

ბურაბ ჭილაშვილი

რელატივისტური მექანიკა

(წიგნი დაიბეჭდა იუნესკოს ფინანსური დახმარებით)



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
თბილისი 1997

22.3

53

ჭ 4 61

დამხმარე სახელმძღვანელოში სისტემატურადაა გადმოცემული რელატივისტური მექანიკა. ფარდობითობის სპეციალური თეორიის ექსპერიმენტული საფუძვლების დეტალურ ანალიზზე დაყრდნობით აგებულია რელატივისტური კინემატიკა და დინამიკა. განიხილება ლაგრანჟისა და ჰამილტონის ფორმალიზმები, შენახვის კანონები და გაფანტვის თეორია. უხვადაა საინტერესო ამოცანები, რომელთა ამოსახსნელად განტოლებებთან ერთად გამოიყენება გეომეტრიული ნარმოდგენები.

განკუთვნილია ფიზიკის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის.

რედაქტორი პროფ. ა. ხ ე ლ ა შ ვ ი ლ ი

რეცენზენტები: პროფ. ი. ვ ა შ ა კ ი ძ ე

დოც. ნ. ნ ი ლ ო ს ა ნ ი

© თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1997

ჭ $\frac{1604010000}{608(06)-97}$

ISBN 5-511-00740-4

გალილეის ფარდობითობის პრინციპი

მექანიკას, რომელიც გალილეის შრომებზე დაყრდნობით შეიქმნა ნიუტონის მიერ, კლასიკურ მექანიკას უწოდებენ. კლასიკურ მექანიკაში არსებობს ფარდობითობის პრინციპი, რომელსაც გალილეის პატივსაცემად აინშტაინმა გალილეის ფარდობითობის პრინციპი უწოდა.

ამ პრინციპის შინაარსი ის არის, რომ იზოლირებული სისტემის მექანიკის კანონები და მოძრაობის განტოლება ინვარიანტულია ყველა ინერციული ათელის სისტემის მიმართ, ე. ი. ნებისმიერ ინერციულ სისტემაში მყოფი ფიზიკოსი ერთი და იგივე მექანიკური მოვლენის შესწავლისას ერთსა და იმავე შედეგს მიიღებს.

ბუნებრივია ვიფიქროთ, რომ ფარდობითობის პრინციპი სამართლიანია არა მხოლოდ მექანიკაში, არამედ ფიზიკის სხვა ნებისმიერ დარგშიაც. კერძოდ, სალი აზროვნება მოითხოვს, რომ ნებისმიერ ინერციულ სისტემაში ფიზიკის ყველა კანონს ერთი და იგივე სახე ჰქონდეს; სამწუხაროდ, აღმოჩნდა, რომ კლასიკური ფიზიკის წარმოდგენების მიხედვით ეს ასე არ არის.

ამ თავში განხილულია კლასიკური მექანიკის კანონების ინვარიანტობის საკითხი გალილეის გარდაქმნების მიმართ.

§1. გალილეის გარდაქმნის ფორმულა

ათელის სისტემა. როგორც ვიცით, კლასიკურ მექანიკაში ყოველი სხეულის მოძრაობა აინერება რაიმე ათელის სისტემის მიმართ. ათელის სისტემა შეიძლება დაუფკავშიროთ ნებისმიერ უძრავ ან მოძრავ სხეულს, მაგრამ ხელსაყრელია ათელის სისტემად ავირჩიოთ ისეთი, რომელშიაც მოძრაობის კანონებს ექნება რაც შეიძლება მარტივი სახე. ყველა სხვა ათელის სისტემებს შორის მექანიკაში განსაკუთრებულ როლს ასრულებენ ე. წ. ინერციული სისტემები. როგორც ვიცით, სისტემას ეწოდება ინერციული, თუ ნებისმიერი იზოლირებული მატერიალური ნერტილი ამ სისტემის მიმართ უძრავია ან მოძრაობს სწორხაზობრივად და თანაბრად, ე. ი. $\vec{V} = const$ სიჩქარით. მკაცრად რომ ვიმსჯელოთ, ინერციული სისტემა ბუნებაში არ არსებობს, თუნდაც იმიტომ, რომ ბუნებაში არ არსებობს თავისუფალი (იზოლირებული) ნაწილაკი. ათელის ინერციული სისტემა ისეთივე იდეალიზებული შემთხვევაა, როგორც თვით თავისუფალი ნაწილაკის არსებობის დაშვება. ინერციუ-

ლი იქნებოდა, მაგალითად, უძრავ სხეულთან დაკავშირებული რა-
იმე სისტემა, მაგრამ უძრავი სხეულები სამყაროში არ არსებობენ.
ინერციულად, დიდი სიზუსტით, შეგვიძლია ჩავთვალოთ ე.წ. უძრავ
ვარსკვლავთა სისტემა. ამ სისტემის სათავე მოთავსებულია რომე-
ლიმე უძრავ ვარსკვლავში და ლერძებიც გადიან სხვა უძრავ ვარ-
სკვლავებზე (ასეთი ვარსკვლავების მოძრაობა ხშირად შეუმჩნე-
ველია ერთი საუკუნის განმავლობაშიაც კი, ამიტომ ისინი დიდი
სიზუსტით უძრავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ).

დედამინის რთული მოძრაობის გამო თავისი საკუთარი ლერძისა
და მზის ირგვლივ ელიფსურ ორბიტაზე, იგი არ შეიძლება განვიხი-
ლოთ ინერციულ ათვლის სისტემად, თუმცა, ზოგჯერ, დროის მოკლე
შუალედში კარგი მიახლოებით, მისი ორბიტალური მოძრაობა მზის
გარშემო შეიძლება ჩავთვალოთ სწორხაზობრივად და, მაშასადამე,
დედამინასთან დაკავშირებული ათვლის სისტემა, ინერციულად.

ცხადია, რომ, თუ ჩვენ დავუშვებთ ერთი ინერციული სისტე-
მის არსებობას, მაშინ გვექნება უსასრულო რაოდენობა ასეთი ათ-
ვლის სისტემებისა. მართლაც, ყოველი ათვლის სისტემა, რომე-
ლიც ინერციულის მიმართ მოძრაობს სწორხაზობრივად და თანაბ-
რად, ე. ი. $\vec{V} = const$ სიჩქარით, აგრეთვე ინერციული იქნება. მატე-
რიალური ნერტილის მოძრაობა ხდება დროსა და სივრცეში, ამიტომ
საჭიროა მექანიკაში სივრცისა და დროის შესახებ გარკვეული წარ-
მოდგენის შემუშავება. კლასიკური მექანიკის თანახმად, სივრცე
არის აბსოლუტური, ხოლო დრო - უნივერსალური. ეს იმას ნიშნავს,
რომ მანძილი სივრცის ორ ნერტილს შორის, ისევე როგორც შუალე-
დი დროის ორ მომენტს შორის, არ არის დამოკიდებული (მოძრაობა-
ზე) ათვლის სისტემაზე. კლასიკურ მექანიკაში ითვლება, რომ სივრ-
ცე კარგი მიახლოებით აინერება ევკლიდეს გეომეტრიით, ხოლო
დრო იცვლება ევკლიდურად სწორხაზოვნად. დრო კლასიკური
წარმოდგენის მიხედვით ნებისმიერ ინერციულ სისტემაში ერთ-
ნაირად მიმდინარეობს.

ცდა გვიჩვენებს, რომ ფიზიკური თვისებების მიხედვით დრო
არის ერთგვაროვანი, სივრცე კი ერთგვაროვანი და იზოტროპი-
ული. ამასთან, ინერციული სწორედ ის სისტემაა, რომლის მიმარ-
თაც დროსა და სივრცეს აღნიშნული თვისებები ახასიათებს.

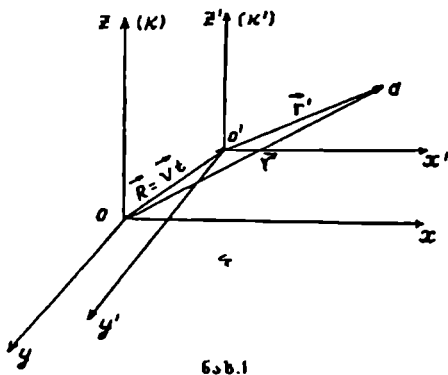
გალილეის გარდაქმნის ფორმულები: ვთქვათ, გვაქვს ერთი
ინერციული სისტემა x, y, z , რომელიც პირობითად უძრავად ჩავ-
თვალოთ. ამ სისტემას ვუნოდოთ K სისტემა ან უშტრიხო სისტე-
მა. განვიხილოთ მეორე K' სისტემა, რომელიც K -ს მიმართ მოძ-
რაობს $\vec{V} = const$ სიჩქარით. K' სისტემის ლერძები აღვნიშნოთ

x', y', z' -ით. K' სისტემას უწოდებთ მოძრავს ან შტრიხიან სისტემას. როგორი კავშირი არსებობს რაიმე a წერტილის კოორდინატებს შორის ამ ორ სისტემაში? ნახ.1-დან ცხადია, რომ

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t, \quad (1.1)$$

$$t = t'$$

ამ გარდაქმნას დაუმატეთ კლასიკური მექანიკის დროის დამოუკიდებლობის ფაქტი ათელის სისტემისაგან $t = t'$ (1.1)-ს გალილეის გარდაქმნის ფორმულები ეწოდება. ჩვენ ხშირად დავჭირდება ის კერძო შემთხვევა, როცა შტრიხიანი ათელის სისტემა მოძრაობს უშტრიხო სისტემის x ღერძის გასწვრივ $V = const$ სიჩქარით (ნახ.2), მაშინ (1.1) გარდაქმნის ფორმულები მიიღებენ სახეს:



$$x = x' + Vt,$$

$$y = y',$$

$$z = z',$$

$$t = t'. \quad (1.2)$$

როცა გვინდა შებრუნებული გარდაქმნა (შტრიხიანი კოორდინატების გამოხატვა უშტრიხოთი), მაშინ საჭიროა (1.1) და (1.2) ფორმულებში მოვახდინოთ $V' \rightarrow -V$ შეცვლა და შტრიხების გადაადგილება, ე. ი.

$$x' = x - Vt,$$

$$y' = y,$$

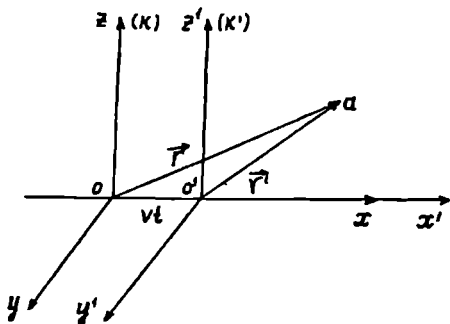
$$z' = z,$$

$$t' = t. \quad (1.3)$$

სიჩქარეთა შეკრების კანონი. ახლა გამოვიყვანოთ კლასიკური მექანიკის სიჩქარეთა შეკრების კანონი. (1.1) ფორმულის განარმოებით მარტივად მივიღებთ

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{V} \quad (1.4)$$

მაშასადამე, ნაწილაკის სიჩქარე უძრავ და მოძრავ სისტემებში ერთმანეთისაგან განსხვავდება. ნაწილაკის სიჩქარე უძრავი სის-



ნახ.2.

გორც ორი ნაწილაკის სიჩქარეთა შეკრების კანონი. მართლაც, ამისათვის საკმარისია ვიგულისხმობთ, რომ K' სისტემის სათავე მოთავსებულია მეორე ნაწილაკზე, მაშინ (1.4) გამოსახულებაში V იქნება მეორე ნაწილაკის სიჩქარე K სისტემის მიმართ.

სიჩქარეთა შეკრების კანონიდან, კერძო შემთხვევაში, როცა მოძრაობა წრფივია, გამომდინარეობს, რომ

$$v = v' \pm V \quad (1.5)$$

ნიშანი მინუსი აიღება მაშინ, როცა ნაწილაკები ერთი მიმართულებით მოძრაობენ, ხოლო პლუსი, როცა ისინი ერთმანეთის შესახვედრად მოძრაობენ.

§2. კლასიკური მექანიკის კანონების ინვარიანტობა და კოვარიანტობა

კლასიკურ მექანიკაში ყველა ინერციული სისტემა ტოლფასოვანია. ინერციული ათვლის სისტემების შემოღების ძირითადი მიზანი სწორედ ის იყო, რომ მექანიკის მოძრაობის კანონებს ყველა ინერციულ სისტემაში ჰქონოდა ინვარიანტული სახე. წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებდით უაზრო შედეგს, რამდენადაც დამკვირვებლები, რომლებიც მოთავსებული იქნებოდნენ სხვადასხვა ათვლის სისტემაში ერთი და იმავე მოვლენის დაკვირვებისას სხვადასხვა შედეგებს მიიღებდნენ, რაც, ცხადია, ეწინააღმდეგება საღ აზროვნებას. ჩვენ მიერ ზემოთ აღნიშნული წარმოადგენს გალილეის ფარდობითობის პრინციპის შინაარსს, რომელიც ასე ყალიბდება: მექანიკის ყველა კანონი და მოძრაობის განტოლე-

ბა, რომელიც სამართლიანია ერთი რომელიმე ათვის ინერციულ სისტემაში იზოლირებული სისტემისათვის, ინვარიანტული რჩება ნებისმიერი სხვა ინერციულ ათვის სისტემაზე გადასვლის დროს.

მათემატიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ მექანიკის მოძრაობის განტოლება არ უნდა შეიცვალოს გალილეის გარდაქმნების მიმართ, ე. ი.

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \quad (2.1)$$

გარდაქმნის შემთხვევაში.

დავწეროთ, N ნაწილაკისაგან შედგენილი, მექანიკური სისტემის i -ური ნაწილაკის მოძრაობის ნიუტონის განტოლებათა სისტემა

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{ik} (|\vec{r}_i - \vec{r}_k|) + \vec{F}_i(\vec{r}_i, t). \quad (2.2)$$

\vec{F}_{ik} i და k ნაწილაკის ურთიერთქმედების ძალაა. იმის გამო, რომ ათვის ინერციულ სისტემაში სივრცე ამჟღავნებს ერთგვარონებისა და იზოტროპიულობის თვისებას, ხოლო დრო ერთგვაროვანია, ამ ძალას ექნება სახე

$$\vec{F}_{ik} = \vec{F}_{ik} (|\vec{r}_i - \vec{r}_k|). \quad (2.3)$$

ე. ი. ნაწილაკთა ურთიერთქმედების ძალა დამოკიდებული იქნება მხოლოდ i და k ნაწილაკებს შორის არსებულ მანძილზე $r_{ik} = |\vec{r}_i - \vec{r}_k|$. გარე \vec{F}_i ძალა, ზოგად შემთხვევაში, შეიძლება იცვლებოდეს დროის მიხედვითაც და დამოკიდებული იყოს სხვა სიდიდეებზედაც.

დავუშვათ, i -ურ ნაწილაკზე გარე ძალა არ მოქმედებს, მაშინ მოძრაობის (2.2) განტოლება ასე გადაინერება:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{ik} (|\vec{r}_i - \vec{r}_k|). \quad (2.4)$$

თუ ამ განტოლებაში ჩავატარებთ გალილეის გარდაქმნებს, ე. ი. გავითვალისწინებთ, რომ $\vec{r}_i = \vec{r}_i' - \vec{V}t$, მაშინ ადვილად დავინახავთ, რომ $\vec{F}_{ik} = \vec{F}'_{ik}$ და მოძრაობის განტოლება მიიღებს სახეს

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i'}{dt^2} = \sum_{k=1}^N \vec{F}'_{ik} (|\vec{r}_i' - \vec{r}_k'|), \quad (2.5)$$

რაც იმას გვიჩვენებს, რომ სისტემის ნებისმიერი i -ური ნაწილაკის მოძრაობის განტოლება ინვარიანტულია გალილეის გარდაქ-

მნების მიმართ. გალილეის გარდაქმნების შედეგად (2.4) განტოლებებში შეიცვალა მხოლოდ აღნიშვნები - უშტრიხო \bar{r}_i რადიუსვექტორების ნაცვლად მონანილეობს შტრიხიანი \bar{r}'_i რადიუსვექტორები.

როცა სისტემაზე გარეშე ძალებიც მოქმედებს, მაშინ, ზოგად შემთხვევაში, მტკიცება იმისა, რომ მოძრაობის განტოლება ინვარიანტული იქნება გალილეის გარდაქმნების მიმართ, არ შეიძლება, ახალ ინერციულ სისტემაზე გადასვლისას განტოლების სტრუქტურა შეიძლება შეიცვალოს. მაგრამ ხშირია შემთხვევები, როცა გარე ძალების არსებობის შემთხვევაშიც, ათელის ახალ ინერციულ სისტემაზე გადასვლისას, მოძრაობის განტოლება თავის სტრუქტურას ინარჩუნებს. ოღონდ, გამორიცხული არ არის განტოლებაში შემავალი კოორდინატების, სიჩქარეების და აჩქარებების ფუნქციებმა სახე შეიცვალოს. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლისას მოძრაობის განტოლება ფორმას არ იცვლის ან კოვარიანტული რჩება.

როცა გარე ძალას კოორდინატებზე დამოკიდებულებით აქვს ჩვენ მიერ არჩეული $\bar{F}_i(\bar{r}_i, t)$ სახე, მაშინ ადვილია დამტკიცება, რომ მოძრაობის (2.2) განტოლებათა სისტემა გალილეის გარდაქმნების მიმართ რჩება კოვარიანტული, ე. ი. გარეგნულ ფორმას არ იცვლის. მართლაც, თუ (2.2) განტოლებაში შევიტანთ გალილეის გარდაქმნის ფორმულას $\bar{r}_i = \bar{r}'_i + \bar{V}t$, შეგვიძლია დავწეროთ

$$m_i \frac{d^2 \bar{r}'_i}{dt^2} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_{ik}(|\bar{r}'_i - \bar{r}'_k|) + \bar{F}_i(\bar{r}'_i, t), \quad (2.6)$$

სადაც

$$\bar{F}'_i(\bar{r}'_i, t) = \bar{F}_i(\bar{r}_i + \bar{V}t, t). \quad (2.7)$$

როგორც ვხედავთ, (2.6) მოძრაობის განტოლებას მართლაც აქვს (2.2) განტოლების კოვარიანტული ფორმა. მაგრამ (2.6)-ში $\bar{F}'_i(\bar{r}'_i, t)$ ძალა, როგორც ახალი \bar{r}'_i რადიუსვექტორის ფუნქცია, განსხვავდება $\bar{F}_i(\bar{r}_i, t)$ ძალისაგან, როგორც ძველი \bar{r}_i რადიუსვექტორის ფუნქციისაგან.

როგორ გამოიყურება მექანიკური სისტემის, როგორც მთლიანის, მოძრაობის განტოლების ინვარიანტობის საკითხი გალილეის გარდაქმნების მიმართ? ამისათვის (2.6) მოძრაობის განტოლება ავჯამოთ i -თი სისტემის შემადგენელი ყველა ნაწილაკის მიხედვით. გავითვალისწინოთ, რომ შიგა ძალების ჯამი ნულის ტოლია და გავიხსენოთ სისტემის ინერციის ცენტრის რადიუსვექტორის განმარტება

$$\bar{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad (2.8)$$

მაშინ გვექნება

$$M \frac{d^2 \bar{R}_c}{dt^2} = \bar{F}, \quad (2.9)$$

სადაც $M = \sum m_i$ სისტემის, როგორც მთლიანის, მასაა, ხოლო

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i(\bar{r}_i, t) \quad (2.10)$$

ყველა გარე ძალის გეომეტრიული ჯამი.

როცა სისტემა იზოლირებულია, მაშინ $\bar{F} = 0$ და (2.9) განტოლება გალილეის გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტული დარჩება

$$M \frac{d^2 \bar{R}_c}{dt^2} = M \frac{d^2 \bar{R}'}{dt^2} = 0 \quad (2.11)$$

ამასთან, \bar{R}'_c განისაზღვრება იმავე (2.8) ფორმულით, სადაც \bar{r}_i შეცვლილია \bar{r}'_i -ით.

ხოლო, როცა სისტემა არაიზოლირებულია, ე. ი. $\bar{F} \neq 0$, მაშინ (2.9) განტოლება შეინარჩუნებს კოვარიანტულ ფორმას

$$M \cdot \frac{d^2 \bar{R}'_c}{dt^2} = \bar{F}', \quad (2.12)$$

სადაც

$$\bar{F}' = \sum_{i=1}^N \bar{F}'_i(\bar{r}'_i, t). \quad (2.13)$$

როგორც ცნობილია, მექანიკის ფიზიკური სიდიდეები გამოიხატება ტენზორებით, როგორც ნესი, ნულოვანი, პირველი და მეორე რანგის ტენზორებით. მოძრაობის განტოლება კი იწერება ერთნაირი რანგის ტენზორული ტოლობის სახით. ამიტომ ასეთნაირად ჩანერილი მოძრაობის განტოლება კოვარიანტული იქნება კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას, რადგან ტოლობის ყველა წევრი

ერთნაირად გარდაიქმნება. განსხვავებით ამისაგან, სხვა გარდაქმნების მიმართ კოვარიანტობა არ არის მექანიკის კანონების თვისება, არამედ წარმოადგენს მათი ჩანერის შედეგს. მექანიკის ერთი და იგივე კანონი შეგვიძლია ჩავენროთ როგორც კოვარიანტული, ისე არაკოვარიანტული სახით. კოვარიანტული სახით ჩანერას ის უპირატესობა აქვს, რომ იგი დამოკიდებული არ არის კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე.

ჩვენ დავინახეთ, რომ გალილეის ფარდობითობის პრინციპის თანახმად, ნებისმიერი ათვლის სისტემა, რომელიც დაკავშირებულია ინერციულთან (1.1) გარდაქმნებით, აგრეთვე ინერციულ სისტემას წარმოადგენს. იმისათვის, რომ შებრუნებული დებულება სამართლიანი იყოს, ე. ი. რომ ყოველი ორი ინერციული სისტემა ერთმანეთთან დაკავშირებული იყოს გალილეის გარდაქმნებით, საჭიროა გალილეის გარდაქმნების კლასის გაფართოება. კერძოდ, საჭიროა შემდეგი სამი ტიპის გარდაქმნის დამატება:

1. მექანიკის კანონები და მოძრაობის განტოლება არ იცვლება, თუ ათვლის სისტემის სათავეს გადავიტანთ $\vec{r}_0 = \text{const}$ ვექტორზე, ე. ი. შემდეგი გარდაქმნის მიმართ

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \quad (2.14)$$

ეს შედეგი გამომდინარეობს სივრცის ერთგვაროვნების თვისებიდან. იზოლირებული სისტემის მდებარეობა სივრცეში დამოკიდებული რომ იყოს სათავეს არჩევაზე, მაშინ შესაძლებელი იქნებოდა სივრცეში უპირატესი ნერტილების გამოყოფა, რასაც, ცხადია, აზრი არა აქვს.

2. მექანიკის კანონები და მოძრაობის განტოლება არ იცვლება დროის ღერძის მიმართ წანაცვლებით $t_0 = \text{const}$ დროით, ე. ი. გარდაქმნის მიმართ

$$t = t' + t_0 \quad (2.15)$$

ეს უკანასკნელი შედეგია დროის ერთგვაროვნებისა. მექანიკის კანონები დროის ათვლის საწყის მომენტს არავითარ უპირატესობას არ ანიჭებს.

3. მექანიკის კანონები და მოძრაობის განტოლება არ იცვლება კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას, ე. ი. გარდაქმნის დროს

$$x_i = a_{ki} \cdot x'_k \quad (2.16)$$

სადაც a_{ki} კოეფიციენტების ერთობლიობა წარმოადგენს გარდაქმნის ორთოგონალურ მატრიცას. ამასთან,

$$a_{im} a_{mk} = a_{mi} a_{km} = \delta_{ik} \quad (2.17)$$

(2.10) და (2.11) გამოსახულებებში გამეორებული ინდექსით იგულისხმება აჯამება.

მექანიკის კანონები და მოძრაობის განტოლება ასევე არ შეიცვლება აღნიშნული გარდაქმნების სხვადასხვა კომბინაციების დროს, ე. ი. მათი თანმიმდევრული მოქმედებით; ამიტომ გალილეის ზოგად გარდაქმნებში ვიგულისხმებთ ისეთ გარდაქმნებს, რომლებიც აერთიანებს (2.1), (2.8), (2.9) და (2.10) გარდაქმნებს, ხოლო (2.1)-ს შემდგომში ვუნოდებთ გალილეის კერძო გარდაქმნებს.

ინერციულ სისტემას, რომლის მიმართაც მოძრაობის განტოლება ინვარიანტულია, გალილეის ათელის სისტემას ვუნოდებთ. ამავე დროს, შემოკლების მიზნით, დამკვირვებელს, რომელიც უძრავად იმყოფება K ან K' ათელის სისტემაში, ვუნოდებთ K ან K' დამკვირვებელს.

§ 3. მექანიკისა და ელექტროდინამიკის ურთიკავშირეობა

წინა პარაგრაფში განხილული იყო გალილეის ფარდობითობის პრინციპი, რომლის თანახმად მექანიკის კანონები ერთნაირად აინერება ყველა ინერციულ ათელის სისტემაში. ასევე ხდება ელექტროდინამიკაშიც, და საზოგადოდ, ფიზიკის სხვა დარგებშიც. სამწუხაროდ, ეს ასე არ აღმოჩნდა. მაქსველის განტოლებების (რომლებიც აღწერენ მუხტის მოძრაობას) ანალიზმა გვიჩვენა, რომ ისინი ინვარიანტული არ არიან გალილეის გარდაქმნების მიმართ.

განვიხილოთ მაქსველის განტოლებები არა ზოგადი სახით, არამედ იმ სახით, რომლებიც ელექტრომაგნიტურ ტალღებს აღწერენ. მაქსველმა დაადგინა, რომ ელექტრომაგნიტური შემოფოთება, ისეთი, როგორც გვაქვს მუხტების რხევის დროს, სივრცეში ვრცელდება სიჩქარით, რომელიც დამოკიდებულია გარემოს თვისებებზე. ეს სიჩქარე, როგორც პარამეტრი, შედის მაქსველის განტოლებებში. აღმოჩნდა, რომ სიცარიელეში ამ შემოფოთების გავრცელების სიჩქარე მიმართულებაზე დამოკიდებული არ არის და დაახლოებით $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}}$ -ის ტოლია. ეს კი რიცხობრივად სინათლის სიჩქარეს ემთხვევა. აქედან მაქსველმა იწინასწარმეტყველა, რომ სინათლე არის ელექტრომაგნიტური ტალღების ერთ-ერთი სახე. ხოლო მას შემდეგ, რაც ჰ. ჰერცმა ექსპერიმენტულად მოახერხა ელექტრომაგნიტური ტალღების მიღება, დადგენილ იქნა, რომ მუხტების დინამიკა და სინათლე ერთი და იმავე მაქსველის განტოლებებით აინერება.

მაქსველის განტოლებებით კარგად აიხსნა მუხტების მოძრაობასთან დაკავშირებული მანამდე ცნობილი ყველა მოვლენა და ნაწი-

ნასწარმეტყველვეი იქნა ახალი მოვლენებიც. მაგრამ, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, აღმოჩნდა, რომ მაქსველის განტოლებები ინვარიანტულნი არ არიან გალილეის გარდაქმნების მიმართ. მაქსველის განტოლებებში შედის სინათლის სიჩქარე. ვთქვათ, სინათლის სიჩქარის ეს მნიშვნელობა აღებულია რაიმე უძრავი სისტემის მიმართ, მაშინ გალილეის ახალ სისტემაზე გადასვლისას, რომლის სიჩქარე აღებული უძრავი სისტემის მიმართ არის $V = const$, სინათლის სიჩქარე სხვა იქნება. სიჩქარეთა შეკრების კლასიკური ფორმულის თანახმად ახალ სისტემაში $c' = c - V$ მაშასადამე, მაქსველის განტოლებებს ახალ ინერციულ სისტემაში ექნება განსხვავებული სახე. რაც იმას ნიშნავს, რომ მაქსველის განტოლებებზე არ არის ინვარიანტული გალილეის გარდაქმნების მიმართ.

საინტერესოა აღვნიშნოთ, რომ მაქსველის განტოლებების არა-ინვარიანტობა გალილეის გარდაქმნების მიმართ თავის გამოხატულებას პოულობს ექსპერიმენტზე. კერძოდ, ეს შეუსაბამობა განაპირობებს მცდარ ექსპერიმენტულ შედეგებს. ამის დასადასტურებლად განვიხილოთ მარტივი მაგალითი. ვთქვათ, უძრავი K სისტემის x ღერძზე მოთავსებულია საკმარისად გრძელი დადებითად დამუხტული ერთგვაროვანი უძრავი გამტარი. განვიხილოთ ინერციული K' სისტემაც, რომელიც მოძრაობს K სისტემის x ღერძის გასწვრივ მუდმივი V სიჩქარით. ავიღოთ ერთეულოვანი დადებითი e მუხტი და ორივე ათვლის სისტემაში მოთავსებული დამკვირვებლის თვალსაზრისით შევისწავლოთ მუხტისა და გამტარის ურთიერთქმედება. K -ში მოთავსებული დამკვირვებლის თვალსაზრისით მუხტზე იმოქმედებს მხოლოდ განზიდვის ელექტრული \vec{F}_e ძალა. K' -ში მოთავსებული დამკვირვებლისათვის, როგორც გამტარი, ისე მუხტი, მოძრაობს V სიჩქარით x ღერძის სანინაალმდეგო მიმართულებით. ამიტომ K' დამკვირვებელი დაადგენს, რომ მუხტზე ერთი მხრით იმოქმედებს ზუსტად ისეთივე ელექტრული ძალა, როგორც K -ში მოთავსებული დამკვირვებლის თვალსაზრისით, მეორე მხრით მუხტზე იმოქმედებს მაგნიტური \vec{F}_m ძალაც. მართლაც, K' დამკვირვებლის თვალსაზრისით მოძრავი დამუხტული გამტარი ეკვივალენტურია ელექტრული დენის, რომელიც შექმნის მაგნიტურ ველს. ეს ველი ბიო-სავარის კანონის მიხედვით იმოქმედებს მოძრავ მუხტზე და წარმოქმნის მაგნიტურ ძალას, რომელიც მიმართული იქნება ელექტრული ძალის სანინაალმდეგოდ. ამგვარად, K' სისტემაში მუხტზე მოქმედი საჯამო ძალა ნაკლები იქნება, ვიდრე იგივე ძალა K სისტემაში. ცხადია, საქმე გვაქვს აშკარა შეუსაბამობასთან. კერძოდ, ვერსად გავექცევით იმ ტრივიალურ და საღ

მოთხოვნას, რომ ყველა ინერციულ ათვლის სისტემაში ნებისმიერი ფიზიკოსი ერთნაირად უნდა აღწერდეს როგორც მექანიკურ, ისე ელექტრომაგნიტურ მოვლენას. ამავ დროს, მეტად გაუგებარი იქნებოდა მექანიკური და დამუხტულ ნაწილაკთა სისტემების მკაცრი გამოყენება, რამდენადაც ისინი არსებითად ერთი და იმავე ობიექტებს სწავლობენ. ცნობილია, რომ ნივთიერება აგებულია დამუხტული ნაწილაკებისაგან და ყველა დამუხტულ ნაწილაკს აქვს მასა.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ ან გალილეის გარდაქმნები არ არის ზუსტი, ან არ ვარგა მაქსველის განტოლებები. ექსპერიმენტი კი ასეთი დასკვნის გაკეთების საფუძველს არ იძლევა, არ მოიძებნა არც ერთი ისეთი მოვლენა, რომელიც მაქსველის განტოლებებით არ აინერებოდეს.

მაქსველის განტოლებები შეიცავენ სინათლის სიჩქარეს, როგორც პარამეტრს, რომელშიაც ჩაქსოვილია ღრმა ფიზიკური შინაარსი. უნდა ვიფიქროთ, შემთხვევითი არ არის ის გარემოება, რომ პარამეტრი $c = (\mu\varepsilon)^{-1/2}$, სადაც μ მაგნიტური განვლადობაა, ხოლო ε დიელექტრიკული მუდმივა სინათლის სიჩქარეს ემთხვევა.

ბუნებრივია დავუშვათ, რომ გალილეის გარდაქმნები, რომლებიც c პარამეტრს არ შეიცავს, არ არის ის გარდაქმნები, რომლებიც ინვარიანტულს უნდა ტოვებდნენ ელექტროდინამიკის კანონებს ყველა ინერციულ სისტემაში. ეს, თავის მხრით, იმას ნიშნავს, რომ მექანიკის კანონებიც ისე უნდა შეიცვალოს, რომ მასში აგრეთვე მონაწილეობდეს c პარამეტრი. მხოლოდ რაღაც ზღვრული მნიშვნელობისათვის, როგორც მექანიკის მოძრაობის კანონებიდან, ისე კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულებიდან, უნდა ამოვარდეს სინათლის სიჩქარე და შესაბამისად დავუბრუნდეთ ნიუტონის მოძრაობის განტოლებას და გალილეის გარდაქმნის ფორმულებს. ამასთან, მოსალოდნელია, რომ თეორიაში შემოვიდეს უგანზომილებო $\beta = v/c$ პარამეტრი, სადაც v არის ნაწილაკის სიჩქარე. ამავ დროს, უნდა ვიფიქროთ, რომ ნიუტონის კანონებში აქამდე წინააღმდეგობებს იმიტომ ვერ ვამჩნევდით, რომ საქმე გვექონდა სხეულების მცირე სიჩქარეებით მოძრაობასთან. მაშასადამე, სინათლის სიჩქარე მაქსველის განტოლებებში შემთხვევით არ გაჩენილა, მას აქვს ფუნდამენტური მნიშვნელობა და იგი უნდა შევიდეს მოძრაობის კლასიკურ განტოლებებშიაც, ასევე ერთიდან მეორე ინერციულ სისტემაზე გადასვლის ფორმულებშიაც. ეს არის მექანიკისა და ელექტროდინამიკის შესაბამისობაში მოყვანის ერთი გზა. არსებობს მეორე გზაც, რომელიც მაქსველმა აირჩია. მაქსველი ფიქრობდა, რომ სწორია როგორც მექანიკის კანონები, ისე

მაქსველის განტოლებები, მაგრამ მაქსველის განტოლებებს არ უნდა ჰქონდეთ ინვარიანტული სახე, რამდენადაც ისინი დანერვილია იმ უპირატესი უძრავი სისტემის მიმართ, რომელშიაც სინათლის სიჩქარე უდრის c -ს. ამ უპირატეს სისტემას მაქსველი უკავშირებდა "მსოფლიო ეთერს" წინასწარ აღვნიშნოთ, რომ სწორი გამოდგა პირველი მოსაზრება, რომლის მიხედვით ფიზიკის კანონებს ინვარიანტული სახე აქვთ ყველა ინერციულ სისტემაში, მაგრამ ამისათვის საჭირო შეიქნა კლასიკური ფიზიკის მთელი რიგი ფუნდამენტური დებულებების გადასინჯვა.

რელატივისტური მექანიკის ექსპერიმენტული
საფუძვლები

ამ თავში გავეცნობით ყველა იმ ძირითად ექსპერიმენტს, რომლებიც წინ უძღოდა აინშტაინის (1880-1955) მიერ ახალი მექანიკის-რელატივისტური მექანიკის ჩამოყალიბებას (1905 წ.).

წინა თავში ვაჩვენეთ, რომ ელექტროდინამიკის მოვლენები, კერძოდ, მაქსველის განტოლებები, რომლებიც მუხტების მოძრაობას აღწერენ, ინვარიანტული არ არიან გალილეის გარდაქმნების მიმართ.

თვითონ მაქსველი მიუთითებდა, რომ მისი განტოლებები არც უნდა იყვნენ ინვარიანტული გალილეის გარდაქმნების მიმართ, რამდენადაც ისინი დანერილია უპირატესი ათვლის სისტემის მიმართ. ამ უპირატეს სისტემად მაქსველს მიაჩნდა უძრავი "ეთერი" -ნივთიერება, რომელიც ავსებს მთელს სამყაროს და ნებისმიერ მატერიალურ სხეულს, ატომებსა და მოლეკულებსაც კი. "ეთერის" ჰიპოთეზის შემოტანას ხელი შეუწყო შემდეგმა გარემოებამაც. როგორც აღმოჩნდა, სინათლე წარმოადგენს ელექტრომაგნიტურ ტალღებს, რომელიც ბრწყინვალედ აინერება მაქსველის განტოლებებით. იმდროინდელი წარმოდგენებით კი ტალღების გავრცელებას სჭირდებოდა მატერიალური გარემო, ისევე როგორც ბგერის ტალღების გავრცელება შეუძლებელია სიცარიელეში.

მაქსველის თეორიაზე დაყრდნობით, გ. ლორენცმა შექმნა ელექტრონული თეორია, რომელიც ასევე ემყარებოდა უპირატესი ათვლის სისტემის არსებობას "ეთერის" სახით. ამიტომ დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა "ეთერის" ჰიპოთეზის შემოწმებას. რელატივისტური მექანიკის ჩამოყალიბების წინა პერიოდი სწორედ ეთერის თვისებების და მასში სინათლის გავრცელების თვისებებების შესწავლას დასჭირდა.

ამ თავში განვიხილავთ იმ კლასიკურ ექსპერიმენტებს, რომლებმაც განსაკუთრებული ზეგავლენა იქონიეს ფიზიკის შემდგომ განვითარებაზე, კერძოდ -რელატივისტური მექანიკის ჩამოყალიბებაზე.

შევისწავლით აინშტაინის ფარდობითობის პრინციპს, გამოვიყვანთ ლორენცის გარდაქმნის ფორმულებს და განვიხილავთ მისგან გამომდინარე შედეგებს.

ფარდობითობის თეორიის ზოგიერთი შედეგის უკეთ გაგების მიზნით, ჩვენ ხშირად მივმართავთ ე.წ. აზრობრივ ექსპერიმენტებს. აზრობრივი ენოდება ისეთ ექსპერიმენტებს, რომლებიც არ ენი-

ნააღმდეგებიან არც ერთ ფიზიკურ დებულებას, მაგრამ მათი პრაქტიკული განხორციელება, პრინციპული სიძნელეების გამო, შეუძლებელია.

შევნიშნოთ, რომ ფარდობითობის თეორია არ ჩამოყალიბებულა ფიზიკის საერთო განვითარებისაგან მოწყვეტით. მის განვითარებაში დიდი ღვაწლი მიუძღვის მრავალ მეცნიერს, მათ შორის გამოჩენილ ჰოლანდიელ მეცნიერს გენდრიკ ანტონ ლორენცს და ფრანგ მათემატიკოს ანრი პუანკარეს.

ფარდობითობის თეორია ორ ნაწილად იყოფა, ერთია ფარდობითობის სპეციალური თეორია (1905 წ), ხოლო მეორე - ფარდობითობის ზოგადი თეორია, რომელიც აგრეთვე ა. აინშტაინმა ჩამოაყალიბა 1916 წელს. ფარდობითობის სპეციალური თეორია მოვლენების შესწავლისას ისაზღვრება ათელის ინერციული სისტემებით, ხოლო გრავიტაციულ ველებს არ განიხილავს. ფარდობითობის ზოგად თეორიაში კი შეისწავლება არაინერციული ათელის სისტემები და გრავიტაციული ველები. ამ წიგნში განვიხილავთ მხოლოდ ფარდობითობის სპეციალური თეორიის არსს.

§ 4. მსოფლიო ეთერის აქაოთება

დღეს "ეთერის" ცნებას ისტორიული მნიშვნელობა აქვს და იგი შეიძლება ვაკუუმის სინონიმად გამოვიყენოთ, მაგრამ "ეთერის" ჰიპოთეზამ თავის დროზე დიდი როლი შეასრულა და მის უარსაყოფად მრავალი მნიშვნელოვანი ექსპერიმენტი ჩატარდა. ამიტომ "ეთერის" საკითხს რამდენადმე დანვრილებით შევეხებით.

"ეთერის" ჰიპოთეზა, როგორც მექანიკური თვისებების მქონე მატერიალური გარემოსი, შემოღებული იყო რენე დეკარტის მიერ (1596-1650). შემდეგ ეს ჰიპოთეზა სინათლის თვისებების შესწავლისას გამოიყენა ქრისტინან ჰიუგენსმა (1629-1695) ეთერი ბერძნული სიტყვაა და ნიშნავს: "ჰაერს", "ნათელ ცას" და სხვ.

საქმე ის არის, რომ ჰიუგენსი, წინააღმდეგ ნიუტონისა, ამტკიცებდა, რომ სინათლეს აქვს ტალღური ბუნება. ტალღები კი გარემოს გარეშე არ ვრცელდება. ცნობილია, რომ, მაგალითად, ბგერის ტალღები სიცარიელებში არ ვრცელდება და წარმოადგენენ (ჰაერის, წყლის, მყარი სხეულების და ა.შ.) რხევის შედეგს. ჰიუგენსის მიხედვით ასეთ "გამტარ გარემოს" სინათლის ტალღებისათვის წარმოადგენს "ეთერი", რომლითაც ავსებულია მთელი სამყარო. ეთერით ავსებულია ნებისმიერი სხეული და გარემო, ეთერი

ავსებს ატომშიგა სიცარიელესაც კი. ჰიუგენსის მიხედვით სინათლის ტალღების გავრცელება სივრცეში ხდება მსოფლიო ეთერის რხევის შედეგად.

მაქსველი ამტკიცებდა, რომ მისი განტოლება დაწერილია სწორედ იმ ათვლის სისტემის მიმართ, რომელიც დაკავშირებულია უძრავ ეთერთან. ეს არის უპირატესი სისტემა, რომელშიაც სინათლის სიჩქარე c -ს ტოლია და ამიტომაც სხვა ინერციულ სისტემაში მაქსველის განტოლებებს არც უნდა ჰქონდეს ინვარიანტული ფორმა.

იბადება კითხვა, რა ფიზიკური თვისებები აქვს ეთერს? ბუნებრივია, ეს კითხვა განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი აღმოჩნდა მას შემდეგ, რაც გაირკვა, რომ მექანიკის კანონები წინააღმდეგობაშია ელექტროდინამიკის კანონებთან. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია იმის გარკვევა, თუ რა მდგომარეობაში იმყოფება ეთერი, უძრავია თუ მოძრავი, ან ხომ არ მოძრაობს იგი მოძრავ სხეულთან ერთად და სხვ. ეთერის მოძრაობისა და უძრაობის საკითხს განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს სიჩქარეთა შეკრების კანონის დადგენის დროს, განსაკუთრებით კი მაშინ, როცა გვაინტერესებს სინათლისა და მოძრავი სხეულის ფარდობითი სიჩქარის განსაზღვრა. ჩვენ ვიცით, რომ ბგერის სიჩქარე ჰაერში ყველა მიმართულებით ერთნაირია, როცა ჰაერი მშვიდ მდგომარეობაში იმყოფება. მაგრამ საკმარისია ამოვარდეს ქარი, რომ ქარის მიმართულებით ბგერის სიჩქარე გაიზარდოს, ხოლო სანინააღმდეგო მიმართულებით შემცირდეს. ასეთსავე მოვლენას უნდა ჰქონდეს ადგილი ეთერის შემთხვევაშიც, ამტკიცებდნენ ეთერის ჰიპოთეზის მომხრეები.

ეთერი რომ არ არსებობდეს, მაშინ სიჩქარეთა შეკრების კანონს, მექანიკის მიხედვით, ექნებოდა ცნობილი სახე $\bar{u} = \bar{c} + \bar{v}$, სადაც \bar{v} სხეულის სიჩქარეა, \bar{c} კი სინათლის სიჩქარეს გამოხატავს. მაგრამ იმის გამო, რომ ეთერი თვითონ შეიძლება მოძრაობდეს, სიჩქარეთა შეკრების კანონი სხვა იქნება. კერძოდ, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\bar{u} = \bar{c} + \alpha \bar{v}, \quad (4.1)$$

სადაც α ე.წ. ეთერის ნატაცების კოეფიციენტი. ცხადია, იგი არის უგანზომილებო რიცხვი. α მაქსიმალურია და უდრის ერთს, როცა საქმე გვაქვს ვაკუუმთან და ტოლია ნულის, როცა ეთერი უძრავია. ეთერის ნანილობრივი მოძრაობის შემთხვევაში $0 < \alpha < 1$.

ფარდობითი სიჩქარის სიდიდე (4.1) ფორმულის თანახმად ტოლი იქნება გამოსახულების

$$u = \sqrt{c^2 + \alpha^2 v^2 + 2\alpha v c \cos \theta}, \quad (4.2)$$

სადაც θ არის კუთხე \vec{c} და \vec{v} ვექტორებს შორის. ნებისმიერი სხეულის სიჩქარე v გაცილებით ნაკლებია სინათლის სიჩქარესთან შედარებით $v \ll c$, ამიტომ ხელსაყრელია (4.2) გამოსახულების

გაშლა $\beta = \frac{v}{c}$ ხარისხების მიხედვით. ამისათვის იგი ასე გადავწეროთ:

$$u = c \left\{ 1 + \alpha^2 \frac{v^2}{c^2} + 2\alpha \frac{v}{c} \cos\theta \right\}^{1/2} \quad (4.3)$$

როცა $\cos\theta \neq 0$ მაშინ შეგვიძლია უგულებელვუყოთ β^2 და უფრო მაღალი რიგის მცირე წევრები. გვექნება

$$u = c \left\{ 1 + \alpha \frac{v}{c} \cos\theta + \dots \right\} \quad \frac{v}{c} \ll 1 \quad (4.4)$$

ან, რაც იგივეა,

$$u = c + \alpha v \cos\theta + \dots \quad \frac{v}{c} \ll 1. \quad (4.5)$$

როცა სინათლისა და სხეულის სიჩქარეებს ერთი და იგივე მიმართულება აქვთ ($\theta = 0$), მაშინ

$$u = c + \alpha v \quad \frac{v}{c} \ll 1 \quad (4.6)$$

ხოლო, როცა სინათლე და სხეული ერთმანეთის შესახვედრად მოძრაობენ ($\theta = \pi$), მაშინ ფარდობითი სიჩქარე ტოლი იქნება

$$u = c - \alpha v \quad \frac{v}{c} \ll 1. \quad (4.7)$$

ორი ჰიპოთეზა არსებობდა ეთერის მოძრაობასთან დაკავშირებით. ერთი ეკუთვნოდა გ. ლორენცს, მეორე -ჰ. პერცს. ლორენცის თანახმად, მსოფლიო ეთერი აბსოლუტურად უძრავია. მსგავსად მაქსველისა, იგი უშვებდა აბსოლუტური ათვლის სისტემის არსებობას. ეს უპირატესი სისტემა დაკავშირებული იყო უძრავ ეთერთან. ლორენცის თანახმად, სხეულების მოძრაობა სივრცეში უნდა იწვევდეს "ეთერულ ქარს", რომელიც შეიძლება შევამჩნიოთ ძალიან ფაქიზი ექსპერიმენტებით. პერცის თანახმად კი, ეთერი მთლიანად ნარიტაცება ($\alpha = 1$) მოძრავი სხეულის მიერ. პერცი მექანიკის ფარდობითობის პრინციპს ავრცელებდა ელექტროდინამიკაზედაც, რის გამო ამტკიცებდა, რომ ეთერის მოძ-

რაობის შემჩნევა ცდაზე შეუძლებელიაო. ჩვენ შემდგომ დავინახავთ, რომ არც ერთი ეს მოსაზრება სწორი არ აღმოჩნდა. *

მაშასადამე, ეთერის არსებობის საკითხი დაიყვანება (4.6) და (4.7) ფორმულების შემონმებაზე. იმ დროს სხეულების ამოდრავება დიდი სიჩქარეებით შეუძლებელი იყო; ამიტომ სიჩქარეთა შეკრების ფორმულის ექსპერიმენტული შემონმება, იმ შემთხვევაში, როცა ერთ-ერთ შესაკრებს სინათლის სიჩქარე წარმოადგენდა, ე.ი. $u = c \pm av$ ფორმულის შემონმება, ლაბორატორიულ პირობებში შეუძლებელი იყო. ამისათვის საჭირო იქნებოდა გამზომი ხელსაწყოების წარმოუდგენლად დიდი სიზუსტე. მაგრამ არსებობდა შესაძლებლობა აღნიშნული ფორმულების შემონმებისა ასტრონომიულ მოვლენებზე დაკვირვების შედეგად.

ამასთან დაკავშირებით ჩვენ განვიხილავთ რამდენიმე კლასიკურ ექსპერიმენტს, რომელთაგან ზოგიერთი ჩატარებული იყო სულ სხვა მიზნით და რომლებმაც დიდი როლი შეასრულეს რელატივისტური მექანიკის ჩამოყალიბების საქმეში. ეს ექსპერიმენტებია: ფიზოს ცდა, აბერაციის მოვლენა, მაიკელსონის ცდა და სხვა.

ამავე დროს უნდა აღვნიშნოთ, რომ თუ სიჩქარეთა შეკრების კანონს მართლა $u = c \pm av$ სახე აღმოაჩნდებოდა, ეს იმის მაჩვენებელი იქნებოდა, რომ გალილეის სიჩქარეთა შეკრების კანონი სწორი არ არის, რაც, თავის მხრით, ეჭვის ქვეშ დააყენებდა კლასიკური მექანიკის სამართლიანობის საკითხსაც.

* უკანასკნელ ხანს ცნობილი გახდა კიდევ ერთი მეტად მოსახერხებელი ათელის სისტემა, რომელიც უკავშირდება ე.წ. რელიქტიურ გამოსხივებას. თანამედროვე წარმოდგენების მიხედვით სამყარო შეიქმნა დაახლოებით 10-15 მილიარდი წლის წინ ზემკერც მდგომარეობაში მყოფი მატერიის აფეთქების შედეგად, ე.წ. "დიდი აფეთქება". ამ აფეთქებისას ნივთიერებასთან ერთად წარმოიშვა აგრეთვე ელექტრომაგნიტური გამოსხივება. გარკვეული დროის განმავლობაში ნივთიერება და გამოსხივება ურთიერთგარდაიქმნებოდნენ: მაგრამ შემდგომში ეს ურთიერთგარდაიქმნა შეწყდა და დარჩენილი (რელიქტიური) ელექტრომაგნიტური გამოსხივება განაგრძობდა განცალკევებულად არსებობას. სამყაროს გაფართოების შედეგად გამოსხივების ტემპერატურა მცირდებოდა და თანამედროვე პერიოდისათვის შეადგენს დაახლოებით 2,7 კელვინს. ამ გამოსხივების დაფიქსირება ცდების საფუძველზე მოახერხეს ამერიკელმა რადიო-ასტრონომებმა ვილსონმა და პენზიასმა 1964-65 წლებში, რისთვისაც მათ ნობელის პრემია მიენიჭათ. ცდებით დადგინდა აგრეთვე, რომ ამ გამოსხივების მიმართ უძრავ ათელის სისტემაში რელიქტიური გამოსხივება იზოტროპიულია, ანუ ყველა მიმართულებით ერთნაირი ინტენსივობისაა. კოორდინატთა ასეთი სისტემა თავისი მნიშვნელობით ეკვივალენტურია უძრავ ვარსკვლავთა სფეროსთან დაკავშირებული ათელის სისტემისა. ნებისმიერი სხვა სისტემის ფარდობითი მოძრაობა შეიძლება განისაზღვროს ამ სისტემაში რელიქტიური გამოსხივების გადახრით იზოტროპიულისაგან. ამრიგად, ყველა სისტემა, რომელშიც რელიქტიური გამოსხივება გამოიყურება იზოტროპიულად, იქნება ათელის ინერციული სისტემა. უნდა აღვნიშნოთ, რომ რელიქტიური გამოსხივების არსებობა არ ახდენს გავლენას ფარდობითობის თეორიის პრინციპებზე (რედ).

§ 5. ფიზოს ცდა

ფიზომ 1851 წელს ჩაატარა ცდა სინათლის სიჩქარის განსაზღვრის მიზნით მოძრავ გარემოში. კერძოდ, მან გამოთვალა სინათლის სიჩქარის მნიშვნელობა მოძრავ წყალში. სინათლის სიჩქარე მატერიალურ გარემოში ყოველთვის ნაკლებია, ვიდრე სინათლის c -სიჩქარე ვაკუუმში. თუ გარემოს გარდატეხის მაჩვენებელი არის n , მაშინ სინათლის სიჩქარე უძრავ გარემოში ტოლი იქნება

$$c_1 = \frac{c}{n}. \quad (5.1)$$

ფიზოს ცდის სქემა საკმარისად მარტივია. სინათლე, რომელიც გამოდის L -წყაროდან (ნახ.3), ნახევრად გამჭვირვალე მოვერცხლილ (ე.ი. სინათლის სხივის ერთ ნახევარს არეკლავს, ხოლო მეორეს გაატარებს) P_1 ფირფიტაზე დაცემის შემდეგ ორად იყოფა.¹ გასული სხივი გაივლის ჯერ b , ხოლო შემდეგ a მილს, რომლებშიაც წყალი დიდი \bar{v} სიჩქარით მიედინება სხივის მოძრაობის მიმართულებით. შემდეგ P_2 სარკის საშუალებით სხივი ხვდება A ინტერფერომეტრში. არეკლილი სხივი კი გაივლის ჯერ a მილს, შემდეგ b -ს წყლის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით და კვლავ ინტერფერომეტრში მოხვდება, ე.ი. გასული სხივი ორივე მილში მოძრაობს წყლის მოძრაობის გასწვრივ, არეკლილი კი -წყლის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ.

მექანიკის თანახმად, სინათლის სიჩქარე წყლის მოძრაობის მიმართულებით მეტი უნდა იყოს, ვიდრე მის საწინააღმდეგო მიმართულებით. მოძრავი წყალი, ასე ვთქვათ, წარიტაცებს სინათლეს. ცხადია, რომ სინათლის სიჩქარე მოძრავ წყალში, როცა იგი ვრცელდება წყლის მოძრაობის მიმართულებით, ტოლი იქნება

$$u = \frac{c}{n} + \alpha v, \quad (5.2)$$

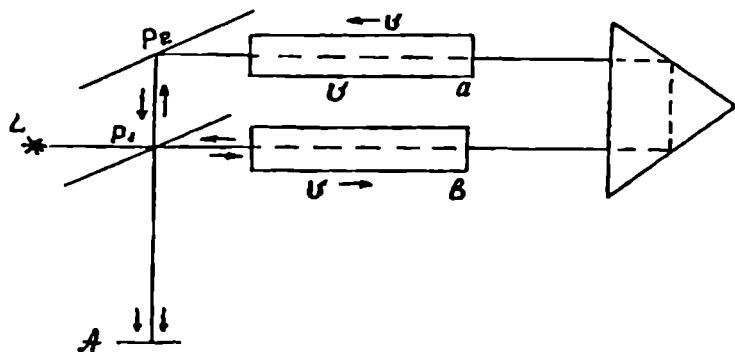
ხოლო, როცა მოძრაობა ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებებისაა, გვექნება

$$u = \frac{c}{n} - \alpha v, \quad (5.3)$$

სადაც α არის ნატაცების კოეფიციენტი. α რომ ერთის ტოლი

¹ ვერცხლის ფენის სისქე ისეა შერჩეული, რომ ფირფიტამ სინათლის ნახევარი არეკლოს, ხოლო მეორე ნახევარი გაატაროს.

ყოფილიყო, მაშინ სიჩქარეთა შეკრებისათვის გვექნებოდა კლასიკური მექანიკის ვექტორული შეკრების კანონი, მაგრამ, როგორც ფიზომ აჩვენა, ეს ასე არ არის.



ნახ.3

ცხადია, რომ პირველი სხივი, რომელიც ყოველთვის წყლის მოძრაობის მიმართულებით ვრცელდება ინტერფერომეტრში, მეორე სხივზე ადრე უნდა მოვიდეს. ამასთან, პირველი და მეორე სხივი ინტერფერომეტრში მისვლას შესაბამისად მოანდომებენ შემდეგ დროს:

$$t_{ba} = \frac{2l}{c/n + \alpha v}, \quad t_{ab} = \frac{2l}{c/n - \alpha v}, \quad (5.4)$$

სადაც l მილის სიგრძეა. დროთა სხვაობა $\Delta t = t_{ab} - t_{ba}$ ტოლი იქნება

$$\Delta t = \frac{2l}{c/n - \alpha v} - \frac{2l}{c/n + \alpha v} = \frac{4l\alpha v}{\frac{c^2}{n^2}(1 - \alpha^2 n^2 \frac{v^2}{c^2})}. \quad (5.5)$$

ფიზოს ცდაში წყლის სიჩქარე იყო $v=700 \frac{\text{სმ}}{\text{სექ}}$, ამიტომ $\frac{v}{c} \ll 1$. ამის გამო, თუ შევინარჩუნებთ მხოლოდ v/c რიგის წევრებს (5.5)-დან მივიღებთ

$$\Delta t = \frac{4\alpha l v}{c^2/n^2}. \quad (5.6)$$

მაშასადამე, სხივები ინტერფერომეტრში შევლენ სხვადასხვა ფაზით, ამიტომ ადგილი ექნება ინტერფერენციული ზოლების

წანაცვლებას, რომლის საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ სელათა სხვაობა, რაც ტოლფასია Δl -ს განსაზღვრისა. შედეგად (5.6) ფორმულიდან ვიპოვიტ α -ს. ფიზომ ამ გზით α -სათვის მიიღო მნიშვნელობა $\alpha = 0,46$. შემდგომში მაიკელსონმა და მორლიმ (1886წ.) თავისი გაუმჯობესებული ინტერფერომეტრით გაიმეორეს ფიზოს ცდა და ნატაცების კოეფიციენტისათვის მიიღეს მნიშვნელობა $\alpha = 0,434 \pm 0,020$.

ფიზოს ცდა ახსნილ იქნა ფრენელის თეორიაზე დაყრდნობით. ფრენელის თანახმად, ეთერის სიმკვრივე ნივთიერებაში ρ_1 მეტია, ვიდრე ρ სიმკვრივე ამ ნივთიერების გარეთ-სიცარიელეში. ამიტომ გარემოს გარდატეხის მაჩვენებელი ტოლი იქნება

$$n = \frac{c}{c_1} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho}}. \quad (5.7)$$

ამის გამო, მოძრავი სხეულის შიგნით ეთერი უფრო მკვრივი უნდა იყოს. თუ ეთერის სიჩქარეს მოძრავი სხეულის შიგნით აღვნიშნავთ v_1 -ით, ხოლო ნივთიერების სიჩქარეს ეთერის მიმართ v -თი, მაშინ "ეთერის როგორც გარემოს უწყვეტობის" ძალით $v_1 \rho_1 = v \rho$, საიდა-

ნაც $v_1 = v \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{v}{n^2}$, ე.ი. ეთერი, სამაგიეროდ, მოძრავი ნივთიერების

მიმართ გადაადგილდება შემცირებული v_1 სიჩქარით.

თუ სინათლე ვრცელდება წყლის გადაადგილების გასწვრივ, მაშინ მისი სიჩქარე წყალში ამ წყლის მიმართ, ე.ი. იმ დამკვირვებლის მიმართ, რომლისთვისაც წყალი უძრავია, იქნება $c_1 - v_1$, გარე დამკვირვებლისათვის წყალი მოძრაობს v სიჩქარით, ამიტომ მისთვის სინათლის სიჩქარე ტოლი იქნება

$$u = c_1 - v_1 \pm v = \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v. \quad (5.8)$$

" \pm " ნიშანი აიღება იმის მიხედვით, წყალსა და სინათლეს ერთი და იგივე, თუ სანინაალმდეგო მიმართულება აქვთ.

ამგვარად, (5.2) და (5.3) ფორმულებთან შედარება ნატაცების კოეფიციენტისათვის მოგვცემს მნიშვნელობას

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad (5.9)$$

რომელიც წყლისათვის უდრის $\alpha = 0,438$ -ს, ე. ი. კარგად ეთანხმება ფიზოს ცდაში მიღებულ მნიშვნელობას.

მართალია, ფიზომ თავისი ექსპერიმენტი ჩაატარა სულ სხვა მიზნით, მაგრამ მისი შედეგი შეგვიძლია გამოვიყენოთ "ეთერის" პიპოთეზის შესამოწმებლად. თუ ვიგულისხმებთ, რომ ფიზოს ცდა ტარდება ეთერის არსებობის პირობებში (ეთერით შევსებულია ყველაფერი), მაშინ სიჩქარეთა შეკრების კანონიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $\mu = \frac{c}{n} \pm 0,434\mu$, ე.ი. ადგილი ჰქონია ეთერის მხოლოდ ნაწილობრივ ნატაცებას მოძრავი წყლის მიერ. ეს დასკვნა კი ეწინააღმდეგება როგორც ლორენცის, ისე შერცის პიპოთეზას.

§6. აბერაციის მოვლენა

ფიზოს ცდიდან გამომდინარეობს, რომ ეთერი ნაწილობრივად წარიტაცება მოძრავი სხეულის (წყლის) მიერ. ახლა კი განვიხილავთ აბერაციის მოვლენას, რომლის თანახმად ეთერის ნატაცებას ადგილი არა აქვს.

აბერაციის მოვლენა აღმოჩენილი იყო 1725 წელს ჯეიმს ბრედლის მიერ. ეს მოვლენა შემდეგში მდგომარეობს: როცა ვაკვირდებით ე.წ. უძრავ ვარსკვლავებს, მაშინ იმის გამო, რომ დედამინა ბრუნავს მზის გარშემო ელიფსურ ორბიტაზე, გვეჩვენება, თითქოს (ერთი წლის განმავლობაში) უძრავი ვარსკვლავებიც მოძრაობენ ელიფსურ ორბიტებზე. როცა უძრავი ვარსკვლავი ზენიტში (ჩვენს თავზე) იმყოფება, მაშინ გვეჩვენება, რომ ვარსკვლავი შემოწმებს წრიულ ორბიტას, ხოლო ეკლიპტიკის სიბრტყესთან ახლოს ვარსკვლავების მოძრაობა სწორხაზოვანია. გაზომვისას აღმოჩნდა, რომ ელიფსური ორბიტის ცენტრი უძრავია, ხოლო დიდი ღერძი დაახლოებით 41 კუთხური სეკუნდის ტოლია.

ბრედლი აკვირდებოდა γ დრაკონის უძრავ ვარსკვლავს ზენიტში და აღმოჩნდა, რომ იგი ასრულებს მოჩვენებით მოძრაობას წრიულ ორბიტაზე. შევნიშნოთ, რომ აბერაციის მოვლენას არაფერი აქვს საერთო ვარსკვლავების საკუთარ მოძრაობასთან. აბერაცია გამოწვეულია იმით, რომ სინათლის სიჩქარე სასრულოა, ხოლო ვარსკვლავის მიერ გამოსხივებულ სინათლეს ვაკვირდებით დედამინაზე, რომელიც თვითონ მზის გარშემო ელიფსურ ორბიტაზე მოძრაობს ($v = 30$ კმ/სეკ სიჩქარით).

ამ მოვლენის ახსნის მიზნით დავუშვათ, რომ უძრავი ვარსკვლავი მდებარეობს ეკლიპტიკის პოლუსში. ასეთ ვარსკვლავზე დაკვირვების დროს ტელესკოპი დედამიწის მოძრაობის მიმართულების მიმართ უნდა დავხაროთ რაღაც φ კუთხეზე. წინააღმდეგ

შემთხვევაში სინათლის სხივი ვერ მიაღწევს ტელესკოპის ოკულარს (ნახ. 4). ექვსი თვის განმავლობაში θ კუთხის ცვლილება, უკიდურეს შემთხვევაში, θ -ს ტოლი იქნება.

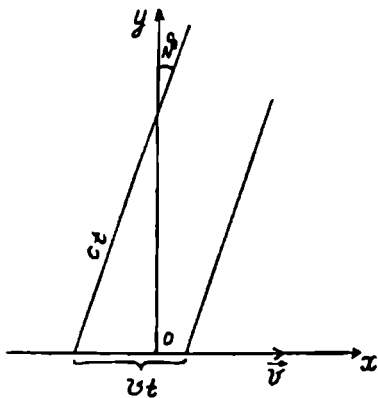
რადგან კლასიკური მექანიკის თანახმად სხივის მიერ განვლილი მანძილი ტოლია ct -ის, ხოლო დედამიწის მოძრაობის გამო, ტელესკოპისა v -სი, ამიტომ¹

$$\theta \approx \frac{v}{c}, \quad (6.1)$$

სადაც θ -ს უნოდებენ აბერაციის კუთხეს, რომელიც, ცხადია, ძალზე მცირეა. რადგან დედამიწის ორბიტალური სიჩქარე დაახლოებით 30 კმ/სექ-ის ტოლია, ამიტომ $\theta \approx \frac{v}{c} = 10^{-4} = 20''$; $2\theta = 41'$ მნიშვნელობა ემთხვევა ვარსკვლავის მოჩვენებით წრიულ ორბიტას, რომელიც ბრედლის გაზომვით $40,5''$ -ის ტოლია.

ეთერი რომ წარიტაცებოდეს დედამიწის ატმოსფეროს მიერ, მაშინ, ცხადია, ვარსკვლავების არავითარ აბერაციას ადგილი არ ექნებოდა. ამგვარად, აბერაციის მოვლენა გვეუბნება, რომ ატმოსფერო საერთოდ არ წარიტაცებს ეთერს.

ახლა ვარსკვლავების აბერაციას შევხედოთ სიჩქარეთა შეკრების თვალსაზრისით. ამ მიზნით შევისწავლოთ აბერაციის მოვლენა ეკლიპტიკის მიმართ სინათლის სხივის ნებისმიერი დახრილობის შემთხვევაში. განვიხილოთ უძრავი ინერციული oxy სისტემა და სისტემა, რომელიც უძრავი სისტემის x ღერძის გასწვრივ მოძრაობს \vec{v} სიჩქარით. კოორდინატთა სისტემის ღერძები ისე შევარჩიოთ, რომ სინათლის სიჩქარე მოცემულ მო-



ნახ. 4

მენტში იდოს $z = z' = 0$ სიბრტყეში. სინათლის სიჩქარე უძრავი ათვლის სისტემის მიმართ იყოს c , ხოლო მოძრავის მიმართ c' ცხადია, რომ ამ ორ სისტემაში მას ექნება შემდეგი მდგენლები:

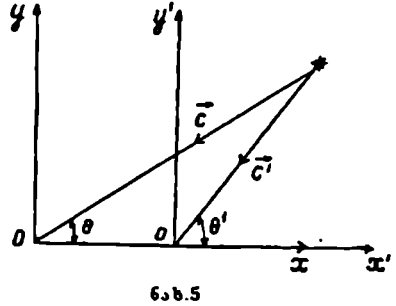
$$c_x = c \cos \theta, \quad c_y = c \sin \theta; \quad (6.2)$$

¹ რადგან დედამიწის საკუთარი ღერძის ირგვლივ მოძრაობის ხაზოვანი სიჩქარე 100-ჯერ ნაკლებია ორბიტალურ სიჩქარეზე, ამიტომ მას მხედველობაში არ ვიღებთ.

და

$$c'_x = c' \cos \theta', \quad c'_y = c' \sin \theta', \quad (6.3)$$

სადაც θ და θ' სხივის მიერ შედგენილი კუთხეებია x და x' ღერძებთან. აბერაციის მოვლენა იმაში მდგომარეობს, რომ $\theta \neq \theta'$; $\Delta\theta = \theta - \theta'$ წარმოადგენს აბერაციის კუთხეს. ამ ფორმულებიდან ცხადია,



$$\operatorname{tg} \theta = \frac{c_y}{c_x}, \quad \operatorname{tg} \theta' = \frac{c'_y}{c'_x} \quad (6.4)$$

ამავე დროს, $c'_y = c_y$, ხოლო $c'_x = c_x + \alpha v$, საიდანაც

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{c_y}{c_x + \alpha v} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{1 + \alpha \frac{v}{c} \frac{1}{\cos \theta}} \quad (6.5)$$

რადგან $\frac{v}{c} \ll 1$, ამიტომ

$$\operatorname{tg} \theta' \approx \operatorname{tg} \theta \left(1 - \alpha \frac{v}{c} \frac{1}{\cos \theta} + \dots \right). \quad (6.6)$$

რადგან $\Delta\theta = \theta - \theta'$, ამიტომ $\theta' = \theta - \Delta\theta$ და

$$\operatorname{tg} \theta' = \operatorname{tg}(\theta - \Delta\theta) = \operatorname{tg} \theta - \frac{\Delta\theta}{\cos^2 \theta}. \quad (6.7)$$

ამ გამოსახულების (6.6) ფორმულაში შეტანით აბერაციის კუთხისათვის, $\frac{v}{c}$ წევრების სიზუსტით, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\Delta\theta = \alpha \frac{v}{c} \sin \theta. \quad (6.8)$$

ცდაზე გაზომილი აბერაციის $\Delta\theta$ კუთხე კი ტოლი აღმოჩნდა

$$\Delta\theta = \frac{v}{c} \sin \theta, \quad (6.9)$$

საიდანაც ვასკენით, რომ ეთერის ნატაცების კოეფიციენტი $\alpha = 1$. მაშასადამე, აბერაციის მოვლენის თანახმად, მსოფლიო ეთერი უძრავია.

ამგვარად, ფიზოს ცდა გვეუბნება, რომ ეთერი ნანილობრივად წარიტაცება მოძრავი გარემოს მიერ, აბერაციის მოვლენა კი ამტკიცებს, რომ ეთერი უძრავია.

§7. მაიკელსონ-მოორლის ექსპერიმენტი

ჯერ კიდევ მაქსველმა მიუთითა, —რომ შეგვეძლოს დედამინის ორ წერტილს შორის სინათლის გავრცელების სიჩქარის გაზომვა ერთი მიმართულებით და შემდეგ სიჩქარის ამ მნიშვნელობის შედარებით შებრუნებული მიმართულებით მოძრავი სინათლის გაზომვით სიჩქარესთან, გავიგებდით ეთერის მოძრაობის სიჩქარეს ამ ორ წერტილს შორის.

მაიკელსონის ცდის იდეაც სწორედ ამაში მდგომარეობს.¹ დავუშვათ, რომ ეთერი მართლაც მატერიალურია, რომელიც გარს აკრავს დედამინას და აღწევს ყველა ნივთიერებაში. თუ ეთერი უძრავად აკრავს დედამინას, მაშინ უნდა ვგრძნობდეთ "ეთერულ ქარს", ისევე როგორც მოძრავი გემის გემბანზე მდგომი მგზავრი შეიგრძნობს ნიავს, როცა ჰაერი სრულიად მშვიდ მდგომარეობაში იმყოფება.

მაიკელსონის ცდის იდეა ემთხვევა ფიზოს ექსპერიმენტის იდეას. ორივე ამ ცდას საფუძვლად უძევს სინათლის ინტერფერენციის მოვლენა. სხვადასხვა მიმართულებით ერთი და იგივე მანძილზე გაშვებული სინათლის სხივები ერთ რომელიმე წერტილში უნდა დავაბრუნოთ და შევკრიბოთ. თუ რომელიმე მიმართულებით, ეთერის მოძრაობის გამო, ადგილი ექნება სინათლის სხივის შენელებას ან აჩქარებას, ცხადია, მაშინ ეს გარემოება ნათლად უნდა აისახოს ინტერფერომეტრში, რამდენადაც ამ შემთხვევაში მოხდება ფაზათა ცვლილება და ინტერფერენციული ზოლების წანაცვლება.

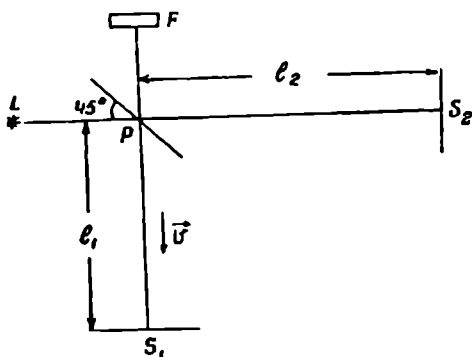
მაიკელსონის ცდის იდეა საკმარისად მარტივია, მაგრამ განსახორციელებლად მეტად რთული. საქმე ის არის, რომ სინათლის სიჩქარე დაახლოებით $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}}$ -ია, მაშინ, როცა დედამინის ორბიტალური სიჩქარე მხოლოდ $v = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}}$ -ია ასე რომ, $\frac{v}{c} = 10^{-4}$ და სინათლის სიჩქარის უზარმაზარი მნიშვნელობის გამო

¹ A. A. Michelson, E. W. Morley. American Journal of Science, 34,333,1887.

დედამინის სიჩქარესთან შედარებით, სინათლის სხივის შენელება, ყველაზე კარგ შემთხვევაშიც კი, იქნება მეტად უმნიშვნელო. ამის გამო, ხელსაწყოს უნდა ჰქონდეს დიდი სიზუსტე (რიგით $\frac{v}{c} = 10^{-4}$).

პირველი ექსპერიმენტი განახორციელა საკუთრივ ალბერტ მაიკელსონმა 1881 წელს, ბერლინის უნივერსიტეტის ჰერმან ჰელმ-ჰოლცის ლაბორატორიაში. შემდეგ ეს ცდა უფრო დიდი სიზუსტით ჩაატარა მაიკელსონმა და ედუარდ მორლიმ კლივლენდში (ამერიკა), 1887 წელს. განსაკუთრებული მნიშვნელობის გამო ანალოგიური ცდები არ შეწყვეტილა შემდეგაც დიდი ხნის განმავლობაში. ამ ექსპერიმენტის შესახებ აინშტაინმა აღნიშნა, რომ "მაიკელსონი იყო მეცნიერული ექსპერიმენტის ერთ-ერთი უდიდესი მხატვარი მსოფლიოში".

მაიკელსონის ექსპერიმენტის სქემა მოცემულია ნახ.6-ზე. მონოქრომატული სინათლე L -წყაროდან (სინათლის წყაროდ მაიკელსონი იყენებდა ნატრიუმის სპექტრულ ხაზს $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ ტალღის სიგრძით) ეცემა მოვერცხლილ ნახევრად გამჭვირვალე P ფირფიტას, რომელიც ამ სინათლეს ორად ყოფს-დაახლოებით ერთ ნახევარს არეკლავს, მეორეს კი ატარებს. ერთი-გასული სხივი ეცემა S_2 წერტილში მოთავსებულ სარკეს, აირეკლება და ბრუნდება F დამკვირვებელთან. მეორე - არეკლილი სხივი ვრცელდება პირველის პერპენდიკულარული მიმართულებით და, S_1 წერტილში მოთავსებულ სარკეში არეკლის შემდეგ, ისიც F დამკვირვებელთან ბრუნდება. ცდაში ორი განსხვავებული მიმართულება სპეციალურად არის აღებული ეთერის თვისებების შესამოწმებლად სხვადასხვა მიმართულებით. მაიკელსონ-მორლის ცდაში F წერტილში აკვირდებოდნენ ამ ორი სხივის ინტერფერენციას. PS_1 და PS_2 მანძილებს ინტერფერომეტრის მხრებს უწოდებენ.



ნახ.6

ვთქვათ, მაიკელსონის ინტერფერომეტრი დედამინასთან ერთად მოძრაობს v სიჩქარით PS_1 მიმართულებით. მაშინ, მექანიკის

თანახმად, დრო, რომელსაც სხივი ანდომებს $PS_1=l_1$ გზის გავლას, ტოლი იქნება $\frac{l_1}{c+v}$, ხოლო იგივე მანძილს შებრუნებული მიმართულებით გაივლის $\frac{l_1}{c-v}$ დროში. სრული დრო, რომელიც საჭიროა PS_1P მანძილის გასავლელად, ტოლი იქნება გამოსახულების

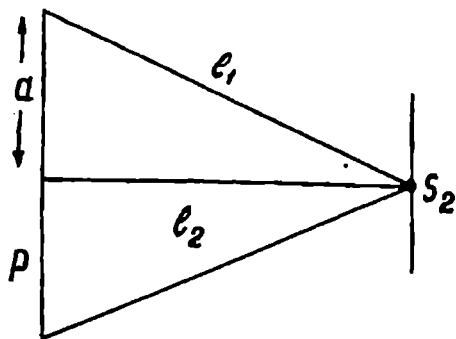
$$t_3 = l_1 \left(\frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v} \right) = \frac{2l_1}{c(1-\beta^2)}, \quad (7.1)$$

სადაც

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad (7.2)$$

რომელსაც ხშირად დაყვანილ სიჩქარესაც უწოდებენ.

ახლა განვიხილოთ მეორე სხივი. ეს სხივი ვრცელდება ინტერფერომეტრის მოძრაობის პერპენდიკულარულად. სხივის მიერ



ნახ.7

PS_2P მანძილის გავლაზე დახარჯული დროის გამოსათვლელად უნდა გავითვალისწინოთ, რომ სანამ სხივი P -დან S_2 სარკესთან მივიდოდეს, P სარკე გადაინაცვლებს პერპენდიკულარული მიმართულებით რაღაც a მანძილზე (ნახ.7). განვსაზღვროთ ეს გადაინაცვლება. ნახ. 7-დან ცხადია, რომ სხივის მიერ განვლილი გზა ტოლია

$$l = \sqrt{l_2^2 + a^2} \quad (7.3)$$

მეორე მხრით,

$$\frac{v}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + l_2^2}}, \quad (7.4)$$

საიდანაც

$$a = \frac{\beta l_2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (7.5)$$

მაშასადამე, დრო, რომელსაც სხივი ანდომებს PS_2P მანძილის გავლას, ტოლი იქნება

$$t_{s_2} = \frac{2l}{c} = \frac{2l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (7.6)$$

როგორც ვხედავთ, სხივების გავრცელების დრო, მაშინაც კი, როცა $l_1=l_2$ სხვადასხვაა და დამოკიდებულია ხელსაწყოს მხრების ორიენტაციაზე დედამიწის მოძრაობის მიმართ.

მაიკელსონს რომ შესძლებოდა სხივების მიერ გავლილ მანძილზე დახარჯული დროთა სხვაობის გაზომვა, იგი ცალსახად დაადგენდა "ეთერის ქარის" არსებობა-არარსებობის საკითხს, მაგრამ, სამწუხაროდ, არა თუ იმ დროს, არამედ თანამედროვე ტექნიკისათვისაც კი დროის ასეთი მცირე სხვაობის გაზომვა შეუძლებელია. ამიტომაც აირჩია მაიკელსონმა (ისევე, როგორც ფიზომ) ამ სხივების ინტერფერენციის მეთოდი. კერძოდ, იგი ამ ორ სხივს, როცა ისინი მრავალჯერ გაივლიდნენ აღნიშნულ ურთიერთმართობულ მიმართულებებს, ერთმანეთს ახვედრებდა ინტერფერომეტრში და აკვირდებოდა მათი შეკრების შედეგს.

გამოვთვალოთ სვლათა სხვაობები ამ სხივებისათვის. სვლათა სხვაობა ტოლი იქნება $\delta = c(t_{s_1} - t_{s_2})$, რომელიც (7.1) და (7.6) ფორმულების გათვალისწინებით მოგვცემს

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - l_2 \right) \quad (7.7)$$

მოვაბრუნოთ ახლა ინტერფერომეტრი 90° -ზე. მაშინ l_1 და l_2 ადგილებს შეიცვლიან და შესაბამისი დროებისათვის მივიღებთ

$$t'_{s_1} = \frac{2l_1}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t'_{s_2} = \frac{2l_2}{c(1-\beta^2)}, \quad (7.8)$$

ხოლო ახალი $\delta' = c(t'_{s_1} - t'_{s_2})$ სვლათა სხვაობისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\delta' = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(l_1 - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right). \quad (7.9)$$

ინტერფერომეტრის 90° -ზე მობრუნებისას უნდა მოხდეს ინტერ-

ფერენციული სურათის ნანაცვლება n ზოლით, ამასთან, როგორც ცნობილია, n განისაზღვრება ფორმულით $n = \frac{\delta' - \delta}{\lambda}$, სადაც λ არის წყაროს სინათლის ტალღის სიგრძე. (7.7) და (7.9) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$n = \frac{2(l_1 + l_2)}{\lambda\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (7.10)$$

იმის გამო, რომ β ძალიან მცირე სიდიდეა, $(1-\beta^2)^{-1/2}$ ფესვი შეგვიძლია გავშალოთ მწკრივად β -ს ხარისხების მიხედვით

$$(1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \dots + \quad (7.11)$$

შედეგად, β^2 წევრების სიზუსტით, მივიღებთ

$$n = -\frac{l_1 + l_2}{\lambda} \beta^2 \quad \beta \ll 1 \quad (7.12)$$

მაგრამ ინტერფერენციულ სურათში არავითარი შესამჩნევი ნანაცვლება არ აღმოჩნდა. მაიკელსონის ექსპერიმენტში სიჩქარე იზომებოდა 10 კმ/სეკ სიზუსტით, ამიტომ დედამინის სიჩქარე ეთერის მიმართ, თუ ასეთი არსებობს, ნაკლები უნდა ყოფილიყო 10 კმ/სეკ-ზე, იმ დროს, როცა დედამინის ორბიტალური სიჩქარე დაახლოებით 30 კმ/სეკ-ის ტოლია. მაიკელსონმა და მორლიმ ეს ცდა გაიმეორეს ნელინადის სხვადასხვა დროს, როცა დედამინის მოძრაობის სიჩქარეს სხვადასხვა მიმართულება აქვს. შედეგი კვლავ უარყოფითი აღმოჩნდა.

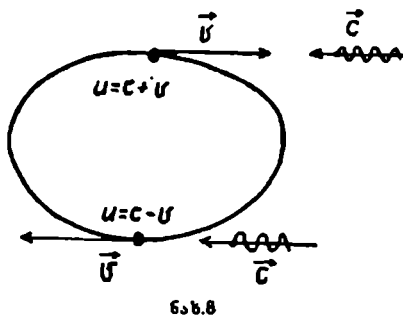
მაშასადამე, მაიკელსონ-მორლის ცდაში დიდი სიზუსტით დამტკიცდა, რომ "ეთერული ქარი" არავითარ გავლენას არ ახდენს სინათლის გავრცელების სიჩქარეზე. სინათლის სიჩქარე არ იცვლება იმის მიხედვით, მოძრაობს იგი "ქარის" მიმართულებით თუ მის პერპენდიკულარულად. მაშასადამე, მაიკელსონ-მორლის ცდაში მიღებული იყო უარყოფითი შედეგი. ნობელის პრემიის ლაურეატის ინგლისელი მეცნიერის ჯონ ბერნალის გამოთქმით ეს იყო "ყველაზე უფრო დიადი ექსპერიმენტი ყველა სხვა უარყოფით რეზულტატებს შორის ფიზიკის ისტორიაში".

ამგვარად, მაიკელსონმა დაამტკიცა, რომ უძრავი ეთერი არ არსებობს.

დანყებული 1881 წლიდან 1932 წლამდე, კიდევ მრავალმა ავტორმა და ავტორთა კოლექტივმა (მათ შორის თვით მაიკელსონმაც) გაიმეორა

მაიკელსონის იგივე ცდა უფრო დიდი სიზუსტით და გაზომვის საიმედოობით; ყველა ამ ცდის შედეგიც ასევე უარყოფითი აღმოჩნდა.

უფრო ნათელი რომ იყოს მაიკელსონის მიერ მიღებული შედეგები, მოვიტანოთ ასეთი ილუსტრაცია. ვთქვათ, ვზომავთ სინათლის ფარდობით სიჩქარეს დედამიწაზე იმ შემთხვევაში, როცა სინათლის სხივისა და დედამიწის ორბიტალური მოძრაობის სიჩქარის მიმართულება ერთმანეთს ემთხვევა. იგივე ფარდობითი სიჩქარე გაზომეთ ზუსტად ექვსი თვის შემდეგ, როცა ეს სიჩქარეები ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ იქნება მიმართული (ნახ.8).



კლასიკური მექანიკის თანახმად, ფარდობითი სიჩქარე პირველ შემთხვევაში იქნება $u=c+u$, მეორეში კი $u=c-u$.

მაიკელსონის ცდა გვეუბნება, რომ ორივე შემთხვევაში ფარდობითი სიჩქარის სიდიდე ტოლი იქნება c -სი. ცხადია, ეს დასკვნა იმ დროისათვის მეტად საოცარი იყო, რამდენადაც იგი ეწინააღმდეგებოდა სიჩქარეთა შეკრების კლასიკურ კანონს.

შევნიშნოთ, რომ მაიკელსონის ცდის ჩატარებიდან თითქმის ორმოცდაათი წლის შემდეგ კენედიმ და თორნდაიკმა 1932 წელს პასადენში ჩაატარეს მეტად საინტერესო ექსპერიმენტი სინათლის სიჩქარის განსაზღვრისა.¹ ამ ექსპერიმენტში კენედიმ და თორნდაიკმა მიზნად დაისახეს შეემონებინათ სინათლის სიჩქარის ცვლილება დედამიწის მოძრაობის მთელი ჩაკეტილი ტრაექტორიის (ელიფსის) გასწვრივ. მათი რეზულტატიც უარყოფითი აღმოჩნდა - არავითარი შესამჩნევი ცვლილება სინათლის სიჩქარისა არ ხდება, სინათლის სიჩქარე არის ინვარიანტული. კენედისა და თორნდაიკის ექსპერიმენტის შედეგად საბოლოოდ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ სინათლის სიჩქარეს ყველა ათვის ინერციულ სისტემაში აქვს ერთი და იგივე რიცხვითი მნიშვნელობა.

¹ R.J. Kennedy, E.M. Thorndike, Phys.Rev., 42,400,1932.

მაიკელსონ-მორლის ექსპერიმენტის შედეგების გამოქვეყნების შემდეგ დაიწყო მცდელობა ამ უარყოფითი რეზულტატის ასახსნელად. ნამოყენებულ იქნა მრავალი ჰიპოთეზა და შეიქმნა თეორიები, რომლებსაც თითქოს შეეძლო მაიკელსონ-მორლის უარყოფითი შედეგის ახსნა. ერთ-ერთი ასეთი ჰიპოთეზა ნამოყენებული იყო გერმანელი მეცნიერის რიტცის მიერ. რიტცის თანახმად, სინათლის სიჩქარის სიდიდე c -ს ტოლია არა უძრავი ეთერის მიმართ, არამედ სინათლის გამომსხივებელი წყაროს მიმართ, ისევე როგორც მატარებლიდან გასროლილი ტყვიის სიჩქარე, ბუნებრივია, გამოვთვალეთ მატარებელთან დაკავშირებული ათვლის სისტემის მიმართ და არა სხვა სისტემის მიმართ. ამ ჰიპოთეზაზე დაყრდნობით, მართლაც, შეგვიძლია ავხსნათ მაიკელსონ-მორლის შედეგი.

სინათლის სიჩქარე \bar{u} მაიკელსონის დანადგარის მიმართ ტოლია

$$\bar{u} = \bar{c} - \bar{v}, \quad (8.1)$$

სადაც, როგორც სინათლის c სიჩქარე, ისე დანადგარის \bar{v} სიჩქარე, აღებულია ეთერის მიმართ. რიტცის მიხედვით სინათლის \bar{c} სიჩქარეს ეთერში ვექტორულად უნდა დაემატოს სინათლის წყაროს სიჩქარე, რომელიც მაიკელსონის ექსპერიმენტში მთელ დანადგართან ერთად მოძრაობდა \bar{v} სიჩქარით. ამგვარად

$$\bar{u} = (\bar{c} + \bar{v}) - \bar{v} = \bar{c} \quad (8.2)$$

მამასადამე, რიტცის ჰიპოთეზის თანახმად, სინათლის სხივები S_1 და S_2 სარკეზე ერთსა და იმავე დროს მივა, ამიტომ დანადგარის მობრუნებით ინტერფერენციულ სურათში არავითარი ცვლილება არ მოხდება. რიტცის ჰიპოთეზის თანახმად, ასევე ადვილად აიხსნება აბერაციის მოვლენა, მაგრამ იგი ეწინააღმდეგება ორმაგი ვარსკვლავების თეორიას.

ორმაგი ვარსკვლავი ენოდება ორი ვარსკვლავის სისტემას, რომლებიც მსოფლიო მიზიდულობის გამო ერთმანეთის მიმართ ელიფსურ ორბიტებზე მოძრაობენ. აღსანიშნავია, რომ გალაქტიკაში ორმაგი ვარსკვლავები საკმარისად ხშირად გვხვდებიან, ამიტომ მათი ყოფაქცევა კარგად არის შესწავლილი. ორმაგი ვარსკვლავის ორბიტაზე ბრუნვის სიჩქარე ხშირად ძალიან დიდია და აჭარბებს დედამიწის ორბიტალური მოძრაობის $3 \cdot 10^6 \frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}}$ სიჩქარეს.

სიმარტივის მიზნით, განვიხილოთ ორი ტოლი მასის მქონე a და b ორმაგი ვარსკვლავის სისტემა. ცხადია, რომ ეს ვარსკვლავები იმოძრაებენ წრიულ ორბიტაზე, რომლის ცენტრი დამთხვევა ინერციის ცენტრს. ვთქვათ, ასეთ ორმაგ ვარსკვლავს ვაკვირდებით S წერტილში, რომელიც ორმაგი ვარსკვლავის სიმძიმის O ცენტრიდან დაშორებულია ასტრონომიულად დიდი l მანძილით (ნახ.9).

განვიხილოთ ისეთი შემთხვევა, როცა l მანძილი გაცილებით მეტია წრის $d=2R$ დიამეტრზე: $l \gg d$. ასეთ შემთხვევაში, S წერტილში დიამეტრი გამოჩნდება ძალიან მცირე α კუთხით. განვიხილოთ დროის მომენტი, როცა ab დიამეტრის მდებარეობა ემთხვევა OS მიმართულებას (ნახ. 9-ზე I მდებარეობა).

იმის გამო, რომ $\beta = \frac{v}{c}$ სიდიდე მცირეა, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ სინათლე ორივე ვარსკვლავიდან OS ხაზის გასწვრივ გავრცელდება ერთი და იმავე სიჩქარით. დაკვირვების S წერტილიდან უახლოეს მდებარეობაში მყოფი a ვარსკვლავის მიერ გამოსხივებულ სინათლეს დამკვირვებლამდე მისასვლელად დასჭირდება შემდეგი დრო:

$$t_{1a} = \frac{l - R}{c}, \quad (8.3)$$

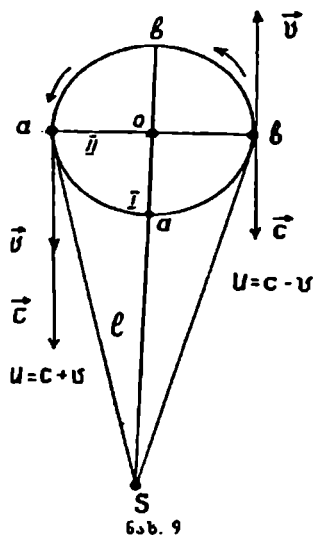
ხოლო სინათლეს, რომელიც გამოსხივდება დაშორებული b ვარსკვლავის მიერ S -წერტილში მისასვლელად, დასჭირდება

$$t_{1b} = \frac{l + R}{c} \quad (8.4)$$

დრო. თუ ჩავთვლით, რომ გამომსხივებელი ვარსკვლავის (წყაროს) მიმართ სინათლის სიჩქარე c -ს ტოლია, მაშინ სინათლეს, რომელიც a და b ვარსკვლავებიდან მოდის S წერტილში, ექნება სხვადასხვა სიჩქარე. თუ ორმაგი a და b ვარსკვლავის სიჩქარე \vec{v} -ს ტოლია, მაშინ ფარდობითი სიჩქარის სიდიდე ტოლი იქნება

$$u = |\vec{c} \pm \vec{v}| = (c^2 + v^2 \pm 2vc \cos \theta)^{1/2} \quad (8.5)$$

ვარსკვლავები დიდი სიჩქარით მოძრაობენ ორბიტაზე, მაგრამ ეს



სიჩქარე მაინც ძალიან მცირეა სინათლის სიჩქარესთან შედარებით, გარდა ამისა, რამდენადაც β ძალიან მცირეა, (8.5) -დან შეგვიძლია დავეწყო

$$u = c \pm v. \quad (\beta \ll 1) \quad (8.6)$$

ზედა ნიშანი აიღება იმ შემთხვევაში, როცა ვარსკვლავი მოძრაობს სინათლის სხივის მიმართულებით, ქვედა კი - საპირისპირო მიმართულებით, როცა a და b ვარსკვლავები მეორე მდებარეობაში იმყოფებიან, მაშინ b ვარსკვლავი დამკვირვებელს შორდება, a კი — უახლოვდება, ამიტომ a ვარსკვლავის მიერ გამოსხივებულ სინათლეს ექნება $c+v$ მნიშვნელობა, b -სას კი $c-v$. ეს სხივები S ნერტილში სათანადოდ მოვლენ შემდეგ დროში:

$$t_{2b} = \frac{l}{c-v}, \quad t_{2a} = \frac{l}{c+v}. \quad (8.7)$$

შევაფასოთ ამ დროთა სხვაობის სიდიდის რიგი. გვექნება

$$t_{2b} - t_{2a} = \frac{2lv}{c^2 - v^2} \approx \frac{2lv}{c^2}. \quad (8.8)$$

ვთქვათ, ორმაგი ვარსკვლავის ორბიტალური სიჩქარეა $v = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}}$ და ჩვენგან იგი დაშორებულია 100 სინათლის წლით. რადგან სინათლის წელი ტოლია $9.463 \cdot 10^{17}$ სმ-ის, ამიტომ (8.8) სხვაობა დაახლოებით ტოლი იქნება

$$t_{2b} - t_{2a} = 642,2 \cdot 10^3 \text{ სეკ} \quad (8.9)$$

დღე-ღამეში არის 86 400 სეკუნდი, ამიტომ (8.9) სხვაობა დაახლოებით ერთი კვირის ტოლია.

ახლა ვიპოვოთ a ვარსკვლავის ორი მდებარეობის შესაბამისი დროთა სხვაობა $t_{21} = t_{2a} - t_{1a}$. გვექნება

$$t_{21} = \frac{l}{c+v} - \frac{l-R}{c} = \frac{R}{c} - \frac{vl}{c^2(1+\beta)} \quad (8.10)$$

ან, რამდენადაც $\beta \ll 1$, იმდენად შეგვიძლია დავკმაყოფილდეთ ფორმულით

$$t_{21} = \frac{R}{c} - \beta \frac{l}{c} \quad (8.11)$$

იმის გამო, რომ l შეგვიძლია ძალიან დიდი ავიღოთ, შეიძლება მივაღწიოთ ისეთ მდგომარეობას, რომ t_{21} უარყოფითი გახდეს, ე.ი.

$I_2 < I_1$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მეორე მდებარეობაში მყოფი a ვარსკვლავის მიერ გამოსხივებული სინათლე, ე.ი. უფრო შორს მყოფი ვარსკვლავიდან გამოსხივებული სინათლე უფრო ადრე მოვა დამკვირვებელთან, ვიდრე გამოსხივებული სინათლე პირველი მდებარეობიდან. ამიტომ იარსებებს დროის ისეთი პერიოდიც, როცა დამკვირვებელი a ვარსკვლავის მიერ გამოსხივებულ სინათლეს საერთოდ ვერ დაინახავს, (ცხადია, ეს მსჯელობა ეხება b ვარსკვლავსაც). ან ორბიტაზე შეიძლება მოიძებნოს სხვადასხვა ნერტილები, რომლებიდანაც a ვარსკვლავის (იგივე ეხება b -საც) მიერ გამოსხივებული სინათლე დედამიწაზე მოვა ერთდროულად. ასეთი ვარსკვლავის ფოტოგრაფირებით ჩვენ მივიღებდით არა მანათობელ ნერტილს, არამედ მანათობელ რკალს. ეს გარემოება განაპირობებდა ორმაგი ვარსკვლავის უცნაურ თვისებებს. კერძოდ, ადგილი ექნებოდა ორმაგი ვარსკვლავის სიკაშკაშის ცვლილებას. დე სიტერმა დაამტკიცა, რომ ასეთ ეფექტებს სინამდვილეში ადგილი არა აქვს, თუმცა მათი შემჩნევა ცდაზე არ იქნება ძნელი.

რიტცის ჰიპოთეზას სხვა პარადოქსული შედეგიც მოჰყვებოდა. სინათლის სიჩქარე რომ დამოკიდებული იყოს ნყაროს სიჩქარეზე და სინათლე, მიღებული ვარსკვლავიდან, როცა ის გვიახლოვდება, უფრო ნელა მოდიოდეს, ვიდრე იმ შემთხვევაში, როცა იგი გვეშორდება, ორმაგი ვარსკვლავის მოძრაობისათვის მივიღებდით არა კეპლერის მოძრაობას, არამედ რაღაც უცნაურს.

ეს პარადოქსული შედეგები გვიჩვენებს, რომ რიტცის ჰიპოთეზა, რომლის თანახმად სინათლეს c სიჩქარე აქვს სინათლის ნყაროს მიმართ, უნდა უკუვაგდოთ.

გარდა ამისა, მაიკელსონ-მორლის ცდა ტომაშეკმა გაიმეორა არა დედამიწაზე მოთავსებული სინათლის ნყაროსათვის, არამედ უძრავი ვარსკვლავიდან გამოსხივებული სინათლისათვის. ამ შემთხვევაში რიტცის ჰიპოთეზის მიხედვით მაიკელსონ-მორლის ცდას დადებითი ეფექტი უნდა მოეცა. ტომაშეკის ცდამ კი ისეთივე უარყოფითი შედეგი მოგვცა, რაც გვექონდა დედამიწაზე მოთავსებული სინათლის ნყაროს შემთხვევაში.

ამ თავის ბოლოში მოვიტანთ კიდევ ერთ მაგალითს ელემენტარულ ნაწილაკთა ფიზიკიდან, რომელიც ასევე ამტკიცებს რიტცის ჰიპოთეზის უსაფუძვლობას.

ლორენცმა და მისგან დამოუკიდებლად ფიტცჯერალდმა კიდევ ერთხელ სცადეს მაიკელსონ-მორლის უარყოფითი რეზულტატის გადარჩენა. კერძოდ, მათ შემოიღეს ე.წ. შემოკლების ჰიპოთეზა, რომლის საფუძველზე შესაძლებელია უპირატესი ათვლის სისტემის არსებობის დაშვება და მაიკელსონ-მორლის უარყოფითი შედეგის ახსნა.

ლორენც-ფიტცჯერალდის ჰიპოთეზის თანახმად, ყოველი x სიჩქარით მოძრავი სხეული უძრავი ეთერის მიმართ განიცდის

შემოკლებას მოძრაობის მიმართულების გასწვრივ $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ სიდი-

დით. შემდგომში ამ მოვლენას უწოდეს "ლორენცის შემოკლება":

ამ ჰიპოთეზის ძალით მაიკელსონის ხელსაწყოში დედამიწის მოძრაობის გასწვრივ მიმართული მხარი (ნახ.6-ზე PS_1 მხარი)

ტოლია $L = l_1 \sqrt{1 - \beta^2}$, სადაც l_1^0 არის მხრის სიგრძე $v=0$ შემთხვევაში, ე.ი. როცა ხელსაწყო ეთერის მიმართ უძრავია. მოძრაობის მართობული მიმართულებით კი ასეთ შემოკლებას ადგილი არა აქვს, ამიტომ $l_2 = l_2^0$ "ლორენცის შემოკლების" გათვალისწინებით მაიკელსონ-მორლის ცდაში (7.7) ფორმულის ნაცვლად გვექნება შემდეგი სხვაობა:

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} (l_1^0 - l_2^0). \quad (9.1)$$

მაშასადამე, ხ. ლსაწყოს მობრუნებით 90° -ზე არავითარი წანაცვლება ინტერფერენციულ სურათში არ გვექნება. ინტერფერენციული ზოლების წანაცვლება მაშინაც არ გვექნება, თუ სიჩქარე შეიცვლება, ოღონდ l_1^0 ტოლი იქნება l_2^0 -ის, ისე როგორც ეს გვექნება მაიკელსონის პირველ ცდებში.

მაგრამ, როცა მხრები ტოლი არ არის $l_1^0 \neq l_2^0$, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ ლორენცის შემოკლების შემთხვევაშიაც კი სიჩქარის ცვლილება ეთერის მიმართ მოგვეცემს ინტერფერენციული ზოლების წანაცვლებას სიდიდით

$$n = \frac{l_1^0 - l_2^0}{\lambda} \left(\frac{v'^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (9.2)$$

ფრჩხილებში მოთავსებული მამრავლი მართლაც უზრუნველყოფს ინტერფერენციული სურათის ცვლილებას.

რამდენადაც ცდამ, რომელიც ჩაატარეს სხვადასხვა სიგრძის მხრების შემთხვევაში, აგრეთვე უარყოფითი შედეგი მოგვცა, ე.ი. ინტერფერენციული ზოლების ნანაცვლება არ დაიმზირა, ამიტომ ლორენც-ფიტცჯერალდის ჰიპოთეზაც უარყოფილ იქნა, თუმცა, "ლორენცის შემოკლებას" მომავალში კიდევ არაერთხელ შევხვდებით, რამდენადაც იგი რეალურად არსებობს.

§ 10. სინათლის სიჩქარე, როგორც ზღვრული სიჩქარე.

ახალი მექანიკის შექმნის აუცილებლობა

დღეს უკვე ცნობილია მრავალი უტყუარი ფაქტი, რომელიც ცალსახად გვიჩვენებს, რომ სინათლის სიჩქარე ვაკუუმში არის სიჩქარის ზღვრული მნიშვნელობა. მასზე მეტი მნიშვნელობა არ შეიძლება ჰქონდეს არც ველის და არც ნაწილაკების სიჩქარეს. ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მარტივი ცდა, რომელიც ჩაატარა ბერტოცმა.¹

ბერტოცის ექსპერიმენტი 1964 წელს ჩატარდა. ამ დროისათვის აღარავის ეპარებოდა ეჭვი ფარდობითობის თეორიის სისწორეში, ამიტომ ამ ექსპერიმენტს მხოლოდ მეთოდოლოგიური მნიშვნელობა აქვს. თუ ყურადღებას არ მივაქცევთ ქრონოლოგიურ თანმიმდევრობას, მაშინ ბერტოცის ცდა შეგვიძლია გამოვიყენოთ, როგორც შესანიშნავი ილუსტრაცია ახალი მექანიკის ჩამოყალიბების აუცილებლობისა.

ბერტოცის ექსპერიმენტში გამოყენებულია ელექტრონების არქარების პრინციპი ელექტროსტატიკური ველით. ცდის პრინციპული სქემა ასეთია: წარმოვიდგინოთ / სიგრძის ვაკუუმური მიწის მილი, რომლის ერთი ბოლოდან გამოიტყორცნება ელექტრონები. თუ მილს მოვდებთ ძლიერ ელექტროსტატიკურ ველს დაძაბულობით ϵ , მაშინ ელექტრონი / მანძილის გავლისას მიიღებს არქარებას. რადგან ელექტრონები სანყის მომენტში უძრავი იყვნენ, არქარების შემდეგ მათი კინეტიკური ენერჯია ტოლი იქნება

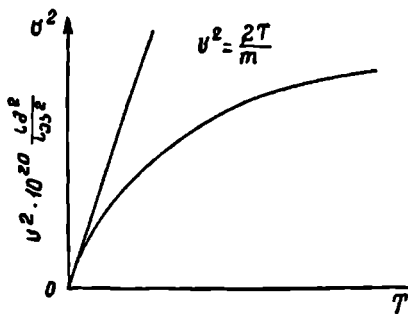
$$T = eV = \frac{mv^2}{2}, \quad (10.1)$$

სადაც m ელექტრონის მასაა, e მუხტის სიდიდე, ხოლო V პოტენ-

¹ B.R. Bartozzi, Am.J.Phys., 32,551,1964.

ციალთა სხვაობა l მანძილზე, ამასთან $V = el$, სადაც e ელექტროსტატიკური ველის დაძაბულობაა.

აჩქარებული ელექტრონები გზას აგრძელებენ L სიგრძის მეორე ვაკუუმურ მილში, რომელიც ველში აღარ არის მოთავსებული. ამ მილში ელექტრონები მოძრაობენ მუდმივი სიჩქარით და მილის ბოლოს ეჯახებიან ალუმინის სამიზნეს, რომელსაც გადასცემენ მთელს თავის კინეტიკურ ენერგიას. ცხადია, რომ L სიგრძის მილში მოძრავი ელექტრონის სიჩქარე შეიძლება განისაზღვროს უშუალოდ, რადგან შეიძლება გაიზომოს დრო, რომელსაც ისინი ანდომებენ L მანძილის გავლას. ასევე უშუალოდ ისაზღვრება ელექტრონების კინეტიკური ენერგია, რადგან თერმონყვილის საშუალებით იზომება სამიზნის ტემპერატურა. (10.1) ფორმულის თანახმად



ნახ. 10

ნახ. 10

ფორმულის თანახმად

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}, \quad (10.2)$$

თუ ავიღებთ $V=2,86 \cdot 10^6$ ვ, $m=9,1 \cdot 10^{-28}$ გრ, ხოლო $e=4,8 \cdot 10^{-10}$ CGSE, მაშინ მივიღებთ $v=10c$, ე.ი. ელექტრონის სიჩქარე ათჯერ მეტი გამოვიდა სინათლის სიჩქარეზე. ასე რომ, კლასიკური მექანიკის თანახმად, ნაწილაკის სიჩქარე შეიძლება რაგინდ დიდი გავხადოთ.

ახლა ვნახოთ, რას გვაძლევს ბერტოცის ექსპერიმენტი. რადგან კინეტიკური ენერგია უშუალოდ იზომება, ამიტომ შეგვიძლია ავაგოთ გრაფიკი კინეტიკური ენერგიის დამოკიდებულებისა v^2 -ის მიხედვით (ნახ.10). თუ კლასიკური კინეტიკური ენერგიის ფორმულა სწორია, მაშინ კინეტიკური ენერგიის v^2 -ზე დამოკიდებულების გრაფიკი უნდა იყოს სწორი ხაზი, რასაც მართლაც აქვს ადგილი საკმარისად მცირე ენერგიებზე. რაც შეეხება დიდ ენერგიებს, გრაფიკი წარმოადგენს მრუდს, რომელიც ზღვარში უახლოვდება ისეთ მნიშვნელობას, რომელიც შეესაბამება სინათლის სიჩქარეს $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}}$, ე.ი. მიუხედავად იმისა, რომ ელექტრონებს ვანიჭებთ სულ უფრო და უფრო მეტ ენერგიას, მათი სიჩქარე ვერ აჭარბებს სინათლის სიჩქარის მნიშვნელობას ვაკუუმში. მაშა-

სადამე, დიდი სიჩქარეებით მოძრაობის შემთხვევაში კინეტიკური ენერგია აღარ არის პროპორციული v^2 სიდიდისა.

რამდენადაც ნაწილაკზე ენერგიის გადაცემისას მისი ენერგია სულ უფრო და უფრო დიდი ხდება, მაგრამ, ამავე დროს, მისი სიჩქარე არ შეიძლება c -ზე მეტი იყოს, იმდენად ბუნებრივია, რომ სიჩქარესთან ერთად გაიზრდება ნაწილაკის მასა,* რაც ეჭვის ქვეშ აყენებს კლასიკური მექანიკის მასის მუდმივობის კანონს.

ახლა თავი მოუყაროთ ყველა იმ ფაქტს, რომელიც მივიღეთ სხვადასხვა კლასიკური ექსპერიმენტის ანალიზის შედეგად. ჯერ ერთი, მაიკელსონ-მორლის ცდა უარყოფს უძრავი ეთერის არსებობას, მაშასადამე, მაქსველის განტოლებების დანერგას უპირატესი ათვლის სისტემის (ეთერის) მიმართ აზრი არა აქვს. ეს, თავის მხრით, იმას ნიშნავს, რომ არავითარი საფუძველი არ არსებობს იმის უარსაყოფად, რომ ფიზიკის ყველა კანონს ინვარიანტული სახე უნდა ჰქონდეს ინერციულ ათვლის სისტემებში.

რადგან მაქსველის განტოლებები ინვარიანტული არ არის გალილეის გარდაქმნების მიმართ, ამიტომ შეგვიძლია გავაკეთოთ ერთადერთი სწორი დასკვნა, რომ გალილეის გარდაქმნები არ არის უნივერსალური ფიზიკის ყველა მოვლენისათვის და ამიტომ საჭიროა მათი დაზუსტება. ეს უკანასკნელი, თავის მხრით, იმის მაჩვენებელია, რომ არც ნიუტონის კანონები ყოფილა უნივერსალური, როგორც ჩანს ამ კანონებსაც სჭირდება გამოყენების ფარგლების დადგენა.

მეორე მხრით, აღმოჩნდა, რომ სინათლე არის ელექტრომაგნიტური ტალღების ერთ-ერთი სახე. სინათლე ვრცელდება სივარდიელეში c -სიჩქარით, რომლის სიდიდე თანამედროვე ექსპერიმენტული (ლაზერების გამოყენებით) მონაცემებით ტოლია

$$c = 299792456,2 \pm 1,1 \frac{\text{მ}}{\text{სეკ}} \quad (10.3)$$

წინამდებარე წიგნში ასეთი სიზუსტე არ დაგეგმილია, ამიტომ სინათლის სიჩქარისათვის სივარდიელეში გამოვიყენებთ მნიშვნელობას

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{სმ}}{\text{სეკ}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{მეტ}}{\text{სეკ}} = 300000 \frac{\text{კმ}}{\text{სეკ}} \quad (10.4)$$

* ლაპარაკია ნაწილაკის ე.წ. რელატივისტურ მასაზე (იხ. ქვემოთ) (რედ.)

მაიკელსონ-მორლის ექსპერიმენტით დამტკიცდა, რომ c არის ინვარიანტული ათვლის ინერციული სისტემების მიმართ, ე.ი. მისი რიცხოვრივი მნიშვნელობა არ იცვლება ერთიდან მეორე ინერციულ სისტემაზე გადასვლისას. ამავ დროს სინათლის სიჩქარე დამოკიდებული არ არის არც გამომსხვივებელი წყაროს და არც დაკვირვებლის მოძრაობაზე. მაქსიმალური სიჩქარე, რაც შეიძლება პქონდეს ნაწილაკს, არის სინათლის სიჩქარე სიცარიელეში.

აღმოჩნდა, რომ კლასიკური მექანიკის კინეტიკური ენერჯიის ფორმულა $T = \frac{mv^2}{2}$ სწორია მხოლოდ მცირე ენერჯიებზე. დიდი სიჩქარეებისათვის ეს ფორმულა არ გამოდგება.

რადგან კლასიკური მექანიკის კინეტიკური ენერჯიის ფორმულა სამართლიანი აღარ არის დიდი, სინათლის სიჩქარის მახლობელი სიჩქარეებისათვის, ამიტომ ბუნებრივია დავასკვნათ, რომ ნიუტონის მექანიკის სამართლიანობა უნდა შემოვსაზღვროთ სიჩქარეთა ინტერვალის მიხედვით. კერძოდ, უნდა მოველოდეთ, რომ ნიუტონის მექანიკის კანონები, და მათ შორის გალილეის გარდაქმნის ფორმულები, სამართლიანი იქნება მხოლოდ ისეთი სიჩქარეებისათვის, რომლებიც გაცილებით ნაკლებია სინათლის სიჩქარესთან შედარებით, ე.ი. როცა $v \ll c$.

1905 წელს ალბერტ აინშტაინმა¹ გამოაქვეყნა შრომა "მოძრავი სხეულების ელექტროდინამიკისათვის", სადაც ფაქტიურად მოგვცა ახალი მექანიკის-რელატივისტური მექანიკის საფუძვლები. ამ მექანიკას ხშირად ფარდობითობის სპეციალურ თეორიასაც უწოდებენ.

აინშტაინმა ფარდობითობის სპეციალურ თეორიას საფუძვლად დაუდო ორი დებულება: 1. სინათლის სიჩქარე ინვარიანტულია ათვლის ინერციული სისტემების მიმართ, ე.ი. სინათლის სიჩქარის სიდიდეს (სიცარიელეში) ყველა ინერციულ სისტემაში ერთი და იგივე მნიშვნელობა აქვს. 2. ფიზიკის კანონები ინვარიანტულია ათვლის ინერციული სისტემების მიმართ. შედეგად აინშტაინს დასჭირდა სივრცისა და დროის შესახებ მანამდე არსებული კლასიკური წარმოდგენების გადასინჯვა. ამასთან, აინშტაინმა უკუაგდო "ეთერის", როგორც "სინათლის გადამტანის, ჰიპოთეზა", რამდენადაც მისი საჭიროება აინშტაინის თეორიაში არ აღმოჩნდა. ამასთანავე უნდა აღვნიშნოთ, რომ რაც არ უნდა განსხვავებული შედეგი მივიღოთ აინშტაინის მექანიკაში, ისინი სხეულების მოძრაობის

¹ A. Einstein. Annalen der Physik, 17,891,1905.

მცირე სიჩქარეებისათვის, ე.ი. როცა $v \ll c$, კლასიკური მექანიკის შედეგებს უნდა ემთხვეოდნენ, რადგანაც არ არსებობს არც ერთი ფაქტი, რომელიც ამ შედეგებს ეწინააღმდეგება მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში. ამ თვალსაზრისით უნდა არსებობდეს ერთგვარი "შესაბამისობის პრინციპი" (ნ.ბორი), რომელმაც უნდა უარყოს ნებისმიერი ისეთი ახალი შედეგი, რომელიც ზღვარში, როცა $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, კლასიკური მექანიკის შედეგებს არ დაემთხვევა.

დასასრულ, უნდა აღვნიშნოთ, რომ განსხვავებით სხვა თეორიებისაგან, რელატივისტური მექანიკის ჩამოყალიბებას დასჭირდა მხოლოდ და მხოლოდ ზემოთ განხილული ორი პოსტულატი, ამიტომაც იგი წარმოადგენს ერთ-ერთ მწყობრ და ლამაზ თეორიას, რომელმაც დიდი გავლენა მოახდინა მეცნიერების მთელ შემდგომ განვითარებაზე.

§ 11. ელემენტარული ნაწილაკები

ფიზიკის შემდგომმა განვითარებამ დაგვანახა, რომ რელატივისტურ მექანიკას განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ელემენტარულ ნაწილაკთა ფიზიკაში, ამიტომ მაგალითების დიდი ნაწილი, რომელთაც ჩვენ განვიხილავთ რელატივისტური მექანიკის გამოყენების მიზნით, ალბულები იქნება ფიზიკის ამ დარგიდან. ამის გამო, მიზანშეწონილია, რამდენიმე სიტყვით განვიხილოთ ელემენტარულ ნაწილაკთა ზოგიერთი თავისებურება. როცა რელატივისტური მექანიკა შეიქმნა, ელემენტარულ ნაწილაკთაგან ცნობილი იყო მხოლოდ ელექტრონი. ამავე დროს, ექსპერიმენტული ტექნიკა ისეთ დაბალ დონეზე იდგა, რომ შეუძლებელი იყო ამ ნაწილაკების გამოყენებით რელატივისტური მექანიკის რომელიმე დასკვნის შემოწმება. ახლა კი ელემენტარულ ნაწილაკთა რიცხვი ძალიან დიდია, არნახულ სიმალეზე დგას ექსპერიმენტული ტექნიკა, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ნაწილაკების აჩქარებისა დიდ ენერგიებამდე. ამის გამო, შესაძლებელი შეიქმნა ფარდობითობის სპეციალური თეორიის თითქმის ყველა თეორიული შედეგის ექსპერიმენტით შემოწმებისა.

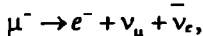
ქვემოთ არ შევხებით იმ საკითხს, თუ რა უნდა ვიგულისხმოთ ნაწილაკის "ელემენტარულობაში", რამდენადაც ეს საკითხი დღესაც საკმარისად ბუნდოვანია. მითუმეტეს, რომ რელატივისტური მექანიკის თვალსაზრისით ნებისმიერ სისტემას, რთული იქნება იგი თუ "ელემენტარული", ძალიან რთული შინაგანი ბუნება ახა-

სიათებს. ადრე დიდი ენერგიების ელემენტარული ნაწილაკების წყაროს წარმოადგენდა მხოლოდ კოსმოსური სხივები. კოსმოსური სხივების პირველად კომპონენტებს წარმოადგენენ დამუხტული ნაწილაკები ძირითადად პროტონები, რომელთა ენერგიები 10^{16} - 10^{17} *ეუ* და ხშირად მეტსაც შეადგენს. ეს ნაწილაკები დედამიწის ატმოსფეროში შემოსვლისას ურთიერთქმედებენ ატმოსფეროს ატომებთან და იძლევიან ახალ ნაწილაკებს. 1932 წელს კოსმოსურ სხივებში ანდერსონის მიერ აღმოჩენილ იქნა პოზიტრონი - დადებითი ელექტრონი, რომლის არსებობა ნაწინასწარმეტყველები იყო დირაკის მიერ 1928 წელს. პოზიტრონს, განსხვავებით ელექტრონისაგან /*e*/' აღნიშნავენ *e*⁻-ით. მას ზუსტად ისეთივე მასა აქვს, რაც ელექტრონს, მუხტი კი - დადებითი. პოზიტრონი ელექტრონთან დაჯახებისას ისობა სინათლის გამოსხივებით.

1932 წელსვე ჯერ ატომგულურ რეაქციებში, შემდეგ კი კოსმოსურ სხივებში, აღმოჩენილ იქნა ნეიტრალური, არასტაბილური, მძიმე ნაწილაკი, რომელსაც ნეიტრონი უწოდეს. ნეიტრონის მასა $m_n = 1838,6 m_e$ ტოლია, სადაც $m_e = 9,1 \cdot 10^{-28}$ გრ ელექტრონის მასაა, მაშინ, როცა პროტონის მასა $m_p = 1836,1 m_e$. როგორც ცნობილია, ნეიტრონის აღმოჩენის შემდეგ საფუძველი ჩაეყარა ატომგულის ნეიტრონებითა და პროტონებით შედგენილობის მოდელს, რომელიც დღეს ეჭვს აღარ იწვევს. ამის შემდეგ დადგა საკითხი ნეიტრონებსა და პროტონებს შორის ურთიერთქმედების ატომგულური ძალების ბუნების გარკვევისა.

1935 წელს იუკავას მიერ გამოთქმულ იქნა ჰიპოთეზა, რომ ატომგულური ძალები შედგება ნეიტრონებსა და პროტონებს შორის ელემენტარული ნაწილაკების გაცვლისა. იუკავას შეფასებით ამ ნაწილაკების მასა მოთავსებული უნდა იყოს $200 m_e$ და $300 m_e$ -ს შორის. ამ ნაწილაკს მან მეზონი - საშუალებო ნაწილაკი უწოდა, რამდენადაც მისი მასა საშუალებოა ელექტრონისა და პროტონის მასას შორის.

1938 წელს ანდერსონმა და ნეიდერმეიერმა აღმოაჩინეს ე.წ. μ მეზონი, რომლის მასა $m_\mu = 207 m_e$. შემდგომში აღმოჩნდა, რომ μ მეზონები არსებობენ როგორც დადებითი მუხტის μ^+ , ისე უარყოფითი მუხტის μ^- . ეს ნაწილაკები სტაბილურები არ არიან. ისინი ცოცხლობენ მხოლოდ $\tau_{\mu^\pm} = 2,210^{-6}$ სეკ, შემდეგ კი გარდაიქმნებიან სხვა ნაწილაკებად. მაგალითად, μ^- მეზონი იშლება სქემით



სადაც ν არის კიდევ ერთი ახალი ნეიტრალური ნაწილაკი - ნეიტ-

რონო, რომელიც პირველად ნანინასნარმეტყველევი იყო პაულის მიერ. β დაშლაში შენახვის კანონებიდან გამომდინარე, შემდეგში აღმოჩნდა, რომ არსებობს ორი ტიპის ნეიტრონი ν_e (ელექტრონული) და ν_μ (მიუონური) და მათი ანტინანილაკები $\bar{\nu}_e$ და $\bar{\nu}_\mu$. შემდეგში ჩვენ ν_e და ν_μ -ს არ განვასხვავებთ, რადგან მათ არ ახასიათებთ ბირთვული ურთიერთქმედება, ამიტომ ისინი არ არიან ის ნანილაკები, რომლებიც ნანინასნარმეტყველევი იყო იუკავას მიერ ატომგულური ურთიერთქმედების ასახსნელად. მხოლოდ 1947 წელს პაუელმა აღმოაჩინა ნანილაკი, რომელსაც შეეძლო პასუხისმგებლობა ეკისრა ატომგულურ ურთიერთქმედებაზე. ამ ნანილაკს უწოდეს π მეზონი. შემდგომში გამოიკვია, რომ არსებობს სამი ტიპის π მეზონი. დადებითი მუხტის π^+ , უარყოფითი მუხტის π^- და ნეიტრალური π^0 ამასთან, მასა $m_{\pi^\pm} = 273,2m_e$, ხოლო $m_{\pi^0} = 264,2m_e$. სამივე ეს ნანილაკი არასტაბილურია. ამასთან π^\pm , მეზონების სიცოცხლის ხანგრძლივობა $\tau_{\pi^\pm} = 2,5 \cdot 10^{-8}$ სექ, ხოლო $\tau_{\pi^0} = (1,80 \pm 0,29) 10^{-16}$ სექ. დაშლის სქემა, მაგალითად, π^+ და π^0 მეზონებისა ასეთია

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu,$$

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma,$$

სადაც γ არის სინათლის კვანტი.

შემდგომში აღმოჩენილ იქნა ელემენტარულ ნანილაკთა მთელი სპექტრი, რომელთა მასები არა თუ შუალედურია ელექტრონისა და პროტონის მასას შორის, არამედ ბევრად აჭარბებს პროტონის მასას. მათი სიცოცხლის ხანგრძლივობა 10^{-10} სექ რიგისაა და უფრო მცირეა.

ელემენტარულ ნანილაკთა ბუნების შესწავლა მით უფრო გაცხოველდა, რაც შესაძლებელი გახდა მათი ხელოვნურად წარმოქმნა ამარქარებლების საშუალებით. ამარქარებლებზე მიღებული დიდი ენერგიების ნანილაკების ნივთიერებასთან ურთიერთქმედების შედეგად შესაძლებელია ნებისმიერი ელემენტარული ნანილაკის გაჩენა. ამავე დროს ამარქარებლების დახმარებით შესაძლებელი შეიქნა ე.წ. ანტინანილაკების: ანტიპროტონების, ანტინეიტრონებისა და სხვ. წარმოქმნა. ამასთან, აღმოჩნდა, რომ მაღალი ენერგიების ნანილაკების კინემატიკა მთლიანად რელატივისტური მექანიკის კანონებს ემორჩილება და მის ბრწყინვალე დასაბუთებას წარმოადგენს.

რელატივისტური მექანიკის დებულებების დასაბუთების

მიზნით, შემდგომში ელემენტარულ ნაწილაკთა ფიზიკას არაერთხელ მივმართავთ. ახლა კი შემოვისაზღვროთ ერთი ექსპერიმენტი, რომელიც ამტკიცებს, რომ სინათლის სიჩქარის მნიშვნელობა დამოკიდებული არ არის წყაროს სიჩქარეზე. ეს ექსპერიმენტი მდგომარეობს მოძრავი ნეიტრალური π^0 მეზონის 2γ კვანტად დაშლის შესწავლაში. გამოიკვება, რომ $v=0,99975c$ სიჩქარით მოძრავი π^0 მეზონის მიერ გამოსხივებული სინათლის (γ -კვანტი) სიჩქარე 10^{-4} სიზუსტით ტოლია c -სი, რაც იმის ბრწყინვალე დასაბუთებაა, რომ სინათლის სიჩქარის მნიშვნელობა დამოკიდებული არ არის წყაროს სიჩქარეზე.

აინშტაინის ფარდობითობის პრინციპი

როგორც წინა თავში აღვნიშნეთ, სინათლის სიჩქარე დამოკიდებული არ აღმოჩნდა გავრცელების მიმართულებაზე და ყველა ინერციულ ათვლის სისტემაში მას აქვს ერთი და იგივე რიცხვითი მნიშვნელობა. ჩვენ განვიხილეთ ექსპერიმენტი, რომელიც გვეუბნება, რომ მაქსიმალური სიჩქარე, რომელიც შეიძლება ჰქონდეს ველს ან ნაწილაკს, არის სინათლის სიჩქარე სიცარიელეში. ამავე დროს აღვნიშნეთ, რომ ინვარიანტობას ათვლის ინერციული სისტემების მიმართ უნდა აკმაყოფილებდეს არა მხოლოდ მექანიკის კანონები, არამედ ფიზიკის ნებისმიერი კანონი.

ასეთ სიტუაციაში, 1905 წელს, ალბერტ აინშტაინმა ჩამოაყალიბა ახალი მექანიკა ან, როგორც მას ხშირად უწოდებენ, ფარდობითობის სპეციალური თეორია.

აინშტაინის თვალსაზრისით, არ არის საჭირო სინათლის სიჩქარის ინვარიანტობის მიზეზის მოძებნა. სინათლის სიჩქარის ინვარიანტობა უნდა მივიღოთ, როგორც ფაქტი, რამდენადაც იგი წარმოადგენს ბუნების კანონს. გარდა ამისა, საჭიროა მოვითხოვოთ, რომ ფიზიკის კანონებს ერთი და იგივე სახე აქვთ ყველა ინერციულ სისტემაში. აინშტაინის მექანიკა სწორედ ამ ორ პოსტულატს ეყრდნობა. ამ პოსტულატების საფუძველზე ნიუტონისეული დროისა და სივრცის აბსოლუტურობას ადგილი აღარა აქვს. როგორც დრო, ისე სივრცე ფარდობითი სიდიდეებია. ახალ მექანიკაში "ადრე" და "გვიან" ფარდობითი ცნებებია. ამასთან, გაირკვა, რომ ნიუტონის მექანიკას აქვს გამოყენების საზღვრები. კერძოდ, იგი სამართლიანი აღმოჩნდა მხოლოდ ნაწილაკთა ისეთი სიჩქარეებისათვის, რომლებიც გაცილებით ნაკლებია სინათლის სიჩქარესთან შედარებით ვაკუუმში, ე.ი. $v \ll c$ შემთხვევაში.)

§12. აინშტაინის ფარდობითობის პრინციპი

აინშტაინს სხვა ფიზიკოსების მსგავსად არ დაუწყია გამოსავალის მოძებნა მაიკელსონ-მორლის უარყოფითი შედეგის ასახსნელად. ის უცნაური ექსპერიმენტული შედეგი, რომ სინათლის გავრცელების სიჩქარე სიცარიელეში არ არის დამოკიდებული არც წყაროს და არც დამკვირვებლის მოძრაობაზე, აინშტაინმა მიიღო,

როგორც ბუნების კანონი და წამოაყენა ჰიპოთეზა, რომ სინათლის სიჩქარის სიდიდე ინვარიანტულია ნებისმიერი ათვლის სისტემის მიმართ.¹

გარდა ამისა, აინშტაინმა წამოაყენა მეორე პოსტულატიც, რომ ფიზიკის ყველა კანონი ინვარიანტულია ნებისმიერი ინერციული ათვლის სისტემის მიმართ. კერძოდ, აინშტაინის თანახმად, არა მხოლოდ მექანიკის კანონები უნდა იყოს ინვარიანტული ნებისმიერი ინერციული სისტემის მიმართ, არამედ ელექტროდინამიკისაც. ამ დებულებებს უნდა დაემატოს მტკიცება, რომ ინერციულ სისტემებში სივრცე არის იზოტროპიული და ერთგვაროვანი, ხოლო დრო-ერთგვაროვანი.

აინშტაინმა ამ ორ პოსტულატზე (დაყრდნობით ჩამოაყალიბა ახალი მექანიკა, რომელსაც დღეს რელატივისტური მექანიკა ეწოდება. ამ მექანიკაში სამართლიანია არა გალილეის ფარდობითობის პრინციპი, არამედ აინშტაინის ფარდობითობის პრინციპი, რომელიც წარმოადგენს ზემოთ განხილული ორი პოსტულატის ერთობლიობას. აინშტაინის ფარდობითობის პრინციპის თანახმად, ფიზიკის კანონები ინვარიანტულია ათვლის ინერციული სისტემების მიმართ და სინათლის სიჩქარეს ერთი და იგივე რიცხვითი მნიშვნელობა აქვს ყველა ინერციულ სისტემაში. ამასთან, აინშტაინის თანახმად, ბუნებაში არ შეიძლება არსებობდეს ისეთი სხეულები, რომელთა სიჩქარე მეტია სინათლის სიჩქარეზე ვაკუუმში. ეს იმას ნიშნავს, რომ არც სხეულთა შორის ურთიერთქმედება შეიძლება გავრცელდეს c -ზე მეტი სიჩქარით.

აინშტაინის რელატივისტურ მექანიკაში მთელ რიგ ინტუიციურ წარმოდგენებს, როგორიცაა "ადრე", "გვიან", "მოვლენათა ერთდროულობა", "მასშტაბების უცვლელობა" და სხვა, საფუძველი შეერყა. აღმოჩნდა, რომ ნიუტონის წარმოდგენა აბსოლუტურ სივრცეზე და აბსოლუტურ დროზე, მკაცრად თუ ვიმსჯელებთ, სინამდვილეს არ შეესაბამება. სინამდვილეში, დროცა და სივრცეც ფარდობითი სიდიდეებია. დროის მსვლელობა (საათების ჩვენება) და ღეროს სიგრძე დამოკიდებულია იმაზე, გაზომვას აწარმოებს მოძრავი თუ უძრავი დამკვირვებელი. ამავე დროს, ჩვენ ამ მოვლენებს მანამდე ვერ ვამჩნევდით, რამდენადაც საქმე გვქონდა სხეულების მოძრაობასთან მცირე სიჩქარეებით.

აინშტაინმა აჩვენა, რომ ნიუტონის მექანიკა სამართლიანია

¹ როგორც ირკვევა, აინშტაინისათვის არ იყო ცნობილი მაიკელსონის ექსპერიმენტის შედეგები.

მხოლოდ სხეულის სიჩქარეთა გარკვეულ ფარგლებში. კერძოდ, ისეთი სიჩქარეებისათვის, რომლებიც გაცილებით ნაკლებია ვაკუუმში სინათლის სიჩქარესთან შედარებით - სივრცისა და დროის აბსოლუტური ხასიათი მხოლოდ მცირე ($v \ll c$) სიჩქარეებისათვის იქნება სამართლიანი. თუ გადავალთ ატომების სამყაროში, სადაც ნანილაკები ძალიან დიდი სიჩქარეებით მოძრაობენ, სივრცისა და დროის ფარდობითი ხასიათის გაუთვალისწინებლობა სერიოზულ შეცდომამდე მიგვიყვანს. მაგალითისათვის, საკმარისია დავასახელოთ უმარტივესი ატომის ნყალბადის ატომის სპექტრის პრობლემა. კერძოდ, ჩვენ ვერ ავხსნით სპექტრის ე.წ. ნაზ სტრუქტურას, რომელიც გამოწვეულია ელექტრონის დიდი სიჩქარით მოძრაობის გამო.

ასევე აუხსნელი დარჩებოდა ელექტრონის საკუთარი მექანიკური მომენტის-სპინის არსებობის საკითხიც.

დღეს აინშტაინის ფარდობითობის პრინციპზე აგებული მექანიკის სამართლიანობა ეჭვს აღარ იწვევს, რამდენადაც, ატომისა და ელემენტარულ ნანილაკთა ფიზიკაში, ასევე თანამედროვე ასტრონომიაში, შეუძლებელია სერიოზული გამოკვლევების ჩატარება და მთელი რიგი მოვლენების ახსნა იმ მექანიკის გამოყენების გარეშე.

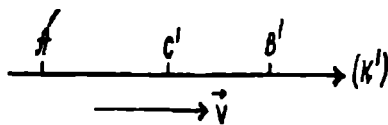
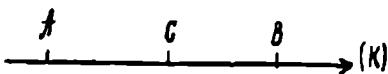
§13. მოვლენათა ერთდროულობის ფარდობითი ხასიათი

კლასიკური ფიზიკის თანახმად, დრო არის აბსოლუტური, ე.ი. საათების ჩვენება დამოკიდებული არ არის იმაზე, ისინი ერთმანეთის მიმართ მოძრაობენ თუ უძრავად იმყოფებიან; ამიტომ, ბუნებრივია, რომ ორი ფიზიკური მოვლენა, რომელიც ერთდროულად ხდება ერთი რომელიმე ათვლის ინერციულ სისტემაში, ერთდროულად მოხდება სხვა ნებისმიერ ინერციულ სისტემაშიაც. ეს იმას ნიშნავს, რომ კლასიკურ მექანიკაში მოვლენათა ერთდროულობას აბსოლუტური ხასიათი აქვს. ერთდროულობა ინვარიანტულია ათვლის ინერციული სისტემების მიმართ.

შევისწავლოთ ორი A და B ერთმანეთზე სივრცულად დაშორებული მოვლენის ერთდროულობის საკითხი. როგორ შევამოწმოთ, რომ A და B ნერტილებში მომხდარი მოვლენები (მაგალითად, ელექტრონათურის ანთება) ერთდროულად ხდება? ამისათვის AB მონაკვეთის შუა C ნერტილში უნდა მოვათავსოთ სიგნალის რეგისტრატორი. თუ A და B ნერტილებიდან მოვლენის მოხდენის მო-

მენტში გამოშვებული სიგნალები C ნერტილში მივა ერთსა და იმავე დროს, მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ მოვლენები A და B ნერტილებში ერთდროულად მოხდა.

ვთქვათ, სიგნალს წარმოადგენს ბგერა, რომლის სიჩქარეა v და გვაინტერესებს შევამოწმოთ შემდეგი საკითხი. თუ A და B მოვლენები ერთდროულად ხდება ათ-



ნახ. 11

ვლის ინერციულ K -სისტემაში, იქნება თუ არა იგი ერთდროული K' -ში, რომელიც K -ს მიმართ მოძრაობს V სიჩქარით x ღერძის გასწვრივ (ნახ. 11)? ცხადია, რომ A ნერტილიდან გამოსული სიგნალის ფარდობითი სიჩქარე K' სისტემაში ტოლი იქნება $v - V$, ხოლო B ნერტილიდან გამოსული სიგნალისა $v + V$. იმის გამო, რომ C ნერტი-

ლი K' სისტემაში A ნერტილიდან გამოსული ბგერის სიგნალის შესახვედრად მოძრაობს V სიჩქარით, ხოლო B -დან გამოსულ სიგნალს გაურბის ზუსტად იგივე v სიჩქარით, ამიტომ K' -შიაც ეს ორი მოვლენა ერთდროული იქნება. შევისწავლოთ ეს საკითხი მათემატიკურად. K დამკვირვებლისათვის დროის რაიმე t მომენტში C' ნერტილი A ნერტილს დაცილებული იქნება მანძილით

$$\frac{1}{2} AB + vt. \quad (13.1)$$

იგივე C' ნერტილი B ნერტილიდან დაცილებული იქნება მანძილით

$$\frac{1}{2} AB - vt. \quad (13.2)$$

K სისტემაში A' ნერტილიდან გამოშვებული სიგნალის ფარდობითი სიჩქარე ტოლი იქნება $v + V$, ხოლო B' ნერტილიდან გამოსხივებული-სა $v - V$. მაშასადამე, A' -დან გამოსხივებული სიგნალი C' -ს მიაღწევს იმ t_1 დროში, რომელიც განისაზღვრება პირობით

$$\left(\frac{1}{2} AB + Vt_1 \right) = (v + V)t_1. \quad (13.3)$$

ხოლო B' -დან გამოსხივებული სიგნალი C' ნერტილს მიაღწევს იმ t_2 დროში, რომელიც განისაზღვრება ფორმულით

$$\left(\frac{1}{2} AB - V t_2\right) = (v - V) t_2. \quad (13.4)$$

ამ ორი უკანასკნელი ფორმულის შედარება მოგვცემს

$$t_1 = t_2 = \frac{AB}{2v}. \quad (13.5)$$

ამგვარად, ორი მოვლენა, რომლებიც ერთდროული იყო K სისტემაში, ასევე ერთდროულია K' სისტემაშიაც. შევნიშნოთ, რომ ეს დასკვნა უშუალო შედეგია კლასიკური მექანიკის სიჩქარეთა შეკრების კანონისა. კერძოდ, იმისა, რომ სიგნალის ფარდობითი სიჩქარე $(v \pm V)$ -ს ტოლია. ამ უკანასკნელი კანონის სამართლიანობა კი ექსპერიმენტმა უნდა გადაწყვიტოს.

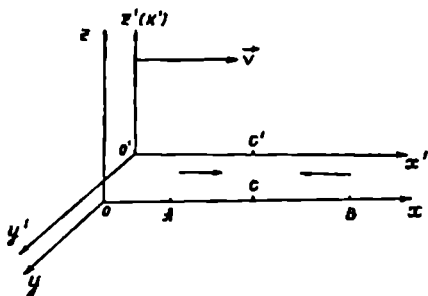
კლასიკური ფიზიკა უშვებს უსასრულოდ დიდი სიჩქარის სიგნალების არსებობის შესაძლებლობას. ამიტომ, რომ ავიღოთ სიგნალი, რომლის სიჩქარე $v = \infty$, მაშინ ზემოთქმულის ანალოგიურად, სწრაფად დავრწმუნდებით, რომ A და B მოვლენები, რომლებიც ერთდროულად ხდება K სისტემაში, ასევე ერთდროულად მოხდება K' სისტემაში.

ახლა, გამოვარკვიოთ რა ხდება აინშტაინის რელატივისტურ მექანიკაში. ის ფაქტი, რომ სინათლის გავრცელების სიჩქარე არის ზღვრული სიჩქარე და არავითარ სიგნალს არ შეიძლება ჰქონდეს c -ზე მეტი სიჩქარე, და, ამავე დროს, იგი ინვარიანტულია ათვლის ინერციული სისტემების მიმართ, პრინციპულად ცვლის მოვლენათა ერთდროულობის ხასიათს. აინშტაინის ფარდობითობის თეორიაში არ არსებობს მკაცრი გამიჯვნა წარსულსა და მომავალს შორის. მოვლენები, რომლებიც ერთი დამკვირვებლისათვის მიმდინარეობენ ერთი თანმიმდევრობით, მეორისათვის, რომელიც პირველის მიმართ მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით, შეიძლება ხდებოდეს სულ სხვა თანმიმდევრობით. ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მაგალითი, რომელიც თვით აინშტაინს ეკუთვნის.

განვიხილოთ ორი დამკვირვებელი K და K' . K დამკვირვებელი იმყოფება უძრავ K სისტემაში, ხოლო K' — ინერციულ სისტემაში, რომელიც მოძრაობს მუდმივი V სიჩქარით K სისტემის x ღერძის დადებითი მიმართულებით. ვთქვათ, x ღერძის A და B ნერტილებში ხდება რაიმე ორი მოვლენა, რომელთა შესახებ იგზავნება სინათლის სიგნალები. გამოვარკვიოთ ამ ორი მოვლენის ერთდროულობის საკითხი, როგორც K , ისე K' დამკვირვებლის თვალსაზრისით.

K დამკვირვებელი მოვათავსოთ C ნერტილში, რომელიც მდებარეობს A და B შორის.

ბარეობს A და B ნერტილების ზუსტად შუაში. დავუშვათ, დროის გარკვეულ მომენტში K' დამკვირვებელი გაუსწორდა K დამკვირ-



ნახ. 12

ვებელს (C' ნერტილი) და სწორედ ამ დროს მოხდა A და B მოვლენები. ცხადია, K დამკვირვებელი დაადგენს, რომ მასთან სინათლის სიგნალები A და B ნერტილებიდან ერთდროულად მივიდა. K დამკვირვებელი ხედავს, რომ K' მოძრაობს B -დან გამოსული სინათლის სიგნალის შესახვედრად, A -დან გამოსულ სიგნალს კი გაურბის, ამიტომ K დამკვირვებელი და-

ასკენის, რომ K' დამკვირვებლისათვის A და B ნერტილებში მოვლენები ერთდროულად არ ხდება. კერძოდ, მოვლენა B -ში უფრო ადრე ხდება, ვიდრე A -ში. K' დამკვირვებელი კი ასე მსჯელობს, რადგან იგი იმყოფება ინერციულ სისტემაში მომხდარი ორი A და B მოვლენის ზუსტად შუა ნერტილში, სინათლე კი A და B ნერტილებიდან ერთი და იგივე c სიჩქარით ვრცელდება, ამიტომ B -დან ადრე (A -სთან შედარებით) მიღებული სიგნალი იმის შედეგია, რომ B მოვლენა უფრო ადრე ხდება, ვიდრე A . მაშასადამე, ორი მოვლენა, რომელიც ერთდროულად ხდება K დამკვირვებლისათვის, არაერთდროული იქნება K' სისტემაში მოთავსებული დამკვირვებლისათვის.

თუ K დამკვირვებელმა A მოვლენა დაინახა ოდნავ უფრო ადრე, ვიდრე B -ში მომხდარი მოვლენა, მაშინ იგი დაასკენის, რომ A მოვლენა წინ უსწრებდა B -ს. გამორიცხული არ არის ისეთი სიტუაციის არსებობა, როცა K' დამკვირვებელი კვლავ იფიქრებს, რომ B მოვლენა წინ უსწრებს A -ს. შედეგად ამ ორი დამკვირვებლისათვის აღნიშნული ორი მოვლენა მიმდინარეობს შებრუნებული თანმიმდევრობით, მათთვის მომავალსა და წარსულს შეცვლილი აქვთ თანმიმდევრობა.

ამგვარად, რელატივისტურ თეორიაში მოვლენათა ერთდროულობას არა აქვს აბსოლუტური ხასიათი. ორი მოვლენის ერთდროულობაზე ლაპარაკს მაშინა აქვს აზრი, როცა მივუთითებთ ათვლის სისტემას, რომელშიაც ეს მოვლენები ერთდროულად ხდება. სხვა ათვლის სისტემაში ეს მოვლენები შეიძლება ერთდროული აღარ იყოს.

ამავე დროს, საჭიროა გავითვალისწინოთ ერთი პრინციპული მომენტი, რომლის მიხედვით K დამკვირვებელს არ შეუძლია ინფორმაცია მიანოდოს K' დამკვირვებელს იმ მოვლენის შესახებ, რომელიც K' სისტემაში მომავალში უნდა მოხდეს. ამისათვის საჭირო იქნებოდა სიგნალი, რომლის სიჩქარე c -ზე მეტი უნდა ყოფილიყო. ასეთი რამ კი ფარდობითობის თეორიაში დაუშვებელია. ამიტომ K' დამკვირვებლისათვის რაიმე მოვლენის შესახებ ინფორმაცია ცნობილი გახდება მხოლოდ იმის შემდეგ, რაც იგი ამ მოვლენის შესახებ სიგნალს თვითონ მიიღებს.

მიუთითოთ ერთი მეტად მნიშვნელოვანი გარემოების შესახებ. მიუხედავად იმისა, რომ ფარდობითობის თეორიაში მოვლენების დროში თანმიმდევრობა სხვადასხვა დამკვირვებლის მიმართ სხვადასხვა შეიძლება იყოს მათ ფარდობით სიჩქარესთან დამოკიდებულებით, მიზეზ-შედეგობრივ დამოკიდებულებას აბსოლუტური ხასიათი აქვს. ეს იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერ ინერციულ სისტემაში, როგორი ($v \ll c$) სიჩქარითაც არ უნდა მოძრაობდეს იგი, მოვლენა-მიზეზი ნინ უნდა უსწრებდეს მოვლენა-შედეგს.

§ 14. ინტარვალი

რელატივისტურ მექანიკაში ინტერვალის ცნება ასრულებს ერთ-ერთ ფუნდამენტურ როლს. იგი ერთმანეთთან აკავშირებს ორ ფიზიკურ მოვლენას, რომლებიც ხდება სივრცეში და დროში.

გამოვარკვეით ჯერ, რა სიდიდეებით ხასიათდება ფიზიკური მოვლენა. ნებისმიერი მოვლენა ხდება სივრცის განსაზღვრულ ადგილას და გარკვეულ დროში. ასე რომ, მოვლენა უნდა დახასიათდეს ოთხი პარამეტრით, რომელთაგან სამი აღწერს იმ ნერტილს, სადაც მოვლენა ხდება, ხოლო მეოთხე იმ დროს, როცა მოვლენა მოხდა. ამასთან, ცხადია, რომ მდებარეობის განსაზღვრის მიზნით, საჭიროა განვიხილოთ ათვლის სისტემა. ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ მოვლენას ყოველთვის ვიხილავთ ათვლის ინერციულ სისტემაში. ამასთან, პირობითად, უძრავ სისტემად ჩავთვალოთ K სისტემა, ხოლო მოძრავად K' . ამ ორ სისტემაში მოვლენის შესაბამისი კოორდინატები იქნება

$$\{x, y, z, t\} \quad \text{და} \quad \{x', y', z', t'\} \quad (14.1)$$

მაშასადამე, ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ ურთიერთკავშირი მოვლენებს შორის K და K' სისტემებში, ე.ი. საჭიროა ერთმანეთის საშუალებით

გამოეხატოტ შტრიხიანი და უშტრიხო კოორდინატები. ეს არის მექანიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანა. ამ ამოცანას ჩვენ გადავწყვეტთ, როცა განვიხილავთ ლორენცის გარდაქმნებს. ახლა კი ვიპოვით კავშირს ამ კოორდინატებისაგან შედგენილ გარკვეულ კომბინაციებს შორის, რომელსაც ინტერვალ ეწოდება.

განვიხილოთ ორი მოვლენა: ერთი, რომელიც ხდება სივრცის (x_1, y_1, z_1) ნერტილში დროის t_1 მომენტში. ვთქვათ, ეს მოვლენა არის სინათლის სიგნალის გამოსხივება რაიმე წყაროს მიერ. და მეორე მოვლენა, რომელიც ხდება სივრცის (x_2, y_2, z_2) ნერტილში დროის t_2 მომენტში. მეორე მოვლენა წარმოადგენს ზემოთ აღნიშნული სინათლის სხივის რეგისტრაციას. ეს ორი მოვლენა განვიხილოთ როგორც K , ისე K' სისტემების თვალსაზრისით.

იმის გამო, რომ რელატივისტურ მექანიკაში ადგილი აქვს ფარდობითობის პრინციპს, რომლის თანახმად სინათლის სიჩქარე ინვარიანტულია K და K' სისტემების მიმართ, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ ამ ორ სისტემაში:

$$c^2(t_2 - t_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \quad (14.2)$$

$$c^2(t_2' - t_1')^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2. \quad (14.3)$$

შემოვილოთ შემდეგი სიდიდე:

$$S_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2; \quad (14.4)$$

S_{12}^2 -ს შემდგომში ინტერვალს ვუწოდებთ. სახელწოდების შინაარსი გასაგებია, რამდენადაც (14.4) წარმოადგენს ორ ფიზიკურ მოვლენას შორის არსებულ "სივრცე-დროითი მანძილის" კვადრატს. ამასთან, $t_{12} = t_2 - t_1$ წარმოადგენს დროის ინტერვალს, ხოლო

$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ სივრცით ინტერვალს ამ ორ მოვლენას შორის. ასე რომ, (14.4) ინტერვალის ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2. \quad (14.4)$$

ამ აღნიშვნის მიხედვით ის გარემოება, რომ მოვლენა, რომელიც მდგომარეობს ერთი და იმავე სინათლის სიგნალის გამოსხივებასა და რეგისტრაციაში K და K' -სათვის სისტემებში, შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$S_{12}^2 = 0, \quad S_{12}'^2 = 0, \quad (14.5)$$

ე.ი. ინტერვალის ნულის ტოლია ნებისმიერ ინერციულ სისტემაში ან, როგორც ამბობენ, თუ ინტერვალის ნულის ტოლია ერთ რომელიმე

ათელის სისტემაში, მაშინ იგი ნულის ტოლი იქნება ნებისმიერ სხვა ინერციულ სისტემაშიც. მაშასადამე, ინტერვალის ნულთან ტოლობა ყველა ინერციულ სისტემაში ეკვივალენტურია სინათლის სიჩქარის ინვარიანტობისა.

ჩვენ შეგვიძლია შემოვიღოთ ინტერვალის ორ უსასრულოდ ახლო მოვლენას შორისაც, კერძოდ, ინტერვალის კვადრატისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 dy^2 - dz^2. \quad (14.6)$$

ზემოთქმულის თანახმად, $ds^2 = 0$ ტოლობა, ცხადია, აგრეთვე ინვარიანტული იქნება ინერციული სისტემების მიმართ, ე.ი. ds'^2 -იც ნულის ტოლი იქნება. რადგან, ამავე დროს ds^2 და ds'^2 ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია, ამიტომ ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას:

$$ds^2 = \alpha ds'^2. \quad (14.7)$$

ამასთან, პროპორციულობის α კოეფიციენტი პრინციპში დამოკიდებული შეიძლება იყოს კოორდინატებზე, დროზე და K და K' სისტემების ურთიერთფარდობით \vec{V} სიჩქარეზე. მაგრამ, რადგან ინერციულ სისტემაში სივრცე და დრო ერთგვაროვანია, α არ შეიძლება კოორდინატებისა და დროის ფუნქცია იყოს. ამავე დროს, α არ შეიძლება დამოკიდებული იყოს ფარდობითი \vec{V} სიჩქარის მიმართულებაზე. მაშინ დაირღვეოდა სივრცის იზოტროპიულობის პირობა. ამიტომ მაქსიმუმში, რაზედაც შეიძლება დამოკიდებული იყოს α , არის ფარდობითი სიჩქარის სიდიდე, ე.ი. \vec{V}^2 . ამგვარად, $\alpha = \alpha(\vec{V}^2)$. ქვემოთ ვაჩვენებთ, რომ α არც \vec{V}^2 -ზეა დამოკიდებული. მართლაც, განვიხილოთ ორი თანმიმდევრული გადასვლა. ჯერ გადავიდეთ K -დან K' სისტემაზე, ხოლო შემდეგ K' -დან უკან დავბრუნდეთ K -ში; სრული სიმეტრიის გამო გვექნება ორი ტოლობა $ds^2 = \alpha ds'^2$ და $ds'^2 = \alpha ds^2$, ე.ი. K -ში, $\alpha^2 = 1$, საიდანაც მივიღებთ, რომ α ტოლი იქნება ერთის. მაშასადამე, ჩვენ მივიღეთ მეტად მნიშვნელოვანი დებულება, რომლის მიხედვით ინვარიანტულია არა მხოლოდ ხულოვანი ინტერვალის, არამედ ნებისმიერი უსასრულოდ მცირე ინტერვალის, ე.ი.

$$ds^2 = ds'^2 \quad (14.8)$$

აქედან კი შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თვით ინტერვალის ინვარიანტული სიდიდეა $S^2 = S'^2$. მართლაც, (14.8)-დან $S^2 = S'^2 + const$. მაგ-

რამ იმის გამო, რომ ნულოვანი ინტერვალები ინვარიანტულია, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $c_{00}t=0$. მაშასადამე, მივიღეთ მეტად მნიშვნელოვანი შედეგი

$$S_{12}^2 = S_{12}'^2. \quad (14.9)$$

ამგვარად, თუ ადგილი აქვს აინშტაინის ფარდობითობის პრინციპს, მაშინ ინტერვალის ინვარიანტულია ათვლის ინერციული სისტემების მიმართ. ე.ი. არსებობს მოვლენის დამახასიათებელი კოორდინატებისა და დროის გარკვეული კვადრატული ფორმა, რომელიც არ იცვლება ერთიდან მეორე ინერციულ სისტემაზე გადასვლის დროს, ე.ი.

$$S_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = inv. \quad (14.10)$$

შევნიშნოთ, რომ ინტერვალის ინვარიანტობა არის მათემატიკური გამოხატულება იმ ფაქტისა, რომ სინათლის სიჩქარის სიდიდე დამოკიდებული არ არის ათვლის სისტემაზე.

შემდგომში ჩვენ სშირად გამოვიყენებთ ინტერვალის ფორმულას იმ შემთხვევაში, როცა ერთ-ერთი მოვლენა ხდება სათავეში $x=y=z=0$ და $t=0$ დროში, ხოლო მეორე ხდება t დროში, სივრცის x, y, z ნერტილში. მაშინ ინტერვალს ექნება სახე

$$S^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t^2 - r^2 \quad (14.11)$$

აღსანიშნავია, რომ ინტერვალის შეიძლება იყოს დადებითი, უარყოფითი და ნული. როცა $S^2 > 0$, მაშინ ინტერვალს უწოდებენ დროისმაგვარს, როცა $S^2 < 0$, ინტერვალს სივრცისმაგვარი ჰქვია, ხოლო, როცა $S^2 = 0$, სინათლისმაგვარს ან ნულოვანს უწოდებენ; ამგვარად,

$S^2 > 0$, დროისმაგვარი,

$S^2 = 0$, სინათლისმაგვარი, (14.12)

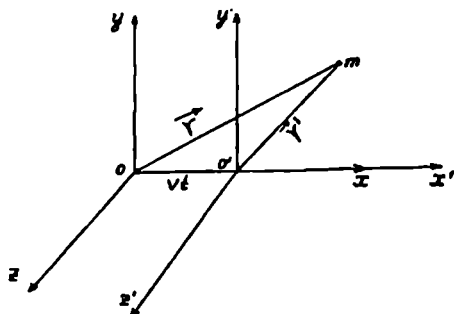
$S^2 < 0$, სივრცისმაგვარი.

ინტერვალის ფიზიკურ შინაარსს განსაკუთრებით კარგად დავინახავთ, როცა განვიხილავთ ფარდობითობის თეორიის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას.

§ 15. ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები

რამდენადაც ათვლის ყველა ინერციული სისტემა ფიზიკის კანონების აღწერის თვალსაზრისით ეკვივალენტურია, ამიტომ აუცილებელია ვიცოდეთ, როგორ მყარდება კავშირი სათანადო ფიზიკურ

სიდიდეებს შორის ამ სხვადასხვა ათვლის სისტემაში. კერძოდ, ჩვენს მიზანს შეადგენს ვიპოვოთ ფორმულები, რომლებიც ერთმანეთთან აკავშირებს ნერტილის კოორდინატებსა და დროს ორ სხვადასხვა ათვლის ინერციულ სისტემაში ან, სხვანაირად, საჭიროა ვიპოვოთ გალილეის გარდაქმნების ანალიტიკური ფორმულები რელატივისტურ მექანიკაში.



ნახ. 13

განვიხილოთ ათვლის ორი ინერციული სისტემა \$K\$ და \$K'\$. ამასთან ვიგულისხმობთ, რომ \$K'\$ სისტემა \$x\$ ღერძის გას-

წვრივ მოძრაობს მუდმივი \$V\$ სიჩქარით (ნახ. 13). მიღებულ შედეგებს ადვილად განვაზოგადებთ იმ შემთხვევაშიაც, როცა \$K'\$ სისტემა \$K\$-ს მიმართ მოძრაობს არა ღერძის გასწვრივ, არამედ ნებისმიერი \$V = const\$ სიჩქარით.

ცხადია, რომ ჩვენ მიერ განხილულ კერძო შემთხვევაში \$y = y'\$ და \$z = z'\$. გამოვიყენოთ ინტერვალის ინვარიანტობის პირობა. კერძოდ, გავითვალისწინოთ, რომ ინტერვალები \$K\$ და \$K'\$ სისტემაში ერთმანეთის ტოლი უნდა იყოს

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad (15.1)$$

სადაც \$(x, y, z)\$ ნერტილის კოორდინატებია \$K\$ სისტემაში, \$(x', y', z')\$ კი იმავე ნერტილის კოორდინატებია \$K'\$ სისტემაში. ამასთან, განსხვავებით კლასიკური მექანიკისაგან, აინშტაინის ფარდობითობის პრინციპიდან გამომდინარე, ვიგულისხმებთ, რომ ერთიდან მეორე სისტემაზე გადასვლისას დროც იცვლება.

ფარდობითობის პრინციპის თანახმად, \$K\$ და \$K'\$ სისტემები სრულიად ეკვივალენტურებია, ამიტომ ნერტილის უშტრიხო კოორდინატების გამოხატვას შტრიხიანების საშუალებით ზუსტად ისეთივე სახე უნდა ჰქონდეს, როგორც ექნება შტრიხიანი კოორდინატების გამოხატვას უშტრიხო კოორდინატების საშუალებით. ეს ფორმულები ერთმანეთისაგან უნდა მიიღებოდეს \$V\$-ს შეცვლით — \$V\$-თი, ე.ი. თუ ვიპოვეთ, რომ უშტრიხო კოორდინატები შტრიხიანების საშუალებით გამოხატულია ფორმულებით:

$$\begin{aligned} x &= f(x', y', z', t'; V) \quad y = y', \quad z = z', \\ t &= \varphi(x', y', z', t'; V), \end{aligned} \quad (15.2)$$

მაშინ უნდა გვექონდეს

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, z, t; -V), \quad y' = y, \quad z' = z, \\ t' &= \varphi(x, y, z, t; -V). \end{aligned} \quad (15.3)$$

გარდა ამისა, როცა $V=0$, მაშინ K' სისტემა დაემთხვევა K -ს და უნდა მივიღოთ იგივეური გარდაქმნა:

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (15.4)$$

აღნიშნული სიმეტრიის დროს (15.1) პირობას დააკმაყოფილებს შტრიხიან და უშტრიხო კოორდინატებს შორის მხოლოდ ნრფივი კავშირი'. ავიღოთ ეს კავშირი ზოგადი სახით:

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta t', \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \epsilon x' + \gamma t'. \end{aligned} \quad (15.5)$$

დავუშვათ, რომ მოძრავ K' სისტემაში ნერტილს t' ყველა მომენტში აქვს $x'=0$ კოორდინატი, მაშინ (15.5)-დან $x=\beta t'$ და $t=\gamma t'$, რადგან $x'=0$ ნერტილი იმყოფება K' სისტემის სათავეში, ამიტომ ეს ნერტილი K სისტემის მიმართ იმოძრავებს V სიჩქარით. მეორე მხრით, $x'=0$ ნერტილის კოორდინატი K -ს მიმართ x -ის ტოლია,

1 ეს შედეგია სივრცისა და დროის ერთგვაროვნების თვისებისა. მართლაც, განვიხილოთ შემდეგი გარდაქმნები $x' = \psi_1(x, y, z, t)$, $y' = \psi_2(x, y, z, t)$, $z' = \psi_3(x, y, z, t)$ და $t' = \psi_4(x, y, z, t)$. ვიპოვოთ შტრიხიანი კოორდინატების უსასრულოდ მცირე ცვლილება dx', dy', dz', dt' ცხადია, რომ უშტრიხო სისტემაში მათ შეესაბამება უსასრულოდ მცირე სიდიდეები: dx, dy, dz, dt . კერძოდ, მაგალითად, dx' -ისათვის გვექნება

$$dx' = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi_1}{\partial t} dt.$$

სივრცისა და დროის ერთგვაროვნების ძალით ეს დამოკიდებულება ერთნაირი უნდა იყოს სივრცის ყველა ნერტილისა და დროის მომენტისათვის. ეს კი მაშინ შეიძლება, როცა $\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \frac{\partial \psi_1}{\partial t}$ სიდიდეები არ იქნებიან დამოკიდებული კოორდინატებზე და დროზე, ე.ი. მუდმივ სიდიდეებს წარმოადგენენ. მაშინ გვექნება $x' = c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 t + c_5$. ასევე ნრფივი დამოკიდებულებით განისაზღვრება y', z', t' კოორდინატებიც.

ამიტომ $V = \frac{x}{t}$. ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით წინა ორი ტოლობიდან მივიღებთ $\frac{x}{t} = \frac{b}{\gamma} = V$ ამიტომ (15.5) ფორმულები ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\begin{aligned}x &= \gamma(\alpha x' + V t'), \\y &= y', \\z &= z', \\t &= \gamma(\delta x' + t'),\end{aligned}\tag{15.6}$$

სადაც α, γ, δ მუდმივი პარამეტრებია, რომლებიც უნდა განისაზღვროს (15.1) პირობიდან. (15.6) ფორმულების შეტანით (15.1)-ში და კოეფიციენტების გატოლებით გვექნება:

$$\begin{aligned}\gamma^2(\alpha^2 - c^2\delta^2) &= 1, \\ \gamma^2(\alpha V - c^2\delta) &= 0, \quad (\gamma^2 - \frac{V^2}{c^2}\gamma^2) = 1,\end{aligned}\tag{15.7}$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \alpha = \pm 1, \quad \delta = \frac{V}{c^2}\alpha, \quad \beta = \frac{V}{c}\tag{15.8}$$

ამასთან, $\alpha = -1$ მნიშვნელობა არ გამოგვადგება, რამდენადაც, თუ დავუშვებთ, $V=0$ (15.6)-დან ვერ მივიღებთ (15.4) იგივე გარდაქმნას. ამიტომ საბოლოოდ, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x = \frac{x' + Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.\tag{15.9}$$

ამასთან, γ კოეფიციენტში შემავალი ფესვის ნიშანი უნდა ავიღოთ დადებითი, რამდენადაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, (15.9) $V=0$ -ის დროს არ მოგვცემდა იგივე გარდაქმნას. (15.9) ფორმულებს უწოდებენ ლორენცის გარდაქმნის ფორმულებს, რამდენადაც ეს ფორმულები აინშტაინამდე გამოყვანილი იყო გენდრიკ ანტონი ლორენცის მიერ, მართალია, ერთობ ძნელად დასასაბუთებელ "ეთერის" ჰიპოთეზაზე დაყრდნობით 1904 წელს¹. აინშტაინის თანახმად კი ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები ლოგიკური შედეგია ფარდობითობის პრინციპისა.

¹ აღნიშნულ გარდაქმნებს ა. პუანკარემ "ლორენცის გარდაქმნები" უწოდა.

ლორენცის გარდაქმნები საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ მოვლენის კოორდინატები ნებისმიერ $V = \text{const}$ სიჩქარით მოძრავ ინერციულ სისტემაში, თუ ამ მოვლენის კოორდინატები ცნობილია ერთ რომელიმე ინერციულ სისტემაში. ლორენცის ფორმულები ფუნდამენტურ როლს ასრულებენ რელატივისტურ მექანიკაში. ცხადია, ისინი ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma(t' + \frac{V}{c^2}x') \quad (15.10)$$

$\gamma(v)$ -ს უწოდებენ ლორენც-ფაქტორს. ცხადია, რომ $\gamma(0) = 1$, ხოლო $\gamma(c) = \infty$. განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $\frac{V}{c} \rightarrow 0$, ე.ი. როცა $V \ll c$. ასეთი ზღვარი ჩვენ შემდგომში, არაერთხელ დაგვჭირდება, ამიტომ მოვიტანოთ გაშლის ფორმულა ლორენც-ფაქტორისათვის:

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \frac{5}{16}\beta^6 + \frac{35}{128}\beta^8 + \dots \quad (15.11)$$

$\frac{V}{c} \rightarrow 0$ ზღვარში ლორენცის გარდაქმნები მოგვცემს

$$\begin{aligned} x &= x' + Vt + \dots \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= t', \end{aligned} \quad (15.12)$$

რაც ემთხვევა გალილეის გარდაქმნის ფორმულებს. გალილეის ფარდობითობის პრინციპი და, მაშასადამე, კლასიკური მექანიკა, სამართლიანი ყოფილა მხოლოდ ისეთი სიჩქარეებისათვის, რომლებიც გაცილებით ნაკლებია სინათლის სიჩქარესთან შედარებით. ცხადია, მხოლოდ ამავე პირობებში იქნება სამართლიანი სიჩქარეთა შეკრების კლასიკური მექანიკის კანონიც.

ლორენცის გარდაქმნების გათვალისწინება მაკროსკოპული მასშტაბის მოვლენებში ძალიან იშვიათად გვჭირდება. ესაა, მაგალითად, ზოგიერთი ასტრონომიული მოვლენა, როცა საქმე გვაქვს ძალიან დიდი სიჩქარეებით მოძრაობასთან. რაც შეეხება მოვლენებს, რომლებიც მიმდინარეობენ მიკროსამყაროში, იქ ლორენცის გარდაქმნების გამოუყენებლობა სერიოზულ შეცდომამდე მიგვიყვანს, რამდენადაც მიკროსამყაროში ნაწილაკების მოძრაობა დაახლოებით c სიჩქარით ჩვეულებრივ მოვლენას ნარმოადგენს.

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ ფიზიკის კანონები, ზოგად შემთხვევაში, ინვარიანტული უნდა იყოს ლორენცის გარდაქმნების მიმართ და არა გალილეის გარდაქმნების მიმართ. გალილეის გარდაქმნები, მაგალითად, ინტერვალის (15.1) ინვარიანტობას არ აკმაყოფილებს, რაშიაც ადვილად დავრწმუნდებით მასში (15.12) ფორმულების შეტანით.

თუ დროსაც, როგორც კოორდინატს, ისე განვიხილავთ, მაშინ ჩვენ დავსკვნით, რომ ლორენცის (15.9) გარდაქმნები ნარმოადგენს ნრფივი ორთოგონალური გარდაქმნის კერძო სახეს. ლორენცის შებრუნებული გარდაქმნების ფორმულების დასაწერად საკმარისია (15.9) განვიხილოთ როგორც განტოლებათა სისტემა და ამოვხსნათ შტრიხიანი კოორდინატები. გვექნება:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (15.13)$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, ეს ფორმულები (15.9) ფორმულებიდან მიიღება, V -ს შეცვლით $-V$ -თი და შტრიხიანი და უშტრიხო კოორდინატების აღნიშვნის შეცვლით.

ლორენცის გარდაქმნები სამართლიანია მაშინ, როცა V ნაკლებია სინათლის c სიჩქარეზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში ლორენც-ფაქტორი გახდება უსასრულო ან ნარმოსახვითი. მაშასადამე, აინშტაინის ფარდობითობის სპეციალური თეორია გამორიცხავს დამკვირვებლის და მისი ათელის სისტემის მოძრაობას $V=c$ ან $V>c$ სიჩქარით. შემდგომში აღმოჩნდა, რომ ფარდობითობის სპეციალური თეორიის მიხედვით, საზოგადოდ, არავითარ ნაწილაკს ან ველს არ შეუძლია სინათლეზე უფრო მეტი სიჩქარით მოძრაობა, ასევე შეუძლებელია c -ზე მეტი სიჩქარით ენერჯიის ან ინფორმაციის გადატანა.

ახლა, დავწეროთ ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები იმ შემთხვევაში, როცა K' სისტემა K სისტემის მიმართ მოძრაობს ნებისმიერი მიმართულების $\vec{V} = \text{const}$ სიჩქარით. (15.9) ლორენცის გარდაქმნებში იცვლებიან ის კოორდინატები, რომლებიც გვაქვს მოძრაობის მიმართულებით, მაშინ, როცა მოძრაობის პერპენდიკულარული მიმართულებით კოორდინატები არ იცვლებიან. ამის გამო, ნაწილაკის რადიუსვექტორი K სისტემაში ნარმოვიდგინოთ $\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp$ ჯამის სახით, სადაც \vec{r}_\parallel არის ვექტორი, რომელიც მიმართულია მოძრაობის გასწვრივ, ე.ი. $\vec{r}_\parallel \uparrow \vec{V}$, ხოლო \vec{r}_\perp მიმართულია მოძრაობის მიმარ-

თულების პერპენდიკულარულად $(\vec{r}_1 \vec{V}) = 0$. ზემოთ აღნიშნულის თანახმად, ლორენცის გარდაქმნები ამ ვექტორებისათვის ასე დაიწერება:

$$\vec{r}_1 = \gamma(\vec{r}_1 - \vec{V}t), \quad \vec{r}'_1 = \vec{r}_1, \quad t' = \gamma \left[t - \frac{(\vec{r}_1, \vec{V})}{c^2} \right] \quad (15.14)$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$(\vec{r}, \vec{V}) = (\vec{r}_1 + \vec{r}_1 \vec{V}) = (\vec{r}_1, \vec{V}) = r_1 V \quad (15.15)$$

და

$$\vec{r}_1 = \vec{V} \frac{(\vec{r}, \vec{V})}{V^2}, \quad (15.16)$$

მაშინ, რადგან K' სისტემაში $\vec{r}' = \vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp}$, ამიტომ გვექნება

$$\vec{r}' = \gamma(\vec{r}_1 - \vec{V}t) + \vec{r}'_{\perp}. \quad (15.17)$$

მაგრამ

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{V} \frac{(\vec{r}, \vec{V})}{V^2}, \quad (15.18)$$

ამიტომ, საბოლოოდ მივიღებთ,

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V} \frac{(\vec{r}, \vec{V})}{V^2} + \gamma \left\{ \frac{\vec{V}(\vec{r}, \vec{V})}{V^2} - \vec{V}t \right\}. \quad (15.19)$$

ამგვარად, ლორენცის ზოგად გარდაქმნებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{n}(\vec{n}, \vec{r}) + \gamma \{ \vec{n}(\vec{n}, \vec{r}) - \vec{V}t \}, \\ t' &= \gamma \left[t - \frac{V}{c^2} (\vec{n}, \vec{r}) \right], \end{aligned} \quad (15.20)$$

სადაც $\vec{n} = \frac{\vec{V}}{V}$ ერთეულოვანი ვექტორია სიჩქარის გასწვრივ. როცა

$\vec{V} = \vec{V}(V, 0, 0)$, (15.20) ფორმულები კვლავ (15.13) ფორმულებს დაემთხვევა; შებრუნებული გარდაქმნის ფორმულების მისაღებად საჭიროა \vec{V} შევცვალოთ - \vec{V} -თი.

აღვნიშნოთ ერთი მნიშვნელოვანი მომენტი ფარდობითობის თეორიისა, რომელიც გამომდინარეობს ლორენცის გარდაქმნებიდან.

კერძოდ, აინშტაინის თეორიაში დროის გარკვეულ მომენტზე ლაპარაკი შეიძლება მხოლოდ ერთ ალებულ ინერციულ სისტემაში, სხვა ინერციულ სისტემაზე გადასვლისას ამ ერთ მომენტს დროის უამრავი მომენტი შეიძლება შეესაბამებოდეს.

დავწეროთ ლორენცის გარდაქმნის კანონი დროისათვის

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2} x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

ამ ფორმულიდან, მართლაც, ნათლად ჩანს, რომ დროის ერთ რომელიმე t მომენტს K სისტემაში, x კოორდინატის სხვადასხვა შესაძლო მნიშვნელობების გამო, შეესაბამება უამრავი t' მომენტი K' (\bar{V} -სიჩქარით მოძრავ) სისტემაში და, პირიქით; დროის ერთ t' მომენტს K' სისტემაში, თანახმად ლორენცის შებრუნებული გარდაქმნისა,

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

K სისტემაში, x' -ის სხვადასხვა შესაძლო მნიშვნელობების გამო, შეესაბამება დროის t მომენტების სიმრავლე.

დაბოლოს, განვიხილოთ მოვლენათა ერთდროულობის საკითხი ლორენცის გარდაქმნებზე დაყრდნობით. დაეუშვათ, რომ K სისტემაში x ღერძის ორ ერთმანეთისაგან დაშორებულ x_1 და x_2 წერტილში, დროის t მომენტში, ერთდროულად ხდება ორი მოვლენა. გამოვარკვიოთ ეს ორი მოვლენა ერთდროული იქნება თუ არა სხვა ინერციულ სისტემაშიაც. კერძოდ, შევისწავლოთ ამ ორი მოვლენის ერთდროულობის საკითხი K' სისტემაში. ამისათვის გამოვიყენოთ ლორენცის (15.13) გარდაქმნები. პირველი მოვლენებისათვის, რომელიც ხდება K სისტემის x_1 წერტილში, დროის t მომენტში, შეგვიძლია დავწეროთ

$$t'_1 = \frac{t - \frac{V}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{15.21}$$

სადაც t'_1 არის პირველი მოვლენის მოხდენის დრო K' სისტემაში. ანალოგიურად, ვიპოვიოთ, რომ მეორე მოვლენა მოხდება დროის მომენტში

$$t'_2 = \frac{t - \frac{V}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (15.22)$$

მაშასადამე K' სისტემაში დროის ინტერვალი ამ ორ მოვლენას შორის იქნება

$$t'_2 - t'_1 = \frac{V(x_2 - x_1)}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (15.23)$$

რამდენადაც, პირობის თანახმად, K სისტემაში განხილული ორი მოვლენა სხვადასხვა წერტილში ხდება $x_2 - x_1 \neq 0$, იმდენად $t_2 - t_1 \neq 0$. მაშასადამე, ორი მოვლენა, რომელიც ერთდროული იყო K სისტემაში, ერთდროული აღარ არის K' სისტემაში. ერთდროულობა ფარდობითი ცნებაა და იგი არ არის ინვარიანტული ლორენცის გარდაქმნების მიმართ.

§ 16. სიჩქარეთა შეკრების კანონი

ცხადია, რომ ლორენცის გარდაქმნების ფორმულებიდან უნდა მივიღოთ სიჩქარეთა შეკრების რელატივისტური კანონი, რომელიც თავის თავში უნდა შეიცავდეს სინათლის სიჩქარის ინვარიანტობას და, რომ ბუნებაში სინათლის სიჩქარე ვაკუუმში არის ზღვრული სიჩქარე.

თუ ნაწილაკი K' სისტემის მიმართ მოძრაობს \vec{V}' სიჩქარით, ხოლო K' სისტემა K -ს მიმართ \vec{V} სიჩქარით, მაშინ ნაწილაკის სიჩქარე K -ს მიმართ იქნება

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \quad (16.1)$$

რადგან შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატთა სისტემა ასევე დაკავშირებულია მატერიალურ წერტილთან, ამიტომ (16.1) იქნება სიჩქარეთა შეკრების კლასიკური მექანიკის კანონი, რომელიც წარმოადგენს გალილეის გარდაქმნების უბრალო შედეგს. (16.1) ფორმულა ეწინააღმდეგება ექსპერიმენტს. მართლაც, თუ გვაქვს წრფივი მოძრაობა და $v' = c$, ხოლო $V = c$, მაშინ (16.1) მოგვცემს $v = 2c$, რაც, როგორც ვიცით, არ შეიძლება.

გამოვიყენოთ ლორენცის გარდაქმნების ფორმულები და გამოვიყვანოთ სიჩქარეთა შეკრების ზოგადი ფორმულები. ვიპოვოთ (15.10)-ის დიფერენციალები:

$$dx = \gamma(dx' + Vdt'), \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \gamma(dt' + \frac{V}{c^2} dx'). \quad (16.2)$$

პირველი ტოლობა გაცეოთ მეოთხეზე და გავითვალისწინოთ, რომ

$$\bar{v} = \bar{v} \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right),$$

მაშინ გვექნება:

$$\bar{v}_x = \frac{dx' + Vdt'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}, \quad \bar{v}_y = \frac{dy'}{\gamma(dt' + \frac{V}{c^2} dx')}, \quad \bar{v}_z = \frac{dz'}{\gamma(dt' + \frac{V}{c^2} dx')} \quad (16.3)$$

ან, საბოლოოდ,

$$\bar{v}_x = \frac{\bar{v}'_x + V}{1 + \frac{V\bar{v}'_x}{c^2}}, \quad \bar{v}_y = \frac{\bar{v}'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{V\bar{v}'_x}{c^2}}, \quad \bar{v}_z = \frac{\bar{v}'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{V\bar{v}'_x}{c^2}} \quad (16.4)$$

ეს არის სიჩქარეთა შეკრების აინშტაინის ფორმულები. როგორც ვხედავთ, მიუხედავად იმისა, რომ (16.2) გარდაქმნების მიხედვით ერთიდან მეორე სისტემაზე გადასვლის დროს y და z ღერძების გასწვრივ კოორდინატთა ნაზრდები არ იცვლება $dy = dy'$, $dz = dz'$, იმის გამო, რომ დროთა ნაზრდები განსხვავებულია $dt \neq dt'$, გარდაიქმნება არა მხოლოდ v_x , არამედ v_y და v_z მდგენლებიც; ამასთან, ეს მდგენლები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან.

სიჩქარეთა შეკრების ფორმულები დავენროთ ვექტორული სახით. ამ მიზნით ხელსაყრელია \bar{v} და \bar{v}' სიჩქარეების გასწვრივი $\bar{v} \cdot (\vec{V} - \text{მიმართულების})$ და განივი $\bar{v}' \cdot (\vec{V} - \text{მართობული})$ მდგენლების შემოტანა. სახელდობრ, ჩვენ შეგვიძლია დავენროთ:

$$\bar{v} \cdot (\vec{V} - \text{მიმართულების}) = \frac{\bar{v}' \cdot \vec{V}}{1 + \frac{(\vec{V}\bar{v}')}{c^2}}, \quad \bar{v}' \cdot (\vec{V} - \text{მართობული}) = \frac{\bar{v}' \cdot \vec{V}}{1 + \frac{(\vec{V}\bar{v}')}{c^2}} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (16.5)$$

შტრიხიან სისტემაში იმავე ფორმულების დასაწერად საკმარისია მოვახდინოთ \vec{V} -ს შეცვლა $-\vec{V}$ -თი, ე.ი.

$$\bar{v}' = \frac{\bar{v} - \bar{V}}{1 - \frac{(\bar{V}\bar{v})}{c^2}}, \quad \bar{v}'_1 = \frac{\bar{v}_1}{1 - \frac{(\bar{V}\bar{v})}{c^2}} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (16.6)$$

როცა შესაკრები სიჩქარეები \bar{v}' და \bar{V} ერთმანეთის პარალელურია, მაშინ (16.5) შეკრების ფორმულას ექნება შემდეგი სახე:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}} \quad (16.7)$$

განვიხილოთ ასეთი მაგალითი. ვთქვათ, კოსმოსური ხომალდი დედამიწის მიმართ მოძრაობს $v_1 = 0,6c$ სიჩქარით და ამ ხომალდიდან, ხომალდის მოძრაობის მიმართულებით გაუშვეს რაკეტა, რომლის სიჩქარე ხომალდის მიმართ აგრეთვე $v_2 = 0,6c$ -ს ტოლია. როგორი იქნება რაკეტის სიჩქარე დედამიწის მიმართ? სიჩქარეთა შეკრების კლასიკური კანონი მოგვცემს მცდარ შედეგს $v = 1,2c$ -ს, მაშინ, როცა აინსტაინის ფორმულით მივიღებთ მნიშვნელობას

$$v = \frac{1,2c}{1 + (0,6)^2} = 0,88c. \quad (16.8)$$

როცა $v' = V = c$, მაშინ (16.7) ფორმულიდან მივიღებთ $v = c$, ე.ი. შეკრების ფორმულაში გათვალისწინებულია ის გარემოება, რომ სინათლის სიჩქარე ვაკუუმში ზღვრული სიჩქარეა.

როცა $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, მაშინ, როგორც ეს მოსალოდნელი იყო, (16.4) ფორმულები მოგვცემენ სიჩქარეთა შეკრების კლასიკურ ფორმულებს:

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z. \quad (v \ll c) \quad (16.9)$$

ეს გასაგებია, რამდენადაც $v \ll c$ პირობებში ლორენცის ფორმულები გალილეის ფორმულებს ემთხვევა.

განვიხილოთ სიჩქარეთა შეკრების შემდეგი მაგალითი. ჩავატაროთ შემდეგი აზრობრივი ექსპერიმენტი. ვთქვათ, გვაქვს მრავალსაფეხურიანი ესკალატორი, რომლის საფეხურები ერთმანეთის მიმართ მოძრაობენ v სიჩქარით. ეს იმას ნიშნავს, რომ, თუ პირველი საფეხურის სიჩქარე არის v , მაშინ მეორე საფეხურის სიჩქარე პირველის მიმართ არის v , მესამის სიჩქარე მეორის მიმართ აგრეთვე არის v და ა.შ.

დავუშვათ, ადამიანი ადის ასეთ ესკალატორზე. ცხადია, რომ n -ურ საფეხურზე ასვლით მან შეიძლება შეიძინოს რაგინდ დიდი სიჩქარე, თუ n იქნება დიდი. სულ სხვა რამეს გვეუბნება აინშტაინის სიჩქარეთა შეკრების ფორმულა. კერძოდ, $n \rightarrow \infty$ დროსაც კი ადამიანს არ შეუძლია c -ზე მეტი სიჩქარის შეძენა. მართლაც, პირველ

საფეხურზე ადამიანის სიჩქარე იქნება $v_1 = v$, მეორეზე $v_2 = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$.

. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\beta = \frac{v}{c}$ და $\beta_i = \frac{v_i}{c}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\beta_1 = \beta = \frac{(1 + \beta) - (1 - \beta)}{(1 + \beta) + (1 - \beta)}, \quad (16.10)$$

$$\beta_2 = \frac{2\beta}{1 + \beta^2} = \frac{(1 + \beta)^2 - (1 - \beta)^2}{(1 + \beta)^2 + (1 - \beta)^2}, \quad (16.11)$$

$$\beta_3 = \frac{\frac{2\beta}{1 + \beta^2} + \beta}{1 + \frac{2\beta^2}{1 + \beta^2}} = \frac{(1 + \beta)^3 - (1 - \beta)^3}{(1 + \beta)^3 + (1 - \beta)^3}, \quad (16.12)$$

და ა.შ.

$$\beta_n = \frac{(1 + \beta)^n - (1 - \beta)^n}{(1 + \beta)^n + (1 - \beta)^n}. \quad (16.13)$$

მაშასადამე, სიჩქარე n -ურ საფეხურზე ტოლი იქნება

$$v_n = c \frac{(1 + \beta)^n - (1 - \beta)^n}{(1 + \beta)^n + (1 - \beta)^n}. \quad (16.14)$$

როცა $\beta = \frac{v}{c} \rightarrow 0$, მაშინ მივიღებთ კლასიკური მექანიკის შედეგს

$$v_n = nv_1, \quad (16.15)$$

რომელიც შეიძლება რაგინდ დიდი გახდეს n -ის უსასრულობისაკენ მისწრაფებით. კერძოდ, იგი შეიძლება გავხადოთ c -ზე მეტი. სინამ-

დვილში კი (16.14) ფორმულა $n \rightarrow \infty$ -სათვის გვაძლევს

$$v_x = c, \quad (16.16)$$

რაც თანხმობაშია იმ ფაქტთან, რომ c არის ზღვრული სიჩქარე.

ბოლოს, სიჩქარეთა შეკრების (16.4) ფორმულები გამოვიყენოთ სინათლისათვის. დავუშვათ, სინათლის სიჩქარის სიდიდე K' სისტე-

მაში უდრის c -ს, ე. ი. $v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2} = c$, მაშინ (16.4) ფორმულების გამოყენებით, ადვილად შევამონმებთ, რომ K სისტემაშიაც სინათლის სიჩქარის სიდიდეს ექნება მნიშვნელობა

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2. \quad (16.17)$$

მაშასადამე, როგორც მოსალოდნელი იყო, სინათლის სიჩქარის სიდიდე ინვარიანტული რჩება ერთიდან მეორე სისტემაზე გადასვლის დროს. რაც შეეხება სინათლის სიჩქარის ცალკეულ მდგენლებს, რომელთა მნიშვნელობა c -ზე ნაკლებია, ისევე როგორც სინათლის სიჩქარის მიმართულება, შეიძლება შეიცვალოს ერთიდან მეორე ათვის სისტემაზე გადასვლის დროს. მართლაც, ვთქვათ, სინათლის სხივი K' სისტემაში ვრცელდება y' ღერძის გასწვრივ c სიჩქარით, მაშინ ამ სისტემაში მას ექნება მდგენლები $v_x' = v_z' = 0$, $v_y' = c$. სიჩქარეთა შეკრების ფორმულების გამოყენებით კი სინათლის სიჩქარის მდგენლებისათვის K სისტემაში მივიღებთ:

$$v_x \neq 0, v_y \neq 0, v_z \neq 0, \quad (16.18)$$

რაც იმას გვიჩვენებს, რომ სინათლის სხივს K სისტემაში განსხვავებული მიმართულება ექნება. ცალკეული პროექცია სინათლის სიჩქარისა c -ზე ნაკლებია, სინათლის სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობა კი ტოლია

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2.$$

§ 17. მოძრავი ბარემოს ოპტიკა

გამოვიყენოთ სიჩქარეთა შეკრების კანონი მოძრავი გარემოს ოპტიკის ზოგიერთი მოვლენის ასახსნელად. კერძოდ, განვიხილათ ფიზოს ცდას, აბერაციის მოვლენას და მაიკელსონ-მორლის ექსპერიმენტს.

ფიზოს ცდა. ავხსნათ ფიზოს ექსპერიმენტი სიჩქარეთა შეკრების რელატივისტური ფორმულის გამოყენებით. სინათლის სიჩქარე

გარემოში არის $\frac{c}{n}$, ხოლო თვით გარემოს (წყლის) მოძრაობის სიჩქარე უძრავი დამკვირვებლის მიმართ იყოს v . მაშინ უძრავი დამკვირვებლისათვის აინშტაინის ფორმულა მოგვცემს

$$u = \frac{\frac{c}{n} \pm v}{1 \pm \frac{v}{nc}}, \quad (17.1)$$

ან მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში შეგვიძლია დავწეროთ:

$$u \approx \left(\frac{c}{n} \pm v\right)\left(1 \pm \frac{v}{nc}\right) = \frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad (v \ll c) \quad (17.2)$$

რაც ემთხვევა ფიზოს ფორმულას.

მაიკელსონ-მორლის ცდა და აბერაციის მოვლენა. დიდხანს გაუგებარი იყო, რატომ ხდება, რომ მაიკელსონ-მორლის ექსპერიმენტში სინათლის სიჩქარე არ იკრიბება დედამიწის სიჩქარესთან, მაშინ, როცა აბერაციის მოვლენაში ასეთ შეკრებას ადგილი აქვს. საიდუმლოება იმაშია, რომ მაიკელსონის ცდაში იზომებოდა სინათლის სიჩქარის მხოლოდ სიდიდე, იმ დროს, როცა აბერაციის მოვლენაში აკვირდებოდნენ სინათლის სიჩქარის მიმართულების ცვლილებას, რომელიც გამოწვეულია სიჩქარის მიმართულების ცვლილებით დედამიწის ორბიტაზე მოძრაობის დროს. როდესაც ვამტკიცებთ, რომ სინათლის სიჩქარე სიცარიელეში ინვარიანტულია ათვლის ინერციული სისტემის მიმართ, იგულისხმება, რომ საქმე ეხება სინათლის სიჩქარის სიდიდეს და არა მიმართულებას. სინათლის სიჩქარის მიმართულება, რა თქმა უნდა, შეიძლება შეიცვალოს ერთიდან მეორე ათვლის სისტემაზე გადასვლის დროს.

განვიხილოთ ზენიტში მყოფი ვარსკვლავი, რომლის მიერ გამოსხივებული სინათლე მოძრაობს x სიბრტყეში (ნახ.14). რადგან $v_x = v_t = 0$, $v_y = -c$, ამიტომ სიჩქარეთა შეკრების ფორმულებით სინათლის სიჩქარე დედამიწის მიმართ ტოლი იქნება

$$v'_x = -V, v'_y = -c\sqrt{1 - \beta^2}, v'_z = 0. \quad (17.3)$$

აქედან კი ცხადია, რომ

$$v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 = c^2, \quad (17.4)$$

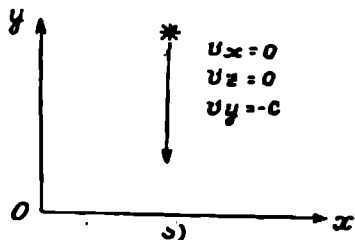
რაც წარმოადგენს მაიკელსონის ცდის შედეგს, ე.ი. სინათლის სიჩქარის სიდიდის ინვარიანტობას ათვლის სისტემის მიმართ.

ნახ.14 ბ-დან ადვილია აბერაციის θ' კუთხის განსაზღვრა. სახელდობრ, გვექნება:

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{v'_x}{v'_y}, \quad (17.5)$$

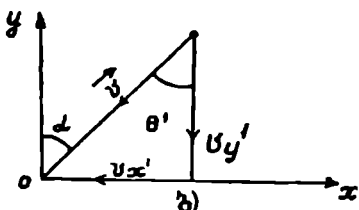
საიდანაც (17.3)-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \beta(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots), \quad (17.6)$$



რაც β^2 წევრების სიზუსტით გვაძლევს $\operatorname{tg} \theta' = \beta$.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა, როცა სინათლე დედამიწას ეცემა დახრილად. კოორდინატა სისტემის ღერძები ისე შევარჩიოთ, რომ დროის ადებულ მომენტში სიჩქარე იდოს K სისტემის xy სიბრტყეში. რადგან (16.4)-ის თანახმად, თუ $v_z = 0$, მაშინ v'_z -იც ნულის ტოლია, ამიტომ K' სისტემაშიაც სინათლის სიჩქარის ვექტორი იდება $x'y'$ სიბრტყეში. ქვემოთ ჩვენ ფორმულებს გამოვიყვანთ ზოგად შემთხვევაში, როცა \vec{v} არის ნებისმიერი სხეულის სიჩქარე, შემდეგ კი მათ გამოვიყენებთ სინათლისათვის.



ნახ.14.

\vec{v} სიჩქარე დავახასიათოთ ორი სიდიდით v მოდულითა და θ კუთხით, რომელსაც \vec{v} ქმნის მოძრაობის მიმართულებასთან, ე.ი. \vec{V} -სთან, მაშინ

$$(\vec{v}, \vec{V}) = vV \cos \theta = v \cdot V. \quad (17.7)$$

ცხადია, რომ

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta. \quad (17.8)$$

K' სისტემაში სიჩქარის მდგენლებისათვის გვექნება ფორმულები:

$$v'_x = v'_x \cos \theta'; \quad v'_y = v'_y \sin \theta', \quad (17.9)$$

სადაც θ' არის კუთხე K' სისტემაში \vec{v}' -სა და მოძრაობის მიმართულებას შორის.

(16.6) ფორმულების ძალით:

$$v' \cos \theta' = \frac{v \cos \theta - V}{1 - \frac{vV}{c^2} \cos \theta}, \quad (17.10)$$

$$v' \sin \theta' = \frac{V \sin \theta}{1 - \frac{vV}{c^2} \cos \theta} \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (17.11)$$

ახლა გამოვიყენოთ ეს ფორმულები სინათლისათვის. ამ მიზნით ავიღოთ $v = c$, მაშინ

$$v' \cos \theta' = \frac{c \cos \theta - v}{1 - \beta \cos \theta}, \quad (17.12)$$

$$v' \sin \theta' = \frac{c \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (17.13)$$

აქედან კვლავ მივიღებთ მაიკელსონ-მორლის შედეგს $v'^2 = c^2$, ე.ი. სიჩქარის სიდიდე K' სისტემაშია c -ს ტოლი იქნება. თუ გავყოფთ (17.13) ფორმულას (17.12)-ზე, მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \beta} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (17.14)$$

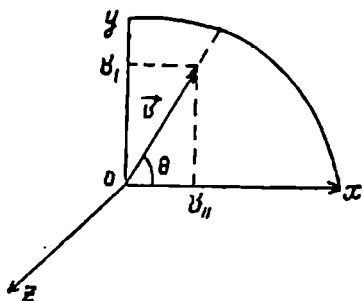
ეს ფორმულა განსაზღვრავს სინათლის სიჩქარის მიმართულების ცვლილებას K -დან K' სისტემაზე გადასვლის დროს, როცა $\beta \ll 1$, მაშინ

$$\operatorname{tg} \theta' = \operatorname{tg} \theta \left\{ 1 + \beta \frac{1}{\cos \theta} + \dots \right\}. \quad (17.15)$$

ე.ი.

$$\operatorname{tg} \theta' - \operatorname{tg} \theta = \frac{\beta \sin \theta}{\cos^2 \theta}. \quad (17.16)$$

თუ შემოვიღებთ აბერაციის კუთხეს $\theta' - \theta = \Delta\theta$, რომელიც იქნება $\beta = \frac{v}{c}$ რიგის სიდიდე, შედეგად მივიღებთ:



ნახ.15

$$\Delta\theta = \frac{v}{c} \sin\theta, \quad (17.17)$$

რაც ემთხვევა აბერაციის ჩვენ მიერ ადრე მიღებულ ფორმულას.

(17.14) ზოგადი ფორმულიდან მარტივად მიიღება ის შემთხვევა, როცა K სისტემაში სინათლე ვრცელდება x ღერძის მართობულად y ღერძის გასწვრივ. ამ შემთხვევაში $\theta = \frac{\pi}{2}$, ხოლო აბერაციის კუთხე $\Delta\theta = \theta' - \theta = \theta' - \frac{\pi}{2}$ და, მაშასადამე,

$$\operatorname{tg}(\Delta\theta) = -\operatorname{ctg}\theta' = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (17.18)$$

რადგან $\Delta\theta \ll 1$, ამიტომ ეს ფორმულა დაემთხვევა (17.6)-ს.

დასასრულ, სინათლის აბერაციის მოვლენასთან დაკავშირებით გავაკეთოთ შემდეგი შენიშვნა: მართალია, კლასიკურ მექანიკაში გამოყვანილი ფორმულით, რომელიც β^2 სიზუსტით ემთხვევა რელატივისტურს, ამ ეფექტის რიცხობრივი ახსნა შესაძლებელია, ეს თეორია საფუძველშივე მცდარია.

აბერაციის მოვლენის კლასიკური ახსნა ემყარება იმას, რომ დედამიწის მოძრაობის გამო, სანამ სინათლე ტელესკოპს გაივლიდეს ობიექტივიდან ოკულარამდე, ოკულარი ნანაცვლებული აღმოჩნდება. მაგრამ, თუ ტელესკოპს გავავსებთ წყლით, მაშინ აბერაცია გაიზრდებოდა, რამდენადაც წყალში სინათლის სხივის გავრცელებას დასჭირდებოდა მეტი დრო და, მაშასადამე, აღნიშნული ნანაცვლება უფრო მეტი იქნებოდა. მაგრამ, როგორც ირკვევა, აბერაციის ასეთი გაზრდა არ დაიშინდება. რელატივისტური თეორია, რომელიც ეყრდნობა ლორენცის გარდაქმნებს, ბრწყინვალედ ხსნის აბერაციის მოვლენას და, ამავე დროს, ამ თეორიის მიხედვით არაფერი შეიცვლება, თუ ტელესკოპს წყლით ავაკვებთ.

თავისი შინაარსით დოპლერის ეფექტიც ამავე პარაგრაფში შეგვეძლო განგვეხილა, მაგრამ მას ჩვენ მივუძღვნიტ 25-ე პარაგრაფს, როცა შემოვიღებთ ტალღურ ოთხვექტორს.

§ 18. ღროის შემოქლება მოძრაობის სისტემაში.

საპუთარი ღრო

ფარდობითობის თეორიაში არ არსებობს ერთიანი მსოფლიო დრო, როგორც ეს გვქონდა ნიუტონის მექანიკაში. ზუსტად რომ ვიმსჯე-

ლოთ, ნიუტონის მექანიკაში დრო მიახლოებითად აბსოლუტურია მხოლოდ მცირე სიჩქარეებისათვის.

იმის გამო, რომ კლასიკური მექანიკის თანახმად, ურთიერთქმედება ვრცელდება მყისად, ე.ი. $c = \infty$, მიიღებოდა, რომ დრო ყველა ათვლის სისტემაში ერთნაირია $t = t'$, ე.ი. დრო აბსოლუტურია. სინამდვილეში კი დროის მსვლელობა დამოკიდებულია იმაზე, დამკვირვებელი საათის მიმართ მოძრაობს თუ უძრავია.

ვთქვათ, შტრიხიანი სისტემის სათავეში $x' = 0$ მოთავსებულია უძრავი საათი. ეს საათი, ცხადია, უჩვენებს t' დროს. ლორენცის გარდაქმნების მიხედვით დრო, რომელსაც უძრავ სისტემაში მოთავსებული უძრავი საათი უჩვენებს, ტოლი იქნება გამოსახულების

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (18.1)$$

ე.ი. $t < t'$, რაც იმას ნიშნავს, რომ დრო მოძრავ სისტემაში უფრო ნელა მიმდინარეობს.

ვთქვათ, ახლა უძრავია უშტრიხო სისტემის საათი $x = 0$ ნერტილში, მაშინ ლორენცის შებრუნებული გარდაქმნის თანახმად,

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (18.2)$$

ე.ი. $t < t'$ და, მაშასადამე, საათი, რომელიც მოძრაობს დამკვირვებლის მიმართ, ჩამორჩება მის საათს. ამასთან, საათების შენელებაში იგულისხმება დროის ინტერვალის გაგრძელება.

განვიხილოთ მოძრავი მატერიალური ნერტილი, რომელთანაც უძრავად დავაკავშიროთ საათი. დროს, რომელსაც საათი უჩვენებს ათვლის სისტემაში, რომელშიაც ის უძრავია, უწოდებენ მატერიალური ნერტილის საკუთარ დროს და მას τ ასოთი აღნიშნავენ.

ვთქვათ, საათი უძრავადაა დამაგრებული K სისტემის $x=0$ სათავეში, მაშინ K' სისტემაში t' ინტერვალისათვის მივიღებთ

$$t' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (18.3)$$

აქედან ცხადია, რომ დროის ინტერვალი, რომელსაც ვზომავთ მოძრავ K' სისტემაში, უფრო გრძელია, ვიდრე დროის ინტერვალი K სისტემაში. ამ მოვლენას უწოდებენ დროის შენელებას.

ცხადია, რომ საათების სვლის შენელების საკითხი შედეგია ინტერვალის ინვარიანტობისა. ავიღოთ დამკვირვებელი K სისტემაში, რომელიც აკვირდება ნებისმიერად მოძრავი საათის ჩვენებას. მოძრავი სისტემის სათავე დაეკავშიროთ ამ საათთან. მოძრავი და უძრავი საათების ჩვენების შედარებისას ხშირად იძულებული ვართ მოძრავ საათს მიმართულება შეუცვალოთ, ე.ი. მასთან დაკავშირებული ათვლის სისტემა ავარჯიროთ. აჩქარებით მოძრავი K' სისტემა კი ინერციული აღარ იქნება, მაგრამ დროის ალბულ ცალკეულ მომენტში საათის მოძრაობა შეიძლება კვლავ განვიხილოთ, როგორც თანაბარი. ამიტომ, დროის ყოველ ალბულ მომენტში, საათთან დაკავშირებული მოძრავი სისტემა შეგვიძლია ჩავთვალოთ ინერციულად.

დავუშვათ, K სისტემაში გავიდა dt უსასრულოდ მცირე დრო. ვიპოვოთ ის $dt' \equiv dt$ დროის შუალედი, რომელსაც უჩვენებს მოძრავი საათი. რადგან მოძრავი საათი დამაგრებულია K' სისტემის სათავეში, ამიტომ $dx' = dy' = dz' = 0$ და ინტერვალის ინვარიანტობის გამო

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 d\tau^2. \quad (18.4)$$

რადგან $dr'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ არის მოძრავი საათის მიერ განვლილი მანძილი dt დროში, ამიტომ

$$v = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}} \quad (18.5)$$

წარმოადგენს მოძრავი ნაწილაკის სიჩქარეს, რის გამოც (18.4) შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (18.6)$$

$d\tau$ არის დროის ის ინტერვალი, რომელსაც ზომავს მოძრავ საათთან უძრავად დაკავშირებული დამკვირვებელი, ამიტომ იგი იქნება მატერიალური ნერტილის საკუთარი დრო. ცხადია, (18.6) ემთხვევა (18.3) განმარტებას. როგორც ვხედავთ, საკუთარი დრო, რადგან იგი მხოლოდ მუდმივი c მამრავლით განსხვავდება ds ინტერვალისაგან, აგრეთვე ინვარიანტული (სკალარული) სიდიდე იქნება ლორენცის გარდაქმნების მიმართ

$$d\tau = \frac{ds}{c} = inv. \quad (18.7)$$

თუ უძრავი საათის მიხედვით გავიდა $t_{21} = t_2 - t_1$ დრო, მაშინ $\tau_{21} = t'_2 - t'_1$ ინტერვალი, რომელსაც უჩვენებს მოძრავი საათი, განისაზღვრება ფორმულით

$$\tau_{21} = \int_{t'_1}^{t'_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \leq \int_{t_1}^{t_2} dt \quad (18.8)$$

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ ზღვარში, როცა $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, დრო ყველა ინერ-

ციულ სისტემაში ერთნაირად მიმდინარეობს და დროის არავითარ შენელებას ადგილი არ ექნება. დროის ზემოთ აღნიშნული შენელების აღქმა ადამიანისათვის უშუალოდ შეუძლებელია, რადგან ყოველდღიურ ცხოვრებაში საქმე გვაქვს მცირე სიჩქარეებით მოძრაობასთან, მაგრამ შენელებას ნამდვილად აქვს ადგილი ბუნებაში. ამასთან, შენელება ეხება ყველა ტიპის საათს, ეს იქნება ზამბარაინი, ელექტრო, ატომური თუ რაიმე სხვა პერიოდულ მოძრაობაზე აგებული ხელსაწყო. დროის შენელების ფაქტი დღეს შეგვიძლია ექსპერიმენტულად შევამოწმოთ მხოლოდ ელემენტარულ ნაწილაკთა სიცოცხლის ხანგრძლივობის გაზომვის საშუალებით. თუ, მაგალითად, რაიმე ნაწილაკის სიცოცხლის ხანგრძლივობა ან ნაწილაკთა სისტემის ნახევარდაშლის პერიოდი K სისტემაში არის τ , მაშინ იგივე ნახევარდაშლის პერიოდი (ან სიცოცხლის ხანგრძლივობა) K' სისტემაში იქნება

$t' = \tau / \sqrt{1 - \beta^2}$ ელემენტარული ნაწილაკების დაშლისას ჩვენ საქმე გვაქვს დიდ სიჩქარეებთან, ამიტომ შენელების ეფექტი ექსპერიმენტულად გასაზომი სიდიდეა. იმ შემთხვევაში, როცა $\beta \ll 1$, გვექნება $t' \approx \tau$ და შენელების ეფექტს ვერ შევამჩნევთ.

მეზონის სიცოცხლის საშუალო ხანგრძლივობა. განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი მეზონის სიცოცხლის ხანგრძლივობის დამოკიდებულებისა იმაზე, სიცოცხლის ხანგრძლივობას ვზომავთ უძრავ სისტემაში თუ მეზონთან უძრავად დაკავშირებულ მოძრავ სისტემაში. ბუნებაში მრავლად გვხვდება არასტაბილური სისტემები, რომლებიც "ცოცხლობენ" გარკვეულ დროს, შემდეგ კი "კვდებიან" - სხვა სისტემებად გარდაიქმნებიან. ასეთებია, მაგალითად, რადიოაქტიური ატომგულები და ზოგიერთი ელემენტარული ნაწილაკი. მაგალითად, ნეიტრონი თავისუფალ მდგომარეობაში წარმოადგენს არასტაბილურ ნაწილაკს, იგი გარდაიქმნება პროტონად, ელექტრონად და ანტინეიტრონოდ.

$$n \rightarrow p + t + \bar{\nu}. \quad (18.9)$$

ასეთივე არასტაბილური ნაწილაკებია მეზონები. მაგალითად, ე.წ. π^+ მეზონი, რომლის მასა 273 ელექტრონის $m_e = 9,110^{-28}$ გ მასის ტოლია, გარდაიქმნება μ^+ მეზონად, რომლის მასაა 215 m_e და ნეიტრინოდ, რომლის უძრავობის მასა ნულის ტოლია, შემდეგი სქემით:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu. \quad (18.10)$$

მაშასადამე, π^+ მეზონი ნარმოქმნის შემდეგ "ცოცხლობს" გარკვეულ დროს, შემდეგ კი იშლება. ანალოგიურად იშლება μ^+ მეზონიც და ა.შ.

აღმოჩნდა, რომ არც რადიოაქტიური ატომგულების და არც ელემენტარული ნაწილაკების დაშლა დაჯოკიდებული არ არის წინა ისტორიაზე და ხდება ალბათობრივი კაჩონით, გარეშე პირობების ჩაურევლად.

ეთქვათ, დროის t მომენტისათვის გვექონდა $N(t)$ არასტაბილური ნაწილაკი. ალბათობა იმისა, რომ dt ინტერვალში მოხდება ამ ნაწილაკების დაშლა, პროპორციულია dt -სი, ე.ი. თუ N არის იმ ნაწილაკთა რიცხვი, რომლებიც არ დაშლილან t დროში, მაშინ ნაწილაკების რიცხვი, რომლებიც იშლება dt დროში, ტოლი იქნება

$$dN = -\frac{1}{\tau} N(t) dt. \quad (18.11)$$

მინუსი ავიღეთ იმის გამო, რომ ადგილი აქვს ნაწილაკთა რიცხვის შემცირებას. $\frac{1}{\tau}$ არის პროპორციულობის კოეფიციენტი. (18.11)-დან მივიღებთ

$$N(t) = N(0) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (18.12)$$

$N(0)$ არის არასტაბილური ნაწილაკების რიცხვი $t = 0$ მომენტში. τ -ს უწოდებენ არასტაბილური ნაწილაკის საშუალო სიცოცხლის ხანგრძლივობას ათვლის სისტემაში, სადაც არასტაბილური ნაწილაკი უძრავია. დროს, რომლის განმავლობაშიც დაიშლება t დროის მომენტისათვის არსებული დაუშლელი ნაწილაკების ნახევარი, უწოდებენ დაშლის ნახევარ პერიოდს და აღწვინავენ T -თი. (18.12) ფორმულიდან გვექნება:

$$\frac{N(T)}{N(0)} = \frac{1}{2} e^{-\frac{T}{\tau}},$$

სადაც $T = \tau \ln 2$

ასე, მაგალითად, თუ დროის რაიმე მომენტში გვექონდა 1000 მეზონი, მაშინ T დროის შემდეგ საშუალოდ დაუშლელი დაგვრჩება 500, შემდეგი T დროის გავლისას - 250 და ა. შ.

ზემოთ განხილულის თანახმად, დაშლის სიცოცხლის ხანგრძლივობის საშუალო მნიშვნელობა მოძრავ სისტემაში სხვა იქნება, კერძოდ,

$$t' = \frac{\tau}{\sqrt{1-p^2}}, \quad (p = \frac{v}{c}), \quad (18.13)$$

სადაც v არის ნაწილაკის სიჩქარე. რადგან τ და t' დროები ერთმანეთისაგან განსხვავდება, ამიტომ დაშლამდე მათ მიერ განვლილი გზა სივრცეში სხვადასხვა იქნება. კერძოდ, ცნობილია, რომ π^+ მეზონის სიცოცხლის ხანგრძლივობა, როცა იგი ნივთიერებაში გავლისას ჩერდება, ტოლია $2 \cdot 10^{-8}$ სექ. ეს არის სწორედ მისი საკუთარი დრო. ამ დროის განმავლობაში მას შეუძლია გაირბინოს ჰაერში მაქსიმუმ $2 \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^{10} = 600$ სმ მანძილი, რადგან c არის π^+ მეზონის შესაძლო სიჩქარის მაქსიმალური მნიშვნელობა. ექსპერიმენტზე კი π^+ მეზონის საშუალო განარბენი გაცილებით მეტია, რამდენადაც მისი საშუალო სიცოცხლის ხანგრძლივობა უძრავ ათვის სისტემაში გაცილებით მეტია, ვიდრე საკუთარი სიცოცხლის ხანგრძლივობა, ე.ი. სიცოცხლის ხანგრძლივობა π^+ მეზონთან უძრავად დაკავშირებულ მოძრავ სისტემაში.

საათების (ან ტყუპების) პარადოქსი. დაუშვათ, რომ K სისტემის სათავეში ვვაქვს ორი საათი A და B , რომლებიც ზუსტად ერთსა და იმავე დროს უჩვენებს. დაუშვათ, $t = 0$ მომენტში B საათმა მოძრაობა დაიწყო x ღერძის გასწვრივ მუდმივი v სიჩქარით. A საათის მიხედვით $t = t_0$ დროის გავლის შემდეგ B საათი აღმოჩნდება x_0

ნერტილში და, თანახმად (18.1) ფორმულისა, იგი გვიჩვენებს $t_0 \sqrt{1-\beta^2}$

დროს. ვთქვათ, ამ ნერტილიდან B საათი იწყებს იგივე სიჩქარით, ოღონდ შებრუნებული მიმართულებით მოძრაობას და A საათის მიხედვით $t_1 = 2t_0$ დროში დაბრუნდება K სისტემის სათავეში. რადგან დროის მიმდინარეობა დამოკიდებული არ არის სიჩქარის ნიშანზე

(ფორმულაში შედის v^2), ამიტომ K სისტემის სათავეში დაბრუნებისას B საათი გვიჩვენებს $t_2 = 2t_0 \sqrt{1-\beta^2}$ დროს, საიდანაც დავასკვნით, რომ

საათების ჩვენებაში წარმოიქმნება სხვაობა

$$l_2 = l_1 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (18.14)$$

ამ სხვაობას ვიპოვით A და B საათების შედარებით.

აინშტაინმა მიუთითა, რომ აქ ჩატარებული მსჯელობა ნარმოქმნის "პარადოქსს", რომელიც შემდგომში ცნობილი გახდა, როგორც "საათების პარადოქსი" და რომელმაც დიდი როლი შეასრულა რელატივისტური მექანიკის არსის საბოლოოდ გარკვევის საქმეში.

პარადოქსის შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს. ვთქვათ, B საათთან დაკავშირებულია ათვლის ინერციული სისტემა K' . A საათის მოძრაობა K' სისტემის მიმართ სრულიად ისეთივეა, რაც B საათის მოძრაობა K -ს მიმართ. ამიტომ ბუნებრივია მოველოდეთ, რომ პროცესის დასასრულს A და B საათების ხელახლა შეხვედრისას, წინააღმდეგ (18.14) ფორმულისა, ჩადორჩენილი იყოს A საათი. პარადოქსი სწორედ ის არის, რომ გაუგებარია, რომელი საათი რომელს უნდა ჩამორჩებოდეს. საათების პარადოქსი რომ უფრო მძაფრი გავხადოთ, გადავიტანოთ იგი ტყუპებზე. უპირველეს ყოვლისა, არ უნდა გვეგონოს, რომ დროის შენელება დაკავშირებულია მხოლოდ საათებთან. დროის შენელებას ადგილი ექნება ნებისმიერ პროცესში, რომელიც მიმდინარეობს როგორც არაორგანულ, ისე ორგანულ სამყაროში, რამდენადაც ნებისმიერი მოძრაობა ფიზიკის კანონებს ემორჩილება. თუ ბიოლოგიურ ორგანიზმს რაიმე სხვა განსაკუთრებულობა არ ახასიათებს, რომლის შესახებ ჩვენ დღემდე არაფერი ვიცით, მაშინ ცოცხალი ორგანიზმისათვის დროის შენელება მოძრავ სისტემაში უნდა წარმოადგენდეს ნებისმიერი ბიოლოგიური პროცესის ნელა მიმდინარეობას, მაგალითად, გულის ნელა ცემას, ნელ მოსაზრებულობას და, რაც მთავარია, ნელა დაბერებას. ამიტომ, თუ ტყუპის ცალს გაუშვებთ სწრაფი რაკეტით სამყაროში სამოგზაუროდ, მაშინ იგი გაცილებით ახალგაზრდა იქნება თავის ტყუპის ცალთან შედარებით, რომელიც დედამიწაზე დარჩა. ამავე დროს, კოსმონავტი ტყუპის ცალი მით უფრო ახალგაზრდა დაბრუნდება, რაც უფრო დიდი სიჩქარით მოძრაობდა მისი კოსმოსური ხომალდი. კოსმოსური ხომალდის დედამიწაზე დაბრუნებისას შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ "დედამიწის თვალსაზრისით" გასულია ასეული და შესაძლებელია ათასეული წლებიც. "საათების პარადოქსის" ენაზე გაუგებარია, რომელი ტყუპის ცალი იქნება უფრო ახალგაზრდა სინამდვილეში.

ეს "პარადოქსი" მაშინვე იქნა ახსნილი აინშტაინის მიერ. საქმე ის არის, რომ ფარდობითობის სპეციალურ თეორიაში ეკვივალენტობის პრინციპი არსებობს მხოლოდ ინერციულ, ათვლის სისტემებს შორის. K'

სისტემა კი არ არის ინერციული, რამდენადაც საათების შე-
სადარებლად საჭიროა იგი დავაბრუნოთ და შევახვედროთ K სისტემას,
რისთვისაც აუცილებელი იქნება სიჩქარის შეცვლა \mathcal{U} -თი. მართლაც,
მოძრავი B -საათი რომ შევადაროთ უძრავს, საჭიროა იგი შევაჩეროთ
ან, უფრო ადვილია, დავაბრუნოთ და შევახვედროთ A საათს. ის, რომ
სწორედ B საათი უნდა აჩქარდეს, აშკარაა, რამდენადაც იგი უნდა
მოვაბრუნოთ, ეს დაკავშირებულია აჩქარებასთან. ამიტომ ყოველთვის
შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ის საათი უჩვენებს ნაკლებ დროს,
რომელმაც აჩქარება განიცადა. ამ თვალსაზრისით, დროის შენელების
შემონშება შეიძლება შემდეგნაირად: A საათი უძრავად დავტოვოთ,
ხოლო B საათი ხელახლა შევადაროთ A -ს წრიული მოძრაობის
შესრულების შემდეგ. ჩამორჩენილი იქნება სწორედ ის საათი,
რომელიც წრეზე მოძრაობდა. ტყუპების შემთხვევაში კი უფრო
ახალგაზრდა იქნება ის ტყუპის ცალი, რომელსაც მოუხდა აჩქარებული
მოძრაობა.

აჩქარებული მოძრაობა შეგვიძლია გამოვრიცხოთ, თუ ორის
ნაცვლად განვიხილავთ სამ ტყუპს. ამ სამი ტყუპიდან ერთი რჩება
დედამინაზე, O ნერტილში, მეორე მიფრინავს კოსმოსში მუდმივი
სიჩქარით და უკან აღარ ბრუნდება, ხოლო მესამე მოძრაობს მეორის
სანინაალმდეგო მიმართულებით და მეორეს ხვდება რაიმე a
ნერტილში. პირველი და მეორე ტყუპის ცალები თავის საათებს ერთსა
და იმავე დროზე აყენებენ საწყის მომენტში O ნერტილში. მეორე და
მესამე ტყუპის ცალები თავის საათებს ადარებენ შეხვედრის a
ნერტილში, ხოლო მესამე და პირველი თავის საათებს ადარებენ O
ნერტილში შეხვედრისას.

აჩქარებული ათვის სისტემებისათვის დროის ინტერვალის
შემოკლების ფორმულის გამოყვანა ფარდობითობის სპეციალური
თეორიის ჩარჩოებში შეუძლებელია. ეს უკანასკნელი გვიჩვენებს, რომ
საჭიროა ფარდობითობის თეორიის შემდგომი განვითარება, რომელიც
განიხილავს ნებისმიერად მოძრავ კოორდინატთა სისტემებს. ასეთი
თეორია, როგორც ადრე აღვნიშნეთ, აინშტაინმა ჩამოაყალიბა 1916
წელს. მას ფარდობითობის ზოგადი თეორია ეწოდება. შევნიშნოთ, რომ
ამ თეორიის მიხედვით მკაცრად მტკიცდება, რომ ჩამორჩება სწორედ
 B საათის ჩვენება და არავითარი "საათების პარადოქსი" არ არსებობს.

მოძრაობა კოსმოსურ სამყაროში. მოძრავ სისტემაში დროის
შენელებასთან დაკავშირებულია სამყაროს უშორესი ნერტილების
ათვისების საინტერესო პერსპექტივა. დავუშვათ ჯერ, რომ დროის
შენელებას ადგილი არა აქვს. მაშინ ადამიანი, მისი შეზღუდული

სიცოცხლის T ხანგრძლივობის გამო, დედამიწას დაცილდებოდა (უკან დაბრუნებით!) მაქსიმუმ $\frac{1}{2}cT$ მანძილით. თუ ადამიანის სიცოცხლის საშუალო ხანგრძლივობად 100 წელს ავიღებთ, მაშინ ადამიანი ერთი მიმართულებით უკეთეს შემთხვევაში გაივლიდა მანძილს, რომელიც 50 სინათლის წლით განისაზღვრება. ეს იმას ნიშნავს, რომ იგი ვერასოდეს გასცილდებოდა სფეროს, რომლის რადიუსია 50 სინათლის წელი. ეს კი იმას გვიჩვენებს, რომ ადამიანისათვის მიუწვდომელი იქნებოდა ჩვენი გალაქტიკის უდიდესი ნაწილიც კი. სულ სხვა მდგომარეობას აქვს ადგილი, როცა გავითვალისწინებთ მოძრავ სისტემაში დროის შენელებას. მოვი(ჯანოთ) საინტერესო მაგალითი კოსმოსური სხივების ფიზიკიდან კოსმოსურ სხივებში ხშირად გვხვდება ფანტასტიკური ენერჯიის ნაწილაკები. მაგალითად, არის შემთხვევები, როცა პროტონის ენერჯია $E_p = 10^{10} \text{ GeV}$ ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს ულტრარელატივისტურ მოძრაობასთან და $E_p = cp$, სადაც p რელატივისტური იმპულსია. ადვილია ჩვენება, რომ

$$\frac{v^2}{c^2} \approx 1 - \left(\frac{m_p c^2}{E_p} \right)^2 = 1 - 10^{-20}, \quad (18.15)$$

სადაც m_p პროტონის მასაა. ე.ი. ასეთი ენერჯიების დროს პროტონის სიჩქარე სინათლის სიჩქარისაგან განსხვავდება მხოლოდ მეოცე ნიშნის სიზუსტით. ამიტომ უძრავი დამკვირვებლის მიმართ პროტონი გალაქტიკას გაივლიდა 10^5 წელში. მაშინ, როცა პროტონთან უძრავად დაკავშირებულ სისტემაში ამისათვის საჭირო იქნებოდა

$$\tau = \frac{10^{-5} \text{წელი}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 10^{-5} \text{წელი} \approx 5 \text{წუთი}. \quad (18.16)$$

როგორც ვხედავთ, განსხვავება დროებში ფანტასტიკურია. მაშასადამე, თუ ჩვენ მივალწევთ სიჩქარეებს, რომლებიც (18.15) ფორმულით გამოიხატება და ასეთ სიჩქარეს მივანიჭებთ კოსმოსურ ხომალდს, მაშინ კოსმონავტს თავისი სიცოცხლის ხანგრძლივობა ეყოფა იმისათვის, რომ მოინახულოს სამყაროს ნებისმიერად დაშორებული ნერტილები. ეს ამოცანა განსაკუთრებულად ადვილად გადაწყდება, თუ კოსმონავტი იმოდრავებს ე.წ. ფოტონური რაკეტით, რომელიც მოძრაობს თითქმის სინათლის სიჩქარით. სამწუხაროდ, ფოტონური რაკეტით მოძრაობა თანამედროვე ტექნიკის დონისათვის

მიუღწეველ ოცნებას წარმოადგენს. დღეს ჩვენთვის სრულიად უცნობია ენერჯის ის წყარო, რომლის საშუალებით შევძლებდით კოსმოსური ხომალდის ამოძრავებას c -ს მახლობელი სიჩქარით. დღეისათვის ადამიანის ასეთი დიდი სიჩქარეებით მოძრაობა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც აზრობრივი ექსპერიმენტი, რომელიც გაბედული ფანტაზიის ერთობ დიდ შესაძლებლობებს გვისახავს.

§ 19. ლორენცის შემოკლება

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ლორენცის გარდაქმნებიდან გამომდინარეობს სხეულის ზომების შემცირება მოძრაობის მიმართულების გასწვრივ. ამ შემცირებას ლორენცის შემოკლებას უწოდებენ. ავიღოთ მყარი ეროჯანზომილებიანი ღერო, რომელიც უძრავად მოვათავსოთ მოძრავი K' სისტემის x' ღერძზე. მისი ზომა იყო l_0 . ცხადია, რომ l_0 სიგრძე ტოლი იქნება მისი ბოლო ნერტილების კოორდინატების სხვაობის, ე.ი.

$$l_0 = x'_2 - x'_1.$$

რადგან l_0 ღერო K' სისტემაში უძრავია, ამიტომ ამ ბოლო ნერტილების კოორდინატების გაზომვა შეიძლება მოვახდინოთ დროის ნებისმიერ მომენტში. სიგრძეს, რომელიც აქვს ღეროს იმ სისტემაში, სადაც იგი უძრავია, საკუთარ სიგრძეს უწოდებენ. ჩვენს შემთხვევაში l_0 იქნება სწორედ საკუთარი სიგრძე.

გამოვარკვიოთ, როგორი იქნება ღეროს სიგრძე უძრავ K სისტემაში. ამ სისტემაშიაც ღეროს სიგრძე განისაზღვრება ბოლო ნერტილების კოორდინატების სხვაობით $l = x_2 - x_1$, სადაც x_1 და x_2 განიმარტება ლორენცის გარდაქმნებით:

$$x'_1 = \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\beta = \frac{V}{c}). \quad (19.1)$$

ამ ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$(x'_2 - x'_1) = \{(x_2 - x_1) + V(t_2 - t_1)\} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (19.2)$$

აღვნიშნოთ, რომ რადგან უძრავი K სისტემის მიმართ ღერო მოძრაობს, ამიტომ ღეროს ბოლო ნერტილები აუცილებელია ავიღოთ დროის ერთსა და იმავე $t_2 = t_1$ მომენტში. მაშასადამე, საბოლოოდ

გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

ან, თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ შემოღებულ აღნიშვნებს, შეგვიძლია დავწეროთ

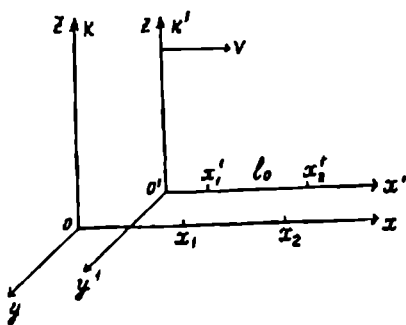
$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (19.3)$$

ე.ი. ამ ათვლის სისტემაში, რომლის მიმართ ღერო მოძრაობს, მისი სიგრძე მოძრაობის მიმართულებით საკუთარ l_0 სიგრძესთან შედარებით მცირდება $\sqrt{1 - \beta^2}$ სიდიდით.

რაც შეეხება განივ ზომებს, ისინი სიჩქარეზე დამოკიდებულნი არ არიან, ამიტომ ერთიდან მეორე ინერციულ სისტემაზე გადასვლისას არ იცვლებიან:

$$y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1 \quad \text{და} \quad z_2 - z_1 = z'_2 - z'_1.$$

ამგვარად, სხეულის ნრფივი ზომები ფარდობითი ყოფილა. მათ მაქსიმალური მნიშვნელობა აქვთ სისტემაში, სადაც ისინი უძრავი არიან.



ნახ.16.

მიუეთითოთ, რომ ლორენცის შემოკლება კინემატიკური ეფექტია. ეს შემოკლება არ არის გამონეული რალაც გასწვრივი ძალების მოქმედებით.

მცირე სიჩქარეების შემთხვევაში, ($v \ll c$). (19.3)-დან გვექნება

$$l = l_0 \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2 + \dots\right) \approx l_0. \quad (19.4)$$

რადგან ლორენცის გარდაქმნების დროს განივი მანძილები არ

იცვლება, ამიტომ სხეულის მოცულობა მოძრავ სისტემაში მცირდება იმავე ფაქტორით

$$V = V_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (19.5)$$

სადაც V_0 არის საკუთარი მოცულობა, ე.ი. მოცულობა იმ ათვლის სისტემაში, სადაც სხეული უძრავია.

მასშტაბების შემცირება ნმინდა რელატივისტური ეფექტია, იგი არავითარ როლს არ ასრულებს ყოველდღიურ ცხოვრებაში, რამდენადაც საქმე გვაქვს მცირე სიჩქარეებთან. მართლაც, ვთქვათ, ერთი მეტრი

სიგრძის სახაზავს ჩაუარა დამკვირვებელმა, რომლის სიჩქარეა

$$v = 30 \frac{მ}{ს/კ}, \text{ მაშინ სახაზავის სიგრძე მისთვის ტოლი იქნება}$$

$$l = (100სმ)\sqrt{1 - 10^{-14}} = 100(1 - \frac{1}{2}10^{-14} + \dots)სმ = 99,9999999999995სმ,$$

ე.ი. პრაქტიკულად მასშტაბის შემცირება არ ხდება. ხოლო, თუ მაგალითად, სიჩქარე $\frac{3}{5}c$ -ს ტოლი იქნებოდა, მაშინ

$$l' = 100\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}სმ = 80სმ.$$

მასშტაბის ასეთი შემცირება კი ადვილი შესამჩნევია.

ფარდობითობის თეორიის ახალ ცნებებს შეუჩრეველი ადამი-ანი ხშირად კითხულობს ხოლმე, "მანც რა რეალური სიგრძე აქვს" ამა თუ იმ ობიექტს? საქმე ის არის, რომ ფარდობითობის თეორიაში ასეთ შეკითხვას აზრი არა აქვს. ღეროს სიგრძე დამოკიდებულია ათვლის სისტემაზე. სხვადასხვა ათვლის სისტემაში მას სხვადასხვა სიგრძე ექნება იმისდა მიხედვით, თუ როგორი სიჩქარით მოძრაობს იგი. ზოგჯერ, ასევე კითხულობენ, ხომ შეიძლება ღეროს სიგრძე ნულის ტოლი გავხადოთ და, მაშასადამე, ნივთიერება გავაქროთ, თუკი ღეროს ავამოძრავეთ c სიჩქარით? საქმე ის არის, რომ ფარდობითობის თეორიაში შეუძლებელია სხეულის მოძრაობა c სიჩქარით. ასე რომ, ნივთიერებას გაქრობის საშიშროება არ ემუქრება.

ახლა განვიხილოთ მასშტაბების შემცირების მაგალითი მიკროსამყაროდან. ამ მიზნით ჩავატაროთ შემდეგი აზრობრივი ექსპერიმენტი. განვიხილოთ π^+ მეზონი, რომელიც v სიჩქარით მოძრაობს ატმოსფეროში. გამოვთვალოთ რამდენ ატომს შეხვდება იგი ატმოსფეროში l მანძილის გავლისას (მთელი) თავისი სიცოცხლის განმავლობაში. გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ π^+ მეზონი ხვდება ჰაერის ყველა ატომს, რომელიც მოთავსებულია $1სმ^2$ ფუძისა და l სიგრძის სვეტში.

გამოანგარიშება მოვახდინოთ ორი დამკვირვებლისათვის: ერთი, რომელიც იმყოფება π^+ მეზონთან უძრავად დამაგრებულ ათვლის

სისტემაში და მეორე, რომელიც ლაბორატორიაში იმყოფება უძრავად განხილული სვეტის მიმართ.

ცხადია, რომ ორივე დამკვირვებლის შედეგი ერთი და იგივე უნდა იყოს, რამდენადაც ორივე თვლის ჰაერის სვეტის ერთსა და იმავე ატომებს, მაგრამ ამ შედეგს ეს ორი დამკვირვებელი მიიღებს სხვადასხვა გზით. თანახმად ლაბორატორიაში მყოფი დამკვირვებლისა, π^+ მეზონის მიერ განვლილი გზა მეზონის სიცოცხლის განმავლობაში ტოლი იქნება

$$l = v\tau, \quad (19.6)$$

სადაც v არის π^+ მეზონის სიჩქარე, τ - მისი სიცოცხლის ხანგრძლივობა. მაგრამ მოძრავი π^+ მეზონის სიცოცხლის ხანგრძლივობა ტოლია

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (19.7)$$

სადაც τ_0 არის უძრავი მეზონის სიცოცხლის ხანგრძლივობა.

(19.6)-ის თანახმად, π^+ მეზონის მიერ განვლილი გზა ტოლი იქნება

$$l = \frac{\beta c \tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (19.8)$$

განხილულ სვეტში ატომების რაოდენობა ტოლია

$$N = nl = \frac{\beta c \tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} n, \quad (19.9)$$

სადაც n არის ჰაერის ატომების კონცენტრაცია.

ატომების იგივე რიცხვი გამოვთვალოთ მეორე დამკვირვებლისათვის, რომელიც იმყოფება π^+ მეზონთან დაკავშირებულ სისტემაში. ამ დამკვირვებლის თვალსაზრისით, π^+ მეზონის მთელი სიცოცხლის τ_0 განმავლობაში სვეტის ჰაერის ატომები მოძრაობენ v სიჩქარით. ამიტომ τ_0 დროში π^+ მეზონს ჩაუვლის ჰაერის სვეტი, რომლის l' სიგრძე, (20.3)-ის თანახმად, ტოლი იქნება

$$l' - v\tau_0 = \beta c \tau_0 = l\sqrt{1-\beta^2}, \quad (19.10)$$

ე.ი. l' -ზე ნაკლები იქნება $\frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}$ -ჯერ.

ჰაერის ატომების რაოდენობა l' სვეტში ტოლი იქნება

$$N' = n'l', \quad (19.11)$$

სადაც n' არის ჰაერის ატომების კონცენტრაცია π^* მეზონთან უძრავად დაკავშირებული დამკვირვებლის თვალსაზრისით. მაგრამ, ცხადია, რომ $N = N'$, ამიტომ,

$$nl = n'l' = n' \sqrt{1 - \beta^2} \quad (19.12)$$

მაშასადამე,

$$n' = \frac{n}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma n. \quad (19.13)$$

ამგვარად, იმისათვის, რომ ჰაერის სვეტის ატომების რიცხვი დამოკიდებული არ იყოს იმაზე, თუ რომელი დამკვირვებელი თელის ამ ატომებს, ლაბორატორიაში მყოფი თუ π^* მეზონთან ერთად მოძრავი, საჭიროა π^* მეზონთან ერთად მოძრავი დამკვირვებლისათვის ჰაერის სვეტის სიგრძე γ -ჯერ ნაკლები იყოს და აგრეთვე γ -ჯერ უფრო მკვრივი, ვიდრე ლაბორატორიაში მყოფი დამკვირვებლის თვალსაზრისით. ეს არის სწორედ მოძრავი სხეულის შემოკლება სისტემის მოძრაობის მიმართულებით. ამასთან, საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ, როგორც ზემოთ დავინახეთ, ლორენცის შემოკლებას და დროის მსვლელობის შენელებას ერთმანეთთან ღრმა ფიზიკური კავშირი აქვს.

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ სივრცისა და დროის მასშტაბების შემოკლება არ არის მოულოდნელი შედეგი. იგი ავტომატურად გამომდინარეობს იმ დაშვებიდან, რომ სინათლის c სიჩქარე ყველა ინერციულ სისტემაში ერთი და იმავე სიდიდის ტოლია. თუ ფარდობითობის თეორიაში კიდევ რაიმეა დაუჯერებელი, ესაა სინათლის სიჩქარის ინვარიანტობა. ეს უკანასკნელი კი, როგორც დავინახეთ, ექსპერიმენტული ფაქტია.

§ 20. მაიკელსონ-მორლის ექსპერიმენტის შედეგების ახსნა ფარდობითობის თეორიით

აეხსნათ მაიკელსონ-მორლის ექსპერიმენტის უარყოფითი რეზულტატი აინშტაინის ფარდობითობის თეორიაზე დაყრდნობით. განვიხილოთ უძრავი K ინერციული სისტემა, რომლის მიმართ დედამინა მოძრაობს v სიჩქარით. K' სისტემა დავაკავშიროთ დედამინასთან და ისიც ინერციულად ჩავთვალოთ. ბუნების მოვლენების ინვარიანტობის გამო, თუ ჩვენ მაიკელსონ-მორლის უარყოფითი შედეგი აეხსენით K სისტემაში, მაშინ იგივეს ექნება ადგილი დედამინაზე მყოფი დამკვირვებლისათვისაც. კერძოდ, მაიკელსონის ინ-

ტერფერომეტრის შემობრუნებამ არ უნდა გამოიწვიოს ინტერფერენციული ზოლების ნანაცვლება არც K და არც K' სისტემაში.

ამგვარად, განვიხილოთ K სისტემა, რომლის მიმართ, როგორც მაიკელსონ-მორლის ექსპერიმენტის განხილვის დროს ვაჩვენეთ, სხივებს მხრების გასავლელად და უკან დასაბრუნებლად შესაბამისად სჭირდებოდათ დრო:

$$t_{s_1} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1-\beta^2} \quad (20.1)$$

და

$$t_{s_2} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (20.2)$$

ეს ფორმულები არ ითვალისწინებენ ფარდობითობის თეორიის შედეგებს, კერძოდ, იმ გარემოებას, რომ დროის ინტერვალები და მასშტაბები სხვადასხვაა მოძრავი და უძრავი ათვლის სისტემების მიმართ. სიმარტივისათვის ვიგულისხმობთ, რომ მხრების სიგრძეები ერთმანეთის ტოლია და დედამიწასთან დაკავშირებულ ათვლის K' სისტემაში l_0 -ის ტოლია, ე.ი. $l_1 = l_2 = l_0$, ე.ი. ჩვენ მიერ წინა პარაგრაფში გამოყვანილი (18.3) ფორმულის თანახმად, K სისტემაში მოძრაობის გასწვრივ მხარის სიგრძე ტოლი იქნება

$$l_1 = l_0 \sqrt{1-\beta^2}; \quad (20.3)$$

განივი მხარის სიგრძე კი არ შეიცვლება

$$l_2 = l_0. \quad (20.4)$$

სრულიად ანალოგიურად, დროის ინტერვალები K სისტემის მიმართ გაზრდილი იქნება $\gamma(v)$ -ჯერ და ისინი გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$t_{s_1} = \frac{t_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_{s_2} = \frac{t_2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (20.5)$$

სადაც t_1 და t_2 სხივების გავრცელების დროებია K' სისტემაში მოთავსებული საათების მიხედვით.

(20.5) ფორმულების ჩასმით (20.1) და (20.2) ფორმულებში და (20.3) და (20.4) გამოსახულებების გათვალისწინებით, ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$t_1 = \frac{2l_0}{c}, \quad t_2 = \frac{2l_0}{c}, \quad (20.6)$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ $t_1 = t_2$, ე.ი. სხივები ორივე მხარს გაივლიან ერთსა და იმავე დროში. ამასთან, ეს შედეგი არ შეიცვლება, როგორც არ უნდა ვაბრუნოთ მაიკელსონის დანადგარი. თავის მხრით, ეს გარემოება ამტკიცებს, რომ K სისტემაში ინტერფერენციული ზოლების არაერთნაირ ნანაცვლებას ადგილი არ ექნება. ზემოთქმულის ძალით კი ასეთივე უარყოფითი რეზულტატი გვექნება K' სისტემაშიც, ე.ი. დე-დამინაზე მყოფი დამკვირვებლისათვის. ამგვარად, ფარდობითობის თეორიის თანახმად, სრულიად ბუნებრივად აიხსნება მაიკელსონ-მორლის ექსპერიმენტის უარყოფითი შედეგი.

§ 21. რელატივისტური ერთეულები

ამ თავის დასასრულს განვიხილოთ ერთი საკითხიც, რომელიც შეეხება სივრცისა და დროის საზომ ერთეულებს. რელატივისტური მექანიკის ყველა ფორმულაში სივრცული და დროითი კოორდინატები სრულიად ეკვივალენტურად მონაწილეობენ. უფრო მეტიც, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ რელატივისტურ თეორიაში დრო გადაიქცა სივრცედ და, პირიქით, სივრცე შეგვიძლია ნარმოვიდგინოთ დროის სახით. ამიტომ სავსებით ბუნებრივია ისინი ერთსა და იმავე ერთეულებში გავზომოთ. ასე, მაგალითად, ჩვენ შეგვიძლია, როგორც დრო, ისე სივრცე, გავზომოთ სანტიმეტრებში, ისევე როგორც ორივეს გაზომვა შეიძლება სეკუნდებში.

$x_0 = ct$ კოორდინატს აქვს მანძილის განზომილება, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ სეკუნდა არის ის მანძილი, რომელსაც სინათლის სხივი გაივლის ერთ სეკუნდში, ე.ი. სეკუნდა არის $3 \cdot 10^{10}$ სმ მანძილი. მაშასადამე, თუ მანძილსა და დროს გავზომავთ სეკუნდებში, მაშინ სიგრძის ერთეული იქნება $3 \cdot 10^{10}$ სმ. პირიქითაც, ჩვენ შეგვიძლია დრო გავზომოთ სანტიმეტრებში. ვიპოვოთ, რისი ტოლია დროის სანტიმეტრი. დროის სანტიმეტრი ესაა ის დრო, რომელშიაც სინათლე

გადის ერთ სანტიმეტრ მანძილს, ე.ი. $\frac{1}{3} \cdot 10^{-10}$ სეკ. მაშასადამე, თუ ჩვენ ავიღებთ ისეთ ერთეულთა სისტემას, სადაც სინათლის სიჩქარე სივრცე-რიელში ერთის ტოლია ($c = 1$), მაშინ $x_0 = t$ და სივრცეცა და დროც განზომილი იქნება ერთი და იგივე ერთეულებით. პირობითად, ერთეულთა სისტემას, სადაც $c = 1$ ვუნოდოთ რელატივისტურ ერთეულთა სისტემა. ამ სისტემაში ყველა ფორმულა გამარტივდება, რამდენადაც უნდა დაეუშვათ $c = 1$. ასე, მაგალითად, ლორენცის გარდაქმნებისათვის გვექნება ფორმულები:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (21.1)$$

განზომილებათა მეთოდის გამოყენებით ამ ფორმულებიდან ჩვეულებრივი განზომილების მქონე სიდიდეებზე დაბრუნება არ არის ძნელი. ასე, მაგალითად, (20.1) ფორმულების ადრინდელი სახით ჩანერისათვის უნდა მოვითხოვოთ, რომ ყველა ნევრს სწორი განზომილება ჰქონდეს. კერძოდ, ფესვში ერთიანს შეიძლება დააკლდეს მხოლოდ უგანზომილებო სიდიდე, მაშასადამე, v^2 უნდა გაიყოს c^2 -ზე, vx კი უნდა ჰქონდეს დროის განზომილება, ამიტომ v უნდა გაიყოს c^2 -ზე და ა.შ.

(21.1) სახით ჩანერილ ლორენცის გარდაქმნებში დროითი და სივრცული კოორდინატები სრულიად ეკვივალენტურად შედიან. ამიტომ ეს ფორმულები არ შეიცვლება, თუ მოვახდენთ $x \leftrightarrow t$ და $x' \leftrightarrow t'$ შეცვლას.

*** ფარდობითობის თეორიის გეომეტრიული
ინტერპრეტაცია**

ლორენცის გარდაქმნებში კოორდინატები და დრო სრულიად ეკვივალენტურად მონაწილეობს და ორივე ფარდობითი სიდიდეა. ბუნებრივია ვიფიქროთ, რომ დროისა და სივრცული კოორდინატების ერთობლიობა ქმნის რალაც ერთიან ოთხგანზომილებიან "სივრცეს". ასეთ სივრცეში ყოველი წერტილის "მდებარეობა" განისაზღვრება სამი სივრცული და ერთი დროითი კოორდინატით. ამ მოსაზრებამ მინკოვსკი 1908 წელს მიიყვანა რელატივისტური მექანიკის მეტად საინტერესო გეომეტრიულ ინტერპრეტაციამდე.

ამ თავში განვიხილავთ მინკოვსკის ოთხგანზომილებიანი სივრცის ძირითად თვისებებს და ავაგებთ აინშტაინის ფარდობითობის თეორიის გეომეტრიულ სურათს. ამავე დროს, ვიგულისხმებთ, რომ მინკოვსკის სივრცის თვისებები სხვა დისციპლინაში უკვე შესწავლილი გვაქვს და ამიტომ ხშირად ზოგიერთი თვისების მხოლოდ ჩამოთვლით დაეკმაყოფილდებით.

§ 22. მინკოვსკის სივრცე

აინშტაინის ფარდობითობის თეორიის გეომეტრიული ინტერპრეტაციის მიზნით, მინკოვსკიმ შემოიღო ოთხგანზომილებიანი "მსოფლიო სივრცის" ცნება, სადაც ყოველი წერტილი ხასიათდება სამი სივრცული და ერთი დროითი კოორდინატით. ამ სივრცის ყოველი წერტილი, მაშასადამე, შეესაბამება გარკვეულ ფიზიკურ მოვლენას. ამ სივრცის წერტილის დეკარტის კოორდინატებისათვის შეგვიძლია ვისარგებლოთ ორი აღნიშვნით, ერთი მინკოვსკის-

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (\vec{r}, x_4), \quad (22.1)$$

სადაც $x_4 = ict$ ნშინდა წარმოსახვითია და, მეორე,

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (x_0, \vec{r}), \quad (22.2)$$

სადაც $x_0 = ct$ ამგვარად, (22.2) აღნიშვნა (22.1)-საგან იმით განსხვავდება, რომ აქ ყველა კოორდინატი ნამდვილია.

გავიხსენოთ ორ უსასრულოდ ახლოს მყოფ მოვლენას შორის ინტერვალის განმარტება

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (22.3)$$

იგი (22.1) მინკოვსკის კოორდინატებში ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$ds^2 = -(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2) = -dx_i^2, \quad (22.4)$$

სადაც $i=1,2,3,4$ მუნჯი ინდექსია. მაშასადამე, ჩვენ მიერ შემოღებულ მსოფლიო სივრცეში ds ინტერვალის კვადრატი ყოფილა ოთხგანზომილებიანი ელემენტარული სიგრძის კვადრატი უარყოფითი ნიშნით

$$ds^2 = -dx_i^2 = -\delta_{ik} dx_i dx_k. \quad (22.5)$$

ოთხგანზომილებიან სივრცეს, რომლის ორ უსასრულოდ მცირედ დაშორებულ ნერტილს შორის მანძილი განისაზღვრება (22.5) ფორმულით, უნოდებენ მინკოვსკის ან მსოფლიო სივრცეს. აღსანიშნავია, რომ მინკოვსკის სივრცეში ds^2 დადებითად განსაზღვრული არ არის, ამიტომ იგი წარმოადგენს ფსევდოევკლიდურ სივრცეს.

(22.3) ინტერვალის ჩასანერად შეგვიძლია გამოვიყენოთ (22.2) არსი კოორდინატებიც. ამ შემთხვევაში მინკოვსკის სივრცის მეტრიკა განისაზღვრება ფორმულით

$$+ ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (i, k = 0, 1, 2, 3), \quad (22.6)$$

სადაც g_{ik} მეტრიკულ ტენზორს ექნება შემდეგი გამოხატულება:

$$g_{ik} = g_{ik}^{-1} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (22.7)$$

ამგვარად, თუ ვისარგებლებთ არსი კოორდინატებით, მაშინ g_{ik} მეტრიკული ტენზორი აღარ არის ერთეულოვანი და ჩვენ იძულებული ვართ შემოვიღოთ კოვარიანტული და კონტრავარიანტული სიდიდეები. $x_4 = ict$ აღნიშვნის დროს კი მეტრიკული ტენზორი $g_{ik} = \delta_{ik}$ ერთეულოვანია.

აღვნიშნოთ, რომ სივრცე-დროითი გეომეტრია არ შეიცვლება, თუ (22.7) მეტრიკული ტენზორის ელემენტებს ყველას ნიშანს შევუცვლით სანინაალმდეგოთი. მაშასადამე, დეკარტის კოორდინატების გამოყენებისას გვექნება ორი შესაძლო მეტრიკული ტენზორი:

$$g_{ik}^{(+)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{ik}^{(-)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (22.8)$$

ლიტერატურაში გამოიყენებოდა ორივე ეს აღნიშვნა, მათ შორის არავითარი განსხვავება არ არის, თუმცა, გარკვეული ფორმალური უპირატესობა $g_{ik}^{(+)}$ მატრიცას გააჩნია, რამდენადაც მისგან მინკოვსკის სივრცეში ერთეულოვანი δ_{ik} მატრიცის მისაღებად საკმარისია ერთი $x_4 = icl$ წარმოსახვითი ცვლადი, მაშინ, როცა $g_{ik}^{(-)}$ -ის შემთხვევაში ამისათვის დაგჭირდებოდა სამი წარმოსახვითი კოორდინატის შემოღება.

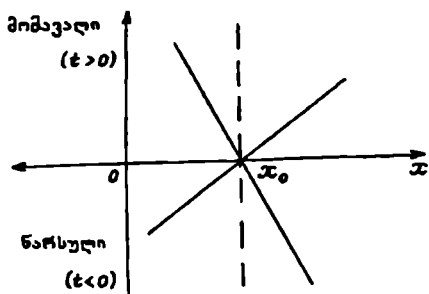
მინკოვსკის (22.1) კოორდინატებს ის უპირატესობა აქვს, რომ ფორმალურად, ფსევდოევკლიდურ სივრცეში შეგვიძლია გამოვიყენოთ ევკლიდის სივრცის ალგებრა.

სინათლის კონუსი. მინკოვსკის სივრცეში შეგვიძლია შემოვიღოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. ამ სისტემის სამი ღერძი x_1, x_2, x_3 ჩვეულებრივი სივრცის საკოორდინატო ღერძებია, მეოთხე კი დროით ღერძს წარმოადგენს; ამ ღერძის ნერტილებისათვის $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. ცხადია, ოთხგანზომილებიანი კოორდინატთა სისტემის არც წარმოდგენა და, მითუმეტეს, არც დახაზვა შეიძლება, ამიტომ გეომეტრიული ინტერპრეტაციის მიზნით, ხშირად შემოვისაზღვრებით ორგანზომილებიანი x_0 მინკოვსკის სივრცით, სადაც $\xi = ct$, რომელიც ძალიან გაგვიადვილებს ფიზიკური მოვლენების ღრმად გაგებას. $\xi = ct$ კოორდინატას გეომეტრიული სურათის აგების დროს გავაიგივებთ დროსთან, რამდენადაც რელატივისტურ მექანიკაში სივრცესა და დროს შორის არავითარი განსხვავება არ არის.

მინკოვსკის სივრცის ყოველ ნერტილს მსოფლიო ნერტილს უწოდებენ. ეს ნერტილი არ განსაზღვრავს ნანილაკის მხოლოდ მდებარეობას; ცხადია, იგი შეესაბამება გარკვეულ მოვლენას, რომელიც ხდება სივრცის განსაზღვრულ ადგილას დროის მოცემულ t მომენტში. მიუხედავად იმისა, ნანილაკი მოძრაობს თუ უძრავია სივრცეში, მასთან დაკავშირებულ მოვლენათა თანმიმდევრობას მინკოვსკის სივრცეში შეესაბამება წირი, რომელსაც მსოფლიო წირს უწოდებენ. ამასთან, უძრავი ნანილაკის მსოფლიო წირი იქნება $\xi = ct$ ღერძის პარალელური წრფე. კერძოდ, $O\xi$ დროის ღერძი იქნება მსოფლიო წრფე იმ ნერტილისა, რომელიც უძრავად დევს $x=0$ ნერტილში.

განვიხილოთ ორგანზომილებიანი მინკოვსკის სივრცე. როგორც აღვნიშნეთ, მინკოვსკის სივრცეში ყოველი ნერტილი შეესაბამება რაღაც მოვლენას. კერძოდ, მოვლენას, რომელიც მოხდა ამ სივრცის x_0 კოორდინატთა სისტემაში, რომელიც გარკვეულობის მიზნით მართკუთხად ჩავთვალოთ, $x=0$ ნერტილში და $t=0$

($\xi = 0$) დროს შეესაბამება კოორდინატთა სისტემის სათავე. x ღერძის ნერტილები აღწერენ მოვლენას, რომელიც ხდება დროის საწყის $t=0$ მომენტში და სივრცის სხვადასხვა ნერტილებში. $\xi = 0$ არის x ღერძის განტოლება, ამიტომ მას შეიძლება ეწოდოს ანმყოს ღერძი. ამ ღერძის ზემოთ მდებარე ნერტილები ($t > 0$) შეესაბამება მომავალს, ქვემოთ ($t < 0$) კი — წარსულს. საინანააღმდეგოდ დროის ღერძისა, სივრცის ღერძს და მის ყველა პარალელურ ნრფეს არ შეიძლება მსოფლიო წირი შეესაბამებოდეს. ეს იმიტომ, რომ ისინი შეესაბამებიან ერთდროულ მოვლენებს და არ არსებობს ნანილაკი, რომელიც ერთდროულად სივრცის სხვადასხვა ნერტილებში იმყოფებოდეს. ამ სწორებს უწოდებენ ერთდროულობის წირებს. $x=0$ არის ξ ღერძის განტოლება. ამ ღერძის ყველა მოვლენა ხდება



ნახ.17.

სათავეში სხვადასხვა დროს. x ღერძზე ავიღოთ რაიმე x_0 უძრავი მატერიალური ნერტილი. მას შეესაბამება $t=0$ დრო. ვიპოვოთ ამ ნანილაკის მსოფლიო წირი. თუ ეს ნანილაკი უძრავი იყო წარსულში და უძრავი რჩება მომავალშიც, მაშინ $x_0\xi$ მინკოვსკის სიბრტყეში ეს მოვლენა გამოხატული იქნება $\xi = cx$ ღერძის პარალელური ნრფით, ე.ი. აღნიშნული უძრავი ნანილაკის მსოფლიო წირი იქნება ξ ღერძის პარალელური ნრფე, რომელიც x_0 ნერტილში გადის. როცა მატერიალური ნანილაკი მოძრაობს, მისი მსოფლიო წირი, ცხადია, საზოგადოდ, ნრფე აღარ იქნება. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მატერიალური ნერტილის მოძრაობას სამ სივრცეში, მინკოვსკის სივრცეში შეესაბამება გარკვეული მსოფლიო წირი, რომლის ფორმა დამოკიდებული იქნება მოძრაობის ხასიათზე. კერძო შემთხვევაში, როცა ნანილაკი მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით, მსოფლიო წირი იქნება x ღერძის მიმართ დახრილი ნრფე. ამასთან, მსოფლიო ნრფის დახრის კუთხის ტანგენსი დადებითი იქნება, როცა ნანილაკი მოძრაობს x ღერძის დადებითი მიმართულებით და - უარყოფითი, როცა ნანილაკი მოძრაობს x ღერძის საინანააღმდეგოდ მიმართულებით.

მაგრამ მსოფლიო წირების გატარება არ შეიძლება $x_0\xi$ სიბრტყის ნებისმიერ არეში. ჩვენ ახლა ვნახავთ, რომ პირობა, რომლის

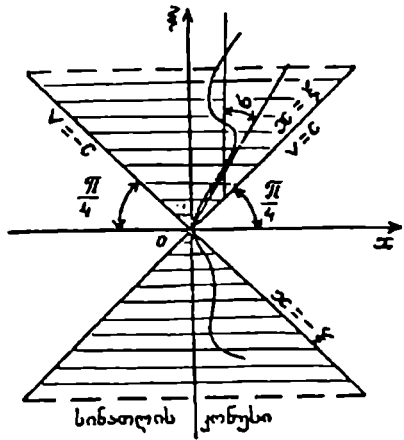
თანახმად მატერიალური ნერტილის v სიჩქარე არ შეიძლება აჭარბებდეს სინათლის სიჩქარეს, $x0\xi$ სიბრტყეს ყოფს რამდენიმე არედ, რომელთაგან ზოგი მოძრაობისათვის დასაშვებია, ზოგი კი - არა. ცხადია, რომ მსოფლიო წირის მხების მიერ ξ ღერძთან შედგენილი φ კუთხე მარტივად განისაზღვრება ფორმულით (იხ. ნახ. 18).

$$\text{tg } \varphi = \frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} = \frac{v}{c} \quad (22.9)$$

როცა $v=c$, მაშინ $\varphi = \frac{\pi}{4}$. მაშასადამე, მსოფლიო წირის მხების დახრა ნებისმიერ ნერტილში ξ ღერძთან ნაკლები უნდა იყოს $\frac{\pi}{4}$ -ზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში ნაწილაკი იმოძრაებდა c -ზე მეტი სიჩქარით.

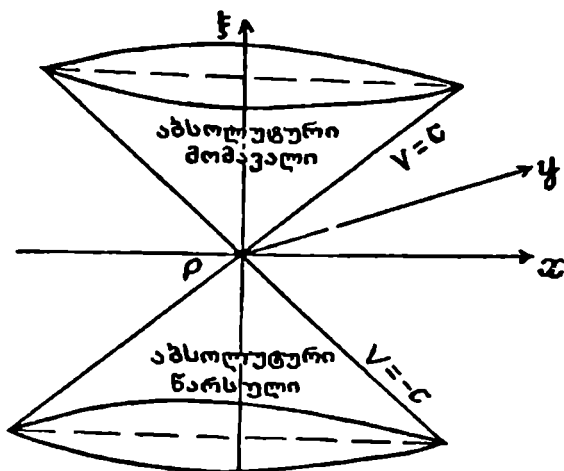
განვიხილოთ $x = \pm \xi$ წრფეები, რომელთა დახრის კუთხე ξ ღერძთან $\frac{\pi}{4}$ -ის ტოლია. ამ წრფეებს შეესაბამება ნაწილაკის მოძრაობა სინათლის სიჩქარით $v = \pm c$. $x = \pm \xi$ წრფეები წარმოადგენენ საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისებს. ამასთან, $v=c$ შეესაბამება ბისექტრისას, რომელიც გადის პირველ და მესამე კვადრანტში, ხოლო $v=-c$ შეესაბამება ბისექტრისას, რომელიც გადის მეორე და მეოთხე კვადრანტში. სიმარტივის მიზნით, შემდეგში ამ ბისექტრისებს შესაბამისად ვუნოდოთ პირველი და მეორე ბისექტრისა.

ამგვარად, სინათლის მსოფლიო წირები იქნება ბისექტრისები და, მაშასადამე, ზემოთქმულის თანახმად, დასაშვებ მოძრაობას შეესაბამება ის არე, რომელიც მდებარეობს ξ ღერძის შემცველ სინათლის მსოფლიო წრფეებს შორის. ამ არეს უწოდებენ სინათლის კონუსს. სინამდვილეში, ორგანზომილებიან შემთხვევაში აღნიშნული არე კონუსი კი არ იქნება, არამედ ამ კონუსის პროექცია $Y=0, Z=0$ სიბრტყეში. ზოგად შემთხვევაში, ოთხგანზომილებიან სივრცეში ჩვენ საქმე გვექნება სამგანზომილებიან ჰიპერზედაპირთან (კონუსი), რომლის წარ-



ნახ. 18.

მოდგენა ან დახაზვა, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, არ შეიძლება. ნამდვილ კონუსთან საქმე გვექნება, როცა X, Y კოორდინატებთან ერთად კიდევ განვიხილავთ ერთ სივრცულ კოორდინატს, მაგალითად, Z -ს (ნახ.19).



ნახ.19

სინათლის კონუსის წვერო შეესაბამება $t=0$ მომენტს, ამიტომ ნებისმიერი მსოფლიო წერტილი, რომელიც მოთავსებულია სინათლის კონუსის ქვედა ნაწილში, შეესაბამება მოვლენას, რომელიც მოხდა $t=0$ მომენტზე ადრე. ამიტომ სინათლის კონუსის ქვედა ნაწილს ($t < 0$) უწოდებენ აბსოლუტურ წარსულს. სრულიად ანალოგიურად მსოფლიო წერტილები, რომლებიც მოთავსებულია O წერტილის ზევით ($t > 0$) შეესაბამებიან მოვლენებს, რომლებიც მოხდება $t=0$ მომენტის შემდეგ. სინათლის კონუსის ზედა ნაწილს ($t > 0$) ამიტომ უწოდებენ აბსოლუტურ მომავალს (ამის შესახებ დანვრილებით იხილეთ § 28-ში).

§ 23. ლორენცის გარდაქმნები მინკოვსკის კოორდინატებში

ახლა, ლორენცის გარდაქმნები ჩვენერთ მინკოვსკის კოორდინატებში. ცხადია, რომ ლორენცის (15.13) ფორმულებს ამ კოორდინატებში ექნება შემდეგი სახე:

$$x'_1 = \frac{x_1 + i\beta x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, x'_2 = x_2, x'_3 = x_3, x'_4 = \frac{x_4 - i\beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (23.1)$$

შემოვიღოთ ასეთი აღნიშვნები:

$$ch\theta = \gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}, sh\theta = \beta\gamma = \beta(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}, i\theta = \beta, \quad (23.2)$$

სადაც $ch\theta, sh\theta$ და $i\theta$ ჰიპერბოლური ფუნქციებია. θ -ს უნოდებენ სისწრაფეს. ცხადია, რომ $ch\theta = \cos(i\theta), sh\theta = -i\sin(i\theta), i\theta = -i\text{tg}(i\theta)$, მაშინ ლორენცის გარდაქმნები მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \cos(i\theta)x_1 + \sin(i\theta)x_4, \\ x'_2 &= x_2, \\ x'_3 &= x_3, \\ x'_4 &= -\sin(i\theta)x_1 + \cos(i\theta)x_4, \end{aligned} \quad (23.3)$$

რომელიც შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც მინკოვსკის ოთხგანზომილებიან სივრცეში სათავეს ირგვლივ x_1x_4 სიბრტყეში მობრუნება წარმოსახვით $i\theta$ კუთხეზე. მაშასადამე, K' სისტემის სათავეს გადატანას x ღერძის გასწვრივ v სიჩქარით, შეესაბამება x_1x_4 სიბრტყეში მობრუნება წარმოსახვით $i\theta$ კუთხეზე.

ცხადია, რომ (23.1) წარმოადგენს წრფივ ორთოგონალურ გარდაქმნას, რომლის შესაბამის მატრიცას აქვს სახე

$$A(v) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (23.4)$$

ამ გარდაქმნის მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტი $\Delta(\theta) = 1$. მართლაც,

$$\Delta(\theta) = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = 1. \quad (23.5)$$

(23.1)-ს უნოდებენ ლორენცის კერძო გარდაქმნას, რამდენადაც იგი შეესაბამება K' სისტემის მოძრაობას x_1 ღერძის გასწვრივ; ზოგად შემთხვევაში, მინკოვსკის სივრცეში, ლორენცის გარდაქმნები გამოხატული იქნება ზოგადი სახის წრფივი ორთოგონალური გარდაქმნებით

$$x'_i = a_{ik}x_k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \quad (23.6)$$

ეს გარდაქმნები მინკოვსკის სივრცეში ინვარიანტულს ტოვებს $x_i^2 = -s^2$ "სიგრძეს", ამიტომ a_{ik} აკმაყოფილებს ორთო-ნორმირების შემდეგ პირობებს:

$$a_{ik}a_{kj} = a_{ki}a_{ji} = \delta_{kj} \cdot (i, k = 1, 2, 3, 4). \quad (23.7)$$

შემდგომში (23.6)-ს ჩვენ ლორენცის ზოგად გარდაქმნებს ვუნოდებთ. ცხადია, რომ იგი შეიცავს როგორც ყველა შესაძლო მობრუნებას მინკოვსკის $x_i x_k$ სიბრტყეში, ისე ინვერსიას. ამასთან, ინვერსიაში უნდა გავიგოთ კენტი რაოდენობის საკოორდინატო ღერძების სარკისებური არეკვლა, ე.ი. გარდაქმნა, რომლის შესაბამისი მატრიცის დეტერმინანტი მინუს ერთის ტოლია. გარდაქმნებს, რომლის შესაბამისი გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტი $\Delta = -1$, ლორენცის არასაკუთრივ გარდაქმნებს უწოდებენ, ხოლო გარდაქმნებს, რომლის შესაბამისი მატრიცის დეტერმინანტი $\Delta = +1$, ლორენცის საკუთარი გარდაქმნები ჰქვია. გავიხსენოთ, რომ ლორენცის (23.6) ზოგად გარდაქმნებში შემავალი მობრუნებანი $x_i x_k$ სიბრტყეში შეესაბამება K' სისტემის სათავის მოძრაობას V სიჩქარით x_i ღერძის გასწვრივ. ლორენცის შებრუნებული გარდაქმნები განსაზღვრული იქნება კანონით

$$x_i = a_{ji}x'_j, (i, j = 1, 2, 3, 4), \quad (23.8)$$

ე.ი. განხორციელებული იქნება შებრუნებული გარდაქმნის მატრიცით

$$\tilde{A} = A^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (23.9)$$

განვიხილოთ ლორენცის ორი თანმიმდევრული კერძო გარდაქმნა. ერთი, როცა K' სისტემა მოძრაობს K სისტემის მიმართ $v_1 = c\beta_1$ სიჩქარით, შესაბამისი გარდაქმნის მატრიცა აღვნიშნოთ $A(v_1)$ -ით. მეორე გარდაქმნა შეესაბამებოდეს K'' მესამე ათვლის სისტემის მოძრაობას K' სისტემის x'_i ღერძის მიმართ $V_2 = c\beta_2$ სიჩქარით; შესაბამისი გარდაქმნის მატრიცა აღვნიშნოთ $A(v_2)$ ით. ცხადია, რომ ნერტილის კოორდინატები K'' და K ათვლის სისტემებში (შესაბამისად x''_i და x_i) კვლავ დაკავშირებულია ლორენცის გარდაქმნებით, რომლის შესაბამისი მატრიცა ტოლი იქნება $A(v_1, v_2) = A(v_2)A(v_1)$ ნამრავლის, ე.ი.

$$A(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & 0 & i\beta_2\gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta_2\gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & i\beta_1\gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (23.10)$$

მატრიცათა გადამრავლების წესის გამოყენებით მარტივად მივიღებთ

$$A(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} (1 + \beta_1\beta_2)\gamma_1\gamma_2 & 0 & 0 & i(\beta_1 + \beta_2)\gamma_1\gamma_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i(\beta_1 + \beta_2)\gamma_1\gamma_2 & 0 & 0 & (1 + \beta_1\beta_2)\gamma_1\gamma_2 \end{pmatrix} \quad (23.11)$$

ამ მატრიცას კი ადვილად მივცემთ (23.4) სახეს, ოღონდ სიჩქარის როლს შეასრულებს გამოსახულება

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (23.12)$$

რომელიც, როგორც ცნობილია, წარმოადგენს აინშტაინის სიჩქარეთა შეკრების კანონს ერთგანზომილებიანი მოძრაობის შემთხვევაში.

ამგვარად, ზემოთ განხილული ლორენცის ორი თანმიმდევრული პარალელური გარდაქმნა კვლავ ლორენცის გარდაქმნას წარმოადგენს, რომელიც შეესაბამება (23.12) სიჩქარეს. როგორც მოსალოდნელი იყო, ლორენცის გარდაქმნები თავის თავში შეიცავს სიჩქარეთა შეკრების რელატივისტურ კანონს.

(23.12) ფორმულა c -ზე გაყოფის შემდეგ ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\frac{v}{c} = th\theta = \frac{th\theta_1 + th\theta_2}{1 + th\theta_1 th\theta_2} = th(\theta_1 + \theta_2). \quad (23.13)$$

მაშასადამე,

$$\theta = \theta_1 + \theta_2, \quad (23.14)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ლორენცის თანმიმდევრული პარალელური გარდაქმნების დროს ადგილი აქვს სისწრაფეთა შეკრებას. განსხვავებით სიჩქარისაგან, სისწრაფე ადიტიურ სიდიდეს წარმოადგენს.

ამის შემდეგ ადვილია მინკოვსკის სივრცეში სხვადასხვა რანგის ტენზორების შემოღება. ამასთან, ჩვენ მათ დანვრელებით არ განვიხილავთ, რამდენადაც ისინი საკმარისად დეტალურად შესწავლილი გვაქვს სხვა კურსში.

იმის აღსანიშნავად, რომ ეს ტენზორები განსაზღვრულია ოთხგანზომილებიან მინკოვსკის სივრცეში, მათ ოთხტენზორებს ვუწოდებთ. მაგალითად, ოთხვექტორი ენოდება ისეთი A_1, A_2, A_3, A_4 სიდიდის ერთობლიობას, რომლებიც კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას გარდაიქმნებიან, ისევე როგორც კოორდინატები, ე.ი. (23.6) კანონით

$$A'_i = a_{ik} A_k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \quad (24.1)$$

ამასთან, მეოთხე კომპონენტი წმინდა წარმოსახვითი სიდიდეა $A_4^2 = -|A_4|^2$. ამის გამო, ისევე როგორც ინტერვალი, ოთხვექტორის კვადრატი დადებითად არ იქნება განსაზღვრული. შეიძლება გვეკონდეს როგორც სივრცისმაგვარი $A_i^2 < 0$, ისე დროისმაგვარი $A_i^2 > 0$ და ნულოვანი (სინათლისმაგვარი) $A_i^2 = 0$ ოთხვექტორები. რადგან A_i^2 მინკოვსკის სივრცეში სკალარს წარმოადგენს, ამიტომ ეს განმარტება ძალაში დარჩება ყველა ინერციულ ათვლის სისტემაში. ე.ი. თუ, მაგალითად, რომელიმე ათვლის სისტემაში A_i ვექტორი დროისმაგვარია $A_i^2 > 0$, მაშინ იგი დროისმაგვარი დარჩება ნებისმიერ სხვა ინერციულ ათვლის სისტემაშიაც. ათვლის სისტემის სპეციალური არჩევით შეგვიძლია მივალნიოთ იმას, რომ დროისმაგვარი ვექტორის მეოთხე კომპონენტი ნულის ტოლი გავხადოთ, რასაც ოთხვექტორის კვადრატის ინვარიანტობის გამო, ვერ შევძლებთ სივრცისმაგვარი ოთხვექტორისათვის ($A_i^2 < 0$ ყველა ათვლის სისტემაში).

მაშასადამე, ნებისმიერი ოთხვექტორი ლორენცის კერძო გარდაქმნის მიმართ გარდაიქმნება შემდეგი კანონით:

$$A'_1 = \frac{A_1 + i\beta A_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}, A'_2 = A_2, A'_3 = A_3, A'_4 = \frac{A_4 - i\beta A_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (24.2)$$

ხოლო შებრუნებული გარდაქმნებისათვის გვექნება ფორმულები:

$$A_1 = \frac{A'_1 - i\beta A'_4}{\sqrt{1 - \beta^2}}, A_2 = A'_2, A_3 = A'_3, A_4 = \frac{A'_4 + i\beta A'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (24.3)$$

მინკოვსკის სივრცეში ორი $A_i (A_1, A_2, A_3, A_4)$ და $B_i (B_1, B_2, B_3, B_4)$

ოთხვექტორის სკალარული ხაზრავლი გახისაზღვრება ფორმულით

$$A_i B_i = A_\alpha B_\alpha + A_4 B_4 = (\vec{A}, \vec{B}) + A_4 B_4 \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, 3 \\ i = 1, 2, 3, 4 \end{pmatrix} \quad (24.4)$$

კერძო შემთხვევაში, ვექტორის კვადრატს ექნება სახე

$$A_i^2 = A_\alpha^2 + A_4^2 = \vec{A}^2 - |A_4|^2 \quad (24.5)$$

ცხადია, რომ $x_i (x_\alpha, \text{ici})$ იქნება კოორდინატის ოთხვექტორი. ადვილად დაინერება ლორენცის ზოგადი გარდაქმნის ფორმულები ოთხვექტორებისათვის. მაგალითად, კოორდინატების ოთხვექტორისათვის $x_i (\vec{r}, x_4)$, თანახმად (15.20) ფორმულებისა, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - (\vec{n}, \vec{r})\vec{n} + \gamma \left[\vec{n}(\vec{r}, \vec{n}) + i\vec{n} \frac{v}{c} x_4 \right], \\ x_4' &= \gamma \left[x_4 - i \frac{v}{c} (\vec{n}, \vec{r}) \right]. \end{aligned} \quad (24.6)$$

სადაც $\vec{n} = \frac{\vec{v}}{v}$. ანალოგიურად, ნებისმიერი $A_i (\vec{A}, A_4)$ ოთხვექტორისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} - \vec{n}(\vec{n}, \vec{A}) + \gamma \left[\vec{n}(\vec{n}, \vec{A}) + i \frac{v}{c} \vec{n} A_4 \right], \\ A_4' &= \gamma \left[A_4 - i \frac{v}{c} (\vec{n}, \vec{A}) \right]. \end{aligned} \quad (24.7)$$

ფსევდოოთხვექტორი შეიძლება განვსაზღვროთ შემდეგი ფორმულით:

$$A_i' = \Delta(a) a_{ij} A_j, \quad (24.8)$$

სადაც $\Delta(a)$ გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტი ერთის ტოლია მობრუნებისათვის, ხოლო მინუს-ერთის — ინვერსიისათვის.

მეორე რანგის ოთხტენზორი განიმარტება ფორმულით

$$T_{ik}' = a_{ij} a_{ks} T_{js}, \quad (24.9)$$

სადაც T_{ik}' ტენზორის კომპონენტებია მობრუნებულ (შტრიხიან) სისტემაში. მეორე რანგის ფსევდოოთხტენზორის განმარტებაში განსხვავებით (24.9) ფორმულისაგან, არ ჩნდება დამატებითი $\Delta(a)$ მამრავლი.

საცვლად მიხკოვსკის $x_1, x_2, x_3, x_4 = |c|$ კოორდინატებისა, თუ ვისარგებლებდით (22.2) არსი კოორდინატებით, მაშინ ორი ოთხ-ვექტორის სკალარული ნამრავლი უნდა განისაზღვროს ფორმულით

$$A, B' = A' B, = g_{ik} A' B^i = A'' B'' - (\bar{A}, \bar{B}), \quad (24.10)$$

სადაც g_{ik} (22.7) მეტრიკული ტენზორია. A ვექტორის კოვარიანტულ A_i და კონტრავარიანტულ A^i მდგენელებს შორის გვაქვს კავშირი

$$A_i = g_{ik} A^k, A^i = g^{ik} A_k, \quad (24.11)$$

სადაც g^{ik} კონტრავარიანტული მეტრიკული ტენზორია და მინკოვსკის სივრცის შემთხვევაში კვლავ (12.7) სახე ექნება. ცხადია, რომ გაშლილად (24.11) კავშირს ექნება სახე:

$$A_0 = A^0, A_1 = -A^1, A_2 = -A^2, A_3 = -A^3 \quad (24.12)$$

მაშასადამე, კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ოთხვექტორების სივრცითი კოორდინატები ერთმანეთისაგან მხოლოდ ნიშნით განსხვავდებიან; ანალოგიურად განისაზღვრება მაღალი რანგის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ტენზორები.

ამგვარად, საჭიროა გვახსოვდეს, რომ როცა ვსარგებლობთ მინკოვსკის კოორდინატებით, მაშინ მინკოვსკის სივრცეში ფორმალურად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ევკლიდის სივრცის აღგებრა, ხოლო, როცა ვსარგებლობთ არსი კოორდინატებით, მაშინ უნდა გამოვიყენოთ კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ტენზორების აღგებრა.

ტენზორული ველები. მინკოვსკის სივრცეში ასევე შეგვიძლია შემოვიღოთ ოთხტენზორული ველები, როცა ტენზორები ფუნქცია იქნება x_1, x_2, x_3, x_4 კოორდინატებისა. მაგალითად, ოთხვექტორული ველი განისაზღვრება $A_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ოთხვექტორით. რადგან ტენზორული ველები კოორდინატების ფუნქციებია. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია შემოვიღოთ დიფერენციალური ოპერატორებიც. ასე, მაგალითად, ჰამილტონის ოთხგანზომილებიან ოპერატორს (ოთხგრადიენტს) ექნება კომპონენტები

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right) \quad (24.13)$$

პირველი სამი კომპონენტი სამსივრცის გრადიენტია, მეოთხე

$\frac{\partial}{\partial x_4} = -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ დაკავშირებულია დროით ნარმოებულთან.

ადვილი საჩვენებელია, რომ $\frac{\partial}{\partial x_j}$ ოთხვექტორია. ამისათვის განვიხილოთ სკალარული ველი $\varphi'(x'_i) = \varphi(x_i)$ და ავიღოთ $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ კერძო წარმოებული. გვექნება

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}; \quad (24.14)$$

თუ გამოვიყენებთ ლორენცის შებრუნებული გარდაქმნის (23.8) ფორმულებს, მივიღებთ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_j} = a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad (24.15)$$

რაც, მართლაც, წარმოადგენს ოთხვექტორის გარდაქმნის კანონს. (24.13) ოპერატორის კვადრატი მოგვცემს ოთხგანზომილებიან ლაპლასის ოპერატორს

$$\frac{\partial^2}{\partial x'_j{}^2} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square \quad (24.16)$$

ამ გამოსახულებას დალამბერის ოპერატორს (დალამბერიანს) უწოდებენ და \square -თი აღნიშნავენ.

თუ, ნაცვლად მინკოვსკის კოორდინატებისა, ვისარგებლებთ არსი კოორდინატებით, მაშინ, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, იძულებული ვიქნებით ვისარგებლოთ კოვარიანტული და კონტრავარიანტული მდგენელებით.

ოთხრადიუსის, ოთხსიჩქარისა და ოთხაჩქარების ვექტორები. საილუსტრაციოდ შემოვიღოთ ოთხრადიუსის, ოთხსიჩქარისა და ოთხაჩქარების ვექტორები. ცხადია, რომ $x_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ კოორდინატები მინკოვსკის სივრცეში გამოხატავს მსოფლიო ნერტილის მდებარეობას. x_i კოორდინატების გარდაქმნის კანონი ოთხვექტორის გარდაქმნის კანონს ემთხვევა, ამიტომ $x_i (i=1,2,3,4)$ ერთობლიობას შეგვიძლია ვუწოდოთ ოთხრადიუსვექტორი. რადგანაც, თანახმად (18.7) ფორმულისა $dx = \frac{1}{c} ds$, ამიტომ მატერიალური ნერტილის საკუთარი დროის კვადრატი

$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2} dx_i^2 \quad (24.17)$$

ყოფილა მინკოვსკის მსოფლიო წირის ელემენტის კვადრატის პროპორციული სიდიდე.

ახლა ვიპოვოთ სიჩქარის ოთხვექტორი. სიჩქარის ოთხვექტორი განესაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$u_i = \frac{dx_i}{ds}; \quad (24.18)$$

ასეთნაირად განსაზღვრული u_i უგანზომილებო იქნება. რადგან ინტერვალი

$$ds = c\sqrt{1-\beta^2} dt, \quad (v = \beta c) \quad (24.19)$$

ამიტომ

$$u_i = \frac{\frac{dx_i}{dt}}{c\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (24.20)$$

რადგან $\frac{dx_i}{dt} = (v_\alpha, ic)$ აგრეთვე ოთხვექტორი იქნება, სადაც v_α არის მატერიალური ნერტილის სიჩქარე, ამიტომ u_i -ს ექნება კომპონენტები:

$$u_\alpha = \frac{\frac{v_\alpha}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}, u_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad (\alpha = 1,2,3). \quad (24.21)$$

მაშასადამე, $u_i \left(\frac{v_\alpha}{c} \gamma, i\gamma \right)$. ცხადია, რომ u_i ოთხვექტორის კვადრატი ტოლი იქნება

$$u_i^2 = u_\alpha^2 + u_4^2 = \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 - \gamma^2 = -1, \quad (24.22)$$

ეს ასეც უნდა ყოფილიყო, რამდენადაც $dx_i^2 = -ds^2$ და, მაშასადამე, $\left(\frac{dx_i}{ds} \right)^2 = u_i^2 = -1$, ე.ი. სიჩქარის ოთხვექტორის ყველა კომპონენტი დამოუკიდებელი არ არის. ამგვარად, u_i ოთხვექტორი მინკოვსკის სივრცეში არის ერთეულოვანი ოთხვექტორი,

რომელიც მხები იქნება ნანილაკის მსოფლიო ნირისა. ანალოგიურად შეგვიძლია შემოვიღოთ ოთხაჩქარება. განვმარტოთ იგი შემდეგნაირად:

$$w_i = \frac{du_i}{ds} = \frac{d^2 x_i}{ds^2} \quad (24.23)$$

შევნიშნოთ, რომ (24.22)-ის გადიფერენციალებით მივიღებთ

$$u_i \frac{du_i}{ds} = u_i w_i = 0, \quad (24.24)$$

ე.ი. სიჩქარისა და აჩქარების ოთხვექტორების სკალარული ნამრავლი მინკოვსკის სივრცეში ნულის ტოლია.

ტალღური ოთხვექტორი. ახლა განვიხილოთ ბრტყელი მონოქრომატული ტალღა

$$\psi(\vec{r}, t) = \text{const} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad (24.25)$$

სადაც $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$ ტალღური ვექტორია, ხოლო $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$ ორტია ტალღის გავრცელების მიმართულებით. ა სიხშირე განისაზღვრება ფორმულით $\omega = ck$. შემოვიღოთ ტალღის ფაზა

$$\theta = (\vec{r}, t) = (\vec{k}, \vec{r}) - \omega t. \quad (24.26)$$

ფაზის საშუალებით ტალღური ვექტორი და სიხშირე ასე განიმარტება:

$$\vec{k} = \nabla \theta, \quad \omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (24.27)$$

ცხადია, რომ θ ფაზა არის ინვარიანტული სიდიდე, რამდენადაც სკალარს წარმოადგენს. რადგან ოთხრადიუსვექტორს აქვს კომპონენტები $x_\mu(\vec{r}, ict)$, ამიტომ ფაზა ასეც შეიძლება ჩავწეროთ:

$$\theta = k_\mu x_\mu \quad (\mu = 1, 2, 3, 4), \quad (24.28)$$

სადაც $k_\mu \equiv k_\mu \left(\vec{k}, \frac{i}{c} \omega \right)$.

გადავიდეთ K' სისტემაზე. ეს გადასვლა განხორციელებული იქნება გარდაქმნით

$$x_{\mu} = a_{\mu\nu} x'_{\nu} \quad (24.29)$$

ხოლო ფაზა ასე გარდაიქმნება:

$$\theta' = \theta = k_{\mu} a_{\mu\nu} x'_{\nu} = k'_{\nu} x'_{\nu} \quad (24.30)$$

სადაც

$$k'_{\nu} = a_{\nu\mu} k_{\mu} \quad (24.31)$$

ნარმოადგენს ოთხვექტორის გარდაქმნის კანონს. ამგვარად,

$k_{\mu}(\bar{k}, \frac{i}{c}\omega)$ ნარმოადგენს ოთხვექტორს. მას უნოდებენ ტალღურ

ოთხვექტორს. ცხადია, რომ მისი კვადრატი ტოლია

$$k_{\mu}^2 = \bar{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (24.32)$$

მაშასადამე, ტალღური ოთხვექტორი ყოფილა სინათლისმაგვარი. ცხადია, რომ (24.27) ფორმულები შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახითაც:

$$k_{\mu} = \frac{\partial\theta}{\partial x_{\mu}} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (24.33)$$

რადგან k_{μ} ოთხვექტორია, ამიტომ ლორენცის კერძო გარდაქმნისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულები:

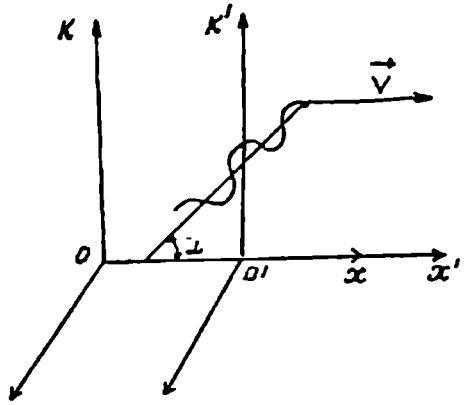
$$k_x = \frac{k'_x + \frac{v}{c^2}\omega'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad k_y = k'_y, \quad k_z = k'_z, \quad \omega = \frac{\omega' + vk'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (24.34)$$

ცხადია, რომ ტალღური ოთხვექტორის კვადრატი $k_{\mu}^2 = 0$ არის ინვარიანტული (სკალარული) სიდიდე. მაშასადამე, $k_{\mu}^2 = 0$ ნებისმიერ ინერციულ სისტემაში, ე.ი. ნებისმიერ ინერციულ სისტემაში გვექნება კავშირი $k = \frac{\omega}{c}$, ამიტომ სინათლის სიჩქარის სიდიდე ყველა ინერციულ სისტემაში ერთი და იგივეა. მივიღეთ მაიკელსონის ცდის შედეგი სინათლის სიჩქარის ინვარიანტობის შესახებ.

გამოვიყენოთ ტალღური ოთხვექტორის $k_{\mu} \left(\bar{k}, \frac{i}{c} \omega \right)$ გარდაქმ-

ნის ფორმულები დოპლერის ეფექტის ასახსნელად. დოპლერის ოპტიკური ეფექტი მდგომარეობს სინათლის სიხშირის ცვლილებაში წყაროს მოძრაობის შედეგად.

განვიხილოთ K' სისტემაში უძრავად დამაგრებული წყაროს სინათლის გამოსხივება მიმართულებით, რომელიც ადგენს α კუთხეს K სისტემის x ღერძთან. წყაროს სიხშირე K' სისტემაში, რომლის მიმართ იგი უძრავია, აღენიშნოთ ω_0 -ით. მას წყაროს საკუთარ სიხშირეს უწოდებენ. გამოვარკვიოთ რისი ტოლი იქნება სიხშირე K დამკვირვებლისათვის, რომლის მიმართ სინათლის წყარო მოძრაობს \vec{V} სიჩქარით. ამ საკითხის გადასაწყვეტად საკმარისია ლორენცის გარდაქმნების გამოყენება. (24.34) ფორმულების თანახმად, ტალღური ოთხვექტორის მეოთხე კომპონენტისათვის გვექნება გარდაქმნის კანონი



ნახ.20

$$\omega_0 = \frac{\omega - vk_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (25.1)$$

სადაც ω და k_x სიხშირე და ტალღური ვექტორის x კომპონენტი K სისტემაში. ტალღური ვექტორის x კომპონენტი K სისტემაში ტოლი იქნება $k_x = k \cos \alpha = \frac{\omega}{c} \cos \alpha$, სადაც α არის კუთხე ტალღის გავრცელების მიმართულებასა და წყაროს მოძრაობის მიმართულებას შორის, ე.ი. \vec{K} და \vec{V} ვექტორებს შორის. (25.1)-დან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\omega_0 = \frac{\omega - \frac{v}{c} \omega \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (25.2)$$

საიდანაც, საბოლოოდ, მივიღებთ:

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}. \quad (25.3)$$

როგორც ვხედავთ, სიხშირე K დამკვირვებლის მიმართ შეიცვალა. სწორედ ამაში მდგომარეობს დოპლერის ეფექტი. კერძოდ, წყაროს ფარდობითი მოძრაობის შედეგად დამკვირვებლის მიმართ საკუთარი სიხშირე და K დამკვირვებლის მიერ მიღებული სიხშირე ერთმანეთის ტოლი არ არის. არარელატივისტურ ზღვარში $\beta = \frac{v}{c}$ ნევრების სიზუსტით, როცა α ერთობ ახლოს არ არის $\frac{\pi}{2}$ -თან, დოპლერის ეფექტისათვის მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}, \quad (25.4)$$

ან, რამდენადაც $\beta \ll 1$, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\omega \approx \omega_0(1 + \beta \cos \alpha), \quad (25.5)$$

რაც სიხშირის ფარდობითი ცვლილებისათვის $\frac{\Delta \omega}{\omega_0} \equiv \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$

მოგვცემს

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_0} = -\beta \cos \alpha \quad (25.6)$$

როგორც ვხედავთ, როცა წყარო მოძრაობს K დამკვირვებლის შესახვედრად, მაშინ სიხშირე იზრდება, ხოლო, როცა წყარო გაურბის K დამკვირვებელს ($\beta < 0$), მაშინ K დამკვირვებლის მიერ მიღებული ω სიხშირე ნაკლებია ω_0 საკუთარ სიხშირეზე.

არჩევენ ორი ტიპის დოპლერის ეფექტს — გრძივსა და განივს.

ამასთან, განივი ეფექტი ნმინდა რელატივისტური ეფექტია, მას არარელატივისტურ თეორიაში ადგილი არა აქვს. დოპლერის განივი ეფექტი გვექნება მაშინ, როცა $\alpha = \frac{\pi}{2}$. (25.3) ფორმულიდან $\alpha = \frac{\pi}{2}$ - ისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2 + \dots \right). \quad (25.7)$$

როგორც ვხედავთ, დოპლერის განივი ეფექტში β -ს მიმართ პირველი ხარისხის დამოკიდებულება ისპობა. ფარდობითი ცვლილება ტოლი იქნება

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{1}{2} \beta^2 \quad (25.8)$$

და იგი სიჩქარის ნიშანზე დამოკიდებული აღარ არის.

აღსანიშნავია, რომ დოპლერის განივი ეფექტს არარელატივისტურ თეორიაში ადგილი არა აქვს. მართლაც, (25.4) -დან, როცა $\alpha = \frac{\pi}{2}$, მივიღებთ $\omega = \omega_0$.

დოპლერის განივი ეფექტი ექსპერიმენტულად შესწავლილი იყო აივისისა და სტილუელის მიერ. ისინი აკვირდებოდნენ დიდი სიჩქარით მოძრავი იონების გამოსხივებას. აივსი იხილავდა იმდენად დიდ სიჩქარეებს, რომ $\beta = \frac{v}{c}$ ფარდობა საკმარისად დიდი იყო დოპლერის ეფექტის დასამზერად. აღმოჩნდა, რომ დოპლერის განივი ეფექტი მართლაც არსებობს და იგი კარგად აინერება (25.8) ფორმულით¹.

ახლა განვიხილოთ დოპლერის გრძივი ეფექტი. ამ შემთხვევაში სინათლის წყარო და დამკვირვებელი x ლერძის გასწვრივ მოძრაობენ, ამიტომ $\alpha = 0$ და (25.3)-დან მივიღებთ

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \quad (25.9)$$

არარელატივისტურ ზღვარში $\beta \ll 1$, მივიღებთ

$$\omega = \omega_0(1+\beta), \quad (25.10)$$

რომელიც ემთხვევა (25.5)-ს $\alpha = 0$ შემთხვევაში.

¹ იმის გამო, რომ დოპლერის განივი ეფექტი β -ს მიმართ კუადრატული ეფექტია, მისი დამზერა შესაძლებელი გახდა მხოლოდ 1938 წელს. Ives H.E., Stilwell G.R. J. Opt. Soc. Amer., 28, 215(1938); 31, 369(1941).

განვიხილოთ ლორენცის ზოგადი გარდაქმნები და შევისწავლოთ მათი ჯგუფური თვისებები. ვისარგებლოთ არსი კოორდინატებით $x_0 = ct, x_1, x_2, x_3$ ამ შემთხვევაში საჭიროა ერთმანეთისაგან განვასხვაოთ ტენზორების კო- და კონტრავარიანტული მდგენლები. მეტრიკულ ტენზორს, როგორც ვიცით, აქვს სახე

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{ik} \quad (26.1)$$

ე.ი. $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ და $g_{ik} = 0$, როცა $i \neq k$, სწორედ ეს g_{ik} ტენზორი აკავშირებს კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ ტენზორებს ერთმანეთთან.

ლორენცის კერძო გარდაქმნები, როგორც დავინახეთ, წარმოადგენს წრფივ ორთოგონალურ გარდაქმნას, რომელიც ინვარიანტულს ტოვებს ინტერვალს $x_\mu x^\mu = inv$ ამასთან, ცხადია, რომ

$$x_\mu x^\mu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu = x_0^2 - x_\alpha^2 \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (26.2)$$

მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ლორენცის ზოგადი გარდაქმნები, რომელიც ასევე ინვარიანტულს ტოვებს ინტერვალს. ამ გარდაქმნებს აქვს სახე

$$x'^i = a_k^i x^k + b^i, \quad (26.3)$$

სადაც a_k^i წარმოადგენს გარდაქმნის მატრიცის ელემენტებს, ხოლო b^i არის კონტრავარიანტული ვექტორი, რომელსაც წანაცვლების ან ტრანსლაციის ვექტორს უწოდებენ. იგი განსაზღვრავს კოორდინატთა სათავეის გადატანას. ამასთან, (26.3) ფორმულაში იგულისხმება, რომ ჯერ მოხდენილია $a_k^i x^k$ გარდაქმნა, შემდეგ კი ტრანსლაცია, როცა $b^i \neq 0$, მაშინ (26.3) გარდაქმნას ლორენცის ზოგადი არაერთგვაროვანი ან პუანკარეს გარდაქმნა ეწოდება. ქვემოთ შევისწავლით მხოლოდ ლორენცის ზოგად ერთგვაროვან $|b^i = 0|$ გარდაქმნებს

$$x'^i = a_k^i x^k \quad (26.4)$$

a_k^i ელემენტების ერთობლიობა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც

მეორე რანგის შერეული ტენზორი. g_{ik} ტენზორის გამოყენებით ადვილად ვიპოვიტ a_i^k, a^{ik} და a_{ik} ტენზორებსაც. მაგალითად, გვექნება:

$$\begin{aligned} a_{ik} &= g_{im} a_k^m, \\ a^{ik} &= g^{im} a_m^k, \\ a_i^k &= g_{im} a_n^m g^{nk} \end{aligned} \quad (26.5)$$

ადვილია ჩვენება, რომ ლორენცის ზოგადი ერთგვაროვანი გარდაქმნებიც ინვარიანტულს ტოვებს ინტერვალს, ე.ი. $x^\zeta x_\zeta = x'^\zeta x'_\zeta = inv$. მართლაც, თუ ამ უკანასკნელში შევიტანთ (26.4) გარდაქმნებს, დავინახავთ, რომ ინტერვალის ინვარიანტული დარჩება, თუ გარდაქმნის მატრიცის ელემენტები აკმაყოფილებენ ორთონორმირების შემდეგ პირობას:

$$a_m^i a_j^n = a^{mi} a_{ni} = \delta_m^n, \quad (26.6)$$

ამ უკანასკნელიდან გამომდინარეობს, რომ გარდაქმნის მატრიცის შესაბამისი დეტერმინანტი

$$\Delta(a) = \pm 1. \quad (26.7)$$

მაშასადამე, აზრი აქვს გარდაქმნის მატრიცის შებრუნებას და შესაბამისად ლორენცის ზოგად შებრუნებული გარდაქმნის განხილვას

$$x' = a_n^i x^n \quad (26.8)$$

ცხადია, ეს უკანასკნელიც წარმოადგენს ლორენცის ზოგად ერთგვაროვან გარდაქმნას.

ლორენცის ზოგად ერთგვაროვან გარდაქმნაში შედის იგივეური გარდაქმნაც, რომელიც ხასიათდება $a_k^i = \delta_k^i$ ელემენტით. მართლაც,

$$x'^i = \delta_k^i x^k = x^i. \quad (26.9)$$

ლორენცის გარდაქმნები შეგვიძლია ფორმალურადაც ჩავწეროთ, თუ x_0, x_α კოორდინატებს (ოთხრადიუსვექტორს) ერთსვეტიანი მატრიცის სახით წარმოვიდგენთ

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (26.10)$$

მაშინ ლორენცის ზოგადი ერთგვაროვანი გარდაქმნა ასე ჩაინერება:

$$X' = AX, \quad (26.11)$$

სადაც A არის ლორენცის ზოგადი გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცა. შებრუნებული ლორენცის ზოგადი ერთგვაროვანი გარდაქმნა ასე განისაზღვრება

$$X = A^{-1} X'. \quad (26.12)$$

ვიპოვოთ ორი თანმიმდევრული ლორენცის ზოგადი გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცა. ვთქვათ, გვაქვს შემდეგი ორი თანმიმდევრული გარდაქმნა $X \rightarrow X'$ და $X' \rightarrow X''$, მაშინ, თუ $X'' = BX'$, ხოლო $X' = AX$, საბოლოოდ გვექნება გარდაქმნა

$$X'' = BAX = CX, \quad (26.13)$$

სადაც $C=BA$ იქნება შესაბამისი ლორენცის ზოგადი გარდაქმნის (X -დან X'' -ში) მატრიცა. შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ C მატრიცის ელემენტებიც ორთონორმირების (26.6) პირობას აკმაყოფილებენ.

ადვილი შესამონმებელია, რომ ლორენცის ზოგადი გარდაქმნები ადგენენ ჯგუფს, რომლის ელემენტებია გარდაქმნის მატრიცები, რამდენადაც ამ ელემენტებისათვის დაცულია ჯგუფის დამახასიათებელი ყველა პირობა. მართლაც, გარდაქმნის A მატრიცა განსაზღვრავს ლორენცის ზოგად გარდაქმნებს. ამ მატრიცების დეტერმინანტები $\Delta(a) = \pm 1 \neq 0$, ამიტომ ჯგუფში არსებობს შებრუნებული ელემენტი A^{-1} , რომელიც განსაზღვრავს შებრუნებულ ლორენცის გარდაქმნას. ლორენცის ორი ზოგადი გარდაქმნის მატრიცათა ნამრავლი კვლავ ლორენცის ზოგადი გარდაქმნის მატრიცას იძლევა და არსებობს ერთეულოვანი მატრიცა $A = \delta_i^k$, რომელიც იგივე გარდაქმნას წარმოადგენს.

აღნიშნულ ჯგუფს ლორენცის ზოგად ჯგუფს უწოდებენ.

გამოვარკვიოთ, რა გარდაქმნები შედის ლორენცის ზოგად ჯგუფში, ე.ი. ლორენცის (26.4) ზოგად ერთგვაროვან გარდაქმნებში. ცხადია, რომ ამ გარდაქმნებში შედის მობრუნება მინკოვსკის ოთხ-სივრცის სხვადასხვა საკოორდინატო სიბრტყეში და საკოორდინატო ღერძების ინვერსია. განვიხილოთ ისინი ცალ-ცალკე.

1. მობრუნება. მობრუნებაში შედის ა) მობრუნება x_2x_3, x_3x_1 და x_1x_2 სიბრტყეებში, ე.ი. ნამდვილი მობრუნება შესაბამისად სივრცული x_1, x_2 და x_3 ღერძების მიმართ. ბ) მობრუნება x_1x_4, x_2x_4 და x_3x_4 სიბრტყეებში (ე.ი. "ჰიპერბოლური მობრუნება"). ეს უკანასკნელი, როგორც ვიცით, შეესაბამება ლორენცის სპეციალურ

(კერძო) გარდაქმნებს,* ე.ი. k' სისტემის გადატანას. შესაბამისად x_1, x_2 და x_3 ღერძების გასწვრივ $\bar{u} = const$ სიჩქარით, ე.ი. სულ გვექნება ექვსი მობრუნება, რომლებიც დახასიათდება ექვსი პარამეტრით. მობრუნების შესაბამის ლორენცის გარდაქმნებს შეესაბამება გარდაქმნის მატრიცები, რომელთა დეტერმინანტია $\Delta(a) = \pm 1$. გარდაქმნები, რომელთაც შეესაბამება გარდაქმნის მატრიცები დეტერმინანტით $\Delta(a) = +1$, ლორენცის საკუთარ გარდაქმნებს უწოდებენ.

2. ინვერსია. შესაძლებელია სამი ტიპის ინვერსია: ა) სივრცული ღერძების ინვერსია

$$x'_\alpha = -x_\alpha, (\alpha = 1, 2, 3), x'_0 = x_0. \quad (26.14)$$

შესაბამისი ოპერატორი აღენიშნოთ P -თი. იგი შეიძლება გამოვხატოთ შემდეგი მატრიცით:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (26.15)$$

ბ) დროითი ღერძის ინვერსია

$$x'_0 = -x_0, x'_\alpha = x_\alpha (\alpha = 1, 2, 3). \quad (26.16)$$

შესაბამისი ოპერატორი აღენიშნოთ T -თი. მას ექნება შემდეგი სახე:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (26.17)$$

ცხადია, რომ როგორც სივრცულ ინვერსიას, ისე დროით ინვერსიას შეესაბამება დეტერმინანტი $\Delta(a) = -1$. ასეთ გარდაქმნებს ლორენცის არასაკუთრივ გარდაქმნებს უწოდებენ. გ) როგორც სივრცული, ისე დროითი ღერძების ინვერსია

$$x'_0 = -x_0, x'_\alpha = -x_\alpha, (\alpha = 1, 2, 3). \quad (26.18)$$

სათანადო ინვერსიის ოპერატორი იქნება გამოხატული წინა ორი მატრიცის ნამრავლით

* მათ ხშირად ლორენცის "ბუსტებს" უწოდებენ (რედ).

$$PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (26.19)$$

ამ შემთხვევაში გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტი $\Delta(PT) = +1$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ გარდაქმნის მატრიცის დროისმაგვარი კომპონენტი $a_0^0 \geq 1$ ან $a_0^0 \leq -1$. ამისათვის ორთონორმირების (26.6) პირობაში ავიღოთ $n = m = 0$, მაშინ გვექნება

$$(a_0^0)^2 = -a_0^\alpha a_0^\alpha = 1, \quad (26.20)$$

საიდანაც $(a_0^0)^2 = 1 + (a_0^\alpha)^2 \geq 1$. ასე რომ, მართლაც, $a_0^0 \geq 1$ ან $a_0^0 \leq -1$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ლორენცის გარდაქმნებს შორის, რომელთათვისაც $a_0^0 > 0$ და $a_0^0 < 0$, არსებობს a_0^0 მნიშვნელობათა ღრეჩო, რომლის სიგანე სულ მცირე 2-ის ტოლია და რომლის გადალახვა შეუძლებელია რაიმე უწყვეტი გარდაქმნით. ლორენცის ზოგადი გარდაქმნები იმის მიხედვით, რისი ტოლია გარდაქმნის შესაბამისი მატრიცების დეტერმინანტი $\Delta(a) = +1$ თუ $\Delta(a) = -1$, ასევე $a_0^0 > 0$ თუ $a_0^0 < 0$, ოთხ კლასად (კომპონენტად) იყოფა (იხ. №1 ცხრილი).

როგორც აღვნიშნეთ, ლორენცის ზოგადი ერთგვაროვანი გარდაქმნების შესაბამისი მატრიცების ერთობლიობა ქმნის ლორენცის ჯგუფს.

ახლა ლორენცის ზოგად გარდაქმნებს მოვთხოვოთ ორი დამატებითი პირობა $\Delta(a) = 1$ და $a_0^0 > 0$,

ე.ი. შემოვისაზღვროთ 1⁰ კლასის გარდაქმნებით. ეს გარდაქმნებიც ადგენენ ჯგუფს, რომელსაც ლორენცის საკუთარ ორთოქრონულ ჯგუფს უწოდებენ და მას L_+ -ით აღნიშნავენ. ცხადია, ეს ჯგუფი წარმოადგენს ექვს პარამეტრზე დამოკიდებულ უწყვეტ ჯგუფს. იგი შეიცავს ზემოთ განხილულ (წამდვილ და ჰიპერბოლურ) მობრუნებებს მინკოვსკის სივრცეში. ამ კლასის გარდაქმნები არ შეიცავენ სივრცული ღერძების არეკვლის მატრიცას, ამიტომ სივრცული კოორდინატთა სისტემის

ცხრილი 1				
	1 ⁰	2 ⁰	3 ⁰	4 ⁰
$\Delta(a)$	+1	-1	-1	+1
a_0^0	>0	>0	<0	<0

ორიენტაციას უცვლელს ტოვებენ (მარჯვენა სისტემა რჩება მარჯვენად, მარცხენა კი - მარცხენად).

2⁰ კლასის გარდაქმნები, ე.ი. გარდაქმნები, რომელთათვის $\Delta(a) = -1$ და $a_0^0 > 0$, შეიცავენ სივრცით ინვერსიას. ამ კლასის გარდაქმნები ჯგუფს არ ადგენენ. 1⁰ და 2⁰ კლასის გარდაქმნების შესაბამისი მატრიცების გაერთიანებით კი მიიღება ჯგუფი, რომელსაც ლორენცის ორთოქრონული ან ლორენცის სრული ჯგუფი ეწოდება. ეს გარდაქმნები არ შეიცავენ დროის ინვერსიას (არ ცვლიან დროის ღერძის დადებით მიმართულებას). ცხადია, ლორენცის სრული ჯგუფი მიიღება ლორენცის საკუთარი ორთოქრონული L_0 ჯგუფიდან, მასზე სივრცული ინვერსიის P მატრიცებისა და ყველა შესაძლო PL_0 მატრიცების დამატებით, სადაც L_0 ლორენცის საკუთარი ორთოქრონული ჯგუფის შესაბამისი მატრიცებია.

3⁰ კლასის გარდაქმნები (ე.ი. $\Delta(a) = -1, a_0^0 < 0$) შეიცავენ ლორენცის გარდაქმნებს, რომელშიაც ჩართულია დროის ინვერსია, ისინი ჯგუფს არ ადგენენ, რადგან არ შეიცავენ ერთეულოვან ელემენტს. მაგრამ თუ 3⁰ კლასის გარდაქმნებს დავუმატებთ 1⁰ კლასის გარდაქმნებს, მაშინ გარდაქმნების ეს ერთობლიობაც შეადგენს ჯგუფს.

4⁰ კლასის გარდაქმნები შეიცავენ როგორც სივრცით, ისე დროით ინვერსიას. ჯგუფს ვეძღვეს 1⁰ და 4⁰ კლასის გარდაქმნების გაერთიანება. ამ ჯგუფისათვის $\Delta(a) = +1$, ამიტომ მას ლორენცის საკუთარ ჯგუფს უწოდებენ.

ლორენცის ზოგადი ჯგუფი შეიძლება მივიღოთ L_0 , ლორენცის საკუთარი ორთოქრონული ჯგუფის ელემენტებზე PL_0, TL_0, PTL_0 ელემენტების დამატებით ან, რაც იგივეა, ლორენცის სრულ ჯგუფზე დროის არეკვლის T მატრიცისა და ყველა შესაძლო TA ნამრავლების დამატებით, სადაც A არის ლორენცის სრული ჯგუფის ელემენტი.

ამგვარად, ლორენცის ზოგადი ჯგუფი შეგვიძლია სიმბოლურად შემდეგი სახით წარმოვიდგინოთ:

$$L = L_0 + PL_0 + TL_0 + PTL_0 \quad (26.21)$$

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ, როცა ლორენცის ზოგადი გარდაქმნები შეიცავს კოორდინატთა სისტემის სათავეს ტრანსლაციას, მაშინ ეს გარდაქმნები ადგენენ ე.წ. პუანკარეს ჯგუფს.

ლორენცის უსასრულოდ მცირე გარდაქმნები. ახლა განვიხილოთ ლორენცის უსასრულოდ მცირე გარდაქმნები. ლორენცის საკუთარი ორთოქრონული ჯგუფის გარდაქმნები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც უსასრულოდ მცირე გარდაქმნების თანმიმ-

დეერობა. რადგან კოორდინატების იგივეურ გარდაქმნას აქვს სახე $X' = \delta_k^i X^k$, ამიტომ უსასრულოდ მცირე გარდაქმნა შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით.

$$X' = (\delta_k^i + \Omega_k^i) X^k, \quad (26.22)$$

სადაც Ω_k^i უსასრულოდ მცირე მატრიცაა. მაშასადამე, უსასრულოდ მცირე გარდაქმნის მატრიცას ექნება გამოსახულება

$$a_k^i = \delta_k^i + \Omega_k^i \quad (26.23)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\delta x^i = x'^i - x^i$, მაშინ (26.22)-დან გვექნება

$$\delta x^i = \Omega_k^i x^k \quad (26.24)$$

შევისწავლოთ Ω_k^i სიდიდეების თვისებები. რადგან δx^i უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ მისთვის მნიშვნელობა აღარა აქვს, რომელი სისტემის მიმართ აიღება იგი K თუ K' , ჩავთვალოთ, რომ მას ვიხილავთ K სისტემაში. (26.24)-დან (გაყოფის თეორემა) გამომდინარეობს, რომ Ω_k^i სიდიდეები ადგენენ მეორე რანგის შერეულ ოთხტენზორს. (26.23) ტოლობა ჩვენერთ კოვარიანტული ტენზორისათვის. ამისათვის იგი გავამრავლოთ მეტრიკულ $g_{..}$ ტენზორზე. მივიღებთ

$$a_{..} = g_{..} + \Omega_{..}, \quad (26.25)$$

სადაც $\Omega_{ik} = g_{im} \Omega_k^m$ უსასრულოდ მცირე მეორე რანგის კოვარიანტული ტენზორია. გამოვიყენოთ a_{ik} ელემენტების ორთონორმირების პირობა. გვექნება

$$a_{im} a^{im} = (g_{im} + \Omega_{im})(g^{im} + \Omega^{im}) = \delta_{..} \quad (26.26)$$

გადავამრავლოთ და შევინარჩუნოთ Ω_{ik} -ს მხოლოდ პირველი ხარისხის წევრები. მივიღებთ

$$g_{im} \Omega^{im} + g^{im} \Omega_{im} = 0. \quad (26.27)$$

ამ ტოლობის გამრავლებით g_{kn} -ზე მარტივად მივიღებთ ტოლობას

$$\Omega_{ik} + \Omega_{ik} = 0. \quad (26.28)$$

მაშასადამე, Ω_{ik} მატრიცა ყოფილა ანტისიმეტრიული.

ანტისიმეტრიულ ოთხტენზორს აქვს ექვსი დამოუკიდებელი კომპონენტი, ამიტომ უსასრულოდ მცირე (26.24) გარდაქმნა დახასიათდება ექვსი პარამეტრით.

ცხადია, ამ Ω_{ik} მატრიცით აინერება $x^i x^k$ მინკოვსკის სიბრ-

ტყეში უსასრულოდ მცირე მობრუნებანი. მათ შორის იქნება უსასრულოდ მცირე მობრუნება $x^1 x^4$ სიბრტყეშიაც, რომელსაც, როგორც ვიცით, შეესაბამება ლორენცის კერძო გარდაქმნა x_i ლერძის გასწვრივ.

ვთქვათ, ახლა გვაქვს ლორენცის ორი თანმიმდევრული უსასრულოდ მცირე გარდაქმნა. ერთი, როცა x_i კოორდინატები გადადის x'_i -ში, რომელიც ხორციელდება $\Omega_{ik}^{(1)}$ ტენზორით და, მეორე, x'_i -დან x''_i -ში, რომელიც ხორციელდება $\Omega_{ik}^{(2)}$ ტენზორით. გამოვარკვიოთ, როგორი სახე ექნება $x_i \rightarrow x''_i$ გარდაქმნის შესაბამის მატრიცას. გვექნება:

$$x''_i = x'_i + \Omega_{ik}^{(2)} x'_k = \left(x_i + \Omega_{ik}^{(1)} x_k \right) + \Omega_{ik}^{(2)} \left(x_k + \Omega_{kl}^{(1)} x_l \right), \quad (26.29)$$

აქედან, მეორე რიგის მცირე ნეერების სიზუსტით, შეგვიძლია დავწეროთ

$$x''_i = x_i + \left[\Omega_{ik}^{(1)} + \Omega_{ik}^{(2)} \right] x_k = x_i + \Omega_{ik}^{(1,2)} x_k, \quad (26.30)$$

ამგვარად, შესაბამისი უსასრულოდ მცირე გარდაქმნის მატრიცა განისაზღვრება ფორმულით

$$\Omega_{ik}^{(1,2)} = \Omega_{ik}^{(1)} + \Omega_{ik}^{(2)}, \quad (26.31)$$

საიდანაც ჩანს, რომ ორი თანმიმდევრული ლორენცის უსასრულოდ მცირე გარდაქმნა არ არის დამოკიდებული გარდაქმნების თანმიმდევრობაზე.

განვიხილოთ ლორენცის გარდაქმნები, როცა K' სისტემა K -ს მიმართ მოძრაობს უსასრულოდ მცირე V სიჩქარით $|v| \approx 1$. მაშინ (24.6) ფორმულების ძალით გვექნება

$$\bar{r}' = \bar{r} + i \frac{v}{c} x_4, \quad (26.32)$$

$$x'_4 = x_4 - \frac{i}{c} (\bar{v} \bar{r}), \quad (26.33)$$

რომელთაც მივცეთ (26.24) სახე. გვექნება

$$\delta x_\alpha = -\frac{v_\alpha}{c} x_0, \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (26.34)$$

$$\delta x_0 = -\frac{1}{c} (v_\alpha x_\alpha), \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

სადაც გავითვალისწინოთ, რომ $x_4 = ix_0$, რადგან $\Omega_{ik} = g_{im} = g_{im} \Omega_k^m$,

ამიტომ გვექნება

$$\Omega_{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha}\Omega_{\alpha}^{\alpha} = g_{00}\Omega_{\alpha}^0 = \Omega_{\alpha}^0, \quad (26.35)$$

$$\Omega_{\alpha 0} = g_{\alpha\alpha}\Omega_0^{\alpha} = g_{\alpha\alpha}\Omega_0^{\alpha} = -\Omega_0^{\alpha},$$

ხოლო (26.34) ფორმულების შედარება (26.24)-თან მოგვცემს:

$$\Omega_{0\alpha} = -\frac{1}{c}v_{\alpha}, \quad \Omega_{\alpha 0} = \frac{1}{c}v_{\alpha} \quad (26.36)$$

მაშასადამე, ლორენცის უსასრულოდ მცირე გარდაქმნის მატრიცის ელემენტები სიჩქარის კომპონენტებით განისაზღვრა.

მეტრიკული ტენზორის გამოყენებით ადვილად ვიპოვით Ω_{ik} ტენზორის კონტრავარიანტულ მდგენლებსაც. მართლაც, რადგან

$$\Omega^{ik} = g^{im}g^{kn}\Omega_{mn}, \quad (26.37)$$

ამიტომ ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\Omega^{0\alpha} = \frac{v_{\alpha}}{c}, \quad \Omega^{\alpha 0} = -\frac{v_{\alpha}}{c} \quad (26.38)$$

ლორენცის უსასრულოდ მცირე გარდაქმნები ფართოდ გამოიყენება ფიზიკის სხვადასხვა დარგში.

§ 27. ლორენცის გარდაქმნების გეომეტრიული შინაარსი

მინკოესკიმ, უპირველეს ყოვლისა, გაარკვია ლორენცის გარდაქმნების გეომეტრიული შინაარსი. სურათი გავამარტივოთ და უგულებელვყოთ Y და Z კოორდინატები, რომლებიც (15.9) ლორენცის კერძო გარდაქმნების დროს არ იცვლებიან. შემოვიღოთ ორი ათვლის სისტემა. ერთი, უძრავი K , რომლის ღერძები იყოს X და $\xi = ct$ და მეორე — მოძრავი K' , ღერძებით X' და $\xi' = ct'$ ჩავთვალოთ, რომ K სისტემა ორთოგონალურია.

ლორენცის გარდაქმნები დაინერგება შემდეგი სახით:

$$x' = \frac{x - \beta\xi}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \xi' = \frac{\xi - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right) \quad (27.1)$$

ხოლო შებრუნებული გარდაქმნებისათვის გვექნება:

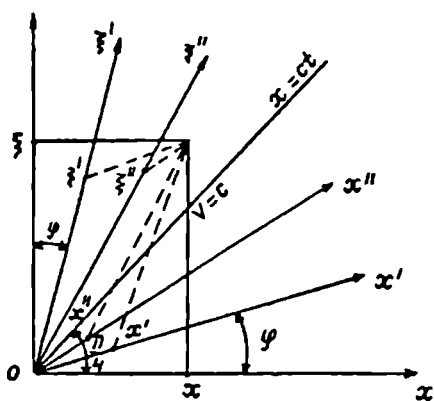
$$x = \frac{x' + \beta\xi'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \xi = \frac{\xi' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (27.2)$$

ვიპოვოთ მოძრავი K' სისტემის ღერძების ორიენტაცია K სის-

ტემის ღერძების მიმართ. ცხადია, რომ (27.1)-ის თანახმად, $x=0$ და $\xi=0$ ნერტილებს შეესაბამება $x'=0$, $\xi'=0$, ე.ი. K და K' ათვლის სისტემების სათავეები ერთმანეთს ემთხვევა. $x'=0$ ნერტილი K სისტემის მიმართ მოძრაობს V სიჩქარით. (27.1)-დან $x'=0$ პირობა გვაძლევს $x=\beta\xi$, საიდანაც $\frac{dx}{d\xi}=\beta$. ამიტომ x' -ის მსოფლიო წირი იქნება სწორი ხაზი, რომელიც გადის სათავეში და დროის ξ ღერძთან ადგენს φ კუთხეს, რომელიც განისაზღვრება $\tan\varphi=\beta$ პირობით. რადგან ამ წირისათვის

$x'=0$, ამიტომ იგი K' $\xi=c\xi'$ სისტემის დროითი ξ ღერძია (ნახ. 21). K' მოძრავე სისტემის x' ღერძის მისაღებად საკმარისია

(27.1)-ში ავიღოთ $\xi'=0$; მაშინ გვექნება $\xi=\beta x$ ნრფე, რომელიც X ღერძთან კვლავ ადგენს $\varphi=\arctg\beta$ კუთხეს. ამგვარად, ვხედავთ, რომ მაშინაც კი, როცა K ორთოგონალურია, K' მოძრავ სისტემას მინკოვსკის სივრცეში შეესაბამება ირიბკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომლის ღერძების დახრა უძრავი K სისტემის შესაბამისი ღერძების მიმართ განისაზღვრება $\varphi=\arctg\frac{v}{c}$ სიდიდით. რაც უფრო ჩქარა მოძრაობს K' სისტემა K -ს მიმართ, მით უფრო დახრილი იქნება K' სისტემის საკოორდინატო ღერძები K სისტემის ღერძების მიმართ. ზღვარში, როცა $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $v=c$ და K' სისტემის ღერძები დაემთხვევა ბისექტრისას. რადგან რეალური მოძრაობისათვის $v < c$, ამიტომ K' სისტემის ღერძების დახრა ყოველთვის ნაკლები იქნება $\frac{\pi}{4}$ -ზე.

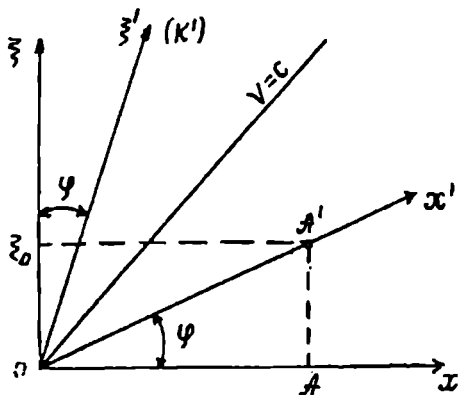


ნახ. 21.

მოვლენის კოორდინატების მოსაძებნად საჭიროა A ნერტილიდან გავავლოთ ღერძების პარალელური ხაზები. მათ მიერ მოკვეთილი მონაკვეთები იქნება A ნერტილის ირიბკუთხა კოორდინატები.

ბისექტრისა $x=c\xi$ გამოხატავს სინათლის სხივის მსოფლიო ხაზს, იგი ინვარიანტულია ლორენცის გარდაქმნების მიმართ.

ახლა მივცეთ მოვლენათა ერთდროულობის ფარდობითობას გეომეტრიული ინტერპრეტაცია. განვიხილოთ დამკვირვებელი, რომელიც უძრავად იმყოფება K' სისტემაში. მაშინ, ცხადია, რომ ყველა მოვლენა, რომელიც მდებარეობს X' ღერძზე, მისთვის ხდება ერთდროულად. კერძოდ, განვიხილოთ ამ სისტემაში ორი მოვლენა, რომელთა მსოფლიო ნერტილები მდებარეობს სათავეში და A ნერტილში (ნახ.22). რო-



ნახ.22.

გორც აღვნიშნეთ, K' -ში მოთავსებული დამკვირვებლისათვის ეს ორი მოვლენა ხდება ერთდროულად. გამოვარკვიოთ, არის თუ არა ეს ორი მოვლენა ერთდროული K დამკვირვებლისათვის. ცხადია, არა. K -ში მყოფი დამკვირვებლისათვის ეს ორი მოვლენა ხდება სხვადასხვა დროს. კერძოდ, A' მოვლენა ხდება გვიან, O მოვლენასთან შედარებით

$\frac{AA'}{c}$ -ჯერ. მაშასადამე, ორი მოვლენის ერთდროულობის ფარდობითი ხასიათი ძალიან მარტივად აიხსნება გეომეტრიულად.

ლორენცის გარდაქმნების გეომეტრიული ინტერპრეტაციის სისრულისათვის საჭიროა საკოორდინატო ღერძების ერთეულოვანი სიგრძეების (მასშტაბების) განსაზღვრა.

ამ მიზნით დავხაზოთ ერთეულოვანი ინტერვალის შესაბამისი ტოლფერდა ჰიპერბოლები (ნახ.23):

$$x^2 - \xi^2 = \pm 1 \quad (27.3)$$

ეს ჰიპერბოლები K სისტემის ξ და X ღერძებს გადაკვეთენ $\xi = 1, x = 0$ და $x = 1, \xi = 0$ ნერტილებში.

ვაჩვენოთ, რომ (27.3) ჰიპერბოლების გადაკვეთის ნერტილები K' სისტემის ღერძებთან იქნება:

$$\xi' = 1, x' = 0 \quad \text{და} \quad \xi' = 0, x' = 1, \quad (27.4)$$

ე.ი. ჰიპერბოლები K' სისტემის ღერძებზეც მოჰკვეთენ სიგრძისა და დროის ერთეულოვან მანძილებს. დამტკიცებისათვის კვლავ მივმართოთ ლორენცის (27.2) გარდაქმნებს. $\xi' = 1, x' = 0$ ნერტილს

K სისტემაში ექნება კოორდინატები:

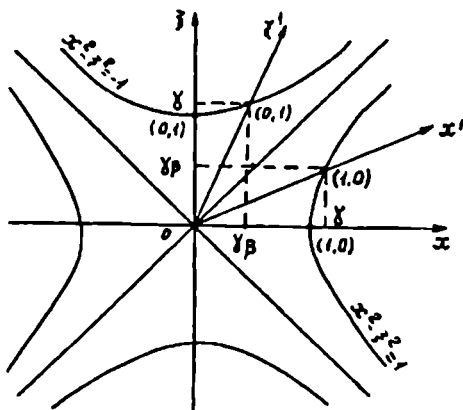
$$x = \gamma\beta, \xi = \gamma, \quad (27.5)$$

რომელიც აკმაყოფილებს $x^2 - \xi^2 = 1$ განტოლებას. შესაბამისად, $\xi' = 0, x' = 1$ ნერტილს K სისტემაში ექნება კოორდინატები:

$$x = \gamma, \xi = \gamma\beta, \quad (27.6)$$

რომელიც, ცხადია, დააკმაყოფილებს $x^2 - \xi^2 = 1$ განტოლებას.

ამგვარად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ (27.3) ჰიპერბოლები, როგორც უძრავი K სისტემის, ისე მოძრავი K' სისტემის ლერძებზე მოჰყვებენ ერთეულოვან მანძილებს, რომლებიც შეგვიძლია გამოვიყენოთ ამ სისტემების მასშტაბებად.



ნახ. 23

§ 28. მოვლენათა მიზეზ-შედეგობრივი კავშირი

მოვლენებს შორის მიზეზ-შედეგობრივი დამოკიდებულების საკითხი ჯერ შევისწავლოთ ლორენცის გარდაქმნებზე დაყრდნობით, შემდეგ კი იგივე საკითხი განვიხილოთ გეომეტრიულად.

შევისწავლოთ ორი მოვლენა, რომელიც ხდება სისტემის ორ x_1 და x_2 ნერტილში, ამასთან $x_2 > x_1$. ვთქვათ, მოვლენა x_1 ნერტილში ხდება დროის t_1 მომენტში, x_2 კი $t_2 > t_1$ მომენტში. t_1 მომენტში მომხდარი მოვლენა იყოს მიზეზი, t_2 -ში კი - მისი შედეგი. მიზეზი- მოვლენიდან მოვლენა შედეგამდე სიგნალის გავრცელების სიჩქარე ტოლი იქნება.

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (28.1)$$

მოძრავ სისტემაში ამ ორი მოვლენის მოხდენის ნერტილები აღვნიშნოთ x'_1 და x'_2 -ით, ხოლო დროის მომენტები, შესაბამისად, t'_1 და t'_2 -ით. ლორენცის გარდაქმნების გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (28.2)$$

სადაც V არის მოძრავი ინერციული სისტემის სიჩქარე უძრავის მიმართ. (28.2) ტოლობიდან (28.1)-ის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{V}{c^2} v\right) \quad (28.3)$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა გვიჩვენებს, რომ, თუ ადგილი აქვს პირობას

$$1 - \frac{V}{c^2} v < 0, \quad (28.4)$$

მაშინ, მოძრავ სისტემაში ადგილი ექნება უტოლობას, $t'_2 < t'_1$, ე.ი. მოვლენა-შემდეგი ადრე მოხდება მოვლენა-მიზეზზე. ეს კი უაზრო-შედეგია (არ შეიძლება ჯერ კაცი მოკვდეს და შემდეგ თოფი გავარდეს!) ამიტომ უნდა მოვითხოვოთ, რომ რეალურ პროცესებში დაცული იყოს შემდეგი უტოლობა

$$1 - \frac{V}{c^2} v \geq 0, \quad (28.5)$$

საიდანაც შეგვიძლია დავწეროთ პირობა

$$v \leq \frac{c^2}{V}. \quad (28.6)$$

ჩვენ ვიცით, რომ ლორენცის გარდაქმნები სამართლიანია $\frac{v}{c} < 1$ -თვის, ამიტომ (28.6) მიიღებს ასეთ სახეს:

$$v < c \quad (28.7)$$

მაშასადამე, იმისათვის, რომ მიზეზ-შემდეგობრივ დამოკიდებულებას ობიექტური ხასიათი ჰქონდეს და იგი დამოკიდებული არ იყოს ათვლის სისტემის არჩევაზე, საჭიროა მოვლენა-მიზეზიდან მოვლენა-შემდეგამდე ურთიერთქმედების (სიგნალის) გავრცელების სიჩქარე ნაკლები იყოს სინათლის სიჩქარეზე. (28.7) პირობის

შესრულების შემთხვევაში შეუძლებელია ისეთი ათვლის ინერციული სისტემის მოძებნა, რომელშიაც მიზეზსა და შედეგს ადგილები ექნებათ შეცვლილი. იგივე საკითხი შევისნავლოთ ინტერვალის გამოყენებით. ორ მოვლენას შორის ინტერვალის ჩაწეროთ შემდეგი სახით:

$$S_{12}^2 = C^2 t_{12}^2 - L_{12}^2, \quad S_{12}^2 = imv. \quad (28.8)$$

ვთქვათ, ერთ რომელიმე ათვლის ინერციულ სისტემაში ორ მოვლენას შორის დარღვეულია მიზეზ-შედეგობრივი კავშირი, ე.ი. $v > c$. მაშინ ინტერვალის $S_{12}^2 < 0$ სივრცისმაგვარია. ინტერვალის ინვარიანტობის გამო ნებისმიერ სხვა სისტემაშიაც ინტერვალის სივრცისმაგვარი იქნება. ე.ი. $S_{12}^2 < 0$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ აღნიშნული ორი მოვლენა არ იქნება ერთმანეთთან დაკავშირებული მიზეზ-შედეგობრივად ნებისმიერ სხვა სისტემაშიც. როცა ინტერვალის სივრცისმაგვარია, ე.ი. როცა, $S_{12}^2 = C^2 t_{12}^2 - L_{12}^2 < 0$, მაშინ, ცხადია, ინტერვალის ინვარიანტობის გამო, არ იარსებებს ისეთი ათვლის სისტემა, რომელშიაც $L_{12}^2 = 0$ და $t_{12}^2 \neq 0$, ე.ი. რომელშიაც ორი მოვლენა ერთსა და იმავე წერტილში ხდება დროის სხვადასხვა მომენტში.

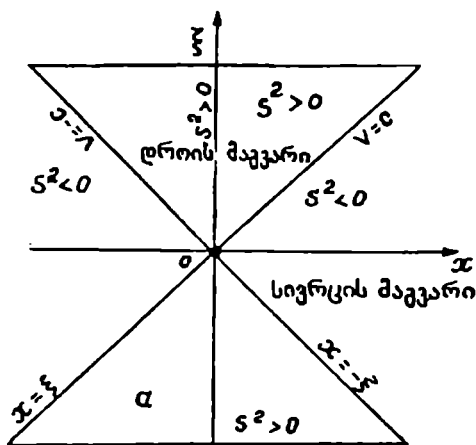
ახლა, ვთქვათ, ინტერვალის დროისმაგვარია, ე.ი. $S_{12}^2 = C^2 t_{12}^2 - L_{12}^2 > 0$, მაშინ შეგვიძლია შევარჩიოთ ისეთი ათვლის სისტემა, რომელშიაც ორი მოვლენა სივრცის ერთსა და იმავე წერტილში მოხდება $|L_{12}^2 = 0|$ დროის სხვადასხვა მომენტში $|t_{12} \neq 0|$ და არ არსებობს ათვლის სისტემა, რომელშიაც აღნიშნული ორი მოვლენა მოხდება ერთდროულად სივრცის სხვადასხვა წერტილში $|t_{12} = 0, L_{12} \neq 0|$, ამ შემთხვევაში ინტერვალის გახდებოდა უარყოფითი, რაც არ შეიძლება ინტერვალის ინვარიანტობის გამო.

ახლა გავარკვიოთ მოვლენათა მიზეზ-შედეგობრივი კავშირი გეომეტრიულად, ამ მიზნით მოვლენათა გეომეტრიული სურათი დავაკავშიროთ ინტერვალთან.

ავიღოთ მინკოვსკის ორგანოზომილებიან x სივრცეში კოორდინატთა სისტემა, რომელშიაც გავატაროთ $x = \pm x$ ბისექტრისები. ისინი შეესაბამება $s^2 = \xi^2 - x^2 = 0$ ინტერვალს ან, რაც იგივეა, $v = \pm c$ სიჩქარეს. ზოგად შემთხვევაში $s^2 = 0$. მსოფლიო ხაზები მინკოვსკის ოთხსივრცეში გამოყოფენ სამგანზომილებიან ჰიპერ-ზედაპირებს, რომელსაც, როგორც ვიცით, სინათლის კონუსს უწოდებენ. ჩვენ მიერ განხილულ ორგანოზომილებიან შემთხვევაში მივიღებთ ამ კონუსის $y=0, z=0$ სიბრტყესთან გადაკვეთის კვალს. $x = \pm x$ სინათლის კონუსი ერთმანეთისაგან გამოყოფს იმ არეებს,

სადაც ინტერვალის დადებითია $s^2 > 0$ და სადაც იგი უარყოფითია $s^2 < 0$ (ნახ.24).

ამ არეებს შესაბამისად ვუნოდებთ დროისმაგვარს და სივრცისმაგვარს. ალსანიშნავია, რომ დროის ლერძზე ინტერვალის $s^2 = \xi^2 > 0$ დროისმაგვარია, ხოლო სივრცულ ლერძზე $s^2 = -x^2 < 0$ - სივრცისმაგვარი. ო ნერტილი შეესაბამება მოვლენას., რომელიც ხდება $t=0$ მომენტში და $x=0$ ნერტილში (ნახ. 24). სინათლის



ნახ.24.
სინათლის კონუსი

კონუსის ქვედა ნაწილში ($t < 0$) მოთავსებული იქნება ყველა ის მოვლენა, რომელიც $t=0$ მოვლენაზე ადრე ხდება. ამიტომ ამ მოვლენებს შეუძლიათ გარკვეული ზემოქმედება მოახდინონ O მოვლენაზე, რომელიც დროის შემდგომ მომენტში ხდება. მაგალითად, მოვლენა a არის ნარსული O მოვლენის მიმართ, ამიტომ მას შეუძლია გავლენა მოახდინოს O -ზე. ასე რომ, ყველა მოვლენა, რომლებიც ხდება სინათლის კონუსის ქვედა

ნაწილში, სწორ მიზეზ-შედეგობრივ დამოკიდებულებაში იქნება O მოვლენასთან. ამის გამო, სინათლის კონუსის ქვედა არეს ($t < 0$) უნოდებენ აბსოლუტურ ნარსულს O მოვლენის მიმართ. რაც შეეხება სინათლის კონუსის ზედა არეს ($t > 0$), აქ, პირიქით, ნებისმიერი მოვლენა O მოვლენაზე გვიან ხდება, ამიტომ ყველა მათზე O მოვლენამ შეიძლება ზემოქმედება მოახდინოს. ე.ი. სინათლის კონუსის ამ ნაწილს შეესაბამება აბსოლუტური მომავალი O მოვლენის მიმართ. რაც შეეხება $s^2 < 0$ არეებს, ამ არის მოვლენებზე O ნერტილში მომხდარი მოვლენის ზეგავლენა და, პირიქით, გამორიცხულია. ეს იმიტომ, რომ ამისათვის საჭირო იქნებოდა სიგნალი, რომელიც გავრცელდებოდა c -ზე მეტი სიჩქარით.

როგორც ვიცით, ინტერვალის K და K' სისტემებში განისაზღვრება ფორმულებით:

$$S^2 = \xi^2 - X^2, \quad S'^2 = \xi'^2 - x'^2, \quad S^2 = S'^2 = imv \quad (28.9)$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ინტერვალის დროისმაგვარია, ე.ი. $s^2 > 0$. შესაბამისი მოვლენა შევისწავლოთ ყველა შესაძლო ინერციულ სისტემაში. როგორც დროის მონაკვეთი, ისე სივრცული დაშორება ამ ორ მოვლენას შორის ამ სისტემებში სულ სხვადასხვა იქნება, მაგრამ ინვარიანტობის გამო $s^2 = \xi^2 - x^2 > 0$ ინტერვალის უცვლელი დარჩება. ეს იმას ნიშნავს, რომ ამ მოვლენების გეომეტ-

რიული ადგილი მოთავსებული იქნება $\frac{x^2}{s^2} - \frac{\xi^2}{s^2} = -1$ ტოლფერდა ჰიპერბოლაზე. ამასთან, ჰიპერბოლას ერთი კალთა მდებარეობს სათავის მიმართ მომავალში ($\xi > 0$), მეორე კი -ნარსულში ($\xi < 0$) (ნახ.25).

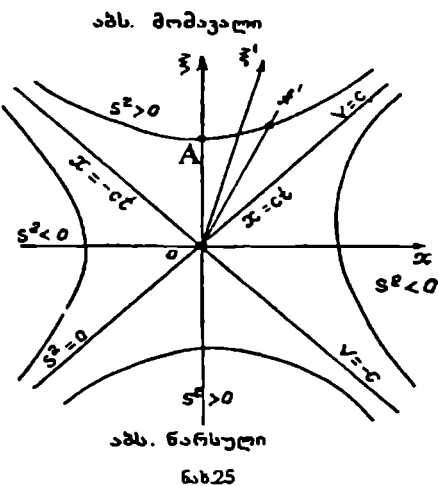
ვთქვათ, რომელიმე ათვლის სისტემის სათავეში მოხდა ორი მოვლენა, თანაც ისე, რომ ერთი მოვლენა იყოს მეორის მიზეზობრივი შედეგი. ვთქვათ, მოვლენა -მიზეზი მოხდა $t=0$ მომენტში, ხოლო იგივე სათავეში $t > 0$ დროის მომენტში მოხდა მოვლენა - შედეგი (ნახ. 25-ზე A ნერტილი). რადგან A ნერტილში გამავალი ჰიპერბოლას ყველა ნერტილი შეესაბამება $t > 0$ დროს, ამიტომ ყველა სხვა შესაძლო ინერციულ ათვლის სისტემაშიც მოვლენა -მიზეზი შედეგზე ადრე მოხდება.

შეიძლება განვიხილოთ ისეთი მიზეზობრივ კავშირში მყოფი ორი მოვლენაც, რომლებიც სხვადასხვა სივრცულ ნერტილში მდებარეობენ. მაგალითად, თოფის გასროლა (მიზეზი), კაცის სიკვდილი (შედეგი). მოძრავ სისტემაში, სადაც ტყვია უძრავია (K' - სისტემა) ორი მოვლენა დევს OA მონაკვეთზე. K სისტემაში კი ეს ორი მოვლენა დევს დახრილ OA' მონაკვეთზე. ამასთან, A' ნერტილი დევს A ნერტილზე გატარებულ ჰიპერბოლას კალთაზე. ასე, რომ, ამ შემთხვევაშიაც მოვლენა - შედეგი მოვლენა მიზეზის შემდეგ ხდება ყველა ათვლის ინერციულ სისტემაში. (არ მოიძებნება ათვლის სისტემა, სადაც ჯერ კაცი მოკვდება, ხოლო თოფი შემდეგ გავარდება).

25-ე ნახაზზე მოცემული ჰიპერბოლების ასიმპტოტების განტოლებაა $x = \pm ct$. ამიტომ იმ არეში, სადაც $s^2 < 0$, მოძრაობა დაუშვებელია, რადგან ამისათვის საჭირო იქნებოდა მოძრაობა c -ზე მეტი სიჩქარით. მოძრაობას c სიჩქარით შეესაბამება $s^2 = 0$ ინტერვალის, ე.ი. სინათლისმაგვარი ინტერვალის. $x = ct$ ტოლობას ადგილი ექნება მაშინ, როცა ორი მოვლენა ერთმანეთთან დაკავშირებულია სინათლის სიჩქარით. ამასთან, ცხადია, ინვარიანტობის

ძალით, ინტერვალის ნულის ტოლი იქნება ნებისმიერ ათვლის ინერციულ სისტემაში.

ახლა განვიხილოთ სივრცისმაგვარი ინტერვალი, ე.ი. როცა $s^2 < 0$, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ამ ინტერვალის შესაბამისი მოვლენების დაკავშირება მიზეზობრივად არავითარ შემთხვევაში არ შეიძლება. ამ მოვლენებისათვის $c^2/t^2 < x^2$, ე.ი. $v > c$, რაც, როგორც ვიცით, შესაძლებელია. მაშასადამე, არ იარსებებს ისეთი ინერციული ათვლის სისტემა, სადაც ორ მოვლენას შორის ინტერვალის სივრცისმაგვარი იქნებოდა.

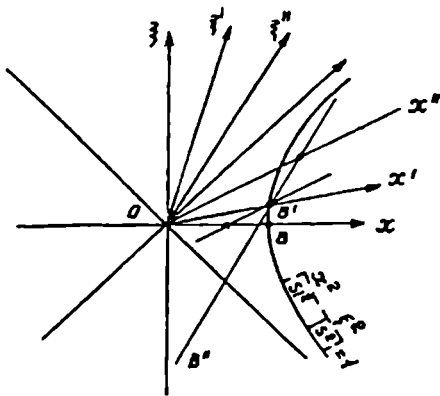


$s^2 = \xi^2 - x^2$ ინტერვალის აგრეთვე წარმოადგენს ტოლფერდა ჰიპერბოლას

$$\frac{x^2}{|s^2|} - \frac{\xi^2}{|s'^2|} = 1, \quad (28.10)$$

რომლის კალთების ზედა ნაწილი $|\xi| > 0$ შეესაბამება მომავალს, ხოლო ქვედა $|\xi| < 0$ - წარსულს (ნახ. 26). უარყოფითი ინტერვალის არეში, ნებისმიერ მოვლენასა და სათავეში მომხდარ მოვლენას შორის ინტერვალის სივრცისმაგვარია $s^2 = \xi^2 - x^2 < 0$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ეს მოვლენები ყველა ინერციულ სისტემაში ხდება სივრცის სხვადასხვა ადგილას $x \neq 0$. ამ არეში მოვლენათა ერთდროულობის საკითხი შეფარდებითია. იარსებებენ ისეთი სისტემები, რომელთათვისაც ამ არის ნებისმიერი მოვლენა O-ში მომხდარ მოვლენაზე გვიან ხდება. იარსებებენ ისეთი სისტემებიც, სადაც იგივე მოვლენა O მოვლენაზე ადრე მოხდება და, ბოლოს, იარსებებს ისეთი ერთი ინერციული ათვლის სისტემა, რომელშიაც ეს ორი მოვლენა ერთდროულად მოხდება. მაშასადამე, იარსებებს ისეთი ათვლის სისტემები, რომლებშიაც მოვლენების დროში თანმიმდევრობა შეცვლილი იქნება სანინალმდეგოთი, ე.ი. მოვლენები, რომლებიც ერთდროულად ან გვიან ხდებოდა O მოვლენასთან (სათავესთან) შედარებით, მოხდება უფრო ადრე. მართლაც, K' სისტემაში განვიხილოთ რაიმე B' მოვლენა. ამ სისტემაში O და

B' მოვლენები, ცხადია, ერთდროულად ხდება. ახლა განვიხილოთ დამკვირვებელი, რომელიც იმყოფება იმ ინერციულ K'' სისტემაში, რომელიც X ღერძის გასწვრივ უფრო ჩქარა მოძრაობს, ვიდრე K' , მაშინ მისი ღერძები კიდევ უფრო დახრილი იქნება. ვიპოვოთ B' ნერტილის მსოფლიო ნერტილი K'' სისტემაში. იგი იქნება B'' ნერტილში. რაც იმას გვიჩვენებს, რომ B' მოვლენა K'' სისტემაში უფრო ადრე მოხდება, ვიდრე O მოვლენა, რაც არღვევს მიზეზ-შედეგობრივ კავშირს. ეს უკანასკნელი კი ამტკიცებს, რომ არც ერთ ათვლის ინერციულ სისტემაში არ შეიძლება ორ მოვლენაზე სივრცითი ღერძის



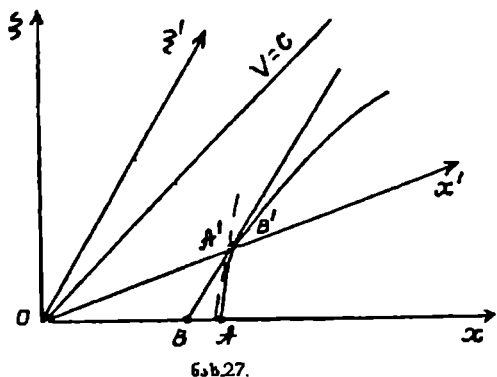
ნახ.26

გატარება. ახლა იგივე მოვლენას შევხედოთ სხვა თვალსაზრისითაც. ვთქვათ, ორი მოვლენა, რომელიც ხდება სათავეში და B ნერტილში, ერთმანეთთან დაკავშირებულია სივრცისმაგვარი ინტერვალით ($s^2 < 0$). ახლა, განვიხილოთ K' სისტემა, რომელშიაც განხილული მოვლენა იმაში მდგომარეობს, რომ ნაწილაკი უძრავია. ეს იმას ნიშნავს, რომ O და B მსოფლიო ნერტილებზე გავლებულია K' სისტემის X' ღერძი, ე.ი. დროითი ღერძი. მაშასადამე, K სისტემაში ორ მოვლენას შორის არსებული სივრცისმაგვარი ინტერვალის გახდა დროისმაგვარი. გამოვიდა, რომ ინტერვალმა ნიშანი შეიცვალა, რაც ინტერვალის ინვარიანტობის გამო დაუშვებელია. ამგვარად, როცა ორი მოვლენა ერთმანეთთან დაკავშირებულია დროისმაგვარი ინტერვალით ($s^2 > 0$), მაშინ მიზეზ-შედეგობრივი თანამიმდევრობის შეცვლა არ არის დამოკიდებული ათვლის სისტემის არჩევაზე. ხოლო, როცა მოვლენები ერთმანეთთან დაკავშირებულია სივრცისმაგვარი ინტერვალით ($s^2 < 0$, ასეთი ნაწილაკის მსოფლიო წირი დევს სინათლის კონუსის გარეთ $v > c$), მაშინ მიზეზ-შედეგობრივი თანამიმდევრობა შეგვიძლია გადავსვათ ნებისმიერად, კოორდინატთა სისტემის სათანადო შერჩევით. კერძოდ, ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ათვლის სისტემა, სადაც ნებისმიერი ორი მოვლენა ერთდროული გახდება. საღ ზაროვნებას მოკლებული შედეგი კი იმაზე მიუთითებს, რომ ორი მოვლენა არ

შეიძლება ერთმანეთთან დაკავშირებული იყოს სივრცისმაგვარი $/s^2 < 0/$ ინტერვალით. არ შეიძლება ნათურა აინთოს, სანამ იგი ქსელში არ ჩაგვირთავს ან, ტელეფონის აბონენტმა გვიპასუხოს, სანამ მისი ნომერი არ აგვიკრეფია და სხვ.

§ 29. მასშტაბის შემოკლების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

განვიხილოთ მასშტაბების შემოკლების საკითხი. ავიღოთ ერთეულოვანი მასშტაბები OA , რომელიც უძრავად დევს უძრავი K სისტემის X ღერძზე (ნახ. 27). მისი ბოლო წერტილების მსოფლიო ხაზები იქნება $O\xi$ და AA' დამკვირვებლისათვის, რომელიც უძრავად იმყოფება K' სისტემაში, ამ ორი წერტილის ერთდროული მდებარეობა ($\xi = 0$) განისაზღვრება O და A' მსოფლიო წერტილებით. ამიტომ OA მონაკვეთი მისთვის მოკლეა, ვიდრე თავისი ერთეულოვანი OB' მასშტაბი. პირიქით, K' სისტემაში უძრავად მოთავსებული OB' ერთეულოვანი მასშტაბის საწყისი და ბოლო წერტილები, რომელთა მსოფლიო წილებია $O\xi'$



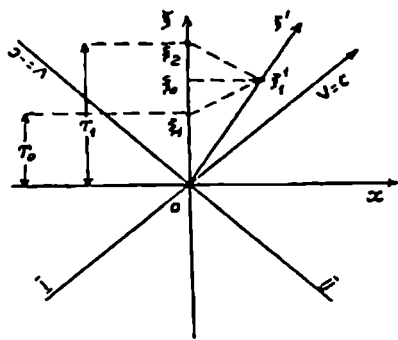
და BB' , K -ში მოთავსებული დამკვირვებლისათვის $\xi = 0$ მომენტში იმყოფებიან O და B წერტილებში, ე.ი. მონაკვეთი კვლავ ნაკლებია, ვიდრე უძრავი K სისტემის ერთეულოვანი OA მასშტაბი.

იგივე მსჯელობით შეგვიძლია ავხსნათ დროის შემოკლებაც. მართლაც, ვთქვათ K' სისტემაში მოთავსებული უძრავი საათი მოძრაობს $O\xi'$ მსოფლიო ხაზის გასწვრივ. როდესაც იგი D' წერტილში $/\xi' = 0/$ მდებარეობს, მაშინ ამ სისტემის მასშტაბის მიხედვით შესრულდება ერთი სრული ბრუნა, მაგრამ მანამდე ერთ სრულ ბრუნს შეასრულებს ის საათი (წერტილი CC' სწორზე, ნახ. 28), რომელიც მოთავსებულია K სისტემაში სივრცის იმავე წერტილში $/\xi = 1/$ ამგვარად, მოძრავი საათის მიხედვით დრო უფრო ნელა გადის, ვიდრე უძრავი საათის მიხედვით. პირიქით, საათი, რომელიც უძრავია K სისტემაში, C -წერტილში შეასრულებს ერთ სრულ ბრუნს, მაშინ როცა სივრცის იმავე ადგილას მდებარე K' სისტემაში მო-

როვე ხელსაწყოებით (მაგალითად, რადიოლოკატორებით), რომლებიც მიიღებენ და გადასცემენ სიგნალებს c -სიჩქარით. ვიგულისხმობი, რომ K დამკვირვებელი ლაბორატორიულ (K) სისტემაში უძრავია $x=0$ ნერტილში. ამ დამკვირვებლის მსოფლიო ნირი იქნება K სისტემის $\xi = ct$ ლერძი. ამასთან, "k კოეფიციენტის" მეთოდში ხელსაყრელია დროც გავზომოთ სანტიმეტრებში, რათა უფრო თავისუფლად გამოვიყენოთ გეომეტრიული აღწერის მეთოდი.

K' დამკვირვებლის მსოფლიო ნირი იქნება წრფე, რომელიც უძრავი K სისტემის $O\xi$ ლერძთან ადგენს $\varphi = \arctg \frac{v}{c}$ კუთხეს, ე.ი. მოძრავი დამკვირვებლის (რომელიც იმყოფება კოსმოსურ ხომალდში) მსოფლიო ნირი იქნება $O\xi'$ წრფე (ნახ.29). სინათლის სიჩქარის გავრცელება კი გამოიხატება $\pm x = \xi$ ბისექტრისებით, რომლებიც შეესაბამება $v = \pm c$ სიჩქარით მოძრაობას. ამასთან, როცა ხომალდი მოძრაობს $v = +c$ სიჩქარით, მსოფლიო ნირი იქნება პირველი ბისექტრისით გამოხატული, ხოლო როცა $v = -c$ -მეორეთი (ნახ.29).

გამოვარკვეით როგორ აისახება გეომეტრიულად სიგნალების გაგზავნა და მიღება აღნიშნული ორი დამკვირვებლის მიერ.



ნახ.29

ვიგულისხმობთ, რომ ამ ორმა დამკვირვებელმა პირველად სიგნალები გაცვალეს $t=0$ მომენტში, როცა ისინი ერთმანეთთან უსასრულოდ არ იმყოფებოდნენ O ნერტილში. რადგან დამკვირვებლები $t=0$ მომენტში ძალიან ახლოს იმყოფებიან ერთმანეთთან, ამიტომ სიგნალების გაცვლას დასჭირდება უსასრულოდ მცირე დრო და მათ შეუძლიათ თავისი საათების სინქრონიზება.

ამის გამო, დამკვირვებლებს შეუძლიათ აირჩიონ საწყისი პირობა, რომ $t = t' = 0$ მომენტებს შეესაბამება O მოვლენა. შემდეგ K დამკვირვებელი მისი საათის მიხედვით T_0 დროის ინტერვალის გასვლის შემდეგ (ξ , მსოფლიო ნერტილი) სიგნალს აგზავნის K' დამკვირვებელთან, რომელსაც იგი მიიღებს თავისი საათის მიხედვით $t' = 0$ საწყისი მომენტიდან T დროის ინტერვალის გასვლის შემდეგ. სიგნალი ვრცელდება $+c$ სიჩქარით, ამიტომ

რანდენადაც სიგნალის მოძრაობა აღინერება პირველი ბისექტრისის პარალელური ξ, ξ' მონაკვეთით, K' დამკვირვებელი ამ სიგნალს მიიღებს ξ' მსოფლიო ნერტილში. ეთქვას, K' დამკვირვებელი იმავე მომენტში ატყობინებს K დამკვირვებელს სიგნალის მიღების შესახებ. ამ მიზნით იგი თავის სიგნალს გზავნის K დამკვირვებელთან. რადგან K' დამკვირვებლის სიგნალი იმოდრავებს $v=-c$ სიჩქარით, ამიტომ K დამკვირვებელი ამ სიგნალს მიიღებს ξ_2 მსოფლიო ნერტილში T_1 მომენტში, რამდენადაც ამ შემთხვევაში სიგნალის გავრცელების ξ_1, ξ_2 მონაკვეთი პარალელური იქნება მეორე ბისექტრისისა. ცხადია, რომ ზოგად შემთხვევაში, K სისტემაში T_0 დროის ინტერვალი ორ მომდევნო სიგნალს შორის ტოლი არ იქნება K' სისტემაში გასულ T დროის ინტერვალისა იმავე სიგნალებს შორის.¹ ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$T = kT_0, \quad (30.1)$$

სადაც k წარმოადგენს კოეფიციენტს, რომლის განსაზღვრაც ჩვენ გვაინტერესებს.

ფარდობითობის თეორიის თანახმად, ეს ცდა შეგვიძლია შევადარუნოთ. ჩვენ უფლება გვაქვს ჩავთვალოთ, რომ K' უძრავი სისტემაა, ხოლო K მის მიმართ მოძრაობს v სიჩქარით. ეთქვას, K' დამკვირვებელი, მის შემდეგ, რაც მან სიგნალი გაცვალა $t = t' = 0$ მომენტში K დამკვირვებელთან (როცა ისინი ერთმანეთთან უსასრულოდ ახლოს იყვნენ O ნერტილში), მას (K დამკვირვებელს) უგზავნის მეორე სიგნალს. K' სისტემაში პირველ და მეორე სიგნალებს შორის დროის ინტერვალი ისე შევარჩიოთ, რომ იგი ზუსტად T_0 -ის ტოლი იყოს. თუ ამავე ორ სიგნალს შორის დროის ინტერვალი K სისტემაში არის T' , მაშინ ცხადია, რომ

$$T' = k'T_0. \quad (30.2)$$

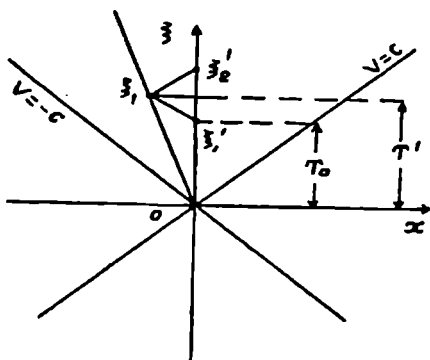
ვარჩევნოთ, რომ ფარდობითობის პრინციპის ძალით k და k' ერთმანეთის ტოლია ($k = k'$). ჯერ ერთი, ორივე დიაგრამაზე გამოვიყენოთ ის გარემოება, რომ სინათლის სიჩქარე ინვარიანტულია. გრაფიკულად ეს გამოიხატა იმით, რომ ორივე შემთხვევაში სიგნალების გავრცელების მსოფლიო წრფეები ღერძთან ადგენენ $\frac{\pi}{4}$ კუთხეს. ორივე ცდის შემთხვევაში სიგნალები იგზავნებოდა T_0 ინტერვალში იმ საათის მიხედვით, რომელიც უძრავად იყო დაკავშირებული სიგნალის გამგზავნ დამკვირვებელთან. ორივე

¹ ეს ჩანს, მაგალითად, დოპლერის ეფექტიდან.

შემთხვევაში სინათლე იგზავნებოდა c სიჩქარით და მიიღებოდა იმ დამკვირვებლის მიერ, რომელიც სინათლის გამგზავნის მიმართ მოძრაობდა V სიჩქარით. ფარდობითობის პრინციპის თანახმად, ორივე დამკვირვებლისათვის ეს მოვლენა ერთნაირად უნდა მიმდინარეობდეს, ამიტომ დავასკვნით, რომ $\frac{T'}{T_0} = \frac{T}{T_0}$, ე.ი.

$$k = k' \quad (30.3)$$

მეორე მხრით, სივრცით ერთგვაროვნებისა და იზოტროპიულობის და დროის ერთგვაროვნების თვისებით k კოეფიციენტი დამოკიდებული არ იქნება სიგნალის მიმდებარისა და გადამცემის მდებარეობაზე, სიგნალის გაგზავნის ან მიღების დროის შერჩევაზე. იგი დამოკიდებული არ იქნება არც სიგნალის გავრცელების



ნახ.30

მიმართულებაზე და არც ორ მომდევნო სიგნალს შორის დროის ინტერვალზე. ამიტომ k კოეფიციენტი შეიძლება დამოკიდებული იყოს მხოლოდ k და k' დამკვირვებლის ურთიერთფარდობით სიჩქარეზე. ვიპოვოთ ეს დამოკიდებულება. გამოვიყენოთ 30-ე ნახაზი. რადგან K სისტემაში ორ სიგნალს შორის დროის ინტერვალი არის T_0 ,

ხოლო K' -ში T , K' -დან K -ში გაგზავნილი სიგნალის მიღებისას ξ_2 მსოფლიო წერტილში K დამკვირვებლის თვალსაზრისით გადის T_1 დრო, ამიტომ გვექნება შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$T = kT_0, \quad T_1 = kT \quad (30.4)$$

და, მაშასადამე, ამ ორი ტოლობის გაერთიანება მოგვცემს

$$T_1 = kT = k^2 T_0. \quad (30.5)$$

ახლა განვიხილოთ $\xi_1 \xi'_2$ სამკუთხედი. მისი $\xi_1 \xi'_1$ და $\xi'_1 \xi_2$ გვერდები

ოღ ღერძთან ადგენენ $\frac{\pi}{4}$ კუთხეს, ამიტომ

$$\xi_0 \xi'_1 = \xi_1 \xi_0 = \xi_0 \xi_2 = \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \quad (30.6)$$

და

$$\xi_0 \xi'_1 = \xi_1 \xi_0 = O\xi_0 / c v = O\xi_0 \frac{V}{C} = \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \quad (30.7)$$

იმავე სამკუთხედიდან გვექნება

$$O\xi_0 = O\xi_1 + \xi_1 \xi_0 = O\xi_1 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 . \quad (30.8)$$

რადგან $O\xi_1 = T_0$, ამიტომ მივიღებთ

$$\xi_1 \xi_2 = T_1 - T_0 = (k^2 - 1) T_0 , \quad (30.9)$$

ხოლო

$$O\xi_0 \frac{v}{c} = \frac{k^2 + 1}{2} \frac{v}{c} T_0 = \frac{k^2 - 1}{2} T_0 , \quad (30.10)$$

საიდანაც

$$\frac{v}{c} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \equiv \beta . \quad (30.11)$$

აქედან კი ადვილად მივიღებთ საძიებელ ფორმულას

$$k(v) = \frac{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (30.12)$$

აი, ეს არის სწორედ ე.წ. "k კოეფიციენტი", რომელიც დიდ როლს ასრულებს ფარდობითობის თეორიის გეომეტრიული ინტერპრეტაციის საქმეში. როცა $V=0$, როგორც მოსალოდნელი იყო, $k=1$. როცა $V>0$, მაშინ $k>1$, ხოლო როცა $V<0$, მაშინ $k<1$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ყველა მოვლენა, რომელიც ადრე ავხსენით ლორენცის გარდაქმნების საშუალებით, შეიძლება ავხსნათ "k კოეფიციენტის" მეთოდზე დაყრდნობითაც. წინასწარ

k კოეფიციენტი დავაკავშიროთ ლორენცის $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ფაქტორთან, რამდენადაც ამას დიდი მნიშვნელობა აქვს გამოთვლების

ჩატარების დროს. თანახმად (30.11) ფორმულისა, ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\gamma = \frac{k^2 + 1}{2k}. \quad (30.13)$$

დროის ინტერვალის შემცირება. უპირველეს ყოვლისა, განვიხილოთ დროის შენელების საკითხი. როგორც ვიცით, K' დამკვირვებლისათვის დროის ინტერვალი შეესაბამება ξ_1' მსოფლიო ნერტილს და $T = kT_0$. მეორე მხრით, $\xi_0 \xi_1'$ მონაკვეთი პერპენდიკულარულია $O\xi$ ღერძისა, ამიტომ K დამკვირვებლის თვალსაზრისით, ξ_1' და ξ_0 მოვლენა ერთდროულად ხდება, ამიტომ K დამკვირვებლისათვის ξ_1' მოვლენა ხდება $t = O\xi_0$ მომენტში. მეორე მხრით, $O\xi_0 = O\xi_1 + \xi_1 \xi_0 = O\xi_1 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2$. მაგრამ $O\xi_1 = T_0$, ხოლო $\xi_1 \xi_2 = (k^2 - 1)T_0$, ამიტომ

$$t = \frac{1+k^2}{2} T_0 = \frac{1+k^2}{2k} T \quad (30.14)$$

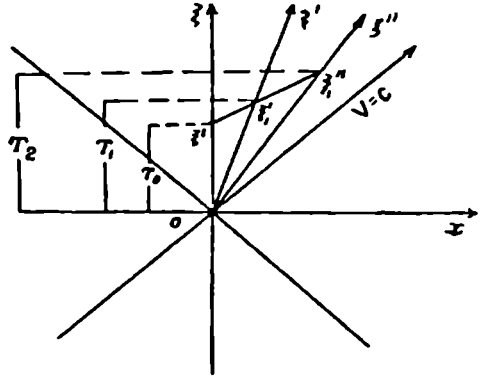
თუ გავითვალისწინებთ (30.13) ფორმულას, ადვილად მივიღებთ, რომ $t = \gamma T$, ე.ი.

$$t = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (30.15)$$

რაც ემთხვევა (18.1) ფორმულას, რომელიც ლორენცის გარდაქმნების ფორმულაზე დაყრდნობით გვექონდა გამოყვანილი.

სიჩქარეთა შეკრების კანონი. "K კოეფიციენტის" მეთოდით ასევე ადვილად გამოვიყვანთ აინშტაინის სიჩქარეთა შეკრების ფორმულასაც. განვიხილოთ სამი ათვლის სისტემა: K , K' და K'' . K სისტემა, როგორც ყოველთვის, უძრავად ჩავთვალოთ, K' სისტემა K -ს მიმართ მოძრაობდეს მუდმივი V_1 სიჩქარით, ხოლო K'' სისტემა K' -ის მიმართ მოძრაობდეს V_2 მუდმივი სიჩქარით. K'' სისტემის სიჩქარე K -სისტემის მიმართ კი u -თი აღვნიშნოთ. განვიხილოთ სამი K, K', K'' დამკვირვებელი, რომლებიც უძრავი არიან შესაბამისად K, K' და K'' სისტემებში. ვიგულისხმობთ, რომ სამივე დამკვირვებელი სანყის $t = t' = t'' = 0$ მომენტში O ნერტილში უსასრულოდ ახლოს არიან ერთმანეთთან და ურთიერთ სიგნალების გაგზავნით სინქრონიზაციას უკეთებენ თავის საათებს. მათი შესატყვისი მსოფლიო წირები იყოს $O\xi, O\xi'$ და $O\xi''$ შესაბამისად (ნახ.31).

ვთქვათ, K დამკვირვებელი სიგნალს აგზავნის K' -თან, რომელიც სიგნალს იღებს ξ'_1 მსოფლიო ნერტილში და თავის მხრივ, იმავე მომენტში სიგნალს აგზავნის მესამე დამკვირვებელთან, რომელიც ამ სიგნალს აფიქსირებს ξ''_1 მსოფლიო ნერტილში. დროის ინტერვალები დამკვირვებლების საათების მიხედვით K, K' და K'' სისტემებში, შესაბამისად, იყოს T_0, T_1 და T_2 . მაშინ კოეფიციენტის მეთოდის თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ



ნახ.31.

$$T_1 = k(V_1)T_0, T_2 = k(V_1)T_1, T_2 = k(u)T_0, \quad (30.16)$$

სადაც K კოეფიციენტები განსაზღვრული იქნება ფორმულებით:

$$k(V_1) = \sqrt{\frac{1 + \frac{V_1}{c}}{1 - \frac{V_1}{c}}}, \quad k(V_2) = \sqrt{\frac{1 + \frac{V_2}{c}}{1 - \frac{V_2}{c}}}, \quad k(u) = \sqrt{\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}} \quad (30.17)$$

(30.16) ტოლობების თანახმად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$T_2 = k(V_2)T_1 = k(V_2)k(V_1)T_0 = k(u)T_0, \quad (30.18)$$

საიდანაც

$$k(u) = k(V_2)k(V_1). \quad (30.19)$$

ამგვარად, K კოეფიციენტი ორი თანამიმდევრული გარდაქმნისა ტოლია ცალკეული გარდაქმნის შესაბამისი კოეფიციენტების ნამრავლის. (30.17) ფორმულების თანახმად (30.19) მოგვცემს

$$\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}} = \frac{\left(1 + \frac{V_2}{c}\right)\left(1 + \frac{V_1}{c}\right)}{\left(1 - \frac{V_2}{c}\right)\left(1 - \frac{V_1}{c}\right)}, \quad (30.20)$$

საიდანაც ვიპოვიოთ u -ს. გვექნება

$$U = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}}, \quad (30.21)$$

რომელიც მართლაც წარმოადგენს სიჩქარეთა რელატივისტური შეკრების კანონს ერთგანზომილებიანი მოძრაობის შემთხვევაში.

დოპლერის ეფექტი. K კოფიციენტი უშუალოდაა დაკავშირებული დოპლერის ეფექტთან, კერძოდ, სიგრძივ ეფექტთან. (30.11) ფორმულის გათვალისწინებით დოპლერის (25.4) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\omega = \frac{2k\omega_0}{(k^2 + 1) - (k^2 - 1)\cos\alpha}, \quad (30.22)$$

საიდანაც გრძივი ეფექტისათვის ($\alpha = 0$) გვექნება გამოხატულება

$$\omega = k\omega_0. \quad (30.23)$$

მაშასადამე, K კოფიციენტი შეგვიძლია განვსაზღვროთ, როგორც $k = \frac{\omega}{\omega_0}$ ფარდობა, რომელიც ეკვივალენტურია (30.1) დამოკიდებულებიან.

დოპლერის განივი ეფექტისათვის ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) იგივე ფორმულიდან მივიღებთ

$$\omega = \frac{2k}{k^2 + 1} \omega_0 = \frac{\omega_0}{\gamma}. \quad (30.24)$$

რადგან $\omega = \frac{2\pi}{T}$, ამიტომ პერიოდებს შორის გვექნება დამოკიდებულება

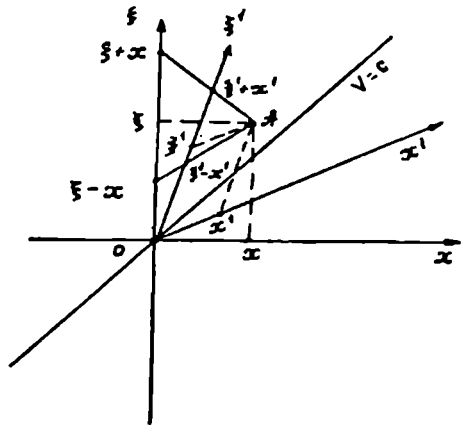
$$T = \gamma T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (30.25)$$

ამგვარად, დოპლერის განივი ეფექტი შედეგი ყოფილა ერთიდან მეორე ინერციულ სისტემაზე გადასვლისას (რომელიც პირველის მიმართ მოძრაობს V სიჩქარით) რხევის პერიოდის გაზრდისა $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ სიდიდით. ეს უკანასკნელი პირდაპირ კავშირშია იმ გარემოებასთან, რომ მოძრავი სისტემის მიმართ ადგილი აქვს

დროის შენელებას. ამის გამო, დოპლერის განივი ეფექტი შეგვიძლია გამოვიყენოთ ერთ-ერთ ექსპერიმენტულ ფაქტად, რომელიც უშუალოდ გვიჩვენებს, რომ მოძრავ სისტემაში, მართლაც, ადგილი აქვს დროის ინტერვალის შემცირებას. სწორედ ასეთი შემცირება იქნა დამზერილი აივსის მიერ დოპლერის განივი ეფექტის აღმოჩენის დროს. მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ აივსის ექსპერიმენტი იყო პირველი ექსპერიმენტი, რომელშიც უშუალოდ დაიმზირა საათების შენელების მოვლენა.

ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები. ახლა ვაჩვენოთ, რომ K კოეფიციენტის მეთოდით ასევე მარტივად გამოიყვანება ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები. შემოვისაზღვროთ ერთგანზომილებიანი მოძრაობით. განვიხილოთ უძრავი K სისტემა და მის მიმართ x ღერძის გასწვრივ V სიჩქარით მოძრავი ინერციული K' სისტემა. K სისტემაში

მსოფლიო ნერტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ x და ξ -ით, K' -ში კი x' და ξ' -ით. ამასთან, როგორც ყოველთვის $\xi = ct$, $\xi' = ct'$, ე.ი. ისინი ნარმოადგენენ დროს c ერთეულებში. ვთქვათ, K დამკვირვებლის მდებარეობა განისაზღვრება $X=0$ ნერტილით, K' -ისა კი $X'=0$. ამ ორი დამკვირვებლის შეხვედრის მომენტი იქნება $\xi = \xi'$ (ე.ი. $t = t'$). განვიხილოთ რაიმე A მოვლენა,



ნახ.32.

რომელიც K' დამკვირვებლის მარჯვნივ ხდება (ნახ.32) K დამკვირვებლის თვალსაზრისით. K დამკვირვებელი $(\xi-x)$ ნერტილიდან აგზავნის სიგნალს მსოფლიო A ნერტილში და არეკვილილ სიგნალს დაბულობს $(\xi+x)$ მსოფლიო ნერტილში. ასე რომ, A მოვლენის კოორდინატები, გამოთვლილი K დამკვირვებლის მიერ ამ ორი ნერტილის კოორდინატებით, იქნება X და ξ . მართლაც, $\xi = \frac{1}{2}(x+\xi) + \frac{1}{2}(-x+\xi)$. ანალოგიურად, K' სისტემაში ამ მოვლენის კოორდინატების გამოთვლა მოგვცემს (x', ξ') -ს.

ვთქვათ, K' დამკვირვებელი თავის სიგნალს მსოფლიო A ნერ-

ტილში ავზაენის ზუსტად მაშინ, როცა K დამკვირვებლის სიგნალი მას ჩაუვლის და A ნერტილიდან არეკვლილ სიგნალს იღებს ზუსტად იმ დროს, როცა მას ჩაუვლის K დამკვირვებლის მიერ A ნერტილიდან არეკვლილი სიგნალი. მაშინ " K კოეფიციენტის" მეთოდის ძალით გვექნება:

$$\xi' - x' = k(\xi - x), \quad (30.26)$$

$$\xi + x = k(\xi' + x'), \quad (30.27)$$

ამ ორუცნობიანი განტოლებიდან განვსაზღვროთ ξ' და x' ; გვექნება:

$$\xi' = \frac{k}{2}(\xi - x) + \frac{1}{2k}(\xi + x) = \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \left(\xi - \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} x \right), \quad (30.28)$$

$$x' = \frac{1}{2k}(\xi + x) - \frac{k}{2}(\xi - x) = \frac{k^2 + 1}{2k} \left(x - \frac{v}{c} \xi \right) \quad (30.29)$$

ან, თუ გავიხსენებთ (30.13) ფორმულას, საბოლოოდ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$x' = \gamma(x - vt), t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right), \quad (30.30)$$

რომელიც, მართლაც, წარმოადგენს ლორენცის გარდაქმნის ფორმულებს ერთგანზომილებიანი მოძრაობის შემთხვევაში.

აღსანიშნავია, რომ (30.26) და (30.27) ფორმულებიდან მარტივად გამომდინარეობს ინტერვალის ინვარიანტობის პირობაც.

ამგვარად, K კოეფიციენტის მეთოდი ეკვივალენტური ყოფილა ლორენცის გარდაქმნებისა. ასე რომ, ჩვენ შეგვიძლია ლორენცის გარდაქმნების ნაცვლად და ყველა იმ მოვლენის ასახსნელად, რომლებიც გამომდინარეობენ ლორენცის გარდაქმნებიდან, ეისარგებლოთ " K კოეფიციენტის" მეთოდით. " K კოეფიციენტის" მეთოდი სიმარტივისა და მოხდენილობის გამო სულ უფრო და უფრო ხშირად გამოიყენება რელატივისტურ თეორიაში.

რელატივისტური მექანიკის მოძრაობის განტოლება

ამ თავში, ჩვენი მიზანია რელატივისტური მექანიკის ჩამოყალიბება. ამისათვის, უპირველეს ყოვლისა, საჭიროა მოძრაობის განტოლების დაწერა. ამასთან, უნდა გვახსოვდეს, რომ, ისევე როგორც კლასიკურ მექანიკაში, მოძრაობის განტოლებების გამოყვანა შეუძლებელია რაიმე ზოგად მოსაზრებებზე დაყრდნობით; იგი არსებითად პოსტულატია, რომლისგანაც გამომდინარე შედეგების სამართლიანობა ექსპერიმენტით უნდა შემოწმდეს. ცხადია, რელატივისტური მექანიკის მოძრაობის განტოლება თავის თავში უნდა შეიცავდეს ფარდობითობის რელატივისტურ პრინციპს, კერძოდ, იგი უნდა ითვალისწინებდეს სივრცისა და დროის ფარდობით ხასიათს. აინშტაინის ფარდობითობის პრინციპის მიხედვით რელატივისტური მოძრაობის განტოლება ინვარიანტული უნდა იყოს ლორენცის გარდაქმნების მიმართ.

ხოლო ზღვარში, შესაბამისობის პრინციპის თანახმად, როცა $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, რელატივისტური მექანიკის მოძრაობის განტოლება უნდა დაემთხვეს კლასიკური მექანიკის მოძრაობის განტოლებას (ნიუტონის განტოლებას), რომელიც უკვე ინვარიანტული იქნება გალილეის გარდაქმნების მიმართ.

ამავე თავში შემოვიღებთ რელატივისტური მექანიკის ფიზიკურ სიდიდეებს და დანვრილებით შევისწავლით მათ თვისებებს.

§ 31. ლაბრანჟის ფუნქცია

ხელსაყრელია, რელატივისტურ მექანიკას საფუძვლად დავუდოთ ჰამილტონის უმცირესი ქმედების პრინციპი, რომელიც ერთი ნაწილაკისათვის დეკარტის კოორდინატებში ასე ჩაინერება:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) dt = 0, \tag{31.1}$$

სადაც S ქმედების ფუნქციაა, ხოლო $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ - ლაგრანჟიანი. ამ პრინციპიდან მიღებული მოძრაობის განტოლება ინვარიანტული უნდა იყოს ლორენცის გარდაქმნების მიმართ, ამიტომ ქმედების ფუნქციასაც იგივე ინვარიანტობის თვისება უნდა ახასიათებდეს. განსხვავებით კლასიკური მექანიკისაგან, dt ინვარიანტული აღარ

არის, ამიტომ ცალკე არც ლაგრანჟის L ფუნქცია იქნება ინვარიანტული. ინვარიანტული უნდა იყოს Ldt ნამრავლი.

სიმარტივის მიზნით ჯერ განვიხილოთ თავისუფალი ნაწილაკი. კლასიკურ მექანიკაში, ამ შემთხვევაში, ლაგრანჟიანი ემთხვევა კინეტიკურ ენერჯიას

$$L = T = \frac{m_0 \vec{v}^2}{2}. \quad (31.2)$$

რელატივისტურ მექანიკაშიც თავისუფალი ნაწილაკი იმოდრავებს თანაბრად და სწორხაზოვნად, ამიტომ ლაგრანჟიანი მხოლოდ სიჩქარის სიდიდის ფუნქცია იქნება. ერთადერთი ინვარიანტი, რომელიც დამოკიდებულია სიჩქარის სიდიდეზე, არის ინტერვალი. ამიტომ თავისუფალი ნაწილაკისათვის Ldt სიდიდე პროპორციული იქნება ინტერვალის $Ldt = \alpha ds$, სადაც α მუდმივია, რომლის არჩევაზე მოძრაობის განტოლების სახე დამოკიდებული არ უნდა იყოს. რადგან (18.6) ფორმულის თანახმად,

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (31.3)$$

სადაც v ნაწილაკის სიჩქარეა, შეგვიძლია დავწეროთ

$$L = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (31.4)$$

ასეთი იქნება თავისუფალი ნაწილაკის ლაგრანჟიანი რელატივისტურ მექანიკაში. ახლა, საჭიროა α პარამეტრის განსაზღვრა.

გამოვიყენოთ შესაბამისობის პრინციპი, რომლის თანახმად $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ ზღვარში (31.4) რელატივისტური ლაგრანჟიანი უნდა დაემთხვეს (31.2) კლასიკურ ლაგრანჟიანს. გვექნება

$$L = \alpha c \left\{ 1 - \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right\}. \quad (31.5)$$

თუ ავიღებთ $\alpha = -m_0 c$, მაშინ მივიღებთ

$$L = -m_0 c^2 + \frac{m_0 \vec{v}^2}{2} + \dots. \quad (31.6)$$

რადგან კლასიკურ მექანიკაში ლაგრანჟიანში მნიშვნელობა არა აქვს მუდმივ შესაკრებს, ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მართლაც, ზღვარში რელატივისტური ლაგრანჟიანი ემთხვევა კლასიკურს.

მაშასადამე, რელატივისტურ მექანიკაში თავისუფალი ნაწილაკის ლაგრანჟის ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}. \quad (31.7)$$

რამდენადაც ჩვენთვის უკვე ცნობილია ლაგრანჟიანი, ადვილად ვიპოვით ენერგიას, იმპულსს და სხვა სიდიდეებს, რამდენადაც კლასიკური მექანიკის შესაბამისი ფორმულები ზოგადია და გამოდგება რელატივისტურ შემთხვევაშიც.

§ 32. რელატივისტური ნაწილაკის იმპულსი და ენერგია

იმპულსი. როგორც ცნობილია, იმპულსის კომპონენტები განისაზღვრება ფორმულით

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}; \quad (i=1,2,3) \quad (32.1)$$

ამასთან, $i=1,2,3$ -ში ვიგულისხმებთ x, y და z კომპონენტებს. თუ ლაგრანჟის ფუნქციისათვის გამოვიყენებთ (31.7) გამოსახულებას, ადვილად ვიპოვით

$$P_i = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (32.2)$$

ან, ვექტორულად,

$$\vec{P} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (32.3)$$

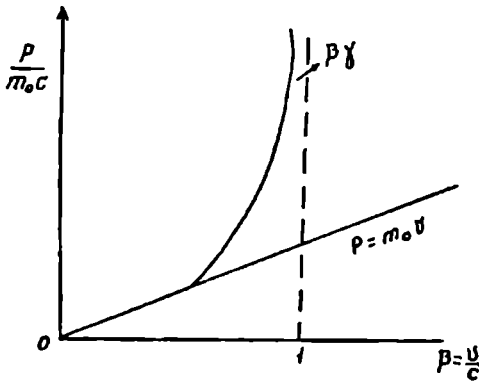
როგორც ვხედავთ, რელატივისტურ მექანიკაში იმპულსსა და სიჩქარეს შორის $\vec{P} = m_0 \vec{v}$ უბრალო (პროპორციული) დამოკიდებულება აღარა გვაქვს. ზღვარში, როცა $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ იმპულსისათვის მივიღებთ

$$\vec{P} = m_0 \vec{v} \left\{ 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right\} \approx m_0 \vec{v}, \quad (32.4)$$

რაც ემთხვევა იმპულსის კლასიკურ განმარტებას.

იმპულსისა და სიჩქარის რელატივისტური დამოკიდებულება

გამოვხატოთ გრაფიკულად (ნახ. 33). ამისათვის ორდინატთა ღერძზე გადავზომოთ უგანზომილებო სიდიდე $\frac{p}{m_0 c}$, აბსცისზე კი $\beta = \frac{v}{c}$ ამ აღნიშვნებში (32.3) ფორმულას ექნება $\frac{p}{m_0 c} = \beta \gamma$ სახე, ამასთან, $p_0 = m_0 v$, შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც დამახასიათებელი იმპულსი, როცა $p \ll m_0 c$ გვექნება არარელატივისტური შემთხვევა. 33-ე ნახაზზე მოცემულია $p = m_0 v$ კლასიკური დამოკიდებულებაც. როგორც მოსალოდნელი იყო, მცირე სიჩქარეებზე $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, იმ-



ნახ.33
 $p = m_0 v$ იმპულსისა და სიჩქარის
 კლასიკური დამოკიდებულებაა, ხოლო $p = \beta \gamma$
 -რელატივისტური.

პულსის რელატივისტური და კლასიკური მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა. დიდ სიჩქარეებზე კი იმპულსის რელატივისტური მნიშვნელობა ძალიან სწრაფად იზრდება და $v=c$ -სათვის უსასრულობა ხდება. ცხადია, რომ მოცემული სიჩქარისათვის, რაც მეტია m_0 მასა, მით მეტი იქნება იმპულსი. ეს იმას ნიშნავს, რომ $p = f(v)$ გრაფიკი მით უფრო დაბლა დაინევს, რაც ნაკლები იქნება ნაწილაკის m_0 მასა. ამიტომ გა-

საგებია, რომ სხვადასხვა მასებს შეგვიძლია მივანიჭოთ ისეთი სიჩქარეები, რომ მათი იმპულსები ტოლი იყოს.

ენერგია. ნაწილაკის ენერგია გამოითვლება ფორმულით

$$E = (\bar{p}, \bar{v}) - L. \quad (32.5)$$

შევიტანოთ \bar{p} -ს მნიშვნელობა (32.3) ფორმულიდან, L -ისა კი (31.7)-დან, გვექნება

$$E = \frac{m_0 \bar{v}^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (32.6)$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (32.7)$$

ზღვარში, როცა $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, გვექნება შემდეგი გაშლა:

$$E = m_0 c^2 \left\{ 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right\} = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} + \dots + \quad (32.8)$$

როგორც ვხედავთ, ზღვარში მუდმივი $m_0 c^2$ შესაკრების სიზუსტით, რელატივისტური E ენერგია ემთხვევა კლასიკურ კინეტიკურ ენერგიას. როგორც ვიცით, ამ ადიტიურ მუდმივს კლასიკურ მექანიკაში მნიშვნელობა არა აქვს, რადგან ენერგია განსაზღვრულია მუდმივი შესაკრების სიზუსტით.

როცა ნაწილაკი უძრავია, ე.ი. როცა $v=0$, მაშინ (32.7) ფორმულა მოგვცემს

$$E = m_0 c^2. \quad (32.9)$$

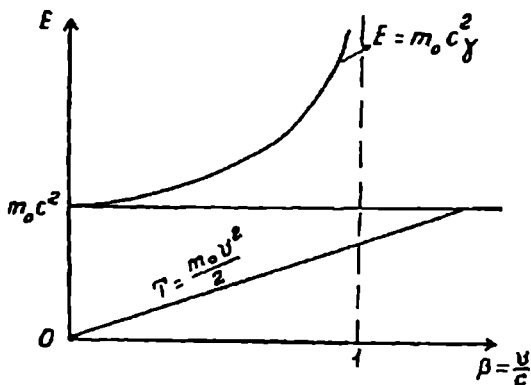
ამ მუდმივს ნაწილაკის უძრაობის ან საკუთარი ენერგია ეწოდება, რამდენადაც იგი დაკავშირებულია ნაწილაკის შინაგან ბუნებასთან.

როცა ნაწილაკის სიჩქარე იზრდება, მაშინ მისი ენერგია იზრდება და როცა ნაწილაკის სიჩქარე გაუტოლდება სინათლის სიჩქარეს, მაშინ რელატივისტური ენერგია $E = \infty$. მაშასადამე, $v=c$ სიჩქარის მისაღწევად საჭიროა უსასრულოდ დიდი ენერგიის დახარჯვა. 34-ე ნახაზზე მოცემულია რელატივისტური ენერგიის დამოკიდებულება სიჩქარეზე. აქვე მოტანილია გრაფიკი კინეტიკური ენერგიისა კლასიკური მექანიკის თანახმად. როგორც ვხედავთ, კლასიკური კინეტიკური ენერგია, მცირე სიჩქარეებზე, $m_0 c^2$ მუდმივის სიზუსტით ემთხვევა რელატივისტურ ენერგიას, დიდ სიჩქარეებზე კი რელატივისტური ენერგია გაცილებით ჩქარა იზრდება. იმისათვის, რომ $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ ზღვარში რელატივისტური ენერგია ზუსტად კლასიკურ კინეტიკურ ენერგიას დაემთხვეს, ხშირად, ენერგიის E მნიშვნელობიდან ცალკე გამოყოფენ უძრაობის $m_0 c^2$ ენერგიას და წერენ $E = T + m_0 c^2$, მაშინ რელატივისტური კინეტიკური ენერგიისათვის გვექნება ფორმულა

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2, \quad (32.10)$$

რომელიც ზღვარში, როცა $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, მოგვცემს ზუსტად $T = \frac{mV^2}{2}$.

რელატივისტური ენერჯიის ასეთი სახით წარმოდგენის დროს T -ს უწოდებენ მოძრაობის (ან კინეტიკურ) ენერჯიას. პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტის დროს m_0c^2 უძრაობის ენერჯია როგორც



ნახ. 34

ნახაზზე მოცემულია ორი გრაფიკი: ერთი $E = m_0c^2 \alpha$, რომელიც შეესაბამება რელატივისტურ ენერჯიას და მეორე, რომელიც გამოხატავს კლასიკურ კინეტიკურ ენერჯიას. მცირე სიჩქარეებზე ეს ორი მრუდი m_0c^2 სიზუსტით ერთმანეთს ემთხვევა.

ტივისტურს. ჩვენ ვხედავთ, რომ რელატივისტური იმპულსისა და ენერჯიის ფორმულები ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad E = mc^2, \quad (32.11)$$

სადაც

$$m \equiv m(\vec{v}) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (32.12)$$

როცა ნაწილაკი უძრავია $v=0$ და $m = m_0$. ამიტომ m_0 -ს უწოდებენ უძრაობის მასას. ეს ის მასაა, რომელიც ნაწილაკს აქვს უძრავ მდგომარეობაში და რომელთანაც ჩვენ საქმე გვქონდა ნიუტონის მექანიკაში. $m(v)$ -ს კი, რომელიც დამოკიდებულია სიჩქარეზე, მოძრაობის ან რელატივისტურ მასას უწოდებენ. როგორც ვხედავთ, კლასიკური მექანიკისაგან განსხვავებით, მასა მუდმივი კი არ არის,

არამედ იცვლება სიჩქარის მიხედვით. ნანილაკის მასა მით მეტია, რაც უფრო ჩქარა მოძრაობს იგი, ხოლო, როცა $v=c$, მოძრაობის მასა უსასრულობის ტოლი ხდება (ნახ. 35). ფორმულას

$$E = mc^2 \quad (32.13)$$

აინშტაინის მასისა და ენერგიის ეკვივალენტობის ფორმულას უწოდებენ. იგი წარმოადგენს მეოცე საუკუნის ფიზიკის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მონაპოვარს. ამ ფორმულის თანახმად, რელატივისტურ მექანიკაში ნებისმიერი ენერგია გამოიხატება mc^2 სახით, სადაც m მასაა.

ახლა ვიპოვოთ მეტად მნიშვნელოვანი ფორმულა სიჩქარის გამოსატყულებისა იმპულსისა და ენერგიის მიხედვით. (32.11) ფორმულების თანახმად,

$$\frac{\vec{v}}{c^2} = \frac{\vec{p}}{E}, \quad (32.14)$$

საიდანაც მივიღებთ მეტად საჭირო ფორმულას

$$\vec{v} = \frac{c^2 \vec{p}}{E}. \quad (32.15)$$

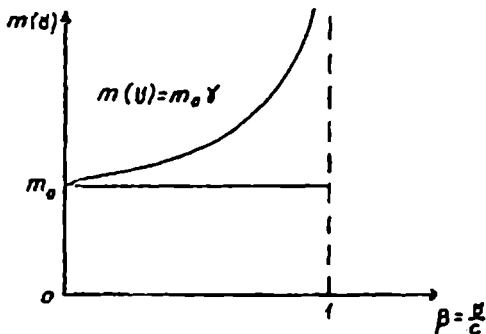
ახლა ენერგია გამოვხატოთ იმპულსის საშუალებით. თანახმად (32.7) და (32.15) ფორმულებისა, ადვილად მივიღებთ

$$\frac{E^2}{c^2} = m_0^2 c^2 + \vec{p}^2, \quad (32.16)$$

საიდანაც

$$E = \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2} \quad (32.17)$$

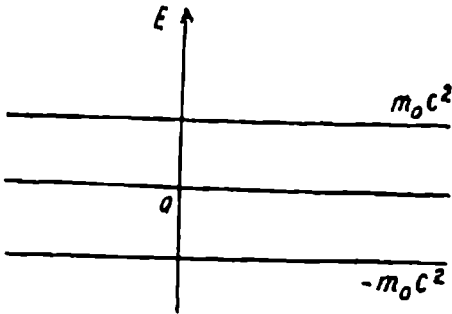
როცა $p=0$, მაშინ $E = \pm m_0 c^2$. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ეს არის ნანილაკის უძრაობის ან საკუთარი ენერგია. ამ ენერგიას ნანილაკს ვერ წავართმევთ, ამიტომ $2m_0 c^2$ ენერგეტიკული ზოლი მოძრაობის ენერგიისათვის გამორიცხულია. (32.17) გამოსახულებაში



ნახ 35

ნახაზზე მოცემულია მასის დამოკიდებულება სიჩქარეზე. მცირე სიჩქარეებზე $m(v)$ ერთბაშად m_0 -ს; დიდ სიჩქარეებზე კი $m(v)$ სწრაფად იზრდება და $v=c$ -ზე უსასრულობა ხდება.

ფეისვის წინ მინუს ნიშანი უნდა გამოვიციხოთ, რამდენადაც კლასიკურ მექანიკაში ენერგეტიკული ნახტომი შეუძლებელია. კლასიკურ მექანიკაში ყველა სიდიდე, მათ შორის ენერგიაც, უწყვეტად იცვლება. თუ, მაგალითად, ნაწილაკს აქვს $E \geq m_0c^2$ ენერგია, მა-



ნახ. 36

შინ მისთვის დაუშვებელია ენერგიის $E \leq -m_0c^2$ მნიშვნელობები, რამდენადაც ამისათვის საჭირო იქნებოდა $2m_0c^2$ ენერგეტიკული ნახტომის განხორციელება. გარდა ამისა, უარყოფით მოძრაობის ენერგიასთან დაკავშირებული იქნებოდა მთელი რიგი უცნაურობები, მაგალითად, ნაწი-

ლაკი ძალის მოქმედებით კი არ აჩქარდებოდა, არამედ შენელებოდა და სხვ. ამიტომ რელატივისტური ენერგიისათვის მომავალში ჩვენ ვისარგებლებთ შემდეგი გამოსახულებით:

$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + \vec{p}^2c^2}. \quad (32.18)$$

ეს ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახითაც:

$$E = m_0c^2 \left\{ 1 + \left(\frac{p}{m_0c} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (32.19)$$

არარელატივისტურ ზღვარში, როცა $p \ll m_0c$, მივიღებთ

$$E = m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_0} + \dots, \quad (32.20)$$

რომელიც ადიტიური m_0c^2 მუდმივის სიზუსტით ემთხვევა იმპულსით გამოხატულ კლასიკურ კინეტიკურ ენერგიას.

ხოლო, თუ განვიხილავთ ულტრარელატივისტურ შემთხვევას, როცა $T \gg m_0c^2$, გვექნება შემდეგი გაშლა

$$E = pc \left\{ 1 + \left(\frac{m_0c}{p} \right)^2 \right\}^{1/2} = pc \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_0c}{p} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{m_0c}{p} \right)^4 + \dots \right\}. \quad (32.21)$$

მამასადამე, როცა $p \gg m_0 c$, შეგვიძლია ვისარგებლოთ ფორმულით

$$E \approx pc \quad (32.22)$$

აღვნიშნოთ, რომ ჩვენ მიერ ზემოთ გამოყვანილ ფორმულებში ავტომატურად გათვალისწინებულია ის გარემოება, რომ ნაწილაკის სიჩქარე არ შეიძლება სივარდიელეში სინათლის სიჩქარეზე მეტი იყოს. მართლაც, როცა $v > c$, როგორც ენერგია, ისე იმპულსი და მოძრაობის მასა წარმოსახვითი გახდება.

დაბოლოს, მივუთითოთ, რომ რელატივისტურ ერთეულებში ($c=1$) მასისა და ენერგიის ეკვივალენტობის კანონი მიიღებს სახეს

$$E = m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} \quad (32.23)$$

ენერგია იმპულსთან დაკავშირებული იქნება ფორმულით

$$E = \sqrt{m_0^2 + p^2} \quad (32.24)$$

იმპულსისათვის კი გვექნება

$$\vec{p} = E\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (32.25)$$

ამ ერთეულებიდან ჩვეულებრივზე დაბრუნება ძნელი არ არის.

როგორც ვხედავთ, რელატივისტური მექანიკის ფორმულებში

მონაწილეობს ფესვი $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2}$, ამიტომ ხშირად მოგვიხდება

ამ ფესვის შეფასება. როცა $\frac{v}{c} \ll 1$, მაშინ შეგვიძლია ვისარგებლოთ ასეთი შეფასებით:

$$\sqrt{1 - \beta^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\beta^2; \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 \quad (32.26)$$

ხოლო როცა v ძალიან ახლოსაა c -სთან, შეგვიძლია დაენეროთ

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)} \approx \sqrt{2(1 - \beta)}. \quad (32.27)$$

დაბოლოს, აღვნიშნოთ ერთი მნიშვნელოვანი გარემოება. ამ ბოლო დროს სულ უფრო და უფრო დამკვიდრდა აზრი, რომ ტერმინი მოძრაობის მასა ამოღებულ იქნეს ხმარებიდან და შენარჩუნებულ იქნეს მხოლოდ უძრაობის მასა, რომელიც ერთი და იგივეა სივრცის სხვადასხვა ადგილას და არ იცვლება არც სიჩქარის და არც დროის მიხედვით.

რელატივისტური მასა შემოვიდა იმპულსის შემდეგი განმარ-

ტებიდან:

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt} = m_0 \gamma \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (32.28)$$

მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია იმპულსისათვის შევინარჩუნოთ ნიუტონის მსგავსი განმარტება, ოღონდ დროითი წარმოებულის ნაცვლად გამოვიყენოთ წარმოებულ საკუთარი დროის მიხედვით.

$$\vec{p} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau}. \quad (32.29)$$

თუ გავიხსენებთ, რომ $d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2}$, მაშინ (32.29) განმარტება (32.28)-ს დაემთხვევა.

რელატივისტურ მექანიკაში ხელსაყრელია საქმე გვეკონდეს ინვარიანტულ სიდიდეებთან, როგორცაა $m_0 d\tau$ და სხვა, ამიტომ მოძრაობის მასის ცნება სულ უფრო და უფრო იშვიათად გამოიყენება.

დასასრულს, განვიხილოთ მაგალითი. როგორი v სიჩქარე უნდა მივანიჭოთ პროტონს, რომ მისი მოძრაობის მასა α ნაწილაკის (ჰელიუმის გულის) უძრაობის მასას გაუტოლდეს?

თუ პროტონისა და α ნაწილაკის უძრაობის მასებს შესაბამისად აღვნიშნავთ M_p და M_α , მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{M_p}{\sqrt{1 - \beta^2}} = M_\alpha, \quad (32.30)$$

საიდანაც განისაზღვრება საძიებელი სიჩქარე:

$$v = c \left(1 - \frac{M_p^2}{M_\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ჩავთვალოთ, რომ $M_\alpha = 4M_p$, მაშინ $v = \frac{\sqrt{15}}{4} c = 0,968245c$.

§ 33. ნაწილაკი ნულის ტოლი უძრაობის მასით

კლასიკურ მექანიკაში ნულის ტოლი მასის მქონე ნაწილაკის არსებობა შეუძლებელია. საქმე ის არის, რომ, თუ ნაწილაკის მასა $m_0 = 0$, მაშინ კლასიკურ მექანიკაში მისი იმპულსი $\vec{p} = m_0 \vec{v} = 0$ და, ასევე, კინეტიკური ენერჯიაც ნულის ტოლი იქნება. ეს იმას ნიშნავს, რომ ასეთ ნაწილაკს ვერ აღმოვაჩინებთ ვერავითარი ექსპერიმენტით. რელატივისტურ მექანიკაში სულ სხვა მდგომარეობა გვექნება. მართლაც, როცა ნაწილაკის უძრაობის მასა $m_0 = 0$, მაშინ (32.18) ფორმულის მიხედვით

$$E = cp, \quad (33.1)$$

ხოლო (32.15)-ის თანახმად $v=c$, ე.ი. ნულოვანი უძრაობის მასის ნაწილაკი მოძრაობს სინათლის სიჩქარით, ხოლო მისი იმპულსი (32.3) ფორმულის მიხედვით ნებისმიერი შეიძლება იყოს. ამგვარად, რელატივისტური მექანიკის თანახმად, ნულოვანი უძრაობის მასის მქონე ნაწილაკს აქვს სასრულო იმპულსი, სასრულო ენერგია და მოძრაობს სინათლის c სიჩქარით.

აინშტაინმა გამოიყენა რელატივისტური მექანიკის ეს თავისებურება და იგი საფუძვლად დაუდო სინათლის კორპუსკულურ თეორიას. აინშტაინის თანახმად, სინათლე შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ნულის ტოლი უძრაობის მასის მქონე კორპუსკულების-ფოტონების (სინათლის კვანტების) ნაკადი. ცალკეული ფოტონის

ენერგია $E = \hbar\omega$, სადაც $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ პლანკის მუდმივია ($h = 1,05 \cdot 10^{-27}$ ერგი სექ), ხოლო ω -ნრიული სიხშირე. (33.1) ფორმულის საფუძველზე, ფოტონისათვის გვექნება

$$E = cp = \hbar\omega, \quad (33.2)$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ ფოტონს ექნება იმპულსი

$$p = \frac{\hbar\omega}{c}, \quad (33.3)$$

ან, რადგან ტალღური ვექტორი $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{k}$, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ მეტად მნიშვნელოვანი ფორმულები:

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad (33.4)$$

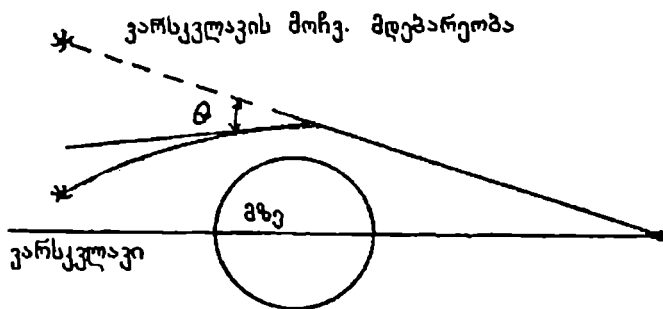
რომლებიც ერთმანეთთან აკავშირებენ ფოტონის, როგორც ნაწილაკის ენერგიასა და იმპულსს სინათლის ტალღურ მახასიათებლებთან-სიხშირესთან და ტალღურ ვექტორთან.

ამგვარად, ფოტონს ნებისმიერი დამკვირვებლისათვის აქვს ერთი და იგივე უძრაობის (ნულოვანი) მასა და ერთი და იგივე c -ს ტოლი სიჩქარე. აღვნიშნოთ, რომ ამჟამად ცნობილი ნაწილაკებიდან ფოტონი ჯერჯერობით ერთადერთი ნაწილაკია ნულის ტოლი უძრაობის მასით. იყო გარკვეული მოსაზრება, რომ ნეიტრინოს უძრაობის მასაც ნულის ტოლია, მაგრამ ეს პიპოთეზა დღეს ეჭვის ქვეშ არის დაყენებული.

რადგან, როგორც ეს ზემოთ აღვნიშნეთ, სინათლის სხივს აქვს მოძრაობის მასა, ამიტომ იგი უნდა მიიზიდებოდეს სამყაროს მძიმე სხეულების მიერ. აღსანიშნავია, რომ ასეთი მოვლენა მართლაც შემჩნეულ იქნა მზის დაბნელების დროს.

ვთქვათ, მზეს, დედამიწას და ვარსკვლავს ისეთი განლაგება აქვთ, რომ ვარსკვლავიდან წამოსული სხივი, სწორხაზობრივი გავრცელების შემთხვევაში, დედამიწის რომელიმე წერტილში მყოფმა დამკვირვებელმა ვერ უნდა დაინახოს. მაგრამ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ ფოტონებს მოძრაობის მასა აქვთ, მაშინ მზის გრავიტაციული ველი სხივს თავისაკენ გადახრის და პრინციპული შესაძლებლობა გაჩნდება ასეთი სხივის დანახვისა (ნახ.37). ამასთან, დამკვირვებელს მოეჩვენება, რომ ვარსკვლავი მდებარეობს მის მიერ დანახული სხივის სწორხაზოვან გაგრძელებაზე.

მზის დიდი სიკაშკაშის გამო, ვარსკვლავის მოჩვენებით მდებარეობას საზღვრავენ მზის დაბნელების დროს და რამდენიმე თვის შემდეგ, როცა მზე საკმარისად შორს იქნება ამ ადგილიდან და იგივე ვარსკვლავის მდებარეობის დაფიქსირება შეიძლება ლამის ცის ფოტოგრაფირების ცნობილი მეთოდით. სამწუხაროდ, ამ ექსპერიმენტის სიზუსტე 10%-ზე მეტი არ არის და ზოგიერთი ექსპერიმენტული შედეგი ერთმანეთთან წინააღმდეგობაში აღმოჩნდა. საშუალოდ ვარსკვლავის გადახრა აღმოჩნდა 2' -ის ტოლი, ნაცვლად ზოგადი ფარდობითობის თეორიის ნაწინასწარმეტყველები $\theta = 1,57'$ მნიშვნელობისა.



ნახ. 37

მესბაურის ეფექტის გამოყენება იმის დასამტკიცებლად, რომ სინათლის კვანტს მოძრაობის მასა გააჩნია. როდესაც უძრავი აგზნებული ატომი ნორმალურ მდგომარეობაში გადადის, ხდება ნაჭარბი ენერგიის გამოსხივება სინათლის კვანტის სახით. კვანტის ენერგია ტოლია $h\nu = \Delta E$, სადაც ΔE არის ენერგიის სხვაობა იმ ორ ენერგეტიკულ დონეს შორის, როცა ატომი უძრავი არ არის.

მაშინ იმის გამო, რომ სინათლის კვანტს გააჩნია იმპულსი $\frac{h\nu}{c}$, კვანტის ეს იმპულსი კომპენსირებული უნდა იყოს ატომის მიერ შეძენილი იმპულსით ან, სხვანაირად, კვანტის გამოსხივების გამო ადგილი ექნება ატომის უკუცემას. ეს კი იმას გამოიწვევს, რომ კვანტის ენერგია $h\nu \neq \Delta E$, რამდენადაც ΔE ენერგიის ნაწილი დაიხარჯება ატომის უკუცემაზე. მაგრამ იმის გამო, რომ გამოსხივებული კვანტის ენერგია eV -ის რიგისაა, ატომის უკუცემა ძალიან მცირე იქნება. სითბური მოძრაობის შესაბამისი ენერგიის ხარჯზე არ არის გამორიცხული, რომ ნივთიერებაში ერთი ატომის მიერ გამოსხივებული კვანტი მეორე ნორმალურ მდგომარეობაში მყოფმა ატომმა შთანთქას.

მეორე მხრით, როგორც ცნობილია, აგზნებულიდან ნორმალურში გადასვლისას კვანტებს ასხივებს ატომის გულიც. ამ კვანტებს γ -კვანტებს უწოდებენ. ცნობილია, რომ γ კვანტის ენერგია ხშირად MeV -ის რიგისაა, ე.ი. მილიონჯერ უფრო დიდი ენერგია აქვს, ვიდრე ატომის მიერ გამოსხივებულ კვანტს. ამიტომ γ კვანტის იმპულსიც დიდი იქნება. მეორე მხრით, ატომგულის მასათითქმის ატომის მასის ტოლია, ამიტომ γ კვანტის გამოსხივების დროს ატომგულების უკუცემა მნიშვნელოვანი იქნება.

განვიხილოთ რადიოაქტიური ატომგული, რომელიც γ კვანტს ასხივებს. ატომგული სიმბოლურად აღინიშნება X^A სახით, სადაც X აღნიშნავს ქიმიური ელემენტის სახელწოდებას, A მასურ რიცხვს, ე. ი. პროტონებისა და ნეიტრონების ჯამს გულში, ხოლო Z პროტონების რიცხვს. მაგალითად, 7_3Li აღნიშნავს ლითიუმის ატომის გულს, რომელიც შედგება 3 პროტონისა და $7-3=4$ ნეიტრონისაგან. აგზნებულ გულს გავუყეთოთ $/*$ ნიშანი. მაშინ γ კვანტის გამოსხივება წარიმართება შემდეგი სქემით:



ვთქვათ, გამოსხივებული γ კვანტის ენერგია არის $E_\gamma = h\nu$. ამასთან, ცხადია, რომ ატომგულის მიერ გამოსხივებული ენერგია განისაზღვრება ფორმულით:

$$\Delta E = E(:X^A) - E(:X^A), \quad (33.6)$$

რომელიც არ იქნება ტოლი $E_\gamma = h\nu$ ენერგიისა, რამდენადაც შესამჩნევი ნაწილი ენერგიისა ატომგულის უკუცემაზე დაიხარჯება, ე.ი. $\Delta E > h\nu$. ამიტომ თავისთავად ცხადია, რომ ერთი ატომგულის გამოსხივებული γ კვანტის შთანთქმა ნივთიერების მეორე ატომ-

გულის მიერ, განსხვავებით ატომების შემთხვევისაგან, ნაკლებად სააღბათო იქნება, რამდენადაც ამისათვის საჭიროა ზუსტად ΔE ენერჯიის γ კვანტი. ამიტომ (33.5) პროცესის შებრუნებული რეაქციისათვის

$$\gamma + {}_Z X^A \Rightarrow {}_Z X^A \quad (33.7)$$

γ კვანტს ენერჯია არ ჰყოფნის. ასეთ შებრუნებულ პროცესს ადგილი მაშინ ექნებოდა, γ კვანტის გამოსხივება რომ ხდებოდა უძრავად დამაგრებული ატომგულების მიერ. ამ შემთხვევაში ატომგულის გამოსხივებულ ΔE ენერჯიას მთლიანად ნაიღებდა γ კვანტი, რამდენადაც უკუცემას ადგილი არ ექნებოდა, ე.ი. ისეთ-სავე ეფექტს მივიღებდით, რაც ატომებისათვის. ატომგულებზე ასეთი ეფექტის შესაძლებლობა იზინანსარმეტყველა გერმანელმა მეცნიერმა მესბაუერმა (1958) და ცდაზედაც განახორციელა.

ავილოთ კრისტალი, რომელიც შეიცავს ${}_Z X^A$ ატომგულებს. ატომგულები ანარმოებენ რხევას კრისტალური მესრის კვანძებში, ამიტომ ატომგულის მიერ γ კვანტის გამოსხივების დროს მათ საშუალება აქვთ უკუცემისა. მაგრამ, თუ ჩვენ კრისტალს ავიღებთ ძალიან დაბალ ტემპერატურაზე, მაშინ ატომგულის მოძრაობა "გაიყინება" და ატომის მიერ მიღებული იმპულსი მთელს კრისტალს გადაეცემა. კრისტალის მასა ძალიან დიდია, ამიტომ ატომგული ისევე იქცევა, თითქოს მისი მასა მთელი კრისტალის მასის, ე.ი. პრაქტიკულად უსასრულობის, ტოლი იყოს. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ასეთ ატომგულს უკუცემა არ შეუძლია. მაშასადამე, აგზნებული ატომგულის ${}_Z X^A$ მიერ გამოსხივებული ენერჯია უკუცემაზე აღარ ისარჯება და იგი მთლიანად γ კვანტს მიაქვს. ასეთი კვანტი კი თავისუფლად შეიძლება შთანთქმას კრისტალში ნებისმიერმა სხვა ნორმალურ მდგომარეობაში მყოფმა ატომგულმა. მოხდება γ კვანტების რეზონანსული შთანთქმა. სწორედ ამ მოვლენას უწოდებს მესბაუერის ეფექტი.

მესბაუერის ეფექტის სიზუსტე იმდენად დიდია, რომ შესაძლებელი აღმოჩნდება მისი გამოყენება აინშტაინის თეორიის შესამოწმებლად, კერძოდ, იმის შესამოწმებლად, რომ γ კვანტს გააჩნია მოძრაობის მასა. ამისათვის ავილოთ ორი კრისტალური ნიმუში დაბალ ტემპერატურაზე. ამასთან, ნიმუში, რომელიც ასხივებს γ კვანტებს, ვერტიკალურად დავაშოროთ მშთანთქმელ ნიმუშს. აღმოჩნდა, რომ გამომსხივებელი ნიმუშის სულ რამდენიმე მეტრზე ანევის შედეგად შთანთქმას მეორე ნიმუშის მიერ ადგილი აღარა აქვს. ეს იმას ნიშნავს, რომ γ კვანტი დედამინის ველში ზუსტად

ისევე იქცევა, როგორც ჩვეულებრივი ნანილაკი. γ კვანტი ვარდნი-სას კარგავს თავის პოტენციალურ ენერგიას და მშთანთქმელთან მიდის ენერგიით, რომელიც საკმარისი აღარ არის (33.7) რეაქციის განსახორციელებლად. მაშასადამე, მესბაურის ეფექტის საშუა-ლებით, კიდევ ერთხელ დამტკიცდა, რომ ფოტონებს გააჩნიათ ზუს-ტად ისეთივე მოძრაობის მასა, როგორიც სხვა ნანილაკებს.

§ 34. ლაგრანჟის განტოლებაჲი

ჩვენ მიერ წინა პარაგრაფში განხილული უმცირესი ქმედების პრინციპი მთლად რელატივისტური არ იყო, რამდენადაც ლაგრან-ჟიანი არ აკმაყოფილებდა რელატივისტური ინვარიანტობის პი-რობას. ეს მოხდა იმის გამო, რომ ჰამილტონის პრინციპში სივრცე და დრო ეკვივალენტურად არ მონაწილეობდნენ. ამ ნაკლის გამოს-წორების მიზნით, ჩამოვაყალიბოთ ჰამილტონის უმცირესი ქმე-დების პრინციპი მინკოვსკის სივრცეში. ამ სივრცეში ლაგრანჟის ფუნქცია სივრცულ და დროით კოორდინატებზე დამოკიდებული უნდა იყოს ეკვივალენტურად, ამიტომ, ნაცვლად x , კოორდინა-ტებისა, x_i , განზოგადებული სიჩქარეებისა და t დროსი, უნდა ვისარგებლოთ $x_i = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ $u_i = \frac{dx_i}{ds}$ კოორდინატისა და სიჩ-ქარის ოთხვექტორებით და s ინტერვალთ. მაშასადამე, მინკოვს-კის სივრცეში ქმედების ფუნქცია ასე იქნება განმარტებული:

$$\underline{S} = \int_{s_1}^{s_2} \Lambda(x, u; s) ds \quad (34.1)$$

ინტეგრალი აიღება მსოფლიო წირის გასწვრივ ორ დაფიქსი-რებულ s_1 და s_2 ინტერვალს შორის, მაშასადამე, $\delta x_i(s_1) = \delta x_i(s_2) = 0$. ძირითადი მოთხოვნა, რაც უნდა წაუყენოთ $\Lambda(x, u; s)$ ლაგრანჟის ფუნქციას, არის ის, რომ იგი უნდა იყოს სკალარი ლორენცის გარ-დაქმნების მიმართ. წინააღმდეგ შემთხვევაში $\delta S = 0$ პრინციპიდან ვერ მივიღებთ ლაგრანჟის კოვარიანტულ განტოლებებს. სხვა მხრივ ლაგრანჟის ფუნქციის არჩევა არაფრით შეზღუდული არ არის, რა თქმა უნდა, გარდა იმ ძირითადი მოთხოვნისა, რომ შესა-ბამისი ლაგრანჟის განტოლებები მექანიკის მოვლენებს სწორად უნდა აღწერდნენ. ამავე დროს, რელატივისტური ლაგრანჟიანის შერჩევისას გზადაგზა უნდა გამოვიყენოთ შესაბამისობის პრინ-

ცოპი, რომლის თანახმად, $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ ზღვარში რელატივისტური მექანიკის შედეგები კლასიკური მექანიკის შედეგებს უნდა ემთხვეოდეს. შევნიშნოთ, რომ რამდენადაც (34.1) გამოსახულებაში ჩვენ ვისარგებლებთ არა საკუთარი დროის ცვლადით, არამედ ინტერვალით, Λ ლაგრანჟის ფუნქციას არ ექნება ენერჯიის განზომილება; ენერჯიის განზომილების იქნება $c \wedge(x, u; s)$ სიდიდე.

რადგან მინკოვსკის სივრცეში ვიცით ტენზორის თვისებები, ამიტომ სკალარული $\wedge(x, u; s)$ სიდიდის შედგენა შეგვიძლია სხვადასხვა სკალარული კომბინაციების საშუალებით; მაგალითად,

$$\wedge(x, u; s) = a + b\Omega_\mu x_\mu + dT_{ik} N_{ik} + \dots, \quad (34.2)$$

სადაც a, b, d, \dots , სკალარებია, ხოლო $\Omega_i, X_i, T_{ik}, N_{ik} \dots$..ოთხვექტორები და ოთხტენზორებია, შესაბამისად, რომლებიც შეიძლება შევადგინოთ x, u, s და სხვა სიდიდეებისაგან.

სამწუხაროდ, რელატივისტურ მექანიკაში ასეთი ინვარიანტული ლაგრანჟიანის შედგენა ყოველთვის არ ხერხდება. ნინა პარაგრაფში განვიხილეთ თავისუფალი ნანილაკი, რომლისთვისაც ეს სიძნელე არ გვექონდა, რამდენადაც, ამ შემთხვევაში, ინვარიანტული ლაგრანჟიანის შედგენა ადვილია. კერძოდ, ადვილი შესაძომნებელია, რომ თავისუფალი ნანილაკი რელატივისტურ მექანიკაში შეიძლება: ავწეროთ შემდეგი, ამკარად ინვარიანტული, ლაგრანჟიანით:

$$\wedge(x, u; s) = \frac{1}{2} m_0 c u_i u_i, \quad (34.3)$$

სადაც i მუნჯი ინდექსი იცვლება ერთიდან ოთხამდე. ერთის შეხედვით ამ ლაგრანჟიანს ცოტა უცნაური სახე აქვს, რამდენადაც $u_i^2 = -1$ -ის ჩასმის შემდეგ \wedge უბრალო რიცხვად გადაიქცევა. მაგრამ ამ ფაქტმა არ უნდა შეგვაშფოთოს, რამდენადაც ჩვენი მიზნებისათვის სრულიად საკმარისია გვექონდეს ლაგრანჟიანის სწორი ფუნქციონალური დამოკიდებულება u ოთხვექტორზე. \wedge ფუნქციას მხოლოდ და მხოლოდ ის პირობა ედება, რომ მისი საშუალებით მიღებული მოძრაობის განტოლებები სწორად აღწერდნენ ექსპერიმენტულ შედეგებს. ეს, თავის მხრით, იმას ნიშნავს, რომ ლაგრანჟიანის (24.3) სახე ერთადერთი არ არის. ჩვენ შეგვიძლია შევარჩიოთ უამრავი ისეთი ლაგრანჟიანი, რომლებიც ერთსა და იმავე მოძრაობის განტოლებას მოგვცემს. კერძოდ, შეგვიძლია თავისუფალი ნანილაკის ლაგრანჟის ფუნქცია ავილოთ შემდეგი სახით:

$$\wedge(x, u, s) = -m_0 c \psi(u_i u_i), \quad (34.4)$$

სადაც $\psi(u_i^2)$ ფუნქციას ედება პირობა

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial u_i^2} \right)_{u_i^2=1} = \frac{1}{2}. \quad (34.5)$$

თუ, მაგალითად, $\psi(u_i^2)$ ფუნქციას ავიღებთ $\psi = A(-u_i u_i)^n$ სახით, სადაც A მუდმივია, მაშინ (34.5) პირობის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\wedge(x, u, s) = -\frac{m_0 c}{2n} (-u_i u_i)^n \quad (34.6)$$

ამ გამოსახულებისაგან (34.3) ლაგრანჟიანი მიიღება $n=1$ შემთხვევაში, მაგრამ შეგვიძლია ისეთივე წარმატებით ვისარგებლოთ ლაგრანჟიანით, რომელიც შეესაბამება, მაგალითად, $n=1/2$ შემთხვევას, ე.ი.

$$\wedge(x, u, s) = -m_0 c \sqrt{-u_i u_i} \quad (34.7)$$

ახლა დავუშვათ, ნაწილაკი თავისუფალი კი არ არის, არამედ მოძრაობს გარკვეულ ველში. ვთქვათ, საქმე გვაქვს მექანიკისათვის ყველაზე უფრო მნიშვნელოვან ურთიერთქმედებასთან, გრა-

ვიტაციულ ველთან $u(n) = -\frac{\alpha}{r}$. იმის გამო, რომ ეს ველი მხოლოდ

კოორდინატებზეა დამოკიდებული, სამწუხაროდ, იგი კოვარიანტობის პირობას არ დააკმაყოფილებს. რელატივისტურ მექანიკაში ურთიერთქმედება არ შეიძლება c -ზე მეტი სიჩქარით ვრცელდებოდეს, კლასიკურ მექანიკაში კი მიღებულია, რომ გრავიტაციული ურთიერთქმედება მყისიერად-უსასრულო სიჩქარით ვრცელდება. სწორედ ამის გამო, გრავიტაციული ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯიის კოვარიანტული სახით ჩაწერა არ ხერხდება. აღსანიშნავია, რომ კლასიკურ ურთიერთქმედებათა დიდი უმრავლესობა რელატივისტურობის მოთხოვნას ასევე არ აკმაყოფილებს. სამაგიეროდ, ელექტრომაგნიტური ველი ამ პირობას აკმაყოფილებს, რამდენადაც რელატივისტური მექანიკის ჩამოყალიბებას საფუძვლად სწორედ ის დაუდეთ, რომ, როგორც ელექტრომაგნიტური ველის, ისე მექანიკის კანონები, ინვარიანტული ყოფილიყვნენ ლორენცის გარდაქმნების მიმართ, ამიტომ ელექტრო-

მაგნიტური ველისათვის ადვილია კოვარიანტული ლაგრანჟიანის დანერა.

ზემოაღნიშნულის გამო, არათავისუფალი ნანილაკისათვის, კლასიკური მექანიკის ანალოგიით, შემდეგი ლაგრანჟიანის შემოღება

$$\Lambda(x, u; s) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - u(\bar{r}) \quad (34.8)$$

რელატივისტური მექანიკის თვალსაზრისით შეიძლება კორექტული არ აღმოჩნდეს იმ ურთიერთქმედებისათვის, რომლებიც კოვარიანტობის პირობას არ აკმაყოფილებენ. მიუხედავად ამისა, ზოგჯერ ლაგრანჟის ფუნქციას ჩვენ მაინც (34.8) სახით ავიღებთ, რამდენადაც არარელატივისტურ ზღვარში იგი კლასიკური მექანიკის ლაგრანჟის ფუნქციას ემთხვევა.

ახლა მოვახდინოთ (34.1) გამოსახულების ვარიაცია; გვექნება

$$\delta s = \frac{\delta \Lambda}{\delta u_i} \delta x_i \Big|_{s_1}^{s_2} + \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \Lambda}{\partial u_i} \right) \delta x_i ds. \quad (34.9)$$

ამ გამოსახულების ნულთან გატოლებით და იმის გათვალისწინებით, რომ $\delta x_i(s) = \delta x_i(s_1) = 0$, მივიღებთ ლაგრანჟის მოძრაობის კოვარიანტულ განტოლებებს

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \Lambda}{\partial u_i} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = 0. \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (34.10)$$

ისევე როგორც კლასიკურ მექანიკაში, შეგვიძლია ვიპოვოთ ქმედების ფუნქცია, როგორც კოორდინატების ფუნქცია. ამ მიზნით ერთმანეთს უნდა შევადაროთ არა ვირტუალური ტრაექტორიები, რომლებსაც ერთი და იგივე სანყისი და ბოლო წერტილები აქვთ, არამედ ჭეშმარიტი, რომელთაც საერთო აქვთ მხოლოდ სანყისი წერტილი, ბოლოები კი ერთმანეთისაგან უსასრულოდ მცირედ განსხვავებულიან. ამ შემთხვევაში, (34.10) განტოლებების გათვალისწინებით, (34.9) მოგვცემს

$$\delta s = \frac{\partial \Lambda}{\partial u_i} \delta x_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (34.11)$$

საიდანაც მივიღებთ განზოგადებული იმპულსის განმარტებას ქმედების ფუნქციის საშუალებით

$$p_i = \frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{\partial \wedge}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (34.12)$$

თავისუფალი ნაწილაკისათვის ლაგრანჟის (34.10) განტოლება უნდა დაეიდეს განტოლებაზე

$$\frac{d}{ds} (m_0 c u_i) = 0, \quad (34.13)$$

ამიტომ თავისუფალი ნაწილაკის ლაგრანჟიანს მართლაც (34.3) სახე უნდა ჰქონდეს.

შევნიშნოთ, რომ ლაგრანჟის (34.10) განტოლებები შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც რელატივისტური მექანიკის საფუძველი. ეს განტოლებები ჩანერილია მინკოვსკის სივრცეში ან, როგორც ხშირად ამბობენ, ოთხფორმაში და კოვარიანტული ლაგრანჟიანის შემთხვევაში თვითონაც კოვარიანტული იქნებიან. სიდიდეს

$$\phi_i = \frac{\partial \wedge}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (34.14)$$

უნოდებენ მინკოვსკის ძალას. ცხადია, რომ ლაგრანჟიანის განტოლებები შეგვიძლია გადავწეროთ კლასიკური მექანიკისათვის ჩვეული სახით

$$\frac{dp_i}{ds} = \phi_{,i} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (34.15)$$

რომელსაც მინკოვსკის მოძრაობის განტოლებას უწოდებენ.

§ 35. იმპულსის ოთხვექტორი

წინა თავში, მინკოვსკის გეომეტრიის განხილვის დროს, ჩვენ შემოვიღეთ ოთხვექტორების ცნება. მაგალითის სახით განვიხილეთ კოორდინატის $x_i(\bar{r}, icl)$ და სიჩქარის $u_i\left(\frac{\bar{v}}{c}, \dot{\gamma}\right)$ ოთხვექტორები. ამასთან, ვაჩვენეთ, რომ კოორდინატის ოთხვექტორის კვადრატი $x_i^2 = x_\alpha^2 - c^2 t^2$, რომელიც ნიშნის სიზუსტით ემთხვევა ინტერვალს $s^2 = -x_i^2$, ხოლო $u_i^2 = -1$. ახლა განვიხილოთ სხვა ფიზიკური ოთხვექტორები. პირველ რიგში, - იმპულსის ოთხვექტორი. (34.12) გან-

მარტების ძალით, თავისუფალი ნაწილაკის იმპულსისათვის გვექნება¹

$$p_i = \frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{\partial \wedge}{\partial x_j} = m_0 c u_j \quad (35.1)$$

თუ გავიხსენებთ u_α ($\alpha = 1, 2, 3$) კომპონენტების მნიშვნელობებს

$$u_\alpha = \frac{v_\alpha}{c}, \text{ მაშინ გვექნება}$$

$$p_\alpha = \frac{\partial s}{\partial x_\alpha} = \frac{m_0 v_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (35.2)$$

ე.ი. (35.1) გამოსახულების პირველი სამი კომპონენტი წარმოადგენს რელატივისტურ იმპულსს. ვიპოვოთ მეოთხე კომპონენტი:

$$p_4 = \frac{\partial s}{\partial x_4} = \frac{i}{c} \frac{ds}{dt} = m_0 c u_4. \quad (35.3)$$

რადგან $u_4 = i\gamma$, ამიტომ

$$p_4 = -\frac{i}{c} \frac{ds}{dt} = i \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (35.4)$$

რადგან

$$\vec{p} = \nabla S, \quad E = -\frac{ds}{dt}, \quad (35.5)$$

ამიტომ $p_4 = \frac{i}{c} E$. მაშასადამე, მივიღეთ სიდიდე

$$p_j = \left(\vec{p}, \frac{i}{c} E \right), \quad (35.6)$$

რომლის პირველი სამი კომპონენტი გამოხატავს რელატივისტურ იმპულსს, ხოლო მეოთხე დაკავშირებულია ენერგიასთან. ცხადია p , მინკოვსკის სივრცეში წარმოადგენს ვექტორს, რადგან

¹ ცხადია, რომ $p_i = m_0 c u_i = m_0 c \frac{dx_i}{ds}$ განმარტება შეგვიძლია შევცვალოთ $p_i = m_0 \frac{dx_i}{d\tau}$ განმარტებით, სადაც $d\tau = \frac{ds}{c}$ საკუთარი დროა. მაშინ $p_4 = \frac{i}{c} E = m_0 i c \frac{dt}{d\tau} = i m_0 c \gamma$

კოორდინატთა სისტემის მობრუნებისას ისევე გარდაიქმნება, როგორც კოორდინატები. p_x -ს იმპულსის ოთხვექტორის უნოდებენ. გაშლილი სახით იგი ასე წარმოიდგინება:

$$p_x = \left(\frac{m_0 \bar{v}_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{i}{c} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (35.7)$$

ვიპოვოთ იმპულსის ოთხვექტორის კვადრატი. ცხადია, რომ

$$p_x^2 = \bar{p}^2 - \frac{E^2}{c^2}. \quad (35.8)$$

ამ უკანასკნელიდან ჩანს, რომ რელატივისტურ მექანიკაში სიდიდე

$$\bar{p}^2 - \frac{E^2}{c^2} = \text{inv.} \quad (35.8')$$

ეს ინვარიანტი დიდ როლს ასრულებს პრაქტიკული გამოთვლების დროს. თუ გავითვალისწინებთ ენერჯიის (32.16) ფორმულას, საბოლოოდ შეგვიძლია დავწეროთ

$$p_x^2 = -m_0^2 c^2. \quad (35.9)$$

მაშასადამე, იმპულსის ოთხვექტორი ყოფილა დროისმაგვარი. ამავე დროს მისი ყველა კომპონენტი დამოუკიდებელი არ არის. (35.9) ფორმულა უფრო მარტივადაც მიიღება (35.1) გამოსახულების კვადრატში აყვანით და $u_x^2 = -1$ დამოკიდებულების გათვალისწინებით.

რადგან p_x ოთხვექტორია, ამიტომ მისთვის ადვილად დავწეროთ ლორენცის კერძო გარდაქმნის ფორმულებს (K' სისტემა მოძრაობს V სიჩქარით K სისტემის x ღერძის გასწვრივ). გვექნება:

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{v}{c^2} E'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, p_y = p'_y, p_z = p'_z, E = \frac{E' + V p'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (35.10)$$

სადაც $p'_x \left(\bar{p}', \frac{i}{c} E' \right)$ იმპულსის ოთხვექტორია მოძრაუ K' სისტემაში. თუ შევადარებთ (35.9) ფორმულას (24.32) -ს დავინახავთ, რომ სინათლე შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ისეთი ნაწილაკების (ფოტონების) ერთობლიობა, რომელთა უძრაობის m_0 მასა ტოლია ნულის. ამავე დროს, სინათლისათვის აინშტაინის (33.4) ფორმულები ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$p_\mu = hk_\mu (\mu = 1, 2, 3, 4), \quad (35.11)$$

სადაც h პლანკის მუდმივაა, ხოლო $k_\mu \left(\bar{k}, \frac{i}{c} \omega \right)$ - ტალღური ოთხ-ვექტორი.

§ 36. მოძრაობის განტოლების ანალიზი

ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ მინკოვსკის სივრცეში მოძრაობის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{dp_\mu}{ds} = \phi_\mu, \quad (\mu = 1, 2, 3, 4). \quad (36.1)$$

p_μ იმპულსის ოთხვექტორია; მოძრაობის (36.1) განტოლების კოვარიანტობის გამო $\phi_\mu (\bar{\phi}, \phi_4)$ აგრეთვე ოთხვექტორს უნდა წარმოადგენდეს. რადგან $p_\mu = m_0 c u_\mu$, ხოლო $ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, ამიტომ (36.1) განტოლება ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$m_0 \frac{du_\mu}{dt} = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \phi_\mu. \quad (36.2)$$

გავიხსენოთ სიჩქარის ოთხვექტორის კომპონენტების (24.21) გამოხატულება, მაშინ შეგვიძლია ძალის კომპონენტებისათვის დავწეროთ განტოლებები:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \bar{\phi}, \quad (36.3)$$

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \phi_4. \quad (36.4)$$

ჯერჯერობით შევისწავლოთ (36.3) განტოლება. (36.4) -ს კი შემდეგ დავუბრუნდეთ. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

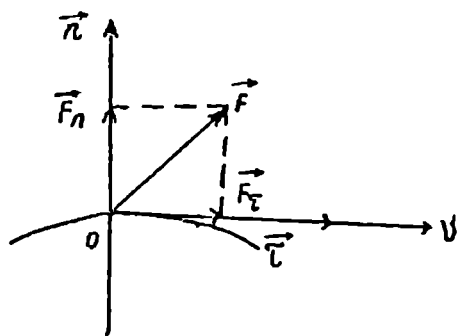
$$\bar{F} = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \bar{\phi}, \quad (36.5)$$

მაშინ (36.3) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}. \quad (36.6)$$

მასა ცვლადი სიდიდითა და მისი გატანა წარმოებულის ნიშნის გარეთ შეუძლებელია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ზოგად შემთხვევაში, ნაწილაკის აჩქარება მოქმედი ძალის პროპორციული აღარ არის. ამის გაკეთება შეიძლება მხოლოდ არარელატივისტურ ზღვარში $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, როცა რელატივისტური იმპულსი დაემთხვევა იმპულსის კლასიკურ $\vec{p} = m_0 \vec{v}$ გამოხატულებას. ამ შემთხვევაში, აინშტაინის განტოლება ნიუტონის განტოლებას დაემთხვევა.

მართალია, რელატივისტურ მექანიკაში ზოგად შემთხვევაში, ძალა აჩქარების პროპორციული არ არის, მაგრამ არსებობს ორი შემთხვევა, როცა პროპორციულობას ადგილი აქვს. ამ საკითხის გასარკვევად განვიხილოთ ნაწილაკის ტრაექტორია და მოქმედი ძალა წარმოვიდგინოთ, როგორც ნორმალური (სიჩქარის მიმართულების პერპენდიკულარული) \vec{F}_n და მხები (სიჩქარის მიმართულების) \vec{F}_t კომპონენტების ვექტორული ჯამი (ნახ. 38). როგორც ცნობილია, \vec{F}_t მხები მდგენელი ცვლის სიჩქარის მხოლოდ სიდიდეს, ნორმალური \vec{F}_n მდგენელი კი-მიმართულებას. ნაწილაკის სიჩქარის ვექტორი წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:



ნახ. 38

$\vec{v} = \frac{v}{v} \vec{v}$ სიჩქარის მხების ორტია, \vec{n} კი ნორმალი

$$\vec{v} = v \vec{t}, \quad (36.7)$$

სადაც \vec{t} სიჩქარის მხების ორტია;

მაშინ ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v \frac{d\vec{t}}{dt}. \quad (36.8)$$

გავითვალისწინოთ, რომ

$$\left(\vec{t}, \frac{d\vec{t}}{dt} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \vec{t} \cdot \vec{t} = 0, \quad (36.9)$$

მაშინ აჩქარების ნორმალური მდგენლისათვის გვექნება

$$W_n = \left(\ddot{n}, \frac{d\ddot{v}}{dt} \right) = v \left(\ddot{n}, \frac{d\ddot{v}}{dt} \right), \quad (36.10)$$

ხოლო მხები მდგენელი ტოლი იქნება

$$W_r = \left(\ddot{r}, \frac{d\ddot{v}}{dt} \right) = \dot{v}. \quad (36.11)$$

ახლა ვიპოვოთ \dot{p} ; გვექნება

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 \bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 v \ddot{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (36.12)$$

საიდანაც

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{m_0 \bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\ddot{r}}{dt} + m_0 \ddot{r} \frac{v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \quad (36.13)$$

ამგვარად, ძალის ნორმალური და მხები კომპონენტებისათვის მივიღებთ:

$$F_n = \left(\ddot{n}, \dot{p} \right) = \frac{m_0 v \left(\ddot{n}, \ddot{r} \right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{m_0 W_n}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (36.14)$$

და

$$F_r = \left(\ddot{r}, \dot{p} \right) = \frac{m_0 W_r}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{m_0 W_r}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \quad (36.15)$$

როგორც ვხედავთ, რელატივისტურ მექანიკაში ძალა მართლაც აჩქარების პროპორციული აღარ არის. მხოლოდ ორ შემთხვევაში იქნება ძალა აჩქარების პროპორციული. კერძოდ, როცა აჩქარებისა და სიჩქარის ვექტორები ერთმანეთის პარალელურია ან პერპენდიკულარული, ოღონდ ამ დროს სხვადასხვა მასა გვევლინება პროპორციულობის კოეფიციენტად:

$$m_l = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}, \quad m_t = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}. \quad (36.16)$$

რომლებსაც ადრე სათანადოდ უწოდებდნენ გრძივ და განივ მასებს.¹ ზღვარში, როცა $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, m_l და m_t მასები ერთმანეთს ემთხვევა $m_l = m_t = m_0$, მაშინ ძალის მდგენლებისათვის მივიღებთ $\vec{F}_n = m_0 \vec{W}_n$, $\vec{F}_t = m_0 \vec{W}_t$, ე.ი. $\vec{F} = -m_0 \vec{V}$ - ძალა აჩქარების პროპორციული გახდება.

ახლა გამოვარკვიოთ (36.4) ვანტოლების შინაარსი. მოვახდინოთ მასში დროის მიხედვით განარმოება

$$\phi_4 = \frac{1}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{m_0 (\vec{v}, \dot{\vec{v}})}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \quad (36.17)$$

ცხადია, რომ

$$(\vec{v}, \dot{\vec{v}}) = v(\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{v}}) = v\left(\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{v}} + v \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt}\right) = v\dot{v} + v^2 \left(\dot{\vec{r}}, \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt}\right) = v\dot{v}. \quad (36.18)$$

ასევე ნათელია, რომ

(36.13) -ის თანახმად,

$$\left(\vec{v}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\vec{v}, \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt}\right) + m_0 (\dot{\vec{r}}, \vec{v}) \frac{\dot{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \quad (36.19)$$

რადგან $\vec{v} = v\dot{\vec{r}}$, ამიტომ (36.19) გამოსახულების მარჯვენა მხარეში პირველი ნევრი ნულის ტოლია. ამგვარად,

$$\left(\vec{v}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \frac{m_0 v \dot{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{m_0 (\vec{v}, \dot{\vec{v}})}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \quad (36.20)$$

თუ გამოსახულებას შევიტანთ (36.17) -ში, მივიღებთ

$$\phi_4 = \frac{1}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (\vec{v}, \vec{F}). \quad (36.21)$$

¹ როგორც § 32-ის ბოლოში მიუთითეთ, ახლა არა თუ "გრძივი" და "განივი" მასები, არამედ, საზოგადოდ, არსებობს ტენდენცია "მოძრაობის მასის" ტერმინის ამოკლებისა.

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით კი (36.4) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = (\vec{v}, \vec{F}). \quad (36.22)$$

ამგვარად, მინკოვსკის მოძრაობის განტოლება

$$\frac{dP_\mu}{dt} = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \phi_\mu, \quad (36.23)$$

სადაც $P_\mu \left(\vec{p}, \frac{i}{c} E \right)$ იმპულსის ოთხვექტორია, ხოლო მინკოვსკის ძალის ოთხვექტორს აქვს კომპონენტები

$$\phi_\mu \left(\frac{\gamma}{c} \vec{F}, i \frac{\gamma}{c^2} (\vec{v}, \vec{F}) \right) \quad (36.24)$$

რომლებიც ეკვივალენტური ყოფილა (36,6) და (36.22) განტოლებებისა:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (36.25)$$

$$\frac{dE}{dt} = (\vec{v}, \vec{F}). \quad (36.26)$$

პირველი წარმოადგენს აინშტაინის მოძრაობის განტოლებას, მეორე კი ანალოგიურია კლასიკური მექანიკის ცოცხალი ძალის კანონის (ენერჯიის შენახვის კანონი). მატერიალური ნერტილის მოძრაობის ენერჯიის ცვლილება დროის ერთეულში ტოლია იმ მუშაობის, რომელსაც აწარმოებს ძალა იმავე დროში.

აღვნიშნოთ, რომ რამდენადაც $u_i \frac{du_i}{ds} = 0$ და $P_\mu = m_0 c u_\mu$, იმდენად (36.1) განტოლებიდან მივიღებთ

$$u_\mu \phi_\mu = 0, \quad (36.27)$$

ე.ი. მინკოვსკის სივრცეში ოთხძალა მართობი ყოფილა ოთხსიჩქარისა.

შევნიშნოთ, რომ მსგავსად ნიუტონის მოძრაობის განტოლებებისა, რელატივისტური მექანიკის (36.25) განტოლება ინვარიანტულია $t \rightarrow -t$ შეცვლის, ე.ი. მომავლის წარსულით შეცვლის მიმართ, რაც იმას ნიშნავს, რომ რელატივისტურ მექანიკაში დროის ორივე მიმართულება ეკვივალენტურია.

კლასიკურ მექანიკაში აჩქარება ინვარიანტული იყო ინერციული სისტემების მიმართ. საინტერესოა გავარკვიოთ, როგორ გარდაიქმნება აჩქარება რელატივისტურ მექანიკაში, როცა ერთი ინერციული სისტემიდან გადავდივართ მეორეზე.

ვიგულისხმობთ, რომ K' სისტემაში მატერიალური ნერტილის სიჩქარე $\vec{v}(v'_x, v'_y, v'_z)$ ცვლადი სიდიდეა, მაშინ სამგანზომილებიან აჩქარებას ოთხაჩქარების სივრცულ კომპონენტებს, ამ სისტემაში ექნება მნიშვნელობანი:

$$w'_x = \frac{dv'_x}{dt'}, \quad w'_y = \frac{dv'_y}{dt'}, \quad w'_z = \frac{dv'_z}{dt'} \quad (36.28)$$

ნანილაკის სიჩქარე, უძრავ K სისტემაში იყოს $v(v_x, v_y, v_z)$, მაშინ ამ სისტემაში აჩქარებას ექნება კომპონენტები

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad w_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (36.29)$$

ამასთან, ნანილაკის \vec{v} სიჩქარე \vec{k} სისტემაში განისაზღვრება სიჩქარეთა შეკრების (16.4) ფორმულებით, სადაც V იქნება სიჩქარე, რომლითაც K' სისტემა მოძრაობს K სისტემის x ღერძის გასწვრივ. აჩქარების მდგენლების დასაკავშირებლად ამ ორ სისტემაში ჯერ ვიპოვოთ dv_x, dv_y, dv_z დიფერენციალები. ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ეს დიფერენციალები ტოლია:

$$dv_x = \frac{1-\beta^2}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)^2} dv'_x \left(\beta = \frac{v}{c}\right), \quad (36.30)$$

$$dv_y = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} \left\{ dv'_y - \frac{\frac{v}{c} v'_y dv'_x}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} \right\}, \quad (36.31)$$

$$dv_z = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} \left\{ dv'_z - \frac{\frac{v}{c^2} v'_z dv'_x}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} \right\}. \quad (36.32)$$

ეს გამოსახულებები გავყოთ dt -ზე და ვისარგებლოთ (16.2)-ის ბოლო დამოკიდებულებით. (36.27) და (36.28) განმარტებების გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$W_x = W'_x \frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)}, \quad (36.33)$$

$$W_y = \frac{(1-\beta^2)}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)^2} \left\{ W'_y - \frac{\frac{V}{c^2} v'_y}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)} W'_x \right\}, \quad (36.34)$$

$$W_z = \frac{(1-\beta^2)}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)^2} \left\{ W'_z - \frac{\frac{V}{c^2} v'_z}{\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)} W'_x \right\}, \quad (36.35)$$

როგორც ვხედავთ, არქარების ინვარიანტობას ინერციული სისტემის მიმართ ადგილი არა აქვს.

ვთქვათ, K' სისტემაში ნანილაკის არქარება ნულის ტოლია: $\omega'_x = \omega'_y = \omega'_z = 0$, ე.ი. მოძრაობს ინერციულად, მაშინ უკანასკნელი ფორმულებიდან ცხადია, რომ იგი ინერციულად იმოძრაეებს ნებისმიერ სხვა ინერციულ სისტემაშიც.

ახლა ვთქვათ, K' სისტემაში არქარება მუდმივი სიდიდეა, ე.ი. ნანილაკი მოძრაობს თანაბარარქარებულად. იმის გამო, რომ (36,32-34) ფორმულებში შედის ნანილაკის v'_x სიჩქარე, რომელიც არქარებული მოძრაობის გამო ცვალებადია, ამიტომ K სისტემაში არქარება მუდმივი აღარ არის. ე.ი. შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა: თუ ერთ რომელიმე ინერციულ სისტემაში მოძრაობა თანაბრად არქარებულია, ნებისმიერ სხვა სისტემაში იგი თანაბრად არქარებული აღარ იქნება. მიღებული ფორმულების ფიზიკური შინაარსი განსაკუთრებით კარგად ჩანს ე.წ. თანმხლებ სისტემაში.

თანმხლები ეწოდება იმ ინერციულ სისტემას, რომლის მიმართ მოძრავი მატერიალური ნერტილი დროის ადებულ მომენტში მყისიერად უძრავია, თუმცა მას არქარება გააჩნია. თუ სიჩქარეთა შეკრების (16.4) ფორმულებში გავითვალისწინებთ $v'_x = v'_y = v'_z = 0$, მივიღებთ $v_x = V$, $v_y = v_z = 0$, ე. ი. ნანილაკის სიჩქარე K სისტემაში გახდება V -ს ტოლი. ამგვარად, თანმხლებ სისტემაში (36,32-34) ფორმულები მიიღებენ მარტივ სახეს:

$$w_z = (1 - \beta^2)^{3/2} w'_z. \quad (36.36)$$

$$w_y = (1 - \beta^2) w'_y. \quad (36.37)$$

$$w_x = (1 - \beta^2) w'_x. \quad (36.38)$$

ე.ი. აჩქარებებს შორის ადგილი აქვს პროპორციულ დამოკიდებულებას, ამიტომ თუ K' სისტემაში ნანილაკი აჩქარებულად მოძრაობს, მაშინ იგი სხვა ნებისმიერ ინერციულ სისტემაშიც აჩქარებულად იმოდრავებს, ოღონდ ნაკლები აჩქარებით.

ცხადია, სათანადოდ შეიცვლება ძალაც, ამასთან, თუ ერთ რომელიმე სისტემაში ძალა ნულის ტოლია, არ იარსებებს არც ერთი ისეთი ინერციული სისტემა, სადაც ძალა ნულისაგან განსხვავებული აღმოჩნდებოდა. ამგვარად, ერთი ინერციული სისტემიდან მეორეზე გადასვლისას ძალა არც ისპობა და არც ჩნდება.

§ 37. ჰამილტონ-იაკობის განტოლება

როგორც კლასიკური მექანიკიდან არის ცნობილი, მოძრაობა ეკვივალენტური სახით შეგვიძლია ავწეროთ სხვადასხვა მეთოდით. იგივეს აქვს ადგილი რელატივისტურ მექანიკაში. კერძოდ, რელატივისტური მოძრაობა სავსებით შეგვიძლია შევისწავლოთ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებით, რომელსაც ქვემოთ გამოვიყვანთ.

დავინყოთ თავისუფალი ნანილაკით. დავწეროთ მისი ჰამილტონიანი. თავისუფალი ნანილაკის ჰამილტონიანი ემთხვევა მის ენერჯიას, რომელიც უნდა გამოიხატოს იმპულსის საშუალებით. ცხადია, რომ ენერჯიის (32.18) გამოსახულება შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც თავისუფალი ნანილაკის ჰამილტონის ფუნქცია.

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m_0^2 c^4} \quad (37.1)$$

რელატივისტური მექანიკის ჰამილტონ-იაკობის განტოლება შეგვიძლია მივიღოთ უშუალოდ, (35.1) ტოლობის კვადრატში აყვანით. სახელდობრ, გვექნება

$$\left(\frac{ds}{dx_\mu} \right)^2 = -m_0^2 c^2 \quad (37.2)$$

რომელიც გაშლილი სახით ასე ჩაინერება:

$$(\nabla S)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0 \quad (37.3)$$

ამ განტოლებას უწოდებენ რელატივისტური მექანიკის ჰამილტონ-

იაკობის განტოლებას თავისუფალი ნაწილაკისათვის. იგი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც რელატივისტური შექანიკის საფუძველი. შევნიშნოთ, რომ (37.3) განტოლების მიღება ასევე ადვილად შეიძლება, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -H(\vec{r}, \vec{p}), \quad \vec{P} = \nabla S \quad (37.4)$$

ახლა ჰამილტონ-იაკობის განტოლებაში ჩავრთოთ ურთიერთქმედება. ვთქვათ, ნაწილაკი იმყოფება პოტენციალურ ველში, რომელიც ხასიათდება U პოტენციალური ენერგიით. იმისათვის, რომ არ დაირღვეს მოძრაობის განტოლების რელატივისტური ბუნება, საჭიროა U ფუნქციას ჰქონდეს განსაზღვრული თვისებები ლორენცის გარდაქმნების მიმართ. კერძოდ, რადგან (37.3) ჰამილტონ-იაკობის განტოლება შედეგია ენერგია-იმპულსის ოთხვექტორის კვადრატში აყვანისა, ამიტომ თუ პოტენციალური ენერგია ლორენცის გარდაქმნების მიმართ ისე იქცევა, როგორც ოთხვექტორის მეოთხე (დროითი) კომპონენტი, მაშინ, ცხადია, იგი უნდა დავუმატოთ ენერგიას. ამიტომ ველში მოძრავი ნაწილაკის ჰამილტონიანი ტოლი იქნება შემდეგი გამოსახულებისა:

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4} + u(\vec{r}) \quad (37.5)$$

შესაბამისი ჰამილტონ-იაკობის განტოლება, თანახმად (37.4) ფორმულებისა, მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(\nabla S)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + u \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0. \quad (37.6)$$

თუ ვიპოვეთ ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სრული ინტეგრალი, მაშინ ცნობილი მეთოდით მოვძებნით ტრაექტორიის განტოლებასაც.

ჰამილტონ-იაკობის (37.6) განტოლებაში არარელატივისტურ ზღვარზე $\left(\frac{v}{c} \rightarrow 0 \right)$ გადასვლა უშუალოდ არ ხერხდება. ამის მიზეზი ის არის, რომ ნაწილაკის ენერგიას არარელატივისტურ ზღვარში ემატება ზედმეტი $m_0 c^2$ წევრი, ამიტომ (37.6) განტოლებაში საჭიროა წინასწარ ჩავატაროთ ისეთი გარდაქმნა, რომელიც შეესაბამება $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ ზღვარში, ენერგიის გამოსახულებაში, $m_0 c^2$ წევრის ჩამოცილებას. ამ მიზნით საკმარისია მოვახდინოთ ქმედების ფუნქციის შემდეგი გარდაქმნა:

$$S = S' - m_0 c^2 t. \quad (37.7)$$

(35.4) ფორმულის თანახმად, აქედან მივიღებთ $E = E' + m_0 c^2$, ე.ი. $E' = E - m_0 c^2$ და არარელატივისტურ ზღვარზე გადასვლისას

E' -ისათვის გვექნება კლასიკური გამოხატულება $E' = \frac{m_0 v^2}{2}$ უძრაობის ენერჯიის გარეშე.

ახალი S' -ისათვის ჰამილტონ-იაკობის განტოლება ასე გადაინერება:

$$(\nabla S')^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} + u - m_0 c^2 \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0, \quad (37.8)$$

რომელიც მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{1}{2m_0} (\nabla S')^2 - \frac{1}{2m_0 c^2} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial S'}{\partial t} - \frac{u^2}{2m_0 c^2} - \frac{u}{m_0 c^2} \frac{\partial S'}{\partial t} + u = 0 \quad (37.9)$$

ეს განტოლება ზუსტია და არ განსხვავდება (37.7) -ისაგან. მაგრამ (37.10) განტოლებას ის თვისებურება ახასიათებს, რომ მასში უკვე შესაძლებელია არარელატივისტურ ზღვარზე გადასვლა, კერძოდ ზღვარში, როცა სინათლის სიჩქარე მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, (37.10) დაიყვანება ჰამილტონ-იაკობის კლასიკურ განტოლებაზე.

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + \frac{1}{2m_0} (\nabla S')^2 + u = 0. \quad (37.10)$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ჰამილტონ-იაკობის (37.3) განტოლება ინვარიანტულია ლორენცის გარდაქმნების მიმართ. (37.2) განტოლება მივიღეთ P_μ ოთხვექტორის კვადრატში აყვანით, ე.ი. P_μ^2 იქნება სკალარი ლორენცის გარდაქმნების მიმართ, ამიტომ (37.3) განტოლებაც ინვარიანტული იქნება იმავე გარდაქმნების მიმართ. ჩვენ შეგვიძლია ვაჩვენოთ ინვარიანტობა ლორენცის

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu \quad (37.11)$$

ზოგადი გარდაქმნების მიმართაც $\frac{\partial S}{\partial x_\nu}$. წარმოებული განვიხილოთ,

როგორც რთული ფუნქცია x'_μ ცვლადების მიმართ; გვექნება

$$\frac{\partial S}{\partial x_\nu} = \frac{\partial S}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial S}{\partial x'_\mu} a_{\mu\nu} \quad (37.12)$$

ამ გამოსახულების კვადრატში აყვანით და $a_{\mu\nu}$ ელემენტების

ორთონორმირებული პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_\nu}\right)^2 = \frac{\partial S}{\partial x'_\mu} a_{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x'_j} a_{j\nu} = \left(\frac{\partial S}{\partial x'_\mu}\right)^2 \quad (37.13)$$

რაც ამტკიცებს ჰამილტონ-იაკობის (37.2) განტოლების ინვარიანტობას ლორენცის ზოგადი გარდაქმნების მიმართ. როცა საქმე გვაქვს ჰამილტონ-იაკობის განტოლებასთან, რომელშიც ჩართულია ურთიერთქმედება, მისი ლორენც-ინვარიანტობის საკითხი დამოკიდებულია პოტენციალური ენერჯიის კონკრეტულ თვისებებზე, როგორც ლაგრანჟის განტოლებების გამოყვანის დროს აღვნიშნეთ, ზოგად შემთხვევაში.

კლასიკური მექანიკის პოტენციალური ენერჯიები, როგორც ნესი, ლორენცის ინვარიანტობის პირობას არ აკმაყოფილებენ, რადგან მათი ქმედების რადიუსი უსასრულობის ტოლია და ურთიერთქმედება ხდება მყისიერად. ამიტომ ჰამილტონ-იაკობის რელატივისტური განტოლება ლორენცის გარდაქმნების მიმართ ინვარიანტული მხოლოდ მაშინ იქნება, როცა ურთიერთქმედება წარმოიდგინება კოვარიანტული სახით. ერთ-ერთ ასეთ შესაძლებლობას განვიხილავთ შემდეგ პარაგრაფში.

§ 38. მოძრაობის განტოლება ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრაობი და მუხტული ნაწილაკისათვის

განვიხილოთ ნაწილაკი, რომელსაც აქვს ელემენტარული, დადებითი e მუხტი და შევისწავლოთ მისი მოძრაობა ელექტრომაგნიტურ ველში. ეს ამოცანა მეტად მნიშვნელოვანია, რამდენადაც აქ საქმე გვაქვს სწორედ იმ შემთხვევასთან, როცა ურთიერთქმედება შეგვიძლია შემოვიტანოთ კოვარიანტული სახით.

ელექტრომაგნიტურ ველში მუხტზე იმოქმედებს ლორენცის ძალა

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}], \quad (38.1)$$

სადაც \vec{E} და \vec{H} წარმოადგენენ ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობებს, შესაბამისად. რადგან მუხტზე მოქმედი ძალა ცნობილია, ამიტომ დადებითი მუხტის რელატივისტური ნაწილაკისათვის შეგვიძლია დავწეროთ აინშტაინის განტოლება

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}] \quad (38.2)$$

სადაც \vec{P} რელატივისტური იმპულსია. არარელატივისტურ ზღვა-რში, როცა $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, რელატივისტური იმპულსი დაიყვანება $\vec{P} = m_0\vec{v}$ კლასიკურ გამოსახულებაზე და (38.2) განტოლება ნიუტონის შესაბამის განტოლებას დაემთხვევა.

(38.2) მოძრაობის განტოლების ინვარიანტული ფორმით ჩანერის მიზნით ხელსაყრელია, ნაცვლად \vec{E} და \vec{H} ვექტორებისა, შემოვიღოთ ე.წ. ვექტორული \vec{A} და სკალარული φ პოტენციალები, რომლებიც სივრცისა და დროის ფუნქციებია. ამასთან, \vec{E} და \vec{H} დაძაბულობები პოტენციალების საშუალებით განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (38.3)$$

$$\vec{H} = \text{rot}\vec{A}. \quad (38.4)$$

აღსანიშნავია, რომ \vec{A} და φ პოტენციალებს ფიზიკური აზრი არა აქვთ, რამდენადაც ისინი ცალსახად არ არის განსაზღვრული. კერძოდ, უშუალო ჩასმით დავრწმუნდებით, რომ (38.3) და (38.4) ფორმულებით განსაზღვრული \vec{E} და \vec{H} ვექტორების მნიშვნელობანი არ შეიცვლება, თუ, ნაცვლად φ და \vec{A} პოტენციალებისა, ავიღებთ

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}f, \quad (38.5)$$

სადაც $f(\vec{r}, t)$ ნებისმიერი ფუნქციაა. (38.5) -ს უნოდებენ გრადიენტულ გარდაქმნას, ხოლო იმ ფაქტს, რომ ასეთი გარდაქმნის შედეგად \vec{E} და \vec{H} არ იცვლება -გრადიენტულ ინვარიანტობას.

ლორენცის ძალა გამოვხატოთ ვექტორ და სკალარპოტენციალებით. ამისათვის დაგვჭირდება (38.2) -ში შემავალი ვექტორული ნამრავლის გამოხატვა აღნიშნული პოტენციალების საშუალებით. გვექნება

$$[\vec{v}, \vec{H}]_{\alpha} = [\vec{v}, \text{rot}\vec{A}]_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta} \text{rot}_{\gamma} \vec{A}, \quad (38.6)$$

სადაც β და γ მუნჯი ინდექსებია. $\text{rot}_{\gamma} \vec{A}$ ასევე წარმოვიდგინოთ ლევი-ჩივიტას სიმბოლოთი და შემდეგ გამოვიყენოთ ფორმულა ორი ლევი-ჩივიტას სიმბოლოს ნამრავლისათვის. მივიღებთ.

$$\begin{aligned} [\bar{v}, \bar{H}]_{\alpha} &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\mu\nu} v_{\beta} \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\mu}} = (\partial_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}) v_{\beta} \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\mu}} = \\ &= v_{\nu} \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\alpha}} - v_{\mu} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_{\mu}}; \end{aligned} \quad (38.7)$$

ეს უკანასკნელი ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$[\bar{v}, \bar{H}]_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\bar{v}, \bar{A}) - v_{\mu} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_{\mu}} \quad (38.8)$$

ვიპოვოთ $\frac{dA_{\alpha}}{dt}$ წარმოებულს. იგი ორ წევრს შეიცავს. ერთია A_{α} -ს უშუალო ცვლილება დროის მიხედვით, მეორე კი ცვლილება იმის გამო, რომ მუხტის მოძრაობისას კოორდინატები დროის მიხედვით იცვლება, ე.ი.

$$\frac{dA_{\alpha}}{dt} = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial t} + v_{\mu} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_{\mu}}. \quad (38.9)$$

აქედან განსაზღვრული $v_{\mu} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_{\mu}}$ (38.8)-ში შევიტანოთ; გვექნება

$$[\bar{v}, \bar{H}]_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (\bar{v}, \bar{A}) - \frac{dA_{\alpha}}{dt} + \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial t}. \quad (38.10)$$

მაშასადამე, ძალის α -ური კომპონენტისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$F_{\alpha} = e \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[\varphi - \frac{1}{c} (\bar{v}, \bar{A}) \right] - \frac{1}{c} \frac{dA_{\alpha}}{dt} \right\}. \quad (38.11)$$

ამ გამოსახულებაში შემავალი A_{α} შემდეგი სახით წარმოვიდგინოთ:

$$\frac{dA_{\alpha}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} (A_{\mu} v_{\mu}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} (\bar{v}, \bar{A}), \quad (38.12)$$

რადგან φ პოტენციალი სიჩქარეზე დამოკიდებული არ არის, ამიტომ

$$-\frac{1}{c} \frac{dA_{\alpha}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} \left\{ \varphi - \frac{1}{c} (\bar{v}, \bar{A}) \right\}, \quad (38.13)$$

ახლა, თუ შემოვიღებთ ფუნქციას

$$V(\vec{r}, \vec{v}; t) = e\varphi - \frac{e}{c}(\vec{v}, \vec{A}), \quad (38.14)$$

მაშინ ლორენცის ძალისათვის ელექტრომაგნიტური ველის პოტენციალებში საბოლოოდ გვექნება გამოხატულება

$$F_{\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial x_{\alpha}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial v_{\alpha}}; \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (38.15)$$

$V(\vec{r}, \vec{v}; t)$ -ს უნოდებენ განზოგადებულ პოტენციალურ ენერგიას.

ახლა აღვწეროთ მუხტის მოძრაობა ლაგრანჟის ფორმალიზმით. ჯერ განვიხილოთ კლასიკური შემთხვევა. რადგან ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი მუხტისათვის პოტენციალურ ენერგიას (38.14) სახე აქვს, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია შევარჩიოთ შემდეგი ლაგრანჟიანი:

$$L = \frac{m_0 \vec{v}^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}(\vec{v}, \vec{A}). \quad (38.16)$$

ჰამილტონის ფუნქციას ვიპოვით ფორმულით

$$H = \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}, \vec{v} \right) - L. \quad (38.17)$$

განზოგადებული იმპულსი

$$P_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial v_{\alpha}} \quad (38.18)$$

შეესაბამება დამუხტული ნაწილაკის იმპულსს ელექტრომაგნიტურ ველში. ცხადია, რომ

$$\vec{P} = m_0 \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}. \quad (38.19)$$

როცა ველი არა გვაქვს $\vec{A} = 0$ და $\vec{P} = \vec{p}$, ე.ი. $\vec{P} = m_0 \vec{v}$ არის ნაწილაკის კლასიკური იმპულსი ველის არარსებობის შემთხვევაში. შევიტანოთ (38.19) და (38.16) ჰამილტონის ფუნქციის გამოხატულებაში, მივიღებთ

$$H = \frac{m_0 \vec{v}^2}{2} + e\varphi \quad (38.20)$$

ან, (38.19)-ის გათვალისწინებით, საბოლოოდ გვექნება

$$H = \frac{1}{2m_0} \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\varphi, \quad (38.21)$$

რომელიც წარმოადგენს ჰამილტონიანს ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი დადებითი მუხტის მქონე ნაწილაკისათვის. თუ, გარდა ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედებისა, ნაწილაკი განიცდის სხვა ძალის მოქმედებასაც, მაშინ ამ ძალის შესაბამისი პოტენციალური ენერგია უნდა დაეუმატოთ (38.21) გამოსახულების მარჯვენა მხარეს, ე.ი.

$$H = \frac{1}{2m_0} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\varphi + u. \quad (38.22)$$

როგორც ვხედავთ, იმისათვის რომ თავისუფალი ნაწილაკის ჰამილტონიანიდან გადავიდეთ ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი დადებითი მუხტის მქონე ნაწილაკის ჰამილტონიანზე, საკმარისია მოვახდინოთ შემდეგი შეცვლა:

$$\vec{p} \rightarrow \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right), \quad H \rightarrow H - e\varphi \quad (38.23)$$

კონკრეტულ შემთხვევაში, ელექტრონისათვის, რომლის მუხტი უარყოფითია, გვექნება ჰამილტონის ფუნქცია

$$H = \frac{1}{2m_0} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - e\varphi \quad (38.24)$$

ამის შემდეგ ადვილია ჰამილტონ-იაკობის კლასიკური განტოლების დაწერა ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი დადებითი მუხტის ნაწილაკისათვის, გვექნება

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m_0} \left(\nabla S - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\varphi = 0 \quad (38.25)$$

ახლა იგივე ამოცანა განვიხილოთ რელატივისტურ შემთხვევაში. თუ გავიხსენებთ რელატივისტური თავისუფალი ნაწილაკის (37.3) ლაგრანჟიანს, (38.16) გამოსახულების ანალოგიურად, ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი დადებითი მუხტის რელატივისტური ლაგრანჟის ფუნქციისათვის შეგვიძლია დავწეროთ გამოსახულება

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{e}{c} (\vec{v}, \vec{A}), \quad (38.26)$$

რომლის საშუალებით შეგვიძლია ვიპოვოთ მოძრაობის განტოლება. მაგრამ ჩვენ ჯერ შევეცდებით (38.26) ლაგრანჟიანს მივცეთ აშკარა ინვარიანტული სახე. განსხვავებით გრავიტაციული ველისაგან, ელექტრომაგნიტური ველი სპეციალურ ფარდობითობის

პრინციპს აკმაყოფილებს, ამიტომ ელექტრომაგნიტური ველისათვის შესაძლებელია კოვარიანტული ლაგრანჟიანის აგება. ამ მიზნით საკმარისი იქნება (38.26)-ში შემავალ (38.14) პოტენციალურ ენერჯიას მივცეთ ინვარიანტული სახე. ადვილად შევამოწმებთ, რომ ეს მაშინ შეიძლება, როცა ელექტრომაგნიტური ველის პოტენციალები \vec{A} და φ მინკოვსკის სივრცეში ადგენენ A_j ოთხვექტორს, რომლის სივრცული კომპონენტებია A_a , ხოლო დროითი φ , კერძოდ, $A_j(\vec{A}, i\varphi)$. მაშინ (38.14) პოტენციალური ენერჯია მიიღებს სახეს.

$$V = -e \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} (u_j A_j), \quad (38.27)$$

სადაც u_j არის სიჩქარის ოთხვექტორი $u_j \left(\frac{\vec{v}}{c}, i\gamma \right) \cdot Ldt$ უნდა იყოს ინვარიანტი, ამიტომ (38.26) -დან გვექნება

$$Ldt = \wedge(x, u; s) ds = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \left\{ -m_0 c + \frac{e}{c} u_j A_j \right\}, \quad (38.28)$$

საიდანაც ვხედავთ, რომ ინვარიანტულ ლაგრანჟიანს ექნება ფიგურულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება. მაგრამ პირველი წევრი არ შეიცავს u_j სიჩქარეს, ამიტომ მისი ვარირებით მოძრაობის განტოლებას ვერ მივიღებთ. ამ სიძნელეს ადვილად ავუვლით გვერდს, თუ ამ წევრს გავამრავლებთ $l = \sqrt{-u_j u_j}$ სიდიდესე. ამგვარად, ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული ნაწილაკის ლაგრანჟიანისათვის საბოლოოდ მივიღებთ

$$\wedge(x, u; s) = -m_0 c \sqrt{-u_j u_j} + \frac{e}{c} u_j A_j. \quad (38.29)$$

ეს ლაგრანჟიანი ინვარიანტულია ლორენცის გარდაქმნების მიმართ, რამდენადაც შედგენილია ოთხვექტორების სკალარული ნამრავლებით. მეორე წევრი დაკავშირებულია ველის მახასიათებლებთან, კერძოდ, იგი შეიცავს ველის ოთხპოტენციალს $A_j(\vec{A}, i\varphi)$. როცა $A_j = 0$, მაშინ (38.29) ლაგრანჟიანი დაიყვანება თავისუფალი ნაწილაკის (34.7) ლაგრანჟის ფუნქციაზე.

როგორც თავის დროზე აღვნიშნეთ, თავისუფალი ნაწილაკი შეგვიძლია აღვწეროთ (34.3) ლაგრანჟის ფუნქციითაც, ამიტომ ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული ნაწილაკისათვის (38.29)-ის ნაცვლად იგივე წარმატებით შეგვიძლია ვისარგებლოთ

ლაგრანჟიანით.

$$\Lambda = \frac{1}{2} m_0 c u_j u_j + \frac{e}{c} u_j A_j \quad (38.30)$$

ან, უფრო ზოგადი გამოსახულებით.

$$\Lambda = -\frac{m_0 c}{2n} (-u_j u_j)^n + \frac{e}{c} u_j A_j. \quad (38.31)$$

ყველა ეს ლაგრანჟიანი ერთსა და იმავე მოძრაობის განტოლებას მოგვცემს.

რადგან ლაგრანჟიანის სახე დავადგინეთ, ამიტომ მოძრაობის განტოლების დანერა ძნელი აღარ არის. ჯერ ვიპოვოთ განზოგადებული ოთხიმპულსი. გვექნება

$$P_j = \frac{\partial \Lambda}{\partial u_j} = m_0 c u_j + \frac{e}{c} A_j = p_j + \frac{e}{c} A_j \quad (38.32)$$

სადაც p_j , იმპულსის ოთხვექტორია ველის არარსებობის შემთხვევაში. (38.32) გამოსახულების პირველი სამი კომპონენტისათვის მივიღებთ

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}, \quad (38.33)$$

ხოლო $P_4 = \frac{i}{c} E$ ნეოთხე კომპონენტისათვის გვექნება

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\phi. \quad (38.34)$$

როგორც ვხედავთ, რელატივისტურ შემთხვევაშიც ძალაში რჩება (38.23) გადასვლის ფორმულები.

დავწეროთ ლაგრანჟის განტოლებები. (34.6)-ის თანახმად, გვექნება

$$\frac{d}{ds} \left(m_0 c u_j + \frac{e}{c} A_j \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{e}{c} u_\mu A_\mu \right) = 0; \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (38.35)$$

μ მუნჯი ინდექსია. ამ განტოლებას ადვილად გადავწეროთ მინკოვსკის ფორმით

$$\frac{dp_j}{ds} = \phi_j, \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (38.36)$$

სადაც

$$\phi_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{e}{c} A_\mu u_\mu \right) - \frac{e}{c} \frac{dA_j}{ds} \quad (38.37)$$

ნარმოადგენს მინკოვსკის ძალის გამოხატულებას ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი ნაწილაკისათვის. (38.36) გამოხატულება $i=1,2,3$ მნიშვნელობისათვის ადვილად დაიყვანება (38.2) განტოლებაზე.

ველში მოძრავი დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობის განტოლება ჩვენერთ შამილტონ-იაკობის განტოლების სახითაც. ამისათვის გავითვალისწინოთ, რომ თანახმად (38.32) დამოკიდებულებისა

$$\frac{\partial S}{\partial x_j} = m_0 c u_j + \frac{e}{c} A_j, \quad (38.38)$$

საიდანაც კვადრატში აყვანით და $u_j^2 = -1$ ტოლობის გათვალისწინებით, გვექნება

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_j} - \frac{e}{c} A_j \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0, \quad (38.39)$$

რომელიც ნარმოადგენს შამილტონ-იაკობის განტოლებას ოთხფორმაში. იგივე განტოლება გაშლილად ასე დაინერება:

$$\left(\nabla S - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0. \quad (38.40)$$

როცა ნაწილაკი თავისუფალია, მაშინ $\varphi = \vec{A} = 0$ და (38.40) გადადის (37.3) განტოლებაში. (38.40) განტოლება შეგვიძლია მივიღოთ სხვა გზითაც. ამისათვის თავისუფალი ნაწილაკის შამილტონიანში მოვახდინოთ (38.23) შეცვლა. მივიღებთ შამილტონიანს ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი დადებითი მუხტის მქონე ნაწილაკისათვის

$$H = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \left(\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2} + e\varphi, \quad (38.41)$$

საიდანაც

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad \vec{P} = \nabla S \quad (38.42)$$

ფორმულების გამოყენებით კვლავ მივიღებთ შამილტონ-იაკობის

(38.40) განტოლებას. რა თქმა უნდა, როგორც (38.41) ჰამილტონიანი, ისე (38.40) ჰამილტონ-იაკობის განტოლება, არარელატივისტურ ზღვარში, როცა $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, დაიყვანება შესაბამის (38.21) და (38.25) კლასიკურ გამოსახულებებზე.

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ მოძრაობის (38.2) განტოლებაც ინვარიანტულია $t \rightarrow -t$ (ე.ი. მომავლის ნარსულით) შეცვლის მიმართ, ოღონდ, განსხვავებით (36.25) განტოლებისაგან, აქ დამატებით საჭიროა შემდეგი შეცვლა: $\vec{E} \rightarrow \vec{E}$, $\vec{H} \rightarrow -\vec{H}$ მაშასადამე, (38.2) განტოლება ინვარიანტული იქნება

$$t \rightarrow -t, \quad \vec{E} \rightarrow \vec{E}, \quad \vec{H} \rightarrow -\vec{H} \quad (38.43)$$

შეცვლის მიმართ. ამავე დროს, (38.43) გარდაქმნას პოტენციალებში შეესაბამება $t \rightarrow -t$, $\varphi \rightarrow \varphi$, და $\vec{A} \rightarrow -\vec{A}$ შეცვლა. მაშასადამე, თუ ელექტრომაგნიტურ ველში შესაძლებელია რაიმე მოძრაობა, მაშინ დასაშვებია დროში შებრუნებული მოძრაობაც ველში, რომლის მაგნიტური ველის დაძაბულობას აქვს შებრუნებული მიმართულება.

§ 39. მოძრაობის განტოლება ჰამილტონის ფორმით

წინა პარაგრაფებში რელატივისტური ნანილაკის მოძრაობის განტოლება დავწეროთ სხვადასხვა სახით. საინტერესოა მისი წარმოდგენა ჰამილტონის ფორმითაც. კონკრეტულობის მიზნით განვიხილოთ ერთი ნანილაკი ელექტრომაგნიტურ ველში. სხვა ურთიერთქმედების შემთხვევაში ჰამილოტონის განტოლებების დანერა არავითარ სიძნელესთან არ იქნება დაკავშირებული, თუ რა თქმა უნდა, არ ჩავთვლით იმ სიძნელეს, რომელიც პოტენციალური ენერჯიის კოვარიანტული ფორმით შემოტანასთან არის დაკავშირებული.

გავიხსენოთ ლაგრანჟის განტოლებები

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \Lambda}{\partial u_\mu} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} = 0, \quad (39.1)$$

სადაც x_μ არის მინკოვსკის კოორდინატები, ხოლო $u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds}$ - ოთხ-სიჩქარეა. ლაგრანჟის ფუნქცია ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ორი სახით. ერთი, როცა იგი დამოკიდებულია $x_1, x_2, x_3; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ და t ცვლადებზე $L = L(x_1, x_2, x_3; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3; t)$, სადაც $\dot{x}_\alpha = \frac{d}{dt} x_\alpha$ და, მეორე,

როცა იგი დამოკიდებულია x_1, x_2, x_3, x_4 კოორდინატებზე და მათ ნარმოებულებზე ინტერვალით (ან საკუთარი დროით) u_1, u_2, u_3, u_4 , ე.ი. $\wedge = \wedge(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2, u_3, u_4)$ შესაბამისად, ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ორი ჰამილტონიანი. ერთი,

$$H' = H'(x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3, p_4), \quad (39.2)$$

სადაც

$$p_\mu = \frac{\partial \wedge}{\partial u_\mu}, \quad (39.3)$$

რომელიც, მაგალითად, თავისუფალი ნანილაკისათვის მოგვცემს

$$p_\mu = m_0 c u_\mu \quad (39.4)$$

და, მეორე,

$$H = H(x_1, x_2, x_3; p_1, p_2, p_3; I) \quad (39.5)$$

გამოვიყვანოთ ჰამილტონის განტოლებები ორივე ამ შემთხვევაში. ამისათვის დავწეროთ ჰამილტონის ფუნქცია ცხადი სახით. ნათელია, რომ H' -სათვის გვექნება განმარტება

$$H' = \frac{\partial \wedge}{\partial x_\mu} u_\mu - \wedge; \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (39.6)$$

ამასთან იგულისხმება, რომ (39.3) ტოლობიდან უნდა ამოვხსნათ $u_\mu(x_1, x_2, x_3, x_4; p_1, p_2, p_3, p_4)$ და u_μ გამოვრიცხოთ (39.6) ფორმულიდან. გავანარმოოთ H , x_ν და p_ν ცვლადებით და გავითვალისწინოთ ლაგრანჟის (39.1) განტოლებები. გვექნება

$$\frac{\partial H'}{\partial x_\nu} = p_\mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \wedge}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \wedge}{\partial x_\mu} \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} = - \frac{\partial \wedge}{\partial x_\nu} = - \frac{d}{ds} \frac{\partial \wedge}{\partial x_\nu} = - \frac{\partial p_\nu}{ds}, \quad (39.7)$$

$$\frac{\partial H'}{\partial p_\nu} = u_\nu + p_\mu \frac{\partial u_\mu}{\partial p_\nu} - \frac{\partial \wedge}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu}{\partial p_\nu} = \frac{dx_\nu}{ds} \quad (39.8)$$

ამგვარად, გვექნება ჰამილტონის შემდეგი განტოლებები:

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial s} = \frac{\partial H'}{\partial p_\nu}; \quad \frac{dp_\nu}{ds} = - \frac{\partial H'}{\partial x_\nu}. \quad (39.9)$$

როცა H' -ს აქვს (39.6) სახე, მაშინ (39.9) განტოლებები ეკვივალენტურია ლაგრანჟის (39.1) განტოლებებისა. ელექტრომაგნიტური

ველის შემთხვევაში, როგორც ვიცით, ლაგრანჟიანი შეგვიძლია შევარჩიოთ შემდეგი სახით:

$$\Lambda = \frac{1}{2} m_0 c u_\mu^2 + \frac{e}{c} u_\mu A_\mu, \quad (39.10)$$

ამიტომ განზოგადებული იმპულსისათვის გვექნება

$$P_\mu = \frac{\partial \Lambda}{\partial u_\mu} = m_0 c u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu. \quad (39.11)$$

აქედან

$$m_0 c u_\mu = \left(P_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right), \quad (39.12)$$

საიდანაც

$$\left(P_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0. \quad (39.13)$$

ახლა, თუ (29.12)-ის გამოყენებით (39.6)-დან გამოვრიცხავთ u_μ -ს, მარტივად მივიღებთ H' -ის გამოსატყულებას

$$H' = \frac{1}{2m_0 c} \left(P_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right)^2 \quad (39.14)$$

ამასთან, (39.13)-ის თანახმად, H' -ის რიცხობრივი მნიშვნელობა ტოლია $H' = -\frac{1}{2} m_0 c$ სიდიდის.

ახლა გადავიდეთ $H(x_1, x_2, x_3; p_1, p_2, p_3, t)$ ჰამილტონიანზე. (39.9)-დან გვექნება:

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha}; \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial x_\alpha}. \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (39.15)$$

ეს განტოლებები ნევრ-ნევრად გავყოთ განტოლებაზე

$$\frac{dx_4}{ds} = \frac{\partial H'}{\partial p_4} \quad (39.16)$$

გვექნება:

$$\frac{dx_\alpha}{dx_4} = \frac{\partial H'}{\partial p_\alpha}; \quad \frac{dp_\alpha}{dx_4} = -\frac{\partial H'}{\partial x_\alpha}; \quad \frac{\partial H'}{\partial p_4} \quad (39.17)$$

ახლა (39.13) პირობიდან გამოვხატოთ P_4 დანარჩენი ცვლადების

სამუალებით, ე.ი. ვიპოვოთ $P_4(x_1, x_2, x_3, x_4; P_1, P_2, P_3)$, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{\partial H'}{\partial P_\mu} + \frac{\partial H'}{\partial P_4} \frac{\partial P_4}{\partial x_\mu} = 0, \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (39.18)$$

$$\frac{\partial H'}{\partial x_\beta} + \frac{\partial H'}{\partial P_4} \frac{\partial P_4}{\partial P_\beta} = 0. \quad (\beta = 1, 2, 3) \quad (39.19)$$

აქედან განსაზღვრული $\frac{\partial H'}{\partial P_\alpha}$ და $\frac{\partial H'}{\partial x_\alpha}$ შევიტანოთ (39.17)-ში; მივიღებთ:

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_4} = -\frac{\partial P_4}{\partial P_\alpha}; \quad \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_4} = \frac{\partial P_4}{\partial x_\alpha}. \quad (39.20)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $P_4 = \frac{i}{c} H(\bar{r}, \bar{P}, \bar{t})$ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha}; \quad \frac{dP_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}, \quad (39.21)$$

რომლებიც წარმოადგენენ ჰამილტონის განტოლებებს ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული ნაწილაკისათვის. ვიპოვოთ H -ის გამოსატყულება. ამისათვის დავწეროთ (39.13) პირობა ცხადი სახით. გვექნება

$$\left(P_\alpha - \frac{e}{c} A_\alpha \right)^2 + \left(\frac{iH}{c} - \frac{ie\varphi}{c} \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0, \quad (39.22)$$

საიდანაც მარტივად მივიღებთ

$$H = c \sqrt{m_0^2 c^2 + \left(\bar{P} - \frac{e}{c} \bar{A} \right)^2} + e\varphi. \quad (39.23)$$

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ ჰამილტონის H ფუნქცია წარმოადგენს $P_\mu \left(\bar{P}, \frac{i}{c} H \right)$ ოთხვექტორის მეოთხე კომპონენტს, ამიტომ (39.21) განტოლებებს არა აქვთ კოვარიანტული ფორმა.

შენახვის კანონები. მასისა და ენერგიის
ეკვივალენტობა

ამ თავში შევისწავლით შენახვის კანონებს და მასისა და ენერგიის ეკვივალენტობის საკითხს. შენახვის კანონებს ცალკე განვიხილავთ ერთი მატერიალური ნერტილისათვის და ნანილაკთა სისტემისათვის. დეტალურად შევეხებით იმ სიძნელეებს, რაც დაკავშირებულია სისტემის ნანილაკების ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგიის შემოღებასთან და, აქედან გამომდინარე, ნანილაკთა სისტემისათვის შენახვის კანონების გამოყვანასთან.

დანვრილებითაა შესწავლილი მასისა და ენერგიის ეკვივალენტობის საკითხები. განხილულია ამ კანონის ექსპერიმენტული შემოწმების შესაძლებლობანი და პრაქტიკული გამოყენების საშუალებანი. დანვრილებითაა გადმოცემული ატომური ენერგიის მიღების არსი. დახასიათებულია წყვილთა გაჩენისა და ანიჰილაციის მოვლენები.

§ 40. მატერიალური ნერტილის შენახვის კანონები

რელატივისტურ მექანიკაში ერთი იზოლირებული მატერიალური ნერტილის შენახვის კანონების გამოყვანა ნანილაკთა სისტემის შენახვის კანონებისაგან პრინციპულად განსხვავდება, ამიტომ ჯერ განვიხილოთ ერთი ნანილაკის შემთხვევა.

შენახვის კანონების გამოყვანისას ჩვენ შეგვიძლია ვისარგებლოთ ნებისმიერი მეთოდით. კერძოდ, შეგვიძლია შენახვის კანონები დაუკავშიროთ უსასრულო მცირე გარდაქმნებს, მაგრამ ფიზიკური შედეგების უფრო ნათლად წარმოდგენის მიზნით უმჯობესია გამოვიყენოთ ნიუტონის ვექტორული მეთოდი.

იმპულსის შენახვის კანონი. დავინყოთ იმპულსის შენახვის კანონით. განვიხილოთ ერთი იზოლირებული მატერიალური ნერტილი. აინშტაინის განტოლებას მისთვის ექნება სახე

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (40.1)$$

სადაც \vec{F} არის მოქმედი ძალა. იზოლირებული ნერტილისათვის $\vec{F} = 0$ და

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \quad (40.2)$$

$$\bar{P} = \frac{m_0 \bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = const. \quad (40.3)$$

მაშასადამე, ადგილი აქვს იზოლირებული მატერიალური ნერტილის რელატივისტური იმპულსის შენახვის კანონს.

ენერჯიის შენახვის კანონი. ენერჯიის შენახვის კანონი რელატივისტურ მექანიკაში ცოცხალი ძალის კანონის სახით უკვე გამოვიყვანეთ. ამ კანონს აქვს სახე

$$\frac{dE}{dt} = (\bar{F}, \bar{v}). \quad (40.4)$$

როცა მოქმედი ძალა ნულის ტოლია, მაშინ $\frac{dE}{dt} = 0$ და ადგილი ექნება შენახვის კანონს

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2}}} = const. \quad (40.5)$$

თუ ნაწილაკი იმყოფება კონსერვატიულ ველში, რომელიც ხასიათდება პოტენციალური ენერჯიით, მაშინ $(\bar{F}, \bar{v}) dt = (\bar{F}, d\bar{r}) = -dU$ და (40.4) განტოლებიდან მივიღებთ სრული ენერჯიის შენახვის კანონს

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2}}} + U(\bar{r}) = const. \quad (40.6)$$

(40.4) განტოლებას მივცეთ უფრო საინტერესო სახე. ამისათვის იგი გადავწეროთ სხვანაირად; კერძოდ, დავწეროთ

$$dE = \left(\frac{d\bar{P}}{dt}, \bar{v} \right) dt. \quad (40.7)$$

თუ გავითვალისწინებთ (36.20) ტოლობას, (40.7) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$dE = \frac{m_0 (\bar{v}, d\bar{v})}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \quad (40.8)$$

რადგან მასის ცვლილება ტოლია გამოსახულების

$$dm = \frac{m_0(\bar{v}, d\bar{v})}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}, \quad (40.9)$$

ამიტომ ცოცხალი ძალის კანონი შიილებს ორიგინალურ სახეს

$$dE = c^2 dm, \quad (40.10)$$

ე.ი. კინეტიკური ენერჯიის ნებისმიერი ცვლილება დაკავშირებულია მასის ცვლილებასთან. აღსანიშნავია ის გარემოება, რომ (40.10) დამოკიდებულება ასევე სამართლიანია ნებისმიერი სახის ენერჯიისათვის და არა მაინცადამაინც კინეტიკური ენერჯიისათვის.

იმის გამო, რომ (40.4) და (40.10) ფორმულებში ენერჯია შედის წარმოებულის ნიშნის ქვეშ, შეიძლება გვეფიქრა, რომ რელატივისტურ მექანიკაში, კლასიკური მექანიკის მსგავსად, ენერჯია განსაზღვრულია მუდმივი შესაკრების სიზუსტით, მაგრამ ეს ასე არ არის; რელატივისტურ მექანიკაში ენერჯია განსაზღვრულია ზუსტად.

ამ მნიშვნელოვანი საკითხის გასარკვევად იმპულსისა და ენერჯიის შენახვის საკითხი განვიხილოთ მინკოვსკის მეთოდით. დავნეროთ მინკოვსკის განტოლება ერთი მატერიალური ნერტილისათვის

$$\frac{dP_i}{ds} = \phi_i \left(\frac{\gamma}{c} \bar{F}, \frac{i\gamma}{c} (\bar{v}, \bar{F}) \right), \quad (40.11)$$

სადაც $P_i(\bar{p}, \frac{i}{c} E)$ იმპულსის ოთხვექტორია. როცა ნანილაკი იზოლირებულია, მაშინ $\bar{F} = 0$ და მინკოვსკის განტოლება მოგვცემს

$P_i(\bar{p}, \frac{i}{c} E) = const$, ე.ი. ადგილი აქვს იმპულსისა და ენერჯიის ერთობლივ შენახვას. აქედან ჩანს, რომ რელატივისტურ მექანიკაში კლასიკური მექანიკისაგან განსხვავებით, იმპულსის შენახვა კინეტიკური ენერჯიის შენახვისაგან დამოუკიდებლად შეუძლებელია. მართლაც, ვთქვათ, ერთ რომელიმე ათვლის სისტემაში ინახება იმპულსი, კინეტიკური ენერჯია კი არა. მაშინ, ლორენცის (35.10) გარდაქმნის ფორმულების თანახმად, ჩვენ შეგვიძლია გადავიდეთ ისეთ ინერციულ სისტემაზე, სადაც ახალი \bar{p}' იმპულსი გამოხატული იქნება E და \bar{p} სიდიდეების საშუალებით და, მაშასადამე,

იგი არ შეინახება, რამდენადაც პირობით არ ინახება E . ამგვარად, რელატივისტურ მექანიკაში იმპულსი უსაბუთოდ კინეტიკურ ენერჯიასთან ერთად ინახება, ე.ი. ადგილი აქვს ერთი $P_i(\vec{p}, \frac{i}{c} E)$ ოთხვექტორის შენახვას.

ჩვენ დავინახეთ, რომ რელატივისტურ კინეტიკურ ენერჯიაში, $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ არარელატივისტურ ზღვარზე გადასვლის დროს, კლასიკური კინეტიკური ენერჯიის გარდა დამატებით მიიღებოდა $m_0 c^2$ უძრაობის ენერჯია. კლასიკური მექანიკისათვის ამ მუდმივს მნიშვნელობა არა აქვს, რამდენადაც ენერჯია მუდმივი შესაქრების სიზუსტით არის განსაზღვრული. როგორც ზევით აღვნიშნეთ, ერთის შეხედვით, იგივეს უნდა ჰქონდეს ადგილი რელატივისტურ მექანიკაშიც, მაგრამ ჩვენ რომ გადავავლოთ უძრაობის ენერჯია, მაშინ $P_i(\vec{p}, \frac{i}{c} E)$ აღარ იქნებოდა ოთხვექტორი. როგორც ვაჩვენეთ, ინახება P , ოთხვექტორი, ე.ი. იმპულსის შენახვა მოითხოვს კინეტიკური ენერჯიის შენახვასაც. ეს კი მხოლოდ მაშინ შეიძლება, როცა გარდაიქმნება უძრაობის ენერჯიაც, ე.ი. როცა მასა ენერჯიაში გადადის.* ამიტომაც $m_0 c^2$ უძრაობის ენერჯიის მოცილება დაუშვებელია. ამგვარად, ენერჯია რელატივისტურ მექანიკაში განსაზღვრულია არა ადიტიური მუდმივის სიზუსტით, არამედ ცალსახად. ამის დამადასტურებელ ექსპერიმენტებს ჩვენ შემდგომში განვიხილავთ.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ როცა სრული W ენერჯია ინახება, ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემულ სისტემაში იგი დროზე დამოკიდებული არ არის. აღსანიშნავია, რომ W შეინახება ნებისმიერ ინერციულ სისტემაში, მაგრამ ერთიდან მეორე სისტემაზე გადასვლისას იგი სახეს შეიცვლის, ე.ი. $W = const$ დამოკიდებულებაში კონსტანტი სხვადასხვა იქნება სხვადასხვა სისტემაში. როცა ნაწილაკი მოძრაობს $U(\vec{r})$ კონსერვატულ ველში, მაშინ იმპულსისათვის ისევ

* მასისა და ენერჯიის დამაკავშირებელი $E = mc^2$ თანაფარდობის გაგებისას აუცილებელია გამოვიჩინოთ სიფრთხილე. მაგალითად, მასის გარდაქმნად ენერჯიაში შეიძლება გველაპარაკა მხოლოდ მაშინ, თუ რაიმე პროცესში მასა გაქრებოდა და მასთან ერთად გაქრებოდა სხულის ინერჯიის თვისებები და გაჩნდებოდა ენერჯია, რომელიც ადრე არ იყო. ასეთი პროცესები ზუნებაში არ არსებობს.

ყველა პროცესში ენერჯია ქრება ერთი ფორმით, მაგრამ წარმოიშობა სხვა ფორმით, ამასთან მისი რაოდენობა არ იცვლება. ანალოგიურად მასის არსებობის ფორმები აგრეთვე იცვლება, ხოლო მისი რაოდენობა ინახება. აინშტაინის ფორმულა გვეუბნება, რომ მასის და ენერჯიის ფორმების ნებისმიერი ურთიერთგარდაქმნისას მათ შორის ყოველთვის დაცული იქნება ეს თანაფარდობა (რედ.).

გვექნება განმარტება $\vec{p} = m_0 \vec{v} \gamma$, მაგრამ ოთხვექტორს ადგენს

$$P_j(m_0 \vec{v} \gamma, \frac{i}{c}(W - U)), \quad (40.12)$$

რადგან ამ შემთხვევაში $m_0 \gamma c = m_0 \gamma c^2 / c = \frac{W - U(n)}{c}$. ამავე დროს ჰამილტონიანისათვის (სრული ენერჯიისათვის) გვექნება გამოსახულება

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} + U(\vec{r}), \quad (40.13)$$

ხოლო იმპულსი ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\vec{p} = m_0 \vec{v} \gamma = m_0 c^2 \gamma \frac{\vec{v}}{c^2} = \frac{(W - U)\vec{v}}{c^2}. \quad (40.14)$$

იმპულსის მომენტის შენახვის კანონი. განვიხილოთ შემდეგი მეორე რანგის ოთხტენზორი:

$$M_{jk} = x_j P_k - x_k P_j, \quad (40.15)$$

სადაც $x_j(\vec{r}, ict)$ და $P_j(\vec{p}, \frac{i}{c}E)$ კოორდინატისა და იმპულსის ოთხვექტორებია. M_{jk} არის ანტისიმეტრიული ტენზორი: $M_{jk} = -M_{kj}$, ამიტომ მას ექნება ექვსი დამოუკიდებელი კომპონენტი. M_{jk} -ს უწოდებენ მომენტის ოთხტენზორს. განვიხილოთ M_{jk} -ს წარმოებული ინტერვალით. გვექნება

$$\frac{dM_{jk}}{ds} = \left(\frac{dx_j}{ds} P_k - \frac{dx_k}{ds} P_j \right) + \left(x_j \frac{dP_k}{ds} - x_k \frac{dP_j}{ds} \right) \quad (40.16)$$

რადგან $\frac{dx_j}{ds} = U_j$, ხოლო $P_j = m_0 c U_j$, ამიტომ მარჯვენა მხარეში პირველი სხვაობა მოიხსობა და დაგვრჩება

$$\frac{dM_{jk}}{ds} = x_j \phi_k - x_k \phi_j, \quad (40.17)$$

სადაც ϕ_j მინკოვსკის ძალის ოთხვექტორია. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\phi_{jk} = x_j \phi_k - x_k \phi_j, \quad (40.18)$$

მაშინ (40,17) ასე გადაინერება:

$$\frac{dM_{jk}}{ds} = \phi_{jk}, \quad (40.19)$$

სადაც $\phi_{jk} = -\phi_{kj}$ ანტისიმეტრიულ ტენზორს შეგვიძლია ვუწოდოთ

ძალის მომენტის ოთხტენზორი, რადგან $ds = c dt / \gamma$, ამიტომ (40.19) მიიღებს სახეს

$$\frac{dM_{jk}}{dt} = c \sqrt{1 - \beta^2} \varphi_{jk}. \quad (40.20)$$

(40.20) დავნეროთ ორი ტოლობის სახით. ერთი, რომელშიაც მხოლოდ სივრცული $\alpha = 1, 2, 3$ კომპონენტები მონაწილეობს და, მეორე, რომელშიაც $j = 4$ -ს. გვექნება:

$$\frac{dM_{\alpha\beta}}{dt} = c \sqrt{1 - \beta^2} \varphi_{\alpha\beta}, \quad (40.21)$$

$$\frac{dM_{4\alpha}}{dt} = c \sqrt{1 - \beta^2} \varphi_{4\alpha}. \quad (40.22)$$

$M_{\alpha\beta} = -M_{\beta\alpha}$ იქნება სამსივრცის მეორე რანგის ანტისიმეტრიული ტენზორი; მას აქვს სამი დამოუკიდებელი კომპონენტი და ამიტომ ეკვივალენტურია ვექტორის. $M_{\alpha\beta}$ -ს დუალური ვექტორისათვის გვექნება

$$l_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} M_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta P_\gamma = [\vec{r}, \vec{p}]_\alpha. \quad (40.23)$$

მაშასადამე,

$$\vec{l} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m_0 \vec{v}]. \quad (40.24)$$

ამ ვექტორს ეწოდება იმპულსის მომენტის ვექტორი. იმპულსის მომენტის განმარტება ემთხვევა კლასიკური მექანიკის შესაბამისი სიდიდის განმარტებას, ოღონდ (40.24) ფორმულაში \vec{p} -ში იგულისხმება რელატივისტური იმპულსი $\vec{p} = m_0 \vec{v}$.

სრულიად ანალოგიურად $c \sqrt{1 - \beta^2} \varphi_{\alpha\beta}$ -ს დუალური ვექტორისათვის გვექნება

$$K_\alpha = \frac{1}{2} c \sqrt{1 - \beta^2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta \theta_\gamma = [\vec{r}, \vec{F}]_\alpha, \quad (40.25)$$

სადაც

$$\vec{F} = c \sqrt{1 - \beta^2} \vec{\phi}. \quad (40.26)$$

ვექტორს

$$\vec{K} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad (40.27)$$

ენოდება ძალის მომენტი. ამგვარად, (40.21) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{K}. \quad (40.28)$$

როცა ნაწილაკზე ძალა არ მოქმედებს, მაშინ $\vec{K} = 0$ და ადგილი ექნება იზოლირებული ნაწილაკის იმპულსის მომენტის შენახვის კანონს

$$\vec{l} = (\vec{r}, \vec{p}) = \text{const}. \quad (40.29)$$

მაგრამ შეიძლება ნაწილაკი იზოლირებული არ იყოს და მისი იმპულსის მომენტი მაინც ინახებოდეს. ასეთი შემთხვევა გვექნება მაშინ, როცა ძალა ისეთია, რომ $[\vec{r}, \vec{F}] = 0$. ასეთ ძალებს ცენტრალურს უწოდებენ. ცენტრალური ძალის შესაბამისი პოტენციალური ენერგია დამოკიდებულია რადიუსვექტორის მხოლოდ სიდიდეზე და, მაშასადამე, მას სფერული სიმეტრია ახასიათებს.

შემდგომი გამოყენების თვალსაზრისით საინტერესოა ერთი ნაწილაკის მოძრაობა ცენტრალურ ველში განვიხილოთ ლაგრანჟის მეთოდითაც. ცხადია, რომ რელატივისტურ ლაგრანჟიანს ექნება სახე

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U(\vec{v}). \quad (40.30)$$

რადგან $(\vec{r}, \vec{l}) = 0$, ამიტომ ცენტრალურ ველში მოძრაობა ბრტყეულია, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია შემოვიღოთ პოლარული კოორდინატები. ამ კოორდინატებში $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2$, ამიტომ ლაგრანჟიანი მიიღებს შემდეგ გამოსახულებას:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}{c^2}} - U(\vec{v}). \quad (40.31)$$

როგორც ვხედავთ, ϕ ციკლური კოორდინატია, ამიტომ მისი შესაბამისი განზოგადებული P_ϕ იმპულსი მოძრაობის ინტეგრალი იქნება. ვიპოვოთ მისი გამოსახულება; გვექნება

$$P_\phi = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \frac{m_0 r^2 \dot{\phi}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad (40.32)$$

რადგან $(\vec{r}, \vec{l}) = 0$, ეს იმას ნიშნავს, რომ \vec{l} მართობია სიბრტყისა, რომელშიაც დევს ნაწილაკის ტრაექტორია. თუ \vec{r} ვექტორს ავირ-

ჩვეთ x_0y პოლარ-სიბრტყეში, მაშინ \vec{l} ზართობი იქნება ამ სიბრტყისა და Z ღერძის გასწვრივ იქნება მიმართული $\vec{l}(0,0,l_3=1)$, ამიტომ

$$l = \frac{m_0(xy - yx)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (40.33)$$

თუ ამ გამოსახულებაში გადავალთ პოლარულ კოორდინატებზე, ადვილად ვაჩვენებთ, რომ (40.33) გამოსახულება დაემთხვევა (40.32)-ს. მაშასადამე, ცენტრალურ ველში ნანილაკის მომენტი ტოლი იქნება

$$l = P_\phi = \frac{m_0 r^2 \dot{\phi}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (40.34)$$

ცენტრალურ ველში იმპულსის მომენტის შენახვა ნიშნავს, რომ

$$l = m_0 r^2 \dot{\phi} = \text{const.} \quad (40.35)$$

ეს გამოსახულება საშუალებას გვაძლევს $r = r(t)$ მოძრაობის სრული განტოლებიდან გადავიდეთ ტრაექტორიის $r = r(\phi)$ განტოლებაზე. ამისათვის საკმარისია (40.35) ტოლობა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$d\phi = \frac{l}{m_0 r^2 \gamma} dt. \quad (40.36)$$

ლორენცის მომენტის შენახვა. ახლა განვიხილოთ $M_{4\alpha}$ კომპონენტები. ცხადია, რომ

$$M_{4\alpha} = x_4 P_\alpha - x_\alpha P_4 = ict P_\alpha - x_\alpha \frac{i}{c} E; \quad (40.37)$$

მაშასადამე,

$$M_{4\alpha} = ic \left(t P_\alpha - \frac{E x_\alpha}{c^2} \right). \quad (40.38)$$

სრულიად ანალოგიურად, თუ გავითვალისწინებთ მინკოვსკის ოთხძალის (36.24) განმარტებას, (40.18) მიიღებს სახეს

$$\varphi_{4\alpha} = iy \left\{ t F_\alpha - \frac{1}{c^2} x_\alpha (\vec{v}, \vec{F}) \right\}. \quad (40.39)$$

ამგვარად, (40.22) განტოლება შემდეგი ფორმით გადაინერება:

$$\frac{d}{dt} \left(t\vec{p} - \frac{E\vec{r}}{c^2} \right) = \left\{ t\vec{F} - \frac{\vec{r}}{c^2} (\vec{v}, \vec{F}) \right\}, \quad (40.40)$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ რელატივისტურ მექანიკაში მატერიალური ნერტილისათვის, თუ იგი იზოლირებულია ($\vec{F} = 0$), ადგილი ექნება შემდეგი ვექტორის მენახვას:

$$\vec{n} = t\vec{p} - \frac{E\vec{r}}{c^2} = \text{const.} \quad (40.41)$$

ამ ვექტორს ზოგჯერ ლორენცის მომენტს უწოდებენ. ვექტორის ფიზიკური შინაარსის გარკვევას და მისი კლასიკური ანალოგის მოძებნის საკითხს შემდეგ პარაგრაფში განვიხილავთ, როცა შევისწავლით მენახვის კანონებს ნაწილაკთა სისტემისათვის.

§ 41. ნაწილაკთა სისტემა. მენახვის კანონები

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით ერთი ნაწილაკის რელატივისტურ მექანიკას. ვგულისხმობდით, რომ ამ ერთ ნაწილაკს შინაგანი სტრუქტურა არ გააჩნდა და იგი ამ თვალსაზრისით "ელემენტარული" იყო. ახლა განვიხილოთ რელატივისტურ ნაწილაკთა სისტემა, რომელიც შედგება n ნაწილაკისაგან. ნაწილაკთა სისტემის განხილვა რელატივისტურ მექანიკაში ერთობ რთულ ამოცანას წარმოადგენს. ეს სირთულე იჩენს თავს, როცა ნაწილაკთა სისტემა შედგება ურთიერთქმედი ნაწილაკებისაგან. კლასიკურ მექანიკაში კონსერვატული სისტემის ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია გამოიხატება ნაწილაკთა რადიუსვექტორების გარკვეული ფუნქციებით. იმის გამო, რომ კლასიკურ მექანიკაში ურთიერთქმედება ვრცელდება უსასრულო სიჩქარით, ყველა ეს რადიუსვექტორი აიღება დროის ერთ გარკვეულ მომენტში, ე.ი. სისტემაში მიმდინარე ყველა ურთიერთქმედება ხდება ერთდროულად. ამასთან, ეს ერთდროულობა ძალაშია ნებისმიერ ინერციულ სისტემაში. რელატივისტურ მექანიკაში კი, როგორც ვიცით, არ არსებობს ურთიერთქმედება, რომელიც ვრცელდებოდეს c -ზე მეტი სიჩქარით, ამიტომ, როდესაც გვსურს i -ურ ნაწილაკზე სისტემის დანარჩენი ($n-1$) ნაწილაკის ურთიერთქმედების განსაზღვრა დროის ადგილზე მომენტში, მაშინ აუცილებელია ვიცოდეთ დანარჩენი ნაწილაკების მდებარეობა დროის წინა მომენტებში. ამის გამო, ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგიის კორექტული სახის დადგენა რელატივისტურ მექანიკაში ურთულეს ამოცანას წარმოადგენს. ამი-

ტომ ნაწილაკთა სისტემის თავისებურებათა გარკვევის მიზნით ხშირად ისაზღვრებიან არაურთიერთქმედ ნაწილაკთა სისტემებით. ამ პარაგრაფში შემოვიხაზღვრებით მხოლოდ კინემატიკით და შენახვის კანონებით.

კინემატიკა. შემოვიღოთ ნაწილაკთა სისტემის დამახასიათებელი ფიზიკური სიდიდეები. ნაწილაკთა სისტემის იმპულსი ეწოდება ვექტორს

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_{0i} \vec{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}. \quad (41.1)$$

ამასთან, სისტემის იმპულსის განმარტებისათვის მნიშვნელობა არა აქვს იმას, სისტემა შედგება არაურთიერთქმედი ნაწილაკებისაგან თუ ადგილი აქვს ნაწილაკთა ურთიერთქმედებას, რამდენადაც ნაწილაკთა იმპულსები ვექტორებია და მათი შეკრება ორივე შემთხვევაში ხდება ვექტორთა შეკრების წესით.

ყურადღება მივაქციოთ ერთ მნიშვნელოვან გარემოებას. კლასიკურ მექანიკაში ნაწილაკთა სისტემის იმპულსი შემდეგნაირად წარმოიდგინებოდა:

$$\vec{P}_{კლ.} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} m_{0i} \vec{r}_i = \left(\sum_{i=1}^n m_{0i} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_{0i} \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_{0i}} \right) = M_0 \frac{d\vec{R}_c}{dt}, \quad (41.1')$$

სადაც $M_0 = \sum_{i=1}^n m_{0i}$ სისტემის სრული მასაა, ხოლო

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_{0i} \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_{0i}} \quad (41.1'')$$

წარმოადგენს მასათა ცენტრის (ინერციის ცენტრის) რადიუს-ვექტორს. გავიხსენოთ, რომ m_{0i} -ში კლასიკურ მექანიკაში უძრაობის მასა იგულისხმება.

როცა ნაწილაკთა სისტემა იზოლირებულია, მაშინ ინერციის ცენტრი მოძრაობს თანაბარწრფივად. გარდა ამისა, ცენტრის განმარტება არ არის დამოკიდებული ინერციული სისტემის არჩევაზე. კლასიკურ მექანიკაში ნაწილაკთა სისტემის გადატანითი

მოძრაობა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მასათა ცენტრის მოძრაობა, რომელშიაც თავმოყრილია სისტემის მთელი მასა.

იმის გამო, რომ რელატივისტური იმპულსის (41.1) განმარტებაში მონაწილეობს მოძრაობის მასა, რომელიც დამოკიდებულია დროზე (სიჩქარის საშუალებით!) (41.1') ტიპის გარდაქმნა შეუძლებელია. მაშასადამე, რელატივისტურ მექანიკაში აზრი არა აქვს არც (41.1') მასათა ცენტრის რადიუსვექტორის შემოღებას. მიუხედავად ამისა, ჩვენ შეგვიძლია შემოვიტანოთ ინერციის ცენ-

ტრის ათვლის სისტემა. მას განმარტავენ $\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = 0$ პირობით.

ჩვენ ქვემოთ დავინახავთ, რომ რელატივისტურ მექანიკაშიაც შეგვიძლია შემოვიღოთ ინერციის ცენტრის ცნება არაურთიერთქმედი ნაწილაკთა სისტემის შემთხვევაში, ოღონდ \vec{R}_c განმარტება არა (14.1'')-ით, არამედ სხვა სახით.

ახლა შემოვიღოთ სისტემის ენერჯიის ცნება. როცა ნაწილაკთა შორის ურთიერთქმედება არა გვაქვს, მაშინ სისტემის ენერჯიას ვუნოდებთ სიდიდეს

$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_{0i} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}. \quad (41.2)$$

ეს ფორმულა არ გამოდგება ურთიერთქმედ ნაწილაკთა სისტემისათვის, რამდენადაც იგი არ შეიცავს ნაწილაკთა შორის ურთიერთქმედების ენერჯიას.

ნაწილაკთა სისტემის იმპულსის მომენტი, ზოგად შემთხვევაში, განისაზღვრება ფორმულით

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{P}_i]. \quad (41.3)$$

ჩვენ მიერ ადრე გამოყვანილი ფორმულები ბევრ შემთხვევაში შეიძლება გავავრცელოთ სისტემაზეც, რამდენადაც მათი გამოყვანა არ იყო დაკავშირებული ნაწილაკის "ელემენტარულობის" მოთხოვნასთან. ასე, მაგალითად, ენერჯიის კავშირი იმპულსთან, სისტემის შემთხვევაში განმარტებული იქნება ფორმულით

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \vec{P}^2}, \quad (41.4)$$

სადაც m_0 არის სისტემის უძრაობის მასა; E -სისტემის მოძრაობის

ენერგია, ხოლო \vec{P} - სისტემის იმპულსი. ათელის სისტემაში, სადაც $\vec{P}=0$, გვექნება

$$E_0 = M_0 c^2, \quad (41.5)$$

რომელსაც სისტემის უძრაობის ან საკუთარი ენერგია ეწოდება. უძრაობის (საკუთარი) M_0 მასა, ცხადია, დაკავშირებული იქნება სისტემის შინაგან თვისებებთან.

სისტემის, როგორც მთლიანის, მოძრაობის მასა შეგვიძლია შემდეგი ფორმულით გამოვხატოთ:

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (41.6)$$

სადაც \vec{V} არის სისტემის, როგორც მთლიანის, გადატანითი მოძრაობის სიჩქარე. (41.4) ფორმულა ასეც შეგვიძლია ჩავენროთ:

$$E = Mc^2, \quad (41.7)$$

რომელიც წარმოადგენს მასისა და ენერგიის ეკვივალენტობის აინშტაინის ფორმულას ნაწილაკთა სისტემის შემთხვევაში. ამ ფორმულის თანახმად, სისტემის ენერგიის ყოველ ΔE ცვლილებას შეესაბამება მასის ΔM ცვლილება

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2}. \quad (41.8)$$

ამასთან, არა აქვს მნიშვნელობა, რომელი სახის ენერგიაზეა ლაპარაკი. ესაა, მაგალითად, ელექტროდინამიკური, მექანიკური თუ სითბური ენერგია.

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ სისტემის სიჩქარისათვისაც ადგილი ექნება მნიშვნელოვან ფორმულას

$$\vec{V} = \vec{P} \frac{c^2}{E}. \quad (41.9)$$

(41.4) -დან შეგვიძლია განვსაზღვროთ სისტემის უძრაობის მასა. გვექნება

$$M_0^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{P}^2 = JnV. \quad (41.10)$$

სისტემის უძრაობის M_0 მასა დაკავშირით ცალკეულ ნაწილაკის უძრაობის მასებთან. ამ მიზნით განვიხილოთ არაურთიერთქმედი ნაწილაკთა სისტემა. მაშინ სისტემაში, სადაც $\vec{P} = 0$, გვექნება

$$M_0 = \frac{\sum E_i}{c^2}. \quad (41.11)$$

i -ური ნაწილაკის E_i მოძრაობის ენერგია შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც ჯამი კინეტიკური და უძრაობის ენერგიებისა, ე.ი.

$$E_i = T_i + m_{0i}c^2, \quad (41.12)$$

მაშინ

$$M_0 = \sum_{i=1}^n m_{0i} + \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^n T_i \quad (41.13)$$

აქედან ჩანს, რომ

$$M_0 \neq \sum_{i=1}^n m_{0i}, \quad (41.14)$$

ე.ი. არაურთიერთქმედი ნაწილაკების შემთხვევაშიც კი სისტემის უძრაობის მასა არ უდრის შემადგენელი ნაწილაკების უძრაობის მასების ჯამს. ამას მით უმეტეს ადგილი არ ექნება, როცა ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედება არსებობს. საინტერესოა აღვნიშნოთ, რომ რელატივისტური მექანიკის თვალსაზრისით, ძალიან ძნელია, და ხშირად, აზრსაც კარგავს, სისტემის შემადგენელი ნაწილაკების უძრაობის, კინეტიკური და ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგიების ცალ-ცალკე გამოყოფა. ამის გაკეთება განსაკუთრებით უაზრო ხდება ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკაში, სადაც კინეტიკური ენერგიის ხარჯზე შესაძლებელია ნაკლები მასის ნაწილაკის ურთიერთქმედებით ნივთიერებასთან წარმოქმნას ნაწილაკი უფრო დიდი მასით. ელემენტარული ნაწილაკების რთული შინაგანი სტრუქტურა, ამავე დროს, გამოორიცხავს მათი გარკვეული ნაწილაკებით შედგენილობის საკითხს. ასე, მაგალითად, ის ფაქტი, რომ ნეიტრონი იშლება სქემით

$$n \rightarrow p + e^- + \nu, \quad (41.15)$$

სადაც n პროტონია, e^- -ელექტრონი, ხოლო ν -ნეიტრინო*, სრულიადაც არ ნიშნავს იმას, რომ ნეიტრონი შედგება პროტონისაგან, რამდენადაც, თავისი მხრით, ატომგულში პროტონიც გარდაიქმნება ნეიტრონად

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu. \quad (41.16)$$

იმის გამო, რომ ე.წ. K მეზონი ორ π მეზონად იშლება, ასევე

* უფრო ზუსტად, უნდა იყოს ანტინეიტრინო ($\bar{\nu}$) (რედ.)

არ ნიშნავს, რომ იგი 2π მეზონისაგან შედგება, თუნდაც იმიტომ, რომ იგი ზოგჯერ 3π მეზონადაც იშლება. ამიტომ ელემენტარული ნაწილაკის შემთხვევაში სრულიად გამორიცხულია მიგნით რალაც ნაწილაკების არსებობა უძრაობის, მოძრაობის და ურთიერთქმედების ენერგიებით. ნაცვლად ამისა, იგი განიხილება როგორც ერთი მთლიანი ნაწილაკი ("ელემენტარული"), რომლის მოძრაობის მასა გამრავლებული c^2 -ზე გვაძლევს მოძრაობის ენერგიას. როცა ეს ნაწილაკი უძრავია, მაშინ მისი ენერგია ტოლი იქნება უძრაობის მასა გამრავლებული c^2 -ზე.

როცა სისტემა შედგება ნაწილაკებისაგან, რომლებიც დამოუკიდებელ სტრუქტურას ინარჩუნებენ, მაგალითად, ატომის შემთხვევაში, მაშინ ამ სისტემის უძრაობის მასის შექმნაში წვლილი შეაქვს ცალკეული ნაწილაკების უძრაობის, მოძრაობის და ურთიერთქმედების ენერგიებს, ამიტომ, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ადგილი არა აქვს მასის შენახვის კანონს. რელატივისტურ მექანიკაში მასა არ არის ადითიური სიდიდე. აღნიშნულის უფრო ნათლად წარმოდგენის მიზნით განვიხილოთ ორი არაურთიერთქმედი მატერიალური ნაწილაკის შემთხვევა. მაშინ ენერგიის მუდმივობის კანონი ასე დაინერება:

$$E = \frac{m_{01}c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_{02}c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \text{const.} \quad (41.17)$$

ეს ტოლობა გამოვიყენოთ სპონტანური(თავისთავადი) დაშლის პროცესისათვის, რომელიც ძალიან ხშირად გვხვდება ბირთვულ და ელემენტარულ ნაწილაკთა ფიზიკაში. ვთქვათ, საწყის მომენტში გვაქვს უძრავი ნაწილაკი M_0 უძრაობის მასით. დავუშვათ, რომ ეს ნაწილაკი იშლება ორ ნაწილაკად m_{01} და m_{02} უძრაობის მასებით. მაშინ, რამდენადაც უძრავ მდგომარეობაში დასაშლელ ნაწილაკს ექნება M_0c^2 ენერგია, იმდენად (41.17) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$M_0 = \frac{m_{01}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_{02}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}, \quad (41.18)$$

საიდანაც, რადგან როგორც პირველი, ისე მეორე ნაწილაკის სიჩქარე c -ზე ნაკლებია, ამიტომ

$$M_0 > m_{01} + m_{02}, \quad (41.19)$$

რაც იმას გვიჩვენებს, რომ რელატივისტურ მექანიკაში მასის

შენახვის კანონს ადგილი აღარა აქვს. მასის მუდმივობის კანონს (41.18)-დან მხოლოდ $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ არარელატივისტურ ზღვარში მივიღებთ.

ბადება კითხვა "სად გაქრა" $M_0 - (m_{01} + m_{02})$ მასა? რელატივისტური მექანიკის თანახმად, მასის არავითარი "გაქრობა" არ ხდება, მასის ეს "დანაკარგი" ენერჯიის სახით არსებობს.. აინშტაინის ფორმულის თანახმად ეს მასა ტოლი იქნება

$$M_0 - (m_{01} + m_{02}) = \frac{\Delta E}{c^2}. \quad (41.20)$$

რელატივისტურ მექანიკაში მასამ უფრო მდიდარი შინაარსი შეიძინა. ნებისმიერი მასა შეგვიძლია დავეუკავშიროთ ენერჯიას და, პირიქით, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ნებისმიერ ენერჯიას აქვს მასა-მისი "ანონა" შეიძლება.

მასისა და ენერჯიის ეკვივალენტობის ძალით, მაგალითად, ატომის ნონა აგზნებულ მდგომარეობაში მეტია, ვიდრე მისი ნონა ნორმალურ მდგომარეობაში.

ამგვარად, რელატივისტური მექანიკის თანახმად, მასის მუდმივობის კანონს ადგილი არა აქვს, მის ნაცვლად გვაქვს ენერჯიის შენახვის კანონი, რომელიც შეიცავს ნანილაკის უძრაობის ენერჯიასაც.

მასისა და ენერჯიის ეკვივალენტობის საკითხს შემდეგ პარაგრაფში უფრო დეტალურად შევისწავლით. ახლა კი აღვნიშნოთ, რომ ზემოთ განხილული სპონტანური დაშლის პროცესის განხორციელება ექსპერიმენტზე შეუძლებელი იქნებოდა, უძრავ სისტემას $E = M_0 c^2$ უძრაობის ენერჯია რომ არ ჰქონოდა, რაც ერთხელ კიდევ ამტკიცებს, რომ მოძრაობის ენერჯიაში $m_0 c^2$ ნევრის გადაგდება არ შეიძლება.

შენახვის კანონები. ახლა განვიხილოთ შენახვის კანონები ნანილაკთა სისტემის შემთხვევაში. ნანილაკთა სისტემის შენახვის კანონებთან დაკავშირებით საჭიროა შემდეგი ამოცანის გადაწყვეტა. ჯერ ერთი, უნდა დავადგინოთ რელატივისტური შენახვის კანონების სახე ერთ რომელიმე ათვლის ინერციულ სისტემაში, ხოლო შემდეგ უნდა გავარკვიოთ, როგორ იქცევიან ეს შენახვადი სიდიდეები სხვა ინერციულ სისტემაზე გადასვლისას. ზოგად შემთხვევაში, იზოლირებულ ურთიერთქმედ ნანილაკთა სისტემის ლაგრანჟიანის ინვარიანტობიდან უსასრულოდ მცირე კანონიკური გარდაქმნების მიმართ შეიძლება გამოვიყვანოთ ისეთივე შენახვის კანონები, რომლებიც გვექონდა ერთი თავისუფალი ნანილა-

კისათვის. მაგრამ ნაწილაკთა სისტემისათვის შენახვის კანონების ფიზიკური არსის გარკვევა გაცილებით რთული ამოცანაა, რამდენადაც ნაწილაკთა შორის ურთიერთქმედების ჩართვა რელატივისტური მექანიკის ერთ-ერთ ბუნდოვან საკითხს წარმოადგენს. ამიტომ ჩვენ შემოვიხაზღვრებით არაურთიერთქმედ ნაწილაკთა სისტემების განხილვით. დავწეროთ ასეთი სისტემის ენერგია და იმპულსი შემდეგი სახით:

$$E = Mc^2 = \sum_{i=1}^n \frac{m_{0i} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}, \quad (41.21)$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \frac{m_{0i} \vec{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}. \quad (41.22)$$

ეს სიდიდეები შეინახება, რადგან ნაწილაკთა შორის ურთიერთქმედება არ არსებობს. ამასთან, E და \vec{P} -ს შენახვა იმის შედეგია, რომ ცალკეული ნაწილაკის ენერგია და იმპულსი ინახება, და, ცხადაა, ამიტომ მათი ჯამებიც შეინახება.

თუ ნაწილაკთა შორის ურთიერთქმედება გვაქვს, მაშინ იზოლირებული სისტემისათვის (41.21) და (41.22) ფორმულებით განსაზღვრული ენერგია და იმპულსი არ შეინახება და, ამავე დროს, სისტემის ენერგია და იმპულსი, ე.ი. E და \vec{P} ოთხვექტორს აღარ ადგენენ. ის, რომ (41.21) ენერგია არ ინახება, გასაგებია, რამდენადაც იგი არ შეიცავს ურთიერთქმედების პოტენციალურ ენერგიას, კინეტიკური ენერგია კი, ურთიერთქმედების შემთხვევაში, არც კლასიკურ მექანიკაში ინახება. რაც შეეხება პოტენციალური ენერგიის შემოტანას რელატივისტურ მექანიკაში, იგი, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ადვილი საქმე არ არის. ის, რომ \vec{P} ვექტორი დროში არ ინახება, აგრეთვე დაკავშირებულია ურთიერთქმედების გავრცელებასთან სასრულო სიჩქარით. ამ წინააღმდეგობით აიხსნება ის უცნაური ფაქტიც, რომ E და \vec{P} , რომლებიც წარმოადგენენ ცალკეული ნაწილაკების ოთხვექტორების კომპონენტების ჯამს, არ ქმნიან ოთხვექტორს. მართლაც, (41.21) და (41.22) ჯამების აღების დროს იგულისხმება, რომ ჯამის ყველა შესაკრები ერთდროულად აიღება მოცემული ათვლის ინერციული სისტემის ერთდროულობის თვალსაზრისით. ახალ ინერციულ სისტემაზე გადასვლისას ცალკეული ნაწილაკის იმპულსი და ენერგია შეგვიძლია ვი-

პოვით ლორენცის გარდაქმნების საშუალებით. მაგრამ ამ სიდიდეების უბრალო შეკრებით ვერ მივიღებთ სისტემის ენერჯიასა და იმპულსს ახალ სისტემაში. საქმე ის არის, რომ ახალ სისტემაში ცალკეული ნაწილაკების იმპულსები და ენერჯიები ერთდროული აღარ იქნება. ამიტომ ახალ ინერციულ სისტემაში და E და \vec{P} განსასაზღვრავად საჭიროა (41.21) და (41.22) ჯამების დაყვანა ერთ დროზე. ასეთი დაყვანა კი, თავისთავად ცხადია, დაარღვევს E და \vec{P} სიდიდეების ოთხვექტორულ თვისებებს.

ამგვარად, რელატივისტურ ნაწილაკთა სისტემისათვის შენახვის კანონების არსის გარკვევა საკმარისად რთულ ამოცანას წარმოადგენს. ამიტომ ამოცანა გაეამარტივოთ და, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, შევისწავლოთ არაურთიერთქმედ ნაწილაკთა სისტემა, ე.ი. სისტემის ყველა ნაწილაკი, როგორც თავისუფალი, ისე განვიხილოთ. ამ შემთხვევაში, შენახვის კანონები შედეგი იქნება ცალკეული ნაწილაკის შესაბამისი სიდიდეების შენახვისა. ასეთი სისტემისათვის გვექნება ათი შენახვის კანონი:

$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n m_{0i} c^2 \gamma_i = const, \quad (41.23)$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_{0i} \vec{v}_i \gamma_i = const, \quad (41.24)$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{l}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i m_{0i} \vec{v}_i \gamma_i] = const, \quad (41.25)$$

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^n \vec{n}_i = \sum_{i=1}^n (t \vec{p}_i - \frac{E_i \vec{r}_i}{c^2}) = const \quad (41.26)$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, არაურთიერთქმედ ნაწილაკთა სისტემისათვის ინახება არა მხოლოდ E , \vec{P} , \vec{L} და \vec{N} , არამედ ჯამის თითოეული ნევრიც. ამავე დროს, თავისთავად ცხადია, რომ ასეთი სისტემისათვის ($\vec{P}, \frac{i}{c} E$) იქნება ოთხვექტორი.

აღვნიშნოთ ერთი მნიშვნელოვანი გარემოებაც. ამ ამოცანის თავისებურებიდან გამომდინარე, საწყის მომენტში ნაწილაკები იმყოფებიან ერთმანეთისაგან უსასრულოდ შორს, ამიტომ მათ შორის ურთიერთქმედება არ არსებობს. სრული ენერჯია და იმპულსი იქნება ცალკეული ნაწილაკების ენერჯიებისა და იმპულ-

სების ჯამი. შემდეგ ნანილაკები ერთმანეთს უახლოვდებიან, მათ შორის იწყება ურთიერთქმედება. იცვლება ცალკეული ნანილაკის ენერგია და იმპულსი, მაგრამ დაჯახების შემდეგ, რადგან ნანილაკები კვლავ უსასრულოდ შორდებიან ერთმანეთს, სრული ენერგიისა და სრული იმპულსის მნიშვნელობები სანყისს დაუბრუნდება. არსებობს შემთხვევა, როცა არაურთიერთქმედ ნანილაკთა სისტემის (30,23-26) შენახვის კანონები შეიძლება გამოვიყენოთ ურთიერთქმედების შემთხვევაშიც. ეს არის დაჯახების ამოცანის შემთხვევა.

მაშასადამე, ნანილაკთა გაფანტვის შემთხვევაში იმპულსისა და ენერგიის შენახვის კანონებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_{0i} \bar{v}_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_{0i} \bar{v}'_i}{\sqrt{1 - \frac{v_i'^2}{c^2}}}, \quad (41.27)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_{0i} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_{0i} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i'^2}{c^2}}}; \quad (41.28)$$

სადაც \bar{v}_i და \bar{v}'_i არის i -ური ნანილაკის სიჩქარე ურთიერთქმედებამდე და ურთიერთქმედების შემდეგ. როცა ეს ნანილაკები ერთმანეთისაგან უსასრულო მანძილებით არიან დაცილებული.

ამ ფორმულებს მარტივი შინაარსი აქვთ. ისინი გვიჩვენებენ, რომ დაჯახების შემდეგ სისტემის საბოლოო ენერგია და იმპულსი ისეთივეა, რაც დაჯახებამდე. რა ხდება დაჯახების პროცესში, ე.ი. როცა ნანილაკთა შორის ურთიერთქმედება ნული არ არის, ჩვენ არ ვიცით, რამდენადაც (41.27) და (41.28) ფორმულები ამ დროს სამართლიანი აღარ არის. ერთი, რაც შეგვიძლია ვამტკიცოთ, არის ის, რომ ურთიერთქმედების დამთავრების შემდეგ სისტემის ენერგიისა და იმპულსის საბოლოო მნიშვნელობანი სანყისს დაუბრუნდება.

არაურთიერთქმედ ნანილაკთა მასების ცენტრი. ახლა გამოვარკვიოთ (41.26) შენახვის კანონის ფიზიკური შინაარსი. კვლავ განვიხილოთ არაურთიერთქმედ ნანილაკთა სისტემა და (41.26)

მოძრაობის ინტეგრალი გავყოთ სისტემის $E = \sum_i E_i$ ენერგიაზე,

რომელიც აგრეთვე ინახება. მივიღებთ

$$\frac{t\bar{P}}{E} - \frac{\sum E_i \bar{r}_i}{c^2 \sum E_i} = const. \quad (41.29)$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$\bar{R}_c = \frac{\sum_i E_i \bar{r}_i}{\sum_i E_i}. \quad (41.30)$$

\bar{R}_c -ს ეწოდება არაურთიერთქმედ ნაწილაკთა სისტემის ინერციის ცენტრის რადიუსვექტორი. ამ აღნიშვნის ძალით (41.29) ასე გადაინერება:

$$\bar{R}_c = \frac{\bar{P}c^2}{E} t + const \quad (41.31)$$

ახ

$$\bar{R}_c = \bar{V}_c t + const, \quad (41.32)$$

სადაც

$$\bar{V}_c = \frac{\bar{P}c^2}{E} = \frac{c^2(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \dots + \bar{p}_n)}{E_1 + E_2 + \dots + E_n} \quad (41.33)$$

არის სისტემის ინერციის ცენტრის სიჩქარე. იგი (41.32) ფორმულის თანახმად, ტოლია $\bar{V}_c = \bar{R}_c$ გამოსახულების. ამგვარად, (41.32) ფორმულის მიხედვით, იზოლირებული არაურთიერთქმედ ნაწილაკთა სისტემის მასების ცენტრი მოძრაობს სწორხაზობრივად და თანაბრად. ინერციის ცენტრის ეს თვისება შეგვიძლია გამოვიყენოთ ლორენცის ინერციული სისტემის სათავის შესარჩევად.

ამგვარად, ლორენცის N მომენტის შენახვა დაიყვანება სისტემის ინერციის ცენტრის ინერციულ მოძრაობაზე.

შენიშნოთ, რომ განსხვავებით კლასიკური მექანიკის შესაბამისი (41.1¹) ფორმულისაგან, ინერციის ცენტრის (41.30) განმარტებაში შედის

ენერგიები და არა მასები. არარელატივისტურ ზღვარში, როცა $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, (41.30) დაიყვანება მასათა ცენტრის (41.1¹) კლასიკურ განმარტებაზე, აღსანიშნავია, რომ კლასიკურ მექანიკაში ინერციის ცენტრის (41.1¹) განმარტება გამოიყენება როგორც არაურთიერთქმედ, ისე ურთიერთქმედ ნაწილაკთა სისტემისათვის, მაშინ, როცა (41.30) ფორმულით შეგვიძლია ვისარგებლოთ მხოლოდ ნაწილაკთა შორის ურთიერთქმედების უგულვებლყოფის შესაძლებლობის შემთხვევაში.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ რელატივისტურ მექანიკაში, ზოგად შემთხვევაში, ურთიერთქმედ ნაწილაკთა სისტემისათვის შეგვიძლია შემოვიტანოთ ინერციის ცენტრის ათვლის სისტემის ან C სისტემის ცნება. C სისტემა განიმარტება პირობით

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = 0, \quad (41.34)$$

ე.ი. ამ სისტემაში ნაწილაკთა სრული რელატივისტური იმპულსი ნულის ტოლია. C სისტემას ფართოდ იყენებენ ორი რელატივისტური ნაწილაკის დაჯახების ამოცანებში. ორი ნაწილაკის შემთხვევაში C სისტემაში გვექნება $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$. იმპულსის შენახვის კანონის ძალით $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$, სადაც \vec{p}'_1 და \vec{p}'_2 არის პირველი და მეორე ნაწილაკის იმპულსები საბოლოო მდგომარეობაში. მაშასადამე, C სისტემაში ნულის ტოლი იქნება $\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$ ვექტორიც.

§ 42. მასისა და ენერჯიის ეკვივალენტობა.* ატომური ენერჯია

უაღრესად დიდი მნიშვნელობის გამო ცალკე გამოყვით მასისა და ენერჯიის ეკვივალენტობის საკითხი, რამდენადაც რელატივისტური მექანიკის ყველა სხვა მიღწევათა შორის მასისა და ენერჯიის ეკვივალენტობის ფორმულას

$$E = mc^2 \quad (42.1)$$

განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება. აინშტაინის ამ ფორმულის მიხედვით ნებისმიერი სახის ენერჯია მასის პროპორციულია. ნაწილაკს მით მეტი მასა აქვს, რაც მეტია მისი ენერჯია. აქედან გამომდინარე, მოძრავი ნაწილაკის მასა მეტია იგივე უძრავი ნაწილაკის მასაზე და სხვა. ამასთან დაკავშირებით ისმება ძირითადი კითხვა. შესაძლებელია თუ არა სხეულების მოძრაობით გამოწვეული მასის ცვლილების დაკვირვება ან შეიძლება თუ არა ენერჯიის

“ანონა”? იმის გამო, რომ $m = \frac{E}{c^2}$ ფორმულაში მნიშვნელში შედის

ძალიან დიდი სიდიდე, ამიტომ მოძრაობის შედეგად მიღებული მასის ცვლილება ძალიან მცირეა. ამიტომ ფიქრობდნენ, რომ (42.1) ფორმულას პრაქტიკული მნიშვნელობა არა აქვს ან მისი შემომწმება ექსპერიმენტულად შორეული მომავლის საქმეა. იმისათვის, რომ ნარმოდგენა ვიქონიოთ რა რიგის სიდიდეებთან გვაქვს საქმე (42.1) ფორმულის დედამიწის პირობებში მოძრავი სხეულების ან ასტრო-

* იხ. შენიშვნა (გვ. 181)

ნომიული პროცესებისათვის გამოყენების შემთხვევაში, განვიხილოთ ორი მაგალითი.

ვთქვათ, გვაქვს კოსმოსური ხომალდი, რომლის ნონაა $m_0 = 1 \text{ ტ} = 10^6 \text{ კგ}$ დაუშვათ, იგი კოსმოსში მიფრინავს $v = 11,2 \text{ კმ/სეკ} = 11,2 \cdot 10^3 \text{ მ/სეკ}$ პარაბოლური სიჩქარით. რადგან $v \ll c$, ამიტომ ხომალდის კინეტიკური ენერგია შეგვიძლია გამოვთვალოთ $T = \frac{m_0 v^2}{2}$ ფორმულით. ამ ენერგიის შესაბამისი მასა კი ტოლი იქნება

$$\Delta m = \frac{T}{c^2} = \frac{m_0}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2$$

თუ შევიტანთ m_0 , v და c -ს მნიშვნელობებს, ვიპოვით

$$\Delta m \approx 7 \cdot 10^{-6} \text{ კგ.}$$

ასეთი სიდიდით მოიმატებს ხომალდის მასა, იმის გამო, რომ იგი

მოძრაობს. მასის ფარდობითი ცვლილება ტოლი იქნება $\frac{\Delta m}{m} \approx 10^{-11}$

ეს კი გაცილებით მცირეა იმ სიზუსტესთან შედარებით, რომლითაც თანამედროვე ტექნიკის საშუალებით შეგვიძლია გავზომოთ ერთი ტონა მასა. კერძოდ, თანამედროვე პირობებში ჩვენ შეგვიძლია შევამჩნიოთ გასაზომი მასის მხოლოდ 10^{-8} ნაწილი.

ახლა, განვიხილოთ მზის მიერ გამოსხივებული ენერგიის მასის საკითხი. როგორც ცნობილია, მზე ყოველ სეკუნდში ასხივებს უდიდეს ენერგიას, ამიტომ ამ ენერგიასთან დაკავშირებული უნდა იყოს დიდი რაოდენობის მასაც. შედეგად ადგილი უნდა ჰქონდეს მზის მასის შემცირებას. ვნახოთ, რამდენად მნიშვნელოვანია მზის მასის შემცირება ენერგიის გამოსხივების შედეგად. ცნობილია, რომ მზის მიერ გამოსხივებული ენერგია, რომელიც მოდის დედამიწის ატმოსფეროს საზღვრის მზის სხივების მართობულ კვადრატულ სანტიმეტრზე ფართობი, ერთი სეკუნდის

განმავლობაში, ტოლია $Q = 120 \frac{\text{კალ}}{\text{სმ}^2 \text{სეკ}} \approx 1,4 \cdot 10^6 \frac{\text{ერგი}}{\text{სმ}^2 \text{სეკ}}$ თუ ამ

ენერგიას გავამრავლებთ იმ სფეროს ზედაპირზე, რომლის R რადიუსი ტოლია დედამიწიდან მზემდე საშუალო მანძილის, მივიღებთ მზის მიერ გამოსხივებულ ენერგიას ერთ სეკუნდში. რადგან $R = 150$ მილიონ კილომეტრს, ამიტომ ეს ენერგია ტოლი იქნება

$$\Delta E = 4\pi R^2 Q = 1,4 \cdot 10^6 \cdot 16,52 (1,510^{13})^2 \approx 4 \cdot 10^{33} \text{ ერგი.}$$

მაშასადამე, მზის მასა ერთ სეკუნდში შემცირდება სიდიდით

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \approx \frac{4 \cdot 10^{33}}{9 \cdot 10^{20}} = 4,4 \cdot 10^6 \text{ ტ.}$$

როგორც ვხედავთ, მზე ყოველ სეკუნდში კარგავს ოთხმილიონ ტონაზე მეტ მასას, მაგრამ ეს მასა უმნიშვნელოა მზის მასასთან შედარებით, რომელიც ტოლია $2 \cdot 10^{27}$ ტონის. საინტერესოა აღვნიშნოთ, რომ მომავალი 100 000 წლის განმავლობაში გამოსხივების შედეგად მზის მიერ დაკარგული მასა იქნება $14 \cdot 10^{14}$ ტონა. ეს ფანტასტიკური მასაა, მაგრამ მისი ფარდობა მზის მასასთან შეადგენს მხოლოდ $7 \cdot 10^{-11}$ სიდიდეს, ამიტომ არც ისე ახლო მომავალში, მზის გამოსხივების შედეგად პლანეტების მოძრაობას არავითარი საფრთხე არ ელის.

ამგვარად, როგორც აღვნიშნეთ, ამ ტიპის პროცესებში აინშტაინის (42.1) ფორმულის ექსპერიმენტული შემოწმება შეუძლებელია. თვითონ აინშტაინმა მიუთითა, რომ (42.1) ფორმულას მნიშვნელობა შეიძლება ატომგულურ პროცესებში. სამი ათეული წლის შემდეგ ეს მოსაზრება ბრწყინვალედ დადასტურდა.

მასის დეფექტი. დაუშვათ, მოცემული გვაქვს უძრავი ბმულ ნაწილაკთა სისტემა. ასეთი შეიძლება იყოს მაგალითად ატომი, რომელიც შედგება ატომგულისა და ელექტრონების გარსისაგან; ატომის გული, რომელიც შედგება პროტონებისა და ნეიტრონებისაგან და სხვ. ვთქვათ, ეს სისტემა სპონტანურად იშლება შემადგენელ ნაწილაკებად. დაშლის პროდუქტების უძრაობის მასები აღვნიშნოთ $m_{0i} (i=1, 2, \dots, n)$. დავენროთ ენერგიისა და იმპულსის მუდმივობის კანონები. სანყის მომენტში უძრავი სისტემის ენერგია იქნება $M_0 c^2$, ამიტომ გვექნება

$$M_0 c^2 = \sum_{i=1}^n \sqrt{m_{0i}^2 c^4 + \vec{p}_i^2 c^2}, \quad (42.2)$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = 0. \quad (42.3)$$

რადგან $\vec{P} = 0$ არ მოითხოვს ყველა ნაწილაკის იმპულსის ნულთან ტოლობას, ამიტომ $M_0 c^2 \geq \sum_{i=1}^n m_{0i} c^2$; მაშასადამე,

$$M_0 \geq \sum_{i=1}^n m_{0i}. \quad (42.4)$$

ამგვარად, იმისათვის, რომ შესაძლებელი იყოს სისტემის სპონტანური დაშლა, სისტემის მასა მეტი უნდა იყოს შემადგენელ ნაწილაკთა მასების ჯამზე.

ახლა, ვთქვათ, გვაქვს სისტემა, რომელიც თავისთავად არ იშლება. ასეთი სისტემა შეიძლება დაეშალოს ნაწილაკებით დაბომბვის შედეგად. ვთქვათ, სისტემას ეცემა ნაწილაკი, რომლის ენერგია სანყის მომენტში ტოლია E_i . ამ ნაწილაკის ენერგია საბოლოო მდგომარეობაში იყოს E_f , მაშინ ენერგიის შენახვის კანონი ასე დაინერება:

$$E_i + M_0c^2 = E_f + n \sum_{j=1}^n \sqrt{m_{0j}^2c^4 + \vec{p}_j^2c^2}, \quad (42.5)$$

სადაც M_0c^2 არის სისტემის უძრაობის ენერგია სანყის მომენტში. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა დაშლის პროდუქტების საბოლოო მდგომარეობაში აქვთ ნულოვანი იმპულსი $\vec{p}_j = 0$, მაშინ (42.5)-დან მივიღებთ

$$E_i + M_0c^2 = E_f + c^2 \sum_{j=1}^n m_{0j}, \quad (42.6)$$

საიდანაც

$$E_i - E_f = c^2 \sum_{j=1}^n m_{0j} - M_0c^2. \quad (42.7)$$

$E_i - E_f$ არის ის ენერგია, რომელიც საჭიროა მდგრადი სისტემის დასაშლელად, ამიტომ ცხადია, $E_i - E_f \geq 0$. მაშასადამე, როცა სისტემა მდგრადია, (42.7)-დან გვექნება

$$M_0 < \sum_{j=1}^n m_{0j}. \quad (42.8)$$

ე.ი. მდგრადი სისტემის მასა ნაკლები უნდა იყოს შემადგენელი ნაწილაკების მასათა ჯამზე, რაც იმას გვიჩვენებს, რომ ნაწილაკთა უძრაობის მასები არ არის ადითიური სიდიდე.

ამგვარად, ჩვენ მივიღეთ ასეთი შედეგი: როცა $M_0 > \sum m_{0j}$, მაშინ სისტემა შეიძლება სპონტანურად დაიშალოს, ხოლო როცა $M_0 < \sum m_{0j}$, მაშინ სისტემა მდგრადია, მის დასაშლელად საჭიროა ენერგიის დახარჯვა. სიდიდეს

$$\Delta M = M_0 - \sum_j m_{0j} \quad (42.9)$$

მასის დეფექტს უწოდებენ. ზემოთქმულის თანახმად, როცა მასის დეფექტი $\Delta M > 0$, ადგილი ექნება სისტემის სპონტანურ დაშლას, ხოლო, თუ $\Delta M < 0$, მაშინ სისტემა მდგრადია. ე.ი. მდგრადი სისტემის შემთხვევაში სისტემის მასა ნაკლებია შემადგენელი ნაწილაკების უძრაობის მასათა ჯამზე. იბადება კითხვა: სად იკარგება ეს მასა? აინშტაინის მასისა და ენერჯიის ეკვივალენტობის კანონის შედეგად, მასის დეფექტი გამრავლებული c^2 -ზე, გარდაიქმნა ენერჯიად. მაგალითად, ატომგულის შემთხვევაში ეს იქნება ის ბმის ენერჯია, რომელიც ნეიტრონებსა და პროტონებს ერთად აკავშირებს ატომგულის მდგრადი სისტემის სახით. ამგვარად,

$$\varepsilon = c^2 \Delta M \quad (42.10)$$

ნარმოადგენს ბმის ენერჯიას. $\frac{\varepsilon}{c^2}$ არის სწორედ ის მასა (მასის დეფექტი), რომელიც ატომგულში ბმის ენერჯიად გარდაიქმნა. ამგვარად, ბმის ენერჯია არის ის მინიმალური ენერჯია, რომელიც უნდა დავხარჯოთ, რომ მოცემული სისტემა დავშალოთ შემადგენელ ნაწილაკებად. ამიტომ თუ ატომგულს დავშლით შემადგენელ პროტონებად და ნეიტრონებად, მაშინ ბმის ენერჯია გამოთავისუფლდება დაშლის პროდუქტების კინეტიკური ენერჯიის სახით. ატომგულიდან ენერჯიის გამოსათავისუფლებლად აუცილებელი არ არის მისი სრული დაშლა შემადგენელ ნაწილაკებად. აინშტაინის ფორმულის ძალით, ენერჯია შეიძლება გამოთავისუფლდეს ატომგულის სხვადასხვა ქვესისტემებად დაშლის დროსაც. მაგალითად, ე.წ. ატომური ენერჯია პირველად მიღებული იყო ურანის გულის დაახლოებით ორ ტოლ ნაწილად გახლეჩის შედეგად.

იმის გამო, რომ ატომური ექსპერიმენტის განვითარებას დიდი დრო დასჭირდა, აინშტაინის მასისა და ენერჯიის ეკვივალენტობის ფორმულის შემონიშნებამ სამ ათეულზე მეტი წელი დაიგვიანა, თუმცა ეს ფორმულა ისედაც არავისში ეჭვს აღარ იწვევდა.

ენერჯიის ერთეულები. სანამ $E = mc^2$ ფორმულის ექსპერიმენტით დასაბუთების საკითხს შევეხებოდეთ, მანამ აუცილებელია ენერჯიის ერთეულების შემოღება.

ატომის ფიზიკაში ერგი ძალიან დიდი სიდიდეა (გავიხსენოთ, რომ იგი ძალიან მცირეა კლასიკურ მექანიკაში!), ამიტომ შემოაქვთ (ელექტრონ-ვოლტი), რომელიც ასეა დაკავშირებული ერგთან

$$1\text{eV} = 1,6010^{-12}\text{ერგი} = 1,6010^{-19}\text{ჯ}; \quad (42.11)$$

1 ელექტრონ-ვოლტი არის ის ენერგია, რომელსაც შეიძენს ელექტრონი ამაჩქარებელი ველის 1 ვ ტოლი პოტენციალთა სხვაობით გარბენის დროს.

შემოჰყავთ წარმოებული ერთეულებიც:

$$\begin{aligned} 1keV &= 10^3 eV, \\ 1MeV &= 10^6 eV, \\ 1GeV &= 10^9 eV = 10^3 MeV. \end{aligned} \quad (42.12)$$

ატომგულის ფიზიკაში მასის ძირითად ერთეულად იხილავენ ე.წ. მასის ატომურ ერთეულს (მ.ა.ე.). მასის ატომური ერთეული ტოლია ჟანგბადის ნეიტრალური ატომის უძრაობის მასის $m_0(^{16}O)$ ერთი მეთექვსმეტედის, ე.ი.¹

$$\text{მ.ა.ე.} = \frac{m_0(^{16}O)}{16} = 1,6610^{-27} \text{კგ}, \quad (42.13)$$

რომელიც ძალიან ახლოსაა პროტონის მასასთან $m_p = 1,6710^{-27}$ კგ. რელატივისტური მექანიკის თანახმად, მასის ატომური ერთეული შეიძლება გამოვხატოთ ენერგეტიკულ ერთეულებში. ამისათვის, ვთქვათ, m_0 არის სწორედ მ. ა. ე. , მაშინ აინშტაინის თანახმად,

$$E = m_0 c^2 = 1,6610^{-27} \text{კგ} (3 \cdot 10^8)^2 \frac{\text{მ}^2}{\text{ს}^2} = 1,4910^{-10} \text{ჯ}. \quad (42.14)$$

ეს არის ის ენერგია, რომელიც შეესაბამება მასის ატომურ ერთეულს. ატომგულის ფიზიკისათვის უფრო საინტერესოა მ.ა. ე. გამოვხატოთ eV -ში ან MeV -ში გვექნება

$$1 \text{მ.ა.ე.} = 1,4910^{-10} \text{ჯ} \frac{1eV}{1,6010^{-19} \text{ჯ}} = 9,3110^8 eV = 931 MeV. \quad (42.15)$$

მაშასადამე, სასარგებლოა დავიმახსოვროთ, რომ $1 \text{მ.ა.ე.} = 931 MeV$. ამგვარად , მ.ა.ე. შეიძლება გამოვხატოთ სხვადასხვა სახით

$$\text{მ.ა.ე.} = \frac{m_0(^{16}O)}{16} = 1,6610^{-27} \text{კგ} = 1,4910^{-10} \text{ჯ} = 931 MeV \quad (42.16)$$

ამ ერთეულებში ნეიტრონის მასა ტოლია

¹ 1961 წელს შემოღებულ იქნა ახალი მ.ა.ე. იგი წარმოადგენს ნეიტრალური c^{12} ნახშირბადის ატომის $1/12$ ნაწილს. ეს ერთეული ძალიან მცირედ განსხვავდება (42.13)-საგან, მაგრამ შემოტანილი იყო იმის გამო, რომ c^{12} -ის ნონა ექსპერიმენტულად უფრო ზუსტად იზომება.

$$m_n = 1,008982 \text{ მ. ა. ე. } = 939,5 \text{ MeV.} \quad (42.17)$$

პროტონის მასა კი ტოლი იქნება

$$m_p = 1,00759 \text{ მ. ა. ე. } = 938,2 \text{ MeV} \quad (42.18)$$

ელექტრონისა და პოზიტრონის მასები ენერგეტიკულ ერთეულებში გამოიხატება სიდიდით

$$m_e = 0,511 \text{ MeV.} \quad (42.19)$$

ჩვენ თავის დროზე აღვნიშნეთ, რომ მოძრაობა რელატივისტურია, როცა ნაწილაკის კინეტიკური ენერგია უძრავობის ენერგიის რიგისაა. ამის გამო, ელექტრონები რელატივისტური იქნებიან მაშინაც კი, როცა მათი კინეტიკური ენერგია არც ისე დიდია. რაც შეეხება, მაგალითად, პროტონებს, მათი უძრავობის ენერგია 938,2 MeV-ის ტოლია, ამიტომ 10 MeV კინეტიკური ენერგიების შემთხვევაშიაც კი ისინი კარგი მიახლოებით არარელატივისტურებად შეგვიძლია ჩავთვალოთ. ამიტომაცაა, რომ დაბალი ენერგიების ატომგულის ფიზიკაში ნუკლონები განიხილება როგორც არარელატივისტური ნაწილაკები, თუმცა მათ მიერ წარმოქმნილი ბირთვული ენერგია წმინდა რელატივისტური შედეგია.

ქიმიური რეაქციები ხორციელდება ატომის გარსის ელექტრონების ურთიერთქმედებით, ამიტომ ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად, ქიმიურ რეაქციებში გამოყოფილი სითბო იმდენად მცირეა, რომ მისი გამოხატვა გრამებში იძლევა მნიშვნელობას, რომლის გაზომვა ექსპერიმენტზე შეუძლებელია.

ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ სპეციალურ შემთხვევას მდგრადი სისტემისა, როგორც არის ატომის გული და ვაჩვენებთ, რომ ატომგულის ბმის ენერგია მილიონჯერ მეტია ატომის ბმის ენერგიაზე, რაც აინშტაინის მასისა და ენერგიის ეკვივალენტობის დამოკიდებულების პრაქტიკული შემონმების საშუალებას იძლევა.

ატომგულის ბმის ენერგია. თანამედროვე წარმოდგენით ატომგული შედგება Z პროტონისა და $A-Z$ ნეიტრონისაგან, სადაც A ე.წ. მასური რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს ატომურ ნონას დამრგვალებულს უახლოეს მთელ რიცხვამდე, განსაზღვრავს პროტონებისა და ნეიტრონების საერთო რიცხვს გულში. თუ ატომგულის მასას აღვნიშნავთ $m(A, Z)$ -ით, მაშინ მასის დეფექტისათვის გვექნება ფორმულა

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m(A, Z). \quad (42.20)$$

როცა მასები იზომება ატომურ ერთეულებში, მაშინ ბმის ენერგია ტოლი იქნება

$$\epsilon = \Delta m \cdot 931 \text{ MeV}. \quad (42.21)$$

განვიხილოთ მაგალითი. ვიპოვოთ დეიტრონის ბმის ენერჯია. დეიტრონი შედგება ერთი ნეიტრონისა და ერთი პროტონისაგან. მისი მასა ატომურ ერთეულში ტოლია $m_{\alpha} = 2,014742 \text{ მ.ა.ე.}$, ამიტომ მასის დეფექტი უდრის $\Delta M = 0,0028915$, მაშასადამე, დეიტრონის ბმის ენერჯია, თანახმად (42.21) ფორმულისა, ტოლი იქნება

$$\epsilon_d = 931 \cdot 0,002891 \text{ MeV} = 2,23 \text{ MeV}.$$

ამგვარად, დეიტრონის გახლეჩისას ნეიტრონად და პროტონად გამოთავისუფლდება $2,23 \text{ MeV}$ ენერჯია.

როგორც ვაჩვენეთ, იმისათვის, რომ ატომის გული იყოს მდგრადი, აუცილებელია, რომ მისი მასა (ყოს ნაკლები, ვიდრე მასათა ჯამი იმ პროდუქტებისა, რომლებდაც ალებულ გულს შეუძლია დაშლა. ამასთან, სიმდგრადე სხვადასხვა სახის დაშლის მიმართ სხვადასხვა იქნება. განვიხილოთ, მაგალითად, ${}^6\text{Li}$ ატომის გული, რომელიც შედგება $Z = 3$ პროტონისა და $A - Z = 3$ ნეიტრონისაგან. ადვილია შემონებება, რომ ბმის ენერჯია ${}^2\text{He}^4$ და ${}^1\text{H}^2$ გულებად დაშლის მიმართ არის $1,35 \text{ MeV}$, იმ დროს, როცა იგივე გულის გაყოფას ${}^3\text{He}^3$ და ${}^3\text{H}^3$ გულებად დასჭირდება $15,69 \text{ MeV}$ ენერჯია. რაც შეეხება ${}^6\text{Li}$ ატომგულის ბმის ენერჯიას სამ ნეიტრონად და სამ პროტონად დაშლის მიმართ, იგი $31,25 \text{ MeV}$ -ის ტოლია და პირიქით, ყველაზე მეტი ენერჯია გამოიყოფა, როცა ${}^6\text{Li}$ გული იქმნება სამი თავისუფალი ნეიტრონისა და სამი პროტონისაგან; შედარებით ნაკლები, როცა იგი შეიქმნება ${}^3\text{He}^3$ და ${}^3\text{H}^3$ გულების შეერთებით და კიდევ უფრო ნაკლები, როცა ${}^6\text{Li}$ იქმნება ${}^4\text{He}^4$ და ${}^2\text{H}^2$ გულების სინთეზით.

ამგვარად, ჩვენ ვხედავთ, რომ ატომგულებში მოთავსებულია ენერჯიის დიდი წყარო. მართალია, ცალკეულ გულში, მაკროსკოპული მასშტაბით, ეს ენერჯია დიდი არ არის, მაგრამ თუ გავითვალისწინებთ, რომ ატომგულების რიცხვი ერთ გრამ ნივთიერებაში ძალიან დიდი რიცხვია (დაახლოებით 10^{23}), მაშინ ნათელი გახდება, რომ ატომგულური ენერჯია ფანტასტიკურ მასშტაბებს ღებულობს. ავილოთ, მაგალითად, ნებისმიერი ნივთიერების 1 გ მასა და გამოვთვალოთ მისი შესაბამისი ენერჯია. აინშტაინის ფორმულის მიხედვით იგი ტოლი იქნება

$$E = 1\text{g} \cdot (3 \cdot 10^{10})^2 \frac{\text{სმ}^2}{\text{სეკ}^2} = 9 \cdot 10^{20} \text{ ერჯი}. \quad (42.22)$$

ეს ენერჯია ტოლია 25 მილიარდი კილოვატ-საათის, მაშინ როცა

იგივე ერთი გ ნახშირის დანვით მივიღებდით 8,5 კილოვატ-საათ ენერჯიას.

1939 წელს ჰანმა და შტრასმანმა გერმანიაში აღმოაჩინეს ნეიტრონების დაბომბვის შედეგად ურანის ატომგულის დაახლოებით ორ ტოლ ნაწილად გაყოფის მოვლენა. ამავე დროს, აღმოჩნდა, რომ ურანის ატომგულის გახლეჩისას გამოიყოფა ენერჯია, რომელიც დაახლოებით 200 MeV-ის ტოლია. გამოყოფილი ენერჯიის მნიშვნელობა ბრწყინვალედ ეთანხმება მასისა და ენერჯიის ეკვივალენტობის აინშტაინის ფორმულას. აღსანიშნავია, რომ ურანის გახლეჩის შედეგად გამოყოფილი ენერჯია წარმოადგენს მხოლოდ 0,1 პროცენტს იმ ენერჯიისა, რომელიც თავმოყრილია ურანის გულში, თუკი მას დავშლიდით ნეიტრონებად და პროტონებად, მაგრამ ამ 0,1 პროცენტმაც კი გამოიწვია ფანტასტიკური შედეგები, როცა იგი გამოყენებულ იქნა ატომის ბომბში, როგორც ამაფეთქებელი მასალა. სითბური ენერჯია, რომელიც ატომგულურ რეაქტორში გამოიყოფა, იმდენად დიდია, რომ შესაბამისი მასა ხშირად რამდენიმე გ აღწევს.

ენერჯიას, რომელიც გამოიყოფა ატომგულის გახლეჩისას, ატომური ენერჯია უწოდეს, თუმცა მას არაფერი საერთო არა აქვს ატომთან - იგი არსებითად ატომგულური ენერჯიაა. ის, რომ დღეს კაცობრიობა ფართოდ იყენებს ატომური ელექტროსადგურების მიერ გამოშუშავებულ ელექტროენერჯიას, აინშტაინის ფორმულის სამართლიანობის ბრწყინვალე დასაბუთებას წარმოადგენს.

ბოლოს გავარკვიოთ ერთი მნიშვნელოვანი საკითხი. მასისა და ენერჯიის ეკვივალენტობა ნიშნავს თუ არა, რომ ენერჯია იგივეა, რაც მასა? უძრავობის მასა ინვარიანტული სიდიდეა, ამიტომ იგი დამოკიდებული არ არის ინერციული სისტემის არჩევაზე, მაშინ, როცა ენერჯიის სიდიდე დამოკიდებულია იმაზე, თუ ნაწილაკი რომელ ინერციულ სისტემაში განიხილება. მასა განიმარტება იმპულსის ოთხვექტორის აბსოლუტური მნიშვნელობით

$$m_0^2 = -\frac{P_i^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right), \quad (42.23)$$

მაშინ, როცა ენერჯია წარმოადგენს ამ ოთხვექტორის მხოლოდ დროით კომპონენტს $E = \frac{i}{c} P_4$. აქედან კი ჩანს, რომ მხოლოდ ერთ კერძო შემთხვევაში ემთხვევა ნაწილაკის უძრავობის მასას, სახელდობრ, როცა P_i ოთხვექტორს ნულისაგან განსხვავებული აქვს მხოლოდ დროითი კომპონენტი. ეს კი მაშინ მოხდება, როცა P_i

ვექტორის სივრცითი კომპონენტები ნულის ტოლია, ე.ი. როცა ნანილაკი უძრავია.

§ 43. წყვილთა გაჩენა და ანიჰილაცია

ენერჯის ერთი ფორმიდან მეორეში გარდაქმნის ერთ-ერთი ბრწყინვალე მაგალითს წარმოადგენს წყვილის გაჩენისა და მოსპობის (ანიჰილაციის) მოვლენა. ამასთან, წყვილის დაბადება წარმოადგენს ელექტრონისა და პოზიტრონის (დადებითი ელექტრონის) წარმოქმნას სინათლის γ -კვანტის მიერ მისი გაქრობის შედეგად; ხოლო ანიჰილაცია ეწოდება ამ პროცესის შებრუნებულ მოვლენას, როცა ელექტრონი და პოზიტრონი ერთმანეთთან დაჯახებისას ისპობა, რის შედეგადაც გამოისხივდება სინათლის γ -კვანტი. ეს მეტად საინტერესო მოვლენაა, რომელიც რელატივისტური მექანიკის ერთ-ერთ ბრწყინვალე დადასტურებად გამოდგება (ნანინასწარმეტყველელი იყო დირაკის მიერ 1928 წელს და მხოლოდ 1932 წელს იქნა აღმოჩენილი). საქმე ის არის, რომ მანამდე ფიზიკოსებმა არ იცოდნენ ბუნებაში დადებითი ელექტრონის -პოზიტრონის არსებობის შესახებ, რომელიც წარმოადგენს ნანილაკს ელექტრონის ტოლი მასით, ოღონდ დადებითი ნიშნის მუხტით, მას e^+ -ით აღნიშნავენ.

წყვილის გაჩენისა და ანიჰილაციის მოვლენა ექსპერიმენტზე საკმარისად ადვილად დაიმზირება ვილსონის კამერაში. ვილსონის კამერაში შესაძლებელია ეფექტების ფოტოგრაფირებაც. γ -კვანტი, რადგან მას მუხტი არა აქვს, ფოტოფირზე არ ჩანს, მაგრამ ძალიან კარგად ჩანს ის ნერტილი, სადაც იგი მოისპო. ამ ნერტილიდან ერთმანეთთან გარკვეული კუთხით მიმართული ორი კვალი გამოდის, რომელთაგან ერთი ეკუთვნის ელექტრონს, მეორე კი პოზიტრონს. ის, რომ ამ კვალის შემქმნელ ნანილაკებს სხვადასხვა ნიშნის მუხტი აქვთ, შეგვიძლია ადვილად შევამოწმოთ, თუ ვილსონის კამერას მოვათავსებთ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში. შედეგად, განსხვავებული მუხტების გამო, ელექტრონი და პოზიტრონი სხვადასხვა მიმართულებით გადაიხრება.

ჯერ განვიხილოთ წყვილის გაჩენა. ეს პროცესი მიმდინარეობს შემდეგი სქემით:



უპირველეს ყოვლისა, ამ პროცესში დაცულია მუხტის მუდმივობის კანონი-საჯამო მუხტი, როგორც სანყის, ისე საბოლოო მდგომარეობაში ნულის ტოლია. ელექტრონისა და პოზიტრონის

უძრაობის ენერგიები $m_e c^2$ -ის ტოლია, ამიტომ (43.1) პროცესში ენერგიის შენახვის კანონი მოითხოვს, რომ γ -კვანტის ენერგია სულ მცირე $2 m_e c^2$ -ის ტოლი იყოს. რადგან $m_e c^2 = 0,51 \text{ Mev}$, ამიტომ γ -კვანტს არ შეუძლია წყვილის გაჩენა, თუ მისი ენერგია მეტი ან ტოლი არ არის $1,02 \text{ Mev}$ -ზე. თუ γ კვანტს უფრო მეტი ენერგია ექნება (ვიდრე $1,02 \text{ Mev}$), მაშინ ნაჭარბი ენერგია დაიხარჯება ელექტრონისა და პოზიტრონის მოძრაობის ენერგიის წარმოქმნაზე, ე.ი. ამ დროს წარმოიქმნება მოძრავი წყვილი. შევამოწმოთ წყვილის გაჩენის პროცესში დაცულია თუ არა იმპულსის მუდმივობის კანონი. ადვილია იმის ჩვენება, რომ (43,1) რეაქცია ამ სახით იმპულსის მუდმივობის კანონის მიხედვით აკრძალულია. მართლაც, (43.1) რეაქცია განვიხილოთ C სისტემაში, სადაც ელექტრონისა და პოზიტრონის სრული იმპულსი $\vec{p}_e + \vec{p}_{e^+} = 0$. იმპულსის შენახვის კანონი მოითხოვს, რომ ამავე სისტემაში ნულის ტოლი

იყოს კვანტის $p_\gamma = \frac{k\omega}{c}$ საწყისი იმპულსი, რომელიც ნულისაგან

განსხვავებულია. ეს კი დაუშვებელია, რადგან ფოტონის იმპულსი არც ერთ სისტემაში არ შეიძლება ნულის ტოლი გახდეს, მაგრამ, თუ (43.1) პროცესი აკრძალულია ერთ რომელიმე სისტემაში, იგი აკრძალული იქნება სხვა ნებისმიერშიც. ამგვარად, იმპულსის შენახვის კანონი კრძალავს (43.1) პროცესს თავისუფალ გარემოში. ამის გამო, წყვილი შეიძლება წარმოიქმნას მხოლოდ მესამე სხეულის არსებობის შემთხვევაში, რომელმაც უნდა შეიძინოს ფოტონის იმპულსი. ამ მესამე სხეულის როლს, როგორც წესი, ასრულებს ატომის გული, რომლის ახლობლობაშიაც ხდება (43.1) რეაქცია. ამგვარად, წყვილის გაჩენის დროს იმპულსის შენახვის კანონს ასეთი სახე ექნება: γ

$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}_a + \vec{p}_e + \vec{p}_{e^+}, \quad (43.2)$$

სადაც \vec{p}_a არის გულის იმპულსი საბოლოო მდგომარეობაში (43.2). შენახვის კანონში ვიგულისხმეთ, რომ გულს საწყის მდგომარეობაში იმპულსი არა აქვს, რაც, რა თქმა უნდა, აუცილებელი არ არის. ახლა უკვე წყვილის წარმოქმნის პროცესი აკრძალული აღარ იქნება, რამდენადაც ატომის გულს შეუძლია ფოტონის იმპულსის შექმნა.

როგორც ვხედავთ, წყვილის წარმოქმნის დროს ელექტრომაგნიტური ველის ენერგია იხარჯება, ერთი მხრივ, ელექტრონისა

და პოზიტრონის უძრაობის ენერგიების შესაქმნელად, ხოლო, მეორე მხრივ, მათთვის კინეტიკური ენერგიების მისანიჭებლად.

ახლა განვიხილოთ შებრუნებული ეფექტი. ელექტრონი შეიძლება დაეჯახოს პოზიტრონს და ორივე მოისპოს — მოხდეს ანიჰილაცია. შედეგად ენერგია გამოსხივდება γ კვანტების სახით. ამასთან, ენერგიის შენახვის კანონის თანახმად, γ კვანტების ჯამური ენერგია მინიმუმ $2m_0c^2$ -ის ტოლი იქნება, ე.ი. წყვილის ანიჰილაციის დროს მიიღება სინათლის კვანტები, რომელთა ჯამური ენერგია სულ მცირე $1,02 \text{ MeV}$ -ის ტოლი იქნება. ამგვარად, ანიჰილაციის დროს ისპობა როგორც ელექტრონი, ისე პოზიტრონი და მათ ნაცვლად ჩნდება ელექტრომაგნიტური ველი. წყვილთა ანიჰილაციის მოვლენა ნათლად გვიჩვენებს, რომ ნანილაკის უძრაობის ენერგიას ღრმა ფიზიკური შინაარსი აქვს და მისი გადაგდება არ შეიძლება. მართლაც, ელექტრონსა და პოზიტრონს უძრაობის მასები რომ არ ჰქონდეთ, მაშინ მათი ანიჰილაციის შედეგად შესაძლებელი იქნებოდა ისეთი კვანტების წარმოქმნა, რომელთა $h\nu$ ენერგია ნაკლები უნდა ყოფილიყო $1,02 \text{ MeV}$ -ზე, რასაც ექსპერიმენტზე ადგილი არა აქვს.

წყვილთა ანიჰილაციის შესწავლის დროს აღმოჩენილ იქნა შემდეგი საინტერესო მოვლენა. ელექტრონისა და პოზიტრონის დაჯახების დროს ზოგჯერ მათი მოსპობა უეცრად კი არ ხდება, არამედ ისინი ჯერ ქმნიან წყალბადის ატომის მსგავს ბმულ სისტემას, რომელშიაც ელექტრონი და პოზიტრონი ტოლი მასების გამო მოძრაობენ საერთო სიმძიმის ცენტრის ირგვლივ. ამ სისტემას პოზიტრონიუმს უწოდებენ. მართალია, პოზიტრონიუმის სიცოცხლის ხანგრძლივობა ძალიან მცირეა¹, მაგრამ ეს დრო სრულიად საკმარისი აღმოჩნდა პოზიტრონიუმის მთელი რიგი მნიშვნელოვანი მახასიათებლების დასადგენად.

აღვნიშნოთ, რომ წყვილის გაჩენა და ანიჰილაცია დამახასიათებელია არა მხოლოდ ელექტრონებისა და პოზიტრონებისათვის. წყვილების დაბადება და გაქრობა შეიძლება მოხდეს მძიმე ნანილაკთა ურთიერთქმედების შემთხვევაშიც. ცხადია, ამისათვის დაგეჭირდება ამ ნანილაკთა ურთიერთქმედება დიდ ენერგიაზე.

¹ ელექტრონ-პოზიტრონის სისტემის საჯამო სპინის ორი მნიშვნელობის ($S=0$ და $S=1$) გამო წარმოიქმნება ორი ტიპის პოზიტრონიუმი: ორთოპოზიტრონიუმი ($S=1$) და პარაპოზიტრონიუმი ($S=0$): ამ ორი ტიპის პოზიტრონიუმის სიცოცხლის ხანგრძლივობანი ძლიერ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. პარაპოზიტრონიუმის სიცოცხლის ხანგრძლივობა რიგით 10^{10} სეკ-ია, მაშინ, როცა ორთოპოზიტრონიუმის სიცოცხლის ხანგრძლივობა დაახლოებით 1000 -ჯერ მეტია.

მაგალითად, დიდი ენერგიის პროტონმა მეორე პროტონთან დაჯახებისას შეიძლება წარმოქმნას პროტონ-ანტიპროტონის წყვილი. ამასთან, ანტიპროტონი უარყოფითი ელემენტარული მუხტის მქონე ნაწილაკია, რომლის უძრაობის მასა პროტონისას ემთხვევა. ურთიერთმოქმედ ნაწილაკებს, საწყის მომენტში, ისეთი ენერგიები მაინც უნდა ჰქონდეთ, რომელიც საკმარისი იქნება დაბადებული ნაწილაკების უძრაობის ენერგიების შესაქმნელად (თუ საწყისი ენერგიები უფრო მეტი იქნება, მაშინ იგი დაიხარჯება საბოლოო მდგომარეობაში მყოფი ნაწილაკების, მათ შორის, დაბადებულების კინეტიკური ენერგიის მისანიჭებლად.) ამ ენერგიის გამოსათვლელად, ცხადია, უნდა გამოვიყენოთ რელატივისტური კინემატიკა. როცა საქმე გვაქვს γ კვანტის მიერ წყვილის დაბადებასთან, აღნიშნული ენერგიის გამოთვლა ადვილია, რამდენადაც γ კვანტი პროცესში ისპობა და მისი ენერგია მთლიანად წყვილის გაჩენასა და დაბადებულ ნაწილაკთა კინეტიკურ ენერგიას ხმარდება. ზემოთ აღნიშნული პროტონ-ანტიპროტონის წარმოქმნის პროცესში კი საწყის მომენტში ურთიერთქმედი პროტონები არ ისპობიან და ისინი საბოლოო მდგომარეობაშიც არსებობენ, ე.ი. წყვილთა გაჩენაზე იხარჯება საწყისი პროტონების კინეტიკური ენერგიების მხოლოდ ნაწილი. ამიტომ ძალიან დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს საწყისი ნაწილაკების იმ მინიმალური კინეტიკური ენერგიების გამოთვლას, რომლის ტოლი ან მეტი ენერგიებისათვის შესაძლებელია ამ თუ იმ წყვილის დაბადება. ამ ენერგიას წყვილის დაბადების ზღურბლს უწოდებენ.

კონკრეტულობის მიზნით, კვლავ განვიხილოთ პროტონების შემთხვევა. ვთქვათ, გარკვეული ენერგიის პროტონი ეჯახება უძრავ მდგომარეობაში მყოფ მეორე პროტონს. დავინყოთ არარელატივისტური ენერგიებით, ე.ი. როცა $M_p c^2 \gg T_L$, სადაც M_p პროტონის მასაა, ხოლო T_L - კინეტიკური ენერგია L სისტემაში. რადგან საქმე გვაქვს ტოლი მასების ნაწილაკების ურთიერთქმედებასთან,

ამიტომ T_c კინეტიკური ენერგია C სისტემაში იქნება, $\frac{1}{2}T_L$ -ის ტოლი. მაშასადამე, $\frac{T_c}{T_L} = \frac{1}{2}$. რადგან შეუძლებელია ნაწილაკი ერთი

ათვლის სიტემის თვალსაზრისით შეიქმნას, მეორესი კი არა, ამიტომ ეს იმას ნიშნავს, რომ ახალი ნაწილაკის შესაქმნელად შეიძლება გამოყენებულ იქნას მხოლოდ T_L ენერგიის ნახევარი. ასე, მაგალითად, თუ ლაბორატორიულ სისტემაში $T_L = 100 \text{ MeV}$, მაშინ

ახალი ნაწილაკის შექმნაზე შეიძლება გამოვიყენოთ მხოლოდ 50 MeV ენერგია.

ახლა განვიხილოთ რელატივისტური შემთხვევა. ამ შემთხვევაში ვაჩვენებთ, რომ ნაწილაკის შექმნისათვის საწყისი პროტონის კიდევ უფრო ნაკლები ენერგია შეიძლება გამოვიყენოთ. დავწეროთ ენერგიის შენახვის კანონი. გამოვიყენოთ ის ფაქტი, რომ $E^2 - p^2c^2 = M_0^2c^4 = inu$, ამიტომ ორი პროტონისათვის გვექნება შემდეგი ტოლობა:

$$(E_{1L} + E_{2L})^2 - (\vec{p}_{1L} + \vec{p}_{2L})^2 c^2 = (E_{1c} + E_{2c})^2 - (\vec{p}_{1c} + \vec{p}_{2c})^2 c^2. \quad (43.3)$$

ამ ფორმულაში იმის გამო, რომ მეორე პროტონი უძრავია $E_{2L} = M_p c^2$ და $\vec{p}_{2L} = 0$, ხოლო C სისტემაში, $\vec{p}_{1c} + \vec{p}_{2c} = 0$, ამიტომ

$$E_{1L}^2 + 2E_{1L} M_p c^2 + (M_p c^2)^2 - p_{1L}^2 c^2 = (E_{1c} + E_{2c})^2, \quad (43.4)$$

საიდანაც, საბოლოოდ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$E_L = \frac{E_c^2}{2 M_p c^2}, \quad (43.5)$$

სადაც $E_c = E_{1c} + E_{2c}$ ორი პროტონის სრული ენერგიაა C სისტემაში, ხოლო $E_L = E_{1L} + M_p c^2$ იგივე ენერგიაა L სისტემაში.

დავუშვათ, C სისტემაში ახალი ნაწილაკის შესაქმნელად გვჭირდება პროტონების სრული ენერგია $E_c = 10 \text{ GeV}$. მაშინ, რამდენადაც $M_p c^2 = 938 \text{ MeV}$, გვექნება.

$$E_L \approx \frac{10^2 \text{ GeV}}{20,938} \approx 50 \text{ GeV}. \quad (43.6)$$

მაშასადამე, თუ პროტონს L სისტემაში ავაჩქარებთ 50 GeV -მდე, მაშინ ახალი ნაწილაკის წარმოქმნაზე შეიძლება გამოვიყენოთ მხოლოდ 10 GeV ენერგია.

გამოვარკვევით, როგორი ენერგია უნდა ჰქონდეს პროტონს ლაბორატორიულ სისტემაში, რომელიც ეცემა უძრავ პროტონს იმისათვის, რომ გაჩნდეს პროტონისა და ანტიპროტონის წყვილი, ე.ი. ვიპოვოთ პროტონ-ანტიპროტონის წყვილის დაბადების რეაქციის ზღურბლი, პროტონ-ანტიპროტონის წყვილის გაჩენა ასეთი სქემით უნდა წარმოვიდგინოთ:

$$p + p \rightarrow p + p + (p + \bar{p}), \quad (43.7)$$

ამასთან, ანტიპროტონი აღნიშნული გეაქვს \bar{P} -ით. ცხადია, ამ რეაქციაში დაცულია მუხტის შენახვის კანონი. მაშასადამე, საბოლოო მდგომარეობაში C სისტემაში დაგვჭირდება ენერგია, რომელიც საჭიროა M_p -ს ტოლი მასის ოთხი უძრავი ნაწილაკისათვის, ე.ი. $4 M_p c^2$. (43.5) ფორმულის თანახმად, L სისტემაში, მაშასადამე, საჭიროა დაცემულ პროტონს ჰქონდეს ენერგია

$$E_L = 8 M_p c^2. \quad (43.8)$$

ამ უკანასკნელში შედის ორი პროტონის $2 M_p c^2$ უძრაობის ენერგია, ხოლო დანარჩენი $6 M_p c^2$ არსებობს კინეტიკური ენერგიის სახით. ამგვარად, მინიმალური ენერგია (რეაქციის ზღურბლი), რომელიც საჭიროა პროტონ-ანტიპროტონის წყვილის შესაქმნელად, ტოლი იქნება $6 M_p c^2 = 6 \cdot 938 \text{ MeV} \approx 5,6 \text{ GeV}$. მაშასადამე, პროტონს Z სისტემაში უნდა ჰქონდეს მინიმუმ $5,6 \text{ GeV}$ ენერგია, პროტონ-ანტიპროტონის წყვილი რომ გაჩნდეს. შეიძლება ჩვენება, რომ თუ პროტონი ეჯახება არათავისუფალ პროტონს, არამედ ატომის გულში შემავალს, მაშინ (p, \bar{p}) წყვილის გაჩენისათვის საჭიროა უფრო ნაკლები ენერგია.

ასეთი დიდი ენერგიები ხელოვნურ ამაჩქარებლებზე მიღებულ იქნა მხოლოდ ჩვენი საუკუნის ორმოცდაათიან წლებში. კერძოდ, 1955 წელს ბერკლის ამაჩქარებელზე, რომელსაც ბევატრონი ეწოდება, აღმოჩენილ იქნა პროტონ-ანტიპროტონის წყვილის წარმოქმნისა და ანიჰილაციის მოვლენა. ამასთან, (p, \bar{p}) წყვილის ანიჰილაცია ხდება მეზონების გამოსხივებით. ამასთან, როგორც ნაწინასწარმეტყველები იყო, ანტიპროტონის მასა ისეთივეა, რაც პროტონისა, ხოლო მუხტი უარყოფითი აქვს. ასევე აღმოაჩინეს ნეიტრონებისა და ანტინეიტრონების წარმოქმნისა და ანიჰილაციის მოვლენა და სხვ.

ელექტრონს, პროტონს, ნეიტრონს და ა.შ. ელემენტარულ ნაწილაკთა ფიზიკაში აღნიშნავენ ასოებით: e, p, n , ხოლო შესაბამის ანტინაწილაკებს — პოზიტრონებს, ანტიპროტონებს, ანტინეიტრონებს და ა.შ. -ასოებით: $\bar{e}, \bar{p}, \bar{n}$, და ა.შ.

აღვნიშნოთ, რომ ნივთიერება შექმნილია ნაწილაკებისაგან, კერძოდ, ელექტრონების, პროტონებისა და ნეიტრონებისაგან. ანტინაწილაკები კი ჩნდებიან გარკვეული პროცესების შედეგად, ამიტომ მათი რიცხვი ძალზე მცირეა და, გაჩნდებიან თუ არა ნივთიერების შემადგენელ ნაწილაკებთან ურთიერთქმედებისას, ის-პობიან. ცხადია, გამორიცხული არ არის ანტინივთიერების შექმნაც.

ამასთან, ანტინივთიერება ისეთი მატერიალური გარემოა, რომლის ატომებში ძირითადი საშენი აგურებია ანტინანილაკები, როგორცაა, ანტიპროტონი, ანტინეიტრონი და პოზიტრონი, მართლაც, საბჭოთა კავშირში სერპუხოვის ამაჩქარებელზე 1969 წელს განხორციელებულ იქნა რეაქცია, რასაც შედეგად მოჰყვა ანტინივთიერების მიღება. კერძოდ, დადგენილ იქნა, რომ რეაქციის შედეგად წარმოიქმნება ანტიჰელიუმისა და ანტიტრიტონის ატომგულები.

ჯერ კიდევ ადრე გამოთქმული ჰიპოთეზების მიხედვით, გამორიცხული არ არის ე.წ. "ანტისამყაროს" არსებობაც. ანტისამყაროში, პირიქით, ძალიან ცოტა უნდა იყოს ნანილაკები და ისინი ძალიან მალე უნდა ისპობოდნენ ანტინივთიერების ანტინანილაკებთან დაჯახების შედეგად. ზოგიერთი უფრო გაბედული ჰიპოთეზის თანახმად არსებობს შესაძლებლობა არა მხოლოდ ნივთიერებისა და ანტინივთიერების ანიჰილაციისა, არამედ სამყაროსი და ანტისამყაროსიც, რომელიც უნდა ინვევდეს გიგანტურ კატასტროფას ფანტასტიკური ენერჯის გამოყოფით. ამასთან დაკავშირებით მხოლოდ იმის აღნიშვნით დავეკმაყოფილდეთ, რომ ფიზიკის არც ერთი დარგის შექმნას და განვითარებას არ გამოუნვევია გონების ფანტაზიის ისეთი გაქანება, რაც რელატივისტურმა მექანიკამ გამოიწვია.

რელატივისტური მექანიკის გამოყენება

ამ თავში რელატივისტური მექანიკა გამოყენებულია კონკრეტული ამოცანების გადასაწყვეტად. კერძოდ, დანვრილებითაა განხილული ერთგანზომილებიანი მოძრაობა და მოძრაობა ცენტრალურ ველში. შესწავლილია რელატივისტური ნანილაკის მოძრაობა მუდმივ ერთგვაროვან ელექტრულ და მაგნიტურ ველებში. გადმოცემულია ნანილაკთა ხელოვნური ამაჩქარებლის ციკლოტრონის მუშაობის პრინციპი. ნაჩვენებია, თუ რა დიდი მნიშვნელობა აქვს თანამედროვე ამაჩქარებლებში რელატივისტური ეფექტების გათვალისწინებას; კერძოდ, ნაჩვენებია რომ, როგორც ასეთი ამაჩქარებლების არსებობა, ისე მაღალი ენერგიების ნანილაკების მიღება და მათი საშუალებით მთელი რიგი პროცესების განხორციელება რელატივისტური მექანიკის ბრწყინვალე დასაბუთებას წარმოადგენს.

§ 44. თავისუფალი ნანილაკის ამოცანა

განვიხილოთ ყველაზე მარტივი ამოცანა — თავისუფალი ნანილაკის ამოცანა. თავისუფალი ნანილაკის პოტენციალური ენერგია ნულის ტოლია $\mathcal{H}(\vec{r}, t) = 0$. თავისუფალი ნანილაკისათვის ადგილი ექნება ენერგიის, იმპულსისა და იმპულსის მომენტის შენახვის კანონებს. თავისუფალი ნანილაკის ამოცანის ამოხსნა მარტივად შეიძლება ნებისმიერი მეთოდით, მაგრამ ჩვენ მას ამოვხსნით ჰამილტონ-იაკობის განტოლებაზე დაყრდნობით. (37.3) ფორმულის თანახმად, თავისუფალი ნანილაკისათვის, ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას ექნება სახე

$$(\nabla S)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0. \quad (44.1)$$

რადგან ამოცანა სტაციონარულია, ამიტომ ამონახსნი ვეძებთ შემდეგნაირად:

$$S(\vec{r}, t) = -Et + A(\vec{r}), \quad (44.2)$$

სადაც $A(\vec{r})$ შემოკლებული ქმედების ფუნქციაა. (44.1) განტოლება $A(\vec{r})$ ფუნქციისათვის ასე გადაიწერება:

$$(\nabla A)^2 - \frac{E^2}{c^2} + m_0^2 c^2 = 0. \quad (44.3)$$

თუ გავიხსენებთ $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$ ფორმულას, მაშინ გვექნება

$$(\nabla A)^2 - \bar{p}^2 = 0, \quad (44.4)$$

სადაც $\bar{p}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ ცვლადის განცალდება მოვახდინოთ შემდეგი აღნიშვნით:

$$A(\vec{r}) = A_1(x_1) + A_2(x_2) + A_3(x_3) \quad (44.5)$$

მაშინ (44.4) განტოლება მოგვეცემს:

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}\right)^2 = \alpha_1^2, \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_2}\right)^2 = \alpha_2^2, \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right)^2 = \alpha_3^2, \quad (44.6)$$

სადაც

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \bar{p}^2 \quad (44.7)$$

მაშასადამე, $\alpha_i = p_i$. (44.6) განტოლებების ამოხსნით მივიღებთ:

$$A_1 = \alpha_1 x_1, A_2 = \alpha_2 x_2, A_3 = \alpha_3 x_3. \quad (44.8)$$

ამგვარად, ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სრულ ინტეგრალს თავისუფალი ნაწილაკისათვის ექნება შემდეგი სახე:

$$S = -\sqrt{m_0^2 c^4 + c^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)} t + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3. \quad (44.9)$$

ვიპოვოთ ტრეექტორია. ამისათვის (44.9) გავანარმოოთ α_i მუდმივებით და შედეგი გავუტოლოთ ახალ β_i მუდმივებს. გვექნება:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i = -\frac{c^2 \alpha_i t}{E} + x_i, \quad (44.10)$$

საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ, $\frac{c^2 p_i}{E} = v_i$ ფორმულას, მივიღებთ

$$x_i = v_i t + \beta_i \quad (44.11)$$

ან, ვექტორულად

$$\vec{r} = \vec{v}t + \vec{\beta}, \quad (44.12)$$

სადაც $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$. მაშასადამე, თავისუფალი რელატივისტური ნაწილაკი მოძრაობს $\vec{v} = const$ სიჩქარით, ე.ი. თანაბრად და სწორხაზობრივად.

შედეგი ემთხვევა კლასიკურს, ოღონდ (22.12)-ში $\vec{v} = \frac{c^2}{E} \vec{P}$ ნარმოადგენს რელატივისტურ სიჩქარეს.

ცხადია, თავისუფალი ნაწილაკის ქმედების ფუნქცია შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახითაც:

$$S(\vec{r}, t) = -Et + (\vec{p}, \vec{r}). \quad (44.13)$$

ეს გამოსახულება გარეგნულად ემთხვევა კლასიკურს, მაგრამ (44.13)-ში E და \vec{p} -ში იგულისხმება რელატივისტური ენერგია და იმპულსი. თუ გავითვალისწინებთ კოორდინატისა და იმპულსის ოთხვექტორების გამოსახულებას, მაშინ (44.13) ასეც შეიძლება გადაინეროს:

$$S = x_\mu P_\mu, \quad (44.14)$$

სადაც მუნჯი ინდექსი $\mu = 1, 2, 3, 4$; $x_\mu = (\vec{r}, ict)$, ხოლო $P_\mu = \left(\vec{p}, \frac{i}{c} E\right)$. ცხადია, რომ თავისუფალი ნაწილაკის ოთხიმპულსისათვის გვექნება

$$P_\mu = \frac{\partial S}{\partial x_\mu}, \quad (44.15)$$

საიდანაც მივიღებთ ჩვენთვის უკვე კარგად ცნობილ ფორმულებს:

$$\vec{p} = \nabla S, \quad E = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (44.16)$$

§ 45. ერთგანზომილებიანი მოძრაობა. მაგალითები

ჯერ განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი მოძრაობა ზოგადად. ერთგანზომილებიანი მოძრაობა იმითაა დამახასიათებელი, რომ, როგორც კლასიკურ მექანიკაში, ისე რელატივისტურშიაც, ენერგიის ინტეგრალი საშუალებას იძლევა ამოცანის სრული ამოხსნისა. განვიხილოთ ამ ამოცანის ამოხსნა ჰამილტონ-იაკობის განტოლებაზე დაყრდნობით, რომელსაც ექნება ასეთი სახე:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + u(x)\right)^2 + m_0^2 c^2 = 0 \quad (45.1)$$

რადგან ამოცანა სტაციონარულია, ამიტომ ამონახსნი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად:

$$S = -Et + Ax, \quad (45.2)$$

სადაც $E = \text{const}$ არის ნაწილაკის სრული ენერგია. (45.1) განტოლებიდან ცხადია, რომ

$$A(x) = \int_0^x \sqrt{\left[\frac{E - u(x)}{c}\right]^2 - m_0^2 c^2} dx. \quad (45.3)$$

მაშასადამე, ჰამილტონ-იაკობის განტოლების სრულ ინტეგრალს ექნება გამოხატულება

$$S(x, t) = -Et + \int_0^x \sqrt{\left[\frac{E - u(x)}{c}\right]^2 - m_0^2 c^2} dx \quad (45.4)$$

ტრაექტორიის მისაღებად ეს გამოსახულება გავანარმოოთ E პარამეტრით და მიღებული შედეგი გავუტოლოთ t_0 მუდმივს. გვექნება

$$\frac{\partial S}{\partial t} = t_0 = -t + \int_0^x \frac{[E - u(x)] dx}{c^2 \sqrt{\left[\frac{E - u(x)}{c}\right]^2 - m_0^2 c^2}}, \quad (45.5)$$

საიდანაც

$$t + t_0 = \frac{1}{c} \int_0^x \frac{f(x) dx}{\sqrt{f^2(x) - 1}}; \quad (45.6)$$

აქ ჩვენ შემოვიღეთ ასეთი აღნიშვნა

$$f(x) = \frac{E - u(x)}{m_0 c^2}. \quad (45.7)$$

(45.6) გამოსახულებიდან მოცემული პოტენციალური ენერჯიის შემთხვევაში ვიპოვით $t = \varphi(x)$ ფუნქციას, საიდანაც განვსაზღვრავთ $x = \psi(t)$ ტრაექტორიას.

გავითვალისწინოთ სანყისი პირობა (45.6) ამონახსნში. ვთქვათ, როცა $t=0$, მაშინ $x=0$. ასეთი სანყისი პირობის შემთხვევაში მივიღებთ

$$t = \frac{1}{c} \int_0^x \frac{f(x) dx}{\sqrt{f^2(x) - 1}}. \quad (45.8)$$

როცა მოძრაობა ფინიტურია, მაშინ იგი უსათუოდ პერიოდული იქნება. თუ მაქსიმალურ გადახრას, ე.ი. ამპლიტუდას აღვნიშნავთ a -თი, მაშინ პერიოდისათვის გვექნება ფორმულა

$$T = \frac{4}{c} \int_0^a \frac{f(x) dx}{\sqrt{f^2(x) - 1}}. \quad (45.9)$$

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ თავისუფალი ნანტილაკის შემთხვევაში ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯია $u(x)=0$ და

(45.8) ფორმულიდან მარტივად მივიღებთ წინა პარაგრაფის შედეგს $x=vt$.

§ 46. წრფივი პარამონიული ოსცილატორი

განვიხილოთ წრფივი პარამონიული ოსცილატორის ამოცანა. ოსცილატორის ამოცანა ყველა თეორიაში სასინჯ ქვას წარმოადგენს, ამიტომ მას დიდი მნიშვნელობა აქვს რელატივისტურ მექანიკაშიც. წრფივი ოსცილატორის პოტენციალური ენერგია განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$u(x) = \frac{kx^2}{2}, \quad (46.1)$$

სადაც $k = m_0 \omega^2$. m_0 უძრაობის მასაა, ხოლო ω სიხშირე. ოსცილატორის სრული ენერგია ტოლი იქნება

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{kx^2}{2}, \quad (46.2)$$

რომელიც მოძრაობის ინტეგრალს წარმოადგენს. როცა $t=0$, მაშინ მოვითხოვთ, რომ $x=a$ და $v=0$. შედეგად (46.2) ფორმულა მოგვცემს

$$E = m_0 c^2 + \frac{ka^2}{2}, \quad (46.3)$$

ამიტომ (45.7) ფუნქცია მიიღებს სახეს

$$f(x) = 1 + H^2 + H^2 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \quad (46.4)$$

სადაც მუდმივი κ განისაზღვრება ფორმულით

$$\kappa^2 = \frac{ka^2}{2m_0 c^2} \quad (46.5)$$

თუ შემოვიღებთ ახალ საინტეგრაციო ცვლადს $x = a \sin \varphi$, მაშინ ოსცილატორის პერიოდისათვის საბოლოოდ გვექნება ფორმულა

$$T = \frac{4a}{c\kappa} \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \kappa^2 \cos^2 \varphi) d\varphi}{(2 + \kappa^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}} \quad (46.6)$$

ამ ინტეგრალის ზუსტად ამოხსნა არ ხერხდება, ამიტომ მოვახდინოთ ინტეგრალქვეშა გამოსახულების მწკრივად გამლა κ^2 -ის ხარისხების მიხედვით; გვექნება

$$T = \frac{4a}{\sqrt{2c\kappa}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4} \kappa \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi + \dots + \right\} \quad (46.7)$$

აქედან, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{k}} \left\{ 1 + \frac{3}{16} \frac{\kappa a^2}{m_0 c^2} + \dots + \right\}. \quad (46.8)$$

პირველი წევრი შეესაბამება არარელატივისტურ შემთხვევას, $c \rightarrow \infty$, მეორე წევრი წარმოადგენს რელატივისტურ შესწორებას.

ამავე დროს, ადვილია იმის ჩვენება, რომ ოსცილატორის შემთხვევაში (45.8) ფორმულა x და t -ს შორის მარტივ პერიოდულ დამოკიდებულებას აღარ იძლევა, განსხვავებით კლასიკური შემთხვევისაგან. ადვილია ჩვენება, რომ იგივე მიახლოებაში, რაც გავაკეთეთ (46.8) ფორმულის გამოყვანის დროს, (45.8) ფორმულა მოგვცემს

$$t = \sqrt{\frac{m_0}{k}} \left\{ \left(1 + \frac{3}{8} \kappa^2 \right) \arcsin \frac{x}{a} + \frac{3}{8} \frac{\kappa^2}{a} x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \dots + \right\}. \quad (46.9)$$

ამ მიახლოებით გამოსახულების შემთხვევაშიც კი შეუძლებელია X -ის გამოხატვა t -თი; თუ გადავაგდებთ მეორე წევრს, მაშინ მივიღებთ

$$x \approx a \sin \left\{ \frac{\omega t}{1 + \frac{3}{16} \left(\frac{a\omega}{c} \right)^2} \right\}, \quad (46.10)$$

რომელიც კლასიკური ოსცილატორის ამოცანის ამონახსნისაგან განსხვავდება

$$\left\{ 1 + \frac{3}{16} \left(\frac{a\omega}{c} \right)^2 \right\}^{-1} \quad (46.11)$$

გამოსახულებით სინუსის არგუმენტში. ეს წევრი ზუსტად შეესაბამება (46.8) -ის მიხედვით განსაზღვრულ სიხშირეს, რომელიც

ტოლია

$$\Omega = \frac{\omega}{1 + \frac{3}{16} \left(\frac{a\omega}{c} \right)^2}. \quad (46.12)$$

თუ ვიპოვიტ \dot{x} , ადვილად განვსაზღვრავთ ოსცილატორის ენერჯიასაც ამ მიახლოებაში. ამისათვის საკმარისია (46.3) ფორ-
მულაში შევიტანოთ x და \dot{x} -ის მნიშვნელობა $t=0$ მომენტში, ე.ი. $x=0$ და $\dot{x} = a\Omega$; მივიღებთ

$$E = m_0 c^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega a}{c} \right)^2 + \dots \right\} = m_0 c^2 + \frac{m_0^2 \omega^2 a^2}{2} - \frac{3}{16} m_0 c^2 \left(\frac{a\omega}{c} \right)^4 + \dots \quad (46.13)$$

რომელიც დაემთხვევა წრფივი ჰარმონიული ოსცილატორის ენერ-
ჯიის კლასიკურ გამოსახულებას $c \rightarrow \infty$ ზღვარში. კლასიკური მე-
ქანიკისათვის არამნიშვნელოვანი $m_0 c^2$ ადიტიური მუდმივის სი-
ზუსტით.

§ 47. მოძრაობა მუდმივი ძალის გავლენით

განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი ამოცანა ნანილაკის მოძრა-
ობისა მუდმივი F_0 ძალის გავლენით. ნანილაკი მუდმივი F_0 ძალის
გავლენით იმოძრაებს თანაბრად აჩქარებულად. რელატივისტურ
მექანიკაში თანაბრად აჩქარებული მოძრაობა ეწოდება ისეთ
მოძრაობას, როცა მატერიალური ნერტილი მუდმივ აჩქარებას
ინარჩუნებს დროის ალბებულ მომენტში ამ ნერტილის მიმართ
უძრავ სისტემაში. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ დროის რაიმე t_1
მომენტში მატერიალური ნერტილის მიმართ უძრავ სისტემაში
აჩქარება a_1 -ის ტოლია, მაშინ დროის სხვა მომენტში მატერიალური
ნერტილის მიმართ სხვა უძრავ ათვლის სისტემაში აჩქარება ისევ
 a_1 -ის ტოლი უნდა იყოს. ცხადია, რომ ინერციული სისტემის
მიმართ აჩქარება არ იქნება მუდმივი.

ამგვარად, ამოცანის პირობის თანახმად

$$F_0 = -\frac{du}{dx}, \quad (47.1)$$

ხოლო პოტენციალური ენერჯია ტოლი იქნება გამოსახულების

$$u(x) = -F_0 x. \quad (47.2)$$

ენერჯიის შენახვის კანონი ასე დაიწერება:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - F_0 x = const. \quad (47.3)$$

ავილოთ საწყისი პირობები, რომლის მიხედვით, როცა $t=0$, $x=0$, $v=0$, მაშინ $E = m_0 c^2$ და (47.3) მიიღებს სახეს

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - F_0 x = m_0 c^2. \quad (47.4)$$

ტრანსფორმაციის მოსაძებნად გამოვიყენოთ (45.8) ფორმულა, სადაც $f(x)$ -ის ნაცვლად უნდა შევიტანოთ მნიშვნელობა

$$f(x) = \frac{E - u(x)}{m_0 c^2} = 1 + \frac{F_0}{m_0 c^2} x \quad (47.5)$$

გვექნება

$$t = \left(\frac{m_0 c}{F_0} \right) \left\{ 1 + \left(\frac{F_0 x}{m_0 c^2} \right)^2 - 1 \right\}^{1/2} \quad (47.6)$$

აქედან ვიპოვით ტრანსფორმაციის განტოლებას

$$x(t) = \frac{c}{\omega_0} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 t}{c} \right)^2} - 1 \right\}, \quad (47.7)$$

სადაც $\omega_0 = \frac{F_0}{m_0} = const$ წარმოადგენს კლასიკურ აჩქარებას. ნაწილაკის სიჩქარე კი ტოლი იქნება

$$v = \frac{\omega_0 t}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 t}{c} \right)^2}} = \frac{v_{\infty}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_{\infty}}{c} \right)^2}}. \quad (47.8)$$

კლასიკური მექანიკის თანახმად, იგივე საწყისი პირობებით, მუდ-

მივი ძალის მოქმედების შემთხვევაში, გვექნებოდა

$$v_{\kappa} = \omega_0 t, \quad x = \frac{\omega_0 t^2}{2}. \quad (47.9)$$

როცა $v_{\kappa} = \omega_0 t \ll c$, მაშინ

$$\left\{ 1 + \left(\frac{v_{\kappa}}{c} \right)^2 \right\}^{1/2} = 1 + \frac{v_{\kappa}^2}{2c^2} + \dots + \quad (47.10)$$

და ტრაექტორიის განტოლება დაიყვანება სახეზე

$$x(t) = \frac{c^2}{\omega_0} \frac{1}{2} \frac{v_{\kappa}^2}{c^2} = \frac{\omega_0 t^2}{2} \quad (47.11)$$

ადვილად ვიპოვით \dot{v} -ს. გვექნება

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\omega_0}{\left\{ 1 + \left(\frac{\omega_0 t}{c} \right)^2 \right\}^{3/2}}. \quad (47.12)$$

როგორც ვხედავთ, არსებობს განსხვავება რელატივისტურ და კლასიკურ "მუდმივ" აჩქარებებს შორის.

საინტერესოა იგივე ამოცანის ამოხსნა აჩქარების ოთხვექტორის გამოყენებით. როგორც ვიცით, აჩქარების ოთხვექტორი ასეა განმარტებული:

$$\omega_i = \frac{du_i}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}} \frac{du_i}{dt}, \quad (47.13)$$

სადაც $v = \beta c$ ნანილაკის სიჩქარეა, ხოლო

$$u_{\alpha} = \frac{v_{\alpha}}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (47.14)$$

ოთხსიჩქარის კომპონენტებია. ცხადია, რომ

$$\frac{du_{\alpha}}{dt} = \frac{\dot{v}_{\alpha}}{c(1-\beta^2)^{3/2}}, \quad \frac{du_4}{dt} = \frac{v\dot{\beta}}{c^2(1-\beta^2)^{3/2}} \quad (47.15)$$

ნანილაკის საკუთარ სისტემაში $v=0$ და რადგან მოძრაობას ვიხილავთ X ღერძის გასწვრივ, ამიტომ

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{v}{c}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_3}{dt} = \frac{dx_4}{dt} = 0, \quad (47.16)$$

მაშასადამე, ოთხაჩქარებისათვის გვექნება მდგენლები:

$$\omega_1 = \frac{v}{c} = \frac{\omega_0}{c^2}, \quad \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0, \quad (47.17)$$

სადაც ω_1 ჩვეულებრივი სამგანზომილებიანი აჩქარებაა x ლერდის გასწვრივ. სხვა ნებისმიერ ინერციულ ათვლის სისტემაში

$\omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{c^4}$ უნდა ინარჩუნებდეს თავის მნიშვნელობას, რამდენადაც

იგი წარმოადგენს ოთხსიჩქარის კვადრატს და, მაშასადამე, ინვარიანტულია:

$$\left(\frac{du_i}{ds} \right)^2 = \frac{\omega_0^2}{c^4} = \text{const.} \quad (47.18)$$

ჩავენროთ ეს ფორმულა გაშლილად. გვექნება

$$\frac{1}{c^2(1-\beta^2)} \left\{ \left(\frac{du_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{du_4}{dt} \right)^2 \right\} = \frac{\omega_0^2}{c^4}, \quad (47.19)$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\omega_0 = \frac{v}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \right), \quad (47.20)$$

რომლის ინტეგრაცია საწყისი პირობით $v=0$, როცა $t=0$, მოგვცემს

$$\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega_0 t \quad (47.21)$$

ამ ტოლობიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ v . გვექნება

$$v = \frac{\omega_0 t}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 t}{c} \right)^2}}, \quad (47.22)$$

რომელიც ემთხვევა (47.8) გამოსახულებას. (47.22)-დან ვიპოვით განვლილი მანძილის ფორმულასაც

$$x = \int_0^t \frac{\omega_0 t dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 t}{c}\right)^2}} = \frac{c^2}{\omega_0} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 t}{c}\right)^2} - 1 \right\} \quad (47.23)$$

ამ პარაგრაფში მიღებული შედეგები შეიძლება გამოვიყენოთ კოსმოსურ ხომალდში მიმდინარე დროის, ე.ი. საკუთარი τ დროის, გამოსათვლელად, როცა იგი მოძრაობს თანაბრადჩქარებულად დედამიწასთან უძრავად დაკავშირებული ათელის სისტემის x ღერძის მიმართულებით. ვთქვათ, დედამიწაზე დარჩენილი უძრავი დამკვირვებლის საათის მიხედვით გავიდა t დრო, მაშინ ხომალდის საკუთარი დრო განისაზღვრება (18.8) ფორმულით, რომელშიაც საჭიროა x -ს ნაცვლად ჩავსვათ (47.22) გამოსახულება. გვექნება

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\omega_0^2 t^2}{1 + \frac{\omega_0^2 t^2}{c^2}} \right\}} dt, \quad (47.24)$$

საიდანაც მარტივად მივიღებთ

$$\tau = \frac{c}{\omega_0} \operatorname{Arsh} \left\{ \frac{\omega_0 t}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 t}{c}\right)^2} \right\} = \frac{c}{\omega_0} \operatorname{Arsh} \left(\frac{\omega_0 t}{c} \right). \quad (47.25)$$

როცა $t \rightarrow \infty$, მაშინ τ იზრდება ლოგარითმულად (ე.ი. გაცილებით ნელა, ვიდრე t), კერძოდ, კანონით

$$\tau = \frac{c}{\omega_0} \ln \left(\frac{2\omega_0 t}{c} \right). \quad (t \rightarrow \infty) \quad (47.26)$$

მაშასადამე, ამ კერძო შემთხვევაში, კოსმოსურ ხომალდში დრო ლოგარითმულად ნელა მიმდინარეობს უძრავი დამკვირვებლის დროსთან შედარებით. სწორედ ეს გარემოება უდევს საფუძვლად მომავალში ადამიანის მიერ სამყაროს უშორესი ნერტილების მიღწევის შესაძლებლობას.

§ 48. მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის ველში

განვიხილოთ მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის ველში. ვთქვათ, გვაქვს ძალთა ცენტრი, რომელთანაც ურთიერთქმედებს

უძრაობის m_0 მასის ნანილაკი. ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია იყოს $u(r)$. რადგან $u(r)$ დროზე არ არის დამოკიდებული, ამიტომ მოძრაობა იქნება სტაციონარული. ადგილი ექნება სრული ენერგიის, იმპულსისა და იმპულსის მომენტის შენახვას. იმის გამო, რომ იმპულსის \vec{l} მომენტი ინახება, ცენტრალური სიმეტრიის ველში მოძრაობა იქნება ბრტყელი. ამ სიბრტყედ ავირჩიოთ xoy სიბრტყე. ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - u(r). \quad (48.1)$$

რადგან მოძრაობა ბრტყელია, ხელსაყრელია შემოვიღოთ პოლარული კოორდინატები:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (48.2)$$

ამ კოორდინატებში სიჩქარის კვადრეტი ტოლი იქნება

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (48.3)$$

ასე რომ, ცენტრალურ ველში მოძრავი ნანილაკის ლაგრანჟის ფუნქციას პოლარკოორდინატებში ექნება შემდეგი სახე:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}{c^2}} - u(r). \quad (48.4)$$

გვექნება ორი განზოგადებული იმპულსი:

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m_0 \dot{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (48.5)$$

და

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m_0 r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (48.6)$$

(40.35) ფორმულის თანახმად, P_φ ემთხვევა იმპულსის მომენტს და რადგან φ ციკლური კოორდინატია, ამიტომ $P_\varphi = l = const$. (48.3)

ტოლობა გავამრავლოთ $(m_0 \gamma)^2$ და გავითვალისწინოთ (48.5) და (48.6)

განმარტებები, მაშინ მივიღებთ

$$p^2 = p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\phi^2 \quad (48.7)$$

მაშასადამე, ჰამილტონის ფუნქციისათვის ცენტრალური სიმეტრიის ველში გვექნება გამოსახულება:

$$H = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\phi^2 \right)} + u(r) = \text{const.} \quad (48.8)$$

ამის შემდეგ ძნელი აღარ არის ჰამილტონ-იაკობის განტოლების დანერა. გვექნება

$$\left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \right\} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + u(r) \right)^2 + m_0^2 c^2 = 0. \quad (48.9)$$

რადგან ამოცანა სტაციონარულია და ϕ ციკლურ კოორდინატს წარმოადგენს, ამიტომ (48.9) განტოლების სრული ინტეგრალი შეგვიძლია შემდეგი სახით წარმოვიდგინოთ:

$$S = -Et + P_\phi \phi + A(r). \quad (48.10)$$

შემოკლებული $A(r)$ ქმედების ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$\left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{1}{c^2} (-E + u(r))^2 + m_0^2 c^2 = 0, \quad (48.11)$$

საიდანაც

$$A(r) = \int \sqrt{\frac{1}{c^2} [u(r) - E]^2 - \frac{l^2}{r^2} - m_0^2 c^2} dr \quad (48.12)$$

მაშასადამე, სრულ ქმედებას ექნება შემდეგი გამოსახულება:

$$S = -Et + l\phi + \int \sqrt{\frac{1}{c^2} [u(r) - E]^2 - \frac{l^2}{r^2} - m_0^2 c^2} dr. \quad (48.13)$$

$r = \phi(t)$ ტრაექტორიას ადვილად ვიპოვით (48.13) გამოსახულების E -თი წარმოებულის რაიმე t_0 მუდმივთან გატოლებით. გვექნება

$$t + t_0 = \int_{r_0}^r \frac{\frac{1}{c^2} [E - u(r)] dr}{\sqrt{\frac{1}{c^2} [E - u(r)]^2 - \frac{l^2}{r^2} - m_0^2 c^2}}, \quad (48.14)$$

სადაც r_0 გარკვეული მუდმივია, რომელიც უნდა შევარჩიოთ საწყისი პირობიდან. მაგალითად, ჩვენ შეგვიძლია ავირჩიოთ ასეთი საწყისი პირობა $t=0$ დროს $r=r_0$. ასეთი საწყისი პირობის შემთხვევაში (48.14) მოგვცემს $t_0 = 0$ და მივიღებთ

$$t = \int_{r_0}^r \frac{\frac{1}{c^2} [E - u(r)] dr}{\sqrt{\frac{1}{c^2} [E - u(r)]^2 - \frac{l^2}{r^2} - m_0^2 c^2}}. \quad (48.15)$$

ამ გამოსახულებიდან $u(r)$ -ის კონკრეტული მნიშვნელობისათვის მივიღებთ $t = \phi(r)$, რომლის შებრუნებით განვსაზღვრავთ ტრაექტორიას $r = \psi(t)$.

ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ტრაექტორიის გეომეტრიული სახეც. ამისათვის, როგორც ცნობილია, საჭიროა (48.13) გამოსახულების განარმოება მომენტით; გვექნება

$$\varphi_0 = \varphi + \int_{r_0}^r \frac{-\frac{l}{r^2} dr}{\sqrt{\frac{1}{c^2} [E - u(r)]^2 - \frac{l^2}{r^2} - m_0^2 c^2}} \quad (48.16)$$

φ_0 კუთხე ნული შეიძლება გავხადოთ, თუ φ -ს ავთვლით $r=r_0$ მანძილიდან. გვექნება

$$\varphi = \int_{r_0}^r \frac{l dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{c^2} [E - u(r)]^2 - \frac{l^2}{r^2} - m_0^2 c^2}}. \quad (48.17)$$

პოტენციალური ენერჯიის კონკრეტული სახისათვის ვიპოვიით $\varphi = \chi(r)$ დამოკიდებულებას, საიდანაც განვსაზღვრავთ $r = f(\varphi)$ ტრაექტორიას. როგორც ხედავთ, ფესვის ორი ნიშნის გამო (48.17)

ტრაექტორია სიმეტრიულია სანყისი მანძილის მიმართ.

განვიხილოთ ცენტრალურ ველში მოძრაობის ზოგიერთი ძირითადი თვისება. შევისწავლოთ ისეთი პოტენციალური ენერგიები, რომლებიც ნორმირებული არიან პირობით

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0. \quad (48.18)$$

ისევე როგორც კლასიკურ მექანიკაში, რელატივისტურშიც ცენტრალურ ველში გვექნება როგორც ფინიტური, ისე ინფინიტური მოძრაობა. ამასთან, ფინიტური მოძრაობის შემთხვევაში გვექნება როგორც r_{\min} , ისე r_{\max} მანძილები. ინფინიტური მოძრაობის დროს კი შესაძლებელია მხოლოდ r_{\min} მანძილის არსებობა. ამ დროს ნაწილაკს შეუძლია უსასრულოდ დაშორდეს ძალთა ცენტრს და ამიტომ r შეიძლება უსასრულობის ტოლი იყოს.

ვიპოვოთ იმის პირობები, როდის გვექნება ფინიტური და ინფინიტური მოძრაობა. კლასიკურ მექანიკაში პოტენციალური ენერგიის (48.18) ნორმირების დროს მოძრაობის ხასიათს განსაზღვრავდა სრული ენერგიის ნიშანი. კერძოდ, ფინიტური მოძრაობა გვექონდა $E < 0$ დროს, ხოლო ინფინიტური $E \geq 0$ -სათვის. რელატივისტურ მექანიკაში იმის გამო, რომ ენერგია შეიცავს დამატებით $m_0 c^2$ შესაკრებს, ეს პირობები შესაბამისად იცვლება $E < m_0 c^2$ და $E > m_0 c^2$ პირობებით.

განვიხილოთ სრული ენერგია და ვთქვათ, $E < m_0 c^2$. მაშინ გვექნება

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p_r^2 c^2 + \frac{l^2 c^2}{r^2}} + u(r) < m_0 c^2. \quad (48.19)$$

ცხადია, ეს შემთხვევა განხორციელდება მხოლოდ მიზიდვის დროს. გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $r \rightarrow \infty$, მაშინ

$$\sqrt{m_0^2 c^4 + p_r^2 c^2} < m_0 c^2 \quad (48.20)$$

მაშინაც კი, როცა $p_r = 0$, ეს უტოლობა არ სრულდება. მაშასადამე, (48.19)-ში არ შეიძლება r უსასრულობა ხდებოდეს. ამგვარად, მიზიდვის პოტენციალური ენერგიის შემთხვევაში, $E < m_0 c^2$ -ისათვის მოძრაობა იქნება ფინიტური.

ახლა, ვთქვათ,

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p_r^2 c^2 + \frac{l^2 c^2}{r^2}} + u(r) \geq m_0 c^2 \quad (48.21)$$

როცა $r \rightarrow \infty$, მაშინ,

$$\sqrt{m_0^2 c^4 + p_r^2 c^2} \geq m_0 c^2 \quad (48.22)$$

მაშასადამე, ინფინიტური მოძრაობა დასაშვებია. ამავე დროს $E = m_0 c^2$ ტოლობის შემთხვევაში, ინფინიტური მოძრაობა დასაშვებია მხოლოდ მაშინ, როცა $p_r = 0$.

ფინიტური მოძრაობის შემთხვევაში დასაშვებია ლიმიტაციური მოძრაობა, ე.ი. მოძრაობა, როცა ნაწილაკი ეცემა ცენტრს. სრული ენერგიის გამოსახულებიდან ნათელია, რომ რამდენადაც $m_0 c^2 > 0$ და $p_r^2 \geq 0$, იმდენად

$$rE > lc + ru(r). \quad (48.23)$$

r -ის ნულთან მისწრაფებით მივიღებთ

$$\lim_{r \rightarrow 0} [ru(r)] < -lc, \quad (48.24)$$

ე.ი. ლიმიტაციური მოძრაობა შესაძლებელია მაშინ, თუ $u(r)$ აკმაყოფილებს (48.24) პირობას. შევისწავლოთ სინგულარული პოტენციალები $u(r) \approx r^{-n}$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა: ა) მიზიდვა $u(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$, სადაც $\alpha > 0$ და $n=1, 2, \dots$, მაშინ

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{\alpha}{r^{n-1}} \right) < -lc. \quad (48.25)$$

როცა $n=1$, ლიმიტაციური მოძრაობა გვექნება მხოლოდ მაშინ,

როცა $\alpha > lc$. შევნიშნოთ, რომ კლასიკურ მექანიკაში $u(r) = -\frac{|\alpha|}{r}$.

პოტენციალური ენერგიის შემთხვევაში ლიმიტაციური მოძრაობა საზოგადოდ შეუძლებელია, გარდა იმ კერძო შემთხვევისა, როცა $l=0$, ე.ი. როცა ერთი ნაწილაკი პირდაპირ ეცემა მეორეს. ეს ჩანს იქიდანაც, რომ კლასიკურ ზღვარში $c \rightarrow \infty$. $\alpha > lc$ უტოლობა შესრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $n > 1$ შემთხვევაში ლიმიტაციური მოძრაობა ყოველთვის იქნება დასაშვები.

ბ) განზიდეა $u(r) = \frac{\alpha}{r^n}, \alpha > 0$, გვექნება

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{r^{n-1}} \right) < -lc \quad (48.26)$$

საიდანაც ჩანს, რომ არც ერთი $n \geq 1$ -სათვის ლიმიტაციური მოძრაობა დასაშვები არ არის. ლიმიტაციური მოძრაობის დროს, ცხადია, გვექნება ერთი მობრუნების ნერტილი $r = r_{\max}$ ან-არც ერთი. (48.19)-დან შეგვიძლია განვსაზღვროთ ექსტრემალური მანძილები; როგორც ვიცით, მობრუნების ნერტილებში $P_r = 0$, ამიტომ

$$\frac{1}{c^2} [E - u(r)]^2 - \frac{l^2}{r^2} - m_0^2 c^2 = 0. \quad (48.27)$$

ამ განტოლებიდან ამოიხსნება ექსტრემალური მანძილები. (48.27) გამოხატავს (48.17) ფორმულის ფესვქვეშა გამოსახულების ნულთან ტოლობის პირობას.

რადგან ერთი ექსტრემალური მანძილი (კერძოდ, $r = r_{\min}$) ყოველთვის გვექნება შემდგომში, (48,15) და (48,17)-ში ვიგულისხმებთ, რომ $r_0 = r_{\min}$ და დავნერთ

$$t = \int_{r_{\min}}^r \frac{\frac{1}{c^2} [E - u(r)] dr}{\sqrt{\frac{1}{c^2} [E - u(r)]^2 - \frac{l^2}{r^2} - m_0^2 c^2}}. \quad (48.28)$$

ასევე,

$$\varphi = \int_{r_{\min}}^r \frac{l dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{c^2} [E - u(r)]^2 - \frac{l^2}{r^2} - m_0^2 c^2}}. \quad (48.29)$$

ამ გამოსახულებებში სანყისი პირობები ისეა შერჩეული, რომ კუთხე φ აითვლება $r = r_{\min}$ შესაბამისი ნერტილიდან.

(48.29) წარმოადგენს ტრაექტორიის განტოლებას არაცხადი სახით. თუ ამ გამოსახულებაში ავიღებთ $r = \infty$, მაშინ მივიღებთ

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{c^2} [E - u(r)]^2 - \frac{l^2}{r^2} - m_0^2 c^2}}, \quad (48.30)$$

რომელიც გამოხატავს ტრანსფორმირების ასიმპტოტის განტოლებას არაცხადი სახით. ასიმპტოტის განტოლებას დიდი გამოყენება აქვს ნაწილაკთა გაფანტვის თეორიაში.

(48.30)-ის ფესვევება გამოხატულებას მივცეთ სხვა სახე. გვექნება

$$\frac{1}{c^2} [E - u(r)]^2 - m_0^2 c^2 = p^2 - \frac{u(r)[2E - u(r)]}{c^2}, \quad (48.31)$$

სადაც P რელატივისტური იმპულსია. გაფანტვის ამოცანაში, რამდენადაც ადგილი აქვს იმპულსის შენახვის კანონს, P -ში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ P_∞ , ე. ი. იმპულსის ის მნიშვნელობა, რომელიც ნაწილაკს ჰქონდა უსასრულობაში, სანამ გამფანტავ ცენტრთან იგი არ ურთიერთქმედებდა, ე. ი.

$$\bar{p} = \frac{m_0 \bar{v}_\infty}{\sqrt{1 - \frac{v_\infty^2}{c^2}}}. \quad (48.32)$$

მაშასადამე, ფესვევება გამოხატულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{1}{c^2} [E - u]^2 - \frac{l^2}{r^2} - m_0^2 c^2 = P_\infty^2 - \frac{l^2}{r^2} - V(r), \quad (48.33)$$

სადაც $V(r)$ არის ეფექტური პოტენციალური ენერგია

$$V(r, E) = \frac{u(r)[2E - u(r)]}{c^2}, \quad (48.34)$$

ამგვარად, ასიმპტოტისათვის გვექნება

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{P_\infty^2 - \frac{l^2}{r^2} - V(r)}}, \quad (48.35)$$

რომელიც გარეგნულად ემთხვევა კლასიკურ გამოხატულებას.

განვიხილოთ არარელატივისტური ზღვარი $E = m_0 c^2 \gg u(r)$,

მაშინ ეფექტური პოტენციალური ენერგია ტოლია $2m_0 u(r)$ და (48.35) გამოხატულება ზუსტად ემთხვევა კლასიკურს.

შევნიშნოთ, რომ ეფექტურ რელატივისტურ პოტენციალურ ენერგიას აქვს შემდეგი თვისებები: 1. როცა $u(r)$ სინგულარულია,

მაშინ, მიუხედავად $u(r)$ -ის ნიშნისა, $V(r)$ ყოველთვის უარყოფითია.

2. თუ $u(r)$ სინგულარულია, მაშინ $V(r)$ გაცილებით უფრო სინგულარული იქნება, კერძოდ, u^2 -ჯერ. 3. ეფექტური პოტენციალი დამოკიდებულია ენერგიაზე.

დაბოლოს, ფინიტური მოძრაობის დროს შესაძლებელია პერიოდული მოძრაობა. პერიოდის ფორმულა შეგვიძლია ვიპოვოთ (48.28)-დან. გვექნება

$$T = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{1}{c^2} [E - u(r)] dr}{\sqrt{\frac{1}{c^2} [E - u(r)]^2 - \frac{l^2}{r^2} - m_0^2 c^2}}, \quad (48.36)$$

სადაც r_{\min} და r_{\max} მანძილები განისაზღვრება (48.27) პირობიდან.

§ 49. მოძრაობა კულონურ ველში

წინა პარაგრაფში მიღებული შედეგები გამოვიყენოთ კულონურ ველში ელექტრონის მოძრაობის რელატივისტური ამოცანის გადასაწყვეტად. ვიგულისხმობთ, რომ ელექტრონი, რომლის უძრაობის მასაა m_0 და აქვს $-e$ მუხტი, მოძრაობს $+Ze$ მუხტის მქონე და M_0 უძრაობის მასის ნანილაკის მიერ შექმნილ კულონურ ველში. მაშინ ამ ორი ნანილაკის ურთიერთქმედების პოტენციალურ ენერჯიას ექნება შემდეგი სახე:¹

$$u(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad (49.1)$$

სადაც $\alpha = -Ze^2$ ამასთან, $Z=1,2,\dots$ აღნიშნავს M_0 მასის მქონე ნანილაკის დადებითი მუხტების რაოდენობას. რამდენადაც ჩვენ ძირითადად გვიინტერესებს ატომის პრობლემა, იმდენად Z იქნება პროტონების რიცხვი ატომის გულში. ვიგულისხმობთ, რომ $m_0 \ll M_0$, მაშინ Z მუხტის ნანილაკი შეგვიძლია უძრავად ჩავთვალოთ, შედეგად ამოცანა დაიყვანება ელექტრონის მოძრაობაზე (49.1) პოტენციალური ენერჯიით განსაზღვრულ ცენტრალურ სიმეტრიის ველში, რაც საშუალებას გვაძლევს წინა პარაგრაფში განხილული თეორიის უშუალო გამოყენებისა. აღვნიშნოთ, რომ მათე-

¹ როგორც ელექტრონი, ისე ატომგულიც ჩათვლილია ნერტილოვნად.

მატიკურად ეს ამოცანა ეკვივალენტურია კეპლერის ამოცანისა, ოღონდ იმ განსხვავებით, რომ კულონური ურთიერთქმედების შემთხვევაში ადგილი აქვს როგორც მიზიდვას $|\alpha > 0|$, ისე განზიდვას ($\alpha < 0$), გრავიტაციული ურთიერთქმედების შემთხვევაში კი გვექნება მხოლოდ მიზიდვა და $\alpha = \gamma m_0 M_0$, სადაც γ გრავიტაციული მუდმივია, m_0 პლანეტის უძრაობის მასა, ხოლო M_0 - მზის.

ცხადია, რომ სისტემის სრულ რელატივისტურ ენერგიას ექნება გამოსატყულება

$$E = \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2 c^2} - \frac{\alpha}{r}. \quad (49.2)$$

ტრანექტორიის საპოვნელად (49.1) პოტენციალური ენერგია შევიტანოთ (48.42) ფორმულაში. გვექნება

$$\varphi = \int_{r_{\min}}^r \frac{l dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{c^2} \left(E + \frac{\alpha}{r} \right)^2 - \frac{l^2}{r^2} - m_0^2 c^2}}, \quad (49.3)$$

სადაც φ აითვლება $r = r_{\min}$ მანძილიდან. გავიხსენოთ, რომ, კერძო შემთხვევაში, ლიმიტაციური მოძრაობის დროს, მობრუნების ნერტილი ან სულ არა გვაქვს, ან გვაქვს ერთი, რომელიც შეესაბამება r_{\max} . ამიტომ (49,3) ფორმულაში, ნაცვლად r_{\min} -სა, შემოვა r_{\max} მანძილი.

(49.3)-ში შემოვიღოთ $x = \frac{1}{r}$ აღნიშვნა-და-ფესვექვემა გამოსახულება დავიყვანოთ სრულ კვადრატზე. მივიღებთ

$$\varphi = \int_{1/r_{\min}}^{1/r} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{A^2}{\Gamma^2} + \beta \right) - \left(\Gamma x - \frac{A}{\Gamma} \right)^2}}, \quad (49.4)$$

სადაც შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$A = \frac{\alpha E}{l^2 c^2}, B = \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{l^2 c^2}, \Gamma^2 = 1 - \left(\frac{\alpha}{lc} \right)^2 \quad (49.5)$$

შემოვიტანოთ ორი ახალი აღნიშვნაც:

$$P = \frac{\Gamma^2}{A} \quad (49.6)$$

და

$$\kappa = \sqrt{1 + \beta \frac{\Gamma^2}{A^2}}, \quad (49.7)$$

მაშინ (49.4) გამოსახულება მიიღებს სახეს

$$\Gamma\varphi = \int_{r_{\min}}^{r} \frac{p dx}{\sqrt{\kappa^2 - (px - 1)^2}} \quad (49.8)$$

ახლა ვიპოვოთ მობრუნების ნერტილები. ამისათვის ნულს გავუტოლოთ ფესვექვეშა გამოსახულება

$$\kappa^2 - \left(\frac{p}{r_0} - 1\right)^2 = 0, \quad (49.9)$$

საიდანაც

$$r_0 = \frac{p}{1 \pm \kappa} \quad (49.10)$$

მაშასადამე,

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \kappa}, r_{\max} = \frac{p}{1 - \kappa}. \quad (49.11)$$

ამასთან, r_{\max} მანძილის არსებობა დამოკიდებულია Γ^2 -ზე და სრულ ენერგიაზე.

(49.8) ინტეგრალი ცხრილის ინტეგრალია, ამიტომ გვექნება

$$\Gamma\varphi = \arccos \frac{p-1}{\kappa} \Big|_{r_{\min}}^{r} = \arccos \frac{p-1}{\kappa} - \arccos 1, \quad (49.12)$$

საიდანაც, საბოლოოდ, მივიღებთ

$$r = \frac{p}{1 \pm \kappa \cos(\Gamma\varphi)} \quad (49.13)$$

ამ გამოსახულებაში κ -ში იგულისხმება (49.7)-ის აბსოლუტური მნიშვნელობა, რომელსაც ექსცენტრისიტეტს უწოდებენ. თუ გავითვალისწინებთ (49.5) აღნიშვნებს, κ -სთვის გვექნება გამოსახულება

$$\kappa = \sqrt{1 + \left[1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{lc}{\alpha} \right)^2 - 1 \right]}. \quad (49.14)$$

როცა $\Gamma^2 > 0$, ე.ი. $lc > |\alpha|$, მაშინ

$$\kappa > 1, \text{ როცა } E > m_0 c^2 \quad (49.15)$$

$$\kappa < 1, \text{ როცა } E < m_0 c^2 \quad (49.16)$$

ხოლო, როცა $\Gamma^2 < 0$, ე.ი. $lc < |\alpha|$, მაშინ

$$\kappa > 1, \text{ როცა } E < m_0 c^2 \quad (49.17)$$

$$\kappa < 1, \text{ როცა } E > m_0 c^2 \quad (49.18)$$

$lc = |\alpha|$ შემთხვევაში კი, ე.ი. როცა $\Gamma^2 = 0, \kappa = 1$

არარელატივისტურ ზღვარში, როცა $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, ექსცენტრისიტეტისათვის მივიღებთ ჩვენთვის კარგად ცნობილ გამოხატულებას

$$\kappa = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m_0 \alpha^2}}, \quad (49.19)$$

სადაც E სრული ენერჯიის კლასიკური მნიშვნელობაა. სრულიად ანალოგიურად, არარელატივისტურ ზღვარში (49.6) დაიყვანება პარამეტრის ცნობილ მნიშვნელობაზე

$$P = \frac{l^2}{m_0 \alpha}. \quad (49.20)$$

ახლა შევისწავლოთ (49.13) ტრაექტორია. ტრაექტორიის სახე დამოკიდებული იქნება κ, Γ და P პარამეტრებზე. კერძოდ, საჭიროა Γ^2 -ის მნიშვნელობათა მიხედვით განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

$\Gamma^2 > 0$, $\Gamma^2 < 0$ და $\Gamma^2 = 0$. თითოეულ ამ შემთხვევასთან დაკავშირებული იქნება მიზიდვისა და განზიდვის შემთხვევები და ენერჯიის ორი მნიშვნელობა: $E < m_0 c^2$ და $E > m_0 c^2$

1. განვიხილოთ ჯერ $\Gamma^2 > 0$ შემთხვევა, ე.ი. როცა $|\alpha| < lc$. გარდა ამისა, ვიგულისხმობთ, რომ ადგილი აქვს მიზიდვას, ე.ი. $\alpha > 0$. ამ შემთხვევაში, (49.5) აღნიშვნების თანახმად, $A_1 > 0$; ამიტომ (49.6)-ის ძალით პარამეტრი იქნება დადებითი და (49.13) გამოხა-

ტავს კონუსური კვეთების განტოლებას κ ექსცენტრისიტეტითა და P პარამეტრით, ფოკუსით კოორდინატთა სათავეში. "±" ნიშანი შეესაბამება ტრანექტორიებს, რომელთათვისაც ფოკუსები გადასმულია. რადგან ჩვენ შერჩეული გვაქვს სანყისი პირობა, რომ r_{\min} შეესაბამება $\varphi = 0$ -ს, ამიტომ უნდა ავიღოთ პლუს ნიშანი. ამგვარად, გვექნება

$$r = \frac{P}{1 + \kappa \cos(\Gamma\varphi)}. \quad (49.21)$$

ამ შემთხვევაში კოორდინატთა სისტემა მოთავსებულია მარჯვენა ფოკუსში. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სრული ენერგია

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2} - \frac{|\alpha|}{r} < m_0 c^2, \quad (49.22)$$

მაშინ (49.16) ფორმულის თანახმად $\kappa < 1$, რაც იმას ნიშნავს, რომ (49.21) ტრანექტორია არის ელიფსი. მინიმალური და მაქსიმალური მანძილები განისაზღვრება (49.21) ფორმულიდან. კერძოდ, გვექნება:

$$r_{\min} = r(0) = \frac{P}{1 + \kappa}, r_{\max} = \frac{P}{1 - \kappa}, \quad (49.23)$$

რაც ემთხვევა (49.11) ფორმულებს. ამასთან, არარელატივისტური შემთხვევისაგან განსხვავებით $r_{\max} \neq r(\pi)$. მაქსიმალური მანძილი მიიღება $\varphi = \frac{\pi}{\Gamma}$ მიმართულებით. ცხადია, რომ ელიფსის დიდი ნახევარღერძი განისაზღვრება გამოსახულებით

$$a = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{P}{1 - \kappa^2}; \quad (49.24)$$

მცირე ნახევარღერძი კი ტოლი იქნება

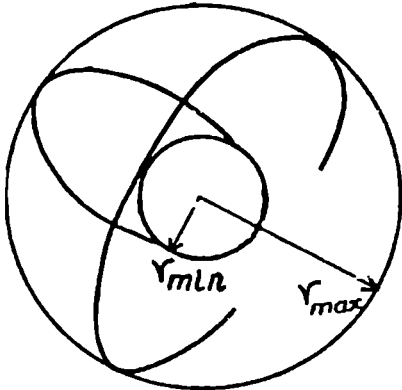
$$b = \sqrt{pa} = \frac{P}{\sqrt{1 - \kappa^2}}. \quad (49.25)$$

განსხვავებით კლასიკური მექანიკისაგან, (49.21) ფორმულით განსაზღვრული $r(\varphi)\Gamma$ მამრავლის არსებობის გამო პერიოდულია არა φ -ს, არამედ $\Gamma\varphi$ -ს მიმართ $r(0) \neq r(2\pi)$. პერიოდულობა გვექნება, როცა $\Gamma\varphi = 2\pi n$, სადაც $n=0, 1, 2, \dots$. მაშასადამე, $r(\varphi)$ პერიოდული იქნება

$$\varphi = \frac{2\pi}{\Gamma} n \quad (49.26)$$

მნიშვნელობებისათვის. რადგან $\Gamma < 1$, ამიტომ $\frac{2\pi}{\Gamma} > 2\pi$

ამგვარად, რელატივისტური მექანიკის თანახმად, ელიფსის



ნახ.39

დიდი ნახევარღერძი ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას. რადიუს-ვექტორი, რომელიც გავლებულია ფოკუსში მოთავსებული მძიმე ნაწილაკიდან მსუბუქისაკენ, ყოველთვის მოთავსებული იქნება ორ წრეს შორის, რომელთა რადიუსებია r_{\min} და r_{\max} (ნახ.39). ე.ი., რელატივისტურ მექანიკაში $-\frac{\alpha l}{r}$ ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯიის შემთხვევაში ტრაექტორია არ არის ჩაკეტილი. ორბიტის ნანაცვლება ერთი მობრუნების

დროს ტოლი იქნება

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{1}{\Gamma} - 1 \right) = 2\pi \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{lc} \right)^2}} - 1 \right\} \quad (49.27)$$

არარელატივისტურ ზღვარში ეს გამოსახულება დაიყვანება სიდიდეზე

$$\Delta\varphi = \frac{\pi\alpha^2}{l^2 c^2} \quad (49.28)$$

მიღებული შედეგი გამოვიყენოთ ნყალბადისებური ატომებისათვის, ე.ი. ისეთი ატომებისათვის, რომლის ატომგული შედგება Z პროტონისაგან, ორბიტაზე კი ბრუნავს ერთი ელექტრონი. რელატივისტური მექანიკის თანახმად, ასეთი ელექტრონი იმოძრაებს ელიფსზე, რომლის ერთ-ერთ ფოკუსში (ჩვენს შემთხვევაში, მარჯ-

ვენა ფოკუსში) იმყოფება ატომის გული. ამავე დროს, ელიფსის დიდი ნახევარღერძის შემობრუნების კუთხე ერთი პერიოდის მანძილზე განისაზღვრება (49.28) ფორმულით. ნყალბადისებური ატომის შემთხვევაში $\alpha = Ze^2$, ამიტომ

$$\Gamma^2 = 1 - \left(\frac{Ze^2}{lc} \right)^2 \quad (49.29)$$

რელატივისტური ეფექტის არსებობა დამოკიდებულია იმაზე, თუ რამდენად განსხვავდება ეს გამოსახულება ერთისაგან. თუ l მომენტს შევცვლით მისი კვანტური მნიშვნელობით $\hbar\sqrt{l(l+1)}$ და გავითვალისწინებთ, რომ ზომერფელდის ნაზი სტრუქტურის მუდ-

მივი $\alpha_0 = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$, მაშინ მივიღებთ

$$\Gamma^2 = 1 - \left\{ \frac{Z}{137\sqrt{l(l+1)}} \right\}^2 \quad (49.30)$$

მაშასადამე, ატომში Γ^2 ყოველთვის დადებითი სიდიდეა (რადგან $Z \leq 92$) და იგი ერთისაგან შეიძლება განსხვავდებოდეს მხოლოდ დიდი Z -ებისათვის. ე.ი. ატომებში რელატივისტური ეფექტები მნიშვნელოვანი შეიძლება აღმოჩნდეს მძიმე ატომების შემთხვევაში.

საინტერესოა რელატივისტური ეფექტის შემონმება პლანეტა მერკურის მაგალითზე, რადგან ცნობილია, რომ მისი ორბიტა ერთი საუკუნის განმავლობაში, მართალია მცირე, მაგრამ მაინც, გარკვეულ კუთხეზე შემობრუნდება.

რადგან რელატივისტურ მექანიკაშიაც ადგილი აქვს იმპულსის მომენტის შენახვას, ამიტომ სამართლიანი იქნება ფართთა კანონი, რომელიც პლანეტის ელიფსზე მოძრაობისათვის მოგვცემს

$$lT = 2m_0 S, \quad (49.31)$$

სადაც T პერიოდია, ხოლო $S = \pi ab$ - ელიფსის ფართი. რადგან $b = a\sqrt{1 - \kappa^2}$, ამიტომ

$$l = 2m_0 \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - \kappa^2}}{T}, \quad (49.32)$$

ხოლო (49.28) მიიღებს სახეს

$$\Delta\varphi \approx \frac{\gamma^2 M_0^2 T^2}{4\pi c^2 a^4 (1 - \kappa^2)}, \quad (49.33)$$

სადაც M_0 მზის უძრავობის მასაა, γ კი გრავიტაციულ მუდმივს ნარმოადგენს. გამოვიყენოთ კეპლერის მესამე კანონიც

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M_0}. \quad (49.34)$$

ამ უკანასკნელიდან განსაზღვრული γM_0 შევიტანოთ (49.33)-ში. საბოლოოდ, გვექნება

$$\Delta\varphi \approx \frac{4\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - \kappa^2)} \quad (49.35)$$

თუ ამ ფორმულაში შევიტანთ a, T, κ მნიშვნელობებს, მერკური-სათვის მივიღებთ $\Delta\varphi \approx 7''$ ას წელიწადში. აღვნიშნოთ, რომ ფარდობითობის ზოგადი თეორიის თანახმად, $\Delta\varphi$ -სათვის მიიღება 6-ჯერ უფრო დიდი მნიშვნელობა.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სრული ენერგია $E \geq m_0 c^2$ მაშინ (49.15)-ის თანახმად $\kappa > 1$ ტრაექტორიას ექნება სახე:

$$r = \frac{P}{1 + \kappa \cos(\Gamma\varphi)}. \quad (\kappa \geq 1) \quad (49.36)$$

არარელატივისტურ ზღვარში, როცა $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, რადგან $\Gamma = 1$ და κ, P პარამეტრები კი განისაზღვრებიან (49.19) და (49.20) ფორმულეებით. (49.36) გამოსახულება ნარმოადგენს ჰიპერბოლას (ან პარაბოლას, როცა $E = m_0 c^2, \kappa = 1$), კოორდინატა სათავით მარჯვენა ფოკუსში. რელატივისტურ შემთხვევაში (49.36) მრუდი ჰგავს ჰიპერბოლას (პარაბოლას), მაგრამ იგი ჰიპერბოლას ემთხვევა მხოლოდ $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ ზღვარში (ნახ. 40). განსხვავებით წინა შემთხვევისაგან, (49.36) შეესაბამება ინფინიტურ მოძრაობას, რამდენადაც $\kappa \geq 1$ -სათვის r შეიძლება უსასრულოდ დიდი გახდეს. ახლა საჭიროა დამატებით ვიზრუნოთ იმაზე, რომ (49.36) გამოსახულების მნიშვნე-

ნელი უარყოფითი არ იყოს. ცხადია, ამისათვის დაცული უნდა იყოს პირობა

$$1 + \kappa \cos(\Gamma\varphi) \geq 0. \quad (49.37)$$

φ_0 -ით აღვნიშნოთ ზღვრული კუთხე, რომლისთვისაც $1 + \kappa \cos(\Gamma\varphi_0) = 0$,

ე.ი. $\cos(\Gamma\varphi_0) = -\frac{1}{\kappa}$, მაშინ

$$\varphi_0 = \frac{1}{\Gamma} \arccos\left(-\frac{1}{\kappa}\right) \quad (49.38)$$

უტოლობა დაცული იქნება ისეთი φ -ებისათვის, რომლებიც მოთავსებული იქნებიან ინტერვალში $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, ე.ი.

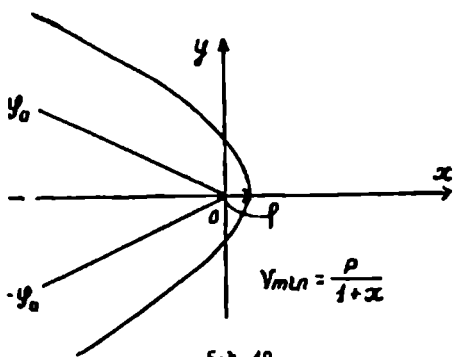
$$-\frac{1}{r} \arccos\left(-\frac{1}{\kappa}\right) \leq \varphi \leq \frac{1}{r} \arccos\left(-\frac{1}{\kappa}\right). \quad (49.39)$$

რადგან $-1 \leq -\frac{1}{\kappa} \leq 0$, ამიტომ $\arccos\left(-\frac{1}{\kappa}\right)$ მოთავსებული იქნება შუალედში

$$\frac{\pi}{2} \leq \arccos\left(-\frac{1}{\kappa}\right) \leq \pi; \quad (49.40)$$

მაშასადამე, $\frac{\pi}{2} \leq \Gamma\varphi_0 \leq \pi$, ე.ი. $2\varphi_0$ არე (ნახ.40) გამორიცხული იქნე-

ბა მოძრაობისათვის. ტრანექტორია იწყება უსასრულობაში, მიზიდვის ცენტრს გარს შემოუვლის და ისევ უსასრულობაში ბრუნდება. მინიმალური მანძილი, რომლითაც ნანილაკი მიუახლოვდება მიზიდვის ცენტრს, ტოლი იქნება გამოსახულების



$$r_{\min} = r(0) = \frac{P}{1 + \kappa}. \quad (49.41)$$

ახლა განვიხილოთ განზიდვის შემთხვევა, ე.ი. როცა $\alpha < 0$. $\alpha < 0$ -სათვის (49.5) -ის თანახმად $A < 0$, ამიტომ (46.6)-ის მიხედვით გვექნება

$$P = -\frac{\Gamma^2}{A} (P > 0) \quad (49.42)$$

და (49.13) განტოლება მოგვცემს ტრაექტორიის შემდეგ სახეს:

$$r = \frac{P}{\kappa \cos(\Gamma\varphi) - 1} \quad (49.43)$$

ამასთან, გარკვეულობის მიზნით შევარჩიეთ " + " ნიშანი. ამ შემთხვევაში სრული ენერგია

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} + \frac{\alpha}{r} \geq m_0 c^2, \quad (49.44)$$

ამიტომ ექსცენტრისიტეტი $\kappa \geq 1$. რადგან $\kappa \geq 1$, ამიტომ საჭიროა ვიზრუნოთ r -ის ნიშანზე. ამისათვის საჭიროა მოვითხოვოთ, რომ

$$\kappa \cos(\Gamma\varphi) - 1 \geq 0. \quad (49.45)$$

ზღვრული φ_0 კუთხე განვსაზღვროთ პირობით $\cos(\Gamma\varphi) = \frac{1}{\kappa}$, საიდანაც

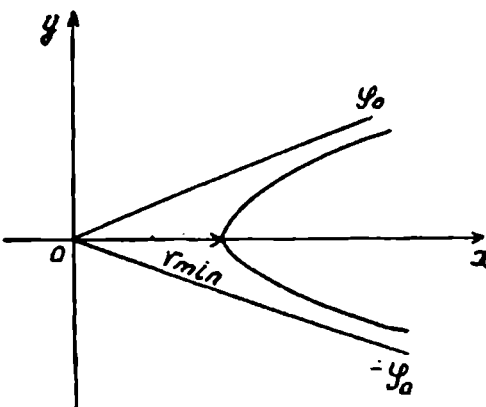
$\varphi_0 = \frac{1}{\Gamma} \arccos \frac{1}{\kappa}$ აღნიშნული უტოლობა დაცული იქნება $|\varphi| \leq \varphi_0$

შემთხვევაში, ე.ი. როცა $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. რადგან $\kappa \geq 1$, ამიტომ

$$0 \leq \frac{1}{\kappa} \leq 1. \text{ ეს კი იმას ნიშნავს, რომ } 0 \leq \arccos \frac{1}{\kappa} \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{რაც, ეკვივალენტურია უტოლობის } 0 \leq \Gamma\varphi_0 \leq \frac{\pi}{2}$$

ამგვარად, (49.43) იქნება ლია მრუდი. ნაწილაკს შეუძლია მოხედეს მხოლოდ $|\varphi| \leq \varphi_0$ არეში. ნაწილაკი მოდის უსასრულობიდან, იგი გარედან ჩაუვლის განმზიდავ ცენტრს და კვლავ უსასრულობაში მიდის (ნახ.41).



ნახ.41

ეს მრუდი არც ჰიპერბოლაა და არც პარაბოლა. იგი მხოლოდ არარელატივისტურ ზღვარში დაემთხვევა ჰიპერბოლას ($\kappa > 1, E > m_0 c^2$)

ან პარაბოლას. ($\kappa = 1, E = m_0 c^2$) მინიმალური მანძილი კვლავ $r(0)$ პირობით განისაზღვრება.

2. ახლა განვიხილოთ $\Gamma^2 < 0$ შემთხვევა, ე.ი. როცა $|\alpha| > lc$. ჯერ ვიგულისხმობთ, რომ ადგილი აქვს მიზიდვას $\alpha > 0$, მაშინ, ცხადია, $A > 0$ და $p = -\frac{\Gamma^2}{A} > 0$. ამავე დროს, $\Gamma = i|\Gamma|$, რის გამოც $\cos(\Gamma\varphi) = \cos(i|\Gamma|\varphi) = \operatorname{ch}(|\Gamma|\varphi)$, სადაც $\operatorname{ch}(|\Gamma|\varphi)$ არის ჰიპერბოლური კოსინუსი. ამგვარად, (49.13) მიიღებს სახეს

$$r = -\frac{p}{1 \pm \kappa \operatorname{ch}(|\Gamma|\varphi)}. \quad (49.46)$$

$\operatorname{ch}(|\Gamma|\varphi)$ ყოველთვის დადებითი სიდიდეა ($\operatorname{ch}x \geq 1$), ამიტომ პლუს ნიშანი მოგვცემს უაზრო შედეგს, რამდენადაც მივიღებდით $r < 0$. ამიტომ ტრანექტორიის განტოლებას ექნება გამოსატყულება

$$r = \frac{p}{\kappa \operatorname{ch}(|\Gamma|\varphi) - 1} \quad (49.47)$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სრული ენერგია $E < m_0 c^2$, მაშინ (49.17)-ის თანახმად $\kappa > 1$.

(49.47) გამოსახულებიდან ჩანს, რომ $r(\varphi)$ აღარ არის პერიოდული ფუნქცია, ამიტომ φ უნდა ვცვალოთ $(0, \infty)$ შუალედში. რადგან $\operatorname{ch}(|\Gamma|\varphi) \geq 1$, ხოლო $\kappa > 1$. ამ შუალედში r ყოველთვის დადებითი იქნება. როცა φ -ს ვზრდით, $r(\varphi)$ იზრდება მონოტონურად, რამდენადაც $\operatorname{ch}(|\Gamma|\varphi)$ ყოველთვის იზრდება. ძალიან დიდი $|\Gamma|\varphi$ -სათვის $\operatorname{ch}(|\Gamma|\varphi) \approx \frac{1}{2} e^{|\Gamma|\varphi}$, ამიტომ (49.47) -დან მივიღებთ

$$r \approx \frac{p}{2\kappa} e^{-|\Gamma|\varphi} (|\Gamma|\varphi \gg 1). \quad (49.48)$$

როგორც ვხედავთ, დიდი $|\Gamma|\varphi$ -სათვის r ნულსაკენ მიისწრაფის

ექსპონენციალურად. ნანილაკი სპირალური ტრაექტორიით ეცემა მიზიდვის ცენტრს (ნახ. 42). ლიმიტაციური მოძრაობის დროს, რო-

გორც მოსალოდნელი იყო, $r(0)$ შეესაბამება მაქსიმალურ მანძილს.

კერძოდ, გვექნება $r_{\max} = \frac{P}{\kappa - 1}$.

ამგვარად, $E < m_0 c^2$ შემთხვევაში (49.47) ტრაექტორია შეესაბამება ლიმიტაციურ მოძრაობას. ეს ასეც უნდა ყოფილიყო, რამდენადაც ცენტრალურ ველში მოძრაობის ზოგადი ხასიათის დადგენის დროს, ჩვენ დავინახეთ, რომ $|\alpha| > 1c$ შემთხვევაში, ლიმიტაციური მოძრაობა დასაშვებია.

როცა $\Gamma^2 < 0$ და $E \geq m_0 c^2$, მაშინ ეს შემთხვევა შეესაბამება (49.22) სრული ენერგიის გამოსახულებაში ფესვის ნიშნის ნიშნის

ნაცვლად " — " ნიშნის აღებას. ამ შემთხვევაში სრული ენერგიის

$$-\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} - \frac{|\alpha|}{r} = \text{const} \quad (49.49)$$

მინუს ერთზე გამრავლებით მივიღებთ

$$\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} + \frac{|\alpha|}{r} = \text{const} , \quad (49.50)$$

ე.ი. ნანილაკი მიზიდვის ველში ისე მოძრაობს, თითქოს იგი განზიდვის ველი ყოფილიყო. შევნიშნოთ, რომ კლასიკურ მექანიკაში ნანილაკები, რომელთაც უარყოფითი კინეტიკური ენერგია ექნებოდათ, არ არსებობენ. ასეთ ნანილაკებს ექნებოდათ უცნაური თვისებები, რომელთაც ადვილად შევამჩნევდით. ასე, მაგალითად, უარყოფითი კინეტიკური ენერგიის ნანილაკები ძალის მინიჭებით კი არ აჩქარდებოდნენ, არამედ, პირიქით, შენელებოდნენ და სხვ. გარდა ამისა, უარყოფითი კინეტიკური ენერგიის ნანილაკები კიდევაც რომ არსებობდნენ, ისინი ენერგიის დადებით მნიშვნელობებს ვერავითარ შემთხვევაში ველარ მიიღებდნენ, რადგან ამისათ-

ვის მათ დასჭირდებოდათ ენერგეტიკული ნახტომის გაკეთება, კერძოდ, ამ ნახტომის მინიმალური მნიშვნელობა ტოლი იქნებოდა $m_0c^2 - (-m_0c^2) = 2m_0c^2$, ე. ი. ნანილაკის გაორკეცებული უძრაობის ენერგიისა. კლასიკურ მექანიკაში ყველა ფიზიკური სიდიდე და მათ შორის ენერგია, უწყვეტად იცვლება ("ბუნებამ ნახტომები არ იცის!"), ამიტომ კლასიკურ მექანიკაში ნანილაკს არ შეიძლება ჰქონდეს უარყოფითი კინეტიკური ენერგია.

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ $\Gamma^2 < 0$ შემთხვევა, როგორც ეს ჩანს (49.30) ფორმულიდან, ატომებში არ ხორციელდება.

3. განვიხილოთ მესამე შემთხვევა, როცა $\Gamma^2 = 0$, ე. ი. როცა $|\alpha| = lc$. ამ შემთხვევაში, ცხადია, $\kappa = 1$.

უშუალოდ (49.3) ფორმულიდან $|\alpha| = lc$ შემთხვევაში მარტივად მივიღებთ

$$-\frac{2\alpha E}{r} = E^2 - m_0^2c^4 - \left(\frac{\alpha E}{lc}\right)^2 (\varphi - \varphi_0)^2 \quad (49.51)$$

სანყისი პირობა ისე შევარჩიოთ, რომ $\varphi_0 = 0$, მაშინ ტრაექტორიისათვის საბოლოოდ მივიღებთ განტოლებას

$$r = \frac{2\alpha E}{(m_0^2c^4 - E^2) + \left(\frac{\alpha E}{lc}\right)^2 \varphi^2} \quad (49.52)$$

განვიხილოთ მიზიდვა $\alpha > 0$, მაშინ $E \leq m_0c^2$ მნიშვნელობისათვის მივიღებთ

$$r = \frac{2|\alpha|E}{|m_0^2c^4 - E^2| + \left(\frac{\alpha E}{lc}\right)^2 \varphi^2}, \quad (49.53)$$

რომელიც წარმოადგენს სპირალს. φ -ს მისწრაფებით უსასრულობისაკენ $r \rightarrow 0$ ხვიის სახით. მაქსიმალური მანძილი გვექნება $\varphi = 0$ მნიშვნელობის დროს $r_{\max} = r(0) = 2|\alpha|E / |m_0^2c^4 - E^2|$. როცა $E > m_0c^2$, მაშინ

$$r = \frac{2|\alpha|E}{-(E^2 - m_0^2 c^4) + \left(\frac{\alpha E}{lc}\right)^2 \varphi^2} \quad (49.54)$$

ამ შემთხვევაში φ კუთხე შემოსაზღვრულია. იგი ყოველთვის მეტია რალაც φ_0 ზღვრულ მნიშვნელობაზე, რომელიც განისაზღვრება პირობით:

$$\varphi_0 = \pm \left(\frac{lc}{\alpha E}\right) \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E}\right)^2} \quad (49.55)$$

მიიღება ტრანექტორია, რომელიც გარს უელის მიზიდვის ცენტრს. განზიდვის შემთხვევაში $\alpha = -|\alpha|$, გვექნება

$$r = \frac{2|\alpha|E}{(E^2 - m_0^2 c^4) - \left(\frac{\alpha E}{lc}\right)^2 \varphi^2} \quad (49.56)$$

ამ გამოსახულებიდან ნათლად ჩანს, რომ ენერგიისათვის $E < m_0 c^2$ მნიშვნელობა დაუშვებელია. როცა $E > m_0 c^2$, მაშინ φ ნაკლები უნდა იყოს φ_0 -ზე. $r(0)$ მნიშვნელობა დასაშვებია და განსაზღვრავს r_{\min} -ს, ე. ი.

$$r_{\min} = r(0) = \frac{2|\alpha|E}{E^2 - m_0^2 c^4} \cdot (E > m_0 c^2) \quad (49.57)$$

ტრანექტორია მსალიანად მოქცეულია φ_0 და $-\varphi_0$ - ასიმპტოტებს შორის.

დაბოლოს აღვნიშნოთ, რომ ინფინიტური მოძრაობის შემთხვევაში (48.43) ფორმულის გამოყენებით (49.1) ურთიერთქმედებისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ასიმპტოტის განტოლება. მაგრამ ასიმპტოტის განტოლებას უფრო ადვილად ვიპოვით ტრანექტორიის განტოლებაში $r = \infty$ დაშვებით. შედეგად მივიღებთ

$$\cos(\Gamma \varphi_0) = \pm \frac{1}{\kappa} \quad (49.58)$$

ამ გამოსახულებას გამოვიყენებთ კულონურ ველში ნანილაკთა გაფანტვის ამოცანის შესწავლის დროს.

რელატივისტური მექანიკის ერთ-ერთ უშუალო დასაბუთებას წარმოადგენს წყალბადის ატომის სპექტრის ნაზი სტრუქტურის არსებობა. რადგან ოპტიკური სპექტროსკოპია საკმარისად მაღალ დონეზეა განვითარებული, ამიტომ მისი საშუალებით შეიძლება დავაკვირდეთ სულ უმნიშვნელო ეფექტებსაც კი, რელატივისტური ეფექტების აღმოჩენა ამ მეთოდით ყველაზე უფრო ხელსაყრელია.

თანამედროვე კვანტური მექანიკით, რომელიც ატომის მექანიკას წარმოადგენს, ადვილად აიხსნება ატომის შიგნით მიმდინარე პროცესები, მათ შორის ატომის სპექტრები. ეს მექანიკა განსხვავდება კლასიკური მექანიკისაგან და წარმოადგენს თვისობრივად ახალ თეორიას. კვანტური მექანიკა ბრწყინვალედ აღწერს ისეთ მოვლენებს, რომლებიც ეხება მცირე სიჩქარეებით მოძრაობას. ამასთან მცირე სიჩქარეებში იგულისხმება მცირე-სინათლის სიჩქარესთან შედარებით. რაც შეეხება დიდი სიჩქარეებით მოძრაობას, ამ შემთხვევაში, სამართლიანია რელატივისტური კვანტური მექანიკა. რელატივისტური კვანტური მექანიკით ადვილად აიხსნება ყველა რელატივისტური ეფექტი, მათ შორის წყალბადის ატომის სპექტრის ნაზი სტრუქტურაც. მაგრამ წყალბადის ატომის ნაზი სტრუქტურის ძირითადი თავისებურებანი ახსნილი იყო ზომერფელდის მიერ მანამდე, სანამ რელატივისტური კვანტური მექანიკა ჩამოყალიბდებოდა ბორის ელემენტარულ კვანტურ თეორიაზე დაყრდნობით. ზომერფელდის თეორიას ამჟამად მხოლოდ ისტორიული მნიშვნელობაა გააჩნია, მაგრამ იმის დასამტკიცებლად, რომ ატომური მოვლენების ასახსნელად აუცილებელია ფარდობითობის თეორიის გათვალისწინება, ჩვენთვის სრულიად საკმარისია.

გავიხსენოთ რაში მდგომარეობს წყალბადის ატომის ნაზი სტრუქტურა. ცნობილია, რომ ბორის დაკვანტვის პირობა განზოგადებული იყო ზომერფელდის მიერ შემდეგი სახით:

$$\oint p_i dq_i = 2\pi n_i \hbar, \quad (50.1)$$

სადაც p_i არის სისტემის განზოგადებული იმპულსი, q_i კი განზოგადებული კოორდინატი. n_i -ს ეწოდება კვანტური რიცხვი და

$n_i = 1, 2, \dots, \infty$, $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-27}$ ერგი. სეკ. პლანკის ცნობილი მუდმივაა. მაგალითად, ცენტრალურ ველში მოძრაობისას (50.1) დაკვანტვის პირობა მოგვცემს

$$\begin{aligned} \oint P_r dr &= 2\pi n_r \hbar, \\ \oint P_\phi d\phi &= 2\pi n_\phi \hbar, \end{aligned} \quad (50.2)$$

სადაც P_r და P_ϕ რადიალური და აზიმუტური განზოგადებული იმპულსებია, n_r -ს ენოდება რადიალური, ხოლო n_ϕ -ს აზიმუტური კვანტური რიცხვები. კარგად არის ცნობილი, რომ ამ ორი პირობიდან წყალბადისებური ატომის (ე.ი. ისეთი ატომის, რომლის ერთი ელექტრონი მოძრაობს $+Ze$ მუხტის მქონე ატომის გულის ველში) ენერჯიისათვის მივიღებთ ბორის ცნობილ გამოსახულებას

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m_0}{2n^2 \hbar^2}, \quad (50.3)$$

სადაც m_0 ელექტრონის უძრაობის მასაა; ამასთან, იგულისხმება, რომ ატომგულის მასა უსასრულოდ დიდია. e არის ელექტრონის მუხტის სიდიდე, ხოლო $n = r_r + r_\phi$ — კვანტური რიცხვია. ატომის მიერ გამოსხივებული სინათლე, როცა ელექტრონი m მდგომარეობიდან გადადის n მდგომარეობაში, განისაზღვრება ბორის სიხშირეთა პირობით:

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar} = \frac{m_0 e^4}{2\hbar^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (50.4)$$

ამ ფორმულით განსაზღვრული წყალბადის ატომის სპექტრი დაემთხვა ექსპერიმენტულად დაკვირვებულ სპექტრს. მაგრამ სპექტროსკოპიის განვითარების შედეგად აღმოჩნდა, რომ (50.4) ფორმულით განსაზღვრული სპექტრული ხაზების გარდა არსებობს დამატებითი ხაზები, რომლებიც ადრინდელი სპექტრომეტრებით არ დაიმზირობდა. ამ მოვლენას უწოდებენ, სწორედ, სპექტრის ნაზ სტრუქტურას.

ზომერფელდის თანახმად, წყალბადისებური ატომის სპექტრის ნაზი სტრუქტურა შედეგია ელექტრონის მოძრაობისა ატომში დიდი სიჩქარით და ამიტომ საჭიროა ფარდობითობის თავისებურებების გათვალისწინება. ამ მიზნით, ზომერფელდმა ამოხსნა წყალბადისებური ატომის ამოცანა რელატივისტურ მექანიკაზე დაყრდნობით.

წყალბადისებურ ატომში $-e$ მუხტის ელექტრონისა და ატომგულის $+Ze$ მუხტს შორის ურთიერთქმედების პოტენციალურ

ენერგიას აქვს შემდეგი სახე:

$$u(r) = -\frac{Ze^2}{r}, \quad (50.5)$$

სადაც Z არის პროტონების რიცხვი ატომის გულში.

დავწეროთ შამილტონ-იაკობის რელატივისტური განტოლება სტაციონარული მდგომარეობისათვის. (48.9) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left\{E + \frac{Ze^2}{r}\right\}^2 + m_0^2 c^2 = 0 \quad (50.6)$$

რამდენადაც ცენტრალურ ველში $P_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \text{const}$ წარმოადგენს იმპულსის მომენტს, ამდენად (50.6) ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)^2 - \frac{P_\varphi^2}{r^2} - m_0^2 c^2, \quad (50.7)$$

აქედან, საბოლოოდ, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$P_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}}, \quad (50.8)$$

სადაც შემოვიღეთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$A = \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2}, \quad B = \frac{Ze^2 E}{c^2}, \quad C = \frac{Z^2 e^4 - p_\varphi^2 c^2}{c^2}. \quad (50.9)$$

ახლა გამოვიყენოთ ზომერფელდის დაკვანტვის პირობები. რადგან $P_\varphi = \text{const}$, ამიტომ (50.2)-დან P_φ -სათვის მივიღებთ დაკვანტვის შემდეგ პირობას:

$$P_\varphi = n_\varphi \hbar. \quad (50.10)$$

რადიალური იმპულსის (50.8) გამოსახულების შეტანით (50.2) -ის პირველ ფორმულაში, გვექნება

$$\oint \sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}} dr = 2\pi n_r \hbar. \quad (50.11)$$

ეს ინტეგრალი ნაშთთა თეორიის გამოყენებით ამოხსნილი იყო ზომერფელდის მიერ.¹ იგი ტოლია

¹ А Зомерфельд. Строение атома и спектры. Госиздат, М., 1956. გვ. 585.

$$-2\pi i \left(\sqrt{C} - \frac{B}{\sqrt{A}} \right) = 2\pi i \hbar. \quad (50.12)$$

(50.9) აღნიშვნებისა და (50.10) დაკვანტვის პირობის გამოყენებით ადვილად ვაჩვენოთ, რომ

$$-i\sqrt{C} = -\hbar \sqrt{n_{\phi}^2 - Z^2 \alpha_0^2}, \quad (50.13)$$

სადაც

$$\alpha_0 = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (50.14)$$

არის ზომერფელდის ნაზი სტრუქტურის ცნობილი კოეფიციენტი, რომელიც უნივერსალურ მუდმივას წარმოადგენს და რიცხობრივად უდრის $\alpha_0 = 1/137,03$. ეს კოეფიციენტი ფუნდამენტურ როლს ასრულებს მთელს თანამედროვე ფიზიკაში.

ასევე გვექნება

$$\frac{B}{\sqrt{A}} = \frac{Ze^2}{c} \left\{ 1 + \left(\frac{m_0 c^2}{E} \right)^2 \right\}^{-1/2} \quad (50.15)$$

მაშასადამე, (50.12) გამოსახულება მიიღებს სახეს

$$\frac{E}{m_0 c^2} = \left\{ 1 + \left(\frac{Z\alpha_0}{N} \right)^2 \right\}^{-1/2} \quad (50.16)$$

სადაც

$$N = n_r + \sqrt{n_{\phi}^2 - (Z\alpha_0)^2} \quad (50.17)$$

არარელატივისტურ ზღვარზე გადასვლისათვის ხელსაყრელია, ნაცვლად E -სი შემოვიღოთ მოძრაობის ენერგია $W = E - m_0 c^2$, მაშინ

$$W = -m_0 c^2 + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{Z\alpha_0}{N} \right)^2}}. \quad (50.18)$$

$\alpha_0 \ll 1$, ამიტომ, თუ Z ძალიან დიდი არაა, ჩვენ შეგვიძლია (50.18) ფორმულაში მოვახდინოთ მწკრივად გაშლა. ამასთან, α_0 კოეფიციენტი (50.18) საკმარისად რთულად შედის, ამიტომ ეს გაშლა

მოვასდინოთ ეტაპობრივად. ჯერ გავშალოთ ფესვი ისე, რომ N -ს ყურადღება არ მივაქციოთ. გვექნება

$$\left\{1 + \left(\frac{Z\alpha_0}{N}\right)^2\right\}^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0 Z}{N}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{\alpha_0 Z}{N}\right)^4 - \dots + \quad (50.19)$$

ახლა გავშალოთ N ; გვექნება

$$N = n_r + n_\phi - \frac{1}{2n_\phi}(Z\alpha_0)^2 + \dots + n - \frac{1}{2n_\phi}(Z\alpha_0)^2 + \dots + \quad (50.20)$$

სადაც

$$n = n_\phi + n_r. \quad (50.21)$$

გარდა ამისა,

$$\frac{1}{N^2} = \left[n - \frac{1}{2n_\phi}(Z\alpha_0)^2 + \dots + \right]^2 = \frac{1}{N^2} \left[1 + \frac{1}{nn_\phi}(\alpha_0 Z)^2 + \dots + \right]. \quad (50.22)$$

ხოლო

$$\frac{1}{N^4} + \frac{1}{n^4} + \dots + \quad (50.23)$$

მაშასადამე, (50.19) გაშლას საბოლოოდ ექნება გამოსატულება

$$\left\{1 + \left(\frac{Z\alpha_0}{N}\right)^2\right\}^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{(\alpha_0 Z)^2}{n^2} - \frac{1}{2} \frac{(\alpha_0 Z)^4}{n^4} \left(\frac{n}{n_\phi} - \frac{3}{4} \right) + \dots +, \quad (50.24)$$

საიდანაც ენერგიისათვის საბოლოოდ გვექნება

$$W = - \frac{(\alpha_0 Z)^2 m_0 c^2}{2n^2} \left\{ 1 + \frac{(\alpha_0 Z)^2}{n^2} \left(\frac{n}{n_\phi} - \frac{3}{4} \right) + \dots + \right\} \quad (50.25)$$

ან, (50.14) აღნიშვნის გათვალისწინებით, შეგვიძლია დავწეროთ

$$W_{n, n_\phi} = - \frac{Z^2 e^4 m_0}{2n^2 \hbar^2} \left\{ 1 + \frac{(\alpha_0 Z)^2}{n^2} \left(\frac{n}{n_\phi} - \frac{3}{4} \right) + \dots + \right\}. \quad (50.26)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, რომ პირველი წევრი შეესაბამება ბორის წყალბადისებური ატომის ენერგიას, რამდენადაც იგი ემთხვევა (50.3) გამოსახულებას. (50.26)-ში მეორე წევრი წარმოადგენს რელატივისტურ შესწორებას. α_0^2 წევრის გამო, ეს შესწორება ძალიან

მცირე სიდიდე იქნება. როგორც ვხედავთ, წყალბადისებური ატომის ენერგია, რელატივისტური შესწორების წყალობით, დამოკიდებულია არა მხოლოდ მთავარ n კვანტურ რიცხვზე, როგორც ეს გვექონდა ბორის თეორიაში, არამედ აზიმუტურ n_{ϕ} კვანტურ რიცხვზედაც (ამიტომაც გავუკეთეთ W -ს ორი ინდექსი). ეს იმას ნიშნავს, რომ ენერგეტიული დონეები ერთი და იმავე n კვანტური რიცხვით ერთმანეთისაგან ნანაცვლებულია, რაც სპექტრში ინვეს სპექტრალური ხაზების გახლეჩას. სწორედ ამ გახლეჩას უწოდებს სპექტრის ნაზი სტრუქტურა.

სპექტრული ხაზის გახლეჩის რიცხვითი მნიშვნელობის დასადგენად განვიხილოთ ბალმერის (ხილული) სერიის შემთხვევა. ამ დროს გადასვლები ხდება $n=2$ დონეზე და n_{ϕ} -ს ექნება ორი მნიშვნელობა: $n_{\phi} = 1$ და $n_{\phi} = 2$. ვიპოვოთ ამ შემთხვევის შესაბამისი ენერგეტიკული წყალბადის ატომისათვის ($Z=1$); გვექნება

$$W_{20} = -\frac{e^4 m_0}{8\hbar^2} \left(1 + \frac{5}{16} \alpha_0^2 \right) \quad (50.27)$$

და

$$W_{21} = -\frac{e^4 m_0}{8\hbar^2} \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{16} \right) \quad (50.28)$$

მაშასადამე, ამ ორ ენერგეტიკულ დონეს შორის სხვაობა (გახლეჩის სიდიდე) ტოლი იქნება

$$\Delta W = W_{21} - W_{20} = \frac{e^4 m_0}{32\hbar^2} \alpha_0^2. \quad (50.29)$$

ენერგიის ეს სხვაობა აპრობებს სპექტრის დუბლეტურ სტრუქტურას, რომლის ხაზებს შორის მანძილი მუდმივი სიდიდეა მთელი სერიისათვის. კერძოდ, იგი ტოლი იქნება

$$\Delta W = \frac{\Delta W}{\hbar} = \frac{e^4 m_0}{32\hbar^3} \alpha_0^2 \quad (50.30)$$

რიცხვითი მნიშვნელობების ჩასმა მოგვცემს $\Delta \omega = 6,92 \cdot 10^{10}$ სექ⁻¹,

რაც ძალიან მცირე სიდიდეა ძირითად $\frac{W_{10}}{\hbar} = \frac{e^4 m_0}{2\hbar^3}$ თერმთან

შედარებით. კერძოდ, იგი მცირე იქნება $\left(\frac{\alpha_0}{4}\right)^2 \approx 3,33 \cdot 10^{-6}$ -ჯერ.

სპექტრული ხაზის გახლეჩის სიდიდე საკმარისად ასლოა ექსპერიმენტულ მნიშვნელობასთან, მაგრამ ნყალბადის ატომის სპექტრს ახასიათებს სხვა თავისებურებანიც, რომელთა ახსნა შეუძლებელია კვანტური მექანიკის გარეშე.

§ 51. დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობა ელექტრულ ველში

ვთქვათ, ნაწილაკი, რომლის მუხტი e -ს ტოლია, ხოლო მასა m_0 , მოძრაობს ერთგვაროვან მუდმივ ელექტრულ ველში. რადგან მუხტზე მოქმედი ელექტრული ძალა $e\vec{E}$ -ს ტოლია, სადაც \vec{E} ელექტრული დაძაბულობის ვექტორია, ამიტომ მოძრაობის რელატივისტური განტოლება ასე დაინერება:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}. \quad (51.1)$$

ათელის სისტემის y ღერძი მივმართოთ ელექტრული დაძაბულობის \vec{E} ვექტორის გასწვრივ. მაშინ ამ სისტემაში $\vec{E} = \vec{E}(0, \epsilon, 0)$. (51.1) მოძრაობის განტოლება ამოვხსნათ შემდეგი საწყისი პირობით: როცა $t=0$

$$\vec{p} = \vec{p}_0, (t=0) \quad (51.2)$$

ამიტომ მოძრაობის განტოლების ამონახსნს ექნება სახე

$$\vec{p} = e\vec{E}t + \vec{p}_0, \quad (51.3)$$

მოძრაობა იქნება ბრტყელი. მოძრაობის სიბრტყედ ავირჩიოთ xy სიბრტყე, ე.ი. z ღერძი მართობი იქნება ტრაექტორიის სიბრტყის. მაშასადამე, გვექნება $z=0$, $p_z=0$. ნულისაგან განსხვავებული იქნება მხოლოდ x და y კომპონენტები. ჯერ ვიპოვოთ ნაწილაკის სინქარე. ამ მიზნით გამოვიყენოთ რელატივისტური სინქარის განმარტება

$$\vec{v} = \frac{c^2}{E} \vec{p} \quad (51.4)$$

(51.3) გამოსახულების გამოყენებით მივიღებთ

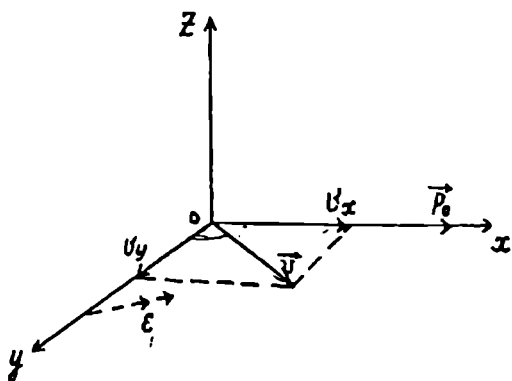
$$\vec{v} = c^2 \frac{\vec{p}_0 + e\vec{E}t}{\sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 |\vec{p}_0 + e\vec{E}t|^2}}. \quad (51.5)$$

როცა $t=0$, მაშინ

$$E_0^2 = m_0^2 c^4 + c^2 P_0^2 \quad (51.6)$$

ნარმოადგენს ნანილაკის სანყის ენერჯიას.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $(\vec{p}_0, \vec{E}) = 0$, ე.ი. როცა \vec{p}_0 სან-



ნახ.43

რის მდგენლებისათვის, თანახმად (51.5) და (51.6) ფორმულებისა, გვექნება

$$v_x = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{E_0^2 + (e\epsilon t c)^2}}; \quad (51.7)$$

$$v_y = \frac{e\epsilon t c^2}{\sqrt{E_0^2 + (e\epsilon t c)^2}}. \quad (51.8)$$

როგორც ვხედავთ, დროის გაზრდით v_x მცირდება. კუთხე, რომელსაც ტრაექტორია ადგენს x ღერძთან-დროის t მომენტში, ტოლი იქნება

$$\text{tg}\theta(t) = \frac{v_x}{v_y} = \frac{e\epsilon t}{p_0} \quad (51.9)$$

დროის t_0 მონაკვეთი, რომელიც საჭიროა ველში a მანძილის გასაწვლელად (51.7)-ის მიხედვით, ტოლია

$$a = \int_0^{t_0} \frac{p_0 c^2 dt}{\sqrt{E_0^2 + (e\epsilon t c)^2}} \quad (51.10)$$

ამ მარტივი ინტეგრალის ამოხსნით მივიღებთ

$$a = \frac{p_0 c}{e\epsilon} \operatorname{Arsh} \left(\frac{e\epsilon c t_0}{E_0} \right), \quad (51.11)$$

საიდანაც

$$t_0 = \frac{E_0}{a e c} \operatorname{sh} \left(\frac{e\epsilon a}{p_0 c} \right). \quad (51.12)$$

(51.5) ფორმულის მიხედვით, სანყისი \bar{v}_0 სიჩქარე ტოლი იქნება

$$\bar{v}_0 = c^2 \frac{\bar{p}_0}{E_0}. \quad (v_0 < c). \quad (51.13)$$

როგორი იქნება ველში მოძრავი ნაწილაკის სიჩქარე უსასრულოდ დიდი დროის შემდეგ კლასიკური მექანიკის თანახმად, ეს სიჩქარე ტოლი იქნება უსასრულობის. რელატივისტური მექანიკის თანახმად კი, (51.5) ფორმულა $t \rightarrow \infty$ -სათვის მოგვცემს.

$$\bar{v} = c \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon} \frac{c}{|e|} \quad (51.14)$$

ე. ი. \bar{v} სიდიდით ტოლი იქნება c -სი, ხოლო მიმართულებას განსაზღვრავს მუხტის ნიშანი.

როცა ნაწილაკი ველში შედის $\bar{p}_0 = 0$ იმპულსით, მაშინ (51.5) -დან

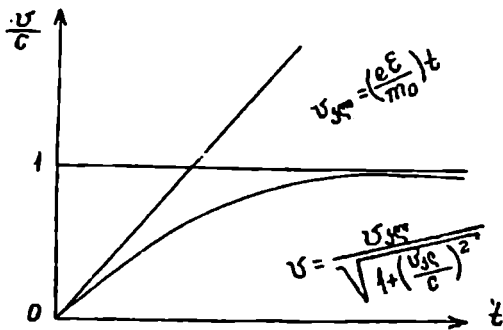
$$v = \frac{\left(\frac{e\epsilon t}{m_0} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{e\epsilon t}{m_0 c} \right)^2}}. \quad (51.15)$$

არარელატივისტურ ზღვარში ეს გამოსახულება დაიყვანება სიჩქარის ცნობილ ფორმულაზე

$$v_{\text{კლ}} = \left(\frac{e\epsilon}{m_0} \right) t. \quad (51.16)$$

ამ ორი სიჩქარის გრაფიკი მოცემულია ნახ. 44-ზე.

როცა $t \rightarrow \infty$, ნანილაკის სიჩქარე მიისწრაფვის სინათლის სიჩქარისაკენ. კლასიკური მექანიკის თანახმად, v_x -ის გრაფიკი შეესაბამება სიჩქარის ცვლილებას დროის მიხედვით. როგორც ვხედავთ, რელატივისტური სიჩქარე მცირეა v_x -თან შედარებით. ახლა, უშუალოდ ვიპოვოთ ტრაექტორია.



ნაბ.44

ამ მიზნით ვაინტეგრირებთ განტოლებას

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t). \quad (51.17)$$

გვექნება

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt, \quad (51.18)$$

სადაც \vec{r}_0 არის რადიუსვექტორის მნიშვნელობა $t=0$ მომენტში. თუ ნანილაკი მოძრაობას იწყებს სათავედან, მაშინ $\vec{r}_0 = 0$ და (51.5) გამოხატულების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\vec{r} = \int_0^t \frac{c^2(\vec{p}_0 + e\vec{E}t) dt}{\sqrt{m_0^2 c^4 + c^2|\vec{p}_0 + e\vec{E}t|^2}} \quad (51.19)$$

კვლავ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $(\vec{E}, \vec{p}_0) = 0$, მაშინ თუ შემოვიღებთ ახალ ცვლადს

$$eEt = E_0 sh\varphi, \quad dt = \frac{E_0}{eEc} ch\varphi d\varphi, \quad (51.20)$$

სადაც E_0 განმარტებულია (51.6) ფორმულით, გვექნება

$$\vec{r} = \frac{c^2}{eEc} \int_0^\varphi \left(\vec{p}_0 + \frac{e\vec{E}E_0}{eEc} sh\varphi \right) d\varphi, \quad (51.21)$$

საიდანაც ვიპოვით ტრაექტორიას

$$\vec{r} = \frac{c^2 \bar{p}_0}{e\epsilon c} \varphi + \frac{E_0 \bar{e}}{e\epsilon^2} (ch\varphi - 1) \quad (51.22)$$

როცა \bar{p}_0 არჩეული გვაქვს x ღერძის გასწვრივ, მაშინ (51.22)-ის დაგეგმილება x და y ღერძებზე მოგვცემს

$$x = \frac{cp_0}{e\epsilon} \varphi, \quad (51.23)$$

$$y = \frac{E_0}{e\epsilon} (ch\varphi - 1). \quad (51.24)$$

ამ ორი ფორმულიდან φ -ს გამორიცხვით საბოლოოდ მივიღებთ

$$y = \frac{E_0}{e\epsilon} \left\{ ch \left(\frac{e\epsilon}{cp_0} x \right) - 1 \right\} \quad (51.25)$$

(51.20) აღნიშვნის ძალით

$$E = \sqrt{E_0^2 + (ce\epsilon t)^2} = E_0 \sqrt{1 + sh^2 \varphi} = E_0 ch \varphi, \quad (51.26)$$

ამიტომ (51.25) -დან

$$E - E_0 = e\epsilon y, \quad (51.27)$$

რომელიც წარმოადგენს ცოცხალი ძალის კანონს; მართლაც, მარცხნივ ჩვენ გვაქვს კინეტიკური ენერჯიის ნაზრდი, მარჯვნივ კი ელექტრული ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა. რამდენადაც მუშაობა ტოლია $(\vec{F}, \vec{r}) = e(\vec{E}, \vec{r}) = e\epsilon y$.

ახლა გამოვარკვიოთ, რას წარმოადგენს (51.25) ტრაექტორია. ჯერ ვიპოვოთ არარელატივისტური ზღვარი. როცა $c \rightarrow \infty$, მაშინ, შიპერბოლურად კოსინუსის არგუმენტი ნულისაკენ მიისწრაფვის, ე.ი. (51.25) -ის ფიგურულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება ნულისაკენ მიისწრაფვის; რადგან $c \rightarrow \infty$ -სათვის $E_0 \rightarrow \infty$, ამიტომ გვექნება განუზღვრელობა. მის გასახსნელად მცირე არგუმენტებისათვის კოსინუს შიპერბოლური გავშალოთ მწკრივად.

გვექნება $ch\varphi = 1 + \frac{1}{2}\varphi^2 + \dots$, ამიტომ

$$y = \frac{E_0}{e\epsilon} \left(\frac{1}{2} \frac{e^2 \epsilon^2}{c^2 p_0^2} x^2 \right) \quad (51.28)$$

არარელატივისტურ ზღვარში $E_0 = m_0 c^2$, $\vec{p}_0 = m_0 \vec{v}$, ამიტომ საბოლოოდ გვექნება

$$y = \frac{eE}{2m_0 v^2} x^2 \quad (51.29)$$

მივიღეთ კლასიკური მექანიკის შედეგი, რომ დამუხტული ნაწილაკი ერთგვაროვან მუდმივ ელექტრულ ველში მოძრაობს პარაბოლაზე.

(51.25) რელატივისტური მრუდი უფრო ჩქარა იზრდება x -ის ზრდისას, ვიდრე (51.29) კლასიკური. კერძოდ, დიდი x -ებისათვის (51.25)-დან მივიღებთ

$$y = \frac{E_0}{2eE} e^{\frac{eE}{m_0 c} x} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (51.30)$$

ე.ი. მრუდი ექსპონენციალურად იზრდება; აღსანიშნავია, რომ ელექტრულ ველში მოძრავი დამუხტული ნაწილაკის ტრაექტორიის დადგენით შეგვიძლია შევამოწმოთ, თუ რამდენად განსხვავდება დიდი სიჩქარეების შემთხვევაში რელატივისტური მოძრაობა არარელატივისტური მოძრაობისაგან.

§ 52. დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობა მუდმივ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში

განვიხილოთ m_0 მასისა და e მუხტის მქონე ნაწილაკის მოძრაობა მუდმივ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში. ათვლის სისტემის z ღერძი ავირჩიოთ მაგნიტური ველის \vec{H} დაძაბულობის ვექტორის გასწვრივ, მაშინ \vec{H} -ს ექნება კომპონენტები $\vec{H} = \vec{H}(0,0,H)$. თუ გავიხსენებთ მუხტზე მოქმედი მაგნიტური ძალის გამოხატულებას, რელატივისტური მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{H}]. \quad (52.1)$$

რადგან

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2}, \quad (52.2)$$

და ენერგია ინახება, ამიტომ

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{ec}{E} [\bar{v}, \bar{H}], \quad (52.3)$$

საიდანაც ღერძებზე დაგეგმილებით მივიღებთ განტოლებებს:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{ecH}{E} v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{ec}{E} v_x, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (52.4)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Omega = \frac{ecH}{E}. \quad (52.5)$$

ამ სიდიდეს აქვს სიხშირის განზომილება. არარელატივისტურ ზღვარში, როცა $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, $E \doteq m_0 c^2$ და გვექნება

$$\omega = \frac{eH}{m_0 c}. \quad (v \ll c) \quad (52.6)$$

მაშასადამე, რელატივისტური სიხშირე

$$\Omega = \omega \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (52.7)$$

ამ აღნიშვნის გათვალისწინებით (52.4) მიიღებს სახეს

$$\dot{v}_x = \Omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\Omega v_x, \quad v_z = v_{0z} = const. \quad (52.8)$$

პირველი განტოლების განარმოებით დროითი და მეორის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\ddot{v}_x + \Omega^2 v_x = 0, \quad v_y = \frac{1}{\Omega} \dot{v}_x; \quad (52.9)$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos(\Omega t + \alpha), \\ v_y &= -v_0 \sin(\Omega t + \alpha), \end{aligned} \quad (52.10)$$

სადაც v_0 ამპლიტუდა და α სანყისი ფაზა განისაზღვრება სანყისი პირობებით. ცხადია, რომ

$$v_0^2 = v_x^2 + v_y^2 = const, \quad (52.11)$$

ე.ი. v_0 ყოფილა ნანილაკის სიჩქარის სიდიდე xoy სიბრტყეში. აღსანიშნავია, რომ მუდმივია აგრეთვე v_x -იც. ასე რომ, $v^2 = v_0^2 + v_x^2 = const$, ე.ი. ნანილაკის სიჩქარის სიდიდე მუდმივია. ახლა ვიპოვოთ ნანი-

ლაკის ტრაექტორია. (52.8)-დან ცხადია, რომ

$$z = v_0 t + z_0, \quad (52.12)$$

სადაც $z = z_0$, როცა $t=0$ მაშასადამე, z ღერძის, ე.ი. მაგნიტური ველის დაძაბულობის გასწვრივ, ნაწილაკი მოძრაობს თანაბარ-სწორხაზოვნად. (52.10)-დან გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_0 \cos(\Omega t + \alpha), \\ \frac{dy}{dt} &= -v_0 \sin(\Omega t + \alpha), \end{aligned} \quad (52.13)$$

რომელთა ამოხსნით მივიღებთ:

$$x = x_0 + \frac{v_0}{\Omega} \sin(\Omega t + \alpha), \quad (52.14)$$

$$y = y_0 + \frac{v_0}{\Omega} \cos(\Omega t + \alpha), \quad (52.15)$$

ე.ი. ველის მართობული მიმართულებით ნაწილაკი არ მოძრაობს თანაბარსწორხაზოვნად. ჩვენ ვხედავთ, რომ Ω ყოფილა ნაწილაკის ბრუნვის ციკლური სიხშირე ω სიბრტყეში. როგორც (52.7) ფორმულიდან ჩანს, რაც მეტია ნაწილაკის სიჩქარე, მით ნაკლებია ბრუნვის სიხშირე. სიხშირის ეს ფორმულა ძალიან დიდი სიზუსტით შემონმებულია თანამედროვე მძლავრ ამარქარებლებზე - ციკლოტრონებზე. ეს დამოკიდებულება შემონმებულ იქნა ციკლოტრონზე აჩქარებული ელექტრონებისათვის, როცა $(1 - \beta^2)^{-1/2} = 2000$, ე.ი. როცა ელექტრონის მასა 20 000-ჯერ არის გაზრდილი იმ დამკვირვებლისათვის, რომლის მიმართ ელექტრონი მოძრაობს βc სიჩქარით. აღვნიშნოთ, რომ ω სიხშირეს ციკლოტრონულ სიხშირეს უწოდებენ.

(52.14) და (52.15) ფორმულების ძალით:

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= \frac{v_0^2}{\Omega^2}, \\ z &= z_0 + v_0 t. \end{aligned} \quad (52.16)$$

ამ უკანასკნელიდან ჩანს, რომ მუდმივ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში დამუხტული ნაწილაკი მოძრაობს მუდმივი სიჩქარით სპირალზე, რომლის ღერძი ემთხვევა მაგნიტური ველის დაძაბულობის

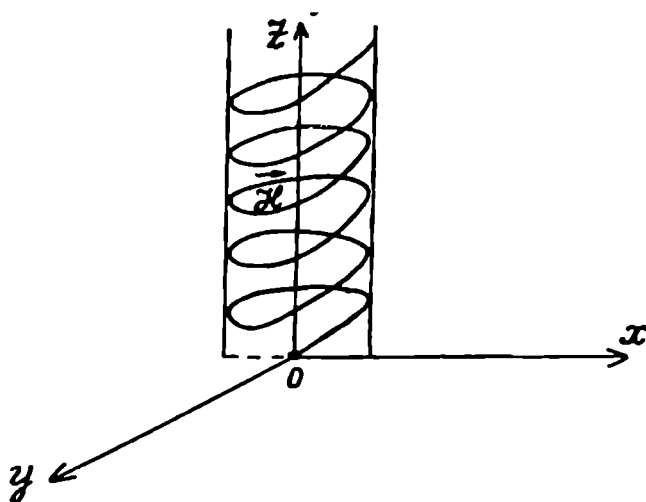
მიმართულებას (ნახ.45), ხოლო რადიუსი განისაზღვრება ფორმულით

$$R = \frac{v_0}{\Omega} = \frac{v_0 E}{ecH} . \quad (52.17)$$

თუ გამოვიყენებთ (52.2) ფორმულას, შეგვიძლია დავწეროთ

$$R = \frac{cP_0}{eH} , \quad (52.18)$$

სადაც P_0 იქნება იმპულსის პროექცია xy სიბრტყეზე. როგორც ვხედავთ, მოცემულ მაგნიტურ ველში მოძრაობისას სპირალის რადიუსი დამოკიდებულია მხოლოდ იმპულსზე. როცა ნაწილაკი ველში ისე შედის, რომ მისი სიჩქარის z კომპონენტი ნულის ტო-

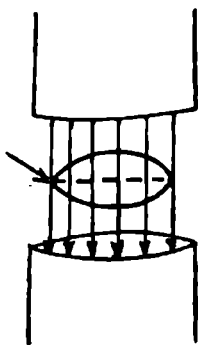


ნახ.45

ლია $v_z = 0$, ე.ი. $z = z_0$, მაშინ სპირალი გადაგვარდება წრეში. მაშასადამე, როცა ნაწილაკი მაგნიტურ ველში შედის \vec{H} ვექტორის მართობული მიმართულებით, მაშინ იგი იმოძრაავებს წრეზე, რომლის (52.18) ფორმულით განსაზღვრული რადიუსი მხოლოდ იმპულსის ფუნქცია იქნება (ნახ.46).

როგორც ვხედავთ, წრის რადიუსი უკუპროპორციულია $e\vec{H}$ ნამრავლის. ე.ი. მუხტი მით უფრო მცირე რადიუსიან წრეზე იმოძ-

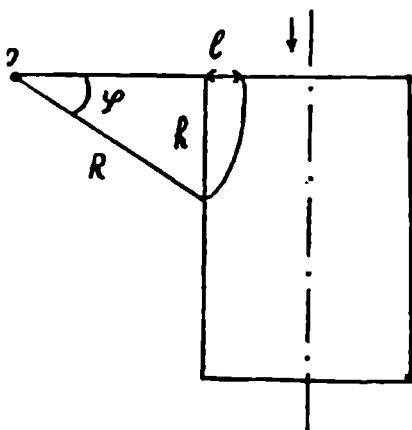
რავებს, რაც მეტია ეს ნამრავლი. როცა ველში შედის ნანილაკი $v=c$ სიჩქარით, ე.ი. $p=\infty$ იმპულსით, მაშინ $R=\infty$ და ველი ნანილას არ გადახრის.



ნახ.46

ელემენტარული ნანილაკების ფიზიკაში დამუხტული ნანილაკების რეგისტრაციის მიზნით იყენებენ ხელსაწყობებს, რომლებიც მოთავსებულია მუდმივ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში. შესაძლებელია ასეთ ველში მოძრავი ნანილაკების კვალის (ტრაექტორიის) ფოტოგრაფირება. მოცემული ველისათვის ტრაექტორიის გეომეტრიული პარამეტრების გაზომვით შეიძლება ვიპოვოთ ნანილაკის იმპულსი და, მაშასადამე, მისი ენერგია.

ვთქვათ, ასეთ ხელსაწყობში (მაგალითად, ე.ნ. ბუშტოვან კამერაში) შეიჭრა დიდი ენერგიის ელემენტარული ნანილაკი. თუ მისი იმპულსი მართობია მაგნიტური ველის დაძაბულობისა, მაშინ იგი იმოძრავებს გარკვეული რადიუსის წრეზე. ხელსაწყობში შეიძლება დაეტიოს ამ წრის მხოლოდ ნანილი. ნახ. 47-დან ცხადია, რომ



ნახ.47

$$h = R \sin \varphi, \\ l = R(1 - \cos \varphi). \quad (52.19)$$

დიდ ენერგიებზე გადახრა მცირეა, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$h \approx R\varphi, l \approx \frac{R}{2}\varphi^2, \quad (52.20)$$

საიდანაც $h^2 = R^2\varphi^2$, ე.ი.

$$R = \frac{h^2}{2l}. \text{ ამგვარად,}$$

$$\frac{cp_0}{eH} = \frac{h^2}{2l}. \quad (52.21)$$

ექსპერიმენტზე ზომავენ არა იმპულსს., არამედ cp_0 -ს რომელსაც აქვს ენერგიის განზომილება. ასე რომ,

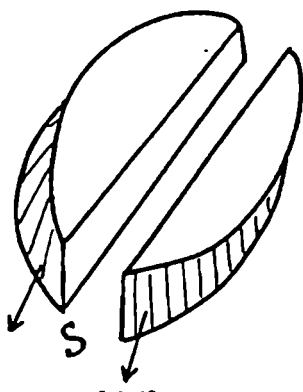
$$cp_0 = \frac{eHh^2}{2l} \quad (52.22)$$

ამასადაამე, ჩვენ შეგვიძლია გავზომოთ გეომეტრიული პარამეტრები l და h და ვიპოვოთ დამუხტული ნანილაკის cp_0 იმპულსი.

§ 53. ციკლოტრონი

როგორც მარტივი მაგალითი დამუხტული ნანილაკის მაგნიტურ ველში მოძრაობის გამოყენებისა. განვიხილოთ ხელოვნური ამაჩქარებელი - ციკლოტრონი, რომლის იდეა და განხორციელება ეკუთვნის ლოურენსსა და ედელფსონს (1930 წ.). ამასთან, ამაჩქარებლის თეორიის მკაცრი განხილვა ჩვენს მიზანს არ შეადგენს. ჩვენთვის მნიშვნელოვანია, ერთი მხრით, იმის გარკვევა, თუ თანამედროვე ფიზიკამ როგორ შეძლო ისეთი მაღალი ენერგიების მიღწევა, რომლის საშუალებით შესაძლებელი გახდა მთელი რიგი რელატივისტური ეფექტების შემონახვა, რომელიც რელატივისტური თეორიის შექმნის გარიჟრაჟზე მიულწევლად ითვლებოდა. მეორე მხრივ კი, თვით ამაჩქარებლებში მიმდინარე პროცესები ბრწყინვალე დადასტურებას იძლევიან რელატივისტური ეფექტების არსებობისა და შემონახვისა. დღეს არსებობს ამაჩქარებელთა მთელი პლეადა, რომელთა მუშაობის პრინციპი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია. ჩვენ განვიხილავთ ციკლოტრონის მუშაობის პრინციპს, როგორც ყველაზე უფრო მარტივს.

ციკლოტრონი წარმოადგენს ორ მეტალურ ნახევარცილინდრს (ნახ. 48), რომელთაც იმის გამო, რომ ისინი ძალიან ჰგვანან "D" ასოს, დუანტებს უწოდებენ. დუანტები მოთავსებული არიან მძლავრ ერთგვაროვან



ნახ. 48

მაგნიტურ ველში, რომლის \vec{H} დაძაბულობა მართობია დუანტების სიბრტყისა. დუანტებს მოდებული აქვს ω_0 სიხშირის ცვალებადი ელექტრული ველი. დუანტებს შორის არის თავისუფალი ჭრილი, სადაც მოთავსებულია ასაჩქარებელი დამუხტული ნანილაკების წყარო. აქ დამუხტული ნანილაკი ელექტრული ველის გავლენით ჩქარდება და შედის რომელიმე დუანტის \vec{H} ველის მართობულ სიბრტყეში. დუანტებს შიგნით ელექტრული ველი არა გვაქვს, ამი-

ტომ ნანილაკი დუანტებში იმოდრავებს წრეზე. რადგან მაგნიტური ველი ნანილაკზე მუშაობას არ ასრულებს, ამიტომ დუანტის შიგნით ნანილაკის ენერგია და სიჩქარის სიდიდე არ იცვლება. ცხადია, რომ წრის რადიუსი, რომელზედაც დუანტაში ნანილაკი მოძრაობს, გამოითვლება წინა პარაგრაფში გამოყვანილი ფორმულით. კერძოდ, არარელატივისტურ ზღვარში, რადიუსისათვის გვექნება ფორმულა

$$R = \frac{v_0 m_0 c}{eH}, \quad (53.1)$$

სადაც v_0 არის სანყისი სიჩქარე, რომლითაც ნანილაკი შედის დუანტაში მაგნიტური ველის დაძაბულობის მართობულად. ნანილაკე-ბი, რომლებიც მართობული არ იქნებიან \vec{H} - ის, იმოდრავებენ სპირალზე და ძალიან მალე მიიტაცებიან დუანტის მეტალური ზედაპირით და, მაშასადამე, არ აჩქარდებიან.

დრო, რომელიც საჭიროა იმისათვის, რომ დამუხტულმა ნანილაკმა გაიაროს წრის ნახევარი (შევიდეს და გამოვიდეს დუანტიდან)

ტოლი იქნება $T = \frac{\pi R}{v_0}$, ე.ი.

$$T = \frac{\pi m_0 c}{eH} \quad (53.2)$$

ციკლოტრონში მუხტი ენერგიას იძენს ელექტრული ველის ხარჯზე, რომელიც ყოველთვის მოქმედებს, როგორც კი მუხტი დუანტებს შორის დატოვებულ ჭრილში გაივლის. ამიტომ ენერგიის დაგროვება ციკლოტრონში ხდება ელექტრული ველის მიერ ნანილაკზე ენერგიის მრავალჯერადი გადაცემით.

იმისათვის, რომ ციკლოტრონში მოხდეს ნანილაკის აჩქარება, იგი ჭრილში უნდა შევიდეს იმ დროს, რომ ელექტრული ველი (ჭრილში) აგრეთვე შეიცვლის მიმართულებას, ე.ი. ციკლოტრონში მუხტის მოძრაობის სიხშირე (ციკლოტრონული სიხშირე) უნდა დაემთხვეს ელექტრული ველის ω_0 სიხშირეს. მაშასადამე, დაცული უნდა იყოს სინქრონიზმის შემდეგი პირობა:

$$\omega_0 = \frac{eH}{m_0 c} \quad (53.3)$$

სადაც m_0 ნანილაკის უძრაობის მასაა. ამ პირობის შესრულება ადვილია მაგნიტური ველის დაძაბულობისა H და ცვლადი ელექტრული ველის ω_0 სიხშირის სათანადო შერჩევით. მაგრამ, როცა საქმე

გვაქვს ნანილაკის ისეთ სიჩქარეებთან, რომელიც ახლოსაა სინათლის სიჩქარესთან, ჩვენ ვანყდებით ნმინდა რელატივისტურ ეფექტებს, რომელთა გათვალისწინების გარეშე ციკლოტრონი უბრალოდ სასურველ შედეგებს არ მოგვცემს. კერძოდ, დიდი სიჩქარეებისათვის (53.3) ფორმულის დანერა აღარ შეიძლება, რამდენადაც სიხშირისათვის ვალდებული ვართ ვისარგებლოთ არა (52.6) ფორმულით, არამედ (52.7)-ით, ე.ი. უნდა გავითვალისწინოთ მასის ცვლილება სიჩქარის მიხედვით. ჭრილში ყოველი გავლისას ნანილაკის სიჩქარე იზრდება, მაშასადამე, იზრდება მასაც. რაც შეეხება სიხშირეს, იგი შემცირდება, შედეგად დაირღვევა სინქრონიზმის (53.3) პირობა. ნანილაკები ჭრილში მოვლენ დაგვიანებით, როცა ელექტრულ ველს არ ექნება მაქსიმალური მნიშვნელობა. ეს სისტემატური დაგვიანება გამოიწვევს იმას, რომ მუხტი დამუხრუჭდება და საბოლოო ჯამში ნანილაკთა აჩქარება შეწყდება.

ამგვარად, რელატივისტური ეფექტების გამო, დიდი სიჩქარეებისათვის სამართლიანი არ არის სინქრონიზმის (53.3) პირობა, რაც იმას ნიშნავს, რომ ციკლოტრონზე ნანილაკის აჩქარების შესაძლებლობანი შეზღუდულია. რელატივისტური ეფექტის არსებობა, ე.ი. მასის დამოკიდებულება სიჩქარეზე არ გვაძლევს საშუალებას ციკლოტრონში მივიღოთ ისეთი დიდი ენერგია, როგორც ჩვენთვისაა სასურველი. ამასთან, იმის გამო, რომ მსუბუქი ნანილაკებისათვის, მათი მცირე უძრაობის ენერგიის გამო, ენერგიების რელატივისტური არე უფრო ადრე იწყება (გავიხსენოთ, რომ მოძრაობა რელატივისტურია, როცა $T > m_0c^2$), ციკლოტრონში მათი მაღალ ენერგიებზე აჩქარება უფრო ძნელია. ავიღოთ, მაგალითად, ელექტრონი, რომლის უძრაობის მასა $0,5 \text{ MeV}$ -ის ტოლია

და ავაჩქაროთ იგი $v = \frac{9}{10}c$ სიჩქარემდე. მაშინ კინეტიკური ენერგია ტოლი იქნება

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 \approx 0,65 \text{ MeV} \quad (53.4)$$

მაშინ, როცა $v = \frac{1}{4}c$ -სათვისაც კი პროტონების კინეტიკური ენერგია 30 MeV -ის რიგისაა. ამიტომ ციკლოტრონში შესაძლებელია ელექტრონების აჩქარება მხოლოდ 1 MeV ენერგიებამდე, მაშინ, როცა პროტონების აჩქარება შეიძლება 10 MeV -მდე.

ვექსლერის მიერ 1944 წელს (და მისგან დამოუკიდებლად მაკ-მილანის მიერ 1945 წელს) წამოყენებულ იქნა იდეა, რომლის მიხედვით ზემოთ აღნიშნული მასის ცელილებასთან დაკავშირებული სიძნელე შეიძლება დაეძლიოთ ელექტრული გენერატორის სიხშირის პერიოდული ცვლილებით. ასეთ ხელსაწყოს უწოდეს სინქროციკლოტრონი. ამასთან, სინქროციკლოტრონში ნანილაკების ამჩქარება ხდება ულუფებით. ამაჟამად, არსებობს მრავალი ტიპის ამჩქარებელი, რომელთა საშუალებით შესაძლებელია საკმარისად დიდი ენერგიების მიღება. ასეთია, მაგალითად, სერპუხოვის პროტონული სინქროტრონი, რომელიც იძლევა 76GeV ენერგიის პროტონების ნაკადს.*

დაბოლოს, აღვნიშნოთ, რომ მაღალი ენერგიების დამუხტული ნანილაკების მიღება თანამედროვე ამჩქარებლებით რელატივისტური თეორიის ბრწყინვალე დადასტურებას წარმოადგენს.

* უკანასკნელ წლებში ამჩქარებლების ტექნიკა საკმაოდ განვითარდა. ამჟამად მსოფლიოს სხვადასხვა ლაბორატორიებში (აშშ, შვეიცარია) მოქმედებენ გაცილებით მძლავრი ამჩქარებლები (რედ.).

გაფანტვის რელატივისტური თეორია

გაფანტვის თეორიას რელატივისტურ მექანიკაში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია. როგორც არაერთხელ აღვნიშნეთ, ელემენტარულ ნაწილაკთა ფიზიკაში ძალიან ხშირად გვხვდება მაღალი ენერგიების ნაწილაკების ურთიერთქმედება. ეს ურთიერთქმედება არსებითად რელატივისტურ ხასიათს ატარებს, ამიტომ მისი შესწავლა შეიძლება მხოლოდ ფარდობითობის თეორიის სპეციფიკის გათვალისწინებით. აქედან გამომდინარე, მნიშვნელოვანია გაფანტვის რელატივისტური თეორიის განხილვა. ამასთან, ცხადია, რომ გაფანტვის რელატივისტური თეორია კლასიკურისაგან განსხვავებული იქნება მხოლოდ კინემატიკით. რელატივისტური კინემატიკაც ეყრდნობა შენახვის კანონებს, მაგრამ ამ კანონებში შემავალ დინამიკურ ფიზიკურ სიდიდეებს, კლასიკურისაგან განსხვავებით, რელატივისტური ხასიათი აქვთ, ამიტომ შესაბამისად კინემატიკაც განსხვავებული იქნება. ცხადია, შესაბამისობის პრინციპის თანახმად, რელატივისტური

გაფანტვის დამახასიათებელი ფორმულები $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ ზღვარში შესაბამის კლასიკურ ფორმულებში გადავა.

ზემოთქმულის გათვალისწინებით, არ შევუდგებით იმ გამოსახულებებისა და განმარტებების დეტალურ განხილვას, რაც უკვე დანერვილებით გაკეთებული გვაქვს კლასიკურ მექანიკაში.

გაფანტვის კინემატიკური დამოკიდებულებანი შეგვიძლია ვიპოვოთ შენახვის კანონების გამოყენებით. გაფანტვის ამოცანაში გვექნება სრული ენერჯიის, იმპულსისა და იმპულსის მომენტის შენახვის კანონები.

გაფანტვის თეორიას ჩვენ განვიხილავთ დრეკადი დაჯახების შემთხვევაში. ამასთან, დრეკადი ენოდება დაჯახებას, როცა ნაწილაკების შინაგანი მდგომარეობა არ იცვლება

§ 54. დაჯახების ამოცანის კინემატიკა

დაჯახების ამოცანაში სანყის მომენტში გვაქვს ორი ერთმანეთისაგან უსასრულო მანძილით დაშორებული ნაწილაკი მასებით m_1 და m_2 , რომლებიც ერთმანეთის შესახვედრად მოძრაობენ. როცა ეს ორი ნაწილაკი ერთმანეთს დაუახლოვდება გარკვეულ მან-

ძილზე, მოხდება ურთიერთქმედება, ნანილაკები გადაიხრებიან თავისი პირვანდელი მიმართულებიდან და კვლავ უსასრულოდ დაშორდებიან ერთმანეთს. სწორედ, ურთიერთქმედების შედეგად ნანილაკთა გადახრას პირვანდელი მიმართულებიდან ეწოდება დაჯახების მოვლენა. მაშასადამე, დაჯახების პროცესში ნანილაკები არ ურთიერთქმედებენ არც საწყის და არც საბოლოო მდგომარეობაში, ე.ი. ისინი მოძრაობენ სწორხაზობრივად და თანაბრად.

რადგან განხილული ორი ნანილაკის სისტემა დაჯახების პროცესში იზოლირებულია, ამიტომ ადგილი ექნება ენერჯიის, იმპულსისა და იმპულსის მომენტის შენახვას. ამასთან, ნანილაკთა სისტემის ენერჯია, იმპულსი და იმპულსის მომენტი შეინარჩუნებენ იმ მნიშვნელობებს, რომელიც მათ ჰქონდათ საწყის მომენტში (უსასრულობაში), როცა ურთიერთქმედებას ადგილი არ ჰქონდა.

ისევე როგორც კლასიკურ მექანიკაში, დაჯახების ამოცანა ხელსაყრელია შევისწავლოთ ორ ათვლის სისტემაში. ერთია ლაბორატორიული ან მოკლედ L სისტემა, ხოლო მეორე C სისტემა. L სისტემა არის ლაბორატორიაში მოთავსებული უძრავი სისტემა, რომლის მიმართაც ექსპერიმენტატორი სწავლობს დაჯახების მოვლენას. C სისტემა ან ინერციის ცენტრის სისტემა არის ათვლის სისტემა, რომლის სათავე მოთავსებულია დაჯახების პროცესში მონაწილე ორი ნანილაკის ინერციის ცენტრში. L სისტემაში პირველი და მეორე ნანილაკის შესაბამისი ოთხიმპულსები დაჯახებამდე აღვნიშნოთ

$\left(\bar{P}_1, \frac{i}{c} W_1\right)$ და $\left(\bar{P}_2, \frac{i}{c} W_2\right)$ -ით, ხოლო დაჯახების შემდეგ — შტრიხიანი ასოებით. ცხადია, რომ სისტემის საწყისი იმპულსი L სისტემაში იქნება $\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$, სრული ენერჯია კი $W = W_1 + W_2$. L სისტემაში ენერჯიისა და იმპულსის მუდმივობის კანონები ასე ჩაინერება:

$$\bar{P}_1 + \bar{P}_2 = \bar{P}'_1 + \bar{P}'_2, \quad (54.1)$$

$$W_1 + W_2 = W'_1 + W'_2. \quad (54.2)$$

დაცემის მიმართულებად ავიღოთ L სისტემის x ღერძი, რომელიც დავამთხვიოთ საწყისი სრული იმპულსის $\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$ მიმართულებას.

C სისტემაში, დაჯახებამდე, ნანილაკები დავახასიათოთ

$\left(\bar{p}_1, \frac{i}{c} E_1\right)$ და $\left(\bar{p}_2, \frac{i}{c} E_2\right)$ ოთხიმპულსებით. დაჯახების შემდეგ კი იგი-

ვე ოთხვექტორები აღვნიშნოთ შტრიხიანი ასოებით. იმპულსისა და ენერგიის შენახვის კანონები შემდეგი ფორმულებით გამოიხატება

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2, \quad (54.3)$$

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2, \quad (54.4)$$

სადაც $E = E_1 + E_2$ სისტემის სრული ენერგიაა დაჯახებამდე, ხოლო $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ — სრული იმპულსი C სისტემაში. C სისტემის სათავის სიჩქარე L სისტემის მიმართ შეიძლება გამოვხატოთ რელატივისტური მექანიკის ცნობილი დამოკიდებულებით (იხ. (32.15) ფორმულა).

$$\vec{V}_c = \frac{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)' c^2}{W_1 + W_2}. \quad (54.5)$$

C სისტემაში $\vec{V}_c = 0$, ამიტომ ამ სისტემაში დაჯახებამდე სრული იმპულსი $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$. მაგრამ იმპულსის შენახვის (54.3) ფორმულის თანახმად, ნულის ტოლი იქნება საბოლოო მდგომარეობის სრული იმპულსიც, ე.ი. $\vec{P} = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ C სისტემაში ნაწილაკთა იმპულსები სიდიდით ყოველთვის ერთმანეთის ტოლია და ურთიერთსანინააღმდეგოდ არიან მიმართული $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$, $\vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2$. მაშასადამე, C სისტემაში ნაწილაკთა დაჯახებისას შეიძლება მოხდეს იმპულსების მხოლოდ შემობრუნება (ნახ. 50). კუთხეს იმპულსების სანყის და საბოლოო მიმართულებებს შორის უწოდებენ გაფანტვის კუთხეს C სისტემაში და აღნიშნავენ θ_c -თი.

C სისტემაში ენერგიის შენახვის (54.4) კანონი გაშლილად ასე დაინერება:

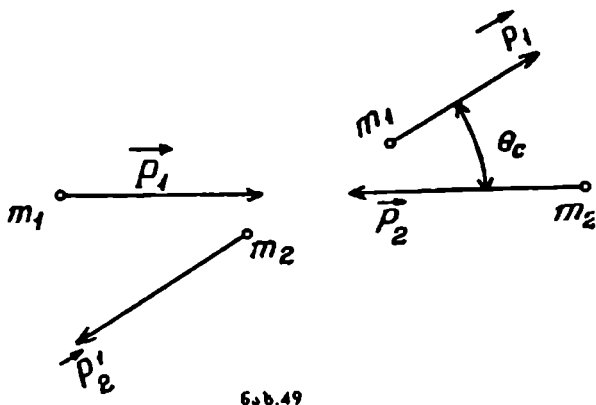
$$\sqrt{m_1^2 c^4 + p_1^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + p_2^2 c^2} = \sqrt{m_1^2 c^4 + p_1'^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + p_2'^2 c^2}, \quad (54.6)$$

საიდანაც ჩანს, რომ C სისტემაში უცვლელი რჩება ცალკეული ნაწილაკის იმპულსის სიდიდეც $p_1 = p_1'$, $p_2 = p_2'$. ამის გამო, C სისტემაში ცალკეული ნაწილაკის ენერგია არ იცვლება $E_1 = E_1'$, $E_2 = E_2'$. ამგვარად, C სისტემაში გვექნება მნიშვნელოვანი დამოკიდებულებანი:

$$p \equiv p_1 = p_1' = p_2 = p_2', \quad E_1 = E_1', \quad E_2 = E_2'. \quad (54.7)$$

ახლა განვიხილოთ L სისტემა. ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ დაჯახებამდე L სისტემაში მეორე ნაწილაკი უძრავია. მაშინ იმპულსის შენახვის (54.1) კანონს ექნება სახე

$$\vec{P}_1 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2, \quad (54.8)$$



ნახ.49

სადაც \vec{P}'_1 და \vec{P}'_2 პირველი და მეორე ნაწილაკის იმპულსებია დაჯახების შემდეგ L სისტემაში. ახლა უკვე დაცემის მიმართულება დაემთხვევა \vec{P}_1 იმპულსის მიმართულებას.

ჩვენი მიზანია, ვიპოვოთ პირველი და მეორე ნაწილაკის ენერგიები დაჯახების შემდეგ L სისტემაში. ამისათვის გამოვიყენებთ შენახვის კანონებს. დაწეროთ მეორე ნაწილაკის სიჩქარის გამოხატულება დაჯახებამდე L სისტემაში. სიჩქარეთა შეკრების ფორმულით

$$\vec{v}_{2L} = \frac{\vec{v}_{2c} + \vec{V}_c}{1 + \frac{v_{2c} V_c}{c^2}}, \quad (54.9)$$

სადაც \vec{v}_{2c} მეორე ნაწილაკის სიჩქარეა C სისტემაში. პირობის თანახმად, L სისტემაში მეორე ნაწილაკი უძრავია $\vec{v}_{2L} = 0$, ამიტომ გვექნება

$$\vec{v}_{2c} = -\vec{V}_c. \quad (54.10)$$

მამასადამე, მეორე ნაწილაკის იმპულსისათვის C სისტემაში გვექნება

$$\bar{p}_z = \frac{m_2 \bar{v}_{z_c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = - \frac{m_2 \bar{V}_c}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (54.11)$$

დაჯახების შემდეგ C სისტემაში ნაწილაკის იმპულსის სიდიდე არ იცვლება, ამიტომ (54.11)-დან გვექნება

$$p'_{2x} = - \frac{m_2 V_c \cos \theta_c}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (54.12)$$

ამავე ნაწილაკის ენერგია C სისტემაში დაჯახებამდე ტოლია

$$E_2 = \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (54.13)$$

ახლა გამოვთვალოთ მეორე ნაწილაკის W'_2 ენერგია დაჯახების შემდეგ L სისტემაში. ამისათვის გამოვიყენოთ ლორენცის გარდაქმნის კანონები ენერგია-იმპულსისათვის. ამასთან, გავითვალისწინოთ, რომ L სისტემა უძრავია, ამიტომ შტრიხიანი სისტემა იქნება C სისტემა. მაშასადამე, (35.10) ფორმულის თანახმად, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $E_2 = E'_2$, გვექნება

$$W'_2 = \frac{E_2 + V_c p'_{2x}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (54.14)$$

ამ ფორმულაში შევიტანოთ p'_{2x} -ის მნიშვნელობა (54.12)-დან და E'_2 -ის რელატივისტური გამოხატულება. მივიღებთ

$$W'_2 = \frac{m_2 c^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} - V_c \frac{m_2 V_c \cos \theta_c}{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (54.15)$$

საიდანაც

$$W'_2 = \frac{m_2 c^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \cos \theta_c \right)}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (54.16)$$

(54.13) ფორმულიდან

$$1 - \frac{V_c^2}{c^2} = \frac{(m_2 c^2)^2}{E_2^2}. \quad (54.17)$$

ამის შემდეგ ადვილია ლორენცის $\gamma(V_c)$ ფაქტორის ჰოვნა. ცხადია, რომ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_c^2}{c^2}}} = \frac{E_2}{m_2 c^2}. \quad (54.18)$$

C სისტემაში სრული ენერგია ტოლია $E = E_1 + E_2$, ამიტომ იგი სრულ ენერგიასთან $W = W_1 + W_2$ ლაბორატორიულ სისტემაში დაკავშირებული იქნება ლორენცის გარდაქმნის ფორმულებით. რადგან C სისტემაში სრული იმპულსი $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, ამიტომ

$$W = \frac{E + V_c(p_{1x} + p_{2x})}{\sqrt{1 - \frac{V_c^2}{c^2}}}. \quad (54.19)$$

მაშასადამე, სრული ენერგიები L და C სისტემებში ერთმანეთთან დაკავშირებული იქნებიან ტოლობით

$$W = \gamma E = \frac{E E_2}{m_2 c^2}. \quad (54.20)$$

ადვილია ჩვენება, რომ

$$\frac{V_c^2}{c^2} = \frac{E_1^2 - m_1^2 c^4}{W^2} = 1 - \frac{(m_2 c^2)^2}{E_2^2} = \frac{p_2^2 c^2}{E_2^2}. \quad (54.21)$$

ასევე ადვილად შევამოწმებთ, რომ

$$E^2 = 2W m_2 c^2 + (m_1^2 - m_2^2) c^4, \quad (54.22)$$

ხოლო

$$E_2 = \frac{E^2 - c^4(m_1^2 - m_2^2)}{2E}. \quad (54.23)$$

(54.21) ფორმულის გათვალისწინებით (54.16) საბოლოოდ მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$W_2' = m_2 c^2 + (W_1 - m_1 c^2) \left\{ 1 - \frac{(m_1 - m_2)^2 c^4}{E^2} \right\} \sin^2 \frac{\theta_c}{2}, \quad (54.24)$$

სადაც E დაკავშირებულია W -სთან (54.22) ფორმულის საშუალებით. რაც შეეხება პირველი ნაწილაკის W_1' ენერგიას, დაჯახების შემდეგ L სისტემაში, იგი შეიძლება ვიპოვოთ ენერგიის შენახვის კანონიდან

$$W_1 + m_2 c^2 = W_1' + W_2'. \quad (54.25)$$

კერძოდ, (54.24) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$W_1' = W_1 - (W_1 - m_1 c^2) \left\{ 1 - \frac{(m_1 - m_2)^2 c^4}{E^2} \right\} \sin^2 \frac{\theta_c}{2}. \quad (54.26)$$

დაცემული ნაწილაკი მეორე ნაწილაკს ყველაზე მეტ ენერგიას გადასცემს მაშინ, როცა $\theta_c = \pi$, ე.ი. როცა გაფანტვა ხდება უკან. ამ შემთხვევაში გვექნება

$$W_{2', \max} = m_2 c^2 + (W_1 - m_1 c^2) \left\{ 1 - \frac{(m_1 - m_2)^2 c^4}{E^2} \right\}. \quad (54.27)$$

ამ დროს დაცემულ ნაწილაკს დარჩება მინიმალური ენერგია

$$W_{1', \min} = m_1 c^2 + \frac{(W_1 - m_1 c^2)(m_2 - m_1)^2 c^4}{E^2}. \quad (54.28)$$

როცა მასები ტოლია $m_1 = m_2$, მაშინ დაცემული ნაწილაკი დაკარგავს მთელ თავის კინეტიკურ ენერგიას და $W_{1', \min}$ ტოლი იქნება $m_1 c^2$ -ის. პირველი ნაწილაკის მიერ მეორეზე გადაცემული ენერგია იქნება $\Delta W = W_1 - W_1'$, თუ, გარდა ამისა, შემოვიტანთ აღნიშვნას $T_1 = W_1 - m_1 c^2$, სადაც T_1 არის დაცემული ნაწილაკის საწყისი კინეტიკური ენერგია, მაშინ (54.26) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახითაც:

$$\frac{\Delta W_1}{T_1} = \left\{ 1 - \frac{(m_1 - m_2)^2 c^4}{E^2} \right\} \sin^2 \frac{\theta_c}{2}. \quad (54.29)$$

არარელატივისტურ ზღვარში ეს ფარდობა დაიყვანება ცნობილ გამოსახულებაზე

$$\left(\frac{\Delta W_1}{T_1}\right)_{\text{არარელ.}} = \left[1 - \frac{(m_1 - m_2)^2 c^4}{(m_1 + m_2)^2 c^4}\right] \sin^2 \frac{\theta_c}{2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \sin^2 \frac{\theta_c}{2}. \quad (54.30)$$

(54.29) ფარდობა მაქსიმალურია უკან გაფანტვისათვის $\theta_c = \pi$ და მინიმალური -ნინ გაფანტვისათვის $\theta_c = 0$; ამასთან

$$\left(\frac{\Delta W_1}{T_1}\right)_{\min} = 0, \quad \theta_c = 0. \quad (54.31)$$

ტოლი მასების შემთხვევაში

$$\left(\frac{\Delta W_1}{T_1}\right)_{m_1=m_2} = 0, \quad \theta_c = 0. \quad (54.32)$$

თუ, ამასთან $\theta_c = \pi$ გვექნება ენერგიის მაქსიმალური გადაცემა

$$\left(\frac{\Delta W_1}{T_1}\right)_{m_1=m_2} = 1.$$

საინტერესოა დაჯახების ორი ზღვრული შემთხვევის განხილვა.

1. როცა დაცემული ნაწილაკის მასა გაცილებით მცირეა უძრავი ნაწილაკის მასაზე, ე.ი. $m_1 \ll m_2$. დაჯახების კლასიკური თეორიის თანახმად, ამ შემთხვევაში, ენერგიის გადაცემა უმნიშვნელოა, ხოლო ზღვარში, როცა $m_2 = \infty$ ენერგიის გადაცემა საერთოდ არ ხდება. რადგან, თანხამად (54.29) და (54.22) ფორმულები-სა

$$\left(\frac{\Delta W_1}{T_1}\right)_{\max} = 1 - \frac{(m_1 - m_2)^2 c^4}{2(W_1 + m_2 c^2)m_2 c^2 + (m_1^2 - m_2^2)c^4}, \quad (54.33)$$

ამიტომ სასრული W_1 -სათვის, როცა $m_2 \rightarrow \infty$, ენერგიის გადაცემა რელატივისტურ შემთხვევაშიაც არ ხდება. მაგრამ იგივე (54.33) ფორმულა $m_1 \ll m_2$ შემთხვევაში მოგვცემს

$$\left(\frac{\Delta W_1}{T_1}\right)_{\max} \approx 1 - \frac{m_2^2 c^4}{2W_1 m_2 c^2 + m_2^2 c^4}, \quad (54.34)$$

რომელიც ერთის რიგისა შეიძლება გამოვიდეს, თუ დაცემული ნა-
ნილაკის ენერგია W , იქნება $m_2 c^2$ რიგისა. ამგვარად, $m_1 \ll m_2$ შემ-
თხვევაში, თუ დაცემული ნანილაკის ენერგია $W_1 \sim m_2 c^2$, მაშინ გა-
დაცემული ენერგია დიდი იქნება. ფიზიკურად ეს გასაგებია, რამ-
დენადაც დაცემული ნანილაკი უძრავი მასის დანაკლისს ავსებს
მოძრაობის მასით, ტოლი მასების შემთხვევაში კი ენერგიის გა-
დაცემა მაქსიმალურია.

2. როცა $m_1 \gg m_2$, კლასიკური მექანიკის თანახმად, აგრეთვე
ადგილი აქვს ენერგიის უმნიშვნელო გადაცემას. რელატივისტურ
მექანიკაში კი (54.33) ფორმულა $m_1 \gg m_2$ -სათვის მოგვცემს

$$\left(\frac{\Delta W_1}{T_1} \right)_{\max} \approx 1 - \frac{m_1^2 c^4}{2m_2 c^2 W_1 + m_1^2 c^4} \quad (54.35)$$

რომელიც ერთის რიგისა იქნება, როცა $W_1 \sim \frac{m_1^2}{m_2} c^2$. ეს შემთხვევაც
მარტივი ასახსნელია ფიზიკურად.

ახლა განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა დაცემული ნა-
ნილაკის უძრაობის მასა ნულის ტოლია, ე.ი. $m_1 = 0$. კლასიკურ მე-
ქანიკაში ასეთი რამ შეუძლებელია, რადგან $m_1 = 0$. შემთხვევაში
ნანილაკის კინეტიკური ენერგია აგრეთვე ნულის ტოლია. რელა-
ტივისტურ მექანიკაში კი, როგორც ვიცით, ნულოვანი უძრაობის

მასის მქონე ნანილაკს გააჩნია ენერგია $W_1 = \sqrt{m_1^2 c^4 + p^2 c^2} = pc$,
ამიტომ დაჯახებისას იგი ისევე გადასცემს ენერგიას m , მასის მქონე
ნანილაკს, როგორც ჩვეულებრივი ნულისაგან განსხვავებული
მასის ნანილაკი. ამავე დროს, უნდა გავითვალისწინოთ, რომ $m = 0$
მასის ნანილაკი უსათუოდ უნდა იყოს დაცემული ნანილაკი, რამ-
დენადაც იგი ან მოძრაობს სინათლის სიჩქარით, ან არ არსებობს.

$m_1 = 0$ შემთხვევაში (54.22) ფორმულის თანახმად სრული
ენერგია C სისტემაში ტოლი იქნება

$$E = am_2 c^2, \quad (54.36)$$

სადაც

$$a = \left(1 + \frac{2W_1}{m_2 c^2} \right)^{1/2} \quad (54.37)$$

მაშინ (54.24) და (54.26) ფორმულები მოგვცემს

$$\frac{W'_2 - m_2 c^2}{W_1} = \frac{W_1 - W'_1}{W_1} = \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \sin^2 \frac{\theta_c}{2}. \quad (54.38)$$

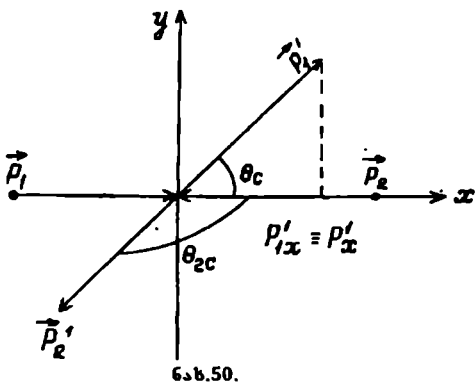
ეს ფორმულები შეგვიძლია გამოვიყენოთ სინათლის კვანტის (და ალბათ ნეიტრინოს) ნაწილაკზე დაჯახების შემთხვევაში.

§ 55. კავშირი გაფანტვის კუთხეებს შორის L და C სისტემაში

ახლა დავამყაროთ კავშირი გაფანტვის θ_L და θ_C კუთხეებს შორის L და C სისტემებში. დაცემის მიმართულებად ავირჩიოთ x ღერძის მიმართულება. C სისტემაში, თანახმად (54.3) ფორმული-სა, ნებისმიერი ნაწილაკის იმპულსის სიდიდე ტოლია, ამიტომ 51-ე ნახაზიდან შეგვიძლია დავწეროთ

$$\cos \theta_c = \frac{p'_x}{p}, \quad (55.1)$$

სადაც p არის ნებისმიერი ნაწილაკის იმპულსის სიდიდე, ხოლო



p'_x - მათი საბოლოო მდგომარეობის იმპულსის მდგენელი დაცემის მიმართულებაზე. გაფანტვის θ_L კუთხეც გამოვხატოთ იმპულსებით. L სისტემაში იმპულსის მუდმივობის კანონს ექნება შემდეგი სახე

$$\vec{P}_1 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 \quad (55.2)$$

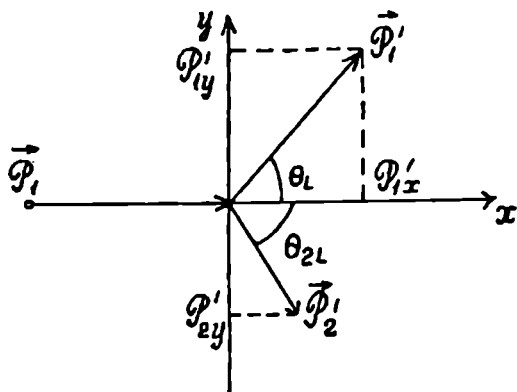
\vec{P}_1 იმპულსის მიმართულება დავამთხვიოთ x

ღერძის მიმართულებას, ხოლო \vec{P}'_1 ავიღოთ xoy სიბრტყეში, მაშინ იმპულსის შენახვის კანონის ძალით, \vec{P}'_2 -იც ამავე სიბრტყეში იქნება მოთავსებული.

(55.2) ტოლობის დაგეგმილება საკოორდინატო ღერძებზე მოგვცემს

$$P_1 = P'_{1x} + P'_{2x}, \quad 0 = P'_{1y} + P'_{2y}, \quad (55.3)$$

სადაც $P_1 = P_{1x}$. როგორც ვხედავთ, $P'_{1y} = -P'_{2y}$. 52-ე ნახაზიდან შეგვიძლია დავწეროთ



ნახ. 51

$$\text{tg} \theta_L = \frac{P'_y}{P'_{1x}}, \quad (55.4)$$

სადაც P'_{1x} არის პირველი ნანილაკის იმპულსის მდგენელი დაცემის მიმართულებაზე გაფანტვის შემდეგ, ხოლო $P'_y = |P'_{1y}| = |P'_{2y}|$ - იმპულსის მდგენელი y ღერძზე ნებისმიერი გაფანტული ნანილაკისა.

დავწეროთ ენერგიის მუდმივობის კანონი L სისტემაში:

$$W_1 + W_2 = W'_1 + W'_2 \equiv W. \quad (55.5)$$

L სისტემაში მეორე ნანილაკი დაჯახებამდე უძრავია, ამიტომ $W_2 = m_2 c^2$. მაშასადამე,

$$\sqrt{m_1^2 c^4 + c^2 \bar{P}_1^2} + m_2 c^2 = \sqrt{m_1^2 c^4 + c^2 \bar{P}'_1{}^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + c^2 \bar{P}'_2{}^2} \quad (55.6)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $P_y'^2 \equiv P_{1y}'^2 = P_{2y}'^2$, გვექნება

$$\begin{aligned} (m_1^2 c^4 + c^2 \bar{P}_1^2)^{1/2} + m_2 c^2 &= \left\{ m_1^2 c^4 + c^2 (P_{1x}'^2 + P_y'^2) \right\}^{1/2} + \\ &+ \left\{ m_2^2 c^4 + c^2 (P_{2x}'^2 + P_y'^2) \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (55.7)$$

ეს ტოლობა შევკვეცოთ c -ზე და ავიყვანოთ კვადრატში. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$\begin{aligned} (P'_{1x}P'_{2x} - P_y'^2) + m_2c(m_1^2c^2 + P_1^2)^{1/2} &= \\ = (m_1^2c^2 + P_{1x}^2 + P_y'^2)^{1/2}(m_2^2c^2 + P_{2x}^2 + P_y'^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (55.8)$$

რომელიც კიდევ ერთხელ ავიყვანოთ კვადრატში. გრძელი, მაგრამ ელემენტარული გარდაქმნების შემდეგ საბოლოოდ მივიღებთ გამოსახულებას

$$W^2 \left(\frac{P'_y}{P'_{1x}} \right)^2 = 2m_2c^2 W \left(\frac{P'_{2x}}{P'_{1x}} \right) + \left(\frac{P'_{2x}}{P'_{1x}} \right)^2 (m_2^2 - m_1^2) c^4. \quad (55.9)$$

P_{2x} / P'_{1x} ფარდობა გამოვხატოთ გაფანტვის კუთხით C სისტემაში. ამისათვის გამოვიყენოთ ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები იმპულსის ოთხვექტორისათვის დაჯახების შემდეგ. შტრიხიანი ათვლის სისტემა იქნება C სისტემა, მაშინ

$$P'_{1x} = \gamma \left(p_{1x} + \frac{V_c}{c^2} E_1 \right), \quad P'_{2x} = \gamma \left(p_{2x} + \frac{V_c}{c^2} E_2 \right), \quad (55.10)$$

სადაც $\gamma(V_c)$ ლორენცის მამრაველია. გავითვალისწინოთ, რომ C სისტემაში ნაწილაკის ენერგია არ იცვლება $E'_1 = E_1$ და $E'_2 = E_2$, გარდა ამისა, ცხადია, რომ C სისტემაში $p'_{1x} = p \cos \theta_c$ და $p'_{2x} = -p \cos \theta_c$, სადაც p რომელიმე ნაწილაკის იმპულსია C სისტემაში. L სისტემაში მეორე ნაწილაკი უძრავია, ხოლო C სისტემაში მისი იმპულსი $p_2 \equiv p$ -ს ტოლია, ამიტომ L და C სისტემების ფარდობითი მოძრაობის V_c სიჩქარე ტოლი იქნება (იხ. (54.16) ფორმულა)

$$V_c = \frac{pc^2}{E_2}, \quad (55.11)$$

რომლის გათვალისწინებით საძიებელი ფარდობისათვის მივიღებთ

$$\frac{P'_{2x}}{P'_{1x}} = \frac{1 - \cos \theta_c}{\frac{E_1}{E_2} + \cos \theta_c}. \quad (55.12)$$

(55.4) და (55.12) გამოსახულებანი შევიტანოთ (55.9) -ში და გავითვალისწინოთ (54.15) ფორმულა. მარტივი გარდაქმნების ჩატარების

შემდეგ მივიღებთ:

$$\operatorname{tg} \theta_L = \frac{m_2 c^2 \sin \theta_c}{E_1 + E_2 \cos \theta_c}. \quad (55.13)$$

და ამით კავშირი გაფანტვის კუთხეებს შორის L და C სისტემებში განხორციელებულია. არარელატივისტურ ზღვარში E , უნდა შევცვალოთ $m_1 c^2$ -ით, ხოლო E_2 $m_2 c^2$ -ით. ასე რომ, (55.13) მოგვცემს ცნობილ ფორმულას:

$$\operatorname{tg} \theta_L = \frac{\sin \theta_c}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta_c}. \quad (55.14)$$

ახლა გამოვიყენოთ (54.22) კავშირი სრულ ენერგიებს შორის C და α სისტემებში

$$E^2 = 2Wm_2 c^2 + (m_1^2 - m_2^2) c^4,$$

სადაც $E = E_1 + E_2$, მაშინ (55.14) ფორმულას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\operatorname{tg} \theta_L = \frac{2Em_2 c^2 \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2}}{E^2 + (m_1^2 - m_2^2) c^4 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2}}. \quad (55.15)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა $m_1 = m_2$, მაშინ (55.15) -დან მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \theta_L = \frac{2m_2 c^2}{E} \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2}. \quad (55.16)$$

ამ შემთხვევაში C სისტემაში უკან გაფანტვას $\theta_c = \pi$ შეესაბამება L სისტემაში $\theta_L = \frac{\pi}{2}$ კუთხეზე გაფანტვას (ნახ.53).

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\theta_c \neq \pi$ და E ძალიან დიდია; მაშინ (55.15)-დან გვექნება

$$\operatorname{tg} \theta_L = \frac{2m_2 c^2}{E} \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2}. \quad (55.17)$$

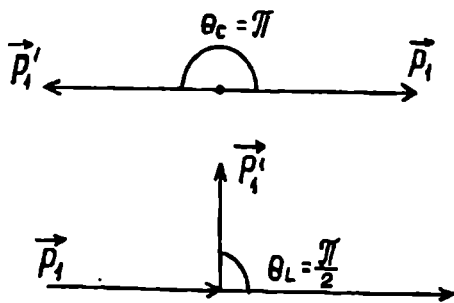
ამ შემთხვევაში, L სისტემაში ყველა ნაწილაკი (გარდა მათი, რომელთათვისაც $\theta_c = \pi$) იფანტება მცირე, წინ მიმართულ, სხეულოვან კუთხეში.

ვთქვათ, $m_2 < m_1$, მაშინ (55.15) -დან ჩანს, რომ $\text{tg}\theta_L > 0$. ამ

შემთხვევაში, ნანილაკები იფანტებიან წინ მიმართულ სხეულოვან კუთხეში, ე.ი.

$\theta_L < \frac{\pi}{2}$. რაც იმას ნიშნავს,

რომ მძიმე ნანილაკი მსუბუქთან დაჯახებისას არ შეიძლება უკან გაიფანტოს. შემდეგ პარაგრაფში ვაჩვენებთ, რომ მაქსიმალური კუთხე ლაბორატორიულ



ნახ. 52

სისტემაში, როცა $m_2 < m_1$, განისაზღვრება ისეთივე ფორმულით, რომელიც გვექონდა კლასიკურ მექანიკაში

$$\theta_{L,\max} = \arcsin \frac{m_2}{m_1}. \quad (55.18)$$

ლაბორატორიულ სისტემაში დაჯახების შემდეგ ნანილაკიც იფანტება. კუთხეს \vec{P}'_2 იმპულსისა და დაცემის მიმართულებას შორის უნოდებენ მეორე ნანილაკის გაფანტვის კუთხეს და აღნიშნავენ θ_{2L} -ით. როცა მეორე ნანილაკი მძიმეა, ამ კუთხეს უკუცემის კუთხესაც უნოდებენ. 52-ე ნახაზიდან გვექნება

$$\text{tg}\theta_{2L} = \frac{P'_y}{P'_{2x}}. \quad (55.19)$$

ამავე ნახაზიდან $P'_y = P'_{1x} \text{tg}\theta_{1L}$, სადაც $\theta_{1L} = \theta_L$ პირველი ნანილაკის გაფანტვის კუთხეა L სისტემაში. მაშასადამე,

$$\text{tg}\theta_{2L} = \frac{P'_{1x}}{P'_{2x}} \text{tg}\theta_{1L}. \quad (55.20)$$

(55.12) ფორმულის გათვალისწინებით შეიძლება დავწეროთ

$$\text{tg}\theta_{2L} = \text{tg}\theta_{1L} \frac{E_1 + E_2 \cos\theta_c}{E_2(1 - \cos\theta_c)}, \quad (55.21)$$

რომელიც მარტივი გარდაქმნებით დაიყვანება გამოსახულებაზე

$$\operatorname{tg} \theta_{2L} = \frac{2m_2 c^2 E}{E^2 + (m_2^2 - m_1^2) c^4} \operatorname{ctg} \frac{\theta_c}{2}, \quad (55.22)$$

სადაც $E = E_1 + E_2$ სრული ენერგიაა C სისტემაში. არარელატივისტურ ზღვარში $E \rightarrow (m_1 + m_2) c^2$, ამიტომ მივიღებთ

$$\operatorname{tg} \theta_{2L} = \operatorname{ctg} \frac{\theta_c}{2}. \quad (55.23)$$

მაშასადამე, არარელატივისტურ ზღვარში

$$\theta_{2L} = \frac{\pi - \theta_c}{2} \quad (55.24)$$

ცხადია, რომ C სისტემაში მეორე ნაწილაკის გაფანტვის კუთხე (ნახ.51) ტოლი იქნება $\theta_{2c} = \pi - \theta_c$.

ამიტომ (55.24) -ის თანახმად $\theta_{2L} = \frac{1}{2} \theta_{2c}$. ამგვარად, ლაბორატორიულ სისტემაში მეორე ნაწილაკის გაფანტვის კუთხე ტოლია იმ კუთხის ნახევრის, რომლითაც იგი იფანტება C სისტემაში.

ვთქვათ, ნაწილაკთა მასები ტოლია $m_1 = m_2 \equiv m$, მაშინ (55.22) ფორმულა მოგვცემს

$$\operatorname{tg} \theta_{2L} = \frac{2m_2 c^2}{E} \operatorname{ctg} \frac{\theta_c}{2}. \quad (55.25)$$

გამოვიყენოთ (55.16) ფორმულა, გვექნება

$$\operatorname{tg} \theta_{2L} = \left(\frac{2mc^2}{E} \right)^2 \operatorname{ctg} \theta_{1L}. \quad (55.26)$$

თუ გავიხსენებთ ორი კუთხის ჯამის ტანგენსის ფორმულას

$$\operatorname{tg}(\theta_{1L} + \theta_{2L}) = \frac{\operatorname{tg} \theta_{1L} + \operatorname{tg} \theta_{2L}}{1 - \operatorname{tg} \theta_{1L} \operatorname{tg} \theta_{2L}} \quad (55.27)$$

მარტივად მივიღებთ

$$\operatorname{tg}(\theta_{1L} + \theta_{2L}) = \frac{4mc^2 E}{(E^2 - 4m^2 c^4) \sin \theta_c}. \quad (55.28)$$

არარელატივისტურ ზღვარში $E = 2mc^2$, ამიტომ (55.28) გამოსახულება უსასრულოობისაკენ მიისწრაფის. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$\theta_{1L} + \theta_{2L} = \frac{\pi}{2}$, ე.ი. ტოლი მასების და არარელატივისტურ შემთხვევაში L სისტემაში ნანილაკები ერთმანეთის მიმართ $\frac{\pi}{2}$ კუთხეზე იფანტებიან. მცირე სიჩქარეებზე $\theta_{1L} + \theta_{2L} = \frac{\pi}{2}$ ფორმულა ზედმინენით კარგად არის შემონმებული. რელატივისტურ შემთხვევაში, როგორც ეს (55.28) ფორმულიდან ჩანს, $\theta_{1L} + \theta_{2L} < \frac{\pi}{2}$. ამ უტოლობის შემონმება შეიძლება, მაგალითად, ელექტრონის ელექტრონზე გაფანტვის დროს. თუ რელატივისტური ეფექტი მართლაც არსებობს, მაშინ ძალიან დიდ ენერგიებზე ელექტრონებისათვის ვილსონის კამერაში მივიღებთ გაფანტვის სურათს, რომელზედაც აღმოჩნდება, რომ გაფანტული ელექტრონების მიერ ერთმანეთთან შედგენილი კუთხე ნაკლებია $\frac{\pi}{2}$ -ზე.

ამჟამად ასეთი სურათების მიღება, და არა მხოლოდ $e-e$ გაფანტვისათვის, არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს, მაგრამ წინათ ასეთი ექსპერიმენტის განხორციელება საკმარისად რთული იყო. ცდაზე ასეთი რელატივისტური ეფექტი $e-e$ გაფანტვის დროს პირველად აღმოაჩინა ჩემპენმა.

ახლა გავიხსენოთ (54.21) ფორმულა. $W_1 - W_1'$ არის ის ენერგია, რომელსაც დაცემული ნანილაკი გადასცემს მეორე ნანილაკს, ამიტომ იგი წარმოადგენს უკუცემული ნანილაკის კინეტიკურ ენერგიას. აღვნიშნოთ იგი T_2' -ით. ამგვარად, $T_2' = W_1 - W_1' = W_2' - m_2c^2$. ამ ენერგიისათვის (54.21) ფორმულა მოგვცემს

$$T_2' = (W_1 - m_1c^2) \left\{ 1 - \frac{(m_1 - m_2)^2 c^4}{E^2} \right\} \sin^2 \frac{\theta_c}{2}. \quad (55.29)$$

უკუცემის მაქსიმალური ენერგია გვექნება $\theta_c = \pi$ კუთხეზე. ამიტომ გვექნება შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\cos \theta_c = 1 - \frac{2T_2'}{(T_2')_{\max}}. \quad (55.30)$$

ეს ფორმულა მეტად მნიშვნელოვანია, რამდენადაც, თუ უშუალოდ გავზომავთ უკუცემის ენერგიის სპექტრს, შეგვიძლია ვიპოვოთ გაფანტვის კუთხე და, მაშასადამე, გაფანტვის დიფერენციალური განიკვეთი C სისტემაში.

ახლა განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა დაცემული ნაწილაკის უძრავობის მასა $m_1 = 0$. მაშინ ადვილია ჩვენება, რომ

$E^2 = (m_2 c^2)^2 a^2$, სადაც $a = \left[\frac{(1 + 2W_1)}{m_2 c^2} \right]^{1/2}$ და (55.15) ფორმულა მოგვცემს

$$\operatorname{tg} \theta_L = \frac{a \sin \theta_c}{a^2 \cos^2 \frac{\theta_c}{2} - \sin^2 \frac{\theta_c}{2}}. \quad (55.31)$$

რადგან $a \neq 1$, ამიტომ $\theta_L \neq \theta_c$. კლასიკურ მექანიკაში კი, როცა $m_1 = 0$, მაშინ $W_1 = 0$ და $\theta_L = \theta_c$. თუმცა კუთხეების ეს უტოლობა ფორმალურია, რამდენადაც $m_1 = 0$ მასის შესაბამისი ნაწილაკი კლასიკურ მექანიკაში არ არსებობს.

დაბოლოს, კინემატიკური თანაფარდობების დასადგენად მეტად მნიშვნელოვანია გადაცემული ოთხიმპულსის შემოტანა. დაცემული ნაწილაკის ოთხიმპულსი იყოს $P_j \left(\vec{p}, \frac{i}{c} E \right)$, ხოლო გაფანტულისა $P'_j = \left(\vec{p}', \frac{i}{c} E' \right)$, მაშინ გადაცემული ოთხიმპულსის ვექტორი ვუნოდოთ შემდეგ სხვაობას:

$$Q_j = P_j - P'_j = \left(\vec{q}, \frac{i}{c} (E - E') \right), \quad (55.32)$$

სადაც

$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}' \quad (55.33)$$

უნოდებენ დაჯახების ვექტორს.

ვაჩვენოთ, რომ გადაცემული ოთხიმპულსი θ_j მართობია

ინერციის ცენტრის სიჩქარის $u_j \left(\gamma \frac{\vec{V}_c}{c}, i\dot{\gamma} \right)$ ოთხვექტორისა, სადაც

$$\gamma = \left(1 - \frac{V_c^2}{c^2} \right)^{-1/2}, \text{ ე.ი.}$$

$$Q_j U_j = 0. \quad (55.34)$$

ეს გამოსახულება, როგორც ორი ოთხვექტორის ნამრაველი, სკალარია, ამიტომ სამართლიანი იქნება როგორც C , ისე L სისტემაში.

ამიტომ შევამოწმოთ იგი C სისტემაში, სადაც $\vec{V}_c = 0$ და $\gamma = 1$. გვექნება

$$Q_j U_j = \gamma \frac{(\vec{p}, \vec{V}_c)}{c} - \gamma \frac{E}{c} - \gamma \frac{(\vec{p}', \vec{V}_c)}{c} + \gamma \frac{E'}{c} = \frac{1}{c}(E' - E). \quad (55.35)$$

C სისტემაში დაჯახებისას ენერგია არ იცვლება $E = E'$, ამიტომ (55.35) ამტკიცებს (55.34) ტოლობას.

ახლა ვიპოვოთ დაჯახების ვექტორის სიდიდე. ამისათვის (55.33) ავიყვანოთ კვადრატში. გვექნება

$$q^2 = p_1'^2 + p_1^2 - 2p_1' p_1 \cos \theta_c = 4p^2 \sin^2 \frac{\theta_c}{2}, \quad (55.36)$$

სადაც გავითვალისწინეთ, რომ დრეკადი დაჯახების დროს C სისტემაში $p_1 = p_1' \equiv p$. მაშასადამე, დაჯახების ვექტორის სიდიდე ტოლი ყოფილა

$$q = 2p \sin \frac{\theta_c}{2}. \quad (55.37)$$

როცა θ_c იცვლება ნულსა და π -ს შორის, მაშინ $0 \leq q \leq 2p$. C სისტემაში, ნაცვლად θ_c გაფანტვის კუთხისა, შეგვიძლია ვისარგებლოთ დაჯახების ვექტორით. ამ თვალსაზრისით მნიშვნელოვანია შემდეგი ფორმულა:

$$4\pi q dq = 2p^2 d\Omega_c, \quad (55.38)$$

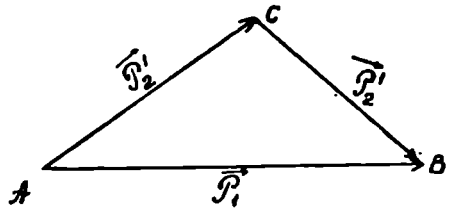
სადაც $d\Omega_c$ სხეულოვანი კუთხეა C სისტემაში. (55.38) მიიღება (55.36)-ის გადიფერენციალებით. (55.38) ფორმულიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$d\Omega_c = \frac{2\pi}{p^2} q dq. \quad (55.39)$$

ამ გამოსახულების გამოყენებით ხშირად ინტეგრაცია გაფანტვის კუთხით შეიძლება შევცვალოთ დაჯახების ვექტორით ინტეგრაციით.

ისევე როგორც კლასიკურ მექანიკაში, ხელსაყრელია ნაწილაკთა იმპულსები დაჯახების შემდეგ გამოვხატოთ დიაგრამის სახით. როგორც წინა პარაგრაფში, მთავრული ასოებით აღვნიშნოთ იმპულსები L სისტემაში. მაშინ იმპულსის მუდმივობის კანონს ექნება სახე $\vec{P} = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2$. გამოვხატოთ იგი გეომეტრიულად (ნახ. 54). ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ C წერტილების ის გეომეტრიული ადგილი, რომელიც შეესაბამება \vec{P}'_1 და \vec{P}'_2 ყველა შესაძლო მნიშვნელობას.

გამოვხატოთ იმპულსის მდგენლები L სისტემაში, შესაბამისი სიდიდეებით C სისტემაში. იმპულსები C სისტემაში აღვნიშნოთ \vec{p}_1 და \vec{p}_2 -ით. C სისტემაში $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0$. რომ-



ნახ. 53

ელიმე ნაწილაკის იმპულსის სიდიდე აღვნიშნოთ p -თი. გამოვიყენოთ ლორენცის გარდაქმნის კანონი იმპულსის ოთხვექტორისათვის. რამდენადაც C სისტემა მოძრავი სისტემაა, ამიტომ შტრიხისანი სისტემა სწორედ C სისტემა იქნება, მივიღებთ

$$P_x = \frac{p \cos \theta_c + \frac{E_1 V_c}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V_c^2}{c^2}}}, \quad P_y = p \sin \theta_c, \quad (56.1)$$

სადაც E_1 არის პირველი ნაწილაკის ენერგია C სისტემაში. ამ ორი ტოლობიდან გამოვრიცხოთ θ_c . მივიღებთ

$$\left(P_x \sqrt{1 - \frac{V_c^2}{c^2}} - \frac{E_1 V_c}{C^2} \right)^2 + P_y^2 = p^2. \quad (56.2)$$

ჩვენი მიზანია p გამოვხატოთ L სისტემის სიდიდეებით. L სისტემაში მეორე ნაწილაკი უძრავია, ამიტომ C სისტემის მიმართ იგი მოძრაობს $-\vec{V}_c$ სიჩქარით. ამის გამო, C სისტემაში მეორე ნაწილა-

კის იმპულსის სიდიდე (ისევე როგორც პირველი ნაწილაკის) იქნება ტოლი

$$p = \frac{m_2 V_c}{\sqrt{1 - \frac{V_c^2}{c^2}}}, \quad (56.3)$$

სადაც

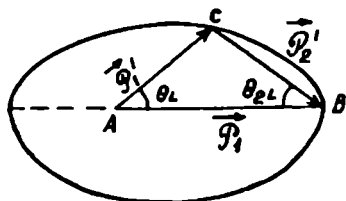
$$V_c = \frac{P_1 c^2}{W}, \quad W = W_1 + m_2 c^2. \quad (56.4)$$

თუ V_c -ს ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (56.3)-ში, ადვილად მივიღებთ

$$p = \frac{m_2 P_1}{\left(m_1^2 + m_2^2 + 2 \frac{m_2 W_1}{c^2}\right)^{1/2}}. \quad (56.5)$$

მაშასადამე, (56.2) მიიღებს საბოლოო სახეს

$$\left(P_x \sqrt{1 - \frac{V_c^2}{c^2}} - \frac{E_1 V_c}{c^2}\right)^2 + P_y^2 = \frac{m_2^2 P_1^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2 \frac{m_2 W_1}{c^2}}. \quad (56.6)$$



$$m_1 < m_2$$

ნახ.54

$P_x O P_y$ სიბრტყეზე ეს უკანასკნელი წარმოადგენს ელიფსის განტოლებას. $P_x = P_y = 0$ სათაეის მიმართ ელიფსის ცენტრი წანაცვლებულია სიდიდეზე

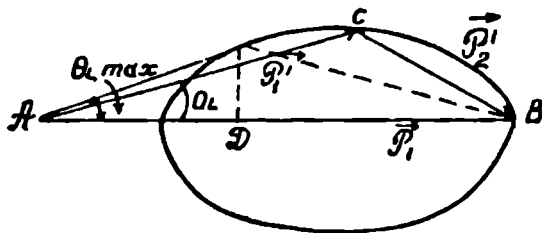
$$\frac{E_1 V_c}{c^2 \sqrt{1 - \frac{V_c^2}{c^2}}}. \quad (56.7)$$

ელიფსის ღერძები ტოლია

$$a = \frac{m_2 P_1 \left(\frac{W_1}{c^2} + m_2\right)}{m_1^2 + m_2^2 + 2 \frac{m_2 W_1}{c^2}}, \quad b = \frac{m_2 P_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2 \frac{m_2 W_1}{c^2}}}. \quad (56.8)$$

ნახ.55-დან ჩანს, რომ $\theta_L = 0$ -სათვის $\vec{P}_1' = \vec{P}_1$. ასე რომ, $AB = P_1$. ვი-

პოვით ელიფსის დიდი ღერძის ფარდობა P_1 -ზე, გვექნება

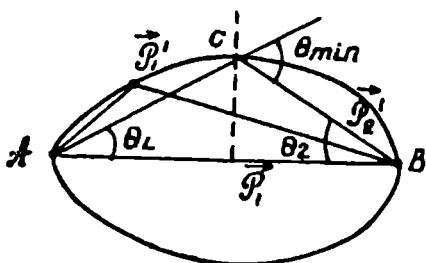


$$m_1 > m_2$$

ნახ.55

$$\frac{2a}{P_1} = \frac{2\left(1 + \frac{W_1}{m_2 c^2}\right)}{\left(1 + \frac{W_1}{m_2 c^2}\right) + \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} + \frac{W_1}{m_2 c^2}\right)}, \quad (56.9)$$

საიდანაც ჩანს, რომ, როცა $m_2 > m_1$, მაშინ $P_1 < 2a$, ე.ი. A ნერტილი ძევეს ელიფსის შიგნით (ნახ. 55). როცა $m_2 < m_1$, მაშინ A ნერტილი ძევეს ელიფსის გარეთ. დიდი ღერძის გაგრძელებაზე (ნახ.56). ხოლო, როცა $m_1 = m_2$, მაშინ $P_1 = 2a$ და A ნერტილი ძევეს ელიფსზე (ნახ.57).



$$m_1 = m_2$$

ნახ.56

$m_1 > m_2$ შემთხვევაში L სისტემაში არსებობს გაფანტვის კუთხის მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომელიც მაშინ მიიღება, როცა \vec{P}_1' იმპულსი მხები იქნება ელიფსის. ვიპოვოთ ეს კუთხე. გამოვიყენოთ ნახ. 56 და განვსაზღვროთ $\theta_{L, \max}$ -ის სინუსი. ცხადია, რომ

$$\sin \theta_{L,\max} = \frac{CD}{AC}. \quad (56.10)$$

A წერტილის კოორდინატები იყოს $A \equiv (P_A, 0)$, ხოლო C -სი $C(P_{xo}, P_{yo})$, მაშინ ელიფსის მხების განტოლებას ექნება სახე

$$\frac{P_x P_{xo}}{a^2} + \frac{P_y P_{yo}}{b^2} = 1. \quad (56.11)$$

ეს მხები P_x ღერძს გადაჰკვეთს A წერტილში, ამიტომ $P_x = P_A$ და $P_y = 0$ -ისათვის (56.11) მოგვცემს

$$P_{xo} = \frac{a^2}{P_A}. \quad (56.12)$$

მხების AC მონაკვეთის სიგრძე ტოლი იქნება

$$AC = \sqrt{(P_A - P_{xo})^2 + P_{yo}^2} \quad (56.13)$$

მამასადამე, (56.10) ფორმულის ძალით გვექნება

$$\sin \theta_{L,\max} = \frac{P_{yo}}{\sqrt{(P_A - P_{xo})^2 + P_{yo}^2}}. \quad (56.14)$$

(56.11) გამოსახულება $P_x = P_{xo}$ და $P_y = P_{yo}$ -ისათვის მოგვცემს

$$P_{yo} = b \sqrt{1 - \frac{P_{xo}^2}{a^2}}. \quad (56.15)$$

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (56.12) ფორმულას და $P_A = (P_1 - a)$ -ს, საბოლოოდ, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\sin \theta_{L,\max} = \frac{b}{\sqrt{b^2 - 2aP_1 + P_1^2}}. \quad (56.16)$$

ამ ფორმულაში შევიტანოთ a და b ნახევარღერძების (56.8) მნიშვნელობანი, მივიღებთ

$$\sin \theta_{L,\max} = \frac{m_2}{m_1}, \quad (56.17)$$

ე.ი. მივიღეთ ისეთივე ფორმულა, როგორც გვექონდა კლასიკურ მექანიკაში.

ტოლი მასების შემთხვევაში \vec{P}_1' და \vec{P}_2' იმპულსებს შორის მი-
ნიმალური კუთხე შეიქმნება იმ შემთხვევაში, როცა C ნერტილი
ძვეს მცირე ნახევარღერძის ბოლოში (ნახ.57) ამ შემთხვევაში

$$\theta_L = \theta_2 = \frac{\theta_{\min}}{2} \quad \text{და} \quad b = atg \frac{\theta_{\min}}{2}. \quad \text{მამასადამე,}$$

$$tg \frac{\theta_{\min}}{2} = \sqrt{\frac{2mc^2}{W_1 + mc^2}}. \quad (56.18)$$

არარელატივისტურ ზღვარში $W_1 \rightarrow m_1c^2$, ამიტომ ელიფსის დი-
დი და პატარა ნახევარღერძებისათვის (56.8) ფორმულა მოგვცემს

$$a = b = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v = \mu v,$$

სადაც v არის ფარდობითი სიჩქარე. მამასადამე, არარელატივი-
სტურ ზღვარში ელიფსი გადაიქცევა წრენირად, რომლის რადი-
უსი μv -ს ტოლია, სადაც μ არის სიტემის დაყვანილი მასა

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

§ 57. გაფანტვის ეფექტური დიფერენციალური განივიკვეთი.

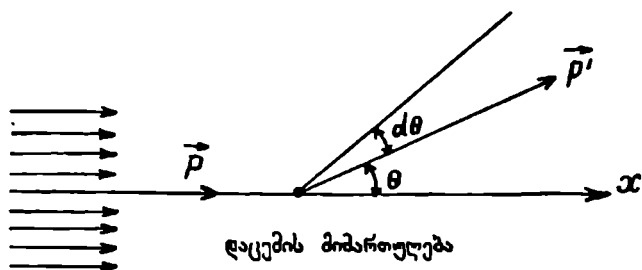
სამიზნე მანძილი

ექსპერიმენტული დაკვირვების თავისებურებიდან გამომდი-
ნარე, ნაცვლად ორი ნანილაკის დაჯახების შესწავლისა, ხელსაყ-
რელია ნანილაკთა გაფანტვის შესწავლა.

როგორც ცნობილია, გაფანტვის ამოცანა შემდეგნაირად ის-
მება: გვაქვს გამფანტავი ცენტრი. მას გარკვეული მიმართულე-
ბით, რომელსაც დაცემის მიმართულება ეწოდება, ეცემა ნანილაკ-
თა ნაკადი. ამასთან, ბუნებრივია მოვითხოვოთ, რომ ნაკადი იყოს
ერთგვაროვანი, ნაკადის შემცველი ნანილაკები მოძრაობდნენ მა-
ქსიმალურად პარალელურად და ყველა ნანილაკს ჰქონდეს ერთი
და იგივე ენერგია. ნანილაკთა ურთიერთქმედების შედეგად გამ-
ფანტავ ცენტრთან ადგილი ექნება გაფანტვას -გადახრას დაცე-
მის მიმართულებიდან.

ნანილაკთა გაფანტვა მოხდება სხვადასხვა θ კუთხეზე, რო-
მელიც წარმოადგენს კუთხეს დაცემული და გაფანტული ნანილა-

კის იმპულსის მიმართულებებს შორის. ჩვენი მიზანია, ვიპოვოთ იმ ნაწილაკთა რიცხვი, რომლებიც გაფანტვის შედეგად მოხვდები-



ნახ.57

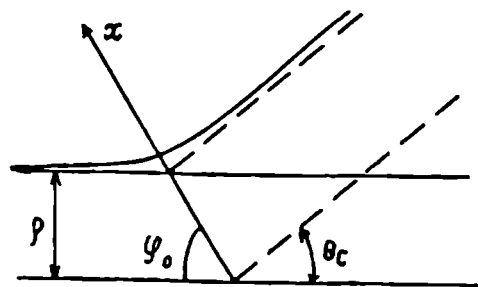
ბიან θ და $\theta + d\theta$ კუთხეებს შორის დროის ერთეულში. ეს რიცხვი აღვნიშნოთ $dn(\theta)$ -თი.

ნაწილაკთა გაფანტვა θ და $\theta + d\theta$ კუთხეებში შეგვიძლია დავახასიათოთ შემდეგი ფარდობით, რომელსაც გაფანტვის ეფექტური დიფერენციალური განივკვეთი ეწოდება

$$d\sigma(\theta) = \frac{dn(\theta)}{J}, \quad (57.1)$$

სადაც J არის დაცემულ ნაწილაკთა ნაკადი. იგი არის ნაწილაკთა ის რაოდენობა, რომელიც დაცემის მიმართულების პერპენდიკულარულად მოთავსებულ ერთეულოვან ფართს ეცემა დროის ერთეულში.

ცხადია, რომ გაფანტვის ეფექტურ განივკვეთს ექნება ფართის განზომილება.



ნახ.58

(რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ r მანძილზე ძალთა ცენტრიდან ნაწილაკამდე) თუ ორი m_1 და m_2 მასის ნაწილაკის გაფანტვას

C სისტემაში, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ დაყვანილი მასით, რომელთა ურთიერთქმედების პოტენციალური $U(r)$ ენერგია დამოკიდებულია მხოლოდ ამ ნაწილაკებს შორის არსებულ r მანძილზე.

ახლა შემოვიღოთ სამიზნე მანძილის ცნება. იმ მანძილს, რომელზედაც ჩაუვლიდა დაცემული ნაწილაკი გამფანტავ ცენტრს, ურთიერთქმედებას ადგილი რომ არ ჰქონოდა, უნოდებენ სამიზნე მანძილს ან დაჯახების პარამეტრს. მას p ასოთი აღვნიშნავთ.

სამიზნე მანძილი დავაკავშიროთ იმპულსის l მომენტთან. ნახ. 59-დან ნათელია, რომ

$$l = r p_{\infty} \sin \alpha, \quad (57.2)$$

სადაც p_{∞} დაცემული ნაწილაკის რელატივისტური იმპულსის სიდიდეა უსასრულობაში, როცა ნაწილაკსა და ძალთა ცენტრს შორის ურთიერთქმედება ჯერ არ იყო. რადგან $r \sin \alpha = p$, ამიტომ

$$l = p_{\infty} p = \frac{m v_{\infty}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\infty}^2}{c^2}}} p. \quad (57.3)$$

ცხადია, p დამოკიდებული იქნება გაფანტვის კუთხეზე $p = p(\theta)$. რაც უფრო შორს ჩაუვლის დაცემული ნაწილაკი ცენტრს, მით უფრო დიდი იქნება სამიზნე p მანძილი, მით ნაკლები ძალა იმოქმედებს ნაწილაკზე და მით მცირე იქნება გაფანტვის კუთხე. მაშასადამე,

$\frac{dp}{d\theta} < 0$. რადგან გაფანტვის ეფექტური დიფერენციალური განივკვეთი დამოკიდებულია გაფანტვის კუთხეზე, ამიტომ იგი დამოკიდებული იქნება სამიზნე მანძილზეც. ცხადია, რომ θ და $\theta + d\theta$ კუთხეებს შორის ის ნაწილაკები გაიფანტება, რომლებიც გაკვეთენ დაცემის მიმართულების ნორმალურად მოთავსებულ რგოლს, რომლის რადიუსები შესაბამისად იქნება p და $p + dp$. აღნიშნული რგოლის ფართი ტოლია

$$ds = -d(\pi p^2) = -2\pi p(\theta) dp(\theta). \quad (57.4)$$

მინუს ნიშანი იმიტომ ავიღეთ, რომ $dp < 0$, ფართი კი დადებითი უნდა იყოს. თუ ამ ფართს გავამრავლებთ დაცემულ ნაწილაკთა ნაკადზე, მივიღებთ $(\theta, \theta + d\theta)$ კუთხეებში დროის ერთეულში გა-
19. გ. ჭილაშვილი

ფანტულ ნანილაკთა რიცხვს.

$$d\pi(\theta) = -2\pi\rho(\theta)d\rho(\theta), \quad (57.5)$$

საიდანაც, (57.1) განმარტების გათვალისწინებით, ვიპოვით კავშირს განიკვეთსა და სამიზნე მანძილს შორის

$$d\sigma = -2\pi\rho d\rho. \quad (57.6)$$

ცხადია, რომ გაფანტვის ეფექტური დიფერენციალური განიკვეთი ასეც შეგვიძლია გადავწეროთ

$$d\sigma = \sigma(\theta)d\Omega, \quad (57.7)$$

სადაც

$$\sigma(\theta) = -\rho(\theta) \frac{d\rho(\theta)}{d\theta} \frac{1}{\sin\theta}, \quad (57.8)$$

ხოლო

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta \quad (57.9)$$

სხეულოვანი კუთხეა.

ინტეგრალური განიკვეთი ეწოდება სიდიდეს, რომელიც დიფერენციალური განიკვეთისაგან მიიღება გაფანტვის θ კუთხის მიხედვით ინტეგრაციით

$$\sigma = 2\pi \int \sigma(\theta) \sin\theta d\theta. \quad (57.10)$$

გეომეტრიულად ინტეგრალური განიკვეთი არის დაცემის ნორმალურად მოთავსებული იმ წრის ფართი, რომელიც უნდა გაკვეთოს ნანილაკმა, რომ მოხდეს გაფანტვა.

ამის შემდეგ საჭიროა გავარკვეოთ ρ -ს დამოკიდებულება გაფანტვის θ კუთხეზე თითოეული კონკრეტული ამოცანისათვის.

დაბოლოს, აღვნიშნოთ ერთი მნიშვნელოვანი გარემოება. თუ ნანილაკის გაფანტვა ხდება არა დაფიქსირებულ გარეშე ველზე, არამედ ნანილაკზე, ყველა ფორმულა, რომელიც ზემოთ მივიღეთ, სამართლიანი იქნება ამ ნანილაკების ინერციის ცენტრის სისტემაშიც.

C სისტემაში გამოთვლების ჩატარება უფრო ადვილია, მაგრამ, როგორც წესი, ექსპერიმენტი ტარდება L სისტემაში. ამიტომ გაფანტვის დიფერენციალური ეფექტური განიკვეთის თეორიული მნიშვნელობის ექსპერიმენტულთან შედარების მიზნით ნიანასნარ L სისტემაზე უნდა გადავიდეთ.

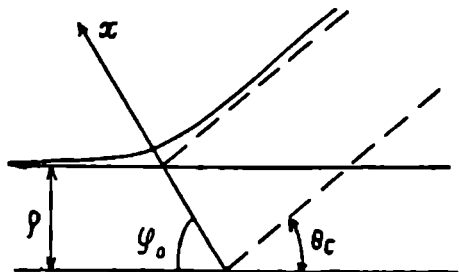
როგორც წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ გაფანტვის ამოცანის გადასაწყვეტად საჭიროა ვიცოდეთ კავშირი გაფანტვის კუთხესა და სამიზნე მანძილს შორის. ამ მიზნით განვიხილოთ გაფანტვა ცენტრალური ურთიერთქმედების შემთხვევაში. ვთქვათ, ნაწილაკი, რომლის მასაა m , ურთიერთქმედებს ძალთა ცენტრთან, რომლის პოტენციალური ენერგია $U(r)$ -ის ტოლია.

ნახ. 59-დან ნათელია, რომ გაფანტვის θ კუთხე დაკავშირებული იქნება φ_0 კუთხესთან. კერძოდ,

$$\theta = \pi - 2\varphi_0. \quad (58.1)$$

ამასთან, როგორც ვიცით, φ_0 კუთხის მოძებნა დაიკვანება გაფანტული ნაწილაკის ტრაექტორიის ასიმპტოტის მოძებნაზე.

(48.43) ფორმულის თანახმად, ასიმპტოტის განტოლებას აქვს სახე



ნახ. 59

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{l dr}{r^2 \sqrt{(E-u)^2 - m^2 c^2 - \frac{l^2}{r^2}}}. \quad (58.2)$$

ჩვენი მიზნებისათვის ხელსაყრელია ამ ინტეგრალში l -ის ნაცვლად შემოვიტანოთ სამიზნე მანძილი. როგორც წინა პარაგრაფში ვაჩვენეთ, $l = P_{\infty} p$. რადგან ადგილი აქვს სრული ენერგიის შენახვას, ამიტომ ხელსაყრელია ენერგიად ავილოთ ის მნიშვნელობა, რომელიც სისტემას აქვს სანყის მომენტში, როცა დაცემული ნაწილაკი იმყოფება უსასრულობაში, ე.ი. $E = \sqrt{m^2 c^4 + p_{\infty}^2 c^2}$ გარდაექმნათ (58.2) -ის ფესვქვეშა გამოსახულება. გვექნება

$$\left(\frac{E-u}{c} \right)^2 - m^2 c^2 = \frac{P_{\infty}^2 c^2 - u(2E-u)}{c^2} = p_{\infty}^2 - \frac{u(2E-U)}{c^2}. \quad (58.3)$$

ამგვარად, გაფანტვის კუთხისათვის საბოლოოდ მივიღებთ გამოსახულებას

$$\theta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{p dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{u(2E-u)}{(P_{\infty}c)^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}} \quad (58.4)$$

$r = r_{\min}$ მანძილი განისაზღვრება ფესვექვეშა გამოსახულების ნულთან ტოლობიდან. (58.4) ფორმულა ამყარებს $\theta = f(\rho)$ კავშირს. ამიტომ $u(r)$ პოტენციალური ენერჯიის კონკრეტული სახისათვის $\rho = \rho(\theta)$ კავშირის მოძებნა დადის გარკვეული ტიპის ინტეგრალის გამოთვლაზე.

თუ (58.4) ფორმულას შევადარებთ კლასიკური მექანიკის ანალოგიურ გამოსახულებას, დავინახავთ, რომ რელატივისტურ შემთხვევაში, პოტენციალური ენერჯიის როლს ასრულებს სიდიდე

$$V(r, E) = \frac{u(2E-u)}{c^2}, \quad (58.5)$$

რომელიც არარელატივისტურ ზღვარში $E = mc^2 \gg u$, მოგვცემს $V(r, E) = 2mu$. როგორც ადრეც აღვნიშნეთ, $V(r, E)$ რელატივისტურ პოტენციალს აქვს შემდეგი თვისებები: ჯერ ერთი, იგი დამოკიდებულია ენერჯიაზე. ამასთან, რაც მეტია E , მით უფრო ეფექტურია ურთიერთქმედება. მეორე, როცა $u(r)$ სინგულარულია, მაშინ V პოტენციალური ენერჯია უფრო სინგულარულია (კვადრატულად) და $u(r)$ -ის ნიშნის მიუხედავად, უარყოფითია.

§ 59. კავშირი განივკვეთებს შორის L და C სისტემებში

ვიპოვოთ კავშირი გაფანტვის ეფექტურ დიფერენციალურ განივკვეთებს შორის L და C სისტემებში. გამოვიდეთ იმ აშკარა ტოლობიდან, რომ გაფანტულ ნაწილაკთა რიცხვი, მოცემულ სხეულოვან კუთხეში, ერთი და იგივე უნდა იყოს ორივე სისტემაში, ე.ი.

$$\sigma_L(\theta_L) 2\pi \sin \theta_L d\theta_L = \sigma_C(\theta_C) 2\pi \sin \theta_C d\theta_C. \quad (59.1)$$

გამოვიყენოთ (55.15) ფორმულა, რომელიც კავშირს ამყარებს გაფანტვის კუთხეებს შორის L და C სისტემებში:

$$\operatorname{tg} \theta_L = \frac{2Em_2c^2 \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2}}{E^2 + (m_1^2 - m_2^2)c^4 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2}}, \quad (59.2)$$

საიდანაც განვსაზღვროთ $\cos \theta_L$. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$\cos \theta_L = \frac{E^2 + (m_1^2 - m_2^2)c^4 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2}}{\left\{ \left[E^2 + (m_1^2 - m_2^2)c^4 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2} \right]^2 + 4E^2 m_2^2 c^4 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2} \right\}^{1/2}}. \quad (59.3)$$

ამ გამოსახულების გადიფერენციალებით გვექნება

$$\sin \theta_L d\theta_L = \frac{\sin \theta_c d\theta_c}{\cos^4 \frac{\theta_c}{2}} \cdot \frac{E^2 m_2^2 c^4 \left\{ E^2 + (m_1^2 - m_2^2)c^4 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2} \right\}}{\left\{ E^4 + 2E^2(m_1^2 + m_2^2)c^4 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2} + (m_1^2 - m_2^2)^2 c^8 \operatorname{tg}^4 \frac{\theta_c}{2} \right\}^{3/2}}. \quad (59.4)$$

ხოლო, (59.1)-დან მივიღებთ

$$\sigma_L(\theta_L) = \sigma_c(\theta_c) \cdot \frac{\cos^4 \frac{\theta_c}{2} \left\{ E^4 + 2E^2(m_1^2 + m_2^2)c^4 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2} + (m_1^2 - m_2^2)^2 c^8 \operatorname{tg}^4 \frac{\theta_c}{2} \right\}^{3/2}}{E^2(m_2c^2)^2 \left\{ E^2 + (m_2^2 - m_1^2)c^4 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2} \right\}}. \quad (59.5)$$

ეს დამოკიდებულება საგრძნობლად გამარტივდება ტოლი მასების შემთხვევაში. მართლაც, დავუშვათ, რომ $m_1 = m_2 \equiv m$, გვექნება

$$\sigma_L(\theta_L) = \sigma_c(\theta_c) \frac{\cos^4 \frac{\theta_c}{2} \left\{ E^2 + 4m^2c^4 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_c}{2} \right\}^{3/2}}{E(mc^2)^2}. \quad (59.6)$$

როცა $m_2 < m_1$, მაშინ (55.15) გამოსახულების მნიშვნელი შეიძლება ნული გახდეს. ამ შემთხვევაში

$$i\theta_c = \frac{E}{c^2 \sqrt{m_1^2 - m_2^2}}. \quad (59.7)$$

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (55.15)-ში, მივიღებთ

$$i\theta_L = \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}}, \quad (59.8)$$

საიდანაც

$$\sin \theta_L = \frac{m_2}{m_1} \quad (59.9)$$

გაფანტვის განივკვეთი კი ლაბორატორიულ სისტემაში ამ შემთხვევაში უსასრულობის ტოლი იქნება.

არარელატივისტურ ზღვარში (59.5) ფორმულა მარტივად დაიყვანება ცნობილ შედეგზე.

$$\sigma_L(\theta_L) = \frac{\left(1 + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta_c + \frac{m_1^2}{m_2^2}\right)^{3/2}}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \theta_c\right)} \sigma_c(\theta_c), \quad (59.10)$$

რომელიც თავის მხრით ტოლი მასებისათვის მოგვცემს $\sigma_L(\theta_L) = 4 \cos \frac{\theta_c}{2} \sigma_c(\theta_c)$ ფორმულას.

და ბოლოს აღვნიშნოთ, რომ რამდენადაც იმპულსის ოთხვექ-

ტორს აქვს სახე $P_i(\vec{p}, \frac{i}{c} E)$, იმდენად $P_j^2 = \vec{p}^2 - \frac{E^2}{c^2} = i\pi v$,

ე.ი. გამოსახულება $(E^2 - p^2 c^4)_L = (E^2 - p^2 c^4)_c = m_0^2 c^2$, ამიტომ ეს ტოლობა ხშირად გამოიყენება ერთიდან მეორე სისტემაზე გადასვლის დროს.

§ 60. გაფანტვა პოტენციალურ ორმოზე და ჯეპირზე

ახლა განვიხილოთ გაფანტვის კონკრეტული მაგალითები. დავინყოსთ გაფანტვით პოტენციალურ ორმოზე. განვიხილოთ შემდეგი ცენტრალური სიმეტრიის პოტენციალური ორმო:

$$\begin{aligned} u(r) &= -u_0, \text{ როცა } r < R, \\ u(r) &= 0, \text{ როცა } r > R, \end{aligned} \quad (60.1)$$

სადაც u_0 ორმოს სიღრმეა. ეს ამოცანა, როცა $u_0 \rightarrow \infty$, დადის უსასრულო სიღრმის ორმოზე გაფანტვაზე, ხოლო, როცა $u_0 \rightarrow -\infty$, მივიღებთ გაფანტვას აბსოლუტურად შეუღწევად სფეროზე ან გაფანტვას უსასრულო სიმაღლის ჯეპირზე.

გამოვიყენოთ (58.4) ფორმულა. რადგან პოტენციალურ ენერგიას $r=R$ წერტილზე წყვეტა აქვს, ამიტომ გვექნება

$$\frac{\pi - \theta_c}{2} = \int_{r_{\min}}^R \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{u_0(2E + u_0)}{(p_{\infty} c)^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}} + \int_R^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}}. \quad (60.2)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$v^2 = \frac{u_0(2E + u_0)}{(p_{\infty} c)^2}, \quad (60.3)$$

მაშინ r_{\min} უნდა ვიპოვოთ შემდეგი განტოლებიდან:

$$1 + v^2 - \frac{\rho^2}{r_{\min}^2} = 0, \quad (60.4)$$

საიდანაც

$$r_{\min} = \frac{\rho}{k}; \quad k = \sqrt{1 + v^2}. \quad (60.5)$$

ამოვხსნათ ინტეგრალები. გვექნება:

$$I_1 = \int_{r_{\min}}^R \frac{\rho dr}{\rho/k r^2 \sqrt{1 + v^2 - \frac{\rho^2}{r^2}}} = - \int_{r_{\min}}^R \frac{d\left(\frac{\rho}{r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{r_{\min}}\right)^2 - \frac{\rho^2}{r^2}}} = \arccos \frac{r_{\min}}{R}, \quad (60.6)$$

ასევე

$$I_2 = \int_R^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}} = - \int_r^{\infty} \frac{d\left(\frac{\rho}{r}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}} = \arcsin \frac{\rho}{R}. \quad (60.7)$$

ამგვარად,

$$\frac{\pi - \theta_c}{2} = \arccos \frac{r_{\min}}{R} + \arcsin \frac{\rho}{R}, \quad (60.8)$$

რომელიც შეგვიძლია ასეც გადავწეროთ:

$$-\frac{\theta_c}{2} = \arcsin \frac{\rho}{R} - \arcsin \frac{r_{\min}}{R}. \quad (60.9)$$

ვიპოვოთ ფარდობა

$$\frac{\rho / r_{\min}}{R / R} = \frac{\rho}{r_{\min}} = \frac{\rho}{\rho / k} = k = \sqrt{1 + v^2} \quad (60.10)$$

ცხადია, რომ $k > 1$, ამასთან, $k > 1$, როგორც არ უნდა იყოს v_0 — დადებითი თუ უარყოფითი, როცა იგი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ $k > 1$ -სათვის კი შეგვიძლია გამოვიყენოთ ფორმულა

$$\arcsin \frac{\rho}{R} - \arcsin \frac{r_{\min}}{R} = \arccos \left(\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}} \sqrt{1 - \frac{r_{\min}^2}{R^2}} + \frac{\rho r_{\min}}{R^2} \right). \quad (60.11)$$

მაშასადამე, (60.9) -ის მიხედვით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\cos \frac{\theta_c}{2} = \sqrt{\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) \left(1 - \frac{r_{\min}^2}{R^2}\right)} + \frac{\rho r_{\min}}{R^2}, \quad (60.12)$$

საიდანაც ადვილად ვაჩვენებთ, რომ

$$\rho^2(\theta) = \frac{k^2 R^2 \sin^2 \frac{\theta_c}{2}}{1 + k^2 - 2k \cos \frac{\theta_c}{2}}. \quad (60.13)$$

ეს გამოსახულება გარეგნულად ემთხვევა კლასიკურ ფორმულას, ოღონდ (60.13) -ში შემავალი k სიდიდე განსხვავებულია, რამდენადაც იგი განმარტებულია რელატივისტური ენერგიითა და იმპულსით. არარელატივისტურ ზღვარში გვექნება

$$v^2 = \frac{u_0(2mc^2 + u_0)}{(\sqrt{2mEc})^2} = \frac{u_0}{E} \quad (60.14)$$

და k -სათვის მივიღებთ კლასიკურ გამოსახულებას $k = \sqrt{1 + \frac{u_0}{E}}$.

გაფანტვის ეფექტურ დიფერენციალურ განივკვეთს ადვილად მივიღებთ (60.13) გამოსახულების გადიფერენციალებით და (57.6)-ის გათვალისწინებით. გვექნება

$$\sigma_r(\theta_c) d\Omega_r = \frac{k^2 R^2 \left(k \cos \frac{\theta_c}{2} - 1 \right) \left(k - \cos \frac{\theta_c}{2} \right)}{4 \cos \frac{\theta_c}{2} \left(1 + k^2 - 2k \cos \frac{\theta_c}{2} \right)^2} d\Omega_r. \quad (60.15)$$

როცა $u_0 \rightarrow \pm\infty$, მაშინ $v^2 \rightarrow +\infty$, ე.ი. $k \rightarrow \infty$ და გვექნება

$$\sigma_r(\theta_c) = \frac{R^2}{4}. \quad (60.16)$$

მაშასადამე, c სისტემაში, ნაწილაკების გაფანტვის დიფერენციალური განივკვეთი უსასრულო სიღრმის პოტენციალურ ორმოზე ან ჯებირზე იზოტროპიულია, ხოლო ინტეგრალური განივკვეთი πR^2 -ის ტოლია. ამგვარად, რელატივისტურ შემთხვევაშიც აბსოლუტურად შეუღწევად სფეროზე გაფანტვის ინტეგრალური განივკვეთი სფეროს განივი კვეთის ტოლია.

§ 61. გაფანტვა კულონური ველით

ახლა განვიხილოთ დამუხტული ნაწილაკების რელატივისტური გაფანტვის ამოცანა. კერძოდ, განვიხილოთ გაფანტვა კულონური ველით

$$u(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad (61.1)$$

სადაც $\alpha = \pm Z_1 Z_2 e^2$. Z არის რიცხვი, რომელიც მიუთითებს, თუ დამუხტული სისტემა (ნაწილაკი) რამდენ ელემენტარულ მუხტს შეიცავს. მაგალითად, პროტონისათვის $Z=1$, α ნაწილაკისათვის $Z=2$, ხოლო ურანის ატომის გულისათვის $Z=92$. კულონური ველის (61.1) სახით ჩაწერა გულისხმობს, რომ ურთიერთქმედი ნაწილაკები ნერტილოვნად უნდა ჩავთვალოთ.

ამ ამოცანის ამოხსნაც (58.4) ფორმულის გამოყენებით უნდა დავინყოთ, მაგრამ ამ კონკრეტულ შემთხვევაში ეს არ დაგვჭირდება, რამდენადაც (61.1) ურთიერთქმედებისათვის ასიმპტოტის განტოლების სახე ჩვენთვის ცნობილია. კერძოდ (49.38) ფორმულის ძალით

$$\cos^2(\varphi_0 \Gamma) = \frac{1}{\kappa^2}, \quad (61.2)$$

სადაც κ ექსცენტრისიტეტია

$$\kappa^2 = 1 + \frac{\Gamma^2}{A^2} \beta. \quad (61.3)$$

Γ, A და β მუდმივები განისაზღვრება (49.5) ფორმულებით. მაშასადამე, κ^2 -ს შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\kappa^2 = 1 + \left[\left(\frac{lc}{\alpha} \right)^2 - 1 \right] \left[1 - \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2 \right]. \quad (61.4)$$

ჩვენი მიზნებისათვის ხელსაყრელია l -ის ნაცვლად შემოვიტანოთ სამიზნე მანძილი. რადგან $l = \rho p_{\infty}$, ამიტომ

$$\kappa^2 = 1 + \left[\left(\frac{\rho p_{\infty} c}{\alpha} \right)^2 - 1 \right] \left[1 - \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2 \right]. \quad (61.5)$$

κ^2 -ის მნიშვნელობის შეტანით (61.2) გამოსახულებაში მივიღებთ

$$\text{tg}^2(\Gamma \varphi_0) = \left[\left(\frac{\rho p_{\infty} c}{\alpha} \right)^2 - 1 \right] \left[1 - \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2 \right]. \quad (61.6)$$

მარჯვნივ მეორე კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} =$ ის ტოლია, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\rho^2 = \left(\frac{\alpha}{p_{\infty} s} \right)^2 \{ \text{tg}^2(\Gamma \varphi_0) + \beta^2 \}. \quad (61.7)$$

როგორც ვიცით, თანახმად (49.5) ფორმულისა

$$\Gamma^2 = 1 - \left(\frac{\alpha}{lc}\right)^2 \quad (61.8)$$

მაგრამ $l = \rho p_{\infty}$, ამიტომ

$$\Gamma^2 = 1 - \left(\frac{\alpha}{\rho p_{\infty} c}\right)^2 \quad (61.9)$$

მაშასადამე, Γ დამოკიდებულია სამიზნე მანძილზე. ეს კი იმას გვეუბნება, რომ (61.6) ტრანსცენდენტული ფუნქციაა ρ -სი და, ამიტომ ρ -სა და θ_c -ს შორის მარტივი კავშირი არ არსებობს. არარელატივისტურ ზღვარში, როცა $\beta \rightarrow 0$ და $\Gamma \rightarrow 1$, მაშინ (61.6) კლასიკურ გამოსახულებაზე დაიყვანება

$$\rho^2 = \left(\frac{\alpha}{p_{\infty} v}\right)^2 \text{tg}^2 \varphi_0, \quad (61.10)$$

საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\varphi_0 = \frac{\pi - \theta_c}{2}$, მარტივად მივიღებთ რეზერფორდის ფორმულას

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \frac{d\Omega_c}{\sin^4 \frac{\theta_c}{2}}. \quad (61.11)$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\frac{\alpha}{cp_{\infty}\sigma} \ll 1$, ე.ი.

$$\rho \gg \frac{\alpha}{cp_{\infty}} \quad (61.12)$$

ამ შემთხვევაში, Γ ახლო იქნება ერთთან და (61.6) მიიღებს სახეს

$$\sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{sp_{\infty}}\right)^2 \left\{ \text{tg}^2 \varphi_0 + \beta^2 \right\}, \quad (61.13)$$

რომელიც შეგვიძლია გამოვხატოთ გაფანტვის კუთხის საშუალებით. გვექნება

$$\rho^2 = \left(\frac{\alpha}{sp_{\infty}}\right)^2 \left\{ \text{ctg}^2 \frac{\theta_c}{2} + \beta^2 \right\}, \quad (61.14)$$

საიდანაც მარტივად ვიპოვით გაფანტვის ეფექტურ დიფერენცი-
ალურ განიკვეთს

$$\sigma_c(\theta_c)d\Omega_c = \left(\frac{z_1 z_2 e^2}{2cp_\infty} \right)^2 \frac{d\Omega_c}{\sin^4 \frac{\theta_c}{2}}. \quad (61.15)$$

დიდი ენერგიების შემთხვევაში, როცა სამართლიანია (61.14) ფორ-
მულა, $vp_\infty = cp_\infty$, ამიტომ

$$\sigma_c(\theta_c)d\Omega_c = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E} \right)^2 \frac{d\Omega_c}{\sin^4 \frac{\theta_c}{2}}. \quad (61.16)$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, კულონური ურთიერთქმედე-
ბისათვის გაფანტვის ინტეგრალური განიკვეთი უსასრულობის
ტოლია.

(61.14) ფორმულიდან ადვილად მივიღებთ გაფანტვის დიფე-
რენციალურ განიკვეთს მცირე კუთხეებზე. სახელდობრ, გვექ-
ნება

$$\sigma_c(\theta_c)d\Omega_c = 4 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{vp_\infty} \right)^2 \frac{d\Omega_c}{\theta_c^4}. \quad (61.17)$$

არარელატივისტურ შემთხვევაში $p_\infty = mv$ და (61.16) დაემთხვევა
რეზერფორდის არარელატივისტურ ფორმულას მცირე კუთხეებ-
ზე გაფანტვის შემთხვევაში.

§ 62. სინათლის ურთიერთქმედება ელექტრონებთან

განვიხილოთ სინათლის კვანტების დაჯახება ელექტრონზე.
კერძოდ, შევხებით ორ მნიშვნელოვან მოვლენას-კომპტონის
ეფექტს და ფოტოეფექტს. პირველი ეფექტი მდგომარეობს სინათ-
ლის კვანტის გაფანტვაში თავისუფალ ელექტრონზე, მეორე კი -
სინათლის მოქმედებით ელექტრონის განთავისუფლებაში ბმული
მდგომარეობიდან. ორივე ეს ეფექტი სრულიად გაუგებარი აღმოჩ-
ნდა კლასიკური ფიზიკის თვალსაზრისით. აინშტაინის სინათლის
კვანტურ თეორიაზე დაყრდნობით. ორივე ისინი მარტივად აიხ-
სნება შენახვის კანონების გამოყენებით.

ვისარგებლოთ იმ ფორმულებით, რომლებიც 54-ე პარაგრაფში

გამოვიყვანეთ. სინათლის კვანტის უძრაობის მასა $m_1 = 0$, ამიტომ კლასიკური მექანიკის თანახმად, იგი სხვა ნაწილაკის არავითარ ენერგიას არ გადასცემს. უფრო მეტიც, ასეთი ნაწილაკის აღმოჩენა მის მიერ გამონვეულ ეფექტებზე დაყრდნობით შეუძლებელია. რელატივისტურ მექანიკაში, $m_1 = 0$ მასის ნაწილაკს, კლასიკური მექანიკისაგან განსხვავებით, აქვს ნულისაგან განსხვავებული ენერგია $W_1 = \sqrt{m_1^2 c^4 + P^2 c^2} = Pc$, ამიტომ მისი დაჯახება რაიმე ნაწილაკთან, როგორც ჩვეულებრივი ნაწილაკების დაჯახება, ისე უნდა განვიხილოთ.

გამოვიყენოთ (54.33) ფორმულა

$$\frac{\Delta W}{W_1} = \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \sin^2 \frac{\theta_c}{2}, \quad (62.1)$$

სადაც

$$a^2 = 1 + \frac{2W_1}{m_2 c^2}, \quad (62.2)$$

ხოლო θ_c გაფანტვის კუთხეა C სისტემაში. ჩვენი მიზნებისათვის ხელსაყრელია θ_c გამოვხატოთ θ_L -ით, რომელიც ამ შემთხვევაში იქნება ნულოვანი უძრაობის მასის მქონე ნაწილაკის საბოლოო იმპულსის მიერ შედგენილი კუთხე დაცემის მიმართულულებასთან. ამ კავშირის დასამყარებლად ვისარგებლოთ (55.35) ფორმულით

$$\operatorname{tg} \theta_L = \frac{a \sin \theta_c}{a^2 \cos^2 \frac{\theta_c}{2} - \sin^2 \frac{\theta_c}{2}}. \quad (62.3)$$

გავიხსენოთ, რომ $\cos^2 \theta_L = (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_L)^{-1}$ და (62.3)-დან ვიპოვოთ $\cos \theta_L$. გვექნება

$$\cos \theta_L = \frac{a^2 \cos^2 \frac{\theta_c}{2} - \sin^2 \frac{\theta_c}{2}}{a^2 \cos^2 \frac{\theta_c}{2} + \sin^2 \frac{\theta_c}{2}} \quad (62.4)$$

საიდანაც მარტივად განისაზღვრება $\sin^2 \frac{\theta_c}{2}$:

$$\sin^2 \frac{\theta_c}{2} = \frac{a^2(1 - \cos \theta_L)}{(1 + \cos \theta_L) + a^2(1 - \cos \theta_L)}. \quad (62.5)$$

თუ ამ გამოსახულებას შევიტანთ (62.1) ფორმულაში, ადვილად მივიღებთ

$$\frac{\Delta W}{W_1} = \frac{\frac{W_1'}{m_2 c^2} (1 - \cos \theta_L)}{1 + \frac{W_1}{m_2 c^2} (1 - \cos \theta_L)}. \quad (62.6)$$

ამ ფორმულიდან მარტივად მივიღებთ ფორმულასაც

$$W_1' = \frac{W_1}{1 + \frac{W_1}{m_2 c^2} (1 - \cos \theta_L)}. \quad (62.7)$$

ჩავატაროთ (62.6) ფორმულის ანალიზი, რომელიც განსაზღვრავს ფარდობით გადაცემულ ენერგიას. უპირველეს ყოვლისა, დაცული უნდა იყოს პირობა

$$1 + \frac{W_1}{m_2 c^2} (1 - \cos \theta_L) \geq 1, \quad (62.8)$$

საიდანაც

$$\frac{W_1}{m_2 c^2} (1 - \cos \theta_L) \geq 0 \quad (62.9)$$

და $\Delta W \geq 0$. მაშასადამე, $W_1' \leq W_1$. როცა $\theta_L = 0$, მაშინ $W_1' = W_1$; ამ შემთხვევაში ნულოვანი უძრაობის მასის ნაწილაკი უძრავ ნაწილაკს ენერგიას არ გადასცემს.

როცა $W_1 \ll m_2 c^2$, ე.ი. როცა დაცემული ნაწილაკის ენერგია გაცილებით ნაკლებია უძრავი ნაწილაკის ენერგიაზე, მაშინ როგორც არ უნდა იყოს გაფანტვის კუთხე, $W_1' \approx W_1$. პირიქით, როცა $W_1 \gg m_2 c^2$, მაშინ, თუ $\theta_L \neq 0$. გვექნება $\Delta W = W_1$, ე.ი. პირველი ნაწილაკი უძრავს გადასცემს მთელ თავის ენერგიას.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა გაფანტვა ხდება მცირე კუთხეებზე, მაშინ (61.6) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\Delta W}{W_1} = \frac{\left(\theta_L/\theta_0\right)^2}{1 + \left(\theta_L/\theta_0\right)^2}, \quad (62.10)$$

სადაც ჩვენ შემოვიღეთ აღნიშვნა

$$\theta_0^2 = \frac{2m_2c^2}{W_1}. \quad (62.11)$$

როცა $\theta_L \ll \theta_0$, მაშინ ენერგიის გადაცემა თითქმის არ ხდება $W_1 = W_1'$ როცა $\theta_L \gg \theta_0$, მაშინ უმჯობესია ვისარგებლოთ (62.7) ფორმულით, რომელიც მოგვცემს

$$W_1' = \frac{W_1}{1 + \frac{1 - \cos\theta_L}{2\theta_0^2}} = \frac{2W_1\theta_0^2}{1 - \cos\theta_L} = \frac{m_2c^2}{1 - \cos\theta_L}. \quad (62.12)$$

როცა $\theta_L = \pi$, მაშინ $W_1' = \frac{1}{2}m_2c^2$, ე.ი. ხდება ენერგიის ძლიერი გადაცემა. ამგვარად, როცა $\theta_L \ll \theta_0$, ენერგიის გადაცემა არ ხდება, ხოლო, როცა $\theta_L \gg \theta_0$, ხდება ენერგიის ძლიერი გადაცემა.

კომპტონის ეფექტი. ეს ეფექტი მდგომარეობს სინათლის კვანტის გაფანტვაში უძრავ ელექტრონზე (ნახ.61). რადგან კვანტის ენერგია $W_1 = \hbar\omega$, ამიტომ (61.7) ფორმულა მოგვცემს

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\hbar\omega}{mc^2}(1 - \cos\theta_L)}. \quad (62.13)$$

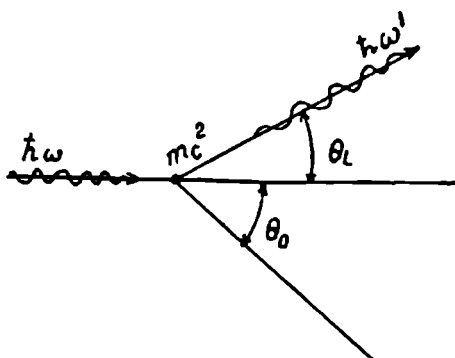
ეს ფორმულა გადავწეროთ ტალღის სიგრძისათვის. რადგან $W = ck = \frac{c}{\lambda}$, სადაც $\lambda = \frac{c}{\omega}$, ამიტომ

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta_L}{2}, \quad (62.14)$$

სადაც $\lambda_c = \frac{h}{mc}$ წარმოადგენს უნივერსალურ მუდმივს, რომელსაც ელექტრონის კომპტონის ტალღის სიგრძე ეწოდება, $\lambda_c = 3,86 \cdot 10^{-11}$ სმ. როგორც ვხედავთ, წინააღმდეგ კლასიკური მექანიკისა სინათლის გაფანტვისას ელექტრონზე ადგილი აქვს ტალღის სიგრძის ცვლი-

ლებას. აღსანიშნავია, რომ კლასიკურმა მექანიკამ ეს ეფექტი ვერ ახსნა.

(61. 6) ფორმულა დაჯახების შემდეგ ელექტრონის მიერ შეძენილი ენერგიისათვის მოგვცემს



61.60

$$\Delta W = h\nu \frac{2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right) \sin^2 \frac{\theta_L}{2}}{1 + 2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right) \sin^2 \frac{\theta_L}{2}} \quad (62.15)$$

ფოტოეფექტი. ახლა განვიხილოთ სინათლის ურთიერთქმედება ბმულ ელექტრონებთან. სინათლის γ კვანტი თავის ენერგიას გადასცემს ატომის ბმულ ელექტრონს, რის შედეგადაც ელექტრონი გადადის თავისუფალ მდგომარეობაში. ამ მოვლენას ეწოდება ფოტოეფექტი. ეს ეფექტი პირველად აღმოჩენილ იქნა მეტალებზე სინათლის ურთიერთქმედების დროს. ამოტყორცნილი ელექტრონების ენერგია დამოკიდებული აღმოჩნდა დაცემული სინათლის სიხშირეზე, ხოლო ელექტრონების რიცხვი - სინათლის ინტენსივობაზე. ამ მოვლენის ახსნა კლასიკური მექანიკით შეუძლებელია იმ დროს, როცა სინათლის კვანტურ თეორიაზე დაყრდნობით ფოტოეფექტის მოვლენა მარტივად აიხსნება ენერგიის შენახვის კანონით.

მეტი სიცხადის მიზნით ფოტოეფექტი განვიხილოთ წყალბადის ატომზე. წყალბადის ატომი წარმოადგენს პროტონს, რომლის გარსზე იმყოფება ერთადერთი ელექტრონი. წყალბადის ატომი სიმბოლურად აღვნიშნოთ ${}^1\text{P}e^{-}$ -ით. რადგან პროტონის უძრავობის მასა

გაცილებით მეტია ელექტრონის უძრაობის m_0 მასაზე $\frac{m_p}{m_0} = 2000$,

ამიტომ მიახლოებით ჩავთვალოთ, რომ წყალბადის ატომის გული (ე.ი. პროტონი) უძრავია, როგორც სანყის, ისე საბოლოო მდგომარეობაში. წყალბადზე ფოტოეფექტი წარმოიადგინება შემდეგი სქემით:



შევნიშნოთ, რომ ფოტოეფექტი იწვევს წყალბადის ატომის იონიზაციას. დაწეროთ (62.16) პროცესისათვის ენერჯის შენახვის კანონი; გვექნება

$$E_\gamma + E_{n, n_\phi} + m_p c^2 = E_{e^-} + m_p c^2 \quad (62.17)$$

$E_\gamma = \hbar\omega$ დაცემული სინათლის კვანტის ენერჯიაა, E_{n, n_ϕ} - ელექტრონის რელატივისტური ენერჯია წყალბადის ატომში. როგორც ვიცით, იგი იკვანტება. რელატივისტურ შემთხვევაში მისი მნიშვნელობა მკაცრად რომ ვიმსჯელოთ, განისაზღვრება რელატივისტური კვანტური მექანიკის მეთოდებით, მაგრამ ჩვენ შეგვიძლია ვისარგებლოთ ბორ-ზომერფელდის დაკვანტვის პირობის გამოყენებით, ჩვენ მიერ გამოყვანილი (50.26) ენერჯის მნიშვნელობით. ზოგად შემთხვევაში ეს ენერჯია დამოკიდებულია ორ კვანტურ რიცხვზე: მთავარ კვანტურ რიცხვზე n და აზიმუტალურ კვანტურ n_ϕ რიცხვზე. არარელატივისტურ ზღვარში კი გვექნება ელექტრონის ენერჯისათვის

$$E_n = m_0 c^2 - \frac{e^4 m_0}{2n^2 \hbar^2}. \quad (62.18)$$

ამ ფორმულაში პირველი წევრი ელექტრონის უძრაობის ენერჯიაა, რომელსაც არარელატივისტურ მექანიკაში მნიშვნელობა არა აქვს, მეორე წევრი კი წყალბადის ატომის ენერჯის ბორის ცნობილი გამოსახულებაა. სიდიდეს

$$I_n = \frac{e^4 m_0}{2n^2 \hbar^2} \quad (62.19)$$

n კვანტურ მდგომარეობაში მყოფი წყალბადის ატომის იონიზაციის ენერჯია ეწოდება. წყალბადის ატომის (ან ბმის) ძირითადი მდგომარეობისათვის $n=1$ $I_1 = 13,05 \text{ eV}$, ე.ი. ასეთი ენერჯიაა საჭირო, ელექტრონი წყალბადის ატომს რომ მოვნყვიტოთ ნულის 20. გ. ჭილაშვილი

ტოლი კინეტიკური ენერჯიით. პროტონის უძრავობის ენერჯია რეაქციამდე და რეაქციის შემდეგ ერთნაირია, ამიტომ ენერჯეტული ბალანსიდან იგი ამოვარდება. რაც შეეხება E_e -ს, იგი არის ამოტყორცნილი ელექტრონის რელატივისტური ენერჯია $E_e = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$. მაშასადამე, საბოლოოდ, ენერჯიის შენახვის კანონს ასეთი სახე ექნება

$$\hbar\omega + E_{n_e} = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}. \quad (62.20)$$

ამ უკანასკნელს შეგვიძლია ვუწოდოთ ფოტოეფექტის რელატივისტური ფორმულა. არარელატივისტურ ზღვარში კი ეს ფორმულა მოგვცემს გამოსახულებას

$$\hbar\omega - I_n = \frac{p^2}{2m_0}. \quad (62.21)$$

ჩვეულებრივად, ასეთი სახით იწერება აინშტაინის ფოტოეფექტის ფორმულა.

ამ ფორმულის მიხედვით ადვილად აიხსნება ექსპერიმენტული ფაქტი, რომ ამოტყორცნილი ელექტრონის ენერჯია დამოკიდებულია დაცემული კვანტის სიხშირეზე. აღვნიშნოთ, რომ ფოტოეფექტი არ მოხდება, თუ γ კვანტის ენერჯია მეტი არაა იონიზაციის ენერჯიაზე. ასე რომ, ფოტოეფექტის მოხდენის აუცილებელი პირობაა $\hbar\omega \geq I_n$. ახლა ავხსნათ, რატომ უნდა იყოს დამოკიდებული ამოტყორცნილი ელექტრონების რიცხვი სინათლის ინტენსივობაზე.

განვიხილოთ არა ერთი ატომი, არამედ ნივთიერება. ელექტრონი რომ ამოიტყორცნოს ატომიდან, საჭიროა ამ უკანასკნელმა სინათლის კვანტი შთანთქმას. მაშასადამე, რაც მეტი იქნება სინათლის ნაკადში კვანტების რიცხვი, მით მეტი იქნება ამოტყორცნილი ელექტრონების რაოდენობა. ეს კი იმას გვიჩვენებს, რომ ფოტოეფექტში ამოტყორცნილ ელექტრონთა რიცხვი დამოკიდებული ყოფილა სინათლის ინტენსივობაზე, რადგან სინათლის ინტენსივობა წარმოადგენს ფოტონთა ნაკადს, რომელიც სინათლის გავრცელების მართობულ 1, სმ² ფართს ეცემა ერთი სეკუნდის განმავლობაში.

ახლა, შევეხებით საკითხს, რომელიც შინაარსის მიხედვით არ არის დაკავშირებული გაფანტვის თეორიასთან, მაგრამ იმის გამო, რომ მას მხოლოდ ერთი პარაგრაფი ეძღვნება, ცალკე თავად აღარ გამოვყავით. ეს არის საკითხი რელატივისტური ურთიერთქმედების შესახებ. რელატივისტურ თეორიაში მრავალი ცნება გადმოვიდა კლასიკური მექანიკიდან. ერთ-ერთი ასეთია ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯიის ცნება. მან დიდი როლი შეასრულა კლასიკურ მექანიკაში ურთიერთქმედებათა არსის გარკვევაში, მაგრამ ამ ცნების პირდაპირ გადმოტანას რელატივისტურ თეორიაში, ხშირად, მრავალი გაუგებრობა მოსდევს.

როგორც კი ნაწილაკებს შორის ურთიერთქმედებას ჩაერთავთ, რელატივისტურ მექანიკაში მთელი რიგი სიძნელეებისა იჩენს თავს. ავიღოთ მაგალითად, ნიუტონის მესამე კანონი. ამ კანონს, როგორც ვიცით, განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს, როცა ერთი ნაწილაკის მექანიკიდან გადავდივართ ნაწილაკთა სისტემის მექანიკაზე. ახლა, ვაჩვენებთ, რომ ქმედებისა და უკუქმედების ტოლობის კანონი გაუგებარია რელატივისტური მექანიკის თვალსაზრისით, რამდენადაც იგი არსებითად ეყრდნობა შორსქმედების პრინციპს. ურთიერთქმედების ძალა კლასიკურ მექანიკაში დამოკიდებულია ნაწილაკთა შორის არსებულ მანძილზე დროის ალბულ მომენტში. რის გამოც ადგილი აქვს შორსქმედებას, რაც თავის მხრივ იმის შედეგია, რომ კლასიკური მექანიკის თვალსაზრისით ურთიერთქმედება ვრცელდება მყისიერად — უსასრულოდ დიდი სიჩქარით. ნაწილაკები რაც არ უნდა შორს იყვნენ ერთმანეთისაგან, ისინი ერთდროულად იწყებენ ურთიერთქმედებას, ამიტომ ნიუტონის მექანიკაში, ერთმანეთისაგან ნებისმიერად დაშორებულ სხეულებს შორის ქმედებაცა და მესამე კანონით განსაზღვრული უკუქმედებაც ერთდროულად ხდება. რელატივისტურ მექანიკაში კი არც ერთი რეალური მოძრაობა, მათ შორის ურთიერთქმედებაც, არ შეიძლება c -ზე მეტი სიჩქარით გავრცელდეს, ამიტომ ადგილი აქვს ურთიერთქმედების "დაგვიანებას". ვნახოთ, როგორ გამოიყურება დედამინა - მზის სისტემაში ნიუტონის მესამე კანონი მათ შორის ურთიერთქმედების სასრული სიჩქარით გავრცელების შემთხვევაში. ვთქვათ, დროის ალბულ მომენტში მზემ იმოქმედა დედამინაზე. ეს მოქმედება დედამინამდე ვერ მიაღწევს იმაზე ადრე, ვიდრე სინათლის სხივს დასჭირდება მზიდან დედამინამდე მისასვლელად, ე.ი. $\frac{r}{c} = \delta$ ნუთი, სადაც r მანძილია მზიდან დედამინა-

ნამდე. ცხადია, დედამინის მზესთან უკუქმედებასაც იგივე დრო დასჭირდება. ასეთ პირობებში სრულიად გაუგებარია ქმედებისა და უკუქმედების ტოლობაზე ლაპარაკი, რადგან ქმედებიდან უკუქმედებამდე განვლილ 16 წუთში, დედამინის მოძრაობის გამო, შეიცვლება დედამინისა და მზის მიზიდულობის ძალა, რამდენადაც იგი დამოკიდებულია მათ შორის მანძილზე.

თუ რა სიძნელები წარმოიქმნება რელატივისტურ მექანიკაში ნაწილაკთა სისტემის განხილვისას, იმის გამო, რომ არ არსებობს ერთიანი აბსოლუტური დრო, ჩვენ უკვე აღვნიშნეთ შენახვის კანონების განხილვისას. ახლა, განვიხილოთ სხვა სიძნელე, რომელიც დაკავშირებულია გარეშე ველის პოტენციალური ენერჯიის ცნების გადმოტანასთან ფარდობითობის თეორიაში.

ვთქვათ, გვაქვს ნაწილაკთა სისტემა, რომელიც უძრავია რაიმე ათვლის ინერციული სისტემის მიმართ. სისტემის ნაწილაკები რთული ხასიათის მოძრაობას შეიძლება აწარმოებდნენ. თითოეულ ნაწილაკს ექნება კინეტიკური ენერჯია და ისინი ერთმანეთთან იმოქმედებენ გარკვეული პოტენციალური ენერჯიით, რომელსაც შინაგანი პოტენციალური ენერჯია ვუწოდოთ. შედეგად სისტემას ექნება შინაგანი ენერჯია, რომელიც შეიძლება გამომჟღავნდეს სხვადასხვა სახით. რელატივისტური მექანიკა ამტკიცებს, რომ უძრავი სისტემის ეს E_0 ენერჯია დაკავშირებული იქნება სისტემის უძრავობის m_0 მასასთან აინშტაინის ეკვივალენტობის ფორმულით

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (63.1)$$

ახლა, ვთქვათ, იგივე სისტემა მოძრაობს \vec{v} სიჩქარით, მაშინ სისტემის ენერჯია გაიზრდება მისი, როგორც მთლიანის, მოძრაობის კინეტიკური ენერჯიის ხარჯზე და მოძრაობის ენერჯია კვლავ

$$E = m(v)c^2 \geq E_0 \quad (63.2)$$

ფორმულით წარმოიდგინება.

იგივე სისტემა მოვათავსოთ გარეშე სტატიკურ ველში, მაშინ კლასიკური მექანიკის ანალოგიით უნდა დავწეროთ

$$W = m(v)c^2 + U, \quad (63.3)$$

სადაც U არის გარეშე ველის პოტენციალური ენერჯია.

იბადება კითხვა: შეიძლება, თუ არა (63.3) ენერჯიაც წარმოვიდგინოთ $W = Mc^2$ სახით? თურმე, ზოგად შემთხვევაში, ეს არ შეიძლება, თუნდაც იმიტომ, რომ უარყოფითი W ენერჯიებისათვის ჩვენ ვერ გამოვრიცხავდით უარყოფითი მოძრაობის მასების არ-

სებობას. იქმნება გაურკვეველი სიტუაცია: შინაგან პოტენციალურ ენერჯიას შეესაბამება მასა, გარეშეს კი - არა.

ზემოთ ჩამოთვლილი და სხვა მრავალი სიძნელე შედეგია იმისა, რომ რელატივისტურ თეორიაში პირდაპირ, ყოველგვარი კრიტიკის გარეშე, გადმოვიტანეთ პოტენციალური ენერჯიის ცნება.

რელატივისტურ მექანიკაში, უპირველეს ყოვლისა, უარყოფილი უნდა იქნას შორსქმედების პოსტულატი, რამდენადაც იგი ენიანალმდეგება აინშტაინის ფარდობითობის პრინციპს. მკაცრად უნდა დავემორჩილოთ იმ ფაქტს, რომ ურთიერთქმედება შეუძლებელია გავრცელდეს c -ზე მეტი სიჩქარით. ეს გარემოება გვაიძულებს რელატივისტურ მექანიკაში ნანილაკთა შორის ურთიერთქმედება სულ სხვა სახით შემოვიტანოთ.

იმის საილუსტრაციოდ, თუ როგორ უნდა განვიხილოთ ურთიერთქმედება რელატივისტურ თეორიაში, შევისწავლოთ დამუხტულ ნანილაკთა ურთიერთქმედება. თურმე, ამ შემთხვევაში, შესაძლებელია ურთიერთქმედების ჩანერა კოვარიანტული სახით, რაც თავის მხრით აპირობებს იმას, რომ ზემოთ აღნიშნული სიძნელეები აღარ გვექნება. ამ მიზნით, საჭირო აღმოჩნდა ურთიერთქმედების ველის ცნების შემოტანა. ველის ცნებას კლასიკურ მექანიკაშიც იყენებდნენ, მაგრამ იქ მას ფორმალური ხასიათი ჰქონდა. იგი არსებითად დაიყვანებოდა ურთიერთქმედების გეომეტრიულ ინტერპრეტაციაზე. რელატივისტურ თეორიაში კი ველი ობიექტური რეალობაა და მას ღრმა ფიზიკური შინაარსი გააჩნია.

განვიხილოთ დამუხტულ n ნანილაკთა სისტემა. i -ური ნანილაკის მუხტი იყოს e_i . პოტენციალი, რომელსაც e_i მუხტი ქმნის \bar{r} მანძილზე, კულონის კანონის თანახმად, ტოლი იქნება

$$\varphi(\bar{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{|\bar{r} - \bar{r}_i|}, \quad (63.4)$$

მაშინ, როგორც ცნობილია, სისტემის ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერჯია გამოიხატება შემდეგი ფორმულით:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n e_k \varphi(\bar{r}_k) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{e_i e_k}{|\bar{r}_i - \bar{r}_k|}. \quad (63.5)$$

ეს ურთიერთქმედება დამოკიდებულია ნანილაკთა რადიუს-ვექტორებზე დროის ალებულ მომენტში, რაც იმას ნიშნავს, რომ ურთიერთქმედება მყისიერად ვრცელდება - ადგილი აქვს შორსქმედებას და, მაშასადამე, დაგვიანებას ურთიერთქმედებაში არ

ვითვალისწინებთ. ამ წინააღმდეგობის დასაძლევად ხელსაყრელი აღმოჩნდა, ნაცვლად (63.5) ურთიერთქმედებისა, ველის ცნების შემოტანა. სიმარტივის მიზნით, ჯერ განვიხილოთ ერთი ნაწილაკის შემთხვევა. მაშინ (63.4) კულონური პოტენციალი ასე ჩაინერება:

$$\varphi(r) = \frac{e}{r}, \quad (63.6)$$

სადაც r მანძილია მუხტიდან დაკვირვების წერტილამდე. (63.6) შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ველი, რომელიც გავრცელებულია მთელს სივრცეზე. საქმე გვექნება სკალარულ ველთან, რომლის მნიშვნელობები განსაზღვრულია სივრცის ნებისმიერ წერტილში. ახლა, თუ გვაქვს მეორე მუხტი, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ეს ნაწილაკი ურთიერთქმედებს $\varphi(\vec{r})$ სკალარულ ველთან და არა უშუალოდ ამ ველის წარმომქმნელ მუხტთან.

მოცემული სკალარული $\varphi(\vec{r})$ ველით შეგვიძლია ავაგოთ ვექტორული ველიც. ამისათვის საკმარისია განვიხილოთ სკალარული $\varphi(\vec{r})$ ველის გრადიენტი $\vec{E} = -\text{grad}\varphi(\vec{r})$, რომელსაც ელექტრული ველის დაძაბულობის ვექტორს უწოდებენ. ამ ვექტორული ველის ყოველ წერტილში განსაზღვრული იქნება \vec{E} ვექტორის როგორც სიდიდე, ისე მიმართულება. \vec{E} ველის შემთხვევაში სივრცე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც \vec{E} ვექტორების სხვადასხვა მნიშვნელობათა სიმრავლე. ურთიერთქმედება სივრცის ყოველ წერტილში შეგვიძლია დავაკავშიროთ \vec{E} ველთან. ურთიერთქმედების ასეთი ინტერპრეტაციის დროს შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ორი დამუხტული ნაწილაკი უშუალოდ კი არ ურთიერთქმედებს ერთმანეთთან, არამედ მათი ურთიერთქმედება ხდება ველის საშუალებით. ნაწილაკი ურთიერთქმედებს მეორე ნაწილაკის მიერ შექმნილ ველთან, რომელსაც ეს ურთიერთქმედება ერთი წერტილიდან გადააქვს მეორეში.

ახლა დავუბრუნდეთ (63.5) ზოგად ურთიერთქმედებას და ვაჩვენოთ, რომ იგი შეიძლება გამოვხატოთ ველის დამახასიათებელი \vec{E} ვექტორის საშუალებითაც.

შემოვიტანოთ მუხტის სივრცეში განაწილების სიმკვრივე

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (63.7)$$

სადაც $\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ არის დირაკის დელტა ფუნქცია.¹

(63.7) -ის ორივე მხარე გავამრავლოთ $\frac{1}{2}\varphi(\vec{r})$ -ზე და ავიღოთ მოცულობითი ინტეგრალი. გვექნება

$$\frac{1}{2} \int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})d\vec{r} = \frac{1}{2} \sum_k e_k \int \delta(\vec{r} - \vec{r}_k)\varphi(\vec{r})d\vec{r} = \frac{1}{2} \sum_k e_k \varphi(\vec{r}_k), \quad (63.8)$$

საიდანაც, (63.5)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$U = \frac{1}{2} \int d\vec{r} \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}). \quad (63.9)$$

ცნობილია, რომ

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}), \quad (63.10)$$

ამიტომ ველის პოტენციალისათვის გვექნება

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = \sum_k \Delta \frac{e_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} = -4\pi \sum_k e_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) = -4\pi\rho(\vec{r}), \quad (63.11)$$

ე.ი. პოტენციალი აკმაყოფილებს პუასონის განტოლებას

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}), \quad (63.12)$$

საიდანაც განსაზღვრული მუხტის სიმკვრივე შევიტანოთ (63.9) ფორმულაში. გვექნება

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int d\vec{r} [\Delta\varphi(\vec{r})]\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi} \int d\vec{r} (\operatorname{divgrad}\varphi)\varphi. \quad (63.13)$$

ახლა გამოვიყენოთ ტოლობა

$$\varphi \operatorname{divgrad}\varphi = \operatorname{div}(\varphi \nabla\varphi) - (\nabla\varphi, \nabla\varphi). \quad (63.14)$$

(63.13) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int d\vec{r} \operatorname{div}(\varphi \nabla\varphi) + \frac{1}{8\pi} \int (\operatorname{grad}\varphi)^2 d\vec{r}. \quad (63.15)$$

ამ გამოსახულების პირველი ინტეგრალი გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულით გარდაიქმნება ინტეგრალში ჩაკეტილ ფართზე

¹ ი. ვაშაკიძე, ვ. მამასახლისოვი, გ. ჭილაშვილი, კვანტური მექანიკა, თსუ გამომცემლობა, 1978, 43.

$$-\frac{1}{8\pi} \int_s d\vec{s}(\varphi \nabla \varphi), \quad (63.16)$$

რომელიც ნულის ტოლი იქნება უსასრულოდ დაშორებულ ზედაპირზე, რამდენადაც ამ ზედაპირზე პოტენციული ნულის ტოლია. მაშასადამე, (63.15)-ში დაგვრჩება მხოლოდ მეორე წევრი. თუ ამ წევრში შემოვიტანთ $\vec{\epsilon} = -\nabla \varphi$ ველის დაძაბულობის ვექტორს, მაშინ, საბოლოოდ, მივიღებთ:

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{e_i e_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} = \frac{1}{8\pi} \int \vec{\epsilon}^2 dF. \quad (63.17)$$

ამგვარად, მანძილზე დამოკიდებული პოტენციული ენერჯია ჩვენ გამოვხატეთ მთელს სივრცეზე გავრცელებულ ინტეგრალზე ენერჯიის $\frac{1}{8\pi} \vec{\epsilon}^2$ სიმკვრივიდან. მაშასადამე, ჩვენ მართლაც შევძელით ურთიერთქმედების გამოხატვა სრულიად ახალი მეთოდით, კერძოდ, $\vec{\epsilon}$ ველის საშუალებით, რომელიც გავრცელებულია მთელს სივრცეზე.

i-ური მუხტის რელატივისტური მოძრაობის განტოლებაც შეგვიძლია ველთან დავაკავშიროთ. მართლაც, დავწეროთ განტოლება

$$\frac{d\vec{P}_i}{dt} = -\text{grad}U = -e_i \text{grad}\varphi, \quad (63.18)$$

საიდანაც

$$\frac{dP_i}{dt} = e_i \vec{\epsilon}(\vec{r}_i). \quad (63.19)$$

მივუთითოთ, რომ ველის შემოტანით შორსქმედების საკითხი ჯერ კიდევ არ არის მოხსნილი. $\vec{\epsilon}$ ვექტორი კვლავ ფუნქციაა \vec{r}_i რადიუსვექტორისა დროის ალბულ მომენტში, რაც მაშინვე წარმოქმნის შორსქმედებას. მაგრამ ველის ცნების შემოტანას ის მნიშვნელოვანი უპირატესობა აქვს, რომ როგორც ნაჩვენები იქნა, მისთვის შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ კოვარიანტული თეორია, რომელშიაც ურთიერთქმედება ვრცელდება სასრული სიჩქარით და, მაშასადამე, შორსქმედების საკითხი თავისი სიძნელეებით მოხსნილი იქნება. ველის თეორიას საფუძვლად დაედო მაქსველის განტოლებები, რომლებიც ინვარიანტულია ლორენცის გარდაქმნე-

ბის მიმართ და რომლებიც, მაშასადამე, აკმაყოფილებენ ფარდობითობის პრინციპის ყველა მოთხოვნას.

ველის თეორიის საკითხებს ჩვენ აქ არ განვიხილავთ, რამდენადაც ისინი შეადგენენ ველის თეორიის ან ელექტროდინამიკის საგანს.

დასასრულს კიდევ ერთხელ აღვნიშნოთ, რომ ველის ცნება რელატივისტურ თეორიაში ფორმალურ ხასიათს კი არ ატარებს, როგორც ეს გვექონდა კლასიკურ ფიზიკაში, არამედ იგი ობიექტურ რეალობას წარმოადგენს - იგი მატერიალური ობიექტია. ჩვენ გვექონდა საშუალება ამაში უშუალოდ დავერწმუნებულიყავით, როცა განვიხილეთ წყვილთა ანიჰილაციის მოვლენა. ელექტრონი და პოზიტრონი დაჯახებისას ისპობა, შედეგად წარმოიქმნება სინათლე, ე.ი. ელექტრომაგნიტური ველი. მხოლოდ შენახვის კანონებზე დაყრდნობითაც კი თავისთავად ცხადია, რომ ასეთი პროცესი შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, თუ ველი მატერიალური ობიექტია, რომელსაც აქვს ენერგია, მასა, იმპულსი და სხვა დამახასიათებელი სიდიდეები.

1. Айзерман М.А. Классическая механика. Издательство "Наука", Москва, 1974.
2. Y. Ahaçoni, The Special Theory of Relativity. 1959.
3. Беккер Р. Теория электричества. Том II, Госиздат Техничко-теоретической литературы, Ленинград-Москва, 1941.
4. Бергман П.Г. Введение в теорию относительности. Госиздат И.-Л., Москва, 1947.
5. Бернард Джефф. Майкельсон и скорости света. Издательство И.-Л., Москва, 1963.
6. Бом Д. Специальная теория относительности, "Мир", 1967.
7. Бонди Г. Относительность и здравый смысл, "Мир", 1967.
8. Макс Борн. Эйнштейновская теория относительности. Издательство "Мир", М., 1972.
9. Бриллюэн Л. Новый взгляд на теорию относительности. Изд. "Мир", Москва, 1972.
10. Голдстейн Г. Классическая механика. Издательство "Наука", Москва, 1975.
11. Зоммерфельд А. Механика. Издательство И.-Л., Москва, 1947.
12. Зоммерфельд А. Электродинамика. Издательство И.-Л., Москва, 1958.
13. Компанец А.С. Курс теоретической физики. Том I. Москва, "Просвещение" 1972.
14. Компанец А.С. Симметрия в микро-макро мире. Издательство "Наука". Москва, 1978.
15. Копилов Г.И. Всего лишь кинематика. Атомиздат, Москва, 1969.
16. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Теория поля. Госиздат физико-математической литературы, Москва, 1960.
17. Макс Лауе. Статьи и речи. Издательство "Наука" М-1969.
18. Липсон Г. Великие эксперименты в физике. Издательство "Мир", Москва, 1972.
19. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности, "Высшая школа", Москва, 1976.
20. Мардер Л. Парадокс часов. Издательство "Мир", Москва, 1974.
21. Матвеев А.Н. Электродинамика и теория относительности, Издательство "Высшая школа", Москва, 1964.
22. Медведев Б.В. Начало теоретической физики. Издательство "Наука", Москва, 1977.
23. Меллер К. Теория относительности, Автоиздат. 1975.
24. Мухин К.Н. Занимательная ядерная физика. Автоиздат, Москва, 1969.
25. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц, "Мир", Москва, 1969.
26. Орир Дж. Физика. Издательство "Мир", Москва, 1981.
27. Пановский В., Филлипс М. Классическая электродинамика, Госиздат физико-математической литературы. Москва, 1963.
28. Паули В. Теория относительности. Гостехиздат, 1947.
29. Румер Ю.Б. Рывкин М.С. Теория относительности, Учпедгиз, 1960.
30. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Т.1., Издательство "Наука", Москва, 1975.
31. Сборник работ классиков релятивизма, "Принцип относительности", ОНТИ, 1935.
32. Синг Дж.Л. Классическая динамика. Госиздат физико-математической литературы. Москва, 1963.
33. Соколов А., Иваненко Д. Квантовая теория поля. Госиздат технико-теоретической литературы. Москва-Ленинград, 1952.

34. Соколовский Ю. Теория относительности. Издательство Харьковского гос. университета. Харьков, 1960.
35. Соколовский Ю.И. Элементарный задачник по теории относительности. Издательство "Наука", Москва 1971.
36. Спроул Р. Современная физика. Издательство "Наука", Москва, 1974.
37. Тейлор З., Уилер Дж. Физика пространства-времени, Издательство "Мир", 1973.
38. Угаров В.А. Специальная теория относительности. Издательство "Наука", Москва, 1977.
39. Фейнман Р., Лейтон Р., Сандс М. Фейнмановские лекции по физике. Издательство "Мир", Москва, 1977.
40. Фок В.А. Теория пространства времени и тяготения. Госиздат технико-теоретической литературы. Москва, 1955.
41. Хальфман Р.Л. Динамика. Издательство "Наука", Москва, 1972.
42. Эйнштейн А. Собрание сочинений, т. II, "Наука", 1965, т. II, 1966. т. IV, 1967.
43. Эйнштейн А. О специальной и общей теории относительности в сб. "Физика и реальность", Издательство "Наука", 1965.
45. Эддингтон А.С. Теория относительности, ГТТИ, Ленинград-Москва, 1934.
46. მ. შირიანაშვილი. ფარდობითობის თეორია, თბ. "ჯანათლება", 1967.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

თ ა ვ ი I

გალილეის ფარდობითობის პრინციპი

§1. გალილეის გარდაქმნის ფორმულები	3
§2. კლასიკური მექანიკის კანონების ინვარიანტობა და კოვარიანტობა	6
§3. მექანიკისა და ელექტროდინამიკის შეუთავსებლობა	11

თ ა ვ ი II

რელატივისტური მექანიკის ექსპერიმენტული საფუძვლები

§4. მსოფლიო ეთერის პიპოთეზა	16
§5. ფიზოს ცდა	20
§6. აბერაციის მოვლენა	23
§7. მაიკელსონ-მორლის ექსპერიმენტი	26
§8. ორმაგი ეარსკვლეაების გამოსხივება	32
§9. ლორენცისა და ფიციკერალდის პიპოთეზა	36
§10. სინათლის სიჩქარე, როგორც ზღვრული სიჩქარე. ახალი მექანიკის შექმნის აუცილებლობა	37
§11. ელემენტარული ნაწილაკები	41

თ ა ვ ი III

აინშტაინის ფარდობითობის პრინციპი

§12. აინშტაინის ფარდობითობის პრინციპი	45
§13. მოვლენათა ერთდროულობის ფარდობითი ხასიათი	47
§14. ინტერვალი	51
§15. ლორენცის გარდაქმნის ფორმულები	54
§16. სიჩქარეთა შეკრების კანონი	62
§17. მოძრავი გარემოს ოპტიკა	66
§18. დროის შემოკლება მოძრავ სისტემაში. საკუთარი დრო	70
§19. ლორენცის შემოკლება	79
§20. მაიკელსონ-მორლის ექსპერიმენტის შედეგების ახსნა ფარდობითობის თეორიით	83
§21. რელატივისტური ერთეულები	85

თ ა ვ ი IV

ფარდობითობის თეორიის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

§22. მინკოვსკის სივრცე	87
§23. ლორენცის გარდაქმნები მინკოვსკის კოორდინატებში	92
§24. ოთხტენზორები	96
§25. დოპლერის ეფექტი	103

§26. ლორენცის ზოგადი გარდაქმნები. ლორენცის ჯგუფი. ლორენცის უსასრულოდ მცირე გარდაქმნები	106
§27. ლორენცის გარდაქმნების გეომეტრიული შინაარსი	114
§28. მოულენათა მიზეზ-მედევობრივი კავშირი	117
§29. მასშტაბების შემოკლების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია	124
§30. K კოეფიციენტის მეთოდი	125

თავი V

რელატივისტური მექანიკის მოძრაობის განტოლება

§31. ლაგრანჟის ფუნქცია	135
§32. რელატივისტური ნაწილაკის იმპულსი და ენერგია	137
§33. ნაწილაკი ნულის ტოლი უძრაობის მასით	144
§34. ლაგრანჟის განტოლებები	149
§35. იმპულსის ოთხვექტორი	153
§36. მოძრაობის განტოლების ანალიზი	156
§37. ჰამილტონ-იაკობის განტოლება	163
§38. მოძრაობის განტოლება ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული ნაწილაკისათვის	166
§39. მოძრაობის განტოლება ჰამილტონის ფორმით	174

თავი VI

შენახვის კანონები. მასისა და ენერჯიის ეკვივალენტობა

§40. მატერიალური ნერტილის შენახვის კანონები	178
§41. ნაწილაკთა სისტემა. შენახვის კანონები	186
§42. მასისა და ენერჯიის ეკვივალენტობა. ატომური ენერგია	197
§43. ნევილთა გაჩენა და ანიჰილაცია	206

თავი VII

რელატივისტური მექანიკის გამოყენება

§44. თავისუფალი ნაწილაკის ამოცანა	213
§45. ერთგანზომილებიანი მოძრაობა. მაგალითები	215
§46. ნრფივი პარამონიული ოსცილატორი	217
§47. მოძრაობა მუდმივი ძალის გავლენით	219
§48. მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის ველში	223
§49. მოძრაობა კულონურ ველში	231
§50. ნეალბადის ატომის სპექტრის ნაზი სტრუქტურა	245
§51. დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობა ელექტრულ ველში	251
§52. დამუხტული ნაწილაკის მოძრაობა მუდმივ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში	256

§53. ციკლოტრონი	261
-----------------------	-----

თავი VIII

გაფანტვის რელატივისტური თეორია

§54. დაჯახების ამოცანის კინემატიკა	265
§55. კაეშირი გაფანტვის კუთხეებს შორის L და C სისტემებში	274
§56. დაჯახების დიაგრამა	283
§57. გაფანტვის ეფექტური დიფერენციალური განიკვეთი. სამიზნე მანძილი	287
§58. სამიზნე მანძილის კაეშირი გაფანტვის კუთხესთან	291
§59. კაეშირი განიკვეთებს შორის L და C სისტემებში	292
§60. გაფანტვა პოტენციალურ ორმოზე და ჯებირზე	295
§61. გაფანტვა კულონური ველით	297
§62. სინათლის ურთიერთქმედება ელექტრონებთან	300
§63. ურთიერთქმედება რელატივისტურ თეორიაში	306
§64. ლიტერატურა	314

გამომცემლობის რედაქტორი ა. სტურუა
ტექრედაქტორი ფ. ბუდალაშვილი
კორექტორები: მ. ვარამაშვილი
ე. ნერეთელი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 12.11.97 საბეჭდი ქალაქი 60X90
1/16. პირ. ნაბ. თაბახი 20. საალ.-საგამომც. თაბახი 14,72

შეკვეთა №45

ტირაჟი 300

ფასი სახელშეკრულებო

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 380028, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 14.

თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა, 380028, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 1.