ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ო. ფურთუხია

ალბათობა და სტატისტიკა მაგალითებსა და ამოცანებში

თბილისი
2009

წინამდებარე სახელმძღვანელო წარმოადგენს ავტორის მიერ წლების განმავლობაში ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში წაკითხული ლექციების კურსისა და ჩატარებული პრაქტიკული მეცადინეობების შესაბამისი მასალის გადამუშავებულ ვარიანტს. მასში კომპაქტურადაა გადმოცემული ალბათობისა და სტატისტიკის ის ძირითადი საკითხები, რომლებიც ყველაზე უფრო ხშირად გვხვდება თანამედროვე გამოყენებით კვლევებში, მოყვანილია აუცილებელი თეორიული მასალა, განხილულია მრავალი სამოტივაციო და საილუსტრაციო მაგალითი, ნაჩვენებია მათი ამოხსნის გზები და მეთოდები. სახელმძღვანელოში აგრეთვე მოყვანილია უკანასკნელი 3 წლის განმავლობაში საკონტროლო წერებსა და შუალედურ და საბოლოო გამოცდებზე მოტანილი ბილეთების ნიმუშები. წიგნი იმავდროულლად წარმოადგენს ამოცანათა კრებულს როგორც ალბათობის თეორიაში, ისე სტატისტიკური დასკვნების თეორიაში. ამოცანებისა და მაგალითების ნაწილი აღებულია მსოფლიოს სხვადასხვა სასწავლო ცენტრებში გასულ წლებში ჩატარებული საგამოცდო საკითხებიდან (იხ. http://www.freeexampapers.com). სახელმძღვანელო შედგენილია თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში ამჟამად მოქმედი სასწავლო პროგრამებისა და სილაბუსების მიხედვით "სტატისტიკა II-სა" (სოციალურ და პოლიტიკურ მეცნიერებათა ფაკულტეტისათვის) და "ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში" (ორსემესტრიანი კურსი ეკონომიკისა და ბიზნესის ფაკულტეტისათვის).

სახელმძღვანელო განკუთვნილია ეკონომიკური და სოციალურ-პოლიტიკური პროფილის სტუდენტებისათვის. იგი სასარგებლო იქნება სტატისტიკის გამოყენებითი ასპექტებით დაინტერესებული ნებისმიერი მკითხველისათვის.

რედაქტორები: საქ. მეცნ. აკად. წ/კორესპონდენტი,
თსუ პროფესორი ე. ნადარაია
თსუ პროფესორი ო. ფურთუხია

რეცენზენტები: თსუ მათემატიკის ლაბორატორიის გამგე,
პროფესორი გ. კვარაცხელია,
თსუ მათემატიკის ლაბორატორიის უფრ. ლაბორანტი,
ფიზ.-მათ. მეცნიერებათა კანდიდატი ზ. ხეჩინაშვილი

განხილულია და მოწონებულია ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის მიმართულების სემინარზე

ISBN 978-9941-0-1204-4

ს ა რ ჩ ე ვ ი

ალბათობის თეორია

თავი I. ალბათობის თეორიის ელემენტები 5

ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე. ოპერაციები ხდომილობებზე. ალბათობის კლასიკური, სტატისტიკური და გეომეტრიული განმარტება. კომბინატორიკის ელემენტები. ალბათობის გამოთვლა კომბინატორიკის გამოყენებით.

თავი II. რთული ხდომილების ალბათობები 17

ალბათობათა შეკრების კანონი. სხვაობის ალბათობის ფორმულა. პირობითი ალბათობა. ნამრავლის ალბათობა. ხდომილებათა დამოუკიდებლობა. სრული ალბათობის ფორმულა. ბაიესის ფორმულა. განმეორებითი ცდები. ბერნულისა და პუასონის ფორმულები.

თავი III. შემთხვევით სიდიდეთა მახასიათებლები 35

შემთხვევითი სიდიდე. განაწილების კანონი. განაწილების ფუნქცია. განაწილების სიმკვრივე. ზოგიერთი მნიშვნელოვანი განაწილება. კვანტილი, მედიანა, მოდა. მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია. ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე. რეგრესიის ფუნქცია. მომენტები, ასიმეტრია, ექსცესი. კოვარიაცია. კორელაციის კოეფიციენტი.

თავი IV. დისკრეტულ განაწილებათა გამოყენებები 52

ბინომიალური და პუასონის განაწილებების გამოყენებები

თავი V. უწყვეტი ტიპის განაწილებები 63

განაწილების სიმკვრივე. კვანტილი, მოდა, მედიანა, ქვედა და ზედა კვარტილი, ზედა α-კრიტიკული წერტილი, მომენტები (ლოდინი, დისპერსია, ასიმეტრია, ექსცესი).

თავი VI. ნორმალური განაწილება 72

თავი II. ალბათობის თეორიის ზღვარითი თეორემები 86

ჩებიშევის უტოლობა. დიდ რიცხვთა კანონი. ჩებიშევის თეორემა. ბერნულის თეორემა. ცენტრალური ზღვარითი თეორემა. ლიაპუნოვის თეორემა. მუავრ-ლაპლასის ლოკალური და ინტეგრალური თეორემები.

სტატისტიკური დასკვნების თეორია

თავი I. წერტილოვანი და ინტერვალური შეფასებები. ნდობის ინტერვალი. საშუალოსათვის 93

წერტილოვან შეფასებათა სახეები (ჩაუნაცვლებელი, ძალმოსილი და ეფექტური შეფასებები). შერჩევითი მომენტები (საშუალო, დისპერსია, შესწორებული დისპერსია, სტანდარტული გადახრა, ასიმეტრია, ექსცესი). შერჩევითი კორელაცია. მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდი. მომენტთა მეთოდი. ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის.

თავი II. ნდობის ინტერვალი ბერნულის სქემაში 103

ასიმპტოტური ნდობის ინტერვალი და შერჩევის მოცულობა პოპულაციის პროპორციისათვის. ნდობის ინტერვალი პუასონის განაწილების უცნობი პარამეტრისათვის.

თავი III. ნდობის ინტერვალი დისპერსიისათვის 107

ნდობის ინტერვალი ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრისათვის ცნობილი და უცნობი საშუალოებისათვის. დიდი შერჩევების შემთხვევა.

თავი IV. ჰიპოთეზათა შემოწმება საშუალოსათვის (σ^2 ცნობილია) 113

ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები. მნიშვნელოვნების დონე. კრიტერიუმის სტატისტიკა. კრიტიკული მნიშვნელობა. კრიტიკული არე. I და II გვარის შეცდომები. კრიტერიუმის სიმძლავრე. ჰიპოთეზათა შემოწმება ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის (დისპერსია ცნობილია). შერჩევის მინიმალური მოცულობა. P-მნიშვნელობის მეთოდი.

თავი V. ჰიპოთეზათა შემოწმება საშუალოსათვის (σ^2 უცნობია) 121

ჰიპოთეზათა შემოწმება ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის უცნობი დისპერსიის შემთხვევაში. Z და T კრიტერიუმების გამოყენების შესაძლო შემთხვევები.

თავი VI. ჰიპოთეზათა შემოწმება დისპერსიისათვის 127

სტატისტიკური ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური განაწილების დისპერსიის შესახებ ცნობილი და უცნობი საშუალოების შემთხვევაში. P-მნიშვნელობის მეთოდი.

თავი VII. ჰიპოთეზათა შემოწმება ბერნულის სქემაში 133

ჰიპოთეზათა შემოწმება ბერნულის სქემაში უცნობი ალბათობისათვის (დიდი და მცირე შერჩევები). ჰიპოთეზათა შემოწმება პუასონის განაწილების უცნობი პარამეტრისათვის (მცირე შერჩევები). P-მნიშვნელობის მეთოდი.

თავი VIII. ნდობის ინტერვალი და ჰიპოთეზათა შემოწმება 139

თავი IX. ორამოკრეფიანი ამოცანები პოპულაციათა საშუალოებისათვის 145

ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის საშუალოთა შორის განსხვავების ჰიპოთეზათა შემოწმება ცნობილი და უცნობი დისპერსიების შემთხვევაში. ჰიპოთეზათა შემოწმება არანორმალური პოპულაციებისათვის (დიდი მოცულობის მქონე შერჩევები). ნდობის ინტერვალები საშუალოთა სხვაობისათვის.

თავი X. ორამოკრეფიანი ამოცანები პოპულაციათა საშუალოებისათვის (მცირე შერჩევები) 155

ორი დამოუკიდებელი არანორმალური პოპულაციის საშუალოს შორის განსხვავების ჰიპოთეზათა შემოწმება მცირე შერჩევების შემთხვევაში. ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.

თავი XI. ორამოკრეფიანი ამოცანები პოპულაციათა დისპერსიებისათვის 161

ჰიპოთეზათა შემოწმება ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის დისპერსიების შესახებ. დისპერსიათა ტოლობის შესახებ ჰიპოთეზათა შემოწმების გამარტივებული პროცედურა. ნდობის იონტერვალი დისპერსიათა ფარდობისათვის.

თავი XII. სტატისტიკური დასკვნები დაწყვილებული მონაცემებისათვის 168

სტატისტიკური დასკვნები დაწყვილებულ მონაცემთა საშუალოების სხვაობებისათვის (დამოკიდებული შერჩევები). P-მნიშვნელობის მეთოდი. ნდობის ინტერვალი.

თავი XIII. ორამოკრეფიანი ამოცანები ბერნულის სქემაში 175

ჰიპოთეზათა შემოწმება წარმატებათა ალბათობებისათვის ბერნულის ცდათა ორი დამოუკიდებელი მიმდევრობისათვის. ნდობის ინტერვალი $p_1 - p_2$ სხვაობისათვის

თავი XIV. თანხმობის კრიტერიუმები 183

ხი-კვადრატ თანხმობის კრიტერიუმის ფორმულა. ნორმალურობის ჰიპოთეზის შემოწმება.

თავი XV. დამოუკიდებლობის შემოწმების ხი-კვადრატ კრიტერიუმი 190

თავი XVI. ერთგვაროვნების შემოწმების ხი-კვადრატ კრიტერიუმი 198

თავი XVII. დაწყვილებული მონაცემები, კორელაცია 203

გაბნევის დიაგრამა. მისადაგების წირი. რეგრესიის წრფის განტოლება. შეფასების სტანდარტული შეცდომა. პროგნოზი და საპროგროზო ინტერვალ. დასკვნები კორელაციის კოეფიციენტის შესახებ (ჰიპოთეზათა შემოწმება).

თავი XVIII. რეგრესია და კორელაცია 219

მარტივი წრფივი რეგრესია. რეგრესიის წრფე. უმცირეს კვადრატთა მეთოდი. რეგრესიის წრფის შეფასება. დეტერმინაციის კოეფიციენტი. სტატისტიკური დასკვნები რეგრესიის კოეფიციენტების შესახებ. მრავლობითი რეგრესია. მოდელის ვარგისიანობის შემოწმება. სტატისტიკური დასკვნები მრავლობითი მოდელის პარამეტრების შესახებ. რანგობრივი კორელაცია. სპირმენის რანგობრივი კორელაციის კოეფიციენტი.

თავი XIX. დისპერსიული ანალიზი (ANOVA) 235

ჰიპოთეზათა შემოწმება სამი ან მეტი პოპულაციის საშუალოთა ტოლობის შესახებ.

თავი XX. საკონტროლო წერებისა და შუალედური და საბოლოო გამოცდების ბილეთების ნიმუშები 2007—2009 წლებში 246

დანართი (სტატისტიკური ცხრილები) 251

დამატება (საგამოცდო ამოცანები ხდომილებებისათვის)........ 260

ლიტერატურა 268

ა ლ ბ ა თ ო ბ ა

თავი I
ალბათობის თეორიის ელემენტები

ექსპერიმენტის ცალკეულ შესაძლო შედეგს **ელემენტარული ხდომილება** ეწოდება, ხოლო მათ ერთობლიობას – **ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე** და აღინიშნება Ω ასოთი: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...\}$.

სავარჯიშოები: I. მონეტის ერთხელ აგდებისას – Ω={გ, ს}; II. მონეტის ორჯერ აგდებისას, ან ორი მონეტის ერთდროულად აგდებისას – Ω={გგ, გს, სგ, სს}; III. მონეტის სამჯერ აგდებისას, ან სამი მონეტის ერთდროულად აგდებისას – Ω= {გგგ, გგს, გსგ, სგგ, გსს, სგს, სსგ, სსს}; IV. მონეტის n-ჯერ აგდებისას $\Omega=\{\omega:\omega=(a_1,...,a_n), a_i=$ გ ან ს$\}$ და შედეგების საერთო რაოდენობა ტოლია 2^n-ის; V. ერთი სათამაშო კამათლის გაგორებისას – Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}; VI. ვთქვათ, თავიდან ვაგდებთ მონეტას. თუ მოვა გერბი, მაშინ ვაგორებთ სათამაშო კამათელს; ხოლო თუ მოვა საფასური, მაშინ კიდევ ერთჯერ ვაგდებთ მონეტას. ამ შემთხვევაში Ω = {გ1, გ2, გ3, გ4, გ5, გ6, სგ, სს}; VII. ორი სათამაშო კამათლის გაგორებისას – Ω={(1,1); (1,2); . ; (1,6); (2,1); (2,2); ; (2,6); . ; (6,1); . . (6,6)} ანუ $\Omega=\{(i,j):i,j=1,2,...,6\}$; VIII. პროდუქციის ვარგისინობის დადგენისას – Ω={"ვარგისი", "უვარგისი"}; IX. სატელეფონო სადგურში გამოძახებათა რაოდენობა -- Ω= {0, 1, 2, }; X. ძაბვა ქსელში – Ω={[0, 220]}.

დისკრეტულ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს **ხდომილება** ეწოდება. თუ ექსპერიმენტის კონკრეტული შედეგი ეკუთვნის რაიმე ხდომილებას, მაშინ ამბობენ რომ ეს ხდომილება **მოხდა,** ხოლო რომელსაც არ ეკუთვნის – ის ხდომილება **არ მოხდა**. ხდომილებები აღინიშნება დიდი ლათინური ასოებით: $A,B,C,D,...$. ხდომილებას $A=\Omega$ უწოდებენ **აუცილებელ ხდომილებას,** *ხოლო* $\emptyset$ – **შეუძლებელ ხდომილებას**. A და B ხდომილების **გაერთიანება** (ან **ჯამი**) ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა ამ ხდომილებებიდან ერთი მაინც ხდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $A\cup B$ (ან $A+B$). A და B ხდომილების **თანაკვეთა** (ან **ნამრავლი**) ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა ეს ხდომილებები ერთდროულად ხდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $A\cap B$ (ან AB). A ხდომილების **საწინააღმდეგო** ხდომილება ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა A არ ხდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $\bar{A}$. A და B ხდომილების **სხვაობა** ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა ხდება A მაგრამ არ ხდება B და აღინიშნება სიმბოლოთი $A\setminus B$. A და B ხდომილებას ეწოდება **უთავსებადი** თუ $A\cap B=\emptyset$.

თუ Ω-ს ნებისმიერ ელემენტარულ ხდომილებას ω_i შეესაბამება გარკვეული რიცხვები $p_i=P(\omega_i)$, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს: $0\le p_i\le 1$ და $\sum_i p_i=1$, მაშინ ამ რიცხვებს ეწოდებათ ω_i ელემენტარული ხდომილებების **ალბ-**

ათობები. $P(A) := \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$. თუ $P(\omega_i) = const$ და $|\Omega| < \infty$, ვღებულობთ ალბათობის კლასიკურ განმარტებას: $P(A) =|A|/|\Omega|$.

ხდომილების სტატისტიკურ ალაბათობად ითვლება ამ ხდომილების ფარდობითი სიხშირე $W_N(A) = M/N$ (სადაც N – ცდათა საერთო რიცხვია, M კი – A ხდომილების მოხდენათა რიცხვი) ან მასთან ახლოს მყოფი რიცხვი (მათემატიკურად ზუსტი ფორმულირება ასეთია: $P(A) = \lim_{N \to \infty} W_N(A)$).

გეომეტრიული ალბათობა. თუ L მონაკვეთზე შემთხვევით აგდებენ წერტილს, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ აგდებული წერტილი დაეცემა $l \subset L$ მონაკვეთზე: $P =|l|/|L|$. ანალოგიური განმარტება გვაქვს სიბრტყეზე და სივრცეში.

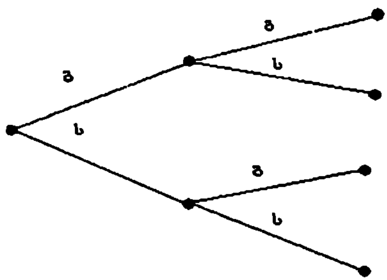
კომბინატორიკის ელემენტები.

გამრავლების პრინციპი: თუ ასარჩევია m ობიექტი და არსებობს პირველი ობიექტის არჩევის n_1 შესაძლებლობა, პირველი ობიექტის არჩევის შემდეგ არსებობს მეორე ობიექტის არჩევის n_2 შესაძლებლობა, და ა. შ., $m-1$ ობიექტის არჩევის შემდეგ არსებობს m-ური ობიექტის არჩევის n_m შესაძლებლობა, მაშინ არსებობს ამ m ობიექტის ამ მიმდევრობით არჩევის $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_m$ შესაძლებლობა.

მაგალითად, თუ მამაკაცს აქვს 4 პერანგი და 2 პიჯაკი, მაშინ ამ მამაკაცს აქვს პერანგისა და პიჯაკის შერჩევის $4 \times 2 = 8$ შესაძლებლობა (ვარიანტი).

ნამრავლის პრინციპთან დაკავშირებით ხშირად სასარგებლოა ხის მსგავსი (ხისებრი) დიაგრამის ანუ დენდროგრამის გამოყენება.

მაგალითად, დენდროგრამით გამოსახული მონეტის ორჯერ აგდების შესაბამისი შედეგების სიმრავლე იქნება:



გადანაცვლებები – ეს არის კომბინაციები, რომლებიც შედგენილია მოცემული n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა n ელემენტისაგან და ერთამანეთისაგან განსხვაედება მხოლოდ ელემენტების განლაგების რიგით. $P_n = n!$.

წყობები – ეს არის m ელემენტიანი კომბინაციები n განსხვავებული ელემენტის მქონე სიმრავლიდან, რომელებიც ერთმანეთისაგან განსხვაედებიან ან ელემენტების შემადგენლობით ან ელემენტების განლაგების რიგით. $A_n^m = n!/(n-m)!$.

ჯუფდებები – ეს არის n ელემენტიანი სიმრავლის დაულაგებელი m ელემენტიანი ქვესიმრავლეები. $C_n^m = n!/(m!(n-m)!)$. ცხადია, რომ $C_n^m \cdot m! = A_n^m$.

ალბათობის გამოთვლა კომბინატორიკის გამოყენებით.

ამორჩევა დაბრუნებით: ექსპერიმენტის ყოველ ნაბიჯზე ყუთიდან ამოღებული ბურთი უკან ბრუნდება. ვიგულისხმოთ, რომ ბურთები გადანომრილია რიცხვებით 1-დან M-მდე. განასხვავებენ ორი ტიპის ამორჩევებს: **დალაგებული ამორჩევები** და **დაულაგებელი ამორჩევები**. დალაგებული ამორჩევები აღინიშნება სიმბოლოთი $(a_1,...,a_n)$, ხოლო დაულაგებელი ამორჩევები – $[a_1,...,a_n]$.

დაბრუნებით დალაგებული ამორჩევის შემთხვევაში:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1,...,a_n) : a_i = 1,...,M;\ i = 1,...,n\} \text{ და } |\Omega| = M^n.$$

დაულაგებელი ამორჩევები დაბრუნებით:

$$\Omega = \{\omega : \omega = [a_1,...,a_n] : a_i = 1,...,M;\ i = 1,...,n\},\ |\Omega| = C_{M+n-1}^n.$$

ამორჩევა დაბრუნების გარეშე: $n \le M$ და ამოღებული ბურთი უკან არ ბრუნდება.

დაბრუნების გარეშე დალაგებული შერჩევის შემთხვევაში:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1,...,a_n) : a_k \ne a_l, k \ne l;\ a_i = 1,...,M;\ i = 1,...,n\} \text{ და } |\Omega| = A_M^n.$$

დაულაგებელი ამორჩევები დაბრუნების გარეშე:

$$\Omega = \{\omega : \omega = [a_1,...,a_n] : a_k \ne a_l, k \ne l;\ a_i = 1,...,M;\ i = 1,...,n\},\ |\Omega| = C_M^n$$

საბოლოო სურათი ასეთია:

	დალაგებული	დაულაგებელი
დაბრუნებით	M^n	C_{M+n-1}^n
დაბრუნების გარეშე	A_M^n	C_M^n

მაგალითად, $M = 3$ და $n = 2$-ის შემთხვევაში შესაბამის ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეებს ექნებათ შემდეგი სახის სტრუქტურები:

			შერჩევა
	(1,1)(1,2)(1,3) (2,1)(2,2)(2,3) (3,1)(3,2)(3,3)	[1,1][2,2][3,3] [1,2][1,3][2,3]	დაბრუნებით
	(1,2)(1,3) (2,1)(2,3) (3,1)(3,2)	[1,2] [1,3] [2,3]	დაბრუნების გარეშე
ერთობლიობა	დალაგებული	დაულაგებელი	

სავარჯიშოები:

I. კურსზე, რომელზეც სამი ჯგუფია, ჯგუფხელების არჩევის ყველა შესაძლო ვარიანტების რიცხვია $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$, სადაც n_i – i-ურ ჯგუფში სტუდენტების რაოდენობაა (ვიყენებთ ნამრავლის პრინციპს);

II. რაოდენობა ყველა შესაძლო კომბინაციების, რამდენნაირადაც შესაძლებელია m მგზავრი განვათავსოთ n ვაგონში ტოლია n^m (დალაგებული ამორჩევა დაბრუნებით, სადაც $M=n$ და $n=m$);

III. m ადამიანის დაბადების დღეების ყველა შესაძლო კომბინაცია (იმ პირობით, რომ თითეული დაბადების დღე არის რომელიმე 365 დღიდან) ტოლია 365^m (საქმე გვაქვს ამორჩევასთან დაბრუნებით, ამასთანავე ამორჩევები ითვლება დალაგებულად, სადაც $M=365$ და $n=m$);

IV. რაოდენობა ყველა შესაძლო კომბინაციების, რამდენნაირადაც შესაძლებელია 5 ბურთი განვათავსოთ 5 ყუთში, ისე რომ ერთ ყუთში იყოს ერთი ბურთი, ტოლია 5! (ნამრავლის პრინციპის თანახმად);

V. პარტიების რაოდენობა, რომელიც უნდა შედგეს n მონაწილისაგან შემდგარ წრიულ საჭადრაკო ტურნირში ტოლია $C_n^2 = n(n-1)/2$ (დაულაგებელი ამორჩევა დაბრუნების გარეშე).

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სიმეტრიული მონეტის ორი დამოუკიდებელი აგდებისას ერთჯერ მაინც მოვა გერბი.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში Ω={გგ, გს, სგ, სს}; $P\{გგ\} = P\{გს\} = P\{სგ\} = P\{სს\} = 1/4$; A={გგ, გს, სგ} და $P(A) = 3/4$.

მაგალითი 2 ("ბედნიერ" ბილეთებზე). 25 საგამოცდო ბილეთიდან 5 "ბედნიერია", ხოლო დანარჩენი 20 – "არა ბედნიერი". რომელ სტუდენტს აქვს "ბედნიერი" ბილეთის აღების მეტი ალბათობა: ვინც პირველი იღებს ბილეთს, თუ ვინც მეორე იღებს ბილეთს?

ამოხსნა. ავღნიშნოთ პირველი სტუდენტის მიერ აღებული ბილეთის ნომერი i ასოთი, ხოლო მეორე სტუდენტის მიერ აღებული ბილეთის ნომერი j ასოთი. დავუშვათ, რომ "ბედნიერი" ბილეთების ნომრებია: 1, 2, 3, 4, 5. მაშინ ცხადია, რომ $\Omega = \{(i,j): i,j = 1,2,...,25, i \neq j\}$, $|\Omega| = 25 \cdot 24 = 600$ და ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ ყველა ელემენტარული ხდომილება ტოლალბათურია: $P(i,j) = 1/600$.

შემოვიღოთ ხდომილებები:

A = {პირველმა სტუდენტმა აიღო კარგი ბილეთი},

B = {მეორე სტუდენტმა აიღო კარგი ბილეთი},

მაშინ ამ ხდომილებებს აქვთ შემდეგი სახე:

$A = \{(i.j): i = 1,...,5; j = 1,...,25; i \neq j\}$ და $B = \{(i,j): i = 1,...,25; j = 1,...,5; i \neq j\}$.

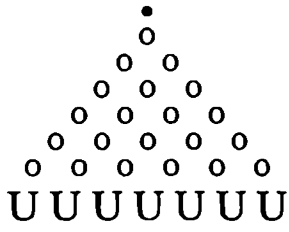
ადვილი დასანახია, რომ $|A| = |B| = 5 \cdot 24 = 120$. ამიტომ ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად:

$$P(A) = P(B) = \frac{120}{600} = \frac{1}{5}.$$

ე. ი. ორივე მოსწავლეს აქვს კარგი ბილეთის აღების ერთი და იგივე ალბათობა.

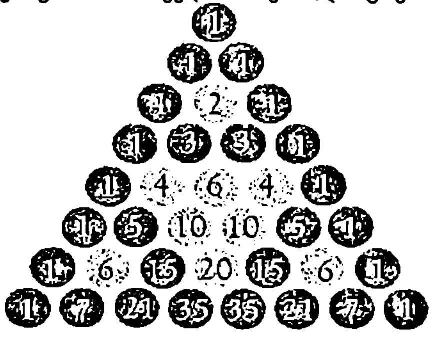
დავალება. წინა ამოცანაში ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მესამე სტუდენტი ამოიღებს “ბედნიერ” ბილეთს.

მაგალითი 3 (გალტონის დაფა). გვაქვს დაფაზე სამკუთხედის ფორმით დალაგებული რგოლები, ისე რომ წვეროში ერთი რგოლია, მეორე რიგში წინასგან თანაბარ მანძილებზე ორი რგოლი, მესამე რიგში ზედა ორი რგოლიდან თანაბარ მანძილებზე სამი რგოლი და ა.შ. ბოლოში არის ექვსი რგოლი. მე-7 რიგში კი არის ბოლო 6 რგოლიდან თანაბარ მანძილებზე 7 ღრმული. ზედა რგოლზე აგდებენ ბურთს და მას შეუძლია იგორაოს თანაბარი ალბათობით ან მარჯვენივ ან მარცხნივ რგოლიდან რგოლზე, რაც საბოლოოდ სრულდება რომელიმე ღრმულში ჩავარდნით. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ბურთი ჩავარდება მეხუთე ღრმულში?



ამოხსნა. როგორც ვხედავთ არსებობს პირველ და მე-7 ღრმულებში ბურთის ჩავარდნის ერთადერთი გზა (ტრაექტორია), მეორე და მე-6 ღრმულებში ბურთის ჩავარდნის – ექვს-ექვსი გზა, მესამე და მეხუთე ღრმულებში – თხუთმეტ-თხუთმეტი გზა და ბოლოს, მეოთხე ღრმულში – ბურთის ჩავარდნის 20 გზა. გზების (შედეგების) სრული რაოდენობაა 1+6+15+20+15+ +6+1=64 და ყველა ეს შედეგი თანაბრად მოსალოდნელია, ვინაიდან თითოეული ტრაექტორიის გავლისას ბურთი განიცდის ექვს დაჯახებას რგოლებზე და ყოველი დაჯახებისას ის თანაბარი ალბათობებით გადაადგილდება ან მარჯვენივ ან მარცხნივ. თანაბარალბათური 64 შედეგიდან მეხუთე ღრმულში ჩავარდნას ხელს უწყობს 15 შედეგი და შესაბამისად, საძებნი ალბათობა იქნება 15/64.

ქვემოთ მოყვანილია გალტონის დაფაზე რგოლების 7 რიგის შემთხვევაში თითოეულ პოზიციაზე ბურთის მოხვედრის შესაძლო გზების რიცხვი.



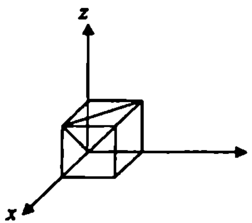
მაგალითი 4. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ წრეში შემთხვევით ჩაგდებული წერტილი არ ჩავარდება ამ წრეში ჩახაზულ წესიერ ექვსკუთხედში.

ამოხსნა. დავუშვათ, რომ წრის რადიუსია R, მაშინ მასში ჩახაზული წესიერი ექვსკუთხედის გვერდიც იქნება R. ამასთანავე, წრის ფართობია $|S| = \pi R^2$, ხოლო ექვსკუთხედის ფართობია – $|s| = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2$. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P = \frac{|S| - |s|}{|S|} = \frac{\pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2}{\pi R^2} = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0{,}174.$$

მაგალითი 5. AB მონაკვეთზე შემთხვევით აგდებენ სამ წერტილს C, D და M. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ AC, AD და AM მონაკვეთებისაგან შეიძლება აიგოს სამკუთხედი?

ამოხსნა. ავღნიშნოთ AC, AD და AM მონაკვეთების სიგრძეები შესაბამისად x, y და z-ით და ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის როლში განვიხილოთ სივრცის წერტილთა სიმრავლე კოორდინატებით (x, y, z). თუ ჩავთვლით, რომ AB მონაკვეთის სიგრძე ტოლია 1-ის, მაშინ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება კუბი, რომლის წიბოა ერთი. ამავე დროს, ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა სიმრავლე (სამკუთხედის აქსიომის თანახმად)შედგება იმ წერტილებისაგან, რომელთა კოორდინატებისათვის სრულდება სამკუთხედის უტოლობები: $x + +y > z, x + z > y,\ y + z > x$. ეს კი წარმოადგენს კუბის ნაწილს, რომელიც მოჭრილია მისგან სიბრტყეებით: $x + y = z,\ x + z = y,\ y + z = x$



(ერთ-ერთი ამ სიბრტყიდან, კერძოდ $x + y = z$, მოყვანილია ნახაზზე). ყოველი ასეთი სიბრტყე კუბიდან მოჭრის პირამიდას, რომლის მოცულობა ტოლია

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

შესაბამისად, კუბის დარჩენილი ნაწილის მოცულობა იქნება

$$|v| = 1 - 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

ამიტომ საძიებელი ალბათობა, განმარტების თანახმად, იქნება

$$|P| = \frac{|v|}{|V|} = \frac{1}{2} : 1 = \frac{1}{2}.$$

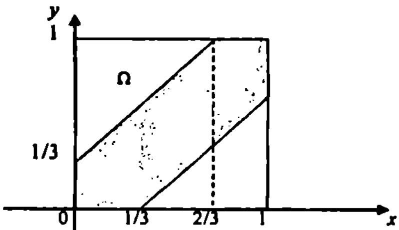
მაგალითი 6 (შეხვედრის ამოცანა). ორი პირი შეთანხმდა გარკვეულ ადგილზე შეხვდეს ერთმანეთს 6-დან 7 საათამდე. თითოეული მათგანი შემთხვევით

მომენტში მიდის დათქმულ ადგილას და მეორეს ელოდება 20 წუთის მანძილზე (შემდეგ კი მიდის). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ეს პირები შეხვდებიან ერთმანეთს?

ამოხსნა. ავღნიშნოთ, ერთ-ერთი პირის დათქმულ ადგილზე მისვლის დრო $6+x$-ით, ხოლო მეორე პირის – $6+y$-ით (სადაც x და y გამოსახულია საათებში). ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის როლში შეგვიძლია ავიღოთ იმ (x,y) წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც ეკუთვნიან ერთეულოვან კვადრატს. ამ შემთხვევაში ჩვენთვის საინტერესო წერტილთა (ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა) სიმრავლე იქნება ერთეულოვანი კვადრატის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა კოორდინატები ერთმანეთისაგან დაშორებულია არაუმეტეს $20/60=1/3$-ით:

$$A=\{(x,y);|x-y|\le 1/3\}\cap\Omega.$$

ვინაიდან, $|x-y|\le 1/3 \Leftrightarrow -1/3\le y-x\le 1/3 \Leftrightarrow x-1/3\le y\le x+1/3$. ამიტომ ადვილი გასაგებია, რომ A სიმრავლე იქნება ერთეულოვანი კვადრატის შიგნით $y=x-1/3$ და $y=x+1/3$ წრფეებს შორის მოქცეული გაფერადებული არე (როცა $0\le x\le 1/3$, მაშინ $y=x-1/3$ წრფის ნაცვლად ქვედა საზღვრის როლში იქნება x ღერძი: $0\le y\le x+1/3$, ხოლო როცა $2/3\le x\le 1$, მაშინ ზედა საზღვარი $y=x+1/3$ წრფის ნაცვლად იქნება $y=1$ წრფე: $x-1/3\le y\le 1$).



ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{1-2/3\cdot 2/3}{1}=\frac{5}{9}.$$

მაგალითი 7. რამდენი განსხვავებული სია შეიძლება შედგენილ იქნეს 7 სხვადასხვა გვარისაგან?

ამოხსნა. $P_7=7!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=5040$.

მაგალითი 8. შეჯიბრებაში მონაწილე 10 სპორტსმენიდან პირველ სამ ადგილზე გასული სამი გამარჯვებული რამდენ სხვადასხვანაირად შეიძლება განთავსდეს დასაჯილდოებელ კვარცხლბეკზე?

ამოხსნა. $A_{10}^3=10\cdot 9\cdot 8=720$.

მაგალითი 9. შესარჩევ შეჯიბრებაში მონაწილეობს 10 ადამიანი, რომელთაგან ფინალში გადის სამი. ფინალისტების რამდენი განსხვავებული სამეული შეიძლება გამოვლინდეს?

ამოხსნა. წინა მაგალითისაგან განსხვავებით, აქ ფინალისტების რიგს (დალაგებას) მნიშვნელობა არა აქვს. ამიტომ ვიყენებთ ჯუფდების ფორმულას:

$$C_{10}^3=\frac{10!}{3!\cdot 7!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{6}=120.$$

მაგალითი 10 (დამთხვევებზე). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). m შემთხვევით არჩეული ადამიანის დაბადების დღეები არ დაემთხვევა ერთმანეთს (იმ პირობით, რომ ყველა დღე ტოლალბათურია); ბ). m შემთხვევით არჩეულ ადამიანში მოიძებნება ორი მაინც ისეთი, რომელთა დაბადების დღეები დაემთხვევა ერთმანეთს.

ამოხსნა. ა). ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შეესაბამება დალაგებულ ამორჩევებს დაბრუნებით, სადაც $M=365$ და $n=m$, ანუ $|\Omega|=365^m$; ხოლო ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილებები კი დალაგებულ ამორჩევებს დაბრუნების გარეშე, სადაც აგრეთვე $M=365$ და $n=m$, ამიტომ მათი რაოდენობაა – A_{365}^m. შესაბამისად, ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად, გვაქვს

$$P(m)=\frac{A_{365}^m}{365^m}=(1-\frac{1}{365})(1-\frac{2}{365})\cdots(1-\frac{m-1}{365}).$$

ბ). საწინააღმდეგო ხდომილების ალბათობის გამოთვლის წესის თანახმად კი გვაქვს, რომ

$$Q(m)=1-\frac{A_{365}^m}{365^m}.$$

მოვიყვანოთ ამ ალბათობის მნიშვნელობების ცხრილი ზოგიერთი m-ის შემთხვევაში:

m	4	16	22	23	40	64	70
Q(m)	0.01636	0.28360	0.47569	0.50730	0.89123	0.99711	0.99916

საინტერესოა აღინიშნოს, რომ (მოლოდინის საწინააღმდეგოდ!) კლასის მოსწავლეთა რაოდენობა, რომელშიც 1/2-ის ტოლი ალბათობით მოიძებნება ორი მოსწავლე მაინც ერთი და იგივე დაბადების დღეებით, არც ისე დიდია: იგი ტოლია მხოლოდ 23-ის.

მაგალითი 11 (მოგება ლატარეაში). გვაქვს M ბილეთი გადანომრილი რიცხვებით ერთიდან M-მდე, რომელთაგან n ბილეთი ნომრებით ერთიდან n-მდე მომგებიანია ($M\geq 2n$). ვყიდულობთ n ცალ ბილეთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ n ბილეთიდან ერთი მაინც იქნება მომგებიანი (ავღნიშნოთ ეს ხდომილება A ასოთი)?

ამოხსნა. ვინაიდან ბილეთების ამოღების (ყიდვის) თანმიმდევრობას არა აქვს მნიშვნელობა ნაყიდ ბილეთებში მომგებიანი ბილეთების არსებობის ან არ არსებობის თვალსაზრისით, ამიტომ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეს ექნება შემდეგი სტუქტურა:

$$\Omega=\{\omega:\omega=[a_1,...,a_n]:a_k\neq a_l,\,k\neq l;\,a_i=1,...,M\}.$$

შესაბამისად, ჩვენს მიერ ზემოთმოყვანილი ცხრილის თანახმად $|\Omega|=C_M^n$.

ხდომილებას (ავღნიშნოთ იგი B_0-ით), რომ ნაყიდ ბილეთებში არ არის მომგებიანი ბილეთები, ექნება შემდეგი სტრუქტურა:

$$B_0=\{\omega:\omega=[a_1,...,a_n]:a_k\neq a_l,\,k\neq l;\,a_i=n+1,...,M\}\ \text{და}\ |B_0|=C_{M-n}^n.$$

ამიტომ

$$P(B_0)=\frac{C^n_{M-n}}{C^n_M}=\frac{A^n_{M-n}}{A^n_M}=(1-\frac{n}{M})(1-\frac{n}{M-1})\cdots(1-\frac{n}{M-n+1}).$$

შესაბამისად, საძებნი ალბათობა იქნება:

$$P(B)=1-P(B_0)=1-(1-\frac{n}{M})(1-\frac{n}{M-1})\cdots(1-\frac{n}{M-n+1}).$$

თუ მაგალითად, $M=n^2$ და $n\to\infty$, მაშინ $P(B_0)\to e^{-1}$ (აქ e ნეპერის რიცხვია) და $P(B)\to 1-e^{-1}\approx 0{,}632$, სადაც კრებადობის სიჩქარე საკმაოდ დიდია: უკვე როცა $n=10$ – $P(B)=0{,}670$.

დავალება. წინა ამოცანის პირობებში ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ნაყიდი n ბილეთიდან ზუსტად m ($m\le n$) იქნება მომგებიანი.

მაგალითი 12 (ურთიერთობის უპირატესობაზე). დავუშვათ კლასში, რომელშიც 10 მოსწავლეა ტარდება გამოკითხვა, სადაც თითოეულმა მოსწავლემ ანკეტაში უნდა მიუთითოს ის სამი ამხანაგი, რომელსაც აძლევს უპირატესობას ცხრა ამხანაგიდან. A იყოს ხდომილება, რომ ერთერთი მოსწავლე დასახელებულ იქნა ყველა შესაძლო ცხრა ანკეტაში. რას უდრის მისი ალბათობა, თუ ანკეტის შევსება იყო შემთხვევითი, ანუ ანკეტის შევსების ნებისმიერი კომბინაცია ტოლალბათურია.

ამოხსნა. ცალკეული მოსწავლისათვის ანკეტის შევსების სხვადასხვა კომბინაციათა რაოდენობა ტოლია C_9^3-ის, ხოლო 10 ანკეტის შევსების ვარიანტების რაოდენობა პირველი მაგალითის ანალოგიურად ტოლია $(C_9^3)^{10}$-ის. ვინაიდან ერთი ანკეტა შეიძლება შევსებულ იქნეს ნებისმიერად, ხოლო დანარჩენ ცხრა ანკეტაში ერთი პასუხი დაფიქსირებულია და დანარჩენი ორი პასუხი კი შეიძლება ნებისმიერად ამოირჩეს რვა შესაძლებელი პასუხიდან, ამიტომ ელემენტარული ხდომილებების რაოდენობა A-ში ტოლია $|A|=C_9^3\cdot(C_8^2)^9$ (თუ წყვილის პირველ კომპონენტს შეუძლია მიიღოს m განსხვავებული მნიშვნელობა, ხოლო მეორე კომპონენტს კი პირველისგან დამოუკიდებლად – n განსხვავებული მნიშვნელობა, მაშინ ასეთი წყვილების რაოდენობა ნამრავლის პრინციპის თანახმად იქნება – $m\cdot n$). აქედან გვაქვს

$$P(A)=\frac{C_9^3\cdot(C_8^2)^9}{(C_9^3)^{10}}=(\frac{C_8^2}{C_9^3})^9=\frac{1}{3^9}.$$

დავალება. წინა ამოცანაში იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთერთი სტუდენტი დასახელებული იქნება k-ჯერ ($k\le 9$).

მაგალითი 13 (ორ "ტუზზე"). განვიხილოთ პრეფერანსის თამაში, როდესაც კარტის შეკვრის მაღალი 32 კარტი შემთხვევით ნაწილდება (რიგდება) სამ მოთამაშეს შორის, ისე რომ თითეული ღებულობს 10 კარტს და ორი კარტი ინახება "საყიდლებში". როგორია ალბათობა იმისა, რომ "საყიდლებში" აღმოჩნდება ორი "ტუზი"?

ამოხსნა. ორი კარტის სხვადასხვა კომბინაციების რაოდენობა, რომელიც შეიძლება აღმოჩნდეს "საყიდლებში" ტოლია $C_{32}^2=496$. კარტის შეკვრაში ოთხი "ტუზია" და სხვადასხვა კომბინაციების რაოდენობა, რომელიც მოგვცემდა ორ "ტუზს" ტოლია $C_4^2=6$. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა ტოლია

$$C_4^2 \Big/ C_{32}^2 = 6/496 = 0{,}012\,.$$

დავალება. დავუშვათ წინა ამოცანაში ერთერთმა მოთამაშემ, ნახა რა თავისი კარტები, იცის, რომ მას "ტუზი" არა აქვს. შეიცვლება თუ არა მაშინ ალბათობა იმისა, რომ "საყიდლებში" ორი "ტუზია"? გამოთვალეთ ეს ალბათობა.

მაგალითი 14 (მხედველობით მოძებნაზე). დავუშვათ გვაქვს N ცალი შემთხვევით დალაგებული გეომეტრიული ფიგურა, რომელთა შორის M ცალი მართკუთხედია ($M \le N$). მოითხოვება მოიძებნოს ყველა მართკუთხედი, თუ ძებნა წარმოებს ელემენტების (ფიგურების) სათითაოდ სკანირებით ფიქსაციის მოცულობით ერთი ელემენტი, ამასთანავე ხდება დაკვირვებული ელემენტის პოზიციის დამახსოვრება და მას თავიდან აღარ ეუბრუნდებით. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დამკვირვებელი შეძლებს აღმოაჩინოს ყველა M მართკუთხედი არაუმეტეს n დაკვირვებისას ($n = M,\dots,N$)?

ამოხსნა. ყველა შესაძლო ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა იქნება $|\Omega| = C_N^n$. ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილებები ისეთი $[a_1,\dots,a_n]$ ერთობლიობებია, რომლებშიც M ადგილას განთავსებულია მართკუთხედები (ამის შესაძლებლობათა რაოდენობაა C_M^M), ხოლო დანარჩენ $N-M$ ადგილას კი არა მართკუთხედები (ამის შესაძლებლობათა რაოდენობაა C_{N-M}^{n-M}). ამიტომ ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილებების რაოდენობა იქნება $C_M^M \cdot C_{N-M}^{n-M}$ შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა ტოლია

$$P_M(n) = \frac{C_M^M \cdot C_{N-M}^{n-M}}{C_N^n} = \frac{C_{N-M}^{n-M}}{C_N^n} = \frac{C_n^M}{C_N^M}\,.$$

ამოცანები

1. სათამაშო "რულეტი" შედგება 38 ტოლი ფართობის მქონე სექტორისაგან, რომელთაგან 18 შავია, 18 წითელია და 2 კი მწვანე. აგდებენ ბურთს, რომელიც საბოლოოდ ჩერდება ერთ-ერთ სექტორში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ბურთი: ა). გაჩერდება წითელ სექტორში; ბ). არ გაჩერდება შავ სექტორში.

2. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ერთი ციფრი იქნება 3-ის ჯერადი.

3. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ორი ციფრი: ა). არ დაემთხვევა ერთმანეთს; ბ). დაემთხვევა ერთმანეთს.

4. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული სამი ციფრიდან: ა). სამივე განსხვავებულია; ბ). სამივე დაემთხვევა ერთმანეთს; გ). ორი მაინც დაემთხვევა ერთმანეთს; დ). მხოლოდ ორი დაემთხვევა ერთმანეთს.

5. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორი სათამაშო კამათლის გაგორებისას ქულების ჯამი იქნება: ა). 9 ქულა; ბ). 10 ქულა.

6. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სამი სათამაშო კამათლის გაგორებისას ქულების ჯამი იქნება: ა). 9 ქულა; ბ). 10 ქულა.

7. 60 საგამოცდო საკითხიდან სტუდენტმა იცის 50 საკითხი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი უპასუხებს ორსაკითხიანი ბილეთის ორივე საკითხს.

8. ყუთში არის 11 წითელი, 12 ყვითელი, 10 თეთრი და 17 შავი ბურთი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული ბურთი იქნება წითელი ან შავი.

9. 1000 დადებითი მთელი რიცხვიდან შემთხვევით ირჩევენ ერთს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს რიცხვი იქნება: ა). 4-ის ჯერადი; ბ). ერთდროულად 4-ისა და 6-ის ჯერადი.

10. კალათაში დევს 7 წითელი და 4 თეთრი დისკი. დაბრუნების გარეშე ირჩევენ ორ დისკს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ორივე დისკი წითელია; ბ). ორივე დისკი ერთი და იგივე ფერისაა; გ). დისკები სხვადასხვა ფერისაა; დ). მეორე დისკი წითელია; ე). მეორე დისკი თეთრია.

11. ჩანთაში დევს 6 წითელი და 4 მწვანე კალკულატორი. იღებენ ორ კალკულატორს დაბრუნების გარეშე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ორივე კალკულატორი წითელია; ბ). ორივე მწვანეა; გ). ზუსტად ერთი კალკულატორი წითელია; დ). ერთი მაინც კალკულატორი წითელია; ე). მეორე კალკულატორი წითელია.

12. 52 კარტიდან იღებენ ორ კარტს დაბრუნების გარეშე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ორივე კარტი სურათებიანია (K, Q, J); ბ). არცერთი არ არის სურათებიანი; გ). ერთი მაინც სურათებიანია; დ). ერთი მაინც წითელია.

13. ჩანთაში დევს 6 წითელი და 4 მწვანე კალკულატორი. შემთხვევით იღებენ ერთ კალკულატორს, მის ფერს ინიშნავენ და მას აბრუნებენ ჩანთაში. შემდეგ შემთხვევით იღებენ მეორე კალკულატორს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ორივე კალკულატორი წითელია; ბ). ორივე მწვანეა; გ). ზუსტად ერთი წითელია; დ). ერთი მაინც წითელია; ე). მეორე წითელია.

14. A ყუთი შეიცავს 1 წითელ და 1 შავ ბურთს, B ყუთი შეიცავს 2 წითელ ბურთს. A ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 1 ბურთს და გადააქვთ B ყუთში. შემდეგ B ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 1 ბურთს და გადააქვთ A ყუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ორი გადატანის შემდეგ შავი ბურთი იქნება A ყუთში.

15. A ყუთი შეიცავს 6 წითელ და 2 მწვანე ბურთს, B ყუთი შეიცავს 4 წითელ და 3 მწვანე ბურთს. აგორებენ წესიერ კამათელს. თუ მოვიდა ლუწი ქულა, მაშინ A ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 1 ბურთს, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში B ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 1 ბურთს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ამოღებული ბურთი წითელია; ბ). ბურთი ამოღებული იყო B ყუთიდან, თუ ცნობილია, რომ ამოღებული ბურთი წითელია.

16. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთეულოვან გვერდიან კვადრატში შემთხვევით შერჩეული წერტილი ამ კვადრატის უახლოესი გვერდიდან დაშორებული იქნება არაუმეტეს 0.15-ით.

17. ორი სიგნალი მიმღებ მოწყობილობაზე T დროის მანძილზე შემთხვევით მომენტში მიიღება. მოწყობილობა მათ განარჩევს, თუ ისინი t დროით მაინც არიან დაცილებული ერთმანეთს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე სიგნალი მიღებული იქნება?

18. ცენტრის გარშემო მბრუნავი წრე გაყოფილია სამი ტოლი ფართობის მქონე სექტორად და გადანომრილია ციფრებით 1, 2 და 3. მას ატრიალებენ ორჯერ და ყოველი გაჩერებისას ინიშნავენ იმ სექტორის ნომერს, რომელშიც მოხვდება ამ მოწყობილებაზე უძრავად მიმაგრებული ისარი. იპოვეთ ალბათობა იმი-

სა, რომ: ა). ორივე ნომერი იქნება ერთიდაიგივე; ბ). არცერთი ნომერი არ იქნება 2; გ). ერთი ნომერი მაინც იქნება 3; დ). არცერთი ნომერი არარის 2 და ორივე ერთიდაიგივეა; ე). არცერთი ნომერი არარის 2 ან ორივე ერთიდაიგივეა.

19. 36 კარტიდან *A* მოთამშეს აქვს ორი დედოფალი და ერთი მეფე. *A* მოთამაშისაგან *B* მოთამაშე შემთხვევით იღებს ერთ კარტს და უბრუნებს ისევ მას. *A* მოთამშე ერთმანეთში ურევს ამ სამ კარტს და შემდეგ *B* მოთამაშე კვლავ იღებს ერთ კარტს. *B* მოთამაშე იგებს თუ მის მიერ ამოღებული ორივე კარტი იქნება მეფე. იპოვეთ *B* მოთამაშის მოგების ალბათობა.

20. წესიერი ტეტრაედრის წახნაგები გადანომრილია ციფრებით 1, 2, 3 და 4. მას აგდებენ ორჯერ და იწერენ იმ ციფრს, რომლითაც ტეტრაედრი დაეცემა იატაკზე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ორივე ციფრი იქნება ერთიდაიგივე; ბ). არცერთი ციფრი არ იქნება 3; გ). ერთი ციფრი მაინც იქნება 3; დ). არცერთი ციფრი არარის 4 და ორივე ერთიდაიგივეა; ე). არცერთი ციფრი არარის 4 ან ორივე ერთიდაიგივეა.

21. ყუთში დევს 10 ბურთი გადანომრილი 1-დან 10-მდე რიცხვებით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებულ 6 ბურთში აღმოჩნდება: ა). ბურთი № 9; ბ). ბურთი № 9 და №10.

22. 200 დეტალის შემოწმებისას სტანდარტულების ფარდობითი სიხშირე აღმოჩნდა 0.9. იპოვეთ სტანდარტული დეტალების რაოდენობა.

23. სიბრტყეზე, რომელიც დაფარულია a გვერდის მქონე კვადრტთა ბადით, შემთხვევით აგდებენ მონეტას რადიუსით $r<a/2$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტა არ გადაკვეთს არცერთი კვადრატის გვერდს.

24. სიბრტყეზე, რომელიც დაფარულია 6 სმ-ით დაშორებული პარალელური წრფეებით, შემთხვევით აგდებენ წრეს რადიუსით 1 სმ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წრე არ გადაკვეთს არცერთ წრფეს.

25. შემთხვევით იღებენ ორ დადებით რიცხვს, რომელთაგან თითოეული არ აღემატება 2-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მათი ნამრავლი არ აღემატება 1-ს, ხოლო განაყოფი კი არ აღემატება 2-ს.

პასუხები:

1. 9/19; 10/19. **2.** 3/10. **3.** 9/10; 1/10. **4.** 18/25; 1/100; 14/50; 27/100. **5.** 1/9; 1/12. **6.** 25/216; 13/108. **7.** 245/354. **8.** 14/25. **9.** 1/4; 1/83. **10.** 21/55; 27/55; 28/55; 7/11; 4/11. **11.** 1/3; 2/15; 8/15; 13/15; 3/5. **12.** 11/221; 10/17; 7/17; 77/102. **13.** 9/25; 4/25; 12/25; 21/25; 3/5. **14.** 2/3. **15.** 37/56; 16/37. **18.** 1/3; 4/9; 5/9; 2/9; 5/9. **19.** 1/9. **20.** 1/4; 9/16; 7/16; 3/16; 5/8. **21.** 0.6; 1/3. **22.** 180. **23.** $(a-2r)^2/a^2$. **24.** 2/3. **25.** $(1+3\ln 2)/8 \approx 0.38$.

თავი II
რთული ხდომილების ალბათობები

ალბათობათა შეკრების კანონი: თუ $A \cap B = \emptyset$, მაშინ

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

საწინააღმდეგო ხდომილების ალბათობა: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

სხვაობის ალბათობის ფორმულა: თუ $B \subset A$, მაშინ $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

თუ $A_i \cap A_j = \emptyset$, როცა $i \neq j$, მაშინ: $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

როცა ხდომილებები თავსებადია: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

საზოგადად:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

პირობითი ალბათობის ფორმულა

A ხდომილების პირობითი ალბათობა პირობაში, რომ ადგილი ჰქონდა B ხდომილებას აღინიშნება $P(A|B)$ (ან $P_B(A)$) სიმბოლოთი და

$$P(A|B) \coloneqq P(A \cap B)/P(B), \quad \text{თუ } P(B) \neq 0.$$

$$0 \leq P(A|B) \leq 1; \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A|B) = 0; \quad B \subset A \Rightarrow P(A|B) = 1;$$

თუ $A_i \cap A_j = \emptyset$, როცა $i \neq j$, მაშინ: $P[(\sum_{i=1}^{n} A_i)|B] = \sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)$.

ნამრავლის ალბათობის ფორმულა

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P[C|(A \cap B)].$$

საზოგადად: $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$.

დამოკიდებული და დამოუკიდებელი ხდომილებები

A ხდომილებას ეწოდება B ხდომილებისაგან **დამოუკიდებელი**, თუ $P(A|B) = P(A)$ ან რაც იგივეა $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. თუ $P(A|B) \neq P(A)$, მაშინ გვაქვს **დამოკიდებული** ხდომილებები. თუ A და B ხდომილებები დამოუკიდებელია, მაშინ ხდომილებები $\overline{A}$ და B აგრეთვე დამოუკიდებელია.

ხდომილებათა ერთობლიობას $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ეწოდება **წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი** თუ: $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j), \quad \forall i \neq j$.

ხდომილებათა ერთობლიობას $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ეწოდება **ერთობლივად დამოუკიდებელი** თუ $\forall \ k \leq n$, $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k$: $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$.

სრული ალბათობის ფორმულა

ხდომილებათა ერთობლიობას $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ეწოდება **ხდომილებათა სრული სისტემა**, თუ $A_i \cap A_j = \emptyset$, როცა $i \neq j$ და $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ (მაგალითად, A და $\overline{A}$).

თუ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ხდომილებათა სრული სისტემაა ($P(A_i) > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$), მაშინ ადგილი აქვს **სრული ალბათობის ფორმულას:** $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i)$.

ბაიესის ფორმულა

თუ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ხდომილებათა სრული სისტემაა, $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, მაშინ ადგილი აქვს **ბაიესის ფორმულას**:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}.$$

განმეორებითი ცდები. ბერნულის ფორმულა

განვიხილოთ ერთი და იგივე ექსპერიმენტების სერია, რომლებიც ტარდება ერთი და იგივე პირობებში ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ამასთანავე, ყოველ კონკრეტულ ექსპერიმენტში ჩვენ განვასხვავებთ მხოლოდ ორ შედეგს: გარკვეული A ხდომილების მოხდენა (რომელსაც პირობითად "წარმატებას" უწოდებენ) და მისი არ მოხდენა – $\overline{A}$ (რომელსაც "მარცხს" უწოდებენ). A ხდომილების მოხდენის ალბათობა ნებისმიერი ექსპერიმენტისათვის მუდმივია და ტოლია $P(A) = p$, სადაც $0 < p < 1$. შესაბამისად, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p := q$ $(p + q = 1)$.

ალბათობას იმისა, რომ n ექსპერიმენტში A ხდომილება მოხდა k-ჯერ გამოითვლება ე. წ. **ბერნულის ფორმულით**:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

ამასთანავე, ადგილი აქვს თანაფარდობას: $P_n(k+1) = \dfrac{(n-k)p}{(k+1)q} P_n(k)$.

ალბათობების ერთობლიობას $P_n(k)$, როცა $k = 0, 1, \ldots, n$ ეწოდება **ალბათობების ბინომიალური განაწილება**.

ისეთ k_0 რიცხვს, რომლის შესაბამისი ალბათობა $P_n(k_0)$ უდიდესია $P_n(0)$, $P_n(1), \ldots, P_n(n)$ ალბათობებს შორის **უალბათესი რიცხვი** ეწოდება. უალბათესი რიცხვი გვიჩვენებს n დამოუკიდებელ ცდაში წარმატებათა რა რაოდენობაა ყველაზე უფრო მოსალოდნელი. უალბათესი რიცხვი წარმოადგენს შემდეგი უტოლობის მთელ ამონახსნს: $np - q \le k_0 \le np + p$.

პუასონის ფორმულა

თანაფარდობას $\lim\limits_{np \to \lambda} p_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!$ **პუასონის ფორმულა** ეწოდება. იგი საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ n დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილების k-ჯერ მოხდენის ალბათობა (როცა n საკმაოდ დიდია, ხოლო p საკმაოდ მცირე, ამასთანავე $np = \lambda < 15$) პუასონის მიახლოებითი ფორმულით: $p_n(k) \approx \lambda^k e^{-\lambda} / k!$.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. განვიხილოთ ოჯახები, სადაც ორ-ორი ბავშვია. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ოჯახში ორივე ბავშვი ვაჟია თუ ცნობილია, რომ: ა). უფროსი ბავშვი – ვაჟია; ბ). ერთი ბავშვი მაინც – ვაჟია?

ამოხსნა. აქ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე ასეთია

$$\Omega = \{ვვ, ვქ, ქვ, ქქ\},$$

სადაც "ვ" აღნიშნავს ვაჟს, ხოლო "ქ" – ქალს. ჩავთვალოთ, რომ ოთხივე შედეგი ტოლალბათურია. შემოვიღოთ ხდომილებები: A – იყოს ხდომილება, რომ უფროსი ბავშვი – ვაჟია, ხოლო B იყოს ხდომილება, რომ უმცროსი ბავშვი – ვაჟია. მაშინ $A \cap B$ – იქნება ხდომილება, რომ ორივე ბავშვი ვაჟია, ხოლო $A \cup B$ – კი იქნება ხდომილება, რომ ერთი ბავშვი მაინც ვაჟია. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობები იქნება: ა). $P(A \cap B \mid A)$ და ბ). $P(A \cap B \mid A \cup B)$. ადვილი დასანახია, რომ:

$$P(A \cap B \mid A) = \frac{P[(A \cap B) \cap A]}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cap B \mid A \cup B) = \frac{P[(A \cap B) \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

მაგალითი 2 (საუკეთესოს შერჩევაზე). მოცემულია m ობიექტი გადანომრილი რიცხვებით $1,2,\ldots,m$, ამასთანავე ისე, რომ ვთქვათ, ობიექტი №1 კლასიფიცირდება როგორც "საუკეთესო", . . , ობიექტი №m კი როგორც "ყველაზე უარესი". იგულისხმება რომ ობიექტები შემოდიან დროის მომენტებში $1,2,\ldots,m$ შემთხვევითი რიგით (ანუ ყველა შესაძლო $m!$ გადანაცვლება ტოლალბათურია). დამკვირვებელს შეუძლია ორი მათგანის შედარებით თქვას რომელია უკეთესი და რომელი უარესი. საჭიროა საუკეთესოს შერჩევა იმ პირობით რომ ობიექტები წარმოიდგინება სათითაოდ და უკუგდებულის დამახსოვრება ხდება დამკვირვებლის მიერ. არ შეიძლება საუკეთესოდ მიჩნეულ იქნეს ის ობიექტი, რომელიც დაკვირვებული ობიექტებიდან ერთზე მაინც უარესია ან რომელიც უკვე იქნა უკუგდებული. ვთქვათ, დამკვირვებელმა ობიექტი შეარჩია k-ურ ნაბიჯზე ($k \le m$), ანუ დათვალიერებული ობიექტებიდან უკანასკნელი აღმოჩნდა ყველა წინაზე უკეთესი და ამიტომ მოხდა მისი შერჩევა. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ამორჩეული ობიექტი იქნება საუკეთესო მთელი ერთობლიობიდან როგორც უკვე განხილულ, ისე ჯერ კიდევ განუხილავ ობიექტებს შორის?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A იყოს ხდომილება, რომ k-ური ობიექტი საუკეთეოა ყველა არსებულ m ობიექტს შორის და B იყოს ხდომილება, რომ k-ური ობიექტი საუკეთეოა დაკვირვებულ k ობიექტს შორის. გასაგებია, რომ მოსაძებნია პირობითი ალბათობა $P(A \mid B)$.

ვინაიდან $A \subset B$, ამიტომ $A \cap B = A$ და $P(A \cap B) = P(A)$. შესაბამისად, პირობითი ალბათობის განმარტების თანახმად

$$P(A \mid B) = P(A)/P(B)$$

ვინაიდან ობიექტების ყველა შესაძლო გადანაცვლებები ტოლალბათურია, ამიტომ ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად ადვილი დასანახია, რომ

$$P(B) = \frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k} \text{ და } P(A) = \frac{(m-1)!}{m!} = \frac{1}{m}.$$

შესაბამისად, $P(A \mid B) = k/m$.

სტრატეგია. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ საუკეთესო ობიექტის ამორჩევის ოპტიმალური სტრატეგია მოწყობილია შემდეგნაირად. ავღნიშნოთ სიმბოლოთი m^* ისეთი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც სამართლიანია უტოლობა

$$\frac{1}{m^*} + \cdots + \frac{1}{m-1} \le 1 < \frac{1}{m^*-1} + \cdots + \frac{1}{m-1}.$$

საუკეთესო ობიექტის არჩევის ოპტიმალური სტრატეგია მდგომარეობს იმაში, რომ დავაკვირდეთ და უკუვაგდოთ პირველი m^*-1 ობიექტი და შემდეგ გავაგრძელოთ დაკვირვება ისეთ τ^* მომენტამდე, როცა პირველად გამოჩნდება ყველა წინამორბედზე უკეთეს ობიექტი.

მაგალითად, თუ $m=1,...,10$, მაშინ m^*-ის შესაბამისი მნიშვნელობებია:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m-ოპტიმალური	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4

საკმაოდ დიდი m-ისათვის $m^* \approx m/e$ (სადაც e — ნეპერის რიცხვია, $e \cong 2.718$) და საუკეთესო ობიექტის არჩევის ალბათობა დაახლოებით ტოლია $1/e \cong 0.368$ (თუმცა, ერთი შეხედვით ბუნებრივია მოგვჩვენებოდა, რომ განსახილველი ობიექტების m რაოდენობის ზრდასთან ერთად, საუკეთესო ობიექტის არჩევის ალბათობა უნდა წასულიყო ნულისაკენ). ე. ი. საუკეთესო ობიექტის არჩევის ოპტიმალური სტრატეგია მდგომარეობს იმაში, რომ უნდა უკუვაგდოთ ობიექტების საერთო რაოდენობის დაახლოებით მესამედი და შემდეგ ავირჩიოთ პირველი ისეთი ობიექტი, რომელიც ყველა წინაზე უკეთესია.

მაგალითი 3 ("ბედნიერ" ბილეთებზე). 25 საგამოცდო ბილეთიდან 5 "ბედნიერია", ხოლო დანარჩენი 20 – "არა ბედნიერი". რომელ სტუდენტს აქვს "ბედნიერი" ბილეთის აღების მეტი ალბათობა: ვინც პირველი იღებს ბილეთს, თუ ვინც მეორე იღებს ბილეთს?

ამოხსნა. ეს ამოცანა ჩვენ უკვე ამოვხსენით ალბათობის კლასიკური განმარტების გამოყენებით. ამოვხსნათ ახლა იგი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ახლებური შემოტანითა და ნამრავლის ალბათობის ფორმულის გამოყენებით. წინასწარ შემოვიღოთ შემდეგი ხდომილებები: A იყოს ხდომილება, რომ პირველმა სტუდენტმა აიღი ბედნიერი ბილეთი, ხოლო B იყოს ხდომილება, რომ მეორე სტუდენტმა აიღი ბედნიერი ბილეთი. მაშინ ცხადია, რომ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება ოთხი ხდომილებისაგან

$$\Omega = \{A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}\}.$$

ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად $P(A)=5/25=1/5$, ხოლო $P(\overline{A})=20/25=4/5$. მეორეს მხრივ, ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე, თუ ცნობილია, რომ პირველმა სტუდენტმა აიღო ბედნიერი ბილეთი, მაშინ ალბათობა იმისა რომ მეორე სტუდენტი აიღებს ბედნიერ ბილეთს ისევ შეიძლება გამოვითვალოთ ალბათობის კლასიკური განმარტებით: ამ შემთხვევაში ყველა შესაძლო შედეგთა რაოდენობაა 24, ხოლო ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა კი მხოლოდ 4 (რადგან ერთი ბედნიერი ბილეთი უკვე აღებულია) და შესაბამისად,

$$P(B \mid A) = 4/24 = 1/6.$$

ანალოგიურად, $P(\overline{B} \mid A) = 20/24 = 5/6$, $P(B \mid \overline{A}) = 5/24 = 5/24$ და $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 19/24$. ამიტომ ორი ხდომილების ნამრავლის ალბათობის ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = 1/5 \cdot 1/6 = 1/30; \; P(A \cap \overline{B}) = 1/5 \cdot 5/6 = 1/6;$$

$$P(\overline{A} \cap B) = 4/5 \cdot 5/24 = 1/6 \text{ და } P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 4/5 \cdot 19/24 = 19/30$$

(შევნიშნავთ, რომ ჩვენ აქ მხოლოდ სისრულისათვის გამოვთვალეთ ყველა შესაძლო პირობითი და ნამრავლის ალბათობები).

ცხადია, რომ $B=(A\cap B)+(\overline{A}\cap B)$. ამიტომ ალბათობათა შეკრების კანონის თანახმად

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=1/30+1/6=15\ (=P(A)).$$

მაგალითი 4. ყუთში m ბურთია, მათ შორის n თეთრია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ორი ბურთის მიმდევრობით დაბრუნების გარეშე ამოღებისას: ა). პირველი ბურთი თეთრია; ბ). მეორე ბურთი თეთრია; გ). ორივე ბურთი თეთრია.

ამოხსნა. A_i იყოს ხდომილება, რომ i-ური ბურთი თეთრია ($i=1,2$). მაშინ ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად:

ა). $P(A_1)=n/m$.

გარდა ამისა,

$$P(A_2\mid A_1)=(n-1)/(m-1) \text{ და } P(A_2\mid \overline{A_1})=n/(m-1).$$

ამიტომ ნამრავლის ალბათობის ფორმულის თანახმად:

გ). $P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)=n(n-1)/m(m-1)$.

ანალოგიურად,

$$P(\overline{A_1}\cap A_2)=P(\overline{A_1})\cdot P(A_2\mid \overline{A_1})=n(m-n)/m(m-1).$$

ამიტომ:

ბ). $P(A_2)=P[(A_1\cap A_2)+(\overline{A_1}\cap A_2)]=P(A_1\cap A_2)+P(\overline{A_1}\cap A_2)=n/m$.

მაგალითი 5. ყუთს აქვს n უჯრა. ალბათობა იმისა რომ ბურთი არის ამ უჯრებიდან ერთ-ერთში ტოლია p-სი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ბურთი არის i-ურ უჯრაში, თუ ცნობილია, რომ ბურთი თითეულ უჯრაში შესაძლებელია იყოს თანაბარი ალბათობებით?

ამოხსნა. A_i იყოს ხდომილება, რომ ბურთი არის i-ურ უჯრაში. A იყოს ამ ხდომილებების გაერთიანება $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$. პირობის თანახმად

$$P(A)=p \text{ და } P(A_i\mid A)=1/n.$$

ამიტომ

$$P(A_i)=P(A_i\cap A)=P(A)P(A_i\mid A)=p\cdot 1/n=p/n.$$

მაგალითი 6. კარტების ნაკრებიდან (რომელშიც 36 კარტია) შემთხვევით იღებენ ერთ კარტს. განვიხილოთ ხდომილებები: A იყოს ხდომილება, რომ ამოღებული კარტი "აგურისა", ხოლო B იყოს ხდომილება, რომ ამოღებული კარტი "მეფეა". არიან თუ არა ეს ხდომილებები დამოუკიდებელი?

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში

$$|\Omega|=36,\ P(A)=9/36=1/4,\ P(B)=4/36=1/9 \text{ და}$$
$$P(A\cap B)=1/36=1/4\cdot 1/9=P(A)\cdot P(B).$$

ე.ი. ეს ხდომილებები დამოუკიდებელია.

მაგალითი 7. დავუშვათ, რომ ვაგორებთ ორ სათამაშო კამათელს. განვიხილოთ ხდომილებები: A — პირველ კამათელზე მოვიდა კენტი ქულა, B — მეორე

კამათელზე მოვიდა კენტი ქულა, C – ორივე კამათელზე მოსულ ქულათა ჯამი კენტია. გავარკვიოთ ამ ხდომილებების დამოუკიდებლობის საკითხი.

ცხადია, რომ $P(A)=P(B)=3/6=1/2$, ხოლო $P(A\cap B)=3\cdot 3/36=1/4$. ამიტომ A და B ხდომილებები დამოუკიდებლია.

დავალება. შეამოწმეთ, რომ $P(C)=1/2$.

შევნიშნოთ, რომ A და B ხდომილებიდან ერთ-ერთის მოხდენის პირობაში C ხდომილება ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესაბამისად, ან პირველ ან მეორე კამათელზე მოვიდა ლუწი ქულა, ანუ გვაქვს თანაფარდობები:

$$A\cap C=A\cap\overline{B} \text{ და } B\cap C=\overline{A}\cap B.$$

A და B ხდომილებების დამოუკიდებლობიდან გამომდინარე ხდომილებები A და $\overline{B}$ და $\overline{A}$ და B აგრეთვე დამოუკიდებლებია, ამიტომ

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=1/4 \text{ და } P(\overline{A}\cap B)=1/4.$$

შესაბამისად,

$$P(A\cap C)=P(A\cap\overline{B})=1/4 \text{ და } P(B\cap C)=P(\overline{A}\cap B)=1/4.$$

ეს თანაფარდობები კი, $P(C)=1/2$ ალბათობის გათვალისწინებით, ნიშნავს, რომ დამოუკიდებლებია A და C და B და C ხდომილებათა წყვილებიც.

დავალება. შეამოწმეთ, რომ ხდომილებები მაგალითი 7-დან არ არიან ერთობლივად დამოუკიდებელი.

მაგალითი 8. დავუშვათ, ვაგდებთ სამ მონეტას. შემოვიღოთ ხდომილებები:

A_1 – პირველი და მეორე მონეტა დაეცა ერთი და იგივე მხარეზე;

A_2 – მეორე და მესამე მონეტა დაეცა ერთი და იგივე მხარეზე;

A_3 – პირველი და მესამე მონეტა დაეცა ერთი და იგივე მხარეზე.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ აქედან ნებისმიერი ორი ხდომილება დამოუკიდებელია, ხოლო სამივე ერთად დამოკიდებულია, ვინაიდან თუ ჩვენ გვეცოდინება რომ მაგალითად, A_1 და A_2 მოხდა, მაშინ ჩვენ ზუსტად ვიცით, რომ A_3 აგრეთვე მოხდა.

დავალება. შეამოწმეთ, რომ ხდომილებები A_1, A_2 და A_3 წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია.

მაგალითი 9 (დაბადების დღეებზე). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, კონკრეტული სკოლის რომ 150 მოსწავლიდან ერთი მაინც დაბადებულია მოცემულ ფიქსირებულ დღეს, მაგალითად პირველ სექტემბერს?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები:

$$A_i=\{i-\text{ური სტუდენტი დაბადებულია 1.09}\},\ i=1,2,\dots,150;$$

$$A=\{\text{ერთი მაინც 150 სტუდენტიდან დაბადებულია 1.09}\}.$$

ნათელია, რომ A_i ხდომილებები ერთობლივად დამოუკიდებელია და $P(A_i)=1/365$. გარდა ამისა, $A=\bigcup_{i=1}^{150}A_i$ და მაშასადამე, საპოვნელია დამოუკიდებელ ხდომილებათა გაერთიანების ალბათობა. გადავიდეთ საწინააღმდეგო ხდომილებაზე და ვისარგებლოთ დე-მორგანის კანონით. მაშინ გვაქვს:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{\bigcup_{i=1}^{150}A_i})=1-P(\bigcap_{i=1}^{150}\overline{A_i})=1-P(\overline{A_1})\cdots P(\overline{A_n}).$$

რამდენადაც $P(\overline{A_i})=1-1/365$, თუ ვისარგებლებთ ნიუტონის ბინომის ფორმულით $(1+x)^n=\sum_{j=1}^{n}C_n^j x^j$, მივიღებთ, რომ:

$$P(A)=\frac{150}{365}-C_{150}^2(\frac{1}{365})^2+C_{150}^3(\frac{1}{365})^3-C_{150}^4(\frac{1}{365})^4+\cdots.$$

ვინაიდან, $150/365\cong 0{,}41$, ხოლო

$$C_{150}^4(\frac{1}{365})^4<(\frac{150}{365})^4\frac{1}{24}\cong\frac{(0,41)^4}{24}<0.005,$$

ამიტომ მწკრივის ნიშანცვლადობის გამო, თუ გადავაგდებთ მწკრივის წევრებს დაწყებული მე-5 წევრიდან (მწკრივების ზოგადი თეორიიდან გამომდინარე), შესაძლებელია ვამტკიცოთ, რომ

$$P(A)\cong 0.41-\frac{(0.41)^2}{2}+\frac{(0.41)^3}{6}\cong 0.41-0.08+0.01=0.34.$$

მაგალითი 10 (ასოების ამოცნობა). გვაქვს ასოების ორი ერთობლიობა:

I={K, И, З, Н} და II={З, Ч, Н}.

შემთხვევით ვირჩევთ ერთ ერთობლიობას და არჩეული ერთობლიობიდან ერთ ასოს. ამორჩეულ ასოს ძალიან მცირე დროის განმავლობაში ვუჩვენებთ დამკვირვებელს (ისე რომ მას არ შეუძლია მთლიანად აღიქვას ასო). როგორია ასოს სწორად გამოცნობის ალბათობა, თუ დამკვირვებელის პასუხია "Н", როცა ის ასოს გამოსახულებაში დაინახავს ვერტიკალურ ხაზს და პასუხია "З", როცა ასოს გამოსახულებაში ვერტიკალური ხაზი არ არის?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები:

$$A_i=\{\text{ამორჩეულია } i-\text{ური ერთობლიობა}, i=1,2\};$$

"К", "И", "З", "Н" და "Ч" – იყოს ხდომილება, რომ წარმოდგენილია შესაბამისად К, И, З, Н და Ч ასოები;

$$B=\{\text{დამკვირვებელმა სწორად უპასუხა}\}.$$

ამოცანის პირობებში ცხადია:

$$P(A_1)=P(A_2)=1/2;$$

$$P(\text{“К”}|A_1)=P(\text{“И”}|A_1)=P(\text{“З”}|A_1)=P(\text{“Н”}|A_1)=1/4,\quad P(\text{“Ч”}|A_1)=0;$$

$$P(\text{“З”}|A_2)=P(\text{“Ч”}|A_2)=P(\text{“Н”}|A_2)=1/3,\quad P(\text{“К”}|A_2)=P(\text{“И”}|A_2)=0.$$

ვინაიდან A_1 და A_2 ქმნიან ხდომილებათა სრულ სისტემას, ამიტომ თითოეული ასოს სწორად ამოცნობის ალბათობა შეგვიძლია გამოვთვალოთ სრული ალბათობის ფორმულით:

$$P(\text{“К”})=P(A_1)\ P(\text{“К”}|A_1)+P(A_2)\ P(\text{“К”}|A_2)=1/8;$$

$$P(\text{“И”})=P(A_1)\ P(\text{“И”}|A_1)+P(A_2)\ P(\text{“И”}|A_2)=1/8;$$

$$P(\text{“З”})=P(A_1)\ P(\text{“З”}|A_1)+P(A_2)\ P(\text{“З”}|A_2)=7/24;$$

$$P(\text{“Н”})=P(A_1)\ P(\text{“Н”}|A_1)+P(A_2)\ P(\text{“Н”}|A_2)=7/24;$$

$$P(\text{“Ч”})=P(A_1)\ P(\text{“Ч”}|A_1)+P(A_2)\ P(\text{“Ч”}|A_2)=1/6.$$

ამოცანის პირობებში ცხადია აგრეთვე, რომ სწორი პასუხის პირობითი ალბათობები სხვადასხვა ასოების წარმოდგენის შემთხვევაში შესაბამისად იქნება:

$$P(B|\text{"К"}) = P(B|\text{"И"}) = P(B|\text{"Ч"}) = 0 \text{ და } P(B|\text{"З"}) = P(B|\text{"Н"}) = 1.$$

ვინაიდან, "К", "И", "З", "Н" და "Ч" აგრეთვე ხდომილებათა სრული სისტემაა, ამიტომ სრული ალბათობის ფორმულა გვაძლევს სწორი პასუხის ალბათობას:

$$P(B) = P(\text{"К"})P(B|\text{"К"}) + P(\text{"Н"})P(B|\text{"Н"}) + P(\text{"И"})P(B|\text{"И"}) +$$
$$+ P(\text{"З"})P(B|\text{"З"}) + P(\text{"Ч"})P(B|\text{"Ч"}) = P(\text{"Н"}) + P(\text{"З"}) = 7/12.$$

მაგალითი 11 (მოთამაშის გაკოტრებაზე). განვიხილოთ ე. წ. "გერბი-საფასურის" თამაში: თუ მონეტის აგდებისას მოვა მოთამაშის მიერ წინასწარ დასახელებული მონეტის მხარე, მაშინ იგი იგებს 1 ლარს, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი აგებს 1 ლარს. ვთქვათ, მოთამაშის საწყისი კაპიტალი შეადგენს x ლარს და მისი მიზანია მიიყვანოს ეს თანხა a ლარამდე. თამაში გრძელდება მანამ სანამ მოთამაშე არ მიიყვანს თავის თანხას წინასწარ განსაზღრულ a ლარამდე, ან იგი არ გაკოტრდება (ანუ წააგებს მის ხელთ არსებულ მთელ x ლარს). როგორია ალბათობა იმისა, რომ მოთამაშე გაკოტრდება?

ამოხსნა. ეს ალბათობა დამოკიდებული იქნება საწყის x კაპიტალზე. აღვნიშნოთ იგი $p(x)$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ იგი განმარტებულია ნებისმიერი $0 \le x \le a$ და ამასთანავე, $P(0) = 1$ და $P(a) = 0$. შემოვიღოთ ხდომილებები:

$A_1 = \{$მოთამაშემ მოიგო პირველ ნაბიჯზე$\}$,

$B = \{$მოთამაშე, რომელსაც გააჩნია საწყისი კაპიტალი x, გაკოტრდება$\}$.

ამოცანის პირობებში გვაქვს:

$$P(A_1) = P(\overline{A_1}) = 1/2, \quad P(B | A_1) = p(x+1) \text{ და } P(B | \overline{A_1}) = p(x-1) \quad (1 \le x \le a-1).$$

ვინაიდან, A_1 და $\overline{A_1}$ ხდომილებათა სრული სისტემაა, ამიტომ სრული ალბათობის ფორმულა $p(x)$ ალბათობისათვის გვაძლევს შემდეგ განტოლებას:

$$p(x) = \frac{1}{2}p(x+1) + \frac{1}{2}p(x-1), \quad 1 \le x \le a-1$$

(ამ ტიპის განტოლებებს მათემატიკაში რეკურენტულ განტოლებებს უწოდებენ). შეიძლება შემოწმდეს, რომ ამ განტოლების ამოხსნას აქვს სახე:

$$p(x) = bx + c,$$

სადაც b და c – ნებისმიერი მუდმივებია. ამ კოეფიციენტების მოსაძებნად უნდა ვისარგებლოთ სასაზღვრო პირობებით $P(0) = 1$ და $P(a) = 0$. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$c = 1 \text{ და } ab + c = 0,$$

საიდანაც, $b = -1/a$ და საბოლოოდ $p(x) = 1 - x/a$, $0 \le x \le a$.

დავალება. დავუშვათ, რომ შესამოწმებელი ჯგუფის 1% ავადმყოფია, ხოლო დანარჩენი 99% კი ჯანმრთელია. ადამიანების შერჩევა ხდება შემთხვევით და ამიტომ

$$P(\text{ავადმყოფი}) = 1\% = 0.01 \text{ და } P(\text{ჯანმრთელი}) = 99\% = 0.99.$$

ვიგულისხმოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა ტესტირება უტარდება ადამიანს, რომელსაც არა აქვს ავადმყოფობა, მაშინ 1%-ია ალბათობა იმისა, რომ მივიღოთ მცდარი დადებითი შედეგი, ე.ი.

$$P(\text{დადებითი} \mid \text{ჯანმრთელი}) = 1\% \text{ და } P(\text{უარყოფითი} \mid \text{ჯანმრთელი}) = 99\%.$$

დაბოლოს, დავუშვათ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა ტესტირება უტარდება ავადმყოფ ადამიანს, მაშინ 1%-ია ალბათობა იმისა, რომ მივიღოთ მცდარი უარყოფითი შედეგი, ე.ი.

$$P(\text{უარყოფითი} \mid \text{ავადმყოფი}) = 1\% \text{ და } P(\text{დადებითი} \mid \text{ავადმყოფი}) = 99\%.$$

გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ადამიანი ჯანმრთელია, ხოლო ტესტმა აჩვენა უარყოფითი შედეგი; ბ). ადამიანი ავადმყოფია, ხოლო ტესტმა აჩვენა დადებითი შედეგი; გ). ადამიანი ჯანმრთელია, ხოლო ტესტმა აჩვენა დადებითი შედეგი; გ). ადამიანი ავადმყოფია, ხოლო ტესტმა აჩვენა უარყოფითი შედეგი.

განვიხილოთ რეალური სიტუაცია, რომელიც გვიჩვენებს ერთი შეხედვით მოულოდნელ განსხვავებას $P(A \mid B)$ და $P(B \mid A)$ პირობით ალბათობებს შორის. იმისათვის, რომ გამოვავლინოთ სერიოზული ავადმყოფობის მქონე ადამიანები ადრეულ სტადიაზე, ხდება ადამიანების დიდი ჯგუფის ტესტირება. მიუხედავად წინასწარი შემოწმების სარგებლობისა, ამ მიდგომას გააჩნია უარყოფითი მხარე: თუ ადამიანს სინამდვილეში არ გააჩნია ავადმყოფობა და საწყისმა ტესტმა აჩვენა დადებითი შედეგი (დაუდგინა ავადმყოფობა), ის იქნება სტრესულ მდგომარეობაში (რაც თავის მხრივ უარყოფითად მოქმედებს მის ცხოვრებაზე) სანამ უფრო წარმატებული ტესტი არ აჩვენებს, რომ ის ჯანმრთელია. ამ პრობლემის მნიშვნელობა შესაძლებელია კარგად გავიგოთ პირობითი ალბათობების ტერმინებში.

წინა დავალების მონაცემებში გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ ტესტი აჩვენებს დადებით შედეგს. სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად:

$$P(\text{დადებითი}) = P(\text{ჯანმრთელი})P(\text{დადებითი} \mid \text{ჯანმრთელი}) +$$
$$+P(\text{ავადმყოფი})P(\text{დადებითი} \mid \text{ავადმყოფი}) = 0.99 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot 0.99 = 0.0198.$$

როგორც ცნობილია, მაგალითის პირობებში

$$P(\text{დადებითი} \mid \text{ავადმყოფი}) = 99\%.$$

გამოვთვალოთ ახლა შებრუნებული პირობითი ალბათობა, რისთვისაც ვისარგებლოთ პირობითი ალბათობის განმარტებითა და ნამრავლის ალბათობის ფორმულებით. მაშინ ზემოთ მიღებული

$$P(\text{დადებითი}) = 0.0198 = 1.98\%$$

შედეგის თანახმად:

$$P(\text{ავადმყოფი} \mid \text{დადებითი}) = \frac{P(\text{ავადმყოფი} \cap \text{დადებითი})}{P(\text{დადებითი})} =$$
$$= \frac{P(\text{ავადმყოფი})\ P(\text{დადებითი} \mid \text{ავადმყოფი})}{1.98\%} = \frac{1\% \cdot 99\%}{1.98\%} = 50\%.$$

როგორც ვხედავთ, პირობითი ალბათობა იმისა რომ ტესტი მოგვცემს დადებით შედეგს, პირობაში რომ ადამიანი ავადმყოფია ტოლია 99%-ის, მაშინ როდესაც პირობითი ალბათობა იმისა რომ ადამიანი ავადმყოფია, პირობაში რომ ტესტმა მოგვცა დადებითი შედეგი არის მხოლოდ 50%. აქ შერჩეული მონაცემებ-

ის შემთხვევაში უკანასკნელი შედეგი შეიძლება ჩაითვალოს მიუღებლად: ნახევარი ადამიანების, რომელთა ტესტირებამ აჩვენა დადებითი შედეგი, ფაქტიურად არის ჯანმრთელი.

მაგალითი 12. ყუთში მოთავსებულია ორი მონეტა: A_1 — სიმეტრიული მონეტა გერბის მოსვლის ალბათობით 1/2, და A_2 — არასიმეტრიული მონეტა გერბის მოსვლის ალბათობით 1/3. შემთხვევით ვიღებთ ერთ მონეტას და ვაგდებთ. დავუშვათ, რომ მოვიდა გერბი. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული მონეტა იყო სიმეტრიული?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება:

$$\Omega = \{(A_1, \text{გ}), (A_1, \text{ს}), (A_2, \text{გ}), (A_2, \text{ს})\},$$

სადაც მაგალითად, $(A_1, \text{გ})$ — ნიშნავს, რომ ამოვიღეთ A_1 მონეტა და მისი აგდების შედეგად მოვიდა გერბი. ამოცანის პირობებში გვაქვს:

$$P(A_1) = P(A_2) = 1/2, \ \ P(\text{გ} \mid A_1) = 1/2 \ \text{ და } \ P(\text{გ} \mid A_2) = 1/3.$$

შესაბამისად, ნამრავლის ალბათობის ფორმულის გამოყენებით გამოვითვლით:

$$P\{(A_1, \text{გ})\} = 1/4, \ \ P\{(A_1, \text{ს})\} = 1/4, \ \ P\{(A_2, \text{გ})\} = 1/6 \ \text{ და } \ P\{(A_2, \text{ს})\} = 1/3.$$

ამიტომ ბაიესის ფორმულის თანახმად

$$P(A_1 \mid \text{გ}) = \frac{P(A_1)P(\text{გ} \mid A_1)}{P(A_1)P(\text{გ} \mid A_1) + P(A_2)P(\text{გ} \mid A_2)} = \frac{3}{5}.$$

ცხადია, აგრეთვე რომ $P(A_2 \mid \text{გ}) = 2/5$.

მაგალითი 13 (კეთილ გამომცდელზე I). ვთქვათ, ჩვენ ჩასაბარებელი გვაქვს გამოცდა და შეგვიძლია ავირჩიოთ ნებისმიერი სამი გამომცდელიდან. დავუშვათ, ჩვენთვის ცნობილია, რომ ერთერთი სამი გამომცდელიდან (უცნობია რომელი) – "კეთილია" და ალბათობა იმისა, რომ მასთან ჩააბარო გამოცდა ტოლია 0.4-ის, ხოლო დანარჩენი ორი გამომცდელი "ავია" და მათთან გამოცდის ჩაბარების ალბათობა ტოლია 0.1-ის. ჩვენ შემთხვევით ავირჩიეთ გამომცდელი და წარმატებით ჩავაბარეთ გამოცდა. როგორია ლაბათობა იმისა, რომ ჩვენ ავირჩიეთ "კეთილი" გამომცდელი?

ამოხსნა. შემოვიღოთ შემდეგი ხდომილებები: A — ამორჩეული გამომცდელი "კეთილია" (მაშინ $\overline{A}$ — იქნება ხდომილება, რომ ამორჩეული გამომცდელი "ავია") და B — გამოცდა ჩაბარებულია (შესაბამისად, $\overline{B}$ — გამოცდა არაა ჩაბარებული). ამოცანის პირობებში გვაქვს:

$$P(A) = 1/3, \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 2/3;$$

$$P(B \mid A) = 0.4, \qquad P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A) = 0.6;$$

$$P(B \mid \overline{A}) = 0.1, \qquad P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 1 - P(B \mid \overline{A}) = 0.9.$$

ცნობილია, რომ მოხდა B ხდომილება და გამოსათვლელია პირობითი ალბათობა $P(A \mid B)$. ვინაიდან, A და $\overline{A}$ ხდომილებები ქმნიან სრულ სისტემას, ბაიესის ფორმულის თანახმად საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})} = \frac{2}{3}.$$

დავალება. მაგალით 13-ის პირობებში გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ არჩეულ იქნა "ავი" გამომცდელი, თუ ცნობილია, რომ გამოცდა ჩაბარებულ იქნა წარმატებით?

მაგალითი 14 (კეთილ გამომცდელზე II). დავუშვათ, რომ გამომცდელთან, რომელთანაც წარმატებით ჩაიარა გამოცდამ (იხ. მაგალითი 13) გამოსაცდელად რიგ-რიგობით მივიდა კიდევ ორი მოსწავლე. ჯერ გამოცდა ვერ ჩააბარა მეორე მოსწავლემ, შემდეგ მივიდა მესამე და მანაც ვერ ჩააბარა გამოცდა. ამ ფაქტის შემდეგ რომელი ჰიპოთეზაა უფრო დასაჯერებელი: ეს გამომცდელი "კეთილია" თუ "ავი"?

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $P_i(A)$ (შესაბამისად, $P_i(\overline{A})$) სიმბოლოთი ალბათობა (აპოსტერიორული) იმისა, რომ ეს გამომცდელი "კეთილია" (შესაბამისად, "ავია") მას შემდეგ რაც გამოცდილ იქნა i-ური სტუდენტი, $i=1,2,3$. ჩვენ უკვე დავადგინეთ, რომ $P_1(A)=2/3$. შესაბამისად,

$$P_1(\overline{A})=1-P_1(A)=1/3.$$

მეორე მოსწავლის თვალსაზრისით ეს ალბათობები წარმოადგენენ ორი შესაძლო ჰიპოთეზის აპრიორულ ალბათობებს. ამიტომ, ბაიესის ფორმულის თანახმად, მეორე სტუდენტის ჩაჭრის შემდეგ აპოსტერიორული ალბათობები იქნება:

$$P_2(A)=\frac{P(\overline{B}\mid A)P_1(A)}{P(\overline{B}\mid A)P_1(A)+P(\overline{B}\mid \overline{A})P_1(\overline{A})}=\frac{4}{7} \quad \text{და} \quad P_2(\overline{A})=1-P_2(A)=\frac{3}{7}.$$

ანალოგიურად, ახლა მიღებული ალბათობები უკვე იქნება აპრიორული ალბათობები მესამე მოსწავლისათვის, და ამიტომ საძიებელი აპოსტერიორული ალბათობები, მას შემდეგ რაც მესამე მოსწავლემ ვერ ჩააბარა გამოცდა, გამოითვლება ისევ ბაიესის ფორმულით:

$$P_3(A)=\frac{P(\overline{B}\mid A)P_2(A)}{P(\overline{B}\mid A)P_2(A)+P(\overline{B}\mid \overline{A})P_2(\overline{A})}=\frac{8}{17} \quad \text{და} \quad P_3(\overline{A})=1-P_3(A)=\frac{9}{17}>P_3(A).$$

როგორც ვხედავთ, ექსპერიმენტის (გამოცდის) დაწყების წინ აპრიორული ალბათობა იმისა. რომ არჩეული გამომცდელი "კეთილია" ტოლი იყო 1/3-ის. ექსპერიმენტების შემდეგ ამ ხდომილების აპოსტერიორული ალბათობა გაიზარდა და გახდა 8/17. მიუხედავად ამისა, თუ სამი ექსპერიმენტის შემდეგ მისაღებია გადაწყვეტილება ამ გამომცდელის შესახებ, მაშინ უფრო სარწმუნოა ჩავთვალოთ იგი "ავად" (ვინაიდან, $P_3(\overline{A})>P_3(A)$).

მაგალითი 15. ყუთში 3 თეთრი და 5 შავი ბურთია. ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 4 ბურთს დაბრუნებით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთებიდან თეთრი ბურთების რაოდენობა მეტი იქნება შავი ბურთების რაოდენობაზე?

ამოხსნა. თუ წარმატებად ჩავთვლით თეთრი ბურთის ამოღებას, მაშინ პირობის თანახმად ერთ ცდაში წარმატების ალბათობა იქნება $p=3/8$. საძიებელი ხდომილების ხელშემწყობ უთავსებად შემთხვევებს წარმოადგენს ოთხ ცდაში 3 ან 4 თეთრი ბურთის ამოღება, რომელთა ალბათობები ბერნულის ფორმულის თანახმად შესაბამისად ტოლია:

$$P_4(3)=C_4^3\cdot(3/8)^3\cdot(1-3/8)^{4-3}=135/1024 \quad \text{და}$$
$$P_4(4)=C_4^4\cdot(3/8)^4\cdot(5/8)^0=81/4096.$$

შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა ალბათობათა შეკრების კანონის თანახმად იქნება:

$$135/1024+81/4096=621/4096.$$

მაგალითი 16. დაეუშვათ ვამოწმებთ დეფექტურობაზე საქონლის პარტიას, რომელიც შედგება 30 ნაწარმისაგან. ცნობილია, რომ დეფექტური პროდუქციის წილი შეადგენს 5%-ს. როგორია საქონლის ამ პარტიაში დეფექტური პროდუქციის ამა თუ იმ რიცხვის აღმოჩენის ალბათობები?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში ექსპერიმენტების რიცხვია $n=30$, ხოლო ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად $p=5/100=0.05$ (შესაბამისად, $q=0.95$). შესაბამისად, გვაქვს:

$$P_{30}(0)=C_{30}^{0}0.05^{0}0.95^{30-0}=0.95^{30}=0.2146,$$

გარდა ამისა,

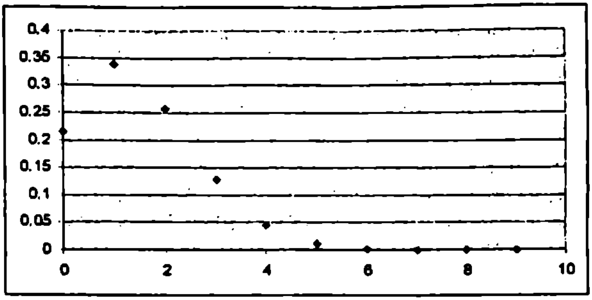
$$P_{30}(k+1)=\frac{30-k}{k+1}\frac{p}{q}P_{30}(k)=\frac{30-k}{k+1}\frac{0.05}{0.95}P_{30}(k)=\frac{30-k}{19(k+1)}P_{30}(k),$$

საიდანაც როცა $k=0$: $P_{30}(0+1)=\dfrac{30-0}{19\cdot(0+1)}\cdot 0.2146=0.3389$;

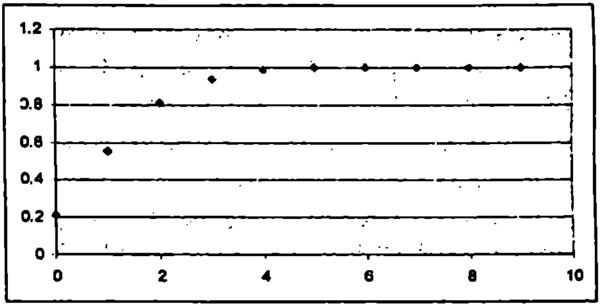
როცა $k=1$: $P_{30}(1+1)=\dfrac{30-1}{19\cdot(1+1)}\cdot 0.3389=0.2586$ და ა. შ. საბოლოოდ გვექნება შემდეგი ცხრილი:

დეფექტური ნაწარმის რიცხვი k	ალბათობა $P_n(k)$	კუმულატიური ალბათობა $\overline{P}_n(k)$
0	0.2146	0.2146
1	0.3389	0.5535
2	0.2586	0.8122
3	0.1270	0.9392
4	0.0451	0.9844
5	0.0124	0.9967
6	0.0027	0.9994
7	0.0005	0.9999
8	0.0001	0.999998
9	0.00000	0.999999

ამ ცხრილის შესაბამისი ალბათობების განაწილების გრაფიკი იქნება:



კუმულატიური ალბათობების შესაბამისი განაწილების გრაფიკი იქნება:



სავარჯიშო 1. ექსპერიმენტი მდგომარეობს სამი სათამაშო კამათლის გაგორებაში. იპოვეთ ალაბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის 10-ჯერ გამეორებისას, ზუსტად 4 ექსპერიმენტში მოვა ზუსტად ორ-ორი "6"?

სავარჯიშო 2. რამდენი შემთხვევითი ციფრი უნდა ავიღოთ, რომ ციფრი "5" მოვიდეს ერთჯერ მაინც არანაკლებ 0.9-ის ტოლი ალბათობით?

ამოცანები

1. A ყუთი შეიცავს 8 წითელ და 7 მწვანე ბურთს, B ყუთი შეიცავს 6 წითელ და 4 მწვანე ბურთს. აგორებენ წესიერ კამათელს. თუ მოვიდა 3-ის ჯერადი ქულა, მაშინ A ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 1 ბურთს, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში B ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 1 ბურთს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ამოღებული ბურთი მწვანეა; ბ). ბურთი ამოღებული იყო A ყუთიდან, თუ ცნობილია, რომ ამოღებული ბურთი მწვანეა.

2. $P(A)=3/4$, $P(B|A)=1/5$, $P(\overline{B}|\overline{A})=4/7$. იპოვეთ: ა). $P(A\cap B)$; ბ). $P(B)$; გ). $P(A|B)$.

3. სტუდენტმა უნდა გაიაროს ტესტირება ლაბორატორიაში მუშაობის დასაწყებად. ტესტირების გავლის შემდეგ სტუდენტი ტესტს უკან არ აბრუნებს. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული სტუდენტი ტესტირებას გაივლის პი-

რველ ცდაზე არის 1/3. განმეორებითი ტესტირების შემთხვევაში ჩაჭრის ალბათობა არის წინა ცდაზე ჩაჭრის ალბათობის ნახევარი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი: ა). გაივლის ტესტირებას არაუმეტეს 3 მცდელობის შედეგად; ბ). გაივლის ტესტირებას პირველ მცდელობაზე, თუ ცნობილია, რომ მან ტესტირება გაიარა არაუმეტეს 3 მცდელობით.

4. $P(A)=13/25$, $P(B)=9/25$, $P(A|B)=5/9$. იპოვეთ: ა). $P(A\cap B)$; ბ). $P(B|A)$; გ). $P(A\cup B)$; დ). $P(\bar{A}|\bar{B})$; ე). $P(A\cup\bar{B})$.

5. 12 წახნაგიან წესიერ მრავალწახნაგაზე აღნიშნულია რიცხვები 1, 2, , 12. მოცემულია 9 დანაყოფიანი ფირფიტა, რომლის ცენტრში დევს მონეტა.

L				●				R

აგდებენ მრავალწახნაგას: თუ მოვიდა 2, 3, 5, 7 ან 11 ქულა, მაშინ მონეტას გადაადგილებენ თითო დანაყოფზე **R**-ის მიმართულებით (მარჯვნივ), ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში **L**-ის მიმართულებით (მარცხნივ). თამაში მთავრდება, როცა მონეტა მიაღწევს ან **R**–ს ან **L** (ფირფიტის რომელიმე ბოლოს). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). თამაში დამთავრდება 4 გადაადგილების შემდეგ **R**-ზე; ბ). თამაში დამთავრდება 4 გადაადგილების შემდეგ; გ). თამაში დამთავრდება 5 გადაადგილების შემდეგ; დ). თამაშის დამთავრებას დასჭირდება 6-ზე მეტი გადაადგილება.

6. მოყვარული სინოპტიკოსის თეორიის თანახმად თუ ერთ წელს იყო წყალდიდობა, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ იგი განმეორდება მომდევნო წელს არის 0.7, ხოლო თუ ერთ წელს არ იყო წყალდიდობა, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ იგი არ იქნება მომდევნო წელს არის 0.6. გასულ წელს წყალდიდობა არ ყოფილა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წყალდიდობა იქნება: ა). მომდევნო სამ წელიწადს ზედიზედ; ბ). ზუსტად ერთჯერ მომდევნო სამი წლის განმავლობაში.

7. ალბათობა იმისა, რომ საფეხბურთო კლუბის I გუნდის ყველა მოთამაშე ფორმაშია არის 0.7. როცა I გუნდის ყველა მოთამაშე ფორმაშია, კლუბი საკუთარ მოედანზე იგებს ალბათობით 0.9. თუ I გუნდის ყველა მოთამაშე არ არის ფორმაში, მაშინ საკუთარ მოედანზე მოგების ალბათობაა 0.4. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). კლუბი მოიგებს საკუთარ მოედანზე; ბ). I გუნდის ყველა მოთამაშე იყო ფორმაში, თუ კლუბმა უკანასკნელი შეხვედრა ვერ მოიგო.

8. ჩანთაში დევს 25 დისკი, რომელთაგან ნაწილი თეთრია და დანარჩენი შავი. ჩანთიდან ერთდროულად შემთხვევით იღებენ ორ დისკს. ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული დისკები ერთი და იგივე ფერისაა ემთხვევა ალბათობას იმისა, რომ ეს დისკები სხვადასხვა ფერისაა. რამდენი თეთრი დისკია ჩანთაში?

9. $P(A)=0.6$, $P(B)=0.8$, $P(B|A)=0.45$, $P(B\cap C)=0.28$. იპოვეთ: ა). $P(A\cap B)$; ბ). $P(C|B)$; გ). $P(A|B)$.

10. $P(A)=0.75$, $P(B|A)=0.8$, $P(B|\bar{A})=0.6$. იპოვეთ $P(B)$ და $P(A|B)$.

11. კლასში არის 7 ბიჭი და 9 გოგონა. შემთხვევით შერჩეულია ამ კლასის ორი მოსწავლე. $A=${პირველი მოსწავლე გოგონაა}, $B=${მეორე მოსწავლე გოგონაა}. იპოვეთ: ა). $P(B|A)$; ბ). $P(\bar{B}|A)$; გ). $P(B|\bar{A})$; დ). $P(B)$.

12. ალბათობა იმისა, რომ მომავალი წლის ივნისის პირველი დღე იქნება მშრალი არის 0.4. თუ ივნისის რომელიმე კონკრეტული დღე მშრალია, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ მომდევნო დღე იქნება მშრალი არის 0.6. სხვა შემთხვევაში ალბათობა იმისა, რომ მომდევნო დღე იქნება მშრალი არის 0.3. იპოვეთ ალბ-

ათობა იმისა, რომ: ა). ივნისის პირველი ორი დღე იქნება მშრალი; ბ). ივნისის მეორე დღე იქნება მშრალი გ). სულ ცოტა ერთი ივნისის პირველი სამი დღიდან იქნება მშრალი.

13. ალბათობა იმისა, რომ მომავალი წლის ივნისის I დღე იქნება მშრალი არის 0.5. თუ ივნისის რომელიმე კონკრეტული დღე მშრალია, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ მომდევნო დღე იქნება მშრალი არის 0.4. სხვა შემთხვევაში ალბათობა იმისა, რომ მომდევნო დღე იქნება მშრალი არის 0.6. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ივნისის პირველი ორი დღე იქნება სველი; ბ). ივნისის მეორე დღე იქნება სველი; გ). სულ ცოტა ერთი ივნისის პირველი სამი დღიდან იქნება სველი.

14. 30 სტუდენტს დაუსვეს კითხვები: უჭერს ის მხარს არგენტინას, ბრაზილიას, თუ არცერთს და ის ცაციაა თუ არა. 12 სტუდენტმა უპასუხა, რომ ის არის ცაცია და მათგან 4 უჭერს მხარს არგენტინას, ხოლო 7 კი ბრაზილიას. არა ცაცია სტუდენტებიდან 1 უჭერს მხარს არგენტინას, ხოლო 10 კი ბრაზილიას. ჯგუფიდან შემთხვევით აარჩიეს 1 სტუდენტი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). სტუდენტი ცაციაა; ბ). სტუდენტი არცერთ გუნდს არ უჭერს მხარს; გ). სტუდენტი ცაციაა, თუ ცნობილია, რომ სტუდენტი არცერთ გუნდს არ უჭერს მხარს.

15. $P(A)=0.3$. B ხდომილება დამოუკიდებელია A ხდომილებისაგან. $P(B)=0.4$. C არის ხდომილება რომ არც A მოხდა და არც B. იპოვეთ: ა). $P(A\setminus B)$; ბ). $P(A\bigcup B)$; გ). $P(C|\overline{A})$.

16. ისვრიან წითელ და ლურჯ კამათელს და მათზე მოსული ქულები იკრიბება. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ქულათა ჯამი იქნება არანაკლებ 10-ისა, თუ წითელ კამათელზე მოვიდა 6 ქულა; ბ). ქულათა ჯამი იქნება არანაკლებ 10-ისა, თუ ერთ კამათელზე მაინც მოვიდა 6 ქულა.

17. კოლეჯის სტუდენტების ნახევარი სწავლობს მეცნიერებას, ხოლო 30% კი მათემატიკას. მათ შორის ვინც სწავლობს მეცნიერებას 40% სწავლობს მათემატიკას. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული სტუდენტი: ა). სწავლობს ორივეს: მთემატიკას და მეცნიერებას; ბ). სწავლობს მათემატიკას, მაგრამ არ სწავლობს მეცნიერებას.

18. $P(D|C)=1/5$, $P(C|D)=1/4$, $P(C\bigcap D)=p$. იპოვეთ: ა). $P(C)$; ბ). $P(D)$.

19. $P(D|C)=1/5$, $P(C|D)=1/4$, $P(C\bigcup D)=1/5$, $P(C\bigcap D)=p$. იპოვეთ p.

20. სტადიონის 40 ბილეთიდან 10 არის ჩრდილოეთის მხარე, 14 აღმოსავლეთის და 16 კი დასავლეთის მხარე. შემთხვევით იღებენ ერთ ბილეთს და აძლევენ X-ს (ადამიანს სახელად X). შემდგომ, შემთხვევით იღებენ მეორე ბილეთს და აძლევენ Y-ს და ანალოგიურად მესამე ბილეთს აძლევენ Z-ს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). X-ს შეხვდება ჩრდილოეთის მხარე; ბ). X-ს და Y-ს შეხვდება ჩრდილოეთის მხარე; გ). სამივეს შეხვდება ერთი და იგივე მხარე; დ). ორს შეხვდება ერთი მხარე, ხოლო მესამეს სხვა მხარე.

21. 24 პრიზიდან 4 ავტომანქანაა, 8 მოტოციკლეტი და 12 საათი. ანამ, ეკამ და ელზამ მოიგეს თითო პრიზი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ანამ მოიგო მანქანა, ხოლო ეკამ -- მოტოციკლეტი ან საათი; ბ). ანამ და ეკამ (ორივემ) მოიგო მანქანა, თუ ცნობილია, რომ ელზამ მოიგო მანქანა; გ). ანასა და ელზას შორის ერთმა მაინც, მოიგო მანქანა; დ). ანამ მოიგო მანქანა, ხოლო ეკამ კი მანქა-

ნა ან მოტოციკლეტი; ე). ანამ მოიგო მანქანა პირობაში, რომ ეკამ მოიგო მანქანა ან მოტოციკლეტი.

22. $\overline{(A \cup B)} = \varnothing$, $P(\overline{A} \mid B) = 1/3$, $P(A) = 6/7$. იპოვეთ $P(B)$.

23. ალბათობა იმისა, რომ კონკრეტული დღე მშრალია არის 3/10. ალბათობა იმისა, რომ "დინამო" მოიგებს მშრალ დღეს არის 3/8, ხოლო – სველ დღეს 3/11. ა). "დინამომ" შემდეგი მატჩი ორშაბათს უნდა ჩაატაროს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ "დინამო" მოიგებს; ბ). გასულ ოთხშაბათს "დინამომ" მატჩი მოიგო. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ოთხშაბათს მშრალი ამინდი იყო; გ). გასულ შაბათს "დინამომ" მატჩი წააგო. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ შაბათს სველი ამინდი იყო.

24. დედამიწის გარკვეულ ნაწილში მშრალი დღეები უფრო მეტია, ვიდრე სველი. თუ რომელიმე დღე მშრალია, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ მომდევნო დღე იქნება ისევ მშრალი არის 0.8. თუ რომელიმე დღე სველია, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ მომდევნო დღე იქნება ისევ სველი არის 0.6. ცნობილია, რომ ორშაბათი სველი დღე იყო. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ იმავე კვირის: ა). სამშაბათი და ოთხშაბათი ორივე იქნება მშრალი; ბ). ოთხშაბათი იქნება მშრალი.

25. თუ რომელიმე დღე მშრალია, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ მომდევნო დღე იქნება ისევ მშრალი არის 0.8. თუ რომელიმე დღე სველია, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ მომდევნო დღე იქნება ისევ სველი არის 0.6. წლის განმაელობაში ჩატარდა 44 კრიკეტის მატჩი, თითოეული გრძელდებოდა სამი დღე მიმდევრობით, რომელთაგან I და III დღე იყო სველი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ II დღე იყო მშრალი.

26. კაზინოში დგას ორი A და A' სათამაშო მაგიდა, რომლებიც სრულიად ერთნაირად გამოიყურება. A მაგიდაზე მოგების ალბათობა არის 1/3, ხოლო A' მაგიდაზე – 1/4. ა). იპოვეთ შემთხვევით არჩეულ მაგიდაზე მოგების ალბათობა; ბ). თქვენ შემთხვევით აირჩიეთ მაგიდა და მოიგეთ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თქვენ აირჩიეთ A მაგიდა; გ). თქვენ შემთხვევით აირჩიეთ მაგიდა და წააგეთ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თქვენ აირჩიეთ A' მაგიდა.

27. კაზინოში დგას სამი სათამაშო მაგიდა A და A' ტიპის, რომლებიც სრულიად ერთნაირად გამოიყურება. ამასთანავე, A' ტიპის მაგიდა ორი ცალია. A ტიპის მაგიდაზე მოგების ალბათობა არის 1/3, ხოლო A' ტიპის მაგიდაზე – 1/4. ა). იპოვეთ შემთხვევით არჩეულ მაგიდაზე მოგების ალბათობა; ბ). თქვენ შემთხვევით აირჩიეთ მაგიდა და მოიგეთ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თქვენ აირჩიეთ A მაგიდა; გ). თქვენ შემთხვევით აირჩიეთ მაგიდა და წააგეთ. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თქვენ აირჩიეთ A' მაგიდა.

28. ალბათობა იმისა, რომ გვანცა ადრე გაიღვიძებს არის 1/3. თუ გვანცა ადრე გაიღვიძებს, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ სკოლაში დროულად მივა არის 3/4. თუ გვანცა გვიან გაიღვიძებს, მაშინ სკოლაში დროულად მისვლის ალბათობა არის 1/5. ერთ შემთხვევით არჩეულ დღეს გვანცა დროულად მივიდა სკოლაში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მან გვიან გაიღვიძა.

29. სამი ერთნაირი A, B და C ყუთი შედგება ორ-ორი უჯრისაგან. A ყუთის თითოეულ უჯრაში დევს თითო ლარი, B ყუთის თითეულ უჯრაში დევს ხუთ-ხუთი ლარი, ხოლო C ყუთის ერთ უჯრაში დევს 1 ლარი და მეორეში კი 5 ლარი. შემთხვევით ირჩევენ ყუთს, ხსნიან მის ერთ უჯრას და პოულობენ მასში

5 ლარს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ ყუთის მეორე უჯრაში აგრეთვე დევს 5 ლარი.

30. ოჯახში არის ორი ბიჭი და ორი გოგო, რომელთაგან ერთს ჰქვია ეკა. შემთხვევით არჩევენ ორ ბავშვს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ორივე ბავშვი გოგოა, თუ ერთი მათგანი გოგოა; ბ). ორივე გოგია, თუ ერთი მათგანი ეკაა.

31. მაგიდას აქვს სამი უჯრა. I უჯრაში დევს 3 ოქროს მონეტა, II-ში – 2 ოქროსა და 1 ვერცხლის მონეტა, ხოლო III-ში – 3 ოქროსა და 2 ვერცხლის მონეტა. შემთხვევით ირჩევენ უჯრას და იქიდან შემთხვევით იღებენ მონეტას. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ამოღებული მონეტა იქნება ოქროსი; ბ). ამორჩეული იყო III უჯრა, თუ ამოღებული მონეტა ოქროსია.

32. კვირის სამუშაო დღეებში ჯუანშერი სამსახურში დადის მატარებლით. ალბათობა იმისა, რომ ის მიუსწრებს 8 საათიან მატარებელს ორშაბათს არის 0.66, ხოლო სხვა სამუშაო დღეებში კი ეს ალბათობა 0.75-ია. შემთხვევით ვირჩევთ კვირის ერთ სამუშაო დღეს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ამ დღეს ჯუანშერი მიუსწრებს 8 საათიან მატარებელს; ბ). არჩეული დღე იყო ორშაბათი, თუ ცნობილია, რომ ამ დღეს ჯუანშერმა მიუსწრო 8 საათიან მატარებელს.

33. ალბათობა იმისა, რომ ზაფხულის რომელიმე დღეს ბათუმში იწვიმებს არის 0.2. ალბათობა იმისა, რომ დღის მაქსიმალური ტემპერატურა წვიმიან დღეს 25 გრადუსს გადააჭარბებს არის 0.3, ხოლო თუ წვიმა არ არის – 0.6. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ზაფხულის შემთხვევით არჩეულ დღეს ბათუმში იწვიმებს, თუ ცნობილია, რომ ამ დღის მაქსიმალური ტემპერატურა 25 გრადუსზე მეტია.

34. საკარნავალო თამაშში მონაწილე ჯერ აგდებს მონეტას, ხოლო შემდეგ ისვრის კამათელს. ის იგებს პრიზს იმ შემთხვევაში, თუ მონეტაზე მოვიდა გერბი, ხოლო კამათელზე – სამზე ნაკლები ქულა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ის მოიგებს პრიზს.

35. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის სამჯერ აგდებისას ორჯერ მოვა სამი ქულა.

36. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კამათლის ოთხჯერ აგდებისას სამჯერ მოვა ოთხი ქულა.

37. A და B დამოუკიდებელია. $P(A)=0.4$, $P(A \cup B)=0.7$. იპოვეთ: $P(B)$.

38. აგდებენ ერთ წესიერ კამათელს და მეორე ისეთ კამათელს, რომელზეც 6 ქულის მოსვლის ალბათობაა 1/4. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). წესიერ კამათელზე მოვა 6 ქულა და არაწესიერზე არ მოვა 6 ქულა; ბ). სულ ცოტა ერთ კამათელზე მაინც მოვა 6 ქულა; გ). ზუსტად ერთ კამათელზე მოვა 6 ქულა, თუ ცნობილია, რომ სულ ცოტა ერთ კამათელზე მაინც მოვიდა 6 ქულა.

39. აგდებენ ერთ წესიერ მონეტას და მეორე ისეთ მონეტას, რომელზეც გერბის მოსვლის ალბათობაა 1/3. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). წესიერ მონეტაზე მოვა გერბი და არაწესიერზე არ მოვა გერბი; ბ). სულ ცოტა ერთ მონეტაზე მაინც მოვა გერბი; გ). ზუსტად ერთ მონეტაზე მოვა გერბი, თუ ცნობილია, რომ სულ ცოტა ერთ მონეტაზე მაინც მოვიდა გერბი.

40. A და B დამოუკიდებელი ხდომილებებია. $P(A)=0.4$, $P(A \cup B)=0.88$. იპოვეთ: ა). $P(B)$; ბ). ალბათობა იმისა, რომ რომელიმე A და B ხდომილებებიდან მოხდება, მაგრამ არა ორივე.

41. იპოვეთ ალაბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ნათურა იქნება უმაღლესი ხარისხის, თუ ცნობილია, რომ ნათურების 4% არასტანდარტულია და სტანდარტული ნათურების 75% უმაღლესი ხარისხისაა.

42. ალბათობა იმისა, რომ ოთხ დამოუკიდებელ ცდში A ხდომილება ერთ-ჯერ მაინც მოხდება არის 0.8. იპოვეთ ცალკეულ ცდაში A ხდომილების მოხდე-ნის ალბათობა.

43. ერთ ყუთში არის 18 თეთრი და 2 წითელი ბურთი, მეორე ყუთში – 9 თეთრი და 1 წითელი ბურთი. II ყუთიდან შემთხვევით ამოღებულ ბურთს დებენ I ყუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ I ყუთიდან ამოღებული ბუ-რთი იქნება თეთრი.

44. ერთ ყუთში არის 3 თეთრი და 2 ლურჯი ბურთი, მეორეში კი 4 თეთრი და 4 ლურჯი ბურთი. I ყუთიდან შემთხვევით გადაიტანეს 2 ბურთი მეორეში. იპ-ოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ II ყუთიდან ამოღებული ბურთი იქნება თეთრი.

45. 10 ყუთიდან ცხრაში დევს 2 წითელი და 2 მწვანე კალკულატორი, ხო-ლო ერთში კი 5 წითელი და 1 მწვანე კალკულატორი. შემთხვევით შერჩეული ყუთიდან შემთხვევით შერჩეული კალკულატორი აღმოჩნდა წითელი. იპოვეთ ალ-ბათობა იმისა, რომ კალკულატორი ამოღებული იყო ყუთიდან, რომელშიც 5 წი-თელი კალკულატორია.

პასუხები:

1. 19/45; 7/19. **2.** 3/20; 9/35; 7/12. **3.** 26/27; 21/25. **4.** 1/5; 5/13; 17/25; 1/2; 21/25. **5.** 0.030; 0.146; 0, 0.712. **6.** 0.196; 0.288. **7.** 0.75; 0.28. **8.** 10 ან 15. **9.** 0.27; 0.35; 0.3375. **10.** 0.75; 0.8. **11.** 8/15; 7/15; 3/5; 2/5; 9/16. **12.** 0.24; 0.42; 0.706. **14.** 2/5; 4/15; 1/8. **15.** 0.18; 0.58; 0.6. **16.** 1/2; 5/11. **17.** 1/5; 1/10. **18.** $5p;4p$. **20.** 0.25; 0.0577; 0.1057; 0.6676. **21.** 10/69; 3/253; 43/138; 11/138; 11/69. **22.** 3/14. **24.** 0.32; 0.56. **25.** 2/11. **28.** 8/23. **29.** 2/3. **30.** 1/5; 1/3. **31.** 2/3; 1/6. **32.** 183/250; 44/183. **33.** 1/5. **34.** 1/6. **35.** 5/72. **36.** 5/324. **37.** 1/2. **38.** 1/8; 3/8; 8/9. **39.** 1/3; 2/3; 3/4. **40.** 0.6; 0.16. **41.** 0.72. **42.** 0.5. **43.** 13/132. **44.** 0.52. **45.** 5/32.

თავი III
შემთხვევით სიდიდეთა მახასიათებლები

ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეზე განსაზღვრულ რიცხვით ფუნქციას **შემთხვევითი სიდიდე** ეწოდება. შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **დისკრეტული ტიპის** თუ ის ღებულობს ცალკეულ, იზოლირებულ შესაძლო მნიშვნელობებს. შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **უწყვეტი ტიპის** თუ მისი შესაძლო მნიშვნელობების სიმრავლე მთლიანად ავსებს რაიმე რიცხვით შუალედს.

ცხრილს, რომელშიც ჩამოთვლილია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები და მათი შესაბამისი ალბათობები, **განაწილების კანონი (ან მწკრივი)** ეწოდება:

ξ_i	x_1	x_2		x_n	
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

აქ $\sum_i p_i = 1$. ალბათობის სტატისტიკური განმარტებიდან გამომდინარე:

თეორიული სიხშირე ≈ ერთობლივი სიხშირე × ალბათობა.

$P(\xi \in \langle a,b\rangle) = \sum_{x\in\langle a,b\rangle} P(\xi = x)$. თუ მოცემულია დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე ξ და რაიმე რიცხვითი g ფუნქცია, მაშინ $g(\xi)$ ისევ იქნება დისკრეტული ტიპის შემთხვევითი სიდიდე განაწილების კანონით:

$g(\xi_i)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$		$g(x_n)$	
p_i	p_1	p_2		p_n	

ჰიპერგეომეტრიული განაწილება. დავუშვათ, რომ ყუთში N ბურთია და მათ შორის M თეთრია. შემთხვევით, დაბრუნების გარეშე ყუთიდან ვიღებთ n ბურთს. ალბათობა იმისა, რომ ამოღებულ n ბურთს შორის ზუსტად k ცალი იქნება თეთრი გამოითვლება ფორმულით:

$$P(N;M;n;m) := P(\mu_n = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \ m = 0,1,\ldots,\min(M,n).$$

რიცხვთა ამ მიმდევრობას **ჰიპერგეომეტრიული განაწილება** ეწოდება.

გეომეტრიული განაწილება: $P(\xi = k) = pq^{k-1}$ $(q = 1-p)$, $k = 1,2,\ldots$.

პუასონის განაწილება პარამეტრით λ: $P\{\xi = k\} = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0,1,2,\ldots$.

შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$F(x) := P(\xi < x) \ \text{(შესაბამისად, } F(x) := P(\xi \le x)\text{)}$$

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a) \ \text{(შესაბამისად, } P(a \le \xi < b) = F(b-0) - F(a-0)\text{)}.$$

განაწლების ფუნქციის თვისებები:

1). ნებისმიერი x-სათვის $0 \le F(x) \le 1$;

2). განაწილების ფუნქცია არაკლებადია;

3). განაწილების ფუნქცია უწყვეტია მარცხნიდან (თუ განაწილების ფუნქციას განვმარტავთ როგორც: $F(x) := P(\xi \le x)$, მაშინ ის იქნება მარჯვნიდან უწყვეტი);

4). $F(x) = \sum_{x_k < x} P\{\xi = x_k\}$ (შესაბამისად, $F(x) = \sum_{x_k \le x} P\{\xi = x_k\}$);

5). $P\{\xi = x_k\} = F(x_k + 0) - F(x_k)$ (შესაბამისად,

$P\{\xi = x_k\} = F(x_k) - F(x_k - 0)$, როცა $F(x) := P(\xi \le x)$).

შემთხვევით სიდიდეს, რომელსაც აქვს უწყვეტი განაწილების ფუნქცია, უწოდებენ **უწყვეტ შემთხვევით** სიდიდეს. თუ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია $F(x)$ წარმოებადია, მაშინ მის წარმოებულს შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების სიმკვრივე** ეწოდება და აღინიშნება $f(x)$-ით: $f(x) = F'(x)$.

$$f(x) \ge 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1; \quad P(\xi \in \langle a,b \rangle) = \int_a^b f(x)dx; \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

უწყვეტი განაწილების ფუნქციის p **რიგის კვანტილი** ეწოდება ისეთ x_p რიცხვს, რომლისთვისაც $F(x_p) = p$. დისკრეტული განაწილების შემთხვევაში, თუ $p_1 + p_2 + \cdots + p_i < x < p_1 + p_2 + \cdots + p_i + p_{i+1}$, მაშინ $x_p = x_{i+1}$. $p = 1/2$ რიგის კვანტილს შემთხვევითი სიდიდის ან მისი განაწილების ფუნქციის **მედიანა** ეწოდება და აღინიშნება $\bar{x}$. ე. ი. $\bar{x} = x_{1/2}$. **მოდა** ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის იმ მნიშვნელობას (ან მნიშვნელობებს), რომელიც შეესაბამება განაწილების სიმკვრივის ლოკალურ მაქსიმუმს უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში ან ალბათობის ლოკალურ მაქსიმუმს დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში.

ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე.

დისკრეტული ორგანზომილებიანი (ξ,η) შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების კანონს** (ანუ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების **ერთობლივ განაწილების კანონს**) აქვს ორგანზომილებიანი ცხრილის სახე, რომელიც გვაძლევს შესაძლო მნიშვნელობების ცალკეული კომპონენტების ჩამონათვალს და იმ $p(x_i, y_j)$ ალბათობებს, რა ალბათობებითაც მიიღება მნიშვნელობა (x_i, y_j):

η	ξ					
	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	…	$p(x_i, y_1)$	…	$p(x_n, y_1)$
…	…	…	…	…	…	…
y_j	$p(x_1, y_j)$	$p(x_2, y_j)$	…	$p(x_i, y_j)$	…	$p(x_n, y_j)$
…	…	…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	…	$p(x_i, y_m)$	…	$p(x_n, y_m)$

$$\sum_{i,j} p(x_i, y_j) = 1; \quad P(\xi = x_i) = \sum_j p(x_i, y_j); \quad P(\eta = y_j) = \sum_i p(x_i, y_j).$$

ორგანზომილებიანი (ξ,η) შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების ფუნქცია** (ან ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების **ერთობლივი განაწილების ფუნქცია**) ეწოდება: $F(x, y) = p(\xi \le x, \eta \le y)$.

1). $0 \le F(x, y) \le 1$;

2). $F(x, y)$ არის თითოეული არგუმენტის მიმართ არაკლებადი, მარჯვნიდან უწყვეტი ფუნქცია;

3). ადგილი აქვს ზღვრულ თანაფარდობებს: $F(-\infty, y) = 0$; $F(x, -\infty) = 0$; $F(-\infty, -\infty) = 0$; $F(\infty, \infty) = 1$;

4). $F(x, \infty) = F_1(x)$; $F(\infty, y) = F_2(y)$.

შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება **დამოუკიდებელი**, თუ

$$F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y).$$

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდები დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)\, p(y_j),\ \forall i, j\,.$$

უწყვეტი ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის **ერთობლივი განაწილების სიმკვრივე** (ანუ **ორგანზომილებიანი სიმკვრივე**) ეწოდება ერთობლივი განაწილების ფუნქციის შერეულ მეორე რიგის კერძო წარმოებულს:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

1). $f(x, y) \ge 0$; 2). $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} f(x, y)dxdy$;

3). $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1$; 4). $p((X, Y) \subset D) = \iint\limits_{D} f(x, y)dxdy.$

5). $f_1(x) = \dfrac{dF_1(x)}{dx} = \dfrac{dF(x, \infty)}{dx} = \dfrac{d\left(\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\right)}{dx} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$,

ანალოგიურად, $f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx.$

6). უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$.

დისკრეტული ξ **შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი** აღინიშნება $E\xi$ სიმბოლოთი და ეწოდება რიცხვს:

$$E\xi = \sum\nolimits_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega)\,,\ \text{ანუ}\quad E\xi = \sum\nolimits_i x_i P\{\xi = x_i\} = \sum\nolimits_i x_i p_i\,.$$

უწყვეტი ტიპის ξ **შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი** ეწოდება რიცხვს

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx\,,\ (\text{თუ } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f(x)dx < \infty).$$

ა). $Ec = c \equiv const$; ბ). $E(\xi \pm \eta) = E\xi \pm E\eta$; გ). $E(c\xi) = cE\xi$; დ). $E(\xi - E\xi) = 0$;

ე). $E(\xi - c)^2 = E(\xi - E\xi)^2 + (c - E\xi)^2$; ვ). $\min\limits_{c \in (-\infty, +\infty)} E(\xi - c)^2 = E(\xi - E\xi)^2$;

ზ). თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევით სიდიდებია, მაშინ

$E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$ (შებრუნებული დებულება მცდარია).

შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციის მათემატიკური ლოდინი:

$$Eg(\xi) = \sum\nolimits_i g(x_i) P\{\xi = x_i\} = \sum\nolimits_i g(x_i) p_i\,.$$

თუ ξ შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ხოლო B რაიმე ხდომილებაა ($P(B) > 0$), მაშინ ξ **შემთხვევითი სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი** B **ხდომილების მიმართ** აღინიშნება $E(\xi \mid B)$ სიმბოლოთი და განიმარტება შემდეგნაირად:

$$E(\xi \mid B)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(\xi=x_i \mid B).$$

ცხადია, რომ $E(\xi \mid \Omega)=E\xi$ და $E(\xi \mid B)=\frac{1}{P(B)}E(I_B\xi)$.

ξ შემთხვევითი სიდიდის η შემთხვევით სიდიდეზე **რეგრესიის მრუდი (ფუნქცია)** ეწოდება ფუნქციას $R(y)=E(\xi \mid \eta=y)$.

შემთხვევითი სიდიდეს $R(\eta)$ (რეგრესიის ფუნქციაში ჩასმულია η შემთხვევითი სიდიდე) ξ შემთხვევითი სიდიდის **პირობით მათემატიკურ ლოდინს** უწოდებენ η პირობით და $E(\xi \mid \eta)$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია.

ξ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია $D\xi$ განიმარტება შემდეგნაირად:

$$DX=E(\xi-E\xi)^2 \equiv E\xi^2-(E\xi)^2.$$

$E\xi$-ს ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის **მეორე რიგის მომენტი** (თვითონ დისპერსიას უწოდებენ აგრეთვე – **მეორე რიგის ცენტრალურ მომენტს**).

თუ დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

x_i	x_1	x_2		x_n
p_i	p_1	p_2		p_n

მაშინ $DX=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\sum_{j=1}^{n}x_jp_j)^2p_i$, ანუ $DX=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-(\sum_{j=1}^{n}x_jp_j)^2$.

I. მუდმივის დისპერსია ნულის ტოლია – $Dc=0$;

II. $D(a\xi+b)=a^2D\xi$.

III. თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ

$$D(\xi \pm \eta)=D\xi+D\eta.$$

ξ შემთხვევითი სიდიდის **პირობითი დისპერსია** B ხდომილების მიმართ:

$$D(\xi \mid B):=E\{[\xi-E(\xi \mid B)]^2 \mid B\}=E(\xi^2 \mid B)-[E(\xi \mid B)]^2.$$

ბერნულის განაწილებას (ანუ ბერნულის შემთხვევით სიდიდეს) აქვს სახე:

ξ	1	0
p	p	$1-p$

აქ $E\xi=p$ და $D\xi=p(1-p)$.

ბინომიალური განაწილების შემთხვევაში: $E\xi=np$ და $D\xi=np(1-p)$.

ჰიპერგეომეტრიული განაწილების შემთხვევაში:

$$E\xi=\frac{n\cdot M}{N} \quad \text{და} \quad D\xi=\frac{n\cdot M\cdot(N-M)\cdot(N-n)}{N^2\cdot(N-1)}.$$

პუასონის განაწილების შემთხვევაში: $E\xi=D\xi=\lambda$.

გეომეტრიული განაწილების შემთხვევაში: $E\xi=1/p$ და $D\xi=(1-p)/p^2$.

ექსპონენციალური განაწილება. ξ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **ექსპონენციალურად განაწილებული პარამეტრით** λ ($\lambda>0$), თუ:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

ამ შემთხვევაში: $E\xi=1/\lambda$ და $D\xi=1/\lambda^2$.

სტანდარტული გადახრა. მომენტები.

ξ შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა (ან სტანდარტული გადახრა): $\sigma\xi = +\sqrt{D\xi}$.

შემთხვევითი სიდიდის სტანდარტიზაცია: $\eta = \dfrac{\xi - E\xi}{\sigma\xi}$ ($E\eta = 0$, $D\eta = 1$).

მომენტები, ასიმეტრია და ექსცესი.

ξ შემთხვევითი სიდიდის n რიგის საწყისი მომენტი ეწოდება სიდიდეს $\mu_n \coloneqq E\xi^n$ ($a \coloneqq \mu_1 = E\xi$).

ξ შემთხვევითი სიდიდის n რიგის ცენტრალური მომენტი ეწოდება სიდიდეს $\nu_n \coloneqq E(\xi - a)^n$ ($\sigma^2 \coloneqq \nu_2 = D\xi$).

ექსცესის კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს:

$$e = \frac{\nu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E(\xi - E\xi)^4}{[+\sqrt{E(\xi - E\xi)^2}\,]^4} - 3 .$$

ასიმეტრიის კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს:

$$\alpha = \frac{\nu_3}{\sigma^3} = \frac{E(\xi - E\xi)^3}{[+\sqrt{E(\xi - E\xi)^2}\,]^3} .$$

კოვარიაცია. კორელაციის კოეფიციენტი.

კოვარიაციის კოეფიციენტი ან უბრალოდ კოვარიაცია ეწოდება სიდიდეს:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] \equiv E(\xi\eta) - E\xi\, E\eta \, .$$

1). თუ ξ და η დამოუკიდებელია, მაშინ $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$ (პირიქით, არა);

2). $\operatorname{cov}(\xi,\xi) = D\xi$;

3). $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \operatorname{cov}(\eta,\xi)$;

4). $\operatorname{cov}(c\cdot\xi,\eta) = c\cdot\operatorname{cov}(\xi,\eta)$;

5). $\operatorname{cov}(\xi \pm \eta,\varsigma) = \operatorname{cov}(\xi,\varsigma) \pm \operatorname{cov}(\eta,\varsigma)$;

6). $D(\xi \pm \eta) = D\xi \pm 2\operatorname{cov}(\xi,\eta) + D\eta$;

7). $|\operatorname{cov}(\xi,\eta)| \le \sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\eta}$.

კორელაციის კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს:

$$\rho(\xi;\eta) \coloneqq \frac{\operatorname{cov}(\xi;\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} \equiv E\left(\frac{\xi - E\xi}{\sigma\xi}\cdot\frac{\eta - E\eta}{\sigma\eta}\right).$$

ა). $-1 \le \rho(\xi;\eta) \le 1$.

ბ). თუ $\rho(\xi;\eta)=1$, მაშინ $\eta=k\xi+b$, სადაც k და b— მუდმივებია, $k>0$.

გ). თუ $\rho(\xi;\eta)=-1$, მაშინ $\eta=k\xi+b$, სადაც k და b— მუდმივებია, $k<0$.

დ). თუ $\eta=k\xi+b$, ($k\neq0$) ან $\xi=k_1\eta+b_1$ ($k_1\neq0$), მაშინ

$\rho(\xi;\eta)=1$ როცა $k_i>0$; $\rho(\xi;\eta)=-1$ როცა $k_i<0$ (i = 1,2).

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მონეტის სამჯერ აგდებისას მოსულ გერბთა რიცხვი. ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე რვა ელემენტიანი სიმრავლეა:

$$\Omega = \{\text{გგგ}, \text{გგს}, \text{გსგ}, \text{სგგ}, \text{გსს}, \text{სგს}, \text{სსგ}, \text{სსს}\}$$

და, შესაბამისად, საძიებელი შემთხვევითი სიდიდე იქნება Ω-ზე განსაზღრული შემდეგი რიცხვითი ფუნქცია:

$$\xi(\text{გგგ}) = 3\,;\ \ \xi(\text{გგს}) = \xi(\text{გსგ}) = \xi(\text{სგგ}) = 2\,;$$

$$\xi(\text{გსს}) = \xi(\text{სგს}) = \xi(\text{სსგ}) = 1 \ \text{ და } \ \xi(\text{სსს}) = 0\,.$$

ცხადია ეს შემთხვევითი სიდიდე დისკრეტული ტიპისაა, ის ღებულობს იზოლირებულ მნიშვნელობებს, მაგალითად, 1-სა და 2-ს შორის ის არ ღებულობს არცერთ მნიშვნელობას.

მაგალითი 2. შემთხვევითი სიდიდე იყოს ორი სათამაშო კამაოლის გაგორებისას მოსულ ქულათა ჯამი. ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება 36 ელემენტარული ხდომილებისაგან:

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1,2,\ldots,6\}\,,$$

ხოლო შემთხვევითი სიდიდე ცალკეულ ელემენტარულ ხდომილებას (i, j) (სადაც i – პირველ კამათელზე მოსული ქულაა, ხოლო j – მეორე კამათელზე მოსული ქულა) შეუსაბამებს: $\xi(i, j) = i + j$ (პირველ და მეორე კამათელზე მოსული ქულების ჯამი). მაგალითად, $\xi(1,3) = \xi(2,2) = \xi(3,1) = 4$. აღნიშნული შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია: 2, 3, , 12. ის დიკრეტული ტიპისაა.

მაგალითი 3. ორი მსროლელი თითოჯერ ესვრის სამიზნეს. მათ მიერ სამიზნის დაზიანების (მიზანში მოხვედრის) ალბათობებია შესაბმისად 0.6 და 0.7. შემთხვევითი სიდიდე ξ იყოს დაზიანებულ სამიზნეთა რაოდენობა. შევადგინოთ მისი განაწილების მწკრივი.

ამოხსნა. ცხადია, რომ ξ შემთხვევითმა სიდიდემ შეიძლება მიიღოს შემდეგი მნიშვნელობები: 0 (ვერც ერთმა მსროლელმა ვერ დააზიანა სამიზნე), 1 (მხოლოდ ერთმა მსროლელმა დააზიანა სამიზნე) და 2 (ორივე მსროლელმა დააზიანა სამიზნე). ვიპოვოთ შესაბამისი ალბათობები.

ბუნებრივია შეგვძლია ვიგულისხმოთ რომ პირველი და მეორე მსროლელის სროლის შედეგები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. შემოვიღოთ ხდომილებები: A – პირველმა მსროლელმა დააზიანა სამიზნე და B – მეორე მსროლელმა დააზიანა სამიზნე. მოცემულია, რომ $P(A) = 0.6$ და $P(B) = 0.7$. შესაბამისად, $P(\overline{A}) = 0.4$ და $P(\overline{B}) = 0.3$. გარდა ამისა, A და B დამოუკიდებელი ხდომილებებია. დამოუკიდებელი ხდომილებებია აგრეთვე: $\overline{A}$ და B, $\overline{A}$ და B , $\overline{A}$ და $\overline{B}$.

ადვილი დასანახია, რომ ხდომილება – ვერც ერთმა მსროლელმა ვერ დააზიანა სამიზნე იქნება $\overline{A} \cap \overline{B}$, ხდომილება – მხოლოდ ერთმა მსროლელმა დააზიანა სამიზნე იქნება $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ და ხდომილება – ორივე მსროლელმა დააზიანა სამიზნე იქნება $A \cap B$. გასაგებია, რომ $(A \cap \overline{B})$ და $(\overline{A} \cap B)$ უთავსებადი ხდომილებებია $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap B) = \varnothing$.

ამიტომ, დამოუკიდებელ ხდომილებათა ნამრავლის ალბათობისა და უთავსებად ხდომილებათა ჯამის ალბათობის ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$P(X=0)=P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0{,}4\cdot 0{,}3=0{,}12;$$

$$P(X=1)=P\{(A\cap\overline{B})\cap(\overline{A}\cap B)\}=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=$$

$$=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0,6\cdot 0,3+0,4\cdot 0,7=0,46;$$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0,6\cdot 0,7=0,42$$

შესაბამისად, ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების მწკრივი იქნება:

x_i	0	1	2
p_i	0.12	0.46	0.42

მაგალითი 4. აუდიტორიაში მყოფი 15 სტუდენტიდან 5 ვაჟია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეულ 6 სტუდენტს შორის 3 ვაჟია?

ამოხსნა. თუ მივუსადაგებთ ჰიპერგეომეტრიულ განაწილებას, გასაგებია, რომ: $N=15$, $M=5$, $n=6$ და $k=3$. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(15;5;6;3)=\frac{C_{10}^{3}C_{15-10}^{6-3}}{C_{15}^{6}}=\frac{C_{10}^{3}C_{5}^{3}}{C_{15}^{6}}=\frac{120\cdot 10}{5005}\approx 0.239.$$

მაგალითი 5. საქონლის პარტიაში დეფექტურ ნაწარმთა რიცხვი ξ ღებულობს მნიშვნელობა 0-ს ალბათობით – 0.3; მნიშვნელობა 1-ს ალბათობით – 0.4; მნიშვნელობა 2-ს ალბათობით – 0.2 და მნიშვნელობა 3-ს ალბათობით – 0.1 ანუ ξ-ს განაწილების მწკრივს აქვს სახე:

x_i	0	1	2	3
p_i	0.3	0.4	0.2	0.1

გამოვთვალოთ ξ-ს განაწილების ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

თუ $x\le 0$, მაშინ $F(x)=P(\xi<x)=P(\varnothing)=0$;

თუ $0<x\le 1$, მაშინ $F(x)=P(\xi<x)=P(\xi=0)=0.3$;

თუ $1<x\le 2$, მაშინ $F(x)=P(\xi<x)=P\{(\xi=0)\cup(\xi=1)\}=$

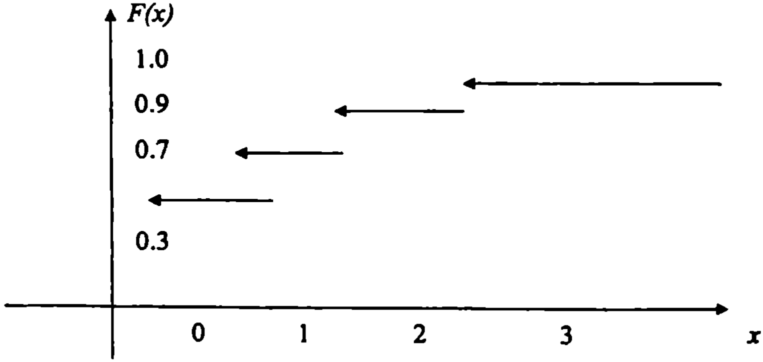
$$=P(\xi=0)+P(\xi=1)=0.3+0.4=0.7;$$

თუ $2<X\le 3$, მაშინ $F(x)=P(\xi<x)=P\{(\xi=0)\cup(\xi=1)\cup(\xi=2)\}=$

$$=P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=2)=0.3+0.4+0.2=0.9;$$

და ბოლოს, თუ $x\ge 3$, მაშინ $F(x)=P(\xi<x)=P(\Omega)=1$.

შესაბამისად, განაწილების ფუნქციის გრაფიკს ექნება შემდეგი სახე:



მაგალითი 6. მოცემულია შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b. \end{cases}$$

(სადაც a და b ($a<b$) ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია). ვიპოვოთ შესაბამისი განაწილების სიმკვრივე. ცხადია, რომ განმარტების თანახმად:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b, \\ 0, & x>b \end{cases}$$

რაც შეეხება $x=a$ და $x=b$ წერტილებს, აქ $F(x)$ ფუნქციას წარმოებული არა აქვს და იქ შეგვიძლია $f(x)$ განვმარტოთ ნებისმიერად, ვთქვათ, $f(a)=f(b)=0$. შემთხვევით სიდიდეს, რომელსაც აქვს აღნიშნული განაწილების სიმკვრივე, ეწოდება **თანაბარად განაწილებული $[a,b]$ მონაკვეთზე**.

მაგალითი 7. დავუშვათ, რომ ნათურის მუშაობის დრო არის შემთხვევითი სიდიდე განაწილების ფუნქციით $F(t)$, ხოლო ნათურის გამოცდა გრძელდება ნათურის მწყობრიდან გამოსვლამდე (გადაწვამდე), თუ ეს მოხდება გამოცდის დაწყებიდან არაუმეტეს 100 საათის განმავლობაში, ანუ $t_0=100$ სთ მომენტამდე. ვთქვათ, $G(t)$ – არის ამ გამოცდის დროს ნათურის ნორმალურად მუშაობის დროის განაწილების ფუნქცია. მაშინ ცხადია, რომ:

$$G(t)=\begin{cases} F(t), & t\le 100 \\ 1, & t>100. \end{cases}$$

$G(t)$ ფუნქციას აქვს ნახტომი t_0 წერტილში, ვინაიდან შესაბამისი შემთხვევითი სიდიდე ღებულობს t_0 მნიშვნელობას ალბათობით $1-F(t_0)>0$.

მაგალითი 8. ვიპოვოთ p რიგის x_p კვანტილი თანაბარი განაწილების ფუნქციისათვის.

p $(0<p<1)$ რიგის x_p კვანტილი უნდა ვეძებოთ როგორც $F(x)=p$ განტოლების ამონახსნი. თანაბარი განაწილების ფუნქციის შემთხვევაში ეს განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{x-a}{x-b}=p,$$

საიდანაც ცხადია, რომ:

$$x_p=a+p(b-a)=a(1-p)+bp.$$

როცა $p=0$, მაშინ ნებისმიერი $x\le a$ წარმოადგენს $p=0$ რიგის კვანტილს, ხოლო $p=1$ რიგის კვანტილი იქნება ნებისმიერი $x\ge b$ რიცხვი.

მაგალითი 9. მოცემულია ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

η	ξ		
	-2	3	6
-0.8	0.1	0.3	0.1
-0.5	0.15	0.25	0.1

ვიპოვოთ ცაკლკეული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

ამოხსნა. ცხრილში მოყვანილი ალბათობების სვეტების მიხედვით შეკრებით მივიღებთ ξ–ს განაწილების მწკრივს:

ξ	-2	3	6
p	0.25	0.55	0.2

ალბათობების შეკრებით სტრიქონების მიხედვით, მივიღებთ η–ს განაწილების მწკრივს:

η	-0.8	-0.5
p	0.5	0.5

მაგალითი 10. მოცემულია ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონი:

ξ	-2	3	6
p	0.2	0.5	0.3

η	-0.8	-0.5
p	0.4	0.6

ვიპოვოთ $Z = \max\{\xi, \eta\}$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი.

ამოხსნა. Z შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო ნმნიშვნელობებია: -0.8; -0.5; 3 და 6. გამოვთვალოთ შესაბამისი ალბათობები. გვაქვს:

$$P(Z=-0.8) = P\{(\xi=-2)\cap(\eta=-0.8)\} = P(\xi=-2)\cdot P(\eta=-0.8) = 0.2\cdot 0.4 = 0.08;$$

$$P(Z=-0.5) = P\{(\xi=-2)\cap(\eta=-0.5)\} = P(\xi=-2)\cdot P(\eta=-0.5) = 0.2\cdot 0.6 = 0.12;$$

$$P(Z=3) = P\{[(\xi=3)\cap(\eta=-0.8)]\cup[(\xi=3)\cap(\eta=-0.5)]\} =$$

$$= P[(\xi=3)\cap(\eta=-0.8)] + P[(\xi=3)\cap(\eta=-0.5)] = 0.5\cdot 0.4 + 0.5\cdot 0.6 = 0.5;$$

$$P(Z=6) = P\{[(\xi=6)\cap(\eta=-0.8)]\cup[(\xi=6)\cap(\eta=-0.5)]\} =$$

$$= P[(\xi=6)\cap(\eta=-0.8)]\cdot P[(\xi=6)\cap(\eta=-0.5)] = 0.3\cdot 0.4 + 0.3\cdot 0.6 = 0.3.$$

მაგალითი 11. გამოვთვალოთ სათამაშო კამათელზე მოსული ქულათა რიცხვის მათემატიკური ლოდინი. გვაქვს:

$$E\xi = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3.5.$$

მაგალითი 12. დავუშვათ, $g(x) = x^3 - 4x$ და მოცემულია ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

2	1	0	2
0.1	0.3	0.4	0.2

დავადგინოთ $\eta = g(\xi)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი და გამოვთვალოთ მისი მათემატიკური ლოდინი.

ცხადია, რომ $g(-2) = g(0) = g(2) = 0$ და $g(-1) = 3$. ამიტომ η შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობებია 0 და 3. დავადგინოთ მისი განაწილების კანონი. ამისათვის გამოვთვალოთ ალბათობები: $P\{\eta = 0\}$ და $P\{\eta = 3\}$. რადგან ხდომილებები $\{\xi = -2\}$, $\{\xi = 0\}$ და $\{\xi = 2\}$ უთავსებადია, ამიტომ ალბათობათა შეკრების წესის თანახმად გვექნება:

$$P\{\eta = 0\} = P\{\{\xi = -2\}\cup\{\xi = 0\}\cup\{\xi = 2\}\} =$$

$$= P\{\xi=-2\} + P\{\xi=0\} + P\{\xi=2\} = 0.1+0.4+0.2 = 0.7 .$$

გარდა ამისა, $P\{\xi=3\} = P\{\xi=-1\} = 0.3$. ამიტომ $\eta = g(\xi)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს აქვს სახე:

0	3
0.7	0.3

გარდა ამისა, $E\eta = 0\cdot 0.7 + 3\cdot 0.3 = 0.9$.

ახლა გამოვთვალოთ $\eta = g(\xi)$ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი (5) თანაფარდობის საშუალებით. გვექნება:

$$E\eta = g(-2)\cdot 0.1 + g(-1)\cdot 0.3 + g(0)\cdot 0.4 + g(2)\cdot 0.2 =$$
$$= 0\cdot 0.1 + 3\cdot 0.3 + 0\cdot 0.4 + 0\cdot 0.2 = 0.9 .$$

მაგალითი 13. გამოვთვალოთ პუასონის განაწილების მათემატიკური ლოდინი.

თუ ვისარგებლებთ წარმოდგენით $e^x = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}$, მაშინ გვექნება:

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda .$$

ე. ი. პუასონის განაწილების λ პარამეტრი წარმოადგენს ამ განაწილების მათემატიკურ ლოდინს (საშუალო მნიშვნელობას).

მაგალითი 14. დავუშვათ, რომ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება სამი ტოლალბათური ელემენტარული ხდომილებისაგან $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = 1/3$. განვმარტოთ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები შემდეგნაირად:

$$\xi(\omega_1) = 1,\ \xi(\omega_2) = 0,\ \xi(\omega_3) = -1 ;$$
$$\eta(\omega_1) = 1,\ \eta(\omega_2) = 0,\ \eta(\omega_3) = 1 .$$

მაშინ გასაგებია, რომ $\xi\eta = \xi$, $E(\xi\eta) = E\xi = 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + (-1)\cdot\frac{1}{3} = 0$. შესაბამისად, $E(\xi\eta) = E\xi\cdot E\eta$. მეორეს მხრივ,

$$P\{\xi=0\} = P\{\eta=0\} = P\{\xi=0, \eta=0\} = P(\omega_2) = 1/3 ,$$

მაშინ როდესაც ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები რომ იყვნენ დამოუკიდებლები $\{\xi=0, \eta=0\}$ ხდომილების ალბათობა უნდა ყოფილიყო $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

მაგალითი 15. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია

x_i	-1	0	1	2	3
p_i	0.1	0.15	0.3	0.25	0.2

გამოვთვალოთ მისი დისპერსია.

ვინაიდან დისპერსიის გამოსათვლელად გვაქვს ორი განსხვავებული ფორმულა, შესაბამისად, გვექნება დისპერსიის გამოთვლის ორი ხერხი. მოხერხებულია ეს გამოთვლები ჩაიწეროს ცხრილების სახით.

დისპერსიის გამოთვლის პირველი ხერხი:

i	x_i	p_i	$x_i p_i$	$(x_i - E\xi)^2$	$(x_i - E\xi)^2 p_i$
1	-1	0.10	-0.1	5.29	0.5290
2	0	0.15	0	1.69	0.2535
3	1	0.30	0.3	0.09	0.0270
4	2	0.25	0.5	0.49	0.1225
5	3	0.20	0.6	2.89	0.5780
			$E\xi = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 1.3$		$D\xi = \sum_{i=1}^{5} (x_i - E\xi)^2 p_i = 1.51$

დისპერსიის გამოთვლის მეორე ხერხი:

i	x_i	p_i	$x_i p_i$	x_i^2	$x_i^2 p_i$
1	-1	0.10	-0.1	1	0.1
2	0	0.15	0	0	0
3	1	0.30	0.3	1	0.3
4	2	0.25	0.5	4	1
5	3	0.20	0.6	9	1.8
			$E\xi = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 1.3$		$E\xi^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i = 3.2$
			$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 1.51$		

მაგალითი 16. დავუშვათ, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდე სიმეტრიულადაა განაწილებული ნულის ირგვლივ, ე. ი. $E\xi=0$. ვთქვათ, $\eta=\xi^2$. მაშინ $E(\xi\eta)=E(\xi^3)=0$, ვინაიდან ξ^3 აგრეთვე, სიამეტრიულადაა განაწილებული ნულის ირგვლივ. მეორეს მხრივ, $E\xi E\eta=0$, ვინაიდან $E\xi=0$. ამიტომ:

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{E(\xi\eta) - E\xi E\eta}{\sigma\xi\sigma\eta} = 0.$$

ე. ი. კორელაცია (და მაშასადამე, კოვარიაცია) შეიძლება იყოს ნული, მაშინაც კი როცა შემთხვევითი სიდიდეები დამოკიდებულია

მაგალითი 17. დავუშვათ, რომ ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების კანონი მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

ξ \ η	1	2	
1	1/5	0	1/5
2	0	3/5	3/5
3	1/5	0	1/5
	2/5	3/5	

ცხადია, რომ:

$$E\xi = 1\cdot 1/5 + 2\cdot 3/5 + 3\cdot 1/5 = 2;\ E\eta = 1\cdot 2/5 + 2\cdot 3/5 = 8/5;$$

$$E(\xi\eta) = 1\cdot 1\cdot 1/5 + 2\cdot 2\cdot 3/5 + 3\cdot 1\cdot 1/5 = 16/5;\ E(\xi\eta) - E\xi E\eta = 0.$$

აქედან გამომდინარე, კორელაციის კოეფიციენტი ნულია, მაშინ როდესაც (ისევე როგორც წინა მაგალითში) ნათელია, რომ ადგილი აქვს η შემთხვევითი სიდიდის ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას ξ შემთხვევით სიდიდეზე.

მაგალითი 18. ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების ქვემოთ მოყვანილი ერთობლივი განაწილების კანონის მიხედვით გამოვთვალოთ კორელაციის კოეფიციენტი ρ(ξ;η).

ξ \ η	1	2	3	
10	1/36	0	0	1/36
20	2/36	1/36	0	3/36
30	2/36	2/36	2/36	6/36
40	1/36	9/36	16/36	26/36
	6/36	12/36	18/36	

$$E\xi = 10\cdot 1/36 + 20\cdot 3/36 + 30\cdot 6/36 + 40\cdot 26/36 \approx 35.83;$$

$$E\eta = 1\cdot 6/36 + 2\cdot 12/36 + 3\cdot 18/36 \approx 2.3;$$

$$D\xi = (10-35,83)^2\cdot 1/36 + (20-35.83)^2\cdot 3/36 + (30-35.83)^2\cdot 6/36 +$$

$$+(40-35,83)^2\cdot 26/36 \approx 57.64; \quad \sigma\xi \approx 7.6;$$

$$D\eta = (1-2,3)^2\cdot 6/36 + (2-2.3)^2\cdot 12/36 + (3-2.3)1^2\cdot 18/36 \approx 0.556;$$

$$\sigma\eta \approx 0.746;$$

$$E(\xi\eta) = 10\cdot 1\cdot 1/36 + 20\cdot 1\cdot 2/36 + 20\cdot 2\cdot 1/36 + 30\cdot 1\cdot 2/36 + 30\cdot 2\cdot 2/36 +$$

$$+30\cdot 3\cdot 2/36 + 40\cdot 1\cdot 1/36 + 40\cdot 2\cdot 9/36 + 40\cdot 3\cdot 16/36 = 86.94;$$

$$\rho(\xi,\eta) = (6.94 - 2.3\cdot 35.83)/(7.6\cdot 0.746) \approx 0.8.$$

ამოცანები

1. შემთხვევითი სიდიდე იყოს ორი კამათლის აგდებისას მოსულ ქულათა; ა). ჯამი; ბ). ნამრავლი; გ). განაყოფი; დ). სხვაობა; ე). სხვაობის მოდული. ააგეთ განაწილების კანონი.

2. კამათელს აგდებენ ერთჯერ. 6 ქულის მოსვლის შემთხვევაში კამათელს აგდებენ მეორეჯერ. შემთხვევითი სიდიდე იყოს ქულათა ჯამი (თუ I აგდებისას არ მოვიდა 6 ქულა, მაშინ II შესაკრებად ჩავთვალოთ 0). ააგეთ განაწილების კანონი.

3. ჩანთაში დევს 2 წითელი და 3 ლურჯი ფანქარი. ჩანთიდან შემთხვევით იღებენ ორ ფანქარს დაბრუნების გარეშე. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მათში ლურჯი ფანქრების რიცხვი. ააგეთ განაწილების კანონი.

4. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.3	0.4

გაკეთდა ორი დაკვირვება ξ შემთხვევით სიდიდეზე. η შემთხვევითი სიდიდე იყოს: ა). მიღებული ქულებიდან უდიდესსა და უმცირესს შორის სხვაობა (როცა

დაკვირვებები ტოლია – $\eta=0$); ბ). ქულების ჯამი; გ). ქულების ნამრავლი. ააგეთ η-ს განაწილების კანონი. η-ს რომელი მნიშვნელობაა ყველაზე უფრო მოსალოდნელი.

5. წესიერ მონეტას აგდებენ ორჯერ. ააგეთ მოსულ გერბთა რიცხვის განაწილების კანონი.

6. ორ წესიერ კამათელს აგდებენ ერთდროულად. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მიღებული ქულებიდან უდიდესსა და უმცირესს შორის სხვაობა (როცა დაკვირვებები ტოლია – სხვაობა არის 0). ააგეთ განაწილების კანონი.

7. წესიერ კამათელს აგდებენ ერთჯერ. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მოსული ქულის ნახევარი, როცა ქულა ლუწია, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში – მისი გაორმაგებული. ააგეთ განაწილების კანონი.

8. წესიერ კამათელს აგდებენ ერთჯერ. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მოსული ქულის მესამედი, როცა ქულა 3-ის ჯერადია, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში – მისი გაორმაგებული. ააგეთ განაწილების კანონი.

9. წესიერ კამათელს აგდებენ ერთჯერ. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მოსული ქულის ნახევარი, როცა ქულა ლუწია, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში – მისი გასამმაგებული. ააგეთ განაწილების კანონი.

10. ორ წესიერ კამათელს აგდებენ ერთდროულად. შემთხვევითი სიდიდე იყოს მიღებული ქულებიდან; ა). უდიდესი; ბ). უმცირესი. ააგეთ განაწილების კანონი.

11. ერთდროულად აგდებენ ორ წესიერ ოთხწახნაგას, ტეტრაედრს (წახნაგები სამკუთხედებია და გადანომრილია ციფრებით 1, 2, 3, 4). ააგეთ ქვედა წახნაგზე მოსულ ქულათა: ა). ნამრავლის; ბ). ჯამის; გ). სხვაობის; დ). განაყოფის; ე). გაორკეცებული ნამრავლის განაწილების კანონები.

12. ჩანთაში დევს 6 წითელი და 3 მწვანე კალკულატორი. ჩანთიდან დაბრუნების გარეშე იღებენ 2 კალკულატორს. ააგეთ მათში მწვანე კალკულატორთა რიცხვის განაწილების კანონი.

13. ჩანთაში დევს 6 წითელი და 3 მწვანე კალკულატორი. ჩანთიდან დაბრუნების გარეშე იღებენ 3 კალკულატორს. ააგეთ მათში წითელ კალკულატორთა რიცხვის განაწილების კანონი.

14. შემთხვევით იღებენ ერთ კარტს 52 კარტიდან. თუ ამოღებული კარტი ტუზია, მაშინ ჩერდებიან. წინააღმდეგ შემთხვევაში აგრძელებენ კარტის ამოღებას დაბრუნების გარეშე მანამ სანამ ან ტუზი არ ამოვა ან 4 კარტი არ იქნება ამოღებული. ააგეთ ამოღებულ კარტთა რაოდენობის განაწილების კანონი.

15. შემთხვევით იღებენ ერთ კარტს 36 კარტიდან. თუ ამოღებული კარტი აგურისაა, მაშინ ჩერდებიან. წინააღმდეგ შემთხვევაში აგრძელებენ კარტის ამოღებას დაბრუნების გარეშე მანამ სანამ ან აგური არ ამოვა ან 4 კარტი არ იქნება ამოღებული. ააგეთ ამოღებულ კარტთა რაოდენობის განაწილების კანონი.

16. ქვემოთ მოცემულია ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი

ξ	1	2	3	4	5
P	q	$2q$	$3q$	$4q$	$5q$

იპოვეთ: ა). q, ბ). $P\{\xi \le 3\}$, გ). $P\{\xi > 2\}$. (1/8, 5/8, 5/8)

17. კომპიუტერი დაპროგრამებულია 0-დან 9-ის ჩათვლით ერთნიშნა რიცხვების მისაღებად (ξ შემთხვევითი სიდიდე) ისე, რომ კენტი ციფრების (1, 3, 5, 7,

9) მიღების ალბათობა არის ლუწი ციფრების (0, 2, 4, 6, 8) მიღების ალბათობის ნახევარი. იპოვეთ განაწილების კანონი.

18. კომპიუტერი დაპროგრამებულია 0-დან 9-ის ჩათვლით ერთნიშნა რიცხვების მისაღებად (ξ შემთხვევითი სიდიდე) ისე, რომ 3-ის ჯერადი ციფრების (0, 3, 6, 9) მიღების ალბათობა არის 3-ის არა ჯერადი ციფრების (1, 2, 4, 5, 7, 8) მიღების ალბათობის გაორმაგებული. იპოვეთ განაწილების კანონი.

19. იპოვეთ p თუ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	-1	1	2	3	5
P	p	0.2	0.15	0.2	$2p$

20. $P\{\xi = k\} = p$, სადაც $k = 1,2,3,4,5,6,7,8$. იპოვეთ p.

21. კუბის ფორმის სათამაშო კამათელი მოწყობილია ისე, რომ მასზე კენტი ქულის მოსვლის ალბათობა 3-ჯერ მეტია ლუწი ქულის მოსვლის ალბათობაზე. ააგეთ ქულათა განაწილების კანონი.

22. კუბის ფორმის სათამაშო კამათელი მოწყობილია ისე, რომ მასზე ნებისმიერი ქულის მოსვლის ალბათობა ამ ქულის პროპორციულია. ააგეთ ქულათა განაწილების კანონი.

23. კუბის ფორმის სათამაშო კამათელი მოწყობილია ისე, რომ მასზე ნებისმიერი ქულის მოსვლის ალბათობა ამ ქულის უკუპროპორციულია. ააგეთ ქულათა განაწილების კანონი.

24. იპოვეთ p თუ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	-2	-1	0	3	4
P	p	0.3	0.12	0.34	p^2

25. 52 კარტიდან შემთხვევით იღებენ ერთ კარტს დაბრუნებით 520-ჯერ. გამოთვალეთ მოსალოდნელი რიცხვი (სიხშირე) იმისა, რომ მოვა: ა). აგური; ბ). ტუზი; გ). სურათიანი კარტი (K, Q, J); დ). ან ტუზი, ან აგური, ან ორივე ერთად; ე). არც ტუზი და არც აგური.

26. კუბის ფორმის სათამაშო კამათელი მოწყობილია ისე, რომ მასზე ლუწი ქულის მოსვლის ალბათობა 3-ჯერ მეტია კენტი ქულის მოსვლის ალბათობაზე. ამ კამათელს აგდებენ 420-ჯერ. გამოთვალეთ მოსალოდნელი რიცხვი (სიხშირე) იმისა, რომ მოვა: ა). 1 ქულა; ბ). ლუწი ქულა; გ). მარტივი რიცხვი.

27. ქვემოთ მოყვანილია ξ შემთხვევითი სიდიდის დაგროვილი ალბათური განაწილების კანონი (ანუ $P\{\xi \le k\}$ ნაცვლად $P\{\xi = k\}$-სი):

ξ	0	1	2	3	4	5
$P\{\xi \le k\}$	0.116	0.428	0.765	0.946	0.995	1.000

გაკეთდა 100 დაკვირვება ξ შემთხვევითი სიდიდეზე. გამოთვალეთ უახლოეს მთელ რიცხვამდე დამრგვალებული ყველა შედეგის მოსალოდნელი სიხშირე.

28. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს აქვს სახე:

$$P\{\xi = k\} = \begin{cases} 0.3 \cdot (0.7)^k, & \text{თუ } k = 1,2,3,4; \\ p, & \text{თუ } k = 5; \\ 0, & \text{ყველა დანარჩენი } k-\text{თვის}. \end{cases}$$

იპოვეთ p და $\{\xi = 3\}$ ხდომილების მოსალოდნელი სიხშირე, როცა ξ შემთხვევითი სიდიდეზე ტარდება 1000 დაკვირვება.

29. ყუთში ძევს 49 ერთნაირი ბურთი, რომლებიც გადანომრილია 1-დან 49-მდე. შემთხვევით ირჩევენ 6 ბურთს დაბრუნების გარეშე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აქედან ოთხზე იქნება ლუწი ქულა.

30. მონეტას აგდებენ გერბის პირველად გამოჩენამდე. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ გერბი პირველად მოვა მეოთხე აგდებისას.

31. გამოთვალეთ ზემოთ მოყვანილი შემთხვევითი სიდიდეების მათემატიკური ლოდინები.

32. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	1	2	3	4
P	0.1	a	0.3	b

ცნობილია, რომ $E\xi = 3$. იპოვეთ a და b.

33. ცნობილია, რომ არცერთი სოკო არ ცოცხლობს მომავალ წლამდე. ნებისმიერი სოკო მომდევნო წელს იძლევა ξ რაოდენობის ახალ სოკოს. დავუშვათ, რომ მიმდინარე წელს ხარობს ორი სოკო. ვიპოვოთ მომავალ წელს სოკოთა η რაოდენობის განაწილების კანონი, გამოვთვალოთ η-ს მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია, თუ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	0	1	2
P	0.2	0.6	0.2

მ ი თ ი თ ე ბ ა: შეადგინეთ დამოუკიდებელი ξ, ξ წყვილის ერთობლივი განაწილების კანონი, $\eta = \xi + \xi$.

34. გამოთვალეთ ქვემოთ მოყვანილი განაწილების კანონების მიხედვით შესაბამისი შემთხვევითი სიდიდეების მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია:

ξ	0	1	2	3	4
P	1/8	3/8	1/8	1/4	1/8

ξ	-2	-1	0	1	2	3
P	0.15	0.25	0.3	0.05	0.2	0.05

ξ	1	2	3	4	5	6	7
P	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1

ξ	3	4	5	6	7
P	1/18	5/18	7/18	1/18	4/18

35. წესიერი სათამაშო კამათლის წახნაგებზე დაწერილია ციფრები 1, 2, 2, 3, 3 და 3. აღვნიშნოთ ξ ასოთი კამათლის ერთხელ გაგორებისას მოსული ქულა. ვიპოვოთ ξ-ს მათემატიკური ლოდინი და სტანდარტული გადახრა.

36. წესიერი სათამაშო კამათლის წახნაგებზე დაწერილია ციფრები 1, 2, 2, 3, 3 და 3. აღვნიშნოთ ξ ასოთი კამათლის ორჯერ გაგორებისას მოსულ ქულათა ჯამი. ააგეთ ξ-ს განაწილების კანონი და გამოთვალეთ მისი ლოდინი და დისპერსია.

37. სამშენებლო კომპანიას სთავაზობენ ორ A და B პროექტს და ფინანსურმა დირექტორმა უნდა ურჩიოს კომპანიას ამ პროექტებიდან რომელი უნდა

აირჩიოს. მისი შეფასებით A პროექტი იძლევა 150000 ლარიან მოგებას ალბათობით 0.5, 250000 ლარიან მოგებას ალბათობით 0..2 და 100000 ლარიან წაგებას ალბათობით 0.3. B პროექტი იძლევა 100000 ლარიან მოგებას ალბათობით 0.6, 200000 ლარიან მოგებას ალბათობით 0.3 და 50000 ლარიან წაგებას ალბათობით 0.1. დაადგინეთ რომელ პროექტს უნდა დაუჭიროს მხარი ფინანსურმა დირექტორმა.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: შეადარეთ ერთმანეთს $E(A)$ და $E(B)$.

38. სუპერმარკეტში კვერცხები იყიდება ყუთებით, რომელშიც დევს 6 – 6 კვერცხი. გატეხილი კვერცხების ξ რაოდენობის განაწილების კანონია:

ξ	0	1	2	3	4	5	6
P	0.8	0.14	0.03	0.02	0.01	0	0

იპოვეთ: ა). ξ-ს მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია; ბ). გაუტეხავი კვერცხების რაოდენობის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია.

39. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	1	2	3	4	5
P	a	0.3	0.2	0.1	0.2

იპოვეთ: a და ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და სტანდარტული გადახრა.

40. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

ξ	2	3	4	5	6	7
P	0.05	0.25	a	b	0.1	0.3

ცნობილია, რომ $E\xi = 4.9$. ვაჩვენოთ, რომ $a = b$ და გამოვთვალოთ ξ შემთხვევითი სიდიდის სტანდარტული გადახრა.

41. წესიერ სათამაშო კამათელს აგდებენ მანამ სანამ არ გამოჩნდება 6 ქულა ან არ ჩატარდება 4 აგდება. ξ იყოს ჩატარებულ აგდებათა რაოდენობა, ხოლო η – კი მოსული 6 ქულების რაოდენობა ამ თამაში. იპოვეთ: ა). ξ-ს განაწილების კანონი; ბ). ξ-ს სტანდარტული გადახრა; გ). $E\eta$.

42. წინა ამოცანის პირობებში, თუ მოთამაშეს თამაშის განმავლობაში მოუვიდა 6 ქულა, მაშინ ის იგებს 100 ლარს, ხოლო თუ თამაშის განმავლობაში არ მოვა 6 ქულა, მაშინ მოთამაშე აგებს 150 ლარს. ვიპოვოთ მოთამაშის მიერ მოგებული თანხის მათემატიკური ლოდინი.

43. კომიტეტი, რომლის შემადგენლობაში შედის 6 მამაკაცი და 4 ქალი, ირჩევს თავის 2 წარმომადგენელს. ვიგულისხმოთ, რომ კომიტეტის ნებისმიერი წევრის არჩევა თანაბარად შესაძლებელია და ავაგოთ არჩეული ქალების რაოდენობის განაწილების კანონი. ვიპოვოთ არჩეული ქალების მოსალოდნელი რიცხვი.

44. აგდებენ წესიერ ოთხწახნაგა პირამიდას, რომელზეც აღნიშნულია ციფრები 1, 2, 3 და 4. შემდეგ აგდებენ წესიერ მონეტას იმდენჯერ რა ციფრიც მოვა პირამიდის ფუძეზე. ξ იყოს პირამიდის ფუძეზე მოსული ქულა, ხოლო η – კი მოსული გერბების რაოდენობა. ა). აჩვენეთ, რომ $P\{\eta = 2\} = 13/48$; ბ). ააგეთ η-ს განაწილების კანონი; გ). აჩვენეთ, რომ $E\eta = \frac{1}{2}E\xi$; დ). გამოთვალეთ $D\xi$.

45. მონეტას აგდებენ 5-ჯერ. ξ შემთხვევითი სიდიდე იყოს მოსულ გერბთა რიცხვი, ხოლო η შემთხვევითი სიდიდე კი ბოლო ორ აგდებაში მოსულ გერბთა რიცხვი. ავაგოთ ამ შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების კანონი და ვიპოვოთ კოვარიაცია.

46 32 კარტიდან შემთხვევით იღებენ 2-ს. ξ შემთხვევითი სიდიდე იყოს ამოღებული ტუზების რიცხვი, ხოლო η შემთხვევითი სიდიდე კი ამოღებული მეფეების რიცხვი. ავაგოთ ავაგოთ ამ შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილების კანონი და ვიპოვოთ კორელაციის კოეფიციენტი.

პასუხები:

1. ა). 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 – 1/36, 1/18, 1/12, 1/9, 5/36, 1/6, 5/36, 1/9, 1/12, 1/18, 1/36. **2.** 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12 – 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/36, 1/36, 1,36, 1,36, 1,36, 1/36. **3.** 0, 1, 2 – 1/10, 3/5, 3/10. **24.** 0.2. **25.** 130; 40; 120; 160; 360. **26.** 105; 105; 245. **27.** 12; 31; 34; 18; 5; 0. **28.** 0.468; 103. **32.** 0.2; 0.4. **33.** 0,1, 2, 3, 4 – 0.04, 0.24, 0.44, 0.24, 0.04; 2; 0.8. **34.** 15/8, ;0.05, ; 4, 3.6; 46/9, 116/81. **35.** 7/3; 0.745. **36.** 2, 3, 4, 5, 6 – 1/36, 1/9, 5/18, 1/3; 14/3; 10/9. **37.** $E(A)=95000$, $E(B)=115000$; B. **38.** 0.3, 0.51; 5.7, 0.51. **39.** 0.2; 2.8, 1.4. **40.** $a=b=0.15$; 1.7. **41.** 1, 2, 3, 4 – 1/6, 5/36, 25/216, 125/216; 1.172; 0.5177. **42.** -20.56. **43.** 0, 1, 2 – 1/3, 8/15, 2/15; 0.8. **44.** 0, 1, 2, 3 – 11/48, 7/16, 13/48, 1/16; $E\eta=7/6$, $E\xi=7/3$; 13/18.

თავი IV
დისკრეტულ განაწილებათა გამოყენებები

ბინომიალური განაწილება

• თუ ყოველ კონკრეტულ ცდას გააჩნია ორი შესაძლო შედეგი (წარმატება და მარცხი) და ისინი ურთიერთგამომრიცხავია;

• ტარდება ცდათა სასრული რაოდენობა – n;

• ყოველი ცდის შედეგი დამოუკიდებელია ყველა დანარჩენი ცდის შედეგისაგან;

• ცალკეულ ცდაში წარმატების p ალბათობა მუდმივია;

მაშინ შემთხვევით სიდიდეს, რომელიც წარმოადგენს წარმატებათა რაოდენობას n ცდაში უწოდებენ ბინომიალურ შემთხვევით სიდიდეს, აღნიშნავენ $Bi(n,p)$ სიმბოლოთი და მას აქვს შემდეგი განაწილების კანონი:

$$P\{Bi(n,p)=k\} \equiv P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\ldots,n.$$

ამასთანავე, $E[Bi(n,p)]=np$; $D[Bi(n,p)]=np(1-p)$.

პუასონის განაწილება

$$P\{Po(\lambda)=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\ldots; \quad E[Po(\lambda)]=\lambda; \quad D[Po(\lambda)]=\lambda.$$

პუასონის განაწილება ადექვატური მოდელია იმ ხდომილებებისათვის, რომლებიც:

• ხდებიან შემთხვევით სივრცეში ან დროში;

• ხდებიან ცალ-ცალკე (ერთდროულად მოხდენა არ შეიძლება);

• ხდებიან დამოუკიდებლად, და

• ხდებიან მუდმივი ინტენსივობით (ხდომილებათა რაოდენობა მოცემულ დროის ინტერვალში ამ ინტერვალის სიგრძის პროპორციულია).

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. მოცემულია $\xi \equiv Bi(8,\frac{1}{4})$. იპოვეთ: ა). $P\{\xi=6\}$; ბ). $P\{\xi\le 2\}$; გ). $P\{\xi>0\}$.

ამოხსნა. ა). ვისარგებლოთ ბერნულის ფორმულით, სადაც $n=8$ და $p=\frac{1}{4}$.

გვაქვს: $P\{\xi=6\}=C_8^6\cdot(\frac{1}{4})^6\cdot(\frac{3}{4})^2=28\cdot(\frac{1}{4})^6\cdot(\frac{3}{4})^2=0.00385\approx 0.004$;

ბ). $$P\{\xi\le 2\}=P\{\xi=0\}+P\{\xi=1\}+P\{\xi=2\}=C_8^0\cdot(\frac{1}{4})^0\cdot(\frac{3}{4})^8+C_8^1\cdot(\frac{1}{4})^1\cdot(\frac{3}{4})^7+$$

$$+C_8^2\cdot(\frac{1}{4})^2\cdot(\frac{3}{4})^6=0.1001+0.2669+0.3114=0.6785\approx 0.679;$$

გ). გადავიდეთ საწინააღმდეგო ხდომილებაზე:

$$P\{\xi>0\}=1-P\{\xi=0\}=1-C_8^0\cdot(\frac{1}{4})^0\cdot(\frac{3}{4})^8=1-0.1001=0.8998\approx 0.9.$$

მაგალითი 2. მოცემულია $\xi \cong Bi(3, \frac{1}{4})$. იპოვეთ $E\xi$ და $D\xi$.

ამოხსნა. $E\xi = np = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. $D\xi = np(1-p) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$.

მაგალითი 3. მოცემულია $\xi \cong Bi(10, 0.3)$. იპოვეთ: ა). $E\xi$ და $D\xi$; ბ). $P\{E\xi - \sigma\xi < \xi < E\xi + \sigma\xi\}$.

ამოხსნა. ა). $E\xi = np = 10 \cdot 0.3 = 3$, $D\xi = np(1-p) = 10 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 2.1$;

ბ). $P\{E\xi - \sigma\xi < \xi < E\xi + \sigma\xi\} = P\{3 - \sqrt{2.1} < \xi < 3 + \sqrt{2.1}\} = P\{3 - 1.44 < \xi < 3 + 1.44\} =$

$$= P\{1.55 < \xi < 4.44\} = P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\} + P\{\xi = 4\} = P\{\xi \le 4\} - P\{\xi \le 1\} =$$

$$0.8497 - 0.1493 = 0.7004 \approx 0.7.$$

მაგალითი 4. მოცემულია $\xi \cong Bi(10, 0.3)$. იპოვეთ: ა). $P\{\xi = 2\}$; ბ). $P\{\xi \le 2\}$; გ). $P\{\xi > 2\}$; დ). $\{\xi = 2\}$ ხდომილების ალბათობა, თუ ცნობილია, რომ $\{\xi \le 2\}$.

ამოხსნა. ა). $P\{\xi = 2\} = C_{10}^2 \cdot (0.2)^2 \cdot (0.8)^8 = 0.302$;

ბ). $P\{\xi \le 2\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} = 0.6778$;

გ). $P\{\xi > 2\} = 1 - P\{\xi \le 2\} = 1 - 0.6778 = 0.3222$;

დ). უნდა მოიძებნოს $P\{\xi = 2 \mid \xi \le 2\}$. პირობითი ალბათობის განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$P\{\xi = 2 \mid \xi \le 2\} = \frac{P\{(\xi = 2) \bigcap (\xi \le 2)\}}{P\{\xi \le 2\}} =$$

$$= \frac{P\{(\xi = 2) \bigcap [(\xi = 0) \bigcup (\xi = 1) \bigcup (\xi = 2)]\}}{P\{\xi \le 2\}} = \frac{P\{\xi = 2\}}{P\{\xi \le 2\}} = \frac{0.302}{0.6778} = 0.4456.$$

მაგალითი 5. ცნობილია, რომ $\xi \cong Bi(n, p)$, $E\xi = 24$ და $D\xi = 8$. იპოვეთ n და p.

ამოხსნა. ვინაიდან $E[Bi(n,p)] = np$ და $D[Bi(n,p)] = np(1-p)$, ამიტომ $24 = np$ და $8 = np(1-p) = 24(1-p)$. საიდანაც $1 - p = 1/3$ ანუ $p = 2/3$. შესაბამისად, $n = 24/p = 24 \cdot 3/2 = 36$.

მაგალითი 6. ცნობილია, რომ $\xi \cong Bi(n, 0.6)$. ვიპოვოთ ცდათა ის მინიმალური რაოდენობა, რომლისთვისაც $P\{\xi \ge 1\} > 0.9$.

ამოხსნა. $P\{\xi \ge 1\} = 1 - P\{\xi = 0\} = 1 - C_n^0 \cdot (0.6)^0 \cdot (0.4)^n = 1 - (0.4)^n > 0.9$. ამიტომ გვაქვს: $(0.4)^n < 0.1$, ანუ $n \ln(0.4) < \ln(0.1)$. აქედან, იმის გათვალისწინებით, რომ $\ln(0.4)$ უარყოფითია, დავასკვნით, რომ $n > \frac{\ln(0.4)}{\ln(0.1)} = 2.51$. შესაბამისად, ცდათა საძიებელი მინიმალური რიცხვი იქნება $n = 3$.

მაგალითი 7. ქვემოთ მოყვანილ სიტუაციებში მიუთითეთ როდისაა პუასონის განაწილება ადექვატური მოდელი:

ა). იმ ავტომობილების რიცხვი, რომლებიც გადაკვეთავენ ერთზოლიან ხიდს თავისუფალი მოძრაობის დროს 10 საათიდან 11 საათამდე;

ამ შემთხვევაში პუასონის განაწილება იქნება კარგი მოდელი, რადგანაც შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ მანქანები ხიდს გადაკვეთავენ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად და დროის შემთხვევით მომენტებში (მოძრაობა თავისუფალია).

ორი მანქანა ერთდროულად ვერ გადაკვეთს ხიდს (ხიდი ერთზოლიანია) და საშუალოდ დროის მოცემულ ინტერვალში ხიდზე გავლილი მანქანების რაოდენობა დროის ინტერვალის პროპორციული იქნება;

ბ). იმ ავტომობილების რიცხვი, რომლებიც 9 საათიდან 10 საათამდე შედიან ქალაქის ცენტრის ავტოსადგომზე;

გასაგებია, რომ ამ შემთხვევაში პუასონის განაწილება ვერ იქნება კარგი მოდელი, განსაკუთრებით თუ ეს სამუშაო დღეა -- ავტოსადგომზე იქნება რიგები და მანქანები ვერ იმოძრავებენ თავისუფლად და ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად;

გ). რადიაოქტიური წყაროს მიერ წამში გამოსხივებული ნაწილაკების რაოდენობა;

პუასონის განაწილება იქნება კარგი მოდელი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ გამოსხივება ხდება დამოუკიდებლად და შემთხვევით მომენტებში და ყოველი კონკრეტული გამოსხივება ერთნაწილაკიანია.

მაგალითი 8. რადიოაქტიური წყაროს მიერ წამში გამოსხივებული ნაწილაკების რაოდენობა ემორჩილება პუასონის განაწილებას საშუალოთი 5. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ წამში გამოსხივებული იქნება: ა). 0; ბ). 1; გ). 2; დ). 3 ან მეტი ნაწილაკი.

ამოხსნა. ξ იყოს შემთხვევითი სიდიდე: "რადიაქტიური წყაროს მიერ წამში გამოსხივებული ნაწილაკების რაოდენობა", მაშინ პირობის თანახმად $\xi \cong Po(5)$. ვისარგებლოთ პუასონის განაწილების კანონითა და შესაბამისი ცხრილებით. მაშინ:

ა). $P\{\xi=0\}=\dfrac{5^0}{0!}e^{-5}=0.0067$;

ბ). $P\{\xi=1\}=\dfrac{5^1}{1!}e^{-5}=0.0337$;

გ). $P\{\xi=2\}=\dfrac{5^2}{2!}e^{-5}=0.0842$;

დ). გადავიდეთ საწინააღმდეგო ხდომილებაზე:

$$P\{\xi\ge 3\}=1-P\{\xi<3\}=1-P\{\xi=0\}-P\{\xi=1\}-P\{\xi=2\}=$$
$$=1-0.0067-0.0337-0.0842=0.875.$$

მაგალითი 9. ტაქსების ფირმაში ტაქსებზე შემოსული გამოძახებების რაოდენობა პუასონის კანონითაა განაწილებული, საშუალოდ 4 გამოძახება ყოველ 30 წუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). არცერთი გამოძახება არ შემოვა 30 წუთში; ბ). ერთი გამოძახება შემოვა 1 საათში; გ). ორზე ნაკლები გამოძახება შემოვა 15 წუთში.

ამოხსნა. ა). ξ იყოს შემთხვევითი სიდიდე: "ტაქსების ფირმაში 30 წუთის განმავლობაში შემოსული გამოძახებების რაოდენობა". მაშინ ცხადია, რომ $\xi \cong Po(4)$. შესაბამისად, გვაქვს:

$$P\{\xi=0\}=\frac{4^0}{0!}e^{-4}=0.0183;$$

ბ). η იყოს შემთხვევითი სიდიდე: "ტაქსების ფირმაში 1 საათის განმავლობაში შემოსული გამოძახებების რაოდენობა". ვინაიდან, პირობიდან გამომდინარე, 1 საათში საშუალოდ 8 გამოძახება შემოეა, ამიტომ $\eta \equiv Po(8)$. შესაბამისად,

$$P\{\eta = 1\} = \frac{8^1}{1!}e^{-8} = 0.0027;$$

გ). ანალოგიურად, თუ ς არის შემთხვევითი სიდიდე: "ტაქსების ფირმაში 15 წუთის განმავლობაში შემოსული გამოძახებების რაოდენობა", მაშინ $\varsigma \equiv Po(2)$. ამიტომ

$$P\{\varsigma < 2\} = P\{\varsigma = 0\} + P\{\varsigma = 1\} = \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} = 0.406.$$

მაგალითი 10. V მლ ტბის წყალში ორგანული ნაწილაკების რაოდენობა ემორჩილება პუასონის განაწილების კანონს საშუალოთი $0.2V$ გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). 50 მლ ტბის წყალი შეიცავს 8-ზე ნაკლებ ორგანულ ნაწილაკს; ბ). 30 მლ ტბის წყალი შეიცავს 2-ზე მეტ ორგანულ ნაწილაკს; გ). 10 მლ ტბის წყალი შეიცავს ზუსტად 3 ორგანულ ნაწილაკს.

ამოხსნა. ა). $V = 50$, $\lambda = 0.2 \cdot 50 = 10$, ე. ი. $\xi \equiv Po(10)$. ვისარგებლოთ პუასონის დაგროვილი (კუმულატიური) ალბათობების ცხრილით:

$$P\{\xi < 8\} = P\{\xi \le 7\} = 0.2202;$$

ბ). $V = 30$, $\lambda = 0.2 \cdot 30 = 6$, ე. ი. $\xi \equiv Po(6)$. გადავიდეთ საწინააღმდეგო ხდომილებაზე:

$$P\{\xi > 2\} = 1 - P\{\xi \le 2\} = 1 - 0.0619 = 0.938;$$

გ). $V = 10$, $\lambda = 0.2 \cdot 10 = 2$, ანუ $\xi \equiv Po(2)$. ამიტომ

$$P\{\xi = 3\} = 0.1804.$$

ამოცანები

1. წესიერ სათამაშო კამათელს აგდებენ 10-ჯერ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). 3 ქულა მოვა 4-ჯერ; ბ). 4 ქულა მოვა 5-ჯერ; გ). 3 ქულა მოვა 6-ჯერ.

2. ყუთში ძევს 49 ერთნაირი ბურთი, რომლებიც გადანომრილია 1-დან 49-მდე. შემთხვევით ირჩევენ 6 ბურთს დაბრუნებით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აქედან ოთხზე იქნება ლუწი ქულა.

3. ξ შემთხვევით სიდიდეს აქვს ბინომური განაწილება პარამეტრებით $n = 6$ და $p = 0.2$. გამოთვალეთ: ა). $P\{\xi = 3\}$; ბ). $P\{\xi = 4\}$; გ). $P\{\xi = 6\}$; დ). $E\xi$.

4. ცნობილია, რომ $\xi \equiv Bi(7, 2/3)$. გამოთვალეთ: ა). $P\{\xi = 4\}$; ბ). $P\{\xi = 6\}$; გ). $P\{\xi = 0\}$; დ). $E\xi$.

5. ცნობილია, რომ $\xi \equiv Bi(9, 0.45)$. იპოვეთ: ა). $P\{\xi = 3\}$; ბ). $P\{\xi = 4 \text{ ან } 5\}$; გ). $P\{\xi \ge 7\}$; დ). $E\xi$.

6. ცნობილია, რომ $\xi \equiv Bi(12, 0.7)$. გამოთვალეთ: ა). $P\{\xi < 4\}$; ბ). უმცირესი x რომლისთვისაც $P\{\xi > x\} < 0.9$.

7. ცნობილია, რომ $\xi \equiv Bi(10, 0.5)$. გამოთვალეთ: ა). $P\{2 \le \xi \le 5\}$; ბ). $P\{\xi \le 1 \text{ ან } \xi > 5\}$.

8. ცნობილია, რომ $\xi \equiv Bi(7,1/6)$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ξ არის: ა). ზუსტად 3; ბ). სულ ცოტა 4.

9. უნივერსიტეტის სტუდენტთა 30%-ის ასაკი მერყეობს 16-წლიდან 19 წლამდე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული 10 სტუდენტიდან 4-ზე ნაკლების ასაკი იქნება 16-წლიდან 19 წლამდე.

10. საკონდიტრო ფაბრიკა ამზადებს დიდი რაოდენობით ფერად ტკბილეულს. ცნობილია, რომ საშუალოდ ტკბილეულის 20% მწვანე ფერისაა. შეკვრაში არის 20 ტკბილეული. იგულისხმეთ, რომ შეკვრაში ტკბილეული ხვდება შემთხვევით ფაბრიკის მიერ დამზადებული მთელი პროდუქციიდან და გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ შეკვრაში ზუსტად 7 ტკბილეული იქნება მწვანე.

11. მეფრინველეობის ფაბრიკაში წარმოებული 6 – 6 კვერცხი ჩალაგებულია ყუთებში. თითეული კვერცხის გატეხვის ალბათობა სხვა კვერცხებისაგან დამოუკიდებლად არის 0.1. ყუთს დავარქვათ ცუდი, თუ მასში დევს სულ ცოტა 2 გატეხილი კვერცხი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ყუთი ცუდია.

12. გარკვეულ ტროპიკულ კუნძულზე რომელიმე კონკრეტულ თვეში ქარიშხალის მოხდენის ალბათობაა 0.08. გამოიყენეთ ბინომიალური განაწილება და გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ წლის განმავლობაში ქარიშხალი იქნება ორზე მეტ თვეში.

13. ცნობილია, რომ დღის გარკვეულ მონაკვეთში ქვეყნის ზრდასრული მოსახლეობის 35% ატარებს ჯინსებს. ა). დღის ამ მონაკვეთში შეირჩა 12 ზრდასრული ადამიანი. გამოიყენეთ ბინომიალური განაწილება და გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ მათგან ზუსტად ხუთს აცვია ჯინსი; ბ). თუ ალბათობა იმისა, რომ ერთ ადამიანს მაინც აცვია ჯინსი არის 0.95, მაშინ რამდენი ადამიანია შერჩეული?

14. მეფრინველეობის ფაბრიკის მიერ წარმოებულ *A* და *B* ტიპის კვერცხებს ცალ-ცალკე აწყობენ 6 – 6 ცალად ყუთებში. *A* ტიპის კვერცხის გატეხვის ალბათობაა 1/6, ხოლო *B* ტიპის კვერცხის – 1/10. შემთხვევით შერჩეულ იქნა ერთი ყუთი *A* ტიპის კვერცხებით და ერთი ყუთი ყუთი *B* ტიპის კვერცხებით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). თითეულ ყუთში არის ზუსტად ერთი გატეხილი კვერცხი; ბ). ორივე ყუთში ერთად არის 2 გატეხილი კვერცხი.

15. ბანკმა გასცა კრედიტი 10 ადამიანზე, რომელთაგან თითოეულის მიერ კრედიტის დაუბრუნებლობის ალბათობა არის 0.15. იპოვეთ ვალის არდამბრუნებელ კრედიტორთა: ა). განაწილების კანონი; ბ). მათემატიკური ლოდინი; გ). უალბათესი რიცხვი.

16. მაღაზიაში ყოველთვიურად გაყიდული სარეცხი მანქანების რიცხვი განაწილებულია $Bi(100,0.25)$ კანონით. მაღაზიის ყოველდღიური ხარჯები შეადგენს 200 ლარს. სარეცხი მანქანის ფასია 1000 ლარი. გამოთვალეთ მაღაზიის ყოველთვიური მოგება.

17. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია პუასონის კანონით საშუალოთი 3. იპოვეთ: ა). $P\{\xi = 2\}$; ბ). $P\{\xi \le 1\}$; გ). $P\{\xi \ge 3\}$.

18. მოცემულია, რომ $\eta \equiv Po(3.25)$. გამოთვალეთ: ა). $P\{\eta = 3\}$; ბ). $P\{\eta \le 2\}$; გ). $P(\eta \ge 2)$.

19. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია პუასონის კანონით საშუალოთი 2.4. იპოვეთ: ა). $P\{\xi \le 3\}$; ბ). $P\{\xi \ge 2\}$; გ). $P\{\xi = 3\}$.

20. ავტომაგისტრალზე კვირაში საშუალოდ 2 ავარია ხდება. ჩავთვალოთ, რომ კვირაში ავარიათა რიცხვი ემორჩილება პუასონის განაწილების კანონს და გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). კონკრეტულ კვირას არ მოხდება ავარია; ბ). კონკრეტულ კვირას მოხდება 2 ავარია; გ). ორ კვირაში მოხდება 3-ზე ნაკლები ავარია.

21. წუთში საშუალოდ 15 მომხმარებელი გაივლის სუპერმარკეტის სალარო-აპარატთან შემოწმებას. ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს მიახლოებით პუასონის განაწილება და გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). 10 წუთიან ინტერვალში არცერთი მომხმარებელი არ გაივლის სალარო-აპარატთან შემოწმებას; ბ). 15 წუთიან ინტერვალში 3-ზე მეტი მომხმარებელი გაივლის სალარო-აპარატთან შემოწმებას.

22. მიმდინარე წლის იანვრის განმავლობაში თქვენ 15-ჯერ დაგპატიჟეს წვეულებაზე. ჩათვალეთ, რომ მომავალი წლის იანვარში თქვენს მიერ მიღებულ მოპატიჟებათა რაოდენობა განაწილებულია პუასონის კანონით იმავე საშუალოთი და გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). მომავალი წლის იანვრის კონკრეტულ დღეს თქვენ არ მიიღებთ არცერთ მიპატიჟებას; ბ). მომავალი წლის იანვრის თვის კონკრეტულ 7 დღიან კვირაში თქვენ მიიღებთ 3-ზე მეტ მიპატიჟებას.

23. ტექნიკური მომსახურების სადგურში 1 საათში შემოდის 100 ავტომობილი. შემოსულ ავტომობილთა რაოდენობა განაწილებულია პუასონის კანონით. იპოვეთ: ა). ალბათობა იმისა, რომ ტექნიკური მომსახურების სადგურში 3 წუთის განმავლობაში არ შემოვა ავტომობილი; ბ). დროის ინტერვალი, რომელშიც სულ ცოტა 0.25-ის ტოლი ალბათობით ტექნიკური მომსახურების სადგურში არ შემოვა ავტომობილი.

24. რადიოაქტიური წყარო საშუალოდ წამში ასხივებს 1 ნაწილაკს. ჩათვალეთ, რომ გამოსხივებულ ნაწილაკთა რაოდენობა ემორჩილება პუასონის კანონს. ა). გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ 4 წამში გამოსხივებული იქნება 0 ან 1 ნაწილაკი; ბ). გამოსხივების რეჟიმის შეცვლის შემდეგ ალბათობა იმისა, რომ 4 წამში გამოსხივებული იქნება 0 ან 1 ნაწილაკი არის 0.8. ამჟამად წამში საშუალოდ რამდენ ნაწილაკს ასხივებს რადიოაქტიური წყარო?

25. ქვემოთ მოყვანილ მაგალითებში მიუთითეთ როდისაა პუასონის განაწილება ადექვატური მოდელი: ა). წვიმის წვეთების რაოდენობა, რომელიც ჩვარდება ლიმონათის ბოთლში 1 წუთის განმავლობაში; ბ). სატვირთო ავტომობილების რაოდენობა, რომლებიც გადაკვეთენ კონკრეტულ ადგილს გადატვირთულ ავტომაგისტრალზე; გ). თვის განმავლობაში სადაზღვევო კომპანიაში შემოსულ პრეტენზიათა რაოდენობა.

26. ქვემოთ მოყვანილია რაოდენობა გზაზე მანქანაგადავლილი ზღარბების 13 კვირის განმავლობაში: 8 9 7 11 5 4 12 7 6 11 3 11. ა). გამოთვალეთ ამ მონაცემების საშუალო და დისპერსია და ახსენით რა შემთხვევაში იქნება პუასონის განაწილება ადექვატური მოდელი; ბ). გამოიყენეთ პუასონის განაწილება და ა) პუნქტში გამოთვლილი საშუალოთი გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ კვირაში მანქანაგადავლილი ზღარბების რაოდენობა მეტია ან ტოლი 7-ის; გ). თუ ალბათობა იმისა, რომ კვირაში მანქანაგადავლილი ზღარბების რაოდენო-

ბა მეტია ან ტოლი 7-ის იქნებოდა 0.0244, მაშინ რამდენი უნდა იყოს პუასონის განაწილების საშუალო.

27. მარტის თვეში შემოსული სატელეფონო ზარების რაოდენობის განაწილების კანონია

დღეში შემოსული ზარების რაოდენობა (x)	0	1	2	3	4
დღეების რაოდენობა	9	12	5	4	1

ა). გამოთვალეთ ფარდობითი სიხშირეები; ბ). გამოთვალეთ განაწილების საშუალო და დისპერსია. ახსენით ესადაგება თუ არა პუასონის განაწილება; გ). გამოიყენეთ პუასონის განაწილება და წინა პუნქტში გამოთვლილი საშუალოს მიხედვით გამოთვალეთ $P\{\xi = x\}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$; დ). შეადარეთ თეორიული ალბათობები და ფარდობითი სიხშირეები. ეთანხმებით თუ არა ბ) პუნქტის დასკვნას?

28. მოცემულია, რომ $\xi \equiv Po(m)$ და $P\{\xi = 1\} = 4P\{\xi = 2\}$. იპოვეთ: ა). m; ბ). $P\{\xi \geq 3\}$; გ). $P\{\xi \geq 4 \mid \xi \geq 3\}$.

29. ავტომაგისტრალის მე-100 კილომეტრზე შუადღის 10-წამიან ინტერვალში გავლილი მანქანების რაოდენობა ემორჩილება პუასონის განაწილებას $\xi \equiv Po(0.8)$. ა). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ აღნიშნულ ადგილს გადაკვეთს 3, 4 ან 5 ავტომობილი; ბ). ცნობილია, რომ აღნიშნულ ადგილი გადაკვეთა 3, 4 ან 5 ავტომობილმა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ავტომობილების რაოდენობა იყო ზუსტად 4.

30. სატელეფონო სადგურში 8.00 – 8.05 ინტერვალში შემოსულ გამოძახებათა რაოდენობა ემორჩილება პუასონის კანონს საშუალოთი 2. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). შემთხვევით შერჩეულ სამშაბათს სატელეფონო სადგურში 8.00 – 8.05 ინტერვალში არ შემოვა არცერთი გამოძახება; ბ). სამშაბათსა და ოთხშაბათს ერთად შემოვა ზუსტად 1 გამოძახება იმავე ინტერვალში; გ). გამოძახება შემოვიდა სამშაბათს, თუ ცნობილია, რომ სამშაბათსა და ოთხშაბათს ერთად შემოვიდა ზუსტად 1 გამოძახება.

31. ავტოქარხნის ყოველკვირეული მოცდენების რაოდენობა ξ განაწილებულია შემდეგნაირად:

x	0	1	2	3	4	5	6
$P\{\xi = x\}$	0.04	0.24	0.28	0.16	0.16	0.08	0.04

ა). იპოვეთ ξ-ს საშუალო; ბ). რა იქნება მოცდენების ერთობლივი მოსალოდნელი რაოდენობა მომავალი 48 კვირის განმავლობაში?

32. მათემატიკოსს დაავიწყდა პაროლი და ის ცდილობს შევიდეს კომპიუტერში. კომპიუტერი მხოლოდ 4 მცდელობის საშუალებას იძლევა. ყოველი მცდელობისას, დამოუკიდებლად სხვა მცდელობებისაგან, წარმატების ალბათობაა 0.4. ა). იპოვეთ კომპიუტერში წარმატებული შეღწევის ალბათობა; ბ). შეადგინეთ მცდელობათა რაოდენობის ალბათური განაწილების კანონი.

33. 52 კარტიდან შემთხვევით იღებენ სამ კარტს დაბრუნების გარეშე. შეადგინეთ ამოღებული ტუზების რიცხვის განაწილების კანონი.

34. ყოველი ჩართვისას ელექტრონული მოწყობილობა გამოყოფს 0, 1 ან 3 ვოლტის ტოლ ძაბვას შესაბამისად 1/2, 1/3 და 1/6 ალბათობებით. ξ იყოს ამ მო-

წყობილობის ორი დამოუკიდებელი ჩართვისას გამოყოფილი ძაბვის ჯამი. ა). შეადგინეთ ξ-ს ალბათური განაწილების კანონი; ბ). ამ მოწყობილობის 360-ჯერ დამოუკიდებლად ჩართვისას რამდენჯერ უნდა ველოდოთ შედეგს 1 ვოლტი?

35. დამწყები მეისრე მიზანში ახვედრებს ალბათობით 0.3. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მიზანში 6-ჯერ სროლისას მეისრე მიზანს მოარტყამს 2-ჯერ მაინც.

36. ნიკასა და მის ოთხ ამხანაგს ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად აქვს პრიზის მოგების 0.45-ის ტოლი ალბათობა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ზუსტად ორი ხუთი ამხანაგიდან მოიგებს პრიზს; ბ). ნიკა და მხოლოდ ერთი მისი ამხანაგი მოიგებს პრიზს.

37. აგდებენ 10 წესიერ სათამაშო კამათელს. თქვენ გითხრეს, რომ ერთ-ერთი აგდების შედეგი არის 6 ქულა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სულ ცოტა ორჯერ მოვიდა 6 ქულა.

38. 8.00 საათიდან 22.00 საათამდე გარკვეულ ბენზინგასამართ სადგურზე შემოდის საშუალოდ 0.8 ავტომობილი წუთში. იგულისხმეთ, რომ შემოსვლის დროები შემთხვევითია და გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სულ ცოტა 2 ავტომობილი შემოვა ბენზინგასამართ სადგურზე კონკრეტული ერთი წუთის განმავლობაში 8.00 საათიდან 22.00 საათამდე.

39. პატარა ქალაქის სახანძრო სადგურში ღამის გამოძახებათა რიცხვი მოდელირდება პუასონის განაწილებით საშუალოთი 4.2 ღამის განმავლობაში. ა). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ კონკრეტულ ღამეს სახანძრო სადგურში შემოვა 3 ან მეტი გამოძახება. ბ). რას უნდა აკმაყოფილებდეს სახანძრო სადგურში შემოსული გამოძახებები, რომ ის იყოს პუასონის მოდელის ადექვატური?

40. მაღაზია ყიდის ორი ფირმის ტელევიზორს. კვირაში გაყიდული სონის ფირმის ტელევიზორების საშუალო რიცხვია 1.8. გაყიდვებს ადგილი აქვს ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად შემთხვევით დროის მომენტებში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). მოცემულ კვირას გაიყიდება ზუსტად 2 სონის ფირმის ტელევიზორი; ბ). მოცემულ ორკვირიან პერიოდში გაიყიდება ზუსტად 4 სონის ფირმის ტელევიზორი.

41. სახლის მეპატრონეს სურს ბაღში დათესოს ბალახი. თესლის მობნევა ხდება შემთხვევით და ბაღის კონკრეტულ 1 კვ. სანტიმეტრი ფართობის მქონე ნაწილში დავარდნილი თესლის რაოდენობა ξ წარმოადგენს პუასონის კანონით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს, რომლის საშუალო ბაღის ნაწილის ფართობის პროპორციულია. ბაღის ფართობია 50 კვ. მეტრი და ითესება 10^6 ბალახის თესლი. გამოთვალეთ: ა). ξ-ს საშუალო; ბ). ალბათობა იმისა, რომ 1 კვ. სმ. ფართობის მქონე ნაწილში არ დაეცემა არცერთი თესლი; გ). $P\{\xi = 0 \text{ ან } \xi > 4\}$.

42. ფირმის თანამშრომლების მიერ სამუშაოს შესრულებისას კვირის განმავლობაში მიღებული ტრამვების რაოდენობის განაწილებაა:

ტრამვების რაოდენობა კვირაში	0	1	2	3	4 და მეტი
კვირეების რაოდენობა	31	17	3	1	0

ა). ახსენით, როდის შეიძლება ამ განაწილების მოდელად ჩაითვალოს პუასონის განაწილება; ბ). გამოთვალეთ ამ მონაცემების საშუალო და დისპერსია და ახსენით რატომ შეიძლება მოდელად გამოდგეს პუასონის განაწილება; გ). გამოთვალ-

ილი საშუალოს მიხედვით გამოთვალეთ პუასონის განაწილების თეორიული სიხშირეები იმისა, რომ კვირაში მოხდება 0, 1, 2, 3, 4 ან მეტი საწარმოო ტრამვა.

43. უმაღლესი ლიგის ფეხბურთის მატჩებში გატანილი ბურთების რაოდენობის ანალიზმა აჩვენა, რომ შემთხვევით შერჩეულ მატჩში გატანილი გოლების რაოდენობის მოდელად შეიძლება განვიხილოთ პუასონის განაწილება პარამეტრით 2.7. სხვადასხვა მატჩებში გატანილი გოლების რაოდენობა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). მატჩი დასრულდება გოლის გარეშე; ბ). მატჩში გატანილი იქნება 4 ან მეტი გოლი.

44. წინა ამოცანის პირობებში ცნობილია, რომ შაბათ დღეს ჩატარდა 11 შეხვედრა. ა). იპოვეთ იმ შეხვედრების მოსალოდნელი რიცხვი, რომლებიც დასრულდება გოლის გარეშე; ბ). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ გოლები გატანილი იქნება ყველა 11 შეხვედრაში; გ). როგორი განაწილება ექნება 11 შეხვედრაში გატანილი გოლების ჯამურ რაოდენობას; დ). გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ 11 შეხვედრაში გატანილი იქნება 30 გოლზე მეტი.

ამოცანები გამოცდისათვის

45. ეკა ესვრის სამიზნეს 10-ჯერ. ყოველი სროლისას ეკა სამიზნეს აზიანებს ალბათობით 0.4 დამოუკიდებლად სხვა სროლების შედეგებისაგან. ξ იყოს სამიზნის დაზიანებათა რიცხვი. იპოვეთ: ა). ξ-ს საშუალო და სტანდარტული გადახრა; ბ). $P\{\xi \ge 2\}$.

46. აგდებენ წესიერ სათამაშო კამათელს, რომელზეც აღნიშნულია ციფრები 1, 1, 2, 3, 4, 5. იპოვეთ მოსული ქულის საშუალო და დისპერსია.

47. ნიკას შეუძლია მიზნში მოარტყას ქვა ალბათობით 0.4. ის ისვრის ქვას 6-ჯერ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ქვა მიზანს მოხვდება ზუსტად 4-ჯერ; ბ). ქვა სამიზნეს პირველად მოხვდება მესამე გასროლისას.

48. ყოველი თამაშისას ბიჭი იგებს პრიზს ალბათობით 0.25. ის თამაშობს 10-ჯერ. ვიგულისხმოთ, რომ თამაშები ურთიერთდამოუკიდებელია. ξ იყოს მოგებულ პრიზთა რაოდენობა. იპოვეთ: ა). $E\xi$; ბ). $P\{\xi \le 2\}$.

49. დაზგა აწარმოებს ქსოვილს გარკვეული დაზიანებებით. დაზიანებების რაოდენობა 1 მეტრ ქსოვილში არის შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც ემორჩილება პუასონის განაწილებას საშუალოთი 3. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ქსოვილის 1 მეტრი შეიცავს 5 ან მეტ დაზიანებას.

50. ნიკა და რეზო აგდებენ ორ-ორ წესიერ სათამაშო კამათელს ერთდროულად. თითეულ კამათელზე მოსული ქულები იკრიბება. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ნიკა მოაგროვებს 9 ქულას; ბ). ნიკა და რეზო ორივე მოაგროვებს 9 – 9 ქულას; გ). ნიკა და რეზო მოაგროვებენ ერთი და იგივე ქულას; დ). ნიკას მიერ მოგროვილი ქულა აღემატება რეზოს მიერ მოგროვილ ქულას.

51. წინა ამოცანის პირობებში დავუშვათ, რომ ξ არის უდიდესი ოთხივე კამათელზე მოსული ქულიდან. ა). აჩვენეთ, რომ $P\{\xi \le x\} = (\frac{1}{6}x)^4$, $x = 1, 2, \ldots, 6$; ბ). გადაწერეთ და დაასრულეთ შემდეგი განაწილების კანონი:

x	1	2	3	4	5	6
$P\{\xi = x\}$	1/1296	15/1296				671/1296

გ). გამოთვალეთ $E\xi$.

52. ორი ტელეგრაფისტი გადასცემს გარკვეულ ტექსტს. ჯუანშერი ტექსტის გადაცემისას საშუალოდ უშვებს 2.7 შეცდომას, ხოლო ღვთისავარი 2.5 შეცდომას. ვიგულისხმოთ, რომ თითოეული ტელეგრაფისტის მიერ დაშვებული შეცდომების რაოდენობა ემორჩილება პუასონის განაწილებას. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ტექსტის გადაცემისას: ა). ჯუანშერი დაუშვებს 2 შეცდომას; ბ). ღვთისავარი დაუშვებს 3 შეცდომას; გ). ჯუანშერი დაუშვებს 2 შეცდომას და ღვთისავარი დაუშვებს 3 შეცდომას.

53. წინა ამოცანის პირობებში ცნობილია, რომ გარკვეული ტექსტის გადაცემისას ჯუანშერმა და ღვთისავარმა ერთად დაუშვეს 5 შეცდომა. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ჯუანშერმა მეტი შეცდომა დაუშვა, ვიდრე ღვთისავარმა.

54. წარსული დაკვირვებებიდან იაგომ იცის, რომ ფოსტალიონის მიერ დღის განმავლობაში მის სახლში მოტანილი წერილების რაოდენობა განაწილებულია პუასონის კანონით საშუალოთი 3. ა). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეულ დღეს ფოსტალიონი იაგოს სახლში მოიტანს ორ წერილს; ბ). ერთ დღეს იაგომ დაინახა, რომ ფოსტალიონი უახლოვდება მის სახლს და შესაბამისად, მან იცის, რომ ფოსტალიონს მოაქვს წერილი. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ დღეს ფოსტალიონი მოიტანს ორ წერილს.

55. ξ შემთხვევით სიდიდეს აქვს პუასონის განაწილება პარამეტრით λ. ალბათობა იმისა, რომ ξ მიიღებს მნიშვნელობას 1 ან 2 არის p. ა). დაწერეთ p-ს გამოსათვლელი გამოსახულება; ბ). დახაზეთ p-ს გრაფიკი, როცა $0 \le \lambda \le 4$; გ). იპოვეთ λ-ს ის მნიშვნელობა, როცა p მიაღწევს მაქსიმუმს.

56. ξ შემთხვევით სიდიდეს აქვს პუასონის განაწილება პარამეტრით λ და აკმაყოფილებს თანაფარდობას: $P\{\xi = 3\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\}$. ა). გამოთვალეთ λ-ს მნიშვნელობა; ბ). გამოთვალეთ $P\{2 \le \xi \le 4\}$.

57. სატელევიზო არხზე ახალ ამბებს უჩვენებენ დღის ერთი და იგივე დროს. ალბათობა იმისა, რომ გოდერძი უყურებს ახალ ამბებს კონკრეტულ დღეს არის 0.4. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ხუთი მომდევნო დღის განმავლობაში გოდერძი ახალ ამბებს უყურებს არა უმეტეს 3-ჯერ.

58. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონია:

x	0	1	2	3
$P\{\xi = x\}$	0.2	a	b	0.25

ცნობილია, რომ $E\xi = 1.55$. ა). იპოვეთ a და b; ბ). იპოვეთ $D\xi$.

59. ξ შემთხვევით სიდიდეს აქვს პუასონის განაწილება პარამეტრით λ. ა). მოცემულია, რომ $P\{\xi = 4\} = P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\}$, იპოვეთ λ-ს მნიშვნელობა; ბ). მოცემულია $\lambda = 3.2$, იპოვეთ ალბათობები: $P\{\xi \ge 2\}$ და $P\{\xi \le 3 | \xi \ge 2\}$.

60. მოთამაშეს შეაქვს n ლარი, ირჩევს 1, 2, 3, 4, 5 და 6 რიცხვებიდან ერთ რიცხვს და აგდებს სამ წესიერ სათამაშო კამათელს. თუ არჩეული რიცხვი მოვა სამივე კამათელზე, მაშინ ის იგებს შეტანილი თანხის გაოთხმაგებულს. თუ არჩეული რიცხვი მოვა ზუსტად ორ კამათელზე, მაშინ ის იგებს შეტანილი თანხის გასამმაგებულს. თუ არჩეული რიცხვი მოვა ზუსტად ერთ კამათელზე,

მაშინ ის იგებს შეტანილი თანხის გაორმაგებულს. თუ არჩეული რიცხვი არ მოდის არცერთ კამათელზე, მაშინ ის არაფერს იგებს. ა). გადაწერეთ და დაასრულეთ მოგებული თანხის რაოდენობის განაწილების კანონი:

მოგება	$-n$	n	$2n$	$3n$
ალბათობა		75/216		

ბ). აჩვენეთ, რომ მოთამაშის მოსალოდნელი მოგება არის $-\frac{17}{216}n$ ლარი; გ). რა თანხა უნდა შეიტანოს მოთამაშემ, რომ მისი მოსალოდნელი დანაკარგი იყოს 34 თეთრი?

61. ξ შემთხვევით სიდიდეს აქვს პუასონის განაწილება და $P\{\xi > 2\} = 0.404$. იპოვეთ $P\{\xi < 2\}$.

62. დისკრეტულ ξ შემთხვევით სიდიდეს აქვს შემდეგი განაწილების კანონი:

$$P\{\xi = x\} = \begin{cases} \dfrac{k}{x}, & \text{როცა } x = 1, 2, 3, 4, \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases}$$

გამოთვალეთ: ა). k მიდმივის მნიშვნელობა; ბ). $E\xi$.

პასუხები:

1. $Bi(10, 1/6)$: $P_{10}(4)$; $P_{10}(5)$; $P_{10}(6)$. **2.** $Bi(6, 24/49)$: $P_6(4)$. **3.** 0.0819; 0.0154; 0.0001; 1.2. **4.** 0.2561; 0.2048; 0.0005; 14/3. **5.** 0.2119; 0.4728; 0.0498; 4.05. **6.** 0.0017; 6. **7.** 0.6123; 0.3877. **8.** 0.0781; 0.0176. **9.** 0.6496. **10.** 0.0545. **11.** 0.1143. **12.** 0.0652. **13.** 0.2039; 7. **14.** 0.1424; 0.2821. **15.** $Bi(10, 0.15)$; 1.5; 1. **16.** 19000. **17.** 0.224; 0.1991; 0.5768. **18.** 0.2218; 0.3696; 0.8352. **19.** 0.7787; 0.6916; 0.209. **20.** 0.1353; 0.2707; 0.2381. **21.** 0.0821; 0.5162. **22.** 0.6065; 0.4634. **23.** 0.0067; 49.9წმ. **24.** 0.0916; 0.206 ნაწილაკი წამში. **25.** კი; არა; კი. **26.** 8, 8 კი, ვინაიდან საშუალო = დისპერსია; 0.6866; 2.8. **27.** 0.29, 0.39, 0.16, 0.13, 0.03; 1.23, 1.21, პუასონი გამოსადეგია; 0.29, 0.36, 0.22, 0.09, 0.03; პუასონი მისაღებია. **28.** 0.5; 0.0144; 0.1217. **29.** 0.0472; 0.162. **30.** 0.135; 0.0733; 0.5. **31.** 2.56; 122.9. **32.** 0.8704; 1, 2, 3, 4 – 0.4, 0.24, 0.144, 0.216. **33.** 0, 1, 2, 3 – 248/1105, 496/1105, 304/1105, 57/1105. **34.** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 – 1/4, 1/3, 1/9, 1/6, 1/9, 1/36; 120. **35.** 0.58. **36.** 0.337; 0.135. **37.** 0.615. 0.615. **38.** 0.191. **39.** 0.79; გამოძახებები უნდა შემოდიოდეს შემთხვევით, დამოუკიდებლად, თითო-თითოდ და მუდმივი ინტენსივობით. **40.** 0.268; 0.191. **41.** 2; 0.135; 0.188. **42.** ტრამვები უნდა ხდებოდეს შემთხვევით, ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად, თითოთითოდ და მუდმივი ინტენსივობით; 0.5, 0.481, შეიძლება რადგანაც საშუალო და დისპერსია დაახლოებით ტოლია; 32, 16, 4, 1, 0. **43.** 0.067; 0.286. **44.** 0.739; 0.465; $Po(29.7)$; 0.430.

თავი V
უწყვეტი ტიპის განაწილებები

ξ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **უწყვეტი ტიპის**, თუ მისი განაწილების ფუნქცია – $F_\xi(x) \coloneqq P\{\xi \le x\}$ უწყვეტია. თუ განაწილების ფუნქცია წარმოიდგინება $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du$ სახით, მაშინ $f_\xi(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების სიმკვრივე**. სიმკვრივეს აქვს შემდეგი თვისებები:

ა). $f(x) \ge 0$ ყოველი x-სათვის;

ბ). $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1$;

გ). $P\{\xi \in \langle a,b \rangle\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_{a}^{b} f_\xi(x)dx$, სადაც $\langle a,b \rangle$ არის ნებისმიერი (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ ინტერვალებიდან.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის მედიანა M არის ის მნიშვნელობა, რომელიც სიმკვრივის გრაფიკის ქვეშ მოთავსებულ ფართობს ყოფს ორ ტოლ ნაწილად. მათემატიკურად ის ასე განიმარტება:

$$P\{\xi \le M\} = F_\xi(M) = \int_{-\infty}^{M} f_\xi(x)dx = \frac{1}{2}.$$

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის p-**კვანტილი** ეწოდება ისეთ x_p მნიშვნელობას, რომელ მნიშვნელობამდეც სიმკვრივის გრაფიკის ქვეშ მოთავსებული ფართობი p-ს ტოლია:

$$P\{\xi \le x_p\} = F_\xi(x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} f_\xi(x)dx = p.$$

გასაგებია, რომ $x_{0.5} = M$

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **ქვედა კვარტილი**, Q_1 (შესაბამისად, **ზედა კვარტილი**, Q_3) ეწოდება $\frac{1}{4}$-კვანტილს (შესაბამისად, $\frac{3}{4}$-კვანტილს).

სხვაობას $Q_3 - Q_1$ **კვარტილთშორისი გაბნევის დიაპაზონი** ეწოდება.

განაწილების $(1-\alpha)$-კვანტილს α-**ზედა კრიტიკული წერტილი** ეწოდება.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **მოდა** m ეწოდება არგუმენტის იმ მნიშვნელობას, სადაც სიმკვრივე აღწევს მაქსიმუმს: $f_\xi(m) = \max_x f_\xi(x)$.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **მათემატიკური ლოდინი (ანუ საშუალო)** განიმარტება შემდეგნაირად:

$$E\xi = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx.$$

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის **დისპერსია** მოიცემა ფორმულით:

$$D\xi = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx - \mu^2 .$$

ასიმეტრიის კოეფიციენტი a გამოითვლება ფორმულით:

$$a = \frac{1}{\sigma^3}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^3 f_\xi(x)dx .$$

ექსცესის კოეფიციენტი e ტოლია:

$$e = \frac{1}{\sigma^4}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^4 f_\xi(x)dx - 3 .$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x, & \text{თუ } 1 \le x \le 2; \\ 0, & \text{სხვაგან.} \end{cases}$$

ა). შეამოწმეთ, რომ $f_\xi(x)$ აკმაყოფილებს სიმკვრივის ა) და ბ) თვისებას;

ბ). გამოთვალეთ $P\{1.5 \le \xi \le 2\}$.

ამოხსნა. ა). $f(x) \ge 0$ ყოველი x-სათვის, ვინაიდან $\frac{2}{3}x > 0$, როცა $x > 0$; გარდა ამისა,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = \int_1^2 \frac{2}{3}xdx = \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\cdot(2^2-1^2) = 1 .$$

ბ). $P\{1.5 \le \xi \le 2\} = \int_{1.5}^{2} f_\xi(x)dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{1.5}^2 = \frac{1}{3}\cdot(2^2-1.5^2) = \frac{1}{3}\cdot 1.75 = 0.583 .$

მაგალითი 2. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} k(1+x^2), & \text{თუ } -1 \le x \le 1; \\ 0, & \text{სხვაგან,} \end{cases}$$

სადაც k მუდმივია. იპოვეთ: ა). k; ბ). $P\{0.3 \le \xi \le 0.6\}$; გ). $P\{|\xi| \le 0.2\}$.

ამოხსნა. ა). ვისარგებლოთ სიმკვრივის ბ) თვისებით:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = \int_{-1}^{1} k(1+x^2)dx = k(x+\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= k(1+\frac{1}{3}\cdot 1^3) - k[(-1)+\frac{1}{3}\cdot(-1)^3] = k\cdot\frac{4}{3} - k\cdot(-\frac{4}{3}) = \frac{8k}{3},$$

ე. ი. $\frac{8k}{3} = 1$. საიდანაც $k = 3/8$;

ბ). $$P\{0.3 \le \xi \le 0.6\} = \int_{0.3}^{0.6}\frac{3}{8}(1+x^2)dx = \frac{3}{8}(x+\frac{1}{3}x^3)\Big|_{0.3}^{0.6} =$$

$$=\frac{3}{8}(0.6+\frac{1}{3}\cdot 0.6^3)-\frac{3}{8}(0.3+\frac{1}{3}\cdot 0.3^3)=0.136;$$

გ). $$P\{|\xi|<0.2\}=P\{-0.2<\xi<0.2\}=\int_{-0.2}^{0.2}\frac{3}{8}(1+x^2)dx=\frac{3}{8}(x+\frac{1}{3}x^3)|_{-0.2}^{0.2}=$$

$$=\frac{3}{8}(0.2+\frac{1}{3}\cdot 0.2^3)-\frac{3}{8}[-0.2+\frac{1}{3}\cdot(-0.3)^3]=0.152.$$

მაგალითი 3. სავაჭრო ცენტრის გამყიდველთა წლიური ხელფასი ξ, გაზომილი 1000 ლარებში, მოდელირდება ალბათური განაწილების სიმკვრივით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} cx^{-7/2}, & \text{თუ } x\ge 16; \\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ: ა). c-ს მნიშვნელობა; ბ). ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული გამყიდველის წლიური ხელფასი მოთავსებულია 20 000 ლარსა და 30 000 ლარს შორის.

ამოხსნა. ა). $$1=\int_{-\infty}^{\infty}f_\xi(x)dx=\int_{16}^{\infty}cx^{-7/2}dx=-\frac{2}{5}\cdot cx^{-5/2}|_{16}^{\infty}=(-0)-(-\frac{2}{5}\cdot c\cdot 16^{-5/2})=\frac{c}{2560},$$

საიდანაც $c=2560$;

ბ). $$P\{20\le\xi\le 30\}=\int_{20}^{30}2560x^{-7/2}dx=2560\cdot(-\frac{2}{5})\cdot x^{-5/2}|_{20}^{30}=$$

$$=2560\cdot(-\frac{2}{5})\cdot 30^{-5/2}-2560\cdot(-\frac{2}{5})\cdot 20^{-5/2}=0.365.$$

მაგალითი 4. 100 000 ლიტრებში გაზომილი ბენზინის ყოველკვირეული გაყიდვები ξ აღიწერება ორი A და B მოდელით. A მოდელის მიხედვით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} 2x, & \text{თუ } 0\le x\le 1; \\ 0, & \text{სხვაგან,}\end{cases}$$

ხოლო B მოდელის თანახმად:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} 12x^3(1-x^2), & \text{თუ } 0\le x\le 1; \\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა). იპოვეთ პირველი მოდელის მედიანა M_A; ბ). აჩვენეთ, რომ მეორე მოდელსაც იგივე მედიანა აქვს, $M_B=M_A$.

ამოხსნა. ა). განმარტების თანახმად:

$$\frac{1}{2}=\int_{-\infty}^{M_A}f_\xi(x)dx=\int_0^{M_A}2xdx=2\cdot\frac{x^2}{2}|_0^{M_A}=(M_A)^2.$$

ამიტომ $M_A=\sqrt{1/2}$;

ბ). ანალოგიურად:

$$\frac{1}{2}=\int_{-\infty}^{M_B}f_\xi(x)dx=\int_0^{M_B}12x^3(1-x^2)dx=(3x^4-2x^6)|_0^{M_B}=$$

$$=3\cdot(M_B)^4-2\cdot(M_B)^6=(M_B)^4\cdot[3-2\cdot(M_B)^2].$$

გავიხსენოთ, რომ $(M_A)^2 = \frac{1}{2}$. მეორე მხრივ, რადგანაც $(\frac{1}{2})^2 \cdot [3-2\cdot\frac{1}{2}] = \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2}$, ამიტომ ცხადია, რომ $M_B = M_A = \sqrt{1/2}$.

მაგალითი 5. ამოცანა 3-ში გამოთვალეთ წლიური ხელფასის: ა). მედიანა; ბ). ქვედა და ზედა კვარტილები; გ). მოდა; დ). მათემატიკური ლოდინი.

ამოხსნა. ა). გვაქვს:

$$\frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{M} f_\xi(x)dx = \int_{16}^{M} 2560x^{-7/2}dx = 2560\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{-5/2}\Big|_{16}^{M} = -1024M^{-5/2}+1.$$

ამიტომ მედიანისათვის ვღებულობთ განტოლებას: $-1024M^{-5/2}+1 = 1/2$. საიდანაც ადვილად დავასკვნით, რომ $M^{5/2} = 2048$, ანუ $M = 21.1$. შესაბამისად, წლიური ხელფასის მედიანა იქნება $21.1\cdot 1000 = 21100$ ლარი;

ბ). განმარტების თანახმად:

$$\frac{1}{4} = \int_{-\infty}^{Q_1} f_\xi(x)dx = \int_{16}^{Q_1} 2560x^{-7/2}dx = 2560\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{-5/2}\Big|_{16}^{Q_1} = -1024Q_1^{-5/2}+1.$$

შესაბამისად, ქვედა კვარტილისათვის გვაქვს განტოლება: $-1024Q_1^{-5/2}+1 = 1/4$, საიდანაც გვაქვს: $Q_1 = (1024\cdot\frac{4}{3})^{2/5} = 18$. ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ ზედა კვარტილი $Q_3 = 27.9$;

გ). ვინაიდან სიმკვრივე კლებადია ფუნქციაა ინტერვალზე $[16,+\infty)$, ამიტომ მოდა იქნება $m = 16$. შესაბამისად, წლიური ხელფასის მოდაა $16\cdot 1000 = 16000$ ლარი.

დ). განმარტების თანახმად:

$$\mu = E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf_\xi(x)dx = \int_{16}^{\infty} x\cdot 2560x^{-7/2}dx = \int_{16}^{\infty} 2560x^{-5/2}dx =$$

$$= 2560\cdot(-\frac{2}{3})\cdot x^{-3/2}\Big|_{16}^{\infty} = 0 - 2560\cdot(-\frac{2}{3})\cdot 16^{-3/2}\Big|_{16}^{\infty} = 26\frac{2}{3}.$$

ე. ი. გამყიდველთა ხელფასის საშუალოა $26\frac{2}{3}\cdot 1000 = 26700$ ლარი.

შევნიშნავთ, რომ საშუალო მეტია მედიანაზე, ვინაიდან განაწილება დადებითად ასიმეტრიულია.

მაგალითი 6. გამოთვალეთ მოდა ამოცანა 4-ის B მოდელში.

ამოხსნა. გავაწარმოოთ სიმკვრივე და გავუტოლოთ ნულს:

$$[12x^3(1-x^2)]' = 36x^2 - 60x^4 = 12x^2(3-5x^2) = 0.$$

ამ განტოლების ფესვებია: 0, $-\sqrt{3/5}$ და $\sqrt{3/5}$, რომელთაგან $0 \le x \le 1$ შუალედში ვარდება მხოლოდ $\sqrt{3/5}$ და აქ $12x^3(1-x^2)$ ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმს. შესაბამისად, მოდა არის $\sqrt{3/5} = 0.775$. ამიტომ გაყიდული ბენზინის მოდაა:

$$0.775\cdot 100\,000 = 77\,500 \text{ ლიტრი}.$$

მაგალითი 7. ბენზინგასამართი სადგურის ყოველკვირეული მოთხოვნა ბენზინზე ξ გაზომილი 1000 ლიტრებში მოდელირდება სიმკვრივის ფუნქციით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}120x^2(1-x), & \text{თუ } 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

გამოთვალეთ საშუალოკვირეული მოთხოვნა ბენზინზე.

ამოხსნა. განმარტების თანახმად:

$$\mu=E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xf_\xi(x)dx=\int_0^1 x\cdot 120x^2(1-x)dx=120\cdot\int_0^1(x^3-x^4)dx=$$

$$=(30x^4-24x^5)|_0^1=30-24=6\,.$$

შესაბამისად, ბენზინგასამართი სადგურის საშუალო მოთხოვნა ბენზინზე კვირაში შეადგენს: $6\cdot 1000=6000$ ლიტრს.

მაგალითი 8. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}\cdot x(2-x), & \text{თუ } 0\le x\le 2;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ: ა). საშუალო; ბ). დისპერსია; გ). $P\{\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma\}$.

ამოხსნა. ა). $\mu=E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xf_\xi(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{3}{4}\cdot x(2-x)dx=\int_0^2(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3)dx=$

$$=(\frac{x^3}{2}-\frac{3x^4}{16})|_0^2=4-3=1;$$

ბ). $\sigma^2=D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_\xi(x)dx-\mu^2=\int_0^2x^2\cdot\frac{3}{4}\cdot x(2-x)dx-1^2=\int_0^2(\frac{3}{2}x^3-\frac{3}{4}x^4)dx-1=$

$$=(\frac{3x^4}{8}-\frac{3x^5}{20})|_0^2-1=(6-\frac{24}{5})-0-1=\frac{1}{5}=0.2;$$

გ). $$P\{\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma\}=P\{1-\sqrt{0.2}<\xi<1+\sqrt{0.2}\}=$$

$$=\int_{1-\sqrt{0.2}}^{1+\sqrt{0.2}}\frac{3}{4}\cdot x(2-x)dx=\int_{1-\sqrt{0.2}}^{1+\sqrt{0.2}}(\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2)dx=(\frac{3x^2}{4}-\frac{x^3}{4})|_{1-\sqrt{0.2}}^{1+\sqrt{0.2}}=$$

$$=(\frac{3\cdot(1+\sqrt{0.2})^2}{4}-\frac{(1+\sqrt{0.2})^3}{4})-(\frac{3\cdot(1-\sqrt{0.2})^2}{4}-\frac{(1-\sqrt{0.2})^3}{4})=$$

$$=(\frac{3\cdot(1.447)^2}{4}-\frac{(1.447)^3}{4})-(\frac{3\cdot(0.552)^2}{4}-\frac{(0.552)^3}{4})=0.626.$$

მაგალითი 9. მოცემულია განაწილების სიმკვრივე:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \cos x, & 0<x\le\pi/2,\\ 0, & x>\pi/2.\end{cases}$$

იპოვეთ განაწილების ფუნქცია.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ ფორმულით: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du$.

თუ $u \le 0$, მაშინ $f(u)=0$. შესაბამისად, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0du=0$;

თუ $0<u\le \pi/2$, მაშინ $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0du+\int_{0}^{x}\cos u du=\sin x$;

თუ $x>\pi/2$, მაშინ $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0du+\int_{0}^{\pi/2}\cos u du+\int_{\pi/2}^{x} 0du=\sin x|_0^{\pi/2}=1$.

საბოლოოდ გვაქვს: $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2,\\ 0, & x>\pi/2.\end{cases}$

ამოცანები

1. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}c(1-\frac{1}{8}x), & \text{თუ } 0\le x\le 8;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ: ა). c მუდმივის მნიშვნელობა; ბ). $P\{\xi \ge 6\}$; გ). $P\{4\le \xi\le 6\}$.

2. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}cx^2, & \text{თუ } 0\le x\le 3;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ: ა). c მუდმივის მნიშვნელობა; ბ). $P\{\xi\le 2\}$; გ). $P\{1.5\le\xi\le 2.5\}$; დ). x-ის მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ $P\{\xi\le x\}=0.2$.

3. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}c(x^2+2), & \text{თუ } \le x\le 3;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ: ა). c მუდმივის მნიშვნელობა; ბ). $P\{\xi\le 1.5\}$.

4. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}c(4-x^2), & \text{თუ } -2\le x\le 2;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ: ა). c მუდმივის მნიშვნელობა; ბ). $P\{\xi\ge 0\}$; გ). $P\{\xi\ge 1\}$; დ). $P\{|\xi|\ge 1\}$; ე). $P\{-0.5\le\xi\le 0.5\}$.

5. კომპიუტერის "კარტრიჯის" მუშაობის ხანგრძლივობაა ξ საათი. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}cx^{-2}, & \text{თუ } x\ge 4;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

გამოთვალეთ c მუდმივის მნიშვნელობა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). "კარტრიჯი" იმუშავებს სულ ცოტა 500 საათი; ბ). "კარტრიჯი" შესაცვლელი გახდება მანამ სანამ ის იმუშავებს 600 საათი; გ). ორი "კარტრიჯი" შესაცვლელი იქნება მანამ სანამ თითოეული იმუშავებს 600-600 საათი; დ). ოთხი "კარტრიჯიდან" ორი იმუშავებს 600 საათზე მეტს, ხოლო ორი 600 საათზე ნაკლებს.

6. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} c(x-a)^2, & \text{თუ } 0\le x\le a;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ: ა). a და c მუდმივის მნიშვნელობები; ბ). $P\{\xi\ge a/2\}$.

7. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & \text{თუ } 0\le x\le 3;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის: ა). მედიანა; ბ). ქვედა და ზედა კვარტილები.

8. კომპიუტერის "კარტრიჯის" სალებავის მუშაობის ხანგრძლივობა ξ, გაზომილი საათებში, მოდელირდება ალბათური განაწილების სიმკვრივით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} 400x^{-2}, & \text{თუ } x\ge 400;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ "კარტრიჯის" მუშაობის ხანგრძლივობის მედიანა.

9. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} 2x-4, & \text{თუ } 2\le x\le 3;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა). დახაზეთ სიმკვრივის გრაფიკი; ბ). იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის მედიანა და მოდა; გ). იპოვეთ კვარტილთშორისი გაბნევის დიაპაზონი.

10. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} \frac{2}{5}(1-\frac{1}{5}x), & \text{თუ } 0\le x\le 5;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა). დახაზეთ სიმკვრივის გრაფიკი; ბ). იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის მედიანა და მოდალური მნიშვნელობა.

11. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x), & \text{თუ } 0\le x\le 2;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის მოდალური მნიშვნელობა.

12. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} cx^2(1-x), & \text{თუ } 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა). იპოვეთ c; ბ). გამოთვალეთ მოდა; გ). დაწერეთ განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს მედიანა M.

13. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & \text{თუ } 0\le x\le 3;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ საშუალო და დისპერსია.

14. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}2x-4, & \text{თუ } 2\le x\le 3;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

იპოვეთ საშუალო და დისპერსია.

15. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1-\frac{1}{8}x), & \text{თუ } 0\le x\le 8;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა). დახაზეთ სიმკვრივის გრაფიკი; ბ). იპოვეთ საშუალო და დისპერსია.

16. საწარმოს მიერ გამოშვებული სილიკონის მასა ξ, გაზომილი კილოგრამებში, მოდელირდება განაწილების სიმკვრივით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{3}{32}(4x-x^2), & \text{თუ } 0\le x\le 4;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა). დახაზეთ სიმკვრივის გრაფიკი; ბ). იპოვეთ სილიკონის მასის საშუალო და დისპერსია.

17. ელემენტების მუშაობის ხანგრძლივობა ξ, გაზომილი საათებში, მოდელირდება განაწილების სიმკვრივით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}3000x^{-4}, & \text{თუ } x\ge 10;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა). დახაზეთ სიმკვრივის გრაფიკი; ბ). იპოვეთ ელემენტების მუშაობის ხანგრძლივობის საშუალო და დისპერსია.

18. კომპიუტერის "კარტრიჯის" მუშაობის ხანგრძლივობა ξ, გაზომილი საათებში, მოდელირდება ალბათური განაწილების სიმკვრივით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}cx^{-2}, & \text{თუ } 400\le x\le 900;\\ 0, & \text{სხვაგან.}\end{cases}$$

ა). გამოთვალეთ c-ს მნიშვნელობა; ბ). დახაზეთ სიმკვრივის გრაფიკი; გ). იპოვეთ "კარტრიჯის" მუშაობის ხანგრძლივობის საშუალო და დისპერსია.

19. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ 0.5x, & 2<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ξ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას, რომელიც: ა). ნაკლებია 0.2-ზე; ბ). ნაკლებია 3-ზე; გ). არ არის ნაკლები 3-ზე; დ). არ არის ნაკლები 5-ზე.

20. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 4 დამოკიდებელი დაკვირვების შედეგად ξ შემთხვევითი სიდიდე 3-ჯერ მიიღებს მნიშვნელობას (0.25, 0.75) შუალედიდან.

21. იპოვეთ განაწილების სიმკვრივე, თუ განაწილების ფუნქციაა:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2,\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$$

22. იპოვეთ განაწილების სიმკვრივე, თუ განაწილების ფუნქციაა:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin 2x, & 0<x\le \pi/4,\\ 1, & x>\pi/4.\end{cases}$$

23. იპოვეთ განაწილების ფუნქცია, თუ განაწილების სიმკვრივეა:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x\le \pi/2,\\ 0, & \text{სხვაგან}.\end{cases}$$

24. იპოვეთ განაწილების ფუნქცია, თუ განაწილების სიმკვრივეა:

$$f(x)=\begin{cases}x-1/2, & 1<x\le 2,\\ 0, & \text{სხვაგან}.\end{cases}$$

25. იპოვეთ [2, 8] მონაკვეთზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე და სტანდარტული გადახრა.

პასუხები:

1. 1/4; 1/16; 3/16. 2. 1/9; 8/27; 147/324; 1.75. 3. 1/15; 11/40. 4. 3/32; 1/2; 5/32; 5/16; 47/128. 5. 400; 4/5; 1/3; 1/9; 8/27. 6. 3; 1/9; 1/8. 7. 2.38; 2.73; 1.89. 8. 800. 9. –; $2+\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 2; $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$. 10. –; $5-\frac{5}{2}\sqrt{2}$, 0. 11. 1. 12. 12; 2/3; $6M^4-8M^3+1=0$. 13. 9/4, 27/80. 14. 8/3, 1/18. 15. –; 8/3, 32/9. 16. –; 2, 4/5. 17. –; 15, 75. 18. 720; –; 584, 19100. 19. 0; 0.5; 0.5; 0. 20. 0.25 ($Bi(4,0.5): P_4(3)=0.25$). 21. $\cos x\,\chi_{(0,\pi/2]}(x)$. 22. $2\cos 2x\,\chi_{(0,\pi/4]}(x)$. 23. $F(x)=0, x\le 0;$ $1-\cos x, 0<x\le \pi/2;$ $1,$ $x>\pi/2$. 24. $F(x)=0,$ $x\le 1;$ $1/2(x^2-x)$, $1<x\le 2$; $1,$ $x>2$. 25. $\frac{1}{6}\chi_{[2,8]}(x)$; $\sqrt{3}$.

თავი VI
ნორმალური განაწილება

შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **ნორმალური** და აღინიშნება სიმბოლოთი $N(a,\sigma^2)$, თუ მის განაწილების სიმკვრივეს (შესაბამისად, განაწილების ფუნქციას) აქვს სახე:

$$f_{N(a,\sigma^2)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \text{ (შესაბამისად, } F_{N(a,\sigma^2)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt\text{).}$$

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ($N(0,1)$) სიმკვრივე (შესაბამისად, განაწილების ფუნქცია) აღინიშნება სიმბოლოთი:

$\varphi(x):=f_{N(0,1)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (შესაბამისად, $\Phi(x):=F_{N(0,1)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$; გარდა ამისა, იხმარება აღნიშვნა: $\Phi_0(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$).

ცხადია, რომ: $\varphi(-x)=\varphi(x)$; $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$; $\Phi(x)=0.5+\Phi_0(x)$, $x>0$;

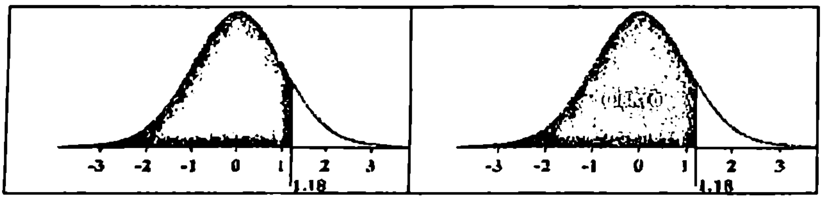
$\frac{N(a,\sigma^2)-a}{\sigma}=N(0,1)$; $P\{N(0,1)\in\langle c,d\rangle\}=\Phi(d)-\Phi(c)$;

$P\{N(a,\sigma^2)\in\langle c,d\rangle\}=\Phi(\frac{d-a}{\sigma})-\Phi(\frac{c-a}{\sigma})$; $x_p^{a,\sigma^2}=\sigma\cdot x_p^{0,1}+a$; $x_p^{0,1}=\frac{x_p^{a,\sigma^2}-a}{\sigma}$, სადაც x_p^{a,σ^2} არის $N(a,\sigma^2)$-ის p-კვანტილი.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე ნაკლებია 1.18-ზე, $P(N(0,1)<1.18)$?

ამოხსნა. დავხაზოთ სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივის წირი და აბსცისთა ღერძზე ავღნიშნოთ 1.18-ის შესაბამისი წერტილი (ამ შემთხვევაში $z=1.18$).



ნორმალური განაწილების ცხრილის პირველ სვეტში მოვძებნოთ რიცხვი 1.1, ხოლო პირველ სტრიქონში კი – რიცხვი .08.

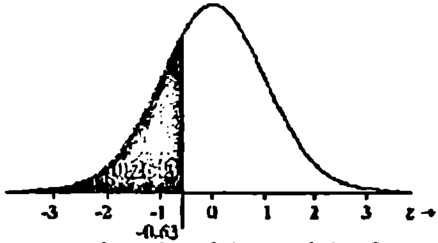
1.1-ის შესაბამისი სტრიქონისა და .08-ის შესაბამისი სვეტის გადაკვეთაზე ვპოულობთ რიცხვს – 0.8810. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება

$$P(N(0,1)<1.18)=0.8810 \quad \text{ანუ } 88.10\%.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე ნაკლებია -0.63-ზე, $P(N(0,1)<-0.63)$?

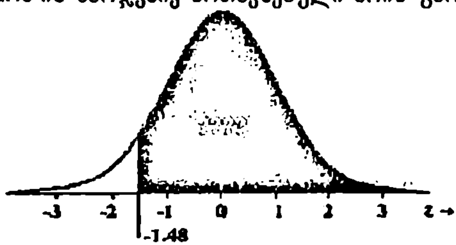
ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $z=-0.63$ და საძიებელი ალბათობა იქნება

$$P(N(0,1)<-0.63)=P(N(0,1)>0.63)=1-\Phi(0.63)=1-0.7357=0.2643 \quad \text{ანუ } 26.43\%.$$



მაგალითი 3. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე მეტია -1.48-ზე, $P(N(0,1)>-1.48)$?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $z=-1.48$ და გამოსათვლელია ნორმალური განაწილების წირის ქვეშ -1.48-ის მარჯვენივ მოთავსებული არის ფართობი.

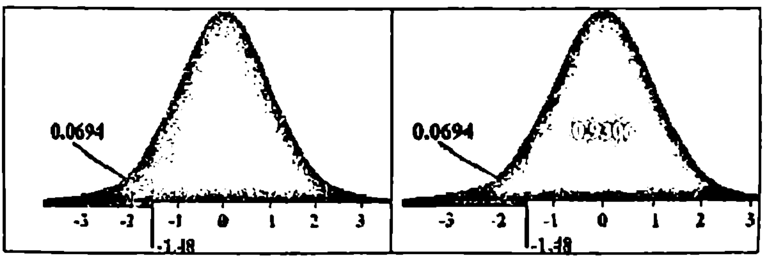


თუ ვისარგებლებთ ნორმალური განაწილების სიმეტრიულობითა და $\Phi(z)$ ფუნქციის ცხრილებით, მივიღებთ:

$$P(N(0,1)>-1.48)=P(N(0,1)<1.48)=\Phi(1.48)=0.9306.$$

შენიშვნა. შეგვიძლია ვისარგებლოთ საწინააღმდეგო ხდომილების ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულით და მაშინ მაგალითი დაიყვანება წინა მაგალითზე:

$$P(N(0,1)>-1.48)=1-P(N(0,1)\le -1.48)=1-P(N(0,1)<-1.48)=1-0.0694=0.9306.$$

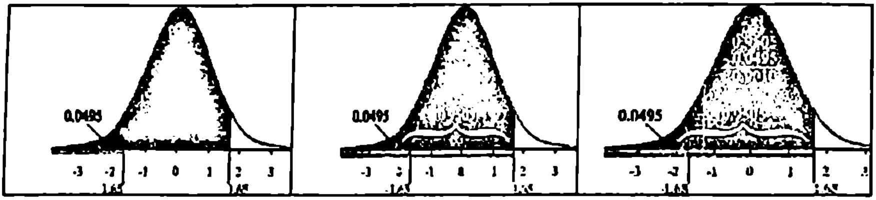


მაგალითი 4. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდე მოთავსებულია შუალედში -1.65-სა და 1.65-ს შორის, $P(-1.65 < N(0,1) < 1.65)$?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში საძიებელი ალბათობა იქნება;

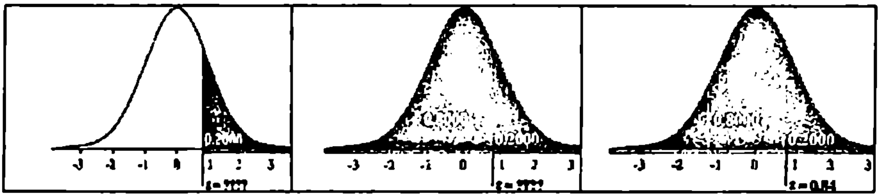
$$P(-1.65 < N(0,1) < 1.65) = \Phi(1.65) - \Phi(-1.65) =$$
$$= \Phi(1.65) - [1 - \Phi(1.65)] = 2\Phi(1.65) - 1 = 2 \times 0.9505 - 1 = 0.9010.$$

შევნიშნავთ, რომ ამოხსნის პროცედურები სქემატურად გამოსახულია ქვემოთმოყვანილ სამ ნახაზზე:



მაგალითი 5. ვიპოვოთ z-ის ისეთი მნიშვნელობა, რომლის მარჯვნივ სტანდარტული ნორმალური განაწილების წირის ქვეშ მოთავსებული არის ფართობი ტოლია 0.2000-ის?

ამოხსნა. ცხადია, რომ ეს ამოცანა ტოლფასია z-ის ისეთი მნიშვნელობის მოძებნის, რომლის მარცხნივ ნორმალური განაწილების წირის ქვეშ მოთავსებული არის ფართობი ტოლია 1-0.2000=0.8000-ის. ნორმალური განაწილების ცხრილში ვპოულობთ 0.8000-სთან ყველაზე ახლოს მდგომ რიცხვს – 0.7995-ს. ეს რიცხვი დგას 0.8-ის შესაბამისი სტრიქონისა და .04-ის შესაბამისი სვეტის გადაკვეთაზე. ამიტომ გასაგებია, რომ z-ის საძიებელი მნიშვნელობაა $z = 0.84$.



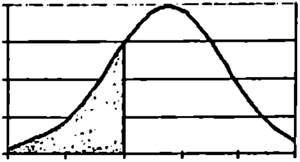
მაგალითი 6. დავუშვათ, რომ ავტომობილის დაზიანების შემთხვევაში ავარიულ გამოძახებაზე რეაგირების საშუალო დრო არის 25 წუთი. ჩავთვალოთ, რომ ეს სიდიდე განაწილებულია დაახლოებით ნორმალურად და მისი სტანდარტული გადახრა ტოლია 4.5 წუთის. შემთხვევით შერჩეულ იქნა 80 გამოძახება. დაახლოებით რამდენ მათგანზე მოხდება რეგირება 15 წუთზე ნაკლებ დროში?

ამოხსნა. ამ ამოცანის ამოსახსნელად ვიპოვოთ ნორმალური წირის ქვეშ 15-ის მარცხნივ მდებარე არის ფართობი.

ნაბიჯი 1. დავხაზოთ გრაფიკი და მოვნიშნოთ საძიებელი არე.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ 15-ის z მნიშვნელობა:

$$z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{15-25}{4.5}=-\frac{10}{4.5}=-2.22.$$



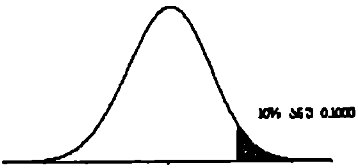
ნაბიჯი 3. ვიპოვოთ $z=-2.22$-სა და $z=0$-ს შორის მდებარე არის ფართობი. ის ტოლია 0.4868-ის.

ნაბიჯი 4. გამოვაკლოთ 0.5000-ს 0.4868. მივიღებთ 0.0132-ს.

ნაბიჯი 5. იმისათვის, რომ გავიგოთ რანდენ გამოძახებაზე მოხდა რეაგირება 15 წუთზე ნაკლებ დროში, გავამრავლოთ შერჩევის მოცულობა (80) მიღებულ ფართობზე (0.0132). მაშინ მივიღებთ 1.056-ს. მაშასადამე, 1.056 ანუ დაახლოებით ერთ გამოძახებაზე მოხდება რეაგირება 15 წუთზე ნაკლებ დროში.

მაგალითი 7. ცნობილია, რომ აბიტურიენტების მხოლოდ 10% შეიძლება გახდეს სტუდენტი. ჩავთვალოთ, რომ აბიტურიენტების მიერ მოგროვილი ქულების მნიშვნელობები ნორმალურადაა განაწილებული საშუალოთი 200 და სტანდარტული გადახრით 20. ვიპოვოთ ის მინიმალური ქულა, რომელიც საჭიროა რათა აბიტურიენტი გახდეს სტუდენტი.

ამოხსნა. ვინაიდან აბიტურიენტების მიერ მოგროვილი ქულების მნიშვნელობები ნორმალურადაა განაწილებული, ამიტომ იმ ქულის მნიშვნელობა (X), რომლის ზევითაც აბიტურიენტი გახდება სტუდენტი, არის ისეთი რიცხვი, რომლის მარჯვნივ ნორმალური წირის ქვეშ მოთავსებული არის ფართობი ტოლია 10%-ის ანუ 0.1000-ის:



ნაბიჯი 1. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ნორმალური წირის ქვეშ 200-სა და X-ს შორის მდებარე არის ფართობი 0.5000-ს გამოვაკლოთ 0.1000, მივიღებთ 0.4000-ს.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ z მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება ნორმალური განაწილების ცხრილში 0.4000-ს. იმ შემთხვევაში, როცა ცხრილში არ იძებნება ზუსტად ეს მნიშვნელობა ვიღებთ მასთან ყველაზე ახლოს მყოფს, ამ შემთხვევაში 0.3997-ს. შესაბამისი $z=1.28$.

ნაბიჯი 3. შევიტანოთ 1.28 z მნიშვნელობის გამოსათვლელ ფორმულაში $z=(X-\mu)/\sigma$ და ამოვხსნათ X

$$1.28 = \frac{X-\mu}{\sigma}$$
$$1.28\times 20 + 200 = X$$
$$X = 25.60 + 200 = 225.60$$
$$X = 226.$$

ე.ი. იმისათვის, რომ აბიტურიენტი გახდეს სტუდენტი, მან უნდა მოაგროვოს 226 ქულა.

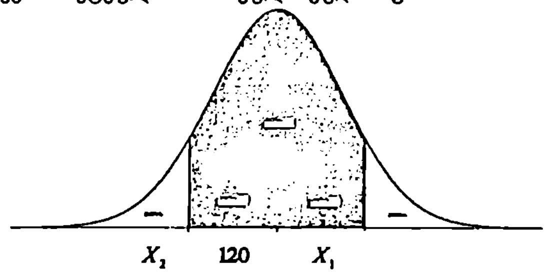
შენიშვნა. იმ შემთხვევაში, როცა ფართობის მნიშვნელობა ვარდება ცხრილის ორი მნიშვნელობის ზუსტად შუაში, მაშინ ვიღებთ მათი შესაბამისი z მნიშვნელობებიდან უფრო დიდს. მაგალითად, თუ ფართობის მნიშვნელობაა 0.4500, ის იმყოფება 0.4495-ისა და 0.4505-ის შუაში და z მნიშვნელობად ვიღებთ 1.65-ს და არა 1.64-ს.

საწყისი მნიშვნელობის გამოთვლა z მნიშვნელობის მიხედვით:

$$X = z\cdot\sigma + \mu.$$

მაგალითი 8. სამედიცინო გამოკლეველის მიზნით მკვლევარს სურს შეარჩიოს არტერიული წნევის საფუძველზე შედგენილი პოპულაციის შუაში მდგომი ადამიანების 60%. ვიგულისხმოთ, რომ არტერიული წნევა განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 120 და სტანდარტული გადახრით 8. დავადგინოთ შესარჩევი ადამიანების არტერიული წნევის ზედა და ქვედა საზღვარი.

ამოხსნა. გასაგებია, რომ შესარჩევი ადამიანების არტერიული წნევის ზედა და ქვედა საზღვარი იქნება ის ორი მოპირდაპირე რიცხვი, რომელთა გარეთ ნორმალური წირის ქვეშ მოქცეული თითოეული კუდის ფართობია 20%.



ცხადია, რომ z მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება ნორმალური განაწილების ცხრილში 0.5000-0.2000=0.3000 ფართობს ტოლია 0.84-ის. შევიტანოთ იგი $X = z\cdot\sigma + \mu$ ფორმულაში. მივიღებთ, რომ

$$X_1 = z\cdot\sigma + \mu = 0.84\times 8 + 120 = 126.72.$$

მეორეს მხრივ, სტანდარტული ნორმალური განაწილების საშუალოს მიმართ სიმეტრიულობის გამო, X_2-ის გამოსათვლელეად უნდა ავიღოთ $z = -0.84$. შესაბამისად გვექნება:

$$X_2 = z\cdot\sigma + \mu = -0.84\times 8 + 120 = 113.28.$$

ე. ი. მკვლევარმა უნდა შეარჩიოს ისეთი ადამიანები, რომელთა არტერიული წნევა მოთავსებულია 113.8-სა და 126.72-ს შორის,

$$113.28 < X < 126.72.$$

მაგალითი 9. მოცემულია $\xi \equiv N(23,\sigma^2)$ და $P\{\xi < 27\} = 0.83$. იპოვეთ σ.

ამოხსნა. ცხადია, რომ $Z = \dfrac{\xi - 23}{\sigma} \equiv N(0,1)$. გარდა ამისა, ხდომილებები $\{\xi < 27\}$ და $\{\dfrac{\xi - 23}{\sigma} < \dfrac{27-23}{\sigma}\}$ ექვივალენტურია. ამიტომ

$$P\{\xi < 27\} = P\{\frac{\xi - 23}{\sigma} < \frac{27-23}{\sigma}\} = P\{Z < \frac{4}{\sigma}\} = 0.83,$$

ანუ $\Phi(\dfrac{4}{\sigma}) = 0.83$. საიდანაც, მაგალითი 5-ის ანალოგიურად: $\dfrac{4}{\sigma} = 0.9542$ და, შესაბამისად, $\sigma = \dfrac{4}{0.9542} = 4.19$.

მაგალითი 10. მას შემდეგ რაც ნიკა ჩამოსვამს ეკას მანქანიდან ქალაქის ცენტრალურ ფოსტასთან, ის მოძრაობს ქალაქში და გარკვეული დროის შემდეგ ბრუნდება ეკას წასაყვანად. ნიკას ვარაუდით ეკას მიერ ფოსტაში გატარებული დრო დაახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული საშუალოთი 6 წუთი და სტანდარტული გადახრით 1.3 წუთი. რამდენი წუთის შემდეგ უნდა დაბრუნდეს ნიკა ფოსტასთან, რომ არ მოუწიოს ლოდინი სულ ცოტა 95%-იანი გარანტიით.

ამოხსნა. T იყოს ეკას მიერ ფოსტაში გატარებული დრო. მაშინ $T \equiv N(6,1.3^2)$. t იყოს ფოსტასთან ეკას ჩამოსმიდან ნიკას უკან დაბრუნებამდე გასული დრო. მოსაძებნია ისეთი t, რომლისთვისაც: $P\{T \le t\} \ge 0.95$. ეს თანაფარდობა ტოლფასია: $P\{\dfrac{T-6}{1.3} \le \dfrac{t-6}{1.3}\} \ge 0.95$, ანუ $\Phi(\dfrac{t-6}{1.3}) \ge 0.95 = \Phi(1.645)$, საიდანაც გვაქვს: $\dfrac{t-6}{1.3} \ge 1.645$. აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ $t \ge 8.1385 \approx 8.14$. მაშასადამე, ნიკა არ უნდა დაბრუნდეს 8.14 წუთზე ადრე.

მაგალითი 11. ბიოლოგი აგროვებს მონაცემებს კონკრეტული სახეობის კაქტუსის სიმაღლის შესახებ. მისი დაკვირვებით კაქტუსების 34.25%-ის სიგრძე 12 სმ-ზე ნაკლებია, ხოლო 18.4%-ის სიგრძე 16 სმ-ზე მეტია. ბიოლოგმა დაუშვა, რომ სიმაღლე განაწილებულია ნორმალურად. ვიპოვოთ ამ განაწილების საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

ამოხსნა. კაქტუსის სიმაღლე ავღნიშნოთ H, $H \approx N(a,\sigma^2)$. მოსაძებნია a და σ. ბიოლოგის დაკვირვების თანახმად: $P\{H < 12\} = 0.342$ და $P\{H > 16\} = 0.184$. შესაბამისად,

$$\Phi(\frac{12-a}{\sigma}) = 0.342 \text{ და } \Phi(\frac{16-a}{\sigma}) = 1 - 0.184 = 0.816.$$

ამიტომ $\dfrac{12-a}{\sigma} = -0.407$ და $\dfrac{16-a}{\sigma} = 0.900$. საიდანაც ვასკვნით, რომ: $a = 13.2$ და $\sigma = 3.06$.

მაგალითი 12. სუპერმარკეტში დღის განმაელობაში გაყიდული ციტრუსების რაოდენობა მოდელირდება ნორმალური განაწილებით. აღმოჩნდა, რომ ხანგრძლივი პერიოდის მანძილზე დღეში საშუალოდ იყიდებოდა 35 კგ. ციტრუსი, ხოლო 15 კგ-ზე ნაკლები გაყიდულ იქნა საშუალოდ ყოველი 20 დღიდან ერთ დღე-

ში. ა). გამოთვალეთ გაყიდვების სტანდარტული გადახრა σ; ბ). ცნობილია, რომ კონკრეტულ დღეს გაიყიდა 53 კგ-ზე მეტი ციტრუსი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ დღეს გაიყიდა 56 კგ-ზე მეტი ციტრუსი.

ამოხსნა. დღეში გაყიდული ციტრუსების რაოდენობა აღვნიშნოთ ξ-თი. მაშინ: $\xi \cong N(35,\sigma^2)$ და $P\{\xi < 15\} = \dfrac{1}{20} = 0.05$.

ა).
$$P\{\xi < 15\} = 0.05 \Rightarrow \Phi(\frac{15-35}{\sigma}) = 0.05 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{15-35}{\sigma} = -1.6448 \Rightarrow \sigma = 12.2;$$

ბ).
$$P\{\xi > 56 \mid \xi > 53\} = \frac{P\{\xi > 56 \cap \xi > 53\}}{P\{\xi > 53\}} = \frac{P\{\xi > 56\}}{P\{\xi > 53\}} =$$
$$= \frac{1-\Phi(\frac{56-35}{12.2})}{1-\Phi(\frac{53-35}{12.2})} = \frac{1-0.9574}{1-0.9299} = 0.608.$$

ამოცანები

1. ცნობილია, რომ $Z \cong N(0,1)$. ნორმალური განაწილების ფუნქციის ცხრილის გამოყენებით იპოვეთ ალბათობები: ა). $P\{Z < 1.23\}$; ბ). $P\{Z \le 2.47\}$; გ). $P\{Z < 0.16\}$; დ). $P\{Z \ge 1.24\}$; ე). $P\{Z > 2.38\}$; ვ). $P\{Z \ge 0.59\}$; ზ). $P\{Z > -1.83\}$; თ). $P\{Z \le -2.06\}$; ი). $P\{Z > -0.07\}$; კ). $P\{Z \le -1.83\}$; ლ). $P\{Z < -2.76\}$; მ). $P\{Z \le -0.21\}$.

2. ცნობილია, რომ $Z \cong N(0,1)$. იპოვეთ ალბათობები: ა). $P\{1.15 < Z < 1.35\}$; ბ). $P\{1.11 \le Z \le 2.22\}$; გ). $P\{0.39 < Z < 2.42\}$; დ). $P\{0 \le Z < 1.55\}$; ე). $P\{-1.82 < Z < 2.33\}$; ვ). $P\{-0.85 < Z \le 2.03\}$; ზ). $P\{-2.51 < Z < 1.09\}$; თ). $P\{-0.55 \le Z \le 0\}$; ი). $P\{-2.82 < Z < -1.82\}$; კ). $P\{-1.75 \le Z \le -1.00\}$; ლ). $P\{-2.57 < Z < -0.12\}$; მ). $P\{-1.96 \le Z < 1.96\}$.

3. ცნობილია, რომ $Z \cong N(0,1)$. იპოვეთ შესაბამისად s, t, u ან v, თუ: ა). $P\{Z < s\} = 0.67$; ბ). $P\{Z < t\} = 0.88$; გ). $P\{Z < u\} = 0.98$; დ). $P\{Z < v\} = 0.85$; ე). $P\{Z > s\} = 0.41$; ვ). $P\{Z > t\} = 0.12$; ზ). $P\{Z > u\} = 0.01$; თ). $P\{Z > v\} = 0.22$; ი). $P\{Z > s\} = 0.99$; კ). $P\{Z > t\} = 0.97$; ლ). $P\{Z > u\} = 0.85$; მ). $P\{Z > v\} = 0.5$.

4. მოცემულია $\xi \cong N(20,16)$. იპოვეთ შემდეგი ალბათობები: ა). $P\{\xi \le 26\}$; ბ). $P\{\xi > 30\}$; გ). $P\{\xi \ge 17\}$; დ). $P\{\xi < 13\}$.

5. მოცემულია $\xi \cong N(24,9)$. იპოვეთ შემდეგი ალბათობები: ა). $P\{\xi \le 29\}$; ბ). $P\{\xi > 31\}$; გ). $P\{\xi \ge 22\}$; დ). $P\{\xi < 16\}$.

6. მოცემულია $\xi \cong N(50,16)$. იპოვეთ შემდეგი ალბათობები: ა). $P\{54 \le \xi \le 58\}$; ბ). $P\{40 < \xi \le 44\}$; გ). $P\{47 < \xi < 57\}$; დ). $P\{39 \le \xi < 53\}$; ე). $P\{44 \le \xi \le 56\}$.

7. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 3 და დისპერსიით 4. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ξ მიიღებს უარყოფით მნიშვნელობას.

8. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი a $(a>0)$ და დისპერსიით $a^2/4$. ა). იპოვეთ $P\{\xi>1.5a\}$; ბ). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ξ უარყოფითია.

9. მოცემულია $\xi \cong N(44,25)$. იპოვეთ შესაბამისად s, t, u ან v, თუ: ა). $P\{\xi \le s\}=0.98$; ბ). $P\{\xi \ge t\}=0.77$; გ). $P\{\xi \ge u\}=0.05$; დ). $P\{\xi \le v\}=0.33$.

10. მოცემულია $\xi \cong N(15,4)$. იპოვეთ შესაბამისად s, t, u, v ან w, თუ: ა). $P\{\xi \le s\}=0.91$; ბ). $P\{\xi \ge t\}=0.57$; გ). $P\{\xi \le u\}=0.10$; დ). $P\{\xi \le v\}=0.39$; ე). $P\{15-w<\xi<15+w\}=0.9$.

11. მოცემულია $\xi \cong N(35.4,12.5)$. იპოვეთ შესაბამისად s, t, u ან v, თუ: ა). $P\{\xi<s\}=0.96$; ბ). $P\{\xi>t\}=0.94$; გ). $P\{\xi>u\}=0.29$; დ). $P\{\xi<v\}=0.15$.

12. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 32 და დისპერსიით σ^2. ალბათობა იმისა, რომ ξ ნაკლებია 33-ზე არის 0.64. იპოვეთ σ^2.

13. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად დისპერსიით 18 და $P\{\xi>73\}=0.03$. იპოვეთ საშუალო.

14. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად, $P\{\xi \ge 59\}=0.02$ და $P\{\xi \ge 29\}=0.93$. იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

15. მოცემულია $\xi \cong N(a,\sigma^2)$, $P\{\xi \ge 9.81\}=0.16$ და $P\{\xi \le 8.82\}=0.01$. იპოვეთ a და σ.

16. აფთიაქში წამლის დამზადებაზე დახარჯული დრო განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 15 წუთი და სტანდარტული გადახრით 2.8 წუთი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წამლის დამზადებაზე დახარჯული დრო: ა). 20 წუთზე მეტია; ბ). 8 წუთზე ნაკლებია; გ). მოთავსებულია 10 წუთსა და 18 წუთს შორის.

17. ჯგუფში 16 წლის გოგონების სიმაღლე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 161.2 სმ და სტანდარტული გადახრით 4.7 სმ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ჯგუფიდან ერთი გოგონას სიმაღლე: ა). 165 სმ-ზე მეტია; ბ). 150 სმ-ზე ნაკლებია; გ). მოთავსებულია 165 სმ-სა და 170 სმ-ს შორის; დ). მოთავსებულია 150 სმ-სა და 163 სმ-ს შორის. 16 წლის 500 შერჩეული გოგონასათვის შეაფასეთ რაოდენობა იმ გოგონების, რომელთა სიმაღლე გავა ზემოთ მოყვანილი 4 დიაპაზონიდან.

18. ავტომობილის შუშის საწმენდი რეზინის სიგრძე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთ 25 სმ და სტანდარტული გადახრით 0.2 სმ. შეაფასეთ 200 ცალი შუშის საწმენდიდან რამდენის სიგრძეს უნდა მოველოდეთ, რომ იქნება: ა). 25.3 სმ ან მეტი; ბ). მოთავსებული 24.89 სმ-სა და 25.11 სმ-ს შორის; გ). მოთავსებული 24.89 სმ-სა და 25.25 სმ-ს შორის.

19. ავტომობილის გაცვეთილი სამუხრუჭე ხუნდის შეცვლის დრო განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 90 წუთი და სტანდარტული გადახრით 5.8

წუთი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ხუნდის შეცვლას დასჭირდება: ა). 105 წუთზე მეტი; ბ). 85 წუთზე ნაკლები. დაადგინეთ საშუალოს მიმართ სიმეტრიული (a,b) ინტერვალი, რომელშიც მოხვდება ხუნდის შეცვლის დრო 90%-იანი საიმედოობით.

20. კომპანიის მიერ წარმოებული დღის განათების მუშაობის ხანგრძლივობა განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 2010 საათი და სტანდარტული გადახრით. კომპანიამ გადაწყვიტა გაზარდოს გაყიდვების რიცხვი, რისთვისაც მან ვალდებულება აიღო საგარანტიო დროის გასვლამდე გაფუჭებული ნებისმიერი დღის განათება უფასოდ შეცვალოს ახლით. ვიპოვოთ ის საგარანტიო დრო, რომლის დაწესების შემთხვევაში კომპანიას მოუწევს უფასოდ შეცვალოს დღის განათების მხოლოდ 3%.

21. ყვავილის ფოთოლის სიგრძე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 18.2 სმ და სტანდარტული გადახრით 2.3 სმ. ა). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ყვავილის ფოთლის სიგრძე მოთავსებულია 16 სმ-სა და 20 სმ-ს შორის; ბ). ყვავილის ფოთლების 12% h სმ-ზე გრძელია, ხოლო 20% l სმ-ზე მოკლეა. იპოვეთ h და l; გ). შეაფასეთ ყვავილის 500 ფოთლიდან რამდენი იქნება 14 სმ-ზე მოკლე.

22. ბოთლს, რომელშიც ასხია უალკოჰოლო სასმელი, აწერია 330 მლ. სინამდვილეში ჩამოსხმული უალკოჰოლო სასმელის მოცულობა განაწილებულია ნორმალურად სტანდარტული გადახრით 2.5 მლ. რამდენი უნდა იყოს ჩამოსხმული უალკოჰოლო სასმელის მოცულობის საშუალო, რათა დარწმუნებული ვიყოთ, რომ ბოთლების სულ ცოტა 99%-ში სასმელი მეტი იქნება 330 მლ-ზე.

23. ფუთას, რომელშიც იყიდება შაქარი, აქვს წარწერა – 1 კგ. შაქარი. ფაქტიურად, ფუთაში მოთავსებული შაქრის წონა განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 1.08 კგ. ფუთების შემოწმებამ აჩვენა, რომ ფუთების 2.5% ნაკლულია (შეიცავს მითითებულ 1 კგ-ზე ნაკლებ შაქარს). ა). იპოვეთ ამ განაწილების სტანდარტული გადახრა; ბ). თუ მოცემული ფუთა ნაკლულია, მაშინ გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ მისი წონა საშუალოზე 3 სტანდარტული გადახრით ნაკლებია.

24. გენერატორის მუშაობის ხანგრძლივობა განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 210 სთ. აღმოჩნდა, რომ გენერატორების 4% მუშაობს 222 საათზე მეტს. იპოვეთ ამ განაწილების დისპერსია.

25. ალბათობის გამოცდაზე სტუდენტების 15% ღებულობს 63 ქულაზე მეტს, ხოლო 10% – 32 ქულაზე ნაკლებს. ვიგულისხმოთ, რომ ქულები განაწილებულია ნორმალურად და ვიპოვოთ ქულების საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

26. მზიანი საათების რაოდენობა თვეში H გარკვეულ კურორტზე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 130 სთ. ცნობილია, რომ $P\{H<179\}=0.975$. ა). გამოთვალეთ H-ის სტანდარტული გადახრა; ბ). გამოთვალეთ $P\{100<H<150\}$.

27. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}k(4-x), \text{ თუ } 0\le x\le 4,\\ 0, \quad \text{სხვაგან}.\end{cases}$$

გამოთვალეთ: ა). k; ბ). $P\{\xi>2.5\}$; გ). $E\xi$.

28. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, \text{ თუ } 0\le x\le 2,\\ 0, \quad \text{სხვაგან}.\end{cases}$$

იპოვეთ: ა). ξ შემთხვევითი სიდიდის მედიანა და ქვედა და ზედა კვარტილი; ბ). $E\xi$; გ). $D\xi$.

29. უწყვეტი U შემთხვევითი სიდიდე თანაბრადაა განაწილებული [0.5, 2.5] სეგმენტზე. იპოვეთ ამ შემთხვევითი სიდიდის: ა). განაწილების სიმკვრივე; ბ). მათემატიკური ლოდინი; გ). დისპერსია.

30. ხის ნაჭრების სიგრძე მოდელირდება უწყვეტი თანაბარი განაწილებით, რომლის სიმკვრივეა:

$$f_U(x)=\begin{cases}\frac{1}{k}, \text{ თუ } 0.2\le x\le 0.8,\\ 0, \quad \text{სხვაგან}.\end{cases}$$

იპოვეთ: ა). k; ბ). EU; გ). DU. დ). შემთხვევით შეირჩა სამი ნაჭერი. რისი ტოლია ალბათობა იმისა, რომ მათგან მხოლოდ ორის სიგრძე იქნება 0.6-ზე მეტი.

31. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}kx^3, \text{ თუ } 0\le x\le 2,\\ 0, \quad \text{სხვაგან}.\end{cases}$$

იპოვეთ: ა). k; ბ). EU; გ). DU; დ). განაწილების მედიანა; ე). ალბათობა იმისა, რომ დაკვირვება მოთავსებული იქნება საშუალოდან ერთი სტანდარტული გადახრის ფარგლებში; ვ). ალბათობა იმისა, რომ 4 დაკვირვებიდან 2 იქნება საშუალოზე მეტი და 2 – საშუალოზე ნაკლები.

32. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}(x-a)(2a-x), \text{ თუ } 0\le x\le 2,\\ 0, \quad \text{სხვაგან}.\end{cases}$$

იპოვეთ: ა). a; ბ). $E\xi$.

33. ცნობილია, რომ $\xi\equiv N(10,8)$. იპოვეთ $P\{\xi>6\}$.

34. ცნობილია, რომ $\xi\equiv N(140,56.25)$. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ξ მეტია 128.75-ზე.

35. გარკვეული მოდელის ავტომობილი 56 მილი/სთ სიჩქარით მოძრაობისას ერთი გალონი ბენზინით გადის მანძილს, რომლის საშუალო მნიშვნელობაა 32.4 მილი და სტანდარტული გადახრა 1.4 მილი. ჩავთვალეთ, რომ საქმე გვაქვს ნორმალურ განაწილებასთან და გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს ავტომ-

ობილი 56 მილი/სთ სიჩქარით მოძრაობისას ერთი გალონი ბენზინით გაივლის 30 მილზე მეტს.

36. ნორმალურად განაწილებული ξ შემთხვევითი სიდიდის საშუალოა 20, ხოლო დისპერსია 4.15. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ $18<\xi<21$.

37. ფართობი, რომლის შეღებვაც შეიძლება 1 ლიტრი ბუნებრივი საღებავით განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 13.2 კვ. მეტრი და სტანდარტული გადახრით 0.197 კვ. მეტრი. ფართობი, რომლის შეღებვაც შეიძლება 1 ლიტრი ხელოვნური საღებავით განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 13.4 კვ. მეტრი და სტანდარტული გადახრით 0.343 კვ. მეტრი. შესაღებია 12.9 კვ. მეტრი ფართობი. განსაზღვრეთ, რომელი საღებავის 1 ლიტრი იქნება საკმარისი უფრო მეტი ალბათობით ამ ფართობის შესაღებად.

38. კვერცხის წონა ξ, გაზომილი გრამებში, განაწილებულია ნორმალურად: $\xi \equiv N(85,0.36)$. კვერცხები იყოფა სამ კატეგორიად: დიდი, საშუალო და პატარა. დიდი კვერცხის წონა მეტია ან ტოლი 90 გრამზე. კვერცხების 25% პატარაა. გამოთვალეთ: ა). კვერცხების რამდენი პროცენტია დიდი; ბ). პატარა კვერცხის მაქსიმალური წონა.

39. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი a და დისპერსიით a. ცნობილია, რომ $P\{\xi<3\}=0.2$. იპოვეთ a.

40. ორი ფირმა, A და B, აწარმოებს გამოძახების შეჩერების მოწყობილებას საკომუნიკაციო ორგანიზაციისათვის. გამოძახების შეჩერების დრო იზომება ნანოწამებში (ნწმ). ა). შეჩერების დრო A ფირმის მიერ წარმოებული შეჩერების მოწყობილებისათვის მოდელირდება ნორმალური განაწილებით საშუალოთი 283 ნწმ და სტანდარტული გადახრით 8 ნწმ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ A ფირმის მოწყობილებისათვის შეჩერების დრო მოთავსებულია 275 ნწმ-სა და 286 ნწმ-ს შორის; ბ). B ფირმის მოწყობილებისათვის შეჩერების დრო ისევ იგულისხმება, რომ ნორმალურია. აქ შეჩერების დროის 10% ნაკლებია 274.6 ნწმ-ზე და 7.5% მეტია 288.2 ნწმ-ზე. ვიპოვოთ ამ განაწილების საშუალო და სტანდარტული გადახრა.

41. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი a და დისპერსიით σ^2. მოცემულია, რომ $P\{\xi>81.89\}=0.01$ და $P\{\xi<27.77\}=0.1$. იპოვეთ a და σ^2.

42. ცნობილია, რომ $\xi \equiv N(a,4)$. იპოვეთ a, თუ ცნობილია, რომ შესაბამისი განაწილების სიმკვრივის წირის წვეს მოქცეული არის ფართობი 12-დან $+\infty$-მდე არის 0.8.

43. დანადგარი ჭრის გრძელ მილებს პატარ-პატარა მილებად. პატარა მილის სიგრძე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი a სმ და სტანდარტული გადახრით 0.25 სმ. a-ს მნიშვნელობის შეცვლა შესაძლებელია დანადგარის რეგულირების ხარჯზე. ა). იპოვეთ a, რომლისთვისაც ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული პატარა მილის სიგრძე ნაკლებია 6.5 სმ-ზე არის 0.1; ბ). დანადგარი დარეგულირდა ისე, რომ $a=6.4$, ხოლო სტანდარტული გადახრა არ შეცვლილა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული პატარა მილის სიგრძე მოთავსებულია 6.3 სმ-სა და 6.6 სმ-ს შორის.

44. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 250 და დისპერსიით 50. იპოვეთ მისი სიმკვრივის წირის ქვეშ 180-დან 280-მდე მოთავსებული არის ფართობი.

45. გარკვეული სახეობის ჩიტის წონა განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 0.8 კგ და სტანდარტული გადახრით 0.12 კგ. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ამ სახეობის ჩიტის წონა მოთავსებული იქნება 0.74 კგ-სა და 0.95 კგ-ს შორის.

46. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად და $P\{\xi \le 10\} = 0.67$, $P\{\xi \le 12\} = 0.937$. იპოვეთ $E\xi$.

47. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} kx^2, \text{ თუ } 0 \le x \le 2, \\ 0, \text{ სხვაგან.} \end{cases}$$

ა). აჩვენეთ, რომ $k = 3/8$; ბ). გამოთვალეთ $E\xi$; გ). იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის მედიანა.

48. საქმიანი ქალი დღის განმავლობაში ტელეფონზე ლაპარაკს ანდომებს T საათს. T შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_T(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}(8x - x^3), \text{ თუ } 0 \le x \le 2, \\ 0, \text{ სხვაგან.} \end{cases}$$

იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის: ა). მათემატიკური ლოდინი; ბ). მედიანა; გ). მოდა.

49. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x(4 - x^2), \text{ თუ } 0 \le x \le 2, \\ 0, \text{ სხვაგან.} \end{cases}$$

იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის მედიანა.

50. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} c(2x - x^2), \text{ თუ } 0 \le x \le 2, \\ 0, \text{ სხვაგან.} \end{cases}$$

იპოვეთ: ა). c მუდმივის მნიშვნელობა; ბ). ალბათობა $P\{0.25 \le \xi \le 0.5\}$.

51. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციაა:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ თუ } x \le 0, \\ \sin x, \text{ თუ } 0 \le x \le \pi/2, \\ 1, \text{ თუ } x \ge \pi/2. \end{cases}$$

იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის: ა). განაწილების სიმკვრივე; ბ). მედიანა.

52. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა: $f_\xi(x)=\sin x$, თუ $0\le x\le \pi/2$, $=0$ სხვაგან. იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის მედიანა.

53. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი a და დისპერსიით σ^2. ცნობილია, რომ $P\{\xi>6.2\}=0.9474$ და $P\{\xi<9.8\}=0.6368$. იპოვეთ a და σ^2.

54. უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე განმარტებულია $[0,a]$ ინტერვალზე თანაფარდობით:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} x/2, \text{ თუ } 0\le x\le 3,\\ 27/8x^2, \text{ თუ } 3<x\le a.\end{cases}$$

იპოვეთ a-ს მნიშვნელობა.

55. ბირთვის სროლის შეჯიბრებაში მონაწილეობს ორი ათლეტი, ივანე და ერეკლე. თითოეული ათლეტისათვის ბირთვის სროლის მანძილი განაწილებულია ნორმალურად. ივანესათვის გასულ წელს ბირთვის სროლის მანძილის საშუალო იყო 60.33 მ, ხოლო სტანდარტული გადახრა 1.95 მ. ა). გასულ წელს ივანესათვის ბირთვის სროლის მანძილის 80% მეტი იყო ვიდრე x მეტრი. იპოვეთ x; ბ). გასულ წელს ერეკლესათვის ბირთვის სროლის მანძილის 80% მეტი იყო ვიდრე 59.5 მეტრი. ცნობილია, რომ გასულ წელს ერეკლესათვის ბირთვის სროლის მანძილის საშუალო იყო 59.39 მ. იპოვეთ მისი სტანდარტული გადახრა; მიმდინარე წელს ერეკლესათვის ბირთვის სროლის მანძილის საშუალოა 59.5 მ, ხოლო სტანდარტული გადახრა 3 მ. ივანესათვის შესაბამისი პარამეტრებია 60.33 მ და 1.95 მ. შეჯიბრების დროს, შემდეგ ტურში გასასვლელად ათლეტმა ბირთვი უნდა ისროლოს სულ ცოტა 65 მეტრზე. პირველ ტურში თითოეული ათლეტი ბირთვს ისვრის 3-ჯერ; გ). განსაზღვრეთ რომელი ათლეტის გასვლაა უფრო მოსალოდნელი შემდეგ ტურში პირველი სროლის შედეგის მიხედვით; დ). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ათლეტი გავა შემდეგ ტურში.

56. ξ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი a და დისპერსიით σ^2, ისე, რომ $P\{\xi>50.32\}=0.119$ და $P\{\xi>43.56\}=0.305$. იპოვეთ a და σ^2 და გამოთვალეთ $P\{|\xi-a|<5\}$.

57. საწარმო ყიდულობს ჭანჭიკების 44%-ს A ფირმიდან, ხოლო დანარჩენს B ფირმიდან. თითოეული ფირმის მიერ დამზადებული ჭანჭიკების დიამეტრი განაწილებულია ნორმალურად სტანდარტული გადახრით 0.16 მმ. A ფირმის მიერ დამზადებული ჭანჭიკების დიამეტრის საშუალოა 1.56 მმ. B ფირმის მიერ დამზადებული ჭანჭიკების 24.2%-ის დიამეტრი ნაკლებია 1.52 მმ-ზე. ა). იპოვეთ B ფირმის მიერ დამზადებული ჭანჭიკების დიამეტრის საშუალო; ბ). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ საწარმოს საწყობიდან შემთხვევით შერჩეული ჭანჭიკის დიამეტრი ნაკლები იქნება 1.52 მმ-ზე; გ). შემთხვევით შერჩეული ჭანჭიკის დიამეტრი ნაკლებია 1.52 მმ-ზე. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ეს ჭანჭიკი დამზადებულია B ფირმაში; დ). B ფირმა დღეში ამზადებს 8000 ჭანჭიკს. თითეული ჭანჭიკი იძლევა 1.5 ლარიან მოგებას, თუ მისი დიამეტრი მოთავსებულია 1.52 მმ-სა და 1.83 მმ-ს შორის. ჭანჭიკი, რომლის დიამეტრი ნაკლებია 1.52 მმ-ზე უნდა გადაგდონ

და იძლევა 0.85 ლარიან დანაკარგს. დაბოლოს, ჭანჭიკი, რომლის დიამეტრი მეტია 1.83 მმ-ზე იყიდება, მაგრამ მოგებას ამცირებს 0.5 ლარამდე. გამოთვალეთ B ფირმის მოსალოდნელი მოგება.

58. ალბათობა იმისა, რომ მშენებლობაზე მიიტანენ სამშენებლო მასალებს $P(A)=0.85$, ალბათობა იმისა, რომ მშენებლობა დასრულდება დროულად $P(B)=0.6$. ალბათობა იმისა, რომ სამშენებლო მასალებს მიიტანენ და მშენებლობა დროულად დასრულდება არის 0.55. ა). აჩვენეთ, რომ A და B ხდომილებები დამოუკიდებელია; ბ). ცნობილია, რომ სამშენებლო მასალები დროულად მიიტანეს მშენებლობაზე. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მშენებლობა არ დასრულდება დროულად.

59. მშენებლობაზე მუშაობს 10 კაციანი ჯგუფი, რომელთა შორის 3 ელექტრიკია და 2 სანტექნიკოსი. არქიტექტორმა დაიბარა სათათბიროდ 5 მუშა და მოვიდა შემთხვევით შერჩეული 5 მათგანი. ა). იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ხუთში მოხვდება 2 ელექტრიკი და 1 სანტექნიკოსი; ბ). მშენებლობაზე კვირაში მუშაობის საათების რაოდენობა განაწილებულია ნორმალურად საშუალოთი 42 სთ. ჯგუფის 10% მუშაობს კვირაში 48 ან მეტ საათს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე სანტექნიკოსი კონკრეტულ კვირაში იმაუშავებს 40 საათზე მეტს.

პასუხები:

1. 0.8907; 0.9932; 0.5636; 0.1075; 0.0087; 0.2776; 0.9664; 0.0197; 0.5279; 0.0336; 0.0029; 0.4168. **2.** 0.0366; 0.1203; 0.3405; 0.4394; 0.9557; 0.7816; 0.8561; 0.2088; 0.0320; 0.1186; 0.4472; 0.9500. **3.** 0.4399; 1.1750; 2.0537; 1.0364; 0.2275; 1.1750; 2.3263; 0.7722; -2. 3263; -1.8808; -1.0364; 0. **4.** 0.9332; 0.0062; 0.7734; 0.0401. **5.** 0.9522; 0.0098; 0.7475; 0.0038. **6.** 0.1359; 0.0606; 0.7333; 0.7704; 0.8664. **7.** 0.0668. **8.** 0.1587; 0.0228. **9.** 54.27; 40.31; 52.22; 41.80. **10.** 17.68; 14.65; 12.44; 14.44; 3.29. **11.** 7.78. **12.** 41.6; 29.9; 37.4; 31.7. **13.** 65.0. **14.** 41.5; 8.50. **15.** 9.51; 0.298. **16.** 0.0371; 0.0062; 0.8209. **17.** 0.2094; 0.0086; 0.1788; 0.6405; 105; 4; 89; 320. **18.** 13; 84; 121. **19.** 0.0049; 0.1943; (80, 100). **20.** 1972 სთ. **21.** 0.614; 20.9, 16.3; 17. **22.** 336 მლ. **23.** 0.041 კგ; 0.054. **24.** 47. **25.** 49.1; 13.4. **26.** 25; 0.673. **27.** 1/8; 0.141; 4/3. **28.** $\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{3}$; 4/3; 2/9. **29.** $f_U(x)=1/2$, თუ $x\in[0.5, 2.5]$, და =0 სხვაგან; 3/2; 1/3. **30.** 0.6; 0.5; 0.03; 2/9. **31.** 1/4; 1.6; 0.107; 1.68; 0.697; 0.351. **32.** $a^3=6$; 2.73. **33.** 0.921. **34.** 0.933. **35.** 0.957. **36.** 0.525. **37.** ბუნებრივი: 0.936 > 0.928. **38.** 20.2%; 81 გრ. **39.** 18.94. **40.** 0.488; 281, 5. **41.** 47; 15. **42.** 10.3. **43.** 6.82; 0.444. **44.** 0.645. **45.** 0.5858. **46.** 9.193. **47.** 3/2; $2^{2/3}$. **48.** 56/45; 1.294; 1.633. **49.** 1.082. **50.** 3/4; 0.1133. **51.** $f_\xi(x)=\cos x$, თუ $0\le x\le \pi/2$, =0 სხვაგან; $\pi/6$. **52.** $\pi/3$. **53.** 9.161; 1.827. **54.** 54/11. **55.** 58.69; 3.41; ერექლესათვის (0.0334>0.0083); 0.119. **56.** 38.41; 10.09; 0.3798. **57.** 1.632; 0.312; 0.775; 6587. **58.** 6/17. **59.** 5/21; 0.44

თავი VII

ალბათობის თეორიის ზღვარითი თეორემები

ჩებიშევის უტოლობა.

ჩებიშევის უტოლობა აფასებს შემთხვევითი სიდიდის გადახრას თავისი მათემატიკური ლოდინიდან. თუ ξ რაიმე შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის სამართლიანია უტოლობა:

$$P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) \geq 1 - D\xi / \varepsilon^2 .$$

დიდ რიცხვთა კანონი.

ჩებიშევის თეორემა. ვთქვათ, შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_1, \xi_2, \ldots$ წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია ($E\xi_i < \infty$) და არსებობს ისეთი რიცხვი C, რომ $D\xi_i \leq C$, $i = 1, 2, \ldots$. მაშინ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის სრულდება უტოლობა:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - \frac{E\xi_1 + E\xi_2 + \cdots + E\xi_n}{n}| < \varepsilon\} = 1.$$

ამ მტკიცებულებას **დიდ რიცხვთა კანონს** უწოდებენ.

ბერნულის თეორემა. დავუშვათ, m არის n დამოუკიდებელ ექსპერიმენტში A ხდომილების მოხდენათა რიცხვი, ხოლო p არის A ხდომილების მოხდენის ალბათობა ცალკეულ ექსპერიმენტში. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$P\{|\frac{m}{n} - p| \geq \varepsilon\} \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \quad (\to 0, \text{ როცა } n \to \infty).$$

ცენტრალური ზღვარითი თეორემა.

დიდ რიცხვთა კანონი არ იკვლევს შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის განაწილების კანონის სახეს. ეს საკითხი შეისწავლება თეორემების ჯგუფში, რომლებსაც **ცენტრალური ზღვარითი თეორემა** ეწოდება. ეს თეორემა ამტკიცებს, რომ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის განაწილების კანონი, რომელთაგან ცალკეულ შესაკრებს შეიძლება ჰქონდეს განსხვავებული განაწილება, უახლოვდება ნორმალურს შესაკრებთა საკმაოდ დიდი რიცხვის შემთხვევაში. ამით აიხსნება ნორმალური განაწილების კანონის უაღრესად დიდი მნიშვნელობა პრაქტიკულ გამოყენებებში.

თეორემა 1. თუ $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობაა, ერთი და იგივე განაწილების კანონით, მათემატიკური ლოდინით a და დისპერსიით σ^2, მაშინ n –ის უსასრულოდ ზრდისას $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ ჯამის განაწილების კანონი უახლოვდება სტანდარტულ ნორმალურ განაწილების კანონს:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{S_n - a}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\} = \Phi(x).$$

თეორემა 2 (ლიაპუნოვის თეორემა). თუ ξ შემთხვევითი სიდიდე წარმოადგენს დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ძალიან დიდი რიცხვის ჯამს, რომელთათვისაც შესრულებულია პირობა:

$$\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} b_k)/[\left(\sum_{k=1}^{n} D_k\right)^{3/2}]=0,$$

სადაც b_k – მესამე რიგის აბსოლუტური ცენტრალური მომენტია ξ_k შემთხვევითი სიდიდის , ხოლო D_k – მისი დისპერსია, მაშინ ξ შემთხვევით სიდიდეს გააჩნია განაწილება, რომელიც ახლოსაა ნორმალურ განაწილებასთან.

თეორემა 3 (მუავრ-ლაპლასის თეორემა). თუ ტარდება n დამოუკიდებელი ცდა, რომელთაგან თითოეულში A ხდომილება ხდება ალბათობით p, $np>15$, მაშინ სამართლიანია თანაფარდობა:

$$p\left(\alpha<\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}<\beta\right)\approx\Phi(\beta)-\Phi(\alpha),$$

სადაც S_n – A ხდომილების მოხდენათა რიცხვია n ცდაში, $q=1-p$, ხოლო

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

შედეგი (მუავრ-ლაპლასის ლოკალური თეორემა). მუაერ-ლაპლასის თეორემის პირობებში $p_n(k)$ – ალბათობა იმისა, რომ A ხდომილება n ცდაში მოხდება ზუსტად k–ჯერ, ცდათა დიდი რიცხვის შემთხვევაში, თუ $np>15$, შეიძლება გამოითვალოს შემდეგი ფორმულით:

$$p_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),$$

სადაც $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, ხოლო $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

შემოვიღოთ განაწილების ფუნქციებისათვის შემდეგი აღნიშვნები:

ჰიპერგეომეტრიული განაწილების ფუნქცია –

$$H(x;t,s,n)=\sum_{k\le x}\frac{C_t^k\cdot C_{n-t}^{s-k}}{C_n^s};$$

ბინომური განაწილების ფუნქცია –

$$Bi(x;p,n)=\sum_{k\le x}C_n^k p^k q^{n-k};$$

პუასონის განაწილების ფუნქცია –

$$\Pi(x;\lambda)=\sum_{0\le k\le x}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda};$$

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქცია –

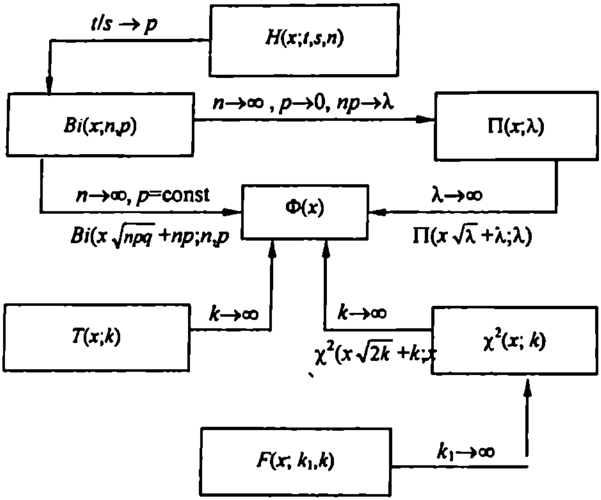
$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt;$$

ხი კვადრატ განაწილების ფუნქცია – $\chi^2(x;k)$;

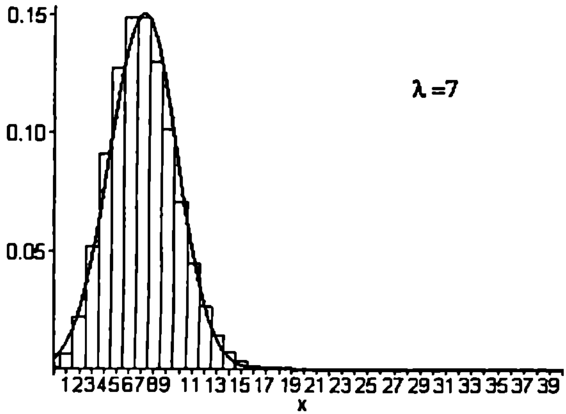
სტიუდენტის განაწილების ფუნქცია – $T(x;k)$;

ფიშერის განაწილების ფუნქცია – $F(x;k_1,k_2)$.

აღსანიშნავია, რომ ზემოთ მოყვანილი განაწილებების ფუნქციებს შორის ადგილი აქვს ქვემოთ მოყვანილ სქემაზე გამოსახულ ზღვრულ თანაფარდობებს:



ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე შედარებულია ნორმალური და პუასონის განაწილებები $\lambda = 7$-ის შემთხვევაში:



მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტის 100-ჯერ აგდებისას გერბთა მოსვლის რიცხვი აღმოჩნდება საზღვრებში 40-დან 60-მდე.

ამოხსნა. ვისარგებლოთ მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალური თეორემით. ჩვენს შემთხვევაში $p=0.5$, $np=100\cdot 0.5=50$. ამიტომ თუ $40<S_n<60$, მაშინ

$$-2<\frac{S_n-50}{5}<2.$$

შესაბამისად, გვაქვს:

$$p(40<S_n<60)=p\left(-2<\frac{S_n-50}{5}<2\right)=\Phi(2)-\Phi(-2)=0.9772-0.0228=0.9544.$$

მაგალითი 2. წინა მაგალითის პირობებში ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ გერბი მოეა 45-ჯერ.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{45-50}{5}=-1$, ამიტომ

$$p_{100}(45)\approx\frac{1}{5}\cdot\varphi(-1)=\frac{1}{5}\cdot\varphi(1)=\frac{1}{5}\cdot 0.2420=0.0484.$$

მაგალითი 3. მოწყობილება შედგება 10 დამოუკიდებლად მომუშავე ელემენტისაგან, რომელთაგან თითოეულის მწყობრიდან გამოსვლის ალბათობა T დროში არის 0.05. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ T დროში მწყობრიდან გამოსულ ელემენტთა რაოდენობისა და ელემენტების მწყობრიდან გამოსვლათა საშუალო რიცხვს შორის განსხვავების მოდული აღმოჩნდება: ა). 2-ზე ნაკლები; ბ). 2-ზე არანაკლები.

ამოხსნა. ა). აღვნიშნოთ S_n სიმბოლოთი T დროში მწყობრიდან გამოსულ ელემენტთა რაოდენობა. ცხადია, რომ ამ შემთხვევით სიდიდეს აქვს ბინომიალური განაწილება და ამიტომ:

$$ES_n=np=10\cdot 0.05=0.5 \quad \text{და} \quad DS_n=npq=10\cdot 0.05\cdot 0.95=0.475.$$

ვისარგებლოთ ჩებიშევის უტოლობით. გვაქვს:

$$P(|S_n-ES_n|<\varepsilon)\geq 1-DS_n/\varepsilon^2,$$

$$P(|S_n-0.5|<2)\geq 1-0.475/4=0.88.$$

ბ). რამდენადაც $|S_n-0.5|<2$ და $|S_n-0.5|\geq 2$ საწინააღმდეგო ხდომილებებია, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$P(|S_n-0.5|\geq 2)\leq 1-0.88=0.12.$$

მაგალითი 4. A ხდომილების მოხდენის ალბათობა თითოეულ ექსპერიმენტში არის 0.5. შევაფასოთ ალბათობა იმისა, რომ 100 დამოუკიდებელ ექსპერიმენტში A ხდომილების მოხდენათა S_n რიცხვი მოთავსებულია 40-დან 60-მდე.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში:

$$ES_n=np=100\cdot 0.5=50 \quad \text{და} \quad DS_n=npq=100\cdot 0.5\cdot 0.5=25.$$

გასაგებია, რომ ხდომილება $40<S_n<60$ ექვივალენტური ხდომილების:

$$40-50<S_n-50<60-50 \iff -10<S_n-50<10 \iff |S_n-50|<10.$$

შესაბამისად, ჩებიშევის უტოლობის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ, რომ:

$$P(40 < S_n < 60) = P(|S_n - 50| < 10) \geq 1 - 25/100 = 0.75.$$

მაგალითი 5. მოცემულია, რომ $P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) \geq 0.8$ და $D\xi = 0.018$. იპოვეთ ε.

ამოხსნა. ჩებიშევის უტოლობის თანახმად $P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) \geq 1 - D\xi/\varepsilon^2$. მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$1 - D\xi/\varepsilon^2 = 0.8.$$

შევიტანოთ ამ განტოლებაში დისპერსიის მნიშვნელობა და ამოვხსნათ ε. გვაქვს:

$$1 - 0.018/\varepsilon^2 = 0.8,$$

აქედან, ცხადია, რომ $\varepsilon = 0.3$.

მაგალითი 6. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \ldots$ მოცემულია განაწილების კანონით:

ξ_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P	$1/2n^2$	$1-1/n^2$	$1/2n^2$

აკმაყოფილებს თუ არა ეს მიმდევრობა დიდ რიცხვთა კანონს?

ამოხსნა. შევამოწმოთ ჩებიშევის თეორემის პირობები. გასაგებია, რომ შემთხვევითი სიდიდეები წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია. გამოვთვალოთ ξ_n-ის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია. გვაქვს:

$$E\xi_n = -n\alpha(1/2n^2) + 0\cdot(1-1/n^2) + n\alpha(1/2n^2) = 0;$$

$$E\xi_n^2 = n^2\alpha^2(1/2n^2) + 0\cdot(1-1/n^2) + n^2\alpha^2(1/2n^2) = n^2\alpha^2(1/n^2) = \alpha^2;$$

$$D\xi_n = E\xi_n^2 - (E\xi_n)^2 = \alpha^2.$$

ამრიგად, მათემატიკური ლოდინები სასრულია და დისპერსიები თანაბრად შემოსაზღვრულია. ამიტომ ჩებიშევის თეორემის თანახმად აღნიშნული მიმდევრობა აკმაყოფილებს დიდ რიცხვთა კანონს.

ამოცანები

1. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე გადაიხრება თავისი მათემატიკური ლოდინიდან არანაკლებ ვიდრე: ა). გაორმაგებული სტანდარტული გადახრა; ბ). გასამმაგებული სტანდარტული გადახრა.

2. ხდომილების მოხდენის ალბათობა თითოეულ ცდაში არის 0.25. შეაფასეთ ალბათობა იმისა, რომ 800 დამოუკიდებელ ცდაში ამ ხდომილების მოხდენათა რიცხვი აღმოჩნდება 150-დან 250-მდე საზღვრებში.

3. მოცემულია დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი:

ξ	0.1	0.4	0.6
P	0.2	0.3	0.5

შეაფასეთ $|\xi - E\xi| < \sqrt{0.4}$ ხდომილების ალბათობა.

4. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \ldots$ მოცემულია განაწილების კანონით:

ξ_n	a	$-a$
P	$n/(2n+1)$	$(n+1)/(2n+1)$

აკმაყოფილებს თუ არა ეს მიმდევრობა დიდ რიცხვთა კანონს?

5. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \ldots$ მოცემულია განაწილების კანონით:

ξ_n	$n+1$	$-n$
P	$n/(2n+1)$	$(n+1)/(2n+1)$

აკმაყოფილებს თუ არა ეს მიმდევრობა ჩებიშევის თეორემის პირობებს?

6. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $\xi_1, \xi_2, \ldots$ მოცემულია განაწილების კანონით:

ξ_n	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

აკმაყოფილებს თუ არა ეს მიმდევრობა დიდ რიცხვთა კანონს?

პასუხები:

1. $\le 1/4$; $\le 1/9$. **2.** ≥ 0.94. **3.** ≥ 0.909. **4.** კი. **5.** არა. **6.** კი.

ს ტ ა ტ ი ს ტ ი კ ა

თავი I
წერტილოვანი და ინტერვალური შეფასებები. ნდობის ინტერვალი საშუალოსათვის

შეფასების ამოცანა: n მოცულობის $X=(X_1,...,X_n)$ შერჩევის საფუძველზე გავაკეთოთ დასკვნები გენერალური ერთობლიობის უცნობი θ პარამეტრის შესახებ. შერჩევის ნებისმიერ $T_n(X)=T_n(X_1,...,X_n)$ ფუნქციას **სტატისტიკა (შეფასება)** ეწოდება. **წერტილოვანი შეფასების ამოცანაა** მოიძებნოს ისეთი სტატისტიკა $T_n(X_1,...,X_n)$, რომლის შერჩევითი მნიშვნელობა $T_n(x_1,...,x_n)$, გარკვეული აზრით, შეიძლება ჩაითვალოს უცნობი θ პარამეტრის ჭეშმარიტი (რეალური) მნიშვნელობის მიახლოებად (შეფასებად) და გამოყენებული იქნას მის ნაცვლად. ასეთ სტატისტიკას (შეფასებას) **წერტილოვანი სტატისტიკა (შეფასება)** ეწოდება.

$T_n(X)=T_n(X_1,...,X_n)$ შეფასებას ეწოდება **ჩაუნაცვლებელი (ანუ გადაუადგილებადი)**, თუ $E_\theta T(X)=\theta$.

$T_n(X)=T_n(X_1,...,X_n)$ შეფასებას ეწოდება **ძალმოსილი (ანუ ძალდებული)**, თუ $T_n \xrightarrow{P_\theta} \theta$ (T_n ალბათობით კრებადია θ-სკენ), როცა $n\to\infty$.

ჩაუნაცვლებელ შეფასებას ეწოდება **ოპტიმალური (ანუ ეფექტური)**, თუ მას სხვა ჩაუნაცვლებელ შეფასებებს შორი გააჩნია უმცირესი დისპერსია.

თუ n მოცულობის შერჩევა წარმოდგენილია ვარიაციული მწკრივის სახით, მაშინ **შერჩევითი საშუალო** ეწოდება სიდიდეს:

$$\bar{x}=\frac{x_1 n_1+x_2 n_2+...+x_k n_k}{n}=x_1\frac{n_1}{n}+x_2\frac{n_2}{n}+...+\frac{n_k}{n}.$$

თუ შერჩევიდან მიღებული მნიშვნელობები არა დაჯგუფებული, მაშინ შერჩევითი საშუალო

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i .$$

შერჩევითი საშუალო წარმოადგენს უცნობი მათემატიკური ლოდინის ჩაუნაცვლებელ და ძალმოსილ შეფასებას.

შერჩევითი დისპერსია ეწოდება სიდიდეს:

$$s^2=\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2\frac{n_i}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

შესწორებული შერჩევითი დისპერსია ეწოდება სიდიდეს:

$$s^{2}=\frac{n}{n-1}s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

შესწორებული შერჩევითი დისპერსია წარმოადგენს უცნობი დისპერსიის ჩაუნაცვლებელ და ძალმოსილ შეფასებას.

შერჩევითი სტანდარტული გადახრა (შესაბამისად, **შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრა**) ეწოდება არითმეტიკულ კვადრატულ ფესვს შერჩევითი დისპერსიიდან $s=\sqrt{s^2}$ (შესაბამისად, შესწორებული შერჩევითი დისპერსიიდან $s^{'}=\sqrt{s^{'2}}$)

შერჩევითი ასიმეტრიის კოეფიციენტი

$$a_{შერ}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^3}$$

შერჩევითი ექსცესის კოეფიციენტი

$$e_{შერ}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^4}-3$$

შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი ეწოდება სიდიდეს:

$$r_{xy}=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\,\bar{y}}{s_x s_y},\qquad \text{სადაც}\quad \overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i\,;$$

$$s_x=\sqrt{s_x^{\,2}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\;;\; s_y=\sqrt{s_y^{\,2}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$$

შერჩევითი პარამეტრების განაწილება ნორმალური პოპულაციისათვის. დავუშვათ, რომ $X_1,X_2,\dots,X_n$ წარმოადგენს შერჩევას ნორმალური გენერალური ერთობლიობიდან, $X_i\equiv N(a,\sigma^2)$ $(i=1,2,\dots,n)$, მაშინ: $\bar{X}$ და S^2 $(S^{'2})$ დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია; $\bar{X}\equiv N(a,\sigma^2/n)$;

$$\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-a)^2/\sigma^2\equiv\chi^2(n)\,;\;\frac{(n-1)S^{'2}}{\sigma^2}\equiv\chi^2(n-1)\,;$$

$$Z=\frac{\bar{X}-a}{\sigma/\sqrt{n}}\equiv N(0,1)\,;\;T=\frac{\bar{X}-a}{S/\sqrt{n-1}}=\frac{\bar{X}-a}{S^{'}/\sqrt{n}}\equiv t(n-1)\,.$$

მაქსიმალური დასაჯერობის მეთოდი: ვთქვათ, $p(x_i,\theta)$ არის ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგად დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს x_i მნიშვნელობას. **მაქსიმალური დასაჯერობის ფუნქცია** ეწოდება θ არგუმენტის ფუნქციას: $L\,(x_1,x_2,\dots,x_n;\,\theta)=p(x_1,\,\theta)p(x_2,\,\theta)\dots p(x_n,\,\theta)$ ($\ln L$ ფუნქციას **მაქსიმალური დასაჯერობის ლოგარითმული ფუნქცია** ეწოდება). **მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასებას** უწოდებენ θ-ს იმ მნიშვნელობას, სადაც მაქსიმალური დასაჯერობის ფუნქცია (ან რაც იგივეა $\ln L$) აღწევს თავის მაქსიმუმს. მის მოსაძებნად საჭიროა: 1). ვიპოვოთ წარმოებული $\partial\ln L/\partial\theta$; 2). გავუტოლოთ წარმოებული ნულს (მივიღებთ ე. წ. **მაქსიმალური დასაჯერობის ლოგარითმულ განტოლებას**) და ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილები; 3). ვიპოვოთ მეორე წარმოებული $\partial^2\ln L/\partial\theta^2$; თუ ის უარყოფითია კრიტიკულ წერტილში, მაშინ ეს წერტილი – მაქსიმუმის წერტილია.

უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევაში, რომლის $f(x, \theta)$ განაწილების სიმკვრივის სახე ცნობილია, მაგრამ იგი შეიცავს უცნობ θ პარამეტრს, მაქსიმალური დასაჯერობის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdots f(x_n, \theta).$$

უცნობი პარამეტრის მაქსიმალური დასაჯერობის შეფასების საპოვნელად უნდა ჩავატაროთ იგივე პროცედურები, რაც დისკრეტულ შემთხვევაში.

მომენტთა მეთოდი: მომენტთა მეთოდი დაფუძნებულია იმ გარემოებაზე, რომ საწყისი და ცენტრალური ემპირიული მომენტები წარმოადგენენ შესაბამისი საწყისი და ცენტრალური თეორიული მომენტების ძალმოსილ შეფასებებს. ამიტომ ამა თუ იმ შეფასების მისაღებად თეორიული მომენტები უნდა გავუტოლოთ იმავე რიგის შესაბამის ემპირიულ მომენტებს და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება ან განტოლებათა სისტემა.

θ უცნობი პარამეტრის γ (ან $1-\alpha$) **საიმედოობის მქონე ანუ $100\gamma\%$ -იანი (ან $100(1-\alpha)\%$-იანი) ნდობის ინტერვალი** ეწოდება ინტერვალს (T_1, T_2), რომლისთვისაც: $P\{T_1 < \theta < T_2\} = \gamma$ (ან $1-\alpha$), სადაც T_1 და T_2 θ პარამეტრის გარკვეული წერტილოვანი შეფასებებია, $\gamma \in (0,1)$ $(\alpha \in (0,1))$; α-ს **მნიშვნელოვნების დონე** ეწოდება; ნდობის ინტერვალის სიგრძის ნახევარს **შეფასების სიზუსტე** ეწოდება.

α მნიშვნელოვნების დონის მქონე ნდობის ინტერვალი ნორმალური პოპულაციის მათემატიკური ლოდინისათვის ცნობილი σ^2 დისპერსიის შემთხვევაში არის:

$$\left(\overline{X} - \sigma \cdot \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \sigma \cdot \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right),$$

სადაც $z_{\alpha/2}$ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია. აქ შეფასების სიზუსტეა $l = \sigma \cdot \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$.

შეფასების წინასწარ დაფიქსირებული l სიზუსტის უზრუნველსაყოფად საჭირო შერჩევის მინიმალური მოცულობაა:

$$n^* = [(\frac{\sigma}{l} z_{\alpha/2})^2] + 1.$$

α მნიშვნელოვნების დონის მქონე ნდობის ინტერვალს ნორმალური პოპულაციის მათემატიკური ლოდინისათვის უცნობი დისპერსიის შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე:

$$(\overline{X} - t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S'}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{S'}{\sqrt{n}}),$$

სადაც $t_{n-1,\alpha/2}$ არის თავისუფლების $n-1$ ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილი.

α მნიშვნელოვნების დონის მქონე ასიმპტოტური ნდობის ინტერვალი (არანორმალური) პოპულაციის საშუალოსათვის შერჩევის დიდი მოცულობის შემთხვევაში ($n \geq 30$), როცა დისპერსია ცნობილია არის:

$$(\overline{X}_n - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}),$$

ხოლო უცნობი დისპერსიის შემთხვევაში კი:

$$(\overline{X}_n - z_{\alpha/2}\cdot\frac{S'}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + z_{\alpha/2}\cdot\frac{S'}{\sqrt{n}}).$$

α მნიშვნელოვნების დონის მქონე ნდობის ინტერვალი (არანორმალური) პოპულაციის საშუალოსათვის, როცა σ უცნობია და $n<30$:

$$(\overline{X} - t_{n-1,\alpha/2}\cdot\frac{S'}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1,\alpha/2}\cdot\frac{S'}{\sqrt{n}}).$$

როდის გამოიყენება Z ან T განაწილება

$\boxed{\text{ცნობილია თუ არა } \sigma?}$ $\xrightarrow{\text{დიახ}}$ $\boxed{\text{გამოიყენე } z_{\alpha/2} \text{ შერჩევის მოცულობის მიუხედავად}^{*}}$

↓ არა

$\boxed{\text{არის თუ არა } n \ge 30?}$ $\xrightarrow{\text{დიახ}}$ $\boxed{\text{გამოიყენე } z_{\alpha/2} \text{ და ფორმულაში } \sigma \text{ შეცვალე } s' \text{-ით}}$

↓ არა

$\boxed{\text{გამოიყენე } t_{n-1,\alpha/2} \text{ და } s' \text{ ფორმულაში}^{**}}$

* სიდიდე უნდა იყოს ნორმალურად განაწილებული როცა $n<30$.

** სიდიდე უნდა იყოს მიახლოებით ნორმალური.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. უნივერსიტეტის რექტორს სურს შეაფასოს წელს ჩარიცხული სტუდენტების საშუალო ასაკი. წარსული გამოკვლევებიდან ცნობილია, რომ სტანდარტული გადახრა არის 2 წელი. აღებულია 50 სტუდენტისაგან შემდგარი შერჩევა და მისთვის გამოთვლილი საშუალო ტოლია 23.2 წლის. იპოვეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის. იგულისხმება, რომ ასაკი დაახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული.

ამოხსნა. 95%-იანი ნდობის ინტერვალი ნიშნავს, რომ ნდობის ინტერვალის საიმედოობა $1-\alpha = 95\%/100\% = 0.95$, ანუ $\alpha = 0.05$. ამიტომ ნორმალური განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$. შესაბამისად, საძიებელი ნდობის ინტერვალი იქნება:

$$(23.2 - 1.96\cdot\frac{2}{\sqrt{50}}, 23.2 + 1.96\cdot\frac{2}{\sqrt{50}}),\ (22.6, 23.8),$$

ანუ 23.2 ± 0.6. ამრიგად, 50 სტუდენტის ასაკიდან გამომდინარე, 95%-იანი საიმედოობით, უნივერსიტეტის რექტორს შეუძლია თქვას, რომ სტუდენტების საშუალო ასაკი მოთავსებულია 22.6 წელსა და 23.8 წელს შორის.

მაგალითი 2. ცნობილია, რომ გარკვეული მედიკამენტის გამოყენების შედეგად პულსის რიცხვი მატულობს. ცნობილია, რომ პულსის რიცხვის სტანდარტული გადახრა არის 5 დარტყმა წუთში. შერჩეულ იქნა ამ მედიკამენტის 30 მომხმარებელი და მათთვის პულსის რიცხვის საშუალო აღმოჩნდა 104 დარტყმა წუთში. ვიპოვოთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი პულსის რიცხვის ჭეშმარიტი საშუალოსათვის. იგულისხმება, რომ შესაბამისი განაწილება დაახლოებით ნორმალურია.

ამოხსნა. აქ $1-\alpha=0.99$, ანუ $\alpha=0.01$. ამიტომ $z_{\alpha/2}=z_{0.005}=2.58$. შესაბამისად, ნდობის ინტერვალი იქნება:

$$104-2.58\cdot\frac{5}{\sqrt{30}}<a<104+2.58\cdot\frac{5}{\sqrt{30}}, \text{ ანუ } 102<a<106.$$

მაშასადამე, 30 მომხმარებლისაგან შედგენილი შერჩევის საფუძველზე, 99%-იანი საიმედოობით, ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ამ მედიკამენტის ყველა მომხმარებლის პულსის რიცხვის საშუალო მოთავსებულია (ცვალებადობს) 102-სა და 106-ს შორის.

მაგალითი 3. კოლეჯის პრეზიდენტმა დაავალა სტატისტიკის მასწავლებელს შეაფასოს კოლეჯის სტუდენტების საშუალო ასაკი. რა მოცულობის შერჩევაა აუცილებელი? სტატისტიკის მასწავლებელი თვლის, რომ საიმედოობა უნდა იყოს 99%, რათა შეფასება იყოს სწორი ერთი წლის სიზუსტით. წინა გამოკვლევებიდან ცნობილია, რომ ასაკთა სტანდარტული გადახრა არის 3 წელი. იგულისხმება, რომ ასაკი დაახლოებით ნორმალურდაა განაწილებული

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $l=1$; $\sigma=3$; $\alpha=1-0.99=0.01$. ამიტომ $z_{\alpha/2}=z_{0.005}=2.58$. შესაბამისად, შერჩევის მინიმალური მოცულობა იქნება:

$$n^{*}=[(\frac{2.58}{1}\cdot 3)^{2}]+1=[59.9]+1=60.$$

ამრიგად, იმისათვის, რომ მასწავლებელმა შეაფასოს სტუდენტთა ასაკის საშუალოს ჭეშმარიტი მნიშვნელობა ერთი წლის სიზუსტით 99%-იანი საიმედოობით, მას სჭირდება სულ ცოტა 60 სტუდენტისაგან შემდგარი შერჩევა.

მაგალითი 4. შემთხვევით შეარჩიეს 10 ავტომობილი და გაზომეს მარჯვენა წინა საბურავის პროტექტორის სიღრმე. საშუალო აღმოჩნდა 0.32 დიუმი (1 დიუმი არის 2.54 სმ.), ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა – 0.08 დიუმი. იპოვეთ 95%-იანი საიმედოობის ნდობის ინტერვალი პროტექტორის სიღრმის საშუალოსათვის. იგულისხმეთ, რომ სიდიდე მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $n=10$, $\overline{X}=0.32$, $s^{'}=0.08$. ვინაიდან პოპულაციის სტანდარტული გადახრა σ უცნობია, ის უნდა შევცვალოთ შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრით $s^{'}=0.08$. თავისუფლების ხარისხია $n-1=10-1=9$. $\alpha=1-0.95=0.05$, $\alpha/2=0.05/2=0.025$. შესაბამისად t განაწილების ზედა კრიტიკული წერტილების ცხრილში მე-9 სტრიქონისა და 0.025-ის შესა-

ბამისი სვეტის გადაკვეთაზე ვპოულობთ $t_{n-1,\alpha/2}$-ის მნიშვნელობას: $t_{n-1,\alpha/2}=t_{9,0.025}=2.262$. ამიტომ საძიებელი ნდობის ინტერვალი იქნება:

$$(0.32-2.262\cdot\frac{0.08}{\sqrt{10}},0.32+2.262\cdot\frac{0.08}{\sqrt{10}}),\text{ ანუ }(0.26,0.38).$$

ამრიგად, 10 მოცულობის მქონე შერჩევის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ ავტომობილების წინა მარჯვენა საბურავების პროტექტორების სიღრმის პოპულაციის საშუალო 95%-იანი საიმედობით მოთავსებულია 0.26 დიუმსა და 0.38 დიუმს შორის. (1 დიუმი = 2.54 სმ)

მაგალითი 5. მოცემულია გენერალური ერთობლიობა გარკვეული მახასიათებლით, რომელიც განაწილებულია ნორმალურად 6.25-ის ტოლი დისპერსიით. ჩატარებულია $n=27$ მოცულობის შერჩევა და მიღებულია მახასიათებლის საშუალო შერჩევითი მნიშვნელობა $\bar{x}=12$. ვიპოვოთ ნდობის ინტერვალი, რომელიც ფარავს გენერალური ერთობლიობის გამოსაკვლევი მახასიათებლის უცნობ მათემატიკურ ლოდინს საიმედოობით $\gamma=0.99$.

ამოხსნა. გვაქვს: $\sigma=\sqrt{6.25}=2.5$; $n=27$; $\bar{x}=12$; $\alpha=1-0.99=0.01$; $z_{\alpha/2}=z_{0.005}=2.57$. აქედან ვღებულობთ საძებნ ნდობის ინტერვალს: (10.76, 13.24).

მაგალითი 6. 20 ელექტრონათურის საკონტროლო შემოწმებისას მათი მუშაობის საშუალო ხანგრძლივობა აღმოჩნდა 2000 საათის ტოლი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 11 საათის ტოლი. ცნობილია, რომ ნათურის მუშაობის ხანგრძლივობა წარმოადგენს ნორმალური კანონით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს. განვსაზღვროთ ამ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის ნდობის ინტერვალი საიმედოობით 0.95.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $\alpha=1-0.95=0.05$. სტიუდენტის განაწილების ცხრილიდან (თავისუფლების 19-ის ტოლი ხარისხით) ვპოულობთ, რომ $t_{n-1,\alpha/2}=t_{19,0.025}=2.093$. ამიტომ საძიებელი ნდობის ინტერვალი იქნება (1994.8, 2005.2).

ამოცანები (σ ცნობილია ან $n\geq 30$)

1. იპოვეთ $z_{\alpha/2}$ (სტანდარტული ნორმალური განაწილების $\alpha/2$-ზედა კრიტიკული წერტილი): ა). 99%-იანი; ბ). 98%-იანი; გ). 95%-იანი; დ). 90%-იანი და ე). 94%-იანი ნდობის ინტერვალებისათვის.

2. გამოთვალეთ შერჩევითი საშუალო, შესწორებული სტანდარტული გადახრა, ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის და იპოვეთ შეფასების სიზუსტე. პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 11. ისარგებლეთ შემდეგი შერჩევით:

43	52	18	20	25	45	43	21	42	32
24	32	19	25	26	44	42	41	41	53
22	25	23	21	27	33	36	47	19	20

3. ქვემოთ მოყვანილი შერჩევის მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ შერჩევითი საშუალო, შესწორებული სტანდარტული გადახრა და ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის:

47.596	68.751	5.838	69.831	28.843	53.107	31.391	48.829	50.706	32.785
62.892	55.105	63.974	56.674	38.362	51.549	31.938	31.851	56.088	48.321
34.906	38.359	72.086	34.009	50.850	43.801	46.127	49.926	54.960	49.671

4. 35 მეხუთე კლასელის კითხვის ქულების საშუალო არის 82, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა 15. ა). იპოვეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი მეხუთე კლასელების კითხვის ქულების საშუალოსათვის; ბ). იპოვეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი მეხუთე კლასელების კითხვის ქულების საშუალოსათვის; გ). რომელი ინტერვალია უფრო განიერი? ახსენით რატომ.

5. გამოთვალეთ შერჩევითი საშუალო, შესწორებული სტანდარტული გადახრა და ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი ევროპელი მოქალაქის წლიური შემოსავლის საშუალოსათვის, თუ ქვემოთ მოყვანილია შემთხვევით შერჩეული 50 ევროპელი მოქალაქის შემოსავლები გაზომილი ათასობით ევროებში:

84	14	31	72	26	49	252	104	31	8
3	18	72	23	55	133	16	29	225	138
85	24	391	72	158	4340	346	19	5	846
461	254	125	61	123	60	29	10	366	47
28	254	6	77	21	97	6	17	8	82

6. 40 პედაგოგზე დაკვირვებამ აჩვენა, რომ ისინი საშუალოდ 12.6 წუთს ანდომებენ ერთი ნაწერის გასწორებას. ა). ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი გასწორების დროის საშუალოსათვის, თუ ცნობილია, რომ სტანდარტული გადახრა ტოლია 2.5 წუთის; ბ). რამდენად მოსალოდნელია, რომ რომელიმე პედაგოგმა თქვას, რომ ის საშუალოდ 30 წუთს ანდომებს ნაწერის გასწორებას?

7. შემთხვევით შერჩეული 40 თავდამსხმელის საშუალო ქულა არის 186, ხოლო თავდამსხმელთა პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 6. ა). ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი თავდამსხმელთა პოპულაციის საშუალო ქულისათვის; ბ). ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი თავდამსხმელთა პოპულაციის საშუალო ქულისათვის იმ შემთხვევაში, როცა 40 თავდამსხმელის ნაცვლად განიხილება 100 თამდამსხმელისაგან შედგენილი შერჩევა იმავე საშუალო ქულით; გ). რომელი ინტერვალია უფრო პატარა (ზუსტი) და რატომ?

8. შემთხვევით შერჩეულ 49 ბავშვზე დაკვირვებამ (რომელთა ასაკი მერყეობდა 8-დან 12 წლამდე) აჩვენა, რომ ისინი სავაჭრო ცენტრში საშუალოდ ხარჯავენ 18.5 ლარს, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 1.56 ლარი. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი 8-დან 12 წლამდე ასაკის ბავშვების მიერ სავაჭრო ცენტრში დახარჯული თანხის საშუალოსათვის.

9. გამოკვლევებმა აჩვენა, რომ აშშ-ს მოქალაქეს საშუალოდ ჭირდება 5.9 თვე ახალი სამუშაოს მოსაძებნად. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი სამუშაოს მოძებნის საშუალოსათვის, თუ გამოკითხული 36 სამუშაოს მძებნელისათვის შესწორებული სტანდარტული გადახრა აღმოჩნდა 0.8 თვე.

10. ქვემოთ მოყვანილია აშშ-ს შემთხვევით შერჩეულ 40 კომპანიაში დროებითი სამუშაო ადგილების რაოდენობა:

7685	3100	725	850	11778	7300	3472	540	11370	5400
1570	160	9953	3114	2600	2821	6200	3483	8954	8
1000	1650	1200	390	1999	400	3473	600	1270	873
400	713	11960	1195	2290	175	887	1703	4236	1400

გამოთვალეთ შერჩევითი საშუალო, შესწორებული სტანდარტული გადახრა და ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი დროებითი სამუშაო ადგილების საშუალოსათვის.

11. 48 შემთხვევით შერჩეული დღის მონაცემების მიხედვით დიდ ჰოსპიტალში დღის განმაელობაში შემოსული პაციენტების საშუალოდ 38% საჭიროებს გადაუდებელ სასწრაფო დახმარებას. პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 4. ა). ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ პაციენტების რაოდენობის საშუალოსათვის, ვინც საჭიროებს გადაუდებელ სასწრაფო დახმარებას; ბ). ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ პაციენტების რაოდენობის საშუალოსათვის, ვინც საჭიროებს გადაუდებელ სასწრაფო დახმარებას, თუ პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 8 ნაცვლად 4-სა; გ). რატომაა მეორე შემთხვევაში ნდობის ინტერვალი უფრო განიერი?

12. ცენტრალური რესპუბლიკური საავადმყოფოს 84 სხვადასხვა ადგილას გაზომილი ხმაურის დონის საშუალო იყო 61.2 დეციბალი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა 7.9 დეციბალი. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საავადმყოფოში ხმაურის დონის რეალური საშუალოსათვის.

13. მკვლევარს სურს შეაფასოს დედაქალაქის პოლიციის ოფიცრის საშუალო ხელფასი. მისი მიზანია, რომ შეფასების საიმედოობა იყოს 95%. ცნობილია, რომ პოლიციის ოფიცრის ხელფასის სტანდარტული გადახრაა 1050 ლარი. რა მოცულობის შერჩევა დასჭირდება მკვლევარს იმისათვის, რომ შეფასების სიზუსტე იყოს 200 ლარი?

14. ფაკულტეტის დეკანატს სურს შეაფასოს მოწვეული პედაგოგების საშუალო კვირეული დატვირთვა. წინა გამოკვლევის მიხედვით სტანდარტული გადახრა იყო 2.6 სთ. რამდენად დიდი მოცულობის შერჩევის აღება იქნება საჭირო, თუ დეკანატს სურს 99%-იანი საიმედოობით ჭეშმარიტ საშუალოსა და შერჩევის საშუალოს შორის განსხვავება არ აღემატებოდეს 1 საათს.

15. ცენტრალური სამხედრო ჰოსპიტალის 117 სხვადასხვა ოთახში ხმაურის საშუალო დონე იყო 58 დეციბალი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა 4.8 დეციბალი. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი ჰოსპიტალში ხმაურის დონის ჭეშმარიტი საშუალოსათვის.

16. სადაზღვევო კომპანია ცდილობს შეაფასოს ავადმყოფობის დღეების საშუალო რაოდენობა მაკდონალდსის ქსელში მომუშავე პერსონალისათვის. საპილოტე შემოწმებით დადგინდა, რომ შესაბამისი სტანდარტული გადახრაა 2.5 დღე. რა მოცულობის შერჩევაა საჭირო, რომ კომპანიამ 95%-იანი საიმედოობით დაადგინოს ინტერვალი, რომელიც შეიცავს ავადმყოფობის დღეების რეალურ საშუალოს მაქსიმალური ცდომილებით 1 დღე?

17. რესტორნის მეპატრონეს სურს დაადგინოს 99%-იანი ნდობის ინტერვალი შამპანიურის ფასის რეალური საშუალოსათვის. რა მოცულობის უნდა იყოს შერჩევა, რომ შეფასების სიზუსტე იყოს 0.1 ლარი, თუ წინა გამოკვლევის თანახმად ფასის სტანდარტული გადახრა იყო 0.12 ლარი.

18. სამშობიარო სახლის პერსონალს სურს შეაფასოს ახალშობილთა წონა. რა მოცულობის შერჩევა იქნება საჭირო, რომ 90%-იანი საიმედოობით წონის რეალური საშუალო მოთავსებული იყოს შერჩევის საშუალოსაგან 6 უნციის (1 უნცია = 28.3 გრ) ფარგლებში, თუ ცნობილია, რომ ახალშობილთა წონის სტანდარტული გადახრაა 8 უნცია.

ამოცანები (σ უცნობია და $n<30$)

19. იპოვეთ $t_{n-1,\alpha/2}$ (თავისუფლების ($n-1$) ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების $\alpha/2$-ზედა კრიტიკული წერტილი): ა). 99%-იანი ნდობის ინტერვალისათვის, როცა $n=18$; ბ). 95%-იანი ნდობის ინტერვალისათვის, როცა $n=23$; გ). 98%-იანი ნდობის ინტერვალისათვის, როცა $n=15$; დ). 90%-იანი ნდობის ინტერვალისათვის, როცა $n=10$; ე). 95%-იანი ნდობის ინტერვალისათვის, როცა $n=20$.

ქვემოთ მოყვანილ ამოცანებში იგულისხმეთ, რომ ყველა სიდიდე განაწილებულია დაახლოებით ნორმალურად:

20. ქვემოთ მოყვანილი მონაცემებისათვის გამოთვალეთ შერჩევითი საშუალო, შესწორებული სტანდარტული გადახრა, ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის და იპოვეთ შეფასების სიზუსტე:

625 675 535 406 512 680 483 522 619 575.

21. ქვემოთ მოყვანილი მონაცემების მიხედვით გამოთვალეთ შერჩევითი საშუალო, შესწორებული სტანდარტული გადახრა და ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის:

62 81 86 79 73 88 90 98 78 93 87 82 78 59 63 97 93 84.

22. შემთხვევით შერჩეული 20 პაციენტისის 100 მილილიტრ სისხლში ჰემოგლობინის საშუალო შემცველელობა აღმოჩნდა 16 გრამი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 2 გრ. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი ჭეშმარიტი საშუალოსათვის.

23. მეტეოროლოგმა 15 ცივი ჰაერის მასივზე დაკვირვების შედეგად დაადგინა, რომ მათი გავრცელების საშუალო სიჩქარეა 18 მილი/სთ, ხოლო სტანდარტული გადახრა კი 2 მილი/სთ. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი რეალური საშუალო სიჩქარისათვის.

24. შტატის წარმომადგენელს სურს შეაფასოს შტატის საკანონმდებლო ორგანოში ქალების საშუალო რიცხვი. მან შემთხვევით შეარჩია 17 შტატი და მიიღო შემდეგი მონაცემები: 5 33 35 37 24 31 16 45 19 13 18 29 15 39 18 58 132. გამოთვალეთ საშუალოს წერტილოვანი შეფასება, შესწორებული სტანდარტული გადახრა და ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის. რატომაა ნდობის ინტერვალი ასე განიერი?

25. 20 თინუსზე დაკვირვებამ აჩვენა, რომ ისინი საშუალოდ ცურავენ 8.6 მილს საათში. შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 1.6. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი ჭეშმარიტი საშუალოსათვის.

26. შემთხვევით არჩეული 6 სპილოს საშუალო წონაა 12200 ფუნტი (1 ფუნტი = 453.6 გრ), ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა 200 ფუნტი. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი ჭეშმარიტი საშუალოსათვის.

27. რეგიონის 8 სკოლის სათადარიგო მასწავლებლის ყოველდღიური ხელფასებია: 60ლ 56ლ 60ლ 55ლ 70ლ 55ლ 60ლ 55ლ. იპოვეთ წერტილოვანი შეფასებები და ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი რეგიონში სათადარიგო მასწავლებლის ყოველდღიური ხელფასების ჭეშმარიტი საშუალოსათვის.

28. 28 მოქალაქის გამოკითხვის მიხედვით მათი ამჟამინდელ მისამართზე ცხოვრების საშუალო ხანგრძლივობამ შეადგინა 9.3 წელი, ხოლო შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრა არის 2 წელი. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის.

29. ავტომაღაზიის მენეჯერმა დაადგინა, რომ მის 6 თანამშრომელს ავტომობილის წყლის ტუმბოს შეცვლა შეუძლია საშუალოდ 18 წუთში, ხოლო შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრა არის 3 წუთი. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი ჭეშმარიტი საშუალოსათვის.

30. შემთხვევით შერჩეული 25 ავტომობილიანი სტუდენტი კვირაში საშუალოდ ხარჯავს 18.53 ლარის ბენზინს. შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 3 ლარი. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი რეალური საშუალოსათვის.

31. სტრესულ სიტუაციაში მყოფი 10 კაციანი ჯგუფის გულისცემის საშუალო რიცხვი წუთში შეადგენს 126-ს, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა არის 4. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი სტრესულ სიტუაციაში მყოფი კაცების გულისცემის რეალური საშუალოსათვის.

32. სტრესულ სიტუაციაში მყოფი 6 ქალი გულისცემის საშუალო რიცხვი წუთში შეადგენს 115-ს, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა არის 6. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი სტრესულ სიტუაციაში მყოფი ქალების გულისცემის რეალური საშუალოსათვის.

33. ჰოსპიტალის 24 საოპერაციო ოთახში ხმაურის დონის საშუალო იყო 41.6 დეციბალი, ხოლო შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 7.5 დეციბალი. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საოპერაციო ოთახებში ხმაურის დონის რეალური საშუალოსათვის.

34. ააგეთ 98%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსათვის, თუ მისგან აღებული შერჩევაა:

22	24	120	382	50	38	297
29	23	70	56	17	51	38

35. ეროვნულ გამოცდაზე მათემატიკაში 20 აბიტურიენტის გულისცემის საშუალო იყო 96 დარტყმა წუთში, ხოლო შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 5. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი გულისცემის რეალური საშუალოსათვის.

36. დედაქალაქის 28 ახალდაქორწინებულის საშუალო წლიური შემოსავალი შეადგენს 58219 ლარს, ხოლო შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 56 ლარი. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი შემოსავლების რეალური საშუალოსათვის.

პასუხები:

1. 2.58; 2.33; 1.96; 1.65; 1.88. **2.** 32.03; 11.01; (28.1, 35.97); 2.01. **3.** 46.9709; 14.3582; (41.8329, 52.1089). **4.** (77, 87); (75, 89); II, ვინაიდან საიმედოობა უფრო დიდია. **5.** 196; 617.3; (52, 340). **6.** (11.9,13.3); ეს ძალიან მცირე ალბათობის მქონეა, რადგან 30 ბევრჯერ აღემატება 13.3-ს. **7.** (184, 188); (185, 187); II, ვინაიდან 100 > 40. **8.** (18.13, 18.87). **9.** (5.6, 6.2). **10.** 3222.4; 3480.1; (2341.5, 4130.3). **11.** (37, 39); (35, 41); ვინაიდან 8 > 4. **12.** (59.5, 62.9). **13.** 106. **14.** 45. **15.** (57.4, 58.6). **16.** 25. **17.** 10. **18.** 5. **19.** 2.898; 2.624; 2.093; 2.074; 1.833. **20.** 563.2; 87.9; (500.4, 626); 27.8. **21.** 81.72; 11.58; (75.96, 87.48). **22.** (15, 17). **23.** (17, 19). **24.** 33.4; 28.7; (21.2, 45.6); მონაცემი 132 არაჩვეულებრივად დიდია ("ამოვარდნილი" – "outlier" მონაცემია). **25.** (8, 9.2). **26.** (11990, 12410). **27.** 58.9; 5.1; (55.5, 62.3). **28.** (8.7, 9.9). **29.** (13, 23). **30.** (17.29, 19.77). **31.** (123, 129). **32.** (109, 121). **33.** (38.4, 44.8). **34.** (7.9, 165.9). **35.** (94, 98). **36.** (58197, 58241)

თავი II
ნდობის ინტერვალი ბერნულის სქემაში

ნდობის ინტერვალი და შერჩევის მოცულობა ბერნულის სქემისათვის (პროპორციისათვის): ბერნულის სქემაში უცნობი p ალბათობის (პოპულაციის პროპორციის) წერტილოვანი შეფასებაა ფარდობითი სიხშირე $w_n = S_n / n$, სადაც $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ($X_i = 1$, თუ i-ურ ცდაში მოხდა წარმატება, და $X_i = 0$, თუ i-ურ ცდაში მოხდა მარცხი) – წარმატებათა რაოდენობაა n დამოუკიდებელ ცდაში.

α მნიშვნელოვნების დონის მქონე ასიმპტოტური ნდობის ინტერვალს უცნობი p ალბათობისათვის (პროპორციისათვის) აქვს შემდეგი სახე:

$$(w_n - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{w_n(1-w_n)}{n}},\ w_n + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{w_n(1-w_n)}{n}}).$$

პოპულაციის პროპორციის l სიზუსტის ინტერვალური შეფასებისათვის საჭირო შერჩევის მინიმალური მოცულობაა:

$$n^* = [w_n(1-w_n)(\frac{z_{\alpha/2}}{l})^2] + 1$$

(ამასთანავე, როცა w_n-ს აპროქსიმაცია უცნობია, მაშინ უნდა გამოვიყენოთ $w_n = 0.5$, ვინაიდან ნამრავლის $w_n(1-w_n)$ მაქსიმალურია, როცა $w_n = 0.5$).

დაზუსტებული α მნიშვნელოვნების დონის მქონე ასიმპტოტური ნდობის ინტერვალი უცნობი p ალბათობისათვის არის:

$$(\frac{w_n + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{w_n(1-w_n)}{n} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{4n^2}}}{1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n}},\ \frac{w_n + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2n} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{w_n(1-w_n)}{n} + \frac{z_{\alpha/2}^2}{4n^2}}}{1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n}}).$$

α მნიშვნელოვნების დონის მქონე ასიმპტოტური ნდობის ინტერვალი პუასონის პოპულაციის უცნობი λ პარამეტრისათვის არის:

$$(\overline{X}_n - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}},\ \overline{X}_n + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\overline{X}_n}{n}}).$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. მოხუცების 500 მომვლელისაგან შემდგარ შერჩევაში 60 მამაკაცია. იპოვეთ 90%-იანი საიმედოობის ნდობის ინტერვალი მოხუცების მოვლის პროგრამაში მონაწილე მამაკაცთა ჭეშმარიტი პროპორციისათვის.

ამოხსნა. ვინაიდან $\alpha = 1 - 0.90 = 0.10$, ამიტომ $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.65$.

გარდა ამისა, $S_n = 60$, $n = 500$. შესაბამისად, $w_n = 60/500 = 0.12$ და $1 - w_n = 1 - 0.12 = 0.88$.

ამიტომ ნდობის ინტერვალი იქნება:

$$(0.12-1.65\cdot\sqrt{\frac{0.12\times0.88}{500}}, 0.12+1.65\cdot\sqrt{\frac{0.12\times0.88}{500}}),\ (0.096, 0.144)$$

ანუ

$$9.6\% < p < 14.4\%.$$

ამრიგად, მოხუცების მოვლის პროგრამაში მონაწილე მამაკაცების რეალური პროპორცია 90%-იანი საიმედოობით მოთავსებულია 9.6%-სა და 14.4%-ს შორის.

მაგალითი 2. მკვლევარს სურს 95%-იანი საიმედოობით შეაფასოს იმ ადამიანების პროპორცია, რომლებსაც სახლში აქვთ საკუთარი კომპიუტერი. წინა გამოკვლევამ აჩვენა, რომ გამოკითხულთა 40%-ს სახლში აქვს საკუთარი კომპიუტერი. მკვლევარს სურს 2%-იანი სიზუსტე ჭეშმარიტი პროპორციისათვის. ვიპოვოთ შერჩევის მოცულობის აუცილებელი მინიმუმი.

ამოხსნა. გვაქვს: $z_{\alpha/2} = z_{(1-0.95)/2} = z_{0.025} = 1.96$, $l = 0.02$, $w_n = 0.40$, $1-w_n = 0.60$. ამიტომ შერჩევის მნიმიმალური მოცულობა იქნება:

$$n = [0.40\times0.60\times(\frac{1.96}{0.02})^2] + 1 = [2304.96] + 1 = 2305.$$

ე. ი. უნდა გამოიკითხოს 2305 ადამიანი.

მაგალითი 3. მკვლევარს სურს 90%-იანი საიმედოობითა და 5%-იანი სიზუსტით შეაფასოს აღმასრულებელი ხელისუფლების იმ წარმომადგენელთა პროპორცია, რომლებსაც აქვთ მანქანის ტელეფონი.

ამოხსნა. ვინაიდან უცნობია w_n-ის შეფასება, სტატისტიკოსი ირჩევს $w_n = 0.5$ და $1-w_n = 0.5$ მნიშვნელობებს.

გარდა ამისა, ამ შემთხვევაში $l = 0.05$, $\alpha = 1-0.90 = 0.1$, $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.65$. შესაბამისად,

$$n = [0.5\times0.5\times(\frac{1.65}{0.05})^2] + 1 = [272.25] + 1 = 273.$$

ე. ი. უნდა გამოიკითხოს აღმასრულებელი ხელისუფლების 273 წარმომადგენელი.

ამოცანები

1. 1500 გამოკითხული ახალგაზრდიდან 39%-მა თქვა, რომ ისინი აპირებენ მომავალ წელს აიღონ უფრო ხანგრძლივი შვებულება. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ ახალგაზრდების რეალური პროპორციისათვის, რომლებიც აპირებენ მომავალ წელს უფრო ხანგრძლივი შვებულების აღებას.

2. დედაქალაქის 100 შემთხვევით შერჩეულ მცხოვრებს შორის 27 მსუქანია. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი დედაქალაქის მოსახლეობაში მსუქანი ადამიანების რეალური პროპორციისათვის.

3. 100 გამოკითხულ უმუშევარს შორის 65% არაა დაინტერესებული დაბრუნდეს ძველ სამსახურში. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ უმუშევრების რეალური პროპორციისათვის, რომლებსაც არ სურთ ძველ სამსახურში დაბრუნება.

4. გამოკითხული 1015 ახალგაზრდიდან 13% დადებითად აფასებს საკანონმდებლო ორგანოს საქმიანობას. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ ახალგაზრდების რეალური პროპორციისათვის, რომლებიც ასე ფიქრობენ.

5. 200 გამოკითხული მუშიდან 168 მუშამ განაცხადა, რომ 1 საათის განმავლობაში სატელეფონო ზარმა არანაკლებ 3-ჯერ გააწყვეტინა მუშაობა. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ მუშების რეალური პროპორციისათვის, რომლებსაც სატელეფონო ზარმა არანაკლებ 3-ჯერ გააწყვეტინა მუშაობა.

6. 120 გამოკითხულ პირველკურსელ გოგონას შორის 18 გოგონას არ სურს მუშაობა გათხოვების შემდეგ. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ პირველკურსელი გოგონების რეალური პროპორციისათვის, რომლებსაც არ სურთ მუშაობა გათხოვების შემდეგ.

7. ჯანდაცვის სამინისტროს მონაცემებით მონაცემებით 13-14 წლის მოზარდებიდან ყოველი მეხუთე ზოგჯერ ეწევა სიგარეტს. მთელი ქვეყნის მასშტაბით 13-14 წლის მოზარდებში სიგარეტის მწეველების პროპორციასთან შესადარებლად განათლების სამინისტრომ გამოკითხა 200 13-14 წლის სკოლის მოსწავლე და დაადგინა, რომ მათი 23% ზოგჯერ ეწევა სიგარეტს. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი სკოლის 13-14 წლის მოსწავლეებში სიგარეტის მწეველთა რეალური პროპორცისასთვის და შეადარეთ ის ჯანდაცვის სამინისტროს მონაცემებს.

8. 80 დაკვირვებული ავტოსაგზაო შემთხვევიდან 46-ის გამომწვევი მიზეზი იყო მძღოლის მიერ ალკოჰოლის მიღება. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ ავტოსაგზაო შემთხვევების რეალური პროპორციისათვის, რომელთა გამომწვევი მიზეზი იყო მძღოლის მიერ ალკოჰოლის მიღება.

9. 90 გამოკითხული ოჯახიდან 40 ფლობს ერთ მაინც იარაღს. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ ოჯახების რეალური პროპორციისათვის, რომლებიც ფლობენ ერთ მაინც იარაღს.

10. 500 გამოკითხული მუშიდან 45% პროფკავშირების წევრია. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ მუშების რეალური პროპორციისათვის, რომლებიც შედიან პროფკავშირებში.

11. გარკვეული ასაკობრივი ჯგუფის 100 გარდაცვლილი ადამიანის კვლევამ აჩვენა, რომ მათგან 25% გარდაიცვალა კიბოთი. ააგეთ 98%-იანი ნდობის ინტერვალი ამ ასაკობრივი ჯგუფის გარდაცვლილ ადამიანებში იმ ადამიანების რეალური პროპორციისათვის, რომლებიც დაიღუპნენ კიბოთი.

12. მკვლევარს სურს 95%-იანი საიმედოობითა და 0.04-ის ტოლი სიზუსტით შეაფასოს რეალური პროპორცია იმ ადამიანების, რომლებსაც უმოგზაურიათ საზღვარგარეთ. იპოვეთ ამისათვის საჭირო შერჩევის აუცილებელი მოცულობა, თუ ცნობილია, რომ 200 ადამიანისაგან შემდგარ შერჩევაში გასულ წელს საზღვარგარეთ იმოგზაურა 80 ადამიანმა.

13. მედიკოსს სურს 99%-იანი საიმედოობითა და 2%-ის სიზუსტით შეაფასოს იმ ქალების რეალური პროპორცია, რომლებიც ღებულობენ ვიტამინს. ადრე ჩატარებული კვლევის თანახმად 180 ქალიდან 25% ღებულობდა ვიტამინს. ა). რა მოცულობის უნდა იყოს საჭირო შერჩევა? ბ). თუ არ იქნებოდა ხელმისაწვდომი შერჩევითი პროპორცია, მაშინ რა მოცულობის შერჩევის აღება მოგვიწევდა?

14. გამოკვლევამ აჩვენა, რომ 55 წელზე მეტი ასაკის 100 ქალიდან 29% ქვრივია. ა). რა მოცულობის შერჩევაა საჭირო, რათა 90%-იანი საიმედოობითა და 0.05-ის სიზუსტით შევაფასოთ 55 წელზე მეტი ასაკის იმ ქალების რეალური

პროპორცია, რომლებიც ქერიევები არიან? ბ). რა მოცულობის შერჩევა უნდა ავიღოთ იმ შემთხვევაში, როცა არა ხელმისაწვდომი შერჩევითი პროპორცია?

15. მკვლევარს სურს 90%-იანი საიმედოობითა და 5%-ის სიზუსტით შეაფასოს იმ მამაკაცების რელური პროპორცია, რომელთა სიმაღლე 5 ფუტსა (1 ფუტი = 30.48 სმ) და 5 დიუმზე (1 დიუმი = 2.54 სმ) ნაკლებია. ა). რა მოცულობის შერჩევაა ამისათვის აუცილებელი, თუ ცნობილია, რომ 300 მამაკაციდან 30-ის სიმაღლე 5 ფუტსა და 5 დიუმზე ნაკლებია; ბ). ბ). რა მოცულობის შერჩევა უნდა ავიღოთ იმ შემთხვევაში, როცა არ იქნება ხელმისაწვდომი შერჩევითი პროპორცია?

16. მასწავლებელს სურს 98%-იანი საიმედოობითა და 0.03-ის სიზუსტით შეაფასოს მაღალი კლასის იმ მოსწავლეების რეალური პროპორცია, რომლებიც ყოველ საღამოს 1 საათს მაინც მეცადინეობენ. ა). რა მოცულობის უნდა იყოს საჭირო შერჩევა, თუკი ცნობილია, რომ 250 გამოკითხული მოსწავლიდან 60% ყოველ საღამოს 1 საათს მაინც მეცადინეობდა; ბ). რა მოცულობის შერჩევა უნდა ავიღოთ იმ შემთხვევაში, როცა არ იქნება ხელმისაწვდომი შერჩევითი პროპორცია?

17. იპოვეთ საიმედოობის ხარისხი, თუ შერჩევის მოცულობაა 600 და მკვლევარს სურს, რომ რეალური პროპორციის შეფასების მაქსიმალური ცდომილება იყოს 4%. ამასთანავე, ცნობილია, რომ ადრინდელი კვლევისას პროპორცია იყო 50%.

18. 1015 გამოკითხულიდან 68%-ს სჯერა, რომ რესპუბლიკელები უპირატესობას ანიჭებენ განათლებას. რა საიმედოობის ნდობის ინტერვალი უნდა გამოვიყენოთ, თუკი შეფასების ცდომილება არ უნდა აღემატებოდეს 3%-ს.

პასუხები:

1. (0.365, 0.415) ანუ (36.5%,41.5%). **2.** (0.197, 0.343). **3.** (0.557, 0.743). **4.** (0.109, 0.151). **5.** (0.797, 0.883). **6.** (0.086, 0.214). **7.** (0.153, 0.307); ეს შედეგი ეთანხმება ჯანდაცვის სამინისტროს მონაცემებს. **8.** (0.467, 0.683). **9.** (0.337, 0.543). **10.** (0.413, 0.487). **11.** (0.149, 0.351). **12.** 577. **13.** 3121; 4161. **14.** 225; 273. **15.** 99; 273. **16.** 1448; 1509. **17.** 95%. **18.** 96%.

თავი III
ნდობის ინტერვალი დისპერსიისათვის

α მნიშვნელოვნების დონის მქონე ნდობის ინტერვალი ნორმალური პოპულაციის დისპერსიისათვის ცნობილი საშუალოს შემთხვევაში არის:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{\chi^2_{n,\alpha/2}},\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{\chi^2_{n,1-\alpha/2}}\right),$$

ხოლო უცნობი საშუალოს შემთხვევაში კი:

$$\left(\frac{(n-1)s'^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}},\frac{(n-1)s'^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right).$$

ზოგჯერ გამოიყენება აღნიშვნები: $\chi^2_{\text{მარჯ.}} \coloneqq \chi^2_{n-1,\alpha/2}$ და $\chi^2_{\text{მარცხ.}} \coloneqq \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$.

α მნიშვნელოვნების დონის მქონე ნდობის ინტერვალი ნორმალური პოპულაციის სტანდარტული გადახრისათვის შერჩევის დიდი მოცულობის შემთხვევაში დაახლოებით არის:

$$(s'-z_{\alpha/2}\cdot\frac{s'}{\sqrt{2n}},\ s'+z_{\alpha/2}\cdot\frac{s'}{\sqrt{2n}}).$$

შერჩევითი დისპერსია ეწოდება სიდიდეს:

$$s^2=\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2\frac{n_i}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \quad (\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i).$$

შესწორებული შერჩევითი დისპერსია ეწოდება სიდიდეს:

$$s'^2=\frac{n}{n-1}s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

შერჩევითი სტანდარტული გადახრა (შესაბამისად, შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრა) ეწოდება არითმეტიკულ კვადრატულ ფესვს შერჩევითი დისპერსიიდან $s=\sqrt{s^2}$ (შესაბამისად, შესწორებული შერჩევითი დისპერსიიდან $s'=\sqrt{s'^2}$)

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. იპოვეთ თამბაქოში ნიკოტინის შემცველელობის დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრისათვის 95%-იანი ნდობის ინტერვალი, თუ ცნობილია, რომ 20 სიგარეტისაგან შედგენილ შერჩევაში ნიკოტინის შემცველელობის შესწორებული სტანდარტული გადახრა 1.6 მილიგრამის ტოლია.

ამოხსნა. ვინაიდან ამ შემთხვევაში $\alpha=1-0.95=0.05$, ამიტომ ხი-კვადრატ განაწილების ორი კრიტიკული მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება $\alpha/2=0.025$-სა და $1-\alpha/2=0.975$-ს და თავისუფლების ხარისხის რიცხვს, რომელიც ტოლია $n-1=20-1=19$, შესაბამისად იქნება: $\chi^2_{19,0.025}=32.852$ და $\chi^2_{19,0.975}=8.907$. ამიტომ საძიებელი ნდობის ინტერვალი იქნება:

$$\left(\frac{(20-1)\cdot(1.6)^2}{32.852},\frac{(20-1)\cdot(1.6)^2}{8.907}\right),\ \text{ანუ}\ (1.5,5.5)$$

ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია 95%-იანი საიმედოობით ვიგულისხმოთ, რომ სიგარეტში ნიკოტინის შემცველობის რეალური დისპერსია მოთავსებულია 1.5 მილიგრამსა და 5.5 მილიგრამს შორის.

ნდობის ინტერვალი სტანდარტული გადახრისათვის იქნება:

$$(\sqrt{1.5},\sqrt{5.5}),\ \text{ანუ}\ (1.2,2.3).$$

მაშასადამე, სიგარეტში ნიკოტინის შემცველობის რეალური სტანდარტული გადახრის 95%-იანი ნდობის ინტერვალია (1.2მგ, 2.3მგ).

მაგალითი 2. ჩავთვალოთ, რომ ხმაური შვეულმფრენის კაბინაში, გარკვეულ რეჟიმში მომუშავე ძრავის დროს, ნორმალური კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა. შემთხვევით შერჩეულ 20 შვეულმფრენში გაზომეს ხმის დონე (დეციბალებში). ხმის დონის შესწორებული შერჩევითი დისპერსია აღმოჩნდა 22.5-ის ტოლი. ვიპოვოთ ნდობის ინტერვალი, რომელიც ფარავს მოცემული ტიპის შვეულმფრენების კაბინაში ხმაურის სიდიდის უცნობ სტანდარტულ გადახრას 98%-იანი საიმედოობით.

ამოხსნა. თავისუფლების 19-ის ტოლი ხარისხითა და $(1-0.98)/2=\ =0.01$ ალბათობის საშუალებით χ^2 –ის განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ სიდიდეს: $\chi^2_{19,0.01}=36.2$. ანალოგიურად, $(1+0.98)/2=0.99$ ალბათობის საშუალებით ვპოულობთ: $\chi^2_{19,0.99}=7.63$. შესაბამისად, უცნობი საშუალოს შემთხვევაში სტანდარტული გადახრის ნდობის ინტერვალის

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S'^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}},\sqrt{\frac{(n-1)S'^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}}\right)$$

ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ, რომ საძიებელი ნდობის ინტერვალია: (3.44, 7.49).

ამოცანები

1. ცხრილის საშუალებით იპოვეთ $\chi^2_{\text{მარცხ}}$ და $\chi^2_{\text{მარჯვ}}$, თუ: ა). $\alpha=0.05$, $n=16$; ბ). $\alpha=0.1, n=5$; გ). $\alpha=0.01, n=23$; დ). $\alpha=0.05$, $n=29$; ე). $\alpha=0.1, n=14$.

ქვემოთ მოყვანილ ამოცანებში იგულისხმეთ, რომ ყველა სიდიდე განილებულია ნორმალურად:

2. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი ელემენტის სიცოცხლის ხანგრძლივობის დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრისათვის, თუ ცნობილია, რომ 20 ელემენტიანი შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 1.7 თვე.

3. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი ავტობუსის უსაფრთხოების შესამოწმებლად საჭირო დროის დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრისათვის, თუ ცნობილია, რომ 20 ავტობუსის უსაფრთხოების შესამოწმებლად საჭირო დროის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 6.8 წთ.

4. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი ძრავის ზეთის 25 ლიტრიანი კონტეინერის წონის დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრისათვის, თუ ცნობილია, რომ 14 კონტეინერისათვის შესწორებული დისპერსია არის 3.3.

5. ქვემოთ მოყვანილია ვაშლის წვენში შაქრის შემცველობა გრამებში:

18.6	19.5	20.2	20.4	19.3
21	20.3	19.6	20.7	18.9
22.1	19.7	20.8	18.9	20.7
21.6	19.5	20.1	20.3	19.9

ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრისათვის.

6. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი უნივერსიტეტის მეოთხე კურსის სტუდენტების ასაკის დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრისათვის, თუ ცნობილია, რომ 24 სტუდენტის ასაკის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 2.3 წ.

7. ააგეთ 98%-იანი ნდობის ინტერვალი დროის იმ შუალედის დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრისთვის, რომელიც სჭირდება სატელეფონო კომპანიას ზარის სწორი მიმართულებით გადართვისათვის, თუ ცნობილია, რომ 15 ზარის შემთხვევაში ამ დროის შესწორებული სტანდარტული გადახრა ტოლია 1.6 წთ.

8. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი აქციის ფასის დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრისათვის შემდეგი შერჩევის მიხედვით:

26.69	13.88	28.37	12	75.37
7.5	47.5	43	3.81	53.81
13.62	45.12	6.94	28.25	28
60.5	40.25	10.87	46.12	14.75

9. ავტოტექმომსახურების ცენტრი აკეთებდა რეკლამას, რომ ზეთის შეცვლისას კლიენტს არ დასჭირდებოდა 30 წუთზე მეტი ლოდინი. ზეთის შეცვლის 28 შემთხვევაში დროის შესწორებული სტანდარტული გადხრა იყო 5.2 წუთი. ააგეთ 95%-იანი ინტერვალი პოპულაციის სტანდარტული გადახრისათვის.

10. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი 12-უნციანი ყავის პაკეტის დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრისათვის, თუ შემოწმებულ 8 პაკეტში ყავის წონა იყო: 12.03 12.1 12.02 11.98 12 12.05 11.97 11.99.

11. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი ელემენტების მუშაობის ხანგრძლივობის სტანდარტული გადახრისათვის, თუ ცნობილია, რომ 200 ელემენტისათვის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 18 თვე.

სავარჯიშოები გამეორებისათვის

12. სტატისტიკის დეპარტამენტის მონაცემებით დედაქალაქის მაცხოვრებლებს კვირაში საშუალოდ 54 საათი აქვთ ტელევიზორი ჩართული. მკვლევარმა გამოკითხა 50 მოქალაქე და დაადგინა, რომ მათ საშუალოდ 43.7 სთ აქვთ ტელევიზორი ჩართული. შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 6.2 სთ. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი ჭეშმარიტი საშუალოსათვის. როგორ ესადაგება ეს შედეგი სტატისტიკის დეპარტამენტის მონაცემებს?

13. პარკში მოსეირნე 36 ადამიანზე დაკვირვებამ აჩვენა, რომ ისინი საშუალოდ გადაადგილდებიან 2.6 კმ/სთ სიჩქარით. შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 0.4 კმ/სთ. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი რეალური საშუალოსათვის.

14. საშუალო წონა 60 შემთხვევით შერჩეული მიკროავტობუსის არის 2627 კგ, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 400 კგ. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი ჭეშმარიტი საშუალო წონისათვის.

15. 1500 გამოკითხული ადამიანიდან შვებულების განმავლობაში საშუალ-ოდ 7.5 ღამე გაატარა სასტუმროში, შესაბამისი შესწორებული სტანდარტული გადახრა იყო 0.8 ღამე. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი რეალური საშუალოსათვის.

16. შემთხვევით შერჩეული 25 ქალაქგარეთ მაცხოვრებლის გამოკითხვის მიხედვით ისინი საშუალოდ 18.23 ლარს ხარჯავენ ტრანსპორტში, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 3 ლარი. ჩათვალეთ, რომ ტრანსპორტის ხარჯები ნორმალურადაა განაწილებული და ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვა-ლი რეალური საშუალოსათვის.

17. ქალაქის გარკვეულ ნაწილში 5 თვიანი დაკვირვების შედეგად თვეში საშუალოდ 28 ფოსტალიონი იყო დაკბენილი მაწანწალა ძაღლების მიერ. შერჩ-ევის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 3. ჩათვალეთ, რომ დაკბენილი ფო-სტალიონების რიცხვი ნორმალურადაა განაწილებული და ააგეთ 90%-იანი ნდო-ბის ინტერვალი თვეში დაკბენილი ფოსტალიონების რეალური საშუალოსათვის.

18. მკვლევარს სურს შეაფასოს პროფესორის საშუალო ხელფასი 95%-იანი საიმედოობითა და 200 ლ. სიზუსტით. რა მოცულობის შერჩევა უნდა იქნას განხ-ილული, თუ ცნობილია, რომ ხელფასის სტანდარტული გადახრაა 1050 ლარი?

19. მკვლევარს სურს შეაფასოს უნივერსიტეტის ყოველწლიური საშუალო დანახარჯები საფოსტო მომსახურებაზე 90%-იანი საიმედოობითა და 25 ლარის სიზუსტით. რა მინიმალური მოცულობის შერჩევა უნდა იქნას განხილული, თუ ცნობილია, რომ საფოსტო დანახარჯების სტანდარტული გადახრაა 80 ლარი?

20. 1500 გამოკითხული ახალგაზრდიდან 42% უპირატესობას ანიჭებს ისტ-ორიული ადგილების დათვალიერებას შვებულებაში ყოფნისას. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ ახალგაზრდების რეალური პროპორციისათვის, ვინც უპი-რატესობას ანიჭებს ისტორიული ადგილების დათვალიერებას.

21. 200 უბედური შემთხვევიდან, რომელიც საჭიროებს გადაუდებელ სამედ-იცინო დახმარებას, 40% მოხდა სახლში. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი სა-ხლში მომხდარი უბედური შემთხვევების რეალური პროპორციისათვის.

22. 100 გამოკითხულიდან 85 კმაყოფილია მერიის მუშაობით. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ ადამიანების რეალური პროპორციისათვის, რომლებ-იც კმაყოფილია მერიის მუშაობით.

23. დიეტოლოგს სურს 95%-იანი საიმედოობითა და 2%-იანი სიზუსტით შე-აფასოს იმ მოზარდების რეალური პროპორცია, რომლებიც ჭამენ ძილის წინ. რა მოცულობის შერჩევა იქნება ამისათვის აუცილებელი, თუ ადრინდელი კვლევის თანახმად 100 გამოკითხულიდან 18% ჭამდა ძილის წინ?

24. 200 გამოკითხული მოზარდიდან 15% რეგულარულად თამაშობდა კა-ლათბურთს. რა მოცულობის შერჩევა უნდა აიღოს მკვლევარმა, თუ მისი სურვილია 99%-იანი საიმედოობითა და 1%-ის სიზუსტით შეაფასოს იმ მოზ-არდების რეალური პროპორცია, ვინც რეგულარულად თამაშობს კალათბურთს.)

25. 28 ფორთოხლის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 0.34 სმ. ააგ-ეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი ფორთოხლის დიამეტრის ჭეშმარიტი სტანდარ-ტული გადახრისათვის.

26. 22 ბალახის საკრეჭი მანქანის მიერ 1 ლიტრი ბენზინით გაკრეჭილი ბალახის ზოლის სიგრძის შესწორებული შერჩევითი დისპერსიაა 2.6. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი რეალური დისპერსიისათვის.

27. შემთხვევით შერჩეული 15 თოვლმავალი მანქანის ბატარეების მუშაობის ხანგრძლივობის (თვეებში) შესწორებული დისპერსია იყო 8.6. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი რეალური დისპერსიისათვის.

28. დედაქალაქის 28 პოლიციის ოფიცრის სიმაღლის შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრა იყო 1.83 დიუმი (1 დიუმი = 2.54სმ). ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პოლიციის ოფიცრთა სიმაღლის რეალური სტანდარტული გადახრისათვის.

ამოცანები გამოცდისათვის

29. 49 შემთხვევით შერჩეული წიგნის მოყვარული კვირის განმავლობაში წიგნის შეძენაზე საშუალოდ ხარჯავს 23.45 ლარს. შესაბამისი შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 2.8 ლარი. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი რეალური საშუალოსათვის.

30. 20 გამოკითხულ პაციენტს ექიმთან ერთ ვიზიტი საშუალოდ უჯდება 44.8 ლარი. შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 3.53 ლარი. ჩათვალეთ, რომ ვიზიტის ღირებულება განაწილებულია ნორმალურად და ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი ექიმთან ერთი ვიზიტის ღირებულების რეალური საშუალოსათვის.

31. 40 შემთხვევით შერჩეული სასკოლო ავტობუსის საშუალო წონაა 4150 ფუნტი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 480 ფუნტი. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი ავტობუსის წონის რეალური საშუალოსათვის.

32. შემთხვევით შერჩეული 10 სადაზღვევო ჯგუფის საშუალო ასაკი იყო 48.6 წელი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 4.1 წელი. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი სადაზღვევო ჯგუფების ასაკის რეალური საშუალოსათვის.

33. რესპუბლიკურ საავადმყოფოში, შემთხვევით შერჩეული 8 კვირაზე დაკვირვებისას, კვირაში საშუალოდ 438 პაციენტი მიმართავდა სასწრაფო დახმარების განყოფილებას. შესწორებული სტანდარტული გადახრა იყო 16. ჩათვალეთ, რომ აღნიშნული კატეგორიის პაციენტთა რიცხვი განაწილებულია ნორმალურად და ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი პაციენტთა რეალური საშუალოსათვის.

34. დედაქალაქის გარკვეულ უბანში, 4 თვიანი დაკვირვების შედეგად დადგინდა, რომ თვეში საშუალოდ ხდებობა 31 ბინის ქურდობა, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა იყო 4. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი თვეში ბინის ქურდობის რეალური საშუალოსათვის.

35. ფაკულტეტის დეკანს სურს შეაფასოს საათების რაოდენობა კვირის მანძილზე, რომელსაც პირველკურსელები უთმობენ სწავლას. წინა კვლევის სტანდარტული გადახრა იყო 2.6 სთ. რა მინიმალური მოცულობის შერჩევა უნდა იქნას განხილული, რათა 99%-იანი საიმედოობით რეალური საშუალოს განსხვავება შერჩევითი საშუალოსაგან არ არემატებოდეს 0.5 საათს.

36. საგზაო დეპარტამენტს სურს 300 ლარის სიზუსტით შეაფასოს გზების სარემონტო სამუშაოებზე ყოველწლირად დახარჯული თანხის საშუალო 90%-იანი საიმედოობით. რა მინიმალური მოცულობის შერჩევის განხილვა იქნება საჭირო, თუ ცნობილია, რომ სტანდარტული გადახრაა 900 ლარი?

37. 75 გამოკითხული მუშიდან 53 სამსახურში ყოველდღიურად დადის ავტობუსით. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ მუშების რეალური პროპორციისათვის, ვინც სამსახურში დადის ავტობუსით.

38. 150 უბედური შემთხვევიდან, რომელიც მოითხოვს გადაუდებელ სამედიცინო დახმარებას, 36% მოდის 6 წლამდე ასაკის ბავშვებზე. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ უბედური შემთხვევების რეალური პროპორციისათვის, რომლებშიც მოყვნენ 6 წლამდე ბავშვები.

39. 90 გამოკითხული ოჯახიდან 40 ფლობს ერთ მაინც ტელევიზორს. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი იმ ოჯახების რეალური პროპორციისათვის, რომლებიც ფლობენ ერთ მაინც ტელევიზორს.

40. დიეტოლოგს სურს 95%-იანი საიმედოობითა და 3% სიზუსტით დაადგინოს რეალური პროპორცია იმ ადამიანების, რომლებიც არ მიირთმევენ არანაირ ვახშამს. რა მინიმალური მოცულობის შერჩევა დასჭირდება მას, თუ წინა კვლევისას 125 გამოკითხული ადამიანიდან 15% არ მიირთმევდა ვახშამს.

41. 25 შემთხვევით შერჩეული ნოველის გვერდების რიცხვის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 9 გვერდი. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პოპულაციის სტანდარტული გადახრისათვის.

42. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი პოლიციის ინსპექტორის მიერ ავტომობილის უსაფრთხოების შემოწმებაზე დახარჯული დროის დისპერსიისა და სტანდარტული გადახრისათვის, თუ 27 შემთხვევით შერჩეული ავტომობილისათვის ამ დროის შესწორებული სტანდარტული გადახრა იყო 6.8 წუთი. ჩათვალეთ, რომ დრო განაწილებულია ნორმალურად.

43. 20 შემთხვევით შერჩეული ავტომობილის მიერ 1 გალონი (1 გალონი = 3.38 ლიტრი)ბენზინის გამოყენების შედეგად გამოყოფილი მავნე ნივთიერებების რაოდენობის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 2.3 უნცია. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი ავტომობილების მიერ გამოყოფილი მავნე ნივთიერებების სტანდარტული გადახრისათვის.

პასუხები:

1. 6.262, 27.488; 0.711, 9.488; 8.643, 42.796; 15.308, 44.461; 5.892, 22.362. **2.** (1.7, 6.2); (1.3, 2.5). **3.** (30.9, 78.2); (5.6, 8.8). **4.** (1.4, 11.7); (1.2, 3.4). **5.** (0.4, 2.25); (0.63, 1.5). **6.** (3.5, 9.3); (1.9, 3). **7.** (1.2, 7.7); (1.1, 2.8). **8.** (259.343, 772.724); (16.104, 27.798). **9.** (4.1, 7.1). **10.** (0.001, 0.008); (0.032, 0.089). **11.** (16.2, 19.8). **12.** (45.9, 48.7); 54 სთ გაცილებით დიდია, ვიდრე მოსალოდნელი ინტერვალი. **13.** (2.5, 2.7). **14.** (2494, 2760). **15.** (7.46, 7.54). **16.** (16.99, 19.47). **17.** (25, 31). **18.** 106. **19.** 28. **20.** (0.395, 0.445) ანუ (39.5%, 44.5%). **21.** (0.343, 0.457). **22.** (0.791, 0.909). **23.** 1418. **24.** 8487. **25.** (0.25, 0.51). **26.** (1.5, 5.3). **27.** (5.1, 18.3). **28.** (1.447, 2.491). **29.** (22.79, 24.11). **30.** (43.15, 46.45). **31.** (3954, 4346). **32.** (45.7, 51.5). **33.** (418, 458). **34.** (26, 36). **35.** 180. **36.** 25. **37.** (0.604, 0.810). **38.** (0.295, 0.425). **39.** (0.342, 0.547). **40.** 545. **41.** (7, 13). **42.** (30.9, 78.2); (5.6, 8.8). **43.** (1.8, 3.2).

თავი IV
ჰიპოთეზათა შემოწმება საშუალოსათვის (σ^2 ცნობილია)

განაწილების პარამეტრების მნიშვნელობების შესახებ ან ორი განაწილების პარამეტრების სიდიდეების შედარების ჰიპოთეზებს, **პარამეტრული ჰიპოთეზები** ეწოდება. ჰიპოთეზებს განაწილების სახის შესახებ კი **არაპარამეტრული ჰიპოთეზები** ეწოდება. ჰიპოთეზას, რომელიც წამოყენებულია შერჩევით მონაცემებთან მისი თანხმობის შესამოწმებლად, **ნულოვანი ჰიპოთეზა** ეწოდება და აღინიშნება H_0-ით (H_0 ამტკიცებს, რომ არ არსებობს განსხვავება პარამეტრსა და მის კონკრეტულ მნიშვნელობას შორის ან არ არსებობს განსხვავება ორ პარამეტრს შორის). H_0 ჰიპოთეზასთან ერთად იხილავენ (წამოაყენებენ) **ალტერნატიულ** ანუ **საწინააღმდეგო** ჰიპოთეზასაც, რომელსაც H_1-ით აღნიშნავენ (H_1 ამტკიცებს, რომ არსებობს განსხვავება პარამეტრსა და მის კონკრეტულ მნიშვნელობას შორის ან არსებობს განსხვავება ორ პარამეტრს შორის). ნულოვანი ჰიპოთეზა მოიცავს ტოლობის ნიშანს:

	კრიტერიუმი:	
ორმხრივი	**მარჯვენა ცალმხრივი**	**მარცხენა ცალმხრივი**
$H_0:\theta=\theta_0$	$H_0:\theta\le\theta_0$	$H_0:\theta\ge\theta_0$
$H_1:\theta\ne\theta_0$	$H_1:\theta>\theta_0$	$H_1:\theta<\theta_0$

სამართლიანი ჰიპოთეზის უკუგდებას **პირველი გვარის შეცდომა** ეწოდება. პირველი გვარის შეცდომის დაშვების ალბათობას **მნიშვნელოვნების დონე** ეწოდება და α-თი აღინიშნება. არასამართლიანი ჰიპოთეზის მიღებას **მეორე გვარის შეცდომა** ეწოდება. მისი ალბათობა აღინიშნება β ასოთი. რიცხვს $1-\beta$, რომელიც ტოლია ალბათობის იმისა, რომ არ იქნება დაშვებული მეორე გვარის შეცდომა, **კრიტერიუმის სიმძლავრე** ეწოდება.

სტატისტიკური ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური განაწილების მათემატიკური ლოდინის შესახებ ცნობილი დისპერსიის შემთხვევაში:

$\xi \cong N(\cdot,\sigma^2)$; $D\xi=\sigma^2$ ცნობილია; $E\xi$ უცნობია.

ჰიპოთეზა: $H_0: E\xi = a_0$

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $Z=\dfrac{\overline{X}-a_0}{\sigma/\sqrt{n}}\cong N(0,1)$

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V.: $z=\dfrac{\overline{x}-a_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

ალტერნატივა	**კრიტიკული არე C.R. (H_0-ის უარყოფის არე)**
$H_1: E\xi=a_1>a_0$	$z\ge z_\alpha$,
$H_1: E\xi=a_1<a_0$	$z\le -z_\alpha$,
$H_1: E\xi\ne a_1$	$z\le -z_{\alpha/2}$ ან $z\ge z_{\alpha/2}$

(სადაც z_α არის $N(0,1)$-ის ზედა α-კრიტიკული წერტილი ანუ **კრიტიკული მნიშვნელობა C.V.**).

$$P\text{- მნიშვნელობა: } P=\begin{cases} P\{Z>z\mid H_0\}, \text{ თუ } H_1: E\xi=a_1>a_0; \\ P\{Z<z\mid H_0\}, \text{ თუ } H_1: E\xi=a_1<a_0; \\ P\{|Z|>|z|\,|\,H_0\}, \text{ თუ } H_1: E\xi\neq a_1. \end{cases} = \begin{cases} 1-\Phi(z), \text{ თუ } H_1: E\xi=a_1>a_0; \\ \Phi(z), \text{ თუ } H_1: E\xi=a_1<a_0; \\ 2\cdot[1-\Phi(|z|)], \text{ თუ } H_1: E\xi\neq a_1. \end{cases}$$

გადაწყვეტილება: თუ $z\in$ C.R., მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

P- მნიშვნელობის მეთოდი: თუ $P\leq\alpha$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ α მნიშვნელოვნების დონით, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

შერჩევის მინიმალური რაოდენობა n^*, რომლისთვისაც I გვარის შეცდომის ალბათობაა α, ხოლო II გვარის შეცდომის ალბათობა ნაკლებია β-ზე:

$$n^*=[\sigma^2(z_\alpha+z_\beta)^2/(a_1-a_0)^2]+1$$

შენიშვნა: თუ შერჩევის მოცულობა მეტია ან ტოლი 30-ს და სტანდარტული გადახრა σ უცნობია, **კრიტერიუმის სტატისტიკად** განიხილება:

$$Z=\frac{\overline{X}-E\xi}{s^{*}/\sqrt{n}}.$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. სამეცნიერო ანგარიშის თანახმად სრული პროფესორის საშუალო წლიური შემოსავალი აღემატება 42000 ლარს. შემთხვევით შერჩეული 30 სრული პროფესორის წლიური შემოსავლის საშუალო აღმოჩნდა 43260 ლარი. 0.05 მნიშვნელოვნების დონისათვის შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ სრული პროფესორის საშუალო ხელფასი მეტია 42000 ლარზე, თუ პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 5230 ლარი.

ამოხსნა. ვინაიდან შერჩევის მოცულობა ≥ 30, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ საქმე გვაქვს დაახლოებით ნორმალურ პოპულაციასთან $N(a,5230^2)$. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0: a\leq 42000$ და $H_1: a>42000$. ვინაიდან, $\alpha=0.05$ და კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია, კრიტიკული მნიშვნელობა იქნება $z_\alpha=1.65$. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$z=\frac{\overline{x}-E\xi}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{43260-42000}{5230/\sqrt{30}}=1.32.$$

რადგანაც 1.32 < 1.65 (ანუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა არ ვარდება კრიტიკულ არეში), ამიტომ არა გვაქვს საფუძველი ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის.

მაგალითი 2. მკვლევარის აზრით სპორტული ფეხსაცმლის საშუალო ფასი ნაკლებია 80 ლარზე. მან კატალოგებიდან შემთხვევით შეარჩია 36 წყვილი სპორტული ფეხსაცმელი და ამოწერა შესაბამისი ფასები:

60	70	75	55	80	55	50	40	80
70	50	95	120	65	80	85	85	45
75	60	90	90	60	95	110	85	45
90	70	70	90	75	85	80	60	110

არის თუ არა საკმარისი საფუძველი, რომ 0.1 მნიშვნელოვნების დონით გავიზიაროთ მკვლევარის აზრი?

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0 : E\xi \geq 80$, $H_1 : E\xi < 80$. რადგანაც, $\alpha = 0.1$ და კრიტერიუმი მარცხენა ცალმხრივია, კრიტიკული მნიშვნელობა იქნება $z_\alpha = -1.28$. პირობაში მოყვანილი ნედლი მონაცემების მიხედვით გამოვთვალოთ შერჩევითი საშუალო და შესწორებული შერჩევითი დისპერსია, გვაქვს: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 75$ და $s' = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 19.2$. შესაბამისად, კრიტერიუმის მნიშვნელობა იქნება:

$$z = \frac{\bar{x} - E\xi}{s' / \sqrt{n}} = \frac{75 - 80}{19.2 / \sqrt{36}} = -1.56 .$$

ვინაიდან კრიტერიუმის მნიშვნელობა ვარდება კრიტიკულ არეში, ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უკუვაგდოთ. შესაბამისად, ჩვენ გვაქვს საკმარისი საფუძველი რომ გავიზიაროთ მკვლევარის მოსაზრება.

მაგალითი 3. ჯანდაცვის სამინისტროს ანგარიშის მიხედვით ინსულტის მკურნალობის საშუალო ღირებულება შეადგენს 24672 ლარს. იმის გასარკვევად, კონკრეტულ საავადმყოფოში ინსულტის მკურნალობის საშუალო ღირებულება არის თუ არ განსხვავებული, მკვლევარმა შემთხვევით შეარჩია ამ საავადმყოფოში ინსულტის მკურნალობის 35 შემთხვევა და მკურნალობის საშუალო ღირებულება გამოვიდა 25226 ლარი. პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 3251 ლარი. შეუძლია თუ არა მკვლევარს 0.01 მნიშვნელოვნების დონით ამტკიცოს, რომ ამ ჰოსპიტალში ინსულტის მკურნალობის ღირებულება განსხვავებულია 24672 ლარისაგან?

ამოხსნა. $H_0 : E\xi = 24672$, $H_1 : E\xi \neq 24672$. კრიტიკული მნიშვნელობებია: 2.58 და -2.58. კრიტერიუმის მნიშვნელობა იქნება:

$$z = \frac{\bar{x} - E\xi}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{25226 - 24672}{3251 / \sqrt{35}} = 1.01 .$$

რამდენადაც 1.01 < 2.58 (ანუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა არ ვარდება კრიტიკულ არეში), ამიტომ არ არსებობს საკმარისი საფუძველი იმისა, რომ კონკრეტულ საავადმყოფოში მკურნალობის ღირებულება განსხვავებულია.

მაგალითი 4. მკვლევარს სურს შეამოწმოს ჰიპოთეზა, რომ მაშველების საშუალო ასაკი 24 წელზე მეტია. მან შემთხვევით შეარჩია 36 მაშველი და დაადგინა, რომ მათი საშუალო ასაკი იყო 24.7 წელი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა 2 წელი. გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი ჰიპოთეზის მისაღებად $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით? იპოვეთ P-მნიშვნელობა.

ამოხსნა. $H_0: E\xi \le 24$, $H_1: E\xi > 24$. კრიტერიუმის მნიშვნელობა იქნება:

$$z = \frac{24.7-24}{2/\sqrt{36}} = 2.1.$$

გამოვთვალოთ P-მნიშვნელობა: $P = 1-\Phi(z) = 1-0.9821 = 0.0179$. ვინაიდან $P \le \alpha$, ამიტომ H_0 უნდა უკუვაგდოთ, ანუ საკმარისი საფუძველი არსებობს იმისა, რომ მაშველის საშუალო ასაკი მეტია 24 წელზე.

შევნიშნავთ, რომ თუ $\alpha = 0.01$, მაშინ არ გვექნებოდა H_0-ის უარყოფის საფუძველი.

მაგალითი 5. მეტეოროლოგის აზრით ქალაქში ქარის საშუალო სიჩქარეა 8კმ/სთ. შემთხვევით შერჩეული 32 დღის მონაცემებით ქარის საშუალო სიჩქარე აღმოჩნდა 8.2 კმ/სთ, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 0.6კმ/სთ. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საფუძველი არ დავეთანხმოთ მეტეოროლოგს? გამოიყენეთ P-მნიშვნელობის მეთოდი.

ამოხსნა. $H_0: E\xi = 8$, $H_1: E\xi \ne 8$. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$z = \frac{8.2-8}{0.6/\sqrt{32}} = 1.89.$$

ვიპოვოთ P-მნიშვნელობა: $P = 2\cdot[1-\Phi(|z|)] = 2\cdot(1-0.9706) = 0.0294$. ვინაიდან, $P > \alpha$, ამიტომ H_0 არ უნდა უარვყოთ, ანუ არა გვაქვს საკმარისი საფუძველი რომ არ გავიზიაროთ მეტეოროლოგის აზრი.

მაგალითი 6. დაკვირვებების რა მინიმალური რაოდენობაა საჭირო იმისათვის, რომ მიღწეულ იქნა 0.05-ის ტოლი მნიშვნელოვნების დონე და 0.9-ის ტოლი სიმძლავრე $\xi \equiv N(\cdot,49)$ ნორმალური პოპულაციის საშუალოს შესახებ ძირითადი $H_0: E\xi = 8$ ჰიპოთეზის შემოწმებისას $H_1: E\xi = 11$ ალტერნატივის წინააღმდეგ.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $\alpha = 0.05$; $\beta = 1-0.9 = 0.1$; $a_0 = 8$; $a_1 = 11$; $\sigma^2 = 49$. ნორმალური განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ $z_\alpha = 1.64$ და $z_\beta = 1.29$. ამიტომ შესაბამისი ფორმულის ძალით $n^* = 48$.

ამოცანები

1. ისარგებლეთ სტანდარტული ნორმალური განაწილების ცხრილით და იპოვეთ კრიტიკული მნიშვნელობა (ან მნიშვნელობები) როცა: ა). $\alpha = 0.01$, კრიტ. ორმხრივია; ბ). $\alpha = 0.05$, კრიტ. მარჯ. ცალმხრივია; გ). $\alpha = 0.05$, კრიტ. მარც. ცალმხრივია; დ). $\alpha = 0.1$, კრიტ. მარც. ცალმხრივია; ე). $\alpha = 0.05$, კრიტ. ორმხრივია; ვ). $\alpha = 0.04$, კრიტ. მარჯ. ცალმხრივია; ზ). $\alpha = 0.01$, კრიტ. მარც. ცალმხრივია; თ). $\alpha = 0.1$, კრიტ. ორმხრივია; ი). $\alpha = 0.02$, კრიტ. მარჯ. ცალმხრივია; კ). $\alpha = 0.02$, კრიტ. ორმხრივია.

2. ჩამოაყალიბეთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები შემდეგი წინადადებებისათვის: ა). ავტობუსის მძღოლების საშუალო ასაკი 39 წელია; ბ). ექიმის საშუალო წლიური შემოსავალი შეადგენს 25000 ლარს; გ). ტელეწამყვანის საშუალო ასაკი 25 წელზე მეტია; დ). მორბენალის საშუალო გულისცემა ნაკლებია 85 დარტყმაზე წუთში; ე). სტუდენტის საშუალო ქულა სტატისტიკაში ნაკლებია 56; ვ). აქციის საშუალო ფასი 250 ლარზე მეტია; ზ).

მამაკაცის საშუალო პენსია აღემატება 75 ლარს თვეში; თ). 1000 გრამიან ბრინჯის ფუთაში დევს სულ ცოტა 950 გრამი ბრინჯი.

3. მკვლევარი ფიქრობს, რომ სოფლის საშუალო ბიუჯეტი შეადგენს 25000 ლარს. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უარვყოთ მკვლევარის მოსაზრება, თუ შემთხვევით შერჩეული 40 სოფლის ბიუჯეტი ათასობით ლარებში შემდეგია:

16.7	17.6	26.5	6.3	16.5	11.9	23.7	14.3	94	4.7
11.6	26.5	5.6	58.6	3.2	14.2	3.5	10.9	11.8	15.2
30.1	19.7	11.7	38.8	36.3	4.8	7.9	14.2	18	24.5
69.2	8.5	19.2	5	15.3	41	27.1	10.3	3.7	13.6

4. სტატისტიკის დეპარტამენტის მონაცემებით დედაქალაქში სასტუმროს ერთი ნომრის საშუალო ღირებულება შეადგენს 69.21 ლარს. ამ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად მკვლევარმა შემთხვევით შეარჩია სასტუმროს 30 ნომერი და დაადგინა, რომ მათი საშუალო ღირებულებაა 68.43 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 3.72 ლარი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უარვყოთ ჰიპოთეზა?

5. ქარხნის მენეჯერის აზრით მუშების საათობრივი ანაზღაურება 9.78 ლარზე ნაკლებია. შემთხვევით შერჩეული 18 მუშის საშუალო საათობრივი ხელფასი აღმოჩნდა 9.6 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 1.42 ლარი. ჩათვალეთ, რომ ხელფასი ნორმალურადაა განაწილებული. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი დავადასტუროთ მენეჯერის მოსაზრება?

6. მკვლევარის შეფასებით დიდი ბიზნესის საშუალო შემოსავალი 24 მილიონზე მეტია. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი დავადასტუროთ მკვლევარის შეფასება, თუ შემთხვევით შერჩეული 50 კომპანიის შემოსავლები (გაზომილი მილიონებში) შემდეგია:

178	122	91	44	35	61	56	46	20	32
30	28	28	20	27	29	16	16	19	15
41	38	36	15	25	31	30	19	19	19
24	16	15	15	19	25	25	18	14	15
24	23	17	17	22	22	21	20	17	20

7. გაყინული კერძის მწარმოებელი ფირმის დირექტორი აცხადებს, რომ კერძის საშუალო კალორიულობა არის 800, ხოლო სტანდარტული გადახრა კი 25. მკვკლევარმა შეამოწმა 12 კერძი და დაადგინა, რომ მათი საშუალო კალორიულობა იყო 873. გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი $\alpha = 0.02$ მნიშვნელოვნების დონით უარვყოთ დირექტორის მტკიცებულობა? ჩავთვალოთ, რომ კალორიულობა კერძში განაწილებულია ნორმალურად.

8. სამგზავრო თვითმფრინავების საშუალო ასაკი შეადგენს 14 წელს. დიდი ავიაკომპანიის შემთხვევით შერჩეული 36 თვითმფრინავის საშუალო ასაკი აღმოჩნდა 11.8 წ. , ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 2.7 წ. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ ამ კომპანიის თვითმფრინავების საშუალო ასაკი ნაკლებია ვიდრე პოპულაციის საშუალო?

9. დიეტოლოგის განცხადებით მისი დიეტით პაციენტები 20 კვირის მანძილზე საშუალოდ იკლებენ 24 ფუნტს. შესაბამისი სტანდარტული გადახრაა 5 ფუნტი. დიეტოლოგს სურს მიიღოს უკეთესი შედეგი და ამცირებს მარილის მოხ-

მარებას. ახალი მეთოდის გამოყენებით 40 შემთხვევით შერჩეული პაციენტი 20 კვირაში საშუალოდ იკლებს 16.3 ფუნტს. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა ითქვას, რომ დიეტა შეიცვალა?

10. სტატისტიკოსის მტკიცებით ლატარეის მყიდველი ადამიანების საშუალო ასაკი არის 70 წელი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უარვყოთ ეს მტკიცებულება, თუ შემთხვევით შერჩეული ლატარეის ბილეთების მყიდველი 30 ადამიანის ასაკის მონაცემებია:

49	80	24	61	79	68	63	72	46	65
76	71	90	56	70	71	71	67	52	82
74	39	49	69	22	56	70	74	62	45

11. გამოკითხვის თანახმად 55 წელზე მეტი ასაკის ქალები დღეში საშუალოდ ხარჯავენ 1660 კალორიას. იმის შესამოწმებლად, ჯანდაცვის სფეროში მომუშავე ქალები ხარჯავენ თუ არა იმავე რაოდენობის კალორიას, შემთხვევით შერჩეულ იქნა ჯანდაცვის სფეროში მომუშავე 55 წ. მეტი ასაკის 43 ქალი და აღმოჩნდა, რომ მათ მიერ დღეში დახარჯული კალორიების საშუალოა 1446, ხოლო სტანდარტული გადახრა კი 56 კალ. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა იმის მტკიცება, რომ ჯანდაცვის სფეროში დასაქმებული ქალების მიერ დახარჯული კალორიების საშუალო განსხვავდება პოპულაციის საშუალოსაგან?

12. ფირმის მენეჯერის მტკიცებით განათების მუშაობის საშუალო ხანგრძლივობაა 36 თვე. სტანდარტული გადახრა შეადგენს 8 თვეს. შემთხვევით შერჩეული 50 განათების მუშაობის საშუალო ხანგრძლივობა აღმოჩნდა 32 თვე. შეიძლება თუ არა ამ მტკიცების უარყოფა $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით?

13. უძრავი ქონების აგენტის მტკიცებით დედაქალაქში სახლების საშუალო გასაყიდი ფასია 60000 ლარი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უარვყოთ აგენტის მტკიცება, თუ დედაქალაქში შემთხვევით შერჩეული 36 გაყიდული სახლის ფასებია (ათასობით ლარებში):

9.5	54	99	94	80	29	121.5	184.75	15
164.45	6	13	188.4	121	308	42	7.5	32.9
126.9	25.225	95	92	38	60	211	15	28
53.5	27	21	76	85	25.22	40	97	284

14. პაციენტების გარკვეული ჯგუფის სისხლში ქოლესტერინის საშუალო დონე შეადგენს არანაკლებ 240 მილიგრამს, ხოლო სტანდარტული გადახრაა 18 მილიგრამი. შემთხვევით შერჩეულ 40 პაციენტს მისცეს ახალი პრეპარატი, რომელიც განკუთვნილია სისხლში ქოლესტერინის დონის დასაწევად. ამ პრეპარატის მიღების შემდეგ აღნიშნული პაციენტების სისხლში ქოლესტერინის საშუალო დონე აღმოჩნდა 229 მილიგრამი. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი განვაცხადოთ, რომ ახალი პრეპარატი ამცირებს ქოლესტერინის დონეს?

15. მიუთითეთ უნდა უკუვაგდოთ თუ არა ნულოვანი ჰიპოთეზა მოცემული P-მნიშვნელობის მიხედვით, თუ: ა). P-მნიშვ. = 0.258, $\alpha = 0.05$, კრიტ. ცალმხრივია; ბ). P-მნიშვ. = 0.0684, $\alpha = 0.1$, კრიტ. ორმხრივია; გ). P-მნიშვ. = 0.0153, $\alpha = 0.01$, კრიტ. ცალმხრივია; დ). P-მნიშვ. = 0.0232, $\alpha = 0.05$, კრიტ. ორმხრივია; ე). P-მნიშვ. = 0.002, $\alpha = 0.01$, კრიტ. ცალმხრივია.

16. დეკანატის მტკიცებით სტუდენტების სახელმძღვანელოების საშუალო ფასი მეტია 27.5 ლარზე. შემთხვევით შერჩეული 50 სახელმძღვანელოს საშუალო

ფასი აღმოჩნდა 39.3 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 5 ლარი. იპოვეთ კრიტერიუმის P-მნიშვნელობა. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით უნდა უკუვაგდოთ თუ არა ნულოვანი ჰიპოთეზა?

17. ავტობუსების ფირმის მენეჯერის მტკიცებით 50 მილი/სთ სიჩქარით მოძრაობისას სასკოლო ავტობუსის საშუალო სამუხრუჭე მანძილი შეადგენს 264 ფუტს (1 ფუტი = 30.48სმ). მკვლევარის მიერ შემთხვევით შერჩეული 20 სასკოლო ავტობუსის საშუალო სამუხრუჭე მანძილი აღმოჩნდა 262.3 ფუტი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 3 ფუტი. მკვლევარის აზრით საშუალო სამუხრუჭე მანძილი ნაკლებია 264 ფუტზე. ჩათვალეთ, რომ სამუხრუჭე მანძილი განაწილებულია ნორმალურად. იპოვეთ P-მნიშვნელობა. $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნების დონით უნდა უკუვაგდოთ თუ არა ნულოვანი ჰიპოთეზა?

18. გასამრავლებელი მოწყობილობის ("ქსეროქსის") მაღაზიის მენეჯერის აზრით ერთი ადამიანის მიერ გამრავლებული გვერდების საშუალო რაოდენობა დღეში ნაკლებია 40 გვერდზე. ქვემოთ მოყვანილია შემთხვევით შერჩეული 50 მომხმარებლის მიერ დღის განმავლობაში გამრავლებული გვერდების რაოდენობა. $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი დავადასტუროთ მენეჯერის მოსაზრება? ისარგებლეთ ჰიპოთეზათა შემოწმების P-მნიშვნელობის მეთოდით.

2	2	2	5	32	5	29	8	2	49
21	1	24	72	70	21	85	61	8	42
3	15	27	113	36	37	5	3	58	82
9	2	1	6	9	80	9	51	2	122
21	49	36	43	61	3	17	17	4	1

19. ტელევიზორების ფირმის მენეჯერის მტკიცებით მათი ტელევიზორების მუშაობის საშუალო ხანგრძლივობა მეტია 84 თვეზე. პოპულაციის სტანდარტული გადახრა არის 10 თვე. შემთხვევით შეარჩიეს 100 ტელევიზორი და შეამოწმეს. შერჩევის საშუალო აღმოჩნდა 85.1 თვე. შეამოწმეთ ჰიპოთეზა, რომ ტელევიზორების მუშაობის საშუალო ხანგრძლივობა მეტია 84 თვეზე და გამოთვალეთ P-მნიშვნელობა. მიღებული P-მნიშვნელობის მიხედვით $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნების დონით უნდა უკუვაგდოთ თუ არა ნულოვანი ჰიპოთეზა?

20. სპეციალური გაყვანილობის მავთულის გამძლეობის სიმტკიცე არის 800 ფუნტი. პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 12 ფუნტი. მკვლევარმა შეამოწმა შემთხვევით შერჩეული 20 მავთული და დაადგინა, რომ მათი საშუალო სიმტკიცეა 793 ფუნტი. შეიძლება თუ არა იმის უარყოფა, რომ გამძლეობის სიმტკიცეა 800 ფუნტი? იპოვეთ P-მნიშვნელობა. მიღებული P-მნიშვნელობის მიხედვით $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნების დონით უნდა უკუვაგდოთ თუ არა ნულოვანი ჰიპოთეზა? ჩათვალეთ, რომ სიდიდე ნორმალურადაა განაწილებული.

21. გასულ წელს დედაქალაქის სამედიცინო მუშაკების საშუალო საათობრივი ანაზღაურება იყო 6.32 ლარი. პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 0.54 ლარი. მიმდინარე წელს შემთხვევით შერჩეული 50 სამედიცინო მუშაკის საშუალო საათობრივი ანაზრაურება შეადგენს 6.51 ლარს. P-მნიშვნელობის მიხედვით, $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ საშუალო არ შეიცვალა.

22. ავტომობილების დილერის რეკომენდაციით 30000 კმ-ის გავლის შემდეგ გადაცემათა კოლოფი საჭიროებს შეკეთებას. იმის გასარკვევად, მომხმარებლე-

ბი ითვალისწინებენ თუ არა დილერის რეკომენდაციას, მან შემთხვევით შეარჩია 40 მომხმარებელი და დაადგინა, რომ გადაცემათა კოლოფის შეკეთების მომენტისათვის ავტომობილების საშუალო განარბენი იყო 30456 კმ. შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 1684 კმ. P-მნიშვნელობის გამოთვლით, $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით, დაადგინეთ აკეთებენ თუ არა გადაცემათა კოლოფის შეკეთებას 30000 კმ-ის გავლის შემდეგ ავტომფლობელები. მიგაჩნიათ თუ არა თქვენ, რომ α-ს მნიშვნელობა 0.1 დაახლოებით მნიშვნელოვნების დონის ტოლია?

23. ავტომობილისტის მტკიცებით ის დღეში საშუალოდ გადის 60 კმ-ს. ქვემოთ მოყვანილია ავტომობილისტის მიერ თვის განმავლობაში ყოველდღიურად გავლილი მანძილები. დავუშვათ, რომ პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 13.42 კმ. გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უარვყოთ ავტომობილისტის მტკიცებულება $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით. ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

72	45	36	68	69	71	57	60	83	26
60	72	58	87	48	59	60	56	64	68
42	57	57	58	63	49	73	75	42	63

პასუხები:

1. ± 2.58; 1.65; -2.58; -1.28; ± 1.96; 1.75; -2.33; ± 1.65; 2.05; ± 2.33. **2.** $H_0: E\xi = 39$, $H_1: E\xi \neq 39$; $H_0: E\xi = 25000$, $H_1: E\xi \neq 25000$; $H_0: E\xi \leq 25$, $H_1: E\xi > 25$; $H_0: E\xi \geq 85$, $H_1: E\xi < 85$; $H_0: E\xi \geq 56$, $H_1: E\xi < 56$; $H_0: E\xi \leq 250$, $H_1: E\xi > 250$; $H_0: E\xi \leq 75$, $H_1: E\xi > 75$; $H_0: E\xi \geq 950$, $H_1: E\xi < 950$. **3.** $H_0: E\xi = 25000$, $H_1: E\xi \neq 25000$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = -1.59$; H_0. **4.** $H_0: E\xi = 69.21$, $H_1: E\xi \neq 69.21$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = -1.15$; H_0. **5.** $H_0: E\xi \geq 9.78$, $H_1: E\xi < 9.78$; $C.V. = -1.28$; $T.V. \equiv z = -0.54$; H_0. **6.** $H_0: E\xi \leq 24$, $H_1: E\xi > 24$; $C.V. = 1.65$; $T.V. \equiv z = 1.85$; H_1. **7.** $H_0: E\xi = 800$, $H_1: E\xi \neq 800$; $C.V. = \pm 2.33$; $T.V. \equiv z = 10.12$; H_1. **8.** $H_0: E\xi \geq 14$, $H_1: E\xi < 14$; $C.V. = -2.33$; $T.V. \equiv z = -4.89$; H_1. **9.** $H_0: E\xi = 24$, $H_1: E\xi \neq 24$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = -9.73$; H_1. **10.** $H_0: E\xi = 70$, $H_1: E\xi \neq 70$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = -2.59$; H_1. **1.** $H_0: E\xi = 1660$, $H_1: E\xi \neq 1660$; $C.V. = \pm 1.65$; $T.V. \equiv z = -25.06$; H_1. **12.** $H_0: E\xi = 36$, $H_1: E\xi \neq 36$; $C.V. = \pm 2.58$; $T.V. \equiv z = -3.54$; H_1. **13.** $H_0: E\xi = 60000$, $H_1: E\xi \neq 60000$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = 1.78$; H_0. **14.** $H_0: E\xi \geq 240$, $H_1: E\xi < 240$; $C.V. = -2.33$; $T.V. \equiv z = -3.87$; H_1. **15.** არა; არა; არა; კი; კი. **16.** $H_0: E\xi \leq 27.5$, $H_1: E\xi > 27.5$; $T.V. \equiv z = 2.55$; P-მნიშვნელობა = 0.0054; კი. **17.** $H_0: E\xi \geq 264$, $H_1: E\xi < 264$; $T.V. \equiv z = -2.53$; P-მნიშვნელობა = 0.0057; კი. **18.** $H_0: E\xi \geq 40$, $H_1: E\xi < 40$; $T.V. \equiv z = -2.45$; P-მნიშვნელობა = 0.0071; კი. **19.** $H_0: E\xi \leq 84$, $H_1: E\xi > 84$; $T.V. \equiv z = 1.1$; P-მნიშვნელობა = 0.1357; არა. **20.** $H_0: E\xi = 800$, $H_1: E\xi \neq 800$; $T.V. \equiv z = -2.61$; P-მნიშვნელობა = 0.009; კი. **21.** $H_0: E\xi = 6.32$, $H_1: E\xi \neq 6.32$; $T.V. \equiv z = -2.49$; P-მნიშვნელობა = 0.0128; H_1. **22.** $H_0: E\xi = 30000$, $H_1: E\xi \neq 30000$; $T.V. \equiv z = 1.71$; P-მნიშვნელობა = 0.0872; H_1; კი. **23.** $H_0: E\xi = 60$, $H_1: E\xi \neq 60$; $T.V. \equiv z = -0.03$; P-მნიშვნელობა = 0.976; არა.

თავი V
ჰიპოთეზათა შემოწმება საშუალოსათვის (σ^2 უცნობია)

სტატისტიკური ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური განაწილების მათემატიკური ლოდინის შესახებ უცნობი დისპერსიის შემთხვევაში:

$\xi \equiv N(\cdot,\cdot)$; $D\xi$ უცნობია; $E\xi$ უცნობია.

ჰიპოთეზა: $H_0 : E\xi = a_0$

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $T = \dfrac{\overline{X} - a_0}{S^* / \sqrt{n}} \equiv T(n-1)$

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V.: $t = \dfrac{\bar{x} - a_0}{s^* / \sqrt{n}}$

ალტერნატივა	**კრიტიკული არე C.R. (H_0-ის უარყოფის არე)**
$H_1 : E\xi = a_1 > a_0$	$t \geq t_{n-1,\alpha}$,
$H_1 : E\xi = a_1 < a_0$	$t \leq -t_{n-1,\alpha}$,
$H_1 : E\xi \neq a_1$	$t \leq -t_{n-1,\alpha/2}$ ან $t \geq t_{n-1,\alpha/2}$

(სადაც $t_{n-1,\alpha}$ არის თავისუფლების $n-1$ ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილი ანუ კრიტიკული მნიშვნელობა C.V.).

$$P\text{- მნიშვნელობა: } P = \begin{cases} P\{T > t \mid H_0\}, \text{ თუ } H_1 : E\xi = a_1 > a_0; \\ P\{T < t \mid H_0\}, \text{ თუ } H_1 : E\xi = a_1 < a_0; \\ P\{|T| > |t| \mid H_0\}, \text{ თუ } H_1 : E\xi \neq a_1. \end{cases} = \begin{cases} 1 - F_T(t), \text{ თუ } H_1 : E\xi = a_1 > a_0; \\ F_T(t), \text{ თუ } H_1 : E\xi = a_1 < a_0; \\ 2 \cdot [1 - F_T(|t|)], \text{ თუ } H_1 : E\xi \neq a_1. \end{cases}$$

გადაწყვეტილება: თუ $t \in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

როდის გამოიყენება Z ან T განაწილება

ცნობილია თუ არა σ? $\xrightarrow{\text{დიახ}}$ გამოიყენე $Z = \dfrac{\overline{X} - E\xi}{\sigma / \sqrt{n}}$

↓ არა

არის თუ არა $n \geq 30$? $\xrightarrow{\text{დიახ}}$ გამოიყენე $Z = \dfrac{\overline{X} - E\xi}{S^* / \sqrt{n}}$

↓ არა

გამოიყენე $T = \dfrac{\overline{X} - E\xi}{S^* / \sqrt{n}}$, თ.ხ. $= n - 1$

*პოპულაცია უნდა იყოს დაახლოებით ნორმალურად განაწილებული.

P- მნიშვნელობის მეთოდი: თუ $P \le \alpha$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. ჯანდაცვის მინისტრის მტკიცებით ექიმის საშუალო წლიური შემოსავალი შეადგენს 24000 ლარს. შემთხვევით შერჩეული 10 ექიმის წლიური შემოსავლის საშუალო აღმოჩნდა 23450 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 400 ლარი. გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი მინისტრის მტკიცების უარსაყოფად $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით?

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0 : E\xi = 24000$, $H_1 : E\xi \ne 24000$. პირობის თანახმად, გვაქვს: $\bar{x} = 23450$, $s^{'} = 400$, $n = 10$. სტიუდენტის განაწილების ცხრილიდან, $\alpha = 0.05$-ისა და თავისუფლების $n-1=9$ ხარისხისათვის, ვპოულობთ საჭირო კრიტიკულ მნიშვნელობებს: $-t_{n-1,\alpha/2} = -2.262$ და $t_{n-1,\alpha/2} = 2.262$. კრიტერიუმის მნიშვნელობა კი იქნება:

$$t = \frac{\bar{x} - E\xi}{s^{'}/\sqrt{n}} = \frac{23450 - 24000}{400/\sqrt{10}} = -4.35.$$

ვინაიდან, $-4.35 < -2.262$, ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უკუვაგდოთ, ანუ ჩვენ გვაქვს საკმარისი საფუძველი მინისტრის მტკიცების უარსაყოფად.

მაგალითი 2. განათლების მინისტრის მტკიცებით სათადარიგო მასწავლებლის საშუალო ხელფასი დღეში ნაკლებია 60 ლარზე. გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი მინისტრის მტკიცების მისაღებად $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით, თუ შემთხვევით შერჩეულ 8 სკოლაში დაფიქსირდა შემდეგი მონაცემები: 60 56 60 55 70 55 60 55.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0 : E\xi \ge 60$, $H_1 : E\xi < 60$. შერჩევის მოცულობაა $n = 8$. სტიუდენტის განაწილების ცხრილიდან, $\alpha = 0.1$-ისა და თავისუფლების $n-1=7$ ხარისხისათვის, ვპოულობთ საჭირო კრიტიკულ მნიშვნელობას: $-t_{n-1,\alpha} = -1.415$. კრიტერიუმის მნიშვნელობის გამოსათვლელად, წინასწარ გამოვთვალოთ შერჩევითი საშუალო და შესწორებული სტანდარტული გადახრა: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 58.88$ და $s^{'} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 5.08$. ამიტომ:

$$t = \frac{\bar{x} - E\xi}{s^{'}/\sqrt{n}} = \frac{58.88 - 60}{5.08/\sqrt{8}} = -0.624.$$

ვინაიდან, კრიტერიუმის მნიშვნელობა არ ვარდება კრიტიკულ არეში, ნულოვანი ჰიპოთეზა არ უნდა უკუვაგდოთ, ანუ ჩვენ არ გვაქვს საკმარისი საფუძველი მინისტრის მტკიცების დასადასტურებლად.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ P-მნიშვნელობა, თუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა სტიუდენტის განაწილებისათვის (T კრიტერიუმის სტატისტიკის t კრიტერიუმის

მნიშვნელობა) არის 2.056, შერჩევის მოცულობაა 11 და კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია.

ამოხსნა. სტიუდენტის განაწილების ზედა კრიტიკული წერტილების ცხრილში თავისუფლების $11-1=10$-ის ტოლი ხარისხის გასწვრივ მოვძებნოთ ისეთი ორი მნიშვნელობა, რომელთა შორის ვარდება (მოექცევა) 2.056. ეს მნიშვნელობებია: 1.812 და 2.228. ვინაიდან, კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია, შევხედოთ სტრიქონს წარწერით "One tail, α" და ვიპოვოთ α-ს ორი მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება 1.812-სა და 2.228-ს. ეს მნიშვნელობებია: 0.05 და 0.025. შესაბამისად, P-მნიშვნელობა სწორედ მათ შორისაა მოთავსებული: $0.025 <$ P-მნიშვნელობა < 0.05. მაგალითად, თუ $\alpha=0.05$, მაშინ ჩვენ უნდა უკუვაგდოთ H_0, რადგანაც P-მნიშვნელობა < 0.05; მაგრამ, თუ $\alpha=0.01$, მაშინ H_0-ის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს, რადგანაც P-მნიშვნელობა $> 0.025 > 0.01$.

შენიშვნა: P-მნიშვნელობის პოვნა შეიძლება სპეციალური კალკულატორით ან კომპიუტერული პროგრამით. ამ მაგალითში კალკულატორით გამოთვლილი P-მნიშვნელობა = 0.033.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ P-მნიშვნელობა, თუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა სტიუდენტის განაწილებისათვის (T კრიტერიუმის სტატისტიკის t კრიტერიუმის მნიშვნელობა) არის 2.983, შერჩევის მოცულობაა 6 და კრიტერიუმი ორმხრივია.

ამოხსნა. სტიუდენტის განაწილების ზედა კრიტიკული წერტილების ცხრილში თავისუფლების $6-1=5$-ის ტოლი ხარისხის გასწვრივ მოვძებნოთ ისეთი ორი მნიშვნელობა, რომელთა შორის ვარდება (მოექცევა) 2.983. ეს მნიშვნელობებია: 2.571 და 3.365. ვინაიდან, კრიტერიუმი ორმხრივია, შევხედოთ სტრიქონს წარწერით "Two tail, α" და ვიპოვოთ α-ს ორი მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება 2.571-სა და 3.365-ს. ეს მნიშვნელობებია: 0.05 და 0.02. შესაბამისად, P-მნიშვნელობა სწორედ მათ შორისაა მოთავსებული: $0.02 <$ P-მნიშვნელობა < 0.05. მაგალითად, თუ $\alpha=0.05$, მაშინ ჩვენ უნდა უკუვაგდოთ H_0, რადგანაც P-მნიშვნელობა < 0.05; მაგრამ, თუ $\alpha=0.01$, მაშინ H_0 -ის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს, რადგანაც P-მნიშვნელობა $> 0.02 > > 0.01$.

შევნიშნავთ, რომ აქ კალკულატორით გამოთვლილი P-მნიშვნელობა არის 0.031.

მაგალითი 5. ექიმების აზრით მორბენალი ადამიანი უფრო მეტ ჟანგბადს მოიხმარს ვიდრე საშუალოდ ყველა ადამიანი. შემთხვევით შერჩეული 15 მორბენალისათვის ჟანგბადის მოხმარების საშუალო იყო 40.6 მლ/კგ, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 6მლ/კგ. თუ ყველა ადამიანის საშუალო მოხმარება შეადგენს 36.7მლ/კგ, გვაქვს თუ არა საკმაო საფუძველი დავუჯეროთ ექიმებს $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით?

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0: E\xi \le 36.7$, $H_1: E\xi > 36.7$. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$t=\frac{\overline{x}-E\xi}{s'/\sqrt{n}}=\frac{40.6-36.7}{6/\sqrt{15}}=2.517.$$

გამოვთვალოთ P-მნიშვნელობა: სტიუდენტის განაწილების ცხრილში $n-1=14$-ის გასწვრივ 2.517 ვარდება 2.145-სა და 2.624-ს შორის, რომელებიც

შეესაბამება $\alpha = 0.025$-სა და $\alpha = 0.01$-ს (კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია). ამიტომ $0.01 < P$-მნიშვნელობა < 0.025. ე. ი. P-მნიშვნელობა $< \alpha$ (ვინაიდან $0.025 < 0.05$) და ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უკუვაგდოთ, ანუ ჩვენ გვაქვს საკმარისი საფუძველი გავიზიაროთ ექიმების მტკიცებულება.

ამოცანები

1. ისარგებლეთ სტიუდენტის განაწილების ცხრილით და იპოვეთ კრიტიკული მნიშვნელობა (ან მნიშვნელობები) როცა: ა). $n = 10$, $\alpha = 0.05$, კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია; ბ). $n = 18$, $\alpha = 0.1$, კრიტერიუმი ორმხრივია; გ). $n = 6$, $\alpha = 0.01$, კრიტერიუმი მარცხენა ცალმხრივია; დ). $n = 9$, $\alpha = 0.025$, კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია; ე). $n = 15$, $\alpha = 0.05$, კრიტერიუმი ორმხრივია; ვ). $n = 23$, $\alpha = 0.005$, კრიტერიუმი მარცხენა ცალმხრივია; ზ). $n = 28$, $\alpha = 0.01$, კრიტერიუმი ორმხრივია; თ). $n = 17$, $\alpha = 0.02$, კრიტერიუმი ორმხრივია.

2. იპოვეთ P-მნიშვნელობის საზღვრები ქვემოთ მოყვანილი კრიტერიუმის მნიშვნელობებისათვის: ა). $t = 2.321$, $n = 15$, კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია; ბ). $t = 1.945$, $n = 28$, კრიტერიუმი ორმხრივია; გ). $t = -1.267$, $n = 8$, კრიტერიუმი მარცხენა ცალმხრივია; დ). $t = 1.562$, $n = 17$, კრიტერიუმი ორმხრივია; ე). $t = 3.025$, $n = 24$, კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია; ვ). $t = -1.145$, $n = 5$, კრიტერიუმი მარცხენა ცალმხრივია; ზ). $t = 2.179$, $n = 13$, $\alpha = 0.01$, კრიტერიუმი ორმხრივია; თ). $t = 0.665$, $n = 10$, $\alpha = 0.02$, კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია.

ქვემოთ მოყვანილ ამოცანებში იგულისხმეთ, რომ პოპულაცია დაახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული.

3. ეკვატორის სამხრეთით ზაფხულის თვეებში მოსული ნალექების საშუალო შეადგენს 11.52 დიუმს (1 დიუმი = 2.54 სმ). 2000 წელს მკვლევარმა შემთხვევით შეარჩია ეკვატორის სამხრეთით მდებარე 10 ქალაქი და დაადგინა, რომ მოსული ნალექების საშუალო არის 7.42 დიუმი. შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრა შეადგენს 1.3 დიუმს. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეუძლია თუ არა მკვლევარს დაასკვნას, რომ 2000 წელს მოსული ნალექების საშუალო ნაკლებია 11.52 დიუმზე?

4. მწვანეების აზრით მსოფლიოში დაცული ტერიტორიების (ნაკრძალების) ფართობების საშუალო ნაკლებია ვიდრე 2000 აკრი (1 აკრი = 0.4 ჰა). შემთხვევით შერჩეული 5 დაცული ტერიტორიის ფართობები გაზომილი აკრებში შემდეგია: 959 1187 493 6249 541. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი დავეთანხმოთ მწვანეების მოსაზრებას?

5. უძრავი ქონების აგენტის მტკიცებით დედაქალაქში მცირე ბიზნესის ოფისის ხარჯების საშუალოა 800 ლარი. შემთხვევით შერჩეული 10 მცირე ბიზნესისათვის ოფისის ხარჯების საშუალომ შეადგინა 863 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა იყო 20 ლარი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უკუვაგდოთ უძრავი ქონების აგენტის მტკიცებულება?

6. წლის განმავლობაში ავადმყოფობის გამო ქარხნის ერთი თანამშრომლის მიერ გაცდენილი სამუშაო საათების საშუალოა 48 საათი. გაცდენათა რაოდენობის შესამცირებლად ქარხნის დირექტორმა თანამშრომლებს დაავალა მონაწ-

ილეობა მიეღოთ გაჯანსაღების პროგრამაში. ერთი წლის შემდეგ, შემთხვევით შერჩეული 18 თანამშრომლის გაცდენილი საათების საშუალომ შეადგინა 41 სთ, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა იყო 5 სთ. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით გაამართლა თუ არა გაჯანსაღების პროგრამამ?

7. მშენებლობის სამინისტროს მტკიცებულებით დედაქალაქში შენობების საშუალო სიმაღლეა სულ ცოტა 700 ფუტია. $\alpha = 0.025$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უკუვაგდოთ მშენებლობის სამინისტროს მტკიცებულება, თუ შემთხვევით შერჩეული 10 შენობის სიმაღლეებია:

485	511	841	725	615
582	616	635	535	520

8. უძრავი ქონების აგენტის მტკიცებით საოფისე ფართის 1 კვ. მეტრის საშუალო საიჯარო გადასახადი დედაქალაქში შეადგენს 17.63 ლარს. მკვლევარმა შემთხვევით შეარჩია 15 ოფისი და დაადგინა, რომ მათი საიჯარო გადასახადის საშუალოა 18.72 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 3.64 ლარი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ არ არსებობს განსხვავება საიჯარო გადასახადებს შორის.

9. უძრავი ქონების აგენტის მტკიცებით სამთახიანი ბინის საშუალო საიჯარო გადასახადი დედაქალაქში შეადგენს 750 ლარს. მკვლევარმა შემთხვევით შეარჩია 12 სამოთახიანი ბინა და დაადგინა, რომ მათი საიჯარო გადასახადის საშუალოა 732 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 17 ლარი. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უკუვაგდოთ აგენტის მტკიცებულება?

10. მწარმოებლის მტკიცებით ახალ თოვლისგადამამუშავებელ მანქანას შეუძლია დანახარჯების შემცირება. მისი მტკიცებით 10 ტონა თოვლის ახალი მანქანით გადამუშავებისას 1 ტონის გადამუშავების ღირებულებამ შეადგინა 5.75 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი არის 1.05 ლარი. ძველი მანქანის შემთხვევაში 1 ტონა თოვლის გადამუშავების საშუალო ღირებულება იყო 6.62 ლარი. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით აკეთებს თუ არა ახალი მანქანა ფულის ეკონომიას?

11. თბილგაზის მტკიცებით მცირე კომპანიების გაზის საშუალო დანახარჯი თვეში არ აღემატება 350 ლარს. კომპანიების მფლობელები კი ეჭვობენ, რომ გაზის დანახარჯი უფრო მეტია. შემთხვევით შეირჩა 12 მცირე კომპანია და აღმოჩნდა, რომ მათი საშუალო დანახარჯი იყო 358 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 16 ლარი. შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გაზის საშუალო დანახარჯი მეტია 350 ლარზე.

12. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ რაიონებში მანქანის გარეცხვის საშუალო ფასია 3 ლარი, თუ ცნობილია, რომ შემთხვევით შერჩეულ 5 რაიონში მანქანის გარეცხვის საშუალო ფასი იყო 3.7 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 0.3 ლარი.

13. გამოკითხვის თანახმად, მარტოხელა ადამიანების სახლში ტელეფონი თვეში საშუალოდ 37-ჯერ რეკავს. ამ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად მკვლევარმა გამოკითხა 29 მარტოხელა ადამიანი და დაადგინა, რომ ტელეფონის ზარების საშუალო იყო 34.9, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 6. $\alpha = 0.05$

მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საფუძველი უკუვაგდოთ აღნიშნული ჰიპოთეზა? გამოიყენეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

14. სტუდენტების აზრით შაბათი საღამოს ბარში გატარება საშუალოდ არ უნდა დაჯდეს 30 ლარზე მეტი. თავიანთი მოსაზრების შესამოწმებლად მათ შემთხვევით შეარჩიეს 16 სტუდენტი და შეეკითხნენ თუ რამდენი დახარჯეს გასულ შაბათ საღამოს ბარში. აღმოჩნდა, რომ შერჩევითი საშუალო არის 31.17 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 5.51 ლარი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საფუძველი დაეეთანხმოთ სტუდენტების მოსაზრებას? ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

15. გასული წლების გამოცდილებიდან გამომდინარე მასწავლებელს სჯერა, რომ გამოცდაზე სტუდენტების საშუალო ქულა არის 75. გამოიყენეთ P-მნიშვნელობის მეთოდი და $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ, რომ სტუდენტების საშუალო ქულა ისევ არის 75, თუ ცნობილია, რომ მიმდინარე წელს 20 შემთხვევით შერჩეული სტუდენტის ქულებია:

80	68	72	73	76	81	71	71	50	65
63	71	70	76	75	69	70	72	70	74

პასუხები:

1. ± 1.833; -3.365; ± 2.145; ± 2.771; ± 1.740; 2.306; -2.819; ± 2.583. **2.** (0.01,0.025); (0.05, 0.1); (0.1, 0.25); (0.1, 0.2); P-მნიშვნელობა < 0.005); (0.1, 0.25); P-მნიშვნელობა = 0.05; P-მნიშვნელობა > 0.25. **3.** $H_0: E\xi \geq 11.52$, $H_1: E\xi < 11.52$; $C.V. = -1.83$; $T.V. \equiv t = -9.97$; კი. **4.** $H_0: E\xi \geq 2000$, $H_1: E\xi < 2000$; $C.V. = -3.747$; $T.V. \equiv t = -0.104$; არა. **5.** $H_0: E\xi = 800$, $H_1: E\xi \neq 800$; $C.V. = \pm 2.262$; $T.V. \equiv t = 9.96$; კი. **6.** $H_0: E\xi \geq 48$, $H_1: E\xi < 48$; $C.V. = -1.333$; $T.V. \equiv t = -5.94$; კი. **7.** $H_0: E\xi \geq 700$, $H_1: E\xi < 700$; $C.V. = -2.262$; $T.V. \equiv t = -2.71$; კი. **8.** $H_0: E\xi = 17.63$, $H_1: E\xi \neq 17.63$; $C.V. = \pm 2.145$; $T.V. \equiv t = 1.16$; H_0. **9.** $H_0: E\xi = 750$, $H_1: E\xi \neq 750$; $C.V. = \pm 3.106$; $T.V. \equiv t = -3.67$; კი. **10.** $H_0: E\xi \geq 6.62$, $H_1: E\xi < 6.62$; $n = 10$; $C.V. = -1.383$; $T.V. \equiv t = -2.62$; კი. **11.** $H_0: E\xi \leq 350$, $H_1: E\xi > 350$; $C.V. = 1.796$; $T.V. \equiv t = 1.732$; H_0. **12.** $H_0: E\xi = 3$, $H_1: E\xi \neq 3$; $C.V. = \pm 2.776$; $T.V. \equiv t = 5.22$; H_1. **13.** $H_0: E\xi \geq 37$, $H_1: E\xi < 37$; $T.V. \equiv t = -1.88$; 0.025 < P-მნიშვნელობა < 0.05; რადგანაც $P < \alpha$, ამიტომ H_0 უნდა უკუვაგდოთ. **14.** $H_0: E\xi = 30$, $H_1: E\xi \neq 30$; $T.V. \equiv t = 0.85$; 0.2 < P-მნიშვნელობა < 0.5; რადგანაც $P > \alpha$, ამიტომ H_0 არ უნდა უკუვაგდოთ. **15.** $H_0: E\xi = 75$, $H_1: E\xi \neq 75$; $T.V. \equiv t = -2.83$; 0.01 < P-მნიშვნელობა < 0.02; რადგანაც $P > \alpha$, ამიტომ H_0 არ უნდა უკუვაგდოთ.

თავი VI
ჰიპოთეზათა შემოწმება დისპერსიისათვის

სტატისტიკური ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური განაწილების დისპერსიის შესახებ:

ჰიპოთეზა: $H_0 : D\xi = \sigma_0^2$

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $\begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - E\xi)^2}{\sigma_0^2} \equiv \chi^2(n), \textit{თუ } E\xi \textit{ ცნობილია;} \\ \dfrac{(n-1)S'^2}{\sigma_0^2} \equiv \chi^2(n-1), \textit{თუ } E\xi \textit{ უცნობია.} \end{cases}$

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V.= $\begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - E\xi)^2}{\sigma_0^2}, \textit{თუ } E\xi \textit{ ცნობილია;} \\ \dfrac{(n-1)s'^2}{\sigma_0^2}, \textit{თუ } E\xi \textit{ უცნობია.} \end{cases}$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე C.R. (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1 : D\xi > \sigma_0^2$	$\begin{cases} [\chi^2_{n,\alpha}, +\infty), \textit{თუ } E\xi \textit{ ცნობილია;} \\ [\chi^2_{n-1,\alpha}, +\infty), \textit{თუ } E\xi \textit{ უცნობია,} \end{cases}$
$H_1 : D\xi < \sigma_0^2$	$\begin{cases} (0, \chi^2_{n,1-\alpha}], \textit{თუ } E\xi \textit{ ცნობილია;} \\ (0, \chi^2_{n-1,1-\alpha}], \textit{თუ } E\xi \textit{ უცნობია,} \end{cases}$
$H_1 : D\xi \neq \sigma_0^2$	$\begin{cases} (0, \chi^2_{n,1-\alpha/2}] \cup [\chi^2_{n,\alpha/2}, +\infty), \textit{თუ } E\xi \textit{ ცნობილია;} \\ (0, \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}] \cup [\chi^2_{n-1,\alpha/2}, +\infty), \textit{თუ } E\xi \textit{ უცნობია} \end{cases}$

(სადაც $\chi^2_{n,\alpha}$ არის $\chi^2(n)$ განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილი ანუ **კრიტიკული მნიშვნელობა C.V.**).

ალტერნატივა	P- მნიშვნელობა:
$H_1 : D\xi > \sigma_0^2$	$P = \begin{cases} P\{\chi^2(n) > T.V.\}, \textit{თუ } E\xi \textit{ ცნობილია;} \\ P\{\chi^2(n-1) > T.V.\}, \textit{თუ } E\xi \textit{ უცნობია,} \end{cases}$
$H_1 : D\xi < \sigma_0^2$	$P = \begin{cases} P\{\chi^2(n) < T.V.\}, \textit{თუ } E\xi \textit{ ცნობილია;} \\ P\{\chi^2(n-1) < T.V.\}, \textit{თუ } E\xi \textit{ უცნობია,} \end{cases}$
$H_1 : D\xi \neq \sigma_0^2$	$P = \begin{cases} 2 \cdot P\{\chi^2(n) > T.V.\}, \textit{თუ } E\xi \textit{ ცნობილია;} \\ 2 \cdot P\{\chi^2(n-1) > T.V.\}, \textit{თუ } E\xi \textit{ უცნობია.} \end{cases}$

გადაწყვეტილება: თუ T.V.$\in$C.R., მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

P- მნიშვნელობის მეთოდი: თუ $P \le \alpha$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. პროფესორს სურს გაარკვიოს, ქულების ცვალებადობა თავის ჯგუფში, სადაც 23 სტუდენტია, არის თუ არა ნაკლები, ვიდრე პოპულაციის დისპერსია 225. პროფესორის ჯგუფში ქულების შესწორებული დისპერსიაა 198. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი ვამტკიცოთ, რომ პროფესორის ჯგუფში ქულების ცვალებადობა ნაკლებია პოპულაციის დისპერსიაზე? ჩათვალეთ, რომ ქულები ნორმალურადაა განაწილებული.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0: D\xi \ge 225$, $H_1: D\xi < 225$. ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა: ვინაიდან კრიტერიუმი მარცხენა ცალმხრივია, $1-\alpha = 0.95$ და თავისუფლების ხარისხია $n-1=22$, ამიტომ ხი კვადრატ განაწილების ზედა კრიტიკული წერტილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ $\chi^2_{n-1,1-\alpha} = \chi^2_{22,0.95} = 12.338$. მაშასადამე, კრიტიკული არეა $C.R. = (0, 12.338]$. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V. = \frac{(n-1)s'^2}{\sigma_0^2} = \frac{(23-1)\cdot 198}{225} = 19.36\,.$$

ვინაიდან, კრიტერიუმის მნიშვნელობა არ ვარდება კრიტიკულ არეში, ამიტომ ნულოვან ჰიპოთეზას ვღებულობთ, ანუ არ არსებობს საკმარისი საფუძველი იმისათვის, რომ პროფესორის ჯგუფში ქულების ცვალებადობა ნაკლებია პოპულაციის დისპერსიაზე.

მაგალითი 2. საავადამყოფოს ადმინისტრატორი დარწმუნებულია, რომ სტანდარტული გადახრა იმ პაციენტების რიცხვის, რომლებიც ამბულატორიულად მკურნალობენ დღეში 8-ზე მეტია. პაციენტების რიცხვი ჩავთვალოთ, რომ განაწილებულია ნორმალურად. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა გავიზიაროთ ადმინისტრატორის მოსაზრება, თუ 15 შემთხვევით შერჩეული დღის მონაცემებია:

25	30	5	15	18
42	16	9	10	12
12	38	8	14	27

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0: D\xi \le 64$, $H_1: D\xi > 64$. რამდენადაც კრიტერიუმის მარჯვენა ცალმხრივია, $\alpha = 0.1$ და თავისუფლების ხარისხია $n-1=14$, ამიტომ კრიტიკული მნიშვნელობა იქნება: $\chi^2_{n-1,\alpha} = 21.0641$. გამოვთვალოთ შესწორებული სტანდარტული გადახრა, გვაქვს:

$$s^{*}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j)^2}=11.2.$$

ამიტომ კრიტერიუმის მნიშვნელობა იქნება:

$$T.V.=\frac{(n-1)s^{*2}}{\sigma_0^2}=\frac{(15-1)\cdot(11.2)^2}{8^2}=27.44.$$

ვინაიდან, კრიტიკული მნიშვნელობა ვარდება კრიტიკულ არეში ($27.44\in[21.0641,+\infty)$), ამიტომ H_0 უნდა უკუვაგდოთ, ანუ ჩვენ გვაქვს საკმარისი საფუძველი, რათა ჩავთვალოთ, რომ პოპულაციის სტანდარტული გადახრა მეტია 8-ზე.

მაგალითი 3. სიგარეტის კომპანიას სურს შეამოწმოს ჰიპოთეზა, რომ მის სიგარეტში ნიკოტინის შემცველელობის დიპერსია არის 0.644. ნიკოტინის შემცველელობა იზომება მილიგრამებში და იგულისხმება, რომ ის ნორმალურად განაწილებულია. 20 სიგარეტისგან აღებული შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 1 მილიგრამი. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უარვყოთ კომპანიის ჰიპოთეზა?

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0: D\xi=0.644$, $H_1: D\xi\neq 0.644$. ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს ორმხრივ კრიტერიუმთან. $\alpha=0.05$-ისა და თავისუფლების $n-1=19$ ხარისხისათვის ხი კვადრატ განაწილების ზედა კრიტიკული წერტილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ კრიტიკული მნიშვნელობებია: $\chi^2_{n-1,\alpha/2}=\chi^2_{19,0.025}=32.852$ და $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}=\chi^2_{19,0.975}=8.907$. კრიტერიუმის მნიშვნელობა კი იქნება:

$$T.V.=\frac{(n-1)s^{*2}}{\sigma_0^2}=\frac{(20-1)\cdot(1)^2}{0.644}=29.5.$$

კრიტერიუმის მნიშვნელობა მოთავსებულია ორ კრიტიკულ მნიშვნელობას შორის ($8.907<29.5<32.852$), ანუ ის არ ვარდება კრიტიკულ არეში. ამიტომ H_0 არ უნდა უკუვაგდოთ. შესაბამისად, ჩვენ არა გვაქვს საკმარისი საფუძველი უარვყოთ კომპანიის მოსაზრება.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ P-მნიშვნელობა, თუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა ხი კვადრატ განაწილებისათვის არის 19.274, შერჩევის მოცულობაა 8 და კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია.

ამოხსნა. ხი კვადრატ განაწილების ზედა კრიტიკული წერტილების ცხრილში თავისუფლების $8-1=7$-ის ტოლი ხარისხის გასწვრივ მოვძებნოთ ისეთი ორი მნიშვნელობა, რომელთა შორის ვარდება (მოექცევა) 19.274. ეს მნიშვნელობებია: 18.475 და 20.278. შევხედოთ პირველ სტრიქონს და ვიპოვოთ α-ს ორი მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება 18.475-სა და 20.278-ს. ეს მნიშვნელობებია: 0.01 და 0.005. შესაბამისად, P-მნიშვნელობა სწორედ მათ შორისაა მოთავსებული: $0.005<P$-მნიშვნელობა <0.01. მაგალითად, თუ $\alpha=0.01$., მაშინ ჩვენ უნდა უკუვაგდოთ H_0, რადგანაც P-მნიშვნელობა ნაკლებია 0.01; მაგრამ, თუ $\alpha=0.001$, მაშინ H_0-ის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს, რადგანაც P-მნიშვნელობა $>0.005>0.001$.

შევნიშნავთ, რომ აქ კალკულატორით გამოთვლილი P-მნიშვნელობა არის 0.007.

მაგალითი 5. ვიპოვოთ P-მნიშვნელობა, თუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა ხი კვადრატ განაწილებისათვის არის 3.823, შერჩევის მოცულობაა 13 და კრიტერიუმი მარცხენა ცალმხრივია.

ამოხსნა. ხი კვადრატ განაწილების ზედა კრიტიკული წერტილების ცხრილში თავისუფლების $13-1=12$-ის ტოლი ხარისხის გასწვრივ მოვძებნოთ ისეთი ორი მნიშვნელობა, რომელთა შორის ვარდება (მოექცევა) 3.823. ეს მნიშვნელობებია: 3.571 და 4.404. შევხედოთ პირველ სტრიქონს და ვიპოვოთ α-ს ორი მნიშვნელობა, რომელიც შეესაბამება 3.571 -სა და 4.404-ს. ეს მნიშვნელობებია: 0.99 და 0.975. როდესაც მიღებული მნიშვნელობები განაწილების მარცხენა მხარესაა, 1-ს უნდა გამოვაკლოთ α-ს ეს მნიშვნელობები და მივიღებთ P-მნიშვნელობის საზღვრებს. ეს საზღვრებია: 1 – 0.99 =0.01 და 1 – 0.975 = 0.025. შესაბამისად, 0.01 < P-მნიშვნელობა < 0.025.

შევნიშნავთ, რომ აქ კალკულატორით გამოთვლილი P-მნიშვნელობა არის 0.014.

შენიშვნა: როდესაც ხი კვადრატ კრიტერიუმი ორმხრივია, ცალმხრივი კრიტერიუმის შესაბამისი ორივე საზღვარი უნდა გაორმაგდეს. შესაბამისად, წინა მაგალითში: $2\cdot 0.01$ < P-მნიშვნელობა < $2\cdot 0.025$, ანუ 0.02 < P-მნიშვნელობა < 0.05.

მაგალითი 6. წინა გამოკვლევებიდან მკვლევარმა იცის, რომ მანქანის შემოწმების დროის სტანდარტული გადახრაა 16.8 წუთი. 24 შემთხვევით შერჩეული მანქანის შემოწმების დროის შესწორებული სტანდარტული გადახრა აღმოჩნდა 12.5 წუთი. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ სტანდარტული გადახრა შეიცვალა? ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდი.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0:\sqrt{D\xi}=16.8$, $H_1:\sqrt{D\xi}\neq 16.8$. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V.=\frac{(n-1)s^{2}}{\sigma_0^2}=\frac{(24-1)\cdot(12.5)^2}{(16.8)^2}=12.733.$$

გამოვთვალოთ P-მნიშვნელობა: თავისუფლების $n-1=32$ ხარისხის გასწვრივ ხი კვადრატ განაწილების ზედა კრიტიკული წერტილების ცხრილში 12.733 ვარდება 11.689-სა და 13.091-ს შორის. α-ს შესაბამისი მნიშვნელობებია: 0.975 და 0.95. ვინაიდან მიღებული მნიშვნელობები განაწილების მარცხენა მხარესაა, 1-ს უნდა გამოვაკლოთ α-ს ეს მნიშვნელობები: $1-0.975=0.025$, $1-0.95=0.05$. რადგანაც კრიტერიუმი ორმხრივია, მიღებული რიცხვები უნდა გაორმაგდეს და მივიღებთ P-მნიშვნელობის საზღვრებს: 0.05 < P-მნიშვნელობა < 0.1 (კალკულატორით გამოთვლილი P-მნიშვნელობა = 0.085).

ვინაიდან, P-მნიშვნელობა მეტია α-ზე, ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზა არ უნდა უკუვაგდოთ. შესაბამისად, ჩვენ არ გვაქვს საკმარისი საფუძველი, რათა დავასკვნათ, რომ სტანდარტული გადახრა შეიცვალა.

ამოცანები

1. ჩამოაყალიბეთ შესაძლო ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები და გამოთვალეთ კრიტიკული მნიშვნელობა, როცა $D\xi = 225$, თუ: ა). $\alpha = 0.05$, $n = 12$ კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია; ბ). $\alpha = 0.1$, $n = 23$, კრიტერიუმი მარცხენა ცალმხრივია; გ). $\alpha = 0.05$, $n = 15$, კრიტერიუმი ორმხრივია; დ). $\alpha = 0.1$, n [illegible] კრიტერიუმი ორმხრივია; ე). $\alpha = 0.01$, $n = 17$, კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია; ვ). $\alpha = 0.025$, $n = 20$, კრიტერიუმი მარცხენა ცალმხრივია; ზ). $\alpha = 0.01$, $n = 13$, კრიტერიუმი ორმხრივია; თ). $\alpha = 0.025$, $n = 29$, კრიტერიუმი მარცხენა ცალმხრივია.

2. იპოვეთ P-მნიშვნელობის საზღვრები ქვემოთ მოყვანილი χ^2 კრიტერიუმის მნიშვნელობებისათვის: ა). $\chi^2 = 29.321$, $n = 16$, კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია; ბ). $\chi^2 = 10.215$, $n = 25$, კრიტერიუმი მარცხენა ცალმხრივია; გ). $\chi^2 = 24.672$, $n = 11$, კრიტერიუმი ორმხრივია; დ). $\chi^2 = 23.722$, $n = 9$, კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია; ე). $\chi^2 = 13.974$, $n = 28$, კრიტერიუმი ორმხრივია; ვ). $\chi^2 = 10.571$, $n = 19$, კრიტერიუმი მარცხენა ცალმხრივია; ზ). $\chi^2 = 12.144$, $n = 6$, კრიტერიუმი ორმხრივია; თ). $\chi^2 = 8.201$, $n = 23$, კრიტერიუმი ორმხრივია;

ქვემოთ მოყვანილ ამოცანებში იგულისხმეთ, რომ სიდიდეები ნორმალურია ან დაახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული.

3. დიეტოლოგის მტკიცებით სხვადასხვა სახის ერთ მაგიდის კოვზ სიროფში კალორიების რიცხვის სტანდარტული გადახრა არის 60. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არ ამ მტკიცებულების უარყოფა, თუ შემთხვევით შერჩეული 18 სხვადასხვა სახის სიროფის ერთ კოვზში კალორიების რიცხვია:

53	210	100	200	100	220
210	100	240	200	100	210
100	210	100	210	100	60

4. შერჩეულ იქნა 18 თითო კილოგრამიანი შაქრის ფუთა. აწონვის შედეგად აღმოჩნდა, რომ შესწორებული შერჩევითი დისპერსია შეადგენს 6.5-ს. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ პოპულაციის დისპერსია მეტია 6.2-ზე.

5. კომპანიის მენეჯერის მტკიცებით მათ მიერ გამოშვებულ იოგურტში შაქრის შემცველელობა არ აღემატება 25 გრამს. შემთხვევით შერჩეულ 20 იოგურტში გაზომეს შაქრის შემცველელობა და აღმოჩნდა, რომ შესწორებული შერჩევითი დისპერსია ტოლია 36-ის. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არ ამ მტკიცებულების უარყოფა?

6. წინა კვლევების თანახმად მკვლევარი თვლის, რომ პირველკურსელ სტუდენტთა წლოვანებების დისპერსია შეადგენს 1.6-ს. შემთხვევით შერჩეული 50 პირველკურსელის წლოვანებების შესწორებული შერჩევითი დისპერსია

აღმოჩნდა 2.3. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა პირველკურსელ სტუდენტთა წლოვანებების დისპერსია 1.6-ზე მეტი?

7. კომპანიის მენეჯერის მტკიცებით იმ სატელეფონო საუბრების ხანგრძლივობების სტანდარტული გადახრა, რომელიც მას სჭირდება ფირმის საქმეების მოსაწესრიგებლად, არ აღემატება 1.2 წუთს. მენეჯერის შემთხვევით შერჩეული 15 სატელეფონო საუბრის ხანგრძლივობის შესწორებული სტანდარტული გადახრა აღმოჩნდა 1.8 წუთი. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ სტანდარტული გადახრა არ აღემატება 1.2-ს. ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

8. პლასტიკატის ბოთლში მოთავსებული 12 უნცია (1 უნცია = 28.3 გრ) კაუსტიკური სოდის წონის დასაშვები სტანდარტული გადახრა არ აღემატება 0.03 უნციას. ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით და $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ დასაშვებია თუ არა პოპულაციის სტანდარტული გადახრა, თუ შემთხვევით შერჩეულ 8 სოდის ბოთლში სოდის წონები იყო:

12.03	12.1	12.02	11.98
12	12.05	11.97	11.99

9. ქვემოთ მოყვანილია სამშენებლო კომპანიის მიერ შესყიდული 12 ფოლადის მავთულის წინააღმდეგობების მაჩვენებლები. მავთულის პარტიის დაწუნება ხდება იმ შემთხვევაში, როცა შესწორებული სტანდარტული გადახრა მეტია 2-ზე. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საფუძველი დავიწუნოთ მავთულების პარტია?

2001	1998	2002	2000	1998	1999
1997	2005	2003	2001	1999	2006

პასუხები:

1. $H_0: D\xi \le 225$, $H_1: D\xi > 225$, $C.V. = 27.587$; $H_0: D\xi \ge 225$, $H_1: D\xi < 225$, $C.V. = 14.042$; $H_0: D\xi = 225$, $H_1: D\xi \ne 225$, $C.V. = 5.629$, 26.119; $H_0: D\xi = 225$, $H_1: D\xi \ne 225$, $C.V. = 2.167$, 14.067; $H_0: D\xi \le 225$, $H_1: D\xi > 225$, $C.V. = 32$; $H_0: D\xi \ge 225$, $H_1: D\xi < 225$, $C.V. = 8.907$; $H_0: D\xi = 225$, $H_1: D\xi \ne 225$, $C.V. = 3.074$, 28.299; $H_0: D\xi \ge 225$, $H_1: D\xi < 225$, $C.V. = 15.308$. **2.** (0.01, 0.025); (0.005, 0.01); (0.01, 0.025): P-მნიშვნელობა < 0.005; (0.025, 0.05); (0.1, 0.2); (0.05, 0.1); P-მნიშვნელობა < 0.01. **3.** $H_0: \sigma = 60$, $H_1: \sigma \ne 60$; $C.V. = 8.672$, 27.587; $T.V. = \chi^2 = 19.707$; H_0. **4.** $H_0: D\xi \le 6.2$, $H_1: D\xi > 6.2$; $C.V. = 33.409$; $T.V. = \chi^2 = 17.823$; H_0. **5.** $H_0: D\xi \le 25$, $H_1: D\xi > 25$; $C.V. = 27.204$; $T.V. = \chi^2 = 27.36$; კი. **6.** $H_0: D\xi \le 1.6$, $H_1: D\xi > 1.6$; $C.V. = 55.758$; $T.V. = \chi^2 = 70.438$; კი. **7.** $H_0: \sigma \le 1.2$, $H_1: \sigma > 1.2$; $T.V. = \chi^2 = 31.5$; P-მნიშვნელობა < 0.005 < α; H_1. **8.** $H_0: \sigma \le 0.03$, $H_1: \sigma > 0.03$; $T.V. = \chi^2 = 14.381$; 0.025 < P-მნიშვნელობა < 0.05 = α; არა. **9.** $H_0: \sigma \le 2$, $H_1: \sigma > 2$; $C.V. = 24.725$; $T.V. = \chi^2 = 22.02$; არა.

თავი VII
ჰიპოთეზათა შემოწმება ბერნულის სქემაში

სტატისტიკური ჰიპოთეზის შემოწმება ბერნულის სქემაში უცნობი p ალბათობის შესახებ (დიდი მოცულობის შემთხვევაში)

ჰიპოთეზა: $H_0 : p = p_0$

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $Z = \dfrac{\overline{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$ $\left(\overline{X} = \dfrac{S_n}{n} = w_n\right)$

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V.: $z = \dfrac{\overline{x} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე C.R. (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1 : p > p_0$	$z \ge z_\alpha$,
$H_1 : p < p_0$	$z \le -z_\alpha$,
$H_1 : p \ne p_0$	$z \le -z_{\alpha/2}$ ან $z \ge z_{\alpha/2}$,

სადაც z_α არის $N(0,1)$-ის ზედა α-კრიტიკული წერტილი ანუ კრიტიკული მნიშვნელობა C.V. (აქ იგულისხმება, რომ: $np \ge 5$ და $nq \ge 5$. თუკი ამ პირობებიდან ერთი მაინც არ სრულდება, მაშინ კრიტიკული მნიშვნელობა უნდა ვიპოვოთ ბინომიალური განაწილების ცხრილიდან).

P- მნიშვნელობა: $P = \begin{cases} 1 - \Phi(z), \text{ თუ } H_1 : p > p_0; \\ \Phi(z), \text{ თუ } H_1 : p < p_0; \\ 2 \cdot [1 - \Phi(|z|)], \text{ თუ } H_1 : p \ne p_0. \end{cases}$

გადაწყვეტილება: თუ $z \in$ C.R., მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

P- მნიშვნელობის მეთოდი: თუ $P \le \alpha$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

შენიშვნა. მცირე მოცულობის შერჩევისათვის (კერძოდ, თუ $n < 30$) კრიტერიუმის სტატისტიკად გამოიყენება $S_n \equiv Bi(n, p_0)$. მაგალითად, ცალმხრივი მარჯვენა ალტერნატივის დროს C.R. $= \{S_n > c_\alpha\}$, სადაც c_α მთელი დადებითი რიცხვი უნდა შეირჩეს პირობიდან, რომ:

$$P\{S_n > c_\alpha \mid H_0\} = \sum_{k=c_\alpha}^{n} C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k} = \alpha .$$

თუ ასეთი c_α არ არსებობს, მაშინ $c = c_\alpha$-ს არჩევენ პირობიდან

$$P\{S_n > c \mid H_0\} \le \alpha < P\{S_n > c-1 \mid H_0\},$$

ან რაც იგივეა:

$$\sum_{k=c}^{n} C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k} \le \alpha < \sum_{k=c-1}^{n} C_n^k p_0^k (1-p_0)^{n-k} .$$

ჰიპოთეზის შემოწმება პუასონის პოპულაციის λ პარამეტრის შესახებ (მცირე მოცულობის შერჩევებისათვის):

პუასონის პოპულაციის λ პარამეტრის შესახებ ჰიპოთეზის შემოწმებისას მცირე მოცულობის შერჩევის შემთხვევაში, იყენებენ P-მნიშვნელობის მეთოდს.

ჰიპოთეზა: $H_0: \lambda = \lambda_0$

ალტერნატივა: $H_1: \lambda \neq \lambda_0$

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $\Pi \equiv Po(\lambda_0)$

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V.: π (პუასონის შემთხვევითი სიდიდის დაკვირვებული მნიშვნელობა)

***P*- მნიშვნელობა:**

$$P=\begin{cases} 2\cdot P\{\Pi\le\pi\,|\,H_0\}=2\cdot\sum\limits_{k=0}^{\pi}\dfrac{\lambda_0^k}{k!}\cdot e^{-\lambda_0}, \text{ თუ } \pi\le\lambda_0; \\ 2\cdot P\{\Pi\ge\pi\,|\,H_0\}=2\cdot\left(1-\sum\limits_{k=0}^{\pi-1}\dfrac{\lambda_0^k}{k!}\cdot e^{-\lambda_0}\right), \text{ თუ } \pi>\lambda_0. \end{cases}$$

თუ $P\le\alpha$, მაშინ ამბობენ, რომ შედეგი (ლაპარაკია π-ზე) ***სტატისტიკურად მნიშვნელოვანია*** და H_0 ჰიპოთეზას უარყოფენ, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი – ***ის სტატისტიკურად უმნიშვნელოა*** და ნულოვან ჰიპოთეზას არ უარყოფენ.

დიდი მოცულობის შემთხვევაში აქაც იყენებენ ნორმალურ აპროქსიმაციას, კერძოდ, იმ ფაქტს, რომ

$$(\Pi-\lambda_0)^2/\lambda_0\equiv[N(0,1)]^2\equiv\chi^2(1).$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. დავუშვათ ჩატარებულია 50 დამოუკიდებელი ექსპერიმენტი, A ხდომილების მოხდენის ფარდობითი სიხშირე აღმოჩნდა 0.12. მნიშვნელოვნების $\alpha = 0.01$ დონისათვის შევამოწმოთ ნულოვანი H_0: $p = 0.1$ ჰიპოთეზა ალტერნატიული H_1: $p > 0.1$ ჰიპოთეზის წინააღმდეგ.

ამოხსნა. ვიპოვოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა

$$z=\frac{(0.12-0.1)\sqrt{50}}{\sqrt{0.1\cdot0.9}}=0.471.$$

კრიტიკული არე იქნება მარჯვენა ცალმხრივი, ხოლო კრიტიკული მნიშვნელობა უნდა ვიპოვოთ პირობიდან

$$\Phi(C.V.)=1-0.01=0.99.$$

ნორმალური განაწილების ფუნქციის ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ $z_\alpha=2.33$. ვინაიდან, $z<z_\alpha$, ამიტომ მიიღება ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ $p=0.1$.

მაგალითი 2. განათლების ინსპექტორის შეფასებით მაღალი კლასის მოსწავლეების 15% ტოვებს სკოლას. გასულ წელს, შემთხვევით შერჩეული

მაღალი კლასის 200 მოსწავლიდან 38-მა დატოვა სკოლა. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უკუვაგდოთ ინსპექტორის მოსაზრება?

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0 : p = 0.15$, $H_1 : p \neq 0.15$. ვინაიდან, $\alpha = 0.05$ და კრიტერიუმი ორმხრივია, კრიტიკული მნიშვნელობებია: $-z_{\alpha/2} = -1.96$ და $z_{\alpha/2} = 1.96$. გარდა ამისა, გვაქვს: $p_0 = 0.15$, $n = 200$, $\bar{x} = w_n = \frac{38}{200} = 0.19$. ამიტომ კრიტერიუმის მნიშვნელობა იქნება:

$$z = \frac{\bar{x} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{0.19 - 0.15}{\sqrt{0.15 \cdot 0.85/200}} = 1.58.$$

როგორც ეხედავთ, კრიტერიუმის მნიშვნელობა არ ვარდება კრიტიკულ არეში, ამიტომ ნულოვან ჰიპოთეზას არ უკუვაგდებთ. ამრიგად, ჩვენ არა გვაქვს საკმარისი საფუძველი ინსპექტორის მოსაზრების საწინააღმდეგოდ.

მაგალითი 3. პროკურორის მტკიცებით ადვოკატების 25%-ზე მეტი იყენებს რეკლამას. 200 შემთხვევით შერჩეულ ადვოკატზე დაკვირვებამ აჩვენა, რომ 63 მათგანი ამა თუ იმ ფორმით იყენებდა რეკლამას. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი გავიზიაროთ პროკურორის მტკიცებულება?

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0 : p \le 0.25$, $H_1 : p > 0.25$. გვაქვს: $p_0 = 0.25$, $n = 200$, $\bar{x} = w_n = \frac{63}{200} = 0.315$. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$z = \frac{\bar{x} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{0.315 - 0.25}{\sqrt{0.25 \cdot 0.75/200}} = 2.12.$$

გამოვთვალოთ P-მნიშვნელობა:

$$P = 1 - \Phi(z) = 1 - \Phi(2.12) = 1 - 9830 = 0.0170.$$

რადგანაც P-მნიშვნელობა < α (0.017 < 0.05), ამიტომ H_0 უნდა უკუვაგდოთ. მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს საკმარისი საფუძველი გავიზიაროთ პროკურორის მოსაზრება იმის შესახებ, რომ ადვოკატების 25%-ზე მეტი იყენებს რეკლამას.

ამოცანები

1. სატელეფონო კომპანიის შეფასებით მათი მომხმარებლების 40%-ს გააჩნია ლოდინის რეჟიმის მქონე მოწყობილება. ამ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად შეირჩა 100 მომხმარებელი და გაირკვა, რომ მათ 37%-ს აქვს ლოდინის რეჟიმის მქონე მოწყობილება. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უკუვაგდოთ კომპანიის მოსაზრება?

2. სათამაშოების მწარმოებლის აზრით 14 წლამდე ასაკის ბავშების სულ ცოტა 23%-ს აქვს სასრიალო გორგოლაჭებიანი დაფა. 14 წლამდე ასაკის 40 ბავშვიან შერჩევაში სასრიალო დაფა აღმოაჩნდა 7 ბავშვს. გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით უარვყოთ სათამაშოების მწარმოებლის მოსაზრება?

3. სამშობიარო სახლის წარსული ჩანაწერების მიხედვით არა დღენაკლუ-ლი ბავშვების საშუალო წონა მეტია ვიდრე 7 ფუნტი და 2 უნცია (1 ფუნტი = 453.6 გრ; 1 უნცია = 28.3 გრ). მიმდინარე წელს 100 დაბადებული ბავშვიდან 23-ის წონა მეტი იყო ვიდრე 7 ფუნტი და 2 უნცია. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი ვამტკიცოთ რომ პროპორცია შეიცვალა?

4. კრიმინალისტების კვლევის მიხედვით ხანძრების სულ ცოტა 40% გამო-წვეულია 21 წლამდე ახალგაზრდების მიერ. მკვლევარის დაკვირვების მიხედვით 80 ხანძრიდან 30 გამოწვეული იყო 21 წლამდე ახალგაზრდის მიერ. $\alpha = 0.1$ მნიშ-ვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უკუვაგდოთ კრიმინ-ალისტების მოსაზრება?

5. უკანასკნელი კვლევის მიხედვით ავიაკატასტროფაში მოყოლილი ადამი-ანების არაუმეტეს 32% იღუპება. 100 ადამიანისაგან შემდგარ შერჩევაში, რომლე-ბიც მოყვნენ ავიაკატასტროფაში, 38 დაიღუპა. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით უნდა უარვყოთ თუ არა კვლევის შედეგი?

6. სტატისტიკის დეპარტამენტის მონაცემებით დედაქალაქის მცხოვრებთა 63%-ს გააჩნია ავტომოპასუხე. კომპანია "მაგთის" 143 გამოკითხული თანამშრომ-ლიდან 85-ს აქვს ავტომოპასუხე. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა, რომ ავტომოპასუხის მფლობელთა პროპორცია "მაგთის" თანამშრომ-ლებს შორის იგივეა რაც დედაქალაქის მცხოვრებლებს შორის.

7. სტატისტიკური ანგარიშის მიხედვით სრულწლოვანი მოსახლეობის 17% გასულ წელს დაესწრო წარმოდგენას ოპერაში. ამ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად მკვლევარმა გამოკითხა 90 ადამიანი და დაადგინა, რომ მათგან გასულ წელს ოპერას დაესწრო 22. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა, რომ რეალური პროპორცია შეადგენს 17%-ს.

8. უკანასკნელი კვლევის მიხედვით პირველკურსელი სტუდენტების სულ ცოტა 15% ჭარბწონიანია. 80 შემთხვევით შერჩეულ პირველკურსელს შორის 9 აღმოჩნდა ჭარბწონიანი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმა-რისი საფუძველი უარვყოთ კვლევის შედეგი?

9. კვლევის მიხედვით უნივერსიტეტის სტუდენტების არაუმეტეს 25% უნივე-რსიტეტამდე მისასვლელად გადის 10 კმ-ზე მეტს. შეთხვევით შერჩეული 100 სტუდენტიდან აღმოჩნდა, რომ 30 უნივერსიტეტამდე მისასვლელად გადის 10 კმ-ზე მეტს. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ კვლევის შედეგების სისწ-ორე. ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

10. სატელეფონო კომპანიის განცხადებით მისი მომხმარებლების 30%-ზე მეტს აქვს 2-ზე მეტი ტელეფონი. ამ განცხადების დასადასტურებლად კომპანიამ შემთხვევით შეარჩია 200 მომხმარებელი და დაადგინა, რომ მათგან 72-ს აქვს 2 ტელეფონზე მეტი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი დავადასტუროთ კომპანიის განცხადება? ისარგებლეთ P-მნიშვნელო-ბის მეთოდით.

11. კრიმინალისტების მტკიცებით მკვლელობების 10% ჩადენილია ქალების მიერ. გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით უკუვაგდოთ ეს მტკიცებულება, თუ 67 შემთხვევით შერჩეული მკვლელობიდან 10 აღმოჩნდა ქალების მიერ ჩადენილი? გამოიყენეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

12. მონეტის 9-ჯერ აგდებისას 3-ჯერ მოვიდა გერბი. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნე-ბის დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ მონეტა არაწესიერია (მითითე-

შა: ისარგებლეთ ბინომიალური განაწილების ცხრილით და იპოვეთ $2P\{\xi \le 3\}$, როცა $p=0.5$ და $n=9$).

13. გასულ წელს თვითმფრინავის მგზავრების 20% მგზავრობდა პირველი კლასით. მიმდინარე წელს შემთხვევით შერჩეული 15 მგზავრიდან 5-მა იმგზავრა პირველი კლასით. $\alpha=0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ პროპორცია შეიცვალა?

პასუხები:

1. $H_0: p=0.4$, $H_1: p\ne 0.4$; $C.V.=\pm 2.58$; $T.V.\equiv z=-0.612$; არა. 2. $H_0: p\ge 0.23$, $H_1: p<0.23$; $C.V.=-1.65$; $T.V.\equiv z=-0.83$; არა. 3. $H_0: p=0.37$, $H_1: p\ne 0.37$; $C.V.=\pm 2.58$; $T.V.\equiv z=-2.9$; კი. 4. $H_0: p\ge 0.4$, $H_1: p<0.4$; $C.V.=-1.28$; $T.V.\equiv z=-0.457$; არა. 5. $H_0: p\le 0.32$, $H_1: p>0.32$; $C.V.=+1.65$; $T.V.\equiv z=+1.29$; არა. 6. $H_0: p=0.63$, $H_1: p\ne 0.63$; $C.V.=\pm 1.96$; $T.V.\equiv z=-0.88$; H_0. 7. $H_0: p=0.17$, $H_1: p\ne 0.17$; $C.V.=\pm 1.96$; $T.V.\equiv z=1.88$; H_0. 8. $H_0: p\ge 0.15$, $H_1: p<0.15$; $C.V.=-1.65$; $T.V.\equiv z=-0.94$; H_0. 9. $H_0: p\le 0.25$, $H_1: p>0.25$; $T.V.\equiv z=1.15$; P-მნიშვნელობა $=0.1251>\alpha$; H_0. 10. $H_0: p\le 0.3$, $H_1: p>0.3$; $T.V.\equiv z=1.85$; P-მნიშვნელობა $=0.0322<\alpha$; H_1. 11. $H_0: p=0.1$, $H_1: p\ne 0.1$; $T.V.\equiv z=1.34$; P-მნიშვნელობა $=0.1802>\alpha$; H_0. 12. არა. 13. არა.

დანებების საშუალო ასაკი, რომელიც მოყვანილია ქვემოთ. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნე-ბის დონით შეიძლება თუ არა ჰიპოთეზის უარყოფა?

12	18	24	16	21	20	18	19	19
22	25	16	18	19	19	20	23	

25. ტაქსების ფირმის მენეჯერის მტკიცებით მათი ტაქსისტების მუშაობის სტაჟის საშუალო შეადგენს სულ ცოტა 12.4 წელს. შემთხვევით შერჩეული 15 ტაქსისტის მუშაობის სტაჟის საშუალო აღმოჩნდა 11.2 წელი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 2 წელი. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა სინამდვილეში სტაჟის საშუალო უფრო ნაკლები, ვიდრე ამას ამტკიცებს მენეჯერი?

პასუხები:

1. $H_0: E\xi = 1800, H_1: E\xi \neq 1800$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = 0.47$; H_0; $1706.04 < E\xi < 1953.96$; $1800 \in (1706.04, 1953.96)$. 2. $H_0: E\xi = 42$, $H_1: E\xi \neq 42$; $C.V. = \pm 1.65$; $T.V. \equiv z = 0.47$; H_1; $43.83 < E\xi < 52.17$; $42 \notin (43.83, 52.17)$. 3. $H_0: E\xi = 86$, $H_1: E\xi \neq 86$; $C.V. = \pm 2.58$; $T.V. \equiv z = -1.29$; H_0; $80 < E\xi < 88$; $86 \in (80, 88)$. 4. $H_0: E\xi = 47$, $H_1: E\xi \neq 47$; $C.V. = \pm 1.65$; $T.V. \equiv z = -2.26$; H_1; $38.35 < E\xi < 45.65$; $47 \notin (38.35, 45.65)$. $H_0: E\xi = 22$, $H_1: E\xi \neq 22$; $C.V. = \pm 2.58$; $T.V. \equiv z = -2.32$; H_0; $19.47 < E\xi < 22.13$; $22 \in (19.47, 22.13)$. 6. $H_0: E\xi = 98$, $H_1: E\xi \neq 98$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = -2.02$; H_1. 7. $H_0: E\xi = 14$, $H_1: E\xi \neq 14$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = 4.22$; H_1. 8. $H_0: E\xi = 16.3$, $H_1: E\xi \neq 16.3$; $T.V. \equiv z = 11.3$; P-მნიშვნელობა < 0.01; კი. 9. $H_0: E\xi = 61.2$, $H_1: E\xi \neq 61.2$; $C.V. = \pm 2.831$; $T.V. \equiv t = -4.378$; კი. 10. $H_0: E\xi \leq 67$, $H_1: E\xi > 67$; $C.V. = 1.383$; $T.V. \equiv t = 7.47$; არა. 11. $H_0: E\xi \leq 23.2$, $H_1: E\xi > 23.2$; $T.V. \equiv t = -1.27$; 0.75 < P-მნიშვნელობა < 0.9; არა. 12. $H_0: E\xi = 6$, $H_1: E\xi \neq 6$; $C.V. = \pm 2.821$; $T.V. \equiv t = 1.835$; არა. 13. $H_0: p \geq 0.3$, $H_1: p < 0.3$; $C.V. = -1.65$; $T.V. \equiv z = -0.85$; H_0. 14. $H_0: p \geq 0.6$, $H_1: p < 0.6$; $C.V. = -1.28$; $T.V. \equiv z = -1.22$; კი. 15. $H_0: p = 0.8$, $H_1: p \neq 0.8$; $C.V. = \pm 2.33$; $T.V. \equiv z = -1.83$; H_0. 16. $H_0: p = 0.65$, $H_1: p \neq 0.65$; $T.V. \equiv z = 1.17$; P-მნიშვნელობა = 0.242 > α; H_0. 17. $H_0: E\xi = 225$, $H_1: E\xi \neq 225$; $T.V. \equiv z = 2.36$; P-მნიშვნელობა = 0.0182; H_0. 18. $H_0: \sigma = 3.4$, $H_1: \sigma \neq 3.4$; $C.V. = 11.689$ და 38.076; $T.V. \equiv \chi^2 = 35.1$; არა. 19. $H_0: \sigma \geq 4.3$, $H_1: \sigma < 4.3$; $T.V. \equiv \chi^2 = 6.95$; 0.005 < P-მნიშვნელობა <0.01 < α; კი. 20. $H_0: \sigma = 95$, $H_1: \sigma \neq 95$; $C.V. = 6.408$ და 33.409; $T.V. \equiv \chi^2 = 15.0212$; არა. 21. $H_0: \sigma = 18$, $H_1: \sigma \neq 18$; $C.V. = 11.143$ და 0.484; $T.V. \equiv \chi^2 = 5.44$; H_0. 22. $H_0: E\xi = 28.6$, $H_1: E\xi \neq 28.6$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = 2.14$; H_1. 23. $H_0: E\xi = 6500$, $H_1: E\xi \neq 6500$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = 5.27$; H_1. 24. $H_0: E\xi = 21$, $H_1: E\xi \neq 21$; $C.V. = \pm 2.921$; $T.V. \equiv t = -2.06$; H_0. 25. $H_0: E\xi \geq 12.4$, $H_1: E\xi < 12.4$; $C.V. = -1.345$; $T.V. \equiv t = -2.324$; H_0.

თავი VIII

ნდობის ინტერვალი და ჰიპოთეზათა შემოწმება

თუ ჰიპოთეზის შემოწმების ამოცანაში ხდება ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფა, მაშინ იმავე მნიშვნელოვნების დონის მქონე ნდობის ინტერვალი პოპულაციის პარამეტრისათვის *არ მოიცავს* პარამეტრის ჰიპოთეტურ მნიშვნელობას.

თუ ჰიპოთეზის შემოწმების ამოცანაში არ ხდება ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფა, მაშინ იმავე მნიშვნელოვნების დონის მქონე ნდობის ინტერვალი პოპულაციის პარამეტრისათვის *მოიცავს* პარამეტრის ჰიპოთეტურ მნიშვნელობას.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. შაქარი დაფასოებულია 5 ფუნტიან (1 ფუნტი = 453.6 გრ) ფუთებში. კონტროლიორს ეჭვი აქვს, რომ ფუთაში არ არის 5 ფუნტი შაქარი. 50 შაქრის ფუთისაგან შემდგარი შერჩევის საშუალო აღმოჩნდა 4.6 ფუნტი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 0.7 ფუნტი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საფუძველი დავასკვნათ, რომ ფუთაში საშუალოდ არ არის 5 ფუნტი შაქარი? ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი ჭეშმარიტი საშუალოსათვის.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0: E\xi = 5$, $H_1: E\xi \neq 5$. ამ ორმხრივი კრიტერიუმის შესაბამისი კრიტიკული მნიშვნელობებია: $-z_{\alpha/2} = -z_{0.025} = -1.96$ და $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$. კრიტერიუმის მნიშვნელობა იქნება:

$$z = \frac{\bar{x} - E\xi}{s' / \sqrt{n}} = \frac{4.5 - 5}{0.7 / \sqrt{50}} = \frac{-0.4}{0.099} = -4.04 .$$

რადგანაც $-4.04 < -1.96$, ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უკუვაგდოთ, ანუ ჩვენ გვაქვს საკმარისი საფუძველი, რათა დავასკვნათ, რომ ფუთაში საშუალოდ არ არის 5 ფუნტი შაქარი.

ავაგოთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოსათვის:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{s'}{\sqrt{n}} < E\xi < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s'}{\sqrt{n}},$$

$$4.6 - 1.96 \cdot \frac{0.7}{\sqrt{50}} < E\xi < 4.6 + 1.96 \cdot \frac{0.7}{\sqrt{50}},$$

$$4.4 < E\xi < 4.8 .$$

როგორც ვხედავთ, 95%-იანი ნდობის ინტერვალი (ანუ ნდობის ინტერვალი მნიშვნელოვნების დონით $\alpha = 0.05$) საშუალოსათვის $E\xi$ არ მოიცავს საშუალოს ჰიპოთეტურ მნიშვნელობას $E\xi = 5$.

მაგალითი 2. მკვლევარი ამტკიცებს, რომ სპეციალური დიეტით გამოკვებილი ზრდასრული ღორი საშუალოდ იწონის 200 ფუნტს. 10 ასეთი ღორისაგან შედგენილი შერჩევის საშუალო წონა აღმოჩნდა 198.2 ფუნტი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 3.3 ფუნტი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საფუძველი დავუჯეროთ მკვლევარს? ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი რეალური საშუალოსათვის.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0: E\xi = 200$, $H_1: E\xi \neq 200$. რადგანაც პოპულაციის სტანდარტული გადახრა უცნობია და $n < 30$, ამიტომ უნდა გამოვიყენოთ T ტესტი. ამ შემთხვევაში ორმხრივი

კრიტერიუმის შესაბამისი კრიტიკული მნიშვნელობებია: $-t_{n-1,\alpha/2}=-t_{9,0.025}=-2.262$ და $t_{n-1,\alpha/2}=t_{9,0.025}=2.262$. კრიტერიუმის მნიშვნელობა იქნება:

$$t=\frac{\bar{x}-E\xi}{s'/\sqrt{n}}=\frac{198.2-200}{3.3/\sqrt{10}}=\frac{-1.8}{1.0436}=-1.72.$$

შესაბამისად, ნულოვანი ჰიპოთეზა არ უნდა უკუვაგდოთ, ანუ არა გვაქვს საკმარისი საფუძველი უარვყოთ მკვლევარის მოსაზრება, რომ ღორის საშუალო წონაა 200 ფუნტი.

ავაგოთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოსათვის:

$$\bar{x}-t_{\alpha/2}\cdot\frac{s'}{\sqrt{n}}<E\xi<\bar{x}+t_{\alpha/2}\cdot\frac{s'}{\sqrt{n}},$$

$$198.2-2.262\cdot\frac{3.3}{\sqrt{10}}<E\xi<198.2+2.262\cdot\frac{3.3}{\sqrt{10}},$$

$$195.8<E\xi<200.6.$$

როგორც ვხედავთ, 95%-იანი ნდობის ინტერვალი (ანუ ნდობის ინტერვალი მნიშვნელოვნების დონით $\alpha=0.05$) საშუალოსათვის $E\xi$ მოიცავს საშუალოს ჰიპოთეტურ მნიშვნელობას $E\xi=200$.

ამოცანები

1. თხილამურების მაღაზიის მენეჯერის მტკიცებით ზამთრის თვეების განმავლობაში მისი მაღაზიის საშუალო დღიური ბრუნვა შეადგენს 1800 ლარს. შემთხვევით შერჩეული ზამთრის 10 დღის საშუალო დღიური ბრუნვა აღმოჩნდა 1830 ლარი. პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 200 ლარი. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საფუძველი უარვყოთ მენეჯერის მტკიცებულება? ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოსათვის. არის თუ არა ნდობის ინტერვალის ინტერპრეტაცია თანხვედრაში ჰიპოთეზის შემოწმების შედეგთან? იგულისხმეთ, რომ სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად.

2. სამგზავრო ავტობუსს საშუალოდ გადაყავს 42 მგზავრი. გასულ წლებში პოპულაციის სტანდარტული გადახრა შეადგენდა 8-ს. მიმდინარე წელს შემთხვევით შერჩეული 10 ავტობუსის მგზავრთა საშუალო აღმოჩნდა 48. $\alpha=0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ საშუალო იგივეა? ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოსათვის. არის თუ არა ნდობის ინტერვალის ინტერპრეტაცია თანხვედრაში ჰიპოთეზის შემოწმების შედეგთან? იგულისხმეთ, რომ სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად.

3. უძრავი ქონების აგენტის მტკიცებით საკუთარი სახლების კომუნალური გადასახადების საშუალო თვეში შეადგენს 86 ლარს. წარსული კვლევის თანახმად პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 6 ლარი. შემთხვევით შერჩეული 15 სახლის მფლობელის საშუალო გადასახადი აღმოჩნდა 84 ლარი. $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ აგენტის მტკიცებულება. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოსათვის. არის თუ არა ნდობის ინტერვალის ინტერპრეტაცია თანხვედრაში ჰიპოთეზის შემოწმების შედეგთან? იგულისხმეთ, რომ სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად.

4. ერთადგილიანი ნავით მდინარის დინების მიმართულებით გაცურვის საშუალო დრო სპორტსმენებისათვის შეადგენს 47 წუთს. ვინაიდან გაზაფხულზე დინების სიჩქარე უფრო სწრაფია, შემთხვევით შერჩეული 10 სპორტსმენის საშუა-

ლო დრო აღმოჩნდა 42 წუთი. წინა კვლევებიდან ცნობილია, რომ სტანდარტული გადახრა შეადგენს 7 წუთს. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა, რომ სწრაფი დინების დროს საშუალო განსხვავებულია. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოსათვის. არის თუ არა ნდობის ინტერვალის ინტერპრეტაცია თანხვედრაში ჰიპოთეზის შემოწმების შედეგთან? იგულისხმეთ, რომ სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად.

5. წინა კვლევების თანახმად პირველკურსელი სტუდენტები კვირაში საშუალოდ 22 საათს ხარჯავენ სწავლაზე. სტანდარტული გადახრა შეადგენს 4 საათს. მიმდინარე წელს გამოკითხეს 60 სტუდენტი და აღმოჩნდა, რომ მათ მიერ კვირის განმავლობაში სწავლაზე დახარჯული დროის საშუალო შეადგენდა 20.8 საათს. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა, რომ სწავლაზე დახარჯული დროის საშუალო შეიცვალა. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოსათვის. არის თუ არა ნდობის ინტერვალის ინტერპრეტაცია თანხვედრაში ჰიპოთეზის შემოწმების შედეგთან?

ამოცანები გამოცდისათვის

6. მეტეოროლოგის მტკიცებით აშშ-ს ქალაქებში უმაღლესი ტემპერატურის საშუალო შეადგენს 98-ს (ფარენგეიტით). $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საფუძველი უკუვაგდოთ მეტეოროლოგის მოსაზრება, თუ ცნობილია, რომ შემთხვევით შერჩეულ 50 ქალაქში უმაღლესი ტემპერატურის მონაცემებია:

97	94	96	105	99	96	80	95	101	97
101	87	88	97	94	98	95	88	94	94
99	99	98	96	96	97	98	99	92	97
99	108	97	98	114	91	96	102	99	102
100	93	88	102	99	98	80	95	101	61

7. კვლევის თანახმად მწეველი ადამიანი საშუალოდ დღეში ეწევა 14 ცალ სიგარეტს. ამ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად შემთხვევით შეირჩა 40 მწეველი და აღმოჩნდა, რომ ისინი დღეში საშუალოდ 18 ცალ სიგარეტს ეწეოდნენ. შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრა იყო 6. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საფუძველი ჩავთვალოთ, რომ მწეველების მიერ დღეში მოწეული სიგარეტის რიცხვი სინამდვილეში განსხვავებულია 14-საგან?

8. სკოლის კონსულტანტს სურს შეამოწმოს მოსაზრება იმის შესახებ, რომ იმ მოსწავლეების საშუალო ასაკი, რომლებიც თავს ანებებენ სწავლას, შეადგენს 16.3 წელს. შემთხვევით შეირჩა 32 მოსწავლე, რომლებმაც თავი დაანებეს სწავლას და აღმოჩნდა, რომ მათი საშუალო ასაკი იყო 16.9 წელი. პოპულაციის სტანდარტული გადახრა შეადგენს 0.3-ს. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საფუძველი უარვყოთ აღნიშნული მოსაზრება? ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

9. მკვლევარს სურს შეამოწმოს არის თუა არა დედაქალაქის მოსახლეობის საშუალო ასაკი 61.2 წელი. 22 შემთხვევით შერჩეული მოქალაქის საშუალო ასაკი აღმოჩნდა 59.8 წელი, ხოლო შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრა კი 1.5 წელი. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით განსხვავდება თუ არა რეალურად საშუალო ასაკი 61.2 წლისაგან? იგულისხმეთ, რომ სიდიდე დაახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული.

10. ზაფხულის თვეებში ტემპერატურის საშუალო აშშ-ს ჩრდილოეთ ნაწილში შეადგენს 67-ს (ფარენგეიტით). მიმდინარე წელს შემთხვევით შერჩეული 10 ქალაქის საშუალო ტემპერატურა აღმოჩნდა 69.6, ხოლო შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრა კი 1.1. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ მიმდინარე წლის ზაფხული უფრო თბილი იყო ვიდრე საშუალოდ?

11. წინანდელი კვლევის მიხედვით მკვლელობის მსხვერპლთა საშუალო ასაკი არ აღემატება 23.2 წელს. მიმდინარე წელს შემთხვევით შერჩეული 18 მკვლელობის მსხვერპლთა საშუალო ასაკი აღმოჩნდა 22.6 წელი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 2 წელი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ მიმდინარე წელს მსხვერპლთა საშუალო ასაკი გაიზარდა? იგულისხმეთ, რომ სიდიდე დაახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული. ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

12. გაეროს მონაცემებით მსოფლიოს 10 პოპულარული ეროვნული მუზეუმის დამთვალიერებელთა საშუალო რიცხვი გასულ წელს შეადგენდა 6 მილიონ ადამიანს. მიმდინარე წელს, ქვემოთ მოყვანილი ამ 10 მუზეუმის დამთვალიერებელთა რიცხვის მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.02$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ მიმდინარე წელს დამთვალიერებელთა საშუალო შეიცვალა (მონაცემები გამოსახულია მილიონებში):

4.7	17.2	14	6.1	6.1
4.9	9.3	9.4	6.4	6.1

13. უნივერსიტეტის ფინანსური დახმარების დეპარტამენტი იმედოვნებს, რომ სტუდენტთა სულ ცოტა 30% მიიღებს ამა თუ იმ სახის ფინანსურ დახმარებას. იმის გასარკვევად, სწორია თუ არა ეს მოსაზრება, შემთხვევით შერჩეულ იქნა 60 სტუდენტი და აღმოჩნდა, რომ მათგან 15 მიიღო ფინანსური დახმარება. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შევამოწმოთ ჰიპოთეზა, რომ სტუდენტთა სულ ცოტა 30% მიიღებს ფინანსურ დახმარებას.

14. წინა კვლევის თანახმად სრულწლოვანი ადამიანების სულ ცოტა 60% საუზმეზე მიირთმევს კვერცხს კვირაში ოთხჯერ მაინც. ამ მოსაზრების შესამოწმებლად დიეტოლოგმა შემთხვევით შეარჩია 100 სრულწლოვანი ადამიანი და დაადგინა, რომ მათ შორის 54% საუზმეზე მიირთმევს კვერცხს კვირაში ოთხჯერ მაინც. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით ეთანხმება თუ არა დიეტოლოგის შედეგი წინა კვლევის შედეგს?

15. სამშენებლო კომპანიის მტკიცებით ბინის მყიდველთა 80%-ს სურს ბინაში ქონდეს ბუხარი. ამ მოსაზრების შესამოწმებლად მკვლევარმა შემთხვევით შეარჩია 30 ბინის მყიდველი და დაადგინა, რომ მათგან 20-ს სურდა ბინაში ქონოდა ბუხარი. $\alpha = 0.02$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ კომპანიის მტკიცებულების სისწორე.

16. "ნოკიას" დისტრიბუტორის მტკიცებით 13 – 16 წლის ასაკის მოზარდების 65%-ს აქვს მათი ფირმის ტელეფონი. ამ მოსაზრების შესამოწმებლად მკვლევარმა შემთხვევით შეარჩია 80 მოზარდი და დაადგინა, რომ მათგან 57-ს ჰქონდა "ნოკიას" ფირმის ტელეფონი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა უკუვაგდოთ დისტრიბუტორის მოსაზრება? ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

17. ფეხბურთის ფედერაციის პრეზიდენტის მტკიცებით ფეხბურთელების საშუალო წონა შეადგენს 225 ფუნტს (1 ფუნტი = 453.6 გრ). ამ მოსაზრების შესა-

შემოწმებლად, მკვლევარმა შემთხვევით შეარჩია 50 ფეხბურთელი და დაადგინა, რომ მათი საშუალო წონა იყო 230 ფუნტი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 15 ფუნტი. $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ პრეზიდენტის მტკიცებულება. ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

18. ფილმების რედაქტორის მტკიცებით ვიდეოფილმების ხანგრძლივობის სტანდარტული გადახრა შეადგენს 3.4 წუთს. შემთხვევით შერჩეული 24 ვიდეოფილმის ხანგრძლივობის შესწორებული სტანდარტული გადახრა აღმოჩნდა 4.2 წუთი. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ შერჩევის სტანდარტული გადახრა განსხვავებულია რედაქტორის მტკიცებულებისაგან?

19. "ჟიგულის" მიერ მოხმარებული საწვავის სტანდარტული გადახრა შეადგენს 4.3 ლიტრს. შემთხვევით შერჩეული 20 "ჟიგულის" მიერ მოხმარებული საწვავის შესწორებული სტანდარტული გადახრა აღმოჩნდა 2.6 ლიტრი. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ შერჩევის სტანდარტული გადახრა ნაკლებია 4.3 ლიტრზე? ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

20. უძრავი ქონების აგენტის მტკიცებით დედაქალაქის ცენტრში 1 კვ. მეტრი საოფისე ფართის საიჯარო გადასახადის სტანდარტული გადახრა შეადგენს 95 ლარს. $\alpha=0.02$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა აგენტის მტკიცებულების უარყოფა, თუ შემთხვევთ შერჩეული 18 საოფისე ფართის 1 კვ. მეტრის საიჯარო გადასახადებია:

400	345	325	395	400	300
375	435	495	525	290	460
425	250	200	525	375	390

21. საღებავების ფირმის მენეჯერის მტკიცებით გარკვეული საღებავის გაშრობის დროის სტანდარტული გადახრა შეადგენს 18 წუთს. ხუთმა სხვადასხვა ტესტირებამ აჩვენა რომ საღებავის გაშრობის დროის შესწორებული სტანდარტული გადახრა შეადგენს 21 წუთს. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა სტანდარტული გადახრის შესახებ?

22. სოციოლოგს სურს შეამოწმოს სწორია თუ არა, რომ გარკვეული პროფესიის ქალები პირველ შვილს აჩენენ 28.6 წლის ასაკში. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით რა დასკვნა უნდა გამოიტანოს სოციოლოგმა, თუ მას ექნება შემთხვევით შერჩეული 36 ქალის მიერ პირველი შვილის გაჩენის ასაკის შემდეგი მონაცემები:

32	28	26	33	35	34	29	24	22
25	26	28	28	34	33	32	30	29
30	27	33	34	28	25	24	33	25
37	35	33	34	36	38	27	29	26

23. უძრავი ქონების აგენტის მტკიცებით ახალი სახლის ყიდვისას დამატებითი ხარჯების საშუალო შეადგენს 6500 ლარს. შემთხვევით შერჩეული 40 გაყიდული სახლის მყიდველის დამატებითი ხარჯების საშუალომ შეადგინა 6600 ლარი. პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა 120 ლარი. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ აგენტის მტკიცებულება.

24. კოლეჯის ადმინისტრატორს სურს შეამოწმოს არის თუ არა სტუდენტის მიერ სწავლისათვის თავის დანებების საშუალო ასაკი 21 წელი. მან აიღო ბოლო 17 წლის მონაცემები და ყოველი წლისათვის დათვალა სწავლისათვის თავის

დანებების საშუალო ასაკი, რომელიც მოყვანილია ქვემოთ. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა ჰიპოთეზის უარყოფა?

12	18	24	16	21	20	18	19	19
22	25	16	18	19	19	20	23	

25. ტაქსების ფირმის მენეჯერის მტკიცებით მათი ტაქსისტების მუშაობის სტაჟის საშუალო შეადგენს სულ ცოტა 12.4 წელს. შემთხვევით შერჩეული 15 ტაქსისტის მუშაობის სტაჟის საშუალო აღმოჩნდა 11.2 წელი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 2 წელი. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა სინამდვილეში სტაჟის საშუალო უფრო ნაკლები, ვიდრე ამას ამტკიცებს მენეჯერი?

პასუხები:

1. $H_0: E\xi = 1800, H_1: E\xi \neq 1800$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = 0.47$; H_0; $1706.04 < E\xi < 1953.96$; $1800 \in (1706.04, 1953.96)$. 2. $H_0: E\xi = 42$, $H_1: E\xi \neq 42$; $C.V. = \pm 1.65$; $T.V. \equiv z = 0.47$; H_1; $43.83 < E\xi < 52.17$; $42 \notin (43.83, 52.17)$. 3. $H_0: E\xi = 86$, $H_1: E\xi \neq 86$; $C.V. = \pm 2.58$; $T.V. \equiv z = -1.29$; H_0; $80 < E\xi < 88$; $86 \in (80, 88)$. 4. $H_0: E\xi = 47$, $H_1: E\xi \neq 47$; $C.V. = \pm 1.65$; $T.V. \equiv z = -2.26$; H_1; $38.35 < E\xi < 45.65$; $47 \notin (38.35, 45.65)$. $H_0: E\xi = 22$, $H_1: E\xi \neq 22$; $C.V. = \pm 2.58$; $T.V. \equiv z = -2.32$; H_0; $19.47 < E\xi < 22.13$; $22 \in (19.47, 22.13)$. 6. $H_0: E\xi = 98$, $H_1: E\xi \neq 98$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = -2.02$; H_1. 7. $H_0: E\xi = 14$, $H_1: E\xi \neq 14$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = 4.22$; H_1. 8. $H_0: E\xi = 16.3$, $H_1: E\xi \neq 16.3$; $T.V. \equiv z = 11.3$; P-მნიშვნელობა < 0.01; კი. 9. $H_0: E\xi = 61.2$, $H_1: E\xi \neq 61.2$; $C.V. = \pm 2.831$; $T.V. \equiv t = -4.378$; კი. 10. $H_0: E\xi \leq 67$, $H_1: E\xi > 67$; $C.V. = 1.383$; $T.V. \equiv t = 7.47$; არა. 11. $H_0: E\xi \leq 23.2$, $H_1: E\xi > 23.2$; $T.V. \equiv t = -1.27$; 0.75 < P-მნიშვნელობა < 0.9; არა. 12. $H_0: E\xi = 6$, $H_1: E\xi \neq 6$; $C.V. = \pm 2.821$; $T.V. \equiv t = 1.835$; არა. 13. $H_0: p \geq 0.3$, $H_1: p < 0.3$; $C.V. = -1.65$; $T.V. \equiv z = -0.85$; H_0. 14. $H_0: p \geq 0.6$, $H_1: p < 0.6$; $C.V. = -1.28$; $T.V. \equiv z = -1.22$; კი. 15. $H_0: p = 0.8$, $H_1: p \neq 0.8$; $C.V. = \pm 2.33$; $T.V. \equiv z = -1.83$; H_0. 16. $H_0: p = 0.65$, $H_1: p \neq 0.65$; $T.V. \equiv z = 1.17$; P-მნიშვნელობა = 0.242 > α; H_0. 17. $H_0: E\xi = 225$, $H_1: E\xi \neq 225$; $T.V. \equiv z = 2.36$; P-მნიშვნელობა = 0.0182; H_0. 18. $H_0: \sigma = 3.4$, $H_1: \sigma \neq 3.4$; $C.V. = 11.689$ და 38.076; $T.V. \equiv \chi^2 = 35.1$; არა. 19. $H_0: \sigma \geq 4.3$, $H_1: \sigma < 4.3$; $T.V. \equiv \chi^2 = 6.95$; 0.005 < P-მნიშვნელობა <0.01 < α; კი. 20. $H_0: \sigma = 95$, $H_1: \sigma \neq 95$; $C.V. = 6.408$ და 33.409; $T.V. \equiv \chi^2 = 15.0212$; არა. 21. $H_0: \sigma = 18$, $H_1: \sigma \neq 18$; $C.V. = 11.143$ და 0.484; $T.V. \equiv \chi^2 = 5.44$; H_0. 22. $H_0: E\xi = 28.6$, $H_1: E\xi \neq 28.6$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = 2.14$; H_1. 23. $H_0: E\xi = 6500$, $H_1: E\xi \neq 6500$; $C.V. = \pm 1.96$; $T.V. \equiv z = 5.27$; H_1. 24. $H_0: E\xi = 21$, $H_1: E\xi \neq 21$; $C.V. = \pm 2.921$; $T.V. \equiv t = -2.06$; H_0. 25. $H_0: E\xi \geq 12.4$, $H_1: E\xi < 12.4$; $C.V. = -1.345$; $T.V. \equiv t = -2.324$; H_0.

თავი IX
ორამოკრეფიანი ამოცანები პოპულაციათა საშუალოებისათვის

ორი დამოუკიდებელი პოპულაციის საშუალოს შორის განსხვავების ჰიპოთეზათა შემოწმება I

$\xi \equiv N(a_1, \sigma_1^2)$ და $\eta \equiv N(a_2, \sigma_2^2)$ ან ორივე შერჩევის მოცულობა მეტია ან ტოლი 30-ზე; ξ და η დამოუკიდებელია; σ_1^2 და σ_2^2 ცნობილია. $X_1, \ldots, X_n$ და $Y_1, \ldots, Y_m$ ორი შერჩევაა შესაბამისად ξ და η პოპულაციებიდან.

კრიტერიუმი:

ორმხრივი	მარჯვენა ცალმხრივი	მარცხენა ცალმხრივი
$H_0: a_1 - a_2 = 0$	$H_0: a_1 - a_2 = 0$	$H_0: a_1 - a_2 = 0$
	ან $H_0: a_1 - a_2 \le 0$	ან $H_0: a_1 - a_2 \ge 0$
$H_1: a_1 - a_2 \ne 0$	$H_1: a_1 - a_2 > 0$	$H_1: a_1 - a_2 < 0$

ჰიპოთეზა: $H_0: a_1 - a_2 = 0$

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $Z = \dfrac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m}} \equiv N(0,1)$

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V.: $z = \dfrac{(\overline{x}_n - \overline{y}_m) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n + \sigma_2^2 / m}}$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე C.R. (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1: a_1 - a_2 > 0$	$z \ge z_\alpha$,
$H_1: a_1 - a_2 < 0$	$z \le -z_\alpha$,
$H_1: a_1 - a_2 \ne 0$	$z \le -z_{\alpha/2}$ ან $z \ge z_{\alpha/2}$

(სადაც z_α არის $N(0,1)$-ის ზედა α-კრიტიკული წერტილი ანუ კრიტიკული მნიშვნელობა C.V.).

$$P\text{- მნიშვნელობა: } P = \begin{cases} P\{Z > z \mid H_0\}, \text{ თუ } H_1: a_1 - a_2 > 0; \\ P\{Z < z \mid H_0\}, \text{ თუ } H_1: a_1 - a_2 < 0; \\ P\{|Z| > |z| \mid H_0\}, \text{ თუ } H_1: a_1 - a_2 \ne 0. \end{cases} = \begin{cases} 1 - \Phi(z), \text{ თუ } H_1: a_1 - a_2 > 0; \\ \Phi(z), \text{ თუ } H_1: a_1 - a_2 < 0; \\ 2 \cdot [1 - \Phi(|z|)], \text{ თუ } H_1: a_1 - a_2 \ne 0. \end{cases}$$

გადაწყვეტილება: თუ $z \in$ C.R., მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

P- მნიშვნელობის მეთოდი: თუ $P \le \alpha$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ α მნიშვნელოვნების დონით, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის:

$$(\bar{x}_n-\bar{y}_m)-z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}<a_1-a_2<(\bar{x}_n-\bar{y}_m)+z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}.$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. ერთი ნორმალური პოპულაციიდან, რომლის სტანდარტული გადახრაა 5, აღებულია 40 მოცულობის მქონე შერჩევა. შერჩევითი საშუალო შეადგენს 102-ს. პირველისაგან დამოუკიდებელი მეორე ნორმალური პოპულაციიდან, რომლის სტანდარტული გადახრაა 6, აღებულია 50 მოცულობის მქონე შერჩევა. ამ უკანასკნელის შერჩევითი საშუალოა 99. $\alpha=0.04$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ არის თუ არა განსხვავება საშუალოებს შორის.

ამოხსნა. გვაქვს: $\xi\equiv N(\cdot,25)$, $\eta\equiv N(\cdot,36)$, $n=40$, $m=50$, $\bar{x}_n=102$, $\bar{y}_m=99$.

ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0:a_1-a_2=0$, $H_1:a_1-a_2\neq 0$. ალტერნატივა ორმხრივია, ამიტომ კრიტიკული არე იქნება $C.R.=(-\infty,-z_{0.02}]\cup[z_{0.02},+\infty)=(-\infty,-2.055]\cup[2.055,+\infty)$. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა. გვაქვს:

$$T.V.\equiv z=\frac{(\bar{x}_n-\bar{y}_m)-(a_1-a_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}}=\frac{102-99}{\sqrt{25/40+36/50}}=2.59.$$

ვინაიდან, 2.59 > 2.055 (ანუ $T.V.\in C.R.$), ამიტომ ძირითად ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ $\alpha=0.04$ მნიშვნელოვნების დონით.

გამოვთვალოთ P-მნიშვნელობა. P-მნიშვნელობა = $2[1-\Phi(2.59)]=0.0016$. ვინაიდან, P-მნიშვნელობა < $\alpha=0.04$, ამიტომ P-მნიშვნელობის მეთოდითაც იგივე დასკვნა გამოგვაქვს: $\alpha=0.04$ მნიშვნელოვნების დონით უკუვაგდებთ H_0 ჰიპოთეზას.

მაგალითი 2. მდინარის მარჯვენა სანაპიროზე შემთხვევით შერჩეული 100 ოჯახის საშუალო შემოსავალი აღმოჩნდა $\bar{x}_{100}=29980$ ლარი, ხოლო მარცხენა სანაპიროზე შემთხვევით შერჩეული 100 ოჯახის საშუალო შემოსავალი კი $\bar{y}_{100}=28650$ ლარი. პირველი პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა $\sigma_1=4740$, ხოლო მეორის $\sigma_2=5365$. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ მდინარის მარჯვენა სანაპიროზე საშუალო შემოსავლები უფრო მაღალია, ვიდრე მარცხენაზე? ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0:a_1-a_2=0$, $H_1:a_1-a_2>0$. გვაქვს: $n=m=100$, $z_\alpha=z_{0.05}=1.645$. კრიტერიუმის მნიშვნელობა იქნება:

$$T.V.\equiv z=\frac{(\bar{x}_n-\bar{y}_m)-(a_1-a_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m}}=\frac{29980-28650}{\sqrt{4740/100+5365/100}}=1.86.$$

ვინაიდან, $z>z_{0.05}$, ამიტომ ძირითადი ჰიპოთეზა უნდა უკუვაგდოთ, ანუ $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მდინარის მარჯვენა სანაპიროზე საშუალო შემოსავლები უფრო მაღალია, ვიდრე მარცხენაზე?

ავაგოთ ნდობის ინტერვალი. ტოლობიდან $90\% = (1-\alpha)\cdot 100\%$, ვასკვნით, რომ $\alpha = 0.1$. შესაბამისად, $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$. ამიტომ, გვაქვს:

$$(\bar{x}_n - \bar{y}_m) - z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m} < a_1 - a_2 < (\bar{x}_n - \bar{y}_m) + z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m},$$

$$29980 - 28650 - 1.645\sqrt{\frac{4740+5365}{100}} < a_1 - a_2 < 29980 - 28650 + 1.645\sqrt{\frac{4740+5365}{100}},$$

$$1330 - 1.645\cdot 10.05 < a_1 - a_2 < 1330 + 1.645\cdot 10.05,$$

$$1313.5 < a_1 - a_2 < 1346.5.$$

ვინაიდან ნდობის ინტერვალი არ მოიცავს ნულს, ჩვენი უნდა მივიღოთ გადაწყვეტილება ნულოვანი ჰიპოთეზის უკუგდების შესახებ, რაც თანხვედრაშია ჰიპოთეზის შემოწმებისას მიღებულ შედეგთან.

ორი დამოუკიდებელი პოპულაციის საშუალოს შორის განსხვავების ჰიპოთეზათა შემოწმება II

$\xi \equiv N(a_1, \sigma_1^2)$ და $\eta \equiv N(a_2, \sigma_1^2)$; ξ და η დამოუკიდებელია; $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ უცნობია. $X_1, \dots, X_n$ და $Y_1, \dots, Y_m$ ორი შერჩევაა შესაბამისად ξ და η პოპულაციებიდან.

ჰიპოთეზა: $H_0 : a_1 - a_2 = 0$

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $T = \dfrac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (a_1 - a_2)}{S'_{n,m}\sqrt{1/n + 1/m}} \equiv T(n+m-2)$,

აქ $S'^2_{n,m} = \dfrac{1}{n+m-2}[(n-1)S'^2_1 + (m-1)S'^2_2] = \dfrac{1}{n+m-2}[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 + \sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y}_n)^2]$,

$(n+m-2)\dfrac{S^2_{n,m}}{\sigma^2} \equiv \chi^2(n+m-2)$.

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V.: $t = \dfrac{(\bar{x}_n - \bar{y}_m) - (a_1 - a_2)}{s'_{n,m}\sqrt{1/n + 1/m}}$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე C.R. (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1 : a_1 - a_2 > 0$	$t \geq t_{n+m-2,\alpha}$,
$H_1 : a_1 - a_2 < 0$	$t \leq -t_{n+m-2,\alpha}$,
$H_1 : a_1 - a_2 \neq 0$	$t \leq -t_{n+m-2,\alpha/2}$ ან $t \geq t_{n+m-2,\alpha/2}$

(სადაც $t_{n+m-2,\alpha}$ არის თავისუფლების $n+m-2$ ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილი ანუ **კრიტიკული მნიშვნელობა** C.V.).

P- მნიშვნელობა: $P=\begin{cases}P\{T>t\mid H_0\}, \text{თუ } H_1: a_1-a_2>0;\\ P\{T<t\mid H_0\}, \text{თუ } H_1: a_1-a_2<0;\\ P\{|T|>|t|\mid H_0\}, \text{თუ } H_1: a_1-a_2\neq 0.\end{cases} =$

$$=\begin{cases}1-F_T(t), \text{თუ } H_1: a_1-a_2>0;\\ F_T(t), \text{თუ } H_1: a_1-a_2<0;\\ 2\cdot[1-F_T(|t|)], \text{თუ } H_1: a_1-a_2\neq 0.\end{cases}$$

გადაწყვეტილება: თუ $t\in$ C.R., მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

P- მნიშვნელობის მეთოდი: თუ $P\le\alpha$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ α მნიშვნელოვნების დონით, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის:

$$(\overline{x}_n-\overline{y}_m)-t_{n+m-2,\alpha/2}s'_{n,m}\sqrt{1/n+1/m}<a_1-a_2<(\overline{x}_n-\overline{y}_m)+t_{n+m-2,\alpha/2}s'_{n,m}\sqrt{1/n+1/m}.$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. ერთი ნორმალური პოპულაციიდან აღებულია $n=10$ მოცულობის შერჩევა, რომლისთვისაც $\overline{x}_n=23$, $s'_1=4$ და მისგან დამოუკიდებელი მეორე ნორმალური პოპულაციიდან აღებულია $m=8$ მოცულობის შერჩევა, რომლისთვისაც $\overline{y}_m=26$, $s'_2=5$. ორივე პოპულაციის დისპერსიები ტოლია. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ არის თუ არა განსხვავება საშუალოებს შორის.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0: a_1-a_2=0$, $H_1: a_1-a_2\neq 0$. კრიტერიუმი ორმხრივია. კრიტიკული მნიშვნელობებია: $C.V.=\pm t_{n+m-2,\alpha/2}=\pm t_{16,0.025}=\pm 2.12$. ვიპოვოთ საერთო დისპერსიის შეფასება:

$$s'^2_{n,m}=\frac{1}{n+m-2}[(n-1)s'^2_1+(m-1)s'^2_2]=\frac{1}{10+8-2}\cdot(9\cdot 16+7\cdot 25)=19.94.$$

გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V.=t=\frac{(\overline{x}_n-\overline{y}_m)-(a_1-a_2)}{s'_{n,m}\sqrt{1/n+1/m}}=\frac{(23-26)-0}{\sqrt{19.94}\cdot\sqrt{1/10+1/8}}=-1.42.$$

ვინაიდან $T.V.\notin C.R.$, ამიტომ ძირითადი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს, ანუ საშუალოებს შორის განსხვავება არ არის არსებითი.

მაგალითი 2. ორი დამოუკიდებელი პოპულაციიდან, რომელთა დისპერსიები ტოლია, აღებულია 15-ის ტოლი მოცულობის შერჩევები და გამოთვლილია საშუალოები და შესწორებული შერჩევითი დისპერსიები: $\overline{x}_n=132.45$, $s'^2_1=123$; $\overline{y}_m=128.06$, $s'^2_2=95$. იგულისხმეთ, რომ პოპულაციები ნორმალურადაა განაწილებული და შეადარეთ ერთმანეთს მათი საშუალოები. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0: a_1-a_2=0$, $H_1: a_1-a_2<0$. კრიტერიუმი მარცხენა ცალმხრივია, ამიტომ კრიტი-

ული მნიშვნელობა იქნება: $C.V. = -t_{n+m-2,\alpha} = -t_{28,0.05} \approx -1.7$. ვიპოვოთ საერთო დისპერსიის შეფასება:

$$s_{n,m}^{'2} = \frac{1}{n+m-2}[(n-1)s_1^{'2} + (m-1)s_2^{'2}] = \frac{1}{15+15-2}\cdot(14\cdot 123 + 15\cdot 95) = 109.$$

გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V. = t = \frac{(\bar{x}_n - \bar{y}_m) - (a_1 - a_2)}{s'_{n,m}\sqrt{1/n + 1/m}} = \frac{(132.45 - 128.06) - 0}{\sqrt{109}\cdot\sqrt{1/15 + 1/15}} = 1.15.$$

რადგანაც 1.15 > - 1.7, ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გაგვაჩნია, ანუ არა გვაქვს საკმარისი საფუძველი ჩავთვალოთ, რომ მეორე პოპულაციის საშუალო უფრო მეტია ვიდრე პირველის.

ავაგოთ ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის. შევიტანოთ მონაცემები შესაბამის ფორმულაში:

$$((\bar{x}_n - \bar{y}_m) - t_{n+m-2,\alpha/2}s'_{n,m}\sqrt{1/n + 1/m}, (\bar{x}_n - \bar{y}_m) + t_{n+m-2,\alpha/2}s'_{n,m}\sqrt{1/n + 1/m}),$$

$$(4.39 - 1.7\cdot\sqrt{109}\sqrt{1/15 + 1/15}, 4.39 + 1.7\cdot\sqrt{109}\sqrt{1/15 + 1/15}),$$

$$(-2.09, 10.87).$$

რამდენადაც ნდობის ინტერვალი მოიცავს ნულს, ჩვენი არა გვაქვს საფუძველი ნულოვანი ჰიპოთეზის უკუგდების, რაც ეთანხმება ჰიპოთეზის შემოწმებისას მიღებულ შედეგს.

ორი დამოუკიდებელი პოპულაციის საშუალოს შორის განსხვავების ჰიპოთეზათა შემოწმება III

პოპულაციები არაა ნორმალური, მაგრამ ორივე შერჩევის მოცულობა მეტია ან ტოლი 30-ზე ($n \ge 30$, $m \ge 30$) და დისპერსიებიც უცნობია. $X_1,\dots,X_n$ და $Y_1,\dots,Y_m$ ორი შერჩევაა შესაბამისად ξ და η პოპულაციებიდან.

ჰიპოთეზა: $H_0 : a_1 - a_2 = 0$

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $Z = \dfrac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_m) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{S_1^{'2}/n + S_2^{'2}/m}} \overset{as}{\cong} N(0,1)$

(სიმბოლო $\overset{as}{\cong}$ ნიშნავს, რომ სიდიდე მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული; $S_1^{'2} := \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$, $S_2^{'2} := \dfrac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y}_m)^2$)

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V.: $z = \dfrac{(\bar{x}_n - \bar{y}_m) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{s_1^{'2}/n + s_2^{'2}/m}}$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე C.R. (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1 : a_1 - a_2 > 0$	$z \ge z_\alpha$,
$H_1 : a_1 - a_2 < 0$	$z \le -z_\alpha$,
$H_1 : a_1 - a_2 \ne 0$	$z \le -z_{\alpha/2}$ ან $z \ge z_{\alpha/2}$

(სადაც z_α არის $N(0,1)$-ის ზედა α-კრიტიკული წერტილი ანუ კრიტიკული მნიშვნელობა C.V.).

$$P\text{- მნიშვნელობა: } P=\begin{cases}1-\Phi(z), \text{ თუ } H_1: a_1-a_2>0;\\ \Phi(z), \text{ თუ } H_1: a_1-a_2<0;\\ 2\cdot[1-\Phi(|z|)], \text{ თუ } H_1: a_1-a_2\neq 0.\end{cases}$$

გადაწყვეტილება: თუ $z\in$ C.R., მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

P- მნიშვნელობის მეთოდი: თუ $P\le\alpha$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ α მნიშვნელოვნების დონით, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის:

$$(\bar{x}_n-\bar{y}_m)-z_{\alpha/2}\sqrt{s_1'^2/n+s_2'^2/m}<a_1-a_2<(\bar{x}_n-\bar{y}_m)+z_{\alpha/2}\sqrt{s_1'^2/n+s_2'^2/m}.$$

შენიშვნა: იმ შემთხვევაშიც, როცა ჩვენ ვამოწმებთ ჰიპოთეზას იმის შესახებ, რომ საშუალოთა შორის განსხვავება არის არა ნული, არამედ რაიმე კონკრეტული რიცხვი $(a_1-a_2=c)$, კრიტერიუმის სტატისტიკად ისევ განიხილება სტატისტიკა:

$$Z=\frac{(\bar{X}_n-\bar{Y}_m)-(a_1-a_2)}{\sqrt{S_1'^2/n+S_2'^2/m}}\overset{\approx}{\equiv}N(0,1).$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. საერთაშორისო სტატისტიკური ასოციაციის მონაცემებით ლონდონში სასტუმროს ოთახის საშუალო ღირებულება არის \$88.42, ხოლო პარიზში კი \$80.61. დავუშვათ, რომ თითოეულ შემთხვევაში აღებულია 50 სხვადასხვა სასტუმროს მონაცემი და შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრებია შესაბამისად \$5.62 და \$4.83. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა არსებითი განსხვავება საშუალოებს შორის? ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0: a_1-a_2=0$, $H_1: a_1-a_2\neq 0$. ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობები:

$$C.V.=\pm z_{\alpha/2}=\pm z_{0.025}=\pm 1.96.$$

გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$z=\frac{(\bar{x}_n-\bar{y}_m)-(a_1-a_2)}{\sqrt{s_1'^2/n+s_2'^2/m}}=\frac{(88.42-80.61)-0}{\sqrt{5.62^2/50+4.83^2/50}}=7.45.$$

ვინაიდან, 7.45 > 1.96, ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უკუვაგდოთ, ანუ საშუალოებს შორის განსხვავება არსებითია.

ავაგოთ ნდობის ინტერვალი. ამ შემთხვევაში $95\%=(1-\alpha)\cdot 100\%$, საიდანაც $\alpha=0.025$. შესაბამისად, $z_{\alpha/2}$. ამიტომ ნდობის ინტერვალი იქნება:

$$(88.42-80.61)-1.96\sqrt{5.62^2/50+4.83^2/50}<a_1-a_2<$$

$$< (88.42-80.61)+1.96\sqrt{5.62^2/50+4.83^2/50},$$

$$5.76 < a_1 - a_2 < 9.86.$$

რამდენადაც ნდობის ინტერვალი არ მოიცავს ნულს, ჩვენი უნდა მივიღოთ გადაწყვეტილება ნულოვანი ჰიპოთეზის უკუგდების შესახებ, რაც ეთანხმება ჰიპოთეზის შემოწმებისას მიღებულ შედეგს.

მაგალითი 2. მკვლევარს სურს შეამოწმოს ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ კოლეჯში სპორტული შეჯიბრებების საშუალო რიცხვი ვაჟებისათვის უფრო მეტია ვიდრე გოგონებისათვის. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი გავიზიაროთ ეს მოსაზრება, თუ შეჯიბრებათა რაოდენობების მონაცემებია (ისარგებლეთ P-მნიშვნელოვნების მეთოდით):

ვაჟები					გოგონები				
6	11	11	8	15	6	8	11	13	8
6	14	8	12	18	7	5	13	14	6
6	9	5	6	9	6	5	5	7	6
6	9	18	7	6	10	7	6	5	5
15	6	11	5	5	16	10	7	8	5
9	9	5	5	8	7	5	5	6	5
8	9	6	11	6	9	18	13	7	10
7	7	5	10	7	11	4	6	8	7
10	7	10	8	11	14	12	5	8	5
9	5	11	5	8	7	8	5	7	10

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0: a_1 - a_2 \le 0$, $H_1: a_1 - a_2 > 0$. თითოეული მონაცემებისათვის გამოვთვალოთ შერჩევითი საშუალო და შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრები:

$$\overline{x}_{50} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} x_i = 8.6, \quad \overline{y}_{50} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} y_i = 7.9;$$

$$s_1' := \sqrt{\frac{1}{50-1}\sum_{i=1}^{50}(x_i - 8.6)^2} = 3.3, \quad s_2' := \sqrt{\frac{1}{50-1}\sum_{i=1}^{50}(y_i - 7.9)^2} = 3.3.$$

შესაბამისად, კრიტერიუმის მნიშვნელობა იქნება:

$$z = \frac{(\overline{x}_n - \overline{y}_m) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{s_1'^2/n + s_2'^2/m}} = \frac{(8.6-7.9)-0}{\sqrt{3.3^2/50 + 3.3^2/50}} = 1.06.$$

ვიპოვოთ P-მნიშვნელოვნება: P-მნიშვნელოვნება $= 1 - \Phi(1.06) = 0.1446$. ვინაიდან 0.1446 > 0.1, ამიტომ ძირითადი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს, ანუ არა გვაქვს საკმარისი საფუძველი ვამტკიცოთ, რომ ვაჟებისათვის სპორტული შეჯიბრებების საშუალო მეტია ვიდრე გოგონებისათვის.

ამოცანები

1. მკვლევარს სურს შეამოწმოს არის თუ არა ამერიკის მთავარი მდინარეების საშუალო სიგრძე იგივე რაც ევროპის მთავარი მდინარეების საშუალო სიგრძე. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი

უარვყოთ ეს მოსაზრება, თუ ცნობილია, რომ შემთხვევით შერჩეული მთავარი მდინარეების სიგრძეთა მონაცემებია:

ამერიკა				ევროპა			
729	329	450	330	481	532	1776	1224
329	600	1243	525	877	447	824	634
850	532	710	300	565	675	724	357
560	332	2315	410	1122	634	326	580
800	1310	605	926	567	932	1124	405
310	375	545	470	454	820	505	496
434	360	865	1036	230	626	210	252
447	652	360	722	600	1575	2290	
430	1979	259	425				

2. შემოწმებულ იქნა გაფანტული სკლეროზით დაავადებულ ადამიანთა ორი 120 და 34 კაციანი ჯგუფის უნარები. პირველ ჯგუფში შედიოდნენ ის ადამიანები ვისაც უვლიდა საკუთარი მეუღლე, ხოლო მეორეში კი ის ადამიანები ვისაც უვლიდა უცხო ადამიანი. მიღებული შედეგებია: $\overline{x}_{120} = 2$, $s_1' = 0.6$; $\overline{y}_{34} = 1.7$, $s_2' = 0.7$. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა განსხვავება ამ ორი ჯგუფის საშუალოებს შორის?

3. მკვლევარს სურს გაარკვიოს არის თუ არა მწეველი ადამიანის პულსი უფრო მაღალი ვიდრე არამწეველის. შემთხვევით შერჩეული 100 მწეველისა და 100 არამწეველის გამოკვლევის შედეგებია შესაბამისად: $\overline{x}_{100} = 90$, $s_1' = 5$; $\overline{y}_{100} = 88$, $s_2' = 6$. შეუძლია თუ არა მკვლევარს $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით დაასკვნას, რომ მწეველი ადამიანის პულსი უფრო მაღალია ვიდრე არამწეველის?

4. სტატისტიკოსის მტკიცებით ტესტის შესრულებისას ფსიქოლოგიის მიმართულების სტუდენტების საშუალო ქულა უფრო მაღალია ვიდრე ეკონომიკის მიმართულების სტუდენტების. შემთხვევით შერჩეული თითოეული მიმართულების 50 – 50 სტუდენტის ტესტირების შედეგად შესაბამისად აღმოჩნდა, რომ: $\overline{x}_{50} = 118$, $s_1' = 15$; $\overline{y}_{50} = 115$, $s_2' = 15$. გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით დავადასტუროთ ეს მტკიცებულება?

5. $\alpha = 0.02$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ საავადმყოფოების დერეფნებში ხმაურის დონე (გაზომილი დეციბალებში) უფრო მაღალია, ვიდრე ოთახებში, თუ შესაბამისი შერჩევითი მახასიათებლებია: $\overline{x}_{84} = 61.2$, $s_1' = 7.9$; $\overline{y}_{34} = 59.4$, $s_2' = 7.9$.

6. უძრავი ქონების აგენტს სურს შეადაროს სახლების გაყიდვის ფასები ქალაქის ჩრდილოეთ და სამხრეთ ნაწილებში. კვლევის შედეგად მიღებული შერჩევითი მახასიათებლებია: $\overline{x}_{35} = 63255$, $s_1' = 5602$; $\overline{y}_{40} = 59102$, $s_2' = 4731$. გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით უკუვაგდოთ ჰიპოთეზა, რომ სახლების გაყიდვის ფასების საშუალო ერთი და იგივეა?

7. შემოწმებულ იქნა ქალთა ორი ჯგუფის ცოდნის დონე. პირველ ჯგუფში შედიოდნენ ისინი ვინც ინსტიტუტის დამთავრებიდან რამოდენიმე თვეში თავი დაანებეს სამუშაოს თავიანთი პროფესიის მიხედვით, ხოლო მეორე ჯგუფში კი ისინი ვინც დარჩნენ სამუშაოზე თავიანთი პროფესიის მიხედვით. კვლევის შედე-

გად მიღებული შერჩევითი მახასიათებლებია: $\bar{x}_{103}=3.16$, $s_1'=0.52$; $\bar{y}_{225}=3.28$, $s_2'=0.46$. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ ცოდნის დონე პირველ ჯგუფში უფრო მაღალია?

8. ქვემოთ მოყვანილია დედაქალაქიდან და რეგიონებიდან შემთხვევით შერჩეული 30 – 30 აბიტურიენტის მიერ ეროვნულ გამოცდებზე მოგროვილი ქულები. გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი ვამტკიცოთ, რომ დედაქალაქის აბიტურიენტების ქულების საშუალო მეტია ვიდრე რეგიონების?

რეგიონები					დედაქალაქი				
656	594	636	642	683	626	531	643	582	637
642	682	617	721	701	624	630	630	540	606
614	632	753	698	649	570	623	710	587	543
631	626	584	609	642	547	609	673	699	598
532	597	698	705	636	703	525	624	615	730
580	691	715	634	749	504	515	613	527	518

9. კოლეჯის ადმინისტრატორის მტკიცებით კოლეჯის წლიური დანახარჯი ვაჟების სპორტზე მეტია ვიდრე ქალების სპორტზე. ქვემოთ მოყვანილი მონაცემების მიხედვით, გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნების დონით დავადასტუროთ ადმინისტრატორის მტკიცებულება?

ვაჟები

13351	22220	11456	12244	8383	8796	7551	5254	6576	3377
10128	14029	10160	16175	623	5544	5811	7550	1664	7656
10652	15048	11480	10126	8811	7120	9119	5472	9505	8033
11015	12371	11267	12703	9732	8605	2063	6670	6797	7040
12919	13763	12403	5286	9571	9544	8725	9463	7723	9626

ქალები

10333	11248	14698	7654	7054	6869	933	9883	6959	6030
12745	16249	11597	9331	7300	7874	6989	5232	8478	7058
12016	10248	13371	5468	6407	6909	6502	6815	9959	9907
10082	11041	10353	7055	8324	9110	9277	5933	3991	5832
11324	10127	7435	8917	8411	7235	8903	6925	5922	6502

10. არის თუ არა განსხვავება შემთხვევით შერჩეული კვირის განმავლობაში ტაქსების ორი კომპანიის თითოეული ტაქსის მიერ გავლილი მანძილების საშუალოებს შორის, თუ შესაბამისი შერჩევების მახასიათებლებია: $\bar{x}_{35}=837$, $s_1'=30$; $\bar{y}_{40}=753$, $s_2'=40$. ჩათვალეთ, რომ პოპულაციები ნორმალურია; მნიშვნელოვნების დონედ აიღეთ $\alpha=0.05$ და ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

11. ქალთა ორი ჯგუფს შესთავაზეს კითხვარი, რათა გაერკვიათ საკუთარი თავისადმი პატივისცემის ხარისხი. პირველ ჯგუფში შედიოდნენ ისინი ვინც ინსტიტუტის დამთავრებიდან რამოდენიმე თვეში თავი დაანებეს სამუშაოს თავიანთი პროფესიის მიხედვით, ხოლო მეორე ჯგუფში კი ისინი ვინც დარჩნენ სამუშაოზე თავიანთი პროფესიის მიხედვით. კვლევის შედეგად მიღებული შერჩევითი მახასიათებლებია: $\bar{x}_{103}=3.05$, $s_1'=0.75$; $\bar{y}_{225}=2.96$, $s_2'=0.75$. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ ამ ჯგუფებში თვითპატივისცემის ხარისხი სხვადასხვაა? ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

12. დეკანატს აინტერესებს არის თუ არა ადგილობრივ და ჩამოსულ სტუდენტთა ასაკის საშუალოებს შორის განსხვავება. ქვემოთ მოყვანილია თითოეული ჯგუფიდან შემთხვევით შერჩეული 50 - 50 სტუდენტის ასაკთა მონაცემები. მნიშვნელოვნების დონედ აიღეთ $\alpha = 0.05$ და ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

ადგილობრივი სტუდენტები

22	25	18	19	26	22	19	25	20	30
19	19	21	23	27	26	26	18	19	19
23	24	18	29	21	21	26	27	18	19
23	21	28	26	19	22	18	22	26	18
32	18	20	18	24	19	23	22	18	20

ჩამოსული სტუდენტები

18	23	26	19	29	20	20	20	18	30
26	23	21	25	19	23	22	35	21	18
18	22	19	19	19	22	28	22	19	36
23	25	25	21	18	27	20	24	20	18
19	27	19	35	24	20	32	20	19	22

13. ორი ჯგუფის ტესტირებისას მიღებული ქულების მიხედვით გამოთვლილი შესაბამისი შერჩევითი მახასიათებლებია: $\overline{x}_{36} = 83.6$, $s_1' = 4.3$; $\overline{y}_{36} = 79.2$, $s_2' = 3.8$. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.

14. ორი სხვადასხვა დასახელების სიგარეტის შემთხვევით შერჩეულ 30 – 30 ღერში ნიკოტინის შემცველობის დონის მიხედვით გამოთვლილი შესაბამისი შერჩევითი მახასიათებლებია: $\overline{x}_{30} = 28.6$, $s_1' = 5.1$; $\overline{y}_{30} = 32.9$, $s_2' = 4.4$. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.

15. ორი სახის ელემენტის შემთხვევით შერჩეული პარტიების შემოწმების მიხედვით გამოთვლილი შესაბამისი შერჩევითი მახასიათებლებია: $\overline{x}_{27} = 9.2$, $s_1' = 0.3$; $\overline{y}_{30} = 8.8$, $s_2' = 0.1$. ჩათვალეთ, რომ სიდიდეები ნორმალურადაა განაწილებული და ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.

პასუხები:

1. $H_0: a_1 = a_2$, $H_1: a_1 \neq a_2$; $C.V. = \pm 2.58$; $T.V. \equiv z = -0.856$; კი. 2. $H_0: a_1 - a_2 = 0$, $H_1: a_1 - a_2 \neq 0$; $C.V. = \pm 1.65$; $T.V. \equiv z = 2.27$; არა. 3. $H_0: a_1 \leq a_2$, $H_1: a_1 > a_2$; $C.V. = +1.65$; $T.V. \equiv z = 2.56$; კი. 4. $H_0: a_1 \leq a_2$, $H_1: a_1 > a_2$; $C.V. = +2.33$; $T.V. \equiv z = 1$; არა. 5. $H_0: a_1 \leq a_2$, $H_1: a_1 > a_2$; $C.V. = +2.05$; $T.V. \equiv z = 1.12$; H_0. 6. $H_0: a_1 = a_2$, $H_1: a_1 \neq a_2$; $C.V. = \pm 2.58$; $T.V. \equiv z = 3.44$; კი. 7. $H_0: a_1 \geq a_2$, $H_1: a_1 < a_2$; $C.V. = -1.65$; $T.V. \equiv z = -2.01$; არა. 8. $H_0: a_1 \leq a_2$, $H_1: a_1 > a_2$; $C.V. = +1.65$; $T.V. \equiv z = 3.3$; არა. 9. $H_0: a_1 \leq a_2$, $H_1: a_1 > a_2$; $C.V. = +2.33$; $T.V. \equiv z = 1.09$; არა. 10. $H_0: a_1 = a_2$, $H_1: a_1 \neq a_2$; $T.V. \equiv z = 10.36$; P-მნიშვნელობა < 0.002 < α; კი. 11. $H_0: a_1 = a_2$, $H_1: a_1 \neq a_2$; $T.V. \equiv z = 1.01$; P-მნიშვნელობა = 0.3124; არა. 12. $H_0: a_1 = a_2$, $H_1: a_1 \neq a_2$; $T.V. \equiv z = -0.76$; P-მნიშვნელობა = 0.4472; H_0. 13. $2.8 < a_1 - a_2 < 6$. 14. $-7.3 < a_1 - a_2 < -1.3$. 15. $0.3 < a_1 - a_2 < 0.5$.

თავი X
ორამოკრეფიანი ამოცანები პოპულაციათა საშუალოებისათვის (მცირე შერჩევები)

ორი დამოუკიდებელი პოპულაციის საშუალოს შორის განსხვავების ჰიპოთეზათა შემოწმება (მცირე შერჩევები) IV

$X_1,\ldots,X_n$ და $Y_1,\ldots,Y_m$ ორი შერჩევაა დამოუკიდებელი ξ და η პოპულაციებიდან, რომელთა დისპერსიები განსხვავებულია; ერთ-ერთი ან ორივე შერჩევის მოცულობა ნაკლებია 30-ზე.

ჰიპოთეზა: $H_0 : a_1 - a_2 = 0$

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $T = \dfrac{(\overline{X}_n - \overline{Y}_m) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{S_1'^2/n + S_2'^2/m}} \cong T(k)$,

სადაც თავისუფლების ხარისხი $k = \min(n-1, m-1)$.

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V.: $t = \dfrac{(\overline{x}_n - \overline{y}_m) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{s_1'^2/n + s_2'^2/m}}$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე C.R. (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1 : a_1 - a_2 > 0$	$t \ge t_{k,\alpha}$,
$H_1 : a_1 - a_2 < 0$	$t \le -t_{k,\alpha}$,
$H_1 : a_1 - a_2 \ne 0$	$t \le -t_{k,\alpha/2}$ ან $t \ge t_{k,\alpha/2}$

(სადაც $t_{k,\alpha}$ არის თავისუფლების k ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილი ანუ კრიტიკული მნიშვნელობა C.V.).

$$P\text{- მნიშვნელობა: } P = \begin{cases} P\{T > t \mid H_0\}, \text{ თუ } H_1 : a_1 - a_2 > 0; \\ P\{T < t \mid H_0\}, \text{ თუ } H_1 : a_1 - a_2 < 0; \\ P\{|T| > |t| \mid H_0\}, \text{ თუ } H_1 : a_1 - a_2 \ne 0. \end{cases} = \begin{cases} 1 - F_T(t), \text{ თუ } H_1 : a_1 - a_2 > 0; \\ F_T(t), \text{ თუ } H_1 : a_1 - a_2 < 0; \\ 2\cdot[1 - F_T(|t|)], \text{ თუ } H_1 : a_1 - a_2 \ne 0. \end{cases}$$

გადაწყვეტილება: თუ $t \in$ C.R., მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

P- მნიშვნელობის მეთოდი: თუ $P \le \alpha$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ α მნიშვნელოვნების დონით, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის:

$$(\overline{x}_n - \overline{y}_m) - t_{k,\alpha/2}\sqrt{s_1'^2/n + s_2'^2/m} < a_1 - a_2 < (\overline{x}_n - \overline{y}_m) + \sqrt{s_1'^2/n + s_2'^2/m}\,.$$

შენიშვნა: საშუალოთა შესახებ ტოლობის შესამოწმებლად T კრიტერიუმის გამოყენებამდე წინასწარ უნდა გამოვიყენოთ F კრიტერიუმი, რათა გავარკვიოთ არის თუ არა დისპერსიები ტოლი. ამ უკანასკნელის გამოსაყენებლად კი აუცილებელია პოპულაციები იყოს ნორმალური ან დაახლოებით ნორმალური.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. ფერმერული მეურნეობების საშუალო ფართობი ინდიანას შტატში შეადგენს 191 აკრს (1 აკრი = 0.4 ჰა), ხოლო აიოვას შტატში კი 199 აკრს. დაეუშვათ, რომ ეს მონაცემები მიღებულია შესაბამისად 8-ისა და 10-ის ტოლი შერჩევებიდან და შესაბამისი შესწორებული სტანდარტული გადახრებია 38 აკრი და 12 აკრი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ ფერმერული მეურნეობების საშუალო ფართობი ამ ორ შტატში განსხვავებულია? იგულისხმება, რომ პოპულაციები ნორმალურია. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.

ამოხსნა. წინასწარ შევამოწმოთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ არის თუ არა პოპულაციათა დისპერსიები ტოლი. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$. ამ შემთხვევაში $38^2=s_1'^2>s_2'^2=12^2$. შესაბამისად, თავისუფლების ხარისხებია: 8 – 1 = 7 და 10 – 1 = 9. ამიტომ კრიტიკული მნიშვნელობა იქნება: $C.V.=F_{k,l,\alpha/2}=F_{7,9,0.025}=4.2$. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა: $T.V.\equiv\overline{f}=s_1'^2/s_2'^2=38^2/12^2=10.03$. რადგანაც 10.03 > 4.2, ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უკუვაგდოთ, ანუ პოპულაციათა დისპერსიები განსხვავებულია. შესაბამისად, საშუალოთა შესახებ ტოლობის შესამოწმებლად უნდა ვისარგებლოთ T კრიტერიუმით.

ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0:a_1=a_2$, $H_1:a_1\neq a_2$. რადგანაც კრიტერიუმი ორმხრივია და დისპერსიები განსხვავებულია, ამიტომ თავისუფლების ხარისხი ტოლია $k=\min(8-1,10-1)=7$. შესაბამისად, კრიტიკული მნიშვნელობებია $C.V.=\pm t_{k,\alpha/2}=\pm t_{7,0.025}=\pm 2.365$. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V.\equiv t=\frac{(\overline{x}_n-\overline{y}_m)-(a_1-a_2)}{\sqrt{s_1'^2/n+s_2'^2/m}}=\frac{(191-100)-0}{\sqrt{38^2/8+12^2/10}}=-0.57.$$

როგორც ვხედავთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა არ შედის კრიტიკულ არეში, ამიტომ ნულოვან ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს, ანუ ჩვენ არა გვაქვს საკმარისი საფუძველი რათა დავასკვნათ, რომ საშუალოები განსხვავებულია.

ავაგოთ ნდობის ინტერვალი. ამისათვის საჭირო სიდიდეები შევიტანოთ შესაბამის ფორმულაში. გვაქვს:

$$(191-199)-2.365\cdot\sqrt{\frac{38^2}{8}+\frac{12^2}{10}}<a_1-a_2<(191-199)+2.365\cdot\sqrt{\frac{38^2}{8}+\frac{12^2}{10}},$$

$$-41.02<a_1-a_2<25.02.$$

მაგალითი 2. მკვლევარს სურს შეამოწმოს არის თუ არა კერძო კლინიკაში ექიმის წლიური შემოსავალი უფრო მაღალი ვიდრე სახელმწიფო კლინიკაში. მან შემთხვევით შეარჩია თითოეული კატეგორიის 10 და 8 ექიმი და შესაბამისი შერჩევითი მახასიათებლები აღმოჩნდა: $\overline{x}_{10}=26800$, $s_1'=600$; $\overline{y}_8=25400$, $s_2'=450$. $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ კერძო კლინიკაში შემოსავალი უფრო მაღალია ვიდრე სახელმწიფოში? იგულისხმეთ, რომ პოპულაციები დაახლოებით ნორმალურია. ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

ამოხსნა. წინასწარ გავარკვიოთ არის თუ არა პოპულაციათა დისპერსიები ტოლი. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V.\equiv\overline{f}=s_1'^2/s_2'^2=600^2/450^2=1.78.$$

ვიპოვოთ P-მნიშვნელობა. 10 – 1 = 9 და 8 – 1 = 7 თავისუფლების ხარისხის მიხედვით ფიშერის განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ P-მნიშვნელობა > 0.2. შესაბამისად, P-მნიშვნელობა > $\alpha=0.01$, ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს, ანუ პოპულაციათა დისპერსიები ტოლია.

გადავიდეთ საშუალოების შესახებ ჰიპოთეზათა შემოწმებაზე. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0:a_1\le a_2$, $H_1:a_1>a_2$. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V.\equiv t=\frac{(\overline{x}_n-\overline{y}_m)-(a_1-a_2)}{\sqrt{\frac{(n-1)s_1'^2+(m-1)s_2'^2}{n+m-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}=$$

$$=\frac{(26800-25400)-0}{\sqrt{\frac{(10-1)\cdot600^2+(8-1)\cdot450^2}{10+8-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}}=5.47.$$

ვიპოვოთ P-მნიშვნელობა. თავისუფლების 10 + 8 – 2 = 16 ხარისხის მიხედვით სტიუდენტის განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ P-მნიშვნელობა ნაკლებია 0.005-ზე. შესაბამისად, P-მნიშვნელობა < $\alpha=0.01$. ამიტომ ჩვენ უკუვაგდებთ ნულოვან ჰიპოთეზას, ანუ ჩვენ გვაქვს საკმარისი საფუძველი დავასკვნათ, რომ კერძო კლინიკაში ექიმის საშუალო შემოსავალი უფრო დიდია ვიდრე სახელმწიფო კლინიკაში.

ამოცანები

ქვემოთმოყვანილ ამოცანებში ყველა სიდიდე ნორმალურია ან დაახლოებით ნორმალური

1. უძრავი ქონების აგენტის მტკიცებით საგადასახადო ინსპექტორის მიერ შეფასებული სახლის ღირებულება შეესაბამება სახლის გაყიდვის ფასს. შემთხვევით შერჩეული 10 - 10 სახლისათვის საგადასახადო ინსპექტორის შეფასებისა და გაყიდვის ფასის მიხედვით გამოთვლილი შესაბამისი შერჩევითი მახასიათებლები აღმოჩნდა: $\overline{x}_{10}=83256$, $s_1'=3256$; $\overline{y}_{10}=88354$, $s_2'=2341$. $\alpha=0.05$

მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა საშუალოებს შორის განსხვავება მნიშვნელოვანი? ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.

2. მკვლევარის აზრით მამრობითი სქესის ექიმის შემოსავალი მეტია ვიდრე მდედრობითის. შემთხვევით შერჩეული 16 მამრობითი სქესის ექიმისა და 20 მდედრობითი სქესის ექიმის შემოსავლების მიხედვით გამოთვლილი შერჩევითი მახასიათებლებია: $\overline{x}_{16}=23800$, $s_1'=300$; $\overline{y}_{18}=23750$, $s_2'=250$. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა დავადასტუროთ მკვლევარის მოსაზრება?

3. პროგრამირების პედაგოგის აზრით მათემატიკის მიმართულების სტუდენტს კომპიუტერული პროგრამის დაწერა და შესწორება შეუძლია უფრო სწრაფად ვიდრე ბიზნესის მიმართულების სტუდენტს. შემთხვევით შერჩეული 12 მათემატიკის (შესაბამისად, 18 ბიზნესის) მიმართულების სტუდენტის მიერ კონკრეტული პროგრამის დაწერაზე და შესწორებაზე დახარჯული დროის საშუალო აღმოჩნდა 36 წუთი (შესაბამისად, 39 წუთი), ხოლო შესაბამისი შესწორებული სტანდარტული გადახრებია: 4 წუთი და 9 წუთი. $\alpha=0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა დავადასტუროთ პედაგოგის მოსაზრება?

4. მკვლევარის შეფასებით სტუდენტი გოგონები სასწავლო წლის განმავლობაში უფრო მეტ დღეებს აცდენენ ვიდრე ვაჟები. შემთხვევით შერჩეული 16 სტუდენტი გოგონას (შესაბამისად, 22 სტუდენტი ვაჟის) მიერ წლის განმავლობაში გაცდენილი დღეების საშუალომ შეადგინა 3.9 დღე (შესაბამისად, 3.6 დღე), ხოლო შესაბამისი შესწორებული სტანდარტული გადახრებია: 0.6 დღე და 0.8 დღე. $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა დავეთანხმოთ მკვლევარის შეფასებას?

5. კლინიკის ადმინისტრატორს აინტერესებს არის თუ არა ბინაზე ექიმის ყოველდღიური გამოძახებების საშუალო უფრო მეტი ვიდრე კლინიკაში მოსული პაციენტების საშუალო. ქვემოთმოყვანილი შერჩევების მონაცემების მიხედვით, $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნების დონით, შეიძლება თუ არა დავადასტუროთ, რომ ექიმის ბინაზე გამოძახებათა საშუალო მეტია კლინიკაში მოსულ პაციენტთა საშუალოზე?

ბინაზე გამოძახება			კლინიკაში მოსვლა		
25	42	57	5	28	37
21	34	44	16	16	48

6. კრიმინალისტს სურს შეამოწმოს ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ უგზოუკვლოდ დაკარგულ არასრულწლოვან ადამიანთა საშუალო მეტია ვიდრე სრულწლოვანთა საშუალო. ქვემოთმოყვანილი უკანასკნელი 5 წლის მონაცემების მიხედვით, $\alpha=0.1$ მნიშვნელოვნების დონით, გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი დავადასტუროთ კრიმინალისტის ჰიპოთეზა?

არასრულწლოვანები	65513	65934	64213	61954	59167
სრულწლოვანები	31364	34478	36937	35946	38209

7. ფინანსური დეკლარაციის მიმღები სახელმწიფო ფირმა (შესაბამისად, კერძო ფირმა) საშუალოდ 10 ადამიანის მომსახურებას ანდომებს 21 წუთს (შესაბამისად, 14 ადამიანის მომსახურებას ანდომებს 27 წუთს), ხოლო შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრაა 5.6 წუთი (შესაბამისად, 4.3 წუთი). $\alpha = 0.02$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა განსხვავება ფირმების მომსახურების საშუალო დროებს შორის? ააგეთ 98%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.

8. A ტიპის 7 სარეცხი მანქანის საშუალო ფასია 815 ლარი, ხოლო B ტიპის 9 სარეცხი მანქანის საშუალო ფასია 845 ლარი. შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრები კი შესაბამისად არის 19 ლარი და 9 ლარი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ B ტიპის სარეცხი მანქანა უფრო ძვირია?

9. 12 ექიმის (შესაბამისად, 27 მედდის) დაზღვევის საშუალო თვიური პრემია შეადგენს 56 ლარს (შესაბამისად, 63 ლარს), ხოლო შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრა ექიმისა და მედდისათვის შესაბამისად ტოლია 3 ლარისა და 5.75 ლარის. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ მედდის სადაზღვევო პრემია უფრო მეტია ვიდრე ექიმის? ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

10. ჯანდაცვის სამინისტროს მონაცემებით დაზღვეული (შესაბამისად, დაუზღვეველი) მშობიარე ქალები სამშობიაროში რჩებიან საშუალოდ 2.3 დღის (შესაბამისად, 1.9 დღის) განმავლობაში. 16 - 16 მშობიარე ქალისაგან შედგენილი ორი ჯგუფის სამშობიაროში გატარებული დღეების შესწორებული სტანდარტული გადახრა ქალების ორივე კატეგორიისათვის შეადგენს 0.6 დღეს. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა საშუალოთა ტოლობის შესახებ. ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის. ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

11. ქვემოთ მოყვანილია დრო, რომელიც სჭირდება 6 – 6 თეთრ და ყავისფერ თაგვს, რათა ისწავლოს მარტივ ლაბირინთში გარბენა. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გაარკვიეთ იწვევს თუ არა თაგვის ფერი ლაბირინთში გარბენის შესასწავლად საჭირო დროში განსხვავებას? ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.

თეთრი თაგვი	18	24	20	13	15	12
ყავისფერი თაგვი	25	16	19	14	16	10

პასუხები:

1. I). $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$; $C.V.=4.03$; $\overline{f}=1.93$; H_0; II). $H_0:a_1=a_2$, $H_1:a_1\neq a_2$; $C.V.=t_{18,0.025}=\pm 2.101$; $t=-4.2$; კი – H_1; III). $-7762<a_1-a_2<-2434$. 2. I). $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$; $C.V.=2.62$; $\overline{f}=1.44$; H_0; II). $H_0:a_1\le a_2$, $H_1:a_1>a_2$; $C.V.=t_{34,0.05}=1.65$; $t=0.55$; არა – H_0. 3. I). $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$; $C.V.=2.72$; $\overline{f}=5.06$; H_1; II). $H_0:a_1\ge a_2$, $H_1:a_1<a_2$; $C.V.=t_{11,0.1}=-1.363$; $t=-1.24$; არა – H_0. 4. I). $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$; $C.V.=3.88$; $\overline{f}=1.78$; H_0; II). $H_0:a_1\le a_2$, $H_1:a_1>a_2$; $C.V.=t_{36,0.01}=2.33$; $t=1.26$; არა – H_0. 5. I). $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$; $C.V.=14.94$; $\overline{f}=1.41$; H_0; II). $H_0:a_1\le a_2$, $H_1:a_1>a_2$; $C.V.=t_{10,0.01}=2.764$; $t=1.45$; არა – H_0. 6. I). $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$; $C.V.=6.39$; $\overline{f}=1.139$; H_0; II). $H_0:a_1\le a_2$, $H_1:a_1>a_2$; $C.V.=t_{8,0.1}=1.397$; $t=16.252$; კი – H_1. 7. I). $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$; $C.V.=4.19$; $\overline{f}=1.7$; H_0; II). $H_0:a_1=a_2$, $H_1:a_1\neq a_2$; $C.V.=t_{22,0.01}=\pm 2.508$; $t=-2.97$; კი – H_1; III). $-11.1<a_1-a_2<-0.93$. 8. I). $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$; $C.V.=4.65$; $\overline{f}=4.46$; H_0; II). $H_0:a_1\ge a_2$, $H_1:a_1<a_2$; $C.V.=t_{14,0.05}=-1.761$; $t=-4.2$; კი – H_1. 9. I). $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$; $\overline{f}=3.67$; 0.02 < P-მნიშვნელობა < 0.05; H_1; II). $H_0:a_1\ge a_2$, $H_1:a_1<a_2$; $d.f.=11$; $t=-4.98$; P-მნიშვნელობა < 0.005 < α; კი – H_1. 10. I). $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$; $\overline{f}=1$; P-მნიშვნელობა > 0.2 > $\alpha=0.01$; H_0; II). $H_0:a_1=a_2$, $H_1:a_1\neq a_2$; $d.f.=30$; $t=1.89$; 0.05 < P-მნიშვნელობა < 0.1; H_0; III). $-0.15<a_1-a_2<0.95$. 11. I). $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$; $C.V.=7.15$; $\overline{f}=1.23$; H_0; II). $H_0:a_1=a_2$, $H_1:a_1\neq a_2$; $C.V.=t_{10,0.025}=\pm 2.228$; $t=0.119$; არა – H_0; III). $-5.9<a_1-a_2<6.5$.

ორამოკრეფიანი ამოცანები პოპულაციათა დისპერსიებისათვის

ჰიპოთეზათა შემოწმება ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის დისპერსიების შესახებ

$\xi \equiv N(a_1, \sigma_1^2)$ და $\eta \equiv N(a_2, \sigma_2^2)$ დამოუკიდებელია; ორივე პოპულაციის პარამეტრები უცნობია.

კრიტერიუმი:

ორმხრივი	მარჯვენა ცალმხრივი	მარცხენა ცალმხრივი
$H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$	$H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$	$H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$
$H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1$	$H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 > 1$	$H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 < 1$

ჰიპოთეზა: $H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $F = \dfrac{S_1'^2 / \sigma_1^2}{S_2'^2 / \sigma_2^2} \equiv F(n-1, m-1) -$ ფიშერის განაწილება $n-1$ და $m-1$ თავისუფლების ხარისხებით (სადაც n და m შერჩევების მოცულობებია)

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V.: $f = \dfrac{s_1'^2}{s_2'^2}$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე C.R. (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 > 1$	$f \geq F_{n-1,m-1,\alpha}$,
$H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 < 1$	$f \leq F_{n-1,m-1,1-\alpha}$,
$H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1$	$f \leq F_{n-1,m-1,1-\alpha/2}$ ან $f \geq F_{n-1,m-1,\alpha/2}$

(სადაც $F_{k,l,\alpha}$ არის k და l თავისუფლების ხარისხის მქონე ფიშერის განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია ანუ კრიტიკული მნიშვნელობა C.V.).

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი დისპერსიათა σ_1^2/σ_2^2 ფარდობისათვის

$$F_{n-1,m-1,1-\alpha/2} \cdot s_2'^2 / s_1'^2 < \sigma_1^2 / \sigma_2^2 < F_{n-1,m-1,\alpha/2} \cdot s_2'^2 / s_1'^2 .$$

დისპერსიათა ტოლობის შესახებ ჰიპოთეზათა შემოწმების გამარტივებული პროცედურა:

ჰიპოთეზა: $H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა T.V.: $\overline{f} = \dfrac{\max\{s_1'^2, s_2'^2\}}{\min\{s_1'^2, s_2'^2\}}$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე C.R. (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1:\sigma_1^2/\sigma_2^2>1$	$\overline{f}\geq F_{k,l,\alpha}$,
$H_1:\sigma_1^2/\sigma_2^2<1$	$\overline{f}\geq F_{k,l,\alpha}$,
$H_1:\sigma_1^2/\sigma_2^2\neq 1$	$\overline{f}\geq F_{k,l,\alpha/2}$

(სადაც $F_{k,l,\alpha}$ არის k და l თავისუფლების ხარისხის მქონე ფიშერის განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილია ანუ კრიტიკული მნიშვნელობა C.V.; $k=n-1$ და $l=m-1$, თუ $s_1^{'2}>s_2^{'2}$, და პირიქით, $k=m-1$ და $l=n-1$, თუ $s_1^{'2}<s_2^{'2}$).

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი დისპერსიათა σ_1^2/σ_2^2 ფარდობისათვის

$$\overline{f}/F_{k,l,\alpha/2}<\sigma_1^2/\sigma_2^2<\overline{f}\cdot F_{k,l,\alpha/2}.$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. მკვლევარს აინტერესებს არის თუ არა განსხვავება მწეველი და არამწეველი ადამიანების პულსის რიცხვთა დისპერსიებს შორის. შემთხვევით შერჩეული 26 მწეველისაგან და 18 არამწეველისაგან შემდგარი ორი შერჩევის შესაბამისი შესწორებული შერჩევითი დისპერსიებია: $s_1^{'2}=36$, $s_2^{'2}=10$. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი დავასკვნათ, რომ დისპერსიები განსხვავებულია? ჩათვალეთ, რომ სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$. ვისარგებლოთ გამარტივებული პროცედურით. ვინაიდან კრიტერიუმი ორმხრივია, $s_1^{'2}>s_2^{'2}$ და თავისუფლების ხარისხებია 26 – 1 = 25 , 18 – 1 =17, ამიტომ კრიტიკული მნიშვნელობა იქნება: $C.V.=F_{k,l,\alpha/2}=F_{25,17,0.025}=2.56$. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა: $T.V.=s_1^{'2}/s_2^{'2}=36/10=3.6$. რადგანაც 3.6 > 2.56, ამიტომ ძირითადი ჰიპოთეზა უნდა უკუვაგდოთ, ანუ ჩვენ გვაქვს საკმარისი საფუძველი დავასკვნათ, რომ დისპერსიები განსხვავებულია.

მაგალითი 2. საჰაერო გადაზიდვების ცენტრის მტკიცებით ამერიკის აეროპორტებში მგზაერთა რიცხის დისპერსია უფრო მეტია ვიდრე ევროპის აეროპორტებში მგზაერთა რიცხის დისპერსია. $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი დავადასტუროთ ეს მოსაზრება? ქვემოთ მოყვანილია შემთხვევით შერჩეულ აეროპორტებში მგზავრების რიცხვი (გაზომილი მილიონებში). ჩათვალეთ, რომ სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად. ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

ამერიკის აეროპორტები		ევროპის აეროპორტები	
36.8	73.5	60.7	51.2
72.4	61.2	42.7	38.6
60.5	40.1		

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0:\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. ვიპოვოთ თითოეული ჯგუფის შესწორებული შერჩევითი დისპერსია: $s_1'^2 = 246.38$, $s_2'^2 = 95.87$. ამიტომ კრიტერიუმის მნიშვნელობა იქნება: $T.V. = s_1'^2 / s_2'^2 = 246.38/95.87 = 2.57$. ვინაიდან, $s_1'^2 > s_2'^2$, ამიტომ $k = 6-1 = 5$ და $l = 4-1 = 3$. ფიშერის განაწილების ცხრილიდან ამოვიღოთ შემდეგი ფრაგმენტი:

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
$F_{5,3,\alpha}$	5.31	9.01	14.88	28.24	45.39

ვინაიდან 2.57 < 5.31, ამიტომ P-მნიშვნელობა > 0.1. შესაბამისად, P-მნიშვნელობა > $\alpha = 0.01$, ამიტომ ძირითადი ჰიპოთეზა არ უნდა უკუვაგდოთ, ანუ $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით ჩვენ არა გვაქვს საკმარისი საფუძველი დავასკვნათ, რომ ამერიკის აეროპორტებში მგზავრთა რიცხის დისპერსია უფრო მეტია ვიდრე ევროპის აეროპორტებში მგზავრთა რიცხის დისპერსია.

მაგალითი 3. ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციიდან აღებულია 15-ის ტოლი მოცულობის შერჩევები, რომელთათვისაც: $\overline{x}_n = 132.45$, $s_1'^2 = 123$; $\overline{y}_m = 128.06$, $s_2'^2 = 95$. შეამოწმეთ ჰიპოთეზა დისპერსიათა ტოლობის შესახებ $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით და ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი დისპერსიათა ფარდობისათვის.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0:\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$, $H_1:\sigma_1^2/\sigma_2^2 > 1$. ვისარგებლოთ გამარტივებული პროცედურით. ვინაიდან, $s_1'^2 > s_2'^2$, ამიტომ $k = n-1 = 14$ და $l = m-1 = 14$. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა: $\overline{f} = 123/95 \approx 1.3$. რადგანაც საქმე გვაქვს მარჯვენა ცალმხრივ ალტერნატივასთან, ამიტომ კრიტიკული არეა $[F_{k,l,\alpha}, +\infty) = [F_{14,14,0.05}, +\infty) = [2.48, +\infty)$. რამდენადაც 1.3 < 2.48, ამდენად ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს, ანუ $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ პოპულაციათა დისპერსიები ტოლია.

ავაგოთ ნდობის ინტერვალი. თანაფარდობიდან $(1-\alpha)\cdot 100\% = 95\%$ გამომდინარე $\alpha = 0.05$, $\alpha/2 = 0.025$. ამიტომ საძიებელი ინტერვალი იქნება:

$$(\overline{f}/F_{14,14,0.025}, \overline{f}\cdot F_{14,14,0.025}),$$

$$(1.3/2.9, 1.3\cdot 2.9) \text{ ანუ } (0.45, 3.77).$$

მაგალითი 4. შესადარებელია ორი დაზგის მუშაობის სიზუსტე. პირველ დაზგაზე ჩატარებულია 25 დაკვირვება, ხოლო მეორეზე კი 20. $s_1'^2 = 3.1$, $s_2'^2 = 1.4$. შეგვიძლია თუ არა $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით დავასკვნათ, რომ მეორე დაზგა უფრო ზუსტია, ვიდრე პირველი ($\sigma_1^2 > \sigma_2^2$)? ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი σ_1^2/σ_2^2 ფარდობისათვის.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0:\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$, $H_1:\sigma_1^2/\sigma_2^2 > 1$. გვაქვს: $n = 25$, $m = 20$; $s_1'^2 > s_2'^2$, $k = n-1 = 24$ და

$l=m-1=19$; კრიტიკული მნიშვნელობა $C.V.=F_{k,l,\alpha}=F_{24,19,0.05}=2.04$; კრიტიკული არე $C.R.=[F_{24,19,0.05},+\infty)=[2.04,+\infty)$; კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V.=\overline{f}=3.1/1.4=2.214.$$

ვინაიდან $T.V.\in C.R.$, ამიტომ ნულოვან ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ და $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით ვასკვნით, რომ მეორე დაზგა უფრო ზუსტია, ვიდრე პირველი.

90%-იანი ნდობის ინტერვალი σ_1^2/σ_2^2 ფარდობისათვის იქნება:

$$(\overline{f}/F_{24,19,0.05}, \overline{f}\cdot F_{24,19,0.05}) = (1.08,4.51).$$

ამოცანები

1. ისარგებლეთ ფიშერის განაწილების ცხრილებით და იპოვეთ კრიტიკული მნიშვნელობები თუ მოცემულია ორი დამოუკიდებელი ნორმალური შერჩევის შესწორებული შერჩევითი დისპერსიები: ა). $s_1'^2=128$, $n=23$; $s_2'^2=162$, $m=16$; კრიტერიუმი ორმხრივია და $\alpha=0.01$. ბ). $s_1'^2=37$, $n=14$; $s_2'^2=89$, $m=25$; კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია და $\alpha=0.01$. გ). $s_1'^2=232$, $n=30$; $s_2'^2=387$, $m=46$; კრიტერიუმი ორმხრივია და $\alpha=0.05$. დ). $s_1'^2=164$, $n=21$; $s_2'^2=53$, $m=17$; კრიტერიუმი ორმხრივია და $\alpha=0.1$. ე). $s_1'^2=92.8$, $n=11$; $s_2'^2=43.6$, $m=11$; კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია და $\alpha=0.05$.

2. იპოვეთ P-მნიშვნელობა F კრიტერიუმის თითოეული მნიშვნელობისათვის: ა). $F=2.97, n=9, m=14$, კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია; ბ). $F=3.32$, $n=6$, $m=12$, კრიტერიუმი ორმხრივია; გ). $F=2.28, n=12, m=20$, კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია; დ). $F=3.51, n=12, m=21$, კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია; ე). $F=4.07, n=6, m=10$, კრიტერიუმი ორმხრივია; ვ). $F=1.65, n=19, m=28$, კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია; ზ). $F=1.77, n=28, m=28$, კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია; თ). $F=7.29, n=5, m=8$, კრიტერიუმი ორმხრივია.

ქვემოთ მოყვანილ ამოცანებში იგულისხმება, რომ ყველა სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად:

3. პედაგოგის მტკიცებით, იმ შემთხვევაში, როცა ლექციების კურსი შერწყმულია კომპიუტერული დამუშავების კომპონენტთან, სტუდენტთა საგამოცდო ქულების დისპერსია უფრო დიდია, ვიდრე კომპიუტერული დამუშავების გარეშე. შემთხვევით შეირჩა სტუდენტთა ორი ჯგუფი. საგამოცდო ქულების შესწორებული შერჩევითი დისპერსია სტუდენტებისათვის, რომელთა სალექციო კურსი შერწყმული იყო კომპიუტერული დამუშავების კომპონენტთან აღმოჩნდა 103, ხოლო მეორე ჯგუფისათვის კი 73. თითოეული შერჩევა შედგება 20 – 20 სტუდენტისაგან. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა დავადასტუროთ პედაგოგის მტკიცებულება?

4. მომხმარებელთა ინტერესების დამცველის მტკიცებით A და B კომპანიების მიერ წარმოებული ელემენტების მუშაობის ხანგრძლივობის დისპერსიები არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან. შემთხვევით შერჩეული იქნა თითოეული ტიპ-

ის 10 -10 ელემენტი და აღმოჩნდა, რომ შესაბამისად $s_A'^2 = 24$ და $s_B'^2 = 40$. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა დავადასტუროთ მომხმარებელთა ინტერესების დამცველის მტკიცებულება?

5. საგადასახადო ინსპექტორის მტკიცებით ორ A და B ქალაქში დაბეგვრისაგან თავისუფალი შემოსავლების დისპერსიები განსხვავებულია. ქვემოთ მოყვანილია ამ ქალაქებში დაბეგვრისაგან თავისუფალი შემოსავლების შერჩევები (შემოსავლები გაზომილია მილიონ დოლარებში). $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა დავადასტუროთ ინსპექტორის მტკიცებულება?

ქალაქი A

113	25	44	31
22	23	11	19
14	23	19	5
8	30	7	2

ქალაქი B

82	295	12	20
11	50	68	16
5	12	81	4
15	9	2	5

6. საავადმყოფოს შემთხვევით შერჩეულ 20 დერეფანში ხმაურის დონის შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრა აღმოჩნდა 4.1 დეციბალი, ხოლო შემთხვევით შერჩეულ 24 ოთახში ხმაურის დონის შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრა კი 7.5 დეციბალი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა იმის მტკიცება, რომ სტანდარტული გადახრები განსხვავებულია?

7. გინეკოლოგის მტკიცებით ახალშობილი ვაჟების სიმაღლეთა ცვალებადობა განსხვავდება ახალშობილი გოგონების სიმაღლეთა ცვალებადობისაგან. შემთხვევით შერჩეული 15 ახალშობილი ვაჟის სიმაღლეთა შესწორებული სტანდარტული გადახრა აღმოჩნდა 1.3 დიუმი (1 დიუმი = 2.54 სმ), ხოლო შემთხვევით შერჩეული 15 ახალშობილი გოგონასათვის კი 0.9 დიუმი. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა დავადასტუროთ გინეკოლოგის მტკიცებულება?

8. მკვლევარს აინტერესებს არის თუ არა განსხვავება დედაქალაქში შემოსული ავტომობილებისა და სატრანზიტო ავტომობილების რიცხვების ცვალებადობას შორის. ქვემოთ მოყვანილი შერჩევების მიხედვით, $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ დისპერსიები განსხვავებულია?

არა სატრანზიტო

3694560	3469431	2855109
3768285	4420553	719934
1838271	1005469	
3358175	1112722	

სატრანზიტო

2774251	3453745	499043
1068107	204369	253956
3534092	456123	826710
2016046	235752	133619

9. მკვლევარის მტკიცებით არტერიული წნევის ცვალებადობა ჭარბწონიან ადამიანებში უფრო დიდია ვიდრე ნორმალურწონიან ადამიანებში. შემთხვევით შერჩეულ 28 ჭარბწონიან ადანმიანში არტერიული წნევის შესწორებული სტანდარტული გადახრა აღმოჩნდა 6.2 მმ. ვერცხ. სვ., ხოლო 25 ნორმალურწონიან ადამიანში კი 2.7 მმ. ვერცხ. სვ.. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ მკვლევარის მტკიცებულება.

10. განათლების სამინისტროს მტკიცებით პედაგოგების სწავლების სტაჟის რიცხვის ცვალებადობა უმაღლეს სასწავლებლებში უფრო დიდია ვიდრე საშუალო სკოლებში. უმაღლესი სასწავლებლის შემთხვევით შერჩეული 26 პედაგოგის მუშაობის სტაჟის შესწორებული სტანდარტული გადახრა აღმოჩნდა 2.8 წელი, ხოლო საშუალო სკოლის 18 პედაგოგისათვის კი 1.9 წელი. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეუძლია თუ არა მკვლევარს დაადასტუროს თავისი მტკიცებულების მართებულება?

11. მკვლევარს სურს შეაფასოს ორი პოპულარული A და B დიეტის შედეგად პაციენტთა მიერ დაკარგული წონის დისპერსია. A დიეტის მიმდევარი შემთხვევით შერჩეული 10 ადამიანის მიერ ერთ თვეში დაკარგული წონების შესწორებული სტანდარტული გადახრა აღმოჩნდა 6.3 ფუნტი (1 ფუნტი = 453.6 გრ), ხოლო B დიეტის მიმდევარი შემთხვევით შერჩეული 12 ადამიანის კი 4.8 ფუნტი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ A დიეტის შემთხვევაში დაკარგული წონის დისპერსია უფრო დიდია ვიდრე B დიეტის შემთხვევაში?

12. მკვლევარის მტკიცებით ინდიანას შტატში შემავალი საგრაფოების ფართობების დისპერსია ნაკლებია ვიდრე აიოვას შტატში შემავალი საგრაფოების ფართობების დისპერსია. ქვემოთ მოყვანილია შემთხვევით შერჩეული საგრაფოების ფართობები (გაზომილი კვადრატულ კილომეტრებში). $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დავადასტუროთ მკვლევარის მტკიცებულება?

ინდიანას შტატი					აიოვას შტატი				
406	431	305	373	560	640	443	717	571	568
393	430	215	148	384	580	569	568	577	434
396	369	489	306	320	431	779	714	503	615
485	408	293	509	407	416	381	731	501	402

13. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ დენვერ'ში მაღალი შენობების სიმაღლეების დისპერსია ტოლია დეტროიტში მაღალი შენობების სიმაღლეების დისპერსიის, თუ სახლების შესაბამისი შერჩევების ფუტებში გაზომილი (1 ფუტი = 30.48 სმ) სიმაღლეებია:

დენვერი			დეტროიტი		
714	504	404	620	562	534
698	438	544	472	448	436
408			430	420	

14. ქვემოთ მოყვანილია უნციებში გაზომილი (1 უნცია = 28.3 გრ) ქალებისა და კაცების სპორტული ფეხსაცმლების შერჩევების წონები. გამოთვალეთ თითოეული შერჩევის შესწორებული დისპერსია და შეამოწმეთ ჰიპოთეზა დისპერსიების ტოლობის შესახებ $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით. ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

ქალები				
11.9	11.2	11.7	12.8	12.6
12.3	13.8	10.8	14.5	14.7
9.2	10.4	11.1	13.3	12.9

კაცები				
10.6	10.3	10.3	9.5	9.3
9.6	9.8	11.2	8.8	9.5
10.1	9.4	9.5	10.2	11.0

15. ქვემოთ მოყვანილია A და B ტიპის მტვერსასრუტების შერჩევების წონები (გაზომილი ფუნტებში). $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა დისპერსიების განსხვავებულობის შესახებ.

A ტიპი				
21	16	23	13	18
17	17	16	15	17
15	17	16	20	20
17	18			

B ტიპი	
24	12
15	13
11	

პასუხები:

1. $C.V. = F_{15,22,0.01} = 3.36$; $C.V. = F_{24,13,0.01} = 3.59$; $C.V. = F_{45,29,0.05} = 2.03$; $C.V. = F_{20,16,0.1} = 2.28$; $C.V. = F_{10,10,0.05} = 2.98$. **2.** 0.025 < P-მნიშვნელობა < 0.05; 0.05 < P-მნიშვნელობა < 0.1; P-მნიშვნელობა = = 0.05; 0.005 < P-მნიშვნელობა < 0.01; P-მნიშვნელობა = 0.05; P-მნიშვნელობა > > 0.1; 0.05 < P-მნიშვნელობა < 0.1; 0.01 < P-მნიშვნელობა < 0.02. **3.** $H_0 : \sigma_1^2 \le \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$; $C.V. = 2.23$; $\bar{f} = 1.41$; არა. **4.** $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$; $C.V. = 3.18$; $\bar{f} = 1.67$; კი. **5.** $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$; $C.V. = 2.86$; $\bar{f} = 7.85$; კი. **6.** $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$, $H_1 : \sigma_1 \ne \sigma_2$; $C.V. = 2.51$; $\bar{f} = 3.346$; კი. **7.** $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$; $C.V. = 2.53$; $\bar{f} = 2.09$; არა. **8.** $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$; $C.V. = 3.53$; $\bar{f} = 1.88$; არა. **9.** $H_0 : \sigma_1^2 \le \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$; $C.V. = 2.66$; $\bar{f} = 5.27$; H_1. **10.** $H_0 : \sigma_1^2 \le \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$; $C.V. = 1.84$; $\bar{f} = 1.47$; არა. **11.** $H_0 : \sigma_1^2 \le \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$; $C.V. = 2.9$; $\bar{f} = 1.72$; არა. **12.** $H_0 : \sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$; $C.V. = 3.15$; $\bar{f} = 1.45$; არა. **13.** $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$; $C.V. = 3.87$; $\bar{f} = 3.18$; H_0. **14.** $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$; $\bar{f} = 5.32$; P-მნიშვნელობა < 0.01 < $\alpha = 0.05$; H_1. **15.** $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$; $C.V. = 3.5$; $\bar{f} = 3.773$; H_1.

თავი XII
სტატისტიკური დასკვნები დაწყვილებული მონაცემებისათვის

სტატისტიკური დასკვნები დაწყვილებულ მონაცემთა საშუალოების სხვაობებისათვის (დამოკიდებული შერჩევები)

მონაცემები შედგება n დამოუკიდებლად შერჩეული წყვილისაგან (X_1,Y_1), (X_n,Y_n) $D_i = X_i - Y_i, i=1,...,n$. $D_1,...,D_n$ წარმოადგენს დამოუკიდებელ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას უცნობი პარამეტრებით $a_D = a_1 - a_2$ და σ_D^2 (აქ $X_1,...,X_n$ და $Y_1,...,Y_m$ – დამოკიდებული შერჩევებია).

$$\overline{D}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i,\ S_D'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D}_n)^2 = \frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n} D_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} D_i)^2];$$

$$\overline{d}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i),\ s_D'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \overline{d}_n)^2 = \frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} d_i)^2]$$

ჰიპოთეზა: $H_0 : a_D = 0$

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $T = \dfrac{\overline{D}_n - a_D}{S_D' / \sqrt{n}} \equiv T(n-1)$

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V.: $t = \dfrac{\overline{d}_n - a_D}{s_D' / \sqrt{n}}$, სადაც $\overline{d}_n$-ით აღნიშნულია $\overline{D}_n$ სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა.

ალტერნატივა	**კრიტიკული არე C.R. (H_0-ის უარყოფის არე)**
$H_1 : a_D > 0$	$t \ge t_{n-1,\alpha}$,
$H_1 : a_D < 0$	$t \le -t_{n-1,\alpha}$,
$H_1 : a_D \ne 0$	$t \le -t_{n-1,\alpha/2}$ ან $t \ge t_{n-1,\alpha/2}$

(სადაც $t_{n-1,\alpha}$ არის თავისუფლების $n-1$ ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილი ანუ კრიტიკული მნიშვნელობა C.V.).

P- მნიშვნელობა: $P = \begin{cases} 1 - F_T(t), \text{ თუ } H_1 : a_1 - a_2 > 0; \\ F_T(t), \text{ თუ } H_1 : a_1 - a_2 < 0; \\ 2 \cdot [1 - F_T(|t|)], \text{ თუ } H_1 : a_1 - a_2 \ne 0. \end{cases}$

გადაწყვეტილება: თუ $t \in$ **C.R.**, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

P- მნიშვნელობის მეთოდი: თუ $P \le \alpha$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ α მნიშვნელოვნების დონით, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი დაწყვილებული მონაცემების საშუალოთა $a_D = a_1 - a_2$ სხვაობისათვის:

$$\bar{d}_n - \frac{s'_D}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,\alpha/2} < a_D < \bar{d}_n + \frac{s'_D}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1,\alpha/2}.$$

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. ფარმაცევტის მტკიცებით კონკრეტული ვიტამინი ზრდის ათლეტის მიერ სიმძიმის აწევის შესაძლებლობას. შემთხვევით შეარჩიეს 8 ათლეტი და შეამოწმეს რა მაქსიმალური სიმძიმის აწევა შეუძლია თითოეულ მათგანს ვიტამინის მიღებამდე და ვიტამინის ერთი თვის განმავლობაში მიღების შემდეგ. იგულისხმეთ, რომ სიდიდე დაახლოებით ნორმალურია და $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ვიტამინის ეფექტურობა.

ათლეტის №	1	2	3	4	5	6	7	8
ვიტ. მიღებამდე x_i	210	230	182	205	262	253	219	216
ვიტ. მიღების შემდეგ y_i	219	236	179	204	270	250	222	216

ამოხსნა. ვიტამინის ეფექტურობა ნიშნავს, რომ ვიტამინის მიღებამდე აწეული სიმძიმე უნდა იყოს არსებითად (მნიშვნელოვნად) ნაკლები, ვიდრე ვიტამინის მიღების შემდეგ. შესაბამისად ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები იქნება: $H_0: a_D \ge 0$, $H_1: a_D < 0$.

გამოვთვალოთ კრიტიკული მნიშვნელობა. აქ თავისუფლების ხარისხი იქნება $d.f. = n-1 = 8-1 = 7$. ამიტომ $C.V. = t_{n-1,\alpha} = t_{7,0.05} = -1.895$.

გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა. ა). შევავსოთ შემდეგი ცხრილი:

ათლეტის №	ვიტ. მიღებამდე, x_i	ვიტ. მიღების შემდეგ, y_i	$d_i = x_i - y_i$	$d_i^2 = (x_i - y_i)^2$
1	210	219	-9	81
2	230	236	-6	36
3	182	179	3	9
4	205	204	1	1
5	262	270	-8	64
6	253	250	3	9
7	219	222	-3	9
8	216	216	0	0
			$\sum d_i = -19$	$\sum d_i^2 = 209$

ბ). ვიპოვოთ სხვაობათა საშუალო: $\bar{d}_9 = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{9} d_i = \frac{-19}{8} = -2.375$;

გ). ვიპოვოთ სხვაობათა შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრა:

$$s'_D = \sqrt{\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} d_i)^2]} = \sqrt{\frac{1}{8-1}\cdot[209 - \frac{1}{8}\cdot(-19)^2]} = 4.84;$$

დ). ვიპოვოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$t = \frac{\overline{d}_n - a_D}{s'_D/\sqrt{n}} = \frac{-2.375 - 0}{4.84/\sqrt{8}} = -1.388.$$

ვინაიდან კრიტერი:უმის მნიშვნელობა არ ეკუთვნის კრიტიკულ არეს – $C.R. = (-\infty, -t_{9,0.05}] = (-\infty, -1.895]$ (-1.388 > -1.895), ამიტომ ჩვენ არა გვაქვს ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი, ანუ არ არსებობს საკმარისი საფუძველი, რათა დავასკვნათ, რომ ვიტამინი აძლიერებს ათლეტის შესაძლებლობებს.

მაგალითი 2. დიეტოლოგს სურს გაარკვიოს შეიცვლება თუ არა პაციენტის ორგანიზმში ქოლესტერინის დონე საკვებში გარკვეული მინერალის დამატების შედეგად. შემთხვევით შეარჩიეს 6 პაციენტი და შეამოწმეს ქოლესტერინის დონე მინერალის მიღებამდე და მინერალის მიღების შემდეგ. იგულისხმეთ, რომ სიდიდე დაახლოებით ნორმალურია. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ ქოლესტერინის დონე შეიცვალა? ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.

პაციენტის №	1	2	3	4	5	6
მინერალის მიღებამდე, x_i	210	235	208	190	172	244
მინ. მიღების შემდეგ, y_i	190	170	210	188	173	228

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0: a_D = 0$, $H_1: a_D \neq 0$.

გამოვთვალოთ კრიტიკული მნიშვნელობა. აქ თავისუფლების ხარისხი იქნება $d.f. = n-1 = 6-1 = 5$. კრიტერიუმი ორმხრივია. ამიტომ კრიტიკული მნიშვნელობებია: $C.V. = \pm t_{n-1,\alpha/2} = \pm t_{5,0.05} = \pm 2.015$.

გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა. ა). შევავსოთ შემდეგი ცხრილი:

პაციენტის №	მინ. მიღებამდე, x_i	მინ. მიღების შემდეგ, y_i	$d_i = x_i - y_i$	$d_i^2 = (x_i - y_i)^2$
1	210	190	20	400
2	235	170	65	4225
3	208	210	-2	4
4	190	188	2	4
5	172	173	-1	1
6	244	228	16	256
			$\sum d_i = 100$	$\sum d_i^2 = 4890$

ბ). ვიპოვოთ სხვაობათა საშუალო: $\overline{d}_6 := \frac{1}{6}\cdot\sum_{i=1}^{6} d_i = \frac{100}{6} = 16.7$;

გ). ვიპოვოთ სხვაობათა შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრა:

$$s'_D = \sqrt{\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} d_i)^2]} = \sqrt{\frac{1}{6-1}\cdot[4890 - \frac{1}{6}\cdot(100)^2]} = 25.4\,;$$

დ). ვიპოვოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$t = \frac{\overline{d}_n - a_D}{s'_D/\sqrt{n}} = \frac{16.7 - 0}{25.4/\sqrt{6}} = 1.61\,.$$

ვინაიდან კრიტერიუმის მნიშვნელობა არ ეკუთვნის კრიტიკულ არეს – $C.R. = (-\infty, -t_{5,0.05}] \cup [t_{5,0.05}, +\infty) = (-\infty, -2.015] \cup [2.015, +\infty)$ $(-2.015 < 1.61 < 2.015)$, ამიტომ ჩვენ არა გვაქვს ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი, ანუ არ არსებობს საკმარისი საფუძველი, რათა დავასკვნათ, რომ მინერალი ცვლის ქოლესტერინის დონეს.

ავაგოთ ნდობის ინტერვალი. შევიტანოთ საჭირო სიდიდეები შესაბამის ფორმულაში. გვაქვს:

$$16.7 - 2.015\cdot\frac{25.4}{\sqrt{6}} < a_D < 16.7 + 2.015\cdot\frac{25.4}{\sqrt{6}}\,,$$

$$-4.19 < a_D < 37.59\,.$$

როგორც ვხედავთ 0 შედის ნდობის ინტერვალში. შესაბამისად, გადწყვეტილება ემთხვევა ზემოთ მიღებულს: ჩვენ არა გავაქვს საფუძველი ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის.

მაგალითი 3. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გაარკვიეთ თუ რა გავლენას ახდენს სქესი იმ კურსდამთავრებულთათვის შეთავაზებული ხელფასის სიდიდეზე, რომელთაც გააჩნიათ ერთნაირი განათლება, ასაკი და სამუშაო გამოცდილება და ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის, თუ მათთვის შეთავაზებული დღიური ხელფასების მონაცემებია:

წყვილის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ქალი, X_i	22	17	21	19	26	23	21	31	25	18
ვაჟი, Y_i	25	18	27	17	29	25	19	27	36	23
სხვაობები, D_i	-3	-1	-6	2	-3	-2	2	4	-11	-5

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0: a_D = 0$, $H_1: a_D < 0$. გამოვთვალოთ სხვაობების შერჩევითი საშუალო და შესწორებული შერჩევითი დისპერსია. გვაქვს:

$$\overline{d}_{10} = \frac{1}{10}\cdot(-3-1-\cdots-5) = -2.3\,,\ \ s_D'^2 = \frac{1}{9}\cdot[(-3+2.3)^2 + \cdots + (-5+2.3)^2] = 19.78\,.$$

შესაბამისად, კრიტერიუმის მნიშვნელობა იქნება:

$$T.V. \equiv t = \frac{\overline{d}_n - a_D}{s'_D/\sqrt{n}} = \frac{-2.3 - 0}{\sqrt{19.78}/\sqrt{10}} = -1.635\,.$$

რამდენადაც კრიტერიუმი მარცხენა ცალმხრივია, ამიტომ კრიტიკული მნიშვნელობა იქნება: $C.V. = -t_{n-1,\alpha} = -t_{9,0.05} = -1.833$, ხოლო კრიტიკული არეა: $C.R. = (-\infty, -1.833]$. როგროც ვხედავთ, $T.V. \notin C.R.$, ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზის

უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს, ანუ არ არსებობს საკმარისი საფუძველი რათა დავასკვნათ, რომ ხელფასზე გავლენას ახდენს სქესი.

საძიებელი ნდობის ინტერვალი იქნება:

$$\left(-2.3-\frac{\sqrt{19.78}}{\sqrt{10}}\cdot t_{9,0.05},-2.3+\frac{\sqrt{19.78}}{\sqrt{10}}\cdot t_{9,0.05}\right),$$

$$(-2.3-1.4064\cdot 1.833,-2.3+1.4064\cdot 1.833),$$

$$(-4.278,\ 0.278).$$

ამოცანები

ქვემოთმოყვანილ ამოცანებში იგულისხმება, რომ ყველა სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად ან დაახლოებით ნორმალურად

1. რესტორანთა ქსელის მენეჯერმა თანამშრომლებს შესთავაზა გამაჯანსაღებელი პროგრამა, რათა შეემცირებინა ავადმყოფობის გამო სამუშაოს გაცდენათა რიცხვი. ქვემოთ ნაჩვენებია შემთხვევით შერჩეული 10 მუშაკის მიერ თვის განმავლობაში სამუშაოს გაცდენათა რიცხვი გამაჯანსაღებელი პროგრამის გავლამდე და გავლის შემდეგ. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ პროგრამამ გაამართლა?

პროგრამის გავლამდე	2	3	6	7	4	5	3	1	0	0
პროგრამის გავლის შემდეგ	1	4	3	8	3	3	1	0	1	0

2. იმ მიზნით, რომ გაეზარდათ სტუდენტის მიერ კვირაში დამოუკიდებელი მუშაობის საათები, შემთხვევით შეარჩიეს 9 სტუდენტი და წაუკითხეს ლექცია განათლების მნიშვნელობის შესახებ ცხოვრებაში. ქვემოთ ნაჩვენებია მათი კვირეული დამოუკიდებელი მუშაობის საათები ლექციამდე და ლექციის მოსმენის შემდეგ. $\alpha=0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ ლექციის მოსმენის შემდეგ გაიზარდა სტუდენტის დამოუკიდებელი მუშაობის საათები?

ლექციის მოსმენამდე	9	12	6	15	3	18	10	13	7
ლექციის მოსმენის შემდეგ	9	17	9	20	2	21	15	22	6

3. პროფესორს აინტერესებს რა გავლენას ახდენს სავარჯიშოების შესახებ ფილმი სტუდენტის სავარჯიშოს მიმართ დამოკიდებულების ხარისხზე. შემთხვევით შერჩეული 10 სტუდენტის გამოკითხვის შედეგების მიხედვით (უფრო დიდი რიცხვი გვიჩვენებს დამოკიდებულების უფრო მაღალ ხარისხს), $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი დავასკვნათ, რომ ფილმის ნახვის შემდეგ დამოკიდებულება შეიცვალა? ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.

ფილმის ნახვამდე	12	11	14	9	8	6	8	5	4	7
ფილმის ნახვის შემდეგ	13	12	10	9	8	8	7	6	5	5

4. მკვლევარს აინტერესებს ახალი დიეტის გავლენა სისხლში ნატრიუმის დონეზე. შემთხვევით შეარჩიეს 10 პაციენტი და გაზომეს სისხლში ნატრიუმის დონე დიეტამდე და დიეტის შემდეგ. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი დავასკვნათ, რომ დიეტის შემდეგ სისხლში ნატრიუმის დონე შემცირდა?

პაციენტი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
დიეტამდე	146	138	152	163	136	147	148	141	143	142
შემდეგ	135	133	147	156	138	141	139	132	138	131

5. ოფისის მენეჯერს სურს გაარკვიოს გაზრდის თუ არა მდივნების მუშაობის სისწრაფეს საბეჭდი მანქანების შეცვლა კომპიუტერებით. ქვემოთ ნაჩვენებია 10 მდივნის მიერ წუთში დაბეჭდილი სიტყვების რაოდენობა საბეჭდ მანქანაზე და კომპიუტერზე. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით, გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი დავასკვნათ, რომ კომპიუტერზე გადასვლა ზრდის დაბეჭდილი სიტყვების რაოდენობას?

მდივანი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
საბეჭდი მანქანა	63	72	85	97	82	101	73	62	58	75
კომპიუტერი	68	80	95	93	80	106	82	78	65	83

6. მშობლიური ენის პედაგოგს სურს გაარკვიოს შეამცირებს თუ არა გრამატიკის ახალი პროგრამა იმ გრამატიკული შეცდომების რაოდენობას, რომელსაც უშვებენ სტუდენტები ორგვერდიანი თხზულების დაწერისას. ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.025$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ შეცდომების რაოდენობა შემცირდა?

სტუდენტი	1	2	3	4	5	6
შეცდომები პროგრამამდე	12	9	0	5	4	3
შეცდომები პროგრამის შემდეგ	9	6	1	3	2	3

7. ფეხსაცმლის მწარმოებლის მტკიცებით ის სპორტსმენები, რომლებსაც აცვიათ მისი ფირმის მიერ გამოშვებული ფეხსაცმელი დარბიან უფრო სწრაფად ვიდრე სხვა სპორტსმენები. ქვემოთმოყვანილი შემთხვევით შერჩეული 8 მორბენალის სისწარაფის მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.025$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დავადასტუროთ მწარმოებლის მტკიცებულება?

მორბენალი	1	2	3	4	5	6	7	8
ფირმის ფეხსაცმელით	8.2	6.3	9.2	8.6	6.8	8.7	8	6.9
სხვა ფეხსაცმელით	7.1	6.8	9.8	8	5.8	8	7.4	8

8. მკვლევარს აინტერესებს შეადაროს ტყუპების პულსთა რიცხვი ერთმანეთს. შერჩეულ იქნა ტყუპების რვა წყვილი და მათი პულსთა რიცხვის მონაცემები წუთში მოყვანილია ქვემოთ. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა პულსთა რიცხვს შორის განსხვავება არსებითი? ააგეთ 99%-იანი ნდობის

ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის. ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

ტყუპისცალი I	87	92	78	83	88	90	84	93
ტყუპისცალი II	83	95	79	83	86	93	80	86

9. უძრავი ქონების აგენტის მტკიცებით დედაქალაქში სამოთახიანი ბინის ფასები შეიცვალა. ქვემოთ მოყვანილია შემთხვევით შერჩეული 16 ბინის საექსპერტო ფასები (გაზომილი ათასობით ლარებში) შესაბამისად 2003 და 2008 წლებში. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ ბინების საექსპერტო ფასები შეიცვალა? ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

2003	2008	2003	2008	2003	2008	2003	2008
184	161	116	120	282	297	12	20
414	382	49	52	25	40	37	38
22	22	24	28	141	148	9	9
99	109	50	50	45	56	17	19

პასუხები:

1. $H_0 : a_D \le 0$, $H_1 : a_D > 0$; $C.V. = t_{9,0.05} = 1.833$; $t = 1.56$; არა – H_0. 2. $H_0 : a_D \ge 0$, $H_1 : a_D < 0$; $C.V. = t_{8,0.1} = -1.397$; $t = -2.8$; კი – H_1. 3. $H_0 : a_D = 0$, $H_1 : a_D \ne 0$; $C.V. = \pm t_{9,0.025} = \pm 2.262$; $t = 0.176$; არა – H_0; $(-1.18, 1.38)$. 4. $H_0 : a_D \le 0$, $H_1 : a_D > 0$; $C.V. = t_{9,0.05} = 1.833$; $t = 5.435$; არა – H_1. 5. $H_0 : a_D \ge 0$, $H_1 : a_D < 0$; $C.V. = t_{9,0.1} = -1.383$; $t = -3.4$; კი – H_1. 6. $H_0 : a_D \le 0$, $H_1 : a_D > 0$; $C.V. = t_{5,0.025} = 2.571$; $t = 2.24$; კი – H_0. 7. $H_0 : a_D \ge 0$, $H_1 : a_D < 0$; $C.V. = t_{7,0.025} = -2.365$; $t = 0.765$; არა – H_0. 8. $H_0 : a_D = 0$, $H_1 : a_D \ne 0$; $d.f. = 7$; $t = 0.978$; α < 0.2 < P-მნიშვნელობა < 0.5; H_0. 9. $H_0 : a_D = 0$, $H_1 : a_D \ne 0$; $d.f. = 15$; $t = -0.5$; P-მნიშვნელობა > 0.5 > α; არა – H_0.

თავი XIII
ორამოკრეფიანი ამოცანები ბერნულის სქემაში

ჰიპოთეზათა შემოწმება წარმატებათა ალბათობებისათვის ბერნულის ცდათა ორი დამოუკიდებელი მიმდევრობისათვის

$X_1,\dots,X_n$ და $Y_1,\dots,Y_m$ ორი დამოუკიდებელი შერჩევაა ბერნულის კანონით განაწილებული პოპულაციიდან შესაბამისად წარმატების უცნობი p_1 და p_2 ალბათობებით; $q_1=1-p_1$, $q_2=1-p_2$; $S_1=\sum_{i=1}^{n}X_i$, $S_2=\sum_{i=1}^{m}Y_i$; $\overline{P}_1=\dfrac{S_1}{n}$, $\overline{P}_2=\dfrac{S_2}{m}$; $\overline{p}_1=\dfrac{s_1}{n}=\dfrac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i$, $\overline{p}_2=\dfrac{s_2}{m}=\dfrac{1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{m}y_i$; $\overline{P}=\dfrac{n}{n+m}\overline{P}_1+\dfrac{m}{n+m}\overline{P}_2$; $\overline{p}=\dfrac{n}{n+m}\overline{p}_1+\dfrac{m}{n+m}\overline{p}_2$; $\overline{Q}=1-\overline{P}$; $\overline{q}=1-\overline{p}$.

კრიტერიუმი:

ორმხრივი	მარჯვენა ცალმხრივი	მარცხენა ცალმხრივი
$H_0: p_1=p_2$	$H_0: p_1=p_2$	$H_0: p_1=p_2$
	ან $H_0: p_1\le p_2$	ან $H_0: p_1\ge p_2$
$H_1: p_1\ne p_2$	$H_1: p_1>p_2$	$H_1: p_1<p_2$

ჰიპოთეზა: $H_0: p_1=p_2$

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $Z=\dfrac{(\overline{P}_1-\overline{P}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\overline{P}\overline{Q}(1/n+1/m)}}\overset{as}{\cong}N(0,1)$

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V.: $z=\dfrac{(\overline{p}_1-\overline{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\overline{p}\overline{q}(1/n+1/m)}}$

ალტერნატივა	კრიტიკული არე C.R. (H_0-ის უარყოფის არე)
$H_1: p_1>p_2$	$z\ge z_\alpha$,
$H_1: p_1<p_2$	$z\le -z_\alpha$,
$H_1: p_1\ne p_2$	$z\le -z_{\alpha/2}$ ან $z\ge z_{\alpha/2}$

(სადაც z_α არის $N(0,1)$-ის ზედა α-კრიტიკული წერტილი ანუ კრიტიკული მნიშვნელობა C.V.).

$$P\text{- მნიშვნელობა: } P=\begin{cases}1-\Phi(z),\ \text{თუ } H_1: a_1-a_2>0;\\ \Phi(z),\ \text{თუ } H_1: a_1-a_2<0;\\ 2\cdot[1-\Phi(|z|)],\ \text{თუ } H_1: a_1-a_2\ne 0.\end{cases}$$

გადაწყვეტილება: თუ $z\in$ C.R., მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

P- მნიშვნელობის მეთოდი: თუ $P \le \alpha$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ α მნიშვნელოვნების დონით, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

$(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალი $p_1 - p_2$ სხვაობისათვის:

$$((\overline{p}_1 - \overline{p}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}_1\overline{q}_1}{n} + \frac{\overline{p}_2\overline{q}_2}{m}}, (\overline{p}_1 - \overline{p}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}_1\overline{q}_1}{n} + \frac{\overline{p}_2\overline{q}_2}{m}})$$

(სადაც $\overline{q}_1 = 1 - \overline{p}_1$, $\overline{q}_2 = 1 - \overline{p}_2$).

შეზღუდვები: $np_1, nq_1, mp_2, mq_2 \ge 5$.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. მკვლევარმა დაადგინა, რომ 34 მცირე კლინიკიდან 12-ში, ისევე როგორც 24 დიდი კლინიკიდან 17-ში, დაკავებული საწოლების წილი ნაკლებია 80%-ზე. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ პროპორციები იმ მცირე და დიდ კლინიკების რომლებშიც დაკავებული საწოლების წილი ნაკლებია 80%-ზე ერთიდაიგივეა. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პროპორციათა სხვაობისათვის.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0: p_1 = p_2$, $H_1: p_1 \ne p_2$. აღვნიშნოთ $\overline{p}_1$ (შესაბამისად, $\overline{p}_2$) სიმბოლოთი პროპორცია იმ მცირე (შესაბამისად, იმ დიდი) კლინიკების რომლებშიც დაკავებული საწოლების წილი ნაკლებია 80%-ზე. გვაქვს:

$$\overline{p}_1 = \frac{s_1}{n} = \frac{12}{34} = 0.35 \text{ და } \overline{p}_2 = \frac{s_2}{m} = \frac{17}{24} = 0.71.$$

ამიტომ $\overline{p} = \frac{n}{n+m}\overline{p}_1 + \frac{m}{n+m}\overline{p}_2 = \frac{34}{34+24}\cdot 0.35 + \frac{24}{34+24}\cdot 0.71 = 0.5$, $\overline{q} = 1 - \overline{p} = 0.5$.

ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა. რადაგანაც კრიტერიუმი ორმხრივია და $\alpha = 0.05$, კრიტიკული მნიშვნელობები იქნება: $C.V. = \pm z_{\alpha/2} = \pm z_{0.025} = \pm 1.96$.

გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V. = z = \frac{(\overline{p}_1 - \overline{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\overline{p}\overline{q}}(1/n + 1/m)} = \frac{(0.35 - 0.71) - 0}{\sqrt{0.5\cdot 0.5\cdot(1/34 + 1/24)}} = -2.7.$$

ვინაიდან -2.7 < -1.96 (ე.ი. $T.V. \in C.R.$), ამიტომ ჩვენ უნდა უკუვაგდოთ ნულოვანი ჰიპოთეზა, ანუ ჩვენ გვაქვს საკმარისი საფუძველი უარვყოთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ პროპორციები არ განსხვავდება.

ავაგოთ ნდობის ინტერვალი. აქ $\overline{q}_1 = 1 - \overline{p}_1 = 0.65$, $\overline{q}_2 = 1 - \overline{p}_2 = 0.29$. ამიტომ საძიებელი ნდობის ინტერვალი იქნება:

$$((0.35 - 0.71) - 1.96\cdot\sqrt{\frac{0.35\cdot 0.65}{34} + \frac{0.71\cdot 0.29}{24}}, (0.35 - 0.71) + 1.96\cdot\sqrt{\frac{0.35\cdot 0.65}{34} + \frac{0.71\cdot 0.29}{24}})$$

$$(-0.36-0.242, -0.36+0.242),$$
$$(-0.602, -0.118).$$

ვინაიდან ნდობის ინტერვალი მოიცავს 0-ს, გადაწყვეტილება ისევ იქნება: უკუვაგდოთ ნულოვანი ჰიპოთეზა.

მაგალითი 2. შემთხვევით შერჩეულ 50 ადამიანს ერთი თვის განმავლობაში ასმევდნენ გარკვეულ წამალს, რამაც გამოიწვია მათ 60%-ში ქოლესტერინის დონის შემცირება. სხვა შემთხვევით შერჩეულ 80 ადამიანს ერთი თვის განმავლობაში ასმევდნენ სხვა წამალს, რამაც გამოიწვია მათ 25%-ში ქოლესტერინის დონის შემცირება. $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა პროპორციებს შორის მნიშვნელოვანი განსხვავება? ამოხსენით როგორც ჩვეულებრივი, ისე P-მნიშვნელობის მათოდით.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0: p_1=p_2$, $H_1: p_1 \neq p_2$.

გვაქვს: $n=50$, $m=80$, $\overline{p}_1=60\%=0.6$, $\overline{p}_2=25\%=0.25$. გამოვთვალოთ $\overline{p}$:

$$\overline{p}=\frac{n}{n+m}\overline{p}_1+\frac{m}{n+m}\overline{p}_2=\frac{50}{50+80}\cdot 0.6+\frac{50}{50+80}\cdot 0.25=0.385.$$

შესაბამისად, $\overline{q}=1-\overline{p}=0.615$.

ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა. რადაგანაც კრიტერიუმი ორმხრივია და $\alpha=0.01$, კრიტიკული მნიშვნელობები იქნება: $C.V.=\pm z_{\alpha/2}=\pm z_{0.005}=\pm 2.58$.

გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$T.V.=z=\frac{(\overline{p}_1-\overline{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\overline{p}\overline{q}}(1/n+1/m)}=\frac{(0.6-0.25)-0}{\sqrt{0.385\cdot 0.615\cdot(1/50+1/80)}}=3.99.$$

რადგანაც 3.99 > 2.58 (ე.ი. $T.V.\in C.R.$), ჩვენ უნდა უკუვაგდოთ ნულოვანი ჰიპოთეზა, ანუ ჩვენ გვაქვს საკმარისი საფუძველი დავასკვნათ, რომ პროპორციებს შორის განსხვავება მნიშვნელოვანია.

ვისარგებლოთ P-მნიშვნელობის მათოდით: ნორმალური განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ P-მნიშვნელობა იქნება:

$$2\cdot[1-\Phi(|z|)]=2\cdot[1-\Phi(3.99)]=2\cdot(1-0.999)=0.002.$$

ვინაიდან P-მნიშვნელობა = 0.002 < $\alpha=0.01$, ამიტომ გადაწყვეტილება ისევ იქნება: $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნების დონით პროპორციებს შორის განსხვავება მნიშვნელოვანია.

ამოცანები

1. მუშათა დასახლებიდან 150 შემთხვევით შერჩეულ ადამიანს შორის 80-ს აწუხებს ფილტვების ავადმყოფობა, ხოლო 100 შემთხვევით შერჩეული სოფლის მოსახლიდან 30-ს აწუხებს ფილტვების ავადმყოფობა. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა განსხვავება ამ ორ დასახლებაში ფილტვების ავადმყოფობის მქონე ადამიანების პროპორციებს შორის?

2. გამოკითხვის თანახმად შემთხვევით შერჩეული 80 ექიმიდან 15 მწეველია, ხოლო 50 იურისტიდან კი სიგარეტს ეწევა 5. $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების

დონით არის თუ არა ექიმებში მწეველთა პროპორცია უფრო მაღალი ვიდრე იურისტებში?

3. შემთხვევით შერჩეული 100 მომხმარებლიდან 43 ანგარიშსწორებისათვის იყენებს "მასტერქარდს", ხოლო შემთხვევით შერჩეული სხვა 100 მომხმარებლიდან 58 ანგარიშსწორებისათვის იყენებს "ვიზაქარდს". $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა განსხვავება იმ მომხმარებელთა პროპორციებს შორის, რომლებიც ანგარიშსწორებისათვის იყენებენ სხვადასხვა ტიპის საკრედიტო ბარათებს?

4. თბილისში შემთხვევით შერჩეული 73 ფოსტალიონიდან ერთი კვირის განმავლობაში 10 დაკბენილ იქნა მაწანწალა ძაღლის მიერ, ხოლო ქუთაისში კი შემთხვევით შერჩეული 80 ფოსტალიონიდან 16 დაკბენილ იქნა ძაღლის მიერ. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა მნიშვნელოვანი განსხვავება პროპორციებს შორის? ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პროპორციათა სხვაობისათვის.

5. გამოკითხვამ აჩვენა, რომ გამოკითხული მამაკაცების 83% ლექციასთან შედარებით უპირატესობას ანიჭებს კომპიუტერულ სწავლებას, ხოლო იგივე მაჩვენებელი ქალებისათვის შეადგენს 75%-ს. თითოეული პოპულაციისათვის აღებული იყო 100 – 100 ადამიანისაგან შემდგარი შერჩევა. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ მამაკაცებსა და ქალებში არ არსებობს განსხვავება იმ ადამიანების პროპორციებს შორის, რომლებიც ლექციასთან შედარებით უპირატესობას ანიჭებენ კომპიუტერულ სწავლებას. ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პროპორციათა სხვაობისათვის.

6. შემთხვევით შერჩეული 200 ქირურგიდან 15%-ს მიაჩნია, რომ ჯანმრთელობის დაცვაზე კონტროლს უნდა ახორციელებდეს სახელმწიფო, ხოლო შემთხვევით შერჩეული 200 თერაპევტიდან ასე ფიქრობს 21%. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა განსხვავება პროპორციებს შორის? ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი პროპორციათა სხვაობისათვის.

7. 80 გამოკითხული ამერიკელიდან 55% თვლის, რომ ის მდიდარია, ხოლო 90 გამოკითხული ევროპელიდან 45% თვლის, რომ ის მდიდარია. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა განსხვავება პროპორციებს შორის? ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი პროპორციათა სხვაობისათვის.

8. 200 გამოკითხული მამაკაციდან 130 ხმარობს უსაფრთხოების ღვედს, ხოლო 300 გამოკითხული ქალიდან 63 ხმარობს უსაფრთხოების ღვედს. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ მამაკაცები უფრო სერიოზულად ეკიდებიან უსაფრთხოებას, ვიდრე ქალები. ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

9. 80 გამოკითხული თბილისელიდან 45-ს აქვს კონდიციონერი, ხოლო 120 გამოკითხული ქუთაისელიდან 63-ს აქვს კონდიციონერი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა განსხვავება პროპორციებს შორის? ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პროპორციათა სხვაობისათვის.

10. 100 ბავშვისგან შემდგარ შერჩევაში 30% ნამყოფია ცირკში. სხვა 100 ბავშვისაგან შემდგარ შერჩევაში 24% ნამყოფია ცირკში. $\alpha = 0.02$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა განსხვავება პროპორციებს შორის? ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

11. 200 გამოკითხული მოზარდიდან 50-ს სჯერა, რომ ომი შეუქცევადია, მაშინ როცა 300 ასაკოვანი ადამიანიდან 93-ს სჯერა, რომ ომი შეუქცევადია. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა განსხვაევბა პროპორციებს შორის? ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი პროპორციათა სხვაობისათვის.

12. 50 პირველკურსელი სტუდენტიდან 8-ს აქვს საკუთარი ავტომანქანა, ხოლო 75 მეოთხეკურსელიდან კი 20-ს. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა, რომ საკუთარი ავტომობილის მქონე სტუდენტების პროპორცია მეოთხეკურსელებში უფრო მაღალია? ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

ამოცანები გამოცდისათვის

იგულისხმეთ, რომ სიდიდეები განაწილებულია ნორმალურად ან დაახლოებით ნორმალურად

13. შემთხვევით შერჩეული 100 – 100 ქირურგისა და სტომატოლოგის საშუალო წლიური შემოსავალი შეადგენს შესაბამისად 54107-სა და 58417 ლარს. ორივე შერჩევის შესწორებული სტანდარტული გადახრაა 81 ლარი. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ ამ პოპულაციათა საშუალოები არ განსხვავდება. ააგეთ 90%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.

14. გამოკითხული მარტოხელა და დაქორწინებული მძღოლების ორი ჯგუფის მიერ კვირის განმავლობაში განვლილი მანძილების ქვემოთ მოყვანილი მონაცემების მიხედვით $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ მარტოხელა მძღოლები საშუალოდ უფრო მეტს გადიან კვირაში დაქორწინებულებთან შედარებით?

მარტოხელა მძღოლები					დაქორწინებული მძღოლები				
106	119	110	115	108	97	133	139	140	101
110	97	117	114	117	115	113	104	120	108
115	118	116	103	152	136	114	109	119	138
121	122	138	98	147	119	117	113	116	147
132	135	142	99	117	99	102	136	145	113
154	107	86	133	115	113	106	108	115	96
138	116	142	104	140	114	150	135	88	105

15. განათლების ინსპექტორს აინტერესებს შეადაროს მოსწავლეებზე დახარჯული თანხების დისპერსიები ქალაქად და სოფლად. შესაბამისი შემთხვევითი შერჩევებიდან მიღებული შესწორებული შერჩევითი დისპერსიებია: $s_1'^2 = 585$, $s_2'^2 = 261$ (შერჩევათა მოცულობებია: $n = 18$, $m = 16$). $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა მნიშვნელოვანი განსხვაევბა პოპულაციათა დისპერსიებს შორის?

16. მკვლევარს სურს შეადაროს I და II ლიგის ფეხბურთელების სიმაღლეების დისპერსიები. თითოეული ლიგიდან შემთხვევით შეარჩიეს 25 – 25 მოთამა-

შე და მათი სიმაღლეების შესწორებული შერჩევითი დისპერსიები აღმოჩნდა შესაბამისად 2.25 და 4.85. $\alpha=0.1$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა მნიშვნელოვანი განსხვავება I და II ლიგის ფეხბურთელების სიმაღლეების დისპერსიებს შორის?

17. კლინიკის ინტენსიური თერაპიის შემთხვევით შერჩეულ 11 ოთახში ხმაურის დონის შესწორებული სტანდარტული გადახრა აღმოჩნდა 4.2 დეციბალი, ხოლო შემთხვევით შერჩეულ არასამკურნალო დანიშნულების 24 ოთახში – 13.2 დეციბალი. $\alpha=0.1$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა მნიშვნელოვანი განსხვავება კლინიკის სამკურნალო და არასამკურნალო დანიშნულების ოთახებში ხმაურის დონის სტანდარტულ გადახრებს შორის?

18. შემთხვევით შერჩეული 30 დღის განმავლობაში დედაქალაქის A სკოლაში გაკვეთილების გაცდენათა შესწორებული სტანდარტული გადახრა აღმოჩნდა 4.9, ხოლო დედაქალაქის B სკოლაში – 2.5. $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ სტანდარტული გადახრები განსხვავებულია?

19. მკვლევარის ვარაუდით, რომ ქარხნის მუშაკთა მიერ ავადმყოფობის გამო წელიწადში გაცდენილი დღეების რაოდენობის ცვალებადობა უფრო მეტია ვიდრე კლინიკის მუშაკთათვის. დიდი კლინიკის შემთხვევით შერჩეული 42 მუშაკზისათვის შესწორებული სტანდარტული გადახრა აღმოჩნდა 2.1 დღე, ხოლო დიდი ქარხნის შემთხვევით შერჩეული 65 მუშაკისათვის – 3.2 დღე. შეამოწმეთ ჰიპოთეზა $\alpha=0.1$ მნიშვნელოვნების დონით.

20. 15 სახის სოკოს სუფის საშუალო ღირებულება შეადგენს 0.73 ლარს, ხოლო შესწორებული შერჩევითი სტანდარტული გადახრა კი 0.05 ლარს. შემთხვევით შერჩეული 24 სახეობის ქათმის სუფისათვის ანალოგიური მახასიათებლები შესაბამისად არის 0.91 ლარი და 0.03 ლარი. $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა ფასებს შორის განსხვავება მნიშვნელოვანი?

21. შემთხვევით შერჩეულ 25 დღიან პერიოდში A და B საქონელზე არსებული ფასების მონაცემების მიხედვით, $\alpha=0.1$ მნიშვნელოვნების დონით, შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ A საქონელი უფრო ძვირია, ვიდრე B საქონელი?

A საქონელი

78	82	68	67	68
75	73	75	64	68
62	73	77	78	79
74	72	73	78	68
73	79	82	71	66

B საქონელი

70	74	73	60	77
71	72	71	74	76
71	80	65	70	83
67	76	75	62	65
66	65	77	66	64

22. შემთხვევით შერჩეული 15 ევროპელი პედაგოგის საშუალო წლიური შემოსავალი შეადგენს 35270\$-ს, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა ტოლია 3256\$-ის. ანალოგიური მახასიათებლები შემთხვევით შერჩეული 30 ამერიკელი პედაგოგისათვის შესაბამისად ტოლია 29512\$-ისა და 1432\$-ის. არის თუ არა მნიშვნელოვანი განსხვავება შემოსავლებს შორის $\alpha=0.02$ მნიშვნელოვნების დონით? ააგეთ 99%-იანი ნდობის ინტერვალი საშუალოთა სხვაობისათვის.

23. დედაქალაქის შემთხვევით შერჩეული 16 ოჯახის საშუალო წლიური შემოსავალი არის 54356 ლარი, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა კი 8256 ლარი. გარეუბნის შემთხვევით შერჩეული 12 ოჯახის საშუალო წლიური შემოსავალი შესადგენს 46512 ლარს, ხოლო შესწორებული სტანდარტული გადახრა ტოლია 1311 ლარის. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ დედაქალაქის მცხოვრებთა წლიური შემოსავალი მეტია ვიდრე გარეუბანში მცხოვრებლების? ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით?

24. პედაგოგს სურს გაზარდოს 10 სტუდენტის სიტყვების მარაგი უცხო ენაში. ამ მიზნით იგი მათ კვირაში ერთჯერ უტარებს დამატებით სემინარებს. დამატებითი სემინარების ჩატარებამდე და სემინარების ჩატარების შემდეგ ჩატარებული ტესტირების ქვემოთმოყვანილი შედეგების მიხედვით, $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით, შეუძლია თუ არა პედაგოგს დავასკვნას, რომ სემინარებმა შედეგი გამოიღო?

სტუდენტის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
სემინარების ჩატარებამდე	83	76	92	64	82	68	70	71	72	63
სემინარების შემდეგ	88	82	100	72	81	75	79	68	81	70

25. შრომის ნაყოფიერების გაზრდის მიზნით ავტონაწილების საამქროს მენეჯერმა გადაწყვიტა სამუშაო ადგილას სამუშაო დროის განმავლობაში ჩაერთო მსუბუქი მუსიკა. შემთხვევით შეარჩიეს რვა მუშა და დათვალეს მათ მიერ გამოშვებული დეტალების რაოდენობა მუსიკის ჩართვამდე და მუსიკის ჩართვიდან ერთი კვირის შემდეგ. ქვემოთ მოყვანილი შესაბამისი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეუძლია თუ არა მენეჯერს დავასკვნას, რომ მუსიკამ გაზარდა შრომის ნაყოფიერება?

მუშის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8
მუსიკის ჩართვამდე	6	8	10	9	5	12	9	7
მუსიკის შემდეგ	10	12	9	12	8	13	8	10

26. 365 დღიდან ლონდონში 207 დღე ნისლიანია, ხოლო სტოკჰოლმში კი 166 დღე. $\alpha = 0.02$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ ნისლიანი დღეების პროპორცია ამ ორ ქალაქში განსხვავებულია? ააგეთ 98%-იანი ნდობის ინტერვალი პროპორციათა სხვაობისათვის.

27. 50 გამოკითხული დედაქალაქის მცხოვრებიდან 32 აქვს მიკროტალღოვანი ქურა, ხოლო 60 გამოკითხული გარეუბანში მცხოვრებიდან 24 აქვს მიკროტალღოვანი ქურა. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა ვთქვათ, რომ პროპორციები ერთიდაიგივეა? ააგეთ 95%-იანი ნდობის ინტერვალი პროპორციათა სხვაობისათვის.

პასუხები:

1. $H_0: p_1 = p_2$, $H_1: p_1 \neq p_2$; $C.V. = \pm z_{0.025} = \pm 1.96$; $z = 3.64$; კი – H_1. **2.** $H_0: p_1 \leq p_2$, $H_1: p_1 > p_2$; $C.V. = z_{0.05} = 1.65$; $z = 1.36$; კი – H_1. **3.** $H_0: p_1 = p_2$, $H_1: p_1 \neq p_2$; $C.V. = \pm z_{0.025} = \pm 1.96$; $z = -2.12$; კი – H_1. **4.** $H_0: p_1 = p_2$, $H_1: p_1 \neq p_2$; $C.V. = \pm z_{0.025} = \pm 1.96$; $z = -0.99$; არა – H_0; (-0.181, 0.055). **5.** $H_0: p_1 = p_2$, $H_1: p_1 \neq p_2$; $C.V. = \pm z_{0.025} = \pm 1.96$; $z = 1.39$; H_0; (-0.032, 0.192). **6.** $H_0: p_1 = p_2$, $H_1: p_1 \neq p_2$; $C.V. = \pm z_{0.05} = \pm 1.65$; $z = -1.56$; არა – H_0; (-0.123, 0.003). **7.** $H_0: p_1 = p_2$, $H_1: p_1 \neq p_2$; $C.V. = \pm z_{0.005} = \pm 2.58$; $z = 1.302$; არა – H_0; (-0.097, 0.297). **8.** $H_0: p_1 \leq p_2$, $H_1: p_1 > p_2$; $z = 9.9$; P-მნიშვნელობა < 0.001 < $\alpha = 0.01$; H_1. **9.** $H_0: p_1 = p_2$, $H_1: p_1 \neq p_2$; $C.V. = \pm z_{0.025} = \pm 1.96$; $z = 0.521$; არა – H_0; (-0.103, 0.178). **10.** $H_0: p_1 = p_2$, $H_1: p_1 \neq p_2$; $z = 0.96$; P-მნიშვნელობა 0.337 > $\alpha = 0.02$; არა – H_0. **11.** $H_0: p_1 = p_2$, $H_1: p_1 \neq p_2$; $C.V. = \pm z_{0.005} = \pm 2.58$; $z = -1.45$; არა – H_0; (-0.165, 0.045). **12.** $H_0: p_1 \geq p_2$, $H_1: p_1 < p_2$; $z = -1.41$; P-მნიშვნელობა = 0.0793 > α; არა – H_0. **13.** $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$; $C.V. = \pm z_{0.05} = \pm 1.65$; $z = -3.76$; H_1; (-62, -24.2). **14.** $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$, $H_1: \mu_1 > \mu_2$; $C.V. = z_{0.01} = 2.33$; $z = 0.59$; H_0. **15.** $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$; $C.V. = F_{17,15,0.025} = 2.86$; $T.V. = \overline{f} = 2.24$; არა – H_0. **16.** $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$; $C.V. = F_{24,24,0.05} = 1.98$; $T.V. = \overline{f} = 2.16$; კი – H_1. **17.** $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$, $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$; $C.V. = F_{23,10,0.05} = 2.77$; $T.V. = \overline{f} = 10.365$; კი – H_1. **18.** $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$, $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$; $C.V. = F_{29,29,0.005} = 2.76$; $T.V. = \overline{f} = 3.84$; კი – H_1. **19.** $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$; $C.V. = F_{64,41,0.1} = 1.47$; $T.V. = \overline{f} = 2.32$; H_1. **20.** I). $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$; $C.V. = F_{14,23,0.005} = 3.47$; $T.V. = \overline{f} = 2.78$; H_0; II). $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$; $C.V. = \pm t_{37,0.005} = \pm 2.74$; $t = -14.09$; H_1 **21.** I). $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$; $C.V. = 1.98$; $T.V. = \overline{f} = 1.11$; H_0; II). $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$, $H_1: \mu_1 > \mu_2$; $C.V. = 1.28$; $t = 1.31$; H_1. **22.** I). $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$; $C.V. = 2.87$; $T.V. = \overline{f} = 5.17$; H_1; II). $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$; $C.V. = \pm 2.624$; $d.f. = 14$; $t = 6.54$; H_1; III). (3447.8, 8068.2). **23.** I). $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$; $T.V. = \overline{f} = 39.7$; P-მნიშვნელობა < 0.05; H_1; II). $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$, $H_1: \mu_1 > \mu_2$; $d.f. = 11$; $t = 3.74$; P-მნიშვნელობა < 0.005; H_1. **24.** $H_0: a_D \geq 0$, $H_1: a_D < 0$; $C.V. = t_{9,0.01} = -2.821$; $T.V. \equiv t = -4.17$; კი – H_1. **25.** $H_0: a_D \geq 0$, $H_1: a_D < 0$; $C.V. = t_{7,0.05} = -1.895$; $T.V. \equiv t = -2.73$; კი – H_1. **26.** $H_0: p_1 = p_2$, $H_1: p_1 \neq p_2$; $C.V. = \pm z_{0.01} = \pm 2.33$; $z = 3.03$; კი – H_1; (0.027, 0.198). **27.** $H_0: p_1 = p_2$, $H_1: p_1 \neq p_2$; $C.V. = \pm z_{0.025} = \pm 1.96$; $z = 2.51$; არა – H_1; (0.058, 0.422).

თავი XIV
თანხმობის კრიტერიუმები

ხი-კვადრატ თანხმობის კრიტერიუმის ფორმულა:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E},$$

სადაც O – **დაკვირვებული სიხშირეა** (observed frequency), E – **მოსალოდნელი სიხშირე** (expected frequency), ხოლო თავისუფლების ხარისხი ტოლია კატეგორიათა (კლასთა) რაოდენობას (n) გამოკლებული 1 ($d.f.=n-1$).

შეზღუდვები: 1. მონაცემები მიღებულია შემთხვევითი შერჩევიდან; 2. თითოეული კატეგორიის მოსალოდნელი სიხშირე უნდა იყოს მეტი ან ტოლი 5-ის (თუ უკანასკნელი პირობა არ სრულდება, უნდა მოხდეს კატეგორიის გაერთიანება სხვა კატეგორიასთან ისე, რომ გაერთიანებული კატეგორიის მოსალოდნელი სიხშირე გახდეს მეტი ან ტოლი 5-ის).

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V. $= \chi^2 = \sum_i \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$.

კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია.

კრიტიკული მნიშვნელობა $C.V. = \chi^2_{n-1,\alpha}$.

კრიტიკული არე C.R. (**H_0-ის უარყოფის არე**) $= [\chi^2_{n-1,\alpha}, +\infty)$

P **- მნიშვნელობა** $= P\{\chi^2(n-1) > T.V.\}$

გადაწყვეტილება: თუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა მეტია ან ტოლი კრიტიკულ მნიშვნელობაზე (T.V. $\geq$C.V.), მაშინ ნულოვან ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

P**- მნიშვნელობის მეთოდი:** თუ $P \leq \alpha$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. მაღაზიის მენეჯერს აინტერესებს ანიჭებს თუ არა მომხმარებელი უპირატესობას ლიმონათის ხუთი განსხვავებული გემოდან რომელიმეს. 100 შემთხვევით შერჩეული მომხმარებლიდან 32-მა აარჩია ალუბალის, 28-მ მარწყვის, 16-მა ფორთოხალის, 14-მა ფეიხოს და 10-მა ყურძნის გემოს მქონე ლიმონათი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უკუვაგდოთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ მომხმარებელი არ ანიჭებს უპირატესობას არც ერთ გემოს?

ამოხსნა. იმ შემთხვევაში, თუ მომხმარებელი არ ანიჭებს უპირატესობას არც ერთ გემოს, მაშინ უნდა ველოდოთ, რომ ყველა გემოს სიხშირე ტოლია, ანუ ჩვენს შემთხვევაში მოსალოდნელი სიხშირეებია: 100/5 = 20. შესაბამისად, ჩვენ გვაქვს სიხშირეთა განაწილების შემდეგი ცხრილი:

სიხშირე	ალუბალი	მარწყვი	ფორთოხალი	ფეიხო	ყურძენი
დაკვირვებული, o_i	32	28	16	14	10
მოსალოდნელი, e_i	20	20	20	20	20

ნაბიჯი 1. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები:

H_0 მომხმარებლებისათვის მნიშვნელობა არა აქვს გემოს.

H_1 : მომხმარებლებისათვის მნიშვნელობა აქვს გემოს.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა. აქ თავისუფლების ხარისხია 5 – 1 = 4, $\alpha = 0.05$. შესაბამისად, ხი-კვადრატ განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ $C.V. = \chi^2_{n-1,\alpha} = \chi^2_{4,0.05} = 9.488$.

ნაბიჯი 3. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(32-20)^2}{20} + \frac{(28-20)^2}{20} + \frac{(16-20)^2}{20} +$$

$$+ \frac{(14-20)^2}{20} + \frac{(10-20)^2}{20} = 18.$$

ნაბიჯი 4. გადაწყვეტილების მიღება: ვინაიდან 18 > 9.488, ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უკუვაგდოთ, ანუ ჩვენ გვაქვს საკმარისი საფუძველი რათა ჩავთვალოთ, რომ მომხმარებლებისათვის მნიშვნელობა აქვს ლიმონათის გემოს.

მაგალითი 2. სტატისტიკის დეპარტამენტის მონაცემებით, იმ ადამიანებიდან ვინც ერთხელ დაკარგა სამუშაო, 38% შოულობს ახალ სამუშაოს, 32% ხდება ნახევრადდასაქმებული, 23% მუშაობს კონტრაქტის გარეშე და 7% იწყებს საკუთარ ბიზნესს. იმის გასარკვევად, ეს პროცენტები არის თუ არა მდგრადი, გამოკითხულ იქნა A კომპანიიდან დათხოვნილი 300 ადამიანი და აღმოჩნდა, რომ 122 იშოვა ახალი სამუშაო, 85 ნახევრადდასაქმებულია, 76 მუშაობს კონტრაქტის გარეშე და 17 ადამიანმა დაიწყო საკუთარი ბიზნესი. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა პროცენტების მდგრადობის შესახებ. ისარგებლეთ როგორც ჩვეულებრივი, ისე P-მნიშვნელობის მეთოდით.

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები:

H_0 მეორედ დასაქმებულ ადამიანთა განაწილება შემდეგია: 38% მუშაობს ახალ სამსახურში, 32% – ნახევრადდასაქმებულია, 23% მუშაობს კონტრაქტის გარეშე და 7% დაიწყო საკუთარი ბიზნესი.

H_1 განაწილება არ არის ისეთი როგორც ნულოვან ჰიპოთეზაშია.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა. ამ შემთხვევაში თავისუფლების ხარისხი $d.f. = 4-1 = 3$, $\alpha = 0.1$. ამიტომ, ხი-კვადრატ განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ $C.V. = \chi^2_{n-1,\alpha} = \chi^2_{3,0.1} = 6.251$

ნაბიჯი 3. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა. მოსალოდნელ სიხშირეთა მნიშვნელობები გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$e_1 = 300 \cdot 0.38 = 114\,,\ e_2 = 300 \cdot 0.32 = 96\,,\ e_3 = 300 \cdot 0.23 = 69\,,\ e_4 = 300 \cdot 0.07 = 21.$$

შესაბამისად,

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(122-114)^2}{114} + \frac{(85-96)^2}{86} + \frac{(76-69)^2}{69} + \frac{(17-21)^2}{21} = 3.2939.$$

ნაბიჯი 4. გადაწყვეტილების მიღება: რადგანაც 3.2939 < 6.251, ამიტომ ძირითადი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს, ანუ პროცენტები არ არის

მნიშვნელოვნად განსხვავებული იმისაგან, რაც ჩამოყალიბებულია ნულოვან ჰიპოთეზაში (პროცენტები მდგრადია).

ვისარგებლოთ ახლა P**-მნიშვნელობის მეთოდით:** ხი-კვადრატ განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ P- მნიშვნელობა $= P\{\chi^2(3) > 3.293\} > \alpha = 0.1$ (რადგანაც $\chi^2_{3,0.1} = 6.251$). შესაბამისად, გადაწყვეტილება იქნება იგივე: ძირითადი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს.

მაგალითი 3. უნივერსიტეტის ეკოლოგიური კლუბის მენეჯერის მტკიცებით კლუბის 10%-ს შეადგენს პირველკურსელები, 20% – მეორეკურსელია, 40% – მესამეკურსელი და 30% კი მეოთხეკურსელი. მიმდინარე წელს კლუბში ირიცხება 14 პირველკურსელი, 19 მეორეკურსელი, 51 მესამეკურსელი და 16 მეოთხეკურსელი. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ მენეჯერის ჰიპოთეზა.

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები:

H_0 ეკოლოგიური კლუბის შემადგენლობის 10%, 20%, 40% და 30% შესაბამისად არის I, II, III და IV კურსელი.

H_1 : განაწილება არ არის ისეთი როგორც ნულოვან ჰიპოთეზაშია.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა: $C.V. = \chi^2_{n-1,\alpha} = \chi^2_{3,0.1} = 6.251$

ნაბიჯი 3. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა. მოსალოდნელ სიხშირეთა მნიშვნელობებია:

$$e_1 = 100 \cdot 0.1 = 10,\ e_2 = 100 \cdot 0.2 = 20,\ e_3 = 100 \cdot 0.4 = 40,\ e_4 = 100 \cdot 0.3 = 30.$$

ამიტომ

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(14-10)^2}{10} + \frac{(19-20)^2}{20} + \frac{(51-40)^2}{40} + \frac{(16-30)^2}{30} = 11.208.$$

ნაბიჯი 4. გადაწყვეტილების მიღება: რადგანაც 11.208 > 6.251, ამიტომ ძირითად ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, ანუ ჩვენ გვაქვს საკმარისი საფუძველი უარვყოთ მენეჯერის მტკიცებულება კლუბის შემადგენლობის შესახებ.

ნორმალურობის შემოწმების ხი-კვადრატ კრიტერიუმი

მაგალითი 5. ხი-კვადრატ კრიტერიუმის გამოყენებით შეამოწმეთ ξ სიდიდე, რომლის სიხშირული განაწილება მოყვანილია ქვემოთ, $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, არის თუ არა ნორმალურად განაწილებული.

კლასის საზღვრები	სიხშირე
89.5—104.5	24
104.5—119.5	62
119.5—134.5	72
134.5—149.5	26
149.5—164.5	12
164.5—179.5	4
$\sum$	200

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები:

H_0 სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად.

H_1 სიდიდე არ არის განაწილებული ნორმალურად.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ სიდიდის საშუალო და შესწორებული სტანდარტული გადახრა. ვისარგებლოთ შემდეგი ცხრილით:

საზღვრები	სიხშირე, f_m	შუაწერტილები, x_m	$f_m \cdot x_m$	$f_m \cdot x_m^2$
89.5—104.5	24	97	2328	225816
104.5—119.5	62	112	6944	777728
119.5—134.5	72	127	9144	1161288
134.5—149.5	26	142	3692	524264
149.5—164.5	12	157	1884	295788
164.5—179.5	4	172	688	118336
$\sum$	200		24680	3103220

შესაბამისად გვაქვს: $\bar{x} = 24680/200 = 123.4$ და

$$s^{\cdot} = \frac{1}{n-1}\sqrt{\sum_{m=1}^{n} f_m \cdot x_m^2 - (\sum_{m=1}^{n} f_m \cdot x_m)^2 / n} = \frac{1}{199} \cdot \sqrt{3103220 - 24680^2 / 200} = 17.03$$

ნაბიჯი 3. ვიპოვოთ კლასის საზღვრებში ξ სიდიდის მოხვედრის ალბათობები მისი ნორმალურად განაწილებულობის დაშვების შემთხვევაში. ამისათვის, მოვახდინოთ ξ სიდიდის, და შესაბამისად კლასის საზღვრების სტანდარტიზაცია, ანუ თითოეული საზღვარი გადავიყვანოთ ე. წ. z საზღვარში $z = \frac{x - \bar{x}}{s^{\cdot}}$ ფორმულის მიხედვით. მაშინ საზღვრები 104.5, 119.5, 134.5, 149.5, 164.5 შეიცვლება შესაბამისად საზღვრებით: -1.11, -0.23, 0.65, 1.53, 2.41 და ნორმალური განაწილების ცხრილის გამოყენებით გვექნება:

$$P\{\xi \le 104.5\} = P\{z \le -1.11\} = 0.1335;$$
$$P\{104.5 \le \xi \le 119.5\} = P\{-1.11 \le z \le -0.23\} = 0.2755;$$
$$P\{119.5 \le \xi \le 134.5\} = P\{-0.23 \le z \le 0.65\} = 0.3332;$$
$$P\{134.5 \le \xi \le 149.5\} = P\{0.65 \le z \le 1.53\} = 0.1948;$$
$$P\{149.5 \le \xi \le 164.5\} = P\{1.53 \le z \le 2.41\} = 0.055; \quad P\{\xi \ge 164.5\} = P\{z \ge 2.41\} = 0.008.$$

ნაბიჯი 4. ვიპოვოთ მოსალოდნელ სიხშირეთა მნიშვნელობები, რისთვისაც ზემოთმიღებული ალბათობები გავამრავლოთ 200-ზე. მოსალოდნელ სიხშირეთა მნიშვნელობებია:

$$e_1 = 200 \cdot 0.1335 = 26.7, \quad e_2 = 200 \cdot 0.2755 = 55.1, \quad e_3 = 200 \cdot 0.3332 = 66.64,$$
$$e_4 = 200 \cdot 0.1948 = 38.96; \quad e_5 = 200 \cdot 0.055 = 11; \quad e_6 = 200 \cdot 0.008 = 1.6.$$

შენიშვნა: ვინაიდან უკანასკნელი კატეგორიის მოსალოდნელი სიხშირე ნაკლებია 5-ზე, ის უნდა გაერთიანდეს წინა კატეგორიასთან და საბოლოოდ გვექნება სიხშირეთა განაწილების შემდეგი ცხრილი:

o_i	24	62	72	26	16
e_i	26.7	55.1	66.64	38.96	12.6

(აქ $16 = 12 + 4$ და $12.6 = 11 + 1.6$)

ნაბიჯი 5. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(24-26.7)^2}{26.7} + \frac{(62-55.1)^2}{55.1} + \frac{(72-66.64)^2}{66.64} +$$

$$+ \frac{(26-38.96)^2}{38.96} + \frac{(16-12.6)^2}{12.6} = 6.797$$

ნაბიჯი 6. ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა. ვინაიდან კატეგორიათა რაოდენობა გახდა 5 ამიტომ თავისუფლების ხარისხი იქნება $d.f. = 5-1=4$. შესაბამისად, $C.V. = \chi^2_{n-1,\alpha} = \chi^2_{4,0.05} = 9.488$

ნაბიჯი 7. გადაწყვეტილების მიღება: რადგანაც 6.797 < 9.488, ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს, ანუ ξ სიდიდის განაწილება შეიძლება ჩაითვალოს, რომ დაახლოებით ნორმალურია.

ამოცანები

1. გადაუდებელი სამედიცინო სამსახურის ხელმძღვანელს სურს დაადგინოს არის თუ არა თანაბრად განაწილებული კვირის განმავლობაში გამოძახებათა რიცხვი. ქვემოთ მოყვანილია შემთხვევით არჩეული კვირის განმავლობაში სამსახურში შემოსულ გამოძახებათა რაოდენობები. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უარვყოთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ კვირის განმავლობაში გამოძახებათა რიცხვი განაწილებულია თანაბრად?

დღე	ორშ.	სამშ.	ოთხშ.	ხუთშ.	პარას.	შაბ.	კვირა
გამოძ. რაოდ.	28	32	15	14	38	43	19

2. ბავშვთა საწვიმარი ლაბადის მწარმოებელს სურს გაარკვიოს ანიჭებს თუ არა მომხმარებელი უპირატესობას ლაბადის რომელიმე ფერს. შემთხვევით შეარჩიეს 50 გაყიდული საწვიმარი ლაბადა და ჩაინიშნეს მათი ფერი. მონაცემები მოყვანილია ქვემოთ. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით ენიჭება თუ არა უპირატესობა რომელიმე ფერს?

ფერი	ყვითელი	წითელი	მწვანე	ლურჯი
გაყიდვ. რაოდ.	17	13	8	12

3. ბარის მენეჯერს სურს გაარკვიოს ანიჭებს თუ არა მომხმარებელი უპირატესობას შარბათში რომელიმე ხილის გემოს. ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ მომხმარებელთა მიერ შეკვეთილ შარბათში ხილის გემო განაწილებულია თანაბრად?

გემო	ლიმონი	ფორთოხალი	მარწყვი	ფეიხო
შეკვ. რაოდ.	12	24	19	9

4. ბანკის მენეჯერს აინტერესებს დროის რომელ მონაკვეთს ანიჭებენ ბანკის კლიენტები უპირატესობას ბანკში მისასვლელად. შეარჩიეს 6 საათი და ქვემოთ მოყვანილია თითოეული საათის განმავლობაში ბანკში მოსული კლიენტების რაოდენობები. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით ჩანს თუ არა, რომ ბანკის კლიენტები დროის რომელიმე მონაკვეთს ანიჭებენ უპირატესობას?

დრო	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00
კლიენტ. რაოდ.	26	33	42	36	24	19

5. აშშ-ის წითელი ჯვრის საზოგადოების მონაცემებით ამერიკელთა 42%-ს აქვს O ჯგუფის სისხლი, 44%-ს – A ჯგუფის სისხლი, 10%-ს – B ჯგუფის სისხლი და 4%-ს – AB ჯგუფის სისხლი. გარკვეული საგრაფოს სამედიცინო ექსპერტის მოსაზრებით მის საგრაფოში სისხლის ჯგუფის განაწილება იგივეა რაც ზოგადნაციონალური. ამ საგრაფოდან შემთხვევით შერჩეული 200 ადამიანის სისხლის ჯგუფის მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით, შეამოწმეთ ექსპერტის მოსაზრება.

ჯგუფი	A	O	B	AB
სიხშირე	58	65	55	22

6. ეკონომიკისა და ბიზნესის ფაკულტეტის დეკანატის მტკიცებით სტუდენტთა საბოლოო შეფასებები გარკვეულ დისციპლინაში განაწილებულია შემდეგნაირად: 40% – A, 30% -- B, 20% -- C, 5% -- D და 5% -- F. გასული სემესტრის ბოლოს ამ დისციპლინაში სტუდენტთა მიერ მიღებული შეფასებების მიხედვით, $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, განსხვავდება თუ არა ამ დისციპლინაში საბოლოო შეფასებები მოსალოდნელისაგან?

შეფასება	A	B	C	D	E
რაოდენობა	45	52	39	8	6

7. კვლევის თანახმად მომხმარებელთა 53% არჩევს ნაღდი ფულის გადახდას სალაროში, 30% სარგებლობს ჩეკებით, 16% იყენებს საკრედიტო ბარათებს, და 1%-სათვის არა აქვს მნიშვნელობა რა ფორმით გადაიხდის. დიდი მაღაზიის მეპატრონემ შემთხვევით შეარჩია 800 მყიდველი და შეეკითხა მათ თუ რა ფორმით არჩევდნენ გადახდას. აღმოჩნდა, რომ მათ შორის 400 იხდის ნაღდი ფულით, 210 იხდის ჩეკებით, 170 სარგებლობს საკრედიტო ბარათებით და 20-სათვის მნიშვნელობა არა აქვს გადახდის ფორმას. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ ამ მაღაზიის მომხმარებლების გადახდის ფორმებთან დამოკიდებულება ემთხვევა კვლევის შედეგებს.

8. იარაღის მაღაზიის მენეჯერს სურს დაადგინოს თუ რომელ თვეში ამჯობინებენ მომხმარებლები სანადირო თოფის ყიდვას. ქვემოთმოყვანილი გასული წლის გაყიდვების მაჩვენებლების მიხედვით, $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ არცერთ თვეს არა აქვს უპირატესობა სანადირო თოფის ყიდვისას.

თვე	სექტემბერი	ოქტომბერი	ნოემბერი	დეკემბერი
გაყიდვ. რაოდ.	18	23	28	15

9. პროგრამული უზრუნველყოფის დეპარტამენტის მენეჯერს მოსაზრებით მისი მომხმარებლების 50% ყიდულობს ტექსტის დასამუშავებელ პროგრამებს,

25% – ელექტრონული გათელის პროგრამებს, და 25% – მონაცემთა ბაზების პროგრამებს. შემთხვევით შერჩეულ მყიდველთა ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, სწორია თუ არა მენეჯერის მოსაზრება? ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

პროგრამა	ტექსტის დამუშ.	ელექტრ. გათვ.	მონაც. ბაზები
გაყიდვ. რაოდ.	38	23	19

10. სამ მონეტას აგდებენ 72-ჯერ. მოსულ გერბთა რაოდენობის ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ მონეტები წესიერია.

გერბთა რაოდ.	0	1	2	3
სიხშირე	3	10	17	42

პასუხები:

1. H_0 თანაბარია, H_1 არათანაბარია; $C.V. = \chi^2_{6,0.05} = 12.59$; $T.V. = \chi^2 = 28.887$; H_1. 2. H_0 არ ენიჭება, H_1 ენიჭება; $C.V. = \chi^2_{3,0.1} = 6.251$; $T.V. = \chi^2 = 3.28$; H_0. 3. H_0 არ ენიჭება (თანაბარია), H_1 ენიჭება (თანაბარია); $C.V. = \chi^2_{3,0.01} = 11.345$; $T.V. = \chi^2 = 8.625$; კი – H_0. 4. H_0 არ ანიჭებენ, H_1 ანიჭებენ; $C.V. = \chi^2_{5,0.05} = 11.071$; $T.V. = \chi^2 = 12.067$; კი – H_1. 5. H_0 იგივეა, H_1 განსხვავებულია; $C.V. = \chi^2_{3,0.1} = 6.251$; $T.V. = \chi^2 = 100.275$; H_1. 6. H_0: იგივეა, H_1 განსხვავებულია; $C.V. = \chi^2_{4,0.05} = 9.488$; $T.V. = \chi^2 = 7.872$; არა $-H_0$. 7. H_0 ემთხვევა, H_1 არ ემთხვევა; $C.V. = \chi^2_{3,0.01} = 11.345$; $T.V. = \chi^2 = 36.8897$; H_1. 8. H_0 არა აქვს უპირატესობა, H_1 აქვს უპირატესობა; $C.V. = \chi^2_{3,0.05} = 7.815$; $T.V. = \chi^2 = 4.67$; H_0. 9. H_0 სწორია, H_1 არასწორია; $T.V. = \chi^2 = 0.6$; P-მნიშვნელობა > 0.1; კი $-H_0$. 10. H_0 წესიერია, H_1 არაწესიერია; $C.V. = \chi^2_{3,0.05} = 7.815$; $T.V. = \chi^2 = 139.4$; H_1.

თავი XV
დამოუკიდებლობის შემოწმების ხი-კვადრატ კრიტერიუმი

მოწმდება ერთი პოპულაციის ორი სხვადასხვა A და B ნიშნის ერთმანეთთან დამოკიდებულების საკითხი. A ნიშანი იყოფა R კატეგორიად, ხოლო B ნიშანი – C კატეგორიად.

ნულოვანი ჰიპოთეზა: H_0 A და B ნიშნები დამოუკიდებელია

ალტერნატივა: H_1 A და B ნიშნები დამოკიდებელია

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: ხი-კვადრატი

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V. $= \chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(o_{i,j} - e_{i,j})^2}{e_{i,j}}$, სადაც $o_{i,j}$ – დაკვირვებული სიხშირეებია, ხოლო $e_{i,j}$ კი მოსალოდნელი სიხშირეები;

$$e_{i,j} = \frac{\sum_i o_{i,j} \times \sum_j o_{i,j}}{\sum_{i,j} o_{i,j}}.$$

შეზღუდვა: ყველა $e_{i,j} \geq 5$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში ვახდენთ დაჯგუფებას).

კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია.

კრიტიკული მნიშვნელობა $C.V. = \chi^2_{k,\alpha}$, სადაც თავისუფლების ხარისხი $k = (R-1)(C-1)$

კრიტიკული არე C.R. (H_0-ის უარყოფის არე) $= [\chi^2_{n-1,\alpha}, +\infty)$

P- **მნიშვნელობა** $= P\{\chi^2(n-1) > T.V.\}$

გადაწყვეტილება: თუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა მეტია ან ტოლი კრიტიკულ მნიშვნელობაზე (T.V. $\geq$C.V.), მაშინ ნულოვან ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

P- **მნიშვნელობის მეთოდი:** თუ $P \leq \alpha$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. 200 გამოკითხული ექთანიდან (შესაბამისად, ექიმიდან) 100 (შესაბამისად, 50) უპირატესობას ანიჭებს ახალ პროცედურას, 80 (შესაბამისად, 120) – ძველ პროცედურას, ხოლო 20-სათვის (შესაბამისად, 30-სათვის) მნიშვნელობა არა აქვს რომელ პროცედურას გამოიყენებს. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა ექთანისა და ექიმის შეხედულებებში განსხვავება?

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები:

H_0 პროცედურაზე შეხედულება *დამოუკიდებელია* პროფესიისაგან.

H_1 პროცედურაზე შეხედულება *დამოკიდებელია* პროფესიაზე.

ნაბიჯი 2. შევადგინოთ ნიშანთა შეუღლების $R \times C$ ცხრილი:

ჯგუფი	ამჯობინებს ახალ პროცედ.	ამჯობინებს ძველ პროცედ.	ერთიდაიგივეა
ექთნები	100	80	20
ექიმები	50	120	30

ამ შემთხვევაში გვაქვს 2 სტრიქონი და 3 სვეტი ($R=2, C=3$), ანუ გვაქვს 2×3 შეუღლების ცხრილი. ამ ცხრილის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტი ((i, j) ბლოკში მდგომი ელემენტი) აღვნიშნოთ $o_{i,j}$-თი. მაგალითად, $o_{1,2}=80$. შესაბამისად, ნიშანთა შეუღლების ცხრილი სქემატურად ასე გამოისახება:

	სვეტი 1	სვეტი 2	სვეტი 3
სტრიქონი 1	$o_{1,1}$	$o_{1,2}$	$o_{1,3}$
სტრიქონი 2	$o_{2,1}$	$o_{2,2}$	$o_{2,3}$

ნაბიჯი 3. ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა. აქ თავისუფლების ხარისხი: $d.f.=(R-1)(C-1)=(2-1)\cdot(3-1)=2$. შესაბამისად, ხი-კვადრატ განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ: $C.V.=\chi^2_{2,0.05}=5.991$.

ნაბიჯი 4. გამოვთვალოთ სტრიქონებში და სვეტებში მდგომი სიდიდეებისა და ყველა სიდიდის ჯამები.

ჯგუფი	ამჯობინებს ახალ პროცედ.	ამჯობინებს ძველ პროცედ.	ერთიდაიგივეა	
ექთნები	100	80	20	$\sum=200$
ექიმები	50	120	30	$\sum=200$
	$\sum=150$	$\sum=200$	$\sum=50$	$\sum=400$

ნაბიჯი 5. თითოეული (i, j) ბლოკისათვის გამოვთვალოთ მოსალოდნელ სიხშირეთა მნიშვნელობები $e_{i,j}$ შემდეგი ფორმულის მიხედვით:

$$\text{მოსალოდნელი მნიშვნელობა} \equiv e_{i,j} = \frac{\text{სტრიქონის ჯამი} \times \text{სვეტის ჯამი}}{\text{მთლიანი ჯამი}}.$$

მაგალითად, (1, 1) ბლოკისათვის მოსალოდნელი მნიშვნელობა $e_{1,1}$ იქნება:

$$e_{1,1} = \frac{(\text{I სტრიქონის ჯამი}) \times (\text{I სვეტის ჯამი})}{\text{მთლიანი ჯამი}} = \frac{200\cdot150}{400} = 75.$$

ანალოგიურად, დანარჩენი მოსალოდნელი მნიშვნელობები იქნება:

$$e_{1,2}=100,\ e_{1,3}=25,\ e_{2,1}=75,\ e_{2,2}=100,\ e_{2,3}=25.$$

თვალსაჩინოებისათვის მოსალოდნელი მნიშვნელობები შეიძლება ჩავწეროთ ფრჩხილებში ნიშანთა შეუღლების ცხრილის შესაბამის ბლოკში:

ჯგუფი	ამჯობინებს ახალ პროცედ.	ამჯობინებს ძველ პროცედ.	ერთიდაიგივეა	
ექთნები	100 (75)	80 (100)	20 (25)	$\sum=200$
ექიმები	50 (75)	120 (100)	30 (25)	$\sum=200$
	$\sum=150$	$\sum=200$	$\sum=50$	$\sum=400$

ნაბიჯი 6. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$\chi^2=\sum_{i,j}\frac{(o_{i,j}-e_{i,j})^2}{e_{i,j}}=\frac{(100-75)^2}{75}+\frac{(80-100)^2}{100}+\frac{(20-25)^2}{25}+$$

$$+\frac{(50-75)^2}{75}+\frac{(120-100)^2}{100}+\frac{(30-25)^2}{25}=26.67\,.$$

ნაბიჯი 7. გადაწყვეტილების მიღება: ვინაიდან 26.67 > 5.991, ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უკუვაგდოთ, ანუ ჩვენ გვაქვს საკმარისი საფუძველი რათა დავასკვნათ, რომ პროფესიაზე შეხედულება დამოკიდებულია პროფესიაზე – ე. ი. ექთანისა და ექიმის შეხედულება პროცედურაზე განსხვავებულია ერთმანეთისაგან.

მაგალითი 2. სოციოლოგს აინტერესებს გაარკვიოს არის თუ არა კავშირი ადამიანის საცხოვრებელ ადგილსა და მის მიერ უნივერსიტეტში გატარებულ წლებს შორის. შემთხვევით შერჩეული 88 ადამიანისათვის ნიშანთა შეუღლების ცხრილს აქვს შემდეგი სახე:

საცხოვრ. ადგილი	უნივერსიტ. II კურსელი	ბაკალავრის ხარისხი	მაგისტრის ხარისხი	ჯამი
ქალაქი	15	12	8	35
ქალაქგარეთ	8	15	9	32
სოფელი	6	8	7	21
ჯამი	29	35	24	88

$\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეუძლია თუ არა სოციოლოგს დაასკვნას, რომ ადამიანის საცხოვრებელი ადგილი დაკავშირებულია მის მიერ უნივერსიტეტში გატარებული წლების რაოდენობასთან?

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები:

H_0 ადამიანის საცხოვრებელი ადგილი *დამოუკიდებელია* უნივერსიტეტში გატარებული წლების რაოდენობისაგან.

H_1 ადამიანის საცხოვრებელი ადგილი *დამოკიდებულია* უნივერსიტეტში გატარებულ წლების რაოდენობაზე.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა. რადგანაც თავისუფლების ხარისხია $d.f.=(R-1)(C-1)=(3-1)\cdot(3-1)=4$ და $\alpha=0.05$, ამიტომ კრიტიკული მნიშვნელობა იქნება: $C.V.=\chi^2_{4,0.05}=9.488$.

ნაბიჯი 3. გამოვთვალოთ მოსალოდნელი მნიშვნელობები. გვაქვს:

$$e_{1,1}=\frac{35\cdot29}{88}=11.53\,,\ e_{1,2}=\frac{35\cdot35}{88}=13.92\,,\ e_{1,3}=\frac{35\cdot24}{88}=9.55\,,$$

$$e_{2,1}=\frac{32\cdot 29}{88}=10.55\,,\ e_{2,2}=\frac{32\cdot 35}{88}=12.73\,,\ e_{2,3}=\frac{32\cdot 24}{88}=8.73\,,$$

$$e_{3,1}=\frac{21\cdot 29}{88}=6.92\,,\ e_{3,2}=\frac{21\cdot 35}{88}=8.35\,,\ e_{3,3}=\frac{21\cdot 24}{88}=5.73\,.$$

ნაბიჯი 4. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$\chi^2=\sum_{i,j}\frac{(o_{i,j}-e_{i,j})^2}{e_{i,j}}=\frac{(15-11.53)^2}{11.53}+\frac{(12-13.92)^2}{13.92}+\frac{(8-9.55)^2}{9.55}+$$

$$+\frac{(8-10.55)^2}{10.55}+\frac{(15-12.73)^2}{12.73}+\frac{(9-8.73)^2}{8.73}+$$

$$+\frac{(6-6.96)^2}{6.96}+\frac{(8-8.35)^2}{8.35}+\frac{(7-5.73)^2}{5.73}=3.01\,.$$

ნაბიჯი 5. გადაწყვეტილების მიღება: რადგანაც $3.01<9.488$, ამიტომ სოციოლოგს არა აქვს საფუძველი ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის, ანუ სოციოლოგს არა აქვს საკმარისი საფუძველი რათა დაასკვნას, რომ ადამიანის საცხოვრებელი ადგილი დამოკიდებულია მის მიერ უნივერსიტეტში გატარებული წლების რაოდენობაზე.

მაგალითი 3. მკვლევარს აინტერესებს არის თუ არა კავშირი ადამიანის სქესსა და მის მიერ მიღებული ალკოჰოლის რაოდენობას შორის. შემთხვევით შერჩეული 68 ადამიანისათვის მიღებული მონაცემების მიხედვით, $\alpha=0.1$ მნიშვნელოვნების დონით, შეუძლია თუ არა მკვლევარს დაასკვნას, რომ მიღებული ალკოჰოლის რაოდენობა დაკავშირებულია სქესთან?

	ალკოჰოლის მოხმარება			
სქესი	დაბალი	საშუალო	მაღალი	ჯამი
მამრობ.	10	9	8	27
მდედრობ.	13	16	12	41
ჯამი	23	24	20	68

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები:

H_0 მიღებული ალკოჰოლის რაოდენობა *დამოუკიდებელია* ადამიანის სქესისაგან.

H_1 ალკოჰოლის რაოდენობა *დამოკიდებულია* ადამიანის სქესზე.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა. აქ თავისუფლების ხარისხია $d.f.=(R-1)(C-1)=(2-1)\cdot(3-1)=2$ და $\alpha=0.1$. შესაბამისად, კრიტიკული მნიშვნელობა იქნება: $C.V.=\chi^2_{2,0.1}=4.605$.

ნაბიჯი 3. გამოვთვალოთ მოსალოდნელი მნიშვნელობები. გვაქვს:

$$e_{1,1}=\frac{27\cdot 23}{68}=9.13\,,\ e_{1,2}=\frac{27\cdot 25}{68}=9.93\,,\ e_{1,3}=\frac{27\cdot 20}{68}=7.94\,,$$

$$e_{2,1}=\frac{41\cdot 23}{68}=13.87\,,\ e_{2,2}=\frac{41\cdot 25}{68}=15.07\,,\ e_{2,3}=\frac{41\cdot 20}{68}=12.06\,.$$

შესაბამისად, დასრულებულ შეუღლების ცხრილს ექნება შემდეგი სახე:

ალკოჰოლის მოხმარება				
სქესი	დაბალი	საშუალო	მაღალი	ჯამი
მამრობ.	10 (9.13)	9 (9.93)	8 (7.94)	27
მდედრობ.	13 (13.87)	16 (15.07)	12 (12.06)	41
ჯამი	23	24	20	68

ნაბიჯი 4. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$\chi^2=\sum_{i,j}\frac{(o_{i,j}-e_{i,j})^2}{e_{i,j}}=\frac{(10-9.13)^2}{9.13}+\frac{(9-9.93)^2}{9.93}+\frac{(8-7.94)^2}{7.94}+$$

$$+\frac{(13-13.87)^2}{13.87}+\frac{(16-15.07)^2}{15.07}+\frac{(12-12.06)^2}{12.06}=0.283$$

ნაბიჯი 5. გადაწყვეტილების მიღება: რამდენადაც 0.283 < 4.605, ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს, ანუ არ არსებობს საკმარისი საფუძველი ვამტკიცოთ, რომ ალკოჰოლის მოხმარება დამოკიდებულია სქესზე.

ამოცანები

1. სწავლობენ არის თუ არა კავშირი სპორტსა და სისხლის წნევას შორის. შემთხვევით შერჩეული 210 ადამიანის ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ სპორტი და წნევა არ არიან დამოკიდებული.

	სისხლის წნევა		
	დაბალი	საშუალო	მაღალი
სპორტსმენი	34	57	21
არა სპორტსმენი	15	63	20

2. მკვლევარს აინტერესებს არის თუ არა დამოკიდებული მოხმარებული ყავის რაოდენობა ადამიანის ასაკზე. 152 შემთხვევით შერჩეული ადამიანის ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha=0.01$ მნიშვნელოვნების დონით, არის თუ არა დამოკიდებული ყავის მოხმარება ასაკზე?

	ყავის მოხმარება		
ასაკი	დაბალი	საშუალო	მაღალი
21—30	18	16	12
31—40	9	15	27
41—50	5	12	10
≥ 51	13	9	6

3. მკვლევარს აინტერესებს არის თუ არა დამოკიდებული ერთმანეთზე მყიდველის ასაკი და შეძენილი ავტომობილის ფასი. შემთხვევით შერჩეული 222 ავტომფლობელის ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვ-

ნების დონით, არის თუ არა ავტომობილის ფასი დამოუკიდებელი ავტომფლობელის ასაკისაგან?

ასაკი	გაყიდვის ფასი არაუმეტეს 20000 ლ	20000 ლ-დან – – 30000 ლ-მდე	30000 ლ-დან – – 40000 ლ-მდე
21—30	16	25	3
31—40	44	23	15
41—50	31	15	18
≥ 51	9	11	12

4. მკვლევარს აინტერესებს დამოკიდებულია თუ არა ინფორმაციის მიღების საშუალებები ადამიანის განათლების დონეზე. გამოკითხული 400 ბაკალავრისა და მაგისტრის ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ ინფორმაციის მიღების გზები დამოუკიდებელია განათლების დონისაგან.

	ტელევიზია	გაზეთები	სხვა საშუალებები
ბაკალავრი	159	90	51
მაგისტრი	27	42	31

5. უნივერსიტეტის რექტორს აინტერესებს ახდენს თუ არა გავლენას ლექტორის სამეცნიერო ხარისხი სტუდენტის შეხედულებაზე ამ ლექტორის მუშაობის ხარისხის შესახებ. გამოკითხული სტუდენტების ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით, შეუძლია თუ არა რექტორს დაასკვნას, რომ სტუდენტის შეხედულება ლექტორის მუშაობის ეფექტურობის შესახებ დამოკიდებულია ლექტორის სამეცნიერო ხარისხზე?

შეხედულება	ხარისხი ბაკალავრი	მაგისტრი	დოქტორი
უმაღლესი	14	9	4
საშუალო	16	5	7
დაბალი	3	12	16

6. მკვლევარს აინტერესებს დაკავშირებულია თუ არა სტუდენტის ოჯახური მდგომარეობა მის შეფასებასთან სტატისტიკაში. 142 შემთხვევით შერჩეული სტუდენტის ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, დამოკიდებულია თუ არა სტუდენტის შეფასება სტატისტიკაში მის ოჯახურ მდგომარეობაზე?

ოჯახური მდგომარეობა	შეფასება A	B	C	D ან E
მარტოხელა	27	32	16	10
დაოჯახებული	14	19	16	8

7. იკვლევენ კავშირს ფილმის ტიპსა და მაყურებლის ასაკს შორის. ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით, არის თუ არა კავშირი ფილმის ტიპსა და მაყურებლის ასაკს შორის?

ასაკი	დოკუმენტური	კომედია	მისტერია
12—20	14	9	8
21—29	15	14	9
30—38	9	21	39
39—47	7	22	17
≥ 48	6	38	12

8. იკვლევენ დამოკიდებულებას ავტომობილის ტიპსა (წამყვანი 2 ან 4 თვალით) და მყიდველის სქესს შორის. შემთხვევით შერჩეული 90 მყიდველის ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ მყიდველის არჩევანი დამოუკიდებელია მისი სქესისაგან.

სქესი	2 წამყვანი თვალი	4 წამყვანი თვალი
მამრობითი	23	43
მდედრობითი	18	6

9. იკვლევდნენ ფეხბურთის თამაშის დროს მაყურებლების მიერ არჩეულ საკვების სახეობას. ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით, არის თუ არა მაყურებლის მიერ არჩეული საკვები დამოუკიდებელი მაყურებლის სქესისაგან?

სქესი	"ჰოთ დოგი"	არახისი	ღვეზელი
მამრობითი	12	21	19
მდედრობითი	13	8	25

10. ახალი პრეპარატის გამოკვლევის მიზნით შერჩეულ იქნა პაციენტთა ორი ჯგუფი, რომელთაგან ერთს აძლევდნენ ახალ პრეპარატს, ხოლო მეორეს კი პლაცებოს. ქვემოთმოყვანილი კვლევის შედეგების მიხედვით, $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით, შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ პრეპარატი ეფექტურია? ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

	შედეგი	
	ეფექტური	არაეფექტური
პრეპარატი	32	9
პლაცებო	12	18

11. წიგნის გამომცემელს აინტერესებს არის თუ არა განსხვავება მამაკაცებისა და ქალების მიერ წასაკითხად არჩეულ წიგნების ტიპებს შორის. ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეამოწმეთ

ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ არჩეული წიგნის ტიპი დამოუკიდებელია მკითხველის სქესისაგან. ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

სქესი	მისტიკა	რომანი	დეტექტივი
მამრობითი	243	201	191
მდედრობითი	135	149	202

პასუხები:

1. H_0: დამოუკიდ., H_1: დამოკიდ.; $C.V.=\chi^2_{2,0.05}=5.991$; $T.V.=\chi^2=6.789$; H_1. 2. H_0: დამოუკიდ., H_1: დამოკიდ.; $C.V.=\chi^2_{6,0.01}=16.812$; $T.V.=\chi^2=15.824$; არა – H_0. 3. H_0: დამოუკიდ., H_1: დამოკიდ.; $C.V.=\chi^2_{6,0.05}=12.592$; $T.V.=\chi^2=24.004$; არა – H_1. 4. H_0: დამოუკიდ., H_1: დამოკიდ.; $C.V.=\chi^2_{2,0.05}=5.991$; $T.V.=\chi^2=21.347$; H_1. 5. H_0: დამოუკიდ., H_1: დამოკიდ.; $C.V.=\chi^2_{4,0.1}=7.779$; $T.V.=\chi^2=19.507$; კი – H_1. 6. H_0: დამოუკიდ., H_1: დამოკიდ.; $C.V.=\chi^2_{3,0.05}=7.815$; $T.V.=\chi^2=2.218$; არა – H_0. 7. H_0: დამოუკიდ., H_1: დამოკიდ.; $C.V.=\chi^2_{8,0.1}=13.362$; $T.V.=\chi^2=46.733$; არა – H_0. 8. H_0: დამოუკიდ., H_1: დამოკიდ.; $C.V.=\chi^2_{1,0.05}=3.841$; $T.V.=\chi^2=11.441$; H_1. 9. H_0: დამოუკიდ., H_1: დამოკიდ.; $C.V.=\chi^2_{2,0.1}=4.605$; $T.V.=\chi^2=6.342$; არა – H_1. 10. H_0: არაეფექტ., H_1: ეფექტ.; $T.V.=\chi^2=10.643$; P-მნიშვნელობა < 0.005; H_1. 11. H_0: დამოუკიდ., H_1: დამოკიდ.; $T.V.=\chi^2=19.43$; P-მნიშვნელობა < 0.005; H_1.

თავი XVI
ერთგვაროვნების შემოწმების ხი-კვადრატ კრიტერიუმი

მოწმდება პოპულაციათა ერთგვაროვნების ჰიპოთეზა, რომელიც ექვივალენტურია ჰიპოთეზისა იმის შესახებ, რომ ამა თუ იმ ნიშნის პროპორციები სხვადასხვა პოპულაციებში ერთიდაიგივეა.

ნულოვანი ჰიპოთეზა: $H_0 \quad p_1 = p_2 = \cdots = p_R$.

ალტერნატივა: H_1 **: ერთი პროპორცია მაინც განსხვავდება დანარჩენებისაგან.**

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: ხი-კვადრატი

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V. $\equiv \chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(o_{i,j} - e_{i,j})^2}{e_{i,j}}$, სადაც $o_{i,j}$ – დაკვირვებული სიხშირეებია, ხოლო $e_{i,j}$ კი მოსალოდნელი სიხშირეები;

$$e_{i,j} = \frac{\sum_i o_{i,j} \times \sum_j o_{i,j}}{\sum_{i,j} o_{i,j}}.$$

შეზღუდვა: **ყველა** $e_{i,j} \geq 5$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში ხდება დაჯგუფება).

კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია.

კრიტიკული მნიშვნელობა $C.V. = \chi^2_{(R-1)(C-1),\alpha}$, სადაც R წარმოადგენს შერჩევათა რაოდენობას, ხოლო C კი კლასების რაოდენობაა.

როდესაც შეუღლების ცხრილის თავისუფლების ხარისხი ერთის ტოლია $(d.f. = 1)$, გამოიყენება კრიტერიუმის მნიშვნელობა: $T.V. \equiv \chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(|o_{i,j} - e_{i,j}| - 0.5)^2}{e_{i,j}}$.

კრიტიკული არე C.R. (H_0**-ის უარყოფის არე**) $= [\chi^2_{n-1,\alpha}, +\infty)$

P**- მნიშვნელობა** $= P\{\chi^2(n-1) > T.V.\}$

გადაწყვეტილება: თუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა მეტია ან ტოლი კრიტიკულ მნიშვნელობაზე (T.V. $\geq$C.V.), მაშინ ნულოვან ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

P**- მნიშვნელობის მეთოდი:** თუ $P \leq \alpha$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. მკვლევარმა შემთხვევით შეარჩია 150 დამამთავრებელი კურსის სტუდენტი სამი უმაღლესი სასწავლებლიდან (ინსტიტურიდან) და თითოეულს დაუსვა შეკითხვა: "დადის თუ არა იგი ინსტიტუტში თავისი ან მშობლების მანქანით". გამოკითხვის შედეგები მოყვანილია ცხრილის სახით. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ იმ სტუდენტების პროპორცია, რომლებიც ინსტიტუტში დადიან საკუთარი ან მშობლების მანქანებით ერთიდაიგივეა სამივე ინსტიტუტისათვის.

	ინსტიტუტი I	ინსტიტუტი II	ინსტიტუტი III	ჯამი
კი	18	22	16	56
არა	32	28	34	94
ჯამი	50	50	50	150

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები:

H_0 $p_1 = p_2 = p_3$ (პროპორციები ერთიდაიგივეა).

H_1 სულ ცოტა ერთი პროპორცია მაინც განსხვავდება დანარჩენებისაგან.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა. თავისუფლების ხარისხი ტოლია $d.f. = (R-1)(C-1) = (2-1)\cdot(3-1) = 2$. ამიტომ ხი-კვადრატ განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ $\alpha = 0.05$-სათვის კრიტიკული მნიშვნელობა იქნება: $C.V. = \chi^2_{2,0.05} = 5.991$.

ნაბიჯი 3. გამოვთვალოთ მოსალოდნელი მნიშვნელობები. ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$\text{მოსალოდნელი მნიშვნელობა} \equiv e_{i,j} = \frac{\text{სტრიქონის ჯამი} \times \text{სვეტის ჯამი}}{\text{მთლიანი ჯამი}}.$$

$$e_{1,1} = \frac{56\cdot 50}{150} = 18.67,\ e_{1,2} = \frac{56\cdot 50}{150} = 18.67,\ e_{1,3} = \frac{56\cdot 50}{150} = 18.67,$$

$$e_{2,1} = \frac{94\cdot 50}{150} = 31.33,\ e_{2,2} = \frac{94\cdot 50}{150} = 31.33,\ e_{2,3} = \frac{94\cdot 50}{150} = 31.33.$$

დასრულებული შეუღლების ცხრილი იქნება:

	ინსტიტუტი I	ინსტიტუტი II	ინსტიტუტი III	ჯამი
კი	18 (18.67)	22 (18.67)	16 (18.67)	56
არა	32 (31.33)	28 (31.33)	34 (31.33)	94
ჯამი	50	50	50	150

ნაბიჯი 4. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(o_{i,j} - e_{i,j})^2}{e_{i,j}} = \frac{(18-18.67)^2}{18.67} + \frac{(22-18.67)^2}{18.67} + \frac{(16-18.67)^2}{18.67} +$$

$$+ \frac{(32-31.33)^2}{31.33} + \frac{(28-31.33)^2}{31.33} + \frac{(34-31.33)^2}{31.33} = 1.596.$$

ნაბიჯი 5. გადაწყვეტილების მიღება: რადგანაც $1.596 < 5.991$, ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს, ანუ არ არსებობს საკმარისი საფუძველი ვამტკიცოთ, რომ პროპორციები განსხვავებულია.

მაგალითი 2. სამი ქარხანა უშვებს ერთიდაიგივე დეტალს. ამ ქარხნებიდან აღებულია შესაბამისად 250, 200 და 150 დეტალი, რომელთაგან არასტანდარტული აღმოჩნდა შესაბამისად 10, 9 და 11 დეტალი. შევამოწმოთ ჰიპოთეზა აღნიშნულ შერჩევათა ერთგვაროვნების შესახებ $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით.

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები:

H_0 შერჩევები ერთგვაროვანია.

H_1 : ორი შერჩევა მაინც განსხვავებულია ერთმანეთისაგან.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა:

$$C.V. = \chi^2_{(R-1)(C-1),\alpha} = \chi^2_{(3-1)(2-1),0.1} = \chi^2_{2,0.1} = 4.605.$$

ნაბიჯი 3. გამოვთვალოთ მოსალოდნელი მნიშვნელობები. გვაქვს:

$$e_{1,1} = \frac{250 \cdot 570}{600} = 297.5,\ e_{1,2} = \frac{250 \cdot 30}{600} = 12.5,\ e_{2,1} = \frac{200 \cdot 570}{600} = 190,$$

$$e_{2,2} = \frac{200 \cdot 30}{600} = 10,\ e_{3,1} = \frac{150 \cdot 570}{600} = 142.5,\ e_{3,2} = \frac{150 \cdot 30}{600} = 7.5.$$

ამრიგად, დასრულებული შეუღლების ცხრილი იქნება:

	სტანდარტული	არასტანდარტული	ჯამი
I ქარხანა	240 (297.5)	10 (12.5)	250
II ქარხანა	191 (190)	9 (10)	200
III ქარხანა	139 (142.5)	11 (7.5)	150
ჯამი	570	30	600

ნაბიჯი 4. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(o_{i,j} - e_{i,j})^2}{e_{i,j}} = \frac{(240-237.5)^2}{237.5} + \frac{(10-12.5)^2}{12.5} + \frac{(191-190)^2}{190} +$$

$$+ \frac{(9-10)^2}{10} + \frac{(139-142.5)^2}{142.5} + \frac{(11-7.5)^2}{7.5} = 2.36.$$

ნაბიჯი 5. გადაწყვეტილების მიღება: რადგანაც 2.36 < 4.605, ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს, ანუ $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შერჩევები ერთგვაროვანია.

ამოცანები

1. კვლევის თანახმად 6-დან 17-წლამდე მოზარდების 64%-ს არ შეუძლია გადალახოს საბაზო შესაბამისობის ტესტი. მკვლევარს აინტერესებს არის თუ არა ამ კატეგორიის მოსწავლეების პროპორცია ერთიდაიგივე სხვადასხვა სკოლებში. ტესტირება ჩაუტარდა შემთხვევით შერჩეულ 120–120 მოსწავლეს ოთხი სხვადასხვა სკოლიდან. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ იმ მოსწავლეების პროპორცია, რომლებმაც გადალახეს შესაბამისობის ტესტი, ერთიდაიგივეა.

	I სკოლა	II სკოლა	III სკოლა	IV სკოლა
გადალახა	49	38	46	34
ვერ გადალახა	71	82	74	86
ჯამი	120	120	120	120

2. სარეკლამო კომპანიამ გადაწყვიტა სამი სხვადასხვა მაღაზიის 92—92 მომხმარებელს შესთავაზოს მონაწილეობა მიიღოს ბაზრის კვლევის გამოკითხვაში. წინა კვლევის მიხედვით, 38%-მა უარი განაცხადა ასეთ გამოკითხვაში მონაწილეობის მიღებაზე. $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმ-

ის შესახებ, რომ იმ მომხმარებლების პროპორცია, რომლებიც აპირებენ მონაწილეობა მიიღონ გამოკითხვაში, ერთიდაიგივეა.

	I მაღაზია	II მაღაზია	III მაღაზია
მიიღებს მონაწილეობას	52	45	36
არ მიიღებს მონაწილეობას	40	47	56
ჯამი	92	92	92

3. სადაზღვევო კომპანიას აინტერესებს იცვლება თუ არა ასაკის მიხედვით პროპორცია იმ მძღოლების, ვინც დალევის შემდეგ ჯდება საჭესთან. გამოკითხულ იქნა 4 ასაკობრივი ჯგუფის 86--86 მძღოლი. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ პროპორცია იმ მძღოლების, ვინც კითხვას: "ჯდებით თუ არა ნასვამი საჭესთან" – უპასუხა "დიახ", ერთიდაიგივეა ყველა ასაკობრივი ჯგუფისათვის.

ასაკი	21—29	30—39	40—49	50-ზე მეტი წლის
დიახ	32	28	26	21
არა	54	58	60	65
ჯამი	86	86	96	86

4. გამოკვლევის მიხედვით 8-დან 17 წლამდე მოზარდების 59% ურჩევნია, რომ მამა დასაქმებული იყოს ბიზნესში, ვიდრე იყოს პარტიული მუშაკი. შერჩეულ იქნა 60—60 მოსწავლე დაწყებითი, საშუალო და მაღალი კლასებიდან, რათა დაედგინათ მათი დამოკიდებულება მამის სამსახურის მიმართ. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ პროპორციები იმ მოსწავლეების, რომელთაც ურჩევნიათ, რომ მამა იყოს ბიზნესმენი, ტოლია.

	დაწყებითი	საშუალო	მაღალი
ბიზნესის სფეროში	29	38	51
პარტიულ სამუშაოზე	31	22	9
ჯამი	60	60	60

5. გამოკითხულ იქნა 100—100 ადამიანი ქვეყნის ოთხივე კუთხეში. მათ დაუსვეს კითხვა: "აქვთ თუ არა მუდმივი სამუშაო". $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ პროპორციები იმ ადამიანების, რომელთაც აქვთ მუდმივი სამუშაო, ტოლია ქვეყნის ოთხივე კუთხეში.

	აღმოსავლეთი	დასავლეთი	ჩრდილოეთი	სამხრეთი
დიახ	43	39	22	28
არა	57	61	78	72
ჯამი	100	100	100	100

6. ამერიკელი მამების საშუალოდ 79% საკუთარი შვილის გაჩენისას იმყოფება სამშობიარო განყოფილებაში. გამოკითხულ იქნა 300 ამერიკელი მამა. მათ დაუსვეს კითხვა: "იმყოფებოდნენ თუ არა სამშობიარო განყოფილებაში მეუღლის მშობიარობისას". $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით გვაქვს თუ არა საკმარისი საფუძველი უკუვაგდოთ ჰიპოთეზა იმ მამების პროპორციების ტოლობის შესა-

ხებ, რომლებიც მეუღლის მშობიარობისას იმყოფებოდნენ სამშობიარო განყოფილებაში?

	I სამშობიარო	II სამშობიარო	III სამშობიარო	IV სამშობიარო
კი	66	60	57	56
არა	9	15	18	19
ჯამი	75	75	75	75

7. მსოფლიო ჯანდაცვის ორგანიზაციის მონაცემებით ზოოპარკებში ბავშვების მიერ მიღებული ტრამვების 55% მოდის მაიმუნის ნაკბენზე. გამოკვლეულ იქნა 4 სხვადასხვა ზოოპარკში ბავშვთა ტრამვების 30—30 შემთხვევა. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა პროპორციების ტოლობის შესახებ. ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით.

ტრამვა	ზოოპარკი A	ზოოპარკი B	ზოოპარკი C	ზოოპარკი D
მაიმუნის კბენა	15	18	13	16
სხვა ტრამვა	15	12	17	14
ჯამი	30	30	30	30

8. სასურსათო მაღაზიების ქსელის მეპატრონეს სურს დაადგინოს მისი მაღაზიების მომხმარებლები მაღაზიაში წასვლამდე წინასწარ ადგენენ თუ არა საჭირო პროდუქტების სიას. ამ მიზნით გამოკითხულ იქნა 288 მომხმარებელი. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ პროპორციები იმ მომხმარებლების, რომლებიც მაღაზიაში წასვლამდე ადგენენ შესაძენი პროდუქტების სიას, ტოლია სამივე მაღაზიისათვის.

	მაღაზია A	მაღაზია B	მაღაზია C
ადგენს სიას	77	74	68
არ ადგენს სიას	19	22	28
ჯამი	96	96	96

პასუხები:

1. $H_0: p_1 = p_2 = p_3 = p_4$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V. = \chi^2_{3,0.05} = 7.815$; $T.V. \equiv \chi^2 = 5.317$; H_0. 2. $H_0: p_1 = p_2 = p_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V. = \chi^2_{2,0.01} = 9.210$; $T.V. \equiv \chi^2 = 8.046$; H_0. 3. $H_0: p_1 = p_2 = p_3 = p_4$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V. = \chi^2_{3,0.05} = 7.815$; $T.V. \equiv \chi^2 = 3.4$; H_0. 4. $H_0: p_1 = p_2 = p_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V. = \chi^2_{2,0.1} = 4.605$; $T.V. \equiv \chi^2 = 18.06$; H_1. 5. $H_0: p_1 = p_2 = p_3 = p_4$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V. = \chi^2_{3,0.1} = 6.251$; $T.V. \equiv \chi^2 = 12.755$; H_1. 6. $H_0: p_1 = p_2 = p_3 = p_4$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V. = \chi^2_{3,0.05} = 7.815$; $T.V. \equiv \chi^2 = 5$; არა – H_0. 7. $H_0: p_1 = p_2 = p_3 = p_4$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $T.V. \equiv \chi^2 = 1.734$; P-მნიშვნელობა > 0.1; H_0. 8. $H_0: p_1 = p_2 = p_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V. = \chi^2_{2,0.1} = 4.605$; $T.V. \equiv \chi^2 = 2.401$; H_0.

თავი XVII
დაწყვილებული მონაცემები, კორელაცია

ამა თუ იმ ორ მახასიათებელს (ან ორ მაჩვენებელს) შორის კავშირის შესწავლის მიზნით ამ მახასიათებლების დაკვირვებული მნიშვნელობების სიმრავლეს წარმოადგენენ წყვილების სიმრავლის სახით: (x_1, y_1), (x_2, y_2), $,(x_n, y_n)$. ამ მონაცემების მიხედვით აგებენ ე. წ. **გაბნევის დიაგრამას** შემდეგი წესით: სიბრტყეზე, კოორდინატთა მართკუთხა სისტემაში, მონიშნავენ წერტილებს, რომელთა კოორდინატებია (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$.

მაგალითი 1. მკვლევარს აინტერესებს დაადგინოს არსებობს თუ არა კავშირი ველოსიპედით წვიმიან ამინდში მომხდარ მსუბუქ ავარიათა რიცხვსა და სიკვდილით (ფატალური შედეგით) დამთავრებულ ავარიათა რიცხვს შორის. ქვემოთ მოყვანილია 10 წლის განმავლობაში წვიმიან ამინდში ველოსიპედით მომხდარი ავარიების მონაცემები:

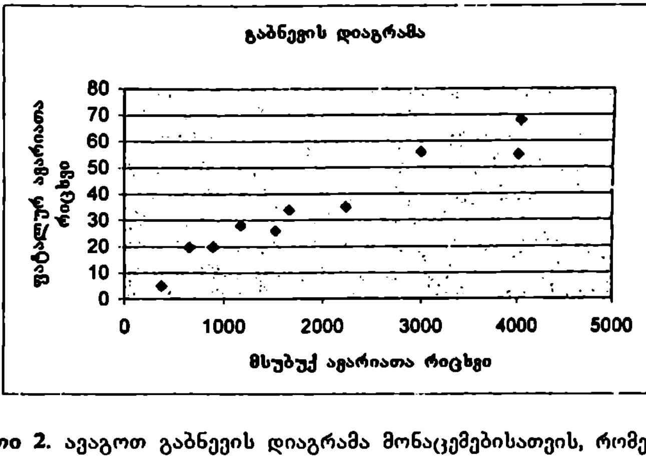
მსუბ. ავარ. რიცხვი, x	376	650	884	1162	1513	1650	2236	3002	4028	4010
ფატ. ავარ. რიცხვი, y	5	20	20	28	26	34	35	56	68	55

ავაგოთ გაბნევის დიაგრამა ამ მონაცემებისათვის.

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. სიბრტყეზე ავაგოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და მოვნიშნოთ x და y ღერძები.

ნაბიჯი 2. ავაგოთ წერტილთა წყვილები საკოორდინატო სიბრტყეზე ისე როგორც ეს ქვემოთაა ნაჩვენები:



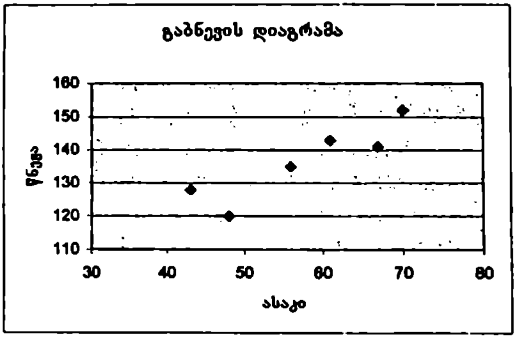
მაგალითი 2. ავაგოთ გაბნევის დიაგრამა მონაცემებისათვის, რომელიც მიიღება 6 შემთხვევით შერჩეული პიროვნების ასაკსა და არტერიული წნევას შორის დამოკიდებულების შესწავლისას. მონაცემების ცხრილია:

პერსონა	ასაკი, x	წნევა, y
A	43	128
B	48	120
C	56	135
D	61	143
E	67	141
F	70	152

ამოხსნა.

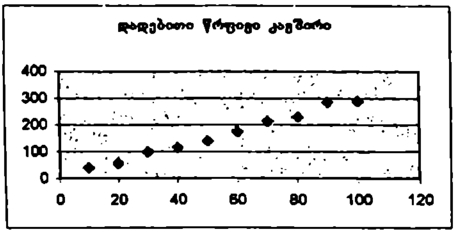
ნაბიჯი 1. დავხაზოთ საკოორდინატო სიბრტყე და მოვნიშნოთ x და y ღერძები.

ნაბიჯი 2. მოვნიშნოთ თითოეული წერტილი გრაფიკზე როგორც ეს ქვემოთაა ნაჩვენები:



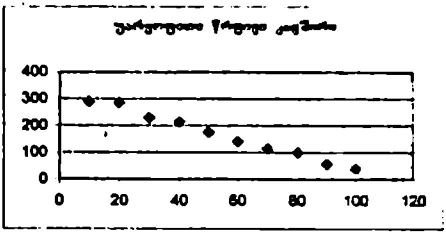
x და y სიდიდეებს შორის შესაძლებელია არსებობდეს რამოდენიმე განსხვავებული ტიპის დამოკიდებულება:

1. დადებითი წრფივი კავშირი არსებობს (გვაქვს) იმ შემთხვევაში, როდესაც წერტილები დაახლოებით კონცენტრირებულია აღმავალი სწორი ხაზის ირგვლივ და ერთდროულად ორივე x და y სიდიდის მნიშვნელობები ზრდადია. ასეთი კავშირი გვაქვს მაშინ, როდესაც x სიდიდის ზრდასთან ერთად იზრდება y სიდიდეც.

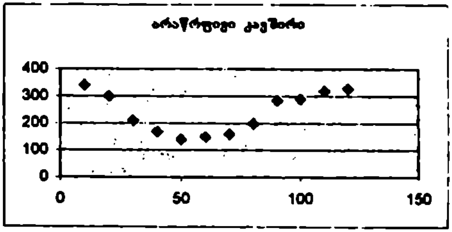


2. უარყოფითი წრფივი კავშირი არსებობს იმ შემთხვევაში, როდესაც წერტილები დაახლოებით კონცენტრირებულია დაღმავალი სწორი ხაზის ირგვლივ.

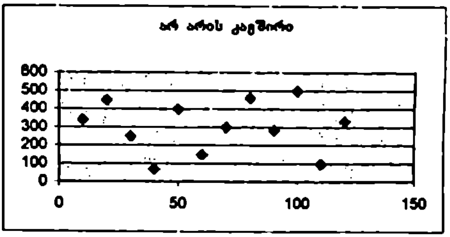
ასეთი კავშირი გვაქვს მაშინ, როდესაც x სიდიდის ზრდასთან ერთად კლებულობს y სიდიდე და პირიქით.



3. არაწრფივი კავშირი არსებობს იმ შემთხვევაში, როდესაც წერტილები დაახლოებით კონცენტრირებულია არაწრფივი (მრუდი) ხაზის (წირის) ირგვლივ. ეს დამოკიდებულება აღიწერება შესაბამისი წირის ბუნებით.



4. არ არის კავშირი იმ შემთხვევაში, როდესაც წერტილები უწესრიგოდაა მიმოფანტული, ანუ არ ჩანს რომ ისინი რაიმე წირის ირგვლივაა კონცენტრირებული.



ზემოთ მოყვანილ მაგალითში x (მსუბუქ ავარიათა რიცხვი) და y (ფატალურ ავარიათა რიცხვი) სიდიდეებს შორის ადგილი აქვს წრფივ დადებით კავშირს. წირს, რომელიც აღწერს კავშირს (დამოკიდებულებას) x და y სიდიდეების მნიშვნელობებს შორის **მისადაგების წირი** ეწოდება. ამ წირის პოვნის საკითხებს სწავლობს მათემატიკური სტატისტიკის ნაწილი, რომელსაც **რეგრესიული ანალიზი** ეწოდება. წირის მოსაძებნად იყენებენ ე. წ. **უმცირეს კვადრატთა მეთოდს.**

თუ სიდიდეებს შორის გვაქვს წრფივი კავშირი $y(x) = ax + b$, მაშინ ამბობენ რომ x და y სიდიდეებს შორის **წრფივი რეგრესიული კავშირია** და $y(x) = ax + b$ წრფეს უწოდებენ **რეგრესიის წრფის** განტოლებას (ხოლო ამ ფორმულით გამოთ-

ელილ $y_i' = y(x_i) = ax_i + b$ მნიშვნელობას პროგნოზი ეწოდება). უმცირეს კვადრატთა მეთოდი გვაძლევს, რომ ამ შემთხვევაში:

$$a = \frac{n(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)\cdot(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \quad \text{და} \quad b = \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)\cdot(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)\cdot(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}.$$

შეფასების სტანდარტული შეცდომა ეწოდება სიდიდეს:

$$s_{\text{შეფ}} := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i')^2}{n-2}},$$

იგი წარმოადგენს დამოკიდებული ცვლადის დაკვირვებული მნიშვნელობების სტანდარტულ გადახრას საპროგნოზო მნიშვნელობებისაგან.

$y(x)$ მნიშვნელობის α მნიშვნელოვნების დონის მქონე **საპროგნოზო ინტერვალი** (ნდობის ინტერვალის ანალოგი) მოიცემა თანაფარდობით:

$$\left(y(x) - t_{n-2,\alpha/2} s_{\text{შეფ}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{n(x-\bar{x})}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}},\ y(x) + t_{n-2,\alpha/2} s_{\text{შეფ}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{n(x-\bar{x})}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}}\right)$$

მაგალითი 3. მენეჯერმა შეაგროვა მონაცემები და დაადგინა, რომ გასამრავლებელი მანქანის ასაკსა და თვეში ტექნიკური მომსახურების ხარჯებს შორის მნიშვნელოვანი კავშირია. რეგრესიის წრფის განტოლებაა $y(x) = 8.13x + 55.57$. იპოვეთ შეფასების სტანდარტული შეცდომა, თუ მონაცემებია:

მანქანა	A	B	C	D	E	F
ასაკი, x	1	2	3	4	5	6
ხარჯი, y	62	78	70	90	93	103

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. გავაკეთოთ შემდეგი ცხრილი:

x_i	y_i	y_i'	$y_i - y_i'$	$(y_i - y_i')^2$
1	62			
2	78			
3	70			
4	90			
4	93			
6	103			

ნაბიჯი 2. ვისარგებლოთ რეგრესიის წრფის განტოლებით და გამოვთვალოთ საპროგნოზო მნიშვნელობები თითოეული x_i-სათვის: $y_i' := y(x_i) = 8.13x_i + 55.57$. გვაქვს: $y_1' = 63.7$, $y_2' = 71.83$, $y_3' = 79.96$, $y_4' = y_5' = 88.09$ და $y_6' = 104.35$. შევიტანოთ ეს მონაცემები ცხრილის შესაბამის სვეტში.

ნაბიჯი 3. თითოეულ y_i-ს გამოვაკლოთ შესაბამისი y_i' და შედეგები შევიტანოთ შესაბამის სვეტში: $y_1 - y_1' = -1.7$, $y_2 - y_2' = 6.17$, $y_3 - y_3' = -9.96$, $y_4 - y_4' = 1.91$, $y_5 - y_5' - 1.35$.

ნაბიჯი 4. მიღებული სხვაობები ავიყვანოთ კვადრატში და შევიტანოთ შესაბამის სვეტში.

ნაბიჯი 5. შევკრიბოთ ბოლო სვეტის მონაცემები:

x_i	y_i	y_i'	$y_i - y_i'$	$(y_i - y_i')^2$
1	62	63.7	-1.7	2.89
2	78	71.83	6.17	38.0689
3	70	79.96	-9.96	99.2016
4	90	88.09	1.91	3.6481
4	93	88.09	4.91	24.1081
6	103	104.35	-1.35	1.8225
ჯამი				169.7392

ნაბიჯი 6. გამოვთვალოთ შეფასების სტანდარტული შეცდომა:

$$s_{\text{ე.ო}} := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i'))^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{169.7392}{6-2}} = 6.51.$$

შეფასების სტანდარტული შეცდომა შეიძლება აგრეთვე გამოითვალოს ფორმულით:

$$s_{\text{ე.ო}} := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n-2}}.$$

მაგალითი 4. წინა მაგალითში: ა). გამოთვალეთ შეფასების სტანდარტული შეცდომა უკანასკნელი ფორმულის მიხედვით და **ბ).** ააგეთ 95%-იანი საპროგნოზო ინტერვალი 3 წლის გასამრავლებელი მანქანისათვის თვეში გასაწევი ტექნიკური მომსახურების ხარჯისათვის.

ამოხსნა. ა).

ნაბიჯი 1. შევავსოთ ქვემოთმოყვანილი ცხრილი:

x_i	y_i	$x_i y_i$	y_i^2
1	62	62	3844
2	78	156	6084
3	70	210	4900
4	90	360	8100
4	93	372	8649
6	103	618	10609
ჯამი	496	1778	42186

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ შეფასების სტანდარტული შეცდომა:

$$s_{\text{ე.ო}} := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n-2}} = \sqrt{\frac{42186 - 55.57\cdot 496 - 8.13\cdot 1778}{6-2}} = 6.48$$

(გასაგებია, რომ 6.48 ახლოსაა წინა მაგალითში მიღებულ 6.51-თან).

ბ).

ნაბიჯი 1. ვიპოვოთ: $\sum x_i = 20$, $\sum x_i^2 = 82$, $\bar{x} = \dfrac{20}{6} = 3.3$.

ნაბიჯი 2. ხარჯის პროგნოზი, როცა $x = 3$: $y(3) = 8.13\cdot 3 + 55.57 = 79.96$.

ნაბიჯი 3. გამოვთვალოთ შეფასების სტანდარტული შეცდომა. ა). პუნქტის მიხედვით: $s_{\hat{y}_{np}} = 6.48$.

ნაბიჯი 4. შევიტანოთ საჭირო მონაცემები საპროგნოზო ინტერვალის თანაფარდობაში (აქ $(1-\alpha)\cdot 95 = 100$, $\alpha = 0.05$; $d.f. = 6-2 = 4$; $t_{n-2,\alpha/2} = 2.776$):

$$(79.96 - 2.776\cdot 6.48\cdot\sqrt{1+\frac{1}{6}+\frac{6\cdot(3-3.3)^2}{6\cdot 82-20^2}},\ 79.96+2.776\cdot 6.48\cdot\sqrt{1+\frac{1}{6}+\frac{6\cdot(3-3.3)^2}{6\cdot 82-20^2}}),$$

$$(79.96-2.776\cdot 6.48\cdot 1.08,\ 79.96+2.776\cdot 6.48\cdot 1.08),$$

$$(60.53,\ 99.39).$$

ორ სიდიდეს შორის დამოკიდებულების ხარისხის გასაზომად იყენებენ ე. წ. **კორელაციის კოეფიციენტს**. არსებობს სხვადასხვა სახის კორელაციის კოეფიციენტი. ჩვენ აქ მოვიყვანთ ე. წ. **პირსონის მომენტთა ნამრავლის კორელაციის კოეფიციენტს (Pearson product moment correlation coefficient – PPMC)**, რომელიც დაკავშირებულია ცნობილი სტატისტიკოსის კარლ პირსონის სახელთან.

კორელაციის კოეფიციენტი, გამოთვლილი მონაცემთა შერჩევის მიხედვით, წარმოადგენს ორ სიდიდეს შორის წრფივი დამოკიდებულების ხარისხისა და მიმართულების საზომს. შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი აღინიშნება r ასოთი, ხოლო პოპულაციის მიხედვით გამოთვლილი კორელაციის კოეფიციენტი აღინიშნება ბერძნული ρ (რო) ასოთი.

ორ x და y სიდიდეს შორის **კოვარიაციის კოეფიციენტი** ($\mathrm{cov}(x,y)$) განიმარტება შემდეგი თანაფარდობით: $\mathrm{cov}(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{xy}$,

სადაც $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$. შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი მოიცემა

თანაფარდობით: $r=\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{s_xs_y}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i-\bar{y}}{s_y}\right).$$

კორელაციის კოეფიციენტის თვისებები:

1. $-1\le r\le 1$. r-ის დადებითი მნიშვნელობა მიუთითებს სიდიდეებს შორის პოზიტიური დამოკიდებულების არსებობაზე, ხოლო უარყოფითი მნიშვნელობა კი – უარყოფითზე.

2. $|r|=1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x და y სიდიდეებს შორის არსებობს წრფივი კავშირი $y_i=ax_i+b$. ამასთანავე, თუ $r=1$, მაშინ $a>0$ და თუ $r=-1$, მაშინ $a<0$.

3. კორელაციის კოეფიციენტი უცვლელი რჩება სიდიდეების წრფივი გარდაქმნისას.

4. კორელაციის კოეფიციენტი ზომავს სიდიდეებს შორის წრფივი დამოკიდებულების სიძლიერეს. სხვა, არაწრფივი, თუნდაც დეტერმინისტული კავშირი კორელაციაში არ აისახება.

5. რაც უფრო კონცენტრირებულია მონაცემები რაიმე წრფის მიდამოში, მით უფრო დიდია კორელაციის კოეფიციენტი.

6. ორ სიდიდეს შორის კავშირი არსებობს, თუ ადგილი აქვს თანაფარდობას: $|r|\ge 2/\sqrt{n}$, სადაც n შერჩევის მოცულობაა.

7. თუ მოცემულია მონაცემთა ორი სიმრავლე $x_1,\dots,x_n$ და $y_1,\dots,y_n$, მაშინ მონაცემთა ახალი $z_i=x_i\pm y_i$ $(i=1,\dots,n)$ სიმრავლისათვის შერჩევითი დისპერსია ასე გამოითვლება: $s_z^2=s_x^2+s_y^2\pm 2\operatorname{cov}(x,y)$ (თუ $\operatorname{cov}(x,y)=0$, მაშინ $s_z^2=s_x^2+s_y^2$). ანალოგიურად, $s_z'^2=s_x'^2+s_y'^2\pm 2\operatorname{cov}'(x,y)$, სადაც

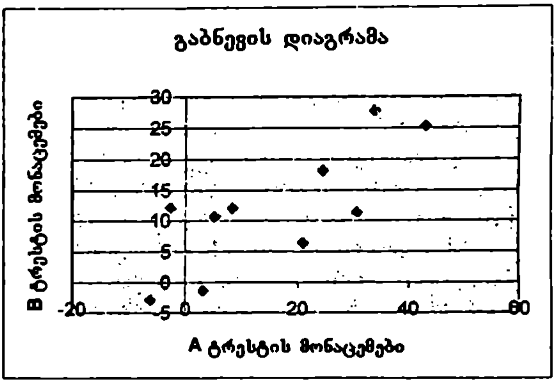
$$\operatorname{cov}'(x,y)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\frac{n}{n-1}\operatorname{cov}(x,y).$$

მაგალითი 5. მოცემულია ორი ტრესტის წლიური საპროცენტო შემოსავლის მონაცემები ბოლო 10 წლის განმავლობაში:

ტრესტი A	8.3	-6.2	20.9	-2.7	33.6	42.8	24.4	5.2	3.1	30.5
ტრესტი B	12.1	-2.8	6.4	12.2	27.8	25.3	18.2	10.7	-1.3	11.4

ავაგოთ გაბნევის დიაგრამა და გამოვთვალოთ კორელაციის კოეფიციენტი.

ამოხსნა. A ტრესტის მონაცემები გადავზომოთ x ღერძზე, B ტრესტისა კი y ღერძზე.



ამ შემთხვევაში $\bar{x}=16$, $\bar{y}=12$, $s_x=17.65$ და $s_y=10.51$. ამიტომ გვაქვს:

$$\operatorname{cov}(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{x}\bar{y}=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot[8.3\cdot 12.1+(-6.2)\cdot(-2.8)+\cdots+30.5\cdot 11.4]-16\cdot 12=71.48,$$

შესაბამისად,

$$r = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{s_x s_y} = \frac{71.48}{17.65 \cdot 10.51} \approx 0.39 .$$

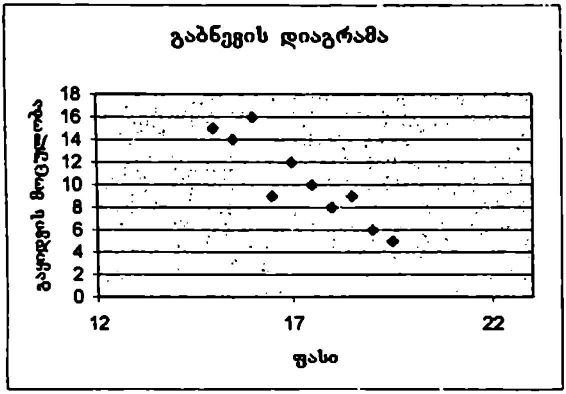
კორელაციის კოეფიციენტის ეს მნიშვნელობა გვაეწმუნებს, რომ არსებობს სუსტად გამოხატული პოზიტიური წრფივი კავშირი A და B ტრესტების ამონაგებს შორის, რასაც გაბნევის დიაგრამაც ადასტურებს.

მაგალითი 6. ახალი პროდუქციის ფასის დასადგენად კომპანიამ შეარჩია 10 ქალაქი, რომელთაც არსებითად ერთი და იგივე ყიდვის პოტენციალი გააჩნია და გამოიტანა პროდუქცია ბაზარზე ყოველ მათგანში სხვადასხვა ფასად. კომპანიის მიერ მიღებული შედეგები მოყვანილია ცხრილში:

ქალაქის ნომერი	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ფასი, x	15.0	15.5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5
გაყიდვის მოცულობა, y	15	14	16	9	12	10	8	9	6	5

დავადგინოთ გაყიდვის მოცულობის ფასზე დამოკიდებულების სახე.

ამოხსნა. ავაგოთ გაბნევის დიაგრამა



როგორც დიაგრამა გვიჩვენებს, ჩვენს წინაშეა უარყოფითი წრფივი კავშირის ტენდენცია: მონაცემები თავმოყრილი არიან უარყოფითი დახრილობის მქონე წრფის მიდამოში. რადგანაც კორელაციის კოეფიციენტი ზომავს ორ სიდიდეს შორის არსებული წრფივი კავშირის სიძლიერეს, უნდა მოველოდეთ, რომ კორელაციის კოეფიციენტი საკმაოდ ახლოს იქნება -1-თთან. გამოვთვალოთ კორელაციის კოეფიციენტი. გვაქვს:

$$\bar{x} = 17.25, \quad s_x = 1.44, \quad \bar{y} = 10.4, \quad s_y = 3.56, \quad \mathrm{cov}(x,y) = -4.75 \text{ და}$$

$$r = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{s_x s_y} = \frac{-4.75}{5.13} \approx -0.93 .$$

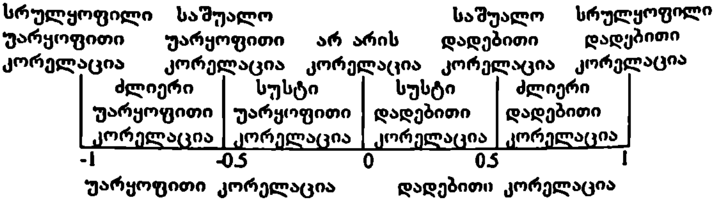
კორელაციის კოეფიციენტის ეს მნიშვნელობა ადასტურებს გაბნევის დიაგრამის დახმარებით მიღებულ დასკვნას. წრფეს, რომლის მიდამოშიაც თავმოყრილია დაკვირვებული წყვილები აქვს სახე: $y = \bar{a}x + \tilde{b}$, სადაც

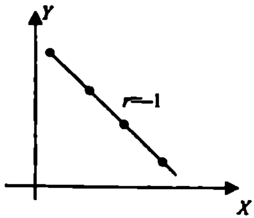
$$\bar{a} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{s_x^2} = \frac{-4.75}{1.44^2} \approx -2.29 \quad \text{და} \quad \bar{b} = \bar{y} - \bar{a}\bar{x} = 10.4 + 2.29 \cdot 17.25 \approx 49.90,$$

ანუ $y = -2.29x + 49.9$.

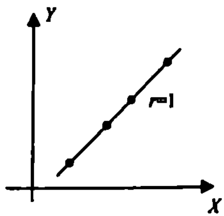
ეს განტოლება კომპანიას საშუალებას აძლევს ახალი პროდუქციის ფასის მიხედვით გააკეთოს პროგნოზი გაყიდვის შესაძლო მოცულობის შესახებ.

ამრიგად, *კორელაციის კოეფიციენტის* მნიშვნელობა მოთავსებულია -1-სა და 1-ს შორის. თუ ორ სიდიდეს შორის ადგილი აქვს *მკაცრად დადებით წრფივ დამოკიდებულებას,* მაშინ r-ის მნიშვნელობა ახლოსაა +1-თან. თუ ორ სიდიდეს შორის ადგილი აქვს *მკაცრად უარყოფით წრფივ დამოკიდებულებას,* მაშინ r-ის მნიშვნელობა ახლოსაა -1-თან. როდესაც ორ სიდიდეს შორის არა გვაქვს წრფივი დამოკიდებულება, ან ამ სიდიდეებს შორის სუსტი კავშირია, მაშინ r-ის მნიშვნელობა ახლოსაა 0-თან. ქვემოთ მოყვანილია კორელაციის ხარისხის სიტყვიერი დახასიათებისათვის მიღებული ტერმინოლოგია და შესაბამისი დიაგრამები:

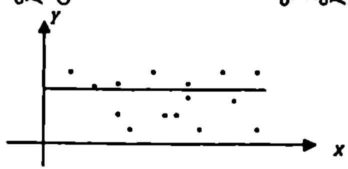




სრულყოფილი უარყოფითი კორელაცია



სრულყოფილი დადებითი კორელაცია



არ არის კორელაცია

ძლიერი უარყოფითი
კორელაცია

ძლიერი დადებითი
კორელაცია

კორელაციის კოეფიციენტის **პირდაპირი** გამოთვლისათვის იყენებენ ფორმულას:

$$r=\frac{n(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)-(\sum_{i=1}^{n}x_i)\cdot(\sum_{i=1}^{n}y_i)}{\sqrt{[n(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2]\cdot[n(\sum_{i=1}^{n}y_i^2)-(\sum_{i=1}^{n}y_i)^2]}}.$$

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა 6 შემთხვევით შერჩეული პიროვნების ასაკისა და არტერიული წნევის მონაცემების მიხედვით:

პერსონა	A	B	C	D	E	F
ასაკი	43	48	56	61	67	70
წნევა	128	120	135	143	141	152

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. გავაკეთოთ ცხრილი ისე როგორც ეს ქვემოთაა ნაჩვენები:

პერსონა	ასაკი, x	წნევა, y	xy	x^2	y^2
A	43	128			
B	48	120			
C	56	135			
D	61	143			
E	67	141			
F	70	152			

ნაბიჯი 2. გამოვთვალოთ xy, x^2 და y^2 გამოსახულებათა მნიშვნელობები და შევიტანოთ ცხრილის შესაბამის სვეტებში. შევკრიბოთ სვეტებში მოთავსებული მნიშვნელობები. დასრულებულ ცხრილს ექნება შემდეგი სახე:

პერსონა	ასაკი, x	წნევა, y	xy	x^2	y^2
A	43	128	5.504	1.849	16.384
B	48	120	5.760	2.304	14.400
C	56	135	7.560	3.136	18.225
D	61	143	8.723	3.721	20.449
E	67	141	9.447	4.489	19.881
F	70	152	10.640	4.900	23.104
	$\sum x=345$	$\sum y=819$	$\sum xy=47.634$	$\sum x^2=20.399$	$\sum y^2=112.443$

ნაბიჯი 3. მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ კორელაციის კოეფიციენტის ფორმულაში და გამოვთვალოთ r:

$$r=\frac{6\cdot 47.634-345\cdot 819}{\sqrt{(6\cdot 20.399-345^2)\cdot(6\cdot 112.443-819^2)}}=0.897.$$

დასკვნა. კორელაციის კოეფიციენტის მიღებული მნიშვნელობა გვეუბნება, რომ ადამიანის ასაკსა და არტერიულ წნევას შორის არსებობს მკაცრად დადებითი წრფივი დამოკიდებულება.

დასკვნები კორელაციის კოეფიციენტის შესახებ

შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი შეიძლება ავიღოთ პოპულაციის კორელაციის კოეფიციენტის შეფასებად, თუ x და y შემთხვევითი სიდიდეები წრფივადაა დაკავშირებული და მათი ერთობლივი განაწილება ნორმალურია.

ჰიპოთეზა: $H_0:\rho=0$ (სიდიდეებს შორის არ არის კორელაცია პოპულაციაში)

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $T=r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}\cong T(n-2)$

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V.: $t=r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$

ალტერნატივა	**კრიტიკული არე C.R. (H_0-ის უარყოფის არე)**
$H_1:\rho>0$	$t\ge t_{n-2,\alpha}$,
$H_1:\rho<0$	$t\le -t_{n-2,\alpha}$,
$H_1:\rho\ne 0$	$t\le -t_{n-2,\alpha/2}$ ან $t\ge t_{n-2,\alpha/2}$

(სადაც $t_{n-2,\alpha}$ არის თავისუფლების $n-2$ ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილი ანუ კრიტიკული მნიშვნელობა C.V.).

$$P\text{- მნიშვნელობა: } P=\begin{cases}P\{T>t\mid H_0\}, \text{ თუ } H_1:\rho>0;\\ P\{T<t\mid H_0\}, \text{ თუ } H_1:\rho<0;\\ P\{|T|>|t|\mid H_0\}, \text{ თუ } H_1:\rho\ne 0.\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}1-F_T(t), \text{ თუ } H_1:\rho>0;\\ F_T(t), \text{ თუ } H_1:\rho<0;\\ 2\cdot[1-F_T(|t|)], \text{ თუ } H_1:\rho\ne 0.\end{cases}$$

გადაწყვეტილება: თუ $t\in$ C.R., მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

P- მნიშვნელობის მეთოდი: თუ $P\le\alpha$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

მაგალითი 8. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა წინა მაგალითში გამოთვლილი კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელოვნების შესახებ.

ამოხსნა (სტანდარტული მეთოდი).

ნაბიჯი 1. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0 : \rho = 0$, $H_1 : \rho \neq 0$.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა. აქ $n = 6$, ე. ი. თავისუფლების ხარისხია $d.f. = 6 - 2 = 4$ და რადგანაც $\alpha = 0.05$, ამიტომ სტიუდენტის განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ $C.V. = \pm t_{n-2,\alpha/2} = \pm t_{4,0.025} = \pm 2.776$.

ნაბიჯი 3. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0.897 \cdot \sqrt{\frac{6-2}{1-0.897^2}} = 4.059 .$$

ნაბიჯი 4. გადაწყვეტილების მიღება: ვინაიდან კრიტერიუმის მნიშვნელობა ვარდება კრიტიკულ არეში, ამიტომ ნულოვან ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, ანუ ასაკსა და წნევას შორის არის მნიშვნელოვანი წრფივი კავშირი.

ამოხსნა (P-მნიშვნელობის მეთოდი).

ნაბიჯი 1. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები: $H_0 : \rho = 0$, $H_1 : \rho \neq 0$.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ თავისუფლების ხარისხი. ვინაიდან $n = 6$, ამიტომ თავისუფლების ხარისხია $d.f. = 6 - 2 = 4$.

ნაბიჯი 3. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0.897 \cdot \sqrt{\frac{6-2}{1-0.897^2}} = 4.059 .$$

ნაბიჯი 4. სტიუდენტის განაწილების ცხრილში თავისუფლების 4-ის ტოლი ხარისხისათვის მოვძებნოთ ორი მნიშვნელობა, რომელთა შორის ვარდება კრიტერიუმის მნიშვნელობა 4.059. ასეთი მნიშვნელობებია 3.747 და 4.604. მათი შესაბამისის α-ების მოძებნით ვპოულობთ, რომ შესაბამისად, 0.01 < P-მნიშვნელობა < 0.02.

ნაბიჯი 5. გადაწყვეტილების მიღება: ვინაიდან P-მნიშვნელობა < α, ამიტომ ნულოვან ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ.

მაგალითი 9. დაწერეთ რეგრესიის წრფის განტოლება მაგალით 5-ში და გააკეთეთ 50 წლის ასაკის ადამიანის არტერიული წნევის პროგნოზი.

ამოხსნა. გვაქვს: $n = 6$, $\sum_{i=1}^{6} x_i = 345$, $\sum_{i=1}^{6} y_i = 819$, $\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 47.634$, $\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 20.399$. გამოვთვალოთ რეგრესიის წრფის კოეფიციენტები:

$$a = \frac{n(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) - (\sum_{i=1}^{n} x_i) \cdot (\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} = 0.964 , \quad b = \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i) \cdot (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i) \cdot (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)}{n(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} = 81.048 .$$

ამიტომ რეგრესიის წრფის განტოლება იქნება:

$$y = 0.964x + 81.048\,.$$

გავაკეთოთ პროგნოზი:

$$y = 0.964 \cdot 50 + 81.048 = 129.248 \approx 129\,.$$

მაშასადამე, 50 წლის ადამიანის სავარაუდო არტერიული წნევა იქნება 129.

შენიშვნა: იმ შემთხვევაში, როცა კორელაციის კოეფიციენტი მნიშვნელოვნად არ განსხვავდება ნულისაგან, y-ის საუკეთესო პროგნოზია y-ის მნიშვნელობების საშუალო.

ამოცანები

1. გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი და გააკეთეთ შესაბამისი დასკვნები x და y სიდიდეებს შორის კავშირის შესახებ:

x	99	150	130	105	219	167	180
y	1200	1000	1050	1150	700	850	900

2. გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი და გააკეთეთ შესაბამისი დასკვნები x და y სიდიდეებს შორის კავშირის შესახებ:

x	40	31	50	53	36	54	36	44
y	32	24	47	50	30	55	33	41

3. სადაზღვევო კომპანია სწავლობს კავშირს სიცოცხლის დაზღვევაზე გამოყოფილ სახსრებსა (y) და ოჯახის შემოსავლებს (x) შორის. ამ მიზნით შეისწავლეს 6 კლიენტის შესაბამისი მაჩვენებლები:

x	45	20	40	40	30	55
y	70	50	60	50	55	105

გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი.

ქვემოთმოყვანილ ამოცანებში $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელოვნების შესახებ.

4. გაყიდვების მენეჯერს აინტერესებს არის თუ არა კავშირი კვირის განმავლობაში გარკვეულ პროდუქციაზე რადიოთი გაკეთებულ სარეკლამო განცხადებათა რაოდენობასა და ამ პროდუქციის გაყიდვის შედეგად ამოღებულ თანხას შორის (თანხა იზომება ათასობით ლარებში):

განცხადებათა რაოდენობა, x	2	5	8	8	10	12
ამოღებული თანხა, y	2	4	7	6	9	10

5. მკვლევარს აინტერესებს არის თუ არა კავშირი ადამიანის ასაკსა და მის მიერ კვირის განმავლობაში გამაჯანსაღებელ ვარჯიშზე დახარჯულ საათებს შორის:

ასაკი, x	18	26	32	38	52	59
საათები, y	10	5	2	3	1.5	1

6. კვლევის მიზანია დაადგინოს დამოკიდებულება ადამიანის თვიურ შემოსავალსა და მის მიერ თვის განმაველობაში სახლის გარეთ სადილობის რაოდენობას შორის:

შემოსავალი, x	500	1200	1500	945	850	400	540
სადილები, y	8	12	16	10	9	3	7

7. მაღაზიის მენეჯერს აინტერესებს არის თუ არა კავშირი გამყიდველის ასაკსა და მის მიერ წლის განმაველობაში ავადმყოფობის გამო გაცდენილ დღეების რაოდენობას შორის:

ასაკი, x	18	26	39	48	53	58
დღეები, y	16	12	9	5	6	2

8. პედაგოგს აინტერესებს რამდენად ძლიერი კავშირია სტუდენტის ტესტირების ქულასა და მის საშუალო შეფასებას შორის:

ტესტის ქულა, x	98	105	100	100	106	95	116	112
საშუალო ქულა, y	2.1	2.4	3.2	2.7	2.2	2.3	3.8	3.4

9. სადაზღვევო კომპანიას აინტერესებს რამდენად ძლიერი კავშირია ადამიანის კვირეული მუშაობის საათების რაოდენობასა და მის მიერ ამავე პერიოდში მიღებული ტრამვების რაოდენობას შორის:

საათები, x	40	32	36	44	41
ტრამვები, y	1	0	3	8	5

ქვემოთმოყვანილ ამოცანებში $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელოვნების შესახებ და დაწერეთ რეგრესიის წრფის განტოლება.

10. გამოკითხვის შედეგად მიღებული ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით გააკეთეთ პროგნოზი 30 წლიანი მოწევის სტაჟის მქონე ადამიანის ავად გახდომათა რაოდენობის:

მოწევის სტაჟი, x	22	14	31	36	9	41	19
ავად გახდომა, y	20	14	54	63	17	71	23

11. მკვლევარს აინტერესებს როგორ არის დამოკიდებული ადამიანის ასაკი მის მიერ კვირაში ფიზიკურ ვარჯიშზე დახარჯული საათების რაოდენობასთან:

ასაკი, x	34	22	48	56	62
საათები, y	5.5	7	3.5	3	1

12. პედაგოგს აინტერესებს დამოკიდებულების სიძლიერე სტუდენტების მიერ "სტატისტიკა I"-სა და "სტატისტიკა II"-ში მიღებულ საბოლოო შეფასებებს შორის:

სტატისტიკა I, x	87	92	68	72	95	78	83	98
სტატისტიკა II, y	83	88	70	74	90	74	83	99

13. პედაგოდს აინტერესებს როგორაა დამოკიდებული სტუდენტის მიერ ლექციების გაცდენათა რიცხვი მის მიერ მიღებულ საბოლოო შეფასებაზე:

გაცდენა, x	10	12	2	0	8	5
შეფასება, y	70	65	96	94	75	82

ქვემოთმოყვანილ ამოცანებში ისარგებლეთ P-მნიშვნელობის მეთოდით

14. მედიკოსს აინტერესებს როგორი კავშირია მამის წონასა (ფუნტებში) და ახალშობილი ვაჟის წონას შორის:

მამის წონა, x	176	160	187	210	196	142	205	215
ვაჟის წონა, y	6.6	8.2	9.2	7.1	8.8	9.3	7.4	8.6

15. ავტომობილების დილერს აინტერესებს არის თუ არა კავშირი გამყიდველის მუშაობის სტაჟსა და მის მიერ თვეში გაყიდული ავტომობილების რაოდენობას შორის:

სტაჟი, x	3	9	2	5	1
რაოდენობა, y	5	14	12	21	8

ამოცანები გამოცდისათვის

ქვემოთმოყვანილ 4 ამოცანაში ააგეთ გაბნევის დიაგრამა, იპოვეთ კორელაციის კოეფიციენტი, შეამოწმეთ კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელოვნება $\alpha = 0.05$-სათვის, დაწერეთ რეგრესიის წრფის განტოლება, გააკეთეთ პროგნოზი.

16. სწავლობენ დამოკიდებულებას მამის ასაკსა და შვილების რაოდენობას შორის. გააკეთეთ 35 წლის მამის შვილების რაოდენობის პროგნოზი, თუ:

ასაკი, x	19	21	27	20	35	31	32	38
რაოდენობა, y	1	2	3	0	1	4	3	4

17. მკვლევარს აინტერესებს კავშირი მძღოლის ასაკსა და წელიწადში მომხდარ ავტო-საგზაო შემთხვევათა რაოდენობას შორის. გააკეთეთ 64 წლის მძღოლის ავტო-საგზაო შემთხვევათა რაოდენობის პროგნოზი, თუ:

ასაკი, x	63	65	60	62	66	67	59
რაოდენობა, y	2	3	1	0	3	1	4

18. მედიკოსს აინტერესებს იცოდეს დამოკიდებულება ბავშვის ასაკსა და კბილებზე კარიესის რაოდენობას შორის. გააკეთეთ კარიესის რაოდენობის პროგნოზი 11 წლის ბავშვისათვის, თუ:

ასაკი, x	6	8	9	10	12	14
რაოდენობა, y	2	1	3	4	6	5

19. იკვლევენ ყოველდღიურად მიღებული ცხიმის რაოდენობის დამოკიდებულებას პაციენტის ქოლესტერინის დონეზე. გააკეთეთ ქოლესტერინის დონის პროგნოზი 8.5 გრამი ცხიმის მიღებისას, თუ:

ცხიმის რაოდენობა, x	6.8	5.5	8.2	10	8.6	9.1	8.6	10.4
ქოლესტერ. დონე, y	183	201	193	283	222	250	190	218

20. მე-18 ამოცანაში იპოვეთ შეფასების სტანდარტული შეცდომა.
21. მე-19 ამოცანაში იპოვეთ შეფასების სტანდარტული შეცდომა.
22. მე-18 ამოცანაში ააგეთ 90%-იანი საპროგნოზო ინტერვალი 7 წლის ბავშვის კარიესთა რაოდენობისათვის.
23. მე-19 ამოცანაში ააგეთ 95%-იანი საპროგნოზო ინტერვალი იმ პაციენტის ქოლესტერინის დონისათვის, ვინც მოიხმარს 10 გრამ ცხიმს.

პასუხები:

1. $r=-0.98$, ძლიერი უარყოფითი კორელაცია. 2. $r=0.98$, ძლიერი დადებითი კორელაცია. 3. $r=0.62$. 4. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$; $r=0.988$; $C.V.=\pm t_{n-2,\alpha/2}=\pm t_{4,0.025}=\pm 2.776$; H_1. 5. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$; $r=-0.832$; H_1. 6. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$; $r=0.952$; H_1. 7. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$; $r=-0.979$; H_1. 8. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$; $r=0.716$; H_1. 9. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$; $r=0.814$; H_0. 10. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$; $r=0.956$; H_1; $y=1.969x-10.944$; $y(30)=48$. 11. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$; $r=-0.984$; H_1; $y=-0.14x+10.199$. 12. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$; $r=0.963$; H_1; $y=0.86x+10.251$. 13. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$; $r=-0.981$; H_1; $y=-2.668x+96.784$. 14. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$; $r=-0.306$; 0.2 < P-მნიშვნელობა < 0.5; H_0; r არამნიშვნელოვანია. 15. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$; $r=0.491$; 0.2 < P-მნიშვნელობა < 0.5; H_0; r არამნიშვნელოვანია. 16. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$; $r=0.857$; H_1; $y=0.19x-2.818$; $y(35)=3.84\approx 4$. 17. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$; $r=-0.078$; H_0; კორელაცია არამნიშვნელოვანია. 18. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$; $r=0.842$; H_1; $y=0.551x-1.918$; $y(11)=4.14\approx 4$. 19. $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho\neq 0$; $r=0.602$; H_0; კორელაცია არამნიშვნელოვანია. 20. 1.129. 21. 29.5. 22. (0, 5). 23. 217.5 – დაკვირვებულ მნიშვნელობათა საშუალო.

თავი XVIII
რეგრესია და კორელაცია

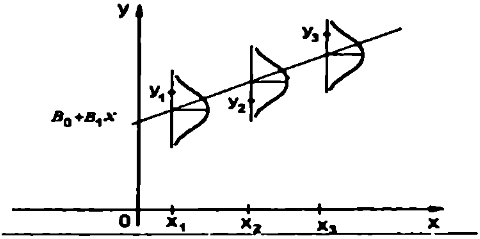
1. მარტივი წრფივი რეგრესია.

ზოგადად ამოცანა ასე აღიწერება: მოცემულია (x_i, Y_i), $i = 1,2,...,n$ წყვილები, რომელთა შორის შემდეგი დამოკიდებულებაა

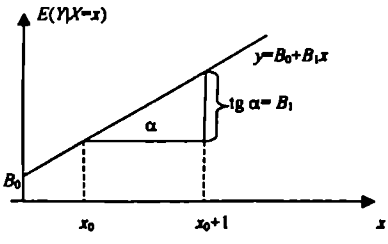
$$Y_i = B_0 + B_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1,2,...,n,$$

სადაც B_0 და B_1 უცნობი მუდმივებია, $\varepsilon_i \cong N(0,\sigma^2)$ კი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია საშუალოთი ნული და უცნობი σ^2 დისპერსიით.

$y = B_0 + B_1 x$ წრფეს **რეგრესიის წრფე** ეწოდება. B_0 და B_1 კოეფიციენტებს – **რეგრესიის კოეფიციენტები**, ხოლო ε_i შემთხვევით სიდიდეს – **შემთხვევითი გადახრა** ეწოდება. ε_i – შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც განაპირობებს $y = B_0 + B_1 x$ წრფიდან გაბნევას. x ცვლადს უწოდებენ ***ამხსნელ*** **(დამოუკიდებელ) ცვლადს ან პრედიქტორს**, ხოლო Y-ს კი – ***მოპასუხე*** **(დამოკიდებულ) ცვლადს**.



B_1 კოეფიციენტს შეიძლება მივცეთ შემდეგი ინტერპრეტაცია: ამხსნელი x ცვლადის ერთი ერთეულით ცვლილება იწვევს დამოკიდებული Y ცვლადის ცვლილებას საშუალო B_1 სიდიდით. B_0 კოეფიციენტი წარმოადგენს რეგრესიის წრფის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილს.



საჭიროა $(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), ..., (x_n, Y_n)$ დამოუკიდებელი დაკვირვებების საფუძველზე აიგოს B_0 და B_1 კოეფიციენტებისა და σ^2 დისპერსიის შეფასებები.

2. უმცირეს კვადრატთა მეთოდი.

B_0 და B_1 კოეფიციენტების b_0 და b_1 შეფასებებს ეძებენ ე. წ. უმცირეს კვადრატთა მეთოდით: $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 \to \min$.

$$b_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \coloneqq \frac{SS_{XY}}{SS_X}, \quad b_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - b_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{Y} - b_1 \overline{x},$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2, \quad SS_{XY} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}.$$

$\hat{Y} = b_0 + b_1 x$ წრფეს ეწოდება რეგრესიის წრფის შეფასება, ან უმცირეს კვადრატთა მეთოდით აგებული წრფე.

შერჩევითი კორელაციის რიცხვითი მნიშვნელობა: $r = \dfrac{SS_{XY}}{\sqrt{SS_X \cdot SS_Y}}$.

შეფასებული რეგრესიის წრფის განტოლება შემდეგნაირად გადაიწერება: $y = \overline{Y} + b_1(x - \overline{x})$. ეს წრფე გადის $(\overline{x}, \overline{Y})$ წერტილზე და $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i) = 0$.

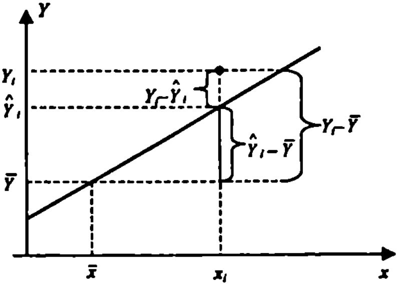
მოდელი რომელიც $Y = B_0 + B_1 x + \varepsilon$ ფორმულითაა მოცემული გულისხმობს, რომ გაბნევის დიაგრამაზე წერტილების გაბნევა განპირობებულია Y ცვლადის მნიშვნელობათა გაბნევით რეგრესიის მრუდიდან, ხოლო x ცვლადის მნიშვნელობები განიხილება ზუსტ მნიშვნელობებად. თუ რეგრესიის წრფის განტოლებაში x-ის ნაცვლად ჩავსვამთ დაკვირვებულ $x_1, \ldots, x_n$ მნიშვნელობებს, მაშინ შესაბამის $\hat{Y}_1 = b_0 + b_1 x_1, \ldots, \hat{Y}_n = b_0 + b_1 x_n$ მნიშვნელობებს ეწოდება Y ცვლადის პროგნოზირებული მნიშვნელობები, ხოლო $e_1 = Y_1 - \hat{Y}_1, \ldots, e_n = Y_n - \hat{Y}_n$ სიდიდეებს ნაშთები ეწოდება. სიდიდეს

$$SSE \coloneqq \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[Y_i - (b_0 + b_1 x_i)\right]^2 = SS_Y - \frac{SS_{XY}^2}{SS_X}$$

ეწოდება ***კვადრატების ნარჩენი ჯამი*** (ნაშთთა კვადრატების ჯამი, *sum of square for eror*).

$$SST \coloneqq \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 \coloneqq SSE + SSR.$$

SST (*total sum of squares*) სიდიდეს ***სრულ ვარიაციას*** უწოდებენ, სიდიდე $SSR := \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ არის გაბნევის ის ნაწილი, რომელის ახსნილია რეგრესიის წრფით (***regression sum of squares***). *SSE* არის სრული გაბნევის ის ნაწილი, რომელიც არ აიხსნება რეგრესიის საშუალებით. $\frac{SST}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$; $\frac{SSR}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$; $\frac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$. $\underset{n-1}{SST} = \underset{n-2}{SSE} + \underset{1}{SSR}$.



დეტერმინაციის კოეფიციენტი. რეგრესიის ხარისხის დასახასიათებლად შემოჰყავთ ე. წ. შერჩევითი დეტერმინაციის კოეფიციენტი:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{SSR}{SST}, \quad \left(\frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}\right)$$

ე. ი. R^2 წარმოადგენს რეგრესიით ახსნილ გაბნევის წილს სრულ გაბნევაში. მტკიცდება, რომ R^2 – ახალს არაფერს იძლევა, ვინაიდან $R^2 = r^2$, სადაც r შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტია.

თუ r^2 მცირეა, ე.ი. რეგრესიით ახსნილია ხრული გაბნევის მცირე წილი, მაშინ მოსაძებნია სხვა ალტერნატიული მოდელი (მაგალითად, არაწრფივი ან მრავლობითი რეგრესიის მოდელი), რომელიც უფრო ეფექტურად ახსნიდა Y ცვლადის დაკვირვებული მნიშვნელობების სრულ გაბნევას თავისი საშუალო მნიშვნელობების მიმართ.

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = R^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = r^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = (1 - r^2) \cdot \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$$

1. სტატისტიკური დასკვნები რეგრესიის კოეფიციენტების შესახებ.

მტკიცდება, რომ b_0 და b_1 შესაბამისად B_0 და B_1 პარამეტრების ჩაუნაცვლებელი შეფასებებია ($Eb_0 = B_0$, $Eb_1 = B_1$) და

$$\sigma_{b_0}^2 := Db_0 = \sigma^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; \qquad \sigma_{b_1}^2 := Db_1 = \sigma^2 \cdot \frac{n}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$

უცნობი σ^2-ის ჩაუნაცვლებელი შეფასება მოიცემა თანაფარდობით

$$S^2 = (\sum_{i=1}^{n} e_i^2)/(n-2) = (\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2)/(n-2) = SSE/(n-2).$$

სიდიდეს $S = \sqrt{SSE/(n-2)}$ – **სტანდარტული შეცდომა** ეწოდება.

b_0 და b_1 სტატისტიკების დისპერსიების შეფასებებია შესაბამისად

$$S_{b_0}^2 = S^2 \cdot \frac{\sum x_i^2}{n \cdot SS_X}, \qquad S_{b_1}^2 = S^2 \cdot \frac{1}{SS_X}.$$

$T_{b_j} = \dfrac{b_j - B_j}{S_{b_j}} \equiv t(n-2)$, $j = 0,1$. აქედან გამომდინარე იგება ნდობის ინტერვალი B_j-სათვის. α მნიშვნელოვნების დონის მქონე ნდობის ინტერვალი B_j-სათვის შემდეგი სახისაა: $(b_j - s_{b_j} \cdot t_{n-2,\alpha/2}, b_j + s_{b_j} \cdot t_{n-2,\alpha/2})$.

განვიხილოთ ძირითადი $H_0 : B_j = B_j^0$ ჰიპოთეზა $H_1 : B_j \neq B_j^0$ ალტერნატივის წინააღმდეგ. ამ შემთხვევაში კრიტერიუმის სტატისტიკა იქნება

$$T_{b_j} = (b_j - B_j^0)/S_{b_j} \equiv t(n-2).$$

თუ T_{b_j} სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობისათვის t_{b_j} და α მნიშვნელოვნების დონისათვის სრულდება პირობა $\left|t_{b_j}\right| > t_{n-k-1,\alpha/2}$, მაშინ უარვყოფთ $H_0 : B_j = B_j^0$ ჰიპოთეზას (შესაბამისად, ვღებულობთ $H_1 : B_j \neq B_j^0$ ჰიპოთეზას), წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გაგვაჩნია.

შევნიშნავთ, რომ თუ $B_1 = 0$, მაშინ რეგრესიის წრფე აბსცისთა ღერძის პარალელურია, ე. ი. x-ის ცვლილებით Y არ იცვლება. თუ ჩვენ გვინდა, α მნიშვნელოვნების დონით, დავრწმუნდეთ, რომ არ არსებობს რაიმე (დადებითი ან უარყოფითი) წრფივი კავშირი x და Y სიდიდეებს შორის, ნულოვანი ჰიპოთეზა $H_0 : B_1 = 0$ უნდა შემოწმდეს ორმხრივი $H_1 : B_1 \neq 0$ ალტერნატივის წინააღმდეგ. თუ გვსურს დავრწმუნდეთ დადებითი (შესაბამისად, უარყოფითი) წრფივი კავშირის არსებობაში, მაშინ ვიხილავთ მარჯვენა ცალმხრივ $H_1 : B_1 > 0$ (შესაბამისად, მარცხენა ცალმხრივ $H_1 : B_1 < 0$) ალტერნატივას. ყველა შემთხვევაში ჰიპოთეზის შემ-

ოწმება ხდება $T_1 := T_{b_1} = b_1 / S_{b_1} \cong t(n-2)$ სტატისტიკის გამოყენებით. გადაწყვეტილების მიღების წესი ასე ყალიბდება:

ა). ორმხრივი ალტერნატივის $H_1 : B_1 \neq 0$ შემთხვევაში $H_0 : B_1 = 0$ ჰიპოთეზას უარვყოფთ, თუ $|t_1| > t_{n-2,\alpha/2}$;

ბ). მარჯვენა ცალმხრივი ალტერნატივის $H_1 : B_1 > 0$ შემთხვევაში $H_0 : B_1 = 0$ ჰიპოთეზას უარვყოფთ, თუ $t_1 > t_{n-2,\alpha}$;

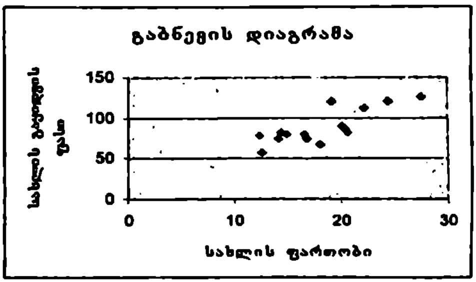
გ). მარცხენა ცალმხრივი ალტერნატივის $H_1 : B_1 < 0$ შემთხვევაში $H_0 : B_1 = 0$ ჰიპოთეზას უარვყოფთ, თუ $t_1 < -t_{n-2,\alpha}$, სადაც t_1 არის T_1 სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა, ხოლო $t_{n-2,\alpha}$ – სტიუდენტის $t(n-2)$ განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილი.

მაგალითი 1. უძრავი ქონების კომპანიის აგენტს სურს განჭვრიტოს სახლის გასაყიდი ფასი. მისი აზრით სახლის ფასი ყველაზე მჭიდრო კავშირშია მის ფრთობთან. მან შემთხვევით შეარჩია ადრე გაყიდული 15 სახლის მონაცემები, რომლებიც მოყვანილია ცხრილის სახით (სადაც x – სახლის ფართობია (× 10 კვ. მ.), ხოლო Y – სახლის გაყიდვის ფასი (1000$)). აგენტის მიზანია სახლის ფასის (დამოუკიდებელი ფასი) პროგნოზირება მისი ფართობის (პრედიქტორის) მიხედვით.

x_i	Y_i	x_i	Y_i	x_i	Y_i
20.0	89.5	14.3	82.5	22.0	112.6
14.8	79.9	27.5	126.3	19.0	120.8
20.5	83.1	16.5	79.3	12.3	78.5
12.5	56.9	24.3	119.9	14.0	74.3
18.0	66.6	20.2	87.6	16.7	74.8

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. შევადგინოთ გაბნევის დიაგრამა



აქედან ჩანს, რომ Y ცვლადის X-ისაგან დამოკიდებულებაში იკვეთება წრფივობის ტენდენცია და შესაძლებელია, რომ მარტივმა წრფივმა რეგრესიამ კარგად აღწეროს იგი. ამიტომ მათემატიკურ მოდელად შეგვეძლია ავირჩიოთ

$$Y_i = B_0 + B_1 x_i + \varepsilon_i .$$

ნაბიჯი 2. გამოვთვალოთ სიდიდეები:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \sum_{i=1}^{n} Y_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ \sum_{i=1}^{n} Y_i^2,\ \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i .$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 172.6,\ \sum_{i=1}^{n} Y_i = 1332.6,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 5222.24,\ \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = 124618.42,\ \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i = 25257.97\text{ ყ}$$

ნაბიჯი 3. გამოვთვალოთ b_0-ისა და b_1-ის გამოსათვლელად საჭირო სიდიდეები:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{272.6}{15} = 18.17,\quad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1332.6}{15} = 88.84\text{ ყ}$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 = 268.19,\ SS_Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\bar{Y}^2 = 6230.24,$$

$$SS_{xY} = \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - n\overline{xY} = 1040.18 .$$

ნაბიჯი 4. გამოვთვალოთ b_0 და b_1 შეფასებები:

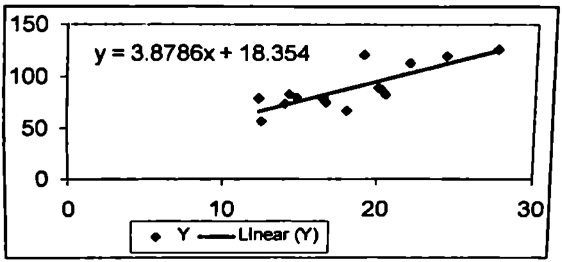
$$b_1 = \frac{SS_{xY}}{SS_x} = \frac{1040.18}{268.19} = 3.8786,$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{x} = 88.84 - 3.8786\cdot 18.17 = 18.354 .$$

ნაბიჯი 5. დავწეროთ რეგრესიის წრფის შეფასება:

$$\hat{Y} = 18.354 + 3.8786x .$$

მიღებული მონაცემები გვაძლევს შემდეგ გრაფიკულ სურათს



დასკვნა. b_1-ის მიღებული მნიშვნელობა $b_1 = 3.8786$, ნიშნავს, რომ სახლის ფართობის ყოველი ერთი ერთეულით გაზრდა იწვევს სახლის ფასის საშუალოდ $3.8786\cdot 1000\$ = 3878.6\$$-ით გაზრდას.

ნაბიჯი 6. გამოვთვალოთ ESS. გვაქვს:

$$SSE = SS_Y - \frac{SS_{xY}^2}{SS_x} = 6230.24 - \frac{(1040.18)^2}{268.19} = 21995.88,$$

საიდანაც მიიღება უცნობი σ^2 დისპერსიის შეფასება

$$S^2=\frac{SSE}{n-2}=\frac{21995.88}{13}=168.91.$$

ნაბიჯი 7. გამოვთვალოთ $S_{b_0}^2$ და $S_{b_1}^2$:

$$S_{b_0}^2=S^2\cdot\frac{\sum x_i^2}{n\cdot SS_X}=168.91\cdot\frac{5222.24}{15\cdot 268.19}=219.26,$$

$$S_{b_1}^2=S^2\cdot\frac{1}{SS_X}=168.91\cdot\frac{1}{268.19}=0.6298,$$

შესაბამისად, $S_{b_1}=0.7936$.

ნაბიჯი 8. გამოვთვალოთ დეტერმინაციის კოეფიციენტი:

$$R^2=1-\frac{SSE}{SST}=0.648.$$

დეტერმინაციის კოეფიციენტის გამოთვლილი მნიშვნელობა გვიჩვენებს, რომ მარტივი წრფივი რეგრესიით აიხსნება სახლის გასაყიდი ფასის ვარიაციის მხოლოდ 64.8%, დანარჩენი 35.2% აუხსნელი რჩება. საჭიროა შეირჩეს სხვა მოდელი (არაწრფივი რეგრესია, ან მრავლობითი რეგრესია).

მაგალითი 2. მაგალით 1-ში:

ა). ავაგოთ $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონის მქონე ნდობის ინტერვალი B_1-სათვის;

ბ). შევამოწმოთ $H_0:B_1=0$ ჰიპოთეზა $H_1:B_1\neq 0$ ალტერნატივის წინააღმდეგ.

ამოხსნა. ა). ცნობილია, რომ $T_1:=\frac{b_1-B_1}{S_{b_1}}\cong t(n-2)$. სტიუდენტის ზედა კრიტიკული წერტილების ცხრილში ვპოულობთ $t_{n-2,\alpha/2}=t_{13,0.025}=2.16$. ამიტომ საძიებელი ნდობის ინტერვალი იქნება:

$$3.88-2.16\cdot 0.7936<B_1<3.88+2.16\cdot 0.7936,$$

$$\text{ანუ }\ 2.1658<B_1<5.5942.$$

ბ). T_1 სტატისტიკის გამოთვლილი მნიშვნელობა t_1 იქნება:

$$t_1=\frac{b_1-B_1}{S_{b_1}}=\frac{3.88-0}{0.7936}=4.8891>t_{13,0.025}=2.16.$$

ამიტომ $H_0:B_1=0$ ჰიპოთეზას უარვყოფთ (ვინაიდან $|t_1|>t_{n-2,\alpha/2}$).

ამრიგად, $\alpha=0.05$ მნიშვნელოვნების დონით სარწმუნოა მტკიცება, რომ სახლის ფასსა და მის ფართობს შორის არსებობს წრფივი კავშირი.

4. მრავლობითი რეგრესია.

განვიხილოთ წრფივი მრავლობითი რეგრესიის მოდელი

$$Y=B_0+B_1X_1+\cdots+B_kX_k+\varepsilon,$$

სადაც Y – დამოკიდებული ცვლადია, $X_1,\ldots,X_k$ – დამოუკიდებელი ცვლადებია (**მათ ამხსნელ ცვლადებს, პრედიქტორებს, ან რეგრესორებს** უწოდებენ), ε – შე-

შფოთებაა, რომელსაც ხშირად **ჭეშმარიტ გადახრას** ან **შეცდომას** უწოდებენ. ε შემთხვევითი სიდიდეა, რომლისთვისაც $E\varepsilon = 0$, ხოლო $D\varepsilon = \sigma^2 > 0$. იგულისხმება, რომ დამოუკიდებელი $X_1, ..., X_k$ ცვლადების მნიშვნელობები ზუსტადაა ცნობილი და გადახრები მიეწერება მხოლოდ Y ცვლადს.

ცხადია, რომ Y შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი პირობაში, რომ $X_1 = x_1, ..., X_k = x_k$ მოიცემა ფორმულით:

$$E(Y \mid X_1 = x_1, ..., X_k = x_k) = B_0 + B_1 x_1 + \cdots + B_k x_k,$$

ხოლო დისპერსია იმავე პირობებში იქნება:

$$D(Y \mid X_1 = x_1, ..., X_k = x_k) = \sigma^2.$$

k ცვლადის $y = B_0 + B_1 x_1 + \cdots + B_k x_k$ ფუნქციას **ჭეშმარიტი რეგრესიის ფუნქცია** ეწოდება, ხოლო $B_0, B_1, ..., B_k$ სიდიდეებს კი – **რეგრესიის კოეფიციენტები.**

საბოლოოდ, მრავლობითი რეგრესიის ამოცანა შემდეგნაირად აღიწერება: მოცემულია n მოცულობის შერჩევა $(Y_i, x_{1i}, ..., x_{ki})$, $i = 1, 2, ..., n$, $n > k$, სადაც

$$Y_i = B_0 + B_1 x_{1i} + \cdots + B_k x_{ki} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{3}$$

ხოლო ε_i შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც განაპირობებს Y_i ცვლადის გადახრას ჭეშმარიტი რეგრესიის ფუნქციის $B_0 + B_1 x_{1i} + \cdots + B_k x_{ki}$ მნიშვნელობიდან; $\varepsilon_i \cong N(0, \sigma^2)$, $E(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$.

ისევე როგორც მარტივი რეგრესიის შემთხვევაში, პირველ ეტაპზე ხდება რეგრესიის თეორიული $B_0, B_1, ..., B_k$ კოეფიციენტებისა და უცნობი σ^2 დისპერსიის შეფასება. რეგრესიის კოეფიციენტების შეფასება ისევ წარმოებს უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენებით. მას შემდეგ რაც მიღებულია თეორიული რეგრესიის კოეფიციენტების $b_0, b_1, ..., b_k$ შეფასებები, $\hat{Y} = b_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_k x_k$ ფუნქცია განსაზღვრავს რეგრესიის ფუნქციის შეფასებას. სიდიდეს

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - b_0 - b_1 x_{1i} - \cdots - b_k x_{ki}$$

ნაშთი ეწოდება.

ისევე როგორც მარტივი რეგრესიის მოდელში, უცნობი $\sigma^2 = D\varepsilon_i$ დისპერსიის შეფასება ეყრდნობა ნაშთების (შესწორებების) კვადრატების ჯამს (*sum of square errors (residuals) – SSE):*

$$SSE := \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)_i^2.$$

ვინაიდან ამ გამოსახულებაში შედის $(k+1)$ შეფასებული პარამეტრი, მისი თავისუფლების ხარისხია $n-(k+1)$ და ამიტომ დისპერსიის შეფასებად იღებენ სიდიდეს:

$$S^2 = \frac{SSE}{n-(k+1)} = MSE.$$

რადგანაც, დაშვების თანახმად $\varepsilon_i \equiv N(0,\sigma^2)$, ამიტომ Y_i ნორმალურებია და როგორც მათი წრფივი კომბინაცია, ასევე ნორმალური იქნება b_j შეფასებებიც. მტკიცდება, რომ: $T_j := (b_j - B_j)/S_{b_j} \equiv t(n-(k+1))$.

დეტერმინაციის კოეფიციენტი. დავწეროთ დისპერსიული თანაფარდობა

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2 .$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$SST=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2,\ SSE=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2 \text{ და } SSR=\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2 .$$

მაშინ გვაქვს: $\underset{n-1}{SST}=\underset{n-k-1}{SSE}+\underset{k}{SSR}$, სადაც SSR – არის სრული გაბნევის რეგრესიით ახსნილი ნაწილი, SSE – სრული გაბნევის ის ნაწილი, რომელიც არ აიხსნება რეგრესიით. თითოეულ წევრს ქვევით მიწერილი აქვს თავისუფლების ხარისხი.

ე. წ. **მრავლობითი დეტერმინაციის კოეფიციენტი** წარმოადგენს სრული ვარიაციის იმ ნაწილს, რომელიც ახსნილია მრავლობითი რეგრესიის მოდელით:

$$R^2=1-\frac{SSE}{SST}\left(=\frac{SSR}{SST}\right).$$

გარდა ამისა, შემოაქვთ ე. წ. **თავისუფლების ხარისხთან შეთანხმებული (*adjusted*) დეტერმინაციის კოეფიციენტი**:

$$adjusted\ R^2=1-\frac{SSE/(n-k-1)}{SST/(n-1)},$$

რაც აიხსნება იმ გარემოებით, რომ თუ დამოუკიდებელ ცვლადთა რაოდენობა k შედარებადია n-თან, R^2-ის მნიშვნელობა შეიძლება არარეალურად დიდი გამოვიდეს და მიგვიყვანოს მცდარ დასკვნამდე. იმ შემთხვევაში, როცა n მნიშვნელოვნად დიდია k-სთან შედარებით, მაშინ ეს კოეფიციენტები დაახლოებით ტოლია, საზოგადოდ კი $adjusted\ R^2 < R^2$.

მტკიცდება, რომ R^2 სტატისტიკა ე. წ. შერჩევითი მრავლობითი კორელაციის კოეფიციენტის კვადრატის ტოლია $R^2=r^2$, რომელიც წარმოადგენს შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტს Y და $\hat{Y}$ შემთხვევით სიდიდეებს შორის:

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})(\hat{Y}_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2}}.$$

მოდელის ვარგისიანობის შემოწმება. მოდელის ვარგისიანობის შემოწმება მრავლობითი რეგრესიის შემთხვევაში მდგომარეობს $H_0: B_1=B_2=\cdots=B_k$ ჰიპოთეზის შემოწმებაში $H_1:$ *ერთი მაინც* $B_i \neq 0, i=1,2,\ldots,k$ ალტერნატივის წინააღმდეგ.

გასაგებია, რომ თუ H_0 ჰიპოთეზა დაწუნებული არ იქნება, არც ერთი დამოუკიდებელი ცვლადი (რეგრესორი) არ არის წრფივად დაკავშირებული Y-თან

და ამიტომ მოდელი უვარგისია პროგნოზირების მიზნებისათვის. მაშინ როცა, თუ ერთი მაინც $B_i \neq 0$, მოდელი რაიმე თვალსაზრისით მაინც გამოსადეგია.

მტკიცდება, რომ ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართიანობისას

$$F = \frac{SSR/k}{SSE/(n-(k+1))} = \frac{MSR}{MSE} \cong F(k, n-(k+1)).$$

F-სტატისტიკა შეიძლება ჩაიწეროს მრავლობითი დეტერმინაციის კოეფიციენტის საშუალებით:

$$F = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-(k+1))} = \frac{n-(k+1)}{k} \cdot \frac{R^2}{1-R^2},$$

ე. ი. F-სტატისტიკა $[n-(k+1)]/k$ თანამამრავლის სიზუსტით ემთხვევა სტატისტიკას: $R^2/(1-R^2)$, რომელიც წარმოადგენს ახსნილი ვარიაციის ფარდობას აუხსნელთან და თუ ეს ფარდობა საკმარისად დიდია, ბუნებრივია უარვყოთ H_0 ჰიპოთეზა H_1 ალტერნატივის სასარგებლოდ. შესაბამისად, კრიტიკულ არე იქნება $F > F_{კრიტ}$ სახის.

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ F სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობისათვის f და α მნიშვნელოვნების დონისათვის სრულდება პირობა

$$f = \frac{n-(k+1)}{k} \cdot \frac{R^2}{1-R^2} > F_{k,n-k-1,\alpha},$$

მაშინ უარვყოფთ H_0 ჰიპოთეზას, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გაგვაჩნია.

5. სტატისტიკური დასკვნები მრავლობითი მოდელის პარამეტრების შესახებ.

თუ H_0 ჰიპოთეზა დაწუნებულია, მაშინ ვამოწმებთ ჰიპოთეზას ცალკეული რეგრესიის კოეფიციენტის ნულთან ტოლობის შესახებ. ამრიგად, ყოველი j-სათვის ($j = 1, 2, \dots, k$) მოწმდება $H_0: B_j = 0$ ჰიპოთეზა $H_1: B_j \neq 0$ ალტერნატივის წინააღმდეგ. ამ შემთხვევაში ტესტის სტატისტიკაა $T_{b_j} = b_j / S_{b_j}$, რომელსაც ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას აქვს სტიუდენტის განაწილება თავისუფლების ხარისხით $n-(k+1): T_{b_j} = b_j / S_{b_j} \cong t(n-(k+1))$.

გადაწყვეტილების მიღების წესი: თუ T_{b_j} სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობისათვის t_{b_j} და α მნიშვნელოვნების დონისათვის სრულდება პირობა

$$|t_{b_j}| > t_{n-k-1,\alpha/2},$$

მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0-ის უარყოფის საფუძველი არ გაგვაჩნია.

α მნიშვნელოვნების დონის ნდობის ინტერვალი B_j კოეფიციენტისათვის შემდეგია: $b_j - s_{b_j} \cdot t_{n-k-1,\alpha/2} < B_j < b_j + s_{b_j} \cdot t_{n-k-1,\alpha/2}$, სადაც $t_{n-k-1,\alpha/2}$ – თავისუფლების

$n-(k+1)$ ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილია.

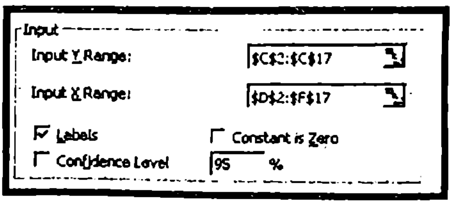
დავუბრუნდეთ უძრავი ქონების აგენტის ამოცანას, რომელსაც ჩვენ ვიხილავდით მარტივი წრფივი რეგრესიის კონტექსტში. როგორც ვნახეთ, სახლის ფასის ცვალებადობის ახსნა მხოლოდ ფართობის ცვალებადობის ხარჯზე არ იძლევა დამაკმაყოფილებელ შედეგს (დეტერმინაციის კოეფიციენტი იყო $R^2 = 0.648$, ანუ ახსნილია ცვალებადობის მხოლოდ 64.8%). აგენტმა გადაწყვიტა განეხილა მრავლობითი წრფივი რეგრესიის მოდელი:

$$Y = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_3X_3 + \varepsilon,$$

სადაც Y – სახლის გაყიდვის ფასია ($\times 1000\$$-ში), X_1 – სახლის ფართობია ($\times$ 10 კვ. მ.-ში), X_2 სახლის ექსპლოატაციის ხანგრძლივობაა (წლებში), ხოლო X_3 სახლის კუთვნილი მიწის ნაკვეთის ფართობია ($\times$ 100 კვ. მ.-ში). შეგროვებული მონაცემები ჩაწერილია Excel-ის დავთრის ფურცელში (ქვეპროგრამა: **Tools/ Data Analysis/Regression**):

	A	B	C	D	E
1	სახლის ნომერი	Y	X_1	X_2	X_3
2	1	89.5	20	5	4.1
3	2	79.9	14.8	10	6.8
4	3	83.1	20.5	8	6.3
5	4	56.9	12.5	7	5.1
6	5	66.6	18	8	4.2
7	6	82.5	14.3	12	8.6
8	7	126.3	27.5	1	4.9
9	8	79.3	16.5	10	6.2
10	9	119.9	24.3	2	7.5
11	10	87.6	20.2	8	5.1
12	11	112.6	22	7	6.3
13	12	120.8	19	11	12.9
14	13	78.5	12.3	16	9.6
15	14	74.3	14	12	5.7
16	15	74.8	16.7	13	4.8

დეტერმინაციის კოეფიციენტი. მოცემული მონაცემები შევიყვანოთ კომპიუტერში შემდეგი წესით: საწყისი (შემავალი) მონაცემების Y ცვლადის არეში ჩავწეროთ დამოკიდებული ცვლადის რიცხვითი მნიშვნელობების მისამართი $\$C\$2:\$C\$17$, X ცვლადის არეში – $\$D\$2:\$F\$17$:



ქვეპროგრამა **Regression** გვაძლევს შემდეგ ამონაბეჭდს:

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R / შერჩევითი კორელაციის კოეფიციენტი	0.957
R Square / დეტერმინაციის კოეფიციენტი	0.916
Adjusted R Square / შეთანხმებული დეტერმინაციის კოეფიციენტი	0.893
Standard Error / სტანდარტული შეცდომა	6.894
Observations / დაკვირვებები	15.000

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში დეტერმინაციის კოეფიციენტი (R-square) გამოვიდა $R^2 = 0.916$ ანუ 91.6%, ხოლო *adjusted* $R^2 = 0.893$ ანუ 89.3%. გავიხსენოთ, რომ მარტივი წრფივი რეგრესიის შემთხვევაში $R^2 = 0.648$. ამრიგად, ორი დამატებითი ცვლადის შემოყვანამ საგრძნობლად გაზარდა დეტერმინაციის კოეფიციენტი, სახლის ფასის ვარიაციის 91.6% აიხსნა სამი დამოუკიდებელი ცვლადით და აუხსნელი დარჩა მხოლოდ 8.4%.

მოდელის ვარგისიანობის შემოწმება. კომპიუტრული ამონაბეჭდის მეორე ბლოკი (ANOVA) წარმოადგენს დისპერსიული ანალიზისათვის საჭირო სიდიდეების რიცხვით მნიშვნელობებს:

ANOVA
დისპერსიული ანალიზი

	df თავისუფლების ხარისხი	SS კვადრ. ჯამი	MS საშ. კვადრ. გადახრა	F F სტატისტიკა	Significance F მნიშვნელოვნების დონე
Regression	3	*SSR*=5707.43	*MSR*= $\frac{SSR}{k}$ =1902.479	$f = \frac{MSR}{MSE} =$ 40.029	0.000
Residual	11	*SSE*=522.79	MSE= $\frac{MSE}{n-k-1}$ =47.527		
Total	14	*SST*=6230.23			

აქ ბოლო სვეტში მითითებულია $\alpha = P\{F > f \mid H_0\}$-ის რიცხვითი მნიშვნელობა, ანუ მნიშვნელოვნების ის მინიმალური დონე, რომლითაც არსებული მონაცემების საფუძველზე ხდება H_0 ჰიპოთეზის უარყოფა.

თუ ავიღებთ მაგალითად, $\alpha = 0.05$, მაშინ $F_{k,n-k-1,\alpha} = F_{3,11,0.05} = 8.76$ და ვინაიდან $40.029 = f > F_{3,11,0.05} = 8.76$, ამიტომ ძირითად ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით და ვასკვნით, რომ ერთი მაინც რეგრესიის კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან.

სტატისტიკური დასკვნები მრავლობითი მოდელის პარამეტრების შესახებ. ამონაბეჭდის მესამე ბლოკიდან ვიღებთ ინფორმაციას უცნობი რეგრესიის

კოეფიციენტების შეფასების შესახებ:

	Coefficients კოეფიციენტი	Standard Error სტანდარტული შეცდომა	t Stat t ტესტი	P-value P მნიშვნელობა	Lower 95%	Upper 95%
Intercept (b_0)	-16.058	19.071	-0.842	0.418	-58.033	25.917
x1 (b_1)	4.146	0.751	5.520	0.000	2.493	5.800
x2 (b_2)	-0.236	0.881	-0.268	0.794	-2.176	1.703
x3 (b_3)	4.831	0.901	5.361	0.000	2.848	6.814

აქ პირველ სვეტში მოცემულია b_0, b_1, b_2, b_3 შეფასებები; მეორეში – მათი სტანდარტული გადახრები, s_{b_j}; მესამეში – $T_{b_j} = b_j / S_{b_j}$ სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობები, $t_{b_j} = b_j / s_{b_j}$; მეოთხე სვეტში – T_{b_j} სტატისტიკებისათვის p-მნიშვნელოებები შესაბამისი $H_0 : B_j = 0$ ჰიპოთეზის შესამოწმებლად $H_1 : B_j \neq 0$ ალტერნატივის წინააღმდეგ, ხოლო ბოლო ორ სვეტში კი მითითებულია 95%-იანი ნდობის ინტერვალები B_j-სათვის.

$b_0 = -16.058$ მნიშვნელობა მიუთითებს საშუალო გასაყიდ ფასს, როცა $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ და მისი ინტერპრეტაცია აზრს მოკლებულია; $b_1 = 4.146$ მნიშვნელობა მიუთითებს იმაზე, რომ ფართობის ყოველი დამატებითი ერთეულისათვის სახლის გაყიდვის ფასი იზრდება საშუალოდ 4146 დოლარით; $b_2 = -0.236$ მნიშვნელობა მიუთითებს იმაზე, რომ სახლის ექსპლოატაციის ყოველი დამატებითი წლისათვის ფასი იკლებს 236 დოლარით; $b_3 = 4.831$ მნიშვნელობა კი მიუთითებს იმაზე, რომ მიწის ნაკვეთის ყოველი დამატებითი 100 კვ. მეტრისათვის სახლის ფასი იზრდება 4831 დოლარით.

ტესტის სტატისტიკის $T_{b_2} = b_2 / S_{b_2}$ დაკვირვებული მნიშვნელობაა $t_2 = -0.268$, ხოლო p-მნიშვნელობაა 0.794, რაც იმის მაჩვენებელია, რომ ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფა ხდება მნიშვნელოვნების მხოლოდ ისეთი α დონით, რომელიც არანაკლებია 0.794-ზე. ამიტომ მნიშვნელოვნების $\alpha = 0.05$ დონით (0.05<0.794) H_0 ჰიპოთეზას არ უარვყოფთ.

B_3-ის შემთხვევაში p-მნიშვნელობა ნულია. ე. ი. ნებისმიერი $\alpha > 0$ დონით (კერძოდ, როცა $\alpha = 0.05$) $H_0 : B_3 = 0$ ჰიპოთეზას უარვყოფთ $H_1 : B_3 \neq 0$ ალტერნატივის წინააღმდეგ.

ცხრილის თანახმად B_3 კოეფიციენტის 95%-იანი ნდობის ინტერვალია (2.848, 6.814). ვნახოთ, რომ იგივე შედეგს მივიღებდით უშუალო გამოთვლებითაც. მართლაც, 95%-იანი ნდობის ინტერვალი B_3 კოეფიციენტისათვის იქნება:

$$b_j - s_{b_j} \cdot t_{n-k-1,\alpha/2} < B_j < b_j + s_{b_j} \cdot t_{n-k-1,\alpha/2}, \quad \alpha/2 = (1-0.95)/2 = 0.025;$$

$$b_3 - s_{b_3} \cdot t_{11,0.025} < B_3 < b_3 + s_{b_3} \cdot t_{11,0.025}, \quad t_{11,0.025} = 2.201;$$

$$4.831 - 0.901 \cdot 2.201 < B_3 < 4.831 + 0.901 \cdot 2.201.$$

ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ, რომ B_1 კოეფიციენტის 95%-იანი ნდობის ინტერვალია (2.848, 6.814).

6. რანგობრივი კორელაცია.

განვიხილოთ ინდივიდთა ან ობიექტთა ერთობლიობა, რომლის ყველა წევრი ხასითდება რაიმე ორი ნიშნით. ვიგულისხმოთ, რომ ორი ნიშნით დახასიათების შედეგები ჩაწერილია შემდეგი სახით $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$,სადაც x_i და y_i არის i-ური ობიექტის დამახასიათებელი ნიშნები. ამ ნიშნებს შეიძლება არც ჰქონდეთ ზუსტი რიცხობრივი მნიშვნელობები, მაგრამ შესაძლებელი იყოს მათი ისე დალაგება, რომ თითოეული ნიშნის მიხედვით ყოველ ობიექტს მიეცეს რიგითი ნომერი – რანგი.

მაგალითი 1. ქვემოთ მოყვანილია ერთი და იგივე სახის პროდუქციის რანჟირების შედეგები ჩატარებული ორი A და B ექსპერტის მიერ. I სვეტში მოცემულია შესამოწმებელი პროდუქციის პირობითი ნომერი, ხოლო II და III სვეტში A და B ექსპერტების შეფასებები. მაგალითად, A ექსპერტი საუკეთესოდ მიიჩნევს პროდუქციის №3 ნიმუშს, მაშინ როცა B ექსპერტი მას მეოთხე ადგილს მიაწერს. რამოდენიმე ნიმუშის ერთნაირი შეფასებისას, თითოეულს მიეწერება შესაბამისი რანგების საშუალო არითმეტიკული. მაგალითად, A ექსპერტი ერთნაირად აფასებს პროდუქციის №5 და №7 ნიმუშებს, ისინი იყოფენ II-III ადგილს, ამიტომ ორივეს მიეწერება $(2+3)/2=2.5$-ის ტოლი რანგი. IV სვეტში A ექსპერტის რანგები დალაგებულია ზრდის მიხედვით, ხოლო მომდევნო V სვეტში მას მიწერილი აქვს იგივე ნიმუშისათვის B ექსპერტის მიერ მიკუთვნებული რანგი.

პროდუქციის პირობითი ნომერი	A ექსპერტ შეფასება	B ექსპერტ შეფასება	R_A	R_B	R_A-R_B	$(R_A-R_B)^2$
1	4	8	1	4	-3	9
2	9	7	2.5	1	1.5	2.25
3	1	4	2.5	5	-2.5	6.25
4	7	6	4	8	-4	16
5	2.5	5	5	3	2	4
6	8	10	6	2	4	16
7	2.5	1	7	6	1	1
8	6	2	8	10	-2	4
9	5	3	9	7	2	4
10	10	9	10	9	1	1
						$\sum=63.5$

იმისათვის, რომ შევისწავლოთ A და B ექსპერტების კრიტერიუმებს შორის ურთიერთდამოკიდებულება, გამოვიყენოთ **სპირმენის ჱ. წ. რანგობრივი კორელაციის კოეფიციენტი**, რომელიც შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$\rho = 1-\frac{6}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}(R_A-R_B)^2$$

თუ ექსპერტების მიერ გამოყენებულ კრიტერიუმებს შორის სრული თანხვედრაა, მაშინ $\sum_{i=1}^{n}(R_A-R_B)^2=0$ და $\rho=1$; თუ უარყოფითი კავშირია, მაშინ $\rho=-1$ და თუ კავშირი არ არსებობს, მაშინ $\rho=0$.

განხილულ მაგალითში $\rho=1-\frac{6}{10\cdot(10^2-1)}\cdot 63.5=1-0.385=0.615$.

სპირმენის რანგობრივი კორელაციის კოეფიციენტი გამოიყენება შემდეგი ჰიპოთეზების შესამოწმებლად:

H_0: ნიშნები დამოუკიდებელია, ე. ი $\rho=0$,

H_1: ნიშნებს შორის დადებითი კავშირია, ე. ი. $\rho>0$.

ცნობილია, რომ დიდი მოცულობის შემთხვევაში $t=\sqrt{n-2}/\sqrt{1-\rho^2}\cong t(n-2)$. ამიტომ კრიტერიუმი ასე ყალიბდება: თუ t სტატისტიკის დაკვირვებული $t_э$ მნიშვნელობისათვის და მოცემული α მნიშვნელოვნების დონისათვის სრულდება პირობა: $t_э>t_{n-2,\alpha}$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს. გასაგებია, რომ ორმხრივი ალტერნატივის შემთხვევაში – $H_1:\rho\neq 0$, კრიტიკული არე იქნება: $U_1=\{|t|>t_{n-2,\alpha/2}\}$.

მაგალითი 2. დღისა და საღამოს სწავლების ეკონომისტ სტუდენტებს ეკითხებოდნენ თუ როგორ აფასებენ ისინი სხვადასხვა პროფესიის პრესტიჟულობას 8 ბალიანი სისტემით. იპოვეთ სპირმენის რანგობრივი კორელაციის კოეფიციენტი, თუ გამოკითხვის მონაცემებია:

პროფესია	დღის	საღამოს
ბუღალტერი	6	3
პროგრამისტი	7	2
ბანკის მენეჯერი	2	6
ადმინისტრატორი	5	4
სტატისტიკოსი	1	7
მარკეტინგის მენეჯერი	4	8
ფინანსისტ-ანალიტიკოსი	3	5
წარმოების მენეჯერი	8	1

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში გვაქვს პროფესიებისაგან შედგენილი ერთობლიობა, ხოლო ნიშნების როლში განიხილება დღისა და საღამოს სწავლების სტუდენტთა მიერ ამ პროფესიების შეფასებები. გავაკეთოთ შემდეგი ცხრილი:

პროფესია	დღის	საღამოს	R_A-R_B	$(R_A-R_B)^2$
ბუღალტერი	6	3	3	9
პროგრამისტი	7	2	5	25
ბანკის მენეჯერი	2	6	–4	16
ადმინისტრატორი	5	4	1	1
სტატისტიკოსი	1	7	–6	36
მარკეტინგის მენეჯერი	4	8	–4	16
ფინანსისტ-ანალიტიკოსი	3	5	–2	4
წარმოების მენეჯერი	8	1	7	49
$\sum$				156

$$\rho = 1 - \frac{6S_\rho}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \cdot 156}{8 \cdot (8^2-1)} = -0.857.$$

ამოცანები

1. A და B ექსპერტებმა შეაფასეს 7 სახის ერთი და იგივე პროდუქცია:

A	19	17	15	14	13	10	7
B	16	18	10	14	15	11	5

გამოთვალეთ სპირმენის რანგობრივი კორელაციის კოეფიციენტი.

2. იპოვეთ SST, თუ $SSR = 36$ და $SSE = 4$.

3. იპოვეთ დეტერმინაციის კოეფიციენტი, თუ $SSR = 30$ და $SSE = 10$

4. როგორაა დამოკიდებული ფირმების მიერ რეკლამაზე თვეში დახარჯული თანხა (x – ათასობით ლარებში) გაყიდული საქონლის ღირებულებაზე (y - ათასობით ლარებში). შეაფასეთ გაყიდული საქონლის ღირებულება, რომელიც გამოწვეულია რეკლამაზე დახარჯული 4500 ლარით, თუ:

ფირმა	A	B	C	D	E
x	2	4	5	7	3
y	10	40	30	50	20

5. რაც უფრო დაბალია საპროცენტო განაკვეთი (x), მით უფრო დაბალია სესხების დაუბრუნებლობის, ანუ დეფოლტების (y) განაკვეთი. ააგეთ 95%-იანი საპროგნოზო ინტერვალი დეფოლტების განაკვეთისათვის, როდესაც საპროცენტო განაკვეთი 8%-ია, თუ შემთხვევით შერჩეული 9 ბანკი მონაცემებია:

x	7	6.6	6	8.5	8	7.5	6.5	7	8
y	38	40	35	46	48	39	36	37	44

პასუხები:

1. $\rho = 0.714$. 2. 40. 3. 0.75.

თავი XIX
დისპერსიული ანალიზი (ANOVA)

მოწმდება ჰიპოთეზა სამი ან მეტი პოპულაციის საშუალოს ტოლობის შესახებ. აღებულია R შერჩევა $(x_{1,1},\dots,x_{1,n_1})$, , $(x_{R,1},\dots,x_{R,n_R})$ მოცულობებით $n_1,n_2,\dots,n_R$; $N=n_1+n_2+\cdots+n_R$; i-ური შერჩევის შერჩევითი საშუალო და შესწორებული შერჩევითი დისპერსია აღნიშნულია შესაბამისად $\bar{x}_i$ და $s_i'^2$ სიმბოლოებით; $\bar{x}_{\text{ერთ.}}=\dfrac{\sum_{i,j}x_{i,j}}{N}$ – არის ერთობლივი საშუალო; $SBB:=\sum_i n_i(\bar{X}_i-\bar{X}_{\text{ერთ.}})^2$, $SBB/\sigma^2\cong\chi^2(R-1)$; $SSW:=\sum_i(n_i-1)S_i'^2$, $SSW/\sigma^2\cong\chi^2(N-R)$ $(N-R=\sum_i(n_i-1))$.

ნულოვანი ჰიპოთეზა: H_0 $a_1=a_2=\cdots=a_R$.

ალტერნატივა: H_1 : ერთი საშუალო მაინც განსხვავდება დანარჩენებისაგ ან.

მნიშვნელოვნების დონე: α

კრიტერიუმის სტატისტიკა: $F=\dfrac{S_B^2}{S_W^2}\cong F(R-1,N-R)$.

კრიტერიუმის მნიშვნელობა T.V. $=f=\dfrac{s_B^2}{s_W^2}$, სადაც s_B^2 (შესაბამისად, s_W^2) არის ჯგუფთა შორის ვარიაცია (შესაბამისად, ჯგუფებში ვარიაცია),

$$s_B^2:=\frac{\sum_i n_i(\bar{x}_i-\bar{x}_{\text{ერთ.}})^2}{R-1},\quad s_W^2:=\frac{\sum_i(n_i-1)s_i'^2}{\sum_i(n_i-1)}.$$

კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია.

კრიტიკული მნიშვნელობა $C.V.=F_{R-1,N-R,\alpha}$.

კრიტიკული არე C.R. (H_0-ის უარყოფის არე) $=[F_{R-1,N-R,\alpha},+\infty)$.

P**- მნიშვნელობა** $=P\{F(R-1,N-R)>T.V.\}$.

შეზღუდვები: 1. პოპულაციები უნდა იყოს ნორმალური ან დაახლოებით ნორმალური; 2. შერჩევები უნდა იყოს ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი; 3. პოპულაციათა დისპერსიები უნდა იყოს ტოლი.

გადაწყვეტილება: თუ კრიტერიუმის მნიშვნელობა მეტია ან ტოლი კრიტიკულ მნიშვნელობაზე (T.V. ≥C.V.), მაშინ ნულოვან ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

P**- მნიშვნელობის მეთოდი:** თუ $P\le\alpha$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზას უკუვაგდებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არა გვაქვს.

მაგალითების ამოხსნის ნიმუშები:

მაგალითი 1. მკვლევარს სურს გამოსცადოს მაღალი არტერიული წნევის დაწევის სამი განსხვავებული მეთოდი. შემთხვევით შეირჩა პაციენტთა სამი ჯგუფი. I ჯგუფს აძლევდნენ გარკვეულ პრეპარატს, II ჯგუფს უტარდებოდა სპე-

ციალური ვარჯიშები, ხოლო III ჯგუფი იცავდა სპეციალურ დიეტას. ოთხი კვირის შემდეგ თითოეულ პაციენტს გაუზომეს არტერიული წნევა (მონაცემები მოყვანილია ქვემოთ). $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ პოპულაციათა საშუალოებს შორის არ არსებობს განსხვავება.

პრეპარატი	ვარჯიში	დიეტა
10	6	5
12	8	9
9	3	12
15	0	8
13	2	4

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები:

$H_0 \quad a_1 = a_2 = a_3$, H_1 ერთი საშუალო მაინც განსხვავდება დანარჩენებისაგან.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა. რადგანაც თავისუფლების ხარისხებია: $R-1=3-1$ და $N-R=15-3=12$, ამიტომ ფიშერის განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ $C.V.=F_{R-1,N-R,\alpha}=F_{2,12,0.05}=3.89$.

ნაბიჯი 3. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა.

ა). თითოეული შერჩევისათვის ვიპოვოთ შერჩევითი საშუალო და შესწორებული შერჩევითი დისპერსია. გვაქვს:

$$\bar{x}_1 = 11.8,\ s_1'^2 = 5.7;\ \bar{x}_2 = 3.8,\ s_2'^2 = 10.2;\ \bar{x}_3 = 7.6,\ s_3'^2 = 10.3.$$

ბ). გამოვთვალოთ ერთობლივი საშუალო:

$$\bar{x}_{\text{ერთ.}} = \frac{\sum_{i,j} x_{i,j}}{N} = \frac{10+12+\cdots+4}{15} = 7.73.$$

გ). გამოვთვალოთ ჯგუფთა შორის ვარიაცია:

$$s_B^2 := \frac{\sum_i n_i(\bar{x}_i - \bar{x}_{\text{ერთ.}})^2}{R-1} = \frac{5\cdot(11.8-7.73)^2 + 5\cdot(3.8-7.73)^2 + 5\cdot(7.6-7.73)^2}{3-1} = 80.07.$$

დ). გამოვთვალოთ ჯგუფებში ვარიაცია:

$$s_W^2 := \frac{\sum_i (n_i-1)s_i'^2}{\sum_i (n_i-1)} = \frac{(5-1)\cdot 5.7 + (5-1)\cdot 10.2 + (5-1)\cdot 10.3}{3\cdot(5-1)} = 8.73.$$

ე). გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$f = \frac{s_B^2}{s_W^2} = \frac{80.07}{8.73} = 9.17.$$

ნაბიჯი 4. გადაწყვეტილების მიღება: ვინაიდან 9.17 > 3.89, ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უკუვაგდოთ, ანუ $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით ჩვენ გვაქვს საკმარისი საფუძველი დავასკვნათ, რომ სულ ცოტა ერთი საშუალო მაინც განსხვავდება დანარჩენებისაგან.

მაგალითი 2. მარკეტინგის სპეციალისტს სურს გაარკვიოს არის თუ არა განსხვავება მომხმარებლების მიერ სამი სხვადასხვა სუპერმარკეტის სალაროსთან რიგში დგომის დროების საშუალოებს შორის (მონაცემები მოყვანილია ქვემ-

ოთ). $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა არსებითი განსხვავება რიგში დგომის დროების საშუალოებს შორის?

მაღაზია A	მაღაზია B	მაღაზია C
3	5	1
2	8	3
5	9	4
6	6	2
3	2	7
1	5	3

ამოხსნა.

ნაბიჯი 1. ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები:

$H_0 \quad a_1 = a_2 = a_3$, H_1 ერთი საშუალო მაინც განსხვავდება დარჩენებისაგან.

ნაბიჯი 2. ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა. აქ თავისუფლების ხარისხებია: $R-1=3-1$ და $N-R=18-3=15$, ამიტომ ფიშერის განაწილების ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ $C.V. = F_{R-1,N-R,\alpha} = F_{2,15,0.05} = 3.68$.

ნაბიჯი 3. გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა.

ა). თითოეული შერჩევისათვის ვიპოვოთ შერჩევითი საშუალო და შესწორებული შერჩევითი დისპესია. გვაქვს:

$$\bar{x}_1 = 3.33,\ s_1'^2 = 3.47;\ \bar{x}_2 = 5.83,\ s_2'^2 = 6.17;\ \bar{x}_3 = 3.33,\ s_3'^2 = 4.27.$$

ბ). გამოვთვალოთ ერთობლივი საშუალო:

$$\bar{x}_{ერთ.} = \frac{\sum_{i,j} x_{i,j}}{N} = \frac{3+2+\cdots+3}{18} = 4.17.$$

გ). გამოვთვალოთ ჯგუფთა შორის ვარიაცია:

$$s_B^2 := \frac{\sum_i n_i(\bar{x}_i - \bar{x}_{ერთ.})^2}{R-1} = \frac{6\cdot(3.33-4.17)^2 + 6\cdot(5.83-4.17)^2 + 6\cdot(3.33-4.17)^2}{3-1} = 12.5.$$

დ). გამოვთვალოთ ჯგუფებში ვარიაცია:

$$s_W^2 := \frac{\sum_i (n_i-1)s_i'^2}{\sum_i (n_i-1)} = \frac{(6-1)\cdot 3.47 + (6-1)\cdot 6.17 + (6-1)\cdot 4.27}{3\cdot(6-1)} = 4.64.$$

ე). გამოვთვალოთ კრიტერიუმის მნიშვნელობა:

$$f = \frac{s_B^2}{s_W^2} = \frac{12.5}{4.64} = 2.69.$$

ნაბიჯი 4. გადაწყვეტილების მიღება: ვინაიდან 2.69 < 3.68, ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არა გვაქვს, ანუ $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით ჩვენ გვაქვს საკმარისი საფუძველი დავასკვნათ, რომ საშუალოები არსებითად არ განსხვავდებიან.

ამოცანები

იგულისხმეთ, რომ: პოპულაციები ნორმალური ან დაახლოებით ნორმალურია; შერჩევები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია და პოპულაციათა დისპერსიები ტოლია.

1. მენეჯერს აინტერესებს არის თუ არა რესპუბლიკური საავადმყოფოს ექიმების, ექთანებისა და ტექნიკური პერსონალის საშუალო ასაკი განსხვავებული.. საავადმყოფოს შემთხვევით შერჩეული თანამშრომლების ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.05$ მნიშენელოვნების დონით, შეუძლია თუ არა მენეჯერს დაასკვნას, რომ ამ სამი ჯგუფის საშუალო ასაკი განსხვავებულია?

ექიმები	**ექთნები**	**ტექნიკური პერსონალი**
60	23	33
36	25	28
29	26	35
56	35	29
32	42	23
54	22	41
58		

2. კომპიუტერის სამი სხვადასხვა ტიპის შემთხვევით შერჩეულ დისკებში აღმოჩენილი დეფექტების რაოდენობის ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.05$ მნიშენელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დაასკვნათ, რომ დეფექტების რაოდენობის საშუალო დისკების ამ სამ ჯგუფში განსხვავებულია?

დისკი A	**დისკი B**	**დისკი C**
0	2	1
1	0	0
0	3	1
2	5	1
3	3	0
2	4	2
0	6	0
1	0	0
1	2	1
0	5	2

3. კოლეჯის სპორტულ პროგრამებში მონაწილე სტუდენტების მიერ მოპოვებული ქულების ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.1$ მნიშენელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დაასკვნათ, რომ ამ სამ ჯგუფში ქულების საშუალო განსხვავებულია?

ფეხბურთი	კალათბურთი	ხელბურთი
3.2	3.8	2.6
2.6	3.1	1.9
2.4	2.6	1.7
2.4	3.9	2.5
1.8	3.3	1.9

4. შემთხვევით შერჩეულ პაციენტთა სამ ჯგუფს უტარდებოდა მკურნალობა სტრესის დონის დაწევის სამი განსხვავებული მეთოდით. სპეციალური მოწყობილობით გაზომილ იქნა (პროცენტებში გამოსახული) თითოეული პაციენტის დაწეული სტრესის დონე (მონაცემები მოყვანილია ქვემოთ). $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ პროცენტების საშუალო ამ ჯგუფებში განსხვავებულია?

I მეთოდი	II მეთოდი	III მეთოდი
3	12	15
10	12	14
5	17	18
1	13	14
13	18	20
3	9	22
4	14	16

5. შემთხვევით შერჩეული ათლეტები დაყვეს სამ ჯგუფად და დაუნიშნეს სამი სახის დიეტა ერთი თვის განმავლობაში. ერთი თვის გასვლის შემდეგ თითოეული ათლეტის მიერ დიეტების მიხედვით დაკლებული კილოგრამები მოყვანილია ქვემოთ. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ დიეტები განსხვავებულია?

დიეტა A	დიეტა B	დიეტა C
3	10	8
6	12	3
7	11	2
4	14	5
	8	
	6	

6. სამომხმარებლო ჟურნალში ჭურჭლის სარეცხი მანქანები იყოფა სამ კატეგორიად: უმაღლესი, ძალიან კარი და კარგი. ამ სამი კატეგორიის მანქანების ქვემოთმოყვანილი ფასების მიხედვით, $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით, არის თუ არა მანქანების საშუალო ფასები განსხვავებული?

უმაღლესი	ძალიან კარგი	კარგი
565	330	350
400	840	379
369	510	280
550	470	320
460	380	400
375	400	450
	290	
	319	

7. მანქანათმშენებელი ქარხნის მუშები შემთხვევით მიმაგრეს ოთხ ასაწყობ ხაზს ("კონვეირს"). თითოეული მუშის მიერ გაკეთებული დეფექტური ნაწილების რაოდენობის ქვემოთმოყვანილი რაოდენობების მიხედვით, $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ დეფექტური ნაწილების რაოდენობის საშუალო ამ ხაზებზე ერთიდაიგივეა?

I ხაზი	II ხაზი	III ხაზი	IV ხაზი
3	8	10	9
2	6	9	15
0	2	8	3
6	0	11	0
4	1	12	2
3	9	15	0
5	7	17	1

8. ქვემოთმოყვანილი მაგნიტოფონის სამი ტიპის კასეტის მუშაობის ხანგრძლივობის მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ მუშაობის ხანგრძლივობის საშუალოები განსხვავებულია?

I ტიპი	II ტიპი	III ტიპი
196	98	94
183	91	106
112	101	85
107	99	102
189	84	101

9. მკვლევარს აინტერესებს არის თუ არა განსხვავება ოთხი სხვადასხვა ტიპის ბალახის საკრეჭი მანქანის წონებს შორის. $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ მანქანების საშუალო წონები განსხვავებულია?

გაზზე	ბენზინზე	ელექტრონული	მექანიკური
95	73	55	37
101	69	52	24
108	72	51	25
97	71	37	29
101	67	57	22
	62	54	17
	68	34	17
	71	45	22
		41	20
		53	18
			21

10. ქვემოთ მოყვანილია დღეღამის სამ სხვადასხვა მონაკვეთში გადაუდებელი სამედიცინო დახმარების ოთახში შემთხვევით შერჩეული პაციენტის მიერ გატარებული დროის მონაცემები (გაზომილი წუთებში). $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დაასკვნათ, რომ პაციენტის დახმარებაზე დახარჯულ დროთა საშუალოები ამ სამ ჯგუფში მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან?

დილა (7–15)	ნაშუადღე (15–23)	ღამე (23—7)
12	9	6
18	8	15
18	16	8
21	20	9
19	15	5

ამოცანები გამოცდისათვის

11. კომპანიის მფლობელს აინტერესებს არის თუ არა გაყიდვათა რაოდენობა ერთნაირად განაწილებული რეგიონების მიხედვით. მან შემთხვევით შეარჩია თვეები და დათვალა 5 სხვადასხვა რეგიონში გაყიდვათა რაოდენობა. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეუძლია თუ არა კომპანიის მფლობელს დაასკვნას, რომ გაყიდვათა რაოდენობა თითოეულ რეგიონში ერთიდაიგივეა?

რეგიონი	სოხუმი	ზუგდიდი	გორი	თელავი	ქუთაისი
გაყიდვები	324	236	182	221	365

12. ჯანდაცვის სამინისტროს აინტერესებს ვინ დათანხმდება ნებაყოფილობით თავის თავზე გამოსცადოს არტერიული წნევის დასაწევი ახალი პრეპარატი. რეგიონების მიხედვით მიღებული მონაცემების ქვემოთმოყვანილი ცხრილის მიხედვით, $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დაასკვნათ,

რომ თითოეულ რეგიონში ექსპერიმენტში მონაწილეობის მსურველთა რაოდენობა ერთიდაიგივეა?

რეგიონი	I	II	III	IV
თანახმაა	87	62	56	93

13. იუსტიციის სამინისტროს აინტერესებს სრულწლოვანი მოსახლეობის შეხედულება ნაფიც მსაჯულთა ინსტიტუტის შემოღების მიმართ. ჩატარებული გამოკითხვის ქვემოთმოყვანილი შედეგების მიხედვით, $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვეიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ შეხედულება დაკავშირებულია ადამიანის სქესთან?

სქესი	ეთანხმება	არ ეთანხმება	გაურკვეველია
მდედრობითი	136	16	8
მამრობითი	114	30	6

14. სწრაფი კვების ობიექტის მენეჯერმა გადაწყვიტა გაარკვიოს თუ რომელ სოუსს ანიჭებენ მომხმარებლები უპირატესობას ჰამბურგერის ჭამისას. ჩატარებული გამოკითხვის ქვემოთმოყვანილი შედეგების მიხედვით, $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით, არის თუ არა მომხმარებლის სასურველი სოუსის სახეობა დამოკიდებული მის სქესზე?

	სოუსი		
სქესი	მაიონეზი	"კეტჩუპი"	მდოგვი
მდედრობითი	25	14	8
მამრობითი	15	18	10

15. გამოკითხულ იქნა 40 და 50 წლის ინვესტორები ფულის განთავსების გზების შესახებ. მიღებული მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, არის თუ არა კავშირი ინვესტორის ასაკსა და ფულის განთავსების გზებს შორის?

	დიდი სააქციო ფონდი	მცირე სააქციო ფონდი	საერთაშორისო სააქციო ფონდი	ფულადი ბაზრის ფონდი	ობლიგაცია
40 წლის	20	10	10	15	45
50 წლის	42	24	24	6	24

16. ზოოლოგიური მაღაზიის მეპატრონეს აინტერესებს დაკავშირებულია თუ არა არჩეული ცხოველის სახეობა ადამიანის სქესთან. ქვემოთმოყვანილი მონაცემების მიხედვით, $\alpha = 0.1$ მნიშვნელოვნების დონით, შეამოწმეთ შესაბამისი ჰიპოთეზა.

	ცხოველის სახეობა		
	ძაღლი	კატა	ჩიტი
მდედრობითი	23	4	8
მამრობითი	32	27	16

17. გამოკითხულ იქნა 3 მაღაზიის 200 – 200 მომხმარებელი, რომლებიც სარგებლობენ საკრედიტო ბარათებით. მათ დაუსვეს კითხვა "ქონდათ თუ არა საკრედიტო ბარათით სარგებლობისას პრობლემები?" $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ პროპორციები ერთიდაიგივეა?

	მაღაზია I	მაღაზია II	მაღაზია III
დიახ	87	56	43
არა	113	144	157
ჯამი	200	200	200

18. შემთხვევით შეარჩიეს კვირა და დათვალეს ქალაქის სამ სხვადასხვა ავტოსადგომზე ყოველდღიურად გაჩერებულ ავტომობილთა რაოდენობა. შეამოწმეთ ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ $\alpha = 0.01$ მნიშვნელოვნების დონით არ არის განსხვავება ამ ავტოსადგომებზე გაჩერებულ ავტომობილთა რაოდენობებს შორის.

ავტოსადგომი I	ავტოსადგომი II	ავტოსადგომი III
203	319	89
162	321	126
190	271	115
219	194	92
188	342	106
209	423	100
212	199	94

19. მამაკაცის სამი ტიპის ფეხსაცმელის ქვემოთმოყვანილი ფასების მიხედვით, $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით, შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ ფასების საშუალოებს შორის მნიშვნელოვანი განსხვავებაა?

ოფიციალური	ყოველდღიური	სპორტული
110	80	64
95	100	66
95	135	70
265	90	92
59	80	
70		
50		

20. ფირმის დირექტორს აინტერესებს არის თუ არა განსხვავება იმ დროების საშუალოებს შორის, რაც მისი თანამშრომლების სამ ჯგუფს სჭირდება სამსახურში მისასვლელად. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით შეუძლია თუ არა ფირმის დირექტორს დაასკვნას, რომ საშუალოებს შორის არსებითი განსხვავებაა?

მენეჯერი	გამყიდველი	მესაწყობე
35	9	15
18	3	6
27	12	27
24	6	22
	14	
	8	
	21	

21. ქვემოთ მოყვანილია ნაწლავის ჩხირების რაოდენობა სამი სხვადასხვა ტბის გარკვეულ ფართობზე 5 დღიანი პერიოდის განმავლობაში. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა განსხვავება ჩხირების რაოდენობის საშუალოებში?

კუს ტბა	ლისის ტბა	ფარავნის ტბა
45	97	33
53	82	35
41	99	31
38	84	28
55	79	26

22. სტუდენტები შემთხვევით გადაანაწილეს სამ ჯგუფში და თითოეულ ჯგუფს შესთავაზეს სწავლების განსხვავებული მეთოდი. კურსის დამთავრების შემდეგ ჩატარებული გამოცდის შედეგები მოყვანილია ქვემოთ. $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით არის თუ არა მნიშვნელოვანი განსხვავება გამოცდის შედეგების საშუალოებში ჯგუფების მიხედვით?

I ჯგუფი	II ჯგუფი	III ჯგუფი
87	82	97
92	78	90
61	41	83
83	65	92
47	63	91

პასუხები:

1. H_0: $a_1=a_2=a_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V.=F_{2,16,0.05}=3.63$; $T.V.\equiv f=5.96$; კი – H_1. 2. H_0: $a_1=a_2=a_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V.=F_{2,27,0.05}=3.35$; $T.V.\equiv f=7.456$; კი – H_1. 3. H_0: $a_1=a_2=a_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V.=F_{2,12,0.1}=2.81$; $T.V.\equiv f=8.448$; კი – H_1. 4. H_0: $a_1=a_2=a_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V.=F_{2,18,0.05}=3.55$; $T.V.\equiv f=19.05$; კი – H_1. 5. H_0: $a_1=a_2=a_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V.=F_{2,11,0.05}=3.98$; $T.V.\equiv f=7.75$; კი – H_1. 6. H_0: $a_1=a_2=a_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V.=F_{2,17,0.1}=2.64$; $T.V.\equiv f=1.28$; არა – H_0. 7. H_0: $a_1=a_2=a_3=a_4$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V.=F_{3,24,0.05}=3.01$; $T.V.\equiv f=6.974$; არა – H_1. 8. H_0: $a_1=a_2=a_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V.=F_{2,12,0.1}=2.81$; $T.V.\equiv f=9.16$; კი – H_1. 9. H_0: $a_1=a_2=a_3=a_4$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V.=F_{3,31,0.1}=2.28$; $T.V.\equiv f=234.5$; კი – H_1. 10. H_0: $a_1=a_2=a_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V.=F_{2,12,0.05}=3.89$; $T.V.\equiv f=5.877$; კი – H_1. 11. H_0: ერთიდაიგივეა, H_1: განსხვავებულია; $C.V.=\chi^2_{4,0.05}=9.488$; $T.V.\equiv \chi^2=87.14$; არა – H_1. 12. H_0: ერთიდაიგივეა, H_1: განსხვავებულია; $C.V.=\chi^2_{3,0.01}=11.345$; $T.V.\equiv \chi^2=13.38$; არა – H_1. 13. H_0: დამოუკიდ., H_1: დამოკიდ.; $C.V.=\chi^2_{2,0.1}=4.605$; $T.V.\equiv \chi^2=6.163$; კი – H_1. 14. H_0: დამოუკიდ., H_1: დამოკიდ.; $C.V.=\chi^2_{2,0.1}=4.605$; $T.V.\equiv \chi^2=3.05$; არა – H_0. 15. H_0: დამოუკიდ., H_1: დამოკიდ.; $C.V.=\chi^2_{4,0.05}=9.488$; $T.V.\equiv \chi^2=28$; კი – H_1. 16. H_0: დამოუკიდ., H_1: დამოკიდ.; $C.V.=\chi^2_{2,0.1}=4.605$; $T.V.\equiv \chi^2=7.674$; H_1. 17. H_0: $p_1=p_2=p_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V.=\chi^2_{2,0.01}=9.21$; $T.V.\equiv \chi^2=23.89$; არა – H_1. 18. H_0: $a_1=a_2=a_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V.=F_{2,18,0.01}=6.01$; $T.V.\equiv f=27.02$; H_1. 19. H_0: $a_1=a_2=a_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V.=F_{2,13,0.05}=3.81$; $T.V.\equiv f=0.533$; არა – H_0. 20. H_0: $a_1=a_2=a_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V.=F_{2,12,0.05}=3.89$; $T.V.\equiv f=6.141$; კი – H_1. 21. H_0: $a_1=a_2=a_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V.=F_{2,12,0.05}=3.89$; $T.V.\equiv f=65.263$; კი – H_1. 22. H_0: $a_1=a_2=a_3$, H_1: ერთი მაინც განსხ.; $C.V.=F_{2,12,0.05}=3.89$; $T.V.\equiv f=3.673$; არა – H_0.

თავი XX

საკონტროლო წერებისა და შუალედური და საბოლოო გამოცდების ბილეთების ნიმუშები 2007—2009 წლებში

ვარიანტი 8.12.1.1.

1. დაწერეთ ჯამის ალბათობის ფორმულა. (1ქ.)
2. განმარტეთ მაჩვენებლიანი განაწილება. (1ქ.)
3. განმარტეთ შემთხვევითი სიდიდის მედიანა. (1ქ.)
4. ბინომიალური განაწილების ლოდინი და დისპერსია. (1ქ.)
5. დაწერეთ მათემატიკური ლოდინის გამოსათვლელი ფორმულა. (1ქ.)
6. აგდებენ ერთ წესიერ კამათელს და მეორე ისეთ კამათელს, რომელზეც 6 ქულის მოსვლის ალბათობაა 1/4. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ წესიერ კამათელზე მოვა 6 ქულა და არაწესიერზე არ მოვა 6 ქულა. (2ქ.)
7. ყუთში მოთავსებულია 3 წესიერი და იმავე ზომისა და წონის მქონე 4 არაწესიერი მონეტა, რომელზეც გერბის მოსვლის ალბათობაა 3/8. შემთხვევით ამოიღეს ერთი მონეტა და ააგდეს. იპოვეთ გერბის მოსვლის ალბათობა. (3ქ.)
8. მოცემულია ორი დამოუკიდებელი ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების კანონები. ა). იპოვეთ η-ს სტანდარტული გადახრა; (1ქ.) ბ). ააგეთ η-ს განაწილების ფუნქცია; (1ქ.) გ). იპოვეთ $P\{\eta \in [-2,6)\}$; (1ქ.) დ). ააგეთ $\xi + \eta$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი. (1ქ.)

ξ	-2	1
P	0.82	0.18

η	-4	2	5
P	0.4	0.1	0.5

9. მოცემულია ორი ξ და η შემთხვევითი სიდიდის ერთობლივი განაწილების კანონი. ა). გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი; (4ქ.) ბ). ავაგოთ $\min(\xi,\eta)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი; (1ქ.) გ). დამოუკიდებელია თუ არა ეს შემთხვევითი სიდიდეები? (1ქ.)

$\eta \backslash \xi$	-3	-1	2
-2	0.25	0.15	0.2
1	0.13	0.05	0.22

10. დაწერეთ ნორმალური განაწილების სიმკვრივე, რომლის ლოდინია 3, ხოლო სტანდარტული გადახრა 4. (1ქ.)
11. თანაბარი განაწილების სიმკვრივეა $f(x)=\begin{cases}1/5, \text{ თუ } x\in[-1,4];\\ 0, \text{ თუ } x\notin[-1,4].\end{cases}$ რას უდრის: ა). მათემატიკური ლოდინი; (1ქ.) ბ). სტანდარტული გადახრა. (1ქ.)
12. $N(0,1)$-ის 0.77-კვანტილია 0.74. იპოვეთ $N(-3,16)$-ის: ა). 0.77-კვანტილი; (1ქ.) ბ). 0.23-კვანტილი. (1ქ.)

შიფრი:

ეკონომიკისა და ბიზნესის ფაკულტეტი. კოლოკვიუმი ალბათობის თეორიასა და მათემატიკურ სტატისტიკაში.

სტუდენტის გვარი, სახელი —————————————— **კურსი** ———
შიფრი:

ვარიანტი № 2007.L1

1. A და B დამოუკიდებელია, $P(A)=0.7$; $P(B)=0.8$. იპოვეთ $P(A\setminus B)$.

ა). 0.1 ბ). -0.1 გ). 0.56 დ). 0.14 ე). 0.24

2. ყუთში 3 თეთრი და 5 შავი ბურთია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ დაბრუნების გარეშე შემთხვევით შერჩეული სამი ბურთიდან 2 თეთრია და 1 შავი?

ა). 1/56 ბ). 15/56 გ). 15/28 დ). 5/28 ე). 1/28

3. სათამაშო კამათელს აგორებენ სამჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სამივეჯერ მოვა ერთი და იგივე ქულა?

ა). 1/36 ბ). 5/9 გ). 25/216 დ). 1/8 ე). 43/216 ვ). 91/216.

4. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. გამოთვალეთ $P(A\cup B\cup C)$ და $P(A\cap B\cap C)$, თუ: A–ქულათა ჯამი ლუწია, B–ქულათა ჯამი 7-ზე ნაკლებია, C–მეორე აგდებისას მოვიდა 2.

ა). 11/12, 1/9 ბ). 31/36, 1/6 გ). 25/26, 1/18 დ). 2/3, 0 ე). 4/9, 1/12 ვ). 7/18, 0

5. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. არიან თუ არა დამოუკიდებლები: A და B? და C? B და C? არიან თუ არა ერთობლივად დამოუკიდებელი A, B და C? თუ: A – პირველი აგდებისას მოვიდა 1 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 6 ქულა, C – ჯამში მოვიდა 7 ქულა;

ა). კი, არა, კი, არა ბ). კი, კი, არა, არა გ). არა, არა, კი, კი; დ). კი, კი, კი, არა

6. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. გამოთვალეთ $P_B(A)$ და მიუთითეთ არის თუ არა A და B დამოუკიდებელი, თუ: A–მოვიდა ერთი და იგივე ქულა, B–ქულათა ჯამი ლუწია.

ა). 1/3, არა ბ). 1/6, კი გ). 1/2, არა დ). 2/5, არა ე). 1/6, კი ვ). 1, არა

7. I, II, III ბრიგადა აწარმოებს დეტალების 30%, 20%. 50%-ს, რომელთა შორის შესაბამისად 1%, 3% და 2% ცუდია. შემთხვევით აღებული დეტალი აღმოჩნდა ცუდი. როგორია ალათობა იმისა, რომ ის დაამზადა I ბრიგადამ?

ა). 0.258 ბ). 0.613 გ). 0.316 დ). 0.526 ე). 0.185 ვ). 0.158

№1. 1. ალბათობის კლასიკ. განმარტება.

2. სრული ალბ. და ბაიესის ფორმულები.

3. მათემატიკური ლოდინი: განმ., თვისებები.

4. $P(A)=0,3; P(B)=4/9; A\perp\!\!\!\perp B$

იპოვეთ $P(\overline{A}\cap\overline{B})$, $P(\overline{A}\setminus B)$.

5. ეიპ. მონეტის 3-ჯერ აგდებისას გერბთა მოსულის გ. კან.; გან. ფ.; M; D და σ.

6. ξ მნიშ. -2, 1, 3. ალბ. 0,2; 0,5; 0,3.
η შ.ს. მნიშ. -1, 0, 2. ალბ. 0,3;0,3;0,4.

$\xi\perp\!\!\!\perp\eta$. იპოვეთ $\xi^2-3\eta$ შ.ს. გან.კან.

7. $f_\xi(x)=ax^4, 1\le x\le 4$; $=0$ სხვაგან.

იპოვეთ: $a, P\{|\xi|<2\}, F_\xi(x), M$ და D

8. შერჩევითი დისპერსია.

9. ξ-ს მნიშ. -2;0;3. η-ს მნიშ. -2;-1;1.

$p_{11}=0,2; p_{12}=0,1; p_{13}=01; p_{21}=0; p_{22}=$
$=1/6; p_{23}=0; p_{31}=0,1; p_{32}=0$. $\rho=?$

№2. 1. მუავრ-ლაპლასის ლოკ. ფორმ.

2. განაწ. ფუნქცია: განმ., თვისებები.

3. თანაბ. განაწ.: სიმკვ. M და D.

4. $P(A)=3/7$; $P(B)=0,4$; $A\perp\!\!\!\perp B$

იპოვეთ $P(\overline{A}\cap\overline{B})$, $P(\overline{A}\setminus B)$.

5. შ.ს. მნიშ. -2, 1, 3. ალბ. 0,2; 0,4; x.
ეიპ. x; გ. კან.; გან. ფ.; M; D და σ.

6. ξ შ.ს. მნიშ. -1, 0, 2. ალბ. 0,3; 0,3; 0,4.
η შ.ს. მნიშ. -2, 1, 3. ალბ. 0,2; 0,5; 0,3.

$\xi\perp\!\!\!\perp\eta$. იპოვეთ $\min\{\xi,\eta\}$ შ.ს. გან. კან.

7. $f_\xi(x)=ax^3, 2\le x\le 5$; $=0$ სხვაგან. :

იპოვეთ: $a, P\{|\xi|\le 3\}, F_\xi(x), M$ და D.

8. ასიმეტრიის კოეფიციენტი.

9. ξ-ს მნიშ. -1;1;2. η-ს მნიშ. -1; 0; 2.

$p_{11}=0,1; p_{12}=0; p_{13}=0,2; p_{21}=0; p_{22}=$
$=1/7; p_{23}=0,1; p_{31}=0; p_{32}=0,2$. $\rho=?$

№ 2008.4.1. 1. სხვაობის ალბათობის ფორმულა. 2. ბერნულის ფორმულა. 3. ხდომილებათა დამოუკიდებლობა. 4. მანქანაში 5 ადგილია. რამდენ სხვადასხვანაირად შეიძლება განთავსდეს მანქანაში 5 ადამიანი, რომელთაგან ერთს არა აქვს უფლება დაიკავს ადგილი საჭესთან?
5. მონეტას აგდებენ ხუთჯერ. როგორია ალაბათობა იმისა, რომ გერბი მოვა კენტ რიცხვჯერ, ხოლო საფასური ლუწ რიცხვჯერ?
6. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. გამოთვალეთ $P(A \cup B \cup C)$ და $P(A \cap B \cap C)$ ალბათობები A, B და C ხდომილებათა შემდეგი სამეულისათვის: A –მოსულ ქულათა ჯამი ლუწია, B –მოსულ ქულათა ჯამი 7-ზე ნაკლებია, C –მეორე აგდებისას მოვიდა 2 ქულა;
7. I ბრიგადა აწარმოებს დეტალების 30%-ს, რომელთა შორის 3% წუნდებულია. II ბრიგა-და აწარმოებს იმავე დეტალების 35%-ს, რომელთა შორის 4% წუნდებლია. III ბრიგადა აწარმოებს დეტალების 15%-ს, რომელთა შორის 1% წუნდებულია. IV ბრიგადა ამზადებს დეტალების 20%-ს, რომელთა შორის 2% წუნდებულია. ერთ საწყობში მოგროვილი ამ დეტალებიდან შემთხვევით აიღეს ერთი დეტალი და ის აღმოჩნდა წუნდებული. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ეს დეტალი დაამზადა I ბრიგადამ?
შეფასება: №1—6 ორ-ორი ქულა, №7 – 3 ქულა. სულ 15 ქულა

№28.10.1. 1. მარჯვენა ჯიბეში 3 ოცთეთრიანი და 4 ათთეთრიანი მონეტაა, მარცხენა ჯიბეში კი 6 ოცთეთრიანი და 3 ათთეთრიანი მონეტა. მარჯვენა ჯიბიდან მარცხენაში შემთხვევით 2 მონეტა გადადეს. იპოვეთ ალბ-ათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ მარცხენა ჯიბიდან შემთხვევით ამოღებული მონეტა ათთეთრიანია. (3 ქ.)
2. ყუთში 7 წითელი და 5 ლურჯი ბურთია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით ამოღებული სამი ბურთი ერთი ფერისაა. (3 ქულა)
3. A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, $P(A)=0.5, P(B)=0.3$. გამოთვალეთ $P(\overline{A}+B)$. (2 ქულა)
4. აგორებენ 2 წესიერ კამათელს, რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მუსული ციფრების ჯამი ტოლია 8-ის, თუ ცნობილია რომ ეს ჯამი ლუწი რიცხვია. (2 ქულა)
5. ააგდეს სამი სიმეტრიული მონეტა, დამოუკიდებელია თუ არა ხდომილობები A={პირველ მონეტაზე მოვი-და გერბი}, B={მოვიდა ერთი საფასური მაინც}. (2 ქულა)
6. ციფრებიდან 1,2,3,4,5 ჯერ ირჩევენ ერთს, ხოლო შემდეგ დარჩენილი ოთხიდან მეორეს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე ამორჩეული რიცხვი კენტია. (3 ქულა)

საგამოცდო ბილეთი №1611. 2.1.

1. ქვემოთ მოყვანილი X-ის განაწილების კანონის მიხედვით იპოვეთ: განაწილების ფუნქცია (0.5ქ.) და ააგეთ გრაფიკი (0.5ქ.); $P(4<X\le 8)$ (0.25ქ.); განაწილების კანონები: $\max(5,X)$-ისა (0.25ქ.) და $4X-9$-ის (0.25ქ.); EX (0.25ქ.); $E(5-3X)$ (0.25ქ.); DX (0.5ქ.); $D(-5+4X)$ (0.25ქ.); **სულ 3 ქულა**

X	3	4	5	10
P	0.25	0.1	?	0.3

2. დამოუკიდებელ X და Y შემთხვევით სიდიდეთა განაწილების კანონების მიხედვით იპოვეთ: EX, EY (0.25ქ.); DX, DY (0.25ქ.); $E(-2XY)$ (0.25ქ.); $D(-3X+4Y)$ (0.25ქ.); $\max(X,Y)$-ის განაწილების კანონი (0.5ქ.). **სულ 1.5 ქულა**

X	-3	-1	2
P	0.3	0.35	?

Y	-2	3
P	0.4	0.6

3. იპოვეთ განაწილების კანონები: X-ის, Y-ის (0.5ქ.) და $2X-3Y$-ის (0.5ქ.); EX, EY (0.25ქ.), $E(3X+5Y)$ (0.5ქ.); DX DY (0.5ქ.); $E(XY)$ (0.5ქ.); $\mathrm{cov}(X,Y)$ (0.25ქ.); $\rho(X,Y)$ (0.5ქ.); $\mathrm{cov}(5X,-4Y+7)$ (0.25ქ.); $\mathrm{cov}(3X+2Y,Y)$ (0.25ქ.); $D(4X-2Y)$ (0.25ქ.); $\rho(-3X+4,X)$ (0.25ქ.); დამოუკიდებელია თუ არა X და Y ?(0.5ქ.). **სულ 5 ქულა**

Y \ X	-2	-1	1
-3	0.17	?	0.15
1	0.23	0.1	0.05

4. დაწერეთ ექსპონენციალური განაწილების სიმკვრივე, თუ $EX = 0.5$. 0.5 ქულა

5. მოცემულია X-ის განაწილების ფუნქცია $F_X(x) = 0$, თუ $x < 2$; $= ax^4$, თუ $2 \le x < 4$; $= 1$, თუ $x > 4$ იპოვეთ განაწილების სიმკვრივე და a (1.5ქ.); EX (0.5ქ.); DX (0.5ქ.), $P(X \in [2,3))$ (0.5ქ.). სულ 3 ქულა

6. $f(x) = e^{-\frac{(x-5)^2}{18}} / \sqrt{18\pi}$. რას უდრის EX (0.25ქ.), DX (0.25ქ.), $P(X = -4)$ (0.25ქ.), $P(X < 0)$ (0.25ქ.). სულ 1 ქულა

7. $P(X = k) = C_{10}^k (0.2)^k (0.8)^{10-k}$), $k = 0,1,\ldots 10$. რას უდრის EX (0.25ქ.), DX (0.25ქ.), $P(X = 4)$ (0.25ქ.), $P(X \in [3,5))$ (0.25ქ.). სულ 1 ქულა

8. მოცემულია შერჩევა: -1, 2, 7, 9, 3, -7, 5, 9, 8, -9. იპოვეთ პოპულაციის საშუალოს ჩაუნაცვლებელი შეფასება. (0.5ქ.) გამოთვალეთ ექსცესის კოეფიციენტი. (0.5ქ.) სულ 1 ქულა

9. ნორმალური პოპულაციიდან აღებულია შერჩევა: 18, 12, 22, 15, 30, 16, 39, 38, 35. $\sigma^2 = 64$. ააგეთ 0.99 საიმედოობის ნდობის ინტერვალი უცნობი საშუალოსათვის (ნორმალური განაწილების 0.995-კვანტილია 2.58). 2 ქულა

10. ნორმალური პოპულაციიდან $N(a, 25)$ აღებულია შერჩევა: 10, 12, -15, 6, 18, -9, 14, -20, 16. $\alpha = 0.03$ მნიშვნელოვნების დონით შევამოწმოთ $H_0 : a = 5$ ჰიპოთეზა $H_1 : a = 7$ -ის წინააღმდეგ ($x_{0.97} = 1.89$). 2 ქულა

ყოველი თეორიული კითხვა ფასდება 2 ქულით:

11. რას ეწოდება გადანაცვლება, წყობა, ჯუფთება. დაწერეთ მათი გამოსათვლელი ფორმულები.

12. ვთქვათ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ არის მოცემული ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე და P არის ამ სივრცეზე განსაზღვრული ალბათობა. რა ძირითად თვისებებს აკმაყოფილებს P ალბათობა?

13. დაწერეთ ორი ხდომილების დამოუკიდებლობის განსაზღვრება. თუ ორი A და B ხდომილებისათვის $A \subset B$, $\mathrm{P}(A) = 1/4$ და $\mathrm{P}(B) = 1/2$, დაასაბუთეთ დამოუკიდებელია თუ არა A და B ხდომილება.

14. რას ეწოდება უალბათესი რიცხვი. დაწერეთ უალბათესი რიცხვის გამოსათვლელი ფორმულა.

15. შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია და მისი თვისებები.

16. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მაგალითები: ბერნულის, ბინომური და პუასონის განაწილებები. მათი მათემატიკური მოლოდინი და დისპერსია.

17. არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეები. კავშირი შემთხვევით სიდიდეთა არაკორელირებულობასა და დამოუკიდებლობას შორის.

18. შერჩევითი საშუალოს მათემატიკური მოლოდინი და დისპერსია. შერჩევითი დისპერსიის მათემატიკური მოლოდინი.

19. შეფასებათა აგების მეთოდი – მომენტთა მეთოდი.

20. ინტერვალური შეფასება – ნდობის ინტერვალი ბერნულის სქემაში წარმატების უცნობი ალბათობისათვის.

საკონტროლო წერა: ვარიანტი 24.2008.12.1.

1. ალბათობის კლასიკური განმარტება. 2. სრული ალბათობისა და ბაიესის ფორმულები. 3. მათემატიკური ლოდინი: განმარტება, თვისებები. 4. ექსცესის კოეფიციენტი. 5. შემთხვევით სიდიდეთა დამოუკიდებლობა.

6. $P(A)=0.3$; $P(B)=4/9$; A და B დამოუკიდებელია. იპოვეთ $P(\overline{A}\cap\overline{B})$, $P(\overline{A}\setminus B)$.

7. მოცემულია ξ შემთ. სიდიდის განაწილების ფუნქცია: $F_\xi(x)=\begin{cases}0, \text{ თუ } x<-2;\\ 0.4, \text{ თუ } -2\le x<0;\\ 0.75, \text{ თუ } 0\le x<3;\\ 1, \text{ თუ } x\ge 3.\end{cases}$

იპოვეთ ξ შემთხვევითი სიდიდის: ა). განაწილების კანონი; ბ). დისპერსია.

8. ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია განაწილების კანონებით:

ξ	-2	1	3
P	0.2	0.5	0.3

η	-1	0	2
P	0.3	0.3	0.4

იპოვეთ: $\xi^2-3\eta$-ს: ა). განაწ. კანონი; ბ). მათემატიკური ლოდინი; გ). $P\{\xi^2-3\eta\ge 0\}=?$

9. მოცემულია ξ შემთ. სიდიდის განაწილების სიმკვრივე: $f_\xi(x)=\begin{cases}ax^3, \text{ თუ } x\in[2,5];\\ 0, \text{ თუ } x\notin[2,5].\end{cases}$

იპოვეთ: ა). a; ბ). $P\{|\xi|<2\}$; გ). განაწილების ფუნქცია $F_\xi(x)$; დ). $E\xi$; ე). $D\xi$.

10. ξ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობებია: -2; 0 და 6, ხოლო η-სი: -2; -1 და 1. მათი ერთობლივი განაწილების კანონია: $p_{11}=0.2$; $p_{12}=0.1$; $p_{13}=0.1$; $p_{21}=0$; $p_{22}=1/6$; $p_{23}=0$; $p_{31}=0.1$; $p_{32}=?$ $p_{33}=0$. ა). გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი; ბ). ააგეთ $\max(\xi/2,\eta)$-ს განაწილების კანონი; გ). გამოთვალეთ $E(\max\{\xi/2,\eta\})$; დ). დამოუკიდებელია თუ არა ეს შემთხვევითი სიდიდეები?

2009 წლის საგამოცდო ბილეთის ამოცანების ნაწილი

D. ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინი არის 11, ხოლო დისპერსია 9-ის ტოლია. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით იპოვეთ ε მუდმივის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა: $P\{|\xi-11|\ge\varepsilon\}\le 0.09$.

E. ნიკა ეძებს სამუშაოს. იგი იმყოფებოდა გასაუბრებაზე ბანკში და სადაზღვევო კომპანიაში. მისი შეფასებით ბანკში მას მიიღებენ 0.5 ალბათობით, ხოლო სადაზღვევო კომპანიაში კი 0.6 ალბათობით. გარდა ამისა, მას მიაჩნია, რომ 0.3-ის ტოლი ალბათობით მას ორივე ეს ორგანიზაცია მიიწვევს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ნიკა სამუშაოს იშოვის.

F. სტუდენტმა 25 საკითხიდან იცის 20. მასწავლებელი მას აძლევს 3 შეკითხვას. რა არის ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი უპასუხებს: ა) მხოლოდ ორ შეკითხვას, ბ) ერთ შეკითხვას მაინც.

G. ფიზკულტურის მასწავლებელმა 9 მოსწავლე, რომელთაგან 7 გოგონაა, ჩააყენა მწკრივში. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ლაშა და გიორგი აღმოჩნდებიან ერთმანეთის გვერდით?

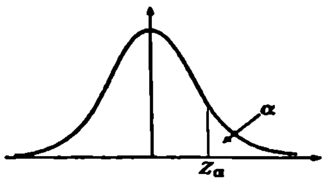
H. ყუთში, რომელშიც 2 ბურთულაა, ჩაუშვეს 2 თეთრი ბურთულა, რის შემდეგაც ალალბედზე ამოიღეს 1 ბურთულა. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთულა თეთრია, თუ ტოლალბათურია ყველა ჰიპოთეზა საწყისი 2 ბურთულის ფერების შესახებ (იგულისხმება, რომ ფერი არის თეთრი ან შავი).

დანართი (სტატისტიკური ცხრილები)

პუასონის განაწილების ცხრილები ($P(k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$)

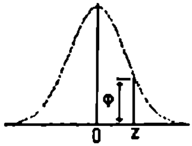
	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.5$	$\lambda=2.0$	$\lambda=2.5$	$\lambda=3.0$	$\lambda=3.5$	$\lambda=4.0$	$\lambda=4.5$	$\lambda=5.0$
p(0)	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
p(1)	0.3679	0.3347	0.2707	0.2052	0.1494	0.1057	0.0733	0.0500	0.0337
p(2)	0.1839	0.2510	0.2707	0.2565	0.2240	0.1850	0.1465	0.1125	0.0842
p(3)	0.0613	0.1255	0.1804	0.2138	0.2240	0.2158	0.1954	0.1687	0.1404
p(4)	0.0153	0.0471	0.0902	0.1336	0.1680	0.1888	0.1954	0.1898	0.1755
p(5)	0.0031	0.0141	0.0361	0.0668	0.1008	0.1322	0.1563	0.1708	0.1755
p(6)	0.0005	0.0035	0.0120	0.0278	0.0504	0.0771	0.1042	0.1281	0.1462
p(7)	0.0001	0.0008	0.0034	0.0099	0.0216	0.0385	0.0595	0.0824	0.1044
p(8)		0.0001	0.0009	0.0031	0.0081	0.0169	0.0298	0.0463	0.0653
p(9)			0.0002	0.0009	0.0027	0.0066	0.0132	0.0232	0.0363
p(10)				0.0002	0.0008	0.0023	0.0053	0.0104	0.0181
p(11)					0.0002	0.0007	0.0019	0.0043	0.0082
p(12)					0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0034
p(13)						0.0001	0.0002	0.0006	0.0013
p(14)							0.0001	0.0002	0.0005
p(15)								0.0001	0.0002

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები (z_α)



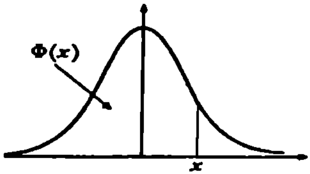
α	0.1	0.05	0.025	0.125	0.01	0.005	0.0025	0.001
z_α	1.28	1.64	1.96	2.24	2.33	2.57	2.81	3.08

$N(0.1)$-ის სიმკვრივის ($\varphi(z)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-z^2/2}$) მნიშვნელობები

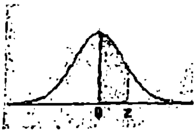


Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.398942	.398922	.398862	.398763	.398623	.398444	.398225	.397966	.397668	.397330
0.1	.396953	.396536	.396080	.395585	.395052	.394479	.393868	.393219	.392531	.391806
0.2	.391043	.390242	.389404	.388529	.387617	.386668	.385683	.384663	.383606	.382515
0.3	.381388	.380226	.379031	.377801	.376537	.375240	.373911	.372548	.371154	.369728
0.4	.368270	.366782	.365263	.363714	.362135	.360527	.358890	.357225	.355533	.353812
0.5	.352065	.350292	.348493	.346668	.344818	.342944	.341046	.339124	.337180	.335213
0.6	.333225	.331215	.329184	.327133	.325062	.322972	.320864	.318737	.316593	.314432
0.7	.312254	.310060	.307851	.305627	.303389	.301137	.298872	.296595	.294305	.292004
0.8	.289692	.287369	.285036	.282694	.280344	.277985	.275618	.273244	.270864	.268477
0.9	.266085	.263688	.261286	.258881	.256471	.254059	.251644	.249228	.246809	.244390
Z	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1.0	.241971	.239551	.237132	.234714	.232297	.229882	.227470	.225060	.222653	.220251
1.1	.217852	.215458	.213069	.210686	.208308	.205936	.203571	.201214	.198863	.196520
1.2	.194186	.191860	.189543	.187235	.184937	.182649	.180371	.178104	.175847	.173602
1.3	.171369	.169147	.166937	.164740	.162555	.160383	.158225	.156080	.153948	.151831
1.4	.149727	.147639	.145564	.143505	.141460	.139431	.137417	.135418	.133435	.131468
1.5	.129518	.127583	.125665	.123763	.121878	.120009	.118157	.116323	.114505	.112704
1.6	.110921	.109155	.107406	.105675	.103961	.102265	.100586	.098925	.097282	.095657
1.7	.094049	.092459	.090887	.089333	.087796	.086277	.084776	.083293	.081828	.080380
1.8	.078950	.077538	.076143	.074766	.073407	.072065	.070740	.069433	.068144	.066871
1.9	.065616	.064378	.063157	.061952	.060765	.059595	.058441	.057304	.056183	.055079
Z	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2.0	.053991	.052919	.051864	.050824	.049800	.048792	.047800	.046823	.045861	.044915
2.1	.043984	.043067	.042166	.041280	.040408	.039550	.038707	.037878	.037063	.036262
2.2	.035475	.034701	.033941	.033194	.032460	.031740	.031032	.030337	.029655	.028985
2.3	.028327	.027682	.027048	.026426	.025817	.025218	.024631	.024056	.023491	.022937
2.4	.022395	.021862	.021341	.020829	.020328	.019837	.019356	.018885	.018423	.017971
2.5	.017528	.017095	.016670	.016254	.015848	.015449	.015060	.014678	.014305	.013940
2.6	.013583	.013234	.012892	.012558	.012232	.011912	.011600	.011295	.010997	.010706
2.7	.010421	.010143	3z98712	3z96058	3z93466	3z90936	3z88465	3z86052	3z83697	3z81398
2.8	3z79155	3z76965	3z74829	3z72744	3z70711	3z68728	3z66793	3z64907	3z63067	3z61274
2.9	3z59525	3z57821	3z56160	3z54541	3z52963	3z51426	3z49929	3z48470	3z47050	3z45666

$N(0.1)$-ის განაწილების ფუნქციის ($\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$) მნიშვნელობები



x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.500	**0.33**	0.629	**0.66**	0.745	**0.99**	0.838	**1.32**	0.906	**1.65**	0.950
0.01	0.503	**0.34**	0.633	**0.67**	0.748	**1.00**	0.841	**1.33**	0.908	**1.66**	0.951
0.02	0.507	**0.35**	0.636	**0.68**	0.751	**1.01**	0.843	**1.34**	0.909	**1.67**	0.952
0.03	0.511	**0.36**	0.640	**0.69**	0.754	**1.02**	0.846	**1.35**	0.911	**1.68**	0.953
0.04	0.515	**0.37**	0.644	**0.70**	0.758	**1.03**	0.848	**1.36**	0.913	**1.69**	0.954
0.05	0.519	**0.38**	0.648	**0.71**	0.761	**1.04**	0.850	**1.37**	0.914	**1.70**	0.955
0.06	0.523	**0.39**	0.651	**0.72**	0.764	**1.05**	0.853	**1.38**	0.916	**1.71**	0.956
0.07	0.527	**0.40**	0.655	**0.73**	0.767	**1.06**	0.855	**1.39**	0.917	**1.72**	0.957
0.08	0.531	**0.41**	0.659	**0.74**	0.770	**1.07**	0.857	**1.40**	0.919	**1.73**	0.958
0.09	0.535	**0.42**	0.662	**0.75**	0.773	**1.08**	0.859	**1.41**	0.920	**1.74**	0.959
0.10	0.539	**0.43**	0.666	**0.76**	0.776	**1.09**	0.862	**1.42**	0.922	**1.75**	0.959
0.11	0.543	**0.44**	0.670	**0.77**	0.779	**1.10**	0.864	**1.43**	0.923	**1.76**	0.960
0.12	0.547	**0.45**	0.673	**0.78**	0.782	**1.11**	0.866	**1.44**	0.925	**1.77**	0.961
0.13	0.551	**0.46**	0.677	**0.79**	0.785	**1.12**	0.868	**1.45**	0.926	**1.78**	0.962
0.14	0.555	**0.47**	0.680	**0.80**	0.788	**1.13**	0.870	**1.46**	0.927	**1.79**	0.963
0.15	0.559	**0.48**	0.684	**0.81**	0.791	**1.14**	0.872	**1.47**	0.929	**1.80**	0.964
0.16	0.563	**0.49**	0.687	**0.82**	0.793	**1.15**	0.874	**1.48**	0.930	**1.81**	0.964
0.17	0.567	**0.50**	0.691	**0.83**	0.796	**1.16**	0.876	**1.49**	0.931	**1.82**	0.965
0.18	0.571	**0.51**	0.694	**0.84**	0.799	**1.17**	0.879	**1.50**	0.933	**1.83**	0.966
0.19	0.575	**0.52**	0.698	**0.85**	0.802	**1.18**	0.881	**1.51**	0.934	**1.84**	0.967
0.20	0.579	**0.53**	0.701	**0.86**	0.805	**1.19**	0.882	**1.52**	0.935	**1.85**	0.967
0.21	0.583	**0.54**	0.705	**0.87**	0.807	**1.20**	0.884	**1.53**	0.936	**1.86**	0.968
0.22	0.587	**0.55**	0.708	**0.88**	0.810	**1.21**	0.886	**1.54**	0.938	**1.87**	0.969
0.23	0.590	**0.56**	0.712	**0.89**	0.813	**1.22**	0.888	**1.55**	0.939	**1.88**	0.969
0.24	0.594	**0.57**	0.715	**0.90**	0.815	**1.23**	0.890	**1.56**	0.940	**1.89**	0.970
0.25	0.598	**0.58**	0.719	**0.91**	0.818	**1.24**	0.892	**1.57**	0.941	**1.90**	0.971
0.26	0.602	**0.59**	0.722	**0.92**	0.821	**1.25**	0.894	**1.58**	0.942	**1.91**	0.971
0.27	0.606	**0.60**	0.725	**0.93**	0.823	**1.26**	0.896	**1.59**	0.944	**1.92**	0.972
0.28	0.610	**0.61**	0.729	**0.94**	0.826	**1.27**	0.897	**1.60**	0.945	**1.93**	0.973
0.29	0.614	**0.62**	0.732	**0.95**	0.828	**1.28**	0.899	**1.61**	0.946	**1.94**	0.973
0.30	0.617	**0.63**	0.735	**0.96**	0.831	**1.29**	0.901	**1.62**	0.947	**1.95**	0.974
0.31	0.621	**0.64**	0.738	**0.97**	0.833	**1.30**	0.903	**1.63**	0.948	**1.96**	0.975
0.32	0.625	**0.65**	0.742	**0.98**	0.836	**1.31**	0.904	**1.64**	0.949	**1.97**	0.975

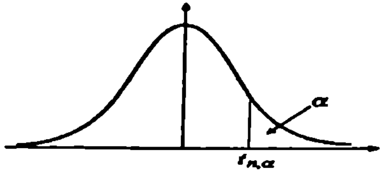


$$\Phi_0(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

ფუნქციის ცხრილები

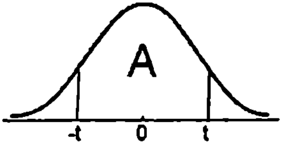
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

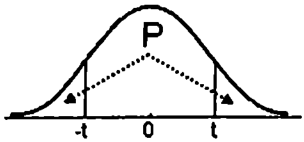
t (სტიუდენტის) განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები ($t_{\alpha,n}$)



	α						
n	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**	**0.0025**	**0.001**
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	127.321	318.289
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.328
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.214
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.894
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385

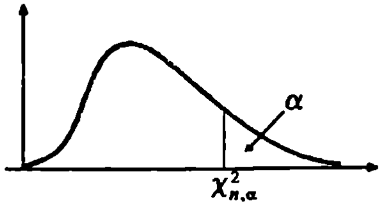
t განაწილების ზედა $\alpha/2$-კრიტიკული წერტილები $t_{n,\alpha/2}$ (ორკუდიანი)





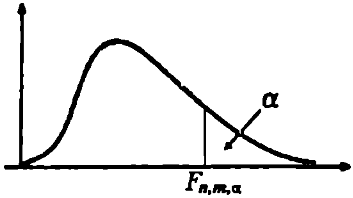
n	A / α	0.80 / 0.20	0.90 / 0.10	0.95 / 0.05	0.98 / 0.02	0.99 / 0.01	0.995 / 0.005	0.998 / 0.002	0.999 / 0.001
1		3.078	6.314	12.706	31.820	63.657	127.321	318.309	636.619
2		1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3		1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4		1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5		1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6		1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7		1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8		1.397	1.860	2.306	2.897	3.355	3.833	4.501	5.041
9		1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10		1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11		1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12		1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13		1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14		1.345	1.761	2.145	2.625	2.977	3.326	3.787	4.140
15		1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16		1.337	1.746	2.120	2.584	2.921	3.252	3.686	4.015
17		1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18		1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19		1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20		1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21		1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22		1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23		1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24		1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.090	3.467	3.745
25		1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26		1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27		1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28		1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29		1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30		1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
∞		1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

χ^2 (ხი კვადრატ) განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები ($\chi^2_{\alpha,n}$)



	α										
n	**0.995**	**0.975**	**0.20**	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.02**	**0.01**	**0.005**	**0.002**	**0.001**
1	0.000039	0.00098	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	9.550	10.828
2	0.0100	0.0506	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597	12.429	13.816
3	0.0717	0.216	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	14.796	16.266
4	0.207	0.484	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860	16.924	18.467
5	0.412	0.831	7.289	9.236	11.070	12.833	13.388	15.086	16.750	18.907	20.515
6	0.676	1.237	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	20.791	22.458
7	0.989	1.690	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	22.601	24.322
8	1.344	2.180	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	21.955	24.352	26.124
9	1.735	2.700	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	26.056	27.877
10	2.156	3.247	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	27.722	29.588
11	2.603	3.816	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725	26.757	29.354	31.264
12	3.074	4.404	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.300	30.957	32.909
13	3.565	5.009	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688	29.819	32.535	34.528
14	4.075	5.629	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319	34.091	36.123
15	4.601	6.262	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	32.801	35.628	37.697
16	5.142	6.908	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000	34.267	37.146	39.252
17	5.697	7.564	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718	38.648	40.790
18	6.265	8.231	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156	40.136	42.312
19	6.844	8.907	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582	41.610	43.820
20	7.434	9.591	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566	39.997	43.072	45.315
21	8.034	10.283	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401	44.522	46.797
22	8.643	10.982	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796	45.962	48.268
23	9.260	11.689	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181	47.391	49.728
24	9.886	12.401	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980	45.559	48.812	51.179
25	10.520	13.120	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928	50.223	52.620
26	11.160	13.844	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	48.290	51.627	54.052
27	11.808	14.573	32.912	36.741	40.113	43.195	44.140	46.963	49.645	53.023	55.476
28	12.461	15.308	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	50.993	54.411	56.892
29	13.121	16.047	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588	52.336	55.792	58.301
30	13.787	16.791	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672	57.167	59.703
31	14.458	17.539	37.359	41.422	44.985	48.232	49.226	52.191	55.003	58.536	61.098
32	15.134	18.291	38.466	42.585	46.194	49.480	50.487	53.486	56.328	59.899	62.487
33	15.815	19.047	39.572	43.745	47.400	50.725	51.743	54.776	57.648	61.256	63.870
34	16.501	19.806	40.676	44.903	48.602	51.966	52.995	56.061	58.964	62.608	65.247
35	17.192	20.569	41.778	46.059	49.802	53.203	54.244	57.342	60.275	63.955	66.619

$F(n,m)$ (ფიშერის) განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები ($F_{n,m,\alpha}$)



	n								$\alpha = 0.1$
m	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**7**	**10**	**15**	**20**
1	39.864	49.500	53.593	55.833	57.240	58.906	60.195	61.220	61.740
2	8.5264	8.9999	9.1618	9.2434	9.2926	9.3491	9.3915	9.4248	9.4413
3	5.5384	5.4624	5.3907	5.3426	5.3092	5.2661	5.2304	5.2003	5.1845
4	4.5448	4.3245	4.1909	4.1073	4.0505	3.9790	3.9198	3.8704	3.8443
5	4.0605	3.7798	3.6194	3.5202	3.4530	3.3679	3.2974	3.2379	3.2067
7	3.5895	3.2575	3.0740	2.9605	2.8833	2.7850	2.7025	2.6322	2.5947
10	3.2850	2.9244	2.7277	2.6054	2.5216	2.4139	2.3226	2.2434	2.2007
15	3.0731	2.6951	2.4898	2.3615	2.2729	2.1582	2.0593	1.9722	1.9243
20	2.9746	2.5893	2.3801	2.2490	2.1582	2.0397	1.9368	1.8450	1.7939
30	2.8808	2.4887	2.2761	2.1423	2.0493	1.9269	1.8195	1.7222	1.6674
60	2.7911	2.3932	2.1774	2.0409	1.9457	1.8194	1.7070	1.6034	1.5435

	n								$\alpha = 0.05$
m	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**7**	**10**	**15**	**20**
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	236.77	241.88	245.95	248.01
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.353	19.396	19.429	19.446
3	10.128	9.5522	9.2766	9.1172	9.0135	8.8867	8.7855	8.7028	8.6602
4	7.7086	6.9443	6.5915	6.3882	6.2560	6.0942	5.9644	5.8579	5.8026
5	6.6078	5.7862	5.4095	5.1922	5.0504	4.8759	4.7351	4.6187	4.5582
7	5.5914	4.7375	4.3469	4.1202	3.9715	3.7871	3.6366	3.5108	3.4445
10	4.9645	4.1028	3.7082	3.4780	3.3259	3.1354	2.9782	2.8450	2.7741
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7066	2.5437	2.4035	2.3275
20	4.3512	3.4928	3.0983	2.8660	2.7109	2.5140	2.3479	2.2032	2.1241
30	4.1709	3.3159	2.9223	2.6896	2.5336	2.3343	2.1646	2.0149	1.9317
60	4.0012	3.1505	2.7581	2.5252	2.3683	2.1666	1.9927	1.8365	1.7480

$F(n,m)$ (ფიშერის) განაწილების ზედა α-კრიტიკული წერტილები ($F_{n,m,\alpha}$)

	n								$\alpha = 0.01$
m	1	2	3	4	5	7	10	15	20
1	4052.2	4999.5	5403.4	5624.6	5763.6	5928.4	6055.8	6157.3	6208.7
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.356	99.399	99.433	99.449
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.672	27.229	26.872	26.690
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	14.976	14.546	14.198	14.020
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.455	10.051	9.7222	9.5526
7	12.246	9.5467	8.4513	7.8466	7.4605	6.9929	6.6201	6.3143	6.1554
10	10.044	7.5594	6.5523	5.9944	5.6363	5.2001	4.8492	4.5582	4.4055
15	8.6831	6.3588	5.4169	4.8932	4.5557	4.1416	3.8049	3.5223	3.3719
20	8.0960	5.8489	4.9382	4.4306	4.1027	3.6987	3.3682	3.0880	2.9377
30	7.5624	5.3903	4.5098	4.0179	3.6990	3.3046	2.9791	2.7002	2.5486
60	7.0771	4.9774	4.1259	3.6491	3.3388	2.9530	2.6318	2.3522	2.1978

	n								$\alpha = 0.005$
m	1	2	3	4	5	7	10	15	20
1	16211	19999	21615	22500	23056	23715	24224	24630	24836
2	198.50	199.00	199.17	199.25	199.30	199.36	199.40	199.43	199.45
3	55.552	49.799	47.467	46.195	45.392	44.434	43.686	43.085	42.777
4	31.333	26.284	24.259	23.155	22.456	21.622	20.967	20.438	20.167
5	22.785	18.314	16.530	15.556	14.940	14.200	13.618	13.146	12.903
7	16.235	12.404	10.882	10.050	9.5221	8.8853	8.3803	7.9677	7.7539
10	12.826	9.4270	8.0807	7.3428	6.8723	6.3025	5.8467	5.4706	5.2740
15	10.798	7.7007	6.4760	5.8029	5.3721	4.8473	4.4235	4.0697	3.8826
20	9.9439	6.9865	5.8176	5.1744	4.7616	4.2569	3.8470	3.5020	3.3178
30	9.1796	6.3547	5.2387	4.6233	4.2275	3.7416	3.3439	3.0058	2.8231
60	8.4946	5.7950	4.7290	4.1399	3.7599	3.2911	2.9042	2.5705	2.3872

დამატება
საგამოცდო ამოცანები ხდომილებებისათვის

ხდომილებები

1. ააგეთ ელემენტარული ხდომილებათა სივრცე სათამაშო კამათლის ორჯერ გაგორებისას. გამოყავით ხდომილებები: A – მოსულ ქულათა ჯამი მეტია 5-ზე, მაგრამ ნაკლებია 9-ზე; B – მოსულ ქულათა ჯამი ნაკლებია 6-ზე ან მეტია 8-ზე; C – მოსულ ქულებში ერთი მაინც ოთხიანია; D – მოსულ ქულათა ჯამი კენტია; E – მოსულ ქულათა სხვაობა ტოლია 4-ის. მიუთითეთ თავსებად და უთავსებად ხდომილებათა ყველა წყვილი.
2. რამდენი ელემენტისაგან შედგება ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე: სათამაშო კამათლის სამჯერ აგდებისას?
3. ა). თუ A და B უთავსებადი ხდომილებებია, და A და C აგრეთვე უთავსებია, მაშინ გამოდის თუ არა აქედან, რომ B და C უთავსებადია? ბ). თუ A და B თავსებადი ხდომილებებია, და A და C აგრეთვე თავსებადია, მაშინ გამოდის თუ არა აქედან, რომ B და C თავსებადია?
4. აუცილებელი და შეუძლებელი ხდომილებების: ა). გადაკვეთა ბ). გაერთიანება.
5. დაამტკიცეთ, რომ თუ $A\cup B=A\cup C$, მაშინ $B=C$ არაა მართებული.
6. დაამტკიცეთ, რომ თუ $A\cap B=A\cap C$ და $A\neq\varnothing$, მაშინ $B=C$ არაა მართებული.
7. იწვევს თუ არა ხდომილება $A\cup(B\cap C)$ ხდომილებას $A\cup(B\cup C)$?
8. სამართლიანია თუ არა ჩართვა $[(B\cap C)\cup B]\cup C\subset[(C\cap C)\cup B]\cap(B\cup B)$?
9. დაამტკიცეთ თანაფარდობები: ა). $\overline{A}\cup(B\cup A)=\Omega$; ბ). $\overline{A}\cup(B\cap A)=\varnothing$; გ). $\overline{A}\cap(B\cup A)=\overline{A}\cap B$; დ). $\overline{A}\cup(B\cup A)=\overline{A}\cup B$; ე). $A\cup(\overline{A}\cup\varnothing)=\Omega\cap(A\cup A)$; ვ). $A\cap(\varnothing\cup A)=(\Omega\cup A)\cap A$.
10. როგორ შეიძლება მარტივად ჩაიწეროს შემდეგი ხდომილებები:
ა). $A\cup(B\cup A)$; ბ). $A\cap(B\cap A)$; გ). $A\cup[B\cup(A\cup B)]$; დ). $B\cap[A\cap(B\cap A)]$;
ე). $(B\cup B\cup B)\cap(A\cup A\cup A)$; ვ). $(B\cap B\cap B)\cup(A\cap A\cap A)$; ზ). $B\cap[A\cup(B\cap A)]$;
თ). $(B\cup A)\cap(A\cap A)$; ი). $\overline{(A\cap B)}\cup\overline{A}$; კ). $\overline{(B\cap A)}\cap\overline{B}$; ლ). $\overline{(B\cup A)}\cap\overline{A}$;
მ). $\overline{(B\cup A)}\cap\overline{B}$.
11. დაამტკიცეთ შემდეგი თანაფარდობები:
ა). $B\cup(A\cap A)=A\cup(B\cup B)$; ბ). $(A\cup\varnothing)\cap(A\cup\Omega)=A\cap(A\cup B)$;
გ). $B\cup(A\cap B)=(B\cup B)\cup(\varnothing\cap A)$; დ). $(A\cup A)\cup(A\cap\varnothing)=(A\cup\Omega)\cap A$;
ე). $[B\cap(A\cup B)]\cup A=(B\cap B)\cup(A\cap A)$; ვ). $\overline{(A\cap B)}\cup\overline{A}=\overline{A}\cup\overline{B}$;
ზ). $(\overline{A}\cup\overline{B})\cup\overline{(A\cap B)}=(\overline{A}\cup\varnothing)\cup\overline{B}$; თ). $[\overline{A}\cap(\overline{B}\cup\overline{A})]\cup[\overline{(A\cap B)}\cup\overline{B}]=\overline{A\cap B}$.

კომბინატორიკა

12. მანქანაში 5 ადგილია. რამდენ სხვადასხვანაირად შეიძლება განთავსდეს მანქანაში 5 ადამიანი, თუ ერთს არა აქვს უფლება დაიკავოს ადგილი საჭესთან?
13. მანქანაში 5 ადგილია. რამდენ სხვადასხვანაირად შეიძლება განთავსდეს მანქანაში 4 ადამიანი, თუ საჭესთან ადგილის დაკავება შეუძლია ორ მათგანს?
14. სტუდენტმა უნდა ჩააბაროს 4 გამოცდა 7 დღის განმავლობაში. რამდენ სხვადასხვანაირად შეიძლება გამოცდების ცხრილის შედგენა, თუ ერთ დღეს არ შეიძლება ერთზე მეტი გამოცდის ჩაბარება?

15. სტუდენტმა 6 დღეში უნდა ჩააბაროს 3 გამოცდა: მათემატიკა, ფიზიკა და ელექტრონიკა. რამდენ სხვადასხვანაირად შეიძლება გამოცდების ცხრილის შედგენა, თუ ერთ დღეს არ შეიძლება ერთზე მეტი გამოცდის ჩაბარება და ჯერ უნდა ჩააბაროს მათემატიკა, შემდეგ ფიზიკა და ბოლოს, ელექტრონიკა?
16. 7 ადამიანიდან, რომელთა შორის 3 დოქტორია, უნდა შედგეს 4 კაციანი კომისია, იმ პირობით, რომ კომისიაში შედიოდეს ერთი მაინც დოქტორი. რამდენ სხვადასხვანაირად შეიძლება შედგეს ასეთი კომისია?
17. 10 ადამიანი უნდა განთავსდეს 3 ოთახში, ისე, რომ თითოეულ ოთახში იყოს არანაკლებ 3 ადამიანი. რამდენ სხვადასხვანაირად შეიძლება ამის გაკეთება?
18. 8 ადამიანი უნდა განთავსდეს 3 ოთახში, ისე, რომ თითოეულ ოთახში იყოს არანაკლებ 2 ადამიანი. რამდენ სხვადასხვანაირად შეიძლება ამის გაკეთება?
19. მონეტას აგდებენ 6-ჯერ. რამდენი ვარიანტია საფასურის ან 2-ჯერ ან 3-ჯერ მოსვლის?
20. მონეტას აგდებენ 7-ჯერ. რამდენი ვარიანტია ან საფასურის 2-ჯერ ან გერბის 3-ჯერ მოსვლის?
21. მონეტას აგდებენ 8-ჯერ. რამდენი ვარიანტია ერთდროულად საფასურის 5-ჯერ და გერბის 3-ჯერ მოსვლის?
22. მონეტას აგდებენ 9-ჯერ. სულ რამდენი ვარიანტია გერბებისა და საფასურებ-ის მოსვლის?
23. მონეტას აგდებენ 8-ჯერ. რას უფრო მეტი შანსები აქვს: საფასურის 4-ჯერ მოსვლას, თუ გერბის 5-ჯერ მოსვლას და რამდენჯერ?

ალბათობის კლასიკური განმარტება

24. ყუთში 10 წითელი, 5 თეთრი და 4 ლურჯი ბურთია. შემთხვევით იღებენ ერთ ბურთს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა). ამოღებულია ლურჯი ბურთი? ბ). არაა ამოღებული წითელი ბურთი? გ). არაა ამოღებული თეთრი ბურთი? დ). ამოღებულია წითელი ან თეთრი ბურთი?
25. რვა ადამიანისაგან, რომელთა შორის 3 დოქტორია და 5 კანდიდატი, უნდა შევადგინოთ სამ კაციანი კომისია. კომისიის წევრები შეირჩევა შემთხვევით. როგორია ალბათობა იმისა, რომ კომისიაში მოხვდება: ა). სამი დოქტორი? ბ). ორი დოქტორი და ერთი კანდიდატი? გ). ერთი დოქტორი და ორი კანდიდატი? დ). სამი კანდიდატი?
26. 9 წიგნიდან, რომელთა შორის 4 ხელოვნებაზეა და 5 დეტექტივია, შემთხვევით ირჩევენ სამს. როგორია ალბათობა იმისა, რომ: ა). სამივე წიგნი იქნება ხელოვნებაზე? ბ). სამივე იქნება დეტექტივი? გ). ერთი ან ორი წიგნი იქნება ხელოვნებაზე? დ). ზუსტად ორი იქნება დეტექტივი?
27. მონეტას აგდებენ სამჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ გერბი მოვა: ა). კენტ რიცხვჯერ? ბ). ლუწ რიცხვჯერ? გ). არც ერთხელ? დ). ორჯერ მაინც?
ა). 1/2; ბ). 3/8; გ). 1/8; დ).
28. მონეტას აგდებენ 4-ჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ გერბი მოვა: ა). კენტ რიცხვჯერ? ბ). ლუწ რიცხვჯერ? გ). არანაკლებ ორჯერ? დ). ერთ-ჯერ მაინც?
29. მონეტას აგდებენ ოთხჯერ. როგორია ალაბათობა იმისა, რომ საფასური მოვა: ა). არანაკლებ სამჯერ? ბ). არანაკლებ ორჯერ? გ). არანაკლებ ერთ-ჯერ? დ). არც ერთხელ?

30. მონეტას აგდებენ ოთხჯერ. როგორია ალაბათობა იმისა, რომ გერბი მოვა: ა). ერთჯერ ან არც ერთჯერ? ბ). ან ორჯერ ან სამჯერ? გ). ან ერთჯერ ან ორჯერ? დ)/ ან ერთჯერ ან სამჯერ?
31. მონეტას აგდებენ ხუთჯერ. როგორია ალაბათობა იმისა, რომ: ა). გერბი მოვა კენტ რიცხვჯერ, ხოლო საფასური ლუწ რიცხვჯერ? ბ). გერბი მოვა კენტ რიცხვჯერ? გ). გერბი მოვა ლუწ რიცხვჯერ? დ). გერბი მოვა ლუწ რიცხვჯერ, ხოლო საფასური კენტ რიცხვჯერ?
32. მონეტას აგდებენ ხუთჯერ. როგორია ალაბათობა იმისა, რომ გერბი მოვა: ა). არანაკლებ სამჯერ? ბ). არანაკლებ ოთხჯერ? გ). ან ერთჯერ ან ორჯერ? დ). ან ერთჯერ ან ოთხჯერ? ე). ან ორჯერ ან სამჯერ?
33. სათამაშო კამათელს აგორებენ ორჯერ. რა უფრო ალბათურია – ჯამში მოვა: ა). 6 ქულა თუ 8 ქულა? ბ). 5 ქულა თუ 9 ქულა? გ). 5 ქულა თუ 6 ქულა? დ). 5 ქულა თუ 8 ქულა? ე). 6 ქულა თუ 7 ქულა? ვ). 7 ქულა თუ 5 ქულა?
34. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ორი სათამაშო კამათლის გაგორებისას მოვა ისეთი ქულები, რომლებიც ორჯერ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან?
35. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ორჯერ გაგორებისას ერთჯერ მაინც მოვა: ა). ერთიანი? ბ). ორიანი? გ). სამიანი? დ). ოთხიანი? ე). ხუთიანი? ვ). ექვსიანი?
36. რომელია მეტი და რამდენით: ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ერთჯერ გაგორებისას მოვა 6 ქულა თუ ორჯერ გაგორებისას ჯამში მოვა 6 ქულა?
37. რომელია მეტი და რამდენით: ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ერთჯერ გაგორებისას მოვა ლუწი ქულა თუ ორჯერ გაგორებისას ჯამში მოვა ლუწი ქულა?
38. სათამაშო კამათელს აგორებენ ორჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ მოსულ ქულათა ჯამი აღმოჩნდება: ა). კენტი რიცხვი? ბ). 4-ზე მეტი და 9-ზე ნაკლები? გ). 3-ის ჯერადი? დ). 4-ის ჯერადი? ე). 5-ის ჯერადი? ვ). 6-ის ჯერადი?
39. რომელია მეტი და რამდენით: ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ერთჯერ გაგორებისას მოვა 3-ის ჯერადი ქულა თუ ორჯერ გაგორებისას ჯამში მოვა 3-ის ჯერადი ქულა?
40. რომელია მეტი და რამდენით: ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ერთჯერ გაგორებისას მოვა 4-ის ჯერადი ქულა თუ ორჯერ გაგორებისას ჯამში მოვა 4-ის ჯერადი ქულა?
41. სათამაშო კამათელს აგორებენ ორჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ მოსულ ქულათა ნამრავლი აღმოჩნდება: ა). 12-ის ტოლი? ბ). 3-ის ჯერადი? გ). 4-ის ჯერადი? დ). 5-ის ჯერადი? ე). 10-ის ჯერადი?
42. სათამაშო კამათელს აგორებენ სამჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ მოვა სამი წახნაგი: ა). ერთი და იგივე ქულებით? ბ). სხვადასხვა ქულებით? გ). 9-ის ტოლი ქულათა ჯამით? დ). 10-ის ტოლი ქულათა ჯამით? ე). 5-ის ჯერადი ქულათა ჯამით?
43. სათამაშო კამათელს აგორებენ სამჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ მოვა ერთი მაინც ერთიანი?
44. სათამაშო კამათელს აგორებენ სამჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ მოვა: ა). ერთჯერ მაინც ორიანი? ბ). ერთჯერ მაინც სამიანი? გ). ერთჯერ მაინც ოთხიანი? დ). ერთჯერ მაინც ხუთიანი? ე). ერთჯერ მაინც ექვსიანი?

45. სათამაშო კამათელს აგორებენ სამჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ არც ერთჯერ არ მოვა ერთიანი? იგივე კითხვა 2, 3, 4, 5 და 6-სათვის.

46. რომელი ალბათობაა მეტი და რამდენით: ა). 5 ქულის მოგროვება სათამაშო კამათლის ორჯერ გაგორებისას თუ სამჯერ გაგორებისას? ბ). 6 ქულის მოგროვება სათამაშო კამათლის ორჯერ გაგორებისას თუ სამჯერ გაგორებისას? გ). 11 ქულის მოგროვება სათამაშო კამათლის ორჯერ გაგორებისას თუ სამჯერ გაგორებისას?

47. ორი ადამიანი შეთანხმდა, რომ ერთმანეთს შეხვდეს 19^{00}-დან 19^{30}-მდე. როგორია შეხვედრის ალბათობა, თუ ა). ერთი ადგილზე მოსვლის შემდეგ იცდის 30 წუთს, ხოლო მეორე საერთოდ არ იცდის? ბ). ერთი იცდის 10 წუთს, ხოლო მეორე 5 წუთს?

ალბათობის გამოთვლის ძირითადი ფორმულები

48. როგორი C ხდომილებებისათვის მიიღებს ჯამის ალბათობის ფორმულა შემდეგ სახეს: $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$? გამოსახეთ ვენის დიაგრამით.

49. როგორი C ხდომილებებისათვის მიიღებს ჯამის ალბათობის ფორმულა შემდეგ სახეს: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$? გამოსახეთ ვენის დიაგრამით.

50. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. გამოთვალეთ $P(A\cup B)$ და $P(A\cap B)$ ალბათობები A და B ხდომილებათა შემდეგი წყვილებისათვის:

ა). A – მოსულ ქულათა ჯამი კენტია, B – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა;

ბ). A – მოსულ ქულათა ჯამი ლუწია, B – მოვიდა ერთი და იგივე ქუ-ლა;

გ). A – მოსულ ქულათა ჯამი 7-ზე მეტია, B – მოსულ ქულათა ჯამი 7-ზე ნაკლებია;

დ). A – მოსულ ქულათა ჯამი 10-ზე ნაკლებია, B – მოსულ ქულათა ჯამი 5-ზე მეტია;

ე). A – მოსულ ქულათა ჯამი ლუწია, B – მოსულ ქულათა ჯამი 8-ზე ნაკლებია;

ვ). A – მოსულ ქულათა ჯამი კენტია, B – მოსულ ქულათა ჯამი 3-ზე ნაკლებია.

51. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. გამოთვალეთ $P(A\cup B\cup C)$ და $P(A\cap B\cap C)$ ალბათობები A, B და C ხდომილებათა შემდეგი სამეულებისათვის:

ა). A – მოსულ ქულათა ჯამი ლუწია, B – მოსულ ქულათა ჯამი 7-ზე ნაკლებია, C – მეორე აგდებისას მოვიდა 2 ქულა;

ბ). A – მოსულ ქულათა ჯამი კენტია, B – მოსულ ქულათა სხვაობაა 1, C – მოსულ ქულათა ჯამი 8-ზე ნაკლებია;

გ). A – მოვიდა სხვადასხვა ქულა, B – მოსულ ქულათა ჯამი 7-ზე ნაკლებია, C – მოსულ ქულათა ჯამია 6;

დ). A – მოვიდა ერთი მაინც ერთიანი, B – მოვიდა ერთი მაინც ექვსიანი, C – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა;

ე). A – მოვიდა ერთი მაინც ორიანი, B – პირველი აგდებისას მოვიდა 2 ქულა, C – მოსულ ქულათა ჯამი 6-ზე ნაკლებია;

ვ). A – პირველი აგდებისას მოვიდა 1 ქულა, B – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა, C – მოსულ ქულათა ჯამია 6.

52. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. გამოთვალეთ პირობითი ალბათობა $P_B(A)$ A და B ხდომილებათა შემდეგი წყვილებისათვის, და მიუთითეთ არიან თუ არა ისინი დამოუკიდებლები:

ა). A – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა, B – მოსულ ქულათა ჯამი ლუწია;

ბ). A – პირველი აგდებისას მოვიდა 3 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 3 ქულა;

გ). A – მოსულ ქულათა სხვაობაა 1, B – მოსულ ქულათა ჯამია 5;

დ). A – მოსულ ქულათა სხვაობაა 2, B – მოსულ ქულათა ჯამია 8;

ე). A – მოსულ ქულათა ჯამია 7, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 1 ქულა;

ვ). A – მოსულ ქულათა ჯამი ნაკლებია 6-ზე, B – მოსულ ქულათა ჯამი ნაკლებია 10ზე.

53. მონეტას აგდებენ 4-ჯერ. დაამტკიცეთ, რომ A, B და C ხდომილებათა შემდეგი სამეულები ერთობლივად დამოუკიდებელია და გამოთვალეთ ალბათობები გადაკვეთების: $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$:

ა). A – პირველი აგდებისას მოვიდა გერბი, B – მესამე აგდებისას მოვიდა გერბი, C – მეოთხე აგდებისას მოვიდა გერბი;

ბ). A – პირველი აგდებისას მოვიდა გერბი, B – მეორე აგდებისას მოვიდა გერბი, C – მესამე აგდებისას მოვიდა გერბი;

გ). A – პირველი ორი აგდებისას მოვიდა გერბი, B – მესამე აგდებისას მოვიდა გერბი, C – მეოთხე აგდებისას მოვიდა გერბი;

დ). A – პირველი აგდებისას მოვიდა გერბი, B – მეორე აგდებისას მოვიდა გერბი, C – უკანასკნელი ორი აგდებისას მოვიდა გერბი.

54. მონეტას აგდებენ 4-ჯერ. დაამტკიცეთ, რომ A, B და C ხდომილებათა შემდეგი სამეულები არ არიან ერთობლივად დამოუკიდებელები:

ა). A – პირველი ორი აგდებისას მოვიდა გერბი, B – მესამე აგდებისას მოვიდა გერბი, C – უკანასკნელი ორი აგდებისას მოვიდა გერბი;

ბ). A – პირველი აგდებისას მოვიდა გერბი, B – მეორე აგდებისას მოვიდა გერბი, C – პირველი ორი აგდებისას მოვიდა გერბი;

გ). A – პირველი აგდებისას მოვიდა გერბი, B – პირველი ორი აგდებისას მოვიდა გერბი, C – ოთხივე აგდებისას მოვიდა გერბი;

დ). A – პირველი აგდებისას მოვიდა გერბი, B – პირველი ორი აგდებისას მოვიდა გერბი, C – უკანასკნელი ორი აგდებისას მოვიდა გერბი.

55. ამოცანა №54-ში მოყვანილ თითოეული სამეულისათვის არიან თუ არა დამოუკიდებლები A და B? A და C? B და C?

56. სათამაშო კამათელს აგდებენ ორჯერ. დაამტკიცეთ, რომ A, B და C ხდომილებათა შემდეგი სამეულებისათვის ადგილი აქვს წყვილ-წყვილად დამოუკიდებლობას, მაგრამ არა აქვს ადგილი ერთობლივად დამოუკიდებ-ლობას:

ა). A – პირველი აგდებისას მოვიდა 1 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 6 ქულა, C – ჯამში მოვიდა 7 ქულა;

ბ). A – პირველი აგდებისას მოვიდა 1 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 1 ქულა, C – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა;

გ). A – პირველი აგდებისას მოვიდა 2 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 5 ქულა, C – ჯამში მოვიდა 7 ქულა;

დ). A – პირველი აგდებისას მოვიდა 1 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 6 ქულა, C – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა;
ე). A – პირველი აგდებისას მოვიდა 6 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 6 ქულა, C – ჯამში მოვიდა 7 ქულა;
ვ). A – პირველი აგდებისას მოვიდა 6 ქულა, B – მეორე აგდებისას მოვიდა 1 ქულა, C – მოვიდა ერთი და იგივე ქულა.

57. სათამაშო კამათელს აგდებენ სამჯერ. როგორია ალბათობა იმისა, რომ მოსულ ქულათა ჯამი იქნება; ა). 4; ბ). 5; გ). 6; დ). 7; ე). 8; ვ). 9; ზ). 10?

58. ექვსი მონადირე ერთდროულად ესვრის გადამფრენ იხვს. სამი მათგანისათვის მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0.4, ხოლო დანარჩენი სამისათვის – 0.6. როგორია ალბათობა იმისა, რომ მიზანში მოახვედრებს ერთი მონადირე მაინც?

59. თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილებებია, აჩვენეთ, რომ მაშინ დამოუკიდებელია $\overline{A}$ და $\overline{B}$ ხდომილებები.

ბაიესის ფორმულა

60. I ბრიგადა აწარმოებს დეტალების 30%-ს, რომელთა შორის 1% წუნდებულია. II ბრიგადა აწარმოებს იმავე დეტალების 20%-ს, რომელთა შორის 3% წუნდებულია. III ბრიგადა აწარმოებს დეტალების 50%-ს, რომელთა შორის 2% წუნდებულია. ერთ საწყობში მოგროვილი ამ დეტალებიდან შემთხვევით აიღეს ერთი დეტალი და ის აღმოჩნდა წუნდებული. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ეს დეტალი დაამზადა: ა). I ბრიგადამ; ბ). II ბრიგა-დამ; გ). III ბრიგადამ?

61. ამოცანა №60-ის პირობებში შემთხვევით ამოიღეს ორი დეტალი და ორივე აღმოჩნდა წუნდებული. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ეს დეტალები დაამზადა: ა). I ბრიგადამ; ბ). II ბრიგადამ; გ). III ბრიგადამ?

62. ამოცანა №60-ის პირობებში შემთხვევით ამოიღეს სამი დეტალი და სამივე აღმოჩნდა წუნდებული. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ეს დეტალები დაამზადა: ა). I ბრიგადამ; ბ). II ბრიგადამ; გ). III ბრიგადამ?

63. ავადმყოფის გამოკვლევის შედეგად გაკეთდა დასკვნა, რომ მას აქვს ერთ-ერთი ორი დაავადებიდან – ან A_1 (ჰიპოთეზა A_1), ან A_2 (ჰიპოთეზა A_2). $P(A_1)=0.4$ და $P(A_2)=0.4$. ექიმმა გადაწყვიტა დიაგნოზის დაზუსტება და დანიშნა ანალიზის ჩატარება, რომლის შედეგს წარმოადგენს დადებითი ან უარყოფითი რეაქცია. თუ პაციენტს აქვს A_1 ავადმყოფობა, ანალიზმა უნდა მოგვცეს დადებითი რეაქცია ალბათობით 0.9 და უარყოფითი რეაქცია – ალბათობით 0.1. თუ კი პაციენტს აქვს A_2 ავადმყოფობა, მაშინ დადებითი და უარყოფითი რეაქციები ტოლალბათურია. ანალიზი ჩატარდა და მან მოგვცა უარყოფითი რეაქცია. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ეს შედეგი განპირობებულია: ა). A_1 ავადმყოფობით; ბ). A_2 ავადმყოფობით?

64. ამოცანა №63-ის პირობებში ანალიზი ჩატარდა ორჯერ და ორივე შემთხვევაში მოგვცა უარყოფითი რეაქცია. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ეს შედეგები განპირობებულია: ა). A_1 ავადმყოფობით; ბ). A_2 ავადმყოფობით?

65. ამოცანა №63-ის პირობებში ანალიზი ჩატარდა ორჯერ და პირველ შემთხვევაში მოგვცა უარყოფითი რეაქცია, ხოლო მეორე შემთხვევაში – დადებითი. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ეს შედეგები განპირობებულია: ა). A_1 ავადმყოფობით; ბ). A_2 ავადმყოფობით?

განმეორებითი ცდები

66. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას ერთიანი მოვა ზუსტად ორჯერ?
67. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას ერთიანი მოვა არაუმეტეს ორჯერ?
68. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას ერთიანი მოვა არანაკლებ ერთჯერ?
69. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას ერთიანი მოვა არანაკლებ სამჯერ?
70. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას სამჯერ მოვა წახნაგი ლუწი ქულით?
71. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას ორჯერ მოვა წახნაგი კენტი ქულით?
72. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას არანაკლებ ორჯერ მოვა წახნაგი კენტი ქულით?
73. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას არანაკლებ სამჯერ მოვა წახნაგი ლუწი ქულით?
74. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას ორჯერ მოვა წახნაგი 3-ის არა ჯერადი ქულით?
75. როგორია ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის ოთხჯერ გაგორებისას არაუმეტეს ორჯერ მოვა წახნაგი 3-ის არა ჯერადი ქულით?
76. ალბათობა იმისა, რომ მოცემულ საწარმოში ელექტროენერგიის დღიური დანახარჯი არ გადააჭარბებს დადგენილ ნორმას, ტოლია 0.8-ის. როგორია ალბათობა იმისა, რომ კვირის განმავლობაში ელექტროენერგიის დანახარჯი არ გავა ნორმიდან ოთხი დღის განმავლობაში?
77. 76-ე ამოცანაში ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კვირის განმავლობაში ელექტროენერგიის დანახარჯი არ გავა ნორმიდან არანაკლებ ხუთი დღე?
78. 76-ე ამოცანაში ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კვირის განმავლობაში ელექტროენერგიის გადახარჯვა აღინიშნებოდა არაუმეტეს სამი დღის განმავლობაში?
79. ალბათობა იმისა, რომ ნათურა არ გადაიწვება 1000 საათის მუშაობის შედეგად, ტოლია 0.95-ის. რისი ტოლია 500 ნათურაში იმ ნათურების უალბათესი რიცხვი, რომლებიც არ გადაიწვა 1000 საათის მუშაობის შედეგად?
80. აჩვენეთ, რომ თუ $p=q=1/2$ და n – ლუწია, მაშინ წარმატების უალბათესი რიცხვი ტოლია მათემატიკური ლოდინის.
81. მსროლელის მიერ სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0.8. როგორია ალბათობა იმისა, რომ 80 გასროლის შედეგად მსროლელი დააზიანებს სამიზნეს: ა). ზუსტად 60-ჯერ? ბ). ზუსტად 64-ჯერ? გ). 60-დან 70-მდე? დ). არანაკლებ 60-ჯერ?
82. თესლის მოცემული პარტიიდან დათესეს 10000 თესლი და ნახეს, რომ აღმოცენდა 8498 თესლი. ამის შედეგად გაკეთდა დასკვნა, რომ თესლის მოცემული პარტიის აღმოცენებადობა შეადგენს 85%-ს ($p=0.85$). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მოცემული პარტიიდან დათესილი 100 თესლიდან აღმოცენდება: ა). ზუსტად 85 თესლი? ბ). 60-დან 80-მდე? გ). 70-დან 90-მდე? დ). არანაკლებ 80 თესლი? ე). არანაკლებ 85 თესლი? ვ). არანაკლებ 90 თესლი? ზ). არანაკლებ 92 თესლი?
83. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სათამაშო კამათლის გაგორებისას ერთი ქულის მოსვლის ფარდობითი სიხშირე გადაიხრება 1/6-საგან უფრო მეტად ვიდ-

რე $\varepsilon=0.01$, თუ სათამაშო კამათელს ვაგორებთ შესაბამისად, 600, 3000, 6000, 12000 და 24000-ჯერ?

84. დავუშვათ, რომ გარკვეული ეპიდემიის დროს დაავადების ალბათობაა $p=0.005$. როგორია ალბათობა იმისა, რომ 1000 ადამიანიდან დაავადდება: ა). არაუმეტეს 2 ადამიანი? ბ). არაუმეტეს 5 ადამიანი? გ). არაუმეტეს 10 ადამიანი? დ). არანაკლებ 3 ადამიანი?

85. პროფილაქტიკური ღონისძიებების გატარებამ მოსალოდნელი ეპიდემიის დროს დაავადების ალბათობა შეამცირა $p_1=0.005$-დან $p_1=0.003$-მდე. ამის შედეგად რამდენჯერ გაიზარდა ალბათობა იმისა, რომ 1000 ადამიანიდან დაავადდება: ა). არაუმეტეს 5 ადამიანი? ბ). არაუმეტეს 2? გ). არავინ არ დაავადდება?

86. წუნდებული პროდუქციის გამოშვების ალაბათობაა $p=0.04$. რამდენჯერ უნდა შევამციროთ წუნდებული პროდუქციის პროცენტი იმისათვის, რომ 20-ჯერ გაიზარდოს ალბათობა იმისა, რომ 1000 ერთეულ პროდუქციაში არ აღმოჩნდეს არცერთი წუნდებული?

პასუხები:

2. 216. **3.** ა). არა; ბ). არა. **4.** $\varnothing$; Ω. **6.** კი. **7.** არა. **10.** ა). $A\cup B$; ბ). $A\cap B$; გ). $A\cup B$; დ). $A\cap B$; ე). $A\cap B$; ვ). $A\cup B$; ზ). $A\cap B$; თ). A; ი). $\overline{(A\cap B)}$; კ). $\overline{B}$; ლ). $\overline{(B\cup A)}$; მ). $\overline{B}$. **12.** 96. **13.** 48. **14.** 840. **15.** 20. **16.** 34. **17.** 4200 (სქემა 3-3-4: $C_{10}^3\cdot C_7^3$). **18.** 980 (განთავსების სქემა: 2-2-4 ან 2-3-3: $C_8^2\cdot C_6^2+C_8^2\cdot C_6^3$). **19.** 35. **20.** 56. **21.** 56. **22.** 512. **24.** ა). 4/19; ბ). 9/19; გ). 14/19: დ). 15/19. **25.** ა). 1/56; ბ). 15/56; გ). 15/28; დ). 5/28. **26.** ა). 1/21; ბ). 5/42: გ). 5/6 დ). 10/21. **28.** ა). 1/2; ბ). 7/16; გ). 11/16; დ). 15/16. **29.** ა). 5/16; ბ). 11/16; გ). 15/16; დ). 1/16. **30.** ა). 5/16; ბ). 5/8; გ). 5/8; დ). 1/2. **31.** ა). 15/32; ბ). 1/2; გ). 15/32; დ). 15/32. **32.** ა). 1/2; ბ). 3/16; გ). 15/32; დ). 5/16; ე). 5/8. **34.** 1/6. **35.** ყველა შემთხვევაში 11/36. **36.** მეტია პირველ შემთხვევაში 1/36-ით. **37.** ორივე შემთხვევაში ტოლია 1/2-ის. **38.** ა). 1/2; ბ). 5/9; გ). 1/3; დ). 1/4; ე). 7/36; ვ). 1/6. **39.** ორივე შემთხვევაში ტოლია 1/3-ის. **40.** მეტია ორჯერ გაგორებისას 1/12-ით. **41.** ა). 1/9; ბ). 5/9; გ). 5/12; დ). 11/36; ე). 1/6. **42.** ა). 1/36; ბ). 5/9; გ). 25/216; დ). 1/8; ე). 43/216. **43.** 91/216. **44.** ყველა ალბათობა ტოლია 91/216-ის. **45.** 125/216. **46.** ა). ორჯერ გაგორებისას 1/12-ით; ბ). ორჯერ გაგორებისას 5/54-ით; 3). სამჯერ გაგორებისას 5/72-ით. **47.** ა). 1/2; ბ). 31/72. **50.** ა). 2/3, 0; ბ). 1/2, 1/6; გ). 5/6, 0; დ). 1, 5/9; ე). 5/6, 1/4; ვ). 3/4, 1/3. **51.** ა). 25/26, 1/18; ბ). 31/36, 1/6; გ). 11/12, 1/9; დ). 2/3, 0; ე). 4/9, 1/12; ვ). 7/18, 0. **52.** ა). 1/3, არა; ბ). 1/6, კი; გ). 1/2, არა; დ). 2/5, არა; ე). 1/6, კი; ვ). 1, არა. **53.** ა). 1/4, 1/4, 1/4, 1/8; ბ). 1/4, 1/4, 1/4, 1/8; გ). 1/8, 1/8, 1/4, 1/16; დ). 1/4, 1/8, 1/8, 1/16. **55.** ა). კი, კი, არა; ბ). კი, არა, არა; გ). არა, არა, არა; დ). არა, კი, კი. **57.** ა). 1/72; ბ). 1/36; გ). 5/108; დ). 5/72; ე). 7/72; ვ). 25/216; ზ). 1/8. **58.** 0.986. **60.** ა). 0.158; ბ). 0.316; გ). 0.526. **61.** ა). 0.073; ბ). 0.439; გ). 0.488. **62.** ა). 0.031; ბ). 0.557; გ). 0.412. **63.** ა). 0.23; ბ). 0.77. **64.** ა). 0.06; ბ). 0.94. **65.** ა). 0.35; ბ). 0.65. **66.** **66.** 0.116. **67.** 0.984. **68.** 0.518. **69.** 0.016. **70.** 1/4. **71.** 3/8. **72.** 11/16. **73.** 5/16. **74.** 8/27. **75.** 11/27. **76.** 0.115. **77.** 0.853. **78.** 0.968. **79.** 475. **81.** ა). 0.06; ბ). 0.11; გ). 0.82; დ). 0.87. **82.** 0.11; 0.08; 0.92; 0.92; 0.5; 0.08; 0.025. **83.** 0.73; 0.46; 0.30; 0.14; 0.04. **84.** ა). 0.125; ბ). 0.656; გ). 0.986; დ). 0.735. **85.** ა). 1.4-ჯერ; ბ). 3.4-ჯერ; გ). 7.5-ჯერ. **86.** 4-ჯერ.

ლიტერატურა

1. გ. მანია. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. სახელმძღვანელო ეკონომიკური ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის. თსუ, თბილისი, 1976
2. ნ. ანთელავა, ა. ედიბერიძე, გ. მანია. ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანათა კრებული. თსუ, თბილისი, 1980.
3. 14. მარი გ., მოსიძე ა., ციგროშვილი ზ., სტატისტიკა. დამხმარე სახელმძღვანელო ESM-თბილისის სტუდენტებისათვის, ESM-თბილისი, 1996.
4. ნ. ლაზრიევა, მ. მანია, გ. მარი, ა. მოსიძე, ა. ტორონჯაძე, თ. ტორონჯაძე, თ. შერვაშიძე. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა ეკონომისტებისათვის. ფონდი «ევრაზია», თბილისი, 2000.
5. თ. ტორონჯაძე, ზ. ციგროშვილი. ბიო-სამედიცინო სტატისტიკა (ლექციების კურსი). ფონდი "ღია საზოგადოება საქართველო", თბილისი, 2001.
6. ე. ნადარაია, რ. აბსავა, მ. ფაცაცია. ალბათობის თეორია. თბილისი, 2005.
7. ო. ფურთუხია. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. თბილისი, 2007.
8. ო.ფურთუხია. აღწერითი სტატისტიკა, ალბათობა, სტატისტიკური დასკვნების თეორია. თბილისი, 2008.
9. ე. ნადარაია, ბ. დოჭვირი, პ. ბაბილუა, მ. ბერაძე, გ. ლომინაშვილი, მ. მნაცაკანიანი. ალბათობის თეორის ამოცანათა კრებული. ქუთაისი 2008.
10. ე. ნადარაია, ბ. დოჭვირი, თ. ბოკელავაძე, გ. ლომინაშვილი, მ. მნაცაკანიანი, მ. ფაცაცია. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა (ამოცანათა კრებული). ქუთაისი 2008.
11. Allan G. Bluman. Ementary Statistics: a brief version, second edition. Published by McGraw-Hill, New York, 2003.
12. P. Newbold, W. L. Carlson, B. M. Thorne. Statistics for Business and Economics, sixth edition. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2007.
13. В. Феллер. ВВедение в теорию вероятностей и ее приложения. Москва, 1967.
14. УА. Г. Дьячков. Теория вероятностей. Москва, 1980.
15. А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров. ВВедение в теорию вероятностей. Москва, 1982.
16. В. К. Захаров, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков. Теория вероятностей. Москва, 1988.
17. В. Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Москва, 1988.

დაიბეჭდა შპს „მწიგნობარის" სტამბაში

0102, ქ.თბილისი, დ. აღმაშენებლის გამზ. 40