quad x(a) = x_0. \quad (9.235)$$

სადაც  $\varphi$  ფუნქცია მოცემულია, ხოლო საწყისი  $x_0$  წერტილი ნებისმიერად ამოირჩევა მოცემული  $C_0$  სიმრავლიდან.  $P_c$  ამოცანა მდგომარეობს  $u$  მართვის და  $x_0$  წერტილის მოძებნაში (მაშასადამე,  $x$  ტრაექტორიისაც), რომლებიც ანიჭებენ მინიმუმს ფუნქციონალს

$$I = f(x(b)) + \int_a^b F(x(t), u(t)) dt \quad (9.236)$$

და ისეთებიც, რომ  $x(b)$  მოთავსებულია მოცემულ  $C_1$  სიმრავლეში.

ბევრი ფიზიკური სისტემები აღიწერებიან დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით. ასეთი მოდელები შეესაბამებიან (9.235) განტოლებას და ამით აიხსნება ოპტიმალური მართვის ამოცანების ფართო გამოყენება.

ფორმალური მათემატიკური თვალსაზრისით კლასიკური ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანები წარმოადგენენ ოპტიმალური მართვის კერძო ამოცანებს. მაგალითად, (9.231) ფუნქციონალის მინიმიზაცია ფიქსირებული ბოლოებით  $x(a) = x_0$ ,  $x(b) = x_1$  წარმოადგენს  $P_c$  ამოცანის კერძო შემთხვევას, რომლისთვისაც

$$\varphi(x, u) \equiv U, \quad U \in R^n, \quad F = L, \quad C_0\{X_0\}, \quad C_1 = \{X_1\}, \quad f \equiv 0 \quad (9.237)$$

და პირიქით, ოპტიმალური მართვის ბევრი ამოცანები შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ, როგორც ვარიაციული აღრიცხვის ჩვეულებრივი ამოცანები შეზღუდვების გათვალისწინებით.

პირველი შეხედვით თითქოს ჩანს, რომ ოპტიმალური მართვის თეორია წარმოადგენს ვარიაციული აღრიცხვის თანამედროვე ინტერპრეტაციას. სინამდვილეში ეს ასე არ არის. არსებობს არსებითი განსხვავება ოპტიმალური მართვის და ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანების ჩამოყალიბებაში. ფკლარკის აზრით კლასიკურ ვარიაციულ აღრიცხვაში ოპტიმალური მართვის თეორიისათვის დაშვება სიგლუვის შესახებ არ არის მისაღები. კერძოდ, ამ ორ თეორიას შორის კავშირის დამყარებაში ფუნდამენტალურ როლს თამაშობს არადიფერენცირებადობა.

ეხლა შევჩერდეთ რა ურთიერთ დამოკიდებულებაშია  $P_B$ ,  $P_c$  და  $P_D$  ამოცანები.

მაგალითად,  $P_D$  ამოცანა შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც  $P_B$  კერძო შემთხვევა. საჭიროა შესაბამისად განისაზღვროს  $\ell$  და  $L$  ფუნქციები:

$$\ell(u, \vartheta) = \begin{cases} f(\vartheta) & u \in C_0, \quad \vartheta \in C_1, \\ -\infty & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში.} \end{cases} \quad (9.238)$$

$$L(s, \vartheta) = \begin{cases} 0 & \vartheta \in F(s), \\ +\infty & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში.} \end{cases} \quad (9.239)$$



$$P_C \subset P_D \subset P_B.$$

მრავალნიშნა ასახვა  $R^n$ -დან  $R^n$ -ში ეწოდება ასახვას, რომელიც ყოველ  $x \in R^n$  უყენებს შესაბამისად  $F(x) \in R^n$  სიმრავლეს. ვთქვათ მოცემულია  $F$  მრავალნიშნა ასახვა, ორი სიმრავლე  $C_0$  და  $C_1$   $R^n$ -ში და  $f$  ფუნქცია განსაზღვრული  $R^n$ -ში.  $P_D$  ამოცანა მდგომარეობს  $f(x(b))$  ფუნქციონალის მინიმუმის მოძებნაში ყველა მრუდეების სიმრავლეზე, რომლებიც აკმაყოფილებენ შეზღუდვებს

$$\dot{x}(t) \equiv F(x(t)) \quad a \leq t \leq b \quad x(a) \in C_0, \quad x(b) \in C_1 \quad (9.240)$$

(9.240) ჩართვას უწოდებენ დიფერენციალურ ჩართვას.

$P_D$  ამოცანაში მიზნის ფუნქცია ცხადად არის დამოკიდებული მხოლოდ მრუდის მარჯენა  $x(b)$  ბოლოზე.  $P_C$  ამოცანა წარმოადგენს  $P_B$  და  $P_D$  ამოცანიების ჰიბრიდს.

ოცნა ზევით ჩვენ განვიხილეთ ელექტრული წრედის მაგალითი, რომელიც ხასიათდება არაგლუვი დინამიკით. ამ სისტემის აღმწერ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$\dot{x} = \begin{cases} \alpha (u - x), & x \leq U, \\ -\beta, & x \geq U, \end{cases} \quad (9.241)$$

სადაც  $\alpha, \beta$  დადებითი მუდმივებია. ( $\alpha > \beta$ )—ძაბვაა კონდენსატორზე. უნდა ავიჩიოთ  $[0, T]$  მონაკვეთზე  $u(\cdot)$  მართვა,

ისეთნაირად, რომ მოხდეს  $\frac{1}{2} \int_0^T u(t)^2 dt$  მინიმიზაცია და

სასაზღვრო პირობების შესრულება

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \quad (9.242)$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ არაგლუვი ამოცანა შეიძლება განვიხილოთ როგორც პონტრიაგინის ამოცანის კერძო შემთხვევა, ან როგორც ბოლცის ამოცანის კერძო შემთხვევა.

თუ (9.241) ამოცანას ამოვხსნით  $u$ -ს მიმართ შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ საწყისი ამოცანა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ბოლცის ამოცანა, თუ განისაზღვრება

$$L(x, \vartheta) = \begin{cases} \frac{(x + \vartheta/\alpha)^2}{2}, & \vartheta \geq 0, \\ \frac{(x + \vartheta/\beta)^2}{2}, & \vartheta \leq 0. \end{cases} \quad (9.243)$$

$$\ell(s_0, s_1) = \begin{cases} 0 & s_0 = X_0, \quad S_1 = x_T. \\ +\infty & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში.} \end{cases} \quad (9.244)$$

შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1.  $L$  ფუნქცია  $\zeta xB$ -ზომადია,
2.  $\ell$  ფუნქცია ქვევიდან ნახევრად უწყვეტია,
3.  $L(t, \dots)$  ნახევრად უწყვეტია ქვევიდან ყველა

$t \in [a, b]$ .

აქედან გამომდინარეობს, რომ მრავალნიშნა ასახვა

$$F(t, x) = \text{epi } L(t, x)$$

ზომადია  $t$  მიხედვით.

გამოვიყენოთ ჰამილტონიანი

$$H(x, p) = \max_{\theta} \{ P\theta - L(x, \vartheta) \} \quad (9.245)$$

$\vartheta$  მნიშვნელობა, რომლისათვისაც მიიღწევა (9.245) მაქსიმუმი, აკმაყოფილებს პირობას  $P \in \theta \nu L(x, \theta)$ . გამოვიყენოთ თეორემა [48].

თეორემა 9.11. ვთქვათ,  $f$ -ლიპშიცის ფუნქციაა  $x$  გარემოში და ლებეგის 0 ზომის  $S$  ნებისმიერი სიმრავლე  $R^n$ -ში. მაშინ

$$\partial f(x) = C0 \{ \lim \nabla f(x_i) : x_i \rightarrow x, x_i \notin S, x_i \in \Omega; \}. \quad (9.246)$$

(9.246) ტოლობის არსი შემდეგშია: განვიხილოთ ნებისმიერი  $x_i$  თანმიმდევრობები, კრებადი  $x$ -კენ, რომლებიც არ შედიან  $S$ -ში და არადიფერენცირებადი ფუნქციების  $f$  ფუნქციების წერტილების სიმრავლეში, ისეთებში, რომ  $\nabla f(x_i)$

თანმიმდევრობები კრებადია. მაშინ ასეთი ზღვრების ამოზნე-  
ქილი გარსი არის  $\partial f(x)$ .

ამ თეორემის თანახმად მივიღებთ

$$\partial_{\theta} L(x, \theta) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{\alpha} \left( x + \frac{\theta}{\alpha} \right) \right\}, & \theta > 0; \\ \left\{ \frac{1}{\beta} \left( x + \frac{\theta}{\beta} \right) \right\}, & \theta < 0; \\ \left\{ t x : \frac{1}{\alpha} \leq t \leq \frac{1}{\beta} \right\}, & \theta = 0; \end{cases}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ  $\theta$  აკმაყოფილებს პირობებს  
 $\theta = \alpha (\alpha p - x)$ , როდესაც  $\alpha p > x$ ;  $\theta = \beta (\beta p - x)$ ,  
როდესაც  $\beta p < x$ ;  $\theta = 0$ , როდესაც  $x \in [\beta p, \alpha p]$ .

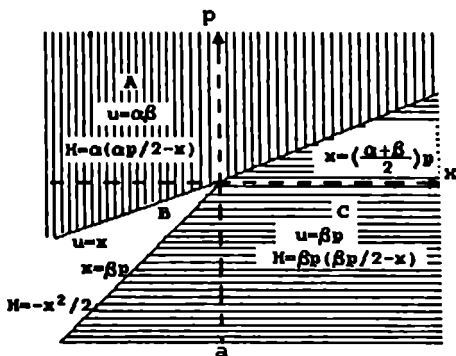
ეხლა გამოვითვალოთ  $H$

$$H(x, p) = \alpha p \left( \frac{\alpha p}{2} - x \right),$$

თუ  $x \leq \min(\alpha p, 0)$  ან  $0 \leq x \leq \frac{\alpha + \beta}{3} p$

$$H(x, p) = -\frac{X^2}{2} \quad \text{თუ} \quad \alpha p \leq x \leq \beta p \leq 0.$$

$H(x, p) = \beta p \left( \frac{\beta p}{2} - X \right)$  ყველა დანარჩენ შემთხვევაში ყე-  
ლა ჩამოთვლილი არეები აღინიშნება  $A, B$  და  $C$ .



ნახ.9.25.

მაგალითი 9.7.

ახლა განვიხილოთ მაგალითი როგორც  $P_c$  ამოცანა.  
(9.241) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\dot{x} = \varphi(x, u),$$

სადაც

$$\varphi(x, u) = \max\{\alpha(u-x), \beta(u-x)\}.$$

$u$  მართვის ფუნქციის მნიშვნელობა შეესაბამება ნამდვილ რიცხვებს. ვუშვებთ, რომ

$$F(t, x, u) = U^2/2, \quad f \equiv 0.$$

$H_p$  კსევილოპამილტონიანს აქვს სახე

$$H_p(t, x, p, u, \lambda) = P \max\{\alpha(u-x), \beta(u-x)\} - \lambda \frac{u^2}{2}.$$

ამოცანაში არ არის მხედველობაში მიღებული ფაზური შეზღუდვები, ამიტომ  $g \equiv -1$ .  $x$  ლოკალური მნიშვნელობის განხილვისათვის უნდა განისაზღვროს

$$g(t, s) = |s - x(t)| - \varepsilon.$$

$H$  ფუნქცია ისეთია, რომ  $A, B, C$  არეების შიგნით დიფერენციალური ჩართვები დადის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებზე, რომელთა ამონახსნები მდებარეობენ  $H$  დონის ხაზებზე (ნახ.9.26). უნდა ითქვას, რომ  $(x, p)$  კამილ-

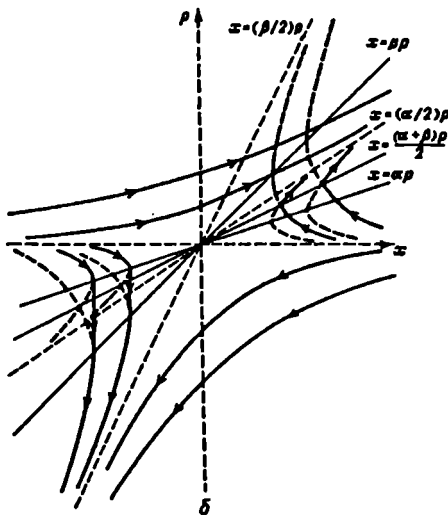
ტონის ჩართვები ტრაექტორიები ერთი არედან მეორეში გადასვლისას არ "ჩერდებიან" საზღვრებზე.

ახლა განვიხილოთ პონტრიაგინის პრინციპის საშუალებით მიღებული აუცილებელი პირობა. ის გარემოება, რომ  $u$  საშუალებით მიიღწევა  $\omega \rightarrow H_p(x, p, \omega, \lambda)$  ფუნქციის მაქსიმუმი  $U$ -ზე, ნიშნავს, რომ  $\lambda = 1$ , ან წინააღმდეგ შემთხვევაში  $p$  იგივეურად ნულის ტოლია  $\lambda$  ერთად, რაც ეწინააღმდეგება ნორმირების პირობას. ამრიგად,  $u$  მაქსიმუმის ადგილას უკეთეს ფუნქციას

$$P \max \{ \alpha (\omega - x), \beta (\omega - x) \} - \frac{\omega^2}{2}.$$

ადვილი შესამოწმებელია ასეთი მაქსიმუმის პირობები  $u$  მოცემულია თანათარღობებით

- |                |          |
|----------------|----------|
| $u = \alpha p$ | A შიგნით |
| $u = \beta p$  | B შიგნით |
| $u = x$        | C შიგნით |



ნახ.9.26

შეუღლებულ განტოლებას ამ შემთხვევაში აქვს სახე  

$$-\dot{P} \in p \partial_x \max\{\alpha(u-x), \beta(u-x)\}.$$

ამიტომ  $B$  არეში

$$\dot{P} = \alpha P \quad u > 0,$$

$$\dot{P} = \beta P \quad u < X,$$

$$\dot{P} \in [\alpha P, \beta P], \quad U = X.$$

ამრიგად, პონტრაგინის პრინციპი ამტკიცებს, რომ  $B$  არის  $\dot{P} \in [\alpha P, \beta P]$  შიგნით, განსხვავებით  $\dot{P} = x$  განტოლებისა, რომელიც მიღებული იყო ბოლცის ამოცანიდან. მისი გამოყენება არ იძლევა საშუალებას ცალსახად განვსაზღვროთ  $P$  (და მაშასადამე  $x$ -იც).

### § 9.12. ოპტიმიზაციის დინამიკური ამოცანების გადაწყვეტა $\psi$ -გარდაქმნის მეთოდით

სტატისკური ამოცანებისაგან განსხვავებით დინამიკური ამოცანები განსაზღვრულია ფუნქციონალურ სივრცეში. ასეთ შემთხვევაში ოპტიმიზაციის ამოცანა მდგომარეობს ისეთ  $u(t)$  ფუნქციის მოძებნაში, რომლის დროსაც რალაც ფუნქციონალი

$$J = \int_0^T f[y(t), \dot{y}(t), u(t)] dt \quad (9.246)$$

თავის ექსტრემალურ მნიშვნელობას აღწევს და ამავე დროს კმაყოფილდება შემდეგი სახის შეზღუდვები

$$\dot{y}(t) = \Phi[y(t), u(t)] \quad (9.247)$$

$$\varphi[y(t), u(t)] = 0.$$

აღნიშნული სახის ამოცანები შესაძლებელია გადაწყვეტილ იქნას  $\psi$ -გარდაქმნის მეთოდით, თუ  $u(t)$  ფუნქციებს უსასრულოგანზომილებიანი სივრცის წერტილებად წარმოვადგენთ [100].

საოპტიმიზაციო ფუნქციონალი შეიძლება იყოს როგორც წრფივი, ასევე არაწრფივი, დიფერენცირებადი ან არადიფერ-

რენცირებადი; გლობალური ექსტრემუმის წერტილი შეიძლება მდებარეობდეს დასაშვები არეს შიგნით ან მის საზღვარზე. ასეთი ამოცანების  $\psi$ -გარდაქმნის მეთოდით გადასაწყვეტად საჭიროა მხოლოდ, რომ  $J$  ფუნქციონალი იყოს შემოსაზღვრული, ხოლო  $u(t)$  ფუნქცია-უწყვეტი.

რადგან  $u(t)$  უწყვეტი ფუნქციაა, ამიტომ იგი შეიძლება აპროქსიმირებულ იქნას უბან-უბან მუდმივი ფუნქციით, რისთვისაც საჭიროა განვხორციელოთ ოპტიმიზაციის დინამიკური ამოცანის დისკრეტიზაცია ან, რაც იგივეა,  $[0, t_f]$  მონაკვეთი  $N$  ტოლი ნაწილად უნდა დავყოთ და  $u(t)$  ფუნქცია  $(u_1, u_2, \dots, u_N)$  ვექტორის სახით წარმოვადგინოთ. მაშინ გვექნება

$$J = J(u_{11}, u_{21}, \dots, u_{N1}; u_{12}, u_{22}, \dots, u_{N2}; u_{1m}, u_{2m}, \dots, u_{Nm}) .$$

ამგვარად,  $u^*(t)$  ფუნქციის განსაზღვრის ამოცანა, რომლის დროსაც  $J[u(t)]$  თავის ექსტრემალურ მნიშვნელობას აღწევს, დაიყვანება  $N$  განზომილებიან სივრცეში შესაბამისი პარამეტრების განსაზღვრის ამოცანაზე.

$u_j (j = 1, 2, \dots, N)$  მნიშვნელობები შეესაბამებიან  $u(t)$  ფუნქციის მნიშვნელობებს დროის  $t_j$  მომენტში. ამიტომ ოპტიმიზაციის სტატიკური ამოცანებისაგან განსხვავებით, რომლებიც  $\psi$ -მეთოდით ამოიხსნებიან,  $u_j$  მნიშვნელობების საოპტიმიზაციო  $J$  ფუნქციალში ჩასმა ხორციელდება არა ერთდროულად, არამედ თანდათანობით: ჯერ ჩაისმება  $u_1$ , შემდეგ  $u_2$  და ა.შ. ორ მეზობელ  $u_j$  და  $u_{j+1}$  მნიშვნელობებს შორის დროის ინტერვალი უნდა შეესაბამებოდეს დროის შერჩეულ მასშტაბში  $[0, t_f]$  ინტერვალის დისკრეტიზაციის ბიჯს. ამგვარად, (9.246) და (9.247) გამოსახულებაში თავდაპირველად ჩაისმება

$$\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{m1} \end{bmatrix}$$

ვექტორ-სვეტი,

შემდეგ

$$\begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{m2} \end{bmatrix}$$

და ა.შ.

$J$  ფუნქციონალი,  $u(t)$  ფუნქციის გარდა, დამოკიდებუ-  
ლია აგრეთვე  $y(t)$  სიდიდეზე, რომელიც  $u$ -სთან დინამიკის  
(9.247) განტოლებითაა დაკავშირებული. ამგვარად, ოპტიმიზა-  
ციის ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს: საჭიროა განი-  
საზღვროს ისეთი  $u^*(t)$  ფუნქცია, რომლის დროსაც

$J = J[y(t), u(t), t]$  ფუნქციონალი თავის ექსტრემალურ მნიშ-  
ვნელობას აღწევს და ადგილი აქვს სისტემის დინამიკის  
განტოლების დაკმაყოფილებას

$$\dot{y}(t) = \Phi[y(t), u(t), t], \quad (9.248)$$

სადაც  $y(t)$  ვექტორია, რომლის განზომილება  $u(t)$  ვექ-  
ტორის განზომილებას შეიძლება არ დაემთხვეს.

საკითხის ამგვარი სახით დასმა ექვივალენტურია ტოლო-  
ბის სახით მოცემული შეზღუდვების შემოტანისა, რომელიც  
(9.248) თანაფარდობით განისაზღვრება. ასეთ შემთხვევაში გა-  
მოთვლები რთულდება იმით, რომ  $u(t)$  ფუნქციის შერჩევის  
შემდეგ, (9.248) გამოსახულების თანახმად აუცილებელია  
 $y(t)$ -ს განსაზღვრა, ხოლო შემდეგ  $J = J[y(t), u(t), t]$  ფუნ-  
ქციონალის გამოთვლა.

პრაქტიკული მნიშვნელობის მრავალ ამოცანაში შესაძლებე-  
ლია აგრეთვე სხვა დამატებითი შეზღუდვების არსებობაც,  
რომლებიც გამოთვლების თვალსაზრისით არსებითად კიდევ  
უფრო რთულდებიან დასმულ ამოცანას. მსგავსი ამოცანების  
 $\psi$  გარდაქმნის მეთოდით გადაწყვეტისას აუცილებელია  $u$ -ს  
შერჩევა განვახორციელოთ დასაშვებ ამონახსნების არეღან  
 $\bar{u} \subset u$ , რომელიც შეზღუდვების მოცემული სისტემით არის



განსაზღვრული. ზოგიერთ შემთხვევაში  $\bar{u}$  ქვესიმრავლე შედარებით პარტიულად განსაზღვრება. იმ შემთხვევაში, როცა  $\bar{u}$  ქვესიმრავლის განსაზღვრა შეუძლებელია, საჭიროა სტატისტიკური ცვლადების რაოდენობის გაზრდა და მხოლოდ იმ მნიშვნელობების გათვალისწინება, რომლის დროსაც კმაყოფილება მოცემული შეზღუდვები.

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნულ, ოპტიმიზაციის დინამიკური ამოცანების  $\psi$ -გარდაქმნის მეთოდით გადაწყვეტა ითვალისწინებს ამოცანის დისკრეტიზაციას, რის შედეგადაც დიფერენციალურ განტოლებათა (9.248) სისტემა სხავობიან განტოლებათა სისტემით შეიცვლება. რასაკვირველია, აქ არაერთარ უზერხულობას ადგილი არა აქვს, ვინაიდან ელექტრონულ-გამომთვლელ მანქანაზე ნებისმიერი დინამიკური ამოცანა მხოლოდ ასეთი გზით ამოიხსნება.

ჩვენს შემთხვევაში ვექტორული  $u(t)$  ფუნქცია უნდა წარმოვადგინოთ მატრიცის სახით:

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1N} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2N} \\ \cdot & & & \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mN} \end{bmatrix} \quad (9.249)$$

$\psi(\zeta)$  ფუნქციის ასაგებად საჭირო ყველა აუცილებელი

გამოთვლა სრულდება  $\begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{mj} \end{bmatrix}$  ვექტორის შემთხვევით შერჩე-

ვის გზით დროის ყველა  $t$ , მნიშვნელობისათვის. შემდეგ

$$\begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{mj} \end{bmatrix}$$

( $j = 1, 2, \dots, N$ ) მიმდევრობის შესაბამისი მნიშვნელობები

შეიტანება (9.248) განტოლებათა სისტემაში და გამოითვლება

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

ვექტორი, რის შედეგადაც განისაზღვრება  $J$  ფუნ-

ქციონალის მნიშვნელობა.

შეზღუდვების  $\varphi_1(u) \leq c_1$  და  $\varphi_2(y) \leq c_2$  არსებობის შემთხვევაში საჭიროა ჩატარდეს სათანადო შემოწმება და  $\psi(\zeta)$  ფუნქციის განსაზღვრისათვის საჭირო გამოთვლებში გათვალისწინებულ უნდა იქნას მხოლოდ ის შემთხვევები, როცა აღნიშნული შეზღუდვები კმაყოფილდება.

$\psi(\zeta)$  და  $u(t)$  ფუნქციების მნიშვნელობების გამოთვლა დროის სხვადასხვა  $t_j$  მომენტში გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით

$$\psi(\zeta) = \int_{\bar{u}} \int \rho[\zeta, u] \theta(u) du, \quad (9.250)$$

$$\bar{u}(\zeta) = \frac{\int_{\bar{u}} \int u \rho[\zeta, u] \theta(u) du}{\int_{\bar{u}} \int \rho[\zeta, u] \theta(u) du}, \quad (9.251)$$

სადაც,  $\rho(\zeta, u) = |J[y(t), u(t), t] - \zeta|$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$

როგორც უკვე იყო აღნიშნული (9.250) მრავალჯერადი ინტეგრალი გამოითვლება მონტე-კარლოს მეთოდით:

$$\psi_\nu = \frac{\xi_\nu}{s} \quad (\nu = 1, 2, \dots, k), \quad (9.252)$$

სადაც  $s$  სტატიკური ცდების რიცხვია, ხოლო  $\xi_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, k$ )—იმ შემთხვევების რაოდენობაა, როცა ადგილი აქვს უტოლობას:

$$J = J[y(t), u(t), t] \geq \zeta_\nu \quad (9.253)$$

დროის  $t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) მომენტის შესაბამისი  $\bar{u}_j$  მნიშვნელობების განსაზღვრისათვის გამოყენება ფორმულები:

$$\bar{u}_j = \frac{\sum_{\nu} u_{j\nu}}{\xi_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, N) \quad (9.254)$$

სადაც  $u_{j\nu}$ —ის მნიშვნელობებია, როცა ადგილი აქვს (9.253) უტოლობას.

იმ შემთხვევაში, როცა  $u$  ვექტორული ფუნქციაა, გამოთვლითი ოპერაციების რიცხვი რამდენადმე იზრდება. ასე მაგალითად, თუ  $u(t)$  წარმოადგენს  $m$ -განზომილებიან ვექტორულ ფუნქციას, მაშინ  $N$  რაოდენობის აპროქსიმაციის ნაცვლად საჭიროა ჩაეტაროს  $mN$  რაოდენობის აპროქსიმაცია. ამ შემთხვევაში, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, შემთხვევითი  $(u_{11}, u_{21}, \dots, u_{m1})$  რიცხვების რეალიზაცია ერთდროულად უნდა განხორციელდეს, შემდეგ გამომუშავდება  $(u_{12}, u_{22}, \dots, u_{m2})$  შემთხვევითი რიცხვები და ა.შ.

მართვის ფუნქციის ოპტიმალური მნიშვნელობა  $u^*(t)$  გამოისახება შემდეგი მატრიცის სახით:

$$u^* = \begin{bmatrix} u^*_{11} & u^*_{12} & u^*_{1N} \\ u^*_{21} & u^*_{22} & u^*_{2N} \\ \dots & \dots & \dots \\ u^*_{m1} & u^*_{m2} & u^*_{mN} \end{bmatrix} \quad (9.255)$$

მატრიცას  $i$ -ური სტრიქონის ვექტორის ელემენტები წარმოადგენენ ზღვრულ წერტილებს  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m$  საშუალო მნიშვნელობებისაგან შედგენილი მიმდევრობებისა, რომლებიც (9.254) ფორმულებით განისაზღვრებიან. ზღვრული მნიშვნელობების გამოთვლა ხორციელდება  $u(\zeta)$  ფუნქციების პარაბოლური აპროქსიმაციისა და მასში გლობალური ექსტრემუმის  $\zeta^*$  მნიშვნელობის ჩასმის შედეგად. ეს უკანასკნელი კი  $\psi(\zeta)$  ფუნქციის აპროქსიმაციისა და ექსტრაპოლაციის შედეგად განისაზღვრება.

განვიხილოთ ოპტიმიზაციის წრფივი დინამიკური ამოცანა. სისტემა, რომლის ყოფაქცევა აღიწერება წრფივი დიფერენციალური განტოლებებით

$$\dot{y} = Ay + Bu \quad (9.256)$$

და რომელსაც შემდეგი სახის მიზნის ფუნქცია გააჩნია

$$J[y(t), u(t)] = \int_0^t dt, \quad (9.257)$$

ან

$$J[y(t), u(t)] = \int_0^t \left\{ [y(t) - y_b(t)]^2 + u^2(t) \right\} dt. \quad (9.258)$$

მიეკუთვნება წრფივი ოპტიმალური დინამიკური სისტემების კლასს.

(9.257) კრიტერიუმი შეესაბამება შემთხვევას, როცა გვაქვს ამოცანა სწრაფქმედების მიხედვით. ასეთი ამოცანა ითვალისწინებს მინიმალურ დროში სისტემის ერთი მდგომარეობიდან მეორე მდგომარეობაში გადაყვანას და ამ ამოცანის რეალიზაციისათვის მმართველ  $u^*(t)$  ფუნქციის მოძებნას.

წრფივი დინამიკური ამოცანების კლასს მიეკუთვნება მართვის მრავალი ამოცანა, სადაც საჭიროა სამართავი სიდიდის მნიშვნელობის შენარჩუნება მოცემულ დონეზე. ასეთი სისტემების მაგალითებია მიმყოლი (მეთვალყურე) სისტემები და სტაბილიზაციის სისტემები.

მაგალითის სახით განვიხილოთ თვითმფრინავის ავტომატური დაჭდომის პროცესი, რომელიც განხილულია ლიტერატურაში [167].

თვითმფრინავის უსაფრთხოდ დაჯდომის განხორციელება დაკავშირებულია ზოგიერთი ისეთი სიდიდის სტაბილურობაზე, რომლებიც დროის ფუნქციას წარმოადგენენ. ასეთი სიდიდეებია: თვითმფრინავის ფრენის სიმაღლე  $h(t)$ , დაშვების სიჩქარე  $\dot{h}(t)$ , ტანგაჟის კუთხე  $\theta(t)$  და მისი გაზომვის სიჩქარე  $\dot{\theta}(t)$ . თუ აღნიშნული სიდიდეების სასურველ მნიშვნელობებს მფრინავი ზუსტად შეინარჩუნებს, მაშინ უსაფრთხო დაჯდომა გარანტირებული იქნება, წინააღმდეგ შემთხვევაში კატასტროფა გარდუვალია. ძირითადად დაჯდომის პროცესი გარკვეული სიმაღლიდან იწყება (100 ფუტი). დაჯდომის დაწყების მომენტში თვითმფრინავს უნდა გააჩნდეს რაღაც საწყისი სიჩქარე. ეს და კიდევ სხვა სიდიდეები (როგორცაა ტანგაჟის კუთხე, მართვის საჭის გადახრის კუთხე და ა.შ.) წარმოადგენენ საწყის მნიშვნელობებს თვითმფრინავის დაჯდომის პროცესის აღმწერ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის.

თვითმფრინავის დაჯდომის ეტეპზე განიხილება მისი მოძრაობა მხოლოდ ვერტიკალურ სიბრტყეში, რადგან ითვლება, რომ ამ დროს მისი მხედველობის არეშია ასაფრენ-დასაჯდო-მი ზოლი და ჰორიზონტალურ სიბრტყეში არავითარ გადახრას ადგილი არ უნდა ჰქონდეს. თვითმფრინავის ზოგიერთი ტიპისათვის სიმაღლის სასურველი ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგი თანაფარდობით

$$h_0(t) = \begin{cases} 100,0e^{-t/5} & \text{როცა } 0 \leq t < 15, \\ 20 - t & \text{როცა } 15 \leq t \leq 20. \end{cases} \quad (9.259)$$

ხოლო დაშვების სიჩქარის სასურველი ფუნქცია—

$$h_0(t) = \begin{cases} -20e^{-t/5} & \text{როცა } 0 \leq t < 15, \\ -1 & \text{როცა } 15 \leq t \leq 20. \end{cases} \quad (9.260)$$

მიწასთან შეხების მომენტში ტანგაჟის კუთხე  $\theta$  უნდა იცვლებოდეს საზღვრებში

$$0^\circ \leq \theta \leq 10^\circ, \quad (9.261)$$

შეზღუდულია აგრეთვე თვითმფრინავის დაშვების კუთხე  $\alpha(t)$ , დაშვების კუთხის შემცირების სიჩქარე  $\dot{\alpha}^0(t)$  და სიმაღლის საჭის მდგომარეობა  $\delta(t)$

$$\alpha(t) \leq 18^\circ, \quad (9.262)$$

$$\dot{\alpha}(t) \leq 3,6^\circ, \quad (9.263)$$

$$-35^\circ \leq \delta(t) \leq 18^\circ \quad (9.264)$$

თვითმფრინავის დაშვების დროს მისი ფრენის დინამიკის განტოლებები აღიწერება შემდეგი თანაფარდობებით:

$$\begin{aligned} \frac{d^3\theta(t)}{dt^3} + 2\beta\omega \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega^2 \frac{d\theta(t)}{dt} = \\ = k\omega T \frac{d\theta(t)}{dt} + k\omega^2 \delta(t), \end{aligned} \quad (9.265)$$

$$T \frac{d^2h(t)}{dt^2} + \frac{dh(t)}{dt} = V\theta(t),$$

$$\frac{d^4h(t)}{dt^4} + 2\beta\omega \frac{d^3h(t)}{dt^3} + \omega^3 \frac{d^2h(t)}{dt^2} = kV\omega^2 \delta(t).$$

სადაც  $k_s$  გაძლიერების კოეფიციენტი,  $k_s = 0,95 \text{ წმ}^{-1}$ ,

$T_s$ —დროის მუდმივია,  $T_s = 2,5 \text{ წმ}^{-1}$ ,

$\omega_s$ —რეზონანსული სიხშირეა,  $\omega = 1 \text{ რად/წმ}$ .

$\beta$ —დემფირების კოეფიციენტი,  $\beta = 0,5$ .

ოპტიმალური დინამიკური სისტემებისათვის საოპტიმიზაციო ფუნქციონალის სახით განსაზღვრა მნიშვნელოვან პრობლემას წარმოადგენს. ჩვენს შემთხვევაში, იმის გამო, რომ საჭიროა ფრენის სიმაღლის  $h(t)$  და დაშვების სიჩქარის  $\dot{h}(t)$  გარკვეულ საზღვრებში შენარჩუნება, ხოლო თვითმფრინავის მართვა  $\delta(t)$  კანონით ხორციელდება, საოპტიმიზაციო ფუნქციონალს (რომელიც შეცდომის ფუნქციას წარმოადგენს) ეჭება სახე:

$$J[h(t), \dot{h}(t), \delta(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \gamma_1(t) [h_0(t) - h(t)]^2 + \right. \\ \left. + \gamma_{21}(t) [\dot{h}_0(t) - \dot{h}(t)]^2 + [\delta(t)]^2 \right\} dt. \quad (9.266)$$

ამგვარად, ამოცანა მდგომარეობს მართვის ისეთი  $\delta^*(t)$  კანონის განსაზღვრაში, რომლის დროსაც (9.266) გამოსახულებას მინიმალური მნიშვნელობა ექნება და ამავე დროს (9.261)–(9.264) დასმული ამოცანის დამაკმაყოფილებლად გადასაწყვეტად დროის  $[0, t_f]$  ინტერვალში დაიჭრება  $N$  ტონაწილად. თვითმფრინავის დინამიკური თვისებების გათვალისწინებით მიზანშეწონილია დავუშვათ  $N = 20$ . მოცემული ინტერვალის თითოეული ნაწილიდან (9.264) უტოლობის გათვალისწინებით შემთხვევით აირჩევა  $\delta$ -ს მნიშვნელობები. მიღებული მიმდევრობა  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{20}$  შეიტანება (9.265) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაში და განისაზღვრება  $h(t), \theta(t)$  და  $\alpha(t)$ . თუ მიღებული მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ (9.261) და (9.262) უტოლობებს, მაშინ გამოითვლება (9.266) ფუნქციონალი, წინააღმდეგ შემთხვევაში შეირჩევა  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{20}$  მიმდევრობის ახალი მნიშვნელობები და ა.შ.

ისევე, როგორც სტატიკური ამოცანების შემთხვევაში, გარკვეული  $\zeta$  რაოდენობის სტატიკური ცვლადების ჩატარების შედეგად განისაზღვრება  $\psi(\zeta)$  ფუნქცია, რომლის აპროქსიმაციისა და ექსტრაპოლაციის შედეგად დადგინდება ფუნქციონალის მინიმალური მნიშვნელობა  $\zeta^*$ , რომლის მახროქსიმირებელ პოლინომებში  $\bar{\delta}(\zeta)_1, \bar{\delta}(\zeta)_2, \dots, \bar{\delta}(\zeta)_{20}$  ჩასმის შედეგად განისაზღვრება მართვის საძიებელი მნიშვნელობები:  $\delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_{20}^*$ . მიღებული მიმდევრობების (9.265) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაში ჩასმის შედეგად გამოითვლება  $h^*(t), \dot{h}^*(t), \theta^*(t)$  და  $\alpha^*(t)$ , რომელთა საფუძველზეც განისაზღვრება საოპტიმიზაციო ფუნქციონალის საძიებლის მინიმალური მნიშვნელობა  $J^*[h^*(t), \dot{h}^*(t), \delta^*(t)]$ .

## თავი მეათე

### ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური

#### კონსტრუირების ამოცანა

##### § 10.1. ზოგადი ამოცანის დასმა

როგორც VIII თავში აღვნიშნეთ, ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანა ფაქტობრივად ოპტიმალური სისტემის სინთეზის ამოცანას წარმოადგენს და იგი განიხილება შემოთავაზებული მოძრაობის დროს.

განვიხილოთ შემოთავაზებული მოძრაობა, რომელიც (8.7) განტოლებათა სისტემით აღიწერება, ანუ მოცემული გვაქვს ობიექტი, რომელიც აღიწერება განტოლებათა შემდეგი სისტემით:

$$\dot{\eta}_k(t) = Y_k(\eta_1(t), \dots, \eta_n(t), \xi_1(t), \dots, \xi_r(t)), \quad k = 1, \dots, n. \quad (10.1)$$

ფუნქციები  $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)$  აღწერენ ობიექტის შემოთავაზებულ მდგომარეობას დროის ნებისმიერ ფიქსირებულ მომენტში, ხოლო ფუნქციები  $\xi_1(t), \dots, \xi_r(t)$  წარმოადგენენ მარეგულირებელ ზემოქმედებებს.

განტოლებათა სისტემა (10.1) განსაზღვრულია ღია არეში (ანუ  $\eta(t)$  და  $\xi(t)$  ფუნქციების მნიშვნელობები შეუზღუდავია) და დროის ინტერვალზე  $t \in [0, \infty]$ .

მოცემული გვაქვს სასაზღვრო პირობები  $\xi$ :

$$\begin{aligned} (i): \quad & \eta_\alpha(0) = \eta_{\alpha 0}, \quad \alpha = 1, \dots, n, \\ (f): \quad & \eta_\alpha(\infty) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (10.2)$$

სადაც  $\eta_{10}, \eta_{20}, \dots, \eta_{n0}$  ნებისმიერი ნამდვილი სასრულო რიცხვებია. ეს იმას ნიშნავს, რომ საწყის მომენტში ობიექტი შეიძლება იმყოფებოდეს  $\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t)$  კოორდინატების ფაზური სივრცის ნებისმიერ წერტილში, ხოლო პროცესის დასასრულს იგი აუცილებლად ნულოვან მდგომარეობაში უნდა მოხვდეს.

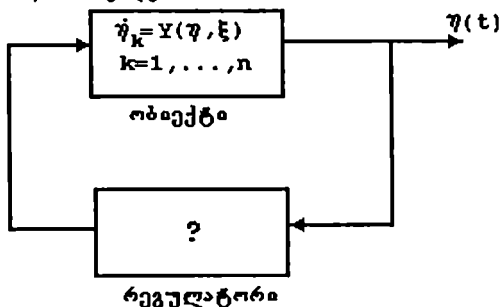


ობიექტის  $(i)$  საწყისი მდგომარეობიდან  $(f)$  საბოლოო მდგომარეობაში გადასვლის პროცესი შევაფასოთ ინტეგრალური კრიტერიუმით

$$I(\xi) = \int_0^{\infty} \omega(\eta_1(t), \dots, \eta_n(t), \xi_1(t), \dots, \xi_r(t)) dt, \quad (10.3),$$

რომელიც ფაქტობრივად გამოსახავს სისტემის რეალური მოძრაობის პროგრამული მოძრაობიდან გადახრის ინტეგრალურ ზომას. აქ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია  $\omega(\eta, \xi)$  ყოველთვის დადებითია და, აგრეთვე, გლუვია თავისი ცვლადების მიმართ.

ამოცანის მიზანია ვიპოვოთ რეგულირების კანონი, რომელიც უზრუნველყოფს სასურველ პროცესს. სქემატურად იგი ასე შეიძლება წარმოვიდგინოთ (ნახ.10.1)



ნახ.10.1

რეგულირების კანონს ვეძებთ ჩაკეტილი სახით, ანუ

$$\xi_\alpha = \xi_\alpha(\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)), \quad \alpha = 1, \dots, r. \quad (10.4)$$

ყოველივე ამის შემდეგ ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანა შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება: ვიპოვოთ ისეთი რეგულირების კანონი (10.4) ანალიზური სახით, რომ ობიექტის (10.1) განტოლებებთან ერთად ნებისმიერი სასრულო საწყისი მნიშვნელობების დროს იგი უზრუნველყოფს ისეთ გარდამავალ პროცესს, რომელიც დამთავრდება კოორდინატთა სათავეში და, ამავე დროს, (10.3) ფუნქციონალს მინიჭებებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

ასეთი ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას სხვადასხვა მეთოდით. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი და მოვიყვანოთ ამოხსნის პროცესის სქემა.

### § 10.2. ამოხსნა ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით

უწინარეს ყოვლისა დასმულ ამოცანას მივცეთ ლაგრანჟის ამოცანის სახე: ყველა უწყვეტ  $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t), \xi_1(t), \dots, \xi_r(t)$  ფუნქციებს შორის, რომლებსაც ასევე უწყვეტი წარმოებული გააჩნიათ (ანუ ეკუთვნიან  $C_1$  ფუნქციათა კლასს), განსაზღვრულნი არიან დროის მონაკვეთზე  $t \in [0, \infty]$ , აკმაყოფილებენ (10.2) სასაზღვრო პირობებს და კავშირის პირობებს

$$g_k(\eta(t), \dot{\eta}(t), \xi(t)) = \dot{\eta}_k - Y_k(\eta, \xi) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (10.5)$$

(ტოლობები (10.5) იგივეა, რაც (10.1)), ვიპოვოთ ისეთი ფუნქციები  $\eta_1^0(t), \dots, \eta_n^0(t), \xi_1^0(t), \dots, \xi_r^0(t)$ , რომლებიც (10.3) ფუნქციონალს მინიჭებენ მინიმალურ მნიშვნელობას.

გავიხსენოთ, რომ ფუნქციონალი (10.3) აქ განსაზღვრული არაა ყველა იმ წირებზე, რომლებიც (10.2) სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებენ, არამედ ამ წირებიდან მხოლოდ ისეთ წირებზე, რომლებიც, ამავე დროს, გარკვეულ მრავალსაბა ზედაპირს მიეკუთვნებიან, კერძოდ, წარმოადგენენ (10.1) განტოლებათა სისტემის ამონახსნებს.

როგორც ადრე იყო აღნიშნული, ლაგრანჟის ამოცანა ამოიხსნება შემდეგი თეორემის საფუძველზე: თუ დიფერენცირებადი წირი  $\{\eta_1^0(t), \dots, \eta_n^0(t), \xi_1^0(t), \dots, \xi_r^0(t)\}$ , რომელიც აკმაყოფილებს (10.2) პირობებს და (10.5) მრავალსაბა ზედაპირზე მდებარეობს, ანიჭებს პირობით ექსტრემუმს (10.3) ფუნქციონალს, მაშინ არსებობს ისეთი  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$  ფუნქციები, რომ იგივე წირი  $\{\eta_1^0(t), \dots, \eta_n^0(t), \xi_1^0(t), \dots, \xi_r^0(t)\}$ , ანიჭებს პირობით ექსტრემუმს ფუნქციონალს

$$\bar{I}(\xi) = \int_0^{\infty} \left[ \omega(\eta, \xi) + \sum_{k=1}^n \lambda_k(t) g_k(\eta, \dot{\eta}, \xi) \right] dt \quad (10.6)$$

უმარტივეს ვარიაციულ ამოცანაში  $\lambda_k(t)$  ფუნქციები ერთდროულად ნულის ტოლი არ შეიძლება იყოს). სხვა სიტყვებით, ლაგრანჟის ამოცანის ექსტრემალი ასევე ექსტრემალია უმარტივესი ვარიაციული ამოცანისა (10.6) ფუნქციონალით.

ისიც იყო აღრე აღნიშნული, რომ ეს თეორემა გვაძლევს ექსტრემუმის მხოლოდ აუცილებელ პირობას და ექსტრემალის ერთადერთობის შემთხვევაში საკმარის პირობადაც გადაიქცევა.

ახლა წარმოვადგინოთ ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანის ლაგრანჟის მეთოდით ამოხსნის სქემა:

1. აღნიშნოთ (10.6) ფუნქციონალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულება  $H$  ასოთი

$$H = \omega(\eta, \xi) + \sum_{k=1}^n \lambda_k(t) [\dot{\eta}_k - Y_k(\eta, \xi)];$$

2. გამოვთვალოთ კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = \frac{\partial \omega}{\partial \eta_k} - \sum_{\beta=1}^n \lambda_\beta \frac{\partial Y_\beta}{\partial \eta_k}, \quad (k=1, \dots, n),$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{\eta}_k} = \lambda_k, \quad (k=1, \dots, n),$$

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi_\alpha} - \sum_{\beta=1}^n \lambda_\beta \frac{\partial Y_\beta}{\partial \xi_\alpha}, \quad (\alpha=1, \dots, r),$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{\xi}_\alpha} = 0, \quad (\alpha=1, \dots, r);$$

3. შევადგინოთ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებები:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial \dot{\eta}_k} \right) - \frac{\partial H}{\partial \eta_k} = 0, \quad (k=1, \dots, n),$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial H}{\partial \dot{\xi}_\alpha} \right) - \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} = 0, \quad (\alpha=1, \dots, r),$$

და ჩავწეროთ ისინი მე-2 პუნქტის გამოსახულებების გამოყენებით. მივიღებთ

$$\dot{\lambda}_k + \sum_{\rho=1}^n \frac{\partial Y_{\rho}}{\partial \eta_k} \lambda_{\rho} - \frac{\partial \omega}{\partial \eta_k} = 0, \quad (k = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{\rho=1}^n \frac{\partial Y_{\rho}}{\partial \xi_{\alpha}} \lambda_{\rho} - \frac{\partial \omega}{\partial \xi_{\alpha}} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r);$$

4. მიღებული განტოლებები (10.1) განტოლებებთან ერთად ვარიაციული ამოცანის განტოლებებია და უნდა ამოიხსნას ერთობლივად.

ეს განტოლებები წარმოადგენენ  $2n$  ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს და  $r$  ალგებრულ განტოლებებს  $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t), \xi_1(t), \dots, \xi_r(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$  უცნობების განსაზღვრისათვის. მათი ამოხსნისათვის უნდა გამოვიყენოთ (10.2) სასაზღვრო პირობები.

მიღებული ვარიაციული ამოცანის განტოლებების ამოხსნისას უნდა გამოირიცხოს  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$  ფუნქციები და ჩაიწეროს რეგულირების კანონი (10.4) გამოსახულების სახით. ამით ამოცანის ამოხსნა მთავრდება.

აქვე უნდა აღვნიშნოთ, რომ ვარიაციული ამოცანის განტოლებების ერთობლივი ამოხსნა და (10.4) გამოსახულების ჩაწერა ყოველთვის ვერ ხერხდება. შემდგომ პარაგრაფებში ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევებს, როდესაც ამოცანის ამოხსნა ბოლომდე შესაძლებელია.

### § 10.3. ამოხსნა მაქსიმუმის პრინციპის მეთოდით

ვიხილავთ ამოცანას, რომელიც მოცემული თავის პირველ პარაგრაფშია ჩამოყალიბებული. ამოხსნის სქემა IX თავის მე-3 პარაგრაფის მიხედვით შემდეგია:

1. შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\omega(\eta(t), \xi(t)) = Y_{n+1}(\eta(t), \xi(t)),$$

$$\int_0^t \omega(\eta(t), \xi(t)) dt = \eta_{n+1}(t).$$

ამ აღნიშვნების შედეგად შეგვიძლია ჩავწეროთ განტოლება

$$\dot{\eta}_{n+1}(t) = Y_{n+1}(\eta(t), \xi(t)),$$

საწყისი პირობით  $\eta_{n+1}(0) = 0$ ;

2.  $\eta_{n+1}(t)$  კოორდინატა მიუერთოთ  $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)$  კოორდინატებს და განვიხილოთ  $\bar{\eta}(t) = \{\eta_1(t), \dots, \eta_{n+1}(t)\}$  ვექტორის მოძრაობა  $(n+1)$  განზომილების სივრცეში, ანუ განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$\dot{\eta}_k(t) = Y_k(\eta_1(t), \dots, \eta_n(t), \xi_1(t), \dots, \xi_r(t)), \quad k = 1, \dots, n+1; \quad (10.7)$$

3. შემოვიტანოთ  $n+1$  განზომილებიანი დამხმარე ვექტორ-ფუნქცია  $\bar{\Psi}(t) = \{\Psi_1(t), \dots, \Psi_{n+1}(t)\}$  და განვსაზღვროთ სკალარული  $H$  ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$H(\bar{\Psi}, \eta, \xi) = \sum_{\alpha=1}^{n+1} \Psi_\alpha(t) Y_\alpha(\eta(t), \xi(t)); \quad (10.8)$$

4. ჩავწეროთ დამხმარე ვექტორ-ფუნქციის განმსაზღვრელი განტოლებები

$$\dot{\Psi}_k(t) = -\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = -\sum_{\alpha=1}^{n+1} \frac{\partial Y_\alpha}{\partial \eta_k} \Psi_\alpha(t), \quad k = 1, \dots, n+1. \quad (10.9)$$

ვინაიდან  $Y_\alpha(\eta(t), \xi(t))$ ,  $\alpha = 1, \dots, n+1$ , ფუნქციებიდან არცერთი არ შეიცავს  $\eta_{n+1}(t)$  ფუნქციას, ბოლო განტოლება გვექნება შემდეგი სახის

$$\dot{\Psi}_{n+1}(t) = 0, \quad \Psi_{n+1}(t) = \text{const}; \quad (10.10)$$

5. დავწეროთ  $H$  ფუნქციის მაქსიმუმის პირობა. ვინაიდან ამოცანა ღია არეშია დასმული, გვექნება

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} = \sum_{\alpha=1}^{n+1} \frac{\partial Y_\alpha}{\partial \xi_\beta} \Psi_\alpha(t) = 0, \quad \beta = 1, \dots, r; \quad (10.11)$$

6. ასევე დავწეროთ მაქსიმუმის პრინციპის თეორემის მეორე პირობა  $t = \infty$  მომენტისათვის:

$$\Psi_{n+1}(\infty) \leq 0, \quad H(\overline{\Psi}(t), \eta^0(t), \xi^0(t))|_{t=\infty} = 0, \quad (10.12)$$

სადაც  $\eta^0(t), \xi^0(t)$  ის ფუნქციებია, რომლებიც მაქსიმუმის პრინციპის თეორემას აკმაყოფილებენ;

7. ამოვხსნათ  $2n+2$  ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა (10.7), (10.9)  $r$  ალგებრულ განტოლებათა (10.11) სისტემასთან ერთად. მათი ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ  $2n$  სასაზღვრო პირობა (10.2), სასაზღვრო პირობა  $\eta_{n+1}(0) = 0$  და გამოსახულება (10.12). ამოხსნის პროცესში გამოვრიცხოთ  $\Psi_1(t), \dots, \Psi_{n+1}(t)$  ფუნქციები და ჩავწეროთ რეგულირების კანონი (10.4) გამოსახულების სახით.

ფაქტობრივად  $\Psi(t)$  ფუნქციები იგივე როლს თამაშობენ, რასაც  $\lambda(t)$  ფუნქციები ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდში.

ეს მეთოდიც აუცილებელ პირობას ეფუძნება და გვაძლევს ამოხსნას, რომელიც ექვემდებარება ოპტიმალურობაზე.

#### § 10.4. ოპტიმალობის საკმარისობის პირობის თეორემა

ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანის ამოსახსნელად მეტად მოსახერხებელია ოპტიმალობის საკმარისობის პირობის თეორემის გამოყენება. ეს თეორემა დამყარებულია ლიაპუნოვის ფუნქციის მეთოდის იდეის შერწყმაზე დინამიკური პროგრამირების პრინციპებთან.

განვიხილოთ ფუნქციები  $W(\eta_1(t), \dots, \eta_n(t))$  და  $\xi^0(\eta_1(t), \dots, \eta_n(t))$ .

დავუშვათ შესაძლებელია ავაგოთ ფუნქცია  $W(\eta)$ , რომელიც დადებითად განსაზღვრული ფუნქციაა თავისი არგუმენტებისა  $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)$  და რომელსაც გააჩნია უსასრულოდ მცირე უმაღლესი ზღვარი. დავუშვათ, ასევე, რომ შესაძლებელია ავაგოთ სისტემის უკუკავშირის კანონი  $\xi^0(\eta)$ , რომლის დროსაც (10.1) განტოლებათა სისტემაზე დაყრდნობით სრულდება შემდეგი პირობები:

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{\xi^0} + \omega(\eta, \xi^0) = 0, \quad (10.13)$$

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{\xi^0} + \omega(\eta, \xi^0) = \min_{\xi} \left\{ \left(\frac{dW}{dt}\right)_{\xi} + \omega(\eta, \xi) \right\}. \quad (10.14)$$

ჩაწერა (...)  $\xi^0$  ნაშნავს, რომ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება გამოითვლება  $\xi^0$  ფუნქციის შემთხვევაში. საკმარისობის თეორემა მდგომარეობს შემდეგში:  
 თეორემა 10.1. თუ შესაძლებელია ავაგოთ ფუნქციები  $W(\eta_1, \dots, \eta_n)$  და  $\xi^0(\eta_1, \dots, \eta_n)$  რომელთათვისაც სამართლიანია (10.13) და (10.14) ტოლობები, მაშინ  $\xi^0(\eta_1, \dots, \eta_n)$  ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონტრუირების ამოცანის ამოხსნაა, ანუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$I(\xi^0) = \min_{\xi} I(\xi).$$

დამტკიცება. (10.13) გამოსახულების ინტეგრირების შედეგად მივიღებთ

$$W(\eta(t)) - W(\eta(0)) = - \int_0^t \omega(\eta, \xi^0) dt. \quad (10.15)$$

განმარტების შედეგად  $W(\eta)$  ფუნქცია დადებითად განსაზღვრულია, (10.13) პირობა კი გვაძლევს, რომ

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{\xi^0} = -\omega(\eta, \xi^0) < 0,$$

ანუ  $W(\eta)$  ფუნქციის სრული წარმოებული უარყოფითად განსაზღვრულია. ამრიგად,  $W(\eta)$  წარმოადგენს ლიაპუნოვის ფუნქციას, რაც ნიშნავს რომ სისტემა (10.1), როდესაც  $\xi = \xi^0$ , ასიმპტოტურად მდგრადია. აქედან გამომდინარე, გამოსახულება (10.15), როდესაც  $t \rightarrow \infty$ , გვაძლევს

$$W(\eta(0)) = \int_0^{\infty} \omega(\eta, \xi^0) dt. \quad (10.16)$$

დაეუშვათ საწინააღმდეგო მოსაზრება:  $\xi^0(\eta)$  ფუნქცია, რომელიც თეორემის პირობებს აკმაყოფილებს, არ არის ოპტიმალური, ანუ არსებობს სხვა რომელიღაც  $\xi'(\eta)$  ფუნქცია, ასევე (10.1) სისტემის ასიმპტოტური მდგრადობის უზრუნველყოფელი, რომლის დროსაც ადგილი აქვს უტოლობას

$$\int_0^{\infty} \omega(\eta, \xi') dt < \int_0^{\infty} \omega(\eta, \xi^0) dt \quad (10.17)$$

რომელიღაც საწყისი  $\eta(0)$  მდგომარეობის დროს.

ცხადია, ასეთი  $\xi'(\eta)$  ფუნქციის შემთხვევაში (10.13) და (10.14) პირობები გვაძლევს გამოსახულებას

$$\left( \frac{dW}{dt} \right)_{\xi'} + \omega(\eta, \xi') \geq 0. \quad (10.18)$$

მიღებული (10.18) გამოსახულების ინტეგრირებით ვღებულობთ

$$W(\eta(t)) - W(\eta(0)) \geq - \int_0^t \omega(\eta, \xi') dt$$

იგი  $t \rightarrow \infty$  შემთხვევაში მიიღებს სახეს

$$W(\eta(0)) \leq \int_0^{\infty} \omega(\eta, \xi') dt,$$

რომელიც (10.16) გამოსახულებასთან ერთად გვაძლევს

$$\int_0^{\infty} \omega(\eta, \xi^0) dt \leq \int_0^{\infty} \omega(\eta, \xi') dt. \quad (10.19)$$

მიღებული (10.19) უტოლობა უპირისპირდება (10.17) უტოლობას, ანუ ეწინააღმდეგება დაშვებულ საწინააღმდეგო მოსაზრებას.

ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია.

აღნიშნული თეორემის გამოყენებით ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანის ამოხსნის



პროცესში მთავარია  $W(\eta)$  და  $\xi^0(\eta)$  ფუნქციების აგება, რაც ძირითადად დიმოკიდებულია (10.1) განტოლებათა სისტემასა და (10.3) ფუნქციონალის სახეზე. მომდევნო პარაგრაფებში ეს საკითხი უფრო კონკრეტულად იქნება განხილული.

### § 10.5. წრფივ-კვადრატული ამოცანა

განვიხილოთ რეგულირების ჩაკეტილი სისტემა (ნახ.10.1), როდესაც ობიექტის შემოფოთებული მოძრაობა აღიწერება ჩვეულებრივი წრფივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემით

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} \eta_\alpha + m_k \xi, \quad k = 1, \dots, n, \quad (10.20)$$

სადაც ფუნქციები  $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)$  ობიექტის მდგომარეობას განსაზღვრავენ დროის ნებისმიერ  $t \in [0, \infty)$  მომენტში,  $\xi(t)$  ფუნქცია კი რეგულირების ფუნქციაა. სიმარტივისათვის ვუშვებთ, რომ  $\xi(t)$  ფუნქცია სკალარული ფუნქციაა, ანუ  $r=1$ .

ვუშვებთ აგრეთვე, რომ  $b_{k\alpha}, m_k$  ( $k, \alpha = 1, \dots, n$ ) მოცემული მუდმივი ნამდვილი სიდიდეებია.

განტოლებები (10.20) განსაზღვრულია ღია არეში,  $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t), \xi$  კოორდინატები არ არიან შემოსაზღვრულნი, მათ შეუძლიათ მიიღონ ნებისმიერი სასრულო მნიშვნელობები.

მოცემული გვაქვს, რომ ამ ღია არეში სისტემის ტრაექტორია  $\eta(t)$  აკმაყოფილებს (10.2) სასაზღვრო პირობებს, ანუ ხორციელდება გარდამავალი პროცესი რომელიდაც საწყისი მდგომარეობიდან ნულოვან მდგომარეობამდე (ისევე, როგორც ზოგად ამოცანაშია თქმული).

გარდამავალი პროცესის ხარისხის საზომად, ნაცვლად (10.3) ფუნქციონალისა, განვიხილოთ ინტეგრალი კვადრატული ფორმიდან

$$I(\xi) = \int_0^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k \eta_k^2 + c \xi^2 \right) dt, \quad (10.21)$$

სადაც  $a_k \geq 0$ ,  $c > 0$  მოცემული მუდმივი სიდიდეებია.

წრფივ-კვადრატული ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: ვიპოვოთ ისეთი რეგულირების კანონი ანალიზური სახით

$$\xi^0 = \xi^0(\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)), \quad (10.22)$$

რომელიც (10.20) განტოლებებთან ერთად მოგვცემს ჩაკეტილ მდგრად სისტემას და ამავე დროს (10.21) ფუნქციონალს მინიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

ამოცანის სახელწოდება "წრფივ-კვადრატული" განპირობებულია იმით, რომ საქმე გვაქვს წრფივ სისტემასთან და გარდამავალი პროცესი ფასდება ინტეგრალური კვადრატული მაჩვენებლით.

აქვე შევნიშნავთ, რომ ამოცანის ამოხსნა არსებობს, თუ

$$m, Bm, B^2m, \dots, B^{n-1}m \quad (10.23)$$

ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელნი არიან. აქ ვექტორ-სვეტი  $m$  და მატრიცა  $B$  განსაზღვრულია (10.20) განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტებით, კერძოდ

$$m = \|m_i\|_{i=1, \dots, n}, \quad B = \|b_{ij}\|_{i,j=1, \dots, n}.$$

ამოცანის ამოხსნის არსებობის საკითხი კვადრატული ფორმის  $a_1, a_2, \dots, a_n, c$  კოეფიციენტებთან დაკავშირებული არ არის.

ამ საკითხით დაინტერესებულ მკითხველს მიუთითებთ ლიტერატურას [77].

ამოხსნათ წრფივ-კვადრატული ამოცანა სხვადასხვა მეთოდებით და შევადაროთ ისინი ერთმანეთს.

## § 10.6. წრფივ-კვადრატული ამოცანის ამოხსნა ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით

ამოხსნის პროცედურა ისეთივეა, როგორც მეორე პარაგრაფში ჩამოყალიბებული ვიზილათ ვარიაციულ ამოცანას: დროის  $t \in [0, \infty)$  ინტერვალზე განსაზღვრულ  $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t), \xi(t)$

გლუვ ფუნქციებს შორის, რომლებიც აკმაყოფილებენ (10.2) სასაზღვრო პირობებს და კავშირის პირობებს

$$g_k = \dot{\eta}_k - \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} \eta_\alpha - m_k \xi = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

ვიპოვოთ ისეთი ფუნქციები, რომლებიც (10.21) ფუნქციონალს მინიმიზებენ მინიმუმს.

მივყუთ მეორე პარაგრაფის სქემას.

1. შევადგინოთ  $H$  ფუნქცია:

$$H = \sum_{k=1}^n a_k \eta_k^2 + c\xi^2 + \sum_{k=1}^n \lambda_k(t) \left( \dot{\eta}_k - \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} \eta_\alpha - m_k \xi \right),$$

სადაც  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$  ლაგრანჟის მამრავლებია.

2. გამოვთვალოთ კერძო წარმოებლებები:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = 2a_k \eta_k - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha b_{\alpha k}, \quad (k = 1, \dots, n);$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{\eta}_k} = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, n;$$

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = 2c\xi - \sum_{k=1}^n \lambda_k m_k;$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{\xi}} = 0.$$

3. შევადგინოთ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებები:

$$\dot{\lambda}_k - 2a_k \eta_k + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha b_{\alpha k} = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$2c\xi - \sum_{k=1}^n \lambda_k m_k = 0.$$

4. მიღებული განტოლებებისა და (10.20) განტოლებების გაერთიანებით, ჩავწეროთ ვარიაციული ამოცანის ერთიანი განტოლებები:

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} \eta_\alpha + m_k \xi, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\dot{\lambda}_k = -\sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha k} \lambda_\alpha + 2a_k \eta_k \quad k = 1, \dots, n, \quad (10.24)$$

$$2c\xi - \sum_{k=1}^n \lambda_k m_k = 0.$$

გვაქვს  $2n$  დიფერენციალური და ერთი ალგებრული განტოლება  $2n+1$  უცნობის  $\eta_1, \dots, \eta_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \xi$  განსაზღვრისათვის. ამოხსნის დროს, უნდა ვეცადოთ ფუნქცია  $\xi$  ვიპოვოთ როგორც  $\eta_1, \dots, \eta_n$  ცვლადების ფუნქცია.

ვარიაციული განტოლებების ბოლო, ალგებრული განტოლება გვაძლევს დამოკიდებულებას

$$\xi = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \lambda_\alpha, \quad (10.25)$$

ანუ  $\xi$  წარმოდგენილია წრფივი ფუნქციის სახით  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ცვლადებისაგან. ჩვენი მიზანი უნდა იყოს ფუნქციები  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$  გამოვსახოთ  $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)$  ფუნქციების მეშვეობით. ამით მივიღებთ რეგულირების კანონს (10.22) სახით. (10.24) განტოლებებში ჩავსვათ (10.25) გამოსახულება, მივიღებთ  $2n$  წრფივ დიფერენციალურ ჩვეულებრივ განტოლებას  $\eta(t)$  და  $\lambda(t)$  ფუნქციების მიმართ:

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} \eta_\alpha + \frac{m_k}{2c} \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \lambda_\alpha, \quad k = 1, \dots, n, \quad (10.25)$$

$$\dot{\lambda}_k = 2a_k \eta_k - \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha k} \lambda_\alpha, \quad k = 1, \dots, n.$$

მიღებულნი განტოლებების ამოსახსნელად გვაქვს  $2n$  სასაზღვრო პირობა (10.2).

ამოვხსნათ (10.25) განტოლებათა სისტემა. ამისათვის პირველ რიგში საჭიროა შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება

$$\Delta(\mu) = 0, \quad (10.26)$$

სადაც  $\Delta(\mu)$  არის (10.25) განტოლებათა სისტემის მახასიათებელი მსაზღვრელი

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} b_{11} - \mu, & b_{12}, \dots, b_{1n}, & \frac{m_1 m_1}{2c}, & \frac{m_1 m_n}{2c} \\ \hline b_{n1}, & b_{n2}, \dots, b_{nn} - \mu, & \frac{m_n m_1}{2c}, \dots, \frac{m_n m_n}{2c} \\ 2a_1, & 0, \dots, 0, & -b_{11} - \mu, \dots, -b_{n1} \\ \hline 0, & 0, \dots, 2a_n, & -b_{1n}, \dots, -b_{nn} - \mu \end{vmatrix}. \quad (10.27)$$

(10.27) მახასიათებელი მსაზღვრელის სტრუქტურა ისეთია, რომ გაშლის შედეგად იგი გვაძლევს მრავალწევრს, რომელიც არ შეიცავს  $\mu$  ფესვის კენტ ხარისხიან წევრებს. ამრიგად, შეიძლება დავასკვნათ, რომ თუ  $\mu_1, \dots, \mu_n$  რიცხვები (10.26) განტოლების უბრალო ფესვებია, მაშინ  $-\mu_1, \dots, -\mu_n$  რიცხვებიც, ასევე, ამ განტოლების უბრალო ფესვები იქნებიან.

ახლა დავუშვათ, რომ (10.26) განტოლებას გააჩნია მხოლოდ უბრალო ფესვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს

$$\operatorname{Re} \mu_k \neq 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

ეს ფესვები ისე გადავნიშნოთ, რომ პირველი  $n$  ფესვი იყოს ისეთი, რომელთა რეალური ნაწილიც უარყოფითია, ანუ

$$\operatorname{Re} \mu_k < 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (10.28)$$

ხოლო შემდგომი ფესვების რეალური ნაწილი კი დადებითი.

(10.26) განტოლების ფესვების პოენის შემდეგ, ჩავწეროთ (10.25) განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნი. როგორც ცნობილია, ზოგადი ამონახსნი წარმოადგენს  $C_k e^{\mu_k t}, C_{n+1} e^{-\mu_1 t}$  ექსპონენციალური ფუნქციების წრფივ კომბინაციებს, სადაც  $C_1, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots, C_{n+n}$  უცნობი მუდმივებია და ექვემდებარებიან განსაზღვრას  $\eta_k(t), \lambda_k(t), k = 1, \dots, n$ , ფუნქციების საწყისი მნიშვნელობების მეშვეობით.

ამრიგად, წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამონხნის ცნობილ ხერხზე დაყრდნობით (10.25) განტოლებათა სისტემის ამონხნს ექნება სახე

$$\eta_{\alpha}(t) = \sum_{k=1}^n A_k^{\alpha} C_k e^{\mu_k t} + \sum_{k=1}^n A_{n+k}^{\alpha} C_{n+k} e^{-\mu_k t}, \quad (10.29)$$

$$\lambda_{\alpha}(t) = \sum_{k=1}^n A_k^{n+\alpha} C_k e^{\mu_k t} + \sum_{k=1}^n A_{n+k}^{n+\alpha} C_{n+k} e^{-\mu_k t},$$

$$(\alpha = 1, \dots, n),$$

სადაც  $A_j^i (i, j = 1, 2, \dots, 2n)$  კოეფიციენტები სრულიად განსაზღვრული მუდმივებია და გამოსახებიან  $b_{k\alpha}, m_k, a_k, c$  მოცემული მუდმივების მეშვეობით. მათი განსაზღვრა ამონხნის პროცესში სავეებით რეალურია და მარტივი.

სასაზღვრო პირობების თანახმად, გარდამავალი პროცესი უნდა დამთავრდეს კოორდინატთა სათავეში, ანუ უნდა დაკმაყოფილდეს პირობები (10.2)

$$\eta_{\alpha}(\infty) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

ამ პირობების დასაკმაყოფილებლად (10.29) გამოსახულებებში აუცილებელია დავუშვათ, რომ

$$C_{n+1} = C_{n+2} = \dots = C_{2n} = 0. \quad (10.30)$$

დანარჩენი მუდმივები  $C_1, C_2, \dots, C_n$  შესაძლებელია განისაზღვროს  $\eta_{\alpha}(t)$  ფუნქციების საწყისი მნიშვნელობების გამოყენებით. ეს პროცედურა აუცილებელი არ არის, ვინაიდან ჩვენ ვეძებთ რეგულირების კანონს ჩაკეტილი ფუნქციის სახით,  $\xi^0 = \xi^0(\eta_1, \dots, \eta_n)$ , რომელიც უნდა მოქმედებდეს ნებისმიერი საწყისი პირობის დროს.

(10.29) ტოლობებიდან, (10.30) პირობის გათვალისწინებით, გამოვრიცხოთ  $C_1 e^{\mu_1 t}, C_2 e^{\mu_2 t}, \dots, C_n e^{\mu_n t}$  ფუნქციები. ეს სავეებით მარტივი პროცესია, თუ (10.29) ტოლობებს განვიხილავთ, როგორც  $2n$  რიგის არაერთგვაროვან ალგებრულ განტოლებათა სისტემას  $C_1 e^{\mu_1 t}, \dots, C_n e^{\mu_n t}$  უცნობების მიმართ. ასეთი გამორიცხვით, მივიღებთ  $\lambda_{\alpha}(t)$  ყველი ფუნქციის

გამოსახულებას  $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)$  ფუნქციების წრფივი ფორმის სახით, კერძოდ,

$$\lambda_\alpha(t) = \sum_{k=1}^n B_k^\alpha \eta_k(t), \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (10.31)$$

სადაც კოეფიციენტები  $B_k^\alpha$  ( $k, \alpha = 1, \dots, n$ ) სავესებით მარტივად განისაზღვრებიან  $b_{k\alpha}, m_k, a_k, c$  კოეფიციენტების მეშვეობით (10.29) ალგებრული განტოლებების ამოხსნის დროს.

საბოლოო ჯამში, გამოსახულებები (10.25) და (10.31) გვაძლევს ოპტიმალური რეგულირების კანონს

$$\xi^0 = \sum_{k=1}^n P_k \eta_k, \quad (10.32)$$

სადაც კოეფიციენტები  $P_1, \dots, P_n$  განისაზღვრებიან, როგორც

$$P_k = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha B_k^\alpha, \quad k = 1, \dots, n.$$

ამრიგად, ოპტიმალური რეგულირების კანონი წარმოადგენს წრფივ ფუნქციას. იგი წარმოადგენს იდეალურ რეგულატორს ხისტი უკუკავშირით, უსასრულოდ დიდი სიჩქარის ძრავით, რომლის ზუსტი რეალიზაცია შეუძლებელია.

თუ ამოცანას შევუცვლით სახეს და მოვითხოვთ გარდამავალი პროცესის ხარისხის შეფასებას ინტეგრალური ფუნქციონალით, რომლის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას დაემატება  $\xi^2(t)$  წევრი, რეგულირების კანონს შეეცვლება სახე და იქნება

$$\dot{\xi} + P_0^* \xi = \sum_{k=1}^n P_k^* \eta_k,$$

სადაც  $P_0^*, P_1^*, \dots, P_n^*$  სავესებით ცალსახად განსაზღვრული მუდმივებია. ასეთი რეგულატორი წარმოადგენს წრფივ რეგულატორს ცვლადი შემოსაზღვრული სიჩქარის მქონე ძრავით. ასეთი რეგულატორები კი შესაძლებელია ზუსტად იქნეს რეალიზებული ფაზური კოორდინატების ცვლის გარკვეულად მცირე არეში.

ამ საკითხის უფრო ღრმა შესწავლისათვის, მკითხველს ვთავაზობთ მითითებულ ლიტერატურას [52], [77].

აქ კი შემოვიფარგლებით მხოლოდ საილუსტრაციო მაგალითით.

ისმის კითხვა: რეგულირების კანონი (10.32) ობიექტის განტოლებათა (10.20) სისტემასთან ერთად ქმნის თუ არა ავტომატური რეგულირების მდგრად სისტემას? რა თქმა უნდა ქმნის და ეს ფაქტი ადვილი შესამოწმებელია. განტოლებათა სისტემას (10.20), (10.32) აქვს ზოგადი ამონახსნი, რომელიც  $C_k e^{\mu_k t}$ ,  $k=1, \dots, n$  ფუნქციების წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს და  $\mu_1, \dots, \mu_n$  სიდიდეები ემთხვევა (10.26) განტოლების უარყოფითი ნამდვილი ნაწილის მქონე ფესვებს.

მაგალითი 10.1.

განვიხილოთ უმარტივესი საილუსტრაციო მაგალითი. ობიექტის შემოთავაზებული მოძრაობა პირველი ხარისხის განტოლებით აღიწერება

$$\dot{\eta}(t) = b\eta + m\xi, \quad (10.33)$$

სასაზღვრო პირობებია

$$\eta(t) = \eta_0, \quad \eta(\infty) = 0, \quad (10.34)$$

ხოლო ხარისხის მაჩვენებელი ფუნქციონალი კი

$$I(\xi) = \int_0^{\infty} (a\eta^2 + c\xi^2) dt, \quad a \geq 0, \quad c > 0.$$

ასეთ შემთხვევაში ვარიაციული ამოცანის განტოლებები იქნებიან

$$\dot{\eta} = b\eta + m\xi,$$

$$\dot{\lambda} = 2a\eta - b\lambda,$$

$$0 = 2c\xi - m\lambda.$$

აქედან

$$\xi = \frac{m}{2c} \lambda(t) \quad (10.35)$$

და დიფერენციალური განტოლებები ობიექტის სახეს



$$\dot{\eta} = b\eta + \frac{m^2}{2c}\lambda, \quad (10.36)$$

$$\dot{\lambda} = 2a\eta - b\lambda.$$

ამ განტოლებათა მახასიათებელი განტოლებაა

$$\Delta\mu = \begin{vmatrix} b - \mu & \frac{m^2}{2c} \\ 2a & -b - \mu \end{vmatrix} = -(b^2 - \mu^2) - \frac{m^2 a}{c} = \mu^2 - b^2 - \frac{m^2 a}{c} = 0.$$

აქედან, ზემოთ დაშვებული ფესვთა ნუმერაციის (10.28) გათვალისწინებით

$$\mu_1 = -\sqrt{b^2 + \frac{m^2 a}{c}} < 0,$$

$$\mu_2 = +\sqrt{b^2 + \frac{m^2 a}{c}} = -\mu_1 > 0.$$

(10.36) განტოლებების ამონახსნი იქნება

$$\eta(t) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t},$$

$$\lambda(t) = \frac{2c}{m^2}(\mu_1 - b)c_1 e^{\mu_1 t} + \frac{2c}{m^2}(\mu_2 - b)c_2 e^{\mu_2 t}$$

(5.34) სასაზღვრო პირობის დასაკმაყოფილებლად აუცილებელია, რომ  $c_2 = 0$ . ამრიგად,

$$\eta(t) = c_1 e^{\mu_1 t}, \quad \lambda(t) = \frac{2c}{m^2}(\mu_1 - b)c_1 e^{\mu_1 t},$$

და ვლებულობთ

$$\lambda(t) = \frac{2c}{m^2}(\mu_1 - b)\eta(t).$$

ჩავსვათ მიღებული  $\lambda(t)$  სიდიდე (10.35) ფორმულაში, მივიღებთ ოპტიმალური რეგულატორის განტოლებას

$$\xi^0 = \frac{\mu_1 - b}{m} \eta(t) = -\frac{b + \sqrt{b^2 + \frac{m^2 a}{c}}}{m} \eta(t). \quad (10.37)$$

ცხადია, ჩაკეტილი ოპტიმალური სისტემა (10.33), (10.37)

$$\dot{\eta}(t) = -\sqrt{b^2 + \frac{m^2 a}{c}} \eta(t)$$

მდგრადია და მისი მახასიათებელი განტოლების ფესვია

$$\mu = -\sqrt{b^2 + \frac{m^2 a}{c}} = \mu_1 < 0.$$

ეხლა განვიხილოთ ეს მაგალითი სახეშეცვლილი ფუნქციონალით, კერძოდ,

$$I(\xi) = \int_0^{\infty} (a\eta^2 + c\xi^2 + \dot{\xi}^2) dt.$$

ვარიაციული ამოცანის განტოლებები შეიცვლება და გვექნება

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= b\eta + m\xi, \\ \dot{\lambda} &= 2a\eta - b\lambda, \end{aligned} \tag{10.38}$$

$$\ddot{\xi} = -\frac{m}{2}\lambda + c\xi.$$

ამ განტოლებათა სისტემის მახასიათებელი განტოლებაა

$$\mu^4 - (b^2 + c)\mu^2 + (am^2 + cb^2) = 0.$$

ამ განტოლების ფესვებია (ზემოთ მიღებული ნუმერაციის შესაბამისად)

$$\mu_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}(b^2 + c) + \sqrt{\frac{1}{4}(b^2 + c)^2 - (am^2 + cb^2)}},$$

$$\mu_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}(b^2 + c) - \sqrt{\frac{1}{4}(b^2 + c)^2 - (am^2 + cb^2)}},$$

$$\mu_3 = -\mu_1,$$

$$\mu_4 = -\mu_2.$$

(10.38) განტოლებათა სისტემის ზოგად ამოხსნას ექნება შემდეგი სახე:

$$\eta(t) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t} + c_3 e^{\mu_3 t} + c_4 e^{\mu_4 t},$$

$$\lambda(t) = \frac{2a}{\mu_1 + b} c_1 e^{\mu_1 t} + \frac{2a}{\mu_2 + b} c_2 e^{\mu_2 t} + \frac{2a}{\mu_3 + b} c_3 e^{\mu_3 t} + \frac{2a}{\mu_4 + b} c_4 e^{\mu_4 t},$$

$$\xi(t) = \frac{\mu_1 - b}{m} c_1 e^{\mu_1 t} + \frac{\mu_2 - b}{m} c_2 e^{\mu_2 t} + \frac{\mu_3 - b}{m} c_3 e^{\mu_3 t} + \frac{\mu_4 - b}{m} c_4 e^{\mu_4 t},$$

$$\dot{\xi}(t) = \mu_1 \frac{\mu_1 - b}{m} c_1 e^{\mu_1 t} + \mu_2 \frac{\mu_2 - b}{m} c_2 e^{\mu_2 t} + \mu_3 \frac{\mu_3 - b}{m} c_3 e^{\mu_3 t} + \mu_4 \frac{\mu_4 - b}{m} c_4 e^{\mu_4 t}.$$

სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, (იხ.(10.34)),  
 აუცილებელია

$$c_3 = c_4 = 0.$$

ამის შემდეგ პირველი, მესამე და მეოთხე ტოლობებიდან  $c_1 e^{\mu_1 t}, c_2 e^{\mu_2 t}$  ფუნქციების გამორიცხვით მივიღებთ რეგულატორის განტოლებას, დამოკიდებულებას  $\eta(t), \xi(t)$  და  $\dot{\xi}(t)$  ფუნქციებს შორის. იგი ასე შეიძლება ჩაწეროს

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \eta \\ \frac{\mu_1 - b}{m}, & \frac{\mu_2 - b}{m}, & \xi \\ \mu_1 \frac{\mu_1 - b}{m}, & \mu_2 \frac{\mu_2 - b}{m}, & \dot{\xi} \end{vmatrix} = 0,$$

რომელიც გაშლის შედეგად გადალევს წრფივი რეგულატორის კანონის შემდეგ გამოსახულებას

$$\dot{\xi} - (\mu_1 + \mu_2 - b)\xi = -\frac{1}{m}(\mu_1 - b)(\mu_2 - b)\eta. \quad (10.39)$$

ჩაკეტილი სისტემა (10.33), (10.39) ოპტიმალური და მდგრადია. ოპტიმალურია, რადგანაც აკმაყოფილებს ექსტრემალობის პირობას ლაგრანჟის ამოცანაში. მდგრადობის შემოწმება იოლია, კერძოდ, ჩაკეტილი სისტემის მახასიათებელი განტოლებაა

$$\mu^2 - (\mu_1 + \mu_2)\mu + \mu_1 \mu_2 = 0,$$

რომლის ფესვებია  $\mu_1$  და  $\mu_2$ , როგორც ვარიაციული ამოცანის განტოლებების ამოხსნისას გვქონდა.

მაგალითი 10.2.

ახლა განვიხილოთ ასევე მარტივი მაგალითი, როდესაც ობიექტის შემფოთებული მოძრაობა მეორე რიგის განტოლებათა სისტემით აღიწერება

$$\dot{\eta}_1(t) = \eta_2(t), \quad (10.40)$$

$$\dot{\eta}_2(t) = b_1 \eta_1(t) + b_2 \eta_2(t) + m\xi(t)$$

და გარდამავალი პროცესი ფასდება შემდეგი ფუნქციონალით

$$I(\xi) = \int_0^{\infty} (a_1 \eta_1^2 + a_2 \eta_2^2 + c\xi^2) dt, \quad a_1 \geq 0, \quad a_2 \geq 0, \quad c > 0. \quad (10.41)$$

სასაზღვრო პირობებს ჩვეულებრივი სახე აქვს

$$\begin{aligned} \eta_1(0) &= \eta_{10}, & \eta_2(0) &= \eta_{20}, \\ \eta_1(\infty) &= 0, & \eta_2(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (10.42)$$

ასეთი ობიექტისა და ფუნქციონალის დროს ვარიაციული ამოცანის განტოლებებია

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= b_1 \eta_1 + b_2 \eta_2 + m\xi, \\ \dot{\lambda}_1 &= -b_1 \lambda_2 + 2a_1 \eta_1, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 - b_2 \lambda_2 + 2a_2 \eta_2, \\ 2c\xi - \lambda_2 m &= 0. \end{aligned}$$

ბოლო ალგებრული განტოლება გვაძლევს

$$\xi = \frac{m}{2c} \lambda_2, \quad (10.43)$$

რომლის ჩასმის შედეგადაც ვარიაციული ამოცანის განტოლებები მიიღებს სახეს

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= b_1 \eta_1 + b_2 \eta_2 + \frac{m^2}{2c} \lambda_2, \\ \dot{\lambda}_1 &= 2a_1 \eta_1 - b_1 \lambda_2, \end{aligned} \quad (10.44)$$

$$\lambda_2 = 2a_2\eta_2 - \lambda_1 - b_2\lambda_2.$$

ამოხსნათ ეს სისტემა და გამოვსახოთ  $\lambda_2(t)$  ფუნქცია  $\eta_1(t)$  და  $\eta_2(t)$  ფუნქციების მეშვეობით.

(10.44) სისტემის მახასიათებელი განტოლება არის

$$\mu^4 - \left(b_2^2 + 2b_1 + \frac{a_2 m^2}{c}\right) \mu^2 + \left(b_1^2 + \frac{a_1 m^2}{c}\right) = 0.$$

რომლის ფესვებია

$$\mu_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(b_2^2 + 2b_1 + \frac{a_2 m^2}{c}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(b_2^2 + 2b_1 + \frac{a_2 m^2}{c}\right)^2 - \left(b_1^2 + \frac{a_1 m^2}{c}\right)}},$$

$$\mu_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(b_2^2 + 2b_1 + \frac{a_2 m^2}{c}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(b_2^2 + 2b_1 + \frac{a_2 m^2}{c}\right)^2 - \left(b_1^2 + \frac{a_1 m^2}{c}\right)}},$$

$$\mu_3 = -\mu_1,$$

$$\mu_4 = -\mu_2.$$

ვარიაციულ განტოლებათა (10.44) სისტემის ამოხსნა, გათვალისწინებით იმისა, რომ  $\eta_1(\infty) = \eta_2(\infty) = 0$ , ასე ჩაიწერება:

$$\eta_1(t) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t},$$

$$\eta_2(t) = \mu_1 c_1 e^{\mu_1 t} + \mu_2 c_2 e^{\mu_2 t},$$

$$\lambda_1(t) = \left[ \frac{2a_1}{\mu_1} - \frac{2c_1}{m^2 \mu_1} (\mu_1^2 - b_2 \mu_1 - b_1) \right] e^{\mu_1 t} + \left[ \frac{2a_2}{\mu_2} - \frac{2c_2}{m^2 \mu_2} (\mu_2^2 - b_2 \mu_2 - b_1) \right] e^{\mu_2 t},$$

$$\lambda_2(t) = \left[ \frac{2c_1}{m^2} (\mu_1^2 - b_2 \mu_1 - b_1) \right] e^{\mu_1 t} + \left[ \frac{2c_2}{m^2} (\mu_2^2 - b_2 \mu_2 - b_1) \right] e^{\mu_2 t}.$$

ჩვენი მიზანია გამოვსახოთ  $\lambda_2(t)$  ფუნქცია  $\eta_1(t)$  და  $\eta_2(t)$  ფუნქციების მეშვეობით და ჩავსვათ (10.43) გამოსახულებაში, რის შედეგადაც მივიღებთ ოპტიმალური რეგულირების კანონს. ამისათვის უკანასკნელი ოთხი გამოსახულებიდან დავაჭგუფოთ პირველი, მეორე და მეთხე ტოლობები

და ამოვხსნათ ისინი როგორც ალგებრული განტოლებები ორი უცნობის მიმართ, უფრო სწორედ, გამოვირიცხოთ ამ სამი განტოლებიდან ორი უცნობი  $c_1 e^{\mu_1 t}$  და  $c_2 e^{\mu_2 t}$  ეს შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \eta_1(t) \\ \mu_1, & \mu_2, & \eta_2(t) \\ \frac{2c}{m^2}(\mu_1^2 - b_2\mu_1 - b_1), & \frac{2c}{m^2}(\mu_2^2 - b_2\mu_2 - b_1), & \lambda_2(t) \end{vmatrix} = 0,$$

რაც გაშლის შემდეგ მოგვცემს ტოლობას

$$\lambda_2(t) = -\frac{2c}{m^2}(\mu_1\mu_2 + b_1)\eta_1(t) - \frac{2c}{m^2}(b_2 - \mu_1 - \mu_2)\eta_2(t).$$

ამის შემდეგ, ოპტიმალური რეგულატორის კანონი (10.43) მიიღებს სახეს

$$\xi^0(t) = -\frac{1}{m}(\mu_1\mu_2 + b_1)\eta_1(t) - \frac{1}{m}(b_2 - \mu_1 - \mu_2)\eta_2(t). \quad (10.45)$$

ჩაკეტილი სისტემა (10.40), (10.45)

$$\dot{\eta}_1(t) = \eta_2(t),$$

$$\dot{\eta}_2(t) = -\mu_1\mu_2\eta_1(t) + (\mu_1 + \mu_2)\eta_2(t)$$

მდგრადია, რადგანაც მისი მახასიათებელი განტოლების

$$\mu^2 - (\mu_1 + \mu_2)\mu + \mu_1\mu_2 = 0$$

ფესვებია  $\mu_1$  და  $\mu_2$ , რომელშიც ვარიაციული ამოცანის განტოლებების ამოხსნისას გვქონდა.

## § 10.7. წრფივ-კვადრატული ამოცანის ამოხსნა მაქსიმუმის პრინციპით

განვიხილოთ იგივე ამოცანა, რომელიც მე-5 პარაგრაფშია ჩამოყალიბებული. გვაქვს მოძრაობის განტოლება (10.20) სასაზღვრო (10.2) პირობებით, ფუნქციონალი (10.21) და ვებტებო რეგულირების (10.22) კანონს.

მივყვეთ მესამე პარაგრაფის სქემას.

1. შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\int_0^t \left( \sum_{k=1}^n a_k \eta_k^2 + c\xi^2 \right) dt = \eta_{n+1}(t),$$

რის შედეგადაც ჩვეურობით დამატებითი კოორდინატის განტოლება

$$\dot{\eta}_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^n a_k \eta_k^2 + c\xi^2, \quad (10.46)$$

საწყისი პირობით  $\eta_{n+1}(0) = 0$ .

2. განტოლება (10.46) მიუერთოთ (10.20) განტოლებათა სისტემას

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} \eta_\alpha + m_k \xi, \quad k = 1, \dots, n, \quad (10.47)$$

$$\dot{\eta}_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k \eta_k^2 + c\xi^2.$$

3. ჩვეურობით ფუნქცია  $H(\eta_1, \dots, \eta_{n+1}, \Psi_1, \dots, \Psi_{n+1}, \xi)$ :

$$H = \Psi_1 \left( \sum_{\alpha=1}^n b_{1\alpha} \eta_\alpha + m_1 \xi \right) + \Psi_2 \left( \sum_{\alpha=1}^n b_{2\alpha} \eta_\alpha + m_2 \xi \right) + \dots + \Psi_n \left( \sum_{\alpha=1}^n b_{n\alpha} \eta_\alpha + m_n \xi \right) + \Psi_{n+1} \left( \sum_{k=1}^n a_k \eta_k^2 + c\xi^2 \right).$$

4. დავწეროთ  $\Psi_1, \dots, \Psi_{n+1}$  ფუნქციების განმსაზღვრელი განტოლებები

$$\dot{\Psi}_k(t) = -\frac{\partial H}{\partial \eta_k} = -\sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha k} \Psi_\alpha(t) - 2a_k \eta_k(t) \Psi_{n+1}(t), \quad k = 1, \dots, n, \quad (10.48)$$

$$\dot{\Psi}_{n+1}(t) = 0.$$

5. დავწეროთ  $H$  ფუნქციის მაქსიმუმის პირობა

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \sum_{\alpha=1}^n m_\alpha \Psi_\alpha(t) + 2c\xi \Psi_{n+1}(t) = 0,$$

რომელიც გვაძლევს

$$\xi = -\frac{1}{2c\Psi_{n+1}(t)} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \Psi_{\alpha}(t). \quad (10.49)$$

6. მაქსიმუმის პრინციპის თეორემის მეორე პირობის თანახმად

$$\Psi_{n+1}(\infty) \leq 0. \quad (10.50)$$

(10.48) განტოლებათა სისტემის ბოლო განტოლების თანახმად

$$\Psi_{n+1}(t) = \text{const}.$$

ამ და (10.50) გამოსახულებების მიხედვით შეგვიძლია სავსებით სამართლიანად განვსაზღვროთ

$$\Psi_{n+1}(t) = -1. \quad (10.51)$$

განტოლებები (10.20), (10.48) და (10.49) გადავწეროთ (10.51) პირობის გათვალისწინებით. გვექნება

$$\dot{\eta}_k(t) = \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} \eta_{\alpha}(t) + m_k \xi(t), \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\dot{\Psi}_k(t) = 2a_k \eta_k(t) - \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha k} \Psi_{\alpha}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (10.52)$$

$$\xi = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \Psi_{\alpha}(t).$$

მიღებული განტოლებები (10.52) ზუსტად იგივე განტოლებებია, რაც გვექონდა მე-6 პარაგრაფში წრფივ-კვადრატული ამოცანის ამოხსნისას ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით, თუ დავუშვებთ, რომ

$$\Psi_k(t) \equiv \lambda_k(t), \quad k = 1, \dots, n.$$

სხვა სიტყვებით, ასეთი დაშვების შედეგად განტოლებები (10.52) იდენტურია (10.24) განტოლებებისა.

ამრიგად, დანარჩენი პროცედურა ამოცანის ამოხსნისა იგივე იქნება, რაც მე-6 პარაგრაფშია აღწერილი. რა თქმა უნდა, პასუხსაც იდენტურს მივიღებთ.

აქვე აღვნიშნოთ, რომ მაქსიმუმის პრინციპის თეორემის მეორე პირობა (10.12), კერძოდ,  $H(\bar{\Psi}(t), \eta^0(t), \xi^0(t))|_{t=\infty} = 0$ ,



ავტომატურად სრულდება ჩაკეტილი ოპტიმალური სისტემის მდგრადობის გამო.

განხილული ამოცანა გვიჩვენებს, რომ  $\Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t)$  ფუნქციები მაქსიმუმის პრინციპში ასრულებენ ლაგრანჟის მამრავლების  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$  როლს.

§ 10.8. წრფივ-კვადრატული ამოცანის ამოხსნა ოპტიმალობის სკმარისობის პირობის თეორემის საფუძველზე

განვიხილოთ მე-5 პარაგრაფის ამოცანას. თეორემის პირობებს (10.13), (10.14) წრფივ-კვადრატული ამოცანისათვის შემდეგი სახე ექნება:

$$\left( \frac{d}{dt} W(\eta) \right)_{\xi^0} + \sum_{k=1}^n a_k \eta_k^2 + c(\xi^0)^2 = 0,$$

$$\min_{\xi} \left\{ \frac{d}{dt} W(\eta) + \sum_{k=1}^n a_k \eta_k^2 + c\xi^2 \right\} = 0.$$

ეს ტოლობები (10.20) განტოლებებზე დაყრდნობით მიიღებენ სახეს

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta_k} \left( \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} \eta_{\alpha} + m_k \xi^0 \right) + \sum_{k=1}^n a_k \eta_k^2 + c(\xi^0)^2 = 0, \quad (10.53)$$

$$\min_{\xi} \left\{ \frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta_k} \left( \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} \eta_{\alpha} + m_k \xi \right) + \sum_{k=1}^n a_k \eta_k^2 + c\xi^2 \right\} = 0. \quad (10.54)$$

რადგანაც ამოცანას  $\eta_1, \dots, \eta_n, \xi$  ცვლადთა ღია არეში ვიხილავთ, (10.54) გამოსახულება გვაძლევს ტოლობას

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta_k} m_k + 2c\xi = 0,$$

ანუ ოპტიმალური რეგულატორის გამოსახულებას

$$\xi^0 = -\frac{1}{2c} \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta_k}. \quad (10.55)$$

როგორც ვხედავთ, ოპტიმალური რეგულატორის გამოსახულება განსაზღვრულია  $W(\eta)$  ფუნქციით. ვიპოვოთ ეს ფუნქცია. ამისათვის (10.55) გამოსახულება ჩავსვათ (10.53) ტოლობაში, მივიღებთ არაწრფივ დიფერენციალურ კერძო წარმოებულთან განტოლებას

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta_k} b_{k\alpha} \eta_\alpha - \frac{1}{4c} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta_k} m_k \right)^2 + \sum_{k=1}^n a_k \eta_k^2 = 0 \quad (10.56)$$

საქმები  $W(\eta)$  ფუნქციის მიმართ.

თეორემის მიხედვით  $W(\eta)$  ფუნქცია უნდა იყოს დადებითად განსაზღვრული თავისი არგუმენტების  $\eta_1, \dots, \eta_n$  მიმართ და უნდა გააჩნდეს უსასრულოდ მცირე უმაღლესი ზღვარი.

(10.56) განტოლების ამოხსნა შესაძლებელია ვეძებოთ კვადრატული ფორმის სახით

$$W(\eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \eta_i(t) \eta_j(t), \quad (10.57)$$

სადაც  $A_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) კოეფიციენტები მუდმივ რიცხვებს წარმოადგენენ. ეს კოეფიციენტები უნდა განისაზღვრონ ისე, რომ  $W(\eta)$  ფუნქცია დადებითად განსაზღვრული ფუნქცია იყოს. ამისათვის კი საჭიროა იქნება, რომ (10.57) კვადრატული ფორმა აკმაყოფილებდეს სილვესტრის კრიტერიუმს, რაც გამოიხატება შემდეგი უტოლობების

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{1i} \\ \dots & \dots \\ A_{i1} & A_{ii} \end{vmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (10.58)$$

შესრულებაში, ანუ  $A_{ij}$  მატრიცა სილვესტრის მატრიცა უნდა იყოს.

თუ ფუნქცია  $W(\eta)$  ისე იქნება განსაზღვრული, რომ მისი კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ (10.58) უტოლობებს, მაშინ ის ლიაპუნოვის ფუნქცია იქნება და ოპტიმალური

სისტემის მდგრადობის საკითხიც გადაწყვეტილი იქნება.

$W(\eta)$  ფუნქციას იმიტომ ექნება ლიაპუნოვის ფუნქციის სახე, რომ იგი დადებითად განსაზღვრული ფუნქციაა და მისი სრული წარმოებული, (10.53) გამოსახულების მიხედვით, უარყოფითად განსაზღვრულია. რა თქმა უნდა, ასეთ შემთხვევაში  $W(\eta)$  ფუნქციის უმაღლესი ზღვარიც უსასრულოდ მცირე იქნება.

ერთი სიტყვით, ვეძებთ (10.56) განტოლების ამოხსნას ისეთი (10.57) კვადრატული ფორმის სახით, რომელიც (10.58) პირობებს აკმაყოფილებს. ასეთი ამოხსნა საბოლოოდ განსაზღვრავს ოპტიმალური რეგულირების კანონს (10.55) ფორმულის მეშვეობით.

ჩავსვათ (10.57) გამოსახულება (10.56) განტოლებაში.

გარკვეული გარდაქმნების შემდეგ გვექნება

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \left\{ a_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^n b_{k\alpha} (A_{k\beta} + A_{\beta k}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4c} \left[ \sum_{k=1}^n m_k (A_{k\alpha} + A_{\alpha k}) \right] \left[ \sum_{k=1}^n m_k (A_{k\beta} + A_{\beta k}) \right] \right\} \eta_{\alpha}(t) \eta_{\beta}(t) = 0. \quad (10.59)$$

ამ გამოსახულებაში  $a_{\alpha\beta}$  მატრიცას აქვს დიაგონალური სახე, მისი ელემენტები შემდეგნაირადაა განსაზღვრული:  $a_{\alpha\beta} = 0$  ყველა შემთხვევაში, როდესაც  $\alpha \neq \beta$ ;  $a_{\alpha\alpha} = a_{\alpha}$  ყველა შემთხვევაში, როდესაც  $\alpha = \beta$ ;  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$ .

ვინაიდან (10.59) ტოლობა უნდა შესრულდეს ნებისმიერი  $\eta_{\alpha}(t) \eta_{\beta}(t)$  ფუნქციების დროს, აუცილებელია შემდეგი  $n^2$  რაოდენობის ტოლობების შესრულება

$$a_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^n b_{k\alpha} (A_{k\beta} + A_{\beta k}) - \frac{1}{4c} \left[ \sum_{k=1}^n m_k (A_{k\alpha} + A_{\alpha k}) \right] \left[ \sum_{k=1}^n m_k (A_{k\beta} + A_{\beta k}) \right] = 0, \quad (10.60) \\ (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n).$$

ამ განტოლებებით უნდა განისაზღვროს  $n^2$  რაოდენობის უცნობი კოეფიციენტები  $A_{\alpha\beta}$ , ( $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$ ).

თუ  $W(\eta)$  ფუნქციას განვიხილავთ როგორც სიმეტრიული სახის კვადრატულ ფორმას, ანუ როდესაც  $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$ , ( $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$ ), მაშინ საძებნი კოეფიციენტების რაოდენობა და შესატყვისი განტოლებების რაოდენობაც შემცირდება  $\frac{n(n-1)}{2}$ -მდე. (10.60) განტოლებების ნაცვლად მივიღებთ

$$a_{\alpha\beta} + 2 \sum_{k=1}^n b_{k\alpha} A_{k\beta} - \frac{1}{c} \left( \sum_{k=1}^n m_k A_{k\alpha} \right) \left( \sum_{k=1}^n m_k A_{k\beta} \right) = 0, \quad (10.61)$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n).$$

ცხადია, მიღებულ განტოლებას მრავალი ამონახსნი ექნება. ამ ამონახსნთა შორის უნდა ამოვიჩიოთ ისეთი, რომელიც (10.58) უტოლობებს, სილვესტრის კრიტერიუმს, აკმაყოფილებს.

(10.61) განტოლებები არაწრფივი ალგებურლი, რიკატის ტიპის განტოლებების სისტემაა. იგი შეიძლება ამოიხსნას თანდათანობითი მიახლოების მეთოდით, მაგრამ ადგილი აქვს გარკვეულ სიძნელეებს, რადგანაც განტოლებები საკმაოდ რთულია და მრავალი ამონახსნი აქვთ. ზოგიერთ კონკრეტულ შემთხვევაში შეიძლება ამონახსნი საერთოდ ვერც ვიპოვოთ. არსებობს მანქანური ამოხსნის მეთოდი ანალოგიური გამომთვლელი მანქანის მეშვეობით. ეს მეთოდი კარგადაა აღწერილი [52] ლიტერატურაში, რის გაცნობასაც ვურჩევთ დაინტერესებულ მკითხველს.

ეხლა დაეუშვათ, რომ (10.61) განტოლებათა სისტემა ამოვხსენით და ამოვიჩიოთ ისეთი ამონახსნი, რომელიც (10.58) უტოლობებს აკმაყოფილებს. ასეთი ამონახსნის არსებობა დამტკიცებულია და, როგორც აღრე ვთქვით, მდგომარეობს (10.23) ექვტორების წრფივად დამოუკიდებლობაში.

რადგანაც  $W(\eta)$  კვადრატული ფორმაა, მისი კერძო წარმოებულები  $\frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta_k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , წრფივი ფორმები იქნე-

ბიან. მათი ჩასმით (10.55) გამოსახულებაში მივიღებთ ოპტი-  
მალური რეგულირების კანონს წრფივი ფუნქციის სახით

$$\xi^0 = \sum_{\alpha=1}^n P_{\alpha} \eta_{\alpha}(t), \quad (10.62)$$

სადაც  $P_1, \dots, P_n$  კოეფიციენტები განსაზღვრულია, როგორც

$$P_{\alpha} = -\frac{1}{c} \sum_{k=1}^n m_k A_{k\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

და წარმოადგენენ გაძლიერების კოეფიციენტებს ცალკეული  
კოორდინატებისათვის.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ იგივე მაგალითები, რაც  
მე-6 პარაგრაფის ბოლოსაა განხილული.

მაგალითი 10.3.

მოძრაობის განტოლებაა

$$\dot{\eta}(t) = b\eta(t) + \xi(t),$$

სასაზღვრო პირობებია

$$\eta(0) = \eta_0, \quad \eta(\infty) = 0,$$

ფუნქციონალი კი

$$I(\xi) = \int_0^{\infty} (a\eta^2 + c\xi^2) dt, \quad a \geq 0, \quad c > 0.$$

ასეთ შემთხვევაში ოპტიმალობის საკმარისობის თეორემა  
გვაძლევს ტოლობებს (შესაბამისად (10.53) და (10.54) ტო-  
ლობებისა):

$$\frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta} (b\eta + m\xi^0) + a\eta^2 + c\xi^0 = 0,$$

$$\frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta} m + 2c\xi^0 = 0.$$

აქედან ოპტიმალური რეგულირების კანონს ექნება სახე

$$\xi^0 = -\frac{m}{2c} \frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta},$$

ხოლო  $W(\eta)$  ფუნქციის საპონველად გვექნება კერძო წარმობებულებიანი დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{m^2 \left( \frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta} \right)^2}{4c} - b\eta \frac{\partial W(\eta)}{\partial \eta} - a\eta^2 = 0.$$

ამ განტოლების ამოხსნას ვეძებთ კვადრატული ფორმის სახით

$$W(\eta) = A\eta^2,$$

რომლის ჩასმაც წინა განტოლებაში გვაძლევს კვადრატულ განტოლებას  $A$  უცნობის მიმართ:

$$A^2 - \frac{2bc}{m^2} A - \frac{ac}{m^2} = 0.$$

ამ განტოლების ამონახსნებია

$$A = \frac{c}{m^2} \left( b \pm \sqrt{b^2 + \frac{am^2}{c}} \right).$$

ამ ორი ამონახსნიდან მეორე ამონახსნი არ გამოგვადგება, რადგანაც იგი უარყოფითია. ამრიგად,  $W(\eta)$  ფუნქციას ექნება სახე

$$W(\eta) = \frac{c}{m^2} \left( b + \sqrt{b^2 + \frac{am^2}{c}} \right) \eta^2,$$

ხოლო ოპტიმალური რეგულირების კანონი კი იქნება

$$\xi^0 = -\frac{1}{m} \left( b + \sqrt{b^2 + \frac{am^2}{c}} \right) \eta(t).$$

ეს ზუსტად იგივეა, რაც გვექონდა ამ ამოცანის ამოხსნისას ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით (10.37) ფორმულის სახით.

მაგალითი 10.4.

ახლა განვიხილოთ მეორე რიგის განტოლებით აღწერილი შეშფოთებული მოძრაობა (10.40), სასაზღვრო პირობებით (10.42) და ფუნქციონალით (10.41)

ოპტიმალობის საკმარისობის თეორემა ასეთი შემთხვევისათვის გვაძლევს პირობებს (შესაბამისად (10.53) და (10.54) პირობებისა):

$$\frac{\partial W(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} \eta_2 + \frac{\partial W(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} (b_1 \eta_1 + b_2 \eta_2 + m \xi^0) + a_1 \eta_1^2 + a_2 \eta_2^2 + c \xi^0{}^2 = 0, \quad (10.63)$$

$$\frac{\partial W(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} m + 2c \xi^0 = 0. \quad (10.64)$$

(10.64) ტოლობა განსაზღვრავს ოპტიმალური რეგულირების კანონს

$$\xi^0 = -\frac{m}{2c} \frac{\partial W(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1}, \quad (10.65)$$

რომლის ჩასმით (10.63) ტოლობაში ვლედულობთ (10.56) სახის კერძო წარმოებულთან დიფერენციალურ განტოლებას  $W(\eta_1, \eta_2)$  ფუნქციისათვის, კერძოდ,

$$\frac{\partial W(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} \eta_2 + \frac{\partial W(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} (b_1 \eta_1 + b_2 \eta_2) - \frac{m^2}{4c} \left( \frac{\partial W}{\partial \eta_2} \right)^2 + a_1 \eta_1^2 + a_2 \eta_2^2 = 0. \quad (10.66)$$

$W(\eta_1, \eta_2)$  ფუნქციას ვეძებთ კვადრატული ფორმის სახით

$$W(\eta_1, \eta_2) = A_{11} \eta_1^2 + 2A_{12} \eta_1 \eta_2 + A_{22} \eta_2^2, \quad (10.67)$$

სადაც  $A_{11}, A_{12}, A_{22}$  უცნობი კოეფიციენტებია.

(10.67) გამოსახულება ჩავსვით (10.66) განტოლებაში, მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\left(2A_{12}b_1 - \frac{m^2}{c}A_{12}^2 + a_1\right)\eta_1^2 + \left(2A_{11} + 2A_{12}b_2 + 2A_{22}b_1 - \frac{2m^2}{c}A_{12}A_{22}\right)\eta_1\eta_2 + \left(2A_{12} + 2A_{22}b_2 - \frac{m^2}{c}A_{22}^2 + a_2\right)\eta_2^2 = 0. \quad (10.68)$$

ამ ტოლობის შესასრულებლად აუცილებელია  $\eta_1^2, \eta_1\eta_2,$  და  $\eta_2^2$  ფუნქციების კოეფიციენტები იყვნენ ნულის ტოლი. ამრიგად, ტოლობა (10.68) გვაძლევს სამ ალგებრულ განტოლებას  $A_{11}, A_{12}$  და  $A_{22}$  სიდიდეების გამოსათვლელად

$$\begin{aligned} A_{12}^2 - 2\frac{b_1c}{m^2}A_{12} - \frac{a_1c}{m^2} &= 0, \\ A_{12}A_{22} - \frac{c}{m^2}A_{11} - \frac{c}{m^2}b_2A_{12} - \frac{c}{m^2}b_1A_{22} &= 0, \\ A_{22}^2 - 2\frac{b_2c}{m^2}A_{22} - \left(2\frac{c}{m^2}A_{12} + \frac{a_2c}{m^2}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (10.69)$$

ამოვხსნათ მიღებული განტოლებათა სისტემა და ამოვიჩიოთ ის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს სილვესტრის პირობებს. ამ შემთხვევაში ეს პირობებია

$$A_{11} > 0, \quad A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0 \quad (10.70)$$

ამ პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ  $A_{22} > 0$  უტოლობაც უნდა სრულდებოდეს.

(10.69) განტოლებებიდან პირველი განტოლების ამოხსნა გვაძლევს ორ ფესვს, დადებითს და უარყოფითს,

$$A_{12} = \frac{b_1c}{m^2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_1c}{m^2}\right)^2 + \frac{a_1c}{m^2}},$$

ხოლო მესამე განტოლება კი ოთხ ფესვს

$$A_{22} = \frac{b_2c}{m^2} \pm \sqrt{\left(\frac{b_2c}{m^2}\right)^2 + \frac{2c}{m^2}A_{12} + \frac{a_2c}{m^2}}.$$



მიღებული გამოსახულებებიდან ჩანს, რომ თუ  $A_{12}$  სიდიდე უარყოფითი იქნება, მაშინ  $A_{22}$  სიდიდის დადებითობას შეიძლება ვერ მივალწიოთ. ამიტომ უნდა ავირჩიოთ დადებითი  $A_{12}$ , ანუ

$$A_{12} = \frac{b_1 c}{m^2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 c}{m^2}\right)^2 + \frac{a_1 c}{m^2}} > 0. \quad (10.71)$$

ამის შემდეგ, რა თქმა უნდა, ვირჩევთ დადებით  $A_{22}$  სიდიდეს, ანუ

$$A_{22} = \frac{b_2 c}{m^2} + \sqrt{\left(\frac{b_2 c}{m^2}\right)^2 + \frac{a_2 c}{m^2} + \frac{2c}{m^2} \left[ \frac{b_1 c}{m^2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 c}{m^2}\right)^2 + \frac{a_1 c}{m^2}} \right]}. \quad (10.72)$$

(10.69) განტოლებათა სისტემის მეორე განტოლება განსაზღვრავს  $A_{11}$  სიდიდეს, როგორც ერთადერთს

$$A_{11} = \frac{m^2}{c} A_{12} A_{22} - b_2 A_{12} - b_1 A_{22} = \frac{m^2}{c} \sqrt{\left(\frac{b_1 c}{m^2}\right)^2 + \frac{a_1 c}{m^2}} \times$$

$$\times \sqrt{\left(\frac{b_2 c}{m^2}\right)^2 + \frac{a_2 c}{m^2} + \frac{2c}{m^2} \left[ \frac{b_1 c}{m^2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 c}{m^2}\right)^2 + \frac{a_1 c}{m^2}} \right]} - \frac{c}{m^2} b_1 b_2 > 0. \quad (10.73)$$

საკმაოდ იოლად მოწმდება, რომ (10.71), (10.72), (10.73) სიდიდეები აკმაყოფილებენ (10.70) უტოლობებს.

(10.65) და (10.67) გამოსახულებები გვაძლევენ

$$\xi^0 = -\frac{m}{c} A_{12} \eta_1(t) - \frac{m}{c} A_{22} \eta_2(t),$$

რომელშიც (10.71) და (10.72) სიდიდეების ჩასმით ვღებულობთ

$$\xi^0 = -\frac{1}{m} \left( b_1 + \sqrt{b_1^2 + \frac{a_1 m^2}{c}} \right) \eta_1(t) - \frac{1}{m} \left( b_2 + \sqrt{b_2^2 + 2b_1 + \frac{a_2 m^2}{c} + 2\sqrt{b_1^2 + \frac{a_1 m^2}{c}}} \right) \eta_2(t). \quad (10.74)$$

ბუნებრივია მივიღეთ იგივე გამოსახულება, რაც გვექონდა მიღებული ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდის გამოყენებით. ამის შემოწმება იოლია, ჩავსვათ (10.45) გამოსახულებაში  $\mu_1$  და  $\mu_2$  ფესვების მნიშვნელობები, მივიღებთ ზუსტად (10.74) გამოსახულებას. (10.40), (10.74) ჩაკეტილი სისტემის მდგრადობის შემოწმება ზედმეტია, რადგანაც ვიცით რომ ამ სისტემისათვის განსაზღვრულია ლიაპუნოვის ფუნქცია  $W(\eta_1, \eta_2)$ .

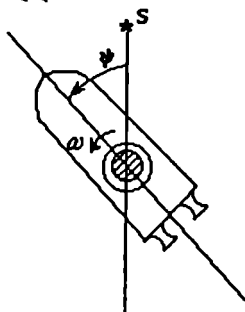
საერთოდ უნდა აღინიშნოს, რომ ოპტიმალური რეგულატორების ანალიზური კონსტრუირების წარფიქვადრატული ამოცანები კარგადაა შესწავლილი. მათი განზოგადობა მრავალმხრივ შეიძლება, მაგალითად, როდესაც ობიექტზე მოქმედებს გარეშე აღმშფოთი ზემოქმედება, როდესაც სისტემა შეიცავს დაგვიანებას, როდესაც სისტემა არასტაციონალურია, როდესაც სისტემაზე სხვა შეზღუდვებიც მოქმედებენ და სხვა. მარტივია ისეთი სახის ამოცანების ამოხსნაც, როდესაც მარეგულირებელი ზემოქმედება ვექტორული სიდიდეა. ყველა ამ სახის ამოცანებს დაინტერესებული მკითხველი შეიძლება გაეცნოს მითითებული ლიტერატურის მეშვეობით [52], [77].

## § 10.9. თანამგრზავრის სტაბილიზაცია მოცემული მიმართულებით.

განვიხილოთ კონკრეტული სახის ობიექტი, ასეთად ავირჩიოთ ხელოვნური თანამგრზავრი და შევისწავლოთ ამოცანა მისი სტაბილიზაციის შესახებ მქნევარას მეშვეობით, რასაც ტექნიკაში გარკვეულ უპირატესობას ანიჭებენ.

დავუშვათ კუთხე  $\Psi$  განსაზღვრავს ზომალდის ღერძის მდგომარეობას ამორჩეულ ფიქსირებულ მიმართულებასთან,

ანუ იგი მოცემული მიმართულებიდან ხომალდის სიგრძივი ღერძის გადახრის კუთხეა.  $\omega$  არის მქნევარას ბრუნვის კუთხური სიჩქარე ხომალდის მიმართ (ნახ.10.2).



ნახ.10.2

სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$(I_C + I_M)\ddot{\Psi}(t) + I_M\dot{\omega}(t) = 0, \quad (10.75)$$

ხოლო მქნევარას მოძრაობის განტოლებაა

$$I_M(\dot{\omega}(t) + \ddot{\Psi}(t)) = -M. \quad (10.76)$$

აქ  $I_C$  და  $I_M$ , შესაბამისად, თანამგზავრისა და მქნევარას ინერციის მომენტებია,  $M$  არის დაფხანული ძრავის მომენტი.

ეს განტოლებები გადალევენ

$$I_C\ddot{\Psi}(t) = M. \quad (10.77)$$

დავუშვათ, მქნევარა იმართება მუდმივი დენის ძრავით. ზოგიერთი მიღებული დაშვების შედეგად ასეთი ძრავის მიერ განვითარებული მომენტი  $M$  შეიძლება გამოისახოს, როგორც

$$M = \frac{K_L}{R_a} \left( v + \frac{\omega}{K_M} \right), \quad (10.78)$$

სადაც  $R_a, K_L$  და  $K_M$  ძრავის ელექტრული კონტურის მუდმივებია, ხოლო  $v$  მმართველი ძაბვაა.

ხომალდის დამყარებულ მდგომარეობას შეესაბამება

$$\Psi^* = \dot{\Psi}^* = 0, \quad (10.79)$$

რაც უნდა განხორციელდეს ისეთი მმართველი ძაბვის რეგულირების კანონის არჩევით, რომ  $v^{\circ} = 0$  უზრუნველყოფდეს (10.79) ტოლობების შესრულებას.

ამ დროს, როგორც (10.75) განტოლებიდან ჩანს, მქნევარას სიჩქარე და წონასწორობის მდგომარეობა განუზღვრელი რჩება.

ამიტომ, განვიხილოთ სისტემის შემფოთებული მოძრაობა, რომელიც წარმოიშება საწყისი მნიშვნელობების შემდეგი სახით განსაზღვრულ ქვესივრცეში

$$I_M \omega_0 + (I_C + I_M) \dot{\Psi}_0 = 0. \quad (10.80)$$

(10.80) პირობას, კერძოდ, აკმაყოფილებს სიდიდეებიც  $\omega_0 = \dot{\Psi}_0 = 0$ . ზოგად შემთხვევაში, (10.80) პირობა ნიშნავს, რომ ხომალდი-მქნევარას სისტემის მოძრაობის რაოდენობის საწყისი მომენტი ნულის ტოლია. მაშინ (10.75) განტოლების მეშვეობით შეიძლება დავწეროთ

$$\omega(t) = -\frac{I_C + I_M}{I_M} \dot{\Psi}(t). \quad (10.81)$$

ამის შემდეგ (10.77) განტოლება (10.78) და (10.81) ფორმულების გამოყენებით მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$I_C \ddot{\Psi}(t) = \frac{K_L}{R_a} \left( v(t) - \frac{I_C + I_M}{I_M K_M} \dot{\Psi}(t) \right). \quad (10.82)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\left. \begin{aligned} \Psi(t) &= \eta_1(t), \quad \dot{\Psi}(t) = \eta_2(t), \quad v(t) = \xi(t), \\ -\frac{K_L(I_C + I_M)}{R_a I_C I_M K_M} &= b_2, \quad \frac{K_L}{R_a I_C} = m. \end{aligned} \right\} \quad (10.83)$$

ამ აღნიშვნების გამოყენებით, განტოლება (10.82) მიიღებს სახეს:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1(t) &= \eta_2(t), \\ \dot{\eta}_2(t) &= b_2 \eta_2(t) + m \xi(t). \end{aligned} \quad (10.84)$$

ამრიგად, მივიღეთ რომ სამართი ობიექტი აღიწერება (10.84) განტოლებებით. ჩვენი მიზანია გარდამავალი პროცესის მინიმიზაცია. ავირჩიოთ ფუნქციონალი

$$I(\xi) = \int_0^{\infty} (a_1 \eta_1^2 + a_2 \eta_2^2 + c\xi^2) dt, \quad a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, c > 0. \quad (10.85)$$

ეს იგივეა, რაც (10.41).

ამოცანა ამოხსნათ ოპტიმალობის საკმარისობის პირობის თეორემის გამოყენებით.

თუ დავაკვირდებით, ეს ის ამოცანაა, რომელიც ამოხსენით წინა პარაგრაფში. განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ ობიექტის აღმწერი (10.40) განტოლებათა სისტემაში  $b_1 = 0$ .

ამრიგად (10.69) ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ნაცვლად გვექნება

$$A_{12}^2 - \frac{a_1 c}{m^2} = 0,$$

$$A_{12} A_{22} - \frac{c}{m^2} A_{11} - \frac{c}{m^2} b_2 A_{12} = 0,$$

$$A_{22}^2 - 2 \frac{b_2 c}{m^2} A_{22} - \left( 2 \frac{c}{m^2} A_{12} + \frac{a_2 c}{m^2} \right) = 0.$$

(10.71), (10.72) და (10.73) ფორმულების ნაცვლად გვექნება

$$A_{12} = + \sqrt{\frac{a_1 c}{m^2}} > 0,$$

$$A_{22} = \frac{b_2 c}{m^2} + \sqrt{\left( \frac{b_2 c}{m^2} \right)^2 + \frac{a_2 c}{m^2} + \frac{2c}{m^2} \sqrt{\frac{a_1 c}{m^2}}} > 0,$$

$$A_{11} = \frac{m^2}{c} \sqrt{\frac{a_1 c}{m^2}} \cdot \sqrt{\left( \frac{b_2 c}{m^2} \right)^2 + \frac{a_2 c}{m^2} + \frac{2c}{m^2} \sqrt{\frac{a_1 c}{m^2}}} > 0.$$

თანამგზავრის სტაბილიზაციის კანონს, (10.74) ფორმულის მსგავსად, ექნება შემდეგი სახე:

$$\xi^0(t) = -\frac{1}{m} \sqrt{\frac{a_1 m^2}{c}} \eta_1(t) - \frac{1}{m} \left( b_2 + \sqrt{b_2^2 + \frac{a_2 m^2}{c} + 2 \sqrt{\frac{a_1 m^2}{c}}} \right) \eta_2(t)$$

(10.86)

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$P = \frac{m^2}{c} \sqrt{\frac{a_1 c}{m^2}}, \quad Q = \sqrt{b_2^2 + \frac{a_2 m^2}{c} + \frac{2m^2}{c} \sqrt{\frac{a_1 c}{m^2}}}$$

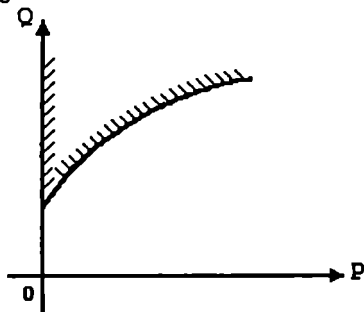
მაშინ სილვესტრის პირობების მიხედვით გვექნება

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = Q^2 + b_2 Q - P > 0, \quad (10.87)$$

ხოლო სტაბილიზაციის (10.86) კანონი ასე ჩაიწერება:

$$\xi^0(t) = -\frac{1}{m} P \eta_1(t) - \frac{1}{m} (b_2 + Q) \eta_2(t). \quad (10.88)$$

განვიხილოთ  $PQ$  სიბრტყე. ამ სიბრტყეზე გვექნება არე, რომლის მიხედვითაც შეიძლება ამორჩეულ იქნეს  $P$  და  $Q$  მნიშვნელობები. ეს არე შემოსაზღვრულია ქვევით (10.87) პარაბოლის დადებითი განშტოებით, ხოლო გვერდიდან  $P=0$  ღერძით (ნახ.10.3).



ნახ.10.3

ასეთი არჩევანი შეიძლება მხოლოდ დაშტრიხულ არეში. ეს ნიშნავს, რომ ნებისმიერი  $m, c, b_2$  და  $P > 0$  სიდიდეებისათვის ყოველთვის მოიძებნება ისეთი

$$Q > -\frac{b_2}{2} + \sqrt{\frac{b_2^2}{4} + P},$$

რომლის დროსაც მოცემულ ოპტიმალურ ამოცანას თანამგზავრის სტაბილიზაციის შესახებ ყოველთვის ექნება ამოხსნა.

ამ დროს გარდამავალი პროცესის დინამიკა (10.84), (10.88) ჩაკეტილ სისტემაში

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1(t) &= \eta_2(t), \\ \dot{\eta}_2(t) &= -P\eta_1(t) - Q\eta_2(t)\end{aligned}\tag{10.89}$$

განისაზღვრება  $P, Q$  რიცხვებითა და  $\frac{a_1}{c}, \frac{a_2}{c}$  კოეფიციენტების მნიშვნელობებით.

(10.89) სისტემის მახასიათებელი განტოლებაა

$$\mu^2 + Q\mu + P = 0,$$

რომლის ფესვებია

$$\mu_{1,2} = -\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P} = -\frac{Q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{Q^2 - 4P}.$$

როგორც ვხედავთ, პროცესის ჩაქრობის სიჩქარე ძირითადად დამოკიდებულია  $Q$  სიდიდეზე.

ეხლა განვიხილოთ პარაბოლა

$$Q^2 - 4P = 0.$$

თუ ეს პარაბოლა გადაკვეთს (10.87) პარაბოლას, მაშინ ვღებულობთ  $P$  და  $Q$  პარამეტრების არეს, რომელშიც გარდამავალი პროცესი იქნება ან აპერიოდული, ან რხევითი. თუ ასეთ გადაკვეთას ადგილი არ ექნება, მაშინ ნებისმიერი  $P$  და  $Q$ , რომელზეც (10.87) პირობას აკმაყოფილებენ, მოგვცემენ აპერიოდულ პროცესს. ეს ყველაფერი დამოკიდებულია  $b_2, m, a_1, a_2, c$  პარამეტრებზე, რომლებიც განსაზღვრავენ  $P$  და  $Q$  სიდიდეებს. მოცემული ობიექტისათვის, ე.ი. როცა მოცემულია  $b_2$  და  $m$  კოეფიციენტები, სხვადასხვა პარამეტრებიანი ფუნქციონალის ოპტიმიზაციისას სხვადასხვა სახის გარდამავალი პროცესი მიიღება. თუ დაუბრუნდებით (10.83) აღნიშნებს, მაშინ ძრავის ელექტრული კონტურის მუდმივების წინასწარი არჩევით შევძლებთ წინასწარ განვსაზღვროთ ოპტიმალური გარდამავალი პროცესის სახე.

# თავი მეთერთმეტე

## დინამიკური პროგრამირების მეთოდი

### § 11.1. შესავალი. ოპტიმალობის პრინციპი

დინამიკური პროგრამირების მეთოდის ავტორია რიჩარდ ბელმანი. მეთოდი გამოიყენება ოპტიმალური მართვის ყველა ამოცანების გადასაწყვეტად [6], [12], [45], [61], [63], [75], [88].

ვთქვათ, სისტემა აღიწერება მდგომარეობის დიფერენციალური განტოლებით.

$$\frac{dx}{dt} = \Psi(x(t), u(t), t), \quad (11.1)$$

სადაც  $x(t) - n$  განზომილების მდგომარეობის ვექტორია,  $u(t)$  არის  $m$  განზომილებიანი მართვის ფუნქცია. მოცემულია საწყისი მდგომარეობა  $x(t_0)$ , მართვის დასაშვები  $\Omega(u)$  არე და ოპტიმალობის კრიტერიუმი.

$$I = \int_{t_0}^T F(u(t), x(t), t) dt, \quad (11.2)$$

რომელსაც ინტეგრირების ზედა ზღვარი აქვს ფიქსირებული.  $x(t)$  ვექტორზე და მის სასრულო მნიშვნელობაზე არ დაიდება შეზღუდვები, ე.ი. განიხილება ამოცანა ტრაექტორიის თავისუფალი მარჯვენა ბოლოთი და მართვის ფიქსირებული დროით.  $t$  არგუმენტი  $\Psi$  და  $F$  ფუნქციებში მიუთითებს მათ არასტაციონალურ ხასიათს და ასეთ ობიექტებს უწოდებენ არაავტონომიურს. მოითხოვება მართვის დასაშვები ფუნქციების კლასში მოცემნოთ ისეთი  $u(t)$  მართვა, რომ

$I$ —ფუნქციონალი აღწევდეს მინიმალურ მნიშვნელობას

$$I = \min_u, \quad u(t) \in \Omega(u),$$



ხოლო მართვის ობიექტი— $T-t_0$  დროში გადავიდეს მოცემული საწყისი მდგომარეობიდან ნებისმიერ სასრულო მდგომარეობაში, რომელიც ეკუთვნის მდგომარეობის სივრცეს.

ეს ამოცანა შეიძლება გავერცელოთ დისკრეტული ობიექტის მართვაზეც. ასეთი ობიექტი აღიწერება სხვაობითი განტოლებით

$$x_{k+1} = \Psi(x_k, u_k, t_k). \quad (11.4)$$

ოპტიმალობის კრიტერიუმს აქვს სახე

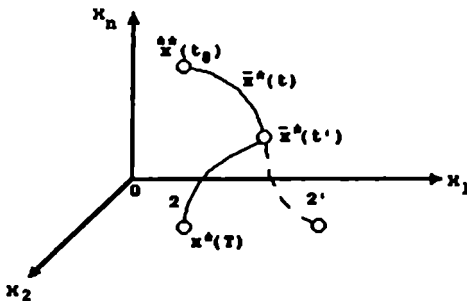
$$I = \sum_{k=0}^N F(x_k, u_k, t_k), \quad (11.5)$$

სადაც  $N$  არის ფიქსირებული სიდიდე. მდგომარეობის და მართვის ვექტორებზე შემოგვაქვს იგივე დაშვებები, როგორც უწყვეტი მართვის შემთხვევაში.

დინამიკური პროგრამირების საფუძველია ე.წ. ოპტიმალობის პრინციპი, რომელიც ამტკიცებს, რომ ოპტიმალური ტრაექტორიის ნებისმიერი დარჩენილი სასრულო უბანი თავისთავად წარმოადგენს ოპტიმალურ ტრაექტორიას.

განვიხილოთ და დავამტკიცოთ ეს პრინციპი უფრო დეტალურად. დავუშვათ, რომ ამოცანა გადაწყვეტილია. მოძებნილია ოპტიმალური  $u^*(t)$  მართვა და მისი შესაბამისი

ოპტიმალური  $x^*(t)$  ტრაექტორია. ავგოთ ეს ტრაექტორია მდგომარეობის სივრცეში (ნახ.11.1.)<sub>0</sub>



ნახ.11.1

გამოვეყთ ამ ტრაექტორიაზე წერტილი  $y^*(t')$ , რომელიც შეესაბამება მომენტს  $t_0 < t' < T$  ეს წერტილი ჰყოფს ოპტიმალურ ტრაექტორიას ორ 1 და 2 უბნებად. ვაჩვენოთ, რომ ოპტიმალური ტრაექტორიის 2 უბანი თავისთავად წარმოადგენს ოპტიმალურ ტრაექტორიას შემდეგი აზრით: დაეუშვათ, რომ  $t'$  მომენტში ობიექტი აღმოჩნდა  $x(t')$  მდგომარეობაში და აუცილებელია ვიპოვოთ დასაშვებ მართებში ისეთი მართვა და მისი შესაბამისი ტრაექტორია,

რომლებსათვისაც  $\int_{t_0}^T F(t)dt = \min$ ;  $x(t') = x^*(t')$  ოპტიმალ-

ბის პრინციპი ამტკიცებს, რომ ასეთ ტრაექტორიად იქნება პირველადი ოპტიმალური ტრაექტორიის 2 უბანი. პრინციპის დამტკიცება ძალიან მარტივია. დაეუშვათ, რომ პრინციპი არის არასწორი და შეიძლება მივუთითოთ  $2'$  უბანი, რო-

მელზედაც ინტეგრალი  $\int_{t'}^T F(t)dt$  არის უფრო მინიმალური,

ვიდრე 2 უბანზე. მაშინ თავიდანვე ე.ი.  $t_0$  მომენტიდან შეიძლებოდა მოგვეძებნა ისეთი მართვა, რომლის დროსაც ობიექტის მოძრაობის ტრაექტორია თანხვედბოდეს  $1-2'$  მრუდეს. ამ ტრაექტორიაზე

$$I = \int_{t_0}^T F dt = \int_{t_0}^{t'} F dt + \int_{t'}^T F dt \quad (11.6)$$

ფუნქციონალი იქნებოდა მცირე ვიდრე  $1-2$  ტრაექტორიაზე. მაგრამ საწყისი წინაპირობების თანახმად  $I$  ფუნქციონალი აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას  $1-2$  ტრაექტორიაზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ  $2'$  უბანი არ ხასიათდება ოპტიმალური თვისებებით და ოპტიმალურია 2 უბანი. ამრიგად, როგორიც არ უნდა იყოს ობიექტის პირვანდელი მდგომარეობა და მართვა დროის საწყის პერიოდში, შემდგომი მართვა უნდა იყოს ოპტიმალური იმ მდგომარეობის მიმართ, რომელსაც მიიღებს ობიექტი პირვანდელი მართვის შედეგად. დროის ნებისმიერ მომენტში ოპტიმალური მართვა არ არის დამოკიდებული სისტემის

წინა ისტორიაზე და განისაზღვრება მხოლოდ სისტემის მდგომარეობით ამ მომენტში და მართვის მიზნით.

ობტიმალობის პრინციპი არ შეიძლება აურიოთ მის ზოგიერთ მოჩვენებით ანალოგებს: ობტიმალურია მხოლოდ ობტიმალური ტრაექტორიის სასრულო უბანი და არა რომელიმე შუალედური. ამის ნათელი მაგალითად რ.ბელმანს მოჰყავს გრძელ მანძილზე მორბენლის ქცევის სტრატეგია. სტარტზე მორბენალი ისახავს მიზანს, რომ თავისი ყველა შესაძლებლობის გამოყენებით გაირბინოს დისტანცია მინიმალურ დროში. როდესაც ის იმყოფება დისტანციაზე, დროის ყოველ მომენტში ანაწილებს თავის ძალებს ისე, რომ ითვისოს წინებს თავის მდგომარეობას დარჩენილი უბნების მინიმალურ დროში გასაველეად. თუ ის დაისახავს მიზანს, რომ ყოველი უახლოესი უბანი გაიაროს უმოკლეს დროში, ადვილი შესაძლებელია, რომ მან ფინიშამდე ვერ მიაღწიოს.

### § 11.2. დინამიკური პროგრამირების მეთოდის დისკრეტული ვარიანტი

მეთოდის შესწავლა დავიწყოთ ერთგანზომილებიანი დისკრეტული ობიექტების მართვის მარტივი ამოცანის შესწავლით. ერთგანზომილებიანი ამოცანები საშუალებას გვაძლევს ნათლად წარმოვიდგინოთ მეთოდის ძირითადი პრინციპები, ხოლო ამოცანის დისკრეტულობა საშუალებას გვაძლევს აქტიურად გამოვიყენოთ კომპიუტერი [12], [45], [75], [146].

სისტემა აღიწერება შემდეგი პირველი რიგის განტოლებით

$$x_{k+1} = x_k + \Psi(x_k, u_k), \quad k = 0, 1, 2. \quad (11.7)$$

სადაც  $x_k = x(t_k)$ ,  $u_k = u(t_k)$ . მოცემულია საწყისი  $x_0$  მდგომარეობა, ობტიმალობის კრიტერიუმი

$$I = \sum_{k=0}^n F(u_k, x_k) \quad (11.8)$$

და მართვების დასაშვები არე  $\Omega(u)$ . მოითხოვება ვიპოვოთ მართვების ისეთი თანმიმდევრობები  $u_0, u_1, \dots, u_n$ , რომელებზედაც  $I$  ფუნქციონალი აღწევს მინიმუმს მოცემული საწყისი მდგომარეობის გათვალისწინებით. აღნიშნული ამოცანა შეიძლება ვცადოთ ამოვხსნათ, როგორც მრავ-

ვალცვლადიანი ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის ამოცანა ლაგრანჟის განუზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდის გამოყენებით. მაგრამ ცვლადების ღიდი რაოდენობა და შეზღუდვები  $\Omega(u)$  არეში არ გვაძლევს საშუალებას გამოვიყენოთ კლასიკური მეთოდები და საჭიროებენ ახლებურ მიდგომას.

დინამიკური პროგრამირების მეთოდის თანახმად ამოცანის გადაწყვეტა იწყება მისი მარჯვენა ბოლოდან. დავუშვათ, რომ ყველა მართვები  $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$  მოქმეზნილია, ხოლო (11.7)–ის და  $x_0$  საფუძველზე მოქმეზნილია შესაბამისი მდგომარეობები  $x_0, x_1, \dots, x_N$ . უცნობია მხოლოდ  $u_N$ ; მოვქმეზნოთ იგი. ვინაიდან  $u_N$ -ზე დამოკიდებულია მხოლოდ (11.8) ბოლო მდგენელი, მაშინ ოპტიმალობის პრინციპზე დამოკიდებულებით ის მოიქმეზნება პირობიდან

$$I_N = F(u_k, x_k) = \min_{u_N \in \Omega(u)} . \quad (11.9)$$

ვარაუდის თანახმად  $x_N$  ცნობილია, ამიტომ  $I_N$  დამოკიდებულია მხოლოდ ერთადერთ  $u_N$  არგუმენტზე. თუ გამოვიყენებთ ერთგანზომილებიან ფუნქციის მინიმიზაციის რომელიმე მეთოდს, ვიპოვით  $\Omega(u)$  არეში  $u_N$  მართვას, რომელიც აკმაყოფილებს (11.9). ცხადია ეს მართვა ფუნქცია იქნება ობიექტის მდგომარეობისა  $t_N$  მომენტში, ე.ი.

$$u_N^* = u_N^*(x_N) . \quad (11.10)$$

თუ უკანასკნელს შევიტანთ  $I_N$  გამოსახულებაში, მაშინ მივიღებთ მის მინიმალურ მნიშვნელობას, რომელიც (11.4) გათვალისწინებით იქნება  $x_N$ -ის ფუნქცია.  $S_N$  აღენიშნოთ  $I_N$  მინიმალური მნიშვნელობა, როდესაც მართვა აღწევს  $u_N^*(x_N)$  ოპტიმალურ მნიშვნელობას, ე.ი.

$$S_N = S_N(x_N) = \min_{u_N \in \Omega(u)} I_N . \quad (11.10)$$

(11.8)-(11.10) ამოცანის ამოხსნა ანალიზურად იშვიათად ხდება, ვინაიდან  $\partial I_n / \partial u_N = 0$  პირობიდან გამომდინარე  $u_N$  ოპტიმალური მართვა მდებარეობს  $\Omega(u)$  არეს გარეთ. პრაქ-

ტიკაში ამოცანის გადაწყვეტა ხდება კომპიუტერის საშუალებით.

გადავიდეთ ამოცანის გადაწყვეტის შემდეგ ეტაპზე. დაუშვათ, რომ განსაზღვრულია ყველა მართეები  $u_0, u_1, \dots, u_{N-2}$  და მათი შესაბამისი მდგომარეობები  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ . ვიპოვოთ ოპტიმალური მართეები  $l_{N-1}, l_N$  მომენტებში. ოპტიმალობის პრინციპის თანახმად ეს მართეები დამოკიდებულია  $x_{N-1}$  მდგომარეობაზე და მართვის მიზანზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ უნდა მოვახდინოთ (11.8) გამოსახულების ბოლო ორი წევრის მინიმიზაცია. მაშასადამე,  $l_{N-1}, l_N$  მომენტებში ოპტიმალური მართვის მოქმენა ხდება პირობიდან

$$I_{N-1} = F(u_{N-1}, x_{N-1}) + F(u_N, x_N) = \min_{u_{N-1}, u_N \in U} . \quad (11.11)$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ  $u_N$ -ზე არის დამოკიდებული (11.11) მხოლოდ მეორე შესაყრები. მაგრამ მისი მინიმიზაცია უკვე მოხდა პირველ ეტაპზე და მოქმენილია მისი მნიშვნელობა (11.10)-ში  $u_N$  ოპტიმალური მართვისას. ამიტომ (11.11)-ში უნდა მოვახდინოთ მინიმიზაცია მხოლოდ  $u_{N-1}$ -ის მიხედვით და ამოცანის ამოხსნის პირველ ეტაპზე მიღებული შედეგებით

$$F(u_{N-1}, x_{N-1}) + S_N(x_N) = \min_{u_{N-1} \in U} . \quad (11.12)$$

(11.12) ჩაწერა იმას ნიშნავს, რომ  $u_{N-1}$  მართვა მოიქმენება მხოლოდ შესაყრების მინიმიუმის პირობიდან, რომელიც უშუალოდ მასზეა დამოკიდებული. ვინაიდან (11.7) პირობის თანახმად

$$x_N = x_N + \Psi(x_{N-1}, u_{N-1}), \quad (11.13)$$

ამიტომ (11.12) პირობა მიიღებს სახეს

$$F(u_{N-1}, x_{N-1}) + S_N(x_N + \Psi(x_{N-1}, u_{N-1})) = \min_{u_{N-1} \in U} \quad (11.14)$$

და  $u_{N-1}$  მართვა მოიქმენება საუკეთესო თვისობრიობის პირობიდან  $[l_{N-1}, l_N]$  მონაკვეთში.

(11.14) ამოცანა შეიცავს ერთადერთ უცნობ სიდიდეს  $u_{N-1}$ . მისი მნიშვნელობა, რომელიც აკმაყოფილებს (11.14) და დამოკიდებულია  $u_{N-1}$ , იქნება

$$u_{N-1}^* = u_{N-1}^*(x_{N-1}). \quad (11.15)$$

თუ შევიტანთ (11.5)-ს (11.4)-ში და ამ მნიშვნელობას აღვნიშნავთ  $S_{N-1}(x_{N-1})$  მივიღებთ

$$S_{N-1}(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1} \in U} \{F(u_{N-1}, x_{N-1}) + S_N(x_{N-1} + \Psi(u_{N-1}, x_{N-1}))\}. \quad (11.16)$$

თუ განვაზოგადებთ ამოცანას მარცხნივ  $k$  ბიჯისათვის მივიღებთ გამოსახულებას, რომელიც მსგავსია (11.16):

$$S_{N-k}(x_{N-k}) = \min_{u_{N-k} \in U} \{F(u_{N-k}, x_{N-k}) + S_{N-k+1}(x_{N-k} + \Psi(u_{N-k}, x_{N-k}))\}. \quad (11.17)$$

(11.17)-ს თანახმად ვიპოვიტ  $I_{N-k}$  მომენტში ოპტიმალურ მართვას

$$u_{N-k}^* = u_{N-k}^*(x_{N-k}) \quad (11.18)$$

და მდგომარეობის მნიშვნელობას

$$S_{N-k}(x_{N-k}),$$

როდესაც  $k$  ცვლილებისას მისი მნიშვნელობა გაუტოლდება  $N$  ე.ი.  $k = N$ , მაშინ

$$S_0(x_0) = \min_{u_0 \in U} \{F(u_0, x_0) + S_1(x_0 + \Psi(x_0 + \Psi(x_0, u_0)))\}. \quad (11.19)$$

(11.19) პირობიდან ვპოულობთ ოპტიმალურ მართვას, როგორც ობიექტის საწყისი მნიშვნელობის ფუნქციას

$$u_0^* = u_0^*(x_0). \quad (11.20)$$

ენიდან საწყისი  $x_0$  მდგომარეობის მნიშვნელობა კონკრეტულია, ამიტომ  $u^*$  მნიშვნელობაც უნდა იყოს კონკრეტული და მას უნდა შეესაბამებოდეს  $S_0(x_0)$  კონკრეტული მნიშვნელობა. ის უნდა აკმაყოფილებდეს (11.19). ე.ი. ყველა  $u_0^{(1)}, u_0^{(2)}, \dots, u_0^{(M)}$  მნიშვნელობისას უნდა შეირჩეს მინიმალური  $S_0$ .

მაგალითი 11.1 [64].

არის საქონლის ფარა, რომლის შენახვაზე იხარჯება გარკვეული თანხები. ეს დანახარჯები კომპენსირდება ფარის ნაწილის გაყიდვის ხარჯზე. საჭიროა ვიპოვოთ სულადობის მართვის წესი, ისე რომ დანახარჯები იყოს მინიმალური (მისაღები მოგების გამოკლებით).

$x(k)$ —საქონლის სულადობის რაოდენობაა  $k$  წლის დასაწყისში,  $k = 0, 1, \dots, k_j$ ,  $u[k]$ —საქონლის სულადობის რაოდენობაა  $k$  წელს,  $k = 0, 1, \dots, k_{j-1}$ . ამ სიდიდეებზე დადებულა შეზღუდვები

$$0 \leq u[k] \leq x[k], \quad k = 0, \dots, k_{j-1}. \quad (11.21)$$

საქონლის სულადობა იცვლება წლიდან წლამდე თანაფარდობით  $x[k+1] = \beta(x[k] - u[k])$ ,  $k = 0, \dots, k_j$  არის კოეფიციენტი სულადობის ბუნებრივი ნამატისა, მორიგი გაყიდვისას, რომელიც შესრულდება მორიგი აღწერის შემდეგ. საჭიროა მოვახდინოთ მინიმიზაცია გამოსახულებისა

$$I = \sum_{k=0}^{k_{j-1}} \{h(x[k] - u[k]) - Cu[k]\}, \quad (11.22)$$

სადაც  $h$ —არის დანახარჯები ერთი ცხოველის შესანახად ერთი წლის განმავლობაში.  $C$ —მისი გაყიდვის ფასია წლის დასაწყისში,  $C > h > 0$ .

დინამიკური პროგრამირების ძირითადი განტოლება ჩავეწეროთ შემდეგი სახით

$$S(x, \tau) = \min_{u \in D_x} \{g_0(x, u, \tau) + S[F(x, u, \tau), \tau + 1]\}, \quad (11.23)$$

$$S(x, \tau) = \min_{0 \leq u \leq x} \{hx - (C + h)u + S[\beta(x - u), \tau + 1]\}. \quad (11.24)$$

ამასთანავე  $S(x, K_j) \equiv 0$ . შევეცადოთ ავაგოთ მიმდევრობითი  $S(x, \tau)$  ფუნქციები. გვექნება

$$S(x, k_{j-1}) = \min_{0 \leq u \leq x} \{hx - (C + h)u\} = -Cx, \quad (11.25)$$

ამასთანვე  $u^*(x, k_{j-1}) = x$ , ეს იმას გვიჩვენებს, რომ ბოლო წელს სულადობის შენარჩუნება არამიზანშეწონილია, ვინაიდან მისგან აღარ შეიძლება მივიღოთ მოგება (ბოლო გაყიდვა შეიძლება მხოლოდ წლის დასაწყისში).  $\tau = k_j - 2$  დროს, გვექნება

$$S(x, k_{j-2}) = \min_{0 \leq u \leq x} \{hx - (C + h)u + c\beta(x - u)\}. \quad (11.26)$$

გათვალისწინებულია  $S(x, K_{j-1})$  სახე. ახლა რეზულტატები დამოკიდებულია  $u$  ნიშანზე,

$$u = 0, \quad \text{თუ} \quad \beta > 1 + \frac{h}{C},$$

$$u = x, \quad \text{თუ} \quad \beta < 1 + \frac{h}{C}.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ მიზანშეწონილია შევინარჩუნოთ მთელი სულადობა, თუ ნაზრდის კოეფიციენტი არის დიდი, საწინააღმდეგო შემთხვევაში წინასწარ თავიდან უნდა მოვიცილოთ. დაეუშვათ, რომ პარამეტრების მნიშვნელობებია,  $\beta = 1,2$ ,  $h = 0,1C$ , მაშინ

$$S(x, k_{j-1}) = -(C\beta - 1)x.$$

ჩვენ გვაქვს უარყოფითი კოეფიციენტებიანი წრფივი ფუნქცია (დანახარჯები არ აღემატება შემოსავალს).

ცხადია, რომ შემდეგი ეტაპების განხილვა გვაძლევს იგივე რეზულტატებს:

$$u^*(x, \tau) = 0, \quad \tau \leq k_{j-2}.$$

ე.ი. საჭიროა ბოლო წლამდე შევინარჩუნოთ სულადობა. იგი იცვლება კანონით

$$x[k] = \beta^k x[0], \quad k = 0, \dots, k_{j-1}.$$

იზრდება დანახარჯები მის შენახვაზე

$$h \sum_{k=0}^{k_{j-1}} \beta^k x[0],$$

მაგრამ ის იფარება მოგებიდან, რომელიც მიიღება საქონლის გაყიდვიდან ბოლო წლის წინ:

$$c\beta^{k_{j-1}} x[0].$$



ადრე ყველგან ნაგულისხმევი იყო, რომ ყველა  $S(x, \tau)$  ფუნქციები განსაზღვრულია, მხოლოდ  $x \geq 0$ .

ხაზი რომ გავუსვათ ამ გარემოებას, ცოტათი შევცვალოთ ამოცანის ფორმულირება, დავუმატოთ პირობა, რომ  $k = k_j$  სასრულო მომენტში საჭიროა სულადობა შევინარჩუნოთ არანაკლები მოცემულ  $\bar{x}$  დონეზე.

ამ შემთხვევაში პირობა

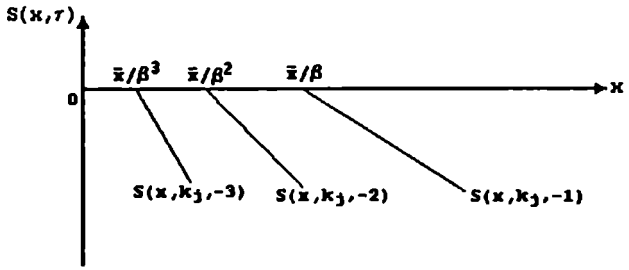
$$S(x, k_j) = 0,$$

მოცემულია მხოლოდ  $x \geq \bar{x}$ .  $x < \bar{x}$  პირობისას  $S(x, k_j)$  არ განისაზღვრება. შემდეგ ნათელია, ყველა ეტაპზე დასაშვებია არა ნებისმიერი საწყისი პირობები, არამედ ისეთები, რომელთა დროს შესაძლებელია სასრულო შეზღუდვების შესრულება:  $k_{j-1}$  მომენტში  $x[k_j - 1]$  არ უნდა იყოს  $\bar{\beta} \bar{x}$  ნაკლები, ნებისმიერი  $\tau$ -თვის  $x[\tau]$  არანაკლები  $\beta^{-\tau} x[0]$ . საწინააღმდეგო შემთხვევაში, ცხოველთა სულადობა ვერ მიაღწევს მოცემულს. ეს შეზღუდვები უნდა იყოს გათვალისწინებული მინიმიზაციისას.

კერძოდ,  $k_j - 1$  მომენტში

$$u^*(x, k_j - 1) = x - \frac{\bar{x}}{\beta}, \quad x \geq \frac{\bar{x}}{\beta}, \quad (11.28)$$

$S(x, \tau)$  ფუნქციას აქვს სახე (ნახ.11.2).



ნახ.11.2

მაგალითი 11.2 [45].

ობიექტი აღიწერება განტოლებით

$$\frac{dx}{dt} = u - x. \quad (11.29)$$

საჭიროა მოიძებნოს მართვა, რომელიც გადაიყვანს სისტემას  $x(0) = 0$  მდგომარეობიდან  $x(1) = 1$  მდგომარეობაში. ამასთან ფუნქციონალმა

$$I[x, u] = \int_0^1 (x^2 + u^2) dt \quad (11.30)$$

უნდა მიაღწიოს მინიმუმს.

განვიხილოთ დისკრეტული ამოცანა.

დავყოთ დროის  $[0, 1]$  ინტერვალი ნაწილებად

$$t_0 = 0, 0; \quad t_1 = 0, 2; \quad t_2 = 0, 4; \quad t_3 = 0, 6; \quad t_4 = 0, 8; \quad t_5 = 1, 0.$$

$x$  კოორდინატები იღებენ შემდეგ დისკრეტულ მნიშვნელობებს

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 0, 2; \quad x_2 = 0, 4; \quad x_3 = 0, 6; \\ x_4 = 0, 8; \quad x_5 = 1, 0.$$

(11.29) განტოლებიდან გადავიღეთ სასრულო სხვაობით განტოლებაზე

$$\Delta x(k\Delta t) = (u(k\Delta t) - x(k\Delta t))\Delta t. \quad (11.31)$$

დისკრეტულ ამოცანაზე გადასვლისას ფუნქციონალს აქვს სახე

$$I[x, u] = \sum_{k=0}^4 [x^2(k\Delta t) + u^2(k\Delta t)]\Delta t. \quad (11.32)$$

შევიტანოთ (11.32)-ში  $u(k\Delta t)$  მნიშვნელობა. (11.31) გამოსახულებიდან მივიღებთ

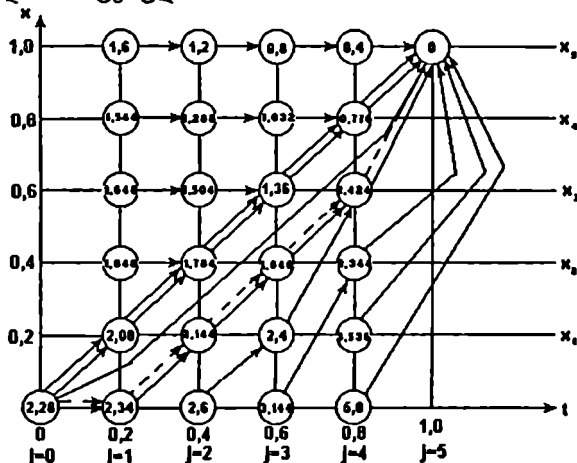
$$I[x, u] = \sum_{k=0}^4 \left[ x^2(k\Delta t) + \left( \frac{\Delta x(k\Delta t)}{\Delta t} \right) + \Delta x(k\Delta t)^2 \right] \Delta t. \quad (11.33)$$

(11.33) ფუნქციონალის ნაზრდი  $k$ - ბიჯზე იქნება

$$\Delta I_k = \left[ x^2(k\Delta t) + \left( \frac{\Delta x(k\Delta t)}{\Delta t} + \Delta x(k\Delta t) \right)^2 \right] \Delta t. \quad (11.34)$$

1 ცხრილში მოცემულია  $\Delta I_k$  ნაზრდის დამოკიდებულება  $x(k\Delta t)$ ,  $\Delta x(k\Delta t)$ .

ამოცანის გადაწყვეტა იწყება ბოლო ეტაპიდან. საბოლოო მდგომარეობაში  $x(1) = 1$  შეიძლება მოვხვდეთ ბოლო ეტაპზე ნებისმიერი მდგომარეობიდან  $x_0, \dots, x_k$  ამასთან ფუნქციონალის ნაზრდი მოცემულია (ნახ.11.3.),



ნახ.11.3

ბოლოსწინა ეტაპზე  $j = 3$  სხვადასხვა საწყისი მნიშვნელობისათვის განისაზღვროს ფუნქციონალის ნაზრდის მინიმუმი. ისრებით ნახაზზე მოცემულია შესაბამისი გადაადგილებები, რომლებიც შეესაბამება ფუნქციონალის მინიმალურ ნაზრდებს. გვექნება

$$I^*(x_i^3) = \min \left\{ \left[ (x_i^3)^2 + \left( \frac{\Delta x_i}{\Delta t} + x_i^3 \right)^2 \right] \Delta t + \Delta I^*(x, 4) \right\},$$

მაშინ

№	1	2	3	4	5	6	7
$x(k\Delta t)$	1,0	0,8	0,8	0,6	0,6	0,6	0,4
$\Delta x(k\Delta t)$	0,0	0,0	0,2	0,0	0,2	0,4	0,0
$\Delta J_k$	0,4	0,256	0,776	0,144	0,584	1,424	0,064
№	8	9	10	11	12	13	14
$x(k\Delta t)$	0,4	0,4	0,4	0,2	0,2	0,2	0,2
$\Delta x(k\Delta t)$	0,2	0,4	0,6	0,0	0,2	0,4	0,6
$\Delta J_k$	0,424	1,184	2,344	0,016	0,296	0,976	2,056
№	15	16	17	18	19	20	21
$x(k\Delta t)$	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$\Delta x(k\Delta t)$	0,8	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\Delta J_k$	3,536	0	0,2	0,8	1,8	3,2	5,0

ამრიგად,

$$\Delta I^*(x_5^3) = 0,8;$$

$$\Delta I^*(x_4^3) = \min \left\{ \begin{array}{l} 0,776 + 0,4 \\ 0,776 + 0,256 \end{array} \right\} = 1,032;$$

$$\Delta I^*(x_3^3) = \min \left\{ \begin{array}{l} 1,44 + 0,4 \\ 0,584 + 0,776 \\ 1,44 + 0,1464 \end{array} \right\} = 1,36;$$

$$\Delta J^*(x_2^3) = \min \left\{ \begin{array}{l} 2,344 + 0,4 \\ 1,184 + 0,776 \\ \underline{0,424 + 1,424} \\ 0,064 + 2,344 \end{array} \right\} = 1,848;$$

$$\Delta I^*(x_1^3) = \min \left\{ \begin{array}{l} 3,526 + 0,4 \\ 2,056 + 0,776 \\ \underline{0,976 + 1,424} \\ 0,296 + 2,344 \\ 0,016 + 3,536 \end{array} \right\} = 2,4;$$

$$\Delta I^*(x_0^3) = \min \left\{ \begin{array}{l} 5,0 + 0,4 \\ 3,2 + 0,776 \\ 1,8 + 1,424 \\ \underline{0,8 + 2,344} \\ 0,2 + 3,536 \\ 0,0 + 5 \end{array} \right\} = 3,144;$$

შემდეგ ეტაპზე  $j=2$  გვექნება

$$I^*(x_i^2) = \min \left\{ \left[ (x_i^2)^2 + \left( \frac{\Delta x_i^2}{\Delta t} + x_i^2 \right)^2 \right] \Delta t + \Delta I^*(x_i^3) \right\}.$$

ვიპოვოთ  $\Delta I(X_1^2)$   $i$ -ს სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის

$$I^*(x_3^2) = 1,2;$$

$$I^*(x_4^2) = \min \left\{ \begin{array}{l} 0,776 + 0,8 \\ \underline{0,256 + 1,032} \end{array} \right\} = 1,288;$$

$$\Delta I^*(x_3^2) = \min \left\{ \begin{array}{l} 1,424 + 0,8 \\ 0,584 + 1,032 \\ 0,144 + 1,36 \end{array} \right\} = 1,504;$$

$$\Delta I^*(x_2^2) = \min \left\{ \begin{array}{l} 2,344 + 0,8 \\ 1,184 + 1,032 \\ 0,424 + 1,36 \\ \hline 0,064 + 1,848 \end{array} \right\} = 1,784;$$

$$\Delta I^*(x_1^2) = \min \left\{ \begin{array}{l} 3,536 + 0,8 \\ 2,056 + 1,032 \\ 0,976 + 1,36 \\ 0,296 + 1,848 \\ \hline 0,016 + 2,4 \end{array} \right\} = 2,144;$$

$$\Delta I^*(x_0^2) = \min \left\{ \begin{array}{l} 5,0 + 0,8 \\ 3,2 + 1,032 \\ 1,8 + 1,36 \\ 0,8 + 1,848 \\ 0,4 + 2,4 \\ \hline 0,0 + 5,0 \end{array} \right\} = 2,6.$$

ანალოგიურად  $j = 1$  შემთხვევაში

$$\Delta I^*(x_3^1) = 1,2 + 0,4 = 1,6;$$

$$\Delta I^*(x_4^1) = \min \left\{ \begin{array}{l} 0,776 + 1,2 \\ 0,256 + 1,288 \end{array} \right\} = 1,544;$$

$$\Delta I^*(x_3^1) = \min \left\{ \begin{array}{l} 1,424 + 1,2 \\ 0,584 + 1,288 \\ 0,144 + 1,504 \end{array} \right\} = 1,648;$$

$$\Delta I^*(x_2^1) = \min \left\{ \begin{array}{l} 2,344 + 1,2 \\ 1,184 + 1,288 \\ 0,424 + 1,504 \\ 0,064 + 1,784 \end{array} \right\} = 1,848;$$

$$\Delta I^*(x_1^1) = \min \left\{ \begin{array}{l} 3,536 + 1,2 \\ 2,056 + 1,288 \\ 0,976 + 1,504 \\ 0,296 + 1,784 \\ 0,016 + 2,14 \end{array} \right\} = 2,08;$$

$$\Delta I^*(x_0^1) = \min \left\{ \begin{array}{l} 5,0 + 1,2 \\ 3,2 + 1,288 \\ 1,8 + 1,504 \\ 0,8 + 1,784 \\ 0,2 + 2,14 \\ 0,0 + 2,6 \end{array} \right\} = 2,34;$$

მოდრობის საწყის ეტაპზე ( $j = 1$ ) გვექნება

$$\Delta I^*(x_0^0) = \min \left\{ \begin{array}{l} 5,0 + 1,6 \\ 3,2 + 1,544 \\ 1,8 + 1,648 \\ 0,8 + 1,848 \\ \underline{0,2 + 2,04} \\ 0,0 + 2,34 \end{array} \right\} = 2,28.$$

ამრიგად, ფუნქციონალის მინიმალური მნიშვნელობა ტოლია  $I^*(x, u) = 2,28$  და მიიღწევა იმ ტრაექტორიაზე, რომელიც ნახაზზე მოცემულია ორმაგი ისრებით.

იგივე ამოცანა გადავწყვიტოთ კლასიკური ვარიაციული მეთოდებით. შევადგინოთ დამხმარე ფუნქციონალი

$$I(x, u) = \int_0^1 [x^2 + \dot{x}^2 + \lambda(\dot{x} + x - u)] dt. \quad (11.35)$$

შევადგინოთ ეილერის განტოლება (11.35) ფუნქციონალისათვის

$$\dot{x} = -x + u, \quad \dot{\lambda} = 2x + \lambda, \quad u = \lambda/2,$$

ან

$$\dot{x} = -x + \lambda/2, \quad \dot{\lambda} = 2x + \lambda. \quad (11.36)$$

ვიპოვოთ მახასიათებელი განტოლების ფესვები

$$\begin{vmatrix} -1 - \mu & 1/2 \\ 2 & 1 - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 - 2 = 0, \quad (11.37)$$

$$\mu_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$$

მაშინ (11.36) სისტემის ამოხსნა გვაძლევს

$$x = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t},$$

$$\lambda = (2 + 2\sqrt{2})c_1 e^{\sqrt{2}t} + (2 - 2\sqrt{2})c_2 e^{-\sqrt{2}t},$$

ხოლო საწყისი პირობების  $x(0) = 0$ ,  $x(1) = 1$  გათვალისწინებით



$$x = \frac{sh\sqrt{2t}}{sh\sqrt{2}}. \quad (11.38)$$

(11.38) ამოხსნის გრაფიკი მოცემულია პუნქტირით ნახაზზე. ის ახლოსაა ტრაექტორიასთან რომელიც შეესაბამება

$$I'[x, u] = 2,28.$$

(11.20) ეტაპის დამთავრების შემდეგ იწყება მოძრაობა მარცხნიდან მარჯვნივ კონკრეტული  $u^1, u^2, \dots, u^N$  მართვების მოსაძებნად. მთელი მანძილის გავლის შემდეგ თანმიმდევრობით მოხდება ოპტიმალური მართვების კონკრეტული მნიშვნელობების აღდგენა.

საყურადღებოა აღინიშნოს, რომ დინამიკური პროგრამირების მეთოდს დაჰყავს  $N+1$  მრავალი ცვლადის  $I$  ფუნქცია ერთი ცვლადის ფუნქციის მინიმიზაციის  $N+1$  ოპერაციაზე.

ამოცანა შეიძლება განვაზოგადოთ მრავალ ცვლადზე, როდესაც შესასვლელზე მიეწოდება მრავალგანზომილებიანი მართვა  $u_k$ , ხოლო გამოსასვლელად განიხილება მდგომარეობის  $x_k$  ვექტორი. ფორმალურად ამისათვის საჭიროა ყველა გამოსახულებაში სკალიარები შეიცვალოს ვექტორებით. მაგრამ ეხლა ყველა ბიჯზე საჭიროა გამოვიკვლიოთ არა ერთგანზომილებიანი ფუნქციები, არამედ  $m$  ცვლადების ფუნქციები მათი შესაბამისი განზომილების მართვით. ეს მკვეთრად ზრდის ამოცანის განზომილებას. მაგალითად ერთგანზომილებიანი ამოცანის შემთხვევაში თუ დისკრეტიზაციის  $\Delta$  ბიჯის დროს ვიღებდით  $x^{(1)}$  100 წერტილს, მაშინ სამგანზომილებიან სივრცეში იმავე ბიჯის დროს შეგვყავს  $10^6$  წერტილი. საჭირო ხდება დიდმეხსიერებიანი კომპიუტერის გამოყენება და ხშირ შემთხვევაში ესეც არ არის საკმარისი. ეს არის ეგრეთწოდებული „დაწვევლილი“ განზომილება რ. ბელმანის განსაზღვრებით.

§ 11.3. დინამიკური პროგრამირების მეთოდის უწყვეტი ამოცანა. ბელმანის განტოლება.

ჩამოვყალიბოთ ოპტიმალური მართვის უწყვეტი ამოცანა დინამიკური პროგრამირების მეთოდის ტერმინებში. დავუშვათ, რომ ამოცანა გადაწყვეტილია. მოქმენილია ოპტიმალური მართვა  $u^*(t)$  და მისი შესაბამისი მოძრაობის ტრაექტორია  $x(t)$ . კრიტერიუმის მინიმალური მნიშვნელობა შესაბამისი ოპტიმალური მართვისას აღვნიშნოთ  $S(x(t_0), t_0)$ . ავიღოთ ოპტიმალურ ტრაექტორიაზე ორი წერტილი, რომელნიც შეესაბამებიან  $t$  და  $t + \Delta t$  მომენტებს.  $\Delta t$ -არის მცირე სიდიდე. ოპტიმალობის პრინციპის შესაბამისად ოპტიმალური ტრაექტორიის უბნები  $t$  და  $t + \Delta t$  წერტილებიდან  $T$  სასრულო წერტილამდე არიან ოპტიმალური. აღვნიშნოთ  $S(x(t), t)$  და  $S(x(t + \Delta t), (t + \Delta t))$ , ფუნქციონალების

$$I = \min_{u(t) \in (t); t \in [t_0, T]} I = \int_{t_0}^T F(u(t), x(t), t) dt \quad (11.39)$$

მინიმალური მნიშვნელობები, რომლებიც შეესაბამებიან ამ უბნებს:

$$S(x(t), t) = \min_{u \in \Omega(t)} \int_t^T F(x(t), u(t), t) dt;$$

$$S(x(t + \Delta t), t + \Delta t) = \min_{u \in \Omega(t)} \int_{t+\Delta t}^T F(x(t), u(t), t) dt. \quad (11.40)$$

ამ სიდიდეებს შორის არის კავშირი

$$S(x(t), t) = \min_{u \in \Omega(t)} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} F(x(t), u(t), t) dt + S(x(t + \Delta t), t + \Delta t) \right\}. \quad (11.41)$$

(11.41) გამოსახულებას უწოდებენ ბელმანის ფუნქციას.

თუ მხედველობაში მივიღებთ  $\Delta t$  მცირე მნიშვნელობას, წარმოვადგინოთ

$$\int_1^{1+\Delta t} F(x(t), u(t), t) dt = F(x(t), u(t), t) \Delta t + O_1(t),$$

სადაც  $O_1(t)$  არის უფრო მაღალი რიგის მცირე ვიდრე  $\Delta t$ .

$x(t + \Delta t)$  ფუნქცია დაშვებით ტეილორის მწკრივად  $t$  მახლობლობაში და თუ გავითვალისწინებთ  $\Delta t$  მცირეს მნიშვნელობას, მივიღებთ

$$x(t + \Delta t) = x(t) + (dx/dt)\Delta t + O_2(t), \quad (11.42)$$

სადაც  $O_2(t)$  მაღალი რიგის მცირეებია.

შემდეგ დავუშვათ, რომ  $S$  დიფერენცირებადი ფუნქციაა თავისი არგუმენტების მიხედვით. ეს ვარაუდი არაფრით არ არის დასაბუთებული, ვინაიდან თვითონ ფუნქცია უცნობია. თუ შემდეგში ეს ვარაუდი არ დამტკიცდა, ყველა ჩვენი მსჯელობები ატარებენ მხოლოდ შემეცნებით ხასიათს. ეს მდგომარეობა ხდის დინამიკური პროგრამირების მეთოდის უწყვეტ ვარიანტს დაუსაბუთებელს.

ვემყარებით რა  $S$  ფუნქციის დიფერენცირებადობას, ვითვალისწინებთ (11.42), დაშვებით  $S(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$  ტეილორის მწკრივად

$$S(x(t + \Delta t), t + \Delta t) = S(x(t), t) + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) \Delta x + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) \Delta t + O_3(t), \quad (11.43)$$

სადაც  $\frac{\partial S}{\partial x} = \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x_n}\right)$   $S$  ფუნქციის კერძო წარმოებულისა ვექტორ-სტრიქონია.  $x$  ვექტორის კომპონენტების მიხედვით  $(x(t), t)$  წერტილში;  $\Delta x = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) \Delta t + O_2$

არის  $x(t)$  ნაზრდი (11.42)-ის გათვალისწინებით.  $O_3(t)$ - არის მაღალი რიგის მცირეები.

თუ გავითვალისწინებთ  $\Delta x$  სტრუქტურას და შევიტანთ (11.41), (11.43) (11.40) გამოსახულებაში, მივიღებთ

$$S(x(t), t) = \min \left\{ F(x(t), u(t), t) \Delta t + S(x(t), t) + \frac{\partial S(x(t), t)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial S(x(t), t)}{\partial t} \Delta t + O_4(t) \right\}, \quad (11.44)$$

სადაც  $O_4(t)$  მაღალი რიგის მცირეა.  $S(x(t), t)$  არ არის  $u(t)$ -ზე დამოკიდებული, ვინაიდან იგი წარმოადგენს ფუნქციონალს, სადაც უკვე ჩასმულია ოპტიმალური მართვა. ამიტომ  $S(x(t), t)$  შეიძლება გამოვიტანოთ მინიმუმის სიმბოლოს გარეთ და იგი გააბათილებს (11.44) გამოსახულების მარცხენა მხარეს. დარჩენილი გამოსახულება გაეყოთ  $\Delta t$ -ზე და  $\Delta t$  მივასწრაფოთ ნულისკენ  $\Delta t \rightarrow 0$ . ამიტომ

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} O_4(t)/\Delta t = 0.$$

$\frac{\partial S}{\partial t}$  წარმოებული ისევე როგორც  $S$  ფუნქცია არ არის მართვაზე დამოკიდებული და იგი შეიძლება გამოვიტანოთ კვადრატული ფრჩხილის გარეთ.  $\frac{dx}{dt}$  (11.39)-ის გათვალისწინებით

შეიძლება შეიცვალოს  $\Psi$ -ით. საბოლოოდ მივიღებთ ბელმანის ცნობილ განტოლებას

$$-\frac{\partial S(x(t), t)}{\partial t} = \min_{u \in (u)} \left\{ F(x(t), u(t), t) + \frac{\partial S(x(t), t)}{\partial x} \Psi(x(t), u(t), t) \right\}, \quad (11.45)$$

ან სკალარულ ფორმაში

$$-\frac{\partial S(x(t), t)}{\partial t} = \min_{u \in (u)} \left\{ F(x(t), u(t), t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial S(x(t), t)}{\partial x_j} \Psi_j(x(t), u(t), t) \right\}, \quad (11.46)$$

ბელმანის განტოლება წარმოადგენს კერძოწარმოებულთან დიფერენციალურ განტოლებას. ოპტიმალური მართვის განსაზღვრის ტექნიკა დაიყვანება შემდეგ პროცედურებზე:

1. ფიგურულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულების მინიმუმიდან განისაზღვრება ოპტიმალური მართვა  $u^*$ , როგორც  $x, S, t$  ფუნქცია. ე.ი. ფორმით

$$u^* = (x(t), S(x(t), t), t).$$

2. მოძებნილი  $u^*$  მართვა ჩაისმება კვადრატულ ფრჩხილებში. მივიღებთ განტოლებას, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ  $S$ -ზე და  $x$ -ზე. ამ განტოლებას უწოდებენ ჰამილტონ-იაკობის ტიპის განტოლებას.

3. ჰამილტონ-იაკობის განტოლება ამოიხსნება  $S(x(t), t)$ -ის მიმართ. ამოხსნისას უნდა გათვალისწინებულ იყოს სასაზღვრო პირობა  $S(x(T), T) = 0$ , რომლის შინაარსი განისაზღვრება  $S(x(t), t)$ -ის მიხედვით. დღესდღეობით არ არსებობს განტოლების ამოხსნის უნივერსალური მეთოდი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს ანალიზურად მივიღოთ  $S(x(t), t)$ . ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში ტარდება ცალკეული გამოკვლევები, ან მიმართავენ კომპიუტერზე ინტეგრირების რიცხვითი მეთოდების გამოყენებას.

4.  $S$  ფუნქციას შევიტანთ  $u^*(x(t), S(x(t), t), t)$  ოპტიმალური მართვის გამოსახულებაში, რაც საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ის როგორც მდგომარეობის და დროის ფუნქცია, ე.ი.  $u^*(x(t), t)$  სახით. ეს არის ამოცანის საბოლოო გადაწყვეტა.

თუ შესაძლებელი გახდება ამ პროცედურის ყველა პუნქტის გადაწყვეტა, მაშინ ვიპოვით მართვის ფუნქციას, როგორც მდგომარეობის ფუნქციას. ე.ი. მივდივართ უკუკავშირთან სისტემასთან. დინამიკური პროგრამირების მეთოდის უწყვეტი ვარიანტი საშუალებას გვაძლევს გადაწყვეტის შეკრული სისტემის ოპტიმალური სინთეზი.

სტაციონალურ სისტემებში (11.46) განტოლებას აქვს სახე

$$\min_{u \in U(u)} \left\{ F(x(t), u(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial S(x(t))}{\partial x_j} \Psi_j(x(t), u(t)) \right\} = 0. \quad (11.47)$$

ახლა შევჩერდეთ ერთ საინტერესო ფაქტზე, რომელიც დამახასიათებელია დინამიკური პროგრამირების მეთოდისათვის. განვიხილოთ სისტემა:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = 0, \quad (11.48)$$

$x \in E_1$

$$I[u] = \varphi(x(T)) + \int_{t_0}^T F(t, x(t), u) dt \rightarrow \inf_{u \in U_1}. \quad (11.49)$$

(11.48) სისტემის მოძრაობა ხორციელდება  $t_0 \leq S \leq t \leq T$  მონაკვეთში და საწყის პირობას აქვს სახე  $x(S) = x$ ,  $x \in R^n$  ე.ი.

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u), \quad s \leq t \leq T, \quad x(s) = x. \quad (11.50)$$

(11.50) სისტემისათვის განვიხილოთ შემდეგი ფუნქციონალის მინიმიზაციის ამოცანა

$$\varphi(x(t)) + \int_0^T F(t, x(t), u) dt \rightarrow \inf_{u \in U_1}. \quad (11.51)$$

აღვნიშნოთ, რომ როდესაც  $S = t_0$  და  $x = x_0$ , (11.59),

(11.51) ამოცანა თანხვედბა (11.48), (11.49) ამოცანას. ცხადია, (11.51) ფუნქციონალის მინიმუმი (11.50) ტრაექტორიაზე დამოკიდებულია საწყის  $s$  მომენტზე და საწყის  $x$  მდგომარეობაზე.  $S(s, x)$  ფუნქციას, რომელიც ტოლია (11.51) ფუნქციონალის ინფიმუმისა, უწოდებენ ბელმანის ფუნქციას

$$S(s, x) = \inf_{u(t) \in U_1} \left[ \varphi(x(T)) + \int_s^T F(t, x(t), u) dt \right]. \quad (11.52)$$

ავილოთ ისეთი დროის ნებისმიერი მომენტები  $S$  და  $\tau$ , რომ  $t_0 \leq S \leq \tau \leq T$ , მაშინ

$$\begin{aligned}
S(s, x) &= \inf_{u(t) \in \mathcal{U}_1} \left[ \varphi(x(T)) + \int_s^T F(t, x(t), u) dt \right] = \inf_{u(t) \in \mathcal{U}_1, S \leq s \leq T} \times \\
&\times \inf_{u(t) \in \mathcal{U}_1, S \leq s \leq T} \left[ \varphi(x(T)) + \int_s^T F(t, x(t), u(t)) dt + \int_r^T F(t, x(t), u) dt \right] = \\
&= \inf_{u(t) \in \mathcal{U}_1, S \leq s \leq T} \left[ \int_s^r F(t, x(t), u) dt \right] + \inf_{u(t) \in \mathcal{U}_1, S \leq s \leq T} \left[ \int_r^T F(t, x(t), u) dt + \right. \\
&\left. + \varphi(x(t)) \right] = \inf_{u(t) \in \mathcal{U}_1, S \leq s \leq T} \left[ \int_r^T F(t, x(t), u) dt + S(\tau, x(\tau)) \right].
\end{aligned}
\tag{11.53}$$

გადავწეროთ (11.53) განტოლება შემდეგნაირად

$$\inf_{u(t) \in \mathcal{U}_1, S \leq s \leq T} \left[ \int_r^T F(t, x(t), u) dt + S(\tau, x(\tau)) - S(s, x) \right] = 0. \tag{11.54}$$

დავუშვათ, რომ ბელმანის  $S(t, x)$  ფუნქცია არის უწყვეტად დიფერენცირებადი. მაშინ მცირე  $\tau - S$  სიდიდეებისას მისი მაღალი რიგის სიდიდეების გათვალისწინებისას, გვექნება

$$S(\tau, x(\tau)) - S(s, x) = \dot{S}(s, x)(\tau - S). \tag{11.55}$$

$\dot{S}(s, x)$  სრული წარმოებულია (11.48) სისტემის ტრაექტორიის გასწვრივ

$$\begin{aligned}
\dot{S}(s, x) &= S_s(s, x) + S_x^T(s, x)f(t, x, u), \\
S_s(s, x) &= \frac{\partial S(s, x)}{\partial S}, \quad S_x(s, x) = \frac{\partial S(s, x)}{\partial x}.
\end{aligned}
\tag{11.56}$$

გაეყოთ (11.54) ორივე მხარე  $\tau - S$ -ზე და გადავიღოთ ზღვარზე  $\tau \rightarrow S + 0$ , მაშინ (11.55) განტოლების გათვალისწინებით მივიღებთ ბელმანის განტოლებას

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_1} [S_s(s, x) + S_x^T(s, x)f(t, x, u) + F(t, x, u)] = 0; \tag{11.57}$$

$$t_0 \leq t \leq T, \quad x \in R^n.$$

(11.52)-ის გათვალისწინებით, ბელმანის ფუნქციას აქვს სახე

$$S(T, x) = \varphi(x), \quad x \in R^n \quad (11.58)$$

ამრიგად, თუ ოპტიმალური მართვის (11.48), (11.49) ამოცანა არსებობს, მაშინ ბელმანის ფუნქცია არის უწყვეტად დიფერენცირებადი და სამართლიანია (11.57), (11.58) თანაფარდობები.

მაგალითი 11.3.

მოცემულია სისტემის განტოლება

$$\dot{x}(t) = u(t)x \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = x_0 > 0.$$

$T$  წინასწარ მოცემული ღრია. ფუნქციონალს აქვს სახე

$$I[u] = \alpha \ln^2 x(T) + \beta \int_0^T x^2(t) dt \rightarrow \inf_u, \quad \alpha, \beta > 0.$$

მართვა  $u(t) \geq 0$ .

ბელმანის განტოლებას აქვს სახე

$$S_t + \inf_u (u x S_x + \beta u^2) = 0, \quad S(T, x) = \alpha \ln^2 x.$$

მართვა, რომელიც მინიმიზაციას უკეთებს ზედა გამოსახულებას არის

$$u = \frac{x}{2\beta} S_x.$$

შევიტანოთ ეს განტოლება ბელმანის განტოლებაში, მივიღებთ

$$S_t - \frac{x^2}{2\beta} (S_x)^2 = 0, \quad V(T, x) = \alpha \ln^2 x.$$

ამოხსნის შემდეგ გვექნება

$$S(t, x) = \frac{\alpha \ln^2 x}{1 + \alpha/\beta(T-t)}; \quad u(t, x) = [\beta + \alpha(T-t)]^{-1} \alpha \ln x.$$

მაგალითი 11.4.

ვიპოვოთ ბელმანის ფუნქცია შემდეგი ამოცანისათვის



$$I(t_0, X_0, u(t)) = \int_{t_0}^T [\langle a(t), x(t) \rangle + b[u(t), t]] dt + \langle C, x(T) \rangle \rightarrow \inf$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + C(t)u(t) + f(t)$$

$$t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) = u(t) \in u.$$

$u(\cdot)$  უბან-უბან წრფივია.  $\langle \rangle$  გვიჩვენებს ორი ფუნქციის სკალარულ ნამრავლს.

ცნობილია  $t_0, T$  დროის მომენტები,  $A(t)$ ,  $C(t)$  მატრიცები არის შესაბამისად  $n \times m$ ,  $n \times r$  განზომილების.  $n$ -განზომილებისაა ვექტორ-ფუნქციები  $a(t)$ ,  $f(t)$ ,  $b(u, t)$ . სკალარული ფუნქციაა.  $n$ -განზომილების ვექტორებია  $C, x_0$  და სიმრავლეები  $U(t) \in R^n$  ( $t_0 \leq t \leq T$ ).

მითითება. ვისარგებლოთ (11.57), (11.58) განტოლებებით.  $S(x, t)$  ვეძებთ  $S(x, t) = \langle \Psi(t), x \rangle$  სახით და  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  ცვლადის პირველი ხარისხის მრავალწევრით.

მაგალითი 11.5.

განვიხილოთ სისტემის მართვა, რომელიც აღიწერება განტოლებით

$$\dot{x} = -ax + \gamma u,$$

$a$  და  $\gamma$  დადებითი მუდმივებია.  $u$  მართვაზე დადებულია შეზღუდვა  $|u| \leq M$ .

საჭიროა მოიძებნოს ოპტიმალური მართვა  $u$ , რომელიც მინიმიზაციას უკეთებს ინტეგრალს

$$I[u] = \int_0^1 x^2(t) dt.$$

შემოვიტანოთ ფუნქცია

$$S(x, t) = \min_u \int_0^1 x^2(t) dt.$$

მაშინ ბელმანის განტოლებას აქვს სახე

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_u \left\{ u^2 + (-au + \gamma x) \frac{\partial S}{\partial u} \right\},$$

მიღებული განტოლების ანალიზი გვიჩვენებს, რომ ფიგურულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება აღწევს მინიმუმს, როდესაც

$$u = -M \operatorname{sgn} \frac{\partial S}{\partial x}$$

მაშასადამე, ოპტიმალური მართვა იღებს მნიშვნელობებს

$+M$  ან  $-M$   $\frac{\partial f}{\partial x}$  წარმოებულის ნიშნისა შესაბამისად.

საბოლოოდ ბელმანის განტოლებას აქვს სახე

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = x^2 - ax \frac{\partial S}{\partial x} - \gamma M \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|.$$

ზოგჯერ შესაძლებელია ვიპოვოთ  $S(x, t)$ , როგორც  $x^1, \dots, x^n$  ცვლადების პოლინომების სახით, ოღონდ განუზღვრელი კოეფიციენტებით და დროზე დამოკიდებულებით

$$S(x, t) = \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \dots \sum_{i_n=0}^{m_n} \Psi_{i_1 \dots i_n}(t) (x^1)^{i_1} \dots (x^n)^{i_n} \quad (11.59)$$

თუ შევიტანთ ამ გამოსახულებას (11.57), მაშინ  $\Psi_{i_1 \dots i_n}(t)$  კოეფიციენტების განსაზღვრისას მივიღებთ შემდეგი სახის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\begin{aligned} S_t(x, t) &= \sum_{i_1=0}^{m_1} \dots \sum_{i_n=0}^{m_n} \Psi_{i_1 \dots i_n}(t) (x^1)^{i_1} \dots (x^n)^{i_n} = \\ &= \inf_{u \in U(t)} F(\Psi_{0 \dots 0}(t) \dots \Psi_{m_1 \dots m_n}(t); x^1, \dots, x^n, u, t), \end{aligned} \quad (11.60)$$

$$x \in G(t), \quad t_0 \leq t \leq T$$

საწყისი პირობებით

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=0}^{m_1} \dots \sum_{i_n=0}^{m_n} \Psi_{i_1 \dots i_n}(T) (x^1)^{i_1} \dots (x^n)^{i_n} &= \Phi(x), \\ x &\in G(T). \end{aligned} \quad (11.61)$$

თუ  $\Phi(x)$ ,  $\inf_{u(t)} F$  არის მრავალწევრები  $x^1, \dots, x^n$  მიმართ, მაშინ (11.60), (11.61)-ში უნდა გაუტოლდეს ერთმანეთს ერთნაირი ხარისხებიანი კოეფიციენტები. მივიღებთ კოშის ამოცანას დიფერენციალური განტოლებათა სისტემას  $\Psi_{1, \dots, n}(t)$  ცვლადების მიმართ. შემდეგ უნდა გამოყენებული იყოს რიცხვითი მეთოდები. კერძოდ, ეილერის, ადამსის, რუნგე-კუტის და სხვა მეთოდები.

თუ  $\Phi(x)$  და  $\inf_{u(t)} F$  არ არიან მრავალწევრები  $x^1, \dots, x^n$  მიმართ, მაშინ (11.60), (11.61) პირობები საერთოდ არ სრულდებიან  $G(t)$  არეში  $(t_0 \leq t \leq T)$ ,  $N = (m_1 + 1) \dots (m_n + 1)$ ,  $\Psi_{1, \dots, n}(t)$  კოეფიციენტების არჩევისას.

მაგალითი 11.6.

მოვძებნოთ მინიმუმი ფუნქციონალისა

$$I[u] = \int_0^T u^2(t) dt + \lambda x^2(T),$$

შემდეგი პირობების გათვალისწინებით  $\dot{x} = u(t)$ ,  $x(0) = u_0$ ,  $u = u(t)$  უბან-უბან წრფივი ფუნქციაა.  $T, x_0$ —რიცხვები მოცემულია.

$$G(t) = E', \quad u(t) = E', \quad (t_0 \leq t \leq T).$$

შევადგინოთ ბელმანის განტოლება

$$\inf_{u \in E'} [S_x(X, t)u + S_t(u, t) + u^2] = 0, \quad (*)$$

$$x \in E', \quad 0 \leq t \leq T, \quad S(x, T) = \lambda x^2$$

ქვედა ზღვარი (\*) მიიღება  $U = -S_n/2$  გამოსახულების სახით. ამის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$S_t(x, t) - S_x^2(x, t)/4 = 0, \quad x \in E', \quad 0 \leq t \leq T$$

მოიძებნოს  $S(x, t)$  შემდეგი მრავალწევრის სახით

$$S(x, t) = \Psi_0(t) + \Psi_1(t)x + \Psi_2(t)x^2$$

შევიტანოთ ეს გამოსახულება (\*)-ში, მივიღებთ კოშის შემდეგ ამოცანას

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_0 - \Psi_1^2/4 = 0, \quad \dot{\Psi}_1 - \Psi_1\Psi_2 = 0, \quad \dot{\Psi}_2 - \Psi_2^2 = 0 \\ 0 \leq t \leq T. \quad \Psi_0(T) = 0, \quad \Psi_1(T) = 0, \quad \Psi_2(T) = \lambda, \end{aligned}$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\Psi_0(t) \equiv \Psi_1(t) \equiv 0; \quad \Psi_2(t) = \frac{\lambda}{1 - \lambda(t - T)}.$$

ამრიგად, ბელმანის ფუნქციას აქვს სახე

$$S(x, t) = \frac{\lambda x^2}{1 - \lambda(t - T)}.$$

ხოლო სინთეზირებული მართვის ფუნქციას აქვს ფორმა

$$u(x, t) = -\frac{S_x}{2} = \frac{\lambda x}{1 - \lambda(t - T)}; \quad x \in E', \quad 0 \leq t \leq T$$

#### § 11.4. დინამიკური პროგრამირების მეთოდი მაქსიმალური სწრაფქმედების ამოცანაში

მაქსიმალური სწრაფქმედების ამოცანაში ოპტიმალობის კრიტერიუმს აქვს სახე

$$I = \int_0^T dt. \quad (11.62)$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია  $F(x, u) = 1$ . საწყისი  $x(0) = x_0$  და საბოლოო  $x(T) = x$  წინასწარ მოცემულია. მართვის ვექტორი  $u \in U$ , სადაც  $U$  არის შეკრული არე მართვის სივრცეში.

ბელმანის განტოლებას აქვს სახე

$$\min_{u \in U} \langle \text{grad } T_m f(x, u) \rangle = -1. \quad (11.63)$$

თუ გავითვალისწინებთ პირობებს:

ა) არსებობს ოპტიმალური  $u^*(t) \in U$  მართვა, რომელიც ანიჭებს მინიმუმს ფუნქციონალს

$$\min_{u \in U} I = S(x_0, T). \quad (11.64)$$

ფუნქციონალის  $S(x_0, T)$  მნიშვნელობას უწოდებენ ბელმანის ფუნქციას.

ბ) ფუნქციონალის მინიმალური მნიშვნელობა  $S(x_0, T)$  არის თავისი არგუმენტის უწყვეტი ფუნქცია და აქვს უწყვეტი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები  $\frac{\partial S}{\partial T}, \frac{\partial S}{\partial x_0}$ ,

$i = \overline{1, n}$  ყველა არგუმენტების მიმართ.  $T_m$ -ით აღვნიშნოთ მინიმალური დრო როდესაც აღმწერი წერტილი გადადის საწყისი მდგომარეობიდან კოორდინატთა სათავეში.

განვიხილოთ ფაზურ სივრცეში იზოქრონული ზედაპირი  $T_m = Const$ . ეს იმ წერტილების გეომეტრიული ადგილია, რომელთათვის ნებისმიერი წერტილიდან გადასვლა კოორდინატთა სათავეში ერთი და იგივე  $T_m$  დროა დასჭირდება. (11.63) გამოსახულება გვიჩვენებს, რომ აღმწერი წერტილი ყოველთვის გადაადგილდება  $l$  შემცირების მხარეს. განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 11.7.

სისტემა აღიწერება განტოლებით

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u. \quad (11.65)$$

$u$ -ზე დადებულია შეზღუდვა

$$|u| \leq 1. \quad (11.66)$$

საკიროა ვიპოვოთ მართვის ის ფუნქცია, როდესაც აღმწერი წერტილი  $(x_{10}, x_{20})$  მდგომარეობიდან უმცირეს დროში გადადის კოორდინატთა სათავეში.

(11.65) სისტემისათვის ბელმანის განტოლებაა

$$\min_{|u| \leq 1} \left\{ \frac{\partial S}{\partial x_{10}} x_{20} + \frac{\partial S}{\partial x_{20}} U \right\} = -1. \quad (11.67)$$

დავუშვათ, რომ  $S(x_{10}, x_{20})$  არის უწყვეტი და უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია. ეს დაშვება სავარაუდოა, რად-

გან ამოცანიდან ეს თვისება არ გამოძინარეობს. შემდეგი მსჯელობა ატარებს ევრისტულ ხასიათს.

(11.67) გამოძინარეობს, რომ ოპტიმალურ მართვას აქვს სახე

$$u' = -\text{Sign}\left(\frac{\partial S}{\partial x_{20}}\right). \quad (11.68)$$

(11.68) გათვალისწინებით ბელმანის განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{\partial S}{\partial x_{10}} x_{20} - \left| \frac{\partial S}{\partial x_{20}} \right| + 1 = 0, \quad (11.69)$$

ვინაიდან  $u'$  იღებს მნიშვნელობებს  $\pm 1$ , ამიტომ ფაზურ სიბრტყეში გვაქვს არეები  $L_1$ , სადაც  $u' = -1$ ,  $L_2$  სადაც  $u' = 1$ .  $L_1$  არეში (11.68) განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{\partial S}{\partial x_{10}} x_{10} - \frac{\partial S}{\partial x_{20}} + 1 = 0, \quad (11.70)$$

$L_2$  არეში

$$\frac{\partial S}{\partial x_{10}} x_{20} - \frac{\partial S}{\partial x_{20}} + 1 = 0. \quad (11.71)$$

(11.70) განტოლების ამონახსნია

$$S = 2\sqrt{x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2}. \quad (11.72)$$

(11.71) განტოლების ამონახსნია

$$S = 2\sqrt{-x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2}. \quad (11.73)$$

ვიპოვოთ ფაზურ სიბრტყეში საზღვარი არეებს შორის. ამისათვის ავიღოთ  $S$  კერძო წარმოებულები (11.73) გათვალისწინებით, ე.ი. არე  $L_2$  სადაც  $u' = 1$

$$\frac{\partial S}{\partial x_{10}} = -\frac{1}{\sqrt{-x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2}}, \quad \frac{\partial S}{\partial x_{20}} = \frac{x_{20}}{\sqrt{-x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2}} - 1. \quad (11.74)$$

$L_2$  არის საზღვრის განსაზღვრისათვის შეეიტანოთ (11.74)  
 (11.69)- განტოლებაში გვექნება.

$$-\frac{x_{20}}{\sqrt{-x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2}} - \left| \frac{x_{20}}{\sqrt{-x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2}} - 1 \right| + 1 = 0, \quad (11.75)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$1 - \frac{x_{20}}{\sqrt{x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2}} \geq 0, \quad \sqrt{-x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2} \geq x_{20} \quad (11.76)$$

(11.76) სამართლიანია

$$x_{20} < 0, \quad -x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2 \geq 0,$$

ან

$$x_{20} > 0, \quad x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2 \leq 0.$$

მივიღეთ საზღვარი  $L_1$  და  $L_2$  არეებს შორის (მრუდი  $AOB$  ნახ.11.4)

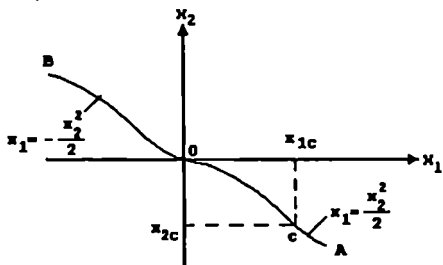
$$x_{20} < 0, \quad x_{10} = \frac{1}{2}x_{20}^2,$$

$$x_{20} > 0, \quad x_{10} = -\frac{1}{2}x_{20}^2.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ საზღვრის არც ერთ წერტილში ბელმანის  $S(x_{10}, x_{20})$  ფუნქციას არა აქვს კერძო წარმოებულები. დავუშვათ, რომ  $C(x_{1c}, x_{2c})$  წერტილი ეკუთვნის  $AO$  რკალს. ე.ი.  $x_{1c} = \frac{1}{2}x_{2c}^2$ . კერძო წარმოებუ-

ლები  $\frac{\partial S}{\partial x_{10}}$  და  $\frac{\partial S}{\partial x_{10}} C(x_{1c}, x_{2c})$  წერტილის მახლობ-

ლობაში  $L_1$  და  $L_2$  არეებს შორის არ არის განსაზღვრული (ნახ.11.4).



ნახ.11.4

ვინაიდან  $C$  წერტილის მახლობლობაში  $L_2$  არეში გვექნება

$$\left. \frac{\partial S}{\partial x_{10}} \right|_{x_{1c}, x_{2c}} = - \left. \frac{1}{\sqrt{-x_{10} + \frac{1}{2} x_{20}^2}} \right|_{x_{1c}, x_{2c}} = \infty.$$

ასევე  $L_1$  არეში  $C$  წერტილის მახლობლობაში

$$\left. \frac{\partial S}{\partial x_{10}} \right|_{x_{1c}, x_{2c}} = \left. \frac{1}{\sqrt{x_{10} + \frac{1}{2} x_{20}^2}} \right|_{x_{1c}, x_{2c}} = - \frac{1}{x_{2c}}.$$

ვინაიდან  $C$  არის ნებისმიერი წერტილი  $AO$  მრუდზე,

ამიტომ  $\left. \frac{\partial S}{\partial x_{10}} \right|_{x_{1c}, x_{2c}}$   $AO$  მრუდზე განიციდის წვეტას. წარმოებუ-

ლი  $x_{20}$  მიხედვით  $L_2$  არეს გამოსასვლელზე  $C$  წერტილში იღებს სახეს

$$\left. \frac{\partial S}{\partial x_{20}} \right|_{x_{1c}, x_{2c}} = \left( \frac{x_{20}}{\sqrt{-x_{10} + \frac{1}{2} x_{20}^2}} - 1 \right) \Big|_{x_{1c}, x_{2c}} = -\infty.$$

თუ ვიმოძრაებთ  $L_1$  არიდან  $C$  წერტილისაკენ, მაშინ



$$\left. \frac{\partial S}{\partial x_{20}} \right|_{x_{1c}, x_{2c}} = \left( \frac{x_{20}}{\sqrt{x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}^2}} + 1 \right) \Big|_{x_{1c}, x_{2c}} = -\frac{x_{2c}}{x_{2c}} + 1 = 0.$$

მაშასადამე,  $\frac{\partial S}{\partial x_{20}}$  წარმოებული  $OA$  მრუდზე განიცდის

წვეტას. ე.ი. ამ მრუდზე ბელმანის ფუნქციას არა აქვს კერძო წარმოებულები, ამიტომ ის არის არაგლუვი ფუნქცია.

ეს მაგალითი გვიჩვენებს, თუ როგორი საჭიროა დინამიკური პროგრამირების მეთოდის უწყვეტი ვარიანტის დასაბუთება.

### § 11.5. ოპტიმალური მართვის სინთეზი სისტემებში წრფივი ობიექტებით და თვისობრიობის კვადრატული კრიტერიუმით

დინამიკური პროგრამირების მეთოდის უწყვეტი ვარიანტი საშუალებას იძლევა ჩატარდეს ოპტიმალური მართვის სინთეზი. შესაძლოა ბელმანის განტოლების უშუალო ამოხსნა. ეს შესაძლებელია წრფივი ობიექტების შემთხვევაში და თვისობრიობის კვადრატული კრიტერიუმის გამოყენებისას. სანამ გადავიდოდეთ თეორიულ საკითხებზე, განვიხილოთ ერთი მაგალითი

მაგალითი 11.8. [86].

განვიხილოთ პირველი რიგის ობიექტი

$$\dot{x} = -ax + bu. \quad (11.77)$$

საჭიროა მოვახდინოთ

$$I = \int_0^T (c_1 x^2 + c_2 u^2) dt \quad (11.78)$$

ფუნქციონალის მინიმიზაცია და ვიპოვოთ შემდეგი სახის წრფივი ოპტიმალური  $u(t) = -q(t)x(t)$  მართვა  $[0, T]$  დროის ინტერვალში, რომელიც არსებობს ნებისმიერი საწყისი

$x_0$  მნიშვნელობისათვის. საბოლოო მნიშვნელობა არ არის მოცემული. ამ ამოცანისათვის ბელმანის განტოლებას აქვს სახე

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_u \left[ c_1 x^2 + c_2 u^2 + \frac{\partial S}{\partial x} (-ax + bu) \right]. \quad (11.79)$$

ვინაიდან  $u(t)$ -ზე არ არის დადებული შეზღუდვა, ამიტომ წინა გამოსახულება შეიძლება გაეაწარმოოთ  $u$  და მიღებული შედეგი გაუტოლოთ ნულს. მაშინ ოპტიმალური მართვა ტოლია

$$u^* = -\frac{b}{2c_2} \frac{\partial S}{\partial x}. \quad (11.80)$$

შევიტანოთ (11.80) (11.79) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} \left( -ax + \frac{b^2}{2c_2} \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \left[ c_1 x^2 + c_2 \left( -\frac{b}{2c_2} \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] = 0. \quad (11.81)$$

განსახილველი ამოცანისათვის სასაზღვრო პირობას აქვს სახე  $\lim_{t \rightarrow T} S(x, t) = 0$ . (11.81) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ ცვლადთა დაცალკეების მეთოდი. ამიტომ  $S(x, t)$  წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$S(x, t) = P(t)Z(t).$$

(11.80) გამოყენებით და მოთხოვნით რომ მართვას ჰქონდეს  $u = -q(t)x(t)$  სახე, გამოგვაქვს დასკვნა, რომ  $Z(x)$  აქვს  $x^2$  სახე. თუ შევიტანოთ  $S(x, t) = P(t)x^2$  (11.81) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{dP}{dT} x^2 + 2xP \left( -ux - \frac{b^2}{2c_2} 2xP \right) + \left[ c_1 x^2 + c_2 \left( \frac{b}{2c_2} 2Px \right)^2 \right] = 0. \quad (11.82)$$

შემდეგ ვიპოვიოთ, რომ  $P(t)$  აკმაყოფილებს არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებას

$$\frac{dP}{dT} - 2aP - \frac{b^2 P^2}{c_2} + c_1 = 0, \quad (11.83)$$

სასაზღვრო პირობით

$$\lim_{t \rightarrow T} S(x, t) = \lim_{t \rightarrow T} P(t)x^2 = 0, \quad (11.84)$$

საიდანაც  $P(t) = 0$ .

ეს იმას ნიშნავს, რომ  $S = P(t)x^2$  წარმოადგენს (11.81)

განტოლების ამონახსნს იმ პირობით, რომ არსებობს (11.83)

განტოლების  $P(t)$  ამონახსნი (11.84) გათვალისწინებით.

(11.83) განტოლება არის რიკატის ტიპის დიფერენციალური განტოლება. მისი ამოხსნა შესაძლებელია ცვლადთა და-ცალკეების მეთოდით

$$\frac{(c_2/b^2)dP}{P^2 + (2c_2a/b^2)P - c_1c_2/b^2} = dt. \quad (11.85)$$

თუ  $P_1$  და  $P_2$  არის  $P^2 + (2c_2a/b^2)P - c_1c_2/b^2 = 0$  მრავალწევრის ფესვები, (11.83) განტოლების საერთო ამონახსნს აქვს სახე

$$\frac{P(t) - P_1}{P(t) - P_2} = k \exp\left[\frac{b^2}{c_1}(P_1 - P_2)t\right], \quad (11.86)$$

ან

$$P(t) = \frac{P_2 k \exp[b^2/c_1 (P_1 - P_2)t] + P_1}{1 - k \exp[b^2/c_1 (P_1 - P_2)t]}. \quad (11.87)$$

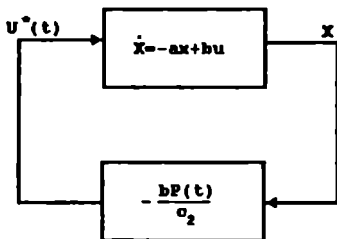
თუ ვისარგებლებთ პირობით  $P(T) = 0$ , გვექნება

$$K = \frac{P_1}{P_2 \exp[b^2/c_1 (P_1 - P_2)]}. \quad (11.88)$$

ამრიგად,  $S(x, t) = P(t)x^2$  ნებისმიერი საწყისი  $x$  და  $t$  დროისათვის.  $u$  მნიშვნელობა ვიპოვოთ (11.80) გამოსახულებიდან

$$u^* = -\frac{b}{2c_2} \frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{bP(t)}{c_2} x. \quad (11.89)$$

მიღებული უკუკავშირის სისტემა მოცემულია (ნახ.11.5.). ეს სისტემა არის წრფივი, მაგრამ არასტაციონალური.



ნახ.11.5

სინთეზის ზოგადი ამოცანა ჩამოვყალიბოთ შემდეგნაირად: მოცემულია არასტაციონალური წრფივი ობიექტი

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (11.90)$$

და მოცემულია საწყისი პირობა

$$x(t_1) = x_1. \quad (11.91)$$

საბოლოო მნიშვნელობა  $x(t_2)$  არ არის ცნობილი. აუცილებელია ვიპოვოთ  $[t_1, t_2]$  ინტერვალში მართვის ფუნქცია, რომელიც მინიმიზაციას უკეთებს ფუნქციონალს

$$I = \frac{1}{2} x_2^T M x_2 + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [x^T(\tau) Q(\tau) x(\tau) + u^T(\tau) R(\tau) u(\tau)] d\tau, \quad (11.92)$$

სადაც  $M_1 Q(t)$  და  $R(t)$  - სიმეტრიული ფუნქციებია. ამასთან  $Q(t)$  და  $R(t)$  დადებითად არიან განსაზღვრული და აქვთ  $t$  დროის მიხედვით უწყვეტი მეორე რიგის წარმოებულები.  $M$  არის დადებითად განსაზღვრული მუდმივი მატრიცა. განსახილველი ამოცანა არის ბოლცის ამოცანა.

ბელმანის განტოლებას მოცემული სისტემისათვის აქვს სახე

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2} x^T(t) Q(t) x(t) + \frac{1}{2} \bar{u}^*{}^T(t) R(t) \bar{u}^*(t) + \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^T (A(t)x + B(t)u^*) \right], \quad (11.93)$$

სასაზღვრო პირობას აქვს სახე

$$\lim_{t \rightarrow t_2} S(x, t) = \frac{1}{2} x^T(t_2) M x(t_2). \quad (11.94)$$

მინიმიზაციის პროცესს მივყევართ პირობამდე

$$\frac{\partial L}{\partial u} \Big|_{u=\bar{u}} + \frac{\partial}{\partial u} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^T (A(t)x + B(t)u) \right] \Big|_{u=\bar{u}} = 0. \quad (11.95)$$

$L$  — არის (11.92) განტოლების ინტეგრალქვეშა გამოსახულება. ბოლო პირობიდან გამომდინარეობს

$$u^*(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right). \quad (11.96)$$

თუ გვინდა მოვახდინოთ წრფივი მართვის სინთეზირება, მაშინ საჭიროა გამოვიყენოთ კვადრატული ფორმა

$$S(x, t) = \frac{1}{2} x^T P(t) x, \quad (11.97)$$

სადაც  $P(t)$  არის  $n \times n$  განზომილების სიმეტრიული მატრიცა.

თუ შევიტანთ (11.96) და (11.97) (11.93) განტოლებაში მივიღებთ რიკატის მატრიცულ განტოლებას

$$-\frac{dP(t)}{dt} = -P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) + P(t)A(t) + A^T P(t) + Q(t), \quad (11.98)$$

სასაზღვრო პირობით

$$P(t_2) = M. \quad (11.99)$$

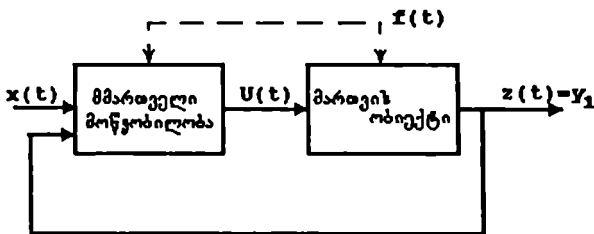
$P(t)$  თეორიულად შეიძლება ვიპოვოთ, თუ მოვახდენთ (11.98) ინტეგრირებას (11.99) გათვალისწინებით. მაშინ მართვის ფუნქციას ექნება სახე

$$u^*(x, t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t). \quad (11.100)$$

მაშასადამე, (11.92) ფუნქციონალს აქვს მინიმუმი თუ რიკატის განტოლებას აქვს ერთი ამონახსნი და ეს პირობა სრულდება მაშინ კალმანის თეორემის თანახმად  $u^*(t)$  არის ოპტიმალური.

მაგალითი 11.9.

განვიხილოთ ამოცანა, რომელშიც ბელმანის განტოლება ამოიხსნება ანალიზურად. ვთქვათ, სისტემას აქვს სტრუქტურა (ნახ.11.6.)



ნახ.11.6

ობიექტი აღიწერება განტოლებით

$$\dot{y}_1(t) = u(t),$$

$$x(t_0) = x_0 = \text{Const.}$$

მართვაზე და მდგომარეობაზე შეზღუდვები არ არის დადებული. თვისობრიობის კრიტერიუმს აქვს სახე

$$I = \int_0^T \left[ (x_0 - y_1(t))^2 + \rho u^2(t) \right] dt. \quad (11.101)$$

ვიპოვოთ  $u(t)$  მართვა, რომელზედაც  $I$  ფუნქციონალი აღწევს მინიმუმს. შევადგინოთ ბელმანის განტოლება

$$\min_u \left\{ (x_0 - y_1)^2 + \rho u^2 + \frac{\partial S}{\partial y_1} u \right\} = -\frac{\partial S(y, t)}{\partial t}. \quad (11.102)$$

მოვახდინოთ (11.102) მინიმიზაცია  $u$  მიხედვით და გაუტოლოთ ნულს

$$2\rho u + \frac{\partial S}{\partial y_1} = 0, \quad \bar{u}^* = \left(-\frac{1}{2\rho}\right) \frac{\partial S}{\partial y_1}. \quad (11.103)$$

შევიტანოთ  $u^*$  მნიშვნელობა (11.102) განტოლებაში. მივიღებთ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას

$$(x_0 - y_1)^2 - (\partial S / \partial y_1)^2 / (4\rho) = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (11.104)$$

(11.104) განტოლების ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ სინჯის მეთოდი. მისი არსი შემდეგში მდგომარეობს:  $S$  წარმოვადგინოთ მწკრივის სახით, რომლის კოეფიციენტები უცნობია. კოეფიციენტები განისაზღვრებიან ჰამილტონ-იაკობის განტოლებიდან.  $S(y_1, t)$  წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$S(y_1, t) = K_1(t) + K_2(t)y_1 + K_3(t)y_1^2,$$

სადაც  $K_1(t)$ ,  $K_2(t)$ ,  $K_3(t)$  უცნობი ცვლადი კოეფიციენტებია. ვინაიდან  $S$  ნებისმიერი  $y_1$  მნიშვნელობისას უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას  $S(y_1(T), T) = 0$ , მაშინ კოეფიციენტებს დაეღებათ პირობა

$$K_1(T) = K_2(T) = K_3(T). \quad (11.105)$$

გამოვითვალოთ

$$\frac{\partial S}{\partial t} = K_1 + K_2 y_1 + K_3 y_1^2, \quad (11.106)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = K_2 + 2K_3 y_1 \quad (11.106)$$

და დავიყვანოთ ჰამილტონ-იაკობის სახეზე

$$\begin{aligned} ((x_0^2 - k_2^2 / 4\rho) + \dot{k}_1) + y_1(-2x_0 - k_2 k_3 / \rho + \dot{k}_3) + \\ + y_1^2(1 - k_3^2 / 4\rho + \dot{k}_2) = 0. \end{aligned} \quad (11.107)$$

(11.107) პირობა სრულდება ნებისმიერი  $y_1$ , თუ

$$\begin{aligned}x_0^2 - k_2^2/4\rho + \dot{k}_1 &= 0, \\-2x_0 - k_2 k_3/\rho + \dot{k}_3 &= 0, \\1 - k_3^2/4\rho + \dot{k}_2 &= 0.\end{aligned}\tag{11.108}$$

უცნობი კოეფიციენტები გამოითვლებიან (11.108) განტოლებათა სისტემის ამოხსნით. შემოვიტანოთ ახალი ცვლადები  $\mu = T - t$ ;  $k_1(\mu) = k_1(t)$ ;  $k_2(\mu) = k_2(t)$ ;  $k_3(\mu) = k_3(t)$ ; რომელთა გამოყენებით სისტემა დაიყვანება სახეზე

$$\begin{aligned}\dot{k}_1(\mu) &= x_0^2 - k_2^2/4\rho; & \dot{k}_2 &= -2x_0 - k_2 k_3/\rho \\ \dot{k}_3 &= 1 - k_3^2/\rho.\end{aligned}\tag{11.109}$$

(11.109) განტოლებათა სისტემა ხასიათდება ნულოვანი საწყისი პირობით. (11.109) სისტემის მესამე განტოლება ადვილად გამოითვლება ცვლადთა დაცალკების მეთოდით

$$K_3(\mu) = \sqrt{\rho} \left( e^{2\sqrt{\rho}\mu} - 1 \right) / \left( e^{2\sqrt{\rho}\mu} + 1 \right) = \sqrt{\rho} \operatorname{th} \sqrt{\rho} \mu.$$

ცნობილი  $K_3$  შემდეგ განისაზღვრება  $K_2$  და  $K_1$

$$\begin{aligned}K_2(\mu) &= -2x_0 \sqrt{\rho} \operatorname{th}(\mu/\sqrt{\rho}), \\ K_1(\mu) &= x_0^2 \sqrt{\rho} \operatorname{th}(\mu/\sqrt{\rho}).\end{aligned}$$

$\operatorname{th}$ - არის ჰიპერბოლური ტანგენსის სიმბოლო. ახლა მოვახდინოთ გადასვლა  $K_i(M)$ -დან  $K_i(t)$ -ზე. საბოლოოდ მივიღებთ ოპტიმალური მართვის გამოსახულებას

$$\begin{aligned}U^* &= -\frac{1}{2\rho} \frac{\partial S}{\partial y_1} = -\frac{1}{2\rho} (k_2(t) + 2k_3(t)y_1) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\rho}} (x_0 - y_1) \operatorname{th} \frac{T-t}{\sqrt{\rho}}.\end{aligned}$$

მაგალითი 11.10. [6],  
განვიხილოთ სისტემა

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u.\tag{11.110}$$



ვიპოვოთ მართვის  $u = u(x_1, x_2, t)$  ფუნქცია ისეთი, რომ

$$I = \int_0^1 (q_{11} x_1^2 + u^2) dt + \alpha_1 x_1^2(t_1) + \alpha_2 x_2^2(t_1) \quad (11.111)$$

ფუნქციონალს ჰქონდეს მინიმალური მნიშვნელობა ( $\alpha_1, \alpha_2, q_{11}$ —მოცემული რიცხვებია). მართვაზე დადებულია შეზღუდვა

$$|u| \leq 1. \quad (11.112)$$

ჩავწეროთ ბელმანის განტოლება

$$-\frac{\partial S(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \min_{|u| \leq 1} \left\{ \frac{\partial S(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} (-x_1 + u) + q_{11} x_1^2 + u^2 \right\}, \quad (11.113)$$

და სასაზღვრო პირობები

$$S[x_1(t_1), x_2(t_1), t] = \alpha_2 x_1^2(t_1) + \alpha_2 x_2^2(t_1). \quad (11.114)$$

(11.113) განტოლებაში მინიმუმი მიიღწევა, მაშინ როდესაც

$$U = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\partial S(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} & \text{თუ } \left| \frac{1}{2} \frac{\partial S(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \right| < 1, \\ 1 & \text{თუ } -\frac{1}{2} \frac{\partial S(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} > 1, \\ 1 & \text{თუ } -\frac{1}{2} \frac{\partial S(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} < -1, \end{cases} \quad (11.115)$$

ეს თანმიმდევრობა შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებასთან

$$-\frac{\partial S(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \frac{\partial S(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} (-x_1 + u) + q_{11} x_1^2 + u^2 \quad (11.116)$$

და (11.114) სასაზღვრო პირობასთან ერთად გვაძლევს დინამიური პროგრამირების მეთოდის სასაზღვრო ამოცანას.

მაგალითი 11.11.

გადავწყვიტოთ სინთეზის ამოცანა შემდეგი ფუნქციის მი-  
ნიმიზაციისათვის  $I[x, u] = x^2(1)$ .

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad x(0) = x_0$$

$$u(t) \in U \quad (0 \leq u \leq 1)$$

ადვილი სანახავია, რომ ამ ამოცანაში სინთეზირებული  
ფუნქციების რაოდენობა უსასრულოა. მაგალითად ასეთი  
ფუნქციებია

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & x \geq 0; \\ 1 & x < 0; \end{cases} \quad \text{ან} \quad u(x, t) = \begin{cases} 0, & x > t - 1; \\ 1, & x \leq t - 1; \end{cases}$$

მაგალითი 11.12.

გადავწყვიტოთ სინთეზის ამოცანა შემდეგი სისტემისათვის

$$I[x, u(t)] = x^2(T) \quad \text{ან} \quad I[x, u(t)] = \int_0^T x^2(t) dt$$

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in U \quad (-1 \leq u \leq 1).$$

იქნება თუ არა მართვის ფუნქცია ერთადერთი?

თუ ვერ შევძელით დამოუკიდებლად აღნიშნული მაგალი-  
თების ამოხსნა, მივმართოთ როგორც §11.5 ასევე §11.7.

§ 11.6. დინამიკური პროგრამირება, როგორც ოპტიმალობის  
საქმარისი პირობა

§ 11.3. ჩანს, რომ ბელმანის განტოლება წარმოადგენს  
ოპტიმალობის აუცილებელ პირობას. ეხლა დავამტყიცოთ  
ზოგადი თეორემა, რომელიც ეხება დინამიკურ პროგრამი-  
რებას [61].

თეორემა 11.1. განვიხილოთ სისტემა, რომელიც მოცემუ-  
ლია § 11.3. მიზნის არე წარმოადგენს  $S$  სიმრავლეს. ხო-  
ლო დროის საბოლოო მნიშვნელობა  $t_2$  წინასწარ არ არის

მოცემული. განვიხილოთ ღია  $Q$  არე, რომელშიც  $S(x, t)$  ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგნაირად:

1.  $\frac{\partial S}{\partial t}$  არის უწყვეტი  $x$  და  $t$  მიხედვით, ხოლო  $\frac{\partial S}{\partial x}$  ან არის უწყვეტი  $x$  და  $t$  მიხედვით, ან აკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{t \rightarrow \tau^+} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^T f \right] = \lim_{t \rightarrow \tau^-} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^T f \right], \quad (11.117)$$

დროს ნებისმიერ მომენტში  $t = \tau$ , როდესაც  $\frac{\partial S}{\partial x}$  ან  $f(x, u)$  არიან წყვეტილი ფუნქციები.

2. ყველა  $x$ -თვის  $Q$  არეში დროის ნებისმიერ მომენტში ჰამილტონის ფუნქციას  $H\left(x, u, t; \frac{\partial V}{\partial x}\right)$  აქვს აბსოლუტური მინიმუმი  $u = u^*$  დასაშვები მართვის ფუნქციების სიმრავლიდან. ამას გარდა  $u^*(t)$  მართვა განსაზღვრავს სისტემის ერთადერთ  $x^*(t)$  ტრაექტორიას.

3.  $S_1$  სასრულო სიმრავლეში  $S(x, t) = 0$ , როდესაც  $S(x, t) = I^*(x, t)$  ყველა დასაშვები მართვის ფუნქციებისას, რომლებიც გადაიყვანენ გამომსახველ წერტილს  $x_1$  მდგომარეობიდან  $S_1$ -ში და არ ტოვებენ  $Q$  არეს. ოპტიმალური  $u^*(t)$  მართვა შეიძლება მივიღოთ ბელმანის განტოლების ამოხსნიდან. თეორემა შეიძლება დავამტკიცოთ შემდეგნაირად: თეორემის 1 და 2 პირობის თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^T f(x, u^*, t) + F(x, u^*, t) \right] < \\
 &< \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^T f(x, u, t) + F(x, u, t) \right]
 \end{aligned}
 \tag{11.118}$$

მოვახდინოთ (11.118)-ის ინტეგრირება ოპტიმალური  $x^*(t)$  ტრაექტორიის გასწვრივ  $t_1$ -დან საბოლოო  $t_2$ -მდე, მივიღებთ

$$\begin{aligned}
 &\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial S(x^*, t)}{\partial t} + \left( \frac{\partial S(x^*, t)}{\partial x} \right)^T f(x^*, u^*, t) \right] dt + \\
 &+ \int_{t_1}^{t_2} [F(x^*, u^*, t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{u^*, t} dt + \int_{t_1}^{t_2} [F(x^*, u^*, t)] dt = 0.
 \end{aligned}
 \tag{11.119}$$

სადაც აღნიშვნაა

$$\left[ \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{u^*, t} = \left( \frac{\partial I^*}{\partial x} \right) f(x, u) + \frac{\partial I^*}{\partial t}.
 \tag{11.120}$$

ახლა განვიხილოთ ინტეგრალი

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^T f(x, u, t) \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} [F(x, u, t)] dt,
 \tag{11.121}$$

შემდეგ დავუშვათ, რომ  $x^*$  და  $u^*$  არიან ერთადერთი მნიშვნელობები, რომლებიც ანიჭებენ აბსოლუტურ მინიმუმს  $W$  სიდიდეს, და რომელიც (11.120)-ის თანახმად ნულის ტოლია. თუ ეს მსჯელობა არასწორია, მაშინ შეიძლება მოიძებნოს სხვა  $u(t) \neq u^*(t)$  და  $x(t) \neq x^*(t)$ , რომლებიც  $W$  გახდინან ნულის ტოლს. მაგრამ (11.118)-ის თანახმად (11.121) ინტეგრალქვეშა გამოსახულება არის ყოველთვის დადებითი. ამრიგად,  $W$  რომ გაუტოლდეს ნულს, ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაც გაუტოლდება ნულს მთელ  $[t_1, t_2]$

ინტერვალში. (11.118) თანახმად ეს შეუძლია გააკეთოს მხოლოდ  $u^*(t), x^*(t)$  წყვილს. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 11.13.

განვიხილოთ ობიექტი  $\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = u$ .

გამოვიყენოთ ფუნქციონალი

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + c^2 u^2) dt.$$

მართვაზე დადებულია შეზღუდვა

$$|u(t)| \leq 1.$$

თუ  $u(t)$ -ზე არ არის დადებული შეზღუდვა მაშინ ოპტიმალურ მართვას აქვს სახე

$$u^*(t) = -\frac{1}{c} (x_1 + \sqrt{1+2c} x_2),$$

ხოლო რიკატის განტოლების ამოხსნას აქვს სახე

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{1+2c} & c \\ c & c\sqrt{1+2c} \end{bmatrix}.$$

როდესაც  $u(t)$ -ზე დადებულია შეზღუდვები, ბელმანის განტოლებას აქვს სახე

$$\left( \frac{\partial I^*}{\partial x_1} \right) x_2 - \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial I^*}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

თუ  $\frac{1}{c^2} \left| \frac{\partial I^*}{\partial x_2} \right| \leq 1$  და  $u^*(t)$  ტოლია

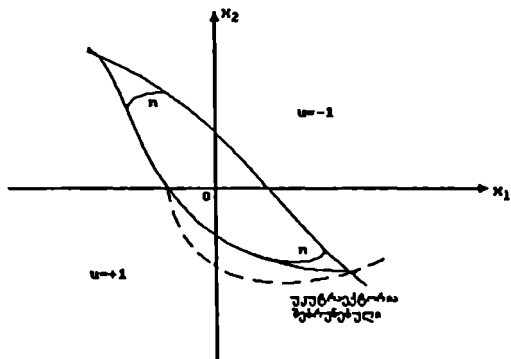
$$u^*(x) = \text{Sgn} \left[ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial I^*}{\partial x_2} \right]; \quad \text{Sgn}[x] = \begin{cases} +1 & x > 1 \\ x & |x| \leq 1 \\ -1 & x < -1 \end{cases}$$

გვაძლევს ზუსტ ამოხსნას, იმ შემთხვევის გარდა, როდესაც  $\frac{\partial I^*}{\partial x}$  წინასწარ არ არის ცნობილი.

მართვა  $u^*(t) = \frac{1}{c}(x_1 + \sqrt{1+2c} x_2)$  უდავოდ ოპტიმალურია, თუ ის არ სცილდება ზღვარს, რომელიც მოცემულია შეზღუდვით. ეს სამართლიანია  $L$  არეში. შეზღუდულია ორი მრუდით, რომელთათვის  $u^*(t) = \pm 1$ , ან

$$-\frac{1}{c}(x_1 + \sqrt{1+2c} x_2) = \pm 1$$

და ორი ტრაექტორიით, რომლებიც შეესაბამებიან მართვას  $u(t) = \pm 1$  და მხებებით ამ მრუდების მიმართ.  $L$  არე მოცემულია (11.7 ნახაზზე).



ნახ.11.7

### § 11.7. კვადრატული ოპტიმიზაცია. საკმარისობის პირობა

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მართვა არაწრფეია  $u = \varphi[x(t)]$ . მდგომარეობის განტოლებაა

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi[x(t)]. \quad (11.122)$$

განვსაზღვროთ  $\varphi$  მართვის დასაშვები კანონების  $\Phi$  კლასი ისეთნაირად, რომ აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს:

(i) ფუნქციაა  $\varphi: \ell \rightarrow u$  უნდა იყოს უწყვეტი;

(ii) ნებისმიერი საწყისი  $x(0) \in \ell$  მდგომარეობისათვის (11.122) დიფერენციალურ განტოლებას უნდა ჰქონდეს ერთადერთი  $x(\cdot)$  ამონახსნი, განსაზღვრული  $0 \leq t < \infty$  ინტერვალზე.

(iii) ნებისმიერი საწყისი  $x(0)$  მდგომარეობისათვის (11.122) განტოლების  $x(\cdot)$  ამონახსნს აქვს ის თვისება, რომ  $x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ . შევნიშნოთ, რომ თუ  $\Gamma: \ell \rightarrow u$  ასახვა უზრუნველყოფს  $A + BF$  მდგომარეობას, მაშინ მართვის წრფივი კანონი  $\varphi(x) = Fx$  მიეკუთვნება  $\Phi$  კლასს.

შემოვიტანოთ დანაკარგების ფუნქციონალი

$$j: \ell \times \Phi \rightarrow [0, \infty],$$

რომლისათვის

$$I(x, \varphi) := \int_0^{\infty} L[x(t), \varphi(x(t))] dt. \quad (11.123)$$

$x(\cdot)$  განისაზღვრება (11.122) განტოლების ამოხსნიდან  $x(0) = x$  საწყისი მდგომარეობისას.  $\varphi^* \in \Phi$  მართვის კანონს ეწოდება ოპტიმალური, თუ  $I(x, \varphi^*) < \infty$  ნებისმიერი  $x \in \ell$ , მაშინ

$$j(x, \varphi^*) \leq j(x, \varphi) \quad x \in \ell, \varphi \in \Phi. \quad (11.124)$$

პირველი ტექნიკური დაშვება იმის გარანტიანია, რომ  $\Phi$  კლასი არ არის ცარიელი და არსებობს ისეთი  $\varphi \in \Phi$ , რომ  $I(x, \varphi) < \infty$  ყველა შესაძლო  $x$ -თვის

A.1.  $(A, B)$  წყილი სტაბილიზირებადია.

მართლაც, თუ  $A + BF$  ასახვა მდგრადია და  $\varphi(x) = F(x)$ , მაშინ

$$I(x, \varphi) := \int_0^T x^T e^{(A+BF)^T} (M + F^T N F) e^{(A+BF)} X dt \leq C|x|^2, \quad (11.125)$$

სადაც  $C$ —მუდმივია. ახლა შეიძლება განვსაზღვროთ შეფასების ფუნქცია

$$V^0(x) := \inf \{ I(x, \varphi) : \varphi \in \Phi \}. \quad (11.126)$$

ცხადია, რომ

$$0 \leq V^0(x) \leq c|x|^2 \quad (11.127)$$

შემოვიტანოთ ოპტიმალობის საკმარისობის თეორემა [26].

თეორემა 11.2. დავუშვათ, რომ არსებობს ისეთი  $\varphi^* \in \Phi$  მართვის ფუნქცია და ისეთი ფუნქცია  $V: \ell \rightarrow R$ , რომ

(i)  $V(\cdot)$  უწყვეტად დიფერენცირებადია  $x \in \ell$  წერტილში;

(ii) რომელიღაც  $C$  მუდმივასათვის

$$0 \leq V(x) \leq c|x|^2, \quad x \in \ell. \quad (11.128)$$

(iii)

$$[Ax + B\varphi^*(x)]^T V_x(t) + L[x, \varphi^*(x)] = 0, \quad x \in \ell. \quad (11.129)$$

(iv)

$$[Ax + Bu]^T V_x(x) + L[x, u] \geq 0, \quad x \in \ell, \quad u \in u, \quad (11.130)$$

მაშინ

$$V(x) = V^0(x), \quad (11.131)$$

და მართვის  $\varphi^*$  ფუნქცია ოპტიმალურია.

უნდა შევნიშნოთ, რომ (11.129) და (11.130) განტოლებები ბელმანის განტოლების ექვივალენტურია. ახლა განვიხილოთ ბელმანის განტოლების ამოხსნა, (11.127) და (11.128) თვისებების გათვალისწინებით. შესაბამისი მართვის  $\varphi^*$  ფუნქცია, მოცემული განტოლებით

$$u = \omega(x, V_x), \quad (11.132)$$



მიეკუთვნება დასაშვებს. თეორემა იძლევა იმის გარანტიას, რომ  $\varphi^*$  ნამდვილად ოპტიმალურია. ამ მიზნისათვის დავუშვათ, რომ

A.2

$$N > 0 \quad (11.133)$$

გავითვალისწინოთ თეორემა. მაშინ ბელმანის განტოლებიდან

$$\min_u [(Ax + Bu)^T V_x(x) + L(x, u)] = 0, \quad (11.134)$$

და (11.132)-ს გათვალისწინებიდან, გვექნება

$$w(x, V_x) = -\frac{1}{2} N^{-1} B^T V_x. \quad (11.135)$$

საბოლოოდ

$$(Ax)^T V_x - \frac{1}{4} V_x^T B N^{-1} B^T V_x + x^T M x = 0. \quad (11.136)$$

ეს განტოლება მიიღება, თუ (11.132) შევიტანთ (11.134), რაც გვაძლევს

$$[Ax + Bw(x, V_x)]^T V_x + L[x, w(x, V_x)].$$

დავუშვათ, რომ

$$V(x) = x^T P x, \quad x \in \ell. \quad (11.136)$$

კვადრატულია.  $P$  ასახვა სიმეტრიულია. შევიტანოთ ეს გამოსახულება (11.136). მივიღებთ მატრიცულ კვადრატულ განტოლებას

$$A^T P + P A - P B N^{-1} B^T P + M = 0, \quad (11.137)$$

რომლის ამოხსნისათვის ჩვენ დაგვჭირდება კიდევ ერთი დაშვება

A.3.  $(D, A)$  არის დეტექტირებადი.

ეს ნიშნავს, რომ

$$V(x) = x^T P^* x \quad (11.138)$$

და ოპტიმალური მართვაა

$$\varphi^*(x) := -N^{-1} B^T P^* x \quad (11.139)$$

$(D, A)$  წყილის დეტექტირების პირობის მხედველობაში არ მიღება, კარგად ჩანს შემდეგი მაგალითიდან:

მაგალითი 11.14 .

$$\dot{x} = u, \quad \int_0^{\infty} u(t)^2 dt = \min,$$

სადაც  $x$  და  $u$  სკალარებია. ამ შემთხვევაში (11.137) განტოლება დადის  $P^2 = 0$  განტოლებაზე.

ასე, რომ  $P^* = 0$  და  $\varphi^*(x) = -P^*x = 0$ . ცხადია, რომ ასეთი უკუკავშირიანი სისტემა არამდგრადია, ხოლო მართვის  $\varphi^*$  ფუნქცია არ მიეკუთვნება დასაშვებთა რიცხვს. იმავე დროს დასაშვები მართვის კანონს

$$\varphi_0(x) = -\varepsilon x, \quad \varepsilon > 0$$

მიეყვართ შეფასებამდე

$$j(x, \varphi_0) = \frac{\varepsilon x^2}{2}.$$

მაშასადამე,

$$V_0(t) = \inf_{\varphi} j(x, \varphi) = 0,$$

რაც მიუთითებს, იმაზე, რომ ოპტიმალური მართვა არ არსებობს.

განვიხილოთ კიდევ კანონი

$$\dot{x} = x + u, \quad \int_0^{\infty} u(t)^2 dt = \min.$$

(11.137)-ის თანახმად

$$2P - P^2 = 0.$$

ამ განტოლების ამონახსნებია  $P_1^* = 0$  და  $P_2^* = 2$ , რომლებსაც შეესაბამება მართვები  $\varphi_1^*(x) = 0$ ,  $\varphi_2^*(x) = -2x$ .

ცხადია, რომ  $I(x, \varphi_1^0) = 0$ , მაგრამ  $\varphi_1^*(x)$  არ არის დასაშვები.  $\varphi_2^*$  მართვა არის დასაშვები და თეორემის თანახმად ის ოპტიმალურია.

ეს გვაძლევს საშუალებას დავასკვნათ, რომ დეტექტირება არ წარმოადგენს ოპტიმალური მართვის აუცილებელ პირობას. მაგრამ თუ დეტექტირება არ არის გარანტი-

რებული, მაშინ ოპტიმალური მართვა შეიძლება არც კი არსებობდეს.

### § 11.8. კროტოვის საკმარისობის პირობა

ოპტიმალური მართვის თეორიაში ამოცანების გადასაწყვეტად გამოიყენება სპეციფიკური მათემატიკური აპარატი, რომელიც გამოიყენებს სხვადასხვა იდეებს ოპტიმალური პროცესების მოსაძებნად. ეს განასხვავებს მათ დანარჩენი დასაშვები პროცესებისაგან. სხვადასხვა მათემატიკური ამოცანების ამოხსნებიდან ცნობილია, რომ ყველაზე ეფექტური საშუალებები არის აუცილებელი პირობები. ამიტომ უნდა ვიყოთ დარწმუნებული, რომ ვიყენებთ ისეთ მეთოდებს, რომლებიც ახლოს არიან აუცილებელ პირობებთან. სწორედ ასეთი მეთოდია კროტოვის ოპტიმალობის საკმარისი პირობა [61].

ფუნქციონალის ოპტიმალობის პირობაზე შეიძლება ვიმსჯელოთ აგრეთვე კროტოვის ფუნქციის საშუალებით. ამოცანის პირობა შემდეგში მდგომარეობს:

$$\begin{aligned} & \text{გვაქვს დასაშვების წყვილი } (\bar{u}(t), \bar{x}(t)), \quad (t_0 \leq t \leq T) \\ & \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0. \end{aligned}$$

განვიხილოთ ოპტიმალური მართვის შემდეგი ამოცანა

$$I[t_0, x_0, u(\cdot)] = \int_{t_0}^T f^0(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \Phi_F(x(T)) \rightarrow \inf, \quad (11.140)$$

$$\dot{x}(\tau) = f(x(\tau), u(\tau), \tau), \quad t_0 \leq \tau \leq T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (11.141)$$

$$x(\tau) \in G(\tau), \quad t_0 \leq \tau \leq T, \quad (11.142)$$

$$u = u(\tau) \in V(\tau), \quad t_0 \leq \tau \leq T \quad (11.143)$$

$u(\tau)$ —უბან-უბან უწყვეტია

დროის მომენტები  $t_0, T$  წინასწარ მოცემულია.

(11.140)–(11.143) თანახმად ოპტიმიზაციის ამოცანისათვის (11.122)–თვის სამართლიანია ფორმულა

$$I(t_0, \bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)) = \int_0^T S(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt + \tilde{S}(x(T), T) + k(\bar{x}_0, t_0) \quad (11.144)$$

და შეფასება

$$0 \leq I(t_0, \bar{x}_0, u(\cdot)) - I_x \leq \int_0^T [S(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) - S_{\min}(t)] dt + [\tilde{S}(\bar{x}(T)T) - \tilde{S}_{\min}] + [k(\bar{x}_0, t_0) - k_0 \min], \quad (11.145)$$

სადაც

$$S(x, u, t) = \langle k_x(x, t), f(x, u, t) \rangle + k_t(x, t) + f^0(x, u, t), \quad (11.146)$$

$$S(x, T) = \Phi(x) - k(x, T), \quad (11.147)$$

$$S_{\min}(t) = \inf_{x \in X(t)} \inf_{u \in D(x, t)} S(x, u, t), \quad (11.148)$$

$$\tilde{S}_{\min} = \inf_{x \in X(T)} \tilde{S}(x, T), \quad (11.149)$$

$$k_0 \min = \inf_{x \in X(t_0)} k(x, t_0), \quad (11.150)$$

$$I_* = \inf_{x \in X(t_0)} \inf_{u(\cdot) \in D(x, t_0)} I(t_0, x, u(\cdot)). \quad (11.151)$$

თეორემა 11.3. იმისათვის, რომ (11.140)-(11.141) ამოცანის დასაშვები წყვილი  $(\bar{u}(t), \bar{x}(t))$  ( $t_0 \leq t \leq T$ ),  $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ , იყოს ამ ამოცანის ამონახსნი, საკმარისია  $k(x, t)$  ფუნქციის არსებობა, რომლისთვისაც (11.144) ფორმულა სამართლიანია (11.140)-(11.143) ამოცანის ნებისმიერი დასაშვები წყვილისათვის და

$$S(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) = S_{\min}(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (11.152)$$

სადაც

$$\tilde{S}(x(t), \bar{u}(t), t) = \tilde{S}_{\min}, \quad k(\bar{x}_0, t_0) = k_0 \min \quad (11.153)$$

განისაზღვრებიან (11.147)-(11.149) ფორმულებით.

თეორემის დამტკიცება გამომდინარეობს (11.152), (11.153) პირობების შესრულებისას, (11.146) მარჯვენა მხარე გაუტოლდება ნულს და  $I(t_0, \bar{x}, \bar{u}(\cdot)) = I^*$  (11.146) გამოსახულებიდან ადვილად გამომდინარეობს საკმარისი პირობა, რომ რომელიღაც წყილი  $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$  მინიმიზაციას უკეთებს (11.140)-(11.141) ამოცანას.

თეორემა 11.4. იმისათვის, რომ ზოგიერთი თანამიმდევრობა  $(u_m(t), x_m(t))$  ( $t_0 \leq t \leq T$ ),  $x_m(t_0) = x_{0m}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) (11.140), (11.141) ამოცანის დასაშვები წყილი იყოს სამინიმიზირებელი, საკმარისია არსებობდეს ისეთი  $k(x, t)$ , რომლისათვისაც (11.144) ფორმულა სამართლიანია (11.140), (11.141) ამოცანის ნებისმიერი დასაშვები წყილისათვის და

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T S(x_m(t), u_m(t), t) dt = \int_{t_0}^T s_{\min}(t) dt,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{S}(x_m(T), T) = \tilde{S}_{\min}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} k(x_{0m}, t_0) = k_{0 \min}$$

დამტკიცება. (11.146) შეფასებაში  $\bar{u}(t), \bar{x}(t)$  ნაცვლად ჩავსვათ  $u_m(t)$ ,  $x_m(t)$  და გადავიღეთ ზღვარზე  $m \rightarrow \infty$ . (11.154), (11.155) პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I(t_0, x_{0m}, u_m(\cdot)) = I^*.$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

რომ ვისარგებლოთ 11.3 და 11.4 თეორემებით (ოპტიმალობის საკმარისი პირობები) უნდა ვიცოდეთ  $k(x, t)$  ფუნქცია, რომლის საშუალებითაც განისაზღვრებიან (11.154), (11.155) გამოსახულებები. ისმება შეკითხვა, როგორ ვიპოვოთ  $k(x, t)$  ფუნქცია?  $k(x, t)$  ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს 11.3 და 11.4 თეორემებს უწოდებენ კროტოვის ფუნქციას, ის შეესაბამება  $(\bar{u}(t), \bar{x}(t))$  წყილს ( $t_0 \leq t \leq T$ ).

უნდა შევნიშნოთ, რომ თუ არსებობს, რომელიღაც  $k(x, t)$  კროტოვის ფუნქცია, მაშინ  $\bar{k}(x, t) = k(x, t) + \alpha(t)$ ,

აგრეთვე კროტოვის ფუნქციაა.  $\alpha(t)$ -ნებისმიერი უწყვეტი,  $[t_0, T]$  არეში უბან-უბან გლუვი ფუნქციაა. კერძოდ, თუ

$$\alpha(t) = - \int_t^T S_{\min}(\tau) d\tau - \tilde{S}_{\min},$$
 მაშინ  $\bar{S}(x, u, t)$ ,  $\tilde{S}(x, T)$  ფუნქციები, რომლებიც აიგებიან (11.142), (11.143) ფორმულებით, მათში  $k$ -ს  $\bar{k} = k + \alpha$  შეცვლით ისეთით, რომ

$$\bar{S}(x, u, t) = S(x, u, t) - S_{\min}(t), \quad \tilde{S}(x, T) = \tilde{S}(x, T) - \tilde{S}_{\min}$$
 და მაშასადამე,

$$\inf_{x \in X(t)} \inf_{u \in D(x, t)} \bar{S}(x, u, t) = 0 \quad (t_0 \leq t \leq T),$$

$$\inf_{x \in X(T)} \tilde{S}(x, T) = 0,$$

ხოლო

$$\inf_{x \in X(t_0)} \bar{k}(x, t_0) = k_0 \min + \alpha(t_0).$$

განსხვავდება  $k_0 \min$ -გან  $\alpha(t_0)$  სიდიდით. ამიტომ ზოგადად დაუკარგავად 11.3 და 11.4 თეორემებში შეიძლება მივიღოთ  $S_{\min}(t) \equiv 0$ ,  $\tilde{S}_{\min} = 0$ .

ამ შენიშვნის გათვალისწინებით, კროტოვის ფუნქცია, რომელიც შეესაბამება დასაშვებ  $(\bar{u}(t), \bar{x}(t))$  წყვილს, ან თანმიმდევრობებს  $(u_m(t), x_m(t))$ , (11.140)-(11.143) ამოცანისათვის 11.3 და 11.4 თეორემების თანახმად, აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$S(x, u, t) = \langle k_x(x, t), f(x, u, t) \rangle + k_t(x, t) + f^0(x, u, t) \geq 0, \\ u \in D(x, t), \quad x \in x(t), \quad t_0 \leq t \leq T \quad (11.156)$$

$$\tilde{S}(x, T) = \Phi(x) - k(x, T) \geq 0, \quad x \in x(t_0),$$

$$k(x, t_0) \geq k_0 \min, \quad x \in x(t_0), \quad (11.157)$$

(11.156), (11.157) გამოსახულებები გადადიან ტოლობაში, როდესაც  $m \rightarrow \infty$  ზღვარზე გადასვლისას  $u = \bar{u}(t)$ ,  $x = \bar{x}(t)$ , ან  $u = u_m(t)$ ,  $x = x_m(t)$ , მნიშვნელობისას (11.156), (11.157) გამოსახულებები წარმოადგენენ უტოლებებს. თუ შევადარებთ (11.156), (11.157) განტოლებებს ბელმანის ფუნქციას და ბელმანის განტოლებას, დავინახავთ, რომ ბელმანის ფუნქცია ყოველთვის კროტოვის ფუნქციაა. კროტოვის ფუნქცია მიღებულია უფრო ზოგადი (11.156), (11.157) მოსაზრებებიდან და ის არსებობს იმ შემთხვევაშიც, როდესაც არ არსებობს ბელმანის ფუნქცია.

იმ შემთხვევაში, როდესაც არ არსებობს მუშაობისათვის ხელსაყრელი კონსტრუქციული აღწერები  $D(x, t)$ ,  $x(t)$  სიმრავლეებისა, მაშინ კროტოვის ფუნქცია შეიძლება განისაზღვროს (11.156), (11.157) პირობებიდან, თუ შევცვლით  $D(x, t)$ ,  $x(t)$  შესაბამისად  $V(t)$ ,  $G(t)$ .

ზემოთნათქვამის ილუსტრაცია მოვახდინოთ რამდენიმე მაგალითზე.

მაგალითი 11.15.

საკვირაო მოიძებნოს მინიმუმი ფუნქციონალისა

$$I[u(\cdot)] = \int_0^1 (x^2(t) - u(t)) dt \quad \dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = x(1) = 0,$$

$$u(t) \in V(t) = \{u \in E': |u| \leq 1\} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

ფაზური შეზღუდვები  $G(t)$  ასეთია:

$$G(0) = G(1) = \{0\}, \quad G(t) \equiv E' \quad (0 \leq t \leq 1)$$

ცხადია, რომ  $(\bar{u}(t) \equiv 0, \bar{x}(t) \equiv 0)$  წყვილი არის დასაშვები ამ ამოცანისათვის. ამისათვის ავიღოთ  $k(x, t) = x$ . მაშინ

$$S(x, u, t) = x^2 \geq 0 = S(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) = S_{\min}(t),$$

$$\bar{S}(x, 1) = -x = 0 = \bar{S}(\bar{x}(1), 1) = \inf_{x \in G(1)} \bar{S}(x, 1),$$

$$k(x, 0) = x = 0 = k(\bar{x}(0), 0) = \inf_{x \in G(0)} k(x, 0).$$

ფორმულა (11.140) სამართლიანია ყველა დასაშვები წყვილი-სათვის. მაშინ თეორემის თანახმად წყვილი  $(\bar{u}(t) \equiv 0, \bar{x}(t) \equiv 0)$  არის ოპტიმალური. მკითხველმა იპოვოს ამ ამოცანისათვის ბელმანის ფუნქცია.

მაგალითი 11.16.

სამართი პროცესი აღიწერება დროის  $t \in [0, u]$  მომენტში განტოლებით

$$\dot{x} = x + 2 + ux, \quad x(0) = 3, \quad x(4) = 8.$$

$x(t)$  მდგომარეობაზე და  $u(t)$  მართვაზე დადებულია შეზღუდვები

$$2 \leq x \leq 10, \quad |u| \leq 5.$$

საჭიროა ვიპოვოთ ოპტიმალური პროცესი  $(x^*(t), u^*(t))$ , რომელიც მინიმუმს ანიჭებს ფუნქციონალს

$$I = \int_0^4 (8(t+1)x^2 - 8tx^2u) dt \rightarrow \min.$$

ამოხსნა: ავავოთ ფუნქცია  $k(x, t)$  შემდეგი ფორმულის დახმარებით

$$k(x, t) = \frac{Q^0(t, x)P(t, x) - P^0(t, x)Q(t, x)}{Q(t, x)} + \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q^0(t, \xi)}{Q(t, \xi)} \right) d\xi + c'''(t).$$

სადაც აღნიშვნები აღებულია განტოლებიდან

$$\dot{x} = P(t, x) + Q(t, x)u,$$

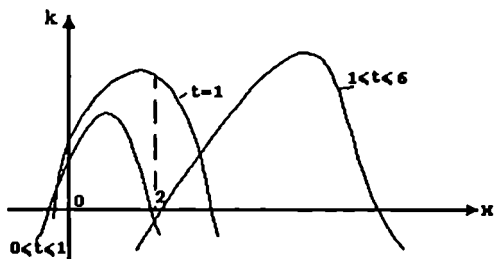
$$I = \int_0^T (P^0(t, x) + Q^0(t, x)u) dt \rightarrow \min.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ  $\bar{x}(t)$  არ არის დამოკიდებული საძიებელი  $c'''(t)$ -ზე, ამიტომ  $c'''(t)$  შეიძლება გაუტოლოთ ნულს.

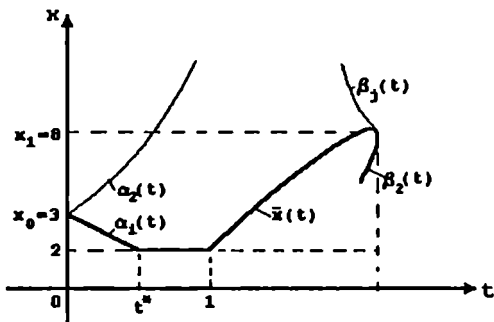
$$k(x, t) = -4x^2 + 16tx$$



სხვადასხვა  $t \in [0, 4]$  მნიშვნელობებისათვის  $k(x, t)$  აღწევს მაქსიმუმს დასაშვები მდგომარეობის სიძრავლის სხვადასხვა წერტილებში.  $k(x, t)$  ყოფაქცევა სხვადასხვა  $t$ -თვის მოცემულია (ნახ.11.8). გრაფიკიდან ჩანს, რომ  $0 \leq t \leq 1$   $k(x, t)$  მაქსიმუმი აქვს წერტილში  $x = 2$ , ხოლო  $1 \leq t \leq 4$  დროს მაქსიმუმი გვექნება  $x = 2t$  წერტილში.



ნახ.11.8.



ნახ.11.9

$\bar{x}(t)$  გრაფიკი მოცემულია (11.9 ნახაზზე).

ახლა ავაგოთ  $\alpha_{1,2}(t)$  და  $\beta_{1,2}(t)$  ტრაექტორიები, რომლებიც შეესაბამებიან  $u(t)$  მართვის მაქსიმალურ და მინიმალურ

ლურ მნიშვნელობებს. ტრაექტორიები  $\alpha_1(t)$ ,  $\beta_1(t)$  აკმა-  
ყოფილებენ განტოლებას

$$\dot{x} = -4x + 2$$

და საწყის პირობებს  $x(0) = 3$ ,  $x(4) = 8$ .

ეს ამონახსნებია:

$$\alpha_1(t) = 0,5 + 2,5e^{-4t},$$

$$\beta_1(t) = 0,5 + 7,5e^{-4(t-4)},$$

$\alpha_2(t)$  და  $\beta_2(t)$  ტრაექტორიები აკმაყოფილებენ განტო-  
ლებას

$$\dot{x} = 6X + 2.$$

იმვე საწყისი პირობისათვის რაც  $\alpha_1(t)$  და  $\beta_1(t)$  გათვა-  
ლისწინებით, გვექნება

$$\alpha_2(t) = -\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3}e^{6t},$$

$$\beta_2(t) = -\frac{1}{3} + 8\frac{1}{3}e^{6(t-4)}.$$

$\alpha_{1,2}(t)$  და  $\beta_{1,2}(t)$  გრაფიკები მოცემულია ნახაზზე. ვიპო-  
ვთ ამ მრუდეების გადაკვეთის წერტილი  $x^*(t)$  მრუდთან.

$\alpha_1(t)$ , მრუდი გადაკვეთს  $x^*(t)$  წერტილში  
 $t^* = -0,25 \ln 0,6$ ,  $\alpha_2(t)$  არა აქვს  $x^*(t)$  გადაკვეთის წერ-  
ტილი, ხოლო  $\beta_{1,2}(t)$  გაივლის  $x_1 = 8$  წერტილს, როდეს-  
საც  $t = 4$ . ეს ამოცანის პირობით არის მოცემული.

განვიხილოთ  $x^*(t)$  ტრაექტორია, რომელიც შესდგება  
სამი ნაწილისაგან

$$x^*(t) = \begin{cases} 0,5 + 2,5e^{-6t} & \text{თუ } 0 \leq t \leq t^*, \\ 2 & \text{თუ } t^* \leq t < 1, \\ 2t & \text{თუ } 1 \leq t \leq 4, \end{cases}$$

სადაც  $t^* = -0,25 \ln 0,6$ .

თუ ეს ტრაექტორია დასაშვებია, მაშინ ის აკმაყოფილებს თეორემის პირობას, მაშასადამე ოპტიმალურია, რადგან მის წერტილებში მიიღწევა  $k(x, t)$  მაქსიმუმი.

$x^*(t)$  დასაშვები ტრაექტორია მოწმდება მისი ჩასმით პირდაპირ პროცესში.  $0 \leq t \leq t^*$  მონაკვეთში ასეთი შემოწმება არაა საჭირო, ვინაიდან  $\bar{x}(t)$  არის აგებული  $\bar{x}(t)$  ზევით. როდესაც  $t^* \leq t \leq 1$ , პროცესის განტოლებაში უნდა შევიტანოთ  $x^*(t) = 2$ , მივიღებთ  $u^*(t) = -2$ . თუ  $1 \leq t \leq 4$ ,  $x^* = 2t$  ჩასმა გვაძლევს  $u^*(t) = -1$ . საბოლოოდ  $u^*(t)$  აქვს სახე

$$u^*(t) = \begin{cases} -5 & \text{თუ } 0 \leq t \leq t^*, \\ -2 & \text{თუ } t^* \leq t < 1, \\ -1 & \text{თუ } 1 \leq t \leq 4, \end{cases}$$

$\bar{u}(t)$  მართვა დასაშვებია, ამიტომ ნაპოვნი წყილი  $(x^*(t), u^*(t))$  არის ოპტიმალური.

## § 11.9. ოპტიმალური მართვის მეთოდების შედარება

### 1. დინამიკური პროგრამირება და მაქსიმუმის პრინციპი.

ვთქვათ მართვის სისტემა აღიწერება განტოლებით

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (11.158)$$

სადაც  $x$ —ობიექტის მდგომარეობის  $n$  განზომილებიანი ვექტორია,  $u$ —მართვის  $r$  განზომილებიანი ვექტორია,  $u \in U$   $U$ —ჩაკეტილი ამოზნექილი არეა მართვების სივრცეში. მართვის კომპონენტები  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  დროის უბან-უბან

უწყვეტი ფუნქციებია. პირველი რიგის წყვეტის წერტილების რაოდენობა სასრულოა.

დაეშვათ, რომ  $x(0) = x_0$  —ობიექტის საწყისი მდგომარეობაა. ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ ამოვიჩიოთ დასაშვები მართვა, რომლის დროს ფუნქციონალს

$$I = \int_0^T F(x, u) dt \quad (11.159)$$

აქვს მინიმუმი.  $T$  დრო ფიქსირებულია.

ჩაეწეროთ ბელმანის განტოლება ფუნქციონალის მინიმუმი-სათვის

$$S(x, T) = \min_{u \in U} I, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \min_{u \in U} \left[ F(x, u) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_j} f_j(x, u) \right]. \quad (11.160)$$

აღვნიშნოთ  $F(x, u) = f_0(x, u)$  და  $t = x_{n+1}$  ე.ი.

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x_{n+1}},$$

$$\min_{u \in U} \left[ \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial S}{\partial x_j} f_j(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}, u) \right] = 0, \quad (11.161)$$

სადაც  $f_{n+1}(x, u) = 1$   $x_0 = I$ . გაეამრავლოთ (11.161) განტოლება  $-1$ -ზე და ვისარგებლოთ ტოლობით  $-\min P = \max(-P)$ ,

სადაც  $P = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial S}{\partial x_j} f_j(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}, u)$ . მაშინ მივიღებთ განტოლებას

$$\max_{u \in U} \left[ - \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial S}{\partial x_j} f_j(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}, u) \right] = 0. \quad (11.162)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\Psi_j = - \frac{\partial S}{\partial x_j},$$

მაშინ (11.162) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\max_{u \in U} \left[ \sum_{j=0}^{n+1} \Psi_j f_j \right] = 0. \quad (11.163)$$

(11.163) განტოლების მარცხენა მხარე შეიძლება განვიხილოთ, როგორც  $f = \{f_0, f_1, \dots, f_{n+1}\}$  ვექტორების  $\Psi^* \{\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{n+1}\}$  სკალარული ნამრავლი. მაშინ (11.163) განტოლების ნაცვლად ჩაწეროთ  $\max_{u \in U} (\Psi, f) = \max_{u \in U} H = 0$  სადაც  $H$  ფუნქცია სუფთა ფორმალური გარდაქმნებით ბელმანის განტოლებიდანაა მიღებული. ბელმანის განტოლებიდან პონტრიაგინის განტოლების მისაღებად აუცილებელია ვაჩვენოთ, რომ  $\Psi$  ვექტორის კომპონენტები აკმაყოფილებენ შეუღლებულ განტოლებათა სისტემას

$$\Psi_j = -\frac{\partial H}{\partial X_j}; \quad j = 0, 1, \dots, n+1. \quad (11.164)$$

ბოლო გამოსახულების მისაღებად უნდა დაეუშვათ, რომ ფუნქციონალის მინიმალური მნიშვნელობას  $S(x, T)$  აქვს მეორე რიგის უწყვეტი კერძო წარმოებულები, ხოლო  $f(x, u)$  ფუნქციებს აქვთ პირველი რიგის წარმოებულები

$$x \text{ მიხედვით. აღვნიშნოთ } g(x, u) = \sum_{j=0}^{n+1} \left( -\frac{\partial S}{\partial x_j} \right) \cdot f_j(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}, u)$$

წარდგენის მიხედვით

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = \sum_{j=0}^{n+1} \left( -\frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_k} f_j - \frac{\partial S}{\partial x_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right). \quad (11.165)$$

(11.162) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ ოპტიმალური ტრაექტორიისას ოპტიმალური მართვის ზემოქმედების შედეგად

$$g(x^*(t), u^*(t)) \equiv 0,$$

ე.ი. ოპტიმალური მოძრაობისას  $g(x, u)$  ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმს. მაშინ

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n+1$$

ნებისმიერი  $t \in [0, T]$ . მაშასადამე, (11.165) გამოსახულება ნულის ტოლია, ე.ი.

$$\sum_{j=0}^{n+1} \left( -\frac{\partial S}{\partial x_j \partial x_k} \right) f_j = -\sum_{j=0}^{n+1} \left( -\frac{\partial S}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right). \quad (11.166)$$

ესლა დაუბრუნდეთ  $\frac{\partial S}{\partial x_k}$  და იგი გაეწარმოოთ  $t$ .

გვაქნება

$$\frac{d}{dt} \left( -\frac{\partial S}{\partial x_k} \right) = \sum_{j=0}^{n+1} \left( -\frac{\partial^2 S}{\partial x_k \partial x_j} \right) \left( \frac{\partial x_j}{dt} = \sum_{j=0}^{n+1} \left( -\frac{\partial^2 S}{\partial x_k \partial x_j} \right) f_j \right) \quad (11.166)$$

(11.166) გათვალისწინებით ბოლო გამოსახულება შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ

$$\frac{d}{dt} \left( -\frac{\partial S}{\partial X_k} \right) = -\sum_{j=0}^{n+1} \left( -\frac{\partial S}{\partial X_j} \right) \frac{\partial f_j}{\partial X_k},$$

ან აღნიშვნების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\frac{d\Psi_k}{dt} = -\sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \Psi_j; \quad k = 0, 1, \dots, n+1. \quad (11.167)$$

(11.167) გამოსახულება წარმოადგენს საძიებელ შეუღლებულ განტოლებათა სისტემას  $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_{n+1}$  ცვლადებისათვის. ჩვენი მსჯელობა დასრულებულია. ბოლოს აღნიშნოთ, რომ

$\frac{\partial^2 S}{\partial x_k \partial x_j}$ -ის არსებობა  $x$  სივრცეში ყოველთვის არ სრულდება. ამიტომ მაქსიმუმის პრინციპის მიღების ეს წესი სუფთა ევრისტიკულია.

2. დინამიკური პროგრამირება და ეილერის განტოლება.

განვიხილოთ ფუნქციონალის მინიმიზაციის პრობლემა

$$I = \int_{t_0}^T F(x, \dot{x}, t) dt \quad x(t_0) = a.$$

$T$ —ფიქსირებული მნიშვნელობაა.  $t_0$ —ცვლადი ჰქვდა ზღვარია. შევადგინოთ ბელმანის განტოლება და მისგან მივიღოთ ეილერის განტოლება.

შემოვიტანოთ განხილვისათვის ორი ცვლადის ფუნქცია

$$S(a, T - t_0) = \min_x \int_{t_0}^T F(x, \dot{x}, t) dt.$$

$a$ —იღებს ნებისმიერ ნამდვილ მნიშვნელობებს,  $t \geq 0$ . ამ ამოცანისათვის ბელმანის განტოლებას აქვს სახე

$$-\frac{\partial S}{\partial t_0} = \min_{x(t_0)} \left[ F(a, \dot{x}(t_0), t_0) + \frac{\partial S}{\partial a} \dot{x}(t_0) \right], \quad (11.168)$$

საწყისი პირობისას  $S(0, 0) = 0$ .

(11.168) განტოლებიდან გამომდინარეობს ეილერის განტოლება. მარჯვენა მხარის მინიმუმისათვის (11.168) განტოლებიდან მივიღებთ აუცილებელ პირობას

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}(t_0)} + \frac{\partial S}{\partial a} = 0. \quad (11.169)$$

(11.168) განტოლება ექვივალენტურია შემდეგი განტოლებათა სისტემის

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0; \quad F + \frac{\partial S}{\partial x} \dot{x} = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (11.170)$$

ვინაიდან (11.170) განტოლება შეიძლება მივიღოთ დროის ნებისმიერი მომენტისათვის. განხორციელებულია გაიგივება  $a$   $x$ -თან. გავაწარმოოთ (11.171) პირველი განტოლება  $t$ , ხოლო მეორე  $x$ , მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \dot{x} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \dot{x} = -\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x}. \quad (11.171)$$

(11.171) განტოლებათა სისტემის პირველ განტოლებას გამოვაკლოთ მეორე, მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (11.172)$$

რომელიც თანხედება ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებას. ე.ი. ბელმანის განტოლებიდან მივიღებთ ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებას თუ გავითვალისწინებთ  $1^0$ -ის შენიშვნას  $S(a, T - t_0)$  მეორე წარმოებულის თვისებაზე. ეილერის განტოლების მიიღება ბელმანის განტოლებიდან ვერისტიკულ ხასიათს ატარებს.

3. მაქსიმუმის პრინციპი და ეილერის განტოლება განვიხილოთ ფუნქციონალი

$$I = \int_{t_0}^T F(x, \dot{x}, t) dt, \quad (11.173)$$

სასაზღვრო პირობებისას

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_1. \quad (11.174)$$

(11.173) ფუნქციონალის ექსტრემალი არის შემდეგი ამოცანისათვის ოპტიმალური ტრაექტორია.

სისტემა აღიწერება განტოლებით

$$\dot{x} = u. \quad (11.175)$$

მინიმიზაციის ფუნქციონალს აქვს სახე

$$I = \int_{t_0}^T F(x, u, t) dt. \quad (11.176)$$

სასაზღვრო (11.174) პირობის გათვალისწინებით  $u(t)$  მართვადროის უწყვეტი ფუნქციაა. მასზე არ არის დადებული შეზღუდვა.

მივიღოთ ეილერის განტოლება მაქსიმუმის პრინციპიდან. ჩავწეროთ განტოლებები

$$\begin{aligned} H &= \Psi_0 F(x, u, t) + \Psi_1 u; \\ \dot{\Psi}_0 &= 0, \quad \dot{\Psi}_1 = -\Psi_0 \frac{\partial F}{\partial x}; \end{aligned} \quad (11.177)$$

მაქსიმუმის პირობაა

$$\max_u [\Psi_0 F(x^0(t), u, t) + \Psi_1 u] = H(\Psi_0(t), \Psi_1(t), x^0(t), u^0(t)). \quad (11.178)$$

ვინაიდან მართვა შეუზღუდავია, ამიტომ



$$\frac{\partial H}{\partial u} = \Psi_0 \frac{\partial F}{\partial u} + \Psi_1 = 0. \quad (11.179)$$

(11.179) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ  $\Psi_0 \neq 0$ . თუ  $\Psi_0 = 0$ , მაშინ  $\Psi_1 = 0$ . მუდმივის სიზუსტით (11.177) განტოლების არატრივიალური ამონახსნიდან და  $\Psi_0 = Const$ , შეიძლება ჩავთვალოთ  $\Psi_0 = -1$ . მაშინ (11.177) მეორე განტოლება მიიღებს სახეს

$$\dot{\Psi}_1 = \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (11.180)$$

მოვახდინოთ (11.180)-ის ინტეგრირება

$$\Psi_1(t) = \Psi_1(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial x} dt. \quad (11.181)$$

მეორეს მხრივ (11.179) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\Psi_0 = -1, \quad \Psi_1 = \frac{\partial F}{\partial u}; \quad (11.182)$$

ბოლო ორ განტოლების მარჯვენა მხარეები გაუტოლოთ ერთმანეთს.

მივიღებთ ეილერის განტოლებას ინტეგრალური ფორმით

$$\dot{x} = u,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = \int_{t_0}^t \frac{\partial F}{\partial x} dt + \Psi_1(t_0).$$

$F$  უწყვეტი, დიფერენცირებადი ფუნქციაა.  $x(t)$  ექსტრემალი ორჯერ დიფერენცირებადი. ბოლო გამოსახულების დიფერენცირებით მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (11.183)$$

(11.183) განტოლება წარმოადგენს (11.173) ფუნქციონალისათვის ეილერი-ლავრანეს განტოლებას.

## თავი მეორემეტე

### ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანა

#### § 12.1. შესავალი.

როგორც ადრე იყო აღნიშნული, თანამედროვე პროგრესმა მეცნიერებასა და ტექნიკაში აუცილებელი გახადა სულ უფრო და უფრო სრულყოფილი ავტომატური სისტემების შექმნა. თუ ჩვენი საუკუნის 50-იან წლებამდე ასეთი სისტემებისაგან მოთხოვნენ მხოლოდ მის მდგრადობას, შემდეგში ეს მოთხოვნები მკვეთრად შეიცვალა და გადაიზარდა ისეთი სისტემების შექმნაში, რომლებიც საუკეთესონი იქნებიან ამა თუ იმ ხარისხობრივი მაჩვენებლით. ამით იყო განპირობებული, რომ სულ მალე შეიქმნა თანამედროვე ცხოვრებისეული მეცნიერული მიმართულება—ოპტიმალური მართვის თეორია, რომელიც შეისწავლის ისეთი სისტემების გათვლისა და კონსტრუირების მეთოდებს, რომელთა საშუალებითაც აიგება ოპტიმალური სისტემა, საუკეთესო რომელიმე წინასწარ არჩეული კრიტერიუმის მიხედვით.

60-იანი წლების ბოლოს მოთხოვნები ასეთი სისტემების მიმართ კიდევ უფრო გაიზარდა. საქმე იმაშია, რომ მართვის სისტემა ხასიათდება და ფასდება არა ერთი, არამედ რამდენიმე კრიტერიუმით, რომლებიც თავისი ფიზიკური არსით სრულიად საწინააღმდეგო ხასიათისანი არიან. ამ კრიტერიუმებიდან ერთ-ერთი მათგანის ოპტიმიზაციისას მეორე კრიტერიუმმა შეიძლება ისეთი მნიშვნელობა მიიღოს, რომელიც სავესებით მიუღებელი იქნება სისტემის კონსტრუქტორისათვის. ამიტომაც, რომ მთელი რიგი პრაქტიკული ამოცანებისათვის ამოხსნის ძიება მხოლოდ ერთი კრიტერიუმის ოპტიმიზაციაზე დაყრდნობით არასაკმარისი ხდება და ასეთ დროს აუცილებლობას წარმოადგენს სისტემის ოპტიმიზაცია ვექტორული კრიტერიუმის ანუ ვექტორული მიზნის ფუნქციონისა თუ ფუნქციონალის მიხედვით. ასეთი ფუნქცია და ფუნქციონალი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი ვექტორების სახით:

$$\begin{aligned}\varphi(\cdot) &= \{\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \dots, \varphi_k(\cdot)\}, \\ I(\cdot) &= \{I_1(\cdot), I_2(\cdot), \dots, I_k(\cdot)\},\end{aligned}\tag{12.1}$$

რომლის კომპონენტებიცაა, შესაბამისად, ფუნქციები  $\varphi_1(\cdot)$ ,  $\varphi_2(\cdot), \dots, \varphi_k(\cdot)$  და ფუნქციონალები  $I_1(\cdot), I_2(\cdot), \dots, I_k(\cdot)$ , ანუ სისტემის ხარისხის მაჩვენებლები. ეს მაჩვენებლები წინასწარ უნდა იქნეს შერჩეული კონსტრუქტორის მიერ სისტემის ფუნქციონირებისათვის და მათემატიკურად ფორმალიზებული ფუნქციებისა თუ ფუნქციონალების სახით.

## § 12.2. პრობლემის ზოგადი მიმოხილვა

ვექტორული ოპტიმიზაციის პრობლემა წარმოიშვა წარმოების დაგეგმვისა და ორგანიზაციის სფეროში ეკონომიკური ხასიათის ამოცანების გადაწყვეტის დროს. მოგვიანებით იგი გავრცელდა დინამიკურ სისტემებზეც. დღეისათვის ვექტორული ოპტიმიზაციის პრობლემა განუყოფელი ნაწილი გახდა მართვის თეორიისა და უფრო და უფრო მეტი ყურადღება ეთმობა მას თანამედროვე ავტომატური მართვის სისტემების დამუშავებისა და შექმნის დროს.

ამ პრობლემის საწყისად მიჩნეულია ფრანგი ეკონომისტის პარეტოს მიერ 1896 წელს გამოქვეყნებული შრომა „პოლიტიკური ეკონომიის კურსი“. პრობლემის განვითარება დაიწყო 1963 წელს ამერიკელი პროფესორის ლოტფი ზადეს მიერ გამოქვეყნებული მცირე მოცულობის სტატიით, რომელმაც პირველად დასვა საკითხი ისეთი ავტომატური სისტემის პროექტირების შესახებ, რომელიც საუკეთესო იქნებოდა მრავალი კრიტერიუმის მიხედვით ერთდროულად. ვექტორული ოპტიმიზაციის პრობლემამ, მიუხედავად არსებული რამდენიმე ნაშრომისა, განვითარება დაიწყო 70-იანი წლებიდან.

განვიხილოთ უმარტივესი სტატიკური ამოცანა: სისტემის ფუნქციონირება ხსიათდება  $n$ -რიგის ვექტორით

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad x \in X \subset E^n$$

და ფასდება  $k$ -რიგის ვექტორ-ფუნქციით

$$\varphi(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)\},$$

რომლის კომპონენტებიც  $x$  ცვლადის მოცემული ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციებია. უნდა ვიპოვოთ  $x$  ვექტორის ისეთი მნიშვნელობა  $x^0 \in X$ , რომელიც  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$

ფუნქციებს ერთდროულად ანიჭებს ოპტიმალურ (მინიმალურ ან მაქსიმალურ) მნიშვნელობებს.

ამოცანის ასე წარმოდგენა არაკორექტულია იმ თვალსაზრისით, რომ ეს ფუნქციები ერთდროულად ოპტიმალურ მნიშვნელობებს რომელიმე ამორჩეული  $x^0 = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$

ვექტორის დროს ვერ მიიღებენ, თუ ასეთი რამ მოხდა, მაშინ ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანასთან არ გვექონია საქმე, იგი სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანა ყოფილა. ამ დროს, სისტემის ხარისხის მაჩვენებელი ფუნქციები  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ , მართალია მათემატიკურად განსხვავებულად არიან ჩაწერილნი, მაგრამ მათი ფიზიკური არსი ერთი და იგივეა.

ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანის ამოხსნა კომპრომისს ეყრდნობა: რამდენად გაუმჯობესდეს ხარისხის რომელიმე მაჩვენებელი, ვთქვათ ფუნქცია  $\varphi_i(x)$ , რომ დანარჩენმა ფუნქციებმა  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{i-1}(x), \varphi_{i+1}(x), \dots, \varphi_k(x)$  არ განიცადონ სისტემისათვის მიუღებელი გაუარესება? როგორ შევადფაროთ ეს გაუმჯობესება და გაუარესება? როგორ კომპრომისზე წავიდეთ? აი ასეთი კითხვებია ძირითადი გადასაწყვეტი ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანის ამოხსნის პროცესში.

არსებულ ლიტერატურაში სხვადასხვა მეთოდებია შემოთავაზებული ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანის გადასაწყვეტად. პრათ-ერთი მათგანია ხარისხის მაჩვენებელი ფუნქციების იერარქიული მიმდევრობის თანდათანობითი ოპტიმიზაცია. გვთავაზობენ შეექმნათ ასეთი იერარქიული მიმდევრობა, შემდეგ ვიპოვოთ ამონახსნთა სიმრავლე, რომელზეც იერარქიული მიმდევრობის პირველი წევრი ღებულობს ოპტიმალურ მნიშვნელობას, შემდეგ ამ ამონახსნთა სიმრავლეზე მოვახდინოთ მეორე წევრის ოპტიმიზაცია და ასე შემდეგ. სამწუხაროდ, ძირითადად, უმრავლეს შემთხვევაში პირველი წევრის ოპტიმიზაციისას ვღებულობთ მხოლოდ ერთ ამონახსნს, და არა ამონახსნთა სიმრავლეს, და შემდეგი წევრის ოპტიმიზაცია ვერ ხერხდება.

შემდეგი და ყველაზე გავრცელებული მეთოდია არაგაუმჯობესებადი წერტილების სიმრავლის პოვნა. წერტილის

$x^0 \in X$  ეწოდება არაგაუმჯობესებადი

$$\varphi(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)\}$$

ვექტორ-ფუნქციის მიმართ, თუ  $x \in X$  წერტილებს შორის არ მოიპოვება ისეთი  $\bar{x}$  წერტილი, როდესაც ადგილი აქვს დამოკიდებულებას

$$\varphi_\alpha(\bar{x}) \leq \varphi_\alpha(x^0), \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad (12.2)$$

რომელშიც ერთ-ერთი უტოლობა აუცილებლად მკაცრია.

არაგაუმჯობესებადი წერტილების სიმრავლეს პარეტო-სიმ-რავლეს უწოდებენ.

არაგაუმჯობესებადი წერტილის ასეთი განსაზღვრა სამართ-ლიანია შემთხვევისათვის, როდესაც ვეძებთ  $\varphi(x)$  ფუნქციის კომპონენტების მინიმუმებს.  $\varphi(x)$  ფუნქციის კომპონენტების მაქსიმუმების ძებნის შემთხვევაში არაგაუმჯობესებადი  $x^0 \in X$  წერტილის განსაზღვრა ანალოგიურია, მხოლოდ (12.2) დამო-კიდებულება იცვლება დამოკიდებულებით

$$\varphi_\alpha(\bar{x}) \geq \varphi_\alpha(x^0), \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (12.3)$$

ქვევით ჩვენ ყოველთვის შემოვიფარგლებით  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$  ფუნქციების მინიმიზაციით.

არაგაუმჯობესებადი წერტილების სიმრავლის დადგენის შემ-დეგ, საჭიროა ამ სიმრავლიდან რომელიმე კომპრომისული ამონახსნის ამორჩევა. აქ გადაწყვეტილების მისაღებად ძირი-თადად მიმართავენ დიალოგის პროცედურას ადამიანსა და გამომთვლელ მანქანას შორის. რასაკვირველია, ამორჩეული ამონახსნი კომპრომისულია და იგი ეფუძნება გადაწყვეტილე-ბის მიმღები პირის კომპეტენციას, ამ პირის მიერ მოპოვე-ბულ დამატებით ინფორმაციას.

ასეთი კომპრომისები შეიძლება სხვადასხვა სახის იყოს. ერთ-ერთი ასეთი კომპრომისი ეჭრნობა  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$  ფუნქციების წონების შერჩევას გადაწყვეტილების მიმ-ღები პირის მიერ გარკვეული ინფორმაციის საფუძველზე და ვექტორული  $\varphi(x) = \{\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)\}$  ფუნქციის დაყენას შემდეგ სკალარულ ფუნქციაზე

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x). \quad (12.4)$$

აქ კოეფიციენტები  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  წარმოადგენენ  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$ , ფუნქციების წონებს. ამრიგად, ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანა (12.1) ვექტორ-ფუნქციით დაიფანება სკალარულ ამოცანაზე (12.4) სკალარული მიზნის ფუნქციით. სამწუხაროდ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  წონების წინასწარ განსაზღვრა მეტად ძნელია, და ამავე დროს პირადულიც, რაც მხოლოდ გადაწყვეტილების მიმღებ პირზეა დამოკიდებული.

დამტკიცებულია, რომ როდესაც

$$\sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} = 1, \quad \lambda_{\alpha} > 0, \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad (12.5)$$

(12.4) ფუნქციის მინიმიზაციით ვღებულობთ წერტილს, რომელიც არაგაუმჯობესებადია. არაგაუმჯობესებადი წერტილების სიმრავლე მთლიანად მიიღება ასეთი გზით, ანუ (12.4) ფუნქციის მინიმიზაციით (12.5) პირობების დროს,  $\lambda$  კოეფიციენტების ცვლილებით.

ერთერთი გავრცელებული გზა  $\lambda$ -კოეფიციენტების ამორჩევისა არის

$$\lambda_1 = \frac{1}{\varphi_{10}}, \lambda_2 = \frac{1}{\varphi_{20}}, \dots, \lambda_k = \frac{1}{\varphi_{k0}},$$

სადაც  $\varphi_{i0}$  არის  $\varphi_i(x)$  ფუნქციის ის მნიშვნელობა, რომელსაც მივიღებთ მხოლოდ მისი მინიმიზაციის დროს.

კომპრომისის ერთ-ერთი, საკმაოდ მისაღები გზაა მეთოდი, რომელიც ეყრდნობა სისტემის ხარისხის განსაზღვრელ ფუნქციათა სივრცეში იდეალური (უტოპიური) წერტილის პოვნის იდეას და ამ სივრცეში ნორმის შემოტანას. ამ გზით მიღებული ამონახსნი კომპრომისულია, იგი ეკუთვნის პარეტო-სიმრავლეს (არის პარეტო-ამონახსნი)

და უზრუნველყოფს  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$ , ფუნქციების მნიშვნელობების მაქსიმალურ სიახლოვეს ამავე ფუნქციების მინიმალურ, ანუ შესაძლებელ საუკეთესო მნიშვნელობებთან. რა თქმა უნდა, აქ მნიშვნელოვან როლს თამაშობს შემოტანადი ნორმის სახე. სიმარტივისათვის, ასეთ ნორმად შეიძლება ამორჩეულ იქნეს ეკლიდეს ნორმა, რაც მთელი

რიგი პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას საკმაოდ კარგ შედეგებს გვაძლევს. ჩვენ ძირითადად შემოვიფარგლებით ასეთი კომპრომისული მეთოდის გამოყენებით [76, 109].

საზოგადოდ, ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანები განზოგადებულია ისეთი შემთხვევებისათვის, როდესაც სისტემა შეიცავს განუზღვრელობას. ასეთი პირობების დროს ამოცანის გადაწყვეტის მეთოდებს მკითხველი შეიძლება გაეცნოს ლიტერატურაში [151, 152, 160].

### § 12.3. პრობლემის ზოგადი მათემატიკური დასმა

ვთქვათ, რომ მოცემული  $Z$  სივრცის თითოეული ელემენტი განსაზღვრავს  $S[Z]$  სისტემას. ეს სისტემა ხასიათდება რამდენიმე ხარისხის მაჩვენებლით, რომლებიც წარმოადგენენ ხარისხის ვექტორულ მაჩვენებელს  $I = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}$ . ასეთ დროს  $Z$  სივრცის თითოეულ ელემენტს

$$z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \in Z,$$

რომელიც  $S[Z]$  სისტემას განსაზღვრავს, ხარისხის მაჩვენებელთა სივრცეში შეესაბამება გარკვეული წერტილი კოორდინატებით  $I_1(z), I_2(z), \dots, I_k(z)$ .

$Z$  სივრცის ელემენტებიდან  $z^\alpha$  სიდიდით აღვნიშნოთ ის ელემენტი, რომელიც აკმაყოფილებს შესაბამის პირობას

$$I_\alpha(z^\alpha) = \inf_{z \in Z} I_\alpha(z), \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (12.6)$$

ამრიგად,  $z^\alpha \in Z$  ელემენტი ის ელემენტია, რომლის დროსაც მინიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს მხოლოდ  $\alpha$  ინდექსის მქონე ხარისხის მაჩვენებელი, ანუ  $I_\alpha(z)$ .

განვიხილოთ  $I(z)$  ეკვლიდეს სივრცე კოორდინატებით  $I_1(z), I_2(z), \dots, I_k(z)$ . დაუშვათ, რომ ნაპოვნი და მოცემული გვაქვს სიდიდეები  $I_1(z^1), I_2(z^2), \dots, I_k(z^k)$ . ყოველთვის შეიძლება იმის მტკიცება, რომ  $Z$  სივრცეში არსებობს რომელიღაც ელემენტი  $z^* = \{z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*\} \in Z$ , რომელიც განსაზ-

ლრავს  $S_z \in S[Z]$  სისტემას და რომლის დროსაც  $I(z)$  სივრცეში  $I_1(z^*), I_2(z^*), \dots, I_k(z^*)$  სიდიდეები საუკეთესო მიახლოებაში (გარკვეული აზრით) იქნებიან ხარისხის მაჩვენებელთა მინიმალურ მნიშვნელობებთან  $I_1(z^1), I_2(z^2), \dots, I_k(z^k)$ . ასეთი მიახლოების კრიტერიუმად შეიძლება აღებულ იქნეს ნებისმიერი დადებითი ფუნქცია  $I_1(z), I_2(z), \dots, I_k(z)$  ცვლადებით. ასეთი ფუნქცია წარმოადგენს  $I(z)$  სივრცის მეტრიკას, იგი აღნიშნოთ სიდიდით  $R(z)$ .

განსაზღვრა 12.1. ელემენტი  $z^* \in Z$  ოპტიმალობას ანიჭებს  $S[Z]$  სისტემას  $R(z)$  მეტრიკის აზრით, თუ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$R(z^*) = \inf_{z \in Z} R(z). \quad (12.7)$$

ამრიგად, ზემოთქმულიდან გამომდინარე, ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანა ფორმულირდება შემდეგი სახით: მოცემული გვაქვს სისტემა  $S[Z]$ , ხარისხის ვექტორული მაჩვენებელი  $I(z)$  და ფუნქცია  $R(z)$ . უნდა მოვძებნოთ  $z^* \in Z$ .

#### § 12.4. ოპტიმალური ტრაექტორიის დაპროგრამების ამოცანა ვექტორული კრიტერიუმის შემთხვევაში.

ოპტიმალური ტრაექტორიის დაპროგრამირების ამოცანა სკალარული კრიტერიუმის შემთხვევაში განხილული იყო IX თავში. ეხლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ოპტიმალობის კრიტერიუმში ნაცვლად (9.2) ფუნქციონალისა, წარმოდგენილი იქნება ვექტორული ფუნქციონალის სახით.

ამრიგად, განვიხილოთ სამართი ობიექტი, რომლის მოძრაობაც აღიწერება დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით (9.1), ანუ ვექტორული სახით.

$$\dot{x}(t) = X(x(t), u(t)). \quad (12.8)$$



აქ  $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ ,  $u(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)\}$ ,  
 $t \in [t_0, T]$ .  $X(x, u)$  ვექტორის  $X_1(x, u), X_2(x, u), \dots, X_n(x, u)$   
 კოორდინატები წარმოადგენენ უწყვეტ და უწყვეტად დიფერენცირებად ფუნქციებს თავისი ცვლადების მიმართ.

მოცემული გვაქვს ობიექტის მოძრაობის განმსაზღვრელი საწყისი  $x_0 = x(t_0)$  და საბოლოო  $x_T = x(T)$  პირობები (8.9) ფორმულების სახით, ანუ

$$x_k(t_0) = x_{k0}, \quad x_k(T) = x_{kT}, \quad (k = 1, \dots, n), \quad (12.9)$$

სადაც  $x_{k0}, x_{kT}, k = 1, \dots, n$  მოცემული რიცხვებია, ხოლო  $T$  სიდიდის მნიშვნელობა ფიქსირებული არ არის.

მოცემული გვაქვს, აგრეთვე, სამართი  $u = \{u_1, \dots, u_r\}$  ვექტორისათვის დასაშვებ მართვათა კლასი  $U$ , რომელიც შედგება უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციებისაგან სასრულო რაოდენობის პირველი რიგის წევრებით და აკმაყოფილებენ პირობებს

$$|u_k(t)| \leq \bar{u}_k, \quad k = 1, \dots, r, \quad (12.10)$$

სადაც  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r$  მოცემული სასრულო რიცხვებია.

სიმარტივისათვის, შემოსაზღვრებს  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  ფუნქციებზე არ განვიხილავთ.

მოცემული გვაქვს  $x(t)$  და  $u(t)$  ვექტორ-ფუნქციებზე განსაზღვრული ვექტორული ფუნქციონალი

$$I(u) = \{I_1(u), I_2(u), \dots, I_k(u)\},$$

რომლის კომპონენტებიცაა ფუნქციონალები

$$I_\alpha(u) = \int_{t_0}^T f_\alpha(x(t), u(t)) dt, \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad (12.11)$$

სადაც  $f_1(x, u), f_2(x, u), \dots, f_k(x, u)$  უწყვეტი ფუნქციებია უწყვეტი პირველი წარმოებულებით.

ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: ყელა დასაშვებ მართვებს  $u = u(t) \in U$  შორის, რომლებსაც (12.8) განტოლება-

თა სისტემის თანახმად ტრაექტორია  $x(t)$  გადაჰყავს  $x_0$  წერტილიდან  $x_T$  წერტილში, ვიპოვოთ ისეთი მართვა  $u^*(t)$ , რომლის დროსაც ფუნქციონალები (12.11) ერთდროულად მიიღებენ მინიმალურ მნიშვნელობებს.

რა თქმა უნდა, ამოცანის ასეთი პირდაპირი გაგება არ იქნება სწორი, უფრო მეტიც, იგი აბსურდულია, ვინაიდან არ არსებობს მართვის ფუნქცია, რომლის დროსაც (12.11) ფუნქციონალები ერთდროულად მიიღებენ მინიმალურ მნიშვნელობებს, თუ ეს ფუნქციონალები ფიზიკური შინაარსით ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან. მაგალითისათვის, განვიხილოთ რაკეტის ვერტიკალური აფრენა სივრცის რომელიმე მოცემულ წერტილში. ფრენის პროცესის კრიტერიუმებად შეიძლება განვიხილოთ ფრენის დრო, საწვავის ხარჯი, საბოლოო წერტილში რაკეტის ენერგია და სხვა. ფუნქციონალები, რომლებიც, შესაბამისად, გამოხატავენ ფრენის დროს და რაკეტის ენერგიას ფრენის საბოლოო წერტილში, მათემატიკურად სხვადასხვანაირად ჩაიწერებიან, სინამდვილეში კი მათი ფიზიკური შინაარსი ერთიდაიგივეა. ასეთი კრიტერიუმების მიხედვით მართვის ოპტიმალური ფუნქციის განსაზღვრა არ წარმოადგენს ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანას. ამოცანა კრიტერიუმებით ფრენის დრო და საწვავის ხარჯი, ან საწვავის ხარჯი და რაკეტის ენერგია ფრენის საბოლოო წერტილში, ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანაა და მისი ამოხსნა მხოლოდ კომპრომისზე დაყრდნობითაა შესაძლებელი. ასეთ კონკრეტულ ამოცანებს მოგვიანებით განვიხილავთ.

ეხლა დავუბრუნდეთ ოპტიმალური ტრაექტორიის დაპროგრამების ზოგად ამოცანას. დაუშვათ, რომ ყველა კონკრეტული  $I_\alpha(u)$  ფუნქციონალის შემთხვევაში ამოვხსენით ოპტიმალური მართვის (სკალარული ოპტიმიზაციის) ამოცანა და ვიპოვეთ შესაბამისი მართვის ფუნქციები

$$u^{(\alpha)}(t) = u^{(\alpha)}(t, x_0, x_T), \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (12.12)$$

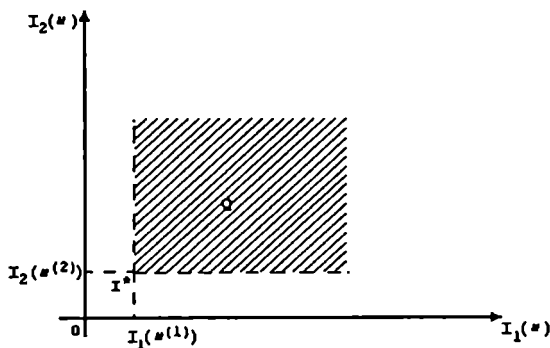
ჯამდელი ვექტორ-ფუნქცია  $u^{(\alpha)}(t) = \{u_1^{(\alpha)}(t), u_2^{(\alpha)}(t), \dots, u_r^{(\alpha)}(t)\}$  წარმოადგენს ოპტიმალურ მართვას, რომლის დროსაც სკალარული ფუნქციონალი  $I_\alpha(u)$  ღებულობს მინიმალურ მნიშვნელობას (12.9) წერტილებზე გამაველ (12.8) სისტემის ტრაექტორიაზე. რა თქმა უნდა, ამ დროს შესაბამისი გა-

რამაველი პროცესებიც სხვადასხვა ხანგრძლივობისაა, კერძოდ,  $T_1, T_2, \dots, T_k$ .

ამრიგად,  $u^{(a)}(t)$  ვექტორ-ფუნქციები განსაზღვრულია და ნაპოვნია. გამოვთვალოთ ვექტორული ფუნქციონალის კომპონენტთა მნიშვნელობები თითოეული  $u^{(a)}(t)$  მართვის შესაბამისად:

$$I^*(u) = \{I_1(u^{(1)}(t)), I_2(u^{(2)}(t)), \dots, I_k(u^{(k)}(t))\}. \quad (12.13)$$

$I_1(u^{(1)}(t))$  სიდიდე ის მინიმალური მნიშვნელობაა, რომელიც შეიძლება მიიღოს  $I_1(u)$  ფუნქციონალმა, ასევეა  $I_2, \dots, I_k$  სიდიდეებიც. ამ სიდიდეთა მნიშვნელობები ეკლიდეს სივრცეში, რომლის კომპონენტებიცაა  $I_1, I_2, \dots, I_k$ , გვაძლევენ წერტილს, რომელიც იდეალურია, უტოპიურია, რადგანაც ამ წერტილის შესაბამისი მართვის ფუნქცია არ არსებობს. ორი კრიტერიუმის შემთხვევაში ასეთი სურათი გვაქვს (ნახ.12.1):



ნახ.12.1

$I = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}$  სივრცეში შემოვიტანოთ ნორმა შემდეგი სახით:

$$R(u) = \|I(u) - I^*(u)\|^2 = \sum_{\alpha=1}^k [I_\alpha(u) - I_\alpha(u^{(a)})]^2 \quad (12.14)$$

ეს ჩვეულებრივი კვადრატული, ევკლიდეს ნორმა, რომელიც განსაზღვრულია ყველა დასაშვებ მართვაზე  $u \in U$

განსაზღვრა 12.2. მართვა  $u^0(t, x_0, x_T) \in U$  ოპტიმალურია  $I(u)$  ვექტორული ფუნქციონალის მიხედვით, როდესაც სრულდება უტოლობა

$$R(u^0) \leq R(u), \quad u \in U. \quad (12.15)$$

ეუწოდოთ ასეთ მართვას ოპტიმალური ვექტორული ფუნქციონალის აზრით.

ამოცანა: დინამიკური სისტემის მოძრაობა აღიწერება (12.8) ვექტორული განტოლებით, სასაზღვრო პირობები განსაზღვრულია (12.9) ფორმულებით, სისტემა ხასიათდება (12.11) კრიტერიუმებით და მოცემულია დასაშვებ მართვათა კლასი  $U$  საძებნია ოპტიმალური მართვა ვექტორული ფუნქციონალის აზრით  $u^0(t, x_0, x_T)$ .

წინა პარაგრაფის ენაზე  $z$  ელემენტის სახით გვაქვს მართვის ფუნქცია  $u(t)$ , რომელიც განსაზღვრავს (12.8) სისტემის მოძრაობას, მიახლოების განმსაზღვრელ  $R(z)$  ფუნქციას ცვლის ევკლიდეს ნორმა (12.14) და (12.7) ტოლობის არსი გამოხატულია (12.15) ფორმულით.

შენიშვნა: ნაგულისხმევია, რომ ამოცანაში ყველა ცვლადი და ფუნქციონალი მოცემულია უგანზომილებო სიდიდეების სახით. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ცვლადებიც და ფუნქციონალებიც უნდა იქნენ დაყვანილი უგანზომილებო სიდიდეებზე.

ამოცანის გადაწყვეტის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ასეთია. ვიხილავთ  $I(u)$  ვექტორის მიმართ ევკლიდეს სივრცეს. ჯამი (12.14) ამ სივრცეში წარმოადგენს მანძილს ნებისმიერი წერტილიდან იდეალურ წერტილამდე. ამოცანა მდგომარეობს ამ მანძილის მინიმიზაციაში, ისეთი  $u(t)$  მართვის ფუნქციის მოძებნაში, რომელიც უზრუნველყოფს ამ მანძილის მინიმუმს.

ფიზიკური ინტერპრეტაციით კი,  $u^0(t, x_0, x_T)$  მართვით ვლებულობთ (12.11) ფუნქციონალების ისეთ მნიშვნელობებს  $I_1(u^{(0)}), I_2(u^{(0)}), \dots, I_n(u^{(0)})$ , რომლებიც მაქსიმალურად ახლოს არიან ამ ფუნქციონალების იდეალურ

$I_1(u^{(1)})I_2(u^{(2)}), \dots, I_n(u^{(n)})$ . მნიშვნელობებთან ამ დროს ხდება თითოეული ფუნქციონალის მნიშვნელობის გაუარესება იდეალურთან შედარებით, მაგრამ ასეთი გაუარესება მინიმალურია და იგი ეხება ყველა მათგანს.

კვლავ განვიხილოთ ორი კრიტერიუმის შემთხვევა. (ნახ.12.1)  $Q$  არე დაშტრიხულია. ეს არის ის არე, რომელშიც შეიძლება არსებობდეს  $I_1(u)$  და  $I_2(u)$  ფუნქციონალების მნიშვნელობები. უფრო ზუსტად, ნებისმიერ  $u(t) \in U$  მართვის ფუნქციას შეიძლება შეესაბამებოდეს  $(I_1(u), I_2(u))$  წერტილი მხოლოდ დაშტრიხულ არეში. უნდა ვეძებოთ ისეთი  $u^0(t, x_0, x_T)$  მართვის ფუნქცია, რომლის შესაბამისი წერტილი  $(I_1(u^0), I_2(u^0))$  დაშტრიხულ  $Q$  არეში ყელაზე ახლოს იქნება იდეალურ  $I^*$  წერტილთან.

ყურადღება უნდა გამახვილდეს იმ გარემოებაზე, რომ ყოველი ფუნქციონალის ცალკეული ოპტიმიზაციის დროს (სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანა) განსხვავებული შეიძლება იყოს როგორც გარდამავალი პროცესების ხანგრძლივობა, ასევე შეიძლება განსხვავებული იყოს სასაზღვრო პირობებიც (12.9) და დასაშვებ მართვათა სიმრავლეც. ასეთი და სხვა საკითხების უკეთ გასაცნობად მიმართეთ მონოგრაფიას [76].

მეტი სისრულისათვის განვიხილოთ უფრო ზოგადი სახის ფუნქციონალი  $I(u)$ , რომლის კომპონენტებიცაა

$$I_1(u) = \int_{t_0}^T f_1(x(t), u(t)) dt,$$

$$I_m(u) = \int_{t_0}^T f_m(x(t), u(t)) dt, \quad (12.16)$$

$$I_{m+1}(u) = f_{m+1}(x(T)),$$

$$I_k(u) = f_k(x(T)).$$

ინტეგრალური სახის ფუნქციონალებში ინტეგრალქვეშა ფუნქციები დადებითად განსაზღვრულია, უწყვეტია და უწყვეტად დიფერენცირებადია საკუთარი არგუმენტების მიმართ. ასევე დადებითად განსაზღვრული და უწყვეტია  $f_{m+1}, \dots, f_k$  ფუნქციებიც. საწყისი დრო  $t_0$  ფიქსირებულია, მოცემული რიცხვია, ხოლო საბოლოო დრო  $T$  თავისუფალია. ყველა ფუნქციონალი თავის მინიმუმს სხვადასხვა დროის შუალედში აღწევს.

განვიხილოთ, აგრეთვე, შემდეგი სახის სასაზღვრო პირობები:

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$x_i(T) = x_{iT}, \quad (i = 1, \dots, \beta < n),$$

ანუ როდესაც  $x_{\beta+1}(T), \dots, x_n(T)$  სიდიდეები თავისუფალია.

ამოვხსენით რა  $k$  რაოდენობის სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანა თითოეული ფუნქციონალის შემთხვევაში (12.16) ფუნქციონალებიდან, მივიღეთ მართვის ფუნქციები, შესაბამისად,  $u^{(1)}(t, x_0, x_T), \dots, u^{(k)}(t, x_0, x_T)$  და გამოვითვალეთ სიდიდეები  $I_1(u^{(1)}), \dots, I_k(u^{(k)})$ , შევადგინოთ  $R(u)$  ფუნქცია (12.14) ფორმულის მიხედვით:

$$R(u) = \sum_{\alpha=1}^m \left[ \int_{t_0}^T f_{\alpha}(x(t), u(t)) dt - I_{\alpha}(u^{(\alpha)}) \right]^2 + \sum_{\alpha=m+1}^k \left[ f_{\alpha} x(T) - I_{\alpha}(u^{(\alpha)}) \right]^2$$

ამრიგად, ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანა (12.16) ფუნქციონალებით დაფანილია ჩვეულებრივი ოპტიმალური მართვის ამოცანაზე სკალარული (12.18) ფუნქციონალით. ეს ამოცანა წარმოადგენს ჩვეულებრივ ვარიაციულ ამოცანას (12.8) შეზღუდვებით, რომლის ამოხსნაც შედარებით ხელსაყრელია, თუ მას წარმოვიდგენთ მაიერის ამოცანის სახით.

ამ მიზნით შემოვიტანოთ ახალი ცვლადები

$$y_{\alpha}(t) = \int_{t_0}^t f_{\alpha}(x(t), u(t)) dt, \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

რომლებიც ამონახსნებია დიფერენციალური განტოლებებისა

$$\dot{y}_\alpha(t) = f_\alpha(x(t), u(t)), \quad (\alpha = 1, \dots, m), \quad (12.20)$$

საწყისი პირობებით

$$y_\alpha(t_0) = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, m). \quad (12.21)$$

განტოლებები (12.20) მიუყვართ (12.8) განტოლებებს, ხოლო პირობები (12.21) კი—(12.17) პირობებს. (12.19) აღნიშვნების შემდეგ ფუნქციონალი (12.18) მიიღებს სახეს:

$$R(u) = \sum_{\alpha=1}^m [y_\alpha(T) - I_\alpha(u^{(\alpha)})]^2 + \sum_{\alpha=m+1}^k [f_\alpha(x(T)) - I_\alpha(u^{(\alpha)})]^2 \quad (12.22)$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ,  $T$  ფიქსირებული არ არის. მიღებული გამოსახულება (12.22) ცვლადი დროის შემთხვევაში აღვნიშნოთ  $2G(x(t), u(t))$  ფუნქციით, ანუ

$$2G(x(t), u(t)) = \sum_{\alpha=1}^m [y_\alpha(t) - I_\alpha(u^{(\alpha)})]^2 + \sum_{\alpha=m+1}^k [f_\alpha(x(t)) - I_\alpha(u^{(\alpha)})]^2 \quad (12.23)$$

ამის შემდეგ მაიერის ამოცანა ასე ჩამოყალიბდება: ყველა დასაშვებ  $x(t), y(t), u(t)$  წირებს შორის, რომლებიც აკმაყოფილებენ (12.8), (12.17), (12.10), (12.20), (12.21) პირობებს, ვიპოვოთ ისეთი, რომელიც მიანიჭებს მინიმუმს ფუნქციონალს

$$\Delta G = G|_{t_0}^T = G(T) - G(t_0) = \frac{1}{2} R(u) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m (I_\alpha(u^{(\alpha)}))^2 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=m+1}^k [f_\alpha(x(t_0)) - I_\alpha(u^{(\alpha)})]^2 \quad (12.24)$$

ცხადია, რომ მართვა  $u^0(t, x_0, x_T)$ , რომელიც მიანიჭებს მინიმუმს  $\Delta G$  ფუნქციონალს, ასევე მიანიჭებს მინიმუმს  $R(u)$  ფუნქციონალსაც.

ეხლა გამოვიყენოთ მაქსიმუმის პრინციპის თეორემა, რომელიც მაიერის ამოცანისათვის აღწერილი გვქონდა მე-9 თავის მე-6 პარაგრაფში:

იმისათვის, რომ  $u(t)$  მართვის ფუნქციამ მიანიჭოს (12.24) ფუნქციონალს ძლიერი მინიმუმი (12.8), (12.20) კავში-

რებისა და (12.17), (12.21) სასაზღვრო პირობების დროს, აუცილებელია ისეთი არანულოვანი უწყვეტი ვექტორ-ფუნქციის  $\psi(t) = \{\psi_1(t), \dots, \psi_{n+m}(t)\}$  არსებობა, რომელიც განისაზღვრება განტოლებებით

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}, & (i = 1, \dots, n), \\ \dot{\psi}_{n+\alpha} &= -\frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, & (\alpha = 1, \dots, m), \end{aligned} \quad (12.25)$$

სადაც ფუნქცია  $H$  განისაზღვრება როგორც

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i X_i(x, u) + \sum_{\alpha=1}^m \psi_{n+\alpha} f_\alpha(x(t), u(t)), \quad (12.26)$$

და, ამავე დროს, ეს ფუნქცია  $H(\psi(t), x(t), u(t))$  ასეთი მართვის დროს აღწევს მაქსიმუმს და სრულდება შემდეგი ტრანსვერსალობის პირობა

$$\left( \delta G - H \delta t + \sum_{i=1}^n \psi_i \delta x_i + \sum_{\alpha=1}^m \psi_{n+\alpha} \delta y_\alpha \right) \Big|_{t_0}^T = 0. \quad (12.27)$$

(12.26) გამოსახულების მაქსიმუმის პირობა მართვის ფუნქციის განსაზღვრავს როგორც

$$u^0(t) = u^0(x(t), \psi(t), t). \quad (12.28)$$

განტოლებები (12.25) და გამოსახულება (12.26) განსაზღვრავს განტოლებათა შემდეგ სისტემას

$$\dot{\psi}_j = -\sum_{i=1}^n \psi_i \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \sum_{\alpha=1}^m \psi_{n+\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j}, \quad (j = 1, \dots, n), \quad (12.29)$$

$$\dot{\psi}_{n+\alpha} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

ამ განტოლებათა მარჯვენა ნაწილები, (12.28) გამოსახულების გათვალისწინებით, შეიცავენ მხოლოდ  $x(t), \psi(t)$ , და  $t$  ცვლადებს.

განტოლებათა სისტემები (12.8), (12.20) და (12.29) განსაზღვრავს  $2(n+m)$  რიგის ერთობლივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, \psi_1, \dots, \psi_{n+m}$



ცვლადების მიმართ. ამ სისტემის ამოსახსნელად საჭიროა  $2(n+m)$  საწყისი პირობა. გვაქვს  $n+m$  საწყისი პირობა

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (12.30)$$

$$y_\alpha(t) = 0, \quad (i = 1, \dots, m),$$

და  $\beta$  პირობა ტრაექტორიის მარჯვენა ბოლოზე

$$x_i(T) = x_{iT}, \quad (i = 1, \dots, \beta). \quad (12.31)$$

ვინაიდან უნდა განისაზღვროს  $T$  მნიშვნელობაც, ამოცანის ამოსახსნელად სულ საჭიროა  $(2n+2m+1)$  პირობა.

გვაკლია  $(n-\beta+m+1)$  პირობა.

ვინაიდან  $x(t), y(t)$  ფუნქციების საწყისი წერტილები და  $x(t)$  ფუნქციის ზოგიერთი მარჯვენა ბოლო ფიქსირებულია, ტრანსვერსალობის პირობა (12.27) იშლება ზუსტად

$(n-\beta+m+1)$  პირობად

$$H(T) = 0,$$

$$y_\alpha(T) - I_\alpha(u^{(\alpha)}) + \psi_{n+\alpha}(T) = 0, \quad (1, \dots, m),$$

$$\sum_{\alpha=m+1}^k \left[ f_\alpha(x(T)) - I_\alpha(u^{(\alpha)}) \right] \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \right)_{i=T} + \psi_i(T) = 0, \quad (i = \beta+1, \dots, n), \quad (12.32)$$

რომლებიც ერთმანეთთან აკავშირებენ  $x(T), y(T), \psi(T), T$  მნიშვნელობებს.

ამრიგად, (12.28) ოპტიმალური მართვის განსაზღვრისათვის, რომელიც ზემოთ შემოთავაზებული აზრით ოპტიმალური იქნება ვექტორული ფუნქციონალის მიმართ (12.16) კომპონენტებით, საჭიროა ამოვსნათ (12.8), (12.20), (12.29) განტოლებათა ერთობლივი სისტემა (12.30)–(12.32) სასაზღვრო პირობების გამოყენებით და რეზულტატი ჩავსვათ (12.28) გამოსახულებაში.

სხვა სიტყვებით, ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანა დაყვანილი იქნა ორწერტილიანი სასაზღვრო ამოცანის ამოსნამდე. განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი.

§ 12.5. მეორე რიგის საილუსტრაციო მაგალითი

ობიექტის მოძრაობა დროში აღიწერება მეორე რიგის სისტემით

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u, \end{aligned} \quad (12.33)$$

რომელიც შეზღუდულია ჩაკეტილი არით

$$\chi(x) = 3 - |x_1| \geq 0. \quad (12.34)$$

დასაშვებ მართვათა კლასიდან, რომელიც განისაზღვრება შეზღუდვით

$$|u| \leq 1, \quad (12.35)$$

ვიპოვოთ ისეთი მართვა  $u^0(t)$ , რომელიც (12.33) სისტემას

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad (12.36)$$

საწყისი მდგომარეობიდან გადაიყვანს

$$x_1(T) = 0 \quad (12.37)$$

საბოლოო მდგომარეობაში და, ამავე დროს, მიანიჭებს მინიმუმს ფუნქციონალს

$$I_1(u) = \int_0^T dt = T, \quad (12.38)$$

ხოლო მაქსიმუმს ფუნქციონალს

$$I_2(u) = x_2(T). \quad (12.39)$$

(12.38) ფუნქციონალის მინიმიზაცია (სწრაფქმედების ამოცანა) განხილულია მე-9 თავში (მაგალითი 9.1) და ოპტიმალურ მართვას აქვს სახე

$$u^{(1)} = \begin{cases} +1, & \text{როდესაც } x_1 < 0, \\ -1, & \text{როდესაც } x_1 > 0. \end{cases} \quad (12.40)$$

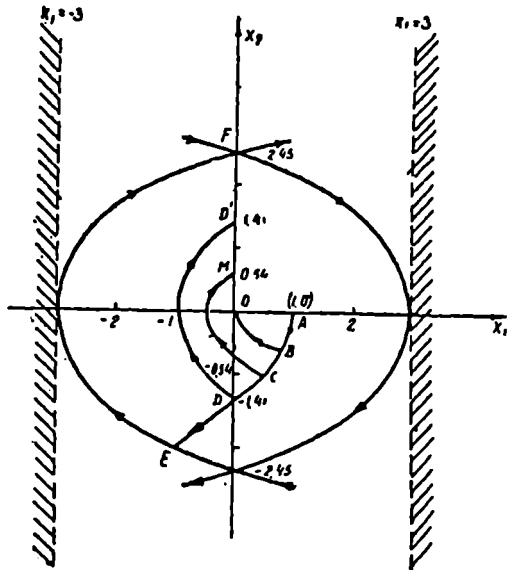
კონკრეტული (12.36) საწყისი მნიშვნელობისათვის ოპტიმალურ მართვას აქვს სახე

$$u^{(1)} = -1, \quad (12.41)$$

რომელსაც (12.33) სისტემა საწყისი (12.36) მდგომარეობიდან გადაყვას  $x_2$  ლერძზე მინიმალურ დროში ტრაექტორიით (ნახ.12.2, მონაკვეთი ABCD)

$$x_1 = -\frac{l^2}{2} + 1 \quad (12.42)$$

$$x_2 = -l.$$



ნახ.12.2

ეს მინიმალური დროა

$$I_1(u^{(1)}) = T^{(1)} = \sqrt{2} \approx 1,414, \quad (12.43)$$

ხოლო  $I_2(u^{(1)})$  ფუნქციონალის მნიშვნელობაა

$$I_2(u^{(1)}) = x_2^{(1)}(T) = -\sqrt{2} \approx -1,414. \quad (12.44)$$

ესაა გადაწყვეტით მეორე ფუნქციონალის  $I_2(u) = x_2(T)$  მაქსიმიზაციის ამოცანა, რაც იდენტურია  $I_2(u) = -x_2(T)$  ფუნქციონალის მინიმიზაციისა. ასეთი ამოცანა (12.34) შეზღუდვის გარეშე უაზრობა იქნებოდა, რადგანაც შეზღუდვის გარეშე შესაძლებელია  $I_2(u)$  ფუნქციონალის უსასრულოდ

დიდი მნიშვნელობის მიღება უსასრულოდ დიდ დროში. ეს ამოცანა მაიერის ამოცანის სახით ასეთია: (12.34), (12.35) შეზღუდვების შემთხვევაში მოვძებნოთ ისეთი მართვის ფუნქცია  $u^{(2)}$ , რომელიც გადაიყვანს (12.33) სისტემას (12.36) მდომარეობიდან (12.37) მდგომარეობაში და ფუნქციონალს

$$\Delta G = G|_0^T = -x_2(T) \quad (12.45)$$

მიანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

მაქსიმუმის პრინციპის თანახმად გვაქვს

$$\tilde{H} = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \mu \left( \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \dot{x}_1 - \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \dot{x}_2 \right), \quad (12.46)$$

რომლის მაქსიმუმიც გვაძლევს

$$u^{(2)} = \text{sign} \psi_2(t). \quad (12.47)$$

$\psi_2(t)$  ფუნქციის განსაზღვრისათვის გვაქვს განტოლებები

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 + \mu x_2 \text{sign} x_1, \end{aligned} \quad (12.48)$$

რომლებიც უნდა ამოვხსნათ (12.33) განტოლებებთან ერთად

$$\chi(x(\tau)) = 3 - x_1(\tau) = 0,$$

$$\left( \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \dot{x}_2 \right)_{t=\tau} = -\frac{\partial |x_1|}{\partial x_1} x_2(\tau) = 0 \quad (12.49)$$

შეზღუდვებისა და

$$\left( \delta G - \tilde{H} \delta t + \psi_1 \delta x_1 + \psi_2 \delta x_2 \right) \Big|_0^T = 0 \quad (12.50)$$

ტრანსვერსალობის პირობის გათვალისწინებით.

აქ მამრავლი  $\mu$  ნულისაგან განსაზღვრებულია მხოლოდ მაშინ, როდესაც  $t = \tau$ , სადაც  $\tau$  დროის ის მომენტი, როცა ტრაექტორია  $x(t)$  ეხება (12.34) საზღვარს.

ტრანსვერსალობის (12.50) პირობა სასაზღვრო (12.36), (12.37) პირობების გათვალისწინებით გვაძლევს ტოლობებს

$$\psi_2(T) = 1,$$

$$\tilde{H}(T) = \psi_2(T)x_2(T) + u(T) + \mu \left( \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \chi}{\partial x_2} \dot{x}_2 \right)_{t=T} = 0. \quad (2.51)$$

ამრიგად, (12.33) და (12.48) განტოლებების ამოსახსნელად და  $T, \mu, \tau$  სიდიდეების საპონელად გვაქვს სამი სასაზღვრო პირობა, (12.51) გამოსახულებები და (12.49) პირობები, სულ 7 პირობა.

განტოლებები (12.48) ფუნქციას  $\psi_2(t)$  განსაზღვრავენ, როგორც წრფივ ფუნქციას, რომელიც ნიშანს იცვლის მხოლოდ ერთჯერ, ან არც ერთხელ. (12.51) გამოსახულებების პირველი პირობა მიგვანიშნებს იმაზე, რომ თუ ფუნქცია  $\psi_2(t)$  ნიშანს იცვლის  $0 \leq t \leq T$  ინტერვალში, მაშინ იგი მზარდი ფუნქციაა. ამრიგად, ოპტიმალური მართვა ასე უნდა ჩაიწეროს

$$u^{(1)}(t) = \begin{cases} +1, & \text{როდესაც } 0 \leq t \leq t', \\ -1, & \text{როდესაც } t' \leq t \leq T, \end{cases} \quad (12.52)$$

სადაც  $t'$  გადართვის მომენტი.

(12.33), (12.48) ერთიანი სისტემის ამოხსნა (12.36), (12.37), (12.49), (12.51) პირობებისა და (12.52) გამოსახულების გათვალისწინებით გვიჩვენებს, რომ სისტემის მოძრაობის ტრაექტორია  $0 \leq t \leq t'$  ინტერვალში თანხედება (12.42) ტრაექტორიას,  $t' \leq t \leq T$  ინტერვალში კი აღიწერება შემდეგნაირად:

$$x_1 = \frac{t^2}{2} - 4t + 5, \quad (12.53)$$

$$x_2 = t - 4.$$

იგი პარაბოლას წარმოადგენს და გადის ფაზურ წერტილზე კოორდინატებით  $x_1 = -3, x_2 = 0$  (ნახ.12.2, მონაკვეთი ABCDEF).

ადვილად გამოითვლება, რომ

$$t' = 2, \quad (12.54)$$

$$I_1(u^{(2)}) = T^{(2)} = 4 + \sqrt{6} \approx 6,449, \quad (12.55)$$

$$I_2(u^{(2)}) = x_2^{(2)}(T) = \sqrt{6} \approx 2,449. \quad (12.56)$$

გამოვთვალეთ რა მნიშვნელობები  $I_1(u^{(1)}), I_2(u^{(2)})$  შესაბამისად ფორმულებისა (12.43) და (12.56), მოვქებნოთ კომპრომისული მართვა (12.38) და (12.39) ფუნქციონალების ერთდროული ოპტიმიზაციის შემთხვევაში.

ჩაეწეროთ  $R(u)$  ფუნქცია (12.18) გამოსახულების მსგავსად:

$$R(u) = \left[ \int_0^T dt - 1,414 \right]^2 + [2,449 - x_2(T)]^2 \quad (12.57)$$

აქ, როგორც წესი,  $T$  ფიქსირებული არ არის, აღვნიშნოთ  $T = T^0$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$x_3(t) = \int_0^t dt = t \quad (12.58)$$

და ჩაეწეროთ დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}_3 = 1, \quad (12.59)$$

საწყისი პირობით

$$x_3(0) = 0. \quad (12.60)$$

(12.57) ფუნქცია ცვლადი  $t$ -ს შემთხვევაში აღვნიშნოთ

$$2G(x_2(t), x_3(t)) = [x_3(t) - 1,414]^2 + [2,449 - x_2(t)]^2 \quad (12.61)$$

(12.33), (12.59) სისტემისათვის  $H$  ფუნქცია ჩაიწერება როგორც

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3, \quad (12.62)$$

რომელიც (12.35) გამოსახულების თანახმად განსაზღვრავს ოპტიმალურ მართვას

$$u^0(t) = \text{sign } \psi_2(t). \quad (12.63)$$

$\psi_2(t)$  ფუნქციის განსაზღვრისათვის კი გვაქვს განტოლებები

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = \psi_1, \quad \dot{\psi}_3 = 0, \quad (12.64)$$

რომლებიც უნდა ამოვხსნათ

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad \dot{x}_3 = 0 \quad (12.65)$$

განტოლებებთან ერთად შემდეგი სასაზღვრო პირობებისა

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad (12.66)$$

$$x_1(T) = 0$$

და ტრანსვერსალობის პირობის

$$(\delta G - H\delta t + \psi_1\delta x_1 + \psi_2\delta x_2 + \psi_3\delta x_3) \Big|_0^{T^0} = 0 \quad (12.67)$$

გათვალისწინებით. ამავე დროს უნდა გამოვიყენოთ (12.63) გამოსახულება.

(12.67) ტრანსვერსალობის პირობა გვაძლევს შემდეგ ტოლობებს:

$$H(T^0) = \psi_1(T^0)x_2(T^0) + \psi_2(T^0)u(T^0) + \psi_3(T^0) = 0, \quad (12.68)$$

$$x_3(T^0) - 1,414 + \psi_3(T^0) = 0, \quad (12.69)$$

$$x_2(T^0) - 2,449 + \psi_2(T^0) = 0. \quad (12.70)$$

ეს ტოლობები (12.66) სასაზღვრო პირობებთან ერთად სასებით საკმარისია (12.65), (12.64) განტოლებების ამოხსნისა და  $T^0$  მნიშვნელობის განსაზღვრისათვის.

ანალოგიურად (12.52) გამოსახულებისა, აქაც ოპტიმალურ მართვას აქვს სახე

$$u^0(t) = \begin{cases} -1, & \text{როდესაც } 0 \leq t < t^0 \\ +1, & \text{როდესაც } t^0 \leq t \leq T^0, \end{cases} \quad (12.71)$$

სადაც  $t^0$  გადართვის მომენტია, და ცხადია, ადგილი აქვს  $t^0 \leq t$ . (12.72)

საქიროა ვიპოვოთ  $t^0$  და  $T^0$

როდესაც  $t^0 = T^0$ , საქმე გვაქვს მხოლოდ  $I_1(u) = T$  ფუნქციონალის მინიმიზაციასთან,  $I_2(u) = -x_2(T)$  თავისუფალი მნიშვნელობისაა.

როდესაც  $t^0 = t'$ , საქმე გვაქვს მხოლოდ  $I_2(u) = -x_2(T)$  ფუნქციონალის მინიმიზაციასთან,  $I_1(u) = T$  ფუნქციონალის მნიშვნელობა თავისუფალია.

როდესაც  $t^0 < t'$ , სისტემის ტრაექტორიას (12.71) ზემოქმედების შედეგად ექნება  $ABCM$  წირის სახე (ნახ.12.2):

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{t^2}{2} + 1 \\ x_2 &= -t \end{aligned} \right\}, \quad \text{როდესაც } 0 \leq t \leq t^0, \quad (12.73)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{t^2}{2} + At + B \\ x_2 &= t + A \end{aligned} \right\}, \quad \text{როდესაც } t^0 \leq t \leq T^0, \quad (12.74)$$

$$(12.66) \quad x_3 = t, \quad \text{როდესაც } 0 \leq t \leq T^0. \quad (12.75)$$

სასაზღვრო პირობების თანახმად გვაქვს ტოლობები

$$x_1(T^0) = \frac{(T^0)^2}{2} + AT^0 + B = 0, \quad (12.76)$$

$$x_2(T^0) = T^0 + A, \quad (12.77)$$

$$x_3(T^0) = T^0. \quad (12.78)$$

$x_1(t)$  და  $x_2(t)$  ფუნქციების უწყვეტობის პირობიდან გამომდინარეობს

$$A = -2t^0, \quad (12.79)$$

$$B = (t^0)^2 + 1. \quad (12.80)$$

(12.64) განტოლების ამოხსნა გვაძლევს

$$\psi_1(t) = \psi_1(T^0) = \text{const}, \quad (12.81)$$

$$\psi_2(t) = -\psi_1(T^0)t + k, \quad (12.82)$$

$$\psi_3(t) = \psi_3(T^0) = \text{const}. \quad (12.83)$$

$t^0$  მომენტში  $\psi_2(t)$  ფუნქციის ნულთან ტოლობის პირობა განსაზღვრავს (12.82) ფორმულიდან ინტეგრირების მუდმივას

$$k = \psi_1(T^0) = t^0 \quad (12.84)$$

თანახმად (12.69), (12.70), (12.77), (12.78), (12.82), (12.84) პირობებისა, შეგვიძლია დავწეროთ



$$\begin{aligned}\psi_1(T^0) &= \frac{2,449 - T^0 - A}{t^{0'} - T^0}, \\ \psi_2(T^0) &= 2,449 - A, \\ \psi_3(T^0) &= 1,414 - T^0\end{aligned}\quad (12.85)$$

ესლა კი, (12.68) და (12.76) ტოლობები (12.79), (12.80), (12.85) გამოსახულებების გამოყენებით განსაზღვრავენ არაწრფივ ალგებრულ განტოლებებს

$$(T^0)^2 - 1,414T^0 - 2(t^{0'})^2 - 1,035t^{0'} = 0, \quad (12.86)$$

$$(T^0)^2 - 4t^{0'}T^0 + 2(t^{0'})^2 + 2 = 0.$$

უცნობი  $t^{0'}$  და  $T^0$  სიდიდეების საპოვნელად ეს განტოლებები უნდა ამოიხსნას შემდეგი შეზღუდვების გათვალისწინებით:

$$\begin{aligned}t^* \leq t^{0'} < t' = 2, \\ 1,414 = T^{(1)} \leq T^0 \leq T^{(2)} = 6,449,\end{aligned}$$

სადაც  $t^*$  გამოითვლება

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{t^2}{2} - 2t^*t + (t^*)^2 + 1 = 0, \\ x_2 &= t - 2t^* = 0\end{aligned}\quad (12.87)$$

განტოლებების ამოხსნით და უდრის  $t^* = 1$ .

(12.87) პირობები განსაზღვრავენ გადართვის მომენტის

ზღვრულ მინიმალურ მნიშვნელობას. როდესაც  $t^{0'} < t^*$ , სასაზღვრო პირობები (12.66) არ იქნებიან დაცული, რადგანაც პარაბოლა (12.74), (12.79), (12.80) ლერძს  $x_1 = 0$  არ გადაკვეთს.

(12.86) განტოლებების ამოხსნის შედეგად დიაპაზონში

$$\begin{aligned}1 \leq t^{0'} \leq 2, \\ 1,41 \leq T^0 \leq 6,44\end{aligned}$$

მიიღება

$$t^0 = 1,0693, \quad T^0 = 2,6785. \quad (12.88)$$

ამრიგად, ოპტიმალური მართვა ვექტორული ფუნქციონალის  $I = \{I_1(u) = T, I_2(u) = -(T)\}$  მინიმიზაციის შემთხვევაში შემდეგი სახისაა:

$$u^0(t) = \begin{cases} -1, & \text{როდესაც } 0 \leq t < 1,0693, \\ +1, & \text{როდესაც } 1,0693 \leq t \leq 2,6785. \end{cases} \quad (12.89)$$

ასეთი მართვის დროს  $x_2(T^0)$  გამოითვლება (12.73), (12.74)

ფორმულებიდან და უდრის  $x_2(T^0) = T^0 - 2t^0 = 0,5399$ .

ამრიგად, ვექტორული ფუნქციონალის კომპონენტები ღებულობენ მნიშვნელობებს

$$I_1(u^0) = T^0 = 2,6785, \quad I_2(u^0) = x_2(T^0) = 0,5399.$$

(12.1) ცხრილში მოცემულია ფუნქციონალების მნიშვნელობები სამივე შემთხვევისათვის. აქვე მოცემულია მათი მნიშვნელობები, როდესაც მინიმიზებულია ფუნქციონალთა ალგებრული ჯამი, ანუ

$$I(u) = I_1 + I_2 = \int_0^T dt - x(T).$$

მარტივი გამოსათვლელია, რომ ასეთ შემთხვევაში მართვის ფუნქციას აქვს სახე

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1, & \text{როდესაც } 0 \leq t < 1, \\ +1, & \text{როდესაც } 0 \leq t \leq 2, \end{cases} \quad (12.90)$$

ხოლო ფუნქციონალების მნიშვნელობებია

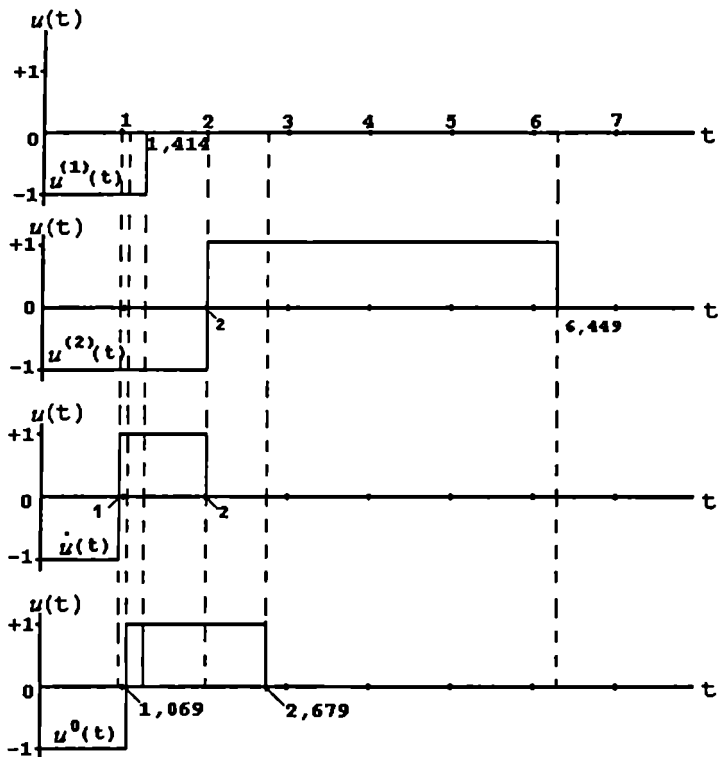
$$I_1 = T = 2, \quad I_2 = x(T) = 0.$$

როგორც ჩანს, ასეთ შემთხვევაში უპირატესობა ენიჭება  $I_1(u)$  ფუნქციონალს. შესაბამისი ტრაექტორია მოცემულია (ნახ.12.2)  $ABO$  მონაკვეთის სახით.

მართვის ფუნქციების (12.40), (12.52), (12.90), (12.89) გრაფიკული სურათი გამოსახულია (ნახ.12.3). ობიექტის განტოლება და სასაზღვრო პირობებია

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u. \quad |u| \leq 1, \quad |x_1| \leq 3. \quad x_1(0) = 1, \quad x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = 0.$$

მართობის კანონი	ფუნქციონალი	გარდამავალი პროცესის სახე	$I = \int_0^T dt$	$I_1 = x_1(T)$
$u^{(1)} = -1$ $0 \leq t \leq \sqrt{2}$	$I_1 = \int_0^T dt$	$x_1 = \frac{t^2}{2} + 1$ $x_2 = -t$ $0 \leq t \leq \sqrt{2}$	$I_2 = \sqrt{2} \approx 1,414$	$I_2^{(1)} = -\sqrt{2} \approx -1,414$
$u^{(2)} = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq 2 \\ +1, & 2 \leq t \leq 6,449 \end{cases}$	$-I_2 = -x_2(T)$	$x_1 = -\frac{t^2}{2} + 1$ $x_2 = -t$ $0 \leq t \leq 2;$ $x_1 = \frac{t^2}{2} - 4t + 5$ $x_2 = t - 4$ $2 \leq t \leq 6,449.$	$I_1^{(2)} = 4 + \sqrt{6} \approx 6,449$	$I_2 = \sqrt{6} \approx 2,449$
$u = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq 1 \\ +1, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$	$I = I_1 - I_2 = \int_0^T dt - x_2(T)$	$x_1 = -\frac{t^2}{2} + 1$ $x_2 = -t$ $0 \leq t \leq 1;$ $x_1 = \frac{t^2}{2} - 2t + 2$ $x_2 = t - 2$ $1 \leq t \leq 2.$	2	0
$u^0 = \begin{cases} -1, & 0 \leq t \leq 1,0693 \\ +1, & 1,0693 \leq t \leq 2,6785 \end{cases}$	$I = \left[ \int_0^T dt - 1,414 \right]^2 + [2,449 - x_2(T)]^2$	$x_1 = -\frac{t^2}{2} + 1$ $x_2 = -t$ $0 \leq t \leq 1,0693;$ $x_1 = \frac{t^2}{2} - 2,1386t + 2,1434$ $x_2 = t - 2,1386$ $1,0693 \leq t \leq 2,6785$	$\gamma^0 = 2,6785$	$x_2^0(T) = 0,5399$



ნახ.12.3.

### § 12.6. რაკეტის ოპტიმალური აფრენა სივრცის მოცემულ წერტილში

რაკეტის აფრენის პროცესისადმი მოთხოვნები შეიძლება სხვადასხვა იყოს. მაგალითად, რაკეტის აფრენა შეიძლება ოპტიმალურად ჩაითვალოს, თუ მისი მოძრაობა შესრულდება უმოკლეს დროში. სხვა შემთხვევაში რაკეტის აფრენას შეიძლება საწვავის ხარჯის მინიმუმში დაედვას საფუძვლად. ოპტიმალობის პირობა შეიძლება მისი სიჩქარის მაქსიმალური მნიშვნელობა იყოს სივრცის რომელიმე მოცემულ წერტილ-

ში, რაც ამ წერტილში რაკეტის კინეტიკურ ენერგიას განსაზღვრავს. შეიძლება სხვა მოთხოვნების ჩამოთვლაც. ეს მოთხოვნები განაპირობებენ რაკეტის ფრენის ოპტიმალობის აზრს. ბუნებრივია, რომ ფრენის განხორციელება რომელიმე კრიტერიუმზე დაყრდნობით, გამოიწვევს სხვა კრიტერიუმების იგნორირებას, რომლის დროსაც, ხშირ შემთხვევებში, იგნორირებული კრიტერიუმების მიღებული მნიშვნელობები დაუშვებელი ხდება. ასეთ დროს აუცილებელია რამდენიმე კრიტერიუმის ერთდროულად გათვალისწინება, გარკვეულ კომპრომისზე წასვლა. რა თქმა უნდა, მრავალი კრიტერიუმის ერთდროული ოპტიმიზაცია (კომპრომისის ხარჯზე) გამოიწვევს კრიტერიუმების გაუარესებას მათ საუკეთესო მნიშვნელობებთან შედარებით, მაგრამ ასეთი გაუარესება მინიმალური უნდა იყოს. განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევები.

ა) აფრენა ვერტიკალურ სიბრტყეზე მინიმალური საწვავის ხარჯით

საფრენი აპარატის მოძრაობა ვერტიკალურ სიბრტყეზე გარკვეული დაშვებებს შედეგად აღიწერება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებებით:

$$\dot{x} = v \cos \gamma,$$

$$\dot{h} = v \sin \gamma,$$

$$\dot{v} = -g \sin \gamma + \frac{v_E \beta}{m} \cos \varepsilon - \frac{D}{m}, \quad (12.91)$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{g}{v} \cos \gamma + \frac{v_E \beta}{mv} \sin \varepsilon + \frac{L}{mv},$$

$$\dot{m} = -\beta.$$

აქ  $x$ —ჰორიზონტალური მანძილია,  $h$ —სიმაღლე,  $v$ —სიჩქარე,  $\gamma$ —ტრაექტორიის ჰორიზონტთან დახრის კუთხე,  $m$ —ზოგადი მასა,  $\varepsilon$ —წვევისა და სიჩქარის ვექტორებს შორის კუთხე,  $\beta$ —საწვავის ხარჯი,  $v_E$ —წვის ეფექტური სიჩქარე,

$D(h, v)$ —პირდაპირი წინააღმდეგობა,  $L(h, v)$ —ამწვევი ძალა,  $g$ —სიმძიმის ძალის აჩქარება.

ეს განტოლებები მოცემულია არეში, რომელიც განისაზღვრება შეზღუდვით  $0 \leq \beta \leq \bar{\beta} = const.$

მართვის ფუნქციებს წარმოადგენენ  $\beta(t)$  და  $\varepsilon(t)$  ფუნქციები, რომლებიც განსაზღვრავენ რაკეტის აფრენის პროგრამას. ოპტიმიზაციის ფუნქციონალია

$$\Delta G = G|_0^T = -(m_T - m_0) = m_0 - m_T, \quad (12.92)$$

რომელიც გვიჩვენებს საწვავის ხარჯს ფრენის პროცესში, საწყისი წერტილიდან საბოლოო წერტილამდე.

დავუშვათ, რომ დასაშვებ მართვათა კლასი  $\Omega \ni \beta$  წარმოადგენს უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციების კლასს, რომლებიც შემოსაზღვრულნი არიან უტოლობით

$$0 \leq \beta \leq \bar{\beta}. \quad (12.93)$$

მოცემული გვაქვს ფიქსირებული სასაზღვრო პირობები

$$x(0) = x_0, h(0) = h_0, v(0) = v_0, \gamma(0) = \gamma_0, m(0) = m_0, \quad (12.94)$$

$$x(T) = x_T, h(T) = h_T, v(T) = ?, \gamma(T) = ?, m(T) = ?, \quad (12.95)$$

ანუ  $v_T, \gamma_T$  და  $m_T$  სიდიდეები თავისუფალია.  $T$  სიდიდით აღნიშნულია ფრენის ხანგრძლივობა.

მაიერის ვარიაციული ამოცანა ასე ჩამოყალიბდება: დასაშვებ მართვათა კლასში  $\Omega$  ვიპოვოთ ისეთი მართვა, რომელიც (12.91) სისტემის ტრაექტორიას ფაზურ სივრცეში (12.94) წერტილიდან გადაიყვანს (12.95) წერტილში და ამავე დროს (12.92) ფუნქციონალს მინიმუმს მიაწიჭებს.

მაქსიმუმის პრინციპის თანახმად ფუნქცია  $H$  შემდეგი სახისაა

$$H = \psi_1 v \cos \gamma + \psi_2 v \sin \gamma + \psi_3 \left( -g \sin \gamma + \frac{v \varepsilon \beta}{m} \cos \varepsilon - \right. \\ \left. - \frac{D}{m} \right) + \psi_4 \left( -\frac{g}{v} \cos \gamma + \frac{v \varepsilon \beta}{mv} \sin \varepsilon + \frac{L}{mv} \right) - \psi_5 \beta. \quad (12.96)$$

დამხმარე  $\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t), \psi_4(t), \psi_5(t)$  ფუნქციებისათვის გვაქვს განტოლებები

$$\psi_1 = 0,$$

$$\dot{\psi}_2 = \frac{1}{m} \frac{\partial D}{\partial h} \psi_3 - \frac{1}{mv} \frac{\partial L}{\partial h},$$

$$\dot{\psi}_3 = -\psi_1 \cos \gamma - \psi_2 \sin \gamma + \frac{1}{m} \frac{\partial D}{\partial v} \psi_3 + \psi_4 \frac{1}{v^2} \left( -\frac{g}{v} \cos \gamma + \right. \\ \left. + \frac{v_E \beta}{m} \sin \varepsilon + \frac{L}{m} \right) - \frac{1}{mv} \frac{\partial L}{\partial v} \psi_4,$$

$$\dot{\psi}_4 = \psi_1 v \sin \gamma - \psi_2 v \cos \gamma + \psi_3 g \cos \gamma - \psi_4 \frac{g}{v} \sin \gamma,$$

$$\dot{\psi}_5 = \frac{\psi_3}{m^2} (v_E \beta \cos \varepsilon - D) + \frac{\psi_4}{m^2 v} (v_E \beta \sin \varepsilon + L).$$

(12.97)

მართვის ფუნქციები  $\beta(t)$  და  $\varepsilon(t)$ , რომლებიც ანიჭებენ მინიმუმს (12.92) ფუნქციონალს, უნდა განისაზღვრონ  $H$  ფუნქციის მაქსიმუმის პირობიდან, შესაბამისად  $\beta^0(t)$  და  $\varepsilon^0(t)$  ფუნქციების მიხედვით.

$H$  ფუნქციის მაქსიმუმი  $\beta(t)$  ფუნქციით გვაძლევს მართვის შემდეგ კანონს

$$\beta^0(t) = \begin{cases} \bar{\beta}, & \text{როდესაც } \psi_3 \frac{v_E}{m} \cos \varepsilon + \psi_4 \frac{v_E}{mv} \sin \varepsilon - \psi_5 > 0, \\ 0, & \text{როდესაც } \psi_3 \frac{v_E}{m} \cos \varepsilon + \psi_4 \frac{v_E}{mv} \sin \varepsilon - \psi_5 < 0. \end{cases} \quad (12.98)$$

შესაძლებელია არსებობდეს ინტერვალი  $[t_1, t_2] \in T$ , რომლის დროსაც ადგილი ექნება ტოლობას

$$\psi_3 \frac{v_E}{m} \cos \varepsilon + \psi_4 \frac{v_E}{mv} \sin \varepsilon - \psi_5 \equiv 0.$$

ასეთ შემთხვევაში მართვას განსაკუთრებული მართვა ეწოდება და მნიშვნელობას ლებულობს (12.93) ინტერვალში.

$H$  ფუნქციის მაქსიმუმი  $\varepsilon(t)$  ფუნქციით გვაძლევს გამოსახულებებს

$$\frac{\partial H}{\partial \varepsilon} = -\psi_3 \frac{v_E}{m} \beta \sin \varepsilon + \psi_4 \frac{v_E}{mv} \beta \cos \varepsilon = 0, \quad (12.99)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon^2} = -\psi_3 \frac{v_E}{m} \beta \cos \varepsilon - \psi_4 \frac{v_E}{mv} \beta \sin \varepsilon < 0. \quad (12.100)$$

ტოლობა (12.99) გვაძლევს დამოკიდებულებას

$$\varepsilon^0(t) = \arctg \frac{\psi_4}{\psi_3 v}, \quad (12.101)$$

ხოლო უტოლობა (12.100) გვაძლევს

$$\psi_3 \cos \varepsilon + \psi_4 \frac{1}{v} \sin \varepsilon > 0. \quad (12.102)$$

იოლი შესამოწმებელია, რომ უკანასკნელი უტოლობა (12.101) ტოლობის გათვალისწინებით სრულდება, თუ

$$0 \leq \varepsilon \leq 90^\circ.$$

ტრანსვერსალობის პირობა შემდეგია:

$$(-\delta m - H\delta t + \psi_1 \delta x + \psi_2 \delta h + \psi_3 \delta v + \psi_4 \delta \gamma + \psi_5 \delta m) \Big|_0^T = 0. \quad (12.103)$$

ეს პირობა (12.94) და (12.95) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით იშლება შემდეგ ტოლობებად

$$\psi_3(T) = 0, \quad \psi_4(T) = 0, \quad \psi_5(T) = 1, \quad (12.104)$$

$$H(T) = \psi_1(T)v(T)\cos \gamma(T) + \psi_2(T)v(T)\sin \gamma(T) - \beta(T) = 0.$$

(12.98) და (12.101) მართვის კანონების საბოლოო სახის მიხედვით საჭიროა განვსაზღვროთ ფუნქციები  $\psi_3(t), \psi_4(t),$

$\psi_5(t)$  ეს შესაძლებელია მხოლოდ (12.91) და (12.97) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემების ერთობლივი ამოხსნით (12.98), (12.101) გამოსახულებათა და (12.94), (12.95), (12.104) პირობების გათვალისწინებით. (12.91), (12.97) განტოლებათა ერთობლივი სისტემა მე-10 რიგისაა, ხოლო (12.94), (12.95), (12.104) ფორმულები საკმარისია ინტეგრირების მუდმივებისა და უცნობი  $T$  მნიშვნელობის განსაზღვრისათვის



ბ) აფრენა მაქსიმალური საბოლოო სიჩქარის მიღწევით

ვიხილავთ იგივე ამოცანას სხვა კრიტერიუმის შემთხვევაში, კერძოდ, (12.92) ფუნქციონალის ნაცვლად გვაქვს

$$\Delta G = G \Big|_0^T = -(\nu(T) - \nu_0). \quad (12.105)$$

$\beta(t)$  და  $\varepsilon(t)$  დასაშვებ მართებს შორის, რომლებიც (12.91) სისტემას (12.94) საწყისი მდგომარეობიდან გადაიყვანს (12.95) მდგომარეობაში, ვიპოვოთ ისეთი, რომლის დროსაც ფუნქციონალი (12.105) მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

ვინაიდან ასეთ შემთხვევაშიც  $H$  ფუნქციის გამოსახულება იგივე რჩება, კერძოდ (12.96), ასევე იგივე გამოსახულება ექნებათ მართვის  $\beta^0(t)$  და  $\varepsilon^0(t)$  ფუნქციებსაც, კერძოდ (12.98) და (12.101), შესაბამისად. განსხვავებული იქნებიან მხოლოდ (12.104) პირობები, რომლებიც ტრანსვერსალობის პირობიდან გამომდინარეობენ. კერძოდ, გვექნება

$$\psi_3(T) = 1, \quad \psi_4(T) = 0, \quad \psi_5(T) = 0,$$

$$H(T) = \psi_1(T)\nu(T) \cos \gamma(T) + \psi_2(T)\nu(T) \sin \gamma(T) - \quad (12.106)$$

$$- g \sin \gamma(T) + \nu_\varepsilon \frac{\beta(T)}{m(T)} \cos \varepsilon(T) = \frac{D(T)}{m(T)} = 0.$$

ამრიგად, მაქსიმალური საბოლოო სიჩქარის მისაღწევად ფრენა ხორციელდება (12.98) და (12.101), მართვის ფუნქციებით, ხოლო  $\psi_3(t), \psi_4(t), \psi_5(t)$  ფუნქციები უნდა განისაზღვრონ (12.91), (12.97) განტოლებათა ერთობლივი ინტეგრირებით (12.94), (12.95), (12.106) პირობების გათვალისწინებით.

გ) აფრენა მინიმალურ დროში

ამ შემთხვევაშიც მართვის ფუნქციებს ისეთივე (12.98) და (12.101) სახე ექნებათ. განსხვავებული იქნება მხოლოდ ტრანსვერსალობის პირობა, რომელიც დაიშლება შემდეგ პირობებად

$$\psi_3(T) = 0, \quad \psi_4(T) = 0, \quad \psi_5(T) = 0,$$

(12.107)

$$H(T) = \psi_1(T)\nu(T) \cos \gamma(T) + \psi_2(T)\nu(T) \sin \gamma(T) = 1$$

და (12.91), (12.97) განტოლებები უნდა ამოვხსნათ (12.94), (12.95), (12.107) პირობების გათვალისწინებით.

დ) აფრენა მრავალი კრიტერიუმის გათვალისწინებით

ვიხილავთ იგივე ამოცანას, როდესაც ფუნქციონალები

$$\begin{aligned} I_1(\beta, \varepsilon) &= -m(T), \\ I_2(\beta, \varepsilon) &= -v(T), \\ I_3(\beta, \varepsilon) &= \int_0^T dt = T \end{aligned} \quad (12.108)$$

ლებულობენ მინიმალურ მნიშვნელობებს ერთდროულად. რა თქმა უნდა, ასეთ ამოხსნის ძებნა შეუძლებელია, ჩვენ უნდა ვეძებოთ კომპრომისული ამონახსნი.

დაუშვათ პირველ ეტაპზე ჩვენ ამოვხსენით სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანები შესაბამისად  $I_1, I_2$  და  $I_3$  ფუნქციონალის შემთხვევაში და ვიპოვეთ:

$\beta_1^0(t)$  და  $\varepsilon_1^0(t)$  ოპტიმალური კანონი  $I_1$  ფუნქციონალის მინიმიზაციისას;

$\beta_2^0(t)$  და  $\varepsilon_2^0(t)$  ოპტიმალური კანონი  $I_2$  ფუნქციონალის მინიმიზაციისას;

$\beta_3^0(t)$  და  $\varepsilon_3^0(t)$  ოპტიმალური კანონი  $I_3$  ფუნქციონალის მინიმიზაციისას.

შემდეგ განვსაზღვრეთ ამ ფუნქციონალთა მინიმალური მნიშვნელობები:

$$I_1(\beta_1^0, \varepsilon_1^0) = I_1^0, I_2(\beta_2^0, \varepsilon_2^0) = I_2^0, I_3(\beta_3^0, \varepsilon_3^0) = I_3^0. \quad (12.109)$$

$I_1, I_2, I_3$  კოორდინატთა სივრცეში (12.109)

მნიშვნელობები განსაზღვრავენ იდეალურ (უტოპიურ) წერტილს. კომპრომისის მიზანია, ვიპოვოთ ისეთი მართვის

პროგრამა  $\beta^*(t), \varepsilon^*(t)$ , რომელიც განახორციელებს ფრენას, რომლის დროსაც (12.108) ფუნქციონალების მნიშვნელობები

$I_1(\beta^*, \varepsilon^*), I_2(\beta^*, \varepsilon^*), I_3(\beta^*, \varepsilon^*)$  საუკეთესო მიახლოებაში იქნებიან ამ ფუნქციონალების (12.109) მნიშვნელობებთან. სხვა

სიტყვებით,  $(I_1, I_2, I_3)$  სივრცეში წერტილი კოორდინატებით

$I_1(\beta^*, \varepsilon^*)$   $I_2(\beta^*, \varepsilon^*)$ ,  $I_3(\beta^*, \varepsilon^*)$  უახლოესი იქნება იდეალურ წერტილთან.

როგორც ზევით აღვნიშნეთ, კომპრომისის ერთერთი მისაღები სახეა

$$R(\beta, \varepsilon) = \left( \frac{I_1(\beta, \varepsilon) - I_1^0}{I_1^0} \right)^2 + \left( \frac{I_2(\beta, \varepsilon) - I_2^0}{I_2^0} \right)^2 + \left( \frac{I_3(\beta, \varepsilon) - I_3^0}{I_3^0} \right)^2 \quad (12.109)$$

ფუნქციონალის მინიმიზაცია. რა თქმა უნდა, ასეთ დროს თითოეული ფუნქციონალის მნიშვნელობა უარესდება მის მინიმალურ მნიშვნელობასთან შედარებით, მაგრამ ასეთი გაუარესება საერთო ჯამში მინიმალურია.

ვიხილავთ იგივე ამოცანას, რაც ამ პარაგრაფის დასაწყისში ჩამოყალიბებული, მხოლოდ ფუნქციონალს ექნება (12.109) სახე. მაიერის ამოცანისათვის ეს ფუნქციონალი ჩაიწერება, როგორც

$$\Delta G = \left[ \left( \frac{m(t) - I_1^0}{I_1^0} \right)^2 + \left( \frac{v(t) - I_2^0}{I_2^0} \right)^2 + \left( \frac{y(t) - I_3^0}{I_3^0} \right)^2 \right]_0^T, \quad (12.110)$$

სადაც

$$y(t) = \int_0^t dt.$$

ეს უკანასკელი გამოსახულება გვაძლევს გნტოლებას

$$\dot{y}(t) = 1, \quad (12.111)$$

საწყისი პირობით

$$y(t_0) = 0. \quad (12.112)$$

ამგერად მაიერის ამოცანა შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება:  $\beta(t), \varepsilon(t)$ , დასაშვებ მართვებს შორის ვიპოვოთ ისეთი ფუნქციები  $\beta^*(t), \varepsilon^*(t)$ , რომლის დროსაც (12.91), (12.111) სისტემის ტრაექტორია (12.94) საწყისი მდგომარეობიდან ისე

გადავა (12.95) საბოლოო მდგომარეობაში, რომ ფუნქციონალი (12.110) მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

ცხადია, რომ  $H$  ფუნქციას ექნება სახე

$$H = \psi_1 v \cos \gamma + \psi_2 v \sin \gamma + \psi_3 \left( -g \sin \gamma + \frac{v_E \beta}{m} \cos \varepsilon - \frac{D}{m} \right) + \psi_4 \left( -\frac{g}{v} \cos \gamma + \frac{v_E \beta}{mv} \sin \varepsilon + \frac{L}{mv} \right) - \psi_5 \beta + \psi_6 \quad (12.113)$$

და  $\psi_1, \dots, \psi_6$  ფუნქციების განსაზღვრისათვის (12.97) განტოლებებს უნდა დავმატოს კიდევ ერთი განტოლება

$$\dot{\psi}_6 = 0 \quad (12.114)$$

ამჭერადაც მართვის ფუნქციები (12.98) და (12.101) გამოსახულებებით აღიწერება, ხოლო  $\psi_1, \dots, \psi_6$  ფუნქციების განსაზღვრისათვის კი უნდა ამოიხსნას 12 განტოლებისაგან შემდგარი სისტემა (12.91), (12.97), (12.111), (12.114). მათ ამოსახსნელად გვაქვს (12.94), (12.95), (12.112) სასაზღვრო პირობები და შემდეგი პირობები, რომელსაც გვაძლევს ტრანსვერსალობის პირობა:

$$2 \left( \frac{m(T) - I_1^0}{I_1^0} \right) + \psi_5(T) = 0,$$

$$2 \left( \frac{v(T) - I_2^0}{I_2^0} \right) + \psi_3(T) = 0,$$

$$2 \left( \frac{y(T) - I_3^0}{I_3^0} \right) + \psi_6(T) = 0,$$

$$H(T) = \psi_1(T) v(T) \cos \gamma(T) + \psi_2(T) v(T) \sin \gamma(T) + \psi_3(T) \left( -g \sin \gamma(T) + \frac{v_E \beta(T)}{m(T)} \cos \varepsilon(T) - \frac{D(T)}{m(T)} \right) - \psi_5(T) \beta(T) + \psi_6(T) = 0,$$

$$\psi_4(T) = 0.$$

§ 12.7. რაკეტის ვერტიკალური აფრენა უძაერო სივრცეში

განვიხილოთ წინა პარაგრაფის ამოცანა კონკრეტული პირობებით, როდესაც  $\gamma(T) = \text{const} = 90^\circ$ . ასეთ დროს გვაქვს  $x(t) = \text{const} = x_0$ ,  $\varepsilon(t) = \text{const} = 0$ . უძაერო სივრცეში ფრენის დროს  $D = 0$ . განვიხილოთ ასევე კონკრეტული რაკეტა წვის ეფექტური სიჩქარით  $v_E = 10^4 \frac{\text{მ}}{\text{წმ}}$  და საწვავის მაქსიმალური ხარჯვით

$$\bar{\beta} = 200 \frac{\text{კგ}}{\text{წმ}}.$$

ასეთი რაკეტის ვერტიკალური აფრენა უძაერო სივრცეში აღიწერება დიფერენციალური განტოლებებით

$$\dot{h} = v,$$

$$\dot{v} = 10^4 \frac{\beta}{m} - 10, \quad (12.115)$$

$$\dot{m} = -\beta,$$

სადაც

$$0 \leq \beta \leq 200. \quad (12.116)$$

აქ დაშვებულია, რომ თავისუფალი ვარდნის აჩქარება  $g = 10 \frac{\text{მ}}{\text{წმ}^2}$ .

დავუშვათ რაკეტა იმყოფება საწყის მდგომარეობაში

$$t_0 = 0: h(0) = h_0 = 0, v(0) = v_0 = 0, m(0) = m_0 = 10^5 \text{კგ} \quad (12.117)$$

და სასურველია მისი აფრენა სიმაღლეზე

$$t = T: h(T) = h_T = 10^5 \text{მ}. \quad (12.118)$$

რა თქმა უნდა, ფრენის დრო  $T$  ფიქსირებული არ არის და ექვემდებარება განსაზღვრას.

განვიხილოთ ოპტიმალური მართვის ამოცანა, როდესაც მინიმიზაციის ფუნქციონალია (12.92), ანუ

$$\Delta G = m_0 - m_T. \quad (12.119)$$

$H$  ფუნქციას ექნება სახე

$$H = \psi_1 v + \psi_2 \left( 10^4 \frac{\beta}{m} - 10 \right) - \psi_3 \beta, \quad (12.120)$$

რომლის მაქსიმუმიც  $\beta$  პარამეტრის მიხედვით განსაზღვრავს მართვის ოპტიმალურ კანონს

$$\beta^0 = \begin{cases} 200, & \text{როდესაც } k_p \geq 0 \\ 0, & \text{როდესაც } k_p \leq 0, \end{cases} \quad (12.121)$$

სადაც  $k_p$  აღნიშნავს  $k_p = 10^4 \frac{\psi_2}{m} - \psi_3$ .

$\psi_1, \psi_2, \psi_3$  დამხმარე ფუნქციებისათვის გვექნება განტოლებები

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1, \end{aligned} \quad (12.122)$$

$$\dot{\psi}_3 = 10^4 \frac{\beta}{m^2} \psi_2.$$

არ არის ძნელი დასადგენი, რომ  $k_p$  ფუნქციას შეუძლია მხოლოდ ერთხელ შეიცვალოს ნიშანი, ან საერთოდ არ შეიცვალოს იგი. მართლაც  $k_p$  ფუნქციის დროის წარმოებულ არის

$$\dot{k}_p = -10^4 \frac{\psi_1}{m} = \frac{A}{m(t)},$$

სადაც  $A = \text{const} = -10^4 \psi_1$ , ( $\psi_1 = \text{const} \neq 0$ ).

აქედან ჩანს, რომ  $k_p$  ფუნქცია მონოტონური ფუნქციაა დროში. ამით მტკიცდება, რომ მართვის ოპტიმალური კანონი შემდეგი სახისაა

$$\beta = \begin{cases} 200, & \text{როდესაც } 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \text{როდესაც } \tau \leq t \leq T. \end{cases} \quad (12.123)$$

აქ  $\tau$  განსაზღვრავს დროს იმ მომენტს, როდესაც სამართი ზემოქმედება  $\beta = 200 \frac{\text{კბ}}{\text{წე}}$  მნიშვნელობიდან უნდა გადაერთოს  $\beta = 0$  მნიშვნელობაზე, ანუ გამოირთოს ძრავი. ტრანსვერსალობის პირობა ასეთია:

$$[-\delta m - H\delta t + \psi_1 \delta h + \psi_2 \delta U + \psi_3 \delta m]_0^T = 0.$$

იგი სიწყისი და საბოლოო (12.117), (12.118) პირობების გათვალისწინებით იშლება შემდეგ გამოსახულებებად:

$$\begin{aligned} \psi_2(T) = 0, \quad \psi_3(T) = 1, \\ H(T) = \psi_1(T)v(T) - \beta(T) = 0. \end{aligned} \quad (12.124)$$

ახლა უნდა ამოვხსნათ (12.115), (12.122) განტოლებათა ერთობლივი სისტემა (12.117), (12.118), (12.124) პირობების გათვალისწინებით. რადგანაც ოპტიმალურ მართვას შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ ერთი გადართვა, საკმარისია გამოვთვალოთ  $\tau$  და  $T$  სიდიდეების მნიშვნელობები და ოპტიმალური მართვის კანონი (12.123) განსაზღვრული იქნება.

რა თქმა უნდა, პირველ ეტაპზე, დროის  $[0, \tau]$  მონაკვეთში  $\beta = 200$ , მოძრაობის (12.115) განტოლებების ამონახსნი იქნება

$$\begin{aligned} m(t) &= 10^5 - 200t, \\ v(t) &= -10t - 10^4 \ln(1 - 0,002t), \\ h(t) &= -5t^2 + 10^4 t + 5 \cdot 10^6 (1 - 0,002t) \ln(1 - 0,002t). \end{aligned} \quad (12.125)$$

საკმარისი სიზუსტის დაცვით, ლოგარითმის მწკრივად გაშლის შემდეგ ეს გამოსახულებები მიახლოებით შეიძლება გადავწეროთ, როგორც

$$\begin{aligned} m(t) &= 10^5 - 200t, \\ v(t) &= -10t + 0,02t^2, \\ h(t) &= -5t^2 + \frac{2}{3} 20^{-2} t^3, \end{aligned} \quad (12.126)$$

რა თქმა უნდა, სიზუსტის გაზრდა შეიძლება მწკრივის შემდგომი წევრების გათვალისწინების ხარჯზე.

$\tau$  მომენტში (12.126) ცვლადების მნიშვნელობები იქნებიან

$$m(\tau) = 10^5 - 200\tau ,$$

$$v(\tau) = 10\tau + 0,02\tau^2 ,$$

$$h(\tau) = -5\tau^2 + \frac{2}{3}20^{-2}\tau^3 ,$$

რომლებიც წარმოადგენენ საწყის მნიშვნელობებს (12.115) განტოლებების ამოსახსნელად მეორე  $[\tau, T]$  ეტაპზე, ანუ როდესაც  $\beta = 0$ .

ყოველივეს გათვალისწინებით, მეორე ეტაპზე მოძრაობის ტრაექტორიას ექნება სახე

$$m(t) = const = m(\tau) ,$$

$$v(t) = 20\tau + 0,02\tau^2 - 10t, \quad (12.127)$$

$$h(t) = -10\tau^2 - \frac{4}{3}10^{-2}\tau^3 + (20\tau - 0,02\tau^2)t - 5t^2 .$$

(12.124) ფორმულიდან ცხადად ჩანს, რომ

$$v(T) = 0, \quad (12.128)$$

რადგანაც  $t = T$  მომენტში  $\beta(T) = 0$ , ხოლო

$$\psi_1(t) = const \neq 0 .$$

(12.127) გამოსახულებების უკანასკნელი ორი გამოსახულება და (12.118), (12.128) პირობები გვაძლევენ ორ ალგებრულ განტოლებას უცნობი  $\tau$  და  $T$  მნიშვნელობების გამოსათვლელად. მართლაც

$$20\tau + 0,02\tau^2 - 10T = 0 ,$$

$$-10\tau^2 - \frac{4}{3}10^{-2}\tau^3 + (20\tau - 0,02\tau^2)T - 5T^2 = 10^5 . \quad (12.129)$$

ამ განტოლებების დადებითი ამონახსნია (გარაკვეული მიახლოებით)

$$\tau = 89,3 \text{ წმ}, \quad T = T_1 = 194,55 \text{ წმ}. \quad (12.130)$$

ამრიგად, ზემოთ აღწერილი რაკეტის ოპტიმალური ვერტიკალური აფრენა (საწვავის ხარჯის მინიმუმაციის აზრით) 100 კმ სიმაღლეზე ორი რეჟიმისაგან შედგება: საწყის ეტაპზე ძრავის მაქსიმალური სიმძლავრით მუშაობა 89,3 წამის



განმავლობაში, ხოლო შემდეგ გამორთული ძრავით მოძრაობა. ასეთი რეჟიმით ფრენისას მიიღწევა სასურველი სიმაღლე  $h = 100$  კმ ნულოვანი საბოლოო სიჩქარით და დაიხარჯება მინიმალური რაოდენობის საწვავი, კერძოდ,

$$I_1^0(\beta) = m_0 - m_T = 17860 \text{ კგ.} \quad (12.131)$$

ახლა შევცვალოთ ოპტიმიზაციის აზრი და განვიხილოთ რაკეტის ისეთი ფრენა, რომ იგი სასურველ წერტილში მოხვდეს მაქსიმალური სიჩქარით, ანუ ოპტიმიზაციის ფუნქციონალი გამოხატავდეს რაკეტის მაქსიმალურ ენერგიას საბოლოო წერტილში. ეს იგივეა, რაც (12.105).

ცხადია, ასეთი მიზნის მისაღწევად ძრავი არ უნდა გამოირთოს და მან უნდა იმუშაოს მაქსიმალური სიმძლავრით მთელი დროის  $[0, T]$  შუალედში. ოპტიმალური მართვის კანონი ჩაიწერება როგორც

$$\beta(t) = \text{const} = 200 \frac{\text{პ/წუ.}}{\text{წუ.}}, \quad t \in [0, T]. \quad (12.131)$$

მათემატიკური გამოთვლები ამ ფორმულის მისაღებად მიღწენად ცხადია, რომ მათზე არ შეეჩერდებით.

(12.125) განტოლებების ინტეგრირების შედეგად (რა თქმა უნდა (12.131) გამოსახულების გათვალისწინებით) ვღებულობთ, რომ რაკეტა  $h = 100$  კმ სიმაღლეს აღწევს  $T_2 = 130,52$  წმ-ში მაქსიმალური სიჩქარით

$$I_2^0(\beta) = v(T) = 1645,9 \frac{\text{მ/წუ.}}{\text{წუ.}}. \quad (12.132)$$

ასეთი რეჟიმის მოძრაობისას საწვავის ხარჯი, რა თქმა უნდა, იზრდება და აღწევს 26104 კგ-ს.

შევნიშნავთ, რომ ოპტიმალური აფრენა დროის მინიმიზაციის თვალსაზრისით, ასევე, (12.131) ოპტიმალური კანონით ხორციელდება.

ესლა განვიხილოთ ფრენა (12.119) და (12.105) ფუნქციონალების ერთდროული მინიმიზაციის აზრით, ვიპოვოთ კომპრომისული ამონახსნი.

როგორც წინა პარაგრაფში იყო აღნიშნული, ანალოგიურად, ასეთი ამოცანა დაიყვანება

$$R(\beta) = \left( \frac{v(t) - 1645,9}{1645,9} \right)^2 + \left( \frac{m_0 - m_T - 17860}{17860} \right)^2 \quad (12.133)$$

ფუნქციონალის მინიმიზაციის ამოცანაზე.

ამ შემთხვევისათვის  $H$  ფუნქციისა და  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  ფუნქციებისათვის გვექნება ისეთივე გამოსახულებები, როგორებიცაა (12.120) და (12.122), შესაბამისად.

ოპტიმალური მართვის კანონი თავისი ფორმით ასევე თანხედება (12.123) კანონს, ოღონდ განსხვავებული იქნება  $\tau$  და  $T$  სიდიდეების მნიშვნელობები. კერძოდ, გვექნება

$$\beta^* = \begin{cases} 200, & \text{როდესაც } 0 \leq t \leq \tau^*, \\ 0, & \text{როდესაც } \tau^* \leq t \leq T^* \end{cases} \quad (12.134)$$

ამ შემთხვევაში (12.115) და (12.122) უნდა ამოიხსნას (12.117), (12.118) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით და მხედველობაში უნდა იქნეს მიღებული ტრანსვერსალობის პირობა, რომელსაც ასეთი სახე აქვს:

$$\left[ 2 \left( \frac{v(t) - 1645,9}{1645,9^2} \right) \delta v + 2 \left( \frac{m_0 - m(t) - 17860}{17860^2} \right) \delta m - H \delta t + \psi_1 \delta h + \psi_2 \delta v + \psi_3 \delta m \right]_0^T = 0.$$

ეს პირობა სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით იშლება შემდეგ ტოლობებად:

$$2 \frac{v_T - 1645,9}{1645,9^2} + \psi_2(T) = 0,$$

$$2 \frac{m_0 - m(T) - 17860}{17860^2} + \psi_3(T) = 0, \quad (12.135)$$

$$H(T) = \psi_1(T)v_T - 10\psi_2(T) = 0.$$

(12.115) განტოლებათა სისტემის ინტეგრირების შედეგად, როდესაც მართვის ფუნქცია განისაზღვრება (12.134) გამოსახულებით, შეგვიძლია ჩავეწეროთ

$$m(T^{\circ}) = m(\tau^{\circ}) = 10^5 - 200\tau^{\circ}, \quad (12.136)$$

$$v(T^{\circ}) = 20\tau^{\circ} + 0,02\tau^{\circ 2} - 10T^{\circ}, \quad (12.137)$$

$$h(T^{\circ}) = -10\tau^{\circ 2} - \frac{4}{3}10^{-2}\tau^{\circ 3} + (20\tau^{\circ} - 0,02\tau^{\circ 2})T^{\circ} - 5T^{\circ 2} = 10^5. \quad (12.138)$$

უკანასკნელი ტოლობა აკავშირებს ორ უცნობ  $\tau^{\circ}$  და  $T^{\circ}$  სიდიდეს. ეს ტოლობა შეიძლება ჩაეწეროს განტოლების სახით

$$T^{\circ 2} - (4\tau^{\circ} + 0,004\tau^{\circ 2})T^{\circ} + \left(2\tau^{\circ 2} + \frac{8}{3}10^{-3}\tau^{\circ 3} + 2 \cdot 10^4\right) = 0, \quad (12.139)$$

რომლის ამოხსნაც ანალიტიკურად აკავშირებს  $\tau^{\circ}$  და  $T^{\circ}$  სიდიდეებს შემდეგი სახით

$$T^{\circ} = 2\tau^{\circ} + 0,002\tau^{\circ 2} - \sqrt{\left(2\tau^{\circ} + 0,002\tau^{\circ 2}\right)^2 - \left(2\tau^{\circ 2} + \frac{8}{3}10^{-3}\tau^{\circ 3} + 2 \cdot 10^4\right)}. \quad (12.140)$$

იოლი შესამოწმებელია, რომ  $\tau^{\circ}$  მნიშვნელობისათვის ინტერვალიდან  $\tau = \tau^{\circ} \leq T_2 = 130,52$ , განტოლებას (12.137) აქვს ნამდვილი ფესვები და მეორე ამონახსნს ფიზიკური აზრი არ გააჩნია.

ჩავსვათ (12.136), (12.137), (12.140) მნიშვნელობები (12.133) გამოსახულებაში და ვიპოვოთ მიღებული  $R(\beta)$  ფუნქციის მინიმუმი  $\tau^{\circ}$  პარამეტრით. ეს გაცილებით იოლი გზაა, ვიდრე ამოვხსნათ (12.122) განტოლებები (12.135) პირობების გათვალისწინებით.

მართლაც, (12.133), (12.136), (12.137), (12.140) გამოსახულებები ერთად განსაზღვრავენ შემდეგ ფუნქციას:

$$R(\tau^{\circ}) = \left( \frac{10 \sqrt{(2\tau^{\circ} + 0,002\tau^{\circ 2})^2 - 2\tau^{\circ 2} - \frac{8}{3} 10^{-3} \tau^{\circ 3} - 2 \cdot 10^4}}{1645,9} - 1 \right)^2 + \left( \frac{200\tau^{\circ} - 17860}{17860} \right)^2 \quad (12.141)$$

ამ ფუნქციის მინიმუმი  $\tau^{\circ}$  ცვლადის მიხედვით ინტერვალში  $89,3 \text{ წმ} = \tau \leq \tau^{\circ} \leq T_2 = 130,52 \text{ წმ}$  მიიღება, როდესაც

$$\tau^{\circ} = 117 \text{ წმ}. \quad (12.142)$$

$T^{\circ}$  მნიშვნელობა განისაზღვრება (12.140) გამოსახულებით და ტოლია

$$T^{\circ} = 132,27 \text{ წმ}. \quad (12.143)$$

რაკეტის საბოლოო სიჩქარე  $h = 10^5 \text{ მ}$  სიმაღლეზე გამოითვლება (12.137) ფორმულით და ტოლი იქნება

$$v(T^{\circ}) = 1291,1 \text{ მ/წმ}.$$

ასეთი ფრენის დროს, როდესაც მართვის კანონი განსაზღვრულია (12.134), (12.142), (12.143) ფორმულებით, დაიხარჯება 23,4 ტონა საწვავი, ანუ გვექნება

$$I_1(\beta^{\circ}) = m_0 - m_T = 23400 \text{ კგ}.$$

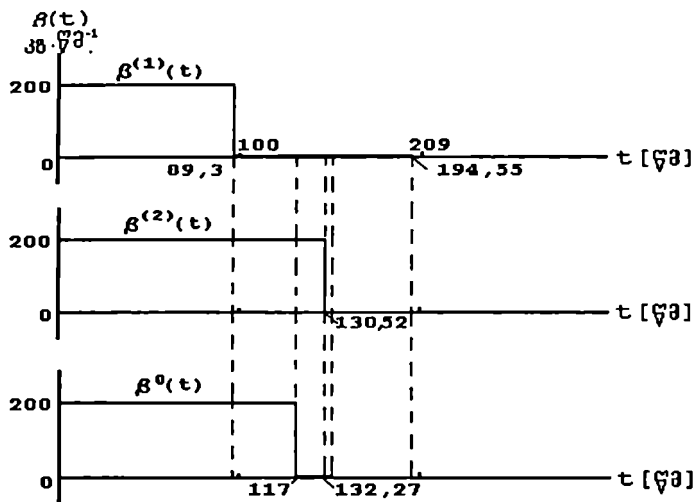
თვალსაჩინოებისათვის მიღებული რეზულტატები თავმოყრილია 12.2 ცხრილში. მართვის კანონის გრაფიკული გამოსახულებები მოცემულია (ნახ.12.4).

ამრიგად, ფრენის განხორციელებისას (12.134), (12.142), (12.143) კანონით, ადგილი აქვს შემდეგ კომპრომისს: ერთის მხრივ, საწვავის ხარჯის 5540 კგ-ით გაზრდით მიიღწევა რაკეტის საბოლოო ნულოვანი სიჩქარის გაზრდა 1291,1მ/წმ-დე; მეორეს მხრივ, რაკეტის მაქსიმალური სიჩქარის შემცირება 354,8 მ/წმ-ით იწვევს 2704 კგ საწვავის ეკონომიას.

ობიექტის განტოლება და სასაზღვრო პირობები	ფუნქციონალის სახე	მართვის კანონის სახე	$m_0 - m$ [კგ]	$v_r$ [მ/წმ]	$T$ [წმ]
$h = v$ $\dot{v} = 10^4 \frac{\beta}{m} - 10$	$I_1(\beta) = m_0 - m_r$	$\beta^{(0)} =$ $= \begin{cases} 200, & 0 \leq t \leq 89,3 \\ 0, & 89,3 \leq t \leq 194,55 \end{cases}$	17860	0	194,55
$\dot{m} = -\beta$ $0 \leq \beta \leq 200$ კგ/წმ	$I_2(\beta) = -v_r$	$\beta^{(1)} = 200,$ $0 \leq t \leq 130,52$	26104	1645,9	130,52
$h(0) = h_0 = 0$ $v(0) = v_0 = 0$ $m(0) = m_0 = 10^5$ კგ $h(T) = h_r = 10^5$ მ	$R(\beta) =$ $= \left( \frac{v_r}{1645,9} - 1 \right)^2 +$ $+ \left( \frac{m_0 - m_r}{17860} - 1 \right)$	$\beta^0 = \begin{cases} 200, & 0 \leq t \leq 117 \\ 0, & 117 \leq t \leq 132,27 \end{cases}$	23400	1291,1	132,27

ანალოგიურადაა შესაძლებელი ოპტიმალური რეგულიატორების ანალიზური კონსტრუირების ამოცანის ამოხსნა ექვტორული ფუნქციონალის შემთხვევაში. აქაც ამოხსნა ხორციელდება კომპრომისის საფუძველზე. დაინტერესებულ მკითხველს მივუთითებთ ლიტერატურას [76].

ეხლა განვიხილოთ წრფივი პროგრამირების ამოცანა.



ნახ.12.4

### § 12.8. წრფივი პროგრამირების ამოცანა ვექტორული მიზნის ფუნქციით

როგორც უკვე აღნიშნეთ, წრფივი პროგრამირების მეთოდები ეფექტურად გამოიყენება სახალხო მეურნეობის მთელი რიგი პრობლემების გადასაწყვეტად, საწარმოო პროცესების ავტომატიზაციის საქმეში, დაგეგმარებაში, ეკონომიკაში და სხვა. წრფივი პროგრამირების მეთოდებმა დღეისათვის მეტად ეფექტური განვითარება ჰპოვეს, ამ დარგის პიონერად აკადემიკოსი ლ. კანტაროვიჩი ითვლება. დღევანდელ დღეს ეს მეთოდები საკმაოდ კარგადაა დამუშავებული და მეტად ეფექტურად გამოიყენებიან როგორც სკალარული, ასევე ვექტორული მიზნის ფუნქციის ოპტიმიზაციისას.

უკვე იყო აღნიშნული, რომ წრფივი პროგრამირების ზოგადი ამოცანა მათემატიკურად ასე ყალიბდება:

მოცემული გვაქვს  $n$  ცვლადის  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  წრფივი ფუნქცია

$$L(X) = c_1x + c_2x + \dots + c_nx \quad (12.144)$$

და ასევე წრფივი სახის შეზღუდვები ამ ცვლადებზე

$$a_{\alpha 1}x_1 + a_{\alpha 2}x_2 + \dots + a_{\alpha n}x_n = b_{\alpha}, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (12.145)$$

$$a_{r+\beta, 1}x_1 + a_{r+\beta, 2}x_2 + \dots + a_{r+\beta, n}x_n \leq b_{r+\beta}, \quad (\beta = 1, \dots, m-r), \quad (12.146)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_s \geq 0 \quad (s \leq n). \quad (12.147)$$

(12.145)-(12.147) სისტემის ამონახსნთა შორის, რომლებიც

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  სივრცეში ქმნიან ამოზნექილ  $\Omega$  მრავალწახნაგას, ვიპოვოთ ისეთი, რომლის დროსაც წრფივი ფორმა (12.144) ღებულობს მინიმალურ (ან მაქსიმალურ, ამოცანის შინაარსის მიხედვით) მნიშვნელობას. ამ ამონახსნს, როგორც უკვე იყო აღნიშნული, ოპტიმალური გვგმა ეწოდება.

ეს არის ამოცანა სკალარული მიზნის ფუნქციით. ასეთი მიდგომა პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად საკმარისი არ არის, ვინაიდან თითქმის ყოველთვის სისტემისაგან მოითხოვება იყოს საუკეთესო ხარისხის რამდენიმე მაჩვენებლის მიხედვით. ასეთ მოთხოვნას მივყევართ წრფივი პროგრამირების ამოცანასთან ვექტორული მიზნის ფუნქციით. მაგალითისათვის მივმართოთ ტრანსპორტის ამოცანას. აქ სულ მცირე, ხარისხის ორი მაჩვენებელი მაინცაა გასათვალისწინებელი გადაზიდვათა საერთო ღირებულება და დრო, რომელიც ამ გადაზიდვებს დასჭირდება. თუ პირველ შემთხვევაში ყურადღება ექცევა მხოლოდ ხარჯების მაქსიმალურ შემცირებას, მეორე შემთხვევაში მხოლოდ გადაზიდვების პროცესის ხანგრძლივობის მაქსიმალური შემცირებაა სასურველი. ორივე პროცესს თავისი ხარჯები აქვს, სასურველია ორივე მოთხოვნის გათვალისწინება. ეს მოთხოვნები ურთიერთსაწინააღმდეგო შინაარსის მოთხოვნებია და საჭიროა კომპრომისის ძიება, კომპრომისული ამონახსნის პოვნა: გადაზიდვები ვაწარმოოთ მისაღებ დროში და საკმარისად მცირე დანახარჯებით.

ასეთი ამოცანის მათემატიკური დასმა განსხვავდება (12.144)-(12.147) ამოცანის დასმისაგან. (12.144) წრფივი ე.წ. მიზნის ფუნქციის ნაცვლად გვექნება ასეთი რამდენიმე წრფივი ფორმა

$$L_i(x) = \sum_{j=1}^i c_{ij} x_j, \quad (i = 1, \dots, k), \quad (12.148)$$

რომლებიც ერთდროულად ექვემდებარებიან მინიმიზაციას.

ამრიგად, წრფივი პროგრამირების ამოცანა ვექტორული მიზნის ფუნქციით მათემატიკურად ასე ჩამოყალიბდება: (12.145)-(12.147) სისტემის ამონახსნთა შორის ვიპოვოთ ისეთი

$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \Omega$  ამონახსნი, რომლის დროსაც წრფივი ფორმები (12.148) ერთდროულად ღებულობენ მინიმალურ მნიშვნელობებს.

რა თქმა უნდა ასეთი ამონახსნი იშვიათად თუ არსებობს და ჩვენ უნდა ვეძიოთ ამოცანის კომპრომისული ამოხსნის გზები.

შენიშნავთ, რომ (12.148) წრფივ ფორმებს შეიძლება სხვადასხვა განზომილებანიც ჰქონდეთ.

ამ შემთხვევაშიც, კომპრომისული ამონახსნი შეიძლება ვეძებოთ ზოგადად ისე, როგორც ამ თავის მე-3 პარაგრაფშია მოცემული.

განვიხილოთ (12.148) წრფივი ფორმებიდან ყოველი კონკრეტული წრფივი ფორმა ცალ-ცალკე და ამოვხსნათ  $k$  რაოდენობის წრფივი პროგრამირების სტანდარტული ამოცანა შესაბამისი მიზნის ფუნქციით. დავუშვათ ასეთი ამოცანების ამოხსნათა შედეგად მივიღეთ შესაბამისი ოპტიმალური გეგმები

$$X_i^0 = (x_{i1}^0, x_{i2}^0, \dots, x_{in}^0), \quad i = 1, \dots, k. \quad (12.149)$$

$X_1^0 = (x_{11}^0, x_{12}^0, \dots, x_{1n}^0)$  არის ოპტიმალური გეგმა, რომელიც მინიმუმს ანიჭებს  $L_1(X)$  წრფივ ფორმას,

$X_2^0 = (x_{21}^0, x_{22}^0, \dots, x_{2n}^0) - L_2(X)$  წრფივ ფორმას და ა.შ.

ამ ოპტიმალურ გეგმებზე გამოვთვალოთ შესაბამისი წრფივი ფორმების მნიშვნელობები:

$$L_1^0 = L_1(X_1^0), \quad L_2^0 = L_2(X_2^0), \dots, \quad L_k^0 = L_k(X_k^0). \quad (12.150)$$

ამრიგად, ვექტორი  $X_a^0 = (x_{a1}^0, x_{a2}^0, \dots, x_{an}^0)$  არის  $L_a(X)$  წრფივი ფორმის (წრფივი ფორმების (12.148) ოჯახიდან) მინიმიზაციის ამოცანის ამონახსნი (12.145)-(12.147) შეზ-



ლუდვების დროს და ეს ამონახსნი ამ წრფივ ფორმას ანიჭებს  $L_a^0 = L_a(X_a^0)$  რიცხობრივ მნიშვნელობას.

ბუნებრივია, რომ (12.149) ვექტორები  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$  ცვლადების სივრცეში განსაზღვრავენ სხვადასხვა წერტილებს, შესაძლებელია, ზოგიერთი მათგანის ურთიერთდამთხვევატ.

განვიხილოთ  $L(X)$  ვექტორი უგანზომილებო კომპონენტებით  $\frac{L_1(X)}{L_1^0}, \frac{L_2(X)}{L_2^0}, \dots, \frac{L_k(X)}{L_k^0}$  და ამ კომპონენტების

სივრცეში  $L(X) - L^0$  მანძილის კვადრატის ფორმულა ჩაეწეროს შემდეგი სახით:

$$R(X) = \|L(X) - L_0\|^2 = \sum_{i=1}^k \left[ \sum_{j=1}^n \frac{c_{ij}}{L_i^0} x_j - 1 \right]^2 \quad (12.151)$$

რა თქმა უნდა,  $L^0$  ვექტორი ამ სივრცეში წარმოადგენს ერთეულოვან ვექტორს. მას შეიძლება ეწოდოს  $L(X)$  ვექტორის იდეალური (უტოპიური) მნიშვნელობა.

განკასტროთ კომპრომისული ამონახსნი გვება  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  ოპტიმალურია (12.148) მიზნის ფუნქციების თვალსაზრისით, თუ სრულდება უტოლობა

$$R(X^*) \leq R(X) \quad (12.152)$$

ნებისმიერი  $X \in \Omega$  დროს.

ასეთ გეგმას წრფივი პროგრამირების ამოცანის ვექტორულად ოპტიმალური გეგმა ეწოდება.

ამრიგად, კომპრომისული ამოცანა შემდეგნაირად: მოცემული გვაქვს წრფივი ფორმები (12.148) და შეზღუდვის პირობები (12.145)-(12.147). უნდა ვიპოვოთ  $X^* \in \Omega$  წერტილი, რომლის დროსაც (12.151) ფუნქცია ლეზულობს მინიმალურ მნიშვნელობას.

ამოცანის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია მდგომარეობს იმაში, რომ  $L = \left( \frac{L_1}{L_1^0}, \frac{L_2}{L_2^0}, \dots, \frac{L_k}{L_k^0} \right)$  ვექტორის კომპონენტების

ეკლიდეს სივრცეში  $R(X)$  ფუნქცია წარმოადგენს მანძილის კვადრატს ნებისმიერი წერტილიდან, რომელიც რომელიღაც გეგმას შეესაბამება, უტოპიურ წერტილამდე კოორდინატებით  $(1,1,\dots,1)$  და ამოცანა კი ამ მანძილის მინიმიზაციაზეა დაყვანილი.

ამოცანის ფიზიკური ინტერპრეტაცია კი იმაში მდგომარეობს, რომ ვექტორულად ოპტიმალური გეგმა  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  უზრუნველყოფს  $L_1(X^*), L_2(X^*), \dots, L_k(X^*)$  მნიშვნელობების მაქსიმალურ სიახლოვეს  $L_1^0, L_2^0, \dots, L_k^0$  მნიშვნელობებთან, შესაბამისად. ამ დროს ყოველი წრფივი ფორმის მინიმალური მნიშვნელობა უარესდება, მაგრამ ასეთი გაუარესება ნაწილდება პროპორციულად და იგი მინიმალურია.

შევნიშნავთ, რომ თუ რომელიმე მნიშვნელობა (12.150) რიცხვებიდან ნულის ტოლი აღმოჩნდება, მაშინ უგანზომილებო სიდიდეებზე გადასვლა სხვა გზით უნდა განვახორციელოთ.

არაწრფივი პროგრამირების ამოცანების ამოხსნაც შეიძლება ვაწარმოოთ ანალოგიური კომპრომისის ხერხით.

როგორც დავინახეთ, წრფივი პროგრამირების ამოცანა ვექტორული მიზნის ფუნქციით ამოიხსნება კომპრომისის ხარჯზე და იგი დაიყვანება კვადრატული პროგრამირების ამოცანაზე (12.151) მიზნის ფუნქციითა და იგივე (12.145)-(12.147) შეზღუდვებით, ვინაიდან (12.151) ფუნქცია კვადრატულ ფუნქციას წარმოადგენს. კვადრატული პროგრამირების ამოცანაში ლოკალური მინიმუმი აბსოლუტურ მინიმუმს თანხვდება და ასეთი ამოცანის ამოსახსნელად გამოსადგვია ყველა მეთოდი, რომლითაც ლოკალური მინიმუმი იძებნება.

არაწრფივი პროგრამირების ამოცანა ვექტორული მიზნის ფუნქციით ასევე კომპრომისის ხარჯზე ამოიხსნება და დაიყვანება არაწრფივი პროგრამირების ამოცანაზე, რომლის ამოსახსნელად საჭიროა ცნობილი სპეციალური საძიებო მეთოდების გამოყენება.

ეხლა განვიხილოთ მარტივი რიცხვითი მაგალითი.

მოცემული გვაქვს მიზნის ფუნქციები წრფივი ფორმების სახით

$$L_1(X) = -3x_1 + 2x_2,$$

$$L_2(X) = 4x_1 + 3x_2, \quad (12.153)$$

$$L_3(X) = 2x_1 - 5x_2$$

და შეზღუდვები უტოლობების სახით

$$-2x_1 - 3x_2 + 18 \geq 0,$$

$$-2x_1 - x_2 + 10 \geq 0,$$

$$(12.154)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

რომლებიც განსაზღვრავენ  $\Omega$  ამოზნექილ მრავალწახნაგას  $x_1$  და  $x_2$  დასაშვები მნიშვნელობებისათვის.

ვიპოვოთ ისეთი ოპტიმალური გეგმა  $X^* = (x_1^*, x_2^*) \in \Omega$  რომელიც ერთდროულად ანიჭებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას (12.153) ფუნქციებს.

სიმპლექს მეთოდის გამოყენება გვაძლევს, რომ  $L_1(X)$  ფორმა თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას  $\Omega$  არეში ღებულობს წერტილში  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 6$  და უდრის  $L_1^0 = 12$ . ამ დროს  $L_2 = 18$ ,  $L_3 = -30$ ;  $L_2(X)$  ფორმა თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას  $\Omega$  არეში ღებულობს წერტილში  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 4$  და უდრის  $L_2^0 = 24$ . ამ დროს  $L_1 = -1$ ,  $L_3 = -14$ . ფორმა  $L_3(X)$  თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას  $\Omega$  არეში ღებულობს წერტილში  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 0$  და უდრის  $L_3^0 = 10$ . ამ დროს  $L_1 = -15$ ,  $L_2 = 20$ .

შევადგინოთ  $R(X)$  ფუნქცია:

$$R(x_1, x_2) = [12 - (-3x_1 + 2x_2)]^2 + [24 - (4x_1 + 3x_2)]^2 + [10 - (2x_1 - 5x_2)]^2,$$

რომელიც გამარტივების შემდეგ ჩაიწერება როგორც

$$R(x_1, x_2) = 29x_1^2 + 38x_2^2 - 8x_1x_2 - 160x_1 - 92x_2 + 820.$$

როგორც ვხედავთ, აქ არ დაგვჭირდა უგანზომილებო სიდიდეებზე გადასვლა.

ამ ფუნქციის მინიმუმი მიიღება წერტილში  $X^* = (x_1^*, x_2^*)$  კოორდინატებით

$$x_1^* = \frac{1612}{543} \approx 2,97; \quad x_2^* = \frac{827}{543} \approx 1,52, \quad (12.155)$$

რომელიც  $\Omega$  არეს მიეკუთვნება და წარმოადგენს ვექტორულად ოპტიმალურ გეგმას. ასეთი ამონახსნის დროს მიზნის ფუნქციები ღებულობენ მნიშვნელობებს:

$$L_1^* = -5,87; \quad L_2^* = 16,44; \quad L_3^* = -1,66.$$

შესადარებლად გამოვთვალოთ სხვა ოპტიმალური გეგმებიც:

ა) (12.153) ფუნქციების

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 3x_1$$

მაქსიმიზაციისას ოპტიმალური გეგმა იქნება  $x_1 = 5, x_2 = 0$ , რაც თანხვდება ოპტიმალურ გეგმას მხოლოდ  $L_3(X)$  ფუნქციის მაქსიმიზაციის დროს.

ბ) ჩებიშევის წერტილი წრფივ განტოლებათა სისტემისათვის

$$\eta_1(x_1, x_2) = -3x_1 + 2x_2 - 12 = 0,$$

$$\eta_2(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2 - 24 = 0,$$

$$\eta_3(x_1, x_2) = 2x_1 - 5x_2 - 10 = 0$$

(12.154) შეზღუდვების დროს გამოითვლება

$$V(x_1, x_2) = \max_{1 \leq i \leq 3} |\eta_i(x_1, x_2)|$$

ფუნქციის მინიმიზაციის შედეგად. იგი ტოლია

$$x_1 = \frac{82}{54} \approx 1,52; \quad x_2 = \frac{518}{378} \approx 1,37,$$

რაც გვაძლევს

$$L_1 = -1,82; \quad L_2 = 10,19; \quad L_3 = -3,81.$$

გ) (12.156) წრფივი ფუნქციების მონუმენტების ჯამის

$$U(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^3 |\eta_i(x_1, x_2)|$$

მინიმიზაციისას ვღებულობთ

$$x_1 = \frac{2550}{442} \approx 5,77; \quad x_2 = \frac{136}{442} \approx 0,31.$$

ეს წერტილი მდებარეობს  $L_1(X) = 24$  და  $L_2(X) = 10$  წრფეების გადაკვეთაზე და არ აკმაყოფილებს (12.154) უტოლობებს. ამ შეზღუდვების გათვალისწინებით ოპტიმალური გეგმა არის

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 0,$$

რაც ასევე ემთხვევა, მხოლოდ  $L_3(X)$  მინიმიზაციის ოპტიმალურ გეგმას.

შედარების მიზნით, მიღებული რეზულტატები თავმოყრილია 12.3 ცხრილში. იოლი შესამჩნევია, რომ ყველა გეგმას შორის მხოლოდ ვექტორულად ოპტიმალური გეგმის დროს ხორციელდება (12.153) წრფივი ფორმების მნიშვნელობათა მაქსიმალური სიახლოვე მათ მაქსიმალურ მნიშვნელობებთან.

ცხრილი 12.3

ამოცანის პირობები: წრფივი ფორმები და შეზღუდვები	ამოცანის გეგმა	გეგმის მოქმედების რეზულტატი	$L_1$	$L_2$	$L_3$
	$x_1 = 0$ $x_2 = 6$	$\max(-3x_1 + 2x_2)$	12	18	-30
$L_1 = -3x_1 + 2x_2$	$x_1 = 3$ $x_2 = 4$	$\max(4x_1 + 3x_2)$	-1	24	-14
$L_2 = 4x_1 + 3x_2$	$x_1 = 5$ $x_2 = 0$	$\max(2x_1 - 5x_2)$	-15	20	10
$L_3 = 2x_1 - 5x_2$	$x_1 = 5$ $x_2 = 0$	$\max(L_1 + L_2 + L_3) = \max x_1$	-15	20	10
$-2x_1 - 3x_2 + 18 \geq 0$ $-2x_1 - x_2 + 10 \geq 0$	$x_1 = 1,52$ $x_2 = 1,37$	$\min V(X)$ $V(X) = \max\{L_1 - 12, L_2 - 24, L_3 - 10\}$	-1,82	10,19	-3,81
$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$	$x_1 = 5$ $x_2 = 0$	$\min U(X)$ $U(X) =  L_1 - 12  +  L_2 - 24  +  L_3 - 10 $	-15	20	10
	$x_1^* = 2,97$ $x_2^* = 1,52$	$\min R(X)$ $R(X) = (L_1 - 12)^2 + (L_2 - 24)^2 + (L_3 - 10)^2$	-5,87	16,44	-1,66

## § 12.9. დაგეგმვის ამოცანა მეტალურგიულ წარმოებაში

განვიხილოთ დაგეგმვის კონკრეტული ამოცანა მეტალურგიულ წარმოებაში გარკვეული გამართივებით.

დავუშვათ, რომ ფეროშენადნობთა ქარხანამ გარკვეული დროის მონაკვეთში უნდა აწარმოოს  $n$  ტონა შენადნობი. ქარხანას შეუძლია მადანის მიღება (მარგანეცისა და კარბონატმარგანეცის კონცენტრატების ნარევი)  $A$  და  $B$  მაღაროებიდან, რომლებიც განლაგებულნი არიან, შესაბამისად,  $l_A$  და  $l_B$  კმ მანძილებზე ქარხნიდან. ქარხნის მიერ შეკვეთილი მადნის რაოდენობა, შესაბამისად, აღენიშნოთ  $x_A$  და  $x_B$  ტონით.

დავუშვათ  $A$  მაღაროს მადანს აქვს შემდეგი მახასიათებლები: 1 ტონა მადნის ფასია  $c_A$  დოლარი; მის გადამუშავებაზე საჭიროა  $t_A$  კვტ.სთ/ტ ელექტროენერგია; იგი შეიცავს  $m_A\%$  ფოსფორს; მისგან იწარმოება  $n_A$  ტონა სილიკომარგანეცის შენადნობი. ანალოგიური პარამეტრები გააჩნია  $B$  მაღაროს მადანს: შესაბამისად,  $c_B$  [დოლ/ტ],

$$t_B [\text{კვტ.სთ/ტ}], m_B [\%], n_B [\text{ტ}].$$

დაუშვათ, ქარხნის წარმადობა დროის ამ მოცემულ მონაკვეთში  $n_1$  ტონა მადნის გადამუშავების გარანტიას იძლევა. გარდა ამისა, ქარხანა შეზღუდულია ელექტროენერგიის ხარჯვაში და მისთვის არარენტაბელურია 1 ტონა შენადნობის მისაღებად დახარჯოს  $t$  კვტ.სთ/ტ ენერგიაზე მეტი.

1 ტ შენადნობის მისაღებად დახარჯული ელექტროენერგიის რაოდენობა ჩაიწერება შემდეგი გამოსახულებით

$$\frac{l_A x_A + l_B x_B}{n_A x_A + n_B x_B}$$

ტექნოლოგიური მონაცემებით შენადნობში ფოსფორის პროცენტული რაოდენობა

$$\frac{m_A x_A + m_B x_B}{n_A x_A + n_B x_B}$$

არ უნდა აღემატებოდეს მოცემულ  $m$  რიცხვს.

ასეთი მონაცემებით დაგეგმვის ამოცანა გადაწყვეტილი უნდა იქნეს შეზღუდვებით, რაც მათემატიკურად ასე გამოიყურება:

$$\begin{aligned} n_A x_A + n_B x_B &\geq n, \\ x_A + x_B &\leq n_1, \\ t_A x_A + t_B x_B &\leq t(n_A x_A + n_B x_B), \\ m_A x_A + m_B x_B &\leq m(n_A x_A + n_B x_B), \quad (12.157) \\ x_A &\geq 0, \quad x_B \geq 0. \end{aligned}$$

ეს უტოლობები სხვა არაფერია, თუ არა წრფივი პროგრამირების ამოცანის პირობები. პირველი უტოლობა უზრუნველყოფს დაგეგმილი რაოდენობის შენადნობის მიღებას, მეორე გამოხატავს ქარხნის წარმადობას, მესამე ზღუდავს ელექტროენერგიის ხარჯს, მეოთხე უზრუნველყოფს შენადნობში ფოსფორის დასაშვებ პროცენტულ რაოდენობას.

(12.157) უტოლობები  $(x_A, x_B)$  სიბრტყეზე განსაზღვრავენ  $\Omega$  არეს.

ქარხნის მიერ მალაროებიდან მიღებული მადნის ფასი ჩაიწერება წრფივი ფორმის სახით,  $c_A x_A + c_B x_B$ , რომლის შეფარდებაც მიღებული შენადნობის რაოდენობასთან,

$n_A x_A + n_B x_B$ , განსაზღვრავს ერთი ტონა შენადნობის მისაღებად საჭირო მადნის საშუალო ფასს. შენადნობის გაყიდვით ქარხანას გარკვეული მოგება უნდა დარჩეს.

მადნის შესყიდვის დაგეგმვის აზრი, ერთის მხრივ, შეიძლება იყოს მოგების მაქსიმალური მიღება, რაც შემდეგი ფორმულით გამოიხატება:

$$L(x_A, x_B) = d(n_A x_A + n_B x_B) - c_A x_A - c_B x_B - P(\ell_A x_A + \ell_B x_B), \quad (12.158)$$

სადაც  $c$  ერთი ტონა შენადნობის გასაყიდი ფასია, ხოლო  $P$  1 ტ მადნის 1 კმ მანძილზე ტრანსპორტირების ხარჯია.

მეორეს მხრივ, მადნის შესყიდვისას შეიძლება სასურველი იყოს სატრანსპორტო საშუალებების მინიმალური გარბენა, რათა ისინი სხვა მიზნებისთვისაც იქნენ გამოყენებული. ეს

მოთხოვნა გადასაზიდი მადნის ტონა-კილომეტრების რიცხვით განისაზვრება და ასე ჩაიწერება

$$L_2(x_A, x_B) = \ell_A x_A + \ell_B x_B. \quad (12.159)$$

მივიღეთ წრფივი პროგრამირების ამოცანა ორი მიზნის ფუნქციით: ერთდროულად მივალწიოთ (12.158) მიზნის ფუნქციის მაქსიმიზაციას და (12.159) მიზნის ფუნქციის მინიმიზაციას (12.157) შეზღუდვების დროს.

ამოცანა ამოვხსნათ შემდეგი რიცხვითი მნიშვნელობებისათვის, რაც რეალურთან საკმარად ახლოა:  $n = 350$  ტ,  $n_1 = 1000$  ტ,  $n_A = 0,5$  ტ,  $n_B = 0,3$  ტ  $t = 4000$  კვტ.სთ/ტ,  $t_B = 1500$  კვტ.სთ/ტ,  $t_A = 1300$  კვტ.სთ/ტ,  $c_A = 32,5$  დოლ/ტ,  $c_B = 12,5$  დოლ/ტ,  $c = 150$  დოლ/ტ,  $m_A = 0,18\%$ ,  $m_B = 0,17\%$ ,  $m = 0,5\%$ ,  $P = 0,1$  დოლ/ტ·კმ,  $\ell_A = 50$  კმ,  $\ell_B = 25$  კმ. (რა თქმა უნდა  $c = 150$  დოლ/ტ პირობითია და იგი მოცემულია სხვა ხარჯების გაუთვალისწინებლად).

ამრიგად, წრფივი პროგრამირების ამოცანა იღებს კონკრეტულ სახეს:

$$\begin{aligned} 0,5x_A + 0,3x_B &\geq 350, \\ x_A + x_B &\leq 1000, \\ x_A &\geq 0, \quad x_B &\geq 0. \end{aligned} \quad (12.160)$$

უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა შორის ვიპოვოთ ისეთი, რომელიც წრფივ ფორმებს

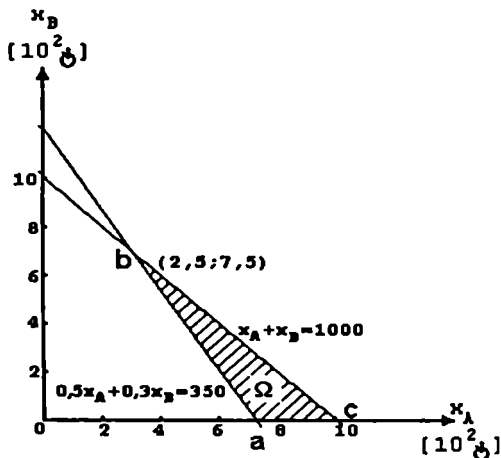
$$L_1(x_A, x_B) = 37,5x_A + 30x_B, \quad (12.161)$$

$$L_2(x_A, x_B) = 50x_A + 25x_B, \quad (12.162)$$

შესაბამისად, მიაწიკებს მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს.

(12.160) უტოლობათა სისტემა  $(x_A, x_B)$  სიბრტყეზე განსაზღვრავს  $\Omega$  არეს სამკუთხედის სახით (ნახ.12.5)





ნახ.12.5

წრფივი ფორმა (12.161) თავის მაქსიმუმს აღწევს  $c$  წერტილში (ნახ.12.5), სადაც

$$x_A = 1000\text{ტ}, \quad x_B = 0.$$

ამ დროს მიზნის ფუნქციები (12.161) და (12.162) ლებულობენ მნიშვნელობებს

$$L_1^0 = 37500\text{დოლ}, \quad L_2 = 50000\text{ტ.კმ}$$

და ერთი ტონა შენადნობის მისაღებად მადნის შესყიდვისა და ტრანსპორტირებისათვის იხარჯება  $\frac{c_A + P l_A}{n_A} = 75$  დოლარი,

მზადდება 500ტ შენადნობი.

წრფივი ფორმა (12.162) თავის მინიმუმს აღწევს  $b$  წერტილში (ნახ.12.5), სადაც

$$x_A = 250\text{ტ}, \quad x_B = 750\text{ტ}.$$

ამ დროს მიზნის ფუნქციები (12.161) და (12.162) ლებულობენ მნიშვნელობებს

$$L_1 = 31875\text{დოლ}, \quad L_2^0 = 31250\text{ტ.კმ}$$

და ერთი ტონა შენადნობის მისაღებად მადნის შესყიდვისა და ტრანსპორტირებისათვის იხარჯება 58,93 დოლარი, მაგ-

რამ საერთო მოგება მცირდება გამოდნობილი შენადნობის რაოდენობის შემცირებით 350 ტონამდე.

ამრიგად, სატრანსპორტო საშუალებათა გარბენის შემცირება 18750 ტონა-კილომეტრით საერთო მოგებას ამცირებს 5625 დოლარით.

მოექებნოთ კომპრომისული ამოხსნა კერძოდ, ამოცანის ვექტორულად ოპტიმალური გეგმა. შევადგინოთ ფუნქცია

$$R(x) = \left( \frac{37,5x_A + 30x_B}{37500} - 1 \right)^2 + \left( \frac{50x_A + 25x_B}{31250} - 1 \right)^2$$

და  $\Omega$  არეში ვიპოვოთ წერტილი  $(x_A^*, x_B^*)$ , რომელიც ამ ფუნქციას მინიმუმს მიანიჭებს. ასეთი წერტილი იოლი საპოვნია და უდრის

$$x_A^* = 294 \text{ ტ}, \quad x_B^* = 706 \text{ ტ}, \quad (12.163)$$

რომელიც  $bc$  მონაკვეთზე მდებარეობს (ნახ.12.5). ამ დროს მიზნის ფუნქციების მნიშვნელობებია

$$L_1^* = 32205 \text{ დოლ}; \quad L_2^* = 32350 \text{ კმ}.$$

თვალსაჩინოებისთვის რეზულტატები მოყვანილია 12.4 ცხრილში.

მიღებული ვექტორულად ოპტიმალური გეგმით (12.163) სატრანსპორტო საშუალებების გარბენის 1100 ტ.კმ-ით გაზრდით საერთო მოგება იზრდება 330 დოლარით, ხოლო 1 ტ შენადნობისათვის საჭირო მადნის შესყიდვასა და ტრანსპორტირებაზე იხარჯება 60,24 დოლარი და საბოლოო პროდუქტი მიიღება 358,8 ტონის რაოდენობით.

ამოცანის პირობები	ამოცანის გეგმა	სამინიმიზაციო გამოსახულება	საერთო მოგება $L_1$ [ლოლ]	ტრანსპორტის გარბენი $L_2$ [ტ.კმ]	1-ე შენადნობისთვის საჭირო მალნის შექმნის და ტრანსპორტირების ხარჯები [ლოლ]	შენადნობის რაოდენობა [ტ]
$x_A + x_B \leq 1000$ $0,5x_A + 0,3x_B \geq 350$ $x_A \geq 0$ $x_B \geq 0$	$x_A = 1000$ ტ $x_B = 0$	$L_1 = -(37,5x_A + 30x_B)$	37500	50000	75	500
	$x_A = 250$ ტ $x_B = 750$ ტ	$L_2 = 50x_A + 25x_B$	31875	31250	58,93	350
	$x_A = 294$ ტ $x_B = 706$ ტ	$R = \left( \frac{37,5x_A + 30x_B}{37500} - 1 \right)^2 + \left( \frac{50x_A + 25x_B}{31250} - 1 \right)^2$	32205	32350	60,24	358,8

ასეთი გეგმის განხორციელებისას, როგორც დავინახეთ, შენადნობში ფოსფორის რაოდენობასა და ელექტროენერგიის ხარჯს ყურადღება ექცეოდა მხოლოდ იმ კუთხით, რომ ისინი დასაშვებ ზღვრებს არ გასცდნოდნენ. რა თქმა უნდა, შენადნობში ფოსფორის პროცენტული რაოდენობის შემცირება ზრდის შენადნობის ხარისხს და მის ფასსაც, მის გასაღებას საშიშროება არ ემუქრება, ხოლო ელექტროენერგიის ხარჯის შემცირება ზრდის საერთო მოგებას. ამ მოთხოვნათა გათვალისწინება ართულებს დაგეგმვის ამოცანას, მაგრამ იგი რჩება განხილული ამოცანის ჩარჩოებში. ასევე შეიძლება სხვა ტექნოლოგიური თუ ორგანიზაციული ხასიათის მოთხოვნების გათვალისწინებაც.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი. დაგვემვის ამოცანას მივუდგეთ როგორც 1 ტ შენადნობისათვის საჭირო მადნის ფასის მინიმიზაციის თვალსაზრისით, ასევე მასში ფოსფორის პროცენტული რაოდენობის მინიმიზაციის თვალსაზრისით, რაც მისი გასაღების შანსს ზრდის და მასთან ერთად ზრდის საერთო მოგებასაც.

დავუშვათ 1 ტ მადნის შექმნასა და ტრანსპორტირებაზე  $A$  და  $B$  მალაროებიდან ქარხანას, შესაბამისად, უჭდება  $c_A$  და  $c_B$  დოლარი. დავუშვათ, აგრეთვე, რომ მალაროები  $A$  და  $B$  იძლევიან გარანტიას დროის მოცემულ მონაკვეთში ქარხანას მიაწოდონ მადანი, შესაბამისად, მხოლოდ  $x_A$  და  $x_B$  ტონის ფარგლებში. დანარჩენი პარამეტრები ისეთივეა, როგორც წინა განხილულ მაგალითში.

ასეთი მონაცემების შემთხვევაში დაგვემვის ამოცანა უნდა ამოიხსნას შემდეგი შეზღუდვების გათვალისწინებით:

$$n_A x_A + n_B x_B \geq n,$$

$$l_A x_A + l_B x_B \leq l(n_A x_A + n_B x_B),$$

$$m_A x_A + m_B x_B \leq m(n_A x_A + n_B x_B), \quad (12.164)$$

$$0 \leq x_A \leq \bar{x}_A, \quad 0 \leq x_B \leq \bar{x}_B.$$

ეს უტოლობები წრფივი პროგრამირების ამოცანის პირობებია. ისინი  $(x_A, x_B)$  სიბრტყეზე განსაზღვრავენ  $\Omega$  არეს.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ქარხანა გეგმავს  $n$  ტონა შენადნობის გამოდნობას და მისთვის ხელსაყრელია მადნის ყიდვა ისე, რომ ამ მადნის ყიდვასა და ტრანსპორტირებაზე გაწეული ხარჯები იყოს მინიმალური და, ამავე დროს, შესყიდულ მადნიდან გამოიღნოს რაც შეიძლება საუკეთესო ხარისხის სილიკომარგანეცის შენადნობი, ანუ შენადნობი შეიცავდეს რაც შეიძლება ნაკლები რაოდენობის ფოსფორს. დაგვემვისადმი ასეთი მიდგომა გამართლებულია არა მარტო მაქსიმალური საერთო მოგების მიღების მიზნით, არამედ შენადნობის გასაღების გაადვილებითაც. ქარხანას შეუძლია გამოაღნოს შენადნობი მინიმალური ხარჯებით, მაგრამ იგი ვერ გაასაღოს უხარისხობის გამო. მეორე მხრივ, ქარხანა გარანტირებულია პროდუქციის

გასაღებით, მაგრამ გაწეული ხარჯებია მიუღებელი. ეს მოთხოვნები მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$L_1(x_A, x_B) = C_A x_A + C_B x_B, \quad (12.165)$$

$$L_2(x_A, x_B) = 0,01 m_A x_A + 0,01 m_B x_B. \quad (12.166)$$

წრფივი ფორმა (12.165) განსაზღვრავს ქარხნის მიერ შესყიდული მადნის ფასს დოლარებში ორივე მალაროდან, ხოლო წრფივი ფორმა (12.166) კი—ფოსფორის რაოდენობას ტონებში მთელ გამოდნობილ შენადნობში.

აქ ვუშვებთ, რომ დნობის პროცესში მადნიდან ფოსფორი მთლიანად გადადის შენადნობში.

მივიღეთ წრფივი პროგრამირების ამოცანა ორი მიზნის ფუნქციით: ვიპოვოთ (12.164) უტოლობათა სისტემის ისეთი ამონახსნი, რომელიც წრფივ ფორმებს (12.165) და (12.166) ანიჭებს მინიმალურ მნიშვნელობებს.

განვიხილოთ კონკრეტული რიცხვითი მნიშვნელობები:

$$n = 150000 \text{ ტ}; \quad n_A = 0,6 \text{ ტ}; \quad n_B = 0,3 \text{ ტ}; \quad t = 4000 \text{ კვტ.სთ/ტ};$$

$$t_A = 1650 \text{ კვტ.სთ/ტ}; \quad t_B = 1450 \text{ კვტ.სთ/ტ}; \quad c_A = 52,5 \text{ დოლ/ტ};$$

$$c_B = 15 \text{ დოლ/ტ}; \quad m_A = 0,174\%; \quad m_B = 0,19\%; \quad \bar{x}_A = 300000 \text{ ტ};$$

$$\bar{x}_B = 400000 \text{ ტ}; \quad m = 0,5\%.$$

ამ დროს (12.164) უტოლობები ღებულობენ სახეს:

$$2x_A + x_B \geq 500000,$$

$$3x_A - x_B \geq 0,$$

$$3,14x_A - x_B \geq 0, \quad (12.167)$$

$$0 \leq x_A \leq 300000,$$

$$0 \leq x_B \leq 400000,$$

ხოლო წრფივი ფორმები კი —

$$L_1(x_A, x_B) = 52,5x_A + 15x_B, \quad (12.168)$$

$$L_2(x_A, x_B) = 0,00174x_A + 0,0019x_B. \quad (12.169)$$

Ω არე, რომელსაც განსაზღვრავენ (12.167) უტოლობები, დაშტრიხულია (ნახ.12.6).

განხილული შემთხვევისათვის, როდესაც მხოლოდ დაგეგმი-  
ლი რაოდენობის შენადნობის ( $n = 150000$ ) მიღებას ვგუ-  
ლისხმობთ, შეზღუდვები (12.167) ასე ჩაიწერება:

$$2x_A + x_B \geq 500000,$$

$$3x_A - x_B \geq 0, \quad (12.170)$$

$$x_A \geq 0, \quad x_B \geq 0,$$

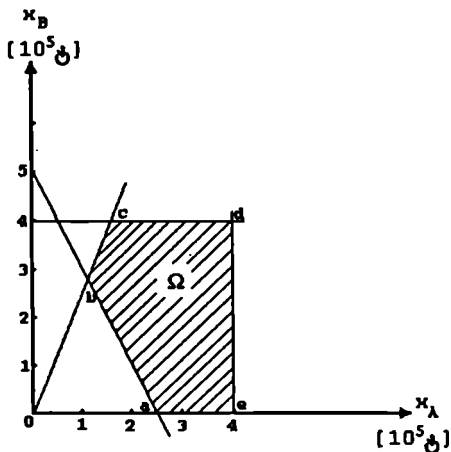
რომლებიც მიუთითებენ იმას, რომ ამოცანის ამონახსნი უნ-  
და ვეძებოთ  $ab$  მონაკვეთზე (ნახ.12.6)

ოპტიმალური გეგმა მხოლოდ შესყიდული მადნის ფასის  
მინიმიზაციის აზრით იოლად საპოვნია და უდრის

$$x_A = 100000\text{ტ}; \quad x_B = 300000\text{ტ}.$$

ამ დროს წრფივი ფორმების (12.168) და (12.169) მნიშ-  
ვნელობებია

$$L_1^0 = 9750000\text{დოლ}; \quad L_2 = 744\text{ტ},$$



ნახ.12.6

რომელთა მიხედვითაც იოლად გამოითვლება, რომ 1ტ შე-  
ნადნობის მისაღებად საჭირო რაოდენობის მადნის საშუალო  
ფასია 65 დოლარი, ხოლო ფოსფორის პროცენტული რაო-

დენობა შენადნობში არის 0,496%, რაც დასაშვებ ფარგლებშია.

ოპტიმალური გეგმა, რომელიც მხოლოდ ფოსფორის მინიმიზაციას ეყრდნობა შენადნობში, არის

$$x_A = 250000 \text{ ტ}; \quad x_B = 0.$$

ამ დროს წრფივი ფორმები (12.168) და (12.169) ლებულობენ მნიშვნელობებს

$$L_1 = 13125000 \text{ დოლ}; \quad L_2^0 = 435 \text{ ტ},$$

ხოლო 1 ტ შენადნობის მისაღებად საჭირო მადნის რაოდენობის ფასია 87,5 დოლარი და შენადნობში ფოსფორის რაოდენობაა 0,29%. მოცემული პარამეტრების პირობებში შეუძლებელია შენადნობის მიღება ფოსფორის უფრო მცირე პროცენტული შემცველობით.

როგორც ვხედავთ ფოსფორის პროცენტული რაოდენობის შემცირება შენადნობში 0,496%-დან 0,29%-მდე დაკავშირებულია მადნის ფასის გაზრდასთან თითქმის 3,5 მილიონი დოლარით.

მოექმნობთ კომპრომისული ამონახსნი, ვექტორულად ოპტიმალური გეგმა. შევადგინოთ ფუნქცია

$$R(x) = \left( \frac{52,5x_A + 15x_B}{9750000} - 1 \right)^2 + \left( \frac{0,00174x_A + 0,0019x_B}{435} - 1 \right)^2$$

და ვიპოვოთ  $\Omega$  არეში (ნახ.12.6) ისეთი ამონახსნი  $x_A^*$  და  $x_B^*$ , რომლებიც ამ ფუნქციას მინიმიუმს მინიმალურ მნიშვნელობას. ასეთი ამონახსნია

$$x_A^* = 221217 \text{ ტ}; \quad x_B^* = 57566 \text{ ტ}. \quad (12.171)$$

თვალსაჩინოებისათვის რეზულტატები თავმოყრილია ცხრილში 12.5.

მიღებული ვექტორულად ოპტიმალური გეგმა (12.171) ერთნაირი ხარისხით უზრუნველყოფს როგორც მადნის ლირებულების მინიმუმს, ასევე შენადნობის მაღალ ხარისხს. ამ დროს მიზნის ფუნქციები (12.168) და (12.169) ლებულობენ მნიშვნელობებს

$$L_1^* = 12477382,5 \text{ დოლ}; \quad L_2^* = 494,293 \text{ ტ},$$

რაც იმის მაჩვენებელია, რომ 1ტ შენადნობის მიღებაზე დახარჯული მადნის ფასი იქნება 83,18 დოლარი, ხოლო ფოსფორის პროცენტული შემადგენლობა შენადნობში 0,33%

ცხრილი 12.5

ამოცანის პირობები	ამოცანის გეგმა	შპინიშიზაციო გამოსახულება	$L_1$	$L_2$	1ტ შენადნობისთვის საჭირო მადნის ფასი (დოლ)	ფოსფორის პროცენტული შემადგენლობა შენადნობში [%]
	$x_A = 100000\text{ტ}$ $x_B = 300000\text{ტ}$	$L_1 = 52.5x_A + 15x_B$	9750000	744	65	0,496
$2x_A + x_B \leq 500000$ $3x_A + x_B \geq 0$ $x_A \geq 0$ $x_B \leq 0$	$x_A = 250000\text{ტ}$ $x_B = 0$	$L_2 = 0.00174x_A + 0.0019x_B$	3125000	435	87,5	0,29
	$x'_A = 221217\text{ტ}$ $x'_B = 57566\text{ტ}$	$R = \left( \frac{52.5x_A + 15x_B}{9750000} - 1 \right)^2 + \left( \frac{0.00174x_A + 0.0019x_B}{435} - 1 \right)^2$	2477382,5	494,293	83,18	0,33

ვექტორულად ოპტიმალური გემით განხორციელებული წარმოების აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ ქარხნის მოქმედება ოპტიმალური იქნება თუ იგი გაზრდის ფოსფორის პროცენტულ შემცველობას შენადნობში 0,04%-ით. ამით იგი ყოველი ტონა შენადნობის გამოღობაზე დაზოგავს 4,32 დოლარს.



1. გუგუშვილი ა.შ., იმედაძე თ.გ., გარგი დ. - ავტომატური მართვის თეორია. მდგომარეობათა სივრცის მეტოდი. თბილისი, გამომცემლობა „საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი“. 1994. - 111გვ.
2. გოგიჩაიშვილი გ.გ., შონია ო.ბ., ქართველიშვილი ი.შ. „ოპერაციათა კვლევა“ - ნაწილი 1, ნაწილი 2. თბილისი, 1996, 1997. ნაწილი 1 - 83გვ, ნაწილი 2 111გვ.
3. Адаптивное управление точностью прокатки труб. Под ред. Данилова Ф.А. и Райбмана Н.С. М.: Металлургия, 1980. 280с.
4. Адаптивные системы автоматического управления. Под ред. Яковлева В.Б. Л.: изд.-во ЛГУ. 1984. 204с.
5. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа; 1986. 319с.
6. Александров А.Г. Оптимальные и Адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1986. 263с.
7. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984. 288с.
8. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1976. 432с.
9. Анциферов Е.Г. Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск.: Наука, Сиб. отделение, 1990. 160с.
10. Атанс М., Фалб И. Оптимальное управление. - М.: Машиностроение, 1968. 764с.
11. Афанасьев В.Н., Данилина А.Н. Алгоритмическое конструирование систем управления с неполной информацией. - М.: МИЭМ, 1935. 94с.

12. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования системы управления. - М.: Высшая школа, 1989. 447с.
13. Афанасьев В.Н., Носов В.Р., Прокопов В.И. Адаптивные системы управления. М.: МИЭМ, 1990. 130с.
14. Ашманов С.А. Линейное программирование. М.: Наука, 1981. 304с.
15. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. - М.: Наука, 1991. 448с.
16. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана. М.: Мир, 1988. 168с.
17. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. - М.: Мир, 1982. - 583с.
18. Банди Б. Основы линейного программирования. - М.: Радио и связь, 1989, 176с.
19. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М.: Связь, 1988. 128с.
20. Бейко И.В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. М.: Наука, 1987. 363с.
21. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. 540с.
22. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987. 400с.
23. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. М.: Наука, 1982. - 199с.
24. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. - 544с.
25. Васильев В.В. Тринадцать лекций по основам вариационного исчисления. Иркутск.: Изд-во Иркутского университета, 1989. 103с.
26. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. - 552с.

27. Вариационные принципы механики. Под ред. Полака Л.С. - М.: Физматгиз, 1959. 932с.
28. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. - Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1977. - 254с.
29. Гасс С. Линейное программирование. М.: Физматгиз, 1961. 303с.
30. Гилль Ф., Мюррей У. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509с.
31. Гугушвили А.Ш., Арефьев Б.А. Определение характеристик нелинейных объектов по их статистическим функциям. Тбилиси: Труды ТНИИСА, Т.VII. 1966. 105-113с.
32. Гугушвили А.Ш., Арефьев Б.А., Буадзе Г.А. Экспериментальное определение постоянной времени нелинейных объектов. Известия ВУЗ-ов СССР, Приборостроение, Т.12, №4, 1969, 42-46с.
33. Гугушвили А.Ш., Арефьев Б.А., Энделадзе Д.Л. Экспериментальный метод опознавания структуры одномерных нелинейных объектов управления с Экстремальной характеристикой. Автоматика, №2, 1970. 43-47с.
34. Гугушвили А.Ш. Принцип симметрии в идентификации нелинейных объектов управления. В кн.: Труды IX Всесоюзной школы семинара по адаптивным системам. Алма-Ата. 1979. 65-69с.
35. Гугушвили А.Ш. Синтез оптимального входного сигнала для идентификации нелинейных объектов управления. Сообщения АН ГССР Т.101, №1, 1981. 113-116с.
36. Гугушвили А.Ш. Фильтр Калмана для случайных полей. Сообщения АН ГССР, Т.63, №2, 1985. 242-246с.
37. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения. М.: Прогресс. 1966. 600с.

38. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. основы негладкого анализа и квазидифференциальные исчисления. М.: Наука, 1990. 432с.
39. Деннис Дж, Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988. 440с.
40. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432с.
41. Живоглядов В.П. Адаптация в автоматизированных системах управления технологическими процессами. Фрунзе: Изд-во "Илим", 1974. 227с.
42. Заде Л, Дезоер Ч. Теория линейных систем. М.: Наука. 1970. 703с.
43. Злочевский С. Прикладные методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука. 1982. 432с.
44. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука. 1967. 460с.
45. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука. 1981. 336с.
46. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука. 1986. 288с.
47. Квакернак Х, Сивак Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир. 1977. 650с.
48. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука. 1988. 280с.
49. Козлов Ю.М., Юсупов Р.М. Беспойсковые самонастраивающиеся системы. М.: Наука. 1969. 455с.
50. Коша А. Вариационное исчисление. М.: Высшая школа. 1983. 279с.

51. Куликовский Р. Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования. М.: Наука. 1967. 379с.
52. Летов А.М. Динамика полета и управления. М.: Наука. 1969. - 359с.
53. Либерзон Л.М., Родов А.Б. Системы экстремального регулирования. М.: Энергия. 1965. 125с.
54. Лоусон Ч., Хенсен Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука. 1986. 232с.
55. Льюнг Л. Идентификация систем. М.: Наука. 1991. 432с.
56. Медведев А.В. Непараметрические системы адаптации. М.: Наука, 1980. 174с.
57. Мину М. Математическое программирование. М.: Наука. 1990, 488с.
58. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука. 1971. 424с.
59. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. М.: Наука. 1978. 352с.
60. Ногин В.Д. Основы теории оптимизации. М.: Высшая школа. 1986. 383с.
61. Основы теории оптимального управления. Под ред. Кротова В.Ф. М.: Высшая школа. 1989. 430с.
62. Павлов Б.В. Соловьев И.Г. Системы прямого адаптивного управления. М.: Наука. 1989. 136с.
63. Параев Ю.И. Теория оптимального управления. Томск.: Изд-во Том. ун-та. 1986. 164с.
64. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука. 1986. - 616с.
65. Перельман И.И. Анализ современных методов адаптивного управления с позиции приложения к автоматизации технологических процессов. АИТ, №7, 1991. 3-32с.

66. Петров Ю.П. Вариационные методы теории оптимального управления. Л.: Энергия. 1977. 288с.
67. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука. 1983. 384с.
68. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1976. 392с.
69. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования. М.: Наука. 1989. 304с.
70. Пугачев В.С., Синицин И.Н. Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука. 1990. 632л.
71. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Адаптивные модели в системах управления. М.: Советское радио. 1966. 159с.
72. Растрингин Л.А. Системы экстремального управления. М.: Наука. 1974. 632с.
73. Рейклейстис Г., Рейвендран А., Рэгдел К. Оптимизация в технике. Т.1, Т.2. М.: 1986. Т.1 350с, Т.2 -320с.
74. Рейнфельд Н., Фогель У. Математическое программирование. М.: Изд-во иностранной литературы. 1960. 303с
75. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 552с.
76. Салуквадзе М.Е. Задачи векторной оптимизации в теории управления. Тбилиси.: Мецниереба. 1975. 201с.
77. Салуквадзе М.Е. Задачи А.М. Летова о синтезе оптимальных систем автоматического управления. Тбилиси.: Мецниереба. 1988. 286с.
78. Сеидж Э.П., Мелса Дж. Идентификация систем управления. М.: Наука, 1974. 246с.

79. Сеидж Э.П., Мелса Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь. 1976. 495с.
80. Сеидж Э.П., Уайт Ч. Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь, 1982. 392с.
81. Скурихин В.И. Адаптивные системы управления машиностроительным производством. М.: Мир. машиностроение, 1989. 207с.
82. Современные методы идентификации систем. Под ред. П. Эйкхоффа. М.: Мир. 1983. 400с.
83. Справочник по теории автоматического управления. Под ред. Красовского А.А. М.: Наука. 1987. 717с.
84. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука. 1986. 352с.
85. Сухарев А.Г. Минимаксные задачи в задачах численного анализа. М.: Наука. 1989. 299с.
86. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления. М.: Машиностроение 1972. 544с.
87. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т.1. М.: Мир, 1991. 360с.
88. Теория автоматического управления. Под ред. Воронова А.А., Т.1, Т.2. М.: Высшая школа, 1987. Т.1 367с, Т.2 375с.
89. Тимохов А. Введение в методы оптимизации. М.: Изд-во МГУ, 1989. 70с.
90. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 286с.
91. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь. 1991. 608с.
92. Уайльд Д.Дж. Методы поиска экстремума. М.: Наука, 1967. 267с.

93. Флеминг У, Ришел Ф. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978. 318с.
94. Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах. Беспойсковые методы. М.: Наука. 1990. 292с.
95. Фрадков А.Л., Фомин В.Н. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 423с.
96. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 534с.
97. Цыпкин Я.З. адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968. 400с.
98. Цыпкин Я.З. Основы инфорационной теории систем. Наука. 1995 352с:
99. Чаки Ф. Современная теория управления. М.: Мир, 1975. 424с.
100. Чичинадзе В.К. Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации. М.: Наука 1983. 256с.
101. Чичинадзе В.К. Введение в теорию систем административного управления и организайии. Тбилиси.: Изд-во ТГУ, 1988. 381с.
102. Чураков Е.П. Оптимальные и адаптивные системы. М.: Энергоатомиздат, 1987. 254с.
103. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 683с.
104. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424с.
105. Юдин Д.Б. Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. М.: Наука, 1969. 424с.
106. Fukushima M. A successive quadratic programming method for a class of contrained nonsmooth optimizaition problems "Math programming" 1991,49, #2-231-251p.



107. Ogata K. Modern Control Engineering. - N.J.: Prentice - Hall, INC., 1990. - 963p.
108. Tzafestas S. G Optimization and Control of Technological Systems. National Technical University of Athens. 1995. - 350 p.
109. Salukvadze M. Vector-Valued Optimization Problems in Control Theory. Academic Press, N. Y. 1979. - 231p.
110. Unbehauen H. Regelungstechnik, v1, v2, v3. - Braunschweig|Wiesbaden. 1988. - v1 - 406p., v2 - 274p, v3 - 437p.
111. Kalaba R.E., Spingarn K. Optimal input system identification for homogeneous and nonhomogeneous boundary Conditions. 'I. Optimiz. Theory and Appl~. 1975, 16, #5-6, 487-496p.
112. Fattorini H.O. Infinite Dimensional Optimization and Control Theory.-Cambridge, 1996.-410 p.

#### დამატებითი ლიტერატურა

113. Злочевский С.И. Прикладные методы оптимального управления движением. М.: изд-во МГУ, 1989. 180с.
114. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Методы оптимизаций. -Тверь: 1996. 322с.
115. Ащепков Л.Т. Лекции по оптимальному управлению. Владивосток, 1996. 206с.
116. Васильев О.В. Лекции по методам оптимизации. Иркутск.: Изд-во Иркут.университета. 1994. 147с.
117. Коломейцева М.Б. Методы теории оптимизации динамических систем. М.: Изд-во МЭИ, 1994. 141с.
118. Кардаш В.А. Введение в стохастическую Оптимизацию. КН1. 1995. 203С.

- 119.Лэннинг Дж., Бэттин Р. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М.: Изд-во иностр. лит. 1958. 387с.
- 120.Козлов Ю.М. Адаптация и обучение в робототехнике. М.: Наука, 1990. 247с.
- 121.Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения много-экстремальных задач. М.: Наука, 1982. 254с.
- 122.Параев Ю.И. Введение в статистическую Динамику процессов управления и фильтрации. М.: Советское радио, 1976. 184с.
- 123.Параев Ю.И. Уравнения Ляпунова и Риккати. Томск.: изд-во Том. ун-та. 1989. 166с.
- 124.Райбман Н.С. Что такое идентификация? М.: Наука, 1970. 119с.
- 125.Райбман Н.С. Идентификация и оценка параметров систем. Т.1, Т.2, Т.3. М.: изд-во ИПУ АН СССР, 1976.
- 126.Райбман Н.С. Дисперсионная идентификация. -М.: Наука. 1981. -336с.
- 127.Райбман Н.С. Типовые линейные модели объектов управления. М.: Наука, 1983. 123с.
- 128.Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 192с.
- 129.Тимофеев А.В. Адаптивные робототехнические комплексы. Л.: Машиностроение 1988. 332с.
- 130.Тимофеев А.В. Адаптивные робототехнические комплексы для гибких автоматических производств. -Л.: ЛДНТП, 1988. -26с.
- 131.Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М.: Мир, 1967. 425с.
- 132.Ту Ю. Современная теория управления. М.: Машиностроение, 1971. 472с.

133. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах. Под ред. Леондеса К.Т. М.: Мир, 1980. 407с.
134. Салыга В.И., Карабутов Н.Н. Идентификация и управление процессами в черной металлургии. М.: Металлургия, 1986. 192с.
135. Александров В.В. и др. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. М.: изд-во МГУ, 1988. 77с.
136. Гугушвили А.Ш., Шаншиашвили В.Г. Опознавание структуры одного класса нелинейных объектов в процессе их нормальной эксплуатации. В кн.: Труды ГПИ „Приборостроение“ №9 (173), 174. 83-86с.
137. Вейль Г. Симметрия. М.: Наука, 1968. 191с.
138. Воронов А.А. устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979. 336с.
139. Андреев Ю.Н. управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976, 424с.
140. Батухтин В.Д., Майборода Л.А. Оптимизация разрывных функции. М.: Наука 1984. 208с.
141. Солодов А.В. Методы теории систем в задачах непрерывной линейной фильтрации. М.: Мир, 1979. 264с.
142. Остром К. Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973. 368с.
143. Попков Ю.С. и др. Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем. М.: Энергия, 1976. 402с.
144. Сеа Ж. Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973. 244с.
145. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управления. М.: Энергия, 1973. 440с.

146. Белман Р. динамическое программирование М.: ИЛ, 1960. 473с.
147. ლურსმანაშვილი ა. წრფივი ალგებრა და წრფივი დაპროგრამება. - თბილისი.: თსუ, 1967. - 310გვ.
148. Гугушвили А.Ш., Шаншиашвили В.Г. Применение функциональных рядов Вольтерра-Винера для определения структуры нелинейных объектов. В кн: Труды ГПИ, приборостроение, №9 (173), 1974. 78-83с.
149. Арефьев Б.А. Оптимизация инерционных процессов. - Л.: Машиностроение, 1969. - 160с.
150. ნაცვლიშვილი ზ. დისკრეტული მათემატიკის საფუძვლები. თბილისი.: თსუ, 1990. - 98გვ.
151. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Оптимизация гарантии в многокритериальных задачах управления. Тбилиси.: Мецниереба, 1996. 475с.
152. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Многокритериальные задачи управления в условиях неопределенности. Тбилиси.: Мецниереба, 1991. 128с.
153. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. - М.: Наука, 1969. - 408с.
154. ქადაგიძე კ. მათემატიკური პროგრამირება (ლექცია წრფივი პროგრამირების მათემატიკურ საფუძვლებში). თბილისი: თსუ, 1981. 134გვ.
155. ჭლამაძე ო. მათემატიკური პროგრამირების გამოყენება საშენი მასალების მრეწველობაში. - თბილისი.: „საბჭოთა საქართველო“, 1967. - 91გვ.
156. ლურსმანაშვილი ა. მათემატიკური დაპროგრამების ზოგიერთი საკითხი. - თბილისი.: თსუ, 1977. - 328გვ.
157. სარჩიმელია რ., წუწუნავა თ. ოპტიმალურობის პირობები მათემატიკური პროგრამირების ამოცანებში. თბილისი.: თსუ, 1988. - 58გვ.
158. მანია გ. წრფივი პროგრამირება. თბილისი.: განათლება, 1967. - 295გვ.
159. კურტანიძე დ. ეკონომიკურ-მათემატიკური მეთოდები დაგეგმვაში. - თბილისი.: თსუ, 1988. - 195გვ.

160. Salukvadze M., Zukovsky V.I. The Vector-Valued Maximin. Academic Press, N.Y. 1994. - 404p.
161. ბარამიძე კ.მ. ავტომატური მართვის თეორიის საფუძვლები. - თბილისი.: განათლება, 1966. 274გვ.
162. ბარდაველიძე ა.შ. ავტომატური მართვის თეორია. ქუთაისი.: ქპი, 1989, ტ1 - 235გვ., ტ2 - 274გვ.
163. ავტომატური მართვის თეორია. ანეტუშილის რედაქციით. - თბილისი.: განათლება, 1978. 458გვ.
164. Ядыкин И.Б., Шумский В.М., Овсепян Ф.А. Адаптивное управление непрерывными технологическими процессами. М.: Энергоиздат, 1985. 332с.
165. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. Санкт-Петербург.: ВHV, 1997. 384с.
166. Арутюнов А.В. Условия экстремума. М.: Факториал, 1997. 240с.
167. Мерризм К.Ч. Теория оптимизации и расчёт систем управления с обратной связью. М.: Мир, 1967. 475с.

ალმასხან გუგუშვილი  
მინდია სალუქვაძე  
ვახტანგ კიკინაძე

ოპტიმალური და ადაპტური სისტემები

რედაქტორი თ.იმედაძე.

ტექნიკური რედაქტორი მ.გიორგაძე.

კორექტორები: ი.კუცია,  
ლ.თედიაშვილი,  
დ.კვერცხიშვილი.

გადაეცა წარმოებას 10.03. 1997წ.  
ხელმოწერილია დასაბეჭდად 10.07. 1997წ.  
ფორმატი 60X90<sup>1</sup>/<sub>16</sub> პირობითი ნაბეჭდი თაბახი—65,0.  
სააღრიცხვო საგამომცემლო თაბახი—65,8.  
ტირაჟი 500. შეკვეთა №521

ფასი სახელშეკრულებო.

© გამომცემლობა "ტექნიკური უნივერსიტეტი".

თბილისი 380075, კოსტავას ქ.77.

© გამომცემლობა "ცისარტყლა" .

"ცისარტყლას" სტამბა, თბილისი 380078 ყაზბეგის გამზირი 18.