ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემია

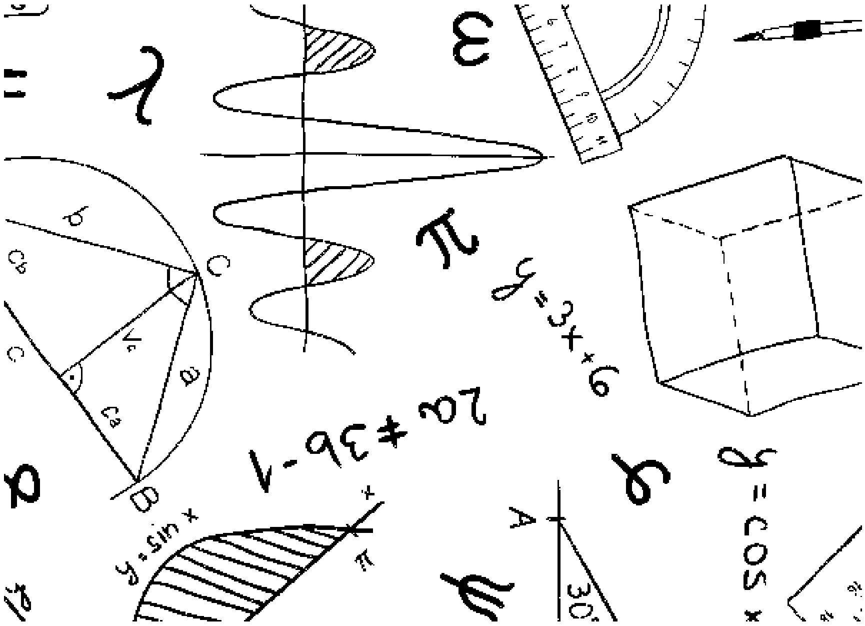
ნორჩ მათემატიკოსთა კლუბი „ალმასი“

თამაზ ობგაძე, მანანა გიორბელიძე

მათემატიკის დამატებითი საკითხები ნიჭიერი მოსწავლეებისათვის

VII კლასი

დამხმარე სახელმძღვანელო



2024

თბილისი

UDC (უაკ) 533 : 51

ო – 125

წიგნი წარმოადგენს დამხმარე სახელმძღვანელოს VII კლასის მათემატიკის მასალის ათვისების გამარტივებისათვის. მოცემულია შესაბამისი პროგრამული მასალის დამატებითი საკითხები, განსაზღვრებები და ამოცანები, რომელთა ამოხსნაც, მოსწავლეს განუმტკიცებს თეორიული მასალის ათვისების სიღრმეს, გაუხსნის გზას რთული და არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის გზაზე.

დამხმარე სახელმძღვანელოში მოცემული მასალა, ასახულია შესაბამისი ამოცანების ტექსტში. ამოცანების ამოხსნისას, მოსწავლე ნაბიჯ-ნაბიჯ შედის მათემატიკის ულამაზესი სივრცის ლაბირინთებში. წიგნში მოცემულია არა მარტო პროგრამით გათვალისწინებული საკითხები, არამედ, მათემატიკის ის დამატებითი თავებიც, რაც მოსწავლეს საშუალებას მისცემს, დაინახოს მათემატიკის ულამაზესი სივრცის ხვეულები და გაერკვეს იმ საკითხების სიღრმეშიც, რაც მათემატიკური სკოლების პროგრამითაა გათვალისწინებული.

რეცენზენტი: ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის პრეზიდენტი,
ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი თემურ ჩილაჩავა

საგამომცემლო სახლი “ტექნიკური უნივერსიტეტი”, 2024

ISBN 978 – 9941 - 8 – 6193 - 2

მადლობა უფალს სიყვარულისთვის,

რაც ჩემს გულშია მუდამ,

ყველა მიყვარხართ, ვინც არ ღალატობთ,

ერს, მამულსა და უფალს

თამაზ ობგაძე

წინასიტყვაობა

წიგნი წარმოადგენს დამხმარე სახელმძღვანელოს VII კლასის მათემატიკის მასალის ღრმად ათვისების გამარტივებისათვის. მოცემულია შესაბამისი პროგრამული მასალის, ასევე, რიგი დამატებითი საკითხების განსაზღვრებები, თეორემები და ამოცანები, რომელთა ამოხსნაც, მოსწავლეს განუმტკიცებს თეორიული მასალის ათვისების სიღრმეს, გაუხსნის გზას რთული და არასტანდარტული ამოცანების ამოხსნის გზაზე.

წიგნი წარმოადგენს ნორჩ მათემატიკოსთა კლუბის „ალმასი“ სამუშაო დოკუმენტს. დამხმარე სახელმძღვანელოში მოცემული თეორიული მასალა, ფართოდ განიმარტება სხვადასხვა მაგალითების საშუალებით, რაც აადვილებს თეორიული მასალის ათვისებას.

წიგნი მოიცავს, როგორც სტანდარტულ, ასევე, საოლიმპიადო ტიპის ამოცანების ამოხსნის მეთოდებს. ყოველი პარაგრაფის შემდეგ, მოცემულია შესაბამისი ამოცანები, მოსწავლეთა თვითკონტროლი-სათვის. ამ წიგნის დაწერის მოტივაცია იყო ჩემი ნიჭიერი მოსწავლეების: მანანა გიორბელიძის, თორნიკე ახვლედიანის, ნიკოლოზ ჩიტაურის, კესო ხავთასის, ნიკოლოზ ჯგერენაიას, დავით ყურაშვილის და ნიკოლოზ ზარანდიას დაუცხრომელი ინტერესი მათემატიკის მიმართ, რისთვისაც მათ მადლობას მოვახსენებ.

მადლობას მოვახსენებ შესანიშნავ ფიზიკოსს, ბატონ ზურაბ ბიწაძეს, იმ სითბოსა და ქრისტიანული სიყვარულისთვის, რამაც მოცემული წიგნის დაწერის საშუალება მომცა.

ყველა მკითხველს, წინასწარ მადლობას ვუხდით გამოხმაურებისათვის. გთხოვთ, მისამართზე: tamaz@mail.ru შეგვატყობინოთ, თქვენი აზრი, შენიშნულ უზუსტობებზე ან შეცდომებზე, რათა შემდგომი გამოცემისას გავითვალისწინოთ.

I თავი. სალაპარაკო ენის მათემატიკური მოდელი

1. გამონათქვამთა ბულის ალგებრა

მოგეხსენებათ, რომ მსჯელობისას ჩვენ ვიყენებთ თხრობით წინადადებებს, მათემატიკაში მათ გამონათქვამებს უწოდებენ და ლათინური ასოებით აღნიშნავენ.

მაგალითად: p – "სოკრატე ადამიანია";
q – "ადამიანი მოკვდავია";
r – "სოკრატე მოკვდავია".

გამონათქვამების საშუალებით ადგენენ რთულ წინადადებებს. ამ ფაქტის ფორმალიზაციას მათემატიკურ ლოგიკაში ახორციელებენ **უნარული** და **ბინარული** ოპერაციები.

განსაზღვრება: **უნარული** ეწოდება ოპერაციას, რომელიც სრულდება ერთ ობიექტზე (გამონათქვამზე). უნა – ლათინურად ნიშნავს ერთს.

განსაზღვრება: **ბინარული** ეწოდება ოპერაციას, რომელიც სრულდება ორ ობიექტზე (გამონათქვამზე). ბი – ლათინურად ნიშნავს ორს.

განსაზღვრება: ორი **p** და **q** გამონათქვამის **დიზიუნქცია ("$\vee$" – ან)** ეწოდება ისეთ **p$\vee$q** გამონათქვამს (**p ან q**), რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია ან **p ან q (ერთ-ერთი მაინც).**

არისტოტელეს მოდელში (ზოგჯერ ამბობენ ლოგიკაში), ნებისმიერი გამონათქვამი ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი. ამბობენ, რომ ჭეშმარიტი (**true**) გამონათქვამის, ჭეშმარიტული მნიშვნელობა უდრის 1-ს, ხოლო, მცდარი (**false**) გამონათქვამისა კი, უდრის 0 - ს. ამ შეთანხმების საფუძველზე, შეგვიძლია შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი დიზიუნქციის ოპერაციისათვის(ცხრილი 1):

ცხრილი 1

p	q	**p$\vee$q**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

განსაზღვრება: ორი **p** და **q** გამონათქვამის **კონიუნქცია (“$\wedge$” – და)** ეწოდება ისეთ **$p \wedge q$** ეწოდება ისეთ (**p და q**), რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია **p და q (ორივე ერთდროულად).** კონიუნქციის ოპერაციისათვის, ასევე, შეგვიძლია შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი (ცხრილი 2):

ცხრილი 2

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

განსაზღვრება: ორ **p** და **q** გამონათქვამს **ექვივალენტური** (=) ეწოდებათ (ჩაწერენ $p \equiv q$), თუ მათ აქვთ ჭეშმარიტობის ერთნაირი მნიშვნელობები, მათში შემავალი გამონათქვამების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

ექვივალენტობის ცნება საშუალებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ ზემოთ შემოყვანილი **ორი ბინარული ოპერაციის** (“$\vee$”**და “$\wedge$”) თვისებები.** ისინი, ნაწილობრივ, ანალოგიური არიან, ჩვენთვის ცნობილი რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების თვისებებისა. თუმცა, არის განსხვავებებიც. განვიხილოთ ეს საკითხი უფრო დეტალურად (ცხრილი3).

ცხრილი 3

გამონათქვამების თვისებები	**თვისების დასახელება**	**შესაბამისი თვისება შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებისათვის**	**ემთხვევიან(+), თუ, არ ემთხვევიან(-) თვისებები**
$p \vee q \equiv q \vee p$	კომუტაციურობის თვისება	a+b=b+a	+
$p \wedge q \equiv q \wedge p$		axb=bxa	+
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	ასოციურობის თვისება	(a+b)+c=a+(b+c)	+
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$		$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	+
$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	დისტრიბუციულობის თვისება	$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	+
$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$		$(axb)+c \neq (a+c) \cdot (b+c)$	-
$p \vee p \equiv p$	იდემპოტენტობის თვისება	$a+a \neq a$	-
$p \wedge p \equiv p$		$axa \neq a$	-

როგორც ვხედავთ, დისტრიბუციულობის მეორე თვისება და იდემპოტენტობის თვისება, გამონათქვამებზე განსაზღვრებული ოპერაციებისათვის, უკვე, იძლევა განსხვავებას რიცხვებზე განსაზღვრულ

ოპერაციებთან შედარებით, რაც იმას ნიშნავს, რომ რიცხვითი სიმრავლეები ოპერაციებთან მიმართებაში (ალგებრის თვალსაზრისით) უფრო **სხვა სტრუქტურული სისტემაა (ბულის ალგებრასთან)** შედარებით.

ახლა, განვიხილოთ **უარყოფის უნარული ოპერაცია,** რომელიც განისაზღვრება გამონათქვამებზე:

განსაზღვრება: p გამონათქვამის უარყოფა ("¬"-არა) ეწოდება ისეთ $\neg p$ გამონათქვამს (არა p), რომელიც ჭეშმარიტია, როცა p მცდარია და პირიქით, მცდარია როცა p ჭეშმარიტია.

შესაბამის ჭეშმარიტობის ცხრილს აქვს სახე(ცხრილი 4) :

ცხრილი 4

p	$\neg p$
1	0
0	1

ამრიგად, **გამონათქვამთა ალგებრაში განიმარტება სამი ძირითადი ოპერაცია ($\vee$, $\wedge$, $\neg$).** ეს სამი ოპერაცია განსაზღვრავს მთელ გამონათქვამთა ალგებრას. ანალოგიურ, **ალგებრულ სისტემებს ბულის ალგებრებს** უწოდებენ.

ყველა სხვა ოპერაცია გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში, გამოისახება ამ სამი ოპერაციის მეშვეობით.

მათემატიკურ მსჯელობაში (ასევე, სხვა ტიპის განსჯის დროს), ჩვენ ხშირად ვიყენებთ სიტყვიერ კონსტრუქციას:

"თუ p, მაშინ q". ამ წინადადებას მათემატიკურ ლოგიკაში ჩაწერენ შემდეგნაირად: $p\Rightarrow q$ (p – დან გამომდინარეობს q). "$\Rightarrow$" - სიმბოლოს **იმპლიკაციას** უწოდებენ. იმისათვის, რომ განსჯა ვაწარმოოთ და ავაგოთ რთული წინადადებებიც, საჭიროა გამოვყოთ ის ძირითადი კანონები, რომლებსაც ჩვენ **აზროვნების კანონებს** ვუწოდებთ და რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ ფორმალიზაცია გავუკეთოთ ჩვეულებრივ-სალაპარაკო ენას (ცხრილი 5):

ცხრილი 5

კანონის ფორმალური ჩაწერა	კანონის დასახელება
$p\vee(\neg p)\equiv 1$	გამორიცხული მესამის კანონი
$p\wedge(\neg p)\equiv 0$	წინააღმდეგობის კანონი
$p\vee 1\equiv 1$; $p\vee 0\equiv p$; $p\wedge 1\equiv p$; $p\wedge 0\equiv 0$	შთანთქმის კანონები
$(p\Rightarrow q)\equiv((\neg p)\vee q)$	კონტრაპოზიციის კანონი
$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\equiv(p\Rightarrow r)$	სილოგიზმის კანონი
$\neg(p\vee q)\equiv(\neg p)\wedge(\neg q)$	დე მორგანის კანონები
$\neg(p\wedge q)\equiv(\neg p)\vee(\neg q)$	
$\neg(\neg p)\equiv p$	ორმაგი უარყოფის კანონი
$(p\Leftrightarrow q)\equiv((p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p))$	ექვივალენტობის კანონი

სალაპარაკო ენის მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს, გამონათქვამთა ბულის ალგებრა: სამი ოპერაციით, იმპლიკაციის ცნებითა და ექვივალენტობის მიმართებით.

ჩვენ უკვე შეგვიძლია ფორმალიზაცია გავუწიოთ საკმაოდ რთულ წინადადებებს.

განსაზღვრება: ბულის ფორმულებს **ექვივალენტური** ეწოდებათ, თუ მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან, მათში შემავალი ატომების ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში.

მაგალითად: განვიხილოთ დე მორგანის პირველი კანონი და დავამტკიცოთ, რომ ექვივალენტობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეს მდგარი ფორმულები, ექვივალენტური არიან. ამისათვის, განმარტების თანახმად, განვიხილოთ ამ ფორმულების ჭეშმარიტობის ცხრილები ატომების (p,q) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში (ცხრილი 6) და ვაჩვენოთ, რომ მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა:

$\neg(\mathbf{p}\vee\mathbf{q})\equiv(\neg\mathbf{p})\wedge(\neg\mathbf{q})$ დე მორგანის პირველი კანონი

დამტკიცება:

ცხრილი 6

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\vee q$	$\neg(p\vee q)$	$(\neg p)\wedge(\neg q)$
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

როგორც ვხედავთ, ბოლო ორი სვეტის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა, რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს ანუ ექვივალენტობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეს მდგარი ფორმულები – არიან ექვივალენტური. რ.დ.გ.

განსაზღვრება: ისეთ ფორმულას, რომლის ჭეშმარიტული მნიშვნელობაც უდრის 1, მასში შემავალი ატომების (გამონათქვამების) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში – **ტავტოლოგია** ეწოდება.

მაგალითად : 1) $G\equiv\mathbf{p}\vee(\neg\mathbf{p})$ – **ტავტოლოგიაა,** გამორიცხული მესამის კანონის თანახმად.

რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემული ფორმულა ტავტოლოგიაა. რ.დ.გ.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ ფორმულა **წინააღმდეგობრივია** (არაა სწორი), თუ, ის მცდარია (სხვანაირად, მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა უდრის 0-ს), მასში შემავალი ატომების (მარტივი გამონათქვამების) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში.

მაგალითად: $G\equiv\ \mathbf{p}\wedge(\neg\mathbf{p})$ ფორმულა წინააღმდეგობრივია, წინააღმდეგობის კანონის თანახმად.

P.S. 1) წარმოდგენილი თეორია, არა მარტო წარმოადგენს სალაპარაკო ენის ფორმალურ მოდელს, არამედ ქმნის საფუძველს, რათა ამოიხსნას **რენე დეკარტის ამოცანა უნივერსალური ალგორითმის პოვნის** შესახებ, იმ ამოცანებისათვის, რომლებიც უშვებენ ფორმალიზაციას არისტოტელეს ლოგიკის ფარგლებში, ზემოთ მოყვანილი მეთოდების მეშვეობით;

2) არისტოტელეს ლოგიკის გარდა, არსებობს **სამნიშნა ლოგიკაც.** აქ ნებისმიერი გამონათქვამი ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი ან მის ჭეშმარიტობაზე არაფრის თქმა არ შეგვიძლია;

3) არსებობს მათემატიკური განზოგადოება **n- ნიშნა ლოგიკაც.** რომლის თეორიაც საკმაოდ განვითარებულია, მაგრამ ჯერ-ჯერობით ნაკლებად გამოიყენება პრაქტიკაში ;

4) არსებობს **არამკაფიო ლოგიკაც.** აქ თითოეული გამონათქვამი ჭეშმარიტია გარკვეული ალბათობით. ეს თეორია ფართო გამოყენებას პოულობს ეკონომიკაში, კატასტროფების პროგნოზირების საქმეში და საერთოდ, ყველა იმ ამოცანებში, სადაც გარემო პირობები იმდენად სწრაფად და მოულოდნელად იცვლება, რომ ამოცანის დეტერმინირებული, ცალსახა დასმა შეუძლებელია;

5) მათემატიკოსები სწავლობენ ასევე, **ინტუციონისტურ ლოგიკას,** რომლის ფუძემდებლებიც არიან ბრაუერი, ვეილი და ჰეიტინგი. ინტუიციონისტური ლოგიკა მათემატიკურ კურიოზს წარმოადგენს, აქ უარყოფენ წინააღმდეგობის კანონს და ცდილობენ ახლებურად ააგონ მთელი მეცნიერება.

1.1. კითხვები და ამოცანები

1. განსაზღვრეთ წინააღმდეგობის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილების გამოყენებით;
2. რამდენი ნულით ბოლოვდება ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 1-დან 81-ის ჩათვლით?
3. ჩაწერეთ გამორიცხული მესამის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილების მეშვეობით;
4. გაქვთ 3 ლიტრიანი და 5 ლიტრიანი ქილები. როგორ ჩავასხათ მათი მეშვეობით დოქში 4 ლიტრი ღვინო ?
5. დაამტკიცეთ დე მორგანის მეორე კანონი გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში;
6. რომელიღაც თვეში 3 კვირა დღე დაემთხვა ლუწ რიცხვს. რა დღე იყო ამ თვის 20 რიცხვში?
7. ტურნირში მონაწილეობდა 7 მოჭადრაკე. სულ რამდენი პარტია გადამაშდებოდა?

8. განსაზღვრეთ დიზიუნქციისა და კონიუნქციის ოპერაციები;
9. 1983 წელს იყო 53 შაბათი დღე. კვირის რა დღე იყო 1 იანვარი ამ წელს?
10. ოცი ქალაქიდან თითოეული შეერთებულია საჰაერო ხაზებით. სულ რამდენი საჰაერო ხაზია?
11. განსაზღვრეთ იმპლიკაციისა და ექვივალენციის მიმართებები;
12. 1970 წელი დაიწყო ხუთშაბათით. კვირის რომელი დღით დაიწყებოდა 1876 და 1977 წლები შესაბამისად? რა კანონზომიერება შეინიშნება?
13. მოიტანეს 5 ჩემოდანი და 5 გასაღები. არ ვიცით, რომელი გასაღები აღებს ამა თუ იმ ჩემოდანს. ყველაზე უარეს შემთხვევაში, რამდენი ცდაა საჭირო რომ, ყველა ჩემოდანს მოვარგოთ თავისი გასაღები?
14. რამდენი წრფე გაივლება სიბრტყეზე მდებარე n წერტილზე, ისე რომ თითოეული წრფე გადიოდეს ორ წერტილზე ?

1.2. განტოლებების ამოხსნა და გამონათქვამთა ალგებრა

ჩვენს მიერ განხილული ლოგიკური ოპერაციები ფართოდ გამოიყენება განტოლებების ამოხსნისას.

განვიხილოთ **წრფივი განტოლებები:**

ა) უმარტივეს წრფივ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$x + a = b. \tag{1}$$

განტოლებებს ჩვენ ვუყურებთ, როგორც თეფშებიან სასწორს, რომლის მარცხენა თეფშზე დევს $x + a$ მასის ტვირთი, ხოლო მარჯვენა თეფშზე კი b მასის საწონები.

სასწორის წონასწორობა არ დაირღვევა, თუ, ორივე თეფშიდან ავიღებთ ან ორივეზე დავდებთ ერთნაირი მასის ტვირთებს.

ეს წინადადება, მოცემული განტოლებისათვის ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად:

განტოლების ჭეშმარიტება არ დაირღვევა, თუ, ტოლობის ორივე მხარეს დავუმატებთ ან გამოვაკლებთ ერთიდაიგივე რიცხვს ანუ:

$$(\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \wedge (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}).$$

ამ თვისებიდან გამომდინარე, განტოლება (1) - ის ამოსახსნელად, საკმარისია ტოლობის ორივე მხარეს გამოვაკლოთ a, მაშინ მივიღებთ რომ

$$(x + a = b) \Leftrightarrow (x + a - a = b - a) \Leftrightarrow (x = b - a). \tag{2}$$

განვიხილოთ **მაგალითები:**

1) $\boldsymbol{x + 7 = 10} \Leftrightarrow x + 7 - 7 = 10 - 7 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 3}$;

2) $\boldsymbol{x-5=8} \Leftrightarrow x-5+5=8+5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x=13}$;

3) $\boldsymbol{2x+8}=20 \Leftrightarrow 2x+8-8=20-8 \Leftrightarrow 2x=12 \Leftrightarrow \boldsymbol{x=6.}$

განტოლების შემდეგი თვისებაა, რომ განტოლების ორივე მხარე, შეგვიძლია გავამრავლოთ ან გავყოთ, ერთიდაიგივე ნულის არატოლ რიცხვზე და ამით ტოლობის ჭეშმარიტება არ შეიცვლება ანუ:

$$(\boldsymbol{c \neq 0} \wedge \boldsymbol{a=b}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{ac=bc} \wedge \boldsymbol{c \neq 0}).$$

ბ) ამ თვისებიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ამოვხსნათ უფრო რთული წრფივი განტოლებებიც. განვიხილოთ **მაგალითები:**

1) $\boldsymbol{2\frac{1}{3}x+1\frac{2}{5}=4\frac{4}{15}} \Leftrightarrow \frac{7}{3}x+\frac{7}{5}=\frac{64}{15} \Leftrightarrow 35x+21=64 \Leftrightarrow 35x=64-21 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 35x=43 \Leftrightarrow x=\frac{43}{35} \Leftrightarrow \boldsymbol{x=1\frac{8}{35}}$;

2) $\boldsymbol{\frac{x-3}{2}+2\frac{1}{3}=\frac{x-5}{6}} \Leftrightarrow 3(x-3)+14=x-5 \Leftrightarrow 3x-9+14=x-5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x+5=x-5 \Leftrightarrow 3x-x=-5-5 \Leftrightarrow 2x=-10 \Leftrightarrow \boldsymbol{x=-5}.$

ახლა განვიხილოთ **ზოგიერთი არაწრფივი განტოლება.**

ა) ნამრავლის თვისება: თუ, ორი ცვლადის ნამრავლი ნულის ტოლია, მაშინ ან პირველი უდრის ნულს ან მეორე ანუ:

$$(\boldsymbol{a \cdot b=0}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{a=0}) \vee (\boldsymbol{b=0}).$$

განვიხილოთ **მაგალითები:**

1) $\boldsymbol{x \cdot (x-1)=0} \Leftrightarrow (x=0) \vee (x=1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\boldsymbol{x=0}\\ \boldsymbol{x=1}\end{array}\right.$;

2) $\boldsymbol{(x-2) \cdot (x-3)=0} \Leftrightarrow (x=2) \vee (x=3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\boldsymbol{x=2}\\ \boldsymbol{x=3}\end{array}\right.$;

3) $\boldsymbol{(x-5)^2 \cdot (x+8)=0} \Leftrightarrow (x=5) \vee (x=-8) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\boldsymbol{x=5}\\ \boldsymbol{x=-8}\end{array}\right.$.

ბ) ორი რიცხვის კვადრატების ჯამი ნულის ტოლია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე მათგანი ნულის ტოლია ანუ:

$$\boldsymbol{a^2+b^2=0} \Leftrightarrow (\boldsymbol{a=0}) \wedge (\boldsymbol{b=0}) \Leftrightarrow \begin{cases}\boldsymbol{a=0}\\ \boldsymbol{b=0}\end{cases}.$$

განვიხილოთ **მაგალითები:**

1) $\boldsymbol{(x-2)^2+(y-3)^2=0} \Leftrightarrow (x-2=0) \wedge (y-3=0) \Leftrightarrow \begin{cases}\boldsymbol{x=2}\\ \boldsymbol{y=3}\end{cases}$;

2) $\boldsymbol{(x+2)^2+(y-5)^2=0} \Leftrightarrow (x+2=0) \wedge (y-5=0) \Leftrightarrow \begin{cases}\boldsymbol{x=-2}\\ \boldsymbol{y=5}\end{cases}$;

3) $\boldsymbol{x^2+y^2=0} \Leftrightarrow (x=0) \wedge (y=0) \Leftrightarrow \begin{cases}\boldsymbol{x=0}\\ \boldsymbol{y=0}\end{cases}$.

II თავი. სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები

2. სიმრავლეთა ბულის ალგებრა

გამონათქვამთა ბულის ალგებრის ანალოგიურ სტრუქტურას, წარმოადგენს სიმრავლეთა ბულის ალგებრა. მოვახდინოთ მისი კონსტრუქციული აგება, გამონათქვამთა ბულის ალგებრის ანალოგიურად.

სიმრავლეებს აღნიშნავენ დიდი ლათინური ასოებით, ხოლო მათ ელემენტებს შესაბამისი პატარა ასოებით.

მაგალითად:

A – მსმენელთა რიცხვი აუდიტორიაში;

ℕ – ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;

ℤ– მთელ რიცხვთა სიმრავლე;

ℚ – რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე;

ℝ – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;

M – ქალების რიცხვი ქართულ ლექსებში . . .

სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებლად, ითვლება გერმანელი მათემატიკოსი **გეორგ კანტორი.** სიმრავლის ცნებას ზუსტი განსაზღვრება არა აქვს, თუმცა ის მოიცემა ინტუიციურად გ.კანტორის მიერ შემდეგი ფორმით:

მინიშნება: სიმრავლე არის ბევრი, რომელსაც ჩვენ ერთიანად გავიაზრებთ.

განსაზღვრება: ორ სიმრავლეს ეწოდებათ **ტოლი**, თუ ისინი შედგებიან ერთიდაიმავე ელემენტებისაგან. ამ ფაქტს ჩაწერენ შემდეგნაირად: $A = B$.

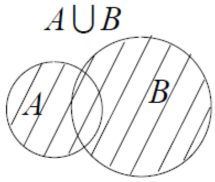
შემოვიღოთ **დიზიუნქციისა, კონიუნქციის და გამონათქვამის უარყოფის შესაბამისი ოპერაციები სიმრავლეებზე.**

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლეების **გაერთიანება** (“∪”) ეწოდება ისეთ A∪B სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის ან A, ან B სიმრავლეს (ერთ-ერთს მაინც).

სიმბოლოების საშუალებით ეს განსაზღვრება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A \cup B = \{c | c \in A \vee c \in B\}. \qquad (1)$$

ჩანაწერი $c \in A$ - წაიკითხება ასე - “c ეკუთვნის (როგორც ელემენტი) A სიმრავლეს”.



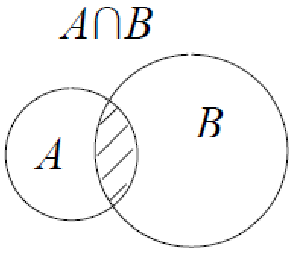
ნახ. 2.1. ორი სიმრავლის გაერთიანების გამოსახვა ეილერის წრეებით

P.S. როგორც სიმბოლური ჩანაწერიდანაც ჩანს, გაერთიანების ოპერაცია განისაზღვრება დიზიუნქციის ოპერაციის საშუალებით.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლეების **თანაკვეთა** (“∩”) ეწოდება ისეთ $A \cap B$ სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც, ეკუთვნის A-საც და B - საც (**ერთდროულად**).

სიმბოლოების საშუალებით ეს განსაზღვრება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A \cap B = \{c | c \in A \land c \in B\}. \tag{2}$$



ნახ. 2.2. ორი სიმრავლის თანაკვეთის გამოსახვა ეილერის წრეებით

P.S. როგორც სიმბოლური ჩანაწერიდანაც ჩანს, თანაკვეთის ოპერაცია განისაზღვრება კონიუნქციის ოპერაციის საშუალებით.

ახლა განვიხილოთ მცდარი და ჭეშმარიტი გამონათქვამების ანალოგები, სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.

განსაზღვრება: ისეთ სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს ელემენტებს **ცარიელი სიმრავლე** (∅) ეწოდება.

P.S. ცარიელი სიმრავლე სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში თამაშობს იგივე როლს, რასაც მცდარი გამონათქვამი - გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.

განსაზღვრება: ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს მოცემული კლასის ყველა სხვა სიმრავლეს **უნივერსალური (E) სიმრავლე** ეწოდება.

P.S. უნივერსალური სიმრავლე, სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში თამაშობს იგივე როლს, რასაც ჭეშმარიტი გამონათქვამი - გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.

(აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ამ ცნებასთან დაკავშირებულია რიგი ანტინომიებისა, რაც ხშირად, უკავშირდება ცნებათა აღრევას – მთელი, არ შეიძლება რომ იყოს თავის ნაწილი, თუმცა, შეიძლება მათ ელემენტებს შორის იყოს ურთიერთცალსახა თანადობა). ის ფაქტი რომ A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის ნაწილი, ანუ **ჩართულია** მასში **როგორც ქვესიმრავლე**, ჩაიწერება შემდეგნაირად: $A \subseteq B$. ამ ჩანაწერში აღნიშნულია, რომ A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის ნაწილი და შეიძლება მთლიანად ემთხვეოდეს კიდეც მას. იმ შემთხვევაში, როცა ამ სიმრავლეების ტოლობა გამორიცხულია, ამბობენ რომ, A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის **საკუთრივი ნაწილი** და ჩაწერენ $A \subset B$.

ახლა განვიხილოთ **გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციების თვისებები, რომლებიც მთლიანად ანალოგიურია, გამონათქვამებზე განსაზღვრული დიზიუნქციისა და კონიუნქციის ოპერაციათა თვისებებისა** (ცხრილი 7).

ცხრილი 7

სიმრავლეთა გაერთიანებისა და თანაკვეთისა თვისებები	თვისებისა და კანონების დასახელება	დიზიუნქციისა და კონიუნქციის თვისებები
$A \cup B = B \cup A$	კომუტაციურობა	$p \vee q \equiv q \vee p$
$A \cap B = B \cap A$		$p \wedge q \equiv q \wedge p$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	ასოციურობა	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$		$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	დისტრიბუციულობა	$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$		$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
$A \cup A = A$	იდემპოტენტობა	$p \vee p \equiv p$
$A \cap A = A$		$p \wedge p \equiv p$
$A \cup E = E;\ A \cup \varnothing = A;$ $A \cap E = A;\ A \cap \varnothing = \varnothing$	შთანთქმის კანონები	$p \vee 1 \equiv 1;\ p \vee 0 \equiv p;\ p \wedge 1 \equiv p;$ $p \wedge 0 \equiv 0$

ახლა, შემოვიღოთ **გამონათქვამის უარყოფის შესაბამისი ოპერაცია სიმრავლეებზე. ამ ოპერაციას სიმრავლის დამატებას** ეძახიან.

განსაზღვრება: მოცემული A სიმრავლის **დამატება E უნივერსუმამდე** ეწოდება ისეთ A^c სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის E-ს და არ ეკუთვნის A-ს.

ეს განსაზღვრება, ფორმალური აღნიშვნებით ასე ჩაიწერება:

$$A^c = \{a | a \in E \wedge a \notin A\}. \qquad (3)$$

დე მორგანის კანონებს, სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში აქვთ სახე:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c; \quad (4)$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c. \quad (5)$$

ორმაგი უარყოფის კანონს, სიმრავლეებისათვის ჩაწერენ შემდეგნაირად:

$$(A^c)^c = A. \quad (6)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, გამონათქვამთა ბულის ალგებრა და სიმრავლეთა ბულის ალგებრა, მიუხედავად შინაარსობრივი სხვაობისა, ოპერაციების მიმართ იდენტურნი არიან.

განსაზღვრება: ორ ალგებრულ სისტემას ჰქვიათ **ჰომომორფული**, თუ, მათში განსაზღვრულია ოპერაციათა ერთნაირი რაოდენობა და მათ ელემენტებს შორის არსებობს ისეთი შესაბამისობა, რომ ოპერაციების შესაბამისობა ინახავს ელემენტთა შესაბამისობას.

ასე, რომ ცხადია **გამონათქვამთა ბულის ალგებრა ჰომომორფულია სიმრავლეთა ბულის ალგებრისა.**

განსაზღვრება. ორი A და B სიმრავლის **სხვაობა $\boldsymbol{A \setminus B}$,** ეწოდება A სიმრავლის იმ ელემენტების სიმრავლეს, რომელიც არ ეკუთვნის B - ს.

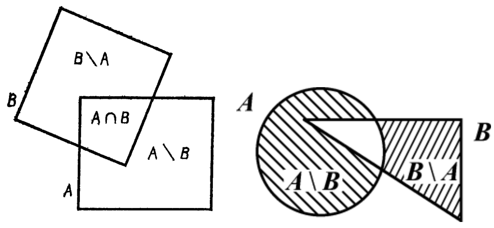
მაგალითი: $A = \{0; 1; 3; 5; 7\}$; $B = \{3; 4; 7\}$. ამ სიმრავლეების სხვაობა იქნება: $\boldsymbol{A \setminus B = \{0; 1; 5\}}$.

განსაზღვრება. ორი A და B სიმრავლის **სიმეტრიული სხვაობა $\boldsymbol{A \oplus B}$,** ეწოდება $A \cup B$ სიმრავლის იმ ელემენტების სიმრავლეს, რომელიც არ ეკუთვნის არ ეკუთვნის $A \cap B$ თანაკვეთას ანუ

$\boldsymbol{A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)}$.

მაგალითი: $A = \{0; 1; 3; 5; 7\}$; $B = \{3; 4; 7\}$. ცხადია, რომ $\boldsymbol{A \cup B} = \{0; 1; 3; 4; 5; 7\}$; $\boldsymbol{A \cap B = \{3; 7\}}$. ამ სიმრავლეების სიმეტრიული სხვაობა იქნება:

$\boldsymbol{A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)} = \{0; 1; 3; 4; 5; 7\} \setminus \{\boldsymbol{3}; \boldsymbol{7}\} = \{0; 1; 4; 5\}$.



ნახ. 2.3. ორი სიმრავლის სხვაობა და სიმეტრიული სხვაობა

$\boldsymbol{n(A)}$ - სიმბოლოთი აღინიშნება $\boldsymbol{A}$ სიმრავლის ელემენტების რაოდენობა.

ცხადია, რომ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, რადგან გაერთიანებაში თანაკვეთის ელემენტების რაოდენობა ორჯერ ჩაითვლება.

2.1. კითხვები და ამოცანები

1. განსაზღვრეთ ბინარული ოპერაციები სიმრავლეებზე;

2. ჩამოწერეთ შთანთქმის კანონები სიმრავლეებისათვის;

3. დაამტკიცეთ დე მორგანის პირველი კანონი სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში;

4. დაამტკიცეთ დე მორგანის მეორე კანონი სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში;

5. განსაზღვრეთ ოპერაციები სიმრავლეებზე;

6. განსაზღვრეთ მოცემული სიმრავლის დამატებით სიმრავლის ცნება;

7. 1970 წელი დაიწყო ხუთშაბათით. კვირის რომელი დღით დაიწყებოდა 1876 და 1977 წლები შესაბამისად? რა კანონზომიერება შეინიშნება?

8. ჩაწერეთ მოცემული სიმრავლე, მისი ელემენტების ჩამოთვლით:

ა) $A = \{x | -12 \leq x < -7, x \in \mathbb{Z}\}$;

ბ) $A = \{x | -5 \leq x < 4, x \in \mathbb{N}\}$;

გ) $A = \{x | -5 \leq x < 5, x \in \mathbb{N}\}$.

9. ჩამოთვალეთ A სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლე, თუ $A = \{a; b\}$;

10 . ჩამოთვალეთ $A = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ სიმრავლის ყველა ის ქვესიმრავლე, რომელიც შეიცავს $\{3; 5; 6\}$ სიმრავლეს ქვესიმრავლის სახით;

11. იპოვეთ $A \cup B$ და $A \cap B$, თუ $A = \{2; 3\}$; $B = \{1; 3\}$;

12. ცნობილია, რომ $n(A) = 50; n(B) = 75; n(A \cap B) = 40$. იპოვეთ $n(A \cup B)$;

13. იპოვეთ მოცემული ორი A და B სიმრავლის: გაერთიანება, თანაკვეთა, სხვაობა და სიმეტრიული სხვაობა, თუ,

$A = \{1; 3; 6; 8\}; B = \{5; 6; 7; 8\}$.

2.2. უტოლობების ამოხსნა და სიმრავლეთა თეორიის ოპერაციები

უტოლობების ამოხსნა იგივე წესით ხდება, როგორც განტოლებების, თუმცა, **არსებობს რიგი თავისებურებებისა.**

1) უტოლობის ორივე მხარეს შეგვიძლია დავუმატოთ ან გამოვაკლოთ ერთიდაიგივე რიცხვი და უტოლობა არ შეიცვლება:

$$(\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{b} \pm \boldsymbol{c});$$

2) თუ, უტოლობის ორივე ნაწილს გავამრავლებთ დადებით რიცხვზე, უტოლობა არ შეიცვლება:

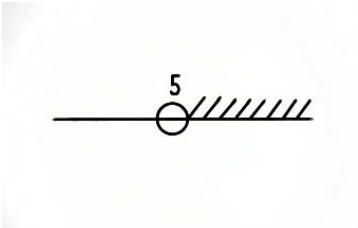
$$\big((\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}) \wedge (\boldsymbol{c} > \boldsymbol{0})\big) \Leftrightarrow (\boldsymbol{ac} \geq \boldsymbol{bc});$$

3)თუ, უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ უარყოფით რიცხვზე, მაშინ უტოლობა შეიცვლის მიმართულებას ანუ, თუ იყო მეტი, გახდება ნაკლები და პირიქით:

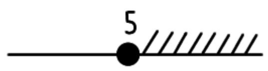
$$\big((\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}) \wedge (\boldsymbol{c} < \boldsymbol{0})\big) \Leftrightarrow (\boldsymbol{ac} \leq \boldsymbol{bc});$$
$$\big((\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}) \wedge (\boldsymbol{c} < \boldsymbol{0})\big) \Leftrightarrow (\boldsymbol{ac} \geq \boldsymbol{bc});$$

ა) განვიხილოთ, **ელემენტარული უტოლობების** ამოხსნის **მაგალითები:**

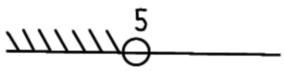
1) $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{5} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{5}; +\infty);$



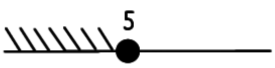
2) $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{5} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{5}; +\infty);$



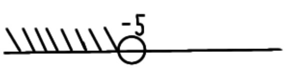
3) $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{5} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (-\infty; \boldsymbol{5});$



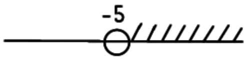
4) $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{5} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (-\infty; \boldsymbol{5}];$



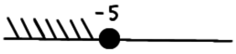
5) $-\boldsymbol{x} > \boldsymbol{5} \Leftrightarrow x < -5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (-\infty; -\boldsymbol{5});$



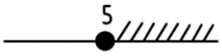
6) $-\boldsymbol{x} < \mathbf{5} \Leftrightarrow x > -5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (-\mathbf{5}; +\infty)$**;**



7) $-\boldsymbol{x} \geq \mathbf{5} \Leftrightarrow x \leq -5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (-\infty; -\mathbf{5}]$**;**

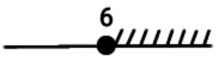


8) $-\boldsymbol{x} \leq \mathbf{5} \Leftrightarrow x \geq -5 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in [-\mathbf{5}; +\infty)$**.**



ბ) განვიხილოთ უფრო რთული, **წრფივი უტოლობების ამოხსნის მაგალითები:**

1) $\mathbf{2} \cdot (\boldsymbol{x} - \mathbf{2}) + \mathbf{3} \geq \boldsymbol{x} + \mathbf{5} \Leftrightarrow 2x - 4 + 3 \geq x + 5 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq x + 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x - x \geq 5 + 1 \Leftrightarrow x \geq 6 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in [\mathbf{6}; +\infty)$**;**



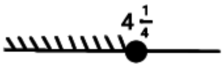
2) $\frac{x-5}{2} + 2\frac{1}{3} \leq \frac{x-3}{6} + 1\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{x-5}{2} + \frac{7}{3} \leq \frac{x-3}{6} + \frac{7}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 12 \cdot \frac{x-5}{2} + 12 \cdot \frac{7}{3} \leq 12 \cdot \frac{x-3}{6} + 12 \cdot \frac{7}{4} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 6(x-5) + 28 \leq 2(x-3) + 21 \Leftrightarrow 6x - 30 + 28 \leq 2x - 6 + 21 \Leftrightarrow$

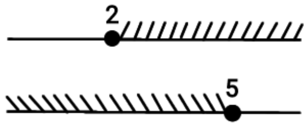
$\Leftrightarrow 6x - 2 \leq 2x + 15 \Leftrightarrow 6x - 2x \leq 15 + 2 \Leftrightarrow 4x \leq 17 \Leftrightarrow x \leq \frac{17}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \leq 4\frac{1}{4} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (-\infty; \mathbf{4}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}]$**.**

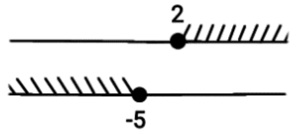


გ) განვიხილოთ, **წრფივ უტოლობათა ელემენტარული სისტემები:**

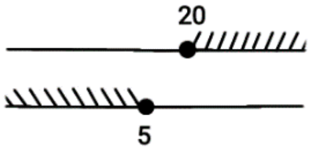
1) $\begin{cases} \boldsymbol{x} \geq \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x} \leq \mathbf{5} \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in [\mathbf{2}; \mathbf{5}]$**;**



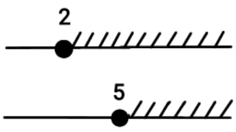
2) $\begin{cases} \boldsymbol{x \geq 2} \\ \boldsymbol{x \leq -5} \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \emptyset;$



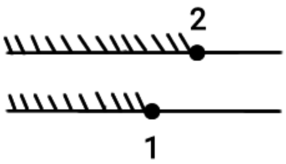
3) $\begin{cases} \boldsymbol{x \geq 20} \\ \boldsymbol{x \leq 5} \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \emptyset;$



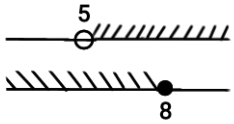
4) $\begin{cases} \boldsymbol{x \geq 2} \\ \boldsymbol{x \geq 5} \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{5}; +\infty];$



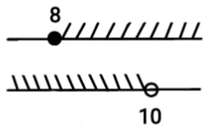
5) $\begin{cases} \boldsymbol{x \leq 2} \\ \boldsymbol{x \leq 1} \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (-\infty; \boldsymbol{1}];$



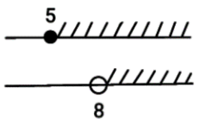
6) $\begin{cases} \boldsymbol{x > 5} \\ \boldsymbol{x \leq 8} \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (\mathbf{5}; \mathbf{8}]$;



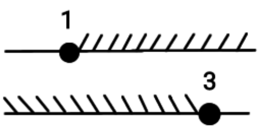
7) $\begin{cases} \boldsymbol{x \geq 8} \\ \boldsymbol{x < 10} \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in [\mathbf{8}; \mathbf{10})$;



8) $\begin{cases} \boldsymbol{x \geq 5} \\ \boldsymbol{x > 8} \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (\mathbf{8}; +\infty)$;



9) $\begin{cases} \boldsymbol{\frac{7x-1}{5} + x < 7} \\ \boldsymbol{\frac{x}{5} + 7x - 1 > 7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 1 + 5x < 35 \\ x + 35x - 5 > 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x < 36 \\ 40x > 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in (\mathbf{1}; \mathbf{3})$.



2.3. წრფივი ფუნქცია და მისი გრაფიკი

ჩვენ განვიხილეთ წრფივი განტოლებები, წრფივი უტოლობები და წრფივ უტოლობათა სისტემები. ახლა, განვიხილოთ, წრფივი ფუნქცია და მისი გრაფიკი.

განსაზღვრება. $y = kx + b$ სახის ფუნქციას, სადაც k და b მუდმივი რიცხვებია, **წრფივი ფუნქცია** ეწოდება.

განსაზღვრება. $y = f(x)$ ფუნქციას, რომლისთვისაც დამოუკიდებელი x ცვლადის მზარდ მნიშვნელობებს, შეესაბამება დამოკიდებული y ცვლადის მზარდი მნიშვნელობები, **ზრდადი** ეწოდება.

ზრდადი ფუნქციის განსაზღვრება, შეგვიძლია მათემატიკური სიმბოლოების საშუალებით ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

ფუნქცია ზრდადია$\equiv (\boldsymbol{x_2} > \boldsymbol{x_1}) \Rightarrow \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) > \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})\right)$.

ცხადია, რომ **წრფივი $\boldsymbol{y = kx + b}$ ფუნქცია ზრდადია, თუ $\boldsymbol{k > 0}$.** **ვიზუალურად,** ზრდადი ფუნქციის გრაფიკი, **არგუმენტის ზრდისას მიდის ზემოთ.**

განსაზღვრება. $y = f(x)$ ფუნქციას, რომლისთვისაც დამოუკიდებელი x ცვლადის მზარდ მნიშვნელობებს, შეესაბამება დამოკიდებული y ცვლადის კლებადი მნიშვნელობები, **კლებადი** ეწოდება.

კლებადი ფუნქციის განსაზღვრება, შეგვიძლია მათემატიკური სიმბოლოების საშუალებით ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

ფუნქცია კლებადია$\equiv (\boldsymbol{x_2} > \boldsymbol{x_1}) \Rightarrow \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1})\right)$.

ცხადია, რომ **წრფივი $\boldsymbol{y = kx + b}$ ფუნქცია კლებადია, თუ $\boldsymbol{k < 0}$.**

ვიზუალურად, კლებადი ფუნქციის გრაფიკი, **არგუმენტის ზრდისას მიდის ქვემოთ.**

მაგალითები:

$\boldsymbol{y = -5x + 3\ (k = -5, b = 3)}$, **ფუნქცია კლებადია, რადგან $\boldsymbol{k = -5 < 0}$;**

$\boldsymbol{y = 3x\ (k = 3, b = 0)}$, **ფუნქცია ზრდადია, რადგან $\boldsymbol{k = 3 > 0}$;**

$\boldsymbol{y = 2.7\ (k = 0, b = 2.7)}$, **ფუნქცია ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას;**

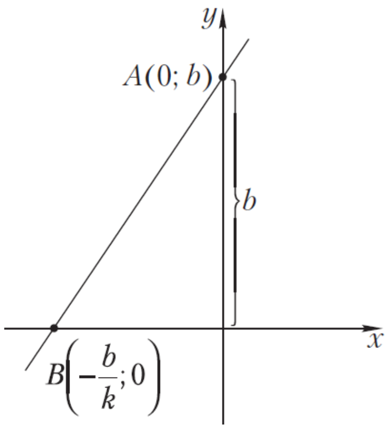
$\boldsymbol{y = 0\ (k = 0, b = 0)}$, **ფუნქცია ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას;**

$\boldsymbol{y = (2x - 1) - (3x + 2) \Leftrightarrow y = -x + 1}$, **ფუნქცია კლებადია, რადგან $\boldsymbol{k = -1 < 0}$.**

წრფივი ფუნქციის გრაფიკი. წრფივი ფუნქციის **გრაფიკია წრფე**. $y = kx + b$ წრფის გრაფიკის ასაგებად, საკმარისია ვიპოვოთ მისი რომელიმე ორი წერტილის კოორდინატები და მათზე გავატაროთ წრფე. ხელსაყრელია, რომ ამ წერტილების არჩევისას, ერთ-ერთი კოორდინატი იყოს ნულის ტოლი, მაშინ მივიღებთ წრფის გრაფიკის, **კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებს. მართლაც,**

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{0}$	$-\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{k}}$
$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{b}$	$\mathbf{0}$

ამგვარად, კოორდინატთა ღერძებთან წრფის გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები იქნება: $A(0;b), B(-\frac{b}{k};0)$ ნახ.2.4.



ნახ. 2.4. $y = kx + b$ ფუნქციის გრაფიკი

ნახ. 2.4 - დან ჩანს, რომ $y = kx + b$ წრფივი ფუნქციის განტოლებიდან გამომდინარე, **b არის ის მონაკეთი, რომელსაც წრფე ჩამოჭრის ორდინატთა ღერძს, ხოლო k კოეფიციენტი, განსაზღვრავს წრფივი ფუნქციის გრაფიკის დახრილობას, აბსცისთა ღერძის დადებით მიმართულებასთან.** მაშასადამე, თუ, გვაქვს ორი წრფივი ფუნქცია: $y = k_1x + b_1; y = k_2x + b_2$, მათი შესაბამისი გრაფიკები იქნებიან პარალელური, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი დახრილობის კოეფიციენტები ერთმანეთის ტოლია ანუ $k_1 = k_2$.

1. ააგეთ გრაფიკები და იპოვეთ: ა) ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები; ბ) გაარკვიეთ ზრდადია, კლებადია, თუ მუდმივია ფუნქცია:

$\boldsymbol{y = -5x + 3}$ **;**

$\boldsymbol{y = 3x}$ **;**

$\boldsymbol{y = 2.7}$ **;**

$\boldsymbol{y = 5}$**.**

2. იპოვეთ $\boldsymbol{k}$, თუ ცნობილია რომ $\boldsymbol{y = kx + 8}$ წრფე პარალელურია $\boldsymbol{y = 5x + 3}$ ფუნქციის გრაფიკის.

3. მოცემულ $\boldsymbol{y = 5x + 3}$ წრფეს, ეკუთვნის თუ, არა $\boldsymbol{(-1; 4)}$ წერტილი ?

2.4. წრფივ განტოლებათა სისტემის გეომეტრიული აზრი და ამოხსნის მეთოდები

განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}, \tag{7}$$

სადაც $(x; y)$ საძებნი ცვლადებია, ხოლო $a_{11}; a_{12}; a_{21}; a_{22}; b_1; b_2$ მოცემული მუდმივი, ნამდვილი რიცხვებია.

განსაზღვრება. წრფივ განტოლებათა (7) **სისტემის ამონახსნი** ეწოდება ცვლადების ისეთი $(x; y)$ წყვილების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებს სისტემის ყველა (ორივე) განტოლებას.

ცხადია, რომ (7) განტოლებათა სისტემის თითოეული განტოლება, გეომეტრიულად, იძლევა წრფეს. ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ, თითოეულ მათგანს ამოვხსნით y ცვლადის მიმართ. მართლაც, ამ სისტემის პირველი განტოლებიდან, ადვილად მივიღებთ, რომ

$$y = -\frac{a_{11}}{a_{12}} \cdot x + \frac{b_1}{a_{12}}. \tag{8}$$

(8) განტოლებაში, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$k_1 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}; b_1 = \frac{b_1}{a_{12}}, \tag{9}$$

მაშინ (8) განტოლება მიიღებს ჩვენს მიერ ადრე განხილული წრფის განტოლების ჩვეულ სახეს:

$$y = k_1 x + b_1. \tag{10}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ **წრფივ განტოლებათა (7) სისტემის ამონახსნი, გეომეტრიულად შეესაბამება, იმ ორი წრფის გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებს, რომლებიც შეესაბამება სისტემის განტოლებებს.**

P.S. ორი წრფე სიბრტყეზე: ა) შეიძლება გადაიკვეთოს ერთ წერტილში, მაშინ **გვაქვს ერთადერთი $(x; y)$ ამონახსნი; ბ)** შეიძლება იყოს ერთმანეთის პარალელური, მაშინ **სისტემას არა აქვს ამონახსნი; გ)** შეიძლება ორივე წრფე ერთმანეთს დაემთხვეს, მაშინ **გვაქვს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე, რადგან წრფის ყოველი წერტილი იქნება ამონახსნი.**

2.4.1. ჩასმის ხერხი

განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}. \tag{11}$$

ამ სისტემას თუ დავაკვირდებით, ადვილად შევამჩნევთ, რომ პირველი განტოლებიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ y ცვლადი და

ჩავსვათ მეორე განტოლებაში, მაშინ მეორე განტოლებაში გვექნება მხოლოდ ერთი ცვლადი და მივიღებთ ისეთ განტოლებას, რომლის ამოხსნაც უკვე ვიცით, მართლაც:

$$\begin{cases}2x+y=4\\5x-2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4-2x\\5x-2(4-2x)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4-2x\\5x-8+4x=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=4-2x\\9x=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{y=2}\\\boldsymbol{x=1}\end{cases}.$$

ამ მეთოდს **ჩასმის ხერხს უწოდებენ** და როგორც ვხედავთ, მისი არსი იმაში მდგომარეობს, რომ თუ რომელიმე განტოლებიდან ერთ-ერთი ცვლადი ადვილად იხსნება, მას გამოვსახავთ მეორე ცვლადით და ჩავსვამთ სისტემის სხვა განტოლებაში, რომელიც უკვე იქცევა ერთუცნობიან წრფივ განტოლებად, ვპოულობთ ამ ცვლადს და პირველ განტოლებაში ჩასმით ვღებულობთ მეორე ცვლადის მნიშვნელობასაც.

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები ჩასმის ხერხით:

1. $\begin{cases}\boldsymbol{6x-y=5}\\\boldsymbol{5x+7y=12}\end{cases};$

2. $\begin{cases}\boldsymbol{x-5y=5}\\\boldsymbol{5x+2y=52}\end{cases};$

3. $\begin{cases}\boldsymbol{6x-2y=10}\\\boldsymbol{15x+21y=36}\end{cases};$

4. $\begin{cases}\boldsymbol{2x-y=7}\\\boldsymbol{5x+7y=27}\end{cases};$

5. $\begin{cases}\boldsymbol{x-3y=5}\\\boldsymbol{2x+5y=32}\end{cases}.$

2.4.2. ალგებრული შეკრების ხერხი

განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა ისეთი სისტემები, რომელთათვისაც, ჩასმის ხერხის გამოყენება იწვევს, რთულ წილადურ გამოსახულებათა გარდაქმნების აუცილებლობას. ასეთ შემთხვევებში, ვიყენებთ ალგებრული შეკრების ხერხს.

მაგალითად, განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases}2x+3y=10\\3x-2y=2\end{cases}. \tag{12}$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად, უმჯობესია ალგებრული შეკრების ხერხის გამოყენება, რომლის არსიც მდგომარეობს შემდეგში:

ა) **ვცდილობთ, თითოეული განტოლების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ ისეთ არანულოვან რიცხვზე, რომ ამ განტოლებებში რომელიმე ცვლადის კოეფიციენტები იყვნენ ართნაირი (ნიშნის სიზუსტით);** ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში, მიზანშეწონილია მეორე განტოლების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ 3 - ზე, ხოლო პირველი განტოლების ორივე ნაწილი გავამრავლოთ 2 - ზე, მაშინ (12) სისტემა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{cases}4x+6y=20\\9x-6y=6\end{cases};$$

ბ) ამ გარდაქმნის შედეგად, $\boldsymbol{y}$ **ცვლადის კოეფიციენტები მოპირდაპირე რიცხვებად იქცა**, რაც საშუალებას იძლევა, რომ სისტემის ორივე განტოლების ერთმანეთზე მიმატებით, გამოვრიცხოთ ეს ცვლადი, მართლაც, თუ ამ განტოლებებს შევკრებთ, მივიღებთ, რომ:

$$4x+9x+6y-6y=20+6 \Leftrightarrow 13x=26 \Leftrightarrow \boldsymbol{x=2.}$$

გ) შევიტანოთ $\boldsymbol{x=2}$ მნიშვნელობა (12) სისტემის პირველ (ან მეორე) განტოლებაში:

$$2\cdot 2+3y=10 \Leftrightarrow 3y=10-4 \Leftrightarrow 3y=6 \Leftrightarrow \boldsymbol{y=2}.$$

ამრიგად, მივიღეთ (12) სისტემის ერთადერთი ამონახსნი: $\boldsymbol{(2;2)}$**.**

განვიხილოთ ახალი სისტემა:

$$\begin{cases}3x+5y=8\\4x-3y=-2\end{cases}. \qquad (13)$$

ამ სისტემის ამოსახსნელად, ვისარგებლოთ ალგებრული შეკრების ხერხით:

ა) შევეცადოთ გავუტოლოთ კოეფიციენტები y ცვლადთან. ამისათვის, პირველი განტოლება გავამრავლოთ 3 -ზე, ხოლო მეორე განტოლება 5 - ზე, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\begin{cases}9x+15y=24\\20x-15y=-10\end{cases};$$

ამ განტოლებების შეკრებით, მივიღებთ რომ

$$29x+15y-15y=14 \Leftrightarrow 29x=14 \Leftrightarrow \boldsymbol{x=\frac{14}{29}}.$$

ბ) შევიტანოთ $\boldsymbol{x=\frac{14}{29}}$ მნიშვნელობა (13) განტოლებათა სისტემის პირველ განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{42}{29}+5y=8 \Leftrightarrow 5y=8-\frac{42}{29} \Leftrightarrow 5y=\frac{190}{29} \Leftrightarrow y=\frac{38}{29} \Leftrightarrow \boldsymbol{y=1\frac{9}{29}}.$$

მაშასადამე, (13) სისტემის ამონახსნია : $\boldsymbol{\left(\frac{14}{29};1\frac{9}{29}\right)}$**.**

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები ალგებრული შეკრების ხერხით:

1. $\begin{cases}\boldsymbol{3x+5y=8}\\\boldsymbol{7x-2y=9}\end{cases};$

2. $\begin{cases} \mathbf{3x + 6y = 18} \\ \mathbf{7x - 3y = 9} \end{cases}$;

3. $\begin{cases} \mathbf{3x + 6y = 9} \\ \mathbf{7x + 3y = 6} \end{cases}$;

4. $\begin{cases} \mathbf{5x + 3y = 20} \\ \mathbf{10x + 6y = 18} \end{cases}$;

5. $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y = 8} \\ \mathbf{6x + 4y = 16} \end{cases}$.

2.4.3. კრამერის წესი მეორე რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემისათვის

განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა, **მეორე რიგის (ორუცნობიანი ორი განტოლების) სისტემის** ამოხსნის **კრამერის წესი**, რომელიც გამოსადეგია, წრფივ განტოლებათა სისტემის ყველა შემთხვევისათვის:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}. \tag{14}$$

წრფივ განტოლებათა (14) სისტემის ამოსახსნელად, **კრამერმა** შეიმუშავა შემდეგი წესი:

ა) უნდა ავაგოთ სისტემის კოეფიციენტებისაგან შემდგარი $\boldsymbol{A}$ მატრიცა (ცხრილი), სადაც პირველი სვეტი იქნება x ცვლადის კოეფიციენტები, ხოლო მეორე სვეტი კი y ცვლადის კოეფიციენტები:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \tag{15}$$

ბ) გამოვთვალოთ სისტემის მთავარი $\boldsymbol{A}$ მატრიცის დეტერმინანტი (რიცხვითი მახასიათებელი) შემდეგი წესის თანახმად:

$$\Delta = \boldsymbol{det\,A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}};$$

გ) შევადგინოთ სისტემის დამხმარე დეტერმინანტები $\Delta_1 \wedge \Delta_2$, შემდეგი წესის მიხედვით:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{b_2} \end{vmatrix} = \boldsymbol{b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}};$$

დ) ამის შემდეგ, (14) სისტემის ამონახსნების საპოვნელად, ვსარგებლობთ კრამერის შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \boldsymbol{y} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases}. \tag{16}$$

კრამერის წესის საილუსტრაციოდ, განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} \boldsymbol{3x + 5y = 11} \\ \boldsymbol{4x - 3y = 5} \end{cases}. \tag{17}$$

ა) სისტემის **მთავარი მატრიცა** იქნება:

$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix};}$

ბ) სისტემის **მთავარი მატრიცის დეტერმინანტი** იქნება:

$\Delta = det\ A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 4 \cdot 5 = -9 - 20 = -29;$

გ) გამოვთვალოთ სისტემის **დამხმარე დეტერმინანტები:**

$\Delta_{\boldsymbol{1}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{11} & \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{-3} \end{vmatrix} = \boldsymbol{11 \cdot (-3) - 5 \cdot 5 = -33 - 25 = -58;}$

$\Delta_{\boldsymbol{2}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{3} & \boldsymbol{11} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{5} \end{vmatrix} = \boldsymbol{5 \cdot 3 - 11 \cdot 4 = 15 - 44 = -29.}$

დ) ახლა **კრამერის ფირმულების დახმარებით** უკვე შეგვიძლია ვიპოვოთ სისტემის ამონახსნი:

$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \boldsymbol{y} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{-58}}{\boldsymbol{-29}} \\ \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{-29}}{\boldsymbol{-29}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases}.$

ამრიგად, სისტემის ამონახსნია $(\boldsymbol{2}; \boldsymbol{1})$.

ამოხსენით განტოლებათა სისტემები კრამერის წესით:

1. $\begin{cases} \boldsymbol{4x + 5y = 8} \\ \boldsymbol{3x + 7y = 15} \end{cases};$ **2.** $\begin{cases} \boldsymbol{14x + 5y = 18} \\ \boldsymbol{13x + 7y = 25} \end{cases};$

3. $\begin{cases} \boldsymbol{5x + 4y = 9} \\ \boldsymbol{3x + 7y = 10} \end{cases};$ **4.** $\begin{cases} \boldsymbol{1.4x + 5.2y = 10} \\ \boldsymbol{3.5x + 7.4y = 5} \end{cases};$

5. $\begin{cases} \boldsymbol{4.2x + 5y = 8.2} \\ \boldsymbol{3.4x + 7.5y = 5.5} \end{cases}$

2.4.3.1. მესამე რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა კრამერის წესით

ჩვენ უკვე განვიხილეთ კრამერის წესი მეორე რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემისათვის (**გვქონდა ორუცნობიანი ორი წრფივი განტოლება**). ახლა განვიხილავთ, **სამ სამუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემას.**

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_1. \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_1 \end{cases} \tag{18}$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად, ისევე, როგორც ორი ცვლადის შემთხვევაში, ანალოგიურად, უნდა ვიპოვოთ: **სისტემის მთავარი A მატრიცის Δ დეტერმინანტი და უკვე, სამი დამხმარე $\Delta_1; \Delta_2; \Delta_3$ დეტერმინანტი**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \tag{19}$$

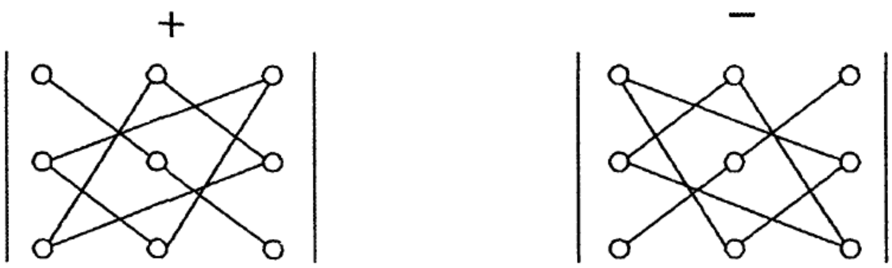
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}; \tag{20}$$

ამ დეტერმინანტების გამოთვლის შემდეგ, (18) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი, მოიცემა **კრამერის შესაბამისი სამი ფორმულით:**

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} \end{cases} \tag{21}$$

როგორც ვხედავთ, მესამე რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემა იხსნება, მეორე რიგის სისტემის ანალოგიურად, **მხოლოდ ერთი სხვაობაა, რომ უნდა ვიცოდეთ, თუ როგორ გამოითვლება მესამე რიგის მატრიცის დეტერმინანტი**.

ახლა განვიხილოთ, მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის სამკუთხედის წესი: **მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლისას, სამი წევრი აიღება დადებითი ნიშნით და სამიც უარყოფითი ნიშნით(პირველი დადებითი წევრი უდრის მატრიცის მთავარ დიაგონალზე მდგარი ელემენტების ნამრავლს, დანარჩენი ორი დადებითი წევრი კი მიიღება მატრიცის იმ სამკუთხედების წვეროებში მდგარი ელემენტების ნამრავლებით, რომელთა ფუძეებიც მთავარი დიაგონალის პარალელურია, ანალოგიურად, მიიღება უარყოფითი წევრებიც, მხოლოდ, ამჯერად, საქმე გვექნება არამთავარ დიაგონალთან):**



ამრიგად, **მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოთვლის, სამკუთხედის წესის თანახმად:**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}. \qquad (22)$$

ამ წესით გამოითვლება (20) დამხმარე დეტერმინანტებიც. კრამერის წესი ძალაშია, ნებისმიერი სასრული რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემისათვის, თუმცა, ამ მეთოდში **ერთადერთი სირთულეა, მაღალი რიგის მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლის ალგორითმი**, რაც დამუშავებულია დიდი ფრანგი მეცნიერის - **ლაპლასის** მიერ. ლაპლასის ალგორითმი, საშუალებას იძლევა, ნებისმიერი რიგის კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლა დავიყვანოთ ერთით ნაკლები რიგის რამდენიმე მატრიცის დეტერმინანტების გამოთვლაზე. მაგალითისათვის, მესამე რიგის მატრიცის დეტერმინანტი რომ გამოვითვალოთ ლაპლასის ალგორითმით, დაგვჭირდება მეორე რიგის დეტერმინანტების გამოთვლა. მეოთხე რიგის მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლა დაიყვანება მესამე რიგის დეტერმინანტების გამოთვლაზე და ა.შ.

ლაპლასის ალგორითმით, მესამე რიგის მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლა, დაიყვანება**: სამი, მეორე რიგის დეტერმინანტის** გამოთვლაზე:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (23)$$

P.S. ცხადია, რომ მესამე რიგის დეტერმინანტს სამკუთხედის წესით გამოვთვლით, თუ, ლაპლასის ალგორითმით, არა აქვს მნიშვნელობა და შედეგი ერთნაირი იქნება. თუმცა, მესამეზე უფრო მაღალი რიგის მატრიცის დეტერმინანტის გამოსათვლელად, ლაპლასის მეთოდი შეუცვლელია.

გამოთვალეთ მესამე რიგის დეტერმინანტები:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; **4.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 9 \\ 11 & 13 & 3 \end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

2.4.4. პარამეტრის შემცველი წრფივი განტოლება და განტოლებათა სისტემები

განვიხილოთ **პარამეტრების შემცველი უმარტივესი წრფივი განტოლება:**

$$\boldsymbol{a \cdot x = b.} \tag{24}$$

ამ განტოლებაში x საძიებელი უცნობი ცვლადია, ხოლო a და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, რომლებიც ჩვენ არ ვიცით და ამიტომ ისინი ჩვენთვის უცნობი პარამეტრებია. ასეთ განტოლებებს, **პარამეტრის შემცველ განტოლებებს უწოდებენ.**

განსაზღვრება. პარამეტრის შემცველი განტოლების ამოხსნა ნიშნავს, მისი ამონახსნის პოვნას, პარამეტრების ყველა მნიშვნელობისათვის ანუ განტოლების მთლიან გამოკვლევას.

(24) განტოლებისათვის გვაქვს სამი შემთხვევა:

ა) თუ $\boldsymbol{a \neq 0}$, მაშინ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $\boldsymbol{x = \frac{b}{a}}$.

ბ) თუ $\begin{cases} \boldsymbol{a = 0} \\ \boldsymbol{b = 0} \end{cases} \Rightarrow$ განტოლებას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი, მართლაც, ამ შემთხვევაში, განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს: $\boldsymbol{0 \cdot x = 0}$, **ამ განტოლებას კი ნებისმიერი $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$ მნიშვნელობა აკმაყოფილებს;**

გ) თუ $\begin{cases} \boldsymbol{a = 0} \\ \boldsymbol{b \neq 0} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x \in \emptyset}$ ანუ განტოლებას, ამ შემთხვევაში, არა აქვს ამონახსნი, მართლაც მაშინ განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$\boldsymbol{0 \cdot x = b \neq 0}$ მარცხენა მხარე ნულია და მარჯვენა არა, რაც შეუძლებელია.

განვიხილოთ მაგალითი:

$$\boldsymbol{a(a-1)x=(a-1)^2.} \tag{25}$$

ამ განტოლების ამოსახსნელად, უნდა განვიხილოთ $\boldsymbol{a}$ პარამეტრის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა და გამოვიკვლიოთ (25) განტოლების შესაბამისი ამონახსნები.

ა) თუ $\boldsymbol{a\neq 0}$ და $\boldsymbol{a\neq 1}$, მაშინ განტოლებას **აქვს ერთი ამონახსნი:**
$x=\frac{(a-1)^2}{a(a-1)}\Leftrightarrow x=\frac{a-1}{a}$;

ბ) თუ $\boldsymbol{a=1}$ $\Leftrightarrow$ განტოლებას **აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი** რადგან, ამ შემთხვევაში, განტოლების ორივე მხარე ნულის ტოლია ნებისმიერი $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$ მნიშვნელობისათვის;

გ) თუ $\boldsymbol{a=0\Rightarrow x}\in\emptyset$**, რადგან მარცხენა ნაწილი ნულია, მარჯვენა კი არა.**

ამოხსენით პარამეტრის შემცველი განტოლებები:

1. $\boldsymbol{ax=a(a-1)}$;

2. $\boldsymbol{(a-1)x=a^2-1;}$

3. $\boldsymbol{k(k-2)x=k^2-4;}$

4. $\boldsymbol{px=p^2(p-1)}$;

5. $\boldsymbol{k(x^2-1)x=p+1.}$

ახლა განვიხილოთ პარამეტრის შემცველი წრფივ განტოლებათა სისტემები:

$$\begin{cases}\boldsymbol{a_{11}x+a_{12}y=b_1}\\ \boldsymbol{a_{21}x+a_{22}y=b_2}\end{cases}, \tag{26}$$

სადაც სისტემის $a_{ij};b_i$ კოეფიციენტები, შეიძლება იყოს დამოკიდებული რაიმე $k;m;n$ პარამეტრებზე, მაშინ ასეთი სისტემის გამოსაკვლევად, **ხელსაყრელია კრამერის წესის** გამოყენება.

როგორც ერთი განტოლების შემთხვევაში, აქაც შეიძლება გვქონდეს **სამი სხვადასხვა შემთხვევა:**

ა) თუ $\Delta\neq \boldsymbol{0}$**, მაშინ გვაქვს ერთი ამონახსნი:** $\begin{cases}\boldsymbol{x=\frac{\Delta_1}{\Delta}}\\ \boldsymbol{y=\frac{\Delta_2}{\Delta}}\end{cases};$

ბ) თუ $\begin{cases}\Delta = \mathbf{0} \\ \Delta_1 = \mathbf{0} \\ \Delta_2 = \mathbf{0}\end{cases}$ ⇔სისტემას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი;

გ) თუ $\begin{cases}\Delta = \mathbf{0} \\ \Delta_1 \neq \mathbf{0}\end{cases} \vee \begin{cases}\Delta = \mathbf{0} \\ \Delta_2 \neq \mathbf{0}\end{cases} \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \in \emptyset.$

განვიხილოთ მაგალითი:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{m}+\mathbf{3})\boldsymbol{x}+\mathbf{4}\boldsymbol{y}=\mathbf{5}-\mathbf{3}\boldsymbol{m} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{m}+\mathbf{5})\boldsymbol{y}=\mathbf{8}\end{cases}. \qquad (27)$$

ამ სისტემის ამოსახსნელად, გამოვთვალოთ სისტემის მთავარი და დამხმარე დეტერმინანტები:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m+3 & 4 \\ 2 & m+5 \end{vmatrix} = m^2+8m+15-8 = m^2+8m+7 = (m+1)(m+7);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5-3m & 4 \\ 8 & m+5 \end{vmatrix} = -3m^2-10m+25-32 = -3m^2-10m-7;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} m+3 & 5-3m \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8m+24-10+6m = 14m+14 = 14(m+1).$$

ა) თუ $\boldsymbol{m} \neq -\mathbf{1} \wedge \boldsymbol{m} \neq -\mathbf{7}$, მაშინ, $\Delta \neq 0$ და სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი:

$$\begin{cases} x = \frac{-3m^2-10m-7}{(m+1)(m+7)} \\ y = \frac{14(m+1)}{(m+1)(m+7)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} = \frac{-\mathbf{3}\left(\boldsymbol{m}+\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\right)}{\boldsymbol{m}+\mathbf{7}} \\ \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{14}}{\boldsymbol{m}+\mathbf{7}} \end{cases};$$

ბ) თუ $\boldsymbol{m} = -\mathbf{1}$, მაშინ $\begin{cases}\Delta = 0 \\ \Delta_1 = 0, \\ \Delta_2 = 0\end{cases}$ რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში, **სისტემას აქვს ამონახსნების უსასრულო რაოდენობა**;

გ) თუ $\boldsymbol{m} = -\mathbf{7}$, მაშინ $\Delta = 0 \wedge \Delta_2 \neq 0$, რაც იმას ნიშნავს რომ ამ შემთხვევაში, სისტემას არა აქვს ამონახსნი, ანუ $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \in \emptyset$.

ამოხსენით პარამეტრის შემცველ განტოლებათა სისტემები:

1. $\begin{cases}(\boldsymbol{m}+\mathbf{5})\boldsymbol{x}+(\mathbf{2}\boldsymbol{m}+\mathbf{3})\boldsymbol{y}=\mathbf{7} \\ (\mathbf{3}\boldsymbol{m}+\mathbf{10})\boldsymbol{x}+(\mathbf{5}\boldsymbol{m}+\mathbf{6})\boldsymbol{y}=\mathbf{16}\end{cases};$

2. $\begin{cases}(\boldsymbol{m}+\mathbf{2})\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{m}\boldsymbol{y}=\mathbf{8} \\ \boldsymbol{m}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{y}=\mathbf{4}\end{cases};$

3. $\begin{cases} (\boldsymbol{m}+\mathbf{5})\boldsymbol{x}+\mathbf{8}\boldsymbol{y}=\mathbf{12} \\ -\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{m}-\mathbf{1})\boldsymbol{y}=\mathbf{3}\boldsymbol{m} \end{cases}$;

4. $\begin{cases} \boldsymbol{mx}+\boldsymbol{ny}=\mathbf{8} \\ \mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}\boldsymbol{y}=\mathbf{4} \end{cases}$;

5. $\begin{cases} \boldsymbol{mx}+(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\boldsymbol{y}=\mathbf{2} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{10}\boldsymbol{y}=-\mathbf{1} \end{cases}$

2.5. მოდულის შემცველი ელემენტარული წრფივი განტოლებები

განსაზღვრება. მოცემული არაუარყოფითი რიცხვის **მოდული** თვით ამ რიცხვს ეწოდება, ხოლო უარყოფითი ნამდვილი რიცხვის **მოდული,** მის მოპირდაპირე დადებით რიცხვს ეწოდება ანუ

$$|x|=\begin{cases} x \ if \ x\geq 0 \\ -x \ \ if \ x<0 \end{cases}. \tag{28}$$

მაშასადამე, $|29|=29$; $|-11|=-(-11)=11$. როგორც ვხედავთ, განსაზღვრის თანახმად, ნამდვილი რიცხვის მოდული, ყოველთვის არაუარყოფითი რიცხვია.

ნამდვილი რიცხვის მოდული, გეომეტრიულად აღნიშნავს მანძილს, ამ რიცხვის გამომსახველი წერტილიდან რიცხვითი ღერძის სათავემდე.

განვიხილოთ უმარტივესი წრფივი, მოდულის შემცველი განტოლება:

$$|\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}|=\mathbf{5}. \tag{29}$$

ამოხსნა:

ცხადია, რომ $|-5|=|5|=5$, მაშასადამე, მოდულის შიგნით მდგარი გამოსახულება:

$$(\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}=\mathbf{5})\vee(\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}=-\mathbf{5})\Leftrightarrow(\boldsymbol{x}=\mathbf{1})\vee(\boldsymbol{x}=-\mathbf{4})\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{1}\\ \mathbf{x}=-\mathbf{4}\end{matrix}\right..$$

ამოხსენით მოდულის შემცველი განტოლებები:

1. $|\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}|=\mathbf{3}$;

2. $|\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}|=-\mathbf{5}$;

3. $|\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{3}|=\mathbf{8}$;

4. $|\mathbf{4.5}\boldsymbol{x}+\mathbf{7.5}|=\mathbf{3.5}$;
5. $|\mathbf{4.2}\boldsymbol{x}-\mathbf{1.6}|=\mathbf{11.7}$.

2.5.1. მოდულის შემცველი უმარტივესი წრფივი უტოლობები

განვიხილოთ მოდულის შემცველი, უმარტივესი უტოლობები:

ა) $|\mathbf{2x-3}| \le \mathbf{5} \Leftrightarrow -5 \le 2x-3 \le 5 \Leftrightarrow -5+3 \le 2x \le 5+3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2 \le 2x \le 8 \Leftrightarrow \mathbf{-1 \le x \le 4} \Leftrightarrow (\boldsymbol{x} \in [\mathbf{-1}; \mathbf{4}])$;

ბ) $|\mathbf{3x+5}| \ge \mathbf{11} \Leftrightarrow (\mathbf{3x+5 \ge 11}) \vee (\mathbf{3x+5 \le -11}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\mathbf{3x \ge 11-5}) \vee (\mathbf{3x \le -11-5}) \Leftrightarrow (x \ge 2) \vee \left(\boldsymbol{x} \le -\mathbf{5}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{x} \ge \mathbf{2} \\ \mathbf{x} \le -\mathbf{5}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \end{array}\right.$

ე.ი. $\boldsymbol{x} \in \left(-\infty; -\mathbf{5}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right] \cup [\mathbf{2}; +\infty)$.

ამოხსენით მოდულის შემცველი უტოლობები:

1. $|\mathbf{2x-3}| \le \mathbf{8}$;

2. $|\mathbf{3x-2}| \ge \mathbf{-4}$;

3. $|\mathbf{2x+3}| \le \mathbf{-5}$;

4. $|\mathbf{7.2x-3.4}| \le \mathbf{5.6}$;

5. $|\mathbf{7.3-2x}| \ge \mathbf{5.4}$.

III თავი. ნატურალური და მთელი რიცხვები

3.1. შესავალი

რიცხვთა თეორიას დიდი ისტორია აქვს. სწავლება რიცხვების შესახებ ჩაისახა ჯერ კიდევ ბაბილონში. დიდი წვლილი შეიტანეს რიცხვთა ელემენტარული თეორიის განვითარებაში ეგვიპტელებმა „ევკლიდეს სკოლა“ ალექსანდრიის ბიბლიოთეკაში, ასევე, ძველმა ბერძნებმა: ერატოსფენმა, პითაგორელებმა, დიოფანტემ წიგნით „არითმეტიკა“, ევკლიდეს მოსწავლემ არქიმედმა და ა.შ.

შუა საუკუნეებში კი, ჟოზეფ ლაგრანჟმა, პიერ ფერმამ, რენე დეკარტმა, ლეონარდ ეილერმა, ლეჟან დირიხლემ, კარლ ფრიდრიხ გაუსმა.

რიცხვთა თეორიის პირველი სისტემატური კურსი, გამოსცა ა.ლეჟანდრმა 1798 წელს, სადაც გადმოცემული იყო ეილერის, ლაგრანჟის და ლეჟანდრის შედეგები.

3.2. გაყოფადობის თეორია

განსაზღვრება: თვლის პროცესში წარმოშობილ რიცხვებს, **ნატურალური რიცხვები** ეწოდება.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება $\mathbb{N}$ ასოთი და

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$.

თეორემა: ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა.

დამტკიცება: მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო ანუ ვთქვათ არსებობს რაღაც სასრული, უდიდესი ნატურალური რიცხვი $n \in \mathbb{N}$. მაშინ, $n + 1 > n$. რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

მაშასადამე, **ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა.**

განსაზღვრება: ვიტყვით, რომ $a \vdots b$ ანუ a იყოფა b - ზე, თუ არსებობს ისეთი მთელი რიცხვი q, რომ $a = bq$.

მაგალითად: $20 \vdots 5$, რადგან არსებობს, ამ შემთხვევაში $q = 4$ რიცხვი ისეთი, რომ $20 = 5 \cdot 4$.

ზოგჯერ, გაყოფადობის სამი წერტილის ნაცვლად, იყენებენ ჩანაწერს $b|a$ და ამბობენ b ყოფს a - ს, რაც იგივეა რომ $a \vdots b$.

განსაზღვრება: ვიტყვით, რომ a არის b - ს ჯერადი, თუ a უნაშთოდ იყოფა b - ზე.

b ნატურალური რიცხვის ჯერადთა სიმრავლეს აღვნიშნავთ A_b სიმბოლოთი ანუ მაგალითად A_{29} აღნიშნავს 29 - ის ჯერადთა სიმრავლეს

$A_{29} = \{29; 58; 87; \dots\}$. საზოგადოდ, $A_b = \{b \cdot n\}_{n=1}^{\infty}$.

P.S. ცხადია, რომ თუ a არის b - ს ჯერადი, მაშინ $a \vdots b$ ანუ $b|a$.

მაგალითად: $20 \vdots 5$, მაშასადამე, 20 არის 5 - ის ჯერადი; სხვანაირად რომ ვთქვათ $20 \in \{5 \cdot k\}_{k=1}^{\infty}$.

თეორემა: თუ $a > b > 0$ და a არ იყოფა b - ზე უნაშთოდ, მაშინ ყოველთვის არსებობს ისეთი ორი ნატურალური რიცხვი q და r, სადაც $0 < r < b$, რომ $a = bq + r$. ამ შემთხვევაში r რიცხვს **ნაშთი** ეწოდება, ხოლო q - ს - **არასრული განაყოფი.**

დამტკიცება: მართლაც, განვიხილოთ b რიცხვის ყველა ჯერადთა სიმრავლე, მაშინ ცხადია, რომ a მოთავსებული იქნება b რიცხვის რომელიღაცა მომდვნო ჯერადთა შორის ანუ $qb < a < (q+1)b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < a - bq < b$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $a - bq = r \Leftrightarrow a = bq + r$. **რ.დ.გ.**

მაგალითად: 20 არ იყოფა უნაშთოდ 3 - ზე, მაგრამ $20 = 3 \cdot 6 + 2$. ამ შემთხვევაში, $a = 20;\ b = 3;\ q = 6;\ r = 2$.

P.S. მოცემული ნატურალური რიცხვის ჯერადების რაოდენობა უსასრულოა, ხოლო გამყოფების რიცხვი - სასრული.

გაყოფადობის თვისებიდან გამომდინარე, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე იყოფა ორ ნაწილად: **ა) მარტივი რიცხვები; ბ) შედგენილი რიცხვები.**

განსაზღვრება: ისეთ ნატურალურ რიცხვებს, რომლებსაც **მხოლოდ ორი გამყოფი აქვს - მარტივი რიცხვები** ეწოდებათ, ხოლო თუ, ორზე მეტი გამყოფი აქვთ - **შედგენილს უწოდებენ.**

ამ განსაზღვრებაში მნიშვნელოვანია სიტყვა „მხოლოდ", რადგან ერთზე და საკუთარ თავზე, ყველა რიცხვი იყოფა.

განსაზღვრებიდან გამომდინარე, მარტივი რიცხვების სიმრავლეა:

$P = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; \ldots\}$.

P.S. რიცხვი 1 არც მარტივია და არც შედგენილი. დანარჩენ ნატურალურ რიცხვებს, რომლებიც არაა მარტივი, შედგენილი რიცხვები ეწოდებათ.

განსაზღვრება: იმ რიცხვებს, რომლებზედაც მოცემული ორი რიცხვი უნაშთოდ იყოფა, **საერთო გამყოფები** ეწოდებათ.

მაგალითად: ვიპოვოთ 20 - ის და 12 - ის საერთო გამყოფების სიმრავლე.

ამოხსნა: 20 - ის გამყოფების სიმრავლეა: $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 10; 20\}$;

12 - ის გამყოფების სიმრავლეა: $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$; განსაზღვრებიდან გამომდინარე, **საერთო გამყოფების სიმრავლე** იქნება:

$A \cap B == \{1; 2; 3; 4\}$.

P.S. ორი რიცხვის საერთო გამყოფების სიმრავლე, წარმოადგენს ამ რიცხვების გამყოფთა სიმრავლეების თანაკვეთას.

ანალოგიურად, ვპოულობთ ორი რიცხვის საერთო ჯერადების სიმრავლესაც.

მაგალითად: ვიპოვოთ 4 და 5 რიცხვების საერთო ჯერადების სიმრავლე.

ამოხსნა: 4 - ის ჯერადთა სიმრავლეა:

$A_4 = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; . \ . \ .\}$;

5 - ის ჯერადთა სიმრავლეა:

$A_5 = \{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; . \ . \ .\}$;

მაშინ, **საერთო ჯერადთა სიმრავლე** იქნება შემდეგი თანაკვეთა:

$A_4 \cap A_5 = \{20; 40; . \ . \ .\}$.

P.S. ორი რიცხვის **საერთო ჯერადთა სიმრავლე,** წარმოადგენს ამ რიცხვის ჯერადთა სიმრავლეების თანაკვეთას.

განსაზღვრება: ორ ნატურალურ რიცხვს ეწოდება **თანამარტივი,** თუ, მათი საერთო გამყოფების სიმრავლე შეიცავს მხოლოდ ერთ ელემენტს - ერთს.

მაგალითად: 3 - ის და 4 - ის საერთო გამყოფების სიმრავლე იქნება:

$A \cap B = \{1; 3\} \cap \{1; 2; 4\} = \{1\}$.

ასეთ შემთხვევაში, ჩავწერთ რომ: $(3; 4) = 1$ ანუ 3 და 4 **თანამარტივი** რიცხვებია.

ცხადია, რომ ორი **თანამარტივი** ნატურალური რიცხვის საერთო გამყოფთა შორის **უდიდესიც, ერთი იქნება,** რადგან ის ერთადერთი საერთო ელემენტია.

განსაზღვრება: ორი a და b რიცხვის **უდიდესი საერთო გამყოფი** $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$ ეწოდება, მათ საერთო გამყოფებს შორის უდიდესს; ხოლო **უმცირესი საერთო ჯერადი** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ ეწოდება მათ საერთო ჯერადებს შორის უმცირესს.

თეორემა: თუ, $a \vdots b$, მაშინ მათი უდიდესი საერთო გამყოფი $d = (a; b) = b$.

დამტკიცება: რადგან $a \vdots b \Leftrightarrow a = bm$, ცხადია რომ b - ს ყველა გამყოფი ყოფს a - საც და მათ შორის უდიდესი კი არის b. **რ.დ.გ.**

თეორემა: თუ a და b რიცხვები თანამარტივია ანუ $(a; b) = 1$, მაშინ ამ რიცხვების $[a; b]$ უმცირესი საერთო ჯერადი, მათი ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება: როგორც ვიცით, $[a; b] = \frac{a \cdot b}{(a;b)} \Longrightarrow [a; b] = a \cdot b$. **რ.დ.გ.**

3.2.1. ნატურალურ რიცხვთა გაყოფადობის თვისებები და ნიშნები

თუ $\boldsymbol{a}$ არის რაიმე ორი რიცხვის ნამრავლი $\boldsymbol{a = bm}$, მაშინ ამბობენ, რომ $\boldsymbol{a}$ იყოფა $\boldsymbol{b}$ - ზე ან სხვანაირად, $\boldsymbol{a}$ არის $\boldsymbol{b}$ - ს ჯერადი ან $\boldsymbol{b}$ ყოფს $\boldsymbol{a}$ - ს, რაც ერთიდაიგივეა და სხვადასხვა ტექსტში ამოცანებიდან გამომდინარე, სხვადასხვანაირად გამოიყენება.

ჯერადი რიცხვის განმარტებიდან გამომდინარეობს, გაყოფადო-ბის რიგი თვისებებისა, რომლებიც შემდგომში ხშირად დაგვჭირდება. ამიტომ, განვიხილოთ ეს თვისებები:

1. თუ $\boldsymbol{a}$ არის $\boldsymbol{b}$ - ს ჯერადი და $\boldsymbol{b}$ არის $\boldsymbol{c}$- ს ჯერადი, მაშინ $\boldsymbol{a}$ არის $\boldsymbol{c}$ - ს ჯერადი.

დამტკიცება: მართლაც, . თუ a არის b - ს ჯერადი, მაშინ $a = bm$; b არის c- ს ჯერადი, მაშინ $b = cn$; მაშასადამე, $a = bm = cnm$,

ე.ი. $a \vdots c$. **რ.დ.გ.**

2. თუ $\boldsymbol{a}$ და $\boldsymbol{b}$ რიცხვები არიან $\boldsymbol{c}$ - ს ჯერადი, მაშინ ამ რიცხვების ჯამიც და სხვაობაც იქნება $\boldsymbol{c}$ - ს ჯერადი.

დამტკიცება: მართლაც, თუ $a = cm$ და $b = cn$, მაშინ

$a \pm b = cm \pm cn = c(m \pm n) \Leftrightarrow (a \pm b) \vdots c$. **რ.დ.გ.**

3. თუ $\boldsymbol{b|a}$, მაშინ ნებისმიერი ნატურალური $\boldsymbol{k}$ რიცხვისათვის $\boldsymbol{kb|ka}$.

დამტკიცება: მართლაც, $b|a \Leftrightarrow a = bq \Leftrightarrow ak = bkq \Leftrightarrow kb|ka$. **რ.დ.გ.**

4. თუ $\boldsymbol{b|a}$ მაშინ, ნებისმიერი ნატურალური $\boldsymbol{c}$ რიცხვისათვის $\boldsymbol{b|ac}$.

დამტკიცება: $b|a \Leftrightarrow a = bq \Leftrightarrow ac = bqc \Leftrightarrow b|ac$. **რ.დ.გ.**

5. თუ $\boldsymbol{b|a}$, მაშინ ნებისმიერი $\boldsymbol{n}$ რიცხვისათვის $\boldsymbol{b^2|a^2}$.

ახლა, განვიხილოთ გაყოფადობის ნიშნები:

თეორემა: 3-ზე ან 9 - ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომელთა ციფრთა ჯამიც იყოფა შესაბამისად 3 - ზე ან 9 - ზე.

საილუსტრაციოდ, განვიხილოთ:

ა) **ორნიშნა რიცხვის შემთხვევა** ანუ ვთქვათ, გვაქვს ორნიშნა რიცხვი:
$\overline{a_1 a_2} = 10a_1 + a_2 = (a_1 + a_2) + 9a_1$;

ბ) სამნიშნა რიცხვის შემთხვევაში, გვექნება შემდეგი წარმოდგენა:
$\overline{a_1 a_2 a_3} = 100a_1 + 10a_2 + a_3 = (a_1 + a_2 + a_3) + 99a_1 + 9a_2 =$
$= (a_1 + a_2 + a_3) + 9 \cdot (11a_1 + a_2)$.

ახლა, განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევის დამტკიცება:

დამტკიცება: განვიხილოთ $n -$ ნიშნა რიცხვი:
$\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots a_{n-1} \cdot 10 + a_n$. გადავწეროთ ეს რიცხვი შემდეგნაირად:

$\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n + 9 \cdot \overline{b_1 b_2 \ldots b_{n-1}}$; $(*)$

სადაც $\overline{b_1 b_2 \ldots b_{n-1}} = \underbrace{11 \ldots 1}_{n-1} \cdot a_1 + \underbrace{11 \ldots 1}_{n-2} \cdot a_2 + \ldots + a_{n-1}$.

ვარსკვლავიანი ფორმულიდან **გამომდინარე, თუ, რიცხვის ციფრთა ჯამი იყოფა 3 -ზე ან 9 - ზე, მაშინ ეს რიცხვიც, შესაბამისად იყოფა 3 -ზე, ან 9 - ზე. რ.დ.გ.**

შედეგი: $\overline{a_1a_2\dots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots a_{n-1} \cdot 10 + a_n$ წარმოდგენიდან, ცხადია რომ თუ, $a_n \vdots 2$, მაშინ მოცემული რიცხვიც იყოფა ორზე ანუ **2 - ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომლებიც ბოლოვდება ლუწი ციფრით. რ.დ.გ.**

თეორემა: 4-ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომლის ბოლო ორი ციფრით შედგენილი რიცხვიც იყოფა 4 - ზე.

დამტკიცება: განვიხილოთ $n -$ ნიშნა რიცხვი:
$\overline{a_1a_2\dots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_{n-2} \cdot 100 + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$.
როგორც ვხედავთ, ბოლო ორი ციფრით შედგენილი რიცხვია:
$a_{n-1} \cdot 10 + a_n$. მის გარეშე, წინ მდგარი შესაკრები 100 - ის ჯერადია ანუ უნაშთოდ იყოფა 4 - ზე, რაც იმას ნიშნავს, რომ თუ, ბოლო ორი ციფრით შედგენილი რიცხვიც 4 - ის ჯერადია, მაშინ $\overline{a_1a_2\dots a_n}$ რიცხვიც გაიყოფა 4 - ზე. **რ.დ.გ.**

თეორემა: 5 - ზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვები, რომლებიც ბოლოვდება ნულით ან ხუთით.

დამტკიცება: განვიხილოთ $n -$ ნიშნა რიცხვი:
$\overline{a_1a_2\dots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots a_{n-1} \cdot 10 + a_n$.

ამ ჩანაწერიდან ცხადია, რომ მარჯვენა ნაწილის ყველა შესაკრები ბოლოს გარდა, წარმოადგენს ათის ხარისხება და მაშასადამე იყოფა 5 - ზეც. თუ ბოლო ციფრი იქნება 5, მაშინ თვით $n -$ ნიშნა რიცხვიც გაიყოფა 5 - ზე, რადგან ხუთის ჯერადი რიცხვების ჯამიც ხუთის ჯერადი იქნება. თუ, ბოლო ციფრია ნული, მაშინ ჩვენი რიცხვი ათის ჯერადი ყოფილა და ავტომატურად გაიყოფა 5-ზეც. **რ.დ.გ.**

შედეგი: 1) 6 - ზე იყოფა ის ლუწი რიცხვები, რომლებიც იყოფა 3 - ზე ანუ თუ, რიცხვი ბოლოვდება ლუწი ციფრით და მისი ციფრთა ჯამი იყოფა 3 - ზე, მაშინ ეს რიცხვი იყოფა 6 - ზე.

შედეგი 2) $\overline{a_1a_2\dots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_{n-3} \cdot 1000 + a_{n-2} \cdot 100 + a_{n-1} \cdot 10 + a_n = \overline{a_1a_2\dots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_{n-3} \cdot 1000 + \overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$
ამ წარმოდგენიდან გამომდინარე: **8 – ზე იყოფა ის რიცხვები, რომელთა ბოლო სამი ციფრისაგან შემდგარი რიცხვიც იყოფა 8 - ზე.**

თეორემა: ხუთით დაბოლოებული ორნიშნა რიცხვის კვადრატის საპოვნელად, საკმარისია მისი ათეულების ციფრი გავამრავლოთ მომდევნო რიცხვზე და მივუწეროთ 25.

დამტკიცება: ჩავწეროთ ორნიშნა რიცხვი ზოგადი სახით:

$\overline{a_1a_2} = 10a_1 + a_2$ და გამოვიანგარიშოთ მისი კვადრატი:

$(10a_1 + a_2)^2 = 100a_1^2 + 20a_1a_2 + a_2^2$. თუ, ორნიშნა რიცხვი ბოლოვდება ციფრით 5, მაშინ მივიღებთ რომ:

$(10a_1 + a_2)^2 = 100a_1^2 + 20a_1a_2 + a_2^2 = 100a_1^2 + 100a_1 + 25$ ანუ

$(10a_1 + a_2)^2 = 100a_1 \cdot (a_1 + 1) + 25$. ამ ჩანაწერიდან ვხედავთ, რომ ორნიშნა რიცხვის კვადრატში ასეულების ციფრი უდრის ათეულების ციფრის ნამრავლს მის მომდევნო რიცხვზე, ბოლო ორი ციფრი კი იქნება 25. **რ.დ.გ.**

3.2.2. არითმეტიკის ძირითადი თეორემა. ეილერის ფუნქცია

რიცხვთა თეორიაში დიდი მნიშვნელობა აქვს არითმეტიკის ძირითად თეორემას, რომელიც საშუალებას იძლევა ნებისმიერი ნატურალური a რიცხვი წარმოვადგინოთ საკუთარი მარტივი გამყოფების ხარისხების ნამრავლის სახით:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}.$$

თეორემა. ერთზე მეტი ყოველი ნატურალური რიცხვი ერთადერთი სახით (თანამამრავლთა რიგის სიზუსტით) იშლება მარტივ რიცხვთა ნამრავლად.

დამტკიცება: ვთქვათ, p_1 არის a რიცხვის უმცირესი მარტივი გამყოფი, მაშინ $a = p_1 \cdot a_1$; ასევე, a_1 რიცხვის უმცირესი მარტივი გამყოფს აღვნიშნავთ p_2-ით, მაშინ $a_1 = p_2 \cdot a_2$ . . .; ცხადია, რომ გვაქვს ნატურალური რიცხვების კლებადი $a_1; a_2; \ldots; a_n$მიმდევრობა, რომელიც ქვემოდან შემოსაზღვრულია $a_n = 1$-ით . თუ, ამ ტოლობებს გადავამრავლებთ, მაშინ მივიღებთ რომ

$$a \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} = a_1p_1 \cdot a_2p_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}p_{n-1} \cdot 1 \cdot p_n$$

თუ, ამ ტოლობას შევკვეცავთ $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$ ნამრავლზე, მივიღებთ a რიცხვის შემდეგ წარმოდგენას:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}.$$

ამ წარმოდგენაში გათვალისწინებულია ის ფაქტი, რომ ზოგიერთი მარტივი მამრავლი შეიძლება განმეორდეს ფორმულაში, რაც მოგვცემს განმეორებათა რიცხვის შესაბამის α_i ხარისხს.

ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ მაგალითი:

დაშალეთ მარტივ მამრავლებად: 120 და 150. იპოვეთ მათი უდიდესი საერთო გამყოფი და უმცირესი საერთო ჯერადი.

ამოხსნა: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$; $150 = 2 \cdot 5^3$; $(120; 150) = 2 \cdot 5 = 10$;

$[120; 150] = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$.

ცხადია, რომ დამტკიცებული ფორმულიდან გამომდინარე, $\boldsymbol{a}$ **ნატურალური რიცხვის გამყოფთა რაოდენობა** გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1).$$

დამტკიცება: მართლაც, არითმეტიკის ძირითადი თეორემიდან გამომდინარე, a-ს გამყოფებია: $1; p_1; p_1^2; \ldots; p_1^{\alpha_1}$ ასევე, $1; p_2; p_2^2; \ldots; p_2^{\alpha_2}$ . . . $1; p_n; p_n^2; \ldots; p_n^{\alpha_n}$; საიდანაც გამომდინარეობს ფორმულა:

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1).$$

ანალოგიურად, ამ გამყოფთა შესაბამისი ჯამების განხილვიდან გამომდინარე, ადვილად მივიღებთ გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ანუ გამყოფთა ჯამისათვის შესაბამის ფორმულას.

ყველა გამყოფთა ჯამი გამოითვლება ფორმულით:

$$S(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}.$$

მაგალითად. თუ $a = 720$, მაშინ რადგან $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, მივიღებთ რომ ფორმულიდან გამომდინარე, გამყოფების რაოდენობა იქნება:

$\tau(a) = (4+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 30;$

ხოლო გამყოფთა ჯამი იქნება:

$S(720) = \frac{2^{4+1}-1}{2-1} \cdot \frac{3^{2+1}-1}{3-1} \cdot \frac{5^{1+1}-1}{5-1} = 2418.$

ეილერის ფუნქცია. ლეონარდ ეილერმა შეისწავლა შემდეგი ამოცანა:

განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა სასრული მიმდევრობა:

$$\mathbf{1}; \mathbf{2}; \mathbf{3}; \ldots \boldsymbol{m} \ldots$$

და ვიპოვოთ ამ მიმდევრობაში, $\boldsymbol{m}$ რიცხვთან თანამარტივი რიცხვების $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{m})$ რაოდენობა.

ამოხსნა: უბრალო გამოთვლით ვპოულობთ, რომ $\boldsymbol{\varphi(1) = 1}$; $\boldsymbol{\varphi(2) = 1}$; $\boldsymbol{\varphi(3) = 2}$; $\boldsymbol{\varphi(4) = 2}$; $\boldsymbol{\varphi(5) = 4}$. **ახლა ვიპოვოთ ზოგადი ფორმულა ეილერის $\boldsymbol{\varphi(m)}$ ფუნქციისათვის.** ვთქვათ, $a; b; c; \ldots; k$ არიან $\boldsymbol{m}$ რიცხვის მარტივი გამყოფები. ცხადია, რომ ის რიცხვები რომლებიც იყოფა a რიცხვზე, ვერ იქნება თანამარტივი $\boldsymbol{m}$ რიცხვთან, მაშასადამე, უნდა გამოვრიცხოთ ამ რიცხვების $\boldsymbol{\frac{m}{a}}$ რაოდენობა, მაშინ განსახილველი დაგვრჩება $m - \frac{m}{a} = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)$ რიცხვი. ამ რიცხვებიდან უნდა გამოვრიცხოთ ის რიცხვებიც, რომლებიც იყოფა $\boldsymbol{b}$ **-ზე.** მაშინ დაგვრჩება $m\left(1 - \frac{1}{a}\right) - \frac{m}{b}\left(1 - \frac{1}{a}\right) = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)$.

ანალოგიურად, თუ გამოვრიცხავთ $\boldsymbol{m}$ რიცხვის ყველა მარტივ გამყოფს, მივიღებთ ეილერის ზოგად ფორმულას:

$$\boldsymbol{\varphi(m)} = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

თუ, გავითვალისწინებთ არითმეტიკის ძირითად თეორემას: $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, მაშინ **ეილერის ფუნქცია** მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\boldsymbol{\varphi(m)} = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{p_n}\right).$$

განვიხილოთ მაგალითი: გამოვთვალოთ რამდენია $\mathbf{100}$ - თან თანამარტივი რიცხვების რაოდენობა: $\mathbf{1; 2; 3; \ldots; 100}$ რიცხვებს შორის.

ამოხსნა: $100 = 2^2 \cdot 5^2$, მაშინ **ეილერის ფორმულიდან** გამომდინარე, მივიღებთ რომ $\varphi(100) = 100\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 40$.

3.2.3. ევკლიდეს ალგორითმი ორი ნატურალური რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის საპოვნელად

განსაზღვრება: იმ მოქმედებათა თანმიმდევრობას, რომელიც საჭიროა დასახული მიზნის მისაღწევად, **ალგორითმი** ეწოდება.

ევკლიდეს თეორემა: თუ $a = bq + r$, მაშინ a და b რიცხვების საერთო გამყოფების სიმრავლე, ემთხვევა b და r რიცხვების საერთო გამყოფების სიმრავლეს, კერძოდ $(a; b) = (b; r)$.

დამტკიცება: მართლაც, თუ a და b რიცხვები იყოფიან რაიმე რიცხვზე, მაშინ bq - ც გაიყოფა ამ რიცხვზე და $a - bq$ - ც გაიყოფა ამ რიცხვზე ანუ r - ც გაიყოფა, რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს. **რ.დ.გ.**

ამ თეორემას ემყარება, **ორი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის პოვნის ევკლიდეს ალგორითმი, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში:** ვთქვათ, გვაქვს ორი a და b რიცხვები, მაშინ ევკლიდეს თეორემის თანახმად, ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$a = bq_0 + r_0; \quad 0 < r_0 < b,$$

$$b = r_0 q_1 + r_1; \quad 0 < r_1 < r_0,$$

$$r_0 = r_1 q_2 + r_2; \quad 0 < r_2 < r_3,$$

$$. \quad . \quad .$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n; \quad 0 < r_n < r_{n-1},$$

$$r_{n-1} = r_n q_{n+1}.$$

$r_0; r_1; r_{2;\ldots}$ ნატურალური რიცხვები ადგენენ კლებად მიმდევრობას, მაგრამ ყოველი ასეთი მონოტონური და ქვემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა სასრულია ანუ ევკლიდეს ალგორითმი, რომელიღაც ნაბიჯზე

აუცილებლად დასრულდება და ეს მოხდება მაშინ, როცა გაყოფა იქნება უნაშთო ანუ როცა $r_{n+1} = 0$. ამრიგად, r_n არის ბოლო ნულისაგან განსხვავებული ნაშთი.

ევკლიდეს თეორემიდან გამომდინარე, ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$(a; b) = (b; r_0) = (r_0; r_1) = \ldots = (r_{n-1}; r_n) = r_n.$$

ამრიგად, ორი $\boldsymbol{a}$ და $\boldsymbol{b}$ რიცხვების უდიდესი საერთო გამყოფი უდრის მათთვის აგებული ევკლიდეს ალგორითმის უკანასკნელ ნულისაგან განსხვავებულ ნაშთს ანუ $\boldsymbol{d = (a; b) = r_n}$.

მაგალითად: ვიპოვოთ $(664; 480)$. ამ შემთხვევაში,

$a = 664; b = 480$. გამოვიყენოთ ევკლიდეს ალგორითმი:

$664 = 480 \cdot 1 + 184;$

$480 = 184 \cdot 2 + 112;$

$184 = 112 \cdot 1 + 72;$

$112 = 72 \cdot 1 + 40;$

$72 = 40 \cdot 1 + 32;$

$40 = 32 \cdot 1 + \mathbf{8};$

$32 = 8 \cdot 4$. ე.ი. $d = (664; 480) = 8$.

3.2.4. ნაშთთა კლასები და სასრული არითმეტიკა

რიცხვთა თეორიაში, ხშირად იყენებენ მოცემულ რიცხვზე გაყოფისას მიღებული ნაშთების თვისებებს. მაგალითად, თუ, ნატურალურ რიცხვს ვყოფთ 2 - ზე, მაშინ ნაშთი შეიძლება იყოს 0 ან 1 ანუ ნატურალურ რიცხვთა $\mathbb{N}$ სიმრავლე იყოფა ორ კლასად:

1. მთელი რიცხვები, რომლებიც იყოფა 2 - ზე (ლუწი) უნაშთოდ:

$a_k = 2k$; $\{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; \ldots\}$, ამ ფორმულაში $k \in \mathbb{N}$;

2. მთელი რიცხვები, რომლებიც არ იყოფა 2 - ზე (კენტი) და ნაშთში იძლევა 1 - ს:

$a_k = 2k - 1;\ \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; \dots\}$. ამ ფორმულაში $k \in \mathbb{N}$.

თუ, ვიხილავთ **მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ სიმრავლეს** ანუ ნატურალურ რიცხვებთან ერთად, ვიხილავთ **ნულს და ნატურალური რიცხვების მოპირდაპირე (უარყოფით) რიცხვებს,** მაშინ ამბობენ რომ მთელ რიცხვთა სიმრავლე გაყოფილია ნაშთთა ორ კლასად:

პირველი კლასის რიცხვები ორზე გაყოფისას ნაშთში იძლევიან ნულს: $\{\dots; -4; -2; 0; 2; 4; \dots\}$; $a_k = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$**;**

მეორე კლასის რიცხვები ნაშთში იძლევიან ერთს და ეს რიცხვებია: $\{\dots -5; -3; -1; 1; 3; 5 \dots\}$. $a_k = 2k - 1,\ k \in \mathbb{Z}$**.**

ერთ კლასში ხვდებიან ის რიცხვები, რომლებიც მოცემულ რიცხვზე გაყოფისას, ერთნაირ ნაშთს იძლევიან. ამ შემთხვევაში, ვიტყვით რომ გვაქვს **ნაშთთა კლასები მოდულით 2**. ჩაწერენ შემდეგნაირად: $\boldsymbol{mod\ 2}$**.**

ნაშთთა კლასების შეკრება მოდულით 2 მოიცემა შემდეგი ცხრილით:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

როგორც ვხედავთ, $\boldsymbol{mod\ 2}$ ანუ ორის მოდულით შეკრებისას: $1 \oplus 1 = 0$.

თუ, თითოეული კლასიდან ავიღებთ თითო რიცხვს, მაშინ მივიღებთ **ნაშთთა სრულ სისტემას** $(\boldsymbol{mod\ 2})$: **0;1**.

თუ, a ნატურალური რიცხვის n - ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთთა კლასებიდან თითო ელემენტს ავიღებთ, მაშინ მივიღებთ ნაშთთა **სრულ სისტემას** მოდულით n:

$$0;1;2; \dots; n.$$

განვიხილოთ **ნაშთთა კლასები მოდულით 7. ცხადია, რომ 7 - ზე გაყოფისას ნაშთი შეიძლება იყოს ერთ-ერთი შემდეგი რიცხვებიდან:**

0; **1**; **2**; **3**; **4**; **5**; **6** ანუ ესაა ნაშთთა სრული სისტემა (mod 7).

ნაშთთა კლასების შეკრების ცხრილს მოდულით 7 აქვს შემდეგი სახე:

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0

2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

კლასებზე ოპერაციას სასრული მოდულით, **სასრული არითმეტიკა** შეისწავლის.

ასეთ **სასრულ არითმეტიკასთან** გვაქვს საქმე, როცა განვიხილავთ ამოცანებს **კვირის დღეებთან დაკავშირებით,** რადგან **კვირაში 7 დღეა** და შემდეგ, ისინი იწყებენ ციკლურად გამეორებას.

როცა საქმე გვაქვს **მუსიკალურ ნოტებთან,** ჩვენ გვჭირდება **სასრული არითმეტიკა მოდულით 12,** რადგან დიეზების გათვალისწინებით სულ 12 ნოტია და შემდეგ ხდება ციკლური გამეორება. ასევე, გვაქვს სულ 12 მაჟორული($4\oplus 3$) და 12 მინორული ($3 \oplus 4$) აკორდი.

P.S. ნაშთთა კლასები $\oplus$ ოპერაციის მიმართ, ადგენენ სასრულ კომუტაციურ ჯგუფს, რომელსაც **აბელის ჯგუფს** უწოდებენ. ასეთი ჯგუფების თეორიას ჩვენ დაწვრილებით განვიხილავთ **აბსტრაქტული ალგებრის კურსში, რომელიც ჯგუფთა თეორიას მიეძღვნება.**

3.3. კითხვები და ამოცანები

1. მოცემული რიცხვის 225-ზე გაყოფისას, ნაშთში დარჩა 150. გაიყოფა თუ არა, მოცემული რიცხვი უნაშთოდ 75-ზე ?

ამოხსნა: საძიებელი რიცხვი თუ, 225-ზე გაყოფისას, ნაშთში იძლევა 150-ს, მაშინ ის შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$a = 225 \cdot k + 150$, სადაც k განაყოფია, მაგრამ $225 \vdots 75$ და $150 \vdots 75$, აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ $\boldsymbol{a \vdots 75}$.

2. დაამტკიცეთ, რომ თუ, ორი ნატურალური რიცხვის ჯამი კენტია, მაშინ მათი ნამრავლი ლუწია.

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო ანუ ვთქვათ ჯამიც კენტია და ნამრავლიც, მაშინ ორივე რიცხვი კენტი ყოფილა და კენტების ჯამი კი კენტი არ იქნება. ამრიგად, მივედით წინააღმდეგობამდე, რაც ნიშნავს, რომ დაშვება არაა ჭეშმარიტი. **რ.დ.გ.**

3. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერად არჩეულ 11 ნატურალურ რიცხვს შორის მოიძებნება ისეთი ორი რიცხვი, რომელთა სხვაობაც ათის ჯერადია.

დამტკიცება: რადგან გვაქვს სულ 10 ერთმანეთისაგან განსხვავებული ციფრი, ნებისმიერად არჩეულ 11 რიცხვს შორის, ყოველთვის მოიძებნება ორი მაინც ისეთი, რომლებიც ბოლოვდება ერთნაირი ციფრებით. მაშინ, მათ შორის სხვაობა, დაბოლოვდება ნულით ანუ არის 10-ის ჯერადი. **რ.დ.გ.**

4. იპოვეთ x და y ციფრები, ხუთნიშნა $\overline{42x4y}$ რიცხვის ჩანაწერში, თუ, ვიცით რომ ეს რიცხვი იყოფა 72 - ზე.

ამოხსნა: რადგან რიცხვი უნაშთოდ იყოფა 72 - ზე, ის უნაშთოდ იყოფა 9 - ზე და 8 -ზე. მაშასადამე, იყოფა 4 - ზეც. მაშინ, ბოლო ორი ციფრით შედგენილი რიცხვი უნდა იყოფოდეს 4 - ზე ანუ ის შეიძლება იყოს: 40; 44; 48. ამასთან, თუ ცხრაზე იყოფა რიცხვი, მაშინ ციფრთა ჯამიც იყოფა ცხრაზე ანუ 4+2+4+$x+y$ = 10 + $x+y$ უნდა იყოფოდეს ცხრაზე. რადგან y - ის შესაძლო მნიშვნელობებია 0; 4; 8; მაშინ x შეიძლება იყოს: 8; 4; 0 ანუ მივიღებთ რიცხვებს: 42840; 42444; 42048. ავარჩიოთ, რომელი იყოფა 72 - ზე. მივიღებთ, რომ :

$$\mathbf{42840 = 72 \cdot 595;\ 42048 = 72 \cdot 584.}$$

5. ლუწი იქნება, თუ კენტი: ა) ორი ლუწი რიცხვის ჯამი ? ბ) ორი კენტი რიცხვის ჯამი ? გ) კენტი რაოდენობის ლუწი რიცხვის ჯამი ? დ) სამი კენტი რიცხვის ჯამი ? ე) კენტი რაოდენობის კენტი რიცხვების ჯამი ? ვ) ლუწი რაოდენობის კენტი რიცხვების ჯამი ?

ამოხსნა: ა) ლუწი რიცხვის ზოგადი ფორმულაა: $2k$, სადაც $k \in \mathbb{N}$. მაშასადამე, ორი ლუწი რიცხვის ჯამი იქნება ლუწი, მართლაც:

$$2k + 2n = 2(k+n) \vdots 2;$$

ბ) კენტი რიცხვის ზოგადი ფორმულაა: $2k-1$, სადაც $k \in \mathbb{N}$. მაშასადამე, ორი კენტი რიცხვის ჯამი იქნება ლუწი, მართლაც:

$$2k - 1 + 2n - 1 = 2k + 2n - 2 = 2(k + n - 1) \vdots 2;$$

გ) კენტი რაოდენობის ლუწი რიცხვის ჯამიც იქნება ლუწი, რადგან ნებისმიერი ორი ლუწი რიცხვის ჯამი ლუწია;

დ) სამი კენტი რიცხვის ჯამი იქნება კენტი, რადგან ორი კენტი რიცხვის ჯამი ლუწია, ხოლო ლუწი და კენტი რიცხვების ჯამი კი - კენტი;

ე) ანალოგიურად, კენტი რაოდენობის, კენტი რიცხვების ჯამი იქნება კენტი;

ვ) ლუწი რაოდენობის კენტი რიცხვების ჯამი იქნება ლუწი.

6. ლუწი იქნება, თუ კენტი: ა) ორი ლუწი რიცხვის ნამრავლი ?

ბ) ორი კენტი რიცხვის ნამრავლი ?

გ) კენტი და ლუწი რიცხვის ნამრავლი ?

ამოხსნა: ორი ლუწი რიცხვის ნამრავლი იქნება ლუწი, რადგან თუ რომელიმე რიცხვს გავამრავლებთ ლუწ რიცხვზე, ნამრავლიც ლუწი იქნება;

ბ) ორი კენტი რიცხვის ნამრავლი კენტია, რადგან თუ, თანამამრავლთაგან არცერთი არ იყოფა ორზე, არც ნამრავლი გაიყოფა 2-ზე;

გ) კენტი და ლუწი რიცხვის ნამრავლი ლუწია, რადგან თუ ერთერთი თანამამრავლი იყოფა 2-ზე, მაშინ ნამრავლიც გაიყოფა 2-ზე.

7. შეიძლება თუ, არა რომ სამი ნატურალური რიცხვის ჯამი იყოს ლუწი, ხოლო მათივე ნამრავლი კენტი ?

ამოხსნა: სამი ნატურალური რიცხვის ჯამი ლუწია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სამივე ლუწია ან ორი მათგანია კენტი და მესამე ლუწი. ორივე შემთხვევაში, ნამრავლი შეიცავს ლუწ თანამამრავლს და მაშასადამე ლუწია. ამრიგად, თუ სამი ნატურალური რიცხვის ჯამი ლუწია, ნამრავლი კენტი არ იქნება.

8. კაკლის 8 ხე იზრდება ერთ რიგში. ცნობილია, რომ ორ მეზობელ ხეზე მოსხმული კაკლების რაოდენობა განსხვავდება 1-ით. შეიძლება, თუ არა რომ კაკლების საერთო რაოდენობა იყოს 2007 ?

ამოხსნა: ვთქვათ, პირველ ხეზე მოსხმულია n რაოდენობის კაკალი, მაშინ მივიღებთ, რომ 8 ხეზე კაკლების საერთო რაოდენობა იქნება:

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + \ldots + (n + 7) = 8n + 28 = 2007.$$

მაშინ, $8n = 2007 - 32$ ანუ $8n = 1975$ ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილი არ იყოფა 8-ზე უნაშთოდ, რაც იმას ნიშნავს რომ კაკლების საერთო რაოდენობა არ შეიძლება იყოს 2007.

9. ჭადრაკის დაფაზე 8×8 დაექცათ საღებავი. შეიძლება, თუ არა რომ დასვრილი უჯრების რაოდენობა 17-ით ნაკლები იყოს სუფთა უჯრების რაოდენობაზე ?

ამოხსნა: საჭადრაკო დაფაზე, სულ გვექნება 64 უჯრა. თუ, დასვრილი უჯრების რაოდენობაა n, მაშინ სუფთა უჯრების რაოდენობა იქნებოდა $n + 17$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ადგილი უნდა ქონდეს განტოლებას:

$n + n + 17 = 64 \Leftrightarrow 2n = 64 - 17 \Leftrightarrow 2n = 47.$

განტოლების მარჯვენა მხარე არაა ლუწი, რაც იმას ნიშნავს, რომ დასვრილი უჯრების რაოდენობა, **არ შეიძლება 17-ით ნაკლები იყოს სუფთა უჯრების რაოდენობაზე.**

10. შეიძლება თუ არა, რომ 5×5 დაფა დაიფაროს 1×2 ზომის დომინოს ქვებით ?

ამოხსნა: 5×5 დაფას აქვს 25 უჯრა. 1×2 ზომის დომინოს ქვების ზომაა 2. რადგან 25 არ იყოფა უნაშთოდ 2-ზე, ასეთი დომინოს ქვებით დაფა **ვერ დაიფარება.**

11. ანამ თქვა, რომ იცის ოთხი ნატურალური რიცხვი, რომელთა ჯამიც და ნამრავლიც კენტი რიცხვებია. მართალია ანა, თუ არა ?

ამოხსნა: ოთხი ნატურალურ რიცხვის ნამრავლი თუ კენტია, ეს იმას ნიშნავს, რომ ოთხივე რიცხვი კენტია, მაგრამ მაშინ მათი ჯამი ლუწი იქნება. ამრიგად, ანა არაა მართალი.

12. დაფაზე 25×25 განლაგებულია შაშის 25 ქვა. ამასთან, მათი განლაგება სიმეტრიულია დიაგონალის მიმართ. დაამტკიცეთ, რომ ერთი შაში მაინც დევს დიაგონალზე.

ამოხსნა: რადგან შაშის ქვების რაოდენობა კენტია, დაფაზე განლაგება კი სიმეტრიულია დიაგონალის მიმართ, სიმეტრიულად განლაგებულ ქვათა რაოდენობა შეიძლება იყოს აუცილებლად ლუწი (დიაგონალის ერთ და მეორე მხარეს). რაც იმას ნიშნავს, რომ ერთი ქვა, აუცილებლად მოხვდება დიაგონალზე, რომ არ დაირღვეს სიმეტრიულობა. **რ.დ.გ.**

13. რომელი ხუთნიშნა რიცხვები არის უფრო ბევრი: რომლებიც ლუწი ციფრებით ჩაიწერება, თუ რომლებიც კენტი რიცხვებით ჩაიწერება (ციფრები არ მეორდებიან) ?

ამოხსნა: ათობით სისტემაში, ლუწი და კენტი ციფრების რაოდენობა ერთნაირია, მაგრამ ხუთნიშნა რიცხვი არ შეიძლება იწყებოდეს ლუწი 0-ით. აქედან გამომდინარე, კენტი ციფრებით ჩაწერილი ხუთნიშნა რიცხვების რაოდენობა იქნება მეტი.

14. რამდენი ისეთი ორნიშნა რიცხვი არსებობს, რომლებიც ჩაწერილია მხოლოდ: ა) ლუწი ციფრებით ? ბ) კენტი ციფრებით ? (ციფრები არ მეორდება).

ამოხსნა: ა) პირველ ადგილზე ნული არ შეიძლება რომ იყოს რიცხვში ანუ გვაქვს ოთხი რიცხვი: 2; 4; 6; 8. მეორე ადგილზე შეიძლება იყოს ნებისმიერი ლუწი ციფრი ანუ 0; 2; 4; 6; 8. რადგან ციფრები არ მეორდება სულ გვექნება $4 \cdot 4 = 16$ განსხვავებული ორნიშნა რიცხვი ჩაწერილი ლუწი ციფრებით; ბ) კენტი ციფრებია: 1; 3; 5; 7; 9 ნებისმიერი ამ ხუთი ციფრიდან, შიძლება იყოს პირველი ციფრი ორნიშნა რიცხვში, ხოლო მეორე ციფრი შეიძლება იყოს მხოლოდ პირველი ციფრისგან განსხვავებული რიცხვი. ასეთები იქნება სულ ოთხი. აქედან გამომდინარე, სულ გვექნება $5 \cdot 4 = \mathbf{20}$ **ორნიშნა რიცხვი ჩაწერილი კენტი ციფრებით.**

15. იპოვეთ ორნიშნა რიცხვი, რომლის ციფრთა ჯამიც ტოლია მისი ციფრების ნამრავლისა.

ამოხსნა: ვთქვათ გვაქვს ორნიშნა რიცხვი $\overline{mn}$. მაშინ, ამოცანის პირობის თანახმად, მივიღებთ განტოლებას:

$m + n = mn \Longrightarrow m = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$. რადგან m და n ნატურალური რიცხვებია, მივიღებთ რომ

$m = 2$ და $n = 2$, რაც იმას ნიშნავს რომ საძიებელი ორნიშნა რიცხვია $\mathbf{22}$.

16. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $\boldsymbol{n}$ რიცხვისათვის, მოიძებნება

$\mathbf{111 \dots 1000 \dots 0}$ სახის ისეთი რიცხვი, რომელიც უნაშთოდ იყოფა $\boldsymbol{n}$ - ზე.

დამტკიცება: განვიხილოთ $n + 1$ რაოდენობის, შემდეგი სახის რიცხვები: $1; 11; 111; 1111; \dots; 11111 \dots 1$. ამ რიცხვების n - ზე გაყოფისას, ნაშთში მივიღებთ ერთ - ერთს, შემდეგი რიცხვებიდან: $0; 1; 2; \dots; n-1$. მაგრამ, ჩვენ გვაქვს $n + 1$ რაოდენობის რიცხვი ანუ **კურდღელი**, რომლებიც უნდა ჩავსვათ n გალიაში ანუ ნაშთთა კლასში. მაშინ, **დირიხლეს პრინციპის თანახმად,** ორი რიცხვი მაინც მოიძებნება, რომლებსაც აქვთ ერთნაირი

ნაშთი. ამ რიცხვების სხვაობა უნაშთოდ გაიყოფა n - ზე და დაბოლოვდება რამდენიმე ნულით, რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს. **რ.დ.გ.**

17. დაამტკიცეთ, რომ 1000 ნატურალური რიცხვიდან, ყოველთვის შეგვიძლია ავირჩიოთ რამდენიმე მათგანი ისე, რომ მათი ჯამი იყოფოდეს 1000 - ზე.

დამტკიცება: ვთქვათ, ეს რიცხვებია: $x_1; x_2; \ldots; x_{1000}$. განვიხილოთ, $x_1;\ x_1 + x_2;\ x_1 + x_2 + x_3; \ldots;\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{1000}$

რიცხვების 1000 - ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთები. ნაშთი ან ნულია ან რომელიმე ორი მათგანი ერთნაირია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ რიცხვების სხვაობა უნაშთოდ გაიყოფა 1000 - ზე. რაც იმას ნიშნავს, რომ დარჩენილი გაუბათილებელი ნატურალური რიცხვების ჯამი იყოფა 1000-ზე. **რ.დ.გ.**

18. დირიხლეს თეორემა: დაამტკიცეთ, რომ მარტივი რიცხვების სიმრავლე უსასრულოა.

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო ანუ ვთქვათ მარტივი რიცხვების სიმრავლე სასრულოა და წარმოვადგინოთ სტანდარტული სახით: $p_1;\ p_2; \ldots : p_n$. განვიხილოთ, რიცხვი:

$p_1 p_2 \ldots p_n + 1$, ეს რიცხვი არ იყოფა არცერთ მარტივ $p_1; p_2; \ldots : p_n$ - რიცხვზე, მაშასადამე, ის თვითონაა მარტივი, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას. მაშასადამე, მარტივ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. **რ.დ.გ.**

19. დაამტკიცეთ, რომ $(\mathbf{11^{n+2}} + \mathbf{12^{2n+1}}) \vdots \mathbf{133}$.

დამტკიცება: ა) შევამოწმოთ ჯერ ინდუქციის ბაზისი ანუ შემთხვევა, როცა $n = 1$.

მაშინ, $\mathbf{11^{n+2}} + \mathbf{12^{2n+1}} = \mathbf{11^3} + \mathbf{12^3} = (\mathbf{11} + \mathbf{12})(\mathbf{11^2} - \mathbf{11} \cdot \mathbf{12} + \mathbf{12^2}) =$

$= 23 \cdot 133 \vdots 133$. მაშასადამე, **ბაზისი ჭეშმარიტია;**

ბ) შევამოწმოთ **ინდუქციის ბიჯი.** დავუშვათ, რომ როცა $n = k$, ადგილი აქვს გაყოფადობას ანუ $(11^{k+2} + 12^{2k+1}) \vdots 133$ და ვაჩვენოთ, რომ გაყოფადობას ადგილი აქვს მაშინაც, როცა $n = k + 1$ ანუ

$(11^{k+3} + 12^{2k+3}) \vdots 133$.

მართლაც, $(11^{k+3} + 12^{2k+3}) = 11 \cdot 11^{k+2} + 12^{2k+1} \cdot 12^2 =$

$$= 11 \cdot 11^{k+2} + 144 \cdot 12^{2k+1} = (11 \cdot (11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1}) \vdots 133$$

რ.დ.გ.

20. დაამტკიცეთ, რომ სამი მომდევნო ნატურალური რიცხვის კუბების ჯამი იყოფა 9 - ზე.

დამტკიცება: ვთქვათ, მოცემულია ნატურალური რიცხვი n, მაშინ გვექნება სამიმომდევნო რიცხვის კუბების ჯამი:

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 +$$

$+12n + 8 = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, დასამტკიცებელია, რომ $(3n^3 + 9n^2 + 15n + 9) \vdots 9$. ცხადია რომ, ჯამი ფრჩხილებში, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$3n^3 + 15n + 9(n^2 + 1)$. ამ წარმოდგენაში, მეორე შესაკრები ცხადია, რომ იყოფა 9 - ზე. მაშასადამე, დასამტკიცებელია, რომ

$(3n^3 + 15n) \vdots 9 \Leftrightarrow (n^3 + 5n) \vdots 3$. დავამტკიცოთ ეს გაყოფადობა მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით.

ა) შევამოწმოთ ინდუქციის **ბაზისი** ანუ შემთხვევა, როცა $n = 1$. მაშინ, ცხადია რომ $n^3 + 5n = 1 + 5 = 6 \vdots 3$. მაშასადამე, ინდუქციის ბაზისი ჭიშმარიტია;

ბ) შევამოწმოთ ახლა **ინდუქციის ბიჯი** ანუ დავუშვათ, რომ როცა $n = k$, მაშინ $(k^3 + 5k) \vdots 3$ და ვაჩვენოთ, რომ თუ $n = k + 1$, მაშინ

$\left((k+1)^3 + 5(k+1)\right) \vdots 3$.

მართლაც, $(k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 =$

$= \left(k^3 + 5k + 3(k^2 + k + 2)\right) \vdots 3$.

რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს. **რ.დ.გ.**

21. დაამტკიცეთ, რომ $(3^{2n+1} + 40n - 67) \vdots 64$.

დამტკიცება: დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით.

ა) შევამოწმოთ ბაზისი ანუ შემთხვევა, როცა $n = 1$.

მაშინ $(3^{2n+1} + 40n - 67) = 3^3 + 40 - 67 = 0 \vdots 64$. ე.ი. ბაზისი ჭეშმარიტია.

ბ) გადავიდეთ ინდუქციის ბიჯზე ანუ დავუშვათ რომ, როცა $n = k$ ადგილი აქვს გაყოფადობას: $(3^{2k+1} + 40k - 67) \vdots 64$ და ვაჩვენოთ, რომ მაშინ თუ $n = k + 1$ ადგილი ექნება გაყოფადობას:

$(3^{2k+3} + 40k - 27) \vdots 64.$

მართლაც,

$3^{2k+3} + 40k - 27 = 3^{2k+1} \cdot 9 + 40k - 27 = 9(3^{2k+1} + 40k - 67) -$

$-320k + 576 = \left(9(3^{2k+1} + 40k - 67) + 64 \cdot (9 - 5k)\right) \vdots 64.$ რ.დ.გ.

22. დამოუკიდებლად დაამტკიცეთ, რომ:

ა) $(\boldsymbol{6^{2n} - 1}) \vdots \boldsymbol{35};$

ბ) $(\boldsymbol{4^{n} + 15n - 1}) \vdots \boldsymbol{9};$

გ) $\left(\boldsymbol{2^{5n+3} + 5^{n} \cdot 3^{n+2}}\right) \vdots \boldsymbol{17};$

დ) $(\boldsymbol{6^{2n} + 3^{n+2} + 3^{n}}) \vdots \boldsymbol{11}.$

ე) არითმეტიკულ პროგრესიაში, ყოველი წევრი დაწყებული მეორედან $\boldsymbol{a_{n+1}}$, მიიღება წინა $\boldsymbol{a_n}$ წევრზე ერთიდაიგივე, ნულის არატოლი $\boldsymbol{d}$ რიცხვის დამატებით ანუ $\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d}$. ააგეთ ზოგადი წევრის ფორმულა - ჰიპოთეზა: $\boldsymbol{a_n = a_1 + d(n-1)}$ და დაამტკიცეთ მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით.

ვ) ააგეთ, არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულა - ჰიპოთეზა: $\boldsymbol{S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n}$ და დაამტკიცეთ მატემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით.

ზ) გეომეტრიულ პროგრესიაში, ყოველი წევრი დაწყებული მეორედან $\boldsymbol{b_{n+1}}$, მიიღება წინა $\boldsymbol{b_n}$ წევრის გამრავლებით ერთიდაიგივე არანულოვან $\boldsymbol{q}$ რიცხვზე ანუ $\boldsymbol{b_{n+1} = b_n \cdot q}$. გამოიყავნეთ, გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულა - ჰიპოთეზა $\boldsymbol{b_n = b_1 q^{n-1}}$ და დაამტკიცეთ, მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით.

23. იპოვეთ **2564** - ის გამყოფთა რაოდენობა და გამოთვალეთ მათი ჯამი.

24. იპოვეთ **5555** - ის გამყოფთა რაოდენობა და გამყოფთა ჯამი.

25. იპოვეთ ყველა სრულყოფილი (იდეალური) ნატურალური რიცხვი და დაადგინეთ: ა) სასრულია მათი რაოდენობა, თუ უსასრულო ? ბ)

დაადგინეთ სრულყოფილი რიცხვების განაწილების კანონი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში (სრულყოფილი ეწოდება რიცხვს, რომელიც თავისი გამყოფების ჯამის ტოლია. გამყოფებში არ ითვლება თვითონ ეს რიცხვი. მაგალითად: $6 = 1 + 2 + 3$). სრულყოფილი უწოდეს რიცხვს 6, რადგან ღმერთმა სამყარო 6 დღეში შექმნა; ასევე, სრულყოფილია $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, მთვარე დედამიწის გარშემო ერთ ბრუნს 28 დღეს ანდომებს . . .

26. გამოთვალეთ ეილერის ფუნქციის მნიშვნელობები: $\varphi(200)$; $\varphi(300)$; $\varphi(500)$. ხომ არ ამჩნევთ რაიმე კანონზომიერებას ?

27. რიცხვისათვის 725, იპოვეთ: გამყოფების რაოდენობა.

28. რიცხვისათვის 722 იპოვეთ ყველა გამყოფის ჯამი.

29. განსაზღვრეთ რიცხვით მწკრივში $1; 2; 3; \ldots; 400$ რამდენი რიცხვია, 400 - თან თანამარტივი.

3.4. განუსაზღვრელი განტოლებების ამოხსნა მთელ რიცხვებში

განვიხილოთ შემდეგი სახის **წრფივი განტოლება;**

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c.$$

სადაც $a_1; a_2; \ldots; a_n$ და c წინასწარ მოცემული მთელი რიცხვებია.

განსაზღვრება: ისეთ განტოლებას, სადაც ცვლადთა $x_1; x_2; \ldots; x_n$ რაოდენობა აღემატება განტოლებათა რაოდენობას, **განუსაზღვრელი განტოლება ეწოდება.** ამ შემთხვევაში, ჩვენი განუსაზღვრელი ერთი განტოლება შეიცავს n რაოდენობის ცვლადს.

თეორემა: წრფივი განუსაზღვრელი განტოლება ამოხსნადია მთელ რიცხვებში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ, მისი მარჯვენა c მხარე იყოფა მარცხენა მხარის კოეფიციენტების უდიდეს საერთო

$d = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ გამყოფზე. ამ თეორემის დამტკიცება ცხადია, გაყოფადობის ზემოთ მოყვანილი თვისებებიდან გამომდინარე.

განვიხილოთ, ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევა $n = 2$. ცვლადებისათვის გამოვიყენებთ ტრადიციულ აღნიშვნებს $x; y$. მაშინ გვექნება შემდეგი სახის განუსაზღვრელი განტოლება:

$$ax + by = c.$$

როგორც ზემოთ განხილული თეორემიდან ჩანს, ამ განტოლებას მთელ რიცხვებში ამონახსნი აქვს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$c \vdots d = (a; b).$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ ცნობილია რომელიმე ერთი ამონახსნი $(\boldsymbol{x_0}; \boldsymbol{y_0})$, როგორ ვიპოვოთ, დანარჩენი ამონახსნები.

ცხადია, რომ თუ $(x_0; y_0)$ არის ორიცნობიანი განუსაზღვრელი განტოლების ამონახსნი, მაშინ

$$ax_0 + by_0 = c.$$

განტოლებას: $ax + by = c$ გამოვაკლოთ განტოლება $ax_0 + by_0 = c$. მაშინ, მარჯვენა ნაწილები გაბათილდება და მივიღებთ შემდეგი სახის განტოლებას:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

გადავწეროთ მიღებული განტოლება შემდეგი სახით:

$$\frac{x - x_0}{-b} = \frac{y - y_0}{a} \equiv t.$$

განტოლებაში სამი ხაზით შემოღებულია დამატებითი პარამეტრის აღნიშნვა t. ამ ცვლადს შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მთელი **მნიშვნელობა** $t \in \mathbb{Z}$**.** აქედან გამომდინარე, **გვაქვს ზოგად ამონახსნთა სიმრავლე რომელიც, მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 - bt} \\ \boldsymbol{y = y_0 + at} \end{cases}.$$

მაგალითი. ამოხსენით განტოლება მთელ რიცხვებში:

$\boldsymbol{2x + 3y = 13.}$

ამოხსნა: ამოხსნის, ზემოთ გადმოცემული მეთოდიდან გამომდინარე, ჯერ უნდა ვიპოვოთ რომელიმე ერთი ამონახსნი: მაგალითად: $(5; 1)$.

მართლაც, $2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13$. ე.ი.$\boldsymbol{x_0 = 5}$; $\boldsymbol{y_0 = 1}$. ჩვენი განტოლების შემთხვევაში, $a = 2$; $b = 3$, მაშასადამე, ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 5 - 2t} \\ \boldsymbol{y = 1 + 3t} \end{cases};$$

სადაც $\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}$**.**

3.4.1. რიცხვის წარმოდგენა ჯაჭვური(უწყვეტი) წილადებით და მისი კავშირი ევკლიდეს ალგორითმთან

განსაზღვრება: გამოსახულებას

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{b_1}{q_1 + \cfrac{b_2}{q_2 + \cfrac{b_3}{q + \cfrac{b_4}{a_4 \dots}}}},$$

სადაც $a_i > 0$; $b_i > 0$ ჯაჭვური(უწყვეტი) წილადი ეწოდება.

ჩვენ განვიხილავთ უწყვეტ წილადებს, რომელთათვისაც $\boldsymbol{b_i = 1}$.

ანუ

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 \dots}}}}$$

ამ წილადს ზოგჯერ ჩაწერენ მოკლედ შემდეგნაირად:

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1; a_2; \dots].$$

არსებობს ორი ტიპის უწყვეტი წილადი: სასრული და უსასრულო.

სასრული უწყვეტი წილადებით წარმოიდგინება რაციონალური რიცხვები, ხოლო ირაციონალური რიცხვები, წარმოიდგინება უსასრულო უწყვეტი წილადებით(ირაციონალურ რიცხვებს მომდევნო თავში შევისწავლით).

მაგალითები: ა) წარმოვადგინოთ უწყვეტი წილადით ჩვეულებრივი რაციონალური რიცხვი $\frac{33}{78}$.

$\frac{33}{78} = \frac{1}{\frac{78}{33}} = \frac{1}{2+\frac{12}{33}} = \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{33}{12}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{9}{12}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{12}{9}}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}$. ეს არის სასრული უწყვეტი წილადი. ის შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$\frac{33}{78} = [0; 2; 2; 1; 3]$

ბ) განვიხილოთ უსასრულო პერიოდული ათწილადი $1.(6) = \frac{5}{3}$ და ჩავწეროთ ჯაჭვური წილადის ფორმით:

$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$. ეს წილადი მოკლედ ჩაიწერება შემდეგნაირად: $\frac{5}{3} = [1; 1; 2]$

გ) ასევე, $\frac{3}{19} = 0 + \frac{1}{\frac{19}{3}} = 0 + \frac{1}{6+\frac{1}{3}}$ ანუ $\frac{3}{19} = [0; 6; 3]$.

რაციონალური $\frac{a}{b}$ უკვეცი წილადის წარმოდგენა, უწყვეტი წილადებით, დაკავშირებულია ევკლიდეს ალგორითმთანაც.

მართლაც, თუ ვეძებთ $\boldsymbol{a}$ და $\boldsymbol{b}$ რიცხვების უდიდეს საერთო გამყოფს ევკლიდეს ალგორითმით, ჩვენ იგივე პროცესს ვატარებთ, რაც მათი ფარდობის უწყვეტ წილადად წარმოსადგენად:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{q_0} + \cfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{q_1} + \cfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{q_2} + \cfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{q_3} + \cfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{q_4 \cdots}}}}}.$$

ანუ $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{q_0}; \boldsymbol{q_1}; \boldsymbol{q_2}; \ldots]$.

P.S. უწყვეტ წილადებს ზოგჯერ, იყენებენ პირველი ხარისხის შედარებების (განუსაზღვრელი განტოლებების) ამოსახსნელად.

3.4.2. უწყვეტი წილადების წარმოდგენა მიახლოებითი წილადებით

განვიხილოთ

$$\frac{a}{b} = [q_0; q_1; q_2; \ldots; q_n]$$

უწყვეტი წილადების წარმოდგენა მიახლოებითი წილადებით

$$\frac{a}{b} \cong \frac{P_k}{Q_k} = [q_0; q_1; q_2; \ldots; q_k].$$

$$\frac{P_0}{Q_0} = [q_0] \Longrightarrow \frac{P_0}{Q_0} = q_0 = \frac{q_0}{1} \Longrightarrow \begin{cases} P_0 = q_0 \\ Q_0 = 1 \end{cases};$$

ანალოგიურად,

$$\frac{P_1}{Q_1} = [q_0; q_1] \Longrightarrow \frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = P_0 q_1 + 1 \\ Q_1 = q_1 \end{cases};$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = [q_0; q_1; q_3] \Longrightarrow \frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = \frac{q_0 q_1 q_2 + q_0 + q_2}{q_1 q_2 + 1} =$$

$$= \frac{q_2(q_0 q_1 + 1) + q_0}{q_1 q_2 + 1} = \frac{q_2 P_1 + P_0}{Q_1 q_2 + Q_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_2 = q_2 P_1 + P_0 \\ Q_2 = Q_1 q_2 + Q_0 \end{cases};$$

ანალოგიურად, მივიღებთ რომ საზოგადოდ, ადგილი აქვს რეკურენტულ ფორმულებს:

$$\begin{cases} P_n = q_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = q_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases}.$$

3.4.3. უწყვეტი წილადების გამოყენება, პირველი რიგის განუსაზღვრელი განტოლებების ამოსახსნელად

განვიხილოთ **პირველი რიგის განუსაზღვრელი განტოლება:**

$$17x + 12y = 1. \qquad (*)$$

უ.ს.გ.$(17; 12) = 1$. მაშასადამე, განტოლებას აქვს ამონახსნი.

განვიხილოთ, ა) **უწყვეტი წილადი**, რომელიც შეესაბამება მოდულით უფრო დიდი 17 კოეფიციენტის მცირე 12 კოეფიციენტთან შეფარდებით მიღებულ წილადს; ბ) ჩავწეროთ მისი მიახლოებითი ჯაჭვური წილადი, რომელსაც მივიღებთ, თუ, უკუვაგდებთ ბოლო რიცხვს; გ) მიღებული მიახლოებითი უწყვეტი წილადიდან აღვადგინოთ მიახლოების წილადი ჩვეულებრივი ფორმით :

$$\frac{17}{12} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} = [1; 2; 2; \mathbf{2}] \approx [1; 2; 2] = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{7}{5};$$

მაშინ, მივიღებთ რომ

$$\frac{17}{12} \approx \frac{7}{5} \Longrightarrow 17 \cdot 5 - 12 \cdot 7 = 1 \Longrightarrow 17 \cdot 5 + 12 \cdot (-7) = 1.$$

თუ შევადარებთ $(*)$ და მიღებულ განტოლებას განტოლებებს, ადვილად მივხვდბით, რომ $(*)$ განტოლებას აკმაყოფილებს

$x_0 = 5;\ \ y_0 = -7;$

ანუ გვაქვს განტოლებები:

$$\begin{cases} 17x + 12y = 1 \\ 17 \cdot 5 + 12 \cdot (-7) = 1 \end{cases};$$

თუ, სისტემის პირველ განტოლებას გამოვაკლებთ მეორე განტოლებას, მაშინ მივიღებთ ერთგვაროვან განტოლებას:

$17 \cdot (x - 5) + 12 \cdot (y + 7) = 0 \Longleftrightarrow 17 \cdot (x - 5) = -12 \cdot (y + 7).$

მიღებული ერთგვაროვანი განტოლებიდან, ცხადია, რომ

$$(x - 5) \vdots (-12) \text{ და } (y + 7) \vdots 17.$$

მაშასადამე, მივიღებთ $(*)$ განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$\begin{cases} x = -12k + 5 \\ y = 17k - 7 \end{cases}.$$

ამ ფორმულებში $k \in \mathbb{Z}$ მთელ რიცხვთა სიმრავლეს.

ახლა, **განვიხილოთ შემდეგი სახის განტოლება:**

$$9x + 13y = 8. \qquad (**)$$

უ.ს.გ.$(9; 13) = 1;\ \ 8 \vdots 1$. მაშასადამე, $(**)$ განტოლებას აქვს მთელი ამონახსნები.

ამ განტოლების კერძო ამონახსნის სამოვნელად: ა) განვიხილოთ მისი უცნობის კოეფიციენტებისაგან შემდგარი, არაწესიერი წილადის წარმოდგენა უწყვეტი წილადებით; ბ) უწყვეტი წილადის წარმოდგენა

შევცვალოთ მიახლოებითი უწყვეტი წილადით, რისთვისაც გადავაგდებთ ბოლო რიცხვს; გ) მიახლოებითი უწყვეტი წილადი გადავწეროთ ჩვეულებრივი წილადის სახით:

$\frac{13}{9} = 1 + \frac{4}{9} = 1 + \frac{1}{\frac{9}{4}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{4}} = [1; 2; \mathbf{4}] \approx [1; 2] = \frac{3}{2}$.

მაშასადამე, $\frac{13}{9} \approx \frac{3}{2} \Rightarrow 9 \cdot 3 - 13 \cdot 2 = 1 \Rightarrow 9 \cdot 3 + 13 \cdot (-2) = 1$

მიღებულ ტოლობას, თუ გავამრავლებთ 8 - ზე, მივიღებთ რომ

$9 \cdot 24 + 13 \cdot (-16) = 8$.

თუ, ერთმანეთის ქვეშ დავწერთ განტოლებებს, მივიღებთ, რომ

$$\begin{cases} 9x + 13y = 8 \\ 9 \cdot 24 + 13 \cdot (-16) = 8 \end{cases};$$

პირველ განტოლებას გამოვაკლოთ მეორე განტოლება. მაშინ მივიღებთ, რომ

$9 \cdot (x - 24) + 13 \cdot (y + 16) = 0 \Rightarrow 9 \cdot (x - 24) = -13 \cdot (y + 16)$.

ამ ერთგვაროვანი განტოლებიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$(x - 24) \vdots (-13); \quad (y + 16) \vdots 9. \qquad)$$

აქედან გამომდინარე, მივიღებთ (**) განტოლების ამონახსნს შემდეგი ფორმით:

$$\begin{cases} x = 24 - 13k \\ y = 9k - 16 \end{cases}.$$

3.4.4. კითხვები და ამოცანები

1. იპოვეთ დიოფანტური განტოლების ორი ნატურალური ამონახსნი:

$\mathbf{28x + 30y + 31z = 365.}$

ამოხსნა: ერთი ამონახსნი პირდაპირ შეიძლება გამოვიცნოთ კალენდარიდან გამომდინარე: $\mathbf{x = 1; y = 7; z = 4}$. **ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნის საპოვნელად გამოვსახოთ, რომელიმე ერთი ცვლადი დანარჩენებით:** $\mathbf{x = \frac{365 - 30y - 31z}{28} = 13 - \frac{30(y+z)+z-1}{28}}$**. რადგან** $\mathbf{x}$ **ნატურალური რიცხვია, წილადი** $\mathbf{\frac{30(y+z)+z-1}{28} = k}$ **აგრეთვე, უნდა იყოს ნატურალური რიცხვი ნაკლები ან ტოლი 12 - ის. ვთქვათ,** $\mathbf{k = 12}$**, მაშინ** $\mathbf{x = 1}$**. დანარჩენი ცვლადების საპოვნელად, მოვახდინოთ გარდაქმნა:** $\mathbf{\frac{30(y+z)+z-1}{28} = 12 \Rightarrow 30(y + z) + z - 1 = 336 \Rightarrow}$

$\mathbf{\Rightarrow 30(y + z) + z = 337 \Rightarrow \begin{cases} y + z = 11 \\ z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 7 \end{cases}}$**. მაშასადამე, მივიღეთ ამონახსნი:** $\mathbf{(1; 4; 7)}$**.**

ახლა დავუშვათ, რომ $\boldsymbol{k = 11 \Rightarrow x = 2}$.

$$\boldsymbol{\frac{30(y+z)+z-1}{28} = 11 \Rightarrow 30(y+z)+z-1 = 308 \Rightarrow}$$

$\boldsymbol{\Rightarrow 30(y+z)+z = 309 \Rightarrow \begin{cases} y+z=10 \\ z=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ z=9 \end{cases}}$. **მაშასადამე, მივიღეთ ამონახსნი: $\boldsymbol{(2;1;9)}$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ სხვა ნატურალური ამონახსნები არა აქვს განტოლებას, თუმცა, მთელ რიცხვებში - აქვს.**

ახლა განვიხილოთ არაწრფივი განუსაზღვრელი განტოლებები:

2. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი მთელი რიცხვის კვადრატი სამზე გაყოფისას, ნაშთში იძლევა ნულს ან ერთს.

დამტკიცება: ნებისმიერი მთელი რიცხვის სამზე გაყოფისას, ნაშთში მივიღებთ ან ნულს ან ერთს ან ორს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი მთელი რიცხვი აღიწერება ერთ - ერთით, შემდეგი სიმრავლეებიდან:

ა) $\boldsymbol{\{3k\}_{k=1}^{\infty}}$; *ბ*) $\boldsymbol{\{3k+1\}_{k=1}^{\infty}}$; *გ*) $\boldsymbol{\{3k+2\}_{k=1}^{\infty}}$. შევისწავლოთ შესაბამისი რიცხვების კვადრატების სახე.

ა) ამ შემთხვევაში, კვადრატს ექნება შემდეგი სახე: $9k^2$ და ცხადია, სამზე გაყოფისას, **ნაშთში მივიღებთ ნულს;**

ბ) ამ შემთხვევაში, კვადრატს ექნება შემდეგი სახე: $9k^2+6k+1$ და ცხადია, სამზე გაყოფისას, **ნაშთში მივიღებთ ერთს;**

გ) ამ შემთხვევაში, კვადრატს ექნება შემდეგი სახე:

$9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$ და ცხადია, სამზე გაყოფისას, **ნაშთში მივიღებთ ერთს.**

მაშასადამე, ნებისმიერი მთელი რიცხვის კვადრატის გაყოფისას 3 - ზე, ნაშთში მივიღებთ 0 - ს ან 1 - ს.

რ.დ.გ.

3. ამოხსენით არაწრფივი განტოლება ნატურალურ რიცხვებში:

$\boldsymbol{x^2+y^2 = 4z-1}$.

ამოხსნა: სამზე და ოთხზე გაყოფისას, ნებისმიერი ნატურალური რიცხვის კვადრატი, ნაშთში იძლევა 0 - ს ან 1- ს. შესაბამისად, x^2+y^2 ოთხზე გაყოფისას ნაშთში იძლევა 0 - ს; 1 - ს ან 2 -ს. მარჯვენა მხარე კი ოთხზე გაყოფისას, იძლევა ნაშთში 3 - ს, მართლაც,

$4z - 1 = 4z - 4 + 3 = 4(z - 1) + 3.$

აქედან გამომდინარე, რადგან ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარე, ოთხზე გაყოფისას ნაშთში იძლევა სხვადასხვა რიცხვებს, ამ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში.

4. ამოხსენით ნატურალურ რიცხვებში განტოლება:

$\boldsymbol{x + y = xy}.$

ამოხსნა: ამოცანა სიმეტრიულია ცვლადების მიმართ. ამოვხსნათ განტოლება y ცვლადის მიმართ: $y = x(y - 1)$. ამ განტოლებას, არ დააკმაყოფილებს $y = 1$ მნიშვნელობა, რადგან მაშინ, ტოლობის მარჯვენა ნაწილი ნულია და მარცხენა კი - 1. გავყოთ განტოლების ორივე ნაწილი $y - 1$ - ზე. მაშინ, მივიღებთ რომ

$x = \frac{y}{y-1} = \frac{y-1+1}{y-1} = 1 + \frac{1}{y-1}$. ამ ტოლობია მარცხენა ნაწილი მთელი რიცხვია, მაშინ მთელი უნდა იყოს მარჯვენა ნაწილიც ანუ მთელი უნდა იყოს $\frac{1}{y-1}$ წილადის მნიშვნელობას, რაც იმას ნიშნავს, რომ $y - 1 = \pm 1$ ანუ გვაქვს ორი ნატურალური ამონახსნი: $(2; 2)$ და $(0; 0)$.

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$

5. ამოხსენით ნატურალურ რიცხვებში განტოლება:

$\boldsymbol{x^2 = y^2 + 2y + 13}.$

ამოხსნა: გარდავქმნათ განტოლება შემდეგნაირად:

$$x^2 = y^2 + 2y + 13 \Leftrightarrow x^2 - (y + 1)^2 = 12 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x + y + 1)(x - y - 1) = 12.$

როგორც ვხედავთ, 12 უნდა წარმოვადგინოთ ორი რიცხვის ნამრავლის სახით. რა თქმა უნდა აქ შესაძლებელია ყველა ვარიანტის განხილვა, თუმცა, თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ ორი რიცხვის ჯამს და სხვაობას ერთნაირი ლუწობა-კენტობა აქვს, მივიღებთ რომ ერთის დამატებით ან გამოკლებით, მათი ლუწობა-კენტობის ერთნაირობა არ ირღვევა, მაშასადამე, განსახილველი ვარიანტების რაოდენობაც შემცირდება და გვექნება შემდეგი შემთხვევა:

$$\begin{cases} x + y + 1 = 6 \\ x - y - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 4} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases};$$

6. ამოხსენით ნატურალურ რიცხვებში განტოლება:

$\boldsymbol{x^3 - x^2 - xy - 17x - 3y + 8 = 0.}$

ამოხსნა: ამოვხსნათ ერთ - ერთი ცვლადი, მაგალითად y. მაშინ მივიღებთ:

$xy + 3y = \boldsymbol{x^3 - x^2 - 17x + 8 \Rightarrow y = \frac{x^3-x^2-17x+8}{x+3}}$ ანუ

$y = x^2 - 4x - 5 + \frac{23}{x+3}$. ცხადია, რომ წილადი უნდა იყოს მთელი რიცხვი, რაც იმას ნიშნავს, რომ: $x + 3 = \pm 1$ ან $x + 3 = \pm 23$.

მაშინ, მივიღებთ რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში გვექნება ერთადერთი ამონახსნი:

$\begin{cases} x = 20 \\ y = 676 \end{cases};$

7. ამოხსენით განტოლება ნატურალურ რიცხვებში:

$\boldsymbol{x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{30}{7}.}$

ამოხსნა: $\boldsymbol{x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{30}{7} \Rightarrow x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = 4 + \frac{2}{7} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \frac{z}{yz+1} = \frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow}$

$\boldsymbol{\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3. \\ z = 2 \end{cases}}$

8. დამოუკიდებლად ამოხსენით ნატურალურ რიცხვებში შემდეგი განუსაზღვრელი განტოლებები:

ა) $\boldsymbol{4x + 6y = 9;}$

ბ) $\boldsymbol{4x + 6y = 12;}$

გ) შესაძლებელია თუ არა 13 დოლარის დახურდავება, 2 დოლარიანი და 5 დოლარიანი კუპიურებით ?

დ) $\boldsymbol{2x^2 - 1 = 2xy;}$

ე) $\boldsymbol{x^2 - y^2 = 303.}$

9. ამოხსენით მთელ რიცხვებში, განუსაზღვრელი განტოლება:

$\boldsymbol{9x + 13y = -1.}$

10. ამოხსენით მთელ რიცხვებში, განუსაზღვრელი განტოლება:

$3x^2 + 5y^2 = 345.$

11. ამოხსენით მთელ რიცხვებში, განუსაზღვრელი განტოლება:

ა) $x^3 - y^3 = 91$;

ბ) $3m + 7n = 5mn$;

გ) $5x - 3y = 2$;

დ) $5x + 3y = 8$;

ე) $15x - 3y = 12$;

ვ) $55x - 15y = 25$;

ზ) $x + 3y = 5$;

თ) $x - 3y = 1$;

ი) $5x - y = 1$;

კ) $x + 3y = 7$;

ლ) $4m + 7n = 5mn$;

მ) შესაძლებელია თუ არა 15 დოლარის დახურდავება, 2 დოლარიანი და 5 დოლარიანი კუპიურებით ?

ნ) შესაძლებელია თუ არა 20 დოლარის დახურდავება, 2 დოლარიანი და 5 დოლარიანი კუპიურებით ?

ო) გიორგის ჰყავდა ქათმები და ღორები. მათი ფეხების საერთო რაოდენობაა 56. რამდენი ღორი და რამდენი ქათამი ჰყოლია გიორგის ?

პ) გიორგის ჰყავდა ქათმები და ღორები. მათი ფეხების საერთო რაოდენობაა 40. რამდენი ღორი და რამდენი ქათამი ჰყოლია გიორგის ?

ჟ) ნიკას უნდა იყიდოს რვეულები და საწერი კალმები. რვეული ღირს 2ლარი, კალამი კი 3ლარი. რამდენი რვეულის და კალმის ყიდვა შეუძლია ნიკას 29 ლარით ?

IV თავი. რაციონალური და ნამდვილი რიცხვები

განსაზღვრება. $\frac{m}{n}$ სახის რიცხვებს, სადაც m მთელ რიცხვთა სიმრავლის ელემენტია, ხოლო n ნატურალური რიცხვია, $\mathbb{Q}$ **რაციონალური რიცხვები** ეწოდებათ.

ეს განსაზღვრება, ფორმალურ აღნიშვნებში ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}\middle|\, \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z} \wedge \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\right\}. \quad (1)$$

ჩვეულებრივი სალაპარაკო ენით რომ ვთქვათ, რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, ნატურალურ და მთელ რიცხვებთან ერთად, შეიცავს წილადურ რიცხვებსაც ანუ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

4. რაციონალური რიცხვები და მათი თვისებები

ჩვენ ვიცით, რომ წილადური რიცხვები შეგვიძლია ჩავწეროთ ათწილადური ფორმითაც.

ამასთან ერთად, **თუ, წილადის მნიშვნელი მარტივ მამრავლებად დაშლისას, შეიცავს მხოლოდ ორის და ხუთის ხარისხებს, მაშინ ათწილადი იქნება სასრული,** მაგალითად: $\frac{7}{2} = 3.5$; $\frac{6}{5} = 1.2$; $\frac{9}{4} = 2.25$.

თუ, წილადის მნიშვნელი მარტივ მამრავლებად დაშლისას შეიცავს სხვა თანამამრავლებსაც, მაშინ წილადი გადაიქცევა უსასრულო პერიოდულ ათწილადად, მაგალითად: $\frac{1}{3} = 0.(3)$; $\frac{2}{7} = 0.(285714)$.

რაც შეეხება ირაციონალურ რიცხვებს, მათ შეესაბამება უსასრულო არაპერიოდული ათწილადები, როგორც ჩვენ უკვე განვიხილეთ ჯაჭვური წილადების შესწავლისას.

უსასრულო პერიოდული ათწილადების გადაქცევა ჩვეულებრივ წილადად შეგვიძლია გავიხსენოთ შემდეგი მაგალითების განხილვისას:

$0.1666\ldots = 0.1(6) = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$;

$0.12333\ldots = 0.12(3) = \frac{123-12}{900} = \frac{111}{900} = \frac{37}{300}$;

$0.340909\ldots = 0.34(09) = \frac{3409-34}{9900} = \frac{3375}{9900} = \frac{15}{44}$.

4.1. მაგალითები რაციონალურ რიცხვებზე

შეასრულეთ ალგებრული მოქმედებები და გამოთვალეთ გამოსახულებათა მნიშვნელობები:

1. $\frac{172\frac{5}{6}-170\frac{1}{3}+3\frac{5}{12}}{0.8\cdot 0.25}$; პასუხი: $29\frac{7}{12}$.

2. $\left(\frac{0.012}{5}+\frac{0.04104}{5.4}\right)\cdot 4560-42\frac{1}{3}$; პასუხი: $3\frac{4}{15}$.

3. $\frac{\left[0.(6)+\frac{1}{3}\right]:0.25}{0.12(3):0.0925}+125\cdot 0.64$; პასუხი: 11.

4. $\frac{\left[\left(\frac{5}{8}+2.708(3)\right):2.5\right]\cdot 0.5}{[1.3+0.7(6)+0.(36)]\cdot\frac{110}{401}}$; პასუხი: 1.

5. $\frac{215\frac{9}{16}-208\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{0.0001:0.005}$; პასუხი: $365\frac{5}{8}$.

4.2. ერთწევრი და მრავალწევრი. შემოკლებული გამრავლების ფორმულები. პასკალის სამკუთხედი.

განსაზღვრება. ალგებრულ გამოსახულებას, რომელიც შედგენილია რიცხვებზე და ასოით გამოსახულებებზე, გამრავლებისა და ახარისხების ოპერაციების საშუალებით **ერთწევრი** ეწოდება.

ერთწევრის მაგალითები: $5x^2y; 7xz; -3xy^3z^2$.

განსაზღვრება. რამოდენიმე ერთწევრის ალგებრულ ჯამს **მრავალწევრი** ეწოდება.

მრავალწევრის **მაგალითები**: $5x^2+2x-29; x^2y+5xy^2-3y^3$.

ალგებრული გამოსახულებების გარდაქმნისას, ფართოდ გამოიყენება **შემოკლებული გამრავლების ფორმულები**:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2; \quad (2)$$

რომელიც, სიტყვიერად ასე წაიკითხება: **ორი რიცხვის ჯამის ნამრავლი მათ სხვაობაზე, ამ რიცხვების კვადრატების სხვაობის ტოლია.**

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2; \quad (3)$$

ფორმულა (3) ასე წაიკითხება: **ორი რიცხვის ჯამის კვადრატი უდრის, პირველი რიცხვის კვადრატს, პლუს ამ რიცხვების გაორკეცებული ნამრავლი და პლუს მეორე რიცხვის კვადრატი**.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \qquad (4)$$

ფორმულა (4) ასე წაიკითხება: **ორი რიცხვის სხვაობის კვადრატი უდრის, პირველი რიცხვის კვადრატს, მინუს ამ რიცხვების გაორკეცებული ნამრავლი და პლუს მეორე რიცხვის კვადრატი.**

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3; \qquad (5)$$

ფორმულა (5) ასე წაიკითხება: **ორი რიცხვის ჯამის კუბი უდრის, პირველი რიცხვის კუბს, პლუს პირველი რიცხვის კვადრატისა და მეორე რიცხვის გასამკეცებული ნამრავლი, პლუს მეორე რიცხვის კვადრატისა და პირველი რიცხვის გასამკეცებული ნამრავლი, პლუს მეორე რიცხვის კუბი.**

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3; \qquad (6)$$

ფორმულა (6) ასე წაიკითხება: **ორი რიცხვის სხვაობის კუბი უდრის, პირველი რიცხვის კუბს, მინუს პირველი რიცხვის კვადრატისა და მეორე რიცხვის გასამკეცებული ნამრავლი, პლუს მეორე რიცხვის კვადრატისა და პირველი რიცხვის გასამკეცებული ნამრავლი, მინუს მეორე რიცხვის კუბი.**

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \qquad (7)$$

ფორმულა (7) ასე წაიკითხება: **ორი რიცხვის კუბების ჯამი უდრის, ამ რიცხვების ჯამს, გამრავლებულს სხვაობის არასრულ კვადრატზე.**

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2); \qquad (8)$$

ფორმულა (8) ასე წაიკითხება: **ორი რიცხვის კუბების სხვაობა უდრის, ამ რიცხვების სხვაობა, გამრავლებულს ჯამის არასრულ კვადრატზე.**

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac; \qquad (9)$$

მითითება:

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)\cdot(a+b+c) = a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c)\ ...$$

4.2.1. პასკალის სამკუთხედი

ჩვენ უკვე განვიხილეთ შემოკლებული გამრავლების ფორმულები და ვნახეთ, თუ როგორ უნდა ავიყვანოთ ორი რიცხვის ჯამი კვადრატში და კუბში:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{10}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \tag{11}$$

ისმის კითხვა, როგორ ავიყვანოთ ორწევრი მეოთხე, მეხუთე და ა.შ. ხარისხში ? როგორ ვიპოვოთ (10),(11) წარმოდგენების ანალოგიური ფორმულები ?

ეს **ამოცანა გადაჭრა გამოცენილმა ფრანგმა მეცნიერმა ბლეზ პასკალმა** შემდეგნაირად:

თუ, დავაკვირდებით განხილულ ფორმულებს, შევნიშნავთ რომ მათ ერთგვარი სიმეტრია ახასიათებთ: პირველი წევრი ადის საძიებელ ხარისხში, შემდეგ, მეორე წევრში გვაქვს პირველი წევრის ხარისხის ერთი ერთეულით შემცირება და მეორე ცვლადთან პირველ ხარისხზე ნამრავლი, შემდეგ, პირველი წევრის ხარისხი კვლავ ერთეულით დაიწევს და მეორე წევრის ხარისხი კი ერთეულით იზრდება და ა.შ.

რაც შეეხება კოეფიციენტებს, ისინი იცვლებიან პასკალის სამკუთხედის ცნობილი კანონზომიერებით:

$$\begin{array}{rcc|c|ccccccccccccc}
(a+b)^0 & = & 1 & 0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
(a+b)^1 & = & a+b & 1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
(a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 & 2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
(a+b)^3 & = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & 3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
(a+b)^4 & = & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 & 4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
(a+b)^5 & = & \dots & 5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
(a+b)^6 & = & \dots & 6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

ნახ. 4.1 პასკალის სამკუთხედი

მარჯვენა მხარეში მოცემულია კოეფიციენტების ცხრილი, რომელსაც პასკალის სამკუთხედს უწოდებენ. ამ სამკუთხედის ფერდებში განლაგებულია ერთიანები, ხოლო მესამე სტრიქონიდან დაწყებული, ყოველი რიცხვი მის ზემოთა რიგში, მეზობლად მდგარი რიცხვების ჯამის ტოლია, ამასთან ერთად, პასკალის სამკუთხედის თითოეული სტრიქონის

რიცხვები, შეესაბამება ორწევრის შესაბამისი ხარისხის გაშლის კოეფიციენტებს.

მაგალითად,

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4; \qquad (12)$$

ამ წარმოდგენის **კოეფიციენტები განლაგებულია პასკალის სამკუთხედის მეოთხე სტრიქონში.**

ანალოგიურად, **ორწევრის მეხუთე ხარისხისთვის** გვექნება შემდეგი წარმოდგენა:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5. \qquad (13)$$

პასკალის სამკუთხედი, საშუალებას გვაძლევს უმტკივნეულოდ (გადამრავლების გარეშე), ავაგოთ ორწევრის ხარისხში აყვანის ფორმულები ნებისმიერი სასრული ხარისხის შემთხვევაში.

4.3. რთული ალგებრული გამოსახულებების გამარტივება შემოკლებული გამრავლების ფორმულების გამოყენებით. მრავალწევრის გაყოფა მრავალწევრზე

1. $\frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$; **პასუხი:** $\frac{ab}{a+b}$.

2. $\frac{a^2-1}{n^2+an} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} - 1\right) \cdot \frac{a-an^3-n^2+n}{1-a^2}$; **პასუხი:** $\frac{n^2+n+1}{n}$.

3. $\frac{(a-1)(a+2)}{a^6-a^5} \cdot \left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4} - \frac{1}{a^2-a}\right]$; **პასუხი:** $\frac{a+2}{a^6}$.

4. $\frac{x-4}{x^3-1} + \frac{x+1}{x^2-1} - \frac{4}{x^2+x+1}$; **პასუხი:** $\frac{x-1}{x^2+x+1}$.

5. $\frac{a^3b^2+b^5}{(a^2-b^2)(a^2b-ab^2+b^3)} + \frac{a^2+ab}{a^2-b^2}$; **პასუხი:** $\frac{a+b}{a-b}$.

შეასრულეთ მრავალწევრების გაყოფა:

1) $\left(2x^3-5x^2+8x-3\right):\left(x^2-2x+3\right)$;
2) $\left(6x^4+5x^3-11x^2+9x-5\right):\left(3x^2+4x-5\right)$;
3) $\left(5x^3+6x^2-x+78\right):(x+3)$;
4) $\left(x^6-2x^5-4x^4+3x^3-3x^2+11x-6\right):\left(x^2+x-2\right)$.

4.4. რიცხვითი მიმდევრობა

განსაზღვრება. ნატურალური არგუმენტის ფუნქციას, **რიცხვითი მიმდევრობა** ეწოდება.

რიცხვითი მიმდევრობის **მაგალითებია:**

ა) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$

ბ) $1; 2; 3; 4; 5; \dots; n; \dots$

გ) $2; 5; 8; 11; 14; \dots; 3n-1; \dots$

დ) $3; 8; 13; 18; 23; \dots; 5n-2; \dots$

ე) $5; 7; 9; 11; 13; \dots; 2n+3; \dots$

რიცხვით მიმდევრობას, საზოგადოდ, წარმოადგენენ ხოლმე, ნატურალური რიცხვების საშუალებით გადანომრილი წევრების სახით ანუ მიმდევრობას ჩაწერენ შემდეგი ფორმით:

$$a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots$$

ამ ჩანაწერში a_1 წარმოადგენს მიმდევრობის პირველ წევრს, რადგან პირველ ადგილზე დგას მიმდევრობაში. შესაბამისად, a_2 მეორე წევრია, a_3 მესამე წევრი და ა.შ., რაც შეეხება a_n - ს, მას მიმდევრობის ზოგად წევრს უწოდებენ, რადგან ის წარმოადგენს ფორმულას, ნებისმიერი წევრის გამოსაანგარიშებლად.

მაგალითად: ა) ამ მიმდევრობაში: $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{2}$; . . .; ამ მიმდევრობის ზოგადი წევრია $a_n = \frac{1}{n}$. ზოგადი წევრის ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვიანგარიშოთ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი, მაგალითად, მეასე წევრი ამ მიმდევრობაში იქნება: $a_{100} = \frac{1}{100}$;

ბ) ამ მიმდევრობაში: $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; . . .; ამ მიმდევრობის ზოგადი წევრია $a_n = n$. ზოგადი წევრის ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვიანგარიშოთ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი, მაგალითად, მეშვიდე წევრი ამ მიმდევრობაში იქნება: $a_7 = 7$;

გ) ამ მიმდევრობაში: $a_1 = 2$; $a_2 = 5$; . . .; ამ მიმდევრობის ზოგადი წევრია $a_n = 3n - 1$. ზოგადი წევრის ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვიანგარიშოთ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი, მაგალითად, მეათე წევრი ამ მიმდევრობაში იქნება: $a_{10} = 3 \cdot 10 - 1 = 29$;

დ) ამ მიმდევრობაში: $a_1 = 3$; $a_2 = 8$; . . .; ამ მიმდევრობის ზოგადი წევრია $a_n = 5n - 2$. ზოგადი წევრის ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვიანგარიშოთ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი, მაგალითად, მეთხუთმეტე წევრი ამ მიმდევრობაში იქნება: $a_{15} = 5 \cdot 15 - 2 = 73$;

ე) ამ მიმდევრობაში: $a_1 = 5$; $a_2 = 7$; . . .; ამ მიმდევრობის ზოგადი წევრია $a_n = 2n + 3$. ზოგადი წევრის ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვიანგარიშოთ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი, მაგალითად, მეექვსე წევრი ამ მიმდევრობაში იქნება: $a_6 = 2 \cdot 6 + 3 = 15$.

4.4.1. არითმეტიკული პროგრესია. ზოგადი წევრის ფორმულა და წევრთა ჯამი

რიცხვითი მიმდევრობის უმარტივეს სახეს, წარმოადგენს **არითმეტიკული პროგრესია:**

$$a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n; \ldots$$

განსაზღვრება. რიცხვით მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორედან, მიიღება წინა წევრზე ერთიდაიგივე ნულის არატოლი რიცხვის დამატებით, **არითმეტიკული პროგრესია** ეწოდება.

განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ცხადია რომ

$a_2 = a_1 + d$;

$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$;

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$;

. . .

$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)d + d = a_1 + (n-1)d$.

ამრიგად, მივიღეთ რომ არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულაა:

$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$.

ამ ფორმულებში d რიცხვს, არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა ეწოდება, რადგან ის წარმოადგენს მომდევნო წევრთა შორის სხვაობას:

$\boldsymbol{d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1}}$.

დავალება მოსწავლეებს: ამ ფორმულის დასამტკიცებლად უნდა გამოვიყენოთ **მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი.** მოსწავლეებს ვთავაზობ: **დაამტკიცეთ ეს ფორმულა!**

ამოხსენით მაგალითები: იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი, სხვაობა და ზოგადი წევრის ფორმულა ქვემოთ მოყვანილი არითმეტიკული პროგრესიებისათვის:

ა) $3; 7; 11; \dots$

ამოხსნა: $\boldsymbol{a_1 = 3; d = 4; a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1;}$

ბ) $5; 12; 19; \dots$?

გ) $8; 5; 2; \dots$?

დ) $-11; -7; --3; \dots$?

ე) $0.2; 0.7; 1.2; \dots$?

ახლა, განვიხილოთ არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამი და გამოვიყვანოთ მისი გამოსაანგარიშებელი ფორმულა ანუ ჩვენ გვაინტერესებს, როგორ გამოვთვალოთ ჯამი:

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.}$$

ჯერ განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები და დავადგინოთ არითმეტიკული პროგრესიის თვისებები.

მაგალითი: 13 წლის გაუსს მასწავლებელმა შესთავაზა, გამოეთვალა ყველა ნატურალური რიცხვია ჯამი 1 - დან 100 - ის ჩათვლით და თვითონ შეუდგა საკუთარი საქმეების შესრულებას, იმ იმედით რომ გაუსი დიდხანს მოუნდებოდა ანგარიშს და არ შეაწუხებდა მასწავლებელს. მაგრამ, რამდენიმე წუთში, პატარა გაუსმა აუწყა, რომ დავალება შეასრულა და აჩვენა პასუხიც, რითიც განაცვიფრა მასწავლებელიც და აღმოაჩინა **არითმეტიკული პროგრესიის საინტერესო თვისებაც, რომ თავიდან და ბოლოდან თანაბრად დაშორებული წევრების ჯამი ერთნაირია.**

გთავაზობთ **გაუსის მსჯელობას:**

საპოვნელია ჯამი: $\boldsymbol{S_n = \sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100;}$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100;$$

$$S_n = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1;$$

შევკრიბოთ ეს ორი ტოლობა და ორ-ორად დავაჯგუფოთ, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$S_n + S_n = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (99 + 2) + (100 + 1)$$

ამ ფორმულაში სულ გვაქვს 100 წყვილი.

მაშინ ცხადია, რომ მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$2S_n = 101 \cdot 100 \Leftrightarrow S_n = \frac{101 \cdot 100}{2} \Leftrightarrow S_n = 5050.$$

ამრიგად, გაუსმა დაადგინა არითმეტიკული პროგრესიის თვისება: **თუ, მოცემული გვაქვს სასრული არითმეტიკული პროგრესია:**

$$a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n;$$

მაშინ, თავიდან და ბოლოდან თანაბრად დაშორებული წევრების ჯამი ერთმანეთის ტოლია ანუ $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots$

დავალება მოსწავლეებს: დაამტკიცეთ, რომ ა) **არითმეტიკულ პროგრესიაში, თავიდან და ბოლოდან თანაბრად დაშორებული წევრების ჯამი ერთნაირია ანუ $a_k + a_{n-k} = a_1 + a_n$ ნებისმიერი $k < n$ რიცხვისათვის; ბ) არითმეტიკული პროგრესიის ნებისმიერი წევრი დაწყებული მეორედან, უდრის მეზობელი წევრების საშუალო არითმეტიკულს ანუ $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$.**

ახლა უკვე მზად ვართ არითმეტიკული პროგრესიის **n წევრის ჯამის ფორმულის საპოვნელად.**

განვიხილოთ, არითმეტიკული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n;$$

მას ქვეშ მივიწეროთ იგივე ჯამი, მხოლოდ შებრუნებული რიგით ჩაწერილი:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1.$$

თუ, ამ ორ ფორმულას წევრ-წევრად შევკრიბავთ, მაშინ მივიღებთ რომ

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1).$$

ამ ჩანაწერში, ფრჩხილების რაოდენობაა n და რადგან ყველა ფრჩხილში მოთავსებული ჯამი ერთნაირია გაუსის თვისების თანახმად, $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots$, ცხადია, რომ არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამისთვის მივიღეთ შემდეგი ფორმულა:

$$\boldsymbol{2S_n = (a_1 + a_n)n \Leftrightarrow S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}}.$$

თუ, მიღებულ ფორმულაში **შევიტანთ არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულას, მაშინ მივიღებთ არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამისათვის** ფორმულას შემდეგი სახით:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{(2a_1+d(n-1))n}{2}}.$$

ახლა ამოვხსნათ შესაბამისი მაგალითები.

იპოვეთ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი, სხვაობა, ზოგადი წევრის ფორმულა და $\boldsymbol{n}$ წევრთა ჯამი ქვემოთ მოყვანილი არითმეტიკული პროგრესიებისათვის:

ა) $3; 7; 11; \ldots$

ამოხსნა: $a_1 = 3; d = 4; a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1;$

მაშინ წევრთა ჯამის $S_n = \frac{(2a_1+d(n-1))n}{2}$ ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ $S_n = \frac{(2\cdot3+4(n-1))}{2} \cdot n = \frac{(4n+2)}{2} \cdot n = (2n+1)n;$

ბ) $5; 12; 19; \ldots$?

გ) $8; 5; 2; \ldots$?

დ) $-11; -7; --3; \ldots$?

ე) $0.2; 0.7; 1.2; \ldots$?

4.4.2. გეომეტრიული პროგრესია. ზოგადი წევრის ფორმულა და წევრთა ჯამი

განსაზღვრება. რიცხვით მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი დაწყებული მეორედან მიიღება წინაწევრის გამრავლებით ერთიდაიგივე ნულის არატოლ რიცხვზე, **გეომეტრიული პროგრესია** ეწოდება.

განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ცხადია რომ

$\boldsymbol{b_2 = b_1 q;}$

$\boldsymbol{b_3 = b_2 q = b_1 q q = b_1 q^2;}$

$\boldsymbol{b_4 = b_3 q = b_1 q^2 q = b_1 q^3;}$

. . .

$\boldsymbol{b_n = b_1 q^{n-1}.}$

მაშასადამე, მივიღეთ გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულა:

$$\boldsymbol{b_n = b_1 q^{n-1}.}$$

ამ ფორმულებში $\boldsymbol{q}$ **რიცხვს, გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი** ეწოდება, **რადგან გეომეტრიული პროგრესიის წევრის გაყოფისას ამ რიცხვზე, მიიღება წინა წევრი:**

$$\boldsymbol{b_1 = \frac{b_2}{q};\ b_2 = \frac{b_3}{q};\ b_3 = \frac{b_4}{q};\ \ldots; b_{n-1} = \frac{b_n}{q}.}$$

დავალება მოსწავლეებს: ამ ფორმულის დასამტკიცებლად უნდა გამოვიყენოთ **მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი.** მოსწავლეებს ვთავაზობ: **დაამტკიცეთ ეს ფორმულა!**

ამოხსენით მაგალითები: იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრი, მნიშვნელი და ზოგადი წევრის ფორმულა ქვემოთ მოყვანილი გეომეტრიული პროგრესიებისათვის:

ა) $1; 9; 81; \ldots$

ამოხსნა: $\boldsymbol{b_1 = 1; q = 9; b_n = b_1 q^{n-1} = 1 \cdot 9^{n-1} = 9^{n-1};}$

ბ) $5; 30; 180; \ldots$?

გ) $8; 56; 392; \ldots$?

დ) $-11; 22; -44; \ldots$?

ე) $0.2; 0.1; 0.05; \ldots$?

ახლა, განვიხილოთ გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამი და გამოვიყვანოთ მისი გამოსაანგარიშებელი ფორმულა ანუ ჩვენ გვაინტერესებს, როგორ გამოვთვალოთ ჯამი:

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n}.$$

ჯერ განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები და დავადგინოთ გეომეტრიული პროგრესიის თვისებები.

მაგალითი: განვიხილოთ გეომეტრიული პროგრესია:

$$2; 6; 18; \ldots; 2 \cdot 3^{n-1}.$$

ამ პროგრესიაში ნებისმიერი წევრი დაწყებული მეორედან, უდრის მეზობელი წევრების საშუალო გეომეტრიულს ანუ $6^2 = 2 \cdot 18$.

საზოგადოდ, კი **ეს თვისება ჩაიწერება შემდეგნაირად:**

$$\boldsymbol{b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}}.$$

ახლა გადავიდეთ, გეომეტრიული პროგრესიის $\boldsymbol{n}$ წევრთა ჯამის ფორმულაზე.

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n; \qquad (*)$$

$$S_n \cdot q = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \ldots + b_n q = b_2 + b_3 + \ldots + b_n + b_n q; \quad (**)$$

$(*)$ ტოლობას გამოვაკლოთ $(**)$ ტოლობა, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$S_n \cdot (1 - q) = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n - (b_2 + b_3 + \ldots + b_n + b_n q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_n \cdot (1 - q) = b_1 - b_n q \Leftrightarrow \boldsymbol{S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}}.$$

ამრიგად, მივიღეთ გეომეტრიული პროგრესიის $\boldsymbol{n}$ წევრთა ჯამის ფორმულა:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}}.$$

თუ ამ ფორმულაში შევიტანთ გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულას $b_n = b_1 q^{n-1}$, მაშინ მივიღებთ წევრთა ჯამის ფორმულას შემდეგი სახით:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{b_1 - b_1 q^{n-1} q}{1 - q} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}}.$$

დავალება მოსწავლეებს: ამ ფორმულის დასამტკიცებლად უნდა გამოვიყენოთ **მათემატიკური ინდუქციის პრინციპი.** მოსწავლეებს ვთავაზობ: **დაამტკიცეთ ეს ფორმულა $\boldsymbol{S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}}$!**

ამოხსენით მაგალითები: იპოვეთ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი წევრი, მნიშვნელი, ზოგადი წევრის ფორმულა და $\boldsymbol{n}$ **წევრის ჯამი** ქვემოთ მოყვანილი გეომეტრიული პროგრესიებისათვის:

ა) $1; 9; 81; \ldots$

ამოხსნა: $\boldsymbol{b_1 = 1; q = 9; b_n = b_1 q^{n-1} = 1 \cdot 9^{n-1} = 9^{n-1}; S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1};}$

$\boldsymbol{S_n = \frac{1 \cdot (9^n - 1)}{9-1} = \frac{9^n - 1}{8};}$

ბ) $5; 30; 180; \ldots$?

გ) $8; 56; 392; \ldots$?

დ) $-11; 22; -44; \ldots$?

ე) $0.2; 0.1; 0.05; \ldots$?

4.5. რიცხვითი მიმდევრობის ზღვარის ცნება და ინტუიციური შინაარსი

განვიხილოთ, რიცხვითი მიმდევრობების მაგალითები:

ა) $1; 2; 3; 4; 5; \ldots; n; \ldots$

ბ) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots$

გ) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \ldots; \frac{1}{n^2}; \ldots$

დ) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \ldots; \frac{n-1}{n}; \ldots$

ე) $\frac{3}{11}; \frac{4}{20}; \frac{9}{26}; \ldots; \frac{2n^2-5n+6}{3n^2+8}; \ldots$

ვ) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots; \frac{1}{2^n}; \ldots$

თითოეული ამ მიმდვრობისათვის შევაფასოთ, თუ, როგორი დინამიკა აქვს ამ მიმდევრობას n - ის „უსასრულოდ“ ზრდისას.

ა) $1; 2; 3; 4; 5; \ldots; n; \ldots$ ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი ერთი ერთეულით მეტია წინა წევრზე, რაც იმას ნიშნავს რომ მიმდევრობა უსასრულოდ იზრდება და არაა შემოსაზღვრული ზემოდან. ასეთ შემთხვევაში, ვამბობთ, რომ ამ მიმდევრობის (ზოგადი წევრის) ზღვარი,

როცა n უსასრულობისაკენ მიისწრაფის, არის უსასრულობა და ამ ფაქტს წერენ შემდეგნაირად:

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty;$$

ბ) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots$ ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი, ნაკლებია წინა წევრზე და მიმდევრობის ზოგადი წევრი, როცა n უსასრულობისაკენ მიისწრაფის, მიისწრაფის ნულისაკენ ანუ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0;$$

გ) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \ldots; \frac{1}{n^2}; \ldots$ ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი, ნაკლებია წინა წევრზე და მიმდევრობის ზოგადი წევრი, როცა n უსასრულობისაკენ მიისწრაფის, მიისწრაფის ნულისაკენ უფრო სწრაფად, ვიდრე წინა მაგალითში ანუ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0;$$

დ) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \ldots; \frac{n-1}{n}; \ldots$ ამ მიმდევრობის ზღვარის საპოვნელად, განვიხილოთ მისი ზოგადი წევრის ზღვარი:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1;$$

რადგან მუდმივის ზღვარი მუდმივის ტოლია, ხოლო $\frac{1}{n}$ მიმდევრობის ზღვარი კი, როგორც ადრე ვნახეთ, ნულის ტოლია;

ე) $\frac{3}{11}; \frac{4}{20}; \frac{9}{26}; \ldots; \frac{2n^2-5n+6}{3n^2+8}; \ldots$ ამ მიმდევრობის ზღვარის საპოვნელად, გამოვთვალოთ მისი ზოგადი წევრის ზღვარი:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-5n+6}{3n^2+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2}-\frac{5n}{n^2}+\frac{6}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{8}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{1}-\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}{\frac{3}{1}+\frac{8}{n^2}} = \frac{2}{3}.$$

ვ) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots; \frac{1}{2^n}; \ldots$ განვიხილოთ, ხარისხოვანი ფუნქციის ზღვარი:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

საზოგადოდ, როცა $0 < q < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. ეს შედეგი ჩვენ დაგვჭირდება უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულის გამოყვანისას.

4.5.1. უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამი

განსაზღვრება. გეომეტრიულ პროგრესიას ეწოდება **უსასრულოდ კლებადი,** თუ პროგრესიის მნიშვნელი აკმაყოფილებს უტოლობას: $0 < q < 1$.

მაგალითად: $1; \frac{2}{3}; \frac{4}{9}; \ldots; \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}; \ldots$ ამ გეომეტრიული პროგრესიის, მნიშვნელია $q = \frac{2}{3} < 1$. ასეთი გეომეტრიული პროგრესიისათვის აზრი აქვს „უსასრულო ჯამსაც“ ანუ $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \ldots$

გამოვიყვანოთ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულა. ამისათვის, განვიხილოთ გეომეტრიული პროგრესიის n წევრთა ჯამის ფორმულა: $\boldsymbol{S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}}$.

განსაზღვრება. უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის **წევრთა ჯამს** უწოდებენ, გეომეტრიული პროგრესიის n წევრთა ჯამის ზღვარს, როცა წევრთა n რიცხვი უსასრულობისაკენ მიისწრაფის:

$$\boldsymbol{S = \lim_{n\to\infty} S_n}.$$

თუ ამ ფორმულაში შევიტანთ $\boldsymbol{S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}}$ **მნიშვნელობას და გავითვალისწინებთ, რომ $\boldsymbol{0 < q < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0}$, მაშინ მივიღებთ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულას:**

$$\boldsymbol{S = \frac{b_1}{1-q}}.$$

გამოვიყენოთ ეს ფორმულა და ვიპოვოთ ჯამი:

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \ldots$$

ამ მაგალითში, $\boldsymbol{b_1 = 1}$; $\boldsymbol{q} = \frac{2}{3}$, მაშასადამე, წევრთა ჯამი იქნება:

$\boldsymbol{S = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3.}$

დავალება: იპოვეთ წევრთა ჯამი პროგრესიებში: ა) $\boldsymbol{b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$;

ბ) $\boldsymbol{b_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}$; გ) $\boldsymbol{b_n = 3 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}}$; დ) $\boldsymbol{b_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{29}\right)^{n-1}}$;

ე) $\boldsymbol{b_n = 11 \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^{n-1}}$.

4.6. მარტივი და რთული პროცენტის დარიცხვის წესი და ეკონომიკური შინაარსი

განვიხილოთ საბანკო სესხის აღებისას, ბანკების მიერ მოგების მიღების წესი.

როცა ბანკი სესხს გასცემს მოკლე ვადით (ანუ ერთ წლამდე ვადით), მაშინ ბანკს შეუძლია შემოგთავაზოთ სესხის ვალის დარიცხვის **მარტივი საპროცენტო განაკვეთი** ანუ თქვენი ვალი, გაიზრდება შეთანხმებული დროის მონაკვეთისათვის **ერთიდაიგივე თანხით და ეს თანხა წარმოადგენს აღებული საწყისი ვალის შეთანხმებულ პროცენტს.**

გამოვიყვანოთ მარტივი დარიცხვის შემთხვევის შესაბამისი ფორმულა. ვთქვათ, ავიღეთ კრედიტი P ლარი, t დროის პერიოდის განმავლობაში და დროის ყოველ პერიოდში დარიცხვა ხდება სარგებლის მარტივი $r\%$ - იანი განაკვეთით, მაშინ ყოველი პერიოდის გასვლის შემდეგ, ვალი იზრდება ერთი და იმავე $\frac{P}{100} \cdot r$ ლარით. ამიტომ პირველი პერიოდის გასვლის შემდეგ, გადასახდელი გვექნება:

$S_1 = P + \frac{P}{100} \cdot r = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ ლარი.

მეორე პერიოდის გასვლის შემდეგ, ჩვენი ვალი შეადგენს:

$S_2 = S_1 + \frac{P}{100} \cdot r = P\left(1 + \frac{r}{100}\right) + \frac{P}{100} \cdot r = P\left(1 + \frac{2r}{100}\right)$ ლარს;

მესამე პერიოდის ბოლოს ვალი იქნება:

$S_3 = S_2 + \frac{P}{100} \cdot r = P\left(1 + \frac{2r}{100}\right) + \frac{P}{100} \cdot r = P\left(1 + \frac{3r}{100}\right)$ლარი

და ა.შ. t პერიოდის შემდეგ, ვალი შეადგენს:

$S = P\left(1 + \frac{t \cdot r}{100}\right)$ ლარს.

ამრიგად, **მივიღეთ მარტივი საპროცენტო განაკვეთით კრედიტის ვალის გამოსაანგარიშებელი ფორმულა:** $\boldsymbol{S = P\left(1 + \frac{t \cdot r}{100}\right)}$.

განვიხილოთ **მაგალითი: 5000ლ გაცემულია სესხად 6 თვით, სარგებლის მარტივი 3% - იანი განაკვეთით. დარიცხვის პერიოდია 1 თვე. იპოვეთ ა) დაგროვილი თანხა; ბ) რამდენი პროცენტით გაიზრდება საწყისი კაპიტალი?**

ამოხსნა: ამოცანის პირობით, საწყისი კაპიტალი $P = 5000$ლ, თვეების პერიოდების რაოდენობაა $t = 6$, ხოლო სარგებლის მარტივი განაკვეთია $r = 3\%$. ა) დაგროვილი თანხის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ შესაბამისი ფორმულა:

$$\boldsymbol{S = P\left(1 + \frac{t \cdot r}{100}\right) = 5000 \cdot \left(1 + \frac{6 \cdot 3}{100}\right) = 5000 \cdot 1.18 = 5900} \text{ **ლარი.**}$$

ბ) გამოვთვალოთ **ბანკის მოგება:** 5900-5000=900 ლ.

ახლა გამოვთვალოთ 5000 - ის რამდენი პროცენტია 900 ლ.

$$\boldsymbol{\frac{900}{5000} \cdot 100\% = 18\%.}$$

ამრიგად, ბანკის საწყისი კაპიტალი **გაიზარდა $\boldsymbol{18\%}$ - ით.**

ახლა განვიხილოთ სესხის დაგროვება რთული პროცენტით.

გრძელვადიან საფინანსო-საკრედიტო ოპერაციებში, თუ პროცენტის გადახდა არ ხდება მათი დარიცხვისთანავე და ისინი ემატებიან ვალს, მაშინ სესხის დაგროვება ხდება რთული პროცენტით. მარტივი პროცენტისაგან განსხვავებით, პროცენტების დარიცხვა ხდება წინა დავალიანებაზე და ამიტომ მისი დაგროვება ხდება აჩქარებით. რთული პროცენტით დაგროვება შეიძლება განვიხილოთ, როგორც დაბანდებული სახსრების პერიოდული რეინვესტირება მარტივი პროცენტით დარიცხვის ერთი პერიოდით.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი წლის ბოლოს არსებულ თანხაზე. ვთქვათ, საწყისი თანხაა P, ხოლო $r\%$ წლიური განაკვეთი, მაშინ ერთი წლის ბოლოს დავალიანება შეადგენს:

$$S_1 = P + \frac{P}{100} \cdot r = P\left(1 + \frac{r}{100}\right),$$

მეორე წლის ბოლოს კი:

$$S_2 = P\left(1+\frac{r}{100}\right) + P\left(1+\frac{r}{100}\right)\frac{r}{100} = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2,$$

და ა.შ. $\boldsymbol{t}$ **დროის პერიოდის შემდეგ, დავალიანება შეადგენს:**

$$\boldsymbol{S = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t}.$$

განვიხილოთ **მაგალითი: ბანკმა სესხად გასცა 1000ლარი, 5 წლის ვადით 10% - იანი წლიური სარგებელით. იპოვეთ დაგროვილი თანხა და მოგების პროცენტი.**

ამოხსნა: ჩვენს შემთხვევაში, საინვესტიციო თანხაა $P = 1000$ლარი, რთული საპროცენტო განაკვეთია $r = 10\%$, ხოლო დროის პერიოდია $t = 5$ წელი, მაშასადამე

$$\boldsymbol{S = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t = 1000 \cdot (1+0.1)^5 = 1610.51}\text{ლ.}$$

მაშინ, მოგება იქნება: $\boldsymbol{1610.51 = 1000 = 610.51}$**ლ.**

შესაბამისად, მოგების პროცენტი იქნება:

$$\boldsymbol{\frac{610.51}{1000} \cdot 100\% \approx 61\%}.$$

V თავი. კინგსელის VII კლასის ტესტები. საოლმპიადო ამოცანების განხილვა

საქართველოში, დიდი პოპულარობით სარგებლობს კინგსელის ტესტები სხვადასხვა კლასებისათვის. თუ, წინა კლასებში ბავშვებს არ ქონდათ საშუალება, რომ გაცნობოდნენ კინგსელის ტესტებს, მათ გაუჭირდებათ VII კლასის ტესტების დამოუკიდებლად ამოხსნა. აქედან გამომდინარე, მიზანშეწონილად მივიჩნიეთ განგვეხილა ამ ტესტების ამოხსნის გზები. ასევე, მნიშვნელოვანია სხვადასხვა ქვეყნების საოლიმპიადო გამოცდილებაც მათემატიკაში.

5. კინგსელის ტესტების ამოხსნა. საოლიმპიადო ამოცანების განხილვა

1. რამდენი ორნიშნა და 3-ის ჯერადი რიცხვი არსებობს, რომლის ჩანაწერშიც გვხვდება ციფრი 1 - იანი ?

ამოხსნა: თუ, ორნიშნა რიცხვის ჩანაწერში ერთ-ერთი ციფრია 1 და ეს ორნიშნა რიცხვი უნაშთოდ იყოფა 3-ზე, მაშინ მეორე ციფრი ისეთი უნდა იყოს, რომ ციფრთა ჯამი იყოფოდეს 3-ზე (გაყოფადობის ნიშნის თანახმად), მაშასადამე, გვაქვს შემდეგი რიცხვები:

12; 15; 18.

და რადგან 1-იანი, შეიძლება იყოს ამ ორნიშნა რიცხვის მეორე ციფრიც, გვაქვს კიდევ სამი რიცხვი:

21; 51; 81.

პასუხი: სულ გვაქვს 6 ასეთი რიცხვი.

2. სკოლაში 100-ზე ნაკლები მეშვიდეკლასელია. მათი განაწილება შეიძლება როგორც 15, ასევე, 18 მოსწავლიან ჯგუფებად. რამდენი მეშვიდეკლასელია სკოლაში ?

ამოხსნა: მოსწავლეთა განაწილება შეიძლება 15 და 18 კაციან ჯგუფებად, მაშასადამე, მოსწავლეთა რაოდენობა იყოფა 15-ზე და 18-ზე უნაშთოდ, რაც იმას ნიშნავს, რომ გაიყოფა მათ უმცირეს საერთო ჯერადზეც. $15 = 3 \cdot 5;\ \ 18 = 3^2 \cdot 2 \Rightarrow [15; 18] = 3^2 \cdot 2 \cdot 5 = 90.$ შემდეგი ჯერადი უკვე მეტი გამოვა 100-ზე, მაშასადამე, კლასში ყოფილა 90 მოსწავლე.

პასუხი: 90 მოსწავლე.

3. ორნიშნა რიცხვის ათეულებისა და ერთეულების ციფრებს ადგილები გაუცვალეს. შემდეგ, ახლად მიღებული რიცხვი გამოაკლეს თავდაპირველ რიცხვს. რაზე იყოფა აუცილებლად ეს სხვაობა?

ამოხსნა: ორნიშნა რიცხვი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$\overline{ab} = 10a + b.$ თუ, ციფრებს შევუცვლით ადგილებს, მაშინ მივიღებთ რიცხვს: $\overline{ba} = 10b + a.$ ამ ორი რიცხვის სხვაობა იქნება:

$\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9(a - b).$

მივიღეთ, რომ $\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b) \vdots 9.$

პასუხი: ასეთი სხვაობა ყოველთვის იყოფა 9-ზე.

4. რამდენი ისეთი ორნიშნა რიცხვი არსებობს, რომელიც მეტია მისი ციფრების გადაადგილებით მიღებული ორნიშნა რიცხვის გასამკეცებულზე?

ამოხსნა: განვიხილოთ ნებისმიერი ორნიშნა რიცხვი:

$\overline{ab} = 10a + b.$ თუ, ციფრებს შევუცვლით ადგილებს, მაშინ მივიღებთ რიცხვს: $\overline{ba} = 10b + a.$ ამოცანის პირობიდან გამომდინარე:

$10a + b > 3(10b + a) \Leftrightarrow 7a > 29b.$

ცხადია, რომ პირველი ციფრი არ შეიძლება იყოს ნული. განვიხილოთ, შესაძლო შემთხვევები ცხრილში:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	0	0	0	0	$0 \vee 1$	$0 \vee 1$	$0 \vee 1$	$0 \vee 1$	$0 \vee 1 \vee 2$

ცხადია, რომ ჩვენს ამოცანას აკმაყოფილებენ, მხოლოდ შემდეგი რიცხვები:

$51; 61; 71; 81; 91; 92.$ მაშასადამე, ჩვენი ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს მხოლოდ ეს 6 ორნიშნა რიცხვი.

პასუხი: 6.

5. თორმეტმა ადამიანმა იყიდა 12 პური. თითო მამაკაცმა იყიდა ორი პური, თითო ქალმა ნახევარი, ხოლო ბავშვმა მეოთხედი პური. რამდენმა მამაკაცმა და რამდენმა ბავშვმა იყიდა პური?

ამოხსნა: ვთქვათ კაცების რიცხვია m , ქალებისა n , ბავშვებისა $k.$ მაშინ, ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$m + n + k = 12;\ \ 2m + 0.5n + 0.25k = 12.$

მაშინ, პირველი განტოლებიდან განვსაზღვროთ n და შევიტანოთ მეორე განტოლებაში. მივიღებთ, რომ $2m + 0.5(12 - m - k) + 0.25k = 12$ ანუ $1.5m - 0.25k = 6.$ გავამრავლოთ ეს ტოლობა 4-ზე, რომ განვთავისუფლდეთ ათწილადებისაგან. მაშინ, მივიღებთ რომ

$6m - k = 24 \Leftrightarrow m = \frac{24+k}{6} = 4 + \frac{k}{6}$.

რადგან ადამიანთა რაოდენობა არ შეიძლება რომ არ იყოს ნატურალური რიცხვი, მივიღებთ რომ $k = 6; m = 5$.

პასუხი: 5 მამაკაცი და 6 ბავშვი.

6. წიგნში მოთხრობა იწყება 70-ე გვერდიდან და მთავრდება 140-ე გვერდზე. რამდენი ციფრია გამოყენებული ამ მოთხრობის გვერდების გადასანომრად ?

ამოხსნა: ამ მოთხრობის გვერდების გადასანომრად გამოყენებული ორნიშნა რიცხვების რაოდენობაა $99 - 69 = 30$, მათ ჩასაწერად საჭიროა გამოვიყენოთ $30 \cdot 2 = \mathbf{60}$ **ციფრი.** ამას გარდა, გვერდების გადასანომრად გამოყენებულია $140 - 99 = 41$ სამნიშნა რიცხვი, რომელთა ჩასაწერადაც გამოყენებული ციფრების რაოდენობაა: $41 \cdot 3 = \mathbf{123}$.

მაშასადამე, სულ გამოყენებულია: $\mathbf{60 + 123 = 183}$ ციფრი.

პასუხი: 183.

7. მაკამ 5კგ 7 ლარიანი და 3კგ 5 ლარიანი შოკოლადი ერთმანეთში აურია. რა ღირს 1კგ შოკოლადის ნარევი ?

ამოხსნა: არევის შემდეგ გვექნება $5 + 3 = 8$კგ შოკოლადი, რომლის საერთო ფასი იქნება: $5 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 35 + 15 = 50$ ლარი. მაშინ, 1კგ ნარევის ფასი იქნებოდა: $50 : 8 = 6.25$ ლარი.

პასუხი: 6.25ლ.

8. მასწავლებელმა მოსწავლეები დაყო 7 ჯგუფად, ისე რომ თითოეულ ჯგუფში კენტი რაოდენობის წევრი აღმოჩნდა. ჩამოთვლილთაგან: 49; 31; 27; 28 რომლის ტოლი არ შეიძლება ყოფილიყო მოსწავლეთა რაოდენობა ?

ამოხსნა: $\mathbf{49 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7}$; $\mathbf{31 = 7 + 7 + 7 + 3 + 3 + 3 + 1}$;

$\mathbf{27} = 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5$; **28 ლუწი რიცხვია და კენტი რაოდენობის კენტი ჯგუფის სახით არ წარმოიდგინება.**

პასუხი: 28.

9. რამდენი წუთია 3სთ - ის $\frac{1}{60}$ ნაწილი ?

ამოხსნა: 3სთ = 180წთ; 180წთ - ის $\frac{1}{60}$ნაწილი = $180 \cdot \frac{1}{60} = \mathbf{3}$**წთ.**

პასუხი: 3წთ.

10. m - ის 9 - ზე გაყოფისას, მიიღება ნაშთი 8. რა ნაშთი მიიღება $(m + 1)$ - ის 9 - ზე გაყოფისას ?

ამოხსნა: m - ის 9 - ზე გაყოფისას, მიიღება ნაშთი 8, მაშასადამე ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$m = 9k + 8 \Leftrightarrow m + 1 = 9k + 8 + 1 = 9(k + 1) \vdots 9$.

მაშასადამე, **$(m + 1)$ - ის 9 - ზე გაყოფისას ნაშთში გვექნება 0.**

პასუხი: 0.

11. რა ციფრით ბოლოვდება ჯამი: $\mathbf{16^3+17^6+11^4}$?

ამოხსნა:

16^3 ბოლოვდება ციფრით 6;

17^6 ბოლოვდება ციფრით 9;

11^4 ბოლოვდება ციფრით 1.

მაშინ, ჯამი: $\mathbf{16^3+17^6+11^4}$, დაბოლოვდება ციფრით 6,

რადგან 6 + 9 + 1 = . . .6.

პასუხი: 6.

12. $x; y;$ **z სამი ერთმანეთისაგან განსხვავებული ნატურალური რიცხვია, რომელთაგან თითოეული ნაკლებია ან ტოლი 15 - ზე. იპოვეთ** $\frac{x+y}{z}$ **გამოსახულების უმცირესი მნიშვნელობა.**

ამოხსნა: $min\frac{x+y}{z}=\frac{x_{min}+y_{min}}{z_{max}}=\frac{1+2}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

პასუხი: $\frac{1}{5}$.

13. **აუზი ნახევრადაა სავსე. დაიწყეს მისგან წყლის თანაბარი გამოშვება. 3სთ - ის შემდეგ, აუზში დარცენილი იყო 600ლ წყალი, ხოლო 5სთ - ის შემდეგ კი - 300ლ. რამდენ ხანში დაიცლება სავსე აუზი ?**

ამოხსნა: ვთქვათ, აუზის მოცულობაა Vლ, ხოლო წყლის გამოშვების სიჩქარეა xლ/სთ. მაშინ, ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე, მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$0.5V-3x=600; 600-2x=300$. მეორე განტოლებიდან ვიპოვით წყლის გამოშვების სიჩქარეს: $x=150$ლ/სთ. თუ შევიტანთ ამ მნიშვნელობას პირველ განტოლებაში, მაშინ ვიპოვით აუზის მოცულობას: $V=2100$ლ. თუ, გავითვალისწინებთ დაცლის სიჩქარეს $x=150$ლ/სთ, მაშინ მივიღებთ რომ აუზის დაცლას დასჭირდება:

$2100:150=$ **14სთ.**

პასუხი: 14სთ.

14. **სამმა მეგობარმა ესროლა სამიზნეს, რომელიც სამი კონცენტრული წრისგან შედგება. პირველმა ორი ისარი მოახვედრა მეორე წრეში და ერთი მესამე წრეში. მეორემ - ორი ისარი მოახვედრა პირველ წრეში და ერთი მესამეში, ხოლო მესამე მეგობარმ ერთი პირველში, ერთი მეორეში და ერთიც მესამეში. პირველმა მეგობარმა დააგროვა 29 ქულა, მეორემ 43. რამდენიქულა დააგროვა მესამე მეგობარმა ?**

ამოხსნა: პირველ წრის ქულა იყოს x, მეორისა y ქულა, ხოლო მესამე წრისა z ქულა. მაშინ, ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ $2y+z=29$; $2x+z=43$. თუ ამ განტოლებებს შევკრებთ, მივიღებთ რომ

$2x + 2y + 2z = 72$ ანუ $x + y + z = \mathbf{36}$, რაც შეესაბამება მესამე მსროლელის დაგროვილ ქულებს.

პასუხი: 36.

15. ნავთით გავსებული ბოთლი იწონის 1000გ - ს. იგივე ბოთლი გავსებული მჟავით იწონის 1600გ - ს. იპოვეთ ბოთლის წონა, თუ მჟავა ორჯერ მძიმეა ნავთზე.

ამოხსნა: ვთქვათ, ბოთლი იწონის x გ - ს, ნავთი - y გ - ს, ხოლო მჟავა z გ - ს. მაშინ, ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლებები:

$x + y = 1000; x + z = 1600; z = 2y.$ მაშინ, მივიღებთ რომ $\boldsymbol{x = 400}$გ.

პასუხი: $\boldsymbol{x = 400.}$

16. თუ ორნიშნა რიცხვს მის მესამედს მივუმატებთ, მივიღებთ მთელ რიცხვს, რომელიც მეტია 72 - ზე და ნაკლებია 79 - ზე. იპოვეთ ეს რიცხვი.

ამოხსნა: ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, მოცემული რიცხვი იყოფა სამზე. მივიღებთ რომ

$$72 < x + \frac{x}{3} < 79 \Leftrightarrow 72 < \frac{4}{3}x < 79 \Leftrightarrow 72 : \frac{4}{3} < x < 79 : \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 72 \cdot \frac{3}{4} < x < 79 \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow 54 < x < 59.25.$$

მაშასადამე, რადგან საძიებელი რიცხვი იყოფა სამზე და აკმაყოფილებს მიღებულ ორმაგ უტოლობას, საძიებელი რიცხვი ყოფილა 57.

პასუხი: 57.

17. იპოვეთ უმცირესი მთელი დადებითი რიცხვი, რომელშიც ყველა ციფრია გამოყენებული და იყოფა 5 - ზე.

ამოხსნა: რადგან მოცემული რიცხვი იყოფა 5 - ზე, ის ბოლოვდება ან ნულით ან 5 - ით. რადგან უნდა იყოს უმცირესი, ჯობია ამ ორი რიცხვიდან ბოლო ციფრი იყოს 5. პირველი ციფრი უნდა იყოს 1, შემდეგი 0, 2; . . .
რაც იმას ნიშნავს, რომ ამოცანის პირობებში, უმცირესი რიცხვი იქნება: $\mathbf{1023467895.}$

პასუხი: $\mathbf{1023467895.}$

18. იპოვეთ $\mathbf{5 \cdot 10^4}$ რიცხვის მომდევნო რიცხვი.

ამოხსნა: $\mathbf{5 \cdot 10^4 + 1 = 50001.}$

პასუხი: $\mathbf{50001}$

19. იპოვეთ $\boldsymbol{a}$ - ს ყველა ნატურალურ მნიშვნელობათა ჯამი, რომელთათვისაც $\boldsymbol{(a - 2) \cdot x = 12}$ განტოლების ფესვი ნატურალური რიცხვია.

ამოხსნა: $(a-2)\cdot x=12 \Leftrightarrow x=\frac{12}{a-2}$. ეს წილადი რომ ნატურალური რიცხვი იყოს, მისი მნიშვნელი უნდა წარმოადგენდეს 12 - ის გამყოფს ანუ $(a-2)\in\{1;2;3;4;6;12\}$. მაშინ, ცხადია რომ $a\in\{3;4;5;6;8;14\}$.

ამ მნიშვნელობათა ჯამი იქნება: $3+4+5+6+8+14=40$.

პასუხი: 40.

20. თუ $\boldsymbol{a}$ არის კენტი და $\boldsymbol{b}$ ლუწი, შემდეგი რიცხვებიდან: ა) $\boldsymbol{ab+b^2}$; ბ) $\boldsymbol{b^2+2a^2}$; გ) $\boldsymbol{3ab+b^2}$; დ) $\boldsymbol{a^2+3ab}$, რომელია კენტი ?

ამოხსნა: კენტია დ) $\boldsymbol{a^2+3ab}$, რადგანაც a^2 კენტია და $3ab$ კი ლუწი.

პასუხი: $\boldsymbol{a^2+3ab}$.

21. ორნიშნა რიცხვის ერთ-ერთი ციფრი წაშალეს და მიიღეს პირვანდელზე 31 - ჯერ ნაკლები რიცხვი. იპოვეთ, ასეთი რიცხვებიდან უმცირესისთვის, პირვანდელსა და წაშლის შემდეგ რიცხვს შორის სხვაობა.

ამოხსნა: ვთქვათ, საწყისი ორნიშნა რიცხვი იყო $\overline{ab}=10a+b$. თუ, წაშალეს პირველი ციფრი, მაშინ მიიღებდნენ b რიცხვს, რომელიც პირობის თანახმად 31 - ჯერ ნაკლებია საწყის რიცხვზე ანუ მივიღებთ, რომ $10a+b=31b \Leftrightarrow 10a=30b \Leftrightarrow a=3b$; ამ პირობას კი აკმაყოფილებენ მხოლოდ შემდეგი ორნიშნა რიცხვები: $31; 62; 93$. ამ რიცხვებიდან უმცირესია 31. პირველი ციფრის წაშლის შემდეგ დაგვრჩება 1, მაშასადამე, მათი სხვაობა იქნება: 31 – 1 **= 30.**

პასუხი: 30.

22. იპოვეთ რაოდენობა 1 - დან 100 - მდე ყველა იმ ნატურალური რიცხვების რაოდენობა, რომლებიც იყოფა მხოლოდ 2 - ზე ან მხოლოდ 3 - ზე.

ამოხსნა: 2 - ზე იყოფიან მხოლოდ ლუწი რიცხვები, რომელთა რაოდენობა 1 - დან 100 - მდე რიცხვებში, არის **50**. ახლა დავთვალოთ, რამდენი რიცხვია ამ დიაპაზონში, რომელიც 3 -ზე იყოფა და 2 - ზე არა.

ასეთი რიცხვებია: 3; 9; 15; . . .; 99. ეს რიცხვები შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით: $6n-3$. ამ ფორმულაში n შეესაბამება ამ რიცხვების ადგილის ნომერს, ვნახოთ მერამდენეა 99. მაშინ მივიღებთ,

რომ $6n-3=99 \Leftrightarrow 6n=102 \Leftrightarrow n=\mathbf{17}$. მაშასადამე, ამოცანის პირობებს აკმაყოფილებს: $\mathbf{50+17=67}$ **ნატურალური რიცხვი.**

პასუხი: 67.

23. $\boldsymbol{ABC}$ **სამკუთხედში** $\boldsymbol{AD}=\mathbf{9}$**სმ მედიანაა.** $\boldsymbol{AC}=\mathbf{13}$**სმ,** $\boldsymbol{BC}=\mathbf{15}$**სმ. იპოვეთ** $\boldsymbol{ADC}$ **სამკუთხედის პერიმეტრი.**

ამოხსნა: ADC სამკუთხედის პერიმეტრი იქნება:

$\boldsymbol{AD+AC+\frac{BC}{2}=29.5}$**სმ.**

პასუხი: $\mathbf{29.5}$**სმ.**

24. ორშაბათს სამი თბომავალი ერტდროულად გავიდა ბათუმის პორტიდან. ცნობილია, რომ პირველი გადის 3 დღეში ერთხელ, მეორე 4 დღეში ერთხელ, მესამე კი 6 დღეში ერთხელ. კვირის რომელ დღეს მოუწევთ თბომავლებს ერთდროულად გასვლა ?

ამოხსნა: ცხადია, რომ თბომავლების განრიგი დაემთხვევა მათი ციკლების უმცირესი საერთო ჯერადი დღის შემდეგ. რადგან $[3;4;6]=12$, ცხადია, რომ განრიგების დამთხვევა მოხდება **პარასკევს**.

პასუხი: პარასკევს.

25. დედამ შვილებს დაურიგა შოკოლადები. გოგონას მისცა შოკოლადების ნახევარი და კიდევ ერთი ცალი. ბიჭს დარჩენილის ნახევარი და კიდევ, ბოლო 5 ცალი. სულ რამდენი შოკოლადი დაურიგა დედამ შვილებს ?

ამოხსნა: ვთქვათ სულ იყო x რაოდენობის შოკოლადი. მაშინ, გოგონასთვის მიუცია: $\frac{x}{2}+1$. ამის შედეგად, დარჩა კიდევ

$x-\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{x}{2}-1$. მაშინ, ბიჭისთვის მიუცია: $\frac{\frac{x}{2}-1}{2}+5$. რაც იმას ნიშნავს, რომ შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლება:

$\frac{x}{2}+1+\frac{x}{4}-\frac{1}{2}+5=x \Leftrightarrow \boldsymbol{x=22.}$

პასუხი: დედას ქონია 22 შოკოლადი.

26. სამი ერთნაირი ვაშლი უფრო მძიმეა, ვიდრე 4 ერთნაირი მსხალი. რომელი უფრო მძიმეა: 4 ვაშლი, თუ 5 მსხალი ?

ამოხსნა: ვთქვათ, ერთი ვაშლი იწონის xგ - ს, ერთი მსხალი კი yგ - ს. მაშინ $3x > 4y \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}y \Leftrightarrow 4x > \frac{16}{3}y \Leftrightarrow 4x > 5\frac{1}{3}y$.

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ **4 ვაშლი უფრო მძიმეა, ვიდრე 3 მსხალი.**

პასუხი: 4 ვაშლი უფრო მძიმეა, ვიდრე 3 მსხალი.

27. თუ პირველი დეკემბერი იქნება სამშაბათი, მაშინ რა დღე იქნება მომავალი წლის პირველი იანვარი ?

ამოხსნა: პირველი დეკემბერი თუ სამშაბათია, მაშინ ყოველი 7 დღის შემდეგ იქნება ისევ სამშაბათი ანუ $1 + 4 \cdot 7 = 29$ დეკემბერს კვლავ სამშაბათი იქნება, რაც იმას ნიშნავს, რომ **პირველი იანვარი იქნება პარასკევი.**

პასუხი: პარასკევი.

28. ლუწია, თუ კენტი ორი მომდევნო ნატურალური რიცხვის ნამრავლი ?

ამოხსნა: ორი მომდევნო ნატურალური რიცხვიდან ერთი კენტია და ერთი ლუწი, მაშასადამე, მათი **ნამრავლი იქნება ლუწი.**

პასუხი: ლუწი.

29. საჭადრაკო ტურნირში 7 კაცი მონაწილეობდა. ყველა ყველას თითოჯერ ეთამაშა. რამდენი პარტია გათამაშდა სულ ?

ამოხსნა: რადგან თითოეულმა ეთამაშა სხვა 6 მონაწილეს, 7 მონაწილე ჩაატარებდა $7 \cdot 6 = 42$ პარტიას, თუმცა, ამ ანგარიშში უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ერთ პარტიას 2 მოთამაშე თამაშობს, მაშასადამე, გათამაშებული პარტიების რაოდენობა იქნება ორჯერ ნაკლები ანუ სულ **გათამაშდებოდა 21 პარტია.**

პასუხი: 21.

30. თუ რიცხვი 9 - ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს 2 - ს, მაშინ რა ნაშთს მოგვცემს ამ რიცხვის ციფრთა ჯამი 9 - ზე გაყოფისას ?

ამოხსნა: რადგან რიცხვი 9 - ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევა 2 - ს, მისი ზოგადი სახეა $9k + 2$. ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი n ნიშნა რიცხვი:

$$\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n = 9k + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_n + 9n = 9k + 2 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 9(k - n) + 2.$$

მაშასადამე, ასეთი რიცხვის **ციფრთა ჯამიც 9 - ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევა 2 - ს.**

პასუხი: 2.

31. დათომ 96 გვერდიანი რვეულის ყველა გვერდი თანმიმდევრულად გადანომრა. რამდენი ციფრის დაწერა მოუხდა მას ?

ამოხსნა: ერთნიშნა რიცხვები გამოიყენა სულ 9 ცალი. ორნიშნა რიცხვების რაოდენობაა: $96 - 9 = 87$, მაგრამ ორნიშნა რიცხვებისთვის გამოყენებულ ციფრთა რაოდენობა იქნება 2 - ჯერ მეტი ანუ $87 \cdot 2 = 174$. რაც იმას ნიშნავს, რომ დათომ გვერდების გადასანომრად გამოიყენა სულ:

$9 + 174 = \mathbf{183}$ **ციფრი.**

პასუხი: 183 ციფრი.

32. წიგნი ღირდა 10ლ და კიდევ თავისი ფასის მესამედი. რამდენი ლარით გაძვირდა წიგნი, თუ ახლა იგი ღირს 12 ლარი და კიდევ თავისი ახალი ფასის მეოთხედი ?

ამოხსნა: რადგან წიგნი ღირდა 10ლ და კიდევ ფასის მესამედი, ცხადია რომ 10ლ არის ფასის ორი მესამედი ანუ თუ, ფასი იყო xლ, მაშინ $\frac{2}{3}x = 10$ ე.ი. $x = 10 : \frac{2}{3} = 15$ლ.

ანალოგიურად, თუ ახლა იგი ღირს 12ლ და კიდევ ახალი ფასის ერთი მეოთხედი, მაშასადამე, 12ლ არის ახალი y ფასის $\frac{3}{4}$ ნაწილი ანუ $\frac{3}{4}y = 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 12 : \frac{3}{4} = 16$ლ.

ეს იმას ნიშნავს, რომ **ფასი გაძვირებულა 1ლ - ით.**

პასუხი: ფასი გაძვირებულა 1ლ - ით.

33. მოცემულია გამოსახულება: 2 2 2 2 2 . რიცხვებს შორის ჩასვით ოთხივე არითმეტიკული მოქმედება +; -; ·; ":"; ისე, რომ მიიღოთ ყველაზე დიდი მნიშვნელობა.

ამოხსნა: $2 \cdot 2 + 2 - 2 : 2 = \mathbf{5}$.

პასუხი: 5.

34. ტაფაზე მხოლოდ 2 კატლეტი ეტევა. კატლეტის ერთი გვერდის შეწვას სჭირდება 5 წუთი. სულ მცირე რა დროში შევწვავთ ამ ტაფაზე 3 კატლეტს ?

ამოხსნა: ჯერ შევწვავთ ორ კატლეტს ერთი მხრიდან (5წთ), შემდეგ, ერთ-ერთ კატლეტს გადავაბრუნებთ და მეორეს მაგივრად დავდებთ მესამე კატლეტს(5წუთი), შემდეგ ეტაპზე, ახალი კატლეტი გადავაბრუნეთ და ოერივე მხარეს შემწვარის ნაცვლად დავდეთ ერთ მხარეს ადრე შემწვარი კატლეტი(5წუთი).

ამგვარად, 3 კატლეტის შესაწვავდ, დაგვჭირდა **15 წუთი.**

პასუხი: 15 წუთი.

35. წილადის მრიცხველი 100 - ით გაზარდეს, მნიშვნელი კი 11 - ჯერ. თუ, წილადის სიდიდე არ შეცვლილა, რა ყოფილა წილადის მრიცხველი ?

ამოხსნა: ვთქვათ, საწისი წილადი იყო: $\frac{m}{n}$, მაშინ ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$\frac{m}{n} = \frac{m+100}{11n} \Leftrightarrow 11m = m + 100 \Leftrightarrow \boldsymbol{m = 10.}$$

პასუხი: 10.

36. შვიდ პოზიციაზე განსხვავებული ციფრები ისე უნდა ჩაწერო, რომ სხვაობა მიიღო რაც შეიძლება პატარა რიცხვი. რას მივიღებთ სხვაობაში:

$**** - ***=?$

ამოხსნა: $1023 - 987 = \mathbf{36.}$

პასუხი: 36.

37. კესომ ჩაიფიქრა რიცხვი, გაამრავლა 7 - ზე, მიღებულს დაუმატა 7, ახლადმიღებული გაყო 7 - ზე და ბოლოს, გამოაკლო 7. შედეგად, კვლავ 7 მიიღო. რა რიცხვი ჩაიფიქრა კესომ ?

ამოხსნა: ვთქვათ, კესომ ჩაიფიქრა x რიცხვი, მაშინ მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{7x+7}{7} - 7 = 7 \Leftrightarrow x + 1 - 7 = 7 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 13.}$$

პასუხი: 13.

38. ქაღალდი 7 ნაწილად დაჭრეს. მერე თითოეული კიდევ 7 ნაწილად. მხოლოდ, ამის შემდეგ მხოლოდ ზოგიერთი - ასევე 7 ნაწილად. რამდენი ნაწილი შეიძლება მიეღოთ ამ პირობების დაცვით ?

ამოხსნა: მას შემდეგ, რაც პირველად დაჭრეს ქაღალდი 7 ნაწილად და შემდეგ,თითოეული კიდევ დაჭრეს 7 ნაწილად, მიიღეს 49 ნაწილი. ამის

შემდეგ, ვთქვათ ამ 49 ნაწილიდან აიღეს $k < 49$ ნაჭერი და კვლავ დაჭრეს ისინი 7 ნაწილად, მაშინ ექნებოდათ: $49 - k + 7k = 49 + 6k$ ნაჭერი.

მაშასადამე, შეიძლებოდა ქონოდათ: $n = 49 + 6k$ ნაჭერი, სადაც $k < 49$ ანუ $\boldsymbol{n} \in \{\mathbf{55}; \mathbf{61}; \mathbf{67}; \mathbf{73}; \ldots; \mathbf{109}; \mathbf{115}; \ldots; \mathbf{337}\}$.

პასუხი: $\boldsymbol{n} \in \{\mathbf{55}; \mathbf{61}; \mathbf{67}; \mathbf{73}; \ldots; \mathbf{109}; \mathbf{115}; \ldots; \mathbf{337}\}$.

39. წრფეთა რა მაქსიმალური რაოდენობა გაივლება სიბრტყეზე მდებარე 11 წერტილზე ? $\boldsymbol{n}$ წერტილზე ?

ამოხსნა: თითოეული წერტილიდან შეიძლება გამოვიდეს წერტილების რაოდენობაზე ერთით ნაკლები წრფე, რადგან თავის თავთან წრფე არ გაივლება, სულ გვაქვს $\boldsymbol{n}$ წერტილი, ე.ი. გაივლება: $\frac{\boldsymbol{n(n-1)}}{\mathbf{2}}$, რადგან თითოეული წრფე 2 წერტილს აერთებს. მაშასადამე, 11 წერტილზე გაივლება: $\frac{11\cdot(11-1)}{2} = \mathbf{55}$ **წრფე.**

პასუხი: $\mathbf{55}$ **წრფე;** $\frac{\boldsymbol{n(n-1)}}{\mathbf{2}}$.

40. ოთხი კალათბურთელის საშუალო ასაკი 21 წელია. სხვა 3 კალათბურთელის კი 28 წელი. შვიდივე ერთ გუნდში გაწევრიანდა. რა იქნება შვიდივეს საშუალო ასაკი ?

ამოხსნა: თუ, ოთხი კალათბურთელის საშუალო ასაკი 21 წელია, მაშინ მათი ასაკების ჯამი იქნება: $21 \cdot 4 = 84$; სხვა 3 კალათბურთელის ასაკების ჯამი იქნება: $28 \cdot 3 = 84$. მაშასადამე, შვიდივე კალათბურთელის ასაკთა საერთო ჯამი იქნება: $84 + 84 = 168$. მაშინ, 7 კალათბურთელის საშუალო ასაკი იქნება: $168 : 7 = \mathbf{24}$ **წელი.**

პასუხი: $\mathbf{24}$ **წელი.**

41. რამდენი ნულით დაბოლოვდება 1 - დან, 33 - ის ჩათვლით ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი ?

ამოხსნა: ნამრავლის ყველა თანამამრავლი დავშალოთ მარტივ მამრავლებად. ნამრავლში ნულს იძლევა ორიანების და ხუთიანების ნამრავლის წყვილები. ცხადია, რომ ნამრავლში ორიანების რაოდენობა მეტია, ვიდრე ხუთიანების (რადგან მოცემულ სიტუაციაში, ლუწი რიცხვების რაოდენობა მეტი იქნება ხუთის ჯერადების რაოდენობაზე). აქედან გამომდინარე, დავთვალოთ ხუთის ჯერადობა ამ ნამრავლში.

ამ შუალედში ხუთის ჯერადებია: $5; 10; 15; 20; 25; 30$. ხუთიანის ჯერადობა ყველა ამ რიცხვში ერთია გარდა 25 - ისა, სადაც ჯერადობა ორია. მაშასადამე, ამ ნამრავლის ბოლოს ნულების რაოდენობა **იქნება: 7.**

პასუხი: 7.

42. ნიკამ წაიკითხა წიგნის მეექვსედი და წასაკითხი დარჩა წაკითხულზე 144 გვერდით მეტი. რამდენგვერდიანია წიგნი ?

ამოხსნა: ვთქვათ, წიგნი არის x გვერდიანი, მაშინ ამოცანის პირობიდან გამომდინარე გვექნება შემდეგი განტოლება:

$\frac{5}{6}x-\frac{1}{6}x=144 \Leftrightarrow \frac{4}{6}x=144 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x=144 \Leftrightarrow \boldsymbol{x=216.}$

პასუხი: 216 გვერდიანი.

43. პატარა სანთელი 7 - ჯერ უფრო სწრაფად იწვის, ვიდრე დიდი სანთელი. ისინი ერთდროულად აანთეს. 7 წუთის შემდეგ პატარა ჩააქრეს საათნახევრის განმავლობაში, შემდეგ, კვლავ აანთეს და სანთლები ერთდროულად ჩაიწვა. პატარა სანთლის ხელმეორედ ანთებიდან რა დროში ჩაიწვა ორივე სანთელი ?

ამოხსნა: ვთქვათ, პატარა სანთელი ჩაიწვება $\boldsymbol{x}$წთ - ში, მაშინ დიდი სანთელი ჩაიწვება $7\boldsymbol{x}$ წთ - ში. 1წთ - ში ჩაიწვება პატარა სანთლის $\frac{1}{x}$ ნაწილი და 7წთ - ში კი $\frac{7}{x}$ ნაწილი. 97წთ - ში ჩაიწვებოდა დიდი სანთლის $\frac{97}{7x}$ ნაწილი. ვთქვათ, პატარა სანთლის ხელმეორედ ანთებიდან სრულ ჩაწვამდე გავიდა tწთ. მაშინ ჩაიწვებოდა პატარა სანთლის$\frac{7+t}{x}$ ნაწილი და დიდი სანთლის $\frac{97+t}{7x}$ ნაწილი. რადგან ორივე სანთელი მთლიანად ჩაიწვა, ეს ორივე სიდიდე ერთმანეთის ტოლია.

მაშასადამე, გვაქვს შემდეგი განტოლება:

$\frac{7+t}{x}=\frac{97+t}{7x} \Leftrightarrow 49+7t=97+t \Leftrightarrow 6t=48 \Leftrightarrow \boldsymbol{t=8.}$

პასუხი: 8წთ.

44. თუ უმცირეს ოთხნიშნა 5 - ის ჯერად რიცხვს, რომელიც სხვადასხვა ციფრებითაა ჩაწერილი, წარმოვადგენთ ხუთი მომდევნო რიცხვის ჯამის სახით, მაშინ იპოვეთ უმცირესი ამ ხუთი რიცხვიდან.

ამოხსნა: ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, ცხადია რომ ასეთი ოთხნიშნა რიცხვია 1025. ვთქვათ, ხუთ მომდევნო რიცხვებს შორის, უმცირესია n, მაშინ მივიღებთ შემდეგ წარმოდგენას:

$n+n+1+n+2+n+3+n+4=1025 \Leftrightarrow 5n+10=1025 \Leftrightarrow \boldsymbol{n=203}.$

პასუხი: 203.

45. ხეივანის სიგრძე 600 მეტრია. მეზობელ ხეებს შორის მანძილია 20 მეტრი. რამდენი ხეა ამ ხეივანში, თუ ხეები ერთ მწკრივადაა ჩარგული ?

ამოხსნა: რადგან ხეივნის სიგრძე 600 მეტრია და ხეებს შორის მანძილი კი 20 მეტრი, სულ გვექნება ხეებს შორის $600:20=30$ ინტერვალი, რაც იმას ნიშნავს, რომ ხეივანში იქნება **31 ხე.**

პასუხი: 31 ხე.

46. მხოლოდ პირველი ონკანი აუზს ავსებს 4 საათში, მხოლოდ მეორე ონკანი კი 6 საათში. რა დროში აავსებს ორივე ონკანი ერთად აუზის $\frac{5}{6}$ ნაწილს ?

ამოხსნა: ერთ საათში პირველი ონკანი აავსებს აუზის $\frac{1}{4}$ ნაწილს, ხოლო მეორე ინკანი კი $\frac{1}{6}$ ნაწილს. ვთქვათ, ორივე ერთდროულად ღიაა t საათის განმავლობაში, მაშინ ამოცანის პირობებიდან გამომდინარე, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$\frac{t}{4}+\frac{t}{6}=\frac{5}{6} \Leftrightarrow 3t+2t=10 \Leftrightarrow \boldsymbol{t=2}.$

პასუხი: 2 სთ.

შინაარსი