

ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემია
საქართველოს საინჟინრო აკადემია
ფაზისის აკადემია

თამაზ ოზგაძე

კლასიკური მექანიკის მათემატიკური
მეთოდები

III ტომი

რხევები. აკუსტიკური ტალღები და სოლიტონები

თბილისი

2024

წიგნი წარმოადგენს მონოგრაფიის ტიპის სახელმძღვანელოს, მექანიკის მათემატიკური მეთოდებით დაინტერესებული ნიჭიერი მკითხველისათვის. მოცემული თეორიული მასალა, ილუსტრირებულია შესაბამისი მაგალითებით და ამოცანებით. ამოცანების ამოხსნისას, მკითხველი ნაბიჯ-ნაბიჯ შედის მექანიკის მათემატიკური მეთოდების ულამაზესი სივრცის ლაბირინთებში. წიგნში შესწავლილია რხევითი სისტემები, აკუსტიკური ტალღები, ბეკლუნდის გარდაქმნები და სოლიტონების კვლევის მეთოდები, რაც საშუალებას მისცემს მკითხველს, დაინახოს მექანიკური პროცესების მათემატიკური მოდელირების ულამაზესი მიმართულების ხვეულები და გაერკვეს იმ საკითხების სიღრმეშიც, რაც მექანიკის სფეროს განეკუთვნება.

მესამე ტომში განხილულია რხევითი სისტემები, აკუსტიკური ტალღები, ბეკლუნდის გარდაქმნები, გაფანტვის თეორია და სოლიტონები.

რეცენზენტი: ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის
პრეზიდენტი, ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა
დოქტორი, პროფესორი თემურ ჩილაჩავა

საგამომცემლო სახლი “ტექნიკური უნივერსიტეტი”, 2024

ISBN 978-9941-8 – 6636-4 (სამივე ტომის)

ISBN 978-9941-8 – 6765-1 (მესამე ტომის)

©

ყველა საავტორო უფლება დაცულია. ამ წიგნის ნებისმიერი ნაწილის (ტექსტი, ფოტო, ილუსტრაცია თუ სხვა) გამოყენება არცერთი ფორმით და საშუალებით (ელექტრონული თუ მექანიკური) არ შეიძლება, გამომცემლის წერილობითი ნებართვის გარეშე. საავტორო უფლების დარღვევა ისჯება კანონით.

ედღვნება ჩემი უდიდესი მასწავლებლის,
პროფესორ თეიმურაზ ვოინიჩ-სიანოჟენცკის
ნათელ ხსოვნას

წინასიტყვაობა

წინამდებარე წიგნი წარმოადგენს კლასიკური მექანიკის მათემატიკური მეთოდების კურსის მესამე ტომს, რომელიც ეძღვნება წრფივი და არაწრფივი ტალღების, ბეკლუნდის გარდაქმნების, გაფანტვის თეორიის და სოლიტონების კვლევის მეთოდების გამოყენების საკითხებს.

პირველ თავში განხილულია როგორც კლასიკური რხევითი სისტემები, ასევე, მოცემულია ავტორხევითი და პარამეტრული რხევითი სისტემები: ვან-დერ-პოლის, პრიგოჟინ-ლევფერის, დიუფინგის, მისნერის, ფრაგიშვილი-ობგამის, მატის მათემატიკური მოდელები. გადმოცემულია რხევითი სისტემების აგების ვარიაციული მეთოდიც.

მეორე თავში გადმოცემულია აკუსტიკური ტალღების შესწავლის მათემატიკური მეთოდები.

მესამე თავში განხილულია გაფანტვის ტეორია, სოლიტონების კვლევის მეთოდები და ბეკლუნდის გარდაქმნები.

კურსი განკუთვნილია ფიზიკითა და მათემატიკით დაინტერესებული ნიჭიერი ახალგაზრდებისათვის. ის საინტერესო იქნება აგრეთვე, მეცნიერების თანამედროვე მეთოდებით დაინტერესებული ინჟინრებისა და ყველა იმ მკითხველისათვის, ვისაც თანამედროვე მექანიკის ახალი მეთოდები აინტერესებს.

I თავი. რხევითი სისტემები

შესავალი

ჩვენ გარშემო არსებული მოვლენების უმრავლესობა ხასიათდება განმსაზღვრელი პარამეტრების რხევითი ცვალებადობით, რაიმე მონოტონურად ცვლადი პარამეტრის (დროის) მიმართ. ასეთ პროცესებს რხევითი პროცესები ეწოდება. რხევით სისტემებს, ზოგჯერ, ოსცილატორებს უწოდებენ.

ზოგად შემთხვევაში, რხევითი სისტემა ხასიათდება თავისუფლების ხარისხით ანუ სისტემის განმსაზღვრელი პარამეტრების აუცილებელი რაოდენობით. მაგალითად, თუ ვსწავლობთ მყარი სხეულის ბრუნვით რხევებს სიმეტრიის ღერძის გარშემო, მაშინ მოძრაობის აღსაწერად საკმარისია ერთი პარამეტრი - მობრუნების კუთხე. რაც ნიშნავს, რომ ასეთ შემთხვევაში, გვაქვს სისტემა, რომლის თავისუფლების ხარისხი ერთის ტოლია. რხევითი სისტემების ძირითადი თავისებურებები ნათლად ჩანს ისეთი ოსცილატორების მაგალითზეც, რომელთა თავისუფლების ხარისხი ერთის ტოლია. ამიტომ სიმარტივის სათვის, განვიხილავთ რხევითი სისტემების ძირითად ცნებებს სწორედ ასეთი მარტივი ოსცილატორების მაგალითზე, თუმცა არსებობს ისეთი რხევითი სისტემებიც, რომელთა თავისუფლების ხარისხი ერთზე მეტია.

რხევითი სისტემების დახასიათება ხდება ასევე ორი ძირითადი მიმართულებით. ესენია: წრფივი და არაწრფივი რხევითი სისტემები, იმის მიხედვით, თუ როგორ ტიპს მიეკუთვნება ის დიფერენციალური განტოლებები, რომლებიც აღწერენ შესაბამის მათემატიკურ მოდელებს. რეალური რხევითი სისტემები ყოველთვის არაწრფივია, თუმცა მიახლოებით, კვლევის გამარტივების მიზნით, ისინი შეიძლება შეიცვალოს შესაბამისი წრფივი სისტემებით.

ვთქვათ, განიხილება რხევითი სისტემა ერთი განმსაზღვრელი $x(t)$ პარამეტრით, რომელიც დამოკიდებულია მონოტონურად ცვლად t პარამეტრზე.

განსაზღვრება. ისეთ რხევით სისტემებს, რომელთათვისაც ადგილი აქვს $x(t) = x(t+T)$ ტოლობას პერიოდული რხევითი სისტემა ეწოდება. ხოლო ისეთ T მინიმალურ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც ამ ტოლობას აქვს ადგილი რხევის პერიოდი ეწოდება.

განსაზღვრება. რხევის პერიოდის $f = \frac{1}{T}$ შებრუნებულ სიდიდეს რხევის სიხშირე ეწოდება. რხევის სიხშირე გვიჩვენებს სრულ რხევათა რაოდენობას მონოტონური პარამეტრის (დროის) ერთი ერთეულით ცვლილებისას. თუ რხევის პერიოდს, წამებში გავზომავთ, მაშინ რხევის სიხშირის ერთეული იქნება ჰერცი (რხევათა რიცხვი ერთ წამში).

რხევის სიხშირის დასახასიათებლად, ზოგჯერ, იყენებენ ω კუთხურ სიხშირეს, რომელიც გამოხატავს რხევათა რაოდენობას 2π წამის (მონოტონური პარამეტრის მნიშვნელობის) განმავლობაში, $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

ქვემოთ, მოცემულია იმ რხევითი პროცესების რხევის სიხშირის რიცხვითი მნიშვნელობები (გამოსახული წმ^{-1} ერთეულებში), რაც ბუნებაში გვხვდება:

- 10^{-10} – პლანეტების საუკუნებრივი შეშფოთებების სიხშირე;
- 10^{-8} – პლანეტების ბრუნვის სიხშირე;
- 10^{-5} – მოქცევა-უკუქცევის სიხშირე;
- 10^1 – რხევის სიხშირე მანქანებში;
- 10^0 – წამების ქანქარა;
- 10^4 – აკუსტიკური რხევები;
- $10^5 - 10^8$ – ულტრაბგერითი მექანიკური რხევები;
- 50 – ცვლადი დენი;
- 10^{12} – ინფრაწითელი გამოსხივება;

10^{15} – ხილული ოპტიკური სპექტრი;

10^{18} – რენტგენის სხივები;

10^{20} - γ სხივები;

10^{23} – კოსმოსური სხივები.

რხევითი პროცესები ასევე ხასიათდება A ამპლიტუდით.

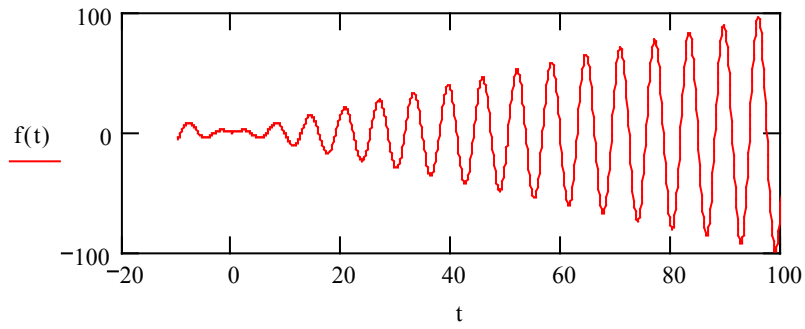
განსაზღვრება. ერთი სრული რხევის განმავლობაში გადახრის ნახევრის სიგრძეს **ამპლიტუდა** ეწოდება.

თუ x_{\max} უდიდესი და x_{\min} უმცირესი მნიშვნელობებია $x(t)$ გადახრისას რხევის ერთი პერიოდში განმავლობაში, მაშინ **რხევის ამპლიტუდა** $A = \frac{1}{2}(x_{\max} - x_{\min})$.

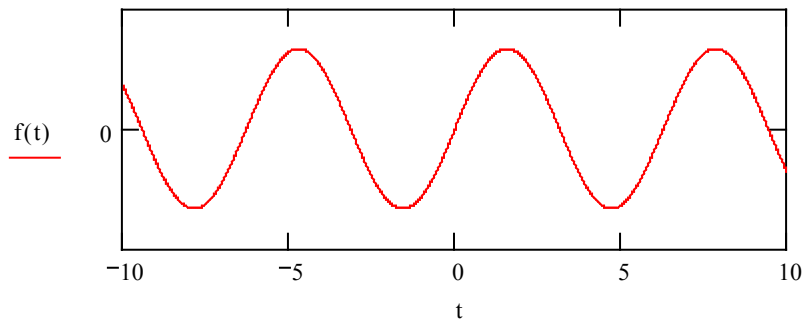
პერიოდული რხევისას გადახრის განზოგადებული კოორდინატი $x(t)$ ასრულებს რხევებს x_0 საშუალო მნიშვნელობის მიდამოში $x_0 = \frac{1}{2}(x_{\max} + x_{\min})$. სიმეტრიული რხევების შემთხვევაში, ეს მნიშვნელობა შეესაბამება აგრეთვე წონასწორობის ან უძრაობის მდგომარეობას.

განსაზღვრება. თუ $x(t)$ ფუნქცია მხოლოდ მიახლოებითაა პერიოდული ანუ $|x(t) - x(t+T)| \leq \varepsilon$ წინასწარ არჩეული ε მცირე სიდიდისათვის, მაშინ $x(t)$ ფუნქციას **თითქმის პერიოდული ფუნქცია** ეწოდება.

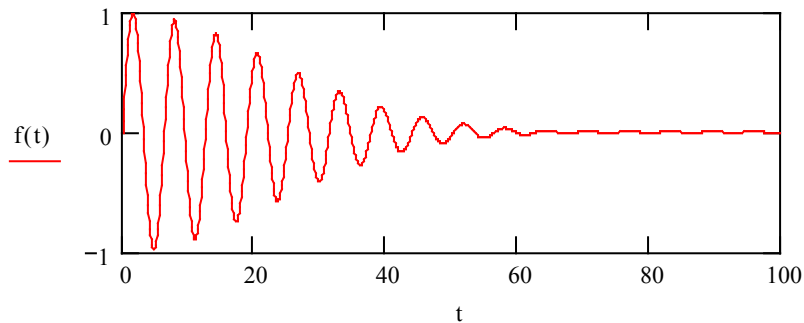
რხევითი სისტემები ხასიათდება რხევის ამპლიტუდის ცვლილებით რაიმე მონოტონური პარამეტრის(დროის) მიხედვით. განასხვავენ: რხევებს ზრდადი ამპლიტუდით (ნგრევადი სისტემები), მუდმივი ამპლიტუდით(პერიოდული) და კლებადი ამპლიტუდით (მიღევადი).



რხევები ზრდადი ამპლიტუდით



რხევები მუდმივი ამპლიტუდით



რხევები მიღევადი ამპლიტუდით

რხევითი სისტემები, წარმოქმნის მექანიზმიდან გამომდინარე, იყოფა შემდეგ ტიპებად:

1. საკუთრივი რხევითი სისტემები (თავისუფალი რხევები);
2. ავტორხევითი სისტემები (თვითაგზნებადი რხევები);
3. პარამეტრული რხევითი სისტემები (პარამეტრით აგზნებადი რხევები);

4. იძულებითი რხევითი სისტემები (მაიძულებელი ძალის გავლენით წარმოშობილი რხევები);

5. ბმული რხევითი სისტემები (ერთმანეთთან შეკავშირებული რამდენიმე რხევითი სისტემა).

განვიხილოთ რხევითი სისტემის თითოეული ტიპი.

საკუთრივი(თავისუფალი) რხევითი სისტემების დინამიკა მთლიანად ემყარება საწყის ბიძგს და შემდეგ აღარ იღებს გარე ზემოქმედებას. ე.ი. ენერჯის გაზრდა არ ხდება სისტემის გარედან. განიხილება ორი ტიპის საკუთრივი(თავისუფალი) რხევითი სისტემები: არადემპფირებული და დემპფირებული. დემპფირებული რხევითი სისტემები იმით გამოირჩევა, რომ ადგილი აქვს ენერჯის დახარჯვას წინააღმდეგობის ძალების დაძლევაზე.

მაგალითად, გრავიტაციული ქანქარა საწყისი ბიძგის შემდეგ თავისუფალ რხევას იწყებს. თავისუფალი რხევითი სისტემების დინამიკა აღიწერება ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებებით.

საკუთრივი რხევებისაგან განსხვავებით, ავტორხევით სისტემებში ადგილი აქვს ენერჯის გარედან შემოდინებას. ამასთან, ენერჯის წყარო არაა თვითონ რხევითი სისტემა. სისტემა გარედან იღებს ზუსტად იმდენ ენერჯიას, რამდენსაც ხარჯავს.

მაგალითი განვიხილოთ საათი, რომელშიც ენერჯის წყარო აწეული ტვირთი ან შეკუმშული ზამბარაა. ასეთი საათი ავტორხევით სისტემას წარმოადგენს. ავტორხევები აღიწერება არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებებით.

საკუთრივი რხევებისა და ავტორხევითი სისტემების შემთხვევაში რხევის სიხშირე განისაზღვრება თვით რხევითი სისტემის ხასიათიდან გამომდინარე, ამიტომ ასეთ სისტემებს ავტონომიურ სისტემებს უწოდებენ.

მათგან განსხვავებით, პარამეტრულ და იძულებით რხევით სისტემებს ჰეტერონომიულ სისტემებს უწოდებენ, რადგან ასეთ

სისტემებში რხევის სიხშირე განისაზღვრება გარე ზემოქმედებიდან გამომდინარე. პარამეტრული აგზნებადობის სისტემებში, გარე ზემოქმედება იწვევს სისტემის შიდა პარამეტრების პერიოდულ ცვალებადობას. მაგალითად, მათემატიკური ქანქარა ძაფზე ჩამოკიდული ტვირთით, როცა ძაფის სიგრძე პერიოდულად იცვლება. პარამეტრული რხევითი სისტემების მათემატიკური მოდელები იმით გამოირჩევა, რომ შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების ზოგიერთი კოეფიციენტი არის მონოტონური პარამეტრის(დროის) პერიოდული ფუნქცია.

იძულებით რხევით სისტემებში, სისტემაზე ასევე მოქმედებს გარე ძალა, რომელიც განსაზღვრავს რხევის კანონს. აქ რხევით პროცესებს კი განსაზღვრავს არა პერიოდული პარამეტრები, არამედ დამატებითი წევრები შესაბამის მათემატიკურ მოდელში, რაც შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვნებას იწვევს.

ბმული რხევითი სისტემების შემთხვევაში, საქმე გვაქვს ორ ან მეტ რხევით სისტემასთან, რომლებიც ახდენენ ერთმანეთზე გავლენას. თუ ერთი სისტემა ახდენს გავლენას მეორეზე, ხოლო მეორე ვერ ახდენს გავლენას პირველზე, ეს არ იქნება ბმული რხევითი სისტემა. ასეთ შემთხვევაში, ძირითადი (პირველი) სისტემა იქნება თავისუფალი, ხოლო მეორე სისტემა იქნება იძულებითი რხევითი სისტემა, რომელიც პირველი სისტემით იმართება.

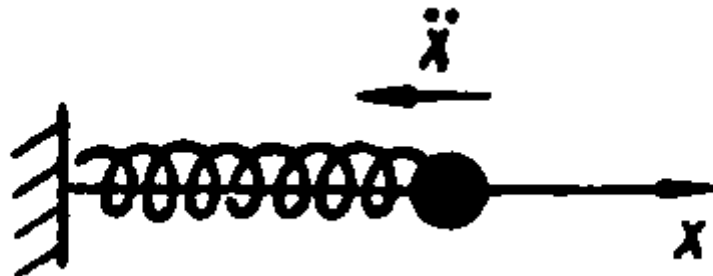
P.S. არსებობს შერეული ტიპის სისტემებიც, რომლებიც ერთდროულად იძულებითი და ავტორხევითი სისტემებია და ა.შ.

განვიხილოთ ჯერ წრფივი რხევითი პროცესები ანუ ისეთი რხევითი პროცესები, რომელთა შესაბამისი მათემატიკური მოდელები წარმოადგენს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებებს შესაბამისი საწყისი პირობებით.

1.1.1. არადემპფირებული თავისაუფალი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

თავისუფალი რხევითი პროცესები წარმოიშობა, როცა სისტემაზე საწყის მომენტში მოქმედებს ამძრავი ძალები, რომლებიც შემდეგ ქრება და სისტემას საშუალებას აძლევს გამოაჩინოს თავისი შინაგანი ბუნება. თავისუფალი რხევითი პროცესების დროს, სისტემის კინეტიკური და პოტენციური ენერგიები პერიოდულად ცვლიან ერთმანეთს. თუ სისტემის კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების ჯამი მონოტონური პარამეტრის (დროის) მიხედვით არ იცვლება (მუდმივია), მაშინ ამ სისტემას კონსერვატიული ეწოდება. კონსერვატიულ სისტემებში გვაქვს არადემპფირებული (არამილევადი) რხევები.

1.1.2. არადემპფირებული, თავისუფალი მექანიკური რხევითი პროცესების მოდელირება



ნახ. 1.1. წრფივი ოსცილატორის მექანიკური მაგალითი

განვიხილოთ წრფივი ოსცილატორის მექანიკური რხევები ნახ.3.1-ის მაგალითზე. m მასის სხეული c სიხისტის ზამბარით დაკავშირებულია კედელთან, სადაც ზამბარის მეორე მხარე მჭიდროდაა ჩამაგრებული. ასეთ შემთხვევაში, ნიუტონის მეორე კანონს ჩავწერთ m მასის სხეულისათვის

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} = -cx. \quad (1.1)$$

მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.2)$$

$$x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (1.3)$$

სადაც

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{რხევის კუთხური სიხშირეა.}$$

კოშის (1.2)-(1.3) ამოცანის ანალიზური ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (1.4)$$

ან ფორმულით

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t - \varphi), \quad (1.5)$$

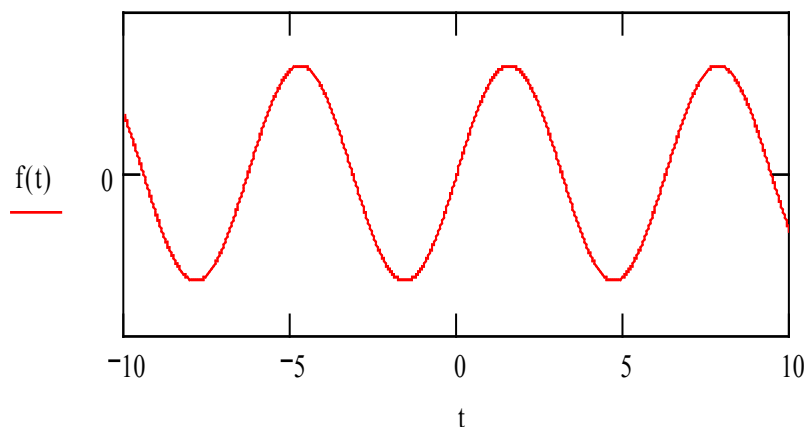
სადაც φ რხევის საწყისი ფაზაა და

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}. \quad (1.6)$$

რხევის პერიოდი და სიხშირე, შესაბამისად იქნება:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad f = \frac{1}{T}. \quad (1.7)$$

ასეთ რხევებს შეესაბამება ნახ. 1.2.



ნახ. 1.2. თავისუფალი არადემფირებული რხევითი სისტემის დინამიკა

როგორც ვხედავთ, გვაქვს პერიოდული რხევები მუდმივი a ამპლიტუდით, რომელიც დამოკიდებულია რხევითი სისტემის საწყის მდგომარეობაზე, ზამბარის სიხისტესა და მერხვეი სხეულის m მასაზე.

თეორემა. თავისუფალი რხევითი სისტემის სრული მექანიკური ენერჯის სიდიდე არ იცვლება დროის მიხედვით.

დამტკიცება. მართლაც, განვიხილოთ დინამიკის განტოლება, გავამრავლოთ ორივე ნაწილი x სიჩქარეზე და ვაინტეგრიროთ, მივიღებთ

$$m\ddot{x} + cx = 0 \Leftrightarrow m\dot{x}\ddot{x} + cx\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{c}{2}x^2\right) = \frac{d}{dt}(E_{kin} + E_{pot}) = 0 \Leftrightarrow E_{kin} + E_{pot} = const$$

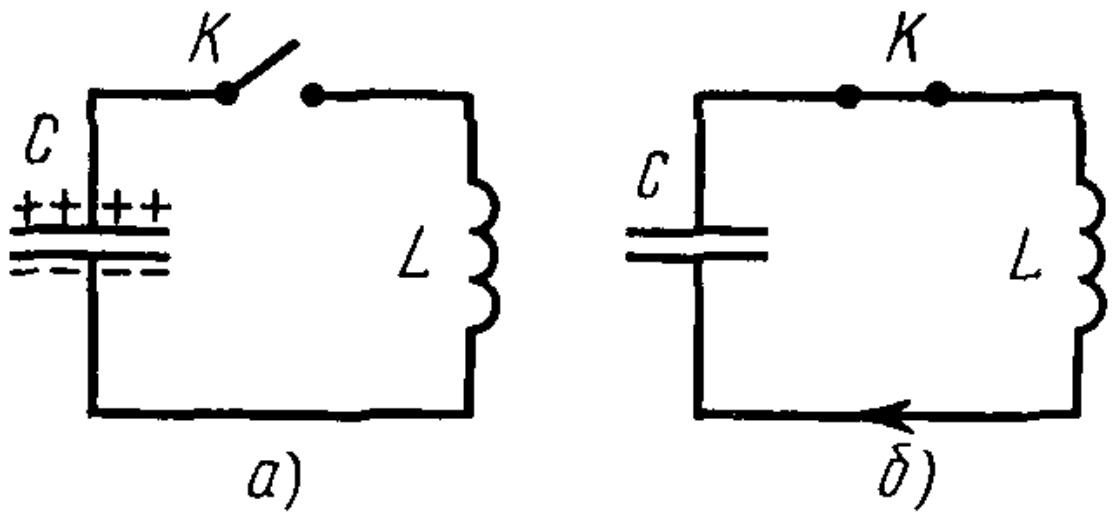
რ.დ.გ.

თავისუფალი რხევითი სისტემის ენერჯია

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2\right) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2,$$

ანუ სისტემის ენერჯია პირდაპირპროპორციულია რხევის ამპლიტუდის კვადრატისა.

1.1.3. არადემპფირებული თავისაუფალი ელექტრული რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება



ნახ. 1.3. რხევითი კონტური

თუ ელექტრული წრედი შეიცავს C ტევადობის კონდენსატორსა და L ინდუქციურობის მქონე კოჭას, მაშინ ამ წრედში შეიძლება აღიძვრას ელექტრული რხევები. ასეთ წრედს რხევით კონტურს უწოდებენ (ნახ. 1.3). ვთქვათ, კონდენსატორის ზედა ფირფიტა დამუხტულია დადებითად, ხოლო ქვედა – უარყოფითად (ნახ. 1.3.a). რხევითი კონტურის მთელი ენერგია თავმოყრილია კონდენსატორში. ჩავრთოთ K ჩამრთველი, მაშინ კონდენსატორი დაიწყებს განმუხტვას და L კოჭაში დენი გავა. კონდენსატორის ელექტრული ენერგია დაიწყებს კოჭას მაგნიტურ ენერგიად გარდაიქმნას. ეს პროცესი დამთავრდება, როცა მოხდება კონდენსატორის მთლიანი განმუხტვა და წრედში გვექნება მაქსიმალური დენის ძალა (ნახ. 1.3.ბ). ამ მომენტიდან დენის ძალა დაიწყებს შემცირებას ისე, რომ არ შეიცვლის მიმართულებას. მაგრამ შემცირება თანდათან მოხდება, ვინაიდან მის შემცირებას ეწინააღმდეგება კოჭას თვითინდუქციის ელექტრომომოძრავებელი ძალა. დენის ხარჯზე დაიწყება კონდენსატორის დამუხტვა, წარმოიქმნება ელექტრული ველი, რომელიც შეამცირებს დენის ძალას. ბოლოს და ბოლოს კონდენსატორი მიიღებს მაქსიმალურ მუხტს, ხოლო დენი გათავდება. ამის შემდეგ, კონდენსატორი დაიწყებს განმუხტვას და დენი დაიძვრება საპირისპირო

მიმართულებით და ა. შ. კონტურში თუ წინაღობა არ იქნება, მაშინ მივიღებთ პერი-ოდულ რხევებს.

შევადგინოთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ, Q არის კონდენსატორის მუხტის სიდიდე, U_c კონდენსატორზე მოდებული ძაბვა, მაშინ

$$U_c = \frac{Q}{C}. \quad (1.8)$$

ასევე, თუ I არის დენის ძალა და U_L კოჭაზე მოდებული ძაბვა

$$U_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (1.9)$$

კირხოფის კანონის თანახმად, გვექნება განტოლება:

$$U_L + U_c = L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (1.10)$$

დენის ძალა არის მუხტის ცვლილების სიჩქარე ანუ

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (1.11)$$

(3.10),(3.11) ტოლობებიდან გვექნება:

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (1.12)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (1.13)$$

მაშინ რხევითი კონტურის განტოლება (1.12) გადაიწერება თავისუფალი რხევების კანონიკური განტოლების სახით:

$$\ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0. \quad (1.14)$$

მიიღება $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ სისწორის ჰარმონიული ელექტრული რხევები, ხოლო რხევის პერიოდი იქნება: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$. ამ ფორმულას ელექტროდინამიკაში ტომპსონის ფორმულას უწოდებენ.

რხევითი სისტემის დინამიკა ისეთივეა, როგორც 1.2 ნახაზზეა გამოსახული.

P.S. როგორც ვხედავთ, მივიღეთ იგივე სახის მათემატიკური მოდელი, როგორც თავისუფალი მექანიკური რხევების დროს. რაც ნიშნავს, რომ ბუნება ერთიანია და თავისუფალი რხევითი სისტემები ელექტრული სისტემებისათვის ემორჩილება იგივე კანონზომიერებას, რასაც მექანიკური სისტემებისათვის.

1.1.4. არადემპფირებული თავისუფალი სოციალური რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

განვიხილოთ ვოლტერას ცნობილი მოდელი მტაცებელი-მსხვერპლი. ამ მოდელში, ორი სახეობის ცხოველია. აქედან, ერთი სახეობის ცხოველი იკვებება მეორე სახეობის ცხოველით. ხოლო მეორე სახეობის ცხოველი იკვებება ბალახით. ისმის კითხვა, მოსალოდნელია თუ არა, რომ პირველმა სახეობამ მოლიანად გაანადგუროს მეორე სახეობის ცხოველი ?

ამ სახეობათა რაოდენობის შესასწავლად ავაგოთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ, $N_1(t)$ არის პირველი სახეობის (მტაცებლების) რაოდენობა დროის მოცემულ მომენტში, ხოლო $N_2(t)$ - მსხვერპლის შესაბამისი რაოდენობა. თუ მსხვერპლი ცხოვრობს მარტო შესაბამისი კვების არეალზე, მაშინ მისი რაოდენობა იზრდება და

$$\dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2, \tag{1.15}$$

სადაც ε_2 ზრდის სიჩქარის კოეფიციენტი.

ასევე, თუ მტაცებლები მარტო აღმოჩნდებიან, მაშინ მათი რაოდენობა შიმშილის გამო განადგურდება. შესაბამის კანონს აქვს სახე:

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1, \quad (1.16)$$

სადაც ε_1 არის მტაცებლების სიკვდილიანობის სიჩქარის კოეფიციენტი.

ეხლა განვიხილოთ, ამ ორი სახეობის ერთდროული თანაცხოვრება შესაბამის არეალზე. მაშინ მტაცებლების გამრავლების სისწრაფე დამოკიდებული იქნება მსხვერპლთან მათი შეხვედრების რაოდენობაზე, რომელიც $N_1 \cdot N_2$ სიდიდის პროპორციულია. მაშასადამე, საბოლოოდ მივიღებთ **ვოლტერას მოდელს**

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_2 N_1 N_2, \quad (1.17)$$

$$\dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - \gamma_1 N_1 N_2, \quad (1.18)$$

სადაც γ_1 მსხვერპლის სიკვდილიანობის კოეფიციენტია მტაცებლებთან შეხვედრის გამო; γ_2 - მტაცებლების გამრავლების კოეფიციენტი.

ეხლა, განვიხილოთ ამ მოდელის წონასწორობის წერტილები ანუ ის მნიშვნელობები, რომელთა დროსაც სისტემა სტაციონარულია

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_2 N_1 N_2 = 0, \quad (1.19)$$

$$\dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - \gamma_1 N_1 N_2 = 0. \quad (1.20)$$

ამ სისტემის არატრივიალური ამონახსნია

$$N_1^0 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_1}, \quad N_2^0 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_2}. \quad (1.21)$$

სახეობათა რაოდენობების წონასწორობის მნიშვნელობების მცირე მიდამოში ანუ, როცა $n_1(t)$ და $n_2(t)$ მცირე სიდიდეებია, გვაქვს თანაფარდობები:

$$N_1(t) = N_1^0 + n_1(t), \quad N_2(t) = N_2^0 + n_2(t). \quad (1.22)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ ვოლტერას (1.19),(1.20) მოდელში და მოვახდენთ მიღებული განტოლებების ლინეარიზაციას, მივიღებთ სისტემას:

$$\dot{n}_1 = \frac{\gamma_2 \varepsilon_2}{\gamma_1} n_2, \quad (1.23)$$

$$\dot{n}_2 = -\frac{\gamma_1 \varepsilon_1}{\gamma_2} n_1. \quad (1.24)$$

თუ (1.23) განტოლებას დროით გავაწარმოებთ და გავითვალისწინებთ (1.24) განტოლებას, მივიღებთ:

$$\ddot{n}_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 n_1 = 0. \quad (1.25)$$

სადაც, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\omega_0^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2, \quad (1.26)$$

მივიღებთ თავისუფალი სისტემების რხევის კანონიკურ განტოლებას:

$$\ddot{n}_1 + \omega_0^2 n_1 = 0. \quad (1.27)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, აქაც მივიღეთ თავისუფალი რხევითი სისტემების რხევის მათემატიკური მოდელი. ნათლად ჩანს, ორი სახეობის თანაცხოვრების შედეგი დამოკიდებულია მათი გამრავლებისა და სიკვდილიანობის სიჩქარეთა კოეფიციენტების მნიშვნელობებზე.

1.15. არადემპფირებული თავისაუფალი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება ფრანგიშვილი-ობგაძის მოდელი

განვიხილოთ ეკონომიკური წონასწორობის განტოლება კეინსის სისტემაში

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (1.28)$$

სადაც $C(t)$ მოხმარებაა, $I(t)$ - ინვესტიციები, $X(t)$ - ეროვნული შემოსავალი.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \quad (1.29)$$

სადაც $\beta(t)$ აქსელერაციის კოეფიციენტია.

$C(t)$ მოხმარება ეროვნული შემოსავლის ფუნქციაა და დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინა ისტორიაზე

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau. \quad (1.30)$$

თუ (1.29) და (1.30) გამოსახულებებს შევიტანთ (1.28) წონასწორობის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(\tau), \tau] dt. \quad (1.31)$$

განტოლების ორივე მხარის t -თი დიფერენცირებით, მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t), t] \quad (1.32)$$

ანუ მივიღებთ დინამიკის ფრანგიშვილ-ობგაძის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1) \dot{X}(t) + F[X(t), t] = 0. \quad (1.33)$$

რადგან $\beta(t) \neq 0$, შეიძლება (1.33) განტოლება გავეყოთ $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ დინამიკურ განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[X(t), t] = 0. \quad (1.34)$$

თუ ფრანგიშვილ-ობგაძის (1.34) განზოგადებულ განტოლებაში მოვახდენთ ჩასმას:

$$\beta(t) = t \quad \text{და} \quad F[X(t), t] = \beta(t) \cdot \omega^2 \cdot X(t), \quad (1.35)$$

მაშინ დინამიკის (1.34) განტოლებიდან მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემების კანონიკურ განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = 0. \quad (1.36)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, კვლავ მივიღეთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი. რაც იმას მოწმობს, რომ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და გვხვდება სრულიად სხვადასხვა შინაარსის ამოცანების გადაწყვეტისას.

ამოცანები და საგარჯიშოები

1. შეადგინეთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი და გამოიკვლიეთ მიღებული სისტემის რხევის პერიოდი, სიხშირე, ფაზა და ამპლიტუდა, სისტემის საწყისი მდგომარეობიდან გამომდინარე.
2. შეისწავლეთ ენერჯის შენახვის კანონი თავისუფალი რხევითი სისტემებისათვის.
3. გამოიკვლიეთ თავისუფალი რხევითი სისტემა ფაზურ სიბრტყეზე. იპოვეთ ტრაექტორიები ფაზურ სიბრტყეზე.
4. შეადგინეთ მექანიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი (ზამბარაზე გამობმული ტვირთი, ნახ.1.1) იმ შემთხვევაში, როცა m მასის ტვირთზე მოქმედებს ხახუნის ძალაც. იქნება თუ არა ასეთი სისტემა თავისუფალი? რხევები იქნება დემპფირებული, თუ არა?
5. ჩამოთვალეთ რხევითი სისტემების ტიპები.

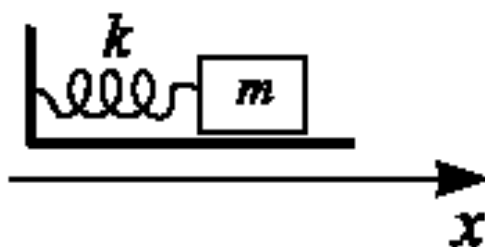
1.2.1. დემპფირებული თავისუფალი რხევითი პროცესების მოდელირება

თუ რხევითი სისტემის მთლიანი ენერჯია მცირდება (წინააღმდეგობის ძალების გადალახვაზე შესრულებული მუშაობის გამო), მაშინ ასეთ სისტემას დემპფირებული სისტემა ეწოდება. დემპფირებულ თავისუფალ სისტემებში გვაქვს

დემპფირებული (პერიოდულ-მილევადი ან არაპერიოდულ-მილევადი) რხევები.

1.2.2. დემპფირებული თავისუფალი მექანიკური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ დემპფირებული საკუთრივი (თავისუფალი) მექანიკური რხევითი სისტემის მაგალითი (ნახ. 1.4). როცა ზამბარის სიხისტეა c , ხოლო ტვირთის ზედაპირთან ხახუნის კოეფიციენტი k , მაშინ $F_{xax} = -kx$.



ნახ. 1.4. დემპფირებული საკუთრივი რხევები m მასის ტვირთის ზედაპირთან ხახუნის გათვალისწინებით

შევადგინოთ m მასის ტვირთის თავისუფალი რხევის მათემატიკური მოდელი ხახუნის ძალის გათვალისწინებით

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} = -cx - k\dot{x}. \quad (1.37)$$

თუ (1.37) განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ m მასის მნიშვნელობაზე და შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{c}{m} = 2\gamma, \quad (1.38)$$

მივიღებთ დემპფირებული თავისუფალი (საკუთარი) რხევითი სისტემის მოდელს:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (1.39)$$

სადაც ω_0 სისტემის თავისუფალი რხევების სიხშირეა,

γ - მიღების კოეფიციენტი.

თუ (1.39) დიფერენციალურ განტოლებაში მოვახდენთ ეილერის ჩასმას $x(t) = e^{rt}$, მაშინ მივიღებთ შესაბამის მახასიათებელ განტოლებას:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0. \quad (1.40)$$

რაც ნიშნავს, რომ (1.39) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (1.41)$$

აქ უნდა განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

თუ $\gamma < \omega_0$, მაშინ (1.41) ტოლობიდან გამომდინარე, გვაქვს მახასიათებელი ალგებრული განტოლების ორი კომპლექსური ურთიერთშეუღლებული r ამონახსნი. ამ შემთხვევაში, დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი შემდეგია:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cos(\omega \cdot t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (1.42)$$

რხევის პერიოდი:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}, \quad \text{ხოლო } A_0 \text{ და } \varphi \text{ მუდმივი რიცხვები განისაზ-$$

ღვრება

$$x(0) = 0 \quad (1.43)$$

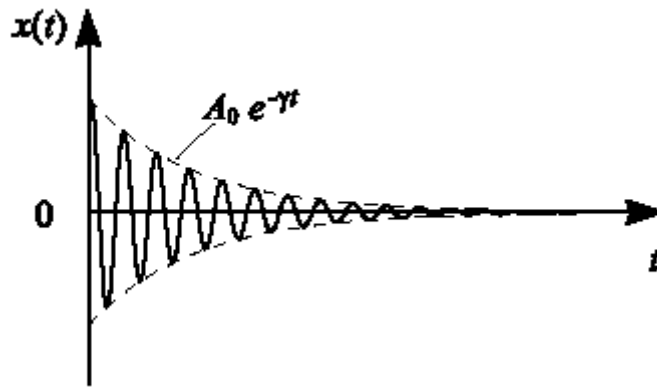
$$\dot{x}(0) = v_0 \quad (1.44)$$

საწყისი პირობებიდან გამომდინარე.

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + (v_0 + \gamma x_0)^2 / \omega^2} \quad (1.45)$$

$$\cos \varphi_0 = x_0 / A_0, \quad \sin \varphi_0 = -(v_0 + \gamma x_0) / (\omega A_0) \quad (1.46)$$

ეს შემთხვევა შეესაბამება მიღებად რხევით პროცესებს.



ნახ. 1.5. მიღევადი რხევები

ამპლიტუდის მიღევალობის სისწრაფე რეგულირდება γ პარამეტრით, ხოლო დემპფირებული სისტემის რხევის სიხშირე $\omega < \omega_0$. რაც ნიშნავს, რომ ხახუნის ძალა ამცირებს სისტემის საკუთარი რხევების სიხშირეს ანუ დემპფირებული სისტემის საკუთარი რხევების სიხშირე ნაკლებია შესაბამისი არადემპფირებული სისტემის რხევების სიხშირეზე.

$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$ სიდიდეს მიღევადი რხევების ამპლიტუდას უწოდებენ. როგორც ამ ფორმულიდან ჩანს, რხევის ამპლიტუდა, ასეთ შემთხვევაში, კლებულობს ექსპონენციალურად. შემოვიღოთ აღნიშვნა: A_n -ით აღვნიშნოთ წრფივი თავისუფალი დემპფირებული სისტემის, წონასწორობის მდგომარეობიდან დადებითი მიმართულებით მაქსიმალური მიმდევრობითი გადახრის სიდიდეები. ცხადია, რომ ეს სიდიდეები აკმაყოფილებს რეკურენტულ თანადობას

$$A_{n+1} = e^{-\gamma T} A_n. \quad (1.47)$$

გამოვთვალოთ რამდენჯერ შემცირდება რხევის ამპლიტუდა ერთი პერიოდის განმავლობაში, მივიღებთ:

$$(A_{t+T} = A_0 \cdot e^{-\gamma(t+T)}, \quad A_t = A_0 \cdot e^{-\gamma t}), \Rightarrow \frac{A_t}{A_{t+T}} = e^{\gamma T} \Rightarrow d = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}} = \gamma \cdot T.$$

განსაზღვრება. $d = \gamma T$ სიდიდეს ოსცილატორის მიღევალობის (ჩაქრობის) ლოგარითმულ დეკრემენტს უწოდებენ.

d -ლოგარითმული დეკრემენტის $N = \frac{1}{d}$ შებრუნებული სიდიდე გვიჩვენებს იმ რხევათა რიცხვს, რომლის შემდეგ ამპლიტუდა e -ჯერ კლებულობს.

T - რხევის პერიოდის განმავლობაში ამპლიტუდა e^{-d} -ჯერ მცირდება.

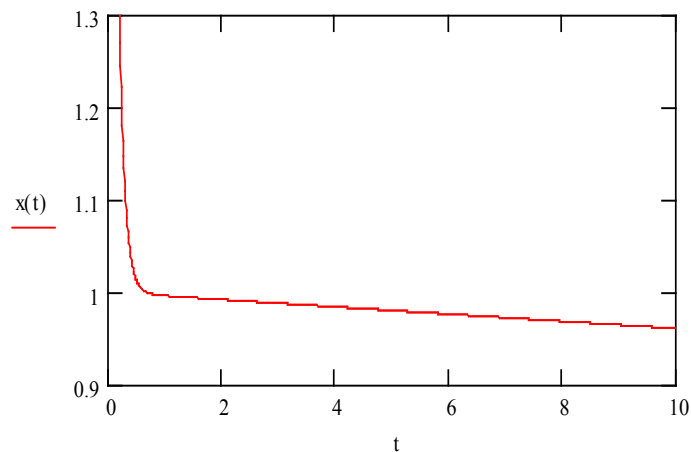
როგორც ვიცით, ენერგია რხევით სისტემაში რხევის ამპლიტუდის კვადრატის პროპორციულია, ამიტომ, ამ შემთხვევაში, მთლიანი მექანიკური ენერგია მცირდება (ხახუნის გამო სითბოში გარდაიქმნება)

$$E = E_0 \cdot e^{-2\gamma t} .$$

თუ $\gamma > \omega_0$, მაშინ r -ის ორივე მნიშვნელობა ნამდვილ რიცხვს წარმოადგენს და ამავე დროს, ორივე მნიშვნელობა უარყოფითია. დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს ამ შემთხვევაში აქვს სახე:

$$x(t) = C_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} . \quad (1.48)$$

ეს მოძრაობის აპერიოდული ჩაქრობაა რაც ნათლად ჩანს გრაფიკიდან ნახ. 1.6

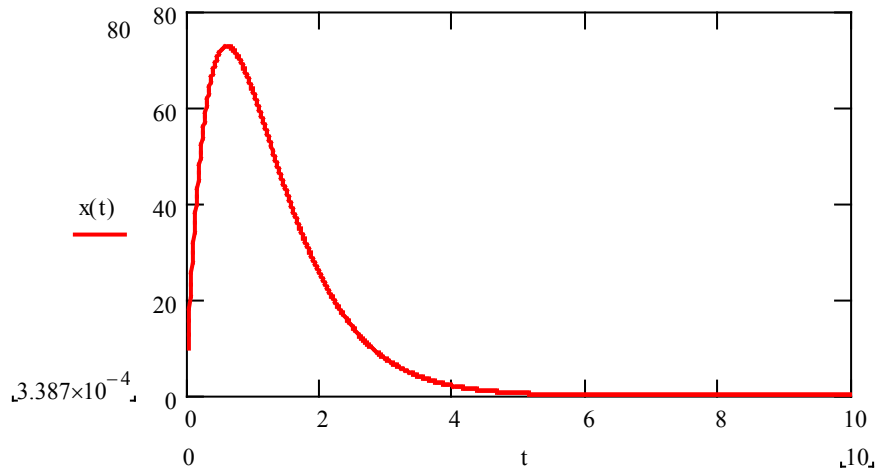


ნახ. 1.6. აპერიოდული მიღევადი მოძრაობა

თუ $\gamma = \omega_0$, მაშინ მახასიათებელ განტოლებას აქვს ერთი ორჯერადი ფესვი $r = -\gamma$. როგორც ცნობილია, ამ შემთხვევაში, დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$x(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-\gamma t}. \quad (1.49)$$

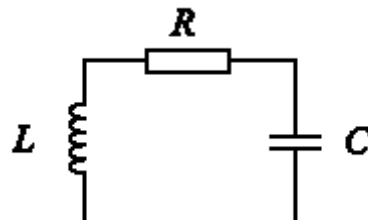
ესეც აპერიოდული მიღევადი მოძრაობის განსაკუთრებული შემთხვევაა (ნახ. 1.7).



ნახ. 1.7. აპერიოდული მიღევადი მოძრაობის განსაკუთრებული შემთხვევა

1.2.3. დემპფირებული, საკუთრივი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ დემპფირებული ელექტრული რხევითი სისტემა.



ნახ. 1.8. დემპფირებული, თავისუფალი ელექტრული რხევითი სისტემა

ამ სისტემაში (ნახ. 1.8) არადემპფირებული რხევითი კონტური-საგან განსხვავებით, ჩართულია R წინაღობა, რაც იწვევს ენერჯის დანაკარგებს და თავისუფალი სისტემა დემპფირებული ხდება.

შევადგინოთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ, Q არის კონდენსატორის მუხტის სიდიდე, U_c - კონდენსატორზე მოდებული ძაბვა, მაშინ

$$U_c = \frac{Q}{C}, \quad (1.50)$$

ასევე, თუ I არის დენის ძალა და U_L - კოჭაზე მოდებული ძაბვა, მაშინ

$$U_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (1.51)$$

ძაბვის ვარდნა R წინაღობაზე

$$U_r = R \cdot I. \quad (1.52)$$

კირჰხოფის კანონის თანახმად, გვექნება განტოლება:

$$U_L + U_r + U_c = L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = 0. \quad (1.53)$$

დენის ძალა მუხტის ცვლილების სიჩქარეა ანუ

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (1.54)$$

(1.53)-(1.54) ტოლობებიდან

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (1.55)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2 \cdot \gamma = \frac{R}{L}, \quad (1.56)$$

მაშინ განტოლება (1.55) მიიღებს სახეს:

$$\ddot{Q} + 2\gamma \dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0, \quad (1.57)$$

სადაც ω_0 სისტემის საკუთარი (თავისუფალი) რხევების სიხშირეა, ხოლო γ -მიღვევის კოეფიციენტი.

P.S. როგორც ვხედავთ, დემპფირებული თავისუფალი ელექტრული რხევითი კონტურის დინამიკის (1.57) განტოლება იდენტურია შესაბამისი დემპფირებული, თავისუფალი, მექანიკური სისტემის დინამიკის განტოლებისა. რაც იმას ნიშნავს, რომ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, ერთნაირად ეხება როგორც მექანიკურ, ასევე, ელექტრულ რხევით სისტემებს.

1.2.4. დემპფირებული თავისუფალი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ ვოლტერას ცნობილი მოდელი მტაცებელი-მსხვერპლი. ამ მოდელში, არის ორი სახის ცხოველი. აქედან, მეორე სახის ცხოველები იკვებებიან პირველი სახის ცხოველებით. ხოლო პირველი სახის ცხოველები იკვებებიან ბალახით. შევისწავლოთ ამ სისტემის შესაბამისი დინამიკა. ამისათვის აუცილებელია სისტემის მათემატიკური მოდელის შედგენა.

ავაგოთ, ამ სახეობათა რაოდენობის შესასწავლად შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ, $N_1(t)$ არის პირველი სახეობის (მსხვერპლის) რაოდენობა დროის მოცემულ მომენტში, ხოლო $N_2(t)$ - მტაცებლების შესაბამისი რაოდენობა. თუ მსხვერპლი ცხოვრობს მარტო შესაბამისი კვების არეალზე, მაშინ მისი რაოდენობა იზრდება მუდმივი k_0 სიჩქარით, მაგრამ მტაცებლებთან შეხვედრა იწვევს მათი ზრდის სიჩქარის შემცირებას k_2 სიჩქარის კოეფიციენტით. მტაცებლებისა და მსხვერპლის შეხვედრის სიხშირე დამოკიდებულია მათი რაოდენობების ნამრავლზე და, მაშასადამე, შეგვიძლია შევადგინოთ შესაბამისი დინამიკის განტოლება:

$$\dot{N}_1(t) = k_0 - k_1 N_1 N_2. \quad (1.58)$$

ანალოგიურად, მტაცებლების რაოდენობის ზრდა დამოკიდებულია მსხვერპლთან შეხვედრების რაოდენობაზე, რაც პირდაპირპროპორციულია მათი რაოდენობების ნამრავლისა. მაგრამ,

მტაცებლებიც იღუპებიან სიბერით, ავადმყოფობით ან უფრო ძლიერ მტაცებელთან ბრძოლაში. მათი სიკვდილიანობის კოეფიციენტი k_2 . მაშინ შესაბამისი დინამიკის განტოლებას ექნება სახე:

$$\dot{N}_2 = k_1 N_1 N_2 - k_2 N_2. \quad (1.59)$$

სტაციონარული წერტილის გამოსათვლელად ნუგს გავუტოლოთ (3.58),(3.59) განტოლებების მარჯვენა ნაწილები. მიღებული სისტემის ამონახსნი იქნება:

$$N_1^0 = \frac{k_2}{k_1}, \quad N_2^0 = \frac{k_0}{k_2}. \quad (1.60)$$

შევისწავლოთ (1.58),(1.59) სისტემა სტაციონარული (1.60) ამონახსნის მიდამოში. ამისათვის საძიებელ რაოდენობებს მივცეთ მცირე წანაზარდები $n_1(t)$ და $n_2(t)$ ანუ (1.58),(1.59) განტოლებებში შევიტანოთ ახალი სიდიდეები და უკუვაგდოთ კვადრატული წევრები მცირე წანაზარდების მიმართ

$$N_1(t) = N_1^0 + n_1(t), \quad (1.61)$$

$$N_2(t) = N_2^0 + n_2(t). \quad (1.62)$$

მაშინ მივიღებთ:

$$\dot{n}_1(t) = -k_2 n_2 - \frac{k_1 k_0}{k_2} n_1, \quad (1.63)$$

$$\dot{n}_2(t) = \frac{k_0 k_1}{k_2} n_1. \quad (1.64)$$

თუ გავაწარმოებთ (1.63) განტოლებას და შევიტანოთ $\dot{n}_2(t)$ -ს მნიშვნელობას (1.64) განტოლებიდან, მაშინ

$$\ddot{n}_1 + \frac{k_1 k_0}{k_2} \dot{n}_1 + k_0 k_1 n_1 = 0. \quad (1.65)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\frac{k_1 k_0}{k_2} = 2 \cdot \gamma \quad \text{და} \quad k_0 k_1 = \omega_0^2,$$

მაშინ განტოლება (1.65) გადაიწერება დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის კანონიკური სახით:

$$\ddot{n}_1 + 2\gamma \dot{n}_1 + \omega_0^2 n_1 = 0. \quad (1.66)$$

ეს სისტემა კი უკვე შესწავლილი გვაქვს.

P.S. როგორც ვხედავთ, დემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემა გვხვდება სოციალურ სისტემებშიც. რაც იძლევა იმის საფუძველს, რომ ჩაუღრმავდეთ სხვადასხვა პროცესის აღწერას და ნაკლებად დავიხარჯოთ მიღებული მოდელების აღმწერი განტოლებების გამოკვლევაზე.

1.2.5. დემპფირებული თავისუფალი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება ფრანგიშვილი-ობგაძის მოდელის ბაზაზე

განვიხილოთ ეკონომიკური წონასწორობის განტოლება კეინსის სისტემაში

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (1.67)$$

სადაც $C(t)$ მოხმარებაა, $I(t)$ - ინვესტიციები, $X(t)$ - ეროვნული შემოსავალი.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება:

$$I(t) = \beta(t) \cdot X(t), \quad (1.68)$$

სადაც $\beta(t)$ აქსელერაციის კოეფიციენტია. გარდა ამისა,

$C(t)$ მოხმარება ეროვნული შემოსავლის ფუნქციაა და დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინაისტორიაზე

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau. \quad (1.69)$$

თუ (1.68) და (1.69) განტოლებებს შევიტანთ (1.67) წონასწორობის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(\tau), \tau] dt. \quad (1.70)$$

განტოლების ორივე მხარის t -თი დიფერენცირებით, მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t), t] \quad (1.71)$$

ანუ ვღებულობთ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1) \dot{X}(t) + F[X(t), t] = 0. \quad (1.72)$$

რადგან $\beta(t) \neq 0$, (1.72) განტოლება შეიძლება გავყოთ $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ შემდეგი სახის დინამიკის განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[X(t), t] = 0. \quad (1.73)$$

თუ ფრანგიშვილ-ობგაძის (1.73) განზოგადებულ განტოლებაში მოვახდენთ ჩასმას

$$\beta(t) = e^{2\gamma t} \cdot \left(\frac{e^{-2\gamma t} - 1}{2\gamma} \right), \quad F[X(t), t] = \beta(t) \cdot \omega_0^2 X(t) \quad (1.74)$$

მივიღებთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის კანონიკურ განტოლებას:

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_0^2 X = 0, \quad (3.75)$$

რომელიც უკვე შევისწავლეთ სხვა შინაარსის პროცესებისათვის.

P.S. როგორც ვხედავთ, კვლავ მივიღეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი. რაც მოწმობს, რომ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და ის გვხვდება სრულიად სხვადასხვა შინაარსის ამოცანების გადაწყვეტისას.

ამოცანები და საგარჯიშოები

1. როგორ სისტემებს უწოდებენ დემპფირებულს?

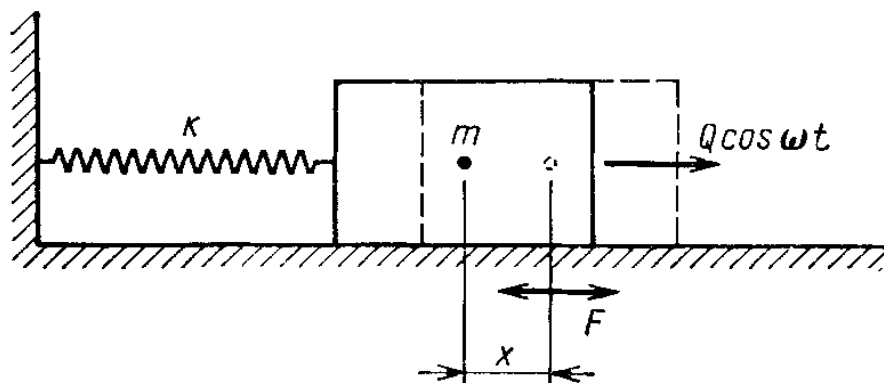
2. როგორ გამოითვლება დემპფირებული საკუთრივი რხევითი სისტემის მიღვეადი რხევების პერიოდი, რა არის ლოგარითმული დეკრემენტი და რისთვისაა საჭირო?
3. რა შემთხვევაში გვაქვს თავისუფალ, დემპფირებულ სისტემაში არაპერიოდული მიღვეადი რხევები?
4. შეადგინეთ ელექტრული, დემპფირებული რხევითი სისტემის სქემა და ააგეთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი.
5. მოიყვანეთ სოციალური დემპფირებული სისტემის მაგალითი და აჩვენეთ კოეფიციენტების რა მნიშვნელობებისთვისაა მოსალოდნელი მიღვეადი რხევითი პროცესები და რა შინაარსი შეესაბამება ამ შემთხვევას.

1.3.1. იძულებითი რხევითი სისტემების მოდელირება

იძულებით რხევით სისტემებში სისტემაზე მოქმედებს გარე ძალა, რომელიც განსაზღვრავს რხევის კანონს. აქ შესაბამის მათემატიკურ მოდელში რხევით პროცესებს განსაზღვრავს დამატებითი წევრები, რაც შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვნებას იწვევს.

1.3.2. იძულებითი მექანიკური რხევითი სისტემების მოდელირება

განვიხილოთ მექანიკური რხევითი სისტემა იმ პირობებში, როცა გვაქვს მაიძულებელი ძალის მოქმედება.



ნახ. 1.9. იძულებითი მექანიკური რხევითი სისტემა $f = Q \cos \omega t$ მაიძულებელი პერიოდული ძალის მოქმედების პირობებში

გვაქვს რხევითი სისტემა (ნახ. 1.9), რომელიც შედგება m მასის სხეულისაგან, როცა ზამბარის სიხისტეა c , ხოლო ტვირთის ზედაპირთან ხახუნის კოეფიციენტი k ანუ $F_{xxx} = -k\dot{x}$. თუ მოძრაობის გამომწვევი გარე პერიოდული ძალაა $f = Q\cos\omega t$, ადვილი მისახვედრია, რომ ნიუტონის დინამიკის კანონიდან გამომდინარე, შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლება m მასის სხეულის x გადაადგილების შესასწავლად:

$$m\ddot{x} = -cx - k\dot{x} + Q\cos(\omega \cdot t). \quad (1.76)$$

გავყოთ ამ განტოლების ორივე მხარე m მასის სიდიდეზე და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\frac{c}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{k}{m} = 2\gamma, \quad \frac{Q}{m} = H. \quad (1.77)$$

მაშინ განტოლება (1.76) გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = H\cos(\omega \cdot t). \quad (1.78)$$

ამრიგად, მივიღეთ წრფივი, დემპფირებული, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.

ახლა შევისწავლოთ ამ სისტემის თავისებურებები. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

- 1) იძულებითი რხევითი სისტემა არაა დემპფირებული;
- 2) დემპფირებული, იძულებითი რხევითი სისტემა.

1) თუ რხევითი სისტემა არაა დემპფირებული, მაშინ $\gamma = 0$ და დინამიკის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\ddot{x} + \omega_0^2x = H\cos(\omega \cdot t). \quad (1.79)$$

როგორც ცნობილია, წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენცი-ალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ტოლია შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი და არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნების ჯამისა

$$x = x_{ertg \text{ var. zogadi}} + x_{araertg. \text{ ker dzo}} \quad (1.80)$$

(1.79) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი ტოლია არადემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის ამონახსნისა

$$x_{ertg \text{ var. zogadi}} = a \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad (1.81)$$

სადაც $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$, $\text{tg} \varphi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}$.

არაერთგვაროვანი (1.79) სისტემის კერძო ამონახსნი

$$x_{araertg. \text{ ker dzo}} = h \cos(\omega \cdot t) \quad (1.82)$$

(1.82) გამოსახულება ჩავსვათ (1.79) განტოლებაში, მივიღებთ

$$-h\omega^2 \cos(\omega \cdot t) + \omega_0^2 h \cos(\omega \cdot t) = H \cos(\omega \cdot t),$$

საიდანაც

$$h = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

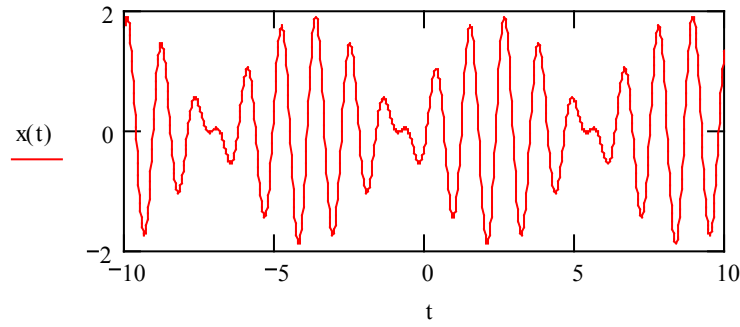
რაც ნიშნავს, რომ (1.79) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნს აქვს სახე:

$$x_{araertg. \text{ ker dzo}} = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (1.83)$$

მივიღეთ არაერთგვაროვანი (1.79) განტოლების ზოგადი ამონახსნი (1.81), რომელიც გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$x(t) = a \cos(\omega_0 \cdot t - \varphi) + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (1.84)$$

ფორმულა (1.84) ძალაშია, თუ $\omega_0 \neq \omega$. ასეთ შემთხვევაში, გვაქვს ორი სხვადასხვა სიხშირის რხევათა ჯამი. სისტემის დინამიკა გამოსახულია ნახ. 1.10 - ზე.



ნახ. 1.10. ორი სხვადასხვა სიხშირის ჰარმონიული რხევის ჯამი

თუ სისტემის საკუთრივი რხევის სიხშირე ω_0 ემთხვევა, მაიძულებელი პერიოდული ძალის რხევის ω სიხშირეს გვექნება რეზონანსი.

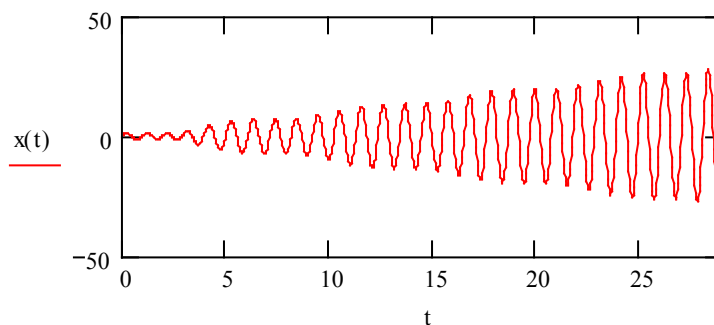
ასეთ შემთხვევაში (1.79) განტოლების ზოგადი ამონახსნის გამოსათვლელად (1.84) ამონახსნი გადაიწერება სახით:

$$x(t) = a \cos(\omega_0 \cdot t - \varphi) + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot (\cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega_0 \cdot t)). \quad (1.85)$$

თუ (1.85) ფორმულაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $\omega \rightarrow \omega_0$, ლობიტალის წესის გამოყენებით მივიღებთ ზოგად ამონახსნს:

$$x(t) = a \cos(\omega_0 \cdot t - \varphi) + \frac{H}{2\omega_0} \cdot t \cdot \sin(\omega_0 \cdot t). \quad (1.86)$$

როგორც (1.86) ამონახსნიდან ჩანს, რეზონანსის შემთხვევაში, რხევის ამპლიტუდა წრფივი კანონით იზრდება (ნახ. 1.11).



ნახ. 1.11. რეზონანსული რხევების დინამიკა

თუ მაიძულებელი ძალის რხევის სიხშირე ახლოსაა სისტემის საკუთრივი რხევების სიხშირესთან, ადგილი აქვს რხევების ცემას ორი მახლობელი სიხშირით.

2) ახლა განვიხილოთ წრფივი, დემპფირებული იძულებითი რხევითი სისტემის შემთხვევა. გვაქვს მათემატიკური მოდელი

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = H \cos(\omega \cdot t) \quad (1.87)$$

ვიპოვოთ ამ განტოლების კერძო ამონახსნი

$$x = \xi \cos(\omega \cdot t) + \eta \sin(\omega \cdot t) \quad (1.88)$$

(1.88) ფორმულა შევიტანოთ (1.87) განტოლებაში, მაშინ ξ და η კოეფიციენტების გამოსათვლელად მივიღებთ განტოლებას:

$$\begin{aligned} -\xi \cdot \omega^2 \cos(\omega \cdot t) - \eta \cdot \omega^2 \sin(\omega \cdot t) - 2\gamma \cdot \xi \cdot \omega \sin(\omega \cdot t) + 2\gamma \cdot \eta \cdot \omega \cos(\omega \cdot t) + \\ + \omega_0^2 \cdot \xi \cdot \cos(\omega \cdot t) + \omega_0^2 \cdot \eta \cdot \sin(\omega \cdot t) = H \cdot \cos(\omega \cdot t) \end{aligned} \quad (1.89)$$

თუ (1.89) განტოლების, კოეფიციენტებს გავუტოლებთ შესაბამის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან, მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{aligned} -\xi \cdot \omega^2 + 2\gamma \cdot \eta \cdot \omega + \xi \cdot \omega_0^2 &= H, \\ -\eta \omega^2 - 2\gamma \cdot \xi \cdot \omega + \omega_0^2 \cdot \eta &= 0. \end{aligned} \quad (1.90)$$

ამ სისტემის ამონახსნებია:

$$\xi = \frac{H \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot \omega^2]}, \quad (1.91)$$

$$\eta = \frac{2\gamma \cdot \omega \cdot H}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot \omega^2]}. \quad (1.92)$$

გამოსახულებაში (1.88) შემოვიღოთ დამატებითი კუთხე, მაშინ (1.91)-(1.92) თანაფარდობების გათვალისწინებით, მივიღებთ (1.87) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნს:

$$x_{\text{araertg var. Krdzo}} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{H}{\sqrt{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot \omega^2]}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi^*) \quad (1.93)$$

შევისწავლეთ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

თავისუფალი, დემპფირებული რხევითი სისტემების შესწავლის დროს გვექონდა სამი შემთხვევა:

ა) თუ $\gamma < \omega_0$, მაშინ $x_{ertg\ var} = A_0 \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cos(\omega \cdot t + \varphi)$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$;

ბ) თუ $\gamma > \omega_0$, მაშინ $x_{ertg\ var} = C_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$;

გ) თუ $\gamma = \omega_0$, მაშინ $x_{ertg\ var} = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-\gamma \cdot t}$.

მაშასადამე, არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

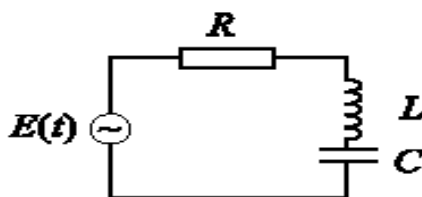
$$x(t) = x_{araertgv.\ ker\ dzo} + x_{ertg\ var} \cdot \tag{1.94}$$

ცხადია, რომ აქაც გვექნება სამი სხვადასხვა შემთხვევა.

P.S. დავალება სტუდენტებს: Mathcad -ის ბაზაზე შეისწავლეთ ამ სამი შემთხვევის შესაბამისი რხევითი სისტემების დინამიკა.

1.3.3. იძულებითი ელექტრული რხევითი სისტემების მოდელირება

განვიხილოთ იძულებითი ელექტრული რხევითი პროცესი რხევით კონტურში (ნახ. 1.12):



ნახ. 1.12. რხევითი კონტური ელექტრული დენის წყაროთი, რომლის ელექტრომამოძრავებელი ძალაა $E(t)$

კირხოფის კანონი ამ წრედისათვის

$$U_L + U_r + U_C = L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = E(t), \tag{1.95}$$

სადაც Q არის კონდენსატორის მუხტის სიდიდე, U_c – კონდენსატორზე მოდებული ძაბვა. $U_c = \frac{Q}{C}$. I – დენის ძალა, U_L – კოჭაზე მოდებული ძაბვა, ამასთან $U_L = L \frac{dI}{dt}$. ძაბვის ვარდნა R წინაღობაზე $U_r = R \cdot I$; $E(t)$ ელექტრული დენის მამოძრავებელი ძალაა. მაშასადამე, მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს

$$L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = E(t). \quad (1.96)$$

თუ (1.96) ფორმულაში გავითვალისწინებთ, რომ დენის ძალა მუხტების მოწესრიგებული ნაკადია ანუ

$$I = \dot{Q}, \quad (1.97)$$

მაშინ, მივიღებთ დენის წყაროს შემცველი ელექტრული რხევითი კონტურის დინამიკის განტოლებას

$$L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t). \quad (1.98)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2 \cdot \gamma = \frac{R}{L}, \quad F(t) = \frac{E(t)}{L}, \quad (1.99)$$

მაშინ (1.98) განტოლება მიიღებს იძულებითი, დემპფირებული, წრფივი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის სახეს, რომელზეც უკვე ვისაუბრეთ:

$$\ddot{Q} + 2\gamma \cdot \dot{Q} + \omega_0^2 \cdot Q = F(t). \quad (1.100)$$

P.C. როგორც ვხედავთ, იძულებითი, დემპფირებული, წრფივი ელექტრული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ემთხვევა შესაბამისი მექანიკური სისტემის მათემატიკურ მოდელს.

1.3.4. იძულებითი სოციალური რხევითი სისტემების მოდელირება

განვიხილოთ სოციუმის დინამიკა დროში. ვთქვათ, $N(t)$ არის სოციუმის მოცულობის ცვლილების კანონი დროში. m ამ სოციუმის საარსებო არეალია, ხოლო $f_1(t)$ სოციუმის მოცულობის ცვლილების გამომწვევი ძალა. ამიტომ, სოციუმის მოცულობის ცვლილების კანონის საპოვნელად განვიხილოთ შესაბამისი დინამიკის განტოლება

$$m\ddot{N} = f_1(t). \quad (1.101)$$

ცხადია, რომ სოციუმის მოცულობის ცვლილების გამომწვევი ძალა სამი ნაწილისაგან შედგება: ა) დადებითი წევრი, რომელიც გამოწვეულია გარე მიგრაციით მოცემულ სოციუმში $f(t)$;

ბ) $-kN$ უარყოფითი წევრით, რაც შეესაბამება სოციუმის შემცირების გამომწვევ ძალას ბუნებრივი სიკვდილიანობის გამო.

k შესაბამისი სიკვდილიანობის კოეფიციენტი; გ) $-2\lambda \dot{N}$ ძალაა, რომელიც იწვევს სოციუმის შემცირებას სხვა სოციუმებთან ბრძოლაში მარცხის გამო. ეს ნიშნავს, რომ

$$f_1(t) = f_2(t) - 2\lambda \dot{N} - kN. \quad (1.102)$$

თუ (1.102) გამოსახულებას შევიტანთ (1.101)-ში, მივიღებთ დინამიკის განტოლებას

$$m\ddot{N} + 2\lambda \dot{N} + kN = f_2(t). \quad (1.103)$$

ამ განტოლების m არეალის სიდიდეზე გაყოფით და შესაბამისი აღნიშვნებით მივიღებთ:

$$\frac{\lambda}{m} = \gamma, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{f_2(t)}{m} = f(t). \quad (1.104)$$

მაშინ განტოლება (1.103) გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\ddot{N} + 2\gamma \dot{N} + \omega_0^2 N = f(t). \quad (1.105)$$

ეს განტოლება ემთხვევა წრფივი, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს. რაც იმას ნიშნავს, რომ რხევითი

სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და აღწერს სრულიად სხვადასხვა შინაარსის პროცესებს.

1.3.5. იძულებითი ეკონომიკური რბევითი სისტემების მოდელირება

განვიხილოთ ეკონომიკური წონასწორობის განტოლება კეინსის სისტემაში

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (1.106)$$

სადაც $C(t)$ მოხმარებაა, $I(t)$ - ინვესტიციები, $X(t)$ - ეროვნული შემოსავალი.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \quad (1.107)$$

სადაც $\beta(t)$ აქსელერაციის კოეფიციენტია.

გარდა ამისა, $C(t)$ მოხმარება არის ეროვნული შემოსავლის ფუნქცია და დამოკიდებულია მოხმარების მოველ წინაისტორიაზე

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau. \quad (1.108)$$

თუ (1.107) და (1.108) თანაფარდობებს შევიტანთ (1.106) კეინსის წონასწორობის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(\tau), \tau] dt \quad (1.109)$$

განტოლების ორივე მხარის t -თი დიფერენცირებით, მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t), t] \quad (1.110)$$

ანუ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1) \dot{X}(t) + F[X(t), t] = 0. \quad (1.111)$$

რადგან $\beta(t) \neq 0$, (1.111) განტოლება შეიძლება გავყოთ $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ დინამიკის განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[X(t), t] = 0. \quad (1.112)$$

თუ ფრანგიშვილ-ობგაძის განზოგადებულ განტოლებაში (1.112) მოვახდენთ ჩასმას (1.113),

$$\beta(t) = e^{2\gamma t} \cdot \left(\frac{e^{-2\gamma t} - 1}{2\gamma} \right), \quad F[X(t), t] = \beta(t) \cdot [\omega_0^2 X(t) - f(t)]. \quad (1.113)$$

მივიღებთ:

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_0^2 X = f(t). \quad (1.114)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, კვლავ მივიღეთ წრფივი, დემპფირებული, იძულებითი, რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი. რაც იმას მოწმობს, რომ დემპფირებული, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და გვხვდება სრულიად სხვადასხვა შინაარსის ამოცანების გადაწყვეტისას.

ამოცანები და სავარჯიშოები

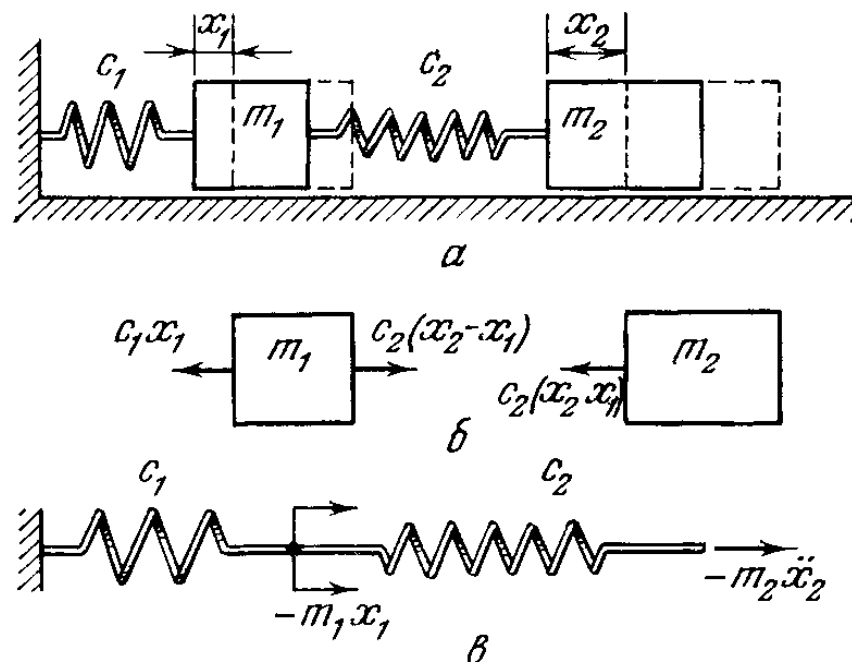
1. ააგეთ იძულებითი, წრფივი, დემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, როცა მაიძულებელი ძალა ნებისმიერი პერიოდული, არა აუცილებლად ჰარმონიული ფუნქციაა.
2. ააგეთ იძულებითი, წრფივი, დემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, როცა მაიძულებელი ძალა ნებისმიერი, საზოგადოდ - არაპერიოდული ფუნქციაა.
3. შეადგინეთ იძულებითი, წრფივი, დემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის გამოსაკვლევი პროგრამა Mathcad -ის ბაზაზე.
4. რა თავისებურებები ახასიათებს არადემპფირებულ, იძულებით რხევით სისტემებს?
5. რით განსხვავდება იძულებითი, წრფივი, რეზონანსული დემპფირებული და არადემპფირებული რხევითი სისტემები?

1.4.1. ბმული რხევითი სისტემების მოდელირება

ბმული რხევითი სისტემების შემთხვევაში საქმე გვაქვს ორი ან მეტი რაოდენობის რხევით სისტემასთან, რომლებიც ერთმანეთზე ახდენენ გავლენას. თუ ერთი სისტემა ახდენს გავლენას მეორეზე, ხოლო მეორე ვერ ახდენს გავლენას პირველზე, ეს არ იქნება ბმული რხევითი სისტემა. ასეთ შემთხვევაში ძირითადი (პირველი) სისტემა იქნება თავისუფალი, ხოლო მეორე სისტემა იქნება იძულებითი რხევითი სისტემა, რომელიც პირველი სისტემით იმართება.

1.4.2. ბმული მექანიკური რხევითი სისტემების მოდელირება

განვიხილოთ წრფივი, ბმული, მექანიკური რხევითი სისტემის მაგალითები (ნახ. 1.13, 1.14).



ნახ. 1.13. ბმული მექანიკური რხევითი სისტემის მაგალითი

ა) ეს სისტემა შედგება ორი m_1 და m_2 მასის სხეულებისაგან, რომლებიც კედელთან და ერთმანეთთან დაკავშირებულია, შესაბამისად, c_1 და c_2 სიხისტის მქონე ზამბარებით და ჰუკის კანონს ემორჩილება.

პირველი სხეულის საწყისი მდგომარეობიდან გადაადგილება აღვნიშნოთ x_1 , ხოლო მეორე სხეულის გადაადგილება, შესაბამისად, x_2 . მაშინ, ნიუტონის მეორე კანონიდან გამომდინარე, მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს:

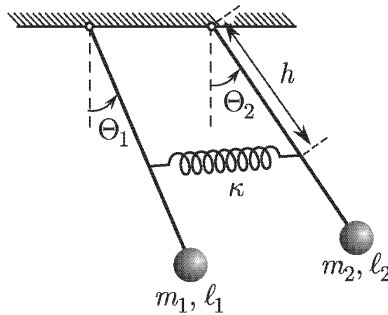
$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = -c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot (x_2 - x_1), \quad (1.115)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -c_2 \cdot (x_2 - x_1). \quad (1.116)$$

$$x_1(0) = x_1^0; \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1^0, \quad (1.117)$$

$$x_2(0) = x_2^0; \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_2^0. \quad (1.118)$$

ბ) ახლა განვიხილოთ ბმული მექანიკური რხევითი სისტემა, რომელიც შედგება ერთმანეთთან ორი ზამბარით დაკავშირებული მათემატიკური ქანქარისაგან (ნახ. 1.14). თუ დავწერთ ნიუტონის დინამიკურ განტოლებას თითოეული ქანქარისათვის, ზამბარიანი კავშირის გათვალისწინებით და მოვახდენთ სტანდარტულ გარდაქმნებს, მივიღებთ ბმული მექანიკური (ნახ. 1.14) რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს.



ნახ. 1.14. ბმული მექანიკური სისტემა ზამბარით დაკავშირებული ორი ქანქარით

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

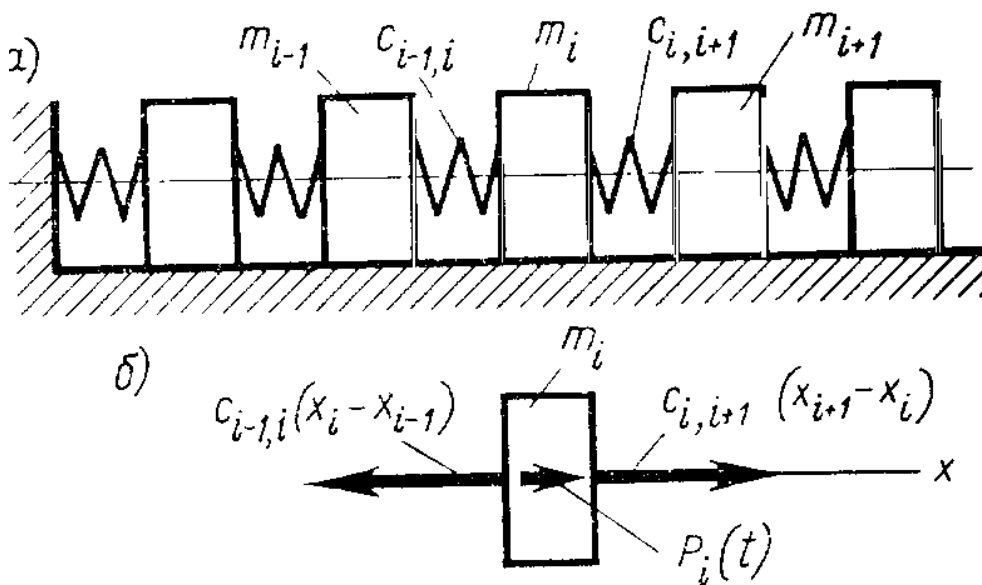
$$\ddot{\Theta}_1 + \omega_{01}^2 \cdot \Theta_1 = -\sigma_1^2 \cdot (\Theta_1 - \Theta_2), \quad (1.119)$$

$$\ddot{\Theta}_2 + \omega_{02}^2 \cdot \Theta_2 = -\sigma_2^2 \cdot (\Theta_2 - \Theta_1), \quad (1.120)$$

სადაც $\omega_{01} = \sqrt{\frac{g}{l_1}}$ და $\omega_{02} = \sqrt{\frac{g}{l_2}}$ ქანქარების საკუთარი რხევის სიხშირეებია, ხოლო σ_1 და σ_2 კოეფიციენტები ასახავს ქანქარების ურთიერთქმედებას, რომელიც განპირობებულია k სიხისტის მქონე ზამბარით

$$\sigma_1^2 = \frac{kh^2}{m_1 \cdot l_1}, \quad \sigma_2^2 = \frac{kh^2}{m_2 \cdot l_2}. \quad (1.121)$$

გ) განვიხილოთ ბმული მექანიკური სისტემა, შედგენილი N რხევითი სისტემისაგან (ნახ. 1.15).



ნახ. 1.15. N რხევითი სისტემისაგან შედგენილი ბმული მექანიკური რხევითი სისტემა

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ბმული, მექანიკური რხევითი სისტემა, რომელიც შედგება N რხევითი სისტემისაგან. თითოეული რხევითი სისტემა შედგება შესაბამისი m_i მასის სხეულისაგან და ეს სხეულები ერთმანეთთან დაკავშირებულია ზამბარებით ისე, რომ m_i და m_{i+1} მასის სხეულები დაკავშირებულია სიხისტის მქონე $c_{i,i+1}$ დრეკადი ზამბარით. ადვილი მისახვედრია, რომ თუ ჩავწერთ ნიუტონის დინამიკის განტოლებას m_i მასის სხეულისათვის ამ სისტემაში, მივიღებთ შესაბამის მათემატიკურ მოდელს:

$$m_i \cdot \ddot{x}_i = -c_{i-1,i}(x_i - x_{i-1}) + c_{i,i+1}(x_{i+1} - x_i) + F_i(t), \quad i = \overline{1, N}. \quad (1.122)$$

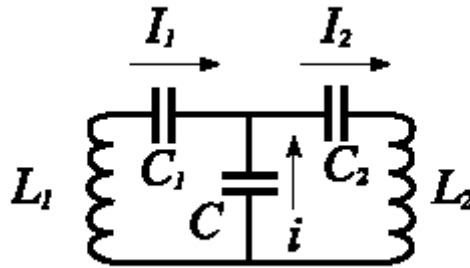
სადაც $F_i(t)$ არის i -ურ სხეულზე მოქმედი გარე ძალა.

P.S. როცა უნდათ შეისწავლონ დრეკადი მყარი სხეულის რხევები, მას განიხილავენ, როგორც N ერთნაირი მასის სხეულს, დაკავშირებულს ერთნაირი c სიხისტის ზამბარებით. მაშინ მყარი, დრეკადი სხეულის რხევები განიხილება, როგორც შესაბამისი ბმული, წრფივი, დისკრეტული, მექანიკური რხევითი სისტემის რხევები და შესაბამის მათემატიკურ მოდელს ექნება სახე:

$$m \cdot \ddot{x}_i = c \cdot (-2 \cdot x_i + x_{i-1} + x_{i+1}), \quad i = \overline{1, N}. \quad (1.123)$$

1.4.3. ბმული ელექტრული რხევითი სისტემების მოდელირება

განვიხილოთ, ბმული რხევითი ელექტრული სისტემა, რომლის შედგენილობაში კონდენსატორით ერთმანეთთან დაკავშირებული ორი რხევითი კონტურია.



ნახ. 1.16. ბმული ელექტრული რხევითი სისტემა

ჩავწეროთ კირჰოფის კანონები ნახ. 1.16-ზე გამოსახული რხევითი კონტურებისათვის

$$i = I_1 - I_2 \Rightarrow \dot{q} = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 \Rightarrow q = q_1 - q_2. \quad (1.124)$$

$$L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \cdot q_1 + \frac{1}{C} \cdot q = 0, \quad (1.125)$$

$$L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \cdot q_2 - \frac{1}{C} \cdot q = 0, \quad (1.126)$$

სადაც $I_1 = \dot{q}_1$ და $I_2 = \dot{q}_2$.

(1.125) და (1.126) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\ddot{q}_1 + \frac{1}{C_1 L_1} q_1 = \frac{1}{C L_1} (q_2 - q_1), \quad (1.127)$$

$$\ddot{q}_2 + \frac{1}{C_2 L_2} q_2 = -\frac{1}{C L_2} (q_2 - q_1). \quad (1.128)$$

P.S. ბმული რხევითი ელექტრული სისტემები გამოიყენება ელექტროტექნიკაში, სიგნალების გასაფილტრად.

1.4.4. ბმული სოციალური რხევითი სისტემების მოდელირება

განვიხილოთ, ორი ურთიერთმოქმედი სოციალური ჯგუფი, რომელთა მოცულობებს აღვნიშნავთ, შესაბამისად, N_1 და N_2 . ამ ორი სოციუმის მოქმედების არეალები აღვნიშნოთ m_1 და m_2 . თუ გავითვალისწინებთ, რომ სოციალური ჯგუფები ურთიერთქმედებს ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალებით, რომლებიც პირდაპირპროპორციულია მათი მოცულობების სხვაობისა ანუ $k_2 \cdot (N_2 - N_1)$; ამასთან, თუ ჩავთვლით, რომ ჯგუფების მოქმედების m_1 და m_2 არეალები შეზღუდულია და, მაშასადამე, რაც უფრო გაიზრდება სოციუმის N_1 და N_2 მოცულობები, მით უფრო ნაკლები იქნება ამ სოციუმის ზრდის სიჩქარე, მივიღებთ ბმული სოციალური რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს:

$$m_1 \cdot \dot{N}_1 = -k_1 \cdot N_1 + k_2 \cdot (N_2 - N_1), \quad (1.129)$$

$$m_2 \cdot \dot{N}_2 = -k_3 \cdot N_2 - k_2 \cdot (N_2 - N_1). \quad (1.130)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიც მივიღეთ ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, რომელიც ანალოგიურია შესაბამისი ელექტრული ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელისა.

1.4.5. ბმული ეკონომიკური რხევითი სისტემების მოდელირება

განვიხილოთ ორი, ურთიერთკონკურენტუნარიანი პროდუქციის, ბაზარზე რეალიზებულ მოცულობათა X_1 და X_2 დინამიკა.

ცხადია, რაც უფრო დიდია რეალიზებული პროდუქციის მოცულობა, მით უფრო ნაკლებია რეალიზებული პროდუქციის ზრდის სიჩქარის ცვლილება, ბაზრის გაჯერების გამო. ასევე, რეალიზებული პროდუქციის მოცულობის ცვლილების სიჩქარე პირდაპირპროპორციულია მოცულობათა სხვაობისა. ამავე დროს, მოქმედი ძალები სიდიდით ტოლია და მიმართულებით საწინააღმდეგო. თუ m_1 და m_2 შესაბამისი პროდუქციის ფასებია, მივიღებთ ბმული ეკონომიკური რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს:

$$m_1 \cdot \ddot{X}_1 = -k_1 \cdot X_1 + k_2 \cdot (X_2 - X_1), \quad (1.131)$$

$$m_2 \cdot \ddot{X}_2 = -k_3 \cdot X_2 - k_2 \cdot (X_2 - X_1). \quad (1.132)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიც მივიღეთ ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, რომელიც ანალოგიურია შესაბამისი ელექტრული ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელისა. ამ მოდელის აგება შესაძლებელია ფრანგიშვილობგადის მოდელის ბაზაზეც.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. განსახდვრეთ წრფივი, ბმული რხევითი სისტემა და ააგეთ შესაბამისი მექანიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.
2. გამოიკვლიეთ ბმული რხევითი სისტემა Mathcad პროგრამის საშუალებით.
3. ააგეთ ბმული რხევითი სოციალური სისტემის მათემატიკური მოდელი და გამოიკვლიეთ Mathcad პროგრამის საშუალებით.
4. ააგეთ ბმული რხევითი ეკონომიკური სისტემის მათემატიკური მოდელი ფრანგიშვილობგადის მოდელის ბაზაზე და გამოიკვლიეთ Mathcad პროგრამის საშუალებით.
5. ააგეთ ბმული რხევითი ფსიქოლოგიური სისტემის მათემატიკური მოდელი.

1.5.1. რხევითი სისტემების მოდელირების ვარიაციული მეთოდები

მათემატიკური მოდელების ასაგებად იყენებენ უნივერსალურ ვარიაციულ პრინციპებს, რომლებიც ემყარება საუკუნოვან პრაქტიკულ გამოცდილებას ბუნებაში მიმდინარე პროცესების შესახებ. ცნობილია, რომ ბუნება ერთიანია ანუ მეცნიერების ერთ სფეროში მიმდინარე პროცესები ანალოგიურია მეორე სფეროში მიმდინარე პროცესებისა. რაც იმას ნიშნავს, რომ საკმარისია აღმოვაჩინოთ პროცესების მსგავსების კრიტერიუმები, რომ შეგვიძლია ფიზიკაში დამუშავებული მოდელები გამოვიყენოთ სხვადასხვა ინტელექტუალურ სფეროში.

1.5.2. ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი.

თავისუფალი რხევითი სისტემის მოდელის აგება

განვიხილოთ დინამიკური სისტემა, რომლისთვის $Q(t)$ მდგომარეობის განმსაზღვრელი კოორდინატია. შესაბამისად, Q წარმოადგენს განმსაზღვრელი პარამეტრის ცვლილების სიჩქარეს. განვსაზღვროთ დინამიკური სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია, როგორც სხვაობა მის კინეტიკურ და პოტენციურ ენერგიებს შორის

$$L(Q, \frac{dQ}{dt}) = E_k - E_p. \quad (1.133)$$

სადაც E_k და E_p , შესაბამისად, სისტემის კინეტიკური და პოტენციური ენერგიებია.

განვიხილოთ სიდიდე, რომელსაც მოქმედებას უწოდებენ და ჩაწერენ ფორმულით:

$$S(Q) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dt}\right) dt. \quad (1.134)$$

ამ სიდიდეზეა დამოკიდებული სისტემის ყოფაქცევა. ჰამილტონის უნივერსალური პრინციპი ამბობს, თუ სისტემა რეალურია, მაშინ $Q(t)$ არის $S(Q)$ ფუნქციონალის სტაციონარული ფუნქცია ანუ

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(Q + \varepsilon\varphi)_{\varepsilon=0} = 0. \quad (1.135)$$

ჰამილტონის პრინციპში მოქმედი $\varphi(t)$ ფუნქცია საცდელი ფუნქციაა, რომელიც ნულის ტოილ ხდება დროის t_1 და t_2 მომენტებში. $\varepsilon \cdot \varphi(t)$ ფუნქციას $Q(t)$ ფუნქციის ვარიაცია ეწოდება. ჰამილტონის პრინციპი საშუალებას იძლევა ავაგოთ რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.

განვიხილოთ სისტემის თავისუფალი რხევები, როცა მოცემული გვაქვს ზამბარა m მასის ტვირთით. ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტია c . მაშინ სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L = \frac{m\left(\frac{dX}{dt}\right)^2}{2} - c \cdot \frac{X^2}{2}. \quad (1.136)$$

მოქმედებისათვის გვექნება გამოსახულება:

$$S(X) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(X, \frac{dX}{dt}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m\left(\frac{dX}{dt}\right)^2}{2} - \frac{c}{2} X^2 \right] dt. \quad (1.137)$$

გამოვითვალოთ მოქმედება $\varepsilon \cdot \varphi(t)$ ვარიაციის შემთხვევაში

$$S(X + \varepsilon\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m\left(\frac{d(X + \varepsilon\varphi)}{dt}\right)^2}{2} - \frac{c}{2} (X + \varepsilon\varphi)^2 \right] dt. \quad (1.138)$$

გავაწარმოთ ეს ფუნქცია ε ცვლადით, მაშინ

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon\varphi) &= \frac{d}{d\varepsilon} \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[m \left\{ \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + 2\varepsilon \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} - c \{ X^2 + 2\varepsilon X\varphi + \varepsilon^2 \varphi^2 \} \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[m \left\{ \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} - c \{ X\varphi + \varepsilon\varphi^2 \} \right] dt. \end{aligned} \quad (1.139)$$

თუ, დავუშვებთ რომ $\varepsilon = 0$, მაშინ

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon\varphi)_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - cX\varphi \right] dt = 0. \quad (1.140)$$

ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილის პირველი წევრის ნაწილობითი ინტეგრებით და იმის გათვალისწინებით, რომ $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$, მივიღებთ

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon\varphi)_{\varepsilon=0} = - \int_{t_1}^{t_2} \varphi \left[m \frac{d^2 X}{dt^2} + cX \right] dt = 0. \quad (1.141)$$

რადგან $\varphi(t)$ ნებისმიერი საცდელი ფუნქციაა, მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + cX = 0. \quad (1.142)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$\omega^2 = \frac{c}{m}, \quad (1.143)$$

მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემის კლასიკურ მათემატიკურ მოდელს:

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0. \quad (1.144)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, ვარიაციულ მეთოდს თავისუფალი რხევითი სისტემისათვის მიყავართ იგივე მათემატიკურ მოდელამდე.

1.5.3. იძულებითი რხევითი სისტემის მოდელირება ვარიაციული მეთოდით

იმ შემთხვევაში, როცა სისტემაზე მოქმედებს მაიძულებელი ძალა F_0 , იცვლება პოტენციური ენერჯიის მხოლოდ ფორმულა

$$E_p = c \frac{X^2}{2} + \int_0^X F_0 dX = c \frac{X^2}{2} + F_0 X, \quad (1.145)$$

ხოლო კინეტიკური ენერჯიის გამოსახულება უცვლელი რჩება

$$E_k = m \frac{\left(\frac{dX}{dt} \right)^2}{2}. \quad (1.146)$$

შესაბამის ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება სახე:

$$L = m \frac{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2}{2} - c \frac{X^2}{2} - F_0 X. \quad (1.147)$$

თუ განვახორციელებთ წინა პარაგრაფის ანალოგიურ გარდაქმნებს, მაშინ მივიღებთ იძულებითი, არადემპფირებული, რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს:

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -cX + F_0. \quad (1.148)$$

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. ჩამოაყალიბეთ ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი.
2. ააგეთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ჰამილტონის ვარიაციული პრინციპის ბაზაზე.
3. ააგეთ იძულებითი, არადემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ჰამილტონის პრინციპის ბაზაზე.
4. ლაგრანჟის ფუნქციისა და ჰამილტონის ფუნქციის კავშირი.
5. ლაგრანჟის ფუნქციისა და ჰამილტონის ფუნქციის განმასხვავებელი თვისებები.

1.6.1. არაწრფივი რხევითი პროცესების მოდელირება

არაწრფივი რხევითი სისტემის შესაბამისი მათემატიკური მოდელები აღიწერება არაწრფივი განტოლებებით. რეალური სისტემები არაწრფივია და მხოლოდ გარკვეული მიახლოებით შეიძლება შეიცვალოს წრფივი სისტემებით. წრფივი რხევითი სისტემების მათემატიკური მოდელირების საკითხები უკვე განვიხილეთ და ახლა შევისწავლოთ არაწრფივი სისტემები.

1.6.2. არადემპფირებული თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი სისტემა. ამ შემთხვევაში არაწრფივია აღმდგენელი ძალის დამოკიდებულება განმსაზღვრელ პარამეტრზე ანუ გვაქვს $f(x)$ დამოკიდებულება. შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$m \cdot \ddot{x} + f(x) = 0 . \quad (1.149)$$

ამ განტოლების ამოხსნა კვადრატურებში, საზოგადოდ, შეუძლებელია. შესაძლებელია ამ განტოლების ზოგადი თვისებების შესწავლა ენერგეტიკული მეთოდის მეშვეობით.

(1.149) განტოლება გავამრავლოთ \dot{x} სიდიდეზე და ვაინტეგრროთ, მაშინ

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \int f(x) \cdot \dot{x} dt = const = E_0 . \quad (1.150)$$

ამასთან,

$$\int f(x) \cdot \dot{x} dt = \int f(x) dx = E_{pot} , \quad (1.151)$$

ე.ი. (1.150) განტოლება წარმოადგენს ენერჯიის შენახვის კანონს:

$$E_{kin} + E_{pot} = E_0 . \quad (1.152)$$

ცხადია, (1.150) ტოლობიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 = E_0 - E_{pot} . \quad (1.153)$$

აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვიპოვოთ რხევის სიჩქარე

$$\dot{x} = v = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})} . \quad (1.154)$$

ფაზურ სიბრტყეზე x_0 წერტილიდან x წერტილამდე გადაადგილების დრო გამოითვლება ფორმულით:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{v} = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}}. \quad (1.155)$$

შესაბამისად, რხევის პერიოდის გამოსათვლელად მიიღება ფორმულა:

$$T = 2 \cdot \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}}. \quad (1.156)$$

ფორმულა (1.156) მართებულია მხოლოდ შეკრული ფაზური ტრაექტორიებისათვის.

1.6.3. თავისუფალი რხევითი სისტემა ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით

განვიხილოთ რხევითი სისტემა ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით

$$f(x) = h \cdot \operatorname{sgn} x = \begin{cases} h, & \text{if } x > 0 \\ -h, & \text{if } x < 0 \end{cases}. \quad (1.157)$$

ასეთი სიტუაციაა რელეურ მართვის სისტემებში.

ამ შემთხვევაში ამონახსნი უნდა ვეძებოთ ცალ-ცალკე იმ შემთხვევებისათვის, როცა $x > 0$ და როცა $x < 0$.

როცა $x > 0$, მაშინ

$$m \cdot \ddot{x} = -f(x) = -h, \quad (1.158)$$

$$\dot{x} = -\frac{h}{m} \cdot t + v_0, \quad (1.159)$$

$$x = -\frac{h}{2m} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0. \quad (1.160)$$

თუ ჩავთვლით, რომ რხევითი სისტემა საწყის მომენტში იმყოფება ზღვრულ მდებარეობაში, მივიღებთ საწყის პირობებს

$$x_0(0) = A, \quad (1.161)$$

$$v_0(0) = 0 . \quad (1.162)$$

თუ (1.159) განტოლებიდან განვსაზღვრავთ t პარამეტრს და ჩავსვამთ (1.161) ტოლობაში, მივიღებთ ფაზური ტრაექტორიების (x, \dot{x}) განტოლებას

$$\dot{x} = v = \sqrt{\frac{2h}{m}(A-x)} . \quad (1.163)$$

1.6.4. დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი პროცესების მოდელირება

დემპფირებისას რხევითი სისტემა ხარჯავს ენერგიას წინააღობის ძალის დაძლევაზე. შესაბამის მათემატიკურ მოდელში წინააღობის ძალა დამოკიდებულია განმსაზღვრელი პარამეტრის x წარმოებულზე.

ზოგადად დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\ddot{x} + g(x) + f(x) = 0 . \quad (1.164)$$

ზოგჯერ, დემპფირების და აღმდგენი ძალები ისე მჭიდროდაა დაკავშირებული ერთმანეთთან, რომ მათი განცალკევება არ ხერხდება. ასეთ შემთხვევაში

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 . \quad (1.165)$$

შევადგინოთ ამ სისტემის შესაბამისი განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა $\dot{x} = v$, მაშინ $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx}$. აქედან გამომდინარე, (1.165) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(x, v)}{v} . \quad (1.166)$$

ეს განტოლება საშუალებას გვაძლევს შევადგინოთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის შესაბამისი სურათი ფაზურ სიბრტყეზე.

ახლა განვიხილოთ ამ სისტემის შესაბამისი ენერგეტიკული განტოლება. ამ განტოლების მისაღებად, გავამრავლოთ (1.164) განტოლება \dot{x} სიდიდეზე და ვაინტეგრროთ. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{2}mv^2 + \int_0^t g(x) \cdot \dot{x} dt + \int_0^x f(x) dx = E_0. \quad (1.167)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას E_D დემპფირების ძალების გადალახვაზე დახარჯული ენერგიისათვის, მივიღებთ ენერჯის განტოლებას

$$E_{kin} + E_{pot} = E_0 - E_D. \quad (1.168)$$

ამ განტოლებიდან ნათლად ჩანს, რომ დემპფირებულ თავისუფალ რხევით სისტემაში ადგილი აქვს ენერჯის დისიპაციას.

1.6.5. დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემა მშრალი ხახუნით

მყარ სხეულებს შორის მშრალ ხახუნს ადგილი აქვს იმ შემთხვევაში, როცა ერთმანეთს ეხება ორი სხეული, რომლებიც გადაადგილდება ერთმანეთის მიმართ ისე, რომ მათ შორის არ არის თხევადი მასა. ამ შემთხვევაში, ხახუნის ძალები თითქმის არ არის დამოკიდებული გადაადგილების სიჩქარეზე და მიმართულია ფარდობითი სიჩქარის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

უმეტეს შემთხვევაში, მშრალი ხახუნის ძალა მიახლოებით შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$K_r = \begin{cases} -r & \text{if } v > 0, \\ +r & \text{if } v < 0. \end{cases} \quad (1.169)$$

ასე, რომ

$$K_r = -r \cdot \text{sgn } \dot{x}. \quad (1.170)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ პროცესის შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს შემდეგი სახე:

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \text{sgn} \dot{x} + f(x) = 0. \quad (1.171)$$

ეს განტოლება ცალ-ცალკე განიხილება იმ შემთხვევებისათვის, როცა $v > 0$ და $v < 0$.

თუ $v > 0$, მაშინ (1.171) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$m \cdot \ddot{x} + f(x) = -r. \quad (1.172)$$

მისი შესაბამისი ენერგეტიკულ განტოლებას აქვს სახე:

$$E_{kin} + E_{pot} = E_0 - r \cdot x = \overline{E_0}. \quad (1.173)$$

ამ რხევითი სისტემისათვის ფაზური ტრაექტორიების განტოლება შემდეგია:

$$v = + \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_0 - r \cdot x - E_{pot})}, \quad \text{თუ } v > 0, \quad (1.174)$$

$$v = - \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_0 + r \cdot x - E_{pot})}, \quad \text{თუ } v < 0. \quad (1.175)$$

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. გამოიყვანეთ არადემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემის ენერგეტიკული განტოლება.
2. გამოიყვანეთ თავისუფალი, რხევითი სისტემის ფაზური ტრაექტორიების განტოლება, ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალის შემთხვევაში.
3. შეადგინეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის შესაბამისი სურათი ფაზურ სიბრტყეზე.
4. გამოიყვანეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის ტრაექტორიების განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე მშრალი ხახუნის შემთხვევაში.
5. გამოიყვანეთ არაწრფივი სისტემის ტრაექტორიების ზოგადი განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე.

1.7.1. ავტორხვეითი სისტემები

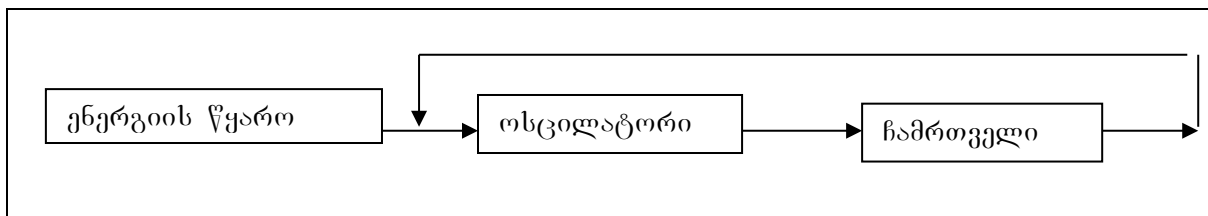
ავტორხვეები - განსაკუთრებული ტიპის რხევებია. ამ ტიპის რხევებისთვის დამახასიათებელია ენერგიის წყაროს არსებობა, რომელიც ავსებს სისტემის ენერგეტიკულ დანაკარგებს.

1.7.2 ზოგადი სქემები და სტრუქტურული თავისებურებები

სტრუქტურისა და მოქმედების პრინციპის მიხედვით განასხვავებენ ავტორხვეითი სისტემების ორ ტიპს:

1. ოსცილატორული სისტემა;
2. დაგროვებითი სისტემა.

ოსცილატორული ტიპის სისტემისათვის დამახასიათებელია შემდეგი სტრუქტურული სქემა (ნახ. 1.17):



ნახ. 1.17. ოსცილატორული ტიპის ავტორხვეითი სისტემის სტრუქტურული სქემა

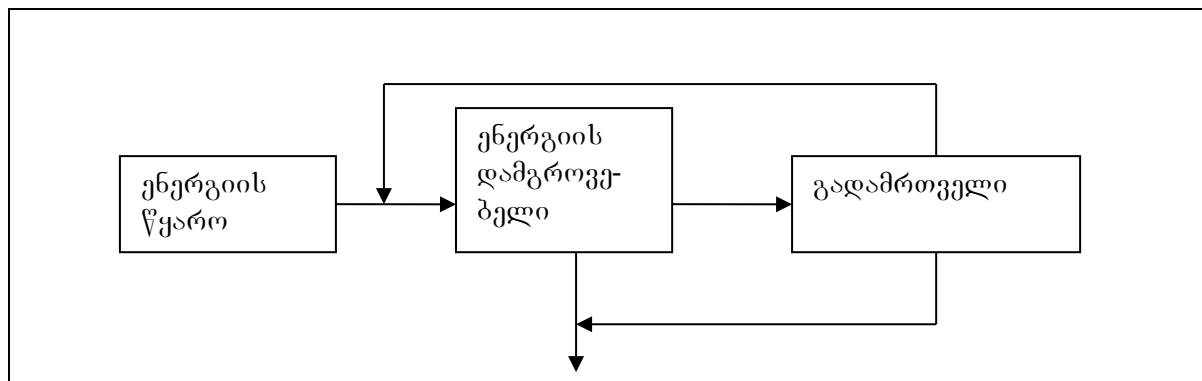
ოსცილატორული ტიპის სისტემებში ჩამრთველი მოქმედებს, როგორც უკუკავშირი რხევით სისტემასა და ენერგიის წყაროს შორის, რომელიც ჩაირთვება საჭირო მომენტში და სისტემას საჭირო ენერგიით ამარაგებს.

ცხრილში მოცემულია შესაბამისი ტიპის პრაქტიკული მაგალითები.

ცხრილი 1.1

№	ავტორხვეითი სისტემა	ენერგიის წყარო	ოსცილატორი	უკუკავშირის საშუალება
1	ზარი	ელექტრობატარეა	ჩაქუჩი	კონტაქტი
2	საათი	დეფორმირებული ზამბარა	ბალანსირი	ჩამომშვები რეგულატორი
3	ვილენჩელოს სიმი	მოდრავი ხეში	სიმი	მშრალი ხახუნი ქრობადი მახასიათებლით
4	თვითმფრინავის მზიდი ფრთა	ჰაერის ნაკადი	დრეკადი ფრთა	ჰაერის ნაკადისა და ფრთის ურთიერთქმედების არასტაციონარული ძალები

დაგროვებითი ავტორხევითი სისტემის სტრუქტურული სქემა მოცემულია ნახ. 1.18-ზე.

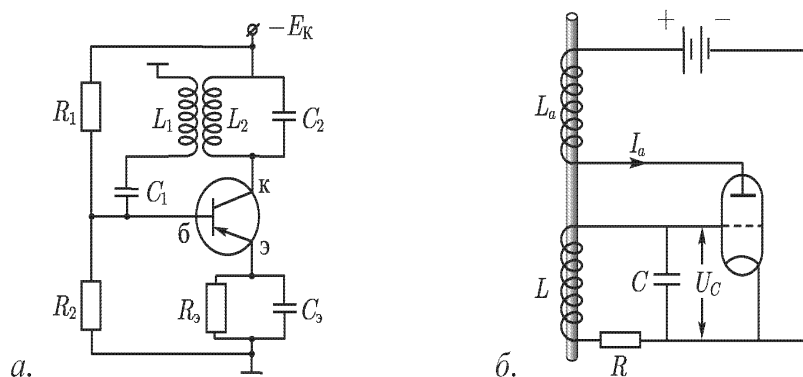


ნახ. 1.18. დაგროვებითი ავტორხევითი სისტემის სტრუქტურული სქემა

დაგროვებითი ავტორხევითი სისტემა, ხშირად, ასრულებს წვევტად (დისკრეტულ) რხევებს.

1.7.3. ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის მათემატიკური მოდელი

ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის სქემა.



ნახ. 1.19. ვან-დერ-პოლის გენერატორის სქემა:
 ა) ტრანზისტორზე; ბ) ელექტრონულ ლამფაზე

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = M \frac{dI_a}{dt}. \quad (1.176)$$

მნიშვნელოვანია, რომ ელექტრონულ ლამფის ბადეზე U_a ძაბვის გაზრდა იწვევს ანოდური I_a დენის მატებას. იმისათვის, რომ

მივიღოთ ანოდური დენის თვითაგზნება, უნდა გამოვთვალოთ დამოკიდებულება $I_a = I_a(U_c)$.

$$S(U_c) = \frac{dI_a}{dU_c} \quad (1.177)$$

წარმოებულს ბადური მახასიათებლის სიმრუდე ეწოდება. შესაბამისი გრაფიკები მოცემულია ნახ. 1.20-ზე.



ნახ. 1.20. ა) ანოდური დენისა და ბ) ბადური სიმრუდის ბადურ ძაბვაზე დამოკიდებულების გრაფიკები

მუშა მდგომარეობაში აღვიღოთ აქვთ დამოკიდებულებებს:

$$S = S_0 - S_2 U_c^2, \quad (1.178)$$

$$I_a = I_{a0} + S_0 U_c - \frac{1}{3} S_2 U_c^3. \quad (1.179)$$

თუ (1.178) და (1.179) ფორმულებს გავითვალისწინებთ, მაშინ (1.176) გადაიწერება სახით:

$$\frac{d^2 U_c}{dt^2} - \frac{M}{LC} \left[S_0 - S_2 U_c^2 - \frac{RC}{M} \right] \frac{dU_c}{dt} + \omega_0^2 U_c = 0, \quad (1.180)$$

სადაც $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. (1.181)

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$x = U_c \sqrt{\frac{MS_2}{MS_0 - RC}}, \quad 2\gamma = \frac{MS_0 - RC}{LC}. \quad (1.182)$$

მივიღებთ ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის მათემატიკურ მოდელს, რომელიც აღწერს ცნობილი ავტორხევითი სისტემის დინამიკას

$$\ddot{x} - 2\gamma \dot{x}(1 - x^2) + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.183)$$

1.7.4. ავტორხევითი ჰიდროაეროდრეკადი სისტემები ფლატერი და დივერგენცია

ჰიდროაეროდრეკადი სისტემები – დრეკადი კონსტრუქციებია, რომლებიც მოთავსებულია ჰაერის ან წყლის ნაკადში და შესაბამის ურთიერთქმედებას განიცდის.

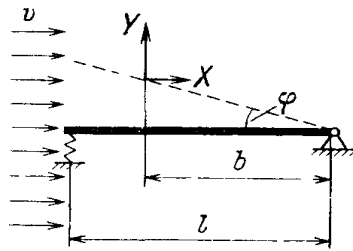
ჰიდროაეროდრეკადი სისტემების მაგალითს წარმოადგენს სამშენებლო ნაგებობები, რომლებიც მოთავსებულია ქარის ზემოქმედების ქვეშ. ჰაერის ნაკადის მოქმედების შედეგად ნაგებობებში აღიძრება რხევები და თუ ნაგებობას არ შეუძლია ქარის მიერ აღძრული რხევების ჩაქრობა, შესაძლოა ნაგებობის დანგრევაც, რაც არაერთხელ მომხდარა. ამიტომ, დაპროექტების ეტაპზე აუცილებელია ქარის დატვირთვის შესწავლა ნებისმიერი მადლივი შენობა-ნაგებობის ან კიდული-ვანტური ხიდებისათვის.

დატვირთვების სიდიდისა და მოქმედების სიხშირის შესწავლა საშუალებას გვაძლევს ავიცილოთ ფლატერი ანუ მაგნე, გამანადგურებელი რხევები და სწორად დაგაპროექტოთ ესა თუ ის ნაგებობა.

ფლატერის შესწავლას დიდი მნიშვნელობა აქვს საფრენი აპარატების დაპროექტების დროსაც.

ჰაერის ზემოქმედების შედეგად, თვითმფრინავის ფრთა დეფორმაციას განიცდის და შედეგად იცვლება გარსდენის რეჟიმი. ამ მოვლენას დივერგენციას უწოდებენ. დივერგენციის შედეგად იცვლება ფრთის გეომეტრია, რამაც შეიძლება გამოიწვიოს ნაკადის პერიოდული მოწყვეტა და შესაბამისი სიხშირის რხევები. ასეთ შემთხვევაში შესაძლოა რეზონანსული რხევების წარმოქმნა და ფრთის დამსხვრევა გარკვეული, კრიტიკული სიჩქარის ფრენის შემთხვევაში. ამიტომ, ფრთის დაპროექტებისას აუცილებელია დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარის დაანგარიშება, რათა თავიდან ავიცილოთ კონსტრუქციის არასაიმედოობა მუშა სიჩქარეების დიაპაზონში. ფლატერი შეიძლება წარმოიქმნას კონსტრუქციის თავისებურები-დან გამომდინარე, გარე ზემოქმედების გარეშე, გარკვეული, ფლატერის კრიტიკული სიჩქარის გადამეტებისას ან სიჩქარეთა გარკვეული დიაპაზონის შემთხვევაშიც.

ა) დივერგენციის შესასწავლად, განვიხილოთ ფრთის სქემატური, გამარტივებული მოდელი (ნახ. 1.21)



ნახ. 1.21. ფრთის დივერგენციის სქემატური მოდელი

განვიხილოთ ბრტყელი ფირფიტა, რომელიც მარცხენა მხარეს დრეკადაა ჩამაგრებული (ფრთის თავისუფალი მხარე), მარჯვენა მხარეს კი აქვს სახსრული ჩამაგრება (ფრთის ჩამაგრება ფუზელაჟთან). ფირფიტა მოთავსებულია v სიჩქარის მქონე ჰაერის ნაკადში. ვიპოვოთ დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარე.

ფრთის φ კუთხით გადახრისას წარმოიქმნება წნევის ძალები, რომლებიც ორ მდგენელად შეიძლება დავშალოთ (შუბლური წინაღობის და ამწევი ძალები).

$$X = C_x \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l \cdot \varphi ; \quad Y = C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l \cdot \varphi , \quad (1.184)$$

სადაც C_x შუბლური წინაღობის კოეფიციენტი; C_y -ამწევი ძალის კოეფიციენტი; ρ ჰაერის სიმკვრივე; l - ფრთის ქორდა;

b - მანძილი სახსრული შეერთებიდან აეროდინამიკური წნევების ტოლქმედის მოდების წერტილამდე.

ფირფიტაზე (ფრთაზე) მოდებული ძალების მომენტების ჯამი სახსრული შეერთების ღერძის მიმართ არის:

$$M = -c_0 \cdot l^2 \cdot \varphi + X \cdot b \cdot \varphi + Y \cdot b , \quad (1.185)$$

სადაც c_0 დრეკადი ჩამაგრების ზამბარის სიხისტეა. გათვალისწინებულია, რომ φ მცირე კუთხეა, $\sin \varphi \approx \varphi$. ჩავსვათ (1.185) ფორმულაში (1.184), მაშინ

$$M = -c_0 \cdot l^2 \cdot \varphi + C_x \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b \cdot l \cdot \varphi^2 + C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b \cdot l \cdot \varphi . \quad (1.186)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: I - ფირფიტის ინერციის მომენტი სახსრული შეერთების დერძის მიმართ. თუ გავითვალისწინებთ შესაბამის განტოლებას ფირფიტისათვის

$$I \cdot \ddot{\varphi} = M, \quad (1.187)$$

მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს

$$I \cdot \ddot{\varphi} + (c_0 \cdot l - C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b) \cdot l \cdot \varphi = 0. \quad (1.188)$$

წინააღობის ძალის მომენტის შესაბამისი წევრი გამოტოვებულია, რადგან უსასრულოდ მცირეა.

ვინაიდან φ უსასრულოდ მცირე შემფოთებაა, სისტემის მდგრადობისათვის ანუ საწყისი შემფოთების ჩაქრობისათვის გვაქვს პირობა

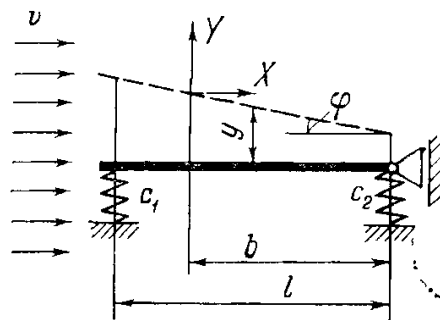
$$c_0 \cdot l - C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b > 0. \quad (1.189)$$

აქედან, ცხადია, რომ დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარე

$$v_{kr} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_0 \cdot l}{C_y \cdot \rho \cdot b}}. \quad (1.190)$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ რაც უფრო მეტია ფრთის სიხისტე, მით უფრო მეტია დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარეც. რაც მეტია დივერგენციის სიჩქარე, მით უკეთესია თვითმფრინავის ფრთისათვის.

ბ)ახლა განვიხილოთ თვითმფრინავის ფრთის ფლატერის განიხილება გამარტივებული, სქემატური მოდელი (ნახ. 1.22).



ნახ. 1.22. თვითმფრინავის ფრთის ფლატერის სქემატური მოდელი

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა ფირფიტის ორივე მხარეს გვაქვს დრეკადი ჩამაგრება. მოსალოდნელია სხვა ტიპის არამდგრადობაც, რომელიც დაკავშირებულია ორგანზომილებიანი სისტემის არაკონსერვატიულობასთან.

განვიხილოთ მცირე შეშფოთებები ამ სისტემაში:

$y(t)$ - ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის გადაადგილება;

$\varphi(t)$ - ფირფიტის მობრუნების კუთხე;

c_1 და c_2 - დრეკადი საყრდენების სიხისტეებია;

$\frac{m \cdot l^2}{12}$ - ფირფიტის ინერციის მომენტი, სიბრტყის პერპენდიკულარულად სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ;

l - ფირფიტის სიგრძე ნაკადის მიმართ;

b - მანძილია ამწევი ძალის მოდების წერტილიდან მის მარჯვენა ბოლომდე.

$$Y = C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l \cdot \varphi. \quad (1.191)$$

დრეკად რეაქციის ძალებს აქვს სახე:

$$R_1 = c_1 \cdot \left(y + \frac{\varphi \cdot l}{2}\right); \quad R_2 = c_2 \cdot \left(y - \frac{\varphi \cdot l}{2}\right). \quad (1.192)$$

შეშფოთებული მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებია:

$$-R_1 - R_2 + Y = m \cdot \ddot{y}; \quad (1.193)$$

$$-R_1 \cdot \frac{l}{2} + R_2 \cdot \frac{l}{2} + Y \cdot \left(b - \frac{l}{2}\right) = \frac{m \cdot l^2}{12} \cdot \ddot{\varphi}. \quad (1.194)$$

თუ ამ განტოლებებში შევიტანთ (1.191) და (1.192) მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$\ddot{y} + c_{11} \cdot y + c_{12} \cdot \varphi = 0; \quad (1.195)$$

$$\ddot{\varphi} + c_{21} \cdot y + c_{22} \cdot \varphi = 0, \quad (1.196)$$

სადაც

$$c_{11} = \frac{c_1 + c_2}{m}; \quad c_{12} = \frac{(c_1 - c_2) \cdot l}{2 \cdot m} - \frac{C_y}{m} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l. \quad (1.197)$$

$$c_{21} = \frac{6 \cdot (c_1 - c_2)}{m \cdot l}; \quad c_{22} = \frac{3 \cdot (c_1 + c_2)}{m} + 6 \cdot \frac{C_y}{m \cdot l^2} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot (l - 2 \cdot b). \quad (1.198)$$

ამ სისტემის მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \lambda^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.199)$$

ანუ

$$\lambda^4 + \lambda^2 \cdot (c_{11} + c_{22}) + c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21} = 0. \quad (1.200)$$

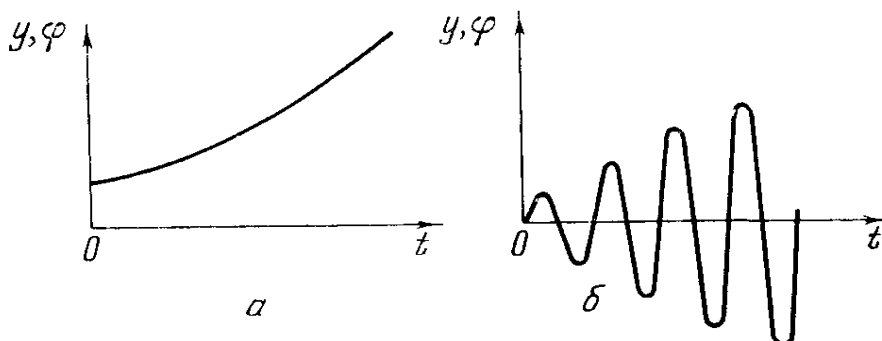
მახასიათებელი განტოლების ფესვებია:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-\frac{c_{11} + c_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2 - (c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21})}}. \quad (1.201)$$

სისტემის მდგრადობის პირობებია:

$$0 < c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21} < \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2. \quad (1.202)$$

პირველი უტოლობის დარღვევისას ამ სისტემაში გვექნება დივერგენცია ნახ. 1.23a, მეორე უტოლობის დარღვევისას, გვაქვს ფლატერი ნახ. 1.23b.



ნახ. 1.23. ფრთის მდგრადობის დაკარგვის გრაფიკები:

a) დივერგენცია; ბ) ფლატერი

მდგრადობის ზღვართი მნიშვნელობები (1.202) უტოლობებში გვაძლევს შესაბამისი კრიტიკული სიჩქარეების მნიშვნელობებს. თუ გავითვალისწინებთ (1.197) და (1.198) განტოლებებს მივიღებთ, რომ

დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარეა

$$v_{div} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot l}{\rho \cdot C_y [c_1 \cdot (b-l) + c_2 \cdot b]}} \quad (1.203)$$

ფლატერის კრიტიკული სიჩქარეა

$$v_{flat} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3\rho \cdot C_y} \cdot \frac{c_1^2 - c_1 \cdot c_2 + c_2^2}{c_1 - c_2}} \quad (1.204)$$

1.7.5. ქიმიური ავტორხევითი სისტემები (პრიგოჟინ-ლენფევერის მოდელი)

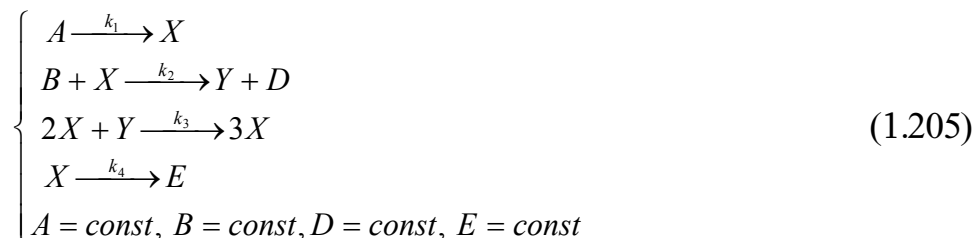
ავტორხევითი სისტემები გვხვდება ზოგიერთი ქიმიური რეაქციის შესწავლისას. ცნობილია, ბ. ბელოუსოვის მიერ 1950 წელს აღმოჩენილი, მოგვიანებით კი ა.ჟაბოტინსკის მიერ შესწავლილი ქიმიური რეაქცია. ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის რეაქცია არის მალონის მჟავას დაჟანგვის პროცესი, იონების კატალიზატორის არსებობისას. ამ რეაქციის მიმდინარეობისას, ხდება კონცენტრაციული რხევები, რის გამოც, ნარევის ფერი იცვლება: ცისფერი-წითელი-ცისფერი . . . გარდა პერიოდული რხევებისა, ქიმიური პროცესების დინამიკა უფრო რთულია და ბოლომდე არაა შესწავლილი. არსებობს ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის რეაქციის სხვადასხვა მათემატიკური მოდელები, როგორცაა ფილდის, კერესის, ნოიესის და სხვა. მაგრამ ვერც ერთი ბოლომდე ვერ აღწერს ქიმიურ დინამიკას.

განვიხილოთ ჰიპოტეტური ქიმიური რეაქციის მოდელი, რომელსაც ბრიუსელატორი ჰქვია და შემუშავებულია

ი. პრიგოჟინის სკოლის მიერ. პრიგოჟინ-ლენფევერის მოდელი ორი შუალედური პროდუქტის მქონე რეაქციის მათემატიკური მოდელია, რომელსაც აქვს პერიოდული ამონახსნები პარამეტრების განსაზღვრული მნიშვნელობებისათვის. ეს მოდელი აგებული იქნა

იმ მათემატიკური მეთოდების დემონსტრაციისათვის, რომლებიც შემუშავებულ იქნა ბრიუსელში, ნობელის პრემიის ლაურეატის პრიგოჟინის ხელმძღვანელობით. ამიტომ, ამ მოდელს ზოგჯერ „ბრიუსელატორს“ უწოდებენ.

პრიგოჟინ-ლეფვერის რეაქციის რეაქტორულ სქემას აქვს სახე:



ეს სისტემა ც ღიაა, ე.ი. ემატება ან აკლდება A, B, D, E ნივთიერებები ისე, რომ მათი რაოდენობა შენარჩუნდება ერთ დონეზე.

პრიგოჟინ-ლეფვერის მათემატიკურ მოდელს ადვილად ავაგებთ (3.205) რეაქტორული სქემიდან გამომდინარე:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = k_1 A + k_3 X^2 Y - (k_2 B + k_4) X \\ \frac{dY}{dt} = k_2 B X - k_3 X^2 Y \end{array} \right. \quad (1.206)$$

ჩავწეროთ (1.206) განტოლებები უგანზომილებო სახით. ამისათვის შემოვიღოთ ახალი ცვლადები ფორმულებით:

$$\tau = k_4 \cdot t, \quad x = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \cdot X, \quad y = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \cdot Y, \quad (1.207)$$

მაშინ (1.206) გადაიწერება სახით:

$$\dot{x} = a - (b+1) \cdot x + x^2 \cdot y, \quad (1.208)$$

$$\dot{y} = b \cdot x - x^2 \cdot y, \quad (1.209)$$

სადაც

$$a = \sqrt{\frac{k_1^2 \cdot k_3}{k_4^3}} \cdot A, \quad b = \frac{k_2}{k_4} \cdot B. \quad (1.210)$$

ამრიგად, მივიღეთ მეორე რიგის დინამიკური სისტემა ორი a და b მართვის პარამეტრებით.

წონასწორობის პირობებს აქვთ სახე:

$$x_0 = a, \quad y_0 = \frac{b}{a}. \quad (1.211)$$

წონასწორობის წერტილში არ ხდება x და y კონცენტრაციების ცვლილება.

ვიპოვოთ წონასწორობის მდგომარეობის, არამდგრადობის პირობები ანუ პირობები, როცა სისტემაში ავტორხევეები წარმოიქმნება.

ამისათვის, წონასწორობის წერტილს მივცეთ მცირე შეშფოთებები და ვნახოთ როდის შორდება სისტემა წონასწორობის წერტილს. განვიხილოთ შეშფოთებული მდგომარეობა

$$x = a + \xi, \quad y = \frac{b}{a} + \eta. \quad (1.212)$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (1.208), (1.209) განტოლებებში

$$\dot{\xi} = a - (b+1)a - (b+1) \cdot \xi + (a^2 + 2 \cdot a \cdot \xi + \xi^2) \cdot \left(\frac{b}{a} + \eta\right), \quad (1.213)$$

$$\dot{\eta} = b \cdot (a + \xi) - (a^2 + 2 \cdot a \cdot \xi + \xi^2) \cdot \left(\frac{b}{a} + \eta\right). \quad (1.214)$$

ამ სისტემის გაწრფივება გვაძლევს

$$\dot{\xi} = (b-1) \cdot \xi + a^2 \cdot \eta, \quad (1.215)$$

$$\dot{\eta} = -b \cdot \xi - a^2 \cdot \eta. \quad (1.216)$$

ამ სისტემის ყოფაქცევის გამოსაკვლევადა, შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება, რისთვისაც უნდა მოვახდინოთ ჩასმა

$$\xi \rightarrow e^{p\tau}, \quad \eta \rightarrow e^{p\tau}. \quad (1.217)$$

მაშინ

$$(p - b + 1) \cdot (p + a^2) = -a^2 \cdot b . \quad (1.218)$$

თუ გავხსნით ფრჩხილებს, მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას

$$p^2 + p \cdot (a^2 + 1 - b) + a^2 = 0. \quad (1.219)$$

მისი ფესვებია:

$$p = -\frac{a^2 + 1 - b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a^2 + 1 - b)^2}{4} - a^2} . \quad (1.220)$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ წერტილში

$$b_{kr} = a^2 + 1 \quad (1.221)$$

სისტემა კარგავს მდგრადობას და პრიგოჟინ-ლენფერის ჰიპოტეტიურ ქიმიურ სისტემაში, იწყება ავტორხევები.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. როგორი ავტორხევითი სისტემებია თქვენთვის ცნობილი? აღწერეთ მათი მუშაობის პრინციპები.
2. ვან-დერ-ვალის ავტოგენერატორის მათემატიკური მოდელი.
3. შეადგინეთ თვითმფრინავის ფრთის ფლატერის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი და იპოვეთ კრიტიკული სიჩქარე.
4. შეადგინეთ თვითმფრინავის ფრთის დივერგენციის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი და იპოვეთ კრიტიკული სიჩქარე.
5. პრიგოჟინ-ლენფერის მათემატიკური მოდელი და ავტორხევების წარმოქმნის პირობა.

1.8.1. პარამეტრული რხევები და სისტემები

პარამეტრული რხევითი სისტემებისათვის დამახასიათებელია რხევების აგზნება რომელიმე განმსაზღვრელი პარამეტრის დროში

ცვლილების გამო. ყველაზე უფრო ხშირად გვხვდება, ასეთი პარამეტრების პერიოდული ცვლილება. სისტემაში პარამეტრული რხევები არ აღიძვრება, თუ ის წონასწორობის მდგომარეობაშია. ეს განასხვავებს პარამეტრულ რხევებს იძულებითი რხევებისაგან.

1.8.2. მექანიკური პროცესის მათეის მოდელი

განვიხილოთ ფიზიკური ქანქარა (სხეული), რომელსაც შეუძლია ბრუნვა A ჰორიზონტალური ბრუნვის ღერძის მიმართ. მოძრაობა ხასიათდება ბრუნვის φ კუთხით ღერძის მიმართ. დაეუშვათ, რომ ბრუნვის A ღერძი მოძრაობს ვერტიკალურ სიბრტყეში გარკვეული $a = a(t)$ კანონით. ქანქარას მოძრაობის განტოლების შედგენისას ღერძთან დაკავშირებული ათვლის სისტემის მიმართ უნდა გავითვალისწინოთ როგორც სიმძიმის ძალის მომენტი

$$M_s = -mgs \cdot \sin \varphi , \quad (1.222)$$

ასევე ინერციის ძალის მომენტიც

$$M_b = -m \cdot \ddot{a} \cdot s \cdot \sin \varphi . \quad (1.223)$$

აქედან გამომდინარე, ფიზიკური ქანქარას მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე:

$$I \cdot \ddot{\varphi} = M_s + M_b = -m \cdot \left(g + \ddot{a} \right) \cdot s \cdot \sin \varphi \quad (1.224)$$

ან სხვანაირად

$$\ddot{\varphi} + \frac{m}{I} \cdot \left(g + \ddot{a} \right) \cdot s \cdot \sin \varphi = 0 , \quad (1.225)$$

სადაც $a(t)$ დროის პერიოდული ფუნქციაა; I -ფიზიკური ქანქარას ინერციის მომენტი; s -მანძილი ქანქარას მოცემული წერტილიდან ბრუნვის A ღერძამდე.

თუ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა $a = A \cdot \cos \Omega \cdot t$, მივიღებთ

$$\ddot{\varphi} + \frac{m}{I} \cdot \left(g + A \cdot \cos \Omega \cdot t \right) \cdot s \cdot \sin \varphi = 0 . \quad (1.226)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს: $\omega^2 = \frac{mgs}{I}$ და $\varepsilon = \frac{mAs}{I}$, მაშინ (1.226) მოდელი გადადის მათიეს მოდელში

$$\ddot{\varphi} + (\omega^2 + \varepsilon \cdot \cos 2t) \cdot \sin \varphi = 0. \quad (1.227)$$

ამრიგად, მივიღეთ კლასიკური პარამეტრული რხევითი სისტემა.

1.8.3. მეისნერის განტოლება

ელექტრული რხევითი სისტემისათვის, რომელიც შედგება C ტევადობის კონდენსატორისა და L ინდუქციურობის მაგნიტური კოჭასაგან, გვაქვს თავისუფალი რხევითი სისტემის მოდელი

$$\ddot{Q} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot Q = 0. \quad (1.228)$$

თუ კონდენსატორის ტევადობა დროის პერიოდული ფუნქციაა $C = C(t)$, მაშინ მიიღება პერიოდულკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება, რომლის დროსაც პარამეტრული რხევები წარმოიქმნება. ასეთი რხევები, როგორც წესი, მანუა რხევითი სისტემისათვის და ცდილობენ სისტემა ისე დააპროექტონ, რომ აიცილონ პარამეტრული რხევები.

თუმცა, ზოგი ჭირი მარგებელიაო და ლ. მანდელშტამმა და ნ. პაპალეკსმა დააპროექტეს ცვლადი დენის გენერატორი, რომლის მუშაობის პრინციპი დამყარებულია კონდენსატორის ტევადობის ცვლილებაზე. ტევადობის ცვლილება ხდება იმის ხარჯზე, რომ კონდენსატორის ფირფიტების ნაწილი შეადგენს მბრუნავ კბილანა ბორბალს.

თუ $\frac{1}{L \cdot C} = P_0 + \Delta P \cdot \text{sign} \cos \Omega \cdot t$, $\tau = \Omega \cdot t$, $\lambda = \frac{P_0}{\Omega^2}$, $\gamma = \frac{\Delta P}{\Omega^2}$, მაშინ (1.228)

გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\ddot{Q} + (\lambda + \gamma \cdot \text{sign}(\cos \tau)) \cdot Q = 0. \quad (1.229)$$

პარამეტრული რხევითი სისტემის მოდელი (1.229) მეისნერის განტოლებას წარმოადგენს.

1.8.4. ფრანგიშვილი-ობგაძის ეკონომიკური დინამიკის განზოგადებული მატეის განტოლება

განვიხილოთ კეინსის წონასწორული ეკონომიკა.

წონასწორობის პირობების მიხედვით ვადგენთ წონასწორობის განტოლებას

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (1.230)$$

სადაც $C(t)$ მოხმარებაა, $I(t)$ – ინვესტიციები.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \quad (1.231)$$

სადაც $\beta(t)$ აქსელერაციის კოეფიციენტია. $C(t)$ მოხმარება წარმოადგენს წარმოების მოცულობის ფუნქციას და დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინა ისტორიაზე ანუ ეროვნული შემოსავლის მოცულობაზე

$$C(t) = \int_0^t F[X(t)] dt. \quad (1.232)$$

(1.231)-ისა და (1.232)-ის (1.230)-ში შეტანით მივიღებთ:

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(t)] dt. \quad (1.235)$$

(1.235) განტოლების ორივე მხარის t -თი დიფერენცირებით გვექნება:

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t)] \quad (1.236)$$

ანუ ვღებულობთ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1) \dot{X}(t) + F[X(t)] = 0. \quad (1.237)$$

რადგან $\beta(t) \neq 0$, შეიძლება (1.237) განტოლება გავყოთ $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ ეკონომიკური დინამიკის განზოგადებულ ფრანგიშვილი-ობგაძის განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t)-1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[x(t)] = 0. \quad (1.238)$$

თუ (1.238)-ში შევარჩევთ $\beta(t)$ და $F[x(t)]$ შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{aligned} \beta(t) &= t \\ F[X(t)] &= t(\omega^2 + \varepsilon \cos 2t) \cdot X(t) \end{aligned} \quad (1.239)$$

მივიღებთ ეკონომიკური დინამიკის მატეის განტოლებას

$$\ddot{X}(t) + (\omega^2 + \varepsilon \cos 2t) \cdot X(t) = 0. \quad (1.240)$$

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ მატეის განტოლება, რომლის-თვისაც დამახასიათებელია პარამეტრული რხევების არსებობა.

ამოცანა: განვიხილოთ ეკონომიკური დინამიკის მატეის განტოლება შემდეგი საწყისი პირობებით:

$$\begin{cases} X_0(0) = 1 \\ X_1(0) = 1 \end{cases}$$

და მონაცემებით $\omega = 0.5; \varepsilon = 0.3$. შევისწავლოთ ეკონომიკური დინამიკა ω -სა და ε -ის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

ავაგოთ $X_0(t)$ დამოკიდებულების გრაფიკი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და შევისწავლოთ ფაზური პორტრეტი.

ამოხსნა:

პროგრამა Mathcad-ზე

წარმოების მოცულობის დემპფირების კოეფიციენტის შეშფოთების მცირე ამპლიტუდე:

$$\varepsilon := 0.8$$

შეშფოთების სიხშირე

$$\omega := 0.01$$

წარმოების მოცულობისა და მისი ცვლილების სიჩქარის საწყისი მიახლოებები

$$ic := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

მატიეს განტოლების მარჯვენა ნაწილების მატრიცა

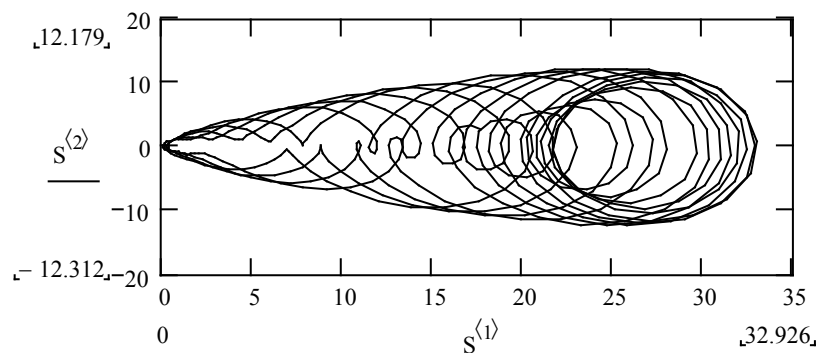
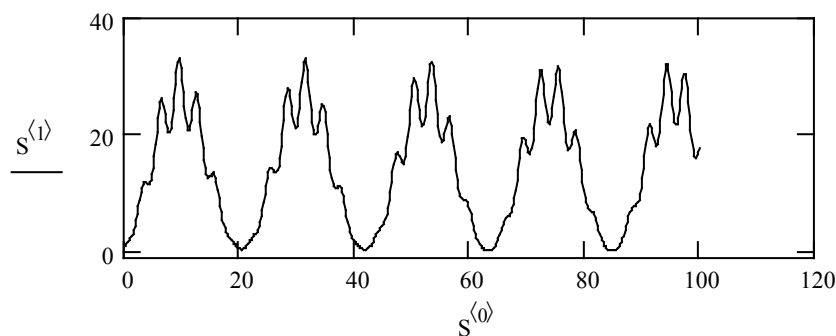
$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ -X_0 \cdot (\omega^2 + \varepsilon \cdot \cos(2 \cdot t)) + 1.1 \end{bmatrix}$$

ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის რუნგე-კუტას მეთოდით ამოხსნის ოპერატორი ცვლადი ბიჯის გამოყენებით

$$S := \text{Rkadapt}(ic, 0, 100, 500, D)$$

წარმოების მოცულობის დამოკიდებულება დროზე და დინამიკის სურათი ფაზურ სიბრტყეზე წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზებზე

$$i := 0.. \text{last}(S^{(0)})$$



1.8.5. ლორენცის მათემატიკური მოდელი ეკონომიკაში. უცნაური ატრაქტორი

წარმოების მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია, პროდუქციის რეალიზაციიდან ამონაგებსა და წარმოების დანახარჯებს შორის სხვაობისა.

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

x – წარმოების მოცულობა;

y – რეალიზებული პროდუქციის მოცულობა;

z – რეალიზებული პროდუქციის ერთეული მოცულობის ფასი;

β-წარმოებული პროდუქციის ერთეული მოცულობის თვითღირებულება;

მაშინ, მივიღებთ განტოლებას:

$$x = \alpha \cdot y - \beta \cdot x. \quad (1.241)$$

რეალიზებული პროდუქციის მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია, წარმოებული პროდუქციის ბაზრით უზრუნველყოფის მოცულობისა, გაჯერების მოცულობისა და წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის მოცულობათა სხვაობისა.

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

r - ბაზრის მოთხოვნის კოეფიციენტი წარმოების x მოცულობაზე;

γ - ბაზრის გაჯერების კოეფიციენტი;

δ - წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის კოეფიციენტი;

z - წარმოებისათვის საჭირო რესურსების მოცულობა;

მაშინ, მივიღებთ განტოლებას:

$$y = r \cdot x - \gamma \cdot y - \delta \cdot x \cdot z. \quad (1.242)$$

წარმოების რესურსების მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია, რესურსებით უზრუნველყოფის მოცულობასა და დახარჯული რესურსების მოცულობათა შორის სხვაობისა.

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

b - რესურსების ხარჯვის სიჩქარის კოეფიციენტი;

l - წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის კოეფიციენტი;

მაშინ, მივიღებთ განტოლებას:

$$z = -b \cdot z + l \cdot x \cdot y. \quad (1.243)$$

ამრიგად, მივიღეთ საწარმოს ფუნქციონირების მათემატიკური მოდელი:

$$\begin{cases} x = \alpha \cdot y - \beta \cdot x \\ y = r \cdot x - \gamma \cdot y - \delta \cdot x \cdot z \\ z = -b \cdot z + l \cdot x \cdot y \end{cases} \quad (1.244)$$

ადვილად შევნიშნავთ, რომ (1.244) განტოლებები ემთხვევიან ლორენცის მათემატიკურ მოდელს, რომელიც წარმოიშვა მექანიკაში, როცა

$$\alpha = \beta = 10; r = 28; \gamma = \delta = l = 1; b = \frac{8}{3}.$$

ამ შემთხვევაში, ფაზურ სიბრტყეზე მივიღებთ ლორენცის ატრაქტორს, რომელიც ფრაქტალურ სიმრავლეს წარმოადგენს. ლორენცის ატრაქტორი შეესაბამება დეტერმინირებულ სისტემაში ქაოსის წარმოქმნის მოვლენას. ამ შემთხვევაში, წარმოებისა და

ამონაგების მოცულობები აღარაა მართვადი და სისტემა მიდის ნგრევისაკენ. ამიტომ, ცდილობენ თავი აარიდონ სისტემის ქაოსური მუშაობის რეჟიმებს, პარამეტრების შესაბამისი დინამიკის საშუალებით.

განვიხილოთ შესაბამისი მაგალითი.

ამოცანა: ამოხსენით ლორენცის განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{d}{dt}x(t) = 10 \cdot y(t) - 10 \cdot x(t)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) - x(t) \cdot z(t) + 28 \cdot x(t)$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = x(t) \cdot y(t) - \frac{8}{3} \cdot z(t)$$

ერთეულოვანი საწყისი პირობების შემთხვევაში და გამოიკვლიეთ ლორენცის უცნაური ატრაქტორი ფაზურ სიბრტყეზე.

ამოხსნა: ლორენცის განტოლებათა სისტემას ადვილად ამოვხსნით:

პროგრამა Mathcad-ზე

ლორენცის განტოლებათა სისტემას, Mathcad-ზე შეესაბამება მატრიცული ოპერატორი:

$$D(t, Q) := \begin{pmatrix} 10 \cdot Q_1 - 10 \cdot Q_0 \\ -Q_1 - Q_0 \cdot Q_2 + 28 \cdot Q_0 \\ Q_0 \cdot Q_1 - \frac{8}{3} \cdot Q_2 \end{pmatrix}$$

Npts := 3000

$$L := \text{Rkadapt} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 50, \text{Npts}, D \right]$$

t := L⁽⁰⁾

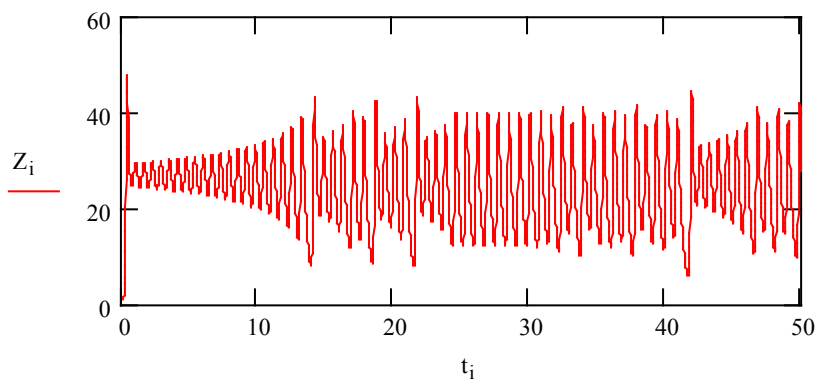
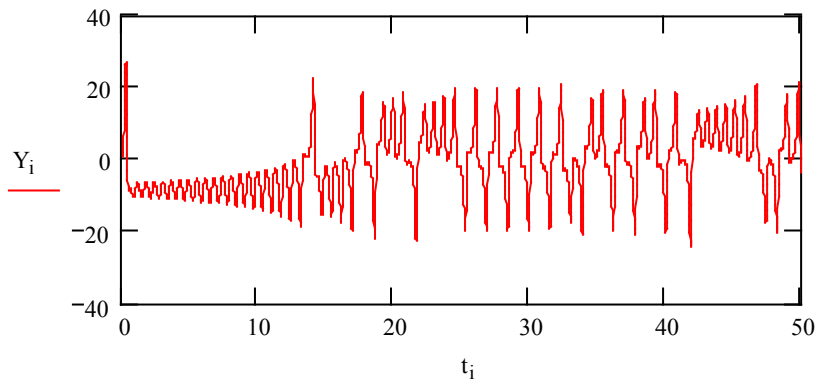
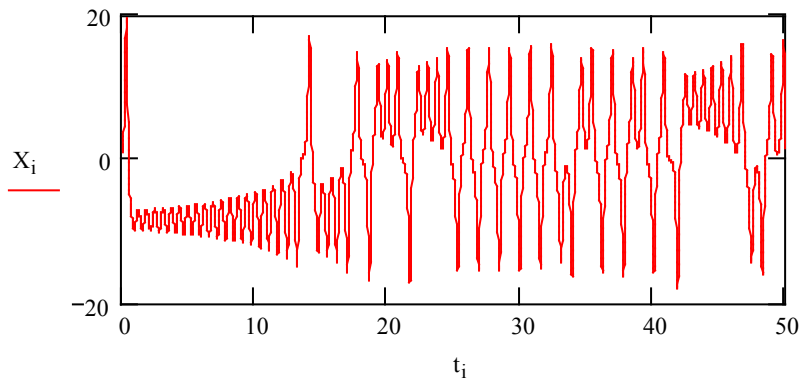
X := L⁽¹⁾

Y := L⁽²⁾

Z := L⁽³⁾

ამონახსნები მოიცემიან გრაფიკების მეშვეობით:

i := 0.. Npts



აგაგოთ დინამიკის სურათი ფაზურ სიბრტყეზე:

$$\varepsilon := 0.001$$

$$R^{(0)} := X$$

$$R^{(1)} := X + \varepsilon$$

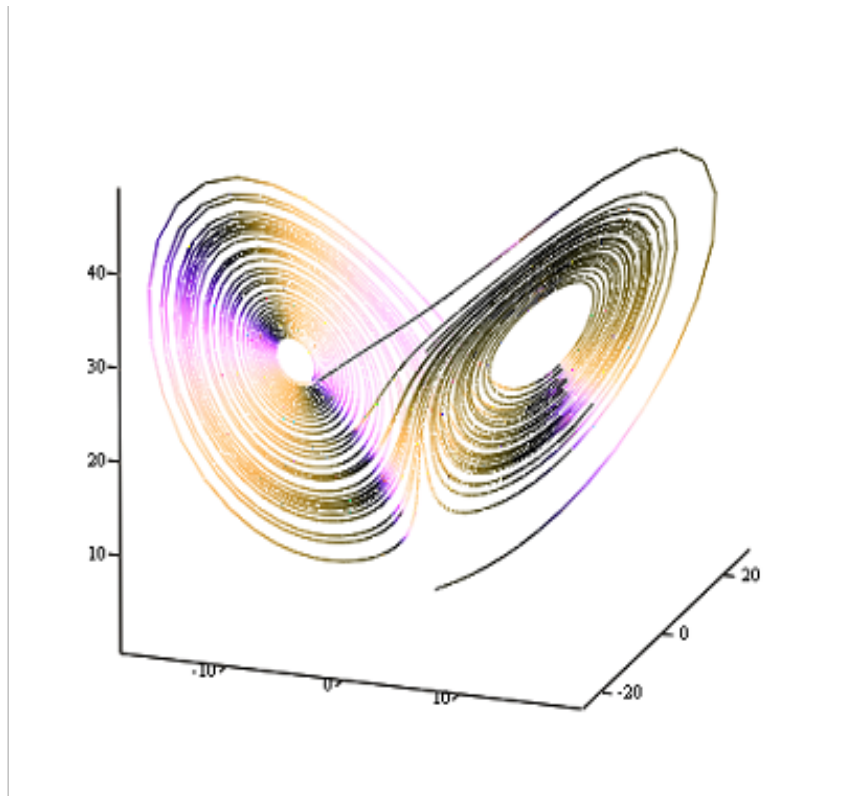
$$S^{(0)} := Y$$

$$S^{(1)} := Y + \varepsilon$$

$$T^{(0)} := Z$$

$$T^{(1)} := Z + \varepsilon$$

მივიღებთ ლორენცის უცნაური ატრაქტორის სურათს, რომელიც შეესაბამება დეტერმინირებული სისტემის, ქაოსურ რეჟიმში გადასვლას, მაგრამ რომელიც იცვლის “პეპელას ფრთების” მოხაზულობას r -პარამეტრის ცვლილებისას. რაც შეესაბამება ბაზრის მოთხოვნის ცვლილებას წარმოებული პროდუქტის მოცულობაზე.



ამოცანები და სავარჯიშოები

1. რით განსხვავდება პარამეტრული რხევები თავისუფალი რხევებისაგან?
2. გამოიყვანეთ ფიზიკური საქანის პარამეტრული რხევების განტოლება.
3. გამოიყვანეთ მატეხს მათემატიკური მოდელი პარამეტრული რხევებისათვის.
4. გამოიყვანეთ ელექტრული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.
5. გამოიყვანეთ მესნერის მათემატიკური მოდელი პარამეტრული რხევებისათვის.

II თავი. აკუსტიკური ტალღების თეორია

მოცემულ გარემოში მცირე ამპლიტუდით რხევისას, სხეული წარმოქმნის გარემოს შეკუმშვის და გაიშვიათების ზონებს, რომლებიც ვრცელდებიან დეფორმირებად გარემოში გრძივი ტალღების ფორმით და მათ ბგერით ტალღებს უწოდებენ. მექანიკის ნაწილს, რომელიც ბგერით ტალღებს შეისწავლის აკუსტიკა ეწოდება.

ბგერითი ტალღები ვრცელდება ნებისმიერ დეფორმირებად გარემოში, როგორცაა მყარი, თხევადი და გაზობრივი გარემო, თუმცა, ვერ ვრცელდება ვაკუუმში.

მოცემულ გარემოში, ბგერითი ტალღის გავრცელების სიჩქარეს ბგერის სიჩქარე ეწოდება. ცხადია, რომ ბგერის სიჩქარის სიდიდე, დამოკიდებულია გარემოზე, სადაც ის ვრცელდება.

გაზებში ბგერის სიჩქარის სიდიდე დამოკიდებულია გაზის ტემპერატურაზე და მის ქიმიურ შემადგენლობაზე, რაც შეეხება ბგერის ტალღის სიხშირეს, ის დამოკიდებულია მხოლოდ ბგერის წყაროს იძულებითი რხევის სიხშირეზე და არაა დამოკიდებული გარემოზე. ერთი გარემოდან მეორეში გადასვლისას, იცვლება ბგერითი ტალღის სიგრძე. თუ ბგერის სიჩქარე დამოკიდებულია ტალღის სიხშირეზე, მაშინ ამბობენ, რომ ადგილი აქვს ბგერითი ტალღის დისპერსიას.

განვიხილოთ ბგერითი ტალღის სიჩქარის მნიშვნელობების ცხრილი სხვადასხვა გარემოსათვის:

გარემო	ბგერის სიჩქარე(მ/წმ), 20° C
ჰაერი	340
წყალი	1500
აგური	3600
მინა	5500
ფოლადი	5000-6100
სპილენძი	4700

2.1. ბგერითი ტალღები

განსაზღვრება. კუმშვად გარემოში მცირე ამპლიტუდის რხევების გავრცელებას ბგერითი ტალღები ეწოდება.

ბგერით ტალღაში რხევების სიმცირის გამო, მოძრაობის v სიჩქარე მცირე სიდიდისაა, შესაბამისად, ეილერის განტოლებებში შეგვიძლია უგულებელვყოთ კონვექტიური წევრები. იგივე მიზეზით, ρ სიმკვრივისა და p წნევების ცვლილებაც მცირე იქნება, რაც იძლევა იმის საშუალებას, რომ ისინი გამოვსახოთ შემდეგნაირად:

$$p = p_0 + p'; \quad \rho = \rho_0 + \rho'. \quad (2.1)$$

სადაც p_0 და ρ_0 წნევისა და სიმკვრივის წონასწორული მნიშვნელობებია, ხოლო p' და ρ' მცირე შემფოთებებია ანუ $\rho' \ll \rho_0$ და $p' \ll p_0$.

თუ, უწყვეტობის განტოლებაში (2.2), შევიტანთ (2.1) მნიშვნელობებს, მივიღებთ (2.3) განტოლებას:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_0 + \rho') \mathbf{v} = 0. \quad (2.3)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ შემფოთებებისათვის გვექნება უწყვეტობის განტოლება შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.4)$$

ანალოგიურად, ეილერის (2.5) განტოლებიდან:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}. \quad (2.5)$$

მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_0} = 0. \quad (2.6)$$

ამრიგად, კუმშვად სითხეში ბგერითი ტალღებისათვის მივიღეთ ორი განტოლება (2.4) და (2.6). უცნობებია: p' ; ρ' ; \mathbf{v} .

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ იდეალურ სითხეში ნებისმიერი მოძრაობა ადიაბატური პროცესია, მაშინ დამოკიდებულება წნევისა და სიმკვრივის შემფოთებებს შორის იქნება შემდეგი სახის:

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s \rho' \Rightarrow \rho' = \frac{p'}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s}. \quad (2.7)$$

თუ (2.7) ფორმულიდან შევიტანთ ρ' შეშფოთების მნიშვნელობას (2.4) ფორმულაში და გარდავექმნით, მივიღებთ რომ

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.8)$$

ორი (2.6) და (2.8) განტოლება, უცნობებით: $\mathbf{v}; p'$ სავსებით აღწერს ბგერით ტალღას იდეალურ სითხეში.

რათა ამოცანა დავიყვანოთ ერთ ცვლადამდე, ვთქვათ სიჩქარეთა ველს აქვს φ პოტენციალი ანუ $\mathbf{v} = \nabla \varphi$, მაშინ (2.6) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (2.9)$$

ნულოვან ინდექსებს ცვლადებთან $\rho_0; p_0$ შემდგომშიც აღარ ჩავწერთ.

თუ (2.9) გამოსახულებას შევიტანთ (2.8) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0. \quad (2.10)$$

სადაც

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}. \quad (2.11)$$

(2.10) სახის განტოლებებს ტალღის განტოლებებს უწოდებენ.

თუ (2.10) განტოლებაზე ვიმოქმედებთ გრადიენტის ოპერაციით, მივიღებთ, რომ სიჩქარის ვექტორიც აკმაყოფილებს იგივე ტალღის განტოლებას. თუ (2.10) განტოლების ორივე მხარეს გავაწარმოებთ დროით, მივიღებთ რომ იგივე ტალღის განტოლებას აკმაყოფილებს წნევების სკალარული ველიც და (2.7) განტოლებიდან გამომდინარე, სიმკვრივეთა სკალარული ველიც.

2.2. მონოქრომატული ტალღები

განვიხილოთ ბგერითი ტალღების დინამიკის ერთგანზომილებიანი შემთხვევა ანუ ჩავთვალოთ, რომ მთელი მოძრაობა

ერთგვაროვანია $(y; z)$ სიბრტყეში. ასეთ ტალღებს, **ბრტყელ ტალღებს** უწოდებენ. ბრტყელი ტალღებისათვის (2.10) განტოლება გადაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.12)$$

ამ განტოლების ამოსახსნელად, მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა შემდეგი ფორმულით:

$$\xi = x - ct; \quad \eta = x + ct. \quad (2.13)$$

მაშინ, (2.12) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (2.14)$$

ამ განტოლების ორჯერ ინტეგრებით, მივიღებთ ზოგად ამონახსნს შემდეგი ფორმით:

$$\varphi = f_1(\xi) + f_2(\eta). \quad (2.15)$$

თუ (2.13) მნიშვნელობებს შევითავსებთ (2.15) ფორმულაში, მივიღებთ ზოგად ამონახსნს შემდეგი ფორმით:

$$\varphi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \quad (2.16)$$

ასეთი ტიპის ფუნქციებით გამოისახებიან სხვა $(p'; \rho'; v)$ განმსაზღვრელი პარამეტრებიც. ინტერპრეტაციისათვის, განვიხილოთ სიმკვრივე და ჩავთვალოთ რომ $f_2 = 0$, მაშინ $\rho' = f_1(x - ct)$. ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ სიმკვრივე ერთნაირი იქნება ყველა იმ წერტილებისათვის, რომლებიც დაშორებულია ერთმანეთისაგან ct მანძილით, სადაც c ბერის სიჩქარეა, ხოლო $f_1(x - ct)$ კი წარმოადგენს **ბრტყელ ტალღას**, რომელიც ვრცელდება აბსცისთა ღერძის დადებითი მიმართულებით. ცხადია, რომ მაშინ $f_2(x + ct)$ აგრეთვე ბრტყელი ტალღაა, რომელიც გარბის საპირისპირო მიმართულებით.

ბრტყელი ტალღების შემთხვევაში, სიჩქარის $v = \nabla \varphi$ სამი კომპონენტიდან, მხოლოდ ერთი $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ განსხვავდება ნულისაგან. მაშასადამე, ბერითი ტალღის სიჩქარე ყოველთვის მიმართულია ტალღის გავრცელების მიმართულებით. ამიტომ, ამბობენ, რომ სითხეში ბერითი ტალღები წარმოადგენენ გრძივ ტალღებს.

ბრტყელი ტალღებისათვის $\varphi = f(x - ct)$, შესაბამისად, მივირებთ რომ

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f'(x - ct); \quad p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho c f'(x - ct). \quad (2.17)$$

(2.17) ფორმულებიდან ცხადია, რომ

$$v = \frac{p'}{\rho c}. \quad (2.18)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $p' = c^2 \rho'$, მაშინ მივიღებთ რომ

$$v = \frac{c \rho'}{\rho}. \quad (2.19)$$

განსაზღვრება. მონოქრომატული ეწოდება მკაცრად ჰარმონიულ (სინუსოიდალურ) ტალღას, რომლის სიხშირე და ამპლიტუდა არ იცვლება დროში.

მონოქრომატული ტალღის სიხშირე შეესაბამება მისი წყაროს სიხშირეს. რეალურად, მონოქრომატული ტალღები ბუნებაში არ არსებობს, მაგრამ თეორიული კვლევისათვის წარმოადგენს სასარგებლო მოდელს.

მონოქრომატული ტალღის პოტენციალს ზოგჯერ წარმოადგენენ კომპლექსური სახით:

$$\varphi = \operatorname{Re}\{\varphi_0(x; y; z)e^{-i\omega t}\}, \quad (2.20)$$

სადაც ω ტალღის სიხშირეა. ტალღის განტოლებაში უშუალო ჩასმით, მივიღებთ, რომ $\varphi_0(x; y; z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$\Delta \varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_0 = 0. \quad (2.21)$$

განვიხილოთ ბრტყელი მონოქრომატული ტალღა, რომელიც გარბის აბსცისთა ღერძის დადებითი მიმართულებისაკენ. ასეთი ტალღის განმსაზღვრელი პარამეტრები დამოკიდებულია $x - ct$ ცვლადზე, მაგალითად, სიჩქარის პოტენციალს ექნება შემდეგი სახე:

$$\varphi = \operatorname{Re}\left\{Ae^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right\}, \quad (2.22)$$

სადაც A მუდმივს კომპლექსური ამპლიტუდა ეწოდება. თუ მას ჩავწერთ $A = ae^{i\alpha}$ სახით, მაშინ მივიღებთ რომ

$$\varphi = a \cos\left(\frac{\omega}{c}x - \omega t + \alpha\right). \quad (2.23)$$

ამ ჩანაწერში a არის ამპლიტუდა, ხოლო კოსინუსის არგუმენტს კი უწოდებენ ფაზას.

განსაზღვრება. ვთქვათ n არის ტალღის გავრცელების მიმართულების ერთეულოვანი ვექტორი, მაშინ (2.24) ვექტორს:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}, \quad (2.24)$$

ტალღურ ვექტორს უწოდებენ, ხოლო მის $|\mathbf{k}|$ სიგრძეს - ტალღურ რიცხვს.

განხილული განსაზღვრებიდან გამომდინარე (2.22) ფორმულა შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\varphi = \operatorname{Re}\{Ae^{i(kr - \omega t)}\}. \quad (2.25)$$

მონოქრომატულ ტალღებს დიდი გამოყენება აქვთ, იქიდან გამომდინარე, რომ ნებისმიერი ტალღა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც ბრტყელი მონოქრომატული ტალღების ერთობლიობა, სხვადასხვა ტალღური ვექტორითა და სხვადასხვა სიხშირით. ტალღის დაშლას მონოქრომატულ ტალღებად მათემატიკაში უწოდებენ ფურიეს მწკრივს ან ფურიეს ინტეგრალით წარმოდგენას. ზოგჯერ კი უწოდებენ სპექტრალურ დაშლას.

2.3. ბგერითი ტალღების ენერგია და იმპულსი

გამოვიყვანოთ ბგერითი ტალღის ენერგიის გამოსაანგარიშებელი ფორმულა. ერთეული მოცულობის სითხის ენერგია გამოიანგარიშება შემდეგი ფორმულით: $\rho\varepsilon + \frac{\rho v^2}{2}$. ამ ფორმულაში ჩავსვათ განმსაზღვრელი პარამეტრების შეშფოთებული მინიშვნელობები: $\rho = \rho_0 + \rho'$; $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon'$, სადაც შტრიხიანი მნიშვნელობები შეესაბამება შესაბამისი სიდიდეების გადახრას მათი მნიშვნელობებისაგან უძრავი სითხის პირობებში. რადგან სითხის სიჩქარე მცირე სიდიდეა, გამოსახულება $\frac{\rho'v^2}{2}$ არის მესამე რიგის მცირე სიდიდე. თუ შემოვიფარგლებით, მხოლოდ მეორე რიგის მცირე სიდიდეებით, მაშინ მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\rho_0 \epsilon_0 + \rho' \frac{\partial (\rho \epsilon)}{\partial \rho_0} + \frac{\rho'^2}{2} \frac{\partial^2 (\rho \epsilon)}{\partial \rho_0^2} + \frac{\rho_0 v^2}{2} \quad (2.26)$$

რადგან ბგერითი ტალღა ადიაბატურია (2.26) გამოსახულებაში, წარმოებულები გამოითვლება მუდმივი ენტროპიის პირობებში. თერმოდინამიკიდან გამომდინარე:

$$d\epsilon = T ds - p dV = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (2.27)$$

მაშასადამე,

$$\left(\frac{\partial (\rho \epsilon)}{\partial \rho} \right)_s = \epsilon + \frac{p}{\rho} = w \quad (2.28)$$

მეორე რიგის წარმოებული კი იქნება:

$$\left(\frac{\partial^2 (\rho \epsilon)}{\partial \rho^2} \right)_s = \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} \right)_s = \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)_s \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{c^2}{\rho} \quad (2.29)$$

მაშასადამე, ერთეული მოცულობის სიტხის ენერგია იქნება:

$$\rho_0 \epsilon_0 + w_0 \rho' + \frac{c^2}{2\rho_0} \rho'^2 + \rho_0 \frac{v^2}{2} \quad (2.30)$$

ამ გამოსახულების პირველი წევრი წარმოადგენს უძრავი სითხის ენერგიას და ის არაა დაკავშირებული ბგერით ტალღასთან. მეორე წევრი დაკავშირებულია ენერგიის იმ ნაწილის ცვლილებასთან, რაც გამოწვეულია ერთეული მოცულობის სითხის მასის ცვლილებით. თუ განვიხილავთ ინტეგრალს სითხის მთელი მოცულობიდან, მივიღებთ რომ მასა არ იცვლება და მაშასადამე ეწ წევრიც არ ახდენს გავლენას ბგერითი ტალღის ენერგიაზე. მაშასადამე, ერთეული მოცულობის სითხის ენერგიის ცვლილება, რომელიც დაკავშირებულია ბგერით ტალღასთან გამოითვლება შემდეგი ინტეგრალით:

$$\int \left(\frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c^2 \rho'^2}{2\rho_0} \right) dV \quad (2.31)$$

ინტეგრალქვეშა გამოსახულება შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ბგერის ენერგიის E სიმკვრივე:

$$E = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c^2 \rho'^2}{2\rho_0} \quad (2.32)$$

ეს გამოსახულება გამარტივდება ბრტყელი ბგერითი ტალღებისათვის რადგან $\rho' = \rho_0 v/c$. მართლაც, თუ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (2.32) ფორმულაში, მივიღებთ რომ

$$E = \rho_0 v^2. \quad (2.33)$$

ზოგად შემთხვევაში, ასეთ ფორმულას არა აქვს ადგილი. ანალოგიური ფორმულა შეიძლება შევადგინოთ ზოგადად ბგერითი ტალღის სრული ენერჯის საშუალო დროითი მნიშვნელობისათვის:

$$q = \rho' v. \quad (2.34)$$

ახლა განვიხილოთ ტალღათა პაკეტი ანუ ტალღათა ერთობლიობა, რომელსაც დროის ყოველი მომენტისათვის უკავია რაღაც შემოსაზღვრული სივრცე მყარი კედლების გარეშე.

ერთეული მოცულობის სითხის იმპულსი ემთხვევა მასის ნაკადის იმპულსის ფორმულას: $j = \rho v$. ამ ფორმულაში თუ შევიტანთ $\rho = \rho_0 + \rho'$ მნიშვნელობას და გავითვალისწინებთ $\rho' = \rho'/c^2$ ფორმულას, მივიღებთ (2.35) ფორმულას:

$$j = \rho_0 v + q/c^2. \quad (2.35)$$

თუ სითხე იდეალურია, მაშინ $v = \nabla \varphi$ და შესაბამისად, (2.35) ფორმულა შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$j = \rho_0 \nabla \varphi + q/c^2. \quad (2.36)$$

სრული იმპულსი უდრის ინტეგრალს $\int j dV$. შესაბამისად, ბგერით ტალღათა პაკეტის სრული იმპულსი იქნება:

$$\int j dV = \frac{1}{c^2} \int q dV. \quad (2.37)$$

ტალღათა პაკეტის სრული იმპულსის არანულოვანი მნიშვნელობა, მიუთითებს იმ ფაქტზე, რომ ადგილი აქვს მასის გადატანას.

2.4. ზგერთი ტაღღბის არეკვლა და გარდატეხა

როდესაც ზგერთი ტაღღა ეჯახება, ორი სხვადასხვა გარემოს გამყოფ საზღვარს, ის აირეკლება და გარდატეცდება. ამის შედეგად, პირველ გარემოში გვაქვს ორი ტაღღის ურთიერთქმედება (დაცემულის და არეკლილის), ხოლო მეორე გარემოში გვაქვს ერთი ტაღღა (გარდატეხილი). ამ ტაღღებს შორის კავშირი დამოკიდებულია გამყოფ ზედაპირზე არსებულ სასაზღვრო პირობებზე.

განვიხილოთ მონოქრომატული გრძივი ტაღღის არეკვლა და გარდატეხა ბრტყელი გამყოფი ზედაპირის შემთხვევაში. გამყოფი იყოს $(y; z)$ სიბრტყე. ადვილი მისახვედრია, რომ სამივე ტაღღას ექნება ერთნაირი ω სიხშირე და ტაღღური ვექტორის ერთნაირი $k_y; k_z$ კომპონენტები, მაგრამ არა k_x გამყოფი სიბრტყის პერპენდიკულარული მდგენელი.

მართლაც, შემოუსაზღვრელი ერთგვაროვანი სივრცის შემთხვევაში მონოქრომატული ტაღღა წარმოადგენს მოძრაობის განტოლების ამონახსნს. საზღვრის არსებობის შემთხვევაში, ემატება სასაზღვრო პირობა, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში ეკუთვნის მხოლოდ $x = 0$ გამყოფ საზღვარს და არაა დამოკიდებული არც დროზე და არც სხვა სივრცულ ცვლადებზე. ამრიგად, ამონახსნის ამ ცვლადებზე დამოკიდებულება ერთნაირია მთელი სივრცისათვის და მოძრაობის დროისათვის ანუ სამივე ტაღღას ექნება ერთნაირი ω სიხშირე და ტაღღური ვექტორის ერთნაირი $k_y; k_z$ კომპონენტები, მაგრამ არა k_x გამყოფი სიბრტყის პერპენდიკულარული მდგენელი.

აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია შევისწავლოთ არეკლილი და გარდატეხილი ტაღღები. ვთქვათ $(x; y)$ არის ტაღღის დაცემის სიბრტყე, მაშინ მისთვის $k_z = 0$; იგივე პირობა უნდა სრულდებოდეს არეკლილი და გარდატეხილი ტაღღებისთვისაც ანუ დაცემული, არეკლილი და გარდატეხილი ტაღღები, ერთ სიბრტყეში მდებარეობს.

ვთქვათ θ არის კუთხე ტაღღის მიმართულებასა და ახსცისთა ღერძის დადებით მიმართულებას შორის. მაშინ, რადგან დაცემული და არეკლილი ტაღღებისათვის ადგილი აქვს $k_y = \frac{\omega}{c} \sin \theta$ ტოლობას, მივიღებთ რომ

$$\theta_1 = \theta'_1, \quad (2.38)$$

ანუ დაცემის და არეკვლის კუთხეები ერთმანეთის ტოლია. დაცემული და გარდატეხილი ტალღებისათვის, ანალოგიური ფორმულიდან, გამომდინარეობს რომ

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (2.39)$$

სადაც c_1 ; c_2 ბგერის შესაბამისი სიჩქარეებია ამ ორი მოსაზღვრე გარემოსათვის.

ამ სამივე ტალღის ინტენსივობათა შესაფასებლად, ამოვწეროთ მათი სიჩქარეთა შესაბამისი პოტენციალები:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \exp \left\{ i\omega \left(\frac{x}{c_1} \cos \theta_1 + \frac{y}{c_1} \sin \theta_1 - t \right) \right\}, \\ \varphi'_1 &= A'_1 \exp \left\{ i\omega \left(-\frac{x}{c_1} \cos \theta_1 + \frac{y}{c_1} \sin \theta_1 - t \right) \right\}, \\ \varphi_2 &= A_2 \exp \left\{ i\omega \left(\frac{x}{c_2} \cos \theta_2 + \frac{y}{c_2} \sin \theta_2 - t \right) \right\}. \end{aligned}$$

გარემოთა გამყოფ სიბრტყეზე უნდა სრულდებოდეს შემდეგი პირობები: წნევა და სიბრტყის ნორმალური სიჩქარეები ორივე გარემოსათვის უნდა იყოს ერთნაირი. მასასადამე, გვაქვს განტოლებები:

$$\rho_1 (A_1 + A'_1) = \rho_2 A_2, \quad \frac{\cos \theta_1}{c_1} (A_1 - A'_1) = \frac{\cos \theta_2}{c_2} A_2. \quad (2.40)$$

გარდატეხის R მაჩვენებელი განისაზღვრება, როგორც დაცემული და გარდატეხილი ტალღების ენერჯიათა ნაკადის სიმკვრივეთა ფარდობა. რადგან ბრტყელ ტალღებში ტალღის ენერჯიის ნაკადის სიმკვრივე უდრის $c\rho v^2$ სიდიდეს, მივიღებთ რომ

$$R = \frac{c_1 \rho_1 v_1'^2}{c_1 \rho_1 v_1^2} = \frac{|A'_1|^2}{|A_1|^2}. \quad (2.41)$$

გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ ეს ფორმულა შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$R = \left(\frac{\rho_2 \operatorname{tg} \theta_2 - \rho_1 \operatorname{tg} \theta_1}{\rho_2 \operatorname{tg} \theta_2 + \rho_1 \operatorname{tg} \theta_1} \right)^2. \quad (2.42)$$

2.5. გეომეტრიული აკუსტიკა

ბრტყელი ტალღები გამოირჩევა სხვა ტიპის ტალღებისგან იმით, რომ მისი გავრცელების მიმართულება და ამპლიტუდა ერთნაირია მღელი სივრცისათვის. რა თქმა უნდა, ყველა ბგერით ტალღას არ ახასიათებს ეს თვისება, თუმცა, არსებობს შემთხვევები, როცა არა ბრტყელი ბგერითი ტალღა, შეგვიძლია სივრცის გარკვეულ მცირე შუალედში განვიხილოთ როგორც ბრტყელი ტალღა. ამისათვის საჭიროა, რომ ტალღის მიმართულება და ამპლიტუდა თითქმის არ იცვლებოდეს ტალღის სიგრძის რიგის მანძილზე.

თუ ეს პირობა სრულდება, მაშინ შეგვიძლია შემოვიყვანოთ ტალღის სხივის ცნება.

განსაზღვრება. წირს, რომლის ყოველ წერტილში, მხების მიმართულება ემთხვევა, ტალღის გავრცელების მიმართულებას, ტალღის სხივი ეწოდება.

ამგვარად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ბგერა ვრცელდება ტალღის სხივის მიმართულებით. ამ შემთხვევაში, ბგერის გავრცელების კანონებს შეისწავლის გეომეტრიული აკუსტიკა. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ გეომეტრიული აკუსტიკა შეისწავლის უსასრულოდ მცირე ტალღის სიგრძის მქონე ბგერით ტალღებს.

გამოვიყვანოთ გეომეტრიული აკუსტიკის ძირითადი განტოლება, რომელიც განსაზღვრავს ტალღის სხივების მიმართულებას. ტალღის სიჩქარის პოტენციალი ჩავწეროთ კომპლექსური სახით:

$$\varphi = ae^{i\psi}. \quad (2.43)$$

იმ შემთხვევაში, როცა ტალღა არაა ბრტყელი, მაგრამ გეომეტრიული აკუსტიკა გამოყენებადია, ტალღის a ამპლიტუდა წარმოადგენს კოორდინატებისა და დროის მიმართ ნელა ცვლად ფუნქციას, ხოლო ტალღის ψ ფაზა წარმოადგენს „თითქმის წრფივ“ ფუნქციას (გავიხსენოთ, რომ ბრტყელი ტალღის შემთხვევაში ტალღის ფაზაა $\psi = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha$ სადაც, \mathbf{k} და ω მუდმივია). სივრცისა და დროის მცირე მონაკვეთებისათვის ფაზა შეგვიძლია დავშალოთ ტეილორის მწკრივად, პირველი რიგის უსასრულოდ მცირეთა სიზუსტით, მაშინ მივიღებთ რომ:

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r} \operatorname{grad} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} t. \quad (2.44)$$

იმასთან დაკავშირებით, რომ სივრცისა და დროის მცირე მონაკვეთებისათვის, ტალღა შეგვიძლია ჩავთვალოთ ბრტყელ ტალღად, ყოველი წერტილისათვის შეგვიძლია განვიხილოთ შესაბამისი ტალღური ვექტორი და ტალღის სიხშირე შემდეგნაირად:

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \equiv \operatorname{grad} \psi, \quad \omega = - \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (2.45)$$

ψ სიდიდეს ეიკონალს უწოდებენ.

ბგერითი ტალღებისათვის, როგორც ვიცით: $\omega^2/c^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, თუ ამ თანადობაში შევიტანთ (2.45) ფორმულებს, მივიღებთ გეომეტრიული აკუსტიკის ძირითად განტოლებას შემდეგი ფორმით:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = 0. \quad (2.46)$$

თუ სითხე არაერთგვაროვანია, მაშინ ბგერის c სიჩქარე დამოკიდებულია სივრცით კოორდინატებზე.

2.6. ბგერის გავრცელება მოძრავ გარემოში

მონოქრომატული ბგერითი ტალღისათვის, რომელიც ვრცელდება უძრავ სითხეში, გვაქვს შემდეგი დამოკიდებულება $\omega = ck$ ტალღურ ვექტორსა და სიხშირეს შორის. გამოვიყვანოთ, შესაბამისი დამოკიდებულება, მოძრავი სითხის შემთხვევაში.

განვიხილოთ \mathbf{u} სიჩქარით მოძრავი სითხის ერთგვაროვანი ნაკადი. გვაქვს უძრავ $(x; y; z)$ ცვლადების კოორდინატთა K სისტემა და \mathbf{u} სიჩქარით მის მიმართ მოძრავი K' სისტემა $(x'; y'; z')$. ცხადია, რომ K' სისტემაში სითხე უძრავია და მონოქრომატულ ტალღას ამ სისტემაში სტანდარტული სახე აქვს ანუ

$$\mathbf{p} = \operatorname{const} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}' - kct)}. \quad (2.47)$$

რადიუს-ვექტორებს შორის ამ ორ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, არსებობს შემდეგნაირი კავშირი: $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$.

აქედან გამომდინარე, უძრავი კოორდინატთა სისტემის მიმართ სიჩქარის პოტენციალი იქნება:

$$\varphi = \text{const } e^{i[\mathbf{k}\mathbf{r} - (\hbar\mathbf{c} + \mathbf{k}\mathbf{u})t]} \quad (2.48)$$

ხარისხის მაჩვენებელში დროის კოეფიციენტი წარმოადგენს ტალღის სიხშირეს, მაშასადამე, მოძრავი გარემოს შემთხვევაში, გვაქვს შემდეგი დამოკიდებულება სიხშირესა და ტალღურ ვექტორს შორის:

$$\omega = c\mathbf{k} + \mathbf{u}\mathbf{k} \quad (2.49)$$

(2.49) ფორმულა შეესაბამება დოპლერის ეფექტს, რაც იმაში მდგომარეობს, რომ ბგერის წყაროს მიმართ მოძრავი დამკვირვებლისათვის აღქმული ბგერის სიხშირე, არ ემთხვევა ბგერის წყაროს სიხშირეს.

ტალღების გავრცელების სიჩქარეა:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = c\frac{\mathbf{k}}{k} + \mathbf{u} \quad (2.50)$$

2.7. სფერული ტალღები

განსაზღვრება. განვიხილოთ ბგერითი ტალღები, რომლებისთვისაც დამახასიათებელია სფერული სიმეტრია ანუ სიმკვრივე, სიჩქარე და ყველა სხვა განმსაზღვრელი პარამეტრი, დამოკიდებულია გარკვეული წერტილიდან მანძილზე. ასეთ ტალღას, სფერულს უწოდებენ.

განვიხილოთ ტალღის განტოლების ამონახსნები, რომლებიც აღწერს სფერულ ტალღას. ჩავწეროთ ტალღის განტოლება, სიჩქარის პოტენციალისათვის:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.51)$$

რადგან φ არის მხოლოდ ცენტრამდე r მანძილისა და დროის ფუნქცია, თუ გამოვიყენებთ ლაპლასის ოპერატორის წარმოადგენას სფერულ კოორდინატებში, მივიღებთ რომ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \quad (2.52)$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\varphi = f(r, t)/r$, მაშინ (2.52) განტოლებიდან გვექნება:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \quad (2.53)$$

ახალი განტოლება $f(r; t)$ ფუნქციისათვის ანუ მივიღეთ ერთგანზომილებიანი თაღლური განტოლება, სადაც სივრცითი ცვლადის როლს თამაშობს რადიუს-ვექტორი. მაშასადამე, გვაქვს ზოგადი ამონახსნი შემდეგი სახით;

$$f = f_1(ct - r) + f_2(ct + r) \quad (2.54)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ სფერული ტალღების (2.52) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$\varphi = \frac{f_1(ct - r)}{r} + \frac{f_2(ct + r)}{r} \quad (2.55)$$

პირველი შესაკრები წარმოადგენს განშლად ტალღას, რომელიც ვრცელდება სათავიდან ყველა მიმართულებით, ხოლო მეორე შესაკრები, წარმოადგენს დრენაჟის სფერულ ტალღას, რომელიც ყველამიმართულებიდან მოდის და თავს იყრის კოორდინატთა სათავეში.

ბრტყელი ტალღებისაგან განსხვავებით, სადაც ტალღის ამპლიტუდა მუდმივია, სფერული ტალღებისათვის ამპლიტუდა მცირდება სათავემდე მანძილის უკუპროპორციულად, ხოლო ტალღის ინტენსივობა, რომელიც ამპლიტუდის კვადრატის პროპორციულია, შესაბამისად, მცირდება ცენტრამდე დაშორების კვადრატის უკუპროპორციულად.

მონოქრომატულ, სფერულ, მდგარ ტალღას აქვს შემდეგი ფორმა:

$$\varphi = A e^{-i\omega t} \frac{\sin kr}{r} \quad (2.56)$$

სადაც $k = \omega/c$.

შესაბამისად, მონოქრომატული, სფერული მორბენალი ტალღა მოიცემა ფორმულით:

$$\varphi = A \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}. \quad (2.57)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ (2.57) გამოსახულება წარმოადგენს შემდეგი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს:

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = -4\pi A e^{-i\omega t} \delta(\mathbf{r}). \quad (2.58)$$

ამ განტოლების მარჯვენა მხარეს დგას დელტა-ფუნქცია:

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (2.59)$$

სფერული ტალღის გავლის შემდეგ, საწყის ნულოვანი პოტენციალის წერტილში, მისი პოტენციალი ისევ განუღებია ბრტყელი ტალღისაგან განსხვავებით, რომლის დროსაც გავლის შემდეგ, სიჩქარის პოტენციალი შეიძლება იყოს ნულის არატოლი რაღაც მუდმივი რიცხვი.

2.8. ცილინდრული ტალღები

განსაზღვერება. განვიხილოთ ტალღა, რომლისთვისაც ყველა განმსაზღვრელი პარამეტრი ერთგვაროვანია ერთი რომელიმე მიმართულებით (ამ მიმართულებით ავირჩევთ აპლიკატების ღერძს) და გვაქვს ამღერძის მიმართ სიმეტრია ღერძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეებში. ასეთ შემთხვევაში, ამბობენ რომ გვაქვს ცილინდრული ტალღა.

ცილინდრული ტალღისათვის გვაქვს სიციქარეთა ველის პოტენციალი $\varphi = \varphi(R, t)$. ტალღის განტოლების ღერძულ-სიმეტრიულ ზოგად ამონახსნს, აქვს შემდეგი სახე:

$$\varphi = \int_R^\infty \frac{f_1(ct - r)}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr + \int_R^\infty \frac{f_2(ct + r)}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr. \quad (2.60)$$

ტალღის განტოლება ცილინდრულ კოორდინატებში ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.61)$$

მონოქრომატული ტალღისათვის: $\varphi = e^{-i\omega t} f(R)$. მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$f'' + \frac{1}{R} f' + k^2 f = 0 \quad (2.62)$$

ეს არის ბესელის პირველი რიგის განტოლება. შესაბამისად, მდგარი ცილინდრული ტალღისათვის გვექნება შემდეგი ამონახსნი:

$$\varphi = A e^{-i\omega t} J_0(kR) \quad (2.63)$$

სადაც J_0 - ბესელის პირველი რიგის ფუნქციაა.

თუ გამოვიყენებთ ბესელის ფუნქციების ასიმპტოტურ წარმოდგენას, მაშინ ცილინდრული მდგარი ტალღისათვის გვექნება სიჩქარეთა ველის პოტენციალი შემდეგი სახით:

$$\varphi = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(kR - \pi/4)}{\sqrt{kR}} e^{-i\omega t} \quad (2.64)$$

მონოქრომატული, მორბენალი ტალღისათვის კი გაქვს შემდეგი ამონახსნი:

$$\varphi = A e^{-i\omega t} H_0^{(1)}(kR) \quad (2.65)$$

სადაც $H_0^{(1)}$ - ჰენკელის ფუნქციაა.

შესაბამისი ასიმპტოტური ფორმულის გათვალისწინებით:

$$\varphi = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{i(kR - \omega t - \pi/4)}}{\sqrt{kR}} \quad (2.66)$$

ცილინდრული განშლადი ტალღა მნიშვნელოვნად განსხვავდება ბრტყელი და სფერული ტალღებისაგან. ცილინდრულ ტალღას შეიძლება ჰქონდეს წინა ფრონტი, მაგრამ არ ჰქონდეს უკანა ფრონტი. მას შემდეგ, რაც ცილინდრული ტალღა მივა მოცემულ წერტილამდე, ის კი არ ქრება უცებ, არამედ, ნელ-ნელა ჩაქრება დროთა განმავლობაში.

III თავი. სოლიტონების თეორია

1970 წლამდე ანალიზურად ამოხსნად არაწრფივ განტოლებათა რაოდენობა იყო შეზღუდული რაოდენობის, რადგან არ არსებობდა მათი ამოხსნის არცერთი ზოგადი მეთოდი. არსებული ამონახსნები კი, ძირითადად იყო დაყვანადი, წრფივი განტოლებების ამოხსნამდე. ამჟამად, არსებობს მრავალი არაწრფივი განტოლების [1-5] ზუსტი ანალიზური ამონახსნი, გამოყენებითი მათემატიკის სხვადასხვა ტიპის ამოცანებისათვის.

ჩვენი მონოგრაფიის მესამე ტომის მესამე თავი ეძღვნება სოლიტონებს, რომლებიც წარმოადგენენ მათემატიკური ფიზიკის არაწრფივი განტოლებების ზუსტ ამონახსნებს. განვიხილავთ კორტევეგა-დე ფრიზის, სინუს - გორდონის, პასტ - ულამის და სხვა განტოლებებს.

კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლება პირველად წარმოიშვა მცირე სიღრმის არხებში ტალღების შესწავლის ამოცანების განხილვისას, თუმცა, შემდგომში აღმოჩნდა რომ ის გვხვდება მაგნიტურ ჰიდროდინამიკაში, პლაზმის ფიზიკაში, ცუნამის პრობლემის განხილვისას და ა.შ.

ამ ამოცანების შესასწავლად შეიქმნა შებრუნებული ამოცანის გაფანტვის მეთოდი, რომელმაც საშუალება მოგვცა ამოხსნილიყო რიგი არაწრფივი ამოცანებისა, რაც დღევანდელი მათემატიკის სიამაყეს წარმოადგენს.

3.1. რასელის განცალკევებული ტალღა (სოლიტონი)

შებრუნებული ამოცანის გაფანტვის მეთოდი 57 წლის წინ შეიქმნა შემდეგი სახის ევოლუციური განტოლებების ამოსახსნელად:

$$u_t = K[u], \quad (3.1)$$

სადა $K[u]$ არაწრფივი ფუნქციონალია დამოკიდებული $u(x, t)$ ცვლადზე. ასეთი სახის ამოცანების ამოხსნის მეთოდი ეკუთვნის მ.კრუსკალს, (შებრუნებული ამოცანის გაფანტვის მეთოდი) Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys.Rev. Lett. 1967, V.19, P. 1095–1097.

ამ ნაშრომში ამოხსნილი იქნა კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლება:

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} \quad (3.2)$$

სოლიტონის ცნება შემოყვანილი იქნა კრუსკალისა და ზაბუსკას ნაშრომში:

Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // *Phys. Rev. Lett.* 1965, V. 15, P. 240–243.

სოლიტონის განცალკევებული ტალღა პირველად. ექსპერიმენტულად აღმოაჩინა ჯორჯ სკოტ რასელმა 1834 წელს. თუმცა, მისი მათემატიკური შესწავლა მოხერხდა მხოლოდ 140 წლის შემდეგ.

ამჟამად, სოლიტონს უწოდებენ ყოველ, ზარის გეომეტრიული ფორმის მქონე ბრტყელ ტალღას, რომელიც მუდმივი სიჩქარით ვრცელდება აბსცისთა ღერძის მიმართულებით $u(x - Vt)$.

კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლების სოლიტონური ამონახსნია:

$$u = -\frac{2\kappa^2}{\text{ch}^2[-\kappa(x - 4\kappa^2 t)]}, \quad (3.3)$$

რასაც ჩვენ მომავალში ვაჩვენებთ. ამ ფორმულაში, ტალღის გავრცელების სიჩქარეა: $V = 4\kappa^2$. სიჩქარე უარყოფითია (3.2) ფორმულაში ნიშნების არჩევის გამო. ადვილი საანგარიშოა, რომ თუ მოვახდენთ ცვლადთა მასშტაბურ გარდაქმნას: $u \rightarrow -u/6$. მაშინ (3.2) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.4)$$

ამ განტოლების სოლიტონური ამონახსნია:

$$u = \frac{12\kappa^2}{\text{ch}^2(\kappa(x - 4\kappa^2 t))}. \quad (3.5)$$

დიდი ამპლიტუდის იმპულსები უფრო სწრაფად მოძრაობენ.

კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლება აღწერს ნებისმიერ სუსტად არაწრფივ, სუსტად დისპერგირებულ ბრტყელ ტალღას. სოლიტონიური ამონახსნის არსებობისათვის uu_x ; u_{xxx} წევრები ერთმანეთს აწონასწორებენ. გრავიტაციული ტალღებისათვის სითხის ნაკადის თხელ ფენაში გვაქვს ბუსინესკის განტოლება:

$$u_{tt} = V_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(u + \frac{3}{2} \frac{u^2}{h} + \frac{h^2}{3} u_{xx} \right) \quad (3.6)$$

შესაბამის სოლიტონურ ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$u = \frac{k}{\operatorname{ch}^2 \left(\sqrt{3k/h^2} (x \pm V_s t) \right)} \quad (3.7)$$

ბუსინესკის განტოლება გადადის კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლებაში, თუ მოვახდენთ გარდაქმნას:

$$\begin{cases} \xi = x - vt \\ \tau = \varepsilon t \end{cases} \quad (3.8)$$

და უგულებელვყოფთ $O(\varepsilon^2)$ წევრებს.

3.1.1. კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლების ზუსტი ამონახსნი
განვიხილოთ, კორტევეგა - დე - ფრიზის განტოლება (3.2):

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}$$

ამ განტოლების ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$\theta = a(x - \omega t) + \delta, \quad a, \omega, \delta = \text{const} \quad (3.9)$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{du}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = (-a\omega)u', \\ u_x &= au'(\theta), \quad u_{xxx} = a^3 u'''(\theta). \end{aligned}$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (3.2) განტოლებაში, გვექნება:

$$(1 - \omega)u' - 6uu' + a^2 u''' = 0 \quad (3.10)$$

ამ განტოლების ორივე მხარის ინტეგრების შედეგად მივიღებთ:

$$u(1 - \omega) - 3u^2 + u''a^2 = C \quad (3.11)$$

თუ ამ განტოლებას გავამრავლებთ მაინტეგრებელ $2u'$ მამრავლზე, მაშინ შევძლებთ კიდევ ერთით დავწიოთ განტოლების ხარისხი:

$$\begin{aligned} 2uu'(1-\omega) - 6u'u^2 + 2u'u''a^2 &= 2Cu', \\ u^2(1-\omega) + 2u^3 + u'^2a^2 &= 2Cu + D, \\ u'a &= \sqrt{-2u^3 + u^2(1-\omega) + 2Cu + D} \end{aligned} \quad (3.12)$$

ბოლო განტოლების ინტეგრებით, მივიღებთ რომ

$$\frac{adu}{\sqrt{-2u^3 + u^2(1-\omega) + 2Cu + D}} = d\theta. \quad (3.13)$$

$$a \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{-2u^3 + u^2(1-\omega) + 2Cu + D}} = \theta - \theta_0. \quad (3.14)$$

რადგან ჩვენ ვეძებთ სოლიტონურ ამონახსნს, მისი პროფილი შეშფოთების წყაროდან შორ მანძილზე უნდა ჩაქრეს ანუ უნდა სრულდებოდეს შემდეგი პირობები:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(\theta) = 0. \quad (3.15)$$

ეს პირობები სრულდება, თუ $C = D = 0$; $1 - \omega = -a^2$. მაშინ

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{-2u^3 + a^2u^2}} = \theta - \theta_0 \Leftrightarrow \int_{u_0}^u \frac{du}{u\sqrt{a^2 - 2u}} = \theta - \theta_0. \quad (3.16)$$

თუ გამოვთვლით ამ ინტეგრალს და u სიჩქარეს გამოვსახავთ θ პარამეტრის საშუალებით, მივიღებთ სოლიტონურ ამონახსნს შემდეგი სახით:

$$u(\theta) = \frac{a^2}{4} \frac{1}{\text{ch}^2\left(\frac{\theta - \theta_0}{2}\right)}. \quad (3.17)$$

3.2. ფერმი - პასტა - ულამის ამოცანა

ფიზიკაში ნობელის პრემიის ლაურეატი, ამერიკაში მოღვაწე იტალიელი ენრიკო ფერმი, მეოცე საუკუნის 50-იან წლებში, ატომური პროექტის დამთავრების შემდეგ, აგრძელებდა მუშაობას ლოს-ალამოსის ბირთვულ ცენტრში. ამ დროისათვის მას მიეცა ძლიერ კომპიუტერებთან ურთიერთობის საშუალება. თავის თანამშრომლებთან ჯ.პასტასთან და ს.ულამთან ერთად ე.ფერმი დაინტერესდა

წრფივ ამოცანებში, არაწრფივი წევრების შეტანის შედეგად, ამონახსნში მოსალოდნელი ცვლილებებით.

აღმოჩნდა რომ შესაბამის ამოცანას მივყავართ რასელის სოლიტონურ ამონახსნებთან და კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლებასთან. ფერმი-პასტა-ულამის ამოცანამ დიდი სტიმული მისცა არაწრფივი ტალღების კვლევების გაძლიერებას.

განვიხილოთ ფერმი-პასტა-ულამის ამოცანა. ვთქვათ, გვაქვს N ერთმანეთის იდენტური, ერთეული მასის მქონე, წრფეზე განლაგებული ნაწილაკი. მეზობელი ნაწილაკები ურთიერთქმედებენ დრეკადი ძალით, ისე, თითქოს ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან ზამბარებით. წონასწორობიდან გამოყვანისას, თითოეული ნაწილაკი აამოძრავებს მეზობლად მყოფ ნაწილაკებს, ისე, რომ ბოლოს მთლიანი სისტემა იწყებს რთულ რხევით პროცესს.

ამ პროცესის აღსაწერად, შემოვიღოთ აღნიშვნები: Q_n აღნიშნავს n - ური ნაწილაკის გადაადგილებას წინასწორობის მდგომარეობიდან. მაშინ, ნიუტონის მეორე კანონიდან გამომდინარე, ამ ნაწილაკისათვის შეგვიძლია ჩავწეროთ მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება:

$$Q_n'' = f(Q_{n+1} - Q_n) - f(Q_n - Q_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.18)$$

აქ $f(Q)$ არის მეზობელ ნაწილაკებს შორის მოქმედი დრეკადი ძალა, რომელიც მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში იძლევა ჰუკის კანონს, ასევე, დამატებით, გვაქვს არაწრფივი ურთიერთქმედების მცირე ძალაც. **ფერმი-პასტა-ულამის** ნაშრომში, განხილულია ორი შემთხვევა:

$$f(Q) = \gamma Q + \alpha Q^2, \quad (3.19)$$

$$f(Q) = \gamma Q + \beta Q^3. \quad (3.20)$$

აქ γ ჯაჭვის წრფივი მუდმივაა, ხოლო α და β ირჩევა იმ პირობით, რომ მაქსიმალური Q გადაადგილება, რომელსაც იწვევს არაწრფივი წევრი იყოს მინიმალური.

ზოგიერთი დაშვებების შედეგად (3.18) განტოლება შესაძლებელია მიყვანილი იქნას კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლებაზე.

შემოვიღოთ ჯაჭვის l ბიჯი სადაც ნაწილაკებია განლაგებული და განვიხილოთ $x = nl$ ცვლადი, როგორც მანძილი ჯაჭვის გასწვრივ. რათა შევძლოთ Q_n ცვლადების უწყვეტ ფუნქციებით აღწერა, გამოვიყენოთ ტეილორის მწკრივად გაშლა და ჩავთვალოთ, რომ

$$Q_n(t) = l^r p(x, t), \quad x = nl, \quad l \ll 1. \quad (3.21)$$

მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} Q_{n+1} - Q_n &= l(p(x+l, t) - p(x, t)) = l \left(lp_x(x, t) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l^2}{2} p_{xx}(x, t) + \frac{l^3}{6} p_{xxx}(x, t) + \dots \right), \\ Q_n - Q_{n-1} &= l(p(x, t) - p(x-l, t)) = l \left(lp_x(x, t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{l^2}{2} p_{xx}(x, t) + \frac{l^3}{6} p_{xxx}(x, t) + \dots \right). \end{aligned}$$

მაშინ (3.18) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} p_{tt} &= f'(0) \left\{ l^2 p_{xx} + \frac{l^4}{12} p_{xxxx} + \dots \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} f''(0) \{ 2l^{r+3} p_{xx} + \dots \} + \frac{1}{6} f'''(0) \{ 3l^{r+4} p_{xx} + \dots \}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

თუ $f(Q) = \gamma Q + \alpha Q^2$, მაშინ $f'(0) = \gamma$, $f''(0) = 2\alpha$, $f'''(0) = 0$. აქედან გამომდინარე, თუ დავუშვებთ, რომ $r = 1$, მაშინ კვადრატული არაწრფივობის მქონე წევრები, იგივე რიგისა იქნებიან, როგორც მეოთხე რიგის წარმოებულიანი წევრი. თუ დავუშვებთ, რომ $u(x, t) = p_x(x, t)$, მაშინ $O(l^4)$ სიზუსტით მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$u_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{l^4}{12} u_{xx} + \alpha l^4 u^2 + l^2 \gamma u \right). \quad (3.23)$$

ამ განტოლებას ჰიდროდინამიკაში, ბუსინესკას განტოლებას უწოდებენ.

თუ ამ განტოლებას განვიხილავთ $O(l^2)$ სიზუსტით, მაშინ მივიღებდით წრფივ ტალღურ განტოლებას და არაწრფივი წევრების გავლენა აღარ გვექნებოდა.

რაც შეეხება ბუსინესკას (3.23) განტოლებას, მას აქვს სოლიტონური ამონახსნი:

$$u(x, t) = \frac{a^2}{8\alpha} \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{ax - \omega t + \delta}{2}\right)}. \quad (3.24)$$

სადაც $\omega^2 = \gamma a^2 l^2 + a^4 l^4 / 12$, ხოლო a ნებისმიერი მუდმივია.

ამრიგად, ჩვენ დისკრეტული ამოცანა დავიყვანეთ უწყვეტ განტოლებაზე, ამ ასიმპტოტურ მეთოდს ავტომოდელურ რედუქციას უწოდებენ და ის ფართოდ გამოიყენება მექანიკაში.

კიდევ ერთი ავტომოდელური რედუქციით, შეგვიძლია ბუსინესკას (3.23) განტოლება დავიყვანოთ კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლებამდე.

მართლაც, განვიხილოთ მხოლოდ ის ტალღები, რომლებიც ჯაჭვის მიმართულებით ვრცელდება. მოვახდინოთ ცვლადთა მასშტაბის გარდაქმნა:

$$\xi = \varepsilon^s (x - ct), \quad \tau = \varepsilon^q t, \quad (3.25)$$

სადაც ε მცირე პარამეტრია.

u გავშალოთ მცირე ε პარამეტრის მიმართ:

$$u = \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots$$

დავუშვათ, რომ $c = \sqrt{\gamma} l$, $s = 1/2$ ი $q = 3/2$, მაშინ წევრები მეოტხე რიგის წარმოებულთ, დროით წარმოებულები და არაწრფივი წევრები ერთი რიგისა იქნებიან ε პარამეტრის მიმართ, ამის გამო U_1 ცვლადის მიმართ მიღებულ განტოლებას, თუ ერთხელ ვაინტეგრებთ ξ ცვლადის მიმართ, მივიღებთ კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლებას:

$$2\sqrt{\gamma}(U_1)_\tau + 2\alpha l^3 U_1 (U_1)_\xi + \frac{l^3}{12} (U_1)_{\xi\xi\xi} = 0. \quad (3.26)$$

3.3. ხიროტას მეთოდი

ვთქვათ $u(x; t)$ აკმაყოფილებს კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლებას:

$$u_t + 12u_x u + u_{xxx} = 0. \quad (3.27)$$

გადავწეროთ ეს განტოლება დივერგენტული ფორმით:

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x}(6u^2 + u_{xx}) = 0. \quad (3.28)$$

განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი ფორმით:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{f} = \\ &= \frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2} = \frac{f_{xx}}{f} - \left(\frac{f_x}{f}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

გამოვსახოთ კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლებაში შემავალი წარმოებულები $f(x; t)$ ფუნქციით:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \frac{f_x}{f} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_{xt}}{f} - \frac{f_x f_t}{f^2} \right), \\ u_x &= \frac{f_{xxx}f - f_{xx}f_x}{f^2} - \frac{2f_x}{f} \left(\frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2} \right) = \\ &= \frac{f_{xxx}}{f} - 3\frac{f_{xx}f_x}{f^2} + 2\left(\frac{f_x}{f}\right)^3, \\ u_{xx} &= \frac{f_{xxxx}f - f_{xxx}f_x}{f^2} - 3\frac{f_{xxx}f_x + f_{xx}^2}{f^2} + 6\frac{f_{xx}f_x^2}{f^3} + \\ &+ 6\left(\frac{f_x}{f}\right)^2 \frac{f_{xx} - f_x^2}{f^2}, \\ 6u^2 &= 6\left(\frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2}\right)^2 = 6\left(f_{xx}^2 - 2\frac{f_{xx}f_x^2}{f^3} + \frac{f_x^4}{f^4}\right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

თუ ამ ფორმულებს შევიტანთ კორტევეგა-დე-ფრიზის (3.28) განტოლებაში, მაშინ მივირებთ რომ

$$\frac{f_{xt}}{f} - \frac{f_x f_t}{f^2} + 3\frac{f_{xx}^2}{f^2} + \frac{f_{xxxx}}{f} - 4\frac{f_{xxx}f_x}{f^2} = 0. \quad (3.31)$$

ცხადია, რომ თუ $f \neq 0$, მაშინ (3.31) შეგვიძლია გადავწეროთ ხიროტას ორადწრფივი განტოლების ფორმით [6]:

$$f f_{xt} - f_x f_t + 3f_{xx}^2 + f f_{xxxx} - 4f_{xxx}f_x = 0. \quad (3.32)$$

ამ განტოლების ამოსახსნელად გამოვიყენოთ შემფოთებათა მეთოდი და ამონახსნი გავშალოთ მცირე ε პარამეტრის მიმართ:

$$f = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i f^{(i)} = 1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots \quad (3.33)$$

მაშინ, ხიროტას ორადწრფივი განტოლება (3.32) შეიცვლება რამდენიმე წრფივი განტოლებით f^i კოეფიციენტების მიმართ:

$$\begin{aligned} & (1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots) \left(\varepsilon f_{xt}^{(1)} + \varepsilon f_{xxxx}^{(1)} + \varepsilon^2 (f_{xt}^{(2)} + \varepsilon f_{xxxx}^{(2)}) + \dots \right) - \\ & - \varepsilon^2 \left(f_x^{(1)} + \varepsilon f_x^{(2)} + \dots \right) \left(f_t^{(1)} + \varepsilon f_t^{(2)} + \dots \right) + 3\varepsilon^2 \left(f_{xx}^{(1)} + \varepsilon f_{xx}^{(2)} + \dots \right)^2 - \\ & - 4\varepsilon^2 \left(f_{xxx}^{(1)} + \varepsilon f_{xxx}^{(2)} + \dots \right) \left(f_x^{(1)} + \varepsilon f_x^{(2)} + \dots \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

თუ მცირე პარამეტრის ერთნაირ ხარისხებთან კოეფიციენტებს გავუტოლებთ, მივიღებთ რომ

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : & \quad f_{xt}^{(1)} + f_{xxxx}^{(1)} = 0, \\ \varepsilon^2 : & \quad f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} = f_x^{(1)} f_t^{(1)} - 3 \left(f_{xx}^{(1)} \right)^2 + 4 f_{xxx}^{(1)} f_x^{(1)}, \\ & \quad \dots \\ \varepsilon^{N+1} : & \quad f_{xt}^{(N+1)} + f_{xxxx}^{(N+1)} = \dots (f^{(1)}, \dots, f^{(N)}) = 0. \\ & \quad \dots \end{aligned} \quad (3.35)$$

ამ სისტემის სტრუქტურა ისეთია, რომ (3.33) გაშლაში შეგვიძლია შემოვიფარგლოთ ნებისმიერი წევრით და თუ დავუშვებთ რომ $f^{(N+1)} = 0$, მაშინ $f^{(N+2)} = f^{(N+3)} = \dots = 0$. მაშასადამე, არაა სავალდებულო რომ ε იყოს აუცილებლად მცირე პარამეტრი. თუ გვინდა რომ შემოვიფარგლოთ N ნომრით, მაშინ დავუშვათ, რომ $\varepsilon = 1$ და მივიღებთ (3.33) გაშლას შემდეგი ფორმით;

$$f^{(1)} = \sum_{i=1}^N e^{\theta_i}, \quad (3.36)$$

სადაც.

$$\theta_i = a_i(x - a_i^2 t) + \delta_i. \quad (3.37)$$

ასევე, შეგვიძლია ამოვხსნათ შემდეგი მიახლოებებისათვის შესაბამისი წრფივი განტოლებები (3.35).

3.4. ბეკლუნდის გარდაქმნები

ხიროტას მეთოდის გარდა, არსებობს სპეციალური ტიპის გარდაქმნები, რომლებსაც არაწრფივი განტოლების ამონახსნები გადაყავს სხვა ამონახსნებში. ასე, რომ თუ გვაქვს ერთი თუნდაც ტრივიალური ამონახსნი, შეგვიძლია ვიპოვოთ სხვა ამონახსნიც. თუ ამ გარდაქმნებს მოვახდენთ N -ჯერ, მაშინ მივიღებთ N სოლიტონურ ამონახსნს.

მაგალითისათვის, განვიხილოთ კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლება:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (3.38)$$

შემოვიყვანოთ ახალი $v(x; t)$ ფუნქცია ისე, რომ

$$u = v_x + v^2 + \lambda. \quad (3.39)$$

სადაც λ ნებისმიერი მუდმივია. თუ (3.39) ფორმულას ჩავსვამთ (3.38) განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ რომ

$$\begin{aligned} u_t &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) v_t, \\ -6uu_x + u_{xxx} &= 6(v_x + v^2 + \lambda) \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) v_x = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) (v_x(v^2 + \lambda)) + 6v_x v_{xx}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

საიდანაც, მივიღებთ მოდიფიცირებულ კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლებას:

$$v_t - 6(v^2 + \lambda)v_x + v_{xxx} = 0. \quad (3.41)$$

შევნიშნავთ, რომ თუ $v(x; t)$ არის (3.41) განტოლების ამონახსნი, მაშინ $-v(x; t)$ აგრეთვე იქნება ამონახსნი, შესაბამისად:

$$u_1 = -v_x + v^2 + \lambda, \quad (3.42)$$

დააკმაყოფილებს (3.38) განტოლებას. ამასთან ერთად, უნდა აღინიშნოს რომ u_1 საზოგადოდ, განსხვავდება u ამონახსნისაგან.

რათა შუალედური $v(x; t)$ ფუნქცია გამოირიცხოს $u \rightarrow u_1$ გარდაქმნიდან, მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა

$$u = 2w_x, \quad u_1 = 2w_{1x}. \quad (3.43)$$

მაშინ

$$\begin{aligned} \frac{u - u_1}{2} &= v_x = (w - w_1)_x, \quad v = w - w_1, \\ v^2 + \lambda &= (w + w_1)_x, \end{aligned} \quad (3.44)$$

ასე, რომ w ; w_1 ცვლადებისათვის მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} (w + w_1)_x = (w - w_1)^2 + \lambda, \\ (w - w_1)_t - 6(w + w_1)_x(w - w_1)_x + (w - w_1)_{xxx} = 0. \end{cases} \quad (3.45)$$

(3.45) სისტემას, ბეკლუნდის გარდაქმნებს უწოდებენ.

ამ გარდაქმნების საილუსტრაციოდ, ვთქვათ $u = w = 0$ და ვიპოვოთ u_1 . სისტემა (3.45) ამ შემთხვევაში, მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} w_{1x} = \lambda + w_1^2, \\ -w_{1t} + 6(w_{1x})^2 - (w_1)_{xxx} = 0, \end{cases} \quad (3.46)$$

ამ სისტემაში, მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა შემდეგი ფორმულებით:

$$w_t = -\frac{f_x}{f}, \quad w_{tx} = -\frac{f_{xx}}{f} + \frac{f_x^2}{f}, \quad (3.47)$$

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$-\frac{f_{xx}}{f} + \frac{f_x^2}{f^2} = \lambda + \frac{f_x^2}{f^2}, \quad (3.48)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$f_{xx} + \lambda f = 0. \quad (3.49)$$

ამ განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$f = e^{a(x+c)} + e^{-a(x+c)}, \quad \lambda = -a^2, \quad c = c(t). \quad (3.50)$$

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$w_1 = -\frac{f_x}{f} = -\frac{ae^{a(x+c)} - ae^{-a(x+c)}}{e^{a(x+c)} + e^{-a(x+c)}} = -ath(a(x+c)) = -ath\theta,$$

$$w_{1t} = -\frac{a^2 c_t}{ch^2\theta th\theta}, \quad w_{1x} = -\frac{a^2}{ch^2\theta},$$

$$w_{1xxx} = -\frac{4a^4}{ch^2\theta} + \frac{6a^4}{ch^4\theta}. \quad (3.51)$$

ბეკლუნდის (3.45) გარდაქმნების მეორე ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$\frac{a^2 c_t}{ch^2\theta} + 6\frac{a^4}{ch^4\theta} + \frac{4a^4}{ch^2\theta} - \frac{6a^4}{ch^4\theta} = 0, \quad (3.52)$$

საიდანაც ადვილად ვიპოვით დამოკიდებულებას:

$$c_t + 4a^2 = 0, \quad c(t) = -4a^2 t + \delta. \quad (3.53)$$

ამრიგად, მივიღებთ შემდეგ ერთსოლიტონიან ამონახსნს:

$$u_1 = 2w_{1x} = -\frac{2a^2}{ch^2(a(x - 4a^2 t + \delta))}. \quad (3.54)$$

ამონახსნის პოვნის პროცესში, ჩვენ მივიღეთ ორი ნებისმიერი მუდმივი: $\lambda = -a^2$ და δ . ცხადია, რომ ასეთი მუდმივები წარმოიშობა ბეკლუნდის გარდაქმნების შედეგად, ნებისმიერი ამონახსნიდან და არა, მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნებიდან. ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ მიღებულ ამონახსნზე, კვლავ მოვახდენთ ბეკლუნდის გარდაქმნებს და ამ პროცესს გავიმეორებთ N -ჯერ, მივირებთ N -სოლიტონურ ამონახსნს, რომელიც შეიცავს $2N$ ნებისმიერ მუდმივს.

3.4.1. ბეკლუნდის გარდაქმნები ტოდის ჯაჭვებისათვის

ბეკლუნდის გარდაქმნები ძალაშია ნებისმიერი სოლიტონური განტოლებებისათვის. განვიხილოთ მათი გამოყენება ტოდის ჯაჭვებისათვის, რომლებიც აღიწერება შემდეგი განტოლებებით:

$$\ddot{Q}_n = e^{Q_{n-1}-Q_n} - e^{Q_n-Q_{n+1}}, \quad (3.55)$$

სადაც $\dot{Q} = \frac{d}{dt}Q$.

ამ სისტემის $Q_n = Q_n(t), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ამონახსნები ცალსახად განისაზღვრება საწყისი პირობებით:

$$Q_n(0) = Q_n^0, \quad \dot{Q}_n(0) = Q_n^1. \quad (3.56)$$

ავიღოთ რომელიღაც $Q_n = Q_n(t), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ამონახსნი და განვიხილოთ შემდეგი სახის $Q_n \mapsto q_n$ გარდაქმნა:

$$\begin{cases} \dot{Q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_{n-1} - Q_n} - \alpha, \\ \dot{q}_n = e^{Q_n - q_n} + e^{q_n - Q_{n+1}} - \alpha, \end{cases} \quad (3.57)$$

სადაც α ნებისმიერი მუდმივი სიდიდეა. ვაჩვენოთ, რომ $q_n(t)$ აგრეთვე, აკმაყოფილებს ტოდას ჯაჭვის (3.55) განტოლებებს. მართლაც, თუ დროით გავაწარმოებთ (3.57) სისტემის მეორე განტოლებას, მივიღებთ რომ

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n &= (\dot{Q}_n - \dot{q}_n)e^{Q_n - q_n} + (\dot{q}_n - \dot{Q}_{n+1})e^{q_n - Q_{n+1}} = \\ &= (e^{q_{n-1} - Q_n} - e^{q_n - Q_{n+1}})e^{Q_n - q_n} + (-e^{Q_{n+1} - q_{n+1}} + e^{Q_n - q_n})e^{q_n - Q_{n+1}} = \\ &= e^{q_{n-1} - q_n} - e^{q_n - q_{n+1}}. \end{aligned}$$

ამგვარად, (3.57) სისტემა წარმოადგენს ბეკლუნდის ფორმულებს ტოდას ჯაჭვებისათვის. ცხადია, რომ ჩვენ შეგვეძლო ბეკლუნდის გარდაქმნები მოგვეხდინა ტრივიალური $Q_n = 0, \quad \dot{Q}_n = 0$ ამონახსნისათვისაც, როგორც ეს კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლებისათვის გავაკეთეთ.

3.4.2. ბეკლუნდის გარდაქმნები სინუს-გორდონის განტოლებისათვის

განსაკუთრებული სიმეტრიით ხასიათდება ბეკლუნდის გარდაქმნები სინუს-გორდონის განტოლებისათვის:

$$u_{xt} = \sin u. \quad (3.58)$$

ამ შემთხვევაში, ბეკლუნდის $u \rightarrow v$ გარდაქმნები მოიცემა შემდეგი სისტემით:

$$\begin{cases} \frac{u_x - v_x}{2} = -\lambda \sin \frac{u + v}{2}, \\ \frac{u_t + v_t}{2} = -\frac{1}{\lambda} \sin \frac{u - v}{2} \end{cases} \quad (3.59)$$

სადაც λ ნებისმიერი მუდმივია.

შევამოწმოთ, რომ v აგრეთვე ამონახსნი იქნება სინუს-გორდონის (3.58) განტოლებისათვის. ამისათვის, გარდაქმნის პირველი განტოლება გავაწარმოთ დროით, ხოლო მეორე განტოლება სივრული ცვლადით, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} \frac{u_{xt} - v_{xt}}{2} &= -\lambda \cos \frac{u + v}{2} \left(\frac{u_t + v_t}{2} \right) = \cos \frac{u + v}{2} \sin \frac{u - v}{2}, \\ \frac{u_{tx} + v_{tx}}{2} &= -\frac{1}{\lambda} \cos \frac{u - v}{2} \left(\frac{u_x - v_x}{2} \right) = \cos \frac{u - v}{2} \sin \frac{u + v}{2}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

მიღებულ (3.60) განტოლებათა სისტემაში, მეორე განტოლებას გამოვაკლოთ პირველი და გავითვალისწინოთ ტრიგონომეტრიული შეკრების ფორმულები, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$v_{xt} = \sin v. \quad (3.61)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ v აგრეთვე ამონახსნი იქნება სინუს-გორდონის განტოლებისათვის. რ.დ.გ.

უნდა აღინიშნოს, რომ ბეკლუნდის გარდაქმნები პირველად 1880 წელს შეიმუშავა სკანდინავიელმა მათემატიკოსმა ბეკლუნდმა [5], დიფერენციალური გემეტრიის ამოცანების განხილვისას და მან პირველმა ააგო, მუდმივი უარყოფითი სიმრუდის მქონე ზედაპირები სამგანზომილებიან სივრცეში.

3.5. გაფანტვის შებრუნებული ამოცანის მეთოდი

გაფანტვის შებრუნებული ამოცანები გვხვდება პრაქტიკაში, როცა შეუძლებელია უშუალო გაზომვების ჩატარება. მაგალითად, არტერიების კედლების ულტრაბგერითი გამოკვლევის დროს. არტერიის კედლის დასუსტებული მონაკვეთის, ანევრიზმას, განსაზღვრა, ხდება ულტრაბგერითი რხევების სპექტრალური ანალიზის საფუძველზე.

მეორე ტიპური მაგალითია სეისმური მონაცემების ანალიზი. ის საშუალებას იძლევა თვალყური ვადევნოთ, არამხოლოდ, უშუალო სეისმურ რყევებს, არამედ, შევისწავლოთ დედამიწის მანტიისა და ბირთვის გეოგრაფიული თავისებურებები. სეისმური ტალღების არეკვლისა და გარდატეხის ანალიზი სხვადასხვა ფენების გავლისას, საშუალებას იძლევა გამოვიკვლიოთ ნიადაგის სიმკვრივისა და სხვა განმსაზღვრელი პარამეტრების მაჩვენებლები. ესაა, კიდევ ერთი მაგალითი გაფანტვის შებრუნებული ამოცანების შესწავლისათვის: ვიცით რა მოსული და გასული ტალღების შესახებ ინფორმაცია ცნობილი წყაროდან, განვსაზღვროთ ტალღების დამფანტავი გარემოს მახასიათებლები. თეორიულად, გაფანტვის შებრუნებულ ამოცანას, მივყავართ ფურიეს გარდაქმნამდე.

3.5.1. ფურიეს გარდაქმნა

გაფანტვის შებრუნებული ამოცანის მეთოდი წარმოიქმნა, როგორც კლასიკური ფურიეს მეთოდის, გარკვეული განზოგადება არაწრფივი ამოცანების ამოსახსნელად. ფურიეს მეთოდი, საშუალებას იძლევა ამოვხსნათ მხოლოდ წრფივი ამოცანები.

მაგალითისათვის, განვიხილოთ გაწრფივებული კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლება:

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.62)$$

და ამოვხსნათ ფურიეს კლასიკური მეთოდით კოშის ამოცანა:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0 \in L_2(\mathbb{R}). \quad (3.63)$$

x ცვლადის მიმართ გამოვიყენოთ ფურიეს გარდაქმნა:

$$\mathcal{F}(u) = \tilde{u}(\lambda; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} u(x; t) dx. \quad (3.64)$$

თუ გავითვალისწინებთ, წარმოებულების ფურიეს გარდაქმნის ფორმულებს:

$$\mathcal{F}(u_x) = -i\lambda \mathcal{F}(u), \quad \mathcal{F}(u_{xxx}) = (-i\lambda)^3 \mathcal{F}(u), \quad (3.65)$$

მაშინ (3.62) კერძოწარმოებულებიანი განტოლება, გარდაიქმნება ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებად დროითი პარამეტრის მიმართ:

$$\tilde{u}_t - i\lambda^3 \tilde{u} = 0. \quad (3.66)$$

ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$\tilde{u}(\lambda, t) = C(\lambda) e^{-i\lambda^3 t}. \quad (3.67)$$

$C(\lambda)$ მუდმივის საპოვნელად, უნდა გამოვიყენოთ (3.63) საწყისი პირობების ფურიე სახე:

$$C(\lambda) = \tilde{u}(\lambda, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} u(x, 0) dx = \mathcal{F}(u_0) \quad (3.68)$$

ამრიგად, ჩვენ ვიპოვეთ (3.62),(3.63) კოშის ამოცანის ამოხსნის ფურიე სახე. საწყისი ფუნქციის აღსადგენად, გამოვიყენებთ ფურიეს უკუ-გარდაქმნას და მივიღებთ ჩვენი ამოცანის ამონახსნს შემდეგი ფორმით:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x - i\lambda^3 t} C(\lambda) d\lambda \quad (3.69)$$

ფურიეს მეთოდით განხილული ამოცანის ამოხსნის მეთოდი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი დიაგრამით:

$$\begin{array}{ccc} u(x, 0) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \tilde{u}(\lambda, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ u(x, t) & \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} & \tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{u}(\lambda, 0) e^{-i\lambda^3 t} \end{array} \quad (3.70)$$

3.6. ლაქსის წყვილი კორტევეგა-დე ფრიზის არაწრფივი განტოლებისათვის

არაწრფივი კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლებისათვის:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.71)$$

ფურიეს გარდაქმნის როლს თამაშობს გაფანტვის გარდაქმნა, რომელიც წარმოებს ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების საშუალებით:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + (\lambda^2 + u)\Phi = 0, \quad (3.72)$$

რომლის $u(x; t)$ კოეფიციენტიც კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლების ამონახსნია. ჩავთვალოთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u = 0. \quad (3.73)$$

გაფანტვის $a(\lambda; t); b(\lambda; t)$ მონაცემები განისაზღვრება გადასახვით $\mathcal{S}(u) = \{a, b\}$.

$$\Phi \rightarrow \begin{cases} e^{-i\lambda x}, & x \rightarrow -\infty, \\ a(\lambda, t)e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t)e^{i\lambda x}, & x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.74)$$

ასეთნაირად განსაზღვრული გაფანტვის მონაცემების დინამიკა დროის მიხედვით, მეტად წააგავს გაწრფივებული განტოლების ფურიე მონაცემების დინამიკას:

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}. \quad (3.75)$$

ამრიგად, გაფანტვის შებრუნებული ამოცანის მეთოდის ზოგად სქემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{array}{ccc} u(x, 0) & \xrightarrow{\mathcal{S}} & \begin{cases} a(\lambda, 0) \\ b(\lambda, 0) \end{cases} \\ \downarrow & & \downarrow \\ u(x, t) & \xleftarrow{\mathcal{S}^{-1}} & \begin{cases} a(\lambda, t) = a(\lambda, 0) \\ b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t} \end{cases} \end{array} \quad (3.76)$$

აქ მთავარია (3.72) განტოლება საიდან მოვიდა. პასუხი იმაში მდგომარეობს, რომ ეს განტოლება შედის ლაქსის წყვილში [7].

განვიხილოთ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა რომელსაც ლაქსის წყვილს უწოდებენ:

$$\begin{cases} \Psi_x = L\Psi \\ \Psi_t = A\Psi, \end{cases} \quad (3.77)$$

სადაც უცნობი წარმოადგენს მეორე რიგის კვადრატულ მატრიცას:

$$\Psi = \Psi(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.78)$$

ისევე, როგორც $L = L(t, x, \lambda)$ და $A = A(t, x, \lambda)$ კოეფიციენტები.

ცხადია, რომ (3.77) სისტემას ვერ დააკმაყოფილებს ნებისმიერი ფუნქციები. გამოვიყვანოთ ამ სისტემის თავსებადობის პირობები. ცხადია, რომ $\Psi; L; A$ გლუვი ფუნქციები უნდა იყოს, ასევე, $\det \Psi \neq 0$.

გავაწარმოოთ ლაქსის წყვილის პირველი განტოლება დროითი პარამეტრით, ხოლო მეორე სივრცითი ცვლადით, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\Psi_{xt} = L_t\Psi + L\Psi_t = \Psi_{tx} = A_x\Psi + A\Psi_x. \quad (3.79)$$

თუ გავითვალისწინებთ ლაქსის (3.77) სისტემას, საბოლოოდ მივიღებთ ამ სისტემის თავსებადობის პირობებს:

$$L_t + LA = A_x + AL, \quad (3.80)$$

ან რაც იგივეა

$$L_t - A_x = [A, L], \quad (3.81)$$

სადაც $[A, L] = AL - LA$ ამ მატრიცების კომუტატორია. ავირჩიოთ ეს მატრიცები შემდეგი სახით:

$$L = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (3.82)$$

$$A = -4\lambda^2 L - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix}. \quad (3.83)$$

სადაც λ ნებისმიერი კომპლექსური პარამეტრია, ხოლო $u(x; t)$ ნებისმიერი ფუნქციაა, რომელიც არაა დამოკიდებული ამ პარამეტრზე.

ჩავსვათ ეს კოეფიციენტები თავსებადობის პირობებში (3.81), რისთვისაც წინასწარ უნდა გამოვთვალოთ წარმოებულები და კომპუტატორი:

$$L_t = i \begin{pmatrix} 0 & u_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} A_x &= -4\lambda^2 i \begin{pmatrix} 0 & u_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2i\lambda \begin{pmatrix} -u_x & -iu_{xx} \\ 0 & u_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{xx} & iu_{xxx} + 4iu_x u_x \\ 2iu_x & -u_{xx} \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -u & -iu_x \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iu_x & 2u^2 \\ -2u & -iu_x \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_x & iu_{xx} + 2iu^2 \\ 2iu & -u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -iu_{xx} & -2uu_x \\ 2u_x & iu_{xx} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

კოეფიციენტებში, თუ გავუტოლებთ λ -ს მიმართ ერთნაირ ხარისხიან კოეფიციენტებს, მივიღებთ რომ

$$\begin{aligned} \lambda^2 : 4i \begin{pmatrix} 0 & u_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + i(-2i) \begin{pmatrix} 0 & -2iu_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= 0, \\ \lambda^1 : 2i \begin{pmatrix} -u_x & -iu_{xx} \\ 0 & u_x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 2iu_{xx} + 4iu^2 \\ -4iu & 0 \end{pmatrix} + \\ + 2 \begin{pmatrix} iu_x & 2u^2 \\ -2u & -iu_x \end{pmatrix} &= 0, \end{aligned} \quad (3.86)$$

რომლებიც სრულდება ნებისმიერი u -სთვის.

$$\begin{aligned} \lambda^0 : i \begin{pmatrix} 0 & u_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{xx} & iu_{xxx} + 4iu_x u_x \\ 2iu_x & -u_{xx} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -iu_{xx} & -2uu_x \\ 2u_x & iu_{xx} \end{pmatrix} &= 0, \\ iu_t - iu_{xxx} - 4iu_x u_x - 2iu_x u_x &= 0, \quad u_t - u_{xxx} - 6uu_x = 0. \end{aligned} \quad (3.87)$$

ამრიგად, ჩვენ გამოვიყვანეთ კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლება ლაქსის წყვილის თავსებადობის (3.81) პირობიდან. პირიქითაც, თუ ადგილი აქვს კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლებას, მაშინ ადგილი აქვს ლაქსის წყვილის თავსებადობის პირობებსაც.

3.7. გელფანდ-ლევიტან-მარჩენკოს განტოლება

გამოვიყვანოთ გაფანტვის შებრუნებული ამოცანის განტოლება, როცა არა გვაქვს მონაცემთა დისკრეტული სპექტრი ანუ $a(\lambda) \neq 0$, ნებისმიერი $\text{Im}\lambda \geq 0$. ჩვენი ამოცანაა, შრედინგერის განტოლებაში (3.88), აღვადგინოთ $u(x; t)$ პოტენციალი:

$$\Phi_{xx} + (\lambda^2 + u(x))\Phi = 0, \quad (3.88)$$

მისი $a(\lambda); b(\lambda)$ მონაცემების გაფანტვის საშუალებით:

$$\Phi \rightarrow \begin{cases} e^{-i\lambda x}, & x \rightarrow -\infty, \\ a(\lambda)e^{-i\lambda x} + b(\lambda)e^{i\lambda x}, & x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (3.89)$$

ჩვენ დაგვჭირდება აგრეთვე Θ კანონიკური ამონახსნი შრედინგერის (3.88) განტოლებისათვის:

$$\begin{aligned} \Theta_{xx} + (\lambda^2 + u(x))\Theta &= 0, \\ \Theta &\rightarrow e^{i\lambda x}, \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.90)$$

ჯერ გამოვიყვანოთ შებრუნების ფორმულა $u(x; t)$ პოტენციალისათვის, ცნობილი Φ ფუნქციის შემთხვევაში.

რადგან ინტეგრალური განტოლება Φ ფუნქციისათვის ეკვივალენტურია განტოლების $\chi(\lambda, x) = \Phi(\lambda, x)e^{-i\lambda x}$, მივიღებთ:

$$\chi(\lambda, x) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\lambda(x-\xi)}}{2i\lambda} u(\xi)\chi(\lambda, \xi) d\xi \quad (3.91)$$

თუ გამოვიყენებთ X ფუნქციის ანალიზურობა λ პარამეტრის მიმართ, როცა $\text{Im}\lambda > 0$, გადავალთ ზღვარზე, როცა $\lambda \rightarrow \infty$ და ვისარგებლოთ შეფასებით:

$$|e^{2i\lambda(x-\xi)}| = e^{-2\text{Im}\lambda(x-\xi)} \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad x > \xi, \quad (3.92)$$

მაშინ

$$u(x) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda(\chi(\lambda, x) - 1) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda(\Phi(\lambda, x)e^{i\lambda x} - 1) \quad (3.93)$$

გადავიდეთ გაფანტვის შებრუნებული ამოცანის განტოლების გამოყვანაზე. გაფანტვის (3.89) პირობები გადავწეროთ სხვანაირად. ჩავთვალოთ λ ცვლადი ნამდვილ რიცხვად და შემოვიყვანოთ შრედინგერის მესამე ამონახსნი $\bar{\Theta}(x; t)$:

$$\begin{aligned}\bar{\Theta}_{xx} + (\lambda^2 + u(x))\bar{\Theta} &= 0, \\ \bar{\Theta} &\rightarrow e^{-i\lambda x}, \quad x \rightarrow +\infty.\end{aligned}\tag{3.94}$$

მაშინ სამ $\Phi; \Theta; \bar{\Theta}$ ცვლადებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება, რადგან ისინი წარმოადგენენ ერთიდაიგივე მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებს. კოეფიციენტები არაა დამოკიდებული ცვლადზე, აქედან გამომდინარე, საკმარისია მათი გამოანგარიშება რომელიმე ერთ წერტილში.

ასიმპტოტური ფორმულებიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$\Phi(\lambda, x) = a(\lambda)\bar{\Theta}(\lambda, x) + b(\lambda)\Theta(\lambda, x) \text{ ნებისმიერი } \lambda \in \mathbb{R}.$$

ეს ტოლობა გავყოთ $a(\lambda)$ -ზე და გავამრავლოთ $\exp(i\lambda y)$ ექსპონენტაზე, მაშინ მივიღებთ რომ

$$\frac{\Phi(\lambda, x)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y} = \left[\bar{\Theta}(\lambda, x) + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \Theta(\lambda, x) \right] e^{i\lambda y} = [\bar{\Theta}(\lambda, x) + r(\lambda)\Theta(\lambda, x)] e^{i\lambda y}.\tag{3.95}$$

ამ გამოსახულებას გამოვაკლოთ $\exp(-i\lambda(x-y))$ და ვაინტეგრროთ λ ცვლადით. მაშინ გვექნება:

$$\begin{aligned}& \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\Phi(\lambda, x)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y} - e^{-i\lambda(x-y)} \right] d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} [\bar{\Theta}(\lambda, x) - e^{-i\lambda x} + r(\lambda)\Theta(\lambda, x)] d\lambda.\end{aligned}\tag{3.96}$$

გვაქვს შემდეგი შეფასება:

$$\frac{\Phi(\lambda, x)}{a(\lambda)} e^{i\lambda y} - e^{-i\lambda(x-y)} = O\left(\lambda^{-1} e^{-i\lambda(x-y)}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty.\tag{3.97}$$

მაშინ განტოლება (3.96) მიიღებს სახეს;

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} [\bar{\Theta}(\lambda, x) - e^{-i\lambda x} + r(\lambda)\Theta(\lambda, x)] d\lambda. \quad (3.98)$$

მის ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$\bar{\Theta}(\lambda, x) = e^{-i\lambda x} + \int_x^{\infty} K(x, y)e^{-i\lambda y} dy, \quad (3.99)$$

გაფანტვის პირდაპირ ამოცანას აქვს სახე:

$$\Theta(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} \frac{\sin \lambda(x-y)}{\lambda} u(y)\Theta(\lambda, y) dy. \quad (3.100)$$

თუ შევიტანთ (3.98) განტოლებაში გვექნება:

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} \left[\int_x^{\infty} K(x, \xi)e^{i\lambda \xi} d\xi + r(\lambda) \left(e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} K(x, \xi)e^{i\lambda \xi} d\xi \right) \right] d\lambda. \quad (3.101)$$

შემოვიყვანოთ ფუნქცია;

$$\hat{K}(x, y) = \begin{cases} K(x, y), & x < y, \\ 0, & x > y, \end{cases} \quad (3.102)$$

მაშინ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(x, \xi)e^{-i\lambda \xi} d\xi d\lambda = 2\pi \hat{K}(x, y). \quad (3.103)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(x, \xi)e^{-i\lambda \xi} d\xi d\lambda = 2\pi \hat{K}(x, y). \quad (3.104)$$

მაშინ მივიღებთ რომ:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} r(\lambda) \int_x^{\infty} K(x, \xi) e^{i\lambda \xi} d\xi d\lambda = \\ & = \int_x^{\infty} K(x, \xi) \int_{-\infty}^{+\infty} r(\lambda) e^{i\lambda(\xi+y)} d\lambda d\xi = \int_x^{\infty} K(x, \xi) 2\pi F(\xi+y) d\xi. \end{aligned} \quad (3.105)$$

მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ განტოლებას:

$$K(x, y) + F(x+y) + \int_x^{\infty} K(x, \xi) F(\xi+y) d\xi = 0, \quad x < y. \quad (3.106)$$

(3.106) განტოლებას გელფანდ-ლევიტან-მარჩენკოს განტოლებას უწოდებენ.

3.8. შებრუნების ფორმულა

ჩვენ დაგვრჩა ბოლო ნაბიჯი, გაფანტის შებრუნებული ამოცანის მეთოდის სქემიდან - გადავიდეთ გელფანდ-ლევიტან მარჩენკოს განტოლების $K(x; y)$ ამონახსნიდან, კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლების $u(x; t)$ ამონახსნზე. ეს გაფასვლა ხორციელდება შებრუნების მოდიფიცირებული ფორმულის დახმარებით.

გადავწეროთ შებრუნების ფორმულა $u(x; t)$ პოტენციალისათვის ახალ $\Theta = \chi e^{-i\lambda x}$ ცვლადებში:

$$u(x) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda(\chi(\lambda, x) - 1) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda(\Theta(\lambda, x)e^{-i\lambda x} - 1) \quad (3.107)$$

ჩავსვათ აქ გამოსახულება $\Theta(\lambda, x)$:

$$\Theta(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^{+\infty} K(x, \xi) e^{i\lambda \xi} d\xi, \quad (3.108)$$

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$u(x) = \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2i\lambda \left(\int_x^{\infty} K(x, \xi) e^{i\lambda(\xi-x)} d\xi \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2 \int_x^{\infty} K(x, \xi) d \left(e^{i\lambda(\xi-x)} \right) = \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ -K(x, x) - \int_x^{\infty} e^{i\lambda(\xi-x)} K_{\xi}(x, \xi) d\xi \right\} = \\
&= -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{i\lambda} \left\{ K_{\xi}(x, x) + \int_x^{\infty} e^{i\lambda(\xi-x)} K_{\xi\xi}(x, \xi) d\xi \right\}. \quad (3.109)
\end{aligned}$$

აქ ბოლო შესაკრები ნულდება, რადგან $K(x, \xi) = O(\lambda^{-N})$. შესაბამისად, ვლებულობთ შებრუნების ფორმულას შემდეგი სახით:

$$u(x) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x). \quad (3.110)$$

ამრიგად, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლების, გაფანტვის შებრუნებული ამოცანის მეთოდით ამოხსნის ალგორითმი:

1. გაფანტვის $a(\lambda) = a(\lambda, 0)$ და $b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-8i\lambda^3 t}$ მონაცემების დახმარებით, ვპოულობთ გარდატეხის კოეფიციენტს:

$$r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)} = \frac{b(\lambda, 0)}{a(\lambda, 0)} e^{-8i\lambda^3 t};$$

2. ვპოულობთ გელფანდ-ლევიტან-მარჩენკოს ინტეგრალური განტოლების გულს:

$$F(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r(\lambda, t) e^{i\lambda z} d\lambda;$$

3. ამოვხსნით გელფანდ-ლევიტან-მარჩენკოს განტოლებას:

$$K(x, y, t) + F(x+y, t) + \int_x^{\infty} K(x, \xi, t) F(\xi+y, t) d\xi = 0, \quad x < y;$$

4. ვპოულობთ კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლების ამონახსნს შებრუნების ფორმულით:

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t)$$

ლიტერატურა

1. Теория солитонов, под. Ред. С.Н.Новикова, Москва, 1980.
2. Ньюелл А. Солитоны в физике и математике, Москва, 1987.
3. Фадеев Л.Д., Тахтаджан Л.А. Гамильтонов подход к теории солитонов, Москва, 1986.
4. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж.,Маурис Л. Солитоны и нелинейные волновые уравнения, Москва, 1988.
5. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. Москва, 1987.
6. Hirota R. Exact solution of the Korteweg-de-Vrise equation for multiple sollisions of solitons//Phys.Rev.Lett. 1971, V.27.
7. Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves//Comm. Pure and Appl. Math. 1968, V.7.
8. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial atates//Phys. Rev. Lett. 1965, V.15.
8. Олховский И.И. Курс Теоретическая механики для физиков, изд МГУ, 1974.
9. Олховский И.И. Павленко Ю.Г., Кузменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. изд МГУ, 1977.
10. Козел С.М., Рашба Э.И. Славатинский С.А. Сборник задач по физике, задачи МФТИ, Москва 1978.
11. Коткин Г.Л. Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике, Москва 1977.
12. Кронин Г.Л. Гринберг Д, Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. пер. с англ. Москва 1975.

13. ოზგაძე თ. მათემატიკური მოდელების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006.
14. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва,1988.
15. Косевич А.М.,Ковалёв А.С. Введение в нелинейную физическую механику,Наукова думка, Киев, 1989.
16. Яковенко Г.Н Лекции по теоретической механике устойчивость, колебания, гамильтонова механика, Москва, 2003,(www. study. com. ru).
17. Берже П.,Помо И.,Видаль К. Порядок в хаосе о детерминистском подходе к турбулентности, Пер. с франц. под ред. Данилова Ю.А.,Мир, Москва, 1991.
18. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г.,КараваяевВ.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001.
19. Лихтенберг А.,Либерман М.Регулярная и стохастическая динамика, пер. с англ., Мир, Москва, 1984.
20. ოზგაძე თ. მათემატიკური მოდელების კურსი (რხვევითი სისტემები), ტ.4., სტუ, თბილისი, 2010.

წინასიტყვაობა		ბვ.
		3
I თავი	რხევითი სისტემები	4
	შესავალი	4
	1.1 არადემპფირებული თავისაუფალი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	10
	1.1.1 არადემპფირებული თავისაუფალი მექანიკური რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	10
	1.1.2 არადემპფირებული თავისაუფალი ელექტრული რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	13
	1.1.3 არადემპფირებული თავისაუფალი სოციალური რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	15
	1.1.4 არადემპფირებული თავისაუფალი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	17
ამოცანები და სავარჯიშოები		19
	1.2.1 დემპფირებული თავისუფალი რხევითი პროცესების მოდელირება	19
	1.2.2 დემპფირებული თავისუფალი მექანიკური რხევითი პროცესების მოდელირება	20
	1.2.3 დემპფირებული თავისუფალი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება	24
	1.2.4 დემპფირებული თავისუფალი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება	26

	1.2.5	დემბფირებული თავისუფალი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება ფრანგიშვილი-ობგაძის მოდელის ბაზაზე	28
ამოცანები და სავარჯიშოები			29
	1.3.1	იძულებითი რხევითი სისტემების მოდელირება	30
	1.3.2	იძულებითი მექანიკური რხევითი სისტემების მოდელირება	30
	1.3.3	იძულებითი ელექტრული რხევითი სისტემების მოდელირება	35
	1.3.4	იძულებითი სოციალური რხევითი სისტემების მოდელირება	37
	1.3.5	იძულებითი ეკონომიკური რხევითი სისტემების მოდელირება	38
ამოცანები და სავარჯიშოები			39
	1.4.1	ბმული რხევითი სისტემების მოდელირება	40
	1.4.2	ბმული მექანიკური რხევითი სისტემების მოდელირება	40
	1.4.3	ბმული ელექტრული რხევითი სისტემების მოდელირება	43
	1.4.4	ბმული სოციალური რხევითი სისტემების მოდელირება	44
	1.4.5	ბმული ეკონომიკური რხევითი სისტემების მოდელირება	44
ამოცანები და სავარჯიშოები			45
	1.5.1	რხევითი სისტემების მოდელირების ვარიაციული მეთოდები	46

	1.5.2	ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი. თავისუფალი რხევითი სისტემის მოდელის აგება	46
	1.5.3	იძულებითი რხევითი სისტემის მოდელირება ვარიაციული მეთოდით	48
ამოცანები და სავარჯიშოები			49
	1.6.1	არაწრფივი რხევითი პროცესების მოდელირება	49
	1.6.2	არადემპფირებული თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი პროცესების მოდელირება	50
	1.6.3	თავისუფალი რხევითი სისტემა ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით	51
	1.6.4	დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი პროცესების მოდელირება	52
	1.6.5	დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემა მშრალი ხახუნით	53
ამოცანები და სავარჯიშოები			54
	1.7.1	ავტორხევითი სისტემები	55
	1.7.2	ზოგადი სქემები და სტრუქტურული თავისებურებები	55
	1.7.3	ვან-დერ-ჰოლის ავტოგენერატორის მოდელი	56
	1.7.4	ავტორხევითი ჰიდროაეროდრეკადი სისტემები ფლატერი და დივერგენცია	58
	1.7.5	ქიმიური ავტორხევითი სისტემები (პრიგოჟინ-ლევევერის მოდელი)	63
ამოცანები და სავარჯიშოები			66
	1.8.1	პარამეტრული რხევები და სისტემები	66

	1.8.2	მექანიკური პროცესის მათემატიკური მოდელი	67
	1.8.3	მეისნერის განტოლება	68
	1.8.4	ფრანგიშვილი-ობგაძის ეკონომიკური დინამიკის განზოგადებული მათემატიკური მოდელი	69
	1.8.5	ლორენცის მათემატიკური მოდელი ეკონომიკაში. უცნაური ატრაქტორი	71
ამოცანები და სავარჯიშოები			75
II თავი	აკუსტიკური ტალღების თეორია		76
	2.1	ბგერითი ტალღები	76
	2.2	მონოქრომატული ტალღები	78
	2.3	ბგერითი ტალღების ენერჯია და იმპულსი	81
	2.4	ბგერითი ტალღების არეკვლა და გარდატეხა	84
	2.5	გეომეტრიული აკუსტიკა	86
	2.6	ბგერის გავრცელება მოძრავ გარემოში	87
	2.7	სფერული ტალღები	88
	2.8	ცილინდრული ტალღები	90
III თავი	სოლიტონების თეორია		92
	3.1	რასელის განცალკევებული ტალღა (სოლიტონი)	92
	3.1.1	კორტევეგა - დე ფრიზის განტოლების ზუსტი ამონახსნი	94
	3.2	ფერმი - პასტა - ულამის ამოცანა	95
	3.3	ხიროტას მეთოდი	99
	3.4	ბეკლუნდის გარდაქმნები	101
	3.4.1	ბეკლუნდის გარდაქმნები ტოდის ჯაჭვებისათვის	103
	3.4.2	ბეკლუნდის გარდაქმნები სინუს-გორდონის განტოლებისათვის	104
	3.5	გაფანტვის შებრუნებული ამოცანის მეთოდი	106
	3.5.1	ფურიეს გარდაქმნა	106

	3.6	ლაქსის წყვილი კორტევეგა-დე ფრიზის არაწრფივი განტოლებისათვის	108
	3.7	გელფანდ-ლევიტან-მარჩენკოს განტოლება	111
	3.8	შებრუნების ფორმულა	114
ლიტერატურა			116