

თბილისის შრომის წითელი ღრუზის ორჯენოსანი  
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

**ვ. მამასახლისოვი, ბ. ჭილაშვილი**

# თეორიული ფიზიკა

I

მექანიკა

სსრ უმაღლესი და საშუალო სპეციალური განათლების  
სამინისტროს მიერ დამუკიცებულა სახელმძღვანელოდ  
ფიზიკის ფაკულტეტის სტუდენტთათვის



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა  
თბილისი 1982

სახელმძღვანელოში გადმოცემულია კლასიკური მექანიკის ძირითადი დებულებები. განხილულია მექანიკის აღწერის სხვადასხვა მეთოდი. ვეტალურადაა შესწავლილი ნაწილაკთა გაფანტვის თეორია, მოძრაობის განტოლებების ინვარიანტობისა და კოვარიანტობის საკითხები, ვარიაციული პრინციპები, ჰამილტონის კანონიკური და ჰამილტონ-იაკობის განტოლებები. განხილულია მთელი რიგი საინტერესო მაგალითები.

წიგნი წარმოადგენს მეორე გამოცემას. იგი განკუთვნილია სახელმძღვანელოდ ფიზიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის. სარგებლობას მოუტანს სხვა სპეციალობის სტუდენტებსაც.

რედაქტორი პროფ. გ. ხუციშვილი

რ ე ც ე ნ ზ ე ნ ტ ი დ ო ც. ი. მაჩაბელი

## მეორე ბამოცემის წინასიტყვაობა

წიგნი წარმოადგენს მეორე შეესებულ და გადა-  
მუშავებულ გამოცემას. მეორე გამოცემიდან მთლიან-  
ად ამოღებულია ტენზორული ალგებრის ელემენტე-  
ბი, რამდენ დაც ახალი სასწავლო გეგმის მიხედვით  
მექანიკის პარალელურად სტუდენტებს ეკითხებათ  
ვექტორული და ტენზორული ანალიზის დამოუკიდე-  
ბელი კურსი და, ამავე დროს, ცალკე წიგნად გამო-  
იცა ავტორის ლექციების კურსი ტენზორული აღრი-  
ცების ელემენტებში (თსუ გამომცემლობა, 1978 წ.).

სამაგიეროდ, ახალ გამოცემაში შეტანილია მთე-  
ლი რიგი დამატებითი საკითხებისა, ხოლო ზოგი პა-  
რაგრაფი დაწერილია თავიდან. ამავე დროს წიგნი  
გამდიდრებულია მაგალითებით.

დიდ მადლობას მოვახსენებთ: პროფესორებს  
ი. ვაშაქიძეს, თ. კობალიაშვილს, დოც. მ. კობია-  
შვილს, დოც. ი. მაჩაბელს, დოც. ფ. ტყეებუჩავას  
და ასისტენტს [ი. ლომიძე] საყურადღებო შენიშვნე-  
ბისათვის. მადლობას ვუძღვნი აგრეთვე მ. ჩიჩუას  
წიგნის ტექნიკური გაფორმების საქმეში დახმარებო-  
სათვის.

მკითხველის შენიშვნებს სიამოვნებით გავითვა-  
ლისწინებთ შემდგომი მუშაობის დროს.

სამწუხაროდ, ჩემი თანაავტორი და მასწავლე-  
ბელი პროფ. ვ. მამასახლისოვი ვერ მოესწრო ამ  
წიგნის ხელახალ გამოცემას.

გ. კილაშვილი



## შ ე ს ა ვ ა ლ ი

თეორიული ფიზიკის ძირითადი ამოცანაა სამყაროს მოვლენების აღწერის ერთიანი სურათის შექმნა, ან სხვანაირად, სივრცის, დროისა და მატერიის ძირითადი თვისებების შესახებ ზოგადი დებულებების ჩამოყალიბების საფუძველზე ბუნებაში მიმდინარე ყველა ფიზიკური მოვლენის ახსნა.

თეორიული ფიზიკის თანამედროვე მდგომარეობა შორსაა ამ მათემატიკური მიზნისაგან. დღესათვის არ არსებობს ბუნების ყველა მოვლენის ახსნის ერთიანი მეთოდი. თეორიული ფიზიკა შედგება სხვადასხვა დარგისაგან, ყოველი მათგანი ემყარება გარკვეულ დებულებებს, რომლებზე დაყრდნობითაც შესაძლებელია ამ დარგებში გაერთიანებულ მოვლენათა ახსნა. მეცნიერების მომავალი ამოცანაა ცალკეულ დარგთა დასაყრდენ დებულებებს შორის კავშირის, მათი საერთო საფუძვლის მოძებნა, რომელიც გამოსავალს უნდა წარმოადგენდეს სამყაროს ფიზიკური მოვლენების ერთიანი ახსნისათვის.

თეორიული ფიზიკის ძირითადი დებულების სამართლიანობა მოწმდება მისგან გამომდინარე შედეგების ცდების მონაცემებთან ყოველმხრივი შედარების გზით. თავის მხრივ, ცხადია, ეს დებულებები შედეგია ექსპერიმენტული მონაცემების ანალიზისა და მათი შემდგომი განზოგადებისა.

მათემატიკური თვალსაზრისით თეორიული ფიზიკის გამოსავალი დებულებები გაერთიანებულია განტოლებებში, რომელთაც მოძრაობის განტოლებები ეწოდებათ. ამ განტოლებათა ამოხსნა ექსპერიმენტით განსაზღვრულ საწყის და სასაზღვრო პირობებში შეესაბამება ფიზიკური მოვლენის მათემატიკურ აღწერას. მოძრაობის განტოლებათა გამოყვანა თეორიული გზით, მხოლოდ სივრცისა და დროის თვისებების შესახებ ზოგად წარმოდგენებზე დაყრდნობით, შეუძლებელია. იგი შეიცავს აგრეთვე გარკვეულ დაშვებებს, რომელთა სამართლიანობა ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში ცნობილია, რის შემდეგ მათ ჩვენ ვაზოგადებთ სხვა ფიზიკური მოვლენისათვისაც. ამ თვალსაზრისით თეორიული ფიზიკა მუდმივ განვითარებას და ცვლილებებს განიცდის. მთელ რიგ შემთხვევებში მოძრაობის განტოლებები ისე კარგად ასახავენ ბუნებაში არსებულ სინამდვილეს, რომ მათი საშუალებით შესაძლებელია არათუ ცნობილი მოვლენების რაოდენობრივი და თვისობრივი ახსნა, არამედ მთელი რიგი ახალი მოვლენების წინასწარმეტყველებაც კი. მაშასადამე, თანამედროვე თეორიული ფიზიკა ხშირად მიუთითებს, თუ სად რა ახალი მოვლენის არსებობაა შესაძლებელი ბუნებაში. მთელი რიგი ფაქტების ექსპერიმენტულად აღმოჩენა ნაკარნახევი იყო სწორედ თეორიული ფიზიკის წინასწარმეტყველებათა საფუძველზე.

თეორიული ფიზიკის დარგებს შორის მექანიკას განსაკუთრებული ადგილი უკავია, რამდენადაც იგი შეისწავლის ბუნების ყველაზე უფრო მარტივი ტიპის მოძრაობას — სხეულთა გადაადგილებას სივრცესა და დროში.

მექანიკა, როგორც მეცნიერება, ჩამოყალიბდა ნიუტონის შრომებში. ნიუტონმა შექმნა მექანიკის მოძრაობის განტოლების დაწერა, რომელიც საშუალებას იძლეოდა ყველა მექანიკური მოვლენის ერთიანი, როგორც თვისობრივი, ისე რაოდენობრივი ახსნისა. ამიტომ ამ მექანიკას ხშირად ნიუტონის ან კლასიკურ მექანიკასაც უწოდებენ.

ახლმა ექსპერიმენტულმა ფაქტებმა, რომლებიც XX საუკუნის დასაწყისისათვის დაგროვდა, ამასთან ცხადყვეს, რომ კლასიკური მექანიკა სამართლიანია მხოლოდ გარკვეულ საზღვრებში. სახელდობრ აღმოჩნდა, რომ იგი არ გამოიყენება, ერთის მხრივ, დიდი სიჩქარეებით (სინათლის სიჩქარის რიგის) მოძრაი სხეულებისათვის, ხოლო, მეორე მხრივ, ატომური ზომის სხეულებისათვის.

1905 წელს ჩამოყალიბდა რელატივისტური მექანიკა, რომელიც ნიუტონის მექანიკის განზოგადებას წარმოადგენს იმ მხრივ, რომ გამოდგება დიდი სიჩქარეებით მოძრაი სხეულებისათვისაც. რაც შეეხება ატომური მოვლენების შემსწავლელ მეცნიერებას, იგი კვანტური მექანიკის სახელწოდებით ჩამოყალიბდა 1925—27 წლებში.

თეორიული ფიზიკის წინამდებარე ტომი შეიცავს მხოლოდ კლასიკური (ნიუტონისეული) მექანიკის გადმოცემას. რელატივისტურ და კვანტურ მექანიკას მიეძღვნება შემდეგი ტომები.

მექანიკა წარმოადგენს თეორიული ფიზიკის პირველ ნაწილს. მექანიკა შეისწავლის სხეულთა მოძრაობის კანონებს. ამასთან იგი მოძრაობას განიხილავს როგორც დროის რაიმე მონაკვეთში ერთი სხეულის გადაადგილებას მეორის მიმართ.

როგორც ფიზიკის ყოველი დარგი, მექანიკაც ეყრდნობა ექსპერიმენტს და მისი განვითარება მიმდინარეობს შედეგების ცდასთან ყოველმხრივი შეთანხმების გზით.

მექანიკის საწყისები გვევლინება არქიმედის დროიდან, მაგრამ როგორც მეცნიერება, მექანიკა იწყება ვალილეის ცნობილი ცდებით, რომლებმაც იგი მიიყვანეს ინერციის პრინციპის ჩამოყალიბებამდე, დასრულებული სახე კი მექანიკამ მიიღო ნიუტონის შრომების შემდეგ. მექანიკის განვითარებაში დადი წვლილი შეიტანეს აგრეთვე ლაგრანჟმა, ჰამილტონმა, იაკობიმ, დალამბერტმა, ელერმა, პუასონმა და სხვ.

ნიუტონმა ჩამოყალიბა სხეულის მოძრაობის პრინციპები და შემოიღო ძალის, როგორც სხეულთა ურთიერთქმედების ცნება. ამ პრინციპებზე დაყრდნობით დაიწერა მოძრაობის განტოლებათა სისტემა, რომელიც საცსებით ახასიათებს მატერიალურ წერტილთა მოძრაობას და წონასწორობის პირობებს.

მექანიკის ძირითადი ამოცანა მდგომარეობს წერტილთა სისტემის მოძრაობის განსაზღვრაში. ამბობენ, რომ მოძრაობა განსაზღვრულია, თუ ცნობილია სისტემის ყოველი წერტილის მდებარეობა დროის ნებისმიერ მომენტში.

როგორც ქვევით დაეინახავთ, ამ ამოცანის გადასაწყვეტად უნდა წინასწარ ვიცოდეთ წერტილთა მდებარეობა და სიჩქარე ერთ რაიმე მომენტში. მაშინ მოძრაობის განტოლებების ამოხსნის საშუალებით მოიძებნება ყველა წერტილის მდებარეობა დროის ნებისმიერ შემდგომ მომენტში.

## მატერიალური წერტილის კინემატიკა

### § 1. ზოგადი ცნებები

მატერიალური წერტილი. მატერიალური წერტილი ისეთი სხეულია, რომლის სიერკითი განზომილება არაა მიღებული მხედველობაში. სხეულის ასეთი განზომილება დასაშვებია მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ზომა იმ მანძილებთან შედარებით, რომლებშიც არსებით როლს ასრულებენ აღებულ ამოცანაში, ძალიან მცირეა. მაშასადამე, მატერიალური წერტილის ცნება შედარებითია. ერთ ამოცანაში აღებულ სხეული შეიძლება განიხილოს როგორც მატერიალური წერტილი, მეორეში კი — არა. ასე, მაგალითად, როცა ვსწავლობთ დედამიწის მოძრაობას მზის გარშემო, იგი დიდ სიზუსტით მატერიალურ წერტილად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რადგან მანძილი მზესა და დედამიწას შორის გაცილებით მეტია დედამიწის ზაზოვან ზომასთან შედარებით. მაგრამ, თუ ჩვენ გვიინტერესებს დედამიწის ბრუნვითი მოძრაობის შესწავლა საკუთარი ღერძის ირგვლივ, მისი წარმოდგენა მატერიალური წერტილის სახით, ცხადია, აღარ შეიძლება. მატერიალური წერტილის ცნების შემოტანით სხეულის მოძრაობის სურათი საკმაოდ მარტივდება, რადგან გამორიცხულია სხეულის ისეთი დამახასიათებელი სიდიდე. როგორცაა მისი მოცულობა, ფორმა, შემადგენლობა და სხვ. წერტილის შენარჩუნებული აქვს სხეულის მხოლოდ მასა. ამიტომაცაა, რომ მას მატერიალურ წერტილს უწოდებენ. ამგვარად, მატერიალური წერტილი არის მასის მქონე გეომეტრიული წერტილი.

მექანიკაში დასაწყისში განიხილავენ მატერიალური წერტილის მოძრაობას. ეს იმით არის გამართლებული, რომ, ჯერ ერთი, წერტილის მოძრაობის წინასწარი განხილვა ბევრად ადვილბებს სასრული ზომის სხეულების მოძრაობის შესწავლას, მეორე, ხშირად მოძრავი სხეული მართლაც შეიძლება განხილული იქნეს როგორც მატერიალური წერტილი.

ათვლის სისტემა. სხეულის მოძრაობას სხვა სხეულების გარეშე თავისთავად არავითარი აზრი არა აქვს. სხეული, რომელიც უძრავია ერთი რომელიმე სხეულის მიმართ, შეიძლება რთულ მოძრაობას აწარმოებდეს მეორის მიმართ. ამიტომ მოძრაობის დასახასიათებლად აუცილებელია იმ სხეულის მითითება, რომლის მიმართაც განიხილება მოძრაობა. ამ სხეულს ათვლის სისტემა უწოდებენ. ცხადია, ათვლის სისტემად შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი მყარი სხეული ან ერთმანეთთან უძრავად დაკავშირებულ მყარ სხეულთა სისტემა. მაგრამ, ნაცულებს იმისა, რომ ვილაპარაკოთ მოძრაობაზე რაიმე სხეულის მიმართ, უკეთესია ამ სხეულში წარმოვიდგინოთ მათთან უძრავად დაკავშირებული კოორდინატთა სისტემა და მოძრაობა განვსაზღვროთ ამ სისტემის მიმართ.

ათვის სისტემად, როგორც წესი, იხილავენ დეკარტის მართებულ კორდინატთა სისტემას, თუმცა ზოგ შემთხვევაში ხელსაყრელია სხვა კორდინატთა სისტემების არჩევა.

თავისთავად ცხადია, რომ მოძრაობის ხასიათი დიდადა დამოკიდებული ათვის სისტემის შერჩევაზე. ერთი და იგივე მოძრაობა ერთი ათვის სისტემის მიმართ შეიძლება საკმარისად მარტივად გამოიყურებოდეს, მაშინ როცა მეორის მიმართ ამ მოძრაობას ძალზე რთული სახე ჰქონდეს. ამიტომ მნიშვნელოვანია ისეთი ათვის სისტემების შემოღება, რომლებშიც მოძრაობა რაც შეიძლება მარტივად იწერება. ამ მოთხოვნას აკმაყოფილებს ე. წ. ცენტრული სისტემა, რომელიც შედგენიანია განმარტებული: ინერციული ეწოდება ისეთ ათვის სისტემას, რომლის მიმართ იზოლირებული მატერიალური წერტილი მოძრაობს სწორხაზოვნად და თანაბრად. ცენტრულად შეგვიძლია ჩავთვალოთ სისტემა, რომელიც დაკავშირებულია სამყაროს ნებისმიერ უძრავ სხეულთან. მაგრამ, მკაცრად რომ ვიმსჯელოთ, ასეთი უძრავი სხეულები სამყაროში არ არსებობენ. ამიტომ ინერციული სისტემა ფაქტიურად აბსტრაქტული სისტემაა. ინერციულ სისტემად, კარგი მიახლოებით, შეგვიძლია განვიხილოთ სისტემა, რომლის სათავე მზეშუა მოთავსებული, ღერძები კი მიმართულია უშორესი, ე. წ. უძრავი ვარსკვლავებისაკენ. იმისათვის, რომ უშორესი ვარსკვლავების ურთიერთმოძრაობა შევამჩნიოთ, ხშირად ერთი საუკუნეც კი არ კმარა. ასე რომ, უშორეს ვარსკვლავებთან დაკავშირებული ათვის სისტემა, პრაქტიკულად უძრავ სისტემას წარმოადგენს და ამიტომ იგი ინერციულად შეგვიძლია ჩავთვალოთ.

ნათელია, რომ, თუ ბუნებაში არსებობს ერთი მანც ინერციული სისტემა, მაშინ იარსებებს უამრავი, რამდენადაც ყოველი ათვის სისტემა, რომელიც ინერციულის მიმართ მოძრაობს თანაბრად და სწორხაზოვნად, აგრეთვე ინერციული სისტემა იქნება.

ათვის სისტემა, რომელიც ინერციულის მიმართ მოძრაობს აჩქარებულად, არაინერციულ სისტემას წარმოადგენს. როგორც ვიცით, დედამიწა არ მოძრაობს სწორხაზოვნად და თანაბრად უძრავი ვარსკვლავების მიმართ, ამიტომ დედამიწასთან უძრავად დაკავშირებული ათვის სისტემა არაა ინერციული. მიუხედავად ამისა, ხშირად, პრაქტიკულად უფრო ხელსაყრელია დედამიწაზე მიმდინარე პროცესების შესწავლა დედამიწასთან დაკავშირებულ ათვის სისტემაში განვიხილოთ. ამასთან შესაძლებელია, კონკრეტული მოვლენების შესწავლისას, დროის მცირე მონაკვეთში, დედამიწის ტრაექტორიის სიმრუდე მხედველობაში არ მივიდეთ და დედამიწასთან დაკავშირებული ათვის სისტემა, კარგი მიახლოებით, ინერციულად ჩავთვალოთ.

დრო და სივრცე. მატერიალური წერტილის მოძრაობა ხდება დროსა და სივრცეში, ამიტომ საჭიროა შექანიკაში სივრცისა და დროის შესახებ გარკვეული წარმოდგენის შემუშავება. ნიუტონის თანახმად, სივრცე არის აბსოლუტური, ხოლო დრო — უნივერსალური. ეს იმას ნიშნავს, რომ მანძილი სივრცის ორ წერტილს შორის, ესევე როგორც შუალედი დროის ორ მომენტს შორის, არ არის დამოკიდებული ათვის სისტემაზე.

ალენიზნოვ, რომ კლასიკურ მექანიკაში, გეომეტრიული თვალსაზრისით, სივრცე ძალიან კარგი მიახლოებით შეგვიძლია ჩავთვალოთ ევკლიდურად, ხოლო დროის ცვლილება ევკლიდურად სწორხაზოვნად.

ცდა გვიჩვენებს, რომ ფიზიკური თვისებების მიხედვით დრო არის ერთგვაროვანი, სივრცეს კი ახასიათებს ერთგვაროვნება და იზოტროპიულობა.



სივრცის იზოტროპიულობა იმას ნიშნავს, რომ სივრცეში არ არსებობს გამოყოფილი მიმართულებები, სადაც მას განსაკუთრებული, სხვა მიმართულებებისაგან განსხვავებული თვისებები ექნებოდა. თუ სივრცეს გარკვეული თვისებები აქვს ერთი გამოყოფილი მიმართულებით, მაშინ მას იგივე თვისებები ექნება ნებისმიერი სხვა მიმართულებით, რომელიც გამოყოფილსაგან მიიღება გარკვეულ კუთხეზე მობრუნებით.

სივრცის ერთგვაროვნება კი გამოორიქხავს სივრცეში განსაკუთრებული, სხვა წერტილებისაგან განსხვავებული თვისებების მქონე, წერტილების არსებობას. თუ სივრცეს ალებულ წერტილში გარკვეული თვისებები აქვს, მაშინ მას იგივე თვისებები ექნება წერტილებში, რომლებიც ალებულისაგან მიიღება გარკვეულ მანძილზე წანაცვლებით.

დაბოლოს, დროის ერთგვაროვნება გულისხმობს, რომ არ არსებობს დროის რაიმე მომენტი, რომელსაც განსხვავებული თვისებები ექნებოდა დროის სხვა მომენტებთან შედარებით, ამიტომ მნიშვნელობა არა აქვს იმას, თუ რა მომენტიდან ვიწყებთ დროის ათვლას.

დაბოლოს აღენიშნოთ, რომ სივრცეს ერთგვაროვნებისა და იზოტროპიულობის, ხოლო დროს ერთგვაროვნების თვისება ექნება სწორედ ათვლის ინერციული სისტემების მიმართ.

## § 2. მატერიალური წერტილის მოძრაობის დამახასიათებელი ძირითადი სიდიდეები

სივრცეში მატერიალური წერტილის მდებარეობა შეიძლება განვსაზღვროთ სამი სიდიდით, მაგალითად, დეკარტის სამი კოორდინატით  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ან, რაც იგივეა, რადიუსვექტორით

$$\mathbf{r} = ix + jy + kz, \quad (2,1)$$

რომლის მდგენელები იქნება დეკარტის  $x$ ,  $y$ ,  $z$  კოორდინატები და, მაშასადამე, მისი სიგრძე განისაზღვრება ფორმულით

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2,2)$$

როდესაც ნაწილაკი მოძრაობს, მაშინ ყოველ მომენტში მოცემული უნდა იყოს მისი მდებარეობის განმსაზღვრელი კოორდინატები, ე. ი. ცნობილი უნდა იყოს  $r$ , როგორც დროის ფუნქცია  $r = r(t)$ .

მრუდს, რომელსაც მოძრაობა ნაწილაკი აღწერს სივრცეში, უწოდებენ ტრაექტორიას. ამიტომ ტრაექტორია მოცემულია, როცა ცნობილია კოორდინატები, როგორც დროის ფუნქციები:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (2,3)$$

ან, რადიუსვექტორის საშუალებით,

$$\mathbf{r} = r(t). \quad (2,4)$$

თუ გვაინტერესებს ტრაექტორიის განტოლება ცხადი (გეომეტრიული) სახით, მაშინ ამ ფორმულებიდან უნდა გამოვირიცხოთ დროის პარამეტრი  $t$ .

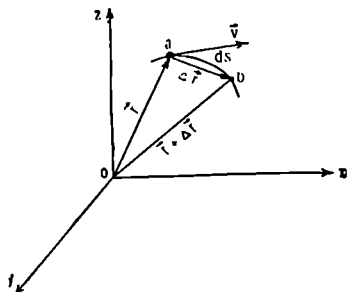
სანამ ტრაექტორიის ძირითად ელემენტებს შევვებოდეთ, შემოვიღოთ კინემატიკის ძირითადი ცნებები — სიჩქარისა და აჩქარების ცნებები. სიჩქარე და აჩქარება განსაზღვრულია რადიუსვექტორის დროითი წარმოებულებით. შევნიშნოთ, რომ მექანიკაში დროითი წარმოებულებისათვის ხშირად გამოიყენება ნიუტონის

აღნიშვნები, სახელდობრ,  $\frac{dx}{dt}$ -ს აღნიშნავთ  $\dot{x}$ -ით, მეორე წარმოებულს  $\ddot{x}$ -ით და ა. შ.

ვექტორს, რომელიც მიიღება რადიუსვექტორის გაწარმოებით დროთი, უწოდებენ ნაწილაკის სიჩქარეს

$$v = \frac{dr}{dt} = \dot{r}. \quad (2,5)$$

წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსიდან ნათელია, რომ სიჩქარე წარმოადგენს ვექტორს, რომელიც ტრაექტორიისადმი მხებია (ნახ. 1), ამიტომ ტრაექტორია



შეგვიძლია სხვანაირადაც განვმარტოთ. ტრაექტორია წარმოადგენს ისეთ მრუდს, რომელსაც ყოველ წერტილში მხებად აქვს ნაწილაკის სიჩქარის ვექტორი, ცხადია, რომ სიჩქარის გეგმილები კოორდინატთა ლერქებზე იქნება:

$$v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}, \quad (2,6)$$

სიჩქარის სიდიდე კი განისაზღვრება ფორმულით

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (2,7)$$

ნახ. 1. ნაწილაკის  $r(t)$  რადიუსვექტორი  $a$ -დან  $b$  წერტილში გადასვლისას შეიქმნის  $\Delta r$  ნაზრდს. ცხადია, რომ  $|\Delta r| = \Delta s$ , სადაც  $\Delta s$  ტრაექტორიის რკალის ელემენტია. სიჩქარე ტოლი იქნება

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

ახლა შემოვიღოთ ნაწილაკის აჩქარება. აჩქარებას უწოდებენ ვექტორს

$$w = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \quad (2,8)$$

ან, რაც იგივეა,

$$w = \frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r}. \quad (2,9)$$

აჩქარების გეგმილებისათვის დეკარტის კოორდინატთა ლერქებზე გვექნება:

$$w_x = \ddot{x}, w_y = \ddot{y}, w_z = \ddot{z}. \quad (2,10)$$

რადგან სიჩქარე და აჩქარება ვექტორებია, ამიტომ მათ ახასიათებთ, როგორც სიდიდე, ისე მიმართულებით. რადიუსვექტორი პოლარული ვექტორია, ამიტომ სიჩქარეცა და აჩქარებაც პოლარულ ვექტორებს წარმოადგენენ.

ახლა განვიხილოთ ტრაექტორიის დამახასიათებელი ელემენტები. მხების მართობს 0 წერტილში უწოდებენ ნორმალს (ნახ. 2). აშკარაა, რომ ამ წერტილში გვექნება ნორმალების უსასრულო სიმრავლე. მართლაც, ყველა წრფე, რომელიც გადის 0 წერტილზე და ძვეს სიბრტყეში, რომელიც მართობია მხებისა, წარმოადგენს ნორმალს. აღნიშნულ სიბრტყეს ნორმალური სიბრტყე ეწოდება. (2,5) ფორმულით განმარტებული სიჩქარე შეიძლება ასეც წარმოვიდგინოთ:

$$v = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dr}{ds}. \quad (2,11)$$

სადაც  $ds = dr$  არის მრუდის ელემენტი, ამიტომ  $v = \frac{ds}{dt}$  იქნება სიჩქარის სიდიდე. გამოსახულება

$$\tau = \frac{dr}{ds} \quad (2,12)$$

არის ერთეულოვანი ვექტორი მხების (სიჩქარის) გასწვრივ. ერთეულოვანი  $\tau$  ვექტორის წარმოებულს  $s$ -ით უწოდებენ ტრაექტორიის სიმრუდის ვექტორს

$$N = \frac{d\tau}{ds} = \frac{d^2r}{ds^2} \quad (2,13)$$

რადგან  $\tau^2 = 1$ , ამიტომ  $\left(\tau, \frac{d\tau}{ds}\right) = 0$  და, მაშასადამე,  $N$  ვექტორი მართობი იქნება მხების.

$N$  ვექტორის სიდიდეს 'უწოდებენ ტრაექტორიის სიმრუდეს ალებულ წერტილში და აღნიშნავენ  $\frac{1}{\rho}$ -ით, ე. ი.

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \left| \frac{d^2r}{ds^2} \right|, \quad \text{Berit to Dre!} \quad (2,14)$$

სიდიანაც

$$\frac{1}{\rho^2} = \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2z}{ds^2} \right)^2, \quad (2,15)$$

$\rho$ -ს ეწოდება სიმრუდის რადიუსი. რადგან  $N$  ვექტორი მართობია მხების (ე. ი.  $\tau$ -სი), ამიტომ იგი ემთხვევა ერთ-ერთ ნორმალს. ამ ნორმალს უწოდებენ მთავარ ნორმალს. როგორც (2.13) განმარტებიდან გამომდინარეობს,  $N$  ვექტორი ყოველთვის მიმართულია ტრაექტორიის ჩაზნექილ მხარეს.  $n$  ერთეულოვანი ვექტორზე (რომლის მიმართულება ემთხვევა  $N$ -ის მიმართულებას) და  $\tau$  ვექტორზე გაშვალ სიბრტყეს უწოდებენ მიმხებ სიბრტყეს ცხადია, რომ სიმრუდის ვექტორსა და ერთეულოვან  $n$  ვექტორს შორის გვაქვს კავშირი

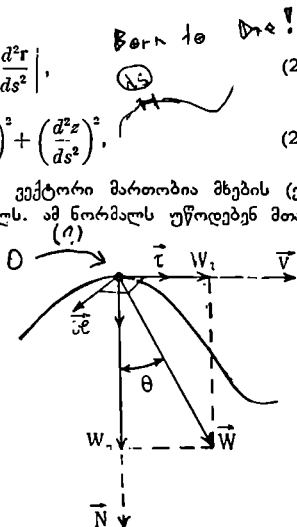
$$* * \quad N = \frac{n}{\rho} \quad (2,16)$$

შემოჰყავთ აგრეთვე ბინორმალიც, რომელიც ემთხვევა

$$* * \quad \alpha = [n, \tau] \quad (2,17)$$

ვექტორის მიმართულებას.

ცხადია, რომ  $\alpha$  მართობია მიმხები სიბრტყესა.  $\tau$ ,  $\alpha$  და  $n$  ორტების საშუალებით შეიძლება განვსაზღვროთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. წერტილს, რომელიც ძვეს მთავარ ნორმალზე ტრაექტორიის ჩაზნექილ მხარეს და დაშორებულია მრუდიდან  $\rho$  მანძილით, უწოდებენ ტრაექტორიის სიმრუდის ცენტრს. მაშასადამე, შეიძლება ითქვას, რომ სიმრუდის  $N$  ვექტორი მიმართულია ტრაექტორიის სიმრუდის ცენტრისაკენ.



ნახ. 2. ნახაზზე  $\tau$ -ის ერთეულოვანი ვექტორი სიჩქარის გასწვრივ  $v = v\tau$   $N$  არის მთავარი ნორმალი.  $\alpha$  და  $n$  აჩქარების მხები და ნორმალური მდგენელებია.  $\beta$  არის კუთხე აჩქარების  $W$  ვექტორსა და მთავარ ნორმალს შორის.  $\alpha = [n, \tau]$  - ბინორმალი.

### § 3. აჩქარების მხევი და ნორმალური მდგენელები

ვიპოვოთ აჩქარების მდგენელები  $\tau$ ,  $n$  და  $\kappa$  მიმართულებებზე. რადგან სიჩქარეს აქვს  $\tau$ -ს მიმართულება, ამიტომ

$$v = v\tau, \quad (3,1)$$

მისი მდგენელები კი  $\kappa$  ბინორმალზე და  $n$  მთავარ ნორმალზე ნულის ტოლი იქნება. (3,1) ფორმულის თანახმად აჩქარება

$$W = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \tau \right). \quad (3,2)$$

გაწარმოებით მივიღებთ

$$W = \frac{d^2s}{dt^2} \tau + \frac{ds}{dt} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \tau + \frac{ds}{dt} \frac{d\tau}{ds} \frac{ds}{dt}. \quad (3,3)$$

თუ გავიხსენებთ (2,13) ფორმულას, გვექნება

$$W = \frac{d^2s}{dt^2} \tau + \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 N, \quad (3,4)$$

ან, თანახმად (2,16) ფორმულისა,

$$W = \frac{d^2s}{dt^2} \tau + \frac{1}{\rho} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 n. \quad (3,5)$$

ეს უკანასკნელი კი ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$W = \frac{d^2s}{dt^2} \tau + \frac{v^2}{\rho} n, \quad (3,6)$$

საიდანაც ჩანს, რომ აჩქარების მხევი მდგენელი

$$W_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}, \quad (3,7)$$

ნორმალური კი

$$W_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (3,8)$$

ცხადია, რომ აჩქარების მხევი მდგენელი ასეც შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$W_\tau = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{v^2}{2}. \quad (3,9)$$

მაშასადამე, აჩქარების სიდიდე  $|W| = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}$  გამოხატული იქნება ფორმულით

$$W = \sqrt{\left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + \left( \frac{v^2}{\rho} \right)^2}, \quad (3,10)$$

ხოლო კუთხე აჩქარების  $W$  ვექტორსა და მთავარ ნორმალს შორის განიმარტება ფორმულით (ნახ. 2)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{W_\tau}{W_n} \quad (3,11)$$

რაც შეეხება აჩქარების ბინორმალურ მდგენელს, იგი ნულის ტოლია. აღსანიშნავია. რომ ნორმალური აჩქარება  $W_n$  ყოველთვის დადებითია. მაშასადამე,  $W$ , რომელიც იმყოფება მიმხებ სიბრტყეში, ყოველთვის მიმართულია ტრაექტორიის

ჩაზნეილ მხარეს. ცხადია, რომ როცა მოძრაობა თანაბარია, ე. ი. სიჩქარე სიდი-  
ლით მუდმივია ( $v = \frac{ds}{dt} = \text{const}$ ), მაშინ მხები აჩქარება  $W_{\tau} = 0$ .

მაშასადამე, მხები აჩქარება ახასიათებს სიჩქარის სიდიდის ცვლილებას. ადვი-  
ლად დავრწმუნდებით, რომ ნორმალური აჩქარება ახასიათებს სიჩქარის მიმართუ-  
ლების ცვლილებას, რადგან, თუ მოძრაობა  
სწორხაზოვანია, მაშინ  $\rho = \infty$  და, მაშასადამე,  
 $W_n = 0$ .

მოძრაობა წრეზე. განვიხილოთ კერძო  
შემთხვევა, როცა მატერიალური წერტილი  
მოძრაობს  $R$  რადიუსიან წრეზე. ნახ. 3-დან  
ცხადია, რომ რკალის ელემენტი  $ds = R d\varphi$ ,  
სადაც  $d\varphi$  არის ე. წ. მობრუნების კუთხე. მა-  
შინ სიჩქარის სიდიდე ტოლი იქნება

$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}, \quad (3,12)$$

სადაც

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (3,13)$$

იწოდება ბრუნვის კუთხურ სიჩქარედ. ამგეა-  
რად, წრითელი მოძრაობის დროს ნაწილაკის  
სიჩქარე<sup>1</sup>

$$v = R\omega. \quad (3,14)$$

აჩქარების მხები მდგენელისათვის გვექნება

$$W_{\tau} = \frac{dv}{dt} = R\chi. \quad (3,15)$$

$$\chi = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (3,16)$$

არის ბრუნვის კუთხური აჩქარება.  $W_{\tau}$  წარ-  
მოადგენს წრეწირის მხებს და პერპენდიკულა-  
რულია წრის რადიუსისა.

რაც შეეხება აჩქარების ნორმალურ პრე-  
ექციას, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ნაწილაკის  
წრეზე მოძრაობის შემთხვევაში სიმრუდის რა-  
დიუსი  $\rho = R$ , მაშინ (3,8) ფორმულიდან მივი-  
ღებთ

$$W_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2. \quad (3,17)$$

ამასთან, წრეზე მოძრაობის შემთხვევაში, აჩქარების ნორმალურ მდგენელს  
უწოდებენ ცენტრმიმსწრე აჩქარებას. იგი მიმართულია წრის ცენტრისაკენ, რა-  
დიუსის გასწვრივ.

<sup>1</sup> ბრუნვის კუთხური სიჩქარის შესახებ უფრო დაწვრილებათ იხილეთ § 59-ში.

ამგვარად, წრეზე მოძრავი ნაწილაკის აჩქარების სიდიდე ტოლი იქნება გამო-  
სახულების

$$W = R \sqrt{\chi^2 + \omega^2}, \quad (3,18)$$

ხოლო კუთხე  $\theta$  შედგენილი  $W$  აჩქარებასა და წრის რადიუსს შორის ტოლი იქნება

$$\text{tg } \theta = \frac{W_{\tau}}{W_n} = \frac{\chi}{\omega}. \quad (3,19)$$

როცა მატერიალური წერტილი წრეზე მოძრაობს მუდმივი  $v = \text{const}$  სიჩქარით, მაშინ აჩქარების მხები პდგენელი  $W_{\tau} = 0$  და აჩქარებას ექნება მხოლოდ ნორმალური კომპონენტი  $W_n = \frac{v^2}{R}$ , რომელიც მიმართული იქნება წრის რადიუსის გასწვრივ.

#### § 4. მრუდწირულ აკორდინატთა სისტემები

მექანიკაში ხშირად გვხვდება დეკარტის მართკუთხა სისტემიდან სხვადასხვა მრუდწირულ კოორდინატებზე გადასვლა. გვაქვს შემთხვევები, როცა მოძრაობის აღწერა დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში მეტად გაძნელებულია, იმ დროს, როცა სხვა უფრო ბუნებრივად შერჩეულ სისტემაში მოძრაობის აღწერა გაცილებით ადვილია. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ისეთ სისტემებზე გადასვლა, რომლებიც ამოცანის გეომეტრიული სიმეტრიის თვისებებს შეესაბამებიან. მაგალითად, თუ პოტენციურ ვენერჯიას აქვს სფერული სიმეტრიის ხასიათი, ამოცანის ამოხსნა ხელსაყრელია სფერულ კოორდინატებში და ა. შ.

დეკარტის  $x, y, z$  (ან  $x_1, x_2, x_3$ ) კოორდინატების ნაცვლად შემოვიღოთ ახალი ცვლადები  $u_1, u_2, u_3$  და ვთქვათ ამ კოორდინატებს შორის არსებობს კავშირი<sup>1</sup>

$$x_i = x_i(u_1, u_2, u_3), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4,1)$$

და პირიქით

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3). \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4,2)$$

ზედაპირებს

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \text{const} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4,3)$$

უწოდებენ საკოორდინატო ზედაპირებს, ხოლო ყოველი ორი საკოორდინატო ზედაპირის გადაკვეთის მრუდებს — საკოორდინატო წირებს. საკოორდინატო წირების გადაკვეთის წერტილებში გავლებული მხეხები განსაზღვრავს საკოორდინატო ღერძებს. დეკარტის სისტემისაგან განსხვავებით, ამ ღერძებს სხვადასხვა წერტილში სხვადასხვა მიმართულება ექნება. თუ წერტილის რადიუსვექტორს განვიხილავთ როგორც ახალი  $u_i$  ცვლადების ფუნქციას  $r = r(u_1, u_2, u_3)$ , მაშინ კერძო წარმოებულის განმარტებით,

$$R_{\alpha} = \frac{\partial r}{\partial u_{\alpha}} \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (4,4)$$

ვექტორი მიმართული იქნება  $\alpha$ -ური საკოორდინატო წირის მხეხად არგუმენტის ზრდის მიმართულებით. ცხადია, რომ ამ ვექტორის სიდიდე ტოლი იქნება

$$R_{\alpha} = \left| \frac{\partial r}{\partial u_{\alpha}} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x_1}{\partial u_{\alpha}} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u_{\alpha}} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial u_{\alpha}} \right)^2}. \quad (4,5)$$

<sup>1</sup> შედგომში დამატებითი მითითების გარეშე  $x, y, z$ -ის ნაცვლად ხშირად ვისარგებლებთ  $x_1, x_2, x_3$  აღნიშვნებით; ასევე, ნაცვლად ვექტორის  $A_x, A_y, A_z$  კომპონენტებისა, გამოიყენებთ  $A_1, A_2, A_3$  აღნიშვნებს.

ვიპოვოთ ფორმულები, რომლებიც აკავშირებენ წერტილის დეკარტის კოორდინატებს მრუდწირულ კოორდინატებთან. ამ მიზნით განვსაზღვროთ  $ds$  მანძილი ორ, ერთმანეთთან უსასრულოდ ახლო მდებარე,  $M(x_1, x_2, x_3)$  და  $N(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$  წერტილის შორის. ცხადია, რომ

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2. \quad (4,6)$$

(4,1)-ის თანახმად

$$dx_i = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} du_\alpha, \quad i=1, 2, 3 \quad (4,7)$$

ამიტომ საძიებელი მანძილის კვადრატისათვის მივიღებთ

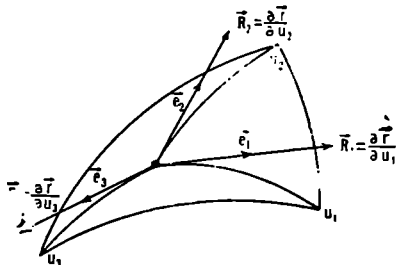
$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta, \quad (4,8)$$

სადაც

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} \right) = (R_\alpha, R_\beta). \quad (4,9)$$

შემოვიღოთ ლამეს პარამეტრები

$$h_{\alpha\alpha}^2 = \sum_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \right)^2 = R_\alpha^2, \quad (4,10)$$



ნახ. 5

$$\theta_{\alpha\beta} = \sum_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} \right); \quad (\alpha \neq \beta) \quad (4,11)$$

მაშინ

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^3 h_{\alpha\alpha}^2 du_\alpha^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} \theta_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta. \quad (4,12)$$

აღვნიშნოთ მრუდწირული ღერძების ორტეხი  $e_1, e_2, e_3$ -ით და დავაკავშიროთ ისინი დეკარტის მართკუთხა სისტემის ღერძების  $i_\alpha$  ორტეხებთან. ამასთან გავითვალისწინოთ, რომ

$$(i_\alpha, i_\beta) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4,13)$$

ცხადია, რომ მრუდწირული ღერძების ორტეხისათვის გვექნება განმარტება

$$e_\alpha = \frac{1}{R_\alpha} \left( \frac{\partial r}{\partial u_\alpha} \right) = \frac{1}{h_{\alpha\alpha}} \sum_{\beta=1}^3 i_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial u_\alpha}; \quad (4,13')$$

ამ ფორმულით გამოხატულია კავშირი  $e_\alpha$  მრუდწირულ და  $i_\alpha$  დეკარტის ორტეხს შორის.

ვიპოვოთ კუთხე მრუდწირული ღერძების ორტეხს შორის. ცხადია, რომ სკალარული ნამრავლი  $\alpha$ -ური და  $\beta$ -ური ორტეხებისა ტოლია

$$(e_\alpha, e_\beta) = \frac{g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}} \sqrt{g_{\beta\beta}}} = \frac{(R_\alpha, R_\beta)}{h_{\alpha\alpha} h_{\beta\beta}}. \quad (4,14)$$

როცა  $\alpha = \beta$ , მაშინ  $g_{\alpha\alpha} = h_{\alpha\alpha}^2$  და მივიღებთ  $e_\alpha^2 = 1$ .

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა

$$\theta_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} - (R_\alpha, R_\beta) = 0; \quad (\alpha \neq \beta) \quad (4,15)$$

ასეთ კოორდინატებს ორთოგონალური მრუდწირული კოორდინატები ეწოდებათ და (4,14)-ის თანახმად გვექნება

$$(e_\alpha, e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (4,16)$$

მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში (4,12) ასეთნაირად ჩაიწერება:

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^3 h_{\alpha\alpha}^2 du_\alpha^2. \quad (4,17)$$

სიგრძის ელემენტებს საკოორდინატო წირების გასწვრივ ექნებათ სახე:

$$ds_1 = h_{11} du_1, \quad ds_2 = h_{22} du_2, \quad ds_3 = h_{33} du_3 \quad (4,18)$$

ან, მოკლედ,

$$ds_i = h_{ii} du_i. \quad (4,19)$$

ცხადია, რომ  $i, k$  საკოორდინატო სიბრტყის ზედაპირის ელემენტი ტოლი იქნება

$$ds_{ik} = h_{ii} h_{kk} du_i du_k, \quad (4,20)$$

ხოლო მოცულობის ელემენტისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$dV = h_{11} h_{22} h_{33} du_1 du_2 du_3. \quad (4,21)$$

არაორთოგონალურ მრუდწირულ სისტემაში ვექტორს აქვს ორი ტიპის კომპონენტები — კოვარიანტული  $A_i$  და კონტრავარიანტული  $A^i$ , რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდება გარდაქმნის კანონით. კერძოდ, კონტრავარიანტული ვექტორი ერთი მრუდწირული სისტემიდან  $(u_1, u_2, u_3)$  მეორეში  $(u'_1, u'_2, u'_3)$  გადასვლის დროს გარდაიქმნება კანონით

$$A'^i = \sum_{k=1}^3 \alpha_k^i A^k, \quad (4,22)$$

ხოლო კოვარიანტული — შემდეგი კანონით:

$$A'_j = \sum_{k=1}^3 \beta_k^j A_k, \quad (4,23)$$

სადაც გარდაქმნის კოეფიციენტები  $\alpha_k^i, \beta_k^j$  განისაზღვრება ფორმულებით:

$$\alpha_k^i = \frac{\partial u'^i}{\partial u^k}, \quad \beta_k^j = \frac{\partial u^j}{\partial u'^k}; \quad (4,24)$$

ამასთან, ეს სიდიდეები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\sum_i \alpha_k^i \beta_i^m = \sum_i \alpha_i^m \beta_k^i = \delta_k^m. \quad (4,25)$$

შუა კრონეკერის სიმბოლოა. როგორც ცნობილია კავშირს კო და კონტრავექტორებს შორის ამყარებს მეტრიკული ტენზორი.



ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული მდგენელები შეგვიძლია განვიხილოთ დეკარტის ირიბკუთხა სისტემაში.  $A$  ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტები განსაზღვრული იქნება ტოლობით

$$A = \sum_{i=1}^3 A^i e_i, \quad i=1, 2, 3 \quad (4,26)$$

სადაც  $e_i$  ირიბკუთხა სისტემის ღერძების ორტებია. რაც შეეხება ვექტორის კოვარიანტულ მდგენელებს, ისინი განსაზღვრული იქნებიან შემდეგი სკალარული ნამრავლით:

$$A_i = (A, e_i) \quad i=1, 2, 3 \quad (4,27)$$

მაშასადამე,  $A$  ვექტორის კონტრავარიანტული მდგენელები ყოფილა ვექტორის ირიბკუთხა მდგენელები, ხოლო კოვარიანტული — ორთოგონალური (იხ ნახ. 6).

როცა მრუდწირული კოორდინატები ორთოგონალურია, მაშინ კოვარიანტული და კონტრავარიანტული მდგენელები ერთმანეთს ემთხვევა.

ფიზიკაში, როგორც წესი, გამოიყენება ორთოგონალური მრუდწირული კოორდინატები, რამდენადაც ზოგად არაორთოგონალურ კოორდინატებში ამოცანის ამოხსნა პრაქტიკულად შეუძლებელია.

სფერული კოორდინატები. სფერული კოორდინატები ( $r, \theta, \varphi$ ) განისაზღვრება ფორმულებით:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (4,28)$$

ან, რაც იგივეა,

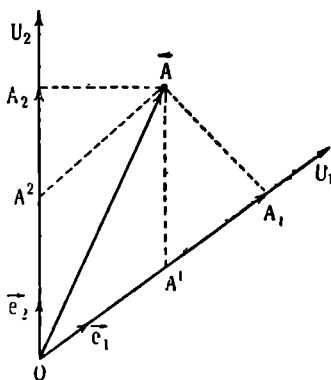
$$\begin{aligned} x + iy &= r \sin \theta e^{-i\varphi}, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (4,28')$$

$\theta$  კუთხე აითვლება  $z$  ღერძიდან,  $\varphi$  კი —  $x$ -დან. ამ ფორმულების მიღება ადვილია ნახ. 4-დან.  $r, \theta, \varphi$  კოორდინატები იცვლებიან საზღვრებში

$$0 \leq r \leq \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (4,29)$$

ლამეს პარამეტრები, ამ შემთხვევაში, თანახმად (4,10) და (4,28) ფორმულებისა, ტოლია:

$$\begin{aligned} h_{11}^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1, \\ h_{22}^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = r^2, \\ h_{33}^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (4,30)$$



ნახ. 6. ნახაზი შეესაბამება ორგანოზომილებიან შემთხვევას.  $A^1, A^2$  ვექტორის კონტრავარიანტული (ირიბკუთხა) მდგენელებია,  $A_1, A_2$  — კოვარიანტული (ორთოგონალური)

მაშასადამე, სფერულ კოორდინატებში სიგრძის ელემენტის ევარატისათვის გვექნება

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (4,31)$$

სიგრძის ელემენტები კი ტოლია:

$$ds_1 = dr, \quad ds_2 = r d\theta, \quad ds_3 = r \sin \theta d\varphi,$$

ხოლო მოცულობის ელემენტი განისაზღვრება ფორმულით

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (4,32)$$

სიდიდეს

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (4,33)$$

ეწოდება სხეულოვანი კუთხე. მოცულობის ელემენტი ასეც გადაიწერება:

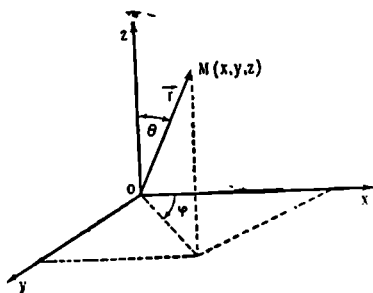
$$dV = r^2 dr d\Omega. \quad (4,34)$$

ცილინდრული კოორდინატებში. ცილინდრული კოორდინატები  $(\rho, \varphi, z)$  განისაზღვრება ფორმულებით:

$$x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi. \quad (4,35)$$

$$z = z.$$



ნახ. 7

ამასთან,

$$0 \leq \rho \leq \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty \leq z \leq +\infty. \quad (4,36)$$

ზემოთ განხილულის ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$h_{11} = 1, \quad h_{22} = \rho, \quad h_{33} = 1. \quad (4,37)$$

მაშასადამე, სიგრძისა და მოცულობის ელემენტებს ცილინდრულ კოორდინატებში შემდეგი სახე აქვთ:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (4,38)$$

და

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz. \quad (4,39)$$

ამ კოორდინატებიდან აღვიღოთ გადავალთ პოლარულ კოორდინატებზე. ამისათვის საკმარისია (4,35)-ში  $z$  ნულის ტოლად ავიღოთ. (4,38) მოგვეცემა

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2. \quad (4,40)$$

პარაბოლური კოორდინატებში. პარაბოლური კოორდინატები  $\xi, \eta, \varphi$  განისაზღვრებიან ტოლობებით:

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta). \quad (4,41)$$

აქედან

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad (4,42)$$

ან შებრუნებით

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad (4,43)$$

ამასთან

$$0 \leq \xi \leq \infty, \quad 0 \leq \eta \leq \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (4,44)$$

$\xi = \text{const}$  და  $\eta = \text{const}$  წარმოადგენს ბრუნვით პარაბოლოიდებს ღერძით  $x$  და ფოკუსით კოორდინატთა სათავეში.

ადვილად შევამოწმებთ, რომ

$$h_{11}^2 = \frac{\xi + \eta}{4\xi}, \quad h_{22}^2 = \frac{\xi + \eta}{4\eta}, \quad h_{33}^2 = \xi\eta, \quad (4,45)$$

ამიტომ

$$ds^2 = \frac{\xi + \eta}{4\xi} d\xi^2 + \frac{\xi + \eta}{4\eta} d\eta^2 + \xi\eta d\varphi^2 \quad (4,46)$$

და

$$dV = \frac{1}{4} (\xi + \eta) d\xi d\eta d\varphi. \quad (4,47)$$

აღნიშნულ კოორდინატთა სისტემებთან საკმე გვექნება არა მხოლოდ მექანიკაში, არამედ თეორიული ფიზიკის სხვადასხვა ნაწილების განხილვის დროსაც.

### § 5. სიჩქარისა და აჩქარების მდგენელები მრუდწირულ ღერძებზე

როგორც ვიცით, ნაწილაკის სიჩქარე დეკარტის კოორდინატებში განისაზღვრება გამოსახულებით

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j + \frac{dz}{dt} k. \quad (5,1)$$

რადიუსექტორი განვიხილოთ როგორც ფუნქცია  $u_1, u_2, u_3$  მრუდწირული კოორდინატებისა და ჩავთვალოთ, რომ მრუდწირული კოორდინატები დროის ფუნქციებია  $u_i = u_i(t)$ , მაშინ, რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად,  $r = r(u_1, u_2, u_3)$ -ის დროითი წარმოებული მოგვცემს

$$v = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial r}{\partial u_i} \dot{u}_i. \quad (5,2)$$

ვიპოვოთ სიჩქარის კვადრატი; რადგან  $v^2 = (v, v)$ , ამიტომ<sup>1</sup>

$$v^2 = \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial r}{\partial u_i}, \frac{\partial r}{\partial u_k} \right) \dot{u}_i \dot{u}_k = \sum_{i,k} g_{ik} \dot{u}_i \dot{u}_k. \quad (5,3)$$

თანახმად (4,10) და (4,11) ფორმულებისა, რადგან ორმაგი ჯამი  $i$  და  $k$ -თი შეგვიძლია გავყოთ ორად: ერთი, სადაც  $i = k$  და, მეორე, სადაც  $i \neq k$ , გვექნება

$$v^2 = \sum h_{ii}^2 \dot{u}_i^2 + \sum_{i \neq k=1}^3 \theta_{ik} \dot{u}_i \dot{u}_k. \quad (5,4)$$

როცა მრუდწირული სისტემა ორთოგონალურია  $\theta_{ik} = 0$ , და

$$v^2 = \sum_{i=1}^3 h_{ii}^2 \dot{u}_i^2. \quad (5,5)$$

<sup>1</sup> ჯამის კვადრატში აუქანისას ინდექსი მეორე ჯამში უნდა შეეცვალოს, მაგალითად, თუ  $A = \sum_k a_k$ , მაშინ  $A^2 = \sum_i \sum_k a_i a_k$ .

ახლა ვიპოვოთ სიჩქარის გეგმილები მრუდწირული სისტემის საკოორდინატო წი-  
რებზე. ამასთან, ცხადია, სიჩქარეს ექნება როგორც ორთოგონალური, ისე ირიბ-  
კუთხოვანი გეგმილები. ჯერ ვიპოვოთ ირიბკუთხა მდგენელები.

თანახმად (4,13') ფორმულისა

$$\frac{\partial r}{\partial u_i} = h_{ii} e_i. \quad (5,6)$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (5,2) ფორმულაში, მივიღებთ

$$v = \sum_{i=1}^3 h_{ii} \dot{u}_i e_i. \quad (5,7)$$

სილიდებს (იხ. 4,26 ფორმულა)

$$v^i = h_{ii} \dot{u}_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (5,8)$$

უწოდებენ სიჩქარის ირიბკუთხა გეგმილებს საკოორდინატო წირებზე, ანდა სიჩქა-  
რის კონტრაგარიანტულ გეგმილებს. ამგვარად,

$$v = \sum_{i=1}^3 v^i e_i, \quad (5,9)$$

ახლა კი ვიპოვოთ სიჩქარის ორთოგონალური მდგენელები მრუდწირულ ღერძებ-  
ზე. ამისათვის საჭიარისია  $v$  სკალარულად გავამრავლოთ მრუდწირული ღერძების  
ორტებზე

$$v_i = (v, e_i) = \frac{1}{h_{ii}} \left( v, \frac{\partial r}{\partial u_i} \right). \quad (5,10)$$

თანახმად (5,2) ფორმულისა,

$$\frac{\partial v}{\partial u_i} = \frac{\partial r}{\partial u_i}. \quad (5,11)$$

ასე რომ, სიჩქარის კოვარიანტული გეგმილები გამოისახება ფორმულით

$$v_i = \frac{1}{h_{ii}} \left( v, \frac{\partial v}{\partial u_i} \right), \quad (5,11')$$

რომელიც ასეც შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ:

$$v_i = \frac{1}{2h_{ii}} \frac{\partial}{\partial u_i} (v^2). \quad (5,12)$$

როცა მრუდწირული სისტემა ორთოგონალურია, მაშინ  $v^2$  გამოითვლება (5,5)  
ფორმულით და სიჩქარის კოვარიანტული (5,12) და კონტრაგარიანტული (5,8)  
მდგენელები ერთმანეთს დაემთხვევა.

განვიხილოთ მაგალითები. გამოეთვალეთ სიჩქარის მდგენელები სფერულ  
და ცილინდრულ ორთოგონალურ სისტემებში. სფერული კოორდინატებისათვის,  
( $u_1 = r$ ,  $u_2 = \theta$ ,  $u_3 = \varphi$ ) გვაქვს:

$$h_{11}^2 = 1, \quad h_{22}^2 = r^2, \quad h_{33}^2 = r^2 \sin^2 \theta. \quad (5,13)$$

(5,5) ფორმულა მოგვცემს:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2, \quad (5,14)$$

(5,12) ფორმულის თანახმად კი სიჩქარის მდგენელებისათვის მივიღებთ:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r \sin\theta \dot{\varphi}. \quad (5,15)$$

როცა გვაქვს ცილინდრული კოორდინატები, მაშინ

$$h_{11}^2 = 1, \quad h_{22}^2 = r^2, \quad h_{33}^2 = 1, \quad (5,16)$$

და (5,5) ფორმულის თანახმად მივიღებთ

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2. \quad (5,17)$$

თანახმად (5,12) ფორმულისა კი მდგენელებისათვის გვექნება:

$$v_p = \rho, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}. \quad (5,18)$$

თუ განვიხილავთ  $(\rho, \varphi)$  პოლარკოორდინატებს სიბრტყეზე ( $z=0$ ) მივიღებთ:

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \quad (5,19)$$

და

$$v_p = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}. \quad (5,20)$$

სიჩქარის ამ მდგენელებთან ხშირად გვექნება საქმე ცენტრალურ ველში მოძრაობის განხილვისას.

პარაბოლურ კოორდინატებში  $(\xi, \eta, \varphi)$ , თუ (5,5) ფორმულაში გავითვალისწინებთ ლამეს პარამეტრების (4,45) მნიშვნელობებს, სიჩქარის კვადრატისათვის მივიღებთ

$$v^2 = \frac{\xi + \eta}{4\xi} \dot{\xi}^2 + \frac{\xi + \eta}{4\eta} \dot{\eta}^2 + \xi\eta\dot{\varphi}^2$$

ახლა ვიპოვოთ აჩქარების ორთოგონალური გეგმილები საკოორდინატო წიგრებზე. განმარტებით, აჩქარება წარმოადგენს ვექტორს

$$W = \frac{dv}{dt} = \ddot{r}. \quad (5,21)$$

ცხადია, რომ აჩქარების ორთოგონალური მდგენელები ტოლი იქნება

$$W_i = (W, e_i) = \frac{1}{h_{ii}} \left( \dot{v}, \frac{\partial r}{\partial u_i} \right). \quad (5,22)$$

ეს გამოსახულება ასეც შეიძლება გადაიწეროს:

$$W_i = \frac{1}{h_{ii}} \left[ \frac{d}{dt} \left( v, \frac{\partial r}{\partial u_i} \right) - \left( v, \frac{d}{dt} \frac{\partial r}{\partial u_i} \right) \right]. \quad (5,23)$$

გავამარტივოთ ამ გამოსახულების თითოეული წევრი. (5,11) გამოსახულების თანახმად მივიღებთ

$$\left( v, \frac{\partial r}{\partial u_i} \right) = \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{v^2}{2} \right). \quad (5,24)$$

ახლა დავამტკიცოთ. რომ მეორე წევრში ღრობითი და  $\frac{\partial}{\partial u_i}$  წარმოებულების გაღასმა შეიძლება. ამის დამტკიცება ადვილია; მართლაც, ერთი მხრივ, თუ  $\frac{\partial r}{\partial u_i}$  განვიხილავთ როგორც რთულ ფუნქციას, გვექნება

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r}{\partial u_i} \right) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_k} \dot{u}_k. \quad (5,25)$$

ხოლო, მეორე მხრივ, (5,2)-ის გაწარმოება  $u_i$ -ით იძლევა

$$\frac{\partial v}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_k} u_k. \quad (5,26)$$

უკანასკნელი ორი ფორმულის შედარება კი გვაძლევს ტოლობას

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial r}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{dr}{dt} = \frac{\partial v}{\partial u_i}. \quad (5,27)$$

ამგვარად, (5,23)-ის მეორე წევრს ექნება სახე

$$\left( v, \frac{d}{dt} \frac{\partial r}{\partial u_i} \right) = \left( v, \frac{\partial v}{\partial u_i} \right) = \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{v^2}{2} \right). \quad (5,28)$$

ამ უკანასკნელი ფორმულისა და (5,24)-ის გათვალისწინებით (5,23) ასე დაიწერება:

$$W_t = \frac{1}{2h_{tt}} \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial v^2}{\partial u_i} - \frac{\partial v^2}{\partial u_i} \right]. \quad (5,29)$$

ამ ფორმულით გამოითვლება აჩქარების ორთოგონალური (კოვარიანტული) გეგმილები მრუდწირული სისტემის ღერძებზე.

როგორც კერძო შემთხვევა, კვლავ განვიხილოთ სფერული და ცილინდრული კოორდინატები.

(5,13) და (5,14) ფორმულების გამოყენებით მარტივად მივიღებთ:

$$\begin{aligned} W_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2, \\ W_\theta &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2, \\ W_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}). \end{aligned} \quad (5,30)$$

აჩქარების მდგენელებისათვის ცილინდრულ კოორდინატებში (5,16) და (5,17) ფორმულები ანალოგიურად მოგვეცემენ:

$$\begin{aligned} W_\rho &= \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \\ W_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}), \\ W_z &= \ddot{z}. \end{aligned} \quad (5,31)$$

პოლარკოორდინატებში აჩქარებას იგივე მდგენელები ექნება, გარდა  $W_z$ -ისა, რომელიც ამ შემთხვევაში ნულის ტოლია.

## მატერიალური წერტილის დინამიკა

თუ გვინდა ვიპოვოთ მატერიალური წერტილის მოძრაობა, საჭიროა ამოიხსნას განტოლება, რომელიც შეიცავს  $r(t)$  ფუნქციას. აშკარაა, რომ ამ განტოლების გამოყვანა თეორიულად შეუძლებელია. იგი უნდა შემოვიღოთ დებულების სახით და შემდეგ მისგან გამოვდინარე შედეგები შევადაროთ ექსპერიმენტს. ნიუტონმა თავი მოუყარა ყველა იმ ექსპერიმენტულ მასალას, რაც იმ დროისათვის არსებობდა და მივიდა იმ დასკვნამდე, რომ მექანიკის საუფუძვლად უნდა დაედოს სამი ძირითადი კანონი, რომლებსაც ნიუტონის კანონები უწოდეს. ამ კანონებიდან მეორე კანონი წარმოადგენს, სწორედ, მოძრაობის დიფერენციალური განტოლების პოსტულირებას. განვიხილოთ ეს კანონები ცალ-ცალკე.

### § 6. ნიუტონის კანონები

პირველი კანონი. ყოველი მატერიალური წერტილი ცდილობს შეინარჩუნოს უძრაობის ან თანაბარსწორხაზოვანი მოძრაობის მდგომარეობა, სანამ მოქმედ ძალები არ გამოიყვანენ მას ამ მდგომარეობიდან. მატერიალური წერტილის მისწრაფებას, შეინარჩუნოს უძრაობის ან თანაბარსწორხაზოვანი მოძრაობის მდგომარეობა, უწოდებენ ინერციას. ნიუტონის პირველ კანონს ხშირად გალილეის ინერციის კანონსაც უწოდებენ. ეს კანონი ფაქტიურად ეკვივალენტურია ინერციული სისტემის შემოღებისა, რომელზედაც პირველ პარაგრაფში გვქონდა საუბარი. ნიუტონის პირველ კანონს შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი მათემატიკური სახე. დაეუშვათ, მატერიალური წერტილის სიჩქარეა  $v$ , ხოლო მასა  $m$ , მაშინ სიდიდეს

$$p = mv = m \frac{dr}{dt} \quad (6,1)$$

ეწოდება ნაწილაკის იმპულსი, ანდა მოძრაობის რაოდენობა (მომავალში გამოვიყენებთ იმპულსის ცნებას). ნიუტონის პირველი კანონი ასე ჩამოყალიბდება: თუ მატერიალურ წერტილზე არავითარი გარეშე სხეული არ მოქმედებს, ე. ი. იგი იზოლირებულია, მაშინ

$$p = mv = \text{const.} \quad (6,2)$$

ე. ი. სიჩქარე არ იცვლება არც სიდიდით და არც მიმართულებით, მაშასადამე, ნაწილაკი მოძრაობს თანაბარსწორხაზოვნად. აშკარაა, რომ ნიუტონის პირველი კანონი, ჩაწერილი (6,2) სახით, შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც იზოლირებული მატერიალური წერტილის იმპულსის მუდმივობის (შენახვის) კანონი.

აღვნიშნოთ, რომ იმპულსი პოლარული ვექტორია.

მეორე კანონი. მეორე კანონი ენება მოძრაობის განტოლების პესტულირებას. ამასთან, მოძრაობის განტოლება წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებას.

ბას, რომელიც წერტილის აჩქარებას აკავშირებს კოორდინატებთან და სიჩქარეებთან. ამ კანონს აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) \quad (6,3)$$

რადგან  $\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ , ამიტომ მუდმივი მასის შემთხვევაში გვექნება

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (6,4)$$

$\mathbf{F}$ -ს ეწოდება ნაწილაკზე მოქმედი ძალა. იგი განსაზღვრავს სხვა სხეულების ურთიერთქმედების სახესა და სიდიდეს მოცემულ მატერიალურ წერტილზე და, მაშასადამე, წარმოადგენს ნაწილაკს ამა თუ იმ სახის მოძრაობის ან წონასწორობის მიზეზს. ძალა ზოგად შემთხვევაში შეიძლება იყოს დამოკიდებული კოორდინატებზე, სიჩქარეებზე, დროზე და სხვა.

მექანიკის ძირითად აპოცანას წარმოადგენს მოცემული ძალის შემთხვევაში (6,4) მოძრაობის განტოლების ინტეგრაცია და რადიუსვექტორის როგორც დროის ფუნქციის განსაზღვრა, ე. ი.  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  ფუნქციის განსაზღვრა. ამასთან,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ -ს მოძრაობის სასრულ განტოლებას ან ტრაექტორიას უწოდებენ.

თუ მატერიალურ წერტილზე ძალა არ მოქმედებს, მაშინ  $\mathbf{F} = 0$  და (6,3) განტოლება მოგვცემს  $\mathbf{p} = \text{const}$ , ე. ი. ნიუტონის პირველ კანონს. ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს თავისუფალ (ან იზოლირებულ) ნაწილაკთან და მოძრაობის სასრულ განტოლებას ექნება სახე

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t, \quad (6,5)$$

სადაც  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$  ნაწილაკის საწყისი მდებარეობის რადიუსვექტორია, ხოლო  $\mathbf{v}$  მისი სიჩქარე. თავისუფალი ნაწილაკის მოძრაობა იქნება თანაბარსწორბრუნოვანი ( $\mathbf{v} = \text{const}$ ). ამ შემთხვევაში აჩქარება ნულის ტოლია, ამიტომ ძალას ხშირად აჩქარების მიზეზსაც უწოდებენ.

ფიზიკაში მეტად დიდი მნიშვნელობა აქვს ე. წ. ცენტრალური ძალების განხილვას, რამდენადაც ბუნებაში არსებული ძალების დიდი უმრავლესობა ცენტრალური

ხასიათს ატარებს. ძალას ეწოდება ცენტრალური, როცა მისი მიმართულება ემთხვევა წრფეს, რომელიც ყოველთვის გადის მოცემულ უძრავ ცენტრზე, ან, სხვაგვარად. როცა ნაწილაკზე მოქმედი ძალა მიმართულია რადიუსვექტორის გასწვრივ (ნახ. 8) და დამოკიდებულია მხოლოდ ცენტრიდან  $r = |\mathbf{r}|$  მანძილზე

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (6,6)$$

სადაც  $F(r)$  არის ძალის პროექცია  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$  მიმართულებაზე. ცხადია, ცენტრალური ძალა ზოგად შემთხვევაში დროზეც შეიძლება იყოს დამოკიდებული.



რადგან რადიუსვექტორი  $r(t)$  და მისი ნებისმიერი რიგის დროითი წარმოებული პოლარული ვექტორებია, ამიტომ აჩქარებაცა და ძალაც პოლარული ვექტორები იქნება.

ძალის ერთეულს  $CGS$  სისტემაში ეწოდება დინი. დინი არის ისეთი ძალა, რომელიც ერთ გრამ მასას ანიჭებს  $1 \frac{cm}{sec^2}$  აჩქარებას.  $SI$  სისტემაში კი ძალის ერთეული არის ნიუტონი, რომელიც  $1$  კგ მასას ანიჭებს  $1 \frac{m}{sec^2}$  აჩქარებას; ცხადია, რომ  $1$  ნიუტონი  $= 10^5$  დინს.

(6,4) წარმოადგენს მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას დროითი წარმოებულის მიმართ. იგი აკეშირებს აჩქარებას კოორდინატებთან და სიჩქარეებთან, ამიტომ შეგვიძლია იგი განვიხილოთ, როგორც მექანიკის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება. მეორე კანონის ზოგად დახასიათებას ქვემოთ მოვიყვანთ, ახლა კი გავიხსენოთ ნიუტონის მესამე კანონი.

მესამე კანონი. ყოველი ორი მატერიალური წერტილი ერთმანეთზე მოქმედებს ძალებით, რომლებიც სიდიდით ერთმანეთის ტოლია და საწინააღმდეგოდ არიან მიმართულნი. თუ ძალას, რომლითაც პირველი წერტილი მეორეზე მოქმედებს, აღვნიშნავთ  $F_{12}$ -ით, ხსლო ძალას, რომლითაც მეორე წერტილი პირველზე მოქმედებს  $F_{21}$ -ით, მაშინ ნიუტონის მესამე კანონის მათემატიკურად შემდეგი სახე ექნება:

$$F_{12} = -F_{21}. \quad (6,7)$$

აღვნიშნოთ ამასთან, რომ  $F_{12}$  ძალა მოდებულია მეორე სხეულზე,  $F_{21}$  კი — პირველზე.

თუ პირველი და მეორე კანონი საკმარისია ერთი მატერიალური წერტილის მოძრაობის დასახასიათებლად, მესამე კანონი საშუალებას გვაძლევს ერთი წერტილის მექანიკიდან გადავიდეთ მრავალი წერტილის მექანიკაზე.

ახლა ნიუტონის მესამე კანონი დავაკეშიროთ სივრცისა და დროის თვისებებთან. კერძოდ, გამოვარკვეოთ როგორი ფუნქცია უნდა იყოს ორ იზოლირებულ მატერიალურ წერტილს შორის მოქმედი  $F_{12}$  ძალა  $r_1$  და  $r_2$  რადიუსვექტორებისა, რომ დაცული აღმოჩნდეს (6,7) კანონი.

დროის ერთგვაროვნების თვისებით დროის ყველა მომენტი ფიზიკური თვალსაზრისით ერთმანეთის ეკვივალენტური უნდა იყოს, რაც იმას ნიშნავს, რომ  $F_{12}$  ძალა დროზე ცხადად დამოკიდებული არ იქნება.

სივრცის ერთგვაროვნების გამო, განხილული სისტემის გადატანით რაიმე  $a$  ვექტორზე ძალის მნიშვნელობა არ უნდა შეიცვალოს.  $a$  ვექტორზე წანაცვლებისას წერტილების რადიუსვექტორები შემდეგნაირად გარდაიქმნებიან:  $r'_1 = r_1 + a$ ,  $r'_2 = r_2 + a$ . მაშასადამე, ერთადერთი კომბინაცია, რომელიც  $a$  ვექტორზე წანაცვლებისას ინვარიანტული დარჩება, იქნება შემდეგი:  $r'_1 - r'_2 = (r_1 + a) - (r_2 + a) = r_1 - r_2$ . ამგვარად, სივრცის ერთგვაროვნების თვისება მოითხოვს, რომ  $F_{12}$  ძალა დამოკიდებული იყოს არა ცალკეული ნაწილაკის რადიუსვექტორზე, არამედ  $r = r_1 - r_2$  სხვაობაზე. ე. ი.  $F_{12} = F_{12}(r_1 - r_2)$ .

დაბოლოს, გამოვარკვეოთ რა შეზღუდვას ადებს ძალის კოორდინატებზე დამოკიდებულებას სივრცის იზოტროპიულობის თვისება. სივრცის იზოტროპიულობის ძალით იზოლირებული სისტემის თვისებება ფიზიკურად ეკვივალენტურია ნებისმიერი მიმართულებით, რაც იმას გვიჩვენებს, რომ ძალა ფუნქცია უნდა იყოს არა  $r = r_1 - r_2$  ვექტორის, არამედ  $r = |r_1 - r_2|$  სიდიდის, ე. ი. გვექნება

$$F_{12} = F_{12}(|r_1 - r_2|).$$

ორი ურთიერთქმედი მატერიალური წერტილის შემთხვევაში ფიზიკურად ერთადერთი გამოყოფილი მიმართულება იქნება  $r_{12} = (r_1 - r_2) / |r_1 - r_2|$  მიმართულება, ამიტომ ძალისათვის საბოლოოდ შეგვიძლია დავწეროთ

$$F_{12} = \frac{(r_1 - r_2)}{|r_1 - r_2|} F_{12}(|r_1 - r_2|). \quad (6,8)$$

ძალის ამ გამოხატულებიდან ნათლად ჩანს, რომ  $F_{12} = -F_{21}$ , ე. ი. ნიუტონის მესამე კანონი მართლაც უშუალოდ დაკავშირებული სივრცის ერთგვაროვნებისა და იზოტროპიულობის და დროის ერთგვაროვნების თვისებებთან.

რადგან ძალა ვექტორული სიდიდეა, ამიტომ იგი ხასიათდება სიდიდით, მიმართულებით და მოდების წერტილით. მოძრაობის აღწერის სურათი რომ უფრო სრული იყოს, საჭიროა ძალთა შეკრების კანონის შემოღებაც. ამ კანონის თანახმად ორი ერთი და იგივე წერტილში მოდებული ძალა იკრებება პარალელოგრამის წესით, ე. ი. მათი ტოლქმედი უდრის ამ პარალელოგრამის დიაგონალს, რომელიც აგებულია ამ ძალებზე.

ზემოთ განხილული კანონები საფუძვლად უძევს კლასიკურ, ანუ ნიუტონის მექანიკას.

## § 7. გალილეის ფარდობითობის პრინციპი

რაგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ათელის ინერციული სისტემები ხასიათდება იმით, რომ ამ სისტემებში ფიზიკური მოვლენები, ყველა სხვა სისტემებთან შედარებით მარტივად აღწერება. ამიტომ მექანიკაში, როგორც წესი, ინერციულ სისტემებს იყენებენ. ამასთან, რამდენადაც ინერციული სისტემები უამრავია, იმდენად აუცილებელია ვიპოვოთ ის ფორმულები, რომლებიც სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში განხილულ ერთი და იგივე ფიზიკურ სიდიდეებს ერთმანეთთან აკავშირებს. გარდა ამისა, საინტერესოა გამოვარკვიოთ, რა მოსდის თვით მოძრაობის განტოლებას ერთიდან მეორე ინერციულ სისტემაზე გადასვლის დროს. კერძოდ, უნდა გამოვარკვიოთ ასეთი გადასვლების დროს იცვლის თუ არა თავის სახეს მოძრაობის განტოლება.

ამისათვის განვიხილოთ ერთი ინერციული სისტემა  $x, y, z$ , რომელიც პირობითად უძრავად ჩავთვალოთ, და მეორე —  $x', y', z'$ , (შტრიხიანი სისტემა), რომელიც პირველის მიმართ მოძრაობს მუდმივი  $V$  სიჩქარით.

მატერიალური წერტილის რადიუს-ვექტორები უძრავი და მოძრავი სისტემების სათავეების მიმართ შესაბამისად აღვნიშნოთ  $r$  და  $r'$ -ით.

მატერიალური წერტილის რადიუს-ვექტორები უძრავი და მოძრავი სისტემების სათავეების მიმართ შესაბამისად აღვნიშნოთ  $r$  და  $r'$ -ით.

რადგან მოძრავი სისტემის სათავეს რადიუს-ვექტორი უძრავის მიმართ  $R = Vt$ , ამიტომ ამ ორ სისტემაში განსაზღვრულ რადიუს-ვექტორებს შორის გვექნება მარტივი კავშირი,

ფაი. 9.

$$r = r' + Vt, \quad (7,1)$$

$$t = t'.$$

აქ ჩვენ დავამატეთ ნიუტონის მექანიკისათვის დამახასიათებელი დროის აბსოლუტურობის პირობაც, ე. ი., რომ დრო როგორც მოძრავ, ისე უძრავ სისტემაში ერთნაირად მიმდინარეობს. (7,1) ფორმულებს გალილეის გარდაქმნის ფორმულებს უწოდებენ. გალილეის გარდაქმნის ფორმულები ზშირად განიხილება იმ კერძო შემთხვევაში, როცა შტრიხიანი სისტემა უძრავი სისტემის  $x$  ლერძის გასწვრივ მოძრაობს  $V = \text{const}$  სიჩქარით. ამ შემთხვევაში, (7,1) ფორმულები მიიღებენ სახეს:

$$\begin{aligned} x &= x' + Vt, \\ y &= y', \\ z &= z', \end{aligned} \quad (7,1')$$

$$t = t'.$$

ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ შებრუნებული გარდაქმნის ფორმულებიც, როცა შტრიხიანი სისტემის კოორდინატები გამოხატულია წერტილის კოორდინატებით უძრავ სისტემაში. (7,1)-დან ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} r' &= r - Vt, \\ t' &= t. \end{aligned} \quad (7,2)$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, შებრუნებული გარდაქმნის ფორმულების მისაღებად საკმარისია მოვახდინოთ  $V \rightarrow -V$  შეცვლა.

გავაწარმოოთ (7,1) ფორმულები დროის მიხედვით. მივიღებთ კავშირს სიჩქარეებს შორის ამ ორ ათვლის სისტემაში

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt} + V \quad (7,3)$$

ან

$$v = v' + V, \quad (7,4)$$

სადაც  $v$  წერტილის სიჩქარეა უძრავ სისტემაში,  $v'$  კი — მოძრავში. უკანასკნელი ფორმულა წარმოადგენს კლასიკური მექანიკის (გალილეის) სიჩქარეთა შეკრების კანონს.

განვიხილოთ ორი მატერიალური წერტილი მასებით  $m_1$  და  $m_2$ . ვთქვათ ეს სისტემა იზოლირებულია. მაშინ ამ ნაწილაკების ურთიერთქმედების ძალა ფუნქცია იქნება მხოლოდ ნაწილაკთა ურთიერთფარდობითი რადიუსვექტორისა  $F = F(r)$ , სადაც  $r = r_1 - r_2$ .  $r_1$  და  $r_2$  რადიუსვექტორები ათვლილია უძრავი ინერციული სისტემის სათავეს მიმართ. მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას უძრავ ინერციულ სისტემაში ექნება შემდეგი სახე:

$$m_1 \ddot{r}_1 = F(r), \quad (7,5)$$

$$m_2 \ddot{r}_2 = F(r). \quad (7,6)$$

ახლა ჩავეწეროთ ეს განტოლებათა სისტემა მოძრავ ინერციულ სისტემაში. რამდენადაც მოძრავ ინერციულ სისტემაში  $r'_1 = r_1 - Vt$  და  $r'_2 = r_2 - Vt$ , იმდენად გვექნება  $r_1 - r_2 = r'_1 - r'_2$ , ე. ი.  $r = r'$  და, მაშასადამე,

$$m_1 \ddot{r}'_1 = F(r'), \quad (7,7)$$

$$m_2 \ddot{r}'_2 = F(r'). \quad (7,8)$$

ე. ი. მოძრაობის განტოლებათა სისტემა ინვარიანტული (უცვლელი) დარჩა მოძრაობის ინერციულ სისტემაზე გადასვლის დროს. ახალ სისტემაში ძველი რადიუსვექტორები  $r_1$  და  $r_2$  უბრალოდ ახალი  $r'_1$  და  $r'_2$  აღნიშვნებში შეიცვალა.

მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა: მოძრაობის განტოლება ნაწილაკთა იზოლირებული სისტემის შემთხვევაში, ინვარიანტული (უცვლელი) რჩება ერთიდან მეორე ინერციულ სისტემაზე გადასვლის დროს. ან, სხვაგვარად, მოძრაობის განტოლება ინვარიანტულია გალილეის გარდაქმნების მიმართ. ეს იმას ნიშნავს, რომ დამკვირვებლები, რომლებიც სხვადასხვა ინერციულ სისტემაში იმყოფებიან, ერთი და იგივე მექანიკური მოვლენის აღწერის დროს ერთსა და იმავე შედეგებს მიიღებენ.

ინერციული სისტემის ფიზიკური თვისებების ეკვივალენტობას დროის აბსოლუტურობასთან ერთად უწოდებენ გალილეის ანდა კლასიკური მექანიკის ფარდობითობის პრინციპს.

როცა ნაწილაკთა სისტემა იზოლირებული აღარ არის, მაშინ ახალ ინერციულ სისტემაზე გადასვლისას მოძრაობის განტოლების სტრუქტურა შეიძლება შეიცვალოს. მაგრამ, ხშირად, არაიზოლირებულ ნაწილაკთა სისტემის მოძრაობის განტოლება კვლავ ინარჩუნებს ფორმას, ოღონდ ისე, რომ იცვლება განტოლებაში შემავალი კოორდინატების, სიჩქარეებისა და აჩქარებების ფუნქციების სახე. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მოძრაობის განტოლება ერთიდან მეორე ინერციულ სისტემაზე გადასვლისას ინარჩუნებს კოვარიანტულ ფორმას.

მაგალითისათვის განვიხილოთ  $m$  მასის მატერიალური წერტილის მოძრაობა ძალთა ველში. უძრავი ინერციული სისტემის სათავე მოვთავსოთ ძალთა ცენტრში, მაშინ წერტილის რადიუსვექტორი იქნება  $r$ . მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე

$$m\ddot{r} = F(r, t). \quad (7,9)$$

გადავიდეთ ახალ ინერციულ სისტემაზე, ე. ი. გამოვიყენოთ გარდაქმნა  $r = r' + Vt$ , მაშინ მივიღებთ

$$m\ddot{r}' = F'(r', t), \quad (7,10)$$

სადაც

$$F'(r', t) = F(r - Vt). \quad (7,11)$$

როგორც ვხედავთ, (7,9) და (7,10) განტოლებებს ერთნაირი (კოვარიანტული) სახე აქვთ; ფუნქცია  $F(r, t)$  ახალ სისტემაში შეცვლილია ახალი  $F'(r', t)$  ფუნქციით. მაშასადამე, მოძრაობის (7,9) განტოლება მართლაც კოვარიანტული ყოფილა.

აღნიშნოთ, რომ სინამდვილეში დრო და სივრცე ფარდობითია, ე. ი. მათი თვისებები დამოკიდებულია ათვლის სისტემის მოძრაობაზე, ამიტომ გალილეის გარდაქმნის კანონები ზოგად შემთხვევაში არ გამოდგება: იგი სამართლიანია მხოლოდ მცირე სიჩქარეებისათვის. ნებისმიერი სიჩქარეებისათვის (რომლებიც ნაკლებია სინათლის სიჩქარეზე  $c = 3 \cdot 10^{10}$  სმ/სეკ) სამართლიანია ლორენცის გარდაქმნის კანონები, თუ  $x', y', z'$  სისტემა მოძრაობს უძრავი სისტემის  $x$  ღერძის გასწვრივ მდებარე  $V$  სიჩქარით, მაშინ ლორენცის გარდაქმნებს შემდეგი სახე აქვს:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (7,12)$$

სადაც  $c$  სინათლის სიჩქარეა. ამ შემთხვევაში, როგორც ვხედავთ, დროც გარდაიქმნება. ცხადია, რომ მცირე სიჩქარეებისათვის, ე. ი. როცა მატერიალური წერტილის სიჩქარე  $V$  გაცილებით ნაკლებია სინათლის სიჩქარეზე ( $V/c \rightarrow 0$ ), ვლენულობთ გალილეის გარდაქმნის კანონებს, საიდანაც ის დასკვნა შეგვიძლია გამოვიტანოთ, რომ ნიუტონის მექანიკა სამართლიანია მხოლოდ მცირე სიჩქარეებისათვის.

### § 8. ნიუტონის მეორე კანონის ზოგადი დახასიათება. მდგომარეობის აღწერა

როგორც დავინახეთ, კლასიკურ მექანიკაში მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (8,1)$$

რომელიც წარმოადგენს სამი სკალარული განტოლების ერთობლიობას:

$$\begin{aligned} mx &= F_x, \\ m\ddot{y} &= F_y, \\ mz &= F_z \end{aligned} \quad (8,2)$$

ამასთან, ძალა შეიძლება დამოკიდებული იყოს კოორდინატებზე, სიჩქარეებზე, დროზე და სხვა. რადგან ძალის მდგენელები ერთდროულად დამოკიდებული შეიძლება იყვნენ  $x$ ,  $y$  და  $z$ -ზე, ამიტომ (8,2) წარმოადგენს მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას.

ამ სისტემის ამოხსნა საშუალებას მოგვცემს ვიპოვოთ მატერიალური წერტილის  $x$ ,  $y$ ,  $z$  კოორდინატები, როგორც დროის ფუნქციები, ე. ი.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (8,3)$$

ან ვექტორულად

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (8,3')$$

ამა თუ იმ ამოცანისათვის, ძალის მოცემული მნიშვნელობისათვის საჭირო იქნება (8,2) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა.

რადგან ნიუტონის (8,2) განტოლებები მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებებია. ამიტომ მათი ამოხსნისას შემოვა ექვსი განუზღვრელი მუდმივი; სახელდობრ, მოძრაობის განტოლებათა სისტემის ამოხსნა მოგვცემს:

$$\begin{aligned} x &= x(t; C_1, C_2, C_3, \dots, C_6), \\ y &= y(t; C_1, C_2, C_3, \dots, C_6), \\ z &= z(t; C_1, C_2, C_3, \dots, C_6), \end{aligned} \quad (8,4)$$

სადაც  $C_1, C_2, \dots, C_6$  ნებისმიერი მუდმივებია. ამ მუდმივების განსაზღვრა შეიძლება საწყისი პირობებიდან, ე. ი.  $t=0$  მომენტში კოორდინატებისა და სიჩქარეების მოცემული მნიშვნელობებიდან:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0, \\ v_x(0) &= v_{x_0}, \quad v_y(0) = v_{y_0}, \quad v_z(0) = v_{z_0}, \end{aligned} \quad (8,5)$$

ან ვექტორულად

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (8,6)$$

ამ პირობების გამოყენებით, თანახმად (8,4)-ისა, გვექნება:

$$\begin{aligned}x_0 &= x(0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\y_0 &= y(0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\z_0 &= z(0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\v_{x_0} &= \dot{x}(0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\v_{y_0} &= \dot{y}(0, C_1, C_2, \dots, C_n), \\v_{z_0} &= \dot{z}(0, C_1, C_2, \dots, C_n),\end{aligned}\tag{8,7}$$

ამ ექვსი ალგებრული განტოლებიდან განისაზღვრება  $C_1, C_2, \dots, C_n$  მუდმივები.

ამგვარად, ნიუტონის კანონები და საწყისი პირობები საცესებით განსაზღვრავენ მატერიალური წერტილის მოძრაობას.

აღვნიშნოთ, რომ კლასიკურ მექანიკაში მდგომარეობას უწოდებენ მატერიალური წერტილის კოორდინატებისა და სიჩქარეების (იმპულსების) ერთდროულად მოცემას.

ჩვენს მიერ ზემოთ მიღებული შედეგები ასე შეგვიძლია გამოეთქვათ: როცა ვიცით ნაწილაკის საწყისი მდგომარეობა, მიშინ ნიუტონის მოძრაობის განტოლება საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ ნაწილაკის ნებისმიერი შემდგომი მდგომარეობები ნებისმიერი სიზუსტით. ან, სხვანაირად, თუ კლასიკურ მექანიკაში ნაწილაკის აწმყო ზუსტად არის განსაზღვრული, მაშინ მოძრაობის განტოლება. ცალსახად განსაზღვრავს მის მომავალს.

მოძრაობის განტოლება მრუდწირულ კოორდინატებში. დაეწეროთ მოძრაობის განტოლება მრუდწირულ კოორდინატებში. ამისათვის საკმარისი იქნება მრუდწირულ კოორდინატებში გამონახტული აჩქარების მასაზე გამრავლება. თანახმად (5,29) ფორმულისა, გვექნება

$$\frac{m}{2h_{11}} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial v^2}{\partial \dot{u}_1} \right) - \frac{\partial v^2}{\partial u_1} \right] = F_{11}\tag{8,8}$$

თუ გამოვიყენებთ (5,30) ფორმულებს, სფერულ კოორდინატებში მოძრაობის განტოლებებისათვის მივიღებთ:

$$\begin{aligned}m [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2] &= F_r, \\m \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \right] &= F_\theta, \\m \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) \right] &= F_\phi,\end{aligned}\tag{8,9}$$

ხოლო ცილინდრულ კოორდინატებში (5,31) ფორმულები მოგვცემს:

$$\begin{aligned}m (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) &= F_\rho, \\m \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\phi}) &= F_\phi, \\m \ddot{z} &= F_z.\end{aligned}\tag{8,10}$$

აქ  $F_r, F_\theta, F_\phi$ , ასევე  $F_\rho, F_\phi$  და  $F_z$  წარმოადგენს მოქმედი ძალის გეგმილებს სათანადო მიმართულებებზე.

მოდრაობის განტოლების ინვარიანტობა დროის ინვერსიის მიმართ. ახლა გამოვარკვიოთ როგორი თვისებები ახასიათებს მოძრაობის განტოლებას მომავლის წარსულით შეცვლის მიმართ ან, როგორც ამბობენ, დროის ინვერსიის მიმართ, რომელიც მათემატიკურად  $t \rightarrow -t$  გარდაქმნის სახით გამოიხატება.

ფიზიკური თვალსაზრისით დროის ინვერსიისას სიჩქარის მიმართულება იცვლება საწინააღმდეგოთი  $\frac{dr}{dt} \rightarrow -\frac{dr}{dt}$  იმ დროს, როცა რადიუსვექტორი უცვლელი რჩება. რადგან აჩქარება წარმოადგენს რადიუსვექტორის მეორე წარმოებულს დროთი, ამიტომ  $t \rightarrow -t$  გარდაქმნისას ისიც უცვლელი იქნება

$$\frac{d^2r}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2r}{dt^2}.$$

ზემოთ ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ მოცემული საწყისი მდგომარეობის შემთხვევაში მოძრაობის განტოლება ცალსახად განსაზღვრავს მდგომარეობებს დროის შემდგომ მომენტებში. ახლა დაესვათ ასეთი კითხვა: შეიძლება თუ არა გამოვარკვიოთ საწყისი მდგომარეობის მიხედვით როგორი იყო სისტემის მდგომარეობა წარსულში? ცხადია ეს შესაძლებელი იქნება მაშინ, როცა  $t \rightarrow -t$  შეცვლისას სისტემა გაიმეორებს ყველა იმ მდგომარეობას, რომლებიც გეჰქონდა წარსულში, ე. ი. როცა მოძრაობის განტოლება ინვარიანტული იქნება  $t \rightarrow -t$  გარდაქმნის მიმართ. ცხადია, ზოგად შემთხვევაში ასეთ ინვარიანტობას ადვილი არ ექნება, მაგრამ იმ შემთხვევაში, როცა მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალა მხოლოდ რადიუსვექტორის ფუნქციაა, მოძრაობის განტოლება

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = F(r) \quad (8,11)$$

ინვარიანტული იქნება  $t \rightarrow -t$  გარდაქმნისა, ე. ი. მომავლის წარსულით შეცვლის მიმართ. როცა ძალა კოორდინატების გარდა დამოკიდებულია, მაგალითად, სიჩქარეზე, მაშინ მოძრაობის განტოლება ინვარიანტული აღარ იქნება მომავლის წარსულით შეცვლის მიმართ. ამ შემთხვევაში მოძრაობის განტოლების ინვარიანტობისათვის საჭიროა დამატებითი პირობები დაედოს ფიზიკური სიდიდეების ყოფაქცევას  $t \rightarrow -t$  გარდაქმნის დროს.

### § 9. მატერიალური წერტილის სწორხაზოვანი მოძრაობა

განვიხილოთ მატერიალური წერტილის სწორხაზოვანი მოძრაობა. ვთქვათ, მოძრაობა ხდება  $x$  ღერძის გასწვრივ. ძალა, რომელიც მოქმედებს მატერიალურ წერტილზე, აღვნიშნოთ  $F$ -ით. მოძრაობის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t). \quad (9,1)$$

განვიხილოთ ის კერძო შემთხვევები, როცა ძალა დამოკიდებულია ერთ-ერთზე  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $t$  სამი ცვლადიდან.

ასეთ პირობებში განტოლების ამოხსნა მარტივია და დაიყვანება ინტეგრირების მოქმედებაზე. ზემოთ აღნიშნული შემთხვევები განვიხილოთ ცალ-ცალკე.

ძალა დროის ფუნქციაა. როცა ძალა მხოლოდ დროის ფუნქციაა, (9,1) განტოლებას ექნება სახე

$$m\ddot{x} = F(t). \quad (9,2)$$

ავილოთ ინტეგრალი  $t$ -თი, მივიღებთ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt + c_1, \quad (9,3)$$

სადაც  $c_1$  ნებისმიერი მუდმივია და განისაზღვრება საწყისი პირობიდან. მოვითხოვთ შემდეგი საწყისი პირობები: როცა  $t=0$ , სიჩქარე  $v=v_0$ . მაშინ (9,3) მოგვეძებ

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt, \quad (9,4)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$a(t) = \int_0^t F(t) dt. \quad (9,5)$$

მაშინ

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} a(t). \quad (9,6)$$

მოვახდინოთ ინტეგრაცია კიდევ ერთხელ საწყისი პირობით: როცა  $t=0$ ,  $x=x_0$ . მივიღებთ

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t a(t) dt. \quad (9,7)$$

ეს არის მოძრაობის განტოლება სასრული სახით, (9,6) კი იძლევა სიჩქარეს ამგვარად, როცა ძალა მხოლოდ დროის ფუნქციაა, ამოცანა სავსებით გადაწყვეტილია.

ძალა სიჩქარის ფუნქციაა. ამ დროს გვაქვს მოძრაობის განტოლება

$$m \frac{dv}{dt} = F(v) \quad (v=\dot{x}) \quad (9,8)$$

აქედან განვსაზღვროთ  $dt$  და ავილოთ ინტეგრალი. მივიღებთ

$$t = m \int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)}, \quad (9,9)$$

სადაც  $v_0$  საწყისი სიჩქარეა.

ეს ინტეგრალი ფუნქციაა  $v$ -ის, აღვნიშნოთ იგი  $f(v)$  თი,

$$f(v) = m \int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)}. \quad (9,10)$$

ამის მიხედვით (9,9) ასე გადაიწერება:

$$t = f(v), \quad (9,11)$$

ამ ტოლობიდან კი ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ  $v$  როგორც ფუნქცია  $t$ -ის, ე. ი.

$$v = \dot{x} = \Phi(t), \quad (9,12)$$

რომლის ამოხსნას მივიღებთ უბრალო ინტეგრაციით. თუ მოვითხოვთ, რომ  $t=0$ -თვის  $x=x_0$ , გვექნება



$$x = x_0 + \int_0^t \dot{\Phi}(t) dt, \quad (9,13)$$

და ამოცანა ამ შემთხვევაშიც ამოხსნილია. განვიხილოთ ახლა უცანასკნელი შემთხვევა.

ძალა კოორდინატის ფუნქციაა. დაეწეროთ მოძრაობის განტოლება

$$m\ddot{x} = F(x). \quad (9,14)$$

ამ განტოლების ორივე მხარე გაავსრავლოთ  $dx$ -ზე. მივიღებთ

$$m \frac{dx}{dt} \cdot dx = m \frac{dx}{dt} \dot{x} dt = m\dot{x} d\dot{x} = F(x) dx. \quad (9,15)$$

ავიღოთ ინტეგრალი

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = \int F(x) dx + E, \quad (9,16)$$

სადაც  $E$  წარმოადგენს ენერჯის განზომილების ნებისმიერ მუდმივს. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\beta(x) = \int F(x) dx. \quad (9,17)$$

მაშინ

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E + \beta(x)]}. \quad (9,18)$$

რომლის ინტეგრაცია მოგვცემს

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E + \beta(x)]}}. \quad (9,19)$$

ინტეგრალი ფუნქციაა  $x$ -ის, ამიტომ ჩვენ მივიღეთ  $t = \varphi(x)$ , საიდანაც, თუ ამოვხსნით  $x$ -ს, ვიპოვით  $x = f(t)$ , ე. ი. ვეცოდინება მოძრაობის სასრული განტოლება.

ამგვარად, ამოცანა საძივე შემთხვევაში ამოხსნილია. საკმარისია ზემოთ მიღებულ ზოგად ფორმულებში ძალის კონკრეტული მნიშვნელობის ჩასმა, რომ ვიპოვოთ ნებისმიერი ერთგანზომილებიანი მოძრაობის ამოხსნა.

## § 10. ენერგია

განსაკუთრებით მნიშვნელოვან სიდიდეს მექანიკაში და, საზოგადოდ, მთელს ფიზიკაში, წარმოადგენს ენერგია. ენერჯის ცნება მკვიდროდაა დაკავშირებული მუშაობასთან, ამიტომ ჭერ განვმარტოთ მუშაობა.

მუშაობა, ვთქვათ მატერიალური წერტილი  $F$  ძალის გავლენით გადაადგილდა  $dr$  მანძილზე, მაშინ

$$(F, dr) = \sum_{\alpha=1}^3 F_{\alpha} dx_{\alpha} \quad (10,1)$$

სკალარულ ნამრავს უწოდებენ  $F$  ძალის ელემენტარულ მუშაობას  $dr$  გზაზე. აშკარაა, რომ მუშაობა სკალარული სიდიდეა. თუ გვაინტერესებს მუშაობა  $ab$  გზაზე, იგი მიიღება (10,1) გამოსახულების ინტეგრაციით  $ab$  წილის გასწვრივ, ე. ი.

$$A = \int_{ab} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int_{ab} \sum_{\alpha} F_{\alpha} dx_{\alpha}. \quad (10,2)$$

CGS სისტემაში მუშაობის ერთეულს წარმოადგენს ერგი. იგი უდრის ერთი ღინის ტოლი ძალის მიერ შესრულებულ მუშაობას ერთ სანტიმეტრ გზაზე.  $10^7$  ერგი =  $= 1$  ჯოულს, რომელიც წარმოადგენს მუშაობის ერთეულს SI სისტემაში. ჯოული გამოხატავს ერთი ნიუტონი ძალის მიერ შესრულებულ მუშაობას ერთ მეტრ გზაზე. ატომურ ფიზიკაში მუშაობის გასაზომად სარგებლობენ ელექტრონვოლტით ( $eV$ ), რომელიც შემდეგნაირადაა განმარტებული:

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-12} \text{ ერგი}. \quad (10,3)$$

$10^3 \text{ eV}$  უწოდებენ კილოელექტრონვოლტს ( $keV$ ),  $10^6 \text{ eV}$  ს მეგაეოლტს ( $MeV$ ) და ა. შ.

ცოცხალი ძალის კანონი. კინეტიკური და პოტენციალური ენერგია. დავწეროთ ნიუტონის მოძრაობის განტოლება

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (10,4)$$

ეს განტოლება სკალარულად გადავამრავლოთ  $d\mathbf{r}$  ვექტორზე; გვექნება

$$m \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}, d\mathbf{r} \right) = (\mathbf{F}, d\mathbf{r}). \quad (10,5)$$

მარჯვენა მხარე წარმოადგენს ძალის მიერ შესრულებულ მუშაობას ელემენტარულ  $d\mathbf{r}$  გზაზე. გარდაეკმნათ მარცხენა მხარე. იგი შემდეგნაირად წარმოვიდგინოთ:

$$(m\ddot{\mathbf{r}}, d\mathbf{r}) = m \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt}, d\mathbf{r} \right) = m(\mathbf{v}, d\mathbf{v}) = \frac{d(mv^2)}{2}. \quad (10,6)$$

ამგვარად, (10,5) მიიღებს გამოხატულებას

$$d \left( \frac{mv^2}{2} \right) = (\mathbf{F}, d\mathbf{r}). \quad (10,7)$$

სილიდეს

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad (10,8)$$

უწოდებენ ნაწილაკის კინეტიკურ ენერგიას ან ცოცხალ ძალას, ხოლო (10,7)-ს ცოცხალი ძალის კანონს. ეს კანონი გვიჩვენებს, რომ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა ტოლია კინეტიკური ენერგიის ცვლილებისა. თუ (10,7)-დან ავიღებთ ინტეგრალს  $ab$  წირის გასწვრივ, მივიღებთ

$$\frac{mv_b^2}{2} - \frac{mv_a^2}{2} = \int_{ab} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}). \quad (10,9)$$

ხშირია შემთხვევა, როცა  $\mathbf{F}$  ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა დამოკიდებულია ტრაექტორიის მხოლოდ საწყის  $a$  და საბოლოო  $b$  წერტილებზე და არაა დამოკიდებული იმ გზაზე, რომლითაც ნაწილაკი  $a$ -დან  $b$ -ში გადადის; ასეთ ძალებს კონსერვატულს უწოდებენ. წირითი ინტეგრალის თეორიიდან ცნობილია, რომ ამ შემთხვევაში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც რაიმე  $U(\mathbf{r})$  ფუნქციის სრული დიფერენციალი

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU(x, y, z). \quad (10,10)$$

მინუს ნიშანი შემოვიღეთ ხელსაყრელობის მიზნით.  $U(r)$ -ს პოტენციალურ ენერჯიას უწოდებენ. მაშასადამე, შესრულებული მუშაობა პოტენციალური ენერჯიის დანახარჯის ტოლი ყოფილა.

(10,10)-დან ჩანს, რომ რამდენადაც პოტენციალური ენერჯია შედის დიფერენციალის ნიშნის ქვეშ, იმდენად იგი განმარტებულია ნებისმიერი მუდმივი შესაკრების სიზუსტით, ე. ი.  $U(r)$  და  $U'(r) = U(r) + c \sin t$  ერთსა და იმავე ფიზიკურ მდგომარეობას შეესაბამება. ეს იმას ნიშნავს, რომ პოტენციალური ენერჯიის ნულოვანი მნიშვნელობა ნებისმიერად შეგვიძლია ავირჩიოთ. ჩვეულებრივად წერტილის პოტენციალურ ენერჯიას ისე ანორმირებენ, რომ მისი მნიშვნელობა უსასრულობაში ნულის ტოლი იყოს, მაშინ, თუ (10,10)-ს გავაინტეგრალებთ ია-დან ძალთა ველის რაიმე  $a$  წერტილამდე, გვექნება

$$U(r) = - \int_{\infty, a} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (10,11)$$

პოტენციალური ენერჯიის ასეთი ნორმირების დროს დადებითი პოტენციალური ენერჯია შეესაბამება განზიდვას, უარყოფითი — მიზიდვას. (10,11) ის მარკვენა მხარე გამოხატავს წერტილზე მოქმედი ძალის მუშაობას, აღებულს მინუს ნიშნით. ამ უკანასკნელს უწოდებენ დახარჯულ მუშაობას. ამრიგად, ჩვენ ვხედავთ, რომ მატერიალური წერტილის პოტენციალური ენერჯია სივრცის რაიმე წერტილში უდრის იმ მუშაობას, რომელიც უნდა დაიხარჯოს ძალთა ველის საწინააღმდეგოდ, რათა მატერიალური წერტილი უსასრულობიდან გადმოტანილ იქნეს სივრცის აღებულ წერტილში.

(10,9) და (10,10) ფორმულებიდან ვღებულობთ, რომ

$$\frac{mv_x^2}{2} - \frac{mv_y^2}{2} = U(r_a) - U(r_b). \quad (10,12)$$

სიდიდეს

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r), \quad (10,13)$$

ე. ი. წერტილის კინეტიკური და პოტენციალური ენერჯიების ჯამს უწოდებენ წერტილის სრულ მექანიკურ ენერჯიას. (10,12)-დან გვაქვს

$$E_a = E_b. \quad (10,14)$$

რაც სრული მექანიკური ენერჯიის შენახვის კანონის წარმოადგენს.

დავუბრუნდეთ (10,10) ფორმულას. ცხადია, რომ ამ ფორმულის საშუალებით შეგვიძლია ძალა დავაკვიშოროთ პოტენციალურ ენერჯიასთან. მართლაც, გვექნება:

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = - \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (10,15)$$

რომელიც ვექტორულად ასე ჩაიწერება:

$$\mathbf{F} = - \text{grad } U. \quad (10,16)$$

ამ გამოსახულებას ფორმალურად ასეც დავწერთ ხოლმე:

$$\mathbf{F} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \quad (10,17)$$

მაშასადამე, მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება მიიღებს სახეს:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (10,18)$$

ან, ვექტორულ აღნიშვნებში,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U. \quad (10,19)$$

პოტენციალური ძალის მავალითად გამოდგება სიმძიმის ძალის ერთგვაროვანი ველი. თუ დედამიწის მიზიდულობას ვიხილავთ დედამიწის მახლობელ არეში, ღრმის ზოგბი ნაკლებია დედამიწის რადიუსთან შედარებით, მაშინ ამ არის ყოველ წერტილში სიმძიმის ძალა  $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ . სადაც  $\mathbf{g}$  სიმძიმის ძალის აჩქარებაა, შეგვიძლია მუდმივად ჩავთვალოთ. სისტემის  $z$  ღერძი მივმართოთ ვერტიკალის გასწვრივ დედამიწიდან ზევით, მაშინ  $m$  მასის ნაწილაკზე მოქმედ სიმძიმის ძალას ექნება პროექციები:

$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = -mg \quad (10,20)$$

მაშასადამე, (10,11) ფორმულის თანახმად

$$mgdz = dU, \quad (10,21)$$

რომლის ინტეგრაციით მივიღებთ:

$$U(z) = mgz + \text{const.} \quad (10,22)$$

ჩავთვალოთ, რომ როცა  $z=0$  (დედამიწის ზედაპირზე)  $U(0)=0$ , მაშინ

$$U(z) = mgz. \quad (10,23)$$

ცოცხალი ძალის ფორმულის გამოყენების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ნაწილაკის თავისუფალი ვარდნა  $h$  ს.მალლიდან. ცხადია, რომ ცოცხალი ძალის კანონი, ამ შემთხვევაში, მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh, \quad (10,24)$$

საიდანაც მივიღებთ გალილეის ცნობილ ფორმულას

$$v = \sqrt{2gh}, \quad (10,25)$$

ე. ი. თავისუფლად ვარდნილი სხეულის სიჩქარე დამოკიდებულია მის დაშორებაზე დედამიწიდან.

ცოცხალი ძალის კანონი ცენტრალური ძალის შემთხვევაში. ახლა გამოვიყვანოთ ცოცხალი ძალის კანონი იმ მეტად მნიშვნელოვან შემთხვევაში, როცა ნაწილაკზე მოქმედ ძალას აქვს ცენტრალური ხასიათი, ე. ი. როცა

$$\mathbf{F} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (10,26)$$

მაშინ (10,7) ფორმულის მარჯვენა მხარე ასე გადაიწერება:

$$(\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \frac{F(r)}{r} (r, d\mathbf{r}). \quad (10,27)$$

რამდენადაც  $r^2 = \mathbf{r}^2$ , იმდენად გადიფერენციალებით მივიღებთ

$$(r, d\mathbf{r}) = r dr; \quad (10,28)$$

მაშასადამე, ცენტრალური ძალის შემთხვევაში მუშაობა ტოლი იქნება

$$(\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = F(r) dr. \quad (10,29)$$

აქედან გამომდინარე, ცენტრალური ძალისათვის ცოცხალი ძალის კანონი მიიღებს შემდეგ გამობატულებას:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F(r) dr, \quad (10,30)$$

ხოლო (10,10) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$F(r) dr = -dU(r). \quad (10,31)$$

ამასთან, ცენტრალურ ძალას შესაბამემა პოტენციალური ენერგია, რომელიც რადიუსვექტორის მხოლოდ  $r = |r|$  სიდიდებზეა დამოკიდებული. ეს იმას ნიშნავს, რომ  $r$  რადიუსის სფეროზე პოტენციალური ენერგიას აქვს ერთი და იგივე მნიშვნელობა. (10,31) ფორმულის თანახმად

$$F(r) = -\frac{dU}{dr}. \quad (10,32)$$

ცხადია, რომ ცენტრალური ძალის შესაბამისი პოტენციალური ენერგია შეიძლება განვსაზღვროთ შემდეგი ფორმულით:

$$U(r) = -\int_{\infty}^r F(r) dr. \quad (10,33)$$

ამასთან, ჩვენ კვლავ ვგულისხმობთ, რომ ძალის ცენტრიდან უსაზღვროდ შორს პოტენციალური ენერგია ნულის ტოლია  $U(\infty) = 0$ .

ცენტრალური ძალების მაგალითებია კულონური და გრავიტაციული ძალები. ორივე ეს ძალა მანძილზე ერთნაირადაა დამოკიდებული და

$$F(r) = -\frac{\alpha}{r^2}. \quad (\alpha = \text{const}). \quad (10,34)$$

გრავიტაციული ურთიერთქმედების შემთხვევაში  $\alpha = \gamma m_1 m_2$ . სადაც  $m_1$  და  $m_2$  მატერიალური წერტილების მასებია,  $\gamma$  — ე. წ. გრავიტაციული მუდმივა. კულონური ურთიერთქმედების დროს კი  $\alpha = kq_1 q_2$ , სადაც  $q_1$  და  $q_2$  წერტილოვანი მუხტებია, ხოლო  $k$  კოეფიციენტი.

(10,33) ფორმულის თანახმად (10,34) ძალის შესაბამისი პოტენციალური ენერგიას ექნება გამობატულება

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}. \quad (10,35)$$

აღსანიშნავია, რომ (10,10) ტოლობას ადგილი ყოველთვის არა აქვს. რადგან ყოველ ძალას პოტენციალი არ გააჩნია. ძალები, რომლებსაც აქვთ პოტენციალი, პოტენციალური ძალებს უწოდებენ. როგორც (10,15)-დან ჩანს, ძალას მაშინ აქვს პოტენციალი, ე. ი. მაშინ არ არის დამოკიდებული მისი მუშაობა გზის ფორმაზე, როცა არსებობს ისეთი  $U(r)$  ფუნქცია, რომლის კერძო წარმოებულები სათანადო ცვლადით უღრის ძალის შესაბამის მდგენელებს. თუ ავიღებთ (10,16) გამოსახულების როტორს და გავითვალისწინებთ, რომ  $\text{rot grad } U = 0$ , მივიღებთ

$$\text{rot } F = 0. \quad (10,36)$$

მაშასადამე, ძალას პოტენციალი მაშინ ექნება, როცა მისი როტორი ნულის ტოლია.

როცა პოტენციალური ენერგია კოორდინატების გარდა დროზეც ცხადად არის დამოკიდებული, მაშინ მდგომარეობას არასტაციონარულს უწოდებენ. ხოლო, როცა პოტენციალური ენერგია დროზე ცხადად არ არის დამოკიდებული, მაშინ მდგომარეობას სტაციონარული ჰქვია. სტაციონარული მდგომარეობა იმითაა მნიშვნელოვანი, რომ, ამ შემთხვევაში, როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, ადგილი აქვს სრული მექანიკური ენერგიის შენახვას. სტაციონარული მდგომარეობა გვაქვს მაშინ, როცა სისტემა იზოლირებულია ან, როცა სისტემა იმყოფება დროის მიხედვით უცვლელ გარეშე ველში.

ბუნებაში რომ მხოლოდ ერთი მატერიალური წერტილი არსებობდეს, მასზე არავითარი ძალა არ იმოქმედებდა, რადგან ძალა წარმოადგენს აღებულ მატერიალურ წერტილზე სხვა სხეულების ურთიერთქმედების შედეგს. ამ პირობებში პოტენციალური ენერგიაც ნულის ტოლი იქნებოდა. პოტენციალური ენერგია შედეგია გარეშე სხეულების ურთიერთქმედებასა აღებულ მატერიალურ წერტილზე. ამასთან ეს ურთიერთქმედება შეიძლება გამოწვეული იყოს სხვადასხვა ხასიათის ძალებით. მაგალითად, გრავიტაციული ძალებით, ელექტრული, ატომგულური და სხვ. წმინდა მექანიკურა მოძრაობა შეგვიძლია დავახასიათოთ პოტენციალური ძალებით, მაგრამ ასეთი მოძრაობა ხშირად გარკვეულ იდეალიზაციას წარმოადგენს. პრაქტიკულად ძალიან ხშირად მოძრაობა ხდება გარემოში, სადაც მოძრავე სხეულები ერთმანეთს ეხახუნებიან, აწვეებიან, აფერხებენ მოძრაობას და სხვ. ამ დროს მექანიკური მოძრაობის პირობები დარღვეულია, რადგან ხახუნის შედეგად ადგილი აქვს სითბოს გამოყოფას. ხახუნი კი შედეგია რთული შინაგანი ატომური მოძრაობებისა. სითბოს გამოყოფის შემთხვევაში მოძრაობას მხოლოდ კოორდინატებით ვეღარ დავახასიათებთ. ასეთ შემთხვევაში იძულებულნი ვართ განვიხილოთ სიჩქარეზე დამოკიდებული პოტენციალური ენერგიებიც, ამასთან პოტენციალური ენერგია სიჩქარეების ძალზე რთული ფუნქცია შეიძლება აღმოჩნდეს. აღსანიშნავია, რომ ამ დროს მექანიკური ენერგია აღარ ინახება, რადგან ენერგიის ნაწილი სხეულის გათბობაზე იხარჯება. ასეთი მოძრაობის დროს, მაშასადამე, ადგილი აქვს ენერგიის დისიპაციას — გაბნევას და სათანადო პოტენციალური ენერგიის ზუსტი სახის დადგენა არ ხერხდება.

ურთიერთქმედების ველი. ვთქვათ, გვაქვს ძალთა ცენტრი, რომელიც ურთიერთქმედებს სივრცის ნებისმიერ წერტილში მოთავსებულ მატერიალურ წერტილზე. ამ ურთიერთქმედების დასახასიათებლად შემოჰყავთ ველის ცნება. ვივლისხმობთ, რომ სივრცის ყოველ წერტილში განსაზღვრული გვაქვს ვექტორი, რომლის მნიშვნელობა შეესაბამება აღებულ წერტილში ძალთა ცენტრის მატერიალურ წერტილთან ურთიერთქმედების ძალას. ამგვარად, დავუშვათ, რომ სივრცის ყოველ წერტილში განსაზღვრული გვაქვს გარკვეული ვექტორი. ვექტორების ამ სიმრავლეს უწოდებენ ძალთა ველს. ცხადია, რომ ძალთა ველი იქნება ვექტორული ველი. ასევე ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგიის ნაცვლად შეგვიძლია ვილაპარაკოთ ურთიერთქმედების ველზე. ამასთან. ურთიერთქმედების პოტენციალური ველი სკალარული ველი იქნება. სინტეზისა აღვნიშნოთ, რომ თანამედროვე წარმოდგენით ველი კი არ არის ურთიერთქმედების აღწერის ფორმალური მეთოდი, არამედ იგი რეალურად არსებობს და მისი საშუალებით ხდება სხეულთა ურთიერთქმედება. მაგალითად, გრავიტაციულ ურთიერთქმედებას ანხორციელებს გრავიტაციული ველი, ელექტრულს — ელექტრული ველი, ატომგულურს — ატომგულური ველი და ა. შ.

მაშასადამე, პოტენციალური ენერგია ახასიათებს იმ ველს, რომლითაც სხეულები აღებულ მატერიალურ წერტილზე მოქმედებენ.

## § 11. ფუნდამენტური ურთიერთქმედებანი

ბუნებაში არსებული მრავალფეროვანი მოვლენის გამომწვევი ურთიერთქმედებანი ყველა დამოუკიდებელი არ არის. თანამედროვე ფიზიკის თვალსაზრისით ურთიერთქმედებანი შეიძლება გაეაერთიანოთ ოთხი ტიპის ურთიერთქმედებაში, რომელთაც ფუნდამენტური ურთიერთქმედებანი ეწოდება. ეს ურთიერთქმედებანია: გრავიტაციული, ელექტრომაგნიტური, ძლიერი, ანუ ატომგულური და სუსტი. ნაწილი ამ ურთიერთქმედებისა კარგად არის შესწავლილი, ნაწილის ბუნება კი ჯერაც ბოლომდე გარკვეული არ არის. თეორიული თვალსაზრისით ყველაზე კარგად დამუშავებულია ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედება, შემდეგ კი გრავიტაციული. ამის მიზეზი ის არის, რომ ეს ურთიერთქმედებანი ელინდება მაკროსკოპულეების ურთიერთქმედებებშიაც, წინააღმდეგ ძლიერი და სუსტი ურთიერთქმედებებისა, რომლებიც აპირობებენ ნაწილაკთა შორის ურთიერთქმედებას მხოლოდ მიკროსამყაროში. მიკროსამყაროში კი ურთიერთქმედების ხასიათის დადგენა შედარებით უფრო ძნელია.

აღსანიშნავია, რომ ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ორი ისეთი ნაწილაკი, რომელთა შორის ადგილი ჰქონდეს ყველა ზემოთ დასახელებულ ურთიერთქმედებას. ასეთია მაგალითად, ორი პროტონი. მაგრამ იმის მიხედვით, თუ რა მანძილებზე ხდება ეს ურთიერთქმედება, როგორია ნაწილაკთა მასები ან სხვა დამახასიათებელი სიდიდეები, მნიშვნელოვანი აღმოჩნდეს მხოლოდ ერთი რომელიმე ურთიერთქმედება. ქვემოთ მოცემულია ყველა ფუნდამენტური ურთიერთქმედების ასე თუ ისე დეტალური დახასიათება.

გრავიტაციული ურთიერთქმედება. გრავიტაციული ურთიერთქმედება შესწავლილი იყო ნიუტონის მიერ. კერძოდ, მან დაამტკიცა, რომ სამყაროს ნებისმიერი ორი მატერიალური წერტილი მასებით  $m_1$  და  $m_2$  ერთმანეთს მიიზიდავს ე. წ. მსოფლიო მიზიდულობის ძალით, რომლის შესაბამისი პოტენციალური ენერგია განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$E_{\text{გრავიტ.}}(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (11,1)$$

სადაც  $\gamma$  არის გრავიტაციული მუდმივა; რიტხობრივად იგი ტოლია

$$\gamma = 6,673 \cdot 10^{-8} \frac{\text{სმ}^3}{\text{გ} \cdot \text{სეკ}^2} = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{მ}^3}{\text{კგ} \cdot \text{სეკ}^2}. \quad (11,2)$$

$r$  კი არის მატერიალურ წერტილებს შორის არსებული მანძილი. როგორც ვხედავთ, გრავიტაციული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია ცენტრალური სიმეტრიის ხასიათისაა. აღსანიშნავია, რომ სხეულებს შორის ადგილი აქვს მხოლოდ მიზიდვას, სამყაროს ნეიტრალური სხეულები არასოდეს არ განიზიდავენ ერთმანეთს, ამიტომაც უწოდებენ ამ ურთიერთქმედებას გრავიტაციულს (gravitation — მიზიდვა).

იმის გამო, რომ გრავიტაციული მუდმივის სიდიდე ძალიან მცირეა, გრავიტაციული ურთიერთქმედება არაერთ რაღაც ასრულებს მხოლოდ მაკროსკოპულეების (დიდი მასების) ურთიერთქმედების შემთხვევაში. კერძოდ, იგი პასუხისმგებელია. მაგალითად, პლანეტების მოძრაობაზე მზის გარშემო, სხეულების მოძრაობაზე დედამიწის მაზაღვლობის ყელში და სხვა მრავალი.

გრავიტაციული პოტენციალური ენერგია განსაზღვრავს გრავიტაციულ ველს, რომელიც მოქმედებს სამყაროს ყველა სხეულზე, ამიტომაც ამ ველს მეტად დიდი

მნიშვნელობა აქვს ფიზიკური მოვლენების შესწავლისათვის. აღსანიშნავია, რომ, როგორც ამას (11,1) პოტენციალური ენერჯის მანძილზე დამოკიდებულება გვიჩვენებს, გრავიტაციული ურთიერთქმედება ხასიათდება შორსმოქმედებით. ამიტომ ხშირად ამბობენ, რომ გრავიტაციული ურთიერთქმედების რადიუსი უსასრულობის ტოლია. გრავიტაციული ურთიერთქმედებისათვის დამახასიათებელია მდგრადი მდგომარეობის წარმოქმნა. ასეთ მდგრად მდგომარეობას ქმნის მაგალითად, ლედამიწა და მთავარ, ლედამიწა და მზე და ა. შ.

ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედება. ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედება ხდება მხოლოდ ელექტრულად დამუხტულ ნაწილაკებს შორის. ცნობილია, რომ ორი დამუხტული წერტილოვანი უძრავი ნაწილაკი ერთმანეთზე მოქმედებს კულონური ძალით, რომლის შესაბამისი პოტენციალური ენერჯია განისაზღვრება შემდეგი კანონით:

$$U_{კლ.}(r) = \pm k \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (11,3)$$

პროპორციულობის  $k$  კოეფიციენტი შეგვიძლია ერთის ტოლი გავხადოთ, თუ (11,3)-ში შემავალ ყველა სიდიდეს გავზომავთ CGS სისტემაში.  $e$  არის ელემენტარული მუხტის სიდიდე ( $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$  CGSE),  $Z$  მიუთითებს, თუ რამდენ ელემენტარულ მუხტს შეიცავს ესა თუ ის სისტემა. ასე მაგალითად, პროტონისა და ელექტრონისათვის  $Z=1$ , ხოლო ჰელიუმის ატომგულისათვის  $Z=2$  და ა. შ.  $r$  არის მანძილი მუხტებს შორის. (11,3)-ში დადებითი ნიშანი აიღება მიზიდვის შემთხვევაში (საწინააღმდეგო ნიშნის მუხტები), უარყოფითი კი განზიდვის (ერთნაირი ნიშნის მუხტები) დროს.

როგორც ვხედავთ, კულონური ურთიერთქმედებაც ცენტრალურ ხასიათს ატარებს და მანძილზე ისევე კანონით არის დამოკიდებული, როგორც გრავიტაციული ურთიერთქმედება. მაშასადამე, კულონური ურთიერთქმედებაც შორსმოქმედების ხასიათისაა, მისი ქმედებს რადიუსი უსასრულობის ტოლია.

როცა მუხტები მოძრაობენ. მაშინ ელექტროსტატიკური ძალის გარდა დამუხტულ ნაწილაკებს შორის მოქმედებს მაგნიტური ძალებიც, ხოლო ველს, რომელსაც ქმნიან მოძრავი დამუხტული ნაწილაკები, ელექტრომაგნიტურ ველს უწოდებენ.

ელექტრომაგნიტური ძალები მნიშვნელოვანია, როგორც მაკროსამყაროში მიმდინარე მოვლენების შესწავლის დროს, ისე ატომური მოვლენების გარკვევისას. კერძოდ. ატომში ელექტრული ძალები ფუნდამენტურ როლს ასრულებენ, რამდენადაც ატომის გულსა და მის გარშემო გარსში მყოფ ელექტრონებს შორის კულონური ძალები მოქმედებს. კულონურ ველს არსებითი მნიშვნელობა აქვს ატომგულური პროცესების შესწავლაშიაც. აღსანიშნავია, რომ კულონური მიზიდვის შემთხვევაში შესაძლებელია ნაწილაკთა მდგრადი მდგომარეობის შექმნა. ასეთ მდგრად მდგომარეობას ქმნის, მაგალითად, პროტონი და ელექტრონი (წყალბადის ატომი) და სხვა.

აღვნიშნოთ, რომ ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედება შეუდარებლად ძლიერია გრავიტაციულ ურთიერთქმედებაზე. მართლაც, ვთქვათ ერთმანეთს ვადარებთ ორი ერთი და იგივე დამუხტული ნაწილაკის. როგორც გრავიტაციულ, ისე კულონურ ურთიერთქმედებას. ცხადია, რომ მათი ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯიების ფარდობა ტოლი იქნება

$$\frac{U_{კლ.}(r)}{U_{გრავიტ.}(r)} = \frac{e^2}{\gamma m^2} \quad (11,4)$$



სადაც  $m$  ნაწილაკის მასაა. ელექტრონისათვის ( $m_e \approx 10^{-27}$  გრ) ეს ფარდობა მოგვემს 10<sup>42</sup>, ხოლო პროტონებისათვის ( $m_p \approx 2000 m_e$ ) ამ ფარდობას ექნება მნიშვნელობა 10<sup>38</sup>; ამასთან, ეს თანაფარდობა სამართლიანია ნაწილაკთა ნებისმიერი ურთიერთდაშორების შემთხვევაში, რამდენადაც ორივე პოტენციალური ენერგია მანძილის მიხედვით ერთნაირად იცვლება. როგორც ვხედავთ, გრავიტაციული ურთიერთქმედება ელექტრომაგნიტურთან შედარებით მართლაც უმნიშვნელოა.

აღვნიშნათ, რომ თანამედროვე კვანტური ელექტროდინამიკის მიხედვით ყოველი მუხტი გარსშემორტყმულია ელექტრომაგნიტური ველით. მუხტებს შორის ურთიერთქმედება ხორციელდება სწორედ ამ ველით. კულონური პოტენციალური ენერგია კი შედეგაა ამ ველებს შორის ელექტრომაგნიტური კვანტების — ფოტონების უწყვეტი გაცვლისა (ერთი მუხტი წარმოქმნის ფოტონს, მეორე კი შთანთქმავს).

ძლიერი (ატომგულური) ურთიერთქმედება. ძლიერი ურთიერთქმედება ხდება ატომგულის შემადგენელ ნაწილაკებს — ნეიტრონებსა ( $n$ ) და პროტონებს ( $p$ ) (ნუკლონებს) შორის. ეს ურთიერთქმედება დამოკიდებული არ არის ელექტრულ მუხტზე. ამიტომ ( $n, p$ ), ( $n, n$ ) და ( $p, p$ ) ძალები ერთმანეთის ტოლია. ატომგულური ძალები დაახლოებით 100 — 1000-ჯერ ინტენსიურია ელექტრომაგნიტურ ძალებზე, ამიტომაც უწოდეს ამ ურთიერთქმედებას ძლიერი. აღსანიშნავია, რომ დღეისათვის ცნობილ ურთიერთქმედებებს შორის ატომგულური ძალეზე ყველაზე უფრო ძლიერია. სამწუხაროდ, ძლიერი ურთიერთქმედების შესახებ ჩვენ ჯერ კიდევ საკმარისად ცოტა რამ ვიცით. ყოველ შემთხვევაში, ჩვენ დღეს არ ვიცით ატომგულური ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგიის მათემატიკური სახით ჩაწერა. თუ შეაკრავთ ვიშაყლებთ, იმის მტკიცებად კი არ შეგვიძლია, საზოგადოდ შესაძლებელია თუ არა ამ ურთიერთქმედების გამოხატვა ცნობილი ფუნქციებით.

ექსპერიმენტული და თეორიული გამოკვლევების საფუძველზე დღეისათვის ატომგულური ძალების შესახებ ცნობილია შემდეგი:

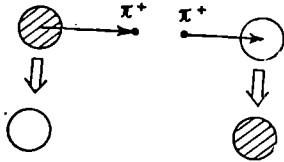
1. ატომგულური ურთიერთქმედება, განსხვავებით ზევით განხილული გრავიტაციული და ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედებებისაგან, არის ახლოსქმედების ხასიათისა. ნუკლონები ძალიან ძლიერად მოქმედებენ ატომგულური მანძილების არეში  $1 \div 2\phi$ , სადაც ფერმი  $\phi = 10^{-13}$  სმ, ამ მანძილის გარეთ კი სწრაფად ისპობიან.

2. ატომგულური ძალებს ახასიათებთ ნაჭერობა. რაც იმას ნიშნავს, რომ ისინი ეფექტურად მოქმედებენ მხოლოდ რამდენიმე ახლოს მყოფ ნუკლონს შორის.

3. როგორც ირკვევა, ატომგულური ძალები ძირითადად ცენტრალურ ხასიათს ატარებენ, მაგრამ ამ ურთიერთქმედებაში გარკვეული წვლილი შეაქვს არაცენტრალურ ურთიერთქმედებასაც. გამორიცხული არ არის ამ ურთიერთქმედების დამოკიდებულება ნაწილაკთა სიჩქარეზეც, რაც ძალიან მცირე მანძილებზე (დაახლოებით  $0.5\phi$ ) იწვევს განზიდვას.

4. ატომგულური ძალებს ახასიათებთ გაცვლითი ურთიერთქმედება. კერძოდ, დამუხტული ნაწილაკების ურთიერთქმედების თეორიის ანალოგიურად იუკავას მიერ ნაწინასწარმეტყველები იყო, რომ ნუკლონები ურთიერთქმედებენ ნაწილაკების გაცვლით. იუკავას გაანგარიშებით ამ ნაწილაკის მასა ტოლი უნდა ყოფილიყო 200 — 300 ელექტრონის  $m_e$  მასისა. რადგან ასეთი ნაწილაკის მასა საშუალოდ ელექტრონისა და პროტონის მასებს შორის, ამიტომ ამ ძიპოთეზურ ნაწილაკს მეზონი უწოდეს, რაც საშუალოდ ნიშნავს. იმ დროისათვის ასეთი ნაწილაკები ბუნებაში არსებობდა ცნობილი არ იყო, მაგრამ შემდგომში ასეთი ნაწილაკები

აღმოჩინეს კოსმოსურ სხივებში. მას  $\pi$  მეზონი უწოლეს. არსებობს, როგორც დადებითი  $\pi^+$ , ისე უარყოფითი  $\pi^-$  და ნეიტრალური  $\pi^0$  მეზონები. ისინი არამდგრადი ნაწილაკებია და სეკუნდის მემილიარდები დროის შემდეგ სხვა ნაწილაკებად გარდაიქმნებიან. დღეს  $\pi$ -მეზონებს ადვილად იღებენ ხელოვნურადაც, ამჩქარებლების საშუალებით. ამასთან, შემდგომში ხელოვნურად წარმოქმნილ იქნა ახალი ნაწილაკები, რომელთა მასათა სპექტრი ფართო ინტერვალში იცვლება. ბევრი მათგანი მძიმეა ნუკლონებზედაც კი და ასევე ძლიერი ურთიერთქმედება ახასიათებთ.



ნახ. 10. ნაწილზე სქემატურად მოცემული მეზონების გამოსხივება. შთანთქმის შედეგად ნუკლონების ადგილების გააცვლა.

ვე, ნეიტრონმა შეიძლება გამოასხივოს  $\pi^-$ -მეზონი, ხოლო პროტონმა შთანთქმის იგი (ნახ. 10).

ამ თეორიაზე დაყრდნობით იუკავამ პოტენციალური ენერჯისათვის მიიღო შემდეგი გამოსახულება:

$$U(r) = -U_0 \frac{e^{-r/r_0}}{r}, \quad (11,5)$$

სადაც  $U_0$  და  $r_0$  მუდმივებია. ამასთან,  $r_0$  სიდიდით ატომგულური ძალების ქმედების რადიუსის რიგისაა ( $r_0 \sim 2\phi$ ). (11,5) პოტენციალური ენერჯია ახლოსქმედებისაა. მაგრამ, როგორც გამოარკვეა, იგი ძლიერი ურთიეროქმედების ყველა ასპექტს ვერ ასახავს. ასე რომ, მართალია იუკავას იდეა ნუკლონთა გაცვლით ურთიეროქმედების შესახებ, როგორც ჩანს, სწორია, მაგრამ ამ დაშვებით მიღებული პოტენციალური ენერჯია, გაურკვეველი მიზეზების გამო, არ არის ის, რომელიც საესებით აღწერს ატომგულურ ურთიეროქმედებას.

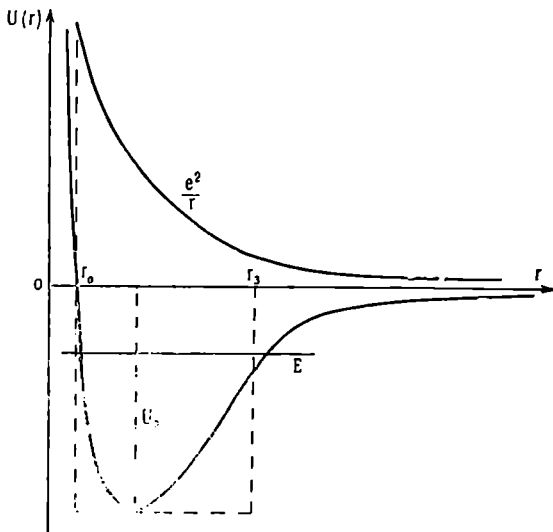
სწორედ იმის გამო, რომ ატომგულური ურთიეროქმედების პოტენციალური ენერჯის სახე დღეს ზუსტად დადგენილი არ არის, ურთიეროქმედებას იღებენ სხვადასხვა ტიპის ფუნქციების სახით. ერთ-ერთი ასეთი პოტენციალური ენერჯის გრაფიკი მოცემულია ნახ. 11-ზე. ამ გრაფიკის მიხედვით ძალიან მცირე მანძილებზე  $r_0 \approx 0,5\phi$  ადგილი აქვს მძლავრ განზიდვას,  $r_0 < r \leq r_0$  ადგილი აქვს მძლავრ მიზიდვას. რომელიც სიდიდით გაცილებით მეტია დღეს ცნობილ ყველა ურთიეროქმედებაზე. პოტენციალური ენერჯის მაქსიმალურ მნიშვნელობას —  $U_0$  უწოდებენ ურთიეროქმედების პოტენციალური ენერჯის სიღრმეს. სიდიდის რიგით იგი  $100 \text{ MeV}$ -ის ტოლია. დაწყებული  $r_0 = 2\phi$ -დან პოტენციალური ენერჯია სწრაფად ისპობა. ცხადია, რომ ეს მრუდი მხოლოდ თვისობრივად გამოხატავს ნუკლონებს შორის არსებულ ნამდვილ ურთიეროქმედებას. იმავე ნახაზზე პუნქტირით მოტანილია პოტენციალური ენერჯის გრაფიკი, რომელიც კიდევ უფრო გამარტივებულად გადმოსცემს ძლიერი ურთიეროქმედების თვისობრივ ხასიათს. ამ მრუდს უწოდებენ სწორკუთხა პოტენციალურ ორმოს. შედარების მიზნით ნახაზზე მოცემულია ორი პროტონის კულონური პოტენციალური ენერჯის გრაფიკიც.

ატომგულური ძალების ელექტრომაგნიტურთან შედარების მიზნით გამოვთვალოთ რას უდრის ორი პროტონის კულონური ურთიერთქმედების ენერგია ატომგულურ ( $\sim 2\phi$ ) მანძილზე. მართივი შეფასება მოგვცემს

$$U = \frac{e^2}{r_0} \approx 0,6 \text{ MeV},$$

იმ დროს, როცა ძლიერი ურთიერთქმედება რიგით 100 MeV-ის ტოლია.

აღსანიშნავია, რომ ძლიერი ურთიერთქმედებაც ახორციელებს მდგრად მდგომარეობას, ასეთი უმარტივესი სისტემაა, მაგალითად, დეიტრონი, რომელიც შედგება ერთი ნეიტრონისა და ერთი პროტონისაგან, ჰელიუმის ატომგული, რომელიც შედგება ორი ნეიტრონისა და ორი პროტონისაგან და ა. შ.



ნახ. 11. ნახაზზე უწყვეტი ხაზით მოცემულია პოტენციალური ენერჯის მრული, რომელიც თვისობრივად გადმოსცემს ნუკლონებს შორის ურთიერთქმედებას. მთელ რიგ ამოკანებში სიმარტივის მიზნით იხილავენ ე. წ. პოტენციალურ ორმოსაც, რომელიც მოცემულია პუნქტირით.  $r_0$  გამზიდავი ბირთვის რადიუსია,  $r_2$  — ატომგულის რადიუსი, ხოლო  $U_2$  — პოტენციალური ორმოს სიღრმე. ნახაზზე გამოხატულია ორი პროტონის კულონური ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯია.

სუსტი ურთიერთქმედება. ზევით განხილულ ურთიერთქმედებებისაგან განსხვავებით, როგორც ჩანს, სუსტი ურთიერთქმედება ნაწილაკების მდგრად მდგომარეობას არ ქმნის, იგი იწვევს მხოლოდ დაშლით პროცესებს. პირველად ასეთი ურთიერთქმედება შესწავლილი იყო ნეიტრონისა და პროტონის  $\beta^-$  დაშლისას, შემდეგი სქემით;

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}, \quad (11,6)$$

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu, \quad (11,7)$$

სადაც  $e^-$  არის ელექტრონი,  $e^+$  დადებითი ელექტრონი (ანტიელექტრონი), ანუ პოზიტრონი,  $v$ , ე. წ. ნეიტრინოა, ხოლო  $\bar{\nu}$  — ანტინეიტრინო. აღსანიშნავია, რომ მსგავსი სქემით ხდება გარდაქმნა იმ ელემენტარული ნაწილაკებისაც, რომლებიც მიიღებიან მძლავრი ამჩქარებლებით და რომელთა შესახებაც ზემოთ გვქონდა საუბარი.

სუსტი ურთიერთქმედება ძლიერ ურთიერთქმედებაზე კარგად არის შესწავლილი, მაგრამ მისი თეორია ჯერ კიდევ შორსაა დასრულებისაგან. მაგალითად, ჩვენ არც კი ვიცით ამ ძალების ქმედების რადიუსი სასრულია თუ არა. როგორც ჩანს, იგი ვაკუუმით ნაკლებია ძლიერი ურთიერთქმედების რადიუსზე. არის მოსაზრება, რომ სუსტი ურთიერთქმედების რადიუსი შეიძლება ნულის ტოლი იყოს. ასევე უცნობია, სუსტი ურთიერთქმედება, მსგავსად ძლიერისა, ხორციელდება გარკვეული — „სუსტად მოქმედი“ ნაწილაკების გაცვლის საშუალებით თუ არა.

აღვნიშნოთ, რომ სუსტი ურთიერთქმედება დაახლოებით  $10^{12}$ -ჯერ სუსტია ძლიერ ურთიერთქმედებაზე.

ამგვარად, ფუნდამენტური ურთიერთქმედებების პოტენციალური ენერგიები სძლიერის მიხედვით შემდეგნაირად შეგვიძლია დავლაგოთ:

$$U_{ძლიერი} \gg U_{ელ. მაგნ.} \gg U_{სუსტი} \gg U_{გრავიტ.} \quad (11,8)$$

ქმედების რადიუსების მიხედვით კი გვექნება შემდეგი სურათი:

$$r_{გრავიტ.} = r_{ელ. მაგნ.} \gg r_{ძლიერი} > r_{სუსტი} \quad (11,9)$$

თუ ძლიერ ურთიერთქმედებას ავიღებთ ერთეულად, მაშინ ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედება დახასიათდება  $10^{-2} - 10^{-3}$  სიდიდით, სუსტი  $10^{-13} - 10^{-14}$  ით, ხოლო გრავიტაციული  $10^{-39}$  ით.

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ ძლიერ ურთიერთქმედებას კვანტური მექანიკის მეთოდებით შეისწავლიან ატომგულის ფიზიკაში, სუსტ ურთიერთქმედებას კვანტური ელექტროდინამიკის მეთოდებით — ელემენტარული ნაწილაკების ან მაღალი ენერგიების ფიზიკაში, ელექტრომაგნიტურ ურთიერთქმედებას, როგორც კლასიკური ელექტროდინამიკით, მაკროსხეულების შემთხვევაში, ისე კვანტური ელექტროდინამიკით — ატომის ფიზიკაში. გრავიტაციულ ურთიერთქმედებას კი, როგორც წესი, შეისწავლიან კლასიკურ მექანიკაში, რამდენადაც, როგორც ზევით აღვნიშნეთ. იგი არსებითაა მხოლოდ დიდი მასის მქონე სხეულების ურთიერთქმედების შემთხვევაში.

## § 12. მატერიალური წერტილის დამახასიათებელი სიდიდეები და შენახვის კანონები

სამყარო ისეა აგებული, რომ იზოლირებული მატერიალური წერტილის დამახასიათებელი რიგი ფიზიკური სიდიდეებისა, მოძრაობის მთელი დროის განმავლობაში, ერთსა და იმავე მნიშვნელობას ინარჩუნებენ. ეს სიდიდეები, როგორც წესი, დამოკიდებული არიან მატერიალური წერტილის კოორდინატებზე და კოორდინატების დროით პირველი რიგის წარმოებულებზე (სიჩქარეებზე), აგრეთვე, ზოგად შემთხვევაში, დროზეც, ამიტომ მათ მოძრაობის პირველ ინტეგრალებს უწოდებენ. ამგვარად, მატერიალური წერტილის მოძრაობის ინტეგრალს ექნება შემდეგი სახე:

$$\Phi(r, \dot{r}; t) = \text{const.} \quad (12,1)$$

მოდრაობის ინტეგრალებს შორის განსაკუთრებით მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ ე. წ. მუდმივობის ან შენახვის კანონები, რომლებიც გამოხატავენ მექანიკის ფუნდამენტური სიდიდეების: ენერჯიის, იმპულსის და იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონებს.

ცხადია, რომ მოძრაობის (12,1) ინტეგრალი წარმოადგენს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას, ამიტომ ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში მექანიკის ამოცანის გადაწყვეტა შესაძლებელია ამ განტოლების ამოხსნით.

მტკიცდება, რომ ყველა დამოუკიდებელი პირველი ინტეგრალის ცოდნა ეკვივალენტურია მოძრაობის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნისა. ხოლო, როცა ცნობილია მოძრაობის პირველ ინტეგრალთა მხოლოდ ნაწილი, მაშინ საშუალება არსებობს მოძრაობის განტოლებათა რიგის დაწვევისა. ამიტომ მოძრაობის ინტეგრალებს დიდი მნიშვნელობა ენიჭებათ მექანიკური სისტემის ზოგადი თვისებების შესწავლის საქმეში.

იმპულსი, იმპულსის მუდმივობის კანონი. მოძრაობის განტოლება დავწეროთ შემდეგი სახით:

$$d(mv) = Fdt \quad (12,2)$$

და ავიღოთ ინტეგრალი  $t_0$ -დან  $t$ -მდე. მივიღებთ

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^t Fdt, \quad (12,3)$$

სადაც  $v_0$  საწყისი სიჩქარეა.  $Fdt$ -ს ეწოდება ძალის ელემენტარული იმპულსი, ხოლო  $\int_{t_0}^t Fdt$  ინტეგრალს ძალის იმპულსი ( $t - t_0$ ) დროის განმავლობაში.

როცა ძალა მოქმედებს მცირე  $\tau$  დროის შუალედში, მაშინ ინტეგრალის საშუალო მნიშვნელობის თეორემით გვექნება  $mv - mv_0 \approx F\tau$ . დავუშვათ, უსასრულოდ მცირე დროის განმავლობაში იმპულსი იცვლება სასრული სიდიდით, მაშინ  $F$  ძალა იქნება უსასრულოდ დიდი. ასეთ ძალას ეწოდება იმპულსური ან დარტყმითი. როცა მატერიალურ წერტილზე ძალა არ მოქმედებს, მაშინ  $mv = mv_0 = \text{const}$ , რაც იმპულსის შენახვის კანონს გამოხატავს. ამგვარად, იზოლირებული ნაწილაკის მოძრაობა ინერციულია და მისი იმპულსი  $p = \text{const}$ , ე. ი. იმპულსის მუდმივობის კანონი ნიუტონის პირველი კანონის ეკვივალენტურია.

იმპულსის მომენტი, მისი მუდმივობის კანონი. განვიხილოთ რაიმე  $A$  ვექტორი და შემოვიღოთ შემდეგი მერვე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი:

$$M_{ik} = x_i A_k - x_k A_i, \quad (12,4)$$

რომელსაც ვუწოდოთ მომენტის ტენზორი, ამ ტენზორის დეალურ ვექტორს უწოდებენ  $A$  ვექტორის მომენტს სათავეს მიმართ

$$M_j = \frac{1}{2} \sum_{k,i} \epsilon_{jki} M_{ki}, \quad (j=1, 2, 3) \quad (12,5)$$

სადაც  $\epsilon_{jki}$  ლევი-ჩივიტას სიმბოლოა. (12,5)-ის (12,4)-ის შეტანით მივიღებთ

$$M_j = \sum_{k,i} \epsilon_{jki} x_k A_i. \quad (12,6)$$

რომელიც წარმოადგენს  $[r, \dot{A}]$  ვექტორული ნაშრავლის  $j$ -ურ კომპონენტს. თვით ვექტორს ეწეება სახე

$$M = [r, A] = \sum_{jkl} \epsilon_{jkl} i_j x_k \dot{A}_l. \quad (12,7)$$

$i_1, i_2, i_3$  დეკარტის კოორდინატთა სისტემის ღერძების ორტეზია, ხოლო  $r$  არის  $A$  ვექტორის საწყისი წერტილის რადიუსვექტორი. მომენტის ვექტორი პერპენდიკულარულია  $r$  და  $A$  ვექტორებზე გაშვებული სიბრტყისა, მიმართულების განსასაზღვრავად კი გვეკრძება დამატებითი შეთანხმება. (12,7) განმარტება მექანიკაში მნიშვნელოვანია ორ შემთხვევაში: როცა  $A$  წარმოადგენს იმპულსს და იმპულსის დროით წარმოებულს. ამიტომ  $M$  მომენტი იქნება აქსიალური ვექტორი, რამდენადაც  $r$  და მისი ნებისმიერი რიგის დროითი წარმოებული პოლარული ვექტორებია. შეთანხმდეთ და  $M$  მომენტის მიმართულება მარჯვენა სისტემაში განსაზღვროთ მარჯვენა ბურღის წესით, ე. ი., თუ  $r$  ვექტორს უმცირესი კუთხით დავატრიალებთ  $A$  ვექტორისაკენ, მაშინ მარჯვენა ბურღის გადაადგილების მიმართულება დაემთხვევა მომენტის მიმართულებას.

რამდენადაც აქსიალური ვექტორი ღერძების ინვერსიისას მიმართულებას იცვლის, ხოლო ინვერსიის დროს მარცხენა სისტემა მარჯვენაში გადადის და პირიქით, ამიტომ ასეთი ოპერაციის დროს მარჯვენა ბურღის წესი მარცხენა ბურღის წესით უნდა შეიცვალოს და პირიქით.

როცა  $A = p$ , სადაც  $p = mv$  იმპულსია, მაშინ

$$l = [r, p] \quad (12,8)$$

ეწოდება იმპულსის მომენტი სათავის მიმართ. ხოლო ვექტორს

$$k = [r, \dot{p}] = [r, F] \quad (12,9)$$

უწოდებენ ძალის მომენტს სათავის მიმართ. მომენტები, როგორც ვხედავთ, დამოკიდებულია რადიუსვექტორზე, ე. ი. სისტემის სათავის არჩევაზე.

როცა მატერიალურ წერტილზე მოქმედი ძალა  $F=0$ , მაშინ ძალის მომენტიც ნულია  $k=0$ , იმპულსის მომენტი კი შეიძლება ნულისაგან განსხვავდებოდეს. იმპულსის მომენტის მდგენელებისათვის  $\epsilon_{ijk}$  ტენზორის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$l_i = \sum_{k,j} \epsilon_{ijk} x_k p_j \quad (12,9')$$

ან გაშლილი სახით

$$l_x = y p_z - z p_y, \quad l_y = z p_x - x p_z, \quad l_z = x p_y - y p_x. \quad (12,10)$$

ვიპოვოთ იმპულსის მომენტის წარმოებული დროითი

$$\dot{l} = [\dot{r}, p] + [r, \dot{p}], \quad (12,11)$$

რადგან  $\dot{r}$ -ს აქვს  $p$ -ს მიმართულება, ამიტომ პირველი წევრი ნულის ტოლია, მეორე კი გამოხატავს ძალის მომენტს, ამგვარად,

$$\frac{dl}{dt} = [r, F] = k. \quad (12,12)$$

მივიღეთ მნიშვნელოვანი შედეგი — წერტილის იმპულსის მომენტის წარმოებული დროითი უდრის მოქმედი ძალის მომენტს; როცა მატერიალურ წერტილზე გარეშე ძალა არ მოქმედებს, მაშინ  $F=0$ , და სათანადოდ  $k=0$ , რაც (12,12)

ფორმულის თანახმად მოგვეცემს  $l = \text{const}$ , ე. ი. ადგილი ექნება იმპულსის მომენტის შენახვას. მაშასადამე, თუ ნაწილაკი იზოლირებულია, მაშინ მისი იმპულსის მომენტი ნებისმიერი წერტილის მიმართ მუდმივ სიდიდეს წარმოადგენს. მაგრამ იმპულსის მომენტი შეიძლება შეინახოს არაიზოლირებულ ნაწილაკისათვისაც იმ შემთხვევაში, როცა  $k=0$ . სახელობრ, იმპულსის მომენტი ინახება ცენტრალური ძალებისათვის. ცენტრალური ძალის შემთხვევაში  $\mathbf{F} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ , ამიტომ  $k=0$  და მივიღებთ

$$\frac{dl}{dt} = 0, \quad (12,13)$$

საიდანაც

$$l = [\mathbf{r}, \mathbf{p}] = \text{const}, \quad (12,14)$$

რაც წარმოადგენს იმპულსის მომენტის შენახვის კანონს.  $l$  ვექტორია. ამიტომ (12.14) ფაქტიურად გვაძლევს სამი სკალარული სიდიდის შენახვის კანონს:

$$l_x = A, \quad l_y = B, \quad l_z = C, \quad (12,15)$$

სადაც  $A, B$  და  $C$  მუდმივებია.

შესაძლებელია, რომ  $k$  ვექტორის მხოლოდ ერთი ან ორი მდგენელი უდრიდეს ნულს. მაშინ, ცხადია, შეინახება იმპულსის მომენტის მხოლოდ შესაბამისი მდგენელები.

იმპულსის მომენტის შენახვის კანონიდან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი ფაქტი, რომ ცენტრალური ძალების გავლენით მატერიალური წერტილი ყოველთვის ერთ სიბრტყეში მოძრაობს. ამის დასამტკიცებლად საკმარისია  $l$  ვექტორი სკალარულად გავამრავლოთ წერტილის რადიუსვექტორზე. გვექნება

$$l \cdot \mathbf{r} = ([\mathbf{r}, \mathbf{p}], \mathbf{r}) = m([\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}], \mathbf{r}). \quad (12,16)$$

შერეულ ნამრავლში შეგვიძლია ვექტორები ციკლურად გადავადგილოთ, რის გამოც მივიღებთ

$$m([\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}], \mathbf{r}) = m([\mathbf{r}, \mathbf{r}], \dot{\mathbf{r}}) = 0. \quad (12,17)$$

მაშასადამე,

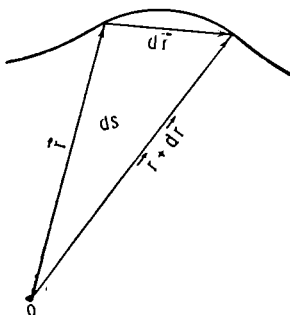
$$(l, \mathbf{r}) = l_x x + l_y y + l_z z = 0, \quad (12,18)$$

რადგან  $l$  მოძრაობის ინტეგრალია, თანახმად (12,12) ფორმულებისა, გვექნება

$$Ax + By + Cz = 0, \quad (12,18')$$

ეს კი სათავეზე გამავალი სიბრტყის განტოლებაა. ამგვარად, მივიღეთ მნიშვნელოვანი შედეგი, რომ ცენტრალური ძალების შემთხვევაში მოძრაობა ბრტყელია, ე. ი. ნაწილაკის ტრაექტორია ყოველთვის ერთ სიბრტყეში ძვება.

დავაკავშიროთ იმპულსის მომენტის შენახვის კანონი ფართით სიჩქარესთან. ვექტორული ნამრავლის თვისებით რადიუსვექტორის მიერ შემოწერილი უსასრულოდ მცირე  $ds$  ფართის ვექტორი, რომლის მიმართულაა განსაზღვრულია მარჯვენა ბურღის წესით, ტოლი იქნება გამოსახულების (იხ. ნახ. 12)



ნახ. 12

$$ds = \frac{1}{2} [r, dr]. \quad (12,19)$$

სიდიდეს  $\frac{ds}{dt}$  უწოდებენ ფართით სიჩქარეს. იგი ტოლია

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2m} [r, p]. \quad (12,20)$$

თუ გავხსენებთ იმპულსის მომენტის განმარტებას, მივიღებთ

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2m} l. \quad (12,21)$$

ცენტრალური სიმეტრიის ველში მომენტი ინახება, ამიტომ

$$s = \frac{l}{2m} t + \text{const.} \quad (12,22)$$

როცა  $t=0$ , თუ  $s=0$  მივიღებთ

$$s = \frac{l}{2m} t. \quad (12,22')$$

ამგვარად, ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრაობისას წერტილის რადიუსვექტორის მიერ შემოწერილი ფართი დროის პროპორციულია. ეს კანონი, რომელსაც ადგილი აქვს ნებისმიერ ცენტრალური სიმეტრიის ველში, კერძო შემთხვევაში, პლანეტების მოძრაობისასათვის აღმოჩენილი იყო კეპლერის მიერ.

ენერგიის შენახვის კანონი. ენერგიის შენახვის კანონი ზემოთ გამოვიყენებთ, მაგრამ ჩვენ მას განვიხილავთ ზოგად შემთხვევაში, როცა პოტენციალური ენერგია დროის ცხადი ფუნქციაა. სრული მექანიკური ენერგია, პოტენციალური ძალების შემთხვევაში, ტოლია

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U(r, t). \quad (12,23)$$

ვიპოვოთ სრული წარმოებული დროითი

$$\frac{dE}{dt} = m(\dot{r}, \ddot{r}) + \frac{\partial U}{\partial t} + \left( \frac{\partial U}{\partial r}, \dot{r} \right). \quad (12,24)$$

ეს ტოლობა დაეწეროთ შემდეგნაირად:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \left( \dot{r}, m\ddot{r} + \frac{\partial U}{\partial r} \right). \quad (12,25)$$

ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად ფრჩხილებში მოთავსებული ჯამი ნულის ტოლია და, მივიღებთ

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (12,26)$$

თუ პოტენციალური ენერგია დროს ცხადად არ შეიცავს, ე. ი.  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ , მაშინ, (12,26)-ის თანახმად, გვექნება

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U(r) = \text{const.}, \quad (12,27)$$

ე. ი. ენერგიის შენახვის კანონი.



ამგვარად, მატერიალური წერტილისათვის საერთოდ გვაქვს შემდეგი შვიდი მოძრაობის ინტეგრალი:

$$E = \text{const}, \quad p_x = \text{const}, \quad p_y = \text{const}, \quad p_z = \text{const}, \\ l_x = \text{const}, \quad l_y = \text{const}, \quad l_z = \text{const}. \quad (12,28)$$

განვიხილოთ თავისუფალი მატერიალური წერტილი. ადვილად ჩვენება, რომ მისთვის ყველა მოძრაობის ინტეგრალი დამოუკიდებელი არ იქნება. მართლაც, (12,27) შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად:

$$E = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}. \quad (12,29)$$

აქედან ჩანს, რომ ოთხი მოძრაობის ინტეგრალი შემზღვია ერთი პირობით. გარდა ამისა (12,16)-დან აშკარა შემდეგი დამოკიდებულება (ვინაიდან  $|\mathbf{l} \perp \mathbf{p}$ ):

$$(\mathbf{l}, \mathbf{p}) = l_x p_x + l_y p_y + l_z p_z = 0, \quad (12,30)$$

რაც საშუალებას გვაძლევს კიდევ ერთი ინტეგრალის სხვა ინტეგრალებით გამოხატვისა. ამგვარად, თავისუფალ ნაწილაკს ექნება მხოლოდ ხუთი დამოუკიდებელი მოძრაობის ინტეგრალი.

მოძრაობის ინტეგრალების მნიშვნელობაზე მოძრაობის ამოცანის ამოხსნისათვის არაერთხელ გვექნება საუბარი. ახლა კი აღვნიშნოთ, რომ მოძრაობის ინტეგრალების მოცემა ერთი ან რამდენიმე საწყისი პირობის მოცემის ტოლფასია. მაგალითად, თუ გვაქვს ენერგიის ინტეგრალი, ეს იმას ნიშნავს, რომ მას დროის ყოველ შემდგომ მომენტში იგივე მნიშვნელობა ექნება, რაც  $t=0$  საწყის მომენტში. თუ  $t=0$  მომენტში  $r=r_0$  და  $\dot{r}=\dot{r}_0$ , მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$E = \frac{m\dot{r}_0^2}{2} + U(r_0), \quad (12,31)$$

საიდანაც შეგვიძლია ამოვხსნათ რომელიმე საწყისი კოორდინატი ანდა რომელიმე საწყისი სიჩქარე.

### § 13. მატერიალური წერტილის ერთგანზომილებიანი მოძრაობა და ენერგიის ინტეგრალი

განვიხილოთ მატერიალური წერტილის ერთგანზომილებიანი მოძრაობა  $x$  ღერძის გასწვრივ. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ერთგანზომილებიანი მოძრაობა მნიშვნელოვანია იმ მხრივაც, რომ ენერგიის ინტეგრალის გამოყენებით, მოძრაობის განტოლების ამოხსნის გარეშე, შევძლებთ მოძრაობის განსაზღვრას. დავწეროთ ენერგიის ინტეგრალი ერთგანზომილებიანი მოძრაობისათვის

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \text{const}. \quad (13,1)$$

აქედან შეგვიძლია ამოვხსნათ  $\dot{x}$ . გვექნება

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}. \quad (13,2)$$

საიდანაც

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}}. \quad (13,3)$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (13,4)$$

მოცემული  $U(x)$  პოტენციალური ენერჯიის დროს ამოვხსნით ინტეგრალს, რომელიც  $x$ -ის ფუნქცია იქნება

$$t = \varphi(x). \quad (13,5)$$

ამ უკანასკნელიდან კი განვსაზღვრავთ  $x$ , როგორც დროის ფუნქციას და ამით განხილული შემთხვევა საესებით ემთხვევა § 9-ში განხილულ მოძრაობის შესამე შემთხვევას, როცა ძალა კოთრდინატის ფუნქცია იყო.

ახლა გვაკეთოთ ზოგადი შენიშვნები ერთგანზომილებიანი მოძრაოლის ამოცანის ირგვლოვ. რადგან კინეტიკური ენერჯია არსებითად დადებითი სიდიდეა, ამიტომ ნაწილაკის მოძრაობა დასაშვებია იმ არეში, რომლისთვისაც შესრულებულია პირობა

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = E - U(x) \geq 0, \quad (13,6)$$

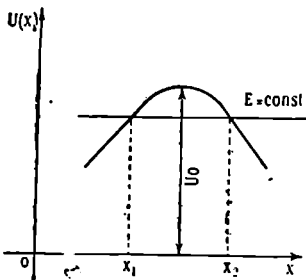
ე. ი. იმ არეში, რომელშიაც სრული ენერჯია პოტენციალურზე მეტია. ნახ.

13-ზე მოცემული პოტენციალური ენერჯიის შემთხვევაში მოძრაობისათვის დასაშვები არეა  $x \leq x_1$ ;  $x \geq x_2$ , ხოლო ნახ. 14-სათვის  $x_1 \leq x \leq x_2$ . ამ ნახაზეზე პოტენციალური ენერჯიის გრაფიკების გარდა მოცემულია სრული ენერჯიის შესაბამისი სწორებიც. ნათელია, რომ ნახ. 13-

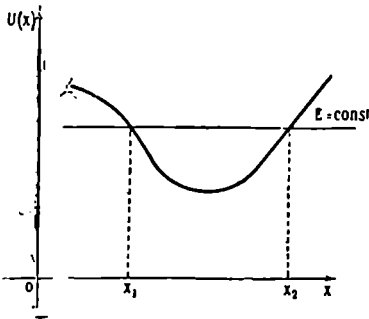
ზე გამოხატული პოტენციალური ენერჯიის შემთხვევაში ნაწილაკი რომ  $x_1 \leq x \leq x_2$  არეში მოხვდეს. მისი სრული ენერჯია ნაკლები უნდა იყოს პოტენციალურზე, ეს კი გვაძლევს უარყოფით კინეტიკურ ენერჯიას, რასაც აზრი არა აქვს. ამიტომ ნაწილაკისათვის აღნიშნულ არეში მოძრაობა აკრძალულია.  $x_1$  და  $x_2$  წერტილებში  $E = U(x)$  და ამიტომ კინეტიკური ენერჯია და, მაშასადამე, სიჩქარეები ნულის ტოლია. ამ წერტილებს მობრუნების წერტილებს უწოდებენ. აშკარაა, რომ ეს წერტილები განისაზღვრება განტოლებით

$$E = U(x). \quad (13,7)$$

ნახ. 13-ზე გამოხატულ პოტენციალური ენერჯიის მრუდს პოტენციალურ ჯებირს უწოდებენ, მისი მაქსიმალური  $U_0$  მნიშვნელობას კი — პოტენციალური ჯებირის სი-



ნახ. 13



ნახ. 14

მალღეს. ნაწილაკს ჯებირის ერთი მხრიდან მეორეზე გადასვლა მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ შეუძლია, როცა მისი სრული ენერგია მეტია ჯებირის სიმაღლეზე. ნახ. 14-ზე მოყვანილია პოტენციალური ჯებირის შებრუნებული შემთხვევა. მას პოტენციალურ ორმოს უწოდებენ. ამ შემთხვევაში ნაწილაკს შეუძლია უსასრულოდ დიდხანს იმოძრაოს  $x_1, x_2$  არეში ისე, რომ მის გარეთ არ გამოვიდეს. აღსანიშნავია, რომ მიზიდვის ყოველი პოტენციალური ენერგია შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ გარკვეული პოტენციალური ორმოს სახით.

როცა პოტენციალური ენერგია ისეთია, რომ მობრუნების წერტილები ან სულ არა გვაქვს, ან გვაქვს მხოლოდ ერთი, მაშინ ნაწილაკს შეუძლია უსასრულოდ მაშინ წასვლა და მოძრაობა იქნება შემოუსაზღვრავი — ფინიტური. თუ გვაქვს ორი ისეთი მობრუნების წერტილი, რომელთა შორის დატულია პირობა  $E \geq U$ , მაშინ მოძრაობა ხდება სასრულ არეში. ასეთ მოძრაობას ფინიტურს უწოდებენ.

ეთქვით, პოტენციალური ენერგია ნორმირებულია ისე, რომ ადგილი აქვს პირობას

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0, \quad (13,9)$$

მაშინ ადვილია დატყობა, რომ ფინიტური მოძრაობა დასაშვებია მხოლოდ  $E < 0$  შემთხვევაში. მართლაც, დავუშვათ, სრული ენერგია უარყოფითია და (13,1) გამოსახულებასში გადავიღეთ ზღვარზე, როცა  $x \rightarrow \infty$ . მივიღებთ

$$0 > E = \frac{mx^2}{2}. \quad (13,9)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ კინეტიკური ენერგია უარყოფითია, რასაც აზრი არა აქვს. ამ წინააღმდეგობამდე მიგვიყვანა  $x$ -ის მისწრაფებამ უსასრულობისაკენ. ამგვარად,  $E < 0$  დროს მოძრაობა მართლაც ფინიტურია.

განვიხილოთ პოტენციალურ ორმოს ნაწილაკის მოძრაობა. ცხადია, რომ ერთგანზომილებიანი ფინიტური მოძრაობა იქნება პერიოდული მოძრაობა. იმ დროს, რომელიც საჭიროა, რომ ნაწილაკი  $x_1$  წერტილიდან  $x_2$ -ში მივიდეს და შემდეგ ისევ  $x_1$ -ში დაბრუნდეს, ეწოდება რბევის პერიოდი და აღვნიშნოთ  $T$ -ით. აშკარაა, რომ თანახმად (13,4) ფორმულისა, რბევის პერიოდისათვის გვექნება

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}}, \quad (13,10)$$

$x_1$  და  $x_2$  მობრუნების წერტილებზე: განისაზღვრება (13,7) განტოლებიდან, ე. ი. ფესვქვეშა გამოსახულების ნულთან ტოლობიდან.

განვიხილოთ მარტივი მაგალითი. ვიპოვოთ რბევის პერიოდი ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს პოტენციალურ ველში

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}, \quad k = \text{const}, \quad (13,11)$$

მობრუნების წერტილები განისაზღვრება პირობიდან

$$\frac{kx^2}{2} = E, \quad (13,12)$$

ასე რომ, რხევის პერიოდისათვის გვექნება

$$T = 2 \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2E/k}}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{kx^2}{2} \right)}} dx \quad (13,13)$$

ამ მარტივი ინტეგრალის ამოხსნის შემდეგ მივიღებთ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (13,14)$$

სიღიღეს

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (13,15)$$

უწოდებენ რხევის სიხშირეს. მაშასადამე, რხევის პერიოდი

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

საიდანაც მივიღებთ რხევის სიხშირის

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (13,16)$$

ცნობილ ფორმულას.

ახლა ვიპოვოთ რხევალი ნაწილაკის კოორდინატის დროზე დამოკიდებულება. ამისათვის საკმარისია გამოვიყენოთ (13,4) ფორმულა (13,11) პოტენციალური ენერჯიის შემთხვევაში. მარტივი ინტეგრაციის ჩატარების შემდეგ მივიღებთ

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha \right), \quad (13,17)$$

სადაც  $\alpha$  მუდმივი განისაზღვრება საწყისი პირობით. კერძოდ, (13,4) ფორმულის თანახმად, როცა  $t=0$ , მაშინ  $x=x_0$ , ამიტომ

$$\alpha = \arcsin \left( \sqrt{\frac{k}{2E}} x_0 \right). \quad (13,18)$$

თუ გავითვალისწინებთ (13,15) ფორმულას, (13,17)-დან საბოლოოდ მივიღებთ

$$x(t) = a \sin(\omega t + \alpha), \quad (13,19)$$

სადაც

$$a = \sqrt{\frac{2E}{k}} = x_{max} \quad (13,20)$$

უწოდება რხევის ამპლიტუდა. რხევალი ნაწილაკის ენერჯიისათვის (13,20) ფორმულის დახმარებით მივიღებთ

$$E = \frac{m\omega^2 a^2}{2} \quad (13,21)$$

ე. ი. რხევის ენერჯია დამოკიდებულია რხევის სიხშირესა და ამპლიტუდაზე.

## მატერიალურ წერტილთა სისტემის მექანიკა

### § 14. ნაწილაკთა სისტემა და მისი დამახასიათებელი სიდიდეები

გადავიდეთ ნაწილაკთა სისტემის შესწავლაზე. მოვიტანოთ რამდენიმე განმარტება.

ურთიერთმოქმედ მატერიალურ წერტილთა ერთობლიობას ეწოდება მექანიკური სისტემა, თუ თითოეული ნაწილაკის მოძრაობა დამოკიდებულია დანარჩენი ნაწილაკების მოძრაობაზე.

როცა მექანიკური სისტემის ნაწილაკთა კოორდინატები და სიჩქარეები, დროის ნებისმიერ მომენტში, შეზღუდული არ არის, მაშინ ასეთ სისტემას თავისუფალს ეწოდებენ.

მექანიკურ სისტემას ეწოდება არათავისუფალი, როცა დროის ნებისმიერ მომენტში სისტემის ნაწილაკებს არ შეუძლიათ დაიკავონ ნებისმიერი მდებარეობა და მიიღონ სიჩქარეების ნებისმიერი მნიშვნელობანი. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სისტემაზე დადებულია ბმები (შეზღუდვები) და სისტემის მატერიალურ წერტილებს მოძრაობა შეუძლიათ მხოლოდ და მხოლოდ წინასწარ მოცემულ ზედაპირებზე და მრუდებზე. მაგალითად, სამი მატერიალური ნაწილაკის სისტემა იქნება თავისუფალი, როცა ამ ნაწილაკების მოძრაობა სივრცეში ხდება მხოლოდ და მხოლოდ ურთიერთქმედების ძალების, ვთქვათ გრავიტაციული ძალების, გავლენით. თუ ამ სამ ნაწილაკზე დამატებით დადებულია შეზღუდვა, რომლის მიხედვით ისინი ყოველთვის წინასწარ განსაზღვრულ სიბრტყეში უნდა მოძრაობდნენ, მაშინ ასეთი სისტემა არათავისუფალი იქნება.

იმ დამოუკიდებელ პარამეტრთა რიცხვს, რომელიც განსაზღვრავს სისტემის მდებარეობას სივრცეში, ეწოდებენ სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვს. თუ გვაქვს ერთი თავისუფალი ნაწილაკი, მაშინ აშკარაა, რომ მისი მდებარეობა სივრცეში განისაზღვრება სამი პარამეტრით, მაგალითად, მისი დეკარტის კოორდინატებით. საზოგადოდ  $N$  რაოდენობის მატერიალურ წერტილთა თავისუფალი სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი იქნება  $3N$ . როცა ნაწილაკთა სისტემა ემორჩილება გარკვეულ ბმებს, მაშინ სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი ნაკლებია  $3N$ -ზე.

ის შედეგები, რაც ჩვენ მივალთ ერთი მატერიალური წერტილისათვის. შეგვიძლია განვაზოგადოთ ნაწილაკთა სისტემისათვის, ოღონდ საჭიროა შემოვიღოთ შიგა და გარე ძალების ცნება. შიგა ძალები ეწოდება იმ ძალებს, რომლებიც გამოწვეული არიან სისტემის მატერიალურ წერტილთა ურთიერთქმედებით. მაგალითად, სისტემის  $i$ -ურ ნაწილაკზე იმტქმელებს ძალები, რომლებიც გამოწვეული

იქნებიან დანარჩენი  $N - 1$  ნაწილაკის მიერ.  $i$ -ურ ნაწილაკზე მოქმედი ძალა, რომელიც გამოწვეულია  $k$ -ური ნაწილაკით, აღვნიშნოთ  $F_{ik}$ -ით. აშკარაა, რომ ნიუტონის მესამე კანონით

$$F_{ik} + F_{ki} = 0. \quad (14,1)$$

თუ მოვახდენთ ამ გამოსახულების აჯამებას  $i$  და  $k$ -თი, გვექნება

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N (F_{ik} + F_{ki}) = 0. \quad (14,2)$$

ამ ჯამში შედის წევრებიც  $i=k$ , რადგან ნაწილაკი თავის თავზე არ მოქმედებს  $F_{ii} + F_{ii} = 0$  და სათანადო წევრები სულ ერთია ნულის ტოლი იქნება. თუ მეორე წევრში  $k$ -ს შევცვლით  $i$ -თი და პირიქით, ამით ორმაგი ჯამის მნიშვნელობა არ შეიცვლება, შედეგად კი მივიღებთ.

$$\sum_{ik} F_{ik} = 0. \quad (14,3)$$

(14,2) ან (14,3) გვიჩვენებს, რომ ყველა შიგა ძალის გეომეტრიული ჯამი ნულის ტოლია.

სისტემის  $i$ -ურ ნაწილაკზე მოქმედი გარე ძალა ეწოდება ყველა იმ ძალას, რომელიც გამოწვეულია სხეულებით, რომლებიც სისტემას არ ეკუთვნიან. შიგა ძალებისაგან განსხვავების მიზნით  $i$ -ურ ნაწილაკზე მოქმედი გარე ძალა  $F'_i$ -ით აღვნიშნოთ. ცხადია, რომ სისტემის  $i$ -ურ ნაწილაკზე მოქმედი ძალა ტოლი იქნება შიგა და გარე ძალების ჯამისა. ამიტომ მოძრაობის განტოლებას სისტემის  $i$ -ური ნაწილაკისათვის ექნება სახე

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_k F_{ik} + F'_i \quad (i=1, 2, \dots, N), \quad (14,4)$$

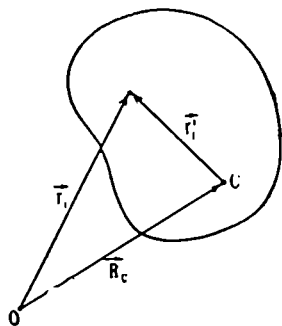
სადაც  $F'_i$  არის  $i$ -ურ ნაწილაკზე მოქმედი ყველა გარე ძალის ჯამი. სულ გვექნება  $N$  ვექტორული განტოლება ან, თუ ყოველ მათგანს კოორდინატთა ღერძებზე დავგვეგმილებთ,  $3N$  სკალარული განტოლება. ამოცანა დაიყვანება ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე. ვინაიდან ცალკეული განტოლება მეორე რიგისაა, ამიტომ სისტემის ამოხსნები შეიცავენ  $6N$  განუსაზღვრელ მუდმივს, ე. ი.

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(t; C_1, C_2, \dots, C_{6N}), \\ y_i &= y_i(t; C_1, C_2, \dots, C_{6N}), \\ z_i &= z_i(t; C_1, C_2, \dots, C_{6N}). \end{aligned} \quad (14,5)$$

სადაც  $i=1, 2, \dots, N$ . ამ მუდმივების განსაზღვრა შეიძლება საწყისი პირობების გამოყენებით. თუ საწყის მომენტში  $t=0$  ცნობილია ყველა წერტილის მდებარეობის და სიჩქარის მნიშვნელობები, მაშინ (14,5) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ  $6N$  პირობას, სააღიდანაც მო-

იძებნება ყველა  $C_1, C_2, \dots, C_{6N}$  მუდმივი.

სისტემის ინერციის ცენტრი. თუ გვაქვს  $N$  მატერიალურ ნაწილაკთა სისტემა, რომლის  $i$ -ური ნაწილაკის რადიუს-ვექტორი სათავის მიმართ  $r_i$ -ს ტოლია,



ნახ. 15

ხოლო მასა  $m_i$ -ს, მაშინ სისტემის მასების ან ინერციის ცენტრი ეწოდება იმ  $C$  წერტილს, რომლის რადიუსვექტორი იმავე სათავის მიმართ განიმარტება ფორმულით

$$R_c = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}, \quad (14,6)$$

აღვნიშნოთ  $R_c$  ვექტორის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე  $X_c, Y_c, Z_c$ -ით, მაშინ მასების ცენტრის კოორდინატები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$X_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad Y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad Z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}. \quad (14,7)$$

გამოვიყენოთ მასების ცენტრის მოძრაობის განტოლება. ამისათვის დავწეროთ  $i$ -ური წერტილისათვის მოძრაობის განტოლება

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_k F_{ik} + F_i, \quad (14,8)$$

და აეჯამოთ ყველა ნაწილაკის მიმართ. ვინაიდან ყველა შიგა ძალის გეომეტრიული ჯამი უდრის ნულს, ე. ი.  $\sum_{i,k} F_{ik} = 0$ , გვექნება

$$\sum_{i=1}^N \frac{dp_i}{dt} = \sum_{i=1}^N F_i. \quad (14,9)$$

რადგან  $p_i = m_i \frac{dr_i}{dt}$ , ამიტომ მიღებული განტოლება ასე გადაიწერება:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i r_i = F', \quad (14,9')$$

სადაც  $F' = \sum F_i'$ . თუ ამ ტოლობის მარცხენა მხარეს გაავრავლებთ და გაეყოფთ სისტემის სრულ მასაზე  $M = \sum m_i$  და გავიხსენებთ მასევეც ცენტრის განმარტებას, მივიღებთ

$$M \frac{d^2 R_c}{dt^2} = F' \quad (14,10)$$

მივიღეთ მასების ცენტრის მოძრაობის განტოლება. იგი გვიჩვენებს, რომ სისტემის მასების ცენტრი მოძრაობს ისე, როგორც იმოძრაებდა  $M$  მასის მქონე წერტილი ისეთი ძალის მოქმედების შედეგად, რომელიც უდრის სისტემაზე მოქმედი ყველა გარე ძალის გეომეტრიულ ჯამს.

როცა სისტემა იზოლირებულია, ე. ი. როცა გარე ძალების ჯამი  $F' = 0$ , ნიუტონის (14,10) განტოლება მოგვცემს

$$M \frac{dV_c}{dt} = 0, \quad V_c = \text{const.} \quad (14,11)$$

სადაც  $V_c = \frac{dR_c}{dt}$  ინერციის ცენტრის სიჩქარეა.

მივიღეთ მეტად მნიშვნელოვანი შედეგი. ჯერ ერთი, (14,10) განტოლება გვჩვენებს, რომ ინერციის ცენტრის მოძრაობაში არავითარ როლს არ ასრულებს სისტემის შიგა ძალები, მისი მოძრაობა განპირობებულია მხოლოდ და მხოლოდ გარე ძალებით. მეორე, როცა გარეშე ძალები არ მოქმედებენ, ინერციის ცენტრი

მოძრაობს სწორხაზოვნად და თანაბრად. აქედან წარმოდგება სწორედ მისი სახელ-  
წოდებაც.

ინერციის ცენტრის ის თვისება, რომ იზოლირებული სისტემის შემთხვევაში იგი უძრავია ანდა მოძრაობს თანაბარსწორხაზოვნად, შეგვიძლია გამოვიყენოთ ათვლის სისტემის ასარჩევად. მართლაც, ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ისეთი ათვ-  
ლის სისტემა, რომლის სათავე სისტემის ინერციის ცენტრის ემთხვევა. ასეთ ათვ-  
ლით სისტემას ინერციის ცენტრის სისტემას უწოდებენ.

ჭ-ური ნაწილაკის რადიუსვექტორი სისტემის ინერციის ცენტრის მიმართ აღნიშნოთ  $r'_i$ -ით, ხოლო რაიმე უძრავი წერტილის მიმართ  $r_i$ -თ. ამ უძრავ ათვ-  
ლის სისტემას ხშირად ლაბორატორიულ სისტემასაც უწოდებენ, მაშინ გვექნება

$$r'_i = r_i - R_c \quad (14,11')$$

ეს ტოლობა გავმარაგოთ  $m_i$ -ზე და ავჯამოთ ყველა ნაწილაკის მიმართ. მივიღებთ

$$\sum m_i r'_i = \sum m_i r_i - \left( \sum_i m_i \right) R_c \quad (14,12)$$

(14,6) განმარტების გათვალისწინებით გვექნება

$$\sum m_i r'_i = 0 \quad (14,13)$$

მიღებული ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ჩვენ გვექნია მხოლოდ  $N - 1$  დამოუკიდებელი რადიუსვექტორი, ამიტომ ინერციის ცენტრის სისტემაზე გადა-  
სვლით სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი სამით მცირდება. აშკარაა,  
რომ ამ სისტემაში ნულია  $R_c$  ვექტორიც, ე. ი.

$$\sum m_i r_i = 0 \quad (14,14)$$

(ეს კი იგივე (14,13) ტოლობაა, რადგან ინერციის ცენტრზე გადასვლით  $r_i = r'_i$ ),  
ჩვენ აღნიშნეთ, რომ იზოლირებული სისტემის ინერციის ცენტრი მოძრაობს ინერ-  
ციით, ამიტომ ეს მოძრაობა არაეითარ ინტერესს არ იწვევს; ჩვენთვის უფრო  
საინტერესოა სისტემის ნაწილაკების ფარდობითი მოძრაობა ინერციის ცენტრის  
მიმართ. ამიტომ ხშირად საჭიროა ინერციის ცენტრის მოძრაობის გამოყოფა. ეს  
შეგვიძლია მოვახერხოთ ე. წ. იაკობის კოორდინატების შემოღებით. ამ კოორდი-  
ნატებს აქვთ სახე:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{m_1}{m_1} r_1 - r_2, \\ \rho_2 &= \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} - r_3, \\ \rho_3 &= \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3}{m_1 + m_2 + m_3} - r_4, \end{aligned} \quad (14,15)$$

$$\rho_h = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_h r_h}{m_1 + m_2 + \dots + m_h} - r_{h+1},$$

$$\rho_N = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_N r_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = R_c.$$



ეს გარდაქმნა ორთოგონალურია, მისი დეტერმინანტი ერთის ტოლია. ამ კოორდინატების აგების ფიზიკური შინაარსი გასაგებია. ჩვენ შემოგვაქვს  $N$  ნაწილაკის მასების ცენტრის რადიუსვექტორი და  $N - 1$  ნაწილაკის მასების ცენტრისა და მე- $N$  ნაწილაკის ფარდობითი რადიუსვექტორი,  $N - 2$  ნაწილაკის მასების ცენტრისა და მე- $(N - 1)$  ნაწილაკის ფარდობითი რადიუსვექტორი და ა. შ.

მაგალითად, ორი ნაწილაკისათვის გვექნება:

$$\rho_1 = r_1 - r_2, \quad (14,16)$$

$$R_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2};$$

სამისათვის კი —

$$\rho_1 = r_1 - r_2.$$

$$\rho_2 = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} - r_3, \quad (14,17)$$

$$\rho_3 = R_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ შებრუნებული გარდაქმნის ფორმულებიც, ე. ი. როცა  $\rho$  ვექტორებით განსაზღვრული იქნება  $r$  ვექტორები, მაგალითად, სამი ნაწილაკისაგან შედგენილი სისტემისათვის მივიღებთ:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \rho_1 + \frac{m_3}{M} \rho_2 + \rho_3,$$

$$r_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \rho_1 + \frac{m_3}{M} \rho_2 + \rho_3, \quad (14,18)$$

$$r_3 = -\frac{m_1 + m_2}{M} \rho_2 + \rho_3.$$

სადაც

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

წარმოადგენს სისტემის სრულ მასას. ორი ნაწილაკის შემთხვევაში სიმძიმის ცენტრის მოძრაობას გამოყოფის საკითხს მომავალში ჩვენ კიდევ შევეხებით, ამასთან უფრო დაწვრილებით.

## § 16. მუხანიაკური სისტემის იმპულსი, მრმენტი და ენერგია

შემოვიღოთ ნაწილაკთა სისტემის დამახასიათებელი დინამიკური სიდიდეები: იმპულსი, იმპულსისა და ძალის მომენტები და ენერგია.

სისტემის იმპულსი. სისტემის სრული იმპულსი ეწოდება ცალკეულ ნაწილაკთა იმპულსის ვექტორების ჯამს, ე. ი.

$$P = \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i. \quad (15,1)$$

თუ გადავალთ ინერციის ცენტრის რადიუსვექტორზე, მივიღებთ

$$P = \frac{d}{dt} \sum m_i r_i = M \frac{dR_c}{dt} = M V_c, \quad (15,2)$$

სადაც  $V_c = \frac{dR_c}{dt}$  ინერციის ცენტრის სიჩქარეა.

აშკარაა, რომ

$$\frac{dP}{dt} = M \frac{d^2 R_c}{dt^2} = F'. \quad (15,3)$$

როცა სისტემა იზოლირებულია, ყველა გარე ძალის ჯამი  $F' = 0$ , და

$$P = \text{const}, \quad (15,4)$$

ე. ი. სისტემის სრული იმპულსი მოძრაობის ინტეგრალია. მივიღეთ, რომ იზოლირებული სისტემის ყველა წერტილის იმპულსთა გეომეტრიული ჯამი მუდმივი სიდიდეა. ამაში მდგომარეობს იმპულსის შენახვის კანონი.

სისტემის იმპულსის მომენტი. სისტემის იმპულსის მომენტი ეწოდება გამოსახულებას

$$L = \sum_{i=1}^N [r_i, p_i], \quad (15,5)$$

რომელიც წარმოადგენს ცალკეულ ნაწილაკთა იმპულსის მომენტთა გეომეტრიულ ჯამს. ავიღოთ  $L$ -ის სრული წარმოებული დროით

$$\frac{dL}{dt} = \sum [\dot{r}_i, p_i] + \sum [r_i, \dot{p}_i]. \quad (15,6)$$

პირველი წევრი ნულია, რადგან  $\dot{r}_i$  და  $p_i$  პარალელური ვექტორებია, მეორე წევრში  $\dot{p}_i$ -ის მნიშვნელობა შევითანოთ (14,4) მოძრაობის განტოლებიდან, მაშინ მივიღებთ

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{ik} [r_i, F_{ik}] + \sum_i [r_i, F'_i]. \quad (15,7)$$

აქ

$$k'_i = [r_i, F'_i] \quad (15,8)$$

წარმოადგენს  $i$ -ურ ნაწილაკზე მოქმედი გარე ძალის მომენტს, ხოლო

$$K' = \sum_i k'_i \quad (15,9)$$

იქნება სისტემის ყველა გარე ძალის მომენტთა ჯამი.

განვიხილოთ (15,7)-ის პირველი წევრი. იგი რომ მოისპოს, საჭიროა, გარდა ნიუტონის მესამე კანონის მოქმედებისა, შიგა ძალები მიმართული იყოს ნაწილაკთა შემართებული ხაზის გასწვრივ. რადგან  $i$  და  $k$  ღებულობენ ერთსა და იმავე მნიშვნელობას  $i, k = 1, 2, 3 \dots N$ , ფორმულაში შემავალ ორმაგ ჯამში წყვილ-წყვილად შეგვხვდება შემდეგი წევრები:

$$[r_i, F_{ik}] + [r_k, F_{ki}], \quad (15,10)$$

რომლებიც ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად ( $F_{ik} = -F_{ki}$ ) ასე გადაიწერება:

$$[r_i - r_k, F_{ik}]. \quad (15,11)$$

რადგან  $r_i - r_k$  ვექტორის მიმართულება ეთხვევა  $F_{ik}$ -ს მიმართულებას, ამიტომ (15,11) გამოსახულება ნულის ტოლია და მასთან ერთად ნული იქნება (15,7)-ის პირველი წევრიც მარჯვენა მხარეში. ამგვარად დაგვრჩება

$$\frac{dL}{dt} = K', \quad (15,12)$$

სადაც  $K'$ , როგორც აღვნიშნეთ, წარმოადგენს გარეშე ძალების სრულ მომენტს რაიმე წერტილის მიმართ. როცა სისტემა იზოლირებულია ანდა, როცა სხვა რაიმე მიზეზით  $K' = 0$ , მრვილებთ

$$L = \text{const}, \quad (15,13)$$

რაც გამოხატავს სისტემის იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონს. ამრიგად, მივიღეთ, რომ როცა სისტემა იზოლირებულია, ყველა წერტილის იმპულსთა მომენტის გეომეტრიული ჯამი მუდმივი სიდიდეა.

ჩვენს მიერ განხილული იმპულსის მომენტი საზოგადოდ დამოკიდებულია წერტილის არჩევაზე. ხშირად კი მიზანშეწონილია ამ ნებისმიერობის გამორიცხვა. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ამის მიღწევა შეიძლება ინერციის ცენტრის სისტემაზე გადასვლით. გამოვიყენოთ (14,11') დამოკიდებულება

$$r_i = r'_i + R_c. \quad (15,14)$$

სადაც  $r_i$  და  $r'_i$   $i$ -ური წერტილის რადიუსვექტორებია, სათანადოდ, ლაბორატორიული და ინერციის ცენტრის სისტემების მიმართ. ამ ტოლობიდან აშკარაა, რომ სათანადოდ სიჩქარეებს შორის გვაქვს კავშირი

$$v_i = v'_i + V_c. \quad (15,15)$$

აქ  $V_c$  არის ინერციის ცენტრის სიჩქარე ლაბორატორიულ სისტემაში. სისტემის იმპულსის მომენტისათვის უძრავი წერტილის მიმართ გვექნება

$$L = \sum_i [r'_i + R_c, m_i(v'_i + V_c)] = \sum_i [r'_i, m_i v'_i] + \\ + \sum [r'_i, m_i V_c] + \sum [R_c, m_i v'_i] + \sum [R_c, m_i V_c]. \quad (15,16)$$

ეს გამოსახულება შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$L = \sum_i [r'_i, m_i v'_i] + \sum_i [R_c, m_i V_c] + \left[ \sum m_i r'_i, V_c \right] + \\ + \left[ R_c, \frac{d}{dt} \sum m_i r'_i \right]. \quad (15,17)$$

თანხმად (14,13) ფორმულისა. ამ გამოსახულების ბოლო ორი წევრი ნულის ტოლია; მაშასადამე,

$$L = [R_c, P] + \sum [r'_i, p'_i]. \quad (15,18)$$

აქ  $P = M V_c$ , ხოლო  $p'_i$  წერტილის იმპულსია მასების ცენტრის სისტემაში. წარმოვიდგინოთ, თითქოს შეწყდა წერტილების მოძრაობა მასების ცენტრის მიმართ, ე. ი.  $p'_i = 0$ , მაშინ ყველა წერტილი იმოძრაებს სეძიძიის ცენტრთან ერთად  $V_c$  სიჩქარით. ამ შემთხვევაში მთელი სისტემის იმპულსი, ცხადია, იქნება  $\sum m_i V_c = M V_c$ . ვუწოდოთ ასეთ მოძრაობას სისტემის როგორც მთლიანის მოძრაობა. (15,18) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ სისტემის იმპულსის მომენტი შედგება ორი წევრისაგან. პირველი წევრი წარმოადგენს სისტემის როგორც მთლიანის იმპულსის მომენტს რაიმე უძრავი ცენტრის მიმართ. მეორე წევრი კი გამოხატავს სისტემის ნაწილაკების ფარდობითი მოძრაობის იმპულსის მომენტს ინერციის ცენტრის მიმართ. მას სისტემის საკუთარი მომენტი ეწოდება. აშკარაა, რომ პირველი წევრის გამო  $L$  დამოკიდებულია ცენტრის არჩევაზე. როცა  $R_c = 0$ , ე. ი. როცა

გადავალთ ინერციის ცენტრის სისტემაზე, სისტემის იმპულსის მომენტი მხოლოდ ფარდობითი მოძრაობის იმპულსის მომენტის ტოლია.

ენერგია. კენიგის დებულება. სისტემის კინეტიკური ენერგია ლაბორატორიულ სისტემაში ტოლია სიდიდის

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{r}_i^2 \quad (15,19)$$

ისევე როგორც მომენტი, კინეტიკური ენერგიაც შეგვიძლია გამოვხატოთ ორი წევრით, რომელთაგან ერთი იქნება სისტემის როგორც მთლიანის კინეტიკური ენერგია, მეორე კი — ფარდობითი მოძრაობის კინეტიკური ენერგია. შემოვიღოთ ინერციის ცენტრი, მაშინ  $v_i = v_i + V_c$  და კინეტიკური ენერგიისათვის გვაქვს

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (v_i + V_c)^2 = \frac{1}{2} \sum m_i V_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 + (V_c, \sum m_i v_i'), \quad (15,20)$$

ბოლო წევრი ნულის ტოლია. მართლაც,

$$(V_c, \sum m_i v_i') = (V_c, \frac{d}{dt} \sum m_i r_i') = 0, \quad (15,21)$$

რამდენადაც თანახმად (14,13) ფორმულისა  $\sum m_i r_i' = 0$ . ამგვარად,

$$T = \frac{M V_c^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2. \quad (15,22)$$

ეს ფორმულა გამოხატავს კენიგის დებულების შინაარსს. თუ გადავალთ ინერციის ცენტრის სისტემაზე, მაშინ  $V_c = 0$ , და დაგვრჩება მხოლოდ ფარდობითი მოძრაობის კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2 \quad (15,23)$$

ახლა განვიხილოთ სისტემის პოტენციალური ენერგია. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია შემთხვევა, როცა როგორც შიგა ისე გარე ძალებს გააჩნიათ პოტენციალი.  $i$  და  $k$  ნაწილაკების ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია აღვნიშნოთ  $U_{ik}(r_i, r_k)$ . ურთიერთქმედების ეს პოტენციალური ენერგია დამოკიდებული იქნება  $i$  და  $k$  ნაწილაკების რადიუსვექტორებზე. ცხადია, რომ  $U_{ik}$  ტოლი იქნება  $U_{ki}$ -სი გარდა ამისა, რადგან ნაწილაკი თავისთავზე არ ჰქმედებს, უნდა მივიღოთ, რომ  $U_{ii} = 0$ . როგორც ვიცით,  $F_{ik}$  ძალა  $U_{ik}$  პოტენციალურ ენერგიასთან დაკავშირებული იქნება შემდეგი ფორმულით:

$$F_{ik} = -\nabla_i U_{ik}, \quad (15,24)$$

სადაც  $\nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial r_i}$  არის გრადიენტი  $i$ -ური ნაწილაკის კოორდინატების მიხედვით,

ე. ი.  $\nabla_i \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right)$ . ისევე როგორც ნიუტონის შესამე კანონის განხილვის დროს ვაჩვენეთ, სივრცის ერთგვაროვნებისა და იზოტროპიულობის და დროის ერთგვაროვნების გამო, იზოლირებული სისტემის ნაწილაკთა ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია ფუნქცია იქნება არა ცალკეული  $r_i$  და  $r_k$  რადიუსვექტორებისა, არამედ მათი სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობისა  $r_{ik} = |r_i - r_k|$ ,

ე. ი.

$$U_{ik} = U_{ik}(|r_i - r_k|). \quad (15,25)$$

პოტენციალური ენერჯიის კოორდინატებზე ასეთი დამოკიდებულება უზრუნველყოფს ნიუტონის შესამე კანონის სამართლიანობას

$$F_{iK} = -\nabla_i U_{iK} = \nabla_K U_{iK} = -F_{Ki}. \quad (15,26)$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ უზრუნველყოფილი იქნება იზოლირებული სისტემის შენახვის კანონები, რამდენადაც შიგა ძალების საჯამო ურთიერთქმედება ნულზე დაიყვანება.

რადგან  $i$  და  $k$  ნაწილაკების ურთიერთქმედების როგორც ძალა, ისე პოტენციალური ენერჯია ფუნქციაა მხოლოდ  $r_{iK}$ -სი, ამიტომ  $F_{iK}(r_{iK})$  ძალა შეიძლება გამოვხატოთ ფორმულითაც

$$F_{iK}(r_{iK}) = -\nabla_{iK} U_{iK}(r_{iK}), \quad (15,27)$$

სადაც  $\nabla_{iK} \equiv \frac{\partial}{\partial r_{iK}}$  არის გრადიენტი  $r_{iK}$  ფარდობითი რადიუსვექტორის კოორდინატების მიხედვით.

ამგვარად, სისტემის ნაწილაკების ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯია შეგვიძლია განვიხილოთ შემდეგი წამის სახით:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k}^N U_{iK}(|r_i - r_k|). \quad (15,28)$$

ჯამის წინ ნახევარი შემოღებულია იმისათვის, რომ ურთიერთქმედებაში ( $i, k$ ) წყვილი მხოლოდ ერთხელ ჩაითვალოს ( $U_{iK} = U_{Ki}$ ). ეს ჯამი ასეც შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$\sum_{i>k=1}^N U_{iK}(r_{iK}). \quad (15,29)$$

ორივე ეს ჩაწერა ერთმანეთის ეკვივალენტურია. თუ ახლა ცალკეული ნაწილაკის პოტენციალურ ენერჯიას გარეშე ვვლში აღვნიშნავთ  $U_i(r_i, t)$ -თი, მაშინ სისტემის სრული პოტენციალური ენერჯია ტოლი იქნება გამოხატულების

$$U = \sum_{i=1}^N U_i(r_i, t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N U_{iK}(r_{iK}). \quad (15,30)$$

სისტემის სრული მექანიკური ენერჯია კი განისაზღვრება ფორმულით

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i^2 + \sum_{i=1}^N U_i(r_i, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N U_{iK}(r_{iK}). \quad (15,31)$$

ადვილია ჩვენება, რომ იზოლირებული სისტემისათვის ადგილი ექნება ენერჯიის შენახვის კანონს. ამისათვის ვიპოვოთ  $\frac{dE}{dt}$ -ს გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & \sum_{i=1}^N (m_i \dot{r}_i, \ddot{r}_i) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^N (\nabla_i U_i, \dot{r}_i) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,k} (\nabla_{iK} U_{iK}, \dot{r}_{iK}). \end{aligned} \quad (25,32)$$

გარდაეკნათ ბოლო წევრი. რადგან ორმაგი ჯამის მნიშვნელობა არ შეიცვლება  $i \neq k$  შეცვლის დროს და  $U_{ik} = U_{ki}$ , ამიტომ მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i,k} (\nabla_{ik} U_{ik}, \dot{r}_k) &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} (\nabla_{ik} U_{ik}, \dot{r}_i) - \frac{1}{2} \sum_{i,k} (\nabla_{ik} U_{ik}, \dot{r}_k) = \\ &= \sum_{i,k} (\nabla_{ik} U_{ik}, \dot{r}_i) = - \sum_{i,k} (F_{ik}, \dot{r}_i); \end{aligned} \quad (25,33)$$

მაშასადამე, (25,32) გამოსახულება მიიღებს სახეს

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N (\dot{r}_i, \{m_i \ddot{r}_i - F_i - \sum_k F_{ik}\}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial U_i}{\partial t}, \quad (25,34)$$

სადაც  $F_i = -\nabla_i U_i$  სისტემის  $i$ -ურ ნაწილაკზე მოქმედი გარე ძალაა. თუ გავი-  
თვლისწინებთ (14,4) მოძრაობის განტოლებას, საბოლოოდ გვექნება

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial U_i(r_i, t)}{\partial t}. \quad (25,35)$$

ენერჯის შენახვისათვის საჭიროა ამ გამოსახულების მარჯვენა მხარე ნულის ტოლი იყოს. ამისათვის კი აუცილებელია ნაწილაკთა სისტემა იყოს იზოლირებული ან გარე ძალებით გამოწვეული ურთიერთქმედება დროზე ცხადად არ იყოს დამოკი-  
ლებული, ე. ი.  $U_i = U_i(r_i)$ .

აღსანიშნავია, რომ სისტემისათვის იგივე შენახვის კანონები გვაქვს, რაც ერთი ნაწილაკის შემთხვევაში, სახელდობრ, ენერჯის იმპულსისა და იმპულსის მომენტის. მაგრამ სისტემის შემთხვევაში მოძრაობის ინტეგრალთა რიცხვი საზო-  
გადოდ შეიღწე მეტია. კერძოდ, ჩვენ შემდგომში დავამტკიცებთ, რომ თუ სის-  
ტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი  $n$ -ის ტოლია, მაშინ მას ექნება  $(2n - 1)$  დამოუკიდებელი მოძრაობის ინტეგრალი. მაგრამ ამ მოძრაობის ინტეგრლებიდან უველას ერთი და იგივე პრაქტიკული მნიშვნელობა როდი აქვს. განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ჩვენ მიერ განხილულ შეიდი მოძრაობის ინტეგრალს, რომელ-  
თა ძირითად თვისებას ადითიურობის თვისება წარმოადგენს, ადითიურობა ნიშნავს შემდეგს: მოძრაობის ინტეგრალთა მნიშვნელობა სისტემისათვის, რომელიც შედ-  
გება არაურთიერთმოქმედი ქვესისტემებისაგან, წარმოადგენს ცალკეული ქვესისტე-  
მის შესაბამისი მოძრაობის ინტეგრალთა ჯამს.

## § 16. ბმები და რეაქციის ძალები

წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ, რომ სისტემის მოძრაობის შესასწავლად საჭი-  
როა ამოვხსნათ მოძრაობის განტოლებათა სისტემა

$$m_i \ddot{r}_i = \sum_k F_{ik} + F_i'. \quad (16,1)$$

ამ სისტემის ამოხსნით ვიპოვით ყველა რადიუსვექტორს, როგორც დროის ფუნქ-  
ციებს

$$r_i = r_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (16,2)$$

მაგრამ ასე მარტივად საქმე მხოლოდ თავისუფალ ნაწილაკთა სისტემისათვის  
გვაქვს.

იმ პირობებს, რომლებიც ზღუდავენ ნაწილაკის მოძრაობას, უწოდებენ ბმებს. ამასთან შეზღუდვა შეიძლება დაედოს როგორც კოორდინატებს, ისე სიჩქარეებს. ბმები ანალიზურად გამოიხატებიან გარკვეული ალგებრული ან დიფერენციალური განტოლების სახით. ჰერცის ტერმინოლოგიით არჩევენ ორი ტიპის ბმას: ჰოლონომურსა და არაჰოლონომურს. ჰოლონომური ბმები ზღუდავენ კოორდინატებს, ამიტომ მათ გეომეტრიულ ბმებსაც უწოდებენ. გეომეტრიული ბმების განტოლებას აქვს სახე

$$f(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0 \quad (16,3)$$

ამ ბმას, რადგან იგი დროზე ცხადად არაა დამოკიდებული, უწოდებენ სტაციონარულ გეომეტრიულ ბმას. არასტაციონარული ბმის განტოლება კი შეგვიძლია ჩაევწეროთ შემდეგნაირად:

$$f(r_1, r_2, \dots, r_n; t) = 0. \quad (16,4)$$

არაჰოლონომური ბმების დროს ბმების განტოლებას, ზოგად შემთხვევაში, აქვს დიფერენციალური განტოლების სახე, რადგან ამ დროს შეზღუდვა ედება სიჩქარეებსაც. არსებობს ისეთი არაჰოლონომური ბმებიც, რომელთა ჩაწერა მათემატიკურად შეუძლებელია. ბმების მაგალითები პრაქტიკაში უამრავი გვხვდება. სტაციონარული გეომეტრიული ბმა გვექნება, მაგალითად, როცა ნაწილაკი მოძრაობს უცვლელრადიუსიანი სფეროს ზედაპირზე (მაგალითად, დედამიწის ზედაპირზე მოძრაობა სხეულისათვის). არასტაციონარული იქნება ბმა იმ შემთხვევაში, თუ სფეროს რადიუსი თანდათან იცვლება, მაგალითად, საპნის ბუშტის ზედაპირზე მოძრაობა ნაწილაკი და სხვა.

ნათელია, რომ ბმების შემთხვევაში სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი ნაკლებია  $3N$ -ზე. განვიხილოთ ბმების შემთხვევაში თავისუფლების ხარისხთა რიცხვის განსაზღვრის მაგალითები. ვთქვათ, გვაქვს ორი ნაწილაკი, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან ისე, რომ მანძილი მათ შორის უცვლელი რჩება. მაშინ ამ სისტემის გვეს კოორდინატს დაედება ერთი პირობა

$$(r_1 - r_2)^2 = a^2. \quad (16,5)$$

ამ შემთხვევაში გეომეტრიული ბმა განისაზღვრება განტოლებით

$$f(r_1, r_2) = (r_1 - r_2)^2 - a^2 = 0, \quad (16,6)$$

$a$  მანძილია ნაწილაკთა შორის. მაშასადამე, დეკარტის ყველა კოორდინატი დამოუკიდებელი არაა, მათზე დადებულია ერთი ბმა, ამიტომ დამოუკიდებელი იქნება მხოლოდ ხუთი კოორდინატი (რამდენადაც (16,6)-დან ყოველთვის განისაზღვრება ერთი რომელიმე კოორდინატი დანარჩენი ხუთის საშუალებით). ამგვარად, ორი ერთმანეთთან უცვლელი მანძილით დაკავშირებული ნაწილაკთა სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი ხუთის ტოლია.

ახლა, ვთქვათ, გვაქვს სისტემა, შემდგარი ისეთი სამი ნაწილაკისაგან, რომლებიც მოთავსებულია უცვლელი სიდიდის გვერდების მქონე სამკუთხედის წვეროებში (ნახ. 16). ცხადია, რომ ასეთ სისტემაზე დადებული იქნება სამი ბმა:

$$\begin{aligned} (r_1 - r_2)^2 - R_{12}^2 &= 0, \\ (r_1 - r_3)^2 - R_{13}^2 &= 0, \\ (r_2 - r_3)^2 - R_{23}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (16,7)$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში დამოუკიდებელი იქნება მხოლოდ გვესი კოორდინატი.

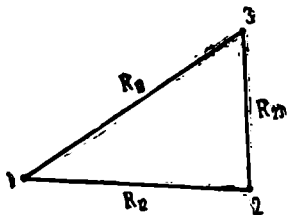
რადგან არადეფორმირებადი მყარი სხეულის მდებარეობა სივრცეში ხასიათდება სამი ისეთი წერტილით, რომლებიც ერთ სწორზე არ მდებარეობენ, ამიტომ თავისუფალი მყარი სხეულის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი ექვსის ტოლი იქნება.

არჩევნ აგრეთვე ორმხრივ და ცალმხრივ ბმებს. თუ ბმა გამოიხატება ტოლობით, მაშინ მას ორმხრივს უწოდებენ, ხოლო თუ იგი გამოიხატება უტოლობით, მაშინ — ცალმხრივს. ნაწილაკთა სისტემის შემთხვევაში, თუ მასზე რალაცა ბმებია დადებული, თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი ყოველთვის ნაკლებია  $3N$ -ზე. სიმარტივისათვის განვიხილოთ ორმხრივი, პოლონომური და სტაციონარული ბმები. ეთქვას, მათი რიცხვი არის  $j$ . ბმების განტოლებები დაიწერება ასე:

$$\begin{aligned} f_1(r_1, r_2, \dots, r_N) &= 0, \\ f_2(r_1, r_2, \dots, r_N) &= 0, \end{aligned} \quad (16,8)$$

$$f_j(r_1, r_2, \dots, r_N) = 0.$$

ამ შემთხვევაში სისტემის წერტილთა კოორდინატები როდია დამოუკიდებელი. ახლა უკვე სისტემის მდებარეობის განსაზღვრისათვის საკმარისია ვიცოდეთ  $3N - j$



ნახ. 16

კოორდინატი, რადგან დანარჩენი  $j$  კოორდინატი მოიძებნება ბმათა (16,8) განტოლებებიდან მაშასადამე, სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი  $n = 3N - j$  ცხადია, რომ როცა  $j = 3N$ , მაშინ სისტემის წერტილები უძრავია, რადგან ყოველ კოორდინატს შეესაბამება მხოლოდ ერთადერთი მნიშვნელობა, რომელიც განისაზღვრება ბმათა განტოლებებიდან.

არათავისუფალი სისტემის მოძრაობის განსაზღვრა რთულ ამოცანას წარმოადგენს, რადგან (16,1) განტოლებათა

სისტემა უნდა ამოიხსნას (16,8) ბმის განტოლებებთან ერთად.

რეაქციის ძალები, იბადება კითხვა, როგორ გამოვიყენოთ არათავისუფალი სისტემის შემთხვევაში ის კანონები, რომელიც ჩვენ გამოვიყვანეთ თავისუფალი სისტემისათვის ან, სხეანაირად რომ ეთქვას, რა პირობებში შეიძლება არ გავითვალისწინოთ ბმების განტოლებები. ვინაიდან გვაქვს როგორც მოძრაობის, ისე ბმების განტოლებები, ამიტომ თუ გვინდა უკანასკნელი გამოვირიცხოთ, საჭიროა მოძრაობის განტოლებები რალაცნაირად შევკვალოთ. ეგრეთ წოდებული რეაქციის პრინციპის ძალით ყოველი ბმა შეიძლება შეიცვალოს სათანადო ძალით, რომელსაც რეაქციის ძალას უწოდებენ. მოყვანილი პრინციპი გულისხმობს, რომ ყოველი ბმის როლი იმაში გამოიხატება, რომ ის გარკვეული ძალით მოქმედებს სისტემის წერტილზე. მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია ბმა აღარ გავითვალისწინოთ, სამაგიეროდ მოძრაობის განტოლებებში დამატებით შემოვიღოთ ბმის რეაქციის ძალები. თანახმად ზემონათქვამისა, მოძრაობის განტოლებები ახლა მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i + R_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (16,9)$$



აქ  $F_i$  წერტილზე უშუალოდ მოქმედი ყველა ძალის ტოლქმედია (როგორც შიგა, ისე გარე), ხოლო  $R_i$  — რეაქციის ძალა. აღსანიშნავია, რომ  $R_i$  რეაქციის ძალები უცნობია, ხშირად ისინი დამოკიდებულია თვით წერტილების მოძრაობაზე. ამიტომ რეაქციის ძალების შემოტანა თავისთავად ამოცანას არ ამარტივებს. მაგრამ, როგორც ქვემოთ დავინახავთ, მექანიკა ისე შეიძლება ჩამოვყალიბოთ, რომ მოძრაობის განტოლებები არ შეიცავდეს რეაქციის ძალებს.

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ ნიუტონის ძალას, რომელიც დაკავშირებულია ნაწილაკთა ურთიერთქმედებასთან, უწოდებენ აქტიურ ძალას, ყველა სხვა ძალას კი, ბმის რეაქციის ძალებთან ერთად, — პასიურ ძალებს.

## შესაძლო გადაადგილების პრინციპი და ლაბრანჟის განტოლებები

მექანიკური სისტემის შესაბამისი ნიუტონის მოძრაობის განტოლებათა სისტემის ამოხსნა რთულდება განსაკუთრებით იმ შემთხვევაში, როცა სისტემაზე დადებულია ბმები.

ბმების შემთხვევაში ყველა რადიუსვექტორი აღარ არის დამოუკიდებელი, ამიტომ მოძრაობის საპოვნელად საჭიროა ნიუტონის განტოლებათა სისტემა ამოხსნას ბმების განტოლებებთან ერთად, რაც ხშირად პრაქტიკულად გადაუჭრელ სიძნელეებს აწუდება.

ლაგრანჟმა მოახერხა ნაწილაკთა სისტემის ისეთნაირად დახასიათება, როდესაც მოძრაობის განტოლებებიდან გამორიცხულია ბმის რეაქტიის ძალები და განტოლება შეიცავს იმდენ დამოუკიდებელ კოორდინატს, რამდენიცაა სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი.

### § 17. განზოგადებული კოორდინატები

როგორც ზემოთ დავინახეთ, როცა სისტემაზე დადებულია ბმები, მაშინ დეკარტის კოორდინატებს დამატებითი პირობები ედებათ ბმების განტოლებას სახით, ამიტომ მექანიკური სისტემის აღწერა დეკარტის კოორდინატებში ყოველთვის არაა ხელსაყრელი. გარდა ამისა, მთელი რიგი ამოცანების ამოხსნის დროს დეკარტის მართკუთხა სისტემის არჩევა უამრავ არახელსაყრელობასთანაა დაკავშირებული. როცა სისტემაზე დადებულია  $j$  ბმა, მაშინ დამოუკიდებელი იქნება მხოლოდ  $3N - j$  კოორდინატი, ამიტომ ბუნებრივია შემოვიღოთ იმდენი ახალი კოორდინატი, რამდენიცაა სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი და, რომლებიც ცალსახად დაახასიათებენ სისტემის მდებარეობას სივრცეში. ასე მაგალითად, ზემოთ განხილული ორი უცვლელი მანძილით დაკავშირებული წერტილის შემთხვევაში, რადგან თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი ხუთის ტოლია, დამოუკიდებელი პარამეტრები შეგვიძლია ასე შევარჩიოთ: ერთი წერტილი განვსაზღვროთ დეკარტის სამი კოორდინატით, მეორე წერტილი კი  $\theta$  და  $\varphi$  კუთხეებით; ამასთან  $0 \leq \theta \leq \pi$ , ხოლო  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . ამგვარად, გვექნება კოორდინატები:  $x, y, z, \theta, \varphi$ , რომლებიც სავესებით განსაზღვრავენ ასეთი სისტემის მდებარეობას სივრცეში.

იმ პარამეტრებს, რომელთა რიცხვი თავისუფლების ხარისხთა რიცხვის ტოლია და, რომლებიც განსაზღვრავენ მექანიკური სისტემის მდებარეობას სივრცეში, უწოდებენ განზოგადებულ კოორდინატებს.

განზოგადებულ კოორდინატებს აღვნიშნავთ  $q_i$ -თი. ისინი შეგვიძლია შევარჩიოთ ნებისმიერი წესით. მაგრამ, ბუნებრივია, ისინი ისე შევარჩიოთ, რომ მოძ-

რაობა რაც შეიძლება მარტივად დახასიათდეს. ნათელია, რომ დეკარტის კოორდინატებიდან განზოგადებულ კოორდინატებზე გადასვლა ხდება შექვეყნებით:

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t), \quad (17,1)$$

სადაც  $n \leq 3N$  სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვია. ამ გარდაქმნაში, საზოგადოდ, დროც მონაწილეობს.

ზოგად შემთხვევაში სავალდებულო არაა განზოგადებული კოორდინატები გეომეტრიულ კოორდინატებს წარმოადგენდეს; მათი სასაით ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი ფიზიკური სიდიდე: სიგრძის, ფართის, ენერჯის და სხვა განზომილებას.

განზოგადებული კოორდინატების წარმოებულს დროთი  $q_i$  უწოდებენ განზოგადებულ სიჩქარეს. თუ სისტემის ლერძედ აღვიჩვენებთ  $q_1, q_2, \dots, q_n$  განზოგადებულ ლერძებს, მაშინ ეს სისტემა, ზოგად შემთხვევაში, იქნება მრულდწირული, ამიტომ შეგვიძლია ვისარგებლოთ ფორმულებით, რომლებიც გაზოგიყვანეთ პირველ თავში, მატერიალური წერტილის კინემატიკის განხილვის დროს.

ცხადია, ერთი მატერიალური წერტილისათვის სფერული, ცილინდრული და სხვა ორთოგონალური კოორდინატები შეგვიძლია ჩავთვალოთ განზოგადებულ კოორდინატებად.

კონფიგურაციული სივრცე. როცა გვაქვს ერთი ნაწილაკი, მაშინ მისი მდებარეობა სივრცეში შეგვიძლია დაეხასიათოთ სამი კოორდინატით. თუ გვაქვს ორი მატერიალური წერტილი, მაშინ თითოეული იგივე სივრცეში შეგვიძლია დაეხასიათოთ სამ-სამი კოორდინატით. მაგრამ შეგვიძლია ნაცვლად ორი წერტილისა, სამგანზომილებიან სივრცეში განვიხილოთ ერთი წერტილი ექვსი კოორდინატით, ე. ი. განვიხილოთ ერთი ნაწილაკი ექვსგანზომილებიან ფიქტიურ სივრცეში. ასეთ სივრცეს კონფიგურაციული სივრცე ეწოდება. მაშასადამე, ნაცვლად  $N$  ნაწილაკისა სამ სივრცეში, შეგვიძლია განვიხილოთ  $3N$  განზომილებიან კონფიგურაციულ სივრცეში ერთი ნაწილაკის მოძრაობა. ამგვარად, ზოგად შემთხვევაში  $N$  ნაწილაკის სისტემის ნაცვლად, კონფიგურაციულ სივრცეში შეგვიძლია განვიხილოთ ერთი ნაწილაკის მოძრაობა, რომელიც აღწერს გარკვეულ ტრაექტორიას  $3N$  განზომილებიან სივრცეში.

ის გარემოება, რომ სისტემაზე დადებულია  $j$  ბმა, გამოიხატება იმაში, რომ ნაცვლად  $3N$  განზომილებიანი კონფიგურაციული სივრცისა, გვექნება  $n = 3N - j$  განზომილების კონფიგურაციული ქვესივრცე. განზოგადებული კოორდინატები განსაზღვრული იქნება სწორედ ამ ქვესივრცეში. კონფიგურაციულ სივრცეში კოორდინატთა სისტემის ლერძები იქნება  $q_1, q_2, \dots, q_n$ .

უნდა გვახსოვდეს, რომ კონფიგურაციული სივრცის ცნება გეომეტრიული აბსტრაქციაა და მას არავითარი რეალური სივრცე არ შეესაბამება. რეალური სივრცე სამგანზომილებიანია და იგი არაა დამოკიდებული იმაზე, თუ რამდენი ნაწილაკი მოძრაობს მასში. კონფიგურაციული სივრცის ცნება შემოღებულია მხოლოდ და მხოლოდ გეომეტრიული ინტერპრეტაციის გასაადვილებლად.

გადავიდეთ ახლა სისტემის მექანიკის ძირითად საკითხებზე. ჯერ ერთი, სისტემის მექანიკა ისე უნდა ავაგოთ, რომ მოძრაობის დამახასიათებელ გამოსაჩულებებში ბმის რეაქციის ძალები არ შევიდეს და მეორე, მოძრაობის განტოლებები უნდა დადწეროთ განზოგადებული კოორდინატებისათვის. ამ განტოლებებს ის უპირატესობა აქვთ, რომ მათი მათემატიკური სახე არ იცვლება სხვადასხვა კოორდინატებზე გადასვლის დროს — ისინი კოვარიანტული არიან.

## § 18. შესაძლო გადაადგილების და დალაშქრის პრინციპები

სისტემის წერტილების ყოველ გადაადგილებას, რომელიც თავსებადია აღებულ მომენტში არსებულ ბმებთან, უწოდებენ შესაძლო ან ვირტუალურ გადაადგილებას.

როცა სისტემაზე დადებულია სტაციონარული ბმები, მაშინ ნამდვილი გადაადგილება დაემთხვევა ერთ-ერთ შესაძლო გადაადგილებას. მაგრამ როცა ბმები არასტაციონარულია, მაგალითად, როცა ნაწილაკი მოძრაობს ისეთი სფეროს ზედაპირზე, რომლის რადიუსი თანდათან იზრდება (ან მცირდება), იმისათვის, რომ მივიღოთ შესაძლო გადაადგილებები დროის ალებული მომენტისათვის, საჭიროა ბმა ვაიძულეთ გამყარდეს, მაშინ ყოველი გადაადგილება, რომელიც შეესაბამება ასეთ გამყარებულ ბმას, ვირტუალური გადაადგილება იქნება.

ნამდვილი და ვირტუალური გადაადგილებების განსხვავების შიზნით უსასრულოდ მცირე ნამდვილი გადაადგილების გეგმილებისათვის, ისევე როგორც აქამდის, ვინმართ დიფერენციალებს:  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , ვირტუალური გადაადგილებებისათვის კი — ვარაიციებს  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ . ამ უკანასკნელ სიდიდეებს არავითარი კავშირი არა აქვთ მოძრაობის პროცესთან, რამდენადაც ისინი გამყარებულ დროს შეესაბამებიან. ვირტუალური გადაადგილებები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ერთგვარი მათემატიკური ხერხი, რომელიც გვეკირდება სისტემაში მიმდინარე ნამდვილი გადაადგილებებისა და მოქმედი ძალების ხასიათის დასადგენად.

ზემოთქმულის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ არასტაციონარული გეომეტრიული ბმა

$$f_t(r_1, r_2, \dots, r_n; t) = 0. \quad (18,1)$$

მივანიჭოთ სისტემას უსასრულოდ მცირე ვირტუალური გადაადგილება, მაშინ მისი წერტილების რადიუსვექტორები იქნება:

$$r_1 + \delta r_1, r_2 + \delta r_2, \dots, r_N + \delta r_N. \quad (18,2)$$

რადგან, განმარტებით, ვირტუალური გადაადგილებები ბმებთან თავსებადია, ამიტომ კვლავ ადგილი ექნება ბმების განტოლებას

$$f_t(r_1 + \delta r_1, r_2 + \delta r_2, \dots, r_N + \delta r_N, t) = 0. \quad (18,3)$$

ამასთან, პირობის თანახმად, დრო გამყარებულია, ამიტომ მისი ვარაიაცია არ ხდება,  $\delta t = 0$ . (18,3) გავშალოთ ტეილორის მწკრივად, შევინარჩუნოთ პირველი რიგის უსასრულოდ მცირე წევრები და გავითვალისწინოთ (18,1). მივიღებთ

$$\delta f_t = \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{\partial f_t}{\partial r_\alpha} \delta r_\alpha \right) = 0. \quad (i=1, 2, \dots, j) \quad (18,4)$$

მაშასადამე, ბმების არსებობის შემთხვევაში, კოორდინატთა ვარაიაციები უნდა აკმაყოფილებდნენ (18,4) განტოლებას და მათგან დამოუკიდებელი იქნება მხოლოდ  $N - j$  რადიუსვექტორის ვარაიაცია, სადაც  $j$  არის ბმების რიცხვი.

ნამდვილი მოძრაობის დროს, ვირტუალურისაგან განსხვავებით, ადგილი აქვს დროის ცვლილებასაც, ამიტომ ნაცვლად (18,4)-ისა გვექნება

$$df_t = \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{\partial f_t}{\partial r_\alpha} dr_\alpha \right) + \frac{\partial f_t}{\partial t} dt. \quad (18,5)$$

ახლა, თუ (18,1) არასტაციონარული ბმის მაგიერ განვიხილავთ სტაციონარულ ბმას, მაშინ  $\delta f_t$ -სათვის ზუსტად იგივე (18,4) ფორმულას მივიღებთ.

დალაშხერის პრინციპი. შევეცადოთ ახლა სისტემის მოძრაობის განტოლებები ისე გადავწეროთ, რომ მასში გავერთიანდეს ბმის პირობებიც. ამისათვის  $i$ -ური ნაწილაკის ნიუტონის განტოლება  $\dot{p}_i = F_i$ . გავემარაგოთ სკალარულად  $\delta r_i$  ( $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ ) შესაძლო გადაადგილების ვექტორზე და მიღებული შედეგი ავკამოთ ყველა ნაწილაკის მიხედვით

$$\sum_{i=1}^N (F_i - \dot{p}_i, \delta r_i) = 0. \quad (18,6)$$

როცა სისტემაზე ბმები არ არის დადებული, მაშინ ყველა  $\delta r_i$  ვარიაცია დამოუკიდებელია, ამიტომ მათი კოეფიციენტები ნულს შეგვიძლია გავუტოლოთ. შედეგად მივიღებთ ნიუტონის განტოლებათა სისტემას. ხოლო, როცა სისტემაზე დადებულია ბმები, მაშინ  $\delta r_i$  ვარიაციები ერთმანეთზე დამოუკიდებელი აღარ არის და (18,6)-დან ნიუტონის  $N$ -განტოლებათა სისტემა აღარ მიიღება.

გავავერთიანოთ ახლა (18,4) და (18,6) განტოლებები. ამ მიზნით შემოვიღოთ ლაგრანჟის განუზღვრელი  $\lambda_\alpha$  მამრავლები. (18,4)-ის თითოეული განტოლება გავამრავლოთ  $\lambda_\alpha$ -ზე, შევკრიბოთ და მიღებული ჯამი დავუმატოთ (18,6) განტოლებას. საერთო  $\delta r_i$  მამრავლის გამოტანის შემდეგ მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^N \left( F_i - m \frac{d^2 r_i}{dt^2} + \sum_{\alpha=1}^j \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_i} \right), \delta r_i = 0, \quad (18,7)$$

რადგან მექანიკურ სისტემაზე დადებულია  $j$  ბმა, ამიტომ (18,7) განტოლებაში რადიუსვექტორთა დამოუკიდებელ ვარიაციათა რიცხვი იქნება მხოლოდ  $(N - j)$  და შეგვიძლია მხოლოდ  $(N - j)$  ვარიაციის წინ მდგომი კოეფიციენტის ნულთან გატოლება. მაგრამ დამატებით გვაქვს  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j$  განუზღვრელი მუდმივი, რომელთა შერჩევით შეგვიძლია მივალწიოთ იმას, რომ დანარჩენი  $j$  კოეფიციენტიც ნულს გავუტოლოთ. ე. ი. ჩვენ შეგვიძლია ნებასმიერ  $\lambda_\alpha$  მუდმივები ისე ავირჩიოთ, რომ გვექონეს

$$F_k - m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} + \sum_{\alpha=1}^j \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_k} = 0. \quad (k=1, 2, \dots, j) \quad (18,8)$$

ამრიგად, თუ  $\lambda_\alpha$  მუდმივებს ისე ავირჩევთ, რომ დატული იყოს (18,8) ტოლობები, მაშინ (18,7)-ში  $(N - j)$  რადიუსვექტორების ვარიაციების დამოუკიდებლობის გამო ჩვენ შეგვიძლია ნულს გავუტოლოთ დანარჩენი  $(N - j)$  კოეფიციენტიც. მაშასადამე, საბოლოოდ გვექნება

$$F_i - m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} + \sum_{\alpha=1}^j \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_i} = 0. \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (18,9)$$

ცხადია, რომ უკანასკნელი წევრი

$$R_i = \sum_{\alpha=1}^j \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial r_i} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (18,10)$$

შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც  $i$ -ური ნაწილაკზე მოქმედი ყველა რეაქტივის ჯამი. ამიტომ (18,9) განტოლება ასეც შეიძლება გადაიწეროს:

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i + R_i, \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (18,11)$$

რომელიც ემთხვევა (16,9) განტოლებას. (18,10) აღნიშვნებში (18,7) მიაღებს შემდეგ სახეს:

$$\sum_{i=1}^N \left( \left\{ F_i - m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} + R_i \right\}, \delta r_i \right) = 0. \quad (18,12)$$

(18,11) მივიღეთ ჰოლონომური ბმების შემთხვევაში, ნებისმიერი ტიპის ბმების პირობებში ბმის რეაქციის ძალებს, საზოგადოდ, (18,10) სახე აღარ ექნებათ, მაგრამ რეაქციის პრინციპის თანახმად ვიგულისხმებთ, რომ განტოლებათა სისტემას ყოველთვის (18,11) ფორმა აქვს<sup>1</sup>.

აღენიშნოთ, რომ რეაქციის ძალები საზოგადოდ უცნობია, ამიტომ მათი არსებობა საგრძობლად ართულებს მექანიკის ამოცანის ამოხსნას. მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია შემოვისაზღვროთ ბმის რეაქციის ძალები ისეთი კლასით, რომელთათვისაც შესაძლებელია მექანიკის ისეთნაირად ჩამოყალიბება, როცა მოძრაობის განტოლებაში რეაქციის ძალები ცხადი სახით არ შევლენ. ამასთან დაკავშირებით აღენიშნოთ, რომ სწორია ისეთი შემთხვევები, როცა რეაქციის ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა ვირტუალურ გადაადგილებაზე ნულის ტოლია. სამწუხაროდ, ზოგად შემთხვევაში ამის დამტკიცება შეუძლებელია. ამიტომ ჩვენ იგი პოსტულატად მივიღოთ. მაშასადამე, შემოვისაზღვროთ ისეთი ბმებით, როცა შესაბამისი რეაქციის ძალების მიერ ვირტუალურ გადაადგილებაზე შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლია, ე. ი. ვიგულისხმობთ, რომ ადგილი აქვს ე. წ. ვირტუალური მუშაობის პრინციპს, რომლის თანახმად

$$\sum_{i=1}^N (R_i, \delta r_i) = 0; \quad (18,13)$$

მაშასადამე, ვირტუალური მუშაობის პრინციპის თანახმად, ყველა რეაქციის ძალის ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი ყოველგვარი შესაძლო გადაადგილების დროს ნულის ტოლია. ხოლო ბმებს, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ვირტუალური მუშაობის პრინციპს, იდეალურ ბმებს უწოდებენ. ამგვარად, მექანიკის წინამდებარე კურსში ჩვენ შემოვისაზღვრებთ მხოლოდ იდეალური ბმების განხილვით.

(18,13) ვირტუალური მუშაობის პრინციპის გათვალისწინებით (18,12) განტოლება ასე გადაიწერება:

$$\sum_{i=1}^N \left( \left\{ F_i - m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} \right\}, \delta r_i \right) = 0. \quad (18,14)$$

ეს განტოლება შეიძლება საფუძვლად დაედოს მექანიკის იდეალური ბმების შემთხვევაში. იგი გამოხატავს დალამბერის პრინციპის შინაარსს. ერთი შეხედვით შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ (18,14) განტოლება არაფერს ახალს არ იძლევა ნიუტონის მოძრაობის განტოლებებთან შედარებით, მაგრამ სინამდვილეში (18,14) წარმოადგენს ნიუტონის განტოლებების მნიშვნელოვან განზოგადებას. მართლაც, (18,14) განტოლებიდან ნიუტონის განტოლებები მხოლოდ მაშინ მიიღება, როცა

<sup>1</sup> არაჰოლონომური ბმების შემთხვევაში ამოცანის ამოხსნის ზოგადი მეთოდი არ არსებობს, ყოველ ამოცანას ინდივიდუალური მეთოდით უნდა მივუდეთ.

სისტემაზე დადებული არ არის ბმები და, მაშასადამე, ყველა ვარიაცია  $\delta r_i$  ერთ-მანეთისაგან დამოუკიდებელია. დამოუკიდებელი ვარიაციების შემთხვევაში  $\delta r_i$ -ს-კოფეციენტების ნულთან განტოლებით, მართლაც მივიღებთ ნიუტონის მოძრაობის განტოლებათა სისტემას. ბმების შემთხვევაში კი ყველა  $\delta r_i$  დამოუკიდებელ ვარიაციას აღარ წარმოადგენს, ამიტომ (18,14) განტოლება ნიუტონის განტოლებათა სისტემის ეკვივალენტური აღარ არის. თუ (18,14)-ს გამოსავალ პრინციპად ჩავთვლით, მაშინ მისგან შეგვიძლია მივიღოთ მექანიკის მოძრაობის განტოლება უფრო ზოგად შემთხვევაში იდეალური ბმებისათვის, (18,14) განტოლებას უწოდებენ დალამბერის განტოლებას იდეალური ბმებისათვის, (18,12)-ს კი შეგვიძლია ვუწოდოთ დალამბერის განტოლება არაიდეალური ბმების შემთხვევაში.

დალამბერის განტოლებების საშუალებით შეგვიძლია მივიღოთ წონასწორობის პირობებიც. ვთქვათ, სისტემა იმყოფება წონასწორობაში, ე. ი. ყველა მისი წერტილი უძრავია. ცხადია ამ შემთხვევაში ( $\dot{r}=0$ ) დალამბერის (18,14) განტოლება მოგვცემს

$$\sum_{i=1}^N (F_i, \delta r_i) = 0, \quad (18,15)$$

რომელიც წარმოადგენს მექანიკური სისტემის წონასწორობის არა მხოლოდ აუცილებელ, არამედ საკმარის პირობასაც იდეალური ბმების შემთხვევაში. მართლაც, მივიღოთ, რომ ძალაშია (18,15) პირობა და დავამტკიცოთ, რომ სისტემა წონასწორობაში დარჩება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ სისტემის წერტილები ამოძრავდნენ. ცხადია, ამ შემთხვევაში შესაძლო გადაადგილებებზე შეგვიძლია ავირჩიოთ ის გადაადგილებანი, რომლებსაც წერტილები სინამდვილეში შეასრულებენ. ვინაიდან წონასწორობის მდგომარეობიდან გამოსული წერტილი იმძრავებას მოქმედი ძალის გასწვრივ, ამიტომ შესრულებული მუშაობა ამ უსასრულოდ მცირე გზაზე დადებითი იქნება; მაშასადამე,

$$\sum_{i=1}^N (F_i, \delta r_i) > 0. \quad (18,16)$$

ეს ტოლობა კი წინააღმდეგობაშია გამოსავალ (18,15) დებულებასთან. აქედან გამომდინარე, ჩვენი დაშვება იმის შესახებ, რომ წონასწორობა დაირღვა, საბართლიანი არ არის. მაშასადამე, (18,15) წარმოადგენს სისტემის წონასწორობის აუცილებელ და საკმარის პირობას იდეალური ბმების შემთხვევაში.

როცა ბმები იდეალური არ არის, მაშინ (18,12) განტოლების თანახმად, მექანიკური სისტემის წონასწორობის აუცილებელ და საკმარის პირობას ექნება სახე

$$\sum_{i=1}^N (F_i + R_i, \delta r_i) = 0, \quad (18,17)$$

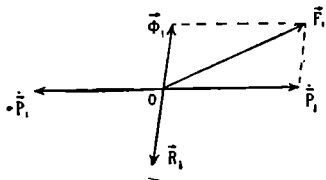
რომელიც იდეალური ბმების შემთხვევაში დაცეიანება (18,15) პირობაზე.

დალამბერის პრინციპის სხვა სახე. ხშირად ხელსაყრელია დალამბერის პრინციპს მივცეთ ისეთი სახე, რომლის გამოყენებით დინამიკური ამოცანები შეიძლება გადავწყვიტოთ სტატიკის მეთოდებით. განვიხილოთ სისტემის  $i$ -ური ნაწილაკის მოძრაობა. როცა ნაწილაკზე დადებულია ბმა, მაშინ მასზე მოქმედი აქტიური  $F_i$  ძალა იწვევს ნაწილაკის აჩქარებას, მაგრამ თავისუფალი მოძრაობისაგან განსხვავებით, აჩქარება  $F_i$  ძალის გასწვრივ არ არის მიმართული. აქტიური  $F_i$  ძალა

დაეშალოთ ორ ძალად: ერთი იყოს ძალა, რომელიც ტოლია მასისა და აჩქარების ნამრავლის, ე. ი.  $\dot{\mathbf{p}}_i$ -ს და, მეორე, რაღაც  $\Phi_i = \mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i$ , რომელსაც დაკარგულ ძალას უწოდებენ. დალაშქრების პრინციპით დაკარგული ძალა გაწონასწორებულია ბმის რეაქციის ძალით, ე. ი.  $\mathbf{R}_i + \Phi_i = 0$ ; რამდენადაც დაკარგული ძალა  $\Phi_i = \mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i$ , ამიტომ დალაშქრების პრინციპი საბოლოოდ მიიღებს გამოხატულებას

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i + (-\dot{\mathbf{p}}_i) = 0. \quad (18,18)$$

იგი სიტყვიერად ასე გამოითქმის: მოძრავი  $i$ -ური მატერიალური წერტილი მყისიერად რომ შეეჩეროთ და მასზე მოვლოთ აქტიური, პასიური და  $(-\dot{\mathbf{p}}_i)$  ძალები, იგი წონასწორობაში აღმოჩნდება.  $(-\dot{\mathbf{p}}_i)$  ძალას ინერციის ძალას უწოდებენ. მა-



ნახ. 17

შასადაც, დალაშქრების პრინციპის თანახმად ნაწილაკზე მოქმედი ძალები (აქტიური და პასიური) დროის ყოველ მომენტში შეიძლება გაეწონასწოროთ ინერციის ძალების საშუალებით. (18,18) დან ერთის შეხედვით შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ დალაშქრების პრინციპის მიხედვით ნაწილაკი ყოველთვის წონასწორობაში უნდა იყოს, მაგრამ სინამდვილეში ეს ასე არ არის, რამდენადაც ინერციის  $(-\dot{\mathbf{p}}_i)$  ძალა

მოძრავ წერტილზე კი არ არის მოდებული, არამედ გარეშე სხეულზე; ამიტომ ინერციის ძალას ჩშირად ფიქტურ ძალასაც უწოდებენ. საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ ასეთი მაგალითი. ვთქვათ ნაწილაკი მოძრაობს თანაბრად და სწორხაზოვნად (ინერციით). შევეცადოთ ნაწილაკის ხელით დამუხრუჭება და მისი ინერციული მოძრაობის დარღვევა. ამისათვის საჭიროა ხელმა ნაწილაკს მიანიჭოს მოძრაობის საწინააღმდეგოდ მიმართული გარკვეული ძალა. ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად, ნაწილაკი თავის მხრივ ხელზე იმოქმედებს ტოლი და საპირისპიროდ მიმართული ძალით, რომელიც ცხადია ხელზე იქნება მოდებული. სწორედ ამ ძალას, რომელიც ხელზე იქნება მოდებული, უწოდებენ ინერციის ძალას. იგი ფიქტიურია იმდენად, რამდენადაც მოდებულია ხელზე და არა მოძრავ ნაწილაკზე.

მაგალითი. (18,9) განტოლების გამოყენების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მარტივი მაგალითი. ვიპოვოთ სპიჩის ძალთა ექვსი მოთავსებული  $m$  მასის მატერიალური წერტილის წონასწორობის კოორდინატები  $a$  რადიუსის მქონე სფეროზე (ნახ. 18). ეკვლისხმოდ, რომ სტაციონარული გეომეტრიული ბმის გამო ნაწილაკი სფეროს ზედაპირს არასოდეს შორდება, კოორდინატთა სისტემის სათავე მოვათავსოთ სფეროს ცენტრში,  $z$  ღერძი კი მივმართოთ ვერტიკალის გასწვრივ ზევით. მაშინ ბმის განტოლებას ექნება სახე

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0. \quad (18,19)$$

(18,19) განტოლება კი წონასწორობისათვის ( $\ddot{\mathbf{r}}=0$ ) მოგვცემს

$$\mathbf{F} + \lambda \text{grad} f = 0. \quad (18,20)$$

რამდენადაც  $\nabla f = 2\mathbf{r}$ , ზღუნად ეს განტოლება ასე გადაიწერება:

$$\mathbf{F} + 2\lambda \mathbf{r} = 0. \quad (18,21)$$

(18,21) დაგვეგმილოთ საკოორდინატო ღერძებზე და გავათვალისწინოთ, რა  $F_x = F_y = 0$  და  $F_z = -mg$ ; გვექნება:

$$2\lambda x = 0, \quad 2\lambda y = 0, \quad -mg + 2\lambda z = 0. \quad (18,22)$$



(18,19) ბმის განტოლებასთან ერთად მივიღეთ ოთხი განტოლება  $x, y, z$  კოორდინატებისა და ლაგრანჟის  $\lambda$  მამრავლის განსასაზღვრავად. მათი ამოხსნით მივიღებთ:

$$x=y=0, \quad z=\pm a, \quad \lambda=\pm \frac{mg}{2a} \quad (18,23)$$

მაშასადამე, წონასწორობის წერტილები იქნება ვერტიკალური დიაგონალის ბოლო წერტილების  $M(0, 0, a)$  და  $N(0, 0, -a)$ .

(18,20) განტოლებიდან აშკარაა, რომ რეაქციის ძალა

$$R=\lambda r_f. \quad (18,24)$$

რადგან გრადიენტის განმარტებით

$$r_f = \frac{\partial f}{\partial n} n, \quad (18,25)$$

სადაც  $n$  სფეროს გარე ნორმალა, ამიტომ

$$R = \lambda \frac{\partial f}{\partial n} n. \quad (18,26)$$

მაშასადამე,  $R$ -ის მიმართულება ემთხვევა სფეროს გარე ნორმალის მიმართულებას, როცა  $\lambda > 0$  (ე. ი.  $\lambda = +\frac{mg}{2a}$ ) და — შიგა ნორმალის მიმართულებას, როცა  $\lambda < 0$  (ე. ი.  $\lambda = -\frac{mg}{2a}$ ), ხოლო სიდიდით  $R=mg$ -ს. ცხადია, რომ ამ კერძო შემთხვევაში, რადგან  $R$  მართობია სფეროს ზედაპირის, რეაქციის ძალის ვირტუალური მუშაობა ნულის ტოლი იქნება.

ენერჯიის ზედმეობის კანონის გამოყენება დალაშქრის განტოლებიდან. დაბოლოს ეჩვენეთ, რომ დალაშქრის (18,14) განტოლებიდან, კერძო შემთხვევაში, მიიღება ენერჯიის მუდმივობის კანონიც. ვთქვათ, შესაძლო გადაადგილება ემთხვევა ნაშლელი გადაადგილებას  $dt$  დროში. მაშინ  $\delta r = \dot{r} dt$  და დალაშქრის განტოლება მოგვცემს ცოცხალი ძალის კანონს

$$\sum_{i=1}^N (F_i, dr_i) = \sum_{i=1}^N \left( m_i \dot{r}_i, \frac{dr_i}{dt} \right) dt = d \left( \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2} \right), \quad (18,27)$$

როცა ძალებს აქვთ პოტენციალი, მაშინ  $\sum_{i=1}^N (F_i, dr_i) = -dU$  და (18,27) განტოლება მოგვცემს ენერჯიის შენახვის კანონს.

## § 18. ლაგრანჟის განტოლებები

ჩინა პარაგრაფში მივიღეთ მოძრაობის განტოლება

$$\sum_{i=1}^N \{ (F_i - \dot{p}_i), \delta r_i \} = 0, \quad (19,1)$$

რომელიც წარმოადგენს დალაშქრის პრინციპის ანალიზურ გამოხატულებას. (19,1) განტოლებიდან გამორიცხულია ბმის რეაქციის ძალები და, მაშასადამე ჩვენ გადავწყვიტეთ ამ თავის დასაწყისში დასმული ამოცანის ერთი ნახევარი. დალაშქრის განტოლებაში ყველა  $\delta r_i$  ვარაუდავად დამოუკიდებელია რომ იყოს, მაშინ განვახორციელებდით ჩვენი მიზნის შეორე ნახევარსაც. კერძოდ, (19,1) განტოლება მოგვ-

ცემა საძიებელი მოძრაობის განტოლებას, რამდენადაც დამოუკიდებელი  $\delta r_i$ -სთვის ნულთან ტოლობას ადგილი ექნებოდა მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება ნულის ტოლი იქნებოდა. მაგრამ სანამ რადიუსვექტორები დამოუკიდებლები არ არიან, ამის გაკეთება არ შეგვიძლია.

ცხადია, მაშასადამე, წინასწარ საჭიროა განზოგადებულ კოორდინატებზე გადასვლა.

ვთქვათ, სისტემაზე დაღებულია გეომეტრიული ბმები. გადავიღეთ დეკარტის  $r_i(x_i, y_i, z_i)$  კოორდინატებიდან განზოგადებულ  $q_i$  კოორდინატებზე. თუ სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი  $n$ -ის ტოლია, ეს გადასვლა შეგვიძლია განვახორციელოთ ფორმულებით

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t). \quad (19,2)$$

ჩვენი მიზანია (19,1) განტოლება გამოვსახოთ ახალი  $q_i$  კოორდინატებით. ამისათვის საჭირო იქნება ამ განტოლებაში შემავალი სიდიდეების  $\delta r_i$ ,  $\dot{p}_i$  და  $F_i$ -ს გამოხატვა განზოგადებულ კოორდინატებში. დავიწყეთ  $\delta r_i$ -ით. რადგან იგი გამოხატავს შესაძლო გადაადგილებას, ამიტომ დროის ვარიაცია არ მოხდება და გვექნება

$$\delta r_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (19,3)$$

განვიხილოთ  $\sum_{i=1}^N (F_i, \delta r_i)$ . იგი წარმოადგენს აქტიური ძალების ვირტუალურ მუშაობას. ცხადია, რომ (19,3)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^N (F_i, \delta r_i) = \left( \sum_{i=1}^N F_i, \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^N F_i, \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k. \quad (19,4)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \left( F_i, \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right). \quad (19,5)$$

ამ აღნიშვნით (19,4) ჯამი მიიღებს სახეს

$$\sum_{i=1}^N (F_i, \delta r_i) = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k. \quad (19,6)$$

$Q_k$ -ს განზოგადებული ძალა ეწოდება. სავალდებულო არაა, რომ განზოგადებულ ძალას ძალის განზომილება ჰქონდეს. იგი შეიძლება აღმოჩნდეს ნებისმიერი განზომილების სიდიდე, ოღონდ  $Q_k \cdot \delta q_k$  ნამრავლს ყოველთვის მუშაობის განზომილება ექნება (ეს გასაგებია, რადგან (19,6)-ის მარცხენა მხარეში მუშაობა გვაქვს). ახალ კოორდინატებში გამოსახატავი დაგვრჩა მეორე წევრი.

$$\sum_{i=1}^N (\dot{p}_i, \delta r_i) = \sum_{i=1}^N m_i (\dot{r}_i, \delta r_i). \quad (19,7)$$

თუ შევიტანთ  $\delta r_i$ -ის მნიშვნელობას (19,3) ფორმულაში, მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^N (\dot{p}_i \cdot \delta r_i) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \left( \ddot{r}_i, \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k. \quad (19,8)$$

ეს უკანასკნელი კი შეგვიძლია გადავწეროთ ასე:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \left( \ddot{r}_i, \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \\ & = \sum_k \delta q_k \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{r}_i, \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) - m_i \left( \dot{r}_i, \frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (19,9)$$

ჩვენ დაგვრჩა  $\dot{r}_i$  სიჩქარის გამოხატვა ახალი კოორდინატებით. გვაქვს

$$\dot{r}_i = \sum_{v=1}^N \frac{\partial r_i}{\partial q_v} \dot{q}_v + \frac{\partial r_i}{\partial t}. \quad (19,10)$$

ამ ფორმულის დახმარებით ჩვენ შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_k \partial t}, \quad (19,11)$$

ე. ი. დროითი და კოორდინატებით წარმოებულების გადასმა შეიძლება. მართლაც, ერთი მხრივ, (19,10) ის გაწარმოება  $q_k$ -თი მოგვეცემს

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_k} = \sum_v \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_k \partial q_v} \dot{q}_v + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_k \partial t}. \quad (19,12)$$

ხოლო, მეორე მხრივ, რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \sum_v \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_v \partial q_k} \dot{q}_v + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_k \partial t}. \quad (19,13)$$

უკანასკნელი ორი ტოლობის შედარება მოგვეცემს დასამტკიცებელ (19,11) ტოლობას. ჩვენ დაგვეჩივრება კიდევ ერთი ტოლობა, რომელსაც მივიღებთ (19,10)-ის გაწარმოებით  $q_k$ -თი

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial r_i}{\partial q_k}. \quad (19,14)$$

მაშასადამე, თანახმად (19,11) და (19,14) ფორმულებისა, (19,9) ჯამს მიეცემა სახე

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{r}_i, \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) - m_i \left( \dot{r}_i, \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) \right] \right\} \delta q_k. \quad (19,15)$$

ეს კი შეგვიძლია გადავწეროთ იგივეურად

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2} \right) \right] \right\} \delta q_k. \quad (19,16)$$

რადგან კინეტიკური ენერგია განისაზღვრება ფორმულით

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{r}_i^2}{2}, \quad (19,17)$$

ამიტომ ჩამი საბოლოოდ შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\sum_{i=1}^N (\dot{p}_i, \delta r_i) = \sum_k \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \delta q_k. \quad (19,18)$$

ამ ფორმულასთან ერთად, თუ გავითვალისწინებთ (19,6) გამოსახულებას, დალაშქრების (19,1) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0, \quad (19,19)$$

განზოგადებული კოორდინატების განმარტებიდან აშკარაა, რომ ყველა  $\delta q_k$  სიდიდე ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. მაშასადამე, (19,19) ტოლობა მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ გვექნება, როცა ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება ნულის ტოლია. ამგვარად,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (19,20)$$

სულ მივიღებთ  $n$  ასეთ განტოლებას. ამ განტოლებებს უწოდებენ ლაგრანჟის განტოლებებს. მიღებული განტოლებები გამოდგება როგორც კონსერვატული, ისე არაკონსერვატული ამოცანებისათვის. ჩვენთვის განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია კონსერვატული ველების შემთხვევა. ამ შემთხვევაში ძალებს აქვთ პოტენციალი

$$F_i = - \frac{\partial U}{\partial r_i}, \quad (19,21)$$

სადაც  $U$  სისტემის პოტენციალური ენერგიაა. განზოგადებული ძალა ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$Q_k = \sum_i \left( F_i, \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) = - \sum_i \left( \frac{\partial U}{\partial r_i}, \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) = - \frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (19,22)$$

ამგვარად, კონსერვატული სისტემებისათვის განზოგადებული ძალაც შეგვიძლია დავუკავშიროთ პოტენციალური ენერჯიის წარმოებულს განზოგადებული კოორდინატებით

$$Q_k = - \frac{\partial U}{\partial q_k}, \quad (19,23)$$

იგი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც  $n$  განზომილებიანი გრადიენტის  $k$ -ური მდგენელი. კონსერვატული სისტემისათვის ლაგრანჟის განტოლება, ამგვარად, მიიღებს სახეს

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_k} = 0. \quad (19,24)$$

შენიშნოთ, რომ კონსერვატული სისტემებისათვის პოტენციალური ენერგია მხოლოდ აბილიმდებარეობის ფუნქციაა და იგი სიჩქარეებზე დამოკიდებული არ არის,

ამიტომ  $\frac{\partial T'}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} (T - U)$ , რის ძალითაც ლაგრანჟის განტოლებები მიიღებს სახეს

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (19,25)$$

სადაც

$$L = T - U \quad (19,26)$$

ეწოდება ლაგრანჟის ფუნქცია, ანდა მოკლედ, ლაგრანჟიანი. აღსანიშნავია, რომ ლაგრანჟის იმდენი განტოლება გვაქვს, რამდენიც არის სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი.

ლაგრანჟის განტოლებები არის მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები განზოგადებული კოორდინატების მიმართ. ასეთ სისტემას, როგორც ცნობილია, აქვს ზოგადი ამოხსნა, რომელიც დამოკიდებულია  $2n$  ნებისმიერ მუდმივზე, ე. ი.

$$q_i = q_i(t; c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \quad (19,27)$$

მათი განსაზღვრის მიზნით საჭიროა ვიცოდეთ წერტილის საწყისი მდგომარეობა კონფიგურაციულ სივრცეში, ე. ი. მოცემული უნდა იყოს წერტილის მდებარეობა და განზოგადებული სიჩქარე საწყის  $t=0$  მომენტში, ე. ი. სიდიდეები:

$$(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0) \quad \text{და} \quad (\dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, \dots, \dot{q}_n^0).$$

შევნიშნოთ, რომ იზოლირებული სისტემის ლაგრანჟიანი არ იცვლება  $t \rightarrow -t$  შეცვლისას, რამდენადაც იგი შეიცავს დროითი წარმოებულების მხოლოდ ლუწ კომბინაციებს. მაშასადამე, ლაგრანჟის განტოლებები დროში შებრუნებადია, ე. ი. თუ მექანიკურ სისტემას შეუძლია რაიმე მოძრაობა, მაშინ მას შეუძლია დროში შებრუნებული მოძრაობაც, ან სხვანაირად, ლაგრანჟის მოძრაობის განტოლებები სიმეტრიულია მოძვლის წარსულის შეცვლით და პირიქით.

აღვნიშნოთ, რომ განზოგადებული კოორდინატების შემოღების შექდეგ მკაცრი საზღვარი სისტემას და ერთ ნაწილას შორის აღარ არსებობს. ამიტომ შემდგომში როგორც ერთ ნაწილას, ისე სისტემას ერთნაირად განვიხილავთ. სისტემის განხილვის დროს ის განსხვავება გვქვნება, რომ განზოგადებულ კოორდინატთა რიცხვი, საზოგადოდ, სამზე მეტი იქნება.

შევნიშნოთ ლაგრანჟის განტოლებების ერთი მეტად მნიშვნელოვანი თავისებურება, სახელდობრ, ის, რომ მათ ყველა კოორდინატისათვის ერთნაირი სახე აქვთ, ე. ი. ლაგრანჟის განტოლებები კოვარიანტული რჩებიან (სახეს არ იცვლიან) ერთი ტიპის განზოგადებული კოორდინატებიდან მეორეზე გადასვლის დროს.

ერთი მატერიალური წერტილისათვის, დეკარტის კოორდინატებში, ლაგრანჟის ფუნქციისათვის გვექნება

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z), \quad (19,28)$$

და ლაგრანჟის განტოლებები მოგვცემენ ნიუტონის განტოლებებს:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (19,29)$$

ლაგრანჟის განტოლებების გამოყვანის ჩვენს მიერ არჩეული გზა ერთადერთი არაა. ისინი შეგვიძლია გამოვიყვანოთ ნიუტონის განტოლებებიდანაც. ამისათვის, სხვათა შორის, საკმარისია (5,29) ფორმულაში ვიგულისხმოდ, რომ  $u_1$ ,

14, 15 განზოგადებული კოორდინატებია. ლაგრანჟის განტოლებების გამოყენების უფრო ზოგად მეთოდს მოვიყვანოთ ჰამილტონის ვარიაციული პრინციპის განხილვისას.

დაბოლოს, აღვნიშნოთ, რომ ლაგრანჟის განტოლებების გამოყენებით ჩვენ გადავდით ანალიზურ მექანიკაზე, სადაც ვექტორული სიდიდეების ნაცვლად საქმე გვექნება სკალარულ ლაგრანჟის ფუნქციასთან, ხოლო სისტემა აღიწერება განზოგადებულ კოორდინატებში, რომლებიც დროის გარკვეულ ფუნქციებს წარმოადგენს.

### § 20. ლაგრანჟის ფუნქცია

წინა პარაგრაფში დავინახეთ, რომ მოძრაობის განტოლების დასაწერად საკმარისია ორი სკალარული  $T$  და  $U$  ფუნქციის ცოდნა. ლაგრანჟიანი კი წარმოადგენს ამ ფუნქციების სხვაობას

$$L = T - U. \quad (20,1)$$

დაეწერათ სისტემის ლაგრანჟიანი განზოგადებულ კოორდინატებში. სისტემის კინეტიკური ენერგია განისაზღვრება ფორმულით

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i^2, \quad (20,2)$$

სადაც  $m_i$  არის  $i$ -ური ნაწილაკის მასა,  $\dot{r}_i$  კი — მისი სიჩქარე. გადავიდეთ განზოგადებულ კოორდინატებზე. განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა და დაეუშვათ, რომ ბმევი არასტაციონარულია, მაშინ

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t), \quad (20,3)$$

დროთი გაწარმოება გვაძლევს

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad (20,4)$$

ასე რომ, კინეტიკური ენერჯიისათვის გვექნება

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right]^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[ \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_j + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \dot{q}_k + \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (20,5)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right), \quad (20,6)$$

$$b_k = \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right), \quad (20,7)$$

$$c = \sum_{i=1}^n m_i \left( \frac{\partial r_i}{\partial t} \right)^2, \quad (20,8)$$

მაშინ კინეტიკურ ენერგიას განზოგადებულ კოორდინატებში ექნება სახე

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_k b_k \dot{q}_k + \frac{1}{2} c, \quad (20,9)$$

სადაც  $a_{ik}$  არის განზოგადებული კოორდინატების და დროის ფუნქცია.  $q_1, q_2, \dots, q_n$  კოორდინატების ერთობლიობა, შემოკლების მიზნით, ერთი  $q$  ასოთი აღვნიშნოთ.  $b_k$  და  $c$  აგრეთვე კოორდინატების და დროის ფუნქციებია. როგორც (20,6)-დან ჩანს,

$$a_{ik}(q, t) = a_{ki}(q, t). \quad (20,10)$$

პოტენციალური ენერგიის განზოგადებულ კოორდინატებში გამოსახტავად საკმარისია ვისარგებლოთ (20,3) ფორმულით. მივიღებთ

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n; t), \quad (20,11)$$

ლაგრანჟის ფუნქციის შესადგენად კი საკმარისია  $T - U$  სხვაობის აღება.

ჩვენთვის განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია სტაციონარული ბმების შემთხვევა, როდესაც  $r_i$  დროს არ შეიცავს, ე. ი.

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (20,12)$$

ამ შემთხვევაზე გადასავლელად საკმარისია  $b_k$  და  $c$  კოეფიციენტების ნულთან გატოლება, მაშინ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (20,13)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ სისტემის კინეტიკური ენერგია განზოგადებული სიჩქარეების კვადრატული ფუნქციაა, ამასთან  $a_{ik}(q)$  სიდიდე კოორდინატების ფუნქციაა და მასას არ წარმოადგენს. იგი მასა იქნება მხოლოდ კერძო შემთხვევაში, როცა სისტემის ენერგია ჩაწერილია დეკარტის კოორდინატებში. ამგვარად, სტაციონარული ბმების შემთხვევაში სისტემის ლაგრანჟიანისათვის, თანახმად (20,13) ფორმულისა, გვაქვს

$$L = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q, t). \quad (20,14)$$

დასასრულ ვაჩვენოთ, რომ ლაგრანჟის ფუნქცია განსაზღვრულია კოორდინატებისა და დროის ნებისმიერი ფუნქციის დროის მიხედვით სრული წარმოებულის სიზუსტით. ეს დებულება, ზოგადობის დაურღვევლად, შეგვიძლია დავამტკიცოთ ერთი ცვლადის შემთხვევაში.

ვთქვათ, მაშასადამე,

$$L = L' + \frac{df(q, t)}{dt}, \quad (20,15)$$

სადაც  $f(q, t)$  ნებისმიერი ფუნქციაა. მაშინ ლაგრანჟის განტოლება

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

მიიღებს სახეს

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L'}{\partial q} + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{df}{dt} - \frac{\partial}{\partial q} \frac{df}{dt} = 0, \quad (20,16)$$

რადგან

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q}, \quad (20,17)$$

ამიტომ

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{df}{dt} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} \right) = \frac{\partial f}{\partial q}. \quad (20,18)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ<sup>1</sup>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \frac{df}{dt}. \quad (20,19)$$

მაშინ (20,16) განტოლებაში ბოლო ორი წევრი ერთმანეთს მოსპობს, და მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L'}{\partial q} = 0. \quad (20,20)$$

ამრიგად, ლაგრანჟიანზე ნებისმიერი ფუნქციის დროის მიხედვით სრული წარმოებულის დამატებამ მოძრაობის განტოლებები უცვლელი დატოვა.

### § 21 ლაგრანჟის ფუნქციის სახე მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში

პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნის დროს მეტად ხელსაყრელია ერთი ნაწილაკის ლაგრანჟის ფუნქციის გამოხატვა მრუდწირულ კოორდინატებში. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია მისი ჩაწერა სფერულ  $r, \theta, \varphi$ , ცილინდრულ  $\rho, \varphi, z$ , პოლარ  $\rho, \vartheta$  და პარაბოლურ  $\xi, \eta, \varphi$  კოორდინატებში. ამ შემთხვევაში, განზოგადებული კოორდინატების როლს შეასრულებენ თვით მრუდწირული კოორდინატები. მაშასადამე, საჭიროა მატერიალური წერტილის ლაგრანჟიანი, რომელსაც დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში აქვს შემდეგი სახე:

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - U(r, t) \quad (21,1)$$

გამოვხატოთ სხვადასხვა მრუდწირულ კოორდინატებში. ამისათვის კი, ცხადია, საჭიროა იქნება სიჩქარის გამოსახვა ამ კოორდინატებში. (5,3) ფორმულის თანახმად, სიჩქარის კვადრატისათვის გვექნება

$$\dot{r}^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 g_{ik} (q_1, q_2, q_3) \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (21,2)$$

სადაც

$$g_{ik} = \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \right). \quad (21,3)$$

ხოლო  $q_1, q_2, q_3$  განზოგადებული (მრუდწირული) კოორდინატებია. მაშასადამე, ლაგრანჟიანისათვის მრუდწირულ კოორდინატებში შეგვიძლია დავწეროთ

<sup>1</sup> იხ. (19,11) ტოლობა.



$$L = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q_1, q_2, q_3; t) \quad (21,4)$$

როცა მრუდწირული კოორდინატები ორთოგონალურია, მაშინ გვექნება

$$\dot{r}^2 = \sum_{i=1}^3 g_{ii} \dot{q}_i^2 = \sum_{i=1}^3 h_{ii}^2 \dot{q}_i^2 \quad (21,5)$$

სადაც  $h_{ii}$  ლამეს პარამეტრებია. ლაგრანჟის ფუნქცია კი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$L = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 h_{ii}^2 \dot{q}_i^2 - U(q_1, q_2, q_3; t) \quad (21,6)$$

როგორც ვხედავთ, განსხვავებით დეკარტის კოორდინატებისაგან, ერთი ნაწილაკის შემთხვევაშიც კი კინეტიკური ენერჯიის გამოსახულებაში შედის არა მასა, არამედ  $a_{ii}(q) = mh_{ii}^2(q_1, q_2, q_3)$  ფუნქცია.

ახლა ცალ-ცალკე განვიხილოთ სფერული, ცილინდრული პოლარი და პარაბოლური კოორდინატები.

სფერული კოორდინატები. (4,30) ფორმულების თანახმად, სფერულ კოორდინატებში ლამეს პარამეტრები ტოლია  $h_{11}^2=1$ ,  $h_{22}^2=r^2$ ,  $h_{33}^2=r^2 \sin^2 \theta$ , ამიტომ ლაგრანჟიანისათვის სფერულ კოორდინატებში შეგვიძლია დავწეროთ

$$L = \frac{m}{2} (r^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - U(r, \theta, \varphi) \quad (21,7)$$

შესაბამისად გვექნება ლაგრანჟის საში განტოლება:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (21,8)$$

რომელთა ცხადი სახით დაწერა არაა ძნელი ლაგრანჟიანის (21,7) გამოსახულების გამოყენებით. ცხადია, რომ ეს განტოლებები დაემთხვევა ნიუტონის (8,9) განტოლებებს.

სფერული კოორდინატების გამოყენება განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია იმ შემთხვევაში, როცა პოტენციალურ ენერჯიას ცენტრალური სიმეტრია ახასიათებს, ე. ი. როცა  $U = U(r)$ .

ცილინდრული კოორდინატები, ცილინდრულ კოორდინატებში ლამეს პარამეტრები ტოლია  $h_{11}^2=1$ ,  $h_{22}^2=r^2$ ,  $h_{33}^2=1$ , ამიტომ ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება სახე

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(r, \varphi, z) \quad (21,9)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა გვაქვს მოძრაობა სიბრტყეზე, ( $z=0$ ), მივიღებთ

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r, \varphi) \quad (21,10)$$

ამ უკანასკნელ შემთხვევაში გვექნება ლაგრანჟის ორი განტოლება

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \quad (21,11)$$

ლაგრანჟიანის (21,9) გამოხატულების შეტანით მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0, \quad (21,12)$$

$$m \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}) + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0. \quad (21,13)$$

ეს განტოლებებიც ემთხვევა ნიუტონის (8,10) განტოლებებს. როცა პოტენციალურ ენერჯიას ახასიათებს ცენტრალური სიმეტრია, მაშინ (21,13) განტოლებაში გვექნება  $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$ .

პარაბოლური კოორდინატები. დაბოლოს, დაეწეროთ ლაგრანჟიანის ფუნქციის გამოხატულება პარაბოლურ კოორდინატებში. ლამეს პარამეტრებს (4,45) ფორმულის თანახმად, ამ კოორდინატებში ექნებათ სახე:

$$h_{11}^2 = \frac{\xi + \eta}{4\xi}, \quad h_{22}^2 = \frac{\xi + \eta}{4\eta}, \quad h_{33}^2 = \xi\eta, \quad (21,14)$$

ამიტომ ლაგრანჟიანისათვის მივიღებთ გამოსახულებას

$$L = \frac{m(\xi + \eta)}{8} \left( \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 \right) + \frac{m\xi\eta}{2} \dot{\varphi}^2 - U(\xi, \eta, \varphi). \quad (21,15)$$

ამ ფუნქციის გათვალისწინებით ადვილად დაიწერება ლაგრანჟიანის განტოლებები პარაბოლურ კოორდინატებში.

## § 22. განზოგადებული იმპულსი

ეუკვათ, ვიხილავთ მატერიალური წერტილის მოძრაობას დეკარტის სისტემაში, მაშინ ლაგრანჟიანი ტოლია

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z). \quad (22,1)$$

ნათელია, რომ ნაწილაკის იმპულსი ლაგრანჟიანთან დაკავშირებულია ფორმულებით:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

გავაფართოოთ ახლა ეს განმარტება და განზოგადებული იმპულსი ვუწოდოთ ლაგრანჟიანის წარმოებულს განზოგადებული სიჩქარით

$$p_i = \frac{\partial J_i}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (22,2)$$

სადაც  $L$  არის სისტემის ლაგრანჟიანის ფუნქცია განზოგადებულ კოორდინატებში. როცა ძალებს პოტენცილი აქვთ, ე. ი. როცა პოტენციალური ენერჯია სიჩქარეების ფუნქცია არ არის, მაშინ

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad (22,3)$$

სადაც  $T$  სისტემის კინეტიკური ენერჯიაა. სტაციონარული ბმების შემთხვევაში

$$T = \frac{1}{2} \sum_{jk} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (22,4)$$

ამიტომ

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \sum_{jh} a_{jh}(q) \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_h + \frac{1}{2} \sum_{jh} a_{jh}(q) \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j. \quad (22,5)$$

უხადია, რომ  $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{ji}$ . ამიტომ

$$p_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{jk} \dot{q}_j. \quad (22,6)$$

თუ მეორე წამში  $j$ -ს შევცვლით  $k$ -თი, ამით წამის მნიშვნელობა არ შეიცვლება. თუ გავიხსენებთ აგრეთვე  $a_{ik} = a_{ki}$  ტოლობას, გვექნება

$$p_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}(q) \dot{q}_k. \quad (22,6')$$

როგორც ვხედავთ, განზოგადებული იმპულსი დამოკიდებულია კოორდინატებზედაც. იგი არ წარმოადგენს იმპულსს ჩვეულებრივი ვაგებით — მასისა და სიჩქარის ნამრავს. საზოგადოდ განზოგადებულ იმპულსს შეიძლება იმპულსის განზომილებაც კი არ ჰქონდეს, იგი შეიძლება გამოხატავდეს სხვადასხვა ფიზიკურ სიდიდეს. მხოლოდ კერძო შემთხვევაში, როცა ვიხილავთ მოძრაობას დეკარტის სისტემაში, განზოგადებული იმპულსი დამთხვევა ჩვეულებრივ იმპულსს.

დაეწეროთ ახლა ერთი ნაწილაკის განზოგადებული იმპულსების გამოხატულებანი სხვადასხვა კოორდინატთა სისტემებში. დავიწყოთ სფერული კოორდინატებით. ლაგრანჟიანს ამ კოორდინატებში აქვს სახე

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - U(r, \theta, \varphi). \quad (22,7)$$

განზოგადებული იმპულსებისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (22,8)$$

სრულად ანალოგიურად სიბრტყეზე მოძრაობისას პოლარკოორდინატებში გვექნება

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - U(\rho, \varphi), \quad (22,9)$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} p_\rho &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (22,10)$$

განვიხილოთ ახლა პარაბოლური კოორდინატები. ამ კოორდინატებში, თანამედროვე (21,15) გამოხატულებისა, გვექნება განზოგადებული იმპულსები:

$$\begin{aligned}
 p_{\xi} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \frac{m}{4\xi} (\xi + \eta) \dot{\xi}, \\
 p_{\eta} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = \frac{m}{4\eta} (\xi - \eta) \dot{\eta}, \\
 p_{\varphi} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \dot{\xi} \dot{\eta} \dot{\varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{22,11}$$

განზოგადებული იმპულსის ცნება დიდ როლს ასრულებს მექანიკაში. ერთ მნიშვნელოვან უმაღლეს დავინახავთ, თუ ლაგრანჟის განტოლებებში

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0
 \tag{22,12}$$

გავითვალისწინებთ განზოგადებული იმპულსის (22,2) განმარტებას, მაშინ ამ განტოლებათა ნაცვლად მივიღებთ სისტემას:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)
 \tag{22,13}$$

ნაცვლად მეორე რიგის  $n$  დიფერენციალური განტოლებისა, მივიღებთ  $2n$  პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებები, რომელთა ამოხსნა ხშირად უფრო მოსახერხებელია, ვიდრე ლაგრანჟის განტოლებებისა.

### § 23. ენერგია განზოგადებულ კოორდინატებში

გამოვიყვანოთ სისტემის სრული ენერგიის ფორმულა განზოგადებულ კოორდინატებში. ვთქვათ, სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი  $n$ -ის ტოლია, მაშინ იგი დახასიათდება  $n$  განზოგადებული კოორდინატით. განვიხილოთ იზოლირებული სისტემა და ვთქვათ, სისტემაზე დადებულია სტაციონარული ბმები. ამ შემთხვევაში ლაგრანჟიანი დროზე არ იქნება დამოკიდებული და ადგილი ექნება ენერგიის შენახვის კანონს. ვიპოვოთ ლაგრანჟის ფუნქციის სრული წარმოებულის დროთი. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად მივიღებთ

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k
 \tag{23,1}$$

გარდაეკმნათ მარჯვენა მხარის მეორე წევრი,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{d}{dt} \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \sum \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k
 \tag{23,2}$$

რადგან სისტემა მოძრაობს ლაგრანჟის განტოლებების მიხედვით, ამიტომ მარჯვენა მხარეში პირველი და ბოლო წევრი ერთად ნულის ტოლია, და მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \left( \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = 0.
 \tag{23,3}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \text{const.}
 \tag{23,4}$$

ამ სიდიდეს უწოდებენ მექანიკური სისტემის სრულ ენერგიას. აღნიშნოთ იგი  $E$ -თი. ამგვარად,

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L. \quad (23,5)$$

თუ მექანიკური სისტემა იზოლირებულია, მაშინ მისი ენერგია წარმოადგენს მოძრაობის ინტეგრალს. ლაგრანჟიანის ერთადერთი თვისება, რომელიც გამოვიყენეთ ენერჯიის შენახვის კანონის მტკიცებისას, არაა ის, რომ იგი დროის ცხადი ფუნქცია არაა. მაგრამ ლაგრანჟიანი დროზე ცხადად დამოკიდებული შეიძლება არ იყოს არაიზოლირებული სისტემებისათვისაც, სახელობრ, როცა სისტემა იმყოფება უცვლელ გარეშე პირობებში, ე. ი. როცა სისტემაზე მოქმედი გარეშე ველის პოტენციალური ენერგია დროზე არაა დამოკიდებული, ამიტომ, ამ შემთხვევაშიც, ენერგია მოძრაობის ინტეგრალი იქნება. მექანიკურ სისტემებს, რომელთა ენერგია ინახება, როგორც აღნიშნეთ, კონსერვატულს უწოდებენ.

(23,5) ფორმულით განსაზღვრული  $E$  სიდიდე რომ მართლაც ენერგიას წარმოადგენს, ჩანს შემდეგიდან; შევითანოთ (23,5) ფორმულაში  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ -ს ნაცვლად იმპულსი, მაშინ გვექნება

$$E = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (23,6)$$

მეორე მხრივ, (22,6') ძალით,

$$p_i = \sum_k a_{ik}(q) \dot{q}_k.$$

ამიტომ

$$E = \sum_i \sum_k a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k - L. \quad (23,7)$$

თუ ახლა გავიხსენებთ (20,1') ფორმულას, რომელიც განსაზღვრავს  $L$ -ს, მივიღებთ

$$E = \frac{1}{2} \sum a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k + U(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (23,8)$$

რაც, თანახმად (20,13)-სა, ასეც გადაიწერება:

$$E = T + U.$$

ამრიგად,  $E$  მართლაც უდრის კინეტიკური და პოტენციალური ენერჯიების ჯამს, ე. ი. წარმოადგენს სისტემის სრულ ენერგიას.

## § 24. ციკლური კოორდინატები

მთელი რაგი ამოცანების განხილვის დროს, ხშირად. ლაგრანჟის ფუნქცია დამოკიდებული არ არის რომელიმე ერთ ან რაღუნიმე  $q_k$  განზოგადებულ კოორდინატზე, იმ დროს, როცა შესაბამის განზოგადებულ  $q_k$  სიჩქარეზე იგი დამოკიდებულია. ასეთ შემთხვევაში  $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$  და  $q_k$ -ს ციკლურ კოორდინატს უწოდებენ. თუ  $q_k$  ციკლურია, მაშინ ლაგრანჟის მოძრაობის განტოლება მოგვეცემს

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \quad (24,1)$$

და, მაშასადამე,

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \text{const}, \quad (24,2)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ციკლური კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული იმპულსი მოძრაობის პირველ ინტეგრალს წარმოადგენს (პირველ ინტეგრალს იმიტომ უწოდებენ, რომ ამ შემთხვევაში ინახება კოორდინატისა და მისი დროით-პირველი რიგის წარმოებულის გარკვეული კომბინაცია).

ციკლური კოორდინატების შესაბამისი მოძრაობის ინტეგრალი შეიძლება გაიშვილებინათ მოძრაობის განტოლების ამოსახსნელად. მაგალითისათვის განვიხილოთ თავისუფალი ნაწილაკი. ლაგრანჟიანს დეკარტის კოორდინატებში ექნება შემდეგი სახე:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (24,3)$$

აქედან ჩანს, რომ სამივე ცვლადი ციკლურია, ამიტომ გვექნება:

$$p_x = m\dot{x} = c_1, \quad p_y = m\dot{y} = c_2, \quad p_z = m\dot{z} = c_3. \quad (24,4)$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$x = \frac{c_1}{m} t + c_1', \quad y = \frac{c_2}{m} t + c_2', \quad z = \frac{c_3}{m} t + c_3'. \quad (24,5)$$

ე. ი. ვეღა კოორდინატი დროის მარტივი ფუნქციაა.

მეორე მაგალითის სახით განვიხილოთ მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის ველში. ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრაობა ბრტყელია. ამიტომ შეგვიძლია ვისარგებლოთ პოლარკოორდინატებით. ლაგრანჟის ფუნქციას აქვს სახე

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - U(\rho), \quad (24,6)$$

ლაგრანჟიანი არაა დამოკიდებული  $\varphi$ -ზე, ეს იმას ნიშნავს, რომ  $\varphi$  ციკლური კოორდინატია და, მაშასადამე, შესაბამისი განზოგადებული იმპულსი

$$p_\varphi = m\rho^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad (24,7)$$

მოძრაობის ინტეგრალია. რადგან იმპულსის მომენტის  $z$  პროექცია ტოლია გამოსახულების

$$l_z = m(\dot{x}y - y\dot{x}). \quad (24,8)$$

ამიტომ პოლარკოორდინატებში  $l_z$ -ს ექნება გამოხატულება

$$l_z = m\rho^2 \dot{\varphi}. \quad (24,9)$$

მაშასადამე,  $p_\varphi$  განზოგადებული იმპულსი ემთხვევა იმპულსის მომენტის  $z$  პროექციას და მოძრაობის ინტეგრალს წარმოადგენს ცენტრალური სიმეტრიის ველში, რადგან იმპულსის მომენტი მოძრაობის სიბრტყის მართობია, ამიტომ  $l = (0, 0, l_z)$  და, მაშასადამე,

$$p_\varphi = l = m\rho^2 \dot{\varphi} \quad (24,10)$$

ინახება ცენტრალური სიმეტრიის ველში.

## მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის ველში

ამ თავში შევისწავლით მოძრაობას ცენტრალური ძალების გავლენით, ე. ი. როცა ურთიერთქმედების პოტენციალურ ენერგიას ცენტრალური სიმეტრია ახასიათებს. ამ შემთხვევაში, როგორც არაერთხელ აღვნიშნეთ, პოტენციალური ენერგია დამოკიდებულია რადიუსვექტორის მხოლოდ სიდიდზე,  $U = U(|r|)$ , ცენტრალური ძალებიდან ყველაზე მნიშვნელოვანია მსოფლიო მიზიდულობისა და კულონური ურთიერთქმედების ძალები, ამიტომ დაწვრილებით შევჩერდებით ამ ძალებზე.

### § 25. ორი სხეულის ამოცანის დაშვანა ერთი სხეულის ამოცანაზე

განვიხილოთ ორი მატერიალური წერტილი მასებით  $m_1$  და  $m_2$  და ვთქვათ, რომ ამ ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ენერგია ფუნქციაა  $|r_1 - r_2|$ -ისა, სადაც  $r_1$  და  $r_2$  ნაწილაკთა რადიუსვექტორებია ლაბორატორიული სისტემის მიმართ. რადგან სისტემის კინეტიკური ენერგია ცალკეულ ნაწილაკთა კინეტიკური ენერგიების ჯამის ტოლია, ამიტომ ამ ორი ნაწილაკის ლაგრანჟის ფუნქციისათვის გვექნება

$$L = \frac{m_1 \dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{r}_2^2}{2} - U(|r_1 - r_2|). \quad (25.1)$$

გამოვყოთ სიმძიმის ცენტრის მოძრაობა. ამისათვის, როგორც ადრე აღვნიშნეთ, საჭიროა გადავიდეთ იაკობის კოორდინატებზე. რომლებსაც ორი ნაწილაკისათვის ექნება სახე:

$$r = r_1 - r_2 \quad (25.2)$$

$$R_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}, \quad (25.3)$$

ე. ი. შემოგვაქვს ფარდობითი მოძრაობისა და სიმძიმის ცენტრის რადიუსვექტორები. ამ განტოლებიდან შეგვიძლია ამოვხსნათ  $r_1$  და  $r_2$ . გვექნება:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r + R_c, \quad (25.4)$$

$$r_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} r + R_c. \quad (25.5)$$

ამ უკანასკნელი ტოლობებიდან ვიპოვოთ  $\dot{r}_1$  და  $\dot{r}_2$  სიჩქარეები, და შევტანოთ ლაგრანჟის (25.1) ფუნქციაში. გადმარტივების შემდეგ მივიღებთ,

$$L = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \dot{r}^2 + \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{R}_c^2 - U(r), \quad (25,6)$$

სადაც  $r = |r_1 - r_2|$ .

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$M = m_1 + m_2, \quad (25,7)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (25,8)$$

$M$  გამოხატავს სისტემის სრულ მასას, ხოლო  $\mu$ -ს დაყვანილ მასას უწოდებენ. როცა  $m_1 = m_2 = m$ , მაშინ დაყვანილი მასა

$$\mu = \frac{m}{2}, \quad (25,9)$$

ხოლო, როცა  $m_2$  მასა  $m_1$ -ზე გაცილებით მეტია, გვექნება

$$\mu = \frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \simeq m_1 \left( 1 - \frac{m_1}{m_2} + \dots \right), \quad (25,10)$$

ე. ი. დაყვანილი მასა ახლოა მსუბუქი ნაწილაკის მასასთან, მაგალითად, წყალბადის ატომის შემთხვევაში დაყვანილი მასა

$$\mu \simeq m_1 \left( 1 - \frac{1}{1836} \right), \quad (25,11)$$

სადაც  $m_1$  ელექტრონის მასაა. როცა შეგვიძლია  $\frac{m_1}{m_2}$  ფარდობის სრულიად უგულებელყოფა, მაშინ დაყვანილი მასა ემთხვევა მსუბუქი ნაწილაკის მასას  $\mu = m_1$ . ლაგრანჯიანის (25.6) გამოსახულება საბოლოოდ მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$L = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{M \dot{R}_c^2}{2} = U(r). \quad (25,12)$$

ცხადია, რომ

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}_1 - \dot{r}_2 \quad \text{და} \quad \mathbf{V}_c = \dot{R}_c = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2}, \quad (25,13)$$

სადაც  $\mathbf{p}_1$  და  $\mathbf{p}_2$  პირველი და მეორე ნაწილაკის იმპულსებია. წარმოადგენენ ნაწილაკთა ფარდობით და ინერციის ცენტრის სიჩქარეებს შესაბამისად გვექნება: ლაგრანჯის შემდეგი განტოლებები:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad (25,14)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_c} - \frac{\partial L}{\partial R_c} = 0. \quad (25,15)$$

მაგრამ  $R_c$  ვექტორის შესაბამისი  $X_c$ ,  $Y_c$ ,  $Z_c$  კოორდინატები ციკლური კოორდინატებია, აპითომ (25,15) განტოლება უბრალოდ ინერციის ცენტრის იმპულსის მუდმივობის კანონს მოგვცემს

$$\mathbf{P}_c = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_c} = M \mathbf{V}_c = \text{const.} \quad (25,16)$$



მაშასადამე, იზოლირებული სისტემის სიმძიმის ცენტრი მოძრაობს სწორხაზოვნად და თანაბრად. ამასთან ცხადია, რომ ინერციის ცენტრის მოძრაობის სურათი ერთნაირი იქნება ნებისმიერი იზოლირებული სისტემისათვის.

ამგვარად, მოძრაობა ორად გაიყო. ერთია სისტემის ფარდობითი მოძრაობა, რომელიც ხასიათდება (25,14) ლაგრანჟის განტოლებებით, ხოლო მეორე — ინერციის ცენტრის თანაბარსწორხაზოვანი მოძრაობა. თუ ათულის სისტემას ინერციის ცენტრში მოვათავსებთ (ინერციის ცენტრის სისტემა), მაშინ  $P_c = 0$ , და დაგვრჩება მხოლოდ ნაწილაკთა ურთიერთფარდობითი მოძრაობა. მაშასადამე, ინერციის ცენტრის სისტემაზე გადასვლით ორი სხეულის ამოცანა დაიყვანება ერთი ისეთი სხეულის მოძრაობაზე, რომლის მასა არის  $\mu$ .

გამოვთვალოთ ფარდობითი მოძრაობის იმპულსი. ცხადია, რომ იგი იქნება ფარდობითი მოძრაობის შესაბამისი განზოგადებული იმპულსი

$$p_r = \frac{\partial I_r}{\partial \dot{r}} = \mu v, \quad (25,17)$$

სადაც  $v = v_1 - v_2$  ფარდობითი სიჩქარეა. ამგვარად, ფარდობითი იმპულსი ტოლი იქნება გამოზახულების

$$p_r = \frac{m_2 p_1 - m_1 p_2}{m_1 + m_2}. \quad (25,17')$$

(23,6) ფორმულის თანახმად, სისტემის სრული ენერგია ტოლი იქნება

$$E_{სრ.} = (p_r, \dot{r}) + (P_c, \dot{R}_c) - L. \quad (25,18)$$

ამ ფორმულაში ლაგრანჟის ფუნქციის (25,12) გამოხატულების შეტანით ადვილად მივიღებთ

$$E_{სრ.} = E + \frac{\mu V_c^2}{2} \quad (25,19)$$

სადაც

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U(r) \quad (25,20)$$

სისტემის ფარდობითი მოძრაობის სრული ენერგიაა, ხოლო  $\frac{\mu V_c^2}{2}$  წარმოადგენს

სისტემის როგორც მთლიანის, გადატანით კინეტიკურ ენერგიას.

ინერციის ცენტრის სისტემაში  $R_c = 0$ . ამიტომ გვექნება

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \quad r_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} r, \quad (25,21)$$

ხოლო ლაგრანჟიანი ტოლი იქნება გამოსახულების

$$I_r = \frac{\mu r^2}{2} - U(r). \quad (25,22)$$

ცენტრის სისტემაში, ამგვარად, მნიშვნელოვანია ნაწილაკთა მხოლოდ ურთიერთფარდობითი მოძრაობა. რაც შეეხება სისტემის როგორც მთლიანის თავისუფალ მოძრაობას, მას ერთი და იგივე სახე ექნება ყველა ნაწილაკთა სისტემისათვის, ამიტომ მას სპეციალური შესწავლა არ სჭირდება. ფარდობითი მოძრაობა კი სხვადასხვა სისტემებს სხვადასხვა ექნება, რამდენადაც ნაწილაკთა ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია სხვადასხვაა.

§ 26. ბრამპტორიის მოძრაობა ცენტრალურ ველში  
მოძრაობისას

განვიხილოთ ნაწილაკი მასით  $m_1$ , რომელიც შედის  $U(r)$  პოტენციალური ენერჯიის ქმედების სფეროში მეორე  $m_2$  მასის მქონე ნაწილაკთან. რადგან სისტემა იზოლირებულია, ამიტომ ადგილი ექნება იმპულსის მომენტისა და ენერჯიის შენახვას. ჩვენ ქვემოთ დავინახავთ, რომ მოძრაობის ეს ინტეგრალები საკმაოდ გვიადვილებენ განტოლებათა ინტეგრაციას. ცენტრალური ველის თვისებით  $(l, r) = 0$ , სადაც  $l$  იმპულსის მომენტია. ეს იმას ნიშნავს, რომ მოძრაობა ბრტყელია. ზოგადობის დაურღვევლად მოძრაობის სიბრტყედ ავირჩიოთ  $xoy$  საკოორდინატო სიბრტყე. ცხადია, რომ  $r$  რადიუსვექტორი მთავსებული იქნება ამ სიბრტყეში და მას ექნება მხოლოდ ორი კომპონენტი  $r = r(x, y)$ . გარდა ამისა, აშკარაა, რომ იმპულსის მომენტი მართობი იქნება ამ სიბრტყის. კოორდინატა სისტემის  $x$  ღერძი მივმართოთ იმპულსის მომენტის გასწვრივ, მაშინ იმპულსის მომენტს ექნება მხოლოდ  $x$  მდგენელი  $l(0, 0, l_z = l)$ . წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ, რომ მთავარია ნაწილაკთა ურთიერთთვარდობითი მოძრაობის შესწავლა. ეს მოძრაობა კი ხასიათდება ლაგრანჯიანით

$$L = \frac{\mu r^2}{2} - U(r), \quad (26,1)$$

სადაც  $\mu$  დაყვანილი მასაა.

შემოვიღოთ  $xoy$  სიბრტყეში პოლარკოორდინატები

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (26,2)$$

სადაც

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

ამ კოორდინატებში

$$\dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (26,3)$$

ამიტომ ლაგრანჯიანი მიიღებს სახეს

$$L = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r). \quad (26,4)$$

ამის შექდეგ ჩვეულებრივი მეთოდით უნდა შევადგინოთ ლაგრანჯის განტოლებები  $r$  და  $\varphi$  ცვლადებისათვის და ამოვხსნათ. მაგრამ ეს გზა, ზოგადად, საკმაოდ რთული და მოუხერხებელია. გაცილებით ადვილია ტრაექტორიის პონეა მოძრაობის ინტეგრაციის გამოყენებით.

როგორც ვხედავთ, ლაგრანჯის ფუნქციაში  $\varphi$  ციკლური კოორდინატია, ამიტომ

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const}. \quad (26,5)$$

მაგრამ, (24.10) ფორმულის თანახმად,  $p_\varphi = l$ , ამიტომ ჩვენს შემთხვევაში მომენტის შენახვის კანონი ასე დაიწერება:

$$l = \mu r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}. \quad (26,5')$$

ამ ტოლობის დახმარებით ლაგრანჯიანიდან გამოვრიცხოთ  $\dot{\varphi}$ ; მივიღებთ

$$L = \frac{\mu r^2}{2} + \frac{l^2}{2\mu r^2} - U(r). \quad (26,6)$$

სათანადო ენერჯიის კი ექნება სახე

$$E = \frac{\mu r^2}{2} + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (26,7)$$

ამ გამოსახულებიდან ჩანს, რომ მოძრაობა ფაქტიურად ერთგანზომილებიანია, რადგან გვაქვს მხოლოდ ერთი  $r$  კოორდინატი, ოღონდ ჩვენს შემთხვევაში პოტენციალური ენერჯიის როლს ასრულებს სიდიდე

$$V(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}. \quad (26,8)$$

ღამატებით წვერს უწოდებენ ცენტრგამშორ პოტენციალურ ენერჯიას. ცხადია, იგი ნულის ტოლია, როცა  $l=0$ . თანახმად (26,8) აღნიშვნისა, სრული ენერჯიის ფორმულა ასე დაიწერება:

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + V(r). \quad (26,9)$$

$V(r)$ -ს ეუწოდებთ ეფექტურ პოტენციალურ ენერჯიას. ნამდვილი ერთგანზომილებიანი მოძრაობის დროს კოორდინატს შეუძლია მიიღოს როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი მნიშვნელობები, ჩვენს შემთხვევაში კი  $r$  ყოველთვის დადებითია.

იმის შემდეგ, რაც ენერჯიის მიხედვით (26,9) სახე, განტოლების ამოხსნის გარეშე შეგვიძლია ვიპოვოთ მოძრაობის ტრაექტორია ისევე, როგორც ეს გავაკეთეთ § 13-ში ერთგანზომილებიანი მოძრაობის განხილვის დროს. ამასთან, ამ პარაგრაფის ფორმულები პირდაპირ შეგვიძლია გამოვიყენოთ იმ პირობით, რომ პოტენციალური ენერჯია უნდა შეეცვალოს ეფექტური  $V(r)$  პოტენციალური ენერჯიით,  $x$  კი  $r$  ცვლადით. სანამ ამას გავაკეთებდეთ, ვაჩვენოთ, რომ (26,9) გამოსახულების დახმარებით შეგვიძლია მივიღოთ მოძრაობასთან დაკავშირებული ზოგადი ცნობები.

ჯერ ერთი. მოძრაობა დასაშვებია მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია პირობა  $E \geq V(r)$  ან. რაც იგივეა.  $E \geq U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$ .

დაეუშვათ, პოტენციალური ენერჯია ისეა ნორმირებული, რომ იგი უსასრულოებაში ნულისაკენ მიისწრაფვის

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0. \quad (26,10)$$

მაშინ ადვილად ვაჩვენებთ, რომ თუ სრული ენერჯია  $E < 0$ , მოძრაობა იქნება ფინიტური. მართლაც, თუ გადავალთ (25,7) განტოლებაში ზღვარზე, როცა  $r \rightarrow \infty$ , მივიღებთ წინააღმდეგობას

$$0 > E = \frac{\mu r^2}{2}, \quad (26,11)$$

რადგან კინეტიკური ენერჯია არსებითად დადებითი სიდიდეა. ამ წინააღმდეგობამდე მიგვიყვანა  $r$ -ის მისწრაფებამ უსასრულობისაკენ. ამგვარად, როცა  $E < 0$ , მოძრაობა სასრულ არეში ხდება.

ფინიტური მოძრაობის დროს შესაძლებელია ე. წ. ლიმიტაციური მოძრაობა, რომლის დროსაც ნაწილაკები ერთმანეთს ეცემიან. ვიპოვოთ იმის პირობა, თუ როდის შეიძლება გამოვრიცხოთ ლიმიტაციური მოძრაობა. (26,7) გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$E \geq \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (26,12)$$

ეს უტოლობა აშკარაა, რადგან მარჯვენა მხარეში გადავადგდეთ არსებითად დადებითი სიდიდე. ამ უტოლობას შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი სახე:

$$Er^2 \geq \frac{l^2}{2\mu} + r^2 U(r), \quad (26,13)$$

როცა  $r \rightarrow 0$ , მარჯვენა მხარე უარყოფითი უნდა იყოს. ამას კი ადგილი ექნება ისეთი პოტენციალური ენერგიებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$[r^2 U(r)]_{r=0} < -\frac{l^2}{2\mu}. \quad (26,14)$$

განვიხილოთ პოტენციალური ენერგია, რომელსაც სათაგის მახლობლობაში აქვს შემდეგი სახე:

$$U(r) = -\frac{\beta}{r^n}, \quad (\beta > 0). \quad (26,15)$$

შევისწავლოთ სამი შემთხვევა. პირველი, როცა  $n=2$ . ამ შემთხვევაში, თანახმად (26,14) ფორმულისა, ლიმიტაციური მოძრაობა შესაძლებელია მაშინ, როცა  $\beta$  მუდმივი აკმაყოფილებს პირობას

$$\beta > \frac{l^2}{2\mu}. \quad (26,16)$$

მეორე შემთხვევაში ავიღოთ  $n > 2$ . ცხადია, რომ ამ დროს მოძრაობა ყოველთვის ლიმიტაციური იქნება, რამდენადაც (26,14) პირობა ნებისმიერი  $n > 2$ -სთვის დაცულია. რაც შეეხება მესამე შემთხვევას, როცა  $n < 2$ , მაშინ ლიმიტაციური მოძრაობა შესაძლებელია მხოლოდ  $l=0$ -თვის. მაშასადამე, ცხადია, რომ მეტად მნიშვნელოვანი  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  პოტენციალური ენერგიის შემთხვევაში, სადაც  $\alpha > 0$

მუდმივია, ლიმიტაციური მოძრაობა დასაშვებია მხოლოდ  $l=0$ -თვის.

აქ მოყვანილი შემთხვევებუდან ჩანს, რომ მოძრაობა არალიმიტაციური შეიძლება იყოს იმ დროსაც კი, როცა ნაწილაკები ერთმანეთს იზიდავს. ლიმიტაციური მოძრაობას კრძალავს  $\frac{l^2}{2\mu r^2}$  წევრი, რომელიც უსასრულობა ხდება, როცა  $r \rightarrow 0$ .

ამიტომაც უწოდებენ ამ ენერგიას ცენტრგამშორ პოტენციალურ ენერგიას.

ცხადია, რომ ფინიტური არალიმიტაციური მოძრაობის დროს გვექნება მინიმალური და მაქსიმალური მანძილები, რომლითაც ნაწილაკები შეიძლება ერთმანეთს მიუახლოვდნენ ან დაშორდნენ. რადიუსევეტორის სიდიდე მოთავსებული იქნება ამ ექსტრემალურ მანძილებს შორის

$$r_{\min} \leq r \leq r_{\max}. \quad (26,17)$$

ლიმიტაციური მოძრაობის დროს მობრუნების წერტილი ან სულ არა გვაქვს, ან გვექნება ერთი  $r=r_{\max}$ .

$E > 0$  დროს გვექნება ინფინიტური მოძრაობა. ამ შემთხვევაში შეიძლება გვექნოდეს მხოლოდ მინიმალური მანძილი. მაქსიმალური მანძილი, რომლითაც ნაწილაკები ერთმანეთს შეიძლება დასცილდნენ, უსასრულობის ტოლი იქნება. ცხა-

ღია, რომ ექსტრემალური მანძილები განისაზღვრება  $\dot{r}=0$  პირობით, რაც, თანახმად (26,9)-სა, მოგვცემს

$$E=V(r) \quad (26,18)$$

განტოლებას  $r$  ექსტრემალური მანძილების საოპენელად. ნამდვილი ერთგანზომილებიანი მოძრაობისაგან განსხვავებით  $\dot{r}=0$  არ ნიშნავს ნაწილაკის გაჩერებას, რადგან ამ შემთხვევაში კუთხური სიჩქარე  $\omega=\dot{\varphi} \neq 0$ .

გამოვიყენოთ ახლა ენერჯის ინტეგრალი და ვიპოვოთ მოძრაობის ტრაექტორია. (26,9)-დან გვექნება

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V(r)]}. \quad (26,19)$$

საიდანაც

$$dt = \frac{\mu dr}{\sqrt{2\mu [E - V(r)]}}. \quad (26,20)$$

ინტეგრირების შემდეგ

$$t = \int_{r_{min}}^r \frac{\mu dr}{\sqrt{2\mu [E - V(r)]}}. \quad (26,21)$$

აქედან შეგვიძლია ვიპოვოთ  $r$  როგორც დროის ფუნქცია. ჩვენთვის უფრო ხელსაყრელია  $\varphi$  და  $r$ -ის დაკავშირება, რადგან ეს მოგვცემს ტრაექტორიის განტოლებას პოლარკოორდინატებში. ამისათვის განვსაზღვროთ  $d\varphi$  (26,5') განტოლებიდან

$$d\varphi = \frac{l}{\mu r^2} dt \quad (26,22)$$

და შეერთანოთ მასში  $dt$ -ს მნიშვნელობა (26,20) ფორმულიდან; მივიღებთ

$$d\varphi = \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2\mu [E - V(r)]}}. \quad (26,23)$$

ინტეგრაცია მოგვცემს

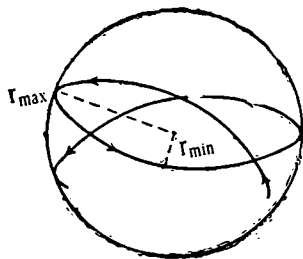
$$\varphi = \int_{r_{min}}^r \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2\mu [E - V(r)]}}. \quad (26,24)$$

ეს ფორმულა უშუალოდ აკავშირებს  $\varphi$  და  $r$ -ს, ე. ი. იძლევა მოძრაობის ტრაექტორიას. ექსტრემალური მანძილები განისაზღვრება (26,18) განტოლებიდან, ე. ი. ინტეგრალქვეშა ფესვის ნულთან ტოლობით. რადგან მინიმალური მანძილი გვექნება როგორც ფინიტური, ისე ინფინიტური მოძრაობისათვის, ამიტომ ქვედა საზღვარი ინტეგრალში იქნება  $r_{min}$ . (26,24) ფორმულიდან ჩანს, რომ როცა  $r=r_{min}$ ,  $\varphi=0$ , ე. ი.  $\varphi$ -ს ათვლას ვიწყებთ მინიმალური მანძილის შესაბამისი მდებარეობიდან.

ფინიტური მოძრაობის დროს მოძრაობის პერიოდი განისაზღვრება ფორმულით

$$T = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\mu dr}{\sqrt{2\mu [E - V(r)]}}. \quad (26,25)$$

ადვილია დამტკიცება იმისა, რომ (26,24)-ით განსაზღვრული ტრაექტორია სიმეტრიულია სისტემის ინერციის ცენტრსა და მობრუნების წერტილზე გამავალი წრფის მიმართ. ეს მტკიცება ეხება ინფინიტურ მოძრაობასაც, ამიტომ მობრუნების წერტილად უმჯობესია ვივლისხმობთ  $r=r_{min}$ -ის შესაბამისი მობრუნების წერტილი. ტრაექტორიის აღნიშნული სიმეტრია ცხადია, რადგან  $\varphi=0$  შეესაბამება  $r=r_{min}$ ,



ნახ. 19

ხოლო მარჯვენა მხარეში, ფესვის ორი ნიშნის გამო,  $(r, \varphi)$  და  $(r, 2\pi - \varphi)$ -ით განსაზღვრული წერტილები სიმეტრიული იქნება აღნიშნული წრფის მიმართ.

როცა მოძრაობა ფინიტურია, გვაქვს  $r_{min}$  და  $r_{max}$  მანძილები. ტრაექტორია ყოველთვის მოთავსებულია ამ მანძილებს შორის, მაგრამ ეს იმას არ ნიშნავს, რომ, საზოგადოდ, ტრაექტორია ჩაკეტილია. მართლაც, ერთი პერიოდის განმავლობაში, როცა  $r$  იცვლება  $r_{min}$ -დან  $r_{max}$ -მდე და შემდეგ კვლავ  $r_{min}$ -მდე, რადიუსექტორი შემობრუნდება კუთხეზე, რომელიც ტოლია

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{ldr}{r^2 \sqrt{2\mu[E - V(r)]}} \quad (26,26)$$

ამიტომ, საზოგადოდ, ტრაექტორია უწყვეტად ავსებს იმ არეს, რომელიც მოთავსებულია ორ ისეთ წრეს შორის, რომელთა რადიუსებია  $r_{min}$  და  $r_{max}$ . აღსანიშნავია, რომ ტრაექტორია ჩაკეტილია მხოლოდ და მხოლოდ ორ შემთხვევაში: ერთი, როცა პოტენციალურ ენერჯიას აქვს სახე

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (26,27)$$

ე. ი. გრავიტაციული და კულონური ველებისათვის და, მეორე, როცა პოტენციალური ენერჯია გამოისახება ფორმულით<sup>1</sup>

$$U(r) = \frac{kr^2}{2} \quad (26,28)$$

ეს უკანასკნელი განსაზღვრავს ნაწილაკის პარაბოლულ რხევას. ორივე ამ შემთხვევას დიდი მნიშვნელობა აქვს მექანიკაში, ამიტომ მათ დაწვრილებით შევისწავლით.

### § 27. $\frac{\alpha}{r}$ პოტენციალური ენერჯიის შემთხვევა

განვიხილოთ ცენტრალური ველის მეტად მნიშვნელოვანი შემთხვევა, როცა პოტენციალური ენერჯია განსაზღვრულია ფორმულით

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (27,1)$$

<sup>1</sup> ამ ორი პოტენციალისათვის გამოთვლილი  $\Delta\varphi=0$ , რაშიც ადვილად დაერწმუნდებით (26,26) ფორმულის გამოყენებით.

როცა  $\alpha > 0$  გვაქვს მიზიდვა, ხოლო როცა  $\alpha < 0$  ადგილი ექნება განზიდვას. ეფექტურ პოტენციალურ ენერგიას ექნება სახე

$$V(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}. \quad (27,2)$$

კონკრეტულობისათვის განვიხილოთ მიზიდვის პოტენციალური ენერგია  $\alpha > 0$ , საჭიროების შემთხვევაში ადვილად გადავალთ  $\alpha < 0$  შემთხვევაზედაც. გამოვარკვიოთ ეფექტური პოტენციალური ენერგიის ყოფაქცევა. აშკარაა, რომ მას გააჩნია მინიმუმი. მართლაც, მინიმუმის პირობა

$$\frac{dV}{dr} = 0 \quad (27,3)$$

მოგვცემს, რომ ექსტრემალური  $r_0$  ტოლია სიდიდის

$$r_0 = \frac{l^2}{\mu\alpha}, \quad (27,4)$$

მინიმუმის წერტილში კი პოტენციალური ენერგია (პოტენციალური ორმოს სიღრმე)

$$V_{min} = -\frac{\mu\alpha^2}{2l^2}. \quad (27,5)$$

უსასრულობაში  $V(r) \rightarrow 0$ , ხოლო სათავეში მიისწრაფის უსასრულობისაკენ, ასე რომ, ეფექტური პოტენციალური ენერგიის მრუდს ექნება ნახ. 20-ზე მოცემული სახე.

ახლა ვიპოვოთ ტრაექტორიის განტოლება. ამისათვის გამოვიყენოთ (26,24) ფორმულა. თუ მასში შევიტანთ (27,2) გამოსახულებას, გვექნება

$$\varphi = \int_{r_{min}}^r \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{l^2}{r^2}}}. \quad (27,6)$$

$r_{min}$  მინიმალური განისაზღვრება ფესვქვეშა გამოსახულების ნულთან ტოლობიდან

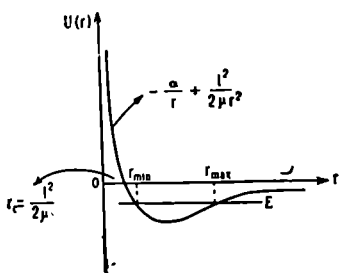
$$\frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r} = E. \quad (27,6')$$

შემოვიღოთ ახალი ცვლადი  $z = \frac{1}{r}$ , მაშინ

$$\varphi = - \int_{1/r_{min}}^{1/r} \frac{l dz}{\sqrt{2\mu E + 2\mu\alpha z - l^2 z^2}}, \quad (27,7)$$

ფესვქვეშა გამოსახულება შევაგვსოთ სრულ კვადრატად

$$2\mu E + 2\mu\alpha z - l^2 z^2 = \left[ 2\mu E + \left(\frac{\mu\alpha}{l}\right)^2 \right] - \left( lz - \frac{\mu\alpha}{l} \right)^2. \quad (27,8)$$



ნახ. 20

მივიღებთ მარტივ ინტეგრალს

$$\varphi = - \int_{1/r_{min}}^{1/r} \frac{ldz}{\sqrt{2\mu E + \left(\frac{\mu\alpha}{l}\right)^2 - \left(lz - \frac{\mu\alpha}{l}\right)^2}}, \quad (27,9)$$

რომლის ამოხსნა მოგვცემს:

$$\varphi = \arccos \frac{lz - \frac{\mu\alpha}{l}}{\sqrt{2\mu E + \left(\frac{\mu\alpha}{l}\right)^2}} \Big|_{1/r_{min}}^{1/r} \quad (27,10)$$

რადგან საწყისი პირობა ისე ავირჩიეთ, რომ  $r = r_{min}$ , როცა  $\varphi = 0$ , ამიტომ ინტეგრალი ქვედა საზღვარზე ისპობა. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით უშუალოდაც, თუ  $E = V(r)$  განტოლებიდან ამოხსნილ  $r_{min}$  შევიტანთ (27,10)-ში. ზედა საზღვრის ჩასმით კი გვექნება

$$\varphi = \arccos \frac{\left(\frac{l}{r} - \frac{\mu\alpha}{l}\right)}{\sqrt{2\mu E + \left(\frac{\mu\alpha}{l}\right)^2}}, \quad (27,11)$$

საიდანაც

$$\frac{l}{r} - \frac{\mu\alpha}{l} = \sqrt{2\mu E + \left(\frac{\mu\alpha}{l}\right)^2} \cos \varphi. \quad (27,12)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}} \quad (27,13)$$

და

$$\rho = \frac{l^2}{\mu\alpha}. \quad (27,14)$$

მაშინ (27,12) ფორმულა მოძრაობის ტრაექტორიისათვის მოგვცემს

$$r(\varphi) = \frac{\rho}{1 + \alpha \cos \varphi}. \quad (27,15)$$

მივიღეთ კონუსური კვეთების განტოლება, როცა სისტემის სათავე მოთავსებულია მარჯვენა ფოკუსში;  $\rho$  წარმოადგენს მეორე გვარის შრულის პარამეტრს, ხოლო  $\alpha$  — ექსცენტრისიტეტს. (27,15) ფორმულის მიხედვით, როცა  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , მაშინ

$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \rho$ , ე. ი.  $\rho$  პარამეტრი ყოფილა ორდინატის მნიშვნელობა სათავეში.

ენერჯისა და, მაშასადამე, ექსცენტრისიტეტის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის გვექნება შემდეგი ტრაექტორიები:

$$\begin{aligned} E < 0, \quad \alpha < 1, \quad & \text{ელიფსი,} \\ E = 0, \quad \alpha = 1, \quad & \text{პარაბოლა,} \\ E > 0, \quad \alpha > 1, \quad & \text{ჰიპერბოლა,} \\ E = -\frac{\mu\alpha^2}{2l^2}, \quad \alpha = 0 \quad & \text{წრეხაზი.} \end{aligned} \quad (27,16)$$



ფინიტური მოძრაობის შემთხვევა. როგორც მოსალოდნელი იყო, ფინიტური მოძრაობა შესაძლებელია მხოლოდ  $E < 0$  დროს. ამ შემთხვევაში ტრაექტორია წარმოადგენს ჩაკეტილ მრუდს. ცხადია, რომ მაქსიმალური და მინიმალური მანძილები, თანახმად (27,15) ფორმულისა, ტოლია:

$$r_{min} = \frac{\rho}{1+z}, \quad r_{max} = \frac{\rho}{1-z}. \quad (27,17)$$

ამ ორი ტოლობის გამოყენებით ექსცენტრისიტეტი შეგვიძლია გამოვხატოთ  $r_{min}$  და  $r_{max}$  მანძილებით; გვექნება

$$z = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}. \quad (27,17')$$

პარამეტრისა და ექსცენტრისიტეტის საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ ელიფსის დიდი და მცირე ნახევარღერძები:

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{\rho}{1-z^2}, \quad (27,18)$$

$$b = \sqrt{a\rho} = \frac{\rho}{\sqrt{1-z^2}}. \quad (27,19)$$

თუ ამ ფორმულებში შევიტანთ პარამეტრისა და ექსცენტრისიტეტის მნიშვნელობებს (27,13) და (27,14)-დან, მივიღებთ:

$$a = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{l}{\sqrt{2\mu|E|}}. \quad (27,20)$$

ჩვენ ეხებადეთ, რომ დიდი ნახევარღერძი მხოლოდ ენერგიაზეა დამოკიდებული, პატარა ნახევარღერძი კი, გარდა ენერჯიისა, მომენტზეა დამოკიდებული. ცხადია, რომ

$$r_{min} = a(1-z), \quad r_{max} = a(1+z). \quad (27,21)$$

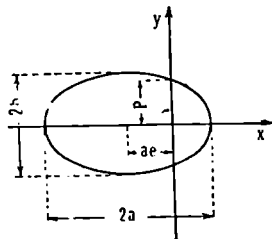
როცა  $E = -\frac{\mu\alpha^2}{2l^2}$ , მაშინ  $z=0$ , და ელიფსი წრედ გადაიქცევა.

(27,13) გამოსახულებაში ფსევის წინ ავიღეთ დიდებითი ნიშანი. უპირობოა ნიშანი რომ აგველო, მაშინ ტრაექტორიის (27,15) ფორმულაში  $\cos \varphi$ -ს ნაცვლად გაჩნდებოდა  $\cos(\varphi + \pi)$ , რაც შეესაბამება შემთხვევას, როცა კოორდინატა სათავე მოთავსებულია მარცხენა ფოკუსში.

გამოთვალთ პერიოდი ელიფსურ ტრაექტორიაზე მოძრაობის დროს. ამისათვის საკმარისია ამოვხსნათ (26,25)-ში შემავალი ინტეგრალი (27,21) საზღვრებში. მაგრამ პერიოდს უფრო მარტივად ვიპოვით ფართითი სიჩქარის ფორმულის გამოყენებით; მართლაც (12,22') ფორმულის თანახმად

$$2\mu s \dot{T}, \quad (27,22)$$

სადაც  $s$  რადიუსვექტორის მიერ შემოწერილი ფართია. ელიფსის შემთხვევაში  $s = \pi ab$ , ამიტომ (27,20) ფორმულების გათვალისწინებით, პერიოდისათვის მივიღებთ



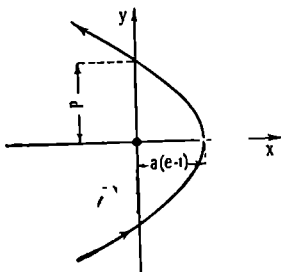
ნახ. 21

$$T = \pi \alpha \sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}} \quad (27,23)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ პერიოდი დამოკიდებულია ენერგიაზე. თუ გავიხსენებთ (27,20) ფორმულებს, (27,23) ფორმულა მოგვცემს

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{\mu}{\alpha} \quad (27,24)$$

ინტენიტური მოძრაობის შემთხვევა. ა) მივიღვა. დაეუშვათ, რომ  $E \geq 0$ . ამ დროს  $x \geq 1$  და მოძრაობა ინტენიტურია. ეს აშკარად ჩანს ტრაექტორიის განტოლებიდან, როცა  $x > 1$ .  $r$ -ის მაქსიმალური მნიშვნელობა  $r_{max} = \infty$ . ამასთან, ტრაექტორია გახსნილია  $\varphi = \pi$  მიმართულებით. ე. ი. მიუხედავად იმისა, რომ ველი მიზიდვის ხასიათისაა, თუ სრული ენერგია  $E \geq 0$ , მოძრაობა შემოუსაზღვრელია. მოძრაობას დადებითი ენერგიით დიდი მნიშვნელობა აქვს ნაწილაკთა გაფანტვის თეორიაში, ამიტომ ამ შემთხვევასაც დეტალურად განვიხილავთ.



ნახ. 22

ინტენიტური მოძრაობის შემთხვევაში დამატებით უნდა ვიზრუნოთ იმაზე, რომ (27,15)-ით განსაზღვრული  $r$  უარყოფითი არ გამოვიდეს. რადგან  $x \geq 1$ , ამიტომ, განსხვავებით ინტენიტური მოძრაობისაგან, ამის საშიშროება არსებობს. მაშასადამე, უნდა მოვითხოვოთ, რომ  $1 + x \cos \varphi > 0$ , ე. ი.  $\cos \varphi \geq -\frac{1}{x}$ . ზღვრული კუთხე განესაზღვროთ პირობით  $1 + x \cos \varphi_0 = 0$ , მაშინ

ესი ტოლი იქნება  $\varphi_0 = \arccos\left(-\frac{1}{x}\right)$ . ცხადია, აღნიშნული უტოლობა დაცული იქნება ისეთი  $\varphi$ -ებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას  $|\varphi| \leq \varphi_0$ , ე. ი.  $-\arccos\left(-\frac{1}{x}\right) \leq \varphi \leq \arccos\left(-\frac{1}{x}\right)$ . რადგან  $x \geq 1$ , ამიტომ  $-1 \leq -\frac{1}{x} \leq 0$  და  $\arccos\left(-\frac{1}{x}\right)$  მნიშვნელობებისათვის გვექნება უტოლობა  $\frac{\pi}{2} \leq \arccos\left(-\frac{1}{x}\right) \leq \pi$ , მაშასადამე,  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi_0 \leq \pi$ . ამ შემთხვევაში მოძრაობა ხდება ჰიპერბოლის ფოკუსთან აბლომდებარე კალთაზე, რომელიც გარს უვლის ფოკუსში მოთავსებულ მიზიდვის ცენტრს. მინიმალური მანძილი ტოლი იქნება

$$r_{min} = \frac{p}{x+1} = a(x-1), \quad (27,25)$$

სადაც  $a$  ჰიპერბოლის „ნახევარღერძია“ და

$$a = \frac{p}{x^2 - 1} = \frac{\alpha}{2E}. \quad (27,26)$$

როცა  $E = 0$ , მაშინ  $x = 1$  და

$$r_{min} = \frac{p}{2}. \quad (27,27)$$

ამ შემთხვევაში ნაწილაკი მოძრაობს პარაბოლაზე, რომლის ფოკუსში მოთავსებულია მიზიდვის ცენტრი.

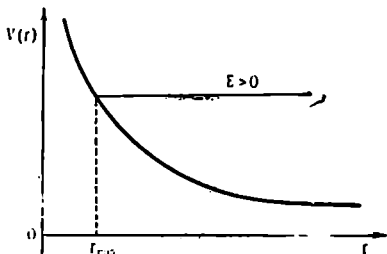
ცხადია, რომ პარაბოლაზე მოძრაობას მეუღლებთ მაშინ, როცა ნაწილაკი უსასრულობაში მოძრაობას იწყებს უძრავობის მდგომარეობიდან.

ბ) განვიხილვა. ახლა განვიხილოთ განზიდვის ველის შემთხვევა, ე. ი. როცა  $\alpha < 0$ . ამ დროს ეფექტური პოტენციალური ენერგია

$$V(r) = \frac{I^2}{2\mu r^2} + \frac{\alpha}{r}. \quad (27,28)$$

ამ გამოსახულებას მინიმუმი არა აქვს, იგი მონოტონურად მცირდება  $\infty$ -დან ნულამდე, როცა  $r$  იცვლება ნულიდან უსასრულობამდე (ნახ. 23). პოტენციალური ენერგია არ ქმნის პოტენციალურ ორპოს, ამიტომ ნაწილაკები მდგრად მდგომარეობას არ ახორციელებენ. მოძრაობა ინფინიტურია, გვექნება მხოლოდ ერთი ექსტრემალური მანძილი  $r = r_{min}$ .

ამ შემთხვევაში მოძრაობის ტრაექტორიის მისაღებად საკმარისია (27,15) ფორმულაში მოვახდროთ შეცვლა  $\alpha \rightarrow -\alpha$ . მაშინ  $p$  შეიცვლის ნიშანს და იმისათვის, რომ ათვლის სისტემა კვლავ მარჯვენა ფოკუსში იყოს მოთავსებული, ხელსაყრელია (27,13) განმარტებაში ფესვის წინ ავიღოთ მინუს ნიშანი. გვექნება



ნახ. 23

$$r(\varphi) = \frac{p}{x \cos \varphi - 1}; \quad (27,29)$$

$x$  და  $p$  იმავე ფორმულებით განისაზღვრება.

პირობა იმისა, რომ  $r$  ყოველთვის დადებითი იყოს, იქნება უტოლობა  $x \cos \varphi - 1 \geq 0$ , ე. ი.  $\cos \varphi \geq \frac{1}{x}$ . ზღვრული კუთხე განისაზღვრება ფორმულით

$\varphi_0 = \arccos \frac{1}{x}$ . აღნიშნული უტოლობა დაცული იქნება მაშინ, როცა  $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$

ან, რაც იგივეა, როცა  $-\arccos \frac{1}{x} \leq \varphi \leq \arccos \frac{1}{x}$ . რადგან  $x \geq 1$ , ამიტომ  $0 \leq \frac{1}{x} \leq 1$ . მაშასადამე,  $\arccos \frac{1}{x}$  მოთავსებული იქნება ინტერვალში

$0 \leq \arccos \frac{1}{x} \leq 1$ , ე. ი. ზღვრული  $\varphi_0$  კუთხე მოთავსებული შეიძლება იყოს

შუალედში  $0 \leq \varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}$ ; ეს იმას ნიშნავს, რომ ტრაექტორია, რომელიც ამ შემთხვევაში ( $E > 0$ ,  $x > 1$ ) ჰიპერბოლას წარმოადგენს, მიზიდვის შემთხვევისაგან განსხვავებით, ფოკუსს გარედან უვლის (იხ. ნახ. 24). ამ შემთხვევაში მინიმალური მანძილი განისაზღვრება ფორმულით

$$r_{min} = \frac{\rho}{x-1} = a(1+z). \quad (27,30)$$

ამგვარად, როგორც მიზიდვის, ისე განზიდვის ურთიერთქმედებისათვის, როცა  $E \geq 0$ , მოძრაობის ტრაექტორია განისაზღვრება განტოლებით

$$r(\varphi) = \frac{\rho}{x \cos \varphi \pm 1}. \quad (27,31)$$

ამასთან, პლუს ნიშანი მიზიდვის შემთხვევაში აიღება, მინუსი კი — განზიდვისას. მოძრაობა ორივე შემთხვევაში ინფინიტურია.

ვიპოვოთ ასიმპტოტების განტოლებები. ამისათვის საჭიროა (27,31)-ში ავიღოთ  $r = \infty$ . ეს მოგვცემს

$$x \cos \varphi_0 = \pm 1 \quad (27,32)$$

2 $\varphi_0$ -ის მნიშვნელობა, სადაც

$$\varphi_0 = \arccos \frac{1}{x}, \quad (27,33)$$

განსაზღვრავს ტრაექტორიის გაშლის კუთხეს. (27,32) წარმოადგენს ტრაექტორიის ასიმპტოტების განტოლებას.

ცხადია, ზოგად შემთხვევაში, როცა ურთიერთქმედება ხდება ნებისმიერი ცენტრალური  $U(r)$  ველით, ასიმპტოტის განტოლებას მივიღებთ, თუ (26,24) ფორმულაში ავიღებთ  $r = \infty$ . გვექნება

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{ldr}{r^2 \sqrt{2\mu [E - V(r)]}}. \quad (27,34)$$

ასიმპტოტების ამ განტოლებებს გამოვიყენებთ გაფანტვის თეორიაში.

## § 28. კეპლერის კანონები

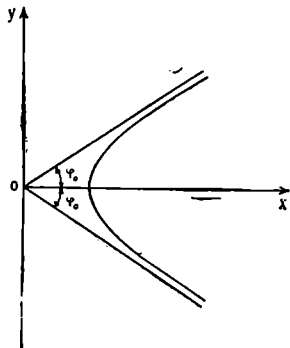
წინა პარაგრაფში მიღებული შედეგები ზოგადია და გამოდგება ნებისმიერი,  $r$ -ის უქუბროპორციული, ველისათვის; ამ პარაგრაფში ზევით მიღებულ ფორმულებს გამოვიყენებთ გრავიტაციული ურთიერთქმედებისათვის.

ცნობილია, რომ სამყაროს ნებისმიერი ორი ნაწილაკი, რომელთა მასებია  $m_1$  და  $m_2$ , ერთმანეთზე მოქმედებს მიზიდვის ძალით, რომელიც გამოიხატება ნიუტონის მსოფლიო მიზიდულობის კანონით

$$F = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (28,1)$$

სადაც  $\gamma$  ე. წ. გრავიტაციული მუდმივია. მსოფლიო მიზიდულობის ძალის შესაბამის პოტენციალურ ენერგიას აქვს სახე

$$U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (28,2)$$



ნახ. 24

მაშასადამე, მსოფლიო მიზიდულობის ძალების შემთხვევაში,  $\alpha = \gamma m_1 m_2$ , ამასთან  $\alpha$  ყოველთვის დადებითია, რაც იმას ნიშნავს, რომ  $U(r)$  მიზიდვის ხასიათისაა.

რადგან გრავიტაციული ველისათვის პოტენციალურ ენერჯიას აქვს  $-\frac{\alpha}{r}$

სახე, ამიტომ წინა პარაგრაფში მიღებული შედეგები პირდაპირ შეგვიძლია გამოვიყენოთ სამყაროს სხეულთა მოძრაობის შესასწავლად. კერძოდ, ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ  $E < 0$  შემთხვევაში მივიღებთ მზის სისტემის პლანეტების მოძრაობის იმ კანონებს, რომლებიც ცნობილია კეპლერის სამი კანონის სახელწოდებით.

მზის გარშემო მოძრაობს სხვადასხვა მასის მქონე ცხრა პლანეტა. ამასთან ზოგიერთ პლანეტას, ისევე როგორც დედამიწას მთვარე, ჰყავს თავისი თანამგზავრები. ამიტომ მკაცრად რომ ვიმსჯელოთ, ჩვენ საქმე გვაქვს მრავალი სხეულის ამოცანასთან, მრავალი სხეულის ამოცანა კი გადაწყვეტილი არ არის. სამი სხეულის ამოცანაც კი შეიძლება ამოხსნას მხოლოდ ძალიან შეზღუდულ პირობებში, ამიტომაც მრავალი სხეულის ამოცანის განხილვისას მიმართავენ მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდებს. მაგრამ იმის გამო, რომ მზის მასა შედარებით დიდია ცალკეული პლანეტის მასაზე, ცალკეული პლანეტის მოძრაობა დიდი სიზუსტით შეგვიძლია ისე განვიხილოთ, თითქოს სხვა პლანეტებთან იგი ურთიერთქმედებას არ განიცდიდეს. პლანეტებს შორის ურთიერთქმედება შეგვიძლია ჩავთვალოთ მცირე შესწოთებად. ამ შემოთხვევების გათვალისწინება აუცილებელია მხოლოდ ზღვიერთ სპეციალურ შემთხვევებში. ქვემოთ ჩვენ ამ შემოთხვევებს ნულის ტოლად ჩავთვლით.

თუ დედამიწის მასას ერთის ტოლად ჩავთვლით, მაშინ მზის მასა იქნება 330 000, იუპიტერისა — 320 და ა. შ. ამიტომ მზის მასა  $m_2$  გაცილებით მეტია ნებისმიერი პლანეტის  $m_1$  მასასთან შედარებით, ე. ი.  $\frac{m_1}{m_2} \approx 0$ . ეს იმას ნიშნავს, რომ დაყვანილი მასა ძალიან დიდი სიზუსტით პლანეტის მასის ტოლია  $\mu \approx m_1$ , ე. ი. პლანეტისა და მზის ინერციის ცენტრი ფაქტიურად მზის ცენტრშია მოთავსებული და  $r_1 \approx r$ .

ამ შენიშვნების შედეგ კეპლერის კანონების ჩამოყალიბება სიძნელეს არ წარმოადგენს, თუ გამოვიყენებთ წინა პარაგრაფში მიღებულ შედეგებს. პირველი კანონი გვეუბნება: პლანეტები მოძრაობენ ელიფსებზე, რომლის ერთ-ერთ ფოკუსში იმყოფება მზე.

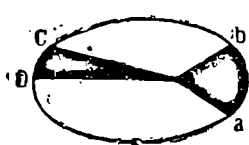
$r = r_{min}$  უწოდებენ პერიპელიუმს,  $r = r_{max}$  — აფელიუმს.

მეორე კანონის თანახმად რადიუსვექტორი, რომელიც გაღლებულია მზიდან პლანეტისაკენ, დროის ტოლ შუალედში ტოლ ფართს შემოსწერს (იხ. ნახ. 25). ამ კანონიდან ნათელია, რომ, რაც უფრო ახლოსაა პლანეტა მზესთან, იგი მით უფრო ჩქარა მოძრაობს.

კეპლერის მესამე კანონს იძლევა (27,24) ფორმულა. მარტლაც, რადგან  $\mu \approx m_1$ , ხოლო  $\alpha = \gamma m_1 m_2$ , ამიტომ

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{1}{\gamma m_2} \quad (28,3)$$

როგორც ვხედავთ, ეს ფარდობა დამოკიდებული არაა პლანეტის მასაზე. სიტყვიერად ეს კანონი ასე გამოითქმის: პლანეტის მზის გარშემო გარემოქცემის დროის



ნახ. 25

(წელიწადის) კვადრატისა და დიდი ნახევარღერძის კუბის ფარდობა ერთი და იგივეა ყველა პლანეტისათვის.

აღვნიშნოთ, რომ კეპლერის კანონები მიიღება ფინიტური მოძრაობის დროს, როცა  $E < 0$ .  $r$ -ის უკუპროპორციული პოტენციული უშვებს ინფინიტურ მოძრაობასაც ამ დროს სხეულის მოძრაობა ხდება ღია ტრაექტორიებზე. ეს შემთხვევა მზის სისტემაში მოძრაობის სხეულებისათვის არ ხორციელდება, მაგრამ ეს არ ნიშნავს, რომ სამყაროს სხვა სხეულები არ მოძრაობენ ღია ტრაექტორიებზე. აღსანიშნავია, რომ ზოგი კომეტა სწორედ ღია ტრაექტორიაზე მოძრაობს.

თუ არ შემოვიფარგლებით  $\frac{m_1}{m_2} \approx 0$  დაშვებით, მაშინ კეპლერის კანონები

დაზუსტებას მოითხოვს, რანდენადაც საჭირო იქნება მზის მოძრაობის გათვალისწინებაც.

წინა პარაგრაფში ვნახეთ, რომ ზოგად შემთხვევაში, ორი ნაწილაკის მოძრაობა დაიყვანება ერთი ნაწილაკის მოძრაობაზე, რომლის მასა არის  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  დაყვანილი მასა. ამ ფიქტიური ნაწილაკის შესაბამისი  $r = r_1 - r_2$  რადიუსვექტორი ინერციის ცენტრის მიმართ აღწერს ტრაექტორიას, რომელიც წარმოადგენს კონუსურ კვეთებს

$$r = \frac{l^2/\mu\alpha}{1 + z \cos \varphi}; \quad (28,4)$$

ამასთან, კონუსური კვეთების ფოკუსი იმყოფება კოორდინატთა სათავეში, რომელიც ემთხვევა სისტემის ინერციის ცენტრს და  $\varphi = 0$  შესაბამება  $r_{min}$  მანძილს. ახლა გამოვარკვიოთ, რა ტრაექტორიებზე მოძრაობენ თვით პლანეტები და მზე. ამისათვის საჭიროა შევისწავლოთ  $r_1$  და  $r_2$  რადიუსვექტორების მიერ შემოწერილი ტრაექტორიები ინერციის ცენტრის მიმართ. ამისათვის საკმარისია გამოვიყენოთ (25,21) ფორმულები, რომელთა თანახმად

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \quad r_2 = - \frac{m_1}{m_1 + m_2} r. \quad (28,5)$$

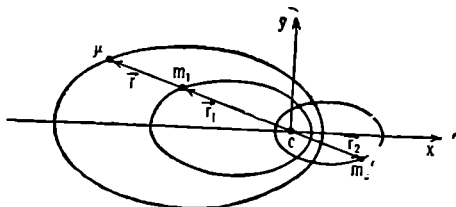
როგორც ვხედავთ, პლანეტის  $r_1$  რადიუსვექტორს ყოველთვის იგივე მიმართულება აქვს, რაც  $r$ -ს, ე. ი.  $\mu$  მასის რადიუსვექტორს, სიდიდით კი მასზე  $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$ -ჯერ მეტია. ასე რომ, პლანეტაც იმოძრაობს კონუსურ კვეთაზე, რომლის განტოლება, (28,4)-ის თანახმად, განიზღვრება ფორმულით

$$r_1 = \frac{l^2/m_1\alpha}{1 + z \cos \varphi}. \quad (28,6)$$

რაც შეეხება მზეს, მისი რადიუსვექტორი ყოველთვის  $r$ -ის საწინააღმდეგოდაა მიმართული: როცა რაიმე მიმართულების მიმართ  $r$ -ის მიერ შედგენილი კუთხე  $\varphi$ -ს ტოლია, მაშინ  $r_2$ -ის მიერ შედგენილი კუთხე  $(\pi + \varphi)$ -ს ტოლი იქნება. რადგან ამავე დროს  $r_2$ -ის სიდიდე  $r$ -ის სიდიდეზე  $\frac{m_1}{m_1 + m_2}$ -ჯერ მეტია, ამიტომ მზე იმოდრავებს შემდეგ კონუსურ კვეთაზე:

$$r_2 = \frac{l^2/m_2\alpha}{1 - z \cos \varphi}. \quad (28,7)$$

მაშასადამე, ჩვენ ვხედავთ, რომ სინამდვილეში, როგორც პლანეტები, ისე მზე მოძრაობენ ელიფსებზე საერთო ინერციის ცენტრის მიმართ. ამასთან, დაუვანილო  $\mu$  მასის მქონე ნაწილაკისა და პლანეტის შესაბამისი ელიფსების მარჯვენა ფოკუსი იმყოფება ინერციის ცენტრში, მზის შემთხვევაში კი ინერციის ცენტრში იმყოფება ელიფსის მარცხენა ფოკუსი (ნახ. 26), ე. ი. მზის შემთხვევაში მინიპალური მანძილი გვექნება  $\varphi = \pi$  კუთხეზე.



ნახ. 26

დაზუსტებას მოითხოვს კეპლერის მესამე კანონიც. ზოგად შემთხვევაში, უნდა ვისარგებლოთ (27,24) ფორმულით, რომელიც მოგვცემს

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma m_2} \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \quad (28,7)$$

ამ შესწორებას არსებითი მნიშვნელობა არა აქვს მსუბუქი პლანეტებისათვის, მძიმეებისათვის კი შეუძლია გარკვეული როლი შეასრულოს.

წყალბადის ატომის პრობლემა. სრულიად ანალოგიურად შეიძლება მოიძებნოს ტრაექტორიის განტოლება კლონურ ენსში ზონარობისას. ამ შემთხვევაში საჭიროა (28,2) პოტენციალური ენერჯიის გამოხატულებაში  $\alpha = \gamma m_1 m_2$  შევცვალოთ მუხტების ნამრავლით. მაგალითად, წყალბადის ატომისათვის გვექნება  $\alpha = e^2$ , სადა  $e$  — ელემენტარული მუხტია. როცა სრული ენერჯია  $E < 0$ , ელექტრონი იმობრავებს ელიფსზე, რომლის ფოკუსში მათაყსებელი იქნება პროტონი. მაგრამ კლასიკური მექანიკის თანახმად წყალბადის ატომი არ შეიძლება მდგრად სისტემას წარმოადგენდეს. მართლაც, ელექტრონი ორბიტაზე აჩქარებულად მოძრაობს (მრუდწირული მოძრაობა ყოველთვის აჩქარებულა!) კლასიკური ელექტროდინამიკა კი გვასწავლის, რომ აჩქარებულად მოძრაობა დამუხტული ნაწილაკი სინათლეს გამოასხივებს და, მაშასადამე, კარგავს თავის ენერჯიას. ამიტომ გარკვეული დროის გავლის შემდეგ ელექტრონი პროტონს დაეკემა და წყალბადის ატომი, როგორც მდგრადი სისტემა, შეწყვეტს არსებობას. ცხადია, რომ ეს შედეგი ეწინააღმდეგება სინამდვილეს, რამდენადაც წყალბადის ატომი ბუნებაში არსებობს და საკმარისად მდგრად სისტემას წარმოადგენს. შევნიშნოთ, რომ წყალბადის ატომის პრობლემა იყო კლასიკური მექანიკის ერთ-ერთი დაუძლეველი წინააღმდეგობა, რომლის ახსნის საჭიროებამ მოითხოვა ატომის ახალი მექანიკის (კვანტური მექანიკის) ჩამოყალიბება.

### § 28. ბინენს ფორმულა

ბინენს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ცენტრალური ურთიერთქმედების შემთხვევაში მოცემული ძალის მიხედვით მოძრაობის ტრაექტორიის მოძებნისა და, პირაქით, მოცემული ტრაექტორიის მიხედვით ურთიერთქმედების ძალის განსაზღვრისა. ამ ფორმულის გამოყენება საკმარისად მარტივია.

განვიხილოთ ორი მატერიალური წერტილი მასებით  $m_1$  და  $m_2$ , რომლებიც ერთმანეთთან ურთიერთქმედებენ ცენტრალური ძალით. ვიგულისხმობთ, რომ ათვლის სისტემის სათავე მოთავსებულია სისტემის ინერციის ცენტრში. ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით, მოძრაობა დაიყვანება ერთი ფიქტიური ნაწილაკის მოძრაობაზე დაყვანილი  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  მასით.

ცენტრალურ ველში მოძრაობა ბრტყელია და ადგილი აქვს იმპულსის მონენტის შენახვის კანონს

$$l = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const}, \quad (29,1)$$

სადაც  $r$  არის ფარდობითი რადიუსვექტორი  $r = r_1 - r_2$ , ხოლო  $\varphi$  — პოლარ კუთხე. დავეწეროთ ცოცხალი ძალის კანონი ფარდობითი მოძრაობისათვის ცენტრალურ ველში. გვექნება

$$d\left(\frac{\mu v^2}{2}\right) = -dU = F(r) dr, \quad (29,2)$$

სადაც

$$F(r) = -\frac{dU}{dr} \quad (29,3)$$

ცენტრალური ძალაა, ხოლო  $U(r)$  — შესაბამისი პოტენციალური ენერგია. გავიხსენოთ  $v^2$ -ის გამოხატულება პოლარკოორდინატებში

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (29,4)$$

დროებით შემოვიღოთ ახალი ცვლადი  $\chi = \frac{l}{r}$ . მაშინ ცხადია, რომ

$$\frac{d\chi}{d\varphi} = -\frac{l}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}. \quad (29,5)$$

ამ უკანასკნელისა და (29,1) ფორმულირების გათვალისწინებით ვიპოვიოთ

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{l}{\mu} \frac{d\chi}{d\varphi} \quad (29,6)$$

მაშასადამე,

$$v^2 = \frac{l^2}{\mu^2} \left\{ \left( \frac{d\chi}{d\varphi} \right)^2 + \chi^2 \right\}. \quad (29,7)$$

ეს სიდიდე შევიტანოთ ცოცხალი ძალის კანონის გამოხატულებაში; მივიღებთ

$$\frac{l^2}{2\mu} d \left\{ \left( \frac{d\chi}{d\varphi} \right)^2 + \chi^2 \right\} = -dU(r). \quad (29,8)$$

ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ  $d\varphi$ -ზე, მაშინ

$$\frac{l^2}{2\mu} \frac{d}{d\varphi} \left\{ \left( \frac{d\chi}{d\varphi} \right)^2 + \chi^2 \right\} = \frac{dU}{dr} \frac{dr}{d\varphi}. \quad (29,9)$$

მარცხენა მხარე გავწარმოთ  $\varphi$ -თი, ხოლო მარჯვენა მხარეში გავითვალისწინოთ (29,5) ტოლობა. ამის შემდეგ მოვახდინოთ შეკვეცა  $\frac{d\chi}{d\varphi}$ -ზე. საბოლოოდ მივიღებთ

$$\frac{dU}{dr} = \frac{l^2}{\mu r^3} \left\{ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right\}. \quad (29,10)$$



პოტენციალურ ენერგიას მივიღებთ ინტეგრაციით

$$U(r) = \frac{l^2}{\mu} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} \left\{ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right\}. \quad (29,11)$$

ამასთან, ჩვენ მოვითხოვეთ, რომ უსასრულობაში პოტენციალური ენერგია ნულის ტოლი იყოს, ე. ი.  $U(\infty) = 0$ .

ძალისათვის კი შეგვიძლია დავწეროთ

$$F(r) = - \frac{l^2}{\mu r^2} \left\{ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right\}. \quad (29,12)$$

ამ ფორმულას უწოდებენ ბინეს ფორმულას.

სტაციონარულ შემთხვევაში, როცა ცენტრალური ძალა დროზე არ არის დამოკიდებული, მაშინ ბინეს ფორმულა ძალს აკავშირებს ნაწილაკის  $r$  და  $\varphi$  კოორდინატებთან, ე. ი. (29,12) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნით პირდაპირ ვიპოვიტ ტრაექტორიის განტოლებას პოლარკოორდინატებში და, პირიქით, როცა ცნობილია ტრაექტორიის განტოლება, ვიპოვიტ იმ ცენტრალურ ძალას, რომლის გავლენით ნაწილაკი მოძრაობს მოცემულ ტრაექტორიაზე. არასტაციონარულ შემთხვევაში ტრაექტორიის მოსაძებნად საჭიროა გამოვიყენოთ (29,1) ინტეგრალიც.

განვიხილოთ მაგალითები.

მსოფლიო მიზიდულობის კანონი. ვთქვათ ჩვენთვის ცნობილია, რომ ნაწილაკები ერთმანეთზე მოქმედებენ ცენტრალური ძალით და ტრაექტორიას აქვს შემდეგი სახე:

$$r = \frac{p}{1+x \cos \varphi}, \quad (29,13)$$

სადაც  $p$  პარამეტრია,  $x$  კი ექსცენტრისიტეტი. აქედან განვსაზღვროთ  $\frac{1}{r}$  და შევიტანოთ ბინეს ფორმულაში; გვექნება

$$F(r) = - \frac{l^2}{\mu r^2 p}; \quad (29,14)$$

თუ გავითვალისწინებთ პარამეტრის (27,14) გამოხატულებას, საბოლოოდ მივიღებთ

$$F(r) = - \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (29,15)$$

რაიმელიც წარმოადგენს ნიუტონის მსოფლიო მიზიდულობის ძალას.

აქლა განვიხილოთ შებრუნებული ამოცანა. ვთქვათ, ძალას აქვს (29,15) სახე და ვიპოვიტ ტრაექტორიის განტოლებას. ბინეს ფორმულა გვაძლევს

$$\frac{l^2}{\mu} \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right\} = \frac{\alpha}{r^2} \quad (\alpha = \gamma m_1 m_2) \quad (29,16)$$

აქედან

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}. \quad \left( p = \frac{l^2}{\mu \alpha} \right) \quad (29,17)$$

ამ განტოლების ამონახსნი ტოლი იქნება

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{x}{p} \cos(\varphi + \theta), \quad (29,18)$$

სადაც  $x$  და  $\theta$  ნებისმიერა მუდმივებია. (29,18) ტოლზღვან საბოლოოდ მივიღებ.

$$r = \frac{p}{1+x \cos(\varphi + \theta)}, \quad (29,19)$$

რომელიც გამოხატავს კონუსური კვთების განტოლებას, როცა ფოკუსი მოთავსებულია სიმძიმის ცენტრში.

მოდრაობა წრეზე. ვთქვათ მოძრაობის ტრაექტორია წარმოადგენს წრეწირს, რომლის რადიუსი მუდმივია  $r = R$ . ეიოვით მოქმედი ძალის გამოხატულება. ბინეს ფორმულა ამ შემთხვევაში მოგვცემს

$$F(r) = - \frac{l^2}{\mu R^3}, \quad (29,20)$$

ე. ი. სიდიდით ძალა მუდმივია. მეორე მხრით, (29,7) ფორმულის თანახმად,  $v^2 = \frac{l^2}{\mu^2 R^2}$ , რაც (29,20)-ში ჩასმით გვაძლევს

$$F(R) = - \frac{\mu v^2}{R}. \quad (29,21)$$

მივიღეთ ცენტრისკენული ძალის ფორმულა. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში, ნაწილაკი მუდმივი ცენტრალური ძალის გავლენით მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით.

მოდრაობა ლოგარითმულ ხვიაზე. ვთქვათ, ტრაექტორიის განტოლებას პოლარკოორდინატებში აქვს შემდეგი სახე:

$$r = r_0 e^{\lambda \varphi}, \quad (29,22)$$

სადაც  $r_0$  და  $\lambda$  მუდმივი პარამეტრებია. (29,22) წარმოადგენს ლოგარითმული ხვიის განტოლებას თუ (29,22)-ს შევტანთ ბინეს ფორმულაში, მივიღებთ

$$F(r) = - \frac{A}{r^3}, \quad (29,23)$$

სადაც

$$A = \frac{l^2}{\mu} \{\lambda^2 + 1\} = \text{const.} \quad (29,24)$$

მაშასადამე, ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ძალა მიზიდვის ხასიათისაა და მათ შორის არსებული მანძილის კუბის უკუპროპორციულია. როგორც ეიოთ, ასეთი ძალა იწვევს ლიმბიტური მოძრაობას — ნაწილაკები ერთმანეთს ეცემა.

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ ამ პარაგრაფში განხილულ ფორმულებში, თუ სისტემის დაყენილ მასას შევცვლით ერთი რომელიმე ნაწილაკის  $m$  მასით, მაშინ მივიღებთ  $m$  მასის ნაწილაკის მოძრაობას უძრავი ცენტრის მიმართ.

### § 30. მოძრაობა დედამიწის გრავიტაციულ ველში.

#### ხელოვნური თანამგზავრები

დედამიწის გრავიტაციულ ველში სხეულების მოძრაობის შესწავლას განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს, რამდენადაც ადამიანს ყოველ ნაბიჯზე საქმე აქვს ასეთ მოძრაობასთან. ამ ბოლო ორი ათეული წლის განმავლობაში განსაკუთრებული მნიშვნელობა მოიპოვა დედამიწის ხელოვნური თანამგზავრების მოძრაობისა და გავრცელების შესწავლამ. თუ აქამდე დედამიწას ერთი თანამგზავრი ჰყავდა მთვარის სახით, ახლა მის გარშემო ორბიტაზე მოძრაობენ ასობით შედარებით პატარა ხელოვნური თანამგზავრები, რომლებმაც უჩვეულოდ გაამდიდრეს ჩვენი ცოდნა არა მხოლოდ დედამიწის ველში სხეულების მოძრაობის თავისებურებებზე, არამედ მათი საშუალებით შეისწავლება ატმოსფერული მოვლენები, კოსმოსური სხივების თვისებები, დედამიწის ფორმა და მავნიტური ველი, იონოსფერო, დედამიწის წიაღისეული სიმდიდრეები და სხვა მრავალი.

დედამიწის ხელოვნური თანამგზავრების გაშვების თეორიული შესაძლებლობა ცნობილი იყო ჯერ კიდევ ნიუტონისათვის, მაგრამ მათი პრაქტიკული განხორციელება შესაძლებელი გახდა მხოლოდ მძლავრი საფეხურებიანი რეაქტიული ძრავების შექმნის შემდეგ, რაშიაც არანაკლები მნიშვნელობა ჰქონდა სპეციალური ტიპის ეფექტური თხევადი თუ მყარი საწვავების მიღებას.

დედამიწის ხელოვნური თანამგზავრების ტრაექტორიის გათვლისას, პირველ მიახლოებაში სხვა სხეულებს გავლენა შეგვიძლია უგულებელვყოთ. ასევე შეგვიძლია უგულებელვყოთ ჰაერის წინააღმდეგობა. მაშასადამე, არის შესაძლებლობა ეს ამოცანა განვიხილოთ, როგორც ორი სხეულის ამოცანა, სხეულებს შორის ურთიერთქმედების შემთხვევაში, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$U(r) = -\gamma \frac{mM}{r}, \quad (30,1)$$

სადაც  $m$  თანამგზავრის მასაა,  $M$  კი დედამიწისა. ცხადია, რომ თანამგზავრის შემთხვევაში შეგვიძლია გამოვიყენოთ § 26-ში მიღებული შედეგები. განსხვავება იქნება იმაში, რომ პლანეტები ერთხელ და სამუდამოდ განსაზღვრულ ორბიტაზე მოძრაობენ, მაშინ, როცა თანამგზავრის განსაზღვრულ ორბიტაზე გასაყვანად საჭიროა დამატებითი პირობები — საწყისი პირობების სახით. როგორც ქვემოთ დავინახავთ, თანამგზავრის ორბიტაზე გაყვანისათვის გადაწყვეტილი მნიშვნელობა აქვს საწყისი სიჩქარის სიდიდეს და მის მიერ ჰორიზონტთან შექმნილ კუთხეს. ან, როგორც მას უწოდებენ, ვასროლის კუთხეს.

სანამ უშუალოდ ამ ამოცანას შევხებოდეთ გავიხსენოთ, რომ ორა ნაწილაკის ამოცანა ინერციის ცენტრის სისტემაში დაყვანება ერთი დაყვანილი მასის მქონე ფიქტიური ნაწილაკის ამოცანაზე. სათანადო მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე

$$\mu \ddot{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{r}{r} = -\gamma \frac{\mu(m+M)}{r^2} \frac{r}{r}, \quad (30,2)$$

სადაც  $\mu = mM/m + M$  სიტემის დაყვანილი მასაა, ხოლო  $r = r_m - r_M$  ფარდობითი რადიუსვექტორი მიმართულია  $M$  მასის მქონე ნაწილაკიდან  $m$  მასის ნაწილაკისაკენ. შევნიშნოთ, რომ ძალა, რომელიც (30.2) განტოლების მარჯვენა მხარეში შედის, პროპორციულია არა  $-\gamma \mu M$ -ისა, არამედ  $-\gamma \mu(m+M)$ -ისა. ამ განტოლებას შეგვიძლია მივცეთ სხვაგვარი ინტერპრეტაცია. ამისათვის გადავწყოთ იგი შემდეგნაირად

$$m \ddot{r} = -\gamma \frac{m(m+M)}{r^2} \frac{r}{r}. \quad (30,3)$$

მაშასადამე, ეს განტოლება წარმოადგენს  $m$  მასის ნაწილაკის მოძრაობის განტოლებას  $M$  მასის ნაწილაკის მიმართ, ოღონდ უნდა ვიგულისხმოთ. რომ მეორე ნაწილაკი უძრავია და მისი მასაა არა  $M$ , არამედ სის ზემის მთელი მასა  $(m+M)$ . აღვნიშნოთ, რომ თანამგზავრის შემთხვევაში პრაქტიკულად  $m \ll M$ .

ეთქვათ  $m$  მასის ნაწილაკს ვისვრით  $A$  წერტილიდან, რომლის რადიუსვექტორის სიდიდე დედამიწის ცენტრთან არის  $R$ . როცა სხეულს ვისვრით დედამიწის ზედაპირიდან, მაშინ  $R = R_0 = 6378$  კმ.  $A$  წერტილში სიმძიმის ძალის არქარება აღვნიშნოთ  $g$ -თი, ხოლო დედამიწის ზედაპირზე  $g = g_0 = 9.81 \frac{g}{\text{სეკ}^2}$ .  $A$  წერტილში სხეულზე იმოქმედებს დედამიწის მიზიდულობის ძალა, რომელიც ზემოთ განხილულს თანახმად, ცხადია, ტოლი იქნება

$$\frac{-\gamma m(m+M)}{R^2} = -mg, \quad (30,4)$$

საიდანაც მივიღებთ თანფარდობას

$$\gamma(m+M) = gR^2. \quad (30,5)$$

რადგან მოძრაობას ცენტრალური ხასიათი აქვს, ამიტომ გამოვყენოთ იმპულსის მომენტის შენახვის კანონი.  $l = |R, \mu v_0| = R\mu v_0 \sin(R, v_0)$ , ან

$$l = R\mu v_0 \cos \theta, \quad (30,6)$$

სადაც  $\theta$  არის სხეულის საწყისი სიჩქარის  $v_0$ -ის მიერ შედგენილი კუთხე პორი-ზონის — გასროლის კუთხე (ნახ. 27). თუ გავხსენებთ პარამეტრის (27,14) განმარტებას და (30,5) თანაფარდობას, შეგვიძლია პარამეტრი გამოვხატოთ საწყისი სიჩქარითა და  $\theta$  კუთხით. კერძოდ,

$$p = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g}. \quad (30,7)$$

განხილული სისტემის სრული ენერგია ტოლი იქნება

$$E = \frac{\mu v_0^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R}, \quad (30,8)$$

ამიტომ (27,7) ექსცენტრისიტეტისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$x = \sqrt{1 + \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g^2 R^2} (v_0^2 - 2gR)}. \quad (30,9)$$

ცხადია, რომ (27,16) ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$\begin{aligned} x < 1, & v_0 < \sqrt{2gR}, & \text{ელიფსი,} \\ x = 1, & v_0 = \sqrt{2gR}, & \text{პარაბოლა,} \\ x > 1, & v_0 > \sqrt{2gR}, & \text{ჰიპერბოლა.} \end{aligned} \quad (30,10)$$

ნახ. 27.  $\theta$  — არის კუთხე გასროლილი სხეულის საწყისი სიჩქარის მიმართულებასა და პორიზონტს შორის, ე. წ. გასროლის კუთხე.

ინფინიტური მოძრაობა.  $v_{კარ.} = \sqrt{2gR}$  სიჩქარეს უწოდებენ პარაბოლურ ან განთავისუფლების სიჩქარეს. ეს არის ის მინიმალური სიჩქარე, რომელიც საწყის მომენტში უნდა მიეანიჭოთ თანამგზავრს, რომ იგი განთავისუფლდეს დედამიწის მიზიდულობის ველისაგან. ამ სიჩქარეს მეორე კოსმოსურ სიჩქარესაც უწოდებენ როცა სხეულის გასროლა ხდება დედამიწის ზედაპირიდან, მაშინ

$$v_{კარ.} = \sqrt{2g_0 R_0} \approx 11,2 \frac{კმ}{სეკ}. \quad (30,11)$$

თუ სხეულს მიეანიჭებთ საწყისი სიჩქარეს  $v_0$ , რომელიც მეტია ან ტოლი  $v_{კარ.}$ -ის.  $v_0 \geq v_{კარ.}$ , მაშინ ასეთი სხეული გასროლის კუთხის მნიშვნელობაზე დამოუკიდებლად დედამიწისა აღარ დაუბრუნდება და იმოდრავებს პარაბოლაზე ან ჰიპერბოლაზე. კერძო შემთხვევაში, როცა  $\theta = 90^\circ$ , მოძრაობა იქნება სწორხაზოვანი — სხეული იმოდრავებს დედამიწის რადიუსის გასწვრივ უსასრულოდისაკენ.

ფინიტური მოძრაობა. თანამგზავრი. როცა სხეულის საწყისი სიჩქარე

$$v_0 < v_{კარ.} \quad (30,12)$$

მაშინ გასროლილი სხეული ან დედამიწის თანამგზავრი გახდება, ან უკან ჩამოვარდება დედამიწაზე — მოძრაობა იქნება ფინიტური. ამ შემთხვევაში გადამწყვეტი მნიშვნელობა ექნება გასროლის  $\theta$  კუთხეს.

ამ საკითხის გამოსარკვევად გავიხსენოთ  $v^2$ -ის გამოხატულება პოლარკოორდინატებში. რადგან საწყის მომენტში, როცა  $r=R$ ,  $v=v_0$ , ამიტომ გვექნება

$$v_0^2 = \frac{l^2}{\mu^2} \left\{ \left( \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right)_{r=R} + \frac{1}{R^2} \right\}, \quad (30,13)$$

საიდანაც

$$\left( \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right)_{r=R} = \pm \sqrt{\frac{\mu^2 v_0^2}{l^2} - \frac{1}{R^2}}. \quad (30,14)$$

$v_0$ -ის მიმართულება ისე შევარჩიოთ, რომ  $\left( \frac{dr}{dt} \right)_{r=R}$  და  $\left( \frac{d\varphi}{dt} \right)_{r=R}$ , მაშასადამე,  $(dr)_{r=R}$  და  $(d\varphi)_{r=R}$ -ის ნიშნები ერთნაირი იყოს; მაშინ, რამდენადაც

$$\left( \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right)_{r=R} = -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)_{r=R} < 0, \quad (30,15)$$

იმდენად ფესვის წინ მინუს ნიშანი უნდა ავირჩიოთ. ამგვარად,

$$\left( \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \right)_{r=R} = -\sqrt{\frac{\mu^2 v_0^2}{l^2} - \frac{1}{R^2}}. \quad (30,16)$$

რადგან კონუსური კვეთების ტრაექტორია განისაზღვრება ფორმულით

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \chi \cos \varphi}{p}, \quad (30,17)$$

ამიტომ

$$\left( \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right)_{r=R} = -\frac{\chi \sin \varphi_0}{p} = -\sqrt{\frac{\mu^2 v_0^2}{l^2} - \frac{1}{R^2}}. \quad (30,18)$$

სადაც  $\varphi_0 = \varphi(R)$   $A$  წერტილის პოლარკოორდინატია. თუ გავიხსენებთ  $p$  პარამეტრის (30,7) ფორმულას და გავითვალისწინებთ (30,4) დამოკიდებულებას, ავიღებთ მივიღებთ გამოსახულებას

$$\chi \sin \varphi_0 = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{Rg} \operatorname{tg} \theta. \quad (30,19)$$

გარდა ამისა, (30,17)-დან  $r=R$ -ისათვის მივიღებთ

$$\chi \cos \varphi_0 = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{gR} - 1. \quad (30,20)$$

იმისათვის, რომ დედამიწიდან გასროლილმა სხეულმა დედამიწის ირგვლივ ჩაკეტილ ტრაექტორიაზე იმოძრაოს, საჭიროა ნებისმიერ წერტილში  $r \geq R_0$  ან, რადგან  $R_0 = r(\varphi_0)$ , ავიტომ საჭიროა

$$\frac{p}{1 + \chi \cos \varphi} \geq \frac{p}{1 + \chi \cos \varphi_0}. \quad (30,21)$$

ე. ი.  $\cos \varphi_0 \geq \cos \varphi$ ; მაშასადამე,  $\varphi$ -ს ცვლილებისას 0-დან  $\pi$ -მდე უნდა გვექონდეს  $\varphi_0 \geq \varphi$ . რაც შესაძლებელია მხოლოდ  $\varphi_0 = 0$  შემთხვევაში და ჩვენ მივიღეთ შემდეგი დასკვნა: თანამგზავრის პერიგეა (ყველაზე ახლო წერტილი დედამიწიდან) ემთხვევა მის საწყის  $A$  წერტილს (დედამიწიდან ყველაზე დაშორებულ წერტილის-აპოგეა ეწოდება).

ჩაესვათ  $\varphi_0 = 0$  და  $R = R_0$  მნიშვნელობები (30,18) და (30,19) ფორმულებში; გვექნება

$$\cos^2 \theta \operatorname{tg} \theta = 0; \quad \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g R_0} - 1 = \alpha. \quad (30,22)$$

რადგან  $\alpha > 0$ , ამიტომ  $\cos^2 \theta \neq 0$ , მაშინ  $\operatorname{tg} \theta = 0$  და  $\theta = 0$  (ან  $\pi$ -ს). მეორე მხრივ, (30,22)-ის მეორე ფორმულიდან  $\theta = 0$  და ნებისმიერი  $R$ -ისათვის ექსცენტრისიტეტი განისაზღვრება ფორმულით

$$\alpha = \frac{v_0^2}{g R} - 1. \quad (30,23)$$

რადგან  $\alpha > 0$ , ამიტომ აქედან შეგვიძლია დაეწეროთ

$$v_0 > \sqrt{g_0 R_0}. \quad (30,24)$$

ამგვარად, იმისათვის რომ დედამიწიდან გასროლილი სხეული ხელოვნურ თანამგზავრად გადაიქცეს, საჭიროა შესრულებული იყოს ორი პირობა

$$\theta = 0; \quad \sqrt{2g_0 R_0} > v_0 \geq \sqrt{g_0 R_0}. \quad (30,25)$$

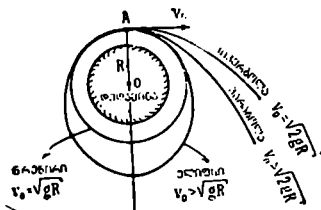
(30,22) განმარტებიდან, როცა  $\alpha = 0$  გვექნება წრეზე მოძრაობა! მაშასადამე, როცა საწყისი სიჩქარე

$$v_{\text{გ.რ.}} = \sqrt{g R}, \quad (30,26)$$

თანამგზავრი დედამიწის ირგვლივ იმობრავებს  $R$  რადიუსიან წრიულ ორბიტაზე.  $v_{\text{გ.რ.}}$ -ს უწოდებენ პირველ კოსმოსურ ან წრიულ სიჩქარეს. თანამგზავრის დედამიწის ზედაპირიდან გასროლის შემთხვევაში  $v_{\text{გ.რ.}} = \sqrt{g_0 R_0} \simeq 7,91 \frac{\text{კმ}}{\text{სეკ}}$ .

როცა გასროლილი სხეულის საწყისი სიჩქარე მეტია  $v_{\text{გ.რ.}}$ -ზე, ე. ი.  $v_0 > v_{\text{გ.რ.}}$ , მაშინ თანამგზავრი მოძრაავებს ელიფსზე; ამასთან, ექსცენტრისიტეტი მით უფრო მეტი იქნება, რაც მეტია საწყისი სიჩქარე  $v_0$  (ნახ. 28).

როცა გასროლის კუთხე  $\theta \neq 0$ , მაშინ საწყისი სიჩქარის არაეითარი მნიშვნელობისათვის გასროლილი სხეული თანამგზავრი არ გახდება, იგი ყოველთვის დედამიწას დაეცემა. პრაქტიკულად სხეული აპყავთ საფეხურებიანი რაკეტით დედამიწის ზედაპირიდან მოცემულ სიმაღლეზე ( $A$  წერტილში), სადაც მას ანიჭებენ სათანადო სიჩქარეს ჰორიზონტის მიმართ  $\theta = 0$  კუთხით. რაც უფრო მაღლა ავიტანთ დედამიწის ზედაპირიდან სხეულს, მით უფრო დასაშვები ხდება გადახრა  $\theta = 0$  პირობიდან. გარდა ამისა, ადვილად ვაჩვენებთ, რომ, რაც უფრო ზევით აგვაქვს გასროლილი სხეული დედამიწის ზედაპირიდან, მით უფრო მცირდება წრიული სიჩქარის სიდიდე.



ნახ. 28. თანამგზავრის გასროლა ხდება  $\theta = 0$  მიმართულებით  $A$  წერტილიდან. ამის მიხედვით, თუ როგორია საწყისი სიჩქარის სიდიდე, მიეღებთ სხვადასხვა ტრაექტორიას: წრეწირს, როცა  $v_0 = \sqrt{gR}$ ; ელიფსს, როცა  $v_0 > \sqrt{gR}$ , პარაბოლას, როცა  $v_0 = \sqrt{2gR}$  და ჰიპერბოლას, როცა  $v_0 > \sqrt{2gR}$ .  $R_0$  არის მანძილი დედამიწის ცენტრიდან გასროლის  $A$  წერტილამდე.

## ნაწილაკთა გაფანტვის თეორია

წინამდებარე თავში შევისწავლით ნაწილაკთა გაფანტვის თეორიას ცენტრალური ურთიერთქმედების შემთხვევაში. აღსანიშნავია, რომ ნაწილაკთა გაფანტვის საკითხებს განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება თანამედროვე ფიზიკაში, ამიტომაც გაფანტვის თეორია ცალკე თავს სახით გამოეყავით.

გაფანტვის თეორია, როგორც ძირითადი მეთოდი სხეულთა შორის ურთიერთქმედების შესწავლისა, კლასიკურ მექანიკაში ნაკლებად გამოიყენებოდა და ამ საკითხებს ატომის რთული ბუნების აღმოჩენამდე თითქმის არავითარე ყურადღება არ ექცეოდა.

აღსანიშნავია, რომ გაფანტვის პირველი ექსპერიმენტები ეხებოდა α-ნაწილაკების გაფანტვას ატომებზე. რეზერფორდმა სწორედ ამ ექსპერიმენტების წყალობით აღმოაჩინა ატომგულის არსებობა.

### § 31. ნაწილაკთა დაჯახება

ბუნებაში არსებობს მრავალი სახის ურთიერთქმედება, რომლებიც ჭერ კიდევ არაა შესწავლილი;

ერთ-ერთი მეთოდი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედების შესწავლისა, არის ნაწილაკთა დაჯახების მეთოდი.

დაჯახების ექსპერიმენტში რაიმე საშუალებით აჩქარებულ ორ ნაწილაკს ერთმანეთს ახვედრებენ. როდესაც ეს ნაწილაკები ურთიერთქმედების სფეროში შეიჭრებიან, ადგილი ექნება მათ გადახრას პირვანდელი მიმართულებიდან. სწორედ ამ მოვლენას უწოდებენ ნაწილაკთა დაჯახებას. ამასთან, ნაწილაკთა დაჯახებაში არ იგულისხმება ამ სიტყვის ჩვეულებრივი მნიშვნელობა — შეხება. დაჯახება არის ნაწილაკთა ურთიერთქმედების შედეგად ტრაექტორიის ყოველგვარი ცვლილება.

დაჯახების თეორიამ განსაკუთრებული მნიშვნელობა მიიღო ხელოვნური ამაჩქარებლების — სინქროფაზოტრონების, ციკლოტრონების, ბეტატრონების და სხვათა შექმნის შემდეგ. ამ ხელსაწყოებით შესაძლებელია არა მხოლოდ დიდი ენერჯიის ნაწილაკების მიღება, არამედ ახალი ტიპის ნაწილაკების გაჩენაც. აღსანიშნავია, რომ ამაჩქარებელთა ტექნიკის განვითარებამდე სარგებლობდნენ მხოლოდ ბუნებრივი რადიოაქტიური ელემენტების მიერ გამოსხივებული α-ნაწილაკების, ელექტრონების და γ-სხივების ნაკადებით, ასევე კოსმოსური სხივების შემადგენელი ნაწილაკებით.

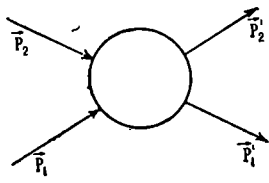
ატომური სხეულების შესასწავლად დაჯახების მოვლენის ექსპერიმენტული და თეორიული ანალიზი მნიშვნელოვან ცნობებს იძლევა როგორც ამ ნაწილაკებს შორის არსებული ძალების, ისე მათი ზოგადი ხასიათის შესახებ. ატომშიგა მოძ-

რაობების დასადგენად ექსპერიმენტატორი ატომს უშენს ნაწილაკთა ნაკადს (ელექტრონებს, პროტონებს,  $\alpha$ -ნაწილაკებს და სხვა). ნაკადის შემადგენელი ნაწილაკების ატომის ნაწილაკებთან ურთიერთქმედების გამო ხდება დაცემულ ნაწილაკთა გადახრა საწყისი მიმართულებიდან — გაფანტვა. გაფანტვის ანალიზით ექსპერიმენტატორი იძენს მისთვის საინტერესო ცნობებს ატომშიგა მოძრაობების შესახებ.

არჩევენ ორი სახის დაჯახებას — დრეკალსა და არადრეკალს. დაჯახებას ეწოდება დრეკალი, როცა ურთიერთმოქმედი ნაწილაკების (ან სისტემების) შინაგანი მდგომარეობანი არ იცვლება. ამ შემთხვევაში სისტემის კინეტიკური ენერგია ინახება. არადრეკალი დაჯახებისას კი ადგილი აქვს ურთიერთმოქმედ ნაწილაკთა შინაგანი ენერგიის ცვლილებებს. ასე მაგალითად, არადრეკალი დაჯახებისას ელექტრონი ატომს გადასცენს ენერგიას, რომლის ნაწილი შეიძლება დაიხარჯოს ატომის როგორც მთლიანის მოძრაობაზე, ნაწილი კი შინაგანი მოძრაობის აღზნებაზე. აღსანიშნავია, რომ ზოგადი განხილვისას არადრეკალ გაფანტვას შეიძლება მოჰყვეს ნაწილაკთა გვარობის შეცვლა. ქვემოთ ჩვენ შემოვისახლვებით დრეკალი დაჯახების თეორიით.

დაჯახებათა შესწავლა განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრაობისას, რამდენადაც ატომურ სამყაროში ძალები ძირითადად ცენტრალურ ხასიათს ატარებენ.

დაჯახების ექსპერიმენტს შემდეგნაირად ახორციელებენ: იღებენ ე. წ. სამიზნეს, რომელიც შეიცავს დასაჯახებელ ნაწილაკთა დიდ რიცხვს და მას უშენენ ნაწილაკთა ნაკადს, რომელიც ატომურ აგრეთვე დიდი სიმკვრივით ხასიათდება. ნაწილაკთა მრავალჯერადი გაფანტვის გამორიცხვის მიზნით, ბუნებრივია, სამიზნე ნივთიერება რაც შეიძლება თხელი უნდა ავიღოთ. დაცემულ ნაწილაკთა სამიზნე ნივთიერებასთან ურთიერთქმედების შედეგად მოხდება ნაწილაკთა გადახრა საწყისი მიმართულებიდან; დაჯახების ამოცანის ხასიათიდან ნათელია, რომ საქმე გვაქვს ნაწილაკთა ინჟინიტურ მოძრაობასთან, ამიტომ დაჯახების ამოცანებში ნაწილაკთა სრული ენერგია დადებითია.



ნახ. 29

დაჯახების ამოცანის გადაწყვეტაშიაც დიდად გვიწყობენ ხელს მოძრაობის ინტეგრირება. დაჯახების ამოცანას კლასიკურ ფიზიკაში შეგვიძლია მივუდგეთ ორი მეთოდით. ერთი მეთოდით ჩვენ შეგვიძლია დავაკვირდეთ ნაწილაკს მთელი მოძრაობის განმავლობაში და ტრაექტორია ვიპოვოთ ჩვეულებრივი წესით.

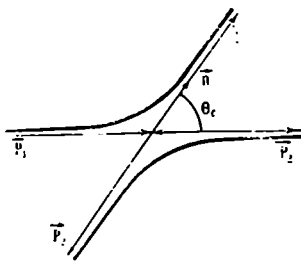
მაგალითად, წინა თავში განხილული  $E \geq 0$  შემთხვევის ამოხსნები, როცა ნაწილაკი მოძრაობდა ღია ტრაექტორიაზე, შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც დაჯახების ამოცანის ამოხსნები. დაჯახების მოვლენის შესწავლის მეორე მეთოდის დროს ჩვენ არ გვანტერესებს დაჯახების დეტალური სურათი. მოცემული გვაქვს საწყისი მდგომარეობა და გვანტერესებს მხოლოდ დაჯახების შედეგების გაგება. ამ მეთოდში ურთიერთქმედებამდე ჩვენ მოცემული გვაქვს იმპულსის სიდიდე და მიმართულება, საჭიროა ვიპოვოთ საბოლოო მდგომარეობის იმპულსის სიდიდე და მიმართულება დაჯახების ადგილიდან ძალიან შორს, როცა ნაწილაკები კვლავ აღარ ურთიერთქმედებენ. (ნახ. 29).

ამგვარად, დაჯახების ამოცანაში დასაწყისში მოცემული გვაქვს ორივე ნაწილაკის საწყისი იმპულსები  $p_1$  და  $p_2$ , საჭიროა ვიპოვოთ საბოლოო იმპულსები  $p_1'$  და  $p_2'$ , ე. ი. განსასაზღვრავია ექვსი სკალარული სიდიდე. ამ ექვსი სიდიდის



საპოტენციალურ გეგმაში ოთხი პიკი და ენერჯისა და იმპულსის შენახვის კანონების სახით. ასე რომ, დამატებით საჭიროა კიდევ ორი სიდიდის მოცემა. ეს სიდიდე გაფანტვის ამოცანებში არის: ერთეულოვანი  $n$  ვექტორი, რომელიც მიმართულია დაჯახების შედეგად მიღებული რომელიმე ნაწილაკის იმპულსის გასწვრივ (რადგან  $n$  ერთეულოვანი ვექტორია, ამიტომ იგი ჩვეულებრივ ვექტორისაგან განსხვავებით განსაზღვრავს ორ იქნება მხოლოდ ორი სიდიდით).

$L$ - და  $C$ -სისტემები. ნაწილაკთა დაჯახებას, ჩვეულებრივად, შეისწავლიან ორ ათვლის სისტემაში. ერთია სისტემა, რომლის მიმართაც გამფანტავი ნაწილაკი დაჯახებამდე უძრავია, მას ლაბორატორიულ ანდა მოკლედ „ $L$ -სისტემას“ უწოდებენ, და მეორე, ინერციის ცენტრის ან „ $C$ -სისტემა“, რომლის სათავე მოთავსებულია დაცემული და გამფანტავი ნაწილაკების ინერციის ცენტრში. აშკარაა, რომ „ $C$ -სისტემაში“ როგორც დაჯახებამდე, ისე დაჯახების შემდეგაც ორივე ნაწილაკი მოძრავია. ინერციის ცენტრის სისტემას ის უპირატესობა აქვს, რომ მასში თეორიული გამოთვლების ჩატარება ადვილია, რადგან, როგორც ადრე ვაჩვენეთ, ამ სისტემაში ორი სხეულის ამოცანა დაიყვანება ერთი სხეულის ამოცანაზე.



ნახ. 30

გაფანტვის მონაცემების ექსპერიმენტთან შედარებას კი, ცხადია, აზრი აქვს მხოლოდ და მხოლოდ ლაბორატორიულ სისტემაში. ამიტომ, ბუნებრივია, ამ ორ სისტემაში განსაზღვრულ სიდიდეებს შორის მათემატიკური კავშირი დავამყაროთ.  $C$ -სისტემაში ინერციის ცენტრის იმპულსი ნულის ტოლია, მაშასადამე, ნული იქნება შემდეგი გამოსახულება:

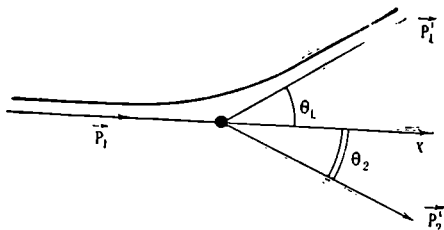
$$V_c = \frac{p_1 + p_2}{m_1 + m_2} = 0. \quad (31,1)$$

ამგვარად, ნაწილაკთა საერთო იმპულსი საწყის მომენტში ნულის ტოლია  $p_1 + p_2 = 0$ . რადგან სისტემა იზოლირებულია, ნულის ტოლი იქნება აგრეთვე სისტემის სრული იმპულსი დაჯახების შემდეგაც.  $p_1' + p_2' = 0$ . ეს კი იმას ნიშნავს, რომ  $C$ -სისტემაში დაჯახების შედეგად შეიძლება ადგილი ჰქონდეს მხოლოდ საჭაბო იმპულსის შეკობრუნებას; იმპულსების ჯამი საწყის და საბოლოო მომენტში ყოველთვის ნულის ტოლი დარჩება. ადვილი საჩვენებელია, რომ  $C$ -სისტემაში, დრეკადი დაჯახების დროს, არ იცვლება ცალკეული ნაწილაკის იმპულსის სიდიდეც. ამისათვის გამოვიყენოთ ენერჯის შენახვის კანონი

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \quad (31,2)$$

რადგან  $p_1 = p_2$  და  $p_1' = p_2'$ , ამიტომ ცხადია, რომ  $p_1 = p_1'$ ,  $p_2 = p_2'$ . დაჯახების სქემატური სურათი  $C$ -სისტემაში მოცემულია ნახ. 30-ზე. საწყის მომენტში ნაწილაკები ერთმანეთს შესახედრად მოძრაობენ, დაჯახების შემდეგ კი — ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ. ნახ. 31-ზე კი მოცემულია დაჯახების სურათი ლაბორატორიულ სისტემაში, როდესაც მეორე ნაწილაკი დაჯახებამდე უძრავია. მ<sub>L</sub> კუთხეს, რომელსაც ადგენს გაფანტული ნაწილაკის იმპულსი საწყის მიმართუ-

ლებასთან, ეწოდება გაფანტვის კუთხე.  $U_2$  არის გაფანტვის კუთხე მეორე ნაწილაკისათვის, რომელიც მანამდე უძრავი იყო.  $C$ -სისტემაში კი გვაქვს ერთი გაფანტვის კუთხე  $U$ , რომელიც განსაზღვრავს კუთხეს საწყის და საბოლოო იმპულსებს შორის.



ნახ. 31

### § 32. კავშირი ინერციის ცენტრისა და ლაბორატორიულ სისტემებს შორის

განივილით  $m_1$  და  $m_2$  მასის მქონე ნაწილაკების დაჯახება. შევისწავლოთ დაჯახების მოვლენის კინემატიკა როგორც  $C'$ , ისე  $L$ -სისტემაში და შემდეგ დავამყაროთ კავშირი ამ ორ სისტემაში განხილულ კინემატიკურ დამოკიდებულებათა შორის.  $C$ -სისტემაში სრული იმპულსი ნულის ტოლია, ამიტომ თანახმად (25,21) ფორმულებისა, გვექნება:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (32,1)$$

$\vec{r}_1$  არის  $m_1$  მასის ნაწილაკის რადიუსვექტორი ინერციის ცენტრის მიმართ,  $\vec{r}_2$  კი  $m_2$  ნაწილაკის რადიუსვექტორი იმავე ცენტრის მიმართ. ცხადია, რომ

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (32,2)$$

გამოხატავს ნაწილაკების დაშორების ფარდობით რადიუსვექტორს. სათანადოდ,

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2 \quad (32,3)$$

იქნება ფარდობითი მოძრაობის სიჩქარე. ნაწილაკთა სიჩქარეები დაჯახებამდე  $C$ -სისტემაში აღვნიშნოთ  $v_1$  და  $v_2$ -ით, მაშინ (32,1) ფორმულიდან გვექნება:

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v, \quad (32,4)$$

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v.$$

დაჯახების შემდეგ  $C$ -სისტემაში სრული იმპულსი კვლავ ნულის ტოლია. ადვილია იმის ჩვენება, რომ ამ შემთხვევებში აუგილი ექნება სიჩქარეთა მხოლოდ მიმართულებებს შეცვლას. მართლაც, (31,1) ფორმულის თანახმად, შეიძლება დავწეროთ  $m_1 v_1 = m_2 v_2$  და  $m_1 v_1' = m_2 v_2'$ , ხოლო ენერჯიის შენახვის კანონი გვაძლევს

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \quad (32,5)$$

ამ ტოლობების გამოყენებით ადვილად მიიღება, რომ  $v_1 = v_1'$  და  $v_2 = v_2'$ . მაშასადამე, სიჩქარეებს დაჩახების შემდეგ ამ სისტემაში ექნება სახე:

$$v_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} v n, \quad (32,6)$$

$$v_2' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v n,$$

სადაც  $n$  აღნიშნავს პირველი ნაწილაკის სიჩქარის მიმართულებას დაჩახების შემდეგ, ხოლო  $v = |v_1 - v_2|$ . ახლა ვიპოვოთ ნაწილაკთა სიჩქარეები დაჩახების შემდეგ  $I$ -სისტემაში. ჩვენ ვიცით, რომ სიჩქარეებს შორის ამ ორ სისტემაში გვაქვს (15,15) კავშირი, ამიტომ (32,6) ფორმულებიდან რომ მივიღოთ სიჩქარეები დაჩახების შემდეგ ლაბორატორიულ სისტემაში, საჭიროა მათ დაეუმატოთ ინერციის ცენტრის სიჩქარე.

ამგვარად გვექნება:

$$u_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} v n + V_c, \quad (32,7)$$

$$u_2' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v n + V_c.$$

$u_1'$  და  $u_2'$  სიჩქარეებია დაჩახების შემდეგ ლაბორატორიულ სისტემაში. ხოლო ინერციის ცენტრის სიჩქარე განისაზღვრება ფორმულით

$$V_c = \frac{p_1 + p_2}{m_1 + m_2}. \quad (32,8)$$

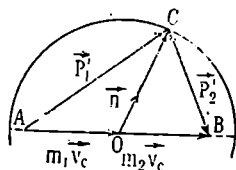
$p_1$  და  $p_2$  ნაწილაკთა იმპულსებია ლაბორატორიულ სისტემაში. მიღებული ფორმულების გეომეტრიული ინტერპრეტაციისათვის უფრო ხელსაყრელია იმპულსებზე გადასვლა. თუ (32,7) განტოლებებს სათანადოდ გავამრავლებთ  $m_1$  და  $m_2$  მასებზე, მივიღებთ:

$$p_1' = \mu v n + m_1 V_c, \quad (32,9)$$

$$p_2' = -\mu v n + m_2 V_c.$$

სადაც  $\mu$  არის სისტემის დაყვანალი მასა,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$



ნახ. 32

ავიღოთ წრე (ნახ. 32), რომლის რადიუსია

$R = \mu v$ , და მის იმ მიმართულების დიამეტრზე,

რომელიც ემთხვევა  $(p_1 + p_2)$ -ის მიმართულებას, განვალაგოთ ორი ვექტორი  $AO = m_1 V_c$  და  $OB = m_2 V_c$  ისე, რომ  $AO$  მთავრდებოდეს ცენტრში,  $OB$  კი იწყებოდეს ცენტრიდან. თუ ამავე ცენტრში მოვდებთ  $\mu v n$  ვექტორს, მის წვეროს შეიძლება ჰქონდეს ნებისმიერი მდებარეობა წრეზე იმის მიხედვით, თუ როგორია  $n$  ვექტორის მიმართულება. ცხადია, რომ  $AC = p_1'$ , ხოლო  $CB = p_2'$ . განმარტებიდან აშკარაა, რომ

$$\frac{OA}{OB} = \frac{m_1}{m_2} = a. \quad (32,10)$$

ვანსაკუთრებით მნიშვნელოვანია შემთხვევა, როცა დაჯახებ მდგ მეორე ნაწილაკი უძრავია. მაშინ  $p_2 = m_2 v_2 = 0$ ,  $v = v_1$  და  $V_c = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$ . ამიტომ

$$OB = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v = \mu v, \quad (32,11)$$

ე. ი. როცა მეორე ნაწილაკი უძრავია.  $B$  წერტილი ძვეს წრეზე, ხოლო ადებულ  $AB$  დიამეტრის მიმართულება ემთხვევა პირველი წერტილის  $p_1$  იმპულსის მიმართულებას. იმის მიხედვით,  $m_1$  მეტია თუ ნაკლებია  $m_2$ -ზე,  $A$  წერტილი იქნება წრის გარეთ ან შიგნით, ე. ი.

$$\begin{aligned} OA > R, \quad \text{როცა } m_1 > m_2 \\ OA < R, \quad \text{როცა } m_1 < m_2 \end{aligned} \quad (32,12)$$

როცა მეორე ნაწილაკი დაჯახებამდე უძრავია, (32,7) ტოლობები მიიღებენ სახეს:

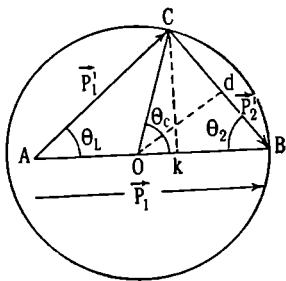
$$u'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v, \quad (32,13)$$

$$u'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v.$$

ცხადია, რომ

$$AO + OB = (m_1 + m_2) V_c = p_1 \quad (32,14)$$

წარმოადგენს პირველი ნაწილაკის იმპულსს ლაბორატორიულ სისტემაში სქემა, რომელიც შეესაბამება უძრავ მეორე ნაწილაკს, მოცემულია ნახ. 33-ზე. ამ ნახაზ-



ნახ. 33

ზე გამოსახულია გაფანტვის კუთხეებიც. სახელდობრ,  $\theta_L$  წარმოადგენს კუთხეს დაცემული ნაწილაკის საწყის და საბოლოო იმპულსებს შორის  $L$ -სისტემაში, ამიტომ  $\theta_L$  იქნება გაფანტვის კუთხე ლაბორატორიულ სისტემაში.  $\theta_2$  უკუცემის კუთხეა; იგი შედგენილია პირველი ნაწილაკის საწყის მიმართულებასა და მეორე ნაწილაკის იმპულსს შორის დაჯახების შემდეგ.  $\theta_c$  კი არის გაფანტვის კუთხე  $C$ -სისტემაში. ამ კუთხეებს ადვილად დავაკვირებთ ერთმანეთთან, თუ გავვლებთ დამხმარე  $CK$  და  $Od$  პერპენდიკულარებს. ცხადია, რომ

$$\operatorname{tg} \theta_L = \frac{OC \sin \theta_c}{AO + OC \cdot \cos \theta_c}.$$

თუ გავცხსენებთ (32,10) ფორმულას, გვექნება:

$$\operatorname{tg} \theta_L = \frac{\sin \theta_c}{a + \cos \theta_c}. \quad (32,15)$$

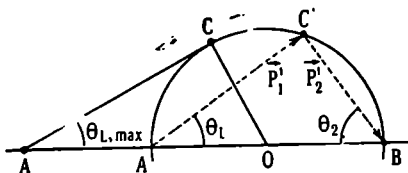
ასევე აშკარაა  $OdB$ -დან, რომ უკუცემისა და  $\theta_c$  კუთხისათვის მიიღება კავშირი

$$\theta_2 = \frac{\pi - \theta_c}{2}, \quad (32,16)$$

(32,15) და (32,16) ფორმულები აკავშირებს გაფანტვის კუთხეებს  $L$ - და  $C$ -სისტემებში. ადვილად ვიპოვით ორივე ნაწილაკის სიჩქარეების სიდიდეებს დაჭახების შემდეგ (32,13) ფორმულებიდან. მართლაც, გვექნება:

$$u_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \theta_c}}{m_1 + m_2} v, \quad u_2' = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin \frac{\theta_c}{2}. \quad (32,17)$$

როცა  $m_1 < m_2$ , მაშინ 28-ე ნახაზიდან აშკარაა, რომ როგორც  $\theta_c$ , ისე  $\theta_L$  შეიძლება იცვლებოდეს 0-სა და  $\pi$ -ს შორის, ხოლო როცა  $m_1 > m_2$ , მაშინ  $A$  წერტილ-



ნახ. 34

ლი წრის გარეთ მდებარეობს (ნახ. 34) და იარსებებს გაფანტვის ზღვრული კუთხე  $\theta_{L, \max}$ , რომელიც განისაზღვრება  $ACO$  მართკუთხა სამკუთხედიდან

$$\sin \theta_{L, \max} = \frac{OC}{OA} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (32,18)$$

ახლა განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა დაცემულ და გამფანტავ ნაწილაკთა მასები ტოლია  $m_1 = m_2 = m$ . ამასთან კვლავ ვივლით სხმით. რომ მეორე ნაწილაკი უძრავია. ამ შემთხვევაში ცხადია, რომ როგორც  $A$ , ისე  $B$  წერტილები წრეზე ძვეს დიამეტრის ბოლოებში. (32,15) ფორმულა მოგვცემს

$$\operatorname{tg} \theta_L = \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2}, \quad (32,19)$$

საიდანაც  $\theta_L = \frac{\theta_c}{2}$ . ამგვარად, ტოლი მასებისათვის (32,16) და (32,19) ფორმულები მოგვცემს შემდეგ კავშირს გაფანტვის კუთხეებს შორის:

$$\theta_L = \frac{\theta_c}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \theta_c}{2}. \quad (32,20)$$

ნათელია, რომ  $\theta_L + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ . ეს გასაგებია, რადგან  $AC'B$  დიამეტრზე დაყრდნობილი სამკუთხედი. ნაწილაკები ერთმანეთის მიმართ მართი კუთხით გაიფანტებიან. (32,18) ფორმულიდან ჩანს, რომ გაფანტვის ზუსტიმალური კუთხე ამ შემთხვევაში  $\frac{\pi}{2}$ -ის ტოლი იქნება.

ახლა გამოვარკვიოთ, როგორი კავშირია ენერგიებს შორის  $C$ - და  $L$ -სისტემებში.

$E_L$  იყოს დაცემული  $m_1$  მასის მქონე ნაწილაკის კინეტიკური ენერგია ლაბორატორიულ სისტემაში, მეორე ნაწილაკი კი ამ სისტემაში უძრავად ჩავთვალოთ, მაშინ

$$E_L = \frac{m_1 v^2}{2}. \quad (v = v_1) \quad (32,21)$$

$v$  არის ნაწილაკის სიჩქარე ლაბორატორიულ სისტემაში. ნაწილაკთა ფარდობითი ენერგია  $C$ -სისტემაში, როგორც ცნობილია, გამოიხატება ფორმულით

$$E_c = \frac{\mu v^2}{2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_L, \quad (32,22)$$

სადაც  $\mu$  დაყვანილი მასაა. ამგვარად, ენერგიებს შორის  $C$  და  $L$ -სისტემებში გვაქვს კავშირი

$$E_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_L \quad (32,23)$$

როცა  $m_1 = m_2 = m$ , მაშინ

$$E_c = \frac{1}{2} E_L. \quad (32,24)$$

ეს გასაგებია, რადგან  $C$ -სისტემაში ორივე ნაწილაკი მოძრაობს და ამიტომ ლაბორატორიულ სისტემაში არსებულ  $E_L$  ენერგიას ორივე თანაბრად ინაწილებს.

დაჩახების შემდეგ პირველი ნაწილაკის ენერგია ლაბორატორიულ სისტემაში აღვნიშნოთ  $E_L^{(1)}$ . თანახმად (32,17) ფორმულისა, გვაქვს

$$E_L^{(1)} = \frac{m_1 u_1^2}{2} = E_L \frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \theta_c}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (32,25)$$

მაქსიმალური ენერგია დაჩახების შემდეგ დაცემულ ნაწილაკს ექნება, როცა  $\theta_c = 0$ , მაშინ  $E_L^{(1)} = E_L$ . ამ შემთხვევაში დაცემული ნაწილაკი გამფანტავს ენერგიას არ გადასცემს. მინიმალური ენერგია კი მიიღება ე. წ. შუბლური დარტყმის დროს, როცა  $\theta_c = \pi$ , მაშინ დაცემული ნაწილაკი გამფანტავს მაქსიმალურ ენერგიას გადასცემს

$$E_L^{(1)} = E_L \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2, \quad (32,26)$$

ხოლო, ამასთანავე, თუ ნაწილაკების მასები ტოლია,  $E_L^{(1)} = 0$  და, მაშასადამე, დაცემული ნაწილაკი მთელ ენერგიას გამფანტავ ნაწილაკს გადასცემს. ამგვარად, დაჩახების შემდეგ დაცემული ნაწილაკის ენერგია, ლაბორატორიულ სისტემაში, მოთავსებულია საზღვრებში

$$\left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 E_L \leq E_L^{(1)} \leq E_L. \quad (32,27)$$

როცა მასები ტოლია, მაშინ ენერგია მოთავსებული იქნება ინტერვალში

$$0 \leq E_L^{(1)} \leq E_L. \quad (32,27')$$

დაჩახებამდე  $L$ -სისტემაში გამფანტავე ნაწილაკის ენერგია ნულის ტოლია; დაჩახების შემდეგ, (32,17) ფორმულის თანახმად, მივიღებთ

$$E_L^{(2)} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \sin^2 \frac{\theta_c}{2} E_L. \quad (32,28)$$

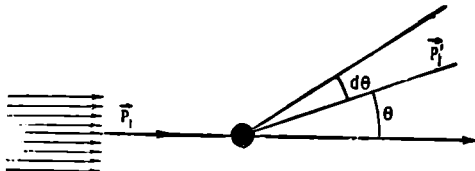
მაშასადამე, იგი მოთავსებულია საზღვრებში<sup>1</sup>

$$0 < E_L^{(2)} < \frac{4\pi_1 m_0}{(m_1 + m_2)^2} E_L. \quad (32,29)$$

ამ პარაგრაფში მიღებული კინემატიკური ფორმულები დიდ გამოყენებას პოულობენ გაფანტვის ამოცანების ანალიზის დროს. (32,9) ფორმულებში შედის ერთეულოვანი  $n$  ვექტორი, რომლის განსაზღვრა კინემატიკითა და რმულსისა და ენერჯის შენახვის კანონების მიხედვით არ შეიძლება. მის განსაზღვრავად საჭიროა ვიცოდეთ ნაწილაკთა შორის არსებული ძალები. მაშასადამე,  $n$ -ის მნიშვნელობები დამოკიდებულია ურთიერთქმედების ენერჯის კონკრეტულ სახეზე. ატომის ფიზიკაში ხშირად შებრუნებით იტყვიან. მოცემულ ენერჯებზე გაფანტვლი ნაწილაკისათვის  $n$  ვექტორის მიმართულების გაზომვით ცდილობენ აღადგინონ ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯის სახე. სწორედ ამაში მდგომარეობს გაფანტვის თეორიის უდიდესი მნიშვნელობა ატომის ფიზიკისათვის.

### § 33. ნაწილაკთა გაფანტვის ეფექტური განიკვეთი

ექსპერიმენტულად ხელსაყრელია შევისწავლოთ არა ერთი ნაწილაკის მეორეზე დაჯახება, არამედ ნაწილაკთა ნაკადის გაფანტვა რაიმე ძალთა ცენტრზე ან გარკვეულ სამიზნე ნივთიერებაზე. ამიტომ დავეუფავთ, რომ უძრავ ცენტრს ეცემა არა ერთი, არამედ ნაწილაკთა ნაკადი. ამასთან ბუნებრივია ზოგიტხოვით, რომ ნაკადი იყოს ერთი და იგივე სიმკვრივის და მის შემადგენელ ნაწილაკებს ჰქონდეს



ნახ. 35

ერთნაირი სიჩქარე. სამიზნე ნივთიერებასთან ურთიერთქმედების შედეგად ნაწილაკები გადახრებიან თავისი საწყისი მიმართულებიდან — ადგილი ექნება ნაწილაკთა გაფანტვას. ნაწილაკთა გაფანტვა მოხდება სხვადასხვა  $\theta$  კუთხეზე, რომელიც წარმოადგენს კუთხეს დაცემულ და გაფანტულ ნაწილაკთა მიმართულებებს შორის. გამოვარკვიოთ, როგორ შეიძლება დავახასიათოთ  $\theta$  და  $\theta + d\theta$  კუთხეებს შორის გაფანტულ ნაწილაკთა რიცხვი. ( $\theta$ ,  $d\theta$ ) კუთხეზე გაფანტულ ნაწილაკთა რიცხვი ერთ სეკუნდში აღენიშნოთ  $dN$ -ით, ხოლო დაცემულ ნაწილაკთა ნაკადი  $J$ -ით.  $J$  არის ნაწილაკთა ის რაოდენობა, რომელიც დაცემის მიმართულების პერპენდიკულარულად მოთავსებულ ერთეულოვან ფართს ხვდება ერთი სეკუნდის განმავლობაში.  $\theta$  და  $\theta + d\theta$  კუთხეებში ნაწილაკთა გაფანტვა შეგვიძლია დავახასიათოთ შემდეგი ფარდობით, რომელსაც გაფანტვის ეფექტური დიფერენციალური განიკვეთი ეწოდება

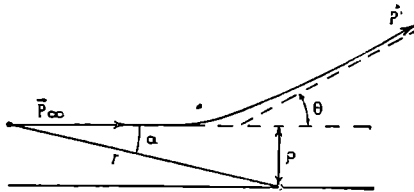
$$d\sigma = \frac{dn(\theta)}{J} \quad (33,1)$$

<sup>1</sup> ამ ფორმულას ადვილად მიკიდებთ ენერჯის შენახვისა და (32,27) ფორმულის გამოყენებითა. ტოლი მასების შემთხვევაში. ცხადია, რომ  $0 < E_L^{(2)} < E_L$ .

$dm$  ერთ სეკუნდში გაფანტულ ნაწილაკთა რიცხვია, ამიტომ მისი განზომილება  $\frac{1}{\text{სეკ}}$ -ია. ნაკადის განზომილება კი  $\text{სმ}^{-2} \text{სეკ}^{-1}$ -ის ტოლია; მაშასადამე, განიკვეთს ჰქონია  $\text{სმ}^2$  განზომილება. აქედან წარმოსდგება მისი სახელწოდება.

ვთქვათ  $m$  მასის ნაწილაკი იფანტება ძალთა ცენტრზე. ნაწილაკისა და ძალთა ცენტრის ურთიერთქმედების  $U(r)$  პოტენციალური ენერჯია დამოკიდებული იყოს მხოლოდ  $r$  მანძილზე ძალთა ცენტრიდან ნაწილაკამდე. როგორც ვიცით, ეს ამოცანა ეკვივალენტურია  $m_1$  და  $m_2$  მასების ნაწილაკთა გაფანტვის ამოცანისა  $C$ -სისტემაში, ოღონდ, ამ შემთხვევაში, მასის როლს ასრულებს დაყვანილი  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  მასა, ხოლო ურთიერთქმედების  $U(r)$  პოტენციალურ ენერჯიაში  $r$  იგულისხმება მანძილი ამ ნაწილაკებს შორის.

შემოვიღოთ სამიზნე მანძილის ცნება. ნაწილაკთა ნაკადისა და გამფანტავ ცენტრს შორის ურთიერთქმედება რომ არ იყოს, მაშინ დაცემული ნაწილაკების გადახრას ადგილი არ ექნებოდა და ისინი იმოძრავებდნენ სწორ ხაზზე.



ნახ. 36

იმ მანძილს, რომელზედაც ჩაუვლიდა დაცემული ნაწილაკი გამფანტავ ცენტრს, ურთიერთქმედებას რომ ადგილი არ ჰქონოდა, უწოდებენ სამიზნე მანძილს ანდა დაჯახების პარამეტრს. მას  $p$  ასოთი აღნიშნავენ (ნახ. 36).

სამიზნე მანძილი შეგვიძლია დავაკვიროთ იმპულსის მომენტთან, რომელიც გაფანტვის ამოცანაში მოძრაობის ინტეგრალს წარმოადგენს  $l = [r, p] = \text{const}$ . გამფანტავი ცენტრის მიმართ იმპულსის მომენტის სიდიდე უსასრულობაში, სანამ დაკვეთლ ნაწილაკსა და გამფანტავ ცენტრს შორის ურთიერთქმედება არ იყოს, ტოლი იქნება

$$l = r p_{\infty} \sin \alpha. \tag{33,2}$$

თუ დაცემული ნაწილაკის სიჩქარეს უსასრულობაში აღვნიშნავთ  $v_{\infty}$ , მაშინ

$$l = m v_{\infty} p. \tag{33,3}$$

სადაც  $m$  დაცემული ნაწილაკის მასაა. ამგვარად,

$$p = \frac{l}{m v_{\infty}}. \tag{33,4}$$

ნათელია, რომ  $p$  დამოკიდებულია გაფანტვის კუთხეზე. რაც უფრო მცირეა გაფანტვის კუთხე, მით უფრო შორს ჩაუვლის ნაწილაკი გამფანტავ ცენტრს, მით ნაკლები ძალა იმოქმედებს ნაწილაკზე და მით მეტი იქნება სამიზნე მანძილი. მაშასადამე,  $\frac{dp}{d\theta} < 0$ . რაღვან გაფანტვის განიკვეთი დაკვეთიებულია გაფანტვის კუთხესთან, ამიტომ იგი დამოკიდებული იქნება სამიზნე მანძილთანაც. ცხადია, რომ  $\theta$  და  $\theta + d\theta$  კუთხეებში ის ნაწილაკები გაიფანტება, რომლებიც გაკვეთენ დაცე-



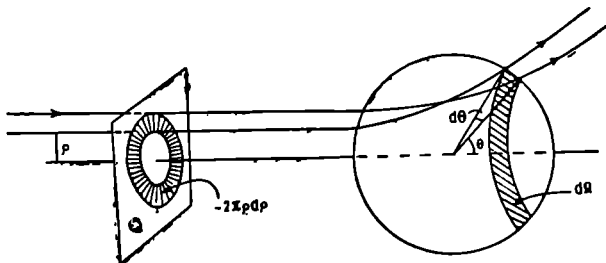
მის მიმართულების ნორმალურად მოთავსებულ რგოლს, რომლის რადიუსები შე-  
საბამისად  $\rho$  და  $\rho + d\rho$  იქნება.

აღნიშნული რგოლის ფართი

$$ds = -d(\pi\rho^2) = -2\pi\rho d\rho. \quad (33,5)$$

ზინუს ნიშანი იმიტომ ავიღეთ, რომ  $d\rho$  უარყოფითია, ფართი კი დადებითი უნდა იყოს. თუ ამ ფართს გავამრავლებთ დაცემულ ნაწილაკთა ნაკადზე, მივიღებთ  $(\theta, \theta + d\theta)$  კუთხეებში გაფანტულ ნაწილაკთა რიცხვს

$$dN(\theta) = -2\pi J\rho(\theta) d\rho(\theta). \quad (33,6)$$



ნახ. 37

საიდანაც (33,1) განმარტებით ადვილად ვიპოვით გაფანტვის ეფექტურ დიფერენ-  
ციალურ განივკვეთს

$$d\sigma = -2\pi\rho d\rho. \quad (33,7)$$

განივკვეთის გაფანტვის კუთხეზე დამოკიდებულება რომ უფრო ნათელი იყოს, ეს ფორმულა ასე გადავწეროთ:

$$d\sigma = -2\pi\rho(\theta) \frac{d\rho}{d\theta} d\theta. \quad (33,8)$$

აღსანიშნავია, რომ გაფანტვის განივკვეთი დამოკიდებული არაა  $\theta$  კუთხეზე. გა-  
ფანტვა მთელი კონუსის ზედაპირზე. რომლის გაშლის კუთხე  $2\theta$ -ს ტოლია, ერთი  
და იგივე იქნება. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ გაფანტვას ახასიათებს აქსიალური  
(ღერძული) სიმეტრია. სიმეტრიის ღერძს წარმოადგენს დაცემის მიმართულება.

უფრო ხელსაყრელია გაფანტვა დავახასიათოთ სხეულოვან კუთხეში გაფან-  
ტულ ნაწილაკთა რიცხვის მიხედვით. სხეულოვანი კუთხე, როგორც ვიცით, იმ  
ფართის ტოლია, რომელსაც ერთეულოვანი რადიუსის სფეროზე ამოჭრის ორი  
კოაქსიალური კონუსი, რომლის მსახველები გადიან  $\theta$  და  $\theta + d\theta$  მიმართულებებ-  
ზე, ე. ი.

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta. \quad (33,9)$$

(ქაღია, რომ  $d\Omega$  სხეულოვან კუთხეში გაფანტულ ნაწილაკათვის, თანახმად  
(33,9)-ისა, მივიღებთ

$$d\sigma = -\rho \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\Omega}{\sin \theta}. \quad (33,10)$$

აღვნიშნოთ

$$\sigma(\theta) = -\rho \frac{d\rho}{d\theta} \frac{1}{\sin \theta}. \quad (33,11)$$

$$d\sigma = \sigma(\theta) d\Omega. \quad (33,12)$$

$\sigma(\theta)$  წარმოადგენს ეფექტურ განივკვეთს ერთეულოვანი სხეულოვანი კუთხისათვის, აღებულია  $\theta$  კუთხის მიმართულებით.

ზემოთ ნათქვამიდან ნათელია, რომ გეომეტრიულად დიფერენციალური განივკვეთი წარმოადგენს დაცემის მიმართულების ნორმალური რგოლის ფართს, რომელიც უნდა გააქვეთოს ნაწილაკმა, რომ იგი გაიფანტოს  $d\Omega$  სხეულოვანი კუთხეში.

განივკვეთი დამოკიდებულია გაფანტვის კუთხეზე და დაცემულ ნაწილაკთა ენერგიაზე. თუ დიფერენციალურ განივკვეთს გავინტეგრალავთ გაფანტვის  $\theta$  კუთხის მიხედვით, მივიღებთ ინტეგრალურ განივკვეთს

$$\sigma = \int_0^{\pi} \sigma(\theta) d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (33,13)$$

გეომეტრიულად ინტეგრალური განივკვეთი წარმოადგენს ნაკადისადმი ნორმალურად მოთავსებული წრის ფართს, რომელიც უნდა გააქვეთოს ნაწილაკმა, რომ გაფანტვა მოხდეს ნებისმიერ კუთხეზე.

ამის შემდეგ საჭიროა გავარკვიოთ  $\rho$ -ს დამოკიდებულება  $\theta$ -ზე თითოეული კონკრეტული ამოცანისათვის.

ეფექტური განივკვეთის შინაარსის გასარკვევად მოვიყვანოთ მაგალითი ატომგულის ფიზიკიდან. დავუშვათ, ატომგული წარმოადგენს  $R$  რადიუსიან სფეროს. ავიღოთ ნივთიერებას  $1 \text{ სმ}^2$  ფართისა და  $0,1 \text{ მმ}$  სისქის ფურცელი. ასეთ ფურცელში მოთავსებულ ატომგულთა რიცხვი  $n$ -ით აღვნიშნოთ. თითოეული ატომგულის მოჩვენებითი ფართი, რომელიც შეუძლია „დაინახოს“ წარმოსახვითმა დამკვირვებელმა,  $\pi R^2$ -ის ტოლია. დამკვირვებელი, რომელიც ზემოდან დაჰყურებს ფურცელს, დაინახავდა  $n$  წრეს, რომლებიც განლაგებული იქნებიან ფურცლის საერთო  $1 \text{ სმ}^2$  ფართზე. ვთქვათ, ახლა ამ ფურცელს ვუშენთ ნაწილაკთა ნაკადს. გარკვეულობისათვის განვიხილოთ ნეიტრონების ნაკადი. გამოვარკვიოთ, როგორია ალბათობა იმისა, რომ ნეიტრონი მოხვდება გულს? ცხადია, რომ ეს ალბათობა წარმოადგენს წილადს. რომლის მრიცხველია წრეების მიერ დაცემული ფართი, მნიშვნელი კი ფურცლის საერთო ფართობი. ასე მაგალითად, თუ ატომგულს აქვს მოჩვენებითი ფართი  $10^{-24} \text{ სმ}^2$ , მაშინ ყველა გულის მოჩვენებითი ფართი ფურცელში იქნება  $n \cdot 10^{-24} \text{ სმ}^2$ . ვთქვათ,  $n = 2 \cdot 10^{21}$ , მაშინ  $n \cdot 10^{-24} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ სმ}^2$ , ე. ი. მთელი ფართის მხოლოდ  $0,002$  ნაწილი; ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ნეიტრონი მოხვდება გულს, და მაშასადამე. გაიფანტება, იქნება  $\frac{2}{1000}$ , ე. ი. ყოვე-

ლი  $1000$  დაცემული ნეიტრონიდან მხოლოდ ორი ნეიტრონი მოხვდება ატომგულს.

ექსპერიმენტატორი აწარმოებს შებრუნებულ გამოთვლას. თუ ცდა უჩვენებს, რომ ყოველი ათასი ნეიტრონიდან ორი ხვდება გულს და ცნობილია გულების რიცხვი სამიზნეში, მაშინ მას შეუძლია იპოვოს გულის მოჩვენებითი ფართი აღებული დაცემული ნაწილაკებისათვის. სწორედ ამ ფართს უწოდებენ ეფექტურ განივკვეთს. მას ეფექტური იმიტომ ჰქვია, რომ იგი დამოკიდებულია ურთიერთქმედების სახეზე და დაცემულ ნაწილაკთა ენერგიაზე. სხვადასხვა ნაწილაკებისა და ენერგიებისათვის ერთსა და იმავე ატომგულს სხვადასხვა ეფექტური განივკვეთი ექნება. ნეიტრონებსა და ატომგულს შორის ახლოქმედების ძალები მოქმედებენ, ამიტომ თუ დაცემულ ნეიტრონს დიდი ენერგია აქვს, მაშინ მისი გაფანტვა არ მოხ-

დება გულთან უშუალო შეხებადღე. ამ შემთხვევაში გულის მოჩვენებითი ფართი ახლოს იქნება გულის ნამდვილ გეომეტრიულ ფართთან  $\pi R^2$ . ამ უკანასკნელიდან შეიძლება განისაზღვროს გულის რადიუსი.

ექსპერიმენტის დროს, როგორც აღენიშნუთ, ახუნენ ნაკადის გაფანტვას სამიზნეზე, რომელიც შეიცავს გამფანტაე ნაწილაკთა დიდ რიცხვს. ეთქვათ, სამიზნეში 1 სმ<sup>2</sup>-ში გვაქვს გამფანტაე  $N$  ცენტრი, მაშინ დაცემული ნაკადის შესუსტება სამიზნე ნივთიერების ერთეულოვანი სისქის გავლისას,  $d\Omega$  სხეულოვან კუთხეში გაფანტვის შედეგად, ტოლი იქნება

$$Nd\sigma = -N\rho(\theta) \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\Omega}{\sin\theta}. \quad (33,14)$$

ამგვარად, თუ შევისწავლით განივეეთის დამოკიდებულებას გაფანტვის კუთხეზე, ვიპოვით სამიზნე მანძილის კავშირის გაფანტვის კუთხესთან, ეს დამოკიდებულება კი საშუალებას მოგვცემს ვამსჯელოთ ნაწილაკისა და გამფანტაე ცენტრის ურთიერთქმედების ხასიათზე.

### § 34. პაპვირი განივეეთეზ შორის $L$ - და $C$ -სისტემაზში

გამოვარკვიოთ, როგორი კავშირია დიფერენციალურ განივეეთებს შორის ლაბორატორიულ და ინერციის ცენტრის სისტემაზში. ეფექტური განივეეთის განმარტებიდან აშკარაა, რომ გაფანტულ ნაწილაკთა რიცხვი მოცემულ სხეულოვან კუთხეში ერთი და იგივეა ორივე სისტემაში, ე. ი. თანახმად (33,12) ფორმულისა,

$$\sigma_L(\theta_L) 2\pi \sin\theta_L d\theta_L = \sigma_c(\theta_c) 2\pi \sin\theta_c d\theta_c. \quad (34,1)$$

გაიხსენოთ, რომ  $\theta_L$  და  $\theta_c$  კუთხეებს შორის გვაქვს შემდეგი კავშირი:

$$\operatorname{tg}\theta_L = \frac{\sin\theta_c}{a + \cos\theta_c}, \quad a = \frac{m_1}{m_2}, \quad (34,2)$$

ამ ფორმულიდან

$$\cos\theta_L = \frac{a + \cos\theta_c}{\sqrt{1 + 2a \cos\theta_c + a^2}}, \quad (34,3)$$

ხოლო გადიფერენციალება მოგვცემს

$$\sin\theta_L d\theta_L = \frac{1 + a \cos\theta_c}{(1 + 2a \cos\theta_c + a^2)^{3/2}} \sin\theta_c d\theta_c. \quad (34,4)$$

ამგვარად, (34,1) ფორმულის თანახმად. აღებული მიმართულებების გასწვრივ განივეეთებს შორის გვექნება შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\sigma_L(\theta_L) = \frac{(1 + 2a \cos\theta_c + a^2)^{3/2}}{(1 + a \cos\theta_c)} \sigma_c(\theta_c). \quad (34,5)$$

როცა  $m_1 = m_2$ , ე. ი.  $a = 1$ , მაშინ (34,5) ფორმულა მიიღებს მარტივ სახეს

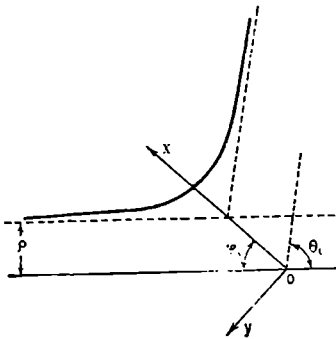
$$\sigma_L(\theta_L) = 4 \cos \frac{\theta_c}{2} \sigma_c(\theta_c), \quad \frac{\theta_c}{2} = \theta_L, \quad (34,6)$$

ხოლო როცა მეორე ნაწილაკის მასა  $m_2 \gg m_1$ , მაშინ  $a \ll 1$ , და  $\sigma_L(\theta_L) \approx \sigma_c(\theta_c)$ , ამ შემთხვევაში  $L$ - და  $C$ -სისტემაზები ეკვივალენტურნი არიან.

რაც შეეხება ინტეგრალურ განივეეთის, იგი ორივე სისტემაში ერთი და იგივეა. ეს ასეც უნდა იყოს, რადგან გაფანტულ ნაწილაკთა სრული რიცხვი დამოკიდებული არაა პროცესის აღწერის მეოღზე.

§ 35. კავშირი გაზანტვის კუთხესა და სამიზნე მანძილს შორის ცენტრალური ველით გაზანტვის უმეტესევაში

განვიხილოთ  $m_1$  და  $m_2$  მასის ნაწილაკების ურთიერთქმედება დადებით ენერჯის შემთხვევაში, როცა ეს ნაწილაკები ურთიერთქმედებენ  $U(r)$  ცენტრალური ველით. ამ შემთხვევაში მდგრადი მდგომარეობა არ იქმნება, რადგან მოძრაობა ინფინიტურია. ცხადია, რომ ადგილი ექნება გაფანტვას. ვაჩვენოთ, რომ გაფანტვის კუთხე შეგვიძლია დავეკავშიროთ ასიმპტოტების განსაზღვრულ კუთხეს. ვიგულისხმობთ, რომ სისტემის სათავე მოთავსებულია ინერციის ცენტრში, მაშინ ამოცანა დაიყვანება ერთი  $\mu$  დაყვანილი მასის მქონე ნაწილაკის მოძრაობაზე. როგორც აღვნიშნეთ, ცენტრალური სიმეტრიის ველში ტრაექტორია სიმეტრიულია იმ წრფის მიმართ, რომელიც გადის ინერციის ცენტრსა და მისგან ყველაზე ახლოს მყოფ ტრაექტორიის წერტილზე, ე. ი.  $r_{min}$  მანძილის მიმართ (იხ.



ნახ. 38

38 ნახაზი). ამიტომ მრუდის ორივე ასიმპტოტი აღნიშნულ სწორთან ერთი და იგივე  $\varphi_0$  კუთხეს ადგენს.  $\varphi_0$  განსაზღვრავს ასიმპტოტის მიმართულებას და გამოისახება (27,34) ფორმულით

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{ldr}{r^2 \sqrt{2\mu [E - U(r)] - \frac{l^2}{r^2}}} \quad (35,1)$$

ნაწილაკის გაღზრის კუთხე  $C$ -სისტემაში აღვნიშნოთ  $\theta_c$ -თი, იგი შეგვიძლია დაეკავშიროთ  $\varphi_0$  კუთხესთან. სახელდობრ, გვექნება

$$\theta_c = |\pi - 2\varphi_0| \quad (35.2)$$

გაფანტვის თეორიაში განიკვეთთ დაკავშირებული სამიზნე მანძილთან, ამიტომ (35,1) ფორმულაში ხელსაყრელია მომენტის ნაცვლად გადავიღეთ სამიზნე მანძილზე, რისთვისაც საკმარისია გავიხსენოთ (33,3) ფორმულა. თუ, გარდა ამისა, ენერჯის ნაცვლად შემოვიღებთ სიჩქარეს

$$E = \frac{\mu v_{\infty}^2}{2}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (35,3)$$

მაშინ  $\varphi_0$  მიიღებს სახეს

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu v_{\infty}^2}}} \quad (35,4)$$

ამგვარად, გაფანტვის კუთხისათვის გვექნება

$$\theta_c = \pi - 2 \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu v_\infty^2}}}. \quad (35,5)$$

ამ ფორმულით გამოხატულია არაცხადი კავშირი  $C$ -სისტემაში გაფანტვის  $\theta_c$  კუთხესა და სამიზნე მანძილს შორის. აქედან, მოცემული  $U(r)$ -ის კონკრეტული სახისათვის, ამოვხსნით ინტეგრალს, ვიპოვით  $\rho$ -ს როგორც  $\theta_c$ -ს ფუნქციას, რის შემდეგ (33,8) ფორმულის დახმარებით ვიპოვით დიფერენციალურ განიკვეთს  $C$ -სისტემაში. განიკვეთის გამოსახულების ზისალებად  $L$ -სისტემაში საკმარისია იქნება ერთიდან მეორე სისტემაზე გადასასვლელი ფორმულების გამოყენება.

შემდეგ პარაგრაფებში ჩვენ განვიხილავთ რამდენიმე კონკრეტულ შემთხვევას. ამ პარაგრაფის ბოლოს კი აღვნიშნათ, რომ ზოგიერთ ამოცანაში ხელსაყრელია  $\varphi_0$ -ის წარმოდგენა შემდეგი სახით:

$$\varphi_0 = - \frac{d}{d\rho} \int_{r_{min}}^{\infty} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{U(r)}{E_c}} dr. \quad (35,6)$$

საინტერესოა ვიპოვოთ  $\varphi_0$  თავისუფალი ნაწილაკისათვის, როცა  $U(r) = 0$ . ცხადია, ამ შემთხვევაში, თანახმად (35,4) ან, რაც იგივეა, (35,6) ფორმულისა, მივიღებთ

$$\varphi_0 = - \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{d\left(\frac{\rho}{r}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}, \quad (35,7)$$

სადაც  $r_{min} = \rho$ . ინტეგრალის ამოხსნა მოგვცემს

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\rho}{r} \Big|_{\rho}^{\infty} = \frac{\pi}{2}. \quad (35,8)$$

ამგვარად, თავისუფალი ნაწილაკისათვის  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ . (35,2) ფორმულის თანახმად ეს შეესაბამება  $m_c = 0$ . ეს ასეც უნდა იყოს, რადგან თავისუფალი ნაწილაკის შემთხვევაში გაფანტვის ადგილი არ ექნება.

ახლა (35,5) ფორმულა გამოვიკვლიოთ სინგულარული პოტენციალური ენერგიებისათვის. კერძოდ, შევისწავლოთ შემდეგი ტიპის სინგულარული პოტენციალური ენერგიები

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^\nu}, \quad (35,9)$$

სადაც  $\nu = 1, 2, 3, \dots$  სინგულარობის რიგი შეიძლება ვუწოდოთ; მიზიდვის შემთხვევაში  $\alpha < 0$ , განზიდვისა კი  $\alpha > 0$ . (35,5)-ში შემავალი ფუნქციეში გამოსახულება აღვნიშნოთ  $f_\nu(r)$ -ით:

$$f_\nu(r) = 1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\alpha}{E_c r^\nu}. \quad (35,10)$$

(35,5) გამოსახულებას რომ აზრი ჰქონდეს  $f_v(r)$  ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას  $f_v(r) > 0$  და, გარდა ამისა, (35,5)-ში შემავალი ინტეგრალი განშლადი არ უნდა გამოვიდეს. ცხადია, რომ დათიქსირებული  $\rho$  და  $E_c$ -სათვის

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_v(r) = 1, \quad (35,11)$$

ე. ი.  $f_v(r)$  ფუნქცია უსასრულობაში დადებითია.

იმისათვის, რომ არსებობდეს  $r = r_{min}$  მანძილი,  $f_v(r)$  ფუნქცია მცირე მანძილებზე უარყოფითი უნდა ხდებოდეს. ამისათვის შევიწვავლოთ  $f_v(r)$ -ის ყოფაქცევა მცირე მანძილებზე.

ჯერ განვიხილოთ  $v=1$  შემთხვევა (კულონური და გრავიტაციული ველები), მაშინ

$$f_1(r) = 1 - \frac{\rho^2}{r^2} \pm \frac{|\alpha|}{E_c r}; \quad (35,12)$$

როცა  $r \rightarrow 0$ , მაშინ მეორე წევრი დანარჩენ ორს აკარბებს, ამიტომ

$$\lim_{r \rightarrow 0} f_1(r) < 0. \quad (35,13)$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ  $f_1(r)$  ფუნქცია რომელიმე  $r$ -ზე ნული გახდება. მაშასადამე, როგორც მიზიდვის, ისე განზიდვის შემთხვევაში იარსებებს  $r = r_{min}$  მანძილი და ინტეგრაცია (35,5)-ში სწორედ ამ მანძილიდან უნდა დაიწყოს. იგივეს ექნება ადგილი, თუ პოტენციალური ენერჯიის სინგულარობის რიგი  $v < 2$ .

ახლა განვიხილოთ მიზიდვის პოტენციალური ენერჯია ( $\alpha < 0$ )  $v=2$  შემთხვევაში. გვექნება

$$f_2(r) = 1 - \left( \rho^2 - \frac{|\alpha|}{E_c} \right) \frac{1}{r^2}; \quad (35,14)$$

ზღვარში, როცა  $r \rightarrow 0$   $f_2(r)$  ფუნქცია უარყოფითი გახდება, თუ სამიზნე  $\rho$  მანძილი აკმაყოფილებს პირობას

$$\rho > \left( \frac{|\alpha|}{E_c} \right)^{1/2} \equiv \rho_0 \quad (35,15)$$

რადგან  $l = \rho \rho_0$ , ამიტომ მომენტისააივის იგივე პირობა ასე ჩაიწერება:

$$l > (2m |\alpha|)^{1/2} \equiv l_0. \quad (35,16)$$

მაშასადამე,

$$\lim_{r \rightarrow 0} f_2(r) < 0, \quad \text{როცა } \rho > \left( \frac{|\alpha|}{E_c} \right)^{1/2}, \quad (35,17)$$

ე. ი. ამ შემთხვევაშიაც იარსებებს მინიმალური მანძილი, რომელიც განისაზღვრება პირობიდან  $f_2(r) = 0$ . სახელდობრ, გვექნება  $r_{min} = \left( \rho^2 - \frac{|\alpha|}{E_c} \right)^{1/2}$   $\theta_c$  გაფანტვის კუთხის გამოსახულებას ადვილად ვიპოვით (35,5)-დან. გვექნება

$$\theta_c = \pi \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{|\alpha|}{E_c \rho^2} \right)^{-1/2} \right\} \quad \rho > \sqrt{\frac{|\alpha|}{E_c}} \quad (35,18)$$

ხოლო, როცა  $\rho < \rho_0$  (ან  $l < l_0$ ) (35,5)-ში შემავალი ინტეგრალი განშლადია, გაფანტვის კუთხე იქნება უსასრულობა.

ისევე  $\nu=2$ -სათვის განვიხილოთ განზიდვის პოტენციალური ენერგია ( $\alpha > 0$ ). ამ შემთხვევაში

$$f_2(r) = 1 - \left( \rho^2 + \frac{|\alpha|}{E_c} \right) \frac{1}{r^2}, \quad (35,19)$$

ამიტომ  $f_2(r)$  ფუნქციის ზღვარი  $r \rightarrow 0$  დროს უარყოფითია. მაშასადამე, იარსებებს მინიმალური მანძილი, რომელიც ტოლი იქნება  $r_{min} = \left( \rho^2 + \frac{|\alpha|}{E_c} \right)^{1/2}$ -ის. გაფანტვის კუთხისათვის მარტივად მივიღებთ

$$f_1 = \pi \left\{ 1 - \left( 1 + \frac{|\alpha|}{\rho^2 E_c} \right)^{-1/2} \right\}. \quad (35,20)$$

როცა  $\alpha > 0$  და  $\nu > 2$ . მაშინ მცირე მანძილებზე  $f_\nu(r) < 0$  და იარსებებს  $r = r_{min}$  მანძილი. ასე რომ, დადებითი სინგულარული პოტენციალური ენერგიებისათვის ( $\alpha > 0$ ) არაეითარი სიძნელეები არ წარმოიქმნება.

სიმძნელე თავს იჩენს მაშინ, როცა პოტენციალური ენერგიას აქვს მიზიდვის ხასიათი ( $\alpha < 0$ ). როცა პოტენციალური ენერგიის სინგულარობა ისეთია, რომ

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 U(r) = -\infty, \quad (35,21)$$

მაშინ  $f_\nu(r)$  ფუნქცია სათავეში დადებითი იქნება, ამიტომ  $r = r_{min}$  მანძილი არ იარსებებს და, ნებისმიერი ენერგიებისა და სამიზნე მანძილებისთვის, (35,5) ფორმულაში ინტეგრაცია უნდა დაეწყოს  $r=0$ -დან.

უფრო ძლიერი მოთხოვნის დროს

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^4 U(r) = -\infty \quad (35,22)$$

$r = r_{min}$  მანძილი არ არსებობს, მაგრამ ამ გარემოებას არაეითარი სიძნელეები არ შემოაქვს. ინტეგრაცია აიღება  $r=0$ -დან და გაფანტვა მოხდება სრულიად განსაზღვრულ კუთხეზე. შეიძლება შემოწმება, რომ სიძნელეები წარმოიქმნება მაშინ, როცა სინგულარობის მარჯვენა მითავსებელია  $2 < \nu < 4$  ინტეგრალში. ამ შემთხვევაში ინტეგრალი არაკალსახა და გაფანტვის კუთხე განსაზღვრული არ არის.

### § 36. გაფანტვა აბსოლუტურად შეუღწევად სფეროზე და პოტენციალურ ორმოზე

განვიხილოთ ორი მაგალითი, რომელსაც დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. ერთია გაფანტვა აბსოლუტურად შეუღწევად პოტენციალურ სფეროზე, ხოლო მეორე — პოტენციალურ ორმოზე. დაევიწყოთ პირველი მაგალითით.

გაფანტვა აბსოლუტურად შეუღწევად სფეროზე. ვთქვათ, ნაწილაკები იფანტებიან პოტენციალურ ძალთა ცენტრზე, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით:

$$\begin{aligned} U(r) &= \infty, & \text{როცა } r < R \\ V(r) &= 0, & \text{როცა } r > R \end{aligned} \quad (36,1)$$

სადაც  $R$  არის პოტენციალური სფეროს რადიუსი. ასეთი სახის პოტენციალური ენერგიას უწოდებენ უსასრულო სიმაღლის პოტენციალურ ჯებირს ან აბსოლუტურად შეუღწევად სფეროს, რადგან ნაწილაკს არ შეუძლია სფეროს შიგნით შეღწევა, მის გარეთ კი იგი თავისუფლად მოძრაობს. ვიპოვოთ  $\varphi_0$  (35,4) ფორმულიდან. პოტენციალური ენერგიის ორი მნიშვნელობის გამო გვექნება მოძრაობის ორი

არე:  $r_{min}$ -დან  $R$ -მდე და  $R$ -დან  $\infty$ -მდე. მაგრამ პირველ არეში პოტენციალური ენერგია უსასრულობის ტოლია, ამიტომ შესაბამისი  $\varphi_0 = 0$ ; დაგერჩება მეორე არე; ასე რომ,

$$\varphi_0 = \int_R^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}} = - \int_R^{\infty} \frac{d\left(\frac{\rho}{r}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}}, \quad (36,2)$$

ამ მარტივი ინტეგრალის ამოხსნით მივიღებთ

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{\rho}{R}, \quad (36,3)$$

აქედან

$$\rho = R \sin \varphi_0. \quad (36,4)$$

(35,2) ფორმულიდან განესაზღვროთ  $\varphi_0$  და შევიტანოთ (36,4)-ში. მივიღებთ

$$\rho = R \cos \frac{\theta_c}{2}, \quad (36,5)$$

აქედან

$$d\rho = -\frac{R}{2} \sin \frac{\theta_c}{2} d\theta_c. \quad (36,6)$$

ამგვარად, (33,8) ფორმულა დიფერენციალური განივკვეთისათვის გვაძლევს

$$d\sigma = \frac{\pi R^2}{2} \sin \theta_c d\theta_c. \quad (36,7)$$

ე. ი. ერთეულოვანი სხეულოვანი კუთხის შესაბამისი გაფანტვისათვის გვექნება

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_c} = \frac{R^2}{4}, \quad (36,8)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ გაფანტვა  $C$ -სისტემაში კუთხეებზე დამოკიდებული არ არის -- იზოტროპულია. ინტეგრალური განივკვეთი კი ტოლი იქნება სიდიდის

$$\sigma = \pi R^2,$$

რაც წარმოადგენს სფეროს გეომეტრიულ განივკვეთს.

ნაწილაკთა გაფანტვა პოტენციალურ ორმოზე. ახლა განვიხილოთ გაფანტვა პოტენციალურ ორმოზე:

$$\begin{aligned} U(r) &= -U_0, & \text{როცა } r < R \\ U(r) &= 0, & \text{როცა } r > R \end{aligned} \quad (36,9)$$

ასეთ ორმოს სწორკუთხა პოტენციალურ ორმოს უწოდებენ.  $U_0$  წარმოადგენს ორმოს სიღრმეს. ვიპოვოთ  $\varphi_0$ . რადგან პოტენციალური ენერგია განსაზღვრულია ორ არეში, ამიტომ (35,4) ინტეგრალი ორად გაიყოფა

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^R \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{U_0}{E_c}}} + \int_R^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}}. \quad (36,10)$$



მეორე ინტეგრალი ემთხვევა წინა ამოცანაში განხილულ (36,2) ინტეგრალს, ამიტომ იგი ტოლია  $\arcsin \frac{\rho}{R}$ . ამოვხსნათ პირველი ინტეგრალი. ამისათვის ვიპოვოთ ჯერ  $r_{min}$ . განმარტების თანახმად, იგი უნდა ამოვხსნათ განტოლებიდან

$$1 - \frac{\rho^2}{r_{min}^2} + \frac{U_0}{Ec} = 0. \quad (36,11)$$

ამ განტოლების ამოხსნით კი მივიღებთ

$$r_{min} = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \frac{U_0}{Ec}}} = \frac{\rho}{k}, \quad (36,12)$$

სადაც

$$k = \sqrt{1 + \frac{U_0}{Ec}}.$$

ამ აღნიშვნებში

$$I = \int_{r_{min}}^R \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{U_0}{Ec}}} = \int_{r_{min}}^R \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\frac{\rho^2}{r_{min}^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}}. \quad (36,13)$$

ეს ინტეგრალი შეგვიძლია ასეც გადავწეროთ:

$$I = - \int_{r_{min}}^R \frac{d\left(\frac{r_{min}}{r}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_{min}}{r}\right)^2}} = \arccos \frac{r_{min}}{R}. \quad (36,14)$$

ამგვარად,  $\varphi_0$  მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\varphi_0 = \arccos \frac{r_{min}}{R} + \arcsin \frac{\rho}{R}. \quad (36,15)$$

რადგან  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ , ამიტომ (36,15) შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ:

$$\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \arcsin \frac{\rho}{R} - \arcsin \frac{r_{min}}{R} \quad (36,16)$$

რადგან  $k > 1$ , ამიტომ  $\frac{\rho}{R} > \frac{r_{min}}{R}$ . ტრიგონომეტრიიდან კი ცნობილია, რომ თუ  $x > y$ , მაშინ

$$\arcsin x - \arcsin y = \arccos \left( \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} + xy \right). \quad (36,17)$$

ამგვარად,

$$\varphi_0 - \frac{\pi}{2} = \arccos \left( \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}} \sqrt{1 - \frac{r_{min}^2}{R^2}} + \frac{\rho r_{min}}{R^2} \right). \quad (36,18)$$

(35,2) ფორმულის გათვალისწინებით კი ვკვებება

$$\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}} \sqrt{1 - \frac{r_{min}^2}{R^2}} + \frac{\rho r_{min}}{R^2} = \cos \frac{\theta_c}{2}. \quad (36,19)$$

მარცხიდან მეორე წვერი მარჯვნივ გადაიტანოთ და მიღებული ტოლობა კვადრატში ავაშლოთ. თუ ამის შემდეგ მოვახდინთ ელემენტარულ დაჯგუფებას, თანახმად (36,12) ფორმულისა,  $\rho$ -სთვის მივიღებთ

$$\rho^2 = \frac{k^2 R^2 \sin^2 \frac{\theta_c}{2}}{\left(1 + k^2 - 2k \cos \frac{\theta_c}{2}\right)}. \quad (36,20)$$

განივკეთის საპოვნელად უნდა ავიღოთ ამ გამოსახულების დიფერენციალი. გვექნება

$$2\rho d\rho = \frac{k^2 R^2 \left[ \sin \frac{\theta_c}{2} \cos \frac{\theta_c}{2} \left(1 + k^2 - 2k \cos \frac{\theta_c}{2}\right) - \sin^2 \frac{\theta_c}{2} k \sin \frac{\theta_c}{2} \right] d\theta_c}{\left(1 + k^2 - 2k \cos \frac{\theta_c}{2}\right)^2}. \quad (36,21)$$

აქედან კი, თანახმად (33,7) და (33,9) ფორმულებისა, მივიღებთ

$$\sigma(\theta_c) d\Omega_c = \frac{k^2 R^2}{4 \cos \frac{\theta_c}{2}} \frac{\left(k \cos \frac{\theta_c}{2} - 1\right) \left(k - \cos \frac{\theta_c}{2}\right)}{\left(1 + k^2 - 2k \cos \frac{\theta_c}{2}\right)^2} d\Omega_c. \quad (36,22)$$

აქეთი იქნება  $C$ -სისტემაში პოტენციალურ ორმოზე გაფანტვის დიფერენციალური განივკვეთი.

გამოვარკვეოთ  $k$  სიდიდის შინაარსი. რადგან  $E_c = \frac{\mu v^2}{2}$ , სადაც  $v$  დაცემული ნაწილაკის სიჩქარეა ორმოდან ძალიან შორს, ამიტომ

$$k = \sqrt{\frac{E_c + U_0}{E_c}} = \frac{v}{v_0}, \quad (36,23)$$

სადაც  $v$  არის ნაწილაკის სიჩქარის მნიშვნელობა პოტენციალურ ორმოში. (36,23) გვეჩვენებს, რომ  $k$  ყოფილა გარდატეხის მაჩვენებელი.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები. ვთქვათ  $U_0 = 0$ , ე. ი. პოტენციალური ორმო უსასრულო სიღრმისაა, მაშინ  $k = \infty$ , და (36,22) მოგვცემს იზოტროპულ გაფანტვას

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_c} = \frac{R^2}{4}. \quad (36,24)$$

ამგვარად, როგორც უსასრულო სიმაღლის ჯებირზე, ისე უსასრულო სიღრმის პოტენციალურ ორმოზე გაფანტვის დიფერენციალური განივკვეთი კუთხეებზე დაშოკიდებული არ არის (ნახ. 39). იზოტროპული გაფანტვა გვექნება მაშინაც, როცა  $E_c \rightarrow 0$ ,  $U_0$  კი სასრულია.

რაც შეეხება ინტეგრალურ განივკვეთს, (36,22)-ის ინტეგრაცია მოგვცემს  $\sigma = \pi R^2$ , ამასთან ინტეგრალი უნდა ავიღოთ 0-დან  $\theta_{c,max}$ -მდე, რომელიც განისაზღვრება (36,20) ფორმულიდან, როცა  $\rho = R$ ,

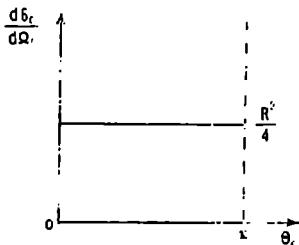
$$\theta_{c,max} = 2 \arccos \frac{1}{k}. \quad (36,25)$$

(36,22) ფორმულა სამართლიანი იქნება სასრული სიმაღლის პოტენციალური ჯებირისათვისაც, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე (ნახ. 40):

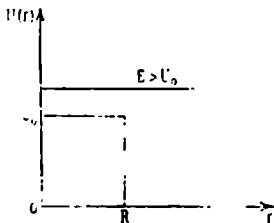
$$\begin{aligned} U(r) &= U_0, & \text{როცა } r < R, \\ U(r) &= 0, & \text{როცა } r > R. \end{aligned} \quad (36,26)$$

$U_0$ -ს უწოდებენ პოტენციალური ჯებირის სიმაღლეს, როცა  $E_c > U_0$ , მაშინ

$$k = \sqrt{1 - \frac{U_0}{E_c}}. \quad (36,27)$$



ნახ. 39



ნახ. 40

როცა  $E_c = U_0$ , ე. ი. როცა ნაწილაკის ენერგია ტოლია ჯებირის სიმაღლის, მაშინ  $k = 0$  და ვაჟანტის განივკვეთი ნულის ტოლია. ხოლო, როცა  $U_0 \rightarrow \infty$ , მაშინ მივიღებთ ჩვენთვის კარგად ცნობილ შედეგს, რომ  $\sigma_c(b) = \frac{R^2}{4}$ .

### § 37. დამუხტული ნაწილაკების გავსანტება. რეზონანსის ფორმულა

ვიპოვოთ ეფექტური განივკვეთის ფორმულა დამუხტული ნაწილაკების ვაჟანტისათვის. ვთქვათ, თრი დამუხტული სისტემა, რომელთა ზომები შეგვიძლია უგულებელვყოთ, ერთმანეთზე მოქმედებს კულონის კანონით

$$U(r) = \pm \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}. \quad (37,1)$$

$Z_1$  და  $Z_2$  აღნიშნავს, თუ ზამდენ ელემენტარულ მუხტს შეიცავს თითოეული სისტემა. მაგალითად,  $\alpha$ -ნაწილაკისათვის  $Z=2$ , პროტონისა და ელექტრონისათვის კი  $Z=1$  და ა. შ.

როგორც წინა ამოცანაში, აქაც საჭიროა  $\varphi_0$  კუთხის მოძებნა. მაგრამ ამისათვის ჩვენ აღარ დაგვიჩივდება (35,4) ინტეგრალის ამოხსნა, რადგან კულონური ველისათვის იგი § 27-ში უკვე ნაპოვნი გვაქვს. უფრო მეტიც, იმავე პარაგრაფში ჩვენ მოექმენეთ ასიმპტოტის განტოლებაც. სახელობრ, (27,32) ფორმულის თანახმად

$$\cos^2 \varphi_0 = \frac{1}{x^2}, \quad (37,2)$$

სადაც  $x$  ექსცენტრისიტეტია, რომელიც უდრის

$$x^2 = 1 + \frac{2E_c l^2}{\mu a^2}. \quad (37,3)$$

რადგან  $\alpha = \pm Z_1 Z_2 e^2$  (37,3) ფორმულაში შეღის კვადრატში, ამიტომ გაფანტვა არ იქნება დამოკიდებული მუხტების ნიშანზე. თუ გავიხსენებთ, რომ  $l = \mu a_p$ , მივიღებთ

$$\cos^2 \varphi_0 = \frac{1}{1 + \left(\frac{2E_c p}{\alpha}\right)^2}; \quad (37,4)$$

აქედან

$$\rho^2 = \left(\frac{\alpha}{2E_c}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0. \quad (37,5)$$

დაბოლოს  $2\varphi_0 = \pi - \theta_c$  ფორმულის გათვალისწინებით, სამიზნე მანძილსა და გაფანტვის კუთხეს შორის  $C$ -სისტემაში მივიღებთ დამოკიდებულებას

$$\rho^2 = \left(\frac{\alpha}{2E_c}\right)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta_c}{2}. \quad (37,6)$$

ამ ფორმულის გადიფერენციალება მოგვცემს

$$2\rho d\rho = - \left(\frac{\alpha}{2E_c}\right)^2 \frac{\operatorname{ctg} \frac{\theta_c}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_c}{2}} d\theta_c. \quad (37,7)$$

ამ გამოსახულების —  $\pi$ -ზე გამრავლებით მივიღებთ დიფერენციალური განიკვეთის შემდეგ ფორმულას:

$$\sigma(\theta_c) d\Omega_c = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E_c}\right)^2 \frac{d\Omega_c}{\sin^4 \frac{\theta_c}{2}}. \quad (37,8)$$

ეს ფორმულა  $\alpha$ -ნაწილაკების ატომებზე გაფანტვისათვის პირველად გამოიყვანა რეზერფორდმა და ამიტომაც მის სახელს ატარებს. ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ გაფანტვის ინტენსიობას მაქსიმუმი აქვს მცირე კუთხეებზე. როცა  $\theta = 0$ , მაშინ  $d\sigma = \infty$ . ეს შემთხვევა შეესაბამება ნაწილაკთა გავლას გამფანტავი ცენტრიდან უსასრულოდ შორ მანძილზე. აშკარაა აგრეთვე, რომ ინტეგრალური განიკვეთი უსასრულობის ტოლია. ამის მიზეზი არის კულონის ველის ხასიათი, რომელიც მანძილის გაზრდით ძალიან ნელა ეცემა, ასე რომ, უსასრულოდ დაშორებული ნაწილაკებიც კი გადაიხრებიან ამ ველის გავლენით. ამის გამო ის ფართი, რომელიც უნდა გაკვეთოს ნაწილაკმა, რომ მოხდეს გაფანტვა, უსასრულოდის ტოლია.

რეზერფორდმა შეისწავლა  $\alpha$ -ნაწილაკების ურთიერთქმედება ატომებთან და აჩვენა, რომ (37,8) ფორმულა სამართლიანია დიდი  $\theta_c > \pi/2$  კუთხეებისათვისაც, რომლებიც შეესაბამება  $10^{-12}$  სმ-ზე ნაკლებ სამიზნე მანძილს, იმ დროს, როცა ატომის ზომა რიგით  $10^{-8}$  სმ-ია. ამით რეზერფორდმა დაამტკიცა, რომ ატომი შედგება ატომგულისა და ელექტრონთა გარსისაგან. ატომის მთელი მასა ფაქტურად თავმოყრილია ატომგულში. ატომგულის ზომა სიდიდის რიგით  $10^{-12}$  სმ-ია. მაშასადამე,  $\alpha$ -ნაწილაკების ატომებით გაფანტვის ექსპერიმენტის ანალიზით დამტკიცდა ატომგულის არსებობის ფაქტი. (37,8) ფორმულა სამართლიანია  $C$ -სისტე-

მისათვის, როცა გამფანტავი ნაწილაკის მასა გაცილებით მეტია დაცემული ნაწილაკის მასაზე, მაგალითად, ელექტრონებს ატომგულუბით გაფანტვის შემთხვევაში, მაშინ  $C$ - და  $L$ -სისტემებს შორის ფაქტიურად განსხვავება არ არის და შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ (37,8) ფორმულა სამართლიანია  $L$ -სისტემაშია. ამ შემთხვევაში  $\theta_c \approx \theta_L$  და  $\mu \approx m_1$ , ასე რომ

$$\sigma_L(\theta_L) d\Omega_L = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E_L} \right)^2 \frac{d\Omega_L}{\sin^4 \frac{\theta_L}{2}}. \quad (37,9)$$

$\theta_L$  არის დაცემული ნაწილაკის გაფანტვის კუთხე  $L$ -სისტემაში. ამ დროს გვექნება უმნიშვნელო უკუტემა და იგი შეგვიძლია არ გაეთვალისწინოთ.  $E_L$  არის დაცემული ნაწილაკის ენერგია  $L$ -სისტემაში.

როცა დაცემული და გამფანტავი ნაწილაკების მასები ტოლია, მაშინ, თანახმად (32,20) ფორმულისა,  $\theta_c = 2\theta_L$ ; გარდა ამისა,  $E_L = 2E_c$  და (34,6) ფორმულა მოგვცემს

$$\sigma_L(\theta_L) = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E_L} \right)^2 \frac{\cos \theta_L}{\sin^4 \theta_L}. \quad (37,10)$$

ამ შემთხვევაში მნიშვნელოვანი იქნება უკუტემა. როგორც ვიცით, უკუტემის კუთხე, ე. ი. მეორე ნაწილაკის გაფანტვის კუთხე  $L$ -სისტემაში განისაზღვრება ფორმულით  $\theta_c = \pi - 2\theta_L$ , ამიტომ მისი შეტანით (37,3) ფორმულაში და მარტივი გარდაქმნით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\sigma_2(\theta_2) d\Omega_2 = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E_c} \right)^2 \frac{d\Omega_2}{\cos^3 \theta_2}. \quad (37,11)$$

ტოლი მასების შემთხვევაში ამ ფორმულიდან მივიღებთ

$$\sigma_2(\theta_2) = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E_c} \right)^2 \frac{1}{\cos^3 \theta_2}. \quad (37,12)$$

თუ, გარდა მასებისა, ტოლია ურთიერთქმედი ნაწილაკების მუხტებიც და ყველა სხვა დამახასიათებელი სიდიდეებიც, ე. ი. თუ ნაწილაკები იგივეურია (მაგალითად, ელექტრონის - ელექტრონიზე გაფანტვას შემთხვევაში), მაშინ ექსპერამენტატორი ვერ განასხვავებს ერთნაირიანაგან დაცემულ და გამფანტავ ნაწილაკს, ამიტომ მ მიმართულუბას შეაბამისი ეფექტურა განუყვეთა ჯამი იქნება (37,10) და (37,12) გამოსახულებებისა, ე. ი.

$$\sigma(\theta) = \left( \frac{Z^2 e^2}{E_L} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} \right\} \cos \theta. \quad (37,13)$$

ყველა ზემოთ განხილულ ფორმულაში მუხტი შედის კვადრატში, ამიტომ შედეგები სამართლიანია, როგორც განზიდვის კლონური ველისათვის, ისე მიზიდვისათვის.

იმის საილუსტრაციოდ, რომ გაფანტვის დიფერენციალურ განვკვეთს მაქსიმუმი აქვს მცირე კუთხეებზე არა მხოლოდ კულონური ურთიერთქმედების შემთხვევაში, არამედ იგი დამახასიათებელია  $\frac{\alpha}{r^n}$  ტიპის ურთიერთქმედებისათვის, სა-

დაც  $n = 1, 2, 3$  და ა. შ., განვიხილოთ ნაწილაკთა გაფანტვა  $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$  ველით,

სადაც  $\alpha$  დადებითი პარამეტრია. ასეთი ურთიერთქმედებისათვის გაფანტვის ამოცანა მარტივად ამოიხსნება. მართლაც, (35,20) ფორმულის ძალით, გაფანტვის კუთხისათვის  $C$ -სისტემაში, გვექნება

$$\frac{\theta_c}{\pi} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{\rho^2 E_c}}}, \quad (37,14)$$

საიდანაც ვიპოვით  $\rho^2$ -ს

$$\rho^2 = \frac{\alpha}{E_c} \frac{\left(1 - \frac{\theta_c}{\pi}\right)^2}{1 - \left(1 - \frac{\theta_c}{\pi}\right)^2}, \quad (37,15)$$

ხოლო ამ გამოსახულების გადფერენციალებით და (37,7)-ის გამოყენებით მივიღებთ დიფერენციალური განივკვეთის შემდეგ ფორმულას:

$$d\sigma_c = \left(\frac{\alpha \pi^2}{E_c}\right) \frac{(\pi - \theta_c) d\Omega_c}{(2\pi - \theta_c)^2 \theta_c^2 \sin \theta_c}. \quad (37,16)$$

მცირე კუთხეებზე განივკვეთს ექნება გამობატლებად

$$\frac{d\sigma_c}{d\Omega_c} \approx \frac{\alpha \pi}{4 E_c} \frac{1}{\theta_c^2}. \quad (37,17)$$

როგორც ვხედავთ,  $\frac{\alpha}{\rho^2}$  ველით გაფანტვის შემთხვევაშიაც გაფანტვის დიფერენციალურ განივკვეთს მაქსიმუმი აქვს მცირე კუთხეებზე, ოღონდ, კულონის ველით გაფანტვისაგან განსხვავებით, კუთხური განაწილება პროპორციულია არა  $\theta_c^{-4}$ -ის, არამედ  $\theta_c^{-2}$ -ის.

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ  $U(r) = \frac{\alpha}{r^n}$  ველზე გაფანტვის ამოცანა, როგორც ზემოთ დაინახეთ, ძალიან მარტივად იხსნება  $n=1$  და  $n=2$  შემთხვევაში. უფრო დიდი  $n$ -ებისათვის  $0_c$ -ში შემავალი ინტეგრალი, როგორც წესი, ელიფსური ფუნქციებით გამოიხატება.

### § 38. გაფანტვა მცირე კუთხეებზე

განვიხილოთ გაფანტვა მცირე კუთხეებზე. მცირე კუთხეებზე გაფანტვის ადგილი ექნება დიდი სამიზნე მანძილებისათვის, როცა ნაწილაკზე მოქმედებს მცირე სიდიდის ძალა. ასეთი შემთხვევა განხორციელდება დაცემულ ნაწილაკთა დიდი ენერგიების დროს, ე. ი. როცა  $\frac{U(r)}{E_c} \ll 1$ . ვიპოვოთ კავშირი  $\rho$  და  $\theta_c$ -ს შორის. ამისათვის წინასწარ ვიპოვოთ  $\varphi_0$ . რადგან  $U \ll E_c$ , ამიტომ  $\varphi_0$ -ს ვიპოვოთ, თუ (35,6) ფორმულაში ფესვს გავშლით  $\left(\frac{U}{E_c}\right)$  მცირე სიდიდის ხარისხებად. გვექნება

$$\varphi_0 = -\frac{\partial}{\partial \rho} \int_{r_{min}}^{\infty} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} dr + \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{U(r) dr}{2E_c \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}} + \dots + \quad (38,1)$$

ამასთან მწკრივად გაშლაში შეჰოვისაზღვრეთ მხოლოდ ორი პირველი წევრით. (38,1)-ის პირველი ინტეგრალი აღვიღად აიღება; იგი მოგვცემს  $\arcsin \frac{\rho}{r_{min}}$  (იხ. (36,3) ფორმულა). რადგან  $U \ll E_c$ , ამიტომ

$$r_{min} = - \frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{U}{E_c}}} \approx \rho. \quad (38,2)$$

და, მაშასადამე, პირველი ინტეგრალი ტოლია  $\frac{\pi}{2}$ . ამგვარად,

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2E_c} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\rho}^{\infty} \frac{rU(r) dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \quad (38,3)$$

გადაწვეროთ ეს ფორმულა იგივეურად

$$\varphi_0 - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4E_c} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\rho}^{\infty} \frac{U(r) d(r^2 - \rho^2)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \quad (38,4)$$

ახლა კი ნაწილობითი ინტეგრაციით მივიღებთ

$$\varphi_0 - \frac{\pi}{2} = - \frac{1}{2E_c} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dU}{dr} \sqrt{r^2 - \rho^2} dr, \quad (38,5)$$

საიდანაც

$$\varphi_0 - \frac{\pi}{2} = \frac{\rho}{2E_c} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \quad (38,6)$$

რადგან  $\theta_c = \pi - 2\varphi_0$ , ამიტომ

$$\theta_c = - \frac{\rho}{E_c} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \quad (38,7)$$

აქ  $E_c = \frac{\mu v_{\infty}^2}{2}$  წარმოადგენს ენერგიას  $C$ -სისტემაში.

იმის გამო, რომ პოტენციალური ენერგია მცირეა,  $\theta_c$  გაფანტვის კუთხეც ძალიან მცირე სიდიდეა. თანახმად (32,15) ფორმულისა, რადგან  $\sin \theta_c \approx \theta_c$ , ხოლო  $\cos \theta_c \approx 1$ , გვექნება, რომ  $\theta_L$  აგრეთვე მცირეა და უდრის

$$\theta_L \approx \frac{\theta_c}{1 + \frac{m_1}{m_2}}. \quad (38,8)$$

ამრიგად, ლაბორატორიულ სისტემაში გაფანტვის კუთხე განისაზღვრება ფორმულით

$$\theta_L = - \frac{\rho}{E_L} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, \quad (38,9)$$

სადაც  $E_L = \frac{m_0 c^2}{2}$  დაცემული ნაწილაკის ენერგიაა ლაბორატორიულ სისტემაში.

(33,9) ფორმულის თანახმად კი  $d\Omega = 2\pi \theta_L d\theta_L$ .

სხეულოვან კუთხეში გაფანტვის განიკვეთი ტოლია

$$\sigma(\theta_L) d\Omega_L = - \frac{d\rho}{\partial\theta_L} \frac{\rho}{\theta_L} d\Omega_L. \quad (38,10)$$

(38,9) ფორმულა შეგვიძლია შეცვლილი სახითაც გადავწეროთ. სახელდობრ, ახალი  $x^2 = \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 - 1$  ცვლადის შემოღებით გვექნება

$$\theta_L = \frac{\rho}{E_L} \int_0^{\infty} \frac{F(\rho \sqrt{1+x^2}) dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (38,11)$$

სადაც  $F = -\frac{dU}{dr}$  არის ძალა. რადგან ინტეგრალქვეშა ფუნქციაა ლუწია, ამიტომ საბოლოოდ გვექნება:

$$\theta_L = \frac{\rho}{2E_L} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\rho \sqrt{1+x^2}) dx}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (38,12)$$

ამგვარად, გაფანტვა მცირე კუთხეებზე განისაზღვრება ფორმულით

$$\theta_L = \frac{\rho}{2E_L} f(\rho), \quad (38,13)$$

სადაც  $f(\rho)$  მხოლოდ და მხოლოდ სამიზნე მანძილის ფუნქციაა და მისი მოძებნა დაიყვანება შემდეგი განსაზღვრული ინტეგრალის ამოხსნაზე:

$$f(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\rho \sqrt{1+x^2}) dx}{\sqrt{1+x^2}}. \quad (38,14)$$

როგორც მარტივი მაგალითი, განვიხილოთ გაფანტვა მცირე კუთხეებზე კულონის ველის შემთხვევაში. ამ დროს  $F = -\frac{dU}{dr} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r^2}$  და საკვირაო ამოხსნას ინტეგრალი

$$f(\rho) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\rho^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{\rho^2}, \quad (38,15)$$

მაშასადამე,

$$\theta_L = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E_L \rho}. \quad (38,16)$$

თანხმად (38,10) ფორმულისა, დიფერენციალური განიკვეთისათვის გვექნება

$$\sigma(\theta_L) d\Omega_L = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E_L} \right)^2 \frac{d\Omega_L}{\theta_L^2}. \quad (38,17)$$



იგივე ფორმულას მივიღებდით განიკვეთის (37,8) ზუსტი გამოხატულებიდან ზღვრულ შემთხვევაში გაფანტვის მცირე კუთხეების დროს.

(33,17) ფორმულა გვიჩვენებს რომ განიკვეთი მოცემულ კუთხეზე ენერჯის სწრაფად კლებადი ფუნქციაა. ეს იმას ნიშნავს, რომ ჩქარი ნაწილაკის გასაფანტავად საჭიროა დიდი ძალა. ასეთი დამატებითი ძალა კი მიიღება მცირე საბიზნე მანძილებისათვის.

### § 39. იზოტროპიული გაფანტვა

ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ გაფანტვა აბსოლუტურად შეუღწევად სფეროზე და უსასრულო სიმბოლის პოტენციალურ ორმოზე  $C$ -სისტემაში იზოტროპიულია, ე. ი. ყველა მიმართულებით ერთი და იგივეა — კუთხეზე არაა დამოკიდებული. მეორე მხრივ, რეზერფორდის ფორმულით განსაზღვრული გაფანტვა არაიზოტროპიულია, გაფანტვას გააჩნია მკვეთრად განსაზღვრული მაქსიმუმი მცირე კუთხეებზე. აღსანიშნავია, რომ განიკვეთის ასეთი ყოფაქცევა განიკვეთილია კულონის ველის თავისებურებით. იგი საკმარისად ნელა ეცემა მანძილთან ერთად, ამიტომ დიდ სამიზნე მანძილებზე (ე. ი. მცირე კუთხეებზე) მოსული ფართი საკმარისად დიდი სიდიდეა. განიკვეთის ასეთი ყოფაქცევა დამახასიათებელია არა მხოლოდ კულონური ველისათვის. ასეთივე სურათი გვევლინება ყველა იმ ურთიერთქმედებისათვის, რომლებიც იგივერად ნული არ ხდებიან სასრულ მანძილზე, თუ ძალა სასრული მანძილის შემდეგ იგივერად ნულია, განიკვეთი მკაცრად იზოტროპიული იქნება. ასეთი შემთხვევა გვქონდა სწორედ შეუღწევად სფეროზე და უსასრულო სიღრმის პოტენციალურ ორმოზე გაფანტვისათვის. როცა ურთიერთქმედება სასრულ მანძილზე იგივერად არ ისპობა და ადგილი აქვს მის შემცირებას მანძილთან ერთად, მაშინ დიდი სამიზნე მანძილების დიდი წვლილის გამო განიკვეთს ეწეება მაქსიმუმი მცირე კუთხეებზე.

მაგრამ ძალიან მცირე კუთხეებზე გაფანტული ნაწილაკების აღრიცხვა ექსპერიმენტზე არ ხერხდება, რადგან მათი გარჩევა ძნელია იმ ნაწილაკებისაგან, რომლებიც საზოგადოდ არ გაფანტულან. ექსპერიმენტის დროს დაცემული ნაწილაკების ტრაექტორიები არასოდეს არ არიან იდეალურად პარალელური, ამიტომ ის ცვლილებანი, რომლებიც გამოწვეულია ტრაექტორიათა არაზუსტი პარალელურობით, შეიძლება ავეუროთ ძალიან მცირე კუთხეებზე გაფანტვასთან. შეუძლებელია იმ გაფანტული ნაწილაკების აღრიცხვა, რომელთა გაფანტვის კუთხე იმავე რიგისაა, რაც ნაკადის ვადაზრა იდეალურად პარალელური მიმართულებებისაგან. ამიტომ ექსპერიმენტზე ყოველთვის გამორიცხვენ ძალიან მცირე კუთხეებზე გაფანტვას.

როცა ძალა მანძილთან ერთად სწრაფად ეცემა, მაშინ განიკვეთს მაქსიმუმი შეიძლება აღმოაჩინდეს ისეთ მცირე კუთხეებზე, რომელთა რეგისტრირება ზემოთ აღნიშნული მიზეზის გამო არ ხერხდება. თუ ამ არეს გამოვრიცხავთ, დანარჩენ კუთხეებზე, განაწილება იქნება მით უფრო იზოტროპიული, რაც უფრო სწრაფად ეცემა ძალა ნულამდის მანძილის გაზრდასთან ერთად. ამიტომ, თუ ექსპერიმენტზე აღმოვაჩინებთ გაფანტულ ნაწილაკთა იზოტროპიული განაწილებას, ეს მომასწავლებელი იქნება იმისა, რომ ძალა სწრაფად ეცემა მანძილს გაზრდასთან ერთად. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, ურთიერთქმედებას აქვს შემდეგი სახე:

$$U(r) = U_0 \left( \frac{R}{r} \right)^n, \quad (39,1)$$

სადაც  $U_0$  არის ენერჯიის განზომილების მუდმივი,  $R$  კი დამახასიათებელი სიგრძეა. როცა  $n \rightarrow \infty$ , მივიღებთ:

$$\begin{aligned} U(r) &= \infty, & \text{როცა } R > r, \\ U(r) &= 0, & \text{როცა } R < r, \end{aligned} \quad (39,2)$$

ე. ი. გვექნება შეულწევალი სფერო (უსასრულო სიმაღლას პოტენციალური ჯები-რა). ანტიომ განაწილება იქნება მკაცრად იზოტროპული. გაფანტვის განიკვეთი (39,1) ურთიერთქმედების შემთხვევაში  $n=1$  და  $n=2$ -სათვის ჩვენ უკვე ნაპოვნი გვაქვს. ახლა ვიპოვოთ გაფანტვის განიკვეთი ნებისმიერი  $n$ -ისათვის, ოღონდ მცირე კუთხეებზე. მიღებული ფორმულები საშუალებას მოგვცემენ შევისწავლოთ გაფანტვის კუთხური განაწილება ძალის მანძილის მიხედვით უსასრულობაში ნულთან მისწრაფების ხარისხზე დამოკიდებით.

ვისარგებლოთ წინა პარაგრაფში გამოყენილი ფორმულებით და ვიპოვოთ გაფანტვის განიკვეთი მცირე კუთხეებზე (39,1) ურთიერთქმედების შემთხვევაში. (38,7) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\theta_c = \frac{\rho n U_0 R^n}{E_c} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^{n+1} \sqrt{r^2 - \rho^2}}. \quad (39,3)$$

ამ გამოსახულებაში შემავალ ინტეგრალს ადვილად დავიყვანთ ეილერის ბეტა ინტეგრალზე. მართლაც, შემოვიღოთ  $x = \rho^2/r^2$  აღნიშვნა. შედეგად (39,3) ასე გადაიწერება:

$$\theta_c = \frac{n U_0 R^n}{2 E_c \rho^n} \int_0^1 x^{\frac{n-1}{2}} (1-x)^{-1/2} dx, \quad (39,4)$$

ხოლო თუ გავიხსენებთ ეილერის ბეტა ფუნქციის განმარტებას, გვექნება

$$\theta_c = \frac{n U_0 R^n}{2 E_c \rho^n} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (39,5)$$

საიდანაც ადვილად ვიპოვით  $\rho$ -ს როგორც  $\theta_c$  გაფანტვის კუთხის ფუნქციას. გვექნება

$$\rho^2 = \left[ \frac{n U_0 R^n}{2 E_c} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right]^{2/n} \frac{1}{\theta_c^{2/n}}. \quad (39,6)$$

ამ გამოსახულების გადიფერენციალებით კი ადვილად მივიღებთ მცირე კუთხეებზე გაფანტვის განიკვეთის შემდეგ ფორმულას:

$$\frac{d\theta_c}{d\Omega_c} = \frac{\Omega_n(E_c)}{\theta_c^{\frac{n}{2}+2}}, \quad (39,7)$$

$\Omega_n(E_c)$  განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

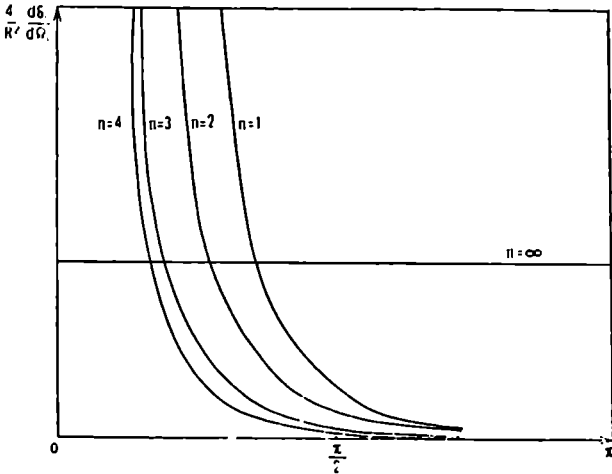
$$\Omega_n(E_c) = \frac{R^2}{n} \left\{ \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left( \frac{U_0}{E_c} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right\}^{2/n} \quad (39,8)$$

სადაც  $\Gamma(x)$  ეილერის გამა ფუნქციაა.

(39,8) ფორმულიდან, კერძო შემთხვევაში, როცა  $n=1$ ,  $R=1$ ,  $U_0 = Z_1 Z_2 e^2$ , მიიღება რეზერფორდის ფორმულა (მცირე კუთხეებისათვის), ხოლო  $n=2$  და  $\alpha = U_0 R^2$ -ისათვის — (37,20) ფორმულა. (39,7)-დან ჩანს, რომ მცირე კუთხეებზე განივკვეთს აქვს მკვეთრი მაქსიმუმი.

როცა  $n$  დიდია, მაშინ ნაწილაკები ყველა კუთხის მიხედვით თითქმის იზოტროპიულად იქნებიან განაწილებული, ძალიან მცირე კუთხეებზე კი გვექნება მკვეთრად გამოხატული მაქსიმუმი.

41-ე ნახაზზე მოცემულია განივკვეთის კუთხური განაწილების დამოკიდებულება  $n$ -ზე.



ნახ. 41. განივკვეთის კუთხური განაწილება  $n$ -ის მიხედვით, როცა  $n=1, 2, 3, 4$ , წინ გაფანტვა მით უფრო მკვეთრია, რაც უფრო მცირეა  $n$ . ნახაზზე მოცემულია აგრეთვე კუთხური განაწილება აბსოლუტურად შეუღწევად სფეროზე გაფანტვისა. სათანადო გრაფიკი პირობითად აღნიშნულია  $n = \infty$ -ით.

სიმარტივის მიზნით ნაწილაკთა ენერჯია აღებულია  $E_c = \frac{U_0}{2}$ -ის ტოლად.

ამგვარად, თუ ნაწილაკთა შორის ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯია იგუჯერად ნული ხდება სასრულო მანძილიდან, მანამდე კი უსასრულოდ დიდია, განივკვეთის კუთხური განაწილება მკაცრად იზოტროპიულია. როცა ძალა კლებულობს მანძილის ზრდასთან ერთად, განივკვეთს მკვეთრი მაქსიმუმი აქვს წინ გაფანტვისათვის. დიდ კუთხეებზე კი გაფანტვა მით უფრო იზოტროპიულია, რაც უფრო სწრაფად ისპობა ძალა მანძილის გაზრდისას.

#### § 40. კავშირი განივკვეთისა და თავისუფალი განარბენის სიგრძის შორის

ამ თავში მიღებულ გაფანტვის ფორმულებში ყველგან იგულისხმებოდა, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს ძალიან თხელ სამიზნე ნივთიერებასთან. როცა სამიზნე ძალიან თხელი არაა, მაშინ ადგილი ექნება ნაწილაკთა „გადაფანტვის“ და მათი საერთო

ფართი სამიზნეს საერთო ფართზე მეტი იქნება. ასეთ შემთხვევაში თითო დაცემული ნაწილაკი თითო სამიზნე ნაწილაკზე კი არ გაიფანტება, არამედ რამდენიმე ნაწილაკზე, ასე რომ, ადგილი ექნება მრავალჯერად გაფანტვას. შემოვიხილოთ ისევე ერთჯერად დაჭახებებით და განვიხილოთ საკმარისად თხელი სამიზნე, ასეთ სამიზნეს ფოლგას უწოდებენ. თუ ფოლგის ზედაპირის ფართს  $s$ -ით აღვნიშნავთ, ხოლო სისქეს  $dx$ -ით, მაშინ მასში გვექნება  $v s dx$  გამფანტავი ცენტრი, სადაც  $v$  არის ნაწილაკთა რიცხვი მოცულობის ერთეულში. თუ  $\sigma$  არის გაფანტვის განიკვეთი ერთი ელემენტარული დაჭახებისა, მაშინ ფოლგის ნაწილაკების ეფექტური ფართი ტოლი იქნება  $v s \sigma dx$ . ამ სიდიდის  $s$ -ზე გაყოფით მივიღებთ დაცემული ნაწილაკის გაფანტვის ალბათობას

$$dI' = v \sigma dx \quad (40,1)$$

$v$ -ს მაკროსკოპულ განიკვეთს უწოდებენ.

ახლა შემოვიღოთ თავისუფალი განარბენის სიგრძის ცნება. თავისუფალი განარბენის სიგრძე ეუწოდოთ მანძილს, რომელსაც დაცემული ნაწილაკი სამიზნეში გაივლის ორ თანმიმდევრულ დაჭახებას შორის. ცხადია, რომ ეს სიგრძე, რომელსაც  $\lambda$ -თი აღვნიშნავთ, ცვალებადი სიდიდეა და დამოკიდებული იქნება სამიზნეს ნაწილაკთა სიმკვრივეზე, დაცემულ ნაწილაკთა ენერგიაზე და სხვა. მაგრამ მოცემულ ენერგიაზე იარსებებს ისეთი საშუალო  $\lambda$ , რომელთანაც ახლოს იქნება ყველა შესაძლო თავისუფალი განარბენის სიგრძეები. ცხადია, ეს საშუალო მნიშვნელობა ტოლი იქნება

$$\lambda = \int_0^{\infty} z p(z) dz, \quad (40,2)$$

სადაც  $p(z)$  არის ალბათობა იმისა, რომ თავისუფალი განარბენის სიგრძე ძვეს  $z$ -სა და  $(z + dz)$ -ს შორის. ვიპოვოთ ეს ალბათობა.

$Q(z)$ -ით აღვნიშნოთ ალბათობა იმისა, რომ დაცემული ნაწილაკი  $z$  მანძილს ისე გაირბენს სამიზნეში, რომ გაფანტვა არ მოხდება. მაშასადამე,  $Q(z)$  არის იმის ალბათობა, რომ  $\lambda \gg z$ .  $dz$  მანძილზე  $Q(z)$  კლებულობს სიდიდით, რომელიც ტოლია  $dz$  მანძილზე დაჭახების ალბათობისა. მაგრამ ალბათობა იმისა, რომ  $dz$  მანძილზე დაჭახება მოხდეს, ტოლია ორი ალბათობის ნამრავლისა; ერთია ალბათობა იმისა, რომ ნაწილაკი გაივლის  $z$  მანძილს დაჭახების გარეშე, ხოლო მეორე  $dI'$  იქნის ალბათობა, რომ ამ მანძილს გაკლას შემდეგ დაჭახება მოხდება. მაშასადამე,

$$dQ(z) = -Q v \sigma dz. \quad (40,3)$$

ამ განტოლების ამოხსნა ასე დაიწერება:

$$Q = \text{const } e^{-v \sigma z}. \quad (40,4)$$

როცა  $z=0$ , იმის ალბათობა, რომ დაჭახება არ მოხდება, ერთის ტოლია, ამიტომ გვექნება

$$Q = e^{-v \sigma z}, \quad (40,5)$$

ხოლო ალბათობა იმისა, რომ თავისუფალი განარბენის სიგრძე ძვეს  $(z, z + dz)$ -ს შორის, მიიღება ამ ალბათობის წარმოებულის აბსოლუტურა სიდიდის აღებით

$$p(z) = v \sigma e^{-v \sigma z}. \quad (40,6)$$

ამ ალბათობის ჩასმით (40,2)-ში და ინტეგრაციით მივიღებთ მნიშვნელოვან ფორმულას

$$\lambda = \frac{1}{\nu\sigma}, \quad (40,7)$$

რომელსაც, ხშირად, შემდეგი სახით წერენ ხოლმე:

$$\lambda \cdot \nu \sigma = 1. \quad (40,8)$$

როცა დაცემული ნაწილაკის თავისუფალი განარბენის საშუალო სიგრძე ძალიან მცირეა, მაშინ ადგილი ექნება მრავალჯერად დაჯახებას. რადგან ჩვენ შემოვისაზღვრეთ მხოლოდ ერთჯერადი დაჯახებებით, ამიტომ ყველა ადრე მიღებული ფორმულა სამართლიანი იქნება იმდენად თხელი სამიზნეებისათვის, რომ მრავალჯერადი გაფანტვის უგულებელყოფა შეიძლებოდეს. „სქელი“ სამიზნეების შემთხვევა განსაკუთრებულ განხილვას მოითხოვს.

## მცირე რხევები

ამ თავში ჩვენ შევისწავლით სისტემის მცირე რხევებს. მცირე რხევებთან საკმე გვაქვს ყოველდღიურ ცხოვრებაში. მდგრადი წონასწორობის მახლობლად რხევად ნაწილას ოსცილატორს უწოდებენ. წონასწორობის მახლობლად მცირე რხევებს აწარმოებენ ატომები და მოლეკულები, ამიტომ ისინი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ოსცილატორები. ოსცილატორის ამოცანა ფუნდამენტური ამოცანაა და იგი ღიდ როლს ასრულებს არა მხოლოდ მექანიკაში, არამედ ფიზიკის სხვა მრავალ დარგშიაც. აღსანიშნავია, რომ გარკვეული განზოგადებული კორდინატების შემოღებით ნებისმიერი სისტემის მცირე რხევები შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც წრფივ, ერთმანეთზე დამოუკიდებელ, ოსცილატორთა ერთობლიობა, ამიტომ მცირე რხევებში ოსცილატორის ამოცანა ძირითად ამოცანას წარმოადგენს. ქვემოთ განვიხილავთ თავისუფალ და იძულებით რხევებს სიცარიელეში. იმ თავისებურებებს კი, რომლებიც დაკავშირებულია გარემოში მოძრაობასთან, მივეუძღვნით შემდეგ თავს.

### § 41. წრფივი ჰარმონიული ოსცილატორი

წონასწორობის პირობები. განვიხილოთ იზოლირებული სისტემა, რომელსაც აქვს მხოლოდ ერთი თავისუფლების ხარისხი და შევისწავლოთ მისი რხევითი მოძრაობა წონასწორობის მახლობლად. წონასწორობის წერტილში განზოგადებული ძალა ნულის ტოლია, ამიტომ გვექნება  $\frac{dU}{dq} = 0$ , ე. ი. წონასწორობის პირობა პოტენციალური ენერჯიის წარმოებულის ნულთან ტოლობა

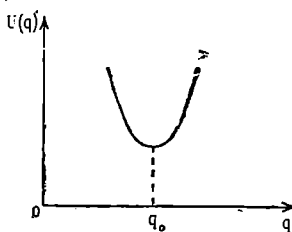
$$\left(\frac{dU}{dq}\right)_{q=q_0} = 0. \quad (41,1)$$

მაგრამ წონასწორობა შეიძლება გვექნდეს სამი სახისა. პირველი — როცა შესრულებულია (41,1) პირობა და, გარდა ამისა, წონასწორობის წერტილში პოტენციალური ენერჯიის მეორე წარმოებული უარყოფითია, ე. ი. როცა პოტენციალური ენერჯიას აქვს მაქსიმუმი. ასეთ წონასწორობას არამდგრადს უწოდებენ. არამდგრად წონასწორობაში, მაშასადამე, გვაქვს:

$$\left(\frac{dU}{dq}\right)_{q=q_0} = 0, \quad \left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_{q=q_0} < 0. \quad (41,2)$$

საკმარისია ასეთ სისტემას მივანიჭოთ მცირე გადაადგილება, რომ იგი წონასწორობის  $q=q_0$  მდებარეობას აღარ დაუბრუნდეს. მეორე სახე წონასწორობისა არის

განურჩეველი წონასწორობა, როდესაც პოტენციალური ენერგია მუდმივია და ყოველი მდებარეობა განურჩევლად წონასწორობის მდებარეობას წარმოადგენს; ამ შემთხვევაში გვაქვს წონასწორობის წერტილთა უსასრულო სიმრავლე. დაბოლოს წონასწორობის მნიშვნელოვან სახეს წარმოადგენს მდგრადი წონასწორობის მდგომარეობა, როდესაც წონასწორობაში მყოფი ნაწილაკი მცირე გადახრის შემდეგ კვლავ წონასწორობაში ბრუნდება. ეს შემთხვევა ხორციელდება მაშინ, როდესაც პოტენციალური ენერგიას წონასწორობის წერტილში გააჩნია მინიმუმი (ნახ. 42). ამგვარად, მდგრადი წონასწორობისათვის დაცული უნდა იყოს პირობები:



ნახ. 42

$$\left(\frac{dU}{dq}\right)_{q_0} = 0, \quad \left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_{q_0} > 0. \quad (41,3)$$

ამასთან, პოტენციალური ენერგიის წარმოებულის ნულთან ტოლობიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ წონასწორობის კოორდინატი  $q_0$ . ზოგადად მისი დაურღვეველად დავუშვათ  $q_0 = 0$ , ე. ი. ნაწილაკი ირხეოდეს სათავის მახლობლად.

წრფივი პარამონიული ოსცილატორი. რადგან ვიხილავთ მცირე რხევებს, ამიტომ პოტენციალური ენერგია შეგვიძლია გავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად და შევინარჩუნოთ რამდენიმე პირველი წევრი

$$U(q) = U(0) + q \left(\frac{dU}{dq}\right)_0 + \frac{q^2}{2!} \left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_0 + \frac{q^3}{3!} \left(\frac{d^3U}{dq^3}\right)_0 + \dots \quad (41,4)$$

$U(0) = \text{const}$  მნიშვნელობა არა აქვს, რადგან პოტენციალური ენერგია განსაზღვრულია მუდმივის სიზუსტით. თუ პოტენციალური ენერგიის ათვლას დავიწყებთ  $U(0)$ -დან, ეს უკანასკნელი შეგვიძლია ნულად ჩავთვალოთ. მდგრად წონასწორობაში მეორე წევრიც ნულის ტოლია, ამიტომ დავგრძელებ

$$U(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_0 q^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3U}{dq^3}\right)_0 q^3 + \dots \quad (41,5)$$

ჯერჯერობით შემოვისაზღვროთ კვადრატული გადახრებით. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$k = \left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_0 > 0, \quad (41,6)$$

ზოგილებთ

$$U(q) = \frac{kq^2}{2}. \quad (41,7)$$

სისტემას (ნაწილაკს), რომელიც ირხევა ასეთი პოტენციალური ენერგიით, ეწოდება წრფივი პარამონიული ოსცილატორი. რხევა პარამონიულია იმის გამო, რომ (41,7) პოტენციალური ენერგია სიმეტრიულია წონასწორობის წერტილის მიმართ  $U(q) = U(-q)$ . როგორც ვიცით, მოქმედი ძალა დაკავშირებულია პოტენციალურ ენერგიასთან ფორმულით  $F = -\frac{dU}{dq}$ . ჩვენს შემთხვევაში გვექმება  $F = -kq$ .

ჩვენ ვხედავთ, რომ მდგრადი წონასწორობიდან გამოყვანილ წერტილზე მოქმედ

დებს ძალა, რომელიც პრაქტიკულია გადაადგილებისა და მიმართულია მდგრადი წონასწორობის მდებარეობისაკენ. ასეთ ძალას დრეკადი ძალა ეწოდება.

წრფივი ჰარმონიული ოსცილატორი ფუნდამენტურ როლს ასრულებს ფიზიკის თითქმის ყველა დარგში. მექანიკაში იგი მნიშვნელოვანია იმდენად, რამდენადაც ნებისმიერი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის მცირე რხევები შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც წრფივ ოსცილატორთა ერთობლიობა.

ახლა შევადგინოთ ოსცილატორის ლაგრანჟის ფუნქცია. ამისათვის დაგვიკრძდება კინეტიკური ენერჯიის მოძებნა. განმარტებით კინეტიკურ ენერჯიას, ერთი თავისუფლების ხარისხის შემთხვევაში, განზოგადებულ კოორდინატებში აქვს სახე

$$T = \frac{a(q)}{2} \dot{q}^2. \quad (41,8)$$

$a(q)$  კოორდინატების ფუნქციაა, გავშალოთ იგივე წონასწორობის მახლობლად მწკრივად

$$a(q) = a(0) + \left( \frac{da}{dq} \right)_0 q + \dots \quad (41,9)$$

იმისათვის, რომ წონასწორობიდან გამოყვანილი ნაწილაკი დაუბრუნდეს საწყის მდებარეობას, საჭიროა  $q$  სიჩქარე მცირე სიდიდე იყოს, ამიტომ (41,9) გაშლაში თუ შევინარჩუნებთ მხოლოდ პირველ წევრს  $a(0)$ , კინეტიკური ენერჯია იმავე რიგის მცირე სიდიდე იქნება, როგორც პოტენციალური ენერჯია. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$a(0) = m. \quad (41,10)$$

მაშინ კინეტიკური ენერჯია მიიღებს სახეს

$$T = \frac{m\dot{q}^2}{2}. \quad (41,11)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა რხევა ხდება დეკარტის სისტემაში,  $m$  მასას წარმოადგენს, ზოგადად კი იგი რალაც მუდმივია.

ამგვარად, ოსცილატორის ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება მნიშვნელობა

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kq^2}{2}. \quad (41,12)$$

სანამ შესაბამის ლაგრანჟის განტოლებას დავწერდეთ, შევნიშნოთ, რომ ლაგრანჟიანი უცვლელი რჩება, თუ მოვახდენთ შეცვლას

$$\dot{q} = \pm i\omega_0 q, \quad (41,13)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (41,14)$$

მაშასადამე, ლაგრანჟიანი ინვარიანტული რჩება შემდეგი გარდაქმნისას:

$$\dot{q} = \pm i\omega_0 q \quad \text{და} \quad q = \pm \frac{1}{i\omega_0} \dot{q}. \quad (41,15)$$

წრფივი ჰარმონიული ოსცილატორის განტოლების ამონახსნების სხვადასხვა სახე. დავწეროთ ლაგრანჟის განტოლება

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (41,16)$$



აქედან, (41,12)-ის თანახმად, მივიღებთ ოსცილატორის რხევის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (41,17)$$

ამ განტოლების ამოხსნა ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$q = e^{st}, \quad (41,18)$$

შევიტანოთ (41,17) განტოლებაში და შედეგი შევკვეცოთ  $e^{st}$ -ზე, მივიღებთ

$$s^2 + \omega_0^2 = 0, \quad (41,19)$$

საიდანაც  $s = \pm i\omega_0$ . ხოლო ზოგადი ამონახსნისათვის ვეძებთ

$$q = C e^{i\omega_0 t} + D e^{-i\omega_0 t}. \quad (41,20)$$

$C$  და  $D$  ნებისმიერი, საზოგადოდ კომპლექსური, მუდმივებია. ] ცხადია, რომ  $q$  კოორდინატი ნამდვილი სიდიდეთა  $q = q^*$ , ამიტომ საჭიროა დაცული იყოს პირობა

$$C e^{i\omega_0 t} + D e^{-i\omega_0 t} = C^* e^{-i\omega_0 t} + D^* e^{i\omega_0 t}, \quad (41,21)$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ  $D = C^*$ . მაშასადამე, (41,20) ზოგადი ამონახსნი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$q(t) = C e^{i\omega_0 t} + C^* e^{-i\omega_0 t}. \quad (41,22)$$

(41,17) ამონახსნი სხვა ფორმითაც შეგვიძლია ჩავწეროთ. მართლაც, კომპლექსური  $C$  რიცხვი წარმოვიდგინოთ მოდულითა და არგუმენტით  $C = d e^{i\phi}$ , სადაც  $d$  და  $\phi$  ნამდვილი რიცხვებია. მაშინ (41,22) ასე გადაიწერება:

$$q(t) = d e^{i(\omega_0 t + \phi)} + d e^{-i(\omega_0 t + \phi)} \quad (41,23)$$

თუ შემოვიტანთ ახალ მუდმივს  $d = a/2$  და გავიხსენებთ ვილერის ფორმულას ზოგადი ამონახსნისათვის ვეძებთ შემდეგი წარმოდგენა

$$q(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi). \quad (41,24)$$

ცხადია, რომ (41,24) ეკვივალენტურია გამოსახულების

$$q(t) = b \sin(\omega_0 t + \beta). \quad (41,25)$$

ხშირად ხელსაყრელია (41,24) ამონახსნი წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახითაც:

$$q(t) = \operatorname{Re}(A e^{i\omega_0 t}), \quad (41,26)$$

სადაც  $A$  კომპლექსური მუდმივია, ხოლო  $\operatorname{Re}$  (Real) აღნიშნავს რეალური ნაწილის აღებას. მართლაც, თუ  $A$ -ს გამოვხატავთ  $A = a e^{i\phi}$  სახით, მაშინ (41,26) დაიყვანება (41,24) ამონახსნზე. სრულიად ანალოგიურად (41,25)-იც შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც

$$q(t) = \operatorname{Im}(B e^{i\omega_0 t}), \quad (41,27)$$

სადაც  $\operatorname{Im}$  (Imaginary) აღნიშნავს წარმოსახვითი ნაწილის აღებას, ცხადია, რომ  $B = b e^{i\beta}$  სახით წარმოდგენით (41,17) დაემთხვევა (41,26) ზოგად ამონახსნს.

აღვნიშნოთ, რომ გარკვეული მიზეზების გამო ექსპონენციალური ამონახსნებით სარგებლობა უფრო მოსახერხებელია, ვიდრე სინუსებით და კოსინუსებით, ამიტომ მთმავალში ზოგადი ამონახსნისათვის ვისარგებლებთ ფორმულით

$$q(t) = A e^{i\omega_0 t}, \quad (A = a e^{i\phi}) \quad (41,28)$$

ოღონდ უნდა გვახსოვდეს, რომ კოორდინატი ნამდვილია და, ამიტომ საბოლოო შედეგებში, ამონახსნიდან უნდა ავიღოთ ნამდვილი ან წარმოსახვითი ნაწილი.

შენიშნოთ, რომ ჩვენ მიერ სხვადასხვა ფორმით დაწერილი ზოგადი ამონახსნი შეიკავს ორ ნებისმიერ ნამდვილ მუდმივს, რომელთა განსაზღვრა შეიძლება საწყისი პირობებით, ე. ი.  $q(t)$  და  $\dot{q}(t)$  სიდიდეების მნიშვნელობებით  $t=0$  მომენტში.

ოსცილატორის სიხშირე, ფაზა, ამპლიტუდა და ენერგია. ჩვენ დაინახეთ, რომ წრფივი პარამნიული ოსცილატორი ირჩევა კანონით

$$q = a \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (41,29)$$

კოსინუსის მაქსიმალური მნიშვნელობა ერთის ტოლია, ამიტომ  $q_{max} = a$ , ე. ი.  $a$  ყოფილა მაქსიმალური გადახრა წონასწორობიდან, ამ სიდიდეს ამპლიტუდას უწოდებენ. სიდიდეს

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \alpha \quad (41,30)$$

რხევის ფაზა ეწოდება. ხოლო

$$\varphi(0) = \alpha \quad (41,31)$$

საწყისი ფაზა ჰქვია. რადგან კოსინუსი  $2\pi$  პერიოდის ფუნქციაა, ამიტომ რხევის პერიოდია

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (41,32)$$

ანღა

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \quad (41,33)$$

$\omega_0$ -ს რხევის წრიულ სიხშირეს უწოდებენ,  $\nu$ -ს კი — სიხშირეს. ჩვენ შემდგომში ვისარგებლებთ  $\omega_0$ -ით და მას, უბრალოდ, სიხშირეს ვუწოდებთ.

ახლა ვიპოვოთ ოსცილატორის ენერგია; აშკარაა, რომ ენერგიას ექნება სახე

$$E = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{kq^2}{2}, \quad (41,34)$$

რადგან  $\dot{q} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$ , ამიტომ სრული ენერგიისათვის მივიღებთ

$$E = \frac{ma^2\omega_0^2}{2}. \quad (41,35)$$

ამგვარად, ოსცილატორის ენერგია დამოკიდებულია სიხშირეზე და რხევის ამპლიტუდაზე.

აღსანიშნავია, რომ იგივე შედეგს მივიღებთ, თუ ნაცვლად ლაგრანჟის (41,16) განტოლებისა ამოვხსნით (41,15) განტოლებებს, რომლებიც წარმოადგენს პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებებს. |

დაბოლოს, მივუთითოთ ერთ მნიშვნელოვან გარემოებაზე. გამოსხივების თეორიაში გამომსხივებელი სხეული განიხილება როგორც დამუხტული ოსცილატორების ერთობლიობა. (41,35)-დან ჩანს, რომ ოსცილატორები ენერგიას გამოასხივებენ უწყვეტად. ეს გარემოება წინააღმდეგობაში აღმოჩნდა მთელ რიგ ექსპერიმენტულ ფაქტებთან. თეორიისა და ექსპერიმენტის შერაგების მიზნით პლანკმა შემოიღო ჰიპოთეზა, რომლის თანახმად ოსცილატორის (41,35) ფორმულით განსაზღვრულ ენერგია სინამდვილეს არ შეესაბამება და რომ ოსცილატორის ენერგია ტოლია

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega, \quad (41,36)$$

სადაც  $n=0, 1, 2, \dots$  მთელი დადებითი რიცხვია.  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-27}$  ერგი სეკ.

ე. წ. პლანკის მუდმივია.  $\hbar$ -ს უწოდებენ ენერჯის კვანტს. მაშასადამე, ოსცილატორის ენერჯია უწყვეტი კი არაა, არამედ წარმოადგენს კვანტების ჯერად სიდიდეს. ამ ჰიპოთეზამ საფუძველი ჩაუყარა თანამედროვე კვანტურ თეორიას.

#### § 42. ოსცილატორის იძულებითი რხევები

წინა პარაგრაფში განვიხილეთ ერთგანზომილებიანი ოსცილატორის მცირე რხევები. აღნიშნულ შემთხვევაში ოსცილატორზე გარეშე ძალა არ მოქმედებდა, ამიტომ ასეთ რხევებს თავისუფალი რხევები ეწოდება. როგორც დავინახეთ, თავისუფალი რხევების დროს წერტილზე მოქმედებს მხოლოდ დრეკადი ძალა, რომელიც გამოწვეულია რხევად სხეულში არსებულ ნაწილაკებს შორის კავშირებით.

ახლა განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როცა ოსცილატორი განიცდის გარეშე ძალის მოქმედებას, ე. ი. როცა ოსცილატორი იზოლირებული აღარ არის, ცხადია, არაიზოლირებული ოსცილატორისათვის ენერჯის შენახვის ადგილი აღარ ექნება. ჩვენ შემოვიღებთ ისევ მცირე რხევებით, ამიტომ შოვითხოვთ, რომ ოსცილატორზე მოქმედი გარეშე ძალა მცირე იყოს. ამგვარად ოსცილატორი, გარდა შინაგანი  $U(q)$  პოტენციალური ველისა, რომელიც დაკავშირებულია სისტემისათვის დამახასიათებელ დრეკად ძალასთან, განიცდის სუსტი გარეშე ველის მოქმედებასაც. დავუშვათ, გარეშე ძალის პოტენციალი არის  $V(q, t)$  და გავშალოთ იგი წონასწორობის  $q_0=0$  წერტილის მახლობლად მწკრივად

$$V(q, t) = V(0, t) + q \left( \frac{\partial V(q, t)}{\partial q} \right)_{q=0} + \dots + \quad (42,1)$$

ცხადია, რომ თუ ამ უკანასკნელ მწკრივში დავეკავშირდებით მხოლოდ პირველი ორი წევრით, მაშინ

$$- \left( \frac{\partial V(q, t)}{\partial q} \right)_{q=0} = F(t) \quad (42,2)$$

წარმოადგენს გარეშე ძალას წონასწორობის მახლობლად, დამოკიდებულს მხოლოდ  $t$  დროზე. რაც შეეხება  $V(0, t)$ -ს, იგი დროის ფუნქციაა და კოორდინატებზე და სიჩქარეებზე დამოკიდებული არ არის, ამიტომ ლაგრანჟის განტოლებაში არავითარ როლს არ შეასრულებს. ამგვარად, გარეშე ველის პოტენციალური ენერჯია განისაზღვრება სიდიდით

$$V(q, t) = -qF(t). \quad (42,3)$$

ლაგრანჟის ფუნქციისათვის კი მივიღებთ

$$L = \frac{mq^2}{2} - \frac{kq^2}{2} + qF(t). \quad (42,4)$$

ლაგრანჟის განტოლება მოგვცემს

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{m} F(t). \quad (42,5)$$

ამ განტოლებას ოსცილატორის იძულებითი რხევის განტოლება ეწოდება.

განვიხილოთ მეტად მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა, როცა გარეშე იძულებითი ძალა პერიოდულია და დროის ჰარმონიულ ფუნქციას წარმოადგენს

$$F(t) = d \cos(\omega t + \vartheta), \quad (42,6)$$

სადაც  $\omega$  იძულებითი ძალის რხევის სიხშირეა,  $d$  და  $\delta$  ამპლიტუდა და საწყისი ფაზა. (42,5) განტოლების ამოხსნის დროს ხელსაყრელია იძულებითი ძალა ასე წარმოვიდგინოთ:

$$F(t) = Re(De^{i\omega t}), \quad (42,7)$$

სადაც კომპლექსური ამპლიტუდა

$$D = de^{i\delta}. \quad (42,8)$$

იძულებითი რხევის (42,5) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{m} De^{i\omega t}, \quad (42,9)$$

აქასთან ამ განტოლებიდან მიღებული საბოლოო შედეგებიდან უნდა ავიღოთ რეალური ნაწილი.

იძულებითი რხევის განტოლება წარმოადგენს მეორე რიგის არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას. ცნობილია, რომ ასეთი განტოლების ამოხსნა წარმოადგენს ჯამს შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნისა და არაერთგვაროვანი განტოლების რომელიმე კერძო ამონახსნისა

$$q = q_0 + q_1, \quad (42,10)$$

სადაც  $q_0$  არის ამონახსნი

$$\ddot{q}_0 + \omega_0^2 q_0 = 0 \quad (42,11)$$

ერთგვაროვანი განტოლებისა,  $q_1$  კი წარმოადგენს (42,5)-ის კერძო ამონახსნს. ჩვენ ვიცით, რომ (42,11)-ის ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$q_0 = Ae^{i\omega_0 t}. \quad (42,12)$$

ამიტომ საკმარისია კერძო ამონახსნის მოძებნა. კერძო ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$q_1 = Be^{i\omega t}. \quad (42,13)$$

აქ  $B$  ისე უნდა განვსაზღვროთ, რომ (42,13)-მა დააკმაყოფილოს (42,9) განტოლება. შევიტანოთ ეს ამონახსნი (42,9)-ში.  $\exp(i\omega t)$ -ზე შეკვევის შემდეგ გვექნება

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) B = \frac{1}{m} D, \quad (42,14)$$

საიდანაც

$$B = \frac{D}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (42,15)$$

თვით კერძო ამონახსნისათვის გვექნება

$$q_1 = \frac{D}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}. \quad (42,16)$$

(42,9) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი კი იქნება

$$q = Ae^{i\omega_0 t} + \frac{D}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}. \quad (42,17)$$

ამგვარად, გარეშე იძულებითი ძალის მოქმედების პირობებში ოსცილატორი ორგვარ რხევას ასრულებს: პირველია პარზონიული რხევა, მეორე კი — იძულებითი. რეზონანსის მოვლენა. როცა გარეშე ძალის სიხშირე  $\omega$  მიისწრაფვის ოსცილატორის საკუთარი  $\omega_0$  სიხშირისაკენ, მაშინ იძულებითი რხევის ამპლიტუდა უსა-

სრულად იზრდება. ამ მოვლენას რეზონანსს უწოდებენ. ფიზიკურად ნათელია, რომ, ამპლიტუდა მართლაც უნდა იზრდებოდეს, მაგრამ არა ისე, რომ უსასრულოდ ტოლი ხდებოდეს. ამიტომ ცხადია, რომ  $\omega = \omega_0$  რეზონანსის წერტილში (42,17) ამოხსნა სხვანაირად უნდა ჩაიწეროს.

(42,17) ამონახსნში მუდმივები ისე შევცვალოთ, რომ ადგილი ჰქონდეს გამოსახულებას

$$q = A' e^{i\omega_0 t} + \frac{D'}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (e^{i\omega t} - e^{i\omega_0 t}). \quad (42,18)$$

ახლა უკვე, როცა  $\omega \rightarrow \omega_0$  მეორე წევრში გვაქვს განუსაზღვრელობა ნული ნულზე, რომლის გახსნა ლოპიტალის წესით მოგვცემს

$$q = A' e^{i\omega_0 t} + \frac{D'}{2m\omega_0} (-it) e^{i\omega_0 t}. \quad (42,19)$$

გადავიდეთ რეალურ ნაწილებზე; ნებისმიერი მუდმივების ხელახალი შერჩევით მივღებთ შემდეგ ზოგად ამონახსნს:

$$q = a' \cos(\omega_0 t + \alpha') + \frac{dt}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t + \beta). \quad (42,20)$$

აქედან ჩანს, რომ იძულებითი რხევის ამპლიტუდა დროის მიხედვით წარფივად იზრდება. იგი უსასრულოდ გახდება მხოლოდ  $t = \infty$ -სთვის, მაგრამ ამ შემთხვევაში რხევები მცირე აღარ იქნება და ჩვენი განხილვა საზოგადოდ აღარ იქნება სწორი.

ძგერა. გამოვარკვიოთ, როგორი სახე ექნება რხევას რეზონანსის უშუალო მახლობლობაში, როცა გარეშე ძალის  $\omega$  სიხშირე ოსცილატორის საკუთარი სიხშირისაგან მცირე სიდიდით განსხვავდება, ე. ი.

$$\omega - \omega_0 = \Omega. \quad (42,21)$$

სადაც  $\Omega$  მცირე სიდიდეა.

ამ შემთხვევაში ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$q = A e^{i\omega_0 t} + B e^{i(\omega_0 + \Omega)t}. \quad (42,22)$$

$B$  განსაზღვრულია (42,15) ფორმულით. (42,22) ამონახსნი შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ:

$$q(t) = C(t) e^{i\omega_0 t}, \quad (42,23)$$

სადაც

$$C(t) = A + B e^{i\Omega t}, \quad (42,24)$$

(42,23)-დან ჩანს, რომ რეზონანსის მახლობლად რხევა კვლავ შეგვიძლია მცირე რხევად ჩავთვალოთ, ოღონდ ამპლიტუდა წარმოადგენს დროის ფუნქციას. აღსანიშნავია, რომ ამპლიტუდა დროის მიხედვით ნელა ცვლადი ფუნქცია იქნება  $\Omega$ -ს სიმცირის გამო. ვიპოვოთ  $C(t)$  ამპლიტუდის ცვლილების საზღვრები. გვაქვს

$$|C(t)|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2 \operatorname{Re}(AB^* e^{-i\Omega t}). \quad (42,25)$$

შევიტანოთ  $C(t) = c(t) e^{i\gamma}$ ,  $A = a e^{i\alpha}$  და  $B = b e^{i\beta}$ . მივიღებთ

$$|c(t)|^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\Omega t + \beta - \alpha), \quad (42,26)$$

საიდანაც აშკარაა, რომ

$$(a - b)^2 \leq c^2 \leq (a + b)^2. \quad (42,27)$$

ამგვარად, რეზონანსის მახლობლად ამპლიტუდა პერიოდულად იცვლება შუალედში

$$|a - b| \leq c \leq a + b. \quad (42,28)$$

ამ მოვლენას ძვერას უწოდებენ, რხევის  $\Omega = \omega - \omega_0$  სიხშირეს კი — ძვერის სიხშირეს.

### § 43. იძულებითი რხევები ნებისმიერი გარეშე ძალის შემთხვევაში

ახლა განვიხილოთ მცირე იძულებითი რხევები ნებისმიერ გარეშე დროზე დამოკიდებული ძალის შემთხვევაში. ამოსახსნელია განტოლება

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{m} F(t). \quad (43,1)$$

ამ განტოლების შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას აქვს ზოგადი ამონახსნი

$$q(t) = A e^{i\omega_0 t}, \quad (43,2)$$

სადაც  $A$  კომპლექსური ამპლიტუდაა. (43,1)-ის კერძო ამონახსნი ვეძებთ მუდმივის ვარიაციის მეთოდით. ჩავთვალოთ, რომ (43,2) გამოსახულებაში  $A = A(t)$  დროის ფუნქციაა და ვიპოვოთ წარმომებულები:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \dot{A} e^{i\omega_0 t} + i\omega_0 A e^{i\omega_0 t}, \\ \ddot{q} &= (\ddot{A} + 2i\omega_0 \dot{A} - \omega_0^2 A) e^{i\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (43,3)$$

ეს წარმომებულები შევიტანთ (43,1) განტოლებაში; მივიღებთ

$$\ddot{A} + 2i\omega_0 \dot{A} = \frac{1}{m} F(t) e^{-i\omega_0 t}. \quad (43,4)$$

რომელიც შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ:

$$\frac{d}{dt} (\dot{A} + 2i\omega_0 A) = \frac{1}{m} F(t) e^{-i\omega_0 t}; \quad (43,5)$$

ამ განტოლების ინტეგრაციით მივიღებთ

$$\dot{A} + 2i\omega_0 A = \frac{1}{m} \int_0^t F(t') e^{-i\omega_0 t'} dt' + C, \quad (43,6)$$

სადაც  $C$  ნებისმიერი მუდმივია. (43,2) და (43,3) ფორმულების გათვალისწინებით გვექნება

$$\dot{q} + i\omega_0 q = \frac{1}{m} e^{i\omega_0 t} \int_0^t F(t') e^{-i\omega_0 t'} dt'. \quad (43,7)$$

დავეშვათ, რომ საწყის მომენტში  $t=0$ , როგორც  $q$ , ისე  $\dot{q}$  ნულის ტოლია, მაშინ (43,7)-ში  $C=0$  და მივიღებთ

$$\dot{q} + i\omega_0 q = \frac{1}{m} e^{i\omega_0 t} \int_0^t F(t') e^{-i\omega_0 t'} dt'. \quad (43,8)$$

ამ განტოლების დამატებით, ინტეგრაცია საკურო ალარაა, რამდენადაც მისი სა-  
შუალებით ვიპოვით როგორც  $q$ -ს, ისე  $\dot{q}$ -სა და ენერჯიას. (43,8) განტოლება გა-  
დაეწეროთ შემდეგნაირად:

$$\ddot{q} + i\omega_0 q = \frac{1}{m} \int_0^t F(t') e^{i\omega_0(t-t')} dt', \quad (43,9)$$

საიდანაც ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების გატოლებით მივიღებთ

$$q(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t F(t') \sin[\omega_0(t-t')] dt', \quad (43,10)$$

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{m} \int_0^t F(t') \cos[\omega_0(t-t')] dt'. \quad (43,11)$$

ამგვარად, ვიპოვეთ კერძო ამონახსნი ნებისმიერი  $F(t)$  ძალის შემთხვევაში. ზოგა-  
ლი ამონახსნის მისაღებად საკუროა (43,10)-ს დაეუმატოთ (43,11)-ის შესაბამისი  
ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, რომელიც  $q_0(t)$ -ით აღვნიშნოთ.  
(43,1) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:

$$q(t) = q_0(t) + \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0(t-t') F(t') dt'. \quad (43,12)$$

ამ ამონახსნს ის თვისება აქვს, რომ იგი  $t=0$  მომენტში ტოლია  $q_0(0)$ -ის, ხოლო  
მისი დროითი წარმოებული  $\dot{q}_0(0)$ -ის. პირველი პირობა ავტომატურად უზრუნ-  
ველყოფილია ინტეგრალის საზღვრებით, მეორის დასამტკიცებლად კი საკმარისია  
(43,12) გავაწარმოოთ დროითი; გვექნება

$$\dot{q}(t) = \dot{q}_0(t) + \frac{1}{m\omega_0} \sin[\omega_0(t-t')] F(t') |_{t'=t} \quad (43,13)$$

საიდანაც, მართლაც, ჩანს, რომ  $[\dot{q}(t)]_0 = [\dot{q}_0(t)]_0$ . ამგვარად, (43,12) ზოგად ამო-  
ხსნში გათვალისწინებულია შემდეგი საწყისი პირობები:

$$q(t) = q_0(t); \quad \dot{q}(t) = \dot{q}_0(t), \quad \text{როცა } t=0. \quad (43,14)$$

როგორც ვხედავთ, აქ გვაქვს შერჩეული სპეციალური საწყისი პირობები. საწყისი  
კოორდინატი და სიჩქარე რალაც ნებისმიერი სიდიდეებით კი არ განისაზღვრება,  
არამედ (43,1)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნისა და  
მისი დროითი წარმოებულის მნიშვნელობით  $t=0$  მომენტში.

შეენიშნოთ, რომ გამოსახულებას, რომელიც შედის (43,12)-ში

$$G(t, t') = \frac{\sin[\omega_0(t-t')]}{m\omega_0} \quad (43,15)$$

უწოდებენ (43,1) განტოლების გრინის ფუნქციას და, მაშასადამე, (43,1) დიფე-  
რენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი ამ ფუნქციის დახმარებით ასე გამო-  
იხატება:

$$q(t) = \int_0^t G(t, t') F(t') dt'. \quad (43,16)$$

ახლა ვიზოვით ენერგია. ცხადია, რომ ენერგია სისტემისა, რომელიც განიცდის დროზე დამოკიდებული გარეშე  $F(t)$  ძალის მოქმედებას, არ ინახება. გარეშე ძალის მოქმედებით ოსცილატორი უწყვეტად იძენს ენერგიას. გამოვთვალოთ ეს ენერგია. ამასთან, რადგან საწყისი პირობის თანახმად  $t=0$  მომენტში  $q=\dot{q}=0$ , ამიტომ ოსცილატორის სრული ენერგია

$$E = \frac{m}{2} (\dot{q}^2 + \omega_0^2 q^2) \quad (43,17)$$

ნულის ტოლი იქნება. (43,9) ფორმულის თანახმად  $t$  დროის განმავლობაში ოსცილატორის მიერ შექმნილი ენერგია ტოლი იქნება გამოსახულების

$$E = \frac{m}{2} |(\dot{q} + i\omega_0 q)|^2 = \frac{1}{2m} \left| \int_0^t F(t') e^{-i\omega_0 t'} dt' \right|^2. \quad (43,18)$$

გამოვთვალოთ ის ენერგია, რომელიც ოსცილატორმა შეიძინა ძალის მოქმედებით 0-დან  $t=\infty$  დროის განმავლობაში. ამისათვის საკმარისია (43,18)-ში ავიღოთ  $t=\infty$ . გარდა ამისა, ინტეგრალის ქვედა საზღვარი შეგვიძლია გავაგრძელოთ  $t=-\infty$ -მდე, რამდენადაც  $t < 0$  მომენტში  $F(t)$  სულ ერთია ნულის ტოლია. ამგვარად, საძიებელი ენერგიისათვის მივიღებთ

$$E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega_0 t} dt \right|^2. \quad (43,19)$$

გავიხსენოთ  $F(t)$  ფუნქციის წარმოდგენა ფურიეინტეგრალად

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (43,20)$$

სადაც ფურიეკომპონენტი განისაზღვრება შემდეგი ინტეგრალით:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (43,21)$$

მაშასადამე, (43,19) ენერგიისათვის გვექნება

$$E = \frac{1}{2m} |f(\omega_0)|^2, \quad (43,22)$$

სადაც  $f(\omega_0)$  არის  $F(t)$  ძალის ფურიეკომპონენტი, რომელიც შეესაბამება ოსცილატორის საკუთარ  $\omega_0$  სიხშირეს.

ახლა ვთქვათ, რომ  $\omega_0 t \ll 1$ , მაშინ ისეთ მცირე დროში, რომლისთვისაც დაეულება პირობა  $t \ll \frac{1}{\omega_0}$ , ექსპონენტი  $e^{-i\omega_0 t}$  შეგვიძლია შევცვალოთ ერთიანით  $e^{-i\omega_0 t} \approx 1$ ; შედეგად, ენერგიისათვის გვექნება

$$E = \frac{1}{2m} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt \right)^2, \quad (43,23)$$

საიდანაც ჩანს, რომ, თუ ძალა მოქმედებს დროის ძალიან მცირე შუალედში, იგი ოსცილატორს ანიჭებს იმპულსს  $\int F(t) dt$ .



ახლა ვაჩვენოთ, რომ კერძო შემთხვევაში, როცა ძალა დრთის პერიოდული ფუნქციაა, მიიღება წინა პარაგრაფში განხილული შედეგები. ვთქვათ ძალას აქვს (42,7) სახე, შევიტანოთ იგი (43,10) ამონახსნში; მივიღებთ

$$q = \frac{D}{m\omega_0} \int_0^t e^{i\omega t'} \sin[\omega_0(t-t')] dt'. \quad (43,24)$$

ამასთან, იგულისხმება, რომ საბოლოო შედეგებში უნდა ავიღოთ რეალური ნაწილი. შემოვიღოთ ამ ინტეგრალში ახალი ცვლადი  $t-t'=x$ ; გვექნება

$$q = \frac{D}{m\omega_0} e^{i\omega t} \int_0^t e^{-i\omega x} \sin \omega_0 x dx. \quad (43,25)$$

ინტეგრაცია მოგვცემს

$$q = \frac{D}{m\omega_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} [-i\omega \sin \omega_0 t - \omega_0 \cos \omega_0 t + \omega_0 e^{i\omega t}]. \quad (43,26)$$

რეალურ ნაწილზე გადასვლით კერძო ამონახსნისათვის საბოლოოდ მივიღებთ გამოსახულებას

$$q = \frac{d}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[ -\cos \omega_0 t \cos \delta + \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \sin \delta + \cos(\omega t + \delta) \right]. \quad (43,27)$$

ზღვარში, როცა  $\omega \rightarrow \omega_0$  მივიღებთ განუზღვრელობას 0/0. გავხსნათ იგი ლოპიტალის წესით; გვექნება

$$q = \frac{d}{-2m\omega_0} \left[ \frac{\sin \omega_0 t \sin \delta}{\omega_0} - t \sin(\omega_0 t + \delta) \right]. \quad (43,28)$$

მაშასადამე, კერძო ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$q = \frac{dt}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t + \delta) - \frac{d \sin \delta}{2m\omega_0^2} \sin \omega_0 t. \quad (43,29)$$

მეორე განსხვავებული წევრი გაგვიჩნდა განსხვავებული საწყისი პირობების გამო. იგი შეიძლება გავაერთიანოთ ზოგად ამონახსნთან. როგორც ეხედავთ, (43,29) ამპლიტუდა უსასრულობა არ ხდება დროის სასრულ მონაკვეთში.

#### § 4.4. ნაწილაკთა სისტემის მცირე რხევები

ზემოთ ჩვენ შემოვიხილავთ ისეთი რხევებით, როცა სისტემას ახასიათებდა ერთი თავისუფლების ხარისხი. ახლა განვიხილოთ სისტემა მრავალი თავისუფლების ხარისხით. ვთქვათ, ასეთი სისტემა აწარმოებს მცირე რხევებს წონასწორობის მახლობლობაში. ამჟამად, რადგან სისტემის წონასწორობისათვის საჭიროა ყოველ  $i$ -ურ ნაწილაკზე მოქმედი განზოგადებული ძალის ნულთან ტოლობა, სისტემის წონასწორობისათვის საჭიროა დაცული იყოს პირობა

$$\left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_{q_i=q_0} = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (44,1)$$

$n$  სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვია,  $q_{i0}$  ( $q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0$ ) წონასწორობის მდებარეობის კოორდინატებია; ისინი განისაზღვრება (44,1) განტოლებებიდან. ზოგალობის დაურღვეველად ვიგულისხმობთ, რომ  $q_{i0} = 0$ . ამას მივალწვეთ, თუ განზო-

გადებულ კოორდინატა სისტემის სათავეს მოვათავსებთ წონასწორობის წერტილში ( $n$  განზომილებიან სივრცეში).

პოტენციალური ენერგია გავშალოთ მწკრივად წონასწორობის წერტილის მახლობლად და შემოვასახვროთ მხოლოდ კვადრატული წევრებით

$$U = U(0) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 q_i q_k + \dots \quad (44,2)$$

წონასწორობის წერტილში დატულია (44,1) პირობა, ამიტომ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\gamma_{ik} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 = \gamma_{ki} \quad (44,3)$$

და მივიღებთ, რომ  $U(0) = 0$ , გვექნება

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} q_i q_k. \quad (44,4)$$

ახლა ვიპოვოთ კინეტიკური ენერგია. განმარტებით სისტემის კინეტიკურ ენერგიას განზოგადებულ კოორდინატებში შემდეგი სახე აქვს:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k. \quad (44,5)$$

გავშალოთ მწკრივად  $a_{ik}(q)$  ფუნქციაც წონასწორობის წერტილში

$$a_{ik}(q) = a_{ik}(0) + \sum_j \left( \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \dots \quad (44,6)$$

თუ ამ გაშლაში შემოვიასახვრებთ მხოლოდ  $a_{ik}(0)$  წევრით, მაშინ კინეტიკურ ენერგიაში იმავე რიგის მცირე სიდიდეებთან გვექნება საქმე, რაც პოტენციალურ ენერგიაში. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$a_{ik}(0) = m_{ik} = \text{const}. \quad (44,7)$$

$a_{ik}$  კოეფიციენტის (20,6) განმარტება გვიჩვენებს, რომ ყოველთვის შეგვიძლია ვივულისხმოთ

$$m_{ik} = m_{ki}. \quad (44,8)$$

ამგვარად, კინეტიკურ ენერგიას მცირე რხევებისათვის ექნება შემდეგი სახე:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k. \quad (44,9)$$

კინეტიკური ენერგია ასევე დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმა იქნება. ლაგრანჟიანისათვის კი მივიღებთ გამოსახულებას

$$L = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \gamma_{ik} q_i q_k. \quad (44,10)$$

ახლა საჭიროა შევადგინოთ ლაგრანჟის განტოლებები. თუ გავითვალისწინებთ  $m_{ik}$  სიმბოლოს თვისებას, გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_j} &= \frac{1}{2} \sum_{ik} m_{ik} \frac{\partial q_i}{\partial q_j} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum m_{ik} q_i \frac{\partial q_k}{\partial q_j} = \\ &= \frac{1}{2} \sum m_{ik} \delta_{ij} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{ik} m_{ik} \dot{q}_i \delta_{kj} = \frac{1}{2} \sum_k m_{ik} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_i m_{ij} \dot{q}_i. \end{aligned} \quad (44,11)$$

რადგან  $m_{ik} = m_{ki}$ , ამიტომ ბოლო ორი ჯამი ერთმანეთის ტოლია. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ მეორე ჯამის ინდექსად  $i$ -ს ნაცვლად დავწერტ  $k$ -ს. ამგვარად,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_k m_{ik} \dot{q}_k. \quad (44,12)$$

ახლა ვიპოვოთ  $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ . ცხადია, რომ რამდენადაც  $\gamma_{ik}$ -ც სიმეტრიულია ინდექსების გადასმის მიმართ, სრულიად ანალოგიურად მივიღებთ

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = - \sum_k \gamma_{ik} q_k. \quad (44,13)$$

ამის შემდეგ ლაგრანჟის განტოლებების შედგენა ადვილია. ავიღოთ დროითი წარმოებული (44,12)-დან და მას გამოვავლოთ (44,13) გამოსახულება. გვექნება

$$\sum_k (m_{ik} \ddot{q}_k + \gamma_{ik} q_k) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (44,14)$$

მივიღებ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა მუდმივ კოეფიციენტებით. გაშლილად ეს სისტემა ასე დაიწერება:

$$\begin{aligned} m_{11} \ddot{q}_1 + m_{12} \ddot{q}_2 + \dots + m_{1n} \ddot{q}_n + \gamma_{11} q_1 + \gamma_{12} q_2 + \dots + \gamma_{1n} q_n &= 0, \\ m_{21} \ddot{q}_1 + m_{22} \ddot{q}_2 + \dots + m_{2n} \ddot{q}_n + \gamma_{21} q_1 + \gamma_{22} q_2 + \dots + \gamma_{2n} q_n &= 0, \end{aligned} \quad (44,15)$$

$$\dots$$

$$m_{n1} \ddot{q}_1 + m_{n2} \ddot{q}_2 + \dots + m_{nn} \ddot{q}_n + \gamma_{n1} q_1 + \gamma_{n2} q_2 + \dots + \gamma_{nn} q_n = 0.$$

ამ სისტემის კერძო ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$q_k = A_k e^{i\omega t}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (44,16)$$

სადაც  $A_k$  და  $\omega$  ჩერჩეობით უცნობებია. ისინი ისე უნდა შეიჩრეს, რომ დაკმაყოფილდეს დიფერენციალური განტოლება. (44,16)-ის (44,14) განტოლებებში შეტანით მივიღებთ შემდეგ ალგებრულ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას:

$$\sum_k (\gamma_{ik} - \omega^2 m_{ik}) A_k = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (44,17)$$

არატრივიალური ამოხსნების მისაღებად აუცილებელია სისტემის დეტერმინანტის ნულთან ტოლობა, ე. ო.

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} - \omega^2 m_{11} & \gamma_{12} - \omega^2 m_{12} & \dots & \gamma_{1n} - \omega^2 m_{1n} \\ \gamma_{21} - \omega^2 m_{21} & \gamma_{22} - \omega^2 m_{22} & \dots & \gamma_{2n} - \omega^2 m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} - \omega^2 m_{n1} & \gamma_{n2} - \omega^2 m_{n2} & \dots & \gamma_{nn} - \omega^2 m_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (44,18)$$

ამ განტოლებას საუკუნეობრივ განტოლებას უწოდებენ. რადგან იგი წარმოადგენს  $\omega^2$ -ის მიმართ „ხარისხის განტოლებას, ამიტომ მას საზოგადოდ ექნება  $n$  ერთ-მანეთისაგან განსხვავებული ფესვი

$$\omega^2 = \omega_\alpha^2 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (44,19)$$

$\omega = \omega_\alpha$ -ს ეწოდება სისტემის საკუთარი სიხშირე. ვიპოვიოთ რა (44,8) საუკუნეობრივი განტოლების ამონახსნებს:  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$  და შევიტანოთ მას (44,7)-ში, მივიღებთ  $n$  რაოდენობის განტოლებათა სისტემას:

$$\sum_{k=1}^n (\gamma_{ik} - \omega_\alpha^2 m_{ik}) A_k^{(\alpha)} = 0. \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (44,20)$$

დავამტკიცოთ, რომ საუკუნეობრივი განტოლების ფესვები ნამდვილი სიდიდეებია, ამისათვის (44,17) განტოლება გავამრავლოთ  $A_i^*$  და ავჯამოთ  $i$ -თი. გვექნება

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i,k} m_{ik} A_k A_i^*}{\sum_{i,k} \gamma_{ik} A_k A_i^*}. \quad (44,21)$$

ამ გამსახვლების როგორც მრიცხველი, ისე მნიშვნელი ნამდვილი სიდიდეებია. მართლაც, დავამტკიცოთ ჯერ, რომ მრიცხველი ნამდვილია. ამისათვის ავიღოთ მისი კომპლექსურად შეუღლებული, რის შემდეგ ჯამში  $i$  შევცვალოთ  $k$ -თი და გავითვალისწინოთ  $m_{ik} = m_{ki}$  ტოლობა

$$\left( \sum_i \sum_k m_{ik} A_k A_i^* \right)^* = \sum_k \sum_i m_{ki} A_i^* A_k = \sum_{i,k} m_{ik} A_k A_i^*. \quad (44,22)$$

ასევე დამტკიცდება მნიშვნელის ნამდვილობაც; ასე რომ, მართლაც,  $(\omega^2)^* = \omega^2$ .

როგორც ცნობილია, როცა (44,10) სისტემის უველა ფესვი განსხვავებულია ერთმანეთისაგან, ამ სისტემის  $A_k^{(\alpha)}$  ამონახსნები პროპორციულია (44,8) დეტერმინანტის მინორების, რომლებშიაც  $\omega$  შეცვლილია საკუთარი  $\omega_\alpha$  სიხშირეებით. აღნიშნოთ ეს მინორები  $\Delta_{k\alpha}$ -თი. მაშინ

$$A_k^{(\alpha)} = a \Delta_{k\alpha}, \quad (k, \alpha = 1, 2, \dots, n)$$

სადაც  $a$  არის მუდმივი.

ამგვარად, დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნისათვის გვექნება (იხ. (44,16))

$$q_k^{(\alpha)} = \Delta_{k\alpha} D_\alpha e^{i\omega_\alpha t} \quad (k, \alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (44,23)$$

აქ  $D_\alpha$  ნებისმიერი კომპლექსური კოეფიციენტებია. განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნი კი კერძო ამონახსნების ჯამი იქნება; ამასთან, თუ გადავალთ რეალურ ნაწილზე, მივიღებთ

$$q_k = \operatorname{Re} \left( \sum_{\alpha=1}^n \Delta_{k\alpha} D_\alpha e^{i\omega_\alpha t} \right). \quad (44,24)$$

აქედან კი ჩანს, რომ თითოეული კოორდინატის ცვლილება შეესაბამება მოძრაობას, რომელიც წარმოადგენს  $n$  პარამონიული რხევის სუპერპოზიციას საკუთარი  $\omega_\alpha$  სიხშირით.

რადგან  $\Delta_{k\alpha}$  მინორები ნამდვილი რიცხვებია, ამიტომ

$$q_k = \sum_{\alpha=1}^n \Delta_{k\alpha} \operatorname{Re}(D_\alpha e^{i\omega_\alpha t}). \quad (44,25)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$Q_\alpha = \operatorname{Re}(D_\alpha e^{i\omega_\alpha t}), \quad (44,26)$$

მაშინ

$$q_k = \sum_{\alpha=1}^n \Delta_{k\alpha} Q_\alpha. \quad (44,27)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ მოძრაობა, რომელიც შეესაბამება თითოეული განზოგადებული  $q_k$  კოორდინატის ცვლილებას, წარმოადგენს  $n$  მარტივი ჰარმონიული  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  რხევების შეკრების შედეგს. ამ რხევების ფაზა და ამპლიტუდა ნებისმიერია, სისწორე კი სავსებით განსაზღვრული სიდიდეა.

ნორმალური კოორდინატებით. ადვილია იმის ჩვენება, რომ შეიძლება განზოგადებული კოორდინატების ისე შერჩევა, რომ თითოეული მათგანი ასრულებდეს თითო მარტივ რხევას. ამისათვის საკმარისია (44,27) განვიხილოთ როგორც განტოლებათა სისტემა  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  სიდიდეების მიმართ. ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით მიღებული  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  შეგვიძლია განვიხილოთ ახალ განზოგადებულ კოორდინატებად. ამ კოორდინატებს ნორმალური კოორდინატები ჰქვია, მათ ჰარმონიულ რხევებს კი — მთავარი რხევებუ. (44,26) ფორმულიდან ნათელია, რომ ნორმალური კოორდინატები აკმაყოფილებენ ჰარმონიული რხევების განტოლებას

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = 0. \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (44,28)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ნორმალური კოორდინატების შემოღებით მოძრაობის განტოლებათა სისტემა იშლება ერთმანეთზე დამოუკიდებელ  $n$  განტოლებად, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი ნორმალური რხევა ისე შეგვიძლია ვიპოვოთ, რომ არ ვიცოლოთ დანარჩენი.

ნორმალური კოორდინატების მთავარი მნიშვნელობა სწორედ იმაში მდგომარეობს, რომ რხევები ერთმანეთზე დამოუკიდებელია.

ამგვარად, ნებისმიერი თავისუფლების ზარისხის მქონე სისტემის მცირე რხევები დაიყვანება  $n$  საკუთარი სისწორეებისა და  $Q_\alpha$  ნორმალური კოორდინატების მოძებნაზე, ნორმალური კოორდინატებზე გადასვლით სისტემის რხევა შეგვიძლია დავიყვანოთ  $n$  დამოუკიდებელ წრფივ ჰარმონიულ ოსცილატორის რხევაზე.

ნორმალურ კოორდინატებს დიდი გამოყენება აქვს ფიზიკისა და ტექნიკის სხვადასხვა დარგებში. მაგალითად, მრავალატომიან მოლეკულათა და კრისტალთა თეორიაში, ელექტროდინამიკაში და სხვა.

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ ნორმალურ კოორდინატებზე გადასვლა შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ სხვა სახითაც. ჩვენ გვაქვს ორი კვადრატული ფორმა: კინეტიკური ენერჯიისა

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

და პოტენციალური ენერჯიისა

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \gamma_{ik} q_i q_k.$$

მათემატიკიდან ცნობილია, რომ როცა ერთ-ერთი ფორმა დადებითადაა განსაზღვრული<sup>1</sup>, მაშინ ყოველთვის შეგვიძლია მოვძებნოთ კოორდინატების ისეთი გარდაქმნა, რომ ორივე ამ ფორმამ ერთდროულად კანონიკური სახე მიიღოს, ე. ი. ფორმაში შევიღეს მხოლოდ კვადრატული წევრები. მაშასადამე, კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიები მიიღებენ შემდეგ მარტივ სახეს:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_s \dot{Q}_s^2, \quad (44,29)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum k_s Q_s^2, \quad (44,30)$$

სადაც  $m_s$  და  $k_s$  დადებითი მუდმივებია. თუ შემოვიღებთ ახალ ნორმალურ კოორდინატებს, რომლებიც ძველებთან დაკავშირებულნი არიან ფორმულით  $Q_s = \sqrt{m_s} q_s$ , მაშინ ლაგრანჟის განტოლება ამ ახალ კოორდინატებში მოგვეცემს

$$\ddot{Q}_s + \omega_s^2 Q_s = 0, \quad (s=1, 2, \dots, n) \quad (44,31)$$

ე. ი. ნორმალური რხევების განტოლებებს.

#### § 45. ამპლიტუდების ნორმირებისა და ორთოგონალურობის პირობა

ახლა გამოვიყვანოთ ზოგადი თანაფარდობები, რომლებიც დიდ როლს ასრულებენ  $q$  განზოგადებული კოორდინატებიდან  $Q$  ნორმალურ კოორდინატებზე გადასვლის დროს. დაემატიკოთ, რომ  $A_k^{(\alpha)}$  ამპლიტუდები, რომლებიც წარმოადგენენ

$$\sum_{k=1}^n (\gamma_{ik} - m_{ik} \omega_\alpha^2) A_k^{(\alpha)} = 0 \quad (45,1)$$

განტოლებათა სისტემის ამოხსნას, გარკვეულ პირობებს აკმაყოფილებენ. დაეწეროთ (45,1) განტოლება  $\omega_\beta$ -ის შესაბამისი ამპლიტუდებისათვისაც

$$\sum_{k=1}^n (\gamma_{ik} - m_{ik} \omega_\beta^2) A_k^{(\beta)} = 0. \quad (45,2)$$

პირველი განტოლება გაემარაგოთ  $A_i^{(\beta)}$ , მეორე  $A_i^{(\alpha)}$ -ზე, თითოეული აეჯამოთ  $i$ -თ და პირველს გამოვაკლოთ მეორე. გვექნება

$$\sum_{i,k} [\gamma_{ik} A_i^{(\beta)} A_k^{(\alpha)} - \gamma_{ik} A_i^{(\alpha)} A_k^{(\beta)} - m_{ik} \omega_\alpha^2 A_i^{(\beta)} A_k^{(\alpha)} + m_{ik} \omega_\beta^2 A_i^{(\alpha)} A_k^{(\beta)}] = 0. \quad (45,3)$$

ამ გამოსახულებაში პირველი ორი წევრი ერთმანეთს აბათილებს. მართლაც, თუ პირველ წევრში  $i$ -ს შევცვლით  $k$ -თა და პირიქით, ამით, აშკარაა, ჯამის მნიშვნელობა არ შეიცვლება, რადგან  $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$ , მაშინ პირველი წევრი დაემთხვევა მეორე წევრს. ამგვარად, (45,3) გამოსახულებიდან დაგვრჩება

<sup>1</sup> ნამდვილ კვადრატულ ფორმას ეწოდება დადებითად (უარყოფითად) განსაზღვრული, თუ ნებისმიერი ნამდვილი  $q_1, q_2, \dots, q_n$  მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც ერთდროულად ნულს არ უტარან, ამ ფორმას აქვს დადებითი (უარყოფითი) მნიშვნელობა.

$$\sum_{i,k} m_{ik} \omega_{\beta}^2 A_i^{(\alpha)} A_k^{(\beta)} - \sum_{i,k} m_{ik} \omega_{\alpha}^2 A_i^{(\beta)} A_k^{(\alpha)} = 0. \quad (45,4)$$

რადგან  $m_{ik} = m_{ki}$ , ამიტომ მეორე ჯამში ინდექსების შეცვლით  $i \rightleftharpoons k$  მივიღებთ

$$(\omega_{\beta}^2 - \omega_{\alpha}^2) \sum_{i,k=1}^n m_{ik} A_i^{(\alpha)} A_k^{(\beta)} = 0. \quad (45,5)$$

რთცა  $\alpha \neq \beta$ , მაშინ  $\omega_{\beta}^2 - \omega_{\alpha}^2 \neq 0$ , და გვქვამება<sup>1</sup>

$$\sum_{i,k} m_{ik} A_i^{(\alpha)} A_k^{(\beta)} = 0. \quad (45,6)$$

ამ პირობას ამპლიტუდათა ორთოგონალობის პირობა ეწოდება. რთცა  $\alpha = \beta$ , (45,5)-ში ჯამი ნებისმიერია. რადგან  $A_i$  ამპლიტუდები ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემის ამონახსნებია, ამიტომ ისინი ისე შეგვიძლია შევარჩიოთ, რომ ეს ნებისმიერი სიდიდე ერთის ტოლი გავხადოთ, მაშინ

$$\sum_{i,k} m_{ik} A_i^{(\alpha)} A_k^{(\alpha)} = 1. \quad (45,7)$$

ამ პირობას ამპლიტუდების ნორმირების პირობას უწოდებენ.  $\partial_{ik}$  სიმბოლოს დახმარებით (45,6) და (45,7) ერთად ასე ჩაიწერება:

$$\sum_{ik} m_{ik} A_i^{(\alpha)} A_k^{(\alpha)} = \partial_{\alpha\beta}. \quad (45,8)$$

ამ პირობას კი ამპლიტუდების ორთო-ნორმირების პირობა ეწოდება.

ახლა გავამრავლოთ (45,1) განტოლება  $A_i^{(\beta)}$ -ზე და ავჯამოთ  $i$ -თი, მივიღებთ

$$\sum_i \sum_k \gamma_{ik} A_i^{(\beta)} A_k^{(\alpha)} = \sum_i \sum_k m_{ik} \omega_{\alpha}^2 A_i^{(\beta)} A_k^{(\alpha)}. \quad (45,9)$$

თუ გავითვალისწინებთ (45,8) ორთო-ნორმირების პირობას, მივიღებთ კიდევ ერთ მნიშვნელოვან დამოკიდებულებას:

$$\sum_{ik} \gamma_{ik} A_i^{(\alpha)} A_k^{(\beta)} = \omega_{\alpha}^2 \partial_{\alpha\beta}. \quad (45,10)$$

მიღებული პირობები დიდ როლს ასრულებენ პრაქტიკული მაგალითების გადაწყვეტის დროს.

#### § 46. ლაბრანჟის ფუნქცია ნორმალურ კოორდინატებში

ამ პარაგრაფში ჩვენს მიზანს შეადგენს სისტემის მცირე რხევების ლაგრანჟიანის გამოსახვა ნორმალურ კოორდინატებში როგორც თავისუფალი, ისე ძილებითი რხევებისათვის. ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ  $A_i^{(\alpha)}$  კოეფიციენტები პროპორციულია  $\Delta_{i\alpha}$  მინორების, ე. ი.  $A_k^{(\alpha)} = a \Delta_{k\alpha}$ , სადაც  $a$  ნებისმიერი მუდმივია. ვინაიდან  $A_k^{(\alpha)}$  კოეფიციენტები ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემას აკმაყოფილებს, შეიძლება მივიღოთ  $a=1$ , ამიტომ (44,27) მიიღებს სახეს:

<sup>1</sup> ყველგან ეგულისხმობთ, რომ ყველა  $\omega_{\alpha}$  საკუთარი სიხშირე ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

$$q_i = \sum_{\alpha=1}^n A_i^{(\alpha)} Q_{\alpha} \quad (46,1)$$

გამოვსახოთ კინეტიკური ენერგია

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (46,2)$$

ნორმალურ კოორდინატებში. ამ მიზნით (46,1) გამოვსახულება შევიტანოთ კინეტიკური ენერგიის ფორმულაში

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \sum_{\alpha=1}^n A_i^{(\alpha)} \dot{Q}_{\alpha} \sum_{\beta=1}^n A_k^{(\beta)} \dot{Q}_{\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \dot{Q}_{\alpha} \dot{Q}_{\beta} \sum m_{ik} A_i^{(\alpha)} A_k^{(\beta)}, \quad (46,3)$$

მაგრამ, თანახმად ორთო-ნორმირების (45,8) პირობისა, ბოლო ორმაგი ჯამი  $\delta_{\alpha\beta}$ -ს ტოლია; ასე რომ,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \dot{Q}_{\alpha} \dot{Q}_{\beta} \delta_{\alpha\beta}, \quad (46,4)$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,1} \dot{Q}_{\alpha}^2. \quad (46,5)$$

გამოვსახოთ ნორმალურ კოორდინატებში პოტენციალური ენერგიაც. განზოგადებულ კოორდინატებში

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \gamma_{ik} q_i q_k. \quad (46,6)$$

ამიტომ (46,1)-ის თანახმად,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \gamma_{ik} \sum_{\alpha} A_i^{(\alpha)} Q_{\alpha} \sum_{\beta} A_k^{(\beta)} Q_{\beta}. \quad (46,7)$$

მაშასადამე,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} Q_{\alpha} Q_{\beta} \sum_{i,k} \gamma_{ik} A_i^{(\alpha)} A_k^{(\beta)}. \quad (46,8)$$

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (45,10) პირობას, მივიღებთ

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} Q_{\alpha} Q_{\beta} \omega_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^2. \quad (46,9)$$

ამგვარად, ლაგრანჟის ფუნქციისათვის გვქვამება

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^2). \quad (46,10)$$

ასევე მარტივი სახე ექნება სისტემის მცირე რხევების შესაბამის ენერგიას ნორმალურ კოორდინატებში; სახელდობრ,

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^2). \quad (46,11)$$



დაწეროთ მოძრაობის განტოლებები. ამისათვის ვიპოვოთ განზოგადებული იმპულსი და ძალა ნორმალურ კოორდინატებში, გვექნება:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_m} = \sum_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} \frac{\partial \dot{Q}_{\alpha}}{\partial \dot{Q}_m} = \sum_{\alpha} \dot{Q}_{\alpha} \delta_{\alpha m} = \dot{Q}_m \quad (46,12)$$

და

$$\frac{\partial L}{\partial Q_m} = \sum_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha} \delta_{\alpha m} = \omega_m^2 Q_m, \quad (46,13)$$

ხოლო ლაგრანჟის განტოლებებს ექნება სახე

$$\ddot{Q}_m + \omega_m^2 Q_m = 0 \quad (m=1, 2, \dots, n) \quad (46,14)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ყოველი ნორმალური კოორდინატი დამოუკიდებელ ჰარმონიულ რხევას ასრულებს.

ნორმალური კოორდინატები იძულებითი რხევის შემთხვევაში. დაბოლოს ეაჩვენოთ, რომ ნორმალური კოორდინატები წეგვიძლია შემოვლოთ ღვირვ იძულებითი რხევების შემთხვევაშიც. სისტემის გარეშე ძალით გამოწვეული იძულებითი რხევების დროს ლაგრანჟიანს ექნება სახე

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k - \gamma_{ik} q_i q_k) + \sum_{k=1}^n q_k F_k(t). \quad (46,15)$$

ამ გამოსახულების პირველი ორი წევრის წარმოდგენა ნორმალური კოორდინატებით მოგვცემს (46,10)-ს. ნორმალურ კოორდინატებში გამოვსახოთ (46,15)-ის ბოლო წევრიც. თანახმად (46,1)-ისა მივიღებთ

$$\sum_k q_k F_k(t) = \sum_{k=1}^n F_k(t) \sum_{\alpha=1}^n A_k^{(\alpha)} Q_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n \Phi_{\alpha}(t) Q_{\alpha}. \quad (46,16)$$

სადაც

$$\Phi_{\alpha}(t) = \sum_k F_k(t) A_k^{(\alpha)}. \quad (46,17)$$

მაშასადამე, ნორმალურ კოორდინატებში იძულებითი რხევების შესაბამისი ლაგრანჟის ფუნქციისათვის გვექნება

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_{\alpha}^2 - \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha}^2) + \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}(t) Q_{\alpha}, \quad (46,18)$$

ხოლო შესაბამის ლაგრანჟის განტოლებებს ექნება სახე

$$\ddot{Q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 Q_{\alpha} = \Phi_{\alpha}(t), \quad (\alpha=1, 2, \dots, n) \quad (46,19)$$

როგორც ვხედავთ, ყველა კოორდინატი დამოუკიდებელ იძულებით რხევას შეესაბამება.

სისტემის რხევითი მოძრაობის თავისებურებათა საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მარტივი მაგალითი. ვაჭვათ, მოცემული გვაქვს სისტემა ორი თავისუფლების ხარისხით, რომლის ლაგრანჟიანი განისაზღვრება ფორმულით

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2} (\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2). \quad (46,20)$$

ვიპოვოთ სისტემის საკუთარი სიხშირეები და ნორმალური კოორდინატები. შემდეგ კი სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია და სრული ენერგია გამოვხატოთ ნორმალურ კოორდინატებში.

თუ ლაგრანჟის ფუნქციის (46,20) გამოხატულებას შევადარებთ (44,10)-ს დავინახავთ, რომ

$$m_{11} = m_{22} = 1, \quad m_{12} = m_{21} = 0; \quad \gamma_{11} = \gamma_{22} = 1, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = -1/2. \quad (46,21)$$

კოფეციენტების ამ მნიშვნელობებისათვის საუკუნეობრივი განტოლება მიიღებს სახეს

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega^2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (46,22)$$

ამ განტოლებას ექნება ორი ფესვი:  $\omega_1^2 = 1/2$ ,  $\omega_2^2 = 3/2$ , მაშასადამე, სისტემის საკუთარი სიხშირეებია:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{3/2}. \quad (46,23)$$

ლაგრანჟის განტოლებების ამონახსნებს კი ექნება შემდეგი გამოხატულება:

$$q_1 = A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} + A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t}, \quad (46,24)$$

$$q_2 = A_2^{(1)} e^{i\omega_1 t} + A_2^{(2)} e^{i\omega_2 t}.$$

ვიპოვოთ  $A_k^{(\alpha)}$  ამპლიტუდები. ამ მიზნით საჭიროა ამოიხსნას (44,20) ალგებრულ განტოლებათა სისტემა პირველი ფესვის შემთხვევაში გვექნება

$$\frac{1}{2} A_1^{(1)} - \frac{1}{2} A_2^{(1)} = 0, \quad (46,25)$$

$$-\frac{1}{2} A_1^{(1)} + \frac{1}{2} A_2^{(1)} = 0,$$

საიდანაც  $A_1^{(1)} = A_2^{(1)}$ . მეორე ფესვისათვის კი (44,20) დაიყვანება შემდეგ სისტემაზე:

$$-\frac{1}{2} A_1^{(2)} - \frac{1}{2} A_2^{(2)} = 0, \quad (46,26)$$

$$-\frac{1}{2} A_1^{(2)} - \frac{1}{2} A_2^{(2)} = 0;$$

აქედან  $A_1^{(2)} = -A_2^{(2)}$ .

გამოვიყენოთ ამპლიტუდების ნორმირების (45,8) პირობა. მივიღებთ

$$A_1^{(1)2} + A_2^{(1)2} = 1, \quad A_1^{(2)2} + A_2^{(2)2} = 1, \quad (46,27)$$

საიდანაც

$$A_1^{(1)} = A_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad A_1^{(2)} = -A_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (46,28)$$

მაშასადამე, (46,24) ამონახსნი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_1 + Q_2), \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_1 - Q_2), \quad (46,29)$$

სადაც  $Q_\alpha = e^{i\omega_\alpha t}$  ნორმალური კოორდინატებია. ცხადია, რომ პირიქით, ნორმალური კოორდინატები განზოგადებულ  $q_1$  და  $q_2$  კოორდინატებთან ასე იქნება დაკავშირებული:

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 + q_2), \quad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 - q_2). \quad (46,30)$$

შევიტანოთ  $q_1$  და  $q_2$ -ის გამოხატულებები (46,29)-დან ლაგრანჟის ფუნქციის (46,20) გამოხატულებაში; შედეგად მივიღებთ ლაგრანჟიანს ნორმალურ კოორდინატებში

$$L = \frac{1}{2}(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Q_1^2 + \frac{3}{2}Q_2^2\right). \quad (46,31)$$

მარტივად დაიწერება სრული ენერჯის ფორმულაც. მართლაც, განმარტებით

$$E = \sum_{i=1}^2 \dot{Q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - L, \quad (46,32)$$

თუ ამ ფორმულაში შევიტანთ ლაგრანჟის (46,31) ფუნქციას, გვექნება

$$E = \frac{1}{2}(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Q_1^2 + \frac{3}{2}Q_2^2\right). \quad (46,33)$$

გამოვიყენოთ ლაგრანჟის განტოლებები ნორმალურ კოორდინატებში

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0 \quad (i=1, 2) \quad (46,34)$$

და დავწეროთ მოძრაობის განტოლებები ნორმალური კოორდინატებისათვის

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_1 + \frac{1}{2}Q_1 &= 0, \\ \ddot{Q}_2 + \frac{3}{2}Q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (46,35)$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, ამ განტოლების ამონახსნები განისაზღვრება  $Q_1 = e^{i\omega_1 t}$  და  $Q_2 = e^{i\omega_2 t}$  ფუნქციებით. თითოეული  $Q_1$  და  $Q_2$  ნორმალური კოორდინატი ასრულებს თითო მარტივ რხევას.

ახლა იგივე ამოცანას შევხედოთ სხვა ასპექტში. კერძოდ, შევეცადოთ პოტენციალური ენერჯის კვადრატული ფორმა დავაყვანოთ კანონიკურ სახეზე (კინეტიკურ ენერჯიას ისედაც კანონიკური სახე აქვს!). ამ მიზნით, ნაცვლად  $q_1$  და  $q_2$  კოორდინატებისა, შემოვიღოთ ახალი  $Q_1$  და  $Q_2$  კოორდინატები

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 \cos \varphi - Q_2 \sin \varphi, \\ q_2 &= Q_1 \sin \varphi + Q_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (46,36)$$

შედეგად, პოტენციალური ენერჯია ასე გადაიწერება:

$$\begin{aligned} U(Q_1, Q_2) &= \frac{1}{2}[(1 - \sin \varphi \cos \varphi)^2 Q_1^2 + (1 + \sin \varphi \cos \varphi)^2 Q_2^2 - \\ &\quad - Q_1 Q_2 \cos 2\varphi] \end{aligned} \quad (46,37)$$

მობრუნების  $\varphi$  კუთხე ისე შევარჩიოთ, რომ პოტენციალური ენერჯის გამოხატულებიდან აპოვარდეს  $Q_1 Q_2$  წევრი. ცხადია, ამისათვის საჭიროა  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . მაშინ (46,37) მიიღებს შემდეგ გამოხატულებას:

$$U(Q_1, Q_2) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} Q_1^2 + \frac{3}{2} Q_2^2 \right\} \quad (46,38)$$

ამასთან, ჩვენ ვხედავთ, რომ საკუთარი სიხშირეები ყოფილა  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  და  $\omega_2 = \sqrt{3/2}$ , ხოლო (46,36) დაემთხვევა (46,29) ფორმულებს (გავითვალისწინოთ, რომ (46,20) ლაგრანჟიანი სიმეტრიულია  $q_1 = q_2$  შეცვლის მიმართ).

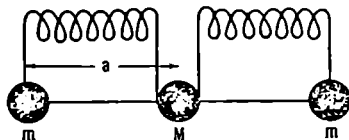
#### § 47. სამატომიანი მოლეკულის რხევები

მოლეკულების მიერ გამოსხივებული სინათლის სპექტრის შესწავლა გვიჩვენებს, რომ მოლეკულაში ადგილი აქვს ატომების რხევას გარკვეული წონასწორობის წერტილის მიმართ. მოლეკულას, გარდა რხევითი მოძრაობისა, შეუძლია აგრეთვე ორი სხვა ტიპის მოძრაობაც. ესენია: მოლეკულის როგორც მთლიანად გადატანითი მოძრაობა და ბრუნვითი მოძრაობა.

თუ გვაქვს მოლეკულა, რომელიც შედგება  $n$  ატომისაგან, მაშინ მისი  $3n$  თავისუფლების ხარისხთა რიცხვიდან სამი იქნება გადატანითი მოძრაობის შესაბამისი თავისუფლების ხარისხი. ზოგად შემთხვევაში ბრუნვასაც სამი თავისუფლების ხარისხი შეესაბამება, ასე რომ, რხევით მოძრაობაზე მოვა  $3n - 6$  თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი. შეიძლება შეგვხვდეს ისეთი მოლეკულაც, რომლის ატომები ერთ სწორ ხაზზე არიან დალაგებული. ასეთ მოლეკულებს წრფივ მოლეკულებს უწოდებენ. რამდენადაც წრფივ მოლეკულაში ატომების შემაერთებელი წრფის ირგვლივ ბრუნვას არავითარი აზრი არა აქვს, ამიტომ მას ექნება მხოლოდ ორი ბრუნვითი თავისუფლების ხარისხი და, მაშასადამე, წრფივი მოლეკულის რხევითი მოძრაობის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი ( $3n - 5$ )-ის ტოლი იქნება.

როცა საინტერესოა მოლეკულის მხოლოდ რხევითი მოძრაობის შესწავლა, საჭიროა განხილვიდან გამოვრიცხოთ ბრუნვითი და გადატანითი მოძრაობანი. გადატანითი მოძრაობის გამოსარიცხავად საკმარისია დავეშვათ, რომ მოლეკულის სიმძივის ცენტრის იმპულსი ნულის ტოლია. ბრუნვითი მოძრაობის გამორიცხვა კი შეიძლება მოლეკულის იმპულსის მომენტის ნულთან გატოლებით.

სიმარტივისათვის შემოვისაზღვრებთ სამატომიანი წრფივი მოლეკულების განხილვით და ვიპოვით ასეთი სისტემის შესაძლო სიხშირეებს. ფიზიკურად გასაგებია, რომ წრფივ მოლეკულას ექნება როგორც გასწვრივი, ისე განივი რხევები, მაგრამ დავკმაყოფილებთ მხოლოდ გასწვრივი რხევის შესაბამისი სიხშირეების მოძებნით.



ნახ. 43

სახით. ეტყვათ, ატომებს შორის მანძილები ერთნაირია და მათ შორის თანატოლი დრეკადი ძალები მოქმედებს დრეკადობის  $k$  კოეფიციენტით,

ასეთი მოლეკულის გასწვრივი საკუთარი რხევების შესასწავლად შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია. ვიგულისხმობთ, რომ რხევა ხდება  $x$  დერძის გასწვრივ. პირ-

ველი, მეორე და მესამე ატომის წონასწორული კოორდინატები შესაბამისად აღვნიშნოთ  $x_{10}$ ,  $x_{20}$  და  $x_{30}$ -ით, მაშინ

$$a = x_{02} - x_{01} = x_{03} - x_{02} \quad (47,1)$$

თუ წონასწორობიდან გადახრას შესაბამისად აღვნიშნავთ

$$q_1 = x_1 - x_{10} \quad (47,2)$$

პოტენციალური ენერჯისათვის გვექნება

$$U = \frac{k}{2} [(q_2 - q_1)^2 + (q_3 - q_2)^2], \quad (47,3)$$

ხოლო კინეტიკური ენერჯისათვის

$$T = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{M}{2} \dot{q}_3^2 \quad (47,4)$$

ჩვენ ესწავლობთ მხოლოდ რხევით მოძრაობას, ამიტომ საჭიროა გამოირიცხოს გადატანითი მოძრაობა. ამისათვის, როგორც აღვნიშნეთ, ნულს უნდა გავუტოლოთ მოლეკულის სიმძიმის ცენტრის იმპულსი. ეს მოგვცემს

$$m(x_1 + x_3) + Mx_2 = \text{const.} \quad (47,5)$$

თუ კოორდინატს წარმოვიდგენთ  $x_i = x_{i0} + q_i$  სახით, მაშინ პირობა

$$m(x_{10} + x_{30}) + Mx_{20} = m(x_1 + x_3) + Mx_2 \quad (47,6)$$

მოგვცემს

$$m(q_1 + q_3) + Mq_2 = 0. \quad (47,7)$$

ამ განტოლების საშუალებით კინეტიკური და პოტენციალური ენერჯებიდან შეგვიძლია გამოვრიცხოთ  $q_2$  კოორდინატი. მივიღებთ

$$U = \frac{k}{2} \left\{ \left[ q_1 + \frac{m}{M} (q_1 + q_3) \right]^2 + \left[ q_3 + \frac{m}{M} (q_1 + q_3) \right]^2 \right\} \quad (47,8)$$

და

$$T = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{m^2}{2M} (\dot{q}_1 + \dot{q}_3)^2 \quad (47,9)$$

შემოვიღოთ ახალი კოორდინატები:

$$Q_1 = q_1 + q_3, \quad Q_2 = q_1 - q_3 \quad (47,10)$$

ამ კოორდინატებში სამატომიანი წრფივი მოლეკულის გასწერივი რხევების შესაბამის ლაგრანჯის ფუნქციას ექნება სახე

$$L = \frac{m(2m+M)}{4M} \dot{Q}_1^2 + \frac{m}{4} \dot{Q}_2^2 - \frac{k(2m+M)^2}{4mM^2} Q_1^2 - \frac{k}{4} Q_2^2 \quad (47,11)$$

გვექნება ლაგრანჯის შედგენილი განტოლებები:

$$\ddot{Q}_1 + \frac{k(2m+M)}{mM} Q_1 = 0, \quad (47,12)$$

$$\ddot{Q}_2 + \frac{k}{m} Q_2 = 0, \quad (47,13)$$

აქედან კი ვხედავთ, რომ რხევის სიხშირეები შესაბამისად ტოლია

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \left( 1 + 2 \frac{m}{M} \right), \quad (47,14)$$

$$\omega_2^2 = \frac{k}{m}. \quad (47,15)$$

როგორც ვხედავთ, თითოეული  $Q$  კოორდინატი დამოუკიდებელ რხევას შეესაბამება, ე. ი. ისინი ნორმალური კოორდინატები ყოფილან.  $\omega_2^2 = \frac{k}{m}$  სიხშირე გვეძ-

ლევს  $Q=0$ , ე. ი.  $q_1 = -q_2$ , ხოლო, თანხმად (47,7) პირობისა,  $q_2 = 0$ . მაშასადამე, ამ შემთხვევაში შუა ატომი უძრავია, კიდურა ატომები კი ირხევიან საწინააღმდეგო ფაზებით.  $\omega_1$  სიხშირეს შეესაბამება  $Q_2 = 0$ , ე. ი.  $q_1 = q_2$ . ამ დროს კიდურა ატომები ერთნაირი ფაზებით ირხევიან და აქვთ შუა ატომის საწინააღმდეგო ფაზა.

როგორც დავინახეთ, გასწვრივ რხევებს შეესაბამება ორი სიხშირე. მაშასადამე, რამდენადაც წრფივი სამატომიანი მოლეკულისათვის უნდა გვექონდეს ოთხი თავისუფლების ხარისხი, ორი სიხშირე დაკავშირებული იქნება განივ რხევებთან.

#### § 48. სივრცითი ოსცილატორი

განვიხილოთ სამგანზომილებიანი ოსცილატორი დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში.  $U(x, y, z)$  პოტენციალური ენერჯია გავშალოთ მჭკრივად წონასწორობის  $x=y=z=0$  წერტილის მახლობლობაში. ვაშლის პირველი წევრი  $U(0, 0, 0)$  შეგვიძლია გადავადლოთ როგორც მუდმივი, რომელსაც პოტენციალური ენერჯიისათვის მნიშვნელობა არა აქვს. მჭკრივად ვაშლავთ შემოვლენ შერეული წარმოებულების მნიშვნელობანი წონასწორობის წერტილში. მაგრამ ისინიც შეგვიძლია ნულად ჩავეთვალოთ, რამდენადაც მიღებული კვადრატული ფორმა კოორდინატების შერჩევით ყოველთვის შეგვიძლია კანონიკურ სახეზე დავიყვანოთ, მაშასადამე შეგვიძლია დავწეროთ

$$U(x, y, z) = \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 y^2}{2} + \frac{k_3 z^2}{2}, \quad (48.1)$$

სადაც

$$k_1 = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_0, \quad k_2 = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_0, \quad k_3 = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_0, \quad (48,2)$$

მინიმუმისათვის (48,1) კვადრატული ფორმა დადებითად უნდა იყოს განსაზღვრული, ამისათვის კი საკმარისია  $k_1$ ,  $k_2$  და  $k_3$  სიდიდეები დადებითი იყოს.

(48,1) პოტენციალური ენერჯიით განსაზღვრულ რხევად ნაწილაკს სივრცით ანიზოტროპიულ ოსცილატორს უწოდებენ. ანიზოტროპიულობა გამოიხატება იმაში, რომ რხევა სხვადასხვა ღერძის გასწვრივ სხვადასხვა სიხშირით ბდება, ამასთან, სიხშირეები ღერძების გასწვრივ განსაზღვრება ფორმულით

$$\omega_i^2 = \frac{k_i}{m} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (48,3)$$

ნათელია, რომ ეკვიპოტენციალური ფართეულები ანიზოტროპიული ოსცილატორის შემთხვევაში წარმოადგენენ სამღერძა ელიფსოიდებს

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\omega_1} \sqrt{\frac{2U_0}{m}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\omega_2} \sqrt{\frac{2U_0}{m}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{\omega_3} \sqrt{\frac{2U_0}{m}}\right)^2} = 1. \quad (48,4)$$

ანიზოტროპიული ოსცილატორის ლაგრანჟის ფუნქციას შემდეგი სახე ექნება:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m}{2} (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2), \quad (48,5)$$

საიდანაც მივიღებთ ლაგრანჟის სამ განტოლებას:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega_2^2 y = 0, \quad \ddot{z} + \omega_3^2 z = 0. \quad (48,6)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ყოველი ღერძის გასწვრივ ხდება დამოუკიდებელი ჰარმონიული რხევა, ასე რომ, ანიზოტროპიული ოსცილატორის რხევა დაიყვანება სამი სხვადასხვა სიხშირით რხევად წრფივ ოსცილატორზე.

გვექნება შემდეგი ზოგადი ამონახსნები:

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\omega_1 t + \alpha), \\ y &= b \cos(\omega_2 t + \beta), \\ z &= c \cos(\omega_3 t + \gamma). \end{aligned} \quad (48,7)$$

ვიპოვოთ სრული ენერგია. ამისათვის გამოვთვალოთ სიჩქარეები და შევიტანოთ ენერჯიის ფორმულაში

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{m}{2} (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2). \quad (48,8)$$

მივიღებთ

$$E = \frac{m a^2 \omega_1^2}{2} + \frac{m b^2 \omega_2^2}{2} + \frac{m c^2 \omega_3^2}{2}. \quad (48,9)$$

ენერგია წარმოადგენს სამი წრფივი ოსცილატორის ენერგიათა ჯამს. კერძო შემთხვევაში, როცა  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$ , მივიღებთ სივრცით იზოტროპულ ოსცილატორს; მისი ენერგია ტოლი იქნება

$$E = \frac{m \omega^2}{2} (a^2 + b^2 + c^2). \quad (48,10)$$

ვიპოვოთ მოძრაობის ტრაექტორია. იზოტროპიული ოსცილატორის პოტენციური ენერგია, თანახმად (48,1) ფორმულისა, ტოლია

$$U = \frac{k}{2} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{k}{2} r^2, \quad (48,11)$$

რაც იმაზე მიგვითითებს, რომ მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიისაა; ნაწილაკზე მოქმედებს დრეკადი ძალა, რომელიც ტოლია

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = -kr, \quad (k = m\omega^2) \quad (48,12)$$

ჩვენ კი ვიცით, რომ ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრაობა ბრტყელია, ამიტომ საკმარისია შემოვიხსნათ  $xoy$  სიბრტყით. მივიღებთ ორ ამონახსნს:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha), \quad y = B \cos(\omega t + \beta). \quad (48,13)$$

მოდრაობის ტრაექტორიის საპოვნელად ამ ტოლობებიდან გამოვიტყუოთ დრო. რადგან  $\alpha$  და  $\beta$  ნებისმიერი მუდმივებია, საწყისი პირობები ისე შევარჩიოთ, რომ (48,13)-დან დროის გამოიტყუვა რაც შეიძლება მარტივად მოხდეს. როცა  $t=0$ , მოვითხოვთ, რომ  $x=A$  და  $y=0$ . მაშინ  $\alpha=0$  და  $\beta=\frac{\pi}{2}$ . გვექნება:

$$\begin{aligned}x &= A \cos \omega t, \\y &= B \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -B \sin \omega t,\end{aligned}\quad (48,14)$$

საიდანაც კვადრატში აყვანითა და შეკრებით მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (48,15)$$

ამრიგად, ტრაექტორია წარმოადგენს ელიფსს, რომლის ცენტრი ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს. როგორც ეს აღენიშნეთ § 26-ში, მართლაც,  $r^2$ -ის პროპორციული პოტენციალური ენერჯიის დროს ტრაექტორია ჩაკეტილი მრუდია. როცა  $A=B$ , მივიღებთ წრეს. ადვილია ჩვენება, რომ კერძო შემთხვევაში (48,13) იძლევა წრფეზე მოძრაობასაც. ამაში დასარწმუნებლად საკმარისია მოვითხოვოთ, რომ როცა  $t=0$ ,  $x=A$  და  $y=B$ , მაშინ მივიღებთ  $\alpha=\beta=0$ , და გვექნება

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B}, \quad (48,16)$$

საიდანაც მართლაც მივიღებთ წრფეს

$$y = \frac{B}{A} x. \quad (48,17)$$

გამოვიტყუოთ ახლა დრო (48,13)-დან ზოგად შემთხვევაში. ამ მიზნით, დროებით შემოვიღოთ აღნიშვნა  $\omega t + \alpha = \theta$  და  $\beta - \alpha = \delta$ . მაშინ (48,13)-დან გვექნება:

$$x = A \cos \theta, \quad x = B (\cos \theta \cos \delta - \sin \theta \sin \delta). \quad (48,18)$$

პირველიდან ვიპოვოთ  $\cos^2 \theta$ . მეორედან  $\sin^2 \theta$  და შეეკრიბოთ. შედეგად გამოირიცხება  $\theta$ , მაშასადამე,  $t$  დროც; ასე რომ, მიიღება

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (48,19)$$

განოჯგევილით ეს მრუდი და ვაჩვენოთ, რომ იგი წარმოადგენს კანტუსურ კვეთებს ცენტრით სათავეში. როგორც ცნობილია, რაცა გვაქვს მრუდი

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 = b \quad (48,20)$$

ერთკვაროვან კოორდინატებში  $x = \frac{x_1}{x_3}$ ,  $y = \frac{x_2}{x_3}$ , იგი ასე გადაიწერება:

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 - b x_3^2 = 0. \quad (48,21)$$

მაშინ, როცა დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (48,22)$$



ხოლო შინორი

$$\Delta_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad (48,23)$$

მრული ელიფსია. როცა  $\Delta = 0$ , მრული შლადია. ჩვენი მრუდისათვის

$$\Delta = -\frac{\sin^4 \delta}{(AB)^2}, \quad \Delta_{33} = \frac{\sin^2 \delta}{(AB)^2}. \quad (48,24)$$

მაშასადამე. თუ  $\delta \neq 0, \pi$ , (48,22) და (48,23) პირობები დაცულია, და მრული ელიფსის წარმოადგენს. თუ  $\delta = 0$  ან  $\delta = \pi$ , მაშინ  $\Delta = \Delta_{33} = 0$ , და მრული ელიფსური შლადი ტიპისაა.

აღნიშნით, რომ განხილულ შემთხვევაში მოძრაობის ცენტრალური ხასიათის გამო ტრაექტორია უშუალოდ შეგვიძლია ვიპოვოთ (26,24) ფორმულით, რომელიც ამ შემთხვევაში მოგვცემს

$$\varphi = \int \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2mE - mkr^2 - \frac{l^2}{r^2}}} + \varphi_0 \quad (48,25)$$

თუ შემოვიღებთ  $x = \frac{1}{r^2}$  აღნიშვნას, მივიღებთ

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{1}{2} \int \frac{l dx}{\sqrt{2mEx - mk - l^2 x^2}}. \quad (48,26)$$

ამ ინტეგრალს ადვილად ამოვხსნით, თუ ფესვებში გამოისახულებას შევავსებთ სრულ კვადრატამდე

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{1}{2} \int \frac{l dx}{\left\{ \left( \frac{mE}{l} \right)^2 - mk - \left( lx - \frac{mE}{l} \right)^2 \right\}^{1/2}}, \quad (48,27)$$

ინტეგრაცია მოგვცემს

$$2(\varphi - \varphi_0) = \arccos \frac{\left( lx - \frac{mE}{l} \right)}{\sqrt{\left( \frac{mE}{l} \right)^2 - mk}}, \quad (48,28)$$

საიდანაც საბოლოოდ მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას

$$\frac{1}{r^2} = \frac{mE}{l^2} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{\omega l}{E} \right)^2} \cos 2(\varphi - \varphi_0) \right\}, \quad (48,29)$$

ეს კი წარმოადგენს კონუსურ კვეთებს ცენტრით სათავეში. როცა  $E = l\omega$ , მივიღებთ წრეს.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ნაწილაკზე მოქმედ ძალას აქვს სახე:  $F' = m\omega^2 r$ . სათანადო ამოცანის გადასაწყვეტად საკმარისია ზემოთ განხილულ ფორმულებში ყველგან  $\omega$  შევცვალოთ  $i\omega$ -თი. მაშინ, მაგალითად, ნაცვლად (48,14)-ისა, გვექნება

$$\begin{aligned} x &= A \cos(i\omega t) = A \operatorname{ch} \omega t, \\ y &= -B \sin(i\omega t) = iB \operatorname{sh} \omega t, \end{aligned} \quad (48,30)$$

რადგან  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ , (48,30)-დან მივიღებთ:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad (48,31)$$

რომელიც გამოხატავს ჰიპერბოლის განტოლებას ცენტრით სათავეში.

#### § 40. ანჰარმონიული რხევები

ჩვენ ზემოთ განვიხილეთ მცირე რხევები პარამონიულ მიახლოებაში, როდესაც პოტენციალური ენერჯიის მწკრივად გაშლაში ვისაზღვრებოდით კოორდინატის კვადრატული წევრებით, მთელ რიგ პრაქტიკულ შემთხვევებში ეს მიახლოება საკმარისი აღარაა და საჭიროა მიახლოების გაუმჯობესება პოტენციალურ ენერჯიაში შემდგომი, კვადრატულზე უფრო მაღალი რიგის, წევრების გათვალისწინების თვალსაზრისით. სიმარტივის მიზნით განვიხილოთ წრფივი ერთგანზომილებიანი რხევა დეკარტის მართკუთხეზან სისტემაში. ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x), \quad (49,1)$$

სადაც  $m$  წარმოადგენს რხევალი ნაწილაკის მასას.

პოტენციალური ენერჯიის მწკრივად გაშლა  $x=0$  წონასწორობის წერტილის მახლობლად, როგორც ვიცით, გვაძლევს

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} + \frac{l x^3}{3} + \dots, \quad (49,2)$$

სადაც

$$k = \left( \frac{d^2 U}{dx^2} \right)_0, \quad l = \frac{1}{2} \left( \frac{d^3 U}{dx^3} \right)_0,$$

ამასთან მწკრივად გაშლაში გავითვალისწინეთ კუბური ხარისხის წევრიც. ლაგრანჟიანი ახლა უკვე განისაზღვრება ფორმულით

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \frac{l x^3}{3}. \quad (49,3)$$

რხევებს, რომელიც შეიცავს კოორდინატის მაღალ ხარისხებს და, მაშასადამე, სიმეტრიულნი არ არიან წონასწორობის წერტილის მიმართ. ანჰარმონიულ რხევებს უწოდებენ. ანჰარმონიული რხევებისათვის ლაგრანჟის განტოლება მოგვეცემს

$$m\ddot{x} + kx + lx^2 = 0. \quad (49,4)$$

გავყოთ ეს განტოლება მასაზე და შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \nu = \frac{l}{m}. \quad (49,5)$$

მივიღებთ

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\nu x^2. \quad (49,6)$$

ეს დიფერენციალური განტოლება არაწრფივია. რადგან უცნობი ფუნქცია შედის კვადრატში, ამიტომ კერძო ამონახსნების ქაში აღარ იქნება ამოხსნა, რაც დამახასიათებელი იყო აქამდე განხილული წრფივი განტოლებებისათვის. მიღებული დიფერენციალური განტოლების ზუსტი ამოხსნა არ ხერხდება, ამიტომ მიმართავენ

მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდს. ამ მეთოდის შინაარსი გადმოცემული იქნება გზადაგზა (49,6) განტოლების ამოხსნისათვის.

უქვებოთ (49,6) განტოლების ამოხსნა შემდეგი მწკრივის სახით

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + \dots \quad (49,7)$$

სადაც  $x^{(1)}$  იქნება პირველი მიახლოების ფუნქცია.  $x^{(2)}$  — მეორე მიახლოების და ა. შ. ამასთან ყოველი შემდგომი მიახლოება წინასთან შედარებით უსასრულოდ მცირე სიდიდეა. (49,7) მწკრივის (49,6) დიფერენციალურ განტოლებაში შეტანით მივიღებთ

$$\ddot{x}^{(1)} + \ddot{x}^{(2)} + \dots + \omega_0^2 (x^{(1)} + x^{(2)} + \dots) = -\nu(x^{(1)} + x^{(2)} + \dots)^2 \quad (49,8)$$

მიღებულ განტოლებაში გაეთვალისწინოთ პირველი რიგის მცირე სიდიდეები. ეს იმას ნიშნავს, რომ მარცხნივ უნდა შევინარჩუნოთ  $x^{(1)}$  და მისი მცირე რიგის წარმოებული, მარჯვენა მხარეში კი  $x^{(1)}$  პირველ მიახლოებაში უნდა გადავადგოთ, რადგან იგი შედის კვადრატში. ამგვარად. დაგვრჩება განტოლება

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = 0. \quad (49,9)$$

ეს კი წარმოადგენს ჰარმონიული რხევის განტოლებას და აქვს ზოგადი ამონახსნი

$$x^{(1)} = a \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (49,10)$$

ახლა გაეთვალისწინოთ მეორე რიგის მცირე წევრებიც; (49,8) მოგვეცემს

$$\ddot{x}^{(2)} + \ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\nu x^{(1)2}. \quad (49,11)$$

მაგრამ  $x^{(1)}$  აკმაყოფილებს (49,9) განტოლებას, ამიტომ (49,11) მიიღებს სახეს

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\nu x^{(1)2}. \quad (49,12)$$

მიმდევრობითი მიახლოების არსი იმაში მდგომარეობს, რომ ამ განტოლების მარჯვენა მხარეში  $x^{(1)}$ -ის ნაცვლად შევუაქვს (49,9) განტოლების ამონახსნი

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\nu a^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (49,13)$$

მოხერხებულობის ღიზნით მარჯვენა მხარე გამოვსახოთ ორმაგი კუთხის კოსინუსით. გვექნება

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\frac{\nu a^2}{2} - \frac{\nu a^2}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha). \quad (49,14)$$

ადვილად შევამოწმებთ, რომ ამ განტოლებას აკმაყოფილებს ფუნქცია

$$x^{(2)} = -\frac{\nu a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\nu a^2}{6\omega_0^2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha). \quad (49,15)$$

თუ მესამე მიახლოებაც გვიანტერესებს, (49,8) განტოლებაში უნდა შევინარჩუნოთ მესამე რიგის მცირე სიდიდეებიც. გაეთვალისწინოთ (49,9), (49,12) განტოლებები და მარჯვენა მხარეში  $x^{(1)}$  და  $x^{(2)}$ -ის ნაცვლად შევტანოთ (49,10) და (49,15) მნიშვნელობები. ასევე ვიპოვით მყოფსხე, მეხუთე და ა. შ. მიახლოების ფუნქციებსაც. ჩვენ შემოვისახდევრებით მხოლოდ მეორე მიახლოებით. (49,7) ფორმულის თანახმად, განტოლების მიახლოებითი ამონახსნისათვის გვექნება

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} = a \cos(\omega_0 t + \alpha) - \frac{\nu a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\nu a^2}{6\omega_0^2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha). \quad (49,16)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ანჰარმონიულობამ შემოიტანა დამატებითი რხევები გაორკეცებული სიხშირეებით. შემდეგი მიახლოება შემოიტანდა უფრო მაღალი ჯერადო-

ბის სიხშირეებს. თავისუფალი —  $\frac{\gamma a^2}{2\omega_0^2}$  წვერი აპირობებს რხევის ანჰარმონიულობას — გადახრა სათ ავის სხვადასხვა მხარეს სხვადასხვა იქნება. ანჰარმონიულ რხევებს განიხილავენ მოლექულათა თეორიაში.

### § 50. ანჰარმონიული პერიოდული რხევების დაშლა ჰარმონიულ რხევებად

წინა პარაგრაფში ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ ანჰარმონიული რხევების დროს ამოხსნის გამოხატულია რხევებით, რომელთა სიხშირეებია:  $\omega_0$ ,  $2\omega_0$ ,  $3\omega_0$  და ა. შ. (49,16) ამოხსნას ახალი მულტიპლების შენოლების ხარჯზე მარტივად შეიძლება მიეცეს შემდეგი სახე:

$$x(t) = A_0 + A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \cos 2\omega_0 t + A_3 \cos 3\omega_0 t + \dots + B_1 \sin \omega_0 t + B_2 \sin 2\omega_0 t + B_3 \sin 3\omega_0 t + \dots \quad (50,1)$$

ეს ფორმულა, რომელიც ჩვენ კერძო შემთხვევაში მივიღეთ, წარმოადგენს მათემატიკაში კარგად ცნობილ ფურიეს თეორემის შინაარსს, რომელიც სამართლიანია ნებისმიერი პერიოდული ფუნქციისათვის. კერძოდ, ეს თეორემა გვეუბნება, რომ თუ  $x = x(t)$   $2\pi$  პერიოდის ფუნქციაა, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ მწკრივად გაშლას:

$$x(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\tau + b_n \sin n\tau). \quad (\tau = \omega_0 t) \quad (50,2)$$

ნახევარი პირველ წვერში შემოღებულია მოხერხებულობის მიზნით. (50,2)-ს უწოდებენ ნებისმიერი, საზოგადოდ ანჰარმონიული, პერიოდული ფუნქციის გაშლას ფურიეს მწკრივად. ამ მწკრივის თვისებები მათემატიკაში კარგად არის შესწავლილი და ამიტომ მათ ყოველგვარი დამტკიცების გარეშე გამოვიყენებთ. ფიზიკურად ფურიეს მწკრივი გვიჩვენებს, რომ ყოველი ანჰარმონიული რხევა შეგვიძლია გამოვხატოთ მარტივი ჰარმონიული რხევების ჯამად, ამასთან ძირითადი რხევა ხდება  $\omega_0$  სიხშირით. იგი იძლევა ძირითად ტონს. დანარჩენი რხევების სიხშირეები ჯერადია ძირითადი ტონის სიხშირისა და განსაზღვრავენ ე. წ. ობერტონებს. ფურიეს მწკრივში შემავალ ჰარმონიულ რხევებს ჰარმონიკებს უწოდებენ.  $a_0$ ,  $a_n$  და  $b_n$  სიდიდეებს ფურიე-კოეფიციენტები ეწოდებათ. მათი განსაზღვრა ადვილია  $x(\tau)$  ფუნქციის საშუალებით. ამისათვის დაგვირდება ზოგიერთი მარტივი ინტეგრალის აღება სინუსებიდან და კოსინუსებიდან. ადვილად შევამოწმებთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\tau \cos n\tau d\tau = \delta_{mn}, \quad (m, n \neq 0) \quad (50,3)$$

ასევე

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\tau \sin n\tau d\tau = \delta_{mn} \quad (m, n \neq 0) \quad (50,4)$$

და

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\tau \cos n\tau d\tau = 0. \quad (50,5)$$

ამ პირობას სინუსისა და კოსინუსის ორთოგონალობის პირობა ჰქვია<sup>1</sup>. გარდა ამისა, ცხადია, რომ

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin n\tau d\tau = 0 \quad (50,6)$$

და

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos n\tau d\tau = 0, \quad n \neq 0 \quad (50,7)$$

უქანასკნელ ინტეგრალში  $n=0$  დროს მიიღება  $2\pi$ .

ამის შემდეგ აღვიღოთ ფურცე-კოეფიციენტებს განსაზღვრა. ჯერ განვსაზღვროთ  $a_0$ . ამ მიზნით ავიღოთ (50,2) მწკრივიდან ინტეგრალი  $(-\pi, \pi)$  შუალედში. ამასთან მწკრივის თანაბრად კრებადობის გამო შეგვიძლია აქამვისა და ინტეგრაციის გადსმა. (50,6) და (50,7) ფორმულების თანახმად ყველა ინტეგრალი ნული იქნება, გარდა პირველი წევრისა. ამგვარად,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} x(\tau) d\tau = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} d\tau, \quad (50,8)$$

საიდანაც

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x(\tau) d\tau. \quad (50,9)$$

განვსაზღვროთ დანარჩენი კოეფიციენტებიც. ამისათვის ფურიეს (50,2) მწკრივი გაეამრავლოთ  $\cos m\tau$ -ზე. სადაც  $m=1, 2, 3, \dots$  და ავიღოთ ინტეგრალი იმავე საზღვრებში, გვექნება

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} x(\tau) \cos m\tau d\tau &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos m\tau d\tau + \\ &+ \sum \left( a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos m\tau \cos n\tau d\tau + b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos m\tau \sin n\tau d\tau \right). \end{aligned} \quad (50,10)$$

ზემოთ მოყვანილი ფორმულების თანახმად, ნულისაგან განსხვავდება მხოლოდ  $a_n$ -თან მდგომი ინტეგრალი, ამიტომ, თანახმად (50,3) ფორმულისა, გვექნება

$$\int_{-\pi}^{+\pi} x(\tau) \cos m\tau d\tau = \pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_{mn}, \quad (50,11)$$

რომელიც  $\delta_{mn}$ -ის ფილტრაციის თვისების გამოყენებით მოგვეცემა

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x(\tau) \cos m\tau d\tau \quad (m=1, 2, \dots) \quad (50,12)$$

ცხადია, რომ, თუ ამ ფორმულაში დავუშვებთ  $m=0$ , მივიღებთ  $a_0$ -ის (50,9) ფორმულას. ამიტომ შემდგომში ყველა  $a_m$  კოეფიციენტს განვსაზღვრავთ (50,12)

<sup>1</sup> საზოგადოდ, ორი  $\psi_n(x)$  და  $\psi_m(x)$  ფუნქცია ორთოგონალურია, თუ  $\int \psi_m(x)\psi_n(x) dx=0$ .

ფორმულთ, რომელშიაც  $m$  მიიღებს  $m=0$  მნიშვნელობასაც. ასეთი ერთიანი განმარტების მიზნით იყო შემოღებული მამრავლი  $1/2$  ფუნიეს მწკრივში.

სრულიად ანალოგიურად ვიპოვიტ  $b_m$  კოეფიციენტებსაც. ამ მიზნით საჭიროა ფუნიეს მწკრივი გავამრავლოთ  $\sin m\tau$ -ზე და ავიღოთ ინტეგრალი. გვექნება

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x(\tau) \sin m\tau \, d\tau. \quad (50,13)$$

ფუნიეს მწკრივი მარტივ სახეს ღებულობს. როცა  $x(\tau)$  ფუნქციას განსაზღვრული ლუწობა გააჩნია. ვთქვათ, მაგალითად,  $x(-\tau) = x(\tau)$ , ე. ი. ფუნქცია ლუწია. მაშინ (50,2) მწკრივში ყველა  $b_n = 0$ , და დაგვრჩება

$$x(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\tau. \quad (50,14)$$

ამ შემთხვევაში ფურიე-კოეფიციენტები შეგვიძლია ასეც წარმოვიდგინოთ:

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\tau) \cos m\tau \, d\tau. \quad (50,15)$$

როცა  $x(\tau)$  კენტი ფუნქციაა, ე. ი.  $x(-\tau) = -x(\tau)$ , მაშინ, თანახმად (50,12)-ისა, ყველა  $a_m = 0$ , და ფურიეს მწკრივს ექნება გამოსატულება

$$x(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\tau, \quad (50,16)$$

ფურიე-კოეფიციენტი კი ტოლია

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\tau) \sin m\tau \, d\tau. \quad (50,17)$$

ფურიეს მწკრივად გაწლას უდიდესი მნიშვნელობა აქვს ფიზიკაში. აღსანიშნავია, რომ ფურიეს მწკრივად შეგვიძლია გავშალოთ ნებისმიერი არაპერიოდული ფუნქციაც, რომელიც გარკვეულ პირობებს აკმაყოფილებს. ამასთან გაშლა აუცილებელი არაა სინუსებისა და კოსინუსების მიხედვით მოვახდინოთ. ზოგად შემთხვევაში ეს გაშლა ხდება ნებისმიერი ორთო-ნორმირებული ფუნქციების მიხედვით, რომლებიც აკმაყოფილებენ, ე. წ. ჩაკეტილობის პირობას. ხშირად ფუნქციის გაშლას ახდენენ ე. წ. ფურიეს ინტეგრალადაც. ამას ადგილი აქვს მაშინ, როცა ის ფუნქციები, რომლის მიხედვითაც იშლება ნებისმიერი ფუნქცია, დამოკიდებულია რაიმე პარამეტრზე (ჩვენს შემთხვევაში სიხშირეზე) უწყვეტი სახით.

გავშალოთ, მაგალითად, ნებისმიერი  $x(t)$  ფუნქცია  $e^{i\omega t}$  ფუნქციების ფურიეინტეგრალად. ამისათვის ხელსაყრელია წინასწარ შემოვილოთ მეტად მნიშვნელოვანი ფუნქცია, რომელიც დიდ როლს ასრულებს თანამედროვე ფიზიკაში. ეს არის ე. წ. დირაკის დელტა ფუნქცია, რომელიც შემდეგნაირადაა განმარტებული: <sup>1</sup>

$$\delta_{xx'} = \delta(x - x') = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x \neq x' \\ \infty, & \text{როცა } x = x' \end{cases} \quad (50,18)$$

<sup>1</sup> ლარკის  $\delta(x)$  ფუნქციის შესახებ უფრო დაწერილებით იხილეთ ი. ვაშაქიძე, ე. მამასახლიძე, გ. პოლშუილი, კვანტური მექანიკა, თსუ გამომცემლობა, 1978, გვ. 43.

ამავე დროს

$$\int_a^b \delta(x-x') dx = 1, \quad (a < x' < b) \quad (50,19)$$

სადაც  $x'$  დაფიქსირებული წერტილია; კერძო შემთხვევაში,  $x'$  შეიძლება ნულის ტოლიც იყოს; მთავარია, რომ  $x'$  იდოს საინტეგრაციო შუალედში.

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ღირაქის დელტა ფუნქცია ლუწია

$$\delta(-x) = \delta(x); \quad (50,20)$$

მას აქვს ფილტრაციის თვისება

$$\int_a^b f(x) \delta(x-x') dx = f(x'), \quad (50,21)$$

რომლის დამტკიცება ადვილია. მართლაც,  $\delta(x)$  ყველგან ნულია, გარდა  $x=x'$  წერტილისა; ამ წერტილში კი იგი უსასრულოდობის ტოლია, ამიტომ  $x=x'$  წერტილში  $f(x)$  შეგვიძლია ინტეგრალის ნიშნის გარეთ გავიტანოთ; თუ ამავე დროს გამოვიყენებთ (50,19) განმარტებას, გვექნება

$$\int_a^b f(x) \delta(x-x') dx = f(x') \int_a^b \delta(x-x') dx = f(x'). \quad (50,22)$$

ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ღირაქის ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი ინტეგრალის სახით:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk. \quad (50,23)$$

როგორც ვხედავთ, ღირაქის  $\delta(x)$  ფუნქცია უწყვეტი  $x$ ,  $x'$  პარამეტრებს შემთხვევაში ისეთივე თვისებებით ხასიათდება, რითაც კრონეკერის  $\delta_{mn}$  სიმბოლოა  $m$ ,  $n$  მთელი რიცხვებისათვის.

მართალია  $\delta(x)$  ფუნქციის (50,18) განმარტება მათემატიკური თვალსაზრისით ერთობ უცნაურია, მაგრამ თურმე შესაძლებელია შემოვიღოთ ისეთი უწყვეტი ფუნქციები, რომლებიც პარამეტრის ზღვრული მნიშვნელობისათვის ღირაქის დელტა ფუნქციაზე დაიყვანება. ე. ი. ჩვენ შეგვიძლია არ ვულაღატოთ მათემატიკურ „სიწმინდეს“, გამოთვლების დროს ღირაქის ფუნქციის ნაცვლად ვისარგებლოთ ამ უწყვეტი ფუნქციებით, ხოლო საბოლოო პასუხებში გადავიდეთ ზღვარზე. მივიღებთ ზუსტად ისეთსავე შედეგებს, როგორსაც მივიღებდით ღირაქის დელტა ფუნქციის უშუალო გამოყენებით.

$x(t)$  ფუნქციის ფურიეინტეგრალად გაშლას შემდეგი სახე აქვს:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (50,24)$$

სადაც  $X(\omega)$ -ს ფურიეკომპონენტი ეწოდება. მისი განსაზღვრა არ არის ძნელი, თუ (50,24)-ს გავამრავლებთ  $e^{-i\omega' t}$ -ზე და ავიღებთ ინტეგრალს  $t$ -თი  $-\infty$ -დან  $+\infty$ -მდე. გვექნება

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega' t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) d\omega \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt \right); \quad (50,25)$$

გავითვალისწინოთ ღირაკის  $\delta(\omega - \omega')$  ფუნქციის (50,23) განმარტება, მაშინ (50,25) ასე გადაიწერება:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega' t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \delta(\omega - \omega') d\omega, \quad (50,26)$$

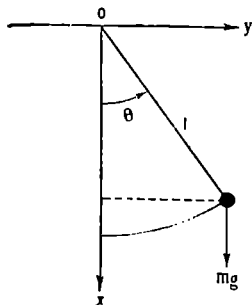
ხოლო ღირაკის ფუნქციის (50,21) ფილტრაციის თვისების გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (50,27)$$

ნებისმიერი ფუნქციის გაშლას ფურიემწკრივად (ან ინტეგრალად) დიდი გამოყენება აქვს ფიზიკის სხვადასხვა დარგებში.

### § 51. ბრტყელი მათემატიკური სპანნი

ამ თავის დასაბრუნებს განვიხილოთ ბრტყელი მათემატიკური სპანნის ამოცანა, რადგან მან ისტორიულად დიდი როლი შეასრულა რხევის თანამედროვე თეორიის ჩამოყალიბების საქმეში. სპანნის რხევის კანონები ჩამოყალიბებული იყო გალილეის მიერ. მათემატიკური სპანნი ეწოდება მატერიალურ წერტილს, რომელიც დაკიდულია სიგრძის უჭიმავი ვიწრო ძაფით და რხევას განიცდის სიმძიმის ძალის გავლენით. შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია. რხევის სიბრტყედ ავიღოთ  $xOy$  სიბრტყე. თუ ნაწილაკის მასა  $m$ -ია, მაშინ მისი პოტენციალური ენერჯია სიმძიმის ძალთა ველში იქნება  $U = -mgx$ , ხოლო ლაგრანჟიანი



ნ.ბ. 44

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx, \quad (51,1)$$

ხელსაყრელია რხევა დავახსიათოთ წონასწორობის მდებარეობიდან გადახრის  $\theta$  კუთხით. 44-ე ნახაზიდან აშკარაა, რომ  $x = l \cos \theta$  და  $y = l \sin \theta$ , ამიტომ

$$L = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} + mgl \cos \theta. \quad (51,2)$$

ლაგრანჟის განტოლებას

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

იქნება სახე

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (51,3)$$

ამ განტოლებაში საძებნი ფუნქცია შედის სინუსის ნიშნის ქვეშ, ამიტომ იგი წარმოადგენს რთულ არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებას. ზოგადად მისი ამო-



სხნა არ ზერხდება. კერძო შემთხვევაში ძალიან მცირე კუთხეებისათვის, როცა  $\sin \theta \approx \theta$ , გვექნება

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (51,4)$$

მივიღებ მცირე რხევების ცნობილი განტოლებას; მისი ამოხსნა იქნება

$$\theta = a \cos(\omega t + \alpha), \quad (51,5)$$

სადაც

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (51,6)$$

რხევის სიხშირეა. ამპლიტუდა  $a$  განსაზღვრავს მაქსიმალურ გადახრას,  $a = \theta_{\max} = \theta_0$ ;  $\alpha$  — საწყისი ფაზაა, თანაბრად (51,6)-ისა რხევის პერიოდისათვის მივიღებთ კარგად ცნობილ ფორმულას

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (51,7)$$

მივიღებ საქანის ცნობილი კანონი, რომ პერიოდი მასაზე არაა დამოკიდებული. გარდა ამისა, მცირე რხევის პერიოდი არც ამპლიტუდაზეა დამოკიდებული. ეს კანონი რხევის იზოქრონიზმის სახელწოდებითაა ცნობილი.

უფრო ზუსტი ამონახსნის საპოვნელად ხელსაყრელია არა (51,3) განტოლების ამოხსნა, არამედ ენერგიის ინტეგრალიდან გამოსვლა, რადგან, როგორც ვიცით, ერთგანზომილებიანი მოძრაობის დროს ენერგიის ინტეგრალი სავსებით განსაზღვრავს მოძრაობას. ენერგიის ინტეგრალს მათემატიკური საქანისათვის ექნება მნიშვნელობა

$$E = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl \cos \theta = \text{const.} \quad (51,8)$$

განვსაზღვროთ მუდმივი  $E$ . როცა  $\theta$  მიაღწევს თავის მაქსიმალურ  $\theta_0$  მნიშვნელობას, მაშინ სიჩქარე  $\dot{\theta} = 0$  და (51,8) მოგვცემს  $E = -mgl \cos \theta_0$ . მაშასადამე,

$$\frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} = mgl(\cos \theta - \cos \theta_0), \quad (51,9)$$

აქედან განისაზღვრება დრო

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (51,10)$$

დრო, რომელიც საჭიროა  $\theta$  კუთხის ცვლილებისათვის 0-დან  $\theta_0$ -მდე, გამრავლებული ოთხზე, მოგვცემს რხევის პერიოდს

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \quad (51,11)$$

რადგან  $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ , ამიტომ

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (51,12)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$k = \sin \frac{\theta_0}{2}, \quad \sin \frac{\theta}{2} = zk. \quad (51,13)$$

მაშინ

$$d\theta = \frac{2k dz}{\sqrt{1 - z^2 k^2}}, \quad (51,14)$$

და პერიოდისათვის გვექნება

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}. \quad (51,15)$$

ეს ინტეგრალი დამოკიდებულია  $k$ -ზე და, მაშასადამე, რხევის ამპლიტუდაზე; რაც იმას ნიშნავს, რომ ზოგად შემთხვევაში რხევა არაიზოქრონულია. აღნიშნოთ ეს ინტეგრალი  $\varepsilon(k)$ -თი.

$$\varepsilon(k) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}. \quad (51,16)$$

ამ ინტეგრალს ელიფსურ ინტეგრალს უწოდებენ. მისი ზუსტად ამოხსნა არ ხერხდება. განვიხილოთ მცირე რხევების შემთხვევა, როცა  $k = \sin \frac{\theta_0}{2} \approx \frac{\theta_0}{2} \ll 1$ , მაშინ შეგვიძლია (51,16)-ში შემავალი ფუნქციის მწკრივად გაშლა

$$(1 - k^2 z^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} k^2 z^2 + \frac{3}{8} k^4 z^4 + \dots + \quad (51,17)$$

სიმარტივისათვის შევწარმოთ მწკრივში მხოლოდ ორი წევრი და შევიტანოთ (51,16) ელიფსურ ინტეგრალში. მივიღებთ

$$\varepsilon(k) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} + \frac{1}{2} k^2 \int_0^1 \frac{z^2 dz}{\sqrt{1 - z^2}} + \dots + \quad (51,18)$$

პირველი ინტეგრალი  $\frac{\pi}{2}$ -ის ტოლია, მეორეს კი ადვილად ამოვხსნით  $z = \sin \varphi$  აღნიშვნის შემოღებით

$$\int_0^1 \frac{z^2 dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4}. \quad (51,19)$$

ამგვარად,

$$\varepsilon(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{k^2}{4} + \dots \right), \quad (51,20)$$

ხოლო რხევის პერიოდისათვის გვექნება

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{k^2}{4} + \dots \right) \quad (51,21)$$

რადგან  $k = \frac{\theta_0}{2}$ , ამიტომ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \dots \right). \quad (51,22)$$

ამ ფორმულიდან ნათლად ჩანს რხევის იზოქრონულობის მიახლოებითი ხასიათი.

დაბოლოს აღნიშნოთ, რომ როცა  $k \rightarrow 0$ , რაც (51,13)-ის თანახმად ნიშნავს

მცირე კუთხეებს, (51,16) მოგვეცემს  $\varepsilon(0) = \frac{\pi}{2}$ , ხოლო როცა  $k \rightarrow 1$ , ე. ი. როცა

ვადანრა ხდება ვერტიკალურ მდებარეობამდე,  $\varepsilon(1) = \infty$ .

## სიჩქარეზე დამოკიდებული ძალები

ამ თავში შევისწავლით ისეთ მოძრაობას, როდესაც მოქმედი ძალები სიჩქარეზე არის დამოკიდებული. სიჩქარეზე დამოკიდებული ძალები ფიზიკაში უდიდეს როლს ასრულებენ. ამ ძალების ტიპიური მაგალითია ხახუნის ძალები. ზოგად შემოხვევაში ხახუნის ძალების დაყვანა მექანიკურ ძალებზე შეუძლებელია, ამიტომ მექანიკას შეუძლია შეისწავლოს ხახუნის ძალების მხოლოდ გარკვეული კლასი, რომლებიც შეიძლება გამოვხატოთ როგორც სიჩქარეების უმარტივესი ფუნქციები. ხახუნის ძალების შემთხვევაში მექანიკური სისტემის ენერგია იფანტება, იგი იხარჯება სიტემის არამექანიკურ მოძრაობებზე და ამიტომ მექანიკური ენერგიის შენახვას ადგილი აღარა აქვს. რა თქმა უნდა, ენერგიის შენახვას უფრო ფართო გაგებით, რომელიც შეიცავს სითბურ მოვლენებსაც, კვლავ ექნება ადგილი, მაგრამ ეს შემთხვევა თერმოდინამიკის საგანს წარმოადგენს და აქ არ განვიხილავთ. ქვემოთ განვიხილავთ ნაწილაკის მოძრაობას გარემოში და რხევებს ხახუნის ძალების გათვალისწინებით. ეს საკითხები განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია იმდენად, რამდენადაც გამოიყენებიან ფიზიკის სხვადასხვა დარგებში.

### § 52. სიჩქარეზე დამოკიდებული ძალები და დისიპაციური ფუნქცია

აქამდის ჩვენ ვიხილავდით ისეთ მოძრაობას, როცა განზოგადებული კოორდინატები და შესაბამისი განზოგადებული სიჩქარეები მოძრაობას საცხებით ახასიათებდნენ. როგორც თავის დროზე აღვნიშნეთ, ეს შესაძლებელია წმინდა მექანიკური მოძრაობისას, როცა სისტემის შინაგან ცვლილებებს უგულუბელუყოფდით. ძალიან ხშირად კი საქმე უფრო რთულადაა და ზოგად შემთხვევებში მოძრაობის აღწერისათვის საჭირო ხდება მექანიკის ფარგლებიდან გამოსვლა. მართლაც, სხეულის მოძრაობის დროს შეიძლება ადგილი ჰქონდეს ხახუნს და, მაშასადამე, სითბოს გამოყოფას, რაც შედეგია ატომებისა და მოლეკულების რთული მოძრაობებისა. ამ დროს ხდება ენერგიის გაფანტვა — დისიპაცია და ენერგია მოძრაობის რენტეგრალს აღარ წარმოადგენს. ამ შემთხვევაში ლაგრანჟიანი აზრს ჰქარავს, რაღაც პოტენციალური ენერგია შეიძლება კოორდინატების გარდა სიჩქარეების რთული ფუნქციაც აღმოჩნდეს.

სიჩქარეზე დამოკიდებულ პოტენცილებს დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს და ხშირად გვხვდება ფიზიკის სხვადასხვა დარგებში, მაგალითად. ელექტროდინამიკაში. ცნობილია, რომ ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრაე მუხტის პოტენციალური ენერგია უდრის

$$U(r, v) = e\varphi - \frac{e}{c} (\mathbf{A}, \mathbf{v}), \quad (52, 1)$$

სადაც  $\varphi$  და  $A$  სკალარ- და ვექტორპოტენციალებია,  $e$  მუხტია,  $c$  — სინათლის სიჩქარე,  $v$  კი მუხტის სიჩქარეა. როგორც ვხედავთ, პოტენციალური ენერგია სიჩქარის ფუნქციაა, ამიტომ ასეთი პოტენციალური ენერგიების შესწავლას დიდი მნიშვნელობა ენიჭება.

სიჩქარეზე დამოკიდებული ძალები გვხვდება პირობების მიხედვით და დეფორმაციის სხეულების მექანიკაში. ცნობილია, მაგალითად, რომ გემის წინააღმდეგობის ძალა პროპორციულია გემის მოძრაობის სიჩქარის სხვადასხვა ხარისხისა. მცირე სიჩქარეებზე წინააღმდეგობის ძალა პროპორციულია სიჩქარის პირველი ხარისხის, ხოლო სიჩქარის გაზრდისას ძალა პროპორციული ხდება სიჩქარის კვადრატის და კუბისა და კი. ბლანტი სითხეში (პაერში) ჩაძირული სფეროს წინააღმდეგობის ძალა, მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში, როგორც ცნობილია, განისაზღვრება სტოკსის კანონით  $6\pi\eta av$ , სადაც  $\eta$  სითხის (პაერის) სიბლანტის კოეფიციენტი,  $a$  სფეროს რადიუსი, ხოლო  $v$  — მისი მოძრაობის სიჩქარე.

სიჩქარეზე დამოკიდებული ველები საზოგადოდ არაპოტენციალურია. ამიტომ ლაგრანჟის განტოლებებს იმ სახით ვეღარ დავწერთ, როგორც აქამდის ვწერდით. ზოგად შემთხვევაში ლაგრანჟის განტოლებებს ეწებათ (19,20) სახე

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (52,2)$$

სადაც  $T$  სისტემის კინეტიკური ენერგია,  $Q_k$  კი — განზოგადებული ძალა. როგორც აღვნიშნეთ, ლაგრანჟიანით სარგებლობას ზოგად შემთხვევაში აზრი აღარ აქვს. მაგრამ ხშირად ისეთი მდგომარეობა გვაქვს, როცა სისტემაზე მოქმედი ძალებიდან ზოგს გააჩნია პოტენციალი, ზოგს კი — არა. ვთქვათ, მაშასადამე, სისტემის  $i$ -ურ ნაწილაკზე მოქმედ ძალას აქვს სახე

$$F_i = - \frac{\partial U}{\partial r_i} + F'_i, \quad (52,3)$$

სადაც  $F'_i$  ის ძალაა, რომელსაც პოტენციალი არა აქვს. მაშინ, (19,22) ფორმულის თანახმად, განზოგადებული  $Q_k$  ძალისათვის გვექნება

$$Q_k = - \frac{\partial U}{\partial q_k} + Q'_k, \quad (52,4)$$

სადაც

$$Q'_k = \sum_{i=1}^N \left( F'_i, \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right). \quad (52,5)$$

ამ შემთხვევაში ლაგრანჟის (52,2) განტოლება ასე გადაიწერება:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k. \quad (52,6)$$

$L$  კვლავ კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების სხვაობას წარმოადგენს.  $Q'_k$  ის განზოგადებული ძალაა, რომელსაც პოტენციალი არა აქვს. აღნიშნული შემთხვევა გვხვდება ხახუნის ძალების დროს. ამასთან ცხად გვიჩვენებს, რომ ბევრ შემთხვევაში ხახუნის ძალა სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია:

$$X = -k_1 \dot{x}, \quad Y = -k_2 \dot{y}, \quad Z = -k_3 \dot{z}, \quad (52,7)$$

სადაც  $X, Y, Z$  ხახუნის ძალის კომპონენტებია,  $k_1, k_2, k_3$  კი — დადებითი მუდმივები. ხახუნის ძალის დასახასიათებლად ხელსაყრელია შემოვიყვანოთ რეღის

ე. წ. დისიპაციური ფუნქცია. რელეის დისიპაციურ ფუნქციას უწოდებენ გამოხატულებას

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_{1i} \dot{x}_i^2 + k_{2i} \dot{y}_i^2 + k_{3i} \dot{z}_i^2), \quad (52,8)$$

ჯამი აიღება სისტემის ყველა ნაწილაკის მიხედვით. აქედან ნათელია, რომ ხახუნის ძალა განისაზღვრება ტოლობით:

$$X_i = -\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial f}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial f}{\partial z_i}, \quad F_i = -\frac{\partial f}{\partial r_i}. \quad (52,9)$$

ხახუნის შესაბამისი განზოგადებული ძალები კი ტოლი იქნებიან

$$Q_k = \sum_i \left( F_i, \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) = - \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial r_i}, \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right). \quad (52,10)$$

(19,14) ტოლობის გათვალისწინება საბოლოოდ მოგვცემს

$$Q_k = -\frac{\partial f}{\partial q_k}, \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (52,11)$$

ლაგრანჟის (52,6) განტოლება კი მიიღებს სახეს

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial f}{\partial q_k}. \quad (52,12)$$

ეს განტოლება გამოიყენება სიჩქარის პროპორციული ხახუნის ძალების შემთხვევაში.

დისიპაციურ ფუნქციას შეიძლება მიეცეთ ფიზიკური შინაარსი. ვაჩვენოთ, რომ იგი წარმოადგენს ენერჯიის გაფანტვის სიჩქარეს. ვიპოვოთ სისტემის სრული ენერჯიის

$$E = \sum_i \dot{q}_i p_i - L \quad (52,13)$$

წარმოებული ღრთით

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \ddot{q}_i p_i + \sum_i \dot{q}_i \dot{p}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i. \quad (52,14)$$

(52,12) განტოლებიდან

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad (52,15)$$

ამიტომ (52,14) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad (52,16)$$

საიდანაც

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (52,17)$$

რელეის ფუნქცია სიჩქარეების კვადრატული ფუნქციაა, ამიტომ ეილერის თეორემით

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i = 2f, \quad (52,18)$$

ლა

$$\frac{dE}{dt} = -2f. \quad (52,19)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ენერჯიის გაფანტვის სიჩქარე გამოიხატება დისიპაციური ფუნქციის საშუალებით. ენერჯიის გაფანტვის შედეგად სისტემის როგორც მთლიანად ენერჯია მცირდება, რადგან  $f$  არსებითად დადებითი ფუნქციაა და ისეთივე კონსტრუქციისაა, როგორც კინეტიკური ენერჯია.

### § 53. თეორემა პირიალის შესახებ

როცა ნაწილაკთა სისტემა მოძრაობს შემოსაზღვრულ არეში, მაშინ გვაქვს პერიოდული, ანდა თითქმის პერიოდული მოძრაობა. ასეთი მოძრაობებისათვის სამართლიანია ერთი მეტად მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც დიდ როლს ასრულებს არა მხოლოდ მექანიკაში, არამედ სტატისტიკურ ფიზიკაშიც. ეს თეორემა თავისი შინაარსით სტატისტიკური ხასიათისაა, რადგან იგი აკავშირებს დროის მიხედვით გასაშუალოებულ ფიზიკურ სიდიდეებს.

ეთქვამთ, სისტემის  $i$ -ური ნაწილაკის რადიუსეკტორია  $r_i$ , ხოლო მასზე მოქმედი ძალა  $F_i$ . განვიხილოთ სიდიდე

$$F = \sum_{i=1}^N (F_i, r_i). \quad (53,1)$$

ამ სიდიდეს უწოდებენ სისტემის კლაუზიუსის ვირიალს. იგი ასეც შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ:

$$\sum_{i=1}^N (F_i, r_i) = \sum_{i=1}^N (p_i, \dot{r}_i). \quad (53,2)$$

ეს ტოლობა გადაწეროთ იგივერად

$$\sum (F_i, r_i) = \frac{d}{dt} \sum (p_i, r_i) - \sum_{i=1}^N (p_i, \dot{r}_i). \quad (53,3)$$

აშკარაა, რომ ბოლო წევრი წარმოადგენს სისტემის გაორკეცებულ კინეტიკურ ენერჯიას, მართლაც,

$$\sum (p_i, \dot{r}_i) = \sum (p_i, v_i) = \sum m_i v_i^2 = 2T. \quad (53,4)$$

გავასაშუალოთ (53,3) განტოლება დროის მიხედვით

$$\overline{\sum_{i=1}^N (F_i, r_i)} + 2\bar{T} = \frac{d}{dt} \overline{\sum (p_i, r_i)}, \quad (53,5)$$

ამასთან, რაიმე  $\Phi(t)$  ფუნქციის დროის მიხედვით საშუალოში ივლისხმება შემდეგი:

$$\overline{\Phi(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(t) dt. \quad (53,6)$$

როცა  $\Phi(t)$  ფუნქცია პერიოდული ფუნქციაა, მაშინ იგი შეგვიძლია გავასაშუალოთ ერთი პერიოდის მანძილზე.

(53,5) უკომპლექსო საინტერესოა იმ შემთხვევაში, როცა მექანიკური სისტემა აწარმოებს კვანძსტაციონარულ მოძრაობას, ე. ი. როცა მოძრაობა ხდება შემოსაზღვრულ არეში და კოორდინატები და სიჩქარეები არ იზრდება უსასრულოდ. ადვილად დავინახავთ, რომ თუ  $\Phi(t)$  წარმოადგენს რაიმე  $f(t)$  ფუნქციის წარმოებულს  $\Phi(t) = f(t)$ , სადაც  $f(t)$  შემოსაზღვრული ფუნქციაა, მაშინ  $\overline{\Phi(t)} = 0$ . მართლაც,

$$\overline{\Phi(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{df}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t) - f(0)}{t} = 0, \quad (53,7)$$

თუ  $f(t)$  ზუსტად პერიოდული ფუნქციაა, მაშინ  $t$  შეგვიძლია ავირჩიოთ პერიოდად და  $f(t)$  გავხადოთ  $f(0)$ -ის ტოლი; შედეგად კვლავ მივიღებთ  $\overline{\Phi(t)} = 0$ . კვანძსტაციონარული მოძრაობის დროს სიდიდე  $\sum (r_i, p_i)$  შემოსაზღვრულია და ამიტომ (53,5)-ის მარჯვენა მხარე ნულის ტოლი იქნება, მაშასადამე,

$$2\overline{T} = - \overline{\sum_{i=1}^N (F_i, r_i)}. \quad (53,8)$$

ეს უკომპლექსო გამოხატავს ძალის ვირიალის თეორემის შინაარსს. ამასთან  $F_i$  ნებისმიერი ძალაა და იგი შეიძლება შეიცავდეს პასიურ ძალებსაც. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია პოტენციალური ძალების შემთხვევა, მაშინ

$$2\overline{T} = \overline{\sum \left( \frac{\partial U}{\partial r_i}, r_i \right)}. \quad (53,9)$$

თუ, გარდა ამისა, პოტენციალური ენერგია კოორდინატების ერთგვაროვანი ფუნქციაა და ერთგვაროვნების რიგი  $n$ -ის ტოლია, მაშინ (53,9)-ის მარჯვენა მხარე მოგვცემს  $n\overline{U}$ , და ვირიალის თეორემა მიიღებს იმ სახეს, რომელიც ხშირად გამოიყენება პრაქტიკულად; კერძოდ,

$$2\overline{T} = n\overline{U}. \quad (53,10)$$

რადგან იზოლირებული სისტემისათვის სრული ენერგია  $E$  მოძრაობის ინტეგრალია, ამიტომ ხელსაყრელია კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების საშუალო სიდიდეების  $E$ -ს მიხედვით გამოხატვა. ფორმულიდან

$$E = \overline{E} = \overline{T} + \overline{U}. \quad (53,11)$$

(53,10)-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\overline{T} = \frac{nE}{n+2}, \quad \overline{U} = \frac{2E}{n+2}. \quad (53,12)$$

როცა პოტენციალური ენერგია წარმოადგენს კოორდინატების კვადრატულ ფუნქციას, მაშინ  $n=2$ , და გვექნება:

$$\overline{T} = \overline{U}. \quad (53,13)$$

ასეთი მდგომარეობა გვაქვს რხევის ამოცანებში. ჩვენ გვეჩვენა, რომ ჰარმონიული რხევის დროს  $x = a \cos(\omega_0 t + \sigma)$ . მაშასადამე, კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების საშუალო მნიშვნელობებისათვის მივიღებთ:

$$\overline{T} = \overline{U} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m a^2 \omega_0^2}{2} \overline{\sin^2(\omega_0 t + \sigma)} \quad (53,14)$$



ლა

$$\overline{U} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (53,15)$$

მაგრამ

$$\overline{\sin^2(\omega_0 t + \alpha)} = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \alpha) dt = \frac{1}{2}; \quad (53,16)$$

ასევე  $\overline{\cos^2(\omega_0 t + \alpha)} = \frac{1}{2}$ , ამიტომ, მართლაც.

$$\overline{T} = \overline{U} = \frac{m a^2 \omega_0^2}{4}. \quad (53,17)$$

როცა  $n = -1$ , მაშინ  $2\overline{T} = -\overline{U}$ . ასეთი შემთხვევა გვაქვს კულონური ველის დროს  $U(r) \sim r^{-1}$ . ცხადია, ამ შემთხვევაში,  $\overline{T} + E = 0$ , რაც მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ შეიძლება, როცა  $E < 0$ , ე. ი. ფინიტური მოძრაობის დროს. ეს ადრე სხვა გზითაც დავამტკიცეთ.

გამოვიყენოთ ვირიალის თეორემა და ვაჩვენოთ, როგორი ენერგია შეესაბამება პლანეტის მოძრაობას წრეხაზზე. წრეზე მოძრაობის შემთხვევაში ექსცენტრისიტეტი  $\varepsilon = 0$  და მოძრაობის ტრაექტორიას ექნება სახე  $r = \rho$ , სადაც  $\rho = \frac{l^2}{\mu \alpha}$  პარამეტ-

რია. პოტენციალური ენერგიის საშუალო, ამგვარად, ტოლია:  $\overline{U} = -\frac{\alpha}{\rho}$ , ხოლო

ვირიალის თეორემა მოგვცემს  $2\overline{T} = \frac{\alpha}{\rho}$ . მაშასადამე, (53,12) ფორმულების თა-

ნახმად,  $E = -\frac{\alpha}{2\rho}$ , ე. ი.

$$E = -\frac{\mu \alpha^2}{2l^2}. \quad (53,18)$$

ენერგიის ასეთი მნიშვნელობა ადრე მიღებული გვექონდა სხვა გზითაც.

აღნიშნული მაგალითებიდან ნათლად ჩანს, რომ თეორემას ძალის ვირიალის შესახებ დიდი გამოყენება აქვს.

## § 54. წრფივი ოსცილატორის მიღებადი რხევები

წინა თავში განვიხილეთ ოსცილატორი სიციარიელეში, მაგრამ ხშირად უფრო საინტერესოა ის შემთხვევა, როცა რხევა ხდება რაიმე გარემოში. გარემო იწვევს ხახუნს, რის შედეგადაც ნაცვლად პარამონიული რხევებისა, რომელსაც ადგილი ჰქონდა სიციარიელეში, გვექნება მიღებადი რხევები, ე. ი. რხევები, რომლებიც ხახუნის ძალების მოქმედების გამო თანდათან სუსტდება და, შესაძლებელია, სავსებითაც მოიხსოს. ცხადია, ამ შემთხვევაში გვექნება ენერგიის დისიპაცია და მოძრაობა შეეგვიძლია აღვწეროთ ლაგრანჟის (52,12) განტოლებით. განვიხილოთ წრფივი ოსცილატორი, ამ შემთხვევაში დასიპაციური ფუნქცია იქნება

$$f = \frac{\varepsilon x^2}{2}, \quad (54,1)$$

სადაც  $\varepsilon$  მუდმივი სიდიდეა და განისაზღვრება ექსპერიმენტის დახმარებით. მას ხაზუნის კოეფიციენტს უწოდებენ; ხაზუნის ძალა კი ტოლი იქნება

$$F' = -\varepsilon x. \quad (54,2)$$

როგორც ვხედავთ, ხაზუნის ძალა სიჩქარის პროპორციულია და მიმართულია მოძრაობის საწინააღმდეგოდ. ლაგრანჟის მოძრაობის განტოლება, თუ გავიხსენებთ, რომ

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}, \quad (54,3)$$

მოგვცემს

$$m\ddot{x} + \varepsilon x + kx = 0. \quad (54,4)$$

შეპოვილათ აღნიშვნები:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\gamma = \frac{\varepsilon}{m}. \quad (54,5)$$

ამ აღნიშვნებში (54,4) მიიღებს სახეს

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (54,6)$$

აქ  $\omega_0$  არის ოსცილატორის სიხშირე, როცა ხაზუნის ძალა არა გვაქვს;  $\gamma$  კი დამკვირვებელია ხაზუნის კოეფიციენტთან. მის ფიზიკურ შინაარსს ქვემოთ გამოვარკვევთ. (54,6)-ს მიღებული რხევის დიფერენციალური განტოლება ეწოდება. იგი წარმოადგენს წრფივ ერთგვაროვან განტოლებას. მისი ამონახსნი ვეძებთ  $x = e^{st}$  სახით. შევიტანოთ განტოლებაში და შევკვეცოთ ექსპონენტზე. მივიღებთ

$$s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2 = 0, \quad (54,7)$$

საიდანაც

$$s = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (54,8)$$

მაველეთ ორი კერძო ამონახსნი. ზოგად ამონახსნს კი ექნება შემდეგი სახე:

$$x = e^{-\gamma t} [C_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}], \quad (54,9)$$

ან, რაც იგივეა,

$$x = C e^{-\gamma t} \operatorname{ch}(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t + \delta). \quad (54,10)$$

$C_1$ ,  $C_2$ , ისევე როგორც  $C$  და  $\delta$ , ნებისმიერი მუდმივებია, რომლებიც განისაზღვრება საწყისი პირობებიდან. (54,10)-ს ადვილად დავიყვანათ (54,9) სახეზე, თუ გავიხსენებთ ჰიპერბოლური კოსინუსის განმარტებას.

იმის მიხედვით, რომელია მეტი,  $\gamma$  თუ  $\omega_0$ , ზოგად ამონახსნს სხვადასხვა სახე ექნება. გვექნება სამი შემთხვევა. პირველი, როცა  $\gamma < \omega_0$ , მაშინ  $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i\delta$ , სადაც

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (54,11)$$

(54,9) ზოგადი ამონახსნისათვის კი მივიღებთ გამოსახულებას

$$x = e^{-\gamma t} (C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}). \quad (54,12)$$

ეს ამონახსნი შეგვიძლია ასეც წარმოვადგინოთ<sup>1</sup>:

$$x = a e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \alpha). \quad (54,13)$$

<sup>1</sup>  $x$  ნამდვილია, ამიტომ  $a$  და  $\alpha$  ნებისმიერი მუდმივებაც ნამდვილებია.

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში რხევა კვლავ ჰარმონიულია, ოღონდ ამპლიტუდა ახლა დროის მიხედვით კლებულობს ექსპონენციალურად, ე. ი.

$$A(t) = ae^{-\gamma t}, \quad (54,14)$$

გარდა ამისა,  $\omega'$  სიხშირე მცირეა, ვიდრე  $\omega_0$ , რაც იმას გვიჩვენებს, რომ ხახუნის შედეგად რხევა გაძნელებულია და რხევა უფრო ნაკლები სიხშირით წარმოებს, ვიდრე ჰარმონიული ოსცილატორის შემთხვევაში.

როგორც დაინახეთ, მიღებული რხევის ამპლიტუდა განისაზღვრება (54,14) ფორმულით, ამასთან  $a$  იქნება ამპლიტუდის მნიშვნელობა, როცა  $t=0$ , ე. ი.  $a=A(0)$ . ამპლიტუდის მიღევის საზომად შემოჰყავთ ლოგარითმული დეკრემენტი. (54,14)-დან

$$\gamma t = \ln \frac{A(0)}{A(t)}. \quad (54,15)$$

თუ ავიღებთ ერთ პერიოდს  $t=T$ , გვექნება

$$\gamma = \frac{1}{T} \ln \frac{A(0)}{A(T)}. \quad (54,16)$$

ამგვარად,  $\gamma$  განსაზღვრავს ამპლიტუდის ლოგარითმულ შემცირებას ერთი პერიოდის მანძილზე, ამიტომ მას ლოგარითმულ დეკრემენტს უწოდებენ. შემოჰყავთ, აგრეთვე, რხევის ამპლიტუდის შემცირების სხვა ზომა. ეს არის ის დრო, რომლის განმავლობაში ამპლიტუდა  $e$ -ჯერ დაეცემა, იგი განისაზღვრება ტოლობით  $\gamma \tau = 1$ , საიდანაც

$$\tau = \frac{1}{\gamma}. \quad (54,17)$$

ამ სიდიდეს რელაქსაციის დროს უწოდებენ.

მიღებული რხევის დროს ოსცილატორის საშუალო ენერგია მცირდება, რადგან ენერგია იხარკება ხახუნის ძალების დაძლევაზე. ვთქვათ,  $\gamma \ll \omega_0$ . ამ შემთხვევაში ერთი პერიოდის მანძილზე მიღებული რხევის ამპლიტუდა თითქმის არ იცვლება და აზრი აქვს (54,13) გამოსახულებიან და მისი დროითი წარმოებულების კვადრატების საშუალო მნიშვნელობებს, ამასთან გასაშუალოებისას  $e^{-\gamma t}$ -ს ცვლილება შეგვიძლია მხედველობაში არ მივიღოთ. თანახმად (53,17) ფორმულებსა,

$$\overline{T} = \overline{U} = \frac{ma^2 \omega_0^2}{4} e^{-\gamma t}, \quad (54,18)$$

საიდანაც

$$\overline{E} = \overline{E}_0 e^{-\gamma t}. \quad (54,19)$$

აქ  $\overline{E}_0 = \frac{ma^2 \omega_0^2}{2}$  წარმოადგენს ენერგიის საშუალო მნიშვნელობას  $t=0$  მომენტში.

ცხადია, რომ (54,19) ფორმულის თანახმად, ლოგარითმული დეკრემენტი შეგვიძლია განვსაზღვროთ ენერგიის საშუალო მნიშვნელობის საშუალებითაც. მართლაც, (54,19) ფორმულიდან ვღებულობთ

$$\frac{1}{\overline{E}} \frac{d\overline{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \ln \overline{E} = -\gamma, \quad (54,20)$$

ხოლო (52,19) ფორმულის თანახმად ოსცილატორის საშუალო ენერგია დისიპაციურ ფუნქციასთან შემდეგ კავშირშია:

$$\overline{E} = \frac{\dot{I}}{\gamma}. \quad (54,21)$$

ახლა განვიხილოთ მეორე შემთხვევა:  $\gamma > \omega_0$ . ზოგად ამონახსნს ექნება (54,9) სახე, სადაც  $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  არის დადებითი სიდიდე და თანაც ნაკლებია  $\gamma$ -ზე. ამიტომ დიდი დროის გავლის შემდეგ ( $t \rightarrow \infty$ )  $x$  ექსპონენციალურად მიუახლოვდება ნულს ყოველგვარი რხევითი მოძრაობის გარეშე. ასეთ მოძრაობას ეწოდება არაპერიოდული მიღება — ოსცილატორი რხევის გარეშე ბრუნდება წონასწორობის მდებარეობაში.

მესამე შემთხვევაში  $\gamma = \omega_0$ , ამ დროს  $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = 0$ , და ადვილად შევამოწმებთ, რომ ზოგადი ამოხსნისათვის გვექნება

$$x = (A + Bt)e^{-\gamma t}, \quad (54,22)$$

რომელიც აგრეთვე არაპერიოდულ მიღებას იძლევა: როცა  $t \rightarrow \infty$ , მაშინ  $x \rightarrow 0$ . აქაც, როგორც წინა შემთხვევაში, წონასწორობიდან გამოყვანილი წერტილი რხევის გარეშე უბრუნდება საწყის მდებარეობას.

### § 55. იძულებითი მიღებადი რხევები

მიღებადი რხევების ყველაზე საინტერესო შემთხვევას წარმოადგენს იძულებითი მიღებადი რხევები. ვთქვათ, ოსცილატორზე, ხახუნის ძალის გარდა მოდებულია გარეშე ძალაც, რომელიც დროის ფუნქციაა. იძულებითი ძალა შეეცდება დაძლიოს ხახუნის ძალების მოქმედება და რხევა მუდმივად შეინარჩუნოს. ამიტომ ამ დროის ძალის ერთდროული მოქმედებით გვექნება რხევის მეტად საინტერესო შემთხვევა, რომელსაც დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს ფიზიკის სხვადასხვა დარგში. იძულებითი ძალა, რომელიც დროის მიხედვით პერიოდულად იცვლება, ავიღოთ შემდეგი სახით:

$$F = F_0 \cos(\omega t + \delta); \quad (55,1)$$

სადაც  $F_0$  იძულებითი ძალის ამპლიტუდაა,  $\delta$  — საწყისი ფაზა,  $\omega$  კი — სიხშირე. იძულებითი მიღებადი რხევის განტოლებას ექნება სახე

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \delta). \quad (55,2)$$

ხელსაყრელობის მიზნით გადავიღეთ კომპლექსურ ფორმაზე

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\Phi}{m} e^{i\omega t}, \quad (55,3)$$

სადაც

$$\Phi = F_0 e^{i\delta}. \quad (55,4)$$

თუ (55,3) განტოლების რეალურ ნაწილს ავიღებთ, იგი დაემთხვევა (55,2) განტოლებას, ამიტომ (55,3) განტოლების ამოხსნის რეალური ნაწილი (55,2) განტოლების ამოხსნა იქნება.

(55,3) განტოლება წარმოადგენს არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას, მისი შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნა წინა პარაგრაფში ვიპოვეთ. კონკრეტულ შემთხვევაში, როცა  $\gamma < \omega_0$ , მას შემდეგი სახე ჰქონდა:

$$x = ae^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \alpha), \quad \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (55,5)$$

თუ ამ ამოხსნას დავუმატებთ (55,3) განტოლების რომელიმე კერძო ამონახსნს, მივიღებთ განტოლების ზოგად ამონახსნს.

კერძო ამოხსნა ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$x = Be^{i\omega t}, \quad (55,6)$$

სადაც  $B$  ჩერჩვრობით განუსაზღვრელი კოეფიციენტია. შევითანოთ (55,3) განტოლებაში და შევკვეცოთ  $e^{i\omega t}$ -ზე. მივიღებთ

$$B = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega)}. \quad (55,7)$$

თუ კომპლექსურ  $B$  ამპლიტუდას წარმოვიდგინთ როგორც

$$B = be^{i\beta}. \quad (55,8)$$

მაშინ, ცხადია, რომ

$$b = |B| = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (55,9)$$

და

$$\tan \beta = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (55,10)$$

ამრიგად, (55.6) კერძი, ამონახსნისათვის ვუქნება

$$x = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} e^{i(\omega t + \beta)}. \quad (55,11)$$

ჩვენთვის საჭირო ამონახსნის მისაღებად ამ გამოსახულებიდან რეალური ნაწილი უნდა ავიღოთ; ვუქნება

$$x = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t + \beta). \quad (55,12)$$

ამ გამოსახულებისა და (55,5) ფუნქციის შეკრებით მივიღებთ (55,2) განტოლების ზოგად ამონახსნს<sup>1</sup>

$$x = ae^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \alpha) + \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t + \beta). \quad (55,13)$$

დიდი დროის გავლის შემდეგ პირველი წევრი პრაქტიკულად მოსპობა და დაგვრჩება მხოლოდ იძულებითი რხევა, რომელიც განისაზღვრება (55,12) ფორმულით.

ადვილად შემოწმდება, რომ როცა  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ , მაშინ იძულებითი რხევის ამპლიტუდას ექნება მაქსიმალური მნიშვნელობა

$$B_{max} = \frac{F_0}{2m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (55,14)$$

როგორც ვხედავთ, განსხვავებით სიციარიელში რხევისა, რეზონანსის წერტილში რხევა სასრულო სიდიდეა. როცა  $\gamma \ll \omega_0$ , მაშინ რეზონანსს ექნება ადგილი  $\omega \approx \omega_0$  მნიშვნელობაზე.

შევისწავლოთ რხევის ყოფაქცევა რეზონანსის წერტილის უზუალო მახლობლობაში. ამისათვის მივიღოთ

$$\omega = \omega_0 + \Omega, \quad (55,15)$$

<sup>1</sup> თუ გვაქვს  $\gamma > \omega_0$  ან  $\gamma = \omega_0$  შემთხვევები, მაშინ პირველი წევრის ნაცვლად უნდა ავიღოთ (54,10) ან (54,22) ამონახსნები.

სადაც  $\Omega$  მცირე სიდიდეა. დავუშვათ, რომ  $\alpha \ll \omega_0$ , უგულვებელვყოთ  $\Omega$ -ს მაღალი ხარისხები და (55,13)-ის ფესვში პირველი წევრი  $(\omega_0^2 - \omega)^2 = (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2$  შევცვალოთ  $4\omega_0^2 \Omega^2$ -ით, ხოლო მეორე წევრში  $\omega$  ავიღოთ  $\omega_0$ -ის ტოლად. გვექნება

$$x = \frac{F_0}{2m\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega^2 + \gamma^2}} \cos(\omega_0 t + \beta). \quad (55,16)$$

იძულებითი ძალების მოქმედებისას ენერგიის შენახვას, საზოგადოდ, ადგილი არა აქვს. მაგრამ გარკვეული დროის გავლის შემდეგ იძულებითი მილევალი რხევა დამყარდება და ენერგია საშუალოდ შეინახება, ე. ი. ენერგიას, რომელსაც ოსცილატორი ხარჯავს ხახუნის ძალების დისიპლევად, აღადგენს გარეშე ძალებიდან. ჩვენი მიზანაა ენერგიის შთანთქმის საკითხის განხილვა. ვიპოვოთ ოსცილატორის მიერ ერთ სეკუნდში შთანთქმული ენერგია, რომელიც იხარჯება ხახუნის ძალების დაძლევაზე. როგორც დისიპაციური ფუნქციის ფიზიკური შინაარსის გარკვევის დროს ვაჩვენეთ, ეს ენერგია გარკვევებული დისიპაციური ფუნქციის ტოლია და დამოკიდებული იქნება გარეშე ძალის სისწიერზე.  $I(\omega)$ -თი აღვნიშნოთ შთანთქმული ენერგიის საშუალო ინტენსივობა  $\omega$  სისწირის იძულებითი ძალის მოქმედებისას. მაშინ, (52,19) ფორმულის თანახმად,

$$I(\omega) = - \frac{d\bar{E}}{dt} = 2\bar{f}, \quad (55,17)$$

სადაც ხაზი თავზე აღნიშნავს დროის მიხედვით გასაშუალებას.

ვიპოვოთ დისიპაციური ფუნქციის საშუალო. როგორც ვიცით,

$$f = \frac{\epsilon x^2}{2} = \gamma m \dot{x}^2, \quad (55,18)$$

ამიტომ, (55,16) გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$f = \frac{\gamma}{4m} \frac{F_0^2}{(\Omega^2 + \gamma^2)} \sin^2(\omega t + \beta). \quad (55,19)$$

ფუნქცია პერიოდულია, ამიტომ საშუალო მნიშვნელობა შეგვიძლია ვიპოვოთ ერთი პერიოდის მანძილზე; რადგან  $\sin^2(\omega t + \beta) = 1/2$ , შთანთქმული ენერგიის ინტენსივობისათვის, თანახმად (55,17)-სა, გვექნება

$$I(\Omega) = \frac{F_0^2 \gamma}{4m(\Omega^2 + \gamma^2)}. \quad (55,20)$$

ინტენსივობის სისწიერზე ასეთი ტიპის დამოკიდებულებას უწოდებენ დისპერსიულს<sup>1</sup>. ინტენსივობა სწრაფად იზრდება რეზონანსის წერტილში  $\omega \approx \omega_0$ . გარეშე ძალა მით უფრო ადვილად გადასცემს ოსცილატორს ენერგიას, რაც უფრო მცირეა  $\Omega$ , ე. ი. რაც უფრო ახლოსაა მისი სისწიერე ოსცილატორის  $\omega_0$  საკუთარ სისწიერესთან.

$I(\Omega)$  მრუდს, რომელსაც უწოდებენ შთანთქმის რეზონანსულ მრუდს, აქვს ნახ. 45-ზე მოყვანილი სახე. რეზონანსულ მრუდს ახასიათებენ ე. წ. მრუდის ნახევარსიგანით. ნახევარსიგანე წარმოადგენს იმ  $\Delta\Omega$  სიდიდეს, რომელზედაც  $I(\Omega)$  მნიშვნელობა ინტენსივობასთან შედარებით  $\Omega=0$  წერტილზე ორჯერ მცირდება, ამასთან

<sup>1</sup> აღბათობათა თეორიაში ასეთი ტიპის განაწილება ცნობილია კოში-ლორენცის განაწილებების სახელწოდებით.

$$I(0) = \left(\frac{F_0}{2}\right)^2 \frac{1}{m\gamma}. \quad (55,21)$$

ამგვარად, ნახევარსიგანე განისაზღვრება პირობით

$$I(\Delta\Omega) = \frac{1}{2} I(0). \quad (55,22)$$

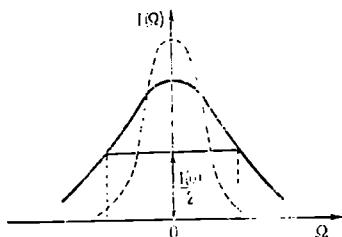
(55,20) და (55,22) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$(\Delta\Omega)^2 + \gamma^2 = 2\gamma^2, \quad (55,23)$$

საიდანაც

$$\gamma = \pm \Delta\Omega. \quad (55,24)$$

(55,21) გვიჩვენებს, რომ, როცა  $\gamma$  მცირდება, მრუდის სიმაღლე იზრდება, (55,24)-ის თანახმად კი მრუდი ვიწროვდება, ე. ი.  $\gamma$ -ს შემცირებით რეზონანსული მრუდი ვიწროვდება და მაღლდება და, პირიქით,  $\gamma$ -ს გაზრდით მრუდი დაბლდება და განიერდება. აღსანიშნავია, რომ თურმე ეს ცვლილება ისეთი თანაფარდობით ხდება, რომ რეზონანსული მრუდის მიერ შემოწყობილი ფართი მუდმივია და არაა დამოკიდებული მიღების ლოგარითმულ დეკრემენტზე. მართლაც, აღნიშნული ფართი ტოლი იქნება



ნახ. 45

$$s = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} I(\Omega) d\Omega. \quad (55,25)$$

რადგან  $\Omega = \omega - \omega_0$  და  $\omega$  იცვლება 0-დან  $\infty$ -მდე, ამიტომ ინტეგრალის საზღვრები აღებულია  $-\omega_0$  და  $\infty$ -ს შორის. მაგრამ ინტეგრალქვეშა ფუნქციას მაქსიმუმი აქვს  $\Omega = 0$ -ში, სხვაგან კი სწრაფად მცირდება, ამიტომ ინტეგრალის მნიშვნელობა არსებითად არ შეიცვლება, თუ ქვედა საზღვარს  $-\infty$ -მდე გავავრცელებთ, მაშინ (55,20)-ის შეტანით ინტეგრალში ფართისათვის მივიღებთ მნიშვნელობას

$$s = \left(\frac{F_0}{2}\right)^2 \frac{\gamma}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{\gamma^2 + \Omega^2} = \frac{\pi}{m} \left(\frac{F_0}{2}\right)^2 \quad (55,26)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ  $I(\Omega)$  მრუდით შემოსაზღვრული ფართი არაა დამოკიდებული  $\gamma$ -ზე.

ვიპოვოთ ახლა შთანთქმული ენერგია. დამყარებული მოძრაობის დროს საშუალო ენერგია, რომელსაც ჰარმონიული ოსცილატორი დახარჯავს ხახუნის ძალებზე, ტოლი იქნება იმ საშუალო ენერგიის, რომელსაც გარეშე ძალა აწვდის ოსცილატორს იძულებითი რხევის შესანარჩუნებლად. თანახმად (54,21) და (55,17) ფორმულებისა, ეს ენერგია ტოლია<sup>1</sup>

$$\bar{E} = \frac{1}{2\gamma} I(\Omega), \quad (55,27)$$

<sup>1</sup> შევიძლია, აგრეთვე, ვისარგებლოთ (54,21) ფორმულით.

საიდანაც (55,20) ფორმულის გათვალისწინებით გვექნება

$$\bar{E}(\Omega) = \frac{F_0^2}{8m} \frac{1}{\Omega^2 + \gamma^2}, \quad (55,28)$$

როცა  $\Omega \simeq 0$ , შეიძლება ავიღოთ  $\omega = \omega_0$ , და მაშინ

$$\bar{E}(0) = \left( \frac{F_0}{2\gamma} \right)^2 \frac{1}{2m}. \quad (55,29)$$

### § 56. მოძრაობა პარამოზში

განვიხილოთ ნაწილაკის მოძრაობის ისეთი შემთხვევა, როცა მასზე მოქმედებენ ხახუნის და გარე ძალები. იგულისხმება, მაშასადამე, რომ დრეკადი ძალები არ მოქმედებენ. სიმარტივის მიზნით შემოვისაზღვროთ ერთგანზომილებიანი მოძრაობით და, ვთქვათ, დისიპაციური ფუნქცია, რომლითაც გარემო ხასიათდება, სიჩქარის კვადრატული ფუნქციაა

$$f = \frac{\epsilon x^2}{2}. \quad (56,1)$$

განვიხილოთ სამი მარტივი შემთხვევა: როცა ნაწილაკზე მოქმედი გარე ძალა  $F$  ნულის ტოლია, როცა იგი მუდმივია და როცა მხოლოდ სიჩქარის ფუნქციაა. ზოგადი ერთგანზომილებიანი მოძრაობისათვის ლაგრანჟის განტოლება

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial f}{\partial x} \quad (56,2)$$

მოგვეყვას

$$m\ddot{x} + \epsilon x = \frac{F}{m}. \quad (56,3)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\frac{\epsilon}{m} = \alpha, \quad (56,4)$$

მაშინ მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე

$$\ddot{x} + \alpha x = \frac{F}{m}. \quad (56,5)$$

დავეშვათ პირველად, რომ  $F=0$ , მაშინ

$$\ddot{x} + \alpha x = 0. \quad (56,6)$$

ამოხსნა ვქებთ  $x = e^{st}$  სახით. განტოლებაში შეტანით მივიღებთ  $s(s+\alpha)=0$ , საიდანაც  $s=0$  და  $s=-\alpha$ , ამიტომ ზოგად ამონახსნს ექნება სახე

$$x = A + Be^{-\alpha t} \quad (56,7)$$

სიჩქარე კი იქნება

$$\dot{x} = -\alpha Be^{-\alpha t}. \quad (56,8)$$

$t=0$  დროს მოვითხოვთ:  $x=x_0$  და  $\dot{x}=\dot{x}_0$ , მაშინ (56,8)-დან  $B = -\frac{\dot{x}_0}{\alpha}$ , ხო-

ლო (56,7)-დან  $A = x_0 + \frac{\dot{x}_0}{\alpha}$ . ამგვარად,



$$x - x_0 = \frac{\dot{x}_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \quad (56,9)$$

და

$$\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\alpha t}, \quad (56,10)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ხახუნის ძალების გამო გარკვეული დროის გავლის შემდეგ სიჩქარე ნული გახდება (კერძოდ ექსპონენციალურად) და ნაწილაკი გაჩერდება  $x_0$ -დან  $\frac{\dot{x}_0}{\alpha}$  მანძილზე.

დავეშვათ ახლა, რომ მატერიალურ წერტილზე მოქმედებს მუდმივი გარეშე ძალა  $F = \text{const}$ . ამ შემთხვევაში საჭიროა ამოიხსნას (56,3) მარტივი არაერთგვაროვანი განტოლება. დავწეროთ ეს განტოლება  $v = \dot{x}$  სიჩქარისათვის

$$\dot{v} + \alpha v = \frac{F}{m}. \quad (56,11)$$

ნათელია, რომ ამ განტოლების კერძო ამონახსნი იქნება  $v = \frac{F}{m\alpha}$ , ხოლო ზოგადი ამონახსნისათვის, თანახმად (56,8)-ისა, გვექნება

$$v = \frac{F}{m\alpha} + ce^{-\alpha t}. \quad (56,12)$$

$c$  მუდმივი განესაზღვროთ საწყისი პირობით:  $v = v_0$ , როცა  $t = 0$ ; მივიღებთ

$$c = v_0 - \frac{F}{m\alpha}. \quad (56,13)$$

მაშასადამე,

$$v = \frac{F}{m\alpha} + \left( v_0 - \frac{F}{m\alpha} \right) e^{-\alpha t}. \quad (56,14)$$

იდი დროის გავლის შემდეგ მეორე წევრი ნული გახდება და მოძრაობა იწარმოებს  $v = \frac{F}{m\alpha}$  მუდმივი სიჩქარით. განვლილი მანძილის მისაღებად საჭიროა იქნება (56,14)-ის ინტეგრაცია.

დაბოლოს, განვიხილოთ შემთხვევა, როცა გარეშე ძალა ფუნქციად სიჩქარის  $F = F(v)$ . მაშინ (56,11)-ს ვქნება სახე

$$\frac{dv}{dt} + \alpha v = \frac{1}{m} F(v), \quad (56,15)$$

ან

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F(v)}{m} - \alpha v, \quad (56,16)$$

საიდანაც

$$t = \int_{v_0}^v \frac{dv}{\frac{1}{m} F(v) - \alpha v}. \quad (56,17)$$

საწყისი პირობა ისეა შერჩეული, რომ როცა  $t = 0$ ,  $v = v_0$ . ინტეგრალის ამოხსნით ვიპოვიტ  $t = f(v)$ , საიდანაც  $v = \varphi(t)$ , ხოლო  $x$ -ს ვიპოვიტ ამ განტოლების ინტეგ-

რაცით. კერძო შემთხვევაში, როცა  $F=0$ , მივიღებთ:  $-zt = \ln \frac{v}{v_0}$ , რაც ემთხვევა (56,10) ამონხსნას. ასევე მარტივად მივიღებთ  $F = \text{const}$  შემთხვევას. მართლაც, (56,17) მოგვცემს

$$-zt = \int_{v_0}^v \frac{d\left(\frac{F}{m} - zv\right)}{\left(\frac{F}{m} - zv\right)} = \ln \frac{F - zvm}{F - zv_0m}, \quad (56,18)$$

რომელიც გამარტივების შემდეგ დაიყვანება (56,14) ამონახსნზე.

როცა ძალა სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია  $F = D\dot{x}$ , მაშინ (56,17) ინტეგრალის გამოთვლით მივიღებთ (56,10) ამონახსნს, სადაც  $x$  შეცვლილი იქნება  $\left(x - \frac{D}{m}\right)$ -ით. ამავე გზით შეგვიძლია განვიხილოთ მრავალი საინტერესო შემთხვევა.

## მყარი სხეულის მექანიკა

ქვემოთ ორ თავს მიეუძღვნით მყარი სხეულის მექანიკას. მყარი სხეულების მექანიკას დიდი მნიშვნელობა აქვს როგორც თეორიული, ისე პრაქტიკული თვალსაზრისით. პრაქტიკაში ყოველი დანადგარი თუ მანქანა მყარი სხეულებისაგან შედგება და ყველგან საქმე გვაქვს მათი წონასწორობის ან მოძრაობის საკითხებთან. ამიტომაც მყარი სხეულების ფიზიკას ცალკე გამოეყო მთელი რიგი ტექნიკური მნიშვნელობის დარგები, რომელთა გარეშე წარმოდგენილია თანამედროვე საინჟინრო მეცნიერებანი. ჩვენ შევუხებთ მყარი სხეულის მოძრაობისა და წონასწორობის მხოლოდ ზოგად თეორიულ საკითხებს, რომელთაც დიდი მნიშვნელობა აქვთ ფიზიკის სხვადასხვა დარგში.

### თ ა ვ ი IX

## მყარი სხეულის კინემატიკა

### § 57. თაჰვისუფალი მყარი სხეული

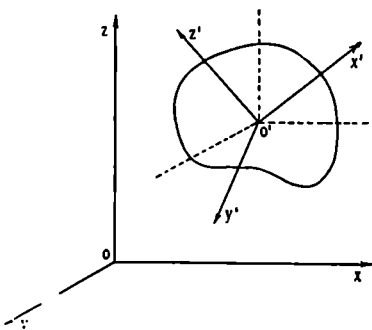
იდეალური მყარი სხეული წარმოადგენს ნაწილაკთა სისტემის ერთ მეტად მნიშვნელოვან შემთხვევას, როდესაც ნაწილაკთა შორის მანძილები უცვლელი სიდიდეებია. ბუნებაში, რა თქმა უნდა, იდეალური მყარი სხეული არ არსებობს. ყოველი სხეული, რომელსაც ჩვენ ჩვეულებრივად „მყარს“ ვუწოდებთ, ყოველთვის ჯანიცდის დეფორმაციასა და სხვადასხვა ცვლილებებს, მაგრამ პირველ მიახლოებაში ხშირად შეგვიძლია დავუშვათ, რომ მის წერტილებს შორის მანძილები უცვლელია. მყარი სხეულის ყოველგვარ შინაგან ცვლილებებს და მის ფიზიკურ თვისებებს, რომელთაც უდიდესი მნიშვნელობა აქვთ თანამედროვე ფიზიკაში, შეისწავლის სპეციალური დარგი, რომელსაც მყარი სხეულების ფიზიკა ვუწოდებთ. ჩვენ დავკმაყოფილებთ მყარი სხეულის, როგორც მთლიანის, მექანიკური მოძრაობების შესწავლით. ამასთან შემდგომში, ზედმეტი მითითების გარეშე, მყარ სხეულებში ვიგულისხმებთ იდეალურ მყარ სხეულებს.

მყარი სხეულის მდებარეობა სივრცეში შეგვიძლია დავახასიათოთ მისი სამი არაკოლინეარული წერტილით. ერთი წერტილით მის მდებარეობას ვერ დავახასიათებთ, რადგან შესაძლებელი იქნებოდა მყარი სხეულის ბრუნვა ამ წერტილის ირგვლივ; ორი წერტილის შემთხვევაში მყარ სხეულს შეუძლია ბრუნვა ამ ორი წერტილის შემავრთბელი წრფის ირგვლივ. მესამე წერტილის დამატებით კი მისი მდებარეობა სივრცეში საესკებით დაფიქსირდება. ეს სამი წერტილი თავისუფალი რომ ყოფილიყო, გვექნებოდა ცხრა თავისუფლების ხარისხი. რამდენადაც ისინი ერთმანეთისაგან უცვლელი მანძილებით არიან დაცილებული, ამ ცხრა სიდიდეს

ვდება სამი ბმა, ამიტომ სულ დავგრძელება ექვსი თავისუფლების ხარისხი. ამგვარად, თავისუფალი მყარი სხეული უნდა დაეხასიათოთ ექვსი განზოგადებული კოორდინატით. აღსანიშნავია, რომ ეს გარეგნობა დამოკიდებული არაა მყარი სხეულის შემადგენელ მატერიალურ წერტილთა რაოდენობაზე და ძალაში რჩება მაშინაც კი, როცა მყარი სხეული შეგვიძლია ვანვიხილოთ როგორც უწყვეტი გარემო.

როცა თვით მყარ სხეულზეა დადებული ბმები, მაშინ მისი თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი ექვსზე ნაკლები იქნება. მაგალითად, როცა მყარი სხეული ისე მოძრაობს, რომ მასში აღებული ყოველი სიბრტყე თავისი თავის პარალელური რჩება, მაშინ მას ექვსება სამი თავისუფლების ხარისხი. ხოლო როცა უძრავია მყარი სხეულის ორ წერტილზე გამავალი რაიმე წრფე, მაშინ მყარ სხეულს მხოლოდ ერთი თავისუფლების ხარისხი ექნება. კერძოდ, ეს იქნება ამ წრფის ირგვლივ ბრუნვის თავისუფლების ხარისხი, რომელიც განისაზღვრება ერთი ზომბრუნების კუთხით.

განვიხილოთ თავისუფალი მყარი სხეული და გამოვარკვიოთ, როგორ უნდა შევარჩიოთ განზოგადებული კოორდინატები. ცხადია, ეს კოორდინატები შეიძლება შევარჩიოთ სხვადასხვანაირად. ნათელია, რომ მყარი სხეულის მდებარეობის



ნახ. 46

დასახასიათებლად დავეკვირდებოთ ათვლის ინერციული სისტემა  $x'o'y'z'$ , რომლის მიმართაც განვიხილოთ მყარი სხეულის მოძრაობას. ამ სისტემას ვუწოდოთ უძრავი ათვლის სისტემა. როცა მყარი სხეულის მაგირ მატერიალურ წერტილს ვიხილავდით, მაშინ ერთი ათვლის სისტემის შემოღება საესებით საკმარისი იყო. მყარი სხეულის მოძრაობის აღსაწერად ხელსაყრელია დამატებით კიდევ ერთი სისტემის შემოღება, რომელიც უძრავად იქნება დაკავშირებული მყარ სხეულთან. მყარ სხეულს ბრუნვა რომ არ შეეძლოს, მაშინ მისი მდებარეობის დასახასიათებლად უძრავი სის-

ტემის მიმართ საკმარისი იქნებოდა სამი კოორდინატი, ე. ი. მდებარეობა განსაზღვრული იქნებოდა მყარი სხეულის რომელიმე ერთი წერტილით. მაგრამ მყარ სხეულს შეუძლია ბრუნვა ამ ერთი წერტილის ირგვლივ, ამიტომ დამატებით დავეკვირდებოთ სამი პარამეტრი, რომლებიც განსაზღვრავენ მყარი სხეულის ორიენტაციას. ამ მიზნით ხელსაყრელია მყარ სხეულში ავილოთ მეორე ათვლის სისტემა, რომელიც უძრავადაა დაკავშირებული მყარ სხეულთან და მასთან ერთად მონაწილეობს ყოველგვარ მოძრაობაში. ამ ათვლის სისტემას ვუწოდებთ მოძრავ სისტემას და აღვნიშნავთ  $x''o''y''z''$  ასუბით. ამის შემდეგ ნათელია, რომ მყარი სხეულის ექვსი თავისუფლების ხარისხიდან სამი ასახიათებს მყარი სხეულის რომელიმე ერთი წერტილის (რომელიცაა მოათავსებულია მოძრავი სისტემის სათავე) მდებარეობას უძრავი სისტემის მიმართ, სამი კი განსაზღვრავს მოძრავი სისტემის ღერძების ორიენტაციას უძრავი სისტემის მიმართ. პირველი სამი კოორდინატი ახასიათებს მყარი სხეულის გადატანით მოძრაობას, მეორე სამი კი — მის ბრუნვას. თუ ჩვენ გვინტერესებს მყარი სხეულის მხოლოდ ბრუნვითი მოძრაობა, ამისათვის საკმა-

რისია მოძრავი და უძრავი სისტემების სათავეების დამთხვევა. ლერძების ურთიერთორიენტაციის განსასაზღვრავად ვიგულისხმობთ, რომ გადატანითი მოძრაობა არა გვაქვს და ორივე სისტემის სათავე ერთმანეთს ემთხვევა. ცხადია, ამ შემთხვევაში, მყარი სხეულის სივრცული ორიენტაციის განსაზღვრის საკითხი დაიყვანება მყარი სხეულის რომელიმე წერტილის კოორდინატებს შორის, მოძრავ და უძრავ სისტემებში, კავშირის დამყარებაზე. ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ ასეთ კავშირს ამყარებს წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნები. რომლებიც ხორციელდება მიმართულების კოსინუსებით.

წერტილის კოორდინატები მოძრავ და უძრავ სისტემებში შეგვიძლია დავაკავშიროთ წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნით

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k \quad (i=1, 2, 3) \quad (57,1)$$

სადაც  $a_{ik}$  კოეფიციენტები წარმოადგენენ მიმართულების კოსინუსებს; ისინი აკმაყოფილებენ ორთო-ნორმირების პირობებს

$$\sum_i a_{ik} a_{in} = \sum_i a_{ni} a_{ni} = \delta_{kn} \quad (57,2)$$

მაშასადამე, ცხრა მიმართულების კოსინუსს ედგება ექვსი პირობა, ე. ი. მათგან დამოუკიდებლად შეგვიძლია ავირჩიოთ მხოლოდ სამი.

მიმართულების კოსინუსები ადგენენ გარდაქმნის მატრიცას

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (57,3)$$

შევნიშნოთ, რომ შებრუნებულ გარდაქმნას ექნება შემდეგი სახე:

$$x_i = \sum_{k=1}^3 a_{ki} x'_k \quad (i=1, 2, 3) \quad (57,4)$$

შესაბამისი გარდაქმნის მატრიცა იქნება  $A$  მატრიცის ტრანსპონირებული

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (57,5)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა გარდაქმნის მატრიცას აქვს სახე

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (57,6)$$

შესაბამის წრფივ ორთოგონალურ გარდაქმნას ექნება გამოხატულება

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \\ x'_2 &= -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \\ x'_3 &= x_3. \end{aligned} \quad (57,7)$$

რომელიც წარმოადგენს შტრიხიანი სისტემის მობრუნებას  $x_3$  ლერძის ირგვლივ  $\varphi$  კუთხეზე საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. შებრუნებული გარდაქმნის მატრიცას ექნება სახე:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (57,8)$$

შესაბამისი წრფივი გარდაქმნა კი იქნება

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \cos \varphi - x'_2 \sin \varphi, \\ x_2 &= x'_1 \sin \varphi + x'_2 \cos \varphi, \\ x_3 &= x'_3, \end{aligned} \quad (57,9)$$

აღსანიშნავია, რომ (57,1) გარდაქმნა საკოორდინატო ღერძების მობრუნების გარდა შეიცავს ინვერსიასაც — არეკლას სისტემის სათავეს მიმართ<sup>1</sup>. ამ შემთხვევაში  $a_{ik} = -\delta_{ik}$  და

$$x'_i = - \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} x_k = -x_i. \quad (57,10)$$

აღვნიშნოთ, რომ ამ ორი გარდაქმნის (მობრუნება და ინვერსია) შესაბამისი გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტები  $\Delta(a)$  ერთმანეთისაგან განსხვავდება ნიშნით; კერძოდ

$$\Delta(a) = +1, \text{ მობრუნებისათვის,} \quad (57,11)$$

$$\Delta(a) = -1, \text{ ინვერსიისათვის.}$$

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ, თუ გვაქვს ორი თანმიმდევრული მობრუნება, რომელთაგან პირველს შეესაბამება  $A$  მატრიცა, მეორეს კი  $B$ , საერთო მობრუნება კვლავ წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნით გამოიხატება, რომლის შესაბამისი გარდაქმნის მატრიცა იქნება  $C = BA$ . ამასთან, შევნიშნოთ, რომ  $BA \neq AB$ .

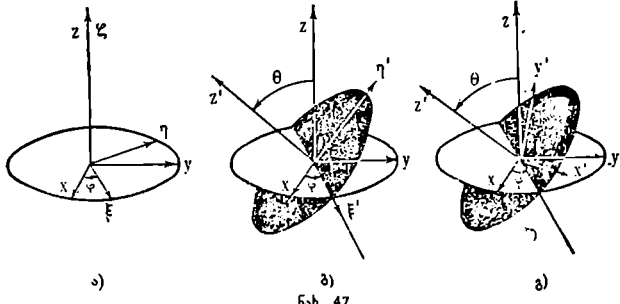
რამდენადაც შტრიხიანი სისტემის ღერძების ორიენტაციის განსაზღვრა ეკვივალენტურია მყარი სხეულის სივრცული ორიენტაციის განსაზღვრისა (გავიხსენოთ, რომ შტრიხიანი სისტემა უძრავადაა დაშვებული მყარ სხეულში). იმდენად მყარი სხეულის ორიენტაცია უძრავი ათვლის სისტემის მიმართ შეგვიძლია დავახასიათოთ ცხრა მიმართულების კოსინუსით. მაგრამ მიმართულების კოსინუსების გამოყენება განზოგადებულა კოორდინატების სახით მოუხერხებელია, რამდენადაც ისინი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი არ არიან. ამიტომ მიმართულების კოსინუსების ნაცვლად მყარი სხეულის სივრცეში ორიენტაციის დასახასიათებლად იყენებენ სხვა სიდიდეებს. ასეთი სიდიდეებია, მაგალითად, ეილერის კუთხეები, რომელთაც შემდეგ პარაგრაფში განვიხილავთ.

## § 58. ეილერის კუთხეები

როდესაც მოძრავი და უძრავი ღერძების ურთიერთორიენტაციის მიმართულების კოსინუსებით ვახასიათებთ, მაშინ, როგორც დავინახეთ, საქმე გვაქვს გარკვეულ სირთულესთან, რომელიც ხელს ვეიშლის მყარი სხეულის მოძრაობა აღწეროთ ლაგრანჟის განტოლებებით, რამდენადაც მიმართულებებს კოსინუსები დამოუკიდებელი სიდიდეები არაა. ჩვენ ვვჭირდება ს:ამ პარამეტრი, იმ დროს, როცა გვაქვს ცხრა მიმართულებას კოსინუსი. ამიტომ საჭიროა სხვა სიდიდეების შემოღება. ღერძების ურთიერთორიენტაციის დახასიათება შეიძლება მრავალნაირი გზით, მაგრამ მათგან ყველაზე მოსახერხებელი არის ეილერის კუთხეებით სარგებლობა. რადგან ახლა ჩვენ გვინტერესებს მხოლოდ ღერძების ურთიერთორიენტა-

<sup>1</sup> უნდა აღინიშნოს, რომ ინვერსიას მყარი სხეულის არაკეთარი მოძრაობა არ შეესაბამება;

ციის საკითხი, ვიგულისხმობთ, რომ უძრავი და მოძრავი სისტემის სათავეები ერთმანეთს ემთხვევა. გარდა ამისა, ეილერის კუთხეებს, როგორც წესი, განმარტავენ მარჯვენა სისტემაში, ამიტომ ჩვენც ეს სისტემა ავირჩიოთ. ეილერის კუთხეები განსაზღვრავს სამ მობრუნებას, რომელთა თანმიმდევრული გამოყენებით ერთი ნებისმიერი დეკარტის სისტემიდან გადავალთ მეორეზე. ვთქვათ, მოცემულია  $x', y', z'$  სისტემა, რომელსაც აქვს გარკვეული ორიენტაცია  $x, y, z$  სისტემის მიმართ. დასაწყისში დავუშვათ, რომ უძრავი და მოძრავი სისტემის ღერძები ერთმანეთს ემთხვევა და ვაჩვენოთ, როგორი ბრუნვები უნდა განვახორციელოთ, რომ მოძრავმა სისტემამ მიიღოს  $x', y', z'$  ღერძების ნებისმიერი მოცემული ორიენტაცია. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ამისათვის საკმარისია თანმიმდევრობით განვახორციელოთ ეილერის სამი  $\varphi, \theta, \psi$  კუთხით გარკვეული წესით მობრუნება.



ნახ. 47

მოვაბრუნოთ მოძრავი სისტემა  $\xi$  ღერძის ირგვლივ  $\varphi$  კუთხეზე საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით. მივიღებთ მოძრავი ღერძების  $\xi, \eta, \zeta$  ორიენტაციას (ნახ. 47). შემდეგ მიღებული სისტემა მოვაბრუნოთ  $\xi$  ღერძის ირგვლივ  $\theta$  კუთხეზე, საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით. შედეგად უძრავი და მოძრავი სისტემების  $xoy$  და  $\xi\eta\zeta$  სიბრტყეები ერთმანეთს გადაკვეთენ  $\xi$  ღერძზე, რომელსაც კვანძთა ღერძს უწოდებენ. მისი მიმართულება განისაზღვრება  $n = [k, k']$  ვექტორული ნამრავლის მიმართულებით,  $k$  და  $k'$  უძრავი და მოძრავი სისტემების  $z$  ღერძების ორტეზია.

დაბოლოს მოძრავი სისტემა მოვაბრუნოთ  $\zeta'$  ღერძის ირგვლივ  $\psi$  კუთხეზე, კვლავ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. მივიღებთ  $x', y', z'$  სისტემის საძიებელ ორიენტაციას. 47-ე ნახაზზე ეს მობრუნებები განხატულია ცალკეული ოპერაციების სახით. უძრავი და მოძრავი სისტემების საბოლოო ორიენტაცია მოცემულია გ) შემთხვევაზე.  $\varphi, \theta, \psi$ -ს ეილერის კუთხეები ეწოდება. ცხადია, ისინი იცვლება შემდეგ ფარგლებში:

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 < \psi < 2\pi, \quad (8.1)$$

აღსანიშნავია, რომ ავტორთა ერთი ნაწილი ამ კუთხეებს მარცხენა სისტემაში განსაზღვრავს, მეორე კი — მარჯვენაში. ამასთან, ხშირად პირველი მობრუნება აითვლება  $y$  ღერძიდან, კუთხეთა ათვლა კი საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით ხდება. ამიტომ, ასეთი სხვადასხვა გზით განსაზღვრული ეილერის კუთხეებით გამოთვლილი შედეგების შედარებისას გარკვეული სიფრთხილე გვმართებს.

დავაკავშიროთ ახლა ეილერის კუთხეები მიმართულების კოსინუსებთან. ამისათვის საკმარისია ზემოთ განხილული მობრუნებების ანალიზურად ჩაწერა. მობ-

რუნება  $x$  ღერძის ირგვლივ  $\varphi$  კუთხეზე, რომლის შედეგად ვიღებთ ახალ  $x, \xi, \eta$  ორიენტაციას, ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ \eta &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ z &= z.\end{aligned}\tag{58,2}$$

ეს წრფივი გარდაქმნა ხსიათდება მატრიცით

$$\Omega_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{58,2'}$$

შემდეგ მობრუნება მოვახდინოთ  $\xi$  ღერძის ირგვლივ  $\theta$  კუთხეზე, მივიღებთ ღერძების  $x', \xi', \eta'$  ორიენტაციას, ამიტომ გვექნება გარდაქმნის ფორმულები

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi, \\ \eta' &= \eta \cos \theta + z \sin \theta, \\ z' &= -\eta \sin \theta + z \cos \theta.\end{aligned}\tag{58,3}$$

ამ მობრუნებას შეესაბამება მატრიცა

$$\Omega_{\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.\tag{58,3'}$$

და ბოლოს  $x'$  ღერძის ირგვლივ მობრუნებისას ვღებულობთ მოძრავი სისტემის  $x', y', z'$  საბოლოო ორიენტაციას

$$\begin{aligned}x' &= \xi \cos \psi + \eta' \sin \psi, \\ y' &= -\xi \sin \psi + \eta' \cos \psi, \\ z' &= z'.\end{aligned}\tag{58,4}$$

სათანადო მობრუნებას შეესაბამება შემდეგ მატრიცა:

$$\Omega_{\psi} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{58,5}$$

(58,2) ფორმულებიდან  $\xi, \eta, z$  შევითანოთ (58,3)-ში, იქიდან განსაზღვრული  $\xi, \eta', z'$  კი — (58,4)-ში. მარტივი დაჭრუფების შემდეგ, თუ მიღებულ შედეგს შევადარებთ (57,1) ფორმულებს, მივიღებთ

$$\begin{aligned}a_{11} &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi, \\ a_{12} &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi, \\ a_{13} &= \sin \theta \sin \psi, \\ a_{21} &= -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi, \\ a_{22} &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi, \\ a_{23} &= \sin \theta \cos \psi, \\ a_{31} &= \sin \varphi \sin \theta, \\ a_{32} &= -\cos \varphi \sin \theta, \\ a_{33} &= \cos \theta,\end{aligned}\tag{58,6}$$



მაშასადამე, სრული გარდაქმნის მატრიცას ექნება სახე:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi \sin \theta & -\cos \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (58,7)$$

ეს მატრიცა ახასიათებს შყარი სხეულის ნებისმიერ ბრუნვას წერტილის ირგვლივ. თუ გავიხსენებთ მატრიცათა გამრავლების წესს, ადვილად შევამოწმებთ, რომ (58,7) მატრიცა წარმოადგენს ლერძების ირგვლივ ცალკეული მობრუნების შესაბამისი მატრიცების ნაპრავეს. სახელდობრ,

$$\Omega = \Omega_{\varphi} \Omega_{\psi} \Omega_{\theta}. \quad (58,8)$$

აქვე აღვნიშნოთ, რომ ვილერის კუთხეების გარდა შყარი სხეულის ორიენტაციის დასახასიათებლად გამოიყენება სხვა პარამეტრებიც, რომელთა შორის განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს კეილი-კლეინის პარამეტრებს. ჩვენ ამ პარამეტრებს არ განვიხილავთ, ოღონდ აღვნიშნავთ, რომ ისინი ვილერის კუთხეებთან შემდეგნაირად არიან დაკავშირებული:

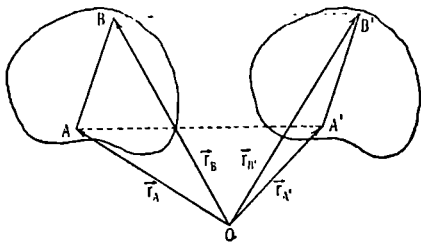
$$\begin{aligned} \alpha &= e^{i \frac{\psi + \varphi}{2}} \cos \frac{\theta}{2}, & \beta &= i e^{i \frac{\psi - \varphi}{2}} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \gamma &= i e^{-i \frac{\psi - \varphi}{2}} \sin \frac{\theta}{2}, & \delta &= e^{-i \frac{\psi + \varphi}{2}} \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (58,9)$$

კეილი-კლეინის ამ ოთხი  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  პარამეტრიდან დამოუკიდებელია მხოლოდ სამი. ამ პარამეტრებს დიდი გამოყენება აქვთ ჯგუფთა თეორიასა და კვანტურ მექანიკაში.

### § 59. შყარი სხეულის გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობანი

შყარი სხეულის ყოველი მოძრაობა დაიყვანება ორ უმარტივეს მოძრაობაზე: გადატანით და ბრუნვით მოძრაობაზე.

შყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა ეწოდება ისეთ მოძრაობას, როცა სხეულის ნებისმიერ ორ წერტილზე გავლებული სწორი გადაადგილდება თავის



ნახ. 48

პარალელურად. ეთქვას,  $t$  მომენტში  $AB$  სწორს, რომელაც შყარი სხეულის  $A$  და  $B$  წერტილებზე გადის, უკავია მდებარეობა, რომლის ბოლო წერტილები გან-

საზღვრულია  $r_A$  და  $r_B$  რადიუსექტორებით.  $\Delta l$  დროის გავლის შემდეგ სხეული გადაადგილდება და  $AB$  სწორი დაიკავებს ახალ  $A'B'$  მდებარეობას. რადგან მყარი სხეულის განმარტებით  $AB = A'B'$ , ხოლო გადატანითი მოძრაობის განმარტებით  $AB$  პარალელურია  $A'B'$ -ის, ამიტომ

$$\Delta r_A = \Delta r_B. \quad (59,1)$$

თუ ამ ტოლობას ორივე მხარეს გავყოფთ გავლილ  $\Delta t$  დროზე და გადავალთ ზღვარზე, როცა  $\Delta t \rightarrow 0$ , მივიღებთ

$$v_A = v_B, \quad (59,2)$$

სადაც  $v_A$  და  $v_B$   $A$  და  $B$  წერტილების სიჩქარეებია. რადგან  $A$  და  $B$  მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილები იყო, ამიტომ მივიღეთ შედეგი: მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის დროს ყოველ მომენტში ყველა წერტილის სიჩქარე ერთმანეთის ტოლია. ამიტომ  $V_A$  თავისუფალი ვექტორია და შეგვიძლია მოვდოთ მყარი სხეულის ნებისმიერ წერტილში. მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის დროს მისი ყოველი წერტილი აღწერს კონგრუენტულ ტრაექტორიებს, ე. ი. ყველა ამ ტრაექტორიის დამთხვევა შეიძლება პარალელური გადატანის საშუალებით. (59,2) ტოლობის გაწარმოებით დროთი მივიღებთ

$$\frac{dv_A}{dt} = \frac{dv_B}{dt}. \quad (59,3)$$

ამრიგად, ყველა წერტილის სიჩქარეთა ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ გადატანითი მოძრაობის დროს მყარი სხეულის ყველა წერტილის აჩქარებებიც ტოლია. ამის გამო მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობა საკვებით შეგვიძლია დავახსიანოთ მისი მხოლოდ ერთი წერტილის, მაგალითად, სიმძიმის ცენტრის მოძრაობით, მყარი სხეულის სიმძიმის ცენტრი ისევე განიმარტება როგორც ნებისმიერი მექანიკური სისტემის სიმძიმის ცენტრი, სახელდობრ, სიმძიმის ცენტრის რადიუს-ვექტორისათვის გვექნება

$$R_c = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}. \quad (59,4)$$

მაგრამ, ხშირად, მყარ სხეულს განიხილავენ უწყვეტი გარემოს სახითაც. ამ შემთხვევაში საკმარისია სხეულის მატერიალური წერტილის  $m_i$  მასა შევცვალოთ  $\rho dV$  ელემენტარულ  $dV$  მოცულობაში მოთავსებული მასით ( $\rho$  არის მასის სიმკვრივე), ხოლო ჯამი — ინტეგრალით. ასე რ.ი.მ, უწყვეტი მყარი სხეულის შემთხვევაში მისი სიმძიმის ცენტრი განისაზღვრება ფორმულით

$$R_c = \frac{\int \rho(r) r dV}{\int \rho dV}. \quad (59,5)$$

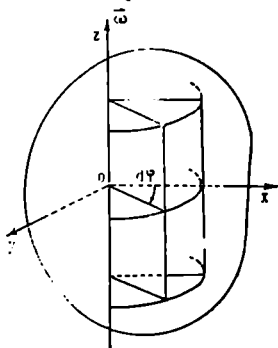
მყარი სხეულის ბრუნვა ღერძის ირგვლივ. თუ მყარი სხეული ისე მოძრაობს, რომ მისი რომელიმე ორ წერტილი უძრავია, მაშინ უძრავი დარჩება ყველა ის წერტილიც, რომლებიც მდებარეობენ ამ ორ წერტილზე გამავალ წოფეზე. ასეთ მოძრაობას უწოდებენ მყარი სხეულის ბრუნვას ღერძის გარშემო, აღნიშნულ წრფეს კი — ბრუნვის ღერძს ადვილად დავამტკიცებთ. რომ ამ შემთხვევაში მყარი სხეულის ყოველი წერტილი მოძრაობს წრეზე, რომელიც მდებარეობს ბრუნვის ღერძის მართობ სიბრტყეში და რომლის ცენტრი ძვეს ბრუნვის ღერძზე.

მყარი სხეულს ბრუნვის სიჩქარე შეგვიძლია დავახსიანოთ ორწახნაგა კუთხის ცვლილებით დროში. ეს ორწახნაგა კუთხე შექმნილია სიბრტყეებით, რომლე-

ბიკ ბრუნვის ღერძზე იკეთება. ამასთან, ერთი სიბრტყე უძრავია, მეორე კი სხეულთან ერთად ბრუნავს. ამ კუთხეს მობრუნების კუთხეს უწოდებენ. სიდიდეს

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (59,6)$$

უწოდებენ ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს.  $d\varphi$  არის კუთხის უსასრულოდ მცირე ნაზრდი, რომელიც სიდიდით ახასიათებს შემობრუნების ზომას, მიმართულებით კი ბრუნვის ღერძს ემთხვევა.  $d\varphi$  (და რაც იგივეა  $\omega$ ) მიმართულება განისაზღვრება ბურლის წესით. სახელობრ, მისი მიმართულება და ბრუნვის მიმართულება უნდა შეესაბამებოდეს ბურლის მოძრაობას. ამასთან, მარჯვენა სისტემაში  $\omega$ -ს მიმართულება განისაზღვრება მარჯვენა ბურლის წესით, მარცხენა სისტემაში კი — მარცხენათი (რადგან იგი აქსიალური ვექტორია).



ნახ. 49

ახლა ვიპოვოთ, რის ტოლია მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის ხაზოვანი სიჩქარე, როდესაც იგი ბრუნავს ღერძის გარშემო. რადგან ყოველი წერტილი მოძრაობს ღერძის მართობ სიბრტყეში მოთაქმებულ წრეზე, ამიტომ ნახ. 50-დან ნათელია, რომ ღერძის ნებისმიერა წერტილიდან გავლებული სხეულის ნებისმიერი წერტილის რადიუსექტორის ნაზრდი  $dr$  სიდიდით ტოლია

$$|dr| = r \sin \theta |d\varphi|. \quad (59,7)$$

აქარაა, რომ  $dr$  მართობია  $r$  და  $d\varphi$ -ზე გამავალ სიბრტყეს, ამიტომ

$$dr = [d\varphi, r], \quad (59,8)$$

სიდანაც,  $dt$ -ზე გაყოფის შემდეგ, მივიღებთ

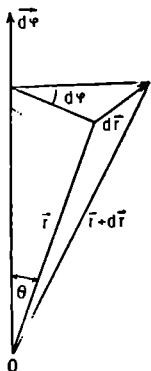
$$v = [\omega, r]. \quad (59,9)$$

ეს ფორმულა განსაზღვრავს მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის ხაზოვან სიჩქარეს. ცხადია, ეს სიჩქარე სხვადასხვა წერტილისათვის სხვადასხვაა.

თუ (59,9)-ს გაუმრავლებთ სკალარულად  $\omega$ -ზე, მივიღებთ  $(v, \omega) = 0$ . ასევე გვექნება  $(r, v) = 0$ , ე. ი. სიჩქარე მართობია როგორც ბრუნვის ღერძისა. ისე

$r$ -ისა. როცა სხეული ბრუნავს მუდმივი კუთხური სიჩქარით, ამბობენ, რომ სხეული ბრუნავს თანაბრად. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში მობრუნების კუთხე მოიძებნება ფორმულით

$$\varphi = \omega t + \varphi_0. \quad (59,10)$$



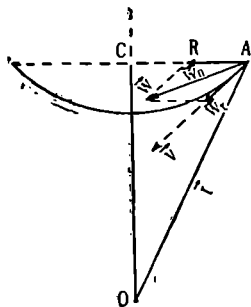
ნახ. 50

სადაც  $\varphi_0$  საწყისი მობრუნების კუთხეა. მყარი სხეულის არათანაბარი ბრუნვის დასახასიათებლად შემოაქვთ კუთხური აჩქარების ცნება. მყარი სხეულის კუთხური აჩქარებას უწოდებენ კუთხური სიჩქარის წარმოებულს დროით, ე. ი.

$$\chi = \frac{d\omega}{dt}. \quad (59,11)$$

ვინაიდან  $\omega$  ვექტორი ყოველთვის ბრუნვის ღერძზე მდებარეობს, ამიტომ  $\chi$  ვექტორიც ბრუნვის ღერძზე მოთავსდება, ამასთან მისი მიმართულება დაემთხვევა  $\omega$  ვექტორის მიმართულებას, როცა  $\omega$  სიდიდით ზრდადია, ხოლო მისი საწინააღმდეგო მიმართულება ექნება, როცა  $\omega$  სიდიდით კლებადია. როცა სხეული ბრუნავს მუდმივი აჩქარებით, ამბობენ, რომ სხეული ასრულებს თანაბრადაჩქარებულ ბრუნვას. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში მობრუნების კუთხე ასე გამოიხატება:

$$\varphi = \frac{\chi t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0, \quad (59,12)$$



ნახ. 51

სადაც  $\chi$  მუდმივი აჩქარებაა,  $\omega_0$  საწყისი კუთხური სიჩქარეა, ხოლო  $\varphi_0$  — საწყისი მობრუნების კუთხე. ახლა მოვინახოთ მბრუნავი სხეულის ნებისმიერი წერტილის აჩქარება. ალგებულო წერტილი სხეულის ბრუნვის დროს შემოსწერს წრეხაზს, რომლის რადიუსი  $R$ -ით აღვნიშნათ.

ვისარგებლოთ აჩქარების დაშლით მხებ და ნორმალურ მდგენელებად. ეპოვოთ  $\chi$ -ის ნორმალური მდგენელი. იგი, როგორც ვიცით, უდრის  $W_n = \frac{v^2}{R}$  ან, რადგან  $v = R\omega = r\omega \sin\theta$ ,

$$W_n = R\omega^2. \quad (59,13)$$

მხები აჩქარებისათვის კი გვაქვს

$$W_t = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\chi. \quad (59,14)$$

ნორმალური აჩქარება-მიმართულია წრის რადიუსის გასწვრივ, ბრუნვის ღერძისაკენ (ნახ. 51), მხები აჩქარება კი — წრისადმი მხების გასწვრივ; ამასთან, იგი გაჩეკება სიჩქარის მიმართულებას, როცა ეს უკანასკნელი სიდიდით მატულობს (აჩქარებული ბრუნვა) და მისი საწინააღმდეგო იქნება, როცა სიჩქარე სიდიდით კლებულობს (დაზმული ბრუნვა). ცხადია, რომ მბრუნავი მყარი სხეულის ალგებულო წერტილის სრული აჩქარება სიდიდით განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$|W| = R \sqrt{\omega^2 + \chi^2}, \quad (59,15)$$

ხოლო იმ კუთხისათვის, რომელსაც ალგებულო წერტილის აჩქარება ქანის ამ წერტილის სიჩქარესთან, გვექნება

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|r'_n|}{|V_t|} = \frac{\omega^2}{\chi}. \quad (59,16)$$

აღებული  $A$  წერტილის აჩქარების მოსაძებნად შეიძლება გვესარგებლა (59,9) ფორმულითაც. მართლაც, გვაქვს

$$W = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} [\omega, r] = \left[ \frac{d\omega}{dt}, r \right] + \left[ \omega, \frac{dr}{dt} \right]. \quad (59,17)$$

მაგრამ  $\frac{dr}{dt} = v$ , ამიტომ, იგივე (59,9) ფორმულის გამოყენებით, გვექნება

$$W = [\chi, r] + [\omega, [\omega, r]]. \quad (59,18)$$

ვექტორული ანალიზიდან ცნობილია, რომ  $[\omega, [\omega, r]] = \omega(\omega, r) - r\omega^2$ , ამიტომ

$$W = [\chi, r] + \omega(\omega, r) - r\omega^2. \quad (59,19)$$

შემოვიღოთ ერთეულოვანი ვექტორი  $\omega_0$ , მიმართული  $\omega$  კუთხური ვექტორის გასწვრივ, მაშინ

$$\omega(\omega, r) - r\omega^2 = \omega^2 [\omega_0(\omega_0, r) - r], \quad (59,20)$$

მაგრამ  $(\omega_0, r)$  წარმოადგენს  $r$  ვექტორის გეგმის ბრუნვის ღერძზე, ხოლო სხვაობა

$$\omega_0(\omega_0, r) - r = OC - OA = AC. \quad (59,21)$$

ამიტომ

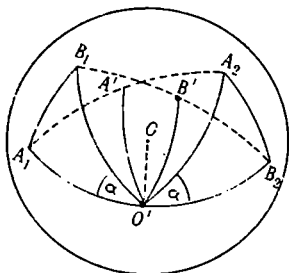
$$W = [\chi, r] + AC\omega^2, \quad (59,22)$$

პირველი წევრი გაბოხატაქს მხებ აჩქარებას. რომელიც სიდიდით უდრის  $\chi r \sin \theta = R\chi$  და მიმართულია  $\chi$  და  $r$  ვექტორების მართობულად, ე. ი. მიმართულია წერტილის მიერ შემოწერილი წრისადმი მხების გასწვრივ, ხოლო მეორე წევრი კი ნორმალური აჩქარებაა. იგი სიდიდით უდრის  $R\omega^2$  და მიმართულია წრის რადიუსის გასწვრივ ბრუნვის ღერძისაკენ.

მყარი სხეულის ბრუნვა წერტილის ირგვლივ. განვიხილოთ მყარი სხეულის ისეთი მოძრაობა, როცა მისი ერთი წერტილი უძრავა. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ყოველგვარი ასეთი მოძრაობა შეგვიძლია დაიყვანოთ ამ წერტილზე გავლებული ღერძის ირგვლივ მობრუნებაზე. ამ დებულებას დალამბერის თეორემას უწოდებენ.

დამტკიცების მიზნით ავიღოთ მყარი სხეული და ვიგულისხმოთ, რომ მისი რომელიმე  $O$  წერტილი უძრავია. აშკარაა, მაშინ მყარი სხეულს შეუძლია მხოლოდ ბრუნვა ამ წერტილის ირგვლივ.  $O$  წერტილიდან, როგორც ცენტრიდან შემოვწეროთ სფერო და ამ სფეროზე ავიღოთ ორი  $A_1$  და  $B_1$  წერტილი. მაშინ ამ ორი წერტილითა და  $O$  ცენტრით სავსებით განისაზღვრება მყარი სხეულის მდებარეობა სფეროზე. რადგან პირობით  $O$  წერტილი დამაგრებულია, ამიტომ მყარი სხეულის მდებარეობის განსაზღვრავად საკმარისია  $A_1B_1$  რკალის მდებარეობის ცოდნა. ეთქვას, სხეული ამოძრავდა და  $A_1B_1$  რკალმა მიიღო  $A_2B_2$  მდებარეობა. შევაერთოთ  $A_1, A_2$  და ასევე  $B_1, B_2$  წერტილები დიდი წრის რკალებით და ამ რკალების შუა  $A'$  და  $B'$  წერტილებზე ორთოგონალურად გავატაროთ დიდი წრეები. მაშინ ეს წრეება გადაიკეთება სფეროს ზედაპირზე რაიმე  $O'$  წერტილში. ეს წერტილი თანატოლი მანძილით იქნება დაკლებულ რაგორც  $A_1$  და  $A_2$ , ისე  $B_1$  და  $B_2$  წერტილებიდან. გარდა ამისა, რადგან  $A_1B_1$  და  $A_2B_2$  რკალები ტოლია, ამიტომ ნახ. 52-ზე  $O'A_2B_2$  და  $O'A_1B_1$  სფერული სამკუთხედები ერთმანეთის ტოლი იქნება.

თუ  $A_1O'B_2$  მთლიან კუთხეს რიგრიგობით გამოვაკლებთ  $\alpha$  კუთხეს, მივიღებთ ერთხელ  $A_1O'A_2$  კუთხეს, მეორედ კი  $B_1O'B_2$ -ს, ე. ი. გვექნება  $A_1O'A_2$  და  $B_1O'B_2$  სფერული კუთხეების ტოლობა. აქედან კი ნათელია, რომ, თუ მყარ სხეულს მოვაბრუნებთ  $OO'$  ღერძის ირგვლივ  $A_1O'A_2$  ან, რაც იგივეა,  $B_1O'B_2$  კუთხით, მაშინ  $A_2$  წერტილი დაემთხვევა  $A_1$  წერტილს, ხოლო  $B_2$  წერტილი  $B_1$ -ს და, მაშასადამე, სხეულის ახალი მდებარეობა მიღებული იქნება ერთი მობრუნებით  $OO'$  ღერძის ირგვლივ, რაც ამტკიცებს დალამბერის თეორემას.



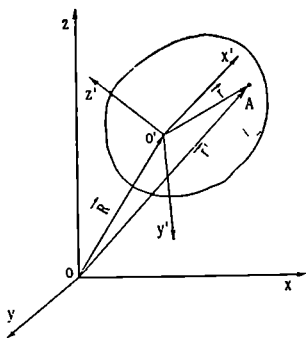
ნახ. 52

რომლის ირგვლივაც წარმოებს აღებულ მობრუნება, მყარი სხეულის მყისა ღერძს კი — ბრუნვის მყისა კუთხურ სიჩქარეს. ცხადია, რომ ამ ღერძის მიმართულება, საზოგადოდ, ცვალებადია როგორც უძრავი სისტემის, ისე სხეულში მოთავსებული სისტემის მიმართაც, ამიტომ მას მყისა ღერძს უწოდებენ, აქ ჩატარებული მსჯელობიდან აშკარაა, რომ მყარი სხეულის წერტილის ირგვლივ ბრუნვის შემთხვევაში მისი ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე ყოველ მომენტში განისაზღვრება ისევ (59,9) ფორმულით, სადაც  $\omega$ -ში უნდა ვიგულისხმეთ ბრუნვის მყისა კუთხური სიჩქარე.

მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა. ახლა განვიხილოთ მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა. მყარი სხეულის ნებისმიერი მოძრაობა ყოველ მომენტში შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც შემდგარი ორი მოძრაობისაგან. ერთია მისი სიმძიმის ცენტრის (ან სხვა რომელიმე წერტილის) გადატანითი მოძრაობა და მეორე — სიმძიმის ცენტრის ირგვლივ მობრუნება. ავიღოთ მყარი სხეულის რომელიმე  $A$  წერტილი და მისი რადიუსვექტორები უძრავი და მოძრავი სისტემების მიმართ, შესაბამისად, აღვნიშნოთ  $r'$  და  $r$ . მაშინ  $A$  წერტილის სივრცეში უსასრულოდ მცირე გადაადგილება წარმოადგენს ორი გადაადგილების შედეგს. ერთია ინერციის ცენტრის უსასრულოდ მცირე  $dR$  გადაადგილება და მეორე — ინერციის ცენტრის მიმართ უსასრულოდ მცირე მობრუნებით გაზოწვეული

ნათელია, რომ მყარი სხეულის რაიმე სასრულ კუთხეზე მობრუნება უძრავი წერტილის ირგვლივ შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც მთელი რიგი უსასრულოდ მცირე მობრუნებების ერთობლიობა. თითოეული ასეთი მცირე მობრუნება, დალამბერის თეორემის თანახმად, წარმოიდგინება როგორც ბრუნვის წერტილზე გამავალი ღერძის ირგვლივ უსასრულოდ მცირე მობრუნება. ბრუნვის ღერძს, მომენტში ასეთი უსასრულოდ მცირე მო-

უწოდებენ, შესაბამის კუთხურ სიჩქარეს უწოდებენ, შესაბამის კუთხურ სიჩქარეს ცხადია, რომ ამ ღერძის მიმართულება, საზოგადოდ, ცვალებადია როგორც უძრავი სისტემის, ისე სხეულში მოთავსებული სისტემის მიმართაც, ამიტომ მას მყისა ღერძს უწოდებენ, აქ ჩატარებული მსჯელობიდან აშკარაა, რომ მყარი სხეულის წერტილის ირგვლივ ბრუნვის შემთხვევაში მისი ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე ყოველ მომენტში განისაზღვრება ისევ (59,9) ფორმულით, სადაც  $\omega$ -ში უნდა ვიგულისხმეთ ბრუნვის მყისა კუთხური სიჩქარე.



ნახ. 53

გადაადგილება  $[d\varphi, r]$ , სადაც  $d\varphi$  არის მობრუნების უსასრულოდ მცირე კუთხის ვექტორი მყისა ღერძის მიმართ. ამგვარად,

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + [d\varphi, \mathbf{r}], \quad (59,23)$$

რაც  $d\mathbf{l}$ -ზე გაყოფის შემდეგ გვაძლევს:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\omega, \mathbf{r}]. \quad (59,24)$$

$\mathbf{V}$  არის მყარი სხეულის ინერციის ცენტრის სიჩქარე. ამგვარად, მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე უძრავი სისტემის მიმართ შეგვიძლია წარმოვიღგინოთ როგორც სხეულის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარისა და ბრუნვის ხაზოვანი სიჩქარეების ჯამი. უნდა გვახსოვდეს, ჯომ (59,24) ფორმულაში  $\mathbf{V}$ -ში შეგვიძლია ვიგულისხმოდ მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე და არა მაინცა და მაინც ინერციის ცენტრის სიჩქარე, მაგრამ მაშინ ბრუნვაც უნდა განვიხილოთ ამ წერტილში გამავალი ღერძის ირგვლივ. )

თუ ჩვენ მყარი სხეულის იმავე  $A$  წერტილის რადიუსვექტორს უკვე სხვა მოძრავი სისტემის  $O'$  სათავეს მიმართ აღვნიშნავთ  $\mathbf{r}''$ -ით, გვექნება  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'' + \mathbf{a}$ , სადაც  $\mathbf{a}$ ,  $O'$  და  $O''$  წერტილებს შეაერთებელი რადიუსვექტორია. მაშინ (59,24) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\omega, \mathbf{a}] + [\omega, \mathbf{r}''], \quad (59,25)$$

მეორე მხრივ, თუ ჩვენ  $O''$  წერტილის სიჩქარეს  $\mathbf{V}'$ -ით აღვნიშნავთ, ხოლო მასში გამავალი ღერძის ირგვლივ სხეულის ბრუნვის კუთხურ სიჩქარეს —  $\omega'$ -ით, მაშინ, თანახმად (59,24)-სა, შეიძლება დავწეროთ

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}' + [\omega', \mathbf{r}'']. \quad (59,26)$$

აქედან ვლებულობთ, რომ

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + [\omega, \mathbf{a}], \quad \omega = \omega'. \quad (59,27)$$

ამ ფორმულის მეორე ტოლობა გვიჩვენებს, რომ კუთხური სიჩქარე არ არის დამოკიდებული  $O'$  წერტილის არჩევაზე. იგივეს ვერ ვიტყვი ამ წერტილის გადატანითი მოძრაობის სიჩქარეზე, რადგან  $\mathbf{V}' \neq \mathbf{V}$ .

გავამრავლოთ (59,27) ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად  $\omega$ -ზე. თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $\omega = \omega'$ , მივიღებთ

$$(\mathbf{V}', \omega') = (\mathbf{V}, \omega) + ([\omega, \mathbf{a}], \omega), \quad (59,28)$$

მაგრამ, ცხადია, რომ  $([\omega, \mathbf{a}], \omega) = 0$ , ამიტომ

$$(\mathbf{V}', \omega') = (\mathbf{V}, \omega). \quad (59,28')$$

მიღებული ფორმულა გვიჩვენებს, რომ თუ  $O'$  კოორდინატთა სათავეს ისე ავირჩევთ, რომ  $(\mathbf{V}, \omega) = 0$ , მაშინ  $(\mathbf{V}', \omega') = 0$ , ე. ი. თუ ერთ რაიმე წერტილში სიჩქარე  $\mathbf{V}$  მართობია  $\omega$  ვექტორისა, მაშინ ყოველ სხვა წერტილშიაც  $\mathbf{V}$  და  $\omega$  ურთიერთმართობი იქნება. (59,26) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ განხილულ შემთხვევაში სხეულის ყველა წერტილის სიჩქარე  $\mathbf{v}$  ძვეს ერთსა და იმავე სიბრტყეში, რომელიც მართობია  $\omega$  კუთხური სიჩქარისა. ასეთ შემთხვევაში ყოველთვის შეიძლება  $O''$  წერტილი ისე ავირჩიოთ, რომ  $\mathbf{V}' = 0$ . მაშინ, როგორც (59,26)-დან გამომდინარეობს, სხეულის მოძრაობა დაიყვანება  $O''$  წერტილში გამავალი მყისა ღერძის ირგვლივ ბრუნვაზე. მაშინაც კი, როცა სხეული მხოლოდ გადატანით მოძრაობას ასრულებს, შეიძლება ყოველ მომენტში იგი განვიხილოთ როგორც ბრუნვა უსასრულოდ დაშორებულ მყისა ღერძის გარშემო.

## მყარი სხეულის დინამიკა

მყარი სხეულის დინამიკა იკვლევს სხეულის მოძრაობას იმ ძალებთან დაკავშირებით, რომლებიც მოქმედებენ ამ სხეულზე. დინამიკის ამოცანა მდგომარეობს სხეულის მდებარეობის, ე. ი. ყველა მისი ექვსი პარამეტრის განსაზღვრაში, როცა ცნობილია მასზე მოქმედი ძალები. მყარი სხეული წერტილთა სისტემის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს, სახელობრ, შემთხვევას, როცა წერტილებს შორის მანძილები უცვლელია. ეს გარემოება ბევრად ამარტივებს ამოცანას, რადგან სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვს ამცირებს ექვსამდე და იძლევა თვალსაჩინო და დასრულებული შედეგების მიღების საშუალებას.

### § 60. მყარი სხეულის კინეტიკური ენერგია, ინერციის ტენზორი

დაწვროთ თავისუფალი მყარი სხეულის ლაგრანჟის ფუნქცია. მყარი სხეული განვიხილოთ როგორც მატერიალურ წერტილთა ერთობლიობა, ამიტომ ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} - U(R, \varphi, \theta, \psi; t), \quad (60,1)$$

ჯამი აღება მყარი სხეულის ყველა მატერიალური წერტილის მიხედვით. შემდეგში, წერის გამარტივების მიზნით, ჯამს ნაწილაკთა რიცხვის მიხედვით ინდექსს აღარ გავუკეთებთ.  $U$  წარმოადგენს პოტენციალურ ენერგიას; იგი დამოკიდებული იქნება იმ ექვს პარამეტრზე, რომელნიც მყარი სხეულის მდებარეობას ახასიათებენ, ე. ი. სამი იქნება სიმძიმის ცენტრის კოორდინატი  $R$ , სამი კი განსაზღვრავს უძრავი და მოძრავი სისტემების ღერძების ურთიერთორიენტაციას, რომელიც მოცემულია ვილერის კუთხვებით  $\varphi, \theta, \psi$ . (60,1)-ში  $U$  ახასიათებს გარეშე ველს, რომელშიაც მყარი სხეული მოძრაობს. რაც შეეხება მყარი სხეულის შემადგენელი ნაწილაკების ურთიერთქმედების პოტენციალურ ენერგიას, იგი, როგორც აღრე აღვნიშნეთ, ნულის ტოლად შეგვიძლია ჩავთვალოთ. მართლაც, მყარი სხეულის წერტილებს შორის მანძილები უცვლელია, უცვლელი მანძილის შესაბამისი პოტენციალური ენერგია კი მუდმივის ტოლია. რადგან პოტენციალური ენერგია ყოველთვის მუდმივის სიზუსტით განისაზღვრება, ამიტომ, ზოგადობის დაურღვეველად, ეს მუდმივი ჩვენ შეგვიძლია ნულის ტოლად მივიჩნიოთ.

გამოთვალათ (60,1)-ში შემავალი კინეტიკური ენერგია უძრავი სისტემის მიმართ



$$T = \sum \frac{mv^2}{2}. \quad (60,2)$$

აქვე აღვნიშნოთ, რომ თუ მყარი სხეული შეგვიძლია უწყვეტი გარემოს სახით განვიხილოთ, მაშინ კინეტიკური ენერჯია ასე დაიწერება:

$$T = \frac{1}{2} \int \rho(r) v^2 dV, \quad (60,2')$$

სადაც  $\rho(r)$  სხეულის სიმკვრივეა.

როგორც ვიცით, მყარი სხეულის ნებისმიერი წერტილის სიჩქარე უძრავი სისტემის მიმართ გამოიხატება ფორმულით

$$v = V + [\omega, r], \quad (60,3)$$

სადაც  $\omega$  ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა და ერთი და იგივეა მყარი სხეულის ყველა წერტილისათვის. სიჩქარის ეს მნიშვნელობა შევითანოთ კინეტიკური ენერჯიის (60,2) ფორმულაში

$$T = \sum \frac{m}{2} (V + [\omega, r])^2. \quad (60,4)$$

კვადრატში აყვანის შემდეგ მივიღებთ

$$T = \frac{1}{2} \sum mV^2 + \sum (V, [\omega, r]) m + \sum \frac{m}{2} ([\omega, r], [\omega, r]). \quad (60,5)$$

რადგან  $V$  და  $\omega$  მყარი სხეულის ყველა წერტილისათვის ერთი და იგივეა, ამიტომ შეგვიძლია მათი ჯამის ნიშნიდან გარეთ გატანა; ჯამი  $\sum m$  — კი იქნება სხეულის მთელი მასა. აღვნიშნოთ იგი  $M$ -ით. მეორე წევრი ასე შეგვიძლია გარდავქმნათ (თუ ვესარგებლებთ (A. [B. C]) გამოსახულების ციკლური ვადასმადობით):

$$\sum m (V, [\omega, r]) = \sum m (r, [V, \omega]) = ([V, \omega], \sum mr) \quad (60,6)$$

ამ მომენტამდე (60,3) ფორმულაში. საეაღდებულო არ იყო მყარ სხეულთან უძრავად დამაგრებული სისტემის სათავე ინერციის ცენტრში მოგვეთავსებინა. ახლა კი, თუ ამას გავაკეთებთ, (60,3) ფორმულა კვლავ ძალაში იქნება, სადაც  $V$  ინერციის ცენტრის სიჩქარეა, (60,6) გამოსახულება კი ნულად გადაიქცევა. რამდენადაც  $\sum mr$  ნულის ტოლი გახდება. ამგვარად, ვიგულისხმობთ, რომ მყარი სხეულის ინერციის ცენტრი და მოძრავი სისტემის სათავე ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ

$$T = \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m [\omega, r]^2. \quad (60,7)$$

გარდავქმნათ მეორე წევრი. ვექტორული ნამრავლის განმარტებით

$$[\omega, r]^2 = \omega^2 r^2 \sin^2(\omega, r) = \omega^2 r^2 - \omega^2 r^2 \cos^2(\omega, r), \quad (60,8)$$

საიდანაც

$$[\omega, r]^2 = \omega^2 r^2 - (\omega, r)^2. \quad (60,8')$$

ამის გამო (60,7) მიიღებს სახეს

$$T = T_{გაღ.} + T', \quad (60,9)$$

სადაც

$$T_{გაღ.} = \frac{MV^2}{2}. \quad (60,10)$$

ხოლო

$$T'' = \frac{1}{2} \sum m [\omega^2 r^2 - (\omega, r)^2]. \quad (60,11)$$

როგორც ვხედავთ, მყარი სხეულის კინეტიკური ენერჯია ორი წევრისაგან შედგება<sup>1</sup>. პირველი  $T_{კლ}$  გამოხატავს მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობის კინეტიკურ ენერჯიას. მეორე წევრი  $T''$  წარმოადგენს, მყარი სხეულის ინერციის ცენტრზე გამავალი ლერძის ირგვლივ  $\omega$  კუთხური სიჩქარით, ბრუნვის კინეტიკურ ენერჯიას, რამდენადაც, როცა  $\omega = 0$ ,  $T'' = 0$ .

ბრუნვითი კინეტიკური ენერჯიის უფრო მოხერხებულად ჩასაწერად გადავიღეთ ტენზორულ აღნიშვნებზე და ვისარგებლოთ მუნიცი ინდექსებით. ტენზორულ აღნიშვნებში  $\omega$  და  $r$  ვექტორების გეგმილები იქნება  $\omega_i$  და  $x_i$ , ამასთან  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ , მაშინ

$$T'' = \frac{1}{2} \sum m [\omega_i^2 x_i^2 - \omega_i x_i \omega_k x_k]. \quad (60,12)$$

აქ  $i$ ,  $l$  და  $k$  მუნიცი ინდექსებია, რაც იმას ნიშნავს, რომ იგულისხმება აჯამვა ერთიდან სამამდე. რადგან  $\omega_i$  შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ  $\omega_i = \omega_k \delta_{ik}$  სახით. ამიტომ

$$T'' = \frac{1}{2} \sum m [\omega_i \omega_k \delta_{ik} x_i^2 - \omega_i \omega_k x_i x_k]. \quad (60,13)$$

ან

$$T'' = \frac{1}{2} \omega_i \omega_k \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k). \quad (60,14)$$

შემოვიღოთ ტენზორი

$$I_{ik} = \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k), \quad (60,15)$$

მაშინ ბრუნვის კინეტიკური ენერჯიისათვის გვექნება

$$T'' = \frac{1}{2} I_{ik} \omega_i \omega_k. \quad (60,16)$$

მყარი სხეულის სრული კინეტიკური ენერჯია კი მიიღებს სახეს

$$T = \frac{MV_c^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \omega_i \omega_k. \quad (60,17)$$

როცა მყარი სხეული მხოლოდ ბრუნვით მოძრაობას ასრულებს, მაშინ  $V_c = 0$  და დაგვრჩება მხოლოდ ბრუნვითი კინეტიკური ენერჯია.

ლაგრანჟიანს მივიღებთ, თუ (60,17)-ს გამოვავლებთ პოტენციალურ ენერჯიას

$$L = \frac{MV_c^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \omega_i \omega_k - U(R, \varphi, \theta, \psi, t). \quad (60,18)$$

(60,15) ფორმულით განსაზღვრულ ტენზორს მყარი სხეულის ინერციის ტენზორი ეწოდება. აშკარაა, რომ  $i$  და  $k$  ინდექსების გადასვით ეს ტენზორი არ იცვლება (გაუიხსენოთ, რომ  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ ), მაშასადამე, ინერციის ტენზორი არის მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორი. ვიპოვოთ ამ ტენზორის კომპონენტები. გვექნება

$$I_{11} = \sum m (x_1^2 - x_2^2) = \sum m (x_2^2 + x_3^2). \quad (60,19)$$

<sup>1</sup> შეადარეთ კენიგის ფორმულას.

ანალოგიურად

$$I_{22} = \sum m (x_1^2 + x_3^2), \quad I_{33} = \sum m (x_1^2 + x_2^2). \quad (60,20)$$

ასევე

$$I_{12} = - \sum m x_1 x_2, \quad I_{13} = - \sum m x_1 x_3, \quad I_{23} = - \sum m x_2 x_3. \quad (60,21)$$

ამრიგად, ინერციის ტენზორის ექვება შემდეგი ცხადი სახე (დეკარტის კოორდინატების აღნიშვნებში):

$$\begin{pmatrix} \sum m (y^2 + z^2) & - \sum m xy & - \sum m xz \\ - \sum m xy & \sum m (x^2 + z^2) & - \sum m yz \\ - \sum m xz & - \sum m yz & \sum m (x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \quad (60,22)$$

გამოთვლებისათვის ხშირად უფრო ხელსაყრელია მყარი სხეულის უწყვეტ გარემოდ წარმოდგენა, რამდენადაც ამ შემთხვევაში აჯამების ნაცვლად აიღება ინტეგრალი. ინერციის ტენზორი უწყვეტი გარემოს შემთხვევაში ასე განიმარტება:

$$I_{ik} = \int \rho(r) [x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k] dV, \quad (60,23)$$

სადაც  $\rho$  მასის სიმკვრივეა და ინტეგრალი აიღება მყარი სხეულის მთელ მოცულობაზე. ტენზორის დიაგონალურ ელემენტებს  $I_{11} = J_x$ ,  $I_{22} = J_y$ ,  $I_{33} = J_z$  უწოდებენ ინერციის მომენტებს შესაბამისი ღერძების მიმართ. რაც შეეხება  $I_{ik}$  ტენზორის არადიაგონალურ ელემენტებს, მათ ცენტრგამშორ ინერციის მომენტებს უწოდებენ.

ამგვარად, ინერციის მომენტები ღერძების მიმართ, თუ მყარ სხეულს განვიხილავთ უწყვეტი გარემოს სახით, ასე განიმარტება:

$$J_x = \int \rho(r) (y^2 + z^2) dV, \quad (60,24)$$

$$J_y = \int \rho(r) (x^2 + z^2) dV. \quad (60,24')$$

$$J_z = \int \rho(r) (x^2 + y^2) dV. \quad (60,24'')$$

იხილავენ აგრეთვე ინერციის მომენტს რაიმე წერტილის მიმართაც; იგი შემდეგი ფორმულით განიმარტება:

$$J_0 = \int \rho(r) r^2 dV = \int \rho(r) (x^2 + y^2 + z^2) dV. \quad (60,25)$$

როგორც წესი, ეს მომენტი აიღება კოორდინატთა სათავის მიმართ. საინტერესოა აღვნიშნოთ, რომ ღერძების მიმართ ინერციის მომენტისა და წერტილის მიმართ ინერციის მომენტს შორის არსებობს დამოკიდებულება

$$2J_0 = J_x + J_y + J_z. \quad (60,26)$$

თუ გამოვიყენებთ (14,11') ტოლობას და გავითვალისწინებთ (14,13) პირობას, (60,25) ფორმულიდან შეგვიძლია გამოვიყვანოთ მნიშვნელოვანი დამოკიდებულება. კერძოდ, სათავის მიმართ ინერციის მომენტი

$$J_0 = J_c + m H_c^2. \quad (60,27)$$

ე. ი. ინერციის მომენტი სათავის მიმართ წარმოადგენს ორი წვერის ჯამს: ერთია ინერციის მომენტი სიმძიმის ცენტრის მიმართ, ხოლო მეორე — სიმძიმის ცენტრის, რომელშიაც თავმოყრილია მყარი სხეულის მთელი მასა, ინერციის მომენტი სათავის მიმართ.

ჩვენ ვიცით, რომ მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორი შეგვიძლია დავიყვანოთ დიაგონალურ სახეზე. ამისათვის საჭიროა ლერძები დავამთხვიოთ ტენზორის მთავარ მიმართულებებს. ამ ლერძებს ინერციის მთავარ ლერძებს უწოდებენ, შესაბამის დიაგონალურ ელემენტებს კი -- ინერციის მთავარ მომენტებს. აღვნიშნოთ ისინი  $J_1$ ,  $J_2$  და  $J_3$ -ით. მაშასადამე, ინერციის მთავარი ლერძების სისტემაში ინერციის ტენზორს აქვს წხლოდ  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  დიაგონალური ელემენტები, ამიტომ ბრუნვის კინეტიკური ენერგია მიიღებს მარტივ სახეს

$$T = \frac{1}{2} (\omega_1^2 J_1 + \omega_2^2 J_2 + \omega_3^2 J_3). \quad (60,28)$$

აღვნიშნოთ, რომ თითოეული ინერციის მთავარი მომენტი არ შეიძლება მეტი იყოს დანარჩენი ორის ჯამზე. მართლაც,

$$J_1 + J_2 = \sum m (x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geq \sum m (x_1^2 + x_2^2) = J_3. \quad (60,29)$$

და ა. შ.

სხეულს, რომელსაც სამივე მთავარი მომენტი ერთმანეთისაგან განსხვავებული აქვს, ე. ი.  $J_1 \neq J_2 \neq J_3 \neq J_1$ , ასიმეტრიულ ბზრიალას უწოდებენ. თუ  $J_1 = J_2 \neq J_3$ , მაშინ მყარ სხეულს სიმეტრიული ბზრიალა ეწოდება. ამასთან  $z$  იქნება სიმეტრიის ღერძი და მთავარი მიმართულებების არჩევა  $x_1, x_2$  სიბრტყეში ნებისმიერია. როცა ყველა მთავარი მომენტი ერთმანეთის ტოლია  $J_1 = J_2 = J_3 = J$ , მაშინ ყოველი სამი ურთიერთმართობული მიმართულება მთავარი იქნება. ამ შემთხვევაში მყარ სხეულს სფერულ ბზრიალას უწოდებენ. თანახმად ზემონათქვამისა, (60,29) გამოხატავს ასიმეტრიული ბზრიალას ბრუნვით კინეტიკურ ენერგიას. სიმეტრიული ბზრიალას ენერგია<sup>1</sup> მივიღებთ ორი რომელიმე მომენტის გატოლებით. სფერული ბზრიალას კინეტიკური ენერგია კი ტოლი იქნება

$$T = \frac{J}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) = \frac{J \omega^2}{2} \quad (60,30)$$

ინერციის მთავარი ლერძების მოძებნა საკმაოდ მარტივდება, როცა ერთგვაროვან მყარ სხეულს ახასიათებს ესა თუ ის სიმეტრია. ამასთან ნათელია, რომ ინერციის ცენტრისა და მთავარი ლერძებისათვის იგივე სიმეტრია გვექნება. ასე მაგალითად, თუ სხეულს აქვს ინერციის ცენტრი, მაშინ ინერციის ცენტრი დაემთხვევა სიმეტრიის ცენტრს. ხოლო როცა სხეულს გააჩნია სიმეტრიის სიბრტყე, მაშინ ინერციის ცენტრი ამ სიბრტყეში იქნება. ამავე სიბრტყეში იქნება ორი მთავარი ღერძი, მესამე კი მათი მართობული იქნება. ასეთი მდგომარეობა გვაქვს, მაგალითად, ბრტყელი მყარი სხეულისათვის, რომელსაც მესამე განზომილება არა აქვს  $x_3 = 0$ . ამ დროს

$$J_1 = \sum m x_1^2, \quad J_2 = \sum m x_2^2, \quad J_3 = \sum m (x_1^2 + x_2^2). \quad (60,31)$$

აქ მომენტებს შორის გვექნება დამოკიდებულება  $J_1 + J_2 = J_3$ .

თუ სხეულს აქვს სიმეტრიის ღერძი, მაშინ ინერციის ცენტრი ამ ღერძზე იქნება, ამავე ღერძს დაემთხვევა ერთი მთავარი მიმართულება, დანარჩენი ორი კი მის მართობ სიბრტყეში იქნება მოთავსებული.

განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი ღეროს ტიპის მყარი სხეული. ვთქვათ, ეს ღერო ემთხვევა  $z$  ღერძს, მაშინ  $x = y = 0$ , და ამიტომ

$$J_1 = J_2 = \sum m z^2, \quad J_3 = 0. \quad (60,32)$$

ასეთ სხეულს უწოდებენ როტატორს. როტატორს აქვს მხოლოდ ბრუნვის ორი თავისუფლების ხარისხი. მას შეუძლია ბრუნვა  $x$  და  $y$  ღერძების ირგვლივ. ბრუნვას  $x$  ღერძის ირგვლივ აზრი არა აქვს. როტატორს დიდი გამოყენება აქვს ორატომიანი მოლეკულების თეორიაში.

ცხადია, რომ როტატორის ბრუნვის კინეტიკური ენერგია განისაზღვრება ფორმულით

$$T = \frac{J \omega_x^2}{2} + \frac{J \omega_y^2}{2}. \quad (60,33)$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ჩვენს მიერ განმარტებული ინერციის მომენტი რაიმე ღერძის მიმართ ვმთხვევა ელემენტარულ მექანიკაში მოცემულ განსაზღვრას, რომლის მიხედვით ინერციის მომენტი წარმოადგენს ცალკეული ნაწილაკის მასისა და მისი ღერძამდე მანძილის კვადრატის ნამრავლთა ჯამს. თანახმად (60,7) ფორმულითა, მყარი სხეულის ბრუნვითი კინეტიკური ენერგია ტოლია

$$T = \frac{1}{2} \sum m [\omega, r]^2, \quad (60,34)$$

რომელიც შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ:

$$T = \frac{J \omega^2}{2}, \quad (60,35)$$

სადაც

$$J = \sum m [n, r]^2. \quad (60,36)$$

$n = \frac{\omega}{\omega}$  — ბრუნვის ღერძის ორტია. მაგრამ  $|[n, r]|$  სიდიდით წარმოადგენს წერტილის დაშორებას ბრუნვის ღერძიდან, ამიტომ ინერციის მომენტი რაიმე ღერძის მიმართ ტოლი ყოფილა ცალკეული ნაწილაკის მასისა და მისი ღერძამდე მანძილის კვადრატის ნამრავლთა ჯამის.

შევნიშნოთ, რომ ინერციის მომენტის (60,32) ფორმულა შეგვიძლია სხვა სახითაც გამოვხატოთ. სახელდობრ, რამდენადაც  $|[n, r]|^2 = r^2 \sin^2 \alpha = r^2 - (n, r)^2$ , ამიტომ

$$J = \sum m [r^2 - (n, r)^2]. \quad (60,37)$$

ინერციის მომენტი დამოკიდებულია ბრუნვის ღერძის მიმართულებაზე. რამდენადაც წერტილის ირგვლივ ბრუნვისას  $\omega$  იცვლის მიმართულებას სხეულის მიმართ, ამიტომ ინერციის მომენტი დროზე იქნება დამოკიდებული. გამოხატვის წარმოადგენს შემთხვევა, როცა სხეული ბრუნავს უცვლელი ღერძის ირგვლივ, მაშინ ინერციის მომენტი მუდმივი სიდიდეა.

ბიუვენსის თეორემა. ნათელია, რომ ინერციის მომენტი (ტენზორი) დამოკიდებულია მოძრავი სისტემის სათავეს არჩევაზე. მაგრამ როცა ცნობილია ინერციის მომენტი ინერციის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ, ადვილად ვიპოვით ინერციის მომენტს ამ ღერძის პარალელური ნებისმიერი ღერძის მიმართაც.

დავუშვათ. ცნობილია ინერციის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ ინერციის მომენტი  $J_c$ . ავიღოთ მყარი სხეულის რომელიმე წერტილი და მისი რადიუს-ვექტორები რაიმე  $O$  წერტილიდან და ინერციის ცენტრიდან აღვნიშნოთ  $r$  და  $r'$ , ინერციის ცენტრისა კი —  $\rho$ -თი (ნ.ბ. 54). მაშინ  $r = \rho + r'$  და ინერციის მომენტი  $O$  წერტილზე გამავალი ღერძის მიმართ იქნება

$$J_0 = \sum m [\mathbf{r}, \mathbf{n}]^2 = \sum m [\rho, \mathbf{n}]^2 + \sum m [\mathbf{r}', \mathbf{n}]^2 + 2 \sum m ([\rho, \mathbf{n}], [\mathbf{r}', \mathbf{n}]). \quad (60,38)$$

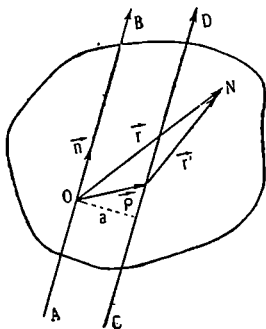
ბოლო წვერში  $\rho$  და  $\mathbf{n} = \frac{\omega}{\omega}$  მუდმივებია, ამიტომ ჯამი შეგვიძლია ვექტორული ნამრავლის ზიგნით შევიტანოთ. მაშინ უკანასკნელი წვერისათვის გვექნება

$$2 ([\rho, \mathbf{n}] [\sum m \mathbf{r}', \mathbf{n}]). \quad (60,39)$$

ეს წვერი კი ნულის ტოლია, რამდენადაც  $\sum m \mathbf{r}' = 0$ . მაშასადამე, დაგვრჩება

$$J_0 = \sum m [\rho, \mathbf{n}]^2 + \sum m [\mathbf{r}', \mathbf{n}]^2. \quad (60,40)$$

პირველ წვერში ვექტორული ნამრავლი ჯამის ნიშნის გარეთ გავა, დარჩენილი ვამოსახულება  $\sum m$  სხეულის მთელ მასას მოგვცემს, გარდა ამისა  $|\rho, \mathbf{n}|$  იქნება



ნახ. 54

მანძილი ორ  $AB$  და  $CD$  ლერძებს შორის. რაც შეეხება (60,40)-ის მეორე წვერს, განმარტებით იგი წარმოადგენს ინერციის მომენტს  $CD$  ლერძის მიმართ. იგი აღნიშნული გვაქვს  $J_c$ -თი, მაშასადამე,

$$J_0 = J_c + M a^2. \quad (60,41)$$

ამგვარად, თუ ცნობილია ინერციის მომენტი ინერციის ცენტრზე გამავალი რაიმე ლერძის მიმართ, მაშინ ამ ლერძის პარალელური ნებისმიერი ლერძის მიმართ ინერციის მომენტის მისაღებად საჭიროა, რომ ინერციის ცენტრზე გამავალი ლერძის მიმართ მომენტს დავემატოთ წვერი, რომელიც წარმოადგენს სხეულის მთელი

მასისა და ამ ლერძებს შორის მანძილის კვადრატის ნამრავს. ეს დებულება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად აღმოაჩინა ჰიუგენსმა. შემდეგ კი — შტეინერმა.

დაბოლოს განვიხილოთ რამდენიმე მაგ. ლითი ერთგვაროვანი მყარი სხეულების ინერციის მომენტის გამოთვლისა.

სფეროს ინერციის მომენტი. განვიხილოთ  $R$  რადიუსის ერთგვაროვანი სფერო. სფეროს ცენტრი დაეკოორდინოთ კოორდინატა სისტემის სათავეს, მაშინ სიმეტრიის გამო  $J_1 = J_2 = J_3$  და, რადგან ინერციის მომენტა სათავეს მიმართ ტოლია  $J_0 = \frac{1}{2} (J_1 + J_2 + J_3)$ , ამიტომ საკმარისია ვიპოვოთ  $J_0$ . გვექნება

$$J_0 = \rho \int r^2 dv = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi \rho \frac{R^5}{5} \quad (60,42)$$

რადგან სფეროს მოცულობა ტოლია  $\frac{4\pi}{3} R^3$ , ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ

$$J_0 = \frac{3}{5} m R^2. \quad (60,43)$$

რაც შეეხება ინერციის მომენტს ღერძების მიმართ, მათთვის გვექნება

$$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2}{5} mR^2. \quad (60,44)$$

ელიფსოიდის ინერციის მომენტი. განვიხილოთ ერთგვაროვანი ელიფსოიდი  $a$ ,  $b$  და  $c$  ნახევარღერძებით. ეობოეთ ინერციის მომენტები  $x$ ,  $y$  და  $z$  ღერძების მიმართ. გამოვიყენოთ (60,24) ფორმულები. ამ ფორმულებში საჭიროა ინტეგრაცია ჩაუტაროთ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (60,45)$$

სამღერძა ელიფსოიდის მოცულობაზე. მაგარამ უფრო მარტივია ცვლადის შეცვლით ელიფსოიდი დაიყვანოთ სფეროზე. ამისათვის საკმარისია შემოვიღოთ ახალი ცვლადები  $x = ax_1$ ,  $y = by_1$ , და  $z = cz_1$ . ამ ცვლადებში ელიფსოიდი დაიყვანება ერთეულოვანი რადიუსის სფეროზე

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1, \quad (60,46)$$

ხოლო ცვლადის გარდაქმნის წესის თანახმად

$$dx dy dz = abc dx_1 dy_1 dz_1. \quad (60,47)$$

შედგავდ, მაგალითად,  $J_1$ -ისათვის გვექნება

$$J_1 = abc \int (b^2 y_1^2 + c^2 z_1^2) dx_1 dy_1 dz_1, \quad (60,48)$$

სადაც ინტეგრაცია უკვე გავრცელებულია ერთეულოვანი სფეროს მოცულობაზე, ამიტომ

$$J_1 = abc \int (b^2 + c^2) \int y_1^2 dx_1 dy_1 dz_1. \quad (60,49)$$

60,42) ფორმულის თანახმად, ერთეულოვანი სფეროს შემთხვევაში,

$$\int x_1^2 dx_1 dy_1 dz_1 = \int y_1^2 dx_1 dy_1 dz_1 = \int z_1^2 dx_1 dy_1 dz_1 = \frac{4\pi}{15} \quad (60,50)$$

ამიტომ ელიფსოიდის ინერციის მომენტებისათვის, რამდენადაც მისი მოცულობა  $\frac{4\pi abc}{3}$  -ის ტოლია, საბოლოოდ გვექნება

$$J_1 = \frac{m}{5} (b^2 + c^2), \quad J_2 = \frac{m}{5} (a^2 + c^2), \quad J_3 = \frac{m}{5} (a^2 + b^2). \quad (60,51)$$

ეს ფორმულები დაიყვანება (60,44)-ზე, როცა  $a=b=c=R$ . რაც შეეხება ინერციის მომენტს სავთვის მიმართ, იგი ტოლი იქნება გამოსახულების

$$J_0 = \frac{m}{5} (a^2 + b^2 + c^2), \quad (60,52)$$

რომელიც აგრეთვე დამოხვევაა (60,43) ფორმულას, როცა  $a=b=c=R$ .

ცილინდრის ინერციის მომენტი. განვიხილოთ  $H$  სიმაღლის და  $R$  რადიუსის ერთგვაროვანი ცილინდრი. სისტემის სათავე მოკაავსოთ ცილინდრის ცენტრში,  $z$  ღერძი დაემათხვიოთ ცილინდრის სიმეტრიის ღერძს. ვიპოვოთ ინერციის მომენტი  $z$  ღერძის (სიმეტრიის ღერძის) მიმართ. სიმკვრივე  $\rho$  ტოლი იქნება სიდიდის  $\rho = \frac{m}{\pi R^2 H}$ , ამიტომ ცილინდრული კოორდინატების შემოღების შემდეგ გვექნება

$$J_3 = \frac{m}{\pi R^2 H} \int (x^2 + y^2) dV = \frac{m}{\pi R^2 H} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-H/2}^{+H/2} dz, \quad (60,53)$$

საიდანაც მივიღებთ

$$J_3 = \frac{mR^2}{2}. \quad (60,54)$$

ინერციის მომენტები  $x$  და  $y$  ღერძების მიმართ ერთმანეთის ტოლია და, რადგან ცილინდრულ კოორდინატებში  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , ამიტომ გვექნება

$$I_1 = \frac{m}{\pi R^2 H} \int (y^2 + z^2) dV = \frac{m}{\pi R^2 H} \left\{ \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_{-H/2}^{H/2} dz + \right. \\ \left. + \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-H/2}^{H/2} z^2 dz \right\}; \quad (60,55)$$

შედეგად მივიღებთ

$$J_1 = J_2 = \frac{m}{4} \left( R^2 + \frac{H^2}{3} \right), \quad (60,56)$$

ხოლო ინერციის მომენტი სათაეის მიმართ ტოლი იქნება

$$J_0 = \frac{m}{4} \left( 2R^2 + \frac{H^2}{3} \right). \quad (60,57)$$

წრიული ერთჯვაროვანი მილის ინერციის მომენტი. განვიხილოთ  $H$ -სიმაღლის წრიული ცილინდრული მილი, რომლის შიგა რადიუსი იყოს  $R_1$ , ხოლო გარე  $R_2$ .

სისტემის სათავე მოვათავსოთ მილის ცენტრში, ხოლო  $z$  ღერძი მიემართოს სიმეტრიის ღერძის გასწვრივ. ასეთი მილის სიმკვრივე ტოლი იქნება

$$\frac{m}{\pi H (R_2^2 - R_1^2)}. \quad (60,58)$$

ვიპოვოთ ინერციის მომენტი  $z$  ღერძის მიმართ. გვექნება

$$J_3 = \frac{m}{\pi H (R_2^2 - R_1^2)} \int (x^2 + y^2) dV. \quad (60,59)$$

ცილინდრულ კოორდინატებზე გადასვლით ეს გამოსახულება შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$J_3 = \frac{m}{\pi H (R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-H/2}^{H/2} dz, \quad (60,60)$$

საიდანაც გვიღებთ

$$J_3 = \frac{m}{2} (R_1^2 + R_2^2). \quad (60,61)$$

როცა  $R_1 = 0$ , მაშინ (60,61) გამოსახულება, როგორც ეს მოსალოდნელი იყო, ღაფთხვევა (60,54) ფორმულას.

ასევე გამოითვლება სხვა სხეულების ინერციის მომენტებიც.

## § 61. მშარი სხეულის იმპულსი, იმპულსისა და ძალის მომენტები

განვიხილოთ მყარი სხეულის იმპულსი და იმპულსის მომენტი უძრავი სისტემის მიმართ. ნაწილაკთა სისტემის იმპულსისათვის გვაქვს

$$\mathbf{P} = \sum m \mathbf{v}. \quad (61,1)$$

როგორც ვიცით,  $\mathbf{v} = \mathbf{V}_c + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$ , ამიტომ

$$\mathbf{P} = M \mathbf{V}_c + \left[ \boldsymbol{\omega}, \sum m \mathbf{r} \right] = M \mathbf{V}_c \quad (61,2)$$

სადაც  $\mathbf{V}_c$  ინერციის ცენტრის სიჩქარეა უძრავი სისტემის მიმართ,  $M$  კი — მყარი სხეულის მასა.

განესაზღვროთ ახლა მყარი სხეულის იმპულსის მომენტი  $O'$  წერტილის მიმართ უძრავ სისტემაში.

$$\mathbf{L}' = \sum (\mathbf{r}' \times \mathbf{p}), \quad (61,3)$$



სადაც  $p$  მყარი სხეულის  $i$ -ური ნაწილაკის იმპულსია, ხოლო  $r'$  — რადიუსვექტორი უძრავი სისტემის მიმართ. თუ ამ გამოსახულებაში შევიტანთ სიჩქარის მნიშვნელობას (59,24) ფორმულიდან და გავითვალისწინებთ, რომ  $r' = R_c + r$ , მივიღებთ

$$L' = [R_c, P] + L, \quad (61,4)$$

სადაც

$$L = \sum m [r, \omega, r]. \quad (61,5)$$

ამგვარად,  $L'$  დაიშლება ორ წევრად. პირველი გამოხატავს მყარი სხეულის, როგორც მთლიანის, იმპულსის მომენტს. ეს წევრი დამოკიდებულია უძრავი სისტემის სათავის არჩევაზე. მეორე  $L$  წევრი კი წარმოადგენს მყარი სხეულის იმპულსის მომენტს ინერციის ცენტრის მიმართ; მას მყარი სხეულის „საკუთარი მომენტ-საც“ უწოდებენ. როცა ბრუნვა არა გვაქვს  $\omega = 0$ , მაშინ  $L = 0$ , ცხადია, რომ ინერციის ცენტრის სისტემაში ექვანება მხოლოდ საკუთარი იმპულსის მომენტი. შემდგომში მყარი სხეულის იმპულსის მომენტში ჩვენ სწორედ  $L$ -ს ვიგულისხმებთ, ე. ი. ათვლის სისტემად ავირჩევთ  $C$ -სისტემას.

თუ გავშლით ორმაგ ვექტორულ ნამრავს

$$[r, [\omega, r]] = r^2 \omega - r(\omega, r), \quad (61,6)$$

მაშინ იმპულსის მომენტის  $i$ -ური კომპონენტისათვის გვექნება

$$L_{i1} = \sum m [x_i^2 \omega_1 - x_i \omega_k x_k] = \omega_k \sum (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k). \quad (61,7)$$

ინერციის ტენზორის განმარტების ძალით  $L_{i1}$  მიიღებს სახეს

$$L_{i1} = I_{ik} \omega_k. \quad (61,8)$$

თუ მყარ სხეულში კოორდინატა სისტემას ისე შევარჩევთ, რომ მისი ლერძები ტენზორის მთავარ მიმართულებებს დამთხვეს, მაშინ  $I_{ik}$  დიაგონალურია და  $I_{11} = J_1$ ,  $I_{22} = J_2$ ,  $J_{33} = J_3$ . ამიტომ

$$L_1 = J_1 \omega_1, \quad L_2 = J_2 \omega_2, \quad L_3 = J_3 \omega_3. \quad (61,9)$$

როცა სხეული ბრუნავს ერთ-ერთი მთავარი ლერძის ირგვლივ, მაგალითად,  $x_1$ -ის ირგვლივ, მაშინ  $\omega_2 = \omega_3 = 0$ . და სხეულის იმპულსის მომენტი იქნება

$$L = J_1 \omega. \quad (61,10)$$

იგივე შედეგს მივიღებთ სფერული ბზრიალასათვის, რომლის სამივე ინერციის მომენტი ერთმანეთს ემთხვევა. ამ შემთხვევაში მომენტის ვექტორი პროპორციულია კუთხური სიჩქარის ვექტორისა და აქვს იგივე მიმართულება. ზოგად შემთხვევაში  $L$  და  $\omega$ -ს მიმართულებები ერთმანეთს არ ემთხვევა.

როცა მყარი სხეული თავისუფალია, მაშინ ძალაშია იმპულსის მომენტის შენახვის კანონი, რაც სფერული ბზრიალასათვის მოგვცემს  $\omega = \text{const}$ , ე. ი. ასეთი ბზრიალა იბრუნებს მუდმივი კუთხური სიჩქარით უცვლელი ლერძის ირგვლივ.

აღვნიშნოთ, რომ ასიმეტრიული ბზრიალას (60,28) ფორმულით განსაზღვრული კინეტიკური ენერგია (61,9)-ის დახმარებით ასეც შეგვიძლია გამოვხატოთ:

$$T = \frac{L_1^2}{2J_1} + \frac{L_2^2}{2J_2} + \frac{L_3^2}{2J_3}. \quad (61,11)$$

სფერული ბზრიალასათვის ( $J_1 = J_2 = J_3 = J$ ) მივიღებთ

$$T = \frac{L^2}{2J}. \quad (61,12)$$

ამ ფორმულას დიდი გამოყენება აქვს მოლეკულათა და ატომგულის თეორიებში.

ადვილი დასაკავშირებელია კინეტიკური ენერგია და იმპულსის მომენტი. მართლაც (60,17)-დან ნათელია, რომ

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \omega_\alpha} \left( \frac{1}{2} \omega_i \omega_h I_{ih} \right) = I_{\alpha h} \omega_h. \quad (61,13)$$

(61,8)-სთან შედარება კი გვაძლევს:

$$L_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \omega_\alpha}, \quad (61,14)$$

ან

$$L = \frac{\partial T}{\partial \omega}. \quad (61,15)$$

თანახმად (60,16) და (61,8) ფორმულებისა, გვექნება შემდეგი მარტივი დამოკიდებულება

$$2T = (L, \omega). \quad (61,16)$$

თუ ამ ტოლობას ჩავწერთ ასეთი სახით:

$$2T = L \cos \alpha, \quad (61,17)$$

სადაც  $\alpha$  კუთხეა მომენტსა და კუთხური სიჩქარის მიმართულებებს შორის, დაეინახავთ, რომ რამდენადაც კინეტიკური ენერგია არსებითად დადებითი სიდიდეა,  $\alpha$  ყოველთვის მახვილი კუთხე იქნება. ამ დასკვნას დიდი მნიშვნელობა აქვს ბზრიალას თეორიაში.

მყარ სხეულზე მოქმედი ძალის მომენტი. ეიპოვოთ იმპულსის მომენტის წარმოებული დროით. გამოყვანის გამარტივების მიზნით ავირჩიოთ ისეთი ინერციული სისტემა, რომლის მიმართაც აღებულ მომენტში მყარი სხეულის ინერციის ცენტრი უძრავია  $V_c = 0$ , მაშინ  $L'$  და  $L$  ერთმანეთის ტოლია და

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \sum [r, p] = \sum [\dot{r}, p] + \sum [r, \dot{p}]. \quad (61,18)$$

რადგან  $\dot{r}$  და  $p$  პარალელური ვექტორებია, ამიტომ მარჯვნივ მდგომი პირველი შესაკრები ნულის ტოლია.  $\dot{p}$  წარმოადგენს მყარი სხეულის  $i$ -ურ ნაწილაკზე მოქმედ ძალას, ამიტომ

$$\frac{dL}{dt} = \sum [r, f] = N. \quad (61,19)$$

აქ  $N$  წარმოადგენს ყველა წერტილზე მოქმედ ძალთა მომენტების ჯამს. მყარი სხეულის ნებისმიერ ნაწილაკზე მოქმედი ძალა ორი ძალის ჯამად შეგვიძლია წარმოვადგინოთ. ერთია შიგა ძალები, გამოწვეული ამ სხეულის სხვა ნაწილაკების მიერ, მეორე კი — გარე ძალები. როგორც ნაწილაკთა სისტემის განხილვის დროს დავამტკიცეთ, ყველა შიგა ძალების მომენტთა ჯამი ნულის ტოლია, ამიტომ (61,19) ფაქტიურად წარმოადგენს მყარ სხეულზე მოქმედი მხოლოდ გარე ძალების მომენტთა ჯამს.

ძალის მომენტი, ისევე როგორც იმპულსის მომენტი, დამოკიდებულია სისტემის სათაეის არჩევზე. რამდენადაც იგი შეიცავს რადიუსვექტორს. დავეუვათ. სათაე ვადატანილია რაიმე  $p$  მანძილზე. ახალი სათაეიდან მყარი სხეულის რომელიმე წერტილამდე მანძილი იყოს  $r'$ , მაშინ ძალის მომენტი ასე შეიცვლება:

$$N = \sum [r, f] = \sum [r', f] + \sum [\rho, f]. \quad (61,20)$$

რადგან  $\rho$  ყველა წერტილისათვის ერთი და იგივეა, ამიტომ

$$N = N' + [\rho, F]. \quad (61,21)$$

სადაც  $N'$  ძალის მომენტთა ჯამია ახალი სათავის მიმართ, ხოლო  $F$  კი — ყველა გარეშე ძალების გეომეტრიული ჯამი. ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ ძალის მომენტთა ჯამი სათავის არჩევაზე მხოლოდ მაშინ არაა დამოკიდებული, როცა ყველა გარეშე ძალის გეომეტრიული ჯამი  $F=0$ . მიუხედავად ამისა, ამ შემთხვევაში საზოგადოდ  $N=N' \neq 0$ . მაგალითისათვის განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სხეულის ორ სხვადასხვა წერტილში მოდებულია ორი თანატოლი და ურთიერთსაწინააღმდეგოდ მიმართული ძალა, ე. ი.  $f_1 + f_2 = 0$ . ამ ძალების მომენტთა ჯამისათვის გვექნება

$$N = [r_1, f_1] + [r_2, f_2] = [r_1 - r_2, f_1]. \quad (61,22)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ  $N \neq 0$ , თუმცა  $F=0$ , ამასთან  $r_1 - r_2 = r$  სხვაობა დამოკიდებული არაა სისტემის სათავის არჩევაზე და, მაშასადამე, ძალთა  $N$  მომენტიც დამოუკიდებელია სათავის არჩევისაგან. ძალთა სისტემას ( $f, -f$ ) ძალთა წყურვლს უწოდებენ, ხოლო  $N$ -ს ამ წყურვლის მომენტს.

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია შემთხვევა, როცა მყარი სხეული იმყოფება გრაეიტაციულ ველში. ამ შემთხვევის მნიშვნელობა თავისთავად ცხადია, რამდენადაც ჩვენს ირგვლივ არსებული ყველა მყარი სხეული ამ ველში იმყოფება. გრაეიტაციულ ველში მყარი სხეულის ყოველ წერტილზე მოქმედი ძალა წარმოადგენს სიმძიმის ძალას  $f = -mg$ . სადაც  $g$  ორტია ვერტიკალის მიმართულებით. მყარ სხეულზე მოქმედი სიმძიმის ძალებით გამოწვეული მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ ტოლი იქნება

$$N = -g \sum \sum [mr, n]. \quad (61,23)$$

რადგან  $n$  მუდმივი ვექტორია, ამიტომ იგი შეგვიძლია ჯამის ნიშნის გარეთ გავიტანოთ; ასე რომ,

$$N = g \left[ n, \sum mr \right]. \quad (61,24)$$

ეს უკანასკნელი კი ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$N = Mg [n, R_c], \quad (61,25)$$

სადაც  $R_c$  ინერციის ცენტრის რადიუსვექტორია. თუ მომენტის ცენტრად მასების ცენტრს ავირჩევთ, მაშინ  $R_c=0$  და  $N=0$ , საიდანაც გამომდინარეობს, რომ განხილულ შემთხვევაში სხეულის იმპულსის მომენტი მასების ცენტრის მიმართ შეიძლება.

## § 62. მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებები უძრავი სისტემის მიმართ

როგორც დაინახეთ, იზოლირებული მყარი სხეულის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი ექვსის ტოლია. ეს იმას ნიშნავს, რომ მისი მოძრაობის განსასაზღვრავად უნდა დაიწეროს ექვსი განტოლება. აქედან სამი განტოლება (ან ერთი ვექტორული განტოლება) დაახასიათებს მყარი სხეულის სიმძიმის ცენტრის მოძრაობას, სამი კი — მის მობრუნებას სიმძიმის ცენტრის მიმართ. აქედან გამომდინარე, მყარი სხეულის ლაგრანჟის ფუნქციისათვის ჩვენ ვიპოვეთ

$$L = \frac{M V_c^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \omega_i \omega_k - U(R, \varphi, \theta, \psi). \quad (62,1)$$

სადაც  $V_c$  ინერციის ცენტრის სიჩქარეა,  $U$  კი გამოხატავს გარეშე ველის პოტენციალურ ენერგიას; იგი დამოკიდებულია სხეულის ინერციის ცენტრის  $R_c(X_c, Y_c, Z_c)$  კოორდინატებზე და მყარი სხეულის ორიენტაციის განმსაზღვრელ ეილერის კუთხეებზე;  $\omega$  მყარი სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა.

მყარი სხეულის მოძრაობის ლაგრანჟის განტოლებები ასე დაიწერება:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial V_c} - \frac{\partial L}{\partial R_c} = 0, \quad (62,2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \omega} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0; \quad (62,3)$$

აქ იგულისხმება, რომ ლაგრანჟიანი გამოხატულია ეილერის კუთხეებში. აღენიშნოთ, რომ (62,3) განტოლებაში შემავალი  $d\xi$  ვექტორი წარმოადგენს მყარი სხეულის უსასრულოდ მცირე შემობრუნების კუთხეს  $\xi = \xi(\varphi, \theta, \psi)$ , ხოლო

$$\omega = \omega(\varphi, \theta, \psi).$$

(62,2) განტოლება აღწერს მყარი სხეულის ინერციის ცენტრის გადატანით მოძრაობას.

მართლაც, რადგან

$$\frac{\partial L}{\partial V_c} = M V_c = P, \quad (62,4)$$

ამიტომ პირველი წევრი მოგვცემს ძალას  $\dot{P}$ . ვაჩვენოთ, რომ მეორე წევრი  $\frac{\partial L}{\partial R_c}$

აგრეთვე ძალაა, ამასთან ცხადია, რომ  $\frac{\partial L}{\partial R_c} = - \frac{\partial U}{\partial R_c}$

თუ მყარი სხეულის  $i$ -ურ წერტილზე მოქმედი გარე ძალა  $f$ -ის ტოლია, მაშინ ამ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა მყარი სხეულის  $i$ -ური წერტილის  $\delta r'$  მანძილზე გადაადგილებისას, სადაც

$$\delta r' = \delta R_c + [\delta \xi, r], \quad (62,5)$$

ტოლი იქნება  $(f, \delta r')$ -ის. ხოლო თუ სხეულზე რამდენიმე ძალა მოქმედებს, მაშინ ამ ძალების საერთო მუშაობა ტოლი იქნება გამოსახულების

$$\sum (f, \delta r'), \quad (62,6)$$

ხოლო პოტენციალური ენერგიის ცვლილება კი ტოლი იქნება

$$\delta U = - \sum (f, \delta r'). \quad (62,7)$$

ამ უკანასკნელში (62.5) ფორმულის შეტანით მივიღებთ

$$\delta U = - \sum (f, \delta R) - \sum (f, [\delta \xi, r]), \quad (62,8)$$

რომლის გადაწერა შეგვიძლია შემდეგნაირადაც:

$$\delta U = - (F, \delta R) - (\delta \xi, N), \quad (62,9)$$

სადაც  $F = \sum f$  ყველა გარე ძალების ჯამია, ხოლო  $N = \sum [r, f]$  ყველა გარე ძალების მომენტების ჯამს წარმოადგენს.

ცხადია, რომ (62,9) განტოლებიდან გვექნება

$$F = -\frac{\partial U}{\partial R_c}, \quad N = -\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad (62,10)$$

გ. ი. —  $\frac{\partial U}{\partial R_c}$  მართლაც მყარ სხეულზე მოქმედი ძალა ყოფილა. აღსანიშნავია, რომ  $F$  არის მხოლოდ გარე ძალების ჯამი, რამდენადაც ყველა შიგა ძალების გეომეტრიული ჯამი ნულის ტოლია. ამრიგად, (62,2) განტოლება, რომელიც ეკვივალენტურია  $\dot{p} = F$  განტოლების, ყოფილა მყარა სხეულის გადატანითი მოძრაობისათვის დაწერილი ნიუტონის განტოლება.

ახლა განვიხილოთ (62,3) განტოლება. წინა პარაგრაფში დაინახეთ, რომ

$$\frac{\partial T}{\partial \omega} = L, \quad (62,11)$$

ამიტომ ამ განტოლების პირველი წევრი მოგვეცემა

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} = \dot{L}. \quad (62,11')$$

ამასთან ვგულისხმობთ, რომ პოტენციალური ენერჯია  $\omega$ -ზე დამოკიდებული არაა. (62,10)-ის გათვალისწინებით (62,3) განტოლება მიიღებს სახეს:  $\dot{L} = N$ .

ამგვარად, მყარი სხეულის მოძრაობა აიწერება განტოლებათა შემდეგი სისტემით:

$$\frac{dp}{dt} = F, \quad (62,12)$$

$$\frac{dL}{dt} = N. \quad (62,13)$$

ამ ორ განტოლებას მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებას უწოდებენ. პირველი, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ნიუტონის მოძრაობის განტოლებაა მყარი სხეულის სიკმის ცენტრთან ერთად გადატანითი მოძრაობისათვის. თუ ათულის სის ჯემას ინერციის ცენტრში მოვთავსებთ, მაშინ დავგრძეება მხოლოდ (62,13) განტოლება, რომელიც აღწერს სხეულის ბრუნვით მოძრაობას. ეს განტოლებაც შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ნიუტონის განტოლება, რომელშიაც იმპულსის როლს ასრულებს იმპულსის მომენტი, ძალის როლს კი — ძალის მომენტი.

### § 63. მხარის სხეულის ლაგრანჟის ფუნქცია ეილერის კუთხეებში. ეილერის კინემატიკური განტოლებები

წინა პარაგრაფში ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ ლაგრანჟის ფუნქცია გამოხატულია ეილერის კუთხეებში. ახლა საჭიროა ეს გამოხატულება ცხადი სხეით მივიღოთ. ამისათვის საკმარისი იქნება კინეტიკური ენერჯიის გამოხატვა ამ კუთხეებში. როცა სისტემის ღერებები ინერციის ცენტრის მთავარ მიმართულებებს ემთხვევა, ბრუნვის კინეტიკური ენერჯია განისაზღვრება ფორმულით

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2), \quad (63,1)$$

აქ  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  — ბრუნვის კუთხური სიჩქარის კომპონენტებია დეკარტის მოძრავი სისტემის მიმართ, საჭიროა მათი გამოსახვა ეილერის კუთხეებითა და მათი დროით

წარმოებულების საშუალებით. ამისათვის საჭიროა  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\theta}$  და  $\dot{\psi}$  დავაგეგმილოთ  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  ღერძებზე. 55-ე ნახაზიდან ნათელია, რომ კუთხური  $\dot{\varphi}$  სიჩქარე მიმართულია  $x$  ღერძის გასწვრივ, ამიტომ მისი პროექცია მოძრავი სისტემის  $z'$  ღერძზე ტოლი იქნება

$$\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi} \cos \theta. \quad (63,2)$$

$x'$  და  $y'$  ღერძებზე  $\dot{\varphi}$ -ის პროექციების მოსაძებნად საჭიროა იგი ჯერ დავაგეგმილოთ  $x'oy'$  სიბრტყეზე, შემდეგ კი  $x'$  და  $y'$  ღერძებზე. ცხადია, რომ პროექცია აღნიშნულ სიბრტყეზე ტოლი იქნება

$$\dot{\varphi}_{OL} = \dot{\varphi} \sin \theta. \quad (63,3)$$

ხოლო ამის შემდეგ  $x'$  და  $y'$  ღერძებზე დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \dot{\varphi}_{OL} \sin \psi = \\ &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \end{aligned} \quad (63,4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2 &= \dot{\varphi}_{OL} \cos \psi = \\ &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi. \end{aligned} \quad (63,5)$$

ნახ. 55

$\dot{\theta}$  კუთხური სიჩქარე მიმართულია კვანძთა ღერძის გასწვრივ, ამიტომ მისი მდგენელები მოძრავი სისტემის ღერძებზე ტოლია

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \psi, \quad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi, \quad \dot{\theta}_3 = 0. \quad (63,6)$$

რაც შეეხება  $\dot{\psi}$  კუთხურ სიჩქარეს, რადგან იგი მიმართულია  $z'$  ღერძის გასწვრივ, მას ექნება მხოლოდ  $\dot{\psi}_3 = \dot{\psi}$  მდგენელი. თუ აქ მიღებულ მდგენელების მნიშვნელობებს შესაბამისად შევკრებთ, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (63,7)$$

ამის შემდეგ უკვე აღვიღია ბრუნვის კინეტიკური ენერჯიის დაწერა. გვექნება

$$\begin{aligned} T &= \frac{J_1}{2} (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \frac{J_2}{2} (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \\ &+ \frac{J_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \end{aligned} \quad (63,8)$$

სიმეტრიული ბზრიალასათვის ( $J_1 = J_2 \neq J_3$ ). ეს ფორმულა მოგვცემს

$$T = \frac{J_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{J_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2, \quad (63,9)$$

ხოლო სფერული ბზრიალასათვის

$$T = \frac{J}{2} (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta). \quad (63,10)$$

(61,9) ფორმულებს გამოყენებით იმპულსის მომენტის მდგენელებს ეილერის კუთხეებში ექნებათ სახე:

$$\begin{aligned} L_1 &= J_1 (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi), \\ L_2 &= J_2 (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi), \\ L_3 &= J_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}). \end{aligned} \quad (63,11)$$

ნათელია, რომ ლაგრანჯის ფუნქცია, თანახმად (60,18) ფორმულისა, ეილერის კუთხეებში ასე დაიწერება:

$$\begin{aligned} L &= \frac{MV_c^2}{2} + \frac{J_1}{2} (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \frac{J_2}{2} (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \\ &+ \frac{J_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - U(R, \varphi, \theta, \psi). \end{aligned} \quad (63,12)$$

აქ განზოგადებული სიჩქარეების როლს ასრულებს  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\theta}$  და  $\dot{\psi}$ . როცა გვიანტერესებს მხოლოდ ბრუნვითი მოძრაობა, მაშინ საკმარისია ლაგრანჯიანიდან გამოვარიცხოთ სიმძიმის ცენტრის მოძრაობის დამახასიათებელი წევრები ( $R_c = 0$ ,  $V_c = 0$ ).

(63,7) ფორმულიდან ჩანს, რომ  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  არ წარმოადგენს რაიმე სიდიდის სრულ წარმოებულებს დროით; ამ თვალსაზრისით ისინი იდენტური არ არიან განზოგადებული სიჩქარეების ჩვეულებრივი განმარტებისა.

#### § 64. თანხისუფალი სიმეტრიული ბზრიალა

განვიხილოთ ერთი წერტილით დამაგრებული სიმეტრიული ბზრიალას თავისუფალი მოძრაობა. ვიგულისხმობთ, რომ ბზრიალას დამაგრების წერტილი არ ემთხვევა ინერციის ცენტრს. თავისუფალი ბზრიალასათვის ადგილი ექნება იმპულსის მომენტის შენახვას. უძრავი სისტემის  $x$  ღერძი მივმართოთ იმპულსის მომენტის გასწვრივ, ხოლო მოძრავი სისტემის  $x'$  ღერძი ბზრიალას სიმეტრიის ღერძს დავამთხვიოთ. გარდა ამისა ვიგულისხმობთ, რომ მოცემულ მომენტში  $x'$  ღერძი კვანძთა ღერძს ემთხვევა. მაშინ  $\psi = 0$  და (53,11) ფორმულები მოგვეცემს:

$$L_1 = J_1 \dot{\theta}, \quad L_2 = J_2 \dot{\varphi} \sin \theta, \quad L_3 = J_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}). \quad (64,1)$$

მეორე მხრივ, რამდენადაც  $x'$  ღერძი (კვანძთა ღერძი)  $x$ -ის მართობია და ადგილი აქვს მომენტის შენახვას,  $L$ -ის მდგენელებისათვის  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  ღერძებზე გვექნება:

$$L_1 = 0, \quad L_2 = L \sin \theta, \quad L_3 = L \cos \theta. \quad (64,2)$$

(64,1) და (64,2) ფორმულების შედარებით მივიღებთ:

$$\dot{\theta} = 0, \quad J_1 \dot{\varphi} = L,$$

$$J_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = L \cos \theta \quad (64,3)$$

პირველი განტოლება გვაძლევს  $\theta = \text{const}$ , ე. ი. კუთხე ბზრიალას სიმეტრიის ღერძსა და იმპულსის მომენტს შორის მუდმივია. მეორე განტოლება კი გვეუბნე-

ბა, რომ ბზრიალა იმპულსის მომენტის ირგვლივ ბრუნავს თანაბრად, კუთხური სიჩქარით

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{J_1} \quad (64,4)$$

ამ მოვლენას რეგულარულ პრეცესიას უწოდებენ. ბზრიალას სიმეტრიის ღერძი აღწერს კონუსს წვეროთი სათავეში. რაც შეეხება მესამე განტოლებას, იგი გვეუბნება, რომ ბზრიალა ბრუნავს საკუთარი ღერძის ირგვლივ კუთხური სიჩქარით

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} = \frac{L}{J_3} \cos \theta \quad (64,5)$$

(64,3)-ის თანახმად  $\dot{\varphi} = L/J_1$ , ამიტომ  $\dot{\psi}$ -ის გამორიცხვით მივიღებთ:

$$\dot{\psi} = \left( \frac{L}{J_3} - \frac{L}{J_1} \right) \cos \theta, \quad (64,6)$$

ან (64,5)-ის გამოყენებით,

$$\dot{\psi} = \frac{J_1 - J_3}{J_1} \omega_3 \quad (64,7)$$

დედამიწის ღერძის ბრუნვა წარმოადგენს პრეცესიის საუკეთესო მაგალითს. მზისა და სხვა პლანეტების მოქმედება დედამიწაზე იმდენად მცირეა, რომ პირველ მიახლოებაში დედამიწის ბრუნვა თავისი ღერძის ირგვლივ თავისუფალ მოძრაობად შეგვიძლია ჩავთვალოთ. ამასთან დედამიწა წარმოადგენს ისეთ სიმეტრიულ ბზრიალას, რომლისათვისაც  $J_1$  მომენტი, იმის გამო, რომ დედამიწა პოლუსებიან შებრტყელებულია, ნაკლებია  $J_3$ -ზე და

$$\frac{J_3 - J_1}{J_1} = 0,0033. \quad (64,8)$$

ამიტომ დედამიწა პრეცესიას განიცდის  $\frac{\omega_3}{300}$  სიხშირით. პრაქტიკულად  $\omega_3 \approx \omega$ ,

ამიტომ პრეცესიის პერიოდი დაახლოებით 300 დღის ტოლია. დედამიწაზე მყოფი დამკვირვებელი შეაჩნევს, რომ ბრუნვის ღერძი შემოსწერს წრეს ჩრდილო პოლუსის ირგვლივ და ერთ ბრუნვას მონაღმრებს 300 დღეს. ასეთი მოვლენა მართ-

ლაც შეინჩნევა, მაგრამ მასზე დაკვირვება ძალზე რთულია, რამდენადაც ბრუნვის ღერძი ჩრდილო პოლუსს არასოდეს არ სცილდება ხუთ მეტრზე მეტი მანძილით.

### § 65. სიმეტრიული ბზრიალა ბრავიტიაციულ ველში

ვთქვათ, ახლა, ერთი წერტილით დამაგრებული სიმეტრიული ბზრიალა იმყოფება გრავიტაციულ ველში. კვლავ ვიგულისხმობთ, რომ უძრავი წერტილი არ ემთხვევა ინერციის ცენტრს. წინა პარაგრაფში მოყვანილი ნახაზიდან ცხადია, რომ ბზრიალას პოტენციალური ენერგია ტოლია  $Mgz$ , სადაც  $M$  ბზრიალას მასაა,



გ კი — სიმძიმის ძალის აჩქარება. რადგან  $x = h \cos \theta$ , სადაც  $h$  მანძილია ინერციის ცენტრიდან ბზრიალას დამაკრების წერტილამდე, ამიტომ პოტენციალური ენერჯისათვის გვექნება

$$U = Mgh \cos \theta, \quad (65,1)$$

თანამედ (63,9) ფორმულისა კი ლაგრანჟის ფუნქცია მიიღებს სახეს

$$L = \frac{J_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\psi}^2) + \frac{J_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgh \cos \theta. \quad (65,2)$$

რადგან პოტენციალური ენერჯია დროს არ შეიცავს, ამიტომ სრული ენერჯია იქნება მოძრაობის ინტეგრალი. გარდა ენერჯიისა გვექნება კიდევ ორი მოძრაობის ინტეგრალი. მართლაც, ლაგრანჟიანში  $\varphi$  და  $\psi$  ციკლური კოორდინატებია, ამიტომ შესაბამისი  $P_\varphi$  და  $P_\psi$  განზოგადებული იმპულსები შეინახება,

$$P_\varphi = J_1 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + J_3 \cos \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \text{const.} \quad (65,3)$$

$$P_\psi = J_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \text{const.} \quad (63,4)$$

თუ ამ ორი უკანასკნელი ტოლობიდან განვსაზღვრავთ  $\dot{\varphi}$  და  $\dot{\psi}$ -ს, მივიღებთ

$$\dot{\varphi} = \frac{P_\varphi - P_\psi \cos \theta}{J_1 \sin^2 \theta}, \quad (65,5)$$

$$\dot{\psi} = \frac{P_\psi}{J_3} - \cos \theta \frac{P_\varphi - P_\psi \cos \theta}{J_1 \sin^2 \theta} \quad (65,6)$$

ბზრიალას სრული ენერჯიისათვის გვექნება

$$E = \frac{J_1 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{(P_\varphi - P_\psi \cos \theta)^2}{2J_1 \sin^2 \theta} + \frac{P_\psi^2}{2J_3} + Mgh \cos \theta. \quad (65,7)$$

აქედან ჩანს, რომ ენერჯია ერთ  $\theta$  კოორდინატზეა დამოკიდებული, ამიტომ ამოცანის ამოსახსნელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ენერჯიის ინტეგრალი. ამასთან ფუნქციური პოტენციალური ენერჯიის როლს ასრულებს გამოსახულება

$$V(\theta) = \frac{(P_\varphi - P_\psi \cos \theta)^2}{2J_1 \sin^2 \theta} + Mgh \cos \theta, \quad (65,8)$$

ხოლო, რადგან  $P_\psi = \text{const}$ , ენერჯიის როლს შეასრულებს გამოსახულება

$$W = E - \frac{P_\psi^2}{2J_3}, \quad (65,9)$$

მაშასადამე,

$$W = \frac{J_1 \dot{\theta}^2}{2} + V(\theta). \quad (65,10)$$

აქედან

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{J_1} [W - V(\theta)]. \quad (65,11)$$

ამ ტოლობიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ  $dt$ ,

$$dt = \sqrt{\frac{J_1}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{W - V(\theta)}}, \quad (65,12)$$

საიდანაც

$$t = \sqrt{\frac{J_1}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{W - V(\theta)}}. \quad (65,13)$$

შევითანოთ  $V(\theta)$ -ს მნიშვნელობა და შემოვიღოთ ახალი ცვლადი  $x = \cos \theta$ . მარტივი გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ

$$t = -J_1 \int \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}, \quad (65,14)$$

სადაც  $\Phi(x)$  შემდეგი ფუნქციაა

$$\Phi(x) = (1 - x^2) [2J_1 W - 2MgJ_1 h x] - (P_\varphi - P_\psi x)^2. \quad (65,15)$$

ამავე აღნიშვნებში (65,11) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\dot{x}^2 = \frac{1}{J_1^2} \Phi(x). \quad (65,16)$$

რადგან  $\Phi(x)$  შესაბამე რიგის პოლინომია, ამიტომ (65,14) ინტეგრალი ელიფსური ტიპის ინტეგრალია.

რაც შეეხება ეილერის  $\varphi$  და  $\psi$  კუთხეებს, მათ ამოვხსნით (65,5) და (65,6) განტოლებებიდან. მაგალითად, (65,5)-დან მივიღებთ

$$\varphi = \sqrt{\frac{J_1}{2}} \int \frac{(P_\varphi - P_\psi \cos \theta)}{J_1 \sin^2 \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{W - V(\theta)}}. \quad (65,17)$$

ახალი  $x = \cos \theta$  ცვლადის შემოღებით ეს გამოსახულებაც ელიფსურ ინტეგრალზე დაიყვანება,

$$\varphi = - \int \frac{(P_\varphi - P_\psi x) dx}{(1 - x^2) \sqrt{\Phi(x)}}. \quad (65,18)$$

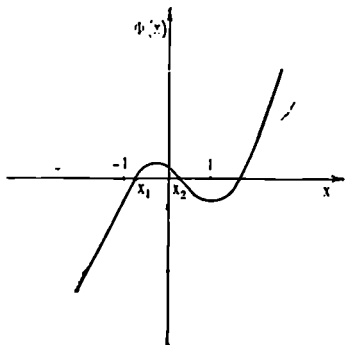
ანალოგიურად ვიპოვით ეილერის  $\psi$  კუთხესაც (65,14)-ში შემავალი ინტეგრალის ამოხსნა ზუსტად არ ხერხდება, მაგრამ ამის გარეშეც შეგვიძლია გავაკეთოთ მთელი რიგი მნიშვნელოვანი დასკვნები ბზრიალას მოძრაობის ხასიათის შესახებ. ცხადია, რომ (65,11) ფორმულის თანახმად,  $\theta$ -ის შესაძლო მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ პირობას  $W \geq V(\theta)$ . როცა  $P_\varphi \neq P_\psi$ , მაშინ პოტენციალური ენერგია  $V(\theta)$  უსასრულოა ხდება  $\theta = 0$  და  $\theta = \pi$ -სთვის, მაშასადამე, მას  $(0, \pi)$  შუალედში ექნება მინიმუმი. შევისწავლოთ ეს საკითხი უფრო დაწვრილებით. ამისათვის განვიხილოთ  $\Phi(x)$  ფუნქციის ყოფაქცევა. ცხადია, რომ  $\Phi(x) = 0$  განტოლების ფესვები განსაზღვრავს იმ  $\theta$  კუთხეებს, რომელთათვისაც  $\theta$  ნიშანს იცვლის.  $\Phi(x) = 0$  წარმოადგენს კუბურ განტოლებას, ამიტომ მას სამი ფესვი ექნება. დიდი  $x$ -ებისათვის ამ კუბურ პოლინომში, (65,15) გამოსახულების თანახმად, ყველაზე დიდი წევრია  $2MgJ_1 h x^2$ , რომელიც, როცა  $x < 0$ , იქნება დიდი უარყოფითი რიცხვი, ხოლო როცა  $x > 0$  - დიდი დადებითი რიცხვი. გარდა ამისა, ცხადია, რომ

$$\Phi(1) = - (P_\varphi - P_\psi)^2, \quad (65,19)$$

$$\Phi(-1) = - (P_\varphi + P_\psi)^2,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ  $\Phi(x)$  ყოველთვის უარყოფითია. აღვნიშნოთ, რომ შესაძლებელია განსაკუთრებული შემთხვევაც, როცა  $x = \pm 1$  არის  $\Phi(x) = 0$  განტოლების ფესვი. აღვიღოთ დამტკიცება, რომ  $\Phi(x) = 0$  განტოლების სამივე ფესვი ნამდვილია. რადგან  $x = \cos \theta$ , ამიტომ ნამდვილი მოძრაობა დასაშვებია

$-1 \leq x \leq 1$  შუალედისათვის. მეორე მხრივ, იმის გამო, რომ  $x$  უნდა ნამდვილი იყოს,  $-1 < x < +1$  შუალედის რაღაც მონაკვეთში  $\Phi(x)$  ფუნქცია დადებითი უნდა იყოს. მაგრამ, თანახმად (65,19) ფორმულებსა, როცა  $x = \pm 1$ ,  $\Phi(x)$  ფუნქცია უარყოფითია, ამიტომ აღნიშნულ შუალედში  $\Phi(x) = 0$  განტოლებას ექნება ორი ნამდვილი ფესვი:  $x_1$  და  $x_2$ . გარდა ამისა, რამდენადაც  $\Phi(+\infty) = \infty$ , ამიტომ  $x > 1$  არეში  $\Phi(x) = 0$ -ს ექნება კიდევ ერთი ნამდვილი ფესვი. ამ ფუნქციის თვისობრივი გრაფიკი გამოხატულია 57-ე ნახაზზე. ამგვარად,  $\Phi(x)$  პოლინომის ერთი ფესვი მაინც უნდა იმყოფებოდეს  $x > 1$  არეში, ე. ი. არეში, რომელიც არ შეესაბამება არს კუთხეებს (აღვნიშნოთ, რომ არს  $\theta$  კუთხეებს შეესაბამება  $\Phi(x) > 0$  არე).



ნახ. 57

რადგან  $-1 \leq x < 1$  (ე. ი.  $0 < \theta \leq \pi$ ) და  $\Phi(x) > 0$ , ამიტომ ყოველთვის გვექნება ისეთი ორი  $x_1$  და  $x_2$  ფესვი, რომელთა შორისაც მოთავსდება  $x$ -ის ის მნიშვნელობები, რომლებიც დასაშვებია ბზრიალას მოძრაობისათვის, ე. ი.  $x = \cos \theta$  მნიშვნელობები ბზრიალას მთელი მოძრაობის დროს მოთავსებული იქნება  $x_1$  და  $x_2$  ფესვებს შორის, ან, რაც იგივეა,  $\theta$  კუთხე შეიცვლება  $\theta_1$  და  $\theta_2$  მნიშვნელობებს შორის, სადაც  $\theta_1 = \arccos x_1$  და  $\theta_2 = \arccos x_2$ , ამასთან შესაძლებელია ისეთი შემთხვევა, როცა ეს ორი ფესვი ერთმანეთს ემთხვევა.

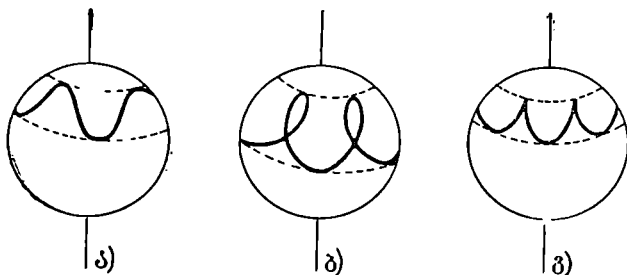
თანახმად (65,5) ფორმულისა, როცა  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ , მაშინ  $\dot{\theta}$ -ის ნიშანს განსაზღვრავს

$$I'_{\dot{\theta}} - P_{\dot{\theta}} x \quad (65,20)$$

გამოსახულება. ამ გამოსახულების ფესვი აღვნიშნოთ  $x_0$ -ით, მაშინ  $x_0 = \frac{P_{\dot{\theta}}}{I'_{\dot{\theta}}}$ . ვთქვათ, საწყისი პირობები ისეთია, რომ  $x_0 > x_2$ , მაშინ (65,20)-დან ნათელია, რომ როცა  $\theta$  მოთავსებულია  $\theta_1$  და  $\theta_2$ -ს შორის,  $\dot{\theta}$  იქნება ერთი და იგივე ნიშნის, ასე რომ  $\dot{\theta}$  ერთნაირად იქნება მიმართული როგორც  $\theta_1$ -თან, ისე  $\theta_2$ -თან. დკუთხე ამ შემთხვევაში მონოტონურად იცვლება, ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ბზრიალას ღერძი პრეცესიას განიცდის ვერტიკალთან. მაგრამ ეს არ იქნება რეგულარული პრეცესია, რომელიც ახასიათებს თავისუფალ ბზრიალას, რამდენადაც ამ შემთხვევაში ბზრიალა აწარმოებს დამატებით რხევით მოძრაობას — ნუტაციას. ბზრიალას ღერძი ირხევა  $\theta_1$  და  $\theta_2$  მნიშვნელობებს შორის. თუ ბზრიალას ცენტრიდან შემოვწერთ ერთეულოვანი რადიუსის სფეროს, მაშინ ამ სფეროზე ბზრიალას ღერძი აღწერს მრუდს, რომელიც ნაჩვენებია ნახ. 58-ის ა) შემთხვევაზე.

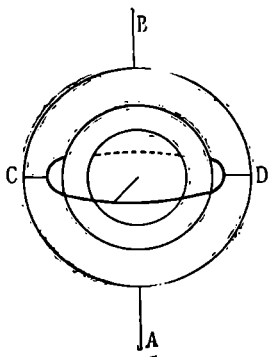
როცა  $x_0$  მოთავსებულია  $x_1$  და  $x_2$ -ს შორის, მაშინ  $\dot{\theta}$  ნიშანს იცვლის. პრეცესიის მიმართულება  $\theta_1$  და  $\theta_2$  ზღვრულ კუთხეებთან სხვადასხვა იქნება. სფეროზე ბზრიალას ღერძი შემოსწერთ მარყუჟის ტიპის წირს (ნახ. 58 ბ). ამასთან, საშუალოდ,  $\dot{\theta} \neq 0$ , ამიტომ გვექნება პრეცესია ამა თუ იმ მიმართულებით.

დაბლოს შესაძლებელია  $x_0$  დაემთხვეს  $\Phi(x) = 0$ -ის რომელიმე ფესვს. მაშინ შესაბამის სასაზღვრო  $U_1$  და  $U_2$  წრეებზე ნული იქნება  $\dot{\varphi}$  და  $\psi$ -ც; მივიღებთ შემთხვევას, რომელიც ნაჩვენებია გ) ნახაზზე.



ნახ. 58

როცა  $\Phi(x) = C$  განტოლებას  $-1 \leq x \leq 1$  არეში აქვს თანმთხვეული ფესვები  $x_1 = x_2$  (ე. ი.  $\theta_1 = \theta_2$ ), მაშინ (65,14) და (65,18) ფორმულებს ველარ გამოვიყენებთ, მაგრამ ეს არცაა საჭირო, რადგან მოძრაობა აიწერება ელემენტარულად. მართლაც, ამ შემთხვევაში  $x = c \sin t$  და, მაშასადამე,  $\theta = c \cos t$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს რეგულარულ პრეცესიას.



ნახ. 59

გიროსკოპი. სიმეტრიულ ბზრიალას მრავალნაირი ტექნიკური გამოყენება აქვს. მოკლედ შევვხებით მხოლოდ გიროსკოპს. გიროსკოპს უწოდებენ სიმეტრიულ ბზრიალას, რომელიც დამაგრებულია კარდანის დასაკიდზე და რომლის ღერძსაც შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მდებარეობა სივრცეში. როგორც § 61-ში დავამტკიცეთ, ამ შემთხვევაში ადგილი ექნება გიროსკოპის იმპულსის მომენტის შენახვას. როცა საწყის მომენტში ბზრიალას ღერძი უძრავია, მაშინ მისი მიმართულება დაემთხვევა  $L$  ვექტორის მიმართულებას. თუ გიროსკოპს მივანიჭებთ კუთხურ

სიჩქარეს საკუთარი ღერძის ირგვლივ, მაშინ შემდგომში ეს ღერძი ყოველთვის ერთი და იგივე მიმართულებას შეინარჩუნებს. ასეთი გიროსკოპი შეგვიძლია გამოვიყენოთ მუდმივი მიმართულების საჩვენებლად მოძრავ სხეულზე, რადგან სხეულის (გემის, თვითმფრინავის და სხვა) მოძრაობა გიროსკოპის ღერძის მიმართულებაზე არ იმოქმედებს.

### § 66. ეილერის დინამიკური განტოლებები

მყარი სხეულის მოძრაობის (62,12) და (62,13) განტოლებები

$$\frac{dP}{dt} = F, \quad \frac{dL}{dt} = N \quad (66,1)$$

დაწერილია უძრავი (ინერციული) სისტემის მიმართ. ეს განტოლებები განსაკუთრებულ ნათელ შინაარსს მიიღებენ, თუ მათ ჩაეწერთ მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ იმ  $x', y', z'$  სისტემაში, რომლის ღერძები ემთხვევა ინერციის ტენზორის მთავარ მიმართულებებს. აღვნიშნოთ  $\frac{dA}{dt}$ -ით  $A$  ვექტორის ცვლილება

ბის სიჩქარე უძრავ კოორდინატთა სისტემის მიმართ. ვიგულისხმობთ ჯერჯერობით, რომ ვექტორი  $A$  უცვლელია მბრუნავი სისტემის მიმართ, მაშინ მისი ცვლილება უძრავ კოორდინატთა სისტემის მიმართ გამოწვეული იქნება მხოლოდ მოძრავი კოორდინატთა სისტემის ბრუნვით, ასე რომ, შეიძლება დავწეროთ

$$\frac{dA}{dt} = [\omega, A], \tag{66,2}$$

სადაც  $\omega$  არის სისტემის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე.

თუ ვექტორი  $A$  ცვლებადია მოძრავი კოორდინატთა სისტემის მიმართაც, მაშინ ცხადია, რომ  $A$  ვექტორის წარმოებულისათვის უძრავ კოორდინატთა სისტემაში მივიღებთ

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d'A}{dt} + [\omega, A], \tag{66,3}$$

სადაც  $\frac{d'A}{dt}$  ნიშნავს  $A$  ვექტორის წარმოებულს მოძრავ კოორდინატთა სისტემაში. ამ ფორმულით განისაზღვრება ნებისმიერი ვექტორის ცვლილების სიჩქარე უძრავი სისტემის მიმართ. იგი შედგება ორი წევრისაგან: პირველი,  $\frac{d'A}{dt}$  წარმოადგენს ვექტორის წარმოებულს მოძრავ სისტემაში. ხოლო მეორე,  $[\omega, A]$  წარმოადგენს  $A$  ვექტორის ცვლილებას, გამოწვეულს მოძრავი სისტემის ბრუნვით. როცა  $A$  გამოხატავს რადიუსვექტორს, მაშინ (66,3) დავმთხვევა სიჩქარის ჩვენთვის კარგად ცნობილ ფორმულას.

ისევე როგორც ყველა ვექტორული ტოლობა, (66,3)-იც შეგვიძლია დავაგვიგებოთ ნებისმიერი სისტემის ღერძებზე. მაგრამ როცა საქმე გვაქვს წარმოებულის პროექციებთან, მოძრავი სისტემის ღერძებზე უნდა დავიცვათ გარკვეული სიფრთხილე. ვთქვათ, უძრავ სისტემაში გვაქვს  $B$  ვექტორის დროითი წარმოებულის

$$A = \frac{dB}{dt}.$$

ცხადია, ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ  $A$  ვექტორის გვეგმილები როგორც უძრავის ისე მოძრავი სისტემის ღერძებზე. მაგრამ პროექციები მოძრავი სისტემის ღერძებზე არ უღრის  $\frac{dB_i}{dt}$ -ს, არამედ ტოლია  $\left(\frac{dB}{dt}\right)_i$ , ე. ი.  $B$  ვექტორი ჯერ უნდა გავაწარმოოთ და შემდეგ დავაგვიგებოთ მოძრავ ღერძებზე. განვიხილოთ, მაგალითად, მოძრავ სისტემაში რაიმე უძრავი წერტილი, რომლის რადიუსვექტორი იყოს  $r$ . მაშინ სიჩქარე უძრავი სისტემის მიმართ იქნება  $v = [\omega, r]$ .  $v$  წარმოადგენს მბრუნავი  $r$  ვექტორის სიჩქარეს უძრავი სისტემის მიმართ. ამასთან გასაგებია, რომ საზოგადოდ,  $v$  ვექტორის მდგენელები ნული არ იქნება მოძრავ სისტემაშიაც. მეორეს მხრე,  $r$  ვექტორის მდგენელები, ამ ვექტორთან ერთად მბრუნავ სისტემაში, მუდმივებია, რის გამოც მათი წარმოებულები მოგვცემს ნულებს. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ამიტომ შეცდომა რომ არ დაუშვათ, თუ ვექტორის დროით წარ-

მოხუცულს ვიღებთ ერთ სისტემაში, მაშინ მისი მდგენელების გამოთვლა სხვა სისტემაში უნდა მოვახდინოთ იმის შემდეგ, რაც ჩაუტარებთ ამ ვექტორის გაწარმოებას.

ამის შემდეგ ადვილია დინამიკური განტოლებების გამოყენება. (66,3) ფორმულის გამოყენებით (66,1) მოძრაობის განტოლებები მიიღებენ სახეს

$$\frac{d'p}{dt} + [\omega, p] = F, \quad \frac{d'L}{dt} + [\omega, L] = N. \quad (66,4)$$

ჩაღვან  $\frac{d'}{dt}$  აღნიშნავს წარმოებულს მოძრაობის სისტემის მიმართ, ამიტომ ეს განტოლებები უშუალოდ შეგვიძლია დავაგვიგვილოთ მოძრაობის სისტემის ღერძებზე, თუ დავწერთ

$$\left(\frac{d'p}{dt}\right)_i = \frac{dp_i}{dt}, \quad \left(\frac{d'L}{dt}\right)_i = \frac{dL_i}{dt}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (66,5)$$

მაშინ გვეჩვენება:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} + (\omega_2 p_3 - \omega_3 p_2) &= F_1, \\ \frac{dp_2}{dt} + (\omega_3 p_1 - \omega_1 p_3) &= F_2, \\ \frac{dp_3}{dt} + (\omega_1 p_2 - \omega_2 p_1) &= F_3. \end{aligned} \quad (66,6)$$

გაიხსენოთ, რომ როცა  $x', y', z'$  სისტემის ღერძები ტენზორის მთავარ ღერძებს ემთხვევა.  $L_1 = \omega_1 J_1$ ,  $L_2 = \omega_2 J_2$ ,  $L_3 = \omega_3 J_3$ , მაშინ (66,4)-ის მეორე განტოლება მოგვცემს:

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 &= N_1, \\ J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 &= N_2, \\ J_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 &= N_3. \end{aligned} \quad (66,7)$$

(66,7) განტოლებებს, ხშირად, ეილერის დინამიკური განტოლებებს უწოდებენ. ისინი წარმოადგენს მყარი სხეულის ბრუნვის განტოლებებს მოძრაობის სისტემაში (მყარ სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ სისტემაში). განმეორებით აღვნიშნავთ, რომ ამ განტოლებებში შემავალი ყველა პარამეტრი აღებულია ინერციის მთავარ ღერძებზე.

ამ განტოლებების დაყვანა კვადრატურზე შესაძლებელია შემდეგ სამ შემთხვევაში: 1)  $N_1 = N_2 = N_3 = 0$  და ნებისმიერი ინერციის მომენტისათვის. ამ შემთხვევას ეილერ-პუანსოს შემთხვევას უწოდებენ. 2) სიმეტრიული ბზრილა  $J_1 = J_2 \neq J_3$  საყრდენი წერტილი ძვეს სიმეტრიის ღერძზე. 3) კოვალენსკაის შემთხვევა. 1887 წელს ს. ვ. კოვალენსკაიამ დაამტკიცა, რომ კვადრატურზე დაიყვანება კიდევ ერთი შემთხვევა და ამით ამოიწურება ყველა შემთხვევა. კოვალენსკაის შემთხვევაში  $J_1 = J_2 = 2J_3$ , ამასთან ინერციის ცენტრი მდებარეობს სიბრტყეში, რომელიც გადის საყრდენ წერტილზე და პერპენდიკულარულია ბზრილის სიმეტრიის ღერძისა.

(66,7) განტოლებათა სისტემა მეორე რიგის განტოლებებია  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  ეილერის კუთხეების დროითი წარმობებულების მიმართ. მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია ეს მეორე რიგის სამი განტოლება შევცვალოთ ექვსი პირველი რიგის განტოლებით. ამისათვის საკმარისია ეილერის დინამიკურ განტოლებებთან ერთად განვიხილოთ ეილერის კინემატიკური განტოლებებიც:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\psi} \cos \psi, \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\psi} \sin \psi, \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (66,8)$$

(66,7) და (66,8) ექვსი განტოლება პირველი რიგის განტოლებებია  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  და  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  ექვსი უცნობი ფუნქციის მიმართ.

### § 67. მხარე სხეულის კინემატიკური ენერჯიის ცვლილება გარუწვითი მოძრაობის შემთხვევაში

დავუშვათ, გვინტერესებს მყარი სხეულის მხოლოდ ბრუნვითი მოძრაობა. (66,7) განტოლებების ორივე მხარე შესაბამისად გადავამრავლოთ  $\omega_1 dt$ ,  $\omega_2 dt$ ,  $\omega_3 dt$ -ზე და ავჯამოთ; გვექნება

$$J_1 \omega_1 d\omega_1 + J_2 \omega_2 d\omega_2 + J_3 \omega_3 d\omega_3 = (N_1 \omega_1 + N_2 \omega_2 + N_3 \omega_3) dt, \quad (67,1)$$

ან

$$d \left( \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2} \right) = (N, \omega) dt. \quad (67,2)$$

მარცხენა მხარეში მივიღეთ ბრუნვითი კინეტიკური ენერჯიის დიფერენციალი  $dT$ . გამოვარკვიოთ, რას წარმოადგენს მარჯვენა მხარე. რადგან  $(N, \omega) dt = (N, d\hat{x})$ , სადაც  $d\hat{x}$  შემობრუნების კუთხის ვექტორია, ამიტომ, თანახმად (62,10) ფორმულისა,  $(N, d\hat{x}) = -dU$ , სადაც  $U$  პოტენციური ენერჯიაა. მაშასადამე, (67,2) ტოლობა გვეუბნება, რომ  $dT = -dU$ , რაც გამოხატავს კინეტიკური ენერჯიის ცვლილების კანონს. (67,2) ტოლობის მარჯვენა მხარის უფრო ნათლად წარმოსადგენად, შევიტანოთ მასში  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ -ის მნიშვნელობანი ეილერის (66,8) კინემატიკური განტოლებებიდან. შეგავსი წევრების დაჯგუფების შემდეგ მივიღებთ

$$\begin{aligned} (N, \omega) dt &= (N_1 \sin \theta \sin \psi + N_2 \sin \theta \cos \psi + N_3 \cos \theta) d\varphi + \\ &+ (N_1 \cos \psi - N_2 \sin \psi) d\psi + N_3 d\theta. \end{aligned} \quad (67,3)$$

გავიხსენოთ, რომ  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  გარე ძალების მომენტის პროექციებია მოძრაობის სისტემის ლერძებზე. ადვილი საჩვენებელია, რომ  $d\varphi$ -სთან მდგომარეობა გამოსახულება ძალის მომენტის პროექციაა  $x$  ლერძზე (ე. ი. ლერძზე, რომლის ირგვლივაც ხდება  $d\varphi$  კუთხეზე მობრუნება),  $d\psi$ -ს კოეფიციენტი ძალის მომენტის პროექციაა კენა-თა ლერძზე,  $N_3$  კი მისი პროექციაა მოძრაობის სისტემის  $z'$  ლერძზე.

ცხადია, რომ  $N$ -ის პროექცია რაიმე  $n$  მიმართულებაზე განისაზღვრება ფორმულით

$$N_n = N_1 \cos(x', n) + N_2 \cos(y', n) + N_3 \cos(z', n). \quad (67,4)$$

ეს ფორმულა  $N$ -ის პროექციისათვის კვანძთა ლერძზე მოგვცემს

$$N_n = N_1 \cos \psi - N_2 \sin \psi, \quad (67,5)$$

ხოლო  $x$  ლერძზე პროექციისათვის გვექნება

$$N_x = N_1 \sin \theta \sin \psi + N_2 \sin \theta \cos \psi + N_3 \cos \theta. \quad (67,6)$$

ამგვარად, მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობისას კინეტიკური ენერჯიის ცვლილება უდრის

$$dT = N_1 d\varphi + N_2 d\theta + N_3 d\psi. \quad (67,7)$$

მარჯვენა მხარე წარმოადგენს პოტენციალური ენერჯიის დანახარჯს, ე. ი. შესრულებულ მუშაობას.

### § 48. ეილერის განტოლებების ამოხსნა თაპისუფალი სიმეტრიული ბურიალასათვის

გამოვიყენოთ ეილერის განტოლებები თავისუფალი მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის შესასწავლად. თავისუფალი მყარი სხეულისათვის  $N_1 = N_2 = N_3 = 0$ , ამიტომ ეილერის დინამიკური განტოლებები მიიღებენ სახეს:

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 &= 0, \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_3 \omega_1 &= 0, \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 &= 0. \end{aligned} \quad (68,1)$$

ამოხსნის ილუსტრაციის მიზნით შევისწავლოთ ადრე უკვე განხილული თავისუფალი ბურიალას შემთხვევა. ამასთან, როგორც ვიცით, არსებობს სამი ტიპის ბურიალა. სფერულს და სიმეტრიულს ამ პარაგრაფში განვიხილავთ, ასიმეტრიულ ბურიალას კი ცალკე პარაგრაფს მიუძღვნით.

სფერული ბურიალას შემთხვევაში  $J_1 = J_2 = J_3 = J$ , და (68,1) განტოლება მოგვცემს  $\dot{\omega} = 0$ . რადგან ასეთი ბურიალასათვის  $L$  იმპულსის ნომენტი პრეპორციულია კუთხურ სიჩქარის, ე. ი.  $L = J\omega$ , ამიტომ ბურიალა იბრუნებს მუდმივ ირვლივ მუდმივი კუთხური სიჩქარით.

ახლა განვიხილოთ სიმეტრიული ბურიალა  $J_1 = J_2 \neq J_3$ . მისთვის (68,1) სისტემა მოგვცემს:

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 &= -(J_3 - J_1) \omega_2 \omega_3, \\ J_1 \dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1, \\ \dot{\omega}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (68,2)$$

ბოლო განტოლებიდან  $\omega_3 = \text{const}$ . თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\Omega = \frac{J_3 - J_1}{J_1} \omega_3, \quad (68,3)$$

(68,2)-ის წინა ორი განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2, \quad \dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1. \quad (68,4)$$

ეს განტოლებები შეიძლება დაიყვანოთ ერთ მეორე რიგის განტოლებაზე. მართლაც, თუ პირველს გავაწარმოებთ დროთა და გამოვიყენებთ მეორე განტოლებას, გვექნება

$$\dot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0. \quad (68,5)$$

მის ზოგად ამონახსნს ექნება სახე

$$\omega_1 = A \cos(\Omega t + \alpha), \quad (68,6)$$

ხოლო  $\omega_2$  ტოლი იქნება

$$\omega_2 = -\frac{\dot{\omega}_1}{\Omega} = A \sin(\Omega t + \alpha). \quad (68,7)$$



ჩვენ ვხედავთ, რომ სიმეტრიის ღერძის ( $x$  ღერძის) მართობ სიბრტყეში კუთხური სიჩქარის პროექციები  $\omega_1$  და  $\omega_2$  პარაბოლიულ ირხევიან  $\Omega$  სიხშირით და მათი კვადრატების ჯამი მუდმივი რჩება  $\omega_1^2 + \omega_2^2 = A^2$  ( $A$  ამპლიტუდა). რადგან  $\omega_3$  აგრეთვე მუდმივია, ეს იმას ნიშნავს, რომ თვით  $\omega$  ვექტორი თანაბრად ბრუნავს ბზრიალას ღერძის მიმართ  $\Omega$  სიხშირით ისე, რომ სიღლით უცვლელი რჩება. რადგან  $L$  და  $\omega$  ვექტორები ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან, ამიტომ იმპულსის მომენტი  $L$  ვექტორიც იბრუნებს ბზრიალას ღერძის ირგვლივ. ეს შედეგი არსებითად ემთხვევა § 64-ში მიღებულ შედეგებს, ოღონდ იქ მოძრაობა უძრავი სისტემის მიმართ იყო განხილული, აქ კი — იმ დამკვირვებლის მიმართ, რომელიც უძრავად დაკავშირებულია თვით მზრუნავ ბზრიალასთან; ამასთან, (68,3) და (64,7) ფორმულების შედარება გვიჩვენებს, რომ  $\Omega$  სიხშირესა და  $\psi$ -ს შორის არსებობს კავშირი:  $\Omega = -\dot{\psi}$ .

### § 69. ასიმეტრიული ბზრიალას თავისუფალი ბრუნვა

განვიხილოთ ასიმეტრიული ბზრიალას ბრუნვა იმ შემთხვევაში, როდესაც მასზე გარეშე ძალები არ მოქმედებენ. ამ შემთხვევაში ვილერის დინამიკური განტოლებების ინტეგრაცია შეგვიძლია მოაზრობის ინტეგრაციების გამოყენებით. ეს ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას როგორც ანალიზურად, ისე პუანსოს გეომეტრიული მეთოდით, რომელსაც შემდეგ პარაგრაფში განვიხილავთ. რადგან გვინტერესებს მხოლოდ ბრუნვითი მოძრაობის შესწავლა, ამიტომ ბზრიალას ცენტრი უძრავად ჩავთვალთ. პოტენციალური ენერგია თავისუფალი მოძრაობის დროს ნულის ტოლია, ამიტომ ბზრიალას მთელი ენერგია დაიყვანება მის ბრუნვით კინეტიკურ ენერგიაზე და ადგილი ექნება მის შენახვას. გარდა კინეტიკური ენერგიისა, შეინახება იმპულსის მომენტიც. თუ გავრკევეთ კინეტიკურ ენერგიას დროებით  $\varepsilon$ -ით აღვნიშნავთ, შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი სამი პირობა:

$$\begin{aligned} J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2 &= L^2, \\ J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2 + J_3 \omega_3 &= \varepsilon, \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 &= \omega^2, \end{aligned} \quad (69,1)$$

სადაც 1, 2, 3 ინდექსი მიუთითებს პროექციებს მოძრავი სისტემის ღერძებზე. რადგან ბზრიალა ასიმეტრიულია, ამიტომ  $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ . განსაზღვრულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ

$$J_1 > J_2 > J_3. \quad (69,2)$$

ამოვხსნათ (69,1) სისტემა  $\omega_1^2$ ,  $\omega_2^2$  და  $\omega_3^2$ -ის მიმართ. შევადგინოთ სისტემის დეტერმინანტი,

$$\Delta = \begin{vmatrix} J_1^2 & J_2^2 & J_3^2 \\ J_1 & J_2 & J_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(J_1 - J_2)(J_2 - J_3)(J_3 - J_1). \quad (69,3)$$

ცხადია, ამის შემდეგ, რომ

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} L^2 & J_2^2 & J_3^2 \\ \varepsilon & J_2 & J_3 \\ \omega^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{J_2 J_3 (J_2 - J_3)}{\Delta} \left[ \omega^2 - \frac{\varepsilon (J_2 + J_3) - L^2}{J_2 J_3} \right]. \quad (69,4)$$

ანალოგიურ დ ვიპოვოთ  $\omega_2^2$  და  $\omega_3^2$ -საც. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\lambda_1 = \frac{\varepsilon(J_2 + J_3) - L^2}{J_2 J_3}, \quad \lambda_2 = \frac{\varepsilon(J_3 + J_1) - L^2}{J_3 J_1}, \quad \lambda_3 = \frac{\varepsilon(J_1 + J_2) - L^2}{J_1 J_2}, \quad (69,5)$$

გვექნება შემდეგი ამონახსნები:

$$\omega_1^2 = \frac{J_2 J_3}{(J_1 - J_2)(J_3 - J_1)} (\lambda_1 - \omega^2), \quad (69,6)$$

$$\omega_2^2 = \frac{J_3 J_1}{(J_1 - J_2)(J_2 - J_3)} (\lambda_2 - \omega^2), \quad (69,6')$$

$$\omega_3^2 = \frac{J_1 J_2}{(J_2 - J_3)(J_3 - J_1)} (\lambda_3 - \omega^2) \quad (69,6'')$$

ელიერის (66.7) განტოლებები (როცა  $N=0$ ) შესაბამისად გავამრავლოთ  $\frac{\omega_1}{J_1}$ ,  $\frac{\omega_2}{J_2}$ ,  $\frac{\omega_3}{J_3}$ -ზე და შევკრიბოთ. მივიღებთ

$$\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \dot{\omega}_3 + \frac{(J_1 - J_2)(J_2 - J_3)(J_3 - J_1)}{J_1 J_2 J_3} \omega_1 \omega_2 \omega_3 = 0. \quad (69,7)$$

ამ გამოსახულების პირველი წევრი  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\omega^2)$ -ის ტოლია. თუ მეორე წევრში  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  და  $\omega_3$ -ის მნიშვნელობებს შევიტანთ (69,6) ფორმულებიდან, გვექნება

$$\frac{d\omega^2}{dt} = -2 \sqrt{(\lambda_1 - \omega^2)(\lambda_2 - \omega^2)(\lambda_3 - \omega^2)}. \quad (69,8)$$

(69,8) დიფერენციალური განტოლების დაყვანა შეგიძლია განტოლებაზე, რომელსაც აკმაყოფილებს ჰიერპტრასის ე. წ. ელიფსური ფუნქცია  $p(u)$ . ეს ფუნქცია წარმოადგენს შემდეგი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს:

$$\frac{dp(u)}{du} = -2 \sqrt{(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3)}. \quad (69,9)$$

ამასთან  $e_1, e_2, e_3$  კუბური პოლინომის ფესვებია და აკმაყოფილებენ პირობას  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ . განსაზღვრულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ  $e_1 > e_2 > e_3$ .

აღვიღალ ვაჩვენებთ, რომ (69,8) განტოლებას დავაკმაყოფილებთ, თუ დავუშვებთ, რომ

$$-\omega^2 = p(t) - \frac{1}{3} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3). \quad (69,10)$$

მართლაც, ამ შემთხვევაში (69,8) განტოლება იღებს სახეს

$$\frac{dp(t)}{dt} = -2 \sqrt{(p(t) - \mu_1)(p - \mu_2)(p - \mu_3)}, \quad (69,11)$$

სადაც

$$\mu_1 = \frac{1}{3} (\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_1),$$

$$\mu_2 = \frac{1}{3} (\lambda_3 + \lambda_1 - 2\lambda_2), \quad (69,12)$$

$$\mu_3 = \frac{1}{3} (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3),$$

ჯამი  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$ . იმისათვის, რომ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  გამოვხატოთ ვეიერშტრასის ფუნქციით, დაგვრჩენია  $e_1, e_2, e_3$ -ის ზემოთ აღნიშნული მიმდევრობის დადგენა. ამისათვის შევისწავლოთ  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  სიდიდეები.

ჯერ ერთი, ყველა ეს რიცხვი დადებითია. მართლაც, განვიხილოთ აშკარა უტოლობა

$$L^2 = J_1^2 \alpha_1^2 + J_2^2 \alpha_2^2 + J_3^2 \alpha_3^2 < J_1^2 \alpha_1^2 + J_1 J_2 \alpha_2^2 + J_1 J_3 \alpha_3^2 = J_1 \varepsilon, \quad (69,13)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$J_1 \varepsilon - L^2 > 0. \quad (69,14)$$

სრულიად ანალოგიურად დაემტკიცებთ, რომ

$$J_3 \varepsilon - L^2 < 0. \quad (69,15)$$

რაც შეეხება  $J_2 \varepsilon - L^2$  სიდიდეს, იგი იოთავებული იქნება წინა ორ სიდიდეს შორის და შეიძლება მიიღოს როგორც დადებითი და უარყოფითი მნიშვნელობა, ისე ნულოვანიც. ჩვენ ვიცით, რომ ორი მომენტის ჯამი მეტია მესამეზე;  $J_2 + J_3 > J_1$ , ამიტომ

$$\varepsilon (J_2 + J_3) - L^2 > J_1 \varepsilon - L^2 > 0, \quad (69,16)$$

რაც იმას გვიჩვენებს, რომ (69,5) ფორმულის თანახმად,  $\lambda_1 > 0$ , ასევე  $\lambda_2$  და  $\lambda_3$ -ც დადებითია, რადგან თუ დაუტლია (69,16) პირობა, მით უმეტეს დაუტლი იქნება პირობები:

$$\varepsilon (J_3 + J_1) - L^2 > 0, \quad \varepsilon (J_1 + J_2) - L^2 > 0, \quad (69,17)$$

რამდენადაც  $J_1 > J_2 > J_3$ . რომ გამოვარკვიოთ,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ -ის ფარდობითი სიდიდეები, განვიხილოთ შემდეგი სხვაობები:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{(J_2 - J_1)(J_3 \varepsilon - L^2)}{J_1 J_2 J_3} > 0, \quad (69,18)$$

$$\lambda_2 - \lambda_3 = \frac{(J_2 - J_3)(J_1 \varepsilon - L^2)}{J_1 J_2 J_3} > 0, \quad (69,18')$$

$$\lambda_1 - \lambda_3 = \frac{(J_1 - J_3)(J_2 \varepsilon - L^2)}{J_1 J_2 J_3}. \quad (69,18'')$$

ბოლო სხვაობის ნიშანი დამოკიდებულია  $J_2 \varepsilon - L^2$  სიდიდეზე განსაზღვრულობისათვის დაეუშვათ, რომ

$$J_2 \varepsilon - L^2 > 0, \quad (69,19)$$

მაშინ წინა ტოლობები გვიჩვენებს, რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$\lambda_2 > \lambda_1 > \lambda_3. \quad (69,20)$$

ახლა ვიპოვოთ  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  რიცხვების ფარდობითი სიდიდეები; ამისათვის შევადგინოთ სხვაობები

$$\mu_1 - \mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1 > 0, \quad \mu_2 - \mu_3 = \lambda_2 - \lambda_3 > 0, \quad \mu_3 - \mu_1 = \lambda_1 - \lambda_3 > 0, \quad (69,21)$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$\mu_3 > \mu_1 > \mu_2. \quad (69,22)$$

ამგვარად  $e_1, e_2, e_3$  რიცხვებისათვის გვექნება გარკვეული უერჩევა ( $e_1 > e_2 > e_3$ ).

$$e_1 = \frac{1}{3} (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3), \quad (69,23)$$

$$e_2 = \frac{1}{3} (\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_1), \quad (69,23')$$

$$e_3 = \frac{1}{3} (\lambda_3 + \lambda_1 - 2\lambda_2). \quad (69,23'')$$

ამის შემდეგ, (69,6) ფორმულების თანახმად, კუთხური სიჩქარის კომპონენტები ვეიერშტრასის ფუნქციით შემდეგნაირად გამოიხატება:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{J_2 J_3}{(J_1 - J_2)(J_3 - J_1)}} \sqrt{\rho(t) - e_2}, \quad (69,24)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{J_1 J_3}{(J_1 - J_2)(J_2 - J_3)}} \sqrt{\rho(t) - e_3}, \quad (69,24')$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{J_1 J_2}{(J_2 - J_3)(J_3 - J_1)}} \sqrt{\rho(t) - e_1}. \quad (69,24'')$$

ვეიერშტრასის  $\rho(t)$  ფუნქცია შეიძლება დაეაყვას იროთ იაკობის ცნობილ  $sn$ ,  $dn$  და  $cn$  ფუნქციებთან. ამ ფუნქციების განსასაზღვრავად განვიხილოთ ინტეგრალი

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}, \quad (69,25)$$

რომელსაც ეწოდება პირველი გვარის ელიფსური ინტეგრალი,  $k$  წარმოადგენს მოდულს. ეს ინტეგრალი  $x = \sin \alpha$  ჩასმით ასეთ სახეს მიიღებს:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \quad (69,26)$$

(69,25) ინტეგრალის ზედა საზღვარი განვიხილოთ როგორც  $u$ -ს ფუნქცია. ზედა საზღვარს ეწოდებენ ამპლიტუდას

$$\varphi = am u, \quad (69,27)$$

$u$ -ს კი — არგუმენტს და მას ასე სწერენ:

$$u = \operatorname{ar}g \varphi. \quad (69,28)$$

შემოვიღოთ ახლა იაკობის ფუნქციები:

$$snu = \sin \varphi = \sin am u, \quad (69,29)$$

$$cnu = \cos \varphi = \cos am u. \quad (69,30)$$

$$dnu = \Delta \varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{d\varphi}{du}. \quad (69,31)$$

პირველ ორ ფუნქციას, სათანადოდ, ჰქვია ელიფსური სინუსი და კოსინუსი, მესამეს კი — ამპლიტუდის დელტა. ისინი შეგვიძლია განვმარტოთ ინტეგრალის სახითაც:

$$u = \int_0^{sn u} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}. \quad (69,32)$$

$$u = \int_1^{cnu} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2+k^2t^2)}}, \quad k' = \sqrt{1-k^2}, \quad (69,33)$$

$$u = \int_1^{dnu} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k^2)}}. \quad (69,34)$$

(69,25) განმარტებიდან ნათელია, რომ როცა  $\varphi=0$ , მაშინ  $u=0$ . (69,29) — (69,31) ფორმულები ამ შემთხვევაში მოგვეცემენ:

$$sn0=0, \quad cn0=1, \quad dn0=1. \quad (69,35)$$

როცა მოდული  $k=0$ , მაშინ (69,25)-დან  $u=\varphi$  და, მაშასადამე,  $snu = \sin u$ ,  $cnu = \cos u$ , ხოლო  $dn u = 1$ , ე. ი. როცა  $k=0$ , იაკობის  $sn$  და  $cn$  ფუნქციები ჩვეულებრივ წრიულ ტრიგონომეტრიულ სინუსსა და კოსინუსს ემთხვევა, ამპლიტუდის დელტა კი ერთის ტოლი ხდება.

როცა  $k=1$ , მაშინ (69,32)-დან

$$u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} \Big|_0^{sn u} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+sn u}{1-sn u}, \quad (69,36)$$

საიდანაც

$$e^{2u} = \frac{1+sn u}{1-sn u}. \quad (69,37)$$

აქედან კი

$$sn u = th u. \quad (69,38)$$

სადაც  $th u$  ჰიპერბოლური ტანგენსია. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ  $k=1$ -ისათვის

$$dn u = cn u = \frac{1}{ch u}. \quad (69,39)$$

ადვილად ვიპოვით იაკობის ფუნქციის წარმოებულებსაც. მარცხადაც, (69,29) განმარტებიდან გვაქვს

$$\frac{d}{du} sn u = \frac{d}{d\varphi} \sin \varphi \frac{d\varphi}{du} = \cos \varphi \frac{d\varphi}{du}, \quad (69,40)$$

ან, (69,30) და (69,31) ფორმულების გამოყენებით,

$$\frac{d}{du} sn u = cn u dn u. \quad (69,41)$$

ასევე ვაჩვენებთ, რომ

$$\frac{d}{du} cn u = -sn u dn u, \quad (69,42)$$

$$\frac{d}{du} dn u = -k^2 sn u cn u. \quad (69,43)$$

დავუბრუნდეთ ახლა კავშირს ვეიერშტრასისა და იაკობის ფუნქციებს შორის. ცნობილია, რომ ამ კავშირს შემდეგი ფორმულები ახორციელებენ:

$$\sqrt{p(u+a)-e_1} = \sqrt{e_3-e_1} dn(u \sqrt{e_1-e_3}), \quad (69,44)$$

$$\sqrt{p(u+a)-e_2} = \sqrt{e_3-e_2} cn(u \sqrt{e_1-e_3}), \quad (69,45)$$

$$\sqrt{\rho(u+a) - e_3} = \sqrt{e_2 - e_3} \operatorname{sn}(u \sqrt{e_1 - e_3}), \quad (69,46)$$

სადაც  $a$  არის  $\rho(u)$  ფუნქციის ძირითადი წარმოსახვითი პერიოდის ნახევარი. ამ ფორმულების თანახმად (69,24) ფორმულები მიიღებენ სახეს:

$$\omega_1 = A \operatorname{cn}(\Omega t + \alpha), \quad (69,47)$$

$$\omega_2 = B \operatorname{sn}(\Omega t + \alpha), \quad (69,48)$$

$$\omega_3 = C \operatorname{dn}(\Omega t + \alpha), \quad (69,49)$$

სადაც  $\alpha$  ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო

$$A = \sqrt{\frac{J_2 J_3 (\lambda_1 - \lambda_2)}{(J_1 - J_2)(J_3 - J_1)}} = \sqrt{\frac{J_2 \varepsilon - L^2}{(J_3 - J_1) J_1}}. \quad (69,50)$$

$$B = \sqrt{\frac{J_3 J_1 (\lambda_2 - \lambda_1)}{(J_1 - J_2)(J_2 - J_3)}} = \sqrt{\frac{J_3 \varepsilon - L^2}{(J_3 - J_2) J_2}}, \quad (69,51)$$

$$C = \sqrt{\frac{J_1 J_2 (\lambda_3 - \lambda_2)}{(J_2 - J_3)(J_3 - J_1)}} = \sqrt{\frac{J_1 \varepsilon - L^2}{(J_1 - J_3) J_3}}, \quad (69,52)$$

$$\Omega = \sqrt{e_1 - e_3} = \sqrt{\frac{(J_2 - J_3)(J_1 \varepsilon - L^2)}{J_1 J_2 J_3}} \quad (69,53)$$

მოდულის როლს ჩვენს შემთხვევაში ასრულებს სიდიდე

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} = \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_3}} = \sqrt{\frac{(J_2 - J_1)(J_3 \varepsilon - L^2)}{(J_2 - J_3)(J_1 \varepsilon - L^2)}}. \quad (69,54)$$

იაკობის ფუნქციები პერიოდული ფუნქციებია. ელიფსური ფუნქციებზე და მახასიათებელი ისაა, რომ მათ ორი პერიოდი გააჩნიათ, ამასთან ამ პერიოდების ფარდობა არაა ნამდვილი რიცხვი.

ცნობილია, რომ არსი პერიოდი უდრის

$$T = \frac{4K}{\Omega}, \quad (69,55)$$

სადაც  $K$  არის ლეჟანდრის პირველი გვარის ელიფსური ინტეგრალი

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (69,56)$$

თუ გავიხსენებთ  $\Omega$ -ს მნიშვნელობას, პერიოდისათვის გვექნება

$$T = 4K \sqrt{\frac{J_1 J_2 J_3}{(J_2 - J_3)(J_1 \varepsilon - L^2)}}. \quad (69,57)$$

ამ დროის გავლის შემდეგ  $\omega$  ვექტორი უბრუნდება თავის საწყის მდებარეობას ბზრიალას ღერძის მიმართ. თვით ბზრიალა უძრავი ღერძის მიმართ თავის საწყის მდებარეობას არ უბრუნდება, იგი გადაინაცვლებს სივრცეში. ამ მოძრაობის შესასწავლად განვიხილოთ ბზრიალას მოძრაობა უძრავი სისტემის მიმართ როგორც დროის ფუნქცია. უძრავი სისტემის  $z$  ღერძი ავირჩიოთ მომენტის გასწვრივ და  $L$  დავაგვიჩილოთ მოძრავი სისტემის ღერძებზე. რადგან პოლარული კუთხე და ღერ-

ძის აზიმუტი მოძრაეი სისტემის მიმართ სათანადოდ ტოლია  $\theta$  და  $\pi/2 - \psi$ , ამიტომ

$$\begin{aligned} L_1 &= J_1 \omega_1 = L \sin \theta \sin \psi, \\ L_2 &= J_2 \omega_2 = L \sin \theta \cos \psi, \end{aligned} \quad (69,58)$$

$$L_3 = J_3 \omega_3 = L \cos \theta.$$

აქედან

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{J_1 \omega_1}{J_2 \omega_2} = \sqrt{\frac{J_1(J_2 - J_3)}{J_2(J_1 - J_3)}} \frac{c n(\Omega t + \alpha)}{s n(\Omega t + \alpha)}, \quad (69,59)$$

$$\cos \theta = \frac{J_3 \omega_3}{L} = \sqrt{\frac{J_3(J_1 \varepsilon - L^2)}{L^2(J_1 - J_3)}} dn(\Omega t + \alpha) \quad (69,60)$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ  $\theta$  და  $\psi$ -ს დამოკიდებულება დროზე ასევე პერიოდულია  $T$  პერიოდით. ამ ფორმულებში  $\varphi$  კუთხე არ შევიდა. მის საპოვნელად გამოვიყენოთ კინემატიკური განტოლებები:

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad (69,61)$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \cos \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi.$$

აქედან

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_1 \sin \psi + \omega_2 \cos \psi}{\sin \theta}. \quad (69,62)$$

მეორე მხრივ, (69,58) ფორმულების ძალით,

$$\omega_1 \sin \psi + \omega_2 \cos \psi = \frac{J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2}{L \sin \theta}, \quad (69,63)$$

$$L^2 \sin^2 \theta = J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2. \quad (69,64)$$

მაშასადამე,

$$\dot{\varphi} = L \frac{J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2}{J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2} = L \frac{\varepsilon - J_3 \omega_3^2}{L^2 - J_3^2 \omega_3^2}. \quad (69,65)$$

$\dot{\varphi}$  ყოველთვის დადებითია, მაშასადამე,  $\varphi$  იქნება დროის მონოტონურად ზრდადი ფუნქცია და იგი არ იქნება პერიოდული. აჭვარად, მართალია,  $\omega$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  სიდიდეები  $L$  პერიოდის გავლის შემდეგ დაუბრუნდებიან თავის საწყის მდებარეობას, სამაგიეროდ,  $\varphi$  არაა პერიოდული და თავისუფლად მოძრაეი ბზრიალა პერიოდის გავლის შემდეგ სივრცის იმავე ადგილას აღარ დაბრუნდება. თუ, რა თქმა უნდა,  $\varphi$ -ს ნაზრდი  $2\pi$ -ს ჯერადი არ აღმოჩნდა.

ჩვენ განვიხილოთ (69,19) შემთხვევა. საწინააღმდეგო შემთხვევაში, როცა  $J_2 \varepsilon - L^2 < 0$ , შეიცვლებოდა  $c_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  რიცხვების მიმდევრობა შედეგად  $a_1$  გამოიხატებოდა  $cn$ -ით და არა  $cn$ -ით, ასევე  $a_2$  გამოიხატებოდა  $sn$  ით, ხოლო  $a_3$  კი —  $cn$ -ით, ე. ი. გადაისმება 1 და 3 ინდექსით.

როცა  $J_2 \varepsilon - L^2 = 0$ , ეს შემთხვევა ცალკე განხილვას მოითხოვს. ამ დროს  $\lambda_1 - \lambda_3 = 0$ , შესაბამისად  $e_1 = e_2$  და  $k = 1$ . ამ შემთხვევაში კი, როგორც ვაჩვენეთ, იაკობის ფუნქციები დაიყვანება ჰიპერბოლურ ფუნქციებზე. შედეგად მივიღებთ:

$$\omega_1 = A \frac{1}{\operatorname{ch}(\Omega t + \alpha)}, \quad (69,66)$$

$$\omega_2 = B \operatorname{th}(\Omega t + \alpha), \quad (69,67)$$

$$\omega_3 = C \frac{1}{\operatorname{ch}(\Omega t + \alpha)}. \quad (69,68)$$

დიდი დროის გავლის შემდეგ  $\tanh(\Omega t + \alpha)$  მისწრაფვის ერთისაკენ, ხოლო  $\frac{1}{\cosh(\Omega t + \alpha)}$  — ნულისაკენ. მაშასადამე, განხილულ შემთხვევაში ბრუნვის მყისა ღერძი ასიმპტოტურად მიისწრაფვის  $y'$  ღერძთან დასამთხვევად.

დაბოლოს, ასიმეტრიული ბზრიალას ფორმულებიდან, როგორც კერძო შემთხვევა, მივიღოთ სიმეტრიული ბზრიალას შემთხვევა  $J_1 = J_2 \neq J_3$ . ამისათვის უნდა მივიღოთ  $k = 0$  და იაკობის  $s_{11}$ ,  $c_{11}$  და  $d_{11}$  ფუნქციები, სათანადოდ, შევცვალოთ სინუსით, კოსინუსით და ერთით, მაშინ, (69,47) — (69,49) ფორმულებიდან,

$$\omega_3 = C = \sqrt{\frac{J_1 \varepsilon - L^2}{(J_1 - J_3) J_3}} = \text{const}, \quad (69,69)$$

(69,53) ფორმულის ძალით კი —

$$\Omega = \frac{1}{J_1} \sqrt{\frac{(J_1 - J_3)(J_1 \varepsilon - L^2)}{J_3}} = \frac{J_1 - J_3}{J_1} \omega_3. \quad (69,70)$$

(69,60) ფორმულიდან გვექნება

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{J_1(J_1 \varepsilon - L^2)}{L^2(J_1 - J_3)}} = \text{const}. \quad (69,71)$$

(69,59) ფორმულა კი მოგვცემს:

$$\text{tg } \varphi = \text{ctg } (\Omega t + \alpha), \quad (69,72)$$

ხოლო  $\dot{\varphi}$ -სთვის (69,65)-ის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\dot{\varphi} = L \frac{\varepsilon - J_3 \frac{J_1 \varepsilon - L^2}{(J_1 - J_3) J_3}}{L^2 - J_3^2 \frac{J_1 \varepsilon - L^2}{(J_1 - J_3) J_3}} = \frac{L}{J_1}. \quad (69,73)$$

მიღებული ფორმულებიდან კი დავასკვნით, რომ

$$\dot{\theta} = \text{const},$$

$$\varphi = \frac{L}{J_1} t + \varphi_0, \quad (69,74)$$

$$\psi = \Omega t + \alpha = \frac{J_1 - J_3}{J_1} \omega_3 t + \alpha,$$

რაც შეესაბამება თავისუფალი სიმეტრიული ბზრიალას პრეცესიულ მოძრაობას.

დასასრულ აღვნიშნოთ, რომ ასიმეტრიული ბზრიალას ამოცანა გარეშე ველში, კერძოდ გრავიტაციულ ველში, კვადრატურებამდე ჭერ კიდევ არაა მიყვანილი, გარდა ზოგიერთი კერძო შემთხვევისა.

## § 70. ასიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობის გეომეტრიული ინტეგრირება

წინა პარაგრაფში მიღებული შედეგები ინერციის ცენტრის ირგვლივ მბრუნავი ასიმეტრიული ბზრიალასათვის შეიქმნება მკვიდროს მარტივი გეომეტრიული მეთოდითაც, რომელიც დაამუშავა ფრანგმა გეომეტრმა პუანსომ.



ინერციის ელიფსოიდის უძრავი  $O$  წერტილის მიმართ, როცა მოძრავი სისტემის კოორდინატა ღერძები ემთხვევა ინერციის მთავარ მიმართულებებს, აქვს შემდეგი სახე:

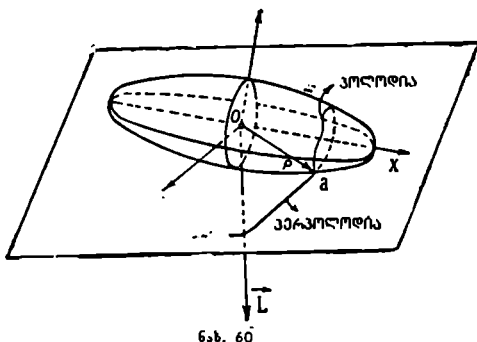
$$J_1 x'^2 + J_2 y'^2 + J_3 z'^2 = 1. \quad (70,1)$$

ვთქვათ, მყარი სხეულის ბრუნვის მყისა ღერძი ემთხვევა  $Oa$  მიმართულებას (ნახ. 60); ვიპოვოთ იმ სობრტყის განტოლება, რომელიც  $a$  წერტილში ეხება ელიფსოიდს.  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  სისტემაში  $a$  ვექტორს ექნება მიმართულების კოსინუსები  $\frac{a_1}{a}$ ,  $\frac{a_2}{a}$ ,  $\frac{a_3}{a}$ , ხოლო  $a$  წერტილის კოორდინატები იგივე ღერძებზე იქნება:

$$x' = \rho \frac{a_1}{a}, \quad y' = \rho \frac{a_2}{a}, \quad z' = \rho \frac{a_3}{a}, \quad (70,2)$$

სადაც  $\rho$  არის  $a$  წერტილის რადიუსვექტორის აბსოლუტური სიდიდე. ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილია, რომ  $F(x', y', z') = 0$  ფართეულის მხები სობრტყის განტოლება ნებისმიერ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  წერტილში ასე განიმარტება:

$$(x - x') \frac{\partial F}{\partial x'} + (y - y') \frac{\partial F}{\partial y'} + (z - z') \frac{\partial F}{\partial z'} = 0. \quad (70,3)$$



ჩვენ შემთხვევაში  $F = J_1 x'^2 + J_2 y'^2 + J_3 z'^2 - 1$ , ამიტომ მხები სობრტყის განტოლება მიიღებს სახეს

$$J_1 x x' + J_2 y y' + J_3 z z' = 1, \quad (70,4)$$

ან, (70,2)-ის გამოყენებით,

$$\frac{\rho}{a} (J_1 a_1 x + J_2 a_2 y + J_3 a_3 z) = 1. \quad (70,5)$$

რამდენადაც იმპულსის მომენტის მდგენელები ტოლია  $L_1 = J_1 a_1$ ,  $L_2 = J_2 a_2$  და  $L_3 = J_3 a_3$ , ამიტომ (70,5) ასეც გადაიწერება:

$$\frac{\rho}{a} (L_1 x + L_2 y + L_3 z) = 1. \quad (70,6)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ  $L(L_1, L_2, L_3)$  ვექტორის გეგმილები ამ განტოლებების კოეფიციენტების პროპორციული სიდიდეებია. ამიტომ  $L$  ვექტორი პერპენდიკულარულია მამასახლისოე, გ. კლაშვილი

ლარულია ამ სიბრტყის. ამგვარად, იმპულსის მომენტი მართობია ინერციის ელიფსოიდის ბრუნვის ღერძის გადაკვეთის წერტილში გავლებული მხები სიბრტყისა.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ინერციის ელიფსოიდის ცენტრიდან აღნიშნულ მხებ სიბრტყეებზე მანძილი მუდმივი სიდიდეა. როცა სიბრტყის განტოლება მოცემულია სახით  $Ax + By + Cz + D = 0$ , მაშინ მანძილი  $N(x_1, y_1, z_1)$  წერტილიდან ამ სიბრტყემდე, როგორც ცნობილია, განისაზღვრება ფორმულით

$$h = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|. \quad (70,7)$$

ჩვენს შემთხვევაში, რამდენადაც მანძილი აიღება კოორდინატთა სათავედან ( $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ ,  $D = -\omega/\rho$ ), იმდენად

$$h = \frac{\omega}{\rho} \frac{1}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}} = \frac{\omega}{\rho L}. \quad (70,8)$$

თუ (70,2) ფორმულებს შევითანთ (70,1) ელიფსოიდის განტოლებაში, მივიღებთ

$$\frac{\rho^2}{\omega^2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2) = 1, \quad (70,9)$$

საიდანაც კინეტიკური ენერჯისათვის გვექნება

$$T = \frac{\omega^2}{2\rho^2}. \quad (70,10)$$

ამ ფორმულის გათვალისწინებით (70,8) მოგვეცემს

$$h = \frac{\sqrt{2T}}{L}. \quad (70,11)$$

რადგან თავისუფალი ბზრიალასათვის ინახება როგორც კინეტიკური ენერჯია, ისე იმპულსის მომენტი, ამიტომ  $h = \text{const}$ , მიუხედავად ბზრიალას ბრუნვითი მოძრაობისა. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მხები სიბრტყე, რომელიც ამავე დროს მართობია მომენტის, სხეულის ბრუნვისას უძრავია. გადაადგილებას განიცდის მხოლოდ შეხების წერტილი. მრუდს, რომელსაც ეს წერტილი შემოსწერს ელიფსოიდის ზედაპირზე, უწოდებენ პოლოდიას, ხოლო უძრავ სიბრტყეზე — ჰერპოლოდიას. ამასთან, რამდენადაც ბრუნვის მყისა ღერძი შეხების წერტილზე გადის, ამიტომ იმ წერტილის სიჩქარე, რომელიც დროის აღებულ მომენტში შეხების წერტილს წარმოადგენს, ნულის ტოლი იქნება.

ცხადია, რომ პოლოდია წარმოადგენს იმ კონუსის გადაკვეთას ინერციის ელიფსოიდთან, რომელიც მთლიანად მოთავსებულია ელიფსოიდში, ხოლო წვერო ემთხვევა ინერციის ელიფსოიდის ცენტრს, ზედაპირი კი წარმოადგენს მყისა ღერძების გეომეტრიულ ადგილს. ჰერპოლოდია კი არის მრუდი, რომელსაც მივიღებთ იმ კონუსის უძრავ სიბრტყესთან გადაკვეთით, რომლის ზედაპირი წარმოადგენს მყისა ღერძების გეომეტრიულ ადგილს სივრცეში, წვერო კი ემთხვევა ელიფსოიდის ცენტრს. მაშასადამე, თავისუფალი ბზრიალას მოძრაობას მივიღებთ, თუ პირველ კონუსს ვაიძულებთ იგოროს მფორეზე ისე, რომ მყისა კუთხური სიჩქარე ყოველ მომენტში (თანახმად (70,10) ფორმულისა) ტოლი იყოს სიდიდისა  $\omega = \rho \sqrt{2T}$  ან, სხვანაირად, რადგან შეხების წერტილის სიჩქარე ნულის ტოლია, საჭირო მოძრაობას მივიღებთ, თუ ელიფსოიდს ვაიძულებთ იგოროს და იბრუნოს უძრავ სიბრტყეზე, ცურვის გარეშე.

ადვილად შეიძლება ვიპოვოთ პოლოდიის განტოლება და შევისწავლოთ მისი ყოფაქცევა. პოლოდიის წერტილები, ერთის მხრივ, იმყოფებიან ინერციის ელიფსოიდის ზედაპირზე და, მაშასადამე, აკმაყოფილებენ (70,1) განტოლებას, მეორე მხრივ, იმყოფებიან მზებ სიბრტყეზეც (70,4), რომელიც ინერციის ცენტრიდან მუდმივ  $h$  მანძილითაა დაშორებული. ეს მანძილი, ანალიზური გეომეტრიის თანახმად, განისაზღვრება ფორმულით

$$h^2 = (J_1^2 x'^2 + J_2^2 y'^2 + J_3^2 z'^2)^{-1} \quad (70,12)$$

აღნიშნოთ

$$J_1^2 x'^2 + J_2^2 y'^2 + J_3^2 z'^2 = D, \quad (70,13)$$

მაშინ

$$D = \frac{1}{h^2} = \frac{L^2}{2T}. \quad (70,14)$$

(70,1) და (70,13) განტოლების ერთობლივი განხილვა მოგვცემს

$$J_1(J_1 - D)x'^2 + J_2(J_2 - D)y'^2 + J_3(J_3 - D)z'^2 = 0, \quad (70,15)$$

რომელიც წარმოადგენს კონუსის განტოლებას; პოლოდია მიიღება ამ კონუსისა და ინერციის ელიფსოიდის გადაკვეთით. კონუსი რომ არსი იყოს, საჭიროა დატული იყოს პირობა

$$J_1 \geq D \geq J_3. \quad (70,16)$$

გეომეტრიულად ეს პირობა ნიშნავს იმას, რომ მანძილი მზების სიბრტყიდან ინერციის ელიფსოიდის ცენტრამდე ნაკლებია, ვიდრე დიდი ნახევარღერძი  $J_3^{-1/2}$  და მეტია, ვიდრე უმცირესი ნახევარღერძი  $J_1^{-1/2}$ , ეს პირობა კი ყოველთვის დატულია. მართლაც, თუ (70,16) უტოლობას  $\varepsilon = 2T$ -ზე გავემარაგებთ და გამოვაკლებთ  $L^2$ -ს, მივიღებთ

$$J_1 \varepsilon - L^2 \geq 0 \geq J_3 \varepsilon - L^2. \quad (70,17)$$

ეს პირობა კი, როგორც წინა პარაგრაფში დავინახეთ, დატულია.

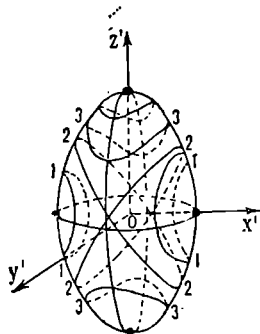
ახლა გამოვარკვიოთ, როგორ იცვლება პოლოდიის სახე, როცა  $D$  იცვლება  $J_1$  და  $J_3$ -ს შორის. ამ საქმეში დაგვეხმარება პოლოდიის პროექციების მოძებნა საკოორდინატო სიბრტყეებზე, ამ მიზნით (70,15) და (70,1) განტოლებებიდან რიგრიგობით გამოვრიცხოთ  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . მივიღებთ:

$$J_2(J_1 - J_2)y'^2 + J_3(J_1 - J_3)z'^2 = D - J_1, \quad (70,18)$$

$$J_1(J_1 - J_2)x'^2 - J_3(J_1 - J_3)z'^2 = D - J_2, \quad (70,19)$$

$$J_1(J_1 - J_3)x'^2 + J_2(J_2 - J_3)y'^2 = D - J_3. \quad (70,20)$$

აქედან ჩანს, რომ პოლოდიის პროექციები  $y'oz'$  და  $x'oy'$  სიბრტყეზე ელიფსებია,  $x'oz'$ -ზე კი — ჰიპერბოლები. სხვადასხვა  $D$ -თვის პოლოდიის პროექციები განისაზღვრება მსგავსი მრუდებით. განვიხილოთ ზოგიერთი შემთხვევა.

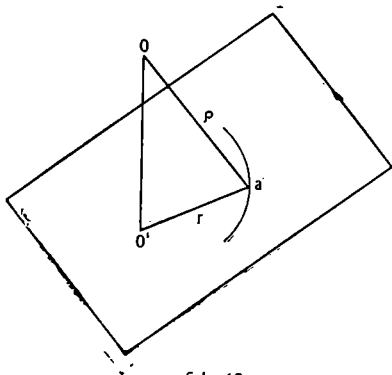


ნახ. 61

ვთქვათ  $D=J_1$ , მაშინ (70,15)-ში  $y'$  და  $x'$ -ის კოფეციენტები უარყოფითია ( $J_1 > J_2 > J_3$ ) და განტოლება მხოლოდ მაშინ იქნება ძალაში, როცა  $y' = z'$ , რაც, თანახმად (70,1) განტოლებისა, გვაძლევს  $x' = \pm \frac{1}{\sqrt{J_1}}$ . ამ შემთხვევაში

პოლოდია გადაგვარდება ორ წერტილად, რომლებიც მცირე ღერძის ბოლოებში მდებარეობენ. როცა  $J_3 = D$ , მაშინ  $x'$  და  $y'$ -ის კოფეციენტები დადებითია და განტოლება დატული იქნება მხოლოდ  $x' = y' = 0$ -სათვის. (70,1)-დან კი ვიპოვით  $z' = \pm \frac{1}{\sqrt{J_3}}$  ამ შემთხვევაში პოლოდია გადაგვარდება დიდი ღერძის ბოლოებზე მდებარე ორ წერტილად.

თუ  $J_1 > D > J_2$ , მაშინ (70,15)-ის პირველი კოფეციენტი დადებითია, ორი შემდეგი კი — უარყოფითი. კონუსს ამ შემთხვევაში ღერძად ექნება  $ox'$  ღერძი. პოლოდია შედგება ორი შტოსაგან, რომლებიც გარს უვლიან მცირე ნახევარღერძს. ნახაზზე ეს შტოები აღნიშნულია 1-ით.



როცა  $D=J_2$ , მაშინ  $J_3 < D$  და (70,15) მრული გადაგვარდება ორ სიბრტყედ, პოლოდია კი წარმოადგენს ორ გადამკვეთ ელიფსს (იხ. 2 მრული ნახ. 61-ზე).  $J_2 > D > J_3$  შემთხვევაში კონუსის ღერძი იქნება  $oz'$  ღერძი, პოლოდიას ექნება ორი შტო, რომლებიც გარს უვლიან ელიფსოიდის დიდ ღერძს (მე-3 მრუდები იმავე ნახაზზე). რაც შეეხება ჰერპოლოდის სახეს, მის დასადგენად

საკირთა ელიფსური ფუნქციების გამოყენება. მაგრამ აქვე შეგვიძლია დავადგინოთ ერთი მნიშვნელოვანი გარემოება. ავიღოთ ჰერპოლოდის შეხების წერტილი და მისი დაშორება უძრავ სიბრტყეზე ინერციის ცენტრიდან დაშვებული პერპენდიკულარის ფუძემდებ ალენიშნით  $r$ -ით (იხ. ნახ. 62). მაშინ ცხადია, რომ  $r^2 = \rho^2 - h^2$ . რადგან  $\rho$  სიდიდე მოთავსებულია ელიფსოიდის დიდსა და მცირე ღერძების სიდიდეებს შორის, აქედან დავასკვნით, რომ ჰერპოლოდია მთლიანად მოთავსებულია ორ კონცენტრიულ წრეხაზს შორის. გარდა ამისა ალენიშნით, რომ იმ დროს, როცა პოლოდია ყოველთვის ჩაკეტილი მრუდია, ჰერპოლოდია ყოველთვის ღია მრუდს წარმოადგენს.

## § 71. მჰარი სხეულის ბრუნვა ღერძის გარშემო

ვთქვათ, მყარი სხეული ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო აქტიური ძალების გავლენით. ბრუნვის ღერძად ავიღოთ  $z$  ღერძი. ასეთი მოძრაობის დასახასიათებლად საკმარისია ერთი პარამეტრი, რამდენადაც მყარ სხეულს, ამ შემთხვევაში, მხოლოდ ერთი თავისუფლების ხარისხი აქვს. ეს ერთი პარამეტრი იქნება კუთხე  $\varphi$ , რომელზედაც მყარი სხეული მობრუნდება დაფიქსირებული მდებარეობის მიმართ. ასეთი მოძრაობისათვის ეილერის დინამიკური განტოლებები მოგვცემენ

$$J_3 \frac{d\omega_3}{dt} = N_3, \quad (71,1)$$

ან, რადგან  $\omega_3 = \dot{\varphi}$ ,

$$J_3 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum (x f_y - y f_x), \quad (71,2)$$

სადაც  $f_x$ ,  $f_y$  ძალის კომპონენტებია  $x$  და  $y$  ღერძებზე. მიღებული განტოლება წარმოადგენს მყარი სხეულის ღერძის გარშემო ბრუნვის ლიფერენციალურ განტოლებას. მისი ინტეგრაციით ვიპოვიოთ  $\varphi = \varphi(t)$  და ამით ამოცანა საესებით გადაწყვეტილი იქნება.

როცა სხეულზე ძალები არ მოქმედებს, ანდა მათი მიმართულება პარალელურია ბრუნვის ღერძის მიმართულებას, ან ჰკვეთენ მას, მაშინ (71,2) განტოლების მარჯვენა მხარე ნულის ტოლი იქნება და მივიღებთ:  $\varphi = \omega t + \text{const}$ , ე. ი. ბრუნვა ხდება თანაბარი კუთხური სიჩქარით. ასეთ ბრუნვას ინერციულ ბრუნვას უწოდებენ.

ფიზიკური საქანი. ფიზიკური საქანი ეწოდება ისეთ მყარ სხეულს, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა ღერძის ირგვლივ სიმძიმის ძალის გავლენით.

ბრუნვის ღერძი ავიღოთ ჰორიზონტალურად და  $z$  ღერძს დავამთხვიოთ,  $xoy$  სიბრტყე კი იყოს ვერტიკალური სიბრტყე, რომელიც მართობია  $z$  ღერძის და გადის ინერციის ცენტრზე (ნახ. 63).

გამოვიყენოთ განტოლება

$$J_3 \ddot{\varphi} = \sum [r, f]_z, \quad (71,3)$$

აქ  $r$  არის მყარი სხეულის  $i$ -ური ნაწილაკის რადიუსვექტორი, ხოლო  $f_i$  — სხეულის  $i$ -ური წერტილის წონა. თანახმად (61,25) ფორმულისა, (71,3) განტოლება მიიღებს სახეს

$$J_3 \ddot{\varphi} = Mg [R, n]_z. \quad (71,4)$$

$M = \sum m_i$  სხეულის სრული მასაა,  $n$  ორთა ვერტიკალის მიმართულებით,  $R$  კი — სიმძიმის ცენტრას რადიუსვექტორი; ცხადია, რომ

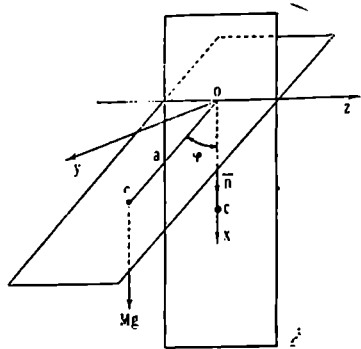
$$J_3 \ddot{\varphi} = Mg (x n_y - y n_x) = -Mg y n_x = -Mg y, \quad (71,5)$$

რადგან  $y = a \sin \varphi$ . სადაც  $a$  არის მანძილი ინერციის ცენტრიდან სათავემდე, ამიტომ

$$J_3 \ddot{\varphi} = -Mga \sin \varphi. \quad (71,6)$$

ეს განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mga}{J_3} \sin \varphi = 0. \quad (71,7)$$



ნახ. 63

თუ შევადარებთ ბრტყელი მათემატიკური საქანის რხევის განტოლებას

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (71,8)$$

დავასკვნით, რომ ფიზიკური საქანი ირხევა ისეთივე კანონით, როგორც მათემატიკური საქანი, რომლის სიგრძე

$$l = \frac{J_3}{Mg a}, \quad (71,9)$$

ასეთ მათემატიკურ საქანს უწოდებენ მოცემული ფიზიკური საქანის სინქრონულს. მცირე რხევების დროს  $\sin \varphi$  შეგვიძლია შევცვალოთ  $\varphi$ -ით, მაშინ გვექნება

$$\varphi = A \sin \left( \sqrt{\frac{Mg a}{J_3}} t + \alpha \right), \quad (71,10)$$

ხოლო რხევის პერიოდი ტოლი იქნება

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_3}{Mg a}}. \quad (71,11)$$

როცა გვანტერესებს ზუსტი ამოხსნა, მაშინ საჭიროა ამოხსნები დავიყვანოთ ელიფსური ტიპის ინტეგრალზე, ისე როგორც ამას ვაკეთებდით მათემატიკური საქანისათვის.

აღენიშნოთ, რომ ფიზიკური საქანის პერიოდის განსაზღვრის საშუალებით შეგვიძლია ექსპერიმენტულად ვიპოვოთ ინერციის ზომენტი.

## § 72. მყარი სხეულის სტატიკა

მყარი სხეულის სტატიკაზე დაწერილებით არ შეეჩერდებით, რამდენადაც მისი ელემენტები საკმარისად ფართოდ შეისწავლება ელემენტარული მექანიკის კურსში; ამასთან, ზოგ დებულებას ჩვენ დამტკიცების გარეშე ჩამოვყალიბებთ.

გამოვარკვეოთ, რაში მდგომარეობს მყარი სხეულის წონასწორობის პირობები. მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებებს აქვთ სახე:

$$\frac{dP}{dt} = F, \quad \frac{dL}{dt} = N, \quad (72,1)$$

სადაც  $F = \sum f$  წარმოადგენს ყველა გარე ძალების ჯამს,  $N = \sum [r, f]$  კი ყველა გარე ძალის მომენტის ჯამია. ამ განტოლებებიდან ჩანს: როცა  $F = 0$  და  $N \neq 0$ , სხეულს შეუძლია ბრუნვა, მისი ინერციის ცენტრი კი უძრავია; ხოლო როცა პირიქით,  $N = 0$  და  $F \neq 0$ , სხეული ასრულებს გადატანით მოძრაობას ბრუნვის გარეშე. მაშასადამე, მყარი სხეულის უძრაობისათვის უნდა გვექონდეს:

$$F = \sum f = 0, \quad N = \sum N = 0. \quad (72,2)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ წონასწორობის შემთხვევაში  $f$  ძალებისაგან შედგენილი მრავალკუთხედი ჩაკეტილია. ასევე ჩაკეტილია მომენტებისაგან შედგენილი მრავალკუთხედიც. წონასწორობის (72,2) პირობები შეიძლება ანალიზური სახითაც დაიწეროს. სახელდობრ,

$$\left. \begin{aligned} \sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0, \\ \sum (yZ - zY) = 0, \quad \sum (zX - xZ) = 0, \quad \sum (xY - yX) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (72,3)$$

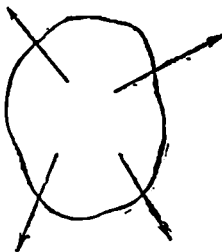
აქ  $X, Y, Z$  ძალის კომპონენტებია კოორდინატთა ღერძებზე. (72,3) წარმოადგენს სტატიკის ძირითად განტოლებებს. მათი რიცხვი ექვსია. მაშასადამე, შეიძლება მხოლოდ ექვსი უცნობი მოიძებნოს.

მყარი სხეულის წონასწორობის პირობები შეიძლება გამოყვანილ იქნეს დინამიკის განტოლებების გამოყენების გარეშეც.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს მყარი სხეული, რომელზედაც მოქმედებს ნებისმიერად განლაგებული ძალები  $f_1, f_2, f_3 \dots f_n$ . პასუხის გაცემა იმ კითხვაზე, თუ რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს სხეულზე მოდებული ძალები, რომ სხეული იყოს წონასწორობაში, შეადგენს სტატიკის ძირითად ამოცანას. ამ პირობების გამოსაყვანად დასაწყისში გავიხსენოთ წვეილძალის განმარტება. იგი, როგორც ვიცით, წარმოადგენს სხვადასხვა წერტილში მოდებული ორი თანატოლი და თანაწინააღმდეგი ძალის ერთობლიობას ( $f, -f$ ). ამ სისტემის მომენტთა ჯამი უდრის

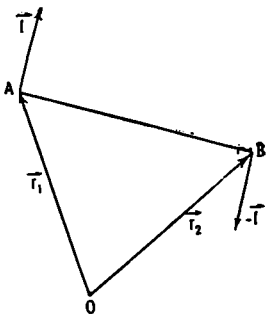
$$N = [r_1 - r_2, f] = [BA, f]. \quad (72,4)$$

იგი არ არის დამოკიდებული  $O$  წერტილზე და ატარებს წვეილის მომენტის სახელწოდებას, როგორც (72,4) ფორმულიდან ჩანს, წვეილის მომენტი უდრის მისი ერთ-ერთი ძალის მომენტს მეორე ძალის მოდების წერტილის მიმართ.



ნახ 54

სტატიკა ემყარება სამ აქსიომას. ეს აქსიომებია: 1) ორი თანატოლი, თანაწინააღმდეგი და ერთი სწორის გასწვრივ მოქმედი ძალა ერთმანეთს აწონასწორებს — აბათილებს. 2) მყარი სხეულის მდგომარეობა არ შეიცვლება, თუ მოქმედ ძალთა სისტემას დაემატებთ ან გამოვაკლებთ ისეთ ძალებს, რომლებიც აწონასწორებენ ერთმანეთს. 3) ერთ წერტილზე მოკებული ორი ძალის ტოლქმედი უდრის ამ ძალებზე აკებული პარალელოგრამის დიაგონალს, ამასთან ძალთა სისტემის ტოლქმედს უწოდებენ ისეთ ერთ ძალას, რომელიც მოცემული ძალების მაგიერობას გასწვევს, ე. ი. სხეულზე იმოქმედებს ისე, როგორც მოქმედებს ძალთა სისტემა მთლიანად.



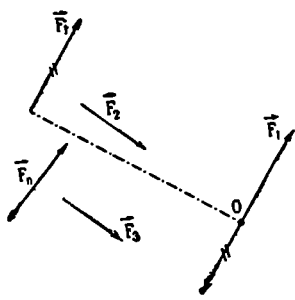
ნახ. 65

აღსანიშნავია, რომ ძალთა სისტემას, საზოგადოდ, ტოლქმედი არა აქვს. ტოლქმედი მას გააჩნია მხოლოდ კერძო შემთხვევებში. მაგალითად, მე-3 აქსიომის ძალით ერთ წერტილში

მოდებულ ძალებს გააჩნიათ ტოლქმედი, რომელიც მოიძებნება პარალელოგრამის წესის თანდათანობითი გამოყენებით. ძალთა წვეილს კი ტოლქმედი არა აქვს, ე. ი. არ არსებობს ერთი ძალა, რომელიც ძალთა წვეილის მაგიერობას გასწვევს.

პირველი ორი აქსიომის გამოყენებით შეიძლება დამტკიცდეს, რომ მყარ სხეულზე მოქმედი ძალა სრიალა ვექტორია, ე. ი. ძალის მოქმედება სხეულზე არ შეიცვლება, თუ მას გავასრიალებთ თავისი მოქმედების სწორის გასწვრივ. ძალა საზოგადოდ დაბმული ვექტორია, ე. ი. არ შეიძლება მისი მოდების წერტილის

გადატანა რაიმე სხვა წერტილში. მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც სხეული, რომელზედაც მოქმედებს ძალა, მყარია, ძალის მოდების წერტილი შეიძლება გადატანილი იქნეს (რა თქმა უნდა, მიმართულების და სიდიდის შეუცვლელად) სხვა წერტილში, მხოლოდ იმავე სწორზე, რომლის გასწვრივაც მოქმედებს ძალა. ადვილად შეიძლება დატკიცდეს აგრეთვე შემდეგი დებულება, რომელიც შეეხება ძალათა წყვილებს. ამ დებულების თანახმად ორი ძალათა წყვილი ტოლფასია, თუ მათი მომენტები თანატოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ ძალათა წყვილი სასესებით განისაზღვრება თავისი მომენტით. თუ მოცემულია მომენტი, შეიძლება ცალსახად მოიძებნოს ძალათა წყვილი. ამავე დროს წყვილის მომენტი, როგორც დებულებიდან გამომდინარეობს, თავისუფალი ვექტორია, ე. ი. წყვილის მომენტი სხეულის ნებისმიერ წერტილში შეიძლება გადავიტანოთ (რა თქმა უნდა, სიდიდის და მიმართულების შეუცვლელად). ეს ნიშნავს, რომ წყვილის მოქმედება არ შეიცვლება, თუ მას ნებისმიერად ვასრიალებთ თავის სიბრტყეში, გადავიტანთ მის პარალელურ სიბრტყეში და ძალას და მხარს ისე შევცვლით, რომ მათი ნამრავლი არ შეცვალოს (წყვილის მხარს უწოდებენ ძალებს შორის გატარებული მართობის სიჯაქეს). მტკიცდება, რომ ძალათა წყვილების ტოლქმედი წყვილის მომენტი უდრის შესაკრები წყვილების მომენტების გეომეტრიულ ჯამს ამ დებულებების გამოყენებით შეიძლება ჩამოყალიბდეს ძალათა წყვილების შეკრების წესი: ძალათა წყვილების შესაკრებად საჭიროა გეომეტრიულად შეიკრიბოს მათი მომენტები. მომენტთა ჯამის მიხედვით აგებული წყვილი წარმოადგენს მოცემული წყვილების ტოლქმედ წყვილს. მომენტის მიხედვით კი წყვილი აიგება შემდეგნაირად: უნდა წარმოვიდგინოთ მომენტისაღმა მართობული სიბრტყე და ამ სიბრტყეში გავტაროთ ძალათა წყვილი ისე, რომ ერთ-ერთი ძალისა და მხარის ნამრავლი უდრიდეს მომენტის ვექტორის სიდიდეს, ამასთან ძალებს უნდა მივცეთ ისეთი მიმართულება, რომ მომენტის მიმართულებასთან ქმნიდეს მარჯვენა სისტემას. ცხადია, რომ თუ მოცემული წყვილების მომენტთა ჯამი ნული აღმოჩნდა, მაშინ ტოლქმედი წყვილის მომენტიც ნული იქნება, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ან წყვილის ძალებია ნული, ან წყვილის ზხარია ნული. მაგრამ ამ უკანასკნელ შემთხვევაში ძალები ერთ წერტილში იქნება მოდებული და გააწონასწორებენ ერთმანეთს. აქედან ჩვენ ვღებულობთ ძალათა წყვილების წონასწორობის პირობას. ძალათა წყვილები აწონასწორებენ ერთმანეთს, როცა მათი მომენტთა გეომეტრიული ჯამი ნულის ტოლია.



ნახ. 64

დაესვათ ახლა ძირითადი კითხვა: რა პირობებში ექნება მყარ სხეულზე მოქმედ ნებისმიერ ძალათა სისტემას ტოლქმედი, ე. ი. ერთი ძალა, რომელიც ძალათა სისტემის მაგივრობას გასწევს.

ავიღოთ რაიმე ძალათა სისტემა, რომელიც მოქმედებს მყარ სხეულზე. როგორ უნდა შევკრიბოთ ეს ძალები? ჩვენ ვაკით ერთ წერტილში მოდებული ძალებისა და წყვილთა ძალების შეკრება. ახლა კი გვაქვს ისეთი ძალები, რომელთა გაგრძელებანი ერთ წერტილში არ გადაიკვეთება და რომლებიც არ მდებარეობენ ერთ სიბრტყეში. მოცემული ძალები რომ შევკრიბოთ, მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ავიღოთ ნებისმიერი  $O$  წერტილი და მოვ-

მელიც მოქმედებს მყარ სხეულზე. როგორ უნდა შევკრიბოთ ეს ძალები? ჩვენ ვაკით ერთ წერტილში მოდებული ძალებისა და წყვილთა ძალების შეკრება. ახლა კი გვაქვს ისეთი ძალები, რომელთა გაგრძელებანი ერთ წერტილში არ გადაიკვეთება და რომლებიც არ მდებარეობენ ერთ სიბრტყეში. მოცემული ძალები რომ შევკრიბოთ, მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ავიღოთ ნებისმიერი  $O$  წერტილი და მოვ-



დოთ მას ორი  $F_1$  ძალის ტოლი, პარალელური და თანაწინააღმდეგი ძალა. ამის უფლება ჩვენ გვაქვს მეორე აქსიომის თანახმად. მოცემული  $F_1$  ძალა და დამატებული ორი ძალა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ერთი ძალა  $F_1$ , მხოლოდ მოდებული აღებულ ნებისმიერ  $O$  წერტილში, და ერთი წყვილძალა, რომლის მომენტი უდრის მოცემული  $F_1$  ძალის მომენტს  $P$  წერტილის მიმართ. თუ ასევე მოვიქცევით ყველა სხვა დანარჩენი ძალების მიმართაც, მაშინ, ნაცვლად მოცემული სისტემისა, გვექნება მისი ეკვივალენტური სისტემა. ეს სისტემა შედგება აღებულ  $O$  წერტილში გადმოტანილი მოცემული ძალებისაგან და შესაფერისი წყვილძალებისაგან, რომელთა მომენტები უდრის, სათანადოდ, მოცემულა ძალების მომენტებს  $O$  წერტილის მიმართ. შევკრიბოთ ახლა ყველა ძალა, რომელიც მოდებულია  $O$  წერტილში, და ყველა წყვილძალა. ამის შედეგად მივიღებთ ერთ ძალას, რომელიც უდრის მოცემული ძალების გეომეტრიულ ჯამს, ე. ი.

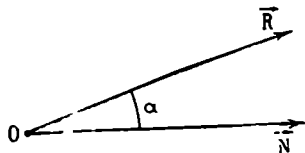
$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

და მოდებულია აღებულ ნებისმიერ წერტილში, და ერთ წყვილძალას, რომლის მომენტი უდრის ყველა მოცემული ძალის მომენტების გეომეტრიულ ჯამს, ე. ი.

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_n.$$

ძალთა გეომეტრიულ ჯამს უწოდებენ სისტემის მთავარ ვექტორს, ხოლო ძალთა მომენტების ჯამს რაზე წერტილს მიმართ უწოდებენ სისტემის მთავარ მომენტს ამ წერტილის მიმართ. ამრიგად, ჩვენ დავინახეთ, რომ ყოველი ძალთა სისტემა, რომელიც მოქმედებს მეარ სხეულზე, საზოგადოდ, დაიყვანება ერთ ძალაზე და ერთ წყვილძალაზე.

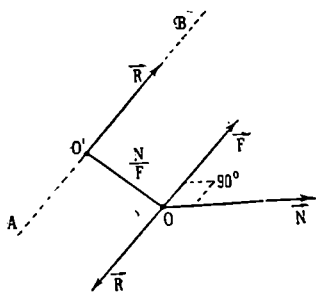
67-ე ნახაზზე ნაჩვენებია მთავარი ვექტორი  $F$  და მთავარი მომენტი  $N$ , კუთხე მათ შორის შეიძლება ნებისმიერი იყოს. იბადება კითხვა, როდის შეიძლება რომ ძალთა სისტემა დაყვანილ იქნეს მხოლოდ ერთ ძალაზე, ე. ი. სკონდეს ტოლქმედი. ადვილი მისახვედრია, რომ



ნახ. 67

ეს მოხდება მაშინ, როცა კუთხე  $F$ -სა და  $N$ -ს შორის უდრის  $90^\circ$ -ს. მართლაც, ამ შემთხვევაში მთავარი ვექტორი  $F$  აღმოჩნდება  $N$  მომენტის შესაბამისი წყვილძალის სიბრტყეში. თუ ახლა წვეილს ისე შევარჩევთ, რომ ძალა უდრდეს  $F$ -ს, ხოლო მხარი კი, ცხადია, იქნება  $N/F$ . და ამ წვეილს მისივე სიბრტყეში შევადრუნებთ ისე, რომ ერთ-ერთი ძალა წარმოართოს მთავარი ვექტორის საწინააღმდეგოდ, მაშინ ეს უკუასახელი გაბათილდება წვეილის ამ ძალით; ასე რომ, დაგვრჩება მხოლოდ ერთი ძალა, რომელიც უდრის სისტემის მთავარ ვექტორს, ხოლო მისი მოქმედების სწორი კი დაშორებულია  $O$  წერტილიდან  $N/F$  მანძილზე. თავისთავად ცხადია, რომ ძალთა შეკრებით მიღებული საბოლოო შედეგი არ უნდა იყოს დამოკიდებული ნებისმიერად აღებულ  $O$  წერტილზე. თუ სისტემა  $O$  წერტილის რაიმე შერჩევით დაიყვანა ერთ ძალაზე, მაშინ ის ყოველთვის დაიყვანება ამ ძალაზე. სადაც არ უნდა ავირჩიოთ  $O$  წერტილი. 68-ე ნახაზზე სისტემის ტოლქმედი უდრის მთავარ ვექტორს და მოდებულა  $O'$  წერტილში. ცხადია, ჩვენ რომ  $O$  წერტილი თავიდანვე აგვეჩრია  $AB$  სწორ ხაზზე. რომელზეცაა ძვეს მთავარი ვექტორი, მაშინ მის მიმართ მთავარი მომენტი ნუ-ი იქნებოდა. ამრიგად, როცა  $F \perp N$ , მთავარი მომენტი  $N$  უდრის ნუ-ს მხოლოდ  $AB$  სწორზე მდებარე წერ-

ტილების მიმართ, დანარჩენ წერტილებში კი იგი არ უდრის ნულს. ვთქვათ ახლა  $F=0$ , ხოლო  $N \neq 0$ . ამ შემთხვევაში ძალთა სისტემა დაიყვანება ერთ წყვილძალაზე, რომლის მომენტი უდრის ძალთა სისტემის მთავარ მომენტს ნებისმიერი წერტილის მიმართ. ჩვენ ვიცით, რომ, როცა  $F = \sum F_i = 0$ , მაშინ მთავარი მომენტი  $N = \sum N_i$  არ არის დამოკიდებული  $O$  წერტილის არჩევაზე. სადაც არ უნდა ავირჩიოთ ეს წერტილი, ყოველთვის მივიღებთ ერთსა და იმავე მთავარ მომენტს, რაც იმას ნიშნავს, რომ მივიღებთ ურთიერთეკვივალენტურ წყვილებს.



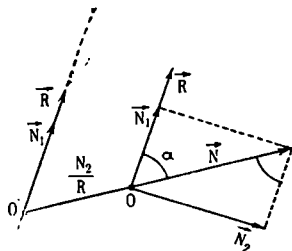
ნახ. 68

განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ მთავარი ვექტორი არ არის დამოკიდებული  $O$  წერტილის არჩევაზე, ხოლო მთავარი მომენტი კი, ცხადია, საზოგადოდ, დამოკიდებულია  $O$  წერტილის არჩევაზე (გარდა იმ შემთხვევისა, როცა  $F=0$ ). შეიძლება დამტკიცდეს, რომ თუ  $F=0$  მთავარი მომენტი იცვლება  $O$  წერტილიდან  $O'$  წერტილზე გადასვლის დროს, მაგრამ უცვლელი რჩება მისი გვერდითი მთავარი ვექტორის მიმართულებაზე. რად-

გან  $F$ -იც უცვლელია, მაშინ აქედან უნდა დავასკვნათ, რომ წერტილიდან წერტილზე გადასვლისას უცვლელი რჩება მთავარი მომენტის და მთავარი ვექტორის სკალარული ნაშრავლი. ამრიგად, მყარ სხეულზე მოქმედ ძალთა სისტემას აქვს, როგორც იტყვიან, ორი ინვარიანტი: მთავარი ვექტორი  $F$  და სკალარული ნაშრავლი  $(F, N)$ .

ზოგად შემთხვევაში, როგორც აღვნიშნეთ, კუთხე  $F$ -სა და  $N$ -ს შორის ნებისმიერია. დავშალოთ  $N$  ვექტორი ორ მდგენელად ისე, რომ ერთი მიმართული იყოს  $F$ -ის გასწვრივ, ხოლო მეორე იყოს  $F$ -ის მართობი ეს მდგენელები ტოლი იქნება სათანადოდ  $N_1 = N \cos \alpha$  და  $N_2 = N \sin \alpha$ . მართობი მდგენელის მიმართ მოვიქცეთ ანალოგიურად იმისა, როგორც ზემოთ. მაშინ სათანადო წყვილი მომენტით  $N_2$  და მთავარი ვექტორი დაიყვანება ერთ ძალაზე, რომელიც დაშორებული იქნება  $O$  წერტილიდან  $\frac{N_2}{F}$  მან-

ძილზე. რაც შეეხება მეორე  $N_1$  მდგენელს, რადგან იგი თავისუფალი ვექტორია, მას გადავიტანთ  $O'$  წერტილში. საბოლოოდ გვექნება მთავარი ვექტორი  $F$  და მომენტი  $N_1$ , რომელსაც ექნება  $F$ -ის მიმართულება. ეს ნიშნავს იმას, რომ ძალთა სისტემა დაყვანილ იქნა ერთ ძალაზე და ერთ წყვილძალაზე, რომლის სიბრტყე მართობია ამ ძალისა. ასეთ სისტემას ხრანხს უწოდებენ. ამრიგად, შეიძლება დავასკვნათ, რომ მყარ სხეულზე მოქმედი ნებისმიერი ძალთა სისტემა დაიყვანება ხრანხზე.



ნახ. 69

ბოლოოდ გვექნება მთავარი ვექტორი  $F$  და მომენტი  $N_1$ , რომელსაც ექნება  $F$ -ის მიმართულება. ეს ნიშნავს იმას, რომ ძალთა სისტემა დაყვანილ იქნა ერთ ძალაზე და ერთ წყვილძალაზე, რომლის სიბრტყე მართობია ამ ძალისა. ასეთ სისტემას ხრანხს უწოდებენ. ამრიგად, შეიძლება დავასკვნათ, რომ მყარ სხეულზე მოქმედი ნებისმიერი ძალთა სისტემა დაიყვანება ხრანხზე.

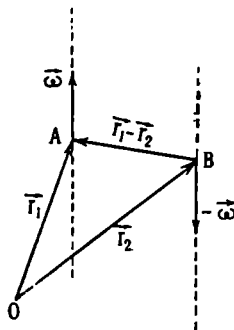
როცა მთავარი ვექტორიც და მთავარი მომენტიც ნულს უდრის, ე. ი.  $F=0$  და  $N=0$ , მაშინ ძალები აწონასწორებენ ერთმანეთს, სხეული წონასწორობაშია. ეს პირობები ჩვენ დინამიკის განტოლებებიდანაც მივიღეთ.

ამრიგად, მყარია სხეულის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმაში მდგომარეობს, რომ მასზე მოქმედი ძაღთა სისტემის მთავარი ვექტორი და მთავარი მომენტი ნებისმიერი წერტილის მიმართ ნულს უდრიდეს.

როცა მყარი სხეული თავისუფალი არ არის, მაშინ ყველა ბმა უნდა შეიკვალოს სათანადო რეაქციის ძალით, ასე რომ, წონასწორობის პირობებში ძაღთა სისტემაში უნდა ვიგულისხმოთ მოცემულ ძალებთან ერთად რეაქციის ძალებიც. ყველაფერი, რაც ჩვენ გამოვიყენებთ მყარ სხეულზე მოქმედი ძაღთა სისტემის შესახებ, შეიძლება გამოვიყენოთ ნებისმიერ ფიზიკურ სიდიდეთა შეკრების დროსაც, თუკი ეს სიდიდეები გამოიხატება სრიალა ვექტორებით. მაგალითად, მყარი სხეულის კუთხური სიჩქარე თ სრიალა ვექტორია, მაშასადამე, ამ სხეულის რთული მოძრაობა, რომელიც შედგება რამდენიმე ბრუნვისაგან, შეგვიძლია დავიყვანოთ ერთ ბრუნვაზე და ერთ ბრუნვის წყვილზე, თუ სხეული ერთდროულად ასრულებს ორ ბრუნვას კუთხური სიჩქარეებით  $\omega$  და  $-\omega$  (იხ. ნახ. 70), მაშინ ასეთ მოძრაობას ბრუნვის წყვილს უწოდებენ. ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ბრუნვის წყვილი გადატანითი მოძრაობის ტოლფასია. მართლაც, ავიღოთ სხეულის რაიმე  $O$  წერტილი და განვსაზღვროთ მისი სიჩქარე (ნახ. 70). პირველი ბრუნვის გამო  $O$  წერტილის სიჩქარე ტოლი იქნება  $v_1 = [\omega, r_1]$ . ხოლო მეორე ბრუნვის გამო წერტილის სიჩქარე  $v_2 = [-\omega, r_2]$ . ცხადია, რომ მისი სრული სიჩქარე იქნება

$$v = v_1 + v_2 = [\omega, r_1] + [-\omega, r_2] = [\omega, r_1 - r_2]. \quad (72,5)$$

მაგრამ  $r_1 - r_2$  არ არის დამოკიდებული  $O$  წერტილის შერჩევაზე, ასე რომ, სხეულის ყველა წერტილის სიჩქარე აღებულ მომენტში ერთი და იგივეა. ეს კი ნიშნავს, რომ სხეული ასრულებს გადატანით მოძრაობას, რომლის სიჩქარე, როგორც (72,5) ფორმულიდან ჩანს, ბრუნვის წყვილის მომენტის ტოლია. ამის შემდეგ შეგვიძლია ზოგადი შედეგი ჩამოვაცალიბოთ. თუ სხეული ერთდროულად რთულ მოძრაობას ასრულებს, რომელიც შედგება რამდენიმე ბრუნვისა და რამდენიმე გადატანითი მოძრაობისაგან, მაშინ სხეულის მოძრაობა ყოველ მომენტში დაიყვანება ერთ ბრუნვაზე და ერთ გადატანით მოძრაობაზე, რომლის მიმართულება ემთხვევა ბრუნვის ღერძს. ეს შედეგი ადვილად მიიღება, თუ მოცემულ გადატანით მოძრაობას შევიცვლით ბრუნვითი წყვილებით, რითაც ამოცანას დავიყვანთ სრიალა ვექტორების შეკამების საკითხზე და გამოვიყენებთ ზემოთ მიღებულ შედეგს. ამრიგად, მყარი სხეულის ყოველი მოძრაობა, რა გინდ რთული არ უნდა იყოს ის, ყოველ მომენტში დაიყვანება სათანადო ხრახნით მოძრაობაზე.



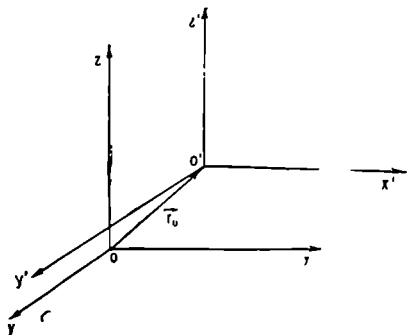
ნახ. 70

## მოძრაობა არაინერციულ სისტემებში

ამ კურსის დასაწყისში აღვნიშნეთ, თუ რა დიდი მნიშვნელობა აქვს მექანიკაში ინერციულ ათვლის სისტემებს, რამდენადაც გალილეის ფარდობითობის პრინციპით ყველა ინერციული სისტემა ერთმანეთის ეკვივალენტურია. ინერციული სისტემა გარკვეულ იდეალიზაციას წარმოადგენს და მისი შემოღება ძალზე აადვილებს ამოცანების განხილვას, რამდენადაც ინერციულ სისტემებში აჩქარება განსაზღვრავს სხეულზე მოქმედ ძალას. ჩვენ შევნიშნეთ, გარდა ამისა, რომ მკაცრად ინერციული სისტემა ბუნებაში არ არსებობს. ინერციულ სისტემად ზოგ შემთხვევაში კარგი მიახლოებით შეგვიძლია ავიღოთ ესა თუ ის სხეული. კერძოდ, დედამიწაც დაკვირვების მცირე დროის განმავლობაში შეგვიძლია ინერციულად ჩავთვალოთ, თუმცა იგი, საზოგადოდ, ინერციულ სისტემას არ წარმოადგენს. ათვლის სისტემად ჩვენ აქამდე ინერციულ სისტემას ვიღებდით. იბადება კითხვა, როგორ შეიცვლება მექანიკის კანონები არაინერციულ სისტემაზე გადასვლისას? ათვლის სისტემის არაინერციულობა შეიძლება გამოწვეული იყოს სისტემის როგორც აჩქარებული გადატანითი მოძრაობით, ისე ბრუნვით.

### § 73. ინერციის ძალები

განვიხილოთ დასაწყისში ათვლის სისტემის გადატანითი აჩქარებული მოძრაობა. ავიღოთ ორი ათვლის სისტემა, ერთი ინერციული  $xoyz$  და მეორე არაინერციული  $x'o'y'z'$ . რადგან, პირობის თანახმად, არაინერციული სისტემა გადატანით მოძრაობს ინერციული სისტემის მიმართ, ამიტომ მისი ლუქები ინერციული სისტემის ღერძების პარალელური ავიღოთ; ეს პარალელობა, ცხადია, შემდეგშიაც დარჩება. განვიხილოთ ახლა მოძრავი  $A$  წერტილი. მისი კოორდინატები ამ სისტემებში, შესაბამისად, აღვნიშნოთ  $x, y, z$  და  $x', y', z'$ . არაინერციული სისტემის სათავეს კოორდინატები ინერციული სისტემის მი-



ნახ. 71

მართ აღვნიშნოთ  $x_0, y_0, z_0$ . ინერციულ სისტემაში მყოფი დაკვირვებელი  $A$  წერტილის მოძრაობის განტოლებას შემდეგი სახით დაწერს:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z, \quad (73,1)$$

სადაც  $F_x, F_y, F_z$  წერტილზე მოქმედი ძალის პროექციებია  $x, y, z$  ღერძებზე. ეს ძალა გამოწვეულია  $A$  წერტილზე დანარჩენი სხეულების მოქმედებით. გადავიღეთ ახლა არაინერციულ სისტემაზე. ცხადია, რომ გვექნება:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x', \\ y &= y_0 + y', \\ z &= z_0 + z', \\ \ddot{x} &= \ddot{x}_0 + \ddot{x}', \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_0 + \ddot{y}', \\ \ddot{z} &= \ddot{z}_0 + \ddot{z}'. \end{aligned} \quad (73,2)$$

თუ გავამრავლებთ მასაზე და გავითვალისწინებთ (73,1) ფორმულას, მივიღებთ:

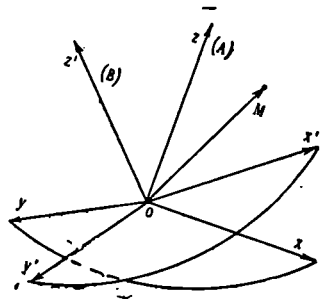
$$\begin{aligned} m\ddot{x}' &= F_x - m\ddot{x}_0, \\ m\ddot{y}' &= F_y - m\ddot{y}_0, \\ m\ddot{z}' &= F_z - m\ddot{z}_0, \end{aligned} \quad (73,3)$$

მაგრამ  $\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0$  წარმოადგენს  $O'$  წერტილის აჩქარების გვეგმილებს ინერციული სისტემის ღერძებზე. რადგან არაინერციული სისტემა მოძრაობს გადატანით, ამიტომ ამ სისტემის ყველა წერტილს ექნება იგივე აჩქარება. მაშასადამე,  $O'$  წერტილის აჩქარება წარმოადგენს არაინერციული სისტემის აჩქარებას  $W_0$ ; (73,3) განტოლებები ვექტორულად შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$mW' = F + F_c, \quad (73.4)$$

სადაც  $F_c = -mW_0$ . ჩვენ ვხედავთ, რომ არაინერციულ სისტემასთან დაკავშირებული დამკვირვებელი, გარდა უშუალოდ მოქმედი ძალისა, წერტილის მოძრაობის აღსაწერად შემოიტანს დამატებით  $F_c$  ძალას, რომელიც უდრის წერტილის მასას და არაინერციული სისტემის აჩქარების ნამრავლს, ალებულს მინუს ნიშნით. ამ ძალას გადატანითი მოძრაობის ინერციის ძალას უწოდებენ. იგი გამოწვეულია შტრიხიანი სისტემის არაინერციულობით და მოისპობა, როცა შტრიხიანი სისტემა იძვრავებს თანაბრად ( $W_0 = 0$ ).

გადავიღეთ ახლა მბრუნავ კოორდინატთა სისტემაზე, ე. ი. დაეწვავთ, რომ არაინერციული სისტემა ბრუნავს ინერციული სისტემის მიმართ. ინერციული სისტემა აღენიშნოთ  $A$ -თი, ხოლო მბრუნავი —  $B$ -თი. რადგან აქ ჩვენ გვიანტერესებს მხოლოდ  $B$  სისტემის ბრუნვითი მოძრაობა, ამიტომ დაეწვავთ, რომ ამ სისტემების სათავეები ერთმანეთს ემთხვევა, ამასთან  $A$ -სისტემას უძრავი ვუწოდოთ, ხოლო  $B$ -ს მოძრავი. განვიხილოთ ახლა რაიმე  $M$  წერტილი. ცხადია, რომ მისი სიჩქარე სხვადასხვა იქნება იმის მიხედვით, თუ რომელი სისტემის მიმართ განვიხილავთ



ნახ. 72

მას. განვიხილოთ ჯერ უძრავი სისტემის მიმართ. აღებული წერტილი რომ უძრავი იყოს მბრუნავ სისტემაში, მაშინ მას ექნებოდა მხოლოდ  $B$ -სისტემის იმ წერტილის სიჩქარე, რომელსაც ის დაემთხვეოდა აღებულ მომენტში. აღვნიშნოთ ეს სიჩქარე  $v'$ -ით. მას წარმოადგენს სიჩქარეს უწოდებენ. მაგრამ ვინაიდან აღებული წერტილი  $B$ -სისტემის მიმართაც მოძრაობს, ამიტომ  $v'$ -ს დაემატება წერტილის  $v_B$  სიჩქარე მოძრავი სისტემის მიმართ, რომელსაც ფარდობით სიჩქარეს უწოდებენ. ამრიგად, აღებული წერტილის სიჩქარე  $A$ -სისტემის მიმართ უდრის

$$v_A = v' + v_B. \quad (73,5)$$

მაგრამ, ვინაიდან  $B$ -სისტემა ბრუნავს, ამიტომ  $v' = [\omega, r]$  და

$$v_A = v_B + [\omega, r], \quad (73,6)$$

სადაც ვიგულისხმეთ, რომ წერტილის რადიუსვექტორები როგორც  $A$ , ისე  $B$ -სისტემაში ერთმანეთის ტოლია და უბრალოდ  $r$ -ით აღვნიშნეთ. შევიტანოთ სიჩქარის ეს მნიშვნელობა ლაგრანჟის ფუნქციაში

$$L = \frac{mv_A^2}{2} - U \quad (73,6')$$

მივიღებთ

$$L = \frac{mv_B^2}{2} + m(v_B, [\omega, r]) + \frac{m}{2}([\omega, r], [\omega, r]) - U. \quad (73,7)$$

ასეთი სახე ექნება ლაგრანჟიანის მბრუნავ არაინერციულ სისტემაში. აღსანიშნავია, რომ სისტემის ბრუნვის გამო ლაგრანჟიანში გაჩნდა სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციული წევრები.  $B$ -სისტემაში ლაგრანჟის განტოლებებს ექნებათ სახე

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_B} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0. \quad (73,8)$$

ლაგრანჟის განტოლებების ცხადი სახით დასაწერად გამოვიყენოთ (60,8') ფორმულა, მაშინ ლაგრანჟიანი მიიღებს სახეს

$$L = \frac{mv_B^2}{2} + m(v_B, [\omega, r]) + \frac{m}{2}[r^2 \omega^2 - (\omega, r)^2] - U. \quad (73,9)$$

ამის შემდეგ ადვილია წარმოებულების პოვნა; ცხადია

$$\frac{\partial L}{\partial v_B} = mv_B + m[\omega, r], \quad (73,10)$$

ხოლო, რადგან

$$(v_B, [\omega, r]) = (r, v_B, \omega), \quad (73,11)$$

ამიტომ

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m[v_B, \omega] + m\{\omega^2 r - m(\omega, r)\omega\} - \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (73,12)$$

გამოვიყენოთ ვექტორული ალგებრის ცნობილი ფორმულა

$$[A[B, C]] = B(A, C) - C(A, B), \quad (73,13)$$

მაშინ

$$\omega^2 r - (\omega, r)\omega = [\omega, r, \omega],$$

ამიტომ ლაგრანჟის განტოლებები ასე დაიწერება:

$$\frac{d}{dt}(mv_B + m[\omega, r]) = m[v_B, \omega] + m[\omega, r, \omega] - \frac{\partial U}{\partial r} \quad (73,14)$$

გავიხსენოთ, რომ  $\dot{r} = \dot{r}' = v_B$ ; საბოლოოდ მივიღებთ

$$m \frac{dv_B}{dt} = - \text{grad } U + F_0 + F_A + F_c, \quad (73,15)$$

სადაც

$$F_0 = - m [\dot{\omega}, r], \quad (73,16)$$

$$F_A = 2m [v_B, \omega], \quad (73,17)$$

$$F_c = m [\omega [r, \omega]]; \quad (73,18)$$

ამ ძალებს, გარდა  $F = - \text{grad } U$  ძალისა, უწოდებენ ინერციულ ძალებს. ისინი გამოწვეულია  $B$ -სისტემის ბრუნვითი მოძრაობით. მართლაც, როცა  $\omega = 0$ , ყველა ინერციული ძალა ნულის ტოლია  $F_A = F_c = F_0 = 0$ . ამგვარად, სისტემის არაინერციულობის გამო შემოვიდა სამი დამატებითი ძალა.

განვიხილოთ ეს ძალები ცალ-ცალკე.  $F_0 = m [\dot{\omega}, r]$  წარმოადგენს ძალას, რომელიც გამოწვეულია  $B$  სისტემის არათანაბარი ბრუნვით (ე. ი. როცა იგი აჩქარებულად ბრუნავს). თანაბარი ბრუნვის შემთხვევაში  $\omega = \text{const}$  და  $F_0 = 0$ . როგორც ცნობილია, დედამიწისათვის  $F_0$  ძალა არა გვაქვს, რამდენადაც, ძალიან დიდი სიზუსტით, დედამიწა მუდმივ კუთხურ სიჩქარით ბრუნავს. დანარჩენი ინერციული ძალები მაშინაც გვაქვს, როცა ბრუნვა თანაბარია.

$F_A = 2m [v_B, \omega]$  ძალას კორიოლისის ძალას უწოდებენ. იგი აღრე განხილული არადისკალტიური ძალებისაგან იმით განსხვავდება, რომ დამოკიდებულია მოძრავე სხეულის ფარდობით სიჩქარეზე. აღსანიშნავია, რომ ამ ძალის ჩაწერა რაიმე ფუნქციის გრადიენტის სახით არ ხერხდება. როცა  $v_B = 0$ , მაშინ  $F_A = 0$ , ე. ი. კორიოლისის ძალა მბრუნავი სისტემის მიმართ უძრავ წერტილზე არ მოქმედებს. ცხადია, რომ  $(F_A, v_B) = 0$ , ამიტომ ცოცხალი ძალის (10,7) კანონის თანახმად, კორიოლისის ძალა მუშაობას არ ასრულებს.

$F_c = m [\omega [r, \omega]]$  ძალას ცენტრგამშორი ძალა ეწოდება. ცხადია, რომ  $F_c$  ძალა მართობია ბრუნვის ღერძისა  $(F_c, \omega) = 0$ , სიდიდით კი იგი ტოლი იქნება (ნახ. 73).

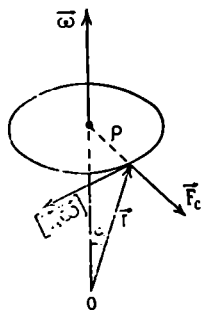
$$F_c = m \omega | [r, \omega] | = m \omega^2 r \sin \alpha. \quad (73,19)$$

რადგან მბრუნავი წერტილის მანძილი ბრუნვის ღერძამდე  $\rho = r \sin \alpha$ , ამიტომ ცენტრგამშორი ძალის სიდიდე ტოლია

$$F_c = m \omega^2 \rho. \quad (73,20)$$

ცხადია, რომ  $F_c$  მიმართულება ემთხვევა  $\rho$ -ს და მართობია ბრუნვის ღერძისა.

ინერციის ძალები განსხვავდებიან სხეულებს შორის ურთიერთქმედების ძალებისაგან. ინერციის ძალები გამოწვეულნი არიან ათვლის სისტემის არაინერციულობით. ამ თვალსაზრისით ისინი განსხვავდებიან რეალური ძალებისაგან, რომლებიც გამოწვეული არიან სხეულებს შორის ურთიერთქმედებით, ანეჭებენ მათ აჩქარებას და მოქმედებენ როგორც ინერციულ, ისე არაინერციულ სისტემებში.



ნახ. 73

§ 74. მბრუნავ სისტემაში მოძრაობი ნაწილაკის  
ენერგია და იმპულსი

სიმარტივისათვის განვიხილოთ თანაბრად მბრუნავი სისტემა. ლაგრანჟიანს, როგორც წინა პარაგრაფში დავინახეთ, აქვს სახე

$$L = \frac{mv_B^2}{2} + m(v_B, [\omega, r]) + \frac{m}{2}([\omega, r], [\omega, r]) - U \quad (74,1)$$

წერტილის იმპულსი მბრუნავ სისტემაში, განმარტების თანახმად, ტოლი იქნება

$$p_B = \frac{\partial L}{\partial v_B} = mv_B + m[\omega, r], \quad (74,2)$$

ხოლო მისი ენერგია, რომელიც გამოიხატება ფორმულით

$$E_B = (p_B, v_B) - L, \quad (74,3)$$

თანახმად (74,1) და (74,2) ფორმულებისა, მოგვეცეს

$$E_B = \frac{mv_B^2}{2} + U - \frac{m}{2}[\omega, r]^2. \quad (74,4)$$

როგორც ვხედავთ, წერტილის სრულ ენერგიას სისტემის ბრუნვის გამო გაუჩნდა წევრი

$$U([\omega, r]) = -\frac{m}{2}[\omega, r]^2, \quad (74,5)$$

რომელსაც ცენტრგამშორი პოტენციალური ენერგია ეწოდება. როგორც მოსალოდნელი იყო, როცა  $\omega = 0$ ,  $U(\omega) = 0$  და ნაწილაკის ენერგია დაეთხვევა ენერგიას ინერციულ სისტემაში.

შევნიშნოთ, რომ იმპულსი ინერციული სისტემის მიმართ, თანახმად (73,6) ფორმულისა, ტოლია

$$p_A = mv_B + m[\omega, r], \quad (74,6)$$

რაც (74,2) ფორმულასთან შედარებით საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ  $p_B = p_A$ , ე. ი. იმპულსები როგორც მბრუნავ, ისე ინერციულ სისტემებში ტოლია. ცხადია, რომ, რაზდენდაც ორივე სისტემაში  $r_A = r_B = r$ , ამიტომ იმპულსის მომენტებიც ტოლი იქნება, ე. ი.  $L_A = [r, p_A] = [r, p_B] = L_B$ . რაც შეეხება ენერგიებს ამ ორ სისტემაში, ისინი განსხვავებული იქნება. მართლაც, თანახმად (73,6) ფორმულისა  $v_B = v_A - [\omega, r]$ , (74,4) ფორმულიდან მივიღებთ

$$E_B = \frac{mv_A^2}{2} + U - m(v_A, [\omega, r]). \quad (74,7)$$

თუ ბოლო წევრში ციკლურ გადასაცვლებას მოვახდენთ, გვექნება

$$m(v_A, [\omega, r]) = (\omega, [r, p_A]) = (\omega, L),$$

სადაც  $L$  იმპულსის მომენტია, ამგვარად,

$$E_B = E_A - (\omega, L), \quad (74,8)$$

სადაც  $E_A$  არის ნაწილაკის სრული ენერგია უძრავ (ინერციულ) სისტემაში. როცა  $\omega = 0$ , ენერგიები მბრუნავ და უძრავ სისტემაში ტოლია.



## § 75. მოძრაობა დედამიწაზე

მბრუნავი სისტემის ყველაზე უფრო მნიშვნელოვან მაგალითს ჩვენს დედამიწა წარმოადგენს. რადგან ჩვენ დედამიწაზე ეცხოვრობთ, ამიტომ მოვლენები, რომლებსაც ვაკვირდებით და შევისწავლით, მნიშვნელოვანია განვიხილოთ სწორედ დედამიწასთან უძრავად დაკავშირებულ სისტემაში. როგორც ცნობილია, დედამიწა წარმოადგენს სფეროსმაგვარ სხეულს, რომელიც ორი სახის ბრუნვით მოძრაობას ასრულებს. ერთია ბრუნვა მზის გარშემო და მეორე — ბრუნვა საკუთარი ღერძის ირგვლივ, რომელსაც  $24 \cdot 60 \cdot 60$  სეკ. = 86400 სეკ. ანდომებს. ათეულის სისტემა აღეარჩიოთ მარჯვენა სისტემა, სათავეთ დედამიწის ცენტრში. მაშინ დედამიწის ღერძის ირგვლივ ბრუნვის აკუთხური სიჩქარე მიმართული იქნება სამხრეთიდან ჩრდილოეთისაკენ, რამდენადაც მარჯვენა სისტემაში ა.ს მიმართულება მარჯვენა ბურღის წესით განისაზღვრება. სიდიდით კუთხური სიჩქარე ტოლია

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} \text{ სეკ}^{-1} = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ სეკ}^{-1}. \quad (75,1)$$

რაც შეეხება მზის ირგვლივ მოძრაობის კუთხურ სიჩქარეს, იგი ნაკლები იქნება 305-ჯერ და ამიტომ მის მიერ გამოწვეულ უმნიშვნელო ეფექტებს ქვემოთ მხედველობაში არ მივიღებთ.

ვთქვათ, გვაქვს სხეული, რომელიც მოძრაობს დედამიწის შიგნით. ცხადია, ამ სხეულზე იმოქმედებს ადრე განხილული ინერციის ძალები. ადვილი საჩვენებელია, რომ ამ ძალების მოქმედება გაცილებით ნაკლებია, ვიდრე სიმძიმის ძალისა, მაგრამ, მიუხედავად ამისა, ხანგრძლივი დროის განმავლობაში მოქმედებისა, მათ შეუძლიათ საგრძნობი ეფექტება გამოიწვიონ.

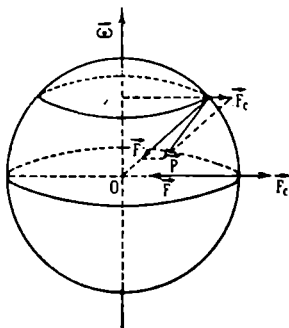
ინერციის ცენტრიდანული ძალის  $F_c = m[\omega^2 r, \omega]$  სიდიდე, როგორც ვაჩვენეთ, ტოლია

$$F_c = m\omega^2 \rho, \quad (75,2)$$

სადაც  $\rho$  არის მანძილი ბრუნვის ღერძიდან სხეულანდე. ვიგულისხმობთ, რომ სხეული დედამიწის ზედაპირზე მოძრაობს, მაშინ ეკვატორზე  $\rho$  დედამიწის რადიუსს დაემთხვევა, ეს უკანასკნელი კი სიდიდით  $6 \cdot 10^8$  სმ-ის ტოლია ამიტომ ინერციის ცენტრიდანული აჩქარებისათვის გვექნება

მნიშვნელობა  $\omega^2 \rho = 3,38 \frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}^2}$ , რაც სიმძიმის ძალის აჩქარების დაახლოებით 0,3%-ს

შეადგენს. ცენტრიდანული ძალა ყოველთვის ბრუნვის ღერძის მართობია და მიმართულია მისგან. ამასთან იგი კუთხეს შეადგენს წერტილის რადიუსექტორთან ან, რაც იგივეა, სიმძიმის ძალის მიმართულებასთან. რადგან  $p$  სიმძიმის ძალის ეფექტური მნიშვნელობა გამოწვეულია  $F$  გრავიტაციული და  $F_c$  ცენტრგამშორი ძალების ჯამით (ნახ. 74), ამიტომ სიმძიმის ძალის აჩქარება განვიღიდან განვიღებ გადასვლისას იცვლება. მას ეკვატორზე ექნება მინიმალური მნიშვნელობა, რადგან



ნახ. 74

აქ ცენტრიდანული ძალა მაქსიმალურია. პოლუსზე კი რგი მაქსიმალურია, რადგან აქ  $F_c$  ნულის ტოლია (რადგან პოლუსზე  $[r, \omega] = 0$ ).

ახლა განვიხილოთ კორიოლისის ძალის მოქმედება. ეს ძალა განისაზღვრება ფორმულით

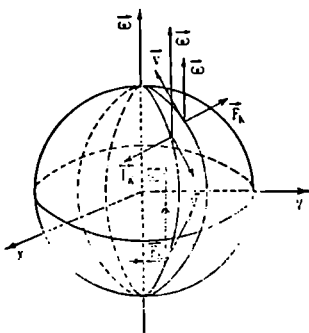
$$F_k = 2m [v_B, \omega]. \quad (75,3)$$

ცხადია, რომ თუ წერტილი უძრავია დედამიწაზე, მასზე ეს ძალა არ მოქმედებს; მისი მოქმედება მით უფრო მეტია, რაც მეტი ფარდობითი სიჩქარით მოძრაობს სხეული. მოცემული სიჩქარისათვის ამ ძალას მაქსიმალური ძნიშვნელობა ექნება ეკვატორის გასწვრივ მოძრაობისას. ამ დროს  $F_k = 2m v_B \omega$ . თუ, მაგალითად, სხეული დედ. მიწის მიმართ მოძრაობს  $10^5 \frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}}$  სიჩქარით, მაშინ კორიოლი-

სის აჩქარება ტოლია  $14,58 \frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}^2}$ , რაც წარმოადგენს სიმძიმის ძალის აჩქარების დაახლოებით  $1,5\%$ -ს.

ცხადია, კორიოლისის ძალა პერპენდიკულარულია  $\omega$  და  $v_B$ -ზე გამავალი სიბრტყისა.

განვიხილოთ სხეული, რომელიც ჩრდილო ნახევარსფეროში მოძრაობს მერიდიანის გასწვრივ. როგორც ჩრდილოეთიდან სამხრეთისაკენ, ისე პირიქით, სამხრეთიდან ჩრდილოეთისაკენ მოძრაობისას კორიოლისის ძალა მოძრაობის მიმართუ-



ნ.ხ. 75

ლებიდან მარჯვნივ იქნება მოგებული ( $F_k$ -ს მიმართულების მოსაძებნად ხელსაყრელია  $\omega$ -ს გადატანა სიჩქარის მოდების წერტილში). ეს უშუალოდ ჩანს (75,3) ფორმულიდან და 75-ე ნახაზიდან. ამიტომაცაა, რომ ჩრდილოეთის მდინარეები, რომლებიც ჩრდილოეთიდან სამხრეთით მოედინებიან, ან პირიქით, უფრო მეტი ძალით აწევიან მარჯვენა ნაპირს, ვიდრე მარცხენას. სრულიად ანალოგიურად დავინახავეთ, რომ სამხრეთ ნახევარსფეროში მდინარეები აწევიან მარცხენა ნაპირს, როგორც ჩრდილოეთიდან სამხრეთით, ისე შებრუნებული მიმართულებით მოძრაობის დროს. გარდა ამისა, ჩრდილოეთის მდინარეების მარჯვენა მხარეს უფრო მაღალი დონე აქვს, ვიდრე მარცხენას,

სამხრეთში კი — პირიქით. ჩრდილოეთში კორიოლისის ძალის მოქმედებით მდინარის მარჯვენა მხარე უფრო ჩამორეცხილია. ეს წარმოადგენს გეოგრაფიაში კარგად ცნობილ ბერის კანონს.

შევნიშნოთ, რომ კორიოლისის ძალის მოქმედებისათვის აუცილებელი არაა სხეულის მოძრაობა მერიდიანის გასწვრივ; მაგალითად, როცა მოძრაობა ხდება პარალელის გასწვრივ აღმოსავლეთისაკენ, კორიოლისის ძალა მიმართული იქნება დედამიწის ბრუნვის ღერძისაკენ და, პირიქით, — როცა სხეული მოძრაობს დასავლეთისაკენ.

კორიოლისის ძალის მოქმედების გამო, ჩრდილო ნახევარსფეროში, როცა საქმე გვაქვს ორბიტის რკინიგზასთან და მოძრაობა თითოეულ ხაზზე ყოველთვის

ერთი მიმართულებით წარმოებს, ადგილი აქვს მარჯვენა რელსის (სამხრეთ ნახევარსფეროში — მარცხენა რელსის) ნაადრევედ გაცეფთას.

კორიოლისის ძალის მოქმედება განსაკუთრებით შეიმჩნევა ჰაერისა და წყლის დიდი მასების დინების დროს. მაგალითად, გოლფსტრიმის თბილი დინება, რომელიც სამხრეთიდან ჩრდილოეთისაკენ მოდის, ამ ძალების გავლენით, მარჯვნივ გადაიხრება, ე. ი. გადაიხრება აღმოსავლეთით. გოლფსტრიმს მოაქვს 22-ჯერ უფრო მეტი წყალი, ვიდრე დედამიწის ყველა მდინარეს ერთად აღებული. ამის წყალობით დასავლეთ ევროპის კონტინენტის ყოველ კვადრატულ სანტიმეტრზე მოდის 4000 მილიარდი კალორია ერთი წლის განმავლობაში, ამიტომ იგი დიდ გავლენას ახდენს ევროპის კლიმატზე. კორიოლისის ძალა აგრეთვე მნიშვნელოვანია ციკლონის მიმართულების განსაზღვრისათვის კერძოდ, ეს ძალა რომ არ მოქმედებდეს, ციკლონი იმოდრავებდა წნევის გრადიენტის მიმართულებით, მაგრამ კორიოლისის ძალა მას გადახრის მარჯვნივ ჩრდილო ნახევარსფეროში და მარცხნივ სამხრეთ ნახევარსფეროში<sup>1</sup>. მხოლოდ ეკვატორზე ემთხვევა ქარის წიმართულება წნევათა ვარდნის მიმართულებას.

კორიოლისის ძალებზე შესწორების მხედველობაში მიღება მნიშვნელოვანია აგრეთვე კურვისა და რაკეტის მოძრაობისათვის და სხვა.

---

<sup>1</sup> ესაა ე. წ. ბაის-ბალის კანონი.

## უმცირესი ქმედების პრინციპი

თავისუფალ ნაწილაკთა სისტემის აღსწერად ჩვეულებრივად სარგებლობენ ნიუტონის მოძრაობის განტოლებებით, ბმების შემთხვევაში კი — ლაგრანჟის განტოლებებით, თვით ეს განტოლებები კი მიღებულია საფუძვლად როგორც ცდების მონაცემთა შედეგი. იბადება კითხვა, ხომ არ შეიძლება მოძრაობის ამ განტოლებების თეორიული გზით გამოყენება ბუნების რაიმე უფრო ზოგადი პრინციპებიდან გამომდინარე? გამოირკვა, რომ მექანიკაში თურმე შესაძლებელია შევარჩიოთ სხვადასხვა ეკვივალენტური პრინციპები, რომლებსაც მიყვავართ ერთი და იმავე მოძრაობის განტოლებებზე.

ამ პრინციპებს შორის განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება ეგრეთ წოდებულ ვარიაციულ პრინციპებს. ამ თავში ჩვენ გავეცნობით ჰამილტონის უმცირესი ქმედების პრინციპს. ეს პრინციპი მექანიკის კანონების დადგენის თვალსაზრისით ახალს არაფერს იძლევა, მაგრამ შეიცავს გარკვეულ ზოგადობას, რომელიც გვეხმარება აღვწეროთ არა მხოლოდ მექანიკური, არამედ ელექტრომაგნიტური და სხვა სახის მოვლენებიც. გარდა ამისა, ამ პრინციპის საშუალებით მთელ რიგ მანამდე კარგად ცნობილ მოვლენას შეგვიძლია შევხედოთ სულ სხვა ასპექტში და ზოგ შემთხვევაში უფრო ღრმად გავიგოთ იგი.

ვარიაციული პრინციპების შინაარსს წარმოადგენს ის, რომ მოძრაობის განტოლებების მიღება შეიძლება გარკვეული ფუნქციონალის ექსტრემუმის პირობიდან, ე. ი. ამ ფუნქციონალის ვარიაციის ნულთან ტოლობის პირობიდან. ეს პრინციპები საშუალებას გვაძლევს გავარკვიოთ, თუ ყველა შესაძლო „ტრაექტორიებიდან“, რომლებიც შეიძლება გადიოდნენ ერთსა და იმავე საწყის და საბოლოო მდებარეობებზე, ბუნება რომელს „აირჩევს“.

### § 76. ვარიაციის ცნება

სანამ მექანიკის ზოგადი პრინციპების განხილვას შევეუდგებოდეთ, მიზანშეწონილია ვარიაციის ცნების შემოღება. ვარიაციის ცნება ერთხელ უკვე დაგვიჩრდა შესაძლო გადანაცვლების პრინციპის განხილვის დროს. ჩვენ მას ახლა უფრო დეტალურად განვიხილავთ.

იზოქრონული ვარიაცია. ვთქვათ, ვიხილავთ მატერიალურ ნაწილაკის ერთ-განზომილებიან მოძრაობას. მისი  $x$  კოორდინატი დამოკიდებული იქნება დროზე

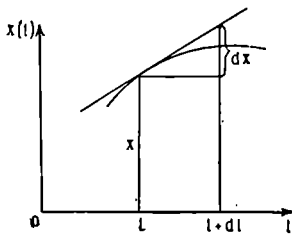
$$x = x(t). \quad (76,1)$$

ამ გამოსახულების დიფერენციალი განისაზღვრება ფორმულით

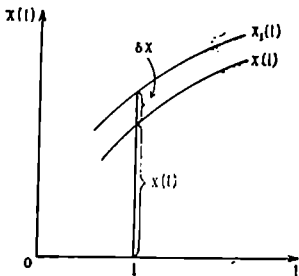
$$dx = \dot{x}dt. \quad (76,2)$$

მისი გეომეტრიული შინაარსი კარგად ჩანს 76-ე ნახაზიდან. აქ ჩვენ საქმე გვაქვს ფუნქციის ცვლილებასთან, როცა არგუმენტს (დროს) ვანიჭებთ უსასრულოდ მცირე ნაზრდს. ამასთან დიფერენციალი აღიგება ერთი და იგივე ტრაექტორიისათვის დროის სხვადასხვა მომენტში.

ახლა ავიღოთ ორი წერტილი და გარდა  $x = x(t)$  ტრაექტორიისა, ამ წერტილებს შორის გავვლოთ სხვა, მასთან უსასრულოდ ახლოს მოთავსებული ტრაექტორიაც  $x_1(t)$  და განვიხილოთ ფუნქციის ცვლილება დროის ადგილზე  $t$  მომენტში. ფუნქციის ამ უსასრულოდ მცირე ცვლილებას უწოდებენ ვარიაციას და მას  $\delta$  ასოთი აღნიშნავენ (ნახ. 77).  $\delta$  სიმბოლო ხაზს უსვამს განსხვავებას ვარიაციასა და დიფერენციალს შორის. დიფერენციალი  $dx$  აღიგება ერთი და იგივე ფუნქციისათვის დროის სხვადასხვა მომენტში,  $\delta$  ვარიაცია კი გულისხმობს განსხვავებას სხვადასხვა ფუნქციებს შორის ერთსა და იმავე დროს.



ნახ. 76



ნახ. 77

მაშასადამე,

$$\delta x = x_1(t) - x(t) \quad (76,3)$$

( $\delta x$  შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც  $\varepsilon \varphi(t)$ , სადაც  $\varepsilon$  უსასრულოდ მცირე სიდიდეა,  $\varphi(t)$  კი — ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქცია). ზემოთ განხილულ ვარიაციას, ხშირად, უბრალო ანდა იზოქრონულ ვარიაციასაც უწოდებენ, რადგან აქ განიხილება ფუნქციის ნაზრდი დროის გარკვეული მომენტისათვის (როგორც ამბობენ, დროის ვარიაცია არ ხდება). ამჟამად, რომ იზოქრონული ვარიაცია

და დროით გაწარმოების რაპერაციები გადასმალა (კომპლტატურა), ვ. ი.

$$\frac{d}{dt} \delta x = \delta \frac{dx}{dt} \quad (76,4)$$

მართლაც, (76,3)-ის გაწარმოება დროით გვიძლევს

$$\frac{d}{dt} \delta x = \dot{x}_1(t) - \dot{x}(t) \quad (76,5)$$

მეორე მხრივ, ვარიაციის განმარტებით  $\dot{x}$ -ის ვარიაციისათვის გვექნება

$$\delta \dot{x} = \dot{x}_1(t) - \dot{x}(t) \quad (76,6)$$

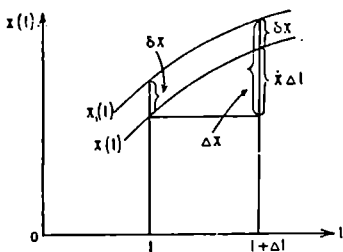
უქანასკნელი ორი ტოლობას შედარებით მივიღებთ დასამტკიცებელ (76,4) ტოლობას.

სრული ვარიაცია. ახლა შემოვიღოთ სრული ვარიაციის ცნება. იზოქრონული ვარიაციის დროს დროის ცვლილება არ ხდება,  $\delta t = 0$ , განვიხილოთ  $x(t)$

ფუნქციის ისეთი ცვლილება, როცა ვარიაციას განიცდის დროც. განსხვავებით  $\delta$  ვარიაციისაგან, სრული ვარიაცია დაკავშირებულია არა მხოლოდ ტრაექტორიის ვარიირებასთან, არამედ დროის ცვლილებასთანაც. სრულ ვარიაციას  $\Delta$  (დიდი დელტა) ასეთი აღნიშნავენ. ცხადია, რომ იგი განისაზღვრება ფორმულით

$$\Delta x = \delta x + \dot{x} \Delta t. \quad (76,7)$$

ამ ფორმულის გეომეტრიული შინაარსი კარგად ჩანს ნახ. 78-დან.  $\Delta t$  აღნიშნავს დროის ცვლილებას. როცა  $\delta x = 0$ , მაშინ (76,7) ფორმულის შედარება (76,2)-თან მოგვცემს  $\Delta t = dt$ , ხოლო როცა  $\Delta t = 0$ , ე. ი. დროის ვარიაცია არ ხდება,



ნახ. 78

$\Delta x$  დამთხვევა უბრალო ვარიაციას. ადვილია დამტკიცება იმისა, რომ სრული ვარიაცია კომპუტატური აღარაა  $\frac{d}{dt}$  ოპერაციისთან, ე. ი.

$$\frac{d}{dt} \Delta x \neq \Delta \frac{d}{dt} x. \quad (76,8)$$

მართლაც (76,7)-ის გაწარმოებით მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \Delta x = \delta \dot{x} + \ddot{x} \Delta t + \dot{x} \frac{d}{dt} \Delta t. \quad (76,9)$$

მეორე მხრივ  $\dot{x}$ -ის სრული ვარიაცია განმარტებით ტოლია

$$\Delta \dot{x} = \delta \dot{x} + \ddot{x} \Delta t. \quad (76,10)$$

ამ განტოლებიდან განსაზღვრულ  $\ddot{x} \Delta t$  წინა ტოლობაში შეტანით მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \Delta x = \Delta \frac{d}{dt} x + \dot{x} \frac{d}{dt} \Delta t, \quad (76,11)$$

რაც ამტკიცებს (76,8) ფორმულას. ამ უკანასკნელში  $\frac{d}{dt}$  და  $\Delta$  ოპერაციების გადასმას ადვილი მხოლოდ მაშინ ექნება, როცა  $\Delta t = 0$ , ე. ი. იზოქრონული ვარიაციის დროს.

ეთქვათ, გვაქვს რაიმე  $f(x, t)$  ფუნქცია, როგორ ვიპოვოთ მისი იზოქრონული ვარიაცია. როცა არგუმენტი განიცდის ვარიაციას  $x + \delta x$ , მაშინ  $f$  ფუნქცია შეიცვლება  $f + \delta f$ -ით და გვექნება

$$f + \delta f = f(x + \delta x, t) = f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \dots \quad (76,12)$$

ამგვარად, პირველი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეების სიზუსტით

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x. \quad (76,13)$$

მრავალი ცვლადის შემთხვევაში სრულიად ანალოგიურად მივიღებდით, რომ

$$\delta f = \sum \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (76,13')$$

ფუნქციის სრული ვარიაციის მოსაძებნად საჭიროა დროის ვარიაციაც მოვახდინოთ. გვექნება

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t. \quad (76,14)$$

თუ შევიტანთ  $\Delta x = \delta x + \dot{x} \Delta t$ , მივიღებთ

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{df}{dt} \Delta t = \delta f + \frac{df}{dt} \Delta t, \quad (76,14')$$

ხოლო მრავალი ცვლადის შემთხვევაში

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{df}{dt} \Delta t. \quad (76,14'')$$

ვარიაციული აღრიცხვის ძირითადი ამოცანა, ვარიაციულ აღრიცხვას დიდი პრაქტიკული გამოყენება აქვს. ჩვენთვის განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ექსტრემუმის მოძებნის ამოცანა. ვარიაციული აღრიცხვის ძირითადი ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: მოცემულია ინტეგრალი

$$I(x) = \int_{t_1}^{t_2} V(x, \dot{x}, t) dt. \quad (76,15)$$

საჭიროა მოიძებნოს ისეთი  $x = x(t)$  ფუნქცია, რომლისთვისაც ამ ინტეგრალს ექნება ექსტრემუმი — მინიმუმი ან მაქსიმუმი, ამასთან ინტეგრირების საზღვრები დაფიქსირებულად ითვლება.  $x(t)$  ფუნქციას, რომელიც (76,15)-ს ექსტრემუმს ანიჭებს, ექსტრემალს უწოდებენ. ვარიაციული ამოცანის ამოხსნა შეიძლება როგორც პირდაპირი, ისე არაპირდაპირი მეთოდებით. არაპირდაპირი მეთოდი მდგომარეობს ექსტრემუმის ამოცანის დიფერენციალურ განტოლებაზე დაყვანაში. ამ მეთოდს განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს მექანიკაში.

არაპირდაპირი მეთოდი დაწერილ ვხვდებით განვიხილოთ ერთი ცვლადის შემთხვევაში. სახელდობრ, ვიხატოთ ფუნქცია ის კლასი, რომელიც  $M(x)$  ინტეგრალს დაფიქსირებული საზღვრების შემთხვევაში ექსტრემუმს მიანიჭებს.

მოვახდინოთ  $x(t)$  და  $\dot{x}(t)$ -ს ვარიაცია

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow x(t) + \delta x(t), \\ \dot{x}(t) &\rightarrow \dot{x}(t) + \delta \dot{x} = \dot{x}(t) + \frac{d}{dt} \delta x. \end{aligned} \quad (76,16)$$

ამასთან, უკანასკნელ ფორმულაში გავითვალისწინოთ, რომ იზოქრონული ვარიაცია გადასმადია დროით წარმოებულთან. ამ ვარიაციის შედეგად მივიღებთ:  $M + \delta M$  და დაეწერთ

$$M + \delta M = \int_{t_1}^{t_2} V \left( x + \delta x, \dot{x} + \frac{d}{dt} \delta x, t \right) dt. \quad (76,17)$$

$V$  ფუნქცია გავშალოთ მწკრივად პირველი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეთა სიზუსტით და გავითვალისწინოთ (76,13). მივიღებთ

$$\delta M = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{d}{dt} \delta x + \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt \quad (76,18)$$

პირველ ინტეგრალში შოვებდინოთ ნაწილობითი ინტეგრაცია

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{d}{dt} \delta x dt \right) = \delta x \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) \delta x dt, \quad (76,19)$$

მაგრამ პირობის თანახმად საზღვრები უცვლელია, ე. ი.  $\delta x(t_2) = \delta x(t_1) = 0$ , ამიტომ უკანასკნელ ტოლობაში თავისუფალი წევრი ნულის ტოლი იქნება და (76,19) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\delta \mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial x} \right) \delta x dt. \quad (76,20)$$

ექსტრემუმში  $\delta \mathcal{L} = 0$  და, რადგან (76,20) სამართლიანია  $t_1$  და  $t_2$  საზღვრების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის, ინტეგრალი ნულის ტოლი მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ იქნება, როცა ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ნულია. ამიტომ, რადგან  $\delta x$  ნებისმიერი ვარიაციაა

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (76,21)$$

ამ განტოლებას ეილერ-ლავრანჟის განტოლება ჰქვია. როგორც ვხედავთ, საძიებელი ექსტრემალი ამ დიფერენციალურ განტოლებას უნდა აკმაყოფილებდეს. აღსანიშნავია, რომ ექსტრემუმის ეს ამოცანა ადვილად განზოგადდება ნებისმიერი რიცხვის დამოუკიდებელ ცვლადთა შემთხვევაში. ამ დროს იმდენ ეილერ-ლავრანჟის განტოლებას მივიღებთ, რამდენ დამოუკიდებელ ცვლადზედაც იქნება  $V$  ფუნქცია დამოკიდებული.

აღნიშნოთ ბოლოს, რომ ხშირად, პირიქით, ხელსაყრელია დიფერენციალური განტოლების დაყვანა ექსტრემუმის ამოცანაზე და შემდეგ ექსტრემუმის პოვნა პირდაპირი მეთოდებით.

## § 77. ჰამილტონის უმცირესი პრინციპის პრინციპი

ლავრანჟის განტოლებები ჩვენ გამოიყვანეთ დალამბერის პრინციპიდან. ფიზიკურად ეს განტოლებები ნიუტონის განტოლებებისაგან არ განსხვავდება. ლავრანჟის განტოლებების უპირატესობა ნიუტონის განტოლებებთან შედარებით მდგომარეობს დინამიური ცვლადების ხელსაყრელად შერჩევაში და მათი მათემატიკური ფორმის დამოუკიდებლობაში ამ ცვლადების შერჩევაზე. ამასთან, თვით განზოგადებული კოორდინატების შერჩევა ნებისმიერია. ლავრანჟის განტოლებების მიღება შეძლება იდეალური ბმების შემთხვევაში, ე. ი. მაშინ, როცა მექანიკური ენერჯია არ გარდაიქმნება სითბურში, წინააღმდეგ შემთხვევაში მექანიკურ სისტემას ვერ დაეახსიათებლით განზოგადებული კოორდინატებით.

ახლა ჩვენ მოვიყვანთ ლავრანჟის განტოლებების მიღების კიდევ ერთ გზას, რომელიც გაცილებით უფრო ზოგადია და ამასთან საშუალებას იძლევა მათი გავრცელებისა არაკონსერვატული და არამექანიკური მოძრაობებისათვისაც.

განვიხილოთ ნაწილაკთა სისტემა. დავუშვათ, რომ სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი უდრის  $n$ -ს და იგი ხასიათდება ლავრანჟის ფუნქციით

$$L = L(q, \dot{q}, t). \text{ შემოვიღოთ ახალი ფუნქცია}$$



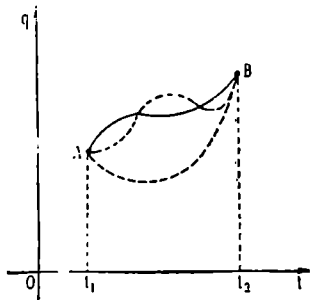
$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) dt. \quad (77,1)$$

რომელსაც ქმედების ფუნქციას ან, მოკლედ, ქმედებას უწოდებენ. ცხადია, ამ ფუნქციას ექნება განზომილება ერგ. სეკ. ინტეგრალი აიღება დროის ორ მომენტს შორის.

ეთქვათ, სისტემა  $t=t_1$  მომენტში იმყოფება კონფიგურაციული სივრცის  $A$  წერტილში, ხოლო  $t=t_2$  მომენტში —  $B$ -ში. ე. ი. როცა  $t=t_1$ , გვაქვს  $q_1=(q_1)_A$ ,  $q_2=(q_2)_A, \dots, q_n=(q_n)_A$ . ხოლო, როცა  $t=t_2$ ,  $q_1=(q_1)_B$ ,  $q_2=(q_2)_B, \dots, q_n=(q_n)_B$ .  $A$ -დან  $B$ -ში სისტემა შეიძლება გადავიდეს სხვადასხვა გზით. ამ გზებს შესაძლო ანდა ვირტუალურ ტრაექტორიებს უწოდებენ, მათგან ერთ-ერთი იქნება ნამდვილი ტრაექტორია. საინტერესოა გამოიკვლიოთ ის პირობები, რომლებიც სისტემას აიძულებს იმოძრაოს ნამდვილი ტრაექტორიის გააწერივ. ამ შეკითხვაზე პასუხობს ჰამილტონის უმცირესი ქმედების პრინციპი, რომელიც ასე ყალიბდება: ყველა შესაძლო ტრაექტორიებიდან, რომლებაც გადის ერთსა და იმავე საწყისს და ბოლო წერტილებზე, სისტემა ირჩევს იმას, რომლის გასწვრივაც ქმედებას აქვს ექსტრემალური მნიშვნელობა (ფიზიკურად მინიმალური მნიშვნელობა). როგორც ვარიაციათა აღრიცხვიდანაა ცნობილი, ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა იმაში მდგომარეობს, რომ ფუნქციის პირველი ვარიაცია ნულს უნდა უდრიდეს. ამიტომ ჰამილტონის პრინციპი მათემატიკურად ასე დაიწერება:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) dt = 0. \quad (77,2)$$

ამ განტოლებიდან მიღებული  $q_i$  განსაზღვრავს ნამდვილ ტრაექტორიას<sup>1</sup>. ამგვარად, ნამდვილი ტრაექტორიის მოძებნის ამოცანა დაყვენილ იქნა ვარიაციული აღრიცხვის ძირითად ამოცანაზე: საჭიროა მოიძებნოს ისეთი  $q_i = q_i(t)$  ფუნქციები, რომლებიც ქმედების ფუნქციას მინიჭებს ექსტრემუმს. ეს მათემატიკური ამოცანა ერთი ცვლადისათვის წინა პარაფრაფში გადაწვევით და ვიპოვეთ ის დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამოხსნა იძლევა ამოცანის პასუხს. ამიტომ პირდაპირ შეგვიძლია დაწვრივოთ განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს სისტემის განზოგადებული კოორდინატები, მაგრამ მეტი სიცხადის მიზნით მრავალი ცვლადის შემთხვევაში კვლავ გავიუოროთ ის პროცედურა, რომელიც საჭიროა ლაგრანჟ-ვილერის განტოლების მისაღებად.



ნახ. 79

$S$ -ფუნქციის ექსტრემუმის მოსაძებნად საჭიროა ეი'ოვით მისი იზოქრონული ვარიაცია და გავეტოლოთ ნულს. (76,13') ფორმულის თანახმად შეგვიძლია დაწვრივოთ

<sup>1</sup> აქ ლაბარაცია ტრაექტორიაზე კონფიგურაციულ სივრცეში, ჩვენს შემთხვევაში  $n$  განზომილებიან სივრცეში.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right\} dt = 0, \quad (77,3)$$

საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$  და მეორე წევრში ჩავატარებთ ნაწილობით ინტეგრაციას, მივიღებთ

$$\delta S = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right\} \delta q_i dt = 0 \quad (77,4)$$

რადგან საწყისი და ბოლო წერტილების ვარიაცია ნულია, ე. ი.

$$(\delta q_i)_{t_1} = (\delta q_2)_{t_1} = \dots = (\delta q_n)_{t_1} = 0 \quad (77,5)$$

და

$$(\delta q_i)_{t_2} = (\delta q_2)_{t_2} = \dots = (\delta q_n)_{t_2} = 0, \quad (77,6)$$

ამიტომ დაგვრჩება

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i \right\} dt = 0. \quad (77,7)$$

მიღებული შედეგი არ არის დამოკიდებული ინტეგრალის საზღვრების შერჩევაზე. თუ ეს ასეა, მაშინ ინტეგრალი ნულს შეიძლება უდრიდეს მხოლოდ მაშინ, როცა თვით ინტეგრალქვეშა გამოსახულება უდრის ნულს, ე. ი.

$$\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i = 0. \quad (77,8)$$

რადგან  $\delta q_i$  ერთმანეთზე დამოუკიდებელი ნებისმიერი ვარიაციებია, ამიტომ ეს ჯამი მხოლოდ და მხოლოდ მაშინაა ნულის ტოლი, როცა  $\delta q_i$ -ს წინ მდგომი ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია. ე. ი.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (77,9)$$

მივიღებთ ლაგრანჯის განტოლებები. მაშასადამე, ვარიაციული აღრიცხვის თვალსაზრისით ეს  $n$  განტოლებებია, რომლებსაც უხდა აკმაყოფილებდეს  $q_i = q_i(t)$  ექსტრემუმები.

ჩვენ ზემოთ არსად არ გვისარგებლია ლაგრანჯის ფუნქციის კონკრეტული სახით. გამოვიყენებთ მხოლოდ ის ფაქტი, რომ იგი ფუნქციაა კოორდინატების სიჩქარეებისა და ღრისი. იმისათვის, რომ კერძო შემთხვევაში ლაგრანჯის განტოლებები დაემთხვეს ნიუტონის განტოლებებს, საჭიროა ლაგრანჯიანისათვის ავიღოთ ჩვენთვის უკვე-ქარგად ცნობილი გამოხატულება

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t). \quad (77,10)$$

თუ გავითვალისწინებთ ჰამილტონის პრინციპის შესაძლო გავრცელებას ფიზიკის სხვა დარგებზე, ყოველთვის უნდა გვახსოვდეს, რომ ლაგრანჯის ფუნქციის არჩევა მხოლოდ ისეთაა შემოსასჯერული, რომ შესაბამისი ლაგრანჯის განტოლებები სწორად აღწერდნენ ექსპერიმენტულ ფაქტებს.

ქმედების ფუნქციის ინვარიანტობა გალილეის გარდაქმნების მიმართ. ვაჩვენოთ, რომ ქმედების ფუნქცია ინვარიანტულია გალილეის გარდაქმნების მიმართ, ვთქვათ, სისტემას აღვწერთ დეკარტის კოორდინატებში, მაშინ

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1} m_i \dot{r}_i^2 - U. \quad (77,11)$$

გადავიდეთ მეორე ათელის სისტემაზე, რომელიც პირველის მიმართ მოძრაობს  $V = \text{const}$  სიჩქარით, მაშინ გალილეის გარდაქმნის კანონს აქვს სახე

$$r_i = r'_i + Vt. \quad (77,12)$$

სისტემის პოტენციალური ენერგია დამოკიდებულია წერტილთა მხოლოდ ფარდობით მანძილზე  $r_i - r_k$ , წინააღმდეგ შემთხვევაში პოტენციალური ენერგია დამოკიდებული იქნებოდა სისტემის სათაფის არჩევაზე, რასაც ფიზიკური აზრი არა აქვს. გალილეის გარდაქმნების მიმართ კი  $r_i - r_k$  სხვაობა არ იცვლება. ენახოთ, როგორ შეიცვლება კინეტიკური ენერგია. ცხადია,

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{r}'_i + V)^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{r}'_i^2 + \frac{MV^2}{2} + \sum m_i (\dot{r}'_i \cdot V). \quad (77,13)$$

აქ  $M$  არის სისტემის მთელი მასა. ეს გამოსახულება ასეც შეიძლება გადაწეროთ:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v'^2 + \frac{d}{dt} \left[ \sum m_i (r'_i \cdot V) + \frac{MV^2 t}{2} \right]. \quad (77,14)$$

თუ ამ გამოსახულებას შევადარებთ (77.13)-ს დაინახავთ, რომ ლაგრანჟიანი, გალილეის გარდაქმნებისას, შედგენიარად იცვლება:

$$L = L' + \frac{d}{dt} \left[ \sum m_i (r'_i \cdot V) + \frac{MV^2 t}{2} \right], \quad (77,15)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ იგი იცვლება კოორდინატებისა და დროის ფუნქციის სრული წარმოებით, რაც ქმედების ფუნქციიდან გამომდინარე შედეგებს არა ცვლის. ამგვარად, ქმედების ინვარიანტობა გალილეის გარდაქმნების მიმართ დამტკიცებულია.

დასასრულ აღვნიშნოთ, რა უპირატესობა აქვს ჰამილტონის უმცირესი ქმედების პრინციპს. ჭერ ერთი, იგი ინტეგრალურ პრინციპია და ამიტომ აღარ შეიცავს იმ ნებისმიერობას, რომელიც გვქონდა კოორდინატების არჩევის დროს. ინტეგრალის ექსტრემუმის საკითხი სრულიადაც არაა დამოკიდებული იმაზე, განსაზღვრულ ინტეგრალში რომელი ცვლადებით ვისარგებლებთ. ამიტომ ინტეგრალური პრინციპი საშუალებას გვაძლევს შექანიკური კანონზომიერების უფრო ღრმად შესწავლისა. გარდა ამისა, ჰამილტონის პრინციპიდან ლაგრანჟის განტოლებების გამოყენებისას ჩვენ არ დაგვიჭირდა ლაგრანჟიანის ცხადი სახის ცოდნა, ამიტომ  $L$  ფუნქციის სათანადოდ შერჩევით, ფორმალურად მაინც, ყოველთვის შეგვიძლია ამ პრინციპის განზოგადება არაკონსერვატული და არამექანიკური სისტემებისათვისაც კი.

## § 78. ჰამილტონის პრინციპი არაკონსერვატული სისტემებისათვის

ჰამილტონის პრინციპი შეგვიძლია განვაზოგადოთ არაკონსერვატული სისტემებისათვისაც. ამისათვის საჭიროა ქმედების ფუნქციის სათანადოდ შერჩევა. ეს პრინციპი შეგვიძლია შემდეგი სახით წარმოვიდგინოთ:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T + A) dt = 0, \quad (78,1)$$

სადაც  $T$  არის სისტემის კინეტიკური ენერჯია,  $A$  კი წარმოადგენს ენერჯიის განზომილების სიდიდეს, რომლის ვარიაცია უდრის

$$\delta A = \sum_{i=1}^N (F_i, \delta r_i). \quad (78,2)$$

აქ  $F_i$  წარმოადგენს  $i$ -ურ ნაწილაკზე მოქმედ ძალას,  $\delta r_i$  კი ვირტუალური გადაადგილებებია. ცხადია, რომ  $\delta A$  გამოხატავს იმ მუშაობას, რომელსაც სისტემაზე მოქმედი ძალები ასრულებენ ვირტუალურ გზაზე. ჩვენ ადრე ვაჩვენეთ, რომ განზოგადებულ კოორდინატებზე გადასვლით

$$\sum_{i=1}^N (F_i, \delta r_i) = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, \quad (78,3)$$

ამიტომ (78,1) განტოლება ასე შეგვიძლია გადაწეროთ:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum Q_i \delta q_i dt = 0. \quad (78,4)$$

რადგან სისტემის კინეტიკური ენერჯია, ისევე როგორც კონსერვატული სისტემის ლაგრანჟიანი, ფუნქციაა განზოგადებული კოორდინატებისა და სიჩქარეებისა, ამიტომ

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T(q, \dot{q}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum \frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt. \quad (78,5)$$

გავიხსენოთ, რომ  $\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j$  და ბოლო ინტეგრალში მოვახდინოთ ნაწილობითი ინტეგრაცია; ამასთან, რადგან საზღვრები კვლავ დაფიქსირებულია, თავისუფალი წევრი მოისპობა; ასე რომ,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum \left( \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt. \quad (78,6)$$

მაშასადამე, (78,4) მიიღებს სახეს

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \left( \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \right) \delta q_j dt = 0. \quad (78,7)$$

აქაც ინტეგრალის ნულთან ტოლობა არ არის დამოკიდებული საზღვრების შერჩევაზე. მაშასადამე, ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ნულს უნდა უდრიდეს. თუ ამასთან იმასაც გავითვალისწინებთ, რომ  $\delta q_j$  ვარიაციები დამოუკიდებელი სიდიდეებია, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (78,8)$$

ამრიგად, (78,1) შეიძლება განვიხილოთ როგორც ჰამილტონის პრინციპის ზოგადი სახე, რომელიც გამოდგება როგორც კონსერვატული, ისე არაკონსერვატული სისტემებისათვის. ამათთან, კონსერვატული სისტემებისათვის  $A$  უდრის პოტენციალურ ენერჯიას  $U$ -ს, ხოლო არაკონსერვატული სისტემებისათვის  $A$  არის სიდიდე, რომლის ნაზრდი სისტემის უსასრულო მცირე შესაძლო გადაადგილებისას განისაზღვრება (78,2) ფორმულით.

**§ 70. ქვედების ფუნქციის დამოკიდებულება  
კოორდინატებზე**

ჩვენ დავინახეთ, რომ ქმედების ფუნქციის დახმარებით შეგვიძლია ავაგოთ მქეანიკა, რამდენადაც ამ ფუნქციის ექსტრემუმის პირობიდან შეგვიძლია გამოვიყვანოთ მოძრაობის ლაგრანჟის განტოლებები. გამოვარკვეით ახლა ქმედების საშუალებით, როგორ შეიძლება განვსაზღვროთ სხვადასხვა ფიზიკური სიდიდე, მაგალითად, იმპულსი და ენერგია. როგორც აღვნიშნეთ, ქმედების ფუნქციას აქვს სახე

$$S = \int_{t_0}^t L(q, \dot{q}; t) dt. \quad (79,1)$$

ამ ფუნქციის ვარიაციას, როგორც მოძრაობის განტოლებების გამოყვანის დროს დავინახეთ, აქვს გამოხატულება

$$\delta S = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \delta q_i \right\} dt. \quad (79,2)$$

მოძრაობის განტოლებების გამოყვანის დროს ჩვენ ერთმანეთს ვადარებდით ყველა შესაძლო ტრაექტორიებს, რომლებიც ერთსა და იმავე საწყის და საბოლოო წერტილებში გადიოდა, ამიტომაც კოორდინატების ვარიაციებს ამ წერტილებში ნულის ტოლად ვიღებდით. შედეგად (79,2) გამოსახულების პირველი წევრი ისპობოდა, მეორე წევრის ნულთან ტოლობა კი (რადგან უმცირესი ქმედების პრინციპით  $\delta S = 0$ ) მოძრაობის განტოლებებს გვაძლევდა. ახლა ჩვენ გვინტერესებს, როგორაა  $S$  ფუნქცია კოორდინატებზე დამოკიდებული; ამიტომ ერთმანეთს შევადარებთ არა შესაძლო ტრაექტორიებს, არამედ ნამდვილ ტრაექტორიებს. რომლებსაც საწყისი გამოსავალი წერტილი საერთო აქვთ, ბოლო წერტილები კი ერთმანეთისაგან უსასრულოდ შორეულ სიღრმეში განსხვავდება. ცხადია, ამ შემთხვევაში ქმედების ფუნქცია დამოკიდებული იქნება საბოლოო მდებარეობის კოორდინატებზე მართლაც, ვთქვათ ცნობილ ნამდვილ მოძრაობა, ე. ი. განსაზღვრულია ცალკეული კოორდინატი, როგორც დროის ფუნქცია. ცხადია, რომ ეს ამონახსნები შეიცავენ აგრეთვე  $2n$  ნებისმიერ მუდმივებს  $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots, c_{2n}$ , ე. ი.

$$q_i = q_i(t; c_1, c_2, \dots, c_{2n}). \quad (79,3)$$

ეს მუდმივები განისაზღვრება საწყისი პირობებით:

$$q_{i0} = q_{i0}(t_0; c_1, c_2, \dots, c_{2n}), \quad (79,4)$$

$$\dot{q}_{i0} = \dot{q}_{i0}(t_0; c_1, c_2, \dots, c_{2n}). \quad (79,5)$$

განტოლებათა რიცხვი აქ უდრის  $2n$ -ს. ამ განტოლებათა სისტემიდან შეიძლება განვსაზღვროთ ყველა  $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$  და შევითანოთ მათი მნიშვნელობა (79,3)-შიც ცხადია, რომ გვექნება

$$q_i = q_i(t, t_0, q_{i0}, \dot{q}_{i0}), \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (79,6)$$

აქ  $q_{i0}$  ნიშნავს ერთობლიობას  $q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}$ , ასევე  $\dot{q}_{i0}$  ნიშნავს  $\dot{q}_{10}, \dot{q}_{20}, \dots, \dot{q}_{n0}$  ერთობლიობას. უკანასკნელი ტოლობების გაწარმოებით მივიღებთ

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t, t_0, q_{i0}, \dot{q}_{i0}). \quad (79,7)$$

(79,1) ფორმულის ინტეგრალქვეშა გამოსახულება დამოკიდებულია  $t$ ,  $q_i$  და  $\dot{q}_i$ -ზე. ცხადია, რომ თვით ქმედების ფუნქციაც ამავე ცვლადებზეა დამოკიდებული, ე. ი.

$$S = S(t, t_0, q_i, \dot{q}_i). \quad (79,8)$$

მაგრამ ამ გამოსახულებაში (79,6) და (79,7)-დან შეიძლება შევიტანოთ  $q_i$  და  $\dot{q}_i$  მნიშვნელობა. მაშინ გვექნება

$$S = S(t, t_0, q_{i0}, \dot{q}_{i0}). \quad (79,9)$$

აქ შემაჯავლი  $\dot{q}_{i0}$  იმავე (79,6)-ის საშუალებით გამოვხატოთ  $q_i$ ,  $t$  და  $t_0$  ცვლადებში. მაშასადამე, საბოლოოდ ქმედების ფუნქცია გამოხატული იქნება როგორც  $t$  დროისა და შესაბამისი კოორდინატების ფუნქცია, ე. ი.

$$S = S(t, q_i, t_0, q_{i0}) \quad (79,10)$$

თუ მუდმივ  $t_0$  და  $q_{i0}$  სიდიდეებს არ აღვნიშნავთ ფუნქციის გამოხატულებაში, შეიძლება დავწეროთ

$$S = S(t, q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (79,11)$$

ენახოთ ახლა, რა კავშირშია იმპულსი და ენერგია ქმედების ფუნქციასთან. გამოვიდეთ (79,2) ფორმულიდან. ვთქვათ, ყველა ტრაექტორია, რომელიც გამოდის ერთი და იმავე წერტილიდან, ნამდვილ მოძრაობას გამოხატავს, მხოლოდ საბოლოო წერტილში ერთმანეთისაგან უსასრულოდ მცირედ განსხვავდება. სხვანაირად რომ ვთქვათ, მოვანდრნოთ ვარიაცია მხოლოდ ტრაექტორიის ბოლო წერტილისა. მაშინ (79,2) ფორმულაში მეორე წევრი მოისპობა, რაუგან პირობის ძალით ყველა მოძრაობა ნამდვილია და ლაგრანჯის განტოლების თანახმად

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

მაშინ, თუ ვავთვალისწინებთ იმასაც, რომ  $(\partial q_i)_{t_0} = 0$ , მივიღებთ

$$\delta S = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \quad (79,12)$$

გავიხსენოთ, რომ  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ , მაშინ

$$\delta S = \sum p_i \delta q_i \quad (79,13)$$

მეორე მხრივ, (79,11)-ის ძალით გვექნება

$$\delta S = \sum \frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (79,13')$$

უკანასკნელი ორი ფორმულიდან განსახილვერება განზოგადებული იმპულსები

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad (79,14)$$

ე. ი. იმპულსის ცალკეული მდგენელი წარმოადგენს ქმედების ფუნქციის კერძო წარმოებულს სათანადო კოორდინატით. ცხადია, რომ ერთი ნაწილაკისათვის დეკარტის კოორდინატებში გვექნება

$$p = \text{grad } S, \quad (79,15)$$

საიდანაც ჩანს, რომ იმპულსი  $S = S_0$  მუდმივი ქმედების ზედაპირის მართობულია. აღსანიშნავია ამასთან, რომ მუდმივი ქმედების ზედაპირს კლასიკურ მექანიკაში არავითარი ფიზიკური შინაარსი არა აქვს. რადგან იმპულსი არის ვექტორი, რომელიც ტრაექტორიას მხებდალა აქვს ყოველ წერტილში, ამიტომ ტრაექტორია მუდმივი ქმედების ზედაპირისადმი ორთოგონალურ წირს წარმოადგენს.

სრულიად ანალოგიურად შეიძლება ქმედების ფუნქციის დაკავშირება ენერგიასთან.

ქმედების ფუნქციის განმარტებიდან გვექნება

$$\frac{dS}{dt} = I. \quad (79,16)$$

მეორე მხრივ, როგორც აღვნიშნეთ, ქმედება შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც კოორდინატებისა და დროის ფუნქცია, ამიტომ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (79,17)$$

(79,14)-ის გათვალისწინებით (79,16) მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum p_i \dot{q}_i = L. \quad (79,18)$$

როცა ლაგრანჟიანი დროს ცხადად არ შეიცავს, თუ გავიხსენებთ ენერჯის (23,6) განმარტებას, გვექნება

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E. \quad (79,19)$$

ენერჯია ამ შემთხვევაში წარმოადგენს ქმედების ფუნქციის კერძო წარმოებულს დროით შებრუნებული ნიშნით. მოვახდინოთ (79,19) განტოლების ინტეგრაცია (0, t) შუალედში; მივიღებთ

$$S(q, t) = -Et + A(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (79,20)$$

ამასთან, რადგან (79,19)-ში შედის დროით კერძო წარმოებული, ინტეგრაციის მუდმივი ამ შემთხვევაში კოორდინატების ნებისმიერი  $A(q)$  ფუნქცია იქნება. ამ  $A(q)$ -ს უწოდებენ შემოკლებული ქმედების ფუნქციას. აშკარაა, რომ

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial A}{\partial q_i}. \quad (79,21)$$

როგორც (79,21) ფორმულა გვიჩვენებს, იმპულსის განსასაზღვრავად, კონსერვატიული ველის შემთხვევაში, საკმარისია შემოკლებული ქმედების ფუნქციის ცოდნა.

### § 80. ვარიაციული პრინციპის სხვადასხვა სახე

მოპერტუის უმცირესი ქმედების პრინციპი. ჰამილტონის უმცირესი ქმედების პრინციპამდე მოპერტუიმ ჩამოაყალიბა პრინციპი, რომელიც თვით მოპერტუის წარმოდგენით იყო მექანიკის ყველაზე უფრო ზოგადი პრინციპი. თვითონ მოპერტუის ამ პრინციპის დასაბუთება არ მოუტია. ამ პრინციპის მათემატიკური ფორმულირება და შინაარსი გაარკვია ჯერ ეილერმა, შემდეგ კი — ლაგრანჟმა. ამიტომაც ხშირად ეს პრინციპი ლიტერატურაში გვხვდება ლაგრანჟ-მოპერტუის პრინციპის სახელწოდებითაც.

ჰამილტონის უმცირესი ქმედების პრინციპი მოითხოვს ქმედების

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t) dt \quad (80,1)$$

ექსტრემუმს. იმ დამატებითი პირობით, რომ კოორდინატების ვარიაცია საწყის  $t_1$  და სიბოლო  $t_2$  მომენტში ნულის ტოლია,

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0 \quad (80,2)$$

და დროის ვარიაცია არ ხდება,

$$\delta t = 0. \quad (80,3)$$

ჩვენ ერთმანეთს ვადარებდით მოძრავი სისტემის ნამდვილ და ვირტუალურ გზაზე მდებარეობას დროის ერთსა და იმავე მომენტში. არ მოვითხოვდით, რომ ამ მდებარეობებში სისტემის ენერგია ყოფილიყო ერთი და იგივე. ახლა კი დაეუწვით, რომ ადგილი აქვს სისტემის სრული ენერგიის შენახვას და ვიგულისხმობთ, რომ ერთმანეთს ვადარებთ ისეთ შესაძლო ტრაექტორიებს, რომელთათვისაც ენერგიის ვარიაცია ნულის ტოლია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნამდვილ და შესაძლო გზაზე ენერგია ერთი და იგივეა.

კონსერვატიული ველისათვის ლაგრანჟიანს ექნება სახე

$$L = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - E. \quad (80,4)$$

სადაც  $E$  არის სრული ენერგია, რომელიც მოძრაობის ინტეგრალია. ამ გამოსახულება ქმედების ფუნქციაში შეტანივთ მივიღებთ

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sum p_i dq_i - E(t_2 - t_1). \quad (80,5)$$

რადგან ჩვენ მოვითხოვთ, რომ ნამდვილ და ვირტუალურ გზებზე სისტემას ჰქონდეს ერთი და იგივე ენერგია, ამიტომ სისტემის მდებარეობას ნამდვილ და ვირტუალურ გზებზე აღარ შეესაბამება დროის ერთი და იგივე მომენტი. ჰამილტონის პრინციპის ჩამოყალიბებისას ჩვენ გეჭონდა  $\delta t = 0$ , სამაგიეროდ  $\delta E \neq 0$ . ახლა კი ჩვენ გვაქვს  $\delta E = 0$  და, მასშადადმე, უნდა მოვითხოვოთ, რომ  $\delta t \neq 0$ .

სიდიდეს

$$A = S + Et \quad (80,6)$$

შემოკლებული ქმედება ეწოდება, მას ხშირად ლაგრანჟის ქმედების ფუნქციასაც უწოდებენ. (80,5)-დან აშკარაა, რომ შემოკლებული ქმედება წარმოადგენს შემდეგ ინტეგრალს:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \sum p_i dq_i, \quad (80,7)$$

მოპერტუის პრინციპი კი მდგომარეობს ამ გამოსახულების სრული ვარიაციის ნულთან ტოლობაში

$$\Delta \int \sum p_i dq_i = 0. \quad (80,8)$$

პირობის ძალით  $\Delta E = 0$ , ხოლო  $E = T + U$ , ამიტომ  $\Delta U = -\Delta T$  და ჰამილტონის უმცირესი ქმედების პრინციპი მოგვცემს



$$\Delta S = \Delta \int L dt = \int \Delta (T - U) dt = \Delta \int 2T dt = 0. \quad (80,9)$$

მაშასადამე, მოპერტუის პრინციპი ასეც დაიწერება:

$$\Delta \int T dt = 0. \quad (80,10)$$

ასეთი სახით პრინციპი ჩამოყალიბებული იყო თვით მოპერტუის მიერ.

იაკობიმ აჩვენა, რომ თუ ჩვენ გვიანტერესებს სისტემის მიერ აღწერილი ტრაექტორია და არ გვიანტერესებს კოორდინატების დროზე დამოკიდებულების სახე, უმცირესი ქმედების პრინციპიდან დრო სავსებით უნდა გამოვრიცხოთ. ამისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ პირობები:

$$p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i}, \quad E(q, \dot{q}) = \text{const}. \quad (80,11)$$

მეორე პირობიდან  $dt$  უნდა გამოიხატოს  $q_i$  და  $dq_i$ -ით და შეტანილ იქნეს  $p_i$ -ს ფორმულაში. რადგან სრული ენერგია

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k + U(q), \quad (80,12)$$

საიდანაც

$$dt = \sqrt{\frac{\sum_{i,k} a_{ik}(q) dq_i dq_k}{2(E - U(q))}}, \quad (80,13)$$

$i$ -ური ნაწილაკის იმპულსი კი უდრის

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k a_{ik}(q) \dot{q}_k.$$

ამიტომ (80,13)-დან მივიღებთ

$$A = \int \sum p_i dq_i = \int \sqrt{2(E - U) \sum_{i,k} a_{ik}(q) dq_i dq_k}. \quad (80,14)$$

აქ ინტეგრალი უკვე აიღება  $n$  განზომილებიანი სივრცის ორ მოცემულ წერტილს შორის.  $\Delta A = 0$  გამოსახულება წარმოადგენს იაკობის პრინციპს. ამ პრინციპში  $E = \text{const}$ , დროს ვარიაცია ეხება ტრაექტორიის სივრცულ პარამეტრებს და დროზე დამოკიდებულების საკითხი საერთოდ არ განიხილება. ამიტომ ეს პრინციპი შეისწავლის მოძრაობის მხოლოდ გეომეტრიულ მხარეს.

როცა იაკობის პრინციპით ვსარგებლობთ, ამოცანის სრული სურათის მისაღებად საჭიროა ვიცოდეთ კოორდინატების დროზე დამოკიდებულებაც. (80,6) გამოსახულებიდან ნათელია, რომ როცა ქმედების ვარიაციას ვეძებთ უცვლელი დროს შემთხვევაში  $\delta t = 0$ , მაშინ იგი გამოიწვევს სრული ენერგიის ვარიაციას. ე. ი.

$$\delta A = \delta S + \delta E t, \quad (80,15)$$

საიდანაც მივიღებთ მნიშვნელოვან ფორმულას

$$t = \frac{\partial A}{\partial E}. \quad (80,16)$$

ეს ფორმულა ტრაექტორიის განტოლებასთან ერთად სავსებით განსაზღვრავს მოძრაობას.

§ 81. ლაგრანჟის განტოლებების მიღება მოპერტუის პრინციპიდან

მოპერტუის პრინციპიდან შეგვიძლია გამოვიყვანოთ ლაგრანჟის მოძრაობის განტოლებები. მოპერტუის პრინციპი გვეუბნება

$$\Delta A = \Delta \int_0^t T dt = 0. \quad (81,1)$$

მეორე მხრივ, ჩვენ ვიცით, რომ შემოკლებული ქმედება დაკავშირებულია ქმედების  $S$  ფუნქციასთან ფორმულით

$$A = S + Et. \quad (81,2)$$

ვიპოვოთ ამ გამოსახულების სრული ვარიაცია; რადგან  $\Delta E = 0$ , ამიტომ

$$\Delta A = \Delta S + E \Delta t. \quad (81,3)$$

სრული ვარიაციის განმარტებით

$$\Delta S = \delta S + \dot{S} \Delta t. \quad (81,4)$$

თუ გავიხსენებთ, რომ  $\dot{S} = L$ , სადაც  $L$  ლაგრანჟიანია, (81,3) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\delta S + (L + E) \Delta t = 0. \quad (81,5)$$

მეორე მხრივ,  $L + E = 2T$ , ამიტომ

$$\delta S + 2T \Delta t = 0. \quad (81,6)$$

$\delta S$  ვარიაცია ჩვენ გამოვთვალეთ § 77-ში. იგი პირდაპირ შეგვიძლია დავწეროთ (77,4) ფორმულის მიხედვით

$$\delta S = \left[ \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right]_0^t + \int_0^t \sum \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \quad (81,7)$$

აღვნიშნოთ, რომ მოპერტუის პრინციპში, რადგან დროის ვარიაციას აქვს ადგილი, საბოლოო წერტილში სხვადასხვა ტრაექტორიაზე მოძრავე ნაწილაკი სხვადასხვა დროს მოდიხ და  $\delta q_i(t)$  აღარ უდრის ნულს. მოპერტუის პრინციპში ბოლო წერტილებში ნულია  $\Delta q_i(t) = \Delta q_i(0) = 0$ , ამიტომ  $\delta q_i$  უნდა გამოვხატოთ  $\Delta q_i$ -ს საშუალებით. სრული ვარიაციის განმარტებით

$$\delta q_i = \Delta q_i - \dot{q}_i \Delta t, \quad (81,8)$$

ამ გამოსახულების შეტანით (81,7)-ის თავისუფალ წევრში მივიღებთ

$$\left[ \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \right]_0^t = \left[ \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \Delta q_i \right]_0^t - \left[ \left( \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \Delta t \right]_0^t. \quad (81,9)$$

ახლა უკვე პირველი წევრი მარჯვნივ ნულის ტოლია, მეორე წევრში კი შეგვიძლია გამოვიყენოთ ეილერის თეორემა ერთგვაროვანი ფუნქციების შესახებ

$$\sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i = 2T, \quad (81,10)$$

ასე რომ

$$\delta S = -2T \Delta t + \int \sum \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \quad (81,11)$$

ამ გამოსახულების შეტანით (81,6) ფორმულაში მივიღებთ

$$\int \sum \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0, \quad (81,12)$$

საიდანაც გამომდინარეობს ლაგრანჟის განტოლებები

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (81,13)$$

ცხადია, რომ, პირიქითაც, მოძრაობის განტოლებებიდან შეგვიძლია მივიღოთ მოპერტუის უმცირესი ქმედების პრინციპი.

### ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები

მექანიკური სისტემის ლაგრანჟის განტოლებებით აღწერის გარდა არსებობს მეორე გზაც, რომელიც ჰამილტონმა გამოიყენა. ლაგრანჟის განტოლებები წარმოადგენს მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომლებშიაც დამოუკიდებელი ცვლადებია განზოგადებული კოორდინატები  $q_1, q_2, \dots, q_n$  და განზოგადებული სიჩქარეები  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ , სადაც  $n$  სისტემის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვია:  $n = 3N - j$  ( $N$  — ნაწილაკთა რიცხვია,  $j$  — ბმათა რიცხვი).

ჰამილტონი, ნაცვლად  $n$  მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებებისა, განიხილავს  $2n$  პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებებს; ამასთან, რაც მთავარია, დამოუკიდებელ ცვლადებად აღებულია განზოგადებული კოორდინატები  $q_1, q_2, \dots, q_n$  და განზოგადებული იმპულსები  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

ჰამილტონის განტოლებების ამოხსნა გარკვეულ შემთხვევაში შეიძლება უფრო მარტივი აღმოჩნდეს, ვიდრე ლაგრანჟის განტოლებებისა. ჰამილტონის განტოლებების არსებით უპირატესობას ლაგრანჟის განტოლებებთან შედარებით დავინახავთ კანონიკური გარდაქმნების განხილვის დროს.

#### § 82. ჰამილტონის განტოლებები

შევუდგეთ ახლა ჰამილტონის განტოლებების გამოყენას. ვთქვათ, სისტემა ხასიათდება  $L = L(q, \dot{q}; t)$  ლაგრანჟის ფუნქციით. ავიღოთ მისი სრული დიფერენციალი. გვექნება

$$dL = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (82,1)$$

ან, თუ გავიხსენებთ  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  და  $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$  ფორმულებს, მივიღებთ

$$dL = \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (82,2)$$

ამ ტოლობის ორივე მხარეს გამოვაკლოთ სიდიდე

$$d\left(\sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i\right) = \sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i, \quad (82,3)$$

მივიღებთ

$$d(L - \sum \dot{q}_i p_i) = \sum \dot{p}_i dq_i - \sum \dot{q}_i dp_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (82,4)$$

შემოვიღოთ ფუნქცია

$$H = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (82,5)$$

აქ, როგორც ვიცი,  $L = L(q_1, q_2, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$ , ასე რომ, ჯერჯერობით  $H$  ფუნქცია შეიცავს კოორდინატებს, სიჩქარეებს და დროს, მაგრამ ჩვენ შეიძლება ვისარგებლოთ განტოლებათა სისტემით

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (82,6)$$

და ამოვხსნათ იგი განზოგადებული სიჩქარეების მიმართ (თუ, რა თქმა უნდა, ასეთი ამოხსნა შესაძლებელია); მივიღებთ

$$\dot{q}_i = f(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n; t). \quad (82,7)$$

თუ სიჩქარეების ამ გამოხატულებას შევითავსებთ (82,5)-ში, მაშინ  $H$  სიდიდე იქნება ფუნქცია განზოგადებული კოორდინატების, განზოგადებული იმპულსების და დროისა, ე. ი.

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n; t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L. \quad (82,8)$$

$H$  სიდიდეს, როდესაც ყველა განზოგადებული სიჩქარე შეცვლილია იმპულსებითა და კოორდინატებით (82,6) ფორმულის მიხედვით, უწოდებენ ჰამილტონის ფუნქციას ანდა ჰამილტონიანს.

(82,4) ასე გადაიწერება:

$$dH = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (82,9)$$

აქედან კი ვღებულობთ

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right. \quad (82,10)$$

ასევე

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (82,11)$$

(82,10) განტოლებები წარმოადგენს ჰამილტონის განტოლებებს. ჰამილტონის განტოლებები, მათი სიმარტივის გამო, კანონიკური განტოლებების სახელწოდებასაც ატარებენ. ისინი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებებია  $q$  და  $p$  ცვლადების მიმართ. ამ ცვლადებს კანონიკურად შეუღლებული ცვლადები ეწოდება. როცა ლაგრანჯიანი დროზე ცხადად არაა დამოკიდებული, მაშინ, (82,8) ტოლობის თანახმად, არც ჰამილტონის ფუნქცია იქნება დროზე დამოკიდებული.

ფაზური სივრცე. როგორც დაინახეთ, ლაგრანჯის მეთოდში მოძრაობის გეომეტრიული ინტერპრეტაციისათვის ხელსაყრელი იყო კონფიგურაციული სივრცის ცნების შემოყვანა. ანალოგიურად ჰამილტონის მეთოდში შემოჰყავთ ფაზური სივრცის ცნება, რომელიც წარმოადგენს  $2n$  განზომილების ფიქტიურ სივრცეს. ამ

სივრცეში ღერძებად აიღება  $2\pi$  განზოგადებული კოორდინატები და იმპულსები. რადგან კოორდინატები და იმპულსები განსაზღვრავს მექანიკური სისტემის მდგომარეობას, ამიტომ ყოველი წერტილი ფაზურ სივრცეში გამოხატავს გარკვეულ მდგომარეობას, სისტემის მოძრაობას კი შეესაბამება მრუდი, რომელსაც ფაზურ ტრაექტორიას უწოდებენ.

მაგალითად, პარმონიულ ოსცილატორს, რომლის ჰამილტონიანია

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = E, \quad \left( \left. \begin{array}{l} \text{მრუდი} \\ \text{ფაზურ სივრცეში} \end{array} \right\} \right)$$

შეესაბამება ისეთი მოძრაობები, რომლის ტრაექტორიები ფაზურ  $p, q$  სიბრტყეზე იქნებიან ელიფსები ნახევარღერძებით:

$$a = \sqrt{2mE}, \quad b = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

ფაზური სივრცის ცნება ხშირად გამოიყენება სტატისტიკურ ფიზიკაში.

### § 83. ჰამილტონის ფუნქცია

ადვილად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა ბმები დროს ცხადად არ შეიცავს და პოტენციალური ენერგია არაა დამოკიდებული სიჩქარეებზე, ჰამილტონის ფუნქცია წარმოადგენს სისტემის სრულ ენერგიას; მართლაც, ჰამილტონის ფუნქცია უდრის

$$H = \sum \dot{q}_i p_i - L \quad (83,1)$$

ან, თუ გავიხსენებთ იმპულსის განმარტებას,

$$H = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L. \quad (83,2)$$

როცა პოტენციალური ენერგია სიჩქარეებს არ შეიცავს, შეიძლება დავწეროთ  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ . გავიხსენოთ, გარდა ამისა, რომ ბმების დროზე დამოუკიდებლობის შემთხვევაში სისტემის კინეტიკური ენერგია სიჩქარეების მეორე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციაა

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k. \quad (83,3)$$

ასე რომ, ეილერის ერთგვაროვანი ფუნქციების შესახებ ცნობილი ღებულების თანახმად, შეიძლება დავწეროთ

$$\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T. \quad (83,4)$$

ამიტომ ჰამილტონის ფუნქცია მიიღებს სახეს

$$H = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - T + U = T + U. \quad (83,5)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ჰამილტონის ფუნქცია განხილულ შემთხვევაში მართლაც წარმოადგენს სისტემის სრულ ენერგიას.

ვიპოვოთ ახლა  $H$ -ის სრული წარმოებულნი დროთი

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right), \quad (83,6)$$

თუ  $\dot{q}_i$  და  $\dot{p}_i$ -ის ნაცვლად შევიტანთ მათ მნიშვნელობებს ჰამილტონის (82,10) განტოლებიდან, მივიღებთ

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (83,7)$$

საიდანაც გამოჰდინარეობს, რომ როცა ჰამილტონიანი დროზე ცხადად არაა დამოკიდებული, მაშინ  $\frac{dH}{dt} = 0$  და  $H = \text{const}$ . ამ შემთხვევაში სისტემის სრული ენერგია მუდმივია. ჰამილტონის ფუნქცია დროზე ცხადად დამოკიდებული არ იქნება იზოლირებული სისტემისათვის, ან მაშინ, როცა სისტემა უცვლელ გარეშე პირობებში იმყოფება.

ჰამილტონის ფუნქციის დაწერა ცხადი სახით ადვილია; ამისათვის საკმარისია კინეტიკური ენერგია იმპულსებით გამოხატვა. განვიხილოთ ერთი მატერიალური წერტილის ჰამილტონიანი სხვადასხვა ორთოგონალურ კოორდინატებში.

ნათელია, რომ დეკარტის კოორდინატებში ჰამილტონიანი ტოლია

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z), \quad (83,8)$$

ჰამილტონის განტოლებებს კი ეწებათ სახე:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m} \quad (83,9)$$

და

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (83,10)$$

პირველი განტოლებები იძლევიან იმპულსების გეგმილებს, მეორე კი — ნიუტონის განტოლებებს.

ცილინდრულ კოორდინატებში, თანხმად (5.18) ფორმულისა,

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_\rho^2 + \frac{p_\phi^2}{\rho^2} + p_z^2 \right) + U(\rho, \phi, z). \quad (83,11)$$

სფერულ კოორდინატებში (22,9) ფორმულა ჰამილტონიანისათვის მოგვეცემს

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\phi^2 \right) + U(r, \theta, \phi), \quad (83,12)$$

ხოლო პოლარულ კოორდინატებში (სიბრტყეში მოძრაობისას)

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) + U(r, \phi). \quad (83,13)$$

თუ გავიხსენებთ ლაგრანჟის ფუნქციის გამოხატულებას პარამეტრულ კოორდინატებში, ამავე კოორდინატებში ჰამილტონიანისათვის მივიღებთ

$$H = \frac{2(\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2)}{m(\xi + \eta)} + \frac{p_\phi^2}{2m\xi\eta} + U(\xi, \eta, \phi). \quad (83,14)$$

$p_\xi$ ,  $p_\eta$  და  $p_\phi$  იმპულსები განისაზღვრება (22,13) ფორმულებით.

ცენტრ. ლუკრი სიმეტრიის ველში მოძრაობისას (სიბრტყეში)

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + U(r). \quad (83,15)$$

ამასთან, რადგან  $p_\phi = l$ , ამიტომ

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r). \quad (83,16)$$

ამ შემთხვევაში ჰამილტონის განტოლებებს ექნება სახე

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\phi} = \frac{l}{mr^2}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) \right), \quad \dot{p}_\phi = 0. \quad (83,17)$$

ასევე ნათელია, რომ წრფივი პარამონიული ოსცილატორისათვის

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \quad (83,18)$$

### § 81. ცვლადთა გარდაქმნის ლეჟანდრის მეთოდი

ჰამილტონის განტოლებების გამოყენების დროს ჩვენ  $q$ ,  $p$  ცვლადებიდან გადავიდეთ  $q$ ,  $p$  ცვლადებზე, ამასთან ეს გარდაქმნა მოვახდინოთ ფორმალური გზით. არსებობს ცვლადთა გარდაქმნის ზოგადი მეთოდი, რომელიც დაამუშავა ლეჟანდრმა. რადგან ცვლადის გარდაქმნასთან შემდგომშიაც გვექნება საქმე, ამიტომ მიზანშეწონილია ამ მეთოდის განხილვა.

ვთქვათ, გვაქვს რაიმე  $f(x_1, x_2 \dots x_n, y_1, y_2 \dots y_n, t)$  ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია  $x_i$ ,  $y_i$  ცვლადებზე და დროზე. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის დიფერენციალი

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt. \quad (84,1)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad v_i = \frac{\partial f}{\partial y_i}, \quad (84,2)$$

მაშინ  $f$  ფუნქციას დიფერენციალისათვის გვექნება:

$$df = \sum_{i=1}^n u_i dx_i + \sum_{i=1}^n v_i dy_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt. \quad (84,3)$$

ამ ტოლობიდან  $u_i$  და  $v_i$  განისაზღვრებიან როგორც  $f$ -ის კერძო წარმოებულები: სათანაოდ,  $x_i$  და  $y_i$  ცვლადებით, ამიტომ  $f$ -ს უწოდებენ წარმომქმნელ ფუნქციას  $x$  და  $y$  ცვლადების მიმართ. დავუშვათ ახლა, რომ გვიჩადა ახალ  $u_i$  და  $v_i$  დამოუკიდებელ ცვლადებზე გადასვლა. ამისათვის შემოვიღოთ ახალი წარმომქმნელი ფუნქცია  $F'(u_1, u_2 \dots u_n, v_1, v_2 \dots v_n, t)$  შემდეგი განმარტებით:

$$F' = \sum u_i x_i - f. \quad (84,4)$$

ვიპოვოთ  $dF'$  და გავითვალისწინოთ (84,3) ფორმულა; მივიღებთ

$$dF' = \sum x_i du_i - \sum v_i dy_i - \frac{\partial f}{\partial t} dt. \quad (84,5)$$



ამგვარად, ჩვენ გადავიღით ახალ  $u$  და  $y$  ცვლადებზე; ამასთან,

$$x_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}, \quad v_i = -\frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial t}. \quad (84,6)$$

საილუსტრაციოდ გავიმეოროთ ლაგრანჟიანიდან ჰამილტონიანზე გადასვლა. ჩვენ გვქონდა (82,2) განტოლება

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (84,7)$$

აქ დამოუკიდებელი ცვლადებია  $q_i$  და  $\dot{q}_i$ , გადავიღეთ ახალ დამოუკიდებელ  $q_i$  და  $p_i$  ცვლადებზე. ამისათვის, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, საჭიროა ახალი წარმოქმნილი ფუნქციის შემოღება

$$H = \sum \dot{q}_i p_i - L. \quad (84,8)$$

რომელიც ემთხვევა ჰამილტონიანის გამოხატულებას. მაშასადამე. ჰამილტონიანი ყოფილა ახალი წარმოქმნილი ფუნქცია. მისი დიფერენციალი, თანახმად (84,5)-სა, გეძლევა

$$dH = \sum \dot{q}_i dp_i - \sum \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (84,9)$$

საიდანაც მივიღებთ ჰამილტონის განტოლებებს.

### § 55. ჰამილტონის განტოლებების გამოყვანა ვარიაციული პრინციპიდან

ისევე როგორც ლაგრანჟის განტოლებები, ჰამილტონის განტოლებებიც შეგვიძლია მივიღოთ ვარიაციული პრინციპიდან. როგორც ვაჩვენეთ, ქმედების ფუნქცია განმარტებულია შემდეგი ფორმულით (აქ  $q$ -ში იგულისხმება ყველა ცვლადი  $q_1, q_2 \dots q_n$ , ხოლო  $\dot{q}$ -ში—ყველა განზოგადებული სიჩქარე)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (85,1)$$

მაგრამ, თანახმად (83,1) ფორმულისა,

$$I = \sum \dot{q}_i p_i - H, \quad (85,2)$$

ასე რომ, ქმედების ფუნქციას წეძლება შემდეგი სახე მიეღეს.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum p_i dq_i - H dt \right). \quad (85,3)$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ გამოსახულების ექსტრემუმი, თუ კოორდინატებისა და იმპულსების ვარიაციებს დამოუკიდებლად ჩავთვლით, ზოგჯერ ჰამილტონის განტოლებებს. კვლავ ვიგულისხმობთ, რომ ტრაექტორიის ბოლო წერტილები დამაგრებულია და გამოვიყენოთ ჰამილტონის პრინციპი

$$\delta \int \left( \sum p_i dq_i - H dt \right) = 0. \quad (85,4)$$

მოვხდინოთ ვარირება

$$\int \left\{ \sum [\delta p_i dq_i + p_i \delta (dq_i)] - \left[ \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt \right\} = 0 \quad (85,5)$$

და განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int \sum p_i \delta dq_i. \quad (85,6)$$

ამ ინტეგრალში გამოვიყენოთ პირობა  $\delta dq_i = d\delta q_i$  და შემდეგ ჩავატაროთ ნაწილობითი ინტეგრაცია. მივიღებთ

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum p_i \delta dq_i = \sum p_i \delta p_i \int_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum \delta q_i dp_i. \quad (85,7)$$

რადგან  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ , ამიტომ ამ ინტეგრალის პირველი გამოსახულება ნულის ტოლია და (85,5) ასე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \left\{ \left[ dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \right] \delta p_i - \left[ \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt \right] \delta q_i \right\} = 0. \quad (85,8)$$

აქ  $t_1$  და  $t_2$  ნებისმიერია. როგორც არ უნდა ავირჩიოთ ისინი, ინტეგრალის ნულთან ტოლობა არ დაირღვევა. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ ინტეგრალქვეშა წამი ნულის ტოლია. თუ იმასაც გავითვალისწინებთ, რომ  $\delta p_i$  და  $\delta q_i$ -ს დამოუკიდებლედ ვიხილავთ, უნდა დავასკვნათ, რომ წამი ნულის ტოლი მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ იქნება, როცა

$$dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt = 0, \quad dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt = 0, \quad (85,9)$$

რაც  $dt$ -ზე გაყოფის შემდეგ გვაძლევს ჰამილტონის განტოლებებს:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (85,10)$$

ამ გამოყვანიდან ნათლად გამოჩნდა ერთი მნიშვნელოვანი გარემოება, რომელიც დამახასიათებელია ჰამილტონის განტოლებებისათვის, სახელდობრ ის, რომ განზოგადებული კოორდინატები და იმპულსები ერთმანეთზე დამოუკიდებელი ცვლადებია. ე. ი. იმპულსები კი არ წარმოადგენს კოორდინატების მიხედვით განსაზღვრულ ცვლადებს (მაგალითად, პროპორციული  $\dot{q}_i$  სიჩქარეების), არამედ ისეაივე დამოუკიდებელი ცვლადებია, როგორც კოორდინატები. ამიტომ  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ცვლადებს ფორმალურად შერჩათ განზოგადებული იმპულსების სახელწოდება. სინამდვილეში, ჰამილტონის მეთოდში მათი სახით შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი  $n$  რაოდენობის  $q_1, q_2, \dots, q_n$  კოორდინატებისაგან დამოუკიდებელი სიდიდე.

## § 86. რაუნისის ფუნქცია

ჩვენ განვიხილეთ მექანიკური სისტემის აღწერის ორი მეთოდი. პირველი ლაგრანჟის მეთოდი, სადაც დამოუკიდებელი ცვლადებია განზოგადებული კოორდინატები. მოძრაობის განტოლება წარმოადგენს ამ ცვლადების მიმართ მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებებს. სისტემას ასახიათებს ლაგრანჟის ფუნქცია. რომელიც დამოკიდებულია როგორც განზოგადებულ კოორდინატებზე, ისე განზო-

გაღებულ სიჩქარეებზე. მეორე მეთოდი ეკუთვნის ჰამილტონს. ამ მეთოდში დამოუკიდებელი ცვლადებია განზოგადებული კოორდინატები და განზოგადებული იმპულსები, სამაგიეროდ, მოძრაობის ჰამილტონის განტოლებები პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებებია. სისტემა ხასიათდება ჰამილტონის ფუნქციით, რომელიც დამოკიდებულია კოორდინატებზე და იმპულსებზე. მოძრაობის აღწერის პირველი მეთოდიდან მეორეზე გადასვლა ადვილად შეიძლება ცვლადის შეცვლის ლეჟანდრის მეთოდის გამოყენებით. კონკრეტული ამოცანების ამოხსნის დროს სარგებლობენ როგორც ერთი, ისე მეორე მეთოდი. მაგრამ არის შემთხვევები, როცა მეორე მეთოდს პირველთან შედარებით გარკვეული უპირატესობა გააჩნია. ეს გვაქვს მაშინ, როცა ზოგიერთი კოორდინატი არ შედის ლაგრანჟის ფუნქციაში. ანეთ კოორდინატს ციკლურს უწოდებენ. ლაგრანჟის მეთოდში, როცა  $q_k$  ციკლური კოორდინატია, ლაგრანჟიანი შესაბამის  $q_k$  სიჩქარეზეა დამოკიდებული და ჩვენ, მიუხედავად იმისა, რომ ციკლური კოორდინატი გვაქვს, კვლავ გვიხდება „როდენობის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა. ჰამილტონის მეთოდში კი, როცა  $q_k$  ციკლურია, მაშინ ჰამილტონიანი დამოკიდებული არაა  $q_k$ -ზე და ჰამილტონის განტოლება გვაძლევს

$$p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0, \quad p_k = c_k = \text{const.} \quad (86,1)$$

ამიტომ ჰამილტონიანი ფაქტიურად არც  $p_k$  იმპულსზეა დამოკიდებული და ჩვენ დაგვიკრძდება ერთით ნაკლები განტოლების ამოხსნა. ციკლური კოორდინატის დროზე დამოკიდებულება კი შეგვიძლია ვიპოვოთ განტოლებიდან

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial c_k}. \quad (86,2)$$

ზემოთ ნათქვამიდან ჩანს, რომ ციკლური კოორდინატების არსებობისას უფრო მოსახერხებელია ჰამილტონის მეთოდის გამოყენება. მაგრამ ხშირად ყველა განზოგადებული სიჩქარის შეცვლა კი არ არის ხელსაყრელი განზოგადებული იმპულსებით, არამედ მხოლოდ მაი, რომლებიც შეესაბამებიან ციკლურ კოორდინატებს, ე. ი. ხელსაყრელია ისეთ შერეულ წარმოდგენაზე გადასვლა. როცა მდგომარეობა აიწერება  $q$ -თი და ნაწილობრივ  $q'$  და  $p$ -თი. შექანიური სისტემის აღწერის ასეთი მეთოდი დამუშავებული იყო რაუსის მიერ.

დავუშვათ, მაშასადამე, რომ „განზოგადებული კოორდინატიდან პირველი  $s$  კოორდინატი ( $s < n$ ) ციკლურს წარმოადგენს, დანარჩენი  $n - s$  კოორდინატი კი არააციკლურია. გადავიდეთ ჰამილტონის მეთოდზე და ნაცვლად ამ  $s$  ციკლური კოორდინატის შესაბამისი  $q_1, q_2, \dots, q_s$  სიჩქარეებისა. შემოვიღოთ განზოგადებული იმპულსები  $p_1, p_2, \dots, p_s$ , დანარჩენი  $n - s$  სიჩქარე უცვლელი დავტოვოთ. ლაგრანჟის ფუნქციის დიფერენციალი

$$dL = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \quad (86,3)$$

ასე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ:

$$dL = \sum_{i=1}^s \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=s+1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^s p_i d\dot{q}_i + \sum_{i=s+1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i. \quad (86,4)$$

გადავიღეთ ახალ ცვლადებზე  $q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2 \dots p_s, \dot{q}_{s+1} \dots \dot{q}_n$ . ლეჟანდრის გარდაქმნის თანახმად  $L$ -ის ნაცვლად უნდა შემოვიღოთ ახალი წარმომქმნელი ფუნქცია

$$R(q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2 \dots p_s, \dot{q}_{s+1}, \dots, \dot{q}_n) = \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - L. \quad (86,5)$$

ამ ფუნქციას რაუსის ფუნქციას უწოდებენ; მისი დიფერენციალისათვის გვაქვს

$$dR = \sum_{i=1}^s \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^s \dot{p}_i dq_i - \sum_{i=s+1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=s+1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \quad (86,6)$$

ამ ტოლობიდან კი მივიღებთ:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial R}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial R}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, s), \quad (86,7)$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=s+1, \dots, n). \quad (86,8)$$

თუ (86,8) ტოლობებს ლაგრანჟის განტოლებებში შევიტანთ, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad (i=s+1, \dots, n). \quad (86,9)$$

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ: რაუსის ფუნქცია  $q_1, q_2 \dots q_s, p_1, p_2, \dots, p_s$  ცვლადებისათვის აკმაყოფილებს ჰამილტონის (86,7) განტოლებებს, დანარჩენი ცვლადებისათვის კი — ლაგრანჟის (86,9) განტოლებებს. ასე რომ, იგი ასრულებს ნაწილობრივ ჰამილტონიანის და ნაწილობრივ ლაგრანჟიანის როლს. რადგან არც ლაგრანჟის და არც ჰამილტონის ფუნქცია ციკლურ კოორდინატებს არ შეიცავს, ამიტომ არც რაუსის ფუნქცია იქნება მათზე დამოკიდებული. გარდა ამისა, (86,1) განტოლების თანახმად. ყველა  $\dot{p}_i = 0$ , ე. ი.  $p_i = c_i = \text{const}$ . რის გამოც  $R$  ფუნქცია დამოკიდებული არაა არც ციკლურ კოორდინატებზე და არც მათ შესაბამის იმპულსებზე. ამიტომ (86,9) განტოლებიდან სასვებით გამორიცხულია ციკლური კოორდინატები და ეს უკანასკნელი შეგვიძლია ვიპოვოთ მათ გარეშე. ციკლური კოორდინატების დროზე დამოკიდებულებას ვიპოვიოთ

$$\dot{q}_i = \frac{\partial R}{\partial p_i} = \frac{\partial R}{\partial c_i} \quad (86,10)$$

განტოლებიდან.

რაუსის მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მარტივი მაგალითი. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L = \frac{1}{2} \frac{\dot{q}_1^2}{q_2^2} + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 - \frac{q_2^2}{2}. \quad (86,11)$$

აქ  $q_1$  ციკლური კოორდინატია, ამიტომ

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\dot{q}_1}{q_2^2} = c. \quad (86,12)$$

$c$  მუდმივია. რაუსის ფუნქციას ექნება სახე

$$R = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 - L = \frac{\dot{q}_1^2}{2q_2^2} - \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 + \frac{q_2^2}{2}. \quad (86,13)$$

რადგან  $\dot{q}_1 = c\dot{q}_2$ , ამიტომ

$$R = \frac{1}{2} (c^2 + 1) \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2} q_2^2. \quad (86,14)$$

ღვეწეროთ (86,9) განტოლება  $q_2$  კოორდინატისათვის; მივიღებთ

$$\ddot{q}_2 + (c^2 + 1) q_2 = 0. \quad (86,15)$$

ამ განტოლების ამოხსნა მარტივია; სახელდობრ, გვექნება

$$q_2 = a \cos(\sqrt{c^2 + 1}t + \alpha). \quad (86,16)$$

$a$ ,  $c$  და  $\alpha$  მუდმივები განისაზღვრება საწყისი პირობებიდან. რაც შეეხება  $q_1$  კოორდინატს, მისი დროზე დამოკიდებულება განისაზღვრება (86,10) განტოლებიდან

$$q_1 = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial c} dt = c \int_0^t \dot{q}_2 dt. \quad (86,17)$$

ამასთან, აქ გამოვიყენეთ საწყისი პირობა, რომ, როცა  $t=0$ ,  $q_1=0$ . თუ (86,17)-ში შევიტანთ  $q_2$ -ს მნიშვნელობას, მივიღებთ

$$q_1 = ca^2 \int_0^t \cos^2(\sqrt{c^2 + 1}t + \alpha) dt. \quad (86,18)$$

მარტივი ინტეგრაციის ჩატარების შემდეგ ვექნება

$$q_1 = \frac{ca^2}{2} \left\{ t + \frac{\cos(\sqrt{c^2 + 1}t + 2\alpha) \sin(\sqrt{c^2 + 1}t)}{\sqrt{c^2 + 1}} \right\}. \quad (86,19)$$

ამით ამოცანა საესებით გადაწვეტილია

## კანონიკური გარდაქმნები

ამ თავში ჩვენ შევისწავლით კანონიკურ გარდაქმნებს და შევაფასებთ მათ მნიშვნელობას ჰამილტონის განტოლებების მოხერხებულად ამოხსნისათვის. კანონიკურ გარდაქმნებში გავაერთიანებთ კოორდინატებისა და იმპულსების გარდაქმნების იმ კლასს, რომელიც კოვარიანტულს ტოვებს ჰამილტონის განტოლებებს. ამ თავში დავინახავთ ჰამილტონის განტოლებების მნიშვნელოვან უპირატესობას, რომელიც მათ ახასიათებთ ლაგრანჟის განტოლებებთან შედარებით.

### § 87. კანონიკური გარდაქმნები

ჰამილტონის მეთოდში, ამგვარად, დამოუკიდებელი ცვლადებია განზოგადებული კოორდინატები და იმპულსები. ამ მეთოდის მათემატიკურ უპირატესობაზე ლაგრანჟის მეთოდთან შედარებით უკვე მიუვითეთ, მაგრამ ეს არაა ძირითადი მიზანი ჰამილტონის ფორმალიზმისა. მთავარი ისაა, რომ ამ მეთოდში განზოგადებული იმპულსები დამოუკიდებელი სიდიდეებია, რის გამოც გვეძლევა დიდი თავისუფლება  $2n$  რადენობის დამოუკიდებელი ცვლადის არჩევისა; გარდა ამისა, ჰამილტონის მეთოდი თანამიმდევრულად ზოგადდება თეორიული ფიზიკის ისეთი დარგებისთვისაც, როგორცაა: სტატისტიკური ფიზიკა, ველის თეორია და კვანტური მექანიკა.

ჩვენ ზემოთ მიუვითეთ ციკლური კოორდინატების მნიშვნელობაზე. ციკლური კოორდინატების არსებობა ძალიან აადვილებს ამოცანის გადაწყვეტას, რადენადაც შესაბამისი იმპულსი მოძრაობის ინტეგრალს წარმოადგენს. ამასთან, ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ციკლური კოორდინატების დროს განსაკუთრებით ხელსაყრელია ჰამილტონის განტოლებებით სარგებლობა. რაზეა დამოკიდებული ამა თუ იმ ამოცანისათვის ციკლური კოორდინატების არსებობა? ამჟამად, რომ იგი დამოკიდებულია განზოგადებული კოორდინატების ხელსაყრელად შერჩევაზე. მაგალითად, თუ კვანტურის მოძრაობას შევისწავლით დეკარტის კოორდინატებში სიბრტყეზე, მაშინ არც ერთი ციკლური კოორდინატი არ გვექნება, იმ დროს, როცა ამავე ამოცანის პოლარკოორდინატებში განხილვისას ფ პოლარკუთხე ციკლურ კოორდინატს წარმოადგენს. ამიტომ ყოველთვის უნდა ვეცადოთ ამოცანა გადავწყვიტოთ იმ კოორდინატებში, რომლებშიც რაც შეიძლება მეტი იქნება ციკლური. ამ მიზნით ბუნებრივია ვიპოვოთ კოორდინატების ისეთი გარდაქმნის კანონები, რომლებიც, ერთის მხრივ, კოვარიანტულს დატოვებს მოძრაობის განტოლებებს, მეორეს მხრივ კი, შეიცავს რაც შეიძლება მეტ ციკლურ კოორდინატებს. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ძველი კოორდინატებისა და იმპულსების ახალ კოორდინატებზე

და იმპულსებზე გადასვლის კანონების ის ერთობლიობა, რომელიც კოვარიანტულს ტოვებს ჰამილტონის განტოლებებს.

ვთქვათ, სისტემის თავისუფლების ხარისხი არის  $n$  და იგი აიწერება  $q_1, q_2, \dots, q_n$  და  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ცვლადებით. შევვიღოთ ახალი  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  და  $P_1, P_2, \dots, P_n$  სივლილებო შეზღვევი კანონით:

$$Q_i = f_i(q, p, t), \quad (87,1)$$

$$P_i = \varphi_i(q, p, t), \quad (87,2)$$

სადაც  $f_i$  და  $\varphi_i$  რაღაც ფუნქციებია. ხოლო  $q$  და  $p$  წარმოადგენს კოორდინატების და იმპულსების ერთობლიობას. თუ აღმოჩნდა, რომ ახალ  $Q, P$  კოორდინატებშიაც სამართლიანია ჰამილტონის განტოლებები:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}, \quad (87,3)$$

სადაც  $H'(Q, P, t)$  წარმოადგენს ჰამილტონის ფუნქციას ახალ  $Q$  და  $P$  ცვლადებში, მაშინ (87,1), (87,2) გარდაქმნას კანონიკურ გარდაქმნას უწოდებენ, რადგან ამ გარდაქმნის დროს  $Q$  და  $P$  კვლავ კანონიკურ ცვლადებად რჩებიან. მაშასადამე, კანონიკური გარდაქმნები ეკუთვნის კოორდინატთა გარდაქმნის იმ კლასს, რომელიც ჰამილტონის განტოლებებს კოვარიანტულს ტოვებს. ცხადია, რომ ზოგად შემთხვევაში ნებისმიერი  $f_i$  და  $\varphi_i$  ფუნქციებისათვის (87.1) და (87.2) გარდაქმნები კანონიკური გარდაქმნები არ იქნება. ამიტომ საინტერესოა დავადგინოთ, რა პირობები უნდა იყოს დატული, რომ აღნიშნული გარდაქმნები კანონიკურ გარდაქმნებს წარმოადგენდეს.

კანონიკური გარდაქმნების ფორმულების მისაღებად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ჰამილტონის განტოლებების ეკვივალენტური უმცირესი ქმედების პრინციპი. თუ გვსურს, რომ როგორც  $q, p$  ისე  $Q, P$  კანონიკური ცვლადები იყოს (ე. ი. აკმაყოფილებდეს ერთი და იმავე ფორმის ჰამილტონის განტოლებებს), საჭიროა გვეკონდეს, ერთი მხრივ,

$$\delta \int (\sum p_i dq_i - H dt) = 0 \quad (87,4)$$

და, მეორე მხრივ,

$$\delta \int (\sum P_i dQ_i - H' dt) = 0. \quad (87,5)$$

ვინაიდან ორივე ეს ტოლობა დატული უნდა იყოს ერთდროულად, ადვილია იმის ჩვენება, რომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულებანი უნდა განსხვავდებოდეს ერთმანეთისაგან რაღაცა ფუნქციის სრული წარმოებულობით. ეს იქედან გამომდინარეობს, რომ ამ ფუნქციის ვარიაცია ინტეგრალის საზღვრებზე ნულს გაუტოლდება. ამრიგად,

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt = \sum_{i=1}^n P_i dQ_i - H' dt + d\Phi, \quad (87,6)$$

სადაც  $\Phi$  არის ნებისმიერი ფუნქცია როგორც დროისა, ისე ყველა  $q, p, Q$  და  $P$  ცვლადის, რომელთა რიცხვი არის  $4n$ . მაგრამ ეს ცვლადები დაკავშირებული არიან  $2n$  გარდაქმნის ფორმულებით. ასე რომ, დამოუკიდებელი მათ შორის იქნება  $2n$ . ამიტომ ამ ფუნქციებში არგუმენტებად შეიძლება ავირჩიოთ  $\Phi_1(q, Q, t), \Phi_2(q, P, t), \Phi_3(p, Q, t), \Phi_4(p, P, t)$ .

ჩვენ ჯერ ავირჩიოთ  $\Phi = \Phi_1(q, Q, t)$ . უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$d\Phi_1(q, Q, t) = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - \sum_{i=1}^n P_i dQ_i + (H' - H) dt, \quad (87,7)$$

საიდანაც გვექნება:

$$p_i = \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_i}, \quad (87,8)$$

$$H' = H + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \quad (87,9)$$

$\Phi_1$  ფუნქციას კანონიკური გარდაქმნის წარმომქმნელ ფუნქციას უწოდებენ. როცა იგი დროზე ცხადად არაა დამოკიდებული, მაშინ (87,9)-ში  $H' = H$  და ძველიდან ახალი ჰამილტონიანის მისაღებად საკმარისია  $H$ -ში  $q$  და  $p$  შევცვალოთ ახალი  $Q$  და  $P$  ცვლადებით<sup>1</sup>. (87,8)-ის პირველი განტოლების დახმარებით შეიძლება ყველა  $Q_i$  გამოვხატოთ  $p_i$ ,  $q_i$  და  $t$ -ს საშუალებით. ამით მივიღებთ (87,1) გარდაქმნებს. თუ ნაპოვნ გამოსახულებებს ჩავსვავთ (87,8)-ის მეორე განტოლებაში, მივიღებთ (87,2) გარდაქმნის ფორმულებს; (87,9) განტოლებიდან კი განისაზღვრება ახალი ჰამილტონიანი.

განვიხილოთ მარტივი მაგალითი, რომელსაც ყოველთვის იხილავენ კანონიკური გარდაქმნების საილუსტრაციოდ. ვთქვათ, გვაქვს წრფივი პარამონიული ოსცილატორი. მისი ჰამილტონის ფუნქცია განისაზღვრება ფორმულით

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad (87,10)$$

გადავიდეთ ახალ  $Q$  და  $P$  ცვლადებზე შემდეგი კანონით:

$$Q = \text{arc ctg } \frac{m\omega q}{p}. \quad (87,11)$$

ამ ვარჯიშიდან განესაზღვროთ  $p$ . გვექნება

$$p = m\omega q \text{ ctg } Q. \quad (87,11')$$

მაგრამ, (87,8) გარდაქმნების თანახმად,  $p = \frac{\partial \Phi_1}{\partial q}$ ; ასე რომ,

$$\Phi_1 = \frac{m\omega q^2}{2} \text{ ctg } Q. \quad (87,12)$$

მეორე მხრივ.

$$P = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2} \frac{1}{\sin^2 Q}. \quad (87,12')$$

ამგვარად, გვექნება

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q. \quad (87,13)$$

ახალ კოორდინატებში ჰამილტონიანს ექნება სახე

$$H' = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P. \quad (87,14)$$

<sup>1</sup> ამ შემთხვევაში, მოძრაობის ჰამილტონის განტოლებებს ინვარიანტული სახე ექნება.



როგორც ვხედავთ, ახალ ცვლადებში  $Q$  ციკლურ კოორდინატს წარმოადგენს, ამიტომ  $P = \text{const}$ . ჰამილტონის განტოლებებს ექნებათ სახე:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0. \quad (87,15)$$

პირველი განტოლებიდან  $Q = \omega t + \alpha$ , სადაც  $\alpha = \text{const}$ , (87,13) ტოლობიდან კი მივიღებთ

$$p = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin(\omega t + \alpha). \quad (87,16)$$

(87,14)-დან ჩანს, რომ  $P = \frac{E}{\omega}$ , ამიტომ რხევის ამპლიტუდა ტოლია

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}, \quad (87,17)$$

საიდანაც ოსცილატორის ენერჯიისათვის მივიღებთ ცნობილ ფორმულას

$$E = \frac{m\omega^2 a^2}{2}. \quad (87,18)$$

მართალია, ოსცილატორის ამოცანა ნებისმიერ კოორდინატებში ადვილად ამოიხსნება, მაგრამ განხილული მაგალითიდანაც ნათლად ჩანს კანონიკური გარდაქმნების დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა, რომელმაც საშუალება მოგვცა ოსცილატორის ერთადერთი კოორდინატი ციკლური გაგვეხადო.

ახლა განვიხილოთ შემდეგი ტიპის წარმომქმნელი ფუნქცია

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^n q_i Q_i. \quad (87,19)$$

მაშინ, თანახმად (87,8) ფორმულისა,

$$p_i = \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i} = Q_i, \quad P_i = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_i} = -q_i. \quad (87,20)$$

მიღებული გარდაქმნა ადგილს უცვლის კოორდინატებსა და იმპულსებს. მართლაც, ჰამილტონის განტოლებები

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (87,21)$$

ინვარიანტული რჩება, თუ  $q_i \rightarrow p_i$  და  $p_i \rightarrow -q_i$ , რაც ერთხელ კიდევ გვიჩვენებს იმას, რომ ჰამილტონის მეთოდში კოორდინატებსა და იმპულსებს შორის განსხვავება არსებობს მხოლოდ სახელწოდებაში, სინამდვილეში ისინი დამოუკიდებელ ცვლადთა სისტემას წარმოადგენენ. ამის გამო,  $q$  და  $p$ -ს ჰამილტონის მეთოდში, უბრალოდ, კანონიკურად შეუღლებულ ცვლადებს უწოდებენ.

კანონიკური გარდაქმნების სხვა შემთხვევები. ზემოთ განვიხილეთ შემთხვევა, როცა წარმომქმნელი ფუნქცია დამოკიდებული იყო  $q$ ,  $Q$  ცვლადებზე. ზოგად შემთხვევაში შეიძლება შეგვხვდეს სხვა სახის დამოკიდებულებაც. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ცვლადებზე დამოკიდებულების თვალსაზრისით შესაძლებელია გვექონდეს შემდეგი ოთხი ტიპის წარმომქმნელი ფუნქცია:

$$\Phi_1(q, Q, t), \quad \Phi_2(q, P, t), \quad \Phi_3(p, Q, t), \quad \Phi_4(p, P, t). \quad (87,22)$$

რადგან ცნობილია კანონიკური გარდაქმნები, რომლებსაც ახორციელებს  $q$  და  $Q$  ცვლადებზე დამოკიდებული ფუნქცია, ადვილად ვიპოვით  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$  ფუნქციებით განხორციელებულ გარდაქმნებსაც ცვლადის შეცვლის ლეჟანდრის მეთოდის გამოყენებით. ასე მაგალითად, რადგან  $P_1 = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_1}$ , ამიტომ

$$\Phi_2(q, P, t) = \Phi_1(q, Q, t) + \sum P_i Q_i. \quad (87,23)$$

რომელიც ლიფერენციალისათვის მოგვცემს

$$d\Phi_2 = \sum p_i dq_i + \sum Q_i dP_i + (H' - H) dt, \quad (87,24)$$

საიდანაც

$$p_i = \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi_2}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \quad (87,25)$$

ანალოგიურად ვიპოვით კანონიკური გარდაქმნის ფორმულებს, რომლებიც ხორციელდებიან  $\Phi_3$  და  $\Phi_4$  წარმომქმნელი ფუნქციებით.

განვიხილოთ მარტივი მაგალითები. ვთქვათ,  $\Phi_2$  გარდაქმნას აქვს სახე

$$\Phi_2 = \sum q_i^x P_i. \quad (87,26)$$

მაშინ (87,25) ფორმულებიდან მივიღებთ:

$$p_i = \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_i} = P_i, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi_2}{\partial P_i} = q_i, \quad H' = H. \quad (87,27)$$

ამ შემთხვევაში გვაქვს იგივეური გარდაქმნა — ძველი კოორდინატები ემთხვევა ახალს. იგივე ტიპის უფრო ზოგად გარდაქმნას ექნება გამოხატულება

$$\Phi_2 = \sum \varphi_i(q, t) P_i. \quad (87,28)$$

სადაც  $\varphi_i$  ნებისმიერი ფუნქციაა. თანახმად (87,25) ფორმულებისა,

$$Q_i = \frac{\partial \Phi_2}{\partial P_i} = \varphi_i(q, t). \quad (87,29)$$

ეს დამოკიდებულება აღნიშნავს ძველი კოორდინატების გარდაქმნას ახალში. ასეთი ტიპის გარდაქმნას, როგორც ცნობილია, წერტილოვან გარდაქმნას უწოდებენ<sup>1</sup>. რადგან  $\varphi_i$  ნებისმიერი ფუნქციაა, ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ყველა წერტილოვან გარდაქმნა კანონიკურ გარდაქმნას წარმოადგენს კანონიკური იქნება, მაგალითად, ნებისმიერი ორთოგონალური გარდაქმნა

$$Q_i = \sum_k a_{ik} q_k, \quad (87,30)$$

სადაც  $a_{ik}$  კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\sum_i a_{ik} a_{in} = \delta_{kn}. \quad (87,31)$$

<sup>1</sup> მოჩრავი შექან-კური სისტემის ისეთ გარდაქმნას, როცა განზოგადებული  $q_i$  და  $Q_i$  კოორდინატები ერთმანეთთან დაკავშირებულია დამოკიდებულებით, რომელიც  $P_i$  განზოგადებულ იმპულსზე დამოკიდებული არ არის, იწოდება წერტილოვან გარდაქმნად.

ამ შემთხვევაში წარმოქმნილი ფუნქცია იქნება

$$\Phi_2 = \sum a_{ik} q_i P_i \quad (87,32)$$

(87,25) ფორმულებიდან კი ვპოულობთ, რომ

$$p_j = \frac{\partial \Phi_2}{\partial q_j} = \sum_i a_{ij} P_i \quad (87,33)$$

აქედან შებრუნებული დამოკიდებულებებისათვის მივიღებთ

$$P_k = \sum_j a_{kj} p_j \quad (87,34)$$

უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნები. კანონიკური ცვლადების უსასრულოდ მცირე გარდაქმნა ეწოდება თაზური სივრცის ყოველი  $(q_i, p_i)$  წერტილის უსასრულოდ მახლობელ წერტილში გადასვლას. როგორც დავინახეთ, იგივე გარდაქმნას შეესაბამება შემდეგი ფუნქცია:

$$\Phi_2 = \sum q_i P_i \quad (87,35)$$

შემოვიღოთ  $\varepsilon$  უსასრულოდ მცირე პარამეტრი, რომელიც დამოკიდებული არაა კოორდინატებზე და იმპულსებზე. მაშინ ცვლადების უსასრულოდ მცირე ცვლილებას შეესაბამება ფუნქცია

$$\Phi = \sum q_i P_i + \varepsilon \Omega(q, P), \quad (87,36)$$

სადაც  $\Omega$  ნებისმიერი ფუნქციაა. თანახმად (87,25) ფორმულებისა, ახალი ცვლადებისათვის გვექნება:

$$Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial P_i}, \quad p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \quad (87,37)$$

საიდანაც

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial P_i}, \quad \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \quad (87,38)$$

რადგან სხვაობა  $P_i - p_i$  უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ  $\Omega(q, P)$  გამოსახულებაში  $P_i$  შეგვიძლია შევცვალოთ  $p_i$ -ით, რაც მოგვცემს:

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial}{\partial p_i} \Omega(q, p), \quad \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial q_i} \Omega(q, p). \quad (87,39)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ უსასრულოდ მცირე გარდაქმნები ხორციელდება  $\Omega(q, p)$  წარმოქმნილი ფუნქციით.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა

$$\dot{z} = dt, \quad \Omega = H. \quad (87,40)$$

ამ შემთხვევაში (87,39) ფორმულები მოგვცემს:

$$dq_i = dt \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad dp_i = -dt \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (87,41)$$

მივიღეთ ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები, ე. ი. განზოგადებული კოორდინატები და მისი შეუღლებული იმპულსების ცვლილება, რომლის დროსაც წარმოქმნილი ფუნქცია ჰამილტონიანია, ისე ხდება, როგორც ამას მოძრაობის განტოლება მოითხოვს.  $t_0$ -დან  $t$  სასრულ დროში ცვლილება შეგვიძლია წარმოვიღინოთ

როგორც ისეთი უსასრულო მცირე კანონიკური გარდაქმნები, რომლებიც ხორციელდება  $H$  წარმომქმნელი ფუნქციით, რაც იმას გვეუბნება, რომ სისტემის მოძრაობა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც იმ კანონიკური გარდაქმნების უწყვეტი განხორციელება, რომელსაც წარმომქმნელ ფუნქციად აქვს ჰამილტონიანი.

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ  $\Phi_3(p, Q, t)$  და  $\Phi_4(p, P, t)$  წარმომქმნელი ფუნქციებას შემთხვევაში გვექნება

$$\Phi_3(p, Q, t) = \Phi_1(q, Q, t) - \sum q_i p_i, \quad (87,42)$$

რომელიც მოგვცემს:

$$q_i = -\frac{\partial \Phi_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial \Phi_3}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}. \quad (87,43)$$

ასევე

$$\Phi_4(p, P, t) = \Phi_1(q, Q, t) + \sum Q_i P_i - \sum q_i p_i, \quad (87,44)$$

საიდანაც

$$q_i = -\frac{\partial \Phi_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = -\frac{\partial \Phi_4}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi_4}{\partial t} \quad (87,45)$$

### § 88. პუასონის კლასიკური ფრჩხილები

ვთქვათ, გვაქვს განზოგადებული კოორდინატებისა და განზოგადებული იმპულსების რაიმე ფუნქცია  $F(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n; t)$ , რომელიც, აგრეთვე, დროის ცხადი ფუნქციაა. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის სრული წარმომებული დროთი. რადგან კოორდინატები და იმპულსები დროზე დამოკიდებული სიდიდეებია, ამიტომ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით გვექნება

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right). \quad (88,1)$$

$\dot{q}_i$  და  $\dot{p}_i$  მნიშვნელობანი შევიტანოთ ჰამილტონის განტოლებებიდან

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (88,2)$$

მაშინ

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + [H, F], \quad (88,3)$$

სადაც

$$[H, F] = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial p_k} \right) \quad (88,4)$$

წარმოადგენს პუასონის ფრჩხილებს  $H$  და  $F$  ფუნქციებისათვის. (88,3)-ს კი უწოდებენ მოძრაობის კლასიკურ განტოლებას. მისგან რომ მართლაც მიიღება მოძრაობის ჰამილტონის განტოლებები, ამას ჩვენ ქვემოთ ვაჩვენებთ.

ზოგადად ორი ნებისმიერი  $A$  და  $B$  კოორდინატებისა და იმპულსების ფუნქციისათვის პუასონის ფრჩხილები განისაზღვრება ანალოგიურად

$$[A, B] = \sum_k \left( \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} - \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} \right). \quad (88,5)$$

ამ განსაზღვრიდან და ლიფერენციალების ჩლემენტარული წესების გამოყენებით ადვილად დავადგენთ პუასონის ფრჩხილების შემდეგ თვისებებს:

$$[A, B] = -[B, A], \quad (88,6)$$

$$[A, \text{const}] = 0, \quad (88,7)$$

$$[A_1 A_2, B] = A_1 [A_2, B] + A_2 [A_1, B], \quad (88,8)$$

$$[A, B_1 B_2] = B_1 [A, B_2] + B_2 [A, B_1], \quad (88,9)$$

$$[A_1 \pm A_2, B] = [A_1, B] \pm [A_2, B], \quad (88,10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [A, B] = \left[ \frac{\partial A}{\partial t}, B \right] + \left[ A, \frac{\partial B}{\partial t} \right]. \quad (88,11)$$

ამ უკანასკნელში  $t$  რაიმე პარამეტრია, რომელზედაც დამოკიდებულია  $A$  და  $B$ . ახლა ვიპოვოთ, რის ტოლია პუასონის ფრჩხილები  $[A, q_h]$ , სადაც  $q_h$  განზოგადებული კოორდინატია. განმარტებით

$$[A, q_n] = \sum \left( \frac{\partial A}{\partial p_h} \frac{\partial q_n}{\partial q_h} - \frac{\partial A}{\partial q_h} \frac{\partial q_n}{\partial p_h} \right). \quad (88,12)$$

რადგან  $p_h$  და  $q_h$  დამოუკიდებელი ცვლადებია, ამიტომ მეორე წევრა ნულის ტოლია; პირველში კი  $\frac{\partial q_n}{\partial q_h} = \delta_{nh}$ , და ფილტრაციის თვისების გამოყენებით მივიღებთ

$$[A, q_n] = \frac{\partial A}{\partial p_n}. \quad (88,13)$$

სრულიად ანალოგიურად გვექნება

$$[A, p_n] = -\frac{\partial A}{\partial q_n}. \quad (88,14)$$

ცხადია, რომ

$$[q_i, q_h] = [p_i, p_h] = 0, \quad (88,15)$$

ხოლო

$$[p_n, q_m] = \sum \left( \frac{\partial p_n}{\partial p_h} \frac{\partial q_m}{\partial q_h} - \frac{\partial p_n}{\partial q_h} \frac{\partial q_m}{\partial p_h} \right) = \sum_h \delta_{nh} \delta_{mh}. \quad (88,16)$$

თუ გამოვიყენებთ ფილტრაციის თვისებას, საბოლოოდ გვექნება

$$[p_n, q_m] = \delta_{nm}. \quad (88,17)$$

ამ ფრჩხილებს პუასონის ფუნდამენტური ფრჩხილები ეწოდება. ამგვარად, იმპულსებიდან და კოორდინატებიდან აღებული პუასონის ფრჩხილები ნულისაგან განსხვავებულია მხოლოდ ერთსახელა მდგენელებისათვის. მაგალითად, ერთი ნაწილაკისათვის დეკარტის კოორდინატებში გვექნება:

$$[p_x, x] = 1, \quad [p_y, y] = 1, \quad [p_z, z] = 1. \quad (88,18)$$

ყველა სხვა შესაძლო ფრჩხილები კოორდინატებიდან და იმპულსებიდან ნულის ტოლია.

დაბოლოს, თუ  $A, B, C$  კოორდინატებისა და იმპულსების ნებისმიერი ფუნქციებია, ადვილი აქვს პუასონის იგივეობას (ამ იგივეობას ხშირად იაკობის იგივეობასაც უწოდებენ)

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0. \quad (88,19)$$

როგორც ვხედავთ, პირველი ფრჩხილებიდან შემდგომი მიიღება ციკლური გადასმით. ამ იგივეობის შემოწმება ხელსაყრელია უშუალოდ. ასეთი გზით შემოწმება იმდენად ელემენტარულია, რომ შეიძლება თვით მკითხველს მივანდოთ.

პუასონის ფრჩხილები სხვადასხვა ფიზიკური სიდიდეებიდან. საინტერესოა გამოვთვალოთ პუასონის  $[l_i, x_k]$ ,  $[l_i, \rho_k]$  და  $[l_i, l_k]$  ფრჩხილები, სადაც  $l_i$  იმპულსის მომენტის  $i$ -ური მდგენელი განისაზღვრება ფორმულით

$$l_i = \sum_{m,n} \varepsilon_{imn} x_m \rho_n. \quad (88,21)$$

ვპოვოთ ჯერ  $[l_i, x_k]$  ფრჩხილები; გვექნება

$$\begin{aligned} [l_i, x_k] &= \sum_{m,n} \varepsilon_{imn} [x_m \rho_n, x_k] = \sum_{m,n} \varepsilon_{imn} x_m [\rho_n, x_k] = \\ &= \sum_{m,n} \varepsilon_{imn} x_m \delta_{nk} = \sum_m \varepsilon_{imk} x_m \end{aligned} \quad (88,22)$$

ამგვარად, საძიებელ პუასონის ფრჩხილებს ექნება სახე

$$[l_i, x_k] = - \sum_m \varepsilon_{ikm} x_m. \quad (88,23)$$

სრულიად ანალოგიურად ეაჩვენებთ, რომ პუასონის ფრჩხილები

$$[l_i, \rho_k] = - \sum_m \varepsilon_{ikm} \rho_m. \quad (88,24)$$

ბოლოს გამოვთვალოთ  $[l_i, l_k]$  ფრჩხილები. ამისათვის  $l_k$  შეეცვალოთ (88,21) გამოსახულებით; გვექნება

$$\begin{aligned} [l_i, l_k] &= \left[ l_i, \sum_{mn} \varepsilon_{kmn} x_m \rho_n \right] = \sum_{mn} \varepsilon_{kmn} [l_i, x_m \rho_n] = \\ &= \sum_{mn} \varepsilon_{kmn} ([l_i, x_m] \rho_n + x_m [l_i, \rho_n]). \end{aligned} \quad (88,25)$$

გავითვალისწინოთ (88,22) და (88,23) ფორმულები; მივიღებთ

$$\begin{aligned} [l_i, l_k] &= \sum_{mn} \varepsilon_{kmn} \left\{ - \sum_j \varepsilon_{imj} x_j \rho_n - \sum_j \varepsilon_{inj} \rho_j x_m \right\} = \\ &= \sum_{mnj} \varepsilon_{mkn} \varepsilon_{imj} x_j \rho_n - \sum_{mnj} \varepsilon_{nkm} \varepsilon_{inj} x_m \rho_j \end{aligned} \quad (88,26)$$

გამოვიყენოთ ფორმულა

$$\sum_m \varepsilon_{mkn} \varepsilon_{mij} = \delta_{ki} \delta_{nj} - \delta_{kj} \delta_{ni} \quad (88,27)$$

შედეგად (88,25) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$[l_i, l_k] = - (x_i \rho_k - x_k \rho_i). \quad (88,28)$$

მარჯვენა მხარეში მივიღეთ მომენტის მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი

$$M_{ik} = x_i \rho_k - x_k \rho_i, \quad (88,29)$$

რომლის დუალური ვექტორი არის იმპულსის მომენტი, ე. ი.

$$M_{ik} = \sum_j \varepsilon_{ijk} l_j; \quad (88,30)$$

მამასადამე, საბოლოოდ მივიღებთ

$$[l_i, l_k] = - \sum_m \varepsilon_{ikm} l_m. \quad (88,31)$$

საინტერესოა აღენიშნოთ, რომ მართალია კანტერ მექანიკაში კოორდინატებს, იმპულსებს და მომენტს კლასიკურისაგან განსხვავებული შინაარსი აქვთ, მაგრამ (88,23), (88,24) და (88,31) ფორმულები იქაც ძალაშია, ოღონდ ოპერატორული სახით.

როგორც მართკუთხალოთი, აჩვენეთ, რომ, თუ  $a$  და  $b$  მდებარე ვექტორებია, მაშინ ადგილი აქვს ფორმულებს<sup>1</sup>:

$$[(a, l), (b, r)] = (r [b \times a]); \quad [(a, l), (b, p)] = (p, [b \times a]) \quad (88,32)$$

და

$$[(a, l), (bl)] = [l, [b \times a]] \quad (88,33)$$

ლაბტორებისათვის საკმარისია (88,23), (88,24) და (88,31) ფორმულების გამოყენება.

პუასონის ფრჩხილების განმარტება იაკობიანის საშუალებით. საინტერესოა პუასონის ფრჩხილების გამოხატვა იაკობიანის საშუალებით.

როგორც ცნობილია, იაკობიანი ასე განისაზღვრება:

$$\frac{D(A, B)}{D(p_h, q_h)} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial A}{\partial p_h} & \frac{\partial A}{\partial q_h} \\ \frac{\partial B}{\partial p_h} & \frac{\partial B}{\partial q_h} \end{array} \right| = \frac{\partial A}{\partial p_h} \frac{\partial B}{\partial q_h} - \frac{\partial A}{\partial q_h} \frac{\partial B}{\partial p_h}. \quad (88,34)$$

ასეთნაირად განმარტებულ იაკობიანს აქვს შემდეგი თვისებები:

$$\frac{D(A, B)}{D(p_h, q_h)} = - \frac{D(A, B)}{D(q_h, p_h)} = - \frac{D(B, A)}{D(p_h, q_h)}, \quad (88,35)$$

$$\frac{D(A, B)}{D(p_h, q_h)} = \frac{D(A, B)}{D(P_h, Q_h)} \cdot \frac{D(P_h, Q_h)}{D(p_h, q_h)}, \quad (88,36)$$

ეს თვისება ანალოგიურია რთული ფუნქციის წარმოებულისა. შემდეგ,

$$\frac{D(p_h, q_h)}{D(P_h, Q_h)} \frac{D(P_h, Q_h)}{D(p_h, q_h)} = 1, \quad (88,37)$$

ასევე:

$$\frac{D(A, q_j)}{D(p_h, q_h)} = \left( \frac{\partial A}{\partial p_h} \right)_{q_h = \text{const}} \delta_{jh}; \quad (88,38)$$

$$\frac{D(A, p_j)}{D(p_h, q_h)} = - \left( \frac{\partial A}{\partial q_h} \right)_{p_h = \text{const}} \delta_{jh}.$$

(88,34) განმარტების თანახმად პუასონის ფრჩხილები ასე გადაიწერება:

$$[A, B] = \sum_k \frac{D(A, B)}{D(p_h, q_h)} \quad (88,37)$$

მისი თვისებები კი განსაზღვრული იქნება იაკობიანის თვისებების საშუალებით. ასე მაგალითად, პუასონის ფრჩხილების (88,13) (88,14) და (88,17) თვისებები ადვილად მიიღება (88,38) ფორმულების გათვალისწინებით.

პუასონის ფრჩხილების იაკობიანის საშუალებით განმარტება ხელსაყრელია კანონიკური გარდაქმნების შესწავლის დროს.

<sup>1</sup> პუასონის ფრჩხილებისაგან განსხვავების მიზნით ვექტორული ნაპრაელი აღნიშნულია  $[A \times B]^c$ -ით.

§ 98. მოძრაობის ინტეგრალები და პუასონის  
თეორემა

გამოვიყენოთ ახლა (88,3) განტოლება ფიზიკური სიდიდეებისათვის. როგორც წესი, დინამიკური სიდიდეები დროს ცხადად არ შეიცავენ, ამიტომ  $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ , და გვექნება

$$\frac{dF}{dt} = [H, F]. \quad (89,1)$$

ვთქვათ,  $F = q_k$  და  $F = p_k$ -ს, მაშინ, თუ გამოვიყენებთ (88,13) და (88,14) ფორმულებს, მივიღებთ

$$\frac{dq_k}{dt} = [H, q_k] = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad (89,2)$$

$$\frac{dp_k}{dt} = [H, p_k] = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad (89,3)$$

რომლებიც წარმოადგენს ჰამილტონის განტოლებებს.

ვთქვათ აღმოჩნდა, რომ გარკვეული  $F$  ფიზიკური სიდიდისათვის  $\frac{dF}{dt} = 0$ ,

ე. ი.

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [H, F] = 0. \quad (89,4)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$F(q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2 \dots p_n; t) = \text{const} \quad (89,5)$$

წარმოადგენს მოძრაობის ინტეგრალს. როცა  $F$  დროზე ცხადად არაა დამოკიდებული, მაშინ მისი შენახვისათვის აუცილებელია შესრულებული იყოს პირობა

$$[H, F] = 0. \quad (89,6)$$

ამრიგად, თუ დროზე ცხადად დამოუკიდებელი  $F$  სიდიდის პუასონის ფრჩხილები ჰამილტონიანთან ნულის ტოლია, მაშინ იგი მოძრაობის ინტეგრალს წარმოადგენს.

დავამტკიცოთ თეორემა, რომლის თანახმად პუასონის ფრჩხილი  $[A, B]$  მოძრაობის ინტეგრალია. თუ  $A$  და  $B$  მოძრაობის ინტეგრალებია, ე. ი. თუ

$$\frac{\partial A}{\partial t} + [H, A] = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial t} + [H, B] = 0, \quad (89,7)$$

მაშინ მათი პუასონის ფრჩხილებიც მოძრაობის ინტეგრალია.

$$[A, B] = \text{const}. \quad (89,8)$$

ამ თეორემას ადვილად დავამტკიცებთ (88,19) იგივეობის დახმარებით. მართლაც, მოძრაობის განტოლებას  $[A, B]$  ფრჩხილებისათვის ექნება სახე

$$\frac{d}{dt} [A, B] = \frac{\partial}{\partial t} [A, B] + [H [A, B]]. \quad (89,9)$$

პუასონის იგივეობა  $C = H$ -ისთვის მიგვცემს

$$[H [A, B]] = -[B [H, A]] - [A, [B, H]]. \quad (89,10)$$



გარდა ამისა, თუ (89,9)-ში გამოვიყენებთ (88,11) ფორმულას, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} [A, B] = \left[ \frac{\partial A}{\partial t}, B \right] + \left[ A, \frac{\partial B}{\partial t} \right] - [B [H, A]] - [A [B, H]]. \quad (89,11)$$

მარჯვენა მხარეში გაეფართიანოთ პირველი და მესამე, ასევე მეორე და მეოთხე წევრები, ამასთან, პუასონის ბოლო ორ ფრჩხილში წინასწარ მოვახდინოთ გადასმა  $[B, [H, A]] = -[[H, A], B]$  და  $[A, [B, H]] = -[A, [H, B]]$ ; გვექნება

$$\frac{d}{dt} [A, B] = \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + [H, A], B \right] + \left[ A, \frac{\partial B}{\partial t} + [H, B] \right]. \quad (89,12)$$

ვ. ი.

$$\frac{d}{dt} [A, B] = \left[ \frac{dA}{dt}, B \right] + \left[ A, \frac{dB}{dt} \right].$$

რაც (89,7) პირობის გათვალისწინებით მოგვეცემს

$$\frac{d}{dt} [A, B] = 0. \quad (89,13)$$

მაშასადამე,  $[A, B] = \text{const}$  და პუასონის თეორემა დამტკიცებულია. ამ თეორემას დიდი გამოყენება აქვს, რადგან, თუ ვიცით ორი მოძრაობის ინტეგრალი, ვიპოვიოთ სხვა ინტეგრალებსაც.

პუასონის თეორემის გამოყენებით (88,24)-დან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თუ ინახება მომენტის სამივე მდგენელი, ე. ი.  $l = \text{const}$  და იმპულსის ერთი რომელიმე მდგენელი, მაშინ შეინახება იმპულსის დანარჩენი ორი მდგენელიც. ასევე, (88,31) ფორმულის ძალით, როცა ინახება იმპულსის მომენტის ორი რომელიმე კომპონენტი, მაშინ შეინახება მესამეც. (88,24)-დან ასევე ცხადია, რომ, თუ ინახება მომენტის ერთი რომელიმე კომპონენტი და მისი მართობული იმპულსის კომპონენტი (მაგალითად,  $l_x$  და  $p_x$ ). მაშინ შეინახება იმპულსის მეორე მართობული კომპონენტიც ( $p_y$ ) და ა. შ. თუმცა უნდა აღინიშნოს, რომ პუასონის ფრჩხილები ორი მოძრაობის ინტეგრალიდან ყოველთვის არ იძლევა ახალ, დამოუკიდებელ მოძრაობის ინტეგრალს. გარდა ამისა, შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ ეს ფრჩხილები იგივეურად მუდმივი სიდიდის ტოლია.

მაგალითად, თუ  $l_x$  და  $p_x$  მოძრაობის ინტეგრალებია, პუასონის  $[l_x, p_x]$  ფრჩხილები ახალ ინტეგრალს ვერ მოგვეცემს, რადგან, უბრალოდ,  $[l_x, p_x] = 0$ .

ვთქვათ,  $H$  ჰამილტონიანი დროზე ცხადად არაა დამოკიდებული, მაშინ მისთვის გვექნება მოძრაობის განტოლება

$$\frac{dH}{dt} = [H, H]. \quad (89,14)$$

ასეთ შემთხვევაში, რადგან  $[H, H] = 0$ , ენერჯია მოძრაობის ინტეგრალი იქნება. ვთქვათ, გარდა ენერჯიისა, გვაქვს კიდევ ერთი მოძრაობის ინტეგრალი

$$A(q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2 \dots p_n; t) = c_1. \quad (89,15)$$

პუასონის თეორემის ძალით მოძრაობის ინტეგრალი იქნება აგრეთვე

$$[A, H] = c_2. \quad (89,16)$$

მეორე მხრივ, რადგან  $A$  მოძრაობის ინტეგრალია, ამიტომ

$$\frac{\partial A}{\partial t} + [H, A] = 0, \quad (89,17)$$

რაც (89,16)-ის გათვალისწინებით მოგვეცემს:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = c_2. \quad (89,18)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ გარდა  $H$  და  $A$ -სი,  $\frac{\partial A}{\partial t}$ -ც მოძრაობის ინტეგრალს წარმოადგენს. ასევე მოძრაობის ინტეგრალები იქნება  $A$ -ს მაღალი რიგის წარმობებულებიც. ხოლო იმ შემთხვევაში, როცა  $A$  მოძრაობის ინტეგრალი დროზე ცხადად არაა დამოკიდებული, (89,17) მოგვეცემს

$$[H, A] = 0, \quad (89,19)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ პუასონის თეორემას აქვს (89,19) სახე, როცა  $H$  და  $A$  დროზე ცხადად არ არიან დამოკიდებული.

### § 90. პუასონის ფრჩხილების კანონიკური ინვარიანტობა

დავამტკიცოთ, რომ პუასონის ფრჩხილები ინვარიანტულია კანონიკური გარდაქმნების მიმართ, რაც ნიშნავს, რომ პუასონის ფრჩხილების სახე დამოკიდებული არაა იმაზე, თუ რომელ კანონიკურ ცვლადებს ავირჩიეთ —  $p, q$  თუ  $P, Q$ . ამასთან  $P, Q$  ცვლადები ძველი  $p, q$  ცვლადებიდან მიიღება კანონიკური გარდაქმნით. უპირველეს ყოვლისა დავამტკიცოთ, რომ

$$[P_k, Q_n]_{pq} = \delta_{kn}, \quad (90,1)$$

სადა:  $p, q$  მიუთითებს ცვლადებს, რომლითაც წარმობებულები აიღება, ე. ი.

$$[P_k, Q_n]_{pq} = \sum_j \left( \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \frac{\partial Q_n}{\partial q_j} - \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \frac{\partial Q_n}{\partial p_j} \right). \quad (90,2)$$

თუ გამოვიყენებთ (87,8) და (87,43) კანონიკური გარდაქმნის ფორმულებს, მარტივად დავამტკიცებთ ტოლობებს

$$\frac{\partial P_k}{\partial q_j} = -\frac{\partial p_j}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_k}. \quad (90,3)$$

ამ ტოლობების გამოყენებით კი (90,2) მიიღებს სახეს

$$[P_k, Q_n]_{pq} = \sum \left( \frac{\partial Q_n}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} + \frac{\partial Q_n}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial Q_k} \right) = \frac{\partial Q_n}{\partial Q_k} = \delta_{nk}. \quad (90,4)$$

რაც ამტკიცებს (90,1) ფორმულის სამართლიანობას.

სრულიად ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ  $[Q_i, Q_k]_{pq} = 0$ . თუ გამოვიყენებთ  $\Phi_2(q, P, t)$  და  $\Phi_1(p, P, t)$  წარმომქმნელი ფუნქციებით განხორციელებულ კანონიკური გარდაქმნის ფორმულებს, მარტივად დავამტკიცებთ, რომ

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial P_i}, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial P_i}. \quad (90,5)$$

ამ ტოლობების გამოყენება კი მოგვეცემს

$$[Q_i, Q_k]_{pq} = \sum_j \left( \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_k} + \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_k} \right) = \frac{\partial Q_i}{\partial P_k} = 0. \quad (90,6)$$

სრულიად ასევე დავამტკიცებთ, რომ  $[P_i, P_k]_{pq} = 0$ .

ახლა დავამტკიცოთ  $A$  და  $B$  ნებისმიერი ფუნქციების პუასონის ფრჩხილების ინვარიანტობა კანონიკური გარდაქმნების მიმართ, ე. ი. დავამტკიცოთ, რომ

$$[A, B]_{pq} = [A, B]_{pQ}. \quad (90,7)$$

ამისათვის დავწეროთ პუასონის ფრჩხილები  $p$  და  $q$  ცვლადებში

$$[A, B]_{pq} = \sum \left( \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} - \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} \right) \quad (90,8)$$

და გადავიღეთ ახალ კანონიკურ ცვლადებზე  $P_j$  და  $Q_j$ . ცვლადის შეცვლის ჩვეულებრივი წესით მივიღებთ

$$[A, B]_{pq} = \sum_k \left\{ \sum_m \left( \frac{\partial A}{\partial Q_m} \frac{\partial Q_m}{\partial p_k} + \frac{\partial A}{\partial P_m} \frac{\partial P_m}{\partial p_k} \right) \sum_n \left( \frac{\partial B}{\partial Q_n} \frac{\partial Q_n}{\partial q_k} + \frac{\partial B}{\partial P_n} \frac{\partial P_n}{\partial q_k} \right) - \right. \\ \left. - \sum \left( \frac{\partial A}{\partial Q_m} \frac{\partial Q_m}{\partial q_k} + \frac{\partial A}{\partial P_m} \frac{\partial P_m}{\partial q_k} \right) \sum \left( \frac{\partial B}{\partial Q_n} \frac{\partial Q_n}{\partial p_k} + \frac{\partial B}{\partial P_n} \frac{\partial P_n}{\partial p_k} \right) \right\}. \quad (90,9)$$

თუ გაეხსნით ფრჩხილებს, მოვახდენთ მსგავსი წევრების შეკვეცას და დაჩვენებამს გვექნება

$$[A, B]_{pq} = \sum_k \sum_m \sum_n \left\{ \frac{\partial A}{\partial Q_m} \frac{\partial B}{\partial P_n} \left( \frac{\partial Q_m}{\partial p_k} \frac{\partial P_n}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_m}{\partial q_k} \frac{\partial P_n}{\partial p_k} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial A}{\partial P_m} \frac{\partial B}{\partial Q_n} \left( \frac{\partial P_m}{\partial p_k} \frac{\partial Q_n}{\partial q_k} - \frac{\partial P_m}{\partial q_k} \frac{\partial Q_n}{\partial p_k} \right) \right\}. \quad (90,10)$$

ამ გამოსახულების მეორე წევრი არ შეიცვლება, თუ ჩამში  $n$ -ს შევცვლით  $m$ -ით და პირიქით, მაშინ

$$[A, B]_{pq} = \sum_{mn} \left( \frac{\partial A}{\partial P_n} \frac{\partial B}{\partial Q_m} - \frac{\partial A}{\partial Q_m} \frac{\partial B}{\partial P_n} \right) \sum_k \left( \frac{\partial P_n}{\partial p_k} \frac{\partial Q_m}{\partial q_k} - \frac{\partial P_n}{\partial q_k} \frac{\partial Q_m}{\partial p_k} \right). \quad (90,11)$$

ბოლო ჩამი წარმოადგენს  $[P_n, Q_m]_{pq}$  პუასონის ფრჩხილებს, ამიტომ

$$[A, B]_{pq} = \sum_{mn} \left( \frac{\partial A}{\partial P_n} \frac{\partial B}{\partial Q_m} - \frac{\partial A}{\partial Q_m} \frac{\partial B}{\partial P_n} \right) [P_n, Q_m]_{pq}, \quad (90,12)$$

საიდანაც, თანახმად (90,1) ფორმულისა და  $\delta_{nm}$  ფუნქციის თვისებისა, საბოლოოდ მივიღებთ

$$[A, B]_{pq} = \sum_n \left( \frac{\partial A}{\partial P_n} \frac{\partial B}{\partial Q_n} - \frac{\partial A}{\partial Q_n} \frac{\partial B}{\partial P_n} \right) = [A, B]_{pQ}. \quad (90,13)$$

რაც პუასონის ფრჩხილების ინვარიანტობას ამტკიცებს კანონიკური გარდაქმნების მიმართ.

გასაგებია, რომ (90,13) ტოლობა გვაძლევს:

$$[Q_i, Q_k] = 0, \quad [P_i, P_k] = 0, \quad [P_i, Q_k] = \delta_{ik}. \quad (90,14)$$

ეს ტოლობები წიდილება განვიხილოთ როგორც ის პირობები, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ახალი  $P$ ,  $Q$  ცვლადები, რომ  $p$ ,  $q \rightarrow P$ ,  $Q$  გარდაქმნა კანონიკური იყოს.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ პუასონის ფრჩხილების ინვარიანტობას კანონიკური გარდაქმნების მიმართ უფრო ადვილად დავამტკიცებთ, თუ გამოვიყენებთ (88,33) განმარტებას.

იკობაიანი (85,37) თვისების ძალით, შევიძლია დავწეროთ

$$\frac{D(A, B)}{D(p_k, q_k)} = \frac{D(A, B)}{D(P_k, Q_k)} \frac{D(P_k, Q_k)}{D(p_k, q_k)}. \quad (90,15)$$

ვინაირგებლით კანონიერი გარდაქმნის რომელიმე წარმომქმნელი ფუნქციით, ვთქვათ  $\Phi_2(q, P, t)$ -ით და დავაპტიოთ, რომ (90,15)-ის მარჯვენა მხარეში მეორე იკობაიანის ერთის ტოლია. ამისათვის ან იკობაიანში გადავიღეთ ახალ  $q, P$  ცვლადებზე; გვექნება

$$\frac{D(P_k, Q_k)}{D(p_k, q_k)} = \frac{D(P_k, Q_k)}{D(\tilde{p}_k, \tilde{q}_k)} \frac{D(P_k, q_k)}{D(p_k, q_k)} = \frac{D(P_k, Q_k)}{D(P_k, q_k)} \cdot \frac{D(p_k, q_k)}{D(P_k, q_k)}. \quad (90,16)$$

ვავითვალისწინოთ იკობაიანის (88,37) თვისებები; მივიღებთ

$$\frac{D(P_k, Q_k)}{D(\tilde{p}_k, \tilde{q}_k)} = \left( \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} \right)_{P_k = \text{const}} : \left( \frac{\partial p_k}{\partial P_k} \right)_{q_k = \text{const}} \quad (90,17)$$

ახლა, თუ გამოვიყენებთ (87,25) ფორმულებს, ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial P_k \partial q_k}; \quad \frac{\partial p_k}{\partial P_k} = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial q_k \partial P_k}. \quad (90,18)$$

ასე რომ, (90,18)-ის გათვალისწინებით, (90,16), მართლაც, ერთის ტოლი ყოფილა

$$\frac{D(P_k, Q_k)}{D(p_k, q_k)} = 1, \quad (90,19)$$

სოლო (90,15)-ის აჯამებით მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას  $[A, B]_{pq} = [A, B]_{PQ}$ . (90,19) ფორმულის გამოყენებით ადვილად ვაჩვენებთ ჰუსონის ფუნდამენტური ფრჩხილების ინვარიანტობასაც. მართლაც, გვექნება

$$\begin{aligned} [P_j, Q_n]_{pq} &= \sum_k \frac{D(P_j, Q_n)}{D(p_k, q_k)} = \sum_k \frac{D(P_j, Q_n)}{D(p_j, q_n)} \frac{D(p_j, q_n)}{D(p_k, q_k)} = \\ &= \sum_k \delta_{jk} \delta_{nk} = \delta_{jn}, \end{aligned} \quad (90,20)$$

რაც ემთხვევა (90,1) გამოსახულებას.

## § 91. შენახვის კანონები და მათი კავშირი სივრცისა და დროის თვისებებთან

განვიხილოთ ჩაკეტილი სისტემა  $n$  თავისუფლების ხარისხთა რიცხვით.

ამასთან, ჩაკეტილ სისტემაში ისეთი სისტემა იგულისხმება, როცა სისტემის წევრთაგანზე მოქმედი ყოველი ძალა დამოკიდებულია მხოლოდ ნაწილაკთა ურთიერთმდებარეობასა და მათ შორის მანძილზე. ვაჩვენოთ, რომ ასეთ სისტემას ექნება  $2n - 1$  დამოუკიდებელი მოძრაობის ინტეგრალი. ამისათვის დავწეროთ ჰამილტონის განტოლებები:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (91,1)$$

ამ განტოლებებს ექნებათ ამონახსნები, რომლებიც დამოკიდებული იქნებიან  $2n$  მუდმივზე, ე. ი.

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t; c_1, c_2, \dots, c_{2n}), \\ p_i &= p_i(t; c_1, c_2, \dots, c_{2n}). \end{aligned} \quad (91,2)$$

აქედან  $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$  შეგვიძლია გამოვხატოთ კოორდინატებითა და იმპულსებით, რაც მოგვცემს  $2n$  მოძრაობის ინტეგრალს; მაგრამ ამ ინტეგრალებიდან, იმის გამო, რომ ჩაკეტილი სისტემის მოძრაობის განტოლებანი დროს ცხადად არ შეიცავს, დამოუკიდებელია მხოლოდ  $2n - 1$ . მართლაც, როცა სისტემის ჰამილტონიანი დროის ცხადი ფუნქცია არაა, ჰამილტონის განტოლებებიდან დრო სავესებით შეგვიძლია გიმოვირიცხოთ. ამისათვის საკმარისია ჰამილტონის ყველა განტოლება გავყოთ ერთ რომელიმე მათგანზე. მაგალითად, ერთი თავისუფლების ხარისხის შემთხვევაში, მივიღებთ

$$\frac{dp}{dq} = - \frac{\partial H}{\partial q} : \frac{\partial H}{\partial p} . \quad (91,3)$$

ამ განტოლების ინტეგრაცია მოგვცემს ერთ მუდმივს. მეორე მუდმივი შეგვიძლია ვიპოვოთ

$$\frac{dt}{dq} = \frac{1}{\frac{\partial H}{\partial p}} \quad (91,4)$$

განტოლების უბრალო ევარატურით, ამასთან  $\frac{\partial H}{\partial p}$  (91,3) განტოლების ინტეგ-

რაციის შემდეგ  $q$ -ს ცნობილი ფუნქცია იქნება. (91,4) განტოლების ინტეგრაციით კი შემოვა  $t_0$  ნებისმიერი მუდმივი დროის საწყისი მომენტის სახით. რამდენადაც იზოლირებული სისტემის მოძრაობის შემთხვევაში დროის საწყისი მომენტის არჩევა ნებისმიერია, ჩვენ შეგვიძლია ერთი ნებისმიერი მუდმივი ამონახსნებში ავიღოთ ადითური  $t_0$  მუდმივის სახით; ასე რომ, ამონახსნებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t + t_0, c_1, c_2 \dots c_{2n-1}), \\ p_i &= p_i(t + t_0, c_1, c_2 \dots c_{2n-1}). \end{aligned} \quad (91,5)$$

ამ  $2n$  ფუნქციიდან თუ გამოვირიცხავთ  $t + t_0$ , მივიღებთ  $(2n - 1)$  დამოუკიდებელ მოძრაობის ინტეგრალს

$$f_i(q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = \epsilon_i, \quad (i = 1, 2, \dots, 2n - 1). \quad (91,5')$$

აღსანიშნავია, რომ ყველა მოძრაობის ინტეგრალს ერთნაირი პრაქტიკული მნიშვნელობა როდი აქვს. განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ჩვენ მიერ ადრე განხილულ შვიდ შენახვის კანონს, რომელთა ძირითად ღირსებას ადითურობის თვისება წარმოადგენს. მოძრაობის ეს ინტეგრალები განსაკუთრებულ როლს ასრულებენ, რამდენადაც ისინი მჭიდროდ არიან დაკავშირებული სივრცისა და დროის ძირითად თვისებებთან. მოძრაობის ინტეგრალების ადითურობის პირობა ასე უნდა გავიგოთ: როცა სისტემა შედგება ისეთი ქვესისტემებისაგან, რომელთა შორის ურთიერთქმედება შეგვიძლია მხედველობაში არ მივიღოთ, მაშინ ამ მოძრაობის ინტეგრალთა მნიშვნელობა მთელი სისტემისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ქვესისტემების შესაბამისი ინტეგრალების მნიშვნელობების შეკრებით. ასეთი ადითური ინტეგრალებია: ენერგია, იმპულსი და იმპულსის მომენტი. აღსანიშნავია, რომ ადითურობის თვისება იმპულსსა და იმპულსის მომენტს, რამდენადაც ისინი ექვტორებს წარმოადგენენ, მაშინაც გააჩნია, როცა ქვესისტემები ერთმანეთზე მოქმედებენ ნებისმიერი კანონით.

განვიხილოთ ნებისმიერი დინამიკური სიდიდე  $K(q, p, t)$  და ვიპოვოთ მისი ცვლილება, როცა  $q$  და  $p$  განიცდის უსასრულოდ მცირე კანონიკურ გარდაქმნას:

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial p_i}, \quad \delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial q_i}, \quad (91,6)$$

სადაც  $\Omega$  წარმომქმნელი ფუნქციაა. ცხადია, რომ  $K$ -ს ცვლილება განისაზღვრება ფორმულით

$$\delta K = \sum \left( \frac{\partial K}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial K}{\partial p_i} \delta p_i \right). \quad (91,7)$$

(91,6) ფორმულების გათვალისწინებით გვექნება

$$\delta K = \varepsilon \sum \left( \frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} - \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} \right) = \varepsilon [\Omega, K] \quad (91,8)$$

თუ  $\Omega = H$  და  $\varepsilon = dt$ , მაშინ (91,8) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\delta K = dt [H, K], \quad (91,9)$$

ხოლო, როცა  $K = q_i$ , გვაქვს

$$\delta q_i = dt [H, q_i] = \dot{q}_i dt, \quad (91,10)$$

ასევე.

$$\delta p_i = dt [H, p_i] = -\dot{p}_i dt. \quad (91,11)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ  $H$ -ით გამოწვეული უსასრულოდ მცირე გარდაქმნა შეესაბამება სისტემის ნამდვილ მოძრაობას. მაგრამ ზოგადი შემთხვევის განხილვის დროს გეპარტებს გარკვეული სიფრთხილე. მართლაც, ზოგადად მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + [H, K]. \quad (91,12)$$

ამ ფორმულის მიხედვით (91,9) ასე გადაიწერება:

$$\delta K = \left( \frac{dK}{dt} - \frac{\partial K}{\partial t} \right) dt, \quad (91,13)$$

საიდანაც გამოჰდინარეობს, რომ თუ  $\frac{\partial K}{\partial t} \neq 0$ , მაშინ  $\delta K$  ცვლილება, გამოწვეული

ამ გარდაქმნით, არ წარმოადგენს დინამიკური  $K$  სიდიდის ნამდვილ ცვლილებას, რომელსაც ადგილი აქვს სისტემის მოძრაობისას. (91,9) ფორმულის ზოგადი ფიზიკური აზრი შემდეგია: როცა დინამიკური სიდიდე დროზე ცხადად არაა დამოკიდებული, მაშინ სისტემის მოძრაობა ეკვივალენტურია ისეთ უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნებისა, რომელთაც წარმომქმნელ ფუნქციად აქვთ ჰამილტონიანი. ეს შედეგი ჩვენ ადრეც მივიღეთ. ახლა განვიხილოთ (91,8) ფორმულის მეორე შედეგი. ვთქვათ  $K = H$ , მაშინ

$$\delta H = \varepsilon [\Omega, H]. \quad (91,14)$$

ასეთია ჰამილტონის ფუნქციის ცვლილება უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნის დროს. ჩვენ ვიცით, რომ როცა  $\Omega(q, p)$  მოძრაობის ინტეგრალია, მაშინ  $[H, \Omega] = 0$ , მაგრამ (91,14)-დან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ როცა  $\Omega$  მოძრაობის ინტეგრალია, მაშინ  $\Omega$ -თი განხორციელებული უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნისას სისტემის ჰამილტონიანი არ იცვლება. მაშასადამე, სისტემის ყველა პირველი ინტეგრალი წარმოადგენს ისეთ უსასრულოდ მცირე კანონიკურ გარდაქმნის წარმომქმნელ ფუნქციებს, რომლის დროსაც ჰამილტონიანი ინვარიანტული რჩება, ე. ი. აღნიშნული კანონიკური გარდაქმნების დროს ჰამილტონიანი

სახეს არ იცვლის და, მაშასადამე, მას ახასიათებს გარკვეული სიმეტრიულობა. ამიტომ, თუ გამოვარკვევთ სისტემის ჰამილტონიანის ყოველგვარ სიმეტრიულობის ელემენტებს, ვიპოვებთ მოძრაობის ყველა ინტეგრალს, ეს კი ეკვივალენტურია სისტემის მოძრაობის ამოცანის ამოხსნისა.

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა  $\Omega = p_z = \text{const}$ , თანახმად (91,6) ფორმულეებისა, გვექნება:

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = \varepsilon, \quad \delta p_x = \delta p_y = \delta p_z = 0, \quad (91,15)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ  $\Omega = p_z$  კანონიერი გარდაქმნა შეესაბამება უსასრულოდ მცირე გადატანას  $z$  ღერძის გასწვრივ. მაშასადამე, ჰამილტონიანი წარმოადგენს ინვარიანტულ სიდიდეს  $z$  ღერძის მიმართ უსასრულოდ მცირე გადაანაცვლებისას.

ახლა ადვილია იმპულსის მუდმივობის კანონის სივრცის ერთგვაროვნების თვისებასთან დაკავშირება. სივრცის ერთგვაროვნება ნიშნავს იმას, რომ ჩაკეტილი სისტემის ჰამილტონიანი არ უნდა შეიცვალოს სისტემის პარალელური (ე. ი. როცა სისტემის ყოველი წერტილი ერთი და იგივე მანძილთ წაინაცვლებს) გადატანის დროს; ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად კი ჰამილტონიანის ასეთი ტიპის ინვარიანტობასთან დაკავშირებულია სისტემის იმპულსის შენახვის კანონი.

ცხადია, რომ იმპულსის სამივე კომპონენტი მხოლოდ იზოლირებული სისტემისათვის შეინახება. როცა სისტემა იმყოფება გარეშე ველში, მაშინ ამ ველს სიმეტრიის თვისებებთან დაკავშირებით შეიძლება ადვილი ჰქონდეს იმპულსის რამელიმე კომპონენტის შენახვას. მაგალითად, თავისუფლად ვარდნილი სხეულისათვის შეინახება იმპულსის ის კომპონენტები, რომლებიც მოთავსებულია მოძრაობის მიმართულეების მართობულ სიბრტყეში.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონი დაკავშირებულია ჰამილტონის ფუნქციის ინვარიანტობასთან სისტემის უსასრულოდ მცირე შემობრუნების დროს.

ვთქვათ, უსასრულოდ მცირე მობრუნებას  $z$  ღერძის მიმართ შეესაბამებო კანონიერი გარდაქმნა, რომლის წარმომქმნელო ფუნქციაა<sup>1</sup>

$$\Omega = I_z = x p_y - y p_x; \quad (91,16)$$

მაშინ, თანახმად (91,6) ფორმულებისა, მივიღებთ:

$$\delta x = -\varepsilon y, \quad \delta y = \varepsilon x, \quad \delta z = 0, \quad \delta p_x = -\varepsilon p_y, \quad \delta p_y = \varepsilon p_x, \quad \delta p_z = 0. \quad (91,17)$$

დავეშვათ, რომ შემობრუნება ხდება უსასრულოდ მცირე  $\delta\varphi$  კუთხეზე, მაშინ (17,7) ფორმულებიდან გვექნება:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \approx x + y\delta\varphi, \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \approx -x\delta\varphi + y, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (91,18)$$

აქედან

$$\delta x = y\delta\varphi, \quad \delta y = -x\delta\varphi, \quad \delta z = 0. \quad (91,19)$$

ზუსტად ასეთივე ფორმულები გვექნება იმპულსისათვის, რამდენადაც სისტემის მობრუნებისას ვექტორი ისევე ვარდაიქმნება, როგორც კოორდინატები.

<sup>1</sup> სიმარტივის მიზნით ვიხილავთ ერთ ნ.წილას ღერძის კოორდინატებში, ცხადია, შედეგები სიმართლიანი იქნება ნებისმიერი რიცხვის სისტემისათვისაც.

(91,19) ფორმულების შედარება (91,17)-თან გვიჩვენებს, რომ ეს უკანასკნელი მართლაც გამოხატავს სისტემის შემობრუნებას  $x$  ღერძის ირგვლივ, თუ  $\epsilon$ -ს ავიღებთ — ნუ-ს ტოლად.

ამგვარად. იმპულსის მომენტის  $x$  კომპონენტის შენახვა დაკავშირებულია სისტემის ჰამილტონიანის ინვარიანტობასთან  $x$  ღერძის მიმართ უსასრულოდ მცირე მობრუნების დროს. რადგან  $x$  ღერძს შეიძლება ჰქონდეს ნებისმიერი მიმართულება, ამიტომ ნათელია, რომ უსასრულოდ მცირე ბრუნვა, ნებისმიერი  $n$  ორტის მქონე ღერძის მიმართ, განხორციელდება წარმომქმნელი ფუნქციით

$$\Omega = (l, n). \quad (91,20)$$

რაც შეეხება ენერჯიის ინტეგრალს, იგი დაკავშირებულია დროის ერთგვაროვნების თვისებასთან. იზოლირებული სისტემის ჰამილტონიანი დროს ცხადად არ შეიცავს, ამიტომ იგი ინვარიანტულია დროში წანაცვლების მიმართ, რის გამოც

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \text{ და } E = \text{const.}$$

ამასთან უნდა გვახსოვდეს, რომ  $H$  სრულ მექანიკურ ენერჯიას ემთხვევა მხოლოდ მაშინ, როცა ბმები სტაციონარულია და  $H$  დროს ცხადად არ შეიცავს. როცა  $H$  დროს ცხადად არ შეიცავს, ხოლო გეომეტრიული ბმები არასტაციონარულია, მაშინ, მართალია,  $H$  კვლავ მუდმივი იქნება, მაგრამ იგი აღარ წარმოადგენს სისტემის სრულ ენერჯიას.



## ჰამილტონ-იაკობის მეთოდი

გარდა ჩვენ მიერ ზემოთ განხილული ორი განტოლებისა, რომელიც შემოღებული იყო ლაგრანჟისა და ჰამილტონის მიერ მექანიკური მოძრაობის აღსაწერად, არსებობს მესამე განტოლება, რომელიც ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სახელწოდებითაა ცნობილი. ეს განტოლება კერძოწარმოებულებიანი პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებაა ქმედების ფუნქციის მიმართ. ამიტომ ლაგრანჟისა და ჰამილტონის მეთოდებისაგან განსხვავებით, ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ამოხსნით უშუალოდ მოძრაობის სასრულ განტოლებას არ ვპოულობთ, მაგრამ კანონიკური გარდაქმნების გაპოყენებით, როცა ნაპოვნია ქმედების ფუნქცია, ადვილად განესაზღვრავთ მოძრაობასაც.

### § 92. ჰამილტონ-იაკობის განტოლება

ზოგადად ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ამოხსნა რთულ ამოცანას წარმოადგენს, რადგან ამ განტოლებაში ცვლადთა განცალკევა ყოველთვის არ ხერხდება, მაგრამ პრაქტიკულად მნიშვნელოვანი ამოცანებისათვის ამ განტოლების ამოხსნა თითქმის ყოველთვისაა შესაძლებელი.

ქმედების ფუნქციის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{dS}{dt} = L. \quad (92,1)$$

მეორე მხრივ, ჩვენ ვიცით, რომ  $S$  შეიძლება განხილული იყოს როგორც ღრისი და  $q_i$  კოორდინატების ფუნქცია, ამიტომ მისი წარმოებულისათვის გვექნება

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (92,2)$$

აქედან, (92,1) ფორმულის გათვალისწინებით, ვლებულობთ

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i - L = 0, \quad (92,3)$$

მაგრამ, როგორც დაინახეთ,

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \quad (92,4)$$

გარდა ამისა, ჰამილტონის ფუნქციისათვის ჩვენ გვქონდა

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L, \quad (92,5)$$

რომელიც შეიძლება განვიხილოთ როგორც კოორდინატების და იმპულსების ფუნქცია, თუ ყველა  $q_i$  სიჩქარეებს განივხატავთ კოორდინატების და იმპულსების საშუალებით. ამიტომ (92,3) მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2 \dots p_n; t) = 0. \quad (92,6)$$

ან, თანახმად (92,4) ფორმულისა,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, q_2 \dots q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2} \dots \frac{\partial S}{\partial q_n}; t\right) = 0. \quad (92,7)$$

ამ განტოლებას ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას უწოდებენ. ამოცანა მდგომარეობს ამ განტოლების ამოხსნაში, ე. ი.  $S$ -ის, როგორც კოორდინატების და დროის ფუნქციის განსაზღვრაში. იგი შეიცავს  $S$ -ის  $n$  კერძო წარმოებულებს კოორდინატების მიმართ და ერთ კერძო წარმოებულს დროის მიმართ. ამიტომ ცხადია, რომ ამოხსნა უნდა შეიცავდეს  $n+1$  განუსაზღვრელ მუდმივს. თუ ვიპოვეთ ისეთი ფუნქცია

$$S = S(q_1, q_2 \dots q_n, \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n, \alpha_{n+1}; t), \quad (92,7')$$

რომელიც აკმაყოფილებს (92,7) ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას და რომელიც იქნენ დამოუკიდებელ  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$  მუდმივს შეიცავს, რამდენი დამოუკიდებელი ცვლადიცა გვაქვს განტოლებაში, მაშინ ასეთ ფუნქციას განტოლების სრული ინტეგრალი ეწოდება. რამდენადაც ჰამილტონ-იაკობის განტოლებაში  $S$  ფუნქცია შედის მხოლოდ წარმოებულის ნიშნის ქვეშ, ამიტომ თუ  $S$  ამ განტოლებას აკმაყოფილებს, მას დაკმაყოფილებს  $S + \text{const}$ -იც, რაც იმას ნიშნავს, რომ ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სრულ ინტეგრალში ერთი მუდმივი ყოველთვის შევა შესაქარები (ადიტიური) მუდმივის სახით. ზოვადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ადიტიურ მუდმივს წარმოადგენს  $\alpha_{n+1}$ , მაშინ სრული ინტეგრალი წარმოგვიდგება შემდეგნაირად:

$$S = S(q_1, q_2 \dots q_n, \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n, t) + \alpha_{n+1}. \quad (92,8)$$

ამ გამოსახულებაში არც ერთი  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  აღარ წარმოადგენს ადიტიურ მუდმივს. ვთქვათ, ამოვხსენით ჰამილტონ-იაკობის განტოლება და ვიპოვეთ ქმედების ფუნქცია სრული ინტეგრალის სახით. ცხადია, ამის შემდეგ ქმედების ფუნქცია უნდა დაეკავშიროთ მოძრაობის განმსაზღვრელ სიდიდეებთან. ჩვენს მიზანს წარმოადგენს გამოვარკვიოთ, თუ რა კავშირი არსებობს ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სრულ ინტეგრალსა და ჩვენთვის საინტერესო მოძრაობის განტოლების ამოხსნებს შორის. ე. ი. თუ ვიცით სრული ინტეგრალი, როგორ ვიპოვოთ, მავალითად, ტრაექტორიის განტოლება და ა. შ.

ამ მიზნით მოვახდინოთ ისეთი კანონიკური გარდაქმნა, რომლის წარმოქმნელ ფუნქციას წარმოადგენდეს (92,8) სრული ინტეგრალი, ე. ი. ძველი  $q$  და  $p$  ცვლადებიდან გადავიდეთ ახალ ცვლადებზე; სახელდობრ, ახალ კოორდინატებად ივირჩიოთ  $Q_i$ , ხოლო იმპულსებად  $\alpha_i$  მუდმივები. მაშინ, თანახმად (87,25) ფორმულებისა,

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \quad H' = H + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (92,9)$$

რადგან  $S$  აკმაყოფილებს (92,7) განტოლებას, ამიტომ ახალი ჰამილტონიანი  $H'$  ნული გამოვიდა. ამის გამო, კანონიკურ განტოლებებს ახალ  $Q$  და  $\alpha$  ცვლადებში ექნებათ სახე:

$$\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial \alpha_i} = 0, \quad (92,10)$$

საიდანაც  $\alpha_i = \text{const}$  და  $Q_i = \text{const}$ . ეს უკანასკნელი მუდმივი აღენიშნოთ  $\beta_i$ -თ. ამის შემდეგ (92,9)-ის პირველი განტოლება

$$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i} \quad (92,11)$$

საშუალებას მოგვცემს  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  მუდმივების განსაზღვრისა  $q_i$  და  $p_i$ -ის საწყისი მნიშვნელობების მიხედვით, ხოლო (92,9)-ის მეორე განტოლება

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} \quad (92,12)$$

დაგვეხმარება  $\beta_i$  კონფიციენტების განსაზღვრაში  $q_1, q_2, \dots, q_n$  კოორდინატების საწყისი მნიშვნელობების მიხედვით. ამისათვის საკმარისი იქნება გამოეთვალოთ (92,12) განტოლების მარჯვენა მხარე  $t = t_0$  საწყის მომენტში. ამის შემდეგ (92,12) განტოლების ამოხსნით  $q_i$  კოორდინატების მიმართ მივიღებთ

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t), \quad (92,13)$$

რაც მოძრაობის სასრულ განტოლებას წარმოადგენს.

ამგვარად, თურმე ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სრული ინტეგრალიდან მოძრაობის განტოლების (ტრაექტორიის) საპოვნელად საკმარისია სრული ინტეგრალი გავაწარმოოთ  $\alpha_i$  მუდმივი რიცხვების მიხედვით და ახალ მუდმივ  $\beta_i$  რიცხვებს გავუტოლოთ.

კონსერვატიული ველისათვის ჰამილტონიანი ღრის ცხადი ფუნქცია არაა და იგი სისტემის სრულ ენერჯიას ემთხვევა:  $H = E$ . ამ შემთხვევაში (92,7) განტოლებიდან ვღებულობთ  $\frac{\partial S}{\partial t} = -E$ , საიდანაც

$$S(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = A(q_1, q_2, \dots, q_n) - Et. \quad (92,14)$$

აქ  $A$  შემოკლებული ქმედების ფუნქციაა. ჰამილტონ-იაკობის განტოლება კონსერვატიული ველისათვის, რადგან

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial A}{\partial q_i} = p_i \quad (92,15)$$

აქ დაიწერება:

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_n; \frac{\partial A}{\partial q_1}, \frac{\partial A}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial A}{\partial q_n}\right) = E. \quad (92,16)$$

ახლა დაეწეროთ ერთი მატერიალური წერტილის ჰამილტონ-იაკობის განტოლება  $U(r, t)$  პოტენციალურ ველში მოძრაობისას. ცხადია, რომ ამ განტოლებას დეკარტის კოორდინატებში ექნება სახე

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} + U(x, y, z; t) = 0, \quad (92,17)$$

ან, თუ გავიხსენებთ გრადიენტის განმარტებას, გვექნება

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + U(r, t) = 0. \quad (92,18)$$

სტაციონარულ შემთხვევაში პოტენციალური ენერგია დროზე ცხადად არაა დამოკიდებული, ამიტომ  $\frac{\partial S}{\partial t} = -E$ , და გვექნება

$$\frac{1}{2m} (\nabla A)^2 + U(r, t) = E; \quad (92,19)$$

ან, გაშლილი სახით,

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 = 2m(E - U). \quad (92,20)$$

ეს გვინდა ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ჩაწერა სხვადასხვა ორთოგონალურ კოორდინატებში, ამისათვის საჭიროა გავიხილოთ § 83-ში მიღებული ფორმულები ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სხვადასხვა კოორდინატებში. მაგალითად, ერთი ნაწილს ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას სტაციონარული მოძრაობისთვის პოლარ-კოორდინატებში ექნება სახე

$$\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial A}{\partial \varphi}\right)^2 = 2m[E - U(r)]. \quad (92,21)$$

სრულიად ანალოგიურად, (83,14) ფორმულის თანახმად, ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას პარაბოლურ კოორდინატებში ასე დავწერთ:

$$\frac{2}{m(\xi + \eta)} \left[ \xi \left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)^2 + \eta \left(\frac{\partial A}{\partial \eta}\right)^2 \right] + \frac{1}{2m\xi\eta} \left(\frac{\partial A}{\partial \varphi}\right)^2 = E - U. \quad (92,22)$$

შ.

### § 93. მთავისუფალი ნაწილაკის ამოცანა

ჰამილტონ-იაკობის მეთოდის გამოყენების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ძველესი ნაწილაკის ერთგანზომილებიანი მოძრაობა. რადგან ნაწილაკი თავისუფალია, ამიტომ პოტენციალური ენერგია ნულის ტოლია და ჰამილტონ-იაკობის განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = 0. \quad (93,1)$$

ამ განტოლების სრული ინტეგრალი ვეძებთ სახით

$$S(x, t) = A(x) - at \quad (93,2)$$

და შევიტანოთ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებაში; გვექნება

$$\left(\frac{dA}{dx}\right)^2 = 2ma, \quad (93,3)$$

აქედან

$$A = \int_0^x \sqrt{2ma} dx = \sqrt{2ma} x. \quad (93,4)$$

მაშასადამე,

$$S(x, a, t) = \sqrt{2ma} x - at. \quad (93,5)$$

შეორე მხრივ. თანახმად (93,4) ფორმულისა,

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{2ma}, \quad (93,6)$$

ეს კი გვიჩვენებს, რომ  $a$  ყოფილა ენერგია. ეს გასაგებია, რადგან  $U=0$  შეესაბამება სტაციონარულ შემთხვევას, ამ დროს კი (93,2)-ში  $a=E$ .

ტრაექტორიის განტოლების მისაღებად, როგორც ვიცით, საჭიროა (93,5) გავაწარმოთ  $a$ -მუდმივით და გავეტოლოთ ახალ  $\beta$ -მუდმივს; გვექნება

$$\beta \frac{dS}{da} = \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{a}} x - t. \quad (93,7)$$

თუ  $\beta$ -ს განვსაზღვრავთ საწყისი პირობიდან და გავიხეივალისწინებთ (93,6)-ს, მივიღებთ მოძრაობის სასრულ განტოლებას

$$x = x_0 + vt, \quad (93,8)$$

რაც ცნობილია ელემენტარული მექანიკიდანაც.

შევიჩინოთ, რომ თავისუფალი ნაწილაკის ერთგანზომილებიან მოძრაობას, თანახმად (93,5) და (93,6) ფორმულებისა, შეესაბამება შემდეგი კვადრატული ფუნქცია:

$$S(x, t) = px - Et, \quad (93,9)$$

სამგანზომილებიანი მოძრაობისათვის კი ანალოგიურად მივიღებთ

$$S(r, t) = (p, r) - Et. \quad (93,10)$$

საიდანაც ნათელია, რომ

$$p = \text{grad } S, \quad E = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (93,11)$$

#### § 94. ერთგანზომილებიანი მოძრაობა, მახლობელი

განვიხილოთ სტაციონარული მოძრაობა ერთი თავისუფლების ხარისხით. ამ შემთხვევაში ჰამილტონ-იაკობის განტოლება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებაა და ექნება სახე

$$H(q, p) = E. \quad (94,1)$$

ეს განტოლება ყოველთვის ამოიხსნება იმპულსის მიმართ, რაც მოგვცემს  $p(q, E)$ . მეორე მხრივ,

$$p = \frac{dA}{dq}, \quad (94,2)$$

საიდანაც

$$A = \int_{q_0}^q p(q, E) dq. \quad (94,3)$$

ამგვარად, ვაპოვიან  $A$  კვადრატის ფუნქციას, რომელიც არ შეიცავს არაერთარ მუდმივს, გარდა სრული ენერგიისა და, მაშასადამე, წარმოადგენს ზოგად ამონახსლს. ამ გამოსახულების გაწარმოება  $E$ -თი, თანახმად (90,16) ფორმულასა, მოგვცემს

$$\frac{\partial A}{\partial E} = \int_{q_0}^q \frac{\partial p}{\partial E} dq = t - t_0. \quad (94,4)$$

რადგან სრული ენერგია უდრის

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(q), \quad (94,5)$$

ამიტომ

$$p = \sqrt{2m[E - U(q)]} = \frac{dA}{dq}, \quad (94,6)$$

საიდანაც

$$A = \int_{q_0}^q \sqrt{2m[E - U(q)]} dq. \quad (94,7)$$

(94,4)-ის თანახმად კი

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_0}^q \frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}}. \quad (94,8)$$

ახსანიშნავია, რომ პერიოდული მოძრაობისათვის აქედან შეგვიძლია მივიღოთ პერიოდის ჩვენთვის კარგად ცნობილი ფორმულა.

განვიხილოთ მაგალითები.

სხეულის თავისუფალი ვარდნა. დავუშვათ,  $m$  მასის სხეული თავისუფლად ვარდება  $z = z_0$  სიმაღლიდან. მისი პოტენციალური ენერგიაა  $U = mgz$ , სადაც  $g$  სიმძიმის ძალის აჩქარებაა. თანახმად (94,8) ფორმულისა,

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{E - mgz}}. \quad (94,9)$$

ამ მარტივი ინტეგრალის ამოხსნით ვპოულობთ

$$t = - \sqrt{\frac{2}{mg^2}} [(E - mgz)^{1/2} - (E - mgz_0)^{1/2}], \quad (94,10)$$

საიდანაც შეგვიძლია განვსაზღვროთ  $z$ ,

$$z = z_0 - \frac{gt^2}{2} - \sqrt{\frac{2(E - mgz_0)}{m}} t, \quad (94,11)$$

როცა  $t=0$ ,  $v=v_0 = \sqrt{\frac{2(E - mgz_0)}{m}}$ , და მივიღებთ ცნობილ ფორმულას

$$z = z_0 - v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (94,12)$$

ოსცილატორი. განვიხილოთ ახლა ოსცილატორის ამოცანა. პოტენციალური ენერგია  $U = \frac{m\omega_0^2 q^2}{2}$ , ამიტომ (როცა  $t=0$ , მაშინ  $q=0$ )

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^q \frac{dq}{\sqrt{E - \frac{m\omega_0^2 q^2}{2}}}. \quad (94,13)$$

ინტეგრალის ამოხსნა გვაძლევს

$$t = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2E}} q, \quad (94,14)$$

საიდანაც

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \sin \omega_0 t. \quad (94,15)$$

როგორც ვხედავთ, ამპლიტუდა ტოლია

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}, \quad (94,16)$$

რაც გვაძლევს ენერჯისათვის ცნობილ დამოკიდებულებას.

### § 55. სივრცითი ანიზოტროპული ოსცილატორი

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ამოხსნისა. ვთქვათ, გვაქვს სივრცითი ანიზოტროპული ოსცილატორი.

წინასწარ განვიხილოთ ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ამოხსნის ზოგად-შემთხვევა, როცა პოტენციალური ენერჯია წარმოდგინება სახით

$$U(x, y, z) = U_1(x) + U_2(y) + U_3(z). \quad (95,1)$$

რადგან ამოცანა სტაციონარულია, ამიტომ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას ასე ჩავწერთ:

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \right\} + U_1(x) + U_2(y) + U_3(z) = E. \quad (95,2)$$

ამოხსნა ვეძებთ საში ფუნქციის ჩამის სახით,

$$A(x, y, z) = A_1(x) + A_2(y) + A_3(z). \quad (95,3)$$

ამასთან  $A_1$  მხოლოდ  $x$ -ის ფუნქციაა,  $A_2$   $y$ -ის, ხოლო  $A_3$   $z$ -ის. (95,3) შევერთა-ნოთ (95,2)-ში და დავაჯგუფოთ შემდეგნაირად:

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{dA_1}{dx} \right)^2 + U_1(x) \right] + \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{dA_2}{dy} \right)^2 + U_2(y) \right] + \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{dA_3}{dz} \right)^2 + U_3(z) \right] = E. \quad (95,4)$$

ამასთან, რადგან  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  თითო ცვლადის ფუნქციებია, კერძო წარმოებულები შევცვალებთ სრული წარმოებულებით. პირველ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება მხოლოდ  $x$ -ის ფუნქციაა, მეორე — მხოლოდ  $y$ -ის, მესამე კი — მხოლოდ  $z$ -ის; მათი ჩამი  $E$  მუდმივის ტოლია მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ იქნება, როცა ითითველი ეს წევრი მუდმივია, ე. ი.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left( \frac{dA_1}{dx} \right)^2 + U_1(x) &= a_1, \\ \frac{1}{2m} \left( \frac{dA_2}{dy} \right)^2 + U_2(y) &= a_2, \\ \frac{1}{2m} \left( \frac{dA_3}{dz} \right)^2 + U_3(z) &= a_3. \end{aligned} \quad (95,5)$$

იმ პირობით, რომ

$$a_1 + a_2 + a_3 = E. \quad (95,6)$$

მივიღეთ საჩი თითო ცვლადი: ჰამილტონ-იაკობის განტოლება და ამით ცვლადები განცალკეულა. ამ განტოლებების ამოხსნა იქნება:

$$A_1(x) = \int_0^x \sqrt{2m(a_1 - U_1(x))} dx, \quad (95,7)$$

$$A_2(y) = \int_0^y \sqrt{2m(a_2 - U_2(y))} dy, \quad (95,8)$$

$$A_3(z) = \int_0^z \sqrt{2m(a_3 - U_3(z))} dz, \quad (95,9)$$

ხოლო, (93,2)-ის თანახმად, სრული ინტეგრალისათვის გვექნება

$$S(x, y, z, t) = \int_0^x \sqrt{2m(a_1 - U_1(x))} dx + \int_0^y \sqrt{2m(a_2 - U_2(y))} dy + \\ + \int_0^z \sqrt{2m(a_3 - U_3(z))} dz - (a_1 + a_2 + a_3)t. \quad (95,10)$$

თანახმად (92,12) ფორმულისა,

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial a_1} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a_1 - U_1(x)}} - t, \quad (95,11)$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial a_2} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{a_2 - U_2(y)}} - t, \quad (95,12)$$

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial a_3} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{a_3 - U_3(z)}} - t, \quad (95,13)$$

აქედან კი შეგვიძლია განვსაზღვროთ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  მუდმივი  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  და  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ , რიცხვების და დროის საშუალებით.

გადავიდეთ ახლა სივრცულ ანიზოტროპულ ოსცილატორზე. მისი პოტენციალური ენერგია უდრის

$$U(x, y, z) = \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 y^2}{2} + \frac{k_3 z^2}{2}. \quad (95,14)$$

რადგან პოტენციალურ ენერგიაა აქვს (95,1) სახე, ამიტომ ზემოთ მიღებული ფორმულები უშუალოდ შეგვიძლია გამოვიყენოთ. თუ (95,11)-ში შევიტანთ

$U_1(x) = \frac{k_1 x^2}{2}$  და ამოვხსნათ მარტივ ინტეგრალს, მივიღებთ

$$x = \sqrt{\frac{2a_1}{k_1}} \sin(\omega_1 t + \delta_1), \quad \delta_1 = \omega_1 \beta_1. \quad (95,15)$$



ასევე ადვილად მივიღებთ, რომ

$$y = \sqrt{\frac{2a_2}{k_2}} \sin(\omega_2 t + \delta_2), \quad (95,16)$$

$$z = \sqrt{\frac{2a_3}{k_3}} \sin(\omega_3 t + \delta_3). \quad (95,17)$$

რ მუდმივები განისაზღვრება საწყისი პირობებიდან. ნათელია, რომ ამპლიტუდები სათანადოდ ტოლია:

$$b_1 = \sqrt{\frac{2a_1}{m_1 \omega_1^2}}, \quad b_2 = \sqrt{\frac{2a_2}{m_2 \omega_2^2}}, \quad b_3 = \sqrt{\frac{2a_3}{m \omega_3^2}}. \quad (95,18)$$

ასე რომ, (95,6)-ის ძალით ენერჯისათვის გვექნება

$$E = \frac{m\omega_1^2 b_1^2}{2} + \frac{m\omega_2^2 b_2^2}{2} + \frac{m\omega_3^2 b_3^2}{2}, \quad (95,19)$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, ისეთივე შედეგები მივიღეთ, რაც ამ ამოცანის ლაგრანჟის მეთოდით განხილვის დროს.

## § 96. ცვლადთა განცალკევება ციკლური კოორდინატების შემთხვევაში

[როცა ჰამილტონ-იაკობის განტოლება დაიყვანება ისეთ „განტოლებაზე, რომელთაგან თითოეული შეიცავს მხოლოდ ერთ ცვლადს და მხოლოდ ერთ კერძო წარმოებულს ამავე ცვლადით, მაშინ ამბობენ, რომ განტოლებაში ცვლადები განცალკევებულია. განცალკევებული ცვლადებით ჰამილტონ-იაკობის განტოლება წარმოადგენს უმარტივესი ტიპის განტოლებას.]

წინა პარაგრაფში განვიხილეთ ცვლადთა განცალკების ერთი კერძო შემთხვევა. ზოგადად ჰამილტონ-იაკობის განტოლებაში ცვლადთა განცალკება ძალზე რთულ ამოცანას წარმოადგენს. მაგრამ პრაქტიკულად მნიშვნელოვან შემთხვევებში ცვლადთა განცალკება ყოველთვის ხერხდება. ამ შემთხვევაში ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ამოხსნა უფრო ადვილია, ვიდრე, მაგალითად, ჰამილტონის განტოლებებისა. აღსანიშნავია, რომ ცვლადთა განცალკება დამოკიდებულია კოორდინატების არაღარ შეჩვენებაზე და მას გარკვეული კავშირი აქვს ციკლური კოორდინატების არსებობასთან. ასე მაგალითად, ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრაობის დროს ჰამილტონ-იაკობის განტოლებაში ცვლადთა განცალკება შეიძლება სფერულ კოორდინატებში, იმ დროს, როცა დეკარტის კოორდინატებში განცალკება არ ხერხდება.

ჰამილტონ-იაკობის განტოლების გამოყენება განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი გამოდგება ატომური მოვლენების შესწავლაში. ატომის ფიზიკის მთელი რიგი მოვლენები მიახლოებით შესწავლილი იყო ჰამილტონ-იაკობის განტოლების საშუალებით. ეს საკითხები წინ უძღოდა თანამედროვე კვანტური მექანიკის ჩამოყალიბებას და, ამგვარად, ჰამილტონ-იაკობის განტოლების გამოყენებამ ატომური მოვლენებისათვის დიდი როლი შეასრულა ახალი მექანიკის ჩამოყალიბებაში. ამიტომ მნიშვნელოვანია განვიხილოთ ცვლადთა განცალკების ის მეთოდი, რომელიც გამოიყენება ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ამოხსნისათვის ატომური მოვლენების შესწავლის დროს. კერძოდ, [განვიხილოთ შემთხვევა ცვლადთა განცალკებისა ციკლური კოორდინატების არსებობისას.]

განსაკუთრებით ადვილია ის შემთხვევა, როცა ჰამილტონიანში ყველა კოორდინატი ციკლურია, გარდა ერთისა. დავეშვათ ერთადერთი არაციკლური კოორდინატია  $q_1$ , ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ამოხსნა ვეძებთ შემდეგნაირად:

$$A = A_1(q_1) + A_2(q_2) + \dots + A_n(q_n). \quad (96,1)$$

რადგან ციკლური კოორდინატების შესაბამისი იმპულსები მუდმივებია, ამიტომ

$$p_i = \frac{dA_i}{dq_i} = a_i, \quad (i = 2, \dots, n) \quad (96,2)$$

ჰამილტონ-იაკობის განტოლება კი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$H\left(q_1, \frac{dA_1}{dq_1}; a_2, a_3, \dots, a_n\right) = E, \quad (96,3)$$

რონელიც უკვე წარმოადგენს პირველი რაგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას  $A_1$ -ის მიმართ და, მაშასადამე, ადვილად ამოიხსნება. (96,2)-დან გვაულობთ

$$A_i = a_i q_i. \quad (96,4)$$

ამიტომ, (96,1)-ის თანახმად, ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$A = A_1(q_1) + \sum_{i=2}^n a_i q_i. \quad (96,5)$$

აქვე აღვნიშნოთ, რომ ეს არ არის ცვლადთა განცალგების ერთადერთი შემთხვევა. ცვლადთა განცალგება შესაძლებელია უფრო ზოგად შემთხვევებშიაც, ამასთან აუცილებელი არაა მხოლოდ ერთი კოორდინატი არ იყოს ციკლური.

მოდრობა ცენტრალური სიმეტრიის ველში. როგორც მარტივი მაგალითი ცვლადთა განცალგებისა ციკლური კოორდინატების შემთხვევაში, განვიხილოთ ერთი წერტილის მოძრობა  $U = U(r)$  ცენტრალური სიმეტრიის ველში. ამ შემთხვევაში მოძრობა ბრტყელია და საკმარისია პოლარ-კოორდინატებით სარგებლობა. ამოცანა სტაციონარულია, ამიტომ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას ასე დავწერთ:

$$\frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + U(r) = E. \quad (96,6)$$

ცხადია, რომ აქ  $\varphi$  ციკლური კოორდინატია და  $p_\varphi = l = \text{const}$ , სადაც  $l$  იმპულსის მ-მენტია. (96,6) განტოლება ასე გადავწერთ:

$$\left( \frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial A}{\partial \varphi} \right)^2 = 2m [E - U(r)]. \quad (96,7)$$

ერთადერთი არაციკლური კოორდინატი  $r$ -ია, ამიტომ ცვლადთა განცალგებას მოვხდენთ ჩასმით

$$A = A_1(r) + l\varphi. \quad (96,8)$$

მივიღებთ

$$\left( \frac{dA_1}{dr} \right)^2 = 2m [E - U(r)] - \frac{l^2}{r^2}, \quad (96,9)$$

აქედან კი

$$A_1 = \int \sqrt{2m [E - U(r)] - \frac{l^2}{r^2}} dr, \quad (96,10)$$

ხოლო, თანახმად (96,8) ფორმულისა,

$$A = \int \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{l^2}{r^2}} dr + \varphi. \quad (96,11)$$

ამ გამოსახულების  $E$ -თი გაწარმოებით და (80,16)-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$l = \int \frac{m dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{l^2}{r^2}}}. \quad (96,12)$$

ამ დამოკიდებულებებიდან ადვილად ვიპოვით  $r$ -ს როგორც  $l$ -ის ფუნქციას. ტრაექტორიის განტოლების საპოვნელად კი საკმარისია გამოვიყენოთ (92,12) ფორმულა

$$\beta = \frac{\partial A}{\partial l} = - \int \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{l^2}{r^2}}} + \varphi. \quad (96,13)$$

აქედან ადვილად ვიპოვით  $r$ -ს როგორც  $\beta$ -ს ფუნქციას. მაშასადამე, გაცილებით ადვილად მივიღეთ იგივე შედეგები, რაც გვექონდა უწინ. ამასთან  $m$ -ში დაყვანილი მასა უნდა ვიგულისხმოთ.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ცენტრალურ ველში ცვლადთა განცალგება შეგვიძლია მოვახდინოთ სფერულ კოორდინატებშია. ჰამილტონიანს ამ კოორდინატებში შემდეგი სახე აქვს:

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r). \quad (96,14)$$

აქ  $\varphi$  კვლავ ციკლური კოორდინატია, ამიტომ  $p_\varphi = \text{const}$ . ჰამილტონ-იაკობის განტოლება ასე დაიწერება:

$$\left( \frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial A}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial A}{\partial \varphi} \right)^2 = 2m(E - U). \quad (96,15)$$

რადგან  $\varphi$  ციკლურია, ამიტომ ცვლადთა განსაცალგებლად ამოხსნა ასე შეგვიძლია ვეძებოთ:

$$A = p_\varphi \varphi + A_\theta(\theta) + A_r(r). \quad (96,16)$$

განტოლებაში შეტანილ მივიღებთ

$$\left( \frac{dA_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left[ \left( \frac{dA_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right] = 2m(E - U(r)). \quad (96,17)$$

ეს გამოსახულება ასე გადავწეროთ:

$$\left[ \left( \frac{dA_r}{dr} \right)^2 - 2m(E - U(r)) \right] r^2 + \left[ \left( \frac{dA_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right] = 0. \quad (96,18)$$

ამ ტოლობას კი ადგილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ ექნება, როცა ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებანი ერთსა და იმავე მუდმივს უდრიან საწინააღმდეგო ნიშნით. აღვნიშნოთ ეს მუდმივი  $a^2$ -ით, მაშინ

$$\left[ \left( \frac{dA_r}{dr} \right)^2 - 2m(E - U(r)) \right] r^2 = -a^2, \quad (96,19)$$

$$\left(\frac{dA_0}{d\theta}\right)^2 = -\frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} + a^2. \quad (96,20)$$

ანგვაოდ. ცვლადები განცალკეულა. ამ განტოლებების ამოხსნით მივიღებთ

$$A_r = \int \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{a^2}{r^2}} dr \quad (96,21)$$

და

$$A_\theta = \int \sqrt{a^2 - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta. \quad (96,22)$$

(96,16) ფორმულის თანახმად კი ზოგად ამოხსნას ექნება სახე

$$A = p_\phi \varphi + \int \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{a^2}{r^2}} dr + \int \sqrt{a^2 - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta. \quad (96,23)$$

თუ შევადარებთ (96,6) და (96,14) ჰამილტონის ფუნქციებს, ადვილად დავინახავთ, რომ ცენტრალური სიმეტრიის ველში სფერულ კოორდინატებში იმპულსის მონენტის როლს ასრულებს სიდიდე

$$l^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}. \quad (96,24)$$

მაშასადამე, ზემოთ განხილულ ფორმულებში  $a^2$  მუდმივი ემთხვევა  $l^2$ . ამის გათვალისწინებით განზოგადებული იმპულსებისათვის გვექნება

$$p_\phi = \frac{\partial A}{\partial \varphi} = \text{const}, \quad (96,25)$$

$$p_\theta = \frac{\partial A}{\partial \theta} = \sqrt{l^2 - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}}, \quad (96,26)$$

$$p_r = \frac{\partial A}{\partial r} = \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{l^2}{r^2}}. \quad (96,27)$$

ახლა ვიპოვოთ ტრაექტორია. ამისათვის (96,23) გავაწარმოთ  $p_\phi$  და  $l$  მუდმივებით და მიღებული შედეგი ახალ  $\varphi_0$  და  $\theta_0$  მუდმივებს გავუტოლოთ; გვექნება:

$$\varphi - \varphi_0 = p_\phi \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{l^2 - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}}} \quad (96,28)$$

და

$$\theta_0 = \int \frac{l d\theta}{\sqrt{l^2 - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}}} - \int \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{l^2}{r^2}}}; \quad (96,29)$$

ხოლო. თუ (96,23)-ს გავაწარმოებთ  $E$ -თი, მივიღებთ ცვლად (96,12) გამოსახულებას, სადა ნაც ვართოთ მოძრაობის სასრულ განტოლებას  $r = r(t)$ .

ჩვენ ყოველთვის შეგვაძლია კოორდინატება ისე ავირჩიოთ, რომ მატერიალური წერტილის საწყისი სიჩქარე იღოს მერიდიანულ სიბრტყეში, ე. ი.  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ .

მაშინ (96,28) ფორმულიდან მივიღებთ  $p_a = 0$ , ე. ი.  $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ მოძრაობა ბრტყელია.

$p_r = 0$ -სთვის კი (96,29) მოგვეცემს ტრაექტორიის შემდეგ განტოლებას:

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{ldr}{r^2 \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{l^2}{r^2}}}, \quad (96,30)$$

რომელიც  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$  პოტენციალური ენერჯისათვის  $r$  და  $\theta$  პოლარკოორდინატებში მოგვეცემს, ჩვენთვის უკვე კარგად ცნობილ, კონუსური კვეთების განტოლებას.

### § 17. მოძრაობის აღწერა სამედეგისა და კუთხური ცვლადებით

ჰამილტონ-იაკობის შეკრდის სიძლიერე იმაშია ც მდგომარეობს, რომ იგი განსაკუთრებით ნაყოფიერი გააზრდა პერიოდული მოძრაობების აღსაწერად. პერიოდული მოძრაობებისათვის ხშირად საკმარისია სიბშირეებზე მოქმენა. ამას კი ადვილად მივაღწევთ, თუ ჰამილტონ-იაკობის ზეთოდში, ნაცვლად  $\alpha$  პარამეტრებისა, შემოვიღებთ ახალ  $J_i$  სიდიდეებს, რომელთაც ქმედების ცვლადები ეწოდებათ და შესაბამის შეუღლებულ  $W_i$ , ე. წ. კუთხურ ცვლადებს. ამ ცვლადებით მოძრაობათა აღწერამ დიდი როლი შეასრულა ასტრონომიაში და, განსაკუთრებით, ატომის ფიზიკაში მისი განვითარების პირველ საფეხურზე, სანამ ატომის ახალი, თანამედროვე მექანიკა შექმნებოდა.

სანამ ამ ცვლადებს შემოვიღებუეთ, წინასწარ ვანემაჩტოთ, რას ვეწოდებთ პერიოდულ მოძრაობას. განვიხილოთ სისტემა, რომლის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი ერთის ტოლია. ასეთი მოძრაობის შესაბამისი ფაზური სივრცე იქნება  $p_0q$  სიბრტყე. არჩევენ ორი ტიპის პერიოდულ მოძრაობას: ლიბრაციასა და ბრუნვას.

ლიბრაცია. ლიბრაცია ეწოდება ისეთი ტიპის პერიოდულ მოძრაობას, რომლის დროსაც კოორდინატასა და იმპულსსაც დროის ერთი და იგივე პერიოდს გააჩნიათ

$$q(t+T) = q(t), \quad p(t+T) = p(t). \quad (97,1)$$

ასეთი ტიპის პერიოდულობა ახასიათებს რხევით მოძრაობებს, მაგალითად, წრფივ პარმონიულ ოსცილატორს. მართლაც, ჩვენ ვიცით, რომ მისი კოორდინატი და იმპულსი ერთი და იგივე პერიოდის პერიოდული ფუნქციებია

$$q = A \cos(\omega t + \alpha), \quad p = B \sin(\omega t + \alpha). \quad (97,2)$$

რადგან  $T$  პერიოდის გავლის შემდეგ  $q$  და  $p$  თავის საწყის მნიშვნელობებს უბრუნდება, ამიტომ სათანადო ფაზური წერტილი სისტემის მოძრაობისას შემოსწერს ჩაკეტილ ტრაექტორიას. მართლაც, (97,2) ფორმულებიდან ოსცილატორისათვის მივიღებთ

$$\frac{q^2}{A^2} + \frac{p^2}{B^2} = 1 \quad (97,3)$$

ჩაკეტილ (ელიფსურ) ტრაექტორიას.

ბრუნვა. ბრუნვითი პერიოდული მოძრაობის დროს  $q$  თვითონ არ იცვლება პერიოდულად, მაგრამ მისი გაზრდისას რაიმე სიდიდით, რომელსაც ჩვენ  $2\pi$ -ს ტოლად ავიღებთ, სისტემის კოორდინატა არ იცვლება. ასეთი პერიოდული მოძ-

რაობის მაგალითია მყარი სხეულის ბრუნვა ლერძის ირგვლივ, ამ დროს  $q$  კოორდინატს როლს შემობრუნების  $\phi$  კუთხე ასრულებს და, მართლაც, მყარი სხეულის შემობრუნებით  $2\pi$  კუთხეზე მისი მდებარეობა არ იცვლება. ამასთან ბრუნვის შემთხვევაში  $q$ -ს მნიშვნელობები შემოსაზღვრული არაა და იგი შეიძლება უსასრულოდ გაიზარდოს. ამიტომ შესაბამისი ფაზური ტრაექტორია ჩაუკეტავი მრუდი იქნება. გასაგებია, რომ ამ შემთხვევაში  $p$  იმპულსი იქნება  $2\pi$  სიდიდის პერიოდული ფუნქცია.

აღნიშნოთ, რომ ორივე ტიპის პერიოდული მოძრაობა შეიძლება ერთ სისტემაშიაც განხორციელდეს. მაგალითად, ჩვენ მიერ განხილული სიმეტრიული ბზრიალას პრეცესიული და ნუტაციური მოძრაობა შეესაბამება ლიბრაციასა და ბრუნვით პერიოდულ მოძრაობებს.

შემოვიღოთ ახლა ქმედები:  $\alpha$  და კუთხური ცვლადები. ამ ცვლადების დიდი მნიშვნელობის გამო ატომური მოკლეენების სფეროში მათი თვისებები დამუშავებული იყო ატომის ფიზიკაში. ამიტომ ამ ცვლადების დეტალური ბუნებისა და მნიშვნელობის გასარკვევად საჭიროა მივმართოთ ატომური ფიზიკის სახელმძღვანელოებს. თუმცა უნდა აღვნიშნოთ, რომ ატომის ფიზიკაში ამ ცვლადებს მხოლოდ ისტორიული როლი შერჩათ, რამდენადაც თანამედროვე ატომის მექანიკა საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ ატომის თვისებები ისე, რომ სულაც არ გამოვიყენოთ ბორის ატომის ნახევრად კლასიკური თეორია, რომელშიაც გადამწყვეტ როლს ასრულებდა ქმედებისა და კუთხის აღნიშნული ცვლადები.

რადგან ერთგანზომილებიან სტაციონარულ მოძრაობას ვიხილავთ, ამიტომ ჰამილტონ-იაკობის სრული ინტეგრალი იქნება  $A = A(q, \alpha)$ . ნაცვლად  $\alpha$  მუდმივისა, შემოვიღოთ ახალი სიდიდე  $J$ , ე. ი.  $A = A(q, J)$ . შესაბამისი განზოგადებული კოორდინატი იყოს  $w$ . იგი, თანახმად (92,12) ფორმულისა, განისაზღვრება ტოლობით

$$w = \frac{\partial A}{\partial J}, \quad (97,4)$$

$w$ -ს უწოდებენ კუთხურ ცვლადს. მოვიჩხოვოთ, რომ  $w$ -ს სრული პერიოდი ერთის ტოლი იყოს, ე. ი.

$$\oint dw = 1. \quad (97,5)$$

$\oint$  მიუთითებს იმაზე, რომ ინტეგრალი აიღება მთელი პერიოდის მანძილზე. კერძოდ, ლიბრაციის დროს ეს ცვლადი გაივლის  $q$  გზას და ისევ გამოსავალ წერტილში დაბრუნდება; ბრუნვის დროს კი ინტეგრალი აიღება  $(0, 2\pi)$  შუალედში ვიპოვოთ (97.4)-ის წარმომებული კოორდინატი

$$\frac{dw}{dq} = \frac{\partial}{\partial J} \left( \frac{\partial A}{\partial q} \right), \quad (97,6)$$

აქედან

$$\oint dw = \frac{\partial}{\partial J} \oint \frac{\partial A}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint p dq. \quad (97,7)$$

მაგრამ (97,5) პირობების დასაკმაყოფილებლად საჭიროა

$$J = \oint p dq = \oint \frac{\partial A}{\partial q} dq. \quad (97,8)$$

როგორც ვხედავთ,  $J$  ცვლადი თავისი კონსტრუქციით ჰგავს ქმედების (80,7) ფუნქციას, ამიტომაც უწოდებენ მას ქმედების ცვლადს. ამგვარად, ჩვენ შემოვიყ-

ვანეთ  $J$  და  $w$  ცვლადები. იბადება კითხვა, როგორ გამოვიყენოთ ისინი მოძრაობის აღსაწერად? ვთქვათ, მოცემულია ჰამილტონიანი  $p$  და  $q$  კანონიკურ ცვლადებში და დროზე იგი ცხადად არაა დამოკიდებული. მაშინ  $H = E$  ემთხვევა სრულ ენერჯიას. ვიპოვიეთ ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სრულ ინტეგრალს  $A = A(q, a)$ , სადაც ამ შემთხვევაში  $a$  ემთხვევა სრულ ენერჯიას  $A = A(q, E)$ . ვიპოვიეთ, აგრეთვე, ინტეგრალს

$$J = \oint \frac{\partial A}{\partial q} dq, \quad (97,9)$$

საიდანაც მივიღებთ:  $J = f(E)$ . ამის შემდეგ, თუ ამოვხსნით  $E$ -ს და შევიტანთ ქმედების ფუნქციაში, გვექნება:  $A = A(q, J)$ .

კანონიკური გარდაქმნების საშუალებით

$$p = \frac{\partial A(q, J)}{\partial q}, \quad w = \frac{\partial A(q, J)}{\partial J}. \quad (97,10)$$

$q$  და  $p$  იქნება  $w$ -ს პერიოდული ფუნქციები ერთის ტოლი პერიოდით, ხოლო  $H$  და  $E$  მხოლოდ  $J$ -ს ფუნქციები.

ჰამილტონის განტოლებებიდან კი მივიღებთ

$$J = \text{const}. \quad (97,11)$$

$$\dot{w} = \frac{dH(J)}{dJ} = \frac{dE}{dJ} = \nu(J), \quad (97,12)$$

სადაც  $\nu$  არის  $J$ -ზე დამოკიდებული ბიციხე.

ცხადია, რომ

$$\dot{w} = \nu t + \gamma, \quad (97,13)$$

სადაც  $\gamma$  მუდმივია.

რადგან  $\dot{w}$  ცვლადი ისე ავირჩიეთ, რომ ყოველი პერიოდის შემდეგ იგი იღებს ერთის ტოლ ნაზრდს, ამიტომ  $\nu$  არის დადებითი რიცხვი და წარმოადგენს რხევის სიხშირეს. მართლაც, პირობიდან

$$\nu(t + T) + \gamma = \nu t + \gamma + 1 \quad (97,14)$$

ვღებულობთ

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad (97,15)$$

რაც ნიშნავს, რომ  $\nu$  კორეზინატის ცვლილების სიხშირეს წარმოადგენს. ამის შემდეგ  $w = \nu t + \gamma$  ფორმულიდან ჩანს, რატომ ეწოდება  $w$ -ს კუთხური ცვლადი.

ამგვარად, მოძრაობის სურათის სრული გამორკვევის გარეშე ქმედებისა და კუთხის ცვლადებმა მოკვეცა პერიოდული მოძრაობის სიხშირის პოვნის საშუალება.

როცა წინასწარ ცნობილია, რომ მოძრაობა პერიოდულია, მაშინ სიხშირის საპოვნელად საკმარისია (97,8) ფორმულით ქმედების  $J$  ცვლადის პოვნა და  $H$ -ის გამოხატვა ამ  $J$ -თი, რის შემდეგაც სიხშირეს ვიპოვიეთ (97,12) ფორმულით.

ნათქვამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ წრფივი ჰარმონიული ოსცილატორი. როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში

$$H = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}. \quad (97,16)$$

აქედან

$$p = \sqrt{2m \left( E - \frac{kq^2}{2} \right)} \quad (97,17)$$

და

$$J = \oint \sqrt{2m \left( E - \frac{kq^2}{2} \right)} dq. \quad (97,18)$$

რადგან მოძრაობა ხდება  $-\sqrt{2E/k} \leq q \leq \sqrt{2E/k}$  არეში, ამიტომ,

$$J = 2 \int_{-\sqrt{2E/k}}^{\sqrt{2E/k}} \sqrt{2m \left( E - \frac{kq^2}{2} \right)} dq. \quad (97,19)$$

რამდენადაც ჩვენ გვინტერესებს რხევის სიხშირე. ხელსაყრელია ვიპოვოთ  $\frac{\partial J}{\partial E}$ . გვქვნება<sup>1</sup>

$$\frac{1}{v} = \frac{\partial J}{\partial E} = 2 \int_{-\sqrt{2E/k}}^{\sqrt{2E/k}} \frac{m dq}{\sqrt{2m \left( E - \frac{kq^2}{2} \right)}}. \quad (97,20)$$

ამ მარტივ ინტეგრალის ამოხსნით მივიღებთ სიხშირის ცნობილ ფორმულას

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (97,21)$$

მიღებული ფორმულები ადვილად განზოგადდება მრავალი თავისუფლების სარისხის შემთხვევაში. ამ დროს  $J_1, J_2, \dots, J_n$  ქმედების ცვლადები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$J_i = \oint p_i dq_i. \quad (97,22)$$

და

$$v_i = \frac{\partial A}{\partial J_i}, \quad (97,23)$$

ხოლო

$$v_i(J_1, J_2, \dots, J_n) = \frac{\partial H(J_1, J_2, \dots, J_n)}{\partial J_i}. \quad (97,24)$$

მაგალითად, სივრცითი ანიზოტროპული ოსცილატორისათვის, თუ გავიხსენებთ § 95-ში ნაპოვნი ქმედების ფუნქციის გამოსახულებას, ადვილად ვიპოვიან სიხშირეებს:

$$v_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad v_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_2}{m}}, \quad v_3 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_3}{m}}. \quad (97,25)$$

მართალია, თითოეული ღერძის გასწვრივ რხევა პერიოდულია, მაგრამ საზოგადოდ ანიზოტროპული ოსცილატორის რხევა პერიოდული არ იქნება, რამდენადაც  $v_1, v_2, v_3$  პერიოდები ერთმანეთს არ ემთხვევა. ასეთი ტიპის რხევას მრავალპერიოდულ, ანდა თითქმის პერიოდულ რხევას უწოდებენ. აღსანიშნავია, რომ მრავალპერიოდული მოძრაობების დროს ტრაექტორია ჩაეკეტილ მრუდს არ წარმოადგენს. როცა  $v_1 = v_2 = v_3$ , მაშინ ოსცილატორის რხევა მკაცრად პერიოდულია და, როგორც თავის დროზე დავამტკიცეთ, ტრაექტორია ჩაეკეტილ მრუდს წარმოადგენს.

<sup>1</sup> რამდენადაც ინტეგრალის საზღვრები ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ფესვებია, ამიტომ საზღვრების მიხედვით წარმოებულემა ამოვარდება.



აღენიშნოთ, რომ საზოგადოდ, ნამდვილი პერიოდული მოძრაობის დროს ტრაექტორია ყოველთვის ჩაკეტილი მრული იქნება.

როცა მრავალპერიოდული მოძრაობისას რომელიმე სიხშირეები ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ამბობენ, რომ ადგილი აქვს გადაგვარებას. გადაგვარება შეიძლება იყოს ერთჯერადი და მრავალჯერადი. შესაძლებელია აგრეთვე სრული გადაგვარებაც, როცა სისტემის ყველა სიხშირე ერთმანეთს ემთხვევა, მაგალითად, სივრცით იზოტროპულ ოსცილატორს ახასიათებს სრული გადაგვარება. სრული გადაგვარება შეესაბამება ნამდვილ პერიოდულ მოძრაობას და ამ შემთხვევაში მოძრაობის ტრაექტორია ჩაკეტილია. სისტემის გადაგვარების საკითხი დაკავშირებულია სისტემის გომეტრიულ თვისებებთან. მტკიცდება, რომ რამდენჯერადი გადაგვარებაც ახასიათებს სისტემას, იმდენჯერ სხვადასხვანაირად შეგვიძლია შევარჩიოთ კოორდინატები, რომლებშიაც ჰამილტონ-იაკობის განტოლებაში ცვლადები განცალდება.

როცა  $p_h$  ციკლური ცვლადია, მაშინ  $p_h = \text{const}$  და  $J_h = p_h \oint dq_h = 2\pi p_h$  დაბოლოს აღენიშნოთ, რომ  $J_1, J_2, \dots, J_n$  ცვლადებს ის დამახასიათებელი თვისებებურება აქვთ, რომ ისინი წარმოადგენენ ე. წ. ადაბატურ ინვარიანტებს.

დავუშვათ, სისტემა, რომელიც ფინიტურ მოძრაობას აწარმოებს, დამოკიდებულია რაიმე  $\epsilon$  პარამეტრზე, რომელიც განსაზღვრავს ან გარეშე ველის ანდა სისტემის შინაგან თვისებებს. ვთქვათ, ეს პარამეტრი გარეშე პირობების გავლენით ნელა (ადიაბატურად) იცვლება დროის მიხედვით. ამასთან, ნელა ცვლადში იგულისხმება ნელი ცვლილება ერთი პერიოდის განმავლობაში

$$T \frac{d\epsilon}{dt} \ll \epsilon. \quad (97,26)$$

ასეთი სისტემა ჩაკეტილი არაა, ამიტომ მისი ენერგია არ შეინახება. მაგრამ ადიაბატური მოქმედების დროს ქმედების  $J$  ცვლადი თურმე წარმოადგენს უცვლელ სიდიდეს და მას ადიაბატურ ინვარიანტს უწოდებენ. ამ გარემოებას ადგილი აქვს მრავალპერიოდული მოძრაობის დროსაც, თუ გადაგვარება არა გვაქვს.

## § 98. კეპლერის ამოცანა კმედეგის ცვლადებში

ამოეხსნათ მოძრაობის ამოცანა ცენტრალური ველის მეტად მნიშვნელოვან შემთხვევაში. როცა პოტენციალური ენერგია ტოლია

$$U = -\frac{\alpha}{r}, \quad (98,1)$$

სადაც  $\alpha$  მუდმივია. როცა  $\alpha = \gamma m_1 m_2$ , მაშინ საქმე გვაქვს გრავიტაციულ ველთან, ხოლო, როცა  $\alpha$  მუხტების ნამრავლია, გვექნება კულონური ველი. განვიხილოთ ფინიტური მოძრაობა. ამ დროს  $E < 0$ . გამოვიყენოთ ქმედების ცვლადები და ვიპოვოთ მოძრაობის პერიოდი. რადგან ცენტრალურ ველში მოძრაობისას ტრაექტორია ბრტყელია, ჰამილტონიანს აქვს სახე

$$H = E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}, \quad (98,2)$$

საიდანაც

$$p_r = \sqrt{2m \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{l^2}{r^2}}, \quad (98,3)$$

$J$  ცვლადი  $\epsilon$  განისაზღვრება ინტეგრალით

$$J = 2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{-2m\epsilon + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{l^2}{r^2}} dr. \quad (98,4)$$

აქ გავიხსენოთ, რომ  $E = -\epsilon < 0$ ;  $r_1$  და  $r_2$  ფუნქციებში გამოსახულების ფესვებია და ტოლებია

$$r_{1,2} = \frac{\alpha}{2\epsilon} \pm \frac{\alpha}{2\epsilon} \sqrt{1 - \frac{2l^2\epsilon}{m\alpha^2}}. \quad (98,5)$$

რადგან ჩვენ გვინტერესებს სიხშირე, ამიტომ უფრო ადვილია ვიპოვოთ  $\frac{\partial J}{\partial \epsilon}$ . ცხადია, რომ

$$\frac{\partial J}{\partial \epsilon} = 2 \int_{r_1(\epsilon)}^{r_2(\epsilon)} \frac{-mr dr}{\sqrt{-2m\epsilon r^2 + 2m\alpha r - l^2}} \quad (98,6)$$

ფუნქციებში გამოსახულება დაივყვანოთ სრულ კვადრატზე და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\sqrt{2m\epsilon} r - \alpha \sqrt{\frac{m}{2\epsilon}} = x. \quad (98,7)$$

შედეგად მივიღებთ

$$\frac{\partial J}{\partial \epsilon} = -\sqrt{\frac{2m}{\epsilon}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2m\epsilon}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{x dx}{\sqrt{N - x^2}} + \frac{\alpha}{2\epsilon} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{N - x^2}} \right\}. \quad (98,8)$$

სადაც

$$N = \frac{m\alpha^2}{2\epsilon} - l^2. \quad (98,9)$$

ხოლო თანახმად (98,5) და (98,7) ფორმულებისა,

$$x_1 = -\sqrt{N}, \quad x_2 = \sqrt{N}. \quad (98,10)$$

(98,8) გამოსახულებაში შემავალი ინტეგრალები მარტივი ინტეგრალებია. ამასთან, პირველი საზღვრებზე მოისპობა, მეორე კი არკისინუსია და საზღვრების ჩასმის შემდეგ მოგვცემს  $\pi$ -ს. ამგვარად,

$$\frac{\partial J}{\partial \epsilon} = -\pi \frac{\alpha}{2\epsilon} \sqrt{\frac{2m}{\epsilon}}. \quad (98,11)$$

რადგან  $H = -\epsilon$ , ამიტომ, თანახმად (97,24) ფორმულისა, პერიოდისაუვის გვექნება

$$T = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2\epsilon^3}}. \quad (98,12)$$

ეს უკანასკნელი კვლევის მესამე კანონს წარმოადგენს.

რამდენადაც  $-\frac{\alpha}{r}$  ველში ტრაექტორია ჩაკეტილია, მოძრაობა მკაცრად პერიოდულია და ამიტომ ადვილი ექნება სრულ გადაგვარებას, ე. ი. სამი სიხში-

რის ნაცვლად ერთი სიხშირე გვექნება. ამის საილუსტრაციოდ ამოცანა ამოგხსნათ ზოგადად, სფერულ კოორდინატებში. მაშინ, თანახმად (96,25) — (96,27) ფორმულები, გვექნება ქმედების სამი ცვლადი:

$$J_\varphi = 2\pi p_\varphi, \quad (98,13)$$

$$J_\theta = \oint \sqrt{l^2 - \frac{p_\theta^2}{\sin^2 \theta}} d\theta, \quad (98,14)$$

$$J_r = \oint \sqrt{2m \left( -\varepsilon + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{l^2}{r^2}} dr. \quad (98,15)$$

აქ  $E$  კვლავ  $-\varepsilon$ -ით შეეცვალეთ, რადგან ფინიტურ მოძრაობას ვიხილავთ. ამოვხსნათ ეს ინტეგრალები. ცხადია, რომ კინეტიკური ენერგია ერთი და იგივე იქნება რომელი ცვლადებითაც არ უნდა ვისარგებლოთ, პოლარკოორდინატებით ტრაექტორიის სიბრტყეში თუ სფერული კოორდინატებით. ამიტომ

$$2T = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} = p_r \dot{r} + l\dot{\theta}, \quad (98,16)$$

სადაც  $\theta$  არის პოლარკუთხე ტრაექტორიის სიბრტყეში (აღრე ამ კუთხეს  $\varphi$ -თი აღვნიშნავდით). ამ ტოლობიდან

$$p_\theta l\dot{\theta} = l\dot{\theta} - p_\varphi d\varphi, \quad (98,17)$$

საიდანაც

$$J_\theta = \oint p_\theta d\theta = \oint l d\theta - \oint p_\varphi d\varphi, \quad (98,18)$$

ან, რადგან  $l$  და  $p_\varphi$  მუდმივებია,

$$J_\theta = 2\pi(l - p_\varphi). \quad (98,19)$$

ვიპოვოთ ახლა  $J_r$ . ცხადია, რომ

$$J_r = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \sqrt{N - \left( \sqrt{2m\varepsilon r} - \alpha \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}} \right)^2} dr, \quad (98,20)$$

სადაც  $N$  განისაზღვრება (98,9) ფორმულით. შემოვიღოთ ახალი ცვლადი

$$t = \frac{1}{\sqrt{2m\varepsilon r}}, \quad (98,21)$$

მივიღებთ

$$J_r = -2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t^3} \sqrt{-l^2 + 2\delta t - 1} dt, \quad (98,22)$$

სადაც

$$\delta = \alpha \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}, \quad t_1 = \frac{1}{\sqrt{2m\varepsilon r_1}}, \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{2m\varepsilon r_2}} \quad (98,23)$$

და გათვალისწინებულია, რომ

$$N - \delta^2 = -l^2. \quad (98,24)$$

(98,22)-ში ნაწილობითი ინტეგრაციის ჩატარებით გვექნება

$$J_r = -2 \left\{ \left[ -\frac{\sqrt{-l^2 t^2 + 2\delta t - 1}}{t} \right]_{t_1}^{t_2} + \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t \sqrt{-l^2 t^2 + 2\delta t - 1}} - l^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sqrt{-l^2 t^2 + 2\delta t - 1}} \right\}, \quad (98,25)$$

სადაც

$$2\pi l = J_\theta + J_\varphi.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თავისუფალი წვერი საზღვრებზე ისპობა. დანარჩენი ინტეგრალები კი ტოლია:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t \sqrt{-l^2 t^2 + 2\delta t - 1}} = \left[ \arcsin \frac{\delta t - 1}{t \sqrt{N}} \right]_{t_1}^{t_2} = -\pi, \quad (98,26)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sqrt{-l^2 t^2 + 2\delta t - 1}} = \left[ \frac{1}{l} \arcsin \frac{l^2 t - \delta}{\sqrt{N}} \right]_{t_1}^{t_2} = -\frac{\pi}{l}, \quad (98,27)$$

მაშასადამე,

$$J_r = 2\pi\delta - 2\pi l. \quad (98,28)$$

თუ გამოვიყენებთ ბ-ს (98,23) გამოსახულებას და გავითვალისწინებთ (97,19) ფორმულას, მივიღებთ

$$J_r + J_\theta + J_\varphi = \pi \alpha \sqrt{\frac{2m}{\varepsilon}}, \quad (98,29)$$

საიდანაც ჰამილტონის ფუნქციისათვის გვექნება

$$H = -\varepsilon = -\frac{2m\pi^2 \alpha^2}{(J_r + J_\theta + J_\varphi)^2}. \quad (98,30)$$

აქედან კი ვხედავთ, რომ

$$\frac{\partial H}{\partial J_r} = \frac{\partial H}{\partial J_\theta} = \frac{\partial H}{\partial J_\varphi} = \frac{4\pi^2 \alpha^2 m}{(J_r + J_\theta + J_\varphi)^3}, \quad (98,31)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ სამივე სიხშირე:  $\nu_r$ ,  $\nu_\theta$ ,  $\nu_\varphi$  ერთმანეთს ემთხვევა. თუ (98,31) გამოსახულებიდან გამოვრიცხავთ  $J_r + J_\theta + J_\varphi$  ჯამს ენერჯის საშუალებით, მაშინ სიხშირისათვის მივიღებთ

$$\nu = \frac{1}{\pi \alpha} \sqrt{\frac{2\varepsilon^3}{m}}, \quad (98,32)$$

რაც (98,12) ფორმულას ემთხვევა.

შეინიშნოთ, რომ  $J_r$ -ში შედის  $l$ , რომელიც, თანახმად (98,25) ფორმულისა, წარმოადგენს ჯამს  $2\pi l = J_\theta + J_\varphi$ , ამიტომ დამოუკიდებლად იმისაგან, თუ რა სახე აქვს ცენტრალური ველის პოტენციალს, ენერჯიაში ყოველთვის შევა  $J_\theta + J_\varphi$  კომბინაცია, რაც შედეგად მოგვცემს იმას, რომ  $\nu_\theta$  და  $\nu_\varphi$  ყოველთვის ერთმანეთის ტოლი იქნება. მაშასადამე, ნებისმიერი ტიპის ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრაობა ერთჯერადად მაინც იქნება გადაგვარებული.

დაბოლოს, აღნიშნით, რომ (98,30) ფორმულამ დიდი როლი შეასრულა ატომის ფიზიკაში. თუ გამოვიყენებთ ზომერფელდ-ვილსონის დაკვანტვის ზოგად პირობებს:

$$\begin{aligned} J_\varphi &= \oint p_\varphi d\varphi = n_\varphi h, \\ J_\theta &= \oint p_\theta d\theta = n_\theta h, \\ J_r &= \oint p_r dr = n_r h, \end{aligned} \tag{98,33}$$

სადაც  $n_\varphi$ ,  $n_\theta$ ,  $n_r$  მთელი დადებითი რიცხვებია, ხოლო  $h$  პლანკის მუდმივა და  $\oint$ -ს ავიღებთ  $Z^2$ -ის ტოლად, ეს ფორმულა მოგვცემს

$$E_n = - \frac{Z^2 e^4 m}{2n^2 \hbar^2}, \tag{98,34}$$

რომელიც ბორის ცნობილ ფორმულას ემთხვევა წყალბადისებურ ატომების ენერჯისათვის. ამ ფორმულაში  $n$  მთელი რიცხვია,  $\hbar$  კი პლანკის მუდმივა. გაყოფილი  $2\pi$ -ზე. ამ ფორმულიდან ვხედავთ, რომ ატომის ენერგია დისკრეტულია.

## ლიტერატურა

1. М. А. Айзерман. Классическая механика. Издательство „Наука“, Москва, 1947.
2. П. Аппель. Теоретическая механика, ч. I, II. Госиздат физико-математической литературы. Москва, 1960.
3. Н. Н. Бухгольц. Основной курс теоретической механики, ч. I, II. Издательство „Наука“, Москва, 1972.
4. Г. Голдстейн. Классическая механика. Издательство „Наука“, Москва, 1975.
5. Н. И. Жирнов. Классическая механика, „Просвещение“, Москва, 1980.
6. А. Зоммерфельд. Механика. Госиздат И.Л., Москва, 1947.
7. А. С. Компанеев. Курс теоретической физики, т. I, „Просвещение“, Москва, 1972.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. Госиздат физико-математической литературы. Москва, 1958.
9. Дж. У. Лич. Классическая механика. Издательство И.-Л., Москва, 1961.
10. Б. В. Медведев. Начала теоретической физики. Издательство „Наука“, Москва, 1977.
11. И. В. Савельев. Основы теоретической физики, т. I. Издательство „Наука“, Москва, 1975.
12. Н. В. Розе. Динамика твердого тела. Ленинград, 1932.
13. Дж. Л. Синг. Классическая динамика. Госиздат физико-математической литературы. Москва, 1963.
14. Г. К. Суллов. Теоретическая механика. Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1946.
15. ნ. ეკუა. თეორიული მექანიკა. ნაწილი I და II, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1970.
16. მ. შირიანაშვილი. ზოგადი ფიზიკის კურსი, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1973.

## საგნობრივი საძიებელი 1

- ბლიბატური ინვარიანტები 321  
 ათვის სისტემა 7  
 — არაინერციული 8  
 — ინერციის ცენტრის 59, 113, 114  
 — ინერციული 8, 26  
 — ლაბორატორიული 59, 87, 113, 114  
 — მბრუნავი 253, 254, 256, 257  
 ამპლიტუდა 52  
 — მათემატიკური საქანის 177  
 — მილევადი რხევის 187  
 — პარამონიული რხევის 146  
 ამპლიტუდის ორთონორმირება 158, 159  
 აპოგეა 109  
 აფელიუმი 101  
 აჩქარება 9, 10, 24  
 — ცენტრშიმწრაფი 13  
 აჩქარების მხები მდგენელი 12, 13, 14  
 — ბინორმალური მდგენელი 12  
 — ნორმალური მდგენელი 12, 13  
 — ორთოგონალური მდგენელები 21, 22
- ბაის-ბალოს კანონი 259  
 ბერის კანონი 258  
 ბზრიალა  
 — ასიმეტრიული 212, 217  
 — თავისუფალი 223  
 — სიმეტრიული 212, 222, 224  
 — სფერული 212, 217, 223  
 ბინეს ფორმულა 103, 105, 106  
 ბინორმალი 11, 12  
 ბმები 53, 62, 63, 66, 304  
 — არასტაციონარული 63, 304  
 — არაპოლონომური 63  
 — გეომეტრიული 63, 74  
 — იდეალური 70  
 — ორმხრივი 64  
 — სტაციონარული 64  
 — ცალმხრივი 64  
 — პოლონომური 63, 70
- ბრტყელი მათემატიკური საქანი 176, 177  
 — საქანის იზოქრონიზმი 177  
 — პერიოდი 177  
 ბრუნვა 203, 204, 205, 317, 318
- ბრუნვის კუთხური სრჩაქე 203  
 — ლერძი 202
- ზადაგვარება 321  
 — ერთჯერადი 321, 324  
 — მრავალჯერადი 321  
 — სრული 321  
 გალილის გარდაქმნის ფორმულები 27, 29  
 — ინერციის კანონი 23  
 — ფარდობითობის პრინციპი 28, 252  
 განზოგადებული იმპულსი 82, 83, 86, 89  
 — სფერულ კოორდინატებში 83  
 — პოლარკოორდინატებში 83  
 გასროლის კუთხე 108  
 გროსკოპი 228  
 ვრავიტაციული ურთიერთქმედება 39, 40, 41
- ღალამბერის განტოლება 71, 73, 75  
 — თეორემა 205, 206  
 — პრინციპი 68, 69, 71, 72  
 დაყვანილი მასა 88, 90, 107, 124  
 დირაკის დელტა ფუნქცია 174, 175, 176  
 დისპაციული ფუნქცია 182, 183, 185, 187  
 — რელების 182  
 დროის აბსოლუტურობა 29  
 — ერთგვაროვნება 8, 9, 26, 201
- მილერის კუთხეები 198, 199, 208, 221, 231  
 — დინამიკური განტოლებები 228, 232, 233, 244  
 — კინემატიკური განტოლებები 221  
 ელერ-ლაგრანჟის განტოლება 264, 265  
 ეილერ-პუანსოს შემთხვევა 230  
 ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედება 40, 41  
 ენერჯია 33, 85  
 — განზოგადებულ კოორდინატებში 84  
 — ინერციის ცენტრის სისტემაში 118  
 — ლაბორატორიულ სისტემაში 118, 136  
 — მბრუნავ სისტემაში 256  
 — ნორმალურ კოორდინატებში 160  
 ექსტრემალური მანძილები 92, 93  
 ექსცენტრისიტეტი 96, 97, 108, 110, 132, 185
- შარიათა 260, 261  
 — ოპოქრონული 260, 261, 262, 265

- სრული 261, 262
- ვეიერშტრასის ელიფსური ფუნქცია 234, 235, 236, 237
- კელი 38
- ატომგულერი 38
- არაჰინერვატული 76
- გრავიტაციული 37, 38, 321
- ელექტრული 38
- ექტორული 38
- კონსერვაციული 76
- ელიფსური 37, 321
- სკალარული 38
- ცენტრალური სიმეტრიის 87, 90, 94, 124, 314, 315, 221
- ექტორი 10, 11, 14, 46
- ექტორის ირიპეკუმოვანი გეგმილები 17
- კოვარიანტული გეგმილები 16, 17
- კონტრაჰარიანტული გეგმილები 16, 17
- ორთოგონალური მდგენელები 17, ერაალის თეორემა 183, 184, 185
- — პოტენციალური ძალეებისათვის 184
- ერტუალური (შესაძლო) ტრაექტორია 265
- გადაადგილება 68
- გადაადგილების პრინციპი 68
- შესაბამის პრინციპი 70
- თავისუფალი განარბენის სიგრძე 139, 141
- თავისუფალი ნაწილაკი 24, 49, 86
- თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი 63, 64
- — მყარი სხეულის 196
- — სისტემის 53
- იკობის იგივე რა 293
- პრინციპი 273
- ფუნქციები 236, 237, 238, 239
- კოორდინატები 56, 87
- იპელსი 23
- განზოგადებული 82, 83, 84
- ინერციის ცენტრის 113
- მყარი სხეულის 216
- ნაწილაკის 23
- სისტემის 57, 58
- იპელსის მომენტი 46, 59, 218
- მყარი სხეულის 216, 217
- ნაწილაკთა სისტემის 57
- ნაწილაკის 57
- ინერციის მომენტი 211, 213, 214
- ტენზორი 210, 211, 217
- მთვარი მომენტები 212
- ინერციის (მასების) ცენტრი 55, 56, 69, 202, 209
- ინვერსია 198
- ძანონიკური განტოლებები 276
- ზრდაქმნები 286, 287
- ცვლადები 289
- კეილი-კლეინის პარამეტრები 201
- კენიგის დებულება 60
- კეპლერის კანონები 48, 100, 101, 102, 322
- ამოცანა კმელებს ცვლადებში 321
- კინემატიკა 7, 9, 195
- კინეტიკური ენერგია 34, 60, 76, 78
- — ბრუნვის 210
- — განზოგადებულ კოორდინატებში 70
- — მატერიალური წერტილის 34
- — მყარი სხეულის 207
- — ნორმალურ კოორდინატებში 160
- — ნაწილაკთა სისტემის 60
- — როტატორის 213
- — სფერული ბზრიალას 212
- კოვალენტობის შემთხვევა 230
- კონფიგურაციული სივრცე 67, 77
- კოორდინატები 9
- განზოგადებული 66, 67, 77
- დეკარტის 15
- იაკობის 56, 87
- მრუდწირული 14, 15
- ნორმალური 157
- ნორმალური ძელებითი რხეების შემთხვევაში 161
- პარამოლური 18, 21
- პოლარული 18, 21, 22
- სფერული 17, 18, 20, 22, 30
- ციკლიური 85, 86, 90
- ცილინდრული 18, 20, 21, 22, 30
- კოორდინატთა სისტემა 8
- — დეკარტის 10, 14, 15
- — მრუდწირული ორთოგონალური 16, 17
- კონვექციის სიმბოლო 16
- კუბური აქსარება 13
- სიჩქარე 13, 207, 209
- კუბური ცვლადი 317, 318, 319
- ლაგრანჯის განტოლება 73, 76, 77, 88, 167, 254, 266
- განტოლების კოვარიანტობა 72
- ფუნქცია 77, 78, 79, 81, 82, 89.
- ანიზოტროპიული ოსცილატორისათვის 167
- — ელერის კუბებში 222, 223
- — მბრუნავ არაინერციულ სისტემაში 254
- — ნორმალურ კოორდინატებში 159
- — პარამოლურ კოორდინატებში 80, 81, 82
- — სფერულ კოორდინატებში 80, 81
- — ცილინდრულ კოორდინატებში 80, 81
- — ურთიერი პარამონიული ოსცილატორის 141
- ლაგრანჟ-მომენტის პრინციპი 271
- ლამეს პარამეტრები 15, 17, 81
- ლევანდრის პირველი გვარის ელიფსური ინტეგრალი 238
- მეორე ცვლადის გარდაქმნისა 280, 284, 290
- ‡ ლიბრატია 317, 318
- ‡ — — ლიმიტაციური მოძრაობა 91, 92
- ლორენცის გარდაქმნის კანონი 28



- მატერიალური წერტილი 7, 9, 23, 29  
 — წერტილის დინამიკა 23  
 — — ენერგია 33  
 — — იმპულსი 23  
 — — იმპულსის მომენტი 46, 47  
 — — ინფინიტური მოძრაობა 51, 92, 96  
 — — ლიმიტაციური მოძრაობა 91, 92  
 — — სწორხაზობრივი მოძრაობა 31  
 — — ფინიტური მოძრაობა 51, 91, 94, 97, 321, 323
- მატრიცა  
 — გარდაქმნის 197, 201  
 — ტრანსპონირებული 197
- მდგომარეობა 30
- მექანიკა  
 — კვანტური 6, 44  
 — კლასიკური 6, 26  
 — ნიუტონის 6, 26, 27
- მილევის ლოგარითმული დეკრემენტი 187
- მიმართულების კოსინუსები 197, 198, 199  
 — — ორთონორმირების პირობა 197
- მიმხეხი სიბრტყე 11, 12
- მობრუნების წერტილები 50, 92, 94
- მოპერტუსის პრინციპი 271, 272, 273, 274, 275
- მოძრაობის ინტეგრალები 45, 49, 62, 296, 297, 301  
 — ადითიური ინტეგრალები 62, 301  
 — — ენერჯის 49
- მუშაობა 33, 35  
 — რეაქციის ძალების 70
- მუშაობის ერთეული 34
- მყისა ლერძები 206, 207, 240
- ნაწილაკთა გაფანტვა 119  
 — — აბსოლუტურად შეუღწევად სფეროზე 127, 128  
 — — იზოტროპული 128, 130, 137  
 — — პოტენციალურ ორმოზე 127, 128  
 — — მცირე კუთხეებზე 134  
 — — კულონური ველით 136  
 — გაფანტვის კუთხე C—სისტემაში 114, 117, 125, 134  
 — გაფანტვის კუთხე L—სისტემაში 116, 117, 135
- გაფანტვის ეფექტური განვიკვეთი 119, 121, 122  
 — ინტეგრალური განვიკვეთი 119, 128, 130
- ნაწილაკთა დაჯახება 111, 112, 113  
 — — არადრეკალი 112  
 — — დრეკალი 112
- ნიუტონის კანონები 23, 30  
 — მსოფლიო მიზიდულობის კანონი 100, 101, 105  
 — — პირველი კანონი 23  
 — — მეორე კანონი 23, 29  
 — — მესამე კანონი 25, 26, 54
- მოძრაობის განტოლება 23, 24, 26, 35, 71, 77  
 — — მოძრაობის განტოლების ინვარიანტობა 28, 31  
 — — მოძრაობის განტოლების კოვარიანტობა 28  
 ნორმალი 10  
 — შთავარი 11, 12  
 ნორმალური სიბრტყე 10  
 ნეტაცია 318
- მრთოგონალური გარდაქმნა 197
- ოსცილატორი 142  
 — სივრცითი 166  
 — სივრცითი ანიზოტროპული 166, 311, 320  
 — სივრცითი იზოტროპული 167, 312, 321  
 — წრფივი პარამონიული 142, 143
- ოსცილატორის არაპერიოდული შილევა 188  
 — ენერგია 146, 147, 152  
 — იძულებითი მილევადი რხევები 188  
 — იძულებითი რხევები 147, 150  
 — შილევადი რხევები 185  
 — საკუთარი სიხშირე 156
- პოლოდა 242, 243, 244
- პერიოდა 109
- პერიპედიუმი 101
- პოტენციალური ენერგია 34, 35, 38, 60, 61  
 — განზოგადებულ კოორდინატებში 79  
 — გრავიტაციული ურთიერთქმედების 37, 126  
 — ეფექტური 91, 95, 99  
 — კულონური ურთიერთქმედების 37, 126, 131, 133  
 — სისტემის 61  
 — სისტემის მცირე რხევებ-ს 154  
 — — ცენტრალური სივრცითი 90  
 — — ცენტრგამშორი 91, 92  
 — — წრფივი პარამონიული ოსცილატორის 142, 143  
 — ჯებირი 50, 127, 131, 138  
 — ჯებირის სიმაღლე 50, 131  
 — ორმო 51, 99, 128  
 — ორმოს სიღრმე 51, 95, 128
- პლანკის მუდმივა 147  
 — პიპოეზა 146
- პრეცესია 224, 318  
 — რეგულარული 224
- პუანსოს გომეტრიული მეთოდი 240
- პუანსონის კლასიკური ფრჩხილები 292, 293, 295, 296  
 — თეორემა 294, 296, 297, 298  
 — იგივეობა 293, 296  
 — უენდამენტური ფრჩხილები 293, 300  
 — ფრჩხილების კანონიკური ინვარიანტობა 298, 299
- რადუსის ფუნქცია 282, 284  
 რეაქციის პრინციპი 64

— ბალები 62, 64, 65, 70  
 რეზერვორდის ფორმულა 131, 132, 139  
 რეზონანსი 148, 149, 189  
 რეზონანსული შთანთქმის მრუდი 190  
 — მრუდის ნახვეარსივანე 190, 191  
 რელაქსაციის დრო 187  
 როტატორი 213  
 რხევები (მცირე) 142  
 — ანპარმონიული 170, 172  
 — მილევალი 185, 187  
 — მრავალპერიოდული 320, 321  
 — სამატომიანი მოლეკულის 164  
 — სისტემის 153  
 — პარმონიული 142  
 რხევის სიხშირე 52  
 — ამპლიტუდა 52, 146  
 — ენერგია 52, 146, 147  
 — რეოქრონიზმი 177, 179  
 — პერიოდი 52, 146, 177, 179  
 — საწყისი ფაზა 146  
 — ფაზა 146

სამიზნე მანძილი 120, 124, 125, 132  
 გაუკუენობრივი ვანტოლება 156.

სივრცე 8

— აბსოლუტური 8  
 — ერთგვაროვანი 8, 9, 25, 303  
 — იზოტროპული 8, 9, 25, 303  
 — ევკლიდური 8

სივრდის რადიუსი 11

სიჩქარე 9, 10, 19

— განზოგადებული 67  
 — ინერციის ცენტრის 55, 57  
 — მეორე კოსმოსური 108  
 — პარაბოლური 108

— პირველი კოსმოსური 110

სიჩქარის ირიბკუთხა მდგენელები 20

— ორთოგონალური მდგენელები 20

— კოვარიანტული გეგმილები 20

— კონტრაავარიანტული გეგმილები 20

სტატისტიკა 246

— მყარი სხეულის 246

სტაციონარული მდგომარეობა 38

სუსტი ურთიერთქმედება 43, 44

სხეულეიანი კუთხე 18, 121

ტრაექტორია 9, 10

— კონგრუენტული 202

— ჩაკეტილი 94

— ცენტრალური სივრდის ველში 90

ტრაექტორიის სივრდე 11

— სივრდის ვექტორი 11

— სივრდის ცენტრი 11

შაზური სივრცე 277, 278, 317

— ტრაექტორია 278

— წერტილი 278, 317

ფართობი სიჩქარე 47, 48, 97

ფიზიკური საკანი 245

— საკანის რხევის პერიოდი 246

ფერის თეორემა 172

— შწყვილი 172

ფურიე-ინტეგრალი 172, 173, 174

ფურიე-კოეფიციენტი 172, 173, 174

ფურიე-კომპონენტი 172

ფუნდამენტური ურთიერთქმედება 39

მედეების ფუნქცია (ქმედება) 265, 269, 270, 271

— ფუნქციის ინვარიანტობა 266, 267

— — შემოკლებული 271, 272

— ცვლადი 317, 318, 320, 321

შენახვის კანონები 44, 300, 301

— — ენერჯის 45, 48, 61, 62, 90, 113

— — იმპულსის 45, 62, 113

— — იმპულსის მომენტის 45, 47, 62, 90

— კანონების კავშირი სივრცისა და დროის თვისებებთან 300

შესაძლო გადაადგილება 66, 69, 74

— გადაადგილების პრინციპი 66, 68

შთანთქმის ინტენსივობა 190

შეზღუდული დარტყმა 118

ცოცხალი ძალა 34

— ძალის კანონი 34, 36, 73, 104

— ძალის კანონი ცენტრალური ძალებისათვის 36

ძალა 24, 25, 26

— ატომგულური (ბირთვული) 38, 39, 41, 42, 43

— აქტიური 65, 71, 74

— განზოგადებული 74, 76, 181

— გრავიტაციული 37, 38, 39, 94

— დაკარგული 72

— დრეკალი 144, 167

— ელექტრომაგნიტური 41, 42

— ინერციის 72, 252, 253, 255, 257

— კონსერვატული 34, 76

— კორიოლისის 255, 258

— კულონური 37, 94, 185

— პაიოური 65, 72

— პოტენციალური 37, 181, 184

— სიმძიმის 36

— სიჩქარეზე დამოკიდებული 180, 181

— ცენტრალური 24, 36, 37, 87

— ცენტრიდანული 255, 257, 258

— ხახუნის 181, 182, 186, 192

ძალის ერთეული 25

— იმპულსი 45

— ვირიალი 184

— მომენტი 46, 218, 219

ძალთა წყვილი (წყვილძალა) 219, 247

- შეკრების წესი 247
- ძგერა 149, 150
- ძგერის სიხშირე 150
- ძლიერი (ატომგულური) ურთიერთქმედება 41, 42, 43
- ზრახნი 250
- ზრახნითი მოძრაობა 251
- ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები 276, 281, 282, 291, 292, 300
- ჰამილტონის ფუნქცია (ჰამილტონიანი) 277, 278, 279, 305
- — დეკარტის კოორდინატებში 279
- — პოლარკოორდინატებში 279
- — სფერულ კოორდინატებში 279
- — ცილინდრულ კოორდინატებში 279
- — წრფივი პარამონული ოსცილატორის 280
- ჰამილტონ-იაკობის განტოლება 305, 306, 308, 313, 314,
- — თავი-უფალი ნაწილაკისათვის 308
- — პარაბოლურ კოორდინატებში 308
- — პოლარკოორდინატებში 308
- — ცენტრალური სიმეტრიის ველისათვის 314
- ჰამილტონის უმცირესი ქმედების პრინციპი 260, 264, 265
- — — არაკონსერვატიული სისტემებისათვის 267
- ჰერპოლოდია 242, 244
- ჰიუგენსის თეორემა 213, 214

## ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი

5

### თ ა ვ ი I

#### მატერიალური წერტილის კინემატიკა

1. ზოგადი ცნებები	7
2. მატერიალური წერტილის მოძრაობის დამახასიათებელი ძირითადი სიდიდეები	9
3. აჩქარების მხები და ნორმალური მდგენელები	12
4. მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემები	14
5. სიჩქარისა და აჩქარების მდგენელები მრუდწირულ ღერძებზე	19

### თ ა ვ ი II

#### მატერიალური წერტილის დინამიკა

6. ნიუტონის კანონები	23
7. გალილეის ფარდობითობის პრინციპი	26
8. ნიუტონის მეორე კანონის ზოგადი დახასიათება. მდგომარეობის აღწერა	29
9. მატერიალური წერტილის სწორხაზოვანი მოძრაობა	31
10. ენერგია	33
11. ფუნდამენტური ურთიერთქმედებანი	39
12. მატერიალური წერტილის დამახასიათებელი სიდიდეები და შენახვის კანონები	44
13. მატერიალური წერტილის ერთგანზომილებიანი მოძრაობა და ენერგიის ინტეგრალი	49

### თ ა ვ ი III

#### მატერიალურ წერტილთა სისტემის მექანიკა

14. ნაწილაკთა სისტემა და მისი დამახასიათებელი სიდიდეები	53
15. მექანიკური სისტემის იმპულსი, მომენტი და ენერგია	57
16. ბმები და რეაქციის ძალები	62

### თ ა ვ ი IV

#### შესაძლო გადაადგილების პრინციპი და ლაგრანჟის განტოლებები

17. განზოგადებული კოორდინატები	66
18. შესაძლო გადაადგილების და დაღმარების პრინციპები	68
19. ლაგრანჟის განტოლებები	73
20. ლაგრანჟის ფუნქცია	78
21. ლაგრანჟის ფუნქციის სახე მრუდწირულ ორთოგონალურ კოორდინატებში	80
22. განზოგადებული იმპულსი	82
23. ენერგია განზოგადებულ კოორდინატებში	84
24. ციკლური კოორდინატები	85

### თ ა ვ ი V

#### მოძრაობა ცენტრალური ხიმეტრიის ველში

25. ორი სხეულის ამოცანის დაყვანა ერთი სხეულის ამოცანაზე	87
26. ტრაექტორიის მოძებნა ცენტრალურ ველში მოძრაობისას	90

27. $\frac{a}{f}$ პოტენციალური ენერგიის შემთხვევა	94
28. კეპლერის კანონები	100
29. ბინეს ფორმულა	103
30. მოძრაობა დედამიწის გრავიტაციულ ველში. ხელოვნური თანამგზავრები	106

თ ა ე ი VI

ნაწილაკთა გაფანტვის თეორია

31. ნაწილაკთა დაჯახება	111
32. კავშირი ინერციის ცენტრსა და ლაბორატორიულ სისტემებს შორის	114
33. ნაწილაკთა გაფანტვის ეფექტური განიკვეთი	117
34. კავშირი განიკვეთვებს შორის L-და C-სისტემებში	123
35. კავშირი გაფანტვის კუთხესა და სამიზნე მანძილს შორის ცენტრალური ველით გაფანტვის შემთხვევაში	124
36. გაფანტვა აბსოლუტურად შეედევადლ სფეროზე და პოტენციალურ ორმოზე	127
37. დამუხტული ნაწილაკების გაფანტვა. რეზერფორდის ფორმულა	131
38. გაფანტვა მცირე კუთხეებზე	134
39. იზოტროპიული გაფანტვა	137
40. კავშირი განიკვეთვასა და თავისუფალი განარბნის სიგრძეს შორის	139

თ ა ე ი VII

მცირე რხევები

41. წრფივი პარმონიული ოსცილატორი	142
42. ოსცილატორის იძულებითი რხევები	147
43. იძულებითი რხევები ნებისმიერი გარეშე ძალის შემთხვევაში	150
44. ნაწილაკთა სისტემის მცირე რხევები	153
45. ამპლიტუდების ნორმირებისა და ორთოგონალობის პირობა	153
46. ლაგრანჟის ფუნქცია ნორმალურ კოორდინატებში	159
47. სმატომიანი მოლეკულის რხევები	164
48. სივრცითი ოსცილატორი	165
49. ანპარმონიული რხევები	173
50. ანპარმონიული პერიოდული რხევების დამლა პარმონიულ რხევებად	172
51. ბრტყელი მათემატიკური სპანინი	176

თ ა ე ი VIII

სიჩქარეზე დამოკიდებული ძალები

52. სიჩქარეზე დამოკიდებული ძალები და დისიპაციური ფუნქცია	180
53. თეორემა ვირიალის შესახებ	183
54. წრფივი ოსცილატორის მილევადი რხევები	185
55. იძულებითი მილევადი რხევები	188
56. მოძრაობა გარემოში	192

მუარის სხეულის მემანინა

თ ა ე ი IX

მუარი სხეულის კინემატიკა

57. თავისუფალი მუარი სხეული	195
58. ეილერის კუთხეები	198
59. მუარი სხეულის გადატანითი და ბრუნვითი მოძრაობანი	201

თ ა ე ი X

მუარი სხეულის დინამიკა

60. მუარი სხეულის კინეტიკური ენერგია, ინერციის ტენზორი	203
61. მუარი სხეულის იმპულსი, იმპულსისა და ძალის მომენტები	216

62. მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებები უძრავი სისტემის მიმართ.	219
63. მყარი სხეულის ლაგრანჟის ფუნქცია ვილერის კუთხეებში, ვილერის კინემატიკური განტოლებები	221
64. თავისუფალი სიმეტრიული ბზრიალა	223
65. სიმეტრიული ბზრიალა გრავეტაციულ ველში	224
66. ვილერის დინამიკური განტოლებები	228
67. მყარი სხეულის კინეტიკური ენერჯის ცვლილება ბრუნვითი მოძრაობის შემთხვევაში	231
68. ვილერის განტოლებების ამოხსნა თავისუფალი სიმეტრიული ბზრიალასათვის	232
69. ასიმეტრიული ბზრიალას თავისუფალი ბრუნვა	233
70. ასიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია	240
71. მყარი სხეულის ბრუნვა ლერძის გარშემო	244
72. მყარი სხეულის სტატიკა	245

თ ა ვ ი X I

მოძრაობა არაინერციულ ხისტივებში

73. ინერციის ძალები	252
74. მბრუნავ სისტემაში მოძრავი ნაწილაკის ენერჯია და იმპულსი	256
75. მოძრაობა დედამიწაზე	257

თ ა ვ ი X I I

უმცირესი ქმედების პრინციპი

76. ვარიაციის ცნება	260
77. ჰამილტონის უმცირესი ქმედების პრინციპი	264
78. ჰამილტონის პრინციპი არაკონსერვატული სისტემებისათვის	267
79. ქმედების ფუნქციის დამოკიდებულება კოორდინატებზე	269
80. ვარიაციული პრინციპის სხვადასხვა სახე	271
81. ლაგრანჟის განტოლებების მიღება მოპერტუნის პრინციპიდან	274

თ ა ვ ი X I I I

ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები

82. ჰამილტონის განტოლებები	275
83. ჰამილტონის ფუნქცია	278
84. ცელადთა გარდაქმნის ლეჟანდრის მეთოდი	280
85. ჰამილტონის განტოლებების გამოყენება ვარიაციული პრინციპიდან	281
86. რაუსის ფუნქცია	282

თ ა ვ ი X I V

კანონიკური გარდაქმნები

87. კანონიკური გარდაქმნები	286
88. პუასონის კლასიკური ფრჩხილები	292
89. მოძრაობის ინტეგრალები და პუასონის თეორემა	296
90. პუასონის ფრჩხილების კანონიკური ინვარიანტობა	298
91. შენახვის კანონები და მათი კავშირი სივრცისა და დროის თვისებებთან	300

თ ა ვ ი X V

ჰამილტონ-ბაქობის მეთოდი

92. ჰამილტონ-ბაქობის განტოლება	305
93. თავისუფალი ნაწილაკის ამოცანა	308
94. ერთგანზომილებიანი მოძრაობა. მაგალითები	309
95. სივრცითი ანიზოტროპული ოსცილატორი	311
96. ცელადთა გაცალება ციკლური კოორდინატების შემთხვევაში	313
97. მოძრაობის აღწერა ქმედებისა და კუთხური ცვლადებით	317
98. კებლერის ამოცანა ქმედების ცვლადებში	321
ლიტერატურა	326
სავსებრივი საძიებელი	327

გამომცემლობის რედაქტორი ა. ს ტ უ რ უ ა  
შხატერული რედაქტორი ი. ჩ ი ქ ვ ი ნ ი ძ ე  
ტექნიკური რედაქტორი ი. ხ უ ც ი შ ვ ი ლ ი  
კორექტორი ც. შ ო ლ ო დ ი ნ ო

სპ 606

გადაეცა წარმოებას 8.10.81. ხელმოწერილია დასაბუქლად 31.03.82.  
უე 04428. საბუქლი ქალაქი №1.70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. პირობითი ნაბუქლი  
თაბახი 29,4. სააღრ.საგამომც. თაბახი 21.97.

ტირაჟი 2 000. შეკვეთის № 1686.

ფასი 1 მან. 30 კაპ.

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 380028, ა. ჯავახიშვილის პროსპექტი, 14.  
Издательство Тбилисского университета, Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 14.

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა, თბილისი, 380028, ა. ჯავახიშვილის პროსპექტი, 1.  
Типография Тбилисского университета, Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 1.