

საერთაშორისო საინჟინრო აკადემია  
შპს სამეცნიერო საწარმოო ფირმა „ალმასი“

თამაზ ოზგაძე

სითხეებისა და გაზების დინამიკის  
მათემატიკური მოდელირება

მონოგრაფია

თბილისი

2024

მონოგრაფიაში განხილულია სითხეებისა და გაზების დინამიკის თემასთან დაკავშირებული საკითხები. განხილულია, ჰიდროდინამიკის განვითარების ძირითადი ისტორიული ეტაპები. შესწავლილია სითხეებისა და გაზების ფიზიკური თვისებები და დინამიკის აღწერის სხვადასხვა მათემატიკური მოდელები.

ნაშრომში განხილულია სითხეთა მოძრაობის სხვადასხვა რეჟიმები. შესწავლილია იდეალური სითხისა და გაზის დინამიკის და წონასწორობის ეილერის თეორია. მოცემულია ეილერის მოდელის გამოყენების საზღვრები. გამოყვანილია ბლანტი, არაკუმშვადი სითხის დინამიკის ნავიე-სტოქსის განტოლებები. გადმოცემულია არსებული ზუსტი ამონახსნების პოვნის ტექნიკა და განტოლებათა სისტემის უგანზომილებო სახეზე გადასვლის მეთოდი.

მოცემულია პრანდტლის სასაზღვრო ფენის განტოლებებზე გადასვლის მეთოდიკა. განხილულია არსებული დინამიკური სისტემების ზუსტი ამონახსნები; შესწავლილია არაწრფივი ორფაზა ბლანტი სითხის ნაკადის კინემატიკური თვისებები და დინამიკა. ნაშრომი საინტერესო იქნება გამოყენებითი მათემატიკითა და საინჟინრო ჰიდრო-აეროდინამიკით დაინტერესებული მკითხველი-სათვის.

რეცენზენტი. ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის  
პრეზიდენტი, პროფესორი თემურ ჩილაჩავა

საგამომცემლო სახლი “ტექნიკური უნივერსიტეტი”, 2024

ISBN 978-9941- 8 – 6192 - 5

©

ყველა საავტორო უფლება დაცულია. ამ წიგნის ნებისმიერი ნაწილის (ტექსტი, ფოტო, ილუსტრაცია თუ სხვა) გამოყენება არცერთი ფორმით და საშუალებით (ელექტრონული თუ მექანიკური) არ შეიძლება, გამომცემლის წერილობითი ნებართვის გარეშე. საავტორო უფლების დარღვევა ისჯება კანონით.

## შესავალი

სითხეების დინამიკის შესწავლას დიდი მნიშვნელობა აქვს საინჟინრო საქმეში. ამ თეორიას ემყარება ჰიდროენერგეტიკა, მელიორაცია, მანქანათმშენებლობა, ავიაცია და სარაკეტო ტექნიკა, ოკეანისა და ატმოსფეროს დინამიკა, სისხლის დინამიკა მსხვილ სისხლძარღვებში და ა.შ.

სითხეების დინამიკის მიმართულებით, პირველ მეცნიერულ გამოკვლევად, ითვლება არქიმედის (287-212წ. ჩვენს წელთაღრიცხვამდე) ტრაქტატი „მცურავი სხეულების შესახებ“. თუმცა, არქიმედამდეც აშენებდნენ სარწყავ არხებს და აკეთებდნენ წყალგაყვანილობის სისტემებს.

ძველ ეგვიპტეში, ინდოეთში, ჩინეთში, კავკასიაში აშენებდნენ გრანდიოზული მასშტაბების არხებს და წყალსაცავებს. მაგალითად, ინდოეთში ზოგიერთი წყალსაცავის სიღრმე 15მ იყო, ჩინეთში კი 2500 წლის წინ ააგეს 1800კმ სიგრძის არხი, რომელიც აერთებდა დიდ მდინარეებს ერთმანეთთან. რომში 2300 წლის წინ აგებული იქნა პირველი წყალგაყვანილობის სისტემა. ასევე, კავკასიაშიც ოდითგან აგებდნენ სარწყავ და წყალგაყვანილობის სისტემებს, აკეთებდნენ გრანდიოზული მოცულობის ქვევრებს და საწნახელს, რისი აგებაც მოითხოვდა ჰიდროდინამიკისა და ჰიდროსტატიკის გარკვეულ ცოდნას.

სითხეების დინამიკის მეცნიერების განვითარების ახალი ტალღა დაიწყო XV-XVI საუკუნეებში. დიდმა ლეონარდო და ვინჩიმ (1452-1519წ), რომელმაც შექმნა ნაშრომი „წყლის მოძრაობისა და გაზომვის შესახებ“, რომელიც გამოქვეყნდა მხოლოდ 400 წლის შემდეგ. ს.სტევენმა (1548-1620წ) დაწერა წიგნი „ჰიდროსტატიკის საფუძვლები“.

გალილეო გალილეიმ (1564-1642წ), 1612წ. გამოაქვეყნა ნაშრომი „საუბარი სხეულებზე, რომლებიც არიან წყალში და მათ შესახებ რომლებიც წყალში მოძრაობენ“, სადაც განიხილა სხეულთა წყალში ცურვის პირობები და ჩამოაყალიბა ჰიდროსტატიკური პარადოქსი.

**ე.ტორიჩელმა** (1608-1647წ) მიიღო, რეზერვუარის ხვრელიდან იდეალური სითხის გამოდინების სიჩქარის ფორმულა.

**ბლეზ პასკალმა** (1623-1662წ) აღმოაჩინა სითხეებზე და გაზებზე წარმოებული წნევის გადაცემის მექანიზმი, რამაც გამოიწვია ახალი ტექნიკური გარღვევა, გამოგონილი იქნა ჰიდრავლიკური პრესი, დომკრატი და ა.შ.

**ისააკ ნიუტონმა** (1643-1727წ) აღმოაჩინა სითხის შიდა ხახუნის კანონი. მიხეილ **ლომონოსოვმა** (1711-1783წ) - მასისა და ენერჯის შენახვის კანონები, რამაც შემდგომი დროის უდიდეს მეცნიერებს, **დ.ბერნულის** (1700-1782წ) და **ლეონარდ ეილერს** (1707-1783წ), საშუალება მისცა აეგოთ სითხეების დინამიკის თანამედროვე თეორია ჰიდროდინამიკა. უნდა აღინიშნოს, რომ **მ.ლომონოსოვმა** შექმნა **ბარომეტრი** - სითხის წნევის გასაზომად, და **ვისკოზიმეტრი** - სითხის სიბლანტის გასაზომად.

**დ.ბერნულიმ** შექმნა წყლის 30მ სიმაღლეზე ამყვანი მოწყობილობა, ხოლო **ლ.ეილერმა** შეიმუშავა **ტურბინის კონსტრუქცია** და გამოიყვანა **ტურბინის განტოლება**, შექმნა **გემების დინამიკის თეორია**.

სითხეების დინამიკის შემდგომი შესწავლა გაგრძელდა ტექნიკური მიმართულებით. **დ.პოლენი** (1685-1761წ) შექმნილ იქნა სხვადასხვა ტიპის ხვრელებიდან და წყალსადინარებიდან, სითხის გადმოდინების ტექნიკური თეორია. **ა.შეზი** (1718-1798წ) სწავლობდა ბლანტი სითხის თანაბარ დინებებს მილსა და სხვადასხვა ტიპის სადინარებში. **პ.დიუბუა** (1734-1809წ) სწავლობდა მდინარეებში ნატანის ტრანსპორტირების და წყლის მოძრაობის წინააღმდეგობის კანონებს. **ო.რეინოლდსი** (1842-1912წ) სწავლობდა წყლის დინების ლამინარულ და ტურბულენტურ რეჟიმებს.

მიუხედავად მიღწეული წარმატებისა, ჯერ კიდევ რჩებოდა დიდი ნაპრალი თეორიულ ჰიდროდინამიკასა და ტექნიკურ ჰიდროდინამიკას შორის, რადგან თეორიულ ჰიდროდინამიკაში არსებული ნავიე-სტოქსის განტოლებები, სირთულის გამო

პრაქტიკულად ვერ გამოიყენებოდა და პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად ძირითადად, იყენებდნენ ნახევრადემპირიულ ფორმულებს. იდეალური სითხის ცნებაზე დამყარებული ეილერის განტოლებები კი, იძლეოდა პარადოქსებს იდეალურ სითხეში სხეულის მოძრაობისას წინააღმდეგობის ძალის გამოთვლისას.

მეოცე საუკუნის დასაწყისში 1904წ., ლ.პრანდტლის მიერ შემუშავებულმა სასაზღვრო ფენის თეორიამ : „მეტად მცირე სიბლანტის მქონე სითხის მოძრაობის შესახებ“, საშუალება მოგვცა, რომ გავამარტივოთ ნავიე-სტოქსის განტოლებები და სიბლანტე გავითვალისწინოთ მხოლოდ იმ წევრებში, რომელიც მნიშვნელოვანია მოცემული ამოცანის განხილვისას. ამ მიდგომამ შესაძლებლობა მოგვცა, ნაწილობრივ, ისევ გაერთიანებულიყო თეორიული და ტექნიკური ჰიდრომექანიკა (ჰიდრაულიკა). ფართო განვითარება ჰპოვა ჰიდროაეროდინამიკამ და შესაბამისად, საავიაციო ტექნიკამ.

## I თავი. სითხეების ფიზიკური თვისებები და კინემატიკა

ბუნებაში არსებული ყველა სხეული შედგება მოლეკულებისაგან. მოლეკულების მოძრაობისა და მათი ურთიერთქმედების ძალების სიდიდის მიხედვით, სითხეებს უკავიათ შუალედური ადგილი მყარ სხეულებსა და გაზებს შორის. მაღალი ტემპერატურისა და დაბალი წნევის პირობებში, სითხეების თვისებები ახლოსაა გაზის თვისებებთან, ხოლო დაბალი ტემპერატურისა და მაღალი წნევის პირობებში - მყარი სხეულის თვისებებთან.

გაზებში მოლეკულებს შორის მანძილი მეტია, ხოლო მათ შორის ურთიერთქმედების ძალები მცირეა ვიდრე სითხეებსა და მყარ სხეულებში, აქედან გამომდინარე, გაზები, სითხეებსა და მყარ სხეულებთან შედარებით, გამოირჩევიან მეტი კუმშვადობის თვისებით.

**სითხეების** მოლეკულები მუდმივად იმოფებიან მთრთოლვარე ქაოსურ მოძრაობაში და ირხევიან მყისიერი ცენტრების მიმართ. ნახტომისებურად გადადიან ერთი მყისიერი ცენტრიდან მეორისაკენ. მყისიერი ცენტრის მიმართ მოლეკულების რხევის სიხშირეა დაახლოებით  $10^{13}$  რხევა წამში.

სითხეებისაგან განსხვავებით, **მყარ სხეულებში** მოლეკულები ირხევიან სტაბილური ცენტრების (კრისტალური მესერის კვანძების) მიმართ და ცენტრების ცვლა არ ხდება.

რაც შეეხება **გაზებს**, მოლეკულების სითბური მოძრაობა ხდება დაჯახებიდან დაჯახებამდე უწყვეტად, ხოლო ერთმანეთთან დაჯახებისას ნახტომისებურად იცვლიან ქაოსური მოძრაობის მიმართულებას.

მოლეკულების დიფუზია სითხეებსა და გაზებში, განაპირობებს **დენადობის** თვისებას. ამიტომ ტერმინი **სითხე** მოიცავს იმ ნივთიერებებს, რომელთაც ახასიათებთ დენადობა და მოიცავს, როგორც წყლის მაგვარ უკუმშ ან მცირედ კუმშვად სითხეს, ასევე - **გაზს** ანუ კუმშვად სითხეს.

## 1.1. უწყვეტობის ჰიპოთეზა

სითხე განიხილება, როგორც მატერიალურ ნაწილაკთა დეფორმირებადი სისტემა, რომელიც მთლიანად ავსებს იმ სივრცეს, სადაც მოძრაობას აქვს ადგილი.

სითხის ნაწილაკი, წარმოადგენს სითხის უსასრულოდ მცირე მოცულობას, რომელშიდაც საკმაოდ ბევრი მოლეკულაა განლაგებული. მაგალითად, თუ განვიხილავთ კუბს, რომლის წიბო 0.001სმ-ია, მაშინ მასში მოთავსებული მოლეკულების რაოდენობა იქნება  $3.3 \cdot 10^{13}$ . ითვლება რომ, სითხის ნაწილაკის მოცულობა, არის გაცილებით ნაკლები, ვიდრე მოძრავი სითხის მიერ დაკავებული მოცულობა.

ამ დაშვებათა პირობებში, სითხეს თვლიან უწყვეტ კონტინუუმად ანუ უწყვეტ გარემოდ, რომელიც მთლიანად ავსებს სივრცის იმ ნაწილს სადაცაა მოთავსებული ანუ სითხეში არაა სიცარიელე ან წყვეტა. აქედან გამომდინარე, სითხის მოძრაობის განმსაზღვრელი პარამეტრები, საჭირო რიგამდე უწყვეტი ფუნქციებით შეგვიძლია აღვწეროთ. უწყვეტი გარემო არის მათემატიკური მოდელი, რომელიც საშუალებას იძლევა შევისწავლოთ სითხის წონასწორობისა და დინამიკის პრაქტიკული ამოცანები.

## 1.2. სითხის სიმკვრივე

სითხის  $\rho$  სიმკვრივე არის  $M$  მასის მქონე სითხის  $W$  მოცულობაში განაწილების დამახასიათებელი სიდიდე. სითხის მოცემულ  $A$  წერტილში სითხის სიმკვრივე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\rho_A = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta W} = \frac{dM}{dW}, \quad (1.1)$$

სადაც  $\Delta M$  არის  $A$  წერტილში მოჭიმვადი და მის მომცველ  $\Delta W$  მოცულობაში მოთავსებული სითხის მასა.

თუ სითხე ერთგვაროვანია, მაშინ  $\Delta W$  მოცულობის ყოველ წერტილში სიმკვრივე ერთნაირია და გამოითვლება ფორმულით

$$\rho = \frac{M}{W}. \quad (1.2)$$

ზოგად შემთხვევაში, სითხის  $\Delta W$  მოცულობაში სიმკვრივე შეიძლება იცვლებოდეს ერთი წერტილიდან მეორეზე გადასვლისას, ასევე - ერთ წერტილში დროის მიხედვით ანუ  $\rho(x; y; z; t)$ .

საზომ სიდიდეთა საერთაშორისო *SI* სისტემაში სიმკვრივის ერთეულად მიღებულია კგ/მ<sup>3</sup>.

სითხეებისა და გაზების სიმკვრივე დამოკიდებულია ტემპერატურაზე და წნევაზე.

წყლის გარდა, ყველა სითხისათვის დამახასიათებელია, ტემპერატურის გაზრდისას სიმკვრივის შემცირება. წყლის სიმკვრივე მაქსიმალურია 4°C ტემპერატურაზე და მცირდება, ტემპერატურის როგორც გაზრდით, ასევე, შემცირებით. წყლის სიმკვრივის ცვლილება ტემპერატურის მიხედვით, ნორმალური ატმოსფერული წნევის პირობებში მოცემულია ცხრილში 1.1.

ცხრილი 1.1

$t^{\circ}C$	$\rho$ კგ/მ <sup>3</sup>
0	999.87
2	999.97
4	1000
6	999.97
8	999.88
10	999.7
20	998.2
30	995.7
40	992.2
60	983.2

ზღვის წყლის სიმკვრივე 0°C-ზე უდრის 1020-1030კგ/მ<sup>3</sup>-ს. ნავთობისა და ნავთობპროდუქტებისა - 650-900კგ/მ<sup>3</sup>, ხოლო ვერცხლისწყლისა - 13 596კგ/მ<sup>3</sup>.

წნევის ცვლილებისას, სითხის სიმკვრივე უმნიშვნელოდ იცვლება. მაგალითად, ჰიდროტექნიკური ნაგებობების მუშაობის პირობებისა-



თვის, წყლის სიმკვრივე შეიძლება ჩაითვალოს მუდმივად და მისი სიმკვრივეა 1000კგ/მ<sup>3</sup>.

ტემპერატურა რომლის დროსაც წყლის სიმკვრივე მაქსიმალურია, წნევის გაზრდისას მცირდება. მაგალითად, 14მპა წნევაზე წყალს მაქსიმალური სიმკვრივე აქვს 0.6 °C ტემპერატურაზე.

### 1.3. სითხეზე მოქმედი ძალები

სითხეებზე მოქმედი ძალები შეგვიძლია დავყოთ ორ ჯგუფად:

**მასური ძალები და ზედაპირული ძალები.** განვიხილოთ, თითოეული მათგანი ცალ-ცალკე.

1. **მასური ძალები.** ძალებს რომლებიც განაწილებული არიან სითხის მთელ მასაზე და მოქმედებენ სითხის მოცემული მოცულობის ყოველ ნაწილაკზე **მასური (მოცულობითი) ძალები** ეწოდებათ.

**მასური ძალების მაგალითებია:** სიმძიმის ძალა, ინერციის ძალა, ელექტრომაგნიტური ძალა (მაგნიტური ჰიდროდინამიკა), მსოფლიო მიზიდულობის გრავიტაციული ძალა (ეს ძალები მნიშვნელოვანია ოკეანისა და ზღვის წყლის მასების მოძრაობის შესწავლისას).

**მასური  $F_i$  ძალების რაოდენობრივი მახასიათებელია,** ერთეულ მასაზე მოქმედი  $b_i$  ძალა ანუ **მასური ძალის სიმკვრივე:**

$$b_i = \frac{dF_i}{dm}; \quad (1.3)$$

მასური ძალის სიმკვრივის განზომილება ემთხვევა აჩქარების განზომილებას ანუ  $b_i$  სიდიდეების განზომილება, საზომ სიდიდეთა საერთაშორისო **SI** სისტემაში არის მ/წმ<sup>2</sup>.

2. **ზედაპირული ძალები.** ზედაპირული ეწოდებათ ძალებს რომლებიც მოქმედებენ სითხის მასის გარემომცველი ზედაპირის გასწვრივ ან სითხის შიგნით ნებისმიერი ორი ნაწილის განყოფი ზედაპირის გასწვრივ.

**ზედაპირული ძალების მაგალითებია:** ზედაპირის მართობულად მოქმედი წნევის  $P$  ძალა და ზედაპირის მხების გასწვრივ მოქმედი ხახუნის  $T$  ძალა.

ზედაპირის ნორმალურად მოქმედი  $P$  ძალის ფარდობას მოქმედების განაწილების ფართზე **ნორმალური  $\sigma_n$  ძაბვა** ეწოდება, ხოლო ზედაპირის მხების მიმართულებით მოქმედი ძალის ფარდობას მოქმედების შესაბამის ფართზე - **მხები  $\tau$  ძაბვა**.

#### 1.4. სითხის სიბლანტე

**განსაზღვრება.** სითხის თვისებას, წინააღმდეგობა გაუწიოს სითხის ფენების ერთმანეთის მიმართ ძვრის დეფორმაციას, **სიბლანტე** ეწოდება.

სითხის სიბლანტე ვლინდება სითხის ფენების ერთმანეთის შემხები ზედაპირის გასწვრივ გადაადგილებისას, როცა მათ შორის წარმოიქმნება მოძრაობის შემაფერხებელი **შიდა ხახუნის ძალები** ანუ **სიბლანტის ძალები**. სიბლანტის ძალების წარმოქმნის მიზეზია მეზობელი ფენების მოლეკულათა ურთიერთქმედება.

სითხის შიდა ხახუნის ძალის არსებობა პირველად დაადგინა **ისააკ ნიუტონმა**. მან დაადგინა, რომ სითხის ფენებს შორის არსებული მხები ძაბვის სიდიდე პირდაპირპროპორციულია სიჩქარის გრადიენტისა მოძრაობის მიმართულების ნორმალის მიმართულებით ანუ

$$\tau = \pm \mu \frac{du}{dn}, \quad (1.4)$$

სადაც  $\mu$  სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტია.

ექსპერიმენტების შედეგად, **პუაზეილმა** დაადგინა, რომ წყლის სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტი დამოკიდებულია ტემპერატურაზე და ოდნავ - წნევაზე. **სუფთა წყლისათვის** სიბლანტის  $\mu$  დინამიკური კოეფიციენტის  $t$  ტემპერატურაზე დამოკიდებულება მოიცემა **პუაზეილის ფორმულით**, შემდეგი სახით:

$$\mu = \mu_0(1 + 0.0337 \cdot t + 0.00022t^2)^{-1}, \quad (1.5)$$

სადაც  $\mu_0$  სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტია, როცა  $t = 0^\circ C$ .

გაზებისათვის, ადგილი აქვს საზერლენდის შემდეგ ფორმულას:

$$\mu = \mu_0 \cdot \frac{273+C}{t+C} \cdot \left(\frac{t}{273}\right)^{1.5}, \quad (1.6)$$

სადაც  $C$  მუდმივი სიდიდეა, რომელიც დამოკიდებულია გაზის გვარობაზე,  $t$  თერმოდინამიკური ტემპერატურაა და  $\mu_0$  გაზის სიბლანტეა  $0^\circ C$ -ზე. ჰაერისათვის  $\mu_0 = 17.12 \cdot 10^{-6}$  პა·წმ,  $C = 117$ .

ცხრილი 1.2-ში მოყვანილია წყლის სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტის მნიშვნელობები სხვადასხვა ტემპერატურის შემთხვევაში.

ცხრილი 1.2

$t^\circ C$	0	10	20	30
$\mu, 10^4$ პა·წმ	17.92	13.04	10.1	8.00

პუაზეილის საპატივცემოდ,  $SI$  სისტემაში დინამიკური სიბლანტის საზომ ერთეულად მიღებულია პუაზი (პზ).  $1$  პა·წმ=10პზ.

ცხრილში 1.3 მოყვანილია ზოგიერთი გაზის დინამიკური სიბლანტის კოეფიციენტის დამოკიდებულება ტემპერატურაზე.

ცხრილი 1.3

გაზები $\mu, 10^4$ პა·წმ	ტემპერატურა $t^\circ C$			
	-50	0	20	50
ჰაერი	1.708	1.840	1.954	2.180
წყლის ორთქლი	0.883	0.975	1.065	1.250
ნახშირორჟანგი $CO_2$	1.367	1.486	1.607	1.827

ჰიდროდინამიკურ გათვლებში, ფართოდ გამოიყენება სიბლანტის კინემატიკური  $\nu$  კოეფიციენტი, რომელიც გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.7)$$

დასახელება „კინემატიკური კოეფიციენტი“ აღნიშნავს იმ ფაქტს, რომ მის განსაზღვრაში მონაწილეობენ მხოლოდ კინემატიკური სიდიდეები. სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტის განზომილება  $SI$  სისტემაში, არის  $მ^2/წმ$ ; ზოგჯერ, გამოიყენება  $1 სმ^2/წმ$  (სტოქსი ანუ სტ). ცხადია, რომ  $1 მ^2/წმ = 10^4 სტ$ .

ცხრილში 1.4 მოყვანილია წყლის სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტის მნიშვნელობები სხვადასხვა ტემპერატურის პირობებში.

ცხრილი 1.4

$t, ^\circ C$	$\nu, 10^4 მ^2/წმ$
0	0.0179
2	0.0167
4	0.0157
6	0.0147
8	0.0139
10	0.0131
12	0.0124
14	0.0118
16	0.0112
18	0.0106
20	0.0101
25	0.0090
30	0.0080
35	0.0072
40	0.0065
45	0.0060

წყლის სიბლანტის კინემატიკურ კოეფიციენტზე, წნევის ცვლილების გავლენა ძალიან მცირეა. წყლის სიბლანტის კინემატიკური სიბლანტის მნიშვნელობა საგრძნობლად იზრდება, თუ ის შეიცავს მასში შეტივტივებულ, მცირე სიდიდის ( $\ll 0.05 მმ$ ) ნაწილაკებს.

სითხის სიბლანტის საზომად გამოიყენება სხვადასხვა კონსტრუქციის ვისკოზიმეტრები.

სითხეებს რომელთათვისაც ადგილი აქვს ნიუტონის (1.4) დამოკიდებულებას (წყალი, ნავთი, ბენზინი, რძე . . .) ნიუტონური სითხეები ეწოდებათ.

არსებობს ისეთი სითხეები, რომელთათვისაც ეს ფორმულა არაა ძალაში: კოლოიდური სუსპენზიები, პოლიმერული ხსნარები, წყალტალახოვანი და ქვა-ღორღიანი სელური ნაკადები, სამშენებლო ხსნარები, ცომი და ა.შ. ასეთ სითხეებს, არანიუტონურ სითხეებს უწოდებენ.

### 1.5. ჰენრი-დალტონის კანონი. დეგაზაცია. დუღილი. კავიტაცია

ნებისმიერი სახის სითხეს, ახასიათებს გარკვეულ პირობებში მასთან შეხებაში მყოფი გაზის შთანთქმა და გახსნა. ჰენრი-დალტონის კანონის თანახმად, 30 მეგაპასკალამდე წნევისა და მუდმივი ტემპერატურის პირობებში, სითხეში გახსნილი გაზის ფარდობითი  $\frac{W_{\text{გაზი}}}{W_{\text{სითხე}}}$  მოცულობა მუდმივი სიდიდეა და მას  $k_b$  ხსნადობის კოეფიციენტს უწოდებენ.

თუ გაზის გახსნა წარმოებს  $p_2$  წნევის პირობებში გარკვეულ  $t$  ტემპერატურაზე, მაშინ თუ გადავითვლით გაზის მოცულობას რაიმე ეტალონური  $p_{\text{atm}}$  წნევის მნიშვნელობისათვის (მაგალითად ატმოსფერული წნევისათვის), მაშინ მივიღებთ ჰენრი-დალტონის კანონს შემდეგი ფორმით:

$$\frac{W_{\text{გაზი}p_{\text{atm}}}}{W_{\text{სითხე}p_2}} = k_b \cdot \frac{p_2}{p_{\text{atm}}} . \quad (1.8)$$

20°C ტემპერატურაზე და ნორმალური ატმოსფერული წნევის პირობებში, წყალში გახსნილი ჰაერის ფარდობითი პროცენტული შემადგენლობა უდრის 1.6% ანუ ჰაერის წყალში ხსნადობის კოეფიციენტია 0.016. ტემპერატურის გაზრდისას ხსნადობის კოეფიციენტი კლებულობს. ჟანგბადს ახასიათებს უფრო მეტი

ხსნადობის კოეფიციენტი ჰაერთან შედარებით, ამიტომ წყალში გახსნილ ჰაერში ჟანგბადის რაოდენობა 50%-ით უფრო მეტია ვიდრე ატმოსფერულ ჰაერში. წნევის შემცირებისას, სითხიდან გამოიყოფა ჰაერი (1.8) კანონის თანახმად. სითხიდან გაზის გამოყოფა (დეგაზაცია) უფრო ინტენსიურად მიმდინარეობს, ვიდრე მასში გახსნა.

სითხის თხევადი მდგომარეობიდან გაზობრივში გადასვლის მოვლენას, **აორთქლება** ეწოდება, ხოლო აორთქლებას როგორც სითხის ზედაპირიდან, ასევე, მთელი მისი მასიდან **დუღილი** ეწოდება. გაზობრივი მდგომარეობიდან თხევად მდგომარეობაში გადასვლას, გაზის **კონდენსაციის** მოვლენა ეწოდება.

სითხე შეგვიძლია მივიყვანოთ **დუღილამდე**, თუ მოცემული წნევის პირობებში, **გავზრდით ტემპერატურას დუღილის ტემპერატურამდე**, ან მოცემული ტემპერატურის პირობებში, თუ **შევამცირებთ წნევას** ამ ტემპერატურისთვის შესაბამისი **გაჯერებული** ორთქლის წნევის **მნიშვნელობამდე**. დუღილისას, სითხეში წარმოიქმნება მასში გახსნილი გაზის ბუშტუკები, რაც ხელს უწყობს დუღილის პროცესს. თუ სითხე **დეგაზირებულია**, მაშინ ის არ დუღდება დუღილის ტემპერატურაზე უფრო მეტი ტემპერატურის პირობებშიც კი.

**საინჟინრო პრაქტიკაში**, საქმე გვაქვს რეალურ წყალთან რომელშიდაც გახსნილია ჰაერი. წყალში წარმოქმნილი ცივი დუღილი ანუ დუღილი რომელიც წარმოიქმნება მასში ხომალდის მოძრაობისას, წნევის შემცირებით ნაჯერი ორთქლის წნევამდე, ატარებს **კავიტაციის** სახელს. კავიტაციისას წყალში წარმოქმნილი ჰაერის ბუშტუკები არღვევენ **უწყვეტი გარემოს აქსიომას**, ამიტომ **ჰიდროდინამიკის კლასიკური მიდგომით კავიტაციის პრობლემა არ იხსნება**. ჰაერის ბუშტუკები შეიძლება მიეკრას ჰიდრომანქანის ან მოძრავი გემის კორპუსს, ამ მოვლენას **სუპერკავიტაციას** უწოდებენ. კავიტაცია ცვლის სხეულთა გარსდენის ჰიდროდინამიკურ სურათს, ასევე, ზოგჯერ ხდება მიერთებული ბუშტუკების გასკდომა, რაც იწვევს მოძრავი გემის ან ჰიდრომანქანის კორპუსის მასალის დაზიანებას. კავიტაცია ხშირად აზიანებს ჰიდროტურბინის ფრთებს, წყლის საქაჩებს, გემის ძალურ

ხრახნს. ასე, რომ წყალში გახსნილი ჰაერის მოცულობას დიდი მნიშვნელობა აქვს საინჟინრო საქმეში.

### **1.6. სითხეში გახსნილი გაზის კონცენტრაციის გავლენა სიბლანტის კოეფიციენტზე**

სითხის გაჭიმვისათვის წინააღმდეგობის გაზრდა ხდება მხოლოდ დეგაზირებულ სითხეებში. ექსპერიმენტულად მიღებულია, რომ დეგაზირებულ, დისტილირებული სითხის ცენტრაფუგირებისას გაჭიმვის წინააღმდეგობის ძაბვა დროის მოკლე მონაკვეთში არის 25 მეგა პასკალი. ჩვეულებრივი ტექნიკური სითხეები არ ეწინააღმდეგებიან გაჭიმვის ძაბვას. ჰაერი შეიძლება იყოს წყალში გახსნილი ან არსებობდეს ჰაერის ბუშტუკების სახით. წყალში გაუხსნელი ჰაერის ბუშტუკების არსებობა მნიშვნელოვნად ამცირებს წყლის დრეკადობის მოდულს, ამავე დროს ეს არაა დამოკიდებული ჰაერის ბუშტუკების ზომაზე.

**სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტი იზრდება სითხეში არსებული ჰაერის კონცენტრაციის ზრდასთან ერთად.**

წყალში გაუხსნელი ჰაერის ბუშტუკების არსებობა, ცვლის მანქანებისა და წყალგაყვანილობის მიღების ჰიდრო სისტემების მუშა სითხის მუშაობის რეჟიმს. აქედან გამომდინარე, მნიშვნელოვანია მუშა სითხეში არსებული ჰაერის მოცულობითი კონცენტრაციის დადგენა.

### **1.7. სითხის ზედაპირული დაჭიმულობა და კაპილარული მოვლენები**

ცნობილია, რომ სითხის მოლეკულები, რომლებიც შეხებაში არიან გაზთან, მყარ სხეულთან ან ორ არაშერევად სითხესთან, სითხის სხვა მოლეკულებისაგან განიცდიან გარედან გაუწონასწორებელი ძალებით ურთიერთქმედებას. ამ მოქმედების ზეგავლენის შედეგად, სითხის ზედაპირი ცდილობს მიიღოს უმცირესი ფართობის მქონე ფორმა.

ამიტომაცაა, რომ წყლის მცირე მოცულობის მქონე წვეთი ჰაერში იღებს სფერულ ფორმას.

თუ გვინდა გავზარდოთ სითხის ზედაპირი, მაშინ საჭიროა რომ სითხის შიგა მოლეკულების ნაწილი ამოვიყვანოთ ზედაპირზე, რისთვისაც უნდა შესრულდეს მუშაობა ანუ ზედაპირის გასწვრივ მოქმედებენ მხები მიმართულების ძალები, რომელთაც **ზედაპირული დაჭიმულობის ძალებს** უწოდებენ.

ზედაპირულ დაჭიმულობას აქვს ორნაირი ფიზიკური აზრი: **ენერგეტიკული (თერმოდინამიკული) და ძალისმიერი (მექანიკური).**

**ენერგეტიკულად**, ზედაპირული დაჭიმულობა არის ზედაპირის გაწელვისათვის საჭირო კუთრი მუშაობა, მუდმივი ტემპერატურის პირობებში.

**მექანიკის თვალსაზრისით**, ზედაპირული დაჭიმულობა არის ძალა, რომელიც მოქმედებს სითხის ზედაპირის შემომსაზღვრელი წირის სიგრძის ერთეულზე.

უფრო ზუსტი იქნება თუ ვიტყვით, რომ ზედაპირული დაჭიმულობა არის სითხის ერთეულოვანი ფართის გარღვევაზე საჭირო ენერგია.

სითხის ზედაპირული დაჭიმულობის  $\sigma$  კოეფიციენტის გასაზომად იყენებენ **ტენზიომეტრს**.

ზედაპირული დაჭიმულობის  $\sigma$  კოეფიციენტი დაკავშირებულია სითხის შინაგან  $U$  ენერგიასთან და ზედაპირის  $S$  ფართობთან შემდეგი ფორმულით:

$$U = \sigma \cdot S. \quad (1.9)$$

სითხე ყოველთვის ცდილობს მინიმუმამდე დაიყვანოს შინაგანი ენერგია, რაც (1.9) ფორმულიდან გამომდინარე აიძულებს ზედაპირს მიიღოს მინიმალური ფართობი.

ზედაპირული დაჭიმულობის კოეფიციენტი დამოკიდებულია შეხებაში მყოფ ნივთიერებათა მასალაზე და ტემპერატურაზე.



ტემპერატურის გაზრდა იწვევს დაჭიმულობის კოეფიციენტის შემცირებას. ეტვეშმა დაადგინა ეს დამოკიდებულება და მოგვცა ფორმულა წყლისთვის შემდეგი სახით:

$$\sigma = 0.072757 \cdot (1 - 0.02 \cdot (T - 291K)). \quad (1.10)$$

წყლისთვის:  $20^{\circ}C$  ტემპერატურაზე ჰაერთან კონტაქტისას

$$\sigma = 0.0726 \text{ ნ/მ.}$$

**ზედაპირული დაჭიმულობის ძალები** უნდა გავითვალისწინოთ, თუ ვსწავლობთ მცირე სიღრმის მქონე ნაკადების დინებას, სითხის მიერ ჰაერის შეწოვის (აერაცია) ან კაპილარული დინების ამოცანებს.

კაპილარები წარმოადგენს ვიწრო (5-10 მიკრომეტრი) განივკვეთის მქონე სისხლძარღვს, გრუნტის ფორებს და ა.შ. რომელშიდაც სითხე ზედაპირული დაჭიმულობის გამო ადის ზემოთ (თუ სითხე დასველებადია. მაგალითად წყალი) ან ჩამოდის ქვემოთ (თუ სითხე არადასველებადია. მაგალითად ვერცხლისწყალი).

კაპილარში სითხის აწევის ან დაწევის  $h$  სიმაღლე გამოითვლება **ბორელი-ჟურიენის** შემდეგი ფორმულით (ნახ. 1.1):

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{r_0(\rho - \rho_0)g}, \quad (1.11)$$

სადაც

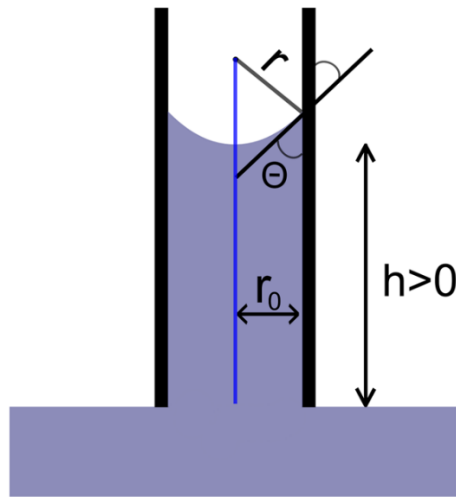
$r_0$  კაპილარის რადიუსია,

$\rho$  სითხის სიმკვრივე (წყლის),

$\rho_0$  გაზური ფაზის სიმკვრივე (ჰაერი),

$g$  თავისუფალი ვარდნის აჩქარება,

$\theta$  სითხის მიერ კაპილარის კედლის დასველების კუთხე.



ნახ. 1.1. სითხის აწევ-დაწევა კაპილარში

### 1.8. წყლის განსაკუთრებული თვისებები

ცნობილია, რომ წყალი შედგება არა მარტო  $H_2O^{16}$  მოლეკულებისაგან. წყალბადისა და ჟანგბადის იზოტოპების სხვადასხვა კომბინაცია, განაპირობებს წყლის 36 ნაირსახეობას. ბუნებრივ წყალში არის 99.7%  $H_2O^{16}$ -ის მოლეკულები, მოლეკულების სხვა სახეობებზე რჩება მხოლოდ 0.3%, მაგრამ ეს არ ნიშნავს იმას, რომ მათი გავლენა წყლის თვისებებზე მოცულობის პროპორციულია.

წყალი არის ანომალური სითხე. სხვადასხვა ტემპერატურისა და წნევის პირობებში წყალი შეიძლება აღმოჩნდეს სამ სხვადასხვა აგრეგატულ: მყარი (ყინული), თხევად და გაზობრივ (წყლის ორთქლი) მდგომარეობაში.

ტემპერატურის შემცირებისას  $4^{\circ}C$ -დან  $0^{\circ}C$ -მდე წყლის მოცულობა კი არ მცირდება (როგორც ბისმუტის გარდა ყველა სითხე), არამედ იზრდება. წყლის სიმკვრივეც, რომელიც მაქსიმალურია  $4^{\circ}C$ -ზე, ამ დროს მცირდება. გაყინვისას, წყლის მოცულობა იზრდება 10%-ით. წყლის გაყინვის ტემპერატურა წნევის გაზრდისას (19.6 მეგა პასკალამდე) მცირდება და შემდგომი გადიდებისას იზრდება.

ცნობილია, რომ წყალსაცავებში წყლის კონვექცია  $4^{\circ}C$ -ზე ჩერდება. ამ დროს წყლის ქვედა ფენების სიმკვრივე მეტია ზედა ფენებთან

შედარებით. ზღვის წყალი იყინება  $-1.9^{\circ}\text{C}$ -ზე. წყალი ნიადაგის კაპილარებში ზოგჯერ იყინება  $4.4^{\circ}\text{C}$ -ზე. ატმოსფერული წნევის პირობებში, წყლის ასაორთქლებლად საჭიროა 6.75-ჯერ მეტი სითბო, ვიდრე ყინულის დასადნობად იმავე წნევის პირობებში.

რადგან წყალში არის გახსნილი ჰაერი, რომელიც მდიდარია ჟანგბადით და სხვა აგრესიული კომპონენტებით, წყალი მოქმედებს ჰიდროტექნიკურ ნაგებობებზე და იწვევს მასალის კოროზიას. წყალში გახსნილი მარილები და სხვა შეტივტივებული ნაწილაკები ზოგჯერ ეკვრიან კედლებს, მაგალითად წყალგაცვანილობის მილებს და ამცირებენ მის გამტარუნარიანობას.

**მაგნიტური ველის მოქმედება,** გამოიყენება წყლის განთავისუფლებისათვის ქაფისაგან და ქვაბების კოროზიისაგან დასაცავად. მაგნიტური ველის გამოყენებით ხდება წყლის გაწმენდა შეტივტივებული ნაწილაკებისაგან. მაგნიტური ველის ზემოქმედების შედეგად, იზრდება წყლის გრუნტში ფილტრაციის სიჩქარე, უფრო ჩქარა შრება ბეტონი და ა.შ.

### 1.9. სითხეების დინამიკის მათემატიკური მოდელირების საფუძვლები

სითხეებისა და გაზების ცნების ქვეშ ერთიანდებიან დეფორმირებადი მასალების ფართო კლასი თხევად(წყალი, ბენზინი, ზეთი . . .) და გაზობრივ(ჰაერი, ჟანგბადი, მეთანი . . .) მდგომარეობაში, რომელთათვისაც დამახასიათებელია **უწყვეტობა** (უწყვეტი გარემო) და **დენადობა** (ძვრის მოძრაობა).

**უწყვეტობა,** გულისხმობს სითხის მასის უწყვეტ განაწილებას სივრცეში.

როგორც ვიცით, მყარი სხეულის მცირე დეფორმაცია დაკავშირებულია მოდებულ ძაბვებთან. მათგან განსხვავებით, სითხეებისა და გაზების დეფორმაცია ხორციელდება მხები ძაბვების გარეშეც და სწორედ ამაში მდგომარეობს სითხეებისა და გაზების **დენადობის** თვისება.

ჰიდროდინამიკაში, სითხეების ცნების ქვეშ აერთიანებენ ისეთ მასალებს, რომლებიც არიან თხევად (წვეთოვანი სითხეები) ან გაზობრივ მდგომარეობაში (უკუმში გაზები).

სითხეების მოძრაობის უმარტივესი მათემატიკური მოდელია ეილერის იდეალური სითხის მოდელი. ამ მოდელის აგებისას, არ ითვალისწინებენ სითხის ფენებს შორის არსებულ შიდა ხახუნს და მის შესაბამის მხებ ძაბვას. თვლიან რომ სითხის ურთიერთშეხებაში მყოფი ნაწილაკები, ერთმანეთზე მოქმედებენ მხოლოდ შეხების ზედაპირისადმი ნორმალური ძაბვებით (წნევით).

მოქმედ ნორმალურ ძაბვებზე რეაქციის მიხედვით, შეგვიძლია დავყოთ სითხეები კუმშვადობის მიხედვით.

წვეთოვანი სითხეები, გაზებისაგან განსხვავებით, უმეტეს შემთხვევაში, შეგვიძლია ჩავთვალოთ მცირედ კუმშვად ან არაკუმშვადად, რაც განპირობებულია სითხეებში მოლეკულური ძალების ურთიერთქმედების წესით. გაზის ნაკადის შიგნით, წნევის მცირე გრადიენტებისა და მცირე სიჩქარის შემთხვევაში, გაზიც შეგვიძლია ჩავთვალოთ არაკუმშვად სითხედ.

სითხეში მცირე შეშფოთებების გავრცელების ხასიათი, კუმშვადი სითხის მნიშვნელოვანი განმასხვავებელი ნიშანია არაკუმშვად სითხესთან შედარებით. არაკუმშვად სითხეში მცირე შეშფოთება ვრცელდება მყისიერად ანუ უსასრულო სიჩქარით, ხოლო კუმშვად სითხეებში - სასრული სიჩქარით (ბგერის სიჩქარით). გაზის მოძრაობის დამახასიათებელი პარამეტრია მახის  $M$  რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს სითხის მოძრაობის სიჩქარის ფარდობას ბგერის სიჩქარესთან. თუ მახის რიცხვი  $M < 1$  მაშინ გვაქვს ბგერამდელი მოძრაობა, თუ  $M \approx 1$  ანუ ახლოსაა ერთთან, მაშინ მოძრაობა ტრანსბგერითია, ხოლო თუ  $M > 1$  მაშინ გვაქვს ზეგერითი მოძრაობა. თუ  $M > 2.5$  მაშინ გვაქვს ჰიპერბგერითი მოძრაობა (საბრძოლო რაკეტები).

მაღალი ბგერამდელი, ზეგერითი და ჰიპერბგერითი სიჩქარეების შემთხვევაში, სითხის კუმშვადობის თვისებას აქვს განსაკუთრებული როლი. იმისათვის, რომ კუმშვადი გაზის მოდელი იყოს ახლოს რეალობასთან, გაზის მაღალი ტემპერატურული ცვლილებების გამო, აუცილებელია, დამატებით თერმოდინამიკური კანონების

გათვალისწინება. თუ არ გვაქვს სითბოს რაოდენობის გამოყოფა ან შთანთქმა, მაშინ გვაქვს ადიაბატური პროცესი. თუ, ადიაბატური პროცესი შექცევადია, მაშინ ენტროპია მუდმივია. ასეთ დინებებს იზენტროპიულს უწოდებენ. თუ, დინებისას გაზის ტემპერატურა არ იცვლება, მაშინ გვაქვს იზოთერმული პროცესი. ხშირად, განიხილება სრულყოფილი გაზის მოდელიც.

**იდეალური სითხის მათემატიკური მოდელი ააგო ლ.ეილერმა.**

აქამდე, ჩვენ ვსაუბრობდით იდეალური სითხის (გაზის) მოდელზე (სითხე ან გაზი სიბლანტის გარეშე), თუმცა, რეალურად, სითხეებს ახასიათებთ სიბლანტის თვისება. სიბლანტის თვისება დაკავშირებულია სითხეებში ფენებს შორის ან გარსდენადი სხეულის კედლებთან არსებულ მხებ ძაბვებთან, რომლებიც „იღვიძებენ“ მხოლოდ მოძრაობის დაწყებასთან ერთად. წონასწორობაში ან უძრავ მდგომარეობაში მყოფ სითხეში, მხები ძაბვები ნულის ტოლია.

ბლანტი სითხის უმარტივესი მოდელია ნიუტონის მოდელი, რომელიც ამბობს, რომ მოძრავ სითხეში მხები ძაბვა პირდაპირ-პროპორციულია მოძრავი სითხის ფენებს შორის არსებული სიჩქარის გრადიენტისა. უფრო ზოგადად, ნიუტონის კანონი ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად: ბლანტი სითხეში ძაბვის ტენზორი დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის პირდაპირპროპორციულია. სიბლანტის კოეფიციენტი, საზოგადოდ, დამოკიდებულია ტემპერატურაზე და წნევაზე. ბლანტი სითხის დინამიკის მათემატიკური მოდელი მოიცემა ნავიე-სტოქსის განტოლებებით.

სითხეებს, რომელთათვისაც ძაბვებსა და სიჩქარის გრადიენტს შორის კავშირი არაწრფივია, არანიუტონური სითხეები ეწოდებათ. ასეთი სითხეების სიბლანტის კოეფიციენტი, როგორც წესი, დამოკიდებულია, არამარტო ტემპერატურასა და წნევაზე, არამედ, სხვა დამატებით პარამეტრებზეც. ასეთი მასალებია: ბლანტპლასტიკური, ფსევდოპლასტიკური, ბლანტ-დრეკადი, ტიკსოტროპიული ... სითხეები.

სითხეებს ახასიათებს მოძრაობის ორგვარი რეჟიმი: ლამინარული და ტურბულენტური.

ლამინარული(ფენოვანი) დინებისას, დენის ხაზებს და მოძრავი სითხის ნაწილაკების ტრაექტორიას აქვს რეგულარული (მოწესრი-

გებულო) ხასიათი, ხოლო ტურბულენტური დინებისას, ხდება მოძრავი თხევადი ნაწილაკების ქაოსური არევა ერთმანეთში. ტურბულენტური დინების აღსაწერად ნავიე-სტოქსის მოდელი აღარ მუშაობს. ამიტომ იყენებენ რეინოლდსის მიახლოებულ მათემატიკურ მოდელს, რომელიც შეიცავს, როგორც დროის მიხედვით გასაშუალებულ, ასევე, პულსაციურ წევრებს. თუმცა, ტურბულენტური დინების მოდელირება დღემდე პრობლემატურია. სითხის მოძრაობის რეჟიმის დასახასიათებლად, იყენებენ რეინოლდსის  $Re$  რიცხვს.  $Re = \frac{vl}{\nu}$ , სადაც  $\nu$  სიჩქარეა,  $l$  დამახასიათებელი სიგრძე და  $\nu$  სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტი.

თუ  $Re < Re_{კრ}$ , მაშინ გვაქვს ლამინარული მოძრაობის რეჟიმი, ხოლო თუ  $Re > Re_{კრ}$ , მაშინ დინება ტურბულენტურია.  $Re_{კრ}$  არის რეინოლდსის რიცხვის კრიტიკული მნიშვნელობა, რომელიც ახასიათებს მოცემულ ამოცანას.

ბლანტი სითხით სხეულთა გარსდენის ამოცანების შესწავლისას, დიდი მნიშვნელობა აქვს მის ურთიერთქმედებას გარსდენადი სხეულების კორპუსთან (საფრენი აპარატები, საზღვაო ხომალდები . . .) ამოცანის სირთულიდან გამომდინარე, პრანდტლმა შეიმუშავა ახალი მათემატიკური მოდელი, რომლის თანახმადაც სიბლანტეს აქვს მნიშვნელობა მხოლოდ გარსდენადი სხეულის კორპუსის თხელ ფენაში, ხოლო ამ თხელი ფენის გარეთ სითხე შეგვიძლია ჩავთვალოთ იდეალურ, პოტენციალურ ნაკადად (სიბლანტის გარეშე). ამ იდეამ მნიშვნელოვნად გაამარტივა ნავიე-სტოქსის მათემატიკური მოდელი და მივიღეთ პრანდტლის სასაზღვრო ფენის განტოლებები, რომლებიც აღწერს ლამინარული ნაკადის მოძრაობას; რაც შეეხება ტურბულენტურ მოძრაობას, პრანდტლის იდეის გავრცელებით რეინოლდსის განტოლებებზე, მიღებული იქნა შესაბამისი ტურბულენტური სასაზღვრო ფენის მათემატიკური მოდელიც.

ისეთი პროცესების აღწერისას (ჰიპერბგერითი მოძრაობა), როდესაც საქმე გვაქვს მოძრავი გაზის მაღალ ტემპერატურასთან ( $10000 K$ ), აუცილებელი ხდება გავითვალისწინოთ იონიზირებულ გაზში ელექტრომაგნიტურ და გაზოდინამიკურ მოვლენებს შორის

ურთიერთქმედება. ასეთ საკითხებს შეისწავლის მაგნიტური ჰიდროაეროდინამიკა.

თუ, ვსწავლობთ საფრენი აპარატების მოძრაობას დიდ სიმაღლეებზე და მაღალი სიჩქარის პირობებში, მაშინ გაზს უკვე ვეღარ ჩავთვლით უწყვეტ გარემოდ, რადგან დიდ მნიშვნელობას იძენს გაზის მოლეკულური სტრუქტურა. გაიშვიათებული გაზისათვის მოძრაობის რეჟიმიდან გამომდინარე, იყენებენ სხვადასხვა მათემატიკურ მოდელებს ქიმიური რეაქციებისა და კვანტური ეფექტების გათვალისწინებით.

შემდეგ თავებში, თანმიმდევრულად განვიხილავთ სითხეების მათემატიკურ მოდელებს და მათი გამოყენების საზღვრებს. ამისათვის დაგვჭირდება რიგი მათემატიკური ცნების გახსენება.

### 1.10. სკალარული ველი ევკლიდეს სივრცეში. სკალარული ველის გრადიენტი

ევკლიდური სივრცის  $D \subset \mathbb{R}^3$  ქვესივრცელს ეწოდება  $f = f(x, y, z)$  ფუნქციით განსაზღვრული სკალარული ველი, თუ  $D$  სივრცის ყოველი წერტილისათვის განსაზღვრულია  $f = f(x, y, z)$  ფუნქცია ანუ  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . ამ ფუნქციას  $D$  სკალარული ველის პოტენციალი ეწოდება. სკალარული ველის  $f(x, y, z)$  პოტენციალის მაგალითებია: ელექტროსტატიკური ველის პოტენციალი, გრავიტაციული ველის პოტენციალი, წნევათა ველის პოტენციალი . . .

თუ სკალარულ ველს შეესაბამება ცალსახა  $f(x, y, z)$  პოტენციალი, მაშინ იმ წერტილების სივრცელს, სადაც მოცემული ფუნქცია ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას, სკალარული ველის დონის ზედაპირები (ეკვიპოტენციალური ზედაპირები) ეწოდებათ. დონის ზედაპირები განისაზღვრება განტოლებით:  $f(x, y, z) = C$ , სადაც  $C$  - მუდმივი რიცხვია. თუ ამ მუდმივს მივცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობებს, მივიღებთ დონის ზედაპირების ერთობლიობას. სკალარული ველის ყოველ წერტილზე გადის ერთადერთი დონის ზედაპირი. დონის ზედაპირის ყოველ წერტილში გვაქვს სკალარული ველის ერთნაირი პოტენციალი ანუ შესაბამისი ფიზიკური მოვლენა ერთნაირად მიმდინარეობს დონის ზედაპირის ყოველ წერტილში.

მაგალითად, თუ გვაქვს სკალარული ტემპერატურული ველი  $T(x, y, z)$ , მაშინ მისი დონის წირები იქნება იზოთერმული ზედაპირები  $T(x, y, z) = C$  ანუ ის ზედაპირები, რომლის ყოველ წერტილში ტემპერატურა ერთნაირია.

თუ გვაქვს უწყვეტი გარემოს წნევათა სკალარული ველი  $p(x, y, z)$ , მაშინ მისი დონის ზედაპირები იქნება იზობარული ზედაპირები  $p(x, y, z) = C$  ანუ ის ზედაპირები, რომლის ყოველ წერტილში წნევა ერთნაირია.

სკალარული ველის შესწავლისათვის, ხშირად, განიხილავენ სკალარული  $\varphi(x, y, z)$  ველის წარმოებულს, მოცემული  $\vec{l}$  ვექტორის მიმართულებით, რომელიც პრაქტიკულად, გვიჩვენებს ამ ველის  $\varphi(x, y, z)$  პოტენციალის ცვლილების სიჩქარეს, მოცემული მიმართულებით და ის მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(\vec{l}, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(\vec{l}, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(\vec{l}, z). \quad (1.12)$$

**P.S.** ცხადია, რომ სკალარული ველის წარმოებული, მოცემული ვექტორის მიმართულებით, დამოკიდებულია წერტილის კოორდინატებზე რომლებშიც ითვლება კერძო წარმოებულები და  $\vec{l}$  ვექტორის მიმართველ კოსინუსებზე.

### 1.10.1. სკალარული ველის გრადიენტი

სკალარული  $\varphi(x, y, z)$  ველის გრადიენტი ეწოდება ვექტორს, რომელიც ჩაიწერება ამ ველის, კოორდინატების მიხედვით კერძო წარმოებულებით, შემდეგი სახით:

$$\text{grad } \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (1.13)$$

აქ იგულისხმება, რომ  $\varphi(x, y, z)$  სკალარული ველი ცალსახაა და უწყვეტი, თავის პირველი რიგის წარმოებულებთან ერთად.

სკალარული ველის გრადიენტით მოცემული ველი უკვე ვექტორული ველია და მისი სიგრძე, ველის ყოველ წერტილში, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$|\text{grad } \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}. \quad (1.14)$$



ცხადია, რომ  $\vec{l}$  ვექტორის მიმართველი ერთეულოვანი  $\vec{l}_0$  ვექტორი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\vec{l}_0 = \cos(\vec{l}, x)\vec{i} + \cos(\vec{l}, y)\vec{j} + \cos(\vec{l}, z)\vec{k}, \quad (1.15)$$

მაშინ, ადვილი მისახვედრია რომ (1.12) ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \text{grad } \varphi \cdot \vec{l}_0, \quad (1.16)$$

მაგრამ  $|\vec{l}_0| = 1$ , მაშინ (1.15) ტოლობიდან და სკალარული ნამრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = |\text{grad } \varphi| \cdot \cos(\text{grad } \varphi, \vec{l}_0) = \text{გეგმილი}_l(\text{grad } \varphi). \quad (1.17)$$

(1.16) ტოლობიდან ნათლად ჩანს, რომ სკალარული ველის წარმოებული მოცემული მიმართულებით, ამ წერტილში გამოთვლილი გრადიენტის გეგმილის ტოლია მოცემული ვექტორის მიმართულებაზე. სკალარული ველის წარმოებულის მაქსიმალური  $|\text{grad } \varphi|$  მნიშვნელობა მიიღწევა მაშინ, როცა კოსინუსი ერთის ტოლია და მაშასადამე, როცა  $\vec{l}_0$  ვექტორის მიმართულება სკალარული ველის გრადიენტის მიმართულებას ემთხვევა.

რადგან მიმართულებით წარმოებული გვიჩვენებს სკალარული ველის ცვლილების სიჩქარეს ამ მიმართულებით, შეგვიძლია დავასკვნათ რომ, სკალარული ველის გრადიენტის მიმართულება შეესაბამება სკალარული ველის ცვლილების მაქსიმალურ სიჩქარეს.

განვიხილოთ სკალარული ველის ცვლილების სიჩქარე დონის წირის  $\vec{s}$  მხების მიმართულებით, მაშინ გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \text{grad } \varphi \cdot \vec{s}_0$ , სადაც  $\vec{s}_0$  დონის წირის მხების მიმართველი ვექტორია. რადგან ვექტორული ველი დონის წირის გასწვრივ არ იცვლება, ცხადია, რომ  $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ , რაც იმას ნიშნავს რომ  $\text{grad } \varphi \cdot \vec{s}_0 = 0$ .

**P.S.** ე.ი. სკალარული ველის გრადიენტი, დონის წირის პერპენდიკულარულია მოცემულ წერტილში ანუ აქვს დონის წირის ნორმალის მიმართულება.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. განვიხილოთ კოორდინატა სათავეში მოთავსებული  $q$  წერტილოვანი მუხტის ველის  $\varphi = \frac{q}{r}$  პოტენციალის დონის წირები და გრადიენტი, სადაც  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  მანძილია კოორდინატა სათავიდან მოცემულ  $(x, y, z)$  წერტილამდე, სადაც პოტენციალის სიდიდე ითვლება.

**ამოხსნა.** ელექტროსტატიკური ველის დონის ზედაპირების საპოვნელად, ჩავწეროთ დონის ზედაპირების განტოლება

$$\varphi = \frac{q}{r} = C \Rightarrow r = \frac{q}{C} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{q}{C}, \quad (1.18)$$

(1.18) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{q^2}{C^2}. \quad (1.19)$$

ამრიგად, მივიღეთ დონის ზედაპირების ერთობლიობა, რომელიც გეომეტრიულად კონცენტრული სფეროს ზედაპირებს წარმოადგენს საერთო ცენტრით იმ წერტილში სადაც ველის წარმომქმნელი მუხტია.

მოცემული სკალარული  $\varphi = \frac{q}{r}$  ველის გრადიენტის საპოვნელად, ვისარგებლოთ (1.13) ფორმულით:  $grad \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$ . მაშინ გვექნება, რომ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -q \frac{x}{r^3}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = -q \frac{y}{r^3}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = -q \frac{z}{r^3}. \quad (1.20)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$grad \varphi = -\frac{q}{r^3} (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}) = -\frac{q}{r^3} \vec{r}. \quad (1.21)$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ  $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{r}_0$  არის  $\vec{r}$  რადიუს-ვექტორის მიმმართველი ვექტორი, საბოლოოდ გვექნება, რომ

$$grad \varphi = -\frac{q}{r^2} \vec{r}_0. \quad (1.22)$$

ცხადია, რომ

$$|grad \varphi| = \frac{q}{r^2}, \quad \vec{r}_0 = \frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k}.$$

## სკალარული ველის გრადიენტის თვისებები

$$1. \operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi; \quad (1.23)$$

$$2. \operatorname{grad}(\varphi \cdot \psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi; \quad (1.24)$$

$$3. \operatorname{grad}F(\varphi) = F'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi. \quad (1.25)$$

### 1.11. ვექტორული ველი. ვექტორული ველის პოტენციალი.

ვექტორული ველის ძალწირები. გრიგალის ცნება და მისი ჰიდროდინამიკური შინაარსი. ვექტორული ველის ცირკულაცია  
შეკრულ წირზე

ევკლიდური სივრცის  $D \subset \mathbb{R}^3$  ქვესიმრავლეს ეწოდება  $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$  ვექტორ-ფუნქციით განსაზღვრული ვექტორული ველი თუ,  $D$  სიმრავლის ყოველი წერტილისათვის განსაზღვრულია  $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$  ვექტორი ანუ  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ . ვექტორული ველის მაგალითებია: მოძრავი სითხის სიჩქარეთა ველი, დეფორმირებულ სხეულში წერტილთა გადაადგილებათა ვექტორული ველი . . .

ვექტორული ველი შეგვიძლია ჩავწეროთ საკოორდინატო ღერძების ორტების მიმართ შემდეგი ფორმით:

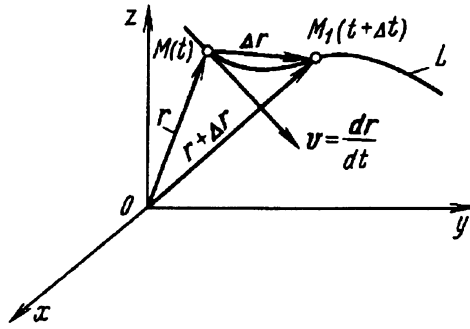
$$\vec{f}(x, y, z) = f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k}. \quad (1.26)$$

სადაც  $f_x(x, y, z)$  არის  $\vec{f}(x, y, z)$  ვექტორ-ფუნქციის გეგმილი აბსცისთა ღერძზე,  $f_y(x, y, z)$  - გეგმილია ორდინატთა ღერძზე, ხოლო  $f_z(x, y, z)$  აპლიკატის ღერძზე.

იგულისხმება, რომ ვექტორული ველის კომპონენტები უწყვეტია თავის კერძო წარმოებულებთან ერთად.

### სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქციის წარმოებული

განვიხილოთ სკალარული  $t$  არგუმენტის  $\mathbf{r}(t)$  ვექტორ-ფუნქცია. მექანიკაში სკალარულ  $t$  არგუმენტად, როგორც წესი, განიხილება დრო; ხოლო  $\mathbf{r}(t)$  აღნიშნავს დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ მოძრავი, მატერიალური  $M$  წერტილის გადაადგილების ვექტორს.



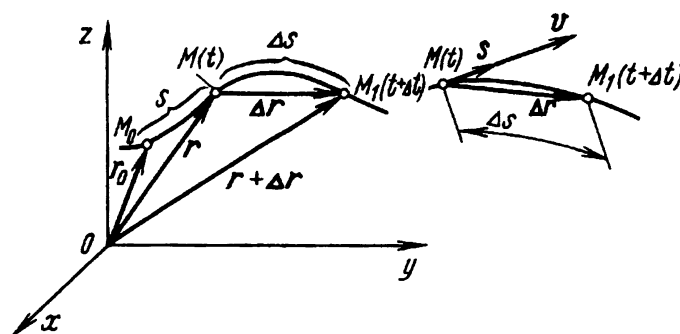
ნახ. 1.2. სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქციის წარმოებული ვექტორის გოდოგრაფი ეწოდება ამ ვექტორის ბოლოს მიერ შემოწერილ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს. ნახ. 1.2 -ზე გადაადგილების  $r(t)$  ვექტორის გოდოგრაფს წარმოადგენს  $M$  წერტილის მოძრაობის  $L$  ტრაექტორია.

გადაადგილების  $r(t)$  ვექტორ-ფუნქციის წარმოებული  $M$  წერტილში, სკალარული  $t$  არგუმენტით განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$v = \frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

ესაა სიჩქარის ვექტორი მოცემულ  $M$  წერტილში. ცხადია, რომ სიჩქარის მიმართულება გადაადგილების გოდოგრაფის მოცემულ წერტილში, მხების მიმართულებას ემთხვევა ნახ. 1.2.

გადაადგილების რადიუს-ვექტორის დროზე დამოკიდებულება შეიძლება მოცემული იყოს ნატურალური პარამეტრის (გადაადგილების ტრაექტორიის  $s$  რკალის) საშუალებით ნახ. 1.3



ნახ. 1.3. გადაადგილების დამოკიდებულება რკალის სიგრძეზე ვთქვათ, რკალის სიგრძის ათვლის წერტილია  $M_0$ , ხოლო რკალის სიგრძე არის დროის ფუნქცია ანუ გვაქვს დამოკიდებულება  $r[s(t)]$ .

მაშინ, რთული ფუნქციის გაწარმოების წესიდან გამომდინარე მივიღებთ რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{s}v,$$

სადაც  $v = \frac{ds}{dt}$  სიჩქარის სიდიდეა, ხოლო  $\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}$  წარმოადგენს მხების მიმართულების ერთეულოვან ვექტორს ტრაექტორიის მოცემულ წერტილში, რადგან როცა  $\Delta s \rightarrow 0$  მაშინ გოდოგრაფის  $\Delta \mathbf{r}$  მკვეთი მიისწრაფის ამ წერტილში მხების მდგომარეობისაკენ და მათი სიგრძეებიც უტოლდებიან ანუ  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s} = 1$ .

### ვექტორული ველის პოტენციალი

$\vec{f}(x, y, z)$  ვექტორულ ველს ეწოდება პოტენციალური, თუ არსებობს ისეთი  $\varphi(x, y, z)$  სკალარული ველი, რომლის გრადიენტული ველიც ემთხვევა მოცემულ ვექტორულ ველს ანუ თუ გვაქვს, შემდეგი ტოლობა:

$$\vec{f}(x, y, z) = \text{grad}\varphi(x, y, z). \quad (1.27)$$

**თეორემა.**  $\vec{f}(x, y, z)$  ვექტორული ველის პოტენციალურობისათვის აუცილებელია და საკმარისი შემდეგი პირობების შესრულება:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} = 0. \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

### ვექტორული ველის ცირკულაცია და წირითი ინტეგრალი

$\vec{f}(x, y, z)$  ვექტორული ველის  $G_L$  ცირკულაცია  $L$  კონტურის გასწვრივ, ეწოდება შემდეგი სახის წირით ინტეგრალს:

$$G_L = \oint f_x(x, y, z)dx + f_y(x, y, z)dy + f_z(x, y, z)dz, \quad (1.29)$$

სადაც  $L$  კონტურის გავლა მარჯვენა კოორდინატთა სისტემაში, უნდა ხდებოდეს საათის ისრის მიმართულების საწინააღმდეგოდ.

თუ  $L$  კონტური არაა შეკრული, მაშინ (1.29) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგარ ინტეგრალს  $\vec{f}$  ვექტორული ველის წირით ინტეგრალს უწოდებენ და ჩაწერენ შემდეგი ფორმით:

$$u = \int \vec{f} \cdot \vec{dr}, \quad (1.30)$$

სადაც  $\vec{dr}$  მოცემულ ინტეგრირების  $AB$  წირზე მოძრავი წერტილის რადიუს-ვექტორია ანუ  $\vec{dr} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$ .

თუ  $\vec{f}$  ძალაა, მაშინ (1.30) არის ის მუშაობა, რომელიც უნდა შეასრულოს ამ ძალამ წერტილის გადასაადგილებლად  $AB$  წირზე.

### ვექტორული ველის ძალწირები

ისეთ წირებს, რომლის ყოველ წერტილში მხების მიმართულება ემთხვევა ამ წერტილში განსაზღვრული  $\vec{f}$  ვექტორული ველის მიმართულებას,  $\vec{f}$  ვექტორული ველის ძალწირები ეწოდებათ.

განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ვექტორული ველის ძალწირებისათვის გვექნება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:

$$\frac{dx}{f_x} = \frac{dy}{f_y} = \frac{dz}{f_z}. \quad (1.31)$$

### ვექტორული ველის გრიგალის ცნება და მისი ჰიდროდინამიკური შინაარსი

$\vec{f}$  ვექტორული ველის გრიგალი ანუ როტორი  $rot \vec{f}$  ეწოდება ვექტორულ ველს, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$rot \vec{f} = \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (1.32)$$

ამ ფორმულას ზოგჯერ წერენ დეტერმინანტის საშუალებითაც:

$$rot \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}. \quad (1.33)$$

P.S. თუ სითხის სიჩქარის ვექტორული ველის გრიგალი ნულის ტოლია, მაშინ მის დინება უგრიგალოა ანუ ფენა ფენას მიჰყვება და არ

**ხდება ფენების ერთმანეთში არევა.** ასეთ შემთხვევაში სითხის დინება პოტენციალურია ანუ  $\vec{v} = \text{grad } \varphi$ . ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ დინება პოტენციალურია, მაშინ ის უგრიგალოც იქნება ანუ მაშინ  $\text{rot}\vec{v} = 0$ . მართლაც  $\text{rot}(\text{grad}\varphi) = 0$  ამ ტოლობის შემოწმება მკითხველისათვის მიმინდია.

**ამოცანა.** დაამტკიცეთ, რომ უგრიგალო მოძრაობის შემთხვევაში სითხის სიჩქარის ცირკულაცია ნებისმიერი შეკრული წირისათვის ნულის ტოლია.

**ამოხსნა.** უგრიგალო დინების შემთხვევაში  $\text{rot}\vec{v} = 0$ , რაც იმას ნიშნავს რომ ადვილი აქვს ველის პოტენციალურობისათვის არსებულ (1.28) აუცილებელ და საკმარის პირობებს. მაშასადამე არსებობს ისეთი  $\varphi$  ფუნქცია, რომ  $\vec{v} = \text{grad } \varphi$ . მაშინ ცხადია, რომ ადვილი ექნება ტოლობას:

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi. \quad (1.34)$$

მაშინ (1.30) წირითი ინტეგრალი  $AB$  წირის გასწვრივ მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$u = \int d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A). \quad (1.35)$$

**P.S.** ეს იმას ნიშნავს, რომ სითხის პოტენციალური დინების სიჩქარეთა ველის ცირკულაცია არაა დამოკიდებული  $AB$  წირზე და დამოკიდებულია მხოლოდ მისი ბოლოების კოორდინატებზე.

თუ ეს კონტური შეკრულია ანუ  $A$  და  $B$  წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ცირკულაცია ნულის ტოლია.

**ამოცანა 1.** სითხის მოძრაობის აჩქარების კოორდინატები მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{cases} a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \\ a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z \\ a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z \end{cases} \quad (1.36)$$

დაამტკიცეთ, რომ თუ სითხის სიჩქარეთა ველი პოტენციალურია, მაშინ აჩქარებათა ვექტორული ველიც პოტენციალური იქნება.

**დამტკიცება.** რადგან სიჩქარეთა ველი პოტენციალურია, გვექნება რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:  $\vec{v} = grad \varphi$  ანუ სიჩქარის ვექტორის კომპონენტები გამოისახება პოტენციალის კერძო წარმოებულებით. ამის გათვალისწინებით (1.36) განტოლებებში შემავალი წარმოებულების გარდაქმნით მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}$$

მაშინ გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (1.37)$$

რადგან  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ .

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$a_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad (1.38)$$

$$a_z = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (1.39)$$

ამრიგად, მივიღეთ რომ აჩქარების ვექტორული ველიც პოტენციალურია და ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულას:

$$\vec{a} = grad \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (1.40)$$

ცხადია, რომ აჩქარებათა ველის პოტენციალია  $\Phi = \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  ფუნქცია და ადგილი აქვს ტოლობას:  $\vec{a} = grad \Phi$ , რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

**ამოცანა 2.** სითხის არაკუმშვადობის პირობა ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (1.41)$$



გამოიყვანეთ სიჩქარეთა ველის პოტენციალის დიფერენციალური განტოლება, თუ დინება პოტენციალურია.

**ამოხსნა.** რადგან დინება პოტენციალურია  $\vec{v} = \text{grad } \varphi$  ანუ  $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  და  $v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ . მაშინ (1.41) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ ადგილი აქვს დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

ამ განტოლებას **ლაპლასის განტოლება** ეწოდება და მას ზოგჯერ მოკლედ ასე ჩაწერენ:

$$\Delta \varphi = 0. \tag{1.42}$$

ფუნქციებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ ლაპლასის განტოლებას, **ჰარმონიულ ფუნქციებს** უწოდებენ.

**ამოცანა 3.** მოცემულია ვექტორული ველი:

$$\vec{f} = 2x \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

იპოვეთ ამ ველის ძალწირები.

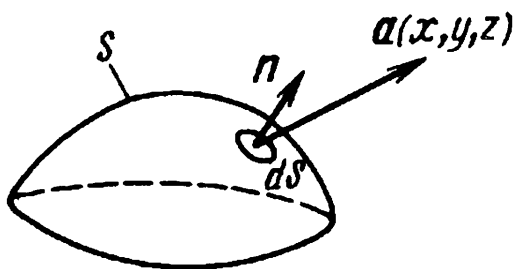
**ამოხსნა.** ვექტორული ველის ძალწირების დიფერენციალური განტოლება  $\frac{dx}{f_x} = \frac{dy}{f_y} = \frac{dz}{f_z}$ , ჩვენი ამოცანის პირობებში ჩაიწერება შემდეგნაირად:  $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z}$ . მისი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნები იქნება:  $y^2 = \frac{C}{x}$  და  $z^2 = C_1 x$ . ამ ვექტორულ ველს აქვს განსაკუთრებული წერტილი, რადგან როცა  $x \rightarrow 0$  მაშინ  $y \rightarrow \infty$  თუ,  $C \neq 0$ .

### 1.11. ვექტორული ველის ნაკადი. დივერგენცია. გაუსის ფორმულა

მოცემული  $\vec{a}(x, y, z)$  ვექტორული ველის ნაკადი  $S$  ზედაპირის ფართობი ეწოდება სკალარს, რომელიც წარმოიდგინება შემდეგი ზედაპირული ინტეგრალით:

$$\Pi = \iint a_n ds = \iint \vec{a} \cdot \vec{n} ds, \tag{1.43}$$

სადაც  $a_n$  არის  $\vec{a}(x, y, z)$  ვექტორის გეგმილი  $S$  ზედაპირის ნორმალზე. ნორმალი აირჩევა შესაბამისი მიმართულებით ნახ. 1.4.



ნახ. 1.4. ვექტორული ველის ნაკადი

ვექტორული ველის ნაკადს აქვს ფიზიკური აზრი. თუ განვიხილავთ სითხის მოძრაობის სიჩქარეთა ვექტორულ ველს, მაშინ ამ ველის  $\Pi$  ნაკადი შეესაბამება დროის ერთეულში  $S$  ზედაპირის ფართობი გამავალი სითხის რაოდენობას. თუ ეს რაოდენობა დადებითია, მაშინ ამ ფართობი გამოდის უფრო მეტი სითხე, ვიდრე შედის რაც იმას ნიშნავს რომ ფართის შიგნით გვაქვს სითხის წყარო. თუ უარყოფითია, მაშინ ფართის შიგნით გვაქვს უარყოფითი წყარო ანუ დრენაჟი.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ განვიხილავთ სითხის მოძრაობის სიჩქარის ვექტორულ  $\vec{v}$  ველს, მაშინ  $S$  ზედაპირით შემოფარგლული  $V$  მოცულობის შემთხვევაში, ამ ზედაპირის გამჭოლი ვექტორული ველის ნაკადი, სითხის  $V$  მოცულობის ცვლილების სიჩქარის ტოლია ანუ

$$\Pi = \iint v_n ds = \iint \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \dot{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \oiint \vec{v} \cdot \vec{n} ds. \quad (1.44)$$

**მაგალითი.** იპოვეთ წერტილის რადიუს-ვექტორის ნაკადი წრიული ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ ცილინდრის ქვედა ზედაპირი ძევს  $OXY$  სიბრტყეში და მისი ცენტრი მდებარეობს კოორდინატთა სათავეში, ცილინდრის ფუძის რადიუსია  $R$  და სიმაღლე  $H$ .

**ამოხსნა.** ცილინდრის სრულ პირეულში ნაკადი გამოითვლება (1.43) ფორმულით, სადაც უნდა გავითვალისწინოთ, რომ

$$\Pi_{სრული} = \Pi_{გვერდითი} + \Pi_{ქვედა} + \Pi_{ზედა}. \quad (1.45)$$

უნდა გავითვალისწინოთ, რომ გვერდითი ზედაპირის ნორმალური პერპენდიკულარულია OZ ღერძის, ამიტომ მისი ყოველი წერტილის რადიუს-ვექტორის  $r_n$  გეგმილი ნორმალის მიმართულებაზე იქნება ცილინდრის R რადიუსის ტოლი ანუ  $r_n = R$ . მაშინ ცხადია, რომ

$$\Pi_{\text{გვერდითი}} = \iint r_n ds = R \cdot \iint ds = R \cdot 2\pi RH = 2\pi R^2 H. \quad (1.46)$$

ცილინდრის ქვედა ზედაპირზე ცილინდრის წერტილების რადიუს-ვექტორები პერპენდიკულარულია ამ ზედაპირის გარე ნორმალის, ამიტომ ამ რადიუს-ვექტორის გეგმილი გარე ნორმალზე ნულის ტოლია და შესაბამისად:

$$\Pi_{\text{ქვედა}} = 0. \quad (1.47)$$

ცილინდრის ზედა ზედაპირის წერტილების რადიუს-ვექტორების გეგმილები მისი ნორმალის მიმართულებით ცილინდრის სიმაღლის ტოლია, მაშასადამე

$$\Pi_{\text{ზედა}} = \iint H ds = H \cdot \iint ds = H \cdot \pi R^2. \quad (1.48)$$

საბოლოოდ მივიღებთ რომ, ცილინდრის სრული პირეულში რადიუს-ვექტორის სკალარული ველის ნაკადი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\Pi_{\text{სრული}} = \Pi_{\text{გვერდითი}} + \Pi_{\text{ქვედა}} + \Pi_{\text{ზედა}} = 2\pi R^2 H + 0 + H \cdot \pi R^2 = 3\pi R^2 H. \quad (1.49)$$

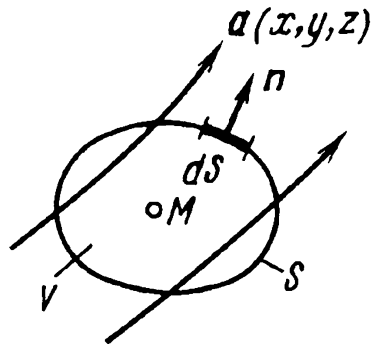
### ვექტორული ველის დივერგენცია

$\vec{a}(x, y, z)$  ვექტორული ველის დივერგენცია მოცემულ M წერტილში (ნახ. 1.10) ეწოდება ამ წერტილის გარემომცველი V მოცულობის არის შემომფარგლავი S ზედაპირის გამჭოლი ვექტორული ველის ნაკადის V მოცულობასთან ფარდობის ზღვარს, როცა მოცულობა მიისწრაფის ნულისაკენ ანუ

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint \vec{a} \cdot \vec{n} ds}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\dot{V}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{m}{\rho}\right)'}{\frac{m}{\rho}} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}. \quad (1.50)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, ვექტორული ველის დივერგენცია მოცემულ წერტილში, ამ წერტილის მიდამოს მოცულობის, ფარდობითი ცვლილების სიჩქარის ტოლია.

თუ განვიხილავთ სითხის სიჩქარეთა ვექტორულ ველს, მაშინ რადგან  $V = \frac{m}{\rho}$  სადაც  $\rho$  მოცემულ  $V$  მოცულობაში მოთავსებული სითხის სიმკვრივეა, ხოლო  $m$  მისი მუდმივი მასა, მაშინ მივიღებთ რომ დივერგენცია მოცემულ წერტილში არის ამ წერტილში სითხის სიმკვრივის ცვლილების ფარდობითი სიჩქარე.



ნახ. 1.5. ვექტორული ველის დივერგენცია

ვექტორული ველის დივერგენცია გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (1.51)$$

#### გაუსის ფორმულა

ვექტორული ველის დივერგენციასა და ნაკადს შორის კავშირს ამყარებს გაუსის ფორმულა:

$$\oint \vec{a} \cdot \vec{n} ds = \iiint \operatorname{div} \vec{a} dV, \quad (1.52)$$

რომელიც ამბობს: მოცემული შეკრული  $S$  ზედაპირის გამჭოლი ვექტორული ველის ნაკადი, უდრის ამ ზედაპირით შემოსაზღვრული  $V$  მოცულობით ინტეგრალს ვექტორული ველის დივერგენციიდან.

ამოცანა 4. გაუსის ფორმულის საშუალებით გარდაქმნით ზედაპირული ინტეგრალი:  $\oint (\operatorname{grad} u \cdot \vec{n}) ds$ .

ამოხსნა.  $\oint (\operatorname{grad} u \cdot \vec{n}) ds = \iiint \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) dV = \iiint \Delta u dV$ .

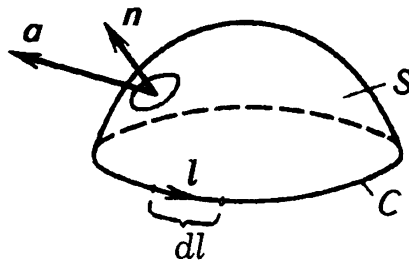
P.S. თუ  $u$  არის სითხის სიჩქარეთა ველის პოტენციალი, მაშინ მისი სიჩქარეთა ვექტორული ველის შეკრული ზედაპირის გამჭოლი ნაკადი ნულის ტოლია, რადგან მაშინ პოტენციალი ჰარმონიული ფუნქციაა.

ამოცანა 5. დაამტკიცეთ, რომ ვექტორული ველის როტორის შეკრული  $S$  ზედაპირის გამჭოლი ნაკადი ნულის ტოლია.

ამოხსნა.  $\oint (\text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \iiint \text{div}(\text{rot } \vec{v}) dV = \iiint 0 dV = 0$  რ.დ.გ.

### 1.13. სტოქსის ფორმულა. დივერგენციის თვისებები

ვექტორულ ანალიზში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია (ნახ. 1.6). სტოქსის თეორემას:



ნახ. 1.6. სტოქსის თეორემა

$\vec{a}$  ვექტორული ველის ცირკულაცია შეკრულ  $C$  წირზე, ამ წირზე მოჭიმული  $S$  ზედაპირის გამჭოლი ვექტორული ველის როტორის ნაკადის ტოლია ანუ

$$\oint \vec{a} \cdot \vec{l} dl = \iint \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n} ds. \quad (1.53)$$

განვიხილოთ დივერგენციის, როტორისა და გრადიენტის ზოგადი თვისებები, რომლებიც განსაზღვრებიდან გამომდინარე ადვილი დასამტკიცებელია და მკითხველისთვის მიგვინდია სავარჯიშოდ:

1.  $\text{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{div} \vec{a} + \text{div} \vec{b};$
2.  $\text{div}(U(x, y, z) \cdot \vec{a}) = U \text{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \text{grad} U;$
3.  $\text{div}(\text{grad} U) = \Delta U;$
4.  $\text{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{rot} \vec{a} + \text{rot} \vec{b};$
5.  $\text{rot}((U(x, y, z) \cdot \vec{a})) = \text{grad} U \times \vec{a} + U \text{rot} \vec{a};$
6.  $\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b};$
7.  $\text{div}(\text{grad} f) = \Delta f;$
8.  $\text{div}(\text{rot } \vec{v}) = 0;$

$$9. \text{rot}(\text{grad}f) = 0;$$

$$10. \text{rot}(\text{rot}\vec{a}) = \text{grad}(\text{div}\vec{a}) - \Delta\vec{a}.$$

### 1.14. ჰამილტონის $\nabla$ ოპერატორი და მისი თვისებები

ჰამილტონის  $\nabla$  ოპერატორი, სიმბოლური ვექტორული ოპერატორია, რომელიც შეიცავს კერძო წარმოებულებს კოორდინატთა ღერძების მიმართულებით:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}. \quad (1.54)$$

ამ ოპერატორის საშუალებით, შედარებით მარტივად ჩაიწერება ველის ოპერატორები:

$$\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}. \quad (1.55)$$

$$\text{div}\vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (1.56)$$

$$\text{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

### 1.15. კუმშვადი სითხის მდგომარეობის განტოლება

უკუმში სითხეებისაგან (წყალი, ნავთი, ბენზინი) განსხვავებით, გაზებისათვის (ჰაერი, ორთქლი, მეთანი, პროპანი - კუმშვადი სითხე) დამახასიათებელია კუმშვადობა. ზოგად შემთხვევაში, კუმშვადი სითხის მდგომარეობის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\rho = f(p, T) \text{ ან } F(p, \rho, T) = 0, \quad (1.57)$$

სადაც  $\rho$  გაზის სიმკვრივეა,  $p$  - წნევა და  $T$  ტემპერატურა.

თერმოდინამიკის აზრით იდეალური გაზებისათვის, მდგომარეობის განტოლებას წარმოადგენს კლაპეირონ განტოლება:

$$pV = R_0T, \quad (1.58)$$

სადაც  $V$  ერთი მოლი გაზის მოცულობაა,  $R_0$  გაზის უნივერსალური მუდმივაა. თუ  $m$  გაზის მოლეკულური წონაა, მაშინ  $\rho = \frac{m}{V}$  და კლაპეირონის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$p = \frac{R_0}{m} \rho T. \quad (1.59)$$

ამ მდგომარეობის განტოლებას აკმაყოფილებს მრავალი სხვადასხვა გაზი, როცა  $p$  წნევა არაა მაღალი და არც  $T$  ტემპერატურაა მეტისმეტად მცირე. ზოგჯერ კლაპეირონის განტოლებას წერენ შემდეგნაირად:

$$p = \rho RT, \text{ სადაც } R = \frac{R_0}{m}. \quad (1.60)$$

რეალური გაზებისათვის მაღალი წნევის პირობებში, იყენებენ ვან დერ ვალსის მდგომარეობის განტოლებას:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = R_0 T, \quad (1.61)$$

სადაც  $a$  და  $b$  მუდმივები ითვალისწინებენ მოლეკულათა ურთიერთქმედებას და მათ მოცულობას ტემპერატურაზე დამოკიდებულებით.

**განსაზღვრება.** სითხეს ეწოდება **ბაროტროპული**, თუ მის მდგომარეობის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\rho = f(p). \quad (1.62)$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში, გაზს უწოდებენ **ბაროკლინურს**. ცხადია, რომ ბაროტროპული გაზი **იზოთერმულია** (სიმკვრივე არაა დამოკიდებული ტემპერატურაზე).

### 1.16. სითბოგადაცემა სითხეებსა და გაზებში

თუ, სითხის ან გაზის მიერ შევსებული სივრცის სხვადასხვა წერტილში სითხის ტემპერატურა სხვადასხვაა, მაშინ უფრო მაღალი ტემპერატურის ნაწილაკებიდან, სითბო გადაეცემა უფრო დაბალი ტემპერატურის ნაწილაკებს.

სითბოს გადაცემის სამი მექანიზმი არსებობს: კონდიქტიური (სითბოგამტარობა), კონვექციური და გამოსხივებითი (რადიაცია).

სითბოსგამტარობით სითბოს გადაცემა წარმოებს სხვადასხვა ტემპერატურის, უშუალო შემხებლობაში მყოფ ნაწილაკებს შორის. ამ შემთხვევაში, სითბოს გადაცემა წარმოებს ატომურ-მოლეკულურ დონეზე და არ იწვევს სითხის მაკროსკოპიულ გადაადგილებას.

ბუნებრივი კონვექცია სითბოს გადაცემის ხერხია, რომლის დროსაც ტემპერატურის დიდი სხვაობის გამო, წარმოებს სითხის მრავალნაწილაკიანი ფენების მოძრაობა. განასხვავებენ ბუნებრივ კონვექციას და იძულებით კონვექციას. იძულებითი კონვექციის დროს ხდება სითხის სხვადასხვა ტემპერატური ფენების შერევა ხელოვნურად, მაგალითად გამაგრებელი ვენტილატორით.

სითბოს გადაცემა გამოსხივებით, ხდება სითხის ფენების უშუალო შემხებლობის გარეშე. ამ შემთხვევაში, ენერჯის გადაცემა წარმოებს გარკვეული ტალღის სიგრძის მქონე გამოსხივებით. სითბური გამოსხივების ტალღის სიგრძეა 0.76-4000მკმ (მიკრომეტრი). მაშინ, როცა ადამიანის თვალისათვის ხილული სინათლის სხივების ტალღის სიგრძეა 0.35-0.75მკმ.

სითბოს რაოდენობის  $\vec{q}$  ნაკადის სიმკვრივე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით (ფურიეს კანონი):

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \text{grad } T, \quad (1.63)$$

სადაც  $\lambda$  სითბოგამტარობის კოეფიციენტი. საერთაშორისო SI სისტემაში მისი განზომილებაა:  $[\lambda] = \frac{\text{ვტ}}{\text{მეტრი გრადუსი}} = \frac{\text{ვტ}}{\text{მგრად}}$ .

სითბოგამტარობის კოეფიციენტი დამოკიდებულია ნივთიერების გვარობაზე და მის ტემპერატურაზე. მეტალები კარგი სითბოსგამტარნი არიან, გაზები კი - ცუდი. განვიხილოთ სითბოგამტარობის კოეფიციენტის დამოკიდებულება ტემპერატურაზე სხვადასხვა მასალებისათვის ცხრილი 1.5.



ნივთიერება	$\lambda$ მოცემულ $T$ ცელსიუსის ტემპერატურაზე					
	20	40	100	200	400	600
წყალი	0.514	0.540	0.585	0.571	-	-
მანქანის ზეთი	0.125	0.124	0.118	0.112	-	-
რკინა	62.5	-	58.0	53.6	41.7	34.2
ვერცხლისწყალი	7.47	8.00	9.03	10.61	-	-
ვერცხლი	-	353.0	357.0	321.0	310.0	-
ჰაერი	0.020	0.021	0.023	0.028	0.036	0.057

ზოგიერთი მეტალის სითბოგამტარობა, ტემპერატურის გაზრდისას მცირდება. ჰაერის, წყალბადის და სხვა გაზებისათვის პირიქით, ტემპერატურის გაზრდისას - იზრდება. სითხეთა უმრავლესობისათვის წყლისა და ვერცხლისწყლის გარდა ტემპერატურის გაზრდისას, სითბოგამტარობა მცირდება.

### 1.17. ენერჯის შენახვის კანონი. სითბოს გადატანის განტოლება

სითხეებისა და გაზების მოძრაობისას ადგილი აქვს ენერჯის შენახვის კანონს, რომელიც შეგვიძლია ჩამოვაცალიბოთ შემდეგნაირად: მოცემული მოცულობის სითხის ან გაზის სრული ენერჯის დროში ცვლილების სიჩქარე ტოლია დროის ერთეულში, გარე  $A_m$  მასური და  $A_z$  ზედაპირული ძალების მუშაობის ჯამისა, დროის ერთეულში გარედან მიღებული სითბოს  $Q$  რაოდენობისა ანუ

$$\frac{dE}{dt} = A_m + A_z + Q. \quad (1.64)$$

მოცემული  $U$  მოცულობის სითხის ან გაზის სრული ენერჯია, წარმოადგენს მისი  $E_k$  კინეტიკური და  $E_p$  შიგა ენერჯიების ჯამს, რომლებიც წარმოადგენილია შემდეგი ფორმულებით:

$$E_k = \int_U \frac{\rho v^2}{2} dU; \quad E_p = \int_U \rho e dU = \int_U \rho c_v T dU; \quad (1.65)$$

სადაც  $e = c_v T$  ერთეულ მასაზე მოსული შინაგანი ენერჯიაა.

მასური და ზედაპირული ძალების მუშაობა დროის ერთეულში ანუ ამ ძალების სიმძლავრე გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$A_m = \int_U \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dU; \quad A_z = \int_S \vec{t}_n \cdot \vec{v} ds; \quad (1.66)$$

სადაც  $\vec{f} \cdot \vec{v}$  ერთეულ მასაზე მოქმედი ძალის სიმძლავრეა, ხოლო  $\vec{t}_n \cdot \vec{v}$  - ერთეულ ფართზე მოქმედი ძალების სიმძლავრე.

გარედან მიღებული სითბოს რაოდენობა ზოგად შემთხვევაში, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც  $Q_k$  კონვექტიური წესით მიღებულ სითბოს და  $Q_R$  რადიაციული წესით ანუ გამოსხივებით მიღებული სითბოს რაოდენობათა ჯამის სახით, რომლებიც გამოითვლებიან შემდეგნაირად:

$$Q_k = \int_s \lambda \frac{\partial T}{\partial n} ds = \int_s (\lambda \cdot grad T)_n ds; \quad Q_R = \int_U \rho q_R dU; \quad (1.67)$$

სადაც  $q_R$  სითბოს რადიაციული გადატანის სიმკვრივეა.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა  $E_k = const$ ,

ხოლო  $A_m = A_z = q_R = 0$ . ასეთ შემთხვევაში, შინაგანი ენერგია იცვლება მხოლოდ სითბოს გადაცემით. მაშინ ენერგიის (1.64) განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{d}{dt} \int_U \rho c_v T dU = \int_s (\lambda \cdot grad T)_n ds. \quad (1.68)$$

თუ (1.68) განტოლების მარჯვენა მხარეს მდგარი ინტეგრალის-თვის გამოვიყენებთ გაუსის ფორმულას, მაშინ მივიღებთ რომ

$$\int_U \left[ \frac{d}{dt} (\rho c_v T) - div(\lambda \cdot grad T) \right] dU = 0. \quad (1.69)$$

თუ, გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს რომ გამოყოფილია ნებისმიერი  $U$  მოცულობა, გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$\frac{d}{dt} (\rho c_v T) = div(\lambda \cdot grad T). \quad (1.70)$$

რადგან ამ კონკრეტულ კერძო შემთხვევაში,  $\rho$ ;  $c_v$ ;  $\lambda$  მუდმივი სიდიდეებია, (1.70) განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{dT}{dt} = a \cdot div(grad T); \quad (1.71)$$

სადაც  $a = \frac{\lambda}{\rho c_v}$ .

ცხადია, რომ ეს განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ სითბოგამტარობის განტოლების კანონიკური სახით ანუ

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = a \cdot \Delta T. \quad (1.72)$$

თუ, სითხე უძრავია  $u = v = w = 0$  და სითბოს გადაცემა ხორციელდება მხოლოდ მეზობელი, ურთიერთშეხებაში მყოფი ნაწილაკების მოლეკულური ურთიერთქმედებით, მაშინ (1.72) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T. \quad (1.73)$$

ზოგად შემთხვევაში, ენერჯის შენახვის კანონს აქვს შემდეგი სახე:

$$\int_U \rho \frac{d}{dt} \left( c_v T + \frac{v^2}{2} \right) dU = \int_U \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dU + \int_S \vec{t}_n \cdot \vec{v} ds + \int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} ds + \int_U \rho q_R dU, \quad (1.74)$$

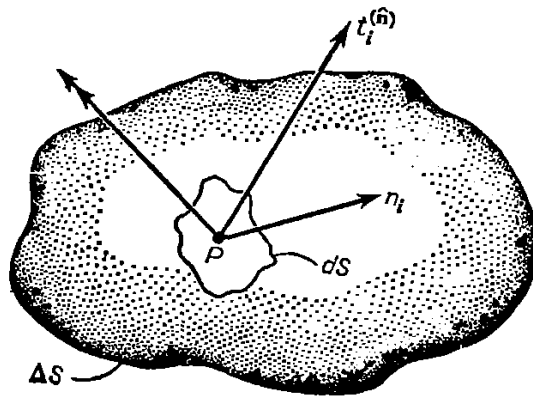
სადაც  $\vec{t}_n$  ძაბვის ვექტორია.

### 1.18. ძაბვის ვექტორი და ძაბვის ტენზორის კომპონენტები. დინამიკის განტოლება კოშის ფორმით

განვიხილოთ უწყვეტი გარემო (მასალა), რადგან ძალის მოქმედება მასალის შიგნით, წერტილიდან წერტილს გადაეცემა, თითოეულ წერტილში გვაქვს გარკვეული ზემოქმედება. მის დასახასიათებლად, სხეულის შიგნით გამოვყოთ ამწერტილზე გამავალი რაიმე  $\Delta S$  ზედაპირი, რომლის ნორმალური მიმართველი ვექტორიც აღვნიშნოთ  $\mathbf{n}$  ასოთი. ცხადია, რომ იმის მიხედვით, თუ როგორაა მიმართული  $\Delta S$  ზედაპირი გვექნება შესაბამისი საშუალო ძალა  $\Delta f_i$ . მოცემულ  $P$  წერტილში ზემოქმედების დასახასიათებლად, განვიხილოთ კოშის დამაბულობის პრინციპი, რომლის თანახმად:  $\Delta S$  ზედაპირის ფართის ერთეულზე მოქმედი საშუალო  $\Delta f_i$  ძალის ფარდობის ზღვარი არსებობს, როცა  $\Delta S$  მიისწრაფის ნულისაკენ და საშუალო ძალის მომენტის ზღვარი კი  $P$  წერტილის მიმართ ნულისკენ მიისწრაფის ანუ გვაქვს შემდეგი ტოლობები:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S} = \frac{df_i}{dS} = t_i^{(n)}. \quad (1.75)$$

$t_i^{(n)}$  ვექტორს ძაბვის ვექტორს უწოდებენ ნახ. 1.7. რა თქმა უნდა არსებობს მოდელები, სადაც მომენტების ჯამს მიეწერება გარკვეული არანულოვანი მნიშვნელობა და იგება შესაბამისი მომენტური თეორიები, თუმცა, ჩვენ ასეთ თეორიებს არ განვიხილავთ.

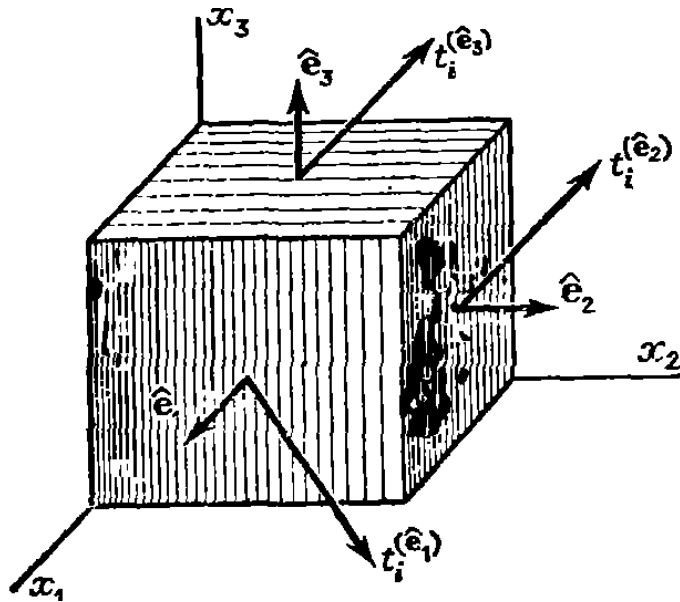


ნახ. 1.7. კოშის პრინციპი და ძაბვის ვექტორი

ამრიგად, კოშის პრინციპის თანახმად, უწყვეტი გარემოს ნებისმიერ  $P$  წერტილს და ამ წერტილზე გამავალ ზედაპირს, რომლის მოგეზულობას ახასიათებს მისი ერთეულოვანი სიგრძის  $n$  ნორმალი, შეესაბამება ძაბვის  $t_i^{(n)}$  ვექტორი. მოცემულ წერტილზე გამავალი ყველა შესაძლო ზედაპირების ერთობლიობას შეესაბამება  $t_i^{(n)}$  ძაბვის ვექტორებისა და შესაბამისი  $n$  ნორმალების სიმრავლე, რომლებიც განსაზღვრავენ ამ წერტილში დამაბულ მდგომარეობას. აღმოჩნდა, რომ მოცემულ წერტილში დამაბული მდგომარეობის დასახასიათებლად, არაა აუცილებელი ყველა შესაძლო  $t_i^{(n)}$ ;  $n$  წყვილების განხილვა. მოცემულ წერტილში დამაბული მდგომარეობის დასახასიათებლად, საკმარისია ამ წერტილზე გამავალ სამ ურთიერთპერპენდიკულარულ ზედაპირზე გვექონდეს მოცემული ძაბვის  $t_i^{(n)}$  ვექტორი.

მოცემულ წერტილში დამაბული მდგომარეობის დასახასიათებლად, ავირჩიოთ ამ წერტილზე გამავალი და საკოორდინატო ღერძების პერპენდიკულარული სამი სიბრტყე ნახ. 1.8

საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელურ ზედაპირებზე მოქმედი ძაბვის ვექტორები გავშალოთ საბაზისო ვექტორთა სისტემის მიმართ. მაშინ მივიღებთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:



ნახ. 1.8. წერტილში ძაბვის შესწავლის სქემა

$$\begin{cases} \mathbf{t}^{(e_1)} = t_1^{(e_1)} \mathbf{e}_1 + t_2^{(e_1)} \mathbf{e}_2 + t_3^{(e_1)} \mathbf{e}_3 = t_i^{(e_1)} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{t}^{(e_2)} = t_1^{(e_2)} \mathbf{e}_1 + t_2^{(e_2)} \mathbf{e}_2 + t_3^{(e_2)} \mathbf{e}_3 = t_i^{(e_2)} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{t}^{(e_3)} = t_1^{(e_3)} \mathbf{e}_1 + t_2^{(e_3)} \mathbf{e}_2 + t_3^{(e_3)} \mathbf{e}_3 = t_i^{(e_3)} \mathbf{e}_i \end{cases} \quad (1.76)$$

უწყვეტი გარემოს წერტილში განსაზღვრული ძაბვის ვექტორის ცხრა კომპონენტი, წარმოადგენს ძაბვის მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტებს:

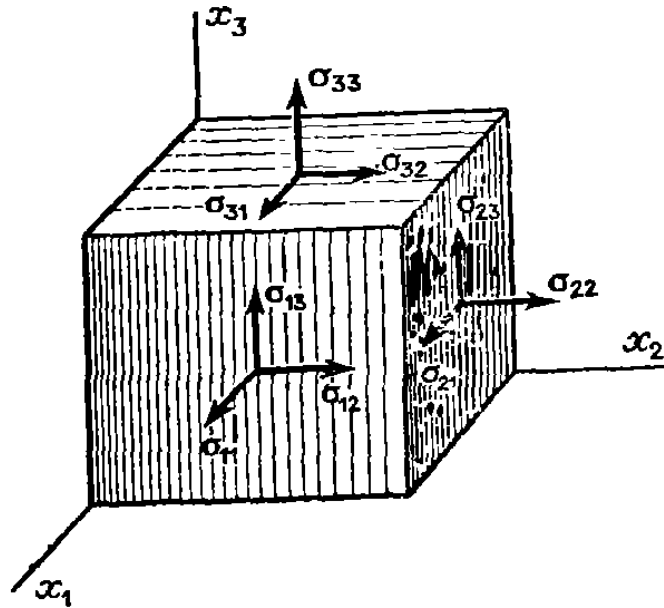
$$t_j^{(e_i)} = \sigma_{ij}. \quad (1.77)$$

ძაბვის ტენზორის მატრიცულ წარმოდგენას აქვს შემდეგი სახე:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.78)$$

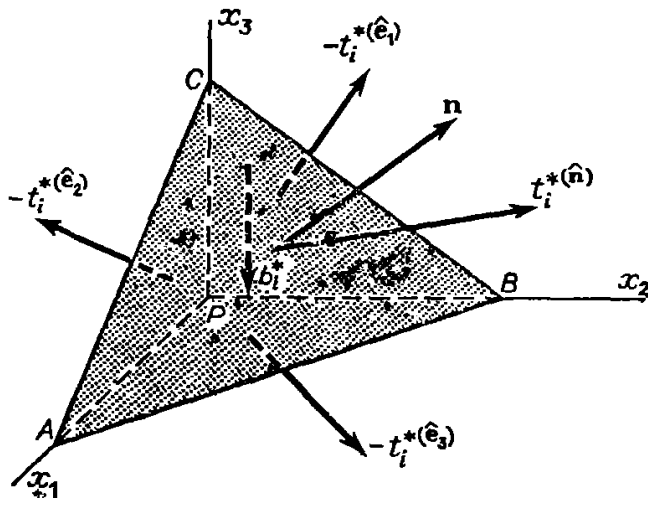
ნახ. 1.9 მოცემულია ძაბვის ტენზორის კომპონენტების მიმართულებები.  $\sigma_{11}$ ;  $\sigma_{22}$ ;  $\sigma_{33}$  კომპონენტებს ნორმალური ძაბვები ეწოდებათ, რადგან ისინი მიმართული არიან შესაბამისი ზედაპირის ნორმალური მიმართულებით, ხოლო  $\sigma_{12}$ ;  $\sigma_{13}$ ;  $\sigma_{21}$ ;  $\sigma_{23}$ ;  $\sigma_{31}$ ;  $\sigma_{32}$  კომპონენტებს მხები ძაბვები (ძვრის ძაბვები) ეწოდებათ.

$\sigma_{ij}$  არის ძალა, რომელიც მიმართულია  $j$ -ური ღერძის მიმართულებით და მოქმედებს  $i$ -ური ღერძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში.



ნახ. 1.9. ძაბვის ტენზორის კომპონენტების მიმართულებები

სხეულის ნებისმიერ  $P$  წერტილში, კავშირი ძაბვის ტენზორის  $\sigma_{ij}$  კომპონენტებსა და ამ წერტილზე გამავალ ნებისმიერი მოგეზულობის ზედაპირზე მოქმედ ძაბვის  $t_i^{(n)}$  ვექტორს შორის, შეიძლება ვიპოვოთ ძალთა წონასწორობის ან მოძრაობის რაოდენობის განტოლებიდან იმ ელემენტარული ტეტრაედრისათვის, რომლის წვეროც მოთავსებულია  $P$  წერტილში. ტეტრაედრის ფუძედ ავირჩიოთ ზედაპირი რომლის ნორმალია  $n_i$ ; ხოლო დანარჩენი სამი წახნაგი პერპენდიკულარულია კოორდინატთა ღერძების ნახ. 1.10.



ნახ. 1.10. უწყვეტი გარემოს ელემენტარული ტეტრაედრი

ვთქვათ, ტეტრაედრის  $ABC$  ფუძის ფართობია  $dS$ . მაშინ გვერდითი წახნაგების ფართობები, როგორც ფუძის გეგმილები კოორდინატთა

სიბრტყეებზე იქნება:  $CPB$  წახნაგისათვის  $dS_1 = dSn_1$ ;  $APC$  წახნაგისათვის  $dS_2 = dSn_2$  და  $BPA$  წახნაგისათვის  $dS_3 = dSn_3$  ანუ

$$dS_i = dS(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) = dS \cos(\mathbf{n}; \mathbf{e}_i) = dSn_i. \quad (1.79)$$

თუ გავითვალისწინებთ ტეტრაედრზე მოქმედ ძალებს, რაც აღნიშნულია ნახ. 1.10-ზე და აგრეთვე, მასურ ძალებს, მაშინ მივიღებთ ტეტრაედრის წონასწორობის განტოლებას:

$$t_i^{*(n)} dS - t_i^{*(e_1)} dS_1 - t_i^{*(e_2)} dS_2 - t_i^{*(e_3)} dS_3 + \rho b_i^* dV = 0. \quad (1.80)$$

თუ, გადავალთ ზღვარზე, როცა ტეტრაედრის წირითი ზომები მიისწრაფის ნულისაკენ, დავინახავთ, რომ მასური ძალები უფრო სწრაფად მცირდება ზედაპირულ ძალებთან შედარებით. მაშასადამე, (1.80) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$t_i^{(n)} dS = t_i^{(e_1)} dSn_1 + t_i^{(e_2)} dSn_2 + t_i^{(e_3)} dSn_3 = t_i^{(n_j)} n_j dS. \quad (1.81)$$

თუ (1.81) განტოლებას შევკვეცავთ  $dS$ -ზე და გავითვალისწინებთ, რომ  $t_j^{(e_i)} = \sigma_{ji}$ ; მივიღებთ, რომ

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j. \quad (1.82)$$

მაშასადამე, მივიღეთ დამოკიდებულება ძაბვის ვექტორისა და ძაბვის ტენზორის კომპონენტებს შორის, რაც საშუალებას იძლევა ჩავწეროთ დინამიკის განტოლებები კოშის ფორმით.

მართლაც, სითხისათვის ნიუტონის მეორე კანონს აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_U \rho v_i dU \right) = \int_S t_i^{(n)} ds + \int_U \rho b_i dU. \quad (1.83)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$ ; მაშინ გაუსის თეორემის თანახმად გარდავექმნით ზედაპირულ ინტეგრალს მოცულობით ინტეგრალად ანუ (1.83) განტოლების მარჯვენა ნაწილი გარდაიქმნება შემდეგნაირად:

$$\int_S \sigma_{ji} n_j dS + \int_U \rho b_i dU = \int_U (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) dU. \quad (1.84)$$

ეხლა გარდავექმნათ (1.83) განტოლების მარცხენა ნაწილი. თუ გამოვიყენებთ ფუნქციიდან ინტეგრალის, დროის მიხედვით

წარმოებულის ფორმულას როცა ინტეგრების მოცულობა  $U(t)$  დროზეა დამოკიდებული, მივიღებთ რომ :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_U \rho v_i dU \right) = \int_U \left( \frac{d(\rho v_i)}{dt} + (\rho v_i) \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dU. \quad (1.85)$$

თუ მარჯვენა მხარის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას გარდავექმნით და გავითვალისწინებთ უწყვეტობის განტოლებას, მაშინ გვექნება:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_U \rho v_i dU \right) = \int_U \left( \rho \frac{dv_i}{dt} + v_i \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right) dU = \int_U \left( \rho \frac{dv_i}{dt} \right) dU. \quad (1.86)$$

თუ (1.86) და (1.84) მნიშვნელობებს შევიტანთ (1.83) განტოლებაში, გვექნება, რომ

$$\int_U \left( \rho \frac{dv_i}{dt} \right) dU = \int_U (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) dU. \quad (1.87)$$

თუ გადავიტანთ ერთ მხარეს და მოვაქცევთ ერთი მოცულობითი ინტეგრალის ქვეშ, მივირებთ რომ

$$\int_U \left( \sigma_{ji,j} + \rho b_i - \rho \frac{dv_i}{dt} \right) dU = 0. \quad (1.88)$$

რადგან ეს ტოლობა სამართლიანია უწყვეტი გარემოს ნებისმიერი ინდივიდუალური მოცულობისათვის, ინტეგრალქვეშა გამოსახულება უნდა იყოს ნულის ტოლი და მაშასადამე, მივიღეთ დინამიკის განტოლება კოშის ფორმით:

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i. \quad (1.89)$$

დინამიკის განტოლებების ჩვეულ ცვლადებში ჩასაწერად სითხეებისა და გაზებისათვის, (1.89) განტოლებები უნდა შევავსოთ რეოლოგიური განტოლებებით. იდეალური სითხეებისა და გაზებისათვის რეოლოგიურ განტოლებებს აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (1.90)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ სითხეებში წონასწორობის პირობებში არის შიდა წნევა, რომელიც განაპირობებს სითხის წვეთის მდგრადობას (უმოდრაობას), სანამ მისი ზომების გამო არ დაირღვევა წონასწორობა. (1.90) რეოლოგიური განტოლების ჩასმით (1.89) დინამიკის განტოლებაში, მიიღება ადრე უკვე განხილული, იდეალური სითხის დინამიკის ეილერის განტოლებები.



რეალური, ბლანტი სითხეებისა და გაზებისათვის, რეოლოგიურ განტოლებას ემატება სითხის ფენებს შორის არსებული ხახუნით გამოწვეული მხები  $\tau_{ij}$  ძაბვები. ბლანტი, სითხის ან გაზის რეოლოგიურ განტოლებას, აქვს შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}. \quad (1.91)$$

### 1.19. დიფუზია და მასის გადატანა სითხეში

თუ, სითხის ან გაზის გარკვეულ მოცულობაში, არის სხვა ნივთიერების ნაწილაკები, მაშინ ამ ნივთიერების ნაწილაკების გადატანა მოლეკულების სითხური მოძრაობის შედეგად ანუ დიფუზია, წარმოებს უფრო დიდი კონცენტრაციის ნაწილიდან, უფრო მცირე კონცენტრაციის მოცულობისკენ.

დიფუზიის უნარი აქვთ ნივთიერების უმცირეს ნაწილაკებს (მოლეკულები, ატომები, იონები), ასევე, უფრო დიდ ნაწილაკებს, რომლებიც ჩანან მიკროსკოპში, განლაგებული არიან სითხის მოლეკულებს შორის და მონაწილეობენ ბროუნის მოძრაობაში. დიფუზიურ პროცესებს დიდი გამოყენება აქვს ტექნიკაში. განსაკუთრებით დიდია მათი როლი ქიმიურ მრეწველობაში და მეტალურგიაში. მაგალითად, მეტალების თერმიული დამუშავებისას, მათი ზედაპირის გამდიდრებისას: ცემენტაციის, აზოტირების, ბორირების და ბერილიზაციის პროცესები მთლიანად, განპირობებულია დიფუზიით.

დიფუზია წარმოებს გაზებში, სითხეებში და მყარ სხეულებში. დიფუნდირებენ როგორც მოცემულ ნივთიერებაში გახსნილი სხვა ნივთიერების ნაწილაკები, ასევე, თვით ამ ნივთიერების ნაწილაკები (ანუ თვითდიფუზია).

დიფუზიის პროცესი, ისევე, როგორც სითხოს გადატანა, განპირობებულია ორი სხვადასხვა მიზეზით: ა) კონცენტრაციათა სხვაობის გამო, შემხები ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ, წარმოიშობა ნივთიერების გადატანის პროცესი. ასეთ დიფუზიას მოლეკულურს უწოდებენ და მას აქვს ადგილი, როგორც მყარ სხეულებში, ასევე, წონასწორობაში მყოფ ან ლამინარულად მოძრავ სითხეებსა და

გაზებში; ბ) სითხეში ან გაზში გახსნილი ნივთიერების ნაწილაკების გადატანა, წარმოებს მოლეკულებზე უფრო დიდი მაკრონაწილაკების მიერ. ასეთ დიფუზიას ნივთიერების **კონვექციური დიფუზია** ეწოდება.

მასის გადატანის ფიქსის კანონიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი ფორმულა:

$$w = -D \frac{\partial c}{\partial n}; \quad (1.92)$$

სადაც  $w$  მასის გადატანის სიმკვრივეა (ანუ დიფუზიის სიჩქარე, ერთეული ფართობის შემხები ზედაპირის ნორმალის მიმართულებით);  $c$  ერთი ნივთიერების კონცენტრაციაა მეორის ერთეულოვან მოცულობაში. ის შეიძლება გამოსახული იყოს კგ/მ<sup>3</sup> ან მოცულობის ნაწილებში, ან პროცენტებში;  $D$  დიფუზიის კოეფიციენტია და მისი განზომილებაა მ<sup>2</sup>/წმ.

ზოგად შემთხვევაში, როცა კონცენტრაცია სივრცის სამ კოორდინატზეა დამოკიდებული, დიფუნდირებადი ნივთიერების მასის ნაკადის სიმკვრივისათვის, ადგილი აქვს სითბოს ნაკადის სიმკვრივის ანალოგიურ ფორმულას:

$$\vec{w} = -D \cdot \text{grad } c. \quad (1.93)$$

დიფუზიის (1.93) ფორმულა ძალაშია მოლეკულური დიფუზიის შემთხვევაში, როცა ტემპერატურისა და წნევების გრადიენტი საკმაოდ მცირეა; სხვა შემთხვევაში, მოლეკულური დიფუზიის კანონი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\vec{w} = -D \cdot (\text{grad } c + \frac{k_t}{T} \cdot \text{grad } T + \frac{k_p}{p} \cdot \text{grad } p). \quad (1.94)$$

მხოლოდ სხვადასხვა კონცენტრაციით გამოწვეულ დიფუზიას **სუფთა დიფუზია** ეწოდება. ტემპერატურათა გრადიენტით გამოწვეულ დიფუზიას - **თერმოდიფუზია**, ხოლო წნევათა გრადიენტით გამოწვეულ დიფუზიას - **ბაროდიფუზია**.  $D$  ყოველთვის არაუარყოფითია, რასაც ვერ ვიტყვით  $k_t$  თერმოდიფუზიის და  $k_p$  ბაროდიფუზიის კოეფიციენტებზე.

ელექტროლიტებში და იონიზირებულ გაზებში (პლაზმა) ელექტრულ პოტენციალთა სხვაობისას, ადგილი აქვს იონურ დიფუზიას, რომელსაც ელექტროდიფუზიას უწოდებენ.

დიფუზიის  $D$  კოეფიციენტი, ტემპერატურის გაზრდისას, იზრდება, რადგან იზრდება მოლეკულათა სითბური მოძრაობის სიჩქარე. დიფუზიის კოეფიციენტს ყველაზე დიდი მნიშვნელობა აქვს გაზებში. დიფუზიის კოეფიციენტის სიდიდე გაზებში დამოკიდებულია, არამარტო მოლეკულების სითბურ მოძრაობაზე, არამედ, მოლეკულების თავისუფალი განარბენის სიგრძეზეც (ანუ იმ საშუალო მანძილზე, სანამ სხვა მოლეკულას დაეჯახება). რაც მეტია თავისუფალი განარბენი, მეტია დიფუზიის სიჩქარეც.

სითხეებში დიფუზია უფრო ნელია, ვიდრე გაზებში. მაგალითად, გაზის გაზში დიფუზიის კოეფიციენტის სიდიდე  $\sim 10^{-5}$  მ<sup>2</sup>/წმ რიგისაა, ხოლო სითხეებისათვის  $\sim 10^{-6}$  მ<sup>2</sup>/წმ რიგის.

**მოლეკულური დიფუზიის განტოლება,** სითბოგამტარობის განტოლების ანალოგიით, შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c. \quad (1.95)$$

კონვექციური დიფუზიის შემთხვევაში, ისევე, როგორც სითბოს ნაკადის კონვექციით გადატანისას, დიფუზიის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{dc}{dt} = D\Delta c. \quad (1.96)$$

ეს განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = D\Delta c. \quad (1.97)$$

როგორც ვხედავთ, სითბოგამტარობისა და დიფუზიის განტოლებებს აქვთ ერთნაირი სახე.

## II თავი. ეილერის იდეალური სითხის მათემატიკური მოდელი და მისი გამოყენების საზღვრები

სითხეების მოძრაობის უმარტივესი მათემატიკური მოდელია ეილერის იდეალური სითხის მოდელი. ამ მოდელის აგებისას, არ ითვალისწინებენ სითხის ფენებს შორის არსებულ შიდა ხახუნს და მის შესაბამის მხებ ძაბვას. თვლიან რომ სითხის ურთიერთშეხებაში მყოფი ნაწილაკები, ერთმანეთზე მოქმედებენ მხოლოდ შეხების ზედაპირისადმი ნორმალური ძაბვებით (წნევით).

მოქმედ ნორმალურ ძაბვებზე რეაქციის მიხედვით, შეგვიძლია დავყოთ სითხეები კუმშვადობის მიხედვით.

წვეთოვანი სითხეები, გაზებისაგან განსხვავებით, უმეტეს შემთხვევაში, შეგვიძლია ჩავთვალოთ მცირედ კუმშვად ან არაკუმშვად, რაც განპირობებულია სითხეებში მოლეკულური ძალების ურთიერთქმედების წესით. გაზის ნაკადის შიგნით, წნევის მცირე გრადიენტებისა და მცირე სიჩქარის შემთხვევაში, გაზიც შეგვიძლია ჩავთვალოთ არაკუმშვად სითხედ.

სითხეში მცირე შეშფოთებების გავრცელების ხასიათი, კუმშვადი სითხის მნიშვნელოვანი განმასხვავებელი ნიშანია არაკუმშვად სითხესთან შედარებით. არაკუმშვად სითხეში მცირე შეშფოთება ვრცელდება მყისიერად ანუ უსასრულო სიჩქარით, ხოლო კუმშვად სითხეებში - სასრული სიჩქარით (ბგერის სიჩქარით). გაზის მოძრაობის დამახასიათებელი პარამეტრია მახის  $M$  რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს სითხის მოძრაობის სიჩქარის ფარდობას ბგერის სიჩქარესთან. თუ მახის რიცხვი  $M < 1$  მაშინ გვაქვს ბგერამდელი მოძრაობა, თუ  $M \approx 1$  ანუ ახლოსაა ერთთან, მაშინ მოძრაობა ტრანსბგერითია, ხოლო თუ  $M > 1$  მაშინ გვაქვს ზებგერითი მოძრაობა. თუ  $M > 2.5$  მაშინ გვაქვს ჰიპერბგერითი მოძრაობა (საბრძოლო რაკეტები).

მაღალი ბგერამდელი, ზებგერითი და ჰიპერბგერითი სიჩქარეების შემთხვევაში, სითხის კუმშვადობის თვისებას აქვს განსაკუთრებული როლი. იმისათვის, რომ კუმშვადი გაზის მოდელი იყოს ახლოს რეალობასთან, გაზის მაღალი ტემპერატურული ცვლილებების გამო, აუცილებელია, დამატებით თერმოდინამიკური კანონების

გათვალისწინება. თუ არ გვაქვს სითბოს რაოდენობის გამოყოფა ან შთანთქმა, მაშინ გვაქვს ადიაბატური პროცესი. თუ ადიაბატური პროცესი შექცევადია, მაშინ ენტროპია მუდმივია. ასეთ დინებებს იზენტროპულს უწოდებენ. თუ დინებისას, გაზის ტემპერატურა არ იცვლება, მაშინ გვაქვს იზოთერმული პროცესი. ხშირად, განიხილება სრულყოფილი გაზის მოდელიც.

## 2.1. ეილერისა და ლაგრანჟის ცვლადები

სითხის მოძრაობა შეგვიძლია აღწეროთ ორი სხვადასხვა მეთოდით.

ა) ლაგრანჟის მეთოდით აღწერისას, თვლიან რომ სითხე, რომელიც უყვეტი გარემოა, შედგება სითხის მცირე ნაწილაკებისაგან (მატერიალური წერტილებისაგან) და სითხის მოძრაობის შესწავლა დაიყვანება, ამ ინდივიდუალური ნაწილაკების მოძრაობის დამახასიათებელი პარამეტრების ცვლილების შესწავლაზე დროის მიხედვით. ასევე, შეისწავლება თუ როგორ იცვლებიან დინამიკური პარამეტრები ერთი ინდივიდუალური ნაწილაკიდან მეორეზე გადასვლისას. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ლაგრანჟის მიდგომისას, ხდება სითხის ნაწილაკების მონიშვნა, ვთქვათ მათი კოორდინატებით  $r_0 = (x_0; y_0; z_0)$  დროის საწყის  $t_0$  მომენტში. მაშინ, სითხის მოძრაობისას მისი თითოეული ნაწილაკის რადიუს-ვექტორი  $r(x; y; z)$ , შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც დროისა და შესაბამისი ნაწილაკის საწყისი მდებარეობების  $r = r(t; r_0)$  ფუნქცია.

$x_0; y_0; z_0$  საწყისი კოორდინატების ნაცვლად, ლაგრანჟის მიდგომისას, შეგვიძლია განვიხილოთ სხვა ნებისმიერი სამი  $a; b; c$  რიცხვი, რომლების ურთიერთცალსახა დამოკიდებულებაში არიან  $x_0; y_0; z_0$  რიცხვებთან ანუ დროის  $t_0$  საწყის მომენტში, შეგვიძლია განვიხილოთ ნაწილაკის განზოგადებული კოორდინატები.

ლაგრანჟის მიდგომისას  $t; a; b; c$  ცვლადები, წარმოადგენს სითხის მოძრაობის დამახასიათებელი ვექტორული და სკალარული პარამეტრების არგუმენტებს. ამ ცვლადებს ლაგრანჟის ცვლადებს უწოდებენ.

ლაგრანჟის ცვლადებში მოძრაობის კანონი ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t; a; b; c). \quad (2.1)$$

სიჩქარისა და აჩქარების ვექტორები, შესაბამისად, მოიცემა ფორმულებით:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t; a; b; c) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(t; a; b; c); \quad (2.2)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t; a; b; c) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(t; a; b; c). \quad (2.3)$$

ბ) ეილერის მეთოდით აღწერისას, კვლევის ობიექტია არა თვით სითხის ნაწილაკები, არამედ, სითხის მიერ შევსებული მოცულობის წერტილები და სწავლობენ: ამ წერტილებში სითხის დინამიკის დამახასიათებელი პარამეტრების ცვლილებას დროის მიხედვით და ამ პარამეტრების ცვლილებას სხვა წერტილებში გადასვლისას.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, განიხილება სითხის მოძრაობის დამახასიათებელი ვექტორული და სკალარული პარამეტრების ცვლილება სივრცის  $(x; y; z)$  კოორდინატებისა და  $t$  დროის მიხედვით.

$x; y; z; t$  ცვლადებს ეილერის ცვლადებს უწოდებენ.

ლაგრანჟის ცვლადებიდან ეილერის ცვლადებზე გადასვლა შეგვიძლია განვახორციელოთ (2.1) ფორმულებიდან გამომდინარე. ამისათვის საკმარისია ის ამოვხსნათ  $a; b; c$  ცვლადებისა და დროის მიმართ. მაგალითად, ვთქვათ გვაქვს ამოცანა:

1. ლაგრანჟის ცვლადებში ინდივიდუალური ნაწილაკების მოძრაობა მოცემულია განტოლებებით:

$$x = a + b(e^t - 1);$$

$$y = a(e^{-t} - 1) + b;$$

$$z = c.$$

ჩაწერეთ ეს მოძრაობა ეილერის ცვლადებში.

**ამოხსნა.**

თუ, მეორე განტოლებიდან განვსაზღვრავთ  $b$  ცვლადს, ჩავსვამთ პირველ განტოლებაში და მას ამოვხსნით  $a$  ცვლადის მიმართ, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$a = \frac{-x+y(e^t-1)}{1-e^t-e^{-t}}; \quad b = \frac{x(e^{-t}-1)-y}{1-e^t-e^{-t}}; \quad c = z.$$

ნებისმიერი  $A(a; b; c; t)$  სიდიდისათვის, რომელიც ლაგრანჟის ცვლადებშია მოცემული, ეილერის ცვლადებში მისი გამოსახულება იქნება შესაბამისი რთული ფუნქცია:

$$A(\varphi_1(x; y; z; t); \varphi_2(x; y; z; t); \varphi_3(x; y; z; t); t); \quad (2.4)$$

სადაც  $a = \varphi_1(x; y; z; t); b = \varphi_2(x; y; z; t); c = \varphi_3(x; y; z; t)$  მიღებულია (2.1) განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შედეგად.

ეილერის ცვლადებში, მოცემული  $A(x; y; z; t)$  სიდიდის ინდივიდუალური წარმოებული დროის მიხედვით, წარმოადგენს რთული ფუნქციის სრულ წარმოებულს:

$$\frac{dA(x; y; z; t)}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial A}{\partial z} \quad (2.5)$$

ანუ 
$$\frac{dA(x; y; z; t)}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A}{\partial x} + v_2 \frac{\partial A}{\partial y} + v_3 \frac{\partial A}{\partial z}, \quad (2.6)$$

სადაც  $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$  სიჩქარის ვექტორია.

ცხადია, რომ აჩქარების ვექტორი, ეილერის კოორდინატებში მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(t; \mathbf{r}) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \quad (2.7)$$

თუ, გამოვიყენებთ ჰამილტონის  $\nabla$  ოპერატორს, მაშინ ეილერის ცვლადებში აჩქარების ვექტორი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (2.8)$$

იმისათვის, რომ ეილერის ცვლადებიდან გადავიდეთ ლაგრანჟის ცვლადებზე, საჭიროა ამოვხსნათ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1; x_2; x_3; t); \quad i = \overline{1,3}. \quad (2.9)$$

საწყისი პირობებით:

$$(x_1; x_2; x_3)|_{t=0} = (a; b; c); \quad (2.10)$$

სადაც  $(x_1; x_2; x_3) = (x; y; z)$  აღნიშვნა მივიღეთ (2.9) განტოლებების მოკლედ ჩასაწერად.

ამრიგად, მიიღება  $x_i = f_i(a; b; c; t)$  მოძრაობის კანონი ლაგრანჟის კოორდინატებში.

მაშინ ნებისმიერი  $B(x_1; x_2; x_3; t)$  სიდიდისათვის ეილერის ცვლადებში, თუ შევიტანთ მიღებული მოძრაობის კანონიდან მნიშვნელობებს მივიღებთ ამ გამოსახულებას ლაგრანჟის ცვლადებში:

$$B(f_1(a; b; c; t); f_2(a; b; c; t); f_3(a; b; c; t); t). \quad (2.11)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ სითხის მოძრაობის ეილერის ცვლადებში განხილვა, საშუალებას იძლევა გამოვიყენოთ ვექტორული აღნიშვნები, ამიტომ მას უფრო ხშირად გამოიყენებენ.

## 2.2. იდეალური არაკუმშვადი სითხის დინამიკის, ეილერის მათემატიკური მოდელი

იდეალურ სითხეს, უწოდებენ არაკუმშვად სითხეს, თუ, მისი სიმკვრივის ცვლილება არაა დამოკიდებული დროზე ანუ  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ . ცხადია, რომ ეს პირობა მითუმეტეს შესრულდება, როცა სიმკვრივე მუდმივი სიდიდეა (რაც მაღალი სიზუსტით სრულდება წყლისთვის).

ვთქვათ, გვაქვს სითხის გამოყოფილი  $V$  მოცულობა, რომელიც შემოფარგლულია  $S$  ზედაპირით. მაშინ მასზე მოქმედებს ორი ტიპის ძალები. მასური ძალები, რომლებიც მოქმედებენ სითხის  $dV$  ელემენტზე იმის მიუხედავად, მის გარეთ არსებობს თუ არა სითხის სხვა ნაწილი და ზედაპირული ძალები, რომლებიც მოქმედებენ სითხის მოცემულ ნაწილზე, გარემომცველი ზედაპირის გასწვრივ სითხის სხვა ნაწილების ზემოქმედებით. ამრიგად, სითხის მოცემული ნაწილისათვის შეგვიძლია ჩავწეროთ ნიუტონის მეორე კანონი შემდეგი ფორმით:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{ზედაპირული}} + \mathbf{F}_{\text{მასური}}. \quad (2.12)$$

ცხადია, რომ სითხის  $dV$  მოცულობისათვის (2.12) განტოლების მარცხენა ნაწილი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$m\mathbf{a} = \int_V \rho \mathbf{a} dV. \quad (2.13)$$



რაც შეეხება მასურ ძალებს, ყველაზე ხშირად ის სიმძიმის ძალაა, გამოწვეული დედამიწის მიზიდულობიდან და თუ, მასის ერთეულზე მოქმედ ძალას (ძალის სიმკვრივეს) ავლნიშნავთ  $\mathbf{f}$  სიდიდით, გვექნება რომ

$$\mathbf{F}_{\text{მასური}} = \int_V \rho \mathbf{f} dV. \quad (2.14)$$

სითხის გამოყოფილ  $dV$  ნაწილზე მოქმედი შიდა ზედაპირული ძალები გაწონასწორებულია ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად. რჩება მხოლოდ შემომფარგვლელ  $S$  ზედაპირზე მოქმედი ძალები, ამ მოცულობის გარეთ მყოფი სითხის ნაწილიდან. რადგან განსახილველი სითხე იდეალურია და მაშასადამე, მხები ძაბვები არა გვაქვს, გვრჩება მხოლოდ ამ ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ მოქმედი წნევის ძალები, რომლებიც განაწილებულია შემომფარგვლელი ზედაპირის ფართზე ანუ

$$\mathbf{F}_{\text{ზედაპირული}} = -\int_S p \mathbf{n} dS. \quad (2.15)$$

ამ ტოლობაში მინუს ნიშანი მიუთითებს იმ ფაქტზე, რომ დადებითად მიღებულია ზედაპირის გარე ნორმალის მიმართულება. ამრიგად, თუ (2.13)-(2.15) ფორმულებს შევითანთ (2.12) განტოლებაში, მივიღებთ რომ

$$\int_V \rho \mathbf{a} dV = -\int_S p \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{f} dV. \quad (2.16)$$

თუ (2.16) ფორმულაში ზედაპირულ ინტეგრალს გარდავქმნით გაუსის ფორმულით მოცულობით ინტეგრალად, გვექნება, რომ

$$\int_V \rho \mathbf{a} dV = -\int_V \nabla p dV + \int_V \rho \mathbf{f} dV \quad (2.17)$$

ანუ

$$\int_V (\rho \mathbf{a} + \nabla p - \rho \mathbf{f}) dV = 0. \quad (2.18)$$

თუ, გავითვალისწინებთ რომ (2.18) განტოლებას ადგილი აქვს სითხის ნებისმიერი ამორჩეული  $dV$  მოცულობისათვის, მივიღებთ რომ დროის ნებისმიერი მომენტისათვის და სივრცის ნებისმიერ წერტილში, ადგილი აქვს შემდეგ ვექტორულ განტოლებას:

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}. \quad (2.19)$$

თუ, სითხის  $\mathbf{a}$  აჩქარებისათვის გამოვიყენებთ (2.8) ფორმულას ეილერის ცვლადებში, მაშინ მივიღებთ ეილერის განტოლებას იდეალური სითხეებისათვის შემდეგი ვექტორული ფორმით:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}. \quad (2.20)$$

იდეალური სითხის დინამიკის მათემატიკურ მოდელს, თუ ჩავწერთ კომპონენტებში, მაშინ გვექნება სამი განტოლებისაგან შემდგარი, შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_1, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_2, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_3. \quad (2.23)$$

გვაქვს სამი განტოლება ოთხი  $v_1$ ;  $v_2$ ;  $v_3$ ;  $p$  უცნობით ანუ სისტემა არაა ჩაკეტილი. მისი ჩაკეტვისათვის გვჭირდება კიდევ ერთი განტოლება, რომელსაც მივიღებთ მასის მუდმივობის კანონიდან გამომდინარე, მას უწყვეტობის განტოლებას უწოდებენ.

### 2.2.1. იდეალური, უკუმში სითხის უწყვეტობის განტოლება

იდეალური, უკუმში სითხის უწყვეტობის განტოლების გამოსაყვანად, განვიხილოთ სითხის ნებისმიერი  $V$  მოცულობა, რომელიც შემოფარგლულია  $S$  ზედაპირით. სითხის არაკუმშვადობის თვისების გამო, რამდენიც შედის სითხე ამ მოცულობაში, იმდენივე უნდა გამოდიოდეს მისი შემოფარგვლელი ზედაპირიდან. აქედან გამომდინარე, განვიხილოთ სითხის ნაკადი შემოფარგვლელი ზედაპირიდან:

$$\Phi = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.24)$$

ზემოთ აღნიშნული უკუმშვადობის პირობიდან გამომდინარე, სითხის ნაკადი უნდა იყოს მუდმივი და მაშასადამე ნულის ტოლი  $\Phi = 0$ .

თუ (2.24) ნაკადისათვის გამოვიყენებთ გაუსის თეორემას, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\Phi = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = 0. \quad (2.25)$$

რადგან (2.25) ფორმულა სრულდება სითხის ნებისმიერი  $dV$  მოცულობისათვის, ცხადია რომ გვექნება უწყვეტობის განტოლება უკუმში იდეალური სითხისათვის შემდეგი სახით:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.26)$$

თუ (2.26) უწყვეტობის განტოლებას მივუერთებთ დინამიკის (2.20) ვექტორულ განტოლებას, უკვე გვექნება ჩაკეტილი განტოლებათა სისტემა.

ცხადია, რომ გიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის აუცილებელია შესაბამისი საწყისი და სასაზღვრო პირობების დასმა.

### 2.2.2. საწყისი და სასაზღვრო პირობები არაკუმშვადი იდეალური სითხისათვის

არაკუმშვადი იდეალური სითხის განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნი, დამოკიდებული იქნება ნებისმიერი სახის სხვადასხვა ფუნქციებსა და მუდმივებზე. ყოველი მოცემული პრაქტიკული ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობისათვის, საჭიროა კონკრეტული საწყისი და სასაზღვრო პირობების დასმა.

არაკუმშვადი იდეალური სითხისათვის, საწყისი პირობებია სიჩქარის მოცემული კონკრეტული ველი, დროის საწყის მომენტში ანუ

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}; t)|_{t=0} = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}). \quad (2.27)$$

რაც შეეხება სასაზღვრო პირობებს: მოცემული ამოცანიდან გამომდინარე, არსებობს სხვადასხვა სახის.

ვთქვათ, სითხეს აქვს რაღაც  $S$  საზღვარი, საზოგადოდ მოძრავი, რომელიც სითხეს შემოფარგლავს, მჭიდროდ ესაზღვრება სივრცე-

ელეების გარეშე და არა გვაქვს მასში ფილტრაცია. ვთქვათ, საზღვრის ზედაპირის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:  $\zeta(\mathbf{r}; t) = 0$ . თუ გამოვითვლით საზღვრის ზედაპირის სრულ წარმოებულს დროის მიხედვით, მივიღებთ რომ

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\zeta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0. \quad (2.28)$$

იმ პირობიდან, რომ სითხე უწყვეტადაა საზღვრის ზედაპირთან დაკავშირებული, გამომდინარეობს, რომ მოძრაობისას, მათი სიჩქარეები ერთნაირია ანუ

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_S = \left( \frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt} \right) \Big|_S = \mathbf{v}|_S. \quad (2.29)$$

მაშინ (2.28) ტოლობიდან გამომდინარე, ცხადია რომ

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\zeta|_S = 0. \quad (2.30)$$

(2.30) კინემატიკური პირობაა. იმ შემთხვევაში, თუ საზღვრის ზედაპირი უძრავია ანუ  $\frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0$ , მაშინ  $\mathbf{v} \cdot \nabla\zeta|_S = 0$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ საზღვრის ზედაპირის მიმართ, ნორმალის მიმართულებით სითხის სიჩქარის მდგენელი უნდა იყოს ნულის ტოლი. მართლაც,  $\nabla\zeta|_S$  ვექტორს აქვს ზედაპირის ნორმალის მიმართულება ანუ

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_S = v_n|_S = 0. \quad (2.31)$$

იმ შემთხვევაში, როცა გვაქვს ამოცანა თავისუფალი საზღვრით, მაგალითად, თუ ვსწავლობთ სითხის ზედაპირზე არაწრფივი ტალღების დინამიკის ამოცანას, მაშინ დამატებით უნდა დავსვათ დინამიკური პირობა თავისუფალ უცნობ ზედაპირზე:

$$p|_S = p_{atm}. \quad (2.32)$$

ეს პირობა უზრუნველყოფს, რომ ჰაერისა და სითხის გამყოფი ზედაპირი იყოს მდგრადი (არ ჩამოიშალოს).

### 2.2.3. მექანიკური ენერჯის შენახვის კანონი არაკუმშვადი იდეალური სითხის ნაკადისათვის

განვიხილოთ, გარკვეული  $V$  მოცულობის არაკუმშვადი იდეალური სითხე, დინამიკის განტოლებებსაც ჩავწერთ სრული წარმოებულის გამოყენებით, შემდეგი ფორმით:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + f, \quad (2.33)$$

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (2.34)$$

დავუშვათ, რომ გარე მასური ძალების  $f$  ველი არის სტაციონარული და გააჩნია  $\Phi$  პოტენციალი, რომელსაც ვუწოდებთ მოძრავი სითხის ერთეულოვანი მოცულობის პოტენციალურ ენერჯიას:

$$f = -\frac{1}{\rho} \nabla \Phi. \quad (2.35)$$

განტოლება (2.35) შევიტანოთ (2.33) განტოლებაში და მიღებული განტოლება, სკალარულად გავამრავლოთ  $\rho v$  სიდიდეზე, მაშინ მივიღებთ რომ

$$\rho v \cdot \frac{dv}{dt} = -v \cdot \nabla p - v \cdot \nabla \Phi \quad (2.36)$$

ანუ თუ, ამ განტოლების მარცხენა მხარეს გარდავქმნით, მაშინ გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho |v|^2 \right) + v \cdot \nabla p + v \cdot \nabla \Phi = 0. \quad (2.37)$$

თუ, გავითვალისწინებთ რომ ნაკადი დამყარებულია ანუ  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ , მაშინ (2.37) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho |v|^2 + \Phi \right) + \frac{d}{dt} p - \frac{\partial}{\partial x} p = 0 \quad (2.38)$$

$\mu = \frac{d}{dt} p - \frac{\partial}{\partial x} p$  სიდიდეს დისიპაციის სიმკვრივეს უწოდებენ. სრული ენერჯის სიმკვრივე ავღნიშნოთ შემდეგი ფორმულით:  $\varepsilon = \frac{1}{2} \rho |v|^2 + \Phi$ . მაშინ (2.38) განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho v \cdot \nabla |v|^2 + v \cdot \nabla p + v \cdot \nabla \Phi = 0. \quad (2.39)$$

თუ, გამოვიყენებთ ვექტორული ანალიზის ცნობილ ფორმულას:  
 $\mathbf{a} \cdot \nabla \varphi = \operatorname{div}(\mathbf{a} \cdot \varphi) - \varphi \cdot \operatorname{div} \mathbf{a}$ , (2.39) ფორმულის წევრებისათვის, მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \Pi = 0, \quad (2.40)$$

სადაც  $\Pi = \mathbf{v} \cdot \left( p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \Phi \right)$  ენერგიის ნაკადის სიმკვრივის ვექტორია, რომელსაც პოინტინგის ვექტორს უწოდებენ.

ავიღოთ მოცულობითი ინტეგრალი (2.40) განტოლებიდან და გავითვალისწინოთ გაუსის თეორემა, მაშინ მივიღებთ რომ

$$\frac{d}{dt} \int_V \varepsilon dV + \int_S \Pi \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (2.41)$$

(2.41) განტოლება იძლევა სრული ენერგიის ცვლილების ინტეგრალურ კანონს. თუ სითხეს აქვს მყარი საზღვრები, მაშინ  $\Pi \cdot \mathbf{n}|_S = 0$  სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარე, გვექნება რომ

$$\frac{d}{dt} \int_U \varepsilon dU = 0. \quad (2.42)$$

მაშასადამე,

$$\int_U \varepsilon dU = \text{const}. \quad (2.43)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ სითხის მექანიკური ენერგია მუდმივია.

#### 2.2.4. ბერნულის ინტეგრალი არაკუმშვადი იდეალური სითხისათვის

ენერგიის შენახვასთან ერთად, არაკუმშვადი იდეალური სითხის დინებისას ადგილი აქვს სხვა შენახვის კანონებსაც. ერთ-ერთი ასეთი კანონია ბერნულის ინტეგრალი. ამ ინტეგრალის მისაღებად, დავუბრუნდეთ (2.38) განტოლებას და არაკუმშვად იდეალურ სითხეს დამატებით, მოვთხოვთ ნაკადის სტაციონარულობა ანუ  $\frac{\partial}{\partial x} p = 0$ , მაშინ, მივიღებთ, რომ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \Phi \right) + \frac{d}{dt} p = 0 \quad (2.44)$$

ანუ

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho |v|^2 + \Phi + p \right) = 0, \quad (2.45)$$

მივიღეთ ბერნულის შემდეგი ინტეგრალი:

$$\frac{1}{2} \rho |v|^2 + \Phi + p = \text{const}. \quad (2.46)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ სტაციონარულ, უკუმშ იდეალურ სითხეში გარე მასური ძალთა ველის პოტენციალურობა განაპირობებს, რომ ტრანექტორიის გასწვრივ, სითხის კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების წნევასთან ჯამი მუდმივი სიდიდეა.

### 2.2.5. ბერნული-კოშის ინტეგრალი არასტაციონარული, პოტენციალური, არაკუმშვადი იდეალური სითხის ნაკადისათვის

ბერნულის ინტეგრალი, შეგვიძლია განვაზოგადოთ არაკუმშვადი, იდეალური, არასტაციონარული ნაკადისათვის, თუ, მოვითხოვთ სითხის სიჩქარეთა ველის პოტენციალურობას ანუ თუ, არსებობს ისეთი სკალარული  $\varphi$  ფუნქცია (სიჩქარეთა ვექტორული ველის პოტენციალი), რომ სიჩქარეთა ველი, გამოისახებოდეს ამ სკალარული ველის გრადიენტის საშუალებით:

$$v = \nabla \varphi. \quad (2.47)$$

ეილერის (2.20) განტოლებაში  $\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho} \nabla p + f$ , შევიტანოთ სიჩქარის (2.47) გამოსახულება პოტენციალის საშუალებით, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + (\nabla \varphi \cdot \nabla) \nabla \varphi = f. \quad (2.48)$$

თუ დავუშვებთ, რომ გარე მასური ძალების ველი კონსერვატულია - გააჩნია პოტენციალი  $\Phi$ , ისე რომ  $f = -\nabla \Phi$ , მაშინ (2.48) განტოლება გადაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \Phi + \frac{p}{\rho} \right) = 0. \quad (2.49)$$

მაშინ ცხადია, რომ მივიღებთ შემდეგი სახის ინტეგრალს:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \Phi + \frac{p}{\rho} = C(t), \quad (2.50)$$

რომელსაც ბერნული-კოშის ინტეგრალს უწოდებენ. აქ  $C(t)$  დროის ნებისმიერი ფუნქციაა და რადგან პოტენციალის არჩევისას, ჩვენ შეგვიძლია პოტენციალი ვეძებოთ ნებისმიერი ადიტიური დროის ფუნქციის სიზუსტით, ყოველთვის შეგვიძლია ისე განვსაზღვროთ პოტენციალი, რომ  $C(t)$  ნებისმიერი ფუნქცია გავანულოთ!

### 2.2.6. არაკუმშვადი იდეალური სითხის პოტენციალური და გრიგალური დინება

ა) პოტენციალური დინება. ბერნული-კოშის ინტეგრალის განხილვისას, ჩვენ განვიხილეთ არაკუმშვადი, იდეალური სითხის პოტენციალური მოძრაობა. იდეალური, არაკუმშვადი სითხის მოძრაობა შეიძლება იყოს პოტენციალური ან გრიგალური.

გრიგალურია დინება, თუ მისი სიჩქარეთა ველის როტორი არაა სითხის შიგნით ყველგან ნულის ტოლი. შესაბამისად, უგრიგალოა დინება თუ, მასში ადგილი აქვს პირობას:

$$\Omega = \text{rot } v = 0. \quad (2.51)$$

ტომსონის კანონზე დაყრდნობით, ლაგრანჟმა ჩამოაყალიბა თეორემა: თუ მოძრაობის დასაწყისში, იდეალური უკუმში სითხე იყო უგრიგალო, მაშინ ის უგრიგალო იქნება დროის შემდგომ მომენტებშიც.

მათემატიკური ანალიზიდან ცნობილია, რომ (2.51) პირობა, არის აუცილებელი და საკმარისი იმისათვის, რომ ცალადბმულ არეში არსებობდეს სიჩქარეთა ველის პოტენციალი ანუ თუ, იდეალური სითხის დინება არის უგრიგალო, მაშინ ის პოტენციალურია.

უნდა აღინიშნოს, რომ წყლის ზედაპირზე არაწრფივი ტალღების გავრცელებასთან დაკავშირებული ამოცანების განხილვისას, საწყისი დროის მომენტში სითხე ან წონასწორობაშია, ან მისი ნაკადი არის ერთგვაროვანი ანუ არაწრფივი ტალღების შესწავლისას სითხე არის უგრიგალო (პოტენციალური) და პოტენციალურად რჩება ბოლომდე. ამდენად, დიდი მნიშვნელობა აქვს პოტენციალური დინების შესწავლას.

როგორც უკვე განვიხილეთ, პოტენციალური დინებისათვის, ადგილი აქვს ბერნული-კოშის ინტეგრალს. ამას გარდა, თუ (2.47)



ფორმულას შევიტანთ უკუმში სითხის (2.34) განტოლებაში, მივიღებთ რომ

$$\operatorname{div}(v) = \operatorname{div}(\nabla\varphi) = \Delta\varphi = 0. \quad (2.52)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ სიჩქარის პოტენციალი აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას ანუ ჰარმონიული ფუნქციაა.

ამრიგად, არაკუმშვადი იდეალური სითხის პოტენციალური ნაკადისათვის, გვაქვს განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\Delta\varphi = 0, \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \Phi + \frac{p}{\rho} = C(t). \quad (2.54)$$

მაშასადამე, იდეალური არაკუმშვადი სითხის სიჩქარეთა ველის საპოვნელად, უნდა ამოვხსნათ ლაპლასის განტოლება შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით და შემდეგ, ბერნული-კომის ინტეგრალიდან, (უმნიშვნელო მუდმივის სიზუსტით), ვიპოვოთ წნევათა ველის განაწილება.

იდეალური სითხის მოდელი, არ ითვალისწინებს სითხის სიბლანტეს. აქედან გამომდინარე, ის წინააღმდეგობას არ უწევს მასში მყარი სხეულების მოძრაობას; რაც იმას ნიშნავს, რომ იდეალური სითხის მათემატიკური მოდელი არ გამოდგება წყლით ან ჰაერით ხომალდების გარსდენის ამოცანების შესასწავლად, თუმცა, კარგად აღწერს წყლის ზედაპირზე ტალღების გავრცელების მოვლენებს და გარსდენის კინემატიკას(გეომეტრიას).

ბ) გრიგალური დინება. რაც შეეხება იდეალური, არაკუმშვადი სითხის გრიგალურ დინებას, ამ შემთხვევაში  $\Omega = \operatorname{rot} v \neq 0$ . თუ, ეილერის (2.33) განტოლების ორივე მხარიდან ავიღებთ როტორს, მივიღებთ რომ

$$\frac{d\operatorname{rot} v}{dt} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{rot}(\nabla p) + \operatorname{rot} f. \quad (2.55)$$

თუ, გარე მასურ ძალებს აქვთ პოტენციალი ანუ  $f = -\nabla\Phi$ , მაშინ ცხადია, რომ მივიღებთ გრიგალის მიმართ დინამიკის განტოლებას შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + (v \cdot \nabla)\Omega = 0, \quad (2.56)$$

$$\Omega = \operatorname{rot} v. \quad (2.57)$$

გვაქვს ექვსი განტოლება ექვსი უცნობით. თუ, განვსაზღვრავთ ამ განტოლებებიდან და შესაბამისი სასაზღვრო-საწყისი პირობებიდან

სიჩქარის ველს, მაშინ ეილერის (2.33) განტოლებიდან უკვე ვიპოვით წნევების განაწილებას.

### 2.2.7. არაწრფივი ტალღების გავრცელების ზოგადი ამოცანა იდეალური უკუმში სითხის ზედაპირზე

განვიხილოთ, იდეალური, უკუმში სითხის ერთეულოვანი სიმკვრივის მქონე ფენა, სიმბიმის ძალის ველში. ვთქვათ, სითხის ეს ფენა ქვევიდან შემოფარგლულია მყარი ქანებით, რომლის განტოლებაც არის:  $z = -h(x; y)$ , ხოლო ზემოდან - თავისუფალი ზედაპირით, რომლის განტოლებაც არის:  $z = \eta(x; y; t)$ . პოტენციალური დინების შემთხვევაში, როგორც უკვე განვიხილეთ, ამოცანა დაიყვანება (2.53)-(2.54) განტოლებათა სისტემაზე, რომელსაც მოცემულ შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე:

$$\Delta\varphi = 0, \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + gz + p = 0. \quad (2.59)$$

სიჩქარის პოტენციალისთვის განვიხილოთ, შესაბამისი სასაზღვრო პირობები მყარ ფსკერზე და თავისუფალ ზედაპირზე. სასაზღვრო პირობას მყარ ფსკერზე (2.31) - დან გამომდინარე, აქვს შემდეგი სახე:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_S = v_n|_{z=-h(x;y)} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{z=-h(x;y)} = 0. \quad (2.60)$$

ეს არის სუფთად კინემატიკური პირობა. მისგან განსხვავებით, თავისუფალ ზედაპირზე დაისმება როგორც კინემატიკური (2.30) სადაც თავისუფალი ზედაპირი იქნება:  $\zeta = \eta(x; y; t) - z$ , ასევე, დინამიკური ( ბერნული-კოშის ინტეგრალი) პირობა.

კინემატიკური პირობიდან გამომდინარე, გვექნება რომ

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \varphi_x\eta_x + \varphi_y\eta_y - \varphi_z|_{z=\eta(x;y;t)} = 0. \quad (2.61)$$

დინამიკურ პირობას მივიღებთ ბერნული-კოშის ინტეგრალიდან და თავისუფალ ზედაპირზე მოცემული ატმოსფერული წნევის პირობიდან. მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + g\eta(x; y; t)|_{z=\eta(x;y;t)} = -p_{atm}(x; y; t). \quad (2.62)$$

გარდა სასაზღვრო პირობებისა, აუცილებელია საწყისი პირობებიც:

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0(x; y; z), \quad \eta|_{t=0} = \eta_0(x; y). \quad (2.63)$$

ამრიგად, მივიღეთ არაწრფივი სასაზღვრო ამოცანა ლაპლასის განტოლებისათვის:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{z=-h(x;y)} = 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \varphi_x\eta_x + \varphi_y\eta_y - \varphi_z\Big|_{z=\eta(x;y;t)} = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + g\eta\Big|_{z=\eta(x;y;t)} = -p_{atm}(x; y; t) \\ \varphi|_{t=0} = \varphi_0(x; y; z), \quad \eta|_{t=0} = \eta_0(x; y) \end{array} \right. \quad (2.64)$$

### 2.2.7.1. მცირე სიღრმის წყალში, ზედაპირული ტალღების დინამიკის მათემატიკური მოდელირება

არაწრფივი ტალღების გავრცელების ზოგადი ამოცანა (2.64), საკმაოდ რთულია და დღემდე არაა ბოლომდე ამოხსნილი. ამიტომ ამ ამოცანასთან ერთად, ხშირად, იყენებენ სხვადასხვა ტიპის ასიმპტოტურ მოდელებს, რომლებიც საშუალებას იძლევა თვისობრივად მაინც შევისწავლოთ, წყლის ზედაპირზე ტალღის გავრცელების დინამიკის პროცესი. ასეთი ტიპის მოდელებია: ბუსინესკის მოდელი და კორტევეგ-დე ფრიზის მოდელი. ორივე ეს მოდელი დაკავშირებულია მცირე სიღრმის წყლის დინამიკურ მოდელთან, რომლის აგებასაც შევეცდებით ეხლა.

განვიხილოთ სითხის ფენა, რომელსაც აქვს ფსკერი  $z = 0$  და თავისუფალი ზედაპირი  $z = h_0$ . შემოვიფარგლოთ სითხის ბრტყელი მოძრაობით  $xOy$  სიბრტყის პარალელურად.

შემოვიღოთ უგანზომილებო პარამეტრები:  $\alpha = \frac{a}{h_0}$ ;  $\beta = \frac{h_0^2}{l^2}$ , სადაც  $a$  - თავისუფალ ზედაპირზე არსებული ტალღის დამახასიათებელი ამპლიტუდაა,  $l$  კი - ტალღის დამახასიათებელი სიგრძე. გადავიდეთ (2.64) ამოცანაში უგანზომილებო პარამეტრებზე შემდეგი ფორმულებით:

$$x' = \frac{x}{l}; z' = \frac{z}{h_0}; t' = \frac{t\sqrt{gh_0}}{l}; \eta' = \frac{\eta-h_0}{a}; \varphi' = \frac{\sqrt{gh_0}}{gla} \varphi \quad (2.65)$$

და შტრიხიანი უგანზომილებო სიდიდეები ჩავწეროთ შტრიხის გარეშე, ძველი აღნიშვნებით, მაშინ გვექნება შემდეგი ამოცანა:

$$\beta \varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0 \text{ if } 0 < z < 1 + \alpha\eta, \quad (2.66)$$

$$\varphi_z|_{z=0} = 0, \quad (2.67)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + \alpha\varphi_x\eta_x - \frac{1}{\beta}\varphi_z &= 0 \\ \varphi_t + \eta + \frac{1}{2}\alpha\varphi_x^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\varphi_z^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ if } z = 1 + \alpha\eta. \quad (2.68)$$

ვთქვათ, (2.66)-(2.68) ამოცანის ამონახსნი  $\varphi$  ფუნქცია შეგვიძლია გავშალოთ ხარისხოვან მწკრივად:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x; t)z^n. \quad (2.69)$$

თუ (2.69) გამოსახულებას ჩავსვამთ (2.66) და (2.67) განტოლებებში, მაშინ გვექნება, რომ

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \beta^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} f(x; t), \quad (2.70)$$

სადაც  $f(x; t) = f_0(x; t)$ .

ეხლა (2.70) ჩავსვათ (2.68) ფორმულებში თავისუფალი ზედაპირისთვის, მაშინ მივიღებთ რომ

$$\left\{ \eta_t + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \alpha\eta)f_x] - \left\{ \frac{1}{6}(1 + \alpha\eta)^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} f + \frac{1}{2}\alpha(1 + \alpha\eta)^2 \eta_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} f \right\} \beta + O(\beta^2) \right\} \quad (2.71)$$

$$\eta + f_t + \frac{1}{2}\alpha f_x^2 - \frac{1}{2}(1 + \alpha\eta)^2 \left\{ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial t} + \alpha f_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} f - \alpha f_{xx}^2 \right\} \beta + O(\beta^2). \quad (2.72)$$

ვთქვათ,  $\beta = \frac{h_0^2}{l^2} \ll 1$  ანუ სითხის ფენის სიღრმე გაცილებით მცირეა ტალღის სიგრძესთან შედარებით. მაშინ (2.71)-(2.72) განტოლებებში შეგვიძლია უგულებელვყოთ  $\beta$ -ს მიხედვით პირველი და მეორე ხარისხის წევრები, რაც მოგვცემს სისტემას:

$$\eta_t + \frac{\partial}{\partial x} (1 + \alpha\eta)f_x = 0. \quad (2.73)$$

$$\eta + f_t + \frac{1}{2}\alpha f_x^2 = 0. \quad (2.74)$$

(2.69) გაშლის ფორმულიდან ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში,  $\varphi = f(x; t)$  და მაშასადამე,  $f_x = \varphi_x = u$  სადაც  $u$  არის სითხის სიჩქარის უგანზომილებო ჰორიზონტალური კომპონენტი. თუ, გავაწარმოებთ

(2.74) განტოლებას  $x$  ცვლადით და დავუბრუნდებით განზომილებიან სიდიდეებს, მივიღებთ მცირე სიღრმის წყლის ფენის ზედაპირზე ტალღების გავრცელების მათემატიკურ მოდელს:

$$\eta_t + \frac{\partial}{\partial x} [(h_0 + \eta)u] = 0. \quad (2.75)$$

$$u_t + uu_x + g\eta_x = 0. \quad (2.76)$$

(2.75) განტოლება შეესაბამება უწყვეტობის განტოლებას ანუ მოცულობის შენახვის კანონს, ხოლო (2.76) განტოლება - იმპულსის შენახვის კანონს.

### 2.2.7.2. ბუსინესკის და კორტევეგ-დე ფრიზის განტოლებების გამოყვანა. ტალღის გავრცელება წყლის არხში

დავუბრუნდეთ (2.71)-(2.72) განტოლებათა სისტემას. თუ დავუშვებთ, რომ  $\alpha = O(\beta)$ ,  $\beta = \frac{h_0^2}{l^2} \ll 1$  და შევინარჩუნებთ  $\beta$  -ს მიხედვით მხოლოდ პირველი ხარისხის წევრებს, მაშინ მივიღებთ რომ

$$\eta_t + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \alpha\eta)u] - \frac{1}{6}\beta u_{xxx} = 0. \quad (2.77)$$

$$u_t + \alpha uu_x + \eta_x - \frac{1}{2}\beta u_{xxt} = 0. \quad (2.78)$$

(2.77)-(2.78) განტოლებებს ბუსინესკის მათემატიკურ მოდელს უწოდებენ. ის შეესაბამება მცირე ამპლიტუდის არაწრფივ ტალღებს მცირე სიღრმის წყლის ზედაპირზე.

თუ, ბუსინესკის მათემატიკურ მოდელში განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ ტალღებს, რომლებიც ვრცელდებიან მარჯვნივ, მივიღებთ კორტევეგ-დე ფრიზის განტოლებას, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{6}\beta\eta_{xxx} = 0. \quad (2.79)$$

### 2.3. კუმშვადი, იდეალური, ბაროტროპული სითხეების (გაზების) დინამიკის მოდელირება

იდეალური კუმშვადი სითხის დინამიკის მათემატიკურ მოდელს, თუ ჩავწერთ კომპონენტებში, მაში გვექნება სამი განტოლებისაგან შემდგარი დინამიკის ეილერის განტოლებები;

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_1, \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_2, \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_3. \quad (2.82)$$

გვაქვს სამი განტოლება ხუთი  $v_1$ ;  $v_2$ ;  $v_3$ ;  $p$ ;  $\rho$  უცნობით ანუ სისტემა არაა ჩაკეტილი. მისი ჩაკეტვისათვის გვჭირდება კიდევ ორი განტოლება, ერთ-ერთი დამატებითი განტოლება მიიღება მასის მუდმივობის კანონიდან და მას უწყვეტობის განტოლებას უწოდებენ კუმშვადი სითხეებისათვის (გაზებისათვის), ხოლო მეორე - მდგომარეობის განტოლებას.

უწყვეტობის განტოლება გამოსახავს მასის მუდმივობის კანონს, უწყვეტი გარემოს ნებისმიერი ინდივიდუალური მოცულობისათვის. მოძრავ გარემოში, გამოვყოთ რაიმე ინდივიდუალური  $V$  მოცულობა, რომლის შიგნით მოთავსებული  $\rho$  სიმკვრივის მასალის მასაა:

$$M = \int_V \rho dV. \quad (2.83)$$

ცხადია, რომ რადგან მოცულობის შემომსახვრელი ზედაპირის გამჭოლი მასის ნაკადი ნულის ტოლია (ინდივიდუალური მოცულობაა), მის შიგნით მოთავსებულის მასის სიდიდე არ იცვლება ანუ

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_V \rho dV \right) = 0. \quad (2.84)$$

თუ, გამოვიყენებთ მოცულობითი ინტეგრალის მატერიალური წარმოებულის ფორმულას, მაშინ გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$\int_V \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad (2.85)$$

რადგან, ეს განტოლება უნდა სრულდებოდეს უწყვეტი გარემოს ნებისმიერი ინდივიდუალური მოცულობისათვის, ცხადია რომ აუცილებელია ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ნულთან ტოლობა ანუ

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.86)$$

ამ განტოლებას, უწყვეტობის განტოლებას უწოდებენ.

თუ, გამოვიყენებთ სიმკვრივის მატერიალური წარმოებულის სრული წარმოებულის ფორმულას, მაშინ (2.86) ფორმულა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.87)$$

თუ, დივერგენციას გადავწერთ ინდექსური აღნიშვნებით, მივიღებთ უწყვეტობის განტოლებას შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho v_{k,k} = 0. \quad (2.88)$$

ცხადია, რომ ეს განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad (2.89)$$

ანუ შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.90)$$

მდგომარეობის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$p = f(\rho). \quad (2.91)$$

სითხეებს (გაზებს) რომელთათვისაც წნევა დამოკიდებულია მხოლოდ სიმკვრივეზე ბაროტროპული ეწოდება. იზოთერმული, აგრეთვე, იზოენტროპული პროცესები ბაროტროპული პროცესების მაგალითს წარმოადგენენ. ბაროტროპულია, ასევე, არაკუმშვადი სითხეც.

## 2.4. კუმშვადი სითხის (გაზის) ერთგანზომილებიანი დინამიკა (ჰიდრაულიკა)

ჰაერის ან სხვა გაზის, მაღალი სიჩქარით მოძრაობისას, გაზის სიმკვრივე დამოკიდებული იქნება მოძრაობის სიჩქარეზე. გაზის ასეთი მოძრაობის კანონებს სწავლობს გაზის დინამიკა.

ცნობილია, რომ გაზის თერმოდინამიკურ მდგომარეობას ახასიათებს სამი პარამეტრი:  $p$  წნევა;  $\rho$  სიმკვრივე და  $T$  ტემპერატურა. ამ პარამეტრებს შორის კავშირი, წნევებისა და ტემპერატურათა

საკმაოდ ფართო დიაპაზონისათვის, მოიცემა კლაპეირონის მდგომარეობის განტოლებით:

$$p = \rho RT, \quad (2.92)$$

სადაც  $R$  გაზის მუდმივაა,  $SI$  სისტემაში მისი განზომილებაა  $[R] = \frac{\text{ჯოული}}{\text{კგ} \cdot \text{გრადუსი}}$ . ცხრილი 2.1-ში მოცემულია ზოგიერთი გაზის მუდმივას მნიშვნელობა:

ცხრილი 2.1

გაზის დასახელება	$R$ მუდმივას მნიშვნელობა $SI$ სისტემაში
ჰაერი	287.14
ჟანგბადი	259.97
აზოტი	296.85
მეთანი	519.95
წყალბადი	4126.1

გაზის მდგომარეობა შეიძლება შეიცვალოს სითბური ან მექანიკური ან ორივეს ერთდროული ზემოქმედების შედეგად. სითბური ზემოქმედება ხორციელდება გაზისათვის სითბოს რაოდენობის გადაცემით ან წართმევით, ხოლო მექანიკური ზემოქმედება - ამ გაზის მიერ გარკვეული მუშაობის შესრულებით ან მასზე გარე ძალის მიერ შესრულებული მუშაობით, მაგალითად, გაზის შეკუმშვით.

ცნობილია, რომ სითბოს რაოდენობა და მექანიკური მუშაობა ერთმანეთის ეკვივალენტურია და სითბოს  $Q$  რაოდენობა (კკალ) რომელიც მიიღება  $L$  მექანიკური მუშაობით (კგ · მ) ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი ფორმულით:

$$Q = A \cdot L, \quad (2.93)$$

სადაც  $A$  მექანიკური მუშაობის სითბური ეკვივალენტია და ტექნიკურ ერთეულთა სისტემაში  $[A] = \frac{1}{427} \frac{\text{კკალ}}{\text{კგ} \cdot \text{მ}}$ , ხოლო  $\frac{1}{A} = 427 \frac{\text{კგ} \cdot \text{მ}}{\text{კკალ}}$  სიდიდე - სითბოს მექანიკური ეკვივალენტი.



ერთეულთა საერთაშორისო სისტემაში ნებისმიერი სახის მუშაობისათვის, ასევე, სითბოს რაოდენობისათვის მიღებულია საერთო ერთეული ჯოული, ამიტომ ამ სისტემაში  $A = 1$ .

სითბოს რაოდენობისა და მექანიკური მუშაობის ეკვივალენტობა, კერძო შემთხვევაა უფრო ზოგადი კანონისა, რომელსაც თერმოდინამიკის პირველ კანონს უწოდებენ.

#### 2.4.1. თერმოდინამიკის პირველი კანონი. ბგერის სიჩქარე

თერმოდინამიკის პირველი კანონი: უძრავ გაზზე გადაცემული სითბოს რაოდენობის ერთი ნაწილი იხარჯება მისი შინაგანი  $E_i$  ენერჯის გაზრდაზე (ტემპერატურის გაზრდა), ხოლო მეორე ნაწილი - მექანიკური მუშაობის შესრულებაზე ანუ

$$dQ = dE_i + dL. \quad (2.94)$$

1კგ მასის გაზის შინაგანი ენერჯის ცვლილება, შეგვიძლია გამოვსახოთ შემდეგი ფორმულით:

$$dE_i = c_v dT, \quad (2.95)$$

სადაც  $c_v$  გაზის კუთრი სითბოტევადობაა მუდმივი მოცულობის პირობებში. მაშინ (2.94) მიიღებს სახეს:

$$dQ = c_v dT + dL. \quad (2.96)$$

$dQ$  სითბოს რაოდენობის ცვლილება შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც სითბოს რაოდენობის ცვლილება მუდმივი წნევის პირობებში ანუ

$$dQ = c_p dT, \quad (2.98)$$

სადაც  $c_p$  კუთრი სითბოტევადობაა მუდმივი წნევის პირობებში, მაშინ

$$c_p dT = c_v dT + dL, \quad (2.99)$$

და მაშასადამე,

$$dL = (c_p - c_v) dT. \quad (2.100)$$

თუ გაზის გაფართოებაზე დახარჯულ მექანიკურ მუშაობას წარმოვადგენთ, როგორც წნევის ნამრავლს მოცულობის ცვლილებაზე ანუ  $dL = pdU$ , მაშინ ტერმოდინამიკის პირველი კანონი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$dQ = c_v dT + pdU. \quad (2.101)$$

ჩავწეროთ გაზის მდგომარეობის კლასპეირონის კანონი დიფერენციალური ფორმით:

$$pdU = RdT, \quad (2.102)$$

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$dQ = (R + c_v)dT = c_p dT, \quad (2.103)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$RdT = (c_p - c_v)dT. \quad (2.104)$$

ცხადია, რომ მაშინ

$$R = c_p - c_v. \quad (2.105)$$

ამ ტოლობიდან, ადვილად მივიღებთ ორ განტოლებას:

$$\begin{cases} \frac{c_p}{R} = \frac{k}{k-1}, \\ \frac{c_v}{R} = \frac{1}{k-1} \end{cases} \quad (2.106)$$

სადაც  $k = \frac{c_p}{c_v}$ .

თუ, გაზი მოძრაობს, მაშინ ენერგიის ნაწილი დაიხარჯება კინეტიკური ენერგიის ცვლილებაზე და ბალანსის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$dQ = c_v dT + dL + vdv, \quad (2.107)$$

სადაც  $vdv = d\left(\frac{v^2}{2}\right)$ . თუ, გავითვალისწინებთ (2.106) განტოლებებს, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$dQ = (R + c_v)dT + vdv = R \left(1 + \frac{c_v}{R}\right) dT + vdv = \frac{k}{k-1} R dT + vdv. \quad (2.108)$$

გაზის ერთი მდგომარეობიდან, მეორეზე გადასვლის მრავალფეროვანი პროცესები, შეგვიძლია დავყოთ რამდენიმე კლასად: ა) მუდმივი მოცულობისას მიმდინარე (იზოქორული); ბ) მუდმივი წნევის პირობებში მიმდინარე (იზობარული); გ) მუდმივი ტემპერატურის დროს მიმდინარე (იზოთერმული) და დ) გარემოსთან სითბოს გაცვლის გარეშე მიმდინარე (ადიაბატური) პროცესები.

რადგან გაზის დინამიკას, ძირითადად, საქმე აქვს სწრაფად მიმდინარე პროცესებთან, რომლის დროსაც გაზი ვერ ასწრებს გარემოსთან სითბოს გაცვლას, დიდი მნიშვნელობა აქვს ადიაბატური პროცესების შესწავლას.

ადიაბატური პროცესების დროს გაზის წნევა და სიმკვრივე დაკავშირებულია ერთმანეთთან შემდეგი განტოლებებით:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k \text{ ანუ } p = C \cdot \rho^k; \quad (2.109)$$

სადაც  $k = \frac{c_p}{c_v}$  ადიაბატის მაჩვენებელია.

$$C = \frac{p_0}{\rho_0^k}. \quad (2.110)$$

თუ გამოვიყენებთ მდგომარეობის განტოლებას, ადვილად მივიღებთ ტემპერატურების ფარდობას:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1} \quad (2.111)$$

ანუ

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}. \quad (2.112)$$

ცნობილია, რომ გაზში ბგერის გავრცელების  $a$  სიჩქარე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (2.113)$$

ადიაბატური პროცესების დროს, მივიღებთ რომ გაზში ბგერის გავრცელების სიჩქარე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{d}{d\rho} (C \cdot \rho^k)} = \sqrt{kC\rho^{k-1}} = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}. \quad (2.114)$$

თუ, განვიხილავთ იზოთერმულ პროცესს, რომლის დროსაც

$$p = C\rho, \quad (2.115)$$

მივიღებთ, რომ შესაბამისი ბგერის გავრცელების სიჩქარეა

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{C} = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

ჰაერისათვის  $T = 288^\circ$  ( $t=15^\circ\text{C}$ ) ტემპერატურაზე,  $k=1.41$ , ბგერის სიჩქარე  $a = 341\text{მ/წმ}$ -ია.

#### 2.4.2. ბერნულის ინტეგრალი იდეალური გაზის ადიაბატური მოძრაობისათვის

გაზის ერთგანზომილებიანი მოძრაობისათვის, ისევე, როგორც სითხის შემთხვევაში, ძირითადი განტოლებებია: უწყვეტობის განტოლება, მოძრაობის რაოდენობის განტოლება და ენერჯის განტოლება ანუ ბერნულის განტოლება ადიაბატური მოძრაობისას.

უწყვეტობის განტოლებას დენის მილისათვის აქვს შემდეგი სახე:

$$\rho_1 v_1 s_1 = \rho_2 v_2 s_2. \quad (2.116)$$

როგორც ვხედავთ, გაზის დენის მილისთვის უწყვეტობის (2.116) განტოლება, განსხვავდება ანალოგიური განტოლებისაგან უკუმში სითხისთვის იმით, რომ სიმკვრივის მნიშვნელობა სხვადასხვა კვეთში სხვადასხვაა (უკუმში სითხისთვის სიმკვრივეები ერთნაირია და შესაბამისად უწყვეტობის განტოლება აღარაა დამოკიდებული სიმკვრივეზე).

მოძრაობის რაოდენობის განტოლება გაზისათვის ისეთივე სახის იქნება, როგორც უკუმში სითხისათვის, მხოლოდ სხვადასხვა კვეთში გაზისათვის სიმკვრივე სხვადასხვაა ანუ მოძრაობის რაოდენობის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\rho_1 v_1 \vec{v}_1 S_1 = \rho_2 v_2 \vec{v}_2 S_2. \quad (2.117)$$

როცა სითხის სიმკვრივე არაა მუდმივი, ბერნულის ინტეგრალის სახე დამოკიდებულია სიმკვრივის დამოკიდებულებაზე ნაკადის პარამეტრებზე. მათემატიკის თვალსაზრისით, ყველაზე მარტივია ის შემთხვევა, როცა სიმკვრივე დამოკიდებულია მხოლოდ წნევაზე. ასეთ სითხეებს **ბაროტროპულს** უწოდებენ. ბაროტროპული სითხეებისათვის (გაზებისათვის) ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$\rho = \varphi(p). \quad (2.118)$$

მაშინ, სტაციონარული დინებისას, როდესაც გარე მასურ ძალებს აქვთ  $\Phi$  პოტენციალი, დენის წირის გასწვრივ გვექნება ბერნულის ინტეგრალი:

$$d\left(\frac{v^2}{2} + \Phi\right) + \frac{dp}{\varphi(p)} = 0. \quad (2.119)$$

თუ შემოვიღებთ შემდეგ აღნიშვნას წნევის ფუნქციისათვის:

$$P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\varphi(p)}, \quad (2.120)$$

მაშინ (2.119)-დან მივიღებთ, რომ

$$d\left(\frac{v^2}{2} + \Phi + P\right) = 0 \quad (2.121)$$

ანუ

$$\frac{v^2}{2} + \Phi + P = C, \quad (2.122)$$

სადაც  $C$  მუდმივი სიდიდეა.

**იზოთერმული პროცესისათვის** ( $T = const$ ,  $\frac{p}{\rho} = C = \frac{p_0}{\rho_0} \Rightarrow \rho = \frac{p \cdot \rho_0}{p_0}$ ), წნევის ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \int_{p_0}^p \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \ln \frac{p}{p_0}. \quad (2.123)$$

მაშინ ბერნულის ინტეგრალს ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \ln \frac{p}{p_0} = C. \quad (2.124)$$

იდეალური გაზის ადიაბატური მოძრაობისას  $\frac{p}{\rho} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k$ , მაშინ  $\rho = \rho_0 \cdot \frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{p^{\frac{1}{k}}}$  და წნევის ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{\rho_0} \int_{p_0}^p p^{-\frac{1}{k}} dp = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{\rho_0} \cdot \left( p^{\frac{k-1}{k}} - p_0^{\frac{k-1}{k}} \right). \quad (2.125)$$

ცხადია, რომ მაშინ წნევის ფუნქცია შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$P = \frac{k}{k-1} \cdot \left( \frac{p}{\rho_0} - \frac{p_0}{\rho_0} \right). \quad (2.126)$$

მაშასადამე, ადიაბატური გაზის დენის მილისთვის ბერნულის ინტეგრალს ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_2}{\rho_2} = C. \quad (2.127)$$

ბერნულის (2.127) ინტეგრალი ფართოდ გამოიყენება გაზის ჰიდრავლიკის ამოცანებში სხვადასხვა სახით. მაგალითად, თუ გამოვიყენებთ კლაპეირონის განტოლებას, ბერნულის განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot RT_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot RT_2 = const. \quad (2.128)$$

თუ გავიხსენებთ (2.114) ფორმულას, მაშინ (2.128) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{k-1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{k-1} = const. \quad (2.129)$$

თუ, ვისარგებლებთ სითბური ფუნქციით ანუ ენტალპიით, რომელიც მოიცემა ფორმულით:

$$i = c_p T \quad (2.130)$$

და (2.106) ფორმულებით, ენტალპია შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$i = \frac{k}{k-1} RT. \quad (2.131)$$

მაშინ, ბერნულის ინტეგრალი გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{v_1^2}{2} + c_p T_1 = \frac{v_2^2}{2} + c_p T_2 = \text{const}, \quad (2.132)$$

ან სხვანაირად,

$$\frac{v_1^2}{2} + i_1 = \frac{v_2^2}{2} + i_2 = \text{const}. \quad (2.133)$$

### 2.4.3. დამუხრუჭებული გაზის პარამეტრები. ენტროპია

წონასწორობაში მყოფი ადიაბატური გაზის პარამეტრებს დამუხრუჭებული გაზის პარამეტრებს უწოდებენ. განვსაზღვროთ დამუხრუჭებული გაზის ტემპერატურა, წნევა, სიმკვრივე, ენტალპია და ბერის სიჩქარე.

თუ (2.132) განტოლებაში უკუვაგდებთ კვეთის შესაბამის ნუმერაციას და დავუშვებთ, რომ ერთ-ერთ კვეთში გაზის სიჩქარე ნულის ტოლია, მივიღებთ რომ

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = c_p T_0, \quad (2.134)$$

მაშასადამე,

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{v^2}{2c_p T}. \quad (2.135)$$

გავამარტივოთ (2.135) ფორმულის მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრები:

$$\frac{v^2}{2c_p T} = \frac{1}{2 \frac{c_p}{kR}} \cdot \frac{v^2}{kRT} = \frac{k-1}{2} \cdot \frac{v^2}{a^2} = \frac{k-1}{2} \cdot M^2, \quad (2.136)$$

სადაც  $M = \frac{v}{a}$  მახის უგანზომილებო რიცხვია. მაშინ, დამუხრუჭებული გაზის უგანზომილებო ტემპერატურა იქნება:

$$\bar{T}_0 = \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2. \quad (2.137)$$

თუ, გამოვიყენებთ ადიაბატური გაზის (2.111),(2.112) ფორმულებს, მივიღებთ რომ

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (2.138)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2.139)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ზგერის სიჩქარე პროპორციულია კვადრატული ფესვისა აბსოლუტური ტემპერატურიდან, მივიღებთ რომ

$$\frac{a_0}{a} = \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2}. \quad (2.140)$$

რადგან ენტალპია პირდაპირპროპორციულია აბსოლუტური ტემპერატურისა, მივიღებთ რომ

$$\frac{i_0}{i} = \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} \cdot M^2. \quad (2.141)$$

გაზის დინამიკაში ფართოდ გამოიყენება გაზის მდგომარეობის დამახასიათებელი პარამეტრი - ენტროპია.

ენტროპია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი დიფერენციალური ფორმით:

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (2.142)$$

თერმოდინამიკის პირველი კანონის თანახმად, ერთეულ მასაზე მოსული სითბური ნაკადი გამოითვლება ფორმულით:

$$dQ = c_v dT - \frac{p}{\rho^2} d\rho = c_v dT - \frac{p}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{\rho}. \quad (2.143)$$

მაშინ

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{c_v dT}{T} - \frac{p}{\rho T} \cdot \frac{d\rho}{\rho}. \quad (2.144)$$

მაგრამ კლაპეირონის განტოლებიდან გვაქვს, რომ

$$\frac{p}{\rho T} = R, \quad (2.145)$$

მაშასადამე, ენტროპია იქნება

$$dS = c_v \frac{d(RT)}{RT} - R \frac{d\rho}{\rho} = c_v d\left(\ln\left(\frac{p}{\rho}\right)\right) - R d(\ln\rho) \quad (2.146)$$

ანუ

$$dS = R \left( \frac{c_v}{R} d\left(\ln\left(\frac{p}{\rho}\right)\right) - d(\ln\rho) \right). \quad (2.147)$$



თუ, გავითვალისწინებთ რომ  $\frac{c_v}{R} = \frac{1}{k-1}$ , მივიღებთ, რომ

$$dS = \frac{R}{k-1} \left[ d \left( \ln \left( \frac{p}{\rho} \right) \right) - (k-1) d(\ln \rho) \right], \quad (2.148)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$dS = \frac{R}{k-1} \cdot d \left( \ln \left( \frac{p}{\rho^k} \right) \right). \quad (2.149)$$

(2.149) განტოლების ინტეგრება იძლევა სხვაობა ენტროპიებს შორის ორ სხვადასხვა კვეთში

$$S_2 - S_1 = \frac{R}{k-1} \cdot \left( \ln \left( \frac{p_2}{\rho_2^k} \right) - \ln \left( \frac{p_1}{\rho_1^k} \right) \right). \quad (2.150)$$

თუ ადიაბატური გაზი იდეალურია, მაშინ ენტროპიის ცვლილება ნულის ტოლია. თუ ენტროპია არ იცვლება, მაშინ პროცესს **იზენტროპიულს** უწოდებენ. რეალურ პროცესებში, ადგილი აქვს დანაკარგებს, ამიტომ ენტროპია იზრდება.

#### 2.4.4. გაზის გამოსვლა საწვავი კამერიდან. მაქსიმალური და კრიტიკული სიჩქარე

განვიხილოთ საწვავი კამერიდან გაზის გამოსვლის პროცესი. ჩავთვალოთ, რომ საწვავი კამერის მოცულობა იმდენად დიდია გამომშვები საქმენის ხვრელის ზომებთან შედარებით, რომ გაზის საწვავ კამერაში მოძრაობის სიჩქარე, შეგვიძლია ჩავთვალოთ ნულის ტოლად. მაშასადამე, საწვავი კამერის შიგნით წნევას, ტემპერატურას და სიმკვრივეს ექნებათ დამუხრუჭებული გაზის პარამეტრების მნიშვნელობები ანუ  $p_0$ ,  $T_0$  და  $\rho_0$ . გაზის საქმენი ხვრელიდან გამოსვლის  $v$  სიჩქარეს ვიპოვით ბერნულის განტოლებიდან:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (2.151)$$

მაშასადამე,

$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot \left( \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right)}. \quad (2.152)$$

გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ  $\frac{p_0}{\rho_0}$  მამრავლი (2.152) ფორმულაში. ჩავთვალოთ, რომ პროცესი ადიაბატურია და იზენტროპული, მაშინ

როგორც ვიცით  $\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}}$  და შესაბამისად, საქმენიდან გაზის გამოსვლის სიჩქარის ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}. \quad (2.153)$$

საქმენიდან გაზის გამოსვლის სიჩქარე იზრდება გარეთ არსებული წნევის შემცირებასთან ერთად. მაქსიმალური იქნება სიჩქარე, თუ გაზი გამოიტყორცნება ვაკუუმში, მაშინ  $p = 0$  და გამოსვლის მაქსიმალური სიჩქარე იქნება

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot RT_0} = \sqrt{\frac{2a_0^2}{k-1}}. \quad (2.154)$$

პრაქტიკა გვიჩვენებს, რომ ზებგერითი გამოსვლის სიჩქარის მისაღებად საჭიროა გარკვეული გეომეტრიის საქმენები (რომელთა განივკვეთი ჯერ მცირდება და მერე უცებ იზრდება - ლავალის საქსენი). ბერნულის (2.129) განტოლებიდან გამომდინარე, გვექნება რომ

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{a_0^2}{k-1}. \quad (2.155)$$

ამ განტოლებიდან, ადვილად ვიპოვით ბგერის სიჩქარის დამოკიდებულებას საქმენიდან გაზის გამოსვლის სიჩქარეზე:

$$a^2 = a_0^2 - \frac{k-1}{2} \cdot v^2. \quad (2.156)$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ რაც მეტია საქმენიდან გაზის გამოსვლის სიჩქარე, მით უფრო ნაკლებია ბგერის სიჩქარე. თუ, საქმენი თანდათან ვიწროვდება და იზრდება გაზის წნევითა სხვაობა ბაკის შიგნით და გარეთ, მაშინ გაზის გამოსვლის სიჩქარეს შეუძლია მიაღწიოს ბგერის ადგილობრივ სიჩქარეს. ამის შემდეგ, რაც უნდა შევამციროთ წნევა საქმენი ხვრელის გარეთ, გამოსვლის სიჩქარე აღარ გაიზრდება. მცირე შემფითებებისათვის საწვავის ბაკი შეულწევადი გახდება.

გაზის საქმენიდან გამოსვლის სიჩქარეს, რომელიც ადგილობრივი ბგერის სიჩქარის ტოლია, კრიტიკული სიჩქარე ეწოდება და აღინიშნება  $a_*$  სიმბოლოთი. ასეთ შემთხვევაში,  $v = a = a_*$ .

თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (2.156) ფორმულაში, მივიღებთ რომ

$$a_*^2 = \frac{2a_0^2}{k+1} = \frac{2k}{k+1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{2k}{k+1} \cdot RT_0. \quad (2.157)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (2.154) ფორმულას, მაშინ მივიღებთ რომ

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1} \cdot a_*^2}. \quad (2.158)$$

ჰაერისათვის  $k = 1.4$ ;  $a_* = 18.3 \cdot \sqrt{T_0}$ .

თუ, გამოვიყენებთ ბერნულის განტოლებას

$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = const$  და ჩავსვათ შესაბამის მნიშვნელობებს  $v = a = a_*$ , მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{k-1} = \frac{k+1}{2(k-1)} \cdot a_*^2. \quad (2.159)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (2.157) ფორმულას მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{a_*}{a_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}}. \quad (2.160)$$

თუ, გავითვალისწინებთ პროცესის ადიაბატურობას, მაშინ მივიღებთ გაზის კრიტიკული პარამეტრების მნიშვნელობებს:

$$\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{k+1}; \quad \frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad \frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2.161)$$

#### 2.4.5. გაზის მოძრაობა ცვლადი განივკვეთის მილში. ლავალის საქმენი

განვიხილოთ, გაზის ერთგანზომილებიანი დინება, ცვლადი განივკვეთის მქონე მილში. მაშინ, უწყვეტობის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\rho v S = const. \quad (2.162)$$

მეორე განტოლებად განვიხილოთ ეილერის განტოლება იდეალური სითხის სტაციონარული ნაკადისათვის:

$$v \cdot \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx}. \quad (2.163)$$

გავაწარმოოთ უწყვეტობის განტოლება  $x$ -ით. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{d}{dx}(\rho v S) = \rho v \cdot \frac{dS}{dx} + \rho S \cdot \frac{dv}{dx} + v S \cdot \frac{d\rho}{dx} = 0. \quad (2.164)$$

თუ (2.164) განტოლებას გავყოფთ  $\rho v S$ -ზე, მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{1}{S} \cdot \frac{dS}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dx} = 0. \quad (2.165)$$

გაზის მოძრაობა ჩავთვალოთ იზენტროპულად და ბაროტროპულად, თუ გავითვალისწინებთ რომ მაშინ  $\frac{dp}{d\rho} = a^2$ . მივიღებთ რომ

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{d\rho}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{dp}{dx}. \quad (2.166)$$

შესაბამისად, (2.165) განტოლებიდან გვექნება, რომ

$$\frac{1}{S} \cdot \frac{dS}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho a^2} \cdot \frac{dp}{dx} = 0. \quad (2.167)$$

თუ, (2.167) განტოლებაში, ეილერის (2.163) განტოლებიდან შევიტანთ  $\frac{dp}{dx}$  წარმოებულის მნიშვნელობას, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$\left(\frac{v^2}{a^2} - 1\right) \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{v}{S} \cdot \frac{dS}{dx} \quad (2.168)$$

ანუ

$$(M^2 - 1) \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{v}{S} \cdot \frac{dS}{dx}, \quad (2.169)$$

სადაც  $M$  მახის რიცხვია.

განტოლება (2.169) აღწერს გაზის ერთგანზომილებიან მოძრაობას ცვლადი კვეთის მილში. ამ განტოლებიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვიმსჯელოთ გაზის მოძრაობის ხასიათზე, საქშენში და მის გარეთ გამოსვლის სიჩქარეზე.

განვიხილოთ, გაზის მოძრაობა როცა  $M < 1$  ანუ ბეგრამდელი დინება. მაშინ ცხადია, რომ  $M^2 - 1 < 0$ , რაც იმას ნიშნავს რომ თუ საქშენის ფორმა კონფუზორია (მილის განივკვეთი გასასვლელისკენ მცირდება)  $\frac{dS}{dx} < 0$ , მაშინ  $\frac{dv}{dx} > 0$  ანუ ხდება ნაკადის სიჩქარის გაზრდა, ხოლო თუ საქშენის გეომეტრიული ფორმა კონფუზორია (მილის განივკვეთი გასასვლელისაკენ იზრდება)  $\frac{dS}{dx} > 0$ , მაშინ  $\frac{dv}{dx} < 0$  ანუ ხდება ნაკადის სიჩქარის შემცირება. ანალოგიური მსჯელობა

შეგვიძლია ჩავატაროთ ზებგერთი მოძრაობის შემთხვევაშიც ანუ როცა  $M > 1$  ცხრილი 2.2.

ცხრილი 2.2

მახის $M$ რიცხვი	სიჩქარის წარმოებული	კვეთის ცვლილება საქმენისკენ	
$M < 1$	$\frac{dv}{dx} > 0$	$\frac{dS}{dx} < 0$	კონფუზორი
	$\frac{dv}{dx} < 0$	$\frac{dS}{dx} > 0$	დიფუზორი
$M > 1$	$\frac{dv}{dx} > 0$	$\frac{dS}{dx} > 0$	დიფუზორი
	$\frac{dv}{dx} < 0$	$\frac{dS}{dx} < 0$	კონფუზორი

(2.169) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ცვლადი განივკვეთის მილში მოძრავი იდეალური გაზისათვის, ისეთი დინების მიღება, რომელიც ბგერის სიჩქარით მოძრაობს ( $M = 1$ ), შესაძლებელია მხოლოდ მინიმალურ განივკვეთში. მაქსიმალურ განივკვეთში, თუმცა, მისი განივკვეთიც ექსტრემალურია, შეუძლებელია ბგერის სიჩქარის მიღება, რადგან მას წინ უძღვის მილის გაფართოებადი ნაწილი, რომელშიდაც ბგერამდელი სიჩქარით მოძრაობისას, სიჩქარე კლებულობს, ხოლო ზებგერთი მოძრაობისას სიჩქარე იზრდება.

## 2.5. იდეალური გაზის ბრტყელი, პოტენციალური მოძრაობის მათემატიკური მოდელი

თუ, წონასწორობაში მყოფ გაზში (ჰაერში) გვაქვს მცირე შეშფოთებების წყარო, მაშინ შეშფოთებები წყაროსაგან ყველა მიმართულებით ვრცელდება ბგერის სიჩქარით. თუ შეშფოთებები ვრცელდება პერიოდულად, მაშინ დროის გარკვეული შუალედის შემდეგ, მთელი სივრცე შევსებული იქნება სფერული ტალღებით.

თუ, ასეთი შეშფოთებები ვრცელდება მოძრავ გაზში, მაშინ შეშფოთებათა გავრცელების არეალი დამოკიდებული იქნება გაზის მოძრაობის სიჩქარის სიდიდეზე ბგერის სიჩქარესთან შედარებით. თუ,

გაზის სიჩქარე: ა) ნაკლებია ბგერის სიჩქარეზე, მაშინ შეშფოთებები ვრცელდება ყველა მიმართულებით, როგორც გაზის მოძრაობის, ასევე, მისი საწინააღმდეგო მიმართულებით; ბ) თუ, გაზის მოძრაობის სიჩქარე მეტია ან ტოლი ბგერის სიჩქარის, მაშინ შეშფოთებები ვერ გავრცელდება გაზის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით; გ) თუ, გაზის სიჩქარე ტოლია ბგერის სიჩქარის, მაშინ დროის გარკვეული შუალედის შემდეგ, წარმოიქმნება გაზის მოძრაობის სიჩქარის ნორმალის გასწვრივ მიმართული გარკვეული ზედაპირი, რომლის იქითაც შეშფოთებები ვერ გავრცელდება და მათი გავრცელება მოხდება მხოლოდ გაზის მოძრაობის მიმართულებით; დ) თუ, გაზის მოძრაობს ზებგერითი სიჩქარით, მაშინ შეშფოთებები გავრცელდება გარკვეული კონუსური ზედაპირის შიგნით, რომელსაც შეშფოთებათა კონუსს უწოდებენ. ამ კონუსის გაშლის  $2\alpha$  კუთხის სიდიდე გამოითვლება შემდეგი ფორმულიდან:

$$\sin \alpha = \frac{a}{v} = \frac{1}{M}. \quad (2.170)$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარე, ცხადია რომ სხეულთა გარსდენისას ზებგერითი სიჩქარით, რაც მეტია გარსმდენი გაზის მახის  $M$  რიცხვი, მით ნაკლების შეშფოთებათა კონუსის გაშლის კუთხე.

ვაჩვენოთ, რომ ბაროტროპული გაზის ბგერამდელი და ზებგერითი მოძრაობის განტოლებები, მათემატიკის თვალსაზრისით, სხვადასხვა ტიპს მიეკუთვნება.

განვიხილოთ, კუმშვადი გაზის მოძრაობის უწყვეტობის განტოლება:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = \rho \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0. \quad (2.171)$$

ბაროტროპული გაზის სიმკვრივე უშუალოდაა დამოკიდებული წნევაზე, აქედან გამომდინარე გვექნება, რომ

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (2.172)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2.173)$$

წნევის წარმოებულები შეგვიძლია განვსაზღვროთ იდეალური გაზის ეილერის განტოლებებიდან:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \cdot \left( u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (2.174)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho \cdot \left( u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (2.175)$$

მაშინ, მივიღებთ რომ

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{a^2} \cdot \left( u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (2.176)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{\rho}{a^2} \cdot \left( u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (2.177)$$

მაშინ, უწყვეტობის (2.171) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{u}{a^2} \cdot \left[ -\rho \cdot \left( u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{v}{a^2} \cdot \left[ -\rho \cdot \left( u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = 0. \quad (2.178)$$

განტოლება (2.178) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{a^2} \cdot \left( u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + v^2 \frac{\partial v}{\partial y} + uv \frac{\partial u}{\partial y} + uv \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.179)$$

თუ, დინება პოტენციალურია მაშინ გვექნება, რომ

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (2.180)$$

მაშინ ცხადია, რომ გაზის ორგანზომილებიანი, იდეალური, ბაროტროპული, პოტენციალური დინებისათვის გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \left( u^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2uv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (2.181)$$

ამ განტოლების გარდაქმნით, მივიღებთ რომ

$$\left( 1 - \frac{u^2}{a^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left( 1 - \frac{v^2}{a^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{uv}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.182)$$

ვთქვათ, გაზი მოძრაობს  $x$  ღერძის გასწვრივ. მაშინ გარსდენადი სხეულის მიერ გაზში შეტანილი შეშფოთები შეგვიძლია აღვწეროთ შემდეგნაირად:

$$u = u_\infty + u'; \quad v = v'; \quad p = p_\infty + p'; \quad \rho = \rho_\infty + \rho'; \quad \varphi = u_\infty x + \varphi'; \quad (2.183)$$

სადაც  $u_\infty$ ;  $p_\infty$ ;  $\rho_\infty$  გაზის პარამეტრებია შეშფოთებამდე, ხოლო  $u'$ ;  $v'$ ;  $p'$ ;  $\rho'$  პარამეტრების შეშფოთებებია, გარსდენადი სხეულის შეტანის გამო.

შევიტანოთ (2.183) შემფოთებული ცვლადების მნიშვნელობები (2.182) განტოლებაში. შემფოთებები და მათი წარმოებულები, ჩავთვალოთ მცირე სიდიდეებად და უგულებელვყოთ შემფოთების მიმართ კვადრატული წევრები, როგორც უფრო მცირე სიდიდეები. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} = 0; \quad (2.184)$$

ან

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{1}{1 - M_\infty^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} = 0. \quad (2.185)$$

სადაც  $M_\infty = \frac{u_\infty}{a}$  მახის რიცხვია შეუშფოთებელი ნაკადისათვის. (2.185) განტოლება არის წრფივი, მეორე რიგის კერძოწარმოებულნიანი დიფერენციალური განტოლება მუდმივი კოეფიციენტებით.

ამ სახით (2.185) განტოლება, გამოიყენება ბერამდელი დინებების შესწავლისას ( $M_\infty < 1$ ). ასეთ შემთხვევაში, (2.185) განტოლება მიეკუთვნება ელიფსურ განტოლებათა რიგს და ის ადვილად დაიყვანება ლაპლასის განტოლებაზე.

რაც შეეხება გაზის ზებგერით მოძრაობას ( $M_\infty > 1$ ), (2.185) განტოლება ხელსაყრელია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} - \frac{1}{M_\infty^2 - 1} \cdot \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} = 0. \quad (2.186)$$

(2.186) განტოლება ჰიპერბოლური ტიპისაა და მას ამონახსნები აქვს, მხოლოდ შემფოთებათა კონუსის შიგნით.



### III თავი. ბლანტი სითხის დინამიკის ნავიე-სტოქსის მათემატიკური მოდელი და მისი გამოყენების საზღვრები

რეალური სითხეები არ არიან იდეალური, რადგან მათთვის დამახასიათებელია სიბლანტის თვისება, რაც განპირობებულია მოძრავი სითხის ფენებს შორის არსებული შიგა ხახუნის ძალებით. აქედან გამომდინარე, ბლანტი სითხეებისათვის დამახასიათებელია ენერჯის დისიპაცია.

ბლანტი სითხის დინამიკის მოდელირებისათვის, აუცილებელია იდეალური სითხის მათემატიკურ მოდელში შევიტანოთ დამატებითი წევრები. რაც შეეხება უწყვეტობის განტოლებას, მისი გამოყვანის წესიდან გამომდინარე, ის ძალაშია ბლანტი სითხეებისათვისაც.

მამასადამე, ბლანტი სითხეებისათვის, იდეალური სითხისაგან განსხვავებით, გვაქვს მხები ძაბვების ტენზორიც და შესაბამის რეოლოგიურ (1.91) განტოლებაში უნდა ჩავწეროთ მხები ძაბვების ტენზორი, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$\tau_{ij} = \mu \cdot \left[ (v_{i,j} + v_{j,i}) - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot v_{k,k} \right]. \quad (3.1)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ბლანტი სითხისათვის ძაბვის ტენზორს აქვს შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \cdot \left[ (v_{i,j} + v_{j,i}) - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot v_{k,k} \right]. \quad (3.2)$$

თუ, კოშის დინამიკის  $\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i$  განტოლებაში, შევიტანთ ძაბვის ტენზორის კომპონენტების (3.2) გამოსახულებას, მივიღებთ ბლანტის სითხის დინამიკის ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემას:

$$-p_{,j}\delta_{ij} + \mu \cdot \left[ (v_{i,jj} + v_{j,ij}) - \frac{2}{3} \cdot \delta_{ij} \cdot v_{k,kj} \right] + \rho b_i = \rho \dot{v}_i. \quad (3.3)$$

ანუ

$$-p_{,i} + \mu \cdot \left[ (v_{i,jj} + v_{j,ij}) - \frac{2}{3} \cdot v_{k,ki} \right] + \rho b_i = \rho \dot{v}_i. \quad (3.4)$$

ნავიე-სტოქსის (3.4) განტოლებათა სისტემა აღწერს ბლანტი სითხის დინამიკას ზოგად შემთხვევაში (გაზის შემთხვევაშიც).

თუ, საქმე გვაქვს ბლანტ, არაკუმშვად სითხესთან (წყალი), მაშინ არაკუმშვადობის  $v_{k,k} = 0$  პირობიდან გამომდინარე, ბლანტი სითხის

დინამიკის ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემას ექნება შემდეგი სახე:

$$-p_{,i} + \mu \cdot (v_{i,jj} + v_{j,ij}) + \rho b_i = \rho \dot{v}_i. \quad (3.5)$$

(3.3) - (3.5) ფორმულებში  $\dot{v}_i$  აღნიშნავს სიჩქარის ვექტორის მატერიალურ წარმოებულს ანუ

$$\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \cdot v_{i,j}. \quad (3.6)$$

ნავიე-სტოქსის დინამიკურ განტოლებებთან ერთად, განიხილავენ უწყვეტობის (3.7) და ენერჯის (3.8) განტოლებას:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0. \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial t} - \rho f_i v_i + (E_t v_i + \rho v_i - v_j \tau_{ij} + q_i)_{,i} = 0. \quad (3.8)$$

სადაც  $E_t = \rho \left( e + \frac{v^2}{2} + \text{პოტენციური ენერჯია} \right)$  ერთეული მოცულობის სითხის სრული ენერჯიაა,  $e$  ერთეული მოცულობის შინაგანი ენერჯიაა,  $q_i$  სითხური ნაკადია. როგორც ვხედავთ, ენერჯის განტოლებაზე არაა დამოკიდებული ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემა.

ამრიგად, თუ გვინდა შევისწავლოთ ბლანტი, არაკუმშვად სითხეში ტემპერატურის განაწილება, ჯერ უნდა ვიპოვოთ სიჩქარეთა ველი ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემიდან, ხოლო შემდეგ, სიჩქარეთა ველის განაწილებიდან გამომდინარე, ვიპოვოთ ტემპერატურის განაწილება ენერჯის განტოლების საშუალებით.

### 3.1. ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემის ვექტორული ჩაწერა დეკარტის ცვლადებში

ბლანტი სითხის დინამიკის განტოლებათა სისტემის რიცხვითი რეალიზაციისას, ხშირად, პრაქტიკული თვალსაზრისით ხელსაყრელია სასრულ სხვაობათა სქემის შედგენამდე, განტოლებათა სისტემის გადაწერა ვექტორული ფორმით. მაგალითად, კუმშვადი, ბლანტი გაზის დინამიკის შესწავლის დროს, როცა არ გვაქვს მასური ძალები და სითხოს გარედან ნაკადი, ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემას დეკარტულ კოორდინატებში ჩაწერენ შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad (3.9)$$

სადაც  $U, E, F, G$  ვექტორები მოიცემა შემდეგი მატრიცებით:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ (E_t + p)u - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} + q_x \end{pmatrix}; \quad (3.10)$$

$$F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ (E_t + p)v - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} + q_y \end{pmatrix}; \quad (3.11)$$

$$G = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ (E_t + p)w - u\tau_{xz} - v\tau_{yz} - w\tau_{zz} + q_z \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

(3.9) განტოლების პირველი სტრიქონი შეესაბამება უწყვეტობის განტოლებას; მეორე, მესამე და მეოთხე სტრიქონები - ნავიე-სტოქსის დინამიკის განტოლებებს, ხოლო მეხუთე - ენერჯიის განტოლებას.

### 3.2. ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემა ბლანტი უკუმში სითხისათვის. მსგავსების კოეფიციენტები და უგანზომილებო ცვლადებზე გადასვლა

სამყაროში მიმდინარე პროცესების შესწავლისას, ფართოდ გამოიყენება მოდელირების მეთოდი. მოდელირების არსი მდგომარეობს იმაში, რომ ლაბორატორიაში ფიზიკურ მოდელებზე ჩატარებული ექსპერიმენტების შედეგები, გადავითანოთ რეალურ ობიექტებზე ნატურალური ზომებით.

ცხადია რომ მცირე ზომის მოდელებზე უფრო მარტივია ექსპერიმენტების ჩატარება, ვიდრე რეალური ზომის ობიექტებზე. სხვადასხვა ფიზიკური პროცესების მოდელირება ემყარება განხილული პროცესების მსგავსებას.

**განსაზღვრება.** ორ მოვლენას ეწოდება **მსგავსი**, თუ ერთ-ერთი მათგანის მახასიათებლებიდან, შეგვიძლია უბრალო გადათვლით, მივიღოთ მეორეს - მახასიათებლები.

**განსაზღვრება.** **მსგავსების კრიტერიუმი** ეწოდებათ იმ უგანზომილებო სიდიდეების ერთობლიობას, რომელთა ტოლობაც განაპირობებს ორი მოვლენის მსგავსებას.

როდესაც გვაქვს პროცესის აღმწერი განტოლებების სისტემა, მსგავსების კრიტერიუმის პოვნა შედარებით მარტივია: ამ შემთხვევაში განტოლებათა სისტემა უნდა გადავწეროთ უგანზომილებო ცვლადებში და მიღებული უგანზომილებო კოეფიციენტების ერთობლიობა იქნება მსგავსების კრიტერიუმი.

თუ, არ გვაქვს პროცესის მათემატიკური მოდელი, მაშინ მსგავსების კრიტერიუმის დასადგენად, უნდა ავირჩიოთ პროცესის განმსაზღვრელი პარამეტრების ერთობლიობა და ვისარგებლოთ განზომილებათა თეორიით. დიდია ამ შემთხვევაში, ბუკინგემის  $\pi$ -თეორემის მნიშვნელობა.

როდესაც გვაქვს პროცესის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი, მსგავსების კრიტერიუმის დადგენა მარტივია. მაგალითისთვის, განვიხილოთ **ბლანტი, უკუმში სითხის ორგანზომილებიანი დინება**. შესაბამის მათემატიკურ მოდელს დეკარტის კოორდინატებში აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + b_x + \nu \Delta u; \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + b_y + \nu \Delta v; \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.15)$$

(3.13)-(3.15) განტოლებათა სისტემა გადავიყვანოთ უგანზომილებო ცვლადებზე შემდეგი ფორმულებით:

$$x = l_0 x'; \quad y = l_0 y'; \quad p = \rho V_0^2 p'; \quad t = t_0 t'; \quad u = V_0 u'; \quad v = V_0 v'; \\ b_x = g b'_x; \quad b_y = g b'_y. \quad (3.16)$$

(3.16) ფორმულებში  $l_0$  ამოცანის დამახასიათებელი სიგრძეა,  $V_0$  დამახასიათებელი სიჩქარე,  $t_0$  დამახასიათებელი დროის მონაკვეთი, შტრიხიანი ცვლადები კი უგანზომილებო სიდიდეებია.

ცხადია, რომ თუ გადავალთ უგანზომილებო შტრიხიან ცვლადებზე, მაშინ მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{V_0}{t_0} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{V_0^2}{l_0} \cdot \left( u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = - \frac{\rho V_0^2}{\rho l_0} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x'} + g b'_x + \frac{v V_0}{l_0^2} \cdot \Delta u'; \quad (3.17)$$

$$\frac{V_0}{t_0} \frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{V_0^2}{l_0} \cdot \left( u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = - \frac{\rho V_0^2}{\rho l_0} \cdot \frac{\partial p'}{\partial y'} + g b'_y + \frac{v V_0}{l_0^2} \cdot \Delta v'; \quad (3.18)$$

$$\frac{V_0}{l_0} \cdot \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = 0. \quad (3.19)$$

(3.17) და (3.18) განტოლებები გავამრავლოთ  $\frac{l_0}{V_0^2}$  -ზე. მაშინ მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას უგანზომილებო ცვლადებში:

$$\frac{l_0}{t_0 V_0} \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{g l_0}{V_0^2} b'_x + \frac{v}{l_0 V_0} \cdot \Delta u'; \quad (3.20)$$

$$\frac{l_0}{t_0 V_0} \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = - \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{g l_0}{V_0^2} b'_y + \frac{v}{l_0 V_0} \cdot \Delta v'; \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0. \quad (3.22)$$

(3.20) და (3.21) განტოლებების უგანზომილებო კოეფიციენტებია:

$$\frac{l_0}{t_0 V_0} = St \text{ სტრუხალის რიცხვი;}$$

$$\frac{g l_0}{V_0^2} = \frac{1}{Fr^2}, \text{ სადაც } Fr \text{ ფრუდის რიცხვია;}$$

$$\frac{v}{l_0 V_0} = \frac{1}{Re}, \text{ სადაც } Re \text{ რეინოლდსის რიცხვია.}$$

ამრიგად, ჩვენს მიერ განხილული ამოცანისათვის მსგავსების კრიტერიუმია ამ სამი რიცხვის ერთობლიობა. თუ, ექსპერიმენტულ მცირე ზომის მოდელზე ჩატარებული ექსპერიმენტის შედეგებს, შევადარებთ შესაბამის, რეალური ზომების ობიექტთან დაკავშირებულ პროცესებს, ისინი იდენტურნი იქნებიან, თუ, მათთვის ერთნაირია რეინოლდსის, სტრუხალის და ფრუდის რიცხვები.

თუ, შევიტანთ უგანზომილებო კოეფიციენტებს და უგანზომილებო შტრიხიან ცვლადებს მოვაცილებთ შტრიხებს, მივიღებთ უგანზომილებო განტოლებათა სისტემას შემდეგი სახით:

$$St \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Fr^2} \cdot b_x + \frac{1}{Re} \cdot \Delta u; \quad (3.23)$$

$$St \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Fr^2} \cdot b_y + \frac{1}{Re} \cdot \Delta v; \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.25)$$

უგანზომილებო სახეზე ჩაწერა მიზანშეწონილია აგრეთვე, რიცხვითი ამონახსნების ძიებისთვისაც, რადგან სითხის მახასიათებელი პარამეტრები ერთმანეთისგან, ზოგჯერ, რამდენიმე რიგით განსხვავდება და მახასიათებელი მასშტაბის არჩევა, საშუალებას გვაძლევს ავიცილოთ ეს პრობლემაც.

### 3.2.1. ერთგვაროვანი ბლანტი სითხის ორგანზომილებიანი დინების აღწერა $\psi - \omega$ ცვლადებში

განვიხილოთ ბლანტი, ერთგვაროვანი, უკუმში სითხის დინამიკის განტოლებათა სისტემა (3.23)-(3.25). შემოვიღოთ დენის  $\psi$  ფუნქცია შემდეგი ფორმულებით:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.26)$$

მაშინ, შვარცის თეორემის თანახმად, განტოლება (3.25) ავტომატურად დაკმაყოფილდება. გრიგალის  $\omega$  ფუნქციას ორგანზომილებიანი დინებისათვის აქვს შემდეგი სახე:

$$\omega_z = \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.27)$$

თუ, (3.27) ფორმულაში შევიტანთ სიჩქარის კომპონენტების გამოსახულებას დენის ფუნქციის საშუალებით (3.26), მაშინ მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega. \quad (3.28)$$

(3.24) განტოლება გავაწარმოოთ  $x$ -ით და მას გამოვაკლოთ (3.23) განტოლება გაწარმოებული  $y$ -ით, მაშინ (3.27) ფორმულის გათვალისწინებით, მივიღებთ რომ

$$St \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \quad (3.29)$$

ამრიგად, მივიღეთ ჩაკეტილი განტოლებათა სისტემა (3.28)-(3.29) ახალი  $\psi - \omega$  ცვლადების მიმართ.

თუ, გვაქვს დამყარებული ერთგვაროვანი ნაკადი  $V_\infty$  სიჩქარით და ხდება სხეულის გარსდენა  $\partial G$  საზღვრით, მაშინ ამოცანის დასმისათვის, საჭიროა შემდეგი სასაზღვრო და საწყისი პირობები:

$$\psi|_{\partial G} = 0; \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{\partial G} = 0; \quad \lim_{(x;y) \rightarrow \infty} \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow V_\infty. \quad (3.30)$$

### 3.3. ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემის ზუსტი ამონახსნები

ტრადიციულად, ზუსტ ამონახსნებს უწოდებენ ისეთ ამონახსნებს, რომლებიც გამოისახებიან კონკრეტული დასრულებული სახით. ასეთი ამონახსნების რაოდენობა მეტად მცირეა. ჩვენ ზუსტ ამონახსნებს ვუწოდებთ აგრეთვე, ისეთ ამონახსნებს, რომლებიც დაიყვანება ისეთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებზე, რომლებიც კომპიუტერზე იხსნება ნებისმიერი სიზუსტით. ზუსტი ამონახსნები მიიღება, როცა ამოცანას ახასიათებს გარკვეული სიმეტრია, რაც საშუალებას იძლევა გავამარტივოთ ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემა.

#### 3.3.1. ლამინარული (ფენოვანი) დინება

განვიხილოთ, ნავიე-სტოქსის ორგანზომილებიან განტოლებათა სისტემა უკუმში სითხისათვის:

$$St \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Fr^2} \cdot b_x + \frac{1}{Re} \cdot \Delta u; \quad (3.31)$$

$$St \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Fr^2} \cdot b_y + \frac{1}{Re} \cdot \Delta v; \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.33)$$

ფენოვანი დინებისას, სიჩქარეს აქვს მხოლოდ ერთი არანულოვანი  $u$  კომპონენტი და ის, (3.33) განტოლებიდან გამომდინარე, არ იცვლება დინების მიმართულების კოორდინატის მიხედვით ( $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , რადგან  $v = 0$ ). მაშინ, თუ უგულებელვყოფთ მასურ ძალებს, განტოლებათა სისტემა დაიყვანება ერთ განტოლებაზე:

$$St \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.34)$$

ამ განტოლებაში, წნევის გრადიენტი უნდა ჩავთვალოთ დროის რაღაც ცნობილ ფუნქციად. ის შეიძლება იყოს მუდმივი ან ნული.

ა) განვიხილოთ შემთხვევა, როცა  $p = const$  მუდმივია, მაშინ (3.34) განტოლება მიიღებს დიფუზიის განტოლების სახეს:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{St \cdot Re} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.35)$$

თუ, გავიხსენებთ გრიგალის (3.27) განმარტებას, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ამ შემთხვევაში  $\omega = -\frac{\partial u}{\partial y}$  გრიგალიც აკმაყოფილებს (3.35) დიფუზიის განტოლებას. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ მუდმივი წნევის პირობებში, ერთგანზომილებიანი მოძრაობისას, ადგილი აქვს გრიგალის დიფუზიას.

დიფუზიის განტოლების კერძო ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$u(y; t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{St \cdot Re}{4t} y^2}. \quad (3.36)$$

(3.36) ფუნქციის ჩასმით (3.35) განტოლებაში, შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ (3.36) აკმაყოფილებს გრიგალური ფენის დიფუზიის (3.35) განტოლებას.

თუ, ვისარგებლებთ იმ ფაქტით, რომ (3.35) განტოლება წრფივია, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (3.37) ფუნქციაც ამონახსნია.

$$u(y; t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{St \cdot Re}{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{St \cdot Re}{4t} (y-\alpha)^2} F(\alpha) d\alpha. \quad (3.37)$$

ეს ამონახსნი აკმაყოფილებს საწყის პირობას:

$$u(y; 0) = F(y). \quad (3.38)$$

მართლაც, მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა:

$$\alpha = y + 2\zeta \sqrt{\frac{t}{St \cdot Re}}; \quad (3.39)$$

მაშინ (3.37) გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$u(y; t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} F\left(y + 2\zeta \sqrt{\frac{t}{St \cdot Re}}\right) d\zeta. \quad (3.40)$$

თუ, ამ ტოლობაში დავუშვებთ რომ  $t = 0$  და გავითვალისწინებთ ცნობილ ფორმულას:



$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \sqrt{\pi}; \quad (3.41)$$

მივიღებთ, რომ

$$u(y; 0) = \frac{F(y)}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = F(y). \quad (3.42)$$

განვიხილოთ, ზოგიერთი კონკრეტული ამოცანა (3.40) ფორმულის გამოყენებით.

### 3.3.2. ნაკადის ტანგენციალური წყვეტა

ვთქვათ, სითხე ავსებს მთელ სივრცეს და დროის საწყის  $t = 0$  მომენტში მოცემულია სიჩქარეთა განაწილება, რომელიც შეესაბამება ტანგენციალურ წყვეტას (გრიგალურ ფენას), როცა  $y = 0$ .

$$u(y; 0) = \begin{cases} u_0 = \text{const}, & \text{if } y > 0 \\ -u_0, & \text{if } y < 0 \end{cases}. \quad (3.43)$$

ვიპოვოთ, (3.35) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (3.43) საწყის პირობას და შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} u \rightarrow \pm u_0. \quad (3.44)$$

თუ, (3.40) განტოლებაში შევიტანთ სიჩქარეთა ველის საწყის განაწილებას, მივიღებთ რომ

$$u(y; t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{-\zeta^2} d\zeta + \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\varepsilon}^{+\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta, \quad (3.45)$$

სადაც  $\varepsilon = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{St \cdot Re}{t}}$ . თუ გავითვალისწინებთ (3.45) ფორმულაში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის სიმეტრიულობას, მივიღებთ რომ

$$u(y; t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\zeta^2} d\zeta = u_0 \cdot \Phi(\varepsilon). \quad (3.46)$$

სადაც  $\Phi(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\varepsilon} e^{-\zeta^2} d\zeta$  კრამპის ფუნქციაა.  $\Phi(\infty) = 1$  და  $\Phi(0) = 0$  ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ  $u(y; t)$  უწყვეტი ფუნქციაა და საწყისი ტანგენციალური წყვეტა, დროის მცირე შუალედში, უწყვეტ დინებად გარდაიქმნება.

### 3.3.3. სითხის მოძრაობა მყარი საზღვრის ზედაპირის მოძრაობისას

განვიხილოთ, ბლანტი უკუმში სითხის  $y = 0$  ბრტყელი საზღვრის მოძრაობით გამოწვეული მოძრაობა, როცა საზღვარი მოძრაობს საკუთარ სიბრტყეში  $V(t)$  სიჩქარით. ცხადია, რომ მოძრაობის სიმეტრიულობიდან გამომდინარე,  $u(y, t); v = 0; w = 0$ . შეგვიძლია შემოვიფარგლოთ  $y > 0$  პირობით. სიჩქარეთა ველი აკმაყოფილებს (3.35) განტოლებას და შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\begin{cases} u(0; t)|_{t>0} = V(t) \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

ამის გარდა, ვიგულისხმობთ რომ საზღვრის მოძრაობის საწყისი სიჩქარეა  $V_0$ , მაშინ ჩვენი ამოცანის ამონახსნი, წინა ამოცანის ამონახსნიდან გამომდინარე, იქნება შემდეგი ფუნქცია:

$$u(y; t) = V_0 \cdot \left( 1 - \Phi \left( \frac{y}{2} \sqrt{\frac{St \cdot Re}{t}} \right) \right) \quad (3.48)$$

ამ ამონახსნიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი  $y$ -თვის  $u(y; t)$  ამონახსნი მიისწრაფის  $V_0$  მნიშვნელობისაკენ, რაც იმას ნიშნავს რომ მოძრავი საზღვარი თან წარიტაცებს მთელ სითხეს.

### 3.3.4. გრძივი წნევათა გრადიენტით გამოწვეული სითხის მოძრაობა. ჰაგენ-პუაზეილის და ვალანდერის ამონახსნი

განვიხილოთ, გრძივი წნევათა არანულოვანი გრადიენტი  $\frac{dp}{dx} \neq 0$ . ამ შემთხვევაში, ლამინარულ (ფენოვან) მოძრაობას შეესაბამება შემდეგი პირობები:

$$\frac{dp}{dx} = -p_1(t); \quad u = u(y; z; t); \quad v = 0; \quad w = 0. \quad (3.49)$$

ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემა დაიყვანება ერთ პუასონის განტოლებაზე:

$$\frac{1}{Re} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -p_1(t). \quad (3.50)$$

განვიხილოთ დინება მილში, რომლის შიგა ნაწილია  $G$ , ხოლო განივკვეთის საზღვარია  $\partial G$ ; ვთქვათ, წნევათა გრადიენტი მუდმივი სიდიდეა ანუ  $p_1(t) = const$ . მაშინ, გვექნება სითხის მიკვრის სასაზღვრო პირობა:

$$u|_{\partial G} = 0. \quad (3.51)$$

მოძრაობის გამომწვევია წნევათა გრადიენტი  $\frac{dp}{dx} = -p_1$ . კერძო შემთხვევაში, როცა განივკვეთი წარმოადგენს წრეს ჰაგენ-პუაზეილის დინებას უწოდებენ. ჩვენ განვიხილავთ, უფრო ზოგად, ვალანდერის ამოცანას - მოძრაობას ელიფსური განივკვეთის მილში.

ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$u(y; z) = A \cdot \left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right); \quad (3.52)$$

სადაც ნებისმიერი მუდმივი  $A$  რიცხვი განისაზღვრება (3.50) განტოლებიდან და (3.51) სასაზღვრო პირობიდან. მივიღებთ, რომ

$$A = -\frac{\Delta p \cdot Re}{2L} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \quad (3.53)$$

ცხადია, რომ  $\max u(y; z) = A$ .

დროის ერთეულში, სითხის განივკვეთში გამავალი სითხის ხარჯი იქნება:

$$Q = \iint_G u \, dy \, dz = -\frac{\Delta p \cdot Re}{2L} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a \left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right) \, dy \, dz. \quad (3.54)$$

ადვილი საპოვნელია, რომ

$$Q = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{\Delta p \cdot Re}{L}. \quad (3.55)$$

ცხადია, რომ ხარჯის მაქსიმუმი მიიღწევა, როცა გვაქვს წრიული განივკვეთი, ანუ როცა  $a = b$ . მაშინ, მივიღებთ რომ

$$u(y; z) = -\frac{\Delta p \cdot Re}{4L} \cdot a^2 \cdot \left(1 - \frac{y^2 + z^2}{a^2}\right). \quad (3.56)$$

$$Q = -\frac{\pi}{8} \cdot a^2 \cdot \frac{\Delta p \cdot Re}{L}. \quad (3.57)$$

დინებას წრიულ მილში ჰაგენ-პუაზეილის დინებას უწოდებენ და ის წარმოადგენს ვალანდერის დინების კერძო შემთხვევას.

### 3.3.5. სითხის ერთგანზომილებიანი მოძრაობა სიმძიმის ძალის გავლენით. ნუსელტის ამოცანა

განვიხილოთ ნუსელტის ამოცანა. ვთქვათ, გვაქვს ჰორიზონტისადმი, მუდმივი  $\alpha$  კუთხით დახრილი ზედაპირი, რომლის გასწვრივაც სიმძიმის ძალის გავლენით მოძრაობს ბლანტი, უკუმში

სითხე. აბსცისთა ღერძი მივმართოთ სითხის მოძრაობის მიმართულადაც. მაშინ მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} + \rho g \sin \alpha = 0; \quad (3.58)$$

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dy} - g \cos \alpha = 0. \quad (3.59)$$

სითხის თავისუფალ ზედაპირზე არ გვაქვს მზებები ძაბვები, გვაქვს მხოლოდ  $p_{atm}$  ატმოსფერული წნევა, ხოლო სითხის ფსკერზე გვაქვს სითხის მიკვრის პირობა. აქედან გამომდინარე, გვაქვს შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$\begin{cases} \mu \frac{du}{dy} \Big|_{y=h} = 0 \\ p \Big|_{y=h} = p_{atm} \end{cases}. \quad (3.60)$$

სითხის მიკვრის პირობას აქვს შემდეგი სახე:

$$u \Big|_{y=0} = 0. \quad (3.61)$$

ამ ამოცანას ნუსელტის ამოცანას უწოდებენ და მის ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:

$$u = -\frac{\rho}{\mu} \cdot g \sin \alpha \cdot \left( \frac{1}{2} y^2 - hy \right). \quad (3.62)$$

$$p = p_{atm} - \rho g \cdot (y - h) \cdot \cos \alpha. \quad (3.63)$$

სითხის ხარჯი დროის ერთეულში ფენის განივკვეთში იქნება

$$Q = \int_0^h u dy = \frac{1}{3\mu} \cdot \rho h^3 g \sin \alpha. \quad (3.64)$$

მნიშვნელოვანია, რომ (3.62),(3.63) დინება არამდგრადია, რაც იწვევს მის ზედაპირზე ტალღების წარმოქმნას. პრაქტიკულად ექსპერიმენტებით დგინდება, რომ როცა  $Q = (1 \div 5)\nu$  აუცილებელია უკვე ტალღების წარმოქმნის გათვალისწინება და ამ შემთხვევებში (3.62),(3.63) ამონახსნები ექსპერიმენტებით აღარ დასტურდება; ხოლო, როცა  $Q = 10\nu$ , წარმოქმნილი ტალღები უკვე სამგანზომილებიანია და ნუსელტის მოდელი აღარ მუშაობს.

### 3.3.5.1. სითხის მოძრაობა ვერტიკალურად განლაგებულ ცილინდრულ მილში, სიმძიმის ძალის გავლენით

განვიხილოთ, სითხის მოძრაობა ვერტიკალურად განლაგებულ ცილინდრულ ფორმის მილში სიმძიმის ძალის გავლენით. ამ შემთხვევაში, ხელსაყრელია ვისარგებლოთ ცილინდრული კოორდინატთა სისტემით  $(r; \varphi; z)$ . ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში, გვექნება სიჩქარის მხოლოდ ერთი მდგენელი  $z$  ღერძის მიმართულებით. მისთვის ადგილი აქვს შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + g. \quad (3.65)$$

სასაზღვრო პირობებს ცილინდრის ზედაპირზე და სითხის თავისუფალ ზედაპირზე აქვთ შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} u|_{r=a} = 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=a+h} = 0 \end{cases} \quad (3.66)$$

სტაციონარულ შემთხვევაში (3.65) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$u = -\frac{1}{4\mu} \rho g r^2 + C_1 \ln \frac{r}{a} + C_2; \quad (3.67)$$

სასაზღვრო (3.66) პირობებიდან კი მივიღებთ რომ

$$C_1 = \frac{1}{2\mu} \rho g (a + h)^2; \quad C_2 = \frac{1}{4\mu} \rho g a^2. \quad (3.68)$$

თუ, სითხე მოძრაობს ორ კოაქსიალურ ცილინდრებს შორის მოქცეულ სივრცეში, მაშინ გარე ცილინდრის ზედაპირზე მხები ძაბვის არ არსებობის მაგივრად, მიკვრის პირობას თუ გამოვიყენებთ მივიღებთ, რომ

$$C_1 = \frac{1}{4\mu} \rho g [(a + h)^2 - a^2] \left[ \ln \left( 1 + \frac{h}{a} \right) \right]^{-1}, \quad C_2 = \frac{1}{4\mu} \rho g a^2, \quad (3.69)$$

$$u(r) = \frac{1}{4\mu} \rho g \left\{ a^2 - r^2 + [(a + h)^2 - a^2] \ln^{-1} \left( 1 + \frac{h}{a} \right) \ln \frac{r}{a} \right\}. \quad (3.70)$$

### 3.3.5.2. სითხის ღერძულ-სიმეტრიული მოძრაობა

სითხის ღერძულ-სიმეტრიული მოძრაობისას ცილინდრულ კოორდინატთა  $r, \varphi, z$  სისტემაში, ადგილი აქვს შემდეგ პირობებს:

$$v_z = u(r; t); v_r = 0; v_\varphi = v(r; t); p = p(r; t). \quad (3.71)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა სითხის ნაწილაკები მოძრაობენ წრეწირებზე, გვექნება რომ აგრეთვე  $v_z = 0$ . ამ შემთხვევაში, ნავიესტოქსის განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= \rho \frac{v^2}{r}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

სიჩქარეთა ველის განტოლებები არაა დამოკიდებული წნევაზე, რაც იმას ნიშნავს რომ შეგვიძლია ჯერ განვსაზღვროთ სიჩქარეთა ველი, ხოლო შემდეგ მეორე განტოლებიდან ვიპოვოთ წნევების განაწილება.

ამ განტოლების უმარტივესი კერძო ამონახსნებია:

$$v_1 = A \frac{1}{r}, v_2 = Br. \quad (3.73)$$

პირველი მათგანი საინტერესოა იმით, რომ ამ სიჩქარეთა ველით განსაზღვრული გრიგალი ყველგან ნულის ტოლია:

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0. \quad (3.74)$$

ეს ამონახსნი შეესაბამება სიჩქარეთა ველს, რომელიც წარმოიქმნება  $a$  რადიუსის ცილინდრის ბრუნვისას ბლანტ სითხეში  $Aa^{-2}$  სიჩქარით. მეორე ამონახსნი შეესაბამება გრიგალურ მოძრაობას.

### 3.3.5.3. სითხის მოძრაობა ორ კოაქსიალურ ცილინდრს შორის

ვთქვათ, სითხე მოქცეულია ორ კოაქსიალურ ცილინდრს შორის, რომელთა რადიუსებიც შესაბამისად  $r_1$  და  $r_2$ -ია და რომლებიც ბრუნავენ შესაბამისად  $\omega_1$  და  $\omega_2$  კუთხური სიჩქარეებით. ვიპოვოთ, (3.72) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები, შემდეგი სასაზღვრო პირობებით:

$$\begin{cases} v|_{r=r_1} = \omega_1 r_1 \\ v|_{r=r_2} = \omega_2 r_2 \end{cases} \quad (3.75)$$

რადგან (3.73) წარმოადგენს (3.72) განტოლების კერძო ამონახსნებს, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ სტაციონარული (3.72) განტოლებების შემთხვევაში, გვექნება ზოგადი ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$v = Ar + Br^{-1}. \quad (3.76)$$

$A; B$  მუდმივებს განვსაზღვრავთ (3.75) სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარე.

$$A = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad B = \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (3.77)$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{\substack{r_2 \rightarrow \infty \\ \omega_2 \rightarrow 0}} v = \lim_{\substack{r_2 \rightarrow \infty \\ \omega_2 \rightarrow 0}} \left( \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r} \right) = \frac{\omega_1 r_1^2}{r}. \quad (3.78)$$

$$v|_{r_1=0 \wedge \omega_1=0} = \omega_2 r. \quad (3.79)$$

წნევების განაწილებას კი ვიპოვით (3.72) სისტემის მეორე განტოლებიდან.

### 3.4. სითხის მოძრაობის არაწრფივი განტოლებების ავტომოდელური ამონახსნები

ავტომოდელური ანუ მსგავსი ამონახსნები ეწოდება, ისეთი კერძოწარმოებულიანი განტოლებების ამონახსნებს, რომლებიც დაიყვანება ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებზე. ამ ამონახსნებს ზუსტს უწოდებენ, რადგან ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები შესაძლებელია ამოიხსნას ნებისმიერი სიზუსტით. ამ შემთხვევაში, არაა აუცილებელი რომ ამონახსნი იყოს მოცემული ანალიზური ფუნქციებით. უფრო ხშირად, სასურველიცაა ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა.

#### 3.4.1. ხიმენც-ხოუარტის ამოცანა

განვიხილოთ, ბლანტი უკუმში სითხის დინება, როცა მისი გამლახდება მყარი სიბრტყის გასწვრივ. ამ ამოცანას ხიმენც-ხოუარტის ამოცანას უწოდებენ.

შემოვიტანოთ  $(x; y)$  კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ  $y = 0$  შეესაბამებოდეს მყარ სიბრტყეს, ხოლო სითხის გაშლა წარმოებს  $x = 0$  და  $y = 0$  წირების გასწვრივ. სიბრტყიდან მოშორებით დავსვათ პირობა:

$$u(x, y) = ax, \quad y \rightarrow \infty. \quad (3.80)$$

ეს ამონახსნი შეესაბამება ამ ამოცანის ამონახსნს იდეალური სითხის შემთხვევაში:

$$u = ax, \quad v = -ay, \quad p = p_a - \frac{1}{2} \rho a^2 (x^2 + y^2). \quad (3.81)$$

ბლანტი სითხის შემთხვევაში, გვაქვს მიკვრის პირობები:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad y = 0. \quad (3.82)$$

რომელიც უნდა დააკმაყოფილოს სტაციონარული, ბლანტი უკუმში სითხის სიჩქარეთა ველმა, რომელიც აღიწერება ნავიე-სტოქსის განტოლებათა შემდეგი სისტემით:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.83)$$

ამოცანის დასმა არ შეიცავს დამახასიათებელ ზომებს. ამონახსნები დამოკიდებულია ორ სიდიდეზე  $\nu; a$ ; რომელთა განზომილებებია:  $[\nu] = \text{მ}^2/\text{წმ}$  და  $[a] = 1/\text{წმ}$ . ამ პარამეტრებისაგან შეგვიძლია შევადგინოთ სიგრძის  $\sqrt{a^{-1}\nu}$  და სიჩქარის  $\sqrt{a\nu}$  მასშტაბი. ამის შემდეგ, შეგვიძლია გადავიდეთ უგანზომილებო პარამეტრებზე შემდეგი ფორმულებით:

$$\eta = y \sqrt{\frac{a}{\nu}}, \quad \zeta = x \sqrt{\frac{a}{\nu}} \quad (3.84)$$

და ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი ფორმულებით:

$$u = \sqrt{a\nu} \zeta \varphi'(\eta), \quad v = -\sqrt{a\nu} \varphi(\eta), \quad p = p_a - \frac{1}{2} \rho a \nu [\zeta^2 + F(\eta)]. \quad (3.85)$$



თუ, (3.85) ცვლადებს შევიტანთ (3.83) განტოლებათა სისტემაში, მივიღებთ რომ

$$\begin{aligned} \varphi''' + \varphi\varphi'' - \varphi'^2 + 1 &= 0, \\ \frac{1}{2} F' &= \varphi'' + \varphi\varphi'. \end{aligned} \quad (3.86)$$

უწყვეტობის განტოლება იგივეურად კმაყოფილდება. სასაზღვრო პირობები კი უნდა შევათანხმოთ (3.80), (3.82) პირობებთან, მაშინ მივიღებთ რომ ადგილი უნდა ქონდეს შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned} \varphi = 0, \quad \varphi' = 0, \quad \eta = 0, \\ \varphi' \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.87)$$

რაც შეეხება წნევას, ის განისაზღვრება მუდმივის სიზუსტით, აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია დავუშვათ რომ  $F(0) = 0$ .

$F(\eta)$  ფუნქცია განისაზღვრება იმის შემდეგ, რაც ნაპოვნი იქნება სიჩქარეთა ველის განაწილება. (3.86)-(3.87) ამოცანის ამოხსნა ხდება რიცხვითი ალგორითმების საშუალებით, რაც საკმაოდ კარგადაა შესწავლილი.

### 3.4.2. ჯეფრი-გამელის ამოცანა

განვიხილოთ, ბლანტი უკუმში სითხის დინება სწორხაზოვანი კედლების მქონე მილში, როცა კედლები ერთმანეთთან ადგენენ  $2\alpha$  სიდიდის კუთხეს. დინების სურათი მკვეთრად იცვლება, იმის მიხედვით, თუ, რომელ მხარეს ხდება დინება (ვიწროვდება თუ ფართოვდება ნაკადი, დინების მიმართულებით), ასევე, მნიშვნელოვანია  $\alpha$  კუთხის სიდიდეც.

ვთქვათ, გვაქვს ორი სწორხაზოვანი საზღვარი, რომლის განტოლებები ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში არის  $\varphi = \pm\alpha$ . განვიხილოთ, მათ შორის რადიალური მოძრაობა. ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემას ამ შემთხვევაში, თუ ჩავწერთ ცილინდრულ კოორდინატებში, მივიღებთ შემდეგ გამარტივებულ სისტემას:

$$u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{u}{r^2} \right), \quad (3.88)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} = 0. \quad (3.90)$$

თუ, მიმდევრობით ვაინტეგრებთ (ე.90)-ს და შემდეგ (3.89) განტოლებებს, მაშინ მივიღებთ რომ

$$ru = F(\varphi), \quad (3.91)$$

$$\frac{1}{\rho} p = \frac{2\nu}{r^2} F(\varphi) + f(r). \quad (3.92)$$

(3.88) განტოლებაში თუ, შევიტანთ (3.91) და (3.92)-დან  $u$  და  $p$ -ს მნიშვნელობებს, გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$\nu F'' + F^2 + 4\nu F = r^3 f'(r) \equiv C = const. \quad (3.93)$$

თუ, (3.93) განტოლებას გავამრავლებთ  $F'$ -ზე, მაშინ შესაძლებელი გახდება მისი ერთხელ ინტეგრება და მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{2} \nu (F')^2 + \frac{1}{3} F^3 + 2\nu F^2 - CF = C_1. \quad (3.94)$$

სითხის მიკვრის პირობებიდან გამომდინარე,  $F(\pm\alpha) = 0$ . მაშინ ლაგრანჟის თეორემიდან სასრული ნაზრდის შესახებ, უნდა არსებობდეს  $\varphi$  კუთხის ისეთი  $\varphi_*$  მნიშვნელობა  $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$  შუალედიდან, რომ  $F'(\varphi_*) = 0$ . ამ წერტილში  $F$  ფუნქციის მნიშვნელობა აღვნიშნოთ  $F_0$ -ით ანუ  $F_0 = F(\varphi_*)$ , მაშინ შეგვიძლია ვიპოვოთ  $C_1$  მუდმივის მნიშვნელობა:

$$C_1 = \frac{1}{3} F_0^3 + 2\nu F_0^2 - CF_0. \quad (3.95)$$

შემოვიღოთ უგანზომილებო ცვლადები  $\eta$ ;  $f(\eta)$  შემდეგი ფორმულით:

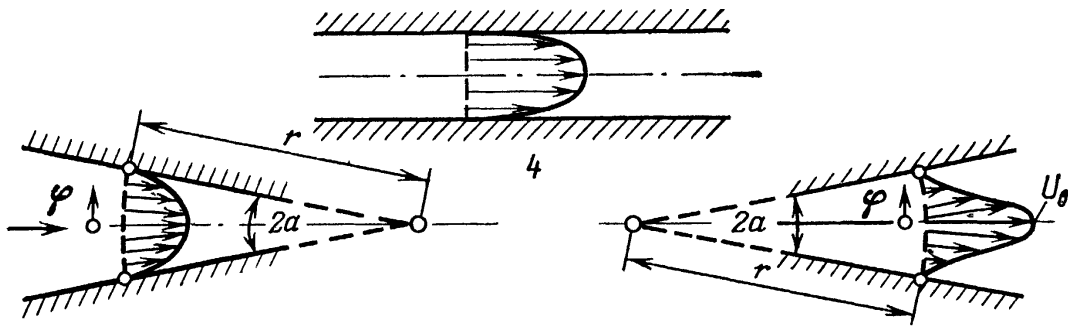
$$\eta = \frac{\varphi}{\alpha}; \quad f(\eta) = \frac{F(\varphi)}{F_0}. \quad (3.96)$$

მაშინ, (3.94) განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(f')^2 = (1 - f) \left[ \frac{2}{3} \cdot Re \cdot \alpha^2 \cdot (f^2 + f) + 4\alpha^2 f + b \right]; \quad (3.97)$$

სადაც  $f|_{f'=0} = 1$ , რაც გამომდინარეობს  $F_0$ -ის არჩევის წესიდან; ხოლო  $b \geq 0$ , რადგან  $b|_{\eta=\pm 1} = (f')^2$ .

ამრიგად, (3.97) განტოლების ამონახსნი დამოკიდებულია მხოლოდ ორ  $\alpha$  და  $Re$  პარამეტრზე. ნახ. 3.1



ნახ. 3.1. ჯეფრი-გამელის დინება

ამ ამოცანის ზუსტი ამონახსნი მოიცემა ელიფსური ფუნქციებით და მეტად არაპრაქტიკულია, აქედან გამომდინარე მიზანშეწონილია მისი მიახლოებითი ამოხსნა.

### 3.4.3. კარმანის ამოცანა მბრუნავი სითხისათვის

განვიხილოთ, ბლანტი უკუმში სითხის ღერძულ-სიმეტრიული მოძრაობა, როელიც გამოწვეულია უსასრულო სიბრტყის ბრუნვით, თავისი რომელიმე უძრავი წერტილის გარშემო. ცილინდრულ  $(r; \varphi; z)$  კოორდინატთა სისტემაში, რომლის ღერძიც გადის ბრუნვის ცენტრის უძრავ წერტილზე, დინების ველი დამოკიდებულია მხოლოდ ორ  $(r; z)$  ცვლადზე. ასეთი მოძრაობა აღიწერება შემდეგი განტოლებათა სისტემით და მას კარმანის ამოცანას უწოდებენ :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta u - \frac{u}{r^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \left( \Delta v - \frac{v}{r^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (3.98)$$

ამ განტოლებებში, ლაპლასის ოპერატორი ჩაწერილია ცილინდრულ კოორდინატებში ანუ

$$\Delta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.99)$$

რაც შეეხება სასაზღვრო პირობებს, ისინი გამოხატავენ მიკვრის (3.100) პირობებს და უსასრულობაში მოძრაობის მიღვეადობის პირობებს:

$$\begin{cases} u|_{z=0} = 0 \\ v|_{z=0} = \omega r. \\ w|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad (3.100)$$

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow \infty} u = 0 \\ \lim_{z \rightarrow \infty} v = 0 \end{cases} \quad (3.101)$$

ამ ამოცანაში გვაქვს მხოლოდ ორი განზომილებიანი პარამეტრი  $v$ ;  $\omega$ . მათგან შეგვიძლია შევადგინოთ სიჩქარის  $\sqrt{v\omega}$  და სიგრძის  $\sqrt{v\omega^{-1}}$  მასშტაბის ფორმულები. ამ სამასშტაბო ფორმულებიდან გამომდინარე, გადავიდეთ ავტომოდელურ ცვლადებზე შემდეგი ფორმულებით:

$$\xi = z \sqrt{\frac{\omega}{v}}, \quad \bar{r} = r \sqrt{\frac{\omega}{v}} \quad (3.102)$$

ამონახსნს ვეძებთ ფორმულებით:

$$\begin{aligned} u &= \bar{r} \sqrt{v\omega} F(\xi), & v &= \bar{r} \sqrt{v\omega} G(\xi), \\ \omega &= \sqrt{v\omega} H(\xi), & p &= \rho v \omega p_1(\xi). \end{aligned} \quad (3.103)$$

ამ ფორმულების ჩასმით (3.98) სისტემა გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} H' + 2F &= 0, \\ F'' + F'H + G^2 - F^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} G'' - G'H - 2FG &= 0, \\ H'' - H'H - p_1' &= 0. \end{aligned} \quad (3.105)$$

(3.100) და (3.101) პირობები გარდაიქმნება ახალ ცვლადების მიმართ და მივიღებთ პირობებს:

$$\begin{cases} F|_{\xi=0} = 0 \\ G|_{\xi=0} = 1; \\ H|_{\xi=0} = 0 \end{cases} \quad (3.106)$$

$$\begin{cases} \lim_{\zeta \rightarrow \infty} F = 0 \\ \lim_{\zeta \rightarrow \infty} G = 0 \end{cases} \quad (3.107)$$

უგანზომილებო წნევებისათვის განტოლების ამოხსნა შეგვიძლია მას შემდეგ, რაც ვიპოვით სიჩქარეთა ველს წინა განტოლებებიდან. ამ განტოლებებს ხსნიან მიახლოებითი მეთოდებით ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მეთოდების გამოყენებით. ექსპერიმენტები გვიჩვენებს, რომ მიღებულ შედეგებს აქვთ პრაქტიკული ღირებულება მხოლოდ ლამინარული დინების შემთხვევაში  $Re_k \approx 3 \cdot 10^5$ . და როგორც კი დინება გადადის ტურბულენტურ  $Re > Re_k$  რეჟიმზე, ეს ამონახსნი კარგავს პრაქტიკულ ღირებულებას.

#### 3.4.4. ლანდაუს ამოცანა სითხის ჭავლის შესახებ

განვიხილოთ წრიული განივკვეთის, ბლანტი სითხის ჭავლის დინამიკის ამოცანა. ჭავლის დინამიკის მოდელირებისათვის ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემა ჩავწეროთ სფერულ  $(r; \varphi; \theta)$  კოორდინატებში. იმ შემთხვევისთვის, როცა დინების ველი არაა დამოკიდებული  $\varphi$ -ზე, მივიღებთ რომ  $v_\varphi = 0$ . მაშინ თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს  $u = v_r$ ;  $v = v_\theta$ ; მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta u - \frac{2u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{ctg\theta}{r^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r^2 u)}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(v \sin \theta)}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (3.108)$$

ამ ფორმულაში, ლაპლასის ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (3.109)$$

ამ ამოცანის ამონახსნებს ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\nu}{r} F(\eta), \quad v = \frac{\nu}{r} G(\eta), \\ p &= p_0 + \rho \left( \frac{\nu}{r} \right)^2 p_1(\eta), \quad \eta = r \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.110)$$

უწყვეტობის განტოლება ავტომატურად კმაყოფილდება, თუ ადგილი აქვს განტოლებებს:

$$F(\eta) = -f'(\eta), \quad G = -\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} f(\eta). \quad (3.111)$$

ეს ფორმულები ადვილად მიიღება თუ, შემოვიღებთ დენის ფუნქციას  $\psi(r, \theta) = vr f(\eta)$ , ხოლო შემდეგ, სიჩქარის  $u; v$  კომპონენტებს გამოვთვლით შესაბამისი ფორმულებით:

$$u = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (3.112)$$

მაშინ (3.108) სისტემის პირველი ორი განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$p_1 = -\frac{1}{2} f^2 \frac{1}{1-\eta^2} - \frac{1}{2} [ff' - (1-\eta^2) f''],$$

$$p_1' = -f'' - \frac{1}{2} \left( f^2 \frac{1}{1-\eta^2} \right)'. \quad (3.113)$$

თუ, (3.113) სისტემის მეორე განტოლებას ერთხელ ვაინტეგრებთ, მასში შევიტანთ პირველი განტოლებიდან  $p_1$ -ს და კიდევ ერთხელ ვაინტეგრებთ, მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

$$p_1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\eta^2} f^2 - f' - \frac{1}{2} C_1,$$

$$2ff' = 2(1-\eta^2) f'' + 4f + 2C_1 \eta + C_2. \quad (3.114)$$

თუ ამ განტოლებას კიდევ ერთხელ ვაინტეგრებთ, მივიღებთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$-2(1-\eta^2) f' + f^2 - 4\eta f = C_1 \eta^2 + C_2 \eta + C_3, \quad (3.115)$$

რომელიც სამ ნებისმიერ მუდმივს შეიცავს. თუ დინებას არა აქვს განსაკუთრებულობები  $\eta = 1$  ღერძზე, მაშინ (3.115) განტოლების მარჯვენა მხარის ერთადერთი დასაშვები სახე იქნება

$$C_1 \eta^2 + C_2 \eta + C_3 = C_1 (1-\eta)^2. \quad (3.116)$$

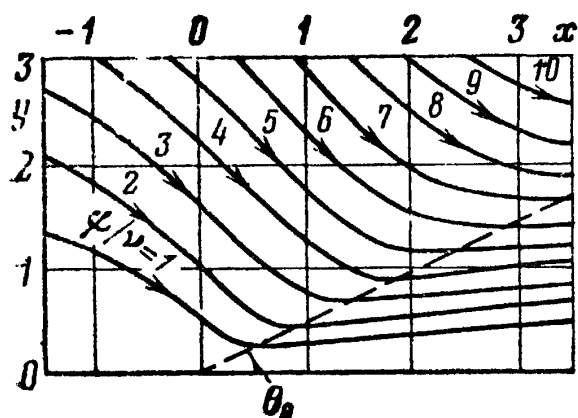
თუ დავუშვებთ, რომ არ გვაქვს განსაკუთრებულობები როცა  $\eta = -1$ , მაშინ ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$C_1\eta^2 + C_2\eta + C_3 = C_1(1+\eta)^2. \quad (3.117)$$

მაშინ  $C_1 = 0$ . მაშინ (3.115) განტოლების ამონახსნი იქნება

$$f = \frac{2(1-\eta^2)}{1+C-\eta}, \quad (3.118)$$

სადაც  $C$  ნებისმიერი მუდმივია. მიღებულ ამონახსნს აქვს განსაკუთრებულობა მხოლოდ ერთ  $r = 0$  წერტილში. ნახ. 3.2-ზე გამოსახულია დენის წირები.



ნახ. 3.2. ლანდაუს ჭავლის დენის წირები

ეს დინება შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც იმპულსის წერტილოვანი წყაროს მიერ გამოწვეული ჭავლი.

### 3.4.5. მერედიტ-ფირფიტის ამოცანა (დინების მართვა საზღვრის ზედაპირის გამჭოლი დინებით)

სითხის დინების მართვა შესაძლებელია თუ, ნაკადის მყარი დახვრეტილი საზღვრის ზედაპირიდან გამოვტუმბავთ ან დიდი წნევით მივაწოდებთ სითხეს.

განვიხილოთ ბრტყელი ფირფიტის გარსდენის ამოცანა სითხის ისეთი ნაკადით, რომლის დინებაც ფირფიტისაგან საკმაოდ მოშორებით, არის თანაბარი და აქვს მუდმივი  $U_\infty$  სიჩქარე. ფირფიტის კედლიდან ხდება სითხის გამოტუმბვა მუდმივი  $-V_0$  სიჩქარით. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში, რომელიც დაკავშირებულია ფირფიტის კედელთან, დინებას შეესაბამება შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$\begin{cases} u|_{y=0} = 0 \\ v|_{y=0} = -V_0 \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u = U_\infty \end{cases} \quad (3.119)$$

ამ პირობებს აკმაყოფილებს (3.120) სისტემის ამონახსნები რომლებიც არაა დამოკიდებული  $x$ -ზე.

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.120)$$

ჩვენი ამოცანის პირობებში, უნდა გავითვალისწინოთ რომ

$$u = u(y); \quad v = -V_0; \quad p = \text{const.} \quad (3.121)$$

ასეთ შემთხვევაში, (3.120) განტოლებებიდან მივიღებთ რომ

$$-V_0 u' = \nu u'' \quad (3.122)$$

რომლის ამონახსნიც (3,121) პირობებში იქნება შემდეგი ფუნქცია:

$$u = U_\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{V_0 y}{\nu}\right) \right]. \quad (3.123)$$

ამ ფუნქციას მერედიტ-გრიფიტსის ფუნქციას უწოდებენ.

### 3.4.6. თ.ობგადის ამოცანა

განვიხილოთ, ბლანტი უკუმში სითხის ორგანზომილებიანი სტაციონარული მოძრაობის შესაბამისი ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემა. უგულებელვყოთ, გარე მასური ძალების მოქმედება და ვთქვათ, მოძრაობას განაპირობებს წნევათა გრადიენტი.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \cdot \Delta u; \quad (3.124)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \cdot \Delta v; \quad (3.125)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3.126)$$



განვიხილოთ, ისეთი დინება რომლის დროსაც  $u = v = \varphi(x; y)$ . მაშინ უწყვეტობის განტოლებიდან გამომდინარე, ადვილად მივიღებთ, რომ  $u = v = f(x - y)$ . მაშინ დინამიკის განტოლებებიდან მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2}{Re} f''; \quad (3.127)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{2}{Re} f''. \quad (3.128)$$

(3.127) და (3.128) განტოლებებიდან მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (3.129)$$

მაშასადამე,  $p = g(x + y) = C_0(x + y)$ , რაც იმას ნიშნავს რომ

$$u = v = f(x - y) = C_0 \cdot \frac{Re}{4} \cdot (x - y)^2 + C_1 \cdot (x - y) + C_2. \quad (3.130)$$

თუ, მივიღებთ მიკვრის პირობებს

$$u|_{y=x} = v|_{y=x} = 0, \quad (3.131)$$

მაშინ  $f(0) = 0$ , ე.ი.  $C_2 = 0$  და საბოლოოდ, **თ.ობგადის ამონახსნს** ექნება შემდეგი სახე:

$$u = v = f(x - y) = C_0 \cdot \frac{Re}{4} \cdot (x - y)^2 + C_1 \cdot (x - y). \quad (3.132)$$

$$p = g(x + y) = C_0(x + y). \quad (3.133)$$

მოდრაობის ტრაექტორიის საპოვნელად, ვწერთ შემდეგ განტოლებებს:

$$\begin{cases} u = \frac{dx}{dt} \\ v = \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow (y = x + C). \quad (3.134)$$

მაშასადამე, სითხის ნაწილაკების მოძრაობის ტრაექტორიაა წრფე, რომელიც დახრილია აბსცისთა ღერძის მიმართ  $45^\circ$ -იანი კუთხით ანუ გვაქვს სიბტყის გასწვრივი ლამინარული დინება გამოწვეული წნევის მუდმივი გრადიენტით  $grad p = (C_0; C_0)$ .

თუ, მოვინდომებთ დავაკმაყოფილოთ უსასრულობაში ნაკადი მუდმივი სიჩქარით დინების პირობა, მაშინ ამოცანას არ ექნება ამონახსნი, რაც ნათლად ჩანს (3.132),(3.133) ზოგადი ამონახსნებიდან.

#### IV თავი. ბლანტი სითხის დინება რეინოლდსის მცირე რიცხვის შემთხვევაში $Re \ll 1$

ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემა არაწრფივია და იმდენად რთული, რომ მისი ზუსტი ამონახსნების პოვნა ძალზედ რთულია. აქედან გამომდინარე, პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას ხშირად, ცდილობენ გაამარტივონ მათემატიკური მოდელი და განიხილონ ამოცანების შესაბამისი კლასები. ბლანტი სითხის დინებას ახასიათებს  $Re$  რეინოლდსის რიცხვი. მცირე რეინოლდსის რიცხვის შემთხვევაში  $Re \ll 1$ , განიხილავენ დიდი სიბლანტის მქონე (მცოცავი) სითხეების ან ბლანტი სითხის მცირე სიჩქარეებით დინებას.

##### 4.1. სტოქსის განტოლებები

დინამიკის განტოლებების გამოსაყვანად, რეინოლდსის რიცხვის მცირე მნიშვნელობებისათვის, განვიხილოთ ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემა დინებისათვის, როცა არ გვაქვს მასური ძალები:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \cdot \Delta \vec{v}; \quad (4.1)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0. \quad (4.2)$$

განვიხილოთ გარსდენის ამოცანა. ამოცანის დამახასიათებელი სიგრძე იყოს  $l_0$ . ნაკადის სიჩქარე უსასრულობაში -  $\vec{v}|_{\infty} = \vec{V}$ . შემოვიყვანოთ უგანზომილებო განმსაზღვრელი პარამეტრები შემდეგი ფორმულებით:

$$\xi = \frac{x}{l_0}; \quad \eta = \frac{y}{l_0}; \quad \zeta = \frac{z}{l_0}; \quad \tau = \frac{v}{l_0^2}; \quad \vec{u} = \frac{l_0}{v} \vec{v}; \quad \Pi = \left(\frac{l_0}{v}\right)^2 \frac{p}{\rho}. \quad (4.3)$$

მაშინ, მივიღებთ რომ დინამიკის უგანზომილებო განტოლებებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + u_{\xi} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} + u_{\eta} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta} + u_{\zeta} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} = -\text{grad } \Pi + \Delta \vec{u}; \quad (4.4)$$

$$\text{div } \vec{u} = 0. \quad (4.5)$$

ამასთან ერთად, უსასრულობაში ნაკადის სიჩქარე იქნება:

$|\vec{u}|_{\infty} = \frac{l_0 v}{v} = Re$ . თუ, განვიხილავთ სითხის დინამიკას რეინოლდსის რიცხვის მცირე მნიშვნელობებისათვის  $Re \ll 1$ ,

მივიღებთ, რომ  $|u_\xi| \ll 1$ ;  $|u_\eta| \ll 1$ ;  $|u_\zeta| \ll 1$ . რადგან სიჩქარეებიც და მათი კომპონენტებიც მცირედ იცვლება ერთეულ სიგრძეზე გადაადგილებისას (მახასიათებელი სიგრძე), გვექნება რომ ადგილი აქვს აგრეთვე შემდეგ უტოლებებს:

$$\left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi} \right| \ll 1; \quad \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta} \right| \ll 1; \quad \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta} \right| \ll 1. \quad (4.6)$$

მაშასადამე,  $u_\xi \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi}$ ;  $u_\eta \frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta}$ ;  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial \zeta}$  ნამრავლები წარმოადგენენ მეორე რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს. თუ, განტოლებათა (4.4),(4.5) სისტემაში უგულებელვყოფთ მეორე რიგის უსასრულოდ მცირეებს პირველი რიგის უსასრულოდ მცირეებთან შედარებით, მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} = -grad \Pi + \Delta \vec{u}; \quad (4.7)$$

$$div \vec{u} = 0. \quad (4.8)$$

(4.7),(4.8) უგანზომილებო განტოლებები, აღწერს ბლანტი სითხის დინებას მცირე რეინოლდსის რიცხვების შემთხვევაში. თუ, დავუბრუნდებით ძველ - განზომილებიან ცვლადებს, ეს განტოლებები გადაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} grad p + \nu \Delta \vec{v}; \quad (4.9)$$

$$div \vec{v} = 0. \quad (4.10)$$

(4.9),(4.10) განტოლებათა სისტემას, სტოქსის განტოლებებს უწოდებენ, სითხის დინებისათვის რეინოლდსის მცირე რიცხვების შემთხვევაში. ზოგჯერ, კი უწოდებენ სტოქსის განტოლებებს სითხის ნელი მოძრაობისათვის.

დამყარებული დინების შემთხვევაში, სტოქსის განტოლებები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\mu \Delta \vec{v} = grad p; \quad (4.11)$$

$$div \vec{v} = 0. \quad (4.12)$$

სტოქსის განტოლებათა სისტემა, ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემისაგან განსხვავებით, არის წრფივი, რაც საშუალებას იძლევა გამოვიყენოთ სხვადასხვა მეთოდები და ამოვხსნათ მრავალი

სხვადასხვა ამოცანა, თუმცა, მისი გამოყენების საზღვრებიც შემოსაზღვრულია.

#### 4.1.1. სფეროს გრსდენის ამოცანა მცირე რეინოლდსის რიცხვებისათვის

განვიხილოთ  $r = a$  რადიუსის მქონე სფეროს გარსდენა ბლანტი სითხის სტაციონარული ნაკადით, როცა  $Re \ll 1$  და ნაკადის  $V$  სიჩქარე უსასრულოებაში მიმართულია აბსცისთა ღერძის პარალელურად.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად, უნდა განვიხილოთ (4.11),(4.12) განტოლებათა სისტემა და შესაბამისი სასაზღვრო პირობები შემდეგი სახით:

$$\vec{v}|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = 0; \quad (4.13)$$

$$\begin{cases} v_x|_{\infty} = V \\ v_y|_{\infty} = 0 \\ v_z|_{\infty} = 0 \\ p|_{\infty} = p_{\infty} \end{cases}. \quad (4.14)$$

გადავიდეთ სფერულ  $(r; \theta; \lambda)$  ცვლადებზე. ამოცანის სიმეტრიიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$\begin{cases} v_{\lambda} = 0 \\ v_r = v_r(r; \theta) \\ v_{\theta} = v_{\theta}(r; \theta) \\ p = p(r; \theta) \end{cases}. \quad (4.15)$$

ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} v_r = f(r) \cos \theta \\ v_{\theta} = g(r) \sin \theta \\ p = \eta h(r) \cos \theta \end{cases}. \quad (4.16)$$

თუ, შევიტანთ (4.16) ფორმულებს (4.11),(4.12) განტოლებებში, მივიღებთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას  $f(r)$ ;  $g(r)$  და  $h(r)$  ფუნქციების მიმართ. თუ ამოვხსნით მიღებულ განტოლებათა სისტემას (4.13),(4.14) სასაზღვრო პირობებში და მიღებულ ამონახსნებს შევიტანთ (4.16) ფორმულებში, მივიღებთ ამოცანის ამონახსნს, რომელიც შეგვიძლია გადავწეროთ დეკარტის კოორდინატებში შემდეგი ფორმით:

$$\begin{cases} v_x = V \left( 1 - \frac{3a}{4r} - \frac{1}{4} \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{3}{4} \frac{Vax^2}{r^3} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ v_y = -\frac{3}{4} \frac{Vaxy}{r^3} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ v_z = -\frac{3}{4} \frac{Vaxz}{r^3} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ p = p_\infty - \frac{2}{3} \mu \frac{Vax}{r^2} \end{cases} \quad (4.17)$$

სადაც  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

სფეროს ზედაპირზე სიჩქარეებისა და წნევების (4.17) განაწილებიდან, შეგვიძლია ვიპოვოთ წინალობის  $R_x$  ძალა და მაშასადამე სფეროს წინალობის კოეფიციენტი. წინალობის ძალთა ნაკრები ვექტორია

$$\mathbf{R} = \iint_S \boldsymbol{\sigma}_n ds = \iint_S \left( \boldsymbol{\sigma}_x \frac{x}{a} + \boldsymbol{\sigma}_y \frac{y}{a} + \boldsymbol{\sigma}_z \frac{z}{a} \right) ds. \quad (4.18)$$

შესაბამის გეგმილებს კოორდინატთა ღერძებზე აქვთ შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} R_x = \iint_S \sigma_{nx} ds = \iint_S \left( \sigma_{xx} \frac{x}{a} + \sigma_{yx} \frac{y}{a} + \sigma_{zx} \frac{z}{a} \right) ds \\ R_y = \iint_S \sigma_{ny} ds \\ R_z = \iint_S \sigma_{nz} ds \end{cases} \quad (4.19)$$

ბლანტი სითხის რეოლოგიურ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}). \quad (4.20)$$

თუ, შევიტანთ (4.20) დამოკიდებულებას (4.19) ფორმულებში, მივიღებთ, რომ

$$\begin{cases} R_x = 6\pi\mu aV \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

(4.21)-ის პირველ ფორმულას სტოქსის ფორმულას უწოდებენ და ის გამოსახავს სფეროს წინალობის ძალას მცირე სიჩქარით მოძრაობისას.

რეინოლდსის მცირე რიცხვების შემთხვევაში, სფეროს წინალობის კოეფიციენტი იქნება

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{1}{2}\rho V^2 \pi a^2} = \frac{6\pi\mu aV}{\frac{1}{2}\rho V^2 \pi a^2} = \frac{12}{Re}. \quad (4.22)$$

(4.22) ფორმულა კარგად შეესაბამება ექსპერიმენტებს, როცა  $Re < \frac{1}{2}$ . ჩვენი დაშვებით  $Re \ll 1$ .

#### 4.1.2. სტოქსის პარადოქსი. წრიული განივკვეთის ცილინდრის გარსდენის ამოცანა

განვიხილოთ, წრიული განივკვეთის ცილინდრის სტაციონარული გარსდენის ამოცანა ბლანტი სითხით, რეინოლდსის მცირე რიცხვების შემთხვევაში. ცხადია, რომ ამოცანა ორგანზომილებიანი იქნება და მიი მათემატიკური მოდელი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\mu \Delta \vec{v} = \text{grad } p; \quad (4.23)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0. \quad (4.24)$$

შესაბამის სასაზღვრო პირობებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} v_x|_{r=a} = v_y|_{r=a} = 0 \\ v_x|_{\infty} = V \\ v_y|_{\infty} = 0 \\ p|_{\infty} = p_{\infty} \end{cases} \quad (4.25)$$

თუმცა, ამ ამოცანას ამონახსნი არა აქვს, რადგან შეუძლებელია ერთდროულად დაკმაყოფილდეს მიკვრის პირობები და პირობები უსასრულობაში. ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მიკვრის პირობებს არის იგივეურად ნულის ტოლი ამონახსნი. ასეთი სიტუაცია გვაქვს ნებისმიერი ცილინდრული სხეულის შემთხვევაში. ესაა **სტოქსის პარადოქსი** ანუ სტაციონარულ შემთხვევაში, სტოქსის ორგანზომილებიანი მოდელის ფარგლებში, ნებისმიერი ცილინდრული სხეულის გარსდენის ამოცანას ამონახსნი არა აქვს. სტოქსის დაშვებები ნავიე-სტოქსის განტოლებებიდან გამოყვანისას ძალაშია მხოლოდ გარსდენადი სხეულის მახლობლობაში, კედლიდან შორს კი კონვექტიური წევრები აღარაა მცირე და მათი უგულებელყოფა არ შეიძლება. ფიზიკურად შეიძლება წარმოვიდგინოთ, რომ ცილინდრი თუ, მოძრაობს სითხეში ის წარიტაცებს სითხის მთელ მასას და ცილინდრთან დაკავშირებულ კოორდინატთა სისტემაში სითხე უძრავია.

**ისმის კითხვა:** შესაძლებელია თუ, არა გამოვიყვანოთ ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემიდან ისეთი წრფივ განტოლებათა სისტემა, რომელიც ძალაში იქნება გარსდენადი სხეულისაგან დიდ მანძილებზე.

### 4.1.3. ოზინის განტოლებები

**ჩვენი ამოცანა:** ავაგოთ ბლანტი სითხის დინების ისეთი მათემატიკური, წრფივი მოდელი რეინოლდსის მცირე რიცხვების დროს, რომლის დროსაც სფეროს გარსდენისას მიღებული ამონახსნები, ძალაში იქნებიან სფეროდან დიდ მანძილებზეც და რომელთათვისაც, ცილინდრის გარსდენისას, არ გვექნება სტოქსის პარადოქსი. ასეთი ამოცანის გადაწყვეტა ეკუთვნის **ოზინს**.

კვლავს დავიწყებთ ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემით არაკუმშვადი სითხისათვის:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v}; \quad (4.26)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0. \quad (4.27)$$

შესაბამის პირობებს უსასრულობაში, აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} v_x|_{\infty} = V \\ v_y|_{\infty} = v_z|_{\infty} = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

სიჩქარის ვექტორის კომპონენტები წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით:

$$\begin{cases} v_x = V + v'_x \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases} \quad (4.29)$$

და შტრიხიანი წევრები მათ წარმოებულელებთან ერთად, ჩავთვალოთ უსასრულოდ მცირედ  $V$  სიჩქარესთან შედარებით, გარსდენადი სფეროდან დიდ მანძილზე. თუ, შევიტანთ (4.29) ფორმულებს ნავიე-სტოქსის (4.26),(4.27) განტოლებებში, უგულებელვყოფთ მეორე რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს და მოვაცილებთ შტრიხებს, მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + V \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v}; \quad (4.30)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (4.31)$$

(4.30),(4.31) განტოლებებს ოზინის განტოლებებს უწოდებენ. ოზინის მათემატიკური მოდელი აღწერს ნელ დინებებს (დინებებს რეინოლდსის რიცხვის მცირე მნიშვნელობებისათვის). სფეროს გარსდენის შემთხვევაში, ოზინის განტოლებები და სტოქსის განტოლებები იძლევიან ერთნაირი სიზუსტის ამონახსნებს, ხოლო სფეროდან მოშორებით ოზინის განტოლებები კვლავ მუშაობს, სტოქსის განტოლებებისგან განსხვავებით.

ამჟამად, ცნობილია ოზინის განტოლებების ზუსტი ამონახსნები: სფეროს, ელიფსოიდის და წრიული ცილინდრის გარსდენის შემთხვევაში. სფეროს წინააღმდეგობის ძალისათვის მიღებული ფორმულა დასტურდება ექსპერიმენტებით, თუ  $Re < 1$ .



**V თავი. პრანდტლის თეორია სასაზღვრო ფენის შესახებ. ბლანტი სითხის დინება რეინოლდსის დიდი რიცხვების შემთხვევაში  $Re \gg 1$**

იდეალურ სითხეს შეესაბამება რეინოლდსის რიცხვის  $Re = \infty$  მნიშვნელობა. თუ, რეინოლდსის რიცხვი საკმაოდ დიდია  $Re \gg 1$ , მაშინ ბლანტი სითხის თვისებები, უახლოვდება იდეალური სითხის თვისებებს. უფრო მეტიც, იდეალური სითხის პოტენციალური დინების ამოცანების ამონახსნები აკმაყოფილებენ ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემას, თუმცა, ვერ აკმაყოფილებენ გარსდენადი სხეულის საზღვართან სითხის მიკვრის პირობებს. აქედან გამომდინარე, თუ, განვიხილავთ სხეულთა გარსდენის ამოცანებს ბლანტი სითხით, დიდი რეინოლდსის რიცხვის შემთხვევაში, ამონახსნი ახლოს იქნება იდეალური პოტენციალური სითხით, სხეულის გარსდენის ამონახსნებთან ყველგან, გარდა, საზღვრის მახლობელი თხელი ფენისა, რომელსაც **სასაზღვრო ფენს** უწოდებენ.

სასაზღვრო ფენში დიდ მნიშვნელობას იძენს სითხის სიბლანტე და ეს იდეა, დასტურდება ექსპერიმენტებითაც. ისმის კითხვა: როგორ ვიპოვოთ სასაზღვრო ფენის სისქე? პრაქტიკაში, სასაზღვრო ფენის  $\delta(x)$  სისქე ეწოდება ისეთ მანძილს გარსდენადი სხეულის საზღვრიდან, რომელზედაც იდეალური და ბლანტი სითხეების მხები ძაბვები ერთმანეთისაგან განსხვავდება უსასრულოდ მცირე სიდიდით.

ამგვარად, გარსდენადი სხეულის გარეთ არსებული სითხის ნაკადი, შეგვიძლია პირობითად დავყოთ ორ ნაწილად: პირველი ნაწილი - სასაზღვრო ფენია, რომლისთვისაც ვიყენებთ ნავიე-სტოქსის განტოლებებს იმ პირობებში, რომ  $\frac{\delta}{l_0} \ll 1$ , ეს პირობები საშუალებას იძლევა გავამარტივოთ დინამიკის განტოლებები; მეორე ნაწილი - სასაზღვრო ფენის გარეთ მყოფი სითხის ნაწილია, რომელიც შეგვიძლია ჩავთვალოთ იდეალური სითხის პოტენციალურ ნაკადად.

ამრიგად, ბლანტი სითხით სხეულის გარსდენის ამოცანის შესასწავლად, ამოცანას ჯერ ხსნიან იდეალური სითხის პოტენციალური ნაკადის ფარგლებში და შემდეგ, საზღვრის გასწვრივ მიღებულ მხებ ძაბვებს, უტოლებენ სასაზღვრო ფენის გარე საზღვართან არსებულ მხებ ძაბვებს და ხსნიან ნავიე-სტოქსის განტოლებათა გამარტივებულ სისტემას უშუალოდ სასაზღვრო ფენის მოცულობისთვის.

### 5.1. პრანდტლის განტოლებათა სისტემა სასაზღვრო ფენისათვის

განვიხილოთ, ბლანტი სითხის დინება დიდი რეინოლდსების შემთხვევაში  $Re \gg 1$ . გავამარტივოთ ბლანტი სითხის დინამიკის განტოლებები სასაზღვრო ფენისათვის  $\frac{\delta}{l_0} \ll 1$  პირობის საშუალებით. დინებას ჩავთვლით ლამინარულად ანუ  $1 \ll Re < Re_{კრ}$ .

სიმარტივისათვის, განვიხილოთ რომელიმე შეკრული კონტურის გარსდენის ამოცანა, ორგანზომილებიანი ბლანტი სითხის ნაკადით. სასაზღვრო ფენში წერტილის მდებარეობა შეგვიძლია დავახასიათოთ გარსდენადი კონტურის თავში ნაკადის გაშლის წერტილიდან საზღვრის გასწვრივ ათვლილი  $x$  რკალის სიგრძით და კონტურის ნორმალის გასწვრივ, კონტურიდან  $y$  მანძილით. რადგან სასაზღვრო ფენის სისქე გაცილებით მცირეა კონტურის სიმრუდის რადიუსზე, სასაზღვრო ფენის შიგნით  $(x; y)$  შეგვიძლია ჩავთვალოთ დეკარტის კოორდინატებად. თუ არ გვაქვს გარე ძალები, მაშინ ბლანტი სითხის მოძრაობა აღიწერება ნავიე-სტოქსის განტოლებებით:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v}; \quad (5.1)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0. \quad (5.2)$$

განვიხილოთ დინება სასაზღვრო  $0 \leq y \leq \delta(x)$  ფენში. შევეცადოთ შევაფასოთ (5.1),(5.2) განტოლებათა სისტემაში შემავალი წევრები  $\frac{\delta}{l_0} \ll 1$  პირობებში.

სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზე,  $v_x$  მდგენელს აქვს უსასრულოებაში სიჩქარის  $V$  რიგი. ჩავთვალოთ, რომ ამ შეფასებას ადგილი აქვს მთელ სასაზღვრო ფენში ანუ

$$v_x = O(V). \quad (5.3)$$

როცა  $x$  იცვლება ნულიდან  $l_0$  სიდიდემდე, მაშინ სიჩქარე იცვლება  $V$  სიდიდით, მაშასადამე

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = O\left(\frac{V}{l_0}\right); \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = O\left(\frac{V}{l_0^2}\right). \quad (5.4)$$

როცა  $y$  იცვლება ნულიდან  $\delta(x)$ -მდე, მაშინ  $v_x$  იცვლება ნულიდან (საზღვარზე მიკვრის პირობიდან)  $V$  სიდიდემდე, მაშასადამე

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = O\left(\frac{V}{\delta}\right); \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = O\left(\frac{V}{\delta^2}\right). \quad (5.5)$$

$\frac{\delta}{l_0} \ll 1$  პირობიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ  $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ . მაშინ დინამიკის განტოლების პირველი კომპონენტისათვის გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (5.6)$$

შევაფასოთ (5.6) განტოლების მარცხენა ნაწილში მდგარი წევრების რიგი. (5.3),(5.4) შეფასებიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = O\left(\frac{V^2}{l_0}\right). \quad (5.7)$$

$v_y$  სიდიდე შეგვიძლია შევაფასოთ უწყვეტობის განტოლებიდან გამომდინარე. მართლაც

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = O\left(\frac{V}{l_0}\right); \quad v_y = \int_0^y \frac{\partial v_y}{\partial y} dy = O\left(\frac{V\delta}{l_0}\right). \quad (5.8)$$

მაშინ, მივიღებთ რომ

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = O\left(\frac{V\delta V}{l_0 \delta}\right) = O\left(\frac{V^2}{l_0}\right). \quad (5.9)$$

თუ, ჩავთვლით რომ ვიხილავთ მხოლოდ ისეთ არასტაციონარულ დინებას, რომლისთვისაც  $\frac{\partial v_x}{\partial t}$  წევრს იგივე ან უფრო მცირე რიგი აქვს, მაშინ მარცხენა მხარეს ექნება  $O\left(\frac{V^2}{l_0}\right)$  რიგი.

პრანდტლის დაშვებით, სასაზღვრო ფენაში ინერციის და სიბლანტის ხახუნის ძალები ერთნაირი რიგისაა. ამ შემთხვევაში, მივიღებთ რომ

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = O\left(\frac{V^2}{l_0}\right). \quad (5.10)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (5.5) შეფასებებს, მივიღებთ რომ

$$O\left(\nu \frac{V}{\delta^2}\right) = O\left(\frac{V^2}{l_0}\right). \quad (5.11)$$

აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$\left(\frac{\delta}{l_0}\right)^2 = O\left(\frac{\nu}{V l_0}\right) \Rightarrow \frac{\delta}{l_0} = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right). \quad (5.12)$$

მაშასადამე, სასაზღვრო ფენის სისქე  $\frac{1}{\sqrt{Re}}$  რიგისაა, რაც იმას ნიშნავს, რომ რაც მეტია რეინოლდსის რიცხვი მით ნაკლებია სასაზღვრო ფენის სისქე.

ეხლა შევაფასოთ  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$  წევრი. სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზე სტაციონარული მოძრაობისას, ადგილი აქვს ბერნულის ინტეგრალს:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = const. \quad (5.13)$$

აქედან გამომდინარე,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = O \left( \frac{V^2}{l_0} \right). \quad (5.14)$$

ეხლა განვიხილოთ დინამიკის განტოლება სიჩქარის მეორე კომპონენტისათვის და შევაფასოთ მისი წევრები:

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right). \quad (5.15)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} = O \left( V \frac{V \delta}{l_0 l} \right) = O \left( \frac{\delta V^2}{l_0 l_0} \right); \quad v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = O \left( \frac{\delta V^2}{l_0 l_0} \right); \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = O \left( \frac{V \delta}{l_0^2 l_0} \right); \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = O \left( \frac{V}{\delta l_0} \right). \quad (5.17)$$

ცხადია, რომ  $\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$  შეგვიძლია უკუვაგდოთ  $\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$  წევრთან შედარებით. აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = O \left( \frac{\delta V^2}{l_0 l_0} \right). \quad (5.18)$$

თუ, შევადარებთ (5.18)-ს (5.14)-თან, მივიღებთ სასაზღვრო ფენში ადგილი აქვს შეფასებას:

$$O \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\delta}{l_0} O \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (5.19)$$

ამრიგად, სასაზღვრო ფენში წნევა  $x$  ღერძის მიმართულებით უფრო სწრაფად იცვლება, ვიდრე  $y$  ღერძის მიმართულებით. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია (5.15) განტოლება შევცვალოთ განტოლებით:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow p = p(x, t). \quad (5.20)$$

სასაზღვრო ფენის განივკვეთში წნევა არ იცვლება.

ნავიე-სტოქსის განტოლებასთან ერთად, განიხილება უწყვეტობის განტოლება, რომელიც არ იცვლება. ამრიგად, მივიღებთ პრანდტლის სასაზღვრო ფენის განტოლებათა სისტემას, შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (5.23)$$

რადგან სასაზღვრო ფენი ძალიან თხელია, შეგვიძლია წნევის ფუნქცია ავიღოთ შესაბამისი იდეალური, პოტენციალური სითხით გარსდენის ამოცანის ამონახსნიდან. მაშინ, გვაქვს მხოლოდ ორი (5.21),(5.22) განტოლება, სადაც  $\frac{\partial p}{\partial x}$  შეგვიძლია ჩავთვალოთ ცნობილ ფუნქციად.

თუ, დინება დამყარებულია, მაშინ სასაზღვრო ფენის გარეთ ძალაშია ბერნულის განტოლება:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = const \Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (5.24)$$

თუ, სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზე  $u = U$ , მაშინ რადგან  $\frac{\partial p}{\partial x}$  არ არის დამოკიდებული  $y$ -ზე ფენის შიგნით (5.24)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ რომ პრანდტლის განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (5.26)$$

რადგან  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=0}$ , შეგვიძლია  $U$ -ს მაგივრად ავიღოთ იდეალური სითხის ამონახსნის მნიშვნელობა, როცა  $y = 0$ . მაშინ  $U = U_x$  და ის დამოკიდებულია მხოლოდ  $x$ -ზე. შესაბამისი  $v_x$  და  $v_y$  უნდა ვიპოვოთ (5.25),(5.26) განტოლებებიდან შემდეგი სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით:

$$\begin{cases} v_x|_{y=0} = 0 \\ v_y|_{y=0} = 0 \end{cases} \quad 0 \leq x \leq l_0. \quad (5.27)$$

სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზე კი გვაქვს შემდეგი პირობა:

$$v_x = (1 - \varepsilon)U(x); \quad (5.28)$$

სადაც  $\varepsilon$  მოცემული მცირე სიდიდეა.

რადგან სასაზღვრო ფენის სისქე უცნობია (5.28) პირობა არ შეიძლება ჩაითვალოს სასაზღვრო პირობად. ამიტომ სასაზღვრო პირობებს უცვლიან სახეს. სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზე პირობას იქიდან გამომდინარე, რომ  $v_x$  სასაზღვრო ფენის შიგნით სწრაფად მიისწრაფის ზღვრული მნიშვნელობისაკენ სხეულიდან დაშორებისას, ცვლიან პირობით  $y \rightarrow \infty$ .

ამრიგად, გვაქვს მიკვრის (5.27) პირობები და შემდეგი სახეცვლილი სასაზღვრო პირობები:

$$\begin{cases} v_x|_{x=0 \wedge y>0} = U(0) \\ v_x|_{y \rightarrow \infty} = U(x) \end{cases} \quad (5.29)$$

თუ, ამოვხსნით ამოცანას სასაზღვრო ფენში ანუ (5.25),(5.26) განტოლებებს (5.29) სასაზღვრო პირობებში, მაშინ შეგვიძლია ვიპოვოთ სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარი  $\delta(x)$  (5.28) ფორმულიდან.

## 5.2. ბლაზიუსის ამოცანა

განვიხილოთ, ბრტყელი ფირფიტა მოთავსებული ბლანტი სითხის ერთგვაროვან, ორგანზომილებიან ნაკადში. ვთქვათ, ფირფიტის  $l_0$  სიგრძე გაცილებით ნაკლებია მის სისქეზე. ნაკადის მიმართულება პარალელურია ფირფიტის სიბრტყის მიმართულების და ფირფიტის თავის პერპენდიკულარულია. ეს დინება საინტერესოა, რადგან ის იძლევა საშუალებას შევადაროთ ერთმანეთს, თხელ ფირფიტებზე წარმოებული მხები ძაბვები, თვითმფრინავის ფრთაზე მოქმედი ზედაპირული ხახუნის ძალებს. რეალური ობიექტის შესწავლისათვის, ხელსაყრელია ფირფიტის სისქე ჩავთვალოთ ნული ტოლად. იდეალური სითხით გარსდენის შემთხვევაში, ფირფიტას არ შეაქვს შემფოთებები ერთგვაროვან ნაკადში და მისი სიჩქარე იქნება მუდმივი  $U$ -ს ტოლი. რეალური სითხის შემთხვევაში, ფირფიტა ამუხრუჭებს ფირფიტის მახლობელი ბლანტი სითხის ნაკადს, რადგან ფირფიტაზე სრულდება სითხის მიკვრის პირობები და ფირფიტის გარშემო წარმოიქმნება სასაზღვრო ფენა, სადაც სიჩქარე განსხვავებული იქნება  $U$  სიდიდისგან. დამყარებულ ნაკადში, სასაზღვრო ფენის სისქე მცირე

იქნება  $l_0$ -თან შედარებით, როცა  $Re \gg 1$ . სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზე სიჩქარის მნიშვნელობა  $U$ -ს ტოლია. ანალოგიურად, წნევის მნიშვნელობას გარე საზღვარზე მუდმივია და თითქმის მუდმივი იქნება მთელ სასაზღვრო ფენში. შესაბამისად, სასაზღვრო ფენის განტოლებებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.31)$$

თუ, დავუშვებთ რომ

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (5.32)$$

მაშინ უწყვეტობის (5.31) განტოლება ავტომატურად დაკმაყოფილდება და (5.30) განტოლებაში გვექნება ერთადერთი  $\psi$  უცნობი. კოორდინატთა სათავეს თუ მოვათავსებთ ფირფიტის წინა ბოლოში, მაშინ ფირფიტის მეორე ბოლო მოხვდება წერტილში კოორდინატებით:  $x = l_0$ ;  $y = 0$ .

შესაბამის სასაზღვრო პირობებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} u|_{y=0} = 0 \\ v|_{y=0} = 0 \\ \lim_{\substack{y \rightarrow \infty \\ \delta_0}} u = U \end{cases}; \quad 0 \leq x \leq l_0. \quad (5.33)$$

ხოლო გარსმდენი სითხის ნაკადისათვის გვაქვს კინემატიკური პირობა:

$$u|_{x=0} = U. \quad (5.34)$$

ამრიგად, გვაქვს ჩაკეტილი განტოლებათა სისტემა და შესაბამისი სასაზღვრო პირობები.

პირველი ზუსტი ამონახსნი, ლამინარული სასაზღვრო ფენისათვის, როცა ფენის გარე საზღვარზე მოცემულია სიჩქარის გაშლა ხარისხოვან მწკრივად:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i; \quad (5.35)$$

პირველად ააგო ბლაზიუსმა.

უნდა აღინიშნოს, რომ თუ სიჩქარის მოცემა  $U(x)$  სახით, შეესაბამება ღერძსიმეტრიული პროფილის სხეულის გარსდენის შემთხვევას, როცა იერიშის კუთხე ნულოვანია, ხოლო სიჩქარის მუდმივი მნიშვნელობა, შეესაბამება ფირფიტის სიგრძივ გარსდენას.

განვიხილოთ, ფოქნერისა და სკანის მიერ შემოთავაზებული ამონახსნი, როცა სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზე მოცემულ სიჩქარეს აქვს შემდეგი სახე:

$$U(x) = cx^m. \quad (5.36)$$

ცხადია, რომ

$$U'(x) = mcx^{m-1}. \quad (5.37)$$

თუ  $m = 0$ , მაშინ  $U = c$  მნიშვნელობა შეესაბამება ფირფიტის გარსდენას. თუ  $m > 0$ , მაშინ დინება კონფუზორულია, ხოლო თუ  $m < 0$ , მაშინ დინება დიფუზორულია. ამრიგად, (5.36) ფორმულა საკმაოდ უნივერსალურია.

დენის წირისათვის გვაქვს შემდეგი განტოლება:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \quad (5.38)$$

სასაზღვრო პირობები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

გარსდენადი სხეულის ზედაპირზე (ანუ როცა  $y = 0$ )  $\psi = 0$ , რადგან სხეულის ზედაპირი არის დენის ნულოვანი წირი;  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ ; ხოლო სხეულიდან საკმაოდ შორ მანძილზე ( $y \rightarrow \infty$ ),  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow U$ .

იმისათვის, რომ (5.38) კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლება მივიყვანოთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაზე, შემოვიტანოთ ახალი ცვლადები შემდეგი ფორმულებით:

$$\eta_1 = y \sqrt{\frac{cx^{m-1}}{\nu}}; \quad \varphi(\eta_1) = \frac{\psi}{\sqrt{c\nu x^{m+1}}}; \quad (5.39)$$

მაშინ (5.38) განტოლებაში შემავალი სიდიდეები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = cx^m mcx^{m-1} = mc^2 x^{2m-1}; \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = cx^m \varphi'(\eta_1); \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} x^{\frac{2m-1}{2}} \varphi''(\eta_1); \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{c^2}{\nu} x^{2m-1} \varphi'''(\eta_1); \quad (5.41)$$



$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sqrt{c\nu x}^{\frac{m-1}{2}} \left[ \frac{m+1}{2} \varphi(\eta_1) + \frac{m-1}{2} \eta_1 \varphi'(\eta_1) \right]; \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = cx^{m-1} \left[ m\varphi'(\eta_1) + \frac{m-1}{2} \eta_1 \varphi''(\eta_1) \right]. \quad (5.43)$$

თუ (5.40)-(5.43) ფორმულებს შევიტანთ (5.38) განტოლებაში, მივიღებთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\varphi''' + \frac{m+1}{2} \varphi \varphi'' = m((\varphi')^2 - 1). \quad (5.44)$$

ამ განტოლებისათვის გვექნება შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

1. მიკვრის პირობები:

$$\begin{cases} \varphi|_{\eta_1=0} = 0 \\ \varphi'|_{\eta_1=0} = 0 \end{cases}; \quad (5.45)$$

2. პირობები უსასრულობაში (კედლიდან მოშორებით):

$$\lim_{\eta_1 \rightarrow \infty} \varphi' = 1. \quad (5.46)$$

ეს ამოცანა კი იხსნება მიახლოებითი რიცხვითი მეთოდების საშუალებით.

გამოთვლის შედეგებით დგინდება, რომ ხახუნის უგანზომილებო კოეფიციენტი ფირფიტაზე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re}}. \quad (5.47)$$

ამ ფორმულას **ბლაზიუსის კანონს** უწოდებენ. სასაზღვრო ფენის შესაბამისი სისქე იქნება:

$$\delta \approx 2,4 \sqrt{\frac{\nu}{U'}}, \quad (5.48)$$

ამრიგად, სასაზღვრო ფენის იდეა, საშუალებას იძლევა ბლანტი სითხით სხეულთა გარსდენის ამოცანები, გადავწყვიტოთ მაღალი სიზუსტით.

## VI თავი. სითხის დინების მდგრადობა

რეალურ პირობებში, ბლანტი სითხის ლამინარული დინება შესაძლებელია, მხოლოდ, რეინოლდსის რიცხვის მცირე მნიშვნელობების პირობებში. როგორც კი რეინოლდსის რიცხვი გადააჭარბებს მოცემული ამოცანისათვის შესაბამის კრიტიკულ მნიშვნელობას, სითხეში საზღვართან ხახუნის გამო წარმოქმნილი შეშფოთებები გადაეცემა ნაკადს და დინება ხდება არამდგრადი. იცვლება ნაკადის სტრუქტურული სურათი და მცირე შეშფოთებებს ემატება დამატებითი პულსაციები, რის გამოც დინება იძენს ტურბულენტურ ხასიათს. ნაკადის არამდგრადობის თვისებასთან მჭიდრო კავშირშია ტურბულენტობა, თუმცა ეს კავშირი საკმაოდ რთულია. გარე შეშფოთებებზე ზემოქმედებით, შესაძლებელია ტურბულენტობის რეჟიმზე გადასვლის შეფერხება-გადაწევა.

ჰიდროდინამიკური მდგრადობის თეორია საშუალებას იძლევა შევაფასოთ რეინოლდსის კრიტიკული რიცხვის მნიშვნელობა, რომლის შემდეგაც, ლამინარული დინება მცირე შეშფოთებების ზემოქმედებით ჰკარგავს მდგრადობას. მდგრადობადაკარგული დინება არაა აუცილებლად ტურბულენტური. ის შეიძლება იყოს რთული ლამინარული დინება. რეალურად, სტაციონარული დინება არსებობს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ ის მდგრადია, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ის სწრაფად იცვლება და ხდება არასტაციონარული.

ტურბულენტობის მეცნიერულად დასაბუთებული თეორია ჯერ არ არსებობს. ტურბულენტობის ტექნიკური, ნახევრადემპირიული თეორია სწავლობს განვითარებულ ტურბულენტურ ნაკადებს, როცა საშუალო პარამეტრები არ იცვლება დროში; რაც შეეხება, არამდგრადობიდან განვითარებულ ტურბულენტურ დინებამდე გადასვლას, ეს შუალედი ჯერ-ჯერობით არაა ბოლომდე შესწავლილი და მიმდინარეობს კვლევა.

### 6.1. ჰიდროდინამიკური მდგრადობის თეორიის საფუძვლები

ვთქავათ,  $\vec{V}(x; y; z)$  და  $P(x; y; z)$  აკმაყოფილებს ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემას და მაშასადამე, აღწერენ დინამიკურად დასაშვებ ლამინარულ დინებას. განვიხილოთ განმსაზღვრელი

პარამეტრების მცირე არასტაციონარული შეშფოთებები  $\vec{v}_1(x; y; z; t)$  და  $p_1(x; y; t)$ .

განვიხილოთ, შეშფოთებული პარამეტრების მნიშვნელობები ანუ

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{V}(x; y; z) + \vec{v}_1(x; y; z; t) \\ p = P(x; y; z) + p_1(x; y; t) \end{cases} \quad (6.1)$$

შეშფოთებული პარამეტრები შვიტანოთ ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემაში. მაშინ, შეშფოთებებისთვის მივიღებთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 = -\vec{\nabla} p_1 + \frac{1}{Re} \Delta \vec{v}_1; \quad (6.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0. \quad (6.3)$$

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს შეშფოთებათა საწყისი  $\vec{v}_1(x; y; z; 0)$ ;  $p_1(x; y; 0)$  მცირე მნიშვნელობები.

$\vec{V}(x; y; z)$ ;  $P(x; y; z)$  სტაციონარულ ამონახსნს ეწოდება მდგრადი, თუ დროის ზრდისას, შეშფოთებები ნულისკენ მიისწრაფის ანუ თუ, (6.2), (6.3) ამოცანა ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით გვაძლევს ქრობად ამონახსნს და ეწოდება არამდგრადი, თუ შეშფოთებები დროის ზრდისას იზრდებიან.

ითვლება, რომ შეშფოთებების ზრდა ან ქრობა დამოკიდებულია საკუთრივ ნაკადის თვისებებზე.

## 6.2. შეშფოთებათა ენერჯის ბალანსი

ნაკადის მდგრადობაზე, შეგვიძლია ვიმსჯელოთ მოცემულ  $G$  არეზე, სითხის შეშფოთებების კინეტიკური ენერჯის, დროის მიხედვით ცვლილების მიხედვითაც:

$$2E = \int_G |\vec{v}_1|^2 d\tau. \quad (6.4)$$

კინეტიკური ენერჯის ბალანსის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{dE}{dt} = M - \frac{1}{Re} N; \quad (6.5)$$

$$M = -\int_G \vec{v}_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} d\tau; \quad (6.6)$$

$$M = \int_G \left[ \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau. \quad (6.7)$$

როგორც ვხედავთ შეშფოთებების მთლიანი კინეტიკური ენერგია იცვლება შეშფოთებების ძირითად ნაკადთან ურთიერთქმედებით და სითხის სიბლანტით. კინეტიკური ენერგიის ზრდას განაპირობებს ნაკადში მაღალი გრადიენტების არსებობა და რეინოლდსის რიცხვის იმდენად დიდი მნიშვნელობა, რომ სიბლანტისაგან გამოწვეული დისიპაცია ვერ ახდენს ენერგიის სტაბილიზაციას.

(6.5)-(6.7) ფორმულებიდან გამომდინარე, შესაძლებელია რეინოლდსის რიცხვის კრიტიკული მნიშვნელობის შეფასება.

რეინოლდსის კრიტიკული მნიშვნელობის შეფასება შესაძლებელია, აგრეთვე, (6.2),(6.3) სისტემის რიცხვითი ამოხსნის საშუალებითაც, თუმცა, ჯერ-ჯერობით მისი ამოხსნა ნებისმიერი საწყისი პირობებისათვის ვერ ხერხდება. აქედან გამომდინარე, ამონახსნის მდგრადობის გამოკვლევა ხდება გარკვეული სახის შეშფოთებისათვის. თუ, ვიპოვით ამ სისტემის რომელიმე არაჩაქრობად კერძო ამონახსნს, მაშინ შესაბამისი სტაციონარული ამონახსნი არამდგრადია. მდგრადობის დამტკიცება გაცილებით რთულია, რადგან (6.2),(6.3) სისტემის რიცხვითი ამონახსნი უნდა შევისწავლოთ ნებისმიერი საწყისი პირობებისათვის და ის უნდა იყოს ჩაქრობადი. აქედან გამომდინარე, ამ მეთოდით ნაპოვნი რეინოლდსის კრიტიკული რიცხვი, გამოდის რეალობას, ზემოდან ზედმეტად აცილებული.

### 6.3. მცირე რხევათა მეთოდი. ორრ-ზომერფელდის განტოლება

განვიხილოთ სიბრტყის გასწვრივ ლამინარული დინება და შევისწავლოთ მისი მდგრადობა. ასეთ შემთხვევაში, ძირითად ნაკადში გვაქვს სიჩქარის მხოლოდ ერთი არანულოვანი კომპონენტი:

$$U = U(y); \quad V = 0; \quad W = 0. \quad (6.8)$$

მცირე შეშფოთებებისათვის თუ უგულებელვყოფთ კვადრატულ წევრებს, მაშინ (6.2),(6.3) განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \bar{v}_1 + (\bar{v}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} p_1 + \frac{1}{Re} \Delta \bar{v}_1; \\ \vec{\nabla} \cdot \bar{v}_1 = 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი განსაზღვრულია მუდმივის მამრავლის სიზუსტით. აქედან გამომდინარე, შეშფოთებების დამახასიათებელი ამპლიტუდა შეგვიძლია ჩავთვალოთ ნებისმიერ მცირე სიდიდედ.

რადგან (6.9) განტოლებების კოეფიციენტები დამოკიდებულია მხოლოდ  $y$  ცვლადზე, შეგვიძლია შეშფოთებები წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(y) \exp i\xi; \quad (6.10)$$

$$p_1 = p(y) \exp i\xi; \quad (6.11)$$

$$\xi = \alpha x - \omega t; \quad i = \sqrt{-1}. \quad (6.12)$$

სადაც  $\alpha$ ;  $\omega$  მუდმივი რიცხვებია; ხოლო  $\vec{v}(y)$  და  $p(y)$  ამპლიტუდა ფუნქციები.

თუ, (6.10)-(6.12) გამოსახულებებს შევიტანთ (6.9) განტოლებათა სისტემაში, მაშინ ამპლიტუდა-ფუნქციებისათვის მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} i\alpha(U - c)u + U'v = -i\alpha p + \frac{1}{Re}(u'' - \alpha^2 u) \\ i\alpha(U - c)v = -p' + \frac{1}{Re}(v'' - \alpha^2 v) \\ i\alpha u + v' = 0 \end{cases} \quad (6.13)$$

დაშვების თანახმად, (6.10)-(6.12) შეშფოთებები ორგანზომილებიანია ანუ  $w = 0$ .  $\omega$ -ს ნაცვლად კი შემოღებულია  $c = \omega\alpha^{-1}$  ახალი მუდმივი.

გავაწარმოოთ (6.13) სისტემის პირველი განტოლება და გამოვრიცხოთ  $p'$  მეორე განტოლების საშუალებით, ხოლო  $u$  გამოვრიცხოთ მესამე განტოლების დახმარებით. მაშინ მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$v^{iv} - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v = i\alpha \cdot Re \cdot [(U - c)(v'' - \alpha^2 v) - U''v]. \quad (6.14)$$

(6.14) განტოლებას **ორრ-ზომერფელდის განტოლება** ეწოდება.

მეოთხე რიგის განტოლებას ოთხი სასაზღვრო პირობა სჭირდება, რომელთა სახეც დამოკიდებულია კონკრეტულ ნაკადზე. ეს პირობები აუცილებლად უნდა იყოს ერთგვაროვანი, რადგან სითხის შეშფოთება საზღვარზე არ ხდება. მაგალითად, თუ გვაქვს დინება სწორხაზოვანი

საზღვრების მქონე არხში, რომლის მყარი კედლების განტოლებებია  $y = \pm 1$ , მიკვრის პირობებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\{v|_{y=\pm 1} = v'|_{y=\pm 1} = 0. \quad (6.15)$$

როგორც წესი  $Re, \alpha > 0$  მუდმივი რიცხვებია. (6.14),(6.15) ამოცანის არატრიალური ამონახსნები, არსებობს  $c$ -ს მხოლოდ ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის, რომელთაც საკუთრივ მნიშვნელობებს უწოდებენ. მათ შესაბამის  $v(y)$  ფუნქციებს საკუთრივ ფუნქციებს ეძახიან. ზოგად შემთხვევაში, საკუთრივი რიცხვები და ფუნქციები კომპლექსურია, თუმცა, ფიზიკური აზრი (6.10)-(6.12) ამონახსნების მხოლოდ ნამდვილ ნაწილს აქვს. ამ ამოცანას, როგორც წესი, ხსნიან გალიორკინ-პეტროვის მეთოდით.

#### 6.4. რელის განტოლება

რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობებისათვის  $Re \gg 1$ , (6.14) განტოლებაში შეგვიძლია უგულებელვყოთ მცირე მარცხენა მხარე და **ორრ-ზომერფელდის განტოლება** ამ შემთხვევაში, მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(U - c)(v'' - \alpha^2 v) - U''v = 0. \quad (6.16)$$

ამ განტოლებას, **რელის განტოლებას** უწოდებენ. ეს განტოლება შეგვიძლია მივიღოთ ეილერის განტოლებებიდანაც იდეალური სითხისათვის. რელის განტოლება მეორე რიგისაა, აქედან გამომდინარე, ის ვერ დააკმაყოფილებს **ორრ-ზომერფელდის განტოლებისათვის დასმულ ყველა სასაზღვრო პირობას**, თუმცა, ეს განტოლება კარგად აღწერს არამდგრადობას ღია ნაკადებში კედლიდან შორ მანძილზე. ამ შემთხვევაში, ბუნებრივი სასაზღვრო პირობები გვქნება უსასრულობაში:

$$\lim_{y \rightarrow \pm \infty} v = 0. \quad (6.17)$$

ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემის ცნობილი ზუსტი ამონახსნების მდგრადობის შესასწავლად, იყენებენ ზემოთ შესწავლილ მიდგომას და ადგენენ, აგრეთვე, რეინოლდსის რიცხვის კრიტიკულ მნიშვნელობას. ეს მიდგომა ძალაშია, არაწრფივი სითხეებისათვისაც.

## VII თავი. რთული რეოლოგიის სითხეები

### 7.1. რეინერ-რივლინის სითხის მათემატიკური მოდელი

თუ ნოლის თეორემას გამოვიყენებთ რთული რეოლოგიის მქონე სითხეებისათვის  $\sigma_{ij} = f(\dot{\epsilon}_{ij})$ ; მაშინ მივიღებთ ამ თანადობის შესაბამისი, ყველაზე ზოგადი სითხის რეოლოგიურ განტოლებას:

$$\sigma_{ij} = \psi_0 \delta_{ij} + \psi_1 \dot{\epsilon}_{ij} + \psi_2 \dot{\epsilon}_{ik} \dot{\epsilon}_{kj}; \quad (7.1)$$

სადაც  $\psi_i = \psi_i(J_1 \dot{\epsilon}; J_2 \dot{\epsilon}; J_3 \dot{\epsilon})$ .

**განსაზღვრება.** სითხეებს, რომლებიც ემორჩილებიან (7.1) რეოლოგიურ კანონს რეინერ-რივლინის ბლანტი სითხეები ეწოდებათ.

ნიუტონური სითხეები წარმოადგენენ რეინერ-რივლინის სითხის კერძო შემთხვევას, როცა  $\psi_2 = 0$  და  $\psi_1 = const$ ;  $\psi_0 = -p$ .

რეინერ-რივლინის მოდელში არსებული მეორე რიგის წევრი იძლევა საშუალებას შევადგინოთ ისეთი სითხეების მათემატიკური მოდელები, რომელთაც ახასიათებთ დილატაციის თვისება ანუ ფხვიერი, სითხით გაჟღენთილი მასალების თვისება მოძრაობისას „ისუნთქონ-იბუყბუყონ“ სიჩქარის პერპენდიკულარული მიმართულებით.

**რეინერ-რივლინის სითხეებისათვის**, ასევე, დაისმის საწყისი პირობები და სასაზღვრო მიკვრის პირობები.

უფრო რთული რეოლოგიის მქონე ელასტიური მასალების მუშაობის მათემატიკური მოდელის შესადგენად, იყენებენ რივლინის რეოლოგიურ კანონს. რივლინმა დაუშვა, რომ რთული რეოლოგიის მასალა თავის თავში აერთიანებს როგორც დრეკად, ასევე, სიბლანტის თვისებებს ანუ გვაქვს ბლანტ-დრეკადი მასალისათვის, შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\sigma_{ij} = f(\epsilon_{ij}; \dot{\epsilon}_{ij}). \quad (7.2)$$

**რივლინ-ერიკსენის თეორემის** თანახმად, (7.2) რეოლოგიურ კანონს, ყველაზე უფრო ზოგად შემთხვევაში, აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \psi_0 \delta_{ij} + \psi_1 \varepsilon_{ij} + \psi_2 \dot{\varepsilon}_{ij} + \psi_3 (\varepsilon_{ij})^2 + \psi_4 (\dot{\varepsilon}_{ij})^2 + \psi_5 (\varepsilon_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{ij} \varepsilon_{ij}) + \\ & + \psi_6 (\varepsilon_{ij}^2 \dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{ij} \varepsilon_{ij}^2) + \psi_7 (\varepsilon_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^2 + \dot{\varepsilon}_{ij}^2 \varepsilon_{ij}) + \psi_8 (\varepsilon_{ij}^2 \dot{\varepsilon}_{ij}^2 + \dot{\varepsilon}_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^2). \end{aligned} \quad (7.3)$$

**ტრუსდელმა** იგივე მეთოდების საშუალებით ააგო **ჰიპოდრეკადი** მასალი მათემატიკური მოდელი:

$$\dot{\sigma}_{ij} = f(\dot{\varepsilon}_{ij}; \sigma_{ij}). \quad (7.4)$$

მასალებისათვის, რომელთაც ახასიათებთ ბლანტი-ელასტიურობა (ცოცვადობა, მასალები მეხსიერებით), შესაბამის რეოლოგიურ კანონს აქვს შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ij} = f(t; \varepsilon_{ij}; \dot{\varepsilon}_{ij}). \quad (7.5)$$

ასეთი მასალებისათვის რეოლოგიურ კანონს ჩაწერენ შემდეგი ფორმით:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t C_{ijmn}(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{mn}}{d\tau} d\tau; \quad (7.6)$$

სადაც  $C_{ijmn}(t)$  ფუნქციას, მასალის რელაქსაციის ფუნქციას უწოდებენ.

ზოგჯერ, (7.6) რეოლოგიური განტოლების ნაცვლად, იყენებენ შემდეგ ფორმულას:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t Q_{ijmn}(t - \tau) \frac{d\sigma_{mn}}{d\tau} d\tau; \quad (7.7)$$

სადაც  $Q_{ijmn}(t)$  ცოცვადობის ფუნქციაა.

პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით, ყველაზე უფრო ზოგადია ტრუსდელის რეოლოგიური კანონი:

$$F(t; \sigma_{ij}; \varepsilon_{ij}; \dot{\sigma}_{ij}; \dot{\varepsilon}_{ij}; \ddot{\sigma}_{ij}; \ddot{\varepsilon}_{ij}) = 0. \quad (7.8)$$

რეოლოგიური კანონის დადგენა ხდება ექსპერიმენტის მეშვეობით, რასაც წინ უძღვის პროცესებისა და მასალების მეცნიერული ანალიზი. ექსპერიმენტის მასალების დამუშავება კი ხდება სტატისტიკის მეთოდებით. ცხადია, რომ რაც უფრო მეტ თვისებებს გავითვალისწინებთ, მით უფრო რთული იქნება მიღებული მათემატიკური მოდელის მიხედვით კონკრეტული ამოცანების ამოხსნა; თუმცა, პრაქტიკული ამოცანებიდან გამომდინარე, ზოგჯერ, იძულებული ვართ, წავიდეთ კომპრომისზე და განვიხილოთ რთული, მრავალკომპონენტიანი სითხეების მათემატიკური მოდელებიც.



## 7.2. წყალ-ტალახოვანი სელის დახრილ სადინარში მოძრაობის მათემატიკური მოდელირება და განმსაზღვრელი პარამეტრების გათვლა

სელური ნაკადი მთიანი რეგიონის სხვა დამანგრეველ სტიქიურ პროცესებთან ერთად, როგორცაა: წყალდიდობები, ქვათაცვენა, მეწყერი, თოვლის ზვავი და მიწისძვრა, დიდ საშიშროებას წარმოადგენს ადამიანისა და საინჟინრო ნაგებობებისათვის.

ქვა-ტალახოვანი, წყალ-ქვიანი და წყალ-ტალახოვანი სელები, პრაქტიკულად, მოულოდნელად წარმოიქმნებიან და წარმოადგენენ მთიანი რეგიონის კალაპოტში ქანობებისაგან მოწყვეტილი ქვებისა და წყლიანი, ქვა-ღორღიანი მასის მოძრავ ნაკადს.

ასეთი ნაკადები, მოკლე დროის განმავლობაში ანადგურებენ ხიდებს, გზებს, ჰიდრო-ელექტრო სადგურებს, ნატანით ფარავენ სავარგულებს, არხებს და დასახლებულ ადგილებს.

ამჟამად, მიუხედავად მრავალი მეცნიერის ძალისხმევისა (Гагошидзе М. С., 1949 – 1970), ჯერ-ჯერობით ცოტაა, მეცნიერულად დასაბუთებული მათემატიკური მოდელი, რომელიც პრაქტიკული სიზუსტით მოგვცემდა სელური ნაკადის წარმოშობის, დინამიკის და დამანგრეველი დატვირთვების პროგნოზს. სელურ ნაკადებთან დაკავშირებული მრავალი საკითხი განსაკუთრებით კი დინამიკა, პროცესის სირთულის გამო ნაკლებადაა შესწავლილი.

### 7.2.1. სელური ნაკადის წარმოქმნის კონცეპტუალური მოდელი

სელური ნაკადის წარმოქმნა, დაკავშირებულია მთის მდინარეთა ქანობების მდგრადობის დაკარგვასთან, რაც იწვევს მათ ჩამოშლას, მეწყერის წარმოქმნას და კალაპოტის გადაკეტვას. დაგროვილი წყალი ბუნებრივ დამბას გაარღვევას და ქვა-ღორღიან მასასთან ერთად მოედინება კალაპოტში მაღალი სიჩქარით, ასეთი ნაკადი წარმოადგენს ღვარცოფს (სელს), რომელსაც მაღალი კინეტიკური ენერგიის გამო, დიდი ზარალის მოტანა შეუძლია, ამიტომ იქ, სადაც კალაპოტი ვიწროვდება, აშენებენ რკინა-ბეტონის ცხავური ტიპის ნაგებობებს (ი.ხერხეულიძე), რომელიც აკავებს სელური ნაკადის მსხვილ ფრაქციებს (დიდი ზომის ქვებს, ბუჩქებს, ხეებს . . .), რაც ამცირებს

ნაკადის კინეტიკურ ენერგიას, თუმცა, ნაწილობრივ ინგრევა სელის გავლისას (Херхеулидзе Г. И., 1958, 1962), მაგალითად ნახ. 7.1 მდინარე დურუჯის ხეობა ყვარელის რაიონში.



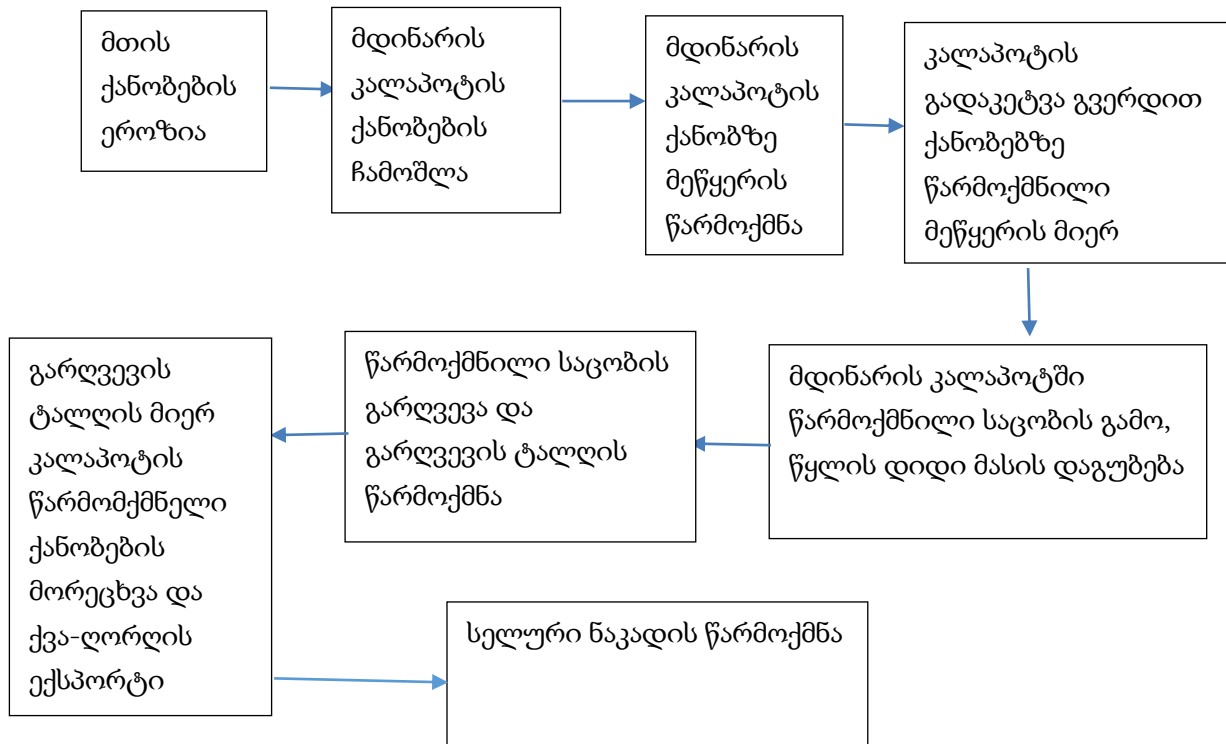
ნახ. 7.1. ი.ხერხეულიძის ცხავური ტიპის სელდამჭერი ნაგებობა

ამის შემდეგ, სელი წარმოადგენს წვრილი ქვა-ლორლისა და ტალახის ნაკადს, რომელსაც შეუძლია მორეცხოს კალაპოტის სანაპირო ზოლი, ნატანით დააბინძუროს სავარგულები, დაანგრიოს საინჟინრო ნაგებობები. ზარალის ასაცილებლად კალაპოტის ქვედა ბიეფის ნაპირებს ამაგრებენ ბადური ტიპის კონსტრუქციებით, ჯებირებით და ა.შ. ნახ. 7.2



ნახ. 7.2. ნაპრსამაგრი ბადე და ჯებირი

სელური ნაკადის წარმოქმნის მექანიზმი, შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი სქემით:



ნახ. 7.3. სელური ნაკადის წარმოქმნის სქემა

მიუხედავად, ზემოთ მოყვანილი დამცავი ღონისძიებებისა, სელური ნაკადი დიდ საშიშროებას უქმნის შემხვედრ საინჟინრო ნაგებობებს. მოსალოდნელი ზარალის შესაფასებლად და მთიან რეგიონში ნაგებობათა ოპტიმალური პროექტირებისას, მნიშვნელოვანია პრაქტიკული სიზუსტით შევაფასოთ ნაგებობებზე მოსალოდნელი დატვირთვები.

აქედან გამომდინარე, საჭიროა ავაგოთ წყალ-ტალახოვანი სელური ნაკადის ადეკვატური მათემატიკური მოდელი.

### 7.2.2. წყალ-ტალახოვანი სელური ნაკადის მათემატიკური მოდელი

სელური ნაკადი წარმოადგენს, ქვა-ლორღისა და წყალ-ტალახოვანი კომპონენტებისაგან შემდგარ ნაკადს. საინჟინრო ნაგებობებთან ურთი-ერთქმედებისას, სელურ ნაკადში წარმოიქმნება მაღალი წნევა. მაღალი წნევის პირობებში, სითხის რეოლოგია კარგად აღიწერება გენიევ-გოგოლაძის ბარო-ბლანტი სითხის მათემატიკური მოდელით (Гениев Г. А., Гоголадзе Р. В. 1985, 1987).

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + (\mu_0 + \lambda p)(v_{i,j} + v_{j,i}). \quad (7.9)$$

როგორც ვხედავთ, გენიევ-გოგოლაძის რეოლოგიური განტოლება, წარმოადგენს ნიუტონური სითხის მოდელის განზოგადებას.

თუ  $\lambda = 0$ , მაშინ ბარო-ბლანტი სითხის რეოლოგიური განტოლება ემთხვევა არაკუმშვადი ნიუტონური სითხის რეოლოგიურ განტოლებას:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu_0(v_{i,j} + v_{j,i}). \quad (7.10)$$

ბარო-ბლანტი სითხის რეოლოგიური განტოლება პირველად ააგო პროფესორმა გ.გენიევმა, ხოლო ამ მოდელის დაწვრილებითი შესწავლა განახორციელა მისმა ასპირანტმა რ.გოგოლაძემ. მან აჩვენა რომ, ეს მოდელი კარგად მუშაობს მაღალი წნევის პირობებში.

სელური ნაკადი წარმოადგენს წყლისა და შეტივტივებული ქვალორლის ნარევს. ასეთი ტიპის ნაკადების მოდელირებისათვის არსებობს რამდენიმე ტიპის მიდგომა:

ა) სელის მთელ მასას უყურებენ, როგორც ერთიან უკუმშ მყარ წარმონაქმნს და სწავლობენ მისი სიმძიმის ცენტრის დინამიკას თეორიული მექანიკის მეთოდებით, რაც მეტად უხეშ შედეგებს იძლევა, თუმცა, გვაძლევს ცხავური ტიპის ნაგებობებზე საშუალო მოსალოდნელი დატვირთვების ანგარიშის საშუალებას:

ბ) ნარევის თითოეული კომპონენტისათვის წერენ დინამიკის განტოლებებს, სადაც კომპონენტების ურთიერთქმედებიდან გამომდინარე, უმატებენ ურთიერთქმედების შესაბამის წევრებს, რაც მეტად სქემატური წარმოდგენაა, რადგან საინჟინრო ნაგებობათა გარსდენისას დაგროვილი მყარი ნატანის მასის გამოყოფა არ ხერხდება; გ) ადგენენ ერთი ჰიპოთეტური სითხის მოდელს, რომელიც გასაშუალებულად მოიცავს ნარევის ყველა კომპონენტის თვისებას.

ჩვენ ვცდილობთ გამოვიყენოთ ბ) და გ) მიდგომების დადებითი მხარეები და სელური ნაკადი წარმოვადგინოთ, როგორც წყალტალახოვან-ქვალორლიანი ნაკადი, რომელიც ერთის მხრივ შეიცავს გენიევ-გოგოლაძის არაკუმშვად სითხეს, რაც საშუალებას გვაძლევს საინჟინრო ნაგებობების გარსდენისას წარმოქმნილი მაღალწნევიანი სითხის თვისებები გავითვალისწინოთ და მეორე მხრივ, წყლის ნაკადის დინამიკური თვისებები აღვწეროთ, ხოლო ამ ორი

კომპონენტის ურთიერთქმედება გავითვალისწინოთ თ.ვოინიჩის იდეის მიხედვით ანუ დიფუზიის განტოლებით ერთ-ერთი კომპონენტისათვის.

აქედან გამომდინარე, ღვარცოფული ნაკადის მათემატიკური მოდელირებისათვის მიზანშეწონილია, რომ გამოვიყენოთ თ.ვოინიჩ-სიანოჟენცის გასაშუალების მეთოდი სიმკვრივისათვის, რომლის თანახმადაც ნარევის  $\rho$  სიმკვრივე, გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$\rho = s\rho_s + (1 - s)\rho_w; \quad (7.11)$$

(7.9) ფორმულაში შემავალი ბაროდიფუზიის  $\lambda$  კოეფიციენტი გავშალოთ ტეილორის მწკრივად:

$$\lambda = f(s) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}s + O(s^2); \quad (7.12)$$

თუ, მყარი ნატანის კონცენტრაცია ნულის ტოლია, მაშინ გვაქვს მხოლოდ თხევადი კომპონენტი ანუ

$\lambda = 0 \Rightarrow f(0) = 0$  და  $\frac{f'(0)}{1!} = \lambda_0 = const.$  მაშასადამე,  $f(s) \cong \lambda_0 s$ .  
თუ, ჩავთვლით, რომ  $\lambda_0 = 1$ , მაშინ მივიღებთ რეოლოგიურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + (\mu_0 + sp)(v_{i,j} + v_{j,i}). \quad (7.13)$$

აქედან გამომდინარე, დინამიკის  $\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i$  განტოლებებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$-p_{,j} \delta_{ij} + (s_{,j}p + p_{,j}s)(v_{i,j} + v_{j,i}) + (\mu_0 + sp)(v_{i,jj} + v_{j,ij}) + \rho b_i = \rho \dot{v}_i. \quad (7.14)$$

რადგან ნარევის სიმკვრივე  $\rho = s\rho_s + (1 - s)\rho_w = s(\rho_s - \rho_w) + \rho_w$ , უწყვეტობის  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho v_{i,i} = 0$  განტოლება, შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_k \frac{\partial s}{\partial x_k} + \frac{s\rho_s + (1-s)\rho_w}{\rho_s - \rho_w} \cdot v_{i,i} = 0. \quad (7.15)$$

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ჩაკეტვას, ვაღწევთ დიფუზიის განტოლების საშუალებით:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_k \frac{\partial s}{\partial x_k} = D s_{,ii}. \quad (7.16)$$

სადაც  $D$  მექანიკური დიფუზიის კოეფიციენტი.

ამრიგად, აგებულია სელური ნაკადის დინამიკის მათემატიკური მოდელი (7.14),(7.15),(7.16), რომელიც შედგება 5 განტოლებისაგან და შეიცავს 5 უცნობს:  $v_1; v_2; v_3; p; s$ .

ამ განტოლებათა სისტემას უნდა მივუერთოთ მყარ საზღვრებთან მიკვრის დირიხლეს ერთგვაროვანი პირობები:

$$v_i|_{\partial\Omega} = 0; \quad (7.17)$$

საწყისი პირობები:

$$v_i|_{t=0} = v_i(x_1, x_2, x_3); \quad s|_{t=0} = s(x_1, x_2, x_3); \quad (7.18)$$

და ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე კინემატიკური პირობები, მაგალითად, წნევა თავისუფალ ზედაპირზე უდრის ატმოსფერულ წნევას:

$$p|_{\partial\Omega_0} = p_{atm}; \quad (7.19)$$

### 7.2.3. მყარი ტალახოვანი ფრაქციის ნაწილაკების სედიმენტაციის ამოცანა

სელური ნაკადის მოდელის ბაზაზე განვიხილოთ ნარევის წონასწორობის განტოლებები, რათა დავადგინოთ ტალახოვანი ფრაქციის ნაწილაკების განაწილების კანონი სიღრმის მიხედვით (სედიმენტაცია). წონასწორობისას მოძრაობის სიჩქარე ნულის ტოლია. მაშასადამე, მოდელის განტოლებებიდან მივიღებთ სისტემას:

$$-p_{,i} + \rho b_i = 0; \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0; \quad (7.21)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = Ds_{,ii}. \quad (7.22)$$

მიღებული (7.20),(7.21),(7.22) სისტემიდან ცხადია, რომ წონასწორობისას ანუ როცა, ბუნებრივი დამბის ზედა ბიეფში დაგროვილი კომპოზიციური მასალის მოძრაობა, ხდება მხოლოდ შევსების ხარჯზე და ძირითადი მასა ჯერ თითქმის უძრავია დამბის მიერ არსებული შეზღუდვის გამო, დამბის სიახლოვეს ხდება ქვადორღის მასალის დალექვა და (7.21) განტოლებიდან გამომდინარე,

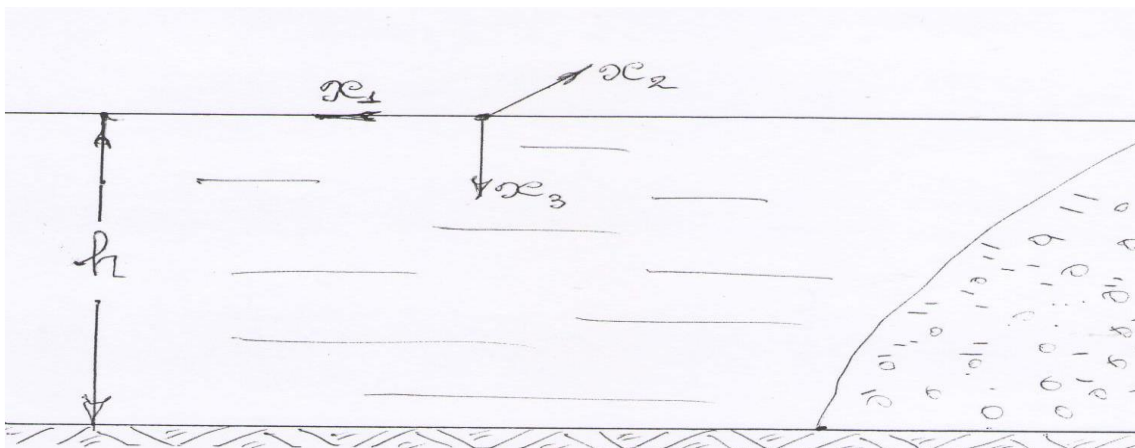
ბარო-ბლანტი მასის  $s$  კონცენტრაცია, დროის მიხედვით არ იცვლება. მაშასადამე, წონასწორობისას კონცენტრაციის განაწილება (7.22) განტოლებიდან გამომდინარე, არის ჰარმონიული ფუნქცია:

$$s_{,ii} = 0. \quad (7.23)$$

კონცენტრაციის განაწილების გამოსათვლელად, უნდა ამოვხსნათ დირიხლეს ამოცანა ლაპლასის განტოლებისათვის, სადაც სასაზღვრო პირობა იქნება დამბის მახლობლობაში წყალ-ტალახოვანი ნარევის ფსკერზე ნატანის დალექვის პირობა, ხოლო ღია ზედაპირზე მყარი ნაწილაკების არ არსებობა ანუ

$$\begin{cases} s|_{x_3=h} = 1 \\ s|_{x_3=0} = 0 \end{cases}. \quad (7.24)$$

ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე, კონცენტრაციის სიღრმის მიხედვით განაწილების ამოცანა არის ერთგანზომილებიანი ნახ. 7.4.



ნახ. 7.4. კომპოზიციური სითხის წონასწორული მდგომარეობა დამბის გარღვევამდე

აქედან გამომდინარე, (7.23)-დან მივიღებთ რომ

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x_3^2} = 0. \quad (7.25)$$

ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$s = C_1 x_3 + C_2. \quad (7.26)$$

სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$C_2 = 0 \text{ და } C_1 = \frac{1}{h}. \quad (7.27)$$

მაშასადამე, მყარი ფრაქციის სიღრმის მიხედვით განაწილებას ექნება შემდეგი სახე:

$$s = \frac{1}{h} x_3. \quad (7.28)$$

მაშინ წნევის განაწილება სიღრმის მიხედვით მოიცემა შემდეგი განტოლებით:

$$p_{,3} = \rho g; \quad (7.29)$$

სადაც

$$\rho = s(\rho_s - \rho_w) + \rho_w. \quad (7.30)$$

მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ (7.28) ამონახსნს, გვექნება რომ

$$\rho = \frac{1}{h} x_3 (\rho_s - \rho_w) + \rho_w. \quad (7.31)$$

თუ შევიტანთ (7.31) ფორმულას (7.29) განტოლებაში და ვაინტეგრებთ, მივიღებთ, რომ

$$p = C_0 + \rho_w g x_3 + \frac{x_3^2}{2h} (\rho_s - \rho_w) g; \quad (7.32)$$

სადაც  $C_0$  მუდმივის საპოვნელად გვჭირდება სასაზღვრო პირობა:

$$p|_{x_3=0} = p_{atm.}; \quad (7.33)$$

სადაც  $p_{atm.}$  ატმოსფერული წნევაა კომპოზიციური ხსნარის თავისუფალ ზედაპირზე.

მაშინ მივიღებთ რომ, წნევის განაწილება ნარევის უძრავ ნაკადში იძლევა შემდეგ, სუსტად კვადრატულ კანონს:

$$p = p_{atm.} + \rho_w g x_3 + \frac{x_3^2}{2h} (\rho_s - \rho_w) g. \quad (7.34)$$

(7.34) ფორმულიდან გამომდინარე, უძრავი წყალ-ტალახოვანი ნარევის ფსკერზე წნევა იქნება მაქსიმალური და მისი სიდიდე იქნება:

$$p = p_{atm.} + \rho_w g h + \frac{h}{2} (\rho_s - \rho_w) g. \quad (7.35)$$



ამრიგად, მივიღეთ წყალ-ტალახოვანი სელური ნაკადის წონასწორობის განტოლებები, რამაც საშუალება მოგვცა გვეპოვა: სიღრმის მიხედვით მყარი კომპონენტის კონცენტრაციისა და წნევების განაწილება.

თუ, სითხე ერთგვაროვანია ანუ  $\rho_s = \rho_w$ , მაშინ (7.35) განტოლება გადადის კლასიკურ ჰიდროსტატიკურ კანონში:

$$p = p_{atm.} + \rho_w g h. \quad (7.36)$$

#### 7.2.4. წყალ-ტალახოვანი სელური ნაკადის მათემატიკური მოდელის ჩაწერა ეილერის ტრადიციულ ცვლადებში

თუ, შემოვიღებთ ტრადიციულ აღნიშვნებს, მაშინ მოდელის განტოლებებიდან მივიღებთ, რომ კომპოზიციური სითხის მათემატიკურ მოდელს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \frac{\lambda p}{\rho} L_{11}(u, v, w, s) + \frac{\lambda s}{\rho} L_{12}(u, v, w, p) + \frac{\mu_0 + s \lambda p}{\rho} (\Delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}) &+ b_1; \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ + \frac{\lambda p}{\rho} L_{21}(u, v, w, s) + \frac{\lambda s}{\rho} L_{22}(u, v, w, p) + \frac{\mu_0 + s \lambda p}{\rho} (\Delta v + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}) &+ b_2; \end{aligned} \quad (7.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ + \frac{\lambda p}{\rho} L_{31}(u, v, w, s) + \frac{\lambda s}{\rho} L_{32}(u, v, w, p) + \frac{\mu_0 + s \lambda p}{\rho} (\Delta w + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}) &+ b_3; \end{aligned} \quad (7.39)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{s \rho_s + (1-s) \rho_w}{\rho_s - \rho_w} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0; \quad (7.40)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z} = D \Delta s; \quad (7.41)$$

სადაც

$$\rho = s(\rho_s - \rho_w) + \rho_w; \quad (7.42)$$

$$L_{11}(u, v, w, s) = 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial z};$$

$$L_{12}(u, v, w, p) = 2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x};$$

$$L_{21}(u, v, w, s) = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial z};$$

$$L_{22}(u, v, w, p) = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y};$$

$$L_{31}(u, v, w, s) = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial s}{\partial y};$$

$$L_{32}(u, v, w, p) = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z};$$

ამ არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად, შემუშავებულია ალგორითმი, რვაჩოვ-ობგაძის ვარიაციულ მეთოდზე დაყრდნობით და ამოხსნილია რიგი ცნობილი გარსდენის ამოცანებისა.

### 7.2.5. ორფაზა ნაკადის აგებული მოდელის გამოკვლევა

ჩვენს მიერ აგებული ორფაზა ნაკადის მათემატიკური მოდელი აღწერს არა მხოლოდ სელურ ნაკადს, არამედ საზოგადოდ, ორფაზა ქიმიურად არაურთიერთქმედი სუსპენზიის ნაკადს.

შევისწავლოთ ამ ნაკადის თავისებურებები.

**სუსპენზიის კინემატიკური თეორემა:** კონცენტრირებული სუსპენზიის სტაციონარულ ნაკადში, როდესაც მყარი ფრაქციის და თხევადი ფრაქციის სიმკვრივეები მცირედ განსხვავდება ერთმანეთისაგან: ა) მყარი ფრაქციის კონცენტრაციათა გრადიენტული ველი ორთოგონალურია ნაკადის სიჩქარეთა ველისა; ბ) კონცენტრაციათა ველი ჰარმონიულია.

**დამტკიცება:** განვიხილოთ უწყვეტობის და მყარი ნაწილაკების დიფუზიის განტოლებები ერთ სისტემაში:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + v_k \frac{\partial s}{\partial x_k} + \frac{s\rho_s + (1-s)\rho_w}{\rho_s - \rho_w} \cdot v_{i,i} = 0; \\ \frac{\partial s}{\partial t} + v_k \frac{\partial s}{\partial x_k} = DS_{,ii}. \end{cases} \quad (7.43)$$

სისტემის პირველი განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ სუსპენზიის მყარი და თხევადი ფრაქციების სიმკვრივეები ერთმანეთისაგან მცირედ განსხვავდება, მაშინ ნარევის სიმკვრივე მცირედ განსხვავდება მყარი ფრაქციის ნაწილაკების სიმკვრივეზე და სუსპენზია, შეგვიძლია ჩავთვალოთ არაკუმშვად სითხედ. მაშინ, ცხადია რომ  $v_{i,i} = 0$  სისტემა (7.43) მიირებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + v_k \frac{\partial s}{\partial x_k} = 0; \\ S_{,ii} = 0. \end{cases} \quad (7.44)$$

თუ, დინება სტაციონარულია, მაშინ (7.44) სისტემის პირველი განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$v_k \frac{\partial s}{\partial x_k} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \text{grad } s = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \text{grad } s. \quad (7.45)$$

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ სუსპენზიის კინემატიკური თეორემის ა) პუნქტი.

ბ) პუნქტის ჭეშმარიტება კი გამომდინარეობს (7.44) სისტემის მეორე განტოლებიდან. რ.დ.გ.

## ლიტერატურა

1. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика, учеб. пос., Машиностроение, Москва, 1987.
2. Фролов Ю.Г. Курс коллоидной химии. — М.: Химия, 1988.
3. Титенс О. Гидро\_ и Аэромеханика, под ред. Л.Прандтля, том 1, Москва, 1933.
4. Прандтль Л., Титенс О. Гидро\_ и Аэромеханика, под ред. Л.Прандтля, том 2, Москва, 1935.
5. Прандтль Л. Гидроаэромеханика, Ижевск, 2000.
6. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика, Наука, Москва, 1969.
7. Келдыш М.В. К теории крыла конечного размаха, колеблющегося в потоке воздуха, ДАН СССР, т.21, №5, 1938.
8. Рахматулин Х.А., Сагомоян А.Я., Бунимович А.И., Зверьев Н.И. Газовая динамика, Москва, 1965.
9. Петров Г.И. О распределении колебаний в вязкой жидкости и о возникновении турбулентности, Москва, 1938.
10. Биркгоф Г. Гидродинамика, пер. с англ., Москва, 1954.
11. Oden J.T. Finite elements of nonlinear continua, New York, 1972.

12. Черный Г.Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью, Москва, 1959.
13. Повх И.Л. Техническая гидромеханика, Ленинград, 1969.
14. Валандер С.В. Лекции по гидроаэромеханике, Ленинград, 1978.
15. Гениев Г.А., Гоголадзе Р.В. Одномерное установившееся движение несжимаемой бара-вязкой среды, Доклады АН Грузии, т.128, №2, 1987.
16. Гениев Г.А. Строительная механика и расчёт сооружений, №2, 1985.
17. Эйнштейн А. Новое определение размеров молекул/ А. Эйнштейн // Собр. науч. трудов. Под редакцией И.Е. Тамма, Я. А. Смородинского, Б.Г. Кузнецова, Москва, Наука, 1965, т. 3.
18. Джеффри Дж. Jeffery G.B. The Motion of Ellipsoidal Particles Immersed in a Viscous Fluid/ G.B.Jeffery // Proceedings of the Royal Society of London – Ser. A. – 1922. – v. 102.
19. Бреннер Г. Реология двухфазных систем/ Г. Бреннер// Реология суспензий – Москва: Мир, 1975.
20. Буевич Ю.А. Реология концентрированных смесей жидкости с мелкими частицами. Параметры межфазного взаимодействия /Ю.А. Буевич, В.Г. Марков// Прикл. мат и мех. 1972. – т. 36. – №3 – С.
21. Бэтчелор Дж. Успехи микрогидродинамики/ Дж. Бэтчелор// В кн. Теоретическая и прикладная гидромеханика, Труды XIV международного конгресса механиков – Москва: Наука, 1979.
22. Гидродинамическое взаимодействие частиц в суспензиях: пер. с англ. под ред. Буевича Ю.А./ Серия Механика. Новое в зарубежной науке – № 22/ Ред. серии Ишлинский А.Ю., Черный Г.Г.– Москва: Мир, 1980.

## შინაარსი

შესავალი		გვ.
I თავი	სითხეების ფიზიკური თვისებები და კინემატიკა	6
	1.1 უწყვეტობის ჰიპოთეზა	7
	1.2 სითხის სიმკვრივე	7
	1.3 სითხეზე მოქმედი ძალები	9
	1.4 სითხის სიბლანტე	10
	1.5 ჰენრი-დალტონის კანონი. დეგაზაცია. დუღილი. კავიტაცია	13
	1.6 სითხეში გახსნილი გაზის კონცენტრაციის	15

		გავლენა სიბლანტის კოეფიციენტზე	
	1.7	სითხის ზედაპირული დაჭიმულობა და კაპილარული მოვლენები	15
	1.8	წყლის განსაკუთრებული თვისებები	18
	1.9	სითხეების დინამიკის მათემატიკური მოდელირების საფუძვლები	19
	1.10	სკალარული ველი ევკლიდეს სივრცეში. სკალარული ველის გრადიენტი	23
	1.10.1	სკალარული ველის გრადიენტი	24
	1.11	ვექტორული ველი. ვექტორული ველის პოტენციალი. ვექტორული ველის ძალწირები. გრიგალის ცნება და მისი ჰიდროდინამიკური შინაარსი. ვექტორული ველის ცირკულაცია შეკრულ წირზე	27
	1.12	ვექტორული ველის ნაკადი. დივერგენცია. გაუსის ფორმულა	33
	1.13	სტოქსის ფორმულა. დივერგენციის თვისებები	37
	1.14	ჰამილტონის $\nabla$ ოპერატორი და მისი თვისებები	38
	1.15	კუმშვადი სითხის მდგომარეობის განტოლება	38
	1.16	სითბოგადაცემა სითხეებსა და გაზებში	39
	1.17	ენერჯის შენახვის კანონი. სითბოს გადატანის განტოლება	41
	1.18	ძაბვის ვექტორი და ძაბვის ტენზორის კომპონენტები. დინამიკის განტოლება კოშის ფორმით	43
	1.19	დიფუზია და მასის გადატანა სითხეში	49
II თავი		ეილერის იდეალური სითხის მათემატიკური მოდელი და მისი გამოყენების საზღვრები	52
	2.1	ეილერისა და ლაგრანჟის ცვლადები	53
	2.2	იდეალური უკუმში სითხის დინამიკის, ეილერის მათემატიკური მოდელი	56
	2.2.1	იდეალური, უკუმში სითხის უწყვეტობის განტოლება	58
	2.2.2	საწყისი და სასაზღვრო პირობები უკუმში იდეალური სითხისათვის	59
	2.2.3	მექანიკური ენერჯის შენახვის კანონი	61

		არაკუმშვადი იდეალური სითხის ნაკადისათვის	
	2.2.4	ბერნულის ინტეგრალი არაკუმშვადი იდეალური სითხისათვის	63
	2.2.5	ბერნული-კოშის ინტეგრალი არასტაციონალური, პოტენციალური, არაკუმშვადი იდეალური სითხის ნაკადისათვის	63
	2.2.6	არაკუმშვადი იდეალური სითხის პოტენციალური და გრიგალური დინება	64
	2.2.7	არაწრფივი ტალღების გავრცელების ზოგადი ამოცანა იდეალური არაკუმშვადი სითხის ზედაპირზე	66
	2.2.7.1	მცირე სიღრმის წყალში, ზედაპირული ტალღების დინამიკის მათემატიკური მოდელირება	67
	2.2.7.2	ბუსინესკის და კორტევეგ-დე ფრიზის განტოლებების გამოყენება. ტალღის გავრცელება წყლის არხში	69
	2.3	კუმშვადი, იდეალური, ბაროტროპული სითხეების (გაზების) დინამიკის მოდელირება	70
	2.4	კუმშვადი სითხის (გაზის) ერთგანზომილებიანი დინამიკა (ჰიდრაულიკა)	72
	2.4.1	თერმოდინამიკის პირველი კანონი. ბგერის სიჩქარე	73
	2.4.2	ბერნულის ინტეგრალი იდეალური გაზის ადიაბატური მოძრაობისათვის	76
	2.4.3	დამუხრუჭებული გაზის პარამეტრები. ენტროპია	79
	2.4.4	გაზის გამოსვლა საწვავი კამერიდან. მაქსიმალური და კრიტიკული სიჩქარე	81
	2.4.5	გაზის მოძრაობა ცვლადი განივკვეთის მილში. ლავალის საქმენი	84
	2.5	იდეალური გაზის ბრტყელი, პოტენციალური მოძრაობის მათემატიკური მოდელი	86
III თავი		ბლანტი სითხის დინამიკის ნავიე-სტოქსის მათემატიკური მოდელი და მისი გამოყენების საზღვრები	89

	3.1	ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემის ვექტორული ჩაწერა დეკარტის ცვლადებში	90
	3.2	ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემა ბლანტი არაკუმშვადი სითხისათვის. მსგავსების კოეფიციენტები და უგანზომილებო ცვლადებზე გადასვლა	91
	3.3	ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემის ზუსტი ამონახსნები	95
	3.3.1	ლამინარული (ფენოვანი) დინება	95
	3.3.2	ნაკადის ტანგენციალური წყვეტა	97
	3.3.3	სითხის მოძრაობა მყარი საზღვრის ზედაპირის მოძრაობისას	98
	3.3.4	გრძივი წნევათა გრადიენტით გამოწვეული სითხის მოძრაობა	98
	3.3.5	სითხის ერთგანზომილებიანი მოძრაობა სიმძიმის ძალის გავლენით	100
	3.3.5.1	სითხის მოძრაობა ვერტიკალურად განლაგებულ ცილინდრულ მილში სიმძიმის ძალის გავლენით	101
	3.3.5.2	სითხის ღერძულ-სიმეტრიული მოძრაობა	102
	3.3.5.3	სითხის მოძრაობა ორ კოაქსიალურ ცილინდრს შორის	102
	3.4	სითხის მოძრაობის არაწრფივი განტოლებების ავტომოდელური ამონახსნები	103
	3.4.1	ხიმენც-ხოუარტის ამოცანა	104
	3.4.2	ჯეფრი-გამელის ამოცანა	105
	3.4.3	კარმანის ამოცანა მბრუნავი სითხისათვის	107
	3.4.4	ლანდაუს ამოცანა სითხის ჭავლის შესახებ	109
	3.4.5	მერედეტ-გრიფიტის ამოცანა (დინების მართვა საზღვრის ზედაპირის გამჭოლი დინებით)	111
	3.4.6	თ.ობგადის ამოცანა	112
IV თავი		ბლანტი სითხის დინება რეინოლდსის მცირე რიცხვის შემთხვევაში $Re \ll 1$	114
	4.1	სტოქსის განტოლებები	114
	4.1.1	სფეროს გრსდენის ამოცანა მცირე რეინოლდსის რიცხვებისათვის	116

	4.1.2	სტოქსის პარადოქსი. წრიული განივკვეთის ცილინდრის გარსდენის ამოცანა	118
	4.2	ოზინის განტოლებები	119
V თავი		პრანდტლის თეორია სასაზღვრო ფენის შესახებ. ბლანტი სითხის დინება რეინოლდსის დიდი რიცხვების შემთხვევაში $Re \gg 1$	121
	5.1	პრანდტლის განტოლებათა სისტემა სასაზღვრო ფენისათვის	122
	5.2	ბლაზიუსის ამოცანა	126
VI თავი		სითხის დინების მდგრადობა	130
	6.1	ჰიდროდინამიკური მდგრადობის თეორიის საფუძვლები	130
	6.2	შემფოთებათა ენერჯის ბალანსი	131
	6.3	მცირე რხევათა მეთოდი. ორრ-ზომერფელდის განტოლება	132
	6.4	რელეის განტოლება	134
VII თავი		რთული რეოლოგიის სითხეები	135
	7.1	რეინერ-რივლინის სითხის მათემატიკური მოდელი	135
	7.2	წყალ-ტალახოვანი სელის დახრილ სადინარში მოძრაობის მათემატიკური მოდელირება და განმსაზღვრელი პარამეტრების გათვლა	137
	7.2.1	სელური ნაკადის წარმოქმნის კონცეპტუალური მოდელი	137
	7.2.2	წყალ-ტალახოვანი სელური ნაკადის მათემატიკური მოდელი	139
	7.2.3	მყარი ტალახოვანი ფრაქციის ნაწილაკების სედიმენტაციის ამოცანა	142
	7.2.4	წყალ-ტალახოვანი სელური ნაკადის მათემატიკური მოდელის ჩაწერა ეილერის ტრადიციულ ცვლადებში	145
	7.2.5	ორფაზა ნაკადის აგებული მოდელის გამოკვლევა	146
ლიტერატურა			147