ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემია

პატარა ქანდის საჯარო სკოლა

ნინო ჭოხური, ნინო მინაგორაშვილი, თამაზ ოზგაძე

ვემზადოთ მოსწავლეთა ოლიმპიადებისათვის მათემატიკაში

IV - V - VI კლასი

2022

თბილისი

დამხმარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია იმ ნიჭიერი მეოთხე, მეხუთე და მეექვსე კლასის მოსწავლეებისათვის, რომლებიც გამოირჩევიან აზროვნებითა და ანალიზის უნარით. ამოცანები დალაგებულია ისე, რომ მკითხველმა იგრძნოს ის სიამე, რაც მოაქვს გამარჯვებებს რთული ამოცანების ამოხსნისას. ამოცანათა კრებული ამოხსნებით, საინტერესო იქნება უფროსკლასელთათვისაც, რომლებიც ემზადებიან სასკოლო ოლიმპიადებისათვის მათემატიკაში. წიგნში განხილულია საინტერესო ამოცანები, მეორე და მესამე კლასის მოსწავლეებისათვისაც.

წიგნი დახმარებას გაუწევს საჯარო სკოლის პედაგოგებსაც, რათა გააფართოვონ იმ ამოცანათა არსენალი, რაც საშუალებას აძლევს პედაგოგს, დაეხმაროს ნიჭიერ მოწაფეებს, სწორად აირჩიონ მომავალი პროფესიული მიმართულება.

რეცენზენტი. ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის პრეზიდენტი, აკადემიკოსი, პროფესორი, ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, თემურ ჩილაჩავა

საგამომცემლო სახლი "ტექნიკური უნივერსიტეტი", 2022

ISBN 978-9941-

წიგნი ეძღვნება
ჩვენი გარდაცვლილი
მასწავლებლების
ნათელ ხსოვნას

წინასიტყვაობა

შემოთავაზებული დამხმარე სახელმძღვანელო, „ვემზადოთ მოსწავლეთა ოლიმპიადებისათვის მათემატიკაში IV – V – VI კლასი“, შემუშავებულია ავტორთა კოლექტივის მიერ. წიგნში განხილულია სხვადასხვა სირთულისა და თემატიკის ამოცანები, რომლებიც დალაგებულია სირთულის მიხედვით. თავიდან, ჩვენ ვცდილობდით, რომ მარტივი ამოცანები მოგვეყვანა, რათა მოსწავლეებს არ აცრუებოდათ გული და მისცემოდათ ხალისი, შემდგომი მუშაობისათვის რთულ ამოცანებთან.

დამხმარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია იმ ნიჭიერი მეოთხე, მეხუთე და მეექვსე კლასის მოსწავლეებისათვის, რომლებიც გამოირჩევიან არასტანდარტული აზროვნებითა და ანალიზის უნარით. ამოცანები დალაგებულია ისე, რომ მკითხველმა იგრძნოს ის სიამე, რაც მოაქვს გამარჯვებებს, რთული ამოცანების ამოხსნისას.

ამოცანათა კრებული ამოხსნებით, საინტერესო იქნება უფროსკლასელთათვისაც, რომლებიც ემზადებიან სასკოლო ოლიმპიადებისათვის მათემატიკაში.

წიგნი დახმარებას გაუწევს საჯარო სკოლის პედაგოგებსაც, რათა გააფართოონ იმ ამოცანათა არსენალი, რაც საშუალებას აძლევს პედაგოგს, დაეხმაროს ნიჭიერ მოწაფეებს, მოემზადონ მოსწავლეთა ოლიმპიადებისათვის და სწორად აირჩიონ მომავალი პროფესიული მიმართულება.

ავტორების შრომა ამ ამოცანებზე, განპირობებული იყო ისეთი ნიჭიერი მოსწავლეების არსებობით, როგორიც არიან პატარა ქანდის საჯარო სკოლის მოსწავლეები: გიორგი სალბიშვილი, მზია

ვარძიაშვილი, მარიამ ოსკანოვი, ეკა სარიშვილი და სხვები, რომელთათვისაც სკოლის სახელმძღვანელოების მასალის გადმოცემის ტემპი და ლოგიკა მოსაწყენი იყო.

წიგნის პირველ თავში განხილულია IV კლასის საოლიმპიადო ამოცანები ამოხსნებით.

მეორე თავში გადმოცემულია V კლასის საოლიმპიადო ამოცანები ამოხსნებით. განხილულია როგორც ალგებრული, ასევე, გეომეტრი-ული ამოცანები

მესამე თავში გამოცემულია VI კლასის პროგრამით გათვალისწინებული საოლიმპიადო ამოცანები ამოხსნებით. აქვეა ამოცანები, მათემატიკის წრის მოსწავლეებისათვის, დამოუკიდებელი მუშაობისათვის. გადმოცემულია ფაკულტატური თემებიც, როგორიცაა გრაფთა თეორიისა და რიცხვთა თეორიის ელემენტები. გადმოცემულია პროგრამის შესაბამისი, საინტერესო ამოცანები გეომეტრიიდან.

წიგნის მეოთხე თავში, მოცემულია საოლიმპიადო ამოცანების ვარიანტები, დაწყებითი სკოლის 2 – 6 კლასის მოსწავლეებისათვის. ავტორების აზრით, რეკომენდირებულია 2-4 კლასის მოსწავლეთა ოლიმპიადების ჩატარების ორგანიზაციულ მუშაობაში, ჩავრთოთ შემდგომი კლასების ნიჭიერი მოსწავლეები, რომლებიც შეასრულებენ აგრეთვე, მოსამზადებელ სამუშაოებს უმცროსკლასელებთან.

ავტორები იმედს გამოთქვამენ, რომ ეს წიგნი სხვა სკოლების პედაგოგებისა და მოსწავლეების ინტერესსაც გამოიწვევს. ჩვენ სიამოვნებით მივიღებთ შენიშვნებს და სურვილებს წიგნის შემდგომი სრულყოფისათვის.

მათემატიკა - მეცნიერებათა დედოფალია,
ხოლო არითმეტიკა - მათემატიკის მეფე.
კარლ ფრიდრიხ გაუსი

I თავი. IV კლასის საოლიმპიადო ამოცანები ამოხსნებით

ათობით სისტემაში, რიცხვების ჩასაწერად გამოიყენება ათი ციფრი: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. ორნიშნა რიცხვი ჩაიწერება ორი ციფრით. მაგალითად: $25 = 2 \cdot 10 + 5$; სამნიშნა რიცხვი ჩაიწერება სამი ციფრით. მაალითად: $325 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5$..

საზოგადოდ, n ნიშნა რიცხვი ჩაიწერება შემდეგნაირად:
$\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots a_{n-1} \cdot 10 + a_n$,
სადაც $a_1; a_2; \ldots a_n$ ციფრებია, რომლებიც გამოიყენება რიცხვის ჩასაწერად.

აქედან გამომდინარე, ორნიშნა რიცხვებისათვის საზოგადოდ, გვაქვს შემდეგი წარმოდგენა: $\overline{a_1 a_2} = a_1 \cdot 10^1 + a_2$; ხოლო, სამნიშნა რიცხვებისთვის: $\overline{a_1 a_2 a_3} = a_1 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10^1 + a_3$.

1.1. ციფრების გამოცნობა

1.1.1. ჩაწერეთ უდიდესი ორნიშნა რიცხვი.
პასუხი: 99.
1.1.2. ჩაწერეთ უდიდესი სამნიშნა რიცხვი.
პასუხი: 999.
1.1.3. ჩაწერეთ უდიდესი სამნიშნა რიცხვი, რომლის ყველა ციფრი განსხვავებულია.
პასუხი: 987.
1.1.4. ჩაწერეთ უმცირესი ორნიშნა რიცხვი.
პასუხი: 10.
1.1.5. ჩაწერეთ უმცირესი სამნიშნა რიცხვი.
პასუხი: 100.
1.1.6. ჩაწერეთ უმცირესი სამნიშნა რიცხვი, რომლის ყველა ციფრი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.
პასუხი: 102.

1.1.7. ჩაწერეთ უდიდესი ათნიშნა რიცხვი.
პასუხი: 9 999 999 999
1.1.8. ჩაწერეთ უდიდესი ათნიშნა რიცხვი, რომლის ყველა ციფრი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.
პასუხი: 9876543210
1.1.9. შესაძლებელია, თუ არა ისეთი თერთმეტნიშნა რიცხვის ჩაწერა, რომლის ყველა ციფრი ერთმანეთისაგან განსხვავდება ?
პასუხი: არა, რადგან ციფრების რაოდენობა სულ ათია ათობით სისტემაში.
1.1.10. ჩაწერეთ უმცირესი ათნიშნა რიცხვი.
პასუხი: 1 000 000 000.
1.1.11. ჩაწერეთ უმცირესი ათნიშნა რიცხვი, რომლის ყველა ციფრი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.
პასუხი: 1023456789.
1.1.12. ციფრებისაგან 3; 6; 2; 4 ჩაწერეთ: ა) უმცირესი ოთხნიშნა რიცხვი; ბ) უდიდესი ოთხნიშნა რიცხვი.
პასუხი: ა) 2346; ბ) 6432.
1.1.13. გამოსახულებაში $\mathbf{7 \cdot 9 + 12 : 3 - 2}$ დასვით ფრჩხილები ისე, რომ მიღებული გამოსახულების მნიშვნელობა იყოს: ა) 23; ბ) 75.
პასუხი: ა) $\mathbf{(7 \cdot 9 + 12) : 3 - 2 = 23}$; ბ) $\mathbf{(7 \cdot 9 + 12) : (3 - 2) = 75}$.
1.1.14. ჩანაწერში $\mathbf{1 * 2 * 3 * 4 * 5}$, ვარსკვლავები შეცვალეთ არითმეტიკული ოპერაციებით და დასვით ფრჩხილები ისე, რომ გამოსახულების მნიშვნელობა იყოს 100.
პასუხი: $\mathbf{(1 \cdot 2 + 3) \cdot 4 \cdot 5 = 100}$.
1.1.15. შეადგინეთ გამოსახულება რომელიც შეიცავს ოთხ ცალ ციფრს 2 და არითმეტიკულ მოქმედებებს ისე, რომ შედეგი იყოს შესაბამისად: ა) 0; ბ) 1; გ) 2; დ) 3; ე) 4; ვ) 5; ზ) 6; თ) 8.
პასუხი: ა) $22 - 22 = 0$; ბ) $22 : 22 = 1$; გ) $2 : 2 + 2 : 2 = 2$; დ) $2 \cdot 2 - 2 : 2 = 3$; ე) $2 \cdot 2 \cdot 2 : 2 = 4$; ვ) $2 \cdot 2 + 2 : 2 = 5$; ზ) $2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 6$; თ) $2 + 2 + 2 + 2 = 8$.
1.1.16. გამოსახულებაში **8 8 8 8 8 8 8 8** ზოგიერთ ციფრებს შორის დასვით შეკრების ნიშანი ისე, რომ ჯამში მივიღოთ 1000.
პასუხი: $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000$.
1.1.17. გამოსახულებაში **1 2 3 4 5 6 7 8 9** ზოგიერთ ციფრებს შორის დასვით პლიუს ან მინუს ნიშანი ისე, რომ შედეგში მივიღოთ 100.
პასუხი: $123 + 45 - 67 + 8 - 9 = 100$.

1.1.18. რამდენნაირად შეიძლება წარმოვადგინოთ რიცხვი 10, ოთხი კენტი რიცხვის ჯამის სახით ?

ამოხსნა: ათზე ნაკლები კენტი რიცხვებია 1; 3; 5; 7; 9. წარმოდგენაში 9 არ შეიძლება მონაწილეობდეს რადგან $10 = 9 + 1$ და აღარ რჩება ადგილი სხვა ციფრებისთვის. გვრჩება ოთხი კენტი რიცხვი 1; 3; 5; 7. შესაბამისად, გვექნება შემდეგი წარმოდგენები: $10 = 7 + 1 + 1 + 1$; $10 = 5 + 3 + 1 + 1$; 10=3+3+3+1. მაშასადამე, სულ გვაქვს სამი ასეთი წარმოდგენა.

1.1.19. რამდენნაირად შეიძლება წარმოვადგინოთ რიცხვი 50 ორი ლუწი რიცხვის ჯამად ? მხოლოდ შესაკრებთა რიგით განსხვავებული წარმოდგენები ჩათვალეთ ერთი და იგივე წარმოდგენად.

ამოხსნა: 50-მდე გვაქვს სულ 26 ლუწი რიცხვი 0; 2; 4; . . . 50. შესაბამისად, გვაქვს 26 წარმოდგენა: $50 = 0 + 50 = 50 + 0 = 2 + 48 = 48 + 2 = \ldots$; რადგან შესაკრებთა რიგით განსხვავებული წარმოდგენები ითვლება ერთი და იგივე წარმოდგენად, სულ გვექნება $26{:}\,2 = \mathbf{13}$ **წარმოდგენა.**

1.1.20. გამოთვალეთ ყველა კენტი რიცხვის ჯამი პირველ ათასეულში.

ამოხსნა: $1 + 3 + 5 + \ldots + 999 = (1 + 999) + (2 + 998) + \ldots (499 + 501) =$
$= 1000 \cdot 250 = 250000.$

(ათასამდე რიცხვებში სულ გვაქვს 500 კენტი რიცხვი, შესაბამისად, ფრჩხილებში მოთავსებული წყვილების რაოდენობაა $500{:}\,2 = \mathbf{250}$).

1.1.21. მოცემულ ჩანაწერებში ვარსკვლავები შეცვალეთ ციფრებით და პასუხი დაასაბუთეთ:

ა) $\begin{array}{r} {**} \\ + \\ {**} \\ \hline 197 \end{array}$;   ბ) $\begin{array}{r} {****} \\ - \\ {***} \\ \hline 1 \end{array}$.

პასუხი: ა) 99+98=197; ბ) $\mathbf{1000 - 999 = 1}$.

1.1.22. რა ციფრით ბოლოვდება ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 1-დან 81-ის ჩათვლით ?

ამოხსნა: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 81$ ნამრავლი ბოლოვდება ნულით, რადგან შეიცავს 10-ზე გამრავლებას.

1.1.23. რამდენი ნულით ბოლოვდება ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 10-დან 25-ის ჩათვლით ?

ამოხსნა: გვაქვს ნამრავლი $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 25$. წარმოვიდგინოთ, რომ თითოეული თანამამრავლი დავშალეთ მარტივ მამრავლებად. ჩვენ გვაინტერესებს ამ დაშლაში, რამდენი იქნება $2 \cdot 5$ წყვილი თანამამრავლი, რომლებიც გვაძლევს ნამრავლის ბოლოში ნულებს. ლუწი რიცხვები უფრო მეტია, ვიდრე 5-ის ჯერადი რიცხვები, აქედან

გამომდინარე, დავთვალოთ რამდენი ხუთიანი შეგვხვდება თანამამრავლად ზემოთმოყვანილ ნამრავლში. მათ დასათვლელად, ამოვიწეროთ ხუთის ჯერადი მამრავლები: 10; 15; 20; 25. პირველი სამი რიცხვი ამ ჩამონათვალიდან გვაძლევს თითო ხუთს თანამამრავლად, ხოლო 25 იძლევა ორ 5-ის ტოლ თანამამრავლს. მაშასადამე, სულ ხუთიანების რაოდენობა დაშლაში იქნება 1+1+1+2=5, რაც იმას ნიშნავს, რომ 10-იდან 25-ის ჩათვლით ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი, ბოლოვდემა **5 ნულით.**

1.1.24. რამდენი ნულით ბოლოვდება ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 1-დან 100-ის ჩათვლით ?

ამოხსნა: გვაქვს ნამრავლი $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$. ცხადია, რომ ნამრავლის ბოლო ციფრების ნულებს იძლევა 2-ის და 5-ის წყვილები ამ ნამრავლში. ლუწი რიცხვების რაოდენობა მეტია ხუთის ჯერადებთან შედარებით. აქედან გამომდინარე, ვითვლით რამდენ ხუთიანს იძლევა ხუთის ჯერადი თანამამრავლები ამ ნამრავლში. ხუთის ჯერადებია:

5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95; 100.

ახლა, სულ გვაქვს 20 რიცხვი. დავთვალოთ, რამდენ 5-იანს იძლევა თანამამრავლად თითოეული ეს რიცხვი. ცხადია, რომ ორ თანამამრავლ 5-იანს იძლევა შემდეგი რიცხვები: 25; 50;75;100 დანარჩენი 5-ის ჯერადი 16 რიცხვი, იძლევა თითო 5-იანს თანამამრავლად, მაშასადამე, ნამრავლში სულ გვექნება: $4 \cdot 2 + 16 = 24$ ხუთის შემცველი თანამამრავლი, რაც იმას ნიშნავს, რომ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$ ნამრავლი, **ბოლოვდება 24 ნულით.**

1.1.25. 4 საწერი კალამი და 3 რვეული ღირს m თეთრი, ხოლო 2 საწერი კალამი და 2 რვეული ღირს n თეთრი. რა ღირს: ა) 8 საწერი კალამი და 7 რვეული ? ბ) 8 საწერი კალამი და 4 რვეული ?

ამოხსნა: ა) რადგან 2 საწერი კალამი და 2 რვეული ღირს n თეთრი, ამიტომ, 4 საწერი კალამი და 4 რვეული ეღირება $2n$ თეთრი; მაგრამ 4 საწერი კალამი და 3 რვეული ღირს m თეთრი, მაშინ მივიღებთ, რომ 8 საწერი კალამი და 7 რვეული ეღირება $2n + m$ თეთრი; ბ) რადგან 4 საწერი კალამი და 3 რვეული ღირს m თეთრი, ხოლო 2 საწერი კალამი და რვეული ღირს n თეთრი, მივიღებთ რომ 2 საწერი კალამი და 1 რვეული ღირს m-n თეთრი, მაშინ 8 საწერი კალამი და 4 რვეული ეღირება $4(\mathrm{m} - \mathrm{n}\,)$ თეთრი.

1.1.26. საჭადრაკო ტურნირში მონაწილეობდა 8 მოჭადრაკე. თითოეული მათგანი ერთმანეთთან თამაშობდა 1 პარტიას. სულ რამდენი პარტია იქნა გათამაშებული ტურნირში ?

ამოხსნა: რადგან ტურნირში 8 მოჭადრაკე მონაწილეობს, თითოეული მოჭადრაკე ეთამაშება 7 სხვა მოჭადრაკეს, სულ გათამაშდებოდა: $8 \cdot 7 : 2 = 28$ პარტია. 2-ზე გაყოფა საჭიროა, რადგან თითოეული პარტია ორჯერაა ჩათვლილი ანგარიშისას(პარტიას თამაშობს ორი ადამიანი).

1.1.27. რვა მეგობარმა ერთმანეთთან გაცვალა თითო საკუთარი სურათი. სულ რამდენი სურათი იქნა გაცვლილი ?

ამოხსნა: სულ გაიცვლებოდა $8 \cdot 7 = 56$ სურათი.

1.1.28. ოცი ქალაქი ერთმანეთთან დაკავშირებულია საჰაერო ხაზებით. სულ რამდენი საჰაერო ხაზია ?

ამოხსნა: თითოეული ქალაქი დაკავშირებულია 19 ქალაქთან და თითოეული ხაზი აერთებს ორ ქალაქს. აქედან გამომდინარე, საჰაერო ხაზების რაოდენობა იქნება: $20 \cdot 19 : 2 = 190$ (2-ზე გაყოფა საჭიროა, რადგან ყოველი ხაზი ორ ქალაქს აკავშირებს და მაშასადამე, ამ ანგარიშისას ჩათვლილია ორჯერ).

1.1.29. რამდენი ისეთი ხუთნიშნა რიცხვის ჩაწერა შეიძლება, რომელთა ციფრთა ჯამია 2. ჩაწერეთ ყველა მათგანი.

ამოხსნა: 2=1+1=0+2. არსებობს 5 ასეთი ხუთნიშნა რიცხვი: $20000; 11000; 10100; 10010; 10001$.

1.1.30. რამდენი ხუთნიშნა რიცხვი შეიძლება შევადგინოთ ციფრებიდან 2, 5, 6, 7, 8 ისე, რომ ციფრები არ მეორდებოდნენ ?

ამოხსნა: ხუთნიშნა რიცხვში პირველ ადგილზე შეიძლება იდგეს, ნებისმიერი ამ 5 ციფრიდან, მეორე ადგილზე - ნებისმიერი, დარჩენილი 4 ციფრიდან, მესამეზე - ნებისმიერი, დარჩენილი 3 ციფრიდან, მეოთხეზე - ნებისმიერი, დარჩენილი 2-დან და ბოლოს მეხუთე ადგილზე 1, რაც იმას ნიშნავს, რომ სულ ამ ციფრებიდან შეგვიძლია შევადგინოთ: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{120}$ სხვადასხვა ციფრიანი ხუთნიშნა რიცხვი.

1.1.31. კრებაზე 30 კაცი მონაწილეობს თავმჯდომარისა და მისი მოადგილის არჩევნებში. არჩევის რამდენი ვარიანტი არსებობს ?

ამოხსნა: თავმჯდომარედ, შეიძლება არჩეული იქნას ნებისმიერი ამ 30 მონაწილიდან, მაშინ მოადგილედ შეიძლება არჩეული იქნას ნებისმიერი, დარჩენილი 29 კაციდან ანუ სულ გვექნება: $30 \cdot 29 = 870$ ვარიანტი.

1.1.32. გვაქვს 60 სამმეტრიანი სიგრძის მქონე მორი, რომლებიც უნდა დაიხერხოს ნახევარმეტრიან მორებად. რამდენჯერ დაგვჭირდება გადახერხვა ?

ამოხსნა: ერთი სამმეტრიანი მორის დასახერხად ნახევარმეტრიან მორებად, გვჭირდება 5 გადახერხვა, მაშასადამე, 60 ასეთი მორის დასახერხად, დაგვჭირდება $60 \cdot 5 = 300$ გადახერხვა.

1.1.33. გზატკეცილის გასწვრივ, რომლის სიგრძეც 4 კმ-ია, უნდა გაიყვანონ სატელეგრაფო ხაზი. რამდენი სატელეგრაფო ბოძი იქნება საჭირო, თუ მეზობელ ბოძებს შორის მანძილი უნდა იყოს 50 მ ?

ამოხსნა: 100 მ მანძილზე საჭიროა 3 ბოძი, 200მ მანძილზე 7 ბოძი, . . . 4000მ მანძილზე დაგვჭირდება 81 ბოძი.

1.1.34. რძით სავსე ბიდონი იწონის 34 კგ-ს, ნახევრად სავსე ბიდონი იწონის 17.75 კგ-ს. რას იწონის ცარიელი ბიდონი ?

ამოხსნა: ბიდონი+ რძე=34 კგ; ბიდონი+ 0.5 რძე=17.75 კგ, მაშინ 2 ბიდონი+რძე=2·17.75=35.5 კგ. თუ, ბოლო ტოლობას გამოვაკლებთ პირველს, მაშინ მივიღებთ, რომ ბიდონის წონა = 35.5 კგ - 34 კგ = 1.5 კგ.

1.1.35. იპოვეთ, ის უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომელიც გაყოფისას 2-ზე, 3-ზე, 4-ზე, 5-ზე, 6-ზე, 8-ზე და 9-ზე ნაშთში იძლევა 1-ს.

ამოხსნა: თუ, ამ რიცხვს გამოვაკლებთ 1-ს, მაშინ ის უნაშთოდ გაიყოფა 2-ზე, 3-ზე, 4-ზე, 5-ზე, 6-ზე, 8-ზე და 9-ზე ანუ ეს რიცხვი იქნება ამ რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი: $9 \cdot 8 \cdot 5 = 360$, მაშინ საძიებელი რიცხვი ყოფილა $360 + 1 = 361$.

1.1.36. იპოვეთ ყველა ისეთი სამნიშნა რიცხვის ჯამი, რომლებიც ჩაიწერებიან ციფრებით 1; 2; 3 და რომელთა ციფრებიც განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, თითოეული რიცხვის ჩანაწერში.

ამოხსნა: გვაქვს ჯამი: 123+132+213+231+312+321=**1332.**

36. სკოლის ოთხ კლასში სწავლობს 60 მოსწავლე. დაამტკიცეთ, რომ მათგან ორის დაბადების დღე მაინც, იქნება ერთ კვირაში.

ამოხსნა: წელიწადში არის 52 კვირა. მაშასადამე, 60 მოსწავლე რომ გავანაწილოთ 52 კვირაზე, რომელიმე კვირაში 2 მოსწავლე მაინც მოხვდება. რ.დ.გ.

1.1.37. ყუთში დევს 100 დროშა: წითლები, მწვანეები, ყვითლები და ლურჯები. რამდენი დროშა უნდა ამოვიღოთ ყუთიდან შიგ ჩაუხედავად, რომ მათ შორის აღმოჩნდეს არანაკლებ, ვიდრე 10 ერთნაირი ფერის დროშა?

ამოხსნა: ყველაზე ცუდ შემთხვევაში, უნდა ავიღოთ ცხრა-ცხრა თითოეული ფერის დროშა, ე.ი. სულ $4\cdot9=36$. ამის შემდეგ, ნებისმიერი ფერის ერთი დროშაც რომ დავამატოთ, გვექნება უკვე 10 ერთი ფერის დროშა. მაშასადამე, სულ უნდა ამოვიღოთ **37 დროშა.**

1.1.38. ერთი და იმავე მანძილს როდის უფრო ჩქარა გაივლით: ა) თუ ვივლით სულ ველოსიპედით; ბ) თუ მაშინ, როცა ნახევარ გზას გავივლით მოტოციკლით, რომელიც ორჯერ სწრაფად მოძრაობს ველოსიპედზე და მეორე ნახევარს გავივლით ფეხით - ორჯერ უფრო ნელა, ვიდრე ველოსიპედით ?

ამოხსნა: რადგან ფეხით, ორჯერ უფრო ნელა ვმოძრაობთ, ვიდრე ველოსიპედით, იმ დროში როცა ველოსიპედით შეგვიძლია მთელი გზის გავლა, ფეხით გავივლით მხოლოდ ნახევარს და რადგან მოტოციკლით ნახევარი გზის გავლას კიდევ სჭირდება რაღაც დრო, ცხადია, რომ ველოსიპედით თუ ვივლით მთელ მანძილს, მაშინ უფრო მალე მივალთ გზის ბოლოს, ვიდრე იმ შემთხვევაში, როცა ნახევარ გზას გავდივართ მოტოციკლით და ნახევარს ფეხით.

1.1.39. მიზანში სროლების რიცხვი შეამცირეს 10-ით, ხოლო მიზანში მოხვედრების რიცხვი გაიზარდა 4-ით. როგორ შეიცვალა აცდენების რაოდენობა ?

ამოხსნა: თუ, სროლების რიცხვი 10-ით შემცირდა და მოხვედრათა რაოდენობა არ შეცვლილა, მაშინ აცილებათა რიცხვი შემცირდებოდა 10-ით, მაგრამ რადგან მიზანში მოხვედრათა რიცხვი გაიზარდა 4-ით, ეს იმას ნიშნავს, რომ აცილებათა რიცხვი შემცირდა **14**-ით $(10+4=14)$.

1.1.40. ავტომობილის გავლილი გზის მრიცხველმა აჩვენა, რომ მანქანამ გაიარა 15951 კმ. ორი საათის შემდეგ, მრიცხველზე კვლავ იყო ისეთი რიცხვი, რომელიც ერთნაირად იკითხებოდა პირდაპირაც და ბოლოდანაც. რა სიჩქარით მოძრაობდა ავტომობილი?

ამოხსნა: ვიპოვოთ 15951-ზე მეტი, უახლოესი რიცხვი რომელიც ერთნაირად იკითხება პირდაპირაც და ბოლოდანაც. ასეთი რიცხვია 16061. მაშინ, ავტომობილი გაივლიდა $16061 - 15951=110$ (კმ) და მაშასადამე, მისი სიჩქარე იქნებოდა 110კმ : 2სთ=55კმ/სთ.

შემდგომი ასეთი რიცხვია 16161. მაშინ გავლილი გზა იქნებოდა $16161-15951=220$ (კმ) და შესაბამისი სიჩქარე იქნებოდა 220კმ:2სთ=110კმ/სთ.

შემდეგი ასეთი რიცხვი იქნებოდა 16261. მაშინ გავლილი გზა იქნებოდა 16261-15951=320(კმ) და შესაბამისი სიჩქარე იქნებოდა 320:2=155 (კმ/სთ).

1.1.41. შემდეგ ჩანაწერებში, ზოგიერთი ციფრი შეცვლილია ასოებით. ერთნაირი ასოები შეესაბამებიან ერთნაირ რიცხვებს გაშიფრეთ როგორია შესაბამისი ციფრული ჩანაწერი, თუ:

a) BDCE b) a 5 2 b

\+ -

BDAE b 2 5 a

------------- --------------

AECBE 8 x m x

ამოხსნა: ა) **5240 + 5210 = 10450**; ბ) **9521 – 1259 = 8262**.

1.1.42. შემდეგ ჩანაწერში ზოგიერთი ციფრი შეცვლილია გულებით. აღადგინეთ რიცხვითი ჩანაწერი, თუ

ა) 6 ♥

x

♥♥

♥♥

\+

♥♥

♥♥ 6

(არაა აუცილებელი, რომ ყველა გული ერთნაირ ციფრს შეესაბამებოდეს).

ამოხსნა: 66 ·11 = 726

1.1.43. პაკეტში ეწყო ვაშლები. თავიდან ამოიღეს ნახევარზე 5-ით ნაკლები. შემდეგ, დარჩენილის ერთი მესამედი ნაწილი. ამის შემდეგ, პაკეტში დარჩა 10 ვაშლი. რამდენი ვაშლი იყო პაკეტში თავდაპირველად?

ამოხსნა: დავიწყოთ ბოლოდან. ამოცანის პირობის თანახმად 10 ვაშლი დარჩა მეორედ ამოღების შემდეგ ანუ 10 წარმოადგენს მეორედ ამოღების შემდეგ დარჩენილი ვაშლების ორ მესამედ ნაწილს; მაშასადამე, ერთი მესამედი იქნებოდა 5 ვაშლი, ხოლო მეორედ ამოღებიდან დარჩენილი ვაშლების სრული რაოდენობა იქნებოდა 5·3=15. გამოდის, რომ 15 არის 5-ით მეტი იმის ნახევარზე რაც იყო

თავდაპირველად და რადგან ნახევარი ყოფილა 15-5=10 ვაშლი, ვაშლების თავდაპირველი რაოდენობა იქნებოდა $10 \cdot 2 = \mathbf{20}$.

1.1.44. სამ ვაშლსა და ერთ მსხალს აწონასწორებს 13 ქლიავი. ერთი ქლიავი და ერთი ვაშლი აწონასწორებენ ერთ მსხალს. რამდენი ქლიავი აწონასწორებს 1 მსხალს ?

ამოხსნა: 3 ვაშლი+1 მსხალი = 13 ქლიავი

1 ქლიავი+ 1 ვაშლი = 1 მსხალი

თუ, ამ ორ ტოლობას შევკრიბავთ, მივიღებთ რომ 4 ვაშლი = 12 ქლიავი ანუ 1 ვაშლი = 3 ქლიავი. თუ, ამ დამოკიდებულებას შევიტანთ მეორე ტოლობაში, მივიღებთ, რომ 1 ქლიავი+3 ქლიავ = 1 მსხალი ანუ **1 მსხალი = 4 ქლიავი.**

1.1.45. ყუთში აწყვია თეთრი, შავი და წითელი ბურთულები, რომელთა საერთო რაოდენობაა 15. თეთრი ბურთულების რაოდენობა 7-ჯერ მეტია წითლებზე. რამდენი შავი ბურთულაა ყუთში ?

ამოხსნა: თეთრი ბურთულების რაოდენობა აღვნიშნოთ „თ“ ასოთი, შავების „შ“ და წითლებისა „წ“ ასოებით. მაშინ, მოცემულობის თანახმად, თ+შ+წ=15 მაგრამ თ=7წ ანუ 8წ+შ=15. მაშინ, ცხადია რომ წ=1 და შ=7 ანუ შავი ბურთულების რაოდენობაა **7.**

1.1.46. ათი ძრავა 10 წუთში ქაჩავს 10ტ რამდენ წუთში ამოქაჩავს 20ტ წყალს 20 ძრავა ?

ამოხსნა: რადგან 10 ძრავა 10 წუთში ქაჩავს 10ტ წყალს, 1 ძრავა 10 წუთში ამოქაჩავს 1ტ წყალს. მაშინ 20 ძრავა **10 წუთში** ამოქაჩავს 20ტ წყალს.

1.1.47. წიგნში გადაიხადეს 25 ლარი 50 თეთრი ანუ მთელი ღირებულების ნახევარი. რა ღირდა წიგნი ?

ამოხსნა: თუ ღირებულების ნახევარია 25 ლარი 50 თეთრი, მაშინ მთლიანი ღირებულება იქნება:

25 ლარი + 50 თეთრი + 25 ლარი + 50 თეთრი **= 51 ლარი.**

1.1.48. მანანა ახლა ორჯერ უფროსია ანიკოზე. ოთხი წლის წინ ის ექვსჯერ უფროსი იყო ანიკოზე. რამდენი წლისები არიან მანანა და ანიკო ახლა ?

ამოხსნა: მანანა =2·ანიკო. მაშინ 4 წლის წინ გვექნებოდა, რომ მანანა-4=6·(ანიკო-4). ამ ტოლობაში, თუ გავითვალისწინებთ პირველ ტოლობას, მივიღებთ რომ 2·ანიკო-4=6·(ანიკო-4). ამ განტოლების ამოხსნა კი გვაძლევს, რომ ანიკო ყოფილა: **5 წლის და მანანა 10 წლის.**

1.1.49. გვაქვს შესაბამისობა $**\mathbf{49} \leftrightarrow$ ნინი. ვარსკვლავების ნაცვლად ჩასვით შესაბამისი რიცხვები.

ამოხსნა: შესაბამისობიდან გამომდინარე, ნ ↔ 4 და ი ↔ 9. მაშადამე, საძიებელი რიცხვი ყოფილა **4949.**

1.1.50. რა კუთხეს შემოწერს წუთების ისარი 5 წუთში ?

ამოხსნა: წუთების ისარი ერთ სრულ ბრუნს ანუ 360° კუთხეს შემოწერს 60 წუთში ანუ 1 წთ-ში შემოწერს $360^{\circ}:60=6^{\circ}$- იან კუთხეს; რაც იმას ნიშნავს, რომ 5 წთ-ში ის შემოწერს $6^{\circ}\cdot 5=\mathbf{30^{\circ}}$**- იან კუთხეს.**

1.1.51. თუ გვაქვს შესაბამისობა: ჭი ↔ ლუწი რიცხვები და ქა ↔ კენტი რიცხვები, მაშინ რას შეესაბამება სიტყვა ჭიქა ?

ამოხსნა: ცხადია, რომ მაშინ ჭიქა შეესაბამება ლუწი და კენტი რიცხვების ერთობლიობას ანუ **ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს.**

1.1.52. თუ გვაქვს შესაბამისობა: $\Delta\leftrightarrow \mathbf{3a-b}$; $\Delta\Delta\leftrightarrow \mathbf{5a-b}$. **მაშინ რას შეესაბამება** $\Delta\Delta\Delta$ **?**

ამოხსნა: $\Delta\leftrightarrow 3a-b$; $\Delta\Delta\leftrightarrow 5a-b$. მაშინ, ცხადია რომ სამკუთხედი ნიშნავს $2a$-ს დამატებას ანუ $\Delta\Delta\Delta\leftrightarrow \mathbf{7a-b}$.

1.1.53. საცეკვაო კარნავალზე თითოეულმა ბიჭმა, იცეკვა სამ გოგონასთან და თითოეულმა გოგონამ - სამ ბიჭთან. დაამტკიცეთ, რომ კარნავალზე ბიჭების და გოგონების რაოდენობა იყო ერთნაირი.

ამოხსნა: დავთვალოთ მოცეკვავე წყვილთა რაოდენობა. ერთის მხრივ, ის ტოლია კავალერთა გასამკეცებული რაოდენობისა, მეორე მხრივ კი - ტოლია გოგონების გასამკეცებული რაოდენობისა, რაც იმას ნიშნავს, რომ გოგონებისა და ბიჭების რაოდენობები ერთმანეთის ტოლია.
რ.დ.გ.

1.1.54. ერთ წრფეზე გადაზომეს ტოლი მონაკვეთები და დასვეს საზღვრებზე 10 წერტილი. მიღებული დიდი მონაკვეთის სიგრძეა I. მეორე წრფეზე გადაზომეს იგივე სიგრძის მონაკვეთები და საზღვრებზე დასვეს 100 წერტილი. მიღებული დიდი მონაკვეთის სიგრძეა $\boldsymbol{L}$. **რამდენჯერ უფრო გრძელია** $\boldsymbol{L}$ **მონაკვეთი I მონაკვეთთან შედარებით ?**

ამოხსნა: რადგან 10 წერტილის დასმით, გვაქვს მონაკვეთი რომლის სიგრძეა $I=9k$, სადაც k ერთი მონაკვეთის სიგრძეა, ხოლო 100 წერტილის დასმით გვექნება მონაკვეთი, რომლის სიგრძეა $L=99k$, ცხადია, რომ $\frac{L}{I}=\frac{99k}{9k}=\mathbf{11}$.

1.1.55. ელექტრომატარებელმა რომლის სიგრძეა 18 მ, ელექტრობოძის გასწვრივ გაიარა 9 წმ-ში. რა დროს მოანდომებდა ის 36მ სიგრძის ხიდის გავლას ?

ამოხსნა: რადგან 18მ მანძილის გავლას ელექტრომატარებელი ანდომებს 9წმ-ს, მისი სიჩქარე ყოფილა 18მ : 9წმ = 2 მ/წმ. მაშინ, ის 36მ ხიდის

გავლისას დამატებით გაივლის თავის სიგრძის ტოლ მანძილს ანუ სულ 36 მ + 18 მ = 54 მ-ს. ამ მანძილის გავლას კი დასჭირდება
54 მ : 2 მ/წმ = **27 წმ.**

1.1.56. კატერი მდინარე რიონიდან შედის შავ ზღვაში. შეიცვლება თუ, არა მისი კორპუსის ჩაძირვის სიღრმე ?

ამოხსნა: შეიცვლება, რადგან მდინარის წყლის სიმკვრივე, ნაკლებია ზღვის წყლის სიმკვრივეზე და შესაბამისად, არქიმედის ამომგდები ძალაც ზღვაში მეტია, ვიდრე მდინარეში.

1.1.57. იპოვეთ უმცირესი ნატურალური რიცხვები, რომლებიც აკმაყოფილებს შემდეგ განუსაზღვრელ განტოლებას: $\boldsymbol{500a + 7d = 514}$.

ამოხსნა: ამ განტოლებიდან გამომდინარე, $7d = 514 - 500a$. მარჯვენა ნაწილი ნატურალური რიცხვი უნდა იყოს და მარცხენაც, მაშინ მივიღებთ, რომ a-ს დასაშვები მნიშვნელობებია 0 და 1. ნული არ აკმაყოფილებს, მაშასადამე, $\boldsymbol{a = 1}$ **და** $\boldsymbol{d = 2}$.

1.1.58. ჩემი პაპა მამაჩემზე უფროსია 32 წლით, მამაჩემი კი ამდენივე წლით უფროსია ჩემზე. რამდენი წლისაა თითოეული ჩვენგანი, თუ, სამი წლის წინ ჩვენი სამივეს ასაკის ჯამი, ნაკლები იყო 100 წელზე ?

ამოხსნა: თუ, მამა არის x წლის, მაშინ პაპა იქნებოდა $x + 32$ წლის, ხოლო შვილიშვილი $x - 32$ წლის. 3 წლის წინ პაპა იყო $x + 32 - 3$ წლის, შვილი $x - 3$ წლის, ხოლო შვილიშვილი $x - 32 - 3$ წლის. ამოცანის პირობის თანახმად, ამ ასაკების ჯამი ნაკლებია 100-ზე ანუ
$3x - 9 < 100$. აქედან გამომდინარე, $x = 36$ არის მამის ასაკი, მაშინ პაპა არის 36 + 32 = 68 წლის, ხოლო შვილიშვილი 36 – 32 = 4 წლის. მივიღეთ, რომ ასაკი შესაბამისად უდრის: **4; 36; 68.**

1.1.59. ორ მეთევზეს: ალეკოს და გიოს ჰკითხეს: „რამდენი თევზია თქვენს კალათაში ?“. ალეკომ უპასუხა: „ჩემს კალათაში იმის ნახევარია, რაც არის გიოს კალათაში და კიდევ 10 ცალი“; გიომ კი უპასუხა: „ჩემს კალათაში იმდენი თევზია, რამდენიც ალეკოსთან და კიდევ 20“. რამდენი თევზია თითოეული მეთევზის კალათაში დაორივესთან ერთად ?

ამოხსნა: ალეკოსთან იყო გიოს ნახევარს მიმატებული 10 თევზი, ხოლო გიოსთან, ალეკოს მიმატებული 20 ანუ გიოსთან იყო თავის ნახევარს მიმატებული 30, რაც იმას ნიშნავს, რომ **გიოსთან სულ ყოფილა** $30 \cdot 2 = \boldsymbol{60}$ **თევზი,** მაშინ **ალეკოსთან იქნებოდა** $\boldsymbol{30 + 10 = 40}$ **თევზი.** სულ **ორივეში ერთად კი 100 თევზი.**

1.1.60. მე და ჩემმა მეგობარმა სამ დღეში ვიყიდეთ 18 მარკა. დღეს მე ვიყიდე იმდენი მარკა, რამდენიც ჩემმა მეგობარმა დღეს და გუშინ

ერთად. სამაგიეროდ, გუშინწინ ჩემმა მეგობარმა იყიდა ორი მარკით მეტი, ვიდრე მე გუშინ და გუშინწინ ერთად. რამდენი მარკა უყიდია სულ, თითოეულ ჩვენგანს ?

ამოხსნა: ვთქვათ, დღეს მე ვიყიდე x ცალი მარკა, მაშინ ჩემს მეგობარს, გუშინ და დღეს ჯამში აგრეთვე ამდენივე უყიდია. ვთქვათ, მე გუშინწინ ვიყიდე y ცალი მარკა და გუშინ z, მაშინ ჩემს მეგობარს გუშინწინ უყიდია $2 + y + z$ ცალი მარკა. მასასადამე, სულ ერთად გვიყიდია: $2x + 2y + 2z + 2 = 18$ მარკა. აქედან გამომდინარე, $x + y + z = 8$. რაც იმას ნიშნავს, რომ მე **მიყიდია 8 მარკა, ჩემს მეგობარს კი 10 მარკა.**

1.1.61. მოციგურავე გოგონა წყვილებში ციგურაობისას, ასრულებდა ბრუნებს საკუთარი ღერძის გარშემო. ის 20-ჯერ შემობრუნდა სახით პარტნიორისაკენ, რომელიც ამავე 10 წმ-ში, 2-ჯერ შემობრუნდა გოგონას გარშემო. რამდენ ბრუნს ასრულებდა მოციგურავე გოგონა წამში ?

ამოხსნა: თუ, ბრუნვის მიმართულებები ემთხვევა, მაშინ გვაქვს 22 ბრუნი 10 წმ-ში ანუ **2,2 ბრ/წმ;** ხოლო თუ, ბრუნვის მიმართულებები საპირისპიროა, მაშინ გვაქვს 18 ბრუნი 10 წმ-ში ანუ **1,8 ბრ/წმ.**

1.1.62. იპოვეთ x და y ციფრები ხუთნიშნა რიცხვში 42x4y თუ, ცნობილია რომ ეს რიცხვი უნაშთოდ იყოფა 72 - ზე.

ამოხსნა: რადგან რიცხვი იყოფა 72 -ზე, ის იყოფა 9-ზე და 8 - ზე. რვაზე რომ გაიყოს ის 4-ზეც უნდა იყოფოდეს. 4 - ზე რომ გაიყოს ბოლო ორი ციფრით შედგენილი რიცხვი უნდა იყოფოდეს 4 - ზე, 9 - ზე რომ გაიყოს, ციფრთა ჯამი უნდა იყოფოდეს 9 - ზე. აქედან გამომდინარე, $x = 0; y = 8$ ანუ **42048=72·584.**

1.1.63. პირველ მილიონ რიცხვს შორის რომელი ტიპის რიცხვებია უფრო მეტი: რომელთა ჩანაწერში მონაწილეობს რიცხვი 1, თუ რომელშიც არ მონაწილეობს 1 ?

ამოხსნა: მეტია უფრო, ისეთი რიცხვების რაოდენობა, სადაც ჩანაწერში მონაწილეობს 1.

1.1.64. იპოვეთ კანონზომიერება და გულების ნაცვლად დასვით შესაბამისი რიცხვითი მიმდევრობები: 10; 8; 11; 9; 12; 10; 13; ♥; ♥ ?

ამოხსნა: ადვილად შევამჩნევთ, რომ მიმდევრობის თითოეული წევრი, დაწყებული მესამედან მიიღება მასზე ორი ნაბიჯით წინ მდგარ წევრზე 1 - ის მიმატებით, ე.ი. გვაქვს შემდეგი მიმდევრობა: **10; 8; 11; 9; 12; 10; 13; 11; 14.**

1.1.65. იპოვეთ ისეთი რიცხვი, რომელიც 2 - ზე გამრავლებით იქცევა ნატურალური რიცხვის კვადრატად, ხოლო 3 - ზე გამრავლებით - ნატურალური რიცხვის კუბად.

ამოხსნა: ასეთი რიცხვია **72.**

1.1.66. გაშიფრეთ ტოლობა: ♥♥+♥♥♥=♥♥♥♥, თუ ცნობილია რომ ორივე შესაკრები და ჯამიც, არ შეიცვლება თუ, ამ რიცხვებიდან თითოეულს ჩავწერთ იგივე ციფრებით, მაგრამ შებრუნებული რიგით.

ამოხსნა: ამოცანის პირობებს აკმაყოფილებენ შემდეგი რიცხვები: **22+979=1001.**

1.1.67. სამკუთხედში, რომლის ყველა გვერდის სიგრძე მთელი რიცხვია, ერთი გვერდის სიგრძეა 5, მეორესი 1. რას უდრის მესამე გვერდის სიგრძე ?

ამოხსნა: მესამე გვერდის სიგრძე ნაკლებია დანარჩენი ორის ჯამზე ანუ $5 + 1 = 6$ - ზე და მეტია დანარჩენი ორის სხვაობაზე ანუ $5 - 1 = 4$ - ზე, რაც იმას ნიშნავს, **რომ მესამე გვერდის სიგრძეა 5.**

1.1.68. პითაგორას მოწაფეთა ნახევარი სწავლობდა მათემატიკას, მეოთხედი მუსიკას, მეშვიდედი ხმას არ იღებდა და ამის გარდა იყო კიდევ სამი ქალი. სულ რამდენი მოწაფე ყოლია პითაგორას ?

ამოხსნა: ვთქვათ, პითაგორას სულ ყავდა x მოწაფე, მაშინ მათემატიკას სწავლობდა $\frac{1}{2}x$, მუსიკას - $\frac{1}{4}x$, ხმას არ იღებდა $\frac{1}{7}x$ და იყო კიდევ სამი ქალი. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{7}x = 3 \Longrightarrow \boldsymbol{x = 28.}$

1.1.69. თედო თავის ცოლ მადონასთან ერთად, ერთ კასრ ლუდს სვამს 10 დღეში. მარტო თედო, იგივე რაოდენობის ლუდს სვამს 14 დღეში. რამდენ დღეში დალევს 1 კასრ ლუდს მადონა ?

ამოხსნა: თედო 140 დღეში დალევს 10 კასრ ლუდს, ცოლთან ერთად, ისინი 140 დღეში დალევენ 14 კასრ ლუდს. ე.ი. 140 დღეში თედოს ცოლი მადონა დალევს $14 - 10 = 4$ კასრ ლუდს, რაც იმას ნიშნავს, რომ 1 კასრ ლუდს თედოს ცოლი - მადონა დალევს $140 : 4 =$ **35 დღეში.**

1.1.70. პაპა ეუბნება შვილიშვილებს: „აი თქვენ 130 კაკალი. გაყავით ორ ნაწილად ისე, რომ 4 - ჯერ გაზრდილი მცირე ნაწილი, უდრიდეს 3 - ჯერ შემცირებულ დიდ ნაწილს“. როგორ გავყოთ კაკლები ?

ამოხსნა: დიდი ნაწილის 3 - ჯერ შემცირებით მივიღებთ იმდენივე კაკალს, რამდენიც არის 4 - ჯერ გაზრდილი მცირე ნაწილი. ე.ი. დიდი ნაწილი შეიცავს $3 \cdot 4 = 12$ - ჯერ უფრო მეტ კაკალს, ვიდრე მცირე ნაწილი, ხოლო კაკლების მთლიანი რაოდენობა 13 - ჯერ მეტია მცირე ნაწილის კაკლების რაოდენობაზე. მაშასადამე, **მცირე ნაწილში უნდა იყოს $\mathbf{130 : 13 = 10}$ კაკალი,** ხოლო **დიდ ნაწილში $\mathbf{130 - 10 = 120}$** კაკალი.

1.1.71. შოშიები მიფრინდნენ ხესთან. როცა ისინი თითო - თითოდ დასხდნენ ტოტებზე, 1 შოშიას არ ეყო ხის ტოტი, ხოლო როცა ტოტებზე დასხდნენ ორ - ორად, 1 ტოტი დარჩა თავისუფალი. რამდენი შოშია იყო ხესთან და რამდენი ტოტი ქონია ხეს ?

ამოხსნა: რადგან თითო - თითოდ დაჯდომისას ტოტებზე, ერთი შოშია დარჩა ადგილის გარეშე, შოშიების რიცხვი ერთით მეტი ყოფილა ხის ტოტების რაოდენობაზე. თუ, შოშიების რიცხვს აღვნიშნავთ x - ით, ხოლო ხის ტოტების რაოდენობას y ასოთი, მივიღებთ, რომ $x - y = 1$. ანალოგიურად, თუ, ორ - ორად დასხდებიან შოშიები, მაში ერთი ტოტი თავისუფალი რჩება ანუ $2(y - 1) = x$. ამ ორ უცნობიანი სისტემის ამონახსნია: $x = 4$; $y = 3$. მაშასადამე, **ხეს ქონია 3 ტოტი და ხესთან მოფრენილი შოშიების რაოდენობაა 4.**

1.1.72. ერთი მოგზაური ერთი ქალაქიდან მეორეში ველოსიპედით ჩასვლას ანდომებს 10 დღეს, ხოლო მეორე მოგზაური, იგივე მანძილს გადის 15 დღეში. რამდენ დღეში შეხვდებიან ეს ორი მგზავრი, თუ ისინი გამოვლენ ამ ორი ქალაქიდან ერთმანეთის შემხვედრი მიმართულებით ?

ამოხსნა: 10 და 15 -ს უმცირესი საერთო ჯერადია 30. ოცდაათ დღეში მგზავრები გაივლიან $30 : 10 + 30 : 15 = 5$ - ჯერ უფრო მეტ მანძილს ვიდრე არის ამ ორ ქალაქს შორის. ე.ი. ისინი შეხვდებიან $30 : 5 = 6$ დღეში.

1.1.73. „რამდენი წლისაა შენი შვილი ?“ - ჰკითხა მზიამ თავის მეგობარს. მეგობარმა უპასუხა: „თუ, ჩემი შვილის ასაკს დავუმატებტ იმდენივეს, რაც ახლაა და კიდევ ნახევარს, მაშინ იქნება 10 წლის“. რამდენი წლისაა შვილი ?

ამოხსნა: ამოცანის პირობის თანახმად, 10 შეადგენს შვილის ასაკის 5 ნახევარს ანუ ასაკის ნახევარი იქნება $10 : 5 = 2$, მაშინ ბავშვის სრული ასაკია 4 წელი.

1.1.74. თემურის 6 ვაჟი ჰყავს, რომელთა ასაკობრივი სხვაობა მიმდევრობით, შეადგენს 4 წელს. ყველაზე უფროსი ვაჟი 3 - ჯერ უფროსია ყველაზე პატარაზე. რა ასაკისა არიან ვაჟები ?

ამოხსნა: ვთქვათ, უცროსი ვაჟი არის n წლის, მაში ძმების ასაკი დალაგდება შემდეგნაირად: $n, n + 4, n + 8, n + 12, n + 16, n + 20$. უმცროსი ვაჟი სამჯერ პატარაა ყველაზე უფროსთან შედარებით, მაშასადამე, $, n + 20 = 3n$. აქედან გამომდინარე, $n = 10$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ძმების ასაკი ლაგდება შემდეგნაირად:

$\mathbf{10; 14; 18; 22; 26; 30.}$

1.1.75. ენვერი ჩარკვიანის საათი რეკავს ყოველ საათს იმდენჯერ, რა დროც არის. რამდენჯერ დარეკავს საათი 12 საათის განმავლობაში ?
ამოხსნა: საათის დარეკვათა რაოდენობა იქნება:
1+2+3+4+...+12=(1+12)+(2+11)+(3+10)+...= 6 ·13 **= 78.**

1.2. კალენდართან დაკავშირებული ამოცანები

წელიწადში გვაქვს 366 ან 365 დღე, რაც დამოკიდებულია იმაზე, რომ ნაკიანია წელიწადი, თუ არა.

ნაკიანია წელიწადი, რომელიც იყოფა 4-ზე უნაშთოდ ან თუ ბოლოვდება ორი ნულით, მაშინ უნდა იყოფოდეს 400-ზე. ნაკიან წელში, თებერვალი შეიცავს 29 დღეს და მაშასადამე, წელიწადი შეიცავს 366 დღეს. კვირის დღეები მეორდება ყოველი 7 დღის შემდეგ (რადგან კვირაში 7 დღეა), ამრიგად, ნაკიან წელიწადს, გვაქვს შემდეგი წარმოდგენა: $\mathbf{366 = 52 \cdot 7 + 2}$ ანუ ნაკიანი წელი, შეიცავს 52 კვირას და 2 დღეს.

რაც შეეხება არანაკიან წელს, ის შეიცავს 365 დღეს. თებერვალში კი, არის 28 დღე. არანაკიანი წელი შეიცავს 52 კვირას და 1 დღეს, რადგან: $\mathbf{365 = 52 \cdot 7 + 1}$.

1.2.1. წელიწადში მაქსიმუმ რამდენი კვირა დღე შეიძლება იყოს ?
ამოხსნა: არანაკიან წელიწადს გვაქვს 365 დღე. რადგან $365 = 52 \cdot 7 + 1$, არანაკიან წელს გვაქვს 52 კვირა; რაც შეეხება ნაკიან წელს, გვაქვს 366 დღე ანუ $366 = 52 \cdot 7 + 2$. მაშასადამე, წელიწადში გვაქვს 52 ან 53 კვირა დღე. მაშასადამე, კვირა დღეების მაქსიმალური რაოდენობაა 53.
1.2.2. ცნობილია, რომ 1983 წელს 53 შაბათი დღე იყო. კვირის რა დღე იყო ამ წლის 1 იანვარი ?
ამოხსნა: რადგან 1983 წელი არაა ნაკიანი, ამ წელს იყო 52 კვირა და ერთი დღე, მაშასადამე 52 შაბათი. რადგან ამ წელს იყო 53 შაბათი, ეს იმას ნიშნავს, რომ წელიწადი იწყებოდა შაბათით და მაშასადამე 1 იანვარი იქნებოდა შაბათი.
1.2.3. ცნობილია, რომ 1970 წელი დაიწყო ხუთშაბათს. რომელი დღით დაიწყო 1976 და 1977 წლები ?
ამოხსნა: რადგან 1970 წელი იყო არანაკიანი, ის შეიცავდა 365 დღეს. ($365 = 52 \cdot 7 + 1$) ე.ი. 1971 წელი იწყებოდა პარასკევით (ერთი დღით წაინაცვლა). 1971 წელიც არაა ნაკიანი, მაშასადამე, შემდგომი 1972

წელიც წაინაცვლებს ერთი დღით და დაიწყება შაბათით. 1972 წელი ნაკიანია $366 = 52 \cdot 7 + 2$, ე.ი. შემდგომი წელი წაინაცვლებს 2 დღით, რაც იმას ნიშნავს, რომ 1973 წელი იწყებოდა ორშაბათით. მაშასადამე, თუ წელი ნაკიანია, მაშინ შემდეგი წელი წაინაცვლებს 2 დღით, ხოლო თუ წელი არაა ნაკიანი, მაშინ შემდეგი წელი წაინაცვლებს ერთი დღით ანუ 1974 წელი დაიწყებოდა სამშაბათით, 1975 წელი - ოთხშაბათით, 1976 წელი - ხუთშაბათით, 1977 წელი - შაბათით.

1.2.4. რომელიღაც თვეში სამი კვირა დღე დაემთხვა ლუწ რიცხვებს. კვირის რა დღე იყო ამ თვის 20 რიცხვი ?

ამოხსნა: რადგან მომდევნო კვირა დღეები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან 7 დღით, ისინი მიმდევრობით ხან ლუწ რიცხვზე მოდიან, ხან კენტზე. მაშადამე, რადგან 3 კვირა დღე მოდის ლუწ რიცხვზე ე.ი. 2 - ზე (უმცირესი ლუწი რიცხვი), ცხადია, რომ მაშინ თვის 20 რიცხვი მოდის ხუთშაბათ დღეზე.

1.2.5. თუ, ღამის 12 საათზე წვიმდა, შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ 72 საათის შემდეგ იქნება მზიანი ამინდი ?

ამოხსნა: 72 საათის შემდეგ, რადგან $72 = 24 \times 3$ ისევ ღამის 12 საათი იქნება, აქედან გამომდინარე, ჩვენს განედზე ისევ ღამე იქნება და არა მზიანი ამინდი.

1.3. ლოგიკური ამოცანები

1.3.1. სამ ყუთში აწყვია ბურთულები: ერთში ორი თეთი, მეორეში - ორი შავი, ხოლო მესამეში - ერთი თეთრი და ერთი შავი. ყუთებს აქვს წარწერა: თთ, შშ, თშ, ისე რომ, არცერთი ყუთის წარწერა არ შეესაბამება მასში არსებული ბურთულების რეალურ ფერს. ყუთიდან ერთი ბურთულის ამოღებით, როგორ გავარკვიოთ რომელ ყუთში რა ფერის ბურთულებია ?

ამოხსნა: ამოვიღოთ ერთი ბურთულა ყუთიდან წარწერით **თშ**, თუ, ამოღებული ბურთულა **აღმოჩნდა თეთრი,** მაშინ ამ ყუთში ორივე ბურთულა ყოფილა თეთრი. ყუთში წარწერით **თშ** ყოფილა ორი შავი და ყუთში წარწერით **შშ** ყოფილა ერთი თეთრი და ერთი შავი ბურთულა.

თუ, **თშ** წარწერიანი ყუთიდან ამოღებული ერთი ბურთულა, **აღმოჩნდა შავი,** მაშინ ამ ყუთში ორივე ბურთულა შავია, ყუთში

წარწერით **შშ**, არის ორი თეთრი ბურთულა, ხოლო ყუთში წარწერით **თთ** - გვაქვს სხვადასხვა ფერის ბურთულები.

1.3.2. კუნძულზე ცხოვრობენ რაინდები, რომლებიც ყოველთვის ამბობენ სიმართლეს და მატყუარები, რომლებიც ყოველთვის ტყუილს ამბობენ. კუნძულზე ჩამოსულ მოგზაურს, შემხვედრი ადამიანი ეუბნება: - მე ვარ მატყუარა. არის თუ, არა შემხვედრი ადამიანი ამ კუნძულის მკვიდრი ?

ამოხსნა: არა. ის არ არის კუნძულის მკვიდრი, რადგან მისი პასუხი არ შეესაბამება კუნძულის მკვიდრთა დახასიათებას. მართლაც, ის რომ რაინდი იყოს, არ იტყოდა მატყუარა ვარო, ხოლო მატყუარა არ იტყოდა სიმართლეს თავის თავზე.

1.3.3. კუნძულზე ცხოვრობენ რაინდები, რომლებიც ყოველთვის ამბობენ სიმართლეს და მატყუარები, რომლებიც ყოველთვის ტყუილს ამბობენ. რა კითხვა უნდა დავუსვათ აბორიგენს ამ კუნძულზე, რომ მისი პასუხით გავარკვიოთ ამ გზას რაინდების ქალაქისკენ მივყავართ, თუ, მატყუარების ქალაქისკენ ?

ამოხსნა: აბორიგენს უნდა ვკითხოთ, „შენ იმ ქალაქში ცხოვრობ, საითაც ამ გზას მივყავართ ?“, თუ, აბორიგენი რაინდია ის გეტყვის: „დიახ“, თუ, აბორიგენი მატყუარათა ქალაქიდანაა ისიც გეტყვის „დიახ“, რადგან ამბობს ტყუილს. ასე, რომ პასუხი დიახ ორივე შემთხვევაში ნიშნავს რომ თქვენ ადგახართ გზას რაინდთა ქალაქისკენ.

თუ, აბორიგენის პასუხია; „არა“ ეს იმას ნიშნავს, რომ თქვენ ადგახართ გზას მატყუარათა ქალაქისკენ.

1.3.4. ჩაფიქრებულ რიცხვს გამოაკლეს 40, დაუმატეს 150 და მიიღეს 500. რა რიცხვი იყო ჩაფიქრებული ?

ამოხსნა: ვთქვათ, ჩაფიქრებული იყო x რიცხვი. მაშინ ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$x-40+150=500$. მაშასადამე, $x=500-110$ ანუ $x=\mathbf{390}$.

1.3.5. დაწერეთ რიცხვი, რომელიც არის 13 ათასეულის, 12 ასეულის და 11 ერთეულის ჯამი.

ამოხსნა: $13\,000+1\,200+11=\mathbf{14211.}$

1.3.6. ორნიშნა რიცხვში 5 ათეულია. ამ რიცხვის ციფრებს შორის ჩაწერეს ნული. რამდენით მეტია მიღებული სამნიშნა რიცხვი მოცემულ ორნიშნა რიცხვზე ?

ამოხსნა: საწყისი ორნიშნა რიცხვია: $a = \overline{5n} = 50 + n$; თუ, ნულს ჩავუწერთ შუაში, მაშინ მიღებული სამნიშნა რიცხვი იქნება $b = \overline{50n}$ ანუ $b = 500 + n$, მაშინ $b - a = 500 + n - 50 - n = \mathbf{450}$.

1.3.7. რამდენჯერ გაიზრდება სამნიშნა რიცხვი, თუ მას მარჯვნიდან მივუწერთ იგივე რიცხვს ?

ამოხსნა: ვთქვათ გვაქვს სამნიშნა რიცხვი: $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. მაშინ, მარჯვნიდან იგივე რიცხვის მიწერის შემთხვევაში, გვექნება შემდეგი რიცხვი: $\overline{xyzxyz} = 100\,000x + 10\,000y + 1000z + 100x + 10y + z$ ანუ

$\overline{xyzxyz} = 100\,100x + 10\,010y + 1001z = 1001 \cdot \overline{xyz}$ **ანუ თუ, სამნიშნა რიცხვს მარჯვნიდან მივუწერთ იგივე რიცხვს, მაშინ ის 1001-ჯერ გაიზრდება.**

1.3.8. ორ მამას და ორ შვილს გაუნაწილეს 3 ვაშლი და თითოეულ მათგანს შეხვდა 1 მთლიანი ვაშლი. როგორაა ეს შესაძლებელი ?

ამოხსნა: ეს შესაძლებელია, თუ, ორი მამა და ორი შვილი სულ სამნი არიან ანუ პაპა, შვილი და შვილიშვილი.

1.3.9. ანბანის საყიდლად, ალეკოს არ ყოფნის 7 თეთრი, ხოლო გიორგის 1 თეთრი. მათ გადაწყვიტეს საერთო ანბანი ეყიდათ და შეაერთეს ფინანსები, მაგრამ ფული მაინც არ ეყოთ. რა ღირდა ანბანი და რა თანხა ქონდა თითოეულ ბიჭუნას ?

ამოხსნა: ვთქვათ, ანბანი ღირდა x თეთრი. მაშინ, ალეკოს ქონია $x - 7$, ხოლო გიორგის $x - 1$ თეთრი, ამათი ჯამური თანხა ნაკლები აღმოჩნდა ანბანის ფასზე ანუ გვაქვს შემდეგი სახის უტოლობა:

$x - 7 + x - 1 < x \Leftrightarrow 2x - 8 < x \Leftrightarrow x < 8$. მაშასადამე, ანბანის ფასი ყოფილა **7 თეთრი, ალეკოს არ ქონდა ფული, ხოლო გიორგის ქონდა 6 თეთრი.**

1.3.10. ერთ მწკრივადაა ამოწერილი ყველა ნატურალური რიცხვი ერთიდან ასამდე. რამდენჯერ გვხვდება ამ მწკრივში:ა) 0 ? ბ) 1 ? გ) 5 ?

ამოხსნა: ა) თითო ნული გვხვდება ყველა ათეულთან, მხოლოდ 100 - ში გვაქვს ორი ნული, მაშასადამე, ამ მწკრივში იქნება **11 ნული;** ბ) ერთიანი პირველ ათეულში გვაქვს ორი 1; 10; მეორე ათეულში 11;12; ...;19 ანუ გვაქვს 10 ერთეული, მესამედან დაწყებული შემდეგ ათეულებში ასეთი რიცხვები მხოლოდ თითო-თითოა, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ მწკრივში სულ გვაქვს $2 + 10 + 8 = \mathbf{20}$ **ერთიანი;** გ) პირველ ათეულში გვაქვს ერთი ხუთიანი, ასეა, ყველა ათეულში, გარდა მეხუთესი, სადაც გვაქვს:

$50; 51; 52; 53; 54; 55; \ldots; 59$ ანუ 11 ხუთიანი, მაშასადამე, მწკრივში სულ გვქონია **20 ხუთიანი.**

1.3.11. ნატურალური რიცხვები ამოწერილია ერთმანეთის გვერდზე ერთ მწკრივად. რა ციფრი იქნება ამ მწკრივში 1001 - ე ადგილზე ?

ამოხსნა: ერთნიშნა რიცხვების რაოდენობაა 9, ორნიშნებისა 90, სამნიშნებისა 900. შესაბამისად, მათ ჩასაწერად საჭირო ციფრების რაოდენობა იქნება: 9; 180 და 2700. მაშასადამე, ჩვენს მიერ საძებნი ციფრი აქვს სამნიშნა რიცხვს. ერთნიშნა და ორნიშნა რიცხვების ჩაწერას სულ სჭირდება:$9 + 180 = 189$ ციფრი. ე.ი. გვრჩება:

$1001 - 189 = 812$ ციფრი. $812 : 3 = 270\frac{2}{3}$ ანუ ნაშთში გვრჩება 2, რაც იმას ნიშნავს, რომ საძიებელი ციფრი **მეორე ადგილზეა** 271 - ე სამნიშნა რიცხვში. ასეთი რიცხვი იქნება: $99 + 271 = \mathbf{370}$. მაშასადამე, ამ მწკრივში 1001 - ე ადგილზე დგას ციფრი **7**.

1.3.12. იპოვეთ ოთხი მომდევნო ლუწი რიცხვი, რომელთა ჯამია 4052.

ამოხსნა: ლუწი რიცხვები მოიცემა ფორმულით $2n$. მაშინ, მომდევნო ლუწი რიცხვები იქნება: $2n + 2$; $2n + 4$; $2n + 6$. მაშინ გვექნება, რომ

$$2n + 2n + 2 + 2n + 4 + 2n + 6 = 4052 \Leftrightarrow 8n = 4040 \Rightarrow n = 505.$$

მაშასადამე, საძიებელი ლუწი რიცხვები ყოფილა: **1010; 1012; 1014; 1016.**

1.3.13. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორი რიცხვის ნამრავლი არის კენტი, მაშინ მათი ჯამი იქნება ლუწი.

დამტკიცება: თუ, ორი ნატურალური რიცხვის ნამრავლი კენტია, მაშინ ორივე რიცხვი ყოფილა კენტი, მაგრამ ორი კენტი რიცხვის ჯამი ყოველთვის ლუწია. რ.დ.გ.

1.4. სხვადსხვა შინაარსის ამოცანები

1.4.1. ტრასაზე მოძრავი ავტობუსი დაზიანდა გზაზე. გამვლელმა მსუბუქმა მანქანამ, რომელშიც მძღოლის გარდა 4 მგზავრი ეტევა, უნდა გადაიყვანოს მგზავრები დანიშნულების ადგილამდე. რამდენჯერ დასჭირდება მსუბუქ მანქანას იქით-აქეთ სიარული, თუ, ავტობუსში 38 მგზავრია ?

ამოხსნა: რადგან გადასაყვანია 38 მგზავრი და მსუბუქ ავტომობილში მხოლოდ 4 ადგილია, საჭირო იქნება: $38:4=9.5$ - ჯერ წასვლა-წამოსვლა ანუ 9 წასვლა-წამოსვლით გადავიყვანთ 36 მგზავრს და დაგვრჩება 2 მგზავრი, რომელთა გადასაყვანადაც მოუწევს მსუბუქ მანქანას მეათედ დაბრუნება. მაშასადამე, სულ დაგვჭირდება **10 - ჯერ წასვლა და მათ შორის 9 - ჯერ კი, იქით აქეთ სიარული.**

1.4.2. ხუთ კატას ჭირდება 5 წუთი 5 თაგვის დასაჭერად. რამდენი კატაა საჭირო, რომ 100 წუთში დაიჭირონ 100 თაგვი ?

ამოხსნა: 5 კატა 1 თაგვს დაიჭერს 1 წუთში, მაშასადამე, **5 კატა** 100 წუთში დაიჭერს 100 თაგვს.

1.4.5. ჭიქაში არიან ბაქტერიები, რომლებიც ყოველ წამში იყოფა ორად, შემდეგ, თითოეული გამოყოფილი 1 წამში ისევ იყოფა ორად და ა.შ. ერთ წუთში ჭიქა ივსება. რამდენ ხანში ავსებენ ბაქტერიები ჭიქის ნახევარს ?

ამოხსნა: პირველი გაყოფის შემდეგ გვაქვს ორი ბაქტერია, შემდეგი გაყოფის შემდეგ 4, შემდეგ 8 . . . ანუ გვაქვს მიმდევრობა: $1; 2; 2^2; 2^3; \dots; 2^n$. როგორც ვხედავთ, n წმ - ში ჭიქაში იქნება 2^n ბაქტერია, ხოლო 1 წთ -ში ანუ 60 წმ - ში 2^{60} ბაქტერია, რომელიც ავსებს ჭიქას. ჭიქის ნახევარს შეავსებს 2^{30} ბაქტერია ანუ ეს მოხდება 30 წმ - ში.

1.4.6. ძველი სქელტანიანი წიგნიდან ამოვარდა წიგნის ბოლო ნაწილი, რომლის პირველი გვერდის ნომერია 328, ხოლო ბოლო გვერდის ნომერი იგივე ციფრებით იწერება, მხოლოდ სხვა თანმიმდევრობით. რამდენი გვერდია ამოვარდნილ ნაწილში ?

ამოხსნა: რადგან ბოლო გვერდი იგივე ციფრებისგან შედგება, ცხადია რომ ის ვერ დაიწყება 2 - ით, მაშასადამე, იწყება 3 - ით ან 8 - ით. ე.ი.

ბოლო გვერდის ნომერია 382; 828 ან 832. გვექნება, რომ ამოვარდნილი გვერდების რაოდენობა იქნება შესაბამისად: **55; 501 ან 505 გვერდი.**

1.4.7. ქაღალდის ფურცელს ჭრიან 4 ნაწილად შემდეგ, ზოგიერთ ნაჭერს კიდევ 4 ნაწილად და ა.შ. დაამტკიცეთ, რომ შეუძლებელია ფურცლის 50 ნაჭრის მიღება.

დამტკიცება: რადგან ჭრიან ფურცელს 4 ნაწილად და შემდეგაც ზოგიერთს 4 ნაწილად, გვექნება ოთხის ჯერადი ნაჭერთა რაოდენობა, მაგრამ 50 არაა 4 -ის ჯერადი, რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს.რ.დ.გ.

1.4.8. ტომარაში გვაქვს 24 კგ ლურსმანი. როგორ ავწონოთ 9 კგ ლურსმანი მხოლოდ ორთეფშიანი სასწორით ?

ამოხსნა: ორთეფშიან სასწორზე დავალაგოთ ლურსმები ისე, რომ გვქონდეს წონასწორობა, მაშინ თითოეულ თეფშზე გვექნება 12 კგ ლურსმანი. შემდეგ, 12 კგ ლურსმანი კვლავ გავყოთ ორად და გავაწონასწოროთ სასწორი, მაშინ თითოეულ თეფშზე გვექნება 6 კგ. ერთ-ერთ თეფშზე არსებული 6 კგ შევინახოთ, ხოლო მეორე 6 კგ კვლავ გავყოთ ორად სასწორის საშუალებით და მივიღებთ 3 კგ -ს. თუ ამ 3 კგ ლურსმანს დავუმატებთ შენახულ 6 კგ - ს, მივიღებთ **9 კგ ლურსმანს.**

1.4.9. სიბრტყეზე 7 კბილანებიანი ლილვი ერთმანეთთან კბილანურ შეხებაშია. შეძლებენ ლილვები ბრუნვას, თუ, არა ?

ამოხსნა: თუ, ორი ლილვი შეხებაშია და პირველი ბრუნავს საათის ისრის მიმართულებით, მაშინ მეორე უნდა ბრუნავდეს საპირისპიროდ ანუ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით; მესამე ლილვი საათის ისრის მიმართულებით და ა.შ. კენტი ნომრის ლილვები ბრუნავენ საათის ისრის მიმართულებით და ლუწი ნომრისა - საპირისპირო მიმართულებით ანუ პირველი და მეშვიდე შეხებაში მყოფი ლილვები უნდა ბრუნავდნენ საათის ისრის მიმართულებით, რაც შეუძლებელია.

1.4.10. გიორგი და მისი მეგობრები, ბიჭები და გოგონები წრეწირზე დადგნენ. აღმოჩნდა, რომ ნებისმიერი მოსწავლის გვერდზე აქეთ-იქით მდგარი ბავშვი ერთი სქესისაა. გიორგის მეგობრებში 7 ბიჭია. რამდენი გოგონა იქნება მათ შორის ?

ამოხსნა: რადგან ბიჭები და გოგონები წრეწირზე გვხვდება მორიგეობით, ბიჭებისა და გოგონების რიცხვი ერთნაირია ანუ გოგონების რიცხვი **იქნება 8.**

1.4.11. შესაძლებელია ჭადრაკის დაფა ზომებით 8×8 დაიფაროს 2×1 ზომის დომინოს ქვებით ?

ამოხსნა: ჭადრაკის დაფას აქვს 64 უჯრა. მის დაფარვას დაჭირდება დომინოს 32 ქვა.

შენიშვნა. თუ, გვაქვს დაფა ზომებით 5×5, მაშინ გვექნება 25 უჯრა ანუ კენტი რაოდენობა და მისი დაფარვა ლუწი ფართის დომინოს ქვებით შეუძლებელი იქნებოდა.

1.4.12. მოცემულია ღერძულ-სიმეტრიული, ამოზნექილი 101 - კუთხედი. დაამტკიცეთ, რომ სიმეტრიის ღერძი გადის ერთ - ერთ წვეროზე. რისი თქმა შეიძლება ათკუთხედის შემთხვევაში ?

ამოხსნა: ღერძული სიმეტრიის შემთხვევაში, ცხადია რომ ამ ღერძის მიმართ სიმეტრიული წვეროები ადგენენ წყვილებს. მაშასადამე, რადგან ასერთკუთხედი კენტი რაოდენობის წვეროებს შეიცავს, ერთი წვერო აუცილებლად იქნება სიმეტრიის ღერძზე. რ.დ.გ.

ათკუთხედის შემთხვევაში, ან ორი წვერო ღერძზეა ან არცერთი წვერო არაა სიმეტრიის ღერძზე.

1.4.13. დაფაზე ზომებით 25×25 დიაგონალის სიმეტრიულად განლაგებულია შაშის 25 ქვა. დაამტკიცეთ, რომ ერთი ქვა ძევს დიაგონალზე.

დამტკიცება: რადგან, სიმეტრიული განლაგება ნიშნავს ქვების დაწყვილებას, 25 ქვიდან ერთ-ერთი დარჩება მეწყვილის გარეშე, რაც იმას ნიშნავს, რომ ის ძევს დიაგონალზე. რ.დ.გ.

1.4.14. შესაძლებელია თუ, არა 50 ლარიანი კუპიურა დავახურდაოთ 15 ცალი: 1 ლარიანებით და 5 ლარიანებით ?

ამოხსნა: რადგან 15 კენტი რიცხვია, ისევე როგორც 1 და 5, ხოლო კენტი რაოდენობის კენტი რიცხვების ჯამი არის კენტი, **ის არასოდეს გახდება 50 - ის ტოლი. მასასადამე, არ შეიძლება.**

1.4.15. წრეწირზე განალაგეს 16 კალათა. შესაძლებელია თუ, არა მათში ისე გავანაწილოთ 55 საზამთრო, რომ ყოველ მეზობელ კალათში, საზამთროების რიცხვი ერთით განსხვავდებოდეს ?

ამოხსნა: რადგან მეზობელ კალათებში საზამთროების რაოდენობა ერთით განსხვავდება, ცხადია რომ მათში არსებული საზამთროების ლუწობა-კენტობა, რიგ-რიგობით იცვლება ანუ 8 კალათაში გვაქვს საზამთროების ლუწი რაოდენობა და დანარჩენ 8 კალათაში კი, კენტი რაოდენობის საზამთროები. ლუწი რიცხვების ჯამი ლუწია, ასევე, ლუწი რაოდენობის კენტი რიცხვების ჯამიც ლუწია, რაც იმას ნიშნავს, რომ კენტი 55 რაოდენობის საზამთროებს, ასეთნაირად ვერ განვალაგებთ კალათებში.

1.4.16. იპოვეთ $\mathbf{1989^{1989}}$ რიცხვის ბოლო ციფრი.

ამოხსნა: ცხადია, რომ ამ რიცხვის ბოლო ციფრი ემთხვევა 9^{1989} რიცხვის ბოლო ციფრს. გამოვითვალოთ ცხრის ხარისხების ბოლო ციფრი რამდენიმე რიცხვისათვის: 9; 1; 9; 1; 9 . . .როგორც ვხედავთ, ცხრის კენტი ხარისხები ბოლოვდება 9 - ით, ხოლო ლუწი ხარისხები 1 - ით. მასასადამე, **$\mathbf{1989^{1989}}$ რიცხვის ბოლო ციფრია 9.**

1.5. გიორგის და მზიკოს თამაშები

1.5.1. გიორგი და მზიკო თამაშობენ შოკოლადის ფილით და რიგ-რიგობით თითო ნაწილს ჩამოამტვრევენ ჩაღრმავებების გასწვრივ. იღებენ შოკოლადის ფილას ზომებით: 6×8. იგებს ის, ვინც ბოლო მომტვრევას ასრულებს. წაგებული ყიდულობს შოკოლადის ახალ ფილას. დაამტკიცეთ, რომ ასეთი ზომების ფილის შემთხვევაში, თუ თამაშს იწყებს გიორგი, მზიკო ყოველთვის წააგებს.

დამტკიცება: რადგან ზომებია 6×8, ღარების გასწვრივ სულ დამტვრევის შემდეგ, გვექნება 48 ნატეხი. სულ კეთდება 47 სვლა, მაშასადამე, **ბოლო სვლას აკეთებს დამწყები** - პირველი მოთამაშე - **გიორგი და ის იგებს.** რ.დ.გ.

შენიშვნა: თუ, იქნებოდა ფილა ზომებით: 5×7, მაშინ ყოველთვის მოიგებდა მეორე მოთამაშე, რადგან ნატეხების რაოდენობა იქნებოდა 35 და მაშასადამე, სულ იქნებოდა 34 სვლა (ლუწი რაოდენობის სვლა).

1.5.2. ორი მოჭადრაკე, რიგ-რიგობთ სვავენ ეტლს ჭადრაკის დაფაზე ისე, რომ ეტლებს არ შეეძლოთ ერთმანეთის მოკვლა. ყოველი სვლის შემდეგ, ჭადრაკის დაფაზე ჰორიზონტალური და ვერტიკალური ველები ერთით მცირდება. წააგებს ის, ვისაც სვლის გასაკეთებელი ველი აღარ დარჩება. ვინ იგებს, დამწყები, თუ მეორე მოთამაშე ?

ამოხსნა: რადგან ყოველი სვლის შემდეგ ვერტიკალური და ჰორიზონტალური ველები ერთით მცირდება, ამ თამაშში გაკეთდება სულ 8 სვლა (ჭადრაკის დაფის ზომებია 8×8). მაშასადამე, ბოლო სვლას გააკეთებს **მეორე მოთამაშე,** რაც იმას ნიშნავს, რომ ასეთ თამაშში, **თამაშის დამწყები აგებს.**

1.5.3. დაფაზე წერია 10 ერთიანი და 10 ორიანი. გიორგი და მზიკო თამაშობენ მათემატიკურ თამაშს და რიგ-რიგობით აკეთებენ სვლას. ერთი სვლის დროს, შეუძლიათ ორი ნებისმიერი რიცხვის წაშლა. თუ, ეს რიცხვები ერთნაირია, მაშინ დაფაზე იწერება ორიანი, ხოლო თუ ეს რიცხვები სხვადასხვაა, მაში იწერება ერთიანი. თუ ბოლოს, დაფაზე დარჩენილი რიცხვი ერთიანია, მაშინ იმარჯვებს გიორგი, თუ – ორიანი, მაშინ მზიკო. ვინ მოიგებს თუ, თამაშს იწყებს გიორგი ?

ამოხსნა: ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, ყოველი სვლის შემდეგ, დაფაზე დაწერილი ერთიანების რაოდენობის ლუწობა არ იცვლება. თავიდან კი, ერთიანების რაოდენობა არის ლუწი ათია, მაშასადამე, ბოლო რიცხვი არ შეიძლება დარჩეს ერთიანი, რაც იმას ნიშნავს, რომ ასეთ თამაშში, **გაიმარჯვებს მზიკო.**

1.5.4. გიორგი და მზიკო თამაშობენ მათემატიკურ თამაშს. სიმეტრიულ მაგიდაზე ისინი რიგ-რიგობით დებენ 2 ლარიან მონეტას, ისე რომ მონეტამ არ უნდა გადაფაროს სხვა მონეტა. თამაშს იწყებს გიორგი. წააგებს ის, ვისაც აღარ ექნება სვლის გაკეთების საშუალება. ვინ მოიგებს ?

ამოხსნა: თამაშის დამწყები გიორგისთვის, ოპტიმალური სვლაა თუ, მონეტას დადებს მაგიდის სიმეტრიის ცენტრში. შემდეგ, მზიკოს ნებისმიერი სვლის შემთხვევაში, გიორგი თავის მონეტას დებს მზიკოს მონეტის მდებარეობის სიმეტრიულად მაგიდის ცენტრის მიმართ. **ცხადია, რომ გიორგის ყოველთვის ექნება სვლა, მზიკოს სვლაზე, ხოლო მაგიდის ფართობის შემოსაზღვრულობის გამო, თამაში აუცილებლად**

დასრულდება მზიკოს წაგებით. ასეთ თამაშში, ყოველთვის იგებს დამწყები.

1.5.5. გვაქვს ქვების ორი გროვა. თითოეულ მათგანში შვიდ - შვიდი ქვაა. გიორგი და მზიკო თამაშობენ მათემატიკურ თამაშს. თითოეულს, ერთ სვლაზე შეუძლია ნებისმიერი რაოდენობის ქვების აღება, მხოლოდ რომელიმე ერთი გროვიდან. წააგებს ის, ვისაც ასაღები ქვები აღარ დარჩება. ვინ მოიგებს, თუ თამაშს იწყებს გიორგი ?

ამოხსნა: ამ თამაშში, სიმეტრიული სვლის საშუალებით **იგებს მზიკო.** რამდენი ქვაც არ უნდა აიღოს დამწყებმა - გიორგიმ რომელიმე გროვიდან, მზიკო იღებს მეორე გროვიდან იგივე რაოდენობას, ასე, რომ მზიკოს ყოველთვის აქვს სიმეტრიული სვლა.

1.5.6. წრეწირზე განლაგებულია 20 წერტილი. გიორგი და მზიკო თამაშობენ მათემატიკურ თამაშს და რიგ-რიგობით აკეთებენ სვლას. ერთი სვლის დროს უნდა შეაერთონ რომელიმე ორი წერტილი ისე, რომ მიღებულმა მონაკვეთმა არ გადაკვეთოს, ადრე უკვე გავლებული მონაკვეთები. წააგებს ის, ვისაც აღარ ექნება ასეთი სვლის გაკეთების საშუალება. ვინ მოიგებს, თუ თამაშს იწყებს გიორგი ?

ამოხსნა: ასეთ თამაშში, ოპტიმალური სვლის შემთხვევაში, **იგებს დამწყები ანუ გიორგი.** მართლაც, მას შეუძლია წრეწირზე მოცემული ოცი წერტილიდან, შეაერთოს მონაკვეთით ორი ისეთი წერტილი, რომლის შემადგენელი მონაკვეთის სხვადასხვა მხარეს აღმოჩნდება ცხრა ცხრა წერტილი ანუ ეს მონაკვეთი იქნება გარკვეული სიმეტრიის მონაკვეთი. ამის შემდეგ, მზიკოს ყოველ სვლაზე, გიორგიმ უნდა უპასუხოს სიმეტრიული სვლით ამ მონაკვეთის მიმართ.

მათემატიკა უნდა ისწავლოთ თუნდაც იმიტომ,
რომ მას ჩვენი აზროვნება წესრიგში მოყავს.

მიხეილ ვასილის ძე ლომონოსოვი

II თავი. V კლასის საოლიმპიადო ამოცანები ამოხსნებით

2.1. ციფრების გამოცნობა

დავამტკიცოთ, რიცხვებთან და ციფრებთან დაკავშირებული ზოგიერთი თეორემა, რომელიც სასკოლო კურსში მოცემულია დაუმტკიცებლად.

თეორემა: 3-ზე ან 9 - ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომელთა ციფრთა ჯამიც იყოფა შესაბამისად 3 - ზე ან 9 - ზე.

დამტკიცება: განვიხილოთ $n -$ ნიშნა რიცხვი:
$\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots a_{n-1} \cdot 10 + a_n$. გადავწეროთ ეს რიცხვი შემდეგნაირად:
$\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n + 9 \cdot \overline{b_1 b_2 \ldots b_{n-1}}$; $(*)$
სადაც $\overline{b_1 b_2 \ldots b_{n-1}} = \underbrace{11 \ldots 1}_{n-1} \cdot a_1 + \underbrace{11 \ldots 1}_{n-2} \cdot a_2 + \ldots + a_{n-1}$.
ვარსკვლავიანი ფორმულიდან გამომდინარე, თუ, რიცხვის ციფრთა ჯამი იყოფა 3 -ზე ან 9 - ზე, მაშინ ეს რიცხვიც, შესაბამისად იყოფა 3 -ზე, ან 9 - ზე. რ.დ.გ.

ვარსკვლავიანი წარმოდგენის საილუსტრაციოდ, განვიხილოთ **ორნიშნა რიცხვის შემთხვევა** ანუ ვთქვათ, გვაქვს ორნიშნა რიცხვი:
$\overline{a_1 a_2} = 10a_1 + a_2 = a_1 + a_2 + 9a_1$;

სამნიშნა რიცხვის შემთხვევაში, გვექნება შემდეგი ვარსკვლავიანი წარმოდგენა: $\overline{a_1 a_2 a_3} = 100a_1 + 10a_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 + 99a_1 + 9a_2 =$
$= a_1 + a_2 + a_3 + 9 \cdot (11a_1 + a_2)$.

შედეგი: $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots a_{n-1} \cdot 10 + a_n$ წარმოდგენიდან, ცხადია რომ თუ, $a_n \vdots 2$, მაშინ მოცემული რიცხვიც იყოფა ორზე ანუ **2 - ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომლებიც ბოლოვდება ლუწი ციფრით.**

თეორემა: 4-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომლის ბოლო ორი ციფრით შედგენილი რიცხვიც იყოფა 4 - ზე.

დამტკიცება: განვიხილოთ $n -$ ნიშნა რიცხვი:
$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-2} \cdot 100 + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$.
როგორც ვხედავთ, ბოლო ორი ციფრით შედგენილი რიცხვია: $a_{n-1} \cdot 10 + a_n$. მის გარეშე, წინ მდგარი შესაკრები 100 - ის ჯერადია ანუ უნაშთოდ იყოფა 4 - ზე, რაც იმას ნიშნავს, რომ თუ, ბოლო ორი ციფრით შედგენილი რიცხვიც 4 - ის ჯერადია, მაშინ $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ რიცხვიც გაიყოფა 4 - ზე. რ.დ.გ.

თეორემა: 5 - ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომლებიც ბოლოვდება ნულით ან ხუთით.

დამტკიცება: განვიხილოთ $n -$ ნიშნა რიცხვი:

$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots a_{n-1} \cdot 10 + a_n$.

ამ ჩანაწერიდან ცხადია, რომ მარჯვენა ნაწილის ყველა შესაკრები ბოლოს გარდა, წარმოადგენს ათის ხარისხება და მაშასადამე იყოფა 5 - ზეც. თუ ბოლო ციფრი იქნება 5, მაშინ თვით $n -$ ნიშნა რიცხვიც გაიყოფა 5 - ზე, რადგან ხუთის ჯერადი რიცხვების ჯამიც ხუთის ჯერადი იქნება. თუ, ბოლო ციფრია ნული, მაშინ ჩვენი რიცხვი ათის ჯერადი ყოფილა და ავტომატურად გაიყოფა 5-ზეც. რ.დ.გ.

შედეგები: ა) 6 - ზე იყოფა ის ლუწი რიცხვები, რომლებიც იყოფა 3 - ზე ანუ თუ, რიცხვი ბოლოვდება ლუწი ციფრით და მისი ციფრთა ჯამი იყოგა 3 - ზე, მაშინ ეს რიცხვი იყოფა 6 - ზე.

ბ)

$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-3} \cdot 1000 + a_{n-2} \cdot 100 + a_{n-1} \cdot 10 + a_n =$
$\overline{a_1a_2\ldots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_{n-3} \cdot 1000 + \overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$

ამ წარმოდგენიდან გამომდინარე: **8 – ზე იყოფა ის რიცხვები, რომელთა ბოლო სამი ციფრისაგან შემდგარი რიცხვიც იყოფა 8 - ზე.**

თეორემა: ხუთით დაბოლოვებული ორნიშნა რიცხვის კვადრატის საპოვნელად, საკმარისია მისი ათეულების ციფრი გავამრავლოთ მომდევნო რიცხვზე და მივუწეროთ 25.

დამტკიცება: ჩავწეროთ ორნიშნა რიცხვი ზოგადი სახით:

$\overline{a_1a_2} = 10a_1 + a_2$ და გამოვიანგარიშოთ მისი კვადრატი:

$(10a_1 + a_2)^2 = 100a_1^2 + 20a_1a_2 + a_2^2$. თუ, ორნიშნა რიცხვი ბოლოვდება ციფრით 5, მაშინ მივიღებთ რომ:
$(10a_1 + a_2)^2 = 100a_1^2 + 20a_1a_2 + a_2^2 = 100a_1^2 + 100a_1 + 25$ ანუ
$(10a_1 + a_2)^2 = 100a_1 \cdot (a_1 + 1) + 25$. ამ ჩანაწერიდან ვხედავთ, რომ ორნიშნა რიცხვის კვადრატში ასეულების ციფრი უდრის ათეულების

ციფრის ნამრავლს მის მომდევნო რიცხვზე, ბოლო ორი ციფრი კი იქნება 25. რ.დ.გ.

ზოგიერთ ამოცანაში, საჭიროა ნატურალური რიცხვის **კანონიკური წარმოდგენის** ცოდნა. **ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:** $\boldsymbol{n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}}$**, სადაც** $\boldsymbol{p_i}$; $\boldsymbol{i = \overline{1,k}}$; $\boldsymbol{n}$ **ნატურალური რიცხვის მარტივი გამყოფებია.**

ასეთი წარმოდგენა, საშუალებას გვაძლევს დავთვალოთ: $\boldsymbol{n}$ **ნატურალური რიცხვის გამყოფების რაოდენობა, რომელიც გამოისახება შემდეგი ფორმულით:** $\boldsymbol{\varphi(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)}$.

ვნახოთ რიცხვების საინტერესო თვისებები:

$1 \cdot 9 = 09$	$90 = 9 \cdot 10$
$2 \cdot 9 = 18$	$81 = 9 \cdot 9$
$3 \cdot 9 = 27$	$72 = 9 \cdot 8$
$4 \cdot 9 = 36$	$63 = 9 \cdot 7$
$5 \cdot 9 = 45$	$54 = 9 \cdot 6$

აქ გამოსახული რიცხვები სარკულ - სიმეტრიულია ერთმანეთის მიმართ.

ახლა კი ვნახოთ, რიცხვების უცნაური კანონზომიერებები:

$9^2 = 81$	$9 \cdot 7 = 63$
$99^2 = 9\ 801$	$99 \cdot 77 = 7\ 623$
$999^2 = 998\ 001$	$999 \cdot 777 = 776\ 223$
$9\ 999^2 = 99\ 980\ 001$	$9\ 999 \cdot 7\ 777 = 77\ 762\ 223$
$99\ 999^2 = 9\ 999\ 800\ 001$	$99\ 999 \cdot 77\ 777 = 7\ 777\ 622\ 223$

და ბოლოს საოცარი კანონზომიერებები:

$12\ 345\ 678 \cdot 9 = 1\ 111\ 111\ 111$
$12\ 345\ 678 \cdot 18 = 2\ 222\ 222\ 222$
$12\ 345\ 678 \cdot 27 = 3\ 333\ 333\ 333$
$12\ 345\ 678 \cdot 36 = 4\ 444\ 444\ 444$
$12\ 345\ 678 \cdot 45 = 5\ 555\ 555\ 555$
$12\ 345\ 678 \cdot 54 = 6\ 666\ 666\ 666$
$12\ 345\ 678 \cdot 63 = 7\ 777\ 777\ 777$
$12\ 345\ 678 \cdot 72 = 8\ 888\ 888\ 888$
$12\ 345\ 678 \cdot 81 = 9\ 999\ 999\ 999$

ახლა, განვიხილოთ შემდეგი საოლიმპიადო ამოცანები:

ვარსკვლავები შეცვალეთ შესაბამისი ციფრებით:

2.1.1. ა) $*** - ** = \mathbf{1}$; ბ) $**\cdot * - * = \mathbf{1}$; გ) $\mathbf{1} *\cdot* \mathbf{1} = \mathbf{1} ** \mathbf{1}$.

ამოხსნა: ა) თუ, სხვაობა სამნიშნა რიცხვსა და ორნიშნა რიცხვს შორის არის ერთი, ეს იმას ნიშნავს, რომ ისინი მომდევნო რიცხვებია, მაშასადამე, გვაქვს სხვაობა უმცირეს სამნიშნა რიცხვსა და უდიდეს ორნიშნა რიცხვს შორის ანუ $100 - 99 = 1$;

ბ) აქაც, გვაქვს სხვაობა ორ მომდევნო რიცხვს შორის; რადგან მეორე რიცხვი ერთნიშნაა, ხოლო პირველი რიცხვი ორნიშნა რიცხვის ნამრავლია ერთნიშნაზე ანუ ორნიშნაზე ნაკლები არაა, მივიღებთ $10 \cdot 1 - 9 = 1$;

გ) რადგან ნამრავლის ბოლო ციფრი არის 1, მივიღებთ რომ მარცხენა მხარია პირველი თანამამრავლი ბოლოვდება 1-ით, მაშინ მივიღებთ რომ $91 \cdot 11 = 1001$.

2.1.2. ა) $** + *=**\mathbf{8}$; ბ) $\mathbf{4} * + * \mathbf{81} =*** \mathbf{0}$; გ) $\mathbf{11} \cdot * \mathbf{2} = \mathbf{1} * \mathbf{2}$.

ამოხსნა: ა) ორნიშნა რიცხვს ემატება ერთნიშნა და ბოლო ციფრია 8, ხოლო შედეგი - სამნიშნა რიცხვია, მაშასადამე გვექნება: $99 + 9 = 108$;

ბ) რადგან, ჯამი ბოლოვდება ნულით და მეორე შესაკრები ერთით, ცხადია რომ პირველი შესაკრები უნდა ბოლოვდებოდეს 9-იანით და მაშასადამე, მივიღებთ რომ: $49 + 981 = 1020$;

გ) მარცხენა მხარეში გვაქვს ორი ორნიშნა რიცხვის ნამრავლი და ის უნდა იყოს სამნიშნა, აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ: $11 \cdot 12 = \mathbf{132}$.

2.1.3.

ა)	ბ)	გ)	დ)
5 *	*	6 * 5 *	3 * 8 6
+	+	-	+
* 8 4	* *	* 8 * 4	* 2 * 7
* * * 0	* * 8	2 8 5 6	8 0 4 *

ამოხსნა: ა) $56 + 984 = 1030$; ბ) $9 + 99 = 108$; გ) $6750 - 3894 = 2856$.

2.1.4.

ა)
```
   * *
   5 2
  -----
   * 6
+
  * *
  -----
  * 7 *
```

ბ)
```
   2 *
   * 2
  -----
   * 8
+
  7 *
  -------
  7 * 8 *
```

გ)
```
   * *
   2 7
  -----
  * * 8
+
  * *
  -----
  3 * *
```

დ)
```
   4 *
   * 6
  -------
   2 * 2
+
  2 * 5
  -------
  * * * 2
```

ამოხსნა: ა) $13 \cdot 52 = 576$; ბ) $24 \cdot 32 = 768$; გ) $14 \cdot 27 = 378$;

დ) $47 \cdot 56 = 2732$.

2.1.5. $a = 5 * 6 + 8 * 2$ ვარსკვლავების ნაცვლად შეიძლება მხოლოდ მიმატების და გამრავლების ნიშნების ჩასმა. შეიძლება თუ არა, რომ a-ს მნიშვნელობა იყოს: ა) 40; ბ) 41 ?

ამოხსნა: ხუთის და ექვსის ჯამი ბოლოვდება 1-თ, ხოლო ნამრავლი - 0-ით; რვის და ორის ჯამი ბოლოვდება ნულით, ხოლო ნამრავლი - 6-ით.

ა) $40 = 5 \cdot 6 + 8 + 2$; ბ) არ შეიძლება, რადგან 41-თან რომ მიუახლოვდეთ ხუტს და ექვსს შორის უნდა ჩავსვათ გამრავლების ნიშანი, თუმცა რვის და ორის ნამრავლიც და ჯამიც ლუწია და ჯამში კენტ 41-ს ვერ მოგვცემს.

2.1.6. $(** + *)(** + *) = ****$. **ვარსკვლავების ნაცვლად ჩასვით რიცხვები, ისე, რომ მიიღოთ სწორი ტოლობა, ამასთან გამოიყენეთ არაუმეტეს 4 განსხვავებული ციფრი.**

ამოხსნა: $(40 + 5)(40 + 5) = 2025$. გვაქვს 4 განსხვავებული ციფრი: 4;0;5;2.

2.1.7. გაშიფრეთ ჩანაწერი: $1BC + CB1 = DDD$. ერთნაირი ასოებით ერთი და იგივე ციფრია აღნიშნული.

ამოხსნა: არ შეიძლება, რომ $\boldsymbol{D = 1}$, რადგან მაშინ $\boldsymbol{C = 0}$ და რიცხვი არ შეიძლება იწყებოდეს ნულით. შევამოწმოთ $\boldsymbol{D = 2}$, მაშინ $\boldsymbol{C = 1}$ და $\boldsymbol{B = 1}$ **ანუ** მივიღებთ, რომ $111 + 111 = 222$.

2.1.8. გაშიფრეთ ჩანაწერი: $A + BB + A = DDD$. ერთნაირი ასოებით ერთი და იგივე ციფრია აღნიშნული.

ამოხსნა: ორნიშნა რიცხვს BB ემატება $2A$ და მიიღება ერთნაირი ციფრებით ჩაწერილი სამნიშნა რიცხვი. მაშასადამე, უნდა გვქონდეს უდიდესი ორნიშნა რიცხვი და მარჯვენა მხარეში კი ერთნაირი ციფრებით ჩაწერილი უმცირესი რიცხვი ანუ $\boldsymbol{BB = 99}$ და $\boldsymbol{DDD = 111.}$ მაშინ, $2\boldsymbol{A} = \mathbf{12}$ და $\boldsymbol{A} = \mathbf{6}$ **ანუ** მივიღებთ, რომ $6 + 99 + 6 = 111$.

2.1.9. გაშიფრეთ ჩანაწერი: $ABBC + CBBA = ABBAB$. ერთნაირი ასოებით ერთი და იგივე ციფრია აღნიშნული.

ამოხსნა: თუ, ტოლობის მარცხენა მხარეს ქვეშ მივუწერთ ერთმანეთს, მივხვდებით რომ $\boldsymbol{A = 1}$ და $\boldsymbol{A + C = 1B \Longrightarrow C = 9 \wedge B = 0.}$ ამრიგად, მივიღებთ, რომ: $1009 + 9001 = 10010$.

2.1.10. გაშიფრეთ ჩანაწერი: $ABCD + ABCD = CDEBD$. ერთნაირი ასოებით ერთი და იგივე ციფრია აღნიშნული.

ამოხსნა: ქვეშ მივუწეროთ მარცხენა მხარის რიცხვები ერთმანეთს, რადგან ციფრები 9-ს არ არემატება, მივიღებთ რომ $\boldsymbol{C = 1.}$ ბოლო ციფრების ჯამიდან, ცხადია რომ $\boldsymbol{D = 0.}$ ასევე, $\boldsymbol{B = 2C = 2 \Longrightarrow C = 1 \wedge B + B = E = 4.}$

მაშასადამე, მივიღებთ, რომ $\quad 5210 + 5210 = 10420$.

2.1.11. გაშიფრეთ ჩანაწერი: $AA3 - A8 = 495$. ერთნაირი ასოებით ერთი და იგივე ციფრია აღნიშნული.

ამოხსნა: თუ, ქვეშ მივუწერთ მარცხენა მხარის საკლებს და მაკლებს, ადვილად მივხვდებით, რომ $\boldsymbol{A = 5}$ ანუ $553 - 58 = 495$.

2.1.12. იპოვეთ გამოსახულების მნიშვნელობა:

(ნ · ი · ნ · ო · ე · კ · ა · ლ · ი · კ · ა): (ზ · უ · რ · ა), თუ განსხვავებული ასოები განსხვავებულ ციფრებს აღნიშნავს.

ამოხსნა: სულ გვაქვს 10 ციფრი: $0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$. რადგან გამოსახულებაში გვაქვს 10 განსხვავებული ასო: ნ;ი;ო;ე;კ;ლ;ა;ზ;უ;რ, ცხადია, რომ გასაყოფში იქნება 0 და მაშასადამე, ამ გამოსახულების

მნიშვნელობა იქნება 0. თუ, იქნებოდა გამყოფში, მაშინ აზრი არ ექნებოდა მოცემულ გამოსახულებას.

2.1.13. მოცემულია ტოლობა:

$(\mathbf{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}):(ს\cdot ა\cdot მ\cdot ე\cdot ბ\cdot ა) = ტ\cdot ა\cdot ძ\cdot ა\cdot რ\cdot ი.$
განსხვავებული ასოები, განსხვავებულ ციფრებს აღნიშნავს. რომელი ციფრია „ა" ასოთი დაშიფრული ?

ამოხსნა: ამ გამოსახულებიდან მივიღებთ, რომ

$(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9) = (ს\cdot ა\cdot მ\cdot ე\cdot ბ\cdot ა)\cdot(ტ\cdot ა\cdot ძ\cdot ა\cdot რ\cdot ი).$
მარცხენა ნაწილში გვაქვს 9 ციფრი, მარჯვენა ნაწილში გვაქვს 9 განსხვავებული ასო და მეორდება ასო „ა", რაც იმას ნიშნავს რომ ის აღნიშნავს ციფრს 1.

2.1.14. შალვას ყავს 2 ბიჭი. თუ, მათი ასაკის რიცხვების ნამრავლს მივუმატებთ ასაკის რიცხვების ჯამს, მივიღებთ 14-ს. რა ასაკის ვაჟები ყოლია შალვას ?
ამოხსნა: თუ ვაჟების ასაკს ავღნიშნავთ შესაბამისად, m და n ასოებით, მივიღებთ განუსაზღვრელ განტოლებას: m+n+mn=14. აქედან, თუ ამოვხსნით m - ს, მაშინ მივიღებთ, რომ $m=\dfrac{14-n}{n+1}=\dfrac{15}{n+1}-1$. რადგან m ნატურალური რიცხვია, გვაქვს სამი შემთხვევა: ა) n+1=5; ბ) n+1=3; გ) n+1=1. მაშინ, ა) m=2, n=4; ბ) m=4, n=2; გ) m=14, n=0. ცხადია, რომ შემთხვევა „გ)" არ შეესაბამება ამოცანის შინაარსს. მაშასადამე, **შალვას ყოლია 2 წლის და 4 წლის ბიჭები.**

2.1.15. რომელი ციფრი უნდა ჩავსვათ ვარსკვლავის ნაცვლად ოთხნიშნა რიცხვში 777 $*$, რომ ის უნაშთოდ გაიყოს 6-ზე ?

ამოხსნა: 6-ზე უნაშთოდ გაიყოფა რიცხვი, თუ, ის იყოფა 2-ზეც და 3-ზეც. მაშასადამე **777** $*$ რიცხვის, ბოლო ციფრი უნდა იყოს ლუწი და ციფრთა ჯამი, უნდა იყოფოდეს 3-ზე. $7+7+7=21 \vdots 3$, ე.ი. თუ, ვარსკვლავის ნაცვლად ჩავსვამთ 0-ს, ან 6-ს მივიღებთ **7770, ან 7776** რიცხვს, რომელიც იყოფა 6-ზე.

2.1.16. რომელი ციფრი უნდა ჩავსვათ ვარსკვლავის ნაცვლად ოთხნიშნა რიცხვში 82 $**$, რომ ის უნაშთოდ გაიყოს 90-ზე ?

ამოხსნა: რადგან რიცხვი უნდა იყოფოდეს 90-ზე, ის უნდა იყოფოდეს 10-ზე და 9-ზე. მაშასადამე, ბოლოვდება 0-ით, და ციფრთა ჯამი იყოფა 9-ზე. აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ გვაქვს რიცხვი $\mathbf{8280}$.

2.1.17. იპოვეთ ყველა ლუწი რიცხვის ჯამი 2-დან 100-ის ჩათვლით.

ამოხსნა:

$S = 2 + 4 + 6 + \ldots + 96 + 98 + 100 = (2 + 100) + (4 + 98) + \ldots$

წყვილების რიცხვი იქნება 25, რადგან ლუწი რიცხვების რაოდენობა 2-დან 100-ის ჩათვლით არის 50 და 50-ში დალაგებული წყვილთა რაოდენობა იქნება მისი ნახევარი ანუ 25. მაშასადამე, საძიებელი ჯამი იქნება: $S = 102 \cdot 25 = \mathbf{2550}.$

2.1.18. თუ, ჩაფიქრებულ რიცხვს გამოვაკლებთ 11-ს, ის უნაშთოდ გაიყოფა 11-ზე. თუ, ჩაფიქრებულ რიცხვს გამოვაკლებთ 7-ს, ის უნაშთოდ გაიყოფა 7-ზე. თუ, გამოვაკლებთ 13-ს, მაშინ გაიყოფა 13-ზე. იპოვეთ ჩაფიქრებული რიცხვი.

ამოხსნა: ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, ჩაფიქრებული რიცხვი უნაშთოდ იყოფა 11-ზე, 7-ზე და 13-ზე. მაშასადამე, ეს რიცხვი არის ამ სამი რიცხვის უმცირესი საერთოჯერადის ჯერადი რიცხვი.

უ.ს.ჯ.[11;7;13]=1001, მაშინ ჩაფიქრებული რიცხვი შეიძლება იყოს, ნებისმიერი ამ რიცხვის ჯერადი: $\mathbf{1001 \cdot n}$ რიცხვი, სადაც $n \in \mathbb{N}$.

2.1.19. იპოვეთ ჯამი: $\boldsymbol{S = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132}}$.

ამოხსნა: $\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$; $\frac{1}{30} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$; $\frac{1}{42} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$; . . . ამგვარად, მივიღებთ რომ

$S = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}$. რაც იმას ნიშნავს, რომ $S = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{3-1}{12} = \frac{2}{12} = \mathbf{\frac{1}{6}}$.

2.1.20. იპოვეთ ჯამი: $\boldsymbol{S = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{4\cdot5} + \frac{1}{5\cdot6} + \frac{1}{6\cdot7} + \frac{1}{7\cdot8} + \frac{1}{8\cdot9} + \frac{1}{9\cdot10}}$.

ამოხსნა: $\frac{1}{1\cdot2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2\cdot3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3\cdot4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; . . .მაშინ, მივიღებთ რომ

$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$. ამგვარად,

$S = 1 - \frac{1}{10} = \mathbf{\frac{9}{10}}$.

2.1.21. იპოვეთ ჯამი:

$$\boldsymbol{S} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5\cdot7}} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7\cdot9}} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9\cdot11}} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{11\cdot13}} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{13\cdot15}} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{15\cdot17}} + \ldots \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{59\cdot61}}.$$

ამოხსნა: $S = 4\cdot\left(\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{7\cdot9}+\frac{1}{9\cdot11}+\frac{1}{11\cdot13}+\frac{1}{13\cdot15}+\frac{1}{15\cdot17}+\ldots\frac{1}{59\cdot61}\right)$. თუ, გავითვალისწინებთ, რომ $\frac{1}{5\cdot7}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$; $\frac{1}{7\cdot9}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)$; . . .

მივიღებთ, რომ $S = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{59}-\frac{1}{61}\right)\right)$ ანუ

$S = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{59}-\frac{1}{61}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{61}\right) = 2\cdot\frac{61-5}{305}$;

$\boldsymbol{S} = \frac{\mathbf{112}}{\mathbf{305}}$.

2.1.22. იპოვეთ ის უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომელიც 2-ზე გაყოფისას, ნაშთში იძლევა 1-ს, სამზე გაყოფისას 2-ს, 4-ზე გაყოფისას 3-ს, 5-ზე გაყოფისას 4-ს, 6-ზე გაყპფისას 5-ს, 7-ზე გაყოფისას 6-ს, 8-ზე გაყოფისას 7-ს, 9-ზე გაყოფისას 8-ს და 10-ზე გაყოფისას 9-ს.

ამოხსნა: თუ, საძიებელ რიცხვს დავუმატებთ 1-ს. ის უნაშთოდ გაიყოფა 2-ზე, 4-ზე, 5-ზე, 6-ზე, 7-ზე, 8-ზე, 9-ზე და 10-ზე. ამ რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადია: $10\cdot9\cdot7\cdot4=2520$, ხოლო საძიებელი რიცხვი ერთით ნაკლებია ანუ გვაქვს შემდეგი რიცხვი: $\mathbf{2519}$.

2.1.23. იპოვეთ ის უდიდესი სამნიშნა რიცხვი, რომელიც 4-ზე გაყოფისას, ნაშთში იძლევა 3-ს, 5-ზე გაყოფისას 4-ს, ხოლო 6-ზე გაყოფისას 5-ს.

ამოხსნა: თუ, საძიებელ რიცხვს დავუმატებთ 1-ს. ის უნაშთოდ გაიყოფა 4-ზე, 5-ზე, 6-ზე ანუ ამ რიცხვების უმცირესი საერთო ჯერადი იქნება:

$6\cdot5\cdot2=60$. უდიდესი სამნიშნა რიცხვი, რომელიც ჯერადია 60-ის არის 960. მაშასადამე, საძიებელი რიცხვი იქნება $960-1=\mathbf{959}$.

2.1.24. მოცემული რიცხვის 225-ზე გაყოფისას, ნაშთში დარჩა 150. გაიყოფა თუ არა, მოცემული რიცხვი უნაშთოდ 75-ზე ?

ამოხსნა: საძიებელი რიცხვი თუ, 225-ზე გაყოფისას, ნაშთში იძლევა 150-ს, მაშინ ის შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$a = 225 \cdot k + 150$, სადაც k განაყოფია, მაგრამ $225 ⋮ 75$ და $150 ⋮ 75$, აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ $\boldsymbol{a} ⋮ \mathbf{75}$.

2.1.25. საწყობში ინახება დანები და ჩანგლები. ორივეს საერთო რაოდენობა მეტია 300-ზე და ნაკლებია 400-ზე. თუ, დანებს და ჩანგლებს დავთვლით ათ-ათობით ან თორმეტ-თორმეტობით, მივიღებთ მთელი რიცხვით გამოხატულ საერთო რაოდენობას. საწყობში რამდენი იყო დანა და რამდენი ჩანგალი, თუ, დანები 100-ით ნაკლები იყო ჩანგლებთან შედარებით.

ამოხსნა: რადგან დანების და ჩანგლების საერთო რიცხვი იყოფა 10-ზეც და 12-ზეც, ის იყოფა მათ უმცირეს საერთო ჯერადზეც: უ.ს.ჯ.[10;12]=60;

60-ის ჯერადი რიცხვებიდან 300-სა და 400-სს შორის მოთავსებულია მხოლოდ ერთი რიცხვი 360. თუ, ჩანგლები იყო x, მაშინ დანები იქნებოდა $x - 100$ ანუ შეგვიძლია შევადგინოთ შემდეგი სახის განტოლება: $x + x - 100 = 360$, მაშინ $2x = 460$. ე.ი. $x = 230$. მაშასადამე, **დანები ყოფილა 230 და ჩანგლები 130.**

2.1.26. დაამტკიცეთ, რომ თუ, ორი ნატურალური რიცხვის ჯამი კენტია, მაშინ მათი ნამრავლი ლუწია.

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო ანუ ვთქვათ ჯამიც კენტია და ნამრავლიც, მაშინ ორივე რიცხვი კენტი ყოფილა და კენტების ჯამი კი კენტი არ იქნება. ამრიგად, მივედით წინააღმდეგობამდე, რაც ნიშნავს, რომ დაშვება არაა ჭეშმარიტი. რ.დ.გ.

2.1.27. მამამ და შვილმა გადაწყვიტა, ორ ხეს შორის მანძილის გაზომვა ნაბიჯებით. ამისათვის, ერთდროულად დაიწყეს ზომვა ერთი და იგივე ხიდან. მამის ნაბიჯის სიგრძე 70 სმ-ია, შვილის - 56 სმ. იპოვეთ ხეებს შორის მანძილი, თუ, ცნობილია რომ მათი ნაბიჯების კვალი დაემთხვა ერთმანეთს 10-ჯერ.

ამოხსნა: 70-ის და 56-ის უმცირესი საერთო ჯერადი უნდა ვიპოვოთ და მისი ჯერადები მოგვცემს კვალის დამთხვევის წერტილებს.

$70 = 7 \cdot 2 \cdot 5$; $56 = 7 \cdot 2^3$; უ.ს.ჯ.[70;56]=$7 \cdot 5 \cdot 2^3 = 280$. მაშასადამე, ნაბიჯების კვალის დამთხვევები მოხდება 280 სმ-ის ჯერად წერტილებში ათვლის ხიდან ანუ $280 \cdot n$ (სმ), რაც იმას ნიშნავს, რომ

კვალის 10-ჯერ დამთხვევის შემთხვევაში გვაქვს, მანძილი ამ ორ ხეს შორის, რომელიც ადვილად გამოითვლება $280 \cdot 10 = 2800$(სმ)=**28მ.**

2.1.28. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერად არჩეულ 11 ნატურალურ რიცხვს შორის მოიძებნება ისეთი ორი რიცხვი, რომელთა სხვაობაც ათის ჯერადია.

დამტკიცება: რადგან გვაქვს სულ 10 ერთმანეთისაგან განსხვავებული ციფრი, ნებისმიერად არჩეულ 11 რიცხვს შორის, ყოველთვის მოიძებნება ორი მაინც ისეთი, რომლებიც ბოლოვდება ერთნაირი ციფრებით. მაშინ, მათ შორის სხვაობა, დაბოლოვდება ნულით ანუ არის 10-ის ჯერადი. რ.დ.გ.

2.1.29. დაამტკიცეთ, რომ ორი რიცხვის უ.ს.ჯ.-ს თუ გავამრავლებთ მათ უ.ს.გ-ზე, მაშინ მივიღებთ, ამ რიცხვების ნამრავლს.

დამტკიცება: ვთქვათ გვაქვს ორი რიცხვი a და b. ამ რიცხვების კანონიკური სახე, ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k} \cdot q_1^{m_1} \cdot q_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot\ q_h^{h}$;

$b = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{t_k} \cdot r_1^{f_1} \cdot r_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot\ r_g^{f_g}$; სადაც p_i, $i = \overline{1,k}$; ამ ორი რიცხვის საერთო მარტივი გამყოფებია; q_i, $i = \overline{1,h}$, არის a ნატურალური რიცხვის ის მარტივი გამყოფები, რომლებზედაც არ იყოფა b; შესაბამისად, r_i, $i = \overline{1,g}$, არის b ნატურალური რიცხვის ის მარტივი გამყოფები, რომლებზედაც არ იყოფა a.

$[a;b]$ - უ.ს.ჯ. მიიღება, თუ ამ ორი რიცხვის კანონიკური გაშლიდან ავიღებთ საერთო p_i მარტივ მამრავლებს უდიდესი ხარისხით და გადავამრავლებთ, როგორც $q_1^{m_1} \cdot q_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot\ q_h^{h}$ ნამრავლზე, ასევე, $r_1^{f_1} \cdot r_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot\ r_g^{f_g}$ ნამრავლზე.

$(a;b)$ - უ.ს.გ.-ის მისაღებად, კი, საერთო p_i მარტივი გამყოფები, უნდა ავიღოთ უმცირესი ხარისხის მაჩვენებლით. მაშასადამე, $a \cdot b = (a;b) \cdot [a;b]$. რ.დ.გ.

2.1.30. კუბის წიბოს სიგრძე 0.5 მ-ია. ეს კუბი დაჭრეს პატარა კუბებად, რომელთა წიბოს სიგრძე 2 მმ-ია. დაჭრილი კუბები დაალაგეს ერთ მწკრივად. რა სიგრძისა იქნება ეს მწკრივი ?

ამოხსნა: საწყისი კუბის წიბო $l_0 = 0.5$ მ = 50 სმ = 500 მმ. მაშინ, ამ კუბის მოცულობა იქნება: $V_0 = l_0^3 = 500^3 = 125 \cdot 10^3$ (მმ^3); დაჭრილი პატარა კუბების წიბო ტოლია $l_1 = 2$ მმ; მაშასადამე, მისი მოცულობა ტოლია

$V_1 = l_1^3 = 8$ მმ^3. ცხადია, რომ პატარა კუბების რაოდენობა იქნება მოცულობათა ფარდობის ტოლი ანუ $n = \frac{V_0}{V_1} = \frac{125 \cdot 10^3}{8} = 15625 \cdot 10^3$. თუ, ამ პატარა კუბებს ერთ მწკრივში დავალაგებთ, რადგან დაჭრილი კუბის წიბო 2 მმ - ია, მივიღებთ მწკრივს, რომლის სიგრძეა:

$15625 \cdot 10^3 \cdot 2 = 31250 \cdot 10^3$ (მმ) = 31250 მ = **31.25 კმ.**

2.1.31. წვიმის წვეთის საშუალო წონა $\frac{1}{12}$ გ-ია. განსაზღვრეთ წვიმის წვეთების რაოდენობა, 1 კვ.მ ფართზე, თუ, წვიმის ნალექის სისქე 2.2 მმ-ია.

ამოხსნა: განვსაზღვროთ 1კვ.მ ფართზე მოსული წყლის მოცულობა. 1მ =100 სმ = 1000 მმ ანუ 1 კვ.მ = 10^6 კვ.მმ

$V_0 = 10^6$ კვ.მმ $\cdot$ 2.2 მმ = $2.2 \cdot 10^6$ კუბ.მმ. წყლის სიმკვრივეა $\rho = 10^{-3}$ გ/მმ^3. მაშინ, V_0 მოცულობის წყლის მასა იქნება: $m = \rho V_0$ ანუ

$m = 10^{-3} \cdot 2.2 \cdot 10^6 = 2.2 \cdot 10^3$(გ). ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ წყლის წვეთების საშუალო რაოდენობა იქნება:

$\mathrm{n} = \mathrm{m}: \frac{1}{12} = 2.2 \cdot 10^3 \cdot 12 = \mathbf{26\,400}$.

2.1.32. ვარსკვლავების ნაცვლად ჩასვით რიცხვები განტოლებაში:

$* \mathbf{00} ** = (***)^2$**.**

ამოხსნა: მარჯვენა მხარეში გვაქვს საპოვნელი ფრჩხილებში მოთავსებული სამნიშნა რიცხვი $\overline{a_1a_2a_3}$, რომელიც შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად: $\overline{a_1a_2a_3} = 100a_1 + 10a_2 + a_3$.

გამოვითვალოთ ამ რიცხვის კვადრატი, მაშინ მივიღებთ რომ:

$$(100a_1 + 10a_2 + a_3)^2 = 10000a_1^2 + 100a_2^2 + a_3^2 +$$

$$+2000a_1a_2 + 200a_3 + 20a_1a_2 = 10000b_1 + 0 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 10b_4 + b_5.$$

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\begin{cases} a_1^2 = b_1 \\ 2000a_1a_2 = 0 \\ 100(a_2^2 + 2a_3) = 0 \\ 20a_1a_2 = 10 \\ a_3^2 = b_5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1^2 = b_1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ b_3 = 0 \\ b_4 = 0 \\ b_5 = 0 \end{cases}.$$ აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ a_1 უნდა იყოს ისეთი რიცხვი, რომლის კვადრატიც იქნება ერთნიშნა, მაშასადამე გვექნება შემდეგი რიცხვები: **100; 200 და 300.**

შესაბამისად, ჩანაწერი $*\mathbf{00}**=(***)^2$ მიიღებს შემდეგ სახეს:

ა) 10 000 = $\mathbf{100^2}$; ბ) 40 000 = $\mathbf{200^2}$; გ) 90 000 = $\mathbf{300^2}$.

2.1.33. გაშიფრეთ ჩანაწერი: $\boldsymbol{a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}}$.

ამოხსნა: ცხადია, რომ

$\boldsymbol{a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}} \Longrightarrow a \cdot c \cdot (10a + c) = 100c + 10c + c$ ანუ გვექნება განტოლება: $a \cdot c \cdot (10a + c) = 111c \Longrightarrow a \cdot (10a + c) = 111 = 3 \cdot 37$;

მაშასადამე, $a = 3; c = 7$. რაც იმას ნიშნავს, რომ $\boldsymbol{a \cdot c \cdot \overline{ac} = \overline{ccc}}$ **ჩანაწერი იშიფრება შემდეგნაირად: $\mathbf{3 \cdot 7 \cdot 37 = 777}$.**

2.1.34. იპოვეთ $\boldsymbol{x}$ და $\boldsymbol{y}$ ციფრები, ხუთნიშნა $\overline{42x4y}$ რიცხვის ჩანაწერში, თუ, ვიცით რომ ეს რიცხვი იყოფა 72 - ზე.

ამოხსნა: რადგან რიცხვი უნაშთოდ იყოფა 72 - ზე, ის უნაშთოდ იყოფა 9 - ზე და 8 -ზე. მაშასადამე, იყოფა 4 - ზეც. მაშინ, ბოლო ორი ციფრით შედგენილი რიცხვი უნდა იყოფოდეს 4 - ზე ანუ ის შეიძლება იყოს: 40; 44; 48. ამასთან, თუ ცხრაზე იყოფა რიცხვი, მაშინ ციფრთა ჯამიც იყოფა ცხრაზე ანუ 4+2+4+$x + y$ = 10 + $x + y$ უნდა იყოფოდეს ცხრაზე. რადგან y - ის შესაძლო მნიშვნელობებია 0; 4; 8; მაშინ x შეიძლება იყოს: 8; 4; 0 ანუ მივიღებთ რიცხვებს: 42840; 42444; 42048. ავარჩიოთ, რომელი იყოფა 72 - ზე. მივიღებთ, რომ : $\mathbf{42840 = 72 \cdot 595;\ 42048 = 72 \cdot 584.}$

2.2. საათთან დაკავშირებული ამოცანები

2.2.1. რა კუთხეს შემოწერს საათების ისარი ორი საათის გავლისას ?

ამოხსნა: საათების ისარი სრულ კუთხეს ანუ 360° კუთხეს შემოწერს 12 საათში, რაც იმას ნიშნავს რომ ერთ საათში შემოწერს $360^{\circ}:12 = 30^{\circ}$- იან კუთხეს, ხოლო 2 სთ-ში კი - **60°- იან კუთხეს.**

2.2.2. საათებისა და წუთების ისრები ერთმანეთს ემთხვევიან 12 საათზე. ამის შემდეგ პირველად, რომელ საათზე დაემთხვევიან ისრები ?

ამოხსნა: წუთების ისარი 60 წუთში აკეთებს სრულ ბრუნს, რაც შეესაბამება 360° - ს. ე.ი. 1 წუთში დიდი ისარი (წუთების) შემოწერს $360^{\circ}:60 = 6^{\circ}$- იან კუთხეს. საათების ისარი 12 საათში შემოწერს 360°- იან კუთხეს, ე.ი. 1 საათში შემოწერს $360^{\circ}:12 = 30^{\circ}$ - იან კუთხეს და მაშასადამე, 1 წუთში შემოწერს $30^{\circ}:60 = 0.5^{\circ}$- იან კუთხეს. მას შემდეგ, რაც დიდი ისარი გააკეთებს ერთ სრულ ბრუნს, გვექნება უკვე პირველი საათი (13 სთ), ამ დროს საათების ისარი დაშორებულია წუთების ისართან 30°- ით. დიდი ისარი თუ, დაეწევა საათების ისარს t წთ - ში, მაშინ გვექნება შემდეგი $6t = 30^{\circ} + 0.5 \cdot t$. ამ განტოლების ამონახსნია: $5.5t = 30^{\circ} \Rightarrow t = 5\frac{5}{11}$. მაშასადამე, ისრები 12 საათის შემდეგ, ერთმანეთს პირველად დაემთხვევიან **13 სთ და $5\frac{5}{11}$ წთ -ზე.**

2.2.3. საათი უჩვენებს 12 საათს. რამდენჯერ და რომელ საათებში მოხდება საათებისა და წუთების ისრების თანხვედრა მომავალ შუაღამემდე ?

ამოხსნა: ერთ საათში წუთების ისარი ასრულებს ერთ სრულ ბრუნს, ხოლო საათების ისარი სრული ბრუნის $\frac{1}{12}$ ნაწილს, რაც იმას ნიშნავს, რომ საათების ისარი ჩამორჩება წუთებისას $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ ბრუნით. ჩამორჩენა გახდება 1 სრული ბრუნი, შუაღამიდან $1:\frac{11}{12} = \frac{12}{11}$ სთ-ში. დროის ამ მომენტში, ისრები დაემთხვევიან ერთმანეთს.

ამის შემდეგ, მეორედ დამთხვევა მოხდება კიდევ $\frac{12}{11}$ სთ-ში პირველი დამთხვევიდან და ა.შ. დამთხვევათა დროები შეიძლება ჩავწეროთ ფორმულით: $t = \frac{12}{11}n$, სადაც n ისრების დამთხვევათა რიგის ნომერია. რადგან დღე-ღამეში 24 საათია, ისრების თანხვედრა შემდეგ შუაღამემდე, მოხდება იმ n ნომრებისათვის, რომლებისთვისაც ადგილი აქვს უტოლობას $t = \frac{12}{11}n < 24 \Rightarrow n < 22$. **მაშასადამე, შემდეგ შუაღამემდე, მოხდება ისრების 21 - ჯერ თანხვედრა და ეს მოხდება შუაღამიდან დროის $t = \frac{12}{11}n$ მომენტებში, სადაც $n = \overline{1,21}$.**

2.2.4. წუთების და საათების ისრები ერთმანეთს ემთხვევიან. დილის რომელი საათია, თუ ისრები თანხვედრისას მოთავსებული არიან 9 საათსა და 10 საათს შორის ?

ამოხსნა: წინა ამოცანის ამოხსნიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ გვაქვს უტოლობა $9<\frac{12}{11}n<10$. აქედან გამომდინარე, $\frac{99}{12}<n<\frac{110}{12}$, ანუ $n=9$. მაშასადამე, არის $\frac{12}{11}\cdot 9=9\frac{9}{11}$ **სთ.**

2.2.5. ჩაწერეთ რიცხვი, რომელიც შეიცავს 11 ათასეულს, 11 ასეულს და 11 ერთეულს.

ამოხსნა: 11000+1100+11=**12111.**

2.3. ამოცანები მოძრაობაზე

ამ ნაწილში, განვიხილავთ წრფივ თანაბარ მოძრაობას. ქვემოთ განხილულ ამოცანებში გვაქვს მოძრაობა მუდმივი სიჩქარით და მაშასადამე, კავშირი გავლილ s გზასა, მოძრაობის v სიჩქარესა და მოძრაობის t დროს შორის, მოიცემა შემდეგი ფორმულით: $s=v\cdot t$.

2.3.1. მანძილს მდინარის დინების მიმართულებით A – დან B – მდე კატერი გადის 3 სთ-ში, ხოლო დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით B– დან A – მდე 4 სთ და 30 წთ-ში. რა დროს მოანდომებდა A – დან B – მდე ცურვას ტივი ?

ამოხსნა: ამოვხსნათ ამოცანა ზოგადად და შემდეგ შევიტანოთ მონაცემები. ვთქვათ კატერის საკუთარი სიჩქარეა v, დინების სიჩქარეა u, მანძილი პუნქტებს შორის აღვნიშნოთ S - ით, დრო A – დან B – მდე t_{AB}. მაშინ მივიღებთ, რომ $t_{AB}=\frac{S}{v+u;}$; $t_{BA}=\frac{S}{v-u}$. მაშინ ცხადია, რომ

$$\begin{cases}\frac{S}{t_{AB}}=v+u\\ \frac{S}{t_{BA}}=v-u\end{cases}$$

, გამოვაკლოთ სისტემის პირველ განტოლებას მეორე, რათა გამოვრიცხოთ კატერის სიჩქარე v. მაშინ, მივიღებთ რომ

$\frac{S}{t_{AB}}-\frac{S}{t_{BA}}=2u$. ჩვენ საძებნი გვაქვს ტივისთვის ცურვის დრო A – დან B – მდე $t_u=\frac{S}{u}$. გავყოთ $\frac{S}{t_{AB}}-\frac{S}{t_{BA}}=2u$ განტოლების ორივე მხარე u - ზე, მაშინ მივიღებთ შემდეგ განტოლებას: $\frac{t_u}{t_{AB}}-\frac{t_u}{t_{BA}}=2$ ანუ $t_u=\frac{2t_{AB}t_{BA}}{t_{BA}-t_{AB}}$. ამ

განტოლების მარჯვენა ნაწილში თუ შევიტანთ ამოცანის მონაცემებს, მივიღებთ, რომ $\boldsymbol{t_u = \frac{2t_{AB}t_{BA}}{t_{BA}-t_{AB}} = \frac{2\cdot3\cdot4,5}{4,5-3} = 18}$ **(წმ).**

2.3.2. გემი კიევიდან ხერსონამდე მიცურავს 3 დღე - ღამე, უკან კი დინების საწინააღმდეგოდ 4 დღე - ღამე. რა დროს მოანდომებდა კიევიდან ხერსონამდე ცურვას ტივი ?

ამოხსნა: თუ გამოვიყენებთ წინა ამოცანის საანგარიშო ფორმულას: $t_u = \frac{2t_{AB}t_{BA}}{t_{BA}-t_{AB}}$, მივიღებთ რომ $t_u = \frac{2t_{AB}t_{BA}}{t_{BA}-t_{AB}} = \frac{2\cdot3\cdot4}{4-3} = \mathbf{24}$ **(დღე-ღამე).**

2.3.3. ერთი ქალაქიდან მეორემდე არის 590 კმ. მათ შორის გზის ნაწილი არის აღმართი, მეორე ნაწილი - ჰორიზონტალურია, ხოლო გზის მესამე ნაწილი დაღმართია. დაღმართიანი გზის ნაწილის სიგრძე 4-ჯერ ნაკლებია ჰორიზონტალურ ნაწილზე და 110 კმ-ით ნაკლებია გზის აღმართიან ნაწილზე. იპოვეთ, გზის აღმართიანი, დაღმართიანი და ჰორიზონტალური ნაწილების სიგრძეები.

ამოხსნა: თუ, გზის დაღმართიანი ნაწილის სიგრძეს აღვნიშნავთ x - ით, მაშინ ჰორიზონტალური ნაწილის სიგრძე იქნება $4x$, ხოლო აღმართიანი ნაწილის სიგრძე კი იქნება: $x + 110$. მაშინ, ამოცანის პირობის თანახმად, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$x + 4x + x + 110 = 590 \Leftrightarrow 6x = 480 \Leftrightarrow x = 80.$

მაშასადამე, დაღმართიანი ნაწილის სიგრძეა 80 კმ, ჰორიზონტულისა 320 კმ და აღმართიანი ნაწილისა კი არის 190 კმ.

2.3.4. გიორგი დილის 9 სთ-სა და 25 წუთზე გამოვიდა A პუნქტიდან და B პუნქტში ჩამოვიდა 13 სთ-სა და 15 წთ-ზე. მეორე დღეს გამოვიდა B - დან A - სკენ დილის 11 სთ-ზე, იარა უფრო სწრაფად და A პუნქტში ჩამოვიდა 14 სთ-სა და 40 წთ-ზე. ამ ორ პუნქტს შორის მანძილი 12 კმ-ია. განსაზღვრეთ A - დან რა მანძილზეა ის წერტილი, სადაც გიორგი ორივე დღეს იყო ერთი და იმავე საათზე.

ამოხსნა: გიორგი პირველ დღეს $\boldsymbol{A}$ - დან პატარა B პუნქტში ჩასვლას მოანდომებდა 3 სთ-სა და 50 წთ-ს = $3\frac{50}{60}$ სთ = $3\frac{5}{6}$ სთ, მეორე დღეს გიორგი გზაში იყო 3 სთ და 40 წთ = $3\frac{40}{60} = 3\frac{2}{3}$ სთ. გამოვითვალოთ შესაბამისი სიჩქარეები: $v_A = \frac{s}{t_A} = 12{:}\,3\frac{5}{6} = 3\frac{3}{23}$ კმ/სთ; $v_B = \frac{s}{t_B} = 12{:}\,3\frac{2}{3} = 3\frac{3}{11}$ კმ/სთ.

რადგან მანძილი ორ პუქტს შორის ორივე დღეს ერთნაირია და ჩვენ გვაინტერესებს ის წერტილი, სადაც ერთი და იგივე დროს იქნებოდა გიორგი ორივე დღეს, შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომ მოძრაობა ხდება საპირისპირო მიმართულებით და შეხვედრის მომენტში, ისინი იქნებიან გზის ერთი და იგივე წერტილში. შეხვედრისას, მათ მიერ

გავლილი გზების ჯამი იქნება 12 კმ. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, გვექნება განტოლება:

$9\frac{5}{12}+\frac{s_A}{v_A}=11+\frac{12-s_A}{v_B}$, სადაც s_A არის საძიებელი მანძილი $\boldsymbol{A}$ - დან. ამ განტოლების ამონახსნია: $\boldsymbol{s_A=8.4}$ **კმ.**

2.3.5. ორ პუნქტს შორის მანძილი 44 კმ-ია. დილის 6 საათზე ერთ-ერთი პუნქტიდან გამოვიდა ველოსიპედისტი. მეორე პუნქტიდან, დილის 7 სთ-სა და 8 წთ-ზე მისი შემხვედრი მიმართულებით გამოვიდა ცხენოსანი. დილის 9 საათზე ისინი შეხვდნენ ერთმანეთს. ცხენოსანის სიჩქარე 2.5 კმ/სთ-ით ნაკლებია, ვიდრე ველოსიპედისტის. იპოვეთ ცხენოსნის და ველოსიპედისტის სიჩქარეები.

ამოხსნა: 7 სთ 8 წთ = $7\frac{8}{60}$ სთ =$7\frac{2}{15}$ სთ. ველოსიპედისტი შეხვედრამდე, გზაში იყო t_1 =9 სთ - 6 სთ = 3 სთ; ხოლო ცხენოსანი კი:
t_2 =9 სთ - $7\frac{2}{15}$ სთ = $1\frac{13}{15}$ სთ; ცხენოსნის სიჩქარეს აღვნიშნავთ x - ით, მაშინ, ველოსიპედისტის სიჩქარე იქნება $x+2.5$. რადგან ცხენოსანი და ველოსიპედისტი მოძრაობს ერთმანეთის შემხვედრი მიმართულებით, შეხვედრის მომენტში, მათ მიერ გავლილი მანძილების ჯამი ტოლი იქნება ამ პუნქტებს შორის მანძილისა ანუ მივიღებთ განტოლებას:

$$1\frac{13}{15}x+3(x+2.5)=44 \Leftrightarrow 1\frac{13}{15}x+3(x+2.5)=44 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{28}{15}x+3x+7.5=44 \Leftrightarrow 28x+45x+112.5=660 \Leftrightarrow 73x=547.5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=7.5$. მაშასადამე, **ცხენოსნის სიჩქარე ყოფილა 7.5 კმ/სთ, ხოლო ველოსიპედისტის სიჩქარეა 10 კმ/სთ.**

2.3.6. ორ ქალაქს შორის გზის $\frac{7}{12}$ შეადგენს 75.25 კმ-ს. დილის 5 სთ - სა და 36 წთ - ზე A - დან B - სკენ გამოვიდა ველოსიპედისტი. დილის 7 სთ - სა და 15 წთ - ზე B - დან A - სკენ გამოვიდა მეორე ველოსიპედისტი, რომელიც საათში 0.75 კმ-ით მეტს გადიოდა ვიდრე პირველი. იპოვეთ, ორივე ველოსიპედისტის სიჩქარე, თუ ისინი შეხვდნენ შუადღისას.

ამოხსნა: თუ, მანძილს ამ ორ ქალაქს შორის არვნიშნავთ s - ით, მაშინ მივიღებთ, რომ $\frac{7}{12}s=75.25 \Leftrightarrow 7s=903 \Leftrightarrow s=129$ (კმ). პირველი ველოსიპედისტი გზაში იყო: $12-5\frac{36}{60}=12-5\frac{3}{5}=6\frac{2}{5}$ (სთ); ხოლო მეორე ველოსიპედისტი კი: $12-7\frac{15}{60}=12-7\frac{1}{4}=4\frac{3}{4}$ (სთ). ვთქვათ, პირველი ველოსიპედისტის სიჩქარე იყო x კმ/სთ, მაშინ მეორე ველოსიპედისტის სიჩქარე იქნებოდა $x+0.75$ კმ/სთ. რადგან შეხვედრის მომენტში ორივე ველოსიპედისტის მიერ გავლილი

მანძილების ჯამი, ტოლია ამ ორ ქალაქს შორის მანძილისა, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$6\frac{2}{5}x+4\frac{3}{4}(x+0.75)=129 \Leftrightarrow \frac{32}{5}x+\frac{19}{4}(x+0.75)=129 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{128x+95x+71.25=2580} \Leftrightarrow \mathbf{223x=2508.75} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \mathbf{x=11.25}$. **მასასადამე, პირველი ველოსიპედისტის სიჩქარე ყოფილა $\mathbf{11.25}$ კმ/სთ, ხოლო მეორესი კი 12 კმ/სთ.**

2.3.7. მატარებელი სატელეგრაფო ბოძს ჩაუვლის ნახევარ წუთში, ხოლო ხიდს, რომლის სიგრძეც 0.7 კმ-ია, გაივლის 50 წმ - ში. იპოვეთ, მატარებლის საშუალო სიჩქარე და სიგრძე.

ამოხსნა: ნახევარი წუთი არის $\frac{1}{120}$ სთ. მატარებლის სიჩქარეს თუ აღვნიშნავთ x კმ/სთ - ით, მაშინ მისი სიგრძე იქნება $l=\frac{1}{120}x$ კმ. მაშინ, ხიდს და საკუთარ სიგრძეს ერთად, მატარებელი გაივლის 50 წმ ანუ $\frac{50}{3600}$ სთ $=\frac{1}{72}$ სთ. ე.ი. გვექნება შემდეგი სახის განტოლება:

$\frac{1}{72}x=\frac{1}{120}x+0.7 \Leftrightarrow \frac{1}{72}x-\frac{1}{120}x=\frac{7}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{36}x=0.7 \Leftrightarrow x=25.2.$

მაშასადამე, მატარებლის **სიჩქარე ყოფილა 25.2 კმ/სთ, ხოლო მატარებლის სიგრძე $\boldsymbol{l=\frac{1}{120}\cdot 25.2=0.21}$კმ = 210 მ.**

2.4. ამოცანები ნაწილებზე

2.4.1. ეგვიპტეში განძის საცავიდან წაიღეს ერთი მეცამეტედი ნაწილი. მეორედ, დარჩენილის ერთი მეჩვიდმეტედი ნაწილი. ამის შემდეგ, საცავში დარჩა 150 ერთეული განძი. რამდენი ერთეული განძი იყო საცავში თავდაპირველად ?

ამოხსნა: ვთქვათ საცავში თავდაპირველად იყო x ერთეული განძი. მაშინ, პირველი წაღების შემდეგ, დარჩებოდა $x-\frac{1}{13}x=\frac{12}{13}x$. მეორედ წაღების შემდეგ დარჩებოდა: $\frac{12}{13}x-\frac{12}{13}x\cdot\frac{1}{17}=\frac{12}{13}x\cdot\frac{16}{17}$. ამოცანის პირობის თანახმად, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას: $\frac{12}{13}x\cdot\frac{16}{17}=150$. ამ განტოლებიდან გამომდინარე, $x=\frac{25\cdot13\cdot17}{32}$ ანუ $x=172\frac{21}{32}$. მაშასადამე, თავდაპირველად განძის საცავში ყოფილა $\mathbf{172\frac{21}{32}}$ **ერთეული განძი.**

2.4.2. ორ სხვადასხვა სახის რვეულში ერთად გადაიხადეს 1 ლარი და 35 თეთრი. რა ღირს თითოეული სახის რვეული, თუ, პირველი რვეულის ღირებულების 0.35 ნაწილი, ტოლია მეორე სახის რვეულის ფასის 0.28 ნაწილის ?

ამოხსნა: ვთქვათ, პირველი სახის რვეული ღირს x ლარი. მაშინ, მეორე სახის რვეული ეღირებოდა $1.35 - x$ ლარი. მაშასადამე, ამოცანის პირობის თანახმად, გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$0.35x = (1.35 - x) \cdot 0.28 \Leftrightarrow 0.35x = 0.378 - 0.28x \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 0.63x = 0.378 \Longrightarrow x = 0.6.$ მაშასადამე, **პირველი სახის რვეული ღირდა 60 თეთრი, ხოლო მეორე სახისა - 75 თეთრი.**

2.4.3. გიორგიმ და ილიამ გადაწყვიტეს ასაწყობი კონსტრუქტორის ყიდვა. ილიას ქონდა თანხა, რომელიც გიორგის თანხის $\frac{5}{6}$ - ს შეადგენდა. გიორგის კონსტრუქტორის საყიდლად არ ყოფნიდა საჭირო თანხის $\frac{3}{8}$ ნაწილი, ხოლო ორივე ბიჭუნას ერთად ქონდათ თანხა, რომელიც 1.4 ლარით მეტია კონსტრუქტორის ფასზე. რა ღირდა კონსტრუქტორი ?

ამოხსნა: ვთქვათ, კონსტრუქტორის ფასი იყო x ლარი, მაშინ გიორგის ქონია საჭირო თანხის $\frac{5}{8}$ ნააწილი ანუ $\frac{5}{8}x$ ლარი. ილიას კი ქონდა გიორგის თანხის $\frac{5}{6}$ ანუ $\frac{5}{8}x \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{48}x$ ლარი. მაშინ, ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$\frac{5}{8}x + \frac{25}{48}x = x + 1.4 \Leftrightarrow 30x + 25x = 48x + 67.2 \Leftrightarrow 7x = 67.2 \Longrightarrow x = 9.6.$

მაშასადამე, ასაწყობი კონსტრუქტორის ფასი იყო **9 ლარი და 60 თეთრი.**

2.4.4. მოცემულია წილადი $\frac{52\,367}{47\,633}$. რა რიცხვი უნდა გამოვაკლოთ მრიცხველს და მივუმატოთ მნიშვნელს, რომ შეკვეცის შემდეგ მივიღოთ $\frac{17}{83}$ წილადი ?

ამოხსნა: ვთქვათ, საძიებელი რიცხვია x, მაშინ მივიღებთ შემდეგი სახის განტოლებას:

$$\frac{52\,367 - x}{47\,633 + x} = \frac{17}{83} \Leftrightarrow 83(52\,367 - x) = 17(47\,633 + x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\,346\,461 - 83x = 809\,761 + 17x \Leftrightarrow 100x = 3\,536\,700 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow x = 35\,367.$ მაშასადამე, ასეთი რიცხვია $\mathbf{35\,367}$.

2.4.5. წილადის მნიშვნელი 3521 - ით მეტია მრიცხველზე. შეკვეცის შემდეგ მიიღეს $\frac{4}{11}$. როგორი იყო წილადის სახე შეკვეცამდე ?

ამოხსნა: ვთქვათ, წილადის მრიცხველია x, მაშინ მისი მნიშვნელი იქნება $x + 3521$ ანუ გვექნება შემდეგი სახის განტოლება:

$\frac{x}{x+3521} = \frac{4}{11} \Leftrightarrow 11x = 4x + 14\,084 \Leftrightarrow 7x = 14\,084 \Longrightarrow x = 2\,012.$

მაშასადამე, შეკვეცამდე გვქონდა წილადი: $\frac{\mathbf{2\,012}}{\mathbf{5\,533}}$.

2.4.6. ორი რიცხვის სხვაობაა 0.7. თუ, მათ შორის უდიდესს გავზრდით 5-ჯერ, ხოლო მცირეს დავტოვებთ უცვლელად, მათ შორის სხვაობა გახდება 75.1. იპოვეთ ეს რიცხვები.

ამოხსნა: ვთქვათ, ორ რიცხვს შორის უმცირესია x, მაშინ უდიდესი იქნება $x + 0.7$. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$5(x + 0.7) - x = 75.1 \Leftrightarrow 5x + 3.5 - x = 75.1 \Leftrightarrow 4x = 71.6 \Rightarrow x = 17.9.$

მაშასადამე, ამ ორი რიცხვიდან უმცირესია $\mathbf{17.9}$, ხოლო უდიდესი კი $17.9 + 0.7 = \mathbf{18.6}$.

2.4.7. წილადი $\frac{2}{7}$ წარმოადგინეთ ორი ისეთი წილადის ჯამის სახით, რომლებსაც სხვადასხვა მნიშვნელი აქვთ და მრიცხველი კი ერთის ტოლია.

ამოხსნა: წარმოვადგინოთ $\frac{2}{7} = \frac{1}{n} + \frac{1}{7n} \Leftrightarrow \frac{2}{7} = \frac{8}{7n} \Rightarrow n = 4$. მასასადამე, გვექნება შემდეგი წარმოდგენა: $\mathbf{\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}}$.

2.4.8. გაიზრდება, თუ შემცირდება წილადი, თუ, მის მრიცხველსა და მნიშვნელს დავუმათებთ რაიმე ნატურალურ რიცხვს ?

ამოხსნა: ვთქვათ, გვაქვს წილადი: $\frac{a}{b}$ მაშინ, თუ, მის მრიცხველსა და მნიშვნელს მივუმატებთ, რაიმე ნატურალურ n რიცხვს, მივიღებთ წილადს: $\frac{a+n}{b+n}$. ამ ორი წილადის შესადარებლად, განვიხილოთ მათი სხვაობა: $\frac{a+n}{b+n} - \frac{a}{b} = \frac{ab+bn-ab-an}{b(b+n)} = \frac{n(b-a)}{b(b+n)} = \begin{cases} \frac{a+n}{b+n} - \frac{a}{b} > 0 \ \ if\ b > a \\ \frac{a+n}{b+n} - \frac{a}{b} < 0 \ \ if\ b < a \end{cases}$.

მასასადამე, თუ, წილადი წესიერია $b > a$, მაშინ ნატურალური რიცხვის მიმატებით მრიცხველსა და მნიშვნელზე, წილადი იზრდება, ხოლო, თუ, წილადი არაწესიერია $b < a$, მაშინ წილადი მცირდება.

2.5. ლოგიკური ამოცანები

2.5.1. გლეხმა მდინარის მეორე ნაპირზე, ნავით უნდა გადაიტანოს კომბოსტო, გადაიყვანოს თხა და მგელი. ნავი პატარაა და მასში ეტევა გლეხი და მასთან ერთად, მხოლოდ კომბოსტო, მგელი, ან თხა.

თუ, მგელს და თხას დავტოვებთ გლეხის გარეშე, მგელი შეჭამს თხას. თუ, თხას და კომბოსტოს დავტოვებთ, მაშინ თხა შეჭამს კომბოსტოს. როგორ მოვიქცეთ ?

ამოხსნა: ნავით, ჯერ მეორე ნაპირზე უნდა გადავიყვანოთ თხა, მგელი და კომბოსტო დავტოვოთ. შემდეგ გზაზე, უნდა წავიყვანოთ მგელი და თხა წამოვიყვანოთ უკან, შემდეგ, გადავიტანოთ მეორე ნაპირზე კომბოსტო მგელთან და წამოვიდეთ, მგელი და კომბოსტო უკვე მეორე ნაპირზეა, რაც იმას ნიშნავს, რომ შეგვიძლია გადავიყვანოთ უკვე თხაც. ამოცანა ამოხსნილია.

2.5.2. გვაქვს ორი ჭურჭელი ერთში ეტევა 3 ლიტრი, ხოლო მეორეში კი 5 ლიტრი წყალი. ამ ორი ჭურჭლის გამოყენებით როგორ ჩავასხათ დოქში 4 ლიტრი წყალი ?

ამოხსნა: ჭურჭლიდან, რომელშიც ეტევა 5 ლიტრი გადავასხათ წყალი 3 ლიტრიან ჭურჭელში, მაშინ დაგვრჩება 2 ლიტრი და ჩავასხათ ის დოქში. თუ ამ ოპერაციას მეორეთაც გავიმეორებთ, დოქში გვექნება 4 ლიტრი წყალი.

2.5.3. გვაქვს ძეწკვის 5 ნაგლეჯი, რომელთაგან თითოეული შეიცავს 3 რგოლს. როგორ გავაერთიანოთ ეს ნაგლეჯები ერთიან ძეწკვად, ისე, რომ გავხსნათ და შევკრათ მხოლოდ სამი რგოლი ?

ამოხსნა: ერთ-ერთი ნაგლეჯის სამივე რგოლი გავხსნათ და მათი საშუალებით შევაერთოთ დანარჩენი ნაგლეჯები.

2.5.4. გვაქვს 9 მონეტა, რომლებიც გარეგნულად ერთნაირია. ცნობილია, რომ მათ შორის ერთი - მსუბუქი ყალბია. როგორ აღმოვაჩინოთ ყალბი მონეტა 3 აწონვით ორთეფშიან სასწორზე, გირების გარეშე ?

ამოხსნა: მონეტები დავალაგოთ სამ ტოლ ჯგუფად. თითოეულში იქნება სამი მონეტა. თეფშებიან სასწორზე დავდოთ რომელიმე ორი სამეული. თუ, ისინი გაწონასწორდა, მაშინ ყალბი მონეტა მესამე სამეულში ყოფილა, თუ, ერთერთი სამეული მსუბუქი აღმოჩნდა მაშინ მასშია ყალბი მონეტა. ამგვარად, ერთი აწონვით ვპოულობთ რომელ სამეულშია ყალბი მონეტა. მეორე აწონვისას ამ სამეულიდან რომელიმე ორ მონეტას დავალაგებთ სასწორის თეფშებზე, თუ ისინი გაწონასწორდა, მაშინ დარჩენილი მესამე მონეტაა ყალბი, თუ არ გაწონასწორდა, მაშინ რომელიც მსუბუქია ის იქნება ყალბი.

2.5.5. ხუთ ყუთში ჩალაგებულია ერთნაირი რაოდენობის ვაშლი. თუ, ყოველი ყუთიდან ამოვიღებთ 60 ვაშლს, მაშინ ყველა ყუთში ერთად იქნება იმდენი ვაშლი, რამდენიც ადრე იყო ორ ყუთში. რამდენი ვაშლი იყო თავდაპირველად თითოეულ ყუთში ?

ამოხსნა: თუ, თითოეული ყუთიდან ამოვიღებთ 60 ვაშლს, მაშინ სულ ამოღებული იქნება: $60 \cdot 5 = 300$ ვაშლი. მაშინ ყველა ყუთში ერთად დარჩება იმდენი ვაშლი, რაც ადრე იყო ორ ყუთში, ე.ი. დანარჩენი სამი

ყუთის ოდენობის ვაშლი ამოგვიღია ანუ სამ ყუთში იყო 300 ვაშლი, მაშინ თითოეულში ყოფილა $300 : 3 = 100$ ვაშლი.

2.5.6. პირველი სართულიდან მესამე სართულზე ასასვლელად უნდა ავიარო 52 საფეხური. რამდენი საფეხურის ავლა დაგვჭირდება პირველიდან მეექვსესართულამდე ასასვლელად, თუ სართულებს შორის საფეხურების რიცხვი ერთნაირია ?

ამოხსნა: მესამე სართულამდე ასასვლელად, უნდა ავიაროთ ორი სართული. მაშასადამე, ერთი სართულის ავლას სჭირდება $52 : 2 = 26$ კიბის ავლა, მაშინ მეექვსე სართულზე ასვლას სჭირდება 5 სართული ავლა ანუ $26 \cdot 5 = 130$ საფეხურის ავლა.

2.5.7. ბიჭს იმდენი და ყავს, რამდენიც ძმა. ხოლო მის დას ორჯერ ნაკლები ყავს დები, ვიდრე ძმები. რამდენი ბიჭია და რამდენი გოგო ამ ოჯახში ?

ამოხსნა: 4 ბიჭი და სამი გოგო.

2.5.8. საქართველოში ჩამოვიდა 100 ტურისტი. მათგან 10-მა არ იცოდა არც გერმანული და არც ფრანგული. 75-მა იცოდა გერმანული და 83-მა ფრანგული. რამდენმა ტურისტმა იცოდა ორივე ენა ?

ამოხსნა: რადგან გერმანული იცოდა 75-მა 100-დან, ცხადია რომ 100 - 75=25 და 25-მა ტურისტმა არ იცოდა გერმანული და 10-მა კაცმა არ იცოდა არცერთი ენა. ე.ი. 25-10=15 და 15-მა ტურისტმა იცოდა მხოლოდ ფრანგული ენა. მასასადამე, ორივე ენა იცოდა 83 -15=68 ტურისტმა.

2.5.9. ერთმანეთს შეხვდა სამი მეგობარი: მოქანდაკე -თეთრაძე, მევიოლინე შავიშვილი და მხატვარი - ქერაშვილი. „რა უცნაურია, რომ ჩვენგან ერთი თეთრთმიანია, ერთი შავთმიანია და ერთიც ქერა, მაგრამ არცერთის თმის ფერი არ ემთხვევა იმ ფერს, რაზეც მიუთითებს მისი გვარი“ , შენიშნა შავთმიანმა. „შენ მართალი ხარ“ - უპასუხა თეთრაძემ. რა ფერის თმა აქვს მხატვარს ?

ამოხსნა: ასეთი ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად ადგენენ ცხრილს, სადაც იმ უჯრაში, რომელიც შეესაბამება გვარის შესაბამისი თმის ფერს (ამოცანის პირობიდან გამომდინარე) დავწერთ მინუსს:

	თეთრაძე	შავიშვილი	ქერაშვილი
თეთრთმიანი	-		
შავთმიანი		-	
ქერათმიანი			-

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, „შენ მართალი ხარ“ უპასუხა თეთრაძემ შავთმიანს, დავასკვნით რომ თეთრაძეს არა აქვს შავი თმები. ე.ი. ცხრილში თეთრაძის სვეტში შესაბამის უჯრაში შევიტანთ მინუსს:

	თეთრაძე	შავიშვილი	ქერაშვილი
თეთრთმიანი	-	+	-
შავთმიანი	-	-	+
ქერათმიანი	+	-	-

ცხადია, რომ ბოლო ცხრილის მეორე სტრიქონიდან გამომდინარე შავთმიანი ყოფილა ქერაშვილი, ამიტომ შესაბამის უჯრაში შევიტანთ პლიუს ნიშანს. ამის შემდეგ, ადვილად მივხვდებით, რომ ქერაშვილი არაა თეთრთმიანი და შესაბამის უჯრაში ჩავწერთ მინუსს. ახლა უკვე ჩანს, რომ თეთრთმიანი ყოფილა შავიშვილი და ჩავწერთ შესაბამის უჯრაში პლიუსს. ამის შემდეგ, ნათელია რომ თეთრაძე ყოფილა ქერათმიანი. ცხრილიდან ჩანს, რომ მხატვარი ყოფილა შავთმიანი ქერაშვილი (უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, თითოეულ სტრიქონში და სვეტში ერთი პლიუსია)

2.5.10. სამი მეგობარი გოგონა გარეთ გამოვიდა შესაბამისად: თეთრი, მწვანე და ლურჯი კაბით. მათი ფეხსაცმელებიც ასევე, იყო; თეთრი, მწვანე და ლურჯი. ცნობილია, რომ მხოლოდ ანიკოს ფეხსაცმლის ფერი ემთხვევა კაბის ფერს. ვიკას არც ფეხსაცმელი და არც კაბა არ იყო თეთრი. ნათელა გამოვიდა მწვანე ფეხსაცმლით. განსაზღვრეთ თითოეული გოგონას კაბისა და ფეხსაცმლის ფერი.

ამოხსნა: შევადგინოთ გოგონების ფეხსაცმლის ფერების დასადგენად ცხრილი:

	ანიკო	ვიკა	ნათელა
თეთრი	+	-	-
მწვანე	-	-	+
ლურჯი	-	+	-

ახლა შევადგინოთ ცხრილი გოგონების კაბის ფერებისათვის:

	ანიკო	ვიკა	ნათელა
თეთრი	+	-	-
მწვანე	-	+	-
ლურჯი	-	-	+

2.5.11. ბოთლში, ჭიქაში, დოქში და ქილაში ჩასხმულია: რძე, ლიმონათი, ბურახი და წყალი. ცნობილია, რომ წყალი და რძე არ არიან ბოთლში, ლიმონათიანი ჭურჭელი დგას დოქსა და ბურახიან ჭურჭელს შორის. ქილაში არაა ლიმონათი და არც წყალი. ჭიქა დგას ქილასთან და რძიან ჭურჭელთან. სადაა ჩასხმული თითოეული სითხე ?

ამოხსნა: პირობის თანახმად, შევადგინოთ ცხრილი. შესაბამის უჯრაში მინუსი ნიშნავს, რომ ჭურჭელში არაა შესაბამისი სითხე, ხოლო პლიუსი - პირიქით.

	ბოთლი	ჭიქა	დოქი	Qilaქილა
რძე	-	-	+	-
ლიმონათი	+	-	-	-
ბურახი	-	-	-	+
წყალი	-	+	-	-

2.5.12. თივის ერთი ზვინი ცხენს ყოფნის საკვებად 1 თვე, თხას - 2 თვე, ხოლო სხვარს - 3 თვე. რამდენ ხანს ეყოფა თივის ზვინი საკვებად სამივეს ერთად ?

ამოხსნა: რადგან ცხენი ერთ ზვინს ათავებს 1 თვეში, 1 წელიწადში ის მოიხმარს 12 ზვინ თივას, შესაბამისად, 1 წელიწადში თხა მოიხმარს საკვებად 6 ზვინს, ხოლო ცხვარი - 4 ზვინს. სამივე ერთად, 1 წელში მოიხმარს $12 + 6 + 4 = 22$ ზვინ თივას. მაშინ, სამივეს ერთად 1 ზვინი თივა ეყოფა $12 : 22 = \frac{6}{11}$ თვის განმავლობაში.

2.5.13. რიცხვებზე შეგვიძლია ჩავატაროთ შემდეგი ოპერაციები: გავამრავლოთ 2-ზე ან ნებისმიერად გადავაადგილოთ ციფრები (მხოლოდ ნულის დაწერა არ შეგვიძლია პირველ ადგილზე). შესაძლებელია, თუ არა ასეთი ოპერაციებით 1-დან მივიღოთ 74 ?

ამოხსნა: $74 = 2 \cdot 37$. აქედან გამომდინარე, მხოლოდ 2-ზე გამრავლებით და ციფრების გადაადგილებით შეუძლებელია მივიღოთ 74.

2.5.14. მასწავლებელმა თქვა: ვინც დაამთავრებს სემესტრს ხუთიანების გარეშე, წავა ექსკურსიაზე. კოტეს, სემესტრის ბოლოს ინგლისურში გა-მოჰყვა ხუთიანი. ნიშნავს თუ არა ეს, რომ კოტე ვერ წავა ექსკურსიაზე ?

ამოხსნა: არ ნიშნავს, რადგან ხუთიანების გარეშე დამთავრება, არის საკმარისი პირობა ექსკურსიაზე წასასვლელად, მაგრამ არაა აუცილებელი.

2.5.15. კლასში 25 მოსწავლეა. მათგან 15 მათემატიკის წრეზე დადის, 11 - ფიზიკის, ხოლო 5 არც მათემატიკის და არც ფიზიკის წრეზე არ დადის. რამდენი მოსწავლე დადის ორივე წრეზე ანუ მათემატიკის და ფიზიკის წრეზე ?

ამოხსნა: ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, ერთ-ერთ წრეზე მაინც, დადის $25 - 5 = 20$ მოსწავლე ანუ $n(A \cup B) = 20$. თუ, გამოვიყენებთ ფორმულას: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, მაშინ მივიღებთ რომ

$20 = 15 + 11 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 6$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ორივე წრეზე დადის **6 მოსწავლე.**

2.5.16. სოფელში ყოველ ოჯახს ყავს ძროხა, ცხენი ან ორივე ერთად. ამასთან ძროხა ყავთ 20 ოჯახში, ცხენი - 25 ოჯახში, ხოლო ორივე - 15 ოჯახში. რამდენი ოჯახია სოფელში ?

ამოხსნა:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 20 + 25 - 15 = 30$, რაც იმას ნიშნავს, რომ სოფელში არის **30 ოჯახი.**

2.6. ლუწობა-კენტობა

ლუწი ეწოდება ნატურალურ რიცხვს, რომელიც უნაშთოდ იყოფა ორზე. ლუწი რიცხვის ზოგადი ფორმულაა: $\{\mathbf{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{\mathbf{2}; \mathbf{4}; \ldots\}$.

თეორემა: ორზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომლებიც ბოლოვდება ლუწი ციფრით.

დამტკიცება: განვიხილოთ, n - ნიშნა რიცხვები:

$\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots a_{n-1} \cdot 10 + a_n$, ამ ჩანაწერიდან ცხადია, რომ მარჯვენა მხარის ყველა წევრი ბოლო a_n - ის გარდა, ნებისმიერი წინა წევრის მნიშვნელობისათვის იყოფა ორზე და თუ, ეს ბოლო ციფრიც გაიყოფა ორზე ანუ რიცხვი დაბოლოვდება ლუწი ციფრით, მაშინ n - ნიშნა რიცხვიც გაიყოფა 2 - ზე. რ.დ.გ.

ნატურალურ რიცხვს, რომელიც 2 - ზე არ იყოფა უნაშთოდ კენტი ეწოდება. კენტი რიცხვის ზოგადი ფორმულაა: $\{\mathbf{2n - 1}\}_{n=1}^{\infty} = \{\mathbf{1}; \mathbf{3}; \ldots\}$.

2.6.1. **ლუწი იქნება, თუ კენტი: ა) ორი ლუწი რიცხვის ჯამი ? ბ) ორი კენტი რიცხვის ჯამი ? გ) კენტი რაოდენობის ლუწი რიცხვის ჯამი ? დ) სამი კენტი რიცხვის ჯამი ? ე) კენტი რაოდენობის კენტი რიცხვების ჯამი ? ვ) ლუწი რაოდენობის კენტი რიცხვების ჯამი ?**

ამოხსნა: ა) ლუწი რიცხვის ზოგადი ფორმულაა: $2k$, სადაც $k \in \mathbb{N}$. მაშასადამე, ორი ლუწი რიცხვის ჯამი იქნება ლუწი, მართლაც:

$2k + 2n = 2(k + n) \vdots 2;$

ბ) კენტი რიცხვის ზოგადი ფორმულაა: $2k - 1$, სადაც $k \in \mathbb{N}$. მაშასადამე, ორი კენტი რიცხვის ჯამი იქნება ლუწი, მართლაც:

$2k - 1 + 2n - 1 = 2k + 2n - 2 = 2(k + n - 1) \vdots 2;$

გ) კენტი რაოდენობის ლუწი რიცხვის ჯამიც იქნება ლუწი, რადგან ნებისმიერი ორი ლუწი რიცხვის ჯამი ლუწია;

დ) სამი კენტი რიცხვის ჯამი იქნება კენტი, რადგან ორი კენტი რიცხვის ჯამი ლუწია, ხოლო ლუწი და კენტი რიცხვების ჯამი კი - კენტი;

ე) ანალოგიურად, კენტი რაოდენობის, კენტი რიცხვების ჯამი იქნება კენტი;

ვ) ლუწი რაოდენობის კენტი რიცხვების ჯამი იქნება ლუწი.

2.6.2. **ლუწი იქნება, თუ კენტი: ა) ორი ლუწი რიცხვის ნამრავლი ? ბ) ორი კენტი რიცხვის ნამრავლი ? გ) კენტი და ლუწი რიცხვის ნამრავლი ?**

ამოხსნა: ორი ლუწი რიცხვის ნამრავლი იქნება ლუწი, რადგან თუ რომელიმე რიცხვს გავამრავლებთ ლუწ რიცხვზე, ნამრავლიც ლუწი იქნება;

ბ) ორი კენტი რიცხვის ნამრავლი კენტია, რადგან თუ, თანამამრავლთაგან არცერთი არ იყოფა ორზე, არც ნამრავლი გაიყოფა 2-ზე;

გ) კენტი და ლუწი რიცხვის ნამრავლი ლუწია, რადგან თუ ერთერთი თანამამრავლი იყოფა 2-ზე, მაშინ ნამრავლიც გაიყოფა 2-ზე.

2.6.3. **შეიძლება თუ, არა რომ სამი ნატურალური რიცხვის ჯამი იყოს ლუწი, ხოლო მათივე ნამრავლი კენტი ?**

ამოხსნა: სამი ნატურალური რიცხვის ჯამი ლუწია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სამივე ლუწია ან ორი მათგანია კენტი და მესამე ლუწი. ორივე შემთხვევაში, ნამრავლი შეიცავს ლუწ თანამამრავლს და მაშასადამე ლუწია. ამრიგად, თუ სამი ნატურალური რიცხვის ჯამი ლუწია, ნამრავლი კენტი არ იქნება.

2.6.4. შეიძლება თუ არა, რომ ხურდის გარეშე გადავიხადოთ:

ა) 20 თეთრი 1; 5 და 10 თეთრიანი შვიდი მონეტით ?

ბ) 20 თეთრი 1 და 5 თეთრიანი შვიდი მონეტით ?

გ) 25 თეთრი 1 და 5 თეთრიანი რვა მონეტით ?

ამოხსნა: ა) $20 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 10$;

ბ) $20 = 5 + 5 + 5 + 5$ შეუძლებელია 7 შესაკრების ჯამის სახით წარმოდგენა 1 და 5 თეთრიანებით;

გ) ასევე, შეუძლებელია 25-ის წარმოდგენა 7 შესაკრებად 1 და 5 თეთრიანებით.

2.6.5. შეიძლება თუ არა 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10 რიცხვებს შორის „+“ და „-“ ნიშნების ჩასმა ისე, რომ მიღებული გამოსახულების მნიშვნელობა იყოს: ა) 7 ?

ამოხსნა: ა) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 = 7$;

2.6.7. ნიკამ 100 ფურცლიანი წიგნიდან მოინიშნა რომელიღაც 23 გვერდი და შეაჯამა ამ გვერდების ნომრები. აჩვენეთ, რომ მას არ შეეძლო მიეღო ჯამში 2016.

ამოხსნა: ჯამში რომ ყოფილიყო 2016 მაშინ ამ 23 გვერდის ციფრების მნიშვნელობათა საშუალო მნიშვნელობა იქნებოდა 2016:23, მაგრამ განაყოფი არაა მთელი რიცხვი, რაც იმას ნიშნავს რომ მონიშნული გვერდების ნომრების ჯამი არ შეიძლება იყოს 2016. რ.დ.გ.

2.6.8. კაკლის 8 ხე იზრდება ერთ რიგში. ცნობილია, რომ ორ მეზობელ ხეზე მოსხმული კაკლების რაოდენობა განსხვავდება 1-ით. შეიძლება, თუ არა რომ კაკლების საერთო რაოდენობა იყოს 2007 ?

ამოხსნა: ვთქვათ, პირველ ხეზე მოსხმულია n რაოდენობის კაკალი, მაშინ მივირებთ, რომ 8 ხეზე კაკლების საერთო რაოდენობა იქნება:

$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+(n+7)=8n+32=2007.$

მაშინ, $8n=2007-32$ ანუ $8n=1975$ ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილი არ იყოფა 8-ზე უნაშთოდ, რაც იმას ნიშნავს რომ კაკლების საერთო რაოდენობა არ შეიძლება იყოს 2007.

2.6.9. ჭადრაკის დაფაზე 8×8 დაექცათ საღებავი. შეიძლება, თუ არა რომ დასვრილი უჯრების რაოდენობა 17-ით ნაკლები იყოს სუფთა უჯრების რაოდენობაზე ?

ამოხსნა: საჭადრაკო დაფაზე, სულ გვექნება 64 უჯრა. თუ, დასვრილი უჯრების რაოდენობაა n, მაშინ სუფთა უჯრების რაოდენობა იქნებოდა $n+17$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ადგილი უნდა ქონდეს განტოლებას:

$n+n+17=64 \Leftrightarrow 2n=64-17 \Leftrightarrow 2n=47.$

განტოლების მარჯვენა მხარე არაა ლუწი, რაც იმას ნიშნავს, რომ დასვრილი უჯრების რაოდენობა, **არ შეიძლება 17-ით ნაკლები იყოს სუფთა უჯრების რაოდენობაზე.**

2.6.10. შეიძლება თუ არა, რომ 5×5 დაფა დაიფაროს 1×2 ზომის დომინოს ქვებით ?

ამოხსნა: 5×5 დაფას აქვს 25 უჯრა. 1×2 ზომის დომინოს ქვების ზომაა 2. რადგან 25 არ იყოფა უნაშთოდ 2-ზე, ასეთი დომინოს ქვებით დაფა **ვერ დაიფარება.**

2.6.11. მოლეკულამ მაღაზიაში იყიდა 20 რვეული, 2 სახატავი რვეული, რამოდენიმე ფანქარი 6 ლარად და 20 თეთრად და 4 ლარიანი რამდენიმე სახაზავი. მას უთხრეს, რომ სალაროში გადასახდელი აქვს 55 ლარი და 65 თეთრი. მოლეკულამ მოითხოვა თანხის გადათვლა და შეცდომა გამოასწორეს. როგორ მიხვდა მოლეკულა, რომ ატყუებდნენ ?

ამოხსნა: რაც იყიდა მოლეკულამ, ყველაფერი იყო ლუწი რაოდენობით და მას თანხა უანგარიშეს კენტ რიცხვად, რაც აშკარად შეცდომა იყო. ამიტომაც ადვილად მიხვდა მოლეკულა.

2.6.12. მაკამ თქვა, რომ იცის ოთხი ნატურალური რიცხვი, რომელთა ჯამიც და ნამრავლიც კენტი რიცხვებია. მართალია მაკა, თუ არა ?

ამოხსნა: ოთხი ნატურალურ რიცხვის ნამრავლი თუ კენტია, ეს იმას ნიშნავს, რომ ოთხივე რიცხვი კენტია, მაგრამ მაშინ მათი ჯამი ლუწი იქნება. ამრიგად, მაკა არაა მართალი.

2.6.13. დაფაზე 25×25 განლაგებულია შაშის 25 ქვა. ამასთან, მათი განლაგება სიმეტრიულია დიაგონალის მიმართ. დაამტკიცეთ, რომ ერთი შაში მაინც დევს დიაგონალზე.

ამოხსნა: რადგან შაშის ქვების რაოდენობა კენტია, დაფაზე განლაგება კი სიმეტრიულია დიაგონალის მიმართ, სიმეტრიულად განლაგებულ ქვათა რაოდენობა შეიძლება იყოს აუცილებლად ლუწი (დიაგონალის ერთ და მეორე მხარეს). რაც იმას ნიშნავს, რომ ერთი ქვა, აუცილებლად მოხვდება დიაგონალზე, რომ არ დაირღვეს სიმეტრიულობა. რ.დ.გ.

2.6.14. რომელი ხუთნიშნა რიცხვები არის უფრო ბევრი: რომლებიც ლუწი ციფრებით ჩაიწერება, თუ რომლებიც კენტი რიცხვებით ჩაიწერება (ციფრები არ მეორდებიან) ?

ამოხსნა: ათობით სისტემაში, ლუწი და კენტი ციფრების რაოდენობა ერთნაირია, მაგრამ ხუთნიშნა რიცხვი არ შეიძლება იწყებოდეს ლუწი 0-ით. აქედან გამომდინარე, კენტი ციფრებით ჩაწერილი ხუთნიშნა რიცხვების რაოდენობა იქნება მეტი.

2.6.15. რამდენი ისეთი ორნიშნა რიცხვი არსებობს, რომლებიც ჩაწერილია მხოლოდ: ა) ლუწი ციფრებით ? ბ) კენტი ციფრებით ? (ციფრები არ მეორდება).

ამოხსნა: ა) პირველ ადგილზე ნული არ შეიძლება რომ იყოს რიცხვში ანუ გვაქვს ოთხი რიცხვი: 2; 4; 6; 8. მეორე ადგილზე შეიძლება იყოს ნებისმიერი ლუწი ციფრი ანუ 0; 2; 4; 6; 8. რადგან ციფრები არ მეორდება სულ გვექნება $4 \cdot 4 = 16$ განსხვავებული ორნიშნა რიცხვი ჩაწერილი ლუწი ციფრებით; ბ) კენტი ციფრებია: 1; 3; 5; 7; 9 ნებისმიერი ამ ხუთი ციფრიდან, შიძლება იყოს პირველი ციფრი ორნიშნა რიცხვში, ხოლო მეორე ციფრი შეიძლება იყოს მხოლოდ პირველი ციფრისგან განსხვავებული რიცხვი. ასეთები იქნება სულ ოთხი. აქედან გამომდინარე, სულ გვექნება $5 \cdot 4 = \mathbf{20}$ **ორნიშნა რიცხვი ჩაწერილი კენტი ციფრებით.**

2.7. სხვადასხვა შინაარსის ამოცანები

2.7.1. კლასში 14 მოსწავლე ინგლისურ ენას სწავლობს, 8 - ფრანგულს, ხოლო 3 მოსწავლე - ორივე ენას. რამდენი მოსწავლეა კლასში, თუ ცნობილია, რომ ყოველი მოსწავლე ერთ ენას მაინც სწავლობს ?

ამოხსნა: ვთქვათ, ინგლისურის მოსწავლეთა სიმრავლეა A, ხოლო ფრანგულისა - B, მაშინ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ $n(A \cup B) = 14 + 8 - 3 = 19$. მასასადამე, კლასში ყოფილა **19 მოსწავლე**.

2.7.2. იპოვეთ ორნიშნა რიცხვი, რომლის ციფრთა ჯამიც ტოლია მისი ციფრების ნამრავლისა.

ამოხსნა: ვთქვათ გვაქვს ორნიშნა რიცხვი $\overline{mn}$. მაშინ, ამოცანის პირობის თანახმად, მივიღებთ განტოლებას: $m + n = mn \Rightarrow m = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$. რადგან m და n ნატურალური რიცხვებია, მივიღებთ რომ

$m = 2$ და $n = 2$, რაც იმას ნიშნავს რომ საძიებელი ორნიშნა რიცხვია $\mathbf{22.}$

2.7.3. ერთი მუშა გეგმიური სამუშაოს შესრულებას ანდომებს 4 სთ - ს, ხოლო მეორე კი 6 სთ - ს. რამდენ ხანს მოუნდება იგივე სამუშაოს შესრულებას მესამე მუშა, რომლის შრომის ნაყოფიერებაც პირველი ორი მუშის საშუალოს ტოლია ?

ამოხსნა: პირველი მუშა ერთ საათში შეასრულებს სამუშაოს $\frac{1}{4}$ ნაწილს, ხოლო მეორე მუშის შრომის ნაყოფიერებაა $\frac{1}{6}$ ნაწილი საათში. მაშინ, მესამე მუშის შრომის ნატოფიერება იქნებოდა $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{24}$ ანუ მესამე მუშა საათში ასრულებს მთელი სამუშაოს $\frac{5}{24}$ ნაწილს. ვთქვათ მთელ სამუშაოს ის შეასრულებს t დროში, მაშინ მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$\frac{5}{24}t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{24}{5} \Rightarrow t = 4.8$სთ. მაშასადამე, მესამე მუშა სამუშაოს შეასრულებს **4 სთ - სა და 48 წთ - ში.**

2.7.4. აუზის ასავსებად, დამონტაჟებულია წყლის ორი ონკანი, რომელთაგან პირველ ონკანს, მარტო მუშაობისას შეუძლია აუზის ავსება 4 სთ - სა და 30 წთ - ში, ხოლო მეორეს - 6 სთ - სა და 45 წთ - ში.

თავიდან მოშვებული იყო მხოლოდ პირველი ონკანი იმ დროის განმავლობაში, რაშიც ორივე ერთად აავსებდა აუზს, ამის შემდეგ, პირველ ონკანთან ერთად, გახსნეს მეორე ონკანიც. მეორე ონკანის გახსნიდან რამდენ ხანში აივსება აუზი ?

ამოხსნა: პირველი ონკანი აუზს ავსებს $4\frac{1}{2}$ სთ - ში ანუ ერთ საათში აავსებს აუზის $1:4\frac{1}{2}=1:\frac{9}{2}=\frac{2}{9}$ ნაწილს, მეორე ონკანი ავსებს $6\frac{45}{60}=6\frac{3}{4}$ სთ - ში ანუ ერთ საათში აავსებს $1:6\frac{3}{4}=1:\frac{27}{4}=\frac{4}{27}$ ნაწილს. ორივე ერთად მუშაობით ერთ საათში აავსებდნენ აუზის:

$\frac{2}{9}+\frac{4}{27}=\frac{6+4}{27}=\frac{10}{27}$ ნაწილს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ერთად მუშაობით ეს ორი ონკანი აუზს აავსებდა $1:\frac{10}{27}=\frac{27}{10}$ სთ - ში. თუ, ამ ხნის განმავლობაში, მოშვებული იყო მხოლოდ პირველი ონკანი, მაშინ ის აავსებდა აუზის

$\frac{27}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{3}{5}$ ნაწილს და დარჩებოდა ასავსები $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ ნაწილი. ამ ნაწილს ერთად მუშაობით, ორივე ონკანი აავსებდა: $\frac{2}{5}:\frac{10}{27}=\frac{2}{5}\cdot\frac{27}{10}=\frac{27}{25}=1\frac{2}{25}=\mathbf{1.08}$ **სთ - ში.**

2.7.5. მართკუთხედის პერიმეტრი 18 სმ - ია. თუ, მის სიგრძეს შევამცირებთ 20% - ით, ხოლო სიგანეს გავადიდებთ 25% - ით, მაშინ მისი პერიმეტრი არ შეიცვლება. იპოვეთ, მართკუთხედის ფართობი.

ამოხსნა: ვთქვათ, მართკუთხედის სიგრძეა x სმ. მოცემულობიდან გამომდინარე, სიგრძისა და სიგანის ჯამი იქნება: $18:2=9$ (სმ). მაშასადამე, სიგანე იქნებოდა $9-x$. თუ, სიგრძეს შევამცირებთ 20% - ით, ის გახდება $x-0.2x=0.8x$, ხოლო თუ, სიგანეს გავადიდებთ 25% - ით, ის იქნება $9-x+0.25(9-x)=1.25(9-x)$. მაშინ, პერიმეტრი იქნება ისევ 18 სმ ანუ მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$2\big(0.8x+1.25(9-x)\big)=18 \Leftrightarrow 0.8x-1.25x+11.25=9 \Leftrightarrow 0.45x=2.25$$

$x=5$. მივიღეთ, რომ სიგრძე ყოფილა 5 სმ, მაშინ სიგანე იქნებოდა 4 სმ და მაშასადამე, ამ მართკუთხედის ფართობია: $4\cdot 5=\mathbf{20}$ **სმ**^{2}.

2.7.6. მარიამმა 25 ფანქარში გადაიხადა იმდენი ლარი, რამდენი ფანქრის ყიდვაც შეიძლება 1 ლარით. რა ღირს 1 ფანქარი ?

ამოხსნა: ვთქვათ, ფანქარი ღირდა x ლარი, მაშინ 25 ფანქარში გადაიხდიდა $25\,x$ ლარს. თუ, x ლარით ვყიდულობთ ერთ ფანქარს, მაშინ 1 ლარით ვიყიდით $\frac{1}{x}$ ფანქარს, ე.ი. შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლება: $25\,x = \frac{1}{x} \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{25} \Longrightarrow x = \frac{1}{5}$ (ლარი) = **20 თეთრი.**

2.7.7. წილადის მრიცხველი გაადიდეს ერთით, ხოლო მნიშვნელი ათით. შეიძლება, თუ, არა რომ წილადი გაიზარდოს ?

ამოხსნა: ვთქვათ, გვაქვს წილადი $\frac{a}{b}$. ამოცანის პირობის მიხედვით, მივირებთ ახალ წილადს: $\frac{a+1}{b+10}$. ამ ორი წილადის შესადარებლად, განვიხილოთ მათი სხვაობა: $\frac{a+1}{b+10} - \frac{a}{b} = \frac{ab+b-ab-10a}{b(b+10)} = \frac{b-10a}{b(b+10)}$. ამ ტოლობიდან, ცხადია რომ თუ, $b - 10a > 0$, მაშინ წილადი გაიზრდება ანუ მაგალითისთვის: $\frac{a}{b} = \frac{1}{11}$, წილადისთვის, $\frac{a+1}{b+10} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{21}} > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{11}}$. **შეიძლება.**

2.7.8. ძმა 5 წთ - ით გვიან გამოვიდა დაზე და დაედევნა მას. ძმა მოძრაობდა ერთნახევარჯერ უფრო დიდი სიჩქარით დაზე. რამდენ ხანში დაეწევა ძმა დას ?

ამოხსნა: დაწევის მომენტში, ორივეს ექნებათ გავლილი ერთნაირი მანძილი ანუ შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლება:

$$\mathbf{1.5vt = v(t+5) \Leftrightarrow 1.5vt = vt + 5v \Leftrightarrow 0.5vt = 5v \Longrightarrow 0.5t = 5 \Longrightarrow}$$

$\Longrightarrow \boldsymbol{t = 10}$. **მაშასადამე ძმა დაეწევა დას თავისი გამოსვლიდან 10 წთ - ში.**

2.7.9. იპოვეთ ნატურალური რიცხვი, რომელიც იყოფა 6 - ზე და აქვს 15 გამყოფი ერთის და თავისი თავის ჩათვლით.

ამოხსნა: თუ, რიცხვი იყოფა 6 - ზე, მაშინ ის იყოფა 2 - ზე და 3 - ზე. $15 = 3 \cdot 5$ რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ რიცხვის გამყოფებია მხოლოდ ეს რიცხვები ანუ რიცხვი არის $2^m \cdot 3^n$. ამ რიცხვის გამყოფების რიცხვია:

$\boldsymbol{(m+1)(n+1) = 3 \cdot 5 \Longrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} m = 4 \\ n = 2 \end{cases}}$. **მაშასადამე, საძიებელი რიცხვი ყოფილა:** $2^m \cdot 3^n = 2^2 \cdot 3^4 = \mathbf{324}$ ან $2^m \cdot 3^n = 2^4 \cdot 3^2 = \mathbf{144}$.

2.7.10. წილადის მრიცხველი გაადიდეს 20% - ით. რამდენი პროცენტით უნდა შევამციროთ მნიშვნელი, რომ წილადი გაიზარდოს 2 - ჯერ ?

ამოხსნა: ვთქვათ, გვაქვს წილადი $\frac{a}{b}$, მაშინ თუ, 20 პროცენტით გავზრდით მრიცხველს და x პროცენტით შევამცირებთ მნიშვნელს, მივიღებთ ახალ წილადს:

$$\frac{1.2a}{b-\frac{b}{100}\cdot x}=\frac{2a}{b}\Leftrightarrow\frac{120a}{100b-bx}=\frac{2a}{b}\Leftrightarrow\frac{60}{100-x}=1\Longrightarrow x=40.$$

მასასადამე, მნიშვნელი უნდა შევამციროთ **40 % - ით.**

2.7.11. ორი არანაკიანი წელი მოსდევს ერთმანეთს. მათგან პირველში, ორშაბათები მეტია, ვიდრე ოთხშაბათები. კვირის რომელი დღე გვხვდება ყველაზე ხშირად, მომდევნო წელში ?

ამოხსნა: არანაკიანი წელი შეიცავს 365 დღეს. $365 = 52 \cdot 7 + 1$ ანუ გვაქვს 52 კვირა და ერთი დღე, რომელიც ყველაზე ხშირად გვხვდება წელიწადში. თუ, წინა წელს ასეთი დღე იყო ორშაბათი, მომდევნო წელს ეს იქნება **სამშაბათი.** ეს არის ან წლის დასაწყისის პირველი დღე ან წლის ბოლო დღე.

2.7.12. გიორგის დების რაოდენობა 2 - ით მეტია ძმების რაოდენობაზე. რამდენით მეტი გოგონა ყავთ ბიჭუნებთან შედარებით გიორგის მშობლებს ?

ამოხსნა: თუ, გიორგის ყავს ერთი ძმა, მაშინ მას ყოლია 3 და. ამ შემთხვევაში მათ მშობლებს ყავთ 3 გოგონა და 2 ბიჭუნა ანუ გოგონების რაოდენობა ერთით მეტია ბიჭუნებზე. ანალოგიური სიტუაცია იქნება ძმების ნებისმიერ რაოდენობაზე. მაშასადამე, გიორგის მშობლებს ერთით მეტი გოგონა ყავთ ვაჟებთან შედარებით.

2.7.13. ლოკოკინა დღეში 3 სმ -ით ზემოთ მიცოცავს ბოძზე, ხოლო ღამით უკან ჩამოცოცდება 2 სმ - ით. რამდენ დღეში მიაღწევს ლოკოკინა ბოძის წვერს, თუ, ბოძის სიმაღლეა 10 მ ?

ამოხსნა: 10 მ = 1 000 სმ. პირველ დღეს აცოცდება 3 სმ -ზე და უკან ჩამოცოცდება 2 სმ -ზე ანუ დღე-ღამეში გადის 1 სმ. მაშასადამე, n დღეში ის ავა 1000 სმ - ზე ანუ $1000 = 3 + n - 1 \Leftrightarrow n = 998$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ლოკოკინა ბოძის წვეროს **მიაღწევს 998 დღეში.**

2.7.14. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი გვერდების სიგრძეებია: 27; 56 და 28 სმ.

ამოხსნა: როგორც ვიცით, სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეთა ჯამი უნდა იყოს მეტი მესამე გვერდზე, მაგრამ $27 + 28 = 55 < 56$. მაშასადამე, ასეთი სამკუთხედი არ არსებობს და ამოცანას **არა აქვს ამონახსნი.**

2.7.15. მყვინთავი მუშაობს წყალქვეშ 20 მ სიღრმეზე. მანძილი გემბანიდან წყლის ზედაპირამდე შეადგენს ბაგირის სიგრძის $\frac{1}{8}$ ნაწილს, ამასთან ბაგირის $\frac{2}{3}$ დახვეულია გორგალზე. რა მაქსიმალურ სიღრმეზე შეუძლია მუშაობა მყვინთავს ?

ამოხსნა: ბაგირის სიგრძის $1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{19}{24} = \frac{5}{24}$ ნაწილი არის 20 მ. მასასადამე, ბაგირის სიგრძე ყოფილა: $20 : \frac{5}{24} = 20 \cdot \frac{24}{5} = 96$ (მ). მანძილი გემბანიდან წყლის ზედაპირამდე იქნება: $96 \cdot \frac{1}{8} = 12$ (მ). მაშასადამე, მყვინთავს შეუძლია იმუშაოს $96 - 12 = \mathbf{84}$ **(მ) მაქსიმალურ სიღრმეზე.**

2.7.16. სამკუთხედში, რომლის გვერდების სიგრძეები მთელი რიცხვებია, ერთი გვერდი უდრის 1 სმ - ს, მეორე კი - 5 სმ - ს. რას უდრის მესამე გვერდი ?

ამოხსნა: სამკუთხედის გვერდების სიგრძეების თვისებებიდან გამომდინარე, ნებისმიერი ორი გვერდის სიგრძის ჯამი მეტია მესამე გვერდის სიგრძეზე ანუ $x + 1 > 5 \Rightarrow x > 4$. ასევე, ნებისმიერი ორი გვერდის სიგრძეების სხვაობა, ნაკლებია მესამე გვერდის სიგრძეზე ანუ $x - 1 < 5 \Rightarrow x < 6$. ამრიგად, $4 < x < 6 \Rightarrow \boldsymbol{x = 5}$**(სმ)**

2.8. დირიხლეს პრინციპი

დირიხლეს პრინციპი ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად**: თუ, $\boldsymbol{N}$ გალიაში ზის $\boldsymbol{N + 1}$ კურდღელი, მაშინ ერთ გალიაში მაინც იქნება არანაკლებ, ვიდრე 2 კურდღელი.**

ადგილი აქვს აგრეთვე, დირიხლეს განზოგადებულ პრინციპს: **თუ, $\boldsymbol{N}$ გალიაში ზის $\boldsymbol{kN + 1}$ კურდღელი, მაშინ ერთ გალიაში მაინც იქნება არანაკლებ, ვიდრე $\boldsymbol{k + 1}$ კურდღელი.**

განვიხილოთ, ამოცანების რომლებიც ადვილად იხსნება დირიხლეს პრინციპის დახმარებით.

2.8.1. ყუთში გვაქვს თეთრი და შავი ბურთულები. მინიმუმ, რამდენი ბურთულა უნდა ამოვიღოთ ყუთში ჩაუხედავად, რომ ამოღებულ ბურთულებს შორის აუცილებლად იყოს ორი ერთნაირი ფერის ბურთულა ?

ამოხსნა: უნდა ამოვიღოთ **3 ბურთულა.** ამ შემთხვევაში, აუცილებლად იქნება 2 მაინც ერთი ფერის ბურთულა.

ამ ამოცანაში, კურდღლების როლს თამაშობენ ბურთულები, ხოლო გალიის როლს - ბურთულის ფერები.

2.8.2. დაამტკიცეთ, რომ $n+1$ ნაურალურ რიცხვს შორის, ყოველთვის შეგვიძლია ავირჩიოთ ორი ისეთი რიცხვი, რომელთა სხვაობაც იყოფა n - ზე.

დამტკიცება: ნებისმიერი ნატურალური რიცხვის n - ზე გაყოფისას, მიიღება ერთ - ერთი შემდეგი ნაშთებიდან: $0; 1; 2; \ldots; n-1$. ნაშთთა საერთო რაოდენობაა n. მაშასადამე, თუ ამოვირჩევთ $n+1$ რიცხვს, მათ შორის ორი მაინც მოიძებნება, რომლებიც n - ზე გაყოფისას იძლევა ერთნაირ ნაშთს, რაც იმას ნიშნავს, რომ მათი სხვაობა უნაშთოდ გაიყოფა n - ზე. რ.დ.გ.

2.8.3. მაღაზიაში მოიტანეს 25 ყუთი სამი სხვადასხვა სახეობის ვაშლი. თითოეულ ყუთში აწყვია ერთნაირი სახეობის ვაშლი. დაამტკიცეთ, რომ მათ შორის 9 ყუთში მაინც არის ერთნაირი სახეობის ვაშლი.

დამტკიცება: 25 ყუთი - კურდღლები გავანაწილოთ სამ გალიაში - სახეობაზე, მაშინ რადგან $25 = 3 \cdot 8 + 1$, დირიხლეს განზოგადებული პრინციპის თანახმად $N = 3$; $k = 8$, მივიღებთ, რომ რომელიღაც გალიაში - სახეობის ვაშლი, აღმოჩნდება 9 კურდღელი - ყუთი ვაშლი. რ.დ.გ.

2.8.4. მოცემულია 15 - ზე ნაკლები ან ტოლი 8 სხვადასხვა ნატურალური რიცხვი. დაამტკიცეთ, რომ წყვილ - წყვილად მათი დადებითი სხვაობებიდან გვექნება სამი მაინც ერთნაირი რიცხვი.

დამტკიცება: თხუთმეტზე ნაკლები ორი ნატურალური რიცხვის სხვაობამ შეიძლება მიიღოს 14 სხვადასხვა მნიშვნელობა: $1; 2; 3; \ldots; 14$ ანუ გვაქვს **14 გალია** კურდღლების გასანაწილებლად. 8 რიცხვიან

წყვილების არჩევათა რაოდენობაა $C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = 28$ ანუ **კურდღლების** - წყვილების რაოდენობაა 28. თუ, გავითვალისწინებთ, რომ გალიაში რომლის ნომერიცაა 14, შეიძლება იჯდეს მხოლოდ ერთი კურდღელი, რადგან $14 = 15 - 1$, მივიღებთ რომ დანარჩენ 13 გალიაში უნდა გავანაწილოთ დარჩენილი 27 კურდღელი, ეს კი დირიხლეს პრინციპიდან გამომდინარე, ნიშნავს, რომ ერთ - ერთ გალიაში გვეყოლება 3 კურდღელი. რ.დ.გ.

2.8.5. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი n რიცხვისათვის, მოიძებნება

$111\ldots1000\ldots0$ სახის ისეთი რიცხვი, რომელიც უნაშთოდ იყოფა n - ზე.

დამტკიცება: განვიხილოთ $n+1$ რაოდენობის, შემდეგი სახის რიცხვები: $1; 11; 111; 1111; \ldots; 11111\ldots1$. ამ რიცხვების n - ზე გაყოფისას, ნაშთში მივიღებთ ერთ - ერთს, შემდეგი რიცხვებიდან: $0; 1; 2; \ldots; n-1$. მაგრამ, ჩვენ გვაქვს $n+1$ რაოდენობის რიცხვი ანუ კურდღელი, რომლებიც უნდა ჩავსვათ n გალიაში ანუ ნაშთთა კლასში. მაშინ, დირიხლეს პრინციპის თანახმად, ორი რიცხვი მაინც მოიძებნება, რომლებსაც აქვთ ერთნაირი ნაშთი. ამ რიცხვების სხვაობა უნაშთოდ გაიყოფა n - ზე და დაბოლოვდება რამდენიმე ნულით, რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს. რ.დ.გ.

2.8.6. დაამტკიცეთ, რომ 1000 ნატურალური რიცხვიდან, ყოველთვის შეგვიძლია ავირჩიოთ რამდენიმე მათგანი ისე, რომ მათი ჯამი იყოფოდეს 1000 - ზე.

დამტკიცება: ვთქვათ, ეს რიცხვებია: $x_1; x_2; \ldots; x_{1000}$. განვიხილოთ, $x_1;\ x_1 + x_2;\ x_1 + x_2 + x_3; \ldots;\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{1000}$

რიცხვების 1000 - ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთები. ნაშთი ან ნულია ან რომელიმე ორი მათგანი ერთნაირია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ რიცხვების სხვაობა უნაშთოდ გაიყოფა 1000 - ზე. რ.დ.გ.

2.8.7. დირიხლეს თეორემა: დაამტკიცეთ, რომ მარტივი რიცხვების სიმრავლე უსასრულოა.

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო ანუ ვთქვათ მარტივი რიცხვების სიმრავლე სასრულოა: $p_1;\ p_2; \ldots: p_n$. განვიხილოთ, რიცხვი:

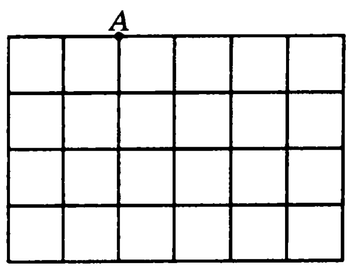
$p_1 p_2 \ldots p_n + 1$, ეს რიცხვი არ იყოფა არცერთ მარტივ $p_1; p_2; \ldots: p_n$ - რიცხვზე, მაშასადამე, ის თვითონაა მარტივი, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას. მაშასადამე, მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. რ.დ.გ.

2.9. გეომეტრიული ამოცანები

2.9.1. ბურატინოს სიმაღლეა 1 მ, ხოლო მისი ცხვირის სიგრძე იყო 9 სმ. როგორც კი ბურატინო ამბობდა ტყუილს, მისი ცხვირი ორჯერ გრძელდებოდა. როგორც კი ცხვირის სიგრძე, მის სიმაღლეზე მეტი გახდა, ბურატინომ ტყუილების ლაპარაკს თავი დაანება. რამდენჯერ მოიტყუა ბურატინომ ?

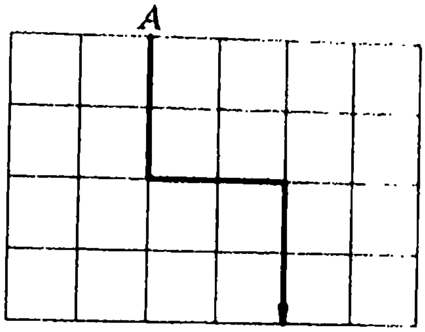
ამოხსნა: 1 მ = 100 სმ; ბურატინოს ცხვირი ერთი ტყულილის შემდეგ, გახდება 18 სმ, ორი ტყუილის შემდეგ - 36 სმ, სამი ტყუილის შემდეგ - 72 სმ, ხოლო 4 ტყულის შემდეგ - 144 ანუ სიმაღლეზე მეტი გახდება. მაშასადამე, ბურატინოს **შეუძლია მხოლოდ 4 ტყუილის თქმა.**

2.9.1. მართკუთხედი გაჭრეს ტეხილის გასწვრივ, რომელიც სამი მონაკვეთისაგან შედგება.



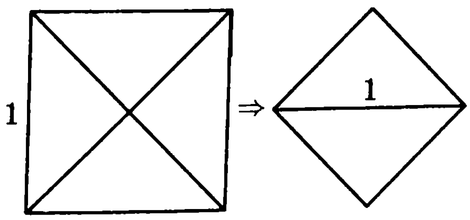
გაჭრა დაიწყეს A წერტილიდან. გაჭრის შედეგად, მიიღეს ორი ტოლი ფიგურა. როგორ გაჭრეს მართკუთხედი ?

ამოხსნა: გაჭრა მოხდა შემდეგნაირად:



2.9.3. როგორ დავჭრათ 4×4 ზომის კვადრატი სწორი ხაზებით ისე, რომ მიღებული ნაწილებისგან შეგვეძლოს შევადგინოთ 32 ერთმანეთის ტოლი კვადრატი ? არაა ნებადართული გამოუყენებელი ნაწილების დატოვება ან ნაწილების ურთიერთგადაფარვა.

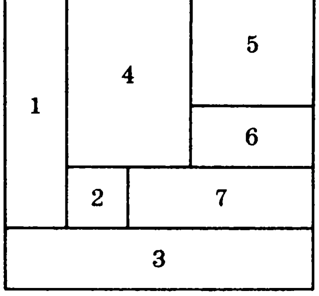
ამოხსნა: თავიდან 4×4 ზომის კვადრატი გავყოთ გავყოთ 16 კვადრატად, რომელთა ზომებიცაა 1×1, ამის შემდეგ, ყოველი მიღებული კვადრატი, გავჭრათ დიაგონალების გასწვრივ 4 კვადრატად და ორ-ორი კვადრატი ერთმანეთს დავადოთ დიდი გვერდის გასწვრივ, მაშინ ამ 4 ნაჭრიდან მივიღებთ 2 კვადრატს



ანუ სულ გვექნება **32 კვადრატი.**

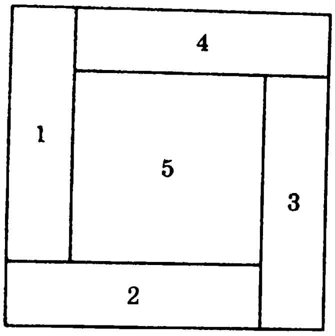
2.9.4. როგორ დავჭრათ 5×5 ზომის კვადრატი 7 მართკუთხედად ისე, რომ მათ შორის არ იყოს ერთნაირები ?

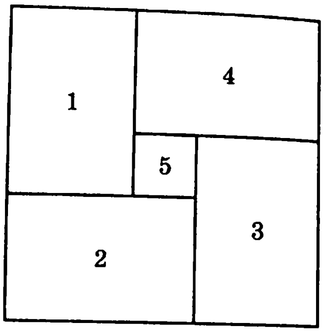
ამოხსნა:



2.9.5. როგორ დავჭრათ 5×5 ზომის კვადრატი 5 მართკუთხედად ისე, რომ მეზობელი მართკუთხედების გვერდები არ ემთხვეოდეს ერთმანეთს. ამასთან ერთად, 4 მართკუთხედი უნდა იყოს ტოლი, ხოლო მეხუთე - იყოს კვადრატი ?

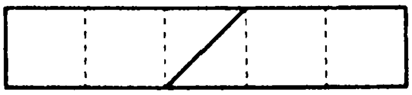
ამოხსნა: ეს შეიძლება მოხდეს ორნაირად:





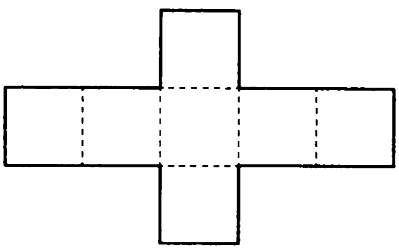
2.9.6. როგორ დავჭრათ 5×5 ზომის კვადრატი, 10 ერთნაირ ოთხკუთხედად, რომლებიც არ არიან მართკუთხედები ?

ამოხსნა: ჯერ გავჭრათ **5×5** ზომის კვადრატი 1×5 ზომის 5 მართკუთხედად:



შემდეგ, ყოველ ასეთ მართკუთხედს, გავჭრით შუა კვადრატის დიაგონალის გასწვრივ და თითოეული ასეთი მართკუთხედი, მოგვცემს ორ ოთხკუთხედს, რომლებიც არ იქნებიან მართკუთხედები. ამრიგად, სულ გვექნება **10 ასეთი ერთნაირი ოთხკუთხედი.**

2.9.7. ნახაზზე მოცემული ფიგურა შედგება 7 ერთნაირი კვადრატისაგან.



მისი პერიმეტრია 16 სმ. იპოვეთ, ამ ფიგურის ფართობი.

ამოხსნა: რადგან პერიმეტრია 16 სმ, ცხადია რომ თითოეული კვადრატის გვერდის სიგრძეა 1 სმ. მაშასადამე, ამ ფიგურის ფართობი იქნება **7 სმ^2.**

2.9.8. მართკუთხა პარალელეპიპედი შეღებეს ყველა მხრიდან და დაჭრეს 24 ერთნაირ კუბიკად. 12 კუბიკს აღმოაჩნდა შეღებილი ორი გვერდი. რა ზომებისაა პარალელეპიპედი ?

ამოხსნა: რადგან პარალელეპიპედი შედგება 24 ერთნაირი კუბიკისაგან და ზომები მთელი რიცხვებია, ვნახოთ რამდენნაირად შეიძლება მივიღოთ 24 სამი თანამამრავლის ნამრავლის სახით:

$24 = 1 \times 1 \times 24 = 1 \times 2 \times 12 = 2 \times 3 \times 4 = 2 \times 2 \times 6 = 1 \times 3 \times 8.$ თუ, გავითვალისწინებთ, რომ 12 კუბიკს აღმოაჩნდა შეღებილი ორი გვერდი, მივიღებთ, რომ პარალელეპიპედის ზომებია: $\mathbf{2 \times 3 \times 4}$.

2.9.9. სათამაშოების ყუთს აქვს მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმა. ზედა წახნაგის ფართობია 6 დმ^2; წინა წახნაგისა - 2.5 დმ^2 და გვერდითი წახნაგისა - 2.4 დმ^2. იპოვეთ ყუთის მოცულობა.

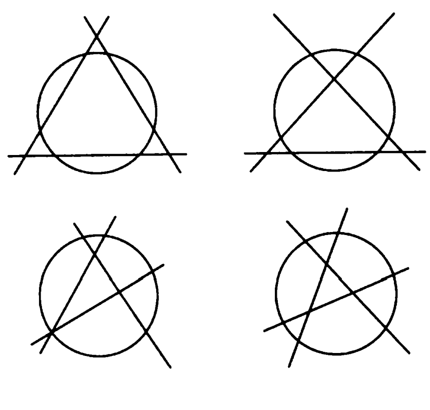
ამოხსნა: ავღნიშნოთ პარალელეპიპედის სიგრძე, სიგანე და სიმაღლე შესაბამისად $a; b; c$ ასოებით. მაშინ, მივიღებთ რომ

$\begin{cases} ab = 6 \\ ac = 2.5 \\ bc = 2.4 \end{cases}$ თუ, ამ ტოლობებს გადავამრავლებთ, მივიღებთ რომ

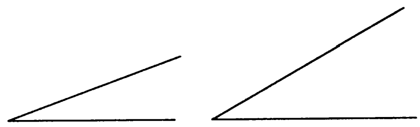
$a^2b^2c^2 = 6 \cdot 2.5 \cdot 2.4 = 36$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $V = abc = 6$**დმ^3.**

2.9.10. როგორ გავყოთ წრე, სამი წრფის საშუალებით: 4; 5; 6; 7 ნაწილად?

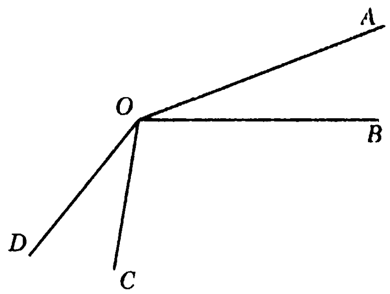
ამოხსნა:



2.9.11. ნახაზზე გამოსახული ორი კუტხე ისე განალაგეთ, რომ მიიღოთ სამი ბლაგვი კუთხე.



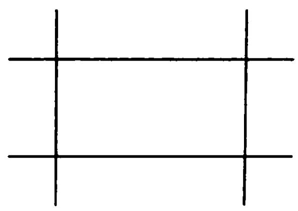
ამოხსნა:



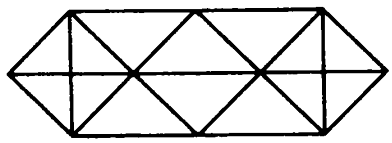
$< AOC$; $< BOD$; $< AOD$; $< BOC$ ბლაგვი კუთხეებია.

2.9.12. ოთხი წრფე ისე განალაგეთ, რომ მიიღოთ 16 მართი კუთხე.

ამოხსნა:

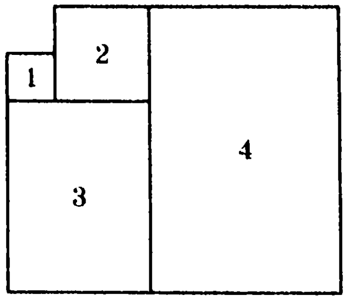


2.9.13. რამდენი სამკუთხედია ნახაზზე ?



ამოხსნა: დავთვალოთ ჯერ ყველაზე პატარა სამკუთხედები, მათი რაოდენობაა 8. ორჯერ უფრო მეტი ფართობის მქონე, სამკუთხედების რაოდენობაა 14. ყველაზე პატარა სამკუთხედებზე 3 - ჯერ უფრო დიდი სამკუთხედების რაოდენობაა 4 (მართკუთხა სამკუთხედები). ყველაზე დიდი სამკუთხედების რაოდენობა კი არის 2. მაშასადამე, სულ ყოფილა **28 სამკუთხედი.**

2.9.14. ნახაზზე გამოსახული 1; 2; 3 და 4 ფიგურები კვადრატებია.

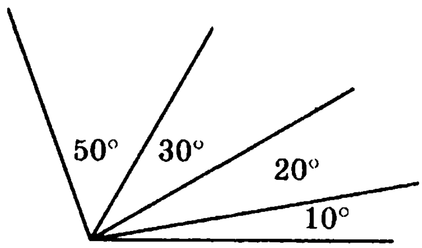


პირველი ფიგურის პერიმეტრია 16 სმ. მეორე ფიგურის პერიმეტრი 24 სმ. იპოვეთ, მეოთხე ფიგურის პერიმეტრი.

ამოხსნა: პირველი ფიგურის გვერდი იქნება $16:4=4$ (სმ); მეორე ფიგურის გვერდი კი - $24:4=6$ (სმ). მაშინ, მესამე ფიგურის გვერდი იქნება $4+6=10$ (სმ). მაშასადამე, მეოთხე ფიგურის გვერდი იქნება

$10+6=16$ (სმ) ანუ მისი პერიმეტრი იქნება $16\times 4=$ **64 (სმ).**

2.9.15. რამდენი სხვადასხვა სიდიდის კუთხეა მოცემულ ნახაზზე ?



ამოხსნა: ნახაზზე, გამოსახულია შემდეგი სიდიდის კუთხეები: $\mathbf{10^\circ};\ \mathbf{20^\circ};\ \mathbf{30^\circ};\mathbf{50^\circ};\mathbf{60^\circ};\mathbf{80^\circ};\ \mathbf{100^\circ};\mathbf{110^\circ}$**.**

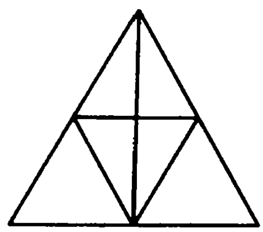
2.9.16. ოთხკუთხედს, რომლის პერიმეტრია 26 სმ, დიაგონალი ყოფს ორ სამკუთხედად, რომელთა პერიმეტრებია 22 სმ და 18 სმ. იპოვეთ ამ დიაგონალის სიგრძე.

ამოხსნა: მიღებული სამკუთხედების პერიმეტრების ჯამი, გვაძლევს ოთხკუთხედის პერიმეტრს პლიუს გაორკეცებული d დიაგონალის სიგრძე ანუ $22+18=26+2d\Longrightarrow 2d=40-26\Longrightarrow \boldsymbol{d}=\mathbf{7}$ **(სმ).**

2.9.17. მართკუთხედი შედგება ორი ერთნაირი კვადრატისაგან, რომელთაც საერთო გვერდი აქვთ. მართკუთხედის პერიმეტრია 18 სმ. იპოვეთმ მართკუთხედის ფართობი.

ამოხსნა: რადგან მართკუთხედის სიგრძე უდრის, გაორკეცებულ კვადრატის სიგრძეს, ხოლო სიგანე კვადრატის გვერდის სიგრძის ტოლია, მივიღებთ რომ მართკუთხედის პერიმეტრი უდრის ექვსჯერ კვადრატის გვერდს ანუ კვადრატის გვერდის სიგრძეა $18:6 = 3$ (სმ). მაშინ მართკუთხედის სიგრძეა 6 სმ და სიგანე 3 სმ. მასასადამე, მართკუთხედის ფართობი იქნება: $6 \times 3 = 18$ სმ^2.

2.9.18. რამდენი სამკუთხედია ნახაზზე ?



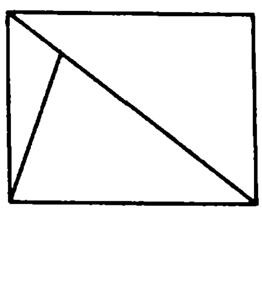
ამოხსნა: ნახაზზე არის 13 სამკუთხედი: 6 პატარა; 4 შედგება 2 პატარა სამკუთხედებისგან; ორი მართკუთხა, შედგებიან სამი სამკუთხედებისგან; 1 დიდი სამკუთხედი, რომელიც შედგება 6 პატარა სამკუთხედისგან.

2.9.19. ხის კუბის ყველა წვეროს, ჩამოაჭრეს ერთნაირი ნაწილი ისე, რომ წაჭრილი კვეთი სამკუთხედის ფორმისაა. რამდენი წვერო და რამდენი წიბო აქვს მიღებულ სივრცულ ფიგურას ?

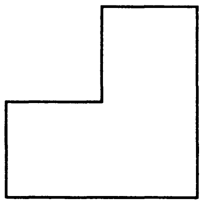
ამოხსნა: 24 წვერო და 36 წიბო. მართლაც, კუბს აქვს 8 წვერო და 12 წიბო. საჭრის შემდეგ, ყოველ ქვეროს მაგივრად, გვექნება დამატებით ორი წვერო და 3 წიბო; რაც იმას ნიშნავს, რომ სულ გვექნება $8 + 2 \times 8 = 24$ წვერო და $6 \times 12:2 = 36$.

2.9.20. დაჭერით მართკუთხედი 3 სამკუთხედად ისე, რომ მათ შორის მხოლოდ ერთი იყოს მართკუთხა.

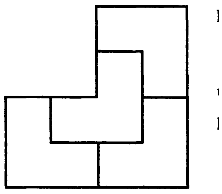
ამოხსნა:



2.9.21. გაყავით მოცემული გეომეტრიული ფორმის ბაღის ნაკვეთი სამ ტოლ ნაწილად.



ამოხსნა:



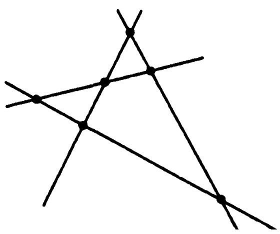
2.9.22. შესაძლებელია თუ, არა მოცემული ცხრილიდან ავირჩიოთ 5 ისეთი რიცხვი, რომელთა ჯამიც არის 50 ?

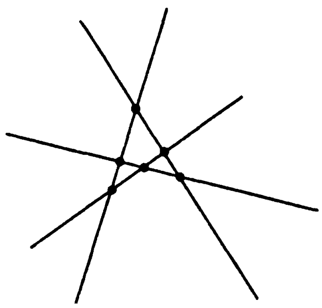
1	15	17
3	13	19
5	11	21
7	9	23

ამოხსნა: არა, რადგან ამ ცხრილში არის მხოლოდ კენტი რიცხვები. აქედან გამომდინარე 5 კენტი რიცხვის ჯამიც კენტია და 50 ვერ იქნება.

2.9.23. ექვს წერტილზე გაატარეთ 4 წრფე ისე, რომ თითოეულ წრფეზე იყოს 3 წერტილი.

ამოხსნა:





2.9.24. გიორგის ქონდა აკვარიუმი, რომელსაც ფუძეში ქონდა 40 სმ გვერდის სიგრძის მქონე კვადრატის ფორმა. მასში წყლის სიღრმე იყო 48 სმ. გიორგის უყიდეს ახალი მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის

მქონე აკვარიუმი, რომლის ფუძის მართკუთხედის სიგრძეა 48 სმ, ხოლო სიგანე - 40 სმ. გიორგიმ ძველი აკვარიუმიდან წყალი გადაასხა ახალში. იპოვეთ წყლის სიღრმე ახალ აკვარიუმში.

ამოხსნა: ძველ აკვარიუმში წყლის მოცულობა იყო: $40 \times 40 \times 48$ სმ^3; ახალ აკვარიუმში კი - $48 \times 40 \times h$ სმ^3. რადგან წაყალი უკუმში სითხეა, ეს მოცეულობები ერთმანეთის ტოლია ანუ

$40 \times 40 \times 48 = 48 \times 40 \times h \Longrightarrow \boldsymbol{h} = \mathbf{40}$ **სმ.**

2.9.25. ჰორიზონტალური ფსკერის მქონე აუზში, რომლის რომლის ფართობიც 1 ჰექტარია, ჩასხმულია 1 მილიონი ლიტრი წყალი. შესაძლოა თუ, არა ასეთ აუზში საერთაშორისო შეჯიბრების ჩატარება ცურვაში ?

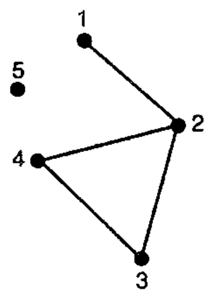
ამოხსნა: 1 ჰა = 10 000 მ^2 ფართობს. $V = 1000\,000$ ლ $= 1000$ მ^3. მაშინ, აუზის სიღრმე იქნებოდა $h = 1000$ მ^3: $10\,000$ მ^2 $= 0.1$ მ. ამ სიღრმის აუზში კი შეჯიბრების ჩატარება შეუძლებელია.

III თავი. VI კლასის საოლიმპიადო ამოცანები ამოხსნებით

3.1. გრაფთა თეორიის ელემენტები

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს არაცარიელი სიმრავლე V და მისი ელემენტების წყვილების რაიმე სიმრავლე E. მაშინ, V სიმრავლის ელემენტებს ეწოდებათ **გრაფის წვეროები,** E სიმრავლის ელემენტებს **კი - გრაფის წიბოები,** ხოლო $(V; E)$ წყვილს, ანუ წვეროებისა და წიბოების სიმრავლეს **- გრაფი.**

ჩვენ შემდგომში გამოვიყენებთ გრაფის გეომეტრიულ წარმოდგენას. გრაფის წვეროებს წარმოადგენენ წერტილები სიბრტყეზე. თუ, გრაფის ორი წვერო ქმნის წიბოს, მაშინ მათ შეაერთებენ წრფის მონაკვეთით. მაგალითად, ნახ. 2.1 - ზე გამოსახულია **წვეროების:** $V = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ და **წიბოების** E სიმრავლე: $E = \{(1; 2); (2; 3); (4; 2); (4; 3)\}$. თუ, ორი წვერო შეერთებულია წიბოთი, მათ **მოსაზღვრე წვეროები** ეწოდებათ, წინააღმდეგ შემთხვევაში - **არამოსაზღვრეები**. წვეროებს, რომლებსაც აერთებს წიბო, ამ **წიბოს ბოლოები** ეწოდებათ. თუ, წვერო წარმოადგენს წიბოს ბოლოს, მაშინ ამბობენ რომ **წიბო გამოდის** ამ წვეროდან. იმ წიბოების $d(\boldsymbol{v})$ რაოდენობას, რომლებიც გამოდის



ნახ. 3.1. მოცემული $\boldsymbol{v}$ წვეროდან, ამ წვეროს **ხარისხი** ეწოდება. თუ, წვეროს ხარისხი ლუწია, მაშინ მას **ლუწი წვერო** ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში - **კენტი** წვერო. მაგალითად, ნახ. 3.1 - ზე გამოსახული გრაფისათვის:

$d(1) = 1; d(2) = 3; d(3) = 2; d(4) = 2; d(5) = 0.$ წვეროს, რომლის ხარისხიც არის ნული, **იზოლირებული წვერო** ეწოდება, ხოლო თუ, ხარისხი ერთია, ასეთ წვეროს **შეკიდებულს** უწოდებენ.

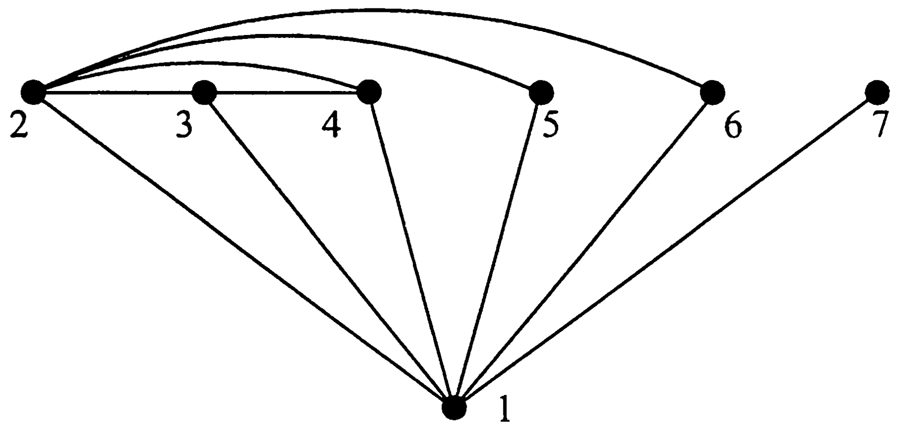
ახლა, განვიხილოთ ამოცანები, გრაფთა თეორიის მეთოდების გამოყენებაზე.

3.1.1. ჭადრაკის ტურნირი ტარდება წრიული სისტემით ანუ მოჭადრაკეთა ნებისმიერი წყვილი, ერთმანეთს ხვდება ერთხელ. ტურნირში მონაწილეობს 7 მოსწავლე. ცნობილია, რომ გიორგიმ

ითამაშა 6 პარტია, ილიამ - ხუთი, ალეკომ და ლექსომ - სამ-სამი, მზიკომ და მარიამმა - ორ-ორი, ზუკამ ერთი. ვისთან ითამაშა ალეკომ ?

ამოხსნა:

ჩვენი ამოცანის ამოსახსნელად, თითოეულ მოთამაშეს შევუსაბამოთ გრაფის წვერო. თუ, ორი მოჭადრაკე შეხვდა ერთმანეთს, მაშინ მათი შესაბამისი წვეროები შევაერთოთ წიბოთი. ამრიგად, ჩვენ ავაგებთ ამოცანის შესაბამის გრაფს ნახ. 3.2.



ნახ. 3.2.

ნახ. 3.2 - ზე გამოსახულია ჩვენი ამოცანის შესაბამისი G გრაფი.

G შეხვედრების გრაფია, სადაც 1 შეესაბამება გიორგის, 2 - ილიას, 3 - ალეკოს, 4 - ლექსოს, 5 - მზიკოს, 6 - მარიამს და 7 - ზუკას.

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე:

$d(1) = 6; d(2) = 5; d(3) = d(4) = 3; d(5) = d(6) = 2; d(7) = 1.$

ნახ. 3.2 - დან გამომდინარე, მივიღებთ რომ **ალეკომ, რომლის ნომერია 3, ითამაშა 1; 2 და 4 ნომერთან ანუ გიორგისთან, ილიასთან და ლექსოსთან.**

3.1.2. ჭადრაკის ტურნირში, რომელიც მიმდინარეობს წრიული სისტემით, მონაწილეობს 5 მოჭადრაკე. უკვე გათამაშდა 6 პარტია. ყველაზე მეტი შეხვედრა ჩაატარეს ბუბამ და მარიამმა სამ-სამი. რამდენი პარტია ითამაშა მონაწილემ, რომელმაც ყველაზე მცირე რაოდენობის შეხვედრა ჩაატარა ?

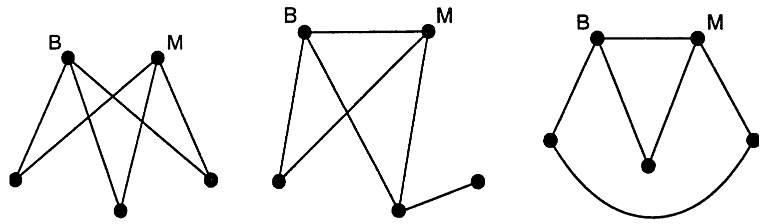
ამოხსნა: განვიხილოთ ორი შემთხვევა: 1) ბუბას და მარიამს არ უთამაშიათ ერთმანეთთან; 2) ბუბამ და მარიამმა ითამაშეს ერთმანეთთან ნახ. 3.4.

1) ამ შემთხვევაში, ყველა სხვა მოთამაშეს ქონდა 2 შეხვედრა;

2) აქ უნდა განვიხილოთ ორი ქვეშემთხვევა:

2ა) არსებობს ტურნირის მონაწილე, რომელსაც არ უთამაშია არც ბუბასთან და არც მარიამთან, ამ სიტუაციას შეესაბამება ნახ. 3.4 - ის მეორე გრაფი, სადაც ვხედავთ რომ, არსებობს კიდევ ერთი წვერო ხარისხით სამი ანუ სხვა მოთამაშეც, რომელსაც 3 თამაში აქვს, რაც ეწინააღმდეგება ამოცანის პირობას, მაშასადამე ეს შემთხვევა არაა ჩვენთვის საინტერესო;

2ბ) ტურნირის ყოველი მონაწილე შეხვდა ბუბას ან მარიამს ან ორივეს. მაშინ გვაქვს ერთადერთი შესაძლო ასეთი შემთხვევა, რაც გამოსახულია ნახ. 3.3 - ის მესამე გრაფით:



ნახ. 3.3

მაშასადამე, უმცირეს შეხვედრათა რაოდენობა ამ ტურნირისა-თვის, **იქნება 2.**

3.1.3. სპორტული შეჯიბრება ტარდება წრიული სისტემით. დაამტკიცეთ, რომ დროის ყოველ მომენტში მოიძებნება ორი მაინც, ისეთი მონაწილე, რომლებსაც ჩატარებული ექნებათ შეხვედრების ერთნაირი რაოდენობა.

ამოხსნა: გამოვსახოთ ტურნირის შეხვედრათა გრაფი და ამოცანა წარმოვადგინოთ გრაფების ენაზე. მაშინ, უნდა დავამტკიცოთ, რომ მოიძებნება ორი მონაწილე ანუ წვერო, რომელთაც აქვთ ჩატარებული ერთნაირი რაოდენობის შეხვედრები ანუ **მოიძებნება ისეთი ორი წვერო, რომელთაც ერთნაირი ხარისხი აქვთ**.

დამტკიცებას ვაწარმოებთ საწინააღმდეგოს დაშვებით ანუ ვთქვათ, არსებობს ისეთი $\boldsymbol{H}$ გრაფი, რომლის ყველა $\boldsymbol{n}$ წვეროს ხარისხი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია.

მაშინ, წვეროების ხარისხები უნდა იყოს: $d(v_1) = 0; d(v_2) = 1 \ldots;$

$d(v_n) = n - 1$. განვიხილოთ გრაფის v_1 და v_{n-1} წვეროები. $d(v_1) = 0$ რაც იმას ნიშნავს, რომ v_1 წვერო იზოლირებულია ანუ არცერთ სხვა წვეროს არ უერთდება წიბოთი, მაგრამ $d(v_n) = n - 1$, რაც იმას ნიშნავს, რომ v_n წვერო ყველა სხვა წვეროსთანაა შეერთებული წიბოთი, მათ შორის v_1 წვეროსთანაც, რაც ეწინააღმდეგება ზემოთქმულს.

ამრიგად, იმის დაშვება რომ არსებობს გრაფი, რომლის ყველა წვეროს ხარისხი განსხვავებულია წინააღმდეგობრივია, რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს ანუ ტურნირის ორ წევრს მაინც ექნება შეხვედრათა ერთნაირი რაოდენობა. რ.დ.გ.

3.1.4. სიბრტყეზე განლაგებულია რამდენიმე წერტილი ისე, რომ არცერთი სამი ერთ წრფეზე არ ძევს. ზოგიერთი წერტილები ერთმანეთთანაა შეერთებული წრფის მონაკვეთით. დაამტკიცეთ, რომ მოიძებნება ისეთი ორი წერტილი, რომელთაგანაც გამოდის ერთნაირი რაოდენობის მონაკვეთები.

ამოხსნა: გადავიყვანოთ ამოცანა გრაფთა თეორიის ენაზე. მაშინ წერტილები სიბრტყეზე იქნებიან გრაფის წვეროები, ხოლო ზოგიერთი ორი წერტილის შემაერთებელი მონაკვეთები იქნებიან გრაფის წიბოები. ის რომ წვეროებიდან გამოსულ მონაკვეტებს ვითვლით, წარმოადგენს წვეროს ხარისხს. მასასადამე ჩვენ დასამტკიცებელი გვაქვს, რომ ბრტყელ გრაფში ორი წვერო მაინც მოიძებნება ერთნაირი ხარისხით. ეს თეორემა კი ჩვენ უკვე დავამტკიცეთ წინა ამოცანაში.

3.1.5. შეჯიბრში რომელიც მიმდინარეობს წრიული სისტემით, მონაწილეობს 12 სპორტსმენი. ჩატარებულია ყველა შეხვედრა. რას უდრის შეხვედრათა რაოდენობა ?

ამოხსნა: გადავიყვანოთ ამოცანა გრაფთა თეორიის ენაზე. ავაგოთ შეხვედრათა გრაფი. წვეროები აღნიშნავენ მოთამაშეებს, რადგან ყველა შეხვდა ერთმანეთს, ყველა წვერო უნდა შევაერთოთ სხვა წვეროებთან.

ისეთ გრაფს, რომლის ყველა წვერო შეერთებულია წიბოთი **სრული გრაფი** ეწოდება. სრულ გრაფს რომელსაც აქვს $\boldsymbol{n}$ წვერო აღნიშნავენ შემდეგნაირად: $\boldsymbol{K_n}$. მაშ, გრაფთა თეორიის ენაზე, ჩვენ საპოვნელი გვაქვს $\boldsymbol{K_{12}}$ **გრაფის წიბოების რაოდენობა.**

გამოვიყვანოთ ზოგადი ფორმულა $\boldsymbol{K_n}$ სრული გრაფის წიბოების რაოდენობისათვის.

გრაფის თითოეული წვეროდან გამოდის $\boldsymbol{n-1}$ წიბო, წვეროების რაოდენობაა $\boldsymbol{n}$. მაშინ, სულ გექნება $\boldsymbol{n(n-1)}$ წიბო, მაგრამ რადგან თითოეული მათგანი ორ წვეროს აერთებს, ამ ანგარიშში ორჯერაა ჩათვლილი და სრული გრაფის წიბოების სწორი რაოდენობა იქნება:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n(n-1)}{2}}.$$

მაშინ, ცხადია რომ $\boldsymbol{S_{12} = \frac{12(12-1)}{2} = 6 \cdot 11 = 66}$.

3.1.6. ჭადრაკის ტურნირში, სადაც ყველას უნდა ეთამაშა ყველასთან, ერთი მოჭადრაკე ავად გახდა და ვერ ითამაშა ყველა პარტია. ტურნირში სულ ჩატარდა 24 შეხვედრა. რამდენი მოჭადრაკე მონაწილეობდა ტურნირში და სულ რამდენი პარტია ითამაშა ტურნირიდან ამოვარდნილმა მოჭადრაკემ ?

ამოხსნა: თუ, ამოცანას გადავიყვანთ გრაფთა თეორიის ენაზე, მივიღებთ, რომ თუ 8 მოჭადრაკე ითამაშებდა ყველა თამაშს, შესრულდებოდა $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ პარტია. თუ, ტურნირის მონაწილეტა რიცხვი იქნებოდა 7, მაშინ გათამაშდებოდა $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ პარტია. რადგან, ამოცანის პირობის თანახმად, ჩატარდა 24 შეხვედრა, ცხადია რომ მონაწილეთა რიცხვი ყოფილა **8, ხოლო გავარდნილმა მოჭადრაკემ მოასწრო 3 შეხვედრა.**

3.1.7. საჭადრაკო ტურნირში, სადაც ყველას უნდა ეთამაშა ყველასთან, ორი მოჭადრაკე ავად გახდა და გამოეთიშა თამაშს, მანამდე სანამ ჩატარდებოდა შეხვედრათა ნახევარი. ტურნირში ჩატარდა სულ 94 შეხვედრა. რამდენი მოჭადრაკე მონაწილეობდა ტურნირში ?

ამოხსნა: რადგან, საქმე გვაქვს სრული გრაფის წიბოების რაოდენობის დათვლასთან, ვისარგებლოთ შესაბამისი ფორმულით: $\boldsymbol{S_n = \frac{n(n-1)}{2}}$. მაშინ, თუ $\boldsymbol{n = 16 \Rightarrow S_n = \frac{n(n-1)}{2} = 120,}$ **თუ,** $\boldsymbol{n = 15 \Rightarrow S_n = 105;}$

$\boldsymbol{n = 14 \Rightarrow S_n = \frac{n(n-1)}{2} = 91.}$ მასასადამე, ტურნირში მონაწილეობდა

ა) 16 ან ბ) 15 მოჭადრაკე. მეორე ბ) შემთხვევაში, 13 მოჭადრაკემ რომლებმაც დაამთავრეს შეხვედრა, ერთმანეთთან ჩაატარეს

$\frac{13\cdot12}{2} = 78$ შეხვედრა, შესაბამისად, თამაშს გამოთიშულებმა ერთად ჩატარეს $94 - 78 = 16$ შეხვედრა, რაც იმას ნიშნავს, რომ ერთმა მაინც ჩაატარა ნახევარზე მეტი თამაში, რაც ეწინააღმდეგება პირობას.

რაც შეეხება ბ) შემთხვევას, ტურნირი დაამთავრა 14 - მა მოჭადრაკემ და ისინი გაითამაშებდნენ $\frac{14\cdot13}{2} = 91$ პარტიას. მასასადამე, თამაშს გამოთიშულები ითამაშებდნენ ერთად:

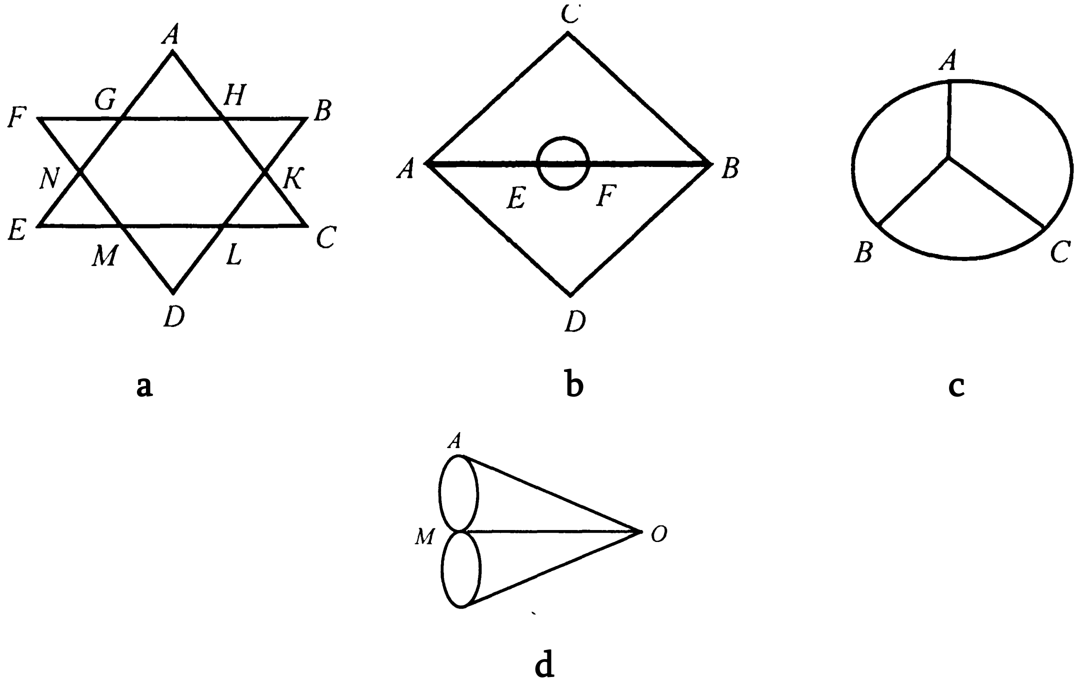
$94 - 91 = 3$ პარტიას, რაც კარგად შეესაბამება ამოცანის პირობებს. მასასადამე, ტურნირში მონაწილეობდა **16 მოჭადრაკე.**

3.1.8. საჭადრაკო ტურნირში, სადაც ყველას უნდა ეთამაშა ყველასთან, ორი მოჭადრაკე ავად გახდა და გამოეთიშა თამაშს, როცა უკვე ჩატარდა შეხვედრათა ნახევარი. ტურნირში ჩატარდა სულ 94 შეხვედრა. რამდენი მოჭადრაკე მონაწილეობდა ტურნირში ?

ამოხსნა: თუ, ტურნირში მონაწილეობდა 15 მოჭადრაკე, მაშინ სულ უნდა ჩატარებულიყო $\boldsymbol{n = 15 \Rightarrow S_n = 105}$ შეხვედრა. ორის ავდმყოფობის გამო, ჩატარდებოდა $\frac{13\cdot12}{2} = 78$ შეხვედრა ანუ გამოთიშულებმა ერთად, ჩაატარეს $94 - 78 = 16$ შეხვედრა. რადგან თითოეული უნდა შეხვდეს დანარჩენ 14 მოჭადრაკეს, ტურნირის ნახევარია 7 შეხვედრა. თუ, თითოეულმა ტურნირს გამოთიშულმა ჩაატარა 8 შეხვედრა, მათ ჩაუტარებიათ ნახევარზე მეტი შეხვედრები. აქედან გამომდინარე, ტურნირში მონაწილეობდა **15 მოჭადრაკე.**

3.1.1. უნიკურსალური ფიგურების შესახებ

განვიხილოთ ამოცანები, სადაც მოითხოვება, რომ ნახაზზე გამოსახული ფიგურები უნდა **დაიხაზოს ხელის ერთი მოსმით ისე, რომ ერთიდაიმავე გვერდზე არ გავატაროთ ფანქარი ორჯერ.** ასეთ ფიგურებს **უნიკურსალურს** უწოდებენ. ნახ. 3.4



ნახ. 3.4.

ყველას უმარტივესად ეჩვენება **c** ნახაზის დახაზვა, მაგრამ ეს არავის გამოსდის. მოსწავლეები იშვიათად ჰკიდებენ ხელს **a** და **b** ნახაზების გამოხაზვას, მაგრამ ამ ნახაზების გამოხაზვა ყველას ადვილად გამოსდის, თუმცა, **c** და **d** ნახაზების გამოხაზვა ჯერ არავის გამოსვლია. ისმის კითხვა:

არსებობს, თუ, არა კრიტერიუმი იმის დასადგენად, რომ წინასწარ შევძლოთ იმის გარკვევა, შესაძლებელია თუ არა მოცემული ნახაზის ისე გამოხაზვა, რომ ფანქარი ფურცლიდან აუღებლად, მხოლოდ ერთხელ გავატაროთ ფიგურის ყველა გვერდზე ანუ ბრტყელი გეომეტრიული წირის უნიკურსალობის კრიტერიუმი ?

ამოხსნა: გენიალურმა მათემატიკოსმა **ლეონარდ ეილერმა** შესძლო ასეთი ტიპის ამოცანების ამოხსნა და შექმნა **გრაფთა თეორია, რომელიც დისკრეტული მათემატიკის ერთ - ერთი ძირითადი ნაწილია.**

თითოეულ კვანძს, სადაც ერთმანეთს კვეთენ მოცემული ბრტყელი ფიგურის წირები, ვუწოდებთ შესაბამისი **გრაფის წვეროებს,** ხოლო წვეროების შემაერთებელ წირებს - **გრაფის წიბოებს.**

a ფიგურის ყველა წვეროს ხარისხი ლუწია; **b** ფიგურის A და B წვერო კენტია, ხოლო C; D; E; F წვეროები ლუწია. **c** და **d** ნახაზზე ყველა 4 წვერო კენტია.

ლუწი წვეროების შემთხვევაში, გამოვდივართ ერთი ლუწი წვეროდან მეორისკენ და ყოველი წვეროს გავლისას, ხარისხი ორით კლებულობს და რადგან წვეროების ხარისხი ლუწია, ადვილად შემოვივლით ყველა წვეროს. მაგალითად, **a ფიგურის შემთხვევაში** შეგვიძლია წვეროები შემოვიაროთ შემდეგნაირად:

$$\boldsymbol{A \to C \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow A}$$

b ფიგურაც, შეგვიძლია გამოვხაზოთ შემდეგნაირად:

$$\boldsymbol{A \longrightarrow C \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow B}$$

c და **d** ნახაზების გამოხაზვა კი, შეუძლებელია.

განსაზღვრება: უნიკურსალური ეწოდება გრაფს, რომელსაც აქვს ლუწი ხარისხის მქონე წვეროები და არაუმეტეს ვიდრე ორი, კენტი ხარისხის წვერო.

P.S. 1) **უნიკურსალურ გრაფში** გვაქვს მხოლოდ ლუწი ხარისხის წვეროები ან ლუწის გარდა, არაუმეტეს ვიდრე ორი, კენტი ხარისხის წვერო;

2) თუ, **უნიკურსალურ გრაფში, გვაქვს მხოლოდ ლუწი ხარისხის წვეროები,** მაშინ შესაბამისი ფიგურის ხაზვა შეგვიძლია დავიწყოთ ნებისმიერი წვეროდან;

3) თუ, **უნიკურსალურ გრაფში გვაქვს ორი კენტი ხარისხის წვერო,** მაშინ შესაბამისი ფიგურის ხაზვას, ვიწყებთ ერთ - ერთი კენტი ხარისხის წვეროდან და ვამთავრებთ, მეორე კენტი ხარისხის წვეროში.

ამრიგად, **ეილერის კრიტერიუმით, გრაფის უნიკურსალურობა არის აუცილებელი და საკმარისი იმისათვის, რომ შესაბამისი ფიგურის გამოხაზვა შეგვეძლოს ერთი ხელის მოსმით,** ფანქრის ფურცლიდან

აუღებლად, ისე, რომ შემოვივლით ფიგურის ყოველ ელემენტს და ფიგურის შემადგენელ არცერთ წირზე არ გავივლით ორჯერ.

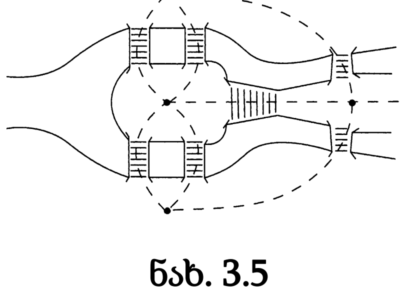
ლეონარდ ეილერი (დ. 15 აპრილი, 1707, ბაზელი, შვეიცარია — გ. 18 სექტემბერი, 1783, პეტერბურგი, რუსეთი) — შვეიცარიელი მათემატიკოსი, მექანიკოსი და ფიზიკოსი. განათლება მიიღო ბაზელის უნივერსიტეტში. 1727–1741 წლებში მუშაობდა პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიაში. დაწერა საყოველთაოდ ხელმისაწვდომი „არითმეტიკის სახელმძღვანელო“ (1738–1740), წარმატებით მუშაობდა რუსეთის რუკების შედგენაზე, მონაწილეობდა სხვადასხვა ტექნიკურ ექსპერტიზაში. პეტერბურგში ცხოვრების პირველ პერიოდში დასაბეჭდად მოამზადა 80 და გამოაქვეყნა 50–ზე მეტი ნაშრომი მათემატიკასა და მექანიკაში. 1741 წელს მუშაობა დაიწყო ბერლინის მეცნიერებათა აკადემიაში მათემატიკის კლასის დირექტორისა და გამგეობის წევრის თანამდებობაზე. ეილერმა საფუძველი ჩაუყარა ტურბინების თეორიას, მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანა როგორც ოპტიკური ტექნიკის განვითარებაში, ისე მასალათა გამძლეობის მოძღვრებაში. სწავლობდა ქარის წისქვილების მოწყობილობას.

1766 წელს ეილერი ოჯახთან ერთად ხელმეორედ ჩავიდა პეტერბურგში. მიუხედავად ხანდაზმულობისა და უსინათლობისა, მისი შრომისუნარიანობა არ დაქვეითებულა.

პეტერბურგში ცხოვრების მეორე პერიოდში მან დასაბეჭდად მოამზადა 400-მდე შრომა, მათ შორის რამდენიმე დიდტანიანი წიგნი. ეილერი იყო ბერლინისა და პარიზის აკადემიების, აგრეთვე ლონდონის სამეფო საზოგადოებისა და სხვათა წევრი. დაწერა 850–მდე სამეცნიერო შრომა. საინტერესოა მისი მეცნიერული მიმოწერა (3000 წერილიდან მხოლოდ ნაწილია გამოქვეყნებული). ეილერი მოღვაწეობდა მათემატიკისა და მექანიკის ყველა დარგში, მათემატიკურ ფიზიკაში, ოპტიკაში, მუსიკის თეორიაში, ბალისტიკაში, საზღვაო მეცნიერებაში, სადაზღვევო საქმეში და სხვ. მათემატიკური ანალიზის საშუალებით მან პირველმა ფართოდ გადმოსცა წერტილის დინამიკა. დაამუშავა მყარი სხეულის კინემატიკა და დინამიკა და მიიღო უძრავი წერტილის

ირგვლივ მყარი სხეულის ბრუნვის განტოლებები, რითაც საფუძველი ჩაუყარა გიროსკოპების თეორიას. მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანა მდგრადობის თეორიაში. გააღრმავა მთვარის მოძრაობის თეორია. შრომების დიდი ციკლი მიუძღვნა მათემატიკური ფიზიკის ამოცანებს (სიმების, ფირფიტებისა და მემბრანების რხევის საკითხებს). ეილერმა საგრძნობლად გააფართოვა მათემატიკური ანალიზის ფარგლები: საფუძველი ჩაუყარა კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიას, შექმნა ვარიაციათა აღრიცხვა, დიფერენციალური განტოლებების თეორიის საფუძვლები, გაამდიდრა თვით დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა (ცვლადთა გარდაქმნა, ერთგვაროვანი ფუნქციები, ეილერის ჩასმები, ეილერ–მაკლორენის შეჯამების ფორმულა, მწკრივთა თეორია, ჯაჭვწილადების თეორია), საფუძველი ჩაუყარა სპეციალურ ფუნქციათა თეორიას (გამა–ფუნქცია, ელიფსური ინტეგრალები, ჰიპერბოლური და ცილინდრული ფუნქციები, ინტეგრალური ლოგარითმი და სხვა). რიცხვთა თეორიას მან უძღვნა 100-ზე მეტი მემუარი, დაამტკიცა პიერ ფერმას მიერ გამოთქმული მრავალი მოსაზრება, დაამუშავა ხარისხოვან ნაშთთა და კვადრატულ ფორმათა თეორიის დაფუძვლები. აღმოაჩინა, მაგრამ ვერ დაამტკიცა კვადრატულ ნაშთთა შექცევადობის კანონი, გამოიკვლია დიოფანტური ანალიზის მრავალი ამოცანა, პირველად მან გამოიყენა მათემატიკური ანალიზის მეთოდები დაყოფათა თეორიისა და მარტივ რიცხვთა თეორიაში. ეილერმა შექმნა გრაფთა თეორია, იდეალური სითხის ჰიდროდინამიკა. დიდია ეილერის დამსახურება მათემატიკის სხვა დარგებშიც, პიერ სიმონ ლაპლასის თქმით ეილერი იყო XVIII საუკუნის II ნახევრის მათემატიკოსების მასწავლებელი.

3.1.9. ეილერის ამოცანა. 1736 წელს ლეონარდ ეილერი სეირნობდა ქ. კენიგსბერგში (ამჟამად, კალინინგრადი). მდინარე პრეგელზე არის 7 ხიდი ნახ. 3.5



ნახ. 3.5

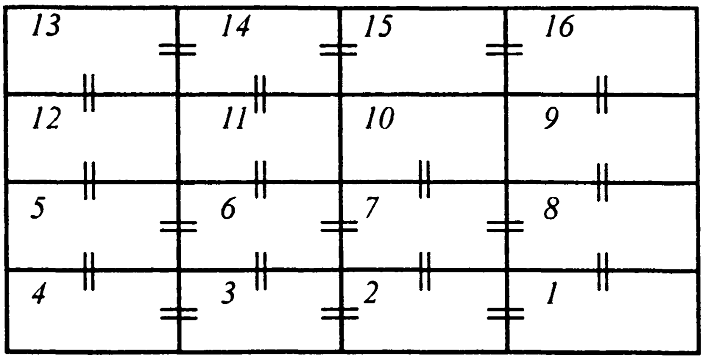
ლეონარდ ეილერი დაინტერესდა, შესაძლოა თუ, არა ყველა ამ ხიდის მხოლოდ ერთხელ გავლით, შემოვიაროთ მდინარე პრეგელის კუნძული ?

ამოხსნა: სწორედ ამ ამოცანის შესწავლისას შექმნა, ლეონარდ ეილერმა გრაფთა თეორია. მან დაამტკიცა, გრაფის უნიკურსალობის შესახებ თეორემა. ამის შემდეგ, ადვილი მისახვედრია, რომ ნახ. 3.5 - ს შეესაბამება გრაფი ნახ. 3.4 d, რომელიც ჩვენ უკვე განვიხილეთ და ვნახეთ, რომ ამ გრაფის ასეთი წესით შემოვლა შეუძლებელია.

3.1.10. კრაზანა ჩაძვრა კუბის ფორმის საშაქრეში. შეძლებს თუ, არა კრაზანა ყველა წიბოს შემოვლას ისე, რომ მხოლოდ ერთხელ შემოიაროს ყველა წიბო ? მას შეუძლია მხოლოდ, წიბოების გასწვრივ მოძრაობა.

ამოხსნა: კუბის თითოეული წვერო წარმოადგენს გრაფის წვეროს, ხოლო წიბოები კი გრაფის წიბოებს. ლუბს აქვს 8 წვერო და თითოეული წვეროდან გამოდის 3 წიბო ანუ შესაბამისი გრაფის წვროთა ხარისხები ყველა 8 კენტია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ეილერის კრიტერიუმის თანახმად, კრაზანა ასეთი წესით, ვერ შემოივლის ყველა წვეროს და წიბოს.

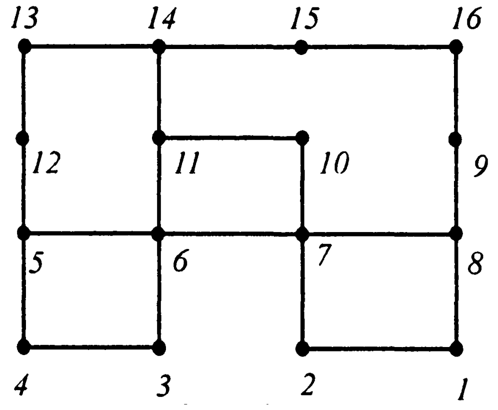
3.1.11. ნახაზზე 3.6 გამოსახულია მიწისქვეშა ლაბირინთის გეგმა:



ნახ. 3.6

მიწისქვეშა სარდაფი შეიცავს, ერთმანეთთან კარებებით დაკავშირებულ 16 ოთახს. შეიძლება თუ, არა რომ 1 ოთახიდან დაწყებული, შემოვიაროთ ყველა ოთახი თითოჯერ ? რომელ ოთახში დასრულდება შემოვლა ?

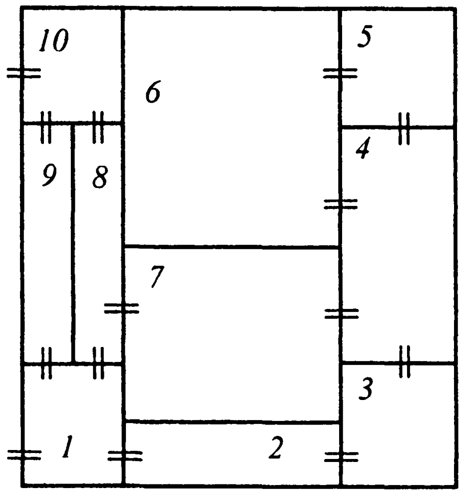
ამოხსნა: გადავნომროთ სარდაფის ოთახები - გრაფის წვეროები და ამოცანა გადავიყვანოთ გრაფთა თეორიის ენაზე, მაშინ ოთახების დამაკავშირებელი კარებები იქცევიან გრაფის წიბოებად ნახ. 3.7.



ნახ. 3.7

ამ ნახაზზე მოცემულ გრაფს აქვს შემდეგი კენტი ხარისხის მქონე წიბო: 5; 8; 11; 14 ანუ ორზე მეტი. მაშასადამე, ეილერის კრიტერიუმის თანახმად, შეუძლებელია მისი შემოთავაზებული წესით შემოვლა.

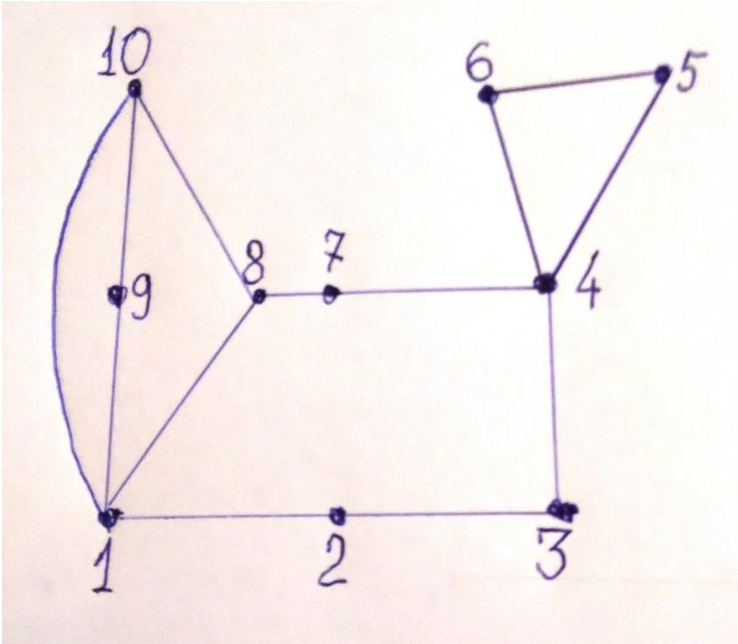
3.1.12. ნახაზზე 3.8 გამოსახულია მიწისქვეშა ლაბირინთის გეგმა:



ნახ. 3.8

მიწისქვეშა სარდაფი შეიცავს, ერთმანეთთან კარებებით დაკავშირებულ 10 ოთახს. შეიძლება თუ, არა რომ 1 ოთახიდან დაწყებული, შემოვიაროთ ყველა ოთახი თითოჯერ ? რომელ ოთახში დასრულდება შემოვლა ?

ამოხსნა: გადავნომროთ სარდაფის ოთახები - გრაფის წვეროები და ამოცანა გადავიყვანოთ გრაფთა თეორიის ენაზე, მაშინ ოთახების დამაკავშირებელი კარებები იქცევიან გრაფის წიბოებად ნახ. 3.9.



ნახ. 3.9

როგორც ვხედავთ, მერვე და მეათე წვერო კენტი ხარისხისაა. დანარჩენი წვეროები კი ლუწია, რაც იმას ნიშნავს რომ, მოცემული გრაფი აკმაყოფილებს უნიკურსალობის პირობებს ანუ შესაძლებელია დავიწყოთ მერვე წვეროდან და მივიდეთ მეათე წვეროში ან პირიქით.

3.1.2. იუმორისტული გვერდი

მათემატიკოსი და ფეხბურთელი

ერთხელ ძმები ნილს ბორი - ცნობილი ფიზიკოსი (კვანტური მექანიკის მამა) და საშუალო დონის მათემატიკოსი ჰერალდ ბორი ერთად გავიდნენ სასეირნოდ კოპენჰაგენში. ნილს ბორის გასაკვირად, ყველა ესალმებოდა ჰერალდს და ნილს ბორი არავის ახსენდებოდა. გულდაწყვეტილმა ნილსმა ხმამაღლა წარმოთქვა: „ეტყობა კოპენჰაგენში მათემატიკოსებს ძლიერ აფასებენ“. მათემატიკოსებს კი არა ჰერალდს, ის ხომ ცნობილი ფეხბურთელია კოპენჰაგენში უპასუხა ღიმილით მათემატიკოსმა ძმამ ნილს ბორს.

ჭკუა და გონებამახვილობა

ჯერ კიდევ სკოლაში სწავლისას, კარლ ფრიდრიხ გაუსი, აკვირვებდა მასწავლებლებს თავისი ჭკუით და გონებამახვილობით. ერთხელ, მასწავლებელმა ჰკითხა: „გაუს, მე შენ დაგისვამ ორ კითხვას. თუ, პირველს უპასუხებ სწორად, მაშინ მეორე კითხვას აღარ დაგისვამ. მაშ, ასე, მიპასუხეთ რამდენი წიწვი აქვს საახალწლო ნაძვისხეს ? “. გაუსმა დაუფიქრებლად უპასუხა: „67 543“. „ასე უცებ, როგორ დათვალე ? გაუკვირდა მასწავლებელს“. „ეს უკვე მეორე კითხვაა ბატონო მასწავლებელო“, ღიმილით უპასუხა გაუსმა.

რომელია მეტი

ერთხელ ქოუჩმა - ინსპექტორმა, რომელიც დაწყებით სკოლაში შესამოწმებლად ესწრებოდა, გადაწყვიტა ჩართულიყო სასწავლო პროცესში და მოსწავლეს დაუსვა შეკითხვა: „ერთ თეფშზე დევს ძეხვის $\frac{3}{5}$ ნაწილი, მეორეზე კი - $\frac{9}{15}$ ნაწილი. რომელ თეფშს აირჩევდი ?“. მოსწავლემ უპასუხა: „$\frac{9}{15}$“. უკმაყოფილო დამსწრე მიუბრუნდა მეორე მშიერ მოსწავლეს: „აბა შენ რას იტყვი ?“. „ორივე თეფშს ავიღებდი მასწავლებელო“.

3.2. რიცხვთა თეორიის ელემენტები

თანამედროვე რიცხვთა თეორიის შემქმნელად, ითვლება გენიალური გერმანელი მათემატიკოსი, ასტრონომი და ფიზიკოსი - კარლ ფრიდრიხ გაუსი. კარლ ფრიდრიხ გაუსი დაიბადა 1777 წლის 30 აპრილს, ბრაუნშვეიგში და გარდაიცვალა 1855 წლის 23 თებერვალს გეტინგენში.

ევროპის ისტორიისთვის XIX საუკუნე ეს ნაპოლეონის ეპოქაა, ხოლო მსოფლიოს მათემატიკოსებისათვის ეს არის კარლ ფრიდრიხ გაუსის ეპოქა.

კარლ ფრიდრიხ გაუსის მამა იყო მებაღე და შადრევნების ხელოსანი, რომელიც განთქმული იყო სწრაფი ანგარიშის ნიჭით. ეს ნიჭი გადავიდა პატარა გაუსზეც, რომლის შესახებაც ამბობდნენ რომ, მან ანგარიში კითხვაზე უფრო სწრაფად ისწავლა. მისი პირველი წარმატება 9 წლის

ასაკში მოვიდა. როცა გაუსმა არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულა აღმოაჩინა, ხოლო გიოტინგენის უნივერსიტეტში სწავლისას უკვე თვითონ ხელახლა აღმოაჩინა ცნობილი მათემატიკოსების თეორემები, მათ შორის ლეონარდ ეილერის რიგი ფორმულები. 1796 წელი გაუსისთვისაც და რიცხვთა თეორიისთვის ყველაზე პროდუქტიული წელიწადი იყო. ამ წლის 30 მარტს მან ჰეპტადეკაგონის აგების წესი, ხოლო 8 აპრილს კვადრატული ურთიერთდამოკიდებულების კანონი აღმოაჩინა. ეს უკანასკნელი, მათემატიკოსებს საშუალებას აძლევს, განსაზღვრონ ნებისმიერი კვადრატული განტოლების ამოხსნადობა მოდულურ არითმეტიკაში. 31 მაისს მიღებული მარტივ რიცხვთა თეორემა, საშუალებას იძლევა განისაზღვროს, თუ როგორ არის მარტივი რიცხვები განაწილებული რიცხვთა წრფეზე.

1799 წელს ჰელმშტედტის უნივერსიტეტში 22 წლის მათემატი-კოსი დოცენტურას იღებს ბრაუნშვაიგში, 1807 წელს – მათემატიკისა და ასტრონომიის კათედრისა და ასტრონომიის ობსერვატორიის დირექტორის თანამდებობას გეტინგენის უნივერსიტეტში. ამ თანამდებობაზე იყო ის სიცოცხლის უკანასკნელ დღემდე.

3.2.1. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი

რიცხვებთან მუშაობისას, ხშირად, გარკვეული კანონზომიერება გამოჩნდება. მაგალითად, თუ განვიხილავთ კენტი რიცხვების ჯამს, მივიღებთ, რომ

$$1+3=4=2^2$$

$$1+3+5=9=3^2$$

$$1+3+5+7=16=4^2$$

ამ კანონზომიერების შენიშვნის შემდეგ, რადგან ვიცით კენტი რიცხვის ზოგადი ფორმულა: $2n-1$, შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ ადგილი უნდა ქონდეს შემდეგ ზოგად ფორმულას:

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

ჩვენ შეგვიძლია ეს ფორმულა შევამოწმოთ n - ის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის, მაგრამ რადგან ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა, ყველა მნიშვნელობას ვერ შევამოწმებთ.

მაშ, როგორ დავამტკიცოთ ეს კანონი ?

არსებობს, ასეთი სახის n - ზე დამოკიდებული ჰიპოთეზების ანუ აღმოჩენილი კანონზომიერებების დამტკიცების გზა და ეს გზაა **მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი:**

***n* - ზე დამოკიდებული გამონათქვამი ჭაშმარიტია *n* - ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, თუ, შესრულებულია ორი პირობა:**

ა) გამონათქვამი როცა $n = 1$, (ინდუქციის ბაზისი);

ბ) ნებისმიერი ნატურალური k რიცხვისათვის, თუ გამონათქვამი ჭეშმარიტია როცა $n = k$, გამომდინარეობს მისი ჭეშმარიტება თუ $n = k + 1$, (ინდუქციის ბიჯი).

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი მათემატიკაში, პირველად შემოიტანა **ოგიუსტ დე მორგანმა** 1838 წელს.

3.2.1. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენების საილუსტრაციოდ, დავამტკიცოთ, ზემოთ „აღმოჩენილი" კანონზომიერება ანუ **2.2.1. დავამტკიცოთ, რომ ყველა კენტი რიცხვი ჯამში იძლევა ზუსტ კვადრატს:**

$$\mathbf{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2}$$

დამტკიცება: დასამტკიცებელი ფორმულია მარცხენა ნაწილი აღვნიშნოთ S_n- ით. განვიხილოთ, ინდუქციის ბიჯი ანუ შევამოწმოთ ეს ტოლობა, ა) როცა $n = 1$. მაშინ, $S_1 = 1 = 1^2$ მაშასადამე ბიჯი ჭეშმარიტია. ახლა გადავიდეთ ინდუქციის ბიჯზე ანუ ბ) დავუშვათ, რომ ეს ტოლობა სამართლიანია, როცა $n = k$ ე.ი. ადგილი აქვს ფორმულას: $S_k = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ და აქედან გამომდინარე, უნდა დავამტკიცოთ, რომ ეს ტოლობა სამართლიანია, როცა $n = k + 1$ ანუ $S_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

მართლაც, $S_{k+1} = S_k + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$. რ.დ.გ.

3.2.2. დაამტკიცეთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას (გაუსის ფორმულა):

$\mathbf{1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$.

დამტკიცება: დამტკიცებას ვაწარმოებთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით: ა) შევამოწმოთ ინდუქციის ბაზისის ჭეშმარიტება: $S_1 = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$, რაც ცხადია რომ ჭეშმარიტია; ახლა შევამოწმოთ ინდუქციის ბიჯი ანუ ბ) დავუშვათ, რომ

$$S_k = 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

და დავამტკიცოთ, რომ მაშინ

$S_{k+1} = 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

მართლაც, $S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. რ.დ.გ.

3.2.3. დაამტკიცეთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

დამტკიცება: ა) როცა $n = 1 \Rightarrow S_1 = 1^2 = \frac{1\cdot(1+1)(2\cdot1+1)}{6} = 1$ ანუ ბაზისი ჭეშმარიტია; ახლა შევამოწმოთ ბიჯი ანუ დავუშვათ, რომ

$S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ და ვაჩვენოთ, რომ მაშინ

$S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

მართლაც,

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} =$$

$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$. რ.დ.გ.

3.2.4. დაამტკიცეთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$.

დამტკიცება: ა) როცა $n = 1 \Rightarrow S_1 = 1^3 = 1^2 = 1$ ე.ი. ბაზისი ჭეშმარი-ტია; შევამოწმოთ ინდუქციის ბიჯი ანუ

ბ) $S_k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = (1+2+3+\ldots+k)^2$ ტოლობის დაშვებით, უნდა დავამტკიცოთ ამ ფორმულის სამართლიანობა როცა $n = k+1$ ანუ უნდა ვაცვენოთ, რომ ადგილი აქვს მაშინ ტოლობას:

$$S_{k+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \big(1+2+3+\ldots+k+(k+1)\big)^2$$

მართლაც,

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = (1+2+3+\ldots+k)^2 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 =$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} =$$

$= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^{\mathbf{2}} = \big(1+2+3+\ldots+k+(k+1)\big)^{\mathbf{2}}$**. რ.დ.გ.**

3.2.5. დაამტკიცეთ, რომ

$\mathbf{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \quad x \neq 1.}$

დამტკიცება: შევამოწმოთ ინდუქციის: ა) ბაზისი: $S_1 = 1 + x = \frac{x^2-1}{x-1}$, ე.ი. ბაზისი ჭეშმარიტია; ახლა გადავიდეთ ბ) ბიჯზე. დავუშვათ რომ ადგილი აქვს დასამტკიცებელ ტოლობას, როცა $n = k$ ანუ

$\boldsymbol{S_k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}}$ და ვაჩვენოთ რომ მაშინ, ის სამართლიანი იქნება, აგრეთვე, როცა $n = k+1$ ანუ

$\boldsymbol{S_{k+1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^k + x^{k+1} = \frac{x^{k+2}-1}{x-1}}$.

მართლაც, $\boldsymbol{S_{k+1} = S_k + x^{k+1} = \frac{x^{k+1}-1}{x-1} + x^{k+1} = \frac{x^{k+1}-1+x^{k+2}-x^{k+1}}{x-1} = \frac{x^{k+2}-1}{x-1}}$

რ.დ.გ.

3.2.6. მოცემული x დადებითი რიცხვის მთელ ნაწილს, აღნიშნავენ შემდეგნაირად $[x]$. მაგალითად, $[2] = 2$; $[5.7] = 5$; $\left[\frac{1}{3}\right] = 0$. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის: $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = n$.

დამტკიცება: განვიხილოთ ორი შემთხვევა: ა) როცა n ლუწია; ბ) როცა n კენტია.

ა) თუ, n ლუწია მაშინ მის ზოგად ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$n = 2m$, ასეთ შემთხვევაში,

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{2m}{2}\right] + \left[\frac{2m+1}{2}\right] = [m] + \left[m + \frac{1}{2}\right] = m + m = 2m = n;$$

ბ) თუ, n კენტია, მაშინ მის ზოგად ფორმულას აქვს შემდეგი სახე: $n = 2m + 1$, ასეთ შემთხვევაში,

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{2m+1}{2}\right] + \left[\frac{2m+1+1}{2}\right] = \left[m + \frac{1}{2}\right] + [m+1] = m + m + 1 =$$

$= 2m + 1 = n$. რ.დ.გ.

3.2.7. იპოვეთ ჯამი: $S_n = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \ldots + (-1)^n$.

ამოხსნა: განვიხილოთ კერძო ჯამები, რათა შევადგინოთ ფორმულა ჰიპოთეზა, რომელსაც შემდეგ, დავამტკიცებთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით. ადვილი გამოსათვლელია, რომ

$S_1 = -1;\ S_2 = 1;\ S_3 = -2;\ S_4 = 2;\ S_5 = -3;\ S_6 = 3 \ldots$

როგორც ვხედავთ, კერძო ჯამების მიმდევრობას აქვს შემდეგი, ნიშანცვლადი რიცხვითი მიმდევრობის სახე: $-1; 1; -2; 2; -3; 3; \ldots$

ჩვენ უკვე ვიცით, რომ რიცხვები შეგვიძლია მთელი ნაწილის აღნიშვნით წარმოვადგინოთ ანუ $1 = \left[\frac{1+1}{2}\right];\ 2 = \left[\frac{2+1}{2}\right];\ 3 = \left[\frac{3+1}{2}\right] \ldots$

მაშასადამე, ნიშანცვლადობის გათვალისწინებით, მიღებულ კერძო ჯამთა რიცხვითი მიმდევრობის ზოგადი წევრი, შეგვიძლია გამოვსახოთ შემდეგნაირად: $S_n = (-1)^n \left[\frac{n+1}{2}\right]$ ანუ გვაქვს უკვე **ჰიპოთეზა** (მიხვედრა), რომ ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულას:

$S_n = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \ldots + (-1)^n = (-1)^n \left[\frac{n+1}{2}\right]$. ახლა, შევეცადოთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის საშუალებით, დავამტკიცოთ ამ ფორმულის ჭეშმარიტება.

ა) ინდუქციის ბაზისი: $S_1 = -1 = (-1)^1 \left[\frac{1+1}{2}\right]$ ცხადია რომ ჭეშმარიტია;

ბ) ინდუქციის ბიჯი: დავუშვათ, რომ ჭეშმარიტია როცა $n = k$ ანუ

$S_k = (-1)^k \left[\frac{k+1}{2}\right]$ და დავამტკიცოთ მაშინ, რომ როცა $n = k + 1$,

$S_{k+1} = (-1)^{\mathrm{k}+1}\left[\frac{\mathrm{k}+2}{2}\right]$. მართლაც, $S_{k+1} = S_k + (-1)^{\mathrm{k}+1}(k+1) =$

$= (-1)^{\mathrm{k}}\left[\frac{\mathrm{k}+1}{2}\right] + (-1)^{\mathrm{k}+1}(k+1) = (-1)^{\mathrm{k}+1}\left(k+1-\left[\frac{\mathrm{k}+1}{2}\right]\right)$.

წინა ამოცანაში ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = n$, მაშასადამე

$\left[\frac{k+1}{2}\right] + \left[\frac{k+2}{2}\right] = k+1 \Rightarrow k+1-\left[\frac{k+1}{2}\right] = \left[\frac{k+2}{2}\right]$.

მაშასადამე, $S_{k+1} = (-1)^{\mathrm{k}+1}\left(k+1-\left[\frac{\mathrm{k}+1}{2}\right]\right) = (-1)^{\mathrm{k}+1}\left[\frac{k+2}{2}\right]$. **რ.დ.გ**

3.2.8. დავალებები მათემატიკის წრის წევრებისათვის. დაამტკიცეთ, რომ:

ა) $\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(3m-2)(3m+1)} = \frac{n}{3n+1}$;

ბ) $\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$;

გ) $\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(4m-3)(4m+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

3.2.2. უტოლობების დამტკიცება მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით

3.2.9. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ორი a და b დადებითი რიცხვისათვის, თუ $a > b$ მაშინ $a^n > b^n$.

დამტკიცება: ა) ინდუქციის **ბაზისი** ანუ $n = 1$: $a > b \Rightarrow a^1 > b^1$ რაც ცხადია რომ ჭეშმარიტია; ბ) **ბიჯი**. დავუშვათ, რომ $a^k > b^k$ **და ვაჩვენოთ, რომ მაშინ $a^{k+1} > b^{k+1}$.**

მართლაც, $a^k > b^k \Rightarrow a^{k+1} > ab^k > bb^k = b^{k+1}$ ანუ $a^{k+1} > a^{k+1}$. რ.დ.გ.

3.2.10. დაამტკიცეთ, რომ $2^n > 2n + 1$ თუ $n \geq 3$.

დამტკიცება: a) ბაზისი აქ იწყება როცა $n = 3$, ამ შემთხვევაში გვექნება უტოლობა: $2^3 > 2\cdot 3 + 1 \Leftrightarrow 8 > 7$ რაც ცხადია, რომ ჭეშმარიტია; ახლა შევამოწმოთ ინდუქციის ბიჯი:

ბ) ვთქვათ, როცა $n = k \Longrightarrow 2^k > 2k + 1$ და ამ დაშვებიდან უნდა ვაჩვენოთ, რომ მაშინ $n = k + 1 \Longrightarrow 2^{k+1} > 2k + 3$.

მართლაც, თუ $2^k > 2k + 1$, მაშინ $2^{k+1} > 4k + 2 > 2k + 3$. **რ.დ.გ.**

3.2.11. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

დამტკიცება: განვიხილოთ ინდუქციის ბაზისი და ბიჯი.

ა) თუ $n = 1$, მაშინ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12} > 1$ მაშასადამე, ბაზისი ჭეშმარიტია;

ბ) დავუშვათ, როცა $n = k$, მაშინ $S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{3k+1} > 1$. უნდა ვაჩვენოთ, რომ როცა $n = k + 1$, მაშინ $S_{k+1} > 1$.

მართლაც, $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} =$

$= S_k + \frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)} > S_k > 1$. **რ.დ.გ.**

3.2.12. დავალება წრის წევრებს. დაამტკიცეთ ბერნულის უტოლობა, თუ $n \geq 2$:

$(1 + x)^n > 1 + nx$, სადაც $x > -1$.

3.2.3. გაყოფადობის ამოცანების დამტკიცება მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით

3.2.13. დაამტკიცეთ, რომ $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) \vdots 133$.

დამტკიცება: ა) შევამოწმოთ ჯერ ინდუქციის ბაზისი ანუ შემთხვევა, როცა $n = 1$.

მაშინ, $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^3 + 12^3 = (11 + 12)(11^2 - 11 \cdot 12 + 12^2) =$

$= 23 \cdot 133 \vdots 133$. მაშასადამე, ბაზისი ჭეშმარიტია;

ბ) შევამოწმოთ ინდუქციის ბიჯი. დავუშვათ, რომ როცა $n = k$, ადგილი აქვს გაყოფადობას ანუ $(11^{k+2} + 12^{2k+1}) \vdots 133$ და ვაჩვენოთ, რომ გაყოფადობას ადგილი აქვს მაშინაც, როცა $n = k + 1$ ანუ

$(11^{k+3} + 12^{2k+3}) \vdots 133$.

მართლაც, $(11^{k+3} + 12^{2k+3}) = 11 \cdot 11^{k+2} + 12^{2k+1} \cdot 12^2 =$

$$= 11 \cdot 11^{k+2} + 144 \cdot 12^{2k+1} = (11 \cdot (11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1}) \vdots 133$$

რ.დ.გ.

3.2.14. დაამტკიცეთ, რომ სამი მომდევნო ნატურალური რიცხვის კუბების ჯამი იყოფა 9 - ზე.

დამტკიცება: ვთქვათ, მოცემულია ნატურალური რიცხვი n, მაშინ გვექნება სამიმომდევნო რიცხვის კუბების ჯამი:

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 +$$

$+12n + 8 = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$. ამოცანის პირობიდან გამომდი-ნარე, დასამტკიცებელია, რომ $(3n^3 + 9n^2 + 15n + 9) \vdots 9$. ცხადია რომ, ჯამი ფრჩხილებში, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$3n^3 + 15n + 9(n^2 + 1)$. ამ წარმოდგენაში, მეორე შესაკრები ცხადია, რომ იყოფა 9 - ზე. მაშასადამე, დასამტკიცებელია, რომ

$(3n^3 + 15n) \vdots 9 \Leftrightarrow (n^3 + 5n) \vdots 3$. დავამტკიცოთ ეს გაყოფადობა მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით.

ა) შევამოწმოთ ინდუქციის ბაზისი ანუ შემთხვევა, როცა $n = 1$. მაშინ, ცხადია რომ $n^3 + 5n = 1 + 5 = 6 \vdots 3$. მაშასადამე, ინდუქციის ბაზისი ჭეშმარიტია;

ბ) შევამოწმოთ ახლა ინდუქციის ბიჯი ანუ დავუშვათ, რომ როცა $n = k$, მაშინ $(k^3 + 5k) \vdots 3$ და ვაჩვენოთ, რომ თუ $n = k + 1$, მაშინ

$\left((k+1)^3 + 5(k+1)\right) \vdots 3$.

მართლაც, $(k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 =$

$= \left(k^3 + 5k + 3(k^2 + k + 2)\right) \vdots 3$.

რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს.

3.2.15. დაამტკიცეთ, რომ $(\boldsymbol{3^{2n+1}+40n-67}) \vdots \boldsymbol{64}$.

დამტკიცება: დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით.

ა) შევამოწმოთ ბაზისი ანუ შემთხვევა, როცა $n=1$.

მაშინ $(3^{2n+1}+40n-67)=3^3+40-67=0 \vdots 64$. ე.ი. ბაზისი ჭეშმარიტია.

ბ) გადავიდეთ ინდუქციის ბიჯზე ანუ დავუშვათ რომ როცა $n=k$ ადგილი აქვს გაყოფადობას: $(3^{2k+1}+40k-67) \vdots 64$ და ვაჩვენოთ, რომ მაშინ თუ $n=k+1$ ადგილი ექნება გაყოფადობას:

$(3^{2k+3}+40k-27) \vdots 64$.

მართლაც,

$$3^{2k+3}+40k-27=3^{2k+1}\cdot 9+40k-27=9(3^{2k+1}+40k-67)-$$

$$-320k+576=\left(9(3^{2k+1}+40k-67)+64\cdot(9-5k)\right) \vdots 64.$$ **რ.დ.გ.**

3.2.16. დავალება წრის წევრებს. დაამტკიცეთ, რომ:

ა) $(\boldsymbol{6^{2n}-1}) \vdots \boldsymbol{35}$;

ბ) $(\boldsymbol{4^{n}+15n-1}) \vdots \boldsymbol{9}$;

გ) $\left(\boldsymbol{2^{5n+3}+5^{n}\cdot 3^{n+2}}\right) \vdots \boldsymbol{17}$;

დ) $(\boldsymbol{6^{2n}+3^{n+2}+3^{n}}) \vdots \boldsymbol{11}$.

ე) არითმეტიკულ პროგრესიაში, ყოველი წევრი დაწყებული მეორედან $\boldsymbol{a_{n+1}}$, მიიღება წინა $\boldsymbol{a_n}$ წევრზე ერთიდაიგივე, ნულის არატოლი $\boldsymbol{d}$ რიცხვის დამატებით ანუ $\boldsymbol{a_{n+1}=a_n+d}$. ააგეთ ზოგადი წევრის ფორმულა - ჰიპოთეზა: $\boldsymbol{a_n=a_1+d(n-1)}$ და დაამტკიცეთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით.

ვ) ააგეთ, არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულა - ჰიპოთეზა: $\boldsymbol{S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n}$ და დაამტკიცეთ მატემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით.

ზ) გეომეტრიულ პროგრესიაში, ყოველი წევრი დაწყებული მეორედან $\boldsymbol{b_{n+1}}$, მიიღება წინა $\boldsymbol{b_n}$ წევრის გამრავლებით ერთიდაიგივე

არანულოვან q რიცხვზე ანუ $b_{n+1} = b_n \cdot q$. გამოიყავნეთ, გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულა - ჰიპოთეზა $b_n = b_1 q^{n-1}$ და დაამტკიცეთ, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით.

3.2.4. დიოფანტური განტოლებების ამოხსნა მთელ და ნატურალურ რიცხვებში

განვიხილოთ შემდეგი სახის **წრფივი განტოლება;**

$$\boldsymbol{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = c.}$$

სადაც $a_1; a_2; \ldots; a_n$ და c წინასწარ მოცემული მთელი რიცხვებია.

განსაზღვრება: ისეთ განტოლებას, სადაც ცვლადთა $x_1; x_2; \ldots; x_n$ რაოდენობა აღემატება განტოლებათა რაოდენობას, განუსაზღვრელი განტოლება ეწოდება. ამ შემთხვევაში, ჩვენი განუსაზღვრელი ერთი განტოლება შეიცავს n რაოდენობის ცვლადს.

თეორემა: წრფივი განუსაზღვრელი განტოლება ამოხსნადია მთელ რიცხვებში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ, მისი მარჯვენა c მხარე იყოფა მარცხენა მხარის კოეფიციენტების უდიდეს საერთო $d = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ გამუოფზე.

განვიხილოთ, ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევა $n = 2$. ცვლადებისათვის კი, გამოვიყენებთ ტრადიციულ აღნიშვნებს $x; y$. მაშინ გვექნება შემდეგი სახის განუსაზღვრელი განტოლება:

$$ax + by = c. \qquad (*)$$

როგორც ზემოთ განხილული თეორემიდან ჩანს, ამ განტოლებას მთელ რიცხვებში ამონახსნი აქვს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$c \vdots d = (a; b)$. ამ განტოლებას, თუ აქვს ამონახსნი, მაშინ მათი რაოდენობა უსასრულოა. ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ ცნობილია რომელიმე ერთი ამონახსნი $(x_0; y_0)$, როგორ ვიპოვოთ, დანარჩენი ამონახსნები.

ცხადია, რომ თუ, $(x_0; y_0)$ არის $(*)$ განტოლების ამონახსნი, მაშინ

$$ax_0 + by_0 = c. \qquad (**)$$

ახლა, განტოლებას $(*)$ გამოვაკლოთ განტოლება $(**)$. მაშინ, მარჯვენა ნაწილები გაბათილდება და მივიღებთ შემდეგი სახის განტოლებას:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \qquad (***)$$

გადავწეროთ $(***)$ განტოლება შემდეგი სახით:

$$\frac{x - x_0}{-b} = \frac{y - y_0}{a} \equiv t. \qquad (****)$$

$(****)$ განტოლებაში სამი ხაზით შემოღებულია დამატებითი აღნიშვნა t. ამ ცვლადს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მთელი მნიშვნელობა. აქედან გამომდინარე, **გვაქვს ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა:** $\boldsymbol{x = x_0 - bt;\ \ y = y_0 + at.}$

ახლა გადავიდეთ კონკრეტული ამოცანების ამოხსნაზე:

3.2.17. ამოხსენით განტოლება მთელ რიცხვებში:

$\boldsymbol{2x + 3y = 13.}$

ამოხსნა: ამოხსნის, ზემოთ გადმოცემული მეთოდიდან გამომდინარე, ჯერ უნდა ვიპოვოთ რომელიმე ერთი ამონახსნი: მაგალითად: $(5; 1)$.

მართლაც, $2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13$. ე.ი.$\boldsymbol{x_0 = 5;\ \ y_0 = 1.}$ ჩვენი განტოლების შემთხვევაში, $a = 2;\ \ b = 3$, მაშასადამე, ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 5 - 2t} \\ \boldsymbol{y = 1 + 3t} \end{cases};$$

სადაც $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}$.

3.2.18. . ამოხსენით განტოლება მთელ რიცხვებში:

$\boldsymbol{19x + 99y = 9.}$

ამოხსნა: ამოხსნის, ზემოთ გადმოცემული მეთოდიდან გამომდინარე, ჯერ უნდა ვიპოვოთ რომელიმე ერთი ამონახსნი: მაგალითად: $(-234; 45)$. ე.ი.$\boldsymbol{x_0 = -234;\ \ y_0 = 45.\ x = x_0 - bt;\ \ y = y_0 + at.}$

ჩვენი განტოლების შემთხვევაში, $a = 19;\ \ b = 99$, მაშასადამე, ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = -234 - 99t} \\ \boldsymbol{y = 45 + 19t} \end{cases};$$

სადაც $t \in \mathbb{Z}$.

3.2.19. იპოვეთ დიოფანტური განტოლების ორი ნატურალური ამონახსნი:

$$\mathbf{28x + 30y + 31z = 365.}$$

ამოხსნა: ერთი ამონახსნი პირდაპირ შეიძლება გამოვიცნოთ კალენდარიდან გამომდინარე: $x = 1; y = 7; z = 4$. **ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნის საპოვნელად გამოვსახოთ, რომელიმე ერთი ცვლადი დანარჩენებით:** $x = \frac{365-30y-31z}{28} = 13 - \frac{30(y+z)+z-1}{28}$. **რადგან** x **ნატურალური რიცხვია, წილადი** $\frac{30(y+z)+z-1}{28} = k$ **აგრეთვე, უნდა იყოს ნატურალური რიცხვი ნაკლები ან ტოლი 12 - ის. ვთქვათ,** $k = 12$, **მაშინ** $x = 1$. **დანარჩენი ცვლადების საპოვნელად, მოვახდინოთ გარდაქმნა:** $\frac{30(y+z)+z-1}{28} = 12 \Rightarrow 30(y+z) + z - 1 = 336 \Rightarrow$

$\Rightarrow 30(y+z) + z = 337 \Rightarrow \begin{cases} y + z = 11 \\ z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 7 \end{cases}$. **მაშასადამე, მივიღეთ ამონახსნი:** $(1; 4; 7)$.

ახლა დავუშვათ, რომ $k = 11 \Rightarrow x = 2$.

$$\frac{30(y+z)+z-1}{28} = 11 \Rightarrow 30(y+z) + z - 1 = 308 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 30(y+z) + z = 309 \Rightarrow \begin{cases} y + z = 10 \\ z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 9 \end{cases}$. **მაშასადამე, მივიღეთ ამონახსნი:** $(2; 1; 9)$. **ადვილი შესამოწმებელია, რომ სხვა ნატურალური ამონახსნები არა აქვს განტოლებას, თუმცა, მთელ რიცხვებში - აქვს.**

ახლა განვიხილოთ არაწრფივი განუსაზღვრელი განტოლებები:

3.2.20. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი მთელი რიცხვის კვადრატი სამზე გაყოფისას, ნაშთში იძლევა ნულს ან ერთს.

დამტკიცება: ნებისმიერი მთელი რიცხვის სამზე გაყოფისას, ნაშთში მივიღებთ ან ნულს ან ერთს ან ორს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი მთელი რიცხვი აღიწერება ერთ - ერთით, შემდეგი სიმრავლეებიდა:

ა) $\{3k\}_{k=1}^{\infty}$; ბ) $\{3k+1\}_{k=1}^{\infty}$; გ) $\{3k+2\}_{k=1}^{\infty}$. **შევისწავლოთ შესაბამისი რიცხვების კვადრატების სახე.**

ა) ამ შემთხვევაში, კვადრატს ექნება შემდეგი სახე: $9k^2$ და ცხადია, სამზე გაყოფისას, **ნაშთში მივიღებთ ნულს;**

ბ) ამ შემთხვევაში, კვადრატს ექნება შემდეგი სახე: $9k^2+6k+1$ და ცხადია, სამზე გაყოფისას, **ნაშთში მივიღებთ ერთს;**

გ) ამ შემთხვევაში, კვადრატს ექნება შემდეგი სახე:

$9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$ და ცხადია, სამზე გაყოფისას, **ნაშთში მივიღებთ ერთს.**

მაშასადამე, ნებისმიერი მთელი რიცხვის გაყოფისას 3 - ზე, ნაშთში მივიღებთ ან 0 - ს ან 1 - ს.

რ.დ.გ.

3.2.21. ამოხსენით არაწრფივი განტოლება მთელ რიცხვებში:

$\boldsymbol{x^2+y^2=4z-1.}$

ამოხსნა: სამზე და ოთხზე გაყოფისას, ნებისმიერი მთელი რიცხვის კვადრატი, ნაშთში იძლევა 0 - ს ან 1- ს. შესაბამისად, x^2+y^2 ოთხზე გაყოფისას ნაშთში იძლევა 0 - ს; 1 - ს ან 2 -ს. მარჯვენა მხარე კი ოთხზე გაყოფისას, იძლევა ნაშთში 3 - ს, მართლაც,

$4z-1=4z-4+3=4(z-1)+3.$

აქედან გამომდინარე, რადგან ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარე, ოთხზე გაყოფისას ნაშთში იძლევა სხვადასხვა რიცხვებს, ამ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი მთელ რიცხვებში.

3.2.22. ამოხსენით მთელ რიცხვებში განტოლება:

$\boldsymbol{x+y=xy.}$

ამოხსნა: ამოცანა სიმეტრიულია ცვლადების მიმართ. ამოვხსნათ განტოლება y ცვლადის მიმართ: $y=x(y-1)$. ამ განტოლებას, არ დააკმაყოფილებს $y=1$ მნიშვნელობა, რადგან მაშინ, ტოლობის მარჯვენა ნაწილი ნულია და მარცხენა კი - 1. გავყოთ განტოლების ორივე ნაწილი $y-1$ - ზე. მაშინ, მივიღებთ რომ

$x=\frac{y}{y-1}=\frac{y-1+1}{y-1}=1+\frac{1}{y-1}$. ამ ტოლობაა მარცხენა ნაწილი მთელი რიცხვია, მაშინ მთელი უნდა იყოს მარჯვენა ნაწილიც ანუ მთელი უნდა

იყოს $\frac{1}{y-1}$ წილადის მნიშვნელობას, რაც იმას ნიშნავს, რომ $y-1=\pm 1$ ანუ გვაქვს ორი მთელი ამონახსნი: $(2;2)$ და $(0;0)$.

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$.

3.2.23. ამოხსენით მთელ რიცხვებში განტოლება:

$\boldsymbol{x^2=y^2+2y+13.}$

ამოხსნა: გარდავქმნათ განტოლება შემდეგნაირად:

$$x^2=y^2+2y+13 \Leftrightarrow x^2-(y+1)^2=12 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x+y+1)(x-y-1)=12.$

როგორც ვხედავთ, 12 უნდა წარმოვადგინოთ ორი რიცხვის ნამრავლის სახით. რა თქმა უნდა აქ შესაძლებელია ყველა ვარიანტის განხილვა, თუმცა, თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ ორი რიცხვის ჯამს და სხვაობას ერთნაირი ლუწობა-კენტობა აქვს, მივიღებთ რომ ერთის დამატებით ან გამოკლებით, მათი ლუწობა-კენტობის ერთნაირობა არ ირღვევა, მაშასადამე, განსახილველი ვარიანტების რაოდენობაც შემცირდება და გვექნება შემდეგი შემთხვევები:

$$\begin{cases} x+y+1=6 \\ x-y-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=4} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x+y+1=2 \\ x-y-1=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=4} \\ \boldsymbol{y=-3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x+y+1=-2 \\ x-y-1=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=-4} \\ \boldsymbol{y=1} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x+y+1=-6 \\ x-y-1=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-7 \\ x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=-4} \\ \boldsymbol{y=-3} \end{cases}.$$

3.2.24. ამოხსენით მთელ რიცხვებში განტოლება:

$\boldsymbol{x^3-x^2-xy-17x-3y+8=0.}$

ამოხსნა: ამოვხსნათ ერთ - ერთი ცვლადი, მაგალითად y. მაშინ მივიღებთ:

$xy+3y=\boldsymbol{x^3-x^2-17x+8} \Rightarrow \boldsymbol{y=\frac{x^3-x^2-17x+8}{x+3}}$ **ანუ**

$y = x^2 - 4x - 5 + \frac{23}{x+3}$. ცხადია, რომ წილადი უნდა იყოს მთელი რიცხვი, რაც იმას ნიშნავს, რომ: $x + 3 = \pm 1$ ან $x + 3 = \pm 23$.

მაშინ, მივიღებთ რომ

$\begin{cases} x = -2 \\ y = 30 \end{cases}$;

$\begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \end{cases}$;

$\begin{cases} x = 20 \\ y = 676 \end{cases}$;

$\begin{cases} x = -26 \\ y = 774 \end{cases}$.

3.2.25. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვებში:

$\boldsymbol{x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{30}{7}}$.

ამოხსნა: $\boldsymbol{x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{30}{7} \Longrightarrow x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = 4 + \frac{2}{7} \Longrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{2}{7} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \frac{z}{yz+1} = \frac{2}{7} \end{cases} \Longrightarrow}$

$\boldsymbol{\Longrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3. \\ z = 2 \end{cases}}$

3.2.26. დავალება წრის წევრებს. ამოხსენით ნატურალურ რიცხვებში შემდეგი განუსაზღვრელი განტოლებები:

ა) $\boldsymbol{4x + 6y = 9}$;

ბ) $\boldsymbol{4x + 6y = 12}$;

გ) $\boldsymbol{3x + 5y = 7}$;

დ) $\boldsymbol{2x^2 - 1 = 2xy}$;

ე) $\boldsymbol{x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{17}{7}}$;

ვ) $\boldsymbol{x^2 - y^2 = 303}$.

3.2.5. შედარებათა თეორიის ელემენტები

გაუსისა, ეილერის და დირიხლეს ფუნდამენტალურმა შრომებმა, ახალი იმპულსი მისცა რიცხვთა თეორიის განვითარებას. გაუსის მიერ შემუშავებულ იქნა შედარებათა თეორია, განუსაზღვრელი განტოლებების (განტოლებები, სადაც ცვლადების რიცხვი მეტია განტოლებათა რაოდენობაზე) ამოსახსნელად N - ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში. მოგვიანებით, ამ თეორიამ დიდი გამოყენება პოვა კრიპტოგრაფიაში (ინფორმაციის დაცვა და გაშიფრვა); ასევე, მონაცემთა ციფრული დამუშავების თეორიაში (ფურიეს დისკრე-ტული გარდაქმნა). ამიტომ, ჩვენ უფრო დეტალურად შევისწავლით გაუსის შედარებათა თეორიას.

განსაზღვრება: ორ a და b რიცხვს **ურთიერთმარტივი** ეწოდებათ თუ, მათი უდიდესი საერთო გამყოფი (a;b)=1.

მაგალითი: 2 და 3 ურთიერთმარტივი რიცხვებია, რადგან (2;3)=1.

3 და 5 ; 7 და 9 ; 9 და 11 დ.ა.შ.

თეორემა: თუ, მოცემული გვაქვს ნებისმიერი ორი a და b>0 მთელი რიცხვები, მაშინ არსებობს ერთადერთი წყვილი მთელი q და r რიცხვებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს :

$$a = bq + r,\quad 0 \le \mathrm{r} \le \mathrm{b}-1.$$

r - რიცხვს უწოდებენ a-რიცხვის b-ზე გაყოფისას მიღებულ **ნაშთს.**

მაგალითი: a=185 ; b=12; მაშინ 185=12·15+5, ანუ q=15 და r=5.

ორი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის საპოვნელად, იყენებენ **ევკლიდეს ალგორითმს,** რომელიც ემყარება $a = bq + r,\ 0 \le \mathrm{r} \le \mathrm{b}-1$ წარმოდგენას. მართლაც, ვთქვათ a ნებისმიერი მთელი რიცხვია და b ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვი, მაშინ თეორემის თანახმად, ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$\begin{aligned}
&a = bq_0 + r_0; \quad 0 < \mathrm{r}_0 < b;\\
&b = r_0 q_1 + r_{1;} \quad 0 < \mathrm{r}_1 < r_0;\\
&r_0 = r_1 q_2 + r_2; \quad 0 < \mathrm{r}_2 < r_1;\\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\
&\mathrm{r}_{\mathrm{n}-2} = r_{n-1} q_n + r_n; \ 0 < \mathrm{r}_{\mathrm{n}} < r_{n-1};\\
&r_{n-1} = r_n q_{n+1}.
\end{aligned}$$

რიცხვები $r_0, r_1, r_2, \ldots$ ადგენენ მკაცრად კლებად არაუარყოფით რიცხვთა მიმდევრობას; მაგრამ ყოველი ასეთი მიმდევრობა სასრულია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი a და b>0 წყვილისათვის

მიმდევრობითი გაყოფის პროცესი (ევკლიდეს ალგორითმი) სასრულია, ე.ი. სასრულია (9) ტოლობათა რიცხვი. პროცესი წყდება იმ საფეხურზე, რომელზედაც გაყოფა შესრულდება უნაშთოდ ანუ როცა $r_{n+1} = 0$. ამგვარად, r_n არის უკანასკნელი ნულისაგან განსხვავებული ნაშთი - უდიდესი საერთო გამყოფი. ცხადია, რომ

$$(a;b) = (b;r_0) = (r_0;r_1) = \ldots = (\mathrm{r}_{\mathrm{n-1}};r_n) = r_n \ .$$

მაგალითი: ვიპოვოთ d=(664 ;480) ; a=664 ; b=480.

მაშინ, ევკლიდეს ალგორითმის თანახმად გვექნება:

664=480·1+184 ;

480=184·2+112 ;

184=112·1+72 ;

112=72·1+40 ;

72=40·1+32 ;

40=32·1+**8** ;

32=8·4.

ე.ი. d=(664 ;480)=**8.**

არითმეტიკის ძირითადი თეორემა: ერთზე მეტი ყოველი ნატურალური რიცხვი ერთადერთი სახით (თანამამრავლთა რიგის სიზუსტით) იშლება მარტივ რიცხვთა ნამრავლად.

ანუ, თუ n ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვია, მაშინ

$$n = p_1\, p_2 \ldots \mathrm{p_n}$$

ამ ნამრავლში, ზოგიერთი თანამამრავლი შეიძლება რამდენიმეჯერ მეორდებოდეს, ამიტომ თუ, გამოვიყენებთ განმეორებათა რიცხვის ხარისხებს, მივიღებთ გაშლის კანონიკურ წარმოდგენას

$$n = p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \ldots \mathrm{p_n}^{\alpha_n} \ .$$

ამ ჩანაწერიდან ნათლად ჩანს, რომ n რიცხვის განსხვავებულ **გამყოფთა რაოდენობა** იქნება:

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_{\mathrm{n}} + 1) \ .$$

P.S. **ორი რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი უდრის მათ ნამრავლს გაყოფილს მათსავე უდიდეს საერთო გამყოფზე.**

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე, განისაზღვრება რიგი არითმეტიკული ფუნქციებისა. მათ შორის განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს ეილერის $\varphi(n)$ ფუნქციას, რომელიც უდრის 1-დან n-მდე ყველა იმ ნატურალური რიცხვების რაოდენობას, რომლებიც ურთიერთმარტივი არიან n- ის მიმართ.

მაგალითი: $\varphi(1)=1;\ \varphi(2)=1;\ \varphi(3)=2;\ \varphi(4)=2;\ \varphi(5)=4;\ \varphi(6)=2.$

ვთქვათ, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$ მოცემული რიცხვის კანონიკური დაშლაა, მაშინ

$$\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\dots(1-\frac{1}{p_n}).$$

თუ, p მარტივი რიცხვია, მაშინ

$$\varphi(p^{\alpha})=p^{\alpha}-p^{\alpha-1}.$$

კერძო შემთხვევაში, $\varphi(p)=p-1.$

მაგალითი: $\varphi(60)=60(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=16;$

$\varphi(81)=81-27=54;$

$\varphi(5)=5-1=4.$

განვიხილოთ მთელი რიცხვები მოცემულ m ნატურალურ რიცხვზე გაყოფისას, მიღებული ნაშთების თვალსაზრისით. ამ m რიცხვს სადარობის **მოდულს** უწოდებენ. ყოველ ნატურალურ რიცხვს, m რიცხვზე გაყოფისას შეესაბამება ნაშთის გარკვეული მნიშვნელობა (0;1;2;3;... m-1) - **ნაშთთა სრული სისტემიდან.** სხვანაირად, რომ ვთქვათ **ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე იყოფა m კლასად. თითოეულ კლასში მოთავსებული არიან ურთიერთსადარი რიცხვები m მოდულით.** თუ, განიხილება შედარებათა თეორია უფრო ფართო რიცხვით სიმრავლეში, კერძოდ მთელ რიცხვთა სიმრავლეში, მაშინ განიხილავენ **აბსოლუტურად უმცირეს ნაშთთა სრულ სისტემას** $-\frac{m-2}{2};\ -\frac{m-4}{2};\ \dots;-2;-1;0;1;2;\ \dots;\frac{m}{2}$**; როცა m ლუწია;**

$-\frac{m-1}{2};-\frac{m-3}{2};\dots;-2;-1;0;1;2;\dots;\frac{m-1}{2};$ **როცა m კენტია.**

განსაზღვრება: ორ მთელ a და b>0 რიცხვს ეწოდებათ **ურთიერთსადარი მოდულით m,** თუ m – ზე გაყოფისას ისინი ერთნაირ ნაშთებს იძლევიან ან სხვანაირად, თუ, $(a-b)\ \vdots\ m$.

სადარობის დამოკიდებულება ასე ჩაიწერება:

$$a\equiv b(\mathrm{mod}\,m).$$

იკითხება ასე: a სადარია b –სი მოდულით m.

ცხადია, რომ თუ a სადარია b –სი, ანუ m – ზე გაყოფისას ისინი ერნაირ ნაშთებს იძლევიან, მაშინ მათი სხვაობა (a-b) უნაშთოდ იყოფა m – ზე.

მაგალითი: $25 \equiv 15(\bmod 10)$, რადგან 25 და 15, 10-ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევიან ერთნაირ რიცხვს 5-ს. ასევე, ცხადია რომ 25-15=10 და იყოფა 10-ზე (შედარების მოდულზე).

შედარებათა თვისებები :

1. ერთნაირმოდულიანი შედარებები შეიძლება წევრ-წევრად შევკრიბოთ, ანუ

$$(a_1 \equiv b_1(\bmod m);\ \mathrm{a}_2 \equiv b_2(\bmod m);...\mathrm{a}_\mathrm{n} \equiv b_n) \Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(\bmod m)).$$

2. შედარებანი ერთნაირი მოდულით, შეიძლება წევრ-წევრად გადავამრავლოთ, ანუ

$$(a_1 \equiv b_1(\bmod m);\ \mathrm{a}_2 \equiv b_2(\bmod m);...\mathrm{a}_\mathrm{n} \equiv b_n) \Rightarrow (\prod_{i=1}^{n} a_i \equiv \prod_{i=1}^{n} b_i(\bmod m)).$$

3. შედარების ორივე მხარე და მოდული შეიძლება ერთდროულად გავამრავლოთ ნატურალურ რიცხვზე ანუ

$$(a_1 \equiv b_1(\bmod m)) \Rightarrow (a_1 n \equiv b_1 n(\bmod mn)).$$

4. თუ, შედარებას ადგილი აქვს რამდენიმე მოდულით, მაშინ ამ შედარებას ადგილი ექნება ახალი მოდულითაც, რომელიც მოცემული მოდულების უმცირესი საერთო ჯერადის ტოლია, ანუ

$$(a \equiv b(\bmod m_1) \wedge a \equiv b(\bmod m_2)) \Rightarrow (a \equiv b(\bmod [m_1; m_2])).$$

5. შედარების ორივე მხარე შეიძლება შეიკვეცოს, მათ ისეთ საერთო გამყოფზე, რომელიც მოდულთან ურთიერთმარტივია, ანუ

$$(an \equiv bn(\bmod m) \wedge (\mathrm{m};\mathrm{n}) = 1) \Rightarrow (\mathrm{a} \equiv \mathrm{b}(\mathrm{mod m})).$$

ეილერის თეორემა: თუ m ერთზე მეტი ნებისმიერი ნატურა-ლური რიცხვია და (a ;m)=1, მაშინ

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1(\bmod m).$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $m = p$ მარტივი რიცხვია და $(a; p) = 1$, $\varphi(p) = p - 1$, მიიღება ფერმას მცირე თეორემა:

$$a^{p-1} \equiv 1(\bmod p).$$

განსაზღვრება: ორ მრავალწევრს ეწოდება ურთიერთმისადარი მოდულით m, თუ მათი სათანადო კოეფიციენტები ურთიერთსადარია m-ის მოდულით ანუ $f(x) \equiv g(x)(\bmod m)$.

P.S. სხვანაირად რომ ვთქვათ $\boldsymbol{f(x) \equiv g(x)(mod\, m)}$, ნიშნავს რომ ჩვენ ვიხილავთ განუსაზღვრელ განტოლებას: $\boldsymbol{f(x) - g(x) = my}$ და ვეძებთ მის ამონახსნებს მთელ ან ნატურალურ რიცხვებში.

განვიხილოთ ერთუცნობიანი შედარებების ამოხსნის მაგალითები.

3.2.27. $x^3+x^2-3x+1\equiv 0(\mathrm{mod}5)$.

ამოხსნა: ეს შედარება მესამე ხარისხისაა. 5-ის მოდულით ნაშთთა სრული სისტემიდან: (0; 1; 2; 3; 4) ამ შედარებას აკმაყოფილებს მხოლოდ რიცხვი 1. ე.ი. მას აქვს ერთი ფესვი. ეს ფესვი ასე ჩაიწერება $x\equiv 1(\mathrm{mod}5)$.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჩვენ ვეძებთ $x^3+x^2-3x+1=5y$ განუსაზღვრელი განტოლების ამონახსნს მთელ რიცხვებში.

შედარება თეორიიდან ვიგებთ, რომ ამონახსნია $x\equiv 1(\mathrm{mod}5)$ ანუ

$x-1=5y \Leftrightarrow x=5y+1$, სადაც y ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

3.2.28. $x^2+x+1\equiv 0(\mathrm{mod}4)$

შედარება კვადრატულია. ნაშთთა სრული სისტემიდან 4-ის მოდულით: (0; 1; 2; 3), მას არცერთი რიცხვი არ აკმაყოფილებს. ე.ი. მას ამონახსნი არა აქვს.

3.2.29. $12x^3+3x^2-2x+3\equiv 0(\mathrm{mod}6)$

ეს შედარებაც კვადრატულია, რადგან უფროსი კოეფიციენტი კუბთან მოდულზე იყოფა უნაშთოდ, ანუ $12\equiv 0(\mathrm{mod}6)$. ასე, რომ იგი შემდეგი შედარების ექვივალენტურია : $3x^2-2x+3\equiv 0(\mathrm{mod}6)$.

ნაშთთა სრული სისტემიდან 6-ის მოდულით: (0; 1; 2; 3; 4; 5) მას აკმაყოფილებს მხოლოდ რიცხვი 3, ე.ი. მისი ერთადერთი ფესვი იქნება $x\equiv 3(\mathrm{mod}6)$.

3.2.30. $x^5+x+1\equiv 0(\mathrm{mod}7)$

ნაშთთა სრული სისტემიდან 7-ის მოდულით: (0; 1; 2; 3; 4; 5; 6) ამ შედარებას აკმაყოფილებს ორი რიცხვი 2 და 4; ამიტომ გვექნება ორი ამონახსნი:

$x\equiv 2(\mathrm{mod}7)$; $\quad$ $x\equiv 4(\mathrm{mod}7)$.

3.3. ამოცანები პროცენტებზე და ნაწილებზე

3.3.1. საქართველოს მოსახლეობის 85% ლაპარაკობს ქართულად, ხოლო რუსულად საუბარი იცის მოსახლეობის 75% - მა. მთელი მოსახლეობის რამდენი პროცენტი საუბრობს ორივე ენაზე ?

ამოხსნა: ცხადია, რომ რუსულად არ ლაპარაკობს საქართველოს მოსახლეობის 100% - 75% = 25%. შესაბამისად, ორივე ენაზე საუბრობს მოსახლეობის 85% - 25% = **60%.**

3.3.2. საწყობში ხორბლის ტენიანობა 16% აღმოჩნდა. 200 კგ ხორბლის გაშრობისას, მისი წონა 20 კგ - ით შემცირდა. იპოვეთ ხორბლის ტენიანობა გამოშრობის შემდეგ 0.1% სიზუსტით.

ამოხსნა: თავდაპირველად, 200 კგ ხორბალი შეიცავდა $200 \cdot 0.16 = 32$ კილოგრამ წყალს. გაშრობის შემდეგ, დარჩებოდა: $32 - 20 = 12$ (კგ) წყალი, ხოლო ხორბალი კი - $200 - 20 = 180$ (კგ). მაშასადამე, 12 კგ წყალი შეადგენს 180 კგ ხორბლის $\frac{12}{180} \cdot 100 = \mathbf{6.7}\%$.

3.3.3. რძის დამამზადებელ ერთ ფერმაში ძროხების საერთო რაოდენობა 12.5% - ით ნაკლებია, ვიდრე მეორე ფერმაში; მაგრამ ერთი ძროხიდან მიღებული რძის საშუალო რაოდენობა (წველადობა) 8% - ით მეტი. რომელ ფერმაში იღებენ უფრო ცოტა რძეს და რამდენი პროცენტით ?

ამოხსნა: ვთქვათ, მეორე ფერმაში a ძროხაა, მაშინ პირველ ფერმაში იქნებოდა $a - 0.125a = 0.875a$ ძროხა. ვთქვათ, მეორე ფერმის ერთი ძროხის საშუალო წველადობაა b ლ, მაშინ პირველი ფერმის ძროხის საშუალო წველადობა იქნებოდა $b + 0.08b = 1.08b$ ლ.

პირველ ფერმაში მიღებული რძის საერთო რაოდენობა იქნებოდა:

$0.875a \cdot 1.08b = 0.945ab$ ლ

ხოლო, **მეორე ფერმაში** მიღებული რძის საერთო რაოდენობა იქნებოდა: ab ლ. ცხადია, რომ პირველ ფერმაში უფრო ნაკლები რძე მიუღიათ. ვნახოთ რამდენით: $ab - 0.945ab = 0.055ab$ (ლ), რაც შეადგენს მეორე ფერმაში მიღებულის: $\frac{0.055ab}{ab} \cdot 100\% = \mathbf{5.5}\%$ **-ს.**

3.3.4. სამშენებლო სამუშაოების მოცულობა იზრდება 80% - ით. რამდენი პროცენტით უნდა გავზარდოთ მუშების რაოდენობა, თუ, შრომის ნაყოფიერება იზრდება 20% - ით ?

ამოხსნა: ვთქვათ, სულ იყო a ლ - ის სამუშაო. 80% - ით გაზრდის შემდეგ, იქნება $a + 0.8a = 1.8a$ ლ - ის სამუშაო. ვთქვათ, მუშების რიცხვი იყო b, მაშინ შრომის ნაყოფიერება იქნებოდა: $\frac{a}{b}$.

სამუშაოს მოცულობა გახდა $1.8a$. შრომის ნაყოფიერება გახდა:

$\frac{a}{b} + \frac{a}{b} \cdot 0.2 = 1.2 \cdot \frac{a}{b}$. მაშასადამე, საჭირო მუშების რაოდენობა იქნება: $\frac{1.8a}{1.2a} \cdot b = 1.5b$, რაც იმას ნიშნავს, რომ მუშების რიცხვი უნდა

გავზარდოთ: $1.5b - b = 0.5b$ რაოდენობით, რაც შეადგენს პირვანდელი b რაოდენობის: $\frac{0.5b}{b} \cdot 100\% = \mathbf{50}\%$ **- ს.**

3.3.5. აუზის შემავსებელი მილის ნაწილობრივი დაცობის გამო, წყლის მოცულობის მიწოდება შემცირდა 60% - ით. რამდენი პროცენტით გაიზრდება აუზის შევსებისთვის საჭირო დრო ?

ამოხსნა: ვთქვათ, აუზის შესავსებად საჭიროა V მოცულობის წყალი და თავდაპირველად, მილში მოდიოდა m ლ/სთ - ში მოცულობის წყალი, მაშინ აუზის ავსებას დაჭირდებოდა: $\frac{V}{m}$ სთ.

ახლა, მილში მოდის: $m - 0.6m = 0.4m$ (ლ/სთ) და მაშასადამე, აუზის ავსებას დასჭირდება: $\frac{V}{0.4m} = 2.5 \cdot \frac{V}{m}$ ანუ ავსების დრო გაიზრდება: $2.5 \cdot \frac{V}{m} - \frac{V}{m} = 1.5 \cdot \frac{V}{m}$ საათით, რაც შეადგენს ადრინდელი დროის: $1.5 \cdot \frac{V}{m} : \frac{V}{m} \cdot 100\% = \mathbf{150}\%$ **- ს.**

3.3.6. მართკუთხედის სიგანე გაზარდეს 3.6 სმ - ით, ხოლო სიგრძე შეამცირეს 16 % - ით. ამის შედეგად, მართკუთხედის ფართობი გაიზარდა 5 % - ით. იპოვეთ ახალი მართკუთხედის სიგანე.

ამოხსნა: ვთქვათ, მართკუთხედის საწყისი სიგანე იყო a სმ, ხოლო სიგრძე - b სმ; მაშინ ფართობი იქნებოდა ab. ახალი მართკუთხედის სიგანე იქნებოდა $a + 3.6$, ხოლო სიგრძე - $b - 0.16 \cdot b = 0.84b$. მაშინ, ახალი მართკუთხედის ფართობი იქნებოდა: $(a + 3.6) \cdot 0.84b =$

$= 0.84ab + 3.024b$ ანუ ფართობი გაიზარდა $0.84ab + 3.024b - ab =$

$= 3.024b - 0.16ab$ - ით, რაც შეადგენს ab -ს 5 % - ს ანუ

$3.024b - 0.16ab = 0.05ab \Rightarrow 3.024b = 0.21ab \Rightarrow a = 14.4$ სმ.

მაშასადამე, ახალი მართკუთხედის სიგანე იქნებოდა:

$a + 3.6 = 14.4 + 3.6 = \mathbf{18}$ **სმ.**

3.3.7. მართკუთხედის სიგრძე შეამცირეს 2.4 სმ - ით, ხოლო სიგანე გაზარდეს 30 % - ით. ამის შედეგად, მართკუთხედის ფართობი გაიზარდა 4 % - ით. იპოვეთ, ახალი მართკუთხედის სიგრძე.

ამოხსნა: ვთქვათ, მართკუთხედის საწყისი სიგრძე იყო a სმ, ხოლო სიგანე - b სმ; მაშინ ფართობი იქნებოდა ab. ახალი მართკუთხედის

სიგრძე იქნებოდა $a-2.4$, ხოლო სიგანე - $b+0.3\cdot b=1.3b$. მაშინ, ახალი მართკუთხედის ფართობი იქნებოდა: $(a-2.4)\cdot 1.3b=$

$=1.3ab-3.12b$ ანუ ფართობი გაიზარდა $1.3ab-3.12b-ab=$

$=-3.12b+0.3ab$ - ით, რაც შეადგენს ab -ს 4 % - ს ანუ

$-3.12b+0.3ab=0.04ab\Longrightarrow 3.12b=0.26ab\Longrightarrow a=12$ სმ.

მაშასადამე, ახალი მართკუთხედის სიგრძე იქნებოდა:

$a-2.4=12-2.4=\mathbf{9.6}$ **სმ.**

3.3.8. მართკუთხედის ორი მოპირდაპირე პარალელური გვერდი გაზარდეს 10 % - ით, ხოლო დანარჩენი ორი შეამცირეს 10 % - ით. როგორ შეიცვალა მართკუთხედის ფართობი ?

ამოხსნა: ვთქვათ, მართკუთხედის საწყისი სიგრძე იყო a , ხოლო სიგანე - b ; მაშინ ფართობი იქნებოდა ab. ახალი მართკუთხედის სიგრძე იქნებოდა $a+0.1a=1.1a$, ხოლო სიგანე - $b-0.1\cdot b=0.9b$. მაშინ, ახალი მართკუთხედის ფართობი იქნებოდა: $1.1a\cdot 0.9b=$

$=0.99ab$ ანუ ფართობი შემცირდა $ab-0.99ab=0.01ab$ სიდიდით, რაც წარმოადგენს საწყისი ფართობის 1% - ს.

მაშასადამე, მართკუთხედის ფართობი **შემცირდა 1 % - ით.**

3.3.9. კვადრატის ყველა გვერდის სიგრძე გაზარდეს 20 % - ით. რამდენი პროცენტით გაიზარდა კვადრატის ფართობი ?

ამოხსნა: ვთქვათ, კვადრატის გვერდის სიგრძეა a, მაშინ მისი ფართობი იქნება a^2. თუ, კვადრატის ყოველი გვერდის სიგძეს გავზრდით 20 % - ით, მაშინ მისი გვერდის სიგრძე იქნება: $a+0.2a=1.2a$ და მაშასადამე, ახალი ფართობი იქნება: $(1.2a)^2=1.44a^2$ ანუ ფართობი გაიზრდება: $1.44a^2-a^2=0.44a^2$- ით, რაც წარმოადგენს საწყისი ფართობის: $\frac{0.44a^2}{a^2}\cdot 100\%=\mathbf{44}$ **% - ს.**

3.3.10. რამდენი პროცენტით გაიზრდება კუბის მოცულობა, თუ მის თითოეულ წიბოს გავზრდით 10 % - ით ?

ამოხსნა: ვთქვათ, კუბის წიბოს სიგრძეა a, მაშინ მისი მოცულობა იქნება a^3. თუ, კუბის წიბოს სიგრძეს გავზრდით 10 % - ით, მაშინ მისი სიგრძე

გახდება: $a + 0.1a = 1.1a$, შესაბამისად, ახალი კუბის მოცულობა იქნება: $(1.1a)^3 = 1.331a^3$ ანუ მოცულობა გაიზრდება:

$1.331a^3 - a^3 = 0.331a^3$ სიდიდით, რაც შეადგენს საწისი მოცულობის:

$\frac{0.331a^3}{a^3} \cdot 100\% = \mathbf{33.1}$ % - ს.

3.3.11. გვაქვს 35% - იანი მარილმჟავას 50 გრ ხსნარი. რამდენი გრამი წყალი უნდა დავუმატოთ ხსნარს, რომ მივიღოთ 10 % - იანი ხსნარი ?

ამოხსნა: 50 გრ მარილმჟავას ხსნარი საწყის ეტაპზე, შეიცავს 35 % მჟავას და 65 % წყალს ანუ 17.5 გრ მჟავას და 32.5 გრ წყალს.

17.5 გრ მჟავასგან, რომ მივიღოთ 10 % - იანი ხსნარი, საჭიროა რომ ხსნარი იყოს 175 გრ ანუ 50 გრ ხსნარს უნდა დავუმატოთ **125 გრ წყალი.**

3.3.12. ერთი რიცხვი მეორეზე მეტია 16 - ით. იპოვეთ ეს რიცხვები, თუ, ერთი მათგანის $\frac{5}{32}$ ნაწილი უდრის მეორე რიცხვის $\frac{3}{16}$ - ს.

ამოხსნა: ვთქვათ, ერთი რიცხვია x, მაშინ მეორე რიცხვი იქნებოდა $x - 16$. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლება:

$$\frac{5}{32}\mathrm{x} = (\mathrm{x} - 16)\frac{3}{16} \Leftrightarrow 5x = (\mathrm{x} - 16) \cdot 6 \Leftrightarrow x = 96.$$

მაშასადამე, ერთი რიცხვია 96 და მეორე 80.

3.3.13. იპოვეთ ორი რიცხვი, თუ, ერთის $\frac{5}{8}$ უდრის მეორის $\frac{3}{4}$ -ს და ერთი მეორეზე 12 - ით მეტია.

ამოხსნა: ვთქვათ, ერთი რიცხვია x, მაშინ მეორე რიცხვი იქნებოდა $12 + x$, რაც იმას ნიშნავს რომ, შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლება:

$\frac{3}{4}x = (12 + x)\frac{5}{8} \Leftrightarrow 6x = 60 + 5x \Rightarrow x = 60.$

მაშასადამე, ერთი რიცხვია **60 და მეორე 72.**

3.3.14. სამი რიცხვის ჯამია 136.5. თუ, პირველს გავამრავლებთ 8 - ზე, მეორეს - 4 - ზე და მესამეს 6 - ზე, ეს ნამრავლები ერთმანეთს გაუტოლდება. იპოვეთ, ეს რიცხვები.

ამოხსნა: ვთქვათ, ეს რიცხვებია: $x; y; z$, მაშინ ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} 8x = 4y \\ 4y = 6z \\ x + y + z = 136.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = \dfrac{4}{3}x \\ x + 2x + \dfrac{4}{3}x = 136.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = \dfrac{4}{3}x \\ 13x = 3 \cdot 136.5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 31.5} \\ \boldsymbol{y = 63} \\ \boldsymbol{z = 42} \end{cases}.$$

3.4. ამოცანები გამოთვლებზე და დამტკიცებაზე

3.4.1. ფერმერს ყავს ცხვრები და ქათმები. რამდენი ქათამი და რამდენი ცხვარი ყავს ფერმერს, თუ, მათ ყველას ერთად, 19 თავი და 46 ფეხი აქვთ ?

ამოხსნა: ვთქვათ, ფერმერს ყავს x რაოდენობის ცხვარი, მაშინ მას ყოლია $19 - x$ ცალი ქათამი. ქათამს აქვს 2 ფეხი, ცხვარს კი - ოთხი, მასასადამე, შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლება:

$2 \cdot (19 - x) + 4x = 46 \Leftrightarrow 38 - 2x + 4x = 46 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4.$
მივიღეთ, რომ ფერმერს ყოლია **4 ცხვარი და 15 ქათამი.**

3.4.2. რა ციფრით ბოლოვდება ყველა ორნიშნა კენტი რიცხვის ნამრავლი ?

ამოხსნა: ბოლოვდება ციფრით 5, რადგან ნებისმიერი კენტი რიცხვის ნამრავლი 5 - ზე ბოლოვდება 5 - ით, ხოლო ხუთით დაბოლოებული რიცხვების ნამრავლიც ბოლოვდება **5 - ით.**

3.4.3. რა ციფრით ბოლოვდება თითოეული ქვემოთ მოყვანილი რიცხვი :

ა) $\boldsymbol{3^3 + 4^3 + 5^3}$; **ბ)** $\boldsymbol{3^{13} + 10^{13} + 18^{13}}$.

ამოხსნა: ა) $3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$. რადგან ჩვენ მხოლოდ ბოლო ციფრი გვაინტერესებს, შევკრიბოთ ბოლო ციფრები:

$7 + 4 + 5 = 16$. მასასადამე, საძიებელი ჯამის ბოლო ციფრია **6**;

ბ) ვნახოთ რა ციფრებით ბოლოვდებიან 3 - ის ხარისხები:

$3^1 = 3$; .

$3^2 = 9;$

$3^3 = 27;$

$3^4 = 81;$

$3^5 = 243;$

$3^6 = 729;$

$3^7 = 2187.$

როგორც, ადვილად შენიშნავთ, ბოლო ციფრები იწყებენ გამეორებას ანუ მათ გააჩნიათ გარკვეული პერიოდულობა: 1; 3; 9; 7 და ამის შემდეგ თავიდან იწყება ისევ 1; 3; 9; 7. მაშასადამე, შეგვიძლია აღმოვაჩინოთ კანონზომიერება: რადგან პერიოდი არის 4, გვექნება ოთხი ნაშთთა კლასი: $4k$; $4k+1$; $4k+2$; $4k+3$. რაც იმას ნიშნავს, რომ თუ ხარისხის მაჩვენებელი 4 - ზე იყოფა, მაშინ სამის ეს ხარისხი დაბოლოვდება პერიოდის პირველი ციფრით ანუ 1 - ით, თუ, ხარისხის მაჩვენებელი 4 - ზე გაყოფისას, ნაშთში იძლევა ერთს, ის დაბოლოვდება პერიოდის მეორე ციფრით ანუ 3 - ით, თუ, ხარისხის მაჩვენებელი 4 - ზე გაყოფისას, ნაშთში იძლევა 2 -ს, მაშინ ეს ხარისხი დაბოლოვდება 9 - ით, თუ, ნაშთში იძლევა 3 - ს, მაშინ - 7 - იანით. **მაშასადამე, 3^{13}, რომ გავიგოთ რა ციფრით ბოლოვდება, უნდა ვნახოთ ხარისხის მაჩვენებელი ანუ 13, ოთხზე გაყოფისას, რა ნაშთს გვაძლევს. ცხადია, რომ $13 = 4 \cdot 3 + 1$ მაშასადამე ნაშთში იძლევა 1 - ს და ბოლოვდება: 3^{13} ციფრით 3;**

ახლა, ანალოგიურად შევისწავლოთ დანარჩენი შესაკრებების ბოლო ციფრების ხარისხები:

10^{13} ცხადია, რომ ნულით ბოლოვდება;

შევისწავლოთ 18^{13} ანუ 8 - ის ხარისხები.

$8^1 = 8;$

$8^2 = 64;$

$8^3 = 512;$

$8^4 = 4596;$

$8^5 = 36768;$

$8^6 = 294144;$

$8^7 = 2353152;$

$8^8 = 18825216.$

ცხადია, რომ ამის შემდეგ დაიწყება ბოლო ციფრების გამეორება:

6; 8; 4; 2; აქაც, ვხედავთ, რომ პერიოდი ოთხი ციფრისაგან შედგება. მაშ, გვაქვს კვლავ 4 ნაშთთა კლასი ანუ თუ ხარისხის მაჩვენებელი 4 - ზე იყოფა უნაშთოდ, მაშინ ეს ხარისხი ბოლოვდენა ციფრი 6 - ით, თუ, გაყოფისას, ნაშთში იძლევა 1 - ს, მაშინ შესაბამისი ხარისხი ბოლოვდება ციფრი **8** - ით და ა.შ.

ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში, გვაქვს $\mathbf{18^{13}}$. **ცხადია, რომ 13 - ის 4 - ზე გაყოფისას ნაშთში დაგვრცება 1:** $\mathbf{13 = 4 \cdot 3 + 1}$

მაშასადამე, $\mathbf{18^{13}}$ **ბოლოვდება ციფრით 8 - ით.**

მაშინ, მივიღებთ რომ: $3^{13} + 10^{13} + 18^{13}$ ჯამი დაბოლოვდება ციფრით: $3 + 0 + 8 = 11$

ანუ საძიებელი ჯამი ბოლოვდება ციფრი 1 - ით.

3.4.4. დავალება წრის წევრებს: რა ციფრით ბოლოვდება თითოეული ქვემოთ მოყვანილი რიცხვი :

ა) $\mathbf{14^{23} + 23^{23} + 70^{23}}$;

ბ) $\mathbf{21^{4} + 34^{4} + 46^{4}}$;

გ) $\mathbf{2022^{2022} + 10^{2022}}$;

დ) $\mathbf{1955^{1955} + 2022^{2022}}$;

3.4.5. იპოვეთ იმ რიცხვების ზოგადი ფორმულა, რომლებიც 3 - ზეც და 4 - ზეც გაყოფისას, ნაშთში იძლევიან 1 - ს.

ამოხსნა: ცხადია, რომ ამ რიცხვს თუ, გამოვაკლებთ 1 - ს, მაშინ ის უნაშთოდ გაიყოფა 3 და 4 რიცხვებზე, მაშასადამე, იქნება მათი საერთო ჯერადი, ასეთი რიცხვებიდან უმცირესი იქნება მათი უმცირესი საერთო ჯერადი ანუ 12 და ამ რიცხვის ყველა ჯერადი გაიყოფა ორივე რიცხვზე, ასეთი რიცხვების ზოგადი ფორმულა იქნება:$12n$ და რადგან ჩვენ ერთი

გამოვაკლეთ საძიებელ რიცხვს, ამოცანის პასუხი იქნება შესაბამისად: $\mathbf{12n+1}$.

3.4.6. იპოვეთ იმ რიცხვების ზოგადი ფორმულა, რომლებიც 6 - ზე და 8 - ზე გაყოფისას, ნაშთში იძლევა 5 - ს.

ამოხსნა: ცხადია, რომ თუ ამ რიცხვს გამოვაკლებთ 5 - ს, მაშინ ის უნაშთოდ გაიყოფა 6 და 8 რიცხვებზე, ასეთი უმცირესი რიცხვი იქნება მათი უმცირესი საერთო ჯერადი: $[6;8]=24$. მასასადამე, საძიებელ ფორმულას ექნება შემდეგი სახე: $\mathbf{24k+5}$.

3.4.7. დაამტკიცეთ, რო ორი მომდევნო კენტი რიცხვის ჯამი იყოფა 4 - ზე.

დამტკიცება: კენტი რიცხვის ზოგადი ფორმულაა: $2k+1$. მისი მომდევნო კენტი რიცხვის ფორმულა იქნება: $2k+3$. მათი ჯამი იქნება:

$2k+1+2k+3=4k+4=4\cdot(k+1)\,\vdots\,\mathbf{4}$ **რ.დ.გ.**

3.4.8. დაამტკიცეთ, რომ ორი მომდევნო კენტი რიცხვის კვადრატების სხვაობა იყოფა 8 - ზე.

დამტკიცება: კენტი რიცხვის ზოგადი ფორმულაა: $2k+1$. მისი მომდევნო კენტი რიცხვის ფორმულა იქნება: $2k+3$. მაშინ $(2k+3)^2-(2k+1)^2=(\mathbf{4k+4})\cdot\mathbf{2}=\mathbf{8(k+1)}\,\vdots\,\mathbf{8}$. **რ.დ.გ.**

3.4.9. დაამტკიცეთ, რომ კენტი რიცხვის კვადრატსა და 1 - ს შორის სხვაობა, იყოფა 8 - ზე.

დამტკიცება: კენტი რიცხვის ზოგადი ფორმულაა: $2k+1$. მაშინ,

$(2k+1)^2-1=2k\cdot(2k+2)=4k\cdot(k+1)\,\vdots\,8$, რადგან ორი მომდევნო ნატურალური რიცხვების $k\cdot(k+1)$ ნამრავლი იყოფა 2 - ზე. **რ.დ.გ.**

3.4.10. დაამტკიცეთ, რომ ოთხი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ჯამი, არ შეიძლება რომ იყოს მარტივი რიცხვი.

დამტკიცება: ვთქვათ, k რაიმე ნატურალური რიცხვია, მაშინ მისი მომდევნო რიცხვები იქნებიან: $k+1; k+2; k+3$. განვიხილოთ ამ ოთხი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ჯამი:

$k+k+1+k+2+k+3=4k+6=2\cdot(2k+3)\,\vdots\,2$ რაც იმას ნიშნავს, რომ ეს ჯამი არაა მარტივი რიცხვი. **რ.დ.გ.**

3.4.11. დაამტკიცეთ, რომ სამი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ნამრავლი იყოფა 6 - ზე.

დამტკიცება: ორი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ნამრავლი იყოფა ორზე, ხოლო სამ მომდევნო რიცხვს შორის ერთი მაინც იყოფა სამზე, რადგა 2 და 3 ურთიერთმარტივი რიცხვებია, სამი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ნამრავლიც აუცილებლად გაიყოფა მათ ნამრავლზე ანუ 6 - ზე. **რ.დ.გ.**

3.4.12. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორი რიცხვი 3 - ზე გაყოფისას, ნაშთში იძლევიან 1 - ს, მაშინ მათი ნამრავლიც 3 - ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევა 1 - ს.

დამტკიცება: რადგან რიცხვი 3 - ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევა 1 - ს, ის შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი ზოგადი სახით: $3k+1$. მეორე, ასეთივე რიცხვს, ჩავწერთ ანალოგიურად: $3n+1$. მაშინ,

$(3k+1)(3n+1)=9kn+3(k+n)+1=3\cdot(3kn+k+n)+1.$ მივიღეთ იგივე სახის რიცხვი, რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს. **რ.დ.გ.**

3.4.13. დაამტკიცეთ, რომ 3 - ზე გაყოფისას თუ, ერთი რიცხვი ნაშთში გვაძლევს 1 - ს, ხოლო მეორე - 2 - ს, მაშინ ამ ორი რიცხვის ნამრავლი, 3 - ზე გაყოფისას ნაშთში მოგვცემს 2 - ს.

დამტკიცება: თუ, ნატურალური რიცხვი 3 - ზე გაყოფისას, ნაშთში გვაძლევს 1 - ს, მაშინ მისი ზოგადი სახეა: $3k+1$. თუ, ნაშთში გვაძლევს 2 - ს, მაშინ მისი ზოგადი სახეა: $3k+2$. განვიხილოთ, ამ ორი ტიპის რიცხვთა ნამრავლი:

$(3k+1)(3k+2)=9k^2+9k+2=3\cdot(3k^2+3k)+2$ ანუ მივიღეთ,

$3m+2$ სახის რიცხვი (სადაც $m=3k^2+3k$), რომელიც 3 - ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევა 2 - ს. **რ.დ.გ.**

3.4.14. დაამტკიცეთ, რომ სამნიშნა რიცხვების სხვაობა, რომელთაგან ერთი მიიღება მეორისგან ციფრების შებრუნებული რიგით დაწერისას, იყოფა 9 - ზე და 11 - ზე.

დამტკიცება: სამნიშნა რიცხვი ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. რიცხვი, რომელიც იგივე ციფრებით, მაგრამ შებრუნებული რიგითაა დაწერილი იქნება:

$\overline{zyx} = 100z + 10y + x$. განვიხილოთ, ამ ორი რიცხვის სხვაობა:

$$\overline{xyz} - \overline{zyx} = 100x + 10y + z - (100z + 10y + x) =$$

$= 99x - 99z = 9 \cdot 11 \cdot (x - z) ⋮ 99$, რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს. **რ.დ.გ.**

3.5. მოდულის შემცველი წრფივი განტოლებები და უტოლობები

ამოხსენით მოდულის შემცველი განტოლებები:

3.5.1. $\boldsymbol{|4x - 1| = 7.}$

ამოხსნა: $|4x - 1| = 7 \Rightarrow (4x - 1 = 7) \vee (4x - 1 = -7) \Rightarrow$

$\Rightarrow (4x = 8) \vee \left(4x = -6 \Rightarrow (\boldsymbol{x = 2}) \vee (\boldsymbol{x = -1.5})\right).$

3.5.2. $\boldsymbol{|4x - 1| = -5}$

ამოხსნა: მოდულის მნიშვნელობა, განსაზღვრების თანახმად, არ შეიძლება რომ იყოს უაროფითი. შესაბამისად, ამ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი ანუ $\boldsymbol{x \in \emptyset}$.

3.5.3. $\boldsymbol{|x - 2| + 2x = 2.}$

ამოხსნა: $|x - 2| + 2x = 2 \Leftrightarrow |x - 2| = 2 - 2x$. მოდული არ შეიძლება რომ იყოს უარყოფითი, აქედან გამომდინარე, უნდა შესრულდეს პირობა $2 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$. თუ, $x \leq 1$ მაშინ $x - 2 < 0$, ასეთ შემთხვევაში, მოდულის მოხსნისას, მოდულის შიგნით წევრებს ვუცვლით ნიშანს (მოდულის განსაზღვრებიდან გამომდინარე) ანუ მივიღებთ განტოლებას:

$-x + 2 = 2 - 2x \Rightarrow \mathbf{x = 0}$.

3.5.4. $\boldsymbol{|x - 8| + x = 5.}$

ამოხსნა: $\boldsymbol{|x - 8| + x = 5 \Leftrightarrow |x - 8| = 5 - x}$. **მოდული არ შეიძლება რომ იყოს უარყოფითი ანუ** $\boldsymbol{5 - x \geq 0} \Leftrightarrow x \leq 5$. ამ შემთხვევაში, მოდულის შიგნით $\boldsymbol{x - 8 < 0}$, **შესაბამისად, მოდულის მოხსნისას ნიშნები**

შეეცვლებათ მოდულის ქვეშა წევრებს ანუ გვექნება განტოლება შემდეგი ფორმით:

$-\boldsymbol{x}+\mathbf{8}=\mathbf{5}-\boldsymbol{x} \Leftrightarrow 8=5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \emptyset.$

3.5.5. $|\boldsymbol{x}-\mathbf{3}|-\boldsymbol{x}=\mathbf{7}.$

ამოხსნა: $|\boldsymbol{x}-\mathbf{3}|-\boldsymbol{x}=\mathbf{7} \Leftrightarrow |\boldsymbol{x}-\mathbf{3}|=\mathbf{7}+\boldsymbol{x}.$ **მოდული არ შეიძლება რომ იყოს უარყოფითი ანუ** $\mathbf{7}+\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow x \geq -7$ ესაა განტოლების დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე.

რადგან განსაზღვრის არე ცალსახად არ გვეუბნება, თუ რა ნიშანი აქვს მოდულისქვეშა გამოსახულებას, უნდა განვიხილოთ ორი შემთხვევა: $\boldsymbol{x}-\mathbf{3} \geq \mathbf{0}$ **და** $\boldsymbol{x}-\mathbf{3}<\mathbf{0}.$

პირველ შემთხვევაში, რაც მთლიან შესაბამისობაშია განსაზღვრის არესთან, მივიღებთ განტოლებას შემდეგი სახით:

$\boldsymbol{x}-\mathbf{3}=\mathbf{7}+\boldsymbol{x} \Leftrightarrow -3=7 \Leftrightarrow x \in \emptyset;$

მეორე შემთხვევაში, $\boldsymbol{x}-\mathbf{3}<\mathbf{0} \Leftrightarrow -7 \leq x<3$, განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$-\boldsymbol{x}+\mathbf{3}=\mathbf{7}+\boldsymbol{x} \Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=-\mathbf{2}.$

3.5.6. წრის წევრებისათვის:

ა) $|\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{11}|+\boldsymbol{x}=\mathbf{8};$

ბ) $|\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{2}|+\boldsymbol{x}=\mathbf{10};$

გ) $|\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{4}|+\boldsymbol{x}=\mathbf{4};$

დ) $|\boldsymbol{x}|=\mathbf{3}(\boldsymbol{x}-\mathbf{3}).$

3.5.7. იპოვეთ მოდულიანი უტოლობების ყველა მთელი ამონახსნი:

ა) $|\boldsymbol{x}| \leq \mathbf{5};$ ბ) $|\boldsymbol{x}-\mathbf{8}| \leq \mathbf{0};$ გ) $|\boldsymbol{x}-\mathbf{3.5}|<\mathbf{2};$ დ) $|\boldsymbol{x}|>\mathbf{5};$ ე) $|\boldsymbol{x}-\mathbf{4}|>\mathbf{5};$

ვ) $|\boldsymbol{x}+\mathbf{1}| \leq \mathbf{5};$ ზ) $|\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}| \leq -\mathbf{5};$ თ) $|\mathbf{7}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}|+\mathbf{6}>\mathbf{0}.$

ამოხსნა:

ა) $|\boldsymbol{x}| \leq \mathbf{5} \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5 \Rightarrow x \in \{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5\};$

ბ) $|\boldsymbol{x}-\mathbf{8}| \leq \mathbf{0}$ მოდული არ შეიძლება იყოს უარყოფითი ნიშნის, მაშასადამე, ამ უტოლობას აკმაყოფილებს ერთადერთი მნიშვნელობა: $\boldsymbol{x}=\mathbf{8};$

გ) $|\boldsymbol{x}-\mathbf{3.5}| < \mathbf{2} \Leftrightarrow -2 < x-3.5 < 2 \Leftrightarrow 1.5 < x < 5.5 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x \in \{2; 3; 4; 5\};$

დ) $|\boldsymbol{x}| > \mathbf{5} \Leftrightarrow (x > 5) \vee (\boldsymbol{x} < -\mathbf{5}) \Longrightarrow x \in \{\ldots -7; -6\} \cup \{6; 7; \ldots\};$

ე) $|\boldsymbol{x}-\mathbf{4}| > \mathbf{5} \Leftrightarrow (x-4 > 5) \vee (\boldsymbol{x}-\mathbf{4} < -\mathbf{5}) \Leftrightarrow (x > 9) \vee (\boldsymbol{x} < -\mathbf{1}) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x \in \{\ldots -3; -2\} \cup \{10; 11; \ldots\};$

ვ)$|\boldsymbol{x}+\mathbf{1}| \leq \mathbf{5} \Leftrightarrow -5 \leq x+1 \leq 5 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 4 \Longrightarrow x \in \{-6; -5; \ldots 4\};$

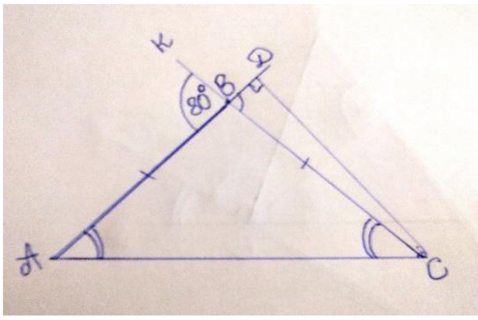
ზ) $|\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}| \leq -\mathbf{5}.$ მოდული არ შეიძლება იყოს უარყოფითი ნიშნის. აქედან გამომდინარე მოცემულ უტოლობას არა აქვს ამონახსნი;

თ) $|\mathbf{7}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}|+\mathbf{6} > \mathbf{0} \Leftrightarrow |\mathbf{7}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}| > -\mathbf{6}.$ მოდულის მნიშვნელობა, ყოველთვის მეტია უარყოფით რიცხვზე. აქედან გამომდინარე, მოცემულ უტოლობას აკმაყოფილებს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი.

3.6. ამოცანები სამკუთხედებზე

3.6.1. ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ - ერთი გარე კუთხე $\mathbf{80}^{\circ}$ - ია. იპოვეთ კუთხე, სამკუთხედის ფუძესა და ფერდზე დაშვებულ სიმაღლეს შორის.

ამოხსნა: $\mathbf{50}^{\circ}$.



ნახ. 3.10

მოც: $\Delta \boldsymbol{ABC}$

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BC}$

$<\boldsymbol{ABK}=\mathbf{80}^{\circ}$

$\boldsymbol{CD} \perp \boldsymbol{AD}$

უ.ვ. $<\boldsymbol{ACD}$

სამკუთხედის გარე კუთხის თვისების გამოყენებით და იმის გათვალისწინებით, რომ ტოლფერდა სამკუთხედში, ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია, მივიღებთ რომ:

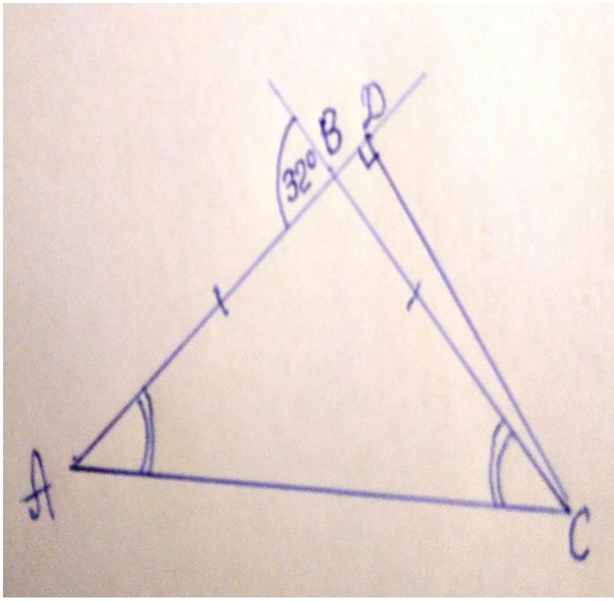
$< ABK = 80^{\circ} \Rightarrow < A = < C = \frac{80^{\circ}}{2} = 40^{\circ}$. ΔCBD - დან გამომდინარე, რადგან $< DBC = < ABK = 80^{\circ}$, როგორც ვერტიკალური კუთხეები. მივიღებთ რომ $< DCB = 90^{\circ} - 80^{\circ} = 10^{\circ}$. მაშინ, ცხადია რომ

$< ACD = < ACB + < BCD = 40^{\circ} + 10^{\circ} = 50^{\circ}$.

ამრიგად, $< ACD = 50^{\circ}$.

3.6.2. ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ - ერთი გარე კუთხე 32° - ია. იპოვეთ კუთხე, სამკუთხედის ფუძესა და ფერდზე დაშვებულ სიმაღლეს შორის.

ამოხსნა: 74°.



მოც: ΔABC

$AB = BC$

$< ABK = 32^{\circ}$

$CD \perp AD$

უ.ვ. $< ACD$

ნახ. 3.11

სამკუთხედის გარე კუთხის თვისების გამოყენებით და იმის გათვალისწინებით, რომ ტოლფერდა სამკუთხედში, ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია, მივიღებთ რომ:

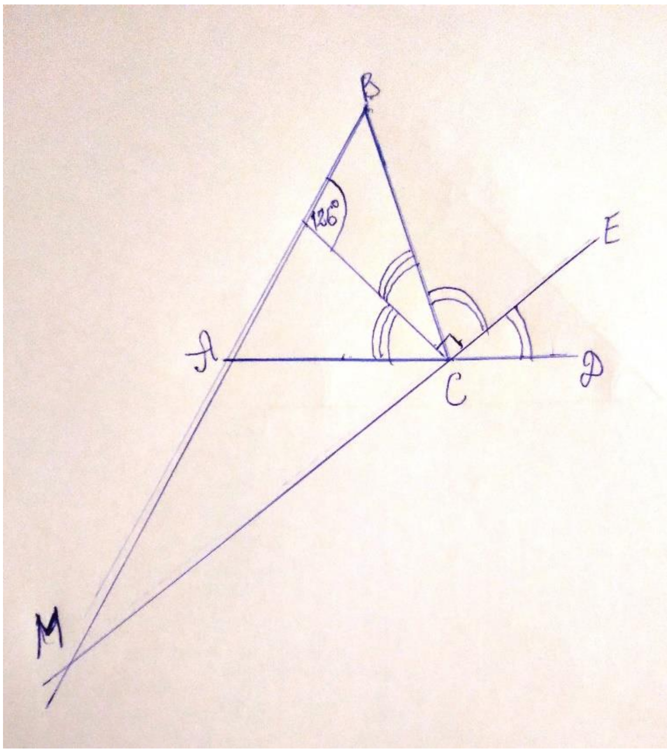
$< ABK = 32^{\circ} \Rightarrow < A = < C = \frac{32^{\circ}}{2} = 16^{\circ}$. ΔCBD - დან გამომდინარე, რადგან $< DBC = < ABK = 32^{\circ}$, როგორც ვერტიკალური კუთხეები. მივიღებთ რომ $< DCB = 90^{\circ} - 32^{\circ} = 58^{\circ}$. მაშინ, ცხადია რომ

$< ACD =< ACB + < BCD = 16^{\circ} + 58^{\circ} = 74^{\circ}$.

ამრიგად, $\boldsymbol{< ACD = 74^{\circ}}$.

3.6.3. $\Delta \boldsymbol{ABC}$ **- ში,** $\boldsymbol{C}$ **წვეროდან გავლებულია შიგა და გარე კუთხის ბისექტრისები. შიგა ბისექტრისა** $\boldsymbol{AB}$ **გვერდთან ადგენს** $\boldsymbol{126^{\circ}}$ **- იან კუთხეს. რა კუთხეს ადგენს** $\boldsymbol{AB}$ **გვერდის გაგრძელებასთან გარე კუთხის ბისექტრისა ?**

ამოხსნა: $\boldsymbol{36^{\circ}}$.



ნახ. 3.12

მოც: $\Delta \boldsymbol{ABC}$

$\boldsymbol{< BCE =< ECD}$

$\boldsymbol{< BKC = 126^{\circ}}$

$\boldsymbol{CD \perp AD}$

$\boldsymbol{< ACK =< KCB}$

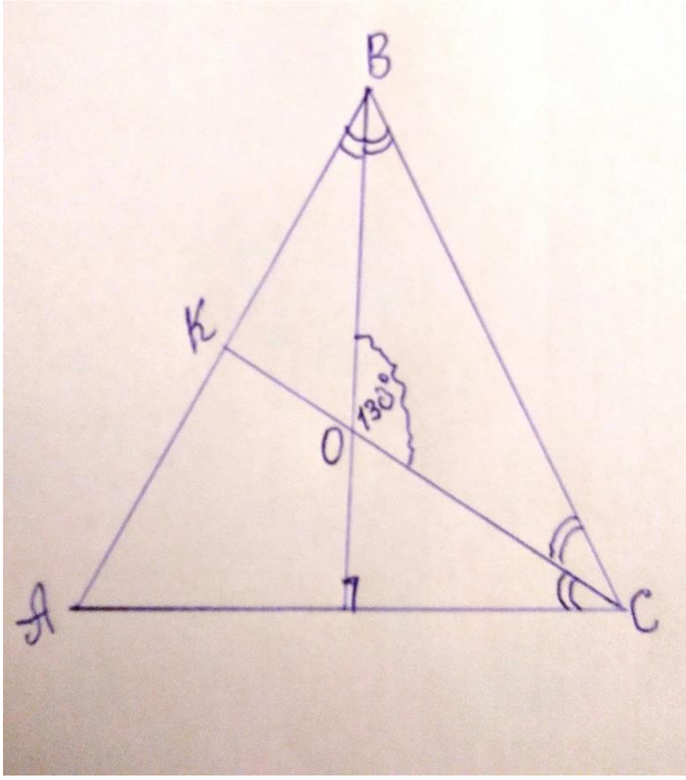
უ.ვ. $\boldsymbol{< AMC}$

ΔKMC - დან გამომდინარე, გარე კუთხის შესახებ თეორემიდან გამომდინარე: $< KMC + < KCM = 126^{\circ}$. მაგრამ $CE \perp KC$ როგორც მოსაზღვრე კუთხეების ბისექტრისები. მაშასადამე, $< KCM = 90^{\circ}$.

მაშასადამე, $\boldsymbol{< AMC =< KMC = 126^{\circ} - 90^{\circ} = 36^{\circ}}$.

3.6.4. ტოლფერდა სამკუთხედში, კუთხე სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხის ბისექტრისასა და ფუძესთან მდებარე კუთხის ბისექტრისას შორის $\boldsymbol{130^{\circ}}$ **- ია. იპოვეთ, სამკუთხედის კუთხეები.**

ამოხსნა: $\boldsymbol{20^{\circ}; 80^{\circ}; 80^{\circ}}$.



ნახ. 3.13

მოც: ΔABC

$AB = BC$

$< BOC = 130^{\circ}$

$< BCK =< KCA$

$< ABD =< DBC$

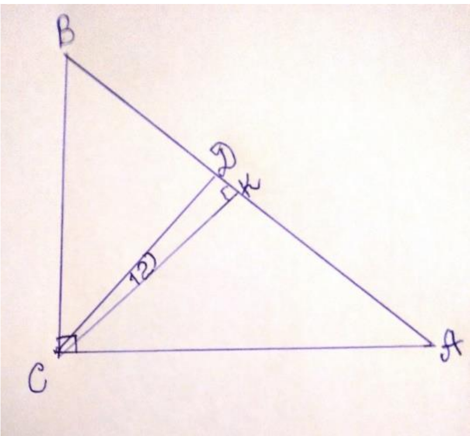
უ.ვ. $< ABC;\ < BAC$

$< BOC$ არის ΔDOC - ს გარე კუთხე, მაშასადამე,

$< OCD + 90^{\circ} = 130^{\circ} \Rightarrow < OCD = 130^{\circ} - 90^{\circ} = 40^{\circ}$. მაშინ,

$< BCA =< BAC = 40^{\circ} \cdot 2 = 80^{\circ}$. ე.ი. $< ABC = 180^{\circ} - 80^{\circ} \cdot 2 = 20^{\circ}$.

3.6.5. მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის, ბისექტრისასა და ამ კუთხიდან გავლებულ სიმაღლეს შორის 12° - ია. იპოვეთ, ამ მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეები.



ამოხსნა: $33^{\circ}; 57^{\circ}$.

მოც: ΔABC

$AC \perp BC$

$< DCK = 12^{\circ}$

$< BCD =< DCA$

$CK \perp AB$

ნახ. 3.14

უ.ვ. $< ABC;\ < BAC$

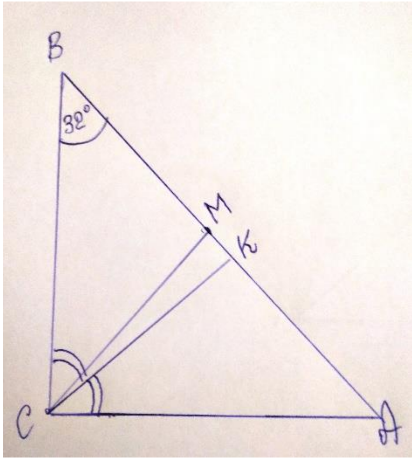
$< KCA = 45^{\circ} - 12^{\circ} = 33^{\circ}$. მაშინ, ΔAKC - დან

$< AKC = 90^{\circ} \Longrightarrow < \boldsymbol{BAC = 90^{\circ} - 33^{\circ} = 57^{\circ}}$ **და** $\boldsymbol{\Delta ABC}$ **- დან**

$< \boldsymbol{ABC = 90^{\circ} - 57^{\circ} = 33^{\circ}}$**.**

3.6.6. **მართკუთხა სამკუთხედის ერთი მახვილი კუთხე $\boldsymbol{32^{\circ}}$ - ია. მართი კუთხის წვეროდან გავლებულია მედიანა და ბისექტრისა. იპოვეთ კუთხე მედიანასა და ბისექტრისას შორის.**

ამოხსნა: $\boldsymbol{13^{\circ}}$.



მოც: $\boldsymbol{\Delta ABC}$

$\boldsymbol{AC \perp BC}$

$< \boldsymbol{ABC = 32^{\circ}}$

$\boldsymbol{AM = MB}$

$< \boldsymbol{BCK =< KCA}$

უ.ვ. $< \boldsymbol{MCK}$

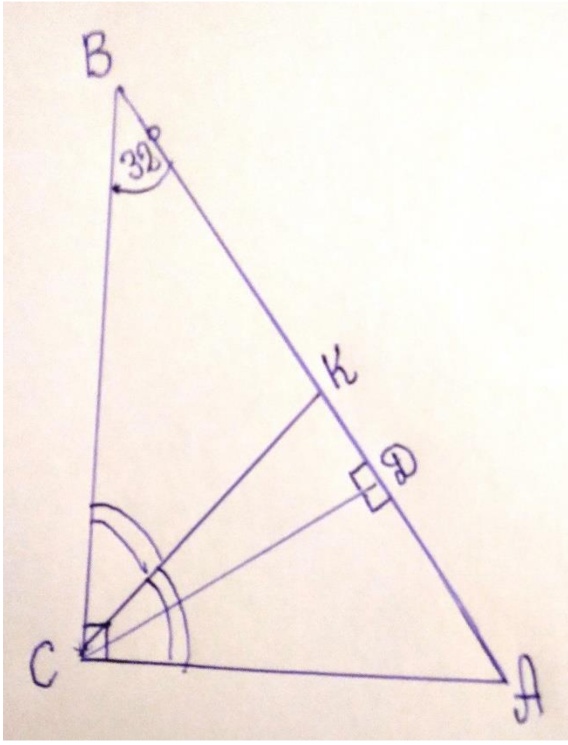
ნახ. 3.15

რადგან ΔABC მართკუთხაა და CM მედიანაა, $CM = BM = AM$. ამშემთხვევაში, მედიანა უდრის შემოხაზული წრის რადიუსს. მაშასადამე, ΔBMC ტოლფერდაა და $< MCB =< MBC = 32^{\circ}$. მაშინ, რადგან CK ბისექტრისაა და მაშასადამე $< BCK = 45^{\circ}$, გვექნება რომ

$< \boldsymbol{MCK = 45^{\circ} - 32^{\circ} = 13^{\circ}}$**.**

3.6.7. **მართკუთხა სამკუთხედის ერთი მახვილი კუთხე $\boldsymbol{32^{\circ}}$ - ია. მართი კუთხის წვეროდან გავლებულია ბისექტრისა და სიმაღლე. იპოვეთ კუთხე, ბისექტრისასა და სიმაღლეს შორის.**

ამოხსნა: $\boldsymbol{13^{\circ}}$.



მოც: ΔABC

$AC \perp BC$

$< ABC = 32^\circ$
$AM = MB$

$< BCK =< KCA$

უ.ვ. $< DCK$

ნახ. 3.16

ΔBDC - დან გამომდინარე, $< BCD = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$. მაგრამ, რადგან CK მართი კუთხის ბისექტრისაა, $< BCK = 45^\circ$. მაშინ, ცხადია რომ

$< DCK =< BCD - < BCK = 58^\circ - 45^\circ = 13^\circ$.

მაშასადამე, $< \boldsymbol{DCK = 13^\circ}$.

3.6.8. სიბრტყეზე გვაქვს 7 წერტილი, რომელთაგან არცერთი სამი, არ მდებარეობს ერთ წრფეზე. ყოველ ორ წერტილზე გავლებულია წრფე. სულ რამდენი წრფეა გავლებული ?

ამოხსნა: რადგან წრფით ვაერთებთ 7 წერტილს დანარცენ ექვსთან და თითოეული წრფე, გადის ორ წერტილზე, სულ გვექნება: $\frac{7 \cdot 6}{2} = \mathbf{21}$ **წრფე.**

3.6.9. რამდენი დიაგონალის გავლება შეიძლება ამოზნექილ: ა) 103 გვერდიან მრავალკუთხედში; ბ) $\boldsymbol{n}$ კუთხედში ?

ამოხსნა: ა) ამოზნექილ 103 გვერდიან მრავალკუთხედს აქვს 103 წვერო. თითოეული წვეროდან გაივლება დიაგონალი ყველა წვეროსკენ, გარდა მეზობელი ორი წვეროსა და თავის თავთან ანუ თითოეული წვეროდან გამოვა $103 - 3 = 100$ დიაგონალი, სულ გვაქვს 103 წვერო, რაც იმას ნიშნავს რომ წვეროებიდან გამოვა სულ

$103 \cdot 100 = 10300$ დიაგონალი, თუმცა, ამ თვლაში ჩვენ ყოველი დიაგონალი ორჯერ ჩავთვალეთ, რადგან ერთი დიაგონალი აერტებს 2 წვეროს.

მაშასადამე, დიაგონალების ზუსტი რიცხვი იქნება: $\frac{10\,300}{2} = \mathbf{5150;}$

ბ) ამოზნექილ $\boldsymbol{n}$ - **კუთხედში, ანალოგიურად ვიანგარიშებთ დიაგონალების** d_n **რაოდენობას და მივიღებთ, შემდეგი სახის ზოგად ფორმულას:**

$$\boldsymbol{d_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}}$$

3.6.10. **ეილერის ამოცანა: შეავსეთ ცხრილი, სადაც სხვადასხვა მრავალწახნაგებისათვის (კუბი; მართკუთხა პარალელეპიპედი; პირამიდა; . . .) უნდა შეიტანოთ** $\boldsymbol{n_1}$ **წვეროების რაოდენობა, წახნაგების** $\boldsymbol{n_2}$ **რაოდენობა და წიბოების** $\boldsymbol{n_3}$ **რაოდენობა და გამოიყვანეთ ფორმულა, რომელიც აკავშირებს ამ სიდიდეებს.**

ბუნების წიგნი დაწერილია

მათემატიკური სიმბოლოებით.

გალილეო გალილეი

IV თავი. საოლიმპიადო ამოცანების ვარიანტები II-V კლასის მოსწავლეებისათვის

4.1. საოლიმპიადო ამოცანების ვარიანტები II კლასის მოსწავლეებისათვის

I ვარიანტი

4.1.1. დახატეთ ორი სამკუთხედი ხუთი მონაკვეთით;

4.1.2. გვაქვს 99 რიცხვი: $1; 2; 3; \dots ; 99$. რამდენჯერ გვხვდება ამ ჩანაწერში ციფრი 5 ?

4.1.3. გააგრძელეთ რიცხვების მიმდევრობები:

ა)18; 13; . . .   ბ) 7; 9; . . .   გ) 5; 10; . . .

4.1.4. თუ, ღამის 12 საათზე წვიმს, მოსალოდნელია რომ, 72 საათის შემდეგ იყოს მზიანი ამინდი ?

4.1.5. ციფრებისაგან: 2; 5; 3 შეადგინეთ ყველა შესაძლო რიცხვი;

4.1.6. ძმა 8 წლისაა, და 13 - ის. რამდენი წლის გახდება და, როცა ძმა იქნება 10 წლის ?

4.1.7. 1მ სიგრძის გვერდის მქონე კვადრატი, დაჭრეს პატარა კვადრატებად, რომელთა გვერდის სიგრძეა 1 სმ და დაალაგეს ერთმანეთის გვერდზე 1 სმ სიგანის ერთ ზოლად. რა სიგრძის აღმოჩნდება ეს ზოლი ?

4.1.8. ციფრებს შორის ჩაწერეთ „+“ ან „-“ ოპერაციები ისე, რომ ადგილი ქონდეს ტოლობებს:

$\mathbf{1\ 2\ 3\ 4\ 5 = 54; \quad 1\ 2\ 3\ 4\ 5 = 168.}$

II ვარიანტი

4.1.9. დახატეთ, როგორ შეიძლება ასანთის 4 ღერისგან მივიღოთ 15;

4.1.10. ორი გოგონა მიდიოდა პარკში, მათ შეხვდათ 5 გოგონა. სულ რამდენი გოგონა მიდიოდა პარკში ?

4.1.11. მარიამმა დაბადების დღეზე მიიღო საჩუქრები: ტორტები და კექსები ერთად 7 ცალი, ნამცხვრები და კექსები ერთად - 9, ტორტები და ნამცხვრები კი ერთად - 6. სულ რამდენი საჩუქარი მიუღია მარიამს ?

4.1.12. ხელებზე გვაქვს 10 თითი. რამდენი თითია 10 ხელზე ?

4.1.13. შეშისათვის მოჭრეს 3 მორი. რამდენი ნაჭერი შეშა მიიღეს თუ, მორები გადაჭრეს სულ 15 - ჯერ ?

4.1.14. ხეზე იჯდა 4 ჩიტი, მათთან მოფრინდა კიდევ ორი ჩიტი. კატა მიეპარა და პირი ჩაავლო ერთ ჩიტს. რამდენი ჩიტი დარჩა ხეზე ?

4.1.15. ამოხსენით განტოლება:

$* + ** + * = \mathbf{60}.$

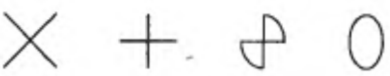
ვარსკვლავების მაგივრად ჩასვით ციფრები: 1; 2; 3; 4; 5. იპოვეთ ამოხსნის რამდენიმე ვარიანტი.

4.1.16. მხოლოდ შეკრების ოპერაციით და ხუთი ორიანის გამოყენებით მიიღეთ 28.

III ვარიანტი

4.1.17. მოლზე მოთამაშე ბავშვებს შორის ფეხშიშველი ბიჭების რაოდენობა იგივეა, რაც ფეხსაცმლიანი გოგონებისა. ვინ უფრო მეტია მოლზე: გოგონები თუ, ფეხშიშველი ბავშვები ?

4.1.18. სამ ჭიქაში ჩაასხეს: რძე, მაწონი და კეფირი. მეორე ჭიქაში არაა კეფირი, მესამე ჭიქაში არც მაწონია და არც კეფირი. რომელ ჭიქაში რა ჩაასხეს ?

4.1.19. მარიამს დაავალეს მონაკვეთებისაგან დაეხატა ფიგურები. მან დახატა შემდეგი ფიგურები:  . რომელი ფიგურაა ზედმეტი ?

4.1.20. ჩასალაგებელია წიგნები. თუ, მათ შევკრავთ ორ-ორად, მაშინ დაგვრჩება ერთი წიგნი, თუ, სამ-სამს შევკრავთ, დაგვრჩება 2, ხოლო ოთხ-ოტხად შეკვრისას, დაგვრჩება 3 წიგნი. განსაზღვრეთ, წიგნების შეკვრის ის უმცირესი რაოდენობა, რომლის დროსაც ზედმეტი წიგნი აღარ დაგვრჩება.

4.1.21. თაგვმა, ბაყაყმა, კურდღელმა და მამალმა ააშენეს სახლი. თაგვი ცხოვრობს ბაყაყზე მაღლა, მაგრამ კურდღელზე დაბლა, მამალი კი ცხოვრობს ბაყაყზე ქვევით. რომელი რომელ სართულზე ცხოვრობს ?

4.1.22. სასწორის ერთ თეფშზე 5 ერთნაირი ვაშლი და 3 ერთნაირი მსხალია, მეორე თეფშზე 4 ასეთივე ვაშლი და 4 ასეთივე მსხალი. სასწორი წონასწორობაშია. რომელი უფრო მსუბუქია, ვაშლი, თუ მსხალი ?

4.1.23. თაროზე იდო 9 წიგნი. მას შემდეგ, რაც აიღეს რამდენიმე წიგნი, თაროზე დარჩა 4 წიგნი. რამდენი წიგნი აუღიათ ?

4.1.24. თერძს აქვს 16 მ ნაჭერი. ის ყოველდღე აჭრის 2 მ -ს. რამდენი დღის შემდეგ მოჭრის ის ბოლო ნაჭერს ?

IV ვარიანტი

4.1.25. მას შემდეგ, რაც ტაქსების გაჩერებიდან გავიდა 9 მანქანა, გაჩერებაზე დარჩა 8 მანქანა. რამდენი მანქანა იყო გაჩერებაზე თავდაპირველად ?

4.1.26. სამი ლუწი რიცხვის ჯამი 12 - ია.ჩაწერეთ ეს რიცხვები, თუ ცნობილია, რომ ისინი განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

4.1.27. ყუთში იყო 7 დიდი და 8 პატარა ღილი. ყუთიდან ამოიღეს 9 ღილი. რამდენი ღილი დარჩა ყუთში ?

4.1.28. აჩვენეთ ის რიცხვები, რომლებიც შეიცავენ მხოლოდ ასეულებს და ერთეულებს: ა) 597; ბ) 705; გ) 990; დ) 505.

4.1.29. ხუთი წლის წინ ილია იყო 4 წლის. რამდენი წლისაა ილია ახლა ?

4.1.30. აჩვენე რომელი რიცხვებია დალაგებული კლების მიხედვით ?

ა) 987; 876; 768; 690; 550; 489; ბ) 890; 786; 678; 990; 560; 200.

4.1.31. მას შემდეგ, რაც მასწავლებელმა მაგიდიდან აიღო 6 რვეული, მაგიდაზე დარჩა 4 რვეული. რამდენი რვეული იყო მაგიდაზე თავდაპირველად ?

4.1.32. მიუთითე, რომელია ლუწი რიცხვები ჩამონათვალში:

ა) 47; ბ) 78; გ) 95; დ) 98.

V ვარიანტი

4.1.33. ზუკამ იყიდა 9 ახალი მარკა. მას შემდეგ, რაც მან რამდენიმე მარკა აჩუქა ანას, მას დარჩა 3 მარკა. რამდენი მარკა აჩუქა ზუკამ ანას ?

4.1.34. აჩვენეთ, რომელი უტოლობაა სწორი ?

ა) $968 - 217 < 968 - 216$; ბ) $240 : 3 > 240 : 2$; გ) $15 \times 3 < 15 \times 4$.

4.1.35. კალათში იყო 9 მწვანე და 5 წითელი ვაშლი. კალათიდან ამოიღეს 10 ვაშლი. რამდენი ვაშლი დარჩა კალათაში ?

4.1.36. რომელია სწორი პასუხი ?

$114 - 57 : 19 + 13 \times 5 =$	$52 - 36 : (62 - 58) =$
а) 68; б) 176; в) 118	а) 33; б) 4; в) 43

4.1.37. ხუთი წლის შემდეგ მზიკო იქნება 15 წლის. რამდენი წლისაა მზიკო ახლა ?

4.1.38. ჩაწერეთ გამოსახულების სახით წინადადება: „18 - ისა და 29 - ის ჯამზე, 5 - ჯერ მეტი რიცხვი“ .

4.1.39. მას შემდეგ, რაც ვარდის ბუჩქიდან მოჭრეს 7 ვარდი, ბუჩქზე დარჩა 14 ვარდი. რამდენი ვარდი იყო ბუჩქზე თავდაპირველად ?

4.1.40. აღნიშნეთ რომელია სწორი:

ა) 5დმ 2სმ < 5დმ 3 სმ;

ბ) 1კგ = 1000 გ;

დ) 1 სთ 30 წთ = 130 წთ.

VI (გართულებული) ვარიანტი

4.1.41. ორ ავტობუსში ჩაჯდა 123 მოსწავლე. შემდეგ, ერთი ავტობუსიდან გამოვიდა 8 მოსწავლე, რომელთგან სამი, ჩაჯდა მეორე ავტობუსში. ამის შემდეგ, ორივე ავტობუსში მოსწავლეების რაოდენობა გათანაბრდა. რამდენი მგზავრი იყო თითოეულ ავთობუსში თავდაპირველად ?

4.1.42. ორ ურთიერთდაპირისპირებულ ქვეყანაში ერთად 90 000 მეომარია. პირველ ქვეყანაში რამდენიმე ათასი მეომარია, მეორეში კი 2 - ჯერ მეტი. რამდენი მეომარია თითოეულ ქვეყანაში ?

4.1.43. ყვავილების ბაღის გასალამაზებლად იყიდეს 200 რცხილის ხე 360 ლარად და 300 ფიჭვი, რომლის ფასიც 2 - ჯერ მეტია. სულ რა თანხა დაიხარჯა ?

4.1.44. მამა კარლამ ბურატინოს 10 საათში 30 დეტალის დამზადება დაავალა. ბურატინო 1 დეტალს ამზადებდა 15 წთ - ში, რის გამოც დროის ეკონომია შეძლო. რამდენ დეტალს დაამზადებს ბურატინო გეგმის ზევით, დროის ეკონომიის ხარჯზე ?

4.1.45. მალვინას ნაკვეთის ერთი ნახევარი უკავია ბოსტანს, მეორე კი ბაღს და ყვავილნარს. ბაღს უკავია 400 $მ^2$, ყვავილნარს კი ამ ფართობის $\frac{1}{30}$ ნაწილი. რა ფართობი უკავია მალვინას მთლიან ნაკვეთს ?

4.1.46. ყარაბას-ბარაბასის ეზოში დადიან ქათმები და კურდღლები. ყველას ერთად აქვთ 20 თავი და 52 ფეხი. რამდენი ქათამი და რამდენი კურდღელია ყარაბს-ბარაბასის ეზოში ?

4.1.47. ქილა საღებავით იწონის 8 კგ - ს. ქილიდან გადმოასხეს საღებავის ნახევარი. ამის შემდეგ, ქილა დარცენილი საღებავით იწონის 4.5 კგ - ს. იპოვეთ ქილის წონა.

4.1.48. დაადგინეთ რა კანონითაა ჩაწერილი რიცხვები: $10; 20; 30; \ldots$

თუ, გინდათ ისწავლოთ ცურვა,

მაშინ თამამად შედით წყალში,

ხოლო თუ გინდათ ისწავლოთ

ამოცანების ამოხსნა,

მაშინ ამოხსენით.

დ.პოია

4.2. საოლიმპიადო ამოცანების ვარიანტები III კლასის მოსწავლეებისათვის

I ვარიანტი

4.2.1. ორი დასახლებული პუნქტიდან, რომელთა შორის მანძილი 65 კმ - ია, ერთმანეთის შემხვედრი მიმართულებით, გამოვიდა ორი ველოსიპედისტი. პირველი ველოსიპედისტი გამოვიდა 1სთ - ით ადრე და მოძრაობდა 15 კმ/სთ სიჩქარით. ველოსიპედისტები ერთმანეთს შეხვდნენ მეორე ველოსიპედისტის გამოსვლიდან 2 სთ - ში. რა სიჩქარით მოძრაობდა მეორე ველოსიპედისტი ?

4.2.2. ძაღლი მისდევს კურდღელს, რომელიც მისგან 180 მ მანძილზეა. ძაღლი აკეთებს ნახტომს 3მ მანძილზე, როცა კურდღელი ხტება 1 მ - ზე. რამდენი ნახტომი უნდა გააკეთოს ძაღლმა, რომ დაეწიოს კურდღელს ?

4.2.3. ჩაამატეთ სიდიდეთა გამოტოვებული ერთეულები ჩანაწერში:

$$\mathbf{723\ldots = 7\ldots 2\ldots 3\ldots}$$

4.2.4. ჩაამატეთ გამოტოვებული რიცხვები:

(   )მ(   )მმ $\times$ **4 = 832** მ **8** სმ

4.2.5. ჩანაწერში **123456789** ზოგიერთ რიცხვებს შორის ჩასვით შეკრების ნიშანი „+“, ისე რომ მიიღოთ 99.

4.2.6. თაიგულებს ადგენენ 24 წითელი და 18 თეთრი ვარდისაგან. თითოეულ თაიგულში 3 წითელი და 3 თეთრი ვარდია. მაქსიმუმ რამდენი თაიგულის შედგენაა შესაძლებელი ?

4.2.7. ციყვმა კურდღელს დაუსვა 6 ამოცანა. ყოველი სწორად ამოხსნილი ამოცანისათვის კურდღელი იღებდა 3 სტაფილოს, ხოლო ყოველი არასწორად ამოხსნილი ამოცანისათვის, ციყვს უკან მიქონდა 2 სტაფილო. რამდენი ამოცანა ამოუხსნია სწორად კურდღელს, თუ, მან მიიღო 8 სტაფილო ?

4.2.8. დახაზეთ სამი ისეთი მართკუთხედი, რომელთა პერიმეტრიც 16 სმ - ია. რამდენი კვადრატი არსებობს, ასეთივე პერიმეტრით ?

II ვარიანტი

4.2.9. გამოთვალეთ: $\mathbf{7846 + 329 \times (288 - 144 \times 2) : 155;}$

4.2.10. ერთნაირი 16 კვადრატისაგან შემდგარი კვადრატიდან, ჩამოაჭრეს ერთი კუთხის კვადრატი. გაყავით დარჩენილი ფიგურა, სამ ტოლ ნაწილად.

4.2.11. სადილის 6 და ჩაის 8 კოვზი ერთად იწონის 960 გ - ს. რა წონისაა თითოეული სადილის კოვზი და თითოეული ჩაის კოვზი, თუ, სადილის კოვზი 4 - ჯერ მძიმეა ჩაის კოვზთან შედარებით.

4.2.12. ერთ ტომარაში იყო 88 კგ ფქვილი, მეორეში - ნახევრით ნაკლები. რამდენს იწონის მთელი ფქვილის ნახევრის მეოთხედი ?

4.2.13. ერთი რუსული ზღაპრის ექვსი გმირი, მიწიდან იღებს თალგამს საერთო ძალით. პაპა ორჯერ ძლიერია ბაბოზე, ბაბო სამჯერ ძლიერია შვილიშვილზე, შვილიშვილი ოთხჯერ ძლიერია ცუგაზე, ცუგა ხუთჯერ ძლიერია კატაზე და კატა ექვსჯერ ძლიერია თაგვზე. რამდენი თაგვია საჭირო თალგამის ამოსაღებად, თუ მათ არავინ ეხმარება ?

4.2.14. ასოების ნაცვლად ჩასვით რიცხვები, ხოლო წერტილების ნაცვლად განზომილებები: $\boldsymbol{A} \ldots + \boldsymbol{B}$ მმ $= \mathbf{703}$მმ.

4.2.15. დაადგინეთ რიცხვების მიმდევრობის აგების კანონზომიერება და გააგრძელეთ ის მომდევნო სამი წევრით: $\mathbf{3; 5; 9; 17; 33.}$

4.2.16. ზუკამ ნაპოვნი ფულით, იყიდა თვითმადუღარა, კრენდელი და კამფეტი. მადუღარა და კრენდელი ერთად, ღირს 48 ლარი. კრენდელში და კამფეტში ზუკამ გადაიხადა 3 ლარი. კამფეტი უფრო ძვირია კრენდელზე. რა რაოდენობის ფული იპოვა ზუკამ ?

III ვარიანტი

4.2.17. სამნიშნა კენტი რიცხვის ციფრთა ჯამია 3. ცნობილია, რომ სამივე ციფრი განსხვავებულია. იპოვეთ ეს რიცხვი.

4.2.18. გოგონამ დახაზა ორი წრფე. ერთზე მან აღნიშნა 2 წერტილი, მეორეზე - 3. სულ მონიშნულია 4 წერტილი. როგორ მოხდა ეს ? დახაზეთ შესაბამისი ნახაზი.

4.2.19. რამდენჯერ გაიზრდება კვადრატის ფართობი, თუ, მის გვერდს გავზრდით 2 - ჯერ ?

4.2.20. დაადგინეთ რიცხვების მიმდევრობის აგების კანონზომიერება და გააგრძელეთ ის მომდევნო სამი წევრით: $3; 5; 9; 17; 33$.

4.2.21. სამი ყუთი კამფეტი და ხუთი ყუთი ორცხობილა ერთად, ღირს 1350 ლარი; ხოლო სამი ყუთი კამფეტი და 8 ყუთი ორცხობილა - 1800 ლარი. რა ღირს ერთი ყუთი ორცხობილა და ერთი ყუთი კანფეტი?

4.2.22. მეორეკლასელი მოსწავლეები ემზადებიან ვაშლის ნერგების ერთ მწკრივში დასარგავად. რამდენი ნერგია საჭირო, თუ, მწკრივის სიგრძე 30 მ - ია, ხოლო ნერგებს შორის მანძილი 3 მ - ია ?

4.2.23. რიცხვის მესამედის ნახევარია 100. იპოვეთ ეს რიცხვი.

4.2.24. პატარა ქანდაში სახლის წინ სხედან: ალეკო, მარი, ზუკა და ანი. თუ, ზუკა რომელიც ზის მარცხენა მხარის ბოლოს, დაჯდება მარისა და ალეკოს შორის, მაშინ ალეკო აღმოჩნდება მარცხენა მხარის ბოლოს. ვინ როგორი თანმიმდევრობით ზის ?

IV ვარიანტი

4.2.25. ამოიწერეთ ყველა რიცხვი 1 - დან 100 - მდე. რამდენჯერ გვხვდება ციფრი 5 ?

4.2.26. კვადრატი ზომებით 3×3, შეიცავს 9 პატარა კვადრატს. სულ რამდენი კვადრატი იქნება ნახაზზე ? დახაზეთ ეს კვადრატი და დაყავით პატარა კვადრატებად.

4.2.27. დახაზეთ სამი ისეთი მართკუთხედი, რომელთა პერიმეტრიც 16 სმ - ია. რამდენი კვადრატი არსებობს, ასეთივე პერიმეტრით ?

4.2.28. სკოლისათვის იყიდეს 17 მაგიდა და რამდენიმე კარადა, სულ 2716 ლარად. მაგიდა ღირს 56 ლარი, ხოლო 4 კარადა ღირს იმდენივე, რაც 9 მაგიდა. რამდენი კარადაა ნაყიდი ?

4.2.29. ვარსკვლავების ნაცვლად, ჩასვით გამოტოვებული ციფრები:

$\mathbf{214 \times 83 + {*}{*} \times 214 = 20330.}$

4.2.30. იპოვეთ იმ კვადრატის ფართობი, რომელსაც იგივე პერიმეტრი აქვს, რაც მართკუთხედს, რომლის გვერდების სიგრძეებია 13 სმ და 5 სმ.

V ვარიანტი

4.2.31. სასკოლო ნაკვეთში მუშაობდა 11 ბრიგადა. ორი ბრიგადა გაერთიანდა. რამდენი ბრიგადა მუშაობს ახლა?

პასუხი: 10.

4.2.32. თბილისის მუნიციპალურ ავტობუსში არის 5 თავისუფალი ადგილი. გაჩერებაზე არავინ ჩამოვიდა, მაგრამ ავიდა 7 მგზავრი. დარჩა 2 თავისუფალი ადგილი. რამდენი მგზავრი დარჩა ფეხზე მდგარი ?

პასუხი: 4 მგზავრი.

4.2.33. რა რიცხვზე უნდა გავყოთ რიცხვი $\mathbf{87912}$, რომ მივიღოთ ისევ ხუთნიშნა რიცხვი, ჩაწერილი იგივე ციფრებით, მაგრამ შებრუნებული მიმდევრობით ?

პასუხი: $\mathbf{87912 : 4 = 21978.}$

4.2.34. მესამე კლასელი მოსწავლის წინაშე აგვისტოს ბოლოს დაისვა ამოცანა: 1 საშლელი, 2 ფანქარი და 3 ბლოკნოტი ღირს 38 ლარი. 3 საშლელი, 2 ფანქარი და 1 ბლოკნოტი ღირს 22 ლარი. რა ღირს კომპლექტი საშლელი, ფანქარი და ბლოკნოტი ?

პასუხი: 4 საშლელი, 4 ფანქარი და 4 ბლოკნოტი ღირს: $\mathbf{38+22=60}$ ლარი ანუ 1 საშლელი, 1 ფანქარი და 1 ბლოკნოტის კომპლექტი ეღირება: $\mathbf{60:4=15}$ ლარი.

4.2.35. ჩემოდნის მასა 1 კგ - ით მეტია ჩანთის მასაზე. რას უდრის ჩემოდნის მასა ტვირთთან ერთად, თუ, ჩანთა იგივე ტვირთით არის 3კგ ?

პასუხი: 4 კგ.

4.2.36. სწორად როგორ ვთქვათ: $\mathbf{7+8=}$

თოთხმეტს, თუ, თუთხმეტს ?

პასუხი: 15.

4.2.37. სკოლის 3 გუნდი მონაწილეობს ფეხბურთის შეჯიბრში. ყოველი გუნდი თამაშობს ერთ თამაშს დანარჩენ ორთან. სულ რამდენი მატჩი იქნება ?

პასუხი: 3 თამაში.

4.2.38. რომელი რიცხვების მოხაზულობა არ იცვლება შემობრუნებისას ?

პასუხი: $\mathbf{8; 69; 88; \ldots}$

VI (გართულებული) ვარიანტი

4.2.39. მეფრინველეობის ფაბრიკაში ქათმების რაოდენობა 20 - ით მეტია ბატების რაოდენობაზე, ხოლო იხვების რაოდენობა 30 - ით ნაკლებია ბქათმებისაზე. იხვები უფრო მეტია ფაბრიკაში, თუ, ბატები და რამდენით ?

პასუხი: ბატების რაოდენობა 10 - ით მეტია იხვებზე.

4.2.40. იპოვეთ $\boldsymbol{A}$ და $\boldsymbol{B}$ რიცხვები, თუ, $\boldsymbol{A\cdot B=A}$ და $\boldsymbol{A+B=10}$.

პასუხი: $\boldsymbol{A=9};\ \boldsymbol{B=1}$.

4.2.41. სასწორის ერთ თეფშზე დევს დიდი კომბოსტო, მეორე თეფშზე კი 2კგ მასის გირი და პატარა კომბოსტო. სასწორი წონასწორობაშია. რამდენით მეტია დიდი კომბოსტოს მასა პატარისაზე ?

პასუხი: 2 კგ - ით.

4.2.42. მავთულისაგან გააკეთეს კვადრატი, რომლის გვერდია 6 სმ. შემდეგ, გაასწორეს მავთული და მისგან გააკეთეს ტოლგვერდა სამკუთხედი. რას უდრის სამკუთხედის გვერდი ?

პასუხი: 8 სმ.

4.2.43. რომელი სამნიშნა რიცხვების ჩაწერა შეიძლება, მხოლოდ ორი ციფრით 0 და 1 ?

პასუხი: 101; 110; 111; 100.

4.2.44. მესამე კლასელი მზიკო, გიორგი და მარიამი თამაშობდნენ შაშს. თითოეულმა მათგანმა ითამაშა 2 პარტია. სულ რამდენი პარტია გათამაშდა ?

პასუხი: 3 პარტია. (მზიკო-გიორგი; მზიკო-მარიამი; გიორგი-მარიამი).

4.2.45. გიორგიმ სიბრტყეზე აიღო 5 წერტილი, რომლებიც 5 სმ - ით არიან დაშორებული *O* წერტილიდან. რომელ წირზე აღმოჩნდებიან ეს წერტილები ?

პასუხი: 5 სმ რადიუსის წრეწირზე ცენტრით *O* წერტილში.

4.2.46. პატარა ჭიანჭველა წავიდა სტუმრად მეზობელ ჭიანჭველასთან სახლში. იქით გზაზე ჭიანჭველა ფეხით წავიდა უკანა გზობაზე კი მანძილის პირველი ნახევარი ბღუნძელას კისერზე მჯდარი მგზავრობდა 2 - ჯერ უფრო ნელა, ვიდრე თავისი ფეხით შეეძლო სიარული, ხოლო გზის მეორე ნახევარი კი კალიის კისერზე იჯდა, რომელიც 5 - ჯერ უფრო სწრაფად ხტუნავდა, ვიდრე ჭიანჭველას შეეძლო სიარული. როდის უფრო ნაკლები დრო მოანდომა ჭიანჭველამ გზის გავლას, მეზობელთან წასვლისას, თუ უკან მგზავრობისას ?

პასუხი: სტუმრად წასვლისას უფრო ნაკლები დრო დასჭირდა, რადგან უკანა გზაზე, ნახევარი გზის გავლას იგივე დრო მოანდომა, რაც იქით წასვლისას, მთლიან გზას.

ყოველი მეცნიერება იმდენადაა ჭეშმარიტი,

რამდენადაც ის არის მათემატიზირებული

იმანუელ კანტი

4.3. საოლიმპიადო ამოცანების ვარიანტები IV კლასის მოსწავლეებისათვის

I ვარიანტი

4.3.1. ყუთში არის თეთრი, შავი და წიტელი კუბიკები. სულ 50 ცალი. თეთრი კუბიკები 11 - ჯერ მეტია შავებზე. წითელი კუბიკები თეთრებზე ნაკლებია, თუმცა, შავებზე მეტი. რამდენი წითელი კუბიკია ყუთში ?

4.3.2. $(2713 \times 65 + 2713 \times 35) - 2713 \times 100 =$

4.3.3. იპოვეთ, ის უდიდესი სამნიშნა რიცხვი, რომლის ყოველი ციფრიც დაწყებული მესამედან, უდრის წინა ორი ციფრის ჯამს.

4.3.4. ჭრიჭინობელამ ზაფხულის ყოველი დღე - ღამის ნახევარი ძილში გაატარა, ყოველი დღე - ღამის მესამედი ცეკვაში დახარჯა, მეექვსედი კი - სიმღერაში. დანარჩენი დრო გადაწყვიტა, რომ ზამთრისთვის მზადებაზე დაეხარჯა. დღე - ღამეში რამდენი საათი დაუთმო ჭრიჭინობელამ ზამთრისთვის მზადებას ?

4.3.5. გვერდიგვერდ დადგეს 8 ტომარა. პირველი ტომარის წონაა 88 კგ., ხოლო ყოველი შემდეგი ტომარას წონა 8 კგ - ით ნაკლებია წინაზე. იპოვეთ, ყველა ტომარის წონა.

4.3.6. მეფის ასულმა საკუთარ ყვავილნარში მოჭრა 128 ია, 192 გვირილა და 160 პიონი. რამდენი ერთნაირი თაიგულის გაკეთებაა შესაძლებელი ამ ყვავილებიდან, რამდენი გვირილა იქნება თითოეულ თაიგულში ?

4.3.7. A ქალაქიდან B - მდე მანძილი 32 კმ - ია, A - დან C - მდე 40 კმ, B - დან C - მდე 28 კმ. შეასრულეთ ნახაზი. კურიერი არის A ქალაქში,

მაგრამ მან უნდა მოიაროს B - დან C ქალაქები, A ქალაქში დაუბრუნებლად. რა უმოკლესი გზაა ამისათვის ?

4.3.8. გაკვეთილი იწყება დილის 8 საათსა და 30 წუთზე და გრძელდება 45 წუთს. გაკვეთილებს შორის დასვენებაა 5 წუთი. რომელ საათზე დაიწყება მესამე გაკვეთილი?

II ვარიანტი

4.3.9. მართკუთხედის გვერდებია 2 სმ და 8 სმ. დახაზეთ კვადრატი, რომლის ფართობიც ამ მართკუთხედის ფართობის ტოლია და იპოვეთ, კვადრატის პერიმეტრი.

4.3.10. ციფრებისაგან 3; 5; 7 შეადგინეთ ყველა ისეთი ორნიშნა რიცხვი, რომლის ციფრებიც განსხვავებულია. იპოვეთ ყველა ამ რიცხვის ჯამი.

4.3.11. ოთხმა კაცმა ჩმოართვა ხელი ერთმანეთს. სულ რამდენი ხელისჩამორთმევა იქნებოდა ?

4.3.12. გამოიანგარიშეთ:

$6804 + 2169 = ?;\quad 86 \times 39 = ?;$

$1516 - 927 = ?;\quad 7080 : 3 = ?$

4.3.13. გამოიანგარიშეთ: $140 - 40 : 5 + 3$.

4.3.14. სამკერვალოს აქვს 75 მ ნაჭერი, რომლისგანაც უნდა შეიკეროს 25 კაბა. რამდენი მეტრი ნაჭერია საჭირო ერთი კაბის შესაკერად ?

4.3.15. სამი რიცხვის ჯამია 30212. პირველი რიცხვი - უმცირესი ხუთნიშნა რიცხვია. მეორე - უდიდესი ოთხნიშნა რიცხვი. იპოვეთ მესამე რიცხვისა და 7539 რიცხვს შორის სხვაობა.

4.3.16. ერთ მაღაზიაში 18 ყუთი გამაგრილებელი სასმელი მიიტანეს, მეორეში - 24. თითოეულ ყუთში 30 ბოთლი წვენი იყო. სულ რამდენი ბოთლი მიუტანიათ ორივე მაღაზიაში?

III ვარიანტი

4.3.17. წერტილები შეავსეთ განზომილებებით:

24კმ = . . .მ; 3 სთ = . . .წთ; 8ტ = . . .კგ; 1 წთ 25 წმ = . . .წმ.

4.3.18. ილია კრეფდა ვაშლებს. 6 ვაშლი, რაც შეადგენდა შეგროვილი ვაშლის მეათედს, მან ჯიბეში ჩაიდო. დანარჩენი კალათაში ჩაალაგა. რამდენი ვაშლია კალათაში ?

4.3.19. ორი რიცხვის ჯამი 462 - ია. ერთ - ერთი მათგანი ბოლოვდება ნულით. თუ, ამ ნულს წავშლით, მივიღებთ მეორე რიცხვს. იპოვეთ ეს რიცხვები.

4.3.20. ბუჩქებთან კუკურიმ შენიშნა ჭუკები და კვიცები. დათვალა სულ 30 ფეხი და 11 კუდი. რამდენი ჭუკი ყოფილა ბუჩქებში ?

4.3.21. ოჯახში ოთხი ბავშვია: 5; 8; 13 და 15 წლის. მათი სახელებია: ია, ნიკა, ეკა და სალომე. რამდენი წლისაა თითოეული მათგანი, თუ , ერთი გოგონა დადის საბავშვო ბაღში, ია უფროსია ნიკაზე, ხოლო იას და ეკას ასაკთა ჯამი იყოფა 3 - ზე.

4.3.22. ციფრებისაგან 1; 2; 3 ჩაწერეთ ისეთი სამნიშნა რიცხვი, რომელიც იყოფა 7 - ზე.

4.3.23. სამი ხუთიანით, როგორ მივიღოთ 30 ?

4.3.24. ასი კილოგრამი ჭარხლისგან მიიღება 16 კგ შაქარი. რამდენი შაქარის მიღება შეიძლება 1ტ ჭარხლისგან ?

IV ვარიანტი

4.3.25. ორთქმავალი პირველ დღეს გზაში იყო 7 სთ, მეორე დღეს კი - 5სთ. ორ დღეში სულ გაიარა 288 კმ. რა მანძილი გაიარა ორთქლმავალმა პირველ და მეორე დღეს, თუ მისი სიჩქარე მუდმივია ?

4.3.26. სამი ყუთი ორცხობილას მასა, ტოლია ორი ყუთი კანფეტის მასის. რას უდრის ხუთი ყუთი კანფეტის მასა, თუ, ერთი ყუთი ორცხობილას მასაა 12 კგ.

4.3.27. კურსდამთავრებულთა ტრადიციულ შეხვედრაზე მოვიდა 180 ყოფილი მოსწავლე, მასწავლებლები კი 6 - ჯერ ნაკლები. რამდენი მასწავლებელი მოსულა შეხვედრაზე ?

4.3.28. საგაზეთო კიოსკში მოიტანეს გასაყიდან ილუსტრირებული ჟურნალები. მას შემდეგ, რაც გაიყიდა 60 ჟურნალი, კიოსკში დარცა 70. რამდენი ახალი ჟურნალი მოუთანიათ კიოსკში ?

4.3.29. მზიკოს ქონდა 18 კაკალი. მას შემდეგ, რაც მან რამდენიმე კაკალი აჩუქა ძმას საბას, მას დარჩა 12 კაკალი. რამდენი კაკალი მიუცია მზიკოს საბასთვის ?

4.3.30. ახალ ბაზრობაზე მოიტანეს 90 სავაჭრო კარავი. თითოეულ რიგში იდგმება 18 კარავი. სულ რამდენ რიგს ეყოფა მოტანილი კარვები ?

4.3.31. სუპერმარკეტში 20 სექციაა. თითოეულ სექციაში მუშაობს 3 გამყიდველი - მენეჯერი. სულ რამდენი გამყიდველი - მენეჯერია სუპერმარკეტში ?

4.3.32. დედამიწაზე ყველაზე მაღლა არიან ვერცხლისფერი ღრუბლები. ისინი ჩანან 90 კმ სიმაღლეზე. გამოსახეთ ეს სიმაღლე მეტრებში.

V ვარიანტი (პასუხებით)

4.3.33. იპოვეთ კანონზომიერება და გააგრძელეთ მიმდევრობა:

$2; 5; 14; 41; \ldots$

პასუხი: 122. ყოველი შემდგომი რიცხვი უდრის გასამკეცებულ წინა რიცხვს მინუს 1.

4.3.34. რვეული უფრო იაფია საწერკალამზე, მაგრამ უფრო ძვირია ფანქარზე. რა უფრო იაფია ფანქარი თუ, საწერკალამი ?

პასუხი: ფანქარი.

4.3.35. გამოიანგარიშეთ 200 ასეულისა და 1 ერთეულის ჯამი.

პასუხი: 20001.

4.3.36. იპოვეთ ჯამი: $\mathbf{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.}$

პასუხი: 55.

4.3.37. წრფეზე აიღეს 4 წერტილი. რამდენი მონაკვეთია ამ წრფეზე ?

პასუხი: 6 მონაკვეთი.

4.3.38. ზუკას ქონდა 7 ჯოხი. მან ერთი ჯოხი გადატეხა შუაზე. რამდენი ჯოხი აქვს ახლა ზუკას ?

პასუხი: 8.

4.3.39. გიორგი ცხოვრობს ნიკაზე მაღლა და მზიკოზე დაბლა, ხოლო ილია ცხოვრობს ნიკაზე ქვემოთ. რომელ სართულზე ცხოვრობს თითოეული მათგანი ოთხსართულიან სახლში ?

პასუხი: პირველ სართულზე - ილია, მეორეზე - ნიკა, მესამეზე - გიორგი, მეოთხეზე - მზიკო.

4.3.40. ჩაწერეთ ყველა ორნიშნა რიცხვი ციფრებით 1; 2; 3, ისე რომ ციფრები არ მეორდებოდეს და იპოვეთ მათი ჯამი.

ამოხსნა: $\mathbf{12 + 13 + 21 + 31 + 23 + 32 = 132.}$

VI ვარიანტი (პასუხებით)

4.3.41. ტომ სოიერმა გადაწყვითა შეღებოს 20 მ სიგრძის ღობე. რამდენი ბოძია ღობეში ჩასმული, თუ ბოძებს შორის მანძილი 2 მ - ია ?

პასუხი: $\mathbf{20 : 2 + 1 = 11}$ ბოძი.

4.3.42. ბიჭუნა და კარლსონი წავიდნენ სამოგზაუროდ სუპერმატარებლით. ბიჭუნა არის 117 - ე ვაგონში მატარებლის თავიდან, ხოლო კარლსონი არის 134 - ე ვაგონში მატარებლის ბოლოდან. აღმოჩნდა რომ ბიჭუნა და კარლსონი მოგზაურობენ გვერდიგვერდ ვაგონებში. რამდენი ვაგონია მატარებელში ?

პასუხი: 251.

4.3.43. ალი - ბაბამ თავის გამოქვაბულში, სადაც განძს ინახავდა კარებს დაადო კოდური კლიტე შიფრით:

$$\square\,\square : \square = \square - \square = \square + \square = \square \cdot \square$$

კოდის გასაშიფრად, უნდა ავკრიფოთ სხვადასხვა ციფრები ისე, რომ ტოლობები იყოს ძალაში.

პასუხი: $56\colon 8 = 9 - 2 = 3 + 4 = 1 \times 7$.

4.3.44. ხუთმა მეგობარი ცდილობდა დაედგინა კვირის რა დღეა დღეს:

მზიკომ თქვა: „გუშინწინ იყო პარასკევი“;

გიორგიმ თქვა: „ზეგ იქნება სამშაბათი“;

მარიამმა თქვა: „გუშინ იყო შაბათი“;

ილიამ თქვა: „ხვალ იქნება ორშაბათი“;

ზუკამ თქვა: „დღეს ხუთშაბათია“.

მათგან ერთი მოტყუვდა. ვინ შეცდა ?

პასუხი: ზუკა.

4.3.45. კოვიდ - საავდმყოფოში ავდმყოფების საკვებად მოიტანეს 300 კგ ბოსტნეული (კარტოფილი, სტაფილო და ხახვი). კარტოფილი და სტაფილო იყო 230 კგ; კარტოფილი და ხახვი 200 კგ. რამდენი კილოგრამი კარტოფილი, რამდენი სტაფილო და რამდენი ხახვი მოუტანიათ საავდმყოფოში ?

პასუხი: $300 - 230 = 70$ კგ ხახვი; $200 - 70 = 130$ კგ კარტოფილი;

$300 - 200 - 100$ კგ სტაფილო.

4.3.46. სამმა ბიჭუნამ მაგიდაზე გაშალა ქაღალდის ხუთკუთხედები და ექვსკუთხედები. ამ ფიგურებს სულ აქვს 37 წვერო. რამდენი ხუთკუთხედია მაგიდაზე ?

ამოხსნა: 5 ხუთკუთხედი და 2 ექვსკუთხედი.

4.3.47. სამნიშნა რიცხვს მარცხნიდან მიუწერეს ციფრი 1. რამდენით გაიზარდა რიცხვი ?

პასუხი: ათასით.

4.3.48. მოტოციკლისტმა 80 კმ/სთ სიჩქარით გაიარა 160 კმ. გზაზე ის რამდენჯერმე გაჩერდა. რამდენ ხანს იყო მოტოციკლისტი გზაში, თუ, გაჩერებებზე მან დახარჯა 25 წთ ?

პასუხი: $160:80=2$ სთ გზაში მოძრაობდა, გზაში იყო 2 სთ 25 წთ.

4.4. საოლიმპიადო ამოცანების ვარიანტები V კლასის მოსწავლეებისათვის

I ვარიანტი

4.4.1. ვრსკვლავები შეცვალეთ შესაბამისი ციფრებით:

ა) $*** - ** = \mathbf{1}$; ბ) $**\cdot * - * = \mathbf{1}$; გ) $\mathbf{1}\ *\cdot *\ \mathbf{1} = \mathbf{1}\ **\ \mathbf{1}$.

4.4.2. იპოვეთ ის უდიდესი სამნიშნა რიცხვი, რომელიც 4-ზე გაყოფისას, ნაშთში იძლევა 3-ს, 5-ზე გაყოფისას 4-ს, ხოლო 6-ზე გაყოფისას 5-ს.

4.4.3.

ა) $\begin{array}{r} ** \\ 52 \\ \hline +\ *6 \\ ** \\ \hline *7* \end{array}$ ბ) $\begin{array}{r} 2* \\ *2 \\ \hline +\ *8 \\ 7* \\ \hline 7*8 \end{array}$ გ) $\begin{array}{r} ** \\ 27 \\ \hline +\ **8 \\ ** \\ \hline 3** \end{array}$ დ) $\begin{array}{r} 4* \\ *6 \\ \hline +\ 2*2 \\ 2*5 \\ \hline ***2 \end{array}$

4.4.4. გემი კიევიდან ხერსონამდე მიცურავს 3 დღე - ღამე, უკან კი დინების საწინააღმდეგოდ 4 დღე - ღამე. რა დროს მოანდომებდა კიევიდან ხერსონამდე ცურვას ტივი ?

4.4.5. დაფაზე 25×25 განლაგებულია შაშის 25 ქვა. ამასთან, მათი განლაგება სიმეტრიულია დიაგონალის მიმართ. დაამტკიცეთ, რომ ერთი შაში მაინც დევს დიაგონალზე.

4.4.6. ორი რიცხვის სხვაობაა 0.7. თუ, მათ შორის უდიდესს გავზრდით 5-ჯერ, ხოლო მცირეს დავტოვებთ უცვლელად, მათ შორის სხვაობა გახდება 75.1. იპოვეთ ეს რიცხვები.

4.4.7. სამი მეგობარი გოგონა გარეთ გამოვიდა შესაბამისად: თეთრი, მწვანე და ლურჯი კაბით. მათი ფეხსაცმელებიც ასევე, იყო; თეთრი,

მწვანე და ლურჯი. ცნობილია, რომ მხოლოდ ანიკოს ფეხსაცმლის ფერი ემთხვევა კაბის ფერს. ვიკას არც ფეხსაცმელი და არც კაბა არ იყო თეთრი. ნათელა გამოვიდა მწვანე ფეხსაცმლით. განსაზღვრეთ თითოეული გოგონას კაბისა და ფეხსაცმლის ფერი.

4.4.8. შეიძლება თუ, არა რომ სამი ნატურალური რიცხვის ჯამი იყოს ლუწი, ხოლო მათივე ნამრავლი კენტი ?

II ვარიანტი

4.4.9 რომელიღაც თვეში სამი კვირა დღე დაემთხვა ლუწ რიცხვებს. კვირის რა დღე იყო ამ თვის 20 რიცხვი ?

4.4.10. ერთმანეთს შეხვდა სამი მეგობარი: მოქანდაკე -თეთრაძე, მევიოლინე შავიშვილი და მხატვარი - ქერაშვილი. „რა უცნაურია, რომ ჩვენგან ერთი თეთრთმიანია, ერთი შავთმიანია და ერთიც ქერა, მაგრამ არცერთის თმის ფერი არ ემთხვევა იმ ფერს, რაზეც მიუთითებს მისი გვარი" , შენიშნა შავთმიანმა. „შენ მართალი ხარ" - უპასუხა თეთრაძემ. რა ფერის თმა აქვს მხატვარს ?

4.4.11. აუზის ასავსებად, დამონტაჟებულია წყლის ორი ონკანი, რომელთაგან პირველ ონკანს, მარტო მუშაობისას შეუძლია აუზის ავსება 4 სთ - სა და 30 წთ - ში, ხოლო მეორეს - 6 სთ - სა და 45 წთ - ში. თავიდან მოშვებული იყო მხოლოდ პირველი ონკანი იმ დროის განმავლობაში, რაშიც ორივე ერთად აავსებდა აუზს, ამის შემდეგ, პირველ ონკანთან ერთად, გახსნეს მეორე ონკანიც. მეორე ონკანის გახსნიდან რამდენ ხანში აივსება აუზი ?

4.4.12. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი n რიცხვისათვის, მოიძებნება

$111\ldots1000\ldots0$ სახის ისეთი რიცხვი, რომელიც უნაშთოდ იყოფა n - ზე.

4.4.13. წილადის მრიცხველი გაადიდეს ერთით, ხოლო მნიშვნელი ათით. შეიძლება, თუ, არა რომ წილადი გაიზარდოს ?

4.4.14. მამამ და შვილმა გადაწყვიტა, ორ ხეს შორის მანძილის გაზომვა ნაბიჯებით. ამისათვის, ერთდროულად დაიწყეს ზომვა ერთი და იგივე ხიდან. მამის ნაბიჯის სიგრძე 70 სმ-ია, შვილის - 56 სმ. იპოვეთ ხეებს შორის მანძილი, თუ, ცნობილია რომ მათი ნაბიჯების კვალი დაემთხვა ერთმანეთს 10-ჯერ.

4.4.15. რა კუთხეს შემოწერს საათების ისარი ორი საათის გავლისას ?
ამოხსნა: საათების ისარი სრულ კუთხეს ანუ 360° კუთხეს შემოწერს 12 საათში, რაც იმას ნიშნავს რომ ერთ საათში შემოწერს $360^{\circ}:12=30^{\circ}$- იან კუთხეს, ხოლო 2 სთ-ში კი - $\mathbf{60}^{\circ}$**- იან კუთხეს.**

4.4.16. იპოვეთ ჯამი: $\boldsymbol{S}=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{8\cdot9}+\frac{1}{9\cdot10}.$

III ვარიანტი

4.4.17. გაშიფრეთ ჩანაწერი: $\mathbf{1}\boldsymbol{BC}+\boldsymbol{CB}\mathbf{1}=\boldsymbol{DDD}$. **ერთნაირი ასოებით ერთი და იგივე ციფრია აღნიშნული.**

4.4.18. ნიკამ 100 ფურცლიანი წიგნიდან მოინიშნა რომელიღაც 23 გვერდი და შეაჯამა ამ გვერდების ნომრები. აჩვენეთ, რომ მას არ შეეძლო მიეღო ჯამში 2016.

4.4.19. მარიამმა 25 ფანქარში გადაიხადა იმდენი ლარი, რამდენი ფანქრის ყიდვაც შეიძლება 1 ლარით. რა ღირსა 1 ფანქარი ?

4.4.20. საათებისა და წუთების ისრები ერთმანეთს ემთხვევიან 12 საათზე. ამის შემდეგ პირველად, რომელ საათზე დაემთხვევიან ისრები ?

4.4.21. გვაქვს მეწკვის 5 ნაგლეჯი, რომელთაგან თითოეული შეიცავს 3 რგოლს. როგორ გავაერთიანოთ ეს ნაგლეჯები ერთიან მეწკვად, ისე, რომ გავხსნათ და შევკრათ მხოლოდ სამი რგოლი ?

4.4.22. იპოვეთ ჯამი:

$$\boldsymbol{S}=\frac{4}{5\cdot7}+\frac{4}{7\cdot9}+\frac{4}{9\cdot11}+\frac{4}{11\cdot13}+\frac{4}{13\cdot15}+\frac{4}{15\cdot17}+\ldots\frac{4}{59\cdot61}.$$

4.4.23. მოცემული რიცხვის 225-ზე გაყოფისას, ნაშთში დარჩა 150. გაიყოფა თუ არა, მოცემული რიცხვი უნაშთოდ 75-ზე ?

4.4.24. საქართველოში ჩამოვიდა 100 ტურისტი. მათგან 10-მა არ იცოდა არც გერმანული და არც ფრანგული. 75-მა იცოდა გერმანული და 83-მა ფრანგული. რამდენმა ტურისტმა იცოდა ორივე ენა ?

IV ვარიანტი

4.4.25. $(** + *)(** + *) = ****$. ვარსკვლავების ნაცვლად ჩასვით რიცხვები, ისე რომ მიიღოთ სწორი ტოლობა, ამასთან გამოიყენეთ არაუმეტეს 4 განსხვავებული ციფრი.

4.4.26. გიორგიმ და ილიამ გადაწყვიტეს ასაწყობი კონსტრუქტორის ყიდვა. ილიას ქონდა თანხა, რომელიც გიორგის თანხის $\frac{5}{6}$ - ს შეადგენდა. გიორგის კონსტრუქტორის საყიდლად არ ყოფნიდა საჭირო თანხის $\frac{3}{8}$ ნაწილი, ხოლო ორივე ბიჭუნას ერთად ქონდათ თანხა, რომელიც 1.4 ლარით მეტია კონსტრუქტორის ფასზე. რა ღირდა კონსტრუქტორი ?

4.4.27 . ორ სხვადასხვა სახის რვეულში ერთად გადაიხადეს 1 ლარი და 35 თეთრი. რა ღირს თითოეული სახის რვეული, თუ, პირველი რვეულის ღირებულების 0.35 ნაწილი, ტოლია მეორე სახის რვეულის ფასის 0.28 ნაწილის ?

4.4.28. რომელი ციფრი უნდა ჩავსვათ ვარსკვლავის ნაცვლად ოთხნიშნა რიცხვში 82 $**$, რომ ის უნაშთოდ გაიყოს 90-ზე ?

4.4.29. თუ, ჩაფიქრებულ რიცხვს გამოვაკლებთ 11-ს, ის უნაშთოდ გაიყოფა 11-ზე. თუ, ჩაფიქრებულ რიცხვს გამოვაკლებთ 7-ს, ის უნაშთოდ გაიყოფა 7-ზე. თუ, გამოვაკლებთ 13-ს, მაშინ გაიყოფა 13-ზე. იპოვეთ ჩაფიქრებული რიცხვი.

4.4.30. რამდენი ისეთი ორნიშნა რიცხვი არსებობს, რომლებიც ჩაწერილია მხოლოდ: ა) ლუწი ციფრებით ? ბ) კენტი ციფრებით ? (ციფრები არ მეორდება).

4.4.31. ეგვიპტეში განძის საცავიდან წაიღეს ერთი მეცამეტედი ნაწილი. მეორედ, დარჩენილის ერთი მეჩვიდმეტედი ნაწილი. ამის შემდეგ, საცავში დარჩა 150 ერთეული განძი. რამდენი ერთეული განძი იყო საცავში თავდაპირველად ?

4.4.32. ყუთში გვაქვს თეთრი და შავი ბურთულები. მინიმუმ, რამდენი ბურთულა უნდა ამოვიღოთ ყუთში ჩაუხედავად, რომ ამოღებულ ბურთულებს შორის აუცილებლად იყოს ორი ერთნაირი ფერის ბურთულა ?

V ვარიანტი

4.4.33. ტომარაში გვაქვს 24 კგ ლურსმანი. როგორ ავწონოთ 9 კგ ლურსმანი მხოლოდ ორთეფშიანი სასწორით ?

4.4.34. შალვას ყავს 2 ბიჭი. თუ, მათი ასაკის რიცხვების ნამრავლს მივუმატებთ ასაკის რიცხვების ჯამს, მივიღებთ 14-ს. რა ასაკის ვაჟები ყოლია შალვას ?

4.4.35. ლუწი იქნება, თუ კენტი: ა) ორი ლუწი რიცხვის ნამრავლი ? ბ) ორი კენტი რიცხვის ნამრავლი ? გ) კენტი და ლუწი რიცხვის ნამრავლი

4.4.36. კლასში 14 მოსწავლე ინგლისურ ენას სწავლობს, 8 - ფრანგულს, ხოლო 3 მოსწავლე - ორივე ენას. რამდენი მოსწავლეა კლასში, თუ ცნობილია, რომ ყოველი მოსწავლე ერთ ენას მაინც სწავლობს ?

4.4.37. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი გვერდების სიგრძეებია: 27; 56 და 28 სმ.

4.4.38. კაკლის 8 ხე იზრდება ერთ რიგში. ცნობილია, რომ ორ მეზობელ ხეზე მოსხმული კაკლების რაოდენობა განსხვავდება 1-ით. შეიძლება, თუ არა რომ კაკლების საერთო რაოდენობა იყოს 2007 ?

4.4.39. თივის ერთი ზვინი ცხენს ყოფნის საკვებად 1 თვე, თხას - 2 თვე, ხოლო სხვარს - 3 თვე. რამდენ ხანს ეყოფა თივის ზვინი საკვებად სამივეს ერთად ?

4.4.40. დაამტკიცეთ, რომ 1000 ნატურალური რიცხვიდან, ყოველთვის შეგვიძლია ავირჩიოთ რამდენიმე მათგანი ისე, რომ მათი ჯამი იყოფოდეს 1000 - ზე.

VI ვარიანტი

4.4.41. მოცემულია ტოლობა:

$(\mathbf{1}\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{3}\cdot\mathbf{4}\cdot\mathbf{5}\cdot\mathbf{6}\cdot\mathbf{7}\cdot\mathbf{8}\cdot\mathbf{9}):(\text{ს}\cdot\text{ა}\cdot\text{მ}\cdot\text{ე}\cdot\text{ბ}\cdot\text{ა})=\text{ტ}\cdot\text{ა}\cdot\text{ძ}\cdot\text{ა}\cdot\text{რ}\cdot\text{ი}.$

განსხვავებული ასოები, განსხვავებულ ციფრებს აღნიშნავს. რომელი ციფრია „ა“ ასოთი დაშიფრული ?

4.4.42. საათი უჩვენებს 12 საათს. რამდენჯერ და რომელ საათებში მოხდება საათებისა და წუთების ისრების თანხვედრა მომავალ შუაღამემდე ?
4.4.43. რომელი ხუთნიშნა რიცხვები არის უფრო ბევრი: რომლებიც ლუწი ციფრებით ჩაიწერება, თუ რომლებიც კენტი რიცხვებით ჩაიწერება (ციფრები არ მეორდებიან) ?
4.4.44. ბოთლში, ჭიქაში, დოქში და ქილაში ჩასხმულია: რძე, ლიმონათი, ბურახი და წყალი. ცნობილია, რომ წყალი და რძე არ არიან ბოთლში, ლიმონათიანი ჭურჭელი დგას დოქსა და ბურახიან ჭურჭელს შორის. ქილაში არაა ლიმონათი და არც წყალი. ჭიქა დგას ქილასთან და რძიან ჭურჭელთან. სადაა ჩასხმული თითოეული სითხე ?
4.4.45. რომელი ციფრი უნდა ჩავსვათ ვარსკვლავის ნაცვლად ოთხნიშნა რიცხვში $777*$, რომ ის უნაშთოდ გაიყოს 6-ზე ?

4.4.46. ერთი მუშა გეგმიური სამუშაოს შესრულებას ანდომებს 4 სთ - ს, ხოლო მეორე კი 6 სთ - ს. რამდენ ხანს მოუნდება იგივე სამუშაოს შესრულებას მესამე მუშა, რომლის შრომის ნაყოფიერებაც პირველი ორი მუშის საშუალოს ტოლია ?

4.4.47. დაამტკიცეთ, რომ მარტივი რიცხვების სიმრავლე უსასრულოა.

4.4.48. გიორგი დილის 9 სთ-სა და 25 წუთზე გამოვიდა A პუნქტიდან და B პუნქტში ჩამოვიდა 13 სთ-სა და 15 წთ-ზე. მეორე დღეს გამოვიდა B - დან A - სკენ დილის 11 სთ-ზე, იარა უფრო სწრაფად და A პუნქტში ჩამოვიდა 14 სთ-სა და 40 წთ-ზე. ამ ორ პუნქტს შორის მანძილი 12 კმ-ია. განსაზღვრეთ A - დან რა მანძილზეა ის წერტილი, სადაც გიორგი ორივე დღეს იყო ერთი და იმავე საათზე.

4.5. საოლიმპიადო ამოცანების ვარიანტები VI კლასის მოსწავლეებისათვის

I ვარიანტი

4.5.1. ჭადრაკის ტურნირი ტარდება წრიული სისტემით ანუ მოჭადრაკეთა ნებისმიერი წყვილი, ერთმანეთს ხვდება ერთხელ. ტურნირში მონაწილეობს 7 მოსწავლე. ცნობილია, რომ გიორგიმ ითამაშა 6 პარტია, ილიამ - ხუთი, ალეკომ და ლექსომ - სამ-სამი, მზიკომ და მარიამმა - ორ-ორი, ზუკამ ერთი. ვისთან ითამაშა ალეკომ ?

4.5.2. სიბრტყეზე განლაგებულია რამდენიმე წერტილი ისე, რომ არცერთი სამი ერთ წრფეზე არ ძევს. ზოგიერთი წერტილები ერთმანეთთანაა შეერთებული წრფის მონაკვეთით. დაამტკიცეთ, რომ მოიძებნება ისეთი ორი წერტილი, რომელთაგანაც გამოდის ერთნაირი რაოდენობის მონაკვეთები.

4.5.3. კრაზანა ჩაძვრა კუბის ფორმის საშაქრეში. შეძლებს თუ, არა კრაზანა ყველა წიბოს შემოვლას ისე, რომ მხოლოდ ერთხელ შემოიაროს ყველა წიბო ? მას შეუძლია მხოლოდ, წიბოების გასწვრივ მოძრაობა.

4.5.4. დაამტკიცეთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\mathbf{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

4.5.5. დაამტკიცეთ, რომ

$$\mathbf{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1}.$$

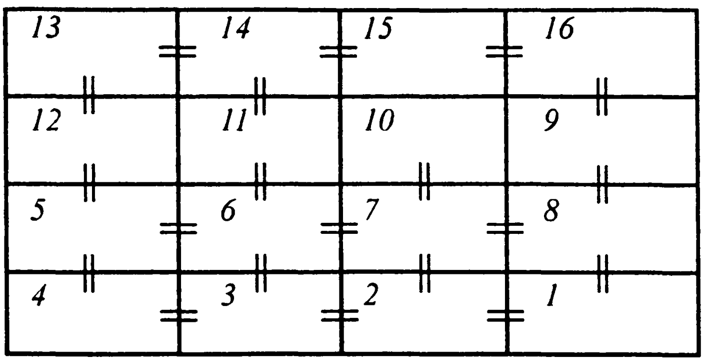
4.5.6. ამოხსენით მთელ რიცხვებში განტოლება:

$$\mathbf{x^3-x^2-xy-17x-3y+8=0}.$$

4.5.7. საწყობში ხორბლის ტენიანობა 16% აღმოჩნდა. 200 კგ ხორბლის გაშრობისას, მისი წონა 20 კგ - ით შემცირდა. იპოვეთ ხორბლის ტენიანობა გამოშრობის შემდეგ 0.1% სიზუსტით.

II ვარიანტი

4.5.8. ნახაზზე გამოსახულია მიწისქვეშა ლაბირინთის გეგმა:



მიწისქვეშა სარდაფი შეიცავს, ერთმანეთთან კარებებით დაკავშირებულ 16 ოთახს. შეიძლება თუ, არა რომ 1 ოთახიდან დაწყებული,

შემოვიაროთ ყველა ოთახი თითოჯერ ? რომელ ოთახში დასრულდება შემოვლა ?

4.5.9. დავამტკიცოთ, რომ ყველა კენტი რიცხვი ჯამში, იძლევა ზუსტ კვადრატს:

$$\mathbf{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2.}$$

4.5.10. მოცემული x დადებითი რიცხვის მთელ ნაწილს, აღნიშნავენ შემდეგნაირად $[x]$. მაგალითად, $[\mathbf{2}]=\mathbf{2}$; $[\mathbf{5.7}]=\mathbf{5}$; $\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right]=\mathbf{0}$. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური $\boldsymbol{n}$ რიცხვისათვის: $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=\boldsymbol{n}$.

4.5.11. დაამტკიცეთ, რომ $(\mathbf{11}^{n+2}+\mathbf{12}^{2n+1})\ \vdots\ \mathbf{133}$.

4.5.12. ამოხსენით განტოლება მთელ რიცხვებში:

$\mathbf{19}x+\mathbf{99}y=\mathbf{9}$.

4.5.13. აუზის შემავსებელი მილის ნაწილობრივი დაცობის გამო, წყლის მოცულობის მიწოდება შემცირდა 60% - ით. რამდენი პროცენტით გაიზრდება აუზის შევსებისთვის საჭირო დრო ?

4.5.14. ΔABC - ში, C წვეროდან გავლებულია შიგა და გარე კუთხის ბისექტრისები. შიგა ბისექტრისა AB გვერდთან ადგენს $\mathbf{126}^{\circ}$ - იან კუთხეს. რა კუთხეს ადგენს AB გვერდის გაგრძელებასთან გარე კუთხის ბისექტრისა ?

III ვარიანტი

4.5.15. ტოლფერდა სამკუთხედში, კუთხე სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხის ბისექტრისასა და ფუძესთან მდებარე კუთხის ბისექტრისას შორის $\mathbf{130}^{\circ}$ - ია. იპოვეთ, სამკუთხედის კუთხეები.

4.5.16. დაამტკიცეთ, რომ ოთხი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ჯამი, არ შეიძლება რომ იყოს მარტივი რიცხვი.

4.5.17. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორი რიცხვი 3 - ზე გაყოფისას, ნაშთში იძლევიან 1 - ს, მაშინ მათი ნამრავლიც 3 - ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევა 1 - ს.

4.5.18. ამოხსენით განტოლება $|x-8|+x=5$.

4.5.19. შეჯიბრში რომელიც მიმდინარეობს წრიული სისტემით, მონაწილეობს 12 სპორტსმენი. ჩატარებულია ყველა შეხვედრა. რას უდრის შეხვედრათა რაოდენობა ?

4.5.20. საჭადრაკო ტურნირში, სადაც ყველას უნდა ეთამაშა ყველასთან, ორი მოჭადრაკე ავად გახდა და გამოეთიშა თამაშს, როცა უკვე ჩატარდა შეხვედრათა ნახევარი. ტურნირში ჩატარდა სულ 94 შეხვედრა. რამდენი მოჭადრაკე მონაწილეობდა ტურნირში ?

4.5.21. დაამტკიცეთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$.

IV ვარიანტი

4.5.22. დაამტკიცეთ, რომ სამი მომდევნო ნატურალური რიცხვის კუბების ჯამი იყოფა 9 - ზე.

4.5.23. $2x+3y=13$.

4.5.24. სამშენებლო სამუშაოების მოცულობა იზრდება 80% - ით. რამდენი პროცენტით უნდა გავზარდოთ მუშების რაოდენობა, თუ, შრომის ნაყოფიერება იზრდება 20% - ით ?

4.5.25. მართკუთხედის ორი მოპირდაპირე პარალელური გვერდი გაზარდეს 10 % - ით, ხოლო დანარჩენი ორი შეამცირეს 10 % - ით. როგორ შეიცვალა მართკუთხედის ფართობი ?

4.5.26. რა ციფრით ბოლოვდება ქვემოთ მოყვანილი რიცხვი :

$3^{13}+10^{13}+18^{13}$.

4.5.27. დაამტკიცეთ, რომ ოთხი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ჯამი, არ შეიძლება რომ იყოს მარტივი რიცხვი.

4.5.28. ამოხსენით უტოლობა: $|x-3.5|<2$.

V ვარიანტი

4.5.29. ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ - ერთი გარე კუთხე $\mathbf{80^{\circ}}$ - ია. იპოვეთ კუთხე, სამკუთხედის ფუძესა და ფერდზე დაშვებულ სიმაღლეს შორის.

4.5.30. რამდენი დიაგონალის გავლება შეიძლება ამოზნექილ: ა) 103 გვერდიან მრავალკუთხედში; ბ) $\boldsymbol{n}$ კუთხედში ?

4.5.31. რა ციფრით ბოლოვდება ქვემოთ მოყვანილი რიცხვი :

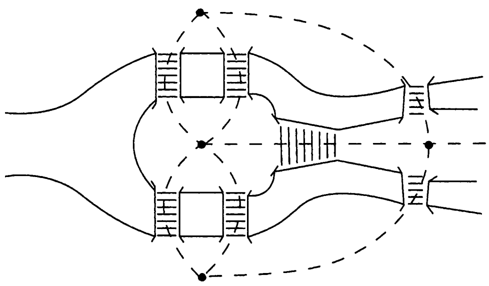
$\mathbf{2022^{2022} + 10^{2022}}$.

4.5.32. $|\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{11}| + \boldsymbol{x} = \mathbf{8}$.

4.5.33. მართკუთხედის სიგრძე შეამცირეს 2.4 სმ - ით, ხოლო სიგანე გაზარდეს 30 % - ით. ამის შედეგად, მართკუთხედის ფართობი გაიზარდა 4 % - ით. იპოვეთ, ახალი მართკუთხედის სიგრძე.

4.5.34. სამი რიცხვის ჯამია 136.5. თუ, პირველს გავამრავლებთ 8 - ზე, მეორეს - 4 - ზე და მესამეს 6 - ზე, ეს ნამრავლები ერთმანეთს გაუტოლდება. იპოვეთ, ეს რიცხვები.

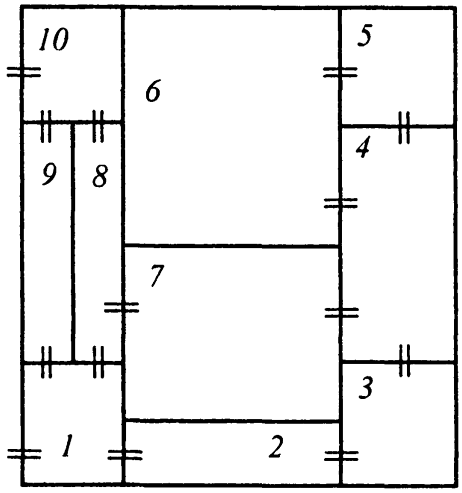
4.5.36. ამოხსენით ეილერის ამოცანა. 1736 წელს ლეონარდ ეილერი სეირნობდა ქ. კენიგსბერგში (ამჟამად, კალინინგრადი). მდინარე პრეგელზე არის 7 ხიდი



ლეონარდ ეილერი დაინტერესდა, შესაძლოა თუ, არა ყველა ამ ხიდის მხოლოდ ერთხელ გავლით, შემოვიაროთ მდინარე პრეგელის კუნძული ?

VI ვარიანტი

4.5.37. ნახაზზე გამოსახულია მიწისქვეშა ლაბირინთის გეგმა:



მიწისქვეშა სარდაფი შეიცავს, ერთმანეთთან კარებებით დაკავშირებულ 10 ოთახს. შეიძლება თუ, არა რომ 1 ოთახიდან დაწყებული, შემოვიაროთ ყველა ოთახი თითოჯერ ? რომელ ოთახში დასრულდება შემოვლა ?

4.5.38. დაამტკიცეთ, რომ

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1.$$

4.5.39. იპოვეთ ჯამი: $S_n = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \ldots + (-1)^n$.

4.5.40. დაამტკიცეთ, რომ სამი მომდევნო ნატურალური რიცხვის კუბების ჯამი იყოფა 9 - ზე.

4.5.41. იპოვეთ დიოფანტური განტოლების ორი ნატურალური ამონახსნი:

$$28x + 30y + 31z = 365.$$

4.5.42. იპოვეთ ორი რიცხვი, თუ, ერთის $\frac{5}{8}$ უდრის მეორის $\frac{3}{4}$ -ს და ერთი მეორეზე 12 - ით მეტია.

4.5.43. დაამტკიცეთ დირიხლეს თეორემა: მარტივი რიცხვების სიმრავლე უსასრულოა.

მათემატიკა წარმოგვიდგენს
ადამიანის სულის სიძლიერეს,
რომელიც მოწოდებულია
დაგვაჯილდოვოს გრძნობების
არასრულყოფილებისა და სიცოცხლის
მოკლე ხანგრძლივობის გამო.
ჟ.ფურიე

V თავი. განმავითარებელი ამოცანები, დაწყებითი საფეხურის მოსწავლეებისათვის

5.1. სახალისო ამოცანები საჯარო სკოლების დაწყებითი საფეხურის მოსწავლეთათვის „კენგურუს“ კონკურსის მასალების ბაზაზე

5.1.1. რამდენი სხვადასხვა ასოა სიტყვებში: „ვაშა - კენგურუ“.

პასუხი: 9.

5.1.2. ქაღალდის ფურცელზე დასვეს წერილი და ამ წერტილზე გაავლეს 4 წრფე. რამდენ ნაწილად გაიყო ამ წრფეებით ქაღალდის ფურცელი ?

პასუხი: 8 ნაწილად.

5.1.3. ექვს საათნახევარში იქნება შუა ღამე. რომელი საათია ახლა ?

პასუხი: 17 სთ 30 წთ.

5.1.4. წელიწადის რამდენი თვის დასახელება მოიცავს 5 ასოს ?

პასუხი: 2.

5.1.5. პირველ აკვარიუმში 12 თევზით უფრო მეტია, ვიდრე მეორეში. რამდენი თევზი უნდა გადავსვათ პირველი აკვარიუმიდან მეორეში, რომ თევზების რაოდენობა, ორივეში გაუტოლდეს ერთმანეთს ?

პასუხი: 6 თევზი.

5.1.6. ამ რიცხვებიდან, რომელია სხვებისგან განსხვავებული ?

ა) ასჯერ ოცი;

ბ) 20 ასეული;

გ) 200 ათეული;

დ) ორი ათასი;

ე) ასჯერ ორასი.

პასუხი: ე) ასჯერ ორასი.

5.1.7. ანა მაღალია მზიკოზე, მაგრამ უფრო დაბალია მარიამზე. ნინო მაღალია ხათუნაზე, მაგრამ უფრო დაბალია ანაზე. ვინაა ამ გოგონებიდან ყველაზე მაღალი ?

პასუხი: მარიამი.

5.1.8. ანას უყვარს 3 - ზე გამრავლება, მარიამს - 2 - ის მიმატება, ხოლო ილია - 1 - ის გამოკლება. რა მიმდევრობით უნდა გამოვიძახოთ ეს მოსწავლეები საყვარელი ოპერაციის შესასრულებლად, რომ 1 - სგან მივიღოთ 4 ?

პასუხი: ჯერ ანა, მერე მარიამი და შემდეგ ილია.

5.1.9. გიორგის 20 კუბიკი აქვს, ალეკოს 12, მზიკოს 8 და მარიამს 6. რომელ მოსწავლეს შეუძლია ყველა თავისი კუბიკებით ააშენოს ერთი დიდი კუბიკი ?

პასუხი: მზიკოს.

5.1.10. სასტუმროში, სტუმრების დასახვედრად მზადაა 5 სამადგილიანი და ერთი ორადგილიანი ნომერი. კიდევ რამდენი ორადგილიანი ნომერია გასამზადებელი 25 ტურისტის ჯგუფის მისაღებად ?

პასუხი: 4 ორადგილიანი ნომერი.

5.1.11. ძველმა მეკობრემ თავისი წარსული ბრძოლების უკვდავსაყოფად მოაჭრევინა თითო მონეტა 1000 დუკატიანი, 3000 დუკატიანი, 4000 დუკატიანი, 6000 დუკატიანი და 7000 დუკატიანი. რამდენნაირად შეუძლია მას ამ მონეტებით შეადგინოს 14000 დუკატი ?

პასუხი: სამნაირად.

5.1.12. რამდენი ისეთი ორნიშნა რიცხვი არსებობს, რომლის ათეულების ციფრიც ნაკლებია ერთეულების ციფრზე ?

პასუხი: 36.

5.1.13. სამი ახალგაზრდა კენგურუ მიშა, გრიშა და ნიკა სხედან სასწორზე. თუ, სასწორიდან ჩამოხტება მიშა, სასწორი აჩვენებს 3 კგ - ს. თუ, სასწორიდან ჩამოხტება გრიშა, სასწორი აჩვენებს 4 კგ - ს. თუ, ჩამოხტება ნიკა, მაშინ სასწორი აჩვენებს 5 კგ - ს. რამდენს იწონის სამივე კენგურუ ერთად ?

პასუხი: 6 კგ.

5.1.14. მარინას და მის მშობლებს დაბადების დღე აქვთ 1 იანვარს. 2007 წლის იანვარში მარინა 6 - ჯერ უმცროსი იყო დედაზე, ხოლო 2008 წლის იანვარში - 5 - ჯერ უმცროსი მამაზე. რამდენი წლითაა მამა უფროსი დედაზე ?

პასუხი: 5 წლით.

5.1.15. წერტილები: $A; B; C; D$ მონიშნულია წრფეზე გარკვეული მიმდევრობით.ცნობილია მათ შორის შემდეგი მანძილები: $AB = 13$ სმ; $BC = 11$ სმ; $CD = 14$ სმ; $AD = 12$ სმ. რას უდრის მანძილი ველაზე დაშორებულ წერტილებს შორის ?

პასუხი: 25 სმ.

5.1.16. ერთი უცნაური ბიჭუნა ხუთშაბათს და პარასკევს ამბობს მხოლოდ სიმართლეს, სამშაბათობით ყოველთვის ტყუის, ხოლო დანარჩენ დღეებში ხან ტყუის, ხანაც არა. შვიდი დღე ზედიზედ, ამ ბიჭუნას ეკითხებოდნენ სახელს. პირველი 6 დღე მისი პასუხები იყო: ჟორა, ბორისი, ვასო, ბორისი, პეტრე, ბორისი. რა უპასუხა მან მეშვიდე დღეს ?

პასუხი: ჟორა.

5.1.17. მარიამი იწერდა ზაფხული თვეების პირველი ორშაბათის რიცხვებს. ზაფხულის ბოლოს კი კრებდა ამ სამ რიცხვს. რა უმცირესი რიცხვი შეიძლებოდა ყოფილიყო ჯამი ?

პასუხი: 9.

5.1.18. ვთქვათ, კალენდარზე გვაქვს 2007 წელი. ამ რიცხვის ციფრთა ჯამია 9. რამდენი წლის შემდეგ გამეორდება ეს ციფრთა ჯამი ?

პასუხი: 9 წლის შემდეგ.

5.1.19. მარიამმა 8 რიცხვი: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 გაყო ორ ოთხეულად, რომელთა ჯამებიც ერთნაირია. ერთ ჯგუფში აღმოჩნდა 1 და 3. კიდევ რომელი რიცხვი აღმოჩნდებოდა ამ ოთხეულში ?

პასუხი: 6.

5.1.20. ყოველ თვეში გვხვდება 4 შაბათი, მაგრამ ზოგიერთ თვეში შაბათების რიცხვი მეტია. მაქსიმუმ რამდენი ასეთი თვე შეიძლება იყოს წელიწადში ?

პასუხი: 5.

5.1.21. სამ დას: ანა, ევას და ლიზის სახლის დალაგება შეუძლია ერთნაირად კარგად. თუ, ნებისმიერი ორი მათგანი მოკიდებს საქმეს ხელს, მაშინ სახლს დაალაგებენ 1 სთ - ში. რა დროს მოანდომებენ ისინი სახლის დალაგებას, თუ სამივე იმუშავებს ერთად ?

პასუხი: 40 წთ.

5.1.22. ელექტრული საათი აჩვენებს დროს 00:00 - დან 23:59 - საათამდე. დღე - ღამის განმავლობაში რა დროის განმავლობაში ჩანს ერთი 2 - იანი მაინც ციფერბლატზე ?

პასუხი: 10 სთ და 30 წთ.

5.1.23. თემურის ფერმაში ცხოვრობენ ქათმები და ღორები. მათი რაოდენობა ერთნაირია. რამდენი ფეხი შეიძლება ქონდეს ყველას ერთად ?

პასუხი: 48.

5.1.24. სტეფანე სწავლობს სკოლაში. თუ, მისი ასაკის გამომხატველ რიცხვში, გადავაადგილებთ ციფრებს, მაშინ მივიღებთ მისი პაპის ასაკს, რომელიც მოთავსებულია 60 და 70 რიცხვებს შორის. რამდენი წლითა ახალგაზრდა სტეფანე პაპასთან შედარებით ?

პასუხი: 45 წლით.

5.1.25. ორი კვადრატული ფორმის და 9×9 ზომის ხელსახოცი დევს მაგიდაზე ისე, რომ ერთად ადგენს 9×13 ზომის მართკუთხედს. იპოვეთ, ამ ხელსახოცების ურთიერთგადაფარვის ფართობი.

პასუხი: 45 კვ.ერთეული.

5.1.26. ვასო იწონის 21 კგ - ს. როცა მან ხელში აიყვანა კატა მუსუ და შედგა სასწორზე, მისი წონა იყო 29 კგ და 500 გ, კნუტ მაკასთან ერთა ვასო იწონის 22 კგ - ს. რა წონას გვიჩვენებს სასწორი, თუ მასზე ერთად შევსვამთ მუსუს და მაკას ?

პასუხი: 9 კგ და 500 გ.

5.1.27. სასწორის ერთ თეფშზე დევს 6 ფორთოხალი, მეორეზე - 2 ნესვი. თუ, ფორთოხლების თეფშზე დავუმატებთ ერთ ნესვს, მაშინ სასწორი გაწონასწორდება. რამდენ ფორთოხალს გააწონასწორებს ერთი ნესვი ?

პასუხი: 6 ფორთოხალს.

5.1.28. გამოთვალეთ: $2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2 = ?$

პასუხი: 4.

5.1.29. ზუკა ცხოვრობს ქუჩაზე, სადაც სახლის ნომრები არიან 1-24. რამდენჯერ გვხვდება სახლის ნომრებში ციფრი 2 ?

პასუხი: 8 - ჯერ.

5.1.30. მიუმატეთ 17 - ს ყველაზე პატარა ორნიშნა რიცხვი და ჯამი გაყავით ყველაზე დიდ ერთნიშნა რიცხვზე. რა რიცხვი მიიღება ?

პასუხი: 3

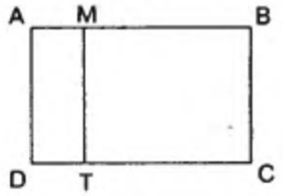
5.1.31. თუ, ამ წელს ჩემი დაბადების დღის მეორე დღეს, მე ვამბობ რომ „ზეგ იქნება ოთხშაბათი“, მაშინ წელს, კვირის რომელ დღეს მქონია დაბადების დღე ?

პასუხი: კვირას.

5.1.32. x რიცხვი ისეთია, რომ მისთვის ორის მიმატება, იგივეა რაც 3 - ზე გამრავლება. მაშინ 6 - ზე გამრავლება მისთვის იგივეა რაც y - ის მიმატება. იპოვეთ y.

პასუხი: 5.

5.1.33. $ABCD$ კვადრატია, რომლის გვერდიც 10 სმ - ია, ხოლო $AMTD$ მართკუთხედია, რომლის მცირე გვერდიც 3 სმ - ია. რამდენით მეტია კვადრატის პერიმეტრი, $AMTD$ მართკუთხედის პერიმეტრზე ?



პასუხი: 14 სმ - ით.

5.1.34. თაიგულში 11 ყვავილია, მათ შორის 5 წითელია, ხოლო 6 ვარდია. მაქსიმუმ, რამდენი თეთრი მიხაკი შიძლება იყოს თაიგულში ?

პასუხი: 5.

5.1.35. მზიკო სახლიდან გამოვიდა 7 სთ 55 წთ - ზე და სკოლაში მივიდა 8 სთ 32 წთ - ზე. მისი მეგობარი ანი, სკოლაში მივიდა 8 სთ 45 წთ - ზე, თუმცა, ანი უფრო ახლოს ცხოვრობს სკოლასთან და მას სჭირდება 12 წთ - ით უფრო ნაკლები დრო სკოლაში მისასვლელად. რომელ საათზე გამოსულა ანი სახლიდან ?

პასუხი: 8 სთ 20 წთ.

5.1.36. ზოოპარკში ცხოვრობდა სამი კენგურუ: ალექსანდრა, ლიზა და ნიკა. შემდეგ, დაიბადა პატარა ცუცუ. ამჟამად, ეს ოჯახი კვირაში ჭამს 28 კგ სტაფილოს, ამასთან ცუცუ მიირთმევს 2 - ჯერ უფრო ნაკლებს, ვიდრე ნებისმიერი უფროსი კენგურუ. კვირაში რამდენ სტაფილოს ჭამდა ეს ოჯახი პატარა ცუცუს დაბადებამდე ?

პასუხი: 24 კგ.

5.1.37. სამ მეგობარს გაუნაწილეს ბარათები, რომლებზეც წერია ციფრები. გიორგის შეხვდა ციფრები: 7; 2; 4; ალეკოს - 6; 5; 1; ხოლო

ილიას - 8; 3; 9. ყოველი მათგანი ცდილობს მიღებული ციფრებით და ოთხი არითმეტიკული მოქმედებით მიიღოს რიცხვი 20. ვინ ვერ შეძლებს მიზნის მიღწევას ?

პასუხი: ალეკო.

5.1.38. ავტორალში მონაწილეობდა სამი ავტომობილი. მათ სტარტი აიღეს შემდეგი თანმიმდევრობით: იაგუარი, ფერარი და მერსედესი. დიცტანციაზე, იაგუარს გაუსწრეს 3 -ჯერ, ფერარის - 5 - ჯერ, ხოლო მერსედესს 8 - ჯერ. როგორი თანმიმდევრობით მივიდნენ ავტომობილები ფინიშზე ?

პასუხი: იაგუარი, ფერარი, მერსედესი.

5.1.39. მარიამი ხატავს ფერად ბუშტებს: ჯერ აფერადებს ცისფრად, მერე წითლად, შემდეგ შავად და ბოლოს ყვითლად. შემდეგ ისევ თავიდან იწყებს და ფერებს იმეორებს იგივე თანმიმდევრობით. რა ფერისა იქნება მეჩვიდმეტე ბუშტი ?

პასუხი: ცისფერი.

5.1.40. სექტემბრის თვეში თუ, ყველა დღე, რომლის რიცხვშიც არის ლუწი ციფრი, იქნება დასვენების დღე, მაშინ რამდენი სამუშაო დღე გვექნებოდა ?

პასუხი: 10 დღე.

5.1.41. უჯრებიანი რვეულის ფურცელზე დახატულ მართკუთხედში, რომლის ზომებია 4×7, გაავლეს დიაგონალი. რამდენ უჯრას გადაკვეთდა ეს დიაგონალი ?

პასუხი: 10 უჯრა.

5.1.42. მიმდევრობით ჩაწერილ 6 მომდევნო ლუწ რიცხვს შორის, ალეკომ აღმოაჩინა, რომ მათ შორის ყველაზე დიდი რიცხვი 2 - ჯერ მეტია, ყველაზე მცირეზე. რას უდრის ყველაზე მცირე რიცხვი ?

პასუხი: 10.

5.1.43. სამეცნიერო საბჭოზე იყო 29 წევრი. მათგან თორმეტს აქვს წვერი, თვრამეტს - ულვაში. 3 წევრს არც წვერი აქვს და არც ულვაში. საბჭოს რამდენ წევრს აქვს წვერიც და ულვაშიც ?

პასუხი: 4 წევრს.

5.1.44. ბურატინომ საახალწლოდ თავისთვის იყიდა სამი სახის კანფეტი: დიდები, პატარები და საშუალოები. ყოველი დიდი კანფეტი ღირს 4 მონეტა, საშუალო - 2 მონეტა, ხოლო პატრა - 1 მონეტა. 10 კანფეტში ბურატინომ გადაიხადა 16 მონეტა. რამდენი დიდი კანფეტი უყიდია ბურატინოს ?

პასუხი: 1 დიდი კანფეტი.

5.2. ამოცანები I კლასის მოსწავლეებისათვის

5.2.1. ეკას 3 ფანქარი აქვს, მაკას კი 6 ფანქარი. სულ რამდენი ფანქარი აქვთ ბავშვებს ?

პასუხი: 9.

5.2.2. ზუკამ ტყეში დაინახა 4 პეპელა და 3 ჭიამაია. სულ რამდენი მწერი დაუნახია ზუკას ?

პასუხი: 7.

5.2.3. ფიჭვის ქვეშ იყო 8 გირჩი. ხიდან ჩამოვარდა კიდევ 3 გირჩი. რამდენი გირჩია ახლა ხის ქვეშ ?

პასუხი: 11.

5.2.4. მიკი და მაუსი წავიდნენ ტყეში სოკოს შესაგროვებლად. მიკიმ 15 სოკო იპოვა მაუსმა კი - 4 სოკო. სულ რამდენი სოკო შეუგროვებიათ მიკის და მაუსს /

პასუხი: 19.

5.2.5. კაფეში მაგიდაზე იდგა 6 ჭიქა კომპოტი და 10 ჭიქა ჩაი. სულ რამდენი ჭიქა მდგარა მაგიდაზე ?

პასუხი: 16.

5.2.6. მზიკოს ბაღში ერთ კვალში არის 35 გვირილა და 26 ვარდი. სულ რამდენი ყვავილია ამ კვალში ?

პასუხი; 61.

5.2.7. ერთ სატვირთო მატარებელში 43 ვაგონია, მეორეში - 40 ვაგონი. რამდენი ვაგონია ორივე მატარებელში ერთად ?

პასუხი: 83.

5.2.8. ილია და ზუკა აშენებენ სახლს მეგობრებისათვის. ილია წუთში ალაგებს 68 აგურს, ხოლო ზუკა - 25 აგურს. რამდენ აგურს ალაგებს ორივე ერთად წუთში ?

პასუხი: 93.

5.2.9. კლასში ისხდნენ 15 გოგონა და ბიჭუნა. ბიბლიოთეკიდან დაბრუნდა კიდევ 5 გოგონა. რამდენია მოსწავლეა ახლა კლასში ?

პასუხი: 20.

5.2.10. ფიფქიასთან სტუმრად მოვიდა 7 გნომი, შემდეგ - კიდევ 4 გნომი. სულ რამდენი გნომი მოსულა სტუმრად ფიფქიასთან ?

პასუხი: 11.

5.2.11. ბიჭუნა და კარლსონი აგროვებდნენ ბაღში ვაშლებს. ბიჭუნამ თავის კალათში ჩაალაგა 37 ვაშლი, კარლსონმა კი - 44. რამდენი ვაშლი შეაგროვეს ბიჭუნამ და კარლსონმა ერთად ?

პასუხი: 81.

5.2.12. ერთ საახალწლო საჩუქარში იყო 36 კანფეტი, მეორეში - 34. სულ რამდენი კანფეტი იყო ორივე საჩუქარში ერთად ?

პასუხი: 70.

5.2.13. მეთევზეების შეჯიბრში 23 მეთევზე იჭერდა თევზს ბაზალეთის ტბაში, ხოლო 39 მეთევზე - მდინარე ქსანში. სულ რამდენი მეთევზე მონაწილეობდა შეჯიბრში ?

პასუხი: 62.

5.2.14. თამარს აქვს x ცალი ვაშლი, ნიკას კი - y ცალი. სულ რამდენი ვაშლი აქვს ორივეს ერთად ?

პასუხი: $x + y$.

5.2.15. ანგარში იდგა 18 სპორტული თვითმფრინავი. 9 თვითმფრინავი გააგზავნეს შეჯიბრზე, მაგრამ იქ აღმოაჩინეს რომ 2 თვითმფრინავი არაა მზად ფრენებისათვის. რამდენი თვითმფრინავი დარჩა ანგარში ?

პასუხი: 9.

5.2.16. ციყვმა ზამთრისთვის მოიმარაგა 24 კაკალი. პატარა ციყვუნიამ კი ჯერ კიდევ ზაფხულში შეახრამუნა 5 კაკალი. რამდენი კაკალი დარჩათ ზამთრისთვის ?

პასუხი: 19.

5.2.17. თოვლის პაპას ქონდა 30 საჩუქარი. მან ბავშვებს უკვე დაურიგა 24 საჩუქარი. რამდენი საჩუქარი დარჩა თოვლის პაპას კიდევ დასარიგებელი ?

პასუხი: 6.

5.2.18. თოვლის პაპამ ნაძვის ხეების ბაზარზე მოიტანა 93 ნაძვის ხე. დღის ბოლოს, მას დარჩა კიდევ 15 ნაძვის ხე. რამდენი ნაძვის ხე გაუყიდია თოვლის პაპას ?

პასუხი: 78.

5.2.19. ვაზაში 33 ყვავილია. იქიდან 17 ღიღილოა და დანარჩენი გვირილები. რამდენი გვირილაა ვაზაში ?

პასუხი: 16.

5.2.20. კალათში ეწყო რამდენიმე ვაშლი. როცა 4 ვაშლი შეახრამუნეს, დარჩა კიდევ 23. რამდენი ვაშლი იყო კალათაში თავდაპირველად ?

პასუხი: 27.

5.3. სახუმარო ამოცანები ლოგიკური აზროვნების განსავითარებლად პირველ - მეორე კლასში

5.3.1. მსხლის ხეზე იყო 50 მსხალი, ხოლო კომშის ხეზე 12 - ით ნაკლები. რამდენი მსხალი იყო კომშის ხეზე ?

პასუხი: კომშის ხე არ ისხამს მსხალს.

5.3.2. რა უფრო მსუბუქია, 1 კგ ბამბა, თუ 1 კგ რკინა ?

პასუხი: ერთნაირია.

5.3.3. ქათამი როცა ორ ფეხზე დგას 2 კგ - ს იწონის. რამდენს იწონის, როცა ერთ ფეხზე დგას ?

პასუხი: 2 კგ.

5.3.4. ზუკა და გიგა ჭადრაკს თამაშობდნენ 4 საათის განმავლობაში. რა დროის განმავლობაში თამაშობდა თითოეული ?

პასუხი: 4 საათი.

5.3.5. ხეზე იჯდა 2 ტოროლა, 3 ბეღურა და 2 ციყვი. უცებ ორი ბეღურა აფრინდა. რამდენი ჩიტი დარჩა ხეზე ?

პასუხი: 3.

5.3.6. რამდენი ბოლო აქვს ორნახევარ ჯოხს ?

პასუხი: 6.

5.3.7. მიფრინავდა იხვების გუნდი. მონადირემ ესროლა და მოკლა 1 იხვი. რამდენი იხვი დარჩა ?

პასუხი: 1. დანარჩენი გაფრინდნენ.

5.3.8. მინდორში დგას მუხა. მუხაზე 3 ვაშლია. მოვიდა ზუკა და ერთი მოგლიჯა. რამდენი დარჩა ხეზე ?

პასუხი: მუხა არ ისხამს ვაშლებს.

5.3.9. ჩვენ ძალიან მეგობრული ოჯახი გვაქვს. 7 ძმიდან თითოეულ ძმას ყავს 1 და. რამდენი ბავშვია ოჯახში ?

პასუხი: 8.

5.3.10. ორი კაცი მიდიოდა სოფლიდან ქალაქში. მათ შეხვდათ სამი კაცი და ერთი ქალი. რამდენი კაცი მიდიოდა სოფლიდან ქალაქში ?

პასუხი: 2.

5.3.11. ბებომ ბაზარზე იყიდა ორი წყვილი ფეხსაცმელი, სამი ვაშლი და 5 მსხალი. ერთი წყვილი ფეხსაცმელი ბებომ აჩუქა შვილიშვილს. სულ რამდენი ხილი უყიდია ბებოს ?

პასუხი: 8.

5.4. სახალისო ამოცანები მესამე - მეოთხე კლასის მოსწავლეებისათვის

5.4.1. ბუდიდან გამოფრინდა 3 მერცხალი.რამდენადაა მოსალოდნელი რომ 15 წმ - ის შემდეგ, ისინი აღმოჩნდნენ ერთ სიბრტყეში ?

პასუხი: სამ წერტილზე ერთი სიბრტყე გაივლება.

5.4.2. მაგიდაზე დევს ორი მონეტა. ჯამში ისინი იძლევიან 3 ლარს. ერთ - ერთი მონეტა არაა 1 ლარი. რა მონეტები გვაქვს ?

პასუხი: 2 ლარიანი და 1 ლარიანი მონეტები.

5.4.3. რა სიჩქარით უნდა გარბოდეს ძაღლი, რომ მის კუდზე მობმულმა ტაფამ არ იხმაუროს ?

პასუხი: მისი სიჩქარე უნდა იყოს ნული. ე.ი. უნდა იდგეს ადგილზე.

5.4.4. დედამიწის გარშემო 1 სრულ ბრუნს ხელოვნური თანამგზავრი ანდომებს 1 სთ და 40 წთ - ს, მეორე ბრუნს კი 100 წთ - ში. როგორ ხდება ეს ?

პასუხი: 1 სთ და 40 წთ = 100 წთ.

5.4.5. ერთი სახლის სახურავი არაა სიმეტრიული. ერთ მხარეს დახრილობა სამოცი გრადუსია, მეორე მხარეს სამოცდაათი. დავუშვათ, რომ მამალმა კვერცხი დადო სახურავის ყველაზე მაღალ წერტილში. რომელ მხარეს ჩამოვარდება კვერცხი ?

პასუხი: მამლები კვერცხს არ დებენ.

5.4.6. თორმეტსართულიან სახლში არის ლიფტი. პირველ სართულზე ცხოვრობს 2 კაცი, ყოველ შემდგომ სართულზე მცხოვრებთა რიცხვი ორმაგდება. რომელი სართულის ღილაკს აწვებიან მცხოვრებნი ყველაზე ხშირად ?

პასუხი: პირველი სართულის ღილაკს.

5.4.7. ორ საფულეში დევს ორი მონეტა, ამას გარდა, ერთ საფულეში ორჯერ მეტი მონეტაა, ვიდრე მეორეში. როგორ ხდება ეს ?

პასუხი: ერთი მონეტებიანი საფულე, დევს მეორე საფულეში.

5.4.8. ორმა მამამ და ორმა შვილმა შეჭამა 3 კვერცხი. რამდენი კვერცხი ჭამა თითოეულმა ?

პასუხი: პაპა, შვილი, შვილიშვილი. თითოეულმა შეჭამა 1 კვერცხი.

5.4.9. საწყობში იყო 5 ცისტერნა საწვავით. თითოეულ ცისტერნაში იყო 6 ტ საწვავი. ორი ცისტერნიდან გაიცა საწვავი. რამდენი ცისტერნა დარჩა საწყობში ?

პასუხი: 5.

5.4.10. ცხენების წყვილმა გაიარა 20 კმ. რა მანძილი გაუვლია თითოეულს ?

პასუხი: 20 კმ.

5.4.11. თუ, ღამის 11 საათზე მოდის წვიმა, შეიძლება რომ 48 საათში იყოს მზიანი ამინდი ?

პასუხი: არა, რადგან ღამე იქნება.

5.5. მინივიქტორინა პირველი კლასის მოსწავლეებისათვის

5.5.1. რატომ დებს ქათამი კვერცხებს ?

პასუხი: რომ არ დებდეს და ისროდეს, კვერცხები დაიმტვრევოდა.

5.5.2. რატომ ჭამენ ლომები უმ ხორცს ?

პასუხი: ხორციანი საჭმლის გაკეთება არ იციან.

5.5.3. რას იზავს ყვავი სამი წლის ცხოვრების შემდეგ ?

პასუხი: გააგრძელებს ცხოვრებას მეოთხე წელი.

5.5.4. რომელ წელს ჭამენ უფრო მეტრს ვიდრე სხვა წლებში ?

პასუხი: ნაკიან წელს.

5.5.5. რა არის ქურქზე უფრო თბილი ჩასაცმელი /

პასუხი: ორი ქურქი.

5.5.6. როგორ წავიღოთ წყალი საცერით ?

პასუხი: გავყინოთ და ყინულად გადავიტანოთ.

5.5.7. ყველაზე მეტად, როდის უადვილდება შავ კატას სახლში შემოსვლა ?

პასუხი: როცა სახლი ღიაა.

5.5.8. ყველაზე მეტად რას გავს ნახევარი ფორთოხალი ?

პასუხი: მეორე ნახევარს.

5.5.9. როგორი ქვები არაა ზღვაში ?

პასუხი: მშრალი.

5.5.10. რომელი ფეხსაცმელია, რომ ცეცხლში მზადდება და ფეხიდან არ იხდიან ?

პასუხი: ნალი.

5.5.11. ორი ცხვარი დგას ისე, რომ ერთი უყურებს სამხრეთს, მეორე ჩრდილოეთს. შეუძლიათ მათ ერთმანეთის დანახვა კისრის მოუბრუნებლად ?

პასუხი: დიას, თუ მათ შუბლები ერთმანეთზე აქვთ მიდებული.

5.5.12. კბილები აქვს და პირი არა. რა არის ?

პასუხი: ხერხი.

5.5.13. ზამთარში რა იყინება ოთახში და ქუჩაში არა ?

პასუხი: ფანჯრის მინა.

5.5.14. ადამიანი ზის და თქვენ არ შეგიძლიათ მის ადგილზე დაჯდომა, მაშინაც კი, თუ ის ადგება სადაც ზის. სად ზის ?

პასუხი: შენს კალთაში.

5.5.15. რა შეიძლება დაინახო დახუჭული თვალებით ?

პასუხი: სიზმარი.

5.5.16. მამაჩემის შვილია, მაგრამ ჩემი ძმა არაა. ვინაა ?

პასუხი: ეს მე ვარ.

5.5.17. რომელ სიტყვაში ცოცხლობს პითაგორას π რიცხვი ასი წელი ?

პასუხი: პისტოლეტი.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Я.И. Перельман. Живая математика, наука,Москва,1970
2.С.Н. Олечник, Ю.В. Нестеренко, М.К. Потапов. Старинные занимательные задачи, наука, Москва,1988
3. Л. Эйлер. Сборник статей и материалов к 150 летию со дня смерти. Сер. II, в. 1. – М., Л., изд. АН СССР, 1935
4. Л.Ф. Магницкий. Арифметика, сиречь наука числительная, Москва, 1703
5. Л. Эйлер. Руководство к арифметике для употребления в гимназии при Императорской Академии наук, Ч.1, СПб, 1740
6. Л. Эйлер. Руководство к арифметике для употребления в гимназии при Императорской Академии наук, Ч.2, СПб, 1760
7. Л. Эйлер. Универсальная арифметика., т.1, т.2, СПб, 1787,1788
8. Н.П. Кострикина. Задачи повышенной трудности в курсе математики, Москва, 1986
9. А.Г. Гайшут. Математика в логических упражнениях, наукова думка, Киев,1985
10.В.Д. Чистяков. Сборник старинных задач по математике с историческими экскурсами и подробными решениями, Минск,1962
11. А.О. Гельфанд. Решение уравнений в целых числах, Москва,1952
12.ნ.ჩოხური, ნ.მინაგორაშვილი, თ.ობგაძე. დამხმარე სახელმძღვანელო მათემატიკის წრის მეცადინეობებისათვის პატარა ქანდის საჯარო სკოლაში, ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემია, თბილისი, 2021
13.Г.И.Зубелевич. Зборник задач московских математических олимпиад, учеб. Пос. для учителей 5-8 классов, Мосува, 1971
14.С.В.Конягин и др. Зарубежные математические олимпиады, Москва, 1987
15.В.И.Арнольд. Задачи для детей от 5 до 15 лет, Москва, 2004

16.П.Ф.Севрюков. Подготовка к решению олимпиадных задач по математике, Ставрополь, 2009
17.А.Я.Канель-Белов, А.К.Ковальджи. Как решают нестандартные задачи, Москва, 2008
18.მ.ჯინჭარაძე. ამოცანათა კრებული მათემატიკაში V კლასი, ვ.კომაროვის № 199 საჯარო სკოლა, თბილისი, 2016
19.О.Оре. Графы и их применение, пер. с анг. ,Мир, Москва, 1965
20. პ.კოლონია. რიცხვთა თეორია, თბილისი, 1961

შინაარსი