რევაზ დანელია, ნანა ჩხაიძე, თამარ კვარაცხელია

მათემატიკა ეკონომისტებისათვის

ს ა ხ ე ლ მ ძ ღ ვ ა ნ ე ლ ო

ბაკალავრის მოსამზადებლად საქართველოს სახელმწიფო
სასოფლო–სამეურნეო უნივერსიტეტის
ეკონომიკურ–ჰუმანიტარული ფაკულტეტის
სტუდენტებისათვის

თბილისი
2008წ.

უმაღლესი მათემატიკის წინამდებარე სახელმძღვანელო შედგენილია საქართველოს სახელმწიფო სასოფლო-სამეურნეო უნივერსიტეტის ეკონომიკურ-ჰუმანიტარული ფაკულტეტის ბაკალავრებისათვის ამჟამად მოქმედი პროგრამის მიხედვით. ნაშრომში უმაღლესი მათემატიკის ამოცანებისა და სავარჯიშოების გვერდით მოცემულია მარტივი ამოცანები ეკონომიკის სფეროდან და ყოველი მათგანი დაწვრილებითაა ამოხსნილი. ამასთან დაკავშირებით წიგნში გადმოცემულია იმ ეკონომიკური ცნებების განსაზღვრებები, რომელიც საჭიროა ეკონომიკური ამოცანების გამოსაკვლევად.

რეცენზენტები: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი როლანდ ომანაძე
ეკონომიკის აკადემიური დოქტორი,
სრული პროფესორი ნუგზარ იოსებაშვილი

რედაქტორი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
სრული პროფესორი ჯემალ როგავა

წინასიტყვაობა

თანამედროვე ეკონომისტებისათვის და აგრეთვე სხვა დარგების სპეციალისტებისათვის აუცილებელია მათემატიკის ზოგიერთი დარგების არაზედაპირული ცოდნა. საბაზრო ეკონომიკის პირობებში ეკონომიკურ სპეციალობებზე მათემატიკის სწავლება ახლებურ მიდგომას მოითხოვს. უკან უნდა მოვიტოვოთ ამ სპეციალობებზე მათემატიკის სწავლების აბსტრაქტულობა, რომლის დროსაც სრულად არ არის გათვალისწინებული ეკონომიკური მეცნიერების თავისებურებანი, რადგან იგი ხშირად ღებულობდა შაბლონური შინაარსის ამოცანების ამოხსნაში ერთფეროვანი ვარჯიშის ხასიათს, რასაც შესაძლოა რაღაც ფორმალური ჩვევების განვითარებისაკენ კი მივყავდით, მაგრამ ხელს არ უწყობდა თავისუფალი აზროვნების განვითარებას. სათანადო ყურადღება არ ექცეოდა მათემატიკაში მიღებული შედეგების გამოყენებას. არადა ეკონომიკაში ასეთი შესაძლებლობანი უამრავია.

საქართველოს სახელმწიფო სასოფლო-სამეურნეო უნივერსიტეტის ეკონომიკის ფაკულტეტის სტუდენტები დღემდე მოკლებულნი არიან უმაღლესი მათემატიკის სახელმძღვანელოს მშობლიურ ენაზე. ასეთი სახელმძღვანელოს საჭიროება კი დიდი ხანია მომწიფდა. სახელმძღვანელოს შედგენისას ვხელმძღვანელობდით ეკონომიკურ ფაკულტეტზე (ბაკალავრიატი) ამჟამად მოქმედი პროგრამით, სადაც უმაღლესი მათემატიკის კურსს (პრაქტიკულის ჩათვლით) ეთმობა 140 საათი. აქედან გამომდინარე სახელმძღვანელოში მოცემული მასალის გადმოცემისას ავტორები უმთავრესად ეყრდნობიან გეომეტრიულ მხარეს (თვალსაჩინოებას) და მკითხველის ინტუიციას. საკითხების მკაცრ ლოგიკურ დასაბუთებას, როგორც ეს ტრადიციულ საუნივერსიტეტო კურსებშია მოცემული ჩვენ არ მივმართავთ.

წიგნში მოცემულია ამოხსნილი ამოცანები და სავარჯიშოები. ჩვენი რჩევაა: სტუდენტმა პირველი დაკვირვებული წაკითხვის შემდეგ დამოუკიდებლად ამოხსნას იგივე ამოცანა თუ სავარჯიშო, რის შედეგადაც იგი დაეუფლება პრაქტიკულ საქმიანობაში წამოჭრილ ამა თუ იმ საკითხის დამოუკიდებლად გადაწყვეტის უნარ-ჩვევებს.

ავტორები დიდ მადლიერების გრძნობით მიიღებენ ყველა იმ შენიშვნას, რომელიც წაადგება ნაშრომის დახვეწას.

თავი I. სიმრავლეთა თეორია. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი. კომბინატორიკა. ფინანსური მათემატიკის ელემენტები

§1. ელემენტარული ცნებები სიმრავლეთა თეორიიდან

სალექციო კურსის პროგრამიდან გამომდინარე, ჩვენს მიზანს არ წარმოადგენს სიმრავლეთა თეორიის გადმოცემა. ვთვლით, რომ მკითხველი იცნობს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს და ამ სიმრავლეში მოქმედებების ძირითად კანონებს. ამიტომ გაკვრით შევეხებით იმ ელემენტარულ ცნებებს სიმრავლეთა თეორიიდან, რომელთა გარეშე გადმოსაცემი კურსის აგება შეუძლებელია.

1. სიმრავლის ცნება მათემატიკის ერთერთი ძირითადი საწყისი ცნებაა. მისი განმარტება უფრო მარტივი ცნებების საშუალებით თითქმის შეუძლებელია. ამიტომ ჩვენ ამ ცნების აღწერით უნდა დავკმაყოფილდეთ. ასე მაგალითად, შეიძლება ვილაპარაკოთ სიბრტყის ყველა წერტილთა სიმრავლეზე, ან რაიმე მრავალკუთხედის ყველა გვერდის სიმრავლეზე და სხვა. სიტყვა **სიმრავლის** ნაცვლად შეიძლება ვიხმაროთ **ერთობლიობა, კლასი, სისტემა** და სხვა. იმ ობიექტებს, რომლებიც ამ სიმრავლეში არიან გაერთიანებული, ამ სიმრავლის ელემენტებს უწოდებენ. სავლდებულო არაა, რომ სიმრავლე მათემატიკური ობიექტების ერთობლიობას წარმოადგენდეს. ასე მაგალითად, შესაძლებელია განვიხილოთ აღებულ მომენტში თბილისის მცხოვრებთა სიმრავლე. ყოველი პირი, რომელიც აღნიშნულ მომენტში თბილისში ცხოვრობს, ჩვენი სიმრავლის ელემენტი იქნება. სიმრავლე განსაზღრულია, როცა ცნობილია ამ სიმრავლის ყველა ელემენტი. სიმრავლის მოცემა შეიძლება ან მასში შემავალი ყველა ელემენტის უბრალო ჩამოთვლით (როცა ეს შესაძლებელია), ან იმ თვისებების დასახელებით, რომელიც ახასიათებს სიმრავლეში შემავალ ყველა ელემენტს.

სიმრავლეებს ავღნიშნავთ დიდი ლათინური ასოებით: ასე მაგალითად: A, B, E, M. ხოლო მის ელემენტებს პატარა ასოებით:

თუ M სიმრავლის ყველა ელემენტის საერთო სახელია e, მაშინ წერენ: $M=\{e\}$.

თუ M სიმრავლე შედგება a, b, c, $d...l$ ელემენტებისაგან, მაშინ წერენ: $M=\{a,b,c,d,..l\}$.

თუ a ობიექტი შედის M სიმრავლეში, ამ გარემოებას ასე ავღნიშნავთ: $a \in M$. რაც იკითხება შემდეგნაირად: „a ეკუთვნის M სიმრავლეს“ ან „a წარმოადგენს M სიმრავლის ელემენტს“

თუ a ობიექტი არაა M სიმრავლის ელემენტი, მაშინ დავწერთ: $a \notin M$ და ვიტყვით „a არ ეკუთვნის M სიმრავლეს“.

ზოგიერთი გამოთქმის გამარტივების მიზნით, შემოაქვთ აგრეთე ე.წ. **ცარიელი სიმრავლის** ცნება, ასე ეწოდება სიმრავლეს, რომელსაც არც ერთი ელემენტი არ გააჩნია. მას აღნიშნავენ $\varnothing$ სიმბოლოთი. მასაშადამე როგორი a ობიექტი არ უნდა ავიღოთ, ყოველთვის გვექნება $a \notin \varnothing$.

ყველა იმ x ელემენტთა სიმრავლე, რომლებსაც გააჩნიათ რაიმე p თვისება, აღინიშნება შემდეგნაირად: $\{x:p\}$. მაგალითად, ყველა იმ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც ნაკლებია 100-ზე ასე აღინიშნება $\{x:\ x \in N, \quad x<100\}$ სადაც N-ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა.

A სიმრავლეს ეწოდება B სიმრავლის **ქვესიმრავლე**, თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის B სიმრავლეს და წერენ: $A \subset B$ (იკითხება „A შედის B-ში). თუ A სიმრავლე არ არის თუ B სიმრავლის ქვესიმრავლე , მაშინ წერენ: $A \not\subset B$.

მიღებულია, რომ ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი A სიმრავლის ქვესიმ-რავლეა. ე.ი. $\varnothing \subset A$.

ცხადია, ნებისმიერი A სიმრავლე თავის თავის ქვესიმრავლეს წარმოადგენს, ე.ი $A \subset A$.

თუ A სიმრავლე B სიმრავლის ქვესიმრავლეა, ხოლო A-ში არსებობს ერთი ელემენტი მაინც, რომელიც B-ს არ ეკუთვნის, მაშინ A-ს ეწოდება B-ს **საკუთრივი ქვესიმრავლე**.

თუ $B \supset A$ და $B \subset A$, მაშინ A და B სიმრავლეებს ტოლი ეწოდება და წერენ $B=A$.

ორი A და B სიმრავლეების **გაერთიანება (ჯამი)** ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც A და B სიმრავლეებიდან ერთერთს მაინც ეკუთვნის და $A \cup B$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ცხადია, რომ $A \cup A=A$.

თუ გვაქვს რამდენიმე სიმრავლე $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, მაშინ ამ სიმრავლეთა გაერთიანება ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ეკუთვნის ერთ-ერთს მაინც მოცემული სიმრავლეებიდან. სიმრავლეთა გაერთიანება აღინიშნება ასე: $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ ან $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

ორი A და B სიმრავლის **თანაკვეთა (ნამრავლი)** ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის, როგორც A ისე B სიმრავლეს და $A \cap B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ახლა ვთქვათ, მოცემულია რამდენიმე სიმრავლე $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, მაშინ ამ სიმრავლეთა თანაკვეთა (ნამრავლი) ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის ეკუთვნის ყველა მოცემულ სიმრავლეს. ამ შემთხვევაში სიმრავლეთა თანაკვეთა ასე აღინიშნება:

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \quad \text{ან} \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k .$$

A და B სიმრავლის **სხვაობა ეწოდება** A სიმრავლის ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც B სიმრავლეს არ ეკუთვნიან და $A \backslash B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ცხადია, რომ თუ $A \cap B = \varnothing$, მაშინ $A \backslash B = A$.

ადვილია ჩვენება, რომ მოქმედებებს სიმრავლეებზე გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

1. $A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A,$ (კომუტაციურობა);
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ასოციაციურობა);
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$ (დისტრიბუციულობა).

განვიხილოთ რაიმე ბუნების ელემენტთა M სიმრავლე და ვიგულისხმოთ, რომ მასში შემავალი ელემენტებისათვის რაიმე ნიშნის მიხედვით დადგენილია გარკვეული რიგი ისე, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. თუ a და b წარმოადგენენ M სიმრავლის სხვადასხვა ელემენტების რაიმე წყვილს, მაშინ ერთ-ერთ მათგანს უფრო დაბალი რიგი აქვს, ვიდრე მეორეს, (ამასთან თუ მაგალითად a-ს უფრო დაბალი რიგი აქვს, ვიდრე b-ს, მაშინ b-ს არ შეიძლება უფრო დაბალი რიგი ჰქონდეს ვიდრე a-ს. ასეთ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვით, რომ M სიმრავლეში დაწესებული რიგის მიხედვით a წინ უსწრებს b-ს, ან b არის a-ს მომდევნო).

2. თუ a-ს უფრო დაბალი რიგი აქვს ვიდრე b-ს, ხოლო b-ს უფრო დაბალი რიგი აქვს ვიდრე c-ს, მაშინ a-ს უფრო დაბალი რიგი აქვს ვიდრე c-ს.

თუ სიმრავლეში შემოღებულია რიგის ცნება, ისე რომ იგი ზემოაღნიშნულ ორ პირობას აკმაყოფილებს, მაშინ მას **დალაგებული სიმრავლე** ეწოდება, ხოლო იმ ნიშანს, რომელიც ამ პირობებს აკმაყოფილებს და გარკვეულ რიგს ამყარებს M სიმრავლის ელემენტებს, შორის **სიმრავლის დალაგების წესი** ჰქვია.

თუ a-ს უფრო დაბალი რიგი აქვს ვიდრე b-ს ჩვენ დავწერთ $a \prec b$ (იკითხება: a წინ უსწრებს b-ს). ამ სიმბოლოს გამოყენებით ზემოთაღნიშნული ორი პირობა, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს სიმრავლის დალაგების წესი შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

1) თუ $a \neq b$ და $a,b \in M$ მაშინ $a \prec b$ ან $a \succ b$ ამასთან, როცა $a \prec b$, შეუძლებელია გვქონდეს $b \prec a$.
2) თუ $a \prec b$ და $b \prec c$ მაშინ $a \prec c$.

მაგალითად, ვთქვათ M აღნიშნავს სხვადასხვა ასაკის ადამიანთა ჯგუფს. განვიხილოთ ამ სიმრავლის ორი ელემენტი, ე.ი. ორი პიროვნება ჩვენი ჯგუფიდან და მას, ვინც უფრო ახალგაზრდაა, დაბალი რიგი მივანიჭოთ, მეორესთან შედარებით; ეს წესი M სიმრავლეს დალაგებულ სიმრავლედ აქცევს და სიმრავლის დალეგების წესს განსაზღვრავს ასაკი.

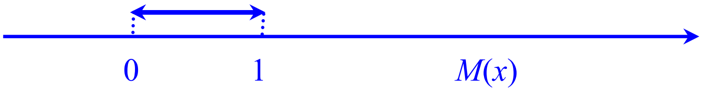
2. ნამდვილ რიცხვათა სიმრავლე. რადგან ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ძირითადი თვისებები და არითმეტიკული მოქმედებები ნამდვილ რიცხვებზე მკითხველისათვის ცნობილია მათემატიკის სასკოლო კურსიდან, ამიტომ ჩვენ მათზე არ შევჩერდებით. ავღნიშნოთ მხილოდ შემდეგი ორი თვისება:

1. **დალაგებულობა.** თუ $x \neq y$ მაშინ ან $x<y$, ან $x>y$.
2. **უწყვეტობა.** X და Y ნამდვილ რიცხვთა ორი სიმრავლეა, თუ ნებისმიერი $x \in X$ და $y \in Y$ რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა $x \leq y$, არსებობს ერთი მაინც ისეთი C რისხვი, რომ ყოველი $x \in X$ და $y \in Y$ რიცხვებისათვის სრულდება უტოლობა $x \leq c \leq y$.

შევნიშნოთ, რომ უწყვეტობის თვისება, რომელიც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს გააჩნია, არ გააჩნია რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს. მაგალითად, ვთქვათ $X = \{x \in Q : x < \sqrt{2}\}$ და $Y = \{y \in Q : y > \sqrt{2}\}$ ცხადია, რომ თუ $x \in X$ და $y \in Y$ მაშინ $x \leq y$ მაგრამ არ არსებობს ისეთი რაციონალური C რიცხვი, რომ ყოველი $x \in X$ და $y \in Y$ მართებული იყოს უტოლობა $x \leq c \leq y$.

3. რიცხვითი ღერძი. რიცხვთა შუალედები. წრფეს, რომელზედაც ფიქსირებულია რაიმე O წერტილი (სათავე), არჩეულია დადებითი მიმართულება

და სიგრძის ერთეული (მასშტაბი) **რიცხვითი ღერძი** ანუ **რიცხვითი წრფე** ეწოდება (ნახ.1).



ნახ. 1

რიცხვითი ღერძის ყოველ M წერტილს შეიძლება შევუსაბამოდ ერთადერთი ნამდვილი x რიცხვი და პირიქით. ეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შეიძლება დამყარდეს შემდეგი წესით: $x=|OM|$ (OM მონაკვეთის სიგრძეს), თუ O-დან M-საკენ ემთხვევა ღერძის მიმართულებას და წინააღმდეგ შემთხვევაში $x=-|OM|$. ამ x რიცხვს M წერტილის კოორდინატი ეწოდება. ეს გარემოება ასე ჩაიწერება: $M(x)$. ცხადია, რომ O-სათვის კოორდინატია 0. მოცემულია წერტილი ღერძზე ნიშნავს, რომ მოცემულია წერტილის კოორდინატი (შემდგომში ნამდვილ რიცხვსა და მის შესაბამის წერტილს ღერძზე გავაიგივებთ).

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ზოგიერთი ქვესიმრავლე, რომლებთაც რიცხვითი შუალედები ეწოდება.

ვთქვათ a და b ნამდვილი ირცხვებია და $a<b$.

განსაზღვრებები: ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $a \le x \le b$, ჩაკეტილი შუალედი (მონაკვეთი) ეწოდება და $[a;b]$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე.ი.

$$[a;b]=\{x\in R : a\le x\le b\}$$

ანალოგიურად

$$(a;b)=\{x\in R : a< x< b\},$$

სიმრავლის ღია შუალედი (ინტერვალი) ეწოდება, ხოლო

$$[a;b)=\{x\in R : a\le x< b\},$$

$$(a;b]=\{x\in R : a\le x\le b\},$$

შესაბამისად ნახევრად ღია შუალედები მარჯვნიდან და მარცხნიდან ეწოდებათ. a და b რიცხვებს განხილული შუალედების საზღვრები ან ბოლოები ეწოდება, ხოლო b-a რიცხვს შუალედის სიგრძე.

ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $x\ge a$ უსასრულო შუალედი ეწოდება და $[a;+\infty)$ სიმბოლოთი აღინიშნება ე.ი.

$$[a;+\infty)=\{x\in R : x\ge a\}.$$

უსასრულო შუალედებს წარმოადგენენ აგრეთვე შემდეგი სიმრავლეები:

$$(a;+\infty)=\{x\in R: x>a\}$$

$$(-\infty;b]=\{x\in R: x\le b\}$$

$$(a;b)=\{x\in R: a<x<b\}$$

ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეც უსასრულო შუალედს წარმოადგენს და იგი ასე აღინიშნება $R=(-\infty;+\infty)$.

$a\in R$ რიცხვის მიდამო $U(a)$ ეწოდება ამ რიცხვის შემცველ ყოველ ინტერვალს.

$a\in R$ რიცხვის ε მიდამო $U(a;\ \varepsilon)$ ეწოდება $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ ინტერვალს:

$$U(a;\ \varepsilon)=(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon).$$

შენიშვნა. სიმბოლო $+\infty$ არ არის რიცხვი. ეს პირობითი ნიშანია და აღნიშნავს იმ ფაქტს, რომ x ცვლად სიდიდეს შეუძლია მიიღოს მეტი მნიშვნელობები, ვიდრე წინასწარ აღებული ნებისმიერად დიდი დადებითი რიცხვია.

$-\infty$ პირობითი ნიშანია და აღნიშნავს იმ ფაქტს, რომ x ცვლად სიდიდეს შეუძლია მიიღოს ნაკლები მნიშვნელობები, ვიდრე წინასწარ აღებული ნებისმიერად მცირე უარყოფითი რიცხვია.

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება სიმრავლის ელემენტები? სიმრავლის ნაწილი? ცარიელი სიმრავლე?
2. რას რას ნიშნავს, რომ A და B სიმრავლეებს შორის დამყრებულია ურთიერთცალსახა თანადობა?
3. როგორ სიმრავლეებს ეწოდება ეკვივალენტური?
4. როგორ სიმრავლეს ეწოდება უსასრულო სიმრავლე? სასრული სიმრავლე?
5. რას ნიშნავს, რომ c რიცხვი მოთავსებულია a და b რიცხვებს შორის?
6. როგორ რიცხვებს ეწოდება ნამდვილი რიცხვები?
7. რას ეწოდება ინტერვალი? სეგმენტი? ნახევარინტერვალი? ნახევარსეგმენტი?
8. როგორ რიცხვებს ეწოდება რაციონალური?

9. წრფის რა წერტილს ეწოდება რაციონალური წერტილი?

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

1. მოცემულია სიმრავლეები: $A=\{a,b,c,d,e\}$ და $B=\{c,d,e,f,g\}$. იპოვეთ $A\bigcap B, A\bigcup B, A\setminus B$.
2. შეჯიბრებაში მონაწილეობდა 9 მოთხილემურე და 20 მოციგურავე. 4 მოთხილამურე მოციგურავეც იყო. რამდენი სპორცმენი მონაწილეობდა შეჯიბრებაში?
3. დაამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა [0,1] სეგმენტსა და [*a,b*] სეგმენტს შორის.
4. დაამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა $]a,b[$ ინტერვალსა და რიცხვთა ღერძს შორის.
5. დაამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა $[0,1[$ და $[0,+\infty[$ სიმრავლეებს შორის.
6. დაამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა წრეწირსა და წრფეს შორის.

§2 მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი და კომბინატორიკის ელემენტები

1. მათემატიკური ინდუქცია (ან სრული ინდუქცია) ეწოდება ნატურალური რიცხვების შესახებ თეორემების დამტკიცების მეთოდს. არსებობს თეორემები, რომლებიც ჭეშმარიტია, ზოგიერთი ერთმანეთის მომდევნო ნატურალურ რიცხვთათვის, და ასევე არსებობს თეორემები, რომლებიც ჭეშმარიტია საზოგადოდ, ნებისმიერი ნატურალური რიცხვისათვის. მათემატიკური ინდუქციის (ან სრული ინდუქციის) მეთოდი ხშირად გამოიყენება იმის დასამტკიცებლად, რომ თეორემა ჭეშმარიტია ზოგადი შემთხვევისათვის ე.ი. ნებისმიერი ნატურალური რიცხვისათვის.

თეორემა. ვთქვათ $T(n)$ არის თეორემა ნატურალური n რიცხვის შესახებ. დაუშვათ, რომ:

1. თეორემა T ჭეშმარიტია n_0 ნატურალური რიცხვისათვის;
2. თუ T თეორემა ჭეშმარიტია ნატურალური $k \geq n_0$ რიცხვისათვის მაშინ იგი ჭეშმარიტია მომდევნო ნატურალური $k+1$ რიცხვისათვისაც.

თუ ეს ორი პირობა შესრულდა მაშინ T თეორემა ჭეშმარიტია ნებისმიერი $n \geq n_0$ რიცხვისათვის. თუ $n_0=1$ გვაქვს სრული ინდუქცია, ხოლო $n_0>1$ არასრული ინდუქცია.

დამტკიცება. დაუშვათ, რომ $T(n)$ თეორემა არ არის ჭეშმარიტი, რომელიმე $N>n_0$ ნატურალური რიცხვისათვის, მაშინ იგი არ უნდა იყოს ჭეშმარიტი $N-1$ ნატურალური რიცხვისათვისაც, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე.ი. თუ $T(n)$ თეორემა ჭეშმარიტია $N-1$ ნატურალური რიცხვისათვის, მაშინ მეორე პირობის ძალით იგი ჭეშმარიტი იქნებოდა N ნატურალური რიცხვისათვისაც. ანალოგიურად მივიღევთ, რომ თუ $T(n)$ თეორემა არ არის ჭეშმარიტი $N-1$ ნატურალური რიცხვისათვის, მაშინ იგი არ იქნება ჭეშმარიტი $N-2$ ნატურალური რიცხვისათვისაც და ა.შ.

ამრიგად, როგორი დიდი არ უნდა იყოს N ნატურალური რიცხვი, თანმიმდევრობით თითო ერთეულის გამოკლებით მივალთ იმ დასკვნამდე, რომ $T(n)$ თეორემა არ არის ჭეშმარიტი არ არის n_0 ნატურალური რიცხვისათვის, რაც პირველ პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე დაშვება იმისა, რომ თეორემა არ არის ჭეშმარიტი $N \geq n_0$ რიცხვისათვის მცდარია.

რ.დ.ზ.

მაგალითი 1. დავამტკიცოთ $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ტოლობის ჭეშმარიტება.

ამოხსნა: როცა $n_0=1$ დასამტკიცებელი ტოლობა ჭეშმარიტია, მართლაც

$$1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$$

$$1=1$$

დაუშვათ ტოლობა სამართლიანია, როცა $n=k$ ე.ი.ჭეშმარიტია ტოლობა:

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

ელემენტარული გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{6(k+1)^2}{6}=$$

$$\frac{(k+1)}{6}(2k^2+k+6k+6)=\frac{(k+1)}{6}(2k^2+7k+6)$$

ფრჩხილებში მოთავსებული წევრი კვადრატული სამწევრია, რომლის ფესვებია $k_1=-2$ და $k_2=-\frac{3}{2}$, ამიტომ $(2k^2+7k+6)=(k+2)(2k+3)$ ეს უკანასკნელი შევიტანოთ დასამტკიცებელ ტოლობაში, მივიღებთ

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6}.$$

ეს ნიშნავს, რომ დასამტკიცებელი თეორემა ჭეშმარიტია. აქედან, კი გამომდინარეობს, რომ ტოლობა მართებულია ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის.

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი n რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას: $a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$(გეომეტრიული პროგრესიის n წევრის ჯამის ფორმულა).

ამოხსნა: როცა n=2 გვაქვს

$$a_1+a_1q=a_1\frac{q^2-1}{q-1}=a_1\frac{(q-1)(q+1)}{q-1}=a_1(q+1)=a_1q+a_1$$

ამრიგად დასამტკიცებელი ტოლობა მართებულია როცა n=2 .

ახლა დავამტკიცოთ, რომ თუ ტოლობა მართებულია ნატურალური $k\geq 2$ რიცხვისათვის, მაშინ იგი მართებული იქნება მომდევნო $k+1$ რიცხვისათვისაც, პირობიდან $a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{k-1}=a_1\frac{q^k-1}{q-1}$, გამომდინარეობს, რომ

$$a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{k-1}+a_1q^k=a_1\frac{q^{k+1}-1}{q-1},$$

მართლაც,

$$a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{k-1}+a_1q^k=a_1\frac{q^k-1}{q-1}+a_1q^k=a_1\left(\frac{q^k-1}{q-1}+q^k\right)=$$

$$=a_1\frac{q^k-1+q^{k+1}-q^k}{q-1}=a_1\frac{q^{k+1}-1}{q-1}$$

მაშასადამე თეორემა მართებულია ნებისმიერი n რიცხვისათვის.

2. კომბინატორიკის ელემენტები. ხშირად თეორიული და პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად საჭიროა სასრული სიმრავლის ელემენტებისაგან სხვადასხვა კომბინაციების შედგენა და რაიმე წესით შედგენილი ყველა შესაძლო კომბინაციის რაოდენობის გამოანგარიშება. ასეთ ამოცანებს, კომბინატორულს უწოდებენ, ხოლო მათემატიკის ნაწილს, რომელიც დასახელებულ ამოცანების ამოხსნას შეისწავლის - კომბინატორიკას.

ერთი და იგივე სასრული სიმრავლის ელემენტები შეიძლება დავალაგოთ სხვადასხვა რიგით იმისა და მიხედვით, თუ სიმრავლის რომელ ელემენტს ავარჩევთ პირველ ელემენტად, რომელს მეორედ და ა.შ.

განსაზღვრება: სასრულ სიმრავლეში დადგენილ რიგს მისი **გადანაცვლება** ეწოდება.

n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვი P_n-ით აღინიშნება. ცხადია, იგი დამოკიდებულია მხოლოდ სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობაზე.

თუ სიმრავლე შედგება ერთი ელემენტისაგან, მაშინ შესაძლებელია ერთადერთი გადანცვლება ე.ი. $P_n=1$. თუ სიმრავლე შედგება ორი ელემენტისაგან $\{a,b\}$, მაშინ შესაძლებელია ორი გადანაცვლება (a,b) და (b,a) ე.ი. $P_2=2$. თუ სიმრავლე შედგება სამი ელემენტისაგან – $\{a,b,c\}$, მაშინ შესაძლებელია ექვსი გადანაცვლება: (a,b,c), (a,c,b), (c,a,b), (c,b,a) (b,a,c) (b,c,a) ე.ი. $P_3=6$. ადვილი შესამჩნევია, რომ $P_1=1$, $P_2=1\cdot2$, $P_3=1\cdot2\cdot3$. მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით დავამტკიცოდ, რომ

$$P_n=1\cdot2\cdot3\cdots n \tag{1}$$

როგორც ზემოთ ვნახეთ, როდესაც $n=1$ ეს ფორმულა მართებულია, დავუშვათ, რომ ფორმულა მართებულია $n=k$ –სათვის, ე.ი. $P_k=1\cdot2\cdot3\cdots k$ ვაჩვენოთ, ფორმულა სამართლიანი იქნება $n=k+1$, ე.ი.

$$P_{k+1}=1\cdot2\cdot3\cdots k\cdot(k+1).$$

მართლაც, იმისათვის, რომ მივიღოთ $k+1$ ელემენტისაგან ყველა შესაძლო გადანცვლება, საჭიროა თითოეულ k ელემენტიან ადრინდელ გადანაცვლებას მივუერთოთ ახალი $(k+1)$ ელემენტი, რომელიც შეიძლება დავაყენოთ 1-ელ, მე-2, მე–3, . . . k –ურ და $(k+1)$-ე ადგილზე. ამრიგად, ყოველი k ელემენტიანი გადანაცვლება წარმოქმნის $(k+1)$-ახალ გადანაცვლებას, ამიტომ $(k+1)$ ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რიცხვი იქნება $P_k=(k+1)$, ე.ი.

$$P_{k+1}=P_k(k+1)=1\cdot2\cdot3\cdots k\cdot(k+1).$$

მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის თანახმად (1) ფორმულა სამართლიანია ნებისმიერი n-სათვის. $1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ ნამრავლი აღინიშნება $n!$ (იკითხება n ფაქტორიალი). მიღებულია, რომ 0!=1 და 1!=1 მაშასადამე

$$P_n = n!.$$

განსაზღვრება: n-ელემენტიანი სიმრავლის ნებისმიერ m-ელემენტიან დალაგებულ ქვესიმრავლეს $(m \le n)$ ეწოდება **წყობა** n ელემენტისაგან m-ად. იგი აღინიშნება A_n^m სიმბოლოთი. მაშასადამე n ელემენტისაგან k-ელემენტიანი წყობა არის სიმრავლე, რომელიც შეიცავს k-ელემენტიანს, აღებულს n ელემენტისაგან და დალაგებულს გარკვეული მიმდევრობით. ამასთანავე, ერთი და იმავე k-ელემენტისაგან შემდგარი ორი წყობა ითვლება სხვადასხვაგვარად, თუ ისინი განსხვავდებიან ელემენტთა განლაგებით. ცხადია, რომ $A_n^1 = n$. მართლაც, n-დან ერთი ელემენტი n ხერხით შეიძლება ავარჩიოთ, ხოლო ამ ელემენტისაგან მიიღება ერთადერთი დალაგებული სიმრავლე.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ როცა $1 \le m \le n$, მაშინ $A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m$. იმისათვის, რომ n ელემენტისაგან შევადგინოთ ყველა შესაძლო ($m+1$) ელემენტიანი წყობა, შეიძლება მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ჯერ ავარჩიოთ რაიმე m რაოდენობის ელემენტი და მოვათავსოთ ისინი პირველ m ადგილზე, ამის შესრულება შეიძლება A_n^m ხერხით. (m+1) ადგილზე შეიძლება მოვათავსოდ ნებისმიერი ელემენტი დარჩენილი (n-m) ელემენტიდან. ამრიგად ყოველი m ელემენტიანი წყობა წარმოქმნის (n-m) რაოდენობის m+1 ელემენტიან წყობას, მაშასადამე, სულ გვექნება $(n-m)A_n^m$ წყობა, ე.ი. $A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m$. თუ გავითვალიწინებთ, რომ $A_n^1 = n$ და ვისარგებლებთ დამტკიცებული ფორმულით, გვექნება:

$$A_n^1 = n,$$

$$A_n^2 = (n-1)A_n^1 = n(n-1),$$

$$A_n^3 = (n-2)A_n^2 = n(n-1)(n-2)$$

. . . .

$$A_n^{m+1} = (n-m+1)A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

მაგრამ, n-დან (n-m+1)-მდე ნატურალურ რიცხვთა ნამრავლი ფაქტორიალის საშუალებით შეიძლება შემდეგნაირად გამოვსახოთ:

$$n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n(n-1)\cdots(n-m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-m-1)(n-m)} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

ე.ი. $$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

შევნიშნოთ, რომ $A_n^n = P_n = n!$.

განსაზღვრება: n ელემნტიანი სიმრავლის ნებისმიერ m ელემენტიან ქვესიმრავლეს ეწოდება **ჯუფთება** n ელემენტისაგან m-ად.

ცხადია, რომ მოცემული სიმრავლის ორი m-ელემნტიანი ჯუფთება სხვადასხვაა. მხოლოდ მაშინ, როდესაც ისინი განსხვავდებიან ერთი ელემენტით მაინც, ხოლო m ელემნტიანი წყობები რომ განსხვავდებოდნენ, საკმარისია ისინი განსხვავდებოდნენ დალაგებით.

n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო m ელემენტიან ჯუფთებათა რიცხვი C_n^m სიმბოლოთი აღინიშნება. დავამტკიცოთ, რომ: $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n}$..

იმისათვის, რომ მოცემული n-ელემენტისაგან შევადგინოთ ყველა შესაძლებელი m-ელემნტიანი წყობა, შეიძლება მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ჯერ n-ელემენტიდან გამოვყოთ რომელიმე m-ელემენტი, რაც C_n^m ხერხით შეიძლება განხორციელდეს. გამოყოფილი m-ელემენტი დავალაგოთ სხვადასხვანაირად, რაც P_m ხერხით შეიძლება შესრულდეს. ამგვარად, მივიღებთ $C_n^m P_m$ დალაგებულ სიმრავლეს. ე.ი. $A_n^m = C_n^m P_n$, საიდანაც $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n}$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ და $P_n = n!$, მივიღებთ

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ ჯუფთებათა რიცხვის შემდეგი თვისებები:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$;
2. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$;
3. $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რა არის მათემატიკური ინდუქცია?

2. რას შეისწავლის კომბინატორიკა?
3. რას ეწოდება წყობა? ჯუფთება ? გადანაცვლება ?
4. მოიყვანეთ ჯუფთებათა რიცხვის თვისებები.

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

1. დაამტკიცეთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით შემდეგი ფორმულები ($n \in N$):

1.1. $a_n = a_1 + d(n-1)$ – არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულა.

1.2. $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ – არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულა.

1.3. $b_n = b_1 q^{n-1}$ – გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულა.

2. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

2.1 $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2},\ n \in N$

2.2 $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2,\ n \in N$

3. გამოთვალეთ:

ა) $\dfrac{A_{13}^{3}}{A_{15}^{3} + A_{14}^{3}}$; ბ) $\dfrac{A_{15}^{4} + A_{14}^{5}}{A_{15}^{3}}$; გ) $\dfrac{A_{15}^{12}}{A_{16}^{3} \cdot 12\ !}$; დ) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!(n^2-4)}$

4. ამოხსენით განტოლება:

ა) $A_x^4 \cdot P_{x-4} = 42 p_{x-4}$; ბ) $C_x^4 = \dfrac{15 A_x^2}{4}$; გ) $A_x^2 + C_x^1 = 256$; დ) $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$

§3. პროცენტების გამოთვლა

1. დაგროვება. თანხას, რომელსაც იხდიან ფულად საშუალებათა სარგებლობისათვის **პროცენტი** ეწოდება. პროცენტის შეფარდებას ფულად საშუალებათა k სიდიდესთან (რაოდენობასთან) $\overline{p}$ **პროცენტული განაკვეთი** ეწოდება.

$$\overline{p} = \frac{P}{k} 100$$

ეკონომიკური ამოცანების გადაწყვეტისას ძალზე მოხერხებულია ე.წ. ხვედრითი პროცენტული განაკვეთით სარგებლობა.

i – ხვედრითი პროცენტული განაკვეთი – არის ის, თანხა, რომელიც მოაქვს 1 ლარს ერთ წელიწადში. გვაქვს $i = \dfrac{\overline{p}}{n} = \dfrac{P \cdot 100}{kn} = \dfrac{P}{nk}\%$, სადაც n წელთა რიცხვია.

თუ პროცენტი თავდაპირველ თანხას ემატება, მაშინ ხდება **თანხის დაგროვება.** თუ დამატებულ პროცენტს არ დაერიცხება პროცენტი, მაშინ გვაქვს **მარტივი პროცენტი.** თუ პროცენტი ემატება კაპიტალს, რომელსაც ის ერიცხებოდა და მომდევნო პერიოდში პროცენტი ერიცხება ასეთნაირად გაზრდილ კაპიტალს, მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს **რთული პროცენტი.**

განვიხილოთ მარტივი პროცენტის ცნება. ვთქვათ k – საწყისი თანხაა, i – ხვედრითი პროცენტული განაკვეთი, მაშინ n – წლის შემდეგ მარტივი პროცენტი იქნება kni. n – წლის შემდეგ მარტივი პროცენტით მიღებული K_n – დაგროვება ტოლია

$$K_n = k + kni = k(1 + ni) \tag{1}$$

მიღებულ ფორმულაში მონაწილეობს ოთხი სიდიდე: k, k_n, i, და n. (1) ფორმულიდან გამოვთვლით ყოველ მათგანს, თუ სამი დანარჩენი ცნობილი სიდიდეებია. მივიღებთ

$$k = \frac{K_n}{1 + ni} \tag{2}$$

$$n = \frac{K_n - k}{ik} \tag{3}$$

$$i = \frac{K_n - k}{nk} \tag{4}$$

მაგალითი 1. 5000 ლარი გაცემულია 4 პროცენტად. გამოიანგარიშეთ 3 წლის განმავლობაში მიღებული დაგროვება.

ამოხსნა. პირობის თანახმად k=5000, p=4, n=3. ვისარგებლოდ (1) ფორმულით: k_3=5000(1+3i), მაგრამ $i = \dfrac{p}{100} = \dfrac{4}{100} = 0{,}04$ შევიტანოთ $i=0{,}04$ k_3-ის საანგარიშო ფორმულაში მივიღებთ:

k_3=5000(1+3·0,04)=5000·1,12=5600 ლარი.

მაგალითი 2. რამდენი ლარი მოგვცემს ორ წელიწადში 784 000 ლარს, თუ იგი გაცემულია ყოველწლიურად მარტივ 6 პროცენტად.

ამოხსნა. მოცემულია $p=6$, $n=2$ $K_n=784\ 000$. უნდა გამოვთვალოთ საწყისი თანხა. გამოვიყენოთ (2) ფორმულა, გვექნება:

$$k=\frac{784\,000}{1+2\cdot 0{,}06}=\frac{784\,000}{1{,}12}=700\,000 \text{ ლარი.}$$

მაგალითი 3. ყოველწლიურად 2000 ლარი გაცემულია მარტივ 5 პროცენტად. რამდენი წლის შემდეგ მოგვცემს იგი 2500 ლარ მოგებას?

ამოხსნა: მოცემულია $p=5$, $k=2000$, $K_n=2500$. უნდა გამოვთვალოთ n, (3) ფორმულა გვაძლევს:

$$n=\frac{2500-2000}{2000\cdot 0{,}05}=\frac{500}{100}=5 \text{ წელი.}$$

განვიხილოთ რთული პროცენტის ცნება. ვთქვათ k საწყის ფულად საშუალებას n წლის განმავლობაში ერიცხება რთული პროცენტი i – ხვედრითი პროცენტული განაკვეთით;

k – ფულადი თანხის სიდიდე პირველი წლის შემდეგ შეადგენს

$$k_1=k+ik=k(1+i)$$

მეორე წლის შემდეგ

$$k_2=k_1+ik_1=k_1(1+i)=k(1+i)^2$$

მესამე წლის შემდეგ

$$k_3=k_2+ik_2=k(1+i)^3$$

- -

n წლის შემდეგ

$$k_n=k_{n-1}+ik_{n-1}=k(1+i)^n$$

ე.ი.

$$K_n=k(1+i)^n. \tag{5}$$

გამოსახულებას $1+i=r$ ეწოდება რთული პროცენტის კოეფიციენტი. ამრიგად

$$K_n=kr^n \tag{6}$$

მაშასადამე n წლის განმავლობაში i – ხვედრითი პროცენტის დარიცხვით ფულად საშუალებათა საბოლოო რაოდენობა, რომლის საწყისი რაოდენობა იყო k რომელიც ტოლია საწყისი თანხა გამრავლებული რთული პროცენტის კოეფიციენტის ხარისხზე, რომლის მაჩვენებელია წელთა რიცხვი.

მაგალითი 4. შემნახველ სალაროში ათი წლით შეტანილია ანაბარი 100000 ლარი, რა თანხას გადაიხდის შემნახველი სალარო ამ პერიოდის ბოლოს თუ $P=3$.

ამოხსნა: მოცემულია n=10, k=100 000, p=3; უნდა გამოვთვალოთ K_n. ვისარგებლოთ (6) ფორმულით.

$$K_n = kr^n = 100000(1+i)^{10} = 10^5(1+K_n)\left(1+\frac{3}{100}\right)^{10} = 10^5 \cdot 1{,}03^{10} = 134\ 392 \quad \text{ლარი}$$

r სიდიდის n ხარისხის გამოთვლა საკმარისად შრომატევადი პროცესია. მისი გამარტივება შეგვიძლია ლოგარითმების ცხრილის გამოყენებით.

მე-(6) ფორმულაში მონაწილეობს 4 სიდიდე K_n, k, n და ხვედრითი პროცენტული განაკვეთი – i. ყოველი მათგანის გამოთვლა შესაძლებელია თუ ცნობილია დანარჩენი სამი. მაგალითად, თუ ცნობილია K_n, p, n, მაშინ (6) ფორმულიდან გვექნება: $k=\frac{K_n}{r^n}$, სადაც

$$r = 1+i = 1+\frac{P}{100} \tag{7}$$

თუ ცნობილია K_n , k da n, i–მაშინ ხვედრითი პროცენტული განაკვეთი შემდეგნაირად გამოითვლება: გავალოგარითმოთ (6) ფორმულის ორივე მხარე, მივიღებთ:

$$\lg K_n = \lg k + n\lg r\,, \qquad \text{საიდანაც:}$$

$$n\lg r = \lg K_n - \lg k \qquad \text{და} \qquad \lg r = \frac{\lg K_n - \lg k}{n}\,.$$

ლოგარითმების ცხრილის გამოყენებით გამოვითვლით r-ის მნიშვნელობას და მისი საშუალებით ვპოულობთ p-ს. რადგან $r = 1+i = 1+\frac{p}{100}$, გვექნება

$$p = 100r - 100 \tag{8}$$

მიღებული ფორმულით ეკონომიკურ ანალიზში დგინდება **ზრდის ტემპების საშუალო მნიშვნელობა.**

მაგალითი 5. ხუთწლიანი გეგმის შესასრულებელ პერიოდში პროდუქციის მოცულობა უნდა გაიზარდოს 85 %-ით. როგორი უნდა იყოს ზრდის საშუალო ტემპი?

ამოხსნა: ვთქვათ, საგეგმო წლის დასაწყისში გვაქვს პროდუქციის k მოცულობა. ხუთი წლის შემდეგ გვექნება $k_5=kr^5$, მაგრამ $k_5=1{,}85k$ ე.ი. $1{,}85k=kr^5$. $r^5=1{,}85$; $r=\sqrt[5]{1{,}85}=1{,}131$ რადგან $r=1+i$, ამიტომ $1+i=1{,}131$, საიდანაც $i=0{,}131$, მაგრამ

$$i=\frac{P}{100}; \qquad p=100\cdot i=100\cdot 0{,}131=13{,}1\%$$

მე-(6) ფორმულიდან გვექნება, რომ

$$n = \frac{\log K_n - \log k}{\log r} \tag{9}$$

თანხის საბოლოო სიდიდის გამოსათვლელად პროცენტი შეიძლება დაემატოს საწყის თანხას წელიწადში ერთხელ წლის ბოლოს, აგრეთვე წელიწადში m – ჯერ, მაგალითად ყოველ თვეში. ამ შემთხვევაში პროცენტები 1 ლარზე $\frac{1}{m}$ წლის შემდეგ შეადგენს $\frac{i}{m}$, ხოლო 1 ლარი თანხა თავისი ნამატით

$\frac{1}{m}$ წლის შემდეგ იქნება: $1+\frac{i}{m}$

$\frac{2}{m}$ წლის შემდეგ იქნება: $\left(1+\frac{i}{m}\right)^2$ და ა.შ. ...

1 წლის შემდეგ იქნება: $\left(1+\frac{i}{m}\right)^m$ და ა.შ. ...

n წლის შემდეგ იქნება: $\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$

ამგვარად, თუ i – პროცენტული განაკვეთია, ხოლო პროცენტული დარიცხვა წელიწადში ხდება m – ჯერ, საწყისი k თანხის საბოლოო სიდიდე n წლის შემდეგ იქნება

$$K_n = k\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} \tag{10}$$

თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება უწყვეტად, ე.ი. $m \to \infty$, მაშინ

$$K_n = \lim_{m\to\infty} k\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} = k\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} = k\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\frac{m}{i}}\right]^{in} = ke^{in}.$$

(ზღვარსა და ზღვრის გამოთვლას გავეცნობით შემდეგში).

მაშასადამე, უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში

$$K_n = ke^{ni} \tag{11}$$

ყველაზე არსებითი და მოულოდნელი მომენტი, რაც დიდ ყურადღებას იმსახურებს უწყვეტი დარიცხვის დროს არის შემდეგი: მიუხედავად იმისა, რომ დარიცხვების m რაოდენობა უსასრულობისაკენ მიისწრფვის, რაც იწვევს შესაბამისი საბოლოო თანხების ზრდას, ზღვრული საბოლოო თანხა რჩება შემოსაზღვრული და გამოითვლება (11) ფორმულით.

მაგალითი 6. თანხა – k =100 000 ლარი დაბანდებულია n=3 წლით, ყოველწლიურად p=6 რთულ პროცენტად. გამოთვლეთ საბოლოო თანხა, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი თვის ბოლოს.

ამოხსნა: ამოცანის პირობების გათვალისწინებით (10) ფორმულიდან მივიღებთ

$$K_3 = 100\ 000\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{12\cdot 3} = 100\ 000(1+0,005)^{36} = 119\ 620 \quad \text{ლარი}$$

მაგალითი 7. გამოთვალეთ k=100 000 ლარის საბოლოო სიდიდე, რომელიც დაბანდებულია p=6 რთულ პროცენტად, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება უწყვეტად 3 წლის განმავლობაში.

ამოხსნა: (11) ფორმულაში შევიტანოთ ამოცანის პირობები, გვექნება $K_3 = 100\,000 e^{3\cdot 0,06} = 119\,720$

2. პერიოდული შენატანი. თუ სხვადასხვა პერიოდის განმავლობაში ყოველი მათგანის დასაწყისში ბანკში შედის p რთული პროცენტული განაკვეთით მუდმივი k თანხა, მაშინ k – ს ეწოდება პერიოდული შენატანი. გამოვთვალოთ ის თანხა, რომელიც ამ გზით დაგროვდება n წლის შემდეგ.

პირველი შენატანი k – დაბანდებულია n წლით. ამრიგად, მისგან მიიღება თანხა $k_1 = kr^n$, $\quad r = 1+\dfrac{p}{100}$;

მეორე შენატანი k – დაბნდებულია (n-1) წლით. ამრიგად, მისგან მიიღება თანხა $k_2 = kr^{n-1}$;

- -

უკანასკნელი შენატანი დაბანდებულია მხოლოდ 1 წლით. ამრიგად, მისგან მიიღება თანხა $k_n = kr$; ამ თანხების ჯამი არის საძიებელი A თანხა. ამრიგად

$$A = kr^n + kr^{n-1} + \cdots + kr = kr(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}).$$

ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება წარმოადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას მნიშვნელით r. ამიტომ $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \dfrac{r^n - 1}{r-1}$. მაშასადამე

$$A = \frac{kr(r^n - 1)}{r-1} \tag{12}$$

3. მარტივი და რთული განაკვეთებით სარგებლობისას თანხის დაგროვების პროცესების შეფასება. დასმული ამოცანის შესასწავლად საჭიროა ერთმანეთს შევადაროთ (1) და (5) ფორმულებით მიღებული სიდიდეები. დაუშვათ, რომ ამ

ფორმულებში ტოლია საწყისი თანხაც, სარგებლობის განაკვეთიც და დარიცხვის პერიოდების n რაოდენობაც.

გვაქვს

$$\frac{K_n^{'}}{K_n^{''}}=\frac{k(1+ni)}{k(1+i)^n}=\frac{1+ni}{(1+i)^n} \quad \text{სადაც,} \quad \begin{cases} K_n' & \text{სარგებლის მარტივი განაკვეთია} \\ K_n'' & \text{სარგებლის რთული განაკვეთია} \end{cases}$$

განვიხილოთ შემდეგი სამი შემთხვევა:

1. როცა $n=1$, მივიღებთ $\frac{K_n^{'}}{K_n^{''}}=\frac{1+i}{1+i}=1$, მაშასადამე დაგროვილი თანხები ტოლია.

2. როცა $0 \prec n \prec 1$ და $i \succ 0$, მაშინ მტკიცდება, რომ $1+ni \succ (1+i)^n$, ე.ი. $\frac{K_n^{'}}{K_n^{''}}>1.$

   ეს ნიშნავს, რომ სარგებლის მარტივი განაკვეთი უფრო მეტ მოგებას იძლევა.

3. როცა $n>1$ და $i>0$, მაშინ მტკიცდება, რომ $1+ni \prec (1+i)^n$, მაშასადამე

$$\frac{K_n^{'}}{K_n^{''}}<1.$$

ეს ნიშნავს, რომ რთული განაკვეთი უფრო მეტ მოგებას იძლევა. ცხადია n –ის ზრდასთან ერთად განსხვავება დაგროვილ თანხებს შორის სულ უფრო იზრდება.

მაგალითი 8. ბანკი სთავაზობს მეანაბრეებს ერთი წლის განმავლობაში სარგებლის რთულ თვიურ 2%-იან დარიცხვას, ხოლო მეორე ბანკი – სარგებლის მარტივ 2,2%-იან დარიცხვას. რომლ ბანკში უფრო ხელსაყრელია მეანაბრისათვის ფულის შეტანა?

როგორც ვიცით

$$\frac{K_n^{'}}{K_n^{''}}=\frac{k(1+ni)}{k(1+i)^n}=\frac{1+\frac{2,2}{100}12}{(1+0,02)^{12}}\approx\frac{1,264}{1,268}<1$$

ამიტომ მეანაბრისათვის თანხის შეტანა ხელსაყრელია პირველ ბანკში.

4. სარგებლის p წლიურ და p^* თვიურ რთულ განაკვეთებს შორის კავშირი. (ერთი და იმავე საწყის და საბოლოო თანხების შემთხვევა).

ვთქვათ თანხა (K ლარი) დაბანდებულია სარგებლი p^* თვიური განაკვეთით. მაშინ n წლის (ანუ 12-n თვის) შემდეგ საბოლოოდ დაგროვილი თანხა K_m^* $(m=12n)$ გამოითვლება ფორმულით

$$K_m^* = K(1+i^*)^m \tag{13}$$

დავსვათ შემდეგი ამოცანა: სარგებლის როგორი თვიური p განაკვეთით უნდა დავაბანდოთ საწყისი თანხა, რომ n წლის შემდეგ საბოლოო K_n თანხა (13) ფორმულით მოცემული თანხის ტოლი იყოს?

პირობის თანახმად $K_m^* = K_n$, $m = 12n$, ე.ი. $K(1+i^*)^{12n} = K(1+i)^n$ ანუ $(1+i^*)^{12} = 1+i$. აქედან მივიღებთ შემდეგ ორ ტოლობას

$$i = (1+i^*)^{12} - 1 \tag{14}$$

და

$$i^* = \sqrt[12]{1+i} - 1 \tag{15}$$

ამრიგად თანხის დაბანდება სარგებლის p რთული განაკვეთით ექვივალენტურია თანხის დაბანდებისა სარგებლის რთული p^* განაკვეთით, სადაც i და i^* დაკავშირებულია (14) და (15) ფორმულებით. ცხადია, რომ $p^* \neq \frac{p}{12}$. უფრო მეტიც მე-(15) ტოლობის გამოყენებით მარტივად ვაჩვენებთ, რომ $p^* < \frac{p}{12}$.

მართლაც, რადგან $(1+x)^m<1+mx$, თუ $0<m<1$ და $x>0$ ამიტომ (15) ტოლობიდან მივიღებთ $\sqrt[12]{1+i} - 1 = (i+1)^{\frac{1}{12}} - 1 < 1 + \frac{1}{12}i - 1 = \frac{i}{12}$, მაშასადამე $i^* < \frac{i}{12}$;

აქედან ვასკვნით, რომ თუ სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია P, მაშინ თანხის მოთავსება ბანკში რთული თვიური $\frac{p}{12}$ განაკვეთით მომგებიანია მეანბრესათვის და წამგებიანია ბანკისათვის.

ანალოგიურად შეგვიძლია დავამყაროთ კავშირები, თუ საწყისი და საბოლოო თანხები ერთი და იგივეა

1. სარგებელის კვარტალურ და წლიურ რთულ განაკვეთებს შორის;
2. სარგებელის თვიურ და წლიურ რთულ განაკვეთებს შორის;
3. სარგებლის დღიურ და წლიურ რთულ განაკვეთებს შორის.

სტუდენტებს ვურჩევთ თვითონ ჩაატაროს მსჯელობანი და მიღებული შედეგებიდან გააკეთოს დასკვნები.

მაგალითი 9. განვსაზღვროთ სარგებლის თვიური რთული 2 %-იანი განაკვეთის ექვივალენტური რთული განაკვეთი.

მოცემულია, რომ p^*=2%; საძიებელია p. (14) ფორმულის თანახმად

$$i = (1+i^*)^{12} - 1 = (1+0{,}02)^{12} - 1 = 1{,}2682413 - 1 \approx 0{,}2682$$

რადგან $i = \frac{p}{100} \approx 0{,}2682$; p=26,82%

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება პროცენტი? რიცხვის პროცენტი?
2. რას ეწოდება მარტივი პროცენტი? რთული პროცენტი?
3. რა არის დარიცხვის პერიოდი?
4. რას ეწოდება სარგებელი?
5. რა ფორმულით გამოითვლება საბოლოო დაგროვილი თანხა?

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1. ბანკში დაბანდებულია 5000 ლარი 2 წლის ვადით სარგებლის წლიური 9 % -იანი (მარტივი) განაკვეთით. გამოთვალეთ დაგროვილი თანხა.
2. ფირმამ შემნახველ ბანკში დააბანდა 25 000 ლარი (ოთხი თვით) დაწყებული 18 ივლისისდან. წლიური საპროცენტო განაკვეთია i=0,09 (მარტივი). გამოთვალეთ დაგროვილი თანხა 18 ნოემბრისათვის.
3. მოქალაქემ დააბანდა 45 000 ლარი 03 ივლისიდან 01 სექტემბრამდე წლიური i=0,08 საპროცენტო განაკვეთით (მარტივი). რა თანხას მიიღებს იგი 01 სექტემბერს?
4. რა თანხა უნდა დავაბანდოთ ბანკში მარტივი წლიური 8 % საპროცენტო განაკვეთით, რომ 9 თვის შემდეგ მივიღოთ 60 000 ლარი?
5. მოქალაქემ ბანკში დააბანდა 5000 ლარი 5 წლით. რა თანხას მიიღებს იგი ამ პერიოდის გასვლის შემდეგ, თუ ბანკი იძლევა სარგებელს 9 % წლიური საპროცენტო განაკვეთით (რთული).
6. 200 000 ლარი დაბანდებულია 3 წლით ყოველწლიური i=0,06 საპროცენტო განაკვეთით (რთული). გამოთვალეთ საბოლოო თანხა, თუ პროცენტების დარიცხვა ხდება ყოველი თვის ბოლოს.
7. მამამ გადაწყვით თავისი დანაზოგი 30 000 ლარი გაუნაწილოს სამ შვილს, პირობითად A, B და C - ს და დაუბანდოს ბანკში იმ ანგარიშით, რომ თითოეულს 18 წლის ასაკში დაუგროვდეს თანაბარი თანხა. გამოთვალეთ რა თანხებს დაუბანდებდა შვილებს, თუ იმ მომენტში შვილების წლოვანება იყო

12, 13 და 16 წელი შესაბამისად და ბანკი იძლეოდა სარგებელს i=7,5 % საპროცენტო განაკვეთით (რთული).

8. რა თანხა დაგროვდება 5 წლის შემდეგ, თუ ბანკში ყოველწლიური პერიოდული შენატანი არის 5 000 ლარი, ხოლო ყოველწლიური საპროცენტო განაკვეთია 9 % (რთული)?

§ 4 დიკონტირება. ჯამური (დაგროვილი) სარგებელი. გრძელვადიანი კრედიტების დაფარვა. დაფარვის კოეფიციენტი. ანუიტეტი.

1. დისკონტი. საწყისი თანხის გამოთვლას მისი საბოლოო სიდიდის მიხედვით **დისკონტირება** ეწოდება. საბოლოო დისკონტირებულ K_n თანხის და საწყის სადისკონტირებო თანხის სხვაობას **დისკონტი** ეწოდება. ამრიგად გვაქვს

$$D = K_n - K \qquad (1)$$

შემოვიტანოთ დისკონტის განმარტება ისე, როგორც ეს არის განმარტებული თანამედროვე ეკონომიკურ ლექსიკონში: დისკონტი –(ინგლ.) *discount*– ფასდაკლება - და ნიშნავს:

1. განსხვავებას ფასიანი ქაღალდების მიმდინარე საბირჟო ღირებულებასა და მის ნომინალს (დაფარვის ფასი) შორის.
2. განსხვავებას ვალუტის ფორვარდულ კურსსა (კურსი, რომელიც დაფიქსირებულია გარიგების დადების მომენტისათვის, მაგრამ გადა-სახდელია მომავალში) და დაუყონებლივი გადახდის კურსს შორის.
3. თამასუქების აღრიცხვას გადახდის დრომდე დათქმული პროცენტების გამოკლებით.
4. ერთი და იმავე საქონელზე ფასთა შორის განსხვავებას მისი მოწოდების სხვადასხვა დროის გათვალისწინებით;
5. საქონელზე ფასდაკლებას.

დიკონტური პოლიტიკა ნიშნავს ცენტრალური ბანკების მიერ გატარებულ სააღრიცხვო, ფულად საკრედიტო პოლიტიკას, რომელიც კრედიტზე სააღრიცხვო საპროცენტო განაკვეთის გაზრდაში ან შემცირებაში გამოიხატება ანუ გამოიყენება სასესხო კაპიტალის მიღება-გაცემის რეგულირების მიზნით. ასე, მაგალითად,

საადრიცხვო განაკვეთის გაზრდით ბანკი ხელს უწყობს კრედიტზე მოთხოვნის შემცირებას, ხოლო პროცენტის შემცირებით მასზე მოთხოვნის გააქტიურებას.

დისკონტირების პრობლემას ვხვდებით კაპიტალდაბანდებათა ეკონომიკური ეფექტიანობის გამოთვლის დროს. ცხადია, რომ მარტივი პროცენტის შემთხვევაში K_n – დისკონტირებული ფულადი საშუალება შეადგენს $K = \frac{K_n}{(1+i)^n}$; რთული პროცენტის შემთხვევაში, რადგან $K = \frac{K_n}{r^n}$, ამიტომ ფულად საშუალებათა K_n თანხის დისკონტირებული მნიშვნელობაა $K_n = Kr^n$.

სიდიდეს

$$v = \frac{1}{r^n} \qquad (2)$$

ეწოდება **დისკონტის კოეფიციენტი**.

მაშასადამე რთული პროცენტის შემთხვევაში $K = K_n v^n$.

ე.ი. K_n ფულად საშუალებათა დისკონტირებული მნიშვნელობის გამოსათვლელად ამ მნიშვნელობათა თანხა მრავლდება დისკონტის კოეფიციენტზე იმ ხარისხში, რომელიც წელთა რაოდენობის ტოლია. გამოთვლების გამარტივების მიზნით პრაქტიკაში სარგებლობენ ცხრილებით, სადაც მოცემულია დისკონტის კოეფიციენტები, შესაბამისი ხვედრითი პროცენტული განაკვეთებისა და წლებისათვის.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ რა თანხა უნდა შეიტანონ შემნახველ სალაროში, რომ ყოველწლიურად 3 %-ის დარიცხვით ათი წლის შემდეგ მივიღოთ 200 000 ლარი.

ცხადია, $K=K_{10}v^{10}$=200 000v^{10}. ცხრილში ვპოულობთ, *რომ* v^{10}=0,74409, მაშასადამე დისკონტირებული თანხა არის K= 200 000· 0,74409=148 918 ლარი.

როდესაც არ გაგვაჩნია დისკონტის კოეფიციენტების ცხრილი, მაშინ ვსარგებლობთ ლოგარითმების ცხრილით, კერძოდ K= 200 000v^{10} – ვალოგარითმებთ, გვექნება $\log K = \log 20000 - 10\log 1{,}03$ საიდანაც გამოთვლებით ვღებულობთ K= 148 918 ლარს.

მაგალითი 2. ერთი და იგივე წარმოებისათვის არსებობს მანქანის შეძენის ორი ვარიანტი. პირველი მანქანის ექსპლუატაციის ვადა სამი წელია, მეორე მანქანის ექვსი წელი. მანქანის შეძენისა და ექსპლუატაციის დანახარჯები მოცემულია შემდეგი ცხრილით:

წელი	1	2	3	4	5	6
I მანქანა	1000	200	400			
II მანქანა	1700	100	200	300	400	500

გამოთვალეთ, რომელი უფრო ხელსაყრელია: 2-ჯერ შევიძინოთ პირველი სახის მანქანა, თუ ერთხელ მეორე სახის მანქანა (ვიგულისხმოთ, რომ ხვედრითი პროცენტული განაკვეთი 10-ის ტოლია).

პირველი მანქანის შეძენისა და ექსპლუატაციის დისკონტირებული დანახარჯები შეადგენს

$$100+\frac{200}{1{,}1}+\frac{400}{1{,}1^2}+\frac{1000}{1{,}1^3}+\frac{200}{1{,}1^4}+\frac{400}{1{,}1^5}=2647$$

მეორე მანქანის შეძენისა და ექსპლუატაციის დისკონტირებული დანახარჯები იქნება:

$$1700+\frac{100}{1{,}1}+\frac{200}{1{,}1^2}+\frac{300}{1{,}1^3}+\frac{400}{1{,}1^4}+\frac{500}{1{,}1^5}=2765$$

მიღებული შედეგებიდან ვასკვნით, რომ უფრო ხელსაყრელია პირველი ვარიანტი.

2. ჯამური (დაგროვილი) სარგებელი. ვთქვათ ბანკიდან სესხად აღებულია *K* ლარი, *n* წლის ვადით სარგებლის მარტივი წლიური *P%*-იანი განაკვეთით. შევადგინოთ ვალის გადახდის გეგმა, თუ მოვალე ბანკს ყოველწლიურად უბრუნებს $\frac{K}{n}$ ლარს და მიმდინარე წლის ვალის *P%*. გამოვთვალოთ ბანკის მოგება.

ამოვწეროთ ცხრილის სახით წლების მიხედვით სესხებისა და შესაბამისი სარგებლის გადასახადების მონაცემები:

წლების რაოდენობა	წლის დასაწყისი	ერთი წლის შემდეგ	ორი წლის შემდეგ	...	*n* წლის შემდეგ
სესხი	K	$K-\frac{K}{n}$	$K-2\frac{K}{n}$	...	$K-n\frac{K}{n}=0$
წლიური სარგებელი	–	$\frac{KP}{100}$	$\left(K-\frac{K}{n}\right)\frac{KP}{100}$	...	$\left[K-(n-1)\frac{K}{n}\right]\frac{KP}{100}$

ამ ცხრილიდან ჩანს, თუ რა თანხა უნდა გადაიხადოს ყოველწლიურად **დებიტორმა** (დებიტორი ანუ მოვალე, ფულის მსესხებელი, **კრედიტორი,** ანუ

მევალე - ფულის გამხსესხებელი). ყოვლწლიური ვალები (მეორე სვეტი) შეადგენენ n წევრიან არითმეტიკულ პროგრესიას მნიშვნელით - $\frac{K}{n}$.

შევნიშნოთ, რომ ბანკის მოგებას წარმოადგენს ყოველწლიურად დარჩენილი ვალების შესაბამისი სარგებლის P %-იანი გადასახადები. გამოვითვალოთ ბანკის მოგება n წლის შემდეგ ამისათვის შევნიშნოთ, რომ გადასახდელი სარგებლის მიმდევრობა (მესამე სვეტი) წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრი $a_1 = \frac{KP}{100}$, ბოლო წევრია $\left[K-(n-1)\frac{K}{n}\right]\frac{KP}{100}$, სხვაობა $d=\frac{KP}{100n}$, ხოლო წევრთა რიცხვია n. არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$S_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{kp}{100}+\left[k-(n-1)\frac{k}{n}\right]\frac{p}{100}\right\}n$$

ელემენტარული გარდაქმნებით მივიღებთ

$$S_n=\frac{KP(n+1)}{200}$$

S_n - თანხას უწოდებენ **ჯამურ (დაგროვილ) სარგებელს** n წლის განმავლობაში. ეს არის თანხა, რომელსაც მოგების სახით მიიღებს ბანკი n წლის განმავლობაში გასესხებულ კაპიტალთან ერთად.

მაგალითი 3. 1000 ლარი აღებულია სესხათ ათი წლის ვადით სარგებლის წლიური მარტივი 5%-იანი განაკვეთით. ვიპოვოთ ჯამური (დაგროვილი) სარგებელი ათი წლის შემდეგ, თუ მოვალე ბანკს ყოველწლიურად უბრუნებს 100 ლარს და მიმდინარე წლის ვალის 5%-ს. გამოვთვალოთ ბანკის მოგება.

რადგან $\frac{K}{n}=\frac{1000}{10}=100$ ლარი და იგი იხდის მიმდინარე წლის ვადის 5%-ს, ამიტომ კმაყოფილდება მაგალითი 3-ის პირობები. შეგვიძლია გამოვიყენოთ ჯამური სარგებლის S_n-ის ფორმულა, მივიღებთ:

$$S_{10}=\frac{1000\cdot 5\cdot 11}{200}=25\cdot 11=275 \text{ ლარი.}$$

მაშასადამე ჯამური სარგებელი ათი წლისშემდეგ შეადგენს 275 ლარს.

მაგალითი 4. 2000 ლარი გაცემულია სესხად სარგებლის 5%-იანი განაკვეთით, საბოლოო თანხაა 3000 ლარი. განსაზღვრეთ სესხის ხანგრძლივობა.

როგორც ვიცით $n=\frac{K_n-K}{ik}=\frac{1}{i}\left(\frac{K_n}{K}-1\right)=\frac{1}{\frac{p}{100}}\left(\frac{K_n}{K}-1\right)=\left(\frac{K_n}{K}-1\right)\frac{100}{p}$

ჩვენ შემთხვევაში K_n=3000, K=2000=5, ამიტომ

$$n=\left(\frac{3000}{2000}-1\right)\frac{100}{5}=\left(\frac{3}{2}-1\right)20=\frac{1}{2}\cdot 20=10.$$

მაშასადამე სეხის ხანგრძლივობა ათი წელია.

3. გრძელვადიანი კრედიტების დაფარვა. საკრედიტო დაწესებულებების მიერ გრძელვადიანი კრედიტების გაცემისას დამუშავებული უნდა იყოს კრედიტების გადახდის გეგმა, ე.ი. გარკვეული წლების განმავლობაში მოვალისაგან კრედიტების დაფარვის გეგმა, ამასთან, მოვალე იხდის ყოველწლიურ გადასახადს ისე, რომ გარკვეული წლების შემდეგ დაფაროს მთელი კრედიტი აღებული თანხით სარგებლობის პროცენტის ჩათვლით. ჩვეულებრივი კრედიტის დასაფარავ შეატანს იხდიან ყოველი წლის ბოლოს.

ვთქვათ, K არის კრედიტი, გაცემული n წლით, ხოლო R კრედიტის დასაფარავი შესატანი, რომელსაც იხდიან ყოველი წლის ბოლოს.

პირველ შესატანს იხდიან წლის ბოლოს და მაშასადამე მისი დისკონტირებული სიდიდე არის Rv,

მეორე შესატანს იხდიან მეორე წლის ბოლოს და მაშასადამე მისი დისკონტირებული სიდიდე არის Rv^2

- - - - - -

უკანასკნელ შესატანს იხდიან n წლის ბოლოს, და მაშასადამე მისი დისკონტირებული სიდიდე არის Rv^n.

კრედიტი დაფარული იქნება, თუ ყველა გადახდილი შესატანების საწყისი ღირებულება კრედიტით წარმოდგენილი ფულადი საშუალებების ტოლია ე.ი. თუ

$$K=Rv+Rv^2+\cdots+Rv^n=Rv\left(v+v^2+\cdots+v^{n-1}\right)$$

სადაც, ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება გეომეტრიულ პროგრესიას წარმოადგენს მნიშვნელით v, ამიტომ $v+v^2+\cdots+v^{n-1}=\dfrac{v^{n-1}-1}{v-1}$,

მაშასადამე $K=R\dfrac{v\left(v^n-1\right)}{v-1}$, საიდანაც

$$R=\frac{K(v-1)}{v\left(v^n-1\right)} \tag{3}$$

რადგან $v=1/r$, გვექნება

$$R=\frac{K\left(\frac{1}{r}-1\right)}{\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r^n}-1\right)}=k\frac{(1-r)r^n}{1-r^n}=K\frac{r^n(r-1)}{r^n-1};$$ ვიცით, რომ $r=1+i$,

ამიტომ

$$R=K\frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n-1} \tag{4}$$

გამოსახულებას

$$\frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n-1} \tag{5}$$

ეწოდება **დაფარვის კოეფიციენტი**

სხვადსხვა პროცენტული განაკვეთებისა და ვადებისათვის არსებობს ამ კოეფიციენტების გამოსათვლელი ცხრილები (იხ. ცხრილი 3)

მაგალითი 5. ცნობილია, რომ K=5 000 000, i=0,05; n=12 უნდა გავიგოთ R.

მესამე ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ დაფარვის კოეფიციენტია 0,11283 ე.ი. კრედიტის დასაფარავად საჭირო შესატანია $R=5000000\cdot 0{,}11283=564150$ ლარი მიღებული კრედიტი, რომ დაიფაროს 12 წლის განმავლობაში მოვალემ ყოველწლიურად უნდა გადაიხადოს 564 150 ლარი. იგი მთლიანად შეიტანს 6769800 ლარს. კრედიტორის მოგებაა 6769800-5000000=1769800 ლარი.

მაგალითი 6. განვსაზღვროთ ყოველთვიური გადასახადი თუ 100 000 ლარი აღებულია ვალად სარგებლის რთული 8%-იანი განაკვეთით 25 წლის ვადით. მთლიანად რა თანხას გადაიხდის მოვალე.

პირობის თანახმად, K=100 000, $i=\frac{P}{100}=\frac{8}{100}=0{,}08$; $1+i$=1,08 n=25. მოცემულ პირობებში დაფარვის კოეფიციენტია

$$\frac{1{,}08^{25}\cdot 0{,}08}{1{,}08^{25}-1}=\frac{6{,}8484726\cdot 0{,}08}{6{,}8484726-1}=\frac{0{,}5478778}{5{,}8484726}=0{,}0936787$$

წლიური შესატანი გამოითვლება (4) ფარმულით.

$$R=100\,000\cdot 0{,}0936787=9367{,}87 \text{ ლარი.}$$

ე.ი. მოვალე თვიურად გადაიხდის $\frac{R}{12}=9367{,}87:12=780{,}65583\approx 780{,}66$ ლარს, ხოლო მთლიანად გადაიხდის $25K=25\cdot 9367687=234196675$ ლარს.საინტერესო, თუ რამდენად დაიკლებს ვალი ერთი წლის შემდეგ?

ამოცანის პირობის თანახმად მოვალე იხდის ფიქსირებულ გადასახადს ყოველთვიურად, მაშინ როდესაც 8%-იანი დარიცხვა ვალზე ხდება ყოველ წლიურად. ვალი პირველი წლის გასვლის შემდეგ აღვნიშნოთ K_1, ცხადია, რომ $K_1 = K + K \cdot 0{,}08 - R = 1{,}08K - R = 108000 - 9367{,}87 = 98632{,}13$ ლარი. ე.ი. ვალმა დაიკლო 100000-98632,13=1367,87 ლარით, მიუხედავად იმისა, რომ გადახდილია 9367,87 ლარი. (!)

4. ანუიტეტი. ზემოთ ჩვენ მივიღეთ $K = K_n v^n$ ფორმულა ერთი საბოლოო K_n თანხის დისკონტირებისათვის. ახლა გავეცნოთ, როგორ ხდება სასრული რაოდენობის საბოლოო თანხების დიკონტირება სხვადასხვა დროის პერიოდის მიხედვით. ასეთი ტიპის ამოცანებთან მაშინ გვაქვს საქმე, როდესაც ხდება რაიმე თანხის დაბანდება იმ პირობით, რომ დროის ყოველი ფიქსირებული პერიოდის (მაგალითად, ყოველი წლის) შემდეგ ხდება ერთი და იმავე ფიქსირებული თანხის მოხსნა ამ ანაბრიდან, ასეთ პროცესს ეკონომიკაში **ანუიტეტი** ეწოდება. ე.ი. **ანუიტეტი** ეწოდება ფულადი ნაკადების მიმდევრობას.

დროის რაიმე ინტერვალის, მაგალითად n წლის შესაბამისი **ანუიტეტის საწყისი თანხა** ეწოდება იმ თანხას, რომელიც უზრუნველყოფს ყოველწლიურ ფიქსირებულ K_0 თანხის ნაკადს, (რომელიც იხსნება ანგარიშიდან).

n წლის შემდეგ საანაბრო ანგარიში იხურება ე.ი. საანაბრო ანგარიშზე დარჩენილი თანხა 0-ის ტოლია. მაშასადამე, ანუიტეტი ყოველწლიური გადასახადია. იგი გრძელვადიანი სესხის სახეობაა, რომლის დროსაც კონტრაქტით დადგენილი სასესხო პერიოდის გავლის შემდეგ კრედიტორი ძირითად თანხასთან ერთად ყოველწლიურად იღებს საპროცენტო განაკვეთით დადგენილ პროცენტის თანხას.

მაგალითი 7. ვიპოვოთ საწყისი თანხა იმ ანუიტეტისა, რომელიც ყოველი წლის ბოლოს იძლევა 10 000 ლარს შემოსავალს 10 წლის განმავლობაში, თუ სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 7%.

ცნობილია, რომ ყოველწლიური გამოსატანი თანხა $R = 10000$ ლარი, $n = 10$ და $1 + i = 1 + \frac{P}{100} = 1 + 0{,}07 = 1{,}07$; უნდა გამოვთვალოთ K-საწყისი თანხა. ვიცით, რომ $R = K\frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1}$ - ფორმულა (4), საიდანაც $K = R\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$; მაშასადამე, ანუიტეტი წარმოადგენს გრძელვადიანი კრედიტის დაფარვის შებრუნებულ ამოცანას. მიღებულ ფორმულაში ჩავსვათ რიცხვითი მნიშვნელობები, მივიღებთ

$$K = 10000\frac{1{,}07^{10}-1}{0{,}07\cdot 1{,}07^{10}} = 1000\frac{1{,}9671511-1}{0{,}07\cdot 1{,}9671511} = 10000\frac{0{,}9671511}{0{,}1377005} =$$

$$= 10000\cdot 7{,}0235845 = 70235{,}845 \quad \text{ლარი}$$

ამრიგად, ამოცანაში აღნიშნული ანუიტეტის საწყისი თანხაა 70235,845 ლარი. იგი უზრუნველყოფს პირობას: მეანაბრემ ათ წელიწადში მიიღოს 100 000 ლარი.

როგორც, ვნახეთ ანუიტეტის თანხა n წლის მანძილზე, რომელიც ყოველი წლის ბოლოს იძლევა K ლარ შემოსავალს, სარგებლის წლიური რთული პროცენტიანი განაკვეთით, გამოითვლება ფორმულით

$$K = R\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}, \tag{6}$$

სადაც n – წელთა რიცხვი ფიქსირებულია, R - ყოველწლიურად კრედიტის დასაფარავი შესატანია. საინტერესო შემთხვევაა, როდესაც წელთა რიცხვი რაგინდ დიდია, ე.ი. $n\to\infty$. ამ შემთხვევის განსახილველად საჭიროა ზემოთმოყვანილ ფორმულაში გადავიდეთ ზღვარზე როცა $n\to\infty$, გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} K = \lim_{n\to\infty} R\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}, \tag{7}$$

$$K = \frac{R}{i}\lim_{n\to\infty} R\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} = \frac{R}{i}\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(1+i)^n}\right] = \frac{R}{i}\left[1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+i)^n}\right] \tag{8}$$

რადგანაც $i>0$, ამიტომ $1+i>1$ ე.ი. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+i)^n=\infty$. მიღებული შედეგი გავითვალისწინოთ უკანასკნელ ტოლობაში, მივიღებთ

$$K = \frac{R}{i} \tag{9}$$

მაშასადამე, ანუიტეტის თანხა, როდესაც წელთა რიცხვი საკმარისად დიდია, ტოლია ყოველწლიურად კრედიტის დასაფარავად თანხა გაყოფილი ხვედრით პროცენტულ განაკვეთზე.

მაგალითი 8. თუ მაგალით 7-ში შევცვლით პირობას „ათი წლის განმავლობაში“ პირობით „წელთა რიცხვი საკმარისად დიდია“ ($n\to\infty$), მიღებული ფორმულის თანახმად მივიღებთ: $K = \frac{10\,000}{0{,}07} = 142857{,}14$ ლარი.

მაშასადამე თუ დაბანდებულია 142857,14 ლარი, მაშინ ანუიტეტი ყოველწლიურად იძლევა 10 000 ლარ შემოსავალს.

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რა არის დისკონტი? დისკონტირება?
2. რა არის სარგებლია მარტივი განაკვეთი? რთული განაკვეთი?
3. როგორ ფინანსურ ოპერაციას ეწოდება ანუიტეტი?
4. რას ეწოდება ანუიტეტის საწყის თანხა?
5. რისი ტოლია ყოველწლიურად კრედიტის დასაფარავად თანხა გაყოფილი ხვედრით პროცენტულ განაკვეთზე?

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

1. რა თანხა უნდა დავაბანდოთ ბანკში, რომ 20 წლის შემდეგ დაგროვდეს 100 000 ლარი, თუ ბანკი იძლევა i =5% (რთულ) ყოველწლიურ სარგებელს?

2. გამოთვალეთ ბანკში დაბანდებული საწყისი თანხა, თუ ცნობილია , რომ ყოველწლიური საპროცენტო განაკვეთი i =5% (რთულ) და 4 წლის შემდეგ საბოლოო თანხამ შეადგინა 18 232,5 ლარი.

3. რა თანხა უნდა დავაბანდოთ 3% (რთული) წლიური საპროცენტო განაკვეთით, რომ 4 წლის შემდეგ დაგროვდეს 60 775 ლარი?

4. რამდენი წლით უნდა დავაბანდოთ 1 000 ლარი i =0,05 (რთულ) წლიური საპროცენტო განაკვეთით, რომ დაგვიგროვდეს 13 200 ლარი?

5. კრედიტი, რომელიც შეადგენს ერთ მილიონ ლარს, უნდა დაიფაროს 20 წელიწადში ყოველი წლის ბოლოს ვალის ერთნაირი თანხის გადახდით. რა თანხა უნდა იხადოს მოვალემ (დებიტორმა) ყოველწლიურად, რომ კრედიტი დაფაროს, თუ i =0,05 (რთული).

6. მოვალემ (დებიტორმა) აიღო კრედიტი 120 000 ლარის რაოდენობით 8 წლით. გამოთვალეთ კრედიტის დაფარვის ყოველწლიური R შენატანი და ჯამური დავალიანება, თუ ყოველწლიური საპროცენტო განაკვეთია i =0,05 (რთული).

7. კომპანიამ 5 წლის განმავლობაში უნდა მიიღოს ყოველწლიურად თანაბარი R=10 000 ლარი. იპოვეთ ასეთი ფულადი ნაკადების მიმდევრობის (ანუიტეტის) მიმდინარე (საწყისი) ღირებულება, თუ ყოველწლიური საპროცენტო განაკვეთია i =0,10 (რთული).

8. იპოვეთ მიმდინარე ღირებულება იმ ანუიტეტისა, რომელიც ყოველი წლის ბოლოს იძლევა 5 000 ლარ შემოსავალს 5 წლის მანძილზე, თუ ყოველწლიური საპროცენტო განაკვეთია $i = 5$ % (რთული).

§ 5 ინვესტიციების შეფასება და შედარება

ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ განსხვავებულ პარამეტრიანი საინვესტიციო პროექტები ფინანსური მომგებიანობის თვალსაზრისით, რომელიც საშუალებას მოგვცემს რამდენიმე პროექტიდან შევარჩიოთ ჩვენთვის ყველაზე ხელსაყრელი წინადადება.

საილუსტრაციოდ ამოვხსნათ შემდეგი კონკრეტული ამოცანა: ვთქვათ საინვესტიციო პროექტი ითხოვს 15 000 ლარის ინვესტირებას და გარანტიას იძლევა, რომ სამ წელიწადში იგი დაუბრუნებს ინვესტორს 20 000 ლარს. ამასთან ცნობილია, რომ საფინანსო ბაზარზე დომინანტური წლიური რთული განაკვეთი 5%-ია.

გამოვთვალოთ:

(1) 15 000 ლარის შესაბამისი საბოლოო თანხა 3 წლის შემდეგ;

(2) 20 000 ლარის შესაბამისი დისკონტირებული თანხა, თუ დროის ინტერვალი 3 წელიწადია;

(3) სარგებლის რა წლიური რთული განაკვეთი შეესაბამება თანხის ზრდას 3 წლის ინტერვალში 15 000-დან 20 000 ლარამდე?

(4) სასურველია თუ არა ფინანსური თვალსაზრისით ასეთი ინვესტიცია?

(5) შეიცვლებოდა თუ არა (დ) პუნქტის რეკომენდაცია, სარგებლის დომინანტური წლიური რთული განაკვეთი, რომ 12% ყოფილიყო.

(1) $K = 15000,\ n = 3,\quad P = 5$. უნდა გამოვთვალოთ K_3.

როგორც ვიცით

$$K_3 = K(1+i)^3 = 15\,000(1+0{,}005)^3 15\,000 \cdot 1{,}05^3 = 15\,000 \cdot 1{,}157625 = 17364{,}375 \text{ ლარი.}$$

(2) უნდა გამოვთვალოთ 20 000 ლარის დისკონტირებული თანხა, ე.ი. მისი შესაბამისი საწყისი თანხა.

$$K_3 = \frac{K}{(1+i)^3} = 20000 : 1{,}157625 = 17276{,}751 \text{ ლარი.}$$

(3) სამი წლის განმავლობაში 15 000 – დან 20 000 ლარამდე ზრდის შესაბამისი სარგებლის წლიური განაკვეთი, როგორც ვიცით გამოითვლება ფორმულით:

$$K_3 = K(1+i_1)^3; \quad (1+i_1)^3 = \frac{K_3}{K}; \quad i_1 = \sqrt{\frac{K_3}{K}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{20\,000}{15\,000}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{2}{5}} - 1 \approx 0{,}1;$$

მივიღეთ, რომ $i_1 \approx 0{,}1$ მაგრამ $\frac{P_1}{100} = i_1$; $P_1 = i_1 100 = 0{,}1 \cdot 100 = 10$, მაშასადამე საძიებელი სარგებლის განაკვეთია $P_1 = 10\%$.

(4) გავაანალიზოთ. სასურველია, თუ არა ამოცანაში აღწერილი ინვესტიციის განხორციელება. ამოცანის პირობის თანახმად ინვესტორი საწყისი 15 000 ლარის ნაცვლად იბრუნებს 20 000 ლარს, ე.ი. იგებს 5 000 ლარს. მას, რომ საწყისი ფული დაებანდებინა ბაზარზე, მაშინ მიიღებდა 17 364 ლარს, და მოგება დარჩებოდა 2 364 ლარი, სანაცვლოდ 5 000 ლარისა. მაშასადამე საინვესტიციო პროექტში თანხის დაბანდება ფინანსურად უფრო მომგებიანია. თუ გავაალალიზებთ (2) პუნქტში მიღებულ შედეგს, კვლავ იგივე დასკვნამდე მივალთ. მართლაც, იმისათვის, რომ საფინანსო ბაზარზე სამი წლის შემდეგ მივიღოთ საინვესტიციო პროექტით შემოთავაზებული 20 000 ლარი, ამისათვის ბაზადზე უნდა დაბანდდეს საწყისი თანხა 17 276 ლარი, რაც 2 276 ლარით აღემატება საინვესტიციო პროექტით მოთხოვნილ თანხას.

საინვესტიციო პროექტით გათვალისწინებულ საბოლოო თანხის შესაბამის დისკონტირებულ სიდიდესა და საინვესტიციო პროექტით მოთხოვნილ საწყისი თანხის სიდიდეს შორის სხვაობას **წმინდა საწყისი სიდიდე** ეწოდება. ჩვენ შემთხვევაში წმინდა საწყისი სიდიდეა

17 276,751- 15 000=2276,751 ლარი.

ცხადია, თუ წმინდა საწყისი სიდიდე დადებითია, მაშინ საინვესტიციო პროექტში მონაწილეობა, ფინანსურად მომგებიანია. ეს უკანასკნელი არის

ერთერთი ძირითადი კრიტერიუმი საინვესტიციო პროექტის მომგებიანობის შესაფასებლად.

მეორეს მხრივ (3) პუნქტში ვაჩვენეთ, რომ საინვესტიციო პროექტში მონაწილეობა ტოლფასია სარგებლის წლიური, რთული 10%-იანი განაკვეთით საწყისი თანხის დაბანდებისა, რაც აღემატება საბაზრო 5%-იან განაკვეთს, მაშასადამე საინვესტიციო პროექტში მონაწილეობა ფინანსურად უფრო მომგებიანია.

სარგებლის იმ წლიურ რთულ განაკვეთს, რომელიც საინვესტიციო დროის პერიოდში უზრუნველყოფს საინვესტიციო თანხის ზრდას, საინვესტიციო პროექტით განსაზღვრულ საბოლოო თანხამდე, ეწოდება **სარგებლის შიგა განაკვეთი.**

ჩვენ შემთხვევაში სარგებლის შიგა განაკვეთია 10%. ცხადია, თუ სარგებლის შიგა განაკვეთი მეტია საფინონსო ბაზრის სარგებლის დომინატურ განაკვეთზე, მაშინ საინვესტიციო პროექტი მომგებიანია. ეს პირობაც ერთერთი კრიტერიუმია საინვესტიციო პროექტების მომგებიანობის შესაფასებლად. ცხადია, იგი სრულ თანხმობაშია ზემოთ ჩამოყალიბებულ კრიტერიუმთან, რომელიც პროექტის მომგებიანობას აფასებს წმინდა საწყისი სიდიდის საშუალებით.

(5) თუ საფინანსო ბაზრის სარგებლის განაკვეთი გახდება 12 %, მაშინ იგი გადააჭარბებს საინვესტიციო პროექტის შიგა განაკვეთს. ამიტომ ამ შემთხვევაში პროექტში მონაწილეობა არა სასურველია ფინანსურად, რადგან საფინანსო ბაზარზე დაბანდება უფრო მეტ მოგებას მოუტანს ინვესტორს, ვიდრე საინვესტიციო პროექტში მონაწილეობა. მართლაც, 15 000 ლარი დაბანდებული 12%-ს მოგვცემს.

$K_3 = 15\,000(1+0{,}12)^3 = 15\,000 \cdot 1{,}12^3 = 15\,000 \cdot 1{,}404928 = 21073{,}92$ ლარი, რაც 1073,92 ლარით მეტია საინვესტიციო პროექტით გათვალისწინებულ საბოლოო თანხაზე.

გავეცნოთ წმინდა საწყისი სიდიდის და სარგებლის შიგა განაკვეთის გამოსათვლელ ფორმულებს. შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

წმინდა საწყისი სიდიდე აღვნიშნოთ ***NPV (Net present value)*** სიმბოლოთი;

სარგებლის შიგა განაკვეთი აღვნიშნოთ ***IRR (Internal rate of returne)*** სიმბოლოთი.

ვთქვათ:

K_1- პროექტით გათვალისწინებული საწყისი საინვესტიციო თანხაა;

K_2-პროექტით გათვალისწინებული საბოლოო თანხაა, რომელიც უბრუნდება ინვესტორს $K_1 < K_2$;

P_m-საფინანსო ბაზრის (დომინანტური) სარგებლის წლიური რთული განაკვეთი;

n-საინვესტიციო პერიოდის ხანგრძლივობა;

NPV -განმარტების თანახმად არის K_2 თანხის შესაბამისი დისკონტირებული თანხისა და საწყისი K_1 თანხის სხვაობა, მაგრამ K_2-ის დისკონტირებული სიდიდეა $\dfrac{K_2}{(1+i_m)^n} = K_2(1+i_m)^{-n}$, სადაც i_m -ით $\left(i_m = \dfrac{P_m}{100}\right)$ აღნიშნულია საფინანსო ბაზრის (დომინანტური) სარგებლის წლიური ხვედრითი რთული განაკვეთი. მაშასადამე

$$\boldsymbol{NPV} = K_2(1+i_m)^{-n} - K_1 \qquad \text{ანუ} \qquad \boldsymbol{NPV} = K_2\left(1+\frac{P_m}{100}\right)^{-n} - K_1 \tag{1}$$

გამოვთვალოთ, რა რთული განაკვეთი შეესაბამება საწყის K_1 თანხის ზრდას საბოლოო K_2 თანხამდე n წლის განმავლობაში. თუ i_x ავღნიშნავთ სარგებელის საძიებელ ხვედრით განაკვეთს, გვექნება

$$K_2 = K_1(1+i_x)^n; \qquad 1+i_x = \sqrt[n]{\frac{K_1}{K_2}}; \qquad i_x = \sqrt[n]{\frac{K_1}{K_2}} - 1;$$

ე.ი.

$$i_x = \sqrt[n]{\frac{K_1}{K_2}} - 1 \tag{2}$$

IRR ფუნქციის ასაგებად გავითვალისწინოთ, რომ $i_x = \dfrac{P_x}{100}$ მაშინ (2) ფორმულიდან მივიღებთ

$$P_x = (IRR) = \left[\sqrt[n]{\frac{K_2}{K_1}} - 1\right]100\%; \tag{3}$$

თუ საქმე ეხება სხვადასხვა საინვესტიციო პროექტების შედარებას, საჭიროა გამოვიყენოთ ორივე (1), (2) ან (3) კრიტერიუმი უფრო მომგებიანი პროექტის შე-სარჩევად. როდესაც საქმე ეხება სხვადასხვა თანხებს, მაშინ ***IRR*** კრიტერიუმი ყოველთვის ვერ იძლევა ფინანსურ მოგების თვალსაზრისით საუკეთესო პროექტის არჩევის საშუალებას. ასეთ შემთხვევაში უნდა მივმართოთ ***NPV*** კრიტერიუმს. ამ მიზნით განვიხილოთ

მაგალითი 1. ვთქვათ იურიდიულ პირს აქვს 30 000 ლარი და თანხის ინვესტირება შესაძლებელია *ორ A და B* პროექტებიდან მხოლოდ ერთში. *A* პროექტი ითხოვს საწყის საინვესტიციო თანხას $K_1^{(A)} = 1000$ ლარს და n=4 წლის შემდეგ აბრუნებს $K_2^{(A)} = 1200$ ლარს. *B* პროექტი ითხოვს საწყის საინვესტიციო თანხას $K_1^{(B)} = 30\,000$ ლარს და n=4 წლის შემდეგ აბრუნებს $K_2^{(B)} = 35000$ ლარს. ცნობილია, რომ საფინანსო ბაზრის სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია $P_m = 3\%$. რომელ პროექტში უფრო მომგებიანი ფულის დაბანდება?

ზემოთ მოყვანილი დასკვნების თანახმად, უნდა გამოვთვალოთ ***NPV*** და ***IRR*** ორივე პროექტისათვის, მიღებული შედეგები შევადაროთ ერთმანეთს *A* და *B* მის საფუძველზე მივიღოთ შესაბამისი გადაწყვეტილება.

გვაქვს

$$\left(NPV\right)_A = K_2^{(A)}(1+i_m)^{-n} - K_i = 1200 \cdot 1{,}03^{-4} - 1000 = 1066{,}1844 - 1000 \approx 66{,}18 \quad \text{ლარი}.$$

$$\left(NPV\right)_B = K_2^{(B)}(1+i_m)^{-n} - K_i = 35000 \cdot 1{,}03^{-4} - 30000 =$$

$$= 35000 : 1{,}1255088 - 30000 \approx 1097{,}046 \quad \text{ლარი}$$

რადგან, ორივე შემთხვევაში ***NPV*** დადებითია, ამიტომ ბაზართან შედარებით ორივე პროექტი მომგებიანია: ამოვარჩიოთ ოპტიმალური პროექტი. გვაქვს ფულის დაბანდების შემდეგი ორი ვარიანტი:

1. ინვესტორი ათას ლარს დააბანდებს *A* პროექტში; დარჩენილ 29 000 ლარს – ბაზარზე. ბაზრიდან კი ის მიიღებს $29\,000 \cdot 1{,}03^4 = 32639{,}76$ ლარის. ამ ვარიან-ტიდან ინვესტორი მიიღებს ჯამში 1 200+32639,76=33839,76 ლარს.
2. ინვესტორი ოცდაათი ათას ლარს მთლიანად დააბანდებს *B* პროექტში. მაშინ იგი 4 წლის შემდეგ მიიღებს 35 000 ლარს. ცხადია, რომ *B* პროექტში მონაწილეობა უკეთესია, რადგან იგი 35 000-33839,76=1160,24 ლარით მეტ შემოსავალს იძლევა.

გამოვთვალოთ სარგებლის შიგა განაკვეთი –***IRR*** ორივე პროექტისათვის

$$\boldsymbol{IRR_A} = \left[\sqrt[4]{1{,}2} - 1\right]100 \approx 4{,}7(\%)$$

$$\boldsymbol{IRR_B} = \left[\sqrt[4]{\frac{35000}{30000}} - 1\right]100 \approx 3{,}9(\%)$$

როგორც ვხედავთ უფრო მაღალი სარგებლის შიგა განაკვეთი აქვს *A* პროექტს, თუმცა როგორც ვნახეთ *B* პროექტში მონაწილეობა უფრო მომგებიანია, ვიდრე *A* პროექტში. ამრიგად, ***IRR*** კრიტერიუმი განსხვავებული თანხების შემთხვევაში არაა სანდო, რადგანაც პატარა თანხის დიდი პროცენტი შეიძლება

უფრო მცირე აღმოჩნდეს, ვიდრე დიდი თანხის პატარა პროცენტი (როგორც ეს აღმოჩნდა განხილულ ამოცანაში).

ახლა განვიხილოთ შემდეგი ტიპის ამოცანა, რომელიც ეხება საინვესტიციო პროექტების შედარებას, როდესაც ინვესტორი იღებს მრავალჯერად შემოსავალს გარკვეული პერიოდების შემდეგ.

ვთქვათ ინვესტორს აქვს 20 000ლარი, რომელიც შეიძლება დაბანდდეს ორი A და B საინვესტიციო პროექტებიდან მხოლოდ ერთში. დაბანდებული 20 000 ლარის შემთხვევაში თითოეული პროექტი იღებს გარანტიას, რომ 4 წლის განმავლობაში ყოველწლიურად დაუბრუნებს ინვესტორს გარკვეულ თანხებს რომლებიც მოცემულია შემდეგი ცხრილის სახით:

წელიწადი		1	2	3	4	სულ
ინვესტორის შემოსავალი	A პროექტი	a_1=6 000	a_2=6 000	a_3=10 000	a_4=8000	27 000
	B პროექტი	b_1=10 000	b_2=6 000	b_3=9 000	b_4=1 000	26 000

შევარჩიოთ, რომელ პროექტშია უმჯობესი თანხის დაბანდება, თუ ბაზარზე სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 11 %.

გარეგნულად A პროექტი უფრო მომგებიანი ჩანს ვიდრე B პროექტი, რადგან იგი თითქოს და 4 წელიწადში 1 000 ლარით მეტ შემოსავალს იძლევა.

გამოვიკვლით მართლაც ასეა თუ არა.

ცხრილიდან, ჩანს, რომ ერთიდაიგივე 10 000 ლარ გადასახადს A პროექტით ინვესტორი იღებს მესამე წლის ბოლოს, ხოლო B პროექტით პირველი წლის ბოლოს. რადგან ეს მიღებული 10 000 ლარი ინვესტორს შეუძლია კვლავ დააბანდოს ბაზარზე, ამიტომ A და B პროექტების აღნიშნული გადასახადი არ არის ერთმანეთის ექვივალენტური. აშკარაა, რომ B პროექტის მიერ პირველი წლის ბოლოს გადახდილი 10 000 ლარს უფრო მეტი „ფასი“ აქვს, ვიდრე A პროექტის მიერ გადახდილ იგივე თანხას მესამე წლის ბოლოს. იმისათვის, რომ გავარკვიოთ რომელი პროექტი ჯობია ინვესტორისათვის, დავითვალოთ პროექტებით გათვალისწინებული გადასახადების შესაბამისი დისკონტირებული (საწყისი) თანხების ჯამი.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ბაზრის სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 11 %, დისკონტირებული a_k^* და b_k^* თანხებისათვის მივიღებთ

$$a_1^* = \frac{6000}{1,1} = 5405,405 \approx 5405,41 \quad a_2^* = \frac{3000}{1,1^2} = 2434,8672 \approx 2434,87 \quad \text{და} \quad \text{ა.შ.}$$

წელიწადი	დისკონტირებული თანხები	
	A პროექტი	*B* პროექტი
1	$a_1^* = 5405,41$	$b_1^* = 9000,01$
2	$a_2^* = 2434,87$	$b_2^* = 4869,73$
3	$a_3^* = 7311,91$	$b_3^* = 6580,72$
4	$a_4^* = 5269,85$	$b_4^* = 658,73$
სულ	20422,04	21109,14

შევადგინოთ ცხრილი მიღებული ცხრილიდან აშკარაა, რომ *A* პროექტში მონაწილეობა ტოლფასია მიმდინარე მომენტში ბაზარზე 20422,04 ლარის დაბანდებისა, ხოლო *B* პროექტში მონაწილეობა – 21109,14 ლარის დაბანდებისა. ამიტომ *B* პროექტში მონაწილეობა უფრო მომგებიანია, ე.ი. ჩვენი წარმოდგენა *A* პროექტის უფრო მომგებიანობის შესახებ მცდარი აღმოჩნდა.

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება წმინდა საწყის სიდიდე? როგორ გამოითვლება წმინდა საწყის სიდიდე?
2. რას ეწოდება სარგებლის შიგა განაკვეთი? როგორ გამოითვლება სარგებლის შიგა განაკვეთი?
3. როგორ აღინიშნება წმინდა საწყის სიდიდე? სარგებლის შიგა განაკვეთი?
4. რა კრიტერიუმებითაა შესაძლებელი საინვესტიციო პროექტების შეფასება?

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

1. იურიდიულ პირს აქვს 30 000 ლარი და თანხის ინვესტირება შესაძლებელია ორი A და B პროექტებიდან მხოლოდ ერთში. A პროექტი ითხოვს საწყის საინვესტიციო თანხას 1 000 ლარს და 4 წლის შემდეგ აბრუნებს 1 200 ლარს. B პროექტი ითხოვს საწყის საინვესტიციო თანხას 30 000 ლარს და 4 წლის შემდეგ აბრუნებს 35 000 ლარს. ცნობილია, რომ საფინანსო ბაზრის სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 3%. რომელ პროექტში უფრო მომგებიანია ფულის დაბანდება?

2. საინვესტიციო პროექტი ინვესტორს ჰპირდება 20 000 ლარის ინვესტიციით 80 000 ლარის მოგებას 5 წელიწადში. გამოთვალეთ სარგებლის შიდა განაკვეთი და განსაზღვრეთ, მომგებიანია თუ არა ეს პროექტი, თუ სარგებლის საბაზრო წლიური რთული განაკვეთია 6 %.

3. ვთქვათ, ინვესტორს აქვს საშუალება მიიღოს მონაწილეობა სამი A , B და C პროექტებიდან მხოლოდ ერთში. A პროექტი მოითხოვს საწყის 20 000 ლარს, B პროექტი - 30 000 ლარს, ხოლო C პროექტი - 100 000 ლარს. ამასთან, A პროექტი გარანტიას იძლევა, რომ ინვესტორს დაუბრუნებს 25 000 ლარს, B პროექტი გარანტიას იძლევა, რომ ინვესტორს დაუბრუნებს 37 000 ლარს, ხოლო C პროექტი - 117 000 ლარს (სამი წლის შემდეგ). რომელი პროექტია უფრო მომგებიანი, თუ საბაზრო წლიური განაკვეთია 5 %?

4. ფირმას აქვს არჩევანი დააბანდოს 10 000 ლარი ორი A და B პროექტებიდან ერთში. ამ პროექტებიდან შემოსავალი წლების მიხედვით მოცემულია ცხრილით (ქვემოთ). ცნობილია, რომ სარგებლის საბაზრო წლიური რთული განაკვეთია 15 %. რომელი პროექტია უფრო მომგებიანი?

წელიწადი		1	2	3	4	5	სულ
ფირმის შემოსავალი	A პროექტი	a_1=2 000	a_2=2 000	a_3=3 000	a_4=3 000	a_5=3 000	13 000
	B პროექტი	b_1=1 000	b_2=1 000	b_3=2 000	b_4=6 000	b_5=4 000	14 000

თავი II. წრფივი ალგებრის ელემენტები. წრფივი ალგებრის ელემენტების ზოგიერთი გამოყენება ეკონომიკურ კვლევებში

§ 1. მატრიცთა თეორიის ელემენტები

1. მატრიცის ცნება. იმისათვის, რომ წარმოებულმა ბიზნესმა მოგვიტანოს მოგება ამიტომ, წარმოების დაგეგმვა უნდა ემყარებოდეს სათანადოდ მოწესრიგებულ სისტემას, რომლის დახმარებითაც მარტივად და მოკლედ აღიწერება დამოკიდებულებანი, რომელსაც ადგილი აქვს წარმოებაში. ასეთი მოწესრიგებული სისტემა შეიძლება თვალნათლივ წარმოვადგინოთ შესაბამისი ცხრილით.

მაგალითად, განვიხილოთ მატერიალური წარმოების სხვადასხვა დარგების მიერ ურთიერთმიწოდების ინფორმაციის სისტემა. თუ i=1, 2, 3, 4 სათანადოდ აღნიშნავს შესაბამისი დარგის ნომერს, მაშინ პროდუქციის ურთიერთმიწოდების ცხრილს აქვს შემდეგი სახე

$$\begin{array}{ccccc} \text{დარგი} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ \text{I} & \varpi_{11} & \varpi_{12} & \varpi_{13} & \varpi_{14} \\ \text{II} & \varpi_{21} & \varpi_{22} & \varpi_{23} & \varpi_{24} \\ \text{III} & \varpi_{31} & \varpi_{32} & \varpi_{33} & \varpi_{34} \\ \text{IV} & \varpi_{41} & \varpi_{42} & \varpi_{43} & \varpi_{44} \end{array} \tag{1}$$

ამ ცხრილში $\varpi_{ij}\,(i,j=1,2,3,4)$ აღნიშნავს პროდუქციის იმ მოცულობას, რომელსაც i-ური დარგი აწვდის j-ური დარგს. ასე მაგალითად, $\varpi_{11},\varpi_{12},\varpi_{13},\varpi_{14}$

შესაბამისად აღნიშნავენ პროდუქციის მოცულობებს, რომელსაც I დარგი აწვდის სხვა დარგებს და ა.შ.

თუ ნორმებს მივიღებთ, როგორც ინფორმაციის სისტემას, მაშინ ანალოგიურად შეიძლება აღვწეროთ წარმოების დაგეგმვა. მაგალითად, თუ წარმოება ამზადებს ოთხი სახის პროდუქციას: 1,2,3,4 და მათი წარმოებისათვის საჭიროა სამი სახის ნედლეული 1,2,3, მაშინ მატერიალურ დანახარჯთა ნორმები, რომელიც წაროადგენს მომარაგების გეგმის საფუძველს შეიძლება მოცემული იყოს ცხრილით:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix} \tag{2}$$

სადაც $a_{i,j} (i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4)$ აღნიშნავს i-ური ნედლეულის დანახარჯის ნორმას j-ური პროდუქტის ერთეულის საწარმოებლად. ასე მაგალითად, I ნედლეულის დანახარჯის ნორმები 1,2,3,4 პროდუქციის ერთეულზე არის $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$.

(1) და (2) ცხრილები წარმოადგენენ ე.წ. მატრიცის კერძო შემთხვევებს, რომელიც განიხილება მათემატიკაში. ეკონომიკურ კვლევებში ისინი ფართო გამოყენებას პოულობენ, განსაკუთრებით, კი წარმოების დაგეგმვაში.

$m \times n$ ზომის მატრიცა ეწოდება მათკუთხა ცხრილს, რომელიც შეიცავს m სტრიქონს და n სვეტს. თვითონ რიცხვებს, რომლებიც შეადგენენ მატრიცას, მატრიცის **ელემენტები** ეწოდებათ. მატრიცას აღნიშნავენ A, B, C, ... ლათინური დიდი ასოებით, ხოლო ელემენტებს ორმაგი ინდექსის მქონე პატარა ასოებით $a_{i,j}$, სადაც i აღნიშნავს სტრიქონის ნომერს j კი სვეტის ნომერს. აგრეთვე გამოიყენება $\left(a_{i,j}\right)_m^n$ აღნიშვნა. ე.ი.

$$A = \left(a_{i,j}\right)_m^n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

იმისათვის, რომ A და B მატრიცა ერთმანეთს შევადაროთ, პირველ რიგში ისინი ერთნაირი ზომისა უნდა იყვნენ. თუ A და B მატრიცა ერთაირი ზომისაა: $A = \left(a_{i,j}\right)_m^n$ და $B = \left(b_{i,j}\right)_m^n$, მაშინ ვიტყვით, რომ A და B მატრიცები ტოლია თუკი $a_{i,j} = b_{i,j}$ ნებისმიერი $i=1,2,...m$ და j=1,2,...n-სთვის. ასეთ შემთხვევაში A=B.

(ცხადია, რომ მატრიცების სხვაგვარ შედარებაზე უაზრობაა, იგულისხმება, რომ შეუძლებელია A>B ცნების რამდენადმე აზრიანი განმატრება).

როცა მატრიცა მხოლოდ ერთო სტრიქონისაგან შედგება, მაშინ მას **ვექტორ-სტრიქონს** უწოდებენ, ხოლო როცა – მხოლოდ ერთი სვეტისაგან, მაშინ მას **ვექტორ-სვეტს** უწოდებენ. მაშასადამე

$A=(a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$ - ვექტორ-სტრიქონია, ხოლო, $B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ კი - ვექტორ-სვეტი.

თუ მატრიცაში $m=n$ მაშინ **მატრიცას კვადრატული** ეწოდება.

მატრიცის ელემენტებს, რომელთა სტრიქონისა და სვეტის ნომრები ემთხვევა **დიაგონალური ელემენტები** ეწოდებათ და ისინი ადგენენ მატრიცის დიაგონალს. მაგალითად, კვადრატული მატრიცის დიაგონალს ადგენენ $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ელემენტები.

თუ მატრიცის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ მატრიცას **ნულოვანი** ეწოდება, ე.ი.

$$O=(0)_m^n=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

თუ მატრიცის ყველა ელემენტი, გარდა დიაგონალურისა, ტოლია ნულის, მაშინ მატრიცას **დიაგონალური** ეწოდება. მაგალითად დიაგონალურია მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

თუ დიაგონალური მატრიცის ყველა დიაგონალური ელემენტი 1-ის ტოლია, მაშინ მატრიცას **ერთეულოვანი** ეწოდება:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2. მოქმედებანი მატრიცებზე. მატრიცის ნამრავლი λ რიცხვზე ეწოდება მატრიცას ($B=\lambda A$), თუ $b_{i,j}=\lambda a_{i,j}$ (i=1,2,3,....m; j=1,2,3,...n). ამ განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ საერთო თანამამრავლი შეიძლება მარტიცის გარეთ გამოვიტანოთ.

თუ A და B ორივე $m\times n$ ზომის მატრიცა, მაშინ მათი ჯამი ეწოდება ესეთ C მატრიცას ($C=A+B$), რომლის ელემენტებიც A და B მატრიცის შესაბამისი ელემენტების ჯამის ტოლია:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \quad i=1,2,\ldots,m \quad j=1,2,\ldots,n \ ,$$

ცხადია, რომ A+O=A. ადვილი შესამჩნევია, რომ A-B=A+(-1)B.

როგორც უკვე ვნახეთ ნებისმიერი ორი მატრიცის არც შედარება შეიძლება და არც შეკრება. ინტუიციურად ცხადია, გარკვეული შეზღუდვები იარსებებს მატრიცების გამრავლების დროსაც.

$A=\left(a_{i,j}\right)_m^n$ და $B=\left(b_{i,j}\right)_n^p$, მატრიცების ნამრავლი ეწოდება $m\times p$ ზომის $C=\left(c_{i,k}\right)_m^p$ მატრიცას, სადაც $c_{i,k}$ ელემენტი არის მატრიცის i-ური სტრიქონის ელემენტების მატრიცის k-ური სვეტის შესაბამის ელემენტებზე ნამრავლთა ჯამი ე.ი.

$$c_{i,k}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk} \qquad \begin{matrix} i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,p \end{matrix} \tag{1}$$

შევნიშნოთ, რომ მატრიცების ნამრავლი განიმარტება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა პირველი მატრიცის სვეტების რიცხვი მეორე მატრიცის სტრიქონების რიცხვის ტოლია. მაგალითად, რომ ვიპოვოთ C ნამრავლი მატრიცის c_{23} ელემენტი, ამისათვის საჭიროა მატრიცის მე-2 სტრიქონის ელემენტები გავამრავლოთ მატრიცის მე-3 სვეტის შესაბამის ელემენტებზე.

$$c_{23}=(a_{21}\quad a_{22}\quad a_{23}\quad \cdots \quad a_{2n})\cdot\begin{pmatrix} b_{13}\\ b_{23}\\ b_{33}\\ \vdots\\ b_{n3}\end{pmatrix}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}+a_{2n}b_{n3}$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $A\cdot B$ თუ

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

მოცემულ მაგალითში A მატრიცის ზომებია 2×3 და B მატრიცისა 3×3. ნამრავლის ელემენტებია

$$c_{11}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=1+4-9=-4; \qquad c_{12}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=-6;$$

$$c_{13}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}=3+0-12=-9; \quad c_{21}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=2+0-6=-4;$$

$$c_{22}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=0+0-4=-4; c_{21}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}=6+0-8=-2;$$

მაშასადამე

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-4 & -6 & -9\\-4 & -4 & -2\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}4 & 6 & 9\\4 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

თუ განვიხილავთ $B\cdot A$ ნამრავლს ის საერთოდ არ იარსებებს, რადგამ ამ შემთხვევაში B მატრიცის სვეტთა რაოდენობა განსხავავებულია A მატრიცის სტრიქონთა რაოდენობაზე (3≠2).

მაგალითი 2. ვთქვათ $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$,

მაშინ $$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\7 & 16\end{pmatrix}, \qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 6\\11 & 12\end{pmatrix}$$

მაშასადამე $$A\cdot B\neq B\cdot A$$

აქედან შეიძლება გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა: საზოგადოდ $A\cdot B\neq B\cdot A$; ე.ი. მატრიცთა ნამრავლი არაკომურაციურია. ე.ი. შეიძლება არსებობდეს $A\cdot B$ ნამრავლი, მაგრამ არ არსებობდეს $B\cdot A$ ნამრავლი.

მარტივად მოწმდება, რომ შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები მატრიცთა სიმრავლეში ხასიათდება შემდეგი თვისებებით:

1. $\boldsymbol{A+B=B+A}$ **2.** $\boldsymbol{\lambda(\delta A)=(\lambda\lambda\delta)}$

3. $\boldsymbol{A-A=O}$ **4.** $\boldsymbol{A(B+C)=AB+AC}$

5. $\boldsymbol{A+O=A}$ **6.** $\boldsymbol{(A+B)C=AC+BC}$

7. $\boldsymbol{\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B}$ **8.** $\boldsymbol{A(BC)=(AB)C}$

იმ შემთხვევაში როცა $A\cdot B=B\cdot A$, ამბობენ, რომ A და B მატრიცები კომუტირებენ. მაგალითად E ერთეულოვანი მატრიცა კომუტირებს ნებისმიერ კვადრატულ მატრიცასთან: *EA=AE*. მართლაც *E*-ერთეულოვანი მატრიცა ისეთივე როლს თამაშობს, როგორსაც რიცხვების გამრავლების დროს რიცხვი 1-იანი.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში თუ $ab=0$, მაშინ ამ რიცხვთაგან ერთი მაინც ნულის ტოლია. მატრიცებში ეს ასე არ არის.

მაგალითად, ა) თუ $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, მაშინ $A\cdot B=0$

ბ) თუ $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, მაშინ $A^2=A\cdot A=0$

3. ტრანსპონირებული მატრიცა. ვთქვათ მოცემულია კვადრატული A=$\left(a_{i,j}\right)_n^n$ მატრიცა. მისი ტრანსპონირებული მატრიცა ეწოდება B მატრიცას ($B=A^T$), თუ $b_{i,j}=a_{i,j}$ ე.ი. A მატრიცის სტრიქონებმა და სვეტებმა ადგილები შეიცვალეს.

მატრიცის ტრანსპონირება შეიძლება განიმარტოს $m\times n$ ზომის A მატრიცის-ათვისაც. მაშინ A^T იქნება $n\times m$ ზომის მატრიცა ე.ი. ამ შემთხვევაშიც მატრიცის სტრიქონები ჩაიწერება სვეტებად და პირიქით სვეტები ჩაიწერება სტრიქონებად.

მაგალითად: თუ

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix} \quad \text{მაშინ} \quad A^T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 3 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}.$$

ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგი თვისებები:

$$\left(A^T\right)^T=A; \qquad (\lambda A)^T=\lambda A^T \qquad (A+B)^T=A^T+B^T \qquad (AB)^T=A^TB^T.$$

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება მატრიცა? მატრიცის რიგი?

2. რას ეწოდება კვადრატული მატრიცა? ერთეულოვანი მატრიცა? ნულოვანი მატრიცა? დიაგონალური მატრიცა?

3. როგორ მატრიცებს ეწოდებათ ტოლი?

4. როგორ შევკრიბოთ ორი მატრიცა? რას ეწოდება მატრიცის რიცხვზე ნამრავლი?

5. როგორ გავამრავლოთ A და B მატრიცა?

6. არის თუ არა A და B მატრიცების ნამრავლი კომუტაციური?

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

1. იპოვეთ $A \cdot B$, თუ:

1.1 $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 1.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

1.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.4 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 30 & 10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -7 \\ 50 & -52 & 37 \\ -3 & 41 & 0 \end{pmatrix}$

1.5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

1.6 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ s & d & f \\ x & v & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2a & 3b & 3c \\ 3s & 4d & -7f \\ -x & -2v & -m \end{pmatrix}$

2. იპოვეთ $k \cdot A$, თუ:

2.1. $k=\frac{3}{4}$ და $A=\begin{pmatrix}\frac{12}{13}\\4\\1\end{pmatrix}$; 2.2. $k=\frac{1}{3}$, ხოლო $A=\begin{pmatrix}\frac{-27}{4} & -1 & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} & -5\end{pmatrix}$;

3. იპოვეთ $A+B$ და $A-B$ თუ:

3.1 $A=\begin{pmatrix}-5\\3\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\-7\\-4\end{pmatrix}$; 3.2 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\2 & 5 & 1\\-1 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\0 & -5 & 1\\-3 & 1 & 0\end{pmatrix}$;

3.3 $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\2 & 0 & 3\\-1 & 30 & 10\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -3 & -7\\50 & -52 & 37\\-3 & 41 & 0\end{pmatrix}$; 3.4 $A=\begin{pmatrix}-\sin^2\alpha\\ \sin^2\beta\\ -2\sin^2\gamma\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-\cos^2\alpha\\ \cos^2\beta\\ -2\cos^2\gamma\end{pmatrix}$

§ 2. მაგალითები ინფორმაციის მატრიცული სახით წარმოდგენაზე.

განვიხილოთ კონკრეტული

მაგალითი 1. ვთქვათ, წარმოება იყენებს ოთხი N_1, N_2, N_3 და N_4 ნედლეულს და ამზადებს სამი ტიპის P_1, P_2, P_3 და P_4 პროდუქტს. ჩავწეროთ მატრიცული სახით წარმოებისათვის საჭირო ნედლეულს დანახარჯების ნორმები და გავაანალიზოთ მიღებული ცხრილი.

a_{11}- ით ავღინშნოთ N_1 სახის ნედლეულის დანახარჯთა ნორმა P_1 პროდუქტის ერთეულის წარმოებისას, a_{12}-ით - P_2 პროდუქტის ერთეულის წარმოებისას, ხოლო a_{13}-ით – P_3 პროდუქტის ერთეულის წარმოებისას. ანალოგიურად, a_{21} - ით ავღინშნოთ N_2 სახის ნედლეულის დანახარჯთა ნორმა P_1 პროდუქტის ერთეულის წარმოებისას და ა.შ. საზოგადოდ a_{ij}-ით ავღინშნოთ N_i სახის ნედლეულის დანახარჯთა ნორმა P_j პროდუქტის ერთეულის წარმოებისას, ცხადია $i=1,2,3,4;$ $j=1,2,3$. თუ ჩავწერთ აღნიშნულ ინფორმაციას ცხრილის სახით, მივიღებთ 4×3 ზომის მატრიცას.

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\\a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{pmatrix}$$

შევნიშნოთ, რომ i–ურ სტრიქონში მდგომი a_{i1}, a_{i2} და a_{i3} ელემენტების ჯამი გვიჩვენებს N_i სახის ნედლეულის მთლიან დანახარჯს სამივე სახის პროდუქტის თითო ერთეულის საწარმოებლად, ხოლო j–ურ სვეტში მდგომი a_{1j}, a_{2j}, a_{3j} და a_{4j} ელემენტების ჯამი გვიჩვენებს P_j პროდუქტის ერთეულის წარმოებისათვის საჭირო ოთხივე ნედლეულის დანახარჯებს. ამ მატრიცაში ზოგიერთი ელემენტის ნულთან ტოლობა გამორიცხული არ არის. მაგალითად, თუ $a_{12} = 0$, ეს ნიშნავს, რომ N_1 სახის ნედლეული P_2 სახის პროდუქტის საწარმოებლად არ გამოიყენება.

მაგალითი 2. ორი ქარხნის მიერ წარმოებული პროდუქცია იგზავნება სამ საწყობში. თითოეულ საწყობში პირველი ქარხნიდან პროდუქტის ერთეულის გადაზიდვაზე იხარჯება, შესაბამისად, 2 ლარი, 3 ლარი, 4 ლარი, ხოლო მეორე ქარხნიდან – 1 ლარი, 5 ლარი, 2 ლარი. ჩავწეროთ ორივე ქარხნის სატრანსპორტო ხარჯები მატრიცული სახით.

რადგან ცნობილია თითოეული ქარხნის მიერ ერთეული პროდუქტის გადაზიდვის ხარჯები, ამიტომ სატრანსპორტო ხარჯები შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი მატრიცით:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

აქ პირველი სტრიქონი მიუთითებს პირველი ქარხნის მიერ წარმოებული ერთეული პროდუქტის გადაზიდვის ხარჯებს სამივე საწყობში, ხოლო მეორე სტრიქონი – მეორე ქარხნის მიერ წარმოებული ერთეული პროდუქტის გადაზიდვის ხარჯებს.

მაგალითი 3. ორმა მომხმარებელმა მაღაზიაში შეიძინა სამი დასახელების პროდუქტი: შაქარი, ყველი და კარაქი. პირველმა შეიძინა 1 კგ შაქარი, 2 კგ ყველი და 1კგ კარაქი. მეორემ კი – 2 კგ შაქარი, 3 კგ ყველი და 2კგ კარაქი. განვსაზღვროთ თითოეული მომხმარებლის დანახარჯი, თუ 1 კგ შაქარი ღირს 1 ლარი, 1 კგ ყველი – 3 ლარი, ხოლო 1 კგ კარაქი – 5 ლარი.

ორივე მომხმარებლის მიერ შეძენილი პროდუქტების რაოდენობა (კგ-ობით) ხასიათდება მატრიცით - $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, სადაც პირველი სტრიქონი შეესაბამება პირველი მომხმარებლის ნავაჭრს, ხოლო მეორე – მეორე მომხმარებლის ნავაჭრს.

პროდუქტების ღირებულება (ლარებში) ხასიათდება მატრიცით - $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

მარტივი დასანახია, რომ ამ მატრიცების გადამრავლებით მივიღებთ ორივე მომხმარებლის დანახარჯების ცხრილს.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3+1\cdot5\\2\cdot1+3\cdot3+2\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\21\end{pmatrix}$$

აქედან ჩანს, რომ პირველმა მომხმარებელმა დახარჯა 12 ლარი, ხოლო მეორემ კი 21 ლარი.

მაგალითი 4. ფირმა უშვებს სამი P_1, P_2, და P_3 სახის პროდუქტს, რომლებსაც ყიდის ორ C_1 და C_2 მომხმარებელზე. ამ მომხმარებლების მიერ ნაყიდი პროდუქტების რაოდენობები გამოსახულია მატრიცით

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}P_1 & P_2 & P_3\end{array}\\ A= & \begin{pmatrix}6 & 7 & 9\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{array}{c}(c_1)\\(c_2)\end{array}.\end{array}$$

თითოეული პროდუქტის ერთეულის ფასი მოცემულია მატრიცით

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}(P_1) & (P_2) & (P_3)\end{array}\\ B= & \begin{pmatrix}100 & 500 & 200\end{pmatrix}^T.\end{array}$$

სამივე სახის პროდუქტის გამოსაშვებად ფირმა იყენებს ოთხი N_1, N_2, N_3 და N_4 სახის ნედლეულს. ამ ნედლეულის დანახარჯის ნორმები (ტონობით) თითოეული სახის პროდუქტის ერთეულის საწარმოებლად გამოსახულია მატრიცით:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}(N_1) & (N_2) & (N_3) & (N_4)\end{array}\\ C= & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\1 & 1 & 2 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{c}(P_1)\\(P_2)\\(P_3)\end{array}.\end{array}$$

ოთხივე ნედლეულის თითოეული ტონის ღირებულება (ლარებში) აღწერილია მატრიცით

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}(N_1) & (N_2) & (N_3) & (N_4)\end{array}\\ D= & \begin{pmatrix}20 & 10 & 15 & 15\end{pmatrix}^T.\end{array}$$

დამატებით შემოვიღოთ ერთსტრიქონიანი მატრიცა $E(1\ \ 1)$.

ვიპოვოთ ქვემოთ მითითებული ყველა მატრიცა და აღვწეროთ მათი ეკონომიკური შენაარსი:

(ა) AB, (ბ) AC, (გ) CD, (დ) ACD, (ე) EAB, (ვ) $EACD$, (ზ) $EAB - EACD$.

$$\text{(ა)}\quad AB = \begin{pmatrix} 6\cdot 100 + 7\cdot 500 + 9\cdot 200 \\ 2\cdot 100 + 1\cdot 500 + 2\cdot 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5900 \\ 1100 \end{pmatrix}$$

მიღებული მატრიცა გამოსახავს თითოეული მამხმარებლის მიერ ნაყიდი საქონლის მთლიან ფასს;

$$\text{(ბ)}\qquad AC=\begin{pmatrix} 6\cdot1+7\cdot1+9\cdot0 & 6\cdot0+7\cdot1+9\cdot0 & 6\cdot0+7\cdot2+9\cdot1 & 6\cdot1+7\cdot1+9\cdot1 \\ 2\cdot1+1\cdot1+2\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot1+2\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot2+2\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot1+2\cdot1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 13 & 7 & 23 & 22 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

მიღებული მატრიცით გამოისახება ნედლეულის რაოდენობა (ტონობით), რომელიც იხარჯება თითოეული მომხმარებლის მიერ ნაყიდი პროდუქტის წარმოებისათვის;

$$\text{(გ)}\qquad CD=\begin{pmatrix} 1\cdot20+0\cdot10+0\cdot15+1\cdot15 \\ 1\cdot20+1\cdot10+2\cdot15+1\cdot15 \\ 0\cdot20+0\cdot10+1\cdot15+1\cdot15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 35 \\ 75 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

მიღებული მატრიცა გვაძლევს ნედლეულის მთლიან ღირებულიბას (ლარებში), რომელიც იხარჯება სამივე სახის პროდუქტის ერთი ერთეულის წარმოებისათვის;

$$\text{(დ)}\qquad ACD=(AC)D=\begin{pmatrix} 13 & 7 & 23 & 22 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 & 10 & 15 & 15 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 1105 \\ 205 \end{pmatrix}.$$

მიღებული მატრიცით განისაზღვრება დახარჯული ნედლეულის მთლიანი ფასი, რომელიც შეესაბამება თითოეული მომხმარებლის მიერ ნაყიდ პროდუქტს;

$$\text{(ე)}\quad \begin{aligned} &EAB=(EA)B=\begin{pmatrix}1\cdot6+1\cdot2 & 1\cdot7+1\cdot1+1\cdot9+1\cdot2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100 & 500 & 200\end{pmatrix}^T= \\ &\begin{pmatrix}8 & 8 & 11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}100 & 500 & 200\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}8\cdot100+8\cdot500+11\cdot200\end{pmatrix}=(7000). \end{aligned}$$

მიღებული მატრიცით გამოისახება მთლიანი შემოსავალი, რომელსაც ფირმა მომხმარებლისაგან ღებულობს.

(ვ) $EACD = \begin{pmatrix}8 & 8 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}35 & 75 & 30\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}8\cdot 35 + 8\cdot 75 + 11\cdot 30\end{pmatrix} = (1210)$.

მიღებული მატრიცა გვაძლევს დახარჯული ნედლეულის მთლიან ფასს;

(ზ) $EAB\text{-}EACD=(7000)\text{-}(1210)=(5790)$.

მიღებული მატრიცა გამოსახავს მოგებას გადასახადებისა და ხელფასის გადახდამდე.

დავალება:

ჩაწერეთ დამოუკიდებლად ინფორმაცია მატრიცული სახით და ამოხსენით

1. ორმა დიასახლისმა ბაზარში შეიძინა 4 სასურსათო პროდუქტი: კარტოფილი, ყველი, ხორცი და თაფლი. ერთმა დიასახლისმა შეიძინა 2 კგ. კარტოფილი, 1 კგ ყველი, 2 კგ ხორცი და 1 კგ თაფლი. ხოლო მეორემ – 3 კგ. კარტოფილი, 2 კგ ყველი, 1,5 კგ ხორცი და 1 კგ თაფლი. გამოთვალეთ თითოეული დიასახლისის დანახარჯი, თუ კარტოფილის ფასია 0,5 ლარი, ყველის – 5 ლარი, ხორცის – 3 ლატი და თაფლის – 8 ლარი.

2. ორი გამყიდველი ბაზარში ერთნაირი პროდუქტებით ვაჭრობდა. ერთმა გაყიდა 50 კგ ვაშლი და 30 კგ ატამი, ხოლო მეორემ – 60 კგ ვაშლი და 20 კგ ატამი. გამოთვალეთ თითოეული გამყიდველის ამონაგები, თუ 1 კგ ვაშლის ფასია 0,8 ლარი, ხოლო 1 კგ ატმის – 1,2 ლარი.

§ 3 დეტერმინანტები. შებრუნებული მატრიცა. მატრიცის რანგი

1. შებრუნებული მატრიცა. მოცემულია n რიგის კვადრატული მატრიცა. ვთქვათ, I იმავე რიგის ერთეულოვანი მატრიცაა. ისეთ კვადრატულ X მატრიცას, რომლისთვისაც

$$XA = AX = I \tag{1}$$

ეწოდება A მატრიცის **შებრუნებული მატრიცა** და აღინიშნება A^{-1} სიმბოლოთი.

თეორემა 1. A მატრიცას შებრუნებული მატრიცის შებრუნებული მატრიცა არის A მატრიცა, ე.ი. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$. $A^{-1} \cdot \left(A^{-1}\right)^{-1} = I$

მართლაც, შებრუნებული მატრიცის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $A^{-1} \cdot \left(A^{-1}\right)^{-1} = I$. თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ მარცხნიდან A მატრიცაზე, მივიღებთ

$$A\left(A^{-1} \cdot \left(A^{-1}\right)^{-1}\right) = AI$$

რადგანაც $AA^{-1} = 1$, გვაქვს

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

რ.დ.ბ.

თეორემა 2. ორი ერთი და იგივე ზომის მატრიცების ნამრავლის შებრუნებული მატრიცა ტოლია შებრუნებული მატრიცების ნამრავლისა შებრუნებული მიმდევრობით, ე.ი.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

მართლაც, გვაქვს:

$$AB\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)AB = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1} \cdot I \cdot B = BB^{-1} = I$$

საიდანაც $AB\left(B^{-1}A^{-1}\right) = \left(B^{-1}A^{-1}\right)AB$ მაშასადამე შებრუნებული მატრიცის განმარტების თანახმად $B^{-1}A^{-1}$ წარმოადგენს AB მატრიცის შებრუნებულს, ე.ი.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

რ.დ.ბ.

შებრუნებული მატრიცის გამოთვლის ხერხი ვუჩვენოთ მაგალითზე: გამოვთვალოთ $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ მატრიცის შებრუნებული მარტიცა.

დავუშვათ, რომ A მატრიცის შებრუნებულია $A^{-1}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$ მატრიცა.

გვექნება $$A^{-1}A=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c_{11}+5c_{12} & 3c_{11}-c_{12}\\ 2c_{21}+5c_{22} & 3c_{21}-c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

მაშასადამე, $$\begin{cases}2c_{11}+5c_{12}=1,\\ 3c_{11}-c_{12}=0.\end{cases} \qquad \begin{cases}2c_{21}+5c_{22}=0,\\ 3c_{21}-c_{22}=1.\end{cases}$$

თუ ამოვხსნით თითოეულ სისტემას, მივიღებთ:

$$c_{11}=\frac{1}{17}; \quad c_{12}=\frac{3}{17}; \quad c_{21}=\frac{5}{17}; \quad c_{22}=-\frac{2}{17}.$$

ე.ი.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{17} & \frac{3}{17}\\ \frac{5}{17} & -\frac{2}{17}\end{pmatrix}$$

შენიშვნა. შებრუნებული მატრიცის გამოთვლის ზემოთმოყვანილი ხერხი რთულდება მარტიცის რიგის ზრდასთან ერთად. მატრიცის შებრუნებული მატრიცის პოვნის უფრო მოხერხებულ ხერხს აღვწერთ შემდგომ პარაგრაფში.

2. დეტერმინანტი. დეტერმინანტის ცნების შემოღება სხვადასხვაგვარად შეიძლება. ჩვენ ისეთ გზას ავირჩევთ, რომელიც საშუალებას მოგვცემს შემდგომში შედარებით მარტივად გამოვთვალოთ და გამოვიყენოთ დეტერმინანტები.

თუ A კვადრატული მატრიცაა, მაშინ მის დეტერმინანტს აღნიშნავენ $|A|$ ან Δ სიმბოლოთი. დავიწყოთ n=1-დან და თანდათან განვსაზღვროთ $n\times n$ ზომის კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტი.

n=1. მაშინ $(A)=a_{11}$ და $|A|=a_{11}$

n=2. მაშინ $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ და განვმარტოთ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

n=3. მაშინ, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

მისი შესაბამისი მესამე რიგის დეტერმინანტი განვსაზღვროთ შემდეგი წესით:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

ვთქვათ, ჩვენ უკვე განსაზღვრული გვაქვს $n \times n$ კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტი და გვინდა განვსზღვროთ $(n+1)\times(n+1)$ ზომის დეტერმინანტი. მაშინ ვიქცევით წინა პუნქტის მსგავსად: ვიღებთ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,n} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1n} & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

მატრიცის პირველ სვეტს და თანდათან ვიწყებთ $|A|$ დეტერმინანტის გაშლას. ვიღებთ a_{11} ელემენტს, მატრიციდან ამოვშლით პირველ სტრიქონსა და პირველ სვეტს, ვამრავლებთ a_{11} – დარჩენილი მატრიცის დეტერმინანტზე. შემდეგ ვიღებთ a_{21} ელემენტს, მატრიციდან ამოვშლით მეორე სტრიქონსა და პირველ სვეტს, ვამრავლებთ a_{21} – დარჩენილი მატრიცის დეტერმინანტზე და ა.შ

ზოგადად ვიღებთ a_{j1} ელემენტს, მატრიციდან ამოვშლით j-ურ სტრიქონსა და პირველ სვეტს, ვამრავლებთ $(-1)^{j+1}{}_{j1}$ – დარჩენილი მატრიცის დეტერმინანტზე.

საბოლოოდ ყველა ასეთი ნამრავლს (სულ ასეთი n+1- ია) შევკრიბავთ და მივიღებთ A მატრიცის დეტერმინანტს.

შენიშვნა. დეტერმინანტის ასეთი განმარტება ემყარება დეტერმინანტის თვისებებს. მაგრამ ჩვენ მიზანშეწონილად ჩავთვალეთ მაინც ასეთი სახის განსაზღვრების შემოღება, რადგან ჩვენი აზრით ეს გარკვეულად აადვილებს დეტერმინანტის გამოთვლებს.

3. მინორი და ალგებრული დამატება. ვთქვათ A $n\times n$ ზომის კვადრატული მატრიცაა. განვიხილოთ მისი a_{ij} ელემენტი. თუ მატრიციდან ამოვშლით j-ურ სტრიქონსა და i-ურ სვეტს, მაშინ მიღება $(n-1)\times(n-1)$ ზომის კვადრატული მატრიცა. ამ მატრიცის დეტერმინანტს ეწოდება a_{ij} ელემენტის მინორი და აღინიშნება M_{ij} სიმბოლოთი. თუ M_{ij} მინორს გავამრავლებთ $(-1)^{i+j}$ – ზე, მიღება a_{ij} ელემენტის **ალგებრული დამატება.** იგი აღინიშნება A_{ij} სიმბოლოთი, ე.ი.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}\,.$$

ალგებრული დამატებების გამოთვლებს ძალიან დიდი მნიშვნელობა აქვთ დეტერმინანტებისა და შებრუნებული მატრიცების გამოთვლისას, ამიტომ ცოტა მეტი ყურადღებით მოვეკიდებით.

ლაპლასის თეორემა. კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტი ტოლია მატრიცის ნებისმიერი სტრიქონის (ან სვეტის) ელემენტებისა და მათი ალგებრული დამატებების ნამრავლების ჯამისა:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2+}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$
$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j+}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

მაშასადამე, დეტერმინანტის გამოთვლა შეიძლება მისი გაშლით ნებისმიერი სტრიქონის ან სვეტის მიმართ. ამიტომ პრაქტიკული გამოთვლებისას მიზანშეწონილია იმ სტრიქონის ან სვეტის ამორჩევა, სადაც ბევრი ნულებია.

დეტერმინანტის თვისებები:

I. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ან რომელიმე სვეტის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ დეტერმინანტიც ნულის ტოლია;

II. თუ დეტერმინანტის ორი სტრიქონი ან სვეტი ერთნაირია, მაშინ დეტერმინანტი ნულის ტოლია;

III. თუ დეტერმინანტში ადგილებს შეუცვლით ორ სტრიქონსა ან ორ სვეტს, მაშინ დეტერმინანტი მხოლოდ ნიშანს შეიცვლის;

IV. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტები შეიცავენ საერთო თანამამრავლს, ის შეიძლება გამოვიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ;

შენიშვნა. მატრიცის რიცხვზე გამრავლება განსხვავდება დეტერმინანტის რიცხვზე გამრავლებისაგან. მატრიცის რიცხვზე გამრავლებისას ამ მატრიცის ყველა ელემენტი უნდა გავამრავლოთ რიცხვზე. იმ დროს, როდესაც

დეტერმინანტის რიცხვზე გამრავლებისას საჭიროა ერთი რომელიმე სტრიქონი ან სვეტი გავამრავლოთ მოცემულ რიცხვზე.

V. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტებს დავუმატებთ სხვა სტრიქონის ან სვეტის ელემენტებს გამრავლებულ ერთი და იგივე რიცხვზე, ამით დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება;

VI. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტებს გავამრავლებთ სხვა სტრიქონის ან სვეტის ალგებრულ დამატებებზე და ამ ნამრავლებს შევკრიბავთ, მიღებული ჯამი ნულის ტოლი იქნება;

VII. თუ დეტერმინანტის ორი სტრიქონის ან სვეტის ელემენტები პროპორციულია, მაშინ დეტერმინანტი ნულის ტოლია;

VIII. ტრანსპონირებული მატრიცის დეტერმინანტი მატრიცის დეტერმინანტის ტოლია;

IX. ორი კვადრატული მატრიცის ნამრავლის დეტერმინანტი მატრიცთა დეტერმინანტების ნამრავლის ტოლია, ე.ი.

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

შევნიშნოთ, რომ ეს ტოლობა სამართლიანია როცა $B \cdot A \neq A \cdot B$.

4. შებრუნებული მატრიცის გამოთვლა დეტერმინანტების გამოყენებით. განვიხილოთ კვადრატული მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

რადგანაც შებრუნებული მატრიცა ჩვენ განვმარტეთ კვადრატული მატრიცისათვის, ამიტომ მას შეიძლება ჰქონდეს შებრუნებული მატრიცა. ბუნებრივად ისმის ამოცანა – როგორ მატრიცას აქვს შებრუნებული. ამ საკითხზე პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა. კვადრატულ მატრიცას მაშინ და მხოლოდ მაშინ აქვს შებრუნებული მატრიცა, როცა მისი დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისაგან.

(კვადრატულ A მატრიცას ეწოდება განსაკუთრებული, თუ $|A| = 0$, ხოლო თუ $|A| \neq 0$, მაშინ არაგანსაკუთრებული).

დამტკიცება. ა) ვთქვათ A მატრიცას აქვს შებრუნებული A^{-1} მატრიცა. მაშინ

$$AA^{-1} = I \quad \text{და ამიტომ} \quad \left|AA^{-1}\right| = |I| \;\Rightarrow\; |A|\left|A^{-1}\right| = 1.$$

მაშასადამე, $|A| \neq 0$ და $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$;

ბ) ვთქვათ $|A| \neq 0$ და ვაჩვენოთ, რომ არსებობს მატრიცა. ახლა ჩვენ უფრო მეტს ვაჩვენებთ, ფაქტიურად აქ მიუთითებთ, თუ როგორ უნდა ავაგოთ A^{-1}.

განვიხილოთ A^* მატრიცა, რომელსაც A მატრიცის მიკავშირებულ მატრიცას უწოდებენ და რომლის ელემენტებიც შემდეგი წესით აიგება. $A^*=(a_{ij}^*)_n^n$, სადაც a_{ij}^* არის A^T მატრიცის ალგებრული დამატება. მაშასადამე $a_{ij}^* = A_{ij}^T = A_{ji}$.

ვთქვათ $B=A^*A=(b_{ij})_n^n$, მაშინ

$$b_{ij} = \sum_{s=1}^{n} A_{is}^* A_{sj} = \sum_{s=1}^{n} A_{is}^* a_{sj} = \begin{cases} |A|, & \text{თუ } i = j, \\ 0, & \text{თუ } i \neq j. \end{cases}$$

ამიტომ

$$B = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

ანალოგიურად მიიღება, რომ

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

მაშინ ცხადია, რომ თუ ავიღებთ მატრიცას $C = \dfrac{1}{|A|} A^*$, მაშინ $A^{-1}=C$.

ვაჩვენოთ, რომ A^{-1} მატრიცა ცალსახადაა განსაზღვრული.

ვთქვათ არსებობს X და Y რომლებიც ტოლი არაა A^{-1}-ის და $AX=I$, $YA=I$. მაშინ $A^{-1}AX=A^{-1}$ და $YAA^{-1}=A^{-1}$ საიდანაც $X=Y=A^{-1}$.

რ.დ.ბ.

თეორემის დამტკიცებიდან გამომდინარე ჩამოვაყალიბოთ შებრუნებული მატრიცის აგების ალგორითმი:

1) უნდა ვიპოვოთ მოცემული მატრიცის დეტერმინანტი $|A|$ თუ $|A| \neq 0$, მაშინ A^{-1} არსებობს, თუ $|A|$ =0, მაშინ A^{-1} არ არსებობს;

2) ვიპოვოთ ტრანსპონირებული მატრიცა A^T.

3) უნდა გამოვთვალოთ A^T მატრიცის ელემენტების ალგებრული დამატებები და ვიპოვოთ მიერთებული მატრიცა A^* და გამოვთვალოთ შებრუნებული მატრიცა $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ ფორმულით.

5. მატრიცის რანგი. განვიხილოთ $A = (a)_m^n$ მატრიცა შევარჩიოთ ამ მატრიცაში ნებისმიერი r სტრიქონი და r სვეტი. ცხადია, $r \leq \min\{m,n\}$ არჩეული სტრიქონებისა და სვეტების გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებისაგან შედგენილ დეტერმინანტს **მატრიცის *r* რიგის მინორი** ეწოდება.

მთელ r რიცხვს ეწოდება **მატრიცის რანგი,** თუ მისი r რიგის მინორთა შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო ყველა r მაღალი რიგის მინორი ნულის ტოლია.

A მატრიცის რანგი აღინიშნება სიმბოლოთი *rangA*. ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ r რიგის მინორთა შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო ყველა (r+1) რიგის მინორი (თუ ასეთი არსებობს) ნულის ტოლია, მაშინ A მატრიცის რანგი r რიცხვის ტოლია.

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა?
2. რას ეწოდება მინორი და ალგებრული დამატება?
3. ჩამოაყალიბეთ დეტერმინანტის თვისებები.
4. რას ეწოდება განსაკუთრებული მატრიცა? არაგანსაკუთრებული მატრიცა?
5. რას ეწოდება მატრიცის რანგი?

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

1. იპოვეთ A^{-1}, თუ:

1.1 $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 1.2 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; 1.3 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

1.4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; 1.5 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. გამოთვალეთ:

2.1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; 2.2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$; 2.3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

2.4. $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$; 2.5. $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$; 2.6. $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$;

3. ამოხსენით განტოლება:

3.1. $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix}=0$; 3.2 $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}=0$; 3.3. $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}=0$;

4. გამოთვალეთ შემდეგი მატრიცების რანგი:

4.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; 4.2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

4.3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 4.4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

§ 4 წრფივ განტოლებათა სისტემა

1. ზოგადი ცნებები. განვიხილოთ m წრფივ განტოლებათა სისტემა n უცნობით:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

სადაც,

a_{ij} და b_{ij} (i=1,2,...,m; j=1,2,3,...n) ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო $x_1, x_2, \ldots x_n$ უცნობი სიდიდეებია. a_{ij} რიცხვებს სისტემის კოეფიციენტები ეწოდებათ, ხოლო b_{ij} რიცხვებს კი განტოლების თავისუფალი წევრები. თუ $m \neq n$ მაშინ სისტემას **მართკუთხა სისტემას**, ხოლო თუ $m = n$, მაშინ **კვადრატული სისტემა** ეწოდება.

შემოკლებული ფორმით სისტემა ჩაიწერება სემდეგი სახით:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad (i = 1,2,3,\ldots,n).$$

სისტემის ამონახსნი ეწოდება $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების ისეთ მნიშვნელობებს, რომელიც სისტემის ყოველ განტოლებას ჭეშმარიტ რიცხვით ტოლობად აქცევს.

თუ სისტემას ერთი ამონახსენი მაინც აქვს, მაშინ მას **თავსებადი** ეწოდება.

თუ სისტემას არა აქვს არცერთი ამონახსენი, მაშინ მას **არა თავსებადი** ეწოდება.

მაგალითები: I. სისტემა $\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$

თავსებადია და მას ერთადერთი ამონახსენი $(x_1 = 8, \quad x_2 = 2)$ აქვს;

II. სისტემა $\begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$ არათავსებადია.

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემასთან დაკავშირებით ისმება ორი ძირითადი საკითხი:

I. სისტემის თავსებადობის გამოკვლევა;

II. თავსებადი სისტემის ყველა ამონახსენის პოვნა.

ადვილი დასანახია, რომ თუ შემოვიღებთ შემდეგი სახის აღნიშვნებს:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

მაშინ (1) განტოლებათა სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს

$$AX = B \tag{2}$$

მატრიცული ფორმით.

2. კრამერის წესი. განვიხილოთ კვადრატული სისტემა *(m=n)*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3}$$

და ამ სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი ავღნიშნოთ Δ-თი ე.ი.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

განვიხილოთ აგრეთვე n რიგის ეგრეთწოდებული დამხმარე დეტერმინანტები: $\Delta_1,\Delta_2,..,\Delta_n$, სადაც Δ_j (j=1,2,3...,n) მიიღება სისტემის Δ დეტერმინანტისაგან მისი j-ური სვეტის შეცვლით თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი სვეტით. ე.ი.

$$A=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1}\cdots & a_{1n} \\ a_{21}\cdots a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1}\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

მტკიცდება, რომ თუ $\Delta\neq0$, მაშინ (3) სისტემა თავსებადია და მას ერთადერთი ამონახსენი აქვს, რომელიც მოიცემა ფორმულებით:

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}, \qquad j=1,2,3,...,n \tag{4}$$

მიღებულ (4) ფორმულებს **კრამერის ფორმულები** ეწოდება.

ცხადია, რომ კრამერის ფორმულების გამოყენება შეიძლება მხოლოდ მაშინ, ამ როცა $\Delta\neq0$, შემთხვევაში სისტემას ერთადერთი ამონახსნი აქვს. აგრეთვე მტკიცდება, რომ თუ $\Delta=0$ და Δ_j –ებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ სისტემას ამონახსენი არა აქვს. თუ $\Delta=0$ და $\Delta_j=0$, მაშინ სისტემას უამრავი ამონახსენი აქვს.

3. სისტემის ამოხსნა მატრიცული ხერხით. განვიხილოთ (2) მატრიცული ფორმით ჩაწერილი განტოლებათა სისტემა

$$AX=B.$$

დავუშვათ, რომ A მატრიცა არაგადაგვარებულია ე.ი. $\Delta=|A|\neq0$. მაშინ როგორც, ვიცით არსებობს A მატრიცის შებრუნებული A^{-1} მატრიცა. გავამრავლოთ (2) – მატრიცული განტოლების ორივე მხარე მარცხნიდან A^{-1} მატრიცაზე

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B\Rightarrow\left[(A^{-1}A)X=A^{-1}B\right]\Rightarrow\left[IX=A^{-1}B\right]\Rightarrow X=A^{-1}B.$$

ე.ი.

$$X=A^{-1}B. \tag{5}$$

რაც წარმოადგენს (2) განტოლების ამონახსნს.

ახლა განვიხილოთ განტოლებათა მართკუთხოვანი სისტემა $m\neq n$. ამ სისტემის ამონახსენის არსებობა მჭიდროდაა დაკავშირებული შემდეგ ორ

მატრიცასთან

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

$\tilde{A}$ მატრიცას სისტემის **გაფართოებული მატრიცა** ეწოდება. მტკიცდება შემდეგი

თეორემა (კრონეკერ-კაპელი). წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის თავსებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისი, რომ სისტემის მატრიცის რანგი უდრიდეს გაფართოებული მატრიცის რანგს, ე.ი. $rang\,\tilde{A}=rangA$; ამასთან

1. თუ $rangA=rang\,\tilde{A}=n$, მაშინ სისტემას აქვს მხოლოდ ერთი ამონახსენი;
2. თუ $rangA=rang\,\tilde{A}<n$, მაშინ სისტემას აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე;
3. თუ $rangA\neq rang\,\tilde{A}$, მაშინ სისტემა არათავსებადია.

4. ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა. წრფივ განტოლებათა სისტემას ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ (1) სისტემის ყველა თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

ცხადია, რომ ერთგვაროვანი სისტემა ყოველთვის თავსებადია, რადგან ე.წ. ტრივიალური (ნულოვანი) ამონახსენი მას ყოველთვის აქვს.

ადვილი დასანახია, რომ თუ $m=n$ და მატრიცის რანგია n, მაშინ სისტემის დეტერმინანტი არ უდრის ნულს და ამიტომ სისტემას მხოლოდ ნულოვანი ამონახსენი აქვს. მაშასადამე, არატივიალური (არანულოვანი) ამონახსნები აქვს მხოლოდ ისეთ სისტემებს, რომელშიც განტოლებათა რაოდენობა ნაკლებია ცვლადების რაოდენობაზე ან, თუკი ისინი ტოლია, მაშინ დეტერმინანტია ნულის ტოლი. სხავგვარად: ერთგვაროვან სისტემას არატრივიალური ამონახსნები აქვს

მაშინ, და მხოლოდ მაშინ როცა რანგი ნაკლებია სისტემის უცნობების რაოდენობაზე.

ავღნიშნოთ ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსენი $x_1 = k_1,\quad x_2 = k_2, ..., x_n = k_n$, სტრიქონის სახით $e_1 = (k_1, k_2, ..., k_n)$.

ადვილი დასანახია, რომ თუ e_1 ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსენია, მაშინ $\lambda e_1 = (\lambda k_1, \lambda k_2, ..., \lambda k_n)$-იც სისტემის ამონახსენია. ასევე, თუ e_1 და e_2 სისტემის ამონახსნებია, მაშინ $(e_1 + e_2)$-იც ამონახსენია.

მაშასადამე, ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსენთა ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია ისევ სისტემის ამონახსენია.

მაგალითი 1. განვსაზღვროთ ბაზარზე შეტანილი სამი ურთიერთდამოკიდებული საქონლის წონასწორობის P_1, P_2 და P_3 ფასები, თუ ისინი აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\begin{cases} 2P_1 + 4P_2 + P_3 = 77, \\ 4P_1 + 3P_2 + 7P_3 = 114, \\ 2P_1 + P_2 + 3P_3 = 48. \end{cases}$$

ჯერ გამოვთვალოთ სისტემის Δ დეტერმინანტი:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(9-7) - 4(12-14) + (4-6) = 10.$$

ე.ი. $\Delta = 10 \neq 0$, ამიტომ სისტემას გააჩნია ერთადერთი ამონახსენი. ამ ამონახსენის საპოვნელად გამოვთვალოთ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 – დამხმარე დეტერმინანტები.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 77 & 4 & 1 \\ 114 & 3 & 7 \\ 48 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 100, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 77 & 1 \\ 4 & 114 & 7 \\ 2 & 48 & 3 \end{vmatrix} = 130, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 77 \\ 4 & 3 & 114 \\ 2 & 1 & 48 \end{vmatrix} = 50.$$

კრამერის ფორმულებით დავადგენთ, რომ

$$P_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 10, \qquad P_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 13, \qquad P_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5.$$

ამრიგად, საძიებელი წონასწორობის ფასებია $P_1 = 10, P_2 = 13, P_3 = 5$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ მატრიცული ხერხით შემდეგი სისტემა

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1\\ -4\\ -2\end{pmatrix}..$$

მოცემული სისტემა, მატრიცული სახით ასე გადაიწერება

$$AX=B.$$

რადგან

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{vmatrix}=6\neq 0,$$

ამიტომ

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ -4\\ -2\end{pmatrix},$$

სადაც

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-6,\quad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-2,\quad A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0,\qquad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 4\end{vmatrix}=-4,\qquad A_{31}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}=6,\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3,\qquad A_{31}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3.$$

საბოლოოდ

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -4\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$$

შევნიშნოთ, რომ კრამერის წესით, ასევე მატრიცული ხერხით შეიძლება ამოიხსნას მხოლოდ ისეთი წრფივ განტოლებათა სისტემები, რომლებშიც უცნობთა რიცხვი განტოლებათა რიცხვის ტოლია და სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან.

მაგალითი 3. გამოვიკვლიოთ სისტემა

$$\begin{cases}x+4y+5z=10,\\ 2x+8y+10z=20,\\ x-y+z=1.\end{cases}$$

პირველ რიგში, ამოვწეროთ სისტემის მატრიცა და გაფართოებული მატრიცა

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 2 & 8 & 10\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\qquad \tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5 & 10\\ 2 & 8 & 10 & 20\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

თუ გამოვითვლით, მივიღებთ, რომ $|A|=0$ ე.ი. მატრიცა გადაგვარებულია. ამიტომ კრამერის ხერხს ვერ გამოვიყენებთ. მარტივად შევამოწმებთ, რომ $rangA$=2, რადგან მისი მეორე რიგის მინორი

$$\begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-8=-10\neq 0\,.$$

ასევე მარტივად ვაჩვენებთ, რომ გაფართოებულ $\tilde{A}$ მატრიცის ყველა მესამე რიგის მინორი ნულის ტოლია და $rang\,\tilde{A}$=2. ამიტომ კრონეკერ-კაპელის თეორემის თანახმად მოცემულ სისტემას გააჩნია ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე. ვიპოვოთ ეს ამონახსნები. ამისათვის მოცემული სისტემა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{cases}x+4y=10-5z,\\ x-y=1-z,\\ 2x+8y+10z=20.\end{cases}$$

პირველი ორი განტოლებიდან მივიღებთ:

$$x=\frac{14-9z}{5};\quad y=\frac{9-4z}{5}\,.$$

უშუალო შემოწმებით მარტივად ვაჩვენებთ, რომ სისტემის მესამე განტოლება ავტომატურად კმაყოფილდება z-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, ამიტომ შემდეგი სამეული $\left(x=\dfrac{14-9z}{5};\quad y=\dfrac{9-4z}{5}\quad z\right)$ წარმოადგენს მოცემული სისტემის ამონახსენს ნებისმიერი z-სათვის.

მაგალითი 4. ამოვხსნათ ერთგვაროვანი სისტემა

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0,\\ 3x_1-3x_2-3x_3=0,\\ 5x_1+x_2-x_3=0.\end{cases}$$

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & -3 & -3\\ 5 & 1 & -1\end{vmatrix}=0$, ხოლო მეორე რიგის მინორი $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -3\end{vmatrix}=-9\neq 0$. ამიტომ სისტემის მატრიცის რანგი – *rangA=2*, ამიტომ სისტემას აქვს არატრივიალური

ამონახსნები. ვიპოვოთ ეს ამონახსნები. ამისათვის ავიღოთ გამოთვლილი მინორის წარმომქმნელი პირველი ორი განტოლება $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$, x_3 –ს მივანიჭოთ ნებისმიერი მნიშვნელობა c.

მივიღებთ: $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -c, \\ x_1 - x_2 = c. \end{cases}$$

საიდანაც $x_1 = \frac{1}{3}c, \quad x_2 = -\frac{2}{3}c,$ მაშასადამე სისტემის ამონახსენია

$x_1 = \frac{1}{3}c, \quad x_2 = -\frac{2}{3}c, \quad x_3 = c,$ სადაც c ნებისმიერი მუდმივია.

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. ამოწერეთ n უცნობიანი m წრფივ განტოლებათა სისტემა. რა შემთხვევაში უწოდებენ ამ სისტემას ერთგვაროვანს? არაერთგვაროვანს?
2. რას უწოდებენ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამონახსნს? რას ეწოდება სისტემის ამოხსნა?
3. როგორ სისტემს უწოდებენ თავსებადს? არათავსებადს?
4. ჩამოაყალიბეთ კრამერის წესი.
5. ჩაწერეთ n უცნობიანი კვადრატული წრფივ განტოლებათა სისტემა მატრიცული სახით.
6. ჩაწერეთ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი მატრიცული სახით.
7. რა კავშირი არსებობს მატრიცის რანგსა და არანულოვან მინორთა მაქსიმალურ რიგს შორის?
8. როგორ წრფივ განტოლებათა სისტემას უწოდებენ მართკუთხოვანს?
9. ჩაწერეთ წრფივ განტოლებათა სისტემის მატრიცა და გაფართოებული მატრიცა.
10. ჩამოაყალიბეთ კრონეკერ-კაპელის თეორემა.

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

1. ამოხსენით კრამერის წესით:

1.1. $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$; 1.2. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$; 1.3. $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 2x + 5y = 19 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}$; 1.5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ 6x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$; 1.7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$

2. m პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის აქვს განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} (3+m)x + 4y = 5 - 3m \\ 2x + (5+m)y = 8 \end{cases}$$

უამრავი ამონახსნი?

3. კრონეკერ-კაპელის თეორემის გამოყენებით დაადგინეთ თავსებადია თუ არა განტოლებათა სისტემა:

3.1. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$; 3.2. $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \\ 4x_1 + 9x_2 = 11 \end{cases}$

4. ამოხსენით შემდეგი მატრიცული განტოლებები

4.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; 4.2. $x \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

4.3. $x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$; 4.4 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

§ 5 მატრიცთა ალგებრის გამოყენება ეკონომიკაში

1. წარმოების დარგშორის ბალანსი. ვთქვათ წარმოება შედგება სხვადასხვა n დარგისაგან. დროის ერთეულში (მაგალითად წელიწადში) ამ დარგების წარმოების მოცულობებია $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$. თითოეული დარგის პროდუქცია გამოიყენება სხვა დარგების მიერ და აგრეთვე ნაწილობრივ – დარგის შეგნით.

i-დარგის პროდუქციის რაოდენობა, რომელიც იხარჯება j-დარგის საჭიროებისათვის ავღნიშნოთ q_{ij} (i,j=1,2,3,...,n). ასე რომ q_{ij} იქნება i-იური დარგის პროდუქციის ის რაოდენობა, რომელიც მოიხმარება, იმავე i-ური დარგის შიგნით.

როგორც, წესი i-იური დარგის პროდუქციის მხოლოდ ნაწილი მოიხმარება წარმოებაში. ამ პროდუქციის ნაწილი იხარჯება ისეთი მიზნებისათვის, რომელიც დაკავშირებული არაა წარმოებასთან; მაგალითად: ექსპორტი, კაპიტალური დაბანდება, მარაგის გაზრდა და სხვ.

i-იური დარგის პროდუქტს, რომელიც არ გამოიყენება საწარმოო დანახარჯებისათვის ეწოდება i-იური დარგის **საბოლოო პროდუქტი** და აღინიშნება q_j.

ყოველი დარგის პროდუქციის განაწილება შეიძლება აღვწეროთ ე.წ. **დარგთაშორისო კავშირების ცხრილით:**

მატერიალური წარმოების დარგი	წარმოების მოცულობა	დარგთაშორისი ნაკადები დარგებში				საბოლოო პროდუქტი
		1	2	...	n	
1	a_1	q_{11}	q_{12}	..	q_{1n}	q_1
2	a_2	q_{21}	q_{22}	…	q_{2n}	q_2
....	...	…	…	…	…	…
n	a_n	q_{n1}	q_{n2}	…	q_{nn}	q_n

დარგთაშორის კავშირების ცხრილში შეიძლება შევაჯამოთ, მხოლოდ სტრიქონების ელემენტები. სვეტების ელემენტების შეკრება არ შეიძლება, რადგან

ისინი წარმოადგენენ სხვადასხვა დარგების პროდუქციებს, რომლებიც სხვადასხვა ერთეულებით იზომება.

ცხადია, რომ

$$\begin{cases} Q_1 = q_{11} + q_{12} + \cdots + q_{1n} + q_1, \\ Q_2 = q_{21} + q_{22} + \cdots + q_{2n} + q_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_n = q_{n1} + q_{n2} + \cdots + q_{nn} + q_n. \end{cases} \tag{1}$$

მივიღეთ განტოლებათა სისტემა, რომელსაც **წარმოების საბალანსო განტოლებები** ეწოდება.

ისინი გვიჩვენებენ, რომ მოცემული დარგის წარმოების მთლიანი მოცულობა ტოლია პროდუქციათა იმ ნაკადების ჯამისა, რომლიც ამ დარგებიდან მიდის სხვა დარგებში, მიმატებული მოცემული დარგის შიგნით, მოხმარებული პროდუქციისა და საბოლოო პროდუქტის ჯამი.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$a_{ij} = \frac{q_{ij}}{Q_j}, \quad i, j = 1,2,3,...,n. \tag{2}$$

ცხადია, რომ a_{ij}-ით აღნიშნულია i-იური დარგის პროდუქციის ის მოცულობა, რომელიც საჭიროა j-იური დარგის პროდუქციის ერთი ერთეულის წარმოებისათვის. a_{ij}-რიცხვებს **წარმოების ტექნოლოგიური კოეფიციენტები** ეწოდება. ამ კოეფიციენტების საშუალებით შევადგინოთ n რიგის კვადრატული მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

ეს მატრიცა ახასიათებს წარმოების ტექნიკურ პირობებს საგეგმო პერიოდში. ამიტომ მას **წარმოების ტექნოლოგიური მატრიცას** უწოდებენ.

ვთქვათ, დროის განსახილველ პერიოდში ცნობილია a_{ij}-სიდიდეები, ე.ი. (3) მატრიცა. (2)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$q_{ij} = a_{ij} Q_j$$

უკანასკნელი ტოლობის გათვალისწინებით (1) – საბალანსო განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$\begin{cases} Q_1 = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + \cdots + a_{1n}Q_n + q_{,1} \\ Q_2 = a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + \cdots + a_{2n}Q_n + q_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_n = a_{n1}Q_1 + a_{n2}Q_2 + \cdots + a_{nn}Q_2 + q_n. \end{cases} \tag{4}$$

მიღებულ სისტემაში იგულისხმება, რომ a_{ij} და q_i ცნობილია, ხოლო Q_1 უცნობი. (4) განტოლებათა სისტემა ჩავწეროთ მატრიცული ფორმით

$$Q = AQ + q \tag{5}$$

სადაც

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

ხოლო A – წარმოების ტექნოლოგიური მატრიცაა. საიდანაც მივიღებთ

$$Q - AQ = q; \qquad (I - A)Q = q\,.$$

მიღებული მატრიცული განტოლება გავამრავლოთ მარცხნიდან $(I - A)^{-1}$-ზე გვექნება

$$(I - A)^{-1}(I - A)Q = (I - A)q; \qquad IQ = (I - A)^{-1}q\,.$$

მაშასადამე

$$Q = (I - A)^{-1}q \tag{6}$$

ცხადია, ამ პროცესში იგულისხმებოდა, რომ დეტერმინანტი $|I - A| \neq 0$

მე-(6) ფორმულა იძლევა საშუალებას გამოვთვალოთ წარმოების დაგების მოცულებები (Q_j სიდიდეები) თუ ცნობილია წარმოების ტექნოლოგიური A მატრიცა და q_j – საბოლოო პროდუქტების რაოდენობები. Q_j – სიდიდეების მოძებნას უწოდებენ **წარმოების გეგმის შედგენას.**

ვთქვათ გამოვითვალეთ, $(I - A)^{-1}$ და მივიღეთ

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

მაშინ (6) განტოლებიდან მივიღებთ

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + \cdots + A_{1n}q_n, \\ A_{21}q_1 + A_{22}q_2 + \cdots + A_{2n}q_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n1}q_1 + A_{n2}q_2 + \cdots + A_{nn}q_n. \end{pmatrix}. \tag{7}$$

საიდანაც

$$\begin{cases} Q_1 = A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + \cdots + A_{1n}q_n = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{1j}q_j, \\ Q_2 = A_{21}q_1 + A_{22}q_2 + \cdots + A_{2n}q_n = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{2j}q_j, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_n = A_{n1}q_1 + A_{n2}q_2 + \cdots + A_{nn}q_n = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{nj}q_j. \end{cases} \tag{8}$$

(8) განტოლებები გვიჩვენებენ, რომ $(I-A)^{-1}$ მატრიცის ელემენტები წარმოად-გენენ სიდიდეებს, რომლებიც განსაზღვრავენ რაოდენობრივ დამოკიდებულებებს ყველა დარგების საბოლოო პროდუქტებს შორის; ამასთანავე დარგების წარმოების მოცულობები წრფივადაა დამოკიდებული დარგების საბოლოო პროდუქტებზე.

$(I-A)^{-1}$ მატრიცის ელემნტებს აქვთ გარკვეული ეკონომიკური შინაარსი. ავიღოთ, მაგალითად, k-ური დარგის საბოლოო პროდუქტი, თუ ვიგულისხმებთ, რომ შეიცვალა მხოლოდ ამ დარგის საბოლოო პროდუქტი, ხოლო სხვა დარგების საბოლოო პროდუქტები უცვლელი დარჩა, მაშინ (8) სისტემის ყოველი განტოლება დაამყარებს წრფივ დამოკიდებულებას ამ დარგის პროდუქციის საერთო რაოდენობასა და k-ური დარგის საბოლოო პროდუქტს შორის. ამ შემთხვევაში დამოკიდებული ცვლადის ნაზრდის შეფარდება დამოუკიდებელი ცვლადის ნაზრდთან, ტოლი იქნება ამ ცვლადის კოეფიციენტისა

$$\frac{\Delta Q_i}{\Delta q_k} = A_{ik} \quad (i = 1,2,3,\ldots,n) \tag{9}$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ A_{ik} კოეფიციენტი განსაზღვრავს i-იური დარგის წარმოების იმ მოცულობას, რომელიც საჭიროა k-იური დარგის საბოლოო პრო-დუქტის ერთი ერთეულით გაზრდისათვის. A_{ik} კოეფიციენტებს უწოდებენ **ერთობლი-ვი მოხმარების კოეფიციენტებს**, ხოლო $(I-A)^{-1}$ მატრიცის – **ერთობლივი მოხმარების კოეფიციენტთა მატრიცას.**

ეს კოეფიციენტები ასრულებენ ძალიან მნიშვნელოვან როლს წარმოების დაგეგმვაში. თუ ვიცით $(I-A)^{-1}$ მატრიცა, შეგვიძლია განვსაზღვროთ

მატერიალური წარმოების გეგმის სხვადასხვა ვარიანტი, რომლებიც შეესაბამებიან საბოლოო პროდუქტის სხვადასხვა ვარიანტებს.

მაგალითი 1. ვთქვათ, წარმოებაში 3 დარგია და მოცემულია წარმოების ტექნოლოგიური მატრიცა:

$$A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}0\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}0 & 0{,}1\end{pmatrix}.$$

გეგმის წინასწარი დამუშავების დროს მიღებულია მომხმარების პროდუქტების ორი ვარიანტი:

$$1^0.\quad q_1^{(1)}=100\,000,\quad q_2^{(1)}=300\,000,\quad q_3^{(1)}=200\,000;$$

$$2^0.\quad q_1^{(2)}=200\,000,\quad q_2^{(2)}=300\,000,\quad q_3^{(1)}=100\,000.$$

საჭიროა განისაზღვროს წარმოების გეგმის შესაბამისი ვარიანტები.

$$I-A=\begin{pmatrix}0{,}7 & -0{,}1 & 0{,}0\\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}2\\ -0{,}9 & 0{,}0 & 0{,}9\end{pmatrix}.$$

მისი დეტერმინანტი $|I-A|=0{,}439\neq 0$ ე.ი. არაგადაგვარებულია.

ვიპოვოთ შებრუნებული $(I-A)^{-1}$ მატრიცა. გვაქვს

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}49643 & 0{,}21378 & 0{,}04751\\ 0{,}47506 & 1{,}49643 & 0{,}33253\\ 0{,}16627 & 0{,}02375 & 1{,}11639\end{pmatrix}.$$

პირველი ვარიანტისთვის გვექნება

$$\begin{pmatrix}Q_1^{(1)}\\ Q_2^{(1)}\\ Q_3^{(1)}\end{pmatrix}=(I-A)^{-1}\begin{pmatrix}100\,000\\ 300\,000\\ 200\,000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}223\,279\\ 562\,941\\ 247\,030\end{pmatrix},$$

საიდანაც

$$Q_1^{(1)}=223\,279,\quad Q_2^{(1)}=562\,941,\quad Q_3^{(1)}=247\,030.$$

ანალოგიურად, მეორე ვარიანტისათვის მივიღებთ

$$Q_1^{(2)}=368\,171,\quad Q_2^{(2)}=577\,194,\quad Q_3^{(2)}=152\,018.$$

მიღებული სიდიდეები განსაზღვრავენ წარმოების გეგმის შესაბამის ვარიანტებს.

თუ ვისარგებლებთ ტოლობით $q_{ij}=a_{ij}Q_j$ შეიძლება განვსარღვროთ დარგთა შორის ნაკადის სიდიდეები და მათი ორივე შესაძლო ვარიანტი.

2. წარმოებაში დასაქმებულობის განსაზღვრა. წარმოების მიერ პროდუქციის გამოშვება მოითხოვს არა მარტო სხვადასხვა მასალისა და წარმოების საგნების (შრომის იარაღების) დანახარჯებს, არამედ ცოცხალი შრომის სხვადასხვა დანახარჯებსაც.

დავუშვათ, რომ:

1) წარმოება იყოფა n დარგად და წარმოების ტექნოლოგიური მატრიცა არის $A=\left(A_{ij}\right)_n^n$;

2) ცოცხალი შრომის დანახარჯები (რომელიც იზომება სამუშაო საათებით ან მომუშავეთა რაოდენობით) i-ური დარგის პროდუქციის ერთეულზე არის $z_i(i=1,2,..,n)$.

3) საგეგმო პერიოდში i-ური დარგის საბოლოო პროდუქტია $q_i(i=1,2,..,n)$

საჭიროა განისაზღვროს ცოცხალი შრომის აუცილებელი დანახარჯების სიდიდეები საგეგმო პერიოდში.

როგორც ვიცით, მოცემულ საბოლოო საზოგადოებრივ პროდუქტს შეესაბამება ცალკეული დარგების პროდუქციათა განსაზღვრული მოცულობები, საგეგმო პერიოდში მათ უნდა შეადგინონ

$$\begin{cases} Q_1 = A_{11}q_1 + A_{12}q_2 + \cdots + A_{1n}q_n = \sum_{j=1}^{n} A_{1j}q_j, \\ Q_2 = A_{21}q_1 + A_{22}q_2 + \cdots + A_{2n}q_n = \sum_{j=1}^{n} A_{2j}q_j, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_n = A_{n1}q_1 + A_{n2}q_2 + \cdots + A_{nn}q_n = \sum_{j=1}^{n} A_{nj}q_j. \end{cases} \tag{10}$$

სადაც A_{ij} i-ური დარგის პროდუქციის დანახარჯთა j-ური დარგის საბოლოო პროდუქცია ერთეულზე. ზემოთ მოყვანილი მეორე პუნქტიდან ცხადია, რომ ცოცხალი შრომის აუცილებელი სრული დანახარჯები საგეგმო პერიოდში განისაზღვრება ფორმულით

$$z = Q_1z_1 + Q_2z_2 + \cdots + Q_nz_n = \sum_{i=1}^{n} Q_iz_i\,. \tag{11}$$

აქედან, თუ მხედველობაში მივიღებთ განტოლებათა (10) სისტემას, გვექნება:

$$z = z_1\sum_{j=1}^{n} A_{1j}q_j + z_2\sum_{j=1}^{n} A_{2j}q_j + \cdots + z_nz_1\sum_{j=1}^{n} A_{nj}q_j\,. \tag{12}$$

მიღებული (12) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ საბოლოო პროდუქტის ყოველ ვარიანტს მოცემული წარმოების ტექნოლოგიური მატრიცისა და ერთეულ პროდუქტზე ცოცხალი შრომის ცნობილი დანახარჯების პირობებში, ცოცხალი

შრომის აუცილებელი დანახარჯების სრულად გარკვეული გეგმა შეესაბამება. z სიდიდის მოძებნას ეკონომიკაში **შრომის გეგმის შედგენას** უწოდებენ.

მაგალითი 2. წარმოება დაყოფილია 3 დარგად; მოცემულია წარმოების ტექნოლოგიური მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}0 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

ცოცხალი შრომის დანახარჯი ერთეულ პროდუქტზე დარგების მიხედვით შეადგენს:

$$z_1 = 10, \quad z_2 = 15, \quad z_3 = 20.$$

გეგმის შემუშავების წინასწარ ეტაპზე მიღებული საბოლოო პროდუქტზე მოთხოვნილების ორი ვარიანტი:

$$1^0. \quad q_1^{(1)} = 100\,000, \quad q_2^{(1)} = 300\,000, \quad q_3^{(1)} = 200\,000;$$
$$2^0. \quad q_1^{(2)} = 200\,000, \quad q_2^{(2)} = 300\,000, \quad q_3^{(1)} = 100\,000.$$

საძიებელია შრომის გეგმის შესაბამისი ვარიანტები.

პროდუქციის მოცულობები: პირველ ვარიანტში (იხ. მაგალითი 1) $Q_1^{(1)} = 223\,279,$ $Q_2^{(1)} = 562\,941,$ $Q_3^{(1)} = 247\,030$, მეორე ვარიანტში მივიღებთ $Q_1^{(2)} = 368\,171,$ $Q_3^{(2)} = 152\,018$, $Q_2^{(2)} = 577\,194,$ ამგვარად, შრომის საერთო დანახარჯები, რომლებიც აუცილებელია საბოლოო საზოგადოებრივი პროდუქტის დაგეგმილი მოცულობის საწარმოებლად, პირველი ვარიანტის მიხედვით შეადგენს

$$z^{(1)} = 223279 \cdot 10 + 562941 \cdot 15 + 247030 \cdot 20 = 15617305$$

ხოლო მეორე ვარიანტის მიხედვით

$$z^{(1)} = 358171 \cdot 10 + 577194 \cdot 15 + 152018 \cdot 20 = 15319980$$

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება i –ური დარგის საბოლოო პროდუქტი?
2. რომელი ელემენტების შეკრება შეიძლება დარგთაშორისო კავშირების ცხრილში?
3. რას ეწოდება წარმოების საბალანსო განტოლება?
4. რას უწოდებენ წარმოების ტექნოლოგიურ კოეფიციენტებს?

5. რას ეწოდება წარმოების ტექნოლოგიური მატრიცა?
6. რას ეწოდება წარმოების გეგმის შედგენა?
7. როგორ კოეფიციენტებს უწოდებენ ერთობლივი მოხმარების კოეფიციენტებს?
8. რას უწოდებენ ერთობლივი მოხმარების კოეფიციენტთა მატრიცას?

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

1. სამი ურთიერთ შეუღლებული დარგის ტექნოლოგიურ კოეფიციენტთა მატრიცა არის

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$$

ცოცხალი შრომის დანახარჯი ერთეულ პროდუქციის ერთეულზე შეადგენს:

$$z_1 = 3, \quad z_2 = 5, \quad z_3 = 10 .$$

ცნობილია საბოლოო პროდუქტზე მოთხოვნილების ორი ვარიანტი:

$$1. \quad q_1^{(1)} = 100\,000, \quad q_2^{(1)} = 300\,000, \quad q_3^{(1)} = 200\,000;$$

$$2. \quad q_1^{(2)} = 200\,000, \quad q_2^{(2)} = 300\,000, \quad q_3^{(1)} = 100\,000.$$

განსაზღვრეთ შრომის სრული ცოცხალი დანახარჯი ყოველი დარგის ერთეულ პროდუქციაზე.

2. წარმოება იყოფა სამ დარგად. მოცემულია წარმოების ტექნოლოგიური მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$$

ცნობილია საბოლოო პროდუქტზე მოთხოვნილების ორი ვარიანტი:

$$1. \quad q_1^{(1)} = 1000, \quad q_2^{(1)} = 3000, \quad q_3^{(1)} = 2000;$$

$$2. \quad q_1^{(2)} = 3000, \quad q_2^{(2)} = 2000, \quad q_3^{(1)} = 1000$$

განსაზღვრეთ წარმოების გეგმის შესაბამისი ვარიანტი.

თავი III. ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები. ანალიზური გეომეტრიის ელემენტების ზოგიერთი გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში

§ 1 წრფე სიბრტყეზე

1. ორ წერტილს შორის მანძილი. მოცემულია ორ წერტილი

$A(x_1,x_2)$ და $B(y_1,y_{2;})$

ვიპოვოთ მათ შორის მანძილი.

ნახ. 1–დან $\triangle ABC$ მართკუთხაა, ამიტომ პითაგორას თეორემის თანახმად

$$AB^2 = AC^2 + CB^2. \tag{1}$$

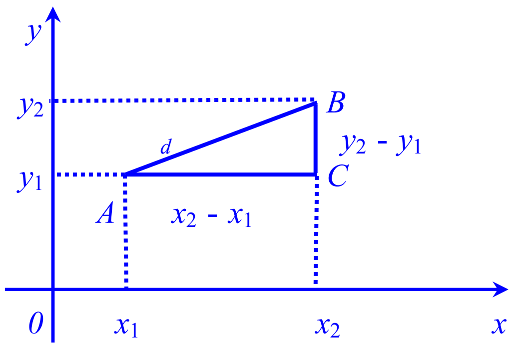
მაგრამ $AC = x_1 - x_2$, $BC = y_1 - y_2$,

მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ (1) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2;$$

საიდანაც მივიღებთ ორ წერტილს შორის მანძილის საძიებელ ფორმულას:

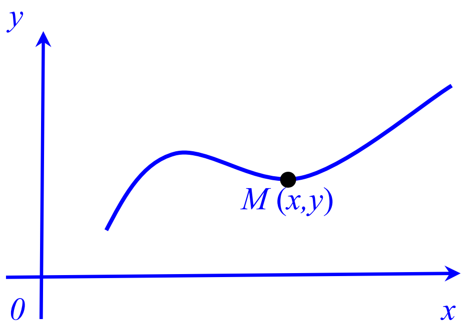
$$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{2}$$



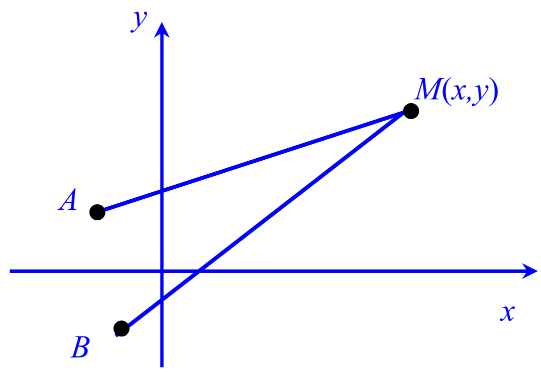
ნახ. 1

2. წირის განტოლება სიბრტყეზე. ვთქვათ სიბრტყეზე მოცემულია რაღაც წირი, რომლის კოორდინატები x და y რაღაც წესით არიან დაკავშირებული. (ნახ. 2) განტოლებას, რომელიც წირის კოორდინატებს ერთმანეთთან აკავშირებს, მოცემული წირის განტოლება ეწოდება.

ზოგადი სახით წირის განტოლებაა $F(x,y)=0$ (თუ კი ეს შესაძლებელია $y=f(x)$).



ნახ. 2



ნახ. 3

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ისეთი წირის განტოლება, რომლის წერტილები თანაბარი მანძილებითაა დაშორებული (-2;1) და (-3;-4) წერტილებისაგან. (ნახ. 3).

რადგან

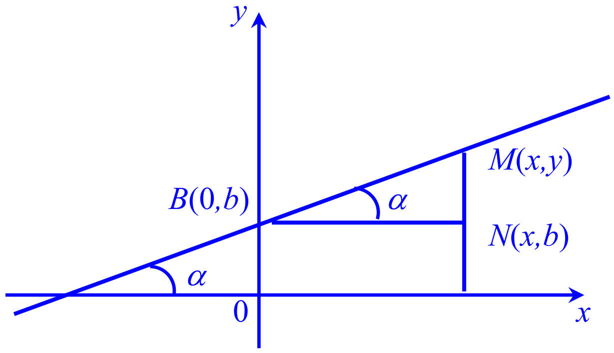
$d(A;M)=d(B;M)$ (სადაც $d(A;M)$ აღნიშნავს მანძილს A-დან M-მდე)

ამიტომ

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y+4)^2}\ .$$

აქედან $x+5y=-10$

ფაქტიურად ყველა წირის განტოლება არსებობს (თუმცა ხშირად ამ განტოლების მოძებნა ძალიან რთული საქმეა). მეორე მხრივ, ყველა განტოლება როდი აღწერს რაიმე წირს. მაგალითად $x^2+y^2+4=0$ განტოლება არ აღწერს არავითარ წირს.



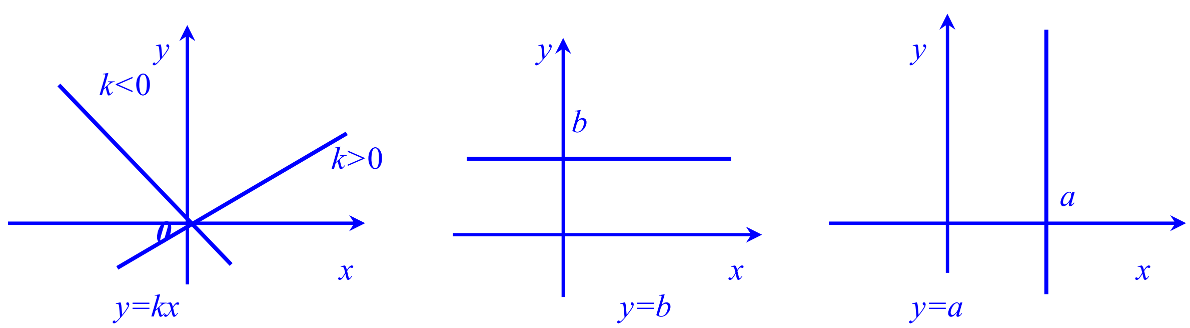
ნახ. 4

3. წრფის განტოლება სიბრტყეზე. ვთქვათ, რაღაც წრფე კვეთს Oy ღერძს $(0;b)$ წერტილში და Ox ღერძთან ადგენს α კუთხეს, სადაც $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ (ნახ. 4)

ავიღოთ წრფეზე ნებისმიერი $M(x;y)$ წერტილი (მიმდინარე წერტილი), მაშინ BMN მართკუთხა სამკუთხედიდან მიიღება, რომ $tg\alpha=\frac{MN}{BN}=\frac{y-b}{x}$. თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას $k=tg\alpha$, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\boldsymbol{y=kx+b} \tag{3}$$

მიღებულ განტოლებას ეწოდება **წრფის განტოლება კუთხური კოეფიციენტით.** ქვემოთ მოყვანილია სხვადასხვა კერძო შემთხვევა:



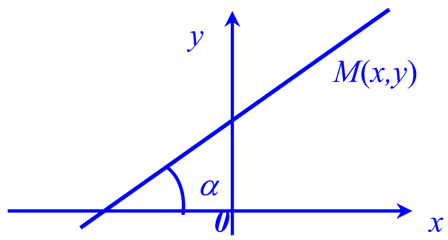
ნახ. 5

1. თუ $b=0$, მაშინ მიიღება $y=kx$ და ესაა წრფე, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეში. ამასთან, თუ $k>0$ მაშინ წრფე Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს მახვილ კუთხეს, თუ $k<0$ მაშინ ადგენს ბლაგვ კუთხეს;
2. თუ $a=0$, მაშინ $k=tg\alpha=0$ და წრფე Ox ღერძის პარალელურია;
3. თუ $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, მაშინ $tg\alpha$ არ არსებობს და წრფე Oy ღერძის პარალელურია.

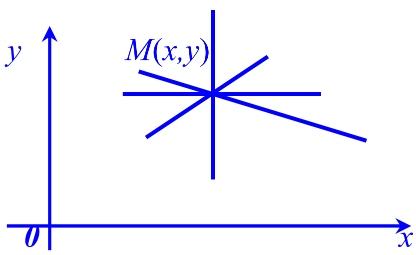
4. მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება. ვთქვათ $M(x_1,y_1)$ წერტილზე გადის რაღაც წრფე (ნახ. 6), რომელიც Ox ღერძთან ადგენს $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$ კუთხეს. რადგან $M(x_1,y_1)$ წერტილი წრფეზე მდებარეობს, ამიტომ $y_1=kx_1+b$. მაშინ წრფის განტოლებაა:

$$\boldsymbol{y-y_1=k(x-x_1)}. \tag{4}$$

სადაც k ნებისმიერი რიცხვია და მიიღებული ფორმულა წარმოადგენს $M(x_1,y_1)$ წერტილზე გამავალ **წრფეთა კონის განტოლებას** (ნახ. 7).

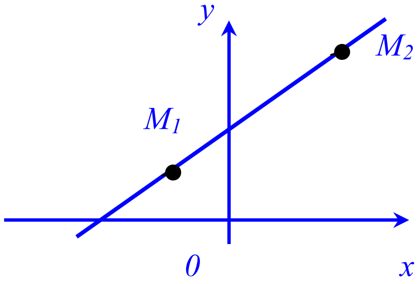


ნახ. 6



ნახ. 7

5. ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება. ვთქვათ $M_1(x_1,y_1)$ და $M_2(x_2,y_2)$ ორი წერტილია და გვინდა ვიპოვოთ წრფე, რომელიც გადის ამ ორ წერტილზე.



ნახ. 8

ამოვწეროთ $M_1(x_1,y_1)$ წერტილზე გამავალი წრფეთა კონის განტოლება: $y-y_1=k(x-x_1)$. რადგან $M_2(x_2,y_2)$ წერტილი ეკუთვნის ამ წრფეს, ამიტომ $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$, მაშინ $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$$\boldsymbol{\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}} \tag{5}$$

მიღებული წარმოადგენს ორ წერტილზე გამავალ წრფის განტოლებას.

6. წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში. ვთქვათ, გვინდა ვიპოვოთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $A(a,0)$ და $B(0,b)$ წერტილებზე. ორ წერტილზე გამავალი წრფის (5) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}.$$

საიდანაც
$$\boldsymbol{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \tag{6}$$

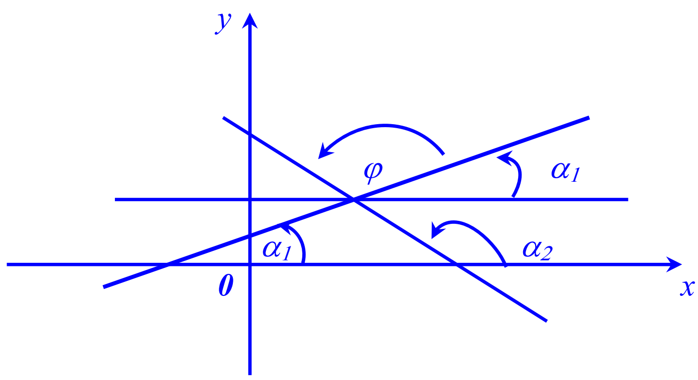
7. წრფის ზოგადი განტოლება. წრფის ზოგადი სახის განტოლებაა

$$\boldsymbol{Ax+By+C=0} \tag{7}$$

სადაც A და B ერთდროულად ნულის ტოლი არ არის.

1. თუ $B\neq 0$, მაშინ $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$; მივიღეთ წრფის განტოლება საკუთხო კოეფიციენტით.
2. თუ $B=0$ და $A\neq 0$, მაშინ წრფის განტოლებაა $x=-\frac{C}{A}$.

8. კუთხე ორ წრფეს შორის. ვთქვათ მოცემულია ორი წრფე შემდეგი განტოლებებით $y=k_1x+b_1$; და $y=k_2x+b_2$; და საჭიროა მათ შორის φ კუთხის მოძებნა. (ნახ. 9) -დან ჩანს, რომ $\varphi=\alpha_1+\alpha_2$;



ნახ. 9

მაშინ $$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

მაშასადამე კუთხე ორ წრფეს შორის გამოითვლება ფორმულით:

$$\boldsymbol{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}} \tag{8}$$

საიდანაც მარტივად მიიღება

9. წრფეთა პერპენდიკულარობისა და პარალელობის პირობები. ცხადია, რომ თუ $1 + k_1 k_2 = 0$, მაშინ წრფეები ურთიერთ პერპენდიკულარულია, საიდანაც

$$\boldsymbol{k_2 = -\frac{1}{k_1}} \tag{9}$$

ხოლო როცა $k_2 - k_1 = 0$, მაშინ წრფეები პარალელურია

$$\boldsymbol{k_1 = k_2} \tag{10}$$

თუ წრფეები მოცემულია ზოგადი სახის განტოლებებით

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0;$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

მაშინ შესაბამისად მივიღებთ **პარალელურობისა** (11) და **მართობულობის** (12) პირობებს:

$$\boldsymbol{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2};} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{A_1 A_2 + B_1 B_2 y + C_1 C_2 = 0} \tag{12}$$

10. წრფეთა გადაკვეთის წერტილი. ვთქვათ მოცემულია ორი წრფე $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ და $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, რომლებიც პარალელურნი არ არიან. მაშინ იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ამ ორი წრფის გადაკვეთის წერტილი. უნდა ამოვხსნათ წრფივ განტოლებათა სისტემა:

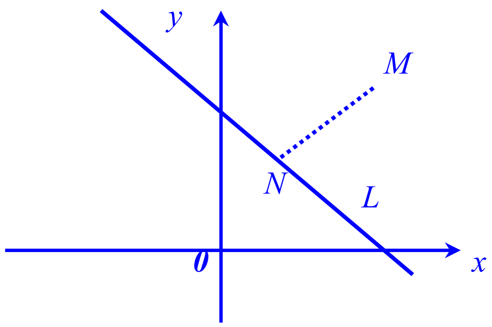
$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0; \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \end{cases}$$

რადგანაც, $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, ამიტომ განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნი

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-C_1 & B_1\\ -C_2 & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & -C_1\\ A_2 & -C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}} \tag{13}$$

და ეს ამონახსნი წარმოადგენს ამ **ორი წრფის გადაკვეთის წერტილის** კოორდინატებს.

11. მანძილი წერტილიდან წრფემდე. ვთქვათ მოცემულია $M(x_0,y_0)$ წერტილი და წრფე $Ax+By+C=0$.



ნახ. 10

M წერტილიდან L წრფემდე მანძილი ეწოდება MN პერპენდიკულარის სიგრძეს. ამრიგად, M წერტილზე უნდა გავატაროთ L წრფის პერპენდიკულარული წრფე. ამ წრფის განტოლებაა $Bx-Ay+D=0$ და რადგან ეს წრფე გადის $M(x_0,y_0)$ წერტილზე, ამიტომ $Bx_0-Ay_0+D=0$, მაშინ საძიებელი წრფის განტოლებაა

$$Bx-Ay+(Ay_0-Bx_0)=0.$$

საძიებელი წერტილის კოორდინატების საპოვნელად უნდა ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases}Ax+By+C=0,\\ Bx-Ay+(Ay_0-Bx_0)=0.\end{cases}$$

რომელიც მოგვცემს წერტილის კოორდინატებს; ამის შემდეგ ვპოულობთ მონაკვეთის სიგრძეს. საბოლოოდ მივიღებთ

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{14}$$

აქვე შევნიშნოთ – იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მანძილი ორ პარალელურ წრფეს შორის, საჭიროა, რომელიმე წრფეზე ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი და

შემდეგ ზემოთ მიღებული ფორმულით ვინგარიშოთ მანძილი აღებული წერტილიდან მეორე წრფემდე.

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. დაწერეთ ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულა.
2. როგორი სახე აქვს წრფის ზოგადი სახის განტოლებას?
3. როგორი სახე აქვს წრფის განტოლებას კუთხური კოეფიციენტით?
4. დაწერეთ წრფეთა კონის განტოლება.
5. როგორი სახე აქვს ორ წერტილზე გამავალ წრფის განტოლებას?
6. როგორი სახე აქვს წრფის განტოლებას ღერძთა მონაკვეთებში.
7. დაწერეთ ორ წრფეს შორის კუთხის გამოსათვლელი ფორმულა.
8. დაწერეთ წრფეთ პარალელობისა და მართობულობის პირობები.
9. როგორ გამოითვლება მანძილი წერტილიდან წრფემდე?
10. როგორ ვიპოვოთ ორი წრფის გადაკვეტის წერტილის კოორდინატები?

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

1. იპოვეთ წერტილი, რომელიც 5 ერთეულითაა დაშორებული როგორც $A(2;1)$ წერტლიდან ისე Oy ღერძიდან;
2. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილები, თუ მისი წვეროებია: $A(2;-1)$, $B(4;3)$, $C(-2;1)$;
3. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც პარალელურია $12x+5y=52$ წრფისა და მისგან დაშორებულია $d=2$ მანძილით;
4. გაატარეთ $M(-1;2)$ წერტილზე წრფე, რომელიც $5x-2y-5=0$ წრფის მართობია;
5. გაატარეთ $M(-1;2)$ წერტილზე წრფე, რომელიც $5x-2y-5=0$ წრფის მართობია;
6. იპოვეთ y –ის მნიშვნელობა, თუ მანძილი $M(10;y)$ წერტილიდან $N(2:-7)$ წერტილამდე უდრის 17 ერთეულს;
7. მოცემულია ტოლგვერდა BC სამკუთხედის ორი $A(-1;1)$ და $B(2;3)$ წვერო. მოძებნეთ მესამე C წვერო;

8. $x+2y-5=0$ და $3x-y-1=0$ წრფეების გადაკვეთის წერტილზე გაატარეთ წრფე, რომელიც $x-y+3=0$ წრფესთან ადგენს 45^0 კუთხეს;

9. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გავლებულია $3x-y-3=0$, $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{2}$ წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე პირველი წრფის მართობულად;

10. იპოვეთ წრფე, რომელიც $4x+3y+1=0$ წრფის პარალელურია და მისგან დაშორებულია 3 ერთეულით.;

11. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე და ორდინატთა ღერძთან ადგენს 150^0-იან კუთხეს;

12. იპოვეთ მონაკვეთის შუა წერტილის კოორდინატები, თუ ბოლო წერტილების კოორდინატებია: (9;-2) და (1:5);

13. იპოვეთ საკუთხო კოეფიციენტები და მონაკვეთები, რომლებსაც მოკვეთს კოორდინატთა ღერძებზე $2x-y+3=0$ წრფე;

14. იპოვეთ მანძილი შემდეგ პარალელურ წრფეებს შორის: $x-2y+5=0$ და $2x-4y+1=0$;

15. იპოვეთ მანძილი შემდეგ წერტილებს შორის: $L(10;-3)$ და $F(4;5)$.

§ 2 მეორე რიგის წირები

1. წრეწირი. სკოლის კურსიდან ცნობილია, რომ წრეწირი იმ წერტილთა სიმრავლეა, რომლებიც ტოლი მანძილით არიან დაშორებული რაღაც $O(x_0,y_0)$ წერტილიდან. თუ $M(x,y)$ წრეწირის ნებისმიერი წერტილია, მაშინ $d(M,O)=R$. მაშასადამე წრეწირის განტოლებაა

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \tag{1}$$

თუ წრეწირის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია, მაშინ წრეწირის განტოლებაა

$$x^2+y^2=R^2. \tag{2}$$

განვიხილოთ მეორე რიგის ორ უცნობიანი ზოგადი სახის განტოლება

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

A,B, და *C* ერთდროულად ნულის ტოლი არ ხდებიან. გამოვიკვლიოთ როდის არის ეს განტოლება წრეწირის განტოლება. ამისათვის ამოვწეროთ წრეწირის განტოლება გაშლილი სახით:

$$x^2-2x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2-R^2=0,$$

საიდანაც ჩანს, რომ *B=0* და $\frac{A}{1}=\frac{C}{1}$. მაშასადამე, წრეწირის ზოგადი განტოლებაა:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3)$$

აქედან, თუ გამოვყოფთ სრულ კვადრატებს

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AE}{4A^2}$$

ცხადია, რომ საჭიროა შესრულდეს პირობა:

$$\frac{D^2+E^2-4AE}{4A^2}>0,$$

მაშინ წრეწირის ცენტრია $0\left(-\frac{8}{2A},-\frac{F}{2A}\right)$ წერტილი და რადიუსია:

$$R=\frac{D^2+E^2-4AE}{4|A|}.$$

2. ელიფსი. განვიხილოთ ისევ მეორე რიგის ორცვლადიანი განტოლება, რომელშიც $B=0, A\neq 0\, C\neq 0.$ გამოვყოთ სრული კვადრატები, მივიღებთ

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F.$$

ავღნიშნოთ $\qquad x_0=\frac{D}{2A}, \quad y_0=-\frac{E}{2C}, \quad \rho=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F.$

მივიღებთ

$$A(x-x_0)^2+C(y-y_0)^2=\rho^2$$

სიმარტივისთვის ჯერ დაუშვათ, რომ $x_0=y_0=0$, მაშინ წირის განტოლებაა

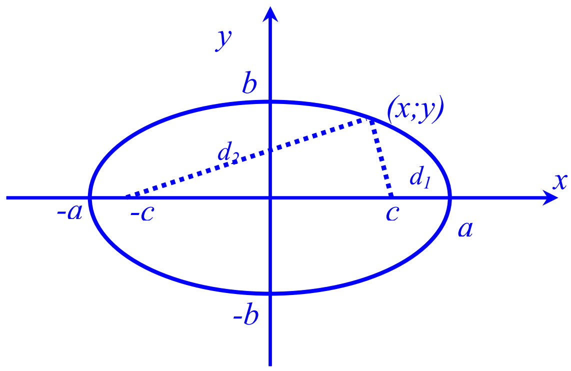
$$Ax^2+Cy^2=\rho$$

ამ წირს ელიფსი ეწოდება, თუკი *AC>0*. ე.ი. **ელიფსი** ეწოდება სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის ყოველი წერტილიდან ორ მოცემულ წერტილებამდე მანძილების ჯამი მუდმივი სიდიდეა.

ვიგულისხმოთ, რომ *A*>0, *C*>0. ცხადია ჩვენ გვაინტერესებს შემთხვევა, როცა $\rho>0$. ამ შემთხვევაში მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

რომელსაც **ელიფსის კანონიკური განტოლება** ეწოდება. ამ განტოლებაში $a=\sqrt{\dfrac{\rho}{A}}$ და $b=\sqrt{\dfrac{\rho}{C}}$ სიდიდეები წარმოადგენენ ელიფსის ნახევარ ღერძებს. როცა $a=b$ მიიღება ელიფსის კერძო შემთხვევა – წრეწირი.



ნახ. 1

$(a;0)$, $(-a;0)$, $(0;b)$, $(0;-b)$ წერტილებს **ელიფსის წვეროები** ეწოდებათ. $(c;0)$, $(-c;0)$ წერტილებს, სადაც $c=\sqrt{|a^2-b^2|}$, **ელიფსის ფოკუსები** ეწოდებათ.

ავიღოთ ელიფსის ნებისმიერი $(x;y)$ წერტილი და გამოვთვალოთ ჯამი d_1+d_2. მართლაც

$$d_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}=\sqrt{x^2-2cx+(a^2-b^2)+\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right)}=$$

$$=\sqrt{x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)-2cx+a^2}==\sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2}-2cx+a^2}=\sqrt{\left(\frac{cx}{a}-a\right)^2}=a-\frac{cx}{a}=a-\varepsilon x.$$

სადაც $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ **ელიფსის ექსცენტრისიტეტია.**

d_2-ის ანალოგიური გამოთვლა გვაძლევს

$$d_2=a+\varepsilon x$$

მაშასადამე

$$d_1+d_2=2a$$

ე.ი. მანძილების ჯამი ელეფსის ნებისმიერი წერტილიდან ელიფსის ფოკუსებამდე მუდმივია.

2. ჰიპერბოლა. ზემოთ ჩვენ მეორე რიგის ორცვლადიანი განტოლება მივიყვანეთ

$$A(x-x_0)^2+C(y-y_0)^2=\rho$$

სახეზე და ვნახეთ როცა $AC>0$, მაშინ ეს განტოლება გვაძლევს ელიფსს. როცა ამ განტოლებაში $AC<0$ მაშინ განტოლება აღწერს წირს, რომელსაც ჰიპერბოლა ეწოდება.

ვთქვათ $A>0$ და $C<0$, მაშინ შესაძლებელია სამი შემთხვევა $\rho>0, \rho=0, \rho<0$

1. $\rho>0$, მაშინ მიიღება ჰიპერბოლას კანონიკური განტოლება

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{5}$$

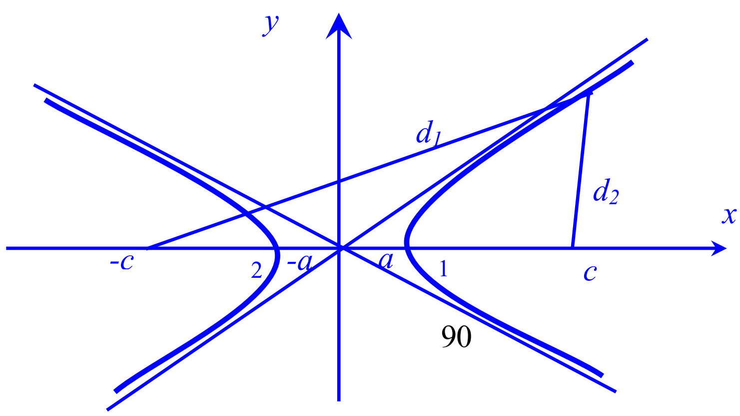
სადაც $a=\sqrt{\frac{\rho}{A}}$ და $b=\sqrt{\frac{\rho}{-C}}$ - შესაბამისად ჰიპერბოლას **ნამდვილი და წარმოსახვითი ნახევარღერძებია.** ე.ი. ჰიპერბოლა ეწოდება სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის ყოველი წერტილიდან ორ მოცემულ წერტილებამდე (რომელსაც ფოკუსებს ვუწოდებთ) მანძილების სხვაობის მოდული მუდმივი სიდიდეა.

ჰიპერბოლას ფოკუსებია $(c;0)$ და $(-c;0)$ წერტილები. სადაც $c=\sqrt{a^2+b^2}$, ხოლო მისი წვეროებია $A_2(-a;0)$ და $A_1(-a;0)$.

თუ ამ შემთხვევაშიც გამოვითვლით d_1 და d_2, მაშინ მუდმივი გამოვა $d_1-d_2=2a$ სხვაობა. გადავწეროთ ჰიპერბოლას განტოლება შემდეგი სახით:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

როცა x საკმაოდ დიდია, მაშინ $\sqrt{x^2-a^2}\approx x$ და აქედან ვასკვნით, რომ ჰიპერბოლა უახლოვდება $y=\pm\frac{b}{a}x$ წრფეებს, როცა $x\to\infty$. ამ წრფეებს **ჰიპერბოლის ასიმპტოტები** ეწოდებათ.



ნახ. 2

2. $\rho = 0$, მაშინ ჰიპერბოლა გადაგვარდება და მიიღება ორი წრფე

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad y = -\frac{b}{a}x.$$

3. $\rho < 0$, მაშინ მიიღება ჰიპერბოლა

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

ცხადია, რომ უბრალოდ (5) შემთხვევაში მიღებული ჰიპერბოლა „ამოტრიალდება“ (საკოორდინატო ღერძები შეიცვლებიან).

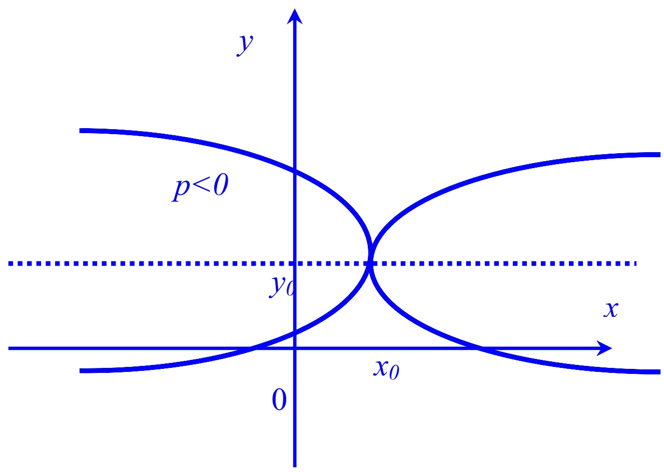
3. პარაბოლა. კვლავ განვიხილოთ მეორე რიგის ორცვლადიანი ზოგადი განტოლება, რომელშიც $B = 0$, $A = 0$ და $C \neq 0$ მაშასადამე

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

თუ $D=0$, მაშინ მიიღება ორი ჰორიზონტალური წრფე. ამიტომ ეს საინტერესო შემთხვევა არ არის. $D \neq 0$ მაშინ სრულ კვადრატებამდე შევსების შემდეგ მივიღებთ: $C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 + Dx + F = \frac{E^2}{4C}$.

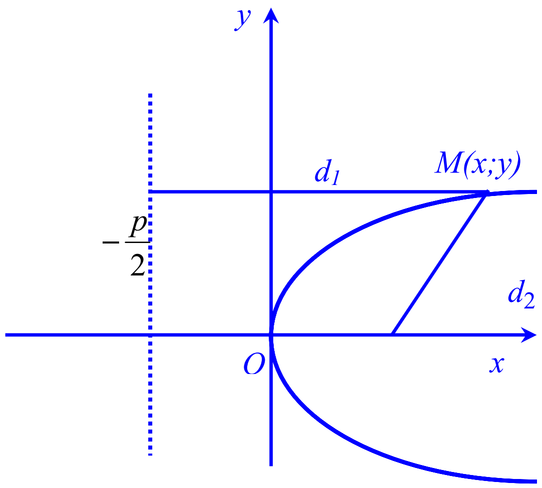
ავღნიშნოთ: $x_0 = -\frac{F}{D} + \frac{E^2}{4DC}$, $y_0 = \frac{E}{2C}$ $2p = -\frac{D}{C}$, მაშინ მიიღება პარაბოლას კანონიკური განტოლება.

$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0})^2 = \boldsymbol{2p}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) \qquad (6)$$



ნახ. 3

თუ $y^2 = 2px$, მაშინ $\left(\frac{p}{2;0}\right)$ წერტილს პარაბოლას ფოკუსი ეწოდება, ხოლო $x = -\frac{p}{2}$ წრფეს, კი პარაბოლას დირექტრისა.



ნახ. 4

$(x_0;y_0)$ წერტილს პარაბოლას სათავე ეწოდება, ხოლო p რიცხვს პარაბოლის პარამეტრი. როცა $p>0$, მაშინ პარაბოლას შტოები მარჯვნივაა მიმართული, ხოლო როცა $p<0$, მაშინ მარცხნივ. $y=y_0$ წრფეს პარაბოლას სიმეტრიის ღერძი ეწოდება. როცა პარაბოლა გადის კოორდინატთა სათავეზე, მაშინ მისი განტოლებაა

$$\boldsymbol{y^2 = 2px} \tag{7}$$

ადვილი დასანახია, რომ $d_1 = x + \frac{p}{2}$ და

$$d_2 = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$$

მივიღეთ პარაბოლას ერთერთი ძირითადი დამახასიათებელი თვისება $d_1=d_2$.

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება ელიფსი? ჰიპერბოლა?
2. როგორი სახე აქვს ელიფსის კანონიკურ განტოლებას?
3. როგორი სახე აქვს ჰიპერბოლას კანონიკურ განტოლებას?
4. რას ეწოდება ელიფსის ექსცენტრისიტეტი?
5. როგორ წრფეებს ეწოდებათ ჰიპერბოლას ასიმპტოტები?
6. როგორი სახე აქვს პარაბოლას კანონიკურ განტოლებას?
7. რას ეწოდება პარაბოლას ფოკუსი?

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

1. იპოვეთ შემდეგი წრეწირის რადიუსი და ცენტრის კოორდინატები: $x^2 + y^2 - 4x = 0$
2. იპოვეთ შემდეგი წრეწირის რადიუსი და ცენტრის კოორდინატები: $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$
3. იპოვეთ შემდეგი წრეწირის რადიუსი და ცენტრის კოორდინატები: $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$
4. იპოვეთ შემდეგი წრეწირის რადიუსი და ცენტრის კოორდინატები: $3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 15 = 0$
5. იპოვეთ შემდეგი წრეწირის რადიუსი და ცენტრის კოორდინატები: $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$
6. განსაზღვრეთ ელიფსის ექსცენტრისიტეტი, თუ მისი დიდ ღერძი 3-ჯერ აღემატება მცირე ღერძს.
7. განსაზღვრეთ ელიფსის ექსცენტრისიტეტი, თუ მისი ღერძების ფარდობაა 5:3
8. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ ფოკუსებს შორის მანძილი უდრის 6-ს, ხოლო დიდი ნახევარღერძია 5.
9. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ ექსცენტრისიტეტი $e=0,8$, ხოლო დიდი ნახევარღერძია 10.
10. შეადგინეთ ელიფსის განტოლება, თუ მცირე ნახევარღერძია 3, ხოლო ექსცენტრისიტეტი $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$
11. იპოვეთ ღერძთა სიგრძეები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი შემდეგი ელიფსის: $9x^2 + 25y^2 = 225$

12. იპოვეთ ღერძთა სიგრძეები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი შემდეგი ელიფსის: $16x^2 + y^2 = 16$
13. შეადგინეთ ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება, თუ წვეროებს შორის მანძილია 8, ფოკუსთა შორის მანძილი კი 10.
14. იპოვეთ ღერძთა სიგრძეები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი შემდეგი ელიფსის: $25x^2 + 169y^2 = 4225$
15. გამოთვალეთ ჰიპერბოლის ნახევარღერძები, თუ ფოკუსური მანძილია 8, ხოლო დირექტრისებს შორის მანძილი კი 6.
16. იპოვეთ ჰიპერბოლი, თუ დირექტრისებს შორის მანძილია $\frac{18}{5}$, ხოლო წარმოსახვითი ნახევარღერძი კი 4.
17. იპოვეთ ღერძები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი შემდეგი ჰიპერბოლის: $7x^2 - 2y^2 = 14$
18. იპოვეთ ღერძები, ფოკუსები და ექსცენტრისიტეტი შემდეგი ჰიპერბოლის: $4x^2 - 9y^2 = 25$

§ 3 წრფივი ფუნქციები ეკონომიკურ ამოცანებში

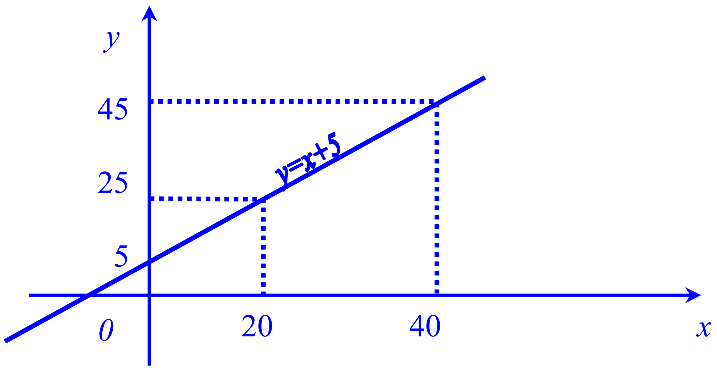
ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ წრფის განტოლების ცნების გამოყენებას ეკონომიკაში. როგორც ვნახეთ სიბრტყეზე წრფის განტოლებაა:

$$y = ax + b . \tag{1}$$

ამიტომ ბუნებრივია, რომ $y = ax + b$-ს ვუწოდოთ წრფივი ფუნქცია. ამ ფუნქციას დიდი გამოყენება აქვს ეკონომიკაში. ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რამდენიმე ეკონომიკური ამოცანა. შევნიშნოთ, რომ თითქმის ყველა ამოცანის ამოხსნისას მოგვიწევს გარკვეული ცვლადების შემოყვანა. წმინდა მათემატიკური თეორიისაგან განსხვავებით, აქ ცვლადები შეზღუდულია და ისინი შეიძლება იცვლებოდნენ მხოლოდ ამოცანის პირობებით განსაზღვრულ სიმრავლეებზე. ამიტომ ყოველ კონკრეტულ ამოცანაში აუცილებელია მიუთითოთ ცვლადების შესაბამისი დასაშვები სიმრავლეები, რომ თავიდან ავიცილოთ მცდარი პასუხები და გავაკეთოთ სწორი დასკვნები.

ამოცანა 1. ტვირთის გადატანის ხარჯების განსაზღვრა. ვთქვათ, ერთი და იმავე ტვირთის გადატანა მოცემული ქალაქიდან 20 კმ-ით დაშორებულ პუნქტამდე

ღირს 25 ლარი, ხოლო 40 კმ-ით დაშორებულ პუნქტამდე – 45 ლარი. რა ეღირება იმავე ტვირთის გადატანა x მანძილზე მოცემული ქალაქიდან, თუ ცნობილია, რომ დამოკიდებულებმა მანძილსა და ტვირთის გადატანის ხარჯებს შორის წრფივია?



ნახ. 1

მანძილი ქალაქიდან დანიშნულ პუნქტამდე x კმ-ია. ტვირთის გადატანის ხარჯი ავღნიშნოთ y ლარით. ამოცანის პირობის თანახმად, საძიებელ დამოკიდებულებას განსაზღვრავს წრფივი ფუნქცია – წრფე. ამასთან, როცა $x=20$, მაშინ $y=25$; ხოლო როცა $x=40$, მაშინ $y=45$; ე.ი. აღნიშნული წრფე გაივლის (20;25) და (40;45) წერტილებზე (ნახ. 1) მისი შესაბამისი განტოლება იქნება:

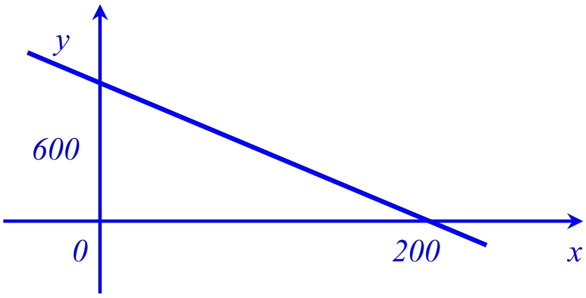
$$\frac{x-20}{40-20}=\frac{y-25}{45-25}$$

აქედან მივიღებთ საძიებელი წრფის განტოლებას $y=x+5$, რომელიც განსაზღვრავს გადატანის ხარჯებს, ე.ი. x კმ-ზე გადატანის ხარჯი იქნება (x+5) ლარი. აქ $x>0$; $y>0$

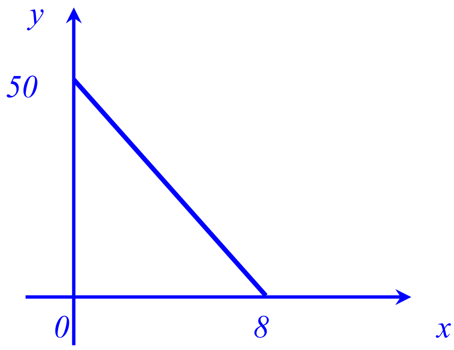
ამოცანა 2. წარმოების სიმძლავრის განსაზღვრა. ქარხნის საწარმოო სიმძლავრეა 200 ლიტრი ლუდი საათში ან 600 ლიტრი ლიმონათი. ქარხანას შეუძლია ერთდროულად აწარმოოს ლუდიცა და ლიმონათიც. შევადგინოთ განტოლება, რომელიც დაახასიათებს ქარხნის საწარმოოსიმძლავრეს თუ დამოკიდებულება წარმოებული ლიმონათისა და ლუდს შორის წრფივია.

Ox ღერძზე გადავზომოთ ქარხნის მიერ ერთ საათში წარმოებული ლუდის რაოდენობა, ხოლო Oy ღერძზე ერთ საათში წარმოებული ლიმონათის რაოდენობა. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე შესაბამისი წრფივი დამოკიდებულების გრაფიკი გადის (200;0) და (0;600) წერტილებზე, ამიტომ საძიებელი წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში იქნება:

$$\frac{x}{200}+\frac{y}{600}=1.$$



ნახ. 2



ნახ. 3

აქედან $3x+y=600$. ამ განტოლებით განისაზღვრება ქარხნის საწარმოო სიმძლავრე, რომელიც აკავშირებს 1 საათში წარმოებული ლუდისა და ლიმონათის რაოდენობებს. ცხადია, რომ $0 \le x \le 200$ და $0 \le y \le 600$ (ნახ.2).

ამოცანა 3. პროდუქციის დანახარჯის განსაზღვრა დროის მიხედვით. ვთქვათ, რაიმე წარმოებას აქვს 50 ტონა საწვავი, რომელიც უნდა დაიხარჯოს 8 დღის განმავლობაში. ვიპოვოთ კავშირი დასახარჯი საწვავისა და გასული დღეების რაოდენობებს შორის, თუ ეს დამოკიდებულება წრფივია.

ამოცანის პირობის თანახმად, როცა დღეთა რაოდენობა 0 ტოლია დასახარჯია 50 ტ. საწვავი,ხოლო 8 დღის შემდეგ საწვავის რაოდენობაა 0, მაშასადამე, თუ Ox ღერძზე გადავზომავთ დღეების რაოდენობას, ხოლო Oy ღერძზე საწვავის რაოდენობას (ნახ.3), მაშინ საძიებელი გრაფიკი (წრფე) გაივლის (0;50) და (8;0) წერტილებზე. ღერძთა მონაკვეთებში მისი განტოლებაა:

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{50}=1.$$

აქედან $25x+4y=200$. სწორედ ესაა საძიებელი კავშირი. ცხადია, რომ $0 \le x \le 8$ და $0 \le y \le 50$.

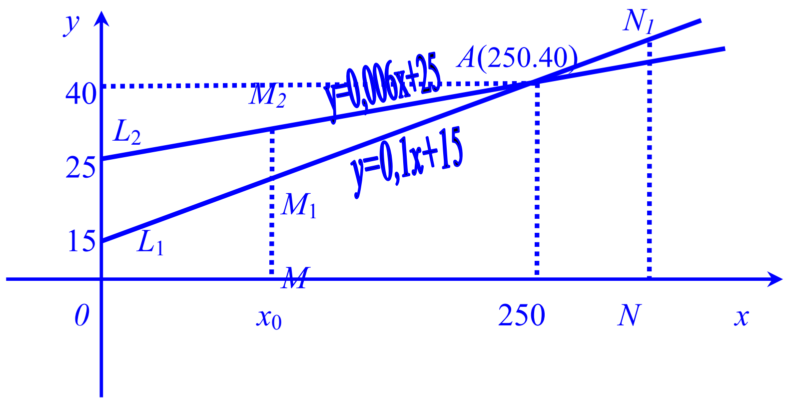
ამოცანა 4. ტვირთის გადატანის ოპტიმალური ვარიანტის არჩევა. ვთქვათ, ტვირთის გადატანის ხარჯები (ლარებში) x კმ-ზე პირველი სახის ტრანსპორტით გამოისახება $y=0,1x+15$ ფორმულით, მეორე სახის ტრანსპორტით კი $y=0,06x+25$ ფორმულით. რა სახის ტრანსპორტითაა უფრო ხელსაყრელი ტვირთის გადატანა.

ამოცანის გადასწყვეტად ავაგოთ ამოცანაში მითითებული წრფივი ფუნქციების შესაბამისი L_1 და L_2 წრფეები (ნახ. 4). ცხადია, რომ $x>0$, ამიტომ

განვიხილავთ მხოლოდ მის შესაბამის ნახევარწრფეებს. მათი გადაკვეთის წერტილი მიძებნება:

$$\text{სისტემის} \quad \begin{cases} y = 0{,}1x + 15, \\ y = 0{,}06x + 25. \end{cases}$$

ამონახსნით. მივიღებთ $A = A(250;40)$.



ნახ. 4

ნახაზიდან ვასკვნით, რომ თუ $0 < x_0 < 250$, მაშინ x_0-ის შესაბამისი ხარჯები იქნება პირველი სახის ტრანსპორტით $y_0^{(1)} = MM_1$ მეორე სახის ტრანსპორტით $y_0^{(2)} = MM_2$. რადგან $MM_1 < MM_2$ ამიტომ როცა $0 < x_0 < 250$ ტვირთის გადაზიდვა უფრო ხელსაყრელია პირველი სახის ტრანსპორტით. ანალოგიურად როცა $x_0 > 250$, მაშინ ტვირთის გადაზიდვა ხელსაყრელია მეორე სახის ტრანსპორტით. თუ მანძილი 250 –ის ტოლია, მაშინ ორივე ტრანსპორტის შემთხვევაში ერთი და იგივეა და 40 ლარის ტოლია.

ამოცანა 5, კომპლექსური საწარმოს ოპტიმალური მუშაობის პროგრამის შედგენა. მექანიკურ საამქროს ერთი თვის განმავლობაში შეუძლია დაამზადოს სახის მანქანებისათვის ნაწილების 60 კომპლექტი. ან სახის მანქანებისათვის ნაწილების 120 კომპლექტი. ამწყობ საამქროს ერთი თვის განმავლობაში შეუძლია ააწყოს სახის 120 მანქანა ან სახის 80 მანქანა. შევადგინოთ ორივე საამქროს მუშაობის ყველაზე ოპტიმალური და ეკონომიკური პროგრამა, თუ თითოეული საამქროს სიმძლავრე ისეთია, რომ და სახის გამოშვებულ პროდუქტებს შორის დამოკიდებულება წრფივია. (*ყველაზე ოპტიმალური და ეკონომიკური პროგრამა არის ისეთი სასურველი და იდეალური რეჟიმი, როდესაც მექანიკური საამქრო ერთ თვეში აწარმოებს n რაოდენობის, A სახისა და m რაოდენობის B სახის*

კომპლექტებს და ამწყობი საამქროც ერთ თვეში ააწყობს n რაოდენობის, A სახისა და m რაოდენობის B სახის მანქანებს. ეს ფაქტობრივად ნიშნავს, რომ სიმძლავრეთა შეუცვლელად ამ საამქროს კოპლექსი უნაშთოდ და მოცდენის გარეშე მუშაობს).

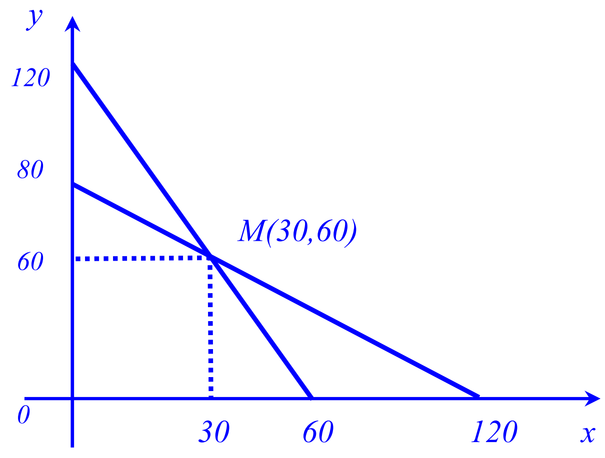
Ox ღერძზე გადავზომოთ *A* სახის პროდუქციის რაოდენობა, ხოლო *Oy*-ზე *B* სახისას. პირობის თანახმად, მექანიკური საამქროს მიერ გამოშვებული *A* და *B* სახის კომპლექტებს, შორის დამოკიდებულების წრფე (60;0) (0;120) წერტილებზე გადის. მისი განტოლება იქნება

$$\frac{x}{60}+\frac{y}{120}=1,$$

ანუ $2x+y=120$. ეს განტოლება ნიშნავს შემდეგს: მექანიკური საამქროს სიმძლავრე ისეთია, რომ მას შეუძლია ერთ თვეში აწარმოოს *x* კომპლექტი *A* სახის მანქანისათვის და *y=120-2x* კომპლექტი *B* სახის მანქანისათვის. ასევე, ამწყობი საამქროს მიერ გამოშვებული *A* და *B* სახის მანქანების რაოდენობებს შორის დამოკიდებულება მოიცემა (120;0) და (0;80) წერტილებზე გამავალი წრფით. მისი განტოლებაა

$$\frac{x}{120}+\frac{y}{80}=1.$$

ანუ *2x+3y=240*. ამრაგად, ამწყობი საამქროს სიმძლავრე ისეთია, რომ თუ ერთ თვეში იგი გამოუშვებს *A* სახის მანქანას, მაშინ მან უნდა გამოუშვას $y=\frac{1}{3}(240-2x)$ რაოდენობის *B* სახის მანქანა. ავაგოთ მიღებული წრფეების გრაფიკი და გავანალიზოთ იგი (ნახ.5).



ნახ. 5

ეს ორი წრფე იკვეთება წერტილში, რომლის კოორდინატებია $\begin{cases}2x+y=120,\\2x+3y=240.\end{cases}$

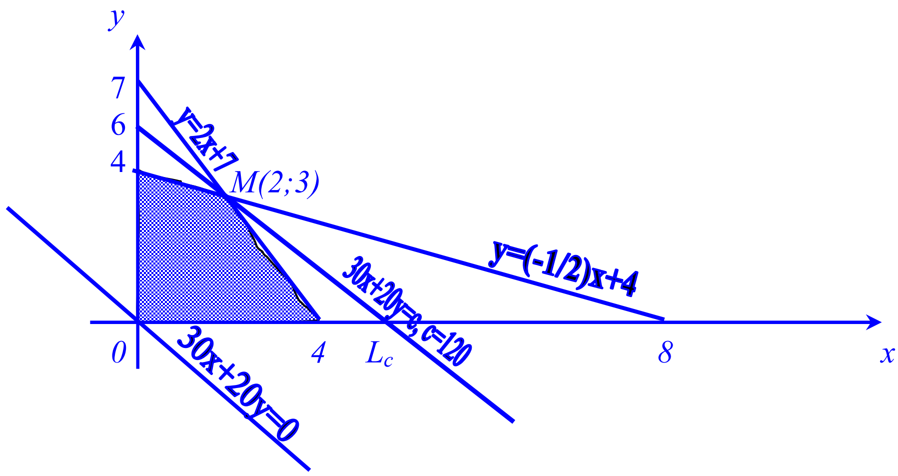
სისტემის ამონახსენი: $x=30; y=60$ ე.ი. $M(30;60)$. რადგან M წერტილი ორივე გრფიკს ეკუთვნის, ეს ნიშნავს, რომ მექანიკური საამქროს თავისი სიმძლავრის პირობებში შეუძლია აწარმოოს 30 კომპლექტი A სახის მანქანისათვის და 60 კომტლექტი B სახის მანქანისათვის, ხოლო ამწყობ საამქროს შეუძლია გამოუშვას 30 ცალი A სახის მანქანა და 60 ცალი B სახის მანქანა. მაშასადამე, M *(30;60)* წერტილი იძლევა ყველაზე ოპტიმალური და ეკონომიკური მუშაობის პროგრამას, რომლის მოძებნაც წარმოადგენდა ჩვენს მიზანს.

ამოცანა 6. წარმოების მაქსიმალური მოგების განსაზღვრა. ვთქვათ, ფაბრიკა აწარმოებს ორი A და B სახის პროდუქციას. A სახის ერთი ერთეულის წარმოებას სჭირდება ერთი სამუშაო საათი და 2კვტ/სთ ელექტრო ენერგია. B სახის ერთი ერთეულის წარმოებას 2სთ და 1კვტ/სთ ელექტროენერგია. დღის განმავლობაში ორივე სახის პროდუქციის წარმოებისათვის განკუთვნილია არაუმეტეს 8 საათისა და 7კვტ/სთ ელექტროენერგიისა. მოგება A სახის პრო-დუქციის ერთეულზე 30 ლარია, ხოლო B სახის ერთეულზე-20 ლარი. როგორ წარ-ვმართოთ წარმოება, რომ მოგება იყოს მაქსიმალური?

ვთქვათ, ფაბრიკამ აწარმოა x რაოდენობის სახის პროდუქცია და y რაო-დენობის B სახის პროდუქცია. შევნიშნოთ, რომ $x \ge 0$ $y \ge 0$. პირობის თანახმად მოგება გამოითვლება ფორმულით $30x+2y$. აღნიშნული რაოდენობის პროდუქციის წარმოება ამოითხოვს $x+2y$ საათს და $(2x+y)$ კვტ/სთ ელექტროენერგიას. ამიტომ ამოცანის პირობის თანახმად მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{cases}x+2y\le 8;\\2x+y\le 7;\\x\ge 0;\\y\ge 0.\end{cases} \quad \text{ანუ} \quad \begin{cases}y\le -\dfrac{1}{2}x+4,\\y\le -2x+7,\\x\ge 0;\\y\ge 0.\end{cases}$$

ამოვხსანათ იგი გრაფიკული ხერხით. ნახაზზე (ნახ. 6) დაშტრიხული არე წარმოადგენს საძიებელ ამონახსნს. შევნიშნოთ, რომ თუ თავისი შინაარსით x და y მთელი რიცხვებია, მაშინ უტოლობათა სიტემის ამონახსენი იქნება მხოლოდ მთელ კოორდინატებიანი წერტილები, რომლებიც ეკუთვნიან დაშრტიხულ არეს (ისინი ნახაზზე გამუქებულია). ჩვენი მიზანია, ვნახოთ x და y პარამეტრების როგორი მნიშვნელობისათვის იქნება მოგების $30x+20y=c$. ფუნქცია მაქსიმალური.



ნახ. 6

შევნიშნოთ, რომ xy საკოორდინატო სიბრტყეზე ავაგებთ ამ წრფივი ფუნქციის გრაფიკს ($c>0$ განვიხილოთ როგორც მუდმივი პარამეტრი), მაშინ შესაბამის წრფეს გააჩნია შემდეგი ეკონომიკური ინტერპრეტაცია:

თუ A და B სახის წარმოებული პროდუქციების რაოდენობებია x_0 და y_0 ამასთან $(x_0, y_0) \in L_c$, მაშინ მოგება ტოლია c-სი ე.ი. მოგების $30x+20y$ ფუნქცია L_c წირის გასწვრივ მუდმივია და c-ს ტოლია. ცხადია, რომ $30x+20y=c$ ფუნქციის გრაფიკი $30x+20y=0$ განტოლებით მოცემული წრფის პარალელურია.

c პარამეტრის ზრდას მოსდევს გრაფიკის პარალელური გადატანა მარჯვნივ. c-ს ზრდა ექვივალენტურია მოგების ზრდისა.

იმისათვის რომ ვიპოვოთ მაქსიმალური მოგება ხსენებულ პირობებში, უნდა მოვძებნოთ L_c წრფის ისეთი მდგომარეობა, როდესაც L_c წრფე შეიცავს დაშტრიხული არის ერთ წერტილს მაინც და ამასთან მის მარჯვნივ დაშტრიხული არის არცერთი წერიტილი არ ძევს. ამას მივაღწევთ L_c წრფის თანდათანობით პარალელური გადატანით მარჯვნივ. ჩვენს შემთხვევაში L_c წრფის ასეთი ზღვრული მდებარეობა მიიღწევა მაშინ, როდესაც ის გაივლის $M(2;3)$ წერტილზე, მაშინ $c=30\cdot 2+20\cdot 3=120$ და ამიტომ შესაბამისი წრფის განტოლებაა

$$30x+20y=120 \text{ ანუ } \frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1.$$

ეს წრფე x და y ღერძებს ჰკვეთს შესაბამისად (4;0) და (0;6) წერტილებში და ამიტომ მდებარეობს $x+2y=8$ და $2x+y=7$ წრფეებს შორის. ამრიგად, მოძებნილია L_c წრფის უკიდურესად ზღვრული მარჯვენა მდებარეობა, როდესაც ის შეიცავს ერთერთ წერტილს დაშტრიხული არედან, კერძოდ (2;3) წერტილს და მის

მარჯვნივ დაშტრიხული არის სხვა წერტილები აღარ მდებარეობენ. აქდან დასკვნა: მოგება მაქმალური იქნება როდესაც იწრმოება A სახის ორი ერთეული და B სახის სამი ერთეული პროდუქციები. ხოლო მაქსიმალური მოგება ტოლია $30 \cdot 2+20 \cdot 3=120$ ლარის.

ასეთი ტიპის ამოცანები განეკუთვნებიან წრფივი პროგრამირების ამოცანათა კლასს.

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. აჩვენეთ მაგალითზე რაში მდგომარეობს ტვირთვის გადატანის ხარჯების განსაზღვრა.
2. განიხილეთ წარმოების სიმძლავრის განსაზღვრა კონკრეტულ მაგალითზე.
3. განიხილეთ ამოცანა პროდუქტის დანახარჯის განსაზღვრაზე დროის მიხედვით.
4. აჩვენეთ კონკრეტულ ამოცანაზე რაში მდგომარეობს ტვირთვის გადატანის ოპტიმალური ვარიანტის არჩევა?
5. განიხილეთ ამოცანა კომპლექსური საწარმოს ოპტიმალური მუშაობის პროგრამის შედგენასთან დაკავშირებით.

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

1. ფირმის დანახარჯები 200 ცალი საქონლის დასამზადებლად შეადგენს 250 ლარს, ხოლო 700 ერთეულის დასამზადებლად -560 ლარს. შეადგინეთ დანახარჯების ფუნქცია (იმ პირობით, რომ დანახარჯების ფუნქცია წრფივია) და გამოთვალეთ დანახარჯები, თუ ფირმამ დაამზადა: 1. 150 ერთეული; 2. 500 ერთეული; 3. 1000 ერთეული;

2. წარმოების დანახარჯი გარკვეული საქონლის 100 ერთეულის საწარმოებლად შეადგენს 300 ლარს, ხოლო 500 ერთეულის საწარმოებლად – 600 ლარს. განსაზღვრეთ წარმოების დანახარჯები, თუ ვიგულისხმებთ, რომ დანახარჯების ფუნქცია წრფივია.

3. ორი სახის ტრანსპორტით გადაზიდვის ხარჯები გამოისახება ფუნქციებით y=50x+150 და y=25x+250. სადაც x მანძილია, ხოლო y სატრანსპორტო ხარჯები. როდისაა უფრო ეკონომიური მეორე სახის ტრანსპორტის გამოყენება.

4. ფირმის თანამშრომელი ვალდებულია იმუშაოს კვირაში 40 საათი. თუ მისი სამუშაოს საათების რაოდენობ აკვიარში გადააჭარბებს 40 საათს, მაშინ მას ყოველ ზენორმატიულ საათში უხდიან 2-ჯერ მეტ თანხას. როგორია თანამშრომლის საათობრივი ანაზღაურება, თუ კვირასი 55 საათის მუშაობისათვის მან მიიღო 420 ლარი?

თავი IV. მათემატიკური ანალიზის შესავალი. ფუნქციის ცნების გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში

§ 1 ფუნქცია

ფუნქციის ცნება მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა. ბუნების მოვლენები, პროცესები, კერძოდ, ტექნიკური და ეკონომიკური პროცესები ხშირად აღიწერება და შეისწავლება ფუნქციის საშუალებით.

1. ცვლადი და მუდმივი სიდიდეები. **ცვლადი** ეწოდება ისეთ სიდიდეს, რომელიც მოცემული საკითხის პირობებში ღებულობს სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობას. **მუდმივი** ეწოდება ისეთ სიდიდეს, რომელსაც მოცემული საკითხის პირობებში აქვს ერთი და იგივე რიცხვითი მნიშვნელობა. თუ რაიმე სიდიდეს ავღნიშნავთ x ან a ასოთი, ეს არ ნიშნავს იმას, რომ ცვლადია ეს სიდიდე, თუ მუდმივი, ამიტომ სიდიდის ცვლილების ხასიათი ყოველთვის განსაკუთრებით უნდა იყოს აღნიშნული. ერთი და იგივე სიდიდე ერთ შემთხვევაში შეიძლება იყოს მუდმივი, მეორეში კი ცვლადი. ასეთ სიდიდეს **პარამეტრი** ეწოდება. მაგალითად, თუ r რადიუსიან წრეს მისი რადიუსისშეუცვლელად ვაგორავებთ წრფეზე, ან ცენტრის მდებარეობა შეიცვლება, ხოლო ფართობი $\pi \cdot r^2$ მუდმივი დარჩება. თუკი

წრის ცენტრს უძრავად დავტოვებთ და r რადიუსს შევცვლით, წრის $\pi \cdot r^2$ ფართობი შეიცვლება. ამრიგად წრის ფართობი ერთ შემთხვევაში მუდმივია, მეორეში კი – ცვლადი, და რადგან ორივე შენთხვევაში წრის ფართობი არის $\pi \cdot r^2$, ამიტომ r არის პარამეტრი.

არსებობს ისეთი მუდმივი სიდიდეები, რომლებიც თავის მნიშვნელობას ნებისმიერ პირობებში ინარჩუნებენ. ასეთ სიდიდეებს **აბსოლუტური მუდმივი** სიდიდეები ეწოდება. მაგალითად, სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი და წრეწირის სიგრძის ფარდობა დიამეტრთან აბსოლუტურად მუდმივის სიდიდეებია.

ცვლადი სიდიდეები ჩვეულებრივ აღინიშნება ლათინური ანბანის უკანასკნელი ასოებით *x, y, z, u, w, t*, ხოლო მუდმივი სიდიდეები კი პირველი ასოებით *a,b,c,…*

2. ფუნქციის ცნება. სხვადასხვა სიდიდეს შორის წარმოშობილ დამოკიდებულებათა შესწავლას მივყავართ ფუნქციის ცნებამდე. შესაძლებელია, რომ გარკვეულ პირობებში ერთი სიდიდის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამებოდეს მეორე სიდიდის გარკვეული მნიშვნელობა. თუ გვაქვს ასეთი შესაბამისობა, მაშინ ამბობენ რომ მეორე სიდიდე პირველი სიდიდის ფუნქციაა. მაგალითად, ჰაერის ტემპერატურა დღის სხვადასხვა დროისათვის სხვადასხვაა, რის გამოც ჰაერის ტემპერატურა დროის ფუნქციაა, ან სხვადასხვა რადიუსიან სფეროს სხვადასხვა მოცულობა აქვს, ამიტომ სფეროს მოცულობა არის რადიუსის ფუნქცია. ახლა მოვიყვანოთ ფუნქციის ზუსტი განსაზღვრა, რომელიც ეკუთვნის **დირიხლეს**.

თუ ნამდვილ რიცხვთა E სიმრავლის ყოველ x რიცხვს შეესაბამება რაიმე წესით ერთი y ნამდვილი რიცხვი, მაშინ ვიტყვით, რომ y არის x –ის ფუნქცია. თვით E სიმრავლეს **ფუნქციის განსაზღვრის არე** ეწოდება.

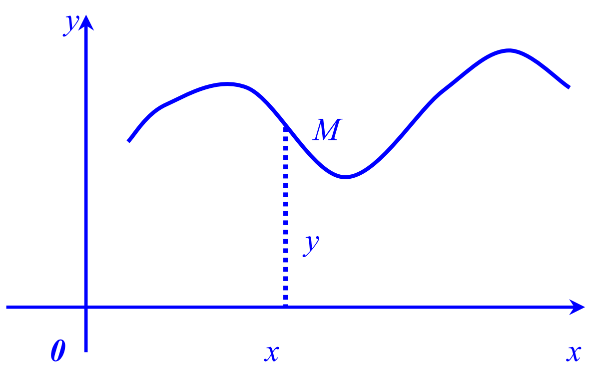
ის ფაქტი, რომ y არის x –ის ფუნქცია, ასე ჩაიწერება: $y = f(x)$, და იკითხება *იგრეკი უდრის ეფ იქსს.* ამ შემთხვევაში ამბობნენ, რომ x და y ცვლადებს შორის არსებობს ფუნქციონალური დამოკიდებულება. x –ს ეწოდება **დამოუკიდებელი ცვლადი**, ანუ **არგუმენტი**, y –ს კი **დამოკიდებული ცვლადი**.

აქ f აღნიშნავს არა სიდიდეს, არამედ დამოუკიდებელ და დამოკიდებულ ცვლადებს შორის შესაბამისობის კანონს. ე.ი. f შეიძლება აღნიშნავდეს მათემატიკურ იმ ოპერაციათა ერთობლიობას, რომლებიც უნდა ვაწარმოოთ x –ზე, რომ მივიღოთ y. მაგალითად, $y = x^2$. აქ f აღნიშნავს შემდეგს: x უნდა ავახარისხოთ კვადრატში, რომ მივიღოთ y.

თუ $f(x)$ განსაზღვრულია E სიმრავლეზე და x_0 არის E სიმრავლის რაიმე ელემენტი, მაშინ $f(x_0)$ წარმოადგენს x_0 ის შესაბამის რიცხვს და მას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა x_0 წერტილში. $f(x)$ ფუნქციის ყველა მნიშვნელობათა სიმრავლეს ამ ფუნქციის **ცვლილების არე** ეწოდება.

3. ცალსახა და მრავალსახა ფუნქცია. ფუნქციის გრაფიკი. ფუნქციის მოცემის ხერხები. ფუნქციის ცნების განსაზღვრის მიხედვით, y არის x –ის ფუნქცია, თუ x –ის ყოველ მნიშვნელობას მოცემული არედან შეესაბამება y –ის ერთი გარკვეული მნიშვნელობა. მაგრამ ზოგჯერ შეიძლება ფუნქციის ცნების ისე განზოგადება, რომ არგუმენტის მოცემულ მნიშვნელობას შეესაბამებოდეს არა ერთი, არამედ რამოდენიმე მნიშვნელობა (უსასრულოდ ბევრიც კი). ასეთ შემთხვევაში $y = f(x)$ წარმოადგენს x –ის **მრავალსახა** ფუნქციას, ხოლო როდესაც არგუმენტის ყოველ მნიშვნელობას ფუნქციის განსაზღვრის არედან შეესაბამება ფუნქციის ერთი გარკვეული მნიშვნელობა, ამბობენ, რომ მოცემული ფუნქცია ცალსახაა. (*შენიშვნა: შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ ცალსახა ფუნქციას, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება ნათქვამი. და ასევე ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ რიცხვით ფუნქციას, ე.ი. ისეთ ფუნქციას, რომლის განსაზღვრისა და მნიშვნელობათა არეები რიცხვითი სიმრავლეებია. ე.ი.* $E(f) \subset R$).

ვთქვათ, D არეზე განსაზღვრულია $y = f(x)$ ფუნქცია. x –ის ყოველ მნიშვნელობას მოცემული D არედან შეესაბამება y –ის გარკვეული მნიშვნელობა. ამ გზით მივიღებთ $(x; y)$ წყვილების სიმრავლეს. ავიღოთ სიბრტყეზე მართკუთხა კოორდინატთა Oxy სისტემა (ნახ. 1).



ნახ. 1

ზემოთ აღნიშნულ ნამდვილ რიცხვთა ყოველ $(x;y)$ წყვილს შეესაბამება სიბრტყის გარკვეული M წერტილი, რომლის აბსცისაა x, ორდინატი კი y. ამგვარად სიბრტყეზე მივიღებთ წერტილთა სიმრავლეს, რომელსაც $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება. ე.ი. $f(x)$ **ფუნქციის გრაფიკი** ეწოდება იმ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთა კოორდინატები აღებულ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას აკმაყოფილებენ, ანუ f ფუნქციის Γ გრაფიკი წარმოადგენს სიბრტყის წერტილთა შემდეგ სიმრავლეს $\Gamma=\{(x,y)\in R^2;\quad x\in D(f),\quad y=f(x)\}$.

$f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს, ჩვეულებრივ **წირი** ეწოდება, ხოლო $y=f(x)$ განტოლებას კი **წირის განტოლება**. (*შენიშვნა: წირის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი ურთულესი ცნებაა, ამიტომ არ მოგვყავს მისი განსაზღვრა*).

ფუნქცია მოცემულია ეს ნიშნავს, რომ დადგენილია წესი, რომლის ძალით არგუმენტის მნიშვნელობათა მიხედვით მოიძებნება ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა. არსებობს ფუნქციის მოცემის სამი ხერხი:

1. ანალიზური (ფორმულით) ხერხი.
2. ცხრილური ხერხი – ამოწერენ დამოუკიდებელი ცვლადის მთელ რიგ მნიშვნელობებსა და ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობებს. ამით შედგება გარკვეული ცხრილი. მაგ. ლოგარითმების ცხრილი, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცხრილი და სხვ.
3. გრაფიკული ხერხი – (აღწერილი იყო ზემოთ). ეს ხერხი მიზანშეწონილია მაშინ, როდესაც ფუნქციის მოცემა ანალიზურად საკმაოდ ძნელია. იგი ხშირად გამოიყენება მათემატიკაში ფუნქციის ამა თუ იმ თვისების საილუსტრაციოდ.

მათემატიკურ ანალიზში უპირატესობას ანიჭებენ ფუნქციის მოცემის ანალიზურ ხერხს. **ანალიზურად მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება იმ მნიშვნელობის სიმრავლეს, რომელთათვისაც შესაბამის ფორმულას აზრი აქვს.**

მაგალითი 1. იპოვეთ ფუნქციის $y=\sqrt{\dfrac{2x-4}{3-6x}}$ განსაზღვრის არე.

კვადრატული ფესვი განსაზღვრულია მხოლოდ არაუარყოფითი რიცხვებისათვის. ამიტომ $\dfrac{2x-4}{3-6x}\geq 0$. ამ უტოლობის ამოხსნა გვაძლევს მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეთა მნიშვნელობებს, ე.ი. იმ ნამდვილ რიცხვთა ერთობლიობას, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას: $\dfrac{1}{2}\prec x\leq 2$.

მაგალითი 2. იპოვეთ ფუნქციის $y=\lg\left(\frac{2x}{x+1}-1\right)$ განსაზღვრის არე.

ათობითი ლოგარითმი განსაზღვრულია მხოლოდ დადებითი რიცხვებისათვის, ამიტომ x არგუმენტის ყველა მნიშვნელობა მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არედან უნდა აკმაყოფილებდეს $\frac{2x}{x+1}-1\succ 0$ უტოლობას. თუ ამ უტოლობის მარცხენა მხარეში შევასრულებთ გამოკლებას, მივიღებთ: $\frac{x-1}{x+1}\succ 0$. ამ წილადის მრიცხველი დადებითია, როცა $x\succ 1$, და უარყოფითი, როცა $x\prec 1$. ხოლო მნიშვნელი დადებითია, როცა $x\succ -1$, და უარყოფითი, როცა $x\prec -1$. მთლიანად წილადი დადებითია, როცა $x\prec -1$ და $x\succ 1$. x –ის ყველა ეს მნიშვნელობა შეიძლება ჩაიწეროს $|x|\succ 1$ ერთი უტოლობის სახით.

3. რაციონალური ფუნქციები. ცხადი და არაცხადი ალგებრული ფუნქციები. ტრანსედენტური ფუნქციები. ფუნქციათა უმარტივეს კლასს მრავალწევრები შეადგენენ. მრავალწევრი ეწოდება

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \tag{1}$$

სახის ფუნქციას, სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია, $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ წარმოადგენენ ნამდვილ რიცხვებს (მრავალწევრის კოეფიციენტებს), ხოლო n არის ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვი. ამ ***n* რიცხვს ეწოდება მრავალწევრის ხარისხი**.

ხშირად, მრავალწევრს მთელ რაციონალურ ფუნქციას ან პოლინომს უწოდებენ. მრავალწევრის კერძო სახეებია, მაგალითად, წრფივი ფუნქცია $y=ax+b$, $(a\neq 0)$. კვადრატული ფუნქცია $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$. ფუნქციათა შემდეგი უფრო ფართო კლასია რაციონალურ ფუნქციათა კლასი. ორი მრავალწევრის ფარდობას ეწოდება **რაციონალური ფუნქცია**:

$$y=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n} \tag{2}$$

აქ იგულისხმება, რომ მრიცხველსა და მნიშვნელს საერთო ფესვი არა აქვთ. ასეთი ფუნქციის განსაზღვრის არეს შეადგენს x –ის ყველა მნიშვნელობა, რომლებიც მნიშვნელს ნულად არ აქცევენ.

ახლა განვიხილოთ ორი x და y ცვლადის მრავალწევრი. x და y ცვლადების $F(x,y)$ მრავალწევრი ეწოდება $a_{ik}x^iy^k$ სახის წევრთა ჯამს, სადაც a_{ik} ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო i და k მაჩვენებლები – არაურყოფითი მთელი

რიცხვები. $(i+k)$ რიცხვს ეწოდება $a_{ik}x^iy^k$ **წევრის ხარისხი** ან **რიგი**. ე.ი. $F(x,y)$ მრავალწევრის ხარისხი ეწოდება მისი წევრების ხარისხებს შორის უდიდესს. მაგალითად, $F(x,y)=3x^7y+5x^4y^3-6x^7y^{11}$ არის მე-18 ხარისხის მრავალწევრი. ორი ცვალდის რაციონალური ფუნქცია ეწოდება ორი ცვლადის ორი მრავაწევრის ფარდობას.

რაციონალურ ფუნქციას

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \tag{3}$$

სადაც $a,\ b,\ c,\ d$ მუდმივები აკმაყოფილებენ პირობებს $(c\neq 0)$ და $\left(\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}\right)$, ეწოდება **წილადურ-წრფივი ფუნქცია**. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $(-\infty;+\infty)\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ სიმრავლე. რაციონალური ფუნქციისათვის დამახასიათებელია ის, რომ ამ ფუნქციის მნიშვნელობის გამოსათვლელად საკმარისია არგუმენტზე შევასრულოთ სასრული რაოდენობა ოთხი არითმეტიკული მოქმედებისა, როგორიცაა შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა. შემოვიტანით შემდეგი განმარტებები:

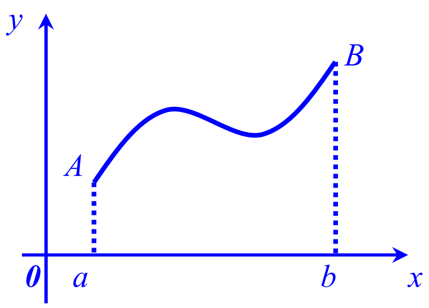
შეკრებას, გამოკლებას, გამრავლებას, გაყოფასა და ფესვის ამოღებას **ალგებრული ოპერაციები** ეწოდება.

$y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **ცხადი ალაგებრული ფუნქცია**, თუ ყოველი x–ისათვის, ფუნქციის განსაზღვრის არედან, მისი შესაბამისი y–ის გამოსათვლელად საჭიროა x –ზე ვაწარმოოთ მხოლოდ სასრული რიცხვი ალგებრული ოპერაციებისა.

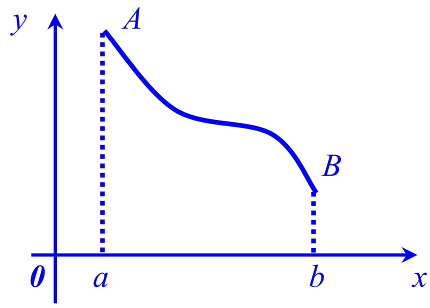
y –ს ეწოდება x –ის **არაცხადი ალაგებრული ფუნქცია**, თუ ის $F(x,y)=0$ განტოლების ამონახსნია, სადაც $F(x,y)$ მრავალწევრია x და y ცვლადების მიართ. საზოგადოდ არაცხად ალაგებრულ ფუნქციათა კლასი უფრო ფართოა, ვიდრე ცხად ალაგებრულ ფუნქცია კლასი. ალგებრულ ფუნქციას, რომელიც რაციონალური არ არის **ირაციონალური ფუნქცია** ეწოდება. ფუნქციას, რომელიც ალგებრული არ არის **ტრანსედენტური ფუნქცია** ეწოდება. მაგალითად, $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$ ტრანსედენტური ფუნქციებია.

4. ზრდადი და კლებადი, შემოსაზღვრული და შემოუსაზღვრელი, ლუწი და კენტი, პერიოდული ფუნქციები. რაიმე D სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **ზრდადი** ამ სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი

x_1 და x_2 რიცხვისათვის $f(x_1) \le f(x_2)$, როდესაც $x_1 \prec x_2$ (ნახ. 2). ხოლო განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **კლებადი** ამ სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x_1 და x_2 რიცხვისათვის $f(x_1) \le f(x_2)$, როდესაც $x_1 \prec x_2$ (ნახ. 3).



ნახ. 2



ნახ. 3

D სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **მონოტონური** ამ სიმრავლეზე, თუ იგი ზრდადია ან კლებადი.

D სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **შემოსაზღვრული** ამ სიმრავლეზე, თუ არსებობს ისეთი დადებითი M რიცხვი, რომ ამ სიმრავლის ყოველი x წერტილისათვის მართებულია უტოლობა: $|f(x)| \le M$, ან $-M \le f(x) \le M$.

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **შემოუსაზღვრელი** D სიმრავლეზე, თუ ყოველი რაგინდ დიდი დადებითი A რიცხვისათვის მოიძებნება ამ სიმრავლის ისეთი x_0 წერტილი, რომ $|f(x_0)| \succ A$.

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **ლუწი,** თუ ნებისმიერი x –ისათვის ფუნქციის განსაზღვრის არედან მართებულია ტოლობა $f(-x) = f(x)$. ლუწი ფუნქციის მაგალითებია $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = \sin^2 x$.

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **კენტი,** თუ ნებისმიერი x –ისათვის ფუნქციის განსაზღვრის არედან მართებულია ტოლობა $f(-x) = -f(x)$. კენტი ფუნქციის მაგალითებია $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = tgx$.

რაიმე არეში განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **პერიოდული** w პერიოდით, ან w – პერიოდული ფუნქცია, სადაც $w \succ 0$, თუ ამ არეს ყოველი x წერტილისათვის $x \pm w$ წერტილები ეკუთვნის ფუნქციის განსაზღვრის არეს და

მართებულია ტოლობა $f(x+w)=f(x)$. მაგალითად, $\cos x$ და $\sin x$ პერიოდული ფუნქციებია და მათი პერიოდია 2π. ასევე, tgx და $ctgx$ -ც პერიოდული ფუნქციებია და მათი პერიოდია π. ჩვეულებრივ, **ფუნქციის პერიოდს** უწოდებენ ყველა დადებით პერიოდს შორის უმცირესს. აქვე შევნიშნავთ, რომ ფუნქციის პერიოდთა შორის შეიძლება არ არსებობდეს უმცირესი. მაგ. $f(x)=1$ ფუნქცია პერიოდულია და მისი პერიოდია ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი α, ვინაიდან $f(x+\alpha)=1=f(x)$.

5. შექცეული ფუნქცია. რთული ფუნქცია. $y=f(x)$ ტოლობა x ცვლადი სიდიდის ყოველ დასაშვებ მნიშვნელობას შეუსაბამებს y ცვლადი სიდიდის სრულიად განსაზღვრულ მნიშვნელობას. მაგრამ ზოგ შემთხვევაში $y=f(x)$ თანაფარდობა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ისეთი ტოლობა, რომელიც y ცვლადი სიდიდის ყოველ მნიშვნელობას შეუსაბამებს x ცვლადი სიდიდის სრულიად განსაზღვრულ მნიშვნელობას. ეს გარემოება ნათელვყოთ კონკრეტულ მაგალითებზე:

მაგალითი 3. $y=2^x$ ტოლობა y –ის ყოველ დადებით მნიშვნელობას შეუსაბამებს x –ის შემდეგ მნიშვნელობას: $x=\log_2 y$. თუ $y=1$, მაშინ $x=\log_2 1=0$; თუ $y=2$, მაშინ $x=\log_2 2=1$; თუ $y=3$, მაშინ $x=\log_2 3$ და ა. შ. მაშასადამე, $y=2^x$ ტოლობა განსაზღვრავს x –ს, როგორც y ცვლადი სიდიდის რაღაც ფუნქციას. ცხადი სახით ეს ფუნქცია ასე ჩაიწერება $x=\log_2 y$.

მაგალითი 4. თუ $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$, მაშინ $y=\sin x$ ტოლობა y –ის ყოველ მნიშვნელობას $[-1;1]$ შუალედიდან შეუსაბამებს x რიცხვს, რომელიც $\arcsin y$ -ის ტოლი. როცა $y=-1$, მაშინ $x=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$; როცა $y=0$, მაშინ $x=\arcsin 0=0$; როცა $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, მაშინ $x=\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$ და ა.შ. მაშასადამე, $y=\sin x$ ტოლობა $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ დამატებითი პირობისას განსაზღვრავს x -ს, როგორც y ცვლადი სიდიდის რაღაც ფუნქციას. ცხადი სახით ეს ფუნქცია შემდეგნაირად ჩაიწერება $x=\arcsin y$.

ზოგადად, ვთქვათ, რომ $y=f(x)$ ტოლობის მიხედვით y ცვლადი სიდიდის ყოველი დასაშვები მნიშვნელობისათვის შესაძლებელია x ცვლადი სიდიდის ერთი და მხოლოდ ერთი მნიშვნელობის აღდგენა. მაშინ ეს ტოლობა განსაზღვრავს x-ს,

როგორც y –ის რაღაც ფუნქციას. ავღნიშნოთ ეს ფუნქცია φ ასოთი $x=\varphi(y)$. ამ ფორმულაში y ასრულებს არგუმენტის როლს, ხოლო x – ფუნქციის. ჩვეულებრიბ x ასოს იყენებენ არგუმენტის აღსანიშნავად. ამიტომ იმ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას, რომელიც φ ასოთია აღნიშნული, ჩვენ ასე გადავწერთ: $y=\varphi(x)$.

ასეთნაირად განსაზღვრულ $y=\varphi(x)$ ფუნქციას $y=f(x)$ ფუნქციის **შექცეული ფუნქცია** ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ $y=f(x)$ ფუნქციისა და მისი შექცეული $y=\varphi(x)$ ფუნქციის განსაზღვრისა და ცვლილების არეები, ასე ვთქვათ, როლებს იცვლიან. ე.ი. ის, რაც $f(x)$ ფუნქციისათვის განსაზღვრის არე იყო შექცეული $y=\varphi(x)$ ფუნქციისათვის ცვლილების არედ იქცევა და ის, რაც $f(x)$ ფუნქციისათვის ცვლილების არე იყო შექცეული $y=\varphi(x)$ ფუნქციისათვის განსაზღვრის არედ იქცევა. მაგალითად, $y=2^x$ ფუნქციისათვის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილ რიცხვთა ერთობლიობა, ხოლო ცვლილების არე – ყველა დადებითი რიცხვის ერთობლიობა. მისი შექცეული $x=\log_2 y$ ფუნქციისათვის კი განსაზღვრის არეა ყველა დადებითი რიცხვის ერთობლიობა, ხოლო ყველა ნამდვილ რიცხვთა ერთობლიობა ცვლილების არე.

ვთქვათ, U არეზე განსაზღვრულია u ცვლადის ფუნქცია $y=f(u)$, სადაც u ცვლადი თავის მხრივ წარმოადგენს D არეზე განსაზღვრულ x ცვლადის $\varphi(x)$ ფუნქციას. ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები მოთავსებულია U არეზე. მაშინ ამ ორი ფუნქციის საშუალებით შეგვიძლია ახალი ფუნქცია ასე: თუ x ნებისმიერი რიცხვია D არედან, მაშინ მას $u=\varphi(x)$ ფუნქცია შეუსაბამებს გარკვეულ u ნამდვილ რიცხვს, რომელსაც თავის მხრივ $y=f(u)$ ფუნქცია შეუსაბამებს გარკვეულ y რიცხვს. ამრიგად, y არის x -ის ფუნქცია $y=F(x)$.

ასეთნაირად განსაზღვრულ $y=F(x)$ ფუნქციას ეწოდება $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ ფუნქციებით განსაზღვრული **რთული ფუნქცია**. მას აგრეთვე ასე აღნიშნავენ $y=f[\varphi(x)]$ და ამბობენ, რომ y ფუნქცია აგებულია $f(u)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციების **სუპერპოზიციით**.

მაგალითი 5. $y=u^5$ და $u=\sqrt[6]{1+25x}$ ფუნქციების სუპრპოზიციით მივიღებთ $y=\sqrt[6]{(1+25x)^5}$.

მაგალითი 6. $y = tgu$, $u = \sqrt[5]{v}$ და $v = x+1$ ფუნქციების სუპერპოზიციით მივიღებთ $y = tg\sqrt[5]{x+1}$.

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. როგორ სიდიდეებს ეწოდება ცვლადი და მუდმივი?
2. როგორ სიდიდეს ეწოდება პარამეტრი? აბსოლუტურად მუდმივი სიდიდე?
3. რას ეწოდება ფუნქცია?
4. რას ეწოდება ფუნქციის განსაზღვრის არე? ფუნქციის ცვლილების არე?
5. ფუნქციის წარმოდგენის რამდენი ძირითადი წესი არსებობს?
6. როგორ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი? კლებადი? მონოტონური?
7. როგორ ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრული? რას ნიშნავს, რომ ფუნქცია შემოუსაზღვრელია?
8. როგორ ფუნქციას ეწოდება ლუწი? კენტი? პერიოდული?
9. რას ეწოდება ფუნქციის პერიოდი?
10. როგორ არის განსაზღვრული შექცეული ფუნქცია?
11. მოიყვანეთ რთული ფუნქციის განსაზღვრა.

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

1. მოძებნეთ შემდეგი ფუნქციის განსაზღვრის არეები:

1.1. $y = \sqrt{x-1}$; 1.2. $y = \sqrt[3]{x+1}$; 1.3. $y = \sqrt{x - x^3}$; 1.4 $y = \lg\dfrac{2+x}{2-x}$;

1.5. $y = \lg\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$; 1.6. $y = \sqrt{\sin 2x}$

2. გამოარკვიეთ, რომელი ფუნქციაა კენტი და რომელი ლუწი:

2.1. $f(x) = a^x + a^{-x}$; 2.2. $f(x) = a^x - a^{-x}$;

2.3. $f(x) = \sqrt[3]{1-x+x^2} - \sqrt[3]{1+x+x^2}$;

2.4. $f(x) = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$; 2.5. $f(x) = \lg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

3. მოცემულია ფუნქცია:

3.1. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$, იპოვეთ $f(0)$, $f(-2)$, $f(-\dfrac{1}{2})$, $f(\sqrt{2})$

3.2. $\varphi(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$, იპოვეთ $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(-2)$, $\varphi(4)$

4. მოძებნეთ $y=f[\varphi(x)]$, თუ

4.1. $f(x)=x^2$, $\varphi(x)=2^x$;

4.2. $f(x)=x^3$, $\varphi(x)=\sqrt[3]{5x-1}$;

§ 2 რიცხვითა მიმდევრობა. მიმდევრობის ზღვარი. რიცხვათა მწკრივი.

1. განმარტება. თუ მოცემულია წესი, რომლის მიხედვითაც ყოველ ნატურალურ n რიცხვს შეესაბამება გარკვეული a_n რიცხვი, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია **რიცხვითი მიმდევრობა**

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

რიცხვით მიმდევრობას აღნიშნავენ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ან $\{a_n\}$ სიმბოლოებით.

მაშასადამე, თუ მოცემული გვაქვს რაღაც რიცხვითი სიმრავლე და მოვახერხეთ ამ სიმრავლეში შემავალი რიცხვების გადანომრა ე.ი. ყოველ რიცხვს მივანიჭეთ ნომერი ისე, რომ არცერთი ნომერი ორ სხვადასხვა რიცხვს არ ეკუთვნის, მაშინ ასეთი სახით გადანომრილი სიმრავლე იქნება მიმდევრობა.

a_1- ს ეწოდება მიმდევრობის პირველი წევრი, a_2-ს მეორე და ა.შ. a_n-ს ეწოდება n-ური ანუ ზოგადი წევრი. ზოგადი წევრის მოცემა ნიშნავს მთელი მიმდევრობის მოცემას. მაგალითად,

თუ $a_n=\dfrac{1}{n}$, მაშინ გვექნება მიმდევრობა $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$

თუ $a_n=\dfrac{n}{n+1}$, მაშინ გვექნება მიმდევრობა $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{2}, \cdots, \dfrac{n}{n+1}, \cdots$

თუ $a_n=(-1)^n$, მაშინ გვექნება მიმდევრობა $1, -1, 1, -1 \cdots$

მიმდევრობების მოცემა ძირიდად ხდება **ანალიზური** ან **რეკურენტული** ხერხით ვიტყვით, რომ მიმდევრობა მოცემულია ანალიზური ხერხით, თუ მოცემულია ფორმულა, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რა მოქმედებანი უნდა შევასრულოთ n-ზე რომ მივიღოთ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი.

მაგალითად, თუ $a_n = \dfrac{3}{3n+1}$, მაშინ შეგვიძლია ამოვწეროთ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი. კერძოდ $a_1 = \dfrac{3}{4}$, $a_5 = \dfrac{3}{16}$, $a_{20} = \dfrac{3}{61}$ და ა.შ.

ვიტყვით, რომ მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული ხერხით, თუ მოცემულია პირველი ან რამდენიმე საწყისი წევრი და ფორმულა, რომლის საშუალებითაც გამოითვლება მიმდევრობის დანარჩენი წევრები.

რეკურენტული ხერხით მოცემული მიმდევრობების მაგალითებია:

1. $a_1 = 2$ და $a_{n+1} = a_n^2$, $n \ge 1$ ცხადია, რომ $a_2 = a_1^2 = 2^2$; $a_3 = a_2^2 = 4^2$ და ა.შ.
2. $a_1 = a$ და $a_{n+1} = qa_n$, $n \ge 1$ (რეკურენტულად მოცემულია უსასრულო გეომეტრიული პროგრესია) $a_1 = a$, $a_2 = a_1 q$, $a_3 = q^2 a, \cdots$ და ა.შ.
3. $a_1 = a$ და $a_{n+1} = a_n + d$, $n \ge 1$ (რეკურენტულად მოცემულია უსასრულო არითმეტიკული პროგრესია) $a_1 = a$, $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d, \cdots$

2. მონოტონური მიმდევრობა. მიმდევრობას $\{2n-1\}$ ე.ი. $1,3,5,...$ სახის მიმდევრობას გააჩნია თვისება: მისი ყოველი წევრი მეტია წინა წევრზე, ხოლო $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ მიმდევრობის (ე.ი. $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots$) ყოველი წევრი ნაკლებია მის წინა წევრზე.

$\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება **ზრდადი,** თუ $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$ და ეწოდება **კლებადი,** თუ $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$. $\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება **არაკლებადი** თუ $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge a_{n+1} \ge \cdots$ და ეწოდება **არაზრდადი,** თუ $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le a_{n+1} \le \cdots$

ზრდად, კლებად, არაკლებად და არზრდად მიმდევრობებს **მონოტონური მიმდევრობები** ეწოდება. ცხადია, რომ თუ

$$a_n - a_{n+1} > 0$$

მაშინ $\{a_n\}$ მიმდევრობა კლებადია. თუ

$$a_n - a_{n+1} \ge 0$$

მაშინ $\{a_n\}$ მიმდევრობა არაზრდადია.

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრი

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{ზრდადია.}$$

ამისათვის უნდა დავამტკიცოთ უტოლობა $a_{n+1} - a_n > 0$

მართლაც,

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{n+1+1}-\frac{n}{n+1}=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

წილადი $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ n-ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის დადებითია ე.ი. $a_{n+1}-a_n>0$ მიმდევრობა ზრდადია.

არსებობენ მიმდევრობები, რომლებიც არც კლებადია და არც ზრდადი, ე.ი. არამონოტონური მიმდევრობები. მაგალითად, მიმდევრობა რომლის ზოგადი წევრია $a_n=(-1)^n$ არამონოტონურია.

$\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება **ზემოდან შემოსაზღვრული,** თუ არსებობს ისეთი რიცხვი, რომ ნებისმიერი $n\in N$ სრულდება უტოლობა $a_n\le M$, ხოლო **ქვემოდან შემოსაზღვრული,** თუ $a_n\ge M$.

$\{a_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება **შემოსაზღვრული,** თუ ის ერთდროულად შემოსაზღვრულია ქვემოდანაც და ზემოდანაც. ე.ი. ნებისმიერი n ნატურალური რიცხვისათვის სამართლიანია

$$m<a_n<M,$$

სადაც M და m რიცხვები n-საგან დამოუკიდებელი მუდმივებია. ამ უტოლობაში ნიშანი შეიძლება შეიცვალოს $\le$ ნიშნით.

მაგალითი 2. მიმდევრობა $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ შემოსაზღვრულია, რადგან $0<\frac{1}{n}<1$;

მაგალითი 3. მიმდევრობა $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ შემოსაზღვრულია, რადგან $\frac{1}{2}\le\frac{n}{n+1}<1$;

მაგალითი 4. მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$ შემოსაზღვრულია.

მართლაც, ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი ტოლია 0-ის ან 1-ის.

$a_1=0,\quad a_2=1\quad a_3=0,\quad a_4=1,\cdots$ ამიტომ $0\le a_n\le 1$.

მაგალითი 5. მიმდევრობა $\{2n+1\}$ შემოუსაზღვრელია ზემოდან.

რადგან $a_n=2n+1$, მაშინ $a_n>0$ და n-ის ზრდასთან ერთად a_n უსასრულოდ იზრდება, რაც იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი ფიქსირებული $M>0$ რიცსვისათვის მიძებნება ისეთი k ნომერი, რომ a_k გადააჭარბებს რიცხვს ე.ი. $a_k>M$

3. მიმდევრობის დაგროვების წერტილი. განვიხილოთ მიმდევრობა $\{a_n\}$, სადაც $a_n=\frac{n}{n+1}$ მაშინ ეს მიმდევრობაა $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\cdots,\frac{100}{101},\cdots$

განვიხილოთ წერტილი 1 და მისი ნებისმიერი ε მიდამო $(1\text{-}\varepsilon;1+\varepsilon)$. ვნახოთ ამ მიმდევრობის რამდენი წერტილი მოხვდება $(1\text{-}\varepsilon;1+\varepsilon)$. შუალედში.

$$1-\varepsilon<\frac{n}{n+1}<1+\varepsilon\Rightarrow-\varepsilon<\frac{1}{n+1}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1\,.$$

აქედან, ცხადია, რომ აღნიშნულ მიდამოში მოხდება მიმდევრობის ყველა წევრი დაწყებული a_N-დან, სადაც $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1;\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$ით აღნიშნულია $\frac{1}{\varepsilon}-1$ რიცხვის მთელი ნაწილი, ხოლო ამ მიდამოს გარეთ დარჩება $a_1,a_2,\cdots,a_N$ მიმდევრობის წევრთა სასრული რაოდენობა. ასეთ **წერტილებს მიმდევრობის დაგროვების წერტილები** ეწოდება.

განხილულ მაგალითში მიმდევრობას ჰქონდა მხოლოდ ერთი დაგროვების წერტილი. დაგროვების წერტილების რაოდენობა შეიძლება მეტიც იყოს. ასე, მაგალითად, მიმდევრობას, რომლის ზოგადი წევრია $a_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$ ორი დაგროვების წერტილი აქვს. განვიხილოთ მაგალითი, რომელშიც მიმდევრობის ზოგადი წევრი გამოითვლება ფორმულით

$$a_n=\begin{cases}1+\frac{1}{k}, & \text{თუ} \quad n=3k\\ 2+\frac{1}{k}, & \text{თუ} \quad n=3k-1\\ 3+\frac{1}{k}, & \text{თუ} \quad n=3k-2\end{cases}$$

მაშინ ამ მიმდევრობას ექნება სამი დაგროვების წერტილი 1, 2 და3.

4. მიმდევრობის ზღვარი. განვიხილოთ $\{a_n\}$ მიმდევრობა. ვიტყვით, რომ a წერტილი არის ამ მიმდევრობის ზღვარი, თუ a რიცხვის ნებისმიერი ε მიდამოს გარეთ არის $\{a_n\}$ მიმდევრობის წევრთა სასრული რაოდენობა. ეს გარემოება ასე ჩაიწერება:

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n\,.$$

თუ მიმდევრობას ზღვარი აქვს, მაშინ მას **კრებადი მიმდევრობა** ეწოდება; წინააღმდეგ შემთხვევაში **განშლადი.**

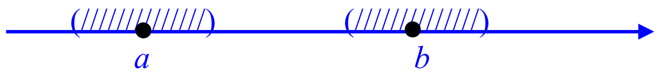
ცხადია, თუ a არის $\{a_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, მაშინ $(a\text{-}\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ მიდამოში მოხვდება წევრთა უსასრულო რაოდენობა, ე.ი. ა დაგროვების წერტილია. აქვე შევნიშნოთ, რომ მიმდევრობას, როგორც ზემოთ ვნახეთ შეიძლება ჰქონდეს არაერთი დაგროვების წერტილი, ამიტომ ბუნებრივია შეკითხვა: „მიმდევრობის

დაგროვების წერტილი არის თუ არა მისი ზღვარი?“ ამ შეკითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი

თეორემა 1: თუ მიმდევრობას ზღვარი აქვს, ის ერთადერთია.

დამტკიცება. დაუშვათ საწინააღმდეგოი. ვთქვათ $\{a_n\}$ მიმდევრობას აქვს ორი ზღვარი $a=\lim_{n\to\infty} a_n$ და $b=\lim_{n\to\infty} a_n$, სადაც $b\neq a$.

ვიგულისხმოთ, რომ $b>a$ განვიხილოთ $\varepsilon=\dfrac{b-a}{3}$ და ავიღოთ a და b რიცხვების ε მიდამოები: $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$, $(b-\varepsilon;b+\varepsilon)$. ცხადია, რომ ეს მიდამოები არ გადაიკვეთებიან



ნახ.1

პირობით $a=\lim_{n\to\infty} a_n$, ამიტომ $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ მიდამოს გარეთ დარჩება ამ მიდევრობის წევრთა სასრული რაოდენობა, მაშასადამე b რიცხვი არ წარმოადგენს მოცემული მიმდევრობის ზღვარს, რაც ჩვენს დაშვებებს ეწინააღმდეგება. (უფრო მეტიც, b რიცხვი არ შეიძლება იყოს ამ მიდევრობის დაგროვების წერტილიც კი) თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2: თუ მიმდევრობას ზღვარი აქვს, მაშინ ის შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება: მოცემულია $a=\lim_{n\to\infty} a_n$, მაშინ a რიცხვის ნებისმიერი ε - მიდამოს გარეთ შესაძლოა მოხვდეს ამ მიდევრობის წევრთა მხოლოდ სასრული რაოდენობა. ავიღოთ ε=1 და ამოვწეროთ *(a-1;a+1)* მიდამოს გარეთ მოხვედრილი წევრები: ვთქვათ მათ შორის უდიდესის მოდულია M_1. მაშინ ავიღოთ $M=\max(|a+1|;|a-1|;|M_1|)$ და ცხადია, რომ ნებისმიერი n-სათვის $|a_n|\leq M$ თეორემა დამტკიცებულია. საზოგადოდ შებრუნებული თეორემა არ არის სამართლიანი. მაგალითად $a_n=(-1)^n$ შემოსაზღვრულია, მაგრამ მას ზღვარი არ გააჩნია (აქვს ორი დაგროვების წერტილი 1 და -1).

5. მიმდევრობის ზღვრის არსებობის ნიშანი. დაუმტკიცებლად ჩამოვაყალიბებთ მიმდევრობის არსებობის აუცილებელ და საკმარის ნიშანს, რომელსაც ხშირად ზღვრის განმარტებადაც ხმარობენ.

თეორემა 3: იმისათვის, რომ a რიცხვი იყოს $\{a_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნებისმიერი ε>0 რიცხვისთვის არსებობდეს ისეთი ნატურალური (ε) რიცხვი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad n > N(\varepsilon).$$

მაგალითი 1. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

გამოვიყენოთ ზემოთ ჩამოყალიბებული თეორემა და ავიღოთ ნებისმიერი ε>0. განვიხილოთ $(-\varepsilon;\varepsilon)$ შუალედი. მაშინ სააჭიროა, რომ სრულდებოდეს პირობა

$$-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

ცხადია, რომ ეს უტოლობები სრულდება მაშინ, როცა $n > \frac{1}{\varepsilon}$. ავიღოთ $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. ცხადია, რომ თუ $n > N(\varepsilon)$, მაშინ $\frac{1}{n} < \varepsilon$ და $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$ ე.ი. სრულდება ზღვრის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა, მაშასადამე

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

6. მიმდევრობის უსასრულო (არასაკუთრივი) ზღვარი. ვთქვათ, $\{a_n\}$ განშლადი მიმდევრობა არაა შემოსაზღვრული და მის წევრებს გააჩნიათ თვისება: ნებისმიერი $M>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $N(M)$ რიცხვი, რომ

$$a_n > M \quad \text{როცა} \quad n > N(M),$$

ან

$$a_n < -M \quad \text{როცა} \quad n > N(M),$$

მაშინ ვიტყვით, რომ შესაბამისად $\{a_n\}$ მიმდევრობა მიისწრაფვის +∞-კენ ან - ∞ –კენ და ფორმალურად ჩავწერთ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \text{ან} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ პირველ შემთხვევაში n- ის უსასრულოდ ზრდას მოსდევს a_n რიცხვების შემოუსაზღვრელად ზრდა, ამიტომ ისინი გადააჭარბებენ ნებისმიერ დადებით რიცხვს, ხოლო მეორე შემთხვევაში a_n რიცხვების შემოუსაზღვრელად მცირდებიან და ნაკლები გახდებიან ნებისმიერად დიდი მოდულის მქონე უარყოფით რიცხვზე. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ a_n განშლადი მიმდევრობა კრებადია შესაბამისად +∞-კენ ან -∞-კენ.

ცხადია, რომ არითმეტიკული $a_n=a_1+d(n-1)$ პროგრესიისათვის გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{როცა} \quad d > 0.$$

$$\text{ან} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{როცა} \quad d < 0.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $a_n \neq 0$ და $a_n \to +\infty$ ან $a_n \to -\infty$, მაშინ ორივე შემთხვევაში – $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

ცხადია, რომ არსებობს განშლადი შემოუსაზღვრელი მიმდევრობები, რომლებიც არაა კრებადი არც $+\infty$-კენ და არც $-\infty$-კენ. მაგალითად $a_n=(-1)^n n^2$ არაა კრებადი არც $+\infty$-კენ და არც $-\infty$-კენ, რადგან ამ მიმდევრობაში ნებისმიერი ნომრის შემდეგ გვხვდება, როგორც ძალიან დიდი დადებითი რიცხვი (როცა n ლუწია) ისე მოდულით ძალიან დიდი უარყოფითი რიცხვი (როცა n კენტია).

თეორემა 4: თუ $\{a_n\}$ და $\{b_n\}$ მიმდევრობები კრებადია და $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, მაშინ კრებადია $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$, $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ (ამ უკანასკნელში b≠0) მიმდევრობები და ადგილი აქვს

$$1.\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b; \quad 2.\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab; \quad 3.\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad \text{ტოლობებს.}$$

დამტკიცება. ზღვრის არსებობის ნიშნიდან გამომდინარეობს, რომ

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როცა} \quad n > N'(\varepsilon) \quad \text{და} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{როცა} \quad n > N''(\varepsilon).$$

თუ $n > N(\varepsilon)$, სადაც $N(\varepsilon) = \max\{N'(\varepsilon), n > N''(\varepsilon)\}$ მაშინ ერთდროულად სრულდება

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{და} \quad |b_n - b| < \varepsilon \quad \text{როცა} \quad n > N(\varepsilon)$$

უტოლობები. ამიტომ

$$|(a_n + b_n) - a + b| = |(a_n - a) - (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{როცა} \quad n > N(\varepsilon),$$

ე.ი.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

ანალოგიურად მტკიცდება დანარჩენი ორი ტოლობა.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, თუ მიმდევრობას ზღვარი აქვს შემოსაზღვრულია, მაგრამ **ყველა შემოსაზღვრულ მიმდევრობას ზღვარი არ გააჩნია.** საინტერესოა

რომელ შემოსაზღვრულ მიმდევრობას არ გააჩნია ზღვარი. ამ საკითხზე პასუხს იძლევა

ვაიერშტრასის თეორემა: ნებისმიერ შემოსაზღვრულ მონოტონურ მიმდევრობას აქვს ზღვარი.

ძალიან ხშირად საჭიროა უტოლობაში ზღვარზე გადასვლა. ამ პირობლემას ეხება შემდეგი

თეორემა 5. $\{a_n\}$ და $\{b_n\}$ კრებადი მიმდევრობებია და ყოველი n-სათვის $a_n < b_n$ ან $a_n \le b_n$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n .$$

თეორემა 6. თუ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ და ყოველი n-სათვის

$$a_n \le c_n \le b_n ,$$

მაშინ $\{c_n\}$ მიმდევრობა კრებადია და

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c .$$

6-ს უწოდებენ ორი პოლიციელის თეორემას.

7. რიცხვი *e*. უმაღლეს მათემატიკაში დიდი მნიშვნელობა აქვს რიცხვს, რომელსაც e სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ეს რიცხვი განისაზღვრება, როგორც $\{a_n\}$ მიდევრობის ზღვარი, რომლის ზოგადი წევრია

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n ,$$

ე.ი.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e . \qquad (1)$$

e რიცხვი ირაციონალური რიცხვია და მისი მიახლოებითი მნიშვნელობაა

$$e \approx 2{,}718281828459045\cdots$$

თხუთმეტი ნიშნის სიზუსტით. e რიცხვს ეწოდება **ნეპერის რიცხვი**.

(1) ტოლობა ხშირად გამოიყენება კონკრეტული ტიპის ზღვრების გამოთვლის დროს. კერძოდ, (1) ტოლობის საფუძველზე მტკიცდება, რომ მიმდევრობას

$$\left\{\left(1+\frac{a}{m}\right)^{mb}\right\}_{m=1}^{\infty}$$

ზღვარი გააჩნია და

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{a}{m}\right)^{mb}=e^{ab} \tag{2}$$

სადაც a და b ნებისმიერი რიცხვებია.

თუ ლოგარითმის ფუძე e რიცხვია, მაშინ მას **ნატურალური ლოგარითმი** ეწოდება და აღინიშნება $\log_e^b=\ln b$. დავამტკიცოდ (2) ფორმულა. გვექნება:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{a}{m}\right)^{mb}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m}{a}}\right)^{\frac{m}{a}ab}=\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{a}}\right)^{\frac{m}{a}}\right]^{ab}$$

შემოვტანოთ აღნიშვნა $\frac{m}{a}=N$. ცხადია, რომ როცა $m\to\infty$, მაშინ $N\to\infty$. მაშასადამე

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{a}{m}\right)^{mb}=\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{a}}\right)^{\frac{m}{a}}\right]^{ab}=e^{ab}.$$

8. რიცხვითი მწკრივი. მწკრივის ჯამი. რიცხვითი მიმდევრობის ცნებასთან მჭიდროდაა დაკავშირებული რიცხვითი მწკრივისა და მწკრივის ჯამის ცნებები.

განვიხილოთ რაიმე $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ რიცხვითი მიმდევრობა და შევადგინოთ შემდეგი გამოსახულება:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{3}$$

შევნიშნოთ, რომ ეს გამოსახულება არის ფორმალური ჯამი, რადგან მასში შესაკრებების რიცხვი უსასრულოა და შეკრების განხორციელება ელემენტარულ მათემატიკაში ცნობილი ალგორითმებით შეუძლებელია, (3) ტიპის უსასრულო რაოდენობის შესაკრებთა ფორმალურ ჯამს **რიცხვითი მწკრივი** ეწოდება. ხოლო a_n რიცხვებს – მწკრივის წევრები. a_n-ს უწოდებენ მწკრივის ზოგად წევრს.

ისმება კითხვა: შეიძლება, თუ არა (3) გამოსახულებას მივანიჭოთ რაიმე აზრი? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად შევადგინოთ შემდეგი რიცხვების მიმდევრობა:

$$
\begin{aligned}
&S_1 = a_1 \\
&S_2 = a_1 + a_2 \\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

მიღებულ $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობას (3) მწკრივის **კერძო ჯამების მიმდევრობა** ეწოდება, ხოლო S_n რიცხვს – n-ური კერძო ჯამი. ინტუიცია გვკარნახობს, რომ როდესაც $n \to \infty$ მაშინ S_n ჯამში შესაკრებად შევა (3) გამოსახულების „თითქმის ყველა წევრი“. ამ მოსაზრებიდან გამომდინარე შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრება: თუ (3) მწკრივის კერძო ჯამების $\{S_n\}$ მიმდევრობას გააჩნია S ზღვარი, როდესაც $n \to \infty$, მაშინ (3) **მწკრივს ეწოდება კრებადი**, ხოლო $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ ზღვარს – (3) **მწკრივის ჯამი** ეწოდება და იგი ასე ჩაიწერება

$$
a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S .
$$

თუ $\{S_n\}$ მიმდევრობას არ გააჩნია ზღვარი, ან $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, მაშინ (3) **მწკრივს ეწოდება განშლადი.** ცხადია, რომ თუ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ ამიტომ

$$
\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0 .
$$

ამრიგად, თუ მწკრივი კრებადია, მაშინ მისი ზოგადი წევრი $a_n \to 0$, როცა $n \to \infty$. ეს არის **მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა.** მაშასადამე, თუ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ მწკრივი განშლადია. მაგრამ ეს პირობა არ არის საკმარისი მწკრივის კრებადობისათვის. მაგალითად მტკიცდება, რომ ე.წ. **ჰარმონიული მწკრივი** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ განშლადია, მიუხედავად იმისა, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

ჩამოვაყალიბოთ მწკრივის კრებადობის რამდენიმე საკმარისი პირობა:

შედარების ნიშანი: ვთქვათ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ და $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ დადებით წევრებიანი მწკრივებია (ე.ი. $a_n > 0, b_n > 0$).

1. თუ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ მწკრივი კრებადია და ყოველი n-სათვის $a_n \le b_n$, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივი კრებადია.

2. თუ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ მწკრივი განშლადია და ყოველი n-სათვის $a_n \ge b_n$, მაშინ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივიც განშლადია.

დალამბერის ნიშანი: ვთქვათ, მოცემულია $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივი და $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$.

1. თუ $q<1$, მაშინ მწკრივი კრებადია;
2. თუ $q>1$, მაშინ მწკრივი განშლადია

კოშის ნიშანი: ვთქვათ მოცემულია $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ მწკრივი და $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$

1. თუ $q<1$, მაშინ მწკრივი კრებადია;
2. თუ $q>1$, მაშინ მწკრივი განშლადია

შევნიშნოთ, რომ დალამბერისა და კოშის ზემოთ ჩამოყალიბებული თეორემები $q=1$ შემთხვევაში ვერ იძლევიან პასუხს მწკრივის კრებადობაზე. ასეთ შემთხვევაში მწკრივის კრებადობის დასადგენად საჭიროა დამატებითი გამოკვლევა (ამ საკითხს აქ არ შევეხებით).

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება ობიექტთა მიმდევრობა? რიცხვთა მიმდევრობის მოცემის რა წესები იცით?

2. როგორ მიმდევრობას ეწოდება ზემოდან შემოსაღვრული? ქვემოდან შემოსაღვრული?
3. როგორ მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი მიმდევრობა? კლებადი მიმდევრობა? არაზრდადი მიმდევრობა? არაკლებადი მიმდევრობა? მონოტონური?
4. რას ნიშნავს $(x_n)_{n\geq 1}$ მიმდევრობის ზღვარია a რიცხვი?
5. შემოსაზღვრულია თუ არა კრებადი მიმდევრობა?
6. კრებადია თუ არა ყოველი შემოსაზღვრული მიმდევრობა?
7. შეიძლება თუ არა, რომ კრებად მიმდევრობას ორი ზღვარი ჰქონდეს?
8. რაში მდგომარეობს ვაიერშტრასის თეორემა?
9. რას ეწოდება ნეპერის e რიცხვი?
10. რას ეწოდება მწკრივი? მწკრივის ზოგადი წევრი? მწკრივის ჯამი?
11. რაში მდგომარეობს მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა?
12. რაში მდგომარეობს კოშისა და დალამბერის ნიშანი?

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

1. დაწერეთ მიმდევრობა მათი ზოგადი წევრის მიხედვით:

1.1 $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; 1.2 $x_n = (-1)^n(2n+1)$; 1.3 $x_n = \cos n\pi$; 1.4 $x_n = n + (-1)^n$;

1.5. $x_n = \frac{3+(-1)^n}{n}$; 1.6. $x_n = \frac{2n\sin\frac{n\pi}{2}}{n+1}$; 1.7. $a_n = \frac{1}{2^{-n}}$; 1.8 $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$;

1.9. $a_n = 2+5n$; 1.10. $a_n = \frac{(-1)^n}{2}$; 1.11. $a_n = \frac{2n-1}{3+5n}$; 1.12. $a_n = tg\frac{\pi}{n+2}$;

1.13. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; 1.14. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3n}$; 1.15. $x_n = \left(-\frac{3}{2^{n+1}}\right)^n$

2. აჩვენეთ, რომ $x_n = \frac{2n+1}{n+1}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \to \infty$, არის 2. იპოვეთ N, თუ $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$;

3. აჩვენეთ, რომ $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \to \infty$, არის 1. იპოვეთ N, თუ $\varepsilon = 0{,}01$; $\varepsilon = 0{,}1$;

4. აჩვენეთ, რომ $x_n = \frac{n}{n+1}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \to \infty$, არის 1. იპოვეთ N, თუ $\varepsilon = 0{,}01$;

5. აჩვენეთ, რომ $x_n = \frac{1}{n^2}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \to \infty$, არის 0. როგორი n–ისათვის შესრულდება $\frac{1}{n^2} \prec \varepsilon$ უტოლობა, თუ $\varepsilon = 0{,}01$; $\varepsilon = 0{,}001$; $\varepsilon = 0{,}0001$;

§ 3 ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა

1. ფუნქციის ზღვრის ცნება. ძირითადი თეორემები ფუნქციის ზღვრის შესახებ. ვიდრე ფუნქციის ზღვრის მკაცრ მათემატიკურ განმარტებას მოვიყვანდეთ, განვიხილოთ მაგალითი.

ვთქვათ, $f(x) = x^2$. თუ x არგუმენტი გაირბენს რიგ მნიშვნელობებს, კრებადს 2 რიცხვისაკენ, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია გაირბენს გაირბენს რიგ მნიშვნელობებს, კრებადს 4 რიცხვისაკენ. ამას შევნიშნავთ, თუ განვიხილავთ $\left|x^2 - 4\right|$ ფუნქციის მიახლოებით მნიშვნელობათა შემდეგ ცხრილს:

x	1,96	1,97	1,98	1,99	2,00	2,01	2,02
x^2 (მიახლოებით)	3,84	3,88	3,92	3,96	4,00	4,04	4,08
$\left|x^2 - 4\right|$ (მიახლოებით)	0,16	0,12	0,08	0,04	0	0,04	0,08

რაც უფრო ახლოა x არგუმენტის მნიშვნელობა 2- თან, იმდენად მცირეა x^2-4 სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა. ამაში შეიძლება დავრწმუნდეთ მკაცრი მათემატიკური მსჯელობითაც, განხილული ცხრილის გარეშე. დავამტკიცოთ, რომ რაგინდ მცირე დადებითი ε რიცხვიც არ უნდა ავიღოთ, ყოველთვის შეიძლება x=2 წერტილის შემცველი ისეთი შუალედი გამოიყოს, რომ ამ შუალედის ყოველი წერტილისათვის შესრულდეს უტოლობა:

$$\left|x^2-4\right| \prec \varepsilon \qquad (1)$$

მართლაც, (1) უტოლობა ტოლფასია ორმაგი უტოლობისა:

$$-\varepsilon \prec x^2-4 \prec \varepsilon \qquad (2)$$

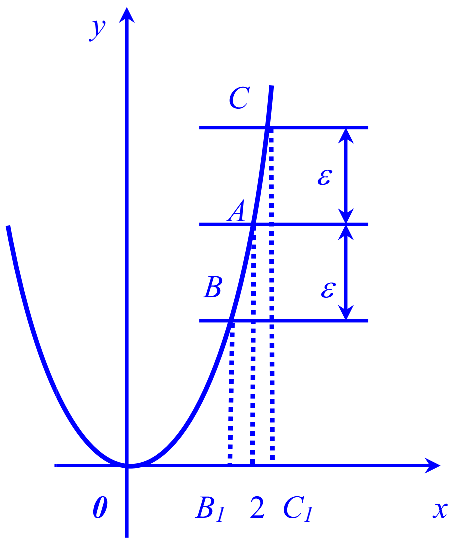
საიდანაც მივიღებთ:

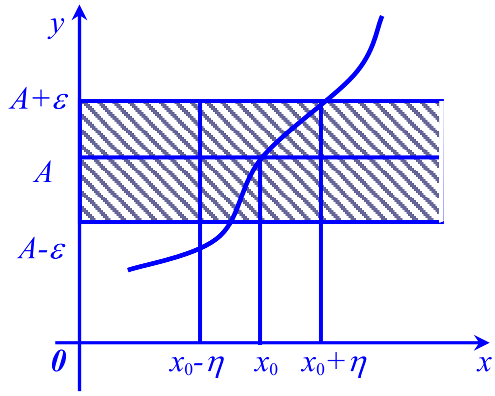
$$4-\varepsilon \prec x^2 \prec 4+\varepsilon$$

$$\sqrt{4-\varepsilon} \prec x \prec \sqrt{4+\varepsilon} \qquad (3)$$

(გავითვალისწინეთ x –ის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობები, რადგანაც $y=x^2$ ფუნქციის ყოფაქცევა ამ შემთხვევაში გვაინტერესებს მხოლოდ x=2 წერტილის მახლობლობაში). ამგვარად, (1) უტოლობა სრულდება (3) შუალედში, რომელიც x=2 წერტილს მოიცავს. მაგალითად, $\left|x^2-4\right| \prec 0{,}1$ უტოლობა $(\varepsilon=0{,}1)$ სრულდება $\sqrt{3{,}9} \prec x \prec \sqrt{4{,}1}$ შუალედში, ანუ $1{,}98 \prec x \prec 2{,}02$, ხოლო $\left|x^2-4\right| \prec 0{,}01$ უტოლობა $(\varepsilon=0{,}01)$ სრულდება $\sqrt{3{,}99} \prec x \prec \sqrt{4{,}01}$ შუალედში, ანუ $1{,}998 \prec x \prec 2{,}002$.

(3) შუალედი აიგება გეომეტრიულადაც. ვთქვათ, A არის $y=x^2$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილი, რომლის აბსცისაა x=2 (ნახ. 1).





ნახ. 1 ნახ. 2

ამ წერტილის ორივე მხარეს გავავლოთ ორი ჰორიზონტალური წრფე, რომლებიც A წერტილიდან დაშორებულია ε მანძილით. ეს წრფეები გადაკვეთენ $y=x^2$ პარაბოლის მარჯვენა ნაწილს B და C წერტილებში. თუ მათგან მართობებს დავუშვებთ აბსცისთა ღერძზე, მივიღებთ B_1C_1 მონაკვეთს. სწორედ ეს მონაკვეთი წარმოადგენს $\left(\sqrt{4-\varepsilon};\sqrt{4+\varepsilon}\right)$ შუალედს, რომელიც ადრე მივიღეთ ალგებრული გზით.

ე.ი. თუ x არგუმენტისათვის 2-ის საკმაოდ ახლო მნიშვნელობებს შევარჩევთ, მაშინ $y=x^2$ ფუნქციის მნიშვნელობანი რაგინდ მცირედ იქნებიან განსხვავებული 4 –საგან. მაგალითად, შეიძლება მივაღწიოთ იმას, რომ შესრულდეს უტოლობანი: $\left|x^2-4\right|\prec 0{,}001$, $\left|x^2-4\right|\prec 0{,}0001$ და ა. შ. ასეთ შემთხვევაში ბუნებრივია რიცხვ 4 –ს ეწოდოს $y=x^2$ ფუნქციის ზღვარი, როცა x მიისწრაფვის 2 –ისაკენ.

შეგახსენებთ, რომ წრფეზე რომელიმე x_0 **წერტილის მიდამო** ეწოდება ყოველ ღია შუალედს, რომელიც აღნიშნულ x_0 წერტილს შეიცავს.

A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ **ფუნქციის ზღვარი** x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$\left|f(x)-A\right|\prec\varepsilon, \qquad \text{როდესაც} \qquad 0\prec\left|x-x_0\right|\prec\eta, \tag{4}$$

სიმბოლურად ეს აღინიშნება ასე:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \tag{5}$$

ან $f(x)\to A$, როცა $x\to x_0$. შევნიშნოთ, რომ η რიცხვი დამოკიდებულია ε -ზე, ამასთანავე, საზოგადოდ, იგი მცირდება ε -თან ერთად. გამოვარკვიოთ ფუნქციის ზღვრის ცნების გეომეტრიული შინაარსი. როგორც, ვიცით $f(x)$ განტოლება დეკარტეს Oxy კოორდინატთა სისტემის მიმართ გამოსახავს გარკვეულ წირს (ნახ. 2). Oy ღერძზე ავიღოთ A წერტილის $]A-\varepsilon;A+\varepsilon[$ მიდამო, სადაც ε ნებისმიერი დადებითი რიცხვია. იმ შემთხვევაში, როცა ადგილი აქვს (4) უტოლობას Ox ღერძზე არსებობს x_0 წერტილის ისეთი $]x_0-\eta;x_0+\eta[$ მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი x წერტილისათვის, რომელიც

განსხვავებულია x_0 წერტილისაგან, $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა A წერტილის $]A-\varepsilon; A+\varepsilon[$ მიდამოში. მაშასადამე, $y=f(x)$ ფუქციის გრაფიკი, რომელიც შეესაბამება $]x_0-\eta; x_0+\eta[$ ინტერვალს, არ გამოვა დაშტრიხული არეს გარეთ (ნახ. 2), გარდა შესაძლებელია, გრაფიკის ერთი წერტილისა, რომელიც შეესაბამებოდეს x_0 წერტილს.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ **ძირითადი თეორემები ფუნქციათა ზღვრების** შესახებ.

1. მუდმივი სიდიდის ზღვარი თვით ამ მუდმივი სიდიდის ტოლია:

$$\lim_{x\to x_0} C = C$$

2. მუდმივი მამრავლი შეიძლება ზღვრის ნიშნის გარეთ გამოვიტანოთ:

$$\lim_{x\to x_0}\left[k\cdot f(x)\right] = k\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)$$

3. ფუნქციათა ჯამის (სხვაობის) ზღვარი ამ ფუნქციების ზღვართა ჯამის (სხვაობის) ტოლია:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm\varphi(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x)$$

4. ფუნქციათა ნამრავლის ზღვარი ამ ფუნქციების ზღვართა ნამრავლის ტოლია:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)$$

5. ორი ფუნქციის შეფარდების ზღვარი ამ ფუნქციების ზღვართა შეფარდების ტოლია:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}, \qquad \left(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0\right).$$

განვიხილოთ მაგალითები ფუნქციათა ზღვრების საპოვნელად.

მაგალითი 1. იპოვეთ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x-2}{x+2}$

განაყოფის ზღვრის თვისების ძალით გვექნება:

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x-2}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 4}(3x-2)}{\lim\limits_{x\to 4}(x+2)} = \frac{\lim\limits_{x\to 4}3x-\lim\limits_{x\to 4}2}{\lim\limits_{x\to 4}x+\lim\limits_{x\to 4}2} = \frac{3\lim\limits_{x\to 4}x-2}{\lim\limits_{x\to 4}x+2} = \frac{3\cdot 4-2}{4+2} = \frac{5}{3}$$

მაგალითი 2. იპოვეთ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$;

როცა $x \to 2$, მოცემული წილადის მრიცხველიცა და მნიშვნელიც $\to 0$. ამიტომ განაყოფის ზღვრის შესახებ თეორემის უშუალო გამოყენება არ შეიძლება, მაგრამ შესაძლებელია, რომ შევკვეცო მოცემული წილადი:

$$\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4$$

ამის შემდეგ ზღვარი ადვილად გამოითვლება.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=2^2+2\cdot 2+4=12$$

2. ფუნქციის უწყვეტობა და წყვეტა. ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები. ფუნქციის უწყვეტობა მარჯვნიდან და მარცხნიდან. ფუნქციის ნაზრდი. განვიხილოთ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრული x_0 წერტილის მიდამოში.

x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **უწყვეტი** x_0 წერტილში, თუ $f(x_0)$ სასრულია და x_0 წერტილში ფუნქციის ზღვარი და ფუნქციის მნიშვნელობა თანატოლია:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

ე.ი. ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის $(\varepsilon \succ 0)$ მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $|f(x)-f(x_0)| \prec \varepsilon$, როდესაც $|x-x_0| \prec \eta$.

ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[a,b]$ სეგმენტზე, გარდა შესაძლებელია ამ სეგმენტის რაიმე x_0 წერტილისა. სამართლიანია შემდეგი განსაზღვრებები:

x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **წყვეტის წერტილი,** თუ შესრულებულია ერთ-ერთი შემდეგი პირობებიდან:

1. x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქცია არ არის განსაზღვრული;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ არ არსებობს;
3. x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია, არსებობს $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, მაგრამ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$. ე.ი. ფუნქციის ზღვარი არ უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას x_0 წერტილში.

ფუნქციას, რომელსაც $[a,b]$ სეგმენტზე აქვს წყვეტის რაიმე x_0 წერტილი, ამ სეგმენტზე **წყვეტილი ფუნქცია** ეწოდება.

მაგალითი 3. ვთქვათ, მოცემულია $f(x)=\frac{1}{x}$ ფუნქცია. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია x –ის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა x=0 მნიშვნელობისა. x=0 წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არ არის. მაშასადამე, x=0 წერტილი წარმოადგენს მოცემული $f(x)=\frac{1}{x}$ ფუნქციის წყვეტის წერტილს.

A რიცხვს ეწოდება $]x_0;b[$ ინტერვალში განსაზღვრული $f(x)$ **ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი** x_0 წერტილში, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\eta \succ 0$ რიცხვი, რომ

$$\left|f(x)-A\right| \prec \varepsilon, \qquad \text{როდესაც} \qquad 0 \prec x-x_0 \prec \eta,$$

ამ შემთხვევაში წერენ ასე:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=A.$$

$f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი x_0 წერტილში აღნიშნავენ $f(x_0+)$ სიმბოლოთი. თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილშიც და $f(x_0+)=f(x_0)$, ე.ი. ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი x_0 წერტილში და ფუნქციის მნიშვნელობა ამ წერტილში თანატოლია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **მარჯვნიდან უწყვეტი** x_0 წერტილში.

A რიცხვს ეწოდება $]a;x_0[$ ინტერვალში განსაზღვრული $f(x)$ **ფუნქციის მარცხენა ზღვარი** x_0 წერტილში, თუ ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი $\eta \succ 0$ რიცხვი, რომ

$$\left|f(x)-A\right| \prec \varepsilon, \qquad \text{როდესაც} \qquad 0 \prec x_0-x \prec \eta,$$

ამ შემთხვევაში წერენ ასე:

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)=A.$$

$f(x)$ ფუნქციის მარცხენა ზღვარი x_0 წერტილში აღნიშნავენ $f(x_0-)$ სიმბოლოთი. თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილშიც და $f(x_0-)=f(x_0)$, ე.ი. ფუნქციის მარცხენა ზღვარი x_0 წერტილში და ფუნქციის მნიშვნელობა ამ წერტილში თანატოლია, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **მარცხნიდან უწყვეტი** x_0 წერტილში.

ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვარს ფუნქციის **ცალმხრივი** ზღვრები ეწოდება. ზღვრის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს

ზღვარი x_0 წერტილში, მაშინ არსებობს ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები x_0 წერტილში და ეს ზღვრები $f(x)$ ფუნქციის ზღვრის ტოლია. ე.ი. თუ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში არა აქვს რომელიმე ცალმხრივი ზღვარი, ან ორივე ცალმხრივი ზღვარი არსებობს, მაგრამ ისინი ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან, მაშინ x_0 წერტილში ფუნქციას არ ექნება ზღვარი. აქედან გამომდინარეობს

თეორემა 6. $f(x)$ ფუნქციას აქვს მარჯვენა და მარცხენა ზღვარი x_0 წერტილში და ისინი თანატოლია, მაშინ ფუნქციას ექნება ზღვარი x_0 წერტილში და იგი ცალმხრივი ზღვრების საერთო მნიშვნელობის ტოლია.

დამტკიცება: ვთქვათ, $f(x_0+)=f(x_0-)=A$. ამ ტოლობების თანახმად, ყოველი დადებითი ε რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი $\eta \succ 0$ რიცხვი, რომ $|f(x)-A| \prec \varepsilon$, როდესაც $0 \prec x-x_0 \prec \eta$,

$$|f(x)-A| \prec \varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad 0 \prec x_0-x \prec \eta.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$|f(x)-A| \prec \varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad 0 \prec |x-x_0| \prec \eta.$$

მაშასადამე, A რიცხვი არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში.

რ.დ.ბ.

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციის ზღვრის არსებობისათვის x_0 წერტილში აუცილებელია და საკმარისი, რომ $f(x)$ ფუნქციას ჰქონდეს თანატოლი მარჯვენა და მარცხენა ზღვარი.

ანალოგიურად, $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისათვის x_0 წერტილში აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს $f(x_0+)=f(x_0-)=f(x_0)$. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **უწყვეტი** $]a,b[$ **ინტერვალში,** თუ იგი უწყვეტია ამ ინტერვალის ყოველ წერტილში. ხოლო $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **უწყვეტი** $[a,b]$ **სეგმენტზე**, თუ იგი უწყვეტია $]a,b[$ ინტერვალში და, გარდა ამისა a წერტილში უწყვეტია მარჯვნიდან, b წერტილში კი – მარცხნიდან.

შემოვიტანოთ ფუნქციის ნაზრდის ცნება. ვთქვათ, h წარმოადგენს $]a,b[$ ინტერვალში არგუმენტის ორი მნიშვნელობის სხვაობას $x-x_0=h$. ამ სხვაობას აღნიშნავენ Δx სიმბოლოთი (იკითხება „დელტა იქსი“) და ეწოდება x **არგუმენტის ნაზრდი**. მაშინ $f(x_0)$ ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობათა სხვაობა იქნება

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

რომელსაც $y=f(x)$ **ფუნქციის ნაზრდი** ეწოდება და აღინიშნება Δy სიმბოლოთი (იკითხება „დელტა იგრეკი“). ე.ი.

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \tag{6}$$

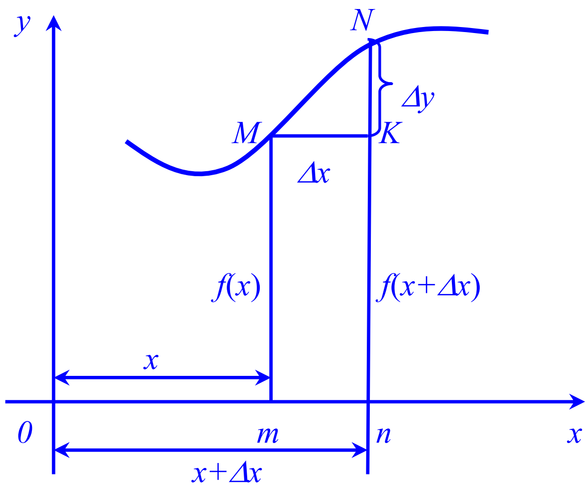
თუ x_0-ის ნაცვლად ავიღებთ $]a,b[$ ინტერვალში ნებისმიერ x წერტილს, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდი x წერტილზე იქნება

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) \tag{7}$$

შევნიშნოთ, რომ x ცვლადის წინ სიმბოლო Δ აღნიშნავს ამ ცვლადის ნაზრდს, ამიტომ Δx წარმოადგენს ერთ მთლიან აღნიშვნას და არა Δ -ს x –ზე ნამრავლს. ვნახოთ რას წარმოადგენს არგუმენტისა და ფუნქციის ნაზრდი გეომეტრიულად. ვთქვათ, სიბრტყეზე აგებულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 3).

განვიხილოთ არგუმენტის რაიმე x მნიშვნელობა, ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა იქნება $f(x)$. ნახაზზე, თუ $x=Om$, მაშინ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა გამოისახება Mm ორდინატით.

ახლა გადავიდეთ ახალ $x+\Delta x = On$ მნიშვნელობაზე. მაშინ ფუნქციის მნიშვნელობა ამ წერტილში იქნება $f(x+\Delta x)$, რომელიც ნახაზზე nN ორდინატით გამოისახება.



ნახ. 3

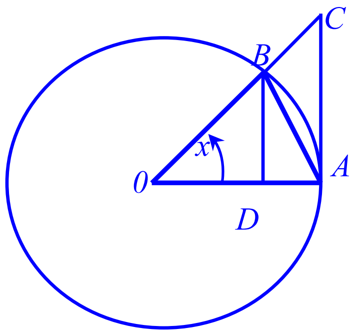
გავატაროთ M წერტილზე KM მონაკვეტი Ox ღერძის პარალელურად Nn წრფის გადაკვეთამდე. მაშინ (ნახ. 3) -ზე არგუმენტისა და ფუნქციის ნაზრდი იქნება: $\Delta x = On - Om = mn = MK$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = nN - mM = nN - nK = KN\,.$$

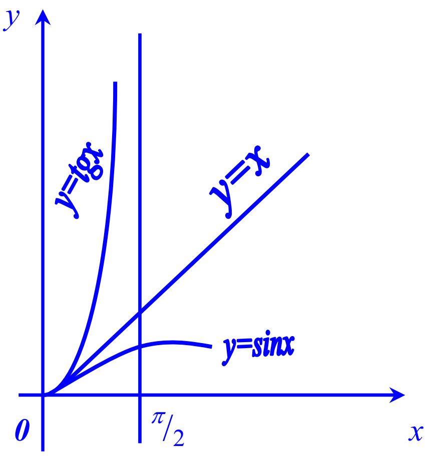
3. ზოგიერთი ტრიგონომეტრიული უტოლობა და მათი გამოყენება ზღვრების გამოთვლისას. შესანიშნავი ზღვრები. დავამტკიცოთ შემდეგი

ლემა 1: ნებისმიერი x მახვილი $0 \prec x \prec \frac{\pi}{2}$ კუთხისათვის

$$\sin x \prec x \prec tgx\,. \tag{8}$$



ნახ. 4



ნახ. 5

დამტკიცება: ვთქვათ, (ნახ. 4) –ზე $OA = OB = 1$, $\angle AOB = x$ რადიანს. BD და AC მართობებია OA –სადმი. ცხადია, OAB სამკუთხედის ფართობი OAB წრიული სექტორის ფართობზე ნაკლებია, ხოლო OAB წრიული სექტორის ფართობი, თავის მხრივ OAC სამკუთხედის ფართობზე ნაკლებია, მაგრამ

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}BD\cdot OA = \frac{1}{2}BD\,; \qquad S_{\text{სექტ.}OAB} = \frac{\pi\cdot OA^2}{2\pi}\cdot x = \frac{x}{2}\,; \qquad S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}OA\cdot AC = \frac{1}{2}AC\,.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $BD=sinx$, $AC=tgx$, მივიღებთ $\frac{1}{2}\sin x \prec \frac{x}{2} \prec \frac{1}{2}tgx\,.$ აქედან გამომდინარეობს რომ $\sin x \prec x \prec tgx\,.$

რ.დ.ბ.

(8) უტოლობის გრაფიკულ ილუსტრაციას წარმოადგენს (ნახ. 5). $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში $y=x$ ფუნქციის გრაფიკი $y=sinx$ ფუნქციის გრაფიკის ზემოთ და ამავე

დროს *y=tgx* ფუნქციის გრაფიკის ქვემოთ მდებარეობს. შევჩერდეთ $\sin x \prec x$ უტოლობაზე უფრო დაწვრილებით. ჩვენ იგი დავამტკიცეთ იმ დაშვებით, რომ $0 \prec x \prec \frac{\pi}{2}$. მაგრამ ასეთ შემთხვევაში x და *sinx* დადებითია. ამიტომ $x = |x|$, $\sin x = |\sin x|$ და $\sin x \prec x$ უტოლობა შეიძლება შემდეგი სახით გადაიწეროს:

$$|\sin x| \prec |x| \tag{9}$$

ეს უტოლობა მართებულია აგრეთვე x –ის უარყოფითი მნიშვნელობებისთვისაც, რომლებიც $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ შუალედშია მოთავსებული, რადგან $|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$ და $|-x| = |x|$.

(9) უტოლობა ასე გადავწეროთ $|\sin x - 0| \prec |x|$. თუ x ნულისაკენ მიისწრაფვის, მაშინ რამდენადაც $|\sin x - 0|$ ნაკლებია $|x|$ -ზე, ისიც ნულისაკენ მიისაწრაფვის. კერძოდ, $|\sin x - 0|$ შეიძლება ნაკლები გახდეს, ვიდრე 0,1; 0,01; 0,001 და ა.შ. საზოგადოდ, რაგინდ მცირე დადებითი ε რიცხვიც არ უნდა ავიღოთ, ყოველთვის შეიძლება იმას მივაღწიოთ, რომ შესრულდეს $|\sin x - 0| \prec \varepsilon$ უტოლობა. ამისათვის საჭიროა x –ის შერჩევა $(-\varepsilon;\varepsilon)$ შუალედში. ეს კი ნიშნავს, რომ

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \tag{10}$$

ე.ი. **სინუს x –ის ზღვარი, როცა $x \to 0$, ნულის ტოლია**. ვინაიდან, 0=*sin*0, ამიტომ მიღებული შედეგი არსებითად იმას ნიშნავს, რომ *y=sinx* ფუნქცია უწყვეტია, როცა *x=0*.

ლემა 2: ნებისმიერი x მახვილი კუთხისათვის (გამოსახული რადიანებით)

$$1 - \cos x \prec x. \tag{11}$$

დამტკიცება: სასკოლო კურსიდან ცნობილია, რომ $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$, მაგრამ რადგან $0 \prec \sin \frac{x}{2} \prec 1$, ამიტომ $\sin^2 \frac{x}{2} \prec \sin \frac{x}{2}$. ლემა 1-ის თანახმად, $\sin \frac{x}{2} \prec \frac{x}{2}$. ე.ი.

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \prec 2\sin \frac{x}{2} \prec 2\frac{x}{2} = x$$

რ.დ.ბ.

თუ x კუთხე მახვილია, მაშინ x და $1-cosx$ დადებითია, ამიტომ $x=|x|$, $1-\cos x=|1-\cos x|$. მაშინ (11) ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$|1-\cos x| \prec |x| \tag{12}$$

ეს უტოლობა, ცხადია, მართებულია მაშინაც, როდესაც $x \prec 0$, ვინაიდან $|1-\cos(-x)|=|1-\cos x|$ და $|-x|=|x|$. (12) –დან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1 \tag{13}$$

ე.ი. **კოსინუს x –ის ზღვარი, როცა $x\to 0$, ერთის ტოლია**. ვინაიდან, $1=sin0$, ამიტომ მიღებული შედეგი არსებითად იმას ნიშნავს, რომ $y=cosx$ ფუნქცია უწყვეტია, როცა $x=0$. ეხლა დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა:

თეორემა 7. $\dfrac{\sin x}{x}$ ფუნქციის ზღვარი არის ერთი, როდესაც $x\to 0$. ე.ი.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{14}$$

დამტკიცება: ვთქვათ, $x\to 0$ და ამავე დროს დადებითი რჩევა. მაშინ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $0\prec x\prec \dfrac{\pi}{2}$ და ამიტომ ლემა 1-ის თანახმად $\sin x \prec x \prec tgx$. ამასთან ამ უტოლობაში შემავალი ყველა გამოსახულება დადებითია. განვიხილოთ სამი წილადი

$$\frac{\sin x}{\sin x},\qquad \frac{\sin x}{x}\qquad \text{და}\qquad \frac{\sin x}{tgx}.$$

როგორც ვიცით. იმ წილადებს შორის რომლებსაც ტოლი მრიცხველი აქვთ, ის იქნება ნაკლები, რომლის მნიშვნელიც მეტია. ე.ი.

$$\frac{\sin x}{\sin x}\succ\frac{\sin x}{x}\succ\frac{\sin x}{tgx}\qquad \text{ან}\qquad 1\succ\frac{\sin x}{x}\succ\cos x.$$

გავამრავლოთ ეს უტოლობა წევრ-წევრად (-1) –ზე, მაშინ უტოლობის ნიშნები მოპირდაპირედ შეიცვლება

$$-1\prec-\frac{\sin x}{x}\prec-\cos x.$$

თუ ამ უტოლობის თითოეულ წევრს მივუმატებთ 1 –ს მივიღებთ:

$$0\prec 1-\frac{\sin x}{x}\prec 1-\cos x,$$ ლემა 2-ის ძალით გვექნება $$0\prec 1-\frac{\sin x}{x}\prec x.$$

რადგან $x \succ 0$ და $1-\frac{\sin x}{x} \succ 0$, ამიტომ $1-\frac{\sin x}{x}$ და x სიდიდეები უკანასკნელ უტოლობაში შეიძლება შევცვალოთ მათი აბსოლუტური მნიშვნელობებით. ამის შედეგად მივიღებთ, რომ $\left|1-\frac{\sin x}{x}\right| \prec |x|$. რაც ცხადია, შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right| \prec |x| \tag{15}$$

(15) უტოლობა მივიღეთ იმ პირობით, რომ $x \succ 0$, მაგრამ იგი მართებულია მაშინაც, როცა $x \prec 0$, რადგან $\frac{\sin x}{x}$ ფუნქცია ლუწია და მაშასადამე

$$\left|\frac{\sin(-x)}{(-x)}-1\right| = \left|\frac{\sin x}{x}-1\right|.$$

თუ x ნულისაკენ მიისწრაფვის, მაშინ, როგორც ეს (15) –დან ჩანს $\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|$ მით უფრო მიისწრაფვის ნულისაკენ. რაგინდ მცირეც უნდა იყოს დადებითი ε რიცხვი, ყოველთვის შეიძლება მივაღწიოთ იმას, რომ შესრულდეს უტოლობა

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right| \prec \varepsilon$$

ამისათვის საჭიროა x –ის შერჩევა $(-\varepsilon;\varepsilon)$ შუალედში. ეს კი ნიშნავს, რომ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

რ.დ.ბ.

განვიხილოთ მაგალითები

მაგალითი 4. ვიპოვოთ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

მოცემული წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ 3-ზე.

$$\frac{\sin 3x}{x}=\frac{3\sin 3x}{3x}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $3x=y$. ცხადია $x\to 0$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ აგრეთვე $y\to 0$. ამიტომ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=\lim_{y\to 0}\frac{3\sin y}{y}=3\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=3\cdot 1=3$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

თუ გამოვიყენებთ $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ იგივეობას, მივიღებთ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$.

შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი $y=\dfrac{x}{2} \Rightarrow x=2y$, მაშინ

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2 y}{(2y)^2} = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin^2 y}{y^2} = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

(14) –ს უწოდებენ შესანიშნავ ზღვარს. §2.7 –ში განვიხილეთ ნეპერის რიცხვი, რომელსაც აგრეთვე უწოდებენ შესანიშნავ ზღვარს. ე.ი. გვაქვს შესანიშნავი ზღვრები: 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ და 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

ბოლო ტოლობიდან გვაქვს, რომ

$$3.\ \lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{და} \quad 4.\ \lim_{x\to -\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

მათაც აგრეთვე უწოდებენ შესანიშნავ ზღვრებს.

შემდეგ მაგალითებში განვიხილოთ ზღვრები, რომლებსაც პირობითად შეიძლება მნიშვნელოვანი ზღვრები ვუწოდოთ:

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$

ვინაიდან $\dfrac{tgx}{x} = \dfrac{\sin x}{x\cos x} = \dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}$, ამიტომ მივიღებთ

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$$

ე.ი. $$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1.$$

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgax}{x}$, სადაც $a\neq 0$;

ავღნიშნოთ $ax=y$, მაშინ გვექნება

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgax}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{tgy}{\frac{y}{a}} = \lim_{y\to 0}\left(a\cdot\frac{tgy}{y}\right) = a\lim_{y\to 0}\frac{tgy}{y} = a\cdot 1 = a$$

ე.ი. $$\lim_{x\to 0}\frac{tgax}{x} = a.$$

მაგალითი 8. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{x}$ სადაც $b\neq 0$;

ანალოგიურად მივიღებთ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{x}=b$ სადაც $b\neq 0$.

მაგალითი 9. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgax}{\sin bx}$ სადაც $a\neq 0,\quad b\neq 0$

მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ x –ზე, სადაც $x\neq 0$, მივიღებთ

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgax}{\sin bx}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgax}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin bx}{x}}=\frac{a}{b}\qquad \text{ე.ი.}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$$

მაგალითი 10. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\frac{k}{x}=\frac{1}{y}$, მაშინ

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ky}=\left[\lim_{y\to 0}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^k=e^k$$

ე.ი.
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$$

მაგალითი 11. გამოვთვალოთ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

თუ ვისარგებლებთ ლოგარითმის თვისებით გვექნება

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1$$

ე.ი.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

ე.წ. **მნიშვნელოვან ზღვრებს** მიეკუთვნება, აგრეთვე, შემდეგი ზღვრული ტოლობები, რომელთა დამტკიცებაც მკითხველისათვის მიგვინდია.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{k}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a}=1$; 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{nx}=1$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$; 8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში არის A რიცხვი?
2. მოიყვანეთ განსაზღვრა $f(x)$ ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრებისა x_0 წერტილში.
3. რას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში? უწყვეტია მარჯვნიდან? უწყვეტია მარცხნიდან?
4. რას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ ინტერვალში? $]a,b[$ სეგმენტზე?
5. რას ნიშნავს, რომ $f(x)$ ფუნქცია წყვეტილია x_0 წერტილში?
6. შეიძლება თუ არა, რომ ფუნქცია განსაზღვრული იყოს x_0 წერტილში, მაგრამ იყოს უწყვეტი? იყოს წყვეტილი?

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

1. აჩვენეთ, რომ $x_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \to \infty$, არის 2. იპოვეთ N, თუ $\varepsilon = 0{,}1$; $\varepsilon = 0{,}01$;
2. აჩვენეთ, რომ $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \to \infty$, არის 1. იპოვეთ N, თუ $\varepsilon = 0{,}1$; $\varepsilon = 0{,}01$;
3. აჩვენეთ, რომ $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \to \infty$, არის 1. იპოვეთ N, თუ; $\varepsilon = 0{,}01$;
4. აჩვენეთ, რომ $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ მიმდევრობის ზღვარი, როცა $n \to \infty$, არის 0. როგორი n–ისათვის შესრულდება $\dfrac{1}{n^2} \prec \varepsilon$ უტოლობა, თუ $\varepsilon = 0{,}1$; $\varepsilon = 0{,}01$;
5. გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები:

5.1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+4x-5}{6x^2+2x+1}$; 5.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$ 5.3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$;

5.4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^4-x+3}{x^3-8x+5}$; 5.5 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-2x^2-4}{x^4+7x-1}$; 5.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$;

5.7. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$; 5.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{4x+1}-\frac{2x^3}{8x^2-1}\right)$; 5.9. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$;

5.10. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$; 5.11. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; 5.12 $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$;

5.13. $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^3+4x^2}{x^2+x-12}$; 5.14. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$; 5.15. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^4-16}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

5.16. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^4-4x^3+1}{x^3-x^2-x+1}$; 5.17. $\lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$; 5.18. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$

5.19. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{3}}{x}$; 5.20. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgbx}{\sin(ax+x^2)}$; 5.21. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$;

5.22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2k}{x}\right)^x=1$; 5.23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=1$; 5.24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{5x}$;

5.25 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{6x}$; 5.26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$

§4. ელემენტარულ ფუნქციათა კლასი

ფუნქციათა იმ სიმრავლიდან, რომელსაც მათემატიკურ ანალიზში განიხილავენ, გამოყოფენ ე.წ. ელემენტარულ ფუნქციებს. ძირითადი ელემენტარული ფუნქციებს წარმოადგენს შემდეგი:

1. $y=C$, სადაც C მუდმივია.
2. $y=x^{\alpha}$, სადაც α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

3. $y = a^x \quad (a \succ 0, a \neq 1)$.

4. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, $y = \sec x$, $y = \cos ecx$.

5. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$, $y = arc\sec x$, $y = \arccos ecx$.

განსაზღვრება: $y = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ელემენტარული ფუნქცია, თუ იგი წარმოიდგინება ერთი ფორმულით, რომელიც შედგენილია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციებისაგან მათზე არითმეტიკული ოპერაციებისა და სუპერპოზიციათა სასრულ რიცხვჯერ გამოყენებით. ამრიგად, ელემენტარული ფუნქციები ყოველთვის მოცემულია ანალიზურად.

ელემენტარული ფუნქციებია, მაგალითად $y = \ln \cos x$, $y = ctgx \cdot arctgx$, $y = 2^{x^x}$. არაელემენტარულია ფუნქცია $y = E(x)$, სადაც $E(x)$ აღნიშნავს უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება x -ს. $y = |x|$ ფუნქცია ელემენტარულია, ვინაიდან იგი ასე წარმოიდგინება $y = \sqrt{x^2}$. მტკიცდება შემდეგი

თეორემა: ნებისმიერი ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

ჩვენ დავამტკიცებთ ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციების უწყვეტობას თავის განსაზღვრის არეში.

1. განვიხილოთ ფუნქციები $y = \sin x$, $y = \cos x$, როგორც ვიცით, ეს ფუნქციები განსაზღვრულია x $-$ის ყველა ნამდვილი რიცხვითი მნიშვნელობებისათვის, ანუ $(-\infty;+\infty)$ შუალედში. ავიღოთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი x_0. წინა პარაგრაფში მოყვანილი მტკიცების თანახმად, ადგილი ექნება უტოლობებს

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $y = \sin x$ და $y = \cos x$ უწყვეტი ფუნქციებია x_0 წერტილზე და ვინაიდან x_0 იყო ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, ამიტომ $y = \sin x$ და $y = \cos x$ უწყვეტი ფუნქციებია თავის განსაზღვრის $(-\infty;+\infty)$ შუალედში.

2. ახლა ავიღოთ $y = tgx$ ფუნქცია. ვინაიდან $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ და $y = \sin x$ და $y = \cos x$ უწყვეტი ფუნქციებია $(-\infty;+\infty)$ შუალედში, ამიტომ $y = tgx$

ფუნქცია, როგორც ორი უწყვეტი ფუნქციის ფარდობა უწყვეტია ყველგან, სადაც მნიშვნელი არ უდრის ნულს, ანუ იგი უწყვეტია ყველგან თავის განსაზღვრის არეში, ხოლო $x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0,1,2,\ldots$ წერტილებში არ არის განსაზღვრული. ანალოგიურად, $y = ctgx$ ფუნქცია უწყვეტია ყველგან თავისი განსაზღვრის არეში, ხოლო $x_k = k\pi$, $k = 0,1,2,\ldots$ წერტილებში არ არის განსაზღვრული.

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება ელემენტარული ფუნქცია?
2. რომელია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები?
3. მოიყვანეთ დამტკიცება ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციების უწყვეტობისა თავის განსაზღვრის არეში.

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

გამოიკვლიეთ შემდეგი ფუნქციებიდან რომელი და სად განიცდის წყვეტას (ააგეთ გარფიკები):

1. $y = x^2$; 2. $y = \dfrac{1}{x+3}$;

3. $y = ctgx$; 4. $y = \sin\dfrac{1}{x}$.

§5. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი სიდიდეები. უსასრულოდ მცირეთა შედარება. ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეები

1. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი სიდიდეები. x_0 წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **უსასრულოდ მცირე** x_0 წერტილში, თუ მისი ზღვარი ნულის ტოლია

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 .$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ უსასრულოდ მცირე სიდიდის აბსოლუტური მნიშვნელობა, გარკვეული დროიდან დაწყებული, ნაკლებია ყოველ, წინასწარ აღებულ, ნებისმიერად მცირე ε რიცხვზე და შემდეგშიაც ასეთივე რჩება. ე.ი. როგორიც არ უნდა იყოს ნებისმიერად მცირე დადებითი ε რიცხვი, გარკვეული დროიდან დაწყებული, უსასრულოდ მცირე x-სიდიდე დააკმაყოფილებს უტოლობას:

$$|x| \prec \varepsilon .$$

x_0 შეიძლება იყოს $+\infty$ ან $-\infty$. თუ $x_0 = +\infty$, ამ არასაკუთრივი წერტილის მიდამოა ყოველი $]a,+\infty[$ შუალედი, ხოლო თუ $x_0 = -\infty$, მაშინ მიდამოა ყოველი $]-\infty, a[$ შუალედი. შევნიშნოთ, რომ ძალიან მცირე სიდიდე არ არის უსასრულოდ მცირე სიდიდე, ვინაიდან უსასრულოდ მცირე სიდიდე ცვლადი სიდიდეა, ძალიან მცირე სიდიდე კი მუდმივია.

ფუნქციისა ზღვრის განსაზღვრებიდან გამომდინრეობს, რომ თუ $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, მაშინ $f(x) - A$ სხვაობა უსასრულოდ მცირეა x_0 წერტილში. და პირიქით, თუ $f(x) = A + \alpha(x)$, სადაც $\alpha(x)$ უსასრულოს მცირეა x_0 წერტილში, მაშინ A იქნება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში (ზღვრის გამოსახვა ტოლობის საშუალებით).

$f(x)$ ფუნქციას ეწოდება **უსასრულოდ დიდი** x_0 წერტილში, თუ ყოველი დადებითი A რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ

$$|f(x)| \succ A, \text{ როდესაც } 0 \prec |x - x_0| \prec \eta .$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty .$$

ამბობენ, რომ ცვლადი სიდიდე უსასრულოდ დიდია, თუ მისი აბსოლუტური მნიშვნელობა, გარკვეული დროიდან დაწყებული მეტია ყოველ წინასწარ აღებულ ნებისმიერად დიდ დადებით N რიცხვზე და შემდეგშიაც ასეთივე რჩება. ე.ი. როგორიც არ უნდა იყოს ნებისმიერად დიდი დადებითი N რიცხვი, გარკვეული დროიდან დაწყებული უსასრულოდ დიდი x-სიდიდე დააკმაყოფილებს უტოლობას:

$$|x| \succ N.$$

თეორემა 1: უსასრულოდ დიდი სიდიდის შებრუნებული სიდიდე, უსასრულოდ მცირეა.

დამტკიცება: ვთქვათ, $f(x)$ უსასრულოდ დიდი სიდიდეა x_0 წერტილში. დავამტკიცოთ, რომ $\dfrac{1}{f(x)}$ უსასრულოდ მცირეა ამავე წერტილში. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი ε რიცხვი, რადგან $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = +\infty$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი დადებითი η რიცხვი, რომ $|f(x)| \succ \dfrac{1}{\varepsilon}$, როდესაც $0 \prec |x - x_0| \prec \eta$. აქედან ვღებულობთ $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| \prec \varepsilon$, როდესაც $0 \prec |x - x_0| \prec \eta$. ე.ი. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)} = 0$.

რ.დ.ბ.

ავღნიშნოთ უსასრულოდ მცირე სიდიდეთა ზოგიერთი თვისება.

თეორემა 2. უსასრულოდ მცირეთა ჯამი უსასრულოდ მცირეა (*იგულისხმება, რომ შესაკრებთა რიცხვი სასრულია*).

დამტკიცება: ვთქვათ, მოცემულია რამდენიმე უსასრულოდ მცირე რიცხვით n. $x_1, x_2, \ldots, x_n$. როგორიც არ უნდა იყოს ნებისმიერად მცირე დადებითი ε რიცხვი, გარკვეული დროიდან დაწყებული, ყველა მოცემული უსასრულოდ მცირე x_i ცვლადი $|x_i| \prec \dfrac{\varepsilon}{n}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. და შემდეგშიც ასეთივე დარჩება. მაგრამ მეორეს მხრივ გვაქვს $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$. ე.ი. $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \le \varepsilon$. ეს კი ამტკიცებ, რომ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ჯამი უსასრულოდ მცირეა.

რ.დ.ბ.

აქედან უშუალოდ გამომდინრეობს, რომ ორი უსასრულოდ მცირეს სხვაობა უსასრულოდ მცირე იქნება ან ნული. მართლაც, ვინაიდან $x_1 - x_2 = x_1 + (-x_2)$,ამიტომ ჯამისათვის დებულება დამტკიცებულია. და თუ ორვე უსასრულოდ მცირე ტოლია, მაშინ მათი სხვაობა ნულის ტოლი იქნება.

თეორემა 3. მუდმივი სიდიდისა და უსასრულოდ მცირეს ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა.

დამტკიცება: ვთქვათ x უსასრულოდ მცირეა, ხოლო a ნებისმიერი მუდმივი სიდიდე. გარკვეული დროიდან დაწყებული $|x| \prec \frac{\varepsilon}{a}$, სადაც ε ნებისმიერად მცირე დადებითი რიცხვია. მაგრამ რადგან $|xa| = |x| \cdot |a|$, ამიტომ მივიღებთ $|xa| \prec \varepsilon$. ე.ი.

რ.დ.ზ.

თეორემა 4. უსასრულოდ მცირეთა ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა.

დამტკიცება: ჯერჯერობით განვიხილოთ ორი x_1 და x_2 უსასრულოდ მცირე. ცხადია, რომ გარკვეული დროიდან დაწყებული $|x_1|$ გახდება რომელიმე მუდმივ დადებით სიდიდეზე ნაკლები, ამასთანავე x_2 -ის ცვლილების დროს დადგება ისეთი მომენტი, როდესაც ადგილი ექნება უტოლობას $|x_2| \prec \frac{\varepsilon}{a}$, სადაც ε ნებისმიერად მცირე დადებითი რიცხვია.

ახლა განვიხილოთ $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2| \prec a \cdot \frac{\varepsilon}{a} = \varepsilon$. ამრიგად, $|x_1 \cdot x_2| \prec \varepsilon$.

რ.დ.ზ.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ რამდენიც არ უნდა იყოს უსასრულოდ მცირე მათი ნამრავლი ყოველთვის უსასრულოდ მცირე იქნება. კერძოდ. თუ ყველა მამრავლი თანატოლია, ე. ი. თუ x უსასრულოდ მცირეა, მაშინ x^n -იც უსასრულოდ მცირე იქნება, სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია.

თეორემა 5. უსასრულოდ მცირე სიდიდეთა შეფარდება შეიძლება იყოს როგორც უსასრულოდ მცირე, ისე სასრული და უსასრულოდ დიდიც.

დამტკიცება: ეს გამომდინარეობს შემდეგი მაგალითებიდან. თუ x უსასრულოდ მცირეა. მაშინ თეორემა 4 –ის თანახმად, x^2 -იც უსასრულოდ მცირე იქნება. შეფარდება $\frac{x^2}{x}$ უსასრულოდ მცირეა, ვინაიდან იგი x –ის ტოლია. ახლა ავიღოთ რომელიმე სასრული a სიდიდე. თეორემა 3 –ის თანახმად ax უსასრულოდ მცირეა, $\frac{ax}{x}$ ფარდობა სასრულია, ვინაიდან იგი a -ს ტოლია. დასასრულ ავიღოთ $\frac{x}{x^2}$ ფარდობა; ეს უსასრულოდ დიდია, ვინაიდან იგი $\frac{1}{x}$ -ის ტოლია და თუ x უსასრულოდ მცირეა, მაშინ როგორც ვიცით $\frac{1}{x}$ უსასრულოდ დიდი იქნება.

რ.დ.ზ.

შევნიშნოთ, რომ გარდა აქ ჩამოთვლილი შემთხვევებისა, შესაძლებელია ისეთი შემთხვევა, როდესაც უსასრულოდ მცირე სიდიდეთა შეფარდებას არა აქვს ზღვარი. მაგალითად, თუ თუ x უსასრულოდ მცირეა, მაშინ $x\sin\frac{1}{x}$ ნამრავლი აგრეთვე უსასრულოდ მცირეა, მაგრამ $\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}$ შეფარდებას, რომელიც $\sin\frac{1}{x}$ -ის ტოლია არა აქვს ზღვარი. ამრიგად, როგორც გამოირკვა ორი უსასრულოდ მცირე სიდიდეთა შეფარდება განუზღვრელობას წარმოადგენს.

თეორემა 6. ორი უსასრულოდ დიდი სიდიდეთა შეფარდება შეიძლება იყოს როგორც უსასრულოდ დიდი, ისე სასრული და უსასრულოდ მცირეც.

დამტკიცება: ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ ორი უსასრულოდ დიდი სიდიდეთა შეფარდება $\frac{y_1}{y_2}$ შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ $\frac{\frac{1}{y_1}}{\frac{1}{y_2}}$, მაგრამ ეს უკვე ორი უსასრულოდ მცირეთა ფარდობაა და ამგვარად თეორემა დამტკიცებულია.

 რ.დ.ბ.

ასევე მტკიცდება შემდეგი ორი თვისებაც

თეორემა 7. უსასრულოდ მცირესა და უსასრულოდ დიდის ნამრავლი შეიძლება იყოს, როგორც უსასრულოდ მცირე, ისე სასრული და უსასრულოდ დიდიც.

თეორემა 8. ორი უსასრულოდ დიდის სხვაობა შეიძლება იყოს, როგორც უსასრულოდ დიდი, ისე სასრული და უსასრულოდ მცირეც.

ამრიგად, უსასრულოდ მცირეთა ფარდობა, ორი უსასრულოდ დიდის ფარდობა, უსასრულოდ მცირეს უსასრულოდ დიდზე ნამრავლი და ორი უსასრულოდ დიდის სხვაობა განუზღვრელობებს წარმოადგენს.

2. უსასრულოდ მცირეთა შედარება. ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეები. თუ α და β უსასრულოდ მცირეთა $\frac{\alpha}{\beta}$ ფარდობა უსასრულოდ მცირეა, მაშინ α -ს ეწოდება **მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე** β -ს მიმართ.

თუ α და β უსასრულოდ მცირეთა $\frac{\alpha}{\beta}$ ფარდობა უსასრულოდ დიდია, მაშინ α -ს ეწოდება **დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირე** β -ს მიმართ.

თუ α და β უსასრულოდ მცირეთა $\dfrac{\alpha}{\beta}$ ფარდობის ზღვარი ნულისაგან განსხვავებული სასრული რიცხვია, მაშინ α და β-ს ეწოდება **ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეები**.

ზოგჯერ საჭიროა ზუსტად დახასიათება ერთი უსასრულოდ მცირის ნულისაგან მისწრაფებისა მეორესთან შედარებით. ამისათვის შემოვიღოთ განმარტება: β უსასრულოდ მცირეს ეწოდება ***k*** **–რიგის უსასრულოდ მცირე** α უსასრულოდ მცირეს მიმართ, თუ α^k და β ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებია.

მაგალითად, თუ α უსასრულოდ მცირეა, მაშინ α^2, α^3, $\sqrt[4]{\alpha}$ არიან შესაბამისად, მეორე, მესამე და $\dfrac{1}{4}$ რიგის უსასრულოდ მცირეები α-ს მიმართ.

α და β უსასრულოდ მცირეებს ეწოდება **ეკვივალენტური**, თუ $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$. თუ α და β ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებია, მაშინ წერენ $\alpha\sim\beta$. ცხადია, რომ თუ $\alpha\sim\beta$, მაშინ $\beta\sim\alpha$. ხოლო თუ $\alpha\sim\beta$ და $\beta\sim\alpha$, მაშინ $\alpha\sim\gamma$.

მაგალითად, *sinx* და *x* ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებია, როდესაც $x\to 0$, რადგან $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

დავამტკიცოთ თეორემა, რომელსაც გამოყენება აქვს ორი უსასრულოდ მცირის ფარდობის ზღვრის გამოთვლის დროს.

თეორემა 9. ორი უსასრულოდ მცირის ფარდობის ზღვარი არ შეიცვლება, თუ ამ უსასრულოდ მცირეებს შევცვლით მათი ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებით.

დამტკიცება: ვთქვათ, α და β უსასრულოდ მცირეებია და $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$. დასამტკიცებელია, რომ თუ არსებობს $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$, მაშინ იარსებებს $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ და მართებულია ტოლობა $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$; $\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ შეფარდება ასე წარმოვადგინოთ $\dfrac{\alpha'}{\beta'}=\dfrac{\alpha'}{\alpha}\cdot\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}$; აქედან $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}=\lim\dfrac{\alpha'}{\alpha}\cdot\lim\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$

რ.დ.ბ.

ახლა მოვიყვანოთ ზოგიერთი ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირის მაგალითები:

1. $\sin x \sim x$, როდესაც $x \to 0$, ვინაიდან $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$;

2. $tgx \sim x$, როდესაც $x \to 0$, ვინაიდან $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$;

3. $(1+x)^{\lambda}-1 \sim \lambda x$, როდესაც $x \to 0$, სადაც λ ნამდვილი რიცხვია, ვინაიდან $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\lambda}-1}{\lambda x}=1$;

4. $a^{x}-1 \sim x\ln a$, როდესაც $x \to 0$, ვინაიდან $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x\ln a}=1$;

5. $e^{x}-1 \sim x$, როდესაც $x \to 0$, ვინაიდან $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$;(4-ს კერძო შემთხვევაა).

6. $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$, როდესაც $\alpha \to 0$, ვინაიდან $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1$;

7. $\arcsin x \sim x$, როდესაც $x \to 0$, ვინაიდან $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$;

8. $arctgx \sim x$, როდესაც $x \to 0$, ვინაიდან $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$;

9. $\sqrt[k]{1+x}-1 \sim \frac{x}{k}$, როდესაც $x \to 0$, ვინაიდან $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{\frac{x}{k}}=1$.

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება უსასრულოდ მცირე სიდიდე x_0 წერტილში?
2. რა დამოკიდებულება არსებობს უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდ სიდიდეებს შორის?
3. თუ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, მაშინ $f(x)-A$ სხვაობა როგორი სიდიდეა x_0 წერტილში?
4. ვთქვათ, $f(x)=A+\alpha(x)$, სადაც $\alpha(x)$ უსასრულოს მცირეა x_0 წერტილში, ხოლო A მუდმივია. რას წარმოადგენს მაშინ $f(x)$ ფუნქციისათვის A წერტილი?

5. რას ნიშნავს, რომ α უსასრულოდ მცირე მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა β უსასრულოდ მცირეს მიმართ?
6. რას ნიშნავს, რომ α და β უსასრულოდ მცირეები ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებია?
7. მოიყვანეთ ეკვივალენტური ორი უსასრულოდ მცირეს განსაზღვრა.
8. შესაძლებელია თუ არა , რომ ორი უსასრულოდ მცირე ყოველთვის შევადაროთ?
9. როდის ეწოდება α-ს k –რიგის უსასრულოდ მცირე β უსასრულოდ მცირეს მიმართ?
10. შეიძლება თუ არა ორი უსასრულოდ მცირეს ფარდობის ზღვრის გამოთვლისას მრიცხველი და მნიშვნელი შევცვალოთ მათი ეკვივალენტური უსასრულდ მცირეებით?

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

1. შეისწავლეთ x ცვლადის მიმრთ შემდეგ უსასრულოდ მცირეთა რიგი:

1.1. $2x$; 1.2. $3x^3$; 1.3. $3\sqrt{x}$;

2. თუ $x \to 0$, მაშინ უჩვენეთ ქვემოთმოყვანილი ფუნქციების ცვალებადობის ხასიათი:

2.1 $\sqrt{a-x}$; 2.2. $ctg\dfrac{\pi a}{2x}$; 2.3. $tgx - \lg a$;

2.4 $\dfrac{1}{\sqrt{4x^2-3a^2}}$; 2.5. $\dfrac{1}{tgx-\lg a}$; 2.6. $\arcsin\dfrac{x}{a}$.

3. თუ x ცვლადი უსასრულოდ დიდია, მაშინ უჩვენეთ რომელია უსასრულოდ მცირე, სასრული რიცხვი და უსასრულოდ დიდი ქვემო მაგალითებიდან:

3.1. x^2; 3.2. x^{-2}; 3.3 $1+\dfrac{1}{x}$; 3.4. e^{-x};

3.5. $ctg\dfrac{1}{x}$; 3.6. $\sin\dfrac{1}{x-a}$; 3.7 $1+6x$; 3.8. $\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}$.

4. განსაზღვრეთ x უსასრულოდ მცირის მიმართ შემდეგი გამოსახულებების რიგი:

4.1. $tgx - \sin x$; 4.2. $1-\cos x$; 4.3. $x^2 - 3x^3$; 4.4. $\sin 3x$; 4.5. $\dfrac{1}{2}tg3x$

§ 6 მოთხოვნის, მიწოდებისა და დანახარჯის ფუნქციები. წონასწორობის ფასი

სანამ ძირითად საკითხზე გადავიდოდეთ მოკლედ გავმარტოთ, რას შეისწავლის მიკროეკონომიკა. შემოვიტანოთ მიკროეკონომიკის განმარტება ისე, როგორც ეს არის განმარტებული თანამედროვე ეკონომიკურ ლექსიკონში.

მიკროეკონომიკა – (ბერძ. *micros* - მცირე), ეს არის ეკონომიკური მეცნიერების სფერო, რომელიც დაკავშირებულია შედარებით მცირემასშტაბიანი ეკონომიკური პროცესების, სუბიექტების, მოვლენების, ძირითადში საწარმოს, ფირმის, მეწარმეთა და მათ შორის სამეურნეო საქმიანობასთან, ეკონომიკურ ურთიერთობებთან. მიკროეკონომიკის ყურადღების ცენტრშია მწარმოებლები და მომხმარებლები, მათ მიერ მიღებული გადაწყვეტილებები წარმოების მოცულობის, გაყიდვის, ყიდვის, მოხმარების ფასების, დანახარჯების, მოგების გათვალისწინებით. მიკროეკონომიკა ასევე შეისწავლის სუბიექტების საბაზრო მოქმედებას, წარმოების პროცესში მათ ურთიერთობას, განაწილებას, გაცვლას, მოხმარებას. მიკროეკონომიკის შესწავლის ობიექტის აგრეთვე ურთიერთობანი მწარმოებლებს, მეწარმეებსა და სახელმწიფოს შორის.

ჩვენ განვიხილავთ მიკროეკონომიკის ორ ძირითად სფეროს რომელთაც ეწოდებათ **მიწოდება და მოთხოვნა.** ჩვენი მიზანია გავაანალიზოთ საბაზრო ეკონომიკის მეტად მნიშვნელოვანი საკითხი, რომლესაც უწოდებენ მიწოდებისა და მოთხოვნის წონასწორობას.

შემოვიღოთ **მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციების** ცნება.

ვთქვათ, ბაზრის მოთხოვნა რაიმე ფიქსირებულ ნაწარმზე არის Q. ცხადია, Q რიცხვი, რომელიც აღნიშნავს მოთხოვნილი ნაწარმის რაოდენობას და იზომება (გარკვეული პროდუქციის შესაბამისი) ერთეულებით. ავღნიშნოთ ერთეული პროდუქციის საბაზრო ფასი P სიმბოლოთი. საბაზრო ეკონომიკის პირობებში მოთხოვნა დამოკიდებულია საბაზრო ფასსზე.

$$Q = f(P). \tag{1}$$

f ფუნქციის კონკრეტული სახე დგინდება ან ეკონომიკური თერიიდან ან საბაზრო მონაცემებიდან. (1) ტიპის დამოკიდებულებას უწოდებენ **მოთხოვნის ფუნქციას** და ამის მისათითებლად f -ს ინდექსად მიაწერენ D ასოს:

$$Q = f_D(P) \tag{2}$$

საზოგადოდ f_D შეიძლება ძალიან რთული ფუნქცია იყოს, შევნიშნოთ, რომ f_D საზოგადოდ დამოკიდებულია P ფასზე, მომხმარებლის Y შემოსავალზე ალტერნატიული პროდუქციის P_S ფასსზე, დამატებითი საქონლის P_c ფასსზე, რეკლამის A დანახრჯზე და მომხმარებელთა T გემოვნებაზე. ჩვენ განვიხილავთ, იმ შემთხვევას, როდესაც f_D წრფივი ფუნქციაა P-ს მიმართ, კერძოდ

$$Q = f_D(P) = a_1 P + b_1, \tag{3}$$

სადაც a_1 და b_1 რაიმე კონკრეტული მუდმივებია, რომლებსაც ეკონომიკაში პარამეტრებს უწოდებენ. რეალურ ცხოვრებაში რაიმე პროდუქციაზე ფასის ზრდა იწვევს ამ პროდუქციაზე მოთხოვნის შემცირებას ე.ი. (3) ფუნქცია უნდა იყოს კლებადი, ეს კი ნიშნავს, რომ $a_1 <0$. ამიტომ შესაბამისი გრაფიკი OP ღერძის დადებით მიმართულებასთან ბლაგვ კუთხეს შეადგენს. ტრადიციულად, ეკონომისტები მოთხოვნის ფუნქციას წერენ არა (2) ფორმით, არამედ

$$P = g_D(Q)$$

სახით. ე.ი. ფასს გამოსახავენ, როგორც მოთხოვნის ფუნქციას. ეს ტოლფასია, იმის რომ (2) განტოლებიდან ვიპოვოთ P ცვლადი Q ცვლადის საშუალებით. ამის შესაბამისად გრაფიკის აგების დროს ვერტიკალურ ღერძზე გადაზომავენ P ფასს, ჰირიზონტალურ ღერძზე კი- Q მოთხოვნას. (3) წრფივი დამოკიდებულებიდან მარტივად მივიღებთ

$$P = g_D(Q) = aQ + b, \tag{4}$$

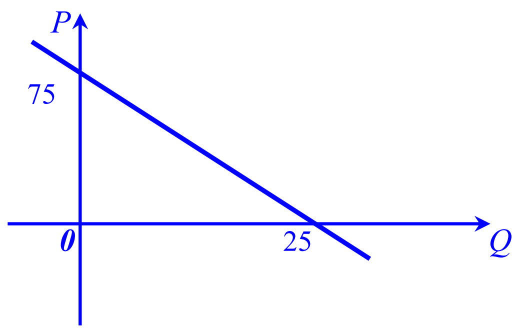
სადაც $a = \dfrac{1}{a_1}$, $b = \dfrac{1}{b_1}$ შევნიშნოთ, რომ რადგან $a_1 < 0$ ამიტომ $a < 0$ ე.ი. (4) ფუნქცია კლებადია. მაშასადამე მისი გრაფიკი OQ ღერძთან შეადგენს ბლაგვ კუთხეს. მას უწოდებენ **მოთხოვნის წირს (წრფეს).** ეკონომიკური შინაარსიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ $P \geq 0$ და $Q \geq 0$ ამასთან $P=0$ ნიშნავს, რომ ფაქტობრივად პროდუქცია უფასოდ ეძლევა ყველა მსურველს, ხოლო Q=0 ნიშნავს, რომ მოთხოვნა განსახილველ პროდუქციაზე არ არსებობს. გავარკვიოთ (4) განტოლებაში b პარამეტრის ეკონომიკური შინაარსი. ცხადია, როცა $P=b$ მაშინ $Q=0$ ე.ი., როდესაც ფასი არის b ტოლი, მაშინ პროდუქციაზე მოთხოვნა არ

არსებობს (რაღაც მიზეზის გამო, მაგალითად მაღალი ფასის გამო) ამრიგად $b>0$ და პროდუქციის ფასი ბაზარზე შემოსაზღვრულია ამ b რიცხვით. ასევე ცხადია, რომ როდესაც $P=0$ მაშინ $Q=-\frac{b}{a}>0$. ამიტომ $-\frac{b}{a}$ რიცხვი მიუთითებს ბაზრის მაქსიმალურ მოთხოვნას.

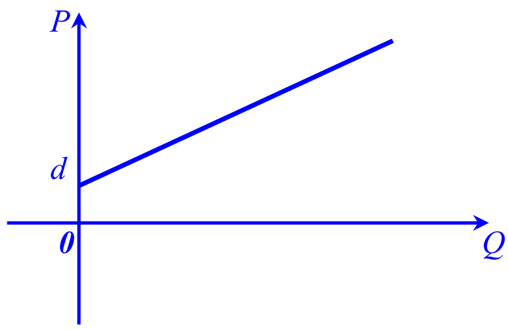
ამოცანა 1. ავაგოთ მოთხოვნის წირი, თუ მოთხოვნის ფუნქციაა $P=-3Q+75$.

1. რას უდრის ფასი, თუ მოთხოვნაა 23?
2. რას უდრის მოთხოვნა, როდესაც ფასია 18?
3. როგორ იცვლება ფასი მოთხოვნის ერთი ერთეულით შემცირებისას?

მოთხოვნის წირის (წრფის) ასაგებად მოვძებნოთ მისი OQ და OP ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები: როდესაც $P=0$ მაშინ $Q=25$; ხოლო $Q=0$, მაშინ $P=75$; ე.ი. წრფე გადის (25;0) და (0;75) წერტილებზე (ნახ.1)



ნახ. 1



ნახ. 2

1. მოცემული მოთხოვნის ფუნქციდან მივიღებთ: თუ $Q=23$; მაშინ $P=-3\cdot 23+75=6$ ე.ი. ამ შემთხვევაში პროდუქციის ფასია $P=6$.

2. როდესაც $P=18$; მაშინ $Q=19$, ე.ი. როდესაც ფასია $P=18$, მაშინ მოთხოვნაა $Q=19$;

3. როდესაც მოთხოვნაა Q, მაშინ ფასია

$$P=-3Q+75$$

ამიტომ როდესაც მოთხოვნა იქნება $Q-1$, მაშინ ფასი იქნება $P_1=-3(Q-1)+75=-3Q+78$. აქედან მივიღებთ $P_1-P=(-3Q+78)-(-3Q+75)=3$ ანუ $P_1=P+3$. ამრიგად, თუ მოთხოვნა შემცირდა ერთი ერთეულით, მაშინ ფასი იზრდება სამი ერთეულით.

ახლა განვიხილოთ **მიწოდების ფუნქცია.** იგი ამყარებს შესაბამისობას რაიმე პროდუქციის ერთეულის P ფასსა და ამავე პროდუქციის Q რაოდენობას შორის,

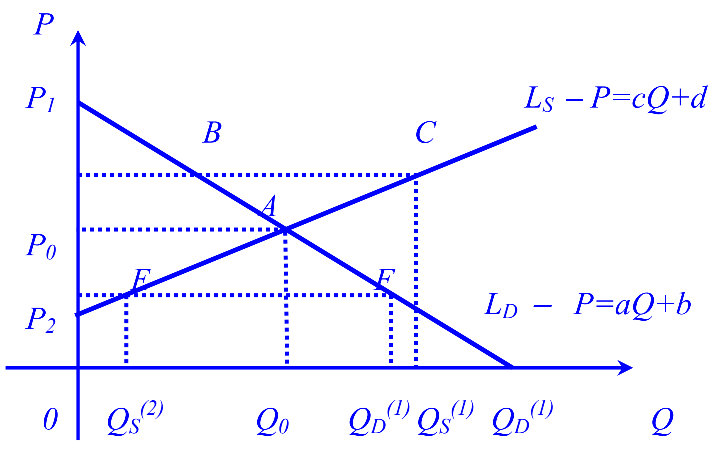
რომლის ბაზარზე შეტანასაც გეგმავს მწარმოებელი. ეკონომიკური თეორია და რეალური ცხოვრება უჩვენებს, რომ ფასის ზრდას მოსდევს მიწოდების ზრდა. ამიტომ მოწოდების ფუნქცია

$$P = g_S(Q) \tag{5}$$

ზრდადი ფუნქციაა. ჩვენ განვიხილავთ კონკრეტულ შემთხვევას, როცა იგი წრფივია, ე.ი.

$$P = g_S(Q) = cQ + d, \tag{6}$$

სადაც c და d მუდმივებია, რადგანაც მიწოდების ფუნქცია ზრდადია, ამიტომ კუთხური კოეფიციენტი $c>0$. რადგან ფასი ყოველთვის დადებითია, ამიტომ d პარამეტრიც დადებითია, ე.ი. $c>0$, $d>0$. აქედან ვასკვნით, რომ მისი შესაბამისი გრაფიკი OQ ღერძთან ადგენს მახვილ კუთხეს და OP ღერძს კვეთს d წერტილში (ნახ.2) ამ გრაფიკს **მიწოდების წირი (წრფე)** ეწოდება. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან (იხ. ნახ.3) გამომდინარეობს, რომ მწარმოებელი დადგმავს პროდუქციის შეტანას ბაზარზე მხოლოდ მაშინ თუ ფასი გადააჭარბებს d სიდიდეს. ავაგოთ ახლა ერთსა და იმავე OPQ სიბრტყეზე მოთხოვნის L_D და მიწოდების L_S წირები (ნახ.3.)



ნახ. 3

ჩავატაროთ ნახ.3 -ის ანალიზი. განვიხილოთ P_1 ფასის შესაბამისი B და C წერტილები L_D და L_S წრფეებზე. რადგან $B \in L_p$ და $C \in L_s$ ამიტომ P_1 ფასს შეესაბამება $Q_D^{(1)}$ მოთხოვნა და $Q_S^{(1)}$ მიწოდება, ამასთან $Q_D^{(1)} < Q_S^{(1)}$ ე.ი. მოთხოვნა ჩამორჩება მიწოდებას. ეს კი ნიშნავს რომ ბაზარი გაჯერებული მიწოდებული პროდუქციით და ამიტომ ეს პროდუქცია მთლიანად არ გაიყიდება. ამრიგად, ამ შემთხვევაში ბაზარზე გვაქვს ჭარბი პროდუქცია.

ახლა განვიხილოთ P_2 ფასის შესაბამისი $E \in L_S$ და $F \in L_D$ წერტილები, ცხადია, რომ P_2 ფასს შეესაბამება $Q_D^{(2)}$ მოთხოვნა და $Q_S^{(2)}$ მიწოდება, ამასთან $Q_D^{(2)} > Q_S^{(2)}$, ე ი. მოთხოვნა ჭარბობს მოწოდებას, ეს კი ნიშნავს, რომ მოთხოვნა მთლიანად ვერ კმაყოფილდება და საქმე გვაქვს პროდუქციის დეფიციტთან. ეს ორივე ვარიანტი არასასურველი, საბაზრო ეკონომიკისათვის.

განვიხილოთ P_0 ფასის შესაბამისი სიტუაცია, მას შეესაბამება L_S და L_D წრფეების საერთო A წერტილი, რომლის აბსცისაა Q_0. ბუნებრივია, რომ P_0 ფასის შეესაბამისი Q_0 მოთხოვნა და Q_0 მიწოდება ერთმანეთის ტოლია. ე.ი. მოთხოვნა ემთხვევა მოწოდებას. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ **ბაზარი გაწონასწორებულია.** (იყიდება იმ რაოდენობის პროდუქცია, რა რაოდენობაც მიეწოდება ბაზარს).

P_0 ფასს ეწოდება **წონასწორობის ფასი,** შესაბამის Q_0 – **წონასწორობის სიდიდე (მოცულობა).**

ცხადია გაწონასწორებული ბაზარი წარმოადგენს იდეალურ ვარიანტს. იგი განისაზღვრება შემდეგი სისტემით:

$$\begin{cases} P = aQ + b, \\ P = cQ + d. \end{cases}$$

მიღებულ სისტემის $(Q_0;P_0)$ განსაზღვრავს მოთხოვნის L_D და L_S წრფეების საერთო წერტილის კოორდინატებს.

ამოცანა 1. მოთხოვნისა და მიწოდების ფუნქციები შესაბამისად მოცემულია ტოლობებით

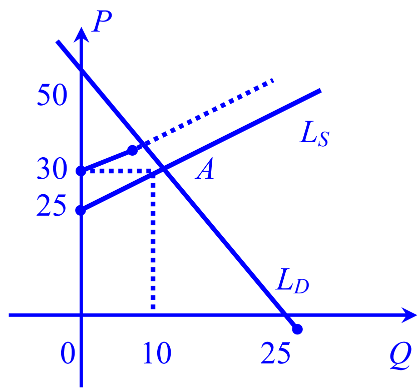
$$P = g_D(Q) = -2Q + 50 \tag{7}$$

$$P = g_S(Q) = \frac{1}{2}Q + 25, \tag{8}$$

სადაც (7) განტოლებაში არის მოთხოვნა, ხოლო (8) განტოლებაში – მიწოდება.

1. განვსაზღვროთ წონასწორობის ფასი და წონასწორობის სიდიდე.
2. მთავრობამ გადაწყვიტა დააწესოს ფიქსირებული გადასახადი 5 ლარის ოდენობით პროდუქციის ყოველ გაყიდულ ერთეულზე. ვიპოვოთ ამ ღონისძიების გავლენა ბაზრის წონასწორობაზე.

1. ავაგოთ მოთხოვნის L_D და მიწოდების L_S წირები (ნახ. 4). მათი გადაკვეთის A წერტილის კოორდინატებით დავადგენთ წონასწორობის ფასსა



და წონასწორობის სიდიდეს.

ნახ. 4

$$\begin{cases} p = -2Q + 50, \\ p = \dfrac{1}{2}Q + 25. \end{cases}$$

სისტემის ამოხსნით მივიღებთ P_0=30; Q_0=10. ამრიგად, წონასწორობის ფასია, P_0=30; წონასწორობის სიდიდე Q_0=10.

2. თუ მთავრობა დააწესებს 5 ლარ ფიქსირებულ გადასახადს პროდუქციის ყოველ გაყიდულ ერთეულზე, მაშინ მოთხოვნის ფუნქცია (7) უცვლელი დარჩება, მიწოდების ფუნქცია (8) კი შეიცვლება. მართლაც, თუ პროდუქციის ერთეული P ლარად იყიდებოდა, რასაც მომხმარებელი ფირმას უხდიდა, ახლა უკვე მომხმარებლის მიერ გადახდილი P ლარიდან 5 ლარი სახელმწიფოს „მიაქვს“, ხოლო $P-5$ ლარი რჩება ფირმას. ამიტომ მიწოდების ფუნქციაში P-ს მაგიერ უნდა ავიღოთ $P-5$. ამის შედეგედ მივიღებთ ახალი სიტუაციის შესაბამის მიწოდების ფუნქციას

$$P - 5 = \frac{1}{2}Q + 25 \qquad \text{ანუ} \qquad P = \frac{1}{2}Q + 30. \tag{9}$$

ამ ფუნქციის შესაბამისი გრაფიკი (ნახ. 4)-ზეა აგებული წყვეტილი ხაზით. წონასწორობის ახალი P_0^1-სა ფასისა და წონასწორობის Q_0^1 ახალი სიდიდის მისაღებად უნდა ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} P = -2Q + 50, \\ P = \dfrac{1}{2}Q + 30. \end{cases}$$

მივიღებთ P_0^1=34, Q_0^1=8. ესენი წონასწორობის ახალი წერტილის კოორდინატებია. (ნახ. 4). გავაანალიზოთ მიღებული ეფექტი, რაც მთავრობის აღნიშნულმა გადაწყვეტილებამ გამოიწვია. ჯერ ერთი მოთხოვნის წირი უცვლელი

დარჩა, ხოლო მოწოდების წირმა აიწია ზემოთ 5 ერთეულით, ამან გამოიწვია წონსწორობის ფასის გაზრდა P_0=30 - დან P_0^1=34, ამრიგად, მომხმარებლისათვის 4 ლარით გაძვირდა, გარდა ამისა, ფირმამ ერთეული პროდუქციის გაყიდვით მიღებული 34 ლარიდან, 5 ლარი მთავრობას უნდა გადაუხადოს, რის გამოც მას 29 ლარი, ანუ 1 ლარით ნაკლები რჩება, ვიდრე მთავრობის გადაწყვეტილებანდე რჩებოდა. ე.ი. ჩატარებული ანალიზი გვიჩვენებს, რომ მთავრობის გადაწყვეტილებამ შეცვალა ბაზრის წონასწორობის მდგომარეობა. ბაზრის ახალი წონასწორობის დამყარება იწვევს პროდუქციის 4 ლარით გაძვირებას და მიწოდებას 10 დან 8 ერთეულამდე შემცირებას. გარდა ამისა, 5 ლარიანი გადასახადი ასე ნაწილდება: 4 ლარს იხდის მომხმარებელი (*რადგან მისთვის 4 ლარით მოხდა გაძვირება*), ხოლო ერთ ლარს ფირმა *(რადგან ფირმის შემოსავალმა პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით დაიკლო ერთი ლარით*).

ზემოთ გადაწყვეტილი ამოცანები შეეესაბამებოდა **ერთსაქონლიან** ბაზარს, ე.ი. განსახილველი განსხვავებული პროდუქციის მახასიათებლები (ფასი, მოთხოვნა, მიწოდება) დამოკიდებულია ბაზრის სხვა პროდუქტებისაგან.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც გვაქვს ორი პროდუქტი, რომლებიც ურთიერთ დამოუკიდებულია, ე.ი. მათი მოთხოვნის რაოდენობები და ფასები გავლენას ახდენენ ერთმანეთზე ე.წ. ორი საქონლიანი ბაზარი.

ამოცანა 2. ბაზარზე შემოდის ორი ურთიერთდამოკიდებული პროდუქტი. პირველი სახის პროდუქტის მოთხოვნის და მიწოდების ფუნქციებია შესაბამისად

$$Q_1 = 10 - 2P_1 + P_2 \qquad (10)$$

$$Q_1 = -3 + 2P_1 \qquad (11)$$

ხოლო მეორე სახის პროდუქტისა კი არის

$$Q_2 = 5 + 2P_1 - 2P_2 \qquad (12)$$

$$Q_2 = -2 + 3P2 \qquad (13)$$

P_1 და P_2 შესაბამისად პირველი და მეორე სახის პროდუქტის ერთეულის ფასებია. განვსაზღვროთ ამ პირობებში ორ საქონლიანი ბაზრის წონასწორობის ფასები და წონასწობის მოცულობები.

როგორც ვიცით წონასწორობა ნიშნავს, რომ მოთხოვნა ორივე პროდუქტზე ემთხვევა მათ მოწოდებას. რადგან (10) ტოლობაში Q_1 მოთხოვნაა, (11) ტოლობაში კი მიწოდება, მათი გატოლება გვაძლევს

$$10 - 2P_1 + P_2 = -3 + 2P_1 \qquad \text{ანუ} \qquad 4P_1 - P_2 = 13.$$

ანალოგიურად (12) და (13)-დან მივიღებთ

$$5+2P_1-2P_2=-2+3P_2, \qquad \text{ანუ} \qquad 2P_1-5P_2=-7.$$

მიღებული ორივე განტოლება უნდა შესრულდეს ერთდროულად. ამიტომ მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{cases} 4P_1-P_2=13, \\ 2P_1-5P_2=-7. \end{cases}$$

მისი ამონახსნებია $P_1=4$, $P_2=3$ რომლებიც წონასწორობის საძიებელი ფასებია, მაშინ (11) და (13) ტოლობებიდან მივიღებთ $Q_1=5$, $Q_2=7$. ისინი წონასწორობის საძიებელი მოცულობებია, შესაბამისად პირველი და მეორე პროდუქტისათვის.

დავალება:

I. შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება მოთხოვნის ფუნქცია და როგორი სახე აქვს მას?
2. რაზე შეიძლება იყოს დამოკიდებული მოთხოვნის ფუნქცია? როგორია მოთხოვნის ფუნქციაში პარამეტრების ეკონომიკური შინაარსი?
3. რას ეწოდება მიწოდების ფუნქცია და როგორი სახე აქვს მას? როგორია მიწოდების ფუნქციაში პარამეტრების ეკონომიკური შინაარსი?
4. მოთხოვნისა და მიწოდების წირების დახმარებით ახსენით რას ნიშნავს ბაზარზე ჭარბი პროდუქცია? პროდუქციის დეფიციტი? წონასწორობა?

II. პრაქტიკული სავარჯიშოები

1. მოთხოვნის ფუნქცია გამოისახება ფორმულით $Q=\dfrac{100}{P+6}$, სადაც Q მოთხოვნის ფუნქციააა, P საქონლის ფასია. გამოთვალეთ მოთხოვნა, როდესაც P ფასი არის: $P=1$; $P=1{,}5$; $P=2$; $P=2{,}5$. ააგეთ მოთხოვნის ფუნქციის გრაფიკი. ფასის ზრდა რა გავლენას ახდენს მოთხოვნაზე?
2. მოთხოვნის ფასის ფუნქცია მოცემულია ფორმულით $P=\dfrac{400}{Q+5}$. გამოთვალეთ შემოსავალი (ამონაგები), რომელიც მიიღება $Q=5$ რაოდენობის გაყიდვით.

3. მიწოდების ფუნქციას აქვს სახე $Q=\sqrt{2P}$, სადაც P საქონლის ფასია, Q მიწოდების სიდიდეა. გამოთვალეთ მიწოდება, როცა P ფასი არის: $P=2$; $P=4{,}5$; $P=6$. ააგეთ მიწოდების ფუნქციის გრაფიკი. ფასის ზრდა რა გავლენას ახდენს მიწოდებაზე?
4. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია $Q=-3P+15$ და მიწოდების ფუნქცია $Q=2P+3$. გარფიკულად წარმოადგინეთ ორივე ფუნქცია და იპოვეთ წონასწორობის ფასი P_0 და რაოდენობა Q_0.
5. იტალიელმა ეკონომისტმა ვილფრედო პარეტომ გამოიკვლია კაპიტალისტურ საზოგადოებაში შემოსავლების განაწილება და მიიღო ფორმულა $y=\dfrac{a}{x^n}$, სადაც y აღნიშნავს იმ პირთა რაოდენობას, რომელთაც გააჩნიათ შემოსავალი არანაკლებ x -ისა. x შემოსავალია, ხოლო a და n მუდმივებია. ვთქვათ:

5.1. $a=2\ 000\ 000\ 000$ და $n=1{,}5$. იპოვეთ: ა) იმ პირთა რაოდენობა, რომელთა შემოსავალი მეტია ან ტოლი 10 000 –ის. ბ) უმცირესი შემოსავალი 100 ყველაზე მდიდარ პიროვნებას შორის.

5.2 $a=4\ 000\ 000\ 000$ და $n=1{,}2$. იპოვეთ: ა) იმ პირთა რაოდენობა, რომელთა შემოსავალი მეტია ან ტოლია 1 000 000 –ის. ბ) უმცირესი შემოსავალი 1 000 ყველაზე მდიდარ პიროვნებას შორის.

6. საწარმოს მთლიანი დანახარჯების ფუნქციაა $C_T(Q)=-0{,}1Q^3+300Q$, სადაც Q საქონლის რაოდენობაა, C_T - მთლიანი დანახარჯებია ფულად ერთეულებში. გამოთვალეთ მთლიანი და საშუალო დანახარჯები, როცა წარმოებული საქონლის რაოდენობა Q უდრის: $Q=1$; $Q=2$; $Q=3$.
მითითება: საშუალო დანახარჯები გამოითვლება შეფარდებით $\dfrac{C_T}{Q}$.

თავი V. დიფერენციალური აღრიცხვის ელემენტები და მათი ზოგიერთი გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში

§ 1. ფუნქციის წარმოებული. მისი გეომეტრიული და ეკონომიკური ინტერპრეტაცია.

ფუნქციის შესწავლისათვის მთავარი მნიშვნელობა ენიჭება იმას, რომ ჩვენ გვქონდეს ისეთი აპარატი, რომელიც დაახასიათებს ფუნქციის ცვალებადობის სიჩქარეს არგუმენტის ცვალებადობასთან დაკავშირებით, რომელსაც დიდი მნიშვნელობა აქვს ფუნქციონალური დამოკიდებულების ბუნების შესასწავლად.

1. ფუნქციის წარმოებული. ვთქვათ, რაიმე შუალედში მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქცია. ამ შუალედში ავიღოთ რომელიმე x_0 წერტილი და მივანიჭოთ მას Δx ნაზრდი, რომელსაც არგუმენტის ნაზრდი ეწოდება. ვიგულისხმოთ, რომ $\Delta x \neq 0$ და ამასთან, $(x_0 + \Delta x)$ წერტილი ძევს x_0 წერტილის მიდამოში. არგუმენტის Δx ნაზრდით შეცვლისას ფუნქციაც მიიღებს შესაბამის ნაზრდს, რომელიც აღინიშნება Δy სიმბოლოთი და გამოითვლება ფორმულით $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. ფუნქციის საშუალო ნაზრდი არის

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

რაც ახასიათებს ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს, როდესაც არგუმენტი იცვლება x_0 – დან $(x_0 + \Delta x)$ – მდე. რაც უფრო მცირეა Δx (ანუ რაც უფრო ახლოსაა Δx ნულთან), მით უფრო ზუსტად აღწერს ეს შეფარდება ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს x_0 წერტილის უშუალო მახლობლობაში. თუ არსებობს სასრული ან უსასრულო ზღვარი $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, ანუ რაც იგივეა

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

მაშინ ამ **ზღვარს ეწოდება** $y = f(x)$ **ფუნქციის წარმოებული** x_0 **წერტილში** და აღინიშნება y' ან $f'(x_0)$ სიმბოლოთი. ზოგჯერ y'-ს ნაცვალად წერენ - y'_x, ამით ხაზგასმულია, რომ წარმოებული აღებულია x ცვლადით.

მაშასადამე, **ფუნქციის წარმოებული** ეწოდება ფუნქციის ნაზრდისა და არგუმენტის ნაზრდის შეფარდების ზღვარს, როდესაც არგუმენტის ნაზრდი ნებისმიერად მიისწრაფის ნულისაკენ.

თუ (2) ზღვარი სასრულია, მაშინ წარმოებულს **სასრული** ეწოდება, ხოლო თუ იგი უსასრულოა წარმოებულს უსასრულო ეწოდება. ამრიგად, მოცემულ წერტილში წარმოებული წარმოადგენს რიცხვს. თუ რაიმე შუალედის ყოველ წერტილში არსებობს სასრული წარმოებული, მაშინ წარმოებული წარმოადგენს

x –ის ფუნქციას მოცემულ შუალედში. ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლის ოპერაციას **გაწარმოება** ეწოდება.

ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა წარმოებული x_0 წერტილში ასე განისაზღვრება:

ზღვრებს

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{და} \quad \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ეწოდება შესაბამისად **მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულები** x_0 **წერტილში**. ეს წარმოებულები აღინიშნება $f'(x_0+)$ და $f'(x_0-)$ სიმბოლოებით.

ადვილი შესამჩნევია, რომ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებადობისათვის x_0 წერტილში აუცილებელია და საკმარისი x_0 წერტილში მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულების თანატოლობა.

ფუნქციას ეწოდება **წარმოებადი** $[a,b]$ **სეგმენტზე**, თუ იგი წარმოებადია ამ სეგმენტის ყველა შიგა წერტილში და a წერტილში ფუნქციას აქვს მარჯვენა წარმოებული, b წერტილში – მარცხენა.

2. წარმოებადი ფუნქციები. $y = f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x წერტილში განისაზღვრება, როგორც ზღვარი

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

მაგრამ, როგორც ცნობილია ზღვრები ყოველთვის არ არსებობენ. სწორედ ამიტომ არც წარმოებული არსებობს ყოველთვის.

მაგალითის სახით განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია $f(x) = |x|$. ვაჩვენოთ, რომ ამ ფუნქციის წარმოებული x=0 წერტილში $f'(0)$ განსაზღვრული არ არის. მართლაც წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \tag{4}$$

თუ Δx ისე მიისწრაფვის ნულისაკენ, რომ რჩება დადებითი, მაშინ

$$|\Delta x| = \Delta x \quad \text{და} \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x \succ 0)}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1.$$

თუ Δx ისე მიისწრაფვის ნულისაკენ, რომ რჩება უარყოფითი, მაშინ

$$|\Delta x| = -\Delta x \quad \text{და} \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x \prec 0)}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$$

თუ (4) ტოლობაში ზღვარი იარსებებდა, მაშინ იგი არ იქნებოდა დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორ მიისწრაფის Δx ნულისაკენ. სინამდვილეში კი ეს ასე არ არის. მაგრამ აქედან შესაძლებელია მხოლოდ ერთი დასკვნის გაკეთება, რომ (4) ტოლობაში ზღვარი არ არსებობს. ე.ი. $f(x)=|x|$ ფუნქციისათვის x=0 წერტილში წარმოებული არ არსებობს.

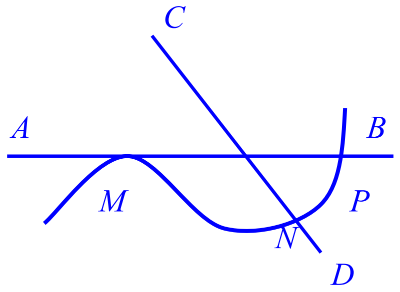
სიძნელეს არ წარმოადგენს იმის ჩვენება, რომ ყველა დანარჩენ წერტილში $f(x)=|x|$ ფუნქციის წარმოებული არსებობს (დამტკიცება მკითხველისათვის მიგვინდია) და უდრის

$$f'(x)=\begin{cases}1, & \text{თუ } \ x\succ 0\\ -1, & \text{თუ } \ x\succ 0\end{cases}$$

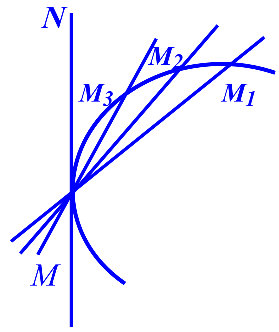
$f(x)$ ფუნქციას უწოდებენ **წარმოებადს** x **წერტილში**, თუ არსებობს სასრული ან უსასრულო $f'(x)$. თუ ფუნქცია წარმოებადია, რომელიმე შუალედის თითოეულ წერტილში მაშინ ამბობენ, რომ იგი წარმოებადია მთელს ამ შუალედში. მაგალითად, ზემოთ განხილული ფუნქცია წარმოებადია ყოველ შუალედში, რომელიც არ შეიცავს x=0 წერტილს; $y=x$ ფუნქცია ყველგან წარმოებადია.

აქვე შევნიშნავთ, რომ შესაძლებელია ფუნქცია, რომელიც წყვეტილია $x=a$ წერტილში, არ შეიძლება იყოს წარმოებადი ამ წერტილში. ე.ი. წარმოებადი შეიძლება იყოს მხოლოდ და მხოლოდ უწყვეტი ფუნქციები. მაგრამ ისე არ უნდა ვიფიქროთ, რომ $x=a$ წერტილში ყოველი უწყვეტი ფუნქცია წარმოებადია ამ წერტილში. მაგალითად $y=|x|$ ფუნქცია უწყვეტია x=0 წერტილში. მაგრამ როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ წარმოებადი არ არის ამ წერტილში. არსებობს უფრო დამაჯერებელი მაგალითებიც, რომ ფუნქცია შესაძლოა ყველგან უწყვეტი იყოს, მაგრამ არ იყოს წარმოებადი (*ჩვენ ასეთ მაგალითებს არ განვიხილავთ, რადგან ის სცილდება ჩვენი პროგრამის საზღვრებს*).

3. წარმოებულის გეომეტრიული მნიშვნელობა. ჯერ შემოვიღოთ მხები წრფის განმარტება. ჩვენ აქამდე საქმე გვქონდა მხოლოდ წრეწირის მხებთან, მოცემულ M წერტილში წრეწირის მხებს ვუწოდებდით წრფეს, რომელსაც წრეწირთან ერთი და მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი ჰქონდა. მაგრამ ასეთი განსაზღვრა ყველა მრუდისათვის არ არის მართებული.



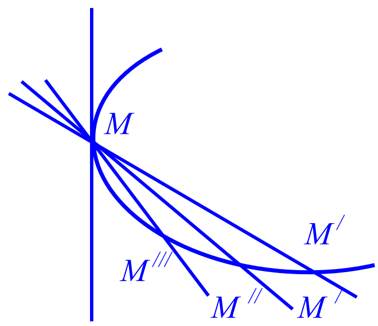
ნახ. 1



ნახ. 2

მაგალითად, ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ AB წრფე შეეხება MNP მრუდს M წერტილში (ნახ. 1). თუმცა ამ მრუდთან მას არა აქვს ერთი, არამედ ორი საერთო M და P წერტილი. CD წრფეს, პირიქით, მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს MNP მრუდთან – N წერტილი, მაგრამ სრულიადაც არ იქნება ბუნებრივი, რომ იგი ჩავთვალოთ მხებად MNP მრუდისადმი.

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ ნებისმიერი მრუდის მხები მის რომელიმე M წერტილში (ნახ. 2). ავიღოთ ამ მრუდზე კიდევ ერთი წერტილი M_1 და გავავლოთ მკვეთი MM_1.

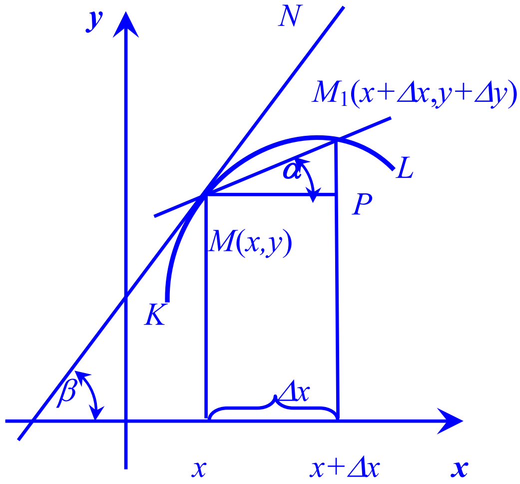


ნახ. 3

თუ M_1 წერტილს ვამოძრავებთ მოცემულ მრუდზე ისე, რომ იგი უსაზღვროდ მიუახლოვდეს M წერტილს, მაშინ მკვეთი იბრუნებს M წერტილის გარშემო და მიმდევრობით დაიკავებს MM_1, MM_2, MM_3 და ა. შ. მდებარეობებს. MN მკვეთის ზღვრული მდებარეობა მოგვცემს მრუდის მხებს M წერტილში.

განსაზღვრება: მრუდის მხები M წერტილში ეწოდება MM_1 მკვეთის ზღვრულ მდებარეობას, როცა მრუდზე მოძრავი M_1 წერტილი უსაზღვროდ უახლოვდება M წერტილს.

მრუდზე მოძრავი M_1 წერტილი შეიძლება უსაზღვროდ უახლოვდებოდეს M წერტილს სხვადასხვა მხრიდან. მაგალითად, ნახ. 3-ზე M' წერტილი უახლოვდება M წერტილს არა ზემოდან, როგორც ეს ნახ. 2-ზეა ნაჩვენები, არამედ ქვემოდან. ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს სხვა მკვეთებთან MM', MM'', MM''' და ა. შ., თუმცა მათი ზღვრული მდებარეობა იგივე MN მხებია.



ნახ. 4

ვთქვათ, ნახ. 4-ზე წარმოდგენილი KL მრუდი არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი. ავიღოთ მასზე ორი წერტილი: ერთი M კოორდინატებით (x,y) და M_1 – $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. გავავლოთ აბსცისთა ღერძის პარალელური MP მონაკვეთი. ΔMM_1P -ში $MP=\Delta x$, $M_1P=\Delta y$. ამიტომ $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ იმ α კუთხის ტანგენსის ტოლია, რომელსაც MM_1 მკვეთი ადგენს აბსცისთა ღერძთან. როცა $\Delta x \to 0$, M წერტილი ადგილზე რჩება, ხოლო M_1 მრუდის გასწვრივ უსაზღვროდ უახლოვდება M –ს. MM_1 მკვეთი ამასობაში იცვლის მიმართულებას. ამასთან ერთად იცვლება α კუთხეც და ადგილი აქვს ტოლობას $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=tg\alpha$. ზღვარზე გადასვლისას MM_1 ქორდა დაიკავებს MN მხების მდებარეობას, შეადგენს, რა აბსცისთა ღერძთან

რომელიდაც β კუთხეს. ცხადია, ამ დროს $tg\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\alpha$. მაგრამ $tg\alpha = \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$,

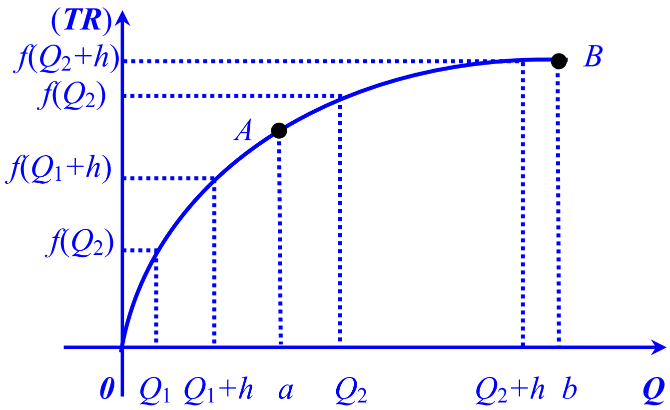
ამიტომ $tg\beta = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = y'$.

ამგვარად, $y = f(x)$ **ფუნქციის წარმოებული** x **წერტილში წარმოადგენს იმ მხების დახრის კუთხის ტანგენსს, რომელიც გავლებულია ფუნქციის გრაფიკისადმი** x **აბსცისას მქონე წერტილზე.**

4. წარმოებულის ეკონომიკური აზრი. ვთქვათ, Y არის ეკონომიკური სიდიდე (დანახარჯები, ამონაგები, მოგება,...), რომელიც x ცვლდის $Y = f(x)$ ფუნქციაა და იგი წარმოებადია. ამ ფუნქციის წარმოებულს **მარჟინალური ანუ ზღვრული ფუნქცია** ეწოდება და აღინიშნება $Y_{\text{ზღ.}} = f'(x)$.

მაგალითად, დანახარჯების ფუნქციის წარმოებული არის **ზღვრული დანახარჯები,** ამონაგების ფუნქციის წარმოებული არის **ზღვრული ამონაგები** და ა. შ. განვიხილოთ დაწვრილებით მარტივი ეკონომიკური ამოცანა მარჟინალური (ზღვრული) ამონაგების შესახებ.

მთლიანი ამონაგების ფუნქციის $(TR) = f(Q)$ გრაფიკი არის წირი, რომელიც გამოსახულია (ნახ. 5) –ზე. ნახაზიდან ჩანს, რომ $f(Q)$ ზრდადი ფუნქციაა $(0;b)$ შუალედში.



ნახ. 5

ამასთან, იგი უფრო სწრაფად იზრდება $(0;a)$ შუალედში (oA წირი), ვიდრე $(a;b)$ შუალედში (AB წირი), ამ ფუნქციას გააჩნია შემდეგი ეკონომიკური შინაარსი.

თუ შევადარებთ ერთმანეთს გაყიდული საქონლის ერთი და იმავე რაოდენობით ზრდას Q_1 რაოდენობიდან Q_1+h–მდე $(0;a)$ შუალედში და Q_2 რაოდენობიდან Q_2+h –მდე $(a;b)$ შუალედში, დავრწმუნდებით, რომ პირველ შემთხვევაში ამონაგების ცვლილება (ნამატი) საქონლის ერთეულზე გაანგარიშებით არის

$$\frac{f(Q_1+h)-f(Q_1)}{h},$$

ხოლო მეორე შემთხვევაში კი

$$\frac{f(Q_2+h)-f(Q_2)}{h}.$$

ნახაზიდან ისიც ჩანს, რომ

$$f(Q_1+h)-f(Q_1)\succ f(Q_2+h)-f(Q_2),$$

ამიტომ

$$\frac{f(Q_1+h)-f(Q_1)}{h}\succ\frac{f(Q_2+h)-f(Q_2)}{h}$$

აქედან კი გამომდინარეობს შემდეგი: გაყიდული პროდუქციის h რაოდენობით გაზრდისას მთლიანი ამონაგების საშუალო ცვლილება (ნამატი) პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით უფრო მეტია $(0;a)$ ინტერვალის Q_1 წერტილისათვის, ვიდრე $(a;b)$ ინტერვალის Q_2 წერტილისათვის. ამრიგად შეფარდება

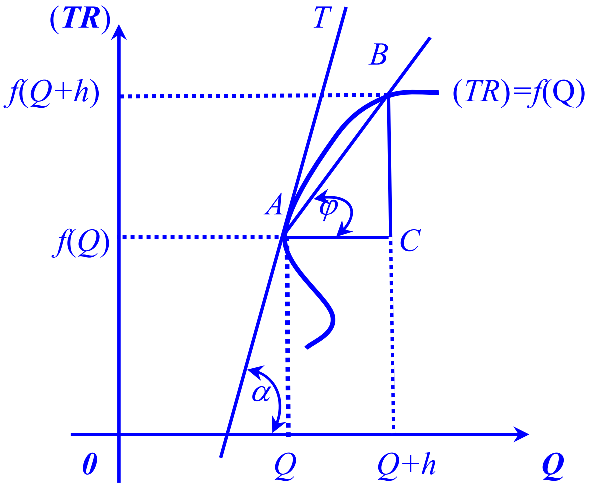
$$\frac{f(Q+h)-f(Q)}{h} \tag{5}$$

აღწერს მთლიანი ამონაგების „ცვლილების სიჩქარეს“ პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით, როდესაც გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა იზრდება Q – დან $Q+h$ – მდე. რაც უფრო მცირეა h –რიცხვი, მით უფრო ზუსტად ახასიათებს აღნიშნული შეფარდება $f(Q)$ ფუნქციის „ცვლილების სიჩქარეს“ Q -ს მახლობლობაში. იდეალურად ზუსტი მახასიათებელი კი იქნება (5) გამოსახულების ზღვარი, როდესაც $h\to 0$.

თუ ეს ზღვარი არსებობს, მაშინ მას როგორც ზემოთ განვმარტეთ მარჟინალური ანუ ზღვრული ამონაგები ეწოდება და აღინიშნება (MK) სიმბოლოთი.

$$(MK)=\lim_{h\to 0}\frac{f(Q+h)-f(Q)}{h} \tag{6}$$

გავეცნოთ მე-(5) და მე- (6) სახის გამოსახულებების გეომეტრიულ შინაარსს.



ნახ. 6

ვთქვათ, მთლიანი შემოსავლის $(TR)=f(Q)$ ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 6) –ზე გამოსახული წირია. მაშინ, ცხადია, რომ ΔABC–დან

$$\frac{f(Q+h)-f(Q)}{h}=\frac{|BC|}{|AC|}=tg\varphi \tag{7}$$

ამრიგად, (7) გამოსახულება წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკის $A(Q;f(Q))$ და $B(Q+h;f(Q+h))$ წერტილებზე გავლებული მკვეთის მიერ OQ ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხის ტანგენსს (ანუ AB წრფის კუთხურ კოეფიციენტს). როდესაც $h\to 0$, მაშინ ცხადია, რომ B წერტილი მიისწრაფვის A წერტილისაკენ, ხოლო AB მკვეთი წრფე – AT წრფისაკენ, რომელიც წარმოადგენს გრაფიკის მხებს A წერტილში. ასევე, ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში $\varphi=\angle BAC$ მიისწრაფის $\alpha=\angle TAC$ კუთხისაკენ. ამიტომ, $tg\varphi\to tg\alpha$. შევნიშნოთ, რომ $tg\alpha$ წარმოადგენს AT წრფის კუთხურ კოეფიციენტს.

ამრიგად, თუ არსებობს (6) ზღვარი, მაშინ (MK) **მარჟინალური ამონაგები,** არგუმენტის Q მნიშვნელობისათვის, რიცხობრივად მთლიანი ამონაგების ფუნქციის გრაფიკის $(Q;f(Q))$ წერტილზე გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტის ტოლია.

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

10. რას ეწოდება ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში?
11. რას ეწოდება ფუნქციის სასრული წარმოებული? უსასრულო წარმოებული? მარჯვენა წარმოებული? მარცხენა წარმოებული? წარმოებადი $[a,b]$ სეგმენტზე?
12. რაში მდგომარეობს წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსი?
13. რაში მდგომარეობს წარმოებულის ეკონომიკური შინაარსი?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1. იპოვეთ $y=f(x)$ ფუნქციის $\Delta y = \Delta f(x)$ ნაზრდი x_0 წერტილში, თუ

   ა) $y = x^2, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = 0{,}1$ ბ) $y = 4^x, \quad x_0 = 2, \quad \Delta x = -0{,}5$

   გ) $y = \lg x, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = 9$ დ) $y = \sin x, \quad x_0 = 0, \quad \Delta x = -\dfrac{\pi}{6}$

2. იპოვეთ $y=f(x)$ ფუნქციის არგუმენტის Δx ნაზრდის შესაბამისი Δy ნაზრდი x წერტილში, თუ:

   $y = ax + b; \quad y = ax^2 + bx + c; \quad y = a^x; \quad y = \ln x; \quad y = \cos x; \quad y = \sin x$

§ 2 გაწარმოების ძირითადი წესები. ელემენტარულ

ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილი

ვთქვათ, $u(x)$ და $v(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია, ხოლო C მუდმივი რიცხვია. მოვიყვანოთ გაწარმოების ძირითადი წესების დამტკიცებები:

თეორემა 1. ორი ფუნქციის ნამრავლის წარმოებული ტოლია პირველი ფუნქციის წარმოებულისა და მეორე ფუნქციის ნამრავლს პლუს მეორე ფუნქციის წარმოებულისა და პირველი ფუნქციის ნამრავლი.

დამტკიცება. ვთქვთ, $w(x)$ ფუნქცია ორი $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციის ნამრავლია $w(x) = u(x) \cdot v(x)$. ჩავწეროთ იგივე უფრო მოკლედ $w = u \cdot v$. ვთქვათ, $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციები წარმოებადია. იქნება თუ არა წარმოებადი მათი ნამრავლი?

გვაქვს $\Delta w = w(x+\Delta x) - w(x) = u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x)v(x)$,

რადგან

$$u(x+\Delta x) - u(x) = \Delta u, \qquad v(x+\Delta x) - v(x) = \Delta v$$

აქედან $u(x+\Delta x) = u + \Delta u, \qquad v(x+\Delta x) = v + \Delta v,$

მაშასადამე

$$\Delta w = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$

ამის გამო $$\frac{\Delta w}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

როდესაც, $\Delta x \to 0$, მივიღებთ: $u \to u, \quad v \to v, \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \to u', \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'$.

ვაჩვენოთ, რომ თუ $\Delta x \to 0$, მაშინ $\Delta v \to 0$. მართლაც

$$\Delta v = \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x \to v' \cdot 0 = 0,$$

ამგვარად,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = u \cdot v' + u' \cdot v + u' \cdot 0 = uv' + u'v.$$

მაშასადამე, განსახილველ შემთხვევაში ნამრავლის წარმოებული არსებობს და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u \tag{8}$$

რ.დ.ზ.

თეორემა 2. მუდმივი მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ წარმოებულის ნიშნის გარეთ.

დამტკიცება. განვიხილოთ $g(x) = af(x)$ ფუნქცია, სადაც a რაიმე რიცხვია, ხოლო $f(x)$ ნებისმიერი წარმოებადი ფუნქცია. ვაჩვენოთ, რომ $g(x)$ ფუნქცია წარმოებადია და

$$g'(x) = a'f(x) \tag{9}$$

მართლაც,

$$\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = \frac{af(x+\Delta x)-af(x)}{\Delta x} = a \cdot \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

ვინაიდან $f(x)$ ნებისმიერი წარმოებადი ფუნქციაა, ამიტომ $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ შეფარდების ზღვარი, როდესაც $\Delta x \to 0$ არსებობს და უდრის $f'(x)$. ამიტომ აგრეთვე არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

და უდრის $a'f(x)$. ე.ი. (9) ტოლობა დამტკიცებულია.

რ.დ.ბ.

თეორემა 3. თუ $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციები წარმოებადია, მაშინ მათი ჯამიც $w(x) = u(x) + v(x)$ წარმოებადი იქნება, ამასთან შესრულდება ტოლობა:

$$w'(x) = u'(x) + v'(x).$$

ე.ი. ორი ფუნქციის ჯამის წარმოებული ამ ფუნქციების წარმოებულთა ჯამის ტოლია.

დამტკიცება. გვაქვს

$$\Delta w(x) = w(x+\Delta x) - w(x) = \left[u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)\right] - \left[u(x)+v(x)\right] =$$

$$= \left[u(x+\Delta x) - u(x)\right] + \left[v(x+\Delta x) - v(x)\right]$$

ამიტომ

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

ვინაიდან $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციები წარმოებადია, ამიტომ არსებობს მათი ზღვრები:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} = u'(x) \qquad \text{და} \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = v'(x).$$

მაშასადამე არსებობს ზღვარიც

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x} = w'(x).$$

ამრიგად,

$$w'(x) = u'(x) + v'(x) \tag{10}$$

მივიღეთ ორი ფუნქციის ჯამის წარმოებულის ფორმულა. ამგვარადვე ვღებულობთ ორი ფუნქციის სხვაობის წარმოებულის ფორმულას:

$$\left[u(x)-v(x)\right]' = u'(x)-v'(x) \tag{11}$$

თუმცა ის შეიძლება ჯამის წარმოებულის ფორმულაზე დავიყვანოთ, თუ $u(x)-v(x)$ გამოსახულებას განვიხილავთ, როგორც ჯამს $u(x)+\left(-v(x)\right)$ და გამოვიყენებთ თეორემა 2-ს.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა-3 მართებულია შესაკრებთა ნებისმიერი რიცხვისათვის:

$$\left(u_1+u_2+\cdots+u_n\right)' = u_1'+u_2'+\cdots+u_n'$$

ვთქვათ, u და v არის x არგუმენტის რაიმე ფუნქციები და ცნობილია ამ ფუნქციების u' და v' წარმოებულები. იბადება კითხვა, შეიძლება თუ არა ვიპოვოთ $\dfrac{u}{v}$ შეფარდების წარმოებული იმ წერტილებში, სადაც v ნოლი არ გახდება? ამ ამოცანის ამოსახსნელად შევასრულოთ შემდეგი გარდაქმნები.

$$\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\Delta u-uv-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v^2+v\cdot\Delta v}$$

ამის გამო

$$\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\frac{1}{v^2+v\cdot\Delta v}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right].$$

რამდენადაც u და v ფუნქციები წარმოებადი არიან, მაშინ არსებობს ზღვრები: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'$ და $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=v'$. გარდა ამისა,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[v^2+v\cdot\Delta v\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[v^2+v\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\Delta x\right]=v^2+vv'\cdot 0=v^2$$

ამიტომ არსებობს ზღვარიც

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\left(\frac{u}{v}\right)',$$ რომელიც

$$\frac{u'v-v'u}{v^2}$$- ის ტოლია.

ამგვარად ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი

თეორემა 4. თუ u და v ფუნქციები წარმოებადი არიან, მაშინ იმ წერტილებში, სადაც v განსხვავდება ნულისაგან, $\frac{u}{v}$ შეფარდება აგრეთვე წარმოებადია და

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

იმ ფუნქციების გასაწარმოებლად, რომლებსაც ვხვდებით პრაქტიკაში, სარგებლობენ უბრალო, მაგრამ მნიშვნელოვანი ფორმულებით, რომელთა ზეპირად ცოდნა აუცილებელია. ახლა სწორედ გადავდივართ ამ ფორმულების გამოყვანაზე.

1. მუდმივი სიდიდე ფუნქციის კერძო სახეა, როდესაც არგუმენტის ყოველ მნიშვნელობას ფუნქციის ერთი და იგივე რიცხვითი მნიშვნელობა შეესაბამება. მაშასადამე, როცა არგუმენტს მივცემთ ნაზრდს, მუდმივი C სიდიდე უცვლელი დარჩება. ამგვარად, მისი ნაზრდი ნულის ტოლია. ნულის Δx –თან ფარდობა ყოველთვის ნულია როგორიც არ უნდა იყოს Δx და ამგვარად, ზღვრისაკენ გადასვლისას ნულის მნიშვნელობას მივიღებთ. ფორმულებით ეს ასე ჩაიწერება: ვთქვათ, რაიმე X შუალედში მოცემულია ფუნქცია $y = f(x) = C$, სადაც C მუდმივია. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის წარმოებული. ავიღოთ X შუალედის შიგა x წერტილი, Δx ნაზრდი იმდენად მცირე შეგვიძლია ავიღოთ, რომ $x+\Delta x$ მიეკუთვნოს აგრეთვე X შუალედს. ამიტომ

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 0 \text{ და მაშასადამე, } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0. \text{ აქედან } \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

ე.ი. X შუალედის ყოველ შიგა x წერტილში $f'(x) = 0$. ამრიგად, მუდმივი სიდიდის წარმოებული ნულის ტოლია.

2. ვიპოვოთ $f(x) = x$ ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს: $f(x) = x$, $f(x+\Delta x) = x + \Delta x$. ამიტომ, $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x) - x = \Delta x$, მაშასადამე, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$. ე.ი. იმ ფუნქციის წარმოებული, რომელიც დამოუკიდებელი ცვლადის ტოლია უდრის ერთს.

3. ვიპოვოთ $f(x) = x^2$ ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს: $f(x) = x^2$, $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2$. ამიტომ,

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = \left[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right] - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

მაშასადამე, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x) = 2x + 0 = 2x .$$ ე.ი. $f(x) = x^2$ ფუნქციის წარმოებული $2x$ –ის ტოლია (პირველი ორი მაგალითისაგან განსხვავებით, აქ წარმოებული x –ზეა დამოკიდებული).

4. ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებული. ზემოთ დავამტკიცეთ, რომ $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$. თუ გამოვიყენებთ თეორემას ორი ფუნქციის ნამრავლის წარმოებულის შესახებ ადვილად მივიღებთ x –ის სხვა ნებისმიერი სხვა ნატურალური ხარისხის წარმოებულს. მაგალითად

$$\left(x^3\right)' = \left(x^2 \cdot x\right)' = \left(x^2\right)' x + x^2 (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2 ;$$

$$\left(x^4\right)' = \left(x^3 \cdot x\right)' = \left(x^3\right)' x + x^3 (x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3 ;$$

$$\left(x^5\right)' = \left(x^4 \cdot x\right)' = \left(x^4\right)' x + x^4 (x)' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 5x^4 .$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $y = x^n$ ფუნქციის წარმოებული, საჭიროა n მაჩვენებელი კოეფიციენტად ავიღოთ, ხოლო x –ის მაჩვენებლი ერთით დავწიოთ. ე.ი. $\left(\boldsymbol{x^n}\right)' = \boldsymbol{n \cdot x^{n-1}}$. ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებულის ეს წესი მართებულია არა მხოლოდ ნატურალური, არამედ ნებისმიერი ნამდვილი α მაჩვენებლის შემთხვევაში: $\left(\boldsymbol{x^{\alpha}}\right)' = \alpha \cdot \boldsymbol{x^{\alpha-1}}$, $(x \succ 0)$.

5. სინუსის და კოსინუსის წარმოებული. ვთქვათ, $y = \sin x$. ვიპოვოთ y'. მივცეთ x –ს ნაზრდი Δx მაშინ $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$. აქედან, $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$ და ცნობილი ფორმულის – $\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$ –ის თანახმად, მივიღებთ $\Delta y = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$, მაშასადამე $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$, საიდანაც

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x .$$

ამგვარად,

$$(\sin x)' = \cos x$$

სრულიად ანალოგიურად, კოსინუსების სხვაობის ფორმულის $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ გამოყენებით, მივიღებთ

$$\cos' x = -\sin x$$

6. ტანგენსისა და კოტანგენსის წარმოებულები. ვთქვათ, $y = tgx$, მაშინ $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ და წილადის გაწარმოების წესის თანახმად

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

ე.ი.

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ანალოგიური მსჯელობით მიიღება, რომ

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

7. მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული. განვიხილოთ $y = a^x$ $(a \succ 0, a \neq 1)$ მაჩვენებლიანი ფუნქცია. ამ ფუნქციის წარმოებულის საპოვნელად ვატარებთ ჩვეულებრივ გარდაქმნებს

$$y = a^x, \quad y + \Delta y = a^{x+\Delta x} = a^x \cdot a^{\Delta x}, \qquad \Delta y = a^x a^{\Delta x} - a^x = a^x \cdot \left(a^{\Delta x} - 1\right), \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \to 0$ და მხედველობაში მივიღოთ შესანიშნავი ზღვარი $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{a^u - 1}{u} = \ln a$, მივიღებთ $y' = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$. ე.ი.

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

როცა $a=e$, მაშინ $lne=1$, ამიტომ (e ნეპერის რიცხვია)

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

8. ლოგარითმული ფუნქციის წარმოებული. ვთქვათ, $y = \ln x$. აქაც ვატარებთ ჩვეულებრივ გარდაქმნებს $y + \Delta y = \ln(x + \Delta x)$,

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right), \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

მიღებულ ტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე და მხედველობაში მივიღოთ შესანიშნავი ზღვარი $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{a(1+z)}{z} = 1$, გვექნება

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\right] = \frac{1}{x}. \quad \text{ე.ი.}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილს აქვს შემდეგი სახე

1. $C' = 0 \quad C = const;$	2. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}, n \in R$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a;$	4. $\left(e^x\right)' = e^x;$
5. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a};$	6. $(\ln x)' = \frac{1}{x};$
7. $(\sin x)' = \cos x;$	8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x};$	10. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
13. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2};$	14. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2};$

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. მოიყვანეთ ფუნქციის ჯამის, სხვაობის, ნამრავლისა და ფარდობის წარმოებულთა გამოსათვლელი ფორმულები.
2. ამოწერეთ ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულების ცხრილი.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1. იპოვეთ $y=f(x)$ ფუნქციის $\Delta y = \Delta f(x)$ ნაზრდი x_0 წერტილში, თუ

ა) $y = x^2, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = 0{,}1$ ბ) $y = 4^x, \quad x_0 = 2, \quad \Delta x = -0{,}5$

გ) $y = \lg x, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = 9$ დ) $y = \sin x, \quad x_0 = 0, \quad \Delta x = -\dfrac{\pi}{6}$

2. იპოვეთ $y=f(x)$ ფუნქციის არგუმენტის Δx ნაზრდის შესაბამისი Δy ნაზრდი x წერტილში, თუ:

$y = ax + b; \quad y = ax^2 + bx + c; \quad y = a^x; \quad y = \ln x; \quad y = \cos x; \quad y = \sin x$

3. გამოთვალეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

1. ა) $y = 7$ ბ) $f'(16)$, თუ $f(x) = x\sqrt{x}$ გ) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2x^2}$

2. ა) $y = x^8$ ბ) $y'(\dfrac{\pi}{6})$, თუ $y(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$ გ) $f(x) = 4^x \cdot \cos x$

3. ა) $y = x^{15}$ ბ) $y = 16 \cdot (\sqrt{x} - \dfrac{1}{x})$ გ) $y = \dfrac{4x^4 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^2}} - \dfrac{4}{x} + 3x$

4. ა) $y = 6x^7$ ბ) $y(x) = \dfrac{arctgx}{1 + x^2}$ გ) $f(x) = \dfrac{tgx}{1 - x^2}$

5. ა) $y = ax^q$ ბ) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2x^2}$ გ) $f(x) = \dfrac{2}{9}x^9 - \dfrac{1}{2x^2} - \sqrt[3]{x^2}$

6. ა) $y = 5\sqrt{x^3}$ ბ) $f(x) = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$ გ) $y = \dfrac{3^x}{\ln 3 \cdot arctgx}$

14. ა) $y = \dfrac{4x^4 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^2}}$ ბ) $f(x) = e^x \cdot \log_5 x$ გ) $y=x^3-9x^2+15x-3$

15. ა) $y = 6x^2 + \dfrac{5x^6}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x^3}} + x - 4$ ბ) $y(x) = \dfrac{1}{2} tgx \cdot \ln x$ გ) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

16. ა) $y'(3)$, თუ $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$ ბ) $y(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$ გ) $y=x^3-6x^2+9x-3$

17. ა) $y'(8)$, თუ $y = \sqrt[3]{x}$ ბ) $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + 7x^2 + \sqrt[5]{5x^4}$

§ 3 ფუნქციის დიფერენციალი. დიფერენციალის უმარტივესი

თვისებები. დიფერენციალის გეომეტრიული მნიშვნელობა.

1. დიფერენციალის განსაზღვრა. წარმოებულის ცნებასთან მჭიდროს არის დაკავშირებული დიფერენციალის ცნება („დიფერენციალი“ ლათინური სიტყვაა და ნიშნავს სხვაობას).

ვთქვათ, $y = f(x)$ არის რაიმე ფუნქცია, რომელსაც გარკვეულ x წერტილში აქვს $f'(x)$ წარმოებული, წარმოებულის განსაზღვრების თანახმად

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = y'.$$

რადგან ცვლადსა და მის ზღვარს შორის სხვაობა უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ $\frac{\Delta y}{\Delta x} - y'$ უსასრულოდ მცირეა, როცა $\Delta x \to 0$. დავუშვათ, რომ $\frac{\Delta y}{\Delta x} - y' = \alpha$, როცა $\Delta x \to 0$ და $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha + y'$ საიდანაც

$$\Delta y = \alpha \Delta x + y' \Delta x \qquad (1)$$

$\rho = \alpha \Delta x$ სიდიდე უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა, ვიდრე მისი მამრავლები (კერძოდ, ვიდრე Δx), როგორც ორი უსასრულოდ მცირის ნამრავლი. ამგვარად,

$$\Delta y = y' \Delta x + \rho \qquad (2)$$

თუ $y' \neq 0$, მაშინ მარჯვენა ნაწილში პირველი შესაკრები იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეა, როგორც Δx, ხოლო მეორე შესაკრები ρ უფრო მაღალი რიგისაა. ამიტომ მცირე Δx ნაზრდის შემთხვევაში მეორე შესაკრები ნაკლები მნიშვნელობისაა, ვიდრე პირველი. ამ პირველ შესაკრებს (მიუხედავად იმისა $y' \neq 0$ თუ არა) უწოდებენ **ფუნქციის დიფერენციალს**, უფრო ზუსტად, ამ ცნებას აქვს ასეთი

განსაზღვრება: $y = f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალი x წერტილში ეწოდება ამ x წერტილში ფუნქციის $y' = f'(x)$ წარმოებულისა და არგუმენტის ნებისმიერი Δx ნაზრდის ნამრავლს. დიფერენციალი აღინიშნება dy ან $df(x)$ (იკითხება „დე იგრეკ“, „დე ეფ იქს“) სიმბოლოთი. ე.ი.

$$dy = y' \Delta x \qquad (3)$$

ამგვარად, dy დიფერენციალი დამოკიდებულია ორ სიდიდეზე: x წერტილსა და Δx ნაზრდზე. კერძოდ, თუ $y = f(x) = x$, გვაქვს $f'(x) = 1$. რის გამოც ბუნებრივია, რომ $dx = \Delta x$, ამიტომ

$$dy = y'dx = f'(x)dx \tag{4}$$

ე.ი. **ფუნქციის დიფერენციალი ტოლია ფუნქციის წარმოებულისა და არგუმენტის დიფერენციალის ნამრავლის.**

ვთქვათ, $y = \sin x$, მაშინ $dy = d(\sin x) = (\sin x)' dx$ და $dy = \cos x dx$. თუ $y = e^x$, მაშინ $dy = (e^x)' dx = e^x dx$ და ა.შ.

(4) ტოლობიდან გვაქვს

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} \tag{5}$$

მაშასადამე, **ფუნქციის წარმოებული უდრის ფუნქციის დიფერენციალისა და არგუმენტის დიფერენციალის ფარდობას.**

სიმბოლო $\frac{dy}{dx}$ იკითხება ასე: „დე იგრეკ დე იქსით“. $\frac{dy}{dx}$ -ს უწოდებენ ლაიბნიცის სიმბოლოს, ხოლო y' -ს ლაგრანჟის სიმბოლოს.

მტკიცდება შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1: თუ $y = f(x)$ ფუნქციას x წერტილში აქვს ნულისაგან განსხვავებული სასრული წარმოებული, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის Δy ნაზრდი ექვივალენტურია $dy = f'(x)\Delta x$ დიფერენციალისა, როდესაც $\Delta x \to 0$.

შენიშვნა: თუ $f'(x) = 0$, მაშინ $dy = 0$, მაგარამ Δy ნაზრდი როგორც წესი, ნულისაგან განსხვავებულია. მაშასადამე, Δy და dy სიდიდეთა ექვივალენტურობა ირღვევა, როდესაც $f'(x) = 0$.

თუ ფუნქციის ნაზრდი შეიძლება წარმოვიდგინოთ (1) ფორმულით, მაშინ x წერტილში $y = f(x)$ ფუნქციას **დიფერენცირებადი** ეწოდება.

თეორემა 2: იმისათვის, რომ $y = f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადი იყოს x წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი, ის ამ წერტილში იყოს წარმოებადი.

ამრიგად, ერთი ცვლადის ფუნქციის წარმოებადობა და დიფერენცირებადობა ერთმანეთის ექვივალენტურია.

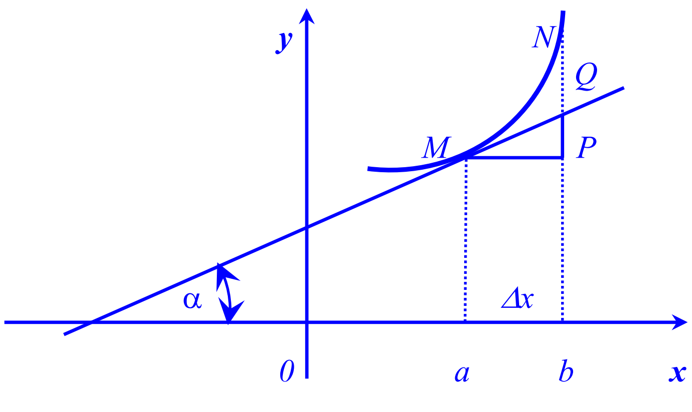
თუ $y = f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია x წერტილში, მაშინ იგი უწყვეტია ამავე წერტილში. შებრუნებული წინადადება სამართლიანი არ არის.

ვინაიდან $\Delta y = dy + \rho$, ამიტომ ფუნქციის dy დიფერენციალი და მისი ნაზრდი Δy ერთმანეთისაგან განსხვავდება ρ უსასრულოდ მცირეთი, რომელიც უფრო მაღალი რიგისაა, ვიდრე Δx. მისი უგულვებელყოფით მივიღებთ შემდეგ მიახლოებით ტოლობას $\Delta y \sim dy$. მიღებულ ტოლობას დიდი გამოყენება აქვს მიახლოებით გამოთვლებში.

თუ u ,v და w წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს:

1. $dC = 0$ 2. $d(u+v+w) = du + dv + dw$
3. $d(uv) = udv + vdu$ 4. $d(Cu) = Cdu$
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{udv - vdu}{dv^2}$ 6. $df(u) = f'(u)du, \quad u = \varphi(x)$

2. ფუნქციის დიფერენციალის გეომეტრიული მნიშვნელობა. ვთქვათ $y = f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია x წერტილში. გამოვარკვიოთ რას წარმოადგენს გეომეტრიულად მოცემული ფუნქციის დიფერენციალი. ავაგოთ $y = f(x)$ წირი (ნახ. 1).



ნახ. 1

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$y = aM, \quad \Delta x = ab = MP, \quad \Delta y = bN - bP = PN, \quad f'(x) = tg\alpha .$$

ფუნქციის დიფერენციალი ასე წარმოგვიდგება

$$dy = f'(x)\Delta x = tg\alpha \cdot MP .$$

მაგრამ MPQ სამკუთხედიდან გვაქვს $tg\alpha \cdot MP = PQ$, მაშასადამე $dy = PQ$. ამრიგად $y = f(x)$ **ფუნქციის დიფერენციალი გეომეტრიულად წარმოადგენს მხების წერტილის ორდინატის ნაზრდს.**

მაგალითად, ვიპოვოთ $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 15$ ფუნქციის დიფერენციალი:

$$dy = \left(3x^3 - 5x^2 + 15\right)' dx = \left(3x^2 - 5\right)dx$$

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება ფუნქციის დიფერენციალი?
2. ჩამოაყალიბეთ ფუნქციის დიფერენციალის გეომეტრიული არსი.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების დიფერენციალი:

1. $y = 6x^7$ 2. $y(x) = \dfrac{arctgx}{1 + x^2}$ 3. $f(x) = \dfrac{tgx}{1 - x^2}$

4. $y = ax^q$ 5. $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2x^2}$ 6. $f(x) = \dfrac{2}{9}x^9 - \dfrac{1}{2x^2} - \sqrt[3]{x^2}$

7. $y = 5\sqrt{x^3}$ 8. $f(x) = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$

§4. შექცეული ფუნქციის წარმოებული. რთული ფუნქციის წარმოებული. მაღალი რიგის წარმოებულები. ლაიბნიცის ფორმულა.

1. შექცეული ფუნქციის წარმოებული. ვთქვათ, მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქციის $\frac{dy}{dx}$ წარმოებული და საჭიროა ამის მიხედვით შებრუნებული $x=\varphi(y)$ ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლა. ვინაიდან ამ უკანასკნელ შემთხვევაში დამოუკიდებელი ცვლადის როლს y ასრულებს, ამიტომ x ფუნქციის წარმოებული უნდა იყოს $\frac{dx}{dy}$; მაგრამ როგორც ჩვეულებრივი წილადი, ჩვენ შეგვიძლია ეს წარმოებული ასე წარმოვადგინოთ:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \tag{1}$$

ამგვარად, თუ ცნობილია პირდაპირი ფუნქციის $\frac{dy}{dx}$ წარმოებული, მაშინ შებრუნებული ფუნქციის $\frac{dx}{dy}$ წარმოებული გამოითვლება (1) ფორმულით. მტკიცდება შემდეგი

თეორემა: ვთქვათ, $[a;b]$ სეგმენტზე არსებითად ზრდადი და უწყვეტი $y=f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია სეგმენტის შიგა x_0 წერტილში. თუ $x=\varphi(y)$ არის $f(x)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, მაშინ იგი წარმოებადია შესაბამის y_0 წერტილში და მართებულია ტოლობა

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)} \tag{1'}$$

1. ***arcsinx*** და ***arccosx*** ფუნქციების გაწარმოება: ვთქვათ,

$$y=\arcsin x, \qquad \text{მაშინ} \qquad x=\sin y.$$

(1) –ის თანახმად

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d\sin y}{dy}}=\frac{1}{\cos y};$$

ვინაიდან, ფუნქციის შებრუნების ცნების თანახმად, y იცვლება $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ შუალედში, ამიტომ $\cos y \succ 0$ და მაშასადამე, $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$. ხოლო $\sin y$, თანახმად აღებული განტოლებისა, არის x, ამიტომ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

მაშასადამე,

$$\frac{d\arcsin x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

და
$$d(\arcsin x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ახლა ვთქვათ,

$$y=\arccos x, \qquad \text{მაშინ} \qquad x=\cos y.$$

(1) –ის თანახმად

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sin y};$$

ვინაიდან, ფუნქციის შებრუნების ცნების თანახმად, y იცვლება $(0,\pi)$ შუალედში, ამიტომ $\sin y \succ 0$ და მაშასადამე, $\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}$. ხოლო $\cos y$, თანახმად აღებული განტოლებისა, არის x, ამიტომ:

$$\frac{d\arccos x}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

და
$$d(\arccos x)=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. ***arctgx*** და ***arcctgx*** ფუნქციების გაწარმოება: ვთქვათ,

$$y=arctgx, \qquad \text{მაშინ} \qquad x=tgy.$$

მაშინ, ცხადია

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}};$$

მაგრამ

$$\frac{1}{\cos^2 y}=\frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y}=1+tg^2 y$$

ხოლო tgy, თანახმად აღებული განტოლებისა, არის x, ამიტომ:

$$\frac{darctgx}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

და
$$d(arctgx)=\frac{dx}{1+x^2}.$$

ახლა ვთქვათ,

$$y=arcctgx, \qquad \text{მაშინ} \qquad x=ctgy.$$

თანახმად ზოგადი წესებისა:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}};$$

მაგრამ

$$\frac{1}{\sin^2 y}=\frac{\sin^2 y+\cos^2 y}{\sin^2 y}=1+ctg^2 y$$

ვინაიდან tgy, თანახმად აღებული განტოლებისა, არის x, ამიტომ:

$$\frac{darcctgx}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$$

და
$$d(arctgx)=-\frac{dx}{1+x^2}.$$

2. რთული ფუნქციის წარმოებული. ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია $f(u)$, სადაც u თავის მხრივ არის x-ის ფუნქცია: $u=g(x)$. მაშინ, როგორც ჩვენთვის ცნობილია, $f(g(x))$ ფუნქციას ეწოდება x არგუმენტის რთული ფუნქცია. თუ არგუმენტის რაიმე x მნიშვნელობებისათვის $u=g(x)$ ფუნქცია წარმოებადია, ხოლო u-ს სათანადო მნიშვნელობისათვის წარმოებადია $f(u)$ ფუნქციაც, მაშინ არსებობს $F(x)=f(g(x))$ რთული ფუნქციის წარმოებული და ადგილი აქვს ტოლობას.

$$F(x)=[f(g(x))]'=f'(u)\Big|_{u=g(x)}\cdot g'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x) \tag{2}$$

მტკიცდება შემდეგი

თეორემა: ვთქვათ, $y=f(u)$, სადაც $u=g(x)$. თუ არგუმენტის რაიმე x მნიშვნელობებისათვის $u=g(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია, ხოლო u-ს სათანადო მნისვნელობისათვის $y=f(u)$ ფუნქციაც დიფერენცირებადია, მაშინ არსებობს რთული $y=f[g(x)]$ ფუნქციის წარმოებული და მართებულია ტოლობა

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \qquad (2^*)$$

ე.ი. რთული ფუნქციის წარმოებული უდრის მოცემული ფუნქციის წარმოებულს დამხმარე ცვლადით, გამრავლებულს დამხმარე ცვლადის წარმოებულზე დამოუკიდებელი ცვლადით.

შენიშვნა 1: (2) ფორმულა შეიძლება გავავრცელოთ იმ შემთხვევაზეც, როდესაც ფუნქცია წარმოდგენილია არა ორი, არამედ რამდენიმე ფუნქციის ერთობლიობის საშუალებით. მაგალითად, თუ

$$y=f(u),\quad u=\varphi(v),\quad v=\psi(x)$$

მაშინ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} \qquad (*)$$

რთული ფუნქციისათვის ძირითად ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილი ასე გადაიწერება

$$\mathbf{1}\ \left(u^n\right)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u',\qquad n\in R$$

$$\mathbf{2.}\ \left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'; \qquad \mathbf{3.}\ \left(e^u\right)'=e^u\cdot u';$$

$$\mathbf{4.}\ \left(\log_a u\right)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'; \qquad \mathbf{5.}\left(\ln u\right)'=\frac{1}{u}\cdot u';$$

$$\mathbf{6.}\ \left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'; \qquad \mathbf{7.}\ \left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$$

$$\mathbf{8.}\ \left(\mathrm{tg}\,u\right)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'; \qquad \mathbf{9.}\left(\mathrm{ctg}\,u\right)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u';$$

$$\mathbf{10.}\left(\arcsin u\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'; \qquad \mathbf{11.}\left(\arccos u\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u';$$

$$\mathbf{12.}\ \left(\mathrm{arctg}\,u\right)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'; \qquad \mathbf{13.}\left(\mathrm{arcctg}\,u\right)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u';$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $f(x)=\sqrt{x^3+1}$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა: შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$f(u)=\sqrt{u}\quad \text{და}\quad u=g(x)=x^3+1,$$

მაშინ (2) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$F(x)=f'(u)\Big|_{u=g(x)}\cdot g'(x)=\left(\sqrt{u}\right)'\Big|_{u=x^3+1}\cdot\left(x^3+1\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\Big|_{u=x^3+1}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $y=\cos^3(1+x^4)$ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა: $y = u^3, \quad u = \cos v, \quad v = 1 + x^4$

რთული ფუნქციის გაწარმოების (*) წესის თანახმად

$$\frac{dy}{du} = 3u^2, \qquad \frac{du}{dv} = -\sin v, \qquad \frac{dv}{dx} = 4x^3$$

მაშასადამე,

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot (-\sin v) \cdot 4x^3 = -12\cos^2 x(1+x^4)\sin(1+x^4)x^3 .$$

შენიშვნა 2: წარმოებულის გამოთვლაში ძირითადი როლი მიეკუთვნება რთული ფუნქციის გაწარმოების წესს. რთული ფუნქციის გასაწარმოებლად შემოგვაქვს დამხმარე ცვლადები. მაგალითად,

$$y = \sqrt{tg5x}$$

რთული ფუნქცია u და v დამხმარე ცვლადების საშუალებით ასე წარმოვადგინოთ:

$$y = u^{\frac{1}{2}}, \quad u = tgv, \quad v = 5x$$

რაც საშუალებას გვაძლევს გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების (*) წესი. სტუდენტმა უნდა მიაღწიოს ამ წესის გამოყენების სრულ გაგებას. ამის შემდეგ დამხმარე ცვლადების შემოღება საჭირო არ არის და ამ ცვლადების შემოუღებლად უნდა შევძლოთ ფუნქციის წარმოებულის მოძებნა. ახლა $y = \sqrt{tg5x}$ ფუნქცია ასე გავაწარმოოთ:

$$\frac{dy}{dx} = \left[(tg5x)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(tg5x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (tg5x)' = \frac{1}{2\sqrt{tg5x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 5x}(5x)' = \frac{5}{2\sqrt{tg5x} \cdot \cos^2 5x}$$

3. მაღალი რიგის წარმოებული. ცხადია, $y=f(x)$ ფუნქციის $f'(x)$ წარმოებული ისევ x ცვლადის ფუნქციაა. თუ $f(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული, მაშინ ამ წარმოებულს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული და აღინიშნება $f''(x)$ ან y'' სიმბოლოთი. თუ მეორე რიგის წარმოებულს გააჩნია წარმოებული, მაშინ მას უწოდებენ მესამე რიგის წარმოებულს და აღნიშნავენ $f'''(x)$ ან y''' სიმბოლოთი. საზოგადოდ, $(n-1)$ რიგის წარმოებულის წარმოებულს ეწოდება n-ური რიგის წარმოებული და აღინიშნება $f^n(x)$ ან y^n სიმბოლოთი.

შევნიშნოთ, რომ მეოთხე რიგის წარმოებულიდან დაწყებული მიღებული აღნიშვნები $y^{(4)} = f^{(4)}(x), \quad y^{(5)} = f^{(5)}(x), \ldots, y^{(n)} = f^{(n)}(x)$. ფრჩხილები იწერება იმისათვის, რომ განვასხვაოთ $y^{(n)}$ წარმოებული y^n ხარისხისაგან.

თუ $y = f(x)$ და $\Delta x = dx$ x არგუმენტის ნაზრდია, მაშინ (აქ $(dx)^n$ ნაცვლად წერენ dx^n) $y^{(n)}(dx)^n$ ნამრავლს ეწოდება $y = f(x)$ ფუნქციის ***n* რიგის დიფერენციალი** და აღნიშნება $d^n y$ ან $d^n f(x)$ სიმბოლოთი

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \tag{3}$$

საიდანაც
$$f^n(x) = y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

მაგალითად, ვიპოვოთ $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ ფუნქციის მესამე რიგის წარმოებული. თანამიმდევრობითი გაწარმოებით მივიღებთ

$$f'(x) = 9x^2 + 4x - 3, \quad f''(x) = 18x + 4, \quad f'''(x) = 18 \ .$$

4. რთული ფუნქციის უმაღლესი რიგის დიფერენციალი. ავიღოთ $y = f(u)$ ფუნქცია, სადაც u დამოუკიდებელი ცვლადია. მაშინ

$$d^2 y = f''(u) du^2 \tag{4}$$

ახლა ვთქვათ, რომ u არის x −ის ფუნქცია $u = \varphi(x)$, მაშინ $du = \varphi'(x)dx$. მოვძებნოთ მოცემული რთული ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი x ცვლადით. გვაქვს:

$$d^2 y = d(dy) = d[f(u)du] = [f''(u)du]du + f'(u)d(du) = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u, \text{ ე.ი.}$$

$$d^2 y = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u \tag{5}$$

აქედან ჩანს, რომ განხილულ ორ შემთხვევას შორის განსხვავება არის. როცა u არის დამოუკიდებელი ცვალდი, მაშინ გვაქვს (4) ტოლობა, თუკი u დამოკიდებულია x-ზე, გვექნება (5) ტოლობა.

5. ლაიბნიცის ფორმულა. ცხადია, ალგებრული ჯამის გაწარმოების წესი უცვლელად გადაიტანება ნებისმიერი რიგის წარმოებულებზე, მაგრამ საყურადღებოა ორი ფუნქციის ნამრავლის მიმდევრობითი გაწარმოება. მტკიცდება შემდეგი თეორემა:

თეორემა: თუ რაიმე X შუალედში $u = u(x)$ და $v = v(x)$ ფუნქციებს აქვს ყველა რიგის წარმოებული n რიგამდე ჩათვლით, მაშინ $y = uv$ ნამრავლსაც აქვს ყველა რიგის წარმოებული n რიგამდე ჩათვლით და მართებულია ტოლობა

$$y^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k-1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)} \tag{6}$$

(6) ფორმულას ეწოდება **ლაიბნიცის ფორმულა**.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ $y = x\sin ax$ n −ური რიგის წარმოებული.

ამოხსნა: ლაიბნიცის ფორმულაში ავიღოთ $u=\sin ax$ და $v=x$. მაშინ $u^{(n)}=a^n\sin\left(ax+\frac{\pi n}{2}\right)$, $v'=1$, $v''=v'''=\cdots=v^{(n)}=0$. ამიტომ (6) ფორმულის თანახმად

$$y^{(n)}=a^{n-1}\left[ax\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)+n\sin\left(ax+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\right].$$

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. როგორ გამოითვლება შექცეული ფუნქციის წარმოებული?
2. როგორ გამოითვლება რთული ფუნქციის წარმოებული?
3. ამოწერეთ რთული ფუნქციის წარმოებულის ფორმულა.
4. რას ეწოდება ფუნქციის მე-2 რიგის წარმოებული? მე-3 რიგის წარმოებული? n –ური რიგის წარმოებული?
5. რას ეწოდება ფუნქციის n –ური რიგის დიფერენციალი?
6. როგორ გამოითვლება რთული ფუნქციის უმაღლესი რიგის დიფერენციალი?
7. ამოწერეთ (ზეპირად) ლაიბნიცის ფორმულა.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

I. გამოთვალეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

1. $y=\ln\sin\frac{2x+3}{x+1}+\sin^2 x$ 2. $y=(a^2-x^2)^2$ 3. $y=\ln(\ln\ tgx)-\arcsin(e^{x^2})$

4. $y=(1+tgx)^4$ 5. $y=x\ln x-x$ 6. $y=\frac{1}{2}\ln tg\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

7. $y=\ln\frac{tg\frac{x}{2}}{1+\sin^2 x}$ 8. $y=\frac{1}{3}tg^3x+tgx$ 9. $y=\sqrt{1+x^2}arctgx-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

10. $y=arctg\frac{x}{a}$ 11. $y=x\ln(x^2+1)-2\sqrt{x}+2arctg\frac{x^2}{2}$ 12. $y=3^{ctg^2x}$

13. $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}+\ln(1+2^x)$ 14. $y=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}$ 15. $y=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

16. $y=\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})+\sin^3 5x\cos^5 3x$ 17. $y=\sqrt{1+x^2}$

18. $y=5^{arctg\frac{\sqrt{x^2-1}}{1-x^2}}+e^{\sqrt{x}}$ 19. $y=\frac{1}{13}e^{2x(3\sin 3x+2\cos 3x)}+arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

20. $y=x\ln x+\ln(1-x)$ 21. $y=\frac{3x+2}{4x^2}\sqrt{x-1}+\frac{3}{4}arctg\sqrt{x^2-1}$

22. $y=\sqrt{\arcsin 2x}+a^{-x}$ 23. $y=(1+tg^2x)e^{arctg^2x}\arcsin\frac{\sqrt{x-1}}{x^2+1}$

24. $y=5^{\sqrt{arctgx^2}}$ 25. $y=e^{\cos x}\sin x$

26. $y=\frac{6^{\ln\cos arctg\frac{e^x-e^{-x}}{2}}}{x^3+\ln x}$ 27. $y=3^{\sqrt{x-1}}\ln\frac{x^2-\sqrt{x^5+2}}{\sqrt{x^5+2}}\sin^3 2x^2$

29. $y=\frac{1}{3}\ln\cos x$ 30. $y=e^{\ln\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^4+1}}}arctg\ln\frac{5tg\frac{x}{2}+4}{x}$

31. $y=\ln\frac{\sin x^2}{x}$ 32. $y=\frac{x^3-2^{\cos x}}{\sqrt{x+14}-4}$

II. იპოვეთ:

33. $f'(1)$, თუ $f(x)=7^x\cdot\ln x$ 34. $y'(2)$, თუ $y=-3\sin\frac{\pi x}{4}$

35. $y'(3)$, თუ $y=\frac{1-x}{1+x}$ 36. $y'(\frac{\pi}{4})$, თუ $y=\ln\sin x$

37. $y'(8)$, თუ $y=\sqrt[3]{x}$

III. გამოთვალეთ შემდეგი ფუნქციების II რიგის წარმოებულები:

38. $y=6x^2+\frac{5x^6}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x^3}}+x-4$ 39 $y(x)=\frac{1}{2}tgx\cdot\ln x$ 40. $y=\frac{x^3}{1-x^2}$

41. $y'(3)$, თუ $y=\frac{1-x}{1+x}$ 42. $y(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$ 43. $y=x^3-6x^2+9x-3$

44. $y'(8)$, თუ $y=\sqrt[3]{x}$ 45. $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}+7x^2+\sqrt[5]{5x^4}$

46. $f'(1)$, თუ $f(x)=7^x\cdot\ln x$ 47. $y=\frac{arctgx}{1+x^2}$ 48. $y=2x^3-15x^2+36x$

§ 5. წარმოებულის უმარტივესი გამოყენებანი

გაწარმოების ძირითადი წესების გაცნობის შემდეგ შესაძლებლობა გვაქვს დავამტკიცოთ დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემები, რომელთაც დიდი გამოყენება აქვთ. შემოვიტანოთ შემდეგი განმარტებები:

$f(x)$ ფუნქციას აქვს **ლოკალური მაქსიმუმი** x_0 წერტილში, თუ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ყოველი $x \neq x_0$ -სათვის ამ მიდამოდან სრულდება უტოლობა

$$f(x_0) \succ f(x).$$

ხოლო, x_0 წერტილს ეწოდება **ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი**.

ანალოგიურად, იტყვიან, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს **ფარდობითი მინიმუმი** x_0 წერტილში, თუ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ყოველი $x \neq x_0$ -სათვის ამ მიდამოდან სრულდება უტოლობა

$$f(x_0) \prec f(x).$$

ხოლო, x_0 წერტილს ეწოდება **ლოკალური მინიმუმის წერტილი**.

მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს უწოდებენ **ექსტრემუმის წერტილებს**, ხოლო ფუნქციის მნიშვნელობებს ამ წერტილებში – **ფუნქციის ექსტრემუმებს**.

1. ფერმას თეორემა (ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა): თუ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია $[a;b]$ შუალედში და ამასთანავე, შუალედის რომელიმე შიგა ξ წერტილზე იგი აღწევს თავის უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას, მაშინ აღნიშნულ წერტილზე ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია. ე.ი.

$$f'(\xi) = 0 \tag{1}$$

დამტკიცება: მართლაც, სიმარტივისათვის შემოვიღოთ, რომ $f(\xi)$ წარმოადგენს ფუნქციის უდიდეს მნიშვნელობას $[a;b]$ შუალედში. ვინაიდან ξ შუალედის შიგა წერტილია, ამიტომ საკმაოდ მცირე h სიდიდისათვის ადგილი ექნება პირობას:

$$f(\xi + h) - f(\xi) \leq 0.$$

ე.ი. როგორიც არ უნდა იყოს მცირე h სიდიდე, $f(\xi+h) - f(\xi)$ სხვაობა არადადებითია. მაშასადამე,

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leq 0, \quad \text{როცა} \quad h \succ 0 \tag{2}$$

და

$$\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \geq 0, \quad \text{როცა} \quad h \prec 0 \qquad (3)$$

ახლა, რადგან ფუნქცია შუალედში წარმოებადია, ამიტომ თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $h \to 0$, მივიღებთ:

$$f'(\xi)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \leq 0 \qquad \text{და} \qquad f'(\xi)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \geq 0$$

ეს კი მოხდება მხოლოდ მაშინ, როცა $f'(\xi)=0$. ე.ი.

რ.დ.ბ.

2. როლის თეორემა: თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია დახურულ $[a;b]$ შუალედში, ამასთან წარმოებადია შიგნით და გარდა ამისა, $f(a)=f(b)=0$, მაშინ ამ შუალედის შიგნით მოიძებნება x -ის ერთი მაინც ისეთი ξ მნიშვნელობა, სადაც $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობა იქნება ნოლი. ე.ი.

$$f'(\xi)=0 \qquad (4)$$

დამტკიცება: თუ $f(x)$ ფუნქცია მუდმივ მნიშვნელობას ინარჩუნებს $[a;b]$ შუალედში, მაშინ მისი წარმოებული შუალედის ყოველ წერტილზე იქნება ნული, ე.ი. $f'(x)=0$ და როლის თეორემა თავისთავად ცხადია. ახლა თუ $f(x)$ ფუნქცია $[a;b]$ შუალედში არ არის მუდმივი, მაშინ ფუნქციის ან M უდიდესი ან m უმცირესი მნიშვნელობა უთუოდ უნდა განსხვავდებოდეს $f(a)=f(b)$ მნიშვნელობისაგან. მაშასადამე, $f(x)$ ფუნქცია შუალედის რომელიმე შიგა ξ წერტილზე მიაღწევს ან M უდიდეს ან m უმცირეს მნიშვნელობას, მაგრამ ფერმას თეორემის თანახმად, აღნიშნულ ξ წერტილზე $f'(\xi)=0$. ე.ი.

რ.დ.ბ.

გეომეტრიულად როლის თეორემა ასე გამოითქმება: თუ ფუნქცია წარმოებადია $[a;b]$ შუალედში და სათანადო გრაფიკის ორდინატები a და b წერტილებზე ტოლია, მაშინ $[a;b]$ შუალედის შიგ იარსებებდა ერთი მაინც ისეთი ξ წერტილი, სადაც მრუდის მხები Ox ღერძის პარალელურია.

3. კოშის თეორემა: თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ორი უწყვეტი ფუნქციაა დახურულ $[a;b]$ შუალედში და წარმოებადი ყველა შიგა წერტილზე, გარდა ამისა, $\varphi'(x)$ წარმოებული შუალედის შიგ არსად არ ხდება ნული, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \tag{5}$$

სადაც, ξ ერთ-ერთი მნიშვნელობაა $[a;b]$-ს შიგნით.

დამტკიცება: მართლაც, განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია:

$$F(x)\equiv f(x)-f(a)-P[\varphi(x)-\varphi(a)],$$

სადაც, P ჯერჯერობით უცნობი მუდმივია. ეს ფუნქციები წარმოებადია და, გარდა ამისა, $F(a)=0$; ახლა შევარჩიოთ P მუდმივი ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს აგრეთვე პირობას: $F(b)=0$; ე.ი.

$$f(b)-f(a)-P[\varphi(b)-\varphi(a)]=0$$

საიდანაც

$$P=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} \tag{6}$$

რადგან $F(x)$ ფუნქცია წარმოებადია და აკმაყოფილებს პირობებს:

$$F(a)=0 \quad \text{და} \quad F(b)=0,$$

ამიტომ როლის თეორემის ძალით შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $[a;b]$ შუალედის შიგნით მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი ξ მნიშვნელობა, სადაც $F'(\xi)=0$; თუ გამოვთვლით $F'(x)$ წარმოებულს, მივიღებთ

$$F'(x)\equiv f'(x)-P\varphi'(x),$$

და, მაშასადამე, უნდა არსებობდეს ისეთი ξ, რომ

$$f'(\xi)-P\varphi'(\xi)=0,$$

საიდანაც, $P=\dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$. თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ (6)-ს, გვექნება

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

სადაც $$a\prec\xi\prec b.$$

რ.დ.ბ.

შენიშვნა: ის გარემოება, რომ ξ მოთავსებულია $[a;b]$ შუალედის შიგნით, შეიძლება აგრეთვე ჩაიწეროს ასე: $\xi=a+\Theta(b-a)$, სადაც Θ ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია (მართლაც, როდესაც $\Theta=0$, მაშინ ცხადია, $\xi=a$; ხოლო თუ $\Theta=1$, მაშინ $\xi=b$; ყველა სხვა შემთხვევაში ξ მოთავსდება a-სა და b –ს შორის). ე.ი. $0\prec\Theta\prec1$.

4. ლაგრანჟის თეორემა: თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a;b]$ შუალედში და წარმოებადია ყველა შიგა წერტილზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi), \tag{7}$$

სადაც $a \prec \xi \prec b$.

დამტკიცება: მართლაც, კოშის თეორემაში მივიღოთ $\varphi(x)\equiv x$, მაშინ $\varphi'(x)=1$. მაშასადამე, $\varphi'(x)\neq 0$ პირობა $[a;b]$ შუალედში შესრულებული იქნება და ჩვენ გვექნება:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(\xi)}{1}, \qquad a \prec \xi \prec b$$

აქედან, $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi), \quad a \prec \xi \prec b$. ე.ი.

რ.დ.ბ.

შედეგი 1: ვუჩვენოთ, რომ თუ $[a;b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილზე იგივურად $f'(x)\equiv 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია არის მუდმივი. მართლაც, ასეთ შემთხვევაში შუალედის ყოველი ორი x_1 და x_2 მნიშვნელობისათვის გვექნება

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi)=0$$

აქედან $f(x_2)=f(x_1)$,

რაც ამტკიცებს შუალედში $f(x)$ ფუნქციის მუდმივობას. ე.ი.

რ.დ.ბ.

შედეგი 2: თუ $[a;b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილზე იგივურად $f'(x)\equiv\varphi'(x)$, მაშინ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები ერთმანეთისაგან მხოლოდ მუდმივით განსხვავდება. მართლაც, თუ ავღნიშნავთ $F(x)\equiv f(x)-\varphi(x)$, მაშინ, ცხადია, $F'(x)$ იგივურად ნული იქნება სეგმენტის ყოველ წერტილზე, და წინა შედეგის ძალით მივიღებთ $F(x)\equiv f(x)-\varphi(x)\equiv const$, საიდანაც $f(x)=\varphi(x)+const$.

რ.დ.ბ.

ლაგრანჟის თეორემას მარტივი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია აქვს. მართლაც, განვიხილოთ მრუდი:

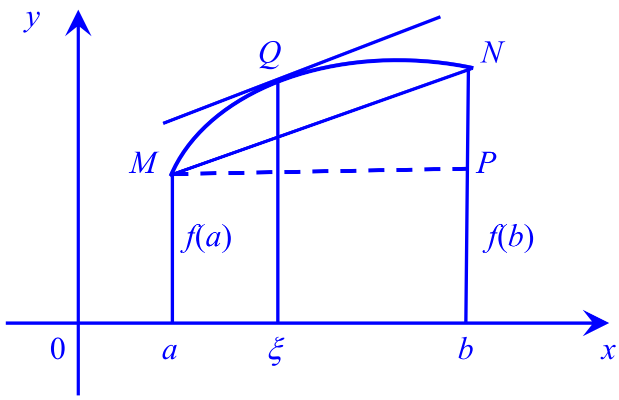
$$y=f(x).$$

ავიღოთ მასზე ორი M და N წერტილი, რომლებიც a და b აბსცისებს შეესაბამება. MNP სამკუთხედიდან მივიღებთ (ნახ.1)

$$\frac{NP}{MP}=tgNMP,$$

ე.ი.
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=tgNMP \tag{8}$$

ლაგრანჟის თეორემის თანახმად, მე- (8) ტოლობა $f'(\xi)$-ის ტოლი უნდა იყოს. მაგრამ ეს $[a;b]$ შუალედში მრუდის ერთ-ერთ წერტილზე გავლებული მხების საკუთხო კოეფიციენტია. მაშასადამე, ლაგრანჟის თეორემას ის გეომეტრიული შინაარსი აქვს, რომ $[a;b]$ შუალედში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი Q წერტილი $y=f(x)$ მრუდზე, სადაც მხები MN ქორდის პარალელურია.



ნახ. 1

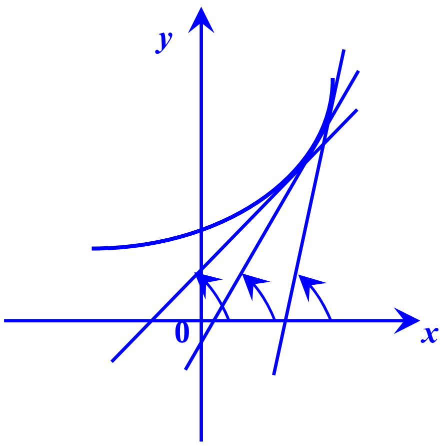
დასასრულ, შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან მე-(7) ფორმულაში შედის $f(b)-f(a)$ სხვაობა, რომელიც $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდს (სასრულო) წარმოადგენს, ამიტომ ლაგრანჟის თეორემას ხშირად **სასრულო ნაზრდის თეორემას** უწოდებენ.

5. ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა. წარმოებულის საშუალებით ადვილია ნებისმიერი წარმოებადი ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედების მოძებნა. მტკიცდება შემდეგი

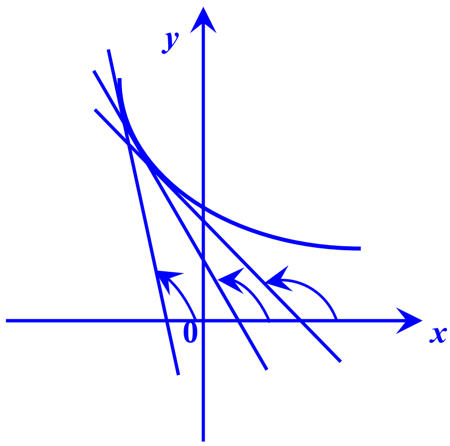
თეორემა 5: თუ $f(x)$ ფუნქციის $f'(x)$ წარმოებული დადებითია $[a;b]$ შუალედში, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია ამ შუალედში, ხოლო თუ წარმოებული უარყოფითია ამ შუალედში, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია მონოტონურად კლებადი ამ შუალედში.

მოვიყვანოთ ამ თეორემის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია: $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული, როცა $x=x_0$, იმ მხების კუთხური კოეფიციენტის ტოლია, რომელიც გავლებულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის იმ წერტილზე, რომლის აბსცისა x_0-ია. პირობა $f'(x)\succ 0$ აღნიშნავს, რომ განსახილველ შუალედში მხებთა კუთხური

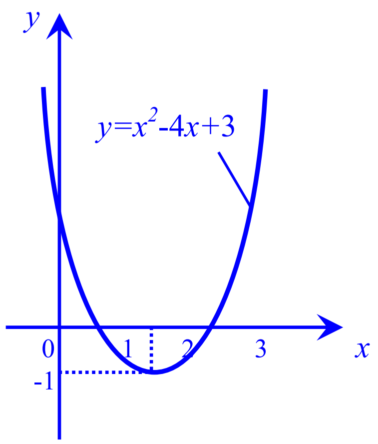
კოეფიციენტები დადებითია. მაგრამ ეს შესაძლებელია მხოლოდ იმშემთხვევაში, როცა მხებთა მიერ Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხეები მახვილია (ნახ. 2). მაშინ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი x –ის ზრდისას სულ მაღლა მიემართება. ეს კი ნიშნავს, რომ ფუნქცია $y = f(x)$ მონოტონურად იზრდება.



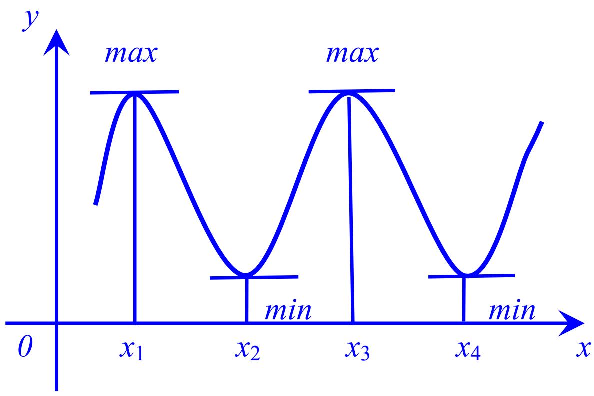
ნახ. 2



ნახ. 3



ნახ. 4



ნახ. 5

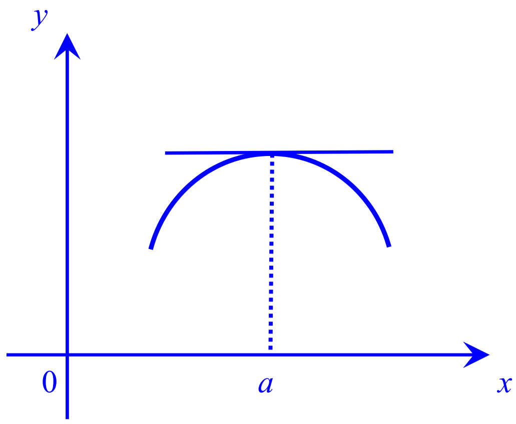
შემთხვევა, როცა $[a,b]$ შუალედში $f'(x) \prec 0$, ანალოგიურად განიხილება. პირობა $f'(x) \prec 0$ ნიშნავს, რომ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისადმი გავლებულ მხებთა კუთხური კოეფიციენტები უარყოფითია. მაგრამ ეს შესაძლებელია იმ შემთხვევაში, როცა მხებთა მიერ Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხეები ბლაგვია (ნახ. 3). მაშინ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი x –ის

ზრდისას სულ დაბლა და დაბლა მიემართება. ეს კი ნიშნავს, რომ ფუნქცია $y = f(x)$ მონოტონურად კლებულობს.

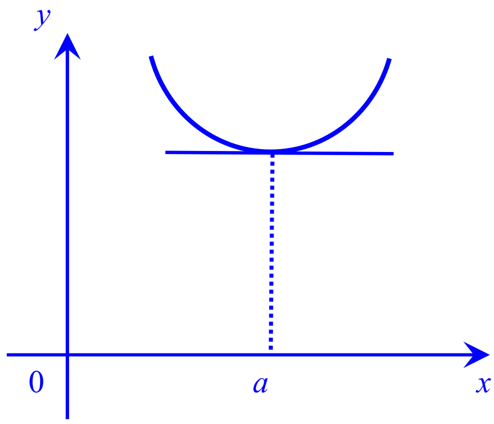
მაგალითად, განვსაზღვროთ $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები. გვაქვს: $f'(x) = 2x - 4$. როდესაც $x \succ 2$, $f'(x) \succ 0$, ხოლო როდესაც $x \prec 2$, $f'(x) \prec 0$. მაშასადამე $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ფუნქცია ზრდადია, როცა $x \succ 2$ და კლებადია, როცა $x \prec 2$ (იხ. ნახ. 4).

6. წარმოებულის გამოყენება ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის საპოვნელად. ფუნქციას რაიმე შუალედში შეიძლება ჰქონდეს ერთი ან რამოდენიმე მაქსიმუმი და მინიმუმი (ნახ. 5), ან არ ჰქონდეს ექსტრემუმი.

როგორ დავადგინოთ, აქვს თუ არა ფუნქციას ექსტრემუმი და თუ აქვს, როგორ ვიპოვოთ იგი? ამისათვის, ცხადია უნდა ვისარგებლოთ **ფერმას თეორემით:** თუ წერტილი არის $y = f(x)$ წარმოებადი ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი, მაშინ $f'(x)$ წარმოებული ამ წერტილში ხდება ნულის ტოლი: $f'(a) = 0$. როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ, ფუნქციის წარმოებულის ნულთან ტოლობა ექსტრემუმის არსებობის მხოლოდ აუცილებელი პირობაა და არა საკმარისი. შეიძლება ფუნქციის წარმოებული რაიმე წერტილში ნულის ტოლი იყოს, მაგრამ ამ წერტილში ფუნქციას ექსტრემუმი არ ჰქონდეს. მივცეთ ამ ნათქვამს გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.



ნახ. 6



ნახ. 7

ვთქვათ, $x = a$ წერტილი არის $y = f(x)$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი (ნახ. 6). მაშინ ამ ფუნქციის გრაფიკის იმ წერტილზე გავლებული მხები, რომლის აბსცისაა a, Ox ღერძის პარალელური იქნებ. ამ მხების კუთხური კოეფიციენტი ნულის ტოლია, მაგრამ, როგორც ცნობილია, ეს კუთხური

კოეფიციენტი $f'(a)$-ს ტოლი უნდა იყოს. მაშასადამე, $f'(a)=0$. ანალოგიური ახსნა აქვს იმ შემთხვევას, როცა $x=a$ წერტილი არის $y=f(x)$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილი (ნახ. 7). ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ $f'(a)=0$ მიღებული პირობა შეეხება მხოლოდ $x=a$ წერტილში წარმოებად ფუნქციებს.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციას ლოკალური ექსტრემუმი შეიძლება ჰქონდეს იმ წერტილზეც, რომელზეც წარმოებული არ არსებობს. წერტილებს, რომლებზეც ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემუმი, **კრიტიკული წერტილი** ეწოდება.

მაგალითად, $f(x)=ax^2+bx+c$ ფუნქციას გააჩნია ერთადერთი ლოკალური ექსტრემუმი $x=-\dfrac{b}{2a}$ წერტილში. ამაში ვრწმუნდებოდით მოცემული კვადრატული სამწევრიდან სრული კვადრატის გამოყოფით $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

ადვილი შესამოწმებელი, რომ $f'\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=0$. მართლაც, ვინაიდან $f(x)=ax^2+bx+c$, ამიტომ $f'(x)=2ax+b$ და ამიტომ $f'\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=0$.

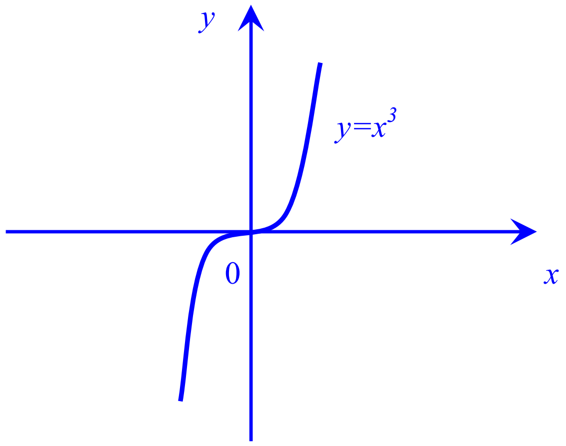
ბუნებრივად ისმის კითხვა: თუ ვიცით, რომ $x=a$ არის $y=f(x)$ ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი, როგორ განვსაზღვროთ, რა სახის ექსტრემუმს იძლევა იგი – მაქსიმუმს თუ მინიმუმს?

ვთქვათ, $f'(x)\prec 0$, როცა $x\prec a$, ხოლო $f'(x)\succ 0$, როცა $x\succ a$. მაშინ $x=a$ წერტილის მახლობლობაში $f(x)$ ფუნქცია კლებადია a-ს მარცხნივ მდებარე წერტილებში, ხოლო ზრდადია a-ს მარჯვნივ მდებარე წერტილებში (ნახ. 7). ამ შემთხვევაში $x=a$ წერტილი არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი. თუ $f'(x)\succ 0$, როცა $x\prec a$ და $f'(x)\prec 0$ როცა $x\succ a$, მაშინ პირიქით, $f(x)$ ფუნქცია a-ს მარცხნივ მდებარე წერტილებში ზრდადი იქნება, ხოლო a-ს მარჯვნივ – კლებადი. ამ შემთხვევაში $x=a$ წერტილი იქნება ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი იქნება (სურ. 6).

ე.ი. $f'(x)$ წარმოებული $x=a$ წერტილში ნულად იქცევა და, ამასთან, ამ წერტილზე გადასვლისას იგი ნიშანს იცვლის „–“ - დან „+“ -ზე, მაშინ a წერტილი ამ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილი იქნება. თუ $f'(x)$ წარმოებული $x=a$ წერტილში ნულად იქცევა, ხოლო ამ წერტილზე გადასვლისას იგი ნიშანს იცვლის „+“- დან „–“ -ზე, მაშინ a წერტილი $f(x)$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი იქნება.

მაგალითად, $f(x)=ax^2+bx+c$ ფუნქციის წარმოებული $f'(x)=2ax+b$ ნულად იქცევა, როცა $x=-\frac{b}{2a}$. ვთქვათ, $a \succ 0$, მაშინ, თუ $x \prec -\frac{b}{2a}$, გვექნება: $2ax \prec -b$, $2ax+b \prec 0$. ხოლო თუ $x \succ -\frac{b}{2a}$, მივიღებთ $2ax \succ -b$, $2ax+b \succ 0$.

ამგვარად, თუ $a \succ 0$, მაშინ $x=-\frac{b}{2a}$ წერტილზე გადასვლისას $f(x)=ax^2+bx+c$ ფუნქციის წარმოებული ნიშანს იცვლის „–“ - ს „+“ -ზე. ამიტომ $x=-\frac{b}{2a}$ წერტილი ამ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილია. სტუდენტებს ვანდობთ დამოუკიდებლად განიხილონ შემთხვევა, როდესაც $a \prec 0$ და წარმოებულის საშუალებით დარწმუნდნენ, რომ $x=-\frac{b}{2a}$ წერტილი ამ შემთხვევაში არის $f(x)=ax^2+bx+c$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი.



ნახ. 8

არ უნდა ვიფიქროთ, რომ თუ $f'(a)=0$, $x=a$ წერტილი, როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ, უთუოდ ლოკალური ექსტრემუმის წერტილია. მაგალითად, $f(x)=x^3$ ფუნქციისათვის გვექნება: $f'(x)=3x^2$ და ამიტომ $f'(0)=0$. მაგრამ, როგორც ეს ამ ფუნქციის გრაფიკიდან ჩანს (ნახ. 8). $x=0$ წერტილი არ არის არც ლოკალური მინიმუმის წერტილი და არც ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი. ეს იმით აიხსნება, რომ $x=0$ წერტილზე წარმოებული $f'(x)=3x^2$ ნულად იქცევა ისე, რომ ნიშანს არ იცვლის. როგორც $x \prec 0$-ის, ისე $x \succ 0$- ისათვის $f'(x) \succ 0$. შეიძლება იმის დამტკიცება, რომ თუ $f'(a)=0$, ხოლო $x=a$ წერტილზე გადასვლისას $f'(x)$

წარმოებული ნიშანს არ იცვლის, მაშინ $x = a$ წერტილი არც ლოკალური მინიმუმის წერტილია და არც ლოკალური მაქსიმუმის. წერტილებს, სადაც $f(x)$ ფუნქციის $f'(x)$ წარმოებული ნულად იქცევა, **სტაციონარული წერტილები** ეწოდება, ხოლო ფუნქციის მნიშვნელობებს ამ წერტილზე – ამ **ფუნქციის სტაციონარული მნიშვნელობები**.

ე.ი. **არსებობს ექსტრემუმის საკმარისი პირობა ორი სახით:**

I პირობა. თუ x_0 კრიტიკულ წერტლზე გადასვლისას წარმოებულმა $f'(x)$-მა ნიშანი შეიცვალა პლუსიდან მინუსზე, მაშინ ამ წერტილზე ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი. თუ x_0 კრიტიკულ წერტლზე გადასვლისას წარმოებულმა $f'(x)$-მა ნიშანი შეიცვალა მინუსიდან პლუსზე, მაშინ ამ წერტილზე ფუნქციას აქვს მინიმუმი. თუ წარმოებული ნიშანს არ იცვლის, მაშინ ფუნქციას ექსტრემუმი არა აქვს.

II პირობა. თუ x_0 კრიტიკულ წერტლზე მეორე რიგის წარმოებული უარყოფითია, ე.ი. თუ $f''(x_0) \prec 0$, მაშინ ამ წერტილზე ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი და $y_{\max} = f(x_0)$. თუ x_0 კრიტიკულ წერტლზე მეორე რიგის წარმოებული დადებითია, ე.ი. თუ $f''(x_0) \succ 0$, მაშინ ამ წერტილზე ფუნქციას აქვს მინიმუმი და $y_{\min} = f(x_0)$. ზემოთქმულიდან გამომდინარე, ექსტრემუმზე გამოკვლევის ალგორითმი ასე ჩამოყალიბდება:

1. ვიპოვოთ $y = f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე $D(f)$.
2. ვიპოვოთ $f'(x)$ და ამოვხსნათ განტოლება $f'(x) = 0$ და დავადგინოთ სად არ არსებობს $f'(x)$. ამით მივიღებთ კრიტიკულ წერტილებს.
3. გამოვიკვლიოთ კრიტიკული წერტილები I და II პირობის საშუალებით. თუ x_0 მაქსიმუმის წერტილია, მაშინ $y_{\max} = f(x_0)$, თუ x_0 მინიმუმის წერტილია, მაშინ $y_{\min} = f(x_0)$.

7. ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა. გადაღუნვის წერტილი. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები. შემოვიტანოთ შემდეგი

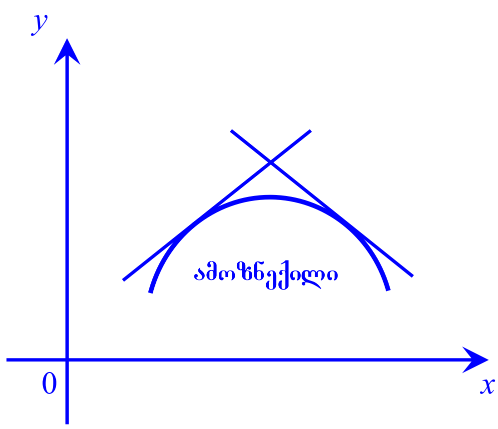
განსაზღვრება: ფუნქციის გრაფიკს ეწოდება ამოზნექილი (ჩაზნექილი) რაიმე შუალედში, თუ მისი ყველა წერტილი მდებარეობს გრაფიკის ნებისმიერი მხების ქვემოთ (ზემოთ) (ნახ. 9., ნახ. 10). მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 6 (გრაფიკის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის საკმარისი პირობები): თუ $y = f(x)$ ფუნქციას აქვს რაიმე შუალედში მეორე რიგის

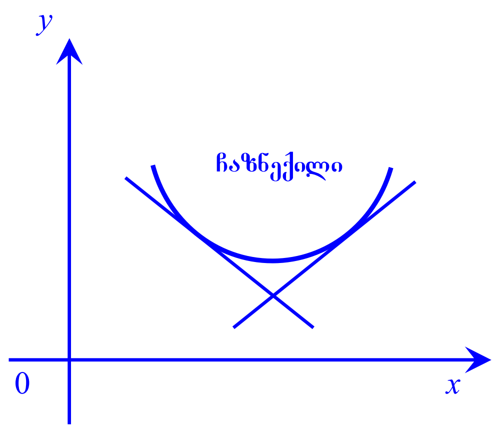
წარმოებული და $f''(x_0)\le 0$ $\left(f''(x_0)\ge 0\right)$ ამ შუალედის ყველა წერტილში, მაშინ ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია (ჩაზნექილია) ამ შუალედში.

განსაზღვრება: გადაღუნვის წერტილი ეწოდება გრაფიკის ისეთ წერტილს, რომელიც ამოზნექილობას ყოფს ჩაზნექილობისაგან. მტკიცება შემდეგი

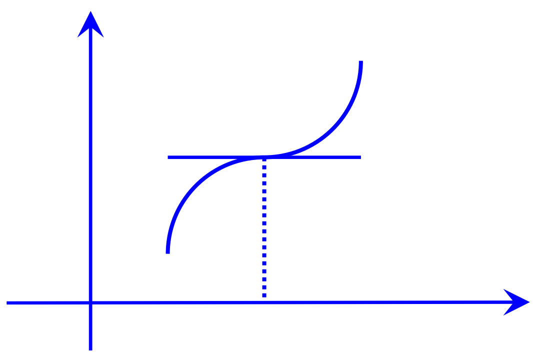
თეორემა 7 (გადაღუნვის წერტილის არსებობის საკმარისი პირობა): თუ x_0 წერტილში ფუნქციას აქვს პირველი რიგის წარმოებული, მეორე რიგის წარმოებული ამავე წერტილში ნულია, ე.ი. $f''(x_0)=0$ და x_0 წერტილზე გადასვლისას $f''(x_0)$ ნიშანს იცვლის, მაშინ $M_0(x_0, f(x_0))$ არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი (ნახ. 11, ნახ. 12).



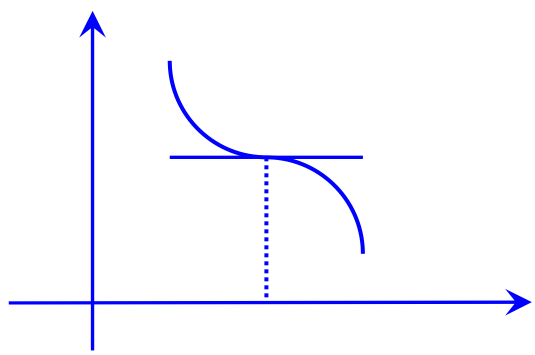
ნახ. 9



ნახ. 10



ნახ. 11



ნახ. 12

ვთქვათ, M არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილი. თუ ამ წერტილის ერთი კოორდინატი მაინც აბსოლუტური სიდიდით უსასრულობისაკენ მიისწრაფის, მაშინ ვიტყვით, რომ M წერტილი მიისწრფის უსასრულობისაკენ. ამ

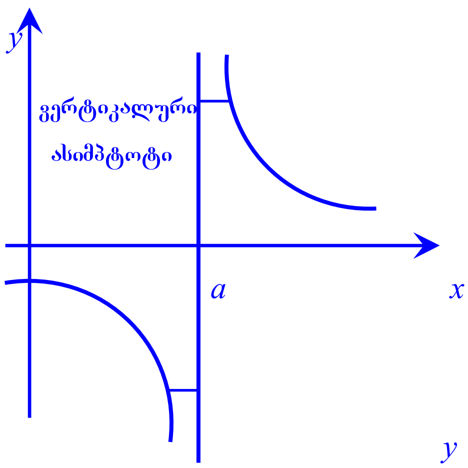
შემთხვევაში ძნელი წარმოსადგენია გრაფიკის სახე, მაგრამ მაინც ხერხდება ამ სიძნელის დაძლევა გრაფიკის შედარებით რომელიმე ცნობილ გრაფიკთან. უმარტივესი შესადარებელი გრაფიკია წრფე. გრაფიკის იმ შტოს ფორმის შესწავლა, რომლის წერტილის ერთი კოორდინატი მაინც უსასრულოდ იზრდება, ხდება ასიმპტოტის საშუალებით.

განსაზღვრება: $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის **ასიმპტოტი** ეწოდება წრფეს, რომელსაც ის თვისება აქვს, რომ მანძილი გრაფიკის M წერტილიდან ამ წრფემდე მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა M წერტილი უსასრულობისაკენ მიისწრაფის, ანუ უსასრულოდ შორდება კოორდინატთა სათავეს. არსებობს სამი სახის ასიმპტოტი:

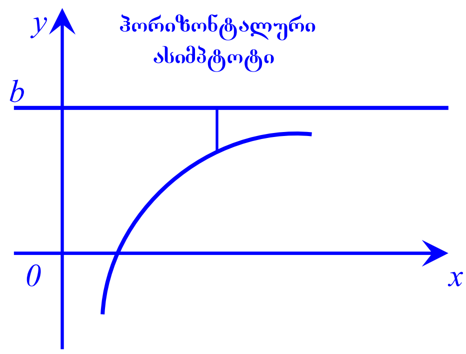
- **ვერტიკალური**, რომლის განტოლებაა $x = a$ (ნახ. 13),
- **ჰორიზონტალური**, რომლის განტოლებაა $y = b$ (ნახ. 14).
- **დახრილი**, რომლის განტოლებაა $y = kx + b$, სადაც

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (*) \quad \text{და} \quad b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] \quad (**)$$ (ნახ. 15).

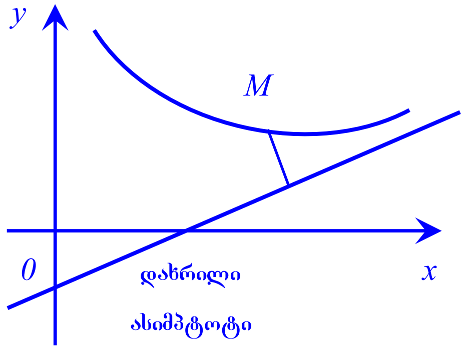
შენიშვნა: თუ (*) ან (**) ზღვრებიდან ერთ-ერთი მაინც არ არსებობს, მაშინ $y = f(x)$ ფუნქციას დახრილი ასიმპტოტი არა აქვს.



ნახ. 13



ნახ. 14



სურ. 15

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. ჩამოაყალიბეთ დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემები.
2. რას ეწოდება ლოკალური მაქსიმუმის, მინიმუმის წერტილები?
3. რას ეწოდება ფარდობითი მაქსიმუმის, მინიმუმის წერტილები?
4. რას ეწოდება ექსტრემუმის წერტლები? კრიტიკული წერტილები?
5. ჩამოაყალიბეთ ექსტრემუმის საკმარისი პირობა.
6. ჩამოაყალიბეთ გრაფიკის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის საკმარისი პირობები.
7. რას ეწოდება ფუნქცის გრაფიკის ასიმპტოტი?
8. რას ეწოდება გადაღუნვის წერტილი? ჩამოაყალიბეთ გადაღუნვის წერტილის არსებობის საკმარისი პირობა.

პრაქტიკული მაგალითები:

1. გამოიკვლიეთ ფუნქცია ექსტრემუმზე:

ა) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ ბ) $y = \sqrt{e^{x^2} - 1}$

გ) $y = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ დ) $y = \ln x + \frac{1}{x}$

2. იპოვეთ ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობის, ჩაზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები:

ა) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$ ბ) $f(x) = e^x$

გ) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$ დ) $f(x) = x^4 + x^2 + e^x$

3. იპოვეთ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები

ა) $y = \frac{x^2}{x^2 + 8}$ ბ) $y = \frac{2x - 1}{(x-1)^2}$

§ 6. განუზღვრელობათა გახსნა. ლოპიტალის წესი

ვთქვათ, $F(x)$ ფუნქცია განსაზღვრული არ არის $x=a$ წერტილში, მაგრამ ზღვარი აქვს, როდესაც $x \to a$. ასეთი ზღვრის მოძებნას **განუზღვრელობათა გახსნა** ეწოდება.

1. $\frac{0}{0}$ განუზღვრელობები. დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა (ლოპიტალის): ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მოდამოში. თუ

1. $f(a)=g(a)=0$,
2. $f'(a)$ და $g'(a)$ არსებობს, ამასთან $g'(a)\neq 0$,

მაშინ არსებობს $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1}$$

დამტკიცება: რადგანაც, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(a)=0,\quad g(a)=0$. ამ პირობებში $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები უწყვეტია ა წერტილში. ა წერტილის აღნიშნულ მიდამოში ავიღოთ რაიმე x წერტილი. კოშის ფორმულის თანახმად

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad \text{სადაც} \quad a\prec c\prec x.$$

რადგან $f(a)=0,\quad g(a)=0$, ამიტომ გვექნება

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{2}$$

ცხადია, თუ $x\to a$, მაშინ $c\to a$. პირობის თანახმად არსებობს $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,

ამიტომ $\lim\limits_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ -ის და (2) ტოლობის თანახმად მართებულია (1).

რ.დ.ბ.

მაგალითი 1: ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$;

ამოხსნა: აქ გვაქვს $\frac{0}{0}$ სახის განუზღვრელობა. ლოპიტალის თეორემის თანახმად $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\cos x}=\frac{1}{1}=1$.

მაგალითი 2: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-7}{2x}=-\frac{3}{4}$;

2. $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუზღვრელობა.

შენიშვნა: შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ამავე ხერხით შეიძლება $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუზღვრელობის გახსნა:

მაგალითი 3: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty$;

მაგალითი 4:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 2x}\right)'=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}:\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin 2x}{2\cos 2x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2x}=1.$$

3. $0\cdot\infty$ სახის განუზღვრელობა. ვთქვათ, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ და $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, მაშინ $f(x)\cdot g(x)$ ნამრავლი $x=a$ წერტილში მოგვცემს $0\cdot\infty$ სახის განუზღვრელობას. იგი კვლავ შეიძლება გავხსნათ ლოპიტალის წესით. მართლაც,

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

ეს უკანასკნელი კი წარმოადგენს $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუზღვრელობას. ეს კი გაიხსნება ლოპიტალის წესით.

მაგალითი 5: ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to a}\left[\left(e^a-e^x\right)tg\frac{\pi x}{2a}\right]$.

ამოხსნა:

$$\lim_{x\to a}\left[\left(e^a-e^x\right)tg\frac{\pi x}{2a}\right]=\lim_{x\to a}\frac{e^a-e^x}{ctg\frac{\pi x}{2a}}=\lim_{x\to a}\frac{-e^x}{\frac{\pi}{2a}\left(\sin^2\frac{\pi x}{2a}\right)^{-1}}=$$

$$=\frac{2a}{\pi}\lim_{x\to a}e^x\cdot\sin^2\frac{\pi x}{2a}=\frac{2a}{\pi}e^a\cdot\sin^2\frac{\pi}{2}=\frac{2a}{\pi}e^a.$$

4. $\infty-\infty$ **სახის განუზღვრელობა.** თუ $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ და $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$, მაშინ $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ $\infty-\infty$ სახის განუზღვრელობას. ამ სახის განუზღვრელობის გახსნა ხდება $\frac{0}{0}$ სახის განუზღვრელობამდე დაყვანით. მართლაც

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}};$$

მაგალითი 6: ვიპოვოთ $\lim_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)$

ამოხსნა: $\lim_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-tgx}{xtgx}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{tgx+\frac{x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x+\cos^2 xtgx}=$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x+\cos x\sin x}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin x}{1+\cos 2x}=\frac{0}{2}=0.$$

5. $1^\infty, 0^0, \infty^0$ **სახის განუზღვრელობები.** ამ ტიპის განუზღვრელობების გახსნა დაიყვანება $0\cdot\infty$ სახის განუზღვრელობის გახსნამდე შემდეგი ფორმულის გამოყენებით

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)},\quad (f(x)\succ 0).$$

მაგალითი 7: გამოვთვალოთ $\lim_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{2a}{x}}\right)^x$;

ამოხსნა: შემოვიღოთ აღნიშვნა $y=\left(\cos\sqrt{\frac{2a}{x}}\right)^x$, მაშინ $\ln y=x\ln\cos\sqrt{2ax^{-1}}$.

საიდანაც

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\cos\sqrt{2ax^{-1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\cos\sqrt{2ax^{-1}}}{x^{-1}}=-\sqrt{\frac{a}{2}}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{ctg\sqrt{2ax^{-1}}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2\sqrt{2ax^{-1}}}{x^{-1}}=-a\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin^2\sqrt{2ax^{-1}}}{\sqrt{2ax^{-1}}}\right)^2=-a.$$

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება განუზღვრელობის გახსნის ლოპიტალის წესი?
2. როგორ შეიძლება გავხსნათ $0\cdot\infty$ სახის განუზღვრელობა? $\infty-\infty$ სახის განუზღვრელობა?
3. როგორ შეიძლება გავხსნათ $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ სახის განუზღვრელობები?

პრაქტიკული მაგალითები:

გამოთვალეთ ზღვარი ლოპიტალის წესით:

1. $\frac{0}{0}$ და $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუზღვრელობის გახსნა

ა) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^3-8}$ ბ) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$

გ) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\cos x-1}$ დ) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$

2. $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ სახის განუზღვრელობის გახსნა

ა) $\lim_{x\to 0}x\ln x$ ბ) $\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x^2}$ გ) $\lim_{x\to 0}x^x$

დ) $\lim_{x\to 0}(\sin x)^{tgx}$ ე) $\lim_{x\to 0}\left(tgx-\frac{1}{x}\right)$

§ 7. ზღვრული (მარჟინალური) ამონაგები. დანახარჯი და მოგება. ზღვრული (მარჟინალური) მიდრეკილება დაზოგვისა და მოხმარებისადმი

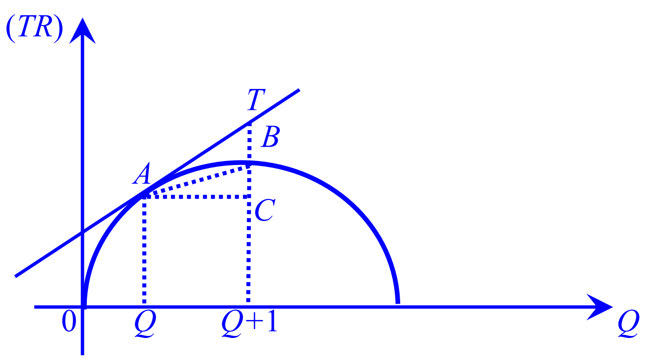
1. ზღვრული (მარჟინალური) ამონაგები. მარჟინალური ამონაგები (MR) განსაზღვრულია ტოლობით

$$(MR) = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{f(Q+\Delta Q) - f(Q)}{\Delta Q}$$

სადაც, $(TR)=f(Q)$ არის მთლიანი ამონაგების ფუნქცია. აქ Q არის მოთხოვნა, ანუ გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა. თუ ეს ზღვარი არსებობს, ცხადია, რომ იგი არის $f(Q)$ ფუნქციის წარმოებული. ამრიგად მოვიღეთ, რომ

$$(MR) = \frac{d(TR)}{dQ} = (TR)' \qquad (1)$$

ე.ი. მარჟინალური ამონაგები არის მთლიანი ამონაგების ფუნქციის წარმოებული მოთხოვნის Q ცვლადით. ხშირად მარჟინალურ ამონაგებს განსაზღვრავენ, როგორც მთლიანი ამონაგების ცვლილებას, როდესაც მოთხოვნა Q იზრდება ერთი ერთეულით. ასეთ მიდგომას ვუწოდოთ მარჟინალური ფუნქციის მიახლოებითი გამოთვლა არგუმენტის (მოთხოვნის) ერთი ერთეულით გაზრდის მეთოდით და ავღნიშნოთ იგი $(MR)^*$ სიმბოლოთი. განვიხილოთ მთლიანი ამონაგების $(TR)=f(Q)$ ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 1)



ნახ. 1

როგორც უკვე ვიცით

$$(MR) = f(Q) = tg\angle TAC = |TC|$$

ხოლო

$$(MR)^* = f(Q+1) - f(Q) = |BC| = tg\angle BAC$$

აქედან ჩანს, რომ (MR) და $(MR)^*$ სიდეეებს შორის სხვაობა $|TB|$ მონაკვეთის სიგრძე, გარკვეულ შემთხვევაში შეიძლება სულაც არ იყოს ძალიან მცირე. ამიტომ სიზუსტის თვალსაზრისით, უმჯობესია ვისარგებლოთ მარჟინალური ამონაგების (1) განმარტებით.

მაგალითი 1: მოთხოვნის ფუნქციაა $P = 60 - Q$

1. ვიპოვოთ მთლიანი ამონაგების *(TR)=f(Q)* ფუნქციის გამოსახულება და მისი მარჟინალური ფუნქცია;
2. გამოვთვალოთ მარჟინალური ამონაგების ფუნქციის მნიშვნელობა, როცა *Q=50*
3. გამოვთვალოთ მთლიანი ამონაგების ფუნქცია არგუმენტის *Q=50* და *Q=51* მნიშვნელობებისათვის. შევადაროთ $(MR)^* = f(51) - f(50)$ და (MR) მარჟინალური ამონაგები *Q=50* მნიშვნელობებისათვის.

ამოხსნა: 1 . გამოვიყენოთ მთლიანი ამონაგების ფორმულა

$$(TR)=QP \tag{2}$$

მივიღებთ $(TR) = QP = (60 - Q)\cdot Q = 60\cdot Q - Q^2$, მისი შესაბამისი მარჟინალური ფუნქცია იქნება

$$(MR) = \frac{d(TR)}{dQ} = f'(Q) = 60 - 2Q$$

2. მარჟინალური ფუნქციის მნიშვნელობა, როდესაც *Q*=50 გამოითვლება შემდეგი ტოლობით:

$$(MR) = f'(50) = -40$$

3. როდესაც *Q*=50 და *Q*=51, მაშინ მთლიანი ამონაგებისათვის შესაბამისად მივიღებთ *f*(50)=500 და *f*(51)=459. ამიტომ მთლიანი ამონაგების ცვლილება, რაც მოსდევს *Q* რაოდენობის ერთი ერთეულით გაზრდას, გამოითვლება სხვაობით

$$(MR)^* = f(51) - f(50) = -41$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ მოთხოვნის ცვლადის *Q*=50 მნიშვნელობებისათვის მარჟინალური ფუნქციის ზუსტი სიდიდე (-40) და მარჟინალური ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა (- 41) არ ემთხვევა ერთმანეთს.

2. დანახარჯი და მოგება. საშუალო ამონაგები (*AR*) მოთხოვნის *Q* დონეზე, ანუ გაყიდული საქონლის *Q* რაოდენობისათვის განისაზღვრება ტოლობით

$$(AR) = \frac{(TR)}{Q} \tag{3}$$

(2) ფორმულის გამოყენებით, სადაც $P = g_D(Q)$ არის მოთხოვნის ფუნქცია, მივიღებთ

$$(AR) = \frac{P \cdot Q}{Q} = P = g_D(Q) \tag{4}$$

ე.ი. საშუალო ამონაგები ემთხვევა მოთხოვნის ფუნქციას.

მთლიანი დანახარჯის *(TC)* ფუნქცია, რომელიც წარმოდგინდება ფიქსირებული (მუდმივი) *(FC)* დანახარჯისა და მთლიანი ცვალებადი დანაზარჯის ჯამის სახით, ავღნიშნოთ *K(Q)* –თი. ე.ი.

$$(TC) = K(Q) = F(C) + V(C) \cdot Q$$

სადაც, (VC) არის პროდუქციის ერთეულის წარმოებისათვის საჭირო ცვალებადი დანახარჯი, ხოლო Q წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა.

ჩვენი მიზანია დავახასიათოთ დანახარჯის K ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე წარმოებული პროდუქციის Q რაოდენობის ცვლასთან დაკავშირებით. ვთქვათ, წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა გაიზარდა ΔQ რაოდენობით, მაშინ შესაბამისი დანახარჯი იქნება $K(Q + \Delta Q)$. ე. ი. წარმოებული პროდუქციის ΔQ ნაზრდს შეესაბამება წარმოების დანახარჯის ნაზრდი: $\Delta K(Q) = K(Q + \Delta Q) - K(Q)$. ამიტომ წარმოების დანახარჯის საშუალო ნაზრდი წარმოებული პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით გამოითვლება შეფარდებით $\dfrac{\Delta K(Q)}{\Delta Q}$.

$\dfrac{\Delta K(Q)}{\Delta Q}$ შეფარდების ზღვარს, როდესაც $\Delta Q \to 0$, ეწოდება წარმოების **მარჟინალური ანუ ზღვრული (*MC*) დანახარჯი:**

$$(MC) = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta K(Q)}{\Delta Q} = K'(Q) = \frac{d(TC)}{dQ} \tag{5}$$

ამრიგად, მარჟინალური დანახარჯი $K'(Q)$, რომელიც გამოთვლილია Q რაოდენობის პროდუქციისათვის, გამოსახავს წარმოების დანახარჯის ცვლილებას საწარმოებელი პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით

$$\Delta K \approx K'(Q) \cdot \Delta Q = dK(Q) \tag{6}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ წარმოების ხარჯების ნაზრდი მიახლოებით უდრის წარმოების მარჟინალური დანახარჯისა და პროდუქციის ნაზრდის ნამრავლს, ანუ დანახარჯის K ფუნქციის დიფერენციალს. აქაც შეგვიძლია შემოვიღოთ მარჟინალური ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად ფორმულა,

რომლელიც შეესაბამება არგუმენტის (წარმოებული პროდუქციის რაოდენობის) ერთი ერთეულით გაზრდისას მიღებული ცვლილების დადგენას:

$$(MC)^* = \Delta(TC) = \Delta K(Q) = K(Q+1) - K(Q) \approx K'(Q) \cdot 1 \qquad (7)$$

ეს თანაფარდობა მიიღება (6) ტოლობიდან, თუ დავუშვებთ, რომ $\Delta Q = 1$.

ეკონომიკაში $(MC)^*$ სიდიდეს უწოდებენ **დანახარჯს**, რომელიც საჭიროა პროდუქციის (Q+1) −ე ერთეულის წარმოებისათვის. როგორც ვხედავთ, ეს სიდიდე გარკვეული მიახლოებით უდრის მარჟინალურ დანახარჯს.

მაგალითი 2: ვთქვათ, წარმოების საშუალო დანახარჯის (AC) ფუნქცია მოცემულია შემდეგი ტოლობით $(AC) = 2Q + 6 + \frac{13}{Q}$

ა. ვიპოვოთ მარჟინალური დანახარჯის *(MC)* ფუნქცია.

ბ. როგორი იქნება მარჟინალური დანახარჯის საშუალებით გამოთვლილი სრული დანახრჯის ცვლილება, თუ წარმოებულიპროდუქციის რაოდენობა 15-დან 12 ერთეულამდე მცირდება? როგორია აღნიშნულ სიტუაციაში მთლიანი დანახარჯის ზუსტი ცვლილება?

ამოხსნა: ა. პირველ რიგში უნდა ვიპოვოთ მთლიანი დანახარჯის (TC) ფუნქცია $(AC) = \frac{(TC)}{Q}$, ამიტომ $(TC) = (AC) \cdot Q$. მაგალითის პირობის გათვალისწინებით მარტივად დავასკვნით $(TC) = K(Q) = 2Q^2 + 6Q + 3$. (5) ტოლობის თანახმად, მარჟინალური დანახარჯის ფუნქციისათვის მივიღებთ

$$(MC) = \frac{d(TC)}{dQ} = K'(Q) = 4Q + 6$$

ბ. რადგან წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა Q=15 ერთეულიდან კლებულობს $Q + \Delta Q = 12$ ერთეულამდე, ამიტომ $\Delta Q = 12 - 5 = -3$. არგუმენტის ამ ცვლილების შესაბამისი წარმოების მთლიანი დანახარჯის ცვლილების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (6) ფორმულა. მივიღებთ

$$\Delta(TC) \approx K'(15) \cdot (-3) = (4 \cdot 15 + 6) \cdot (-3) = -198$$

ამრიგად, აღნიშნული მეთოდით მივიღებთ, რომ დანახარჯი დაიკლებს 198 ერთეულით. გამოვთვალოთ ეხლა მთლიანი დანახარჯის ზუსტი ცვლილება იგივე პირობებში:

$$\Delta(TC) = K(12) - k(15) = 2 \cdot 12^2 + 6 \cdot 12 + 13 - (2 \cdot 15^2 + 6 \cdot 15 + 13) =$$

$$= 2(12^2 - 15^2) + 6(12 - 15) = 2 \cdot (-81) - 6 \cdot (-3) = -162 - 18 = -180$$

მიღებული შედეგების შედარება გვიჩვენებს, რომ მთლიანი დანახარჯის ზუსტ და მიახლოებით მნიშვნელობებს შორის სხვაობა 18 ერთეულია.

მოგების ფუნქცია π გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$\pi(Q) = (TR) - (TC),$$

სადაც *(TR)* არის მთლიანი ამონაგები, ხოლო *(TC)* მთლიანი დანახარჯი. აქ Q არის რელიზებული (გაყიდული) პროდუქციის რაოდენობა. პროდუქციის რეალიზაციისათვის ΔQ რაოდენობით გაზრდას შეესაბამება მოგების ნაზრდი

$$\Delta\pi(Q) = \pi(Q+\Delta Q) - \pi(Q),$$

ამიტომ, მოგების საშუალო ნაზრდი სარეალიზაციო პროდუქტის ერთეულზე გაანგარიშებით გამოითვლება შეფარდებით $\dfrac{\Delta\pi(Q)}{\Delta Q}$.

$\dfrac{\Delta\pi(Q)}{\Delta Q}$ შეფარდების ზღვარს, როდესაც $\Delta Q \to 0$, ეწოდება **ზღვრული** ან **მარჟინალური მოგება.** თუ π ფუნქცია წარმოებადია, მაშინ

$$\lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta\pi(Q)}{\Delta Q} = \pi'(Q) \qquad (8)$$

ამრიგად, მარჟინალური მოგება, რომელიც გამოითვლება Q რაოდენობის სარეალიზაციო პროდუქციისათვის, გამოსახავს მოგების მყისიერ ცვლილებას (ნაზრდს) სარეალიზაციო პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით. (8) –დან გამომდინარეობს, რომ მოგების ნაზრდი მიახლოებით გამოითვლება ფორმულით

$$\Delta\pi(Q) \approx \pi'(Q)\Delta Q = d\pi(Q) \qquad (9)$$

ე.ი. მოგების ნაზრდი მიახლოებით უდრის მარჟინალური მოგებისა სარეალიზაციო პროდუქციის ნაზრდის ნამრავლს, ანუ მოგების π ფუნქციის დიფერენციალს. თუ $\Delta Q = 1$, მაშინ

$$\Delta\pi = \pi(Q+1) - \pi(Q) \approx \pi'(Q)\cdot 1 \qquad (10)$$

ე.ი. მოგების ნაზრდი, რომელიც შეესაბამება რეალიზებული პროდუქციის ერთი ერთეულით გაზრდას გარკვეული მიახლოებით, შეგვიძლია ჩავთვალოთ მარჟინალური მოგების ტოლად.

მაგალითი 3: პროდუქციის წარმოების ფიქსირებული (მუდმივი) დანახარჯია (*FC*)=100 ლარი, ხოლო ცვალებადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე შეადგენს (*VC*)=3 ლარს. მოთხოვნის ფუნქცია *P*=200-*Q*

ა. ვიპოვოთ მარჟინალური მოგების ფუნქცია;

ბ. დაახლოებით, როგორ შეიცვლება მოგება რელიზებული პროდუქციის ერთი ერთეულით გაზრდისას, თუ აღებულ მომენტში პროდუქციის რალიზაციის

დონეა 80 ერთეული. გამოვთვალოთ მოგების ზუსტი ცვლილება და შევადაროთ მიღებულ მიახლოებით მნიშვნელობას.

ამოხსნა: ა. რადგან ცნობილია მუდმივი დანახარჯი და ერთეული პროდუქციის წარმოების ცვალებადი დანახარჯი, მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია იქნება $(TC)=(FC)+(VC)\cdot Q=100+3\cdot Q$. ამოცანის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ მთლიანი ამონაგები გამოითვლება ფორმულით

$$(TR)=P\cdot Q=(200-Q)\cdot Q=200\cdot Q-Q^2$$

ამიტომ მოგების ფუნქციისათვის მივიღებთ

$$\pi(Q)=(TR)-(TC)=200\cdot Q-Q^2-(100+3Q)=-Q^2+197Q-100$$

ვიცით, რომ მარჟინალური მოგება არის მოგების ფუნქციის წარმოებული. ამიტომ მარჟინალური მოგება იქნება $\pi'(Q)=-2Q+197$

ბ. ამოცანის მეორე კითხვაზე პასუხის გასაცემად შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში $Q=80$ და $\Delta Q=1$ მოგების მიახლოებითი ცვლილების მოსაძებნად გამოვიყენოთ (9) ტოლობა: $\Delta\pi(80)\approx\pi'(80)\cdot 1=-2\cdot 80+197=37$.

ამრიგად, თუ აღებულ მომენტში იყიდება 80 ერთეული, მასინ ერტი ერთეულით მეტის გაყიდვა მოგებას გაზრდის დაახლოებით 37 ერთეულით (ლარით). გამოვთვალოთ მოგების ზუსტი ნაზრდი, თუ $\Delta Q=1$.

$$\Delta\pi(80)=\pi(81)-\pi(80)=-81^2+197\cdot 81-(-80^2+197\cdot 80-100)=36$$

ვხედავთ, რომ მოგების ცვლილების მიახლოებით და ზუსტ მნიშვნელობებს შორის სხვაობაა ერთი ერთეული.

3. ზღვრული (მარჟინალური) მიდრეკილება დაზოგვისა და მოხმარებისადმი. ეხლა გამოვიკვლიოთ, თუ როგორია მოხმარების ხარჯებისა და დანაზოგის ცვლილებათა ტენდენცია ეროვნული შემოსავლის ცვლილებასთან დაკავშირებით, რისთვისაც გამოვიყენოთ წარმოებულის ცნება.

მოხმარებისა და დანაზოგის ფუნქციები ავღნიშნოთ, შესაბამისად, *C(Y)* და *S(Y)* –ით. ვიგულისხმოთ, რომ ვიხილავთ მარტივ მოდელს და *Y* ეროვნული შემოსავლი გამოიყენება მხოლოდ მოხმარების ხარჯებისა და დანაზოგისათვის. ე.ი.

$$Y=C(Y)+S(Y) \tag{11}$$

ცხადია, რომ ეროვნული შემოსავლის ΔY ცვლილებას მოსდევს მოხმარების ფუნქციისა და დანაზოგის ფუნქციის ცვლილებები, რომლებიც ეროვნული შემოსავლის ერთ ერთეულზე გადაანგარიშებით გამოითვლება შეფარდებებით:

$$\frac{\Delta C(Y)}{\Delta Y} \quad \text{და} \quad \frac{\Delta S(Y)}{\Delta Y}$$

ეს შეფარდებები გვიჩვენებენ C და S „ცვლილების საშუალო სიჩქარეს“ $(Y, Y+\Delta Y)$ ინტერვალში, ანუ მათი ცვლილების ტენდენციებს. ამ შეფარდებათა ზღვრებს, როდესაც $\Delta Y \to 0$, ეწოდებათ, შესაბამისად, მარჟინალური ანუ ზღვრული მიდრეკილება (მისწრაფება) მომხმარებლებისადმი – ***MPC*** და მარჟინალური ანუ ზღვრული მიდრეკილება (მისწრაფება) დაზოგვისადმი – ***MPS***.

$$\boldsymbol{MPC} = \lim_{\Delta Y \to 0} \frac{\Delta C(Y)}{\Delta Y} = C'(Y)$$

$$\boldsymbol{MPS} = \lim_{\Delta Y \to 0} \frac{\Delta S(Y)}{\Delta Y} = S'(Y) \tag{12}$$

თუ გავაწარმოებთ (11) ტოლობის ორივე მხარეს Y ცვალდით და გამოვიყენებთ (12) ტოლობებს, მივიღებთ

$$\boldsymbol{MPC} + \boldsymbol{MPS} = C'(Y) + S'(Y) = 1 \tag{13}$$

მაგალითი 4: მოხმარების ფუნქცია მოცემულია ტოლობით:

$$C(Y) = 0{,}01 \cdot Y^2 + 0{,}2 \cdot y + 50$$

ვიპოვოთ ***MPC*** და ***MPS***, როდესაც Y=30. გავაანალიზოთ მიღებული შედეგი.

ამოხსნა: მოხმარების ფუნქციის წარმოებული გვაძლევს ***MPC*** მარჟინალურ მიდრეკილებას მომხმარებლისადმი. $\boldsymbol{MPC} = C'(Y) = 0{,}02Y + 0{,}2$, თუ Y=30. მაშინ $\boldsymbol{MPC} = 0{,}02 \cdot 30 + 0{,}2 = 0{,}8$ მარჟინალური მიდრეკილება დაზოგვისადმი ***MPS*** გამოვთვალოთ (13) ფორმულის გამოყენებით $\boldsymbol{MPS} = 1 - \boldsymbol{MPC} = 0{,}2$. მიღებული შედეგები გვიჩვენებს, რომ თუ ეროვნული შემოსავლის დონე 30 ერთეულია, მაშინ მისი გაზრდა ერთი ერთეულით გამოიწვევს მოხმარების გაზრდას დაახლოებით 0,8 ერთეულით, ხოლო დაზოგვის გაზრდას – დაახლოებით 0,2 ერთეულით. ამრიგად, ეროვნული შემოსავლის აღნიშნულ დონეზე მიდრეკილება მომხმარებლისადმი უფრო დიდია, ვიდრე დაზოგვისადმი.

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. განსაზღვრეთ მარჟინალური ამონაგები. მოიყვანეთ მარჟინალური ამონაგების მეორენაირი განმარტება.

2. გეომეტრიულად აჩვენეთ სხვაობა *(MR)* და*(MR)** სიდეებს შორის.
3. განმარტეთ საშუალო ამონაგების სიდიდე მოთხოვნის *Q* დონისათვის.
4. განსაზღვრეთ წარმოების მარჟინალური ანუ ზღვრული *(MC)* დანახარჯი.
5. ამოწერეთ მარჟინალური ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელი ფორმულა.
6. განმარტეთ ზღვრული ანუ მარჟინალური მოგება.
7. ამოწერეთ მოგების ნაზრდის მიახლოებითი გამოსათვლელი ფორმულა.
8. ამოწერეთ ფორმულა, რომელიც ამყარებს კავშირს მოხმარების ზღვრულ მიდრეკილებასა და დაზოგვის ზღვრულ მიდრეკილებას შორის.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1. მოცემულია მთლიანი ამონაგების ფუნქცია $=100Q-Q^2$
   ა) ვიპოვოთ მარჟინალური ამონაგების ფუნქცია;
   ბ) ვთქვათ, აღებულ მომენტში პროდუქციაზე მოთხოვნაა $Q=60$. რა ცვლილებებს განიცდის *(TR)* მთლიანი ამონაგები, თუ მოთხოვნა გაიზრდება 2 ერთეულით?

2. წარმოების ყოველდღიური დანახარჯი, რომელიც დამოკიდებულია წარმოებული პროდუქციის მოცულობაზე, განისაზღვრება ფორმულით $K(Q)=100Q+0{,}1Q^2$, $0 \le Q \le 100$. ვიპოვოთ წარმოების ზღვრული (მარჟინალური) დანახარჯი, თუ წარმოების მოცულობა ტოლია:

ა) 3 ერთეულის;

ბ) 5,5 ერთეულის.

მიახლოებით რამდენით გაიზრდება წარმოების ხარჯები, როდესაც პროდუქცია იზრდება:

გ) 200 ერთეულიდან 200,5 ერთეულამდე?

დ) 800 ერთეულიდან 800,5 ერთეულამდე?

შეადარეთ გ) და დ) პუნქტების პასუხები წარმოების ხარჯების ზუსტ ნაზრდებს.

§ 8. ფუნქციის ელასტიკურობა. მოთხოვნილების ელასტიკურობა ფასის მიხედვით. მიწოდება და მიწოდების ელასტიკურობა. სრული და საშუალო დანახარჯების ელასტიკურობა

1. ფუნქციის ელასტიკურობა. წარმოებულის დახმარებით შეიძლება გამოვთვალოთ დამოკიდებული ცვლადის ნაზრდი, რომელიც შეესაბამება დამოუკიდებელი ცვლადის ნაზრდს. ბევრ ამოცანაში მოხერხებულია გამოვთვალოთ დამოკიდებული ცვლადის ნამატის პროცენტი (შეფარდებითი ნაზრდი), რომელიც შეესაბამება დამოუკიდებელი ცვლადის ნამატის პროცენტს, ამაა მივყავართ ფუნქციის ელასტიკურობის ცნებამდე (ზოგჯერ მას უწოდებენ ფარდობით წარმოებულს).

მოცემულია $y = f(x)$ ფუნქცია. დავუშვათ, რომ დამოუკიდებელი ცვლადის ნაზრდია Δx, ხოლო დამოუკიდებელი x ცვლადის შეფარდებითი ნაზრდი $\dfrac{\Delta x}{x}$. დამოკიდებული ცვლადის შესაბამისი ნაზრდი არის $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, ხოლო დამოკიდებელი ცვლადის შეფარდებითი ნაზრდია $\dfrac{\Delta y}{y}$. ფუნქციის (დამოკიდებელი ცვლადის) შეფარდებითი ნაზრდის შეფარდება დამოუკიდებელი ცვლადის შეფარდებით ნაზრდთან არის $\dfrac{\Delta y}{y} : \dfrac{\Delta x}{x}$.

ეს შეფარდება გვიჩვენებს, რამდენჯერ დიდია ფუნქციის შეფარდებითი ნაზრდი არგუმენტის შეფარდებით ნაზრდზე. ეს შეიძლება, აგრეთვე, ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \tag{1}$$

თუ არსებობს $y = f(x)$ ფუნქციის წარმოებული, მაშინ

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}f'(x) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dy} \tag{2}$$

(2) ზღვარს, ე.ი. $y = f(x)$ ფუნქციის შეფარდებითი ნაზრდისა და დამოუკიდებელი ცვლადის შეფარდებითი ნაზრდის შეფარდების ზღვარს, როდესაც დამოუკიდებელი ცვლადის ნაზრდი $\Delta x \to 0$, ეწოდება $y = f(x)$ **ფუნქციის ელასტიკურობა** x ცვლადის მიმართ.

$y = f(x)$ ფუნქციის ელასტიკურობა აღინიშნება $E_x(y)$ სიმბოლოთი. მაშასადამე,

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dy} \tag{3}$$

ელასტიკურობა x ცვლადის მიმართ არის ფუნქციის მიახლოებითი პროცენტული ნაზრდი, რომელიც შეესაბამება დამოუკიდებელი ცვლადის 1% -ით გაზრდას.

მაგალითი 1: გამოთვალეთ ფუნქციის ელასტიკურობა y=3x-6

ამოხსნა: ელასტიკურობის განმარტების ძალით გვაქვს:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{x}{3(x-2)} \cdot 3 = \frac{3x}{3x-6} = \frac{x}{x-2}$$

თუ, მაგალითად, *x=10*, მაშინ ფუნქციის ელასტიკურობა არის

$$\frac{10}{10-2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

ეს ნიშნავს. რომ თუ x ცვლადი გაიზარდა 1% -ით, მაშინ y გაიზრდება $\frac{5}{4}$%-ით.

მაგალითი 2: გამოთვალეთ ფუნქციის ელასტიკურობა $y = 1 + 2x - x^2$

ამოხსნა: ელასტიკურობის განმარტების ძალით გვაქვს:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{x}{1+2x-x^2}(2-2x) = \frac{2x-2x^2}{1+2x-x^2}$$

თუ, მაგალითად, x=1, მაშინ ფუნქციის ელასტიკურობა არის

$$\frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2}{1 + 2 \cdot 1 - 1} = 0$$

ეს ნიშნავს. რომ თუ x ცვლადი გაიზარდა 1% -ით (1-და, 1,01 –მდე), მაშინ დამოუკიდებელი ცვლადის მნიშვნელობა არ შიცვლება (დაახლოებით).

2. მოთხოვნილების ელასტიკურობა ფასის მიხედვით. მოცემულ საქონელსა და მის ფასს შორის არსებული ფუნქციონალური დამოკიდებულება (*იმ პირობით, რომ სხვა საქონლის ფასი, მყიდველთა შემოსავალი და მოთხოვნილებათა სტრუქტურა მუდმივი სიდიდეებია*) საშუალებას გვაძლევს ფასი განვსაზღვროთ სათანადოდ განსაზღვრული მოთხოვნილების მიხედვით. მაგრამ, მთელ რიგ ეკონომიკურ გამოკვლევებში, აუცილებელია განვსაზღვროთ არა მოთხოვნილების სიდიდე, არამედ მოთხოვნილების ცვლილება, გამოწვეული ფასების განსაზღვრული ცვლილებით. სხვანაირად რომ ვთქვათ, საჭიროა განვსაზღვროთ მოთხოვნილების ელასტიკურობა ფასის მიმართ. ვიგულისხმოთ, რომ მოთხოვნილებს q დამოკიდებულია P ფასისაგან

$$q = f(P) \quad (1)$$

ვთქვათ, ΔP ფასის ნაზრდია, ხოლო Δq მოთხოვნილების შესაბამისი ნაზრდი. ფასის ფარდობითი ცვლილება არის $\frac{\Delta P}{P}$, ხოლო მოთხოვნილების ფარდობითი ცვლილებაა $\frac{\Delta q}{q}$. შეფარდება $\frac{\Delta q}{q}:\frac{\Delta P}{P}$ გამოსახავს მოთხოვნილების ფარდობით ცვლილებას, როცა საქონლის ფასი იზრდება ერთი პროცენტით. **მოთხოვნილების ელასტიკურობა ფასის** მიმართ ეწოდება ზღვარს

$$E_P(q) = E_c = \lim_{\Delta P \to 0}\left(\frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta P}{P}\right) = \lim_{\Delta P \to 0}\left(\frac{\Delta q}{\Delta P}\cdot\frac{P}{q}\right) = \frac{P}{q}\lim_{\Delta P \to 0}\frac{\Delta q}{\Delta P} = \frac{P}{q}\cdot\frac{dq}{dP} \quad (2)$$

და, მაშასადამე,

$$E_c = \frac{P}{q}\cdot\frac{dq}{dP}. \quad (3)$$

მოთხოვნილების ელასტიკურობა ფასის მიმართ, დაახლოებით განსაზღვრავს, თუ როგორ იცვლება მოთხოვნილება საქონელზე, როცა მისი ფასი იზრდება 1% -ით. უმრავლეს შემთხვევაში მოთხოვნილების ფუნქცია არის კლებადი, რადგანაც საქონლის ფასის გაზრდით მოთხოვნილება მასზე მცირდება. მაშასადამე, ასეთ შემთხვევაში

$$\frac{dq}{dP} \prec 0$$

იმისათვის, რომ ავიცდინოთ უარყოფითი რიცხვები, მოთხოვნილების ელასტკურობის შესწავლის დროს მიღებულია, რომ

$$E_c = -\frac{P}{q}\cdot\frac{dq}{dP} \quad (4)$$

თუ $E_c \succ 1$, ე.ი. თუ ფასების 1% -ით გაზრდა იწვევს მოთხოვნილების შემცირებას, მაშინ ამბობენ, რომ **მოთხოვნილება ელასტიკურია.**

თუ $E_c = 1$, ე.ი. თუ ფასების 1% -ით გაზრდა იწვევს მოთხოვნილების 1% -ით შემცირებას, მაშინ ამბობენ, რომ **მოთხოვნილება ნეიტრალურია.**

თუ $0 \prec E_c \prec 1$, ე.ი. თუ ფასების 1% -ით გაზრდა იწვევს მოთხოვნილების 1% -ზე მეტით შემცირებას, მაშინ ამბობენ, რომ **მოთხოვნილება არაელასტიკურია.**

მაგალითი 3: თუ მოთხოვნილების ფუნქცია არის *q=10-P*, მაშინ მოთხოვნილების ელასტიკურობა ეტოლება

$$E_c = -\frac{P}{q}\cdot\frac{dq}{dP} = -\frac{P}{10-P}\cdot(-1) = \frac{P}{10-P}$$

თუ $P=2$, მაშინ

$$E_c = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

ეს ნიშნავს, რომ ფასი 2-ია, მაშინ ფასის 1% -ით გაზრდა გამოიწვევს მოთხოვნილების $\frac{1}{4}$% -ით შემცირებას.

მაგალითი 4: თუ მოთხოვნილების ფუნქცია არის $q = \frac{C}{P}$ (C მუდმივია), მაშინ მოთხოვნილების ელასტიკურობა ეტოლება

$$E_c = -\frac{P}{q} \cdot \frac{dq}{dP} = -\frac{P}{C/P} \cdot \left(-\frac{C}{P^2}\right) = P^2 \cdot P^{-2} = 1$$

მაშასადამე, ეს მოთხოვნილება ფასის უკუპროპორციულია, მაშინ ნებისმიერი ფასისათვის, მოთხოვნილების ელასტიკურობა ერთის ტოლია.

3. მიწოდება და მიწოდების ელასტიკურობა. მიწოდებაში იგულისხმება რომელიმე საქონელის რაოდენობა, რომელიც განკუთვნილია ერთეულ დროში გასაყიდად. როგორც წესი, რომელიმე საქონლის მიწოდება მოცემულ პერიოდში არის ფასის ზრდადი ფუნქცია. ყველა სხვა დანარჩენ ერთნაირ პირობებში მიწოდება მოცემული ფასის დროს უფრო მეტია, ვიდრე მიწოდება ნაკლები ფასის დროს. მაგრამ არის შემთხვევები, როცა მიწოდება იზრდება ფასების შემცირებასთან ერთად. მაგალითად ხორბლის ფასის დაცემა ხშირად აიზულებს გლეხს, გაზარდოს მიწოდება, თუ მას სურს განსაზღვრული შემოსავლის მიღება.

ვთქვათ, $S = S(P)$ არის მიწოდების ფუნქცია, ΔP ფასის ნაზრდია, ხოლო ΔS შესაბამისი მიწოდების ნაზრდი. ფასის შეფარდებითი ნაზრდი არის $\frac{\Delta P}{P}$, ხოლო მიწოდების ფარდობითი ნაზრდი $\frac{\Delta S}{S}$.

ზღვარს

$$E_P(S) = E_P = \lim_{\Delta P \to 0}\left(\frac{\Delta S}{S} : \frac{\Delta P}{P}\right) = \lim_{\Delta P \to 0}\left(\frac{\Delta S}{\Delta P} \cdot \frac{P}{S}\right) = \frac{P}{S}\lim_{\Delta P \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta P} = \frac{P}{q} \cdot \frac{dS}{dP} = \frac{P}{q}S' \qquad (5)$$

ეწოდება **მიწოდების ელასტიკურობა ფასის მიმართ.** მაშასადამე, მიწოდების ელასტიკურობა ფასის მიმართ დახლოებით განსაზრვრავს მიწოდების ნახრდს პროცენტებში, 1% -ით გაზრდის დროს.

4. სრული და საშუალო დანახარჯების ელასტიკურობა. თუ საწარმო აწარმოებს რომელიღაც საქონლის x ერთეულს და განსაზღვრულია სრულ დანახარჯთა ფუნქცია, მაშინ სრულ დანახარჯთა ელასტიკურობა არის:

$$E_x(K) = E_K = \frac{dK}{dx} \cdot \frac{x}{K} = \frac{dK}{dx} \cdot \frac{K}{x} \qquad (6)$$

და, მაშასადამე, **სრულ დანახარჯთა ელასტიკურობა არის ზღვრული დანახარჯების ფარდობა.**

$\pi = \frac{K}{x}$ – საშუალო დანახარჯის ელასტიკურობა შეადგენს:

$$E_x(\pi) = E_\pi = \frac{x}{\pi} \cdot \frac{d\pi}{dx} = \frac{x}{K/x} \cdot \frac{x\frac{dK}{dx} - K}{x^2} = \frac{x^2}{k} \cdot \frac{x\frac{dK}{dx} - K}{x^2} = \frac{x}{K}\frac{dK}{dx} - 1 = E_K - 1$$

და, მაშასადამე, **საშუალო დანახარჯთა ელასტიკურობა ერთეულით მცირე სრულ დანახარჯთა ელასტიკურობაზე.**

თუ $E_K = 1$, მაშინ საშუალო დანახარჯთა ელასტიკურობა ტოლია ნულის. ე.ი. $E_\pi = 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ საშუალო დანახარჯები მუდმივია. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$x\frac{dK}{dx} - K = 0 \quad \text{ან} \quad \frac{dK}{dx} = \frac{K}{x} \qquad (7)$$

მაშასადამე, თუ სრულ დანახარჯთა ელასტიკურობა ერთის ტოლია, მაშინ სრული ზღვრული დანახარჯები ტოლია სრული საშუალო დანახარჯებისა.

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რაში მდგომარეობს წარმოებულის ეკონომიკური აზრი?
2. რას ეწოდება წარმოების ზღვრული დანახარჯი?
3. განმარტეთ რას ეწოდება ზღვრული მოგება.
4. ჩამოაყალიბეთ ფუნქციის ელასტიკურობის ცნება.
5. ჩამოაყალიბეთ მოთხოვნილების ელასტიკურობა ფასის მიმართ.
6. რა შემთხვევაშია მოთხოვნილება ნეიტრალური?
7. როდისაა მოთხოვნილება არაელასტიკური?

8. განმარტეთ მიწოდებისელასტიკურობა ფასის მიმართ.
9. განმარტეთ სრულ დანახარჯთა ელასტიკურობა.
10. ჩამოაყალიბეთ საშუალო დანახარჯთა ელასტიკურობა.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1. სრულ დანახარჯთა მრუდს აქვს სახე *K=6log(1+3x)*. განსაზღვრეთ ზღვრულ დანახარჯთა მრუდი.
2. დაამტკიცეთ, რომ თუ $E_x[f(x)]$ არის *f(x)* ფუნქციის ელასტიკურობა, მაშინ *xf(x)* ფუნქციის ელასტიკურობა, არის $E_x[f(x)]+1$
3. გამოთვალეთ $y=x^3-1$ ფუნქციის ელასტიკურობა. იპოვეთ ფუნქციის ელასტიკურობის მაჩვენებელი, როცა: ა) $x=1$ ბ) $x=5$
4. გამოთვალეთ $y=e^{5x}$ ფუნქციის ელასტიკურობა. იპოვეთ ფუნქციის ელასტიკურობის მაჩვენებელი, როცა: ა) $x=1$ ბ) $x=0$ გ) $x=2$
5. გამოთვალეთ $y=5\log x$ ფუნქციის ელასტიკურობა. იპოვეთ ფუნქციის ელასტიკურობის მაჩვენებელი, როცა: ა) $x=10$ ბ) $x=e$ გ) $x=e^4$
6. გამოთვალეთ $y=ax+b$ ფუნქციის ელასტიკურობა, სადაც a და b მუდმივებია.
7. გამოთვალეთ $y=ax^m$ ფუნქციის ელასტიკურობა, სადაც a და b მუდმივებია.
8. რომელიღაც საქონლის მიწოდების ფუნქცია არის $S=\dfrac{20+4P^2}{1+10P}$, ხოლო მოთხოვნილების ფუნქციაა $q=\dfrac{25-P4P^2}{1+10P}$. განსაზღვრეთ წონასწორობის ფასი. ე.ი. ფასი, რომლის დროსაც მოთხოვნილება და მიწოდება წონასწორდება, აგრეთვე მოთხოვნილების ელასტიკურობა და მიწოდება ამ ფასისათვის.

§ 9. ეკონომიკური ამოცანები ფუნქციის ექსტრემუმის გამოკვლევაზე

მაგალითი 1: დაწესებულება თვეში ამზადებს პროდუქციის x ერთეულს. წარმოების ფინანსური დაგროვება დაკავშირებულია გამოშვებული პროდუქციის x მოცულობასთან ფორმულით:

$$A = -0{,}01x^3 + 300x - 500$$

ვიპოვოთ წარმოებული:

$$A' = -0{,}03x^2 + 300$$

აქედან გამომდინარე, $A' \prec 0$, თუ $-0{,}03x^2 + 300 \prec 0$, ანუ $3x^2 - 30000 \succ 0$, საიდანაც $x^2 - 10000 \succ 0$ უტოლობა სრულდება, როცა $x \prec -100$ ან $x \succ 100$.

მაშასადამე, თუ პროდუქციის გამოშვება გადააჭარბებს 100 ერთეულს, მაშინ წარმოების ფინანსური დაგროვება იკლებს.

მაგალითი 2: ვიგულისხმოთ, რომ რომელიმე საქონლის მოთხოვნილება განისაზღვრება ამ საქონლის ფასით შემდეგი ფორმულით

$$q = f(p)$$

სადაც, p –საქონლის ფასია, ხოლო q- შესაბამისი მოთხოვნილება. მოსახლეობის საერთო დანახარჯი ამ საქონელზე (ამონაგები საქონლის გაყიდვით) შეადგენს – $u = pq$, ხოლო ზღვრული მოგება არის

$$u' = q + pq' = q(1 + \frac{p}{q}q').$$

ვინაიდან მოთხოვნილების ალსტიკურობა ფასის მიმართ არის

$$E_c = -\frac{p}{q}q'$$

ამიტომ ვღებულობთ

$$u' = q(1 - E_c) \qquad (1)$$

ეს განტოლება განსაზღვრავს **დამოკიდებულებას საქონლის გაყიდვით მიღებულ მოგებსა და მოთხოვნილებას შორის**. (1) განტოლებიდან შეიძლება გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნები:

1. თუ E_c>1, მაშინ $u' \prec 0$, ე.ი. თუ მოთხოვნილება ელასტიკურია, მაშინ ფასის მომატებით, საქონლის გაყიდვით მიღებული შემოსავალი მცირდება.

2. თუ $E_c=1$, მაშინ $u'=0$, u მუდმივია. ეს ნიშნავს, რომ ნეიტრალური მოთხოვნილების დროს საქონლის გაყიდვით მიღებული შემოსავალი დამოკიდებულია არ არის ფასზე. ამ შემთხვევაში $pq=C$, საიდანაც $q=\frac{c}{p}$, სადაც c მუდმივია. მაშასადამე, ნეიტრალური მოთხოვნილების დროს მისი სიდიდე ფასის უკუპროპორციულია.
3. თუ $0 \prec E_c \prec 1$, მაშინ $u' \succ 0$, ე.ი. თუ მოთხოვნილება არაელასტიკურია, მაშინ ფასის მომატებით შემოსავალი იზრდება

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ მოცემული საქონლის მოთხოვნილების ელასტიკურობის ცოდნით, შეგვიძლია გამოვარკვიოთ ფასის ცვლილებით გამოწვეული შემოსავლის სიდიდე.

მაგალითი 3: მონოპოლისტური დაწესებულება, რომელიც დამახასიათებელია კაპიტალიზმისათვის, ამზადებს რომელიღაც პროდუქტს. მონოპოლისტურ დაწესებულებას აინტერესებს მაქსიმალური მოგება. ამ მიზანს, რომ მიაღწიოს, მას შეუძლია:

1. გაზარდოს წარმოება ფასების შეუცვლელად;
2. წარმოება დატოვოს უცვლელად, ხოლო ფასები შეუფარდოს მოთხოვნილებას;
3. ფასები დატოვოს უცვლელად, ხოლო წარმოების მოცულობა შეუფარდოს მოთხოვნილებას;

ვიგულისხმოთ, რომ მონოპოლისტური საწარმო ამზადებს მოცემული საქონლის x ერთეულს. მაშინ ფასი, რომლის დროსაც მოთხოვნილება x ერთეულის ტოლია, ვთქვათ, ასე განისაზღვრება $p=p(x)$. $K(x)$– ით ავღნიშნოთ წარმოების მთლიანი დანახარჯები x ერთეული პროდუქციის დსამზადებლად. მაშინ მოგება $z=u(x)-K(x)$ არის, აგრეთვე, x –ის ფუნქცია. ე.ი. $z=xp(x)-K(x)$ წარმოების მოგება იქნება მაქსიმალური, თუ შენარჩუნებულია ორი პირობა:

$$z'=0, \qquad z'' \prec 0$$

პირველი პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$u'(x)-K'(x)=0$$

ე.ი.

$$u'(x)=K'(x).$$

აქედან გამომდინარე, წარმოებას შეუძლია მაქსიმალური მოგების მიღება იმ შემთხვევაში, როდესაც ზღვრული მოგება ტოლია ზღვრული დანახარჯების.

მეორე პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$u''(x) - K''(x) \prec 0$$

ე.ი.

$$u''(x) \prec K''(x).$$

ეს ნიშნავს, რომ წარმოება მიიღებს მაქსიმალურ მოგებას, თუ ზღვრული მოგების ზრდის ტემპი ნაკლებია ზღვრული დანახარჯების ზრდის ტემპზე.

მაგალითი 4: მოცემულია:

1. საშუალო დანახარჯების ფუნქცია $\pi(x) = x$
2. მოთხოვნილების ფუნქციაა *p=10-3x*.

გამოიანგარიშეთ წარმოების მოცულობა, რომლის დროსაც შემოსავალი იქნება მაქსიმუმი.

მთლიანი დანახარჯი შეადგენს $K = x \cdot x = x^2$, ხოლო ზღვრული მთლიანი დანახარჯია $\frac{dk}{dx} = 2x$. მთლიანი შემოსავალი არის $u = xp = x(10-3x) = 10x - 3x^2$. ზღვრული მთლიანი შემოსავალი შეადგენს $\frac{du}{dx} = 10 - 6x$. მოვძებნოთ მეორე რიგის წარმოებული $\frac{d^2k}{dx^2} = 2$, $\frac{d^2u}{dx^2} = -6$. ადგილი აქვს უტოლობას $\frac{d^2u}{dx^2} \prec \frac{d^2k}{dx^2}$. მაშასადამე, მოგება იქნება მაქსიმალური, თუ $x = \frac{5}{4}$, საიდანაც მონოპოლისტური ფასი შეადგენს: $p = 10 - 3\frac{5}{4} = \frac{25}{4}$, მაშინ საშუალო დანახარჯები შეადგენენ $\pi = \frac{5}{4}$, ხოლო სრული დანახარჯებია:

$$K = \pi x = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{16}.$$

ზღვრული შემოსავალი არის

$$u = px = \frac{25}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{125}{16},$$

ხოლო მაქსიმალური შემოსავალია

$$z = u - k = \frac{125}{16} - \frac{25}{16} = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}.$$

დავალება:

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1. მთლიანი დანახარჯების ფუნქციას აქვს სახე: $K=x^3-6x^2+15x$ (x – პროდუქციის მოცულობაა) გამოთვალეთ, წარმოების როგორი მოცულობის დროს იქნება საშუალო დანახარჯები მინიმალური.
2. სითხის გადასაზიდ V მოცულობის მქონე რეზერვუარს აქვს ცილინდრის ფორმა. როგორი უნდა იყოს ცილინდრის ზომები, რომ მის დასამზადებლად საჭირო მასალის ღირებულება იყოს მინიმალური.
3. განსაზღვრეთ ფუნქციის ექსტრემუმი: ა) $y = x^3 - x^2 - 5x + 1$ ბ) $y = xe^x$ გ) $y = x^2e^x$
4. კონსერვის ქილას უნდა ჰქონდეს ცილინდრის ფორმა და 1დმ^3 მოცულობა. გამოთვალეთ, როგორი უნდა იყოს მისი ფუძის რადიუსი, რომ მისი ზედაპირის ფართობი იყოს მინიმალური.
5. R რადიუსიან სფეროში ჩახაზულია ცილინდრი. გამოთვალეთ ცილინდრის ფუძის r რადიუსი, რომლის დროსაც გვერდითი ზედაპიროს ფართი მაქსიმალურია.

§ 10. ორი ცვლადი ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა. კერძო წარმოებულები, სრული დიფერენციალი

1. ორი ცვლადის ფუნქცია. ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი. ჩვენ ხშირად ვხვდებით ისეთ ამოცანებს, რომელთა გადაწყვეტა შესაძლებელია მხოლოდ მრავალი დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის დახმარებით. მრავალსაქონლიანი ბაზრის მახასიათებლები დამოკიდებულია თითოეული საქონლის მოთხოვნასა და ფასზე, რასაც ბუნებრივად მივყავართ ერთზე მეტი ცვლადის ფუნქციამდე.

ასეთ დამოკიდებულებათა შესაწავლად უნდა შემოვიღოთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის ცნება. სიმარტივისათვის შევისწავლოთ შემთხვევა, როდესაც ცვლადების რაოდენობა ორის ტოლია.

განსაზღვრება 1. განვიხილოთ ორი ურთიერთდამოუკიდებელი x და y ცვლადი. ვთქვათ, (x,y) წყვილი იცვლება რაღაც D არეში. თუ (x,y) წყვილის ყოველ მნიშვნელობას D არედან, შეესაბამება გარკვეული z მნიშვნელობა, მაშინ ამბობენ, რომ z არის ორი დამოუკიდებელი x და y ცვლადების ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია D არეში.

x და y ცვლადებს უწოდებენ არგუმენტებს, ანუ დამოუკიდებელ ცვლადებს, ხოლო z დამოკიდებელ ცვლადს, ანუ ფუნქციას. ორი ცვლადის ფუნქციას სიმბოლურად ავღნიშნავთ:

$$z = f(x,y), \quad z=F(x,y), \quad \text{და ა.შ.}$$

განსაზღვრება 2. D არეს ეწოდება $z = f(x,y)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

მაგალითი 1: განსაზღვრეთ $z=3x-y$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

$3x-y$ – ანალიზურ გამოსახულებას აზრი აქვს x და y –ის ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის, ამიტომ მოცემული ფუნქცია განსაზღვრულია მთელ Oxy სიბრტყეზე.

მაგალითი 2: განსაზღვრეთ $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ანალიზური გამოსახულება $\sqrt{1-x^2-y^2}$ განსაზღვრულია x და y –ის იმ მნიშვნელობებისათვის, როცა $1-x^2-y^2 \geq 0$ ანუ $x^2+y^2 \leq 1$. მაშასადამე, მოცემული ფუნქციის განასაზღვრის არე იქნება ერთეულრადიუსიანი წრე, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, ხოლო მისი საზღვარი $x^2+y^2=1$ წრეც ეკუთვნის განსაზღვრის არეს.

შემოვიტანოთ **ცნება.** Oxy სიბრტყის $M_0(x_0,y_0)$ წერტილის მიდამო ეწოდება x და y ცვლადების იმ მნიშვნელობათა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას:

$$|x-x_0| \prec \eta, \qquad |y-y_0| \prec \eta$$

სადაც, η ნებისმიერად მცირე დადებითი რიცხვია.

ვიტყვით. რომ $Z=f(x,y)$ ფუნქციას $M_0(x_0,y_0)$ წერტილზე ზღვარად აქვს A რიცხვი, თუ ყოველ ნებისმიერ $\varepsilon \succ 0$ შეესაბამება ისეთი მცირე $\eta \succ 0$ რიცხვი, რომ, როცა $|x-x_0| \prec \eta$, $|y-y_0| \prec \eta$, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\left|f(x,y)-A\right| \prec \varepsilon \tag{1}$$

ამ გარემოებას ასე ჩაწერენ:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

ვთქვათ, $Z=f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $M_0(x_0,y_0)$ ის რაიმე მიდამოში და თვით m_0 წერტილზეც. ამბობენ, რომ $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია არგუმენტთა x_0 და y_0 მნიშვნელობებისათვის ($f(x,y)$ფუნქცია უწყვეტია $M_0(x_0,y_0)$ წერტილზე), თუ ყოველ წინასწარ აღებულ ნებისმიერად მცირე $\varepsilon \succ 0$ რიცხვს ისეთი $\eta \succ 0$ რიცხვი შეესაბამება, რომ ყველა x და y მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას:

$$|x-x_0| \prec \eta, \quad |y-y_0| \prec \eta,$$

მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\left|f(x,y)-f(x_0,y_0\right| \prec \varepsilon \tag{2}$$

ან, თუ ავღნიშნავთ: $x-x_0=\Delta x$ და $y-y_0=\Delta y$ (Δx და Δy არგუმენტების ნაზრდებია), მაშინ (2) უტოლობა შემდეგნაირად გადაიწერება

$$\left|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0\right| \prec \varepsilon \quad , \quad \text{როცა } |\Delta x| \prec \eta,\ |\Delta y| \prec \eta \tag{3}$$

ე.ი. თუ ფუნქცია უწყვეტია, მაშინ არგუმენტის უსასრულოდ მცირე ნაზრდებს ფუნქციის უსასრულოდ მცირე ნაზრდები შეესაბამება. მე–(3) პირობა შეგვიძლია შემდეგი სახითაც გადავწეროთ:

$$\lim f(x,y)=f(\lim x,\lim y) \tag{4}$$

ამბობენ, რომ $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია რომელიმე D არეში, თუ იგი უწყვეტია ამ არის ყოველ წერტილზე.

თუ (3) ან (4) პირობას ადგილი არა აქვს, ასეთ შემთხვევაში $f(x,y)$ ფუნქცია წყვეტილია $M_0(x_0,y_0)$ წერტილში.

მაგალითი 3. $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ფუნქცია წყვეტილია $(x=0, y=0)$ მნიშვნელობისათვის, რადგან, როცა $x=y=0$, მაშინ ფუნქციას არა აქვს არავითარი აზრი. თუმცა, თუ z-ს განვიხილავთ, როგორც მხოლოდ x-ის (ან მხოლოდ y-ის) ფუნქციას, მაშინ იგი უწყვეტია $x=0$ (ან $y=0$) მნიშვნელობისათვის.

ფუნქციის უწყვეტობიდან გამომდინარე უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ, თუ $f(x,y)$ ფუნქცია უწყვეტია ორივე ცვლადის მიმართ ერთდროულად, მაშინ იგი აუცილებლად უწყვეტი იქნება თითოეული ცვლადის მიმართ ცალ-ცალკე, მაგრამ შებრუნებულ დასკვნას საზოგადოდ ადგილი არა აქვს. ე. ი. მრავალი ცვლადის ფუნქცია უწყვეტი შეიძლება იყოს თითოეული არგუმენტის მიმართ ცალ-ცალკე, მაგრამ იგი არ აღმოჩნდება უწყვეტი ერთდროულად ყველა ცვლადის მიმართ. რისი დასტურიცაა განხილული მაგალითი.

$z=f(x,y)$ ფუნქცია წყვეტილია $M_0(x_0,y_0)$ წერტილში, თუ

1. იგი განსაზღვრულია M_0 წერტილის ნებისმიერ მიდამოში, გარდა თვით m_0 წერტილისა.
2. იგი განსაზღვრულია M_0 წერტილის რაიმე მიდამოს ყოველ წერტილში, მაგრამ არ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$
3. იგი განსაზღვრულია M_0 წერტილის რაიმე მიდამოში და არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$, მაგრამ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \neq f(x_{0,}y_0)$

მაგალითი 4. ფუნქცია $z = x^2 + y^2$ უწყვეტია ნებისმიერი x და y–ისათვის Oxy სიბრტყიდან. მართლაც,

$$\Delta z = \left[(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2\right] - (x^2+y^2) = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

მაშასადამე, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 2x\cdot 0 + 2y\cdot 0 + 0^2 + 0^2 = 0$

მაგალითი 5. ფუნქცია $z = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ განსაზღვრულია მთელ Oxy სიბრტყეზე გარდა $x=y=0$ წერტილისა. განვიხილოთ მისი z მნიშვნელობა $y = kx$ $(k = const)$ წრფის გასწვრივ. ცხადია, რომ

$$z = \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2} = const \quad .$$

როგორც ვხედავთ z ფუნქცია მუდმივია ყოველ წრფეზე, რომელის გადის კოორდინატთა სათავეზე და იგი დამოკიდებულია ამ წრფის k _ საკუთხო კოეფიციენტზე. ამიტომ ზღვარითი მნიშვნელობა დამოკიდებულია იმ წრფეზე, რომელზედაც ვმოძრაობთ Oxy სიბრტყეში. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ იგი წყვეტილია (0,0) წერტილში. ცხადია იგი უწტვეტია Oxy სიბრტყის სხვა ნებისმიერ წერტილში.

განვიხილოთ ორი ცვლადის

$$z=f(x,y) \tag{5}$$

ფუნქცია განსაზღვრული რაიმე D არეში. ჩავთვალოთ y მუდმივად, ე.ი. დავტოვოთ იგი უცვლელად (მუდვივად) და განვიხილოთ z, როგორც მხოლოდ x–ის ფუნქცია. ახლა x ცვლადს მივცეთ Δx ნაზრდი, მაშინ z-იც მიიღებს სათანადო ნაზრდს, რომელიც $\Delta_x z$ – ით ავღნიშნოთ. ე. ი. $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$;

$\Delta_x z$ სიდიდეს ეწოდება აღებული ფუნქციის **კერძო ნაზრდი** x–ით. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის **კერძო წარმოებული** x–ით და მას აღნიშნავენ შესაბამისად $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ან $f'_x(x,y)$ -ით.

ე.ი.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \tag{6}$$

ანალოგიურად განიმარტება კერძო წარმოებულები y–ით; გვექნება

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \tag{7}$$

მაგალითი 6: ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია:

$$z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}; \quad \text{ვიპოვოთ } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ და } \frac{\partial z}{\partial y}.$$

კერძო წარმოებულების განმარტების თანახმად გაწარმოების წესები უცვლელია, მხოლოდ როდესაც ვაწარმოებთ ერთ-ერთი ცვლადით, მაშინ მეორე რჩება უცვლელი – მუდმივი. მაშასადამე, გვექნება

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\left(x^2+y^2\right)'_x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\left(x^2+y^2\right)'_y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

განვმარტოთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის კერძო დიფერენციალები.

$f'_x(x,y)\Delta x$ ნამრავლს, ან, რაც იგივეა $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x$ გამოსახულებას, სადაც Δx არის x არგუმენტის ნაზრდი, ეწოდება $f(x,y)$ **ფუნქციის კერძო დიფერენციალი** x–ით და მას აღნიშნავენ

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x \tag{8}$$

კერძოდ, თუ $z \equiv x$, მაშინ $dx = \Delta x$, ამიტომ (8) ტოლობა შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx \tag{9}$$

ანალოგიურად განიმარტება z ფუნქციის კერძო დიფერენციალი y-ით, ე.ი.

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy \tag{10}$$

ისევე, როგორც ერთი ცვლადის შემთხვევაში, **ფუნქციის სრული დიფერენციალი ეწოდება ფუნქციის ნაზრდის მთავარ ნაწილს.** როცა ეს დიფერენციალი არსებობს, იგი უდრის ყველა არგუმენტის მიმართ კერძო დიფერენციალთა ჯამს და აღინიშნება dz -ით. ე.ი.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = f_x' dx + f_x' dy \tag{11}$$

მაგალითი 7. $z = arctg\frac{x}{y}$, იპოვეთ dz

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(arctg \frac{x}{y} \right)_x' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} \left(\tfrac{x}{y} \right)_x' = \frac{y^2}{x^2 + y^2} * \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(arctg \frac{x}{y} \right)_y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} \left(\tfrac{x}{y} \right)_y' = \frac{y^2}{x^2 + y^2} * \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

მაშასადამე

$$dz = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

2. მეორე რიგის კერძო წარმოებულები: განვიხილოთ ორი ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია $z = f(x, y)$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x, y)$ და $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y'(x, y)$ იყოს მისი პირველი რიგის კერძო წარმოებულები x–ით და y–ით. საზოგადოდ, ეს კერძო წარმოებულები, თავის მხრივ, წარმოადგენენ x და y ცვლადების ფუნქციებს. ასე, რომ შეგვიძლია განვიხილოთ ამ კერძო წარმოებულების კერძო წარმოებულები. პირველი რიგის კერძო წარმოებულების კერძო წარმოებულებს ეწოდება $f(x,y)$ ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები. ორი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში გვექნება ოთხი მეორე რიგის წარმოებულები და ისინი აღინიშნება ასე:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{x^2}'' , \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}''$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}'' , \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{y^2}''$$

f_{xy}'' და f_{yx}'' ეწოდება **შერეული წარმოებულები**.

საზოგადოდ, $z=f(x,y)$ ფუნქციის (*n-1*) - რიგის კერძო წარმოებულების წარმოებულს ეწოდება *n* - რიგის კერძო წარმოებული და აღინიშნება ასე:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right)=\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right)=\frac{\partial^n z}{\partial y\partial x^{n-1}} \quad \text{და ა.შ.}$$

როგორც ვხედავთ ორი ცვლადის ფუნქციის შემთხვევაში გვაქვს ორი მეორე რიგის შერეული წარმოებულები: f_{xy}'' და f_{yx}''. ბუნებრივად ისმის ამოცანა: რა პირობებშია ისინი ერთმანეთის ტოლი? ამ კითხვაზე პასუხს გვაძლევს

შვარცის თეორემა: თუ *f*(*x,y*) ფუნქცია უწყვეტია და აქვს უწყვეტი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები, მაშინ მართებულია ტოლობა:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

მეორე რიგის შერეული წარმოებულები არ არის დამოკიდებული გაწარმოების თანამიმდევრობაზე. (აქ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ წარმოადგენს *z* ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულს, აღებულს ჯერ y −ით და შემდეგ x −ით, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ კი პირიქით).

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქცია?
2. რას ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი?
3. რას ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის უწყვეტობა”?
4. რას ეწოდება ფუნქციის კერძო ნაზრდი?
5. მოიყვანეთ ორი ცვლადის ფუნქციის კერძო წარმოებულის განმარტება?

6. რას ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი?
7. რას ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები?
8. როგორ აღინიშნება ორი ცვლადის ფუნქციის მეორე რიგის კერძო წარმოებულები?
9. მოიყვანეთ შვარცის თეორემა.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1. გამოთვალეთ ზღვრები:

ა) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}(3x^2-2x^2y)$ ბ) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ გ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy+x^2+y+x}{xy+x+y^2+x}$

2. იპოვეთ წყვეტის წერტილები

ა) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ბ) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}$

3. იპოვეთ შემდეგ ფუნქციათა პირველი რიგის კერძო წარმოებულები და სრული დიფერენციალი

ა) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{y^2}$ ბ) $f(x,y)=x^2-y^2$ გ) $f(x,y)=\sqrt{1+xy}$

დ) $f(x,y)=xy-x^2y^3+y$ ე) $f(x,y)=e^{x+y}$ ვ) $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2\right)y^3$

იპოვეთ: f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, f_{yx}

ა) $f(x,y)=x^2y^4$ ბ) $f(x,y)=e^{2x+3y}$ გ) $f(x,y)=e^{x-y}$

§. 11 ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი. პირობითი ექსტრემუმი. ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი.

1. ორი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი. პირობითი ექსტრემუმი. ვთქვათ, $z = f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე D არეში და წერტილი $M_0(x_0, y_0) \in D$.

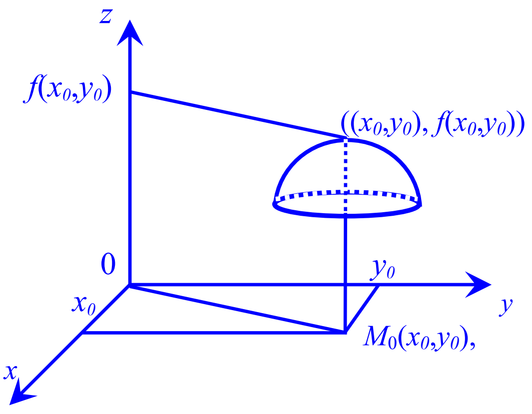
ამბობენ, რომ $z = f(x,y)$ ფუნქცია M_0 წერტილში აღწევს მაქსიმუმს (მხედველობაში გვაქვს შედარებითი მაქსიმუმი), თუ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \prec 0,$$

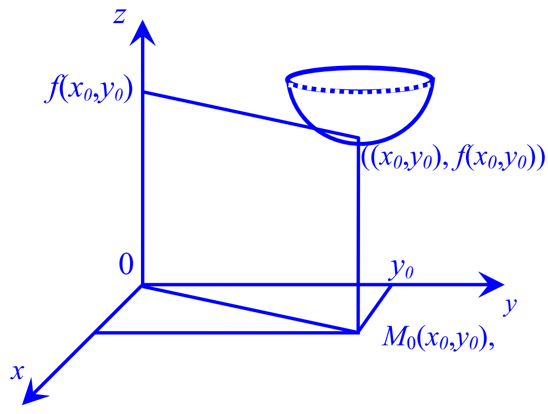
როგორიც არ უნდა იყოს მცირე h და k სიდიდეები; პირიქით $z = f(x,y)$ ფუნქცია M_0 წერტილში აღწევს მინიმუმს, თუ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \succ 0,$$

როგორიც არ უნდა იყოს h და k; (ნახ. 1, 2)



ნახ. 1



ნახ. 2

თეორემა1: იმისათვის, რომ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე $z = f(x,y)$ ფუნქციას ჰქონდეს მაქსიმუმი ან მინიმუმი, მაშინ ***აუცილებელია,*** რომ

$$f_x'(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{და} \qquad f_y'(x_0, y_0) = 0 \qquad (1)$$

ისეთ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1) განტოლებათა სისტემას, **კრიტიკული** წერტილები ეწოდება. მათ, აგრეთვე, **სტაციონარულ** წერტილებსაც უწოდებენ.

აღნიშნული თეორემა გვიჩვენებს, რომ ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ კრიტიკულ წერტილებს შორის. შევნიშნოთ, რომ ისევე, როგორც ერთი ცვლადის ფუნქციებისათვის, აქაც პირველი რიგის კერძო წარმოებულების ნულთან ტოლობა წარმოადგენს ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას.

ჩამოვაყალიბოთ ექსტრემუმის არსებობის **საკმარისი პირობები:** შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$A = f''_{x^2}(x_0, y_0), \qquad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \qquad C = f''_{y^2}(x_0, y_0)$$

თეორემა 2: თუ სტაციონალურ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში $z = f(x, y)$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი მეორე რიგის კერძო წარმოებულები, მაშინ

1. $f(x, y)$ აქვს მაქსიმუმი, თუ $AC - B^2 \succ 0$ და $A \prec 0$;
2. $f(x, y)$ აქვს მინიმუმი, თუ $AC - B^2 \succ 0$ და $A \succ 0$;
3. $f(x, y)$ ფუნქციას არც მინიმუმი აქვს და არც მაქსიმუმი, თუ $AC - B^2 \prec 0$

მაგალითი 1: გამოვიკვლიოთ $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ ფუნქცია მაქსიმუმსა და მინიმუმზე.

ა) ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილები:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 3y^2 - 3x = 0 \end{aligned}\right\}$$

მიღებული სისტემის ამოხსნა გვაძლევს შემდეგ ორ კრიტიკულ წერტილს

$$(x_1 = 1; y_1 = 1) \qquad \text{და} \qquad (x_2 = 0; y_2 = 0)$$

ბ). ვიპოვოთ მეორე რიგის წარმოებულები:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3$$

გ) გამოვიკვლიოთ (1,1) წერტილის ხასიათი

$$A = (6x)_{\substack{x=1\\y=1}} = 6; \qquad B = (-3)_{\substack{x=1\\y=1}} = -3; \qquad C = (6y)_{\substack{x=1\\y=1}} = 6;$$

$$AC - B^2 = 36 - 9 = 27 \succ 0; \qquad A = 6 \succ 0;$$

მაშასადამე (1,1) წერტილში ფუნქციას აქვს მინიმუმი და

$$z_{\min} = \left(x^3 + y^3 - 3xy\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$$

გამოვიკვლიოთ მეორე (0,0) წერტილის ხასიათი:

$$A=0, \ B=-3, \ C=0; \quad AC - B^2 = -9 \prec 0$$

მაშასადამე, მოცემულ წერტილზე ფუნქციას არც მინიმუმი აქვს და არც მაქსიმუმი.

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ამოცანები, რომლებშიც საჭიროა მოიძებნოს მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმი ისეთ სიტუაციაში, როდესაც არგუმენტები აკმაყოფილებენ რაიმე დამატებით პირობებს. ასეთ ამოცანებს ეწოდებათ **პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები.**

2. ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი. შევისწავლოთ ორი ცვლადის ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის მოძებნის **ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი.**

ვთქვათ, მოსაძებნია $z = f(x, y)$ ფუნქციის ექსტრემუმი, როდესაც დამოუკიდებელი ცვლადები ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი პირობით

$$g(x, y) = 0$$

ამ უკანასკნელ ტოლობას ზოგჯერ უწოდებენ **ბმის განტოლებას**. შემოვიღოთ ახალი დამხმარე ფუნქცია $F(x, y, \lambda)$, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით: $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

$F(x, y, \lambda)$ **–ს უწოდებენ ლაგრანჟის ფუნქციას, ხოლო** λ **-ს ლაგრანჟის მამრავლს.**

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ იმ M წერტილის x და y კოორდინატები, რომლებიც აკმაყოფილებენ $g(x, y) = 0$ განტოლებას და რომლისთვისაც $z = f(x, y)$ ფუნქციის შეიძლება ჰქონდეს პირობითი მაქსიმუმი ან მინიმუმი, საჭიროა გამოვთვალოთ $F(x, y, \lambda)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები *x, y* და λ ცვლადებით. ამისათვის ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = f'_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = f'_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = g(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

მიღებული სისტემა წარმოადგენს პირობითი ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას.

$M_0(x_0, y_0)$ წერტილს, რომლის x_0 და y_0 კოორდინატები აკმაყოფილებენ (2) სისტემას, უწოდებენ პირობით ექსტრემუმის სტაციონალურ წერტილს ბმის $g(x, y) = 0$ განტოლების მიმართ.

ცხადია, რომ თუ (x_0, y_0, λ_0) არის (2) სისტემის ამონახსნი, მაშინ $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ წერტილი წარმოადგენს ლაგრანჟის $F(x, y, \lambda)$ ფუნქციის სტაციონალურ წერტილს.

ახლა მოვიყვანოთ პირობითი ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები: ვთქვათ, (x_0, y_0, λ_0) არის (2) სისტემის ამონახსნი. ამასთან, ვგულისხმობთ, რომ

f(x,y) და *g(x,y)* ფუნქციებს $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში აქვთ მეორე რიგის კერძო წარმოებულები. შევადგინოთ შემდეგი დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ g'_y(x_0, y_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix} \qquad (3)$$

მტკიცდება, რომ თუ $\Delta > 0$, მაშინ *z=f(x,y)* ფუნქციას $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში აქვს პირობითი მინიმუმი, ხოლო $\Delta < 0$, მაშინ *z=f(x,y)* ფუნქციას $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში აქვს პირობითი მაქსიმუმი.

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი?
2. რას ეწოდება ორი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი?
3. რას ეწოდება ექსტრემუმის წერტილები და ექსტრემუმები?
4. მოიყვანეთ ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა.
5. რას ეწოდება სტაციონალური წერტილები?
6. რას ეწოდება კრიტიკული წერტილები?
7. მოიყვანეთ ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები.
8. რას ეწოდება პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები?
9. მოიყვანეთ პირობითი ექსტრემუმის მოძებნის ლაგრანჟია მამრავლთა მეთოდი.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1. იპოვეთ მოცემულ ფუნქციათა კრიტიკული წერტილები:

ა) $z = (x-1)^2 + 2y^2$ ბ) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x - y$

გ) $z = x^4 + y^4 + 4xy - 2y^2 + 2x^2$ დ) $z = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

2. გამოთვალეთ შემდეგ ფუნქციათა ექსტრემუმები:

ა) $f(x, y) = 5x^4 + y^4 - 2y^2 + 2x^2$ ბ) $f(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2$

გ) $f(x,y)=x^3+y^3+3x-4y+7$ დ) $f(x,y)=xy(x-y)+y^2-4y$

3. ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ პირობითი ექსტრემუმები:

ა) $\begin{cases} f(x,y)=3x^2+y^2 \\ x+y=4 \end{cases}$ ბ) $\begin{cases} f(x,y)=-x^2+xy-4y^2 \\ x+y=-4 \end{cases}$

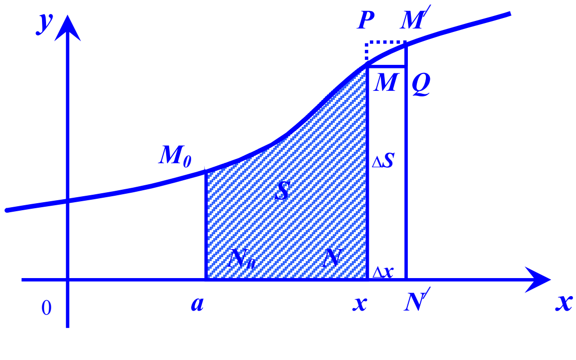
გ) $\begin{cases} f(x,y)=2x^2+xy+y^2+x \\ 2x+y-3=0 \end{cases}$ დ) $\begin{cases} f(x,y)=-2x^2+xy-y^2+3x+y \\ 2x+3y+11=0 \end{cases}$

თავი VI. ინტეგრალური აღრიცხვის ელემენტები და მათი ზოგიერთი გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში

§1. განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტება. ძირითადი თვისებები. ძირითადი ინტეგრალების ცხრილი. უშუალო ინტეგრება

1. პირველადი ფუნქცია. როგორც ვიცით დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითად ამოცანას შეადგენს აღებული ფუნქციის წარმოებულის ან დიფერენციალის მოძებნა. ახლა დავსვათ შებრუნებული ამოცანა. სახელდობრ: ვთქვათ, მოცემულია რომელიმე $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრული რაიმე შუალედში. ვიპოვოთ ის $F(x)$ ფუნქცია, რომლის წარმოებულია $f(x)$, ან სხვაგვარად, ვიპოვოთ ის ფუნქცია, რომლის დიფერენციალია $f(x)dx$. ისეთ $F(x)$ ფუნქციას, რომელსაც წარმოებულად აქვს მოცემული $f(x)$ ფუნქცია ან დიფერენციალად $f(x)dx$, თუ ასეთი არსებობს, მაშინ მას ეწოდება **$f(x)$-ის პირველყოფილი ან პირველადი ფუნქცია**. ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითად საგანს შეადგენს მოცემული ფუნქციის მიხედვით მისი პირველყოფილების აღდგენა. აქ ბუნებრივად ისმის საკითხი: რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს $f(x)$ ფუნქცია, რომ მისი პირველადების არსებობდეს და მას შემდეგ რაც ვიცით, რომ $f(x)$ ფუნქციის პირველადი არსებობს, როგორ ვიპოვოთ იგი. ჯერ ვუჩვენოთ თვალსაჩინო მსჯელობით, რომ კერძოდ, თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია რომელიმე შუალედში, მაშინ მას ყოველთვის ექნება პირველყოფილი. მართლაც ავიღოთ მრუდი (ნახ. 1), რომლის განტოლებაა:

$$y = f(x) \tag{1}$$



ნახ. 1

M_0 იყოს ამ მრუდის მკვიდრი წერტილი a აბსცისით, ხოლო M ცვლადი წერტილი x აბსცისით. მრუდწიროვანი N_0M_0MN ტრაპეციის ფართობი, ცხადია, წარმოადგენს x –ის გარკვეულ ფუნქციას; ავღნიშნოთ იგი $S(x)$-ით; დავამტკიცოთ, რომ სწორედ $S(x)$ ფუნქცია არის $f(x)$-ის პირველყოფილი; ამისათვის x –ს მივცეთ Δx ნაზრდი. M' იყოს მრუდის წერტილი, რომლის აბსცისა არის $x+\Delta x$, მაშინ $S(x+\Delta x)-S(x)$ იქნება $NMM'N'$ ნაკვთის ფართობი. ნახაზიდანნ აშკარად ჩანს, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$m\Delta x \le S(x+\Delta x)-S(x) \le M\Delta x,$$

სადაც m და M არის $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობანი $[x, x+\Delta x]$ შუალედში. გავყოთ ეს უტოლობა Δx –ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც Δx მიისწრაფის ნულისაკენ; რადგან $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ m და M მიისწრაფის $f(x)$-საკენ და მაშასადამე

$$\frac{dS(x)}{dx} = f(x) \tag{2}$$

ამგვარად, $S(x)$ ფართობი ყოფილა $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი (*ეს დამტკიცება ემყარება თვალსაჩინო გეომეტრიულ მოსაზრებებს მრუდისა და ფართობის შესახებ. არსებითად აქ მხოლოს ისაა გარკვეული, რომ თუ ამ მრუდწირულ ტრაპეციასთან დაკავშირებულია x –ის გარკვეული ადიტიური ფუნქცია (ფართობი), ამ უკანასკნელის წარმოებული არის* $f(x)$ ფუნქცია).

ეს მსჯელობა ნათელყოფს აგრეთვე, რომ $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ყოველთვის არსებობს, როცა $f(x)$ უწყვეტია. ამგვარად, გეომეტრიული თვალსაზრისით პირველყოფილი წარმოადგენს იმ ფართობს, რომელიც ზემოდან შემოსაზღვრულია $y=f(x)$ მრუდით, ქვემოდან Ox ღერძის (a, x) მონაკვეთითა და გვერდებიდან სათანადო ორდინატებით.

ახლა ვთქვათ, $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი. შევისწავლოთ არსებობს თუ არა იმავე $f(x)$ ფუნქციის სხვა პირველყოფილი და როგორი სახე აქვს მას. თუ $\Phi(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის სხვა რომელიმე პირველყოფილი, მაშინ ცხადია, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Phi'(x) = F'(x) = f(x),$$

მაგრამ ლაგრანჟის თეორემის შედეგის თანახმად, თუ ორ ფუნქციას აქვს ერთნაირი წარმოებული, მაშინ ისინი ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ მუდმივით, ამიტომ $f(x)$ ფუნქციის ყოველ სხვა $\Phi(x)$ პირველყოფილს აქვს სახე

$$\Phi(x)=F(x)+C$$

სადაც, C მუდმივია.

ამრიგად, $F(x)+C$ გამოსახულება, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, არის $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილის ზოგადი სახე.

ზემოთ მოყვანილი მტკიცებები თეორემების სახით ასე ჩამოყალიბდება:

თეორემა 1: თუ $F(x)$ ფუნქცია $f(x)$ ფუნქციის პირველადია რაიმე შუალედში, მაშინ $F(x)+C$ ფუნქცია აგრეთვე $f(x)$ ფუნქციის პირველადია მოცემულ შუალედში, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

თეორემა 2*:* რაიმე შუალედში უწყვეტ ფუნქციას აქვს პირველადი ფუნქცია ამ შუალედში.

თეორემა 3*:* თუ $F(x)$ და $\Phi(x)$ წარმოადგენენ $f(x)$ ფუნქციის პირველად ფუნქციებს რაიმე შუალედში, მაშინ მოიძებნება ისეთი C მუდმივი, რომ ამ შუალედში ადგილი ექნება ტოლობას: $\Phi(x)=F(x)+C$. ე. ი. $f(x)$ ფუნქციის ორი პირველადი ფუნქცია ერთმანეთისაგან მხოლოდ მუდმივი შესაკრებით განსხვავდება.

განსაზღვრება: ***f*(*x*) ფუნქციის ყველა პირველად ფუნქციათა ერთობლიობას ეწოდება განუსაზღვრელი ინტეგრალი** $f(x)$ ფუნქციიდან და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int f(x)dx .$$

$\int$ **სიმბოლოს ეწოდება ინტეგრების ნიშანი;**

$f(x)$ –ს **ინტეგრალქვეშა ფუნქცია;**

$f(x)dx$–ს კი **ინტეგრალქვეშა გამოსახულება.**

თუ $F(x)$ ფუნქცია არის $f(x)$ ფუნქციის რომელიმე პირველადი ფუნქცია, მაშინ წერენ:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

თუ $f(x)$ ფუნქციას (a,b) ინტერვალში აქვს პირველადი, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ინტეგრებადია ამ ინტერვალში. **მოცემული ფუნქციიდან განუსაზღვრელი ინტეგრალის მოძებნას ფუნქციის ინტეგრება ეწოდება.**

ჩვემ ქვემოთ შევისწავლით ზოგად წესებს სხვადასხვა დიფერენციალისათვის განუსაზღვრელი ინტეგრალის მოსაძებნად; მაგრამ, ამასთანავე, ყველგან ფუნქციათა ისეთ კლასთან გვექნება საქმე, რომლის ინტეგრება ელემენტარულ ფუნქციებში სასრული სახით ხდება. ე.ი. ისეთ ფუნქციებთან, რომელთა

პირველყოფილი გამოისახება სასრული სახით ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით.

უნდა აღინიშნოს, რომ ხშირად გარეგნულად მარტივი ინტეგრალი არ გამოისახება ელემენტარულ ფუნქციებში სასრული სახით. ასეთია მაგალითად, ინტეგრალები:

$$\int \frac{dx}{lnx}\,, \qquad \int \frac{sinx}{x}dx\,, \qquad \int \frac{e^{x}}{x}dx\,, \int \frac{cosx}{x}dx\,, \qquad \int sinx^{2}\,dx\,, \qquad \int cosx^{2}\,dx$$

და სხვ.

რა თქმა უნდა ეს იმას არ ნიშნავს, რომ ეს ინტეგრალები არ არსებობენ; პირიქით, შეიძლება გარკვეულად ითქვას, რომ ეს ინტეგრალები არსებობენ (რადგან, როგორც ზემოთ ვნახეთ, ყოველ უწყვეტ ფუნქციას აქვს პირველყოფილი), მხოლოდ ისინი არ გამოისახებიან სასრული სახით ელემენტარული ფუნქციებით და თვითონ წარმოადგენენ ახალ ფუნქციებს. **როდესაც ინტეგარლი ელემენტარული ფუნქციებით არ გამოისახება, მოკლედ ამბობენ, რომ იგი უმაღლესი ტრანსედენტული ფუნქციაა.** სასრული სახით არ ამოიხსნება შემდეგი ინტეგრალებიც:

$$\int \frac{e^{x}}{x^{n}}dx\,, \quad \int \frac{sinx}{x^{n}}dx\,, \quad \int \frac{cosx}{x^{n}}dx \qquad (n = 1, 2, \ldots ,)$$ და სხვ.

2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები:

1. $\int f'(x)\cdot dx = f(x) + C$; ანუ $\int df(x)\cdot dx = f(x) + C$

2. $\frac{d}{dx}\int f'(x)\cdot dx = f(x) + C$; ანუ $d\int df(x)\cdot dx = f(x) + C$

3. $\int [f(x) \pm g(x)]\cdot dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

4. $\int Af(x)\cdot dx = A\int f(x)dx + C$, $(A = const, A \neq 0)$

5. $\left[\int f(x)\cdot dx\right]' = f(x) + C$

მე-3 თვისება მართებულია შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

3. ძირითად ინტეგრალთა ცხრილი. ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულთა ცხრილის გამოყენებით მარტივად მივიღებთ ძირითადი ინტეგრალების შემდეგ ცხრილს:

1. $\int 1 \cdot dx = x + C$

2. $\int x^{\alpha} \cdot dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$

3. $\int a^{x} \cdot dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$

4. $\int e^{x} \cdot dx = e^{x} + C$

5. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$

11. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left[x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right] + C$

ეს ფორმულები მიიღება დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი ფორმულების უშუალო შებრუნებით. მაგალითდ, რომ დავრწმუნდეთ შემდეგი ტოლობის მართებულობაში $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left[x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right] + C$, ამისათვის საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ $\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$ ფუნქციის წარმოებული არის $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$; მართლაც რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად, გვექნება

$$\left(\ln\left[x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right]\right)' = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

4. უშუალო ინტეგრება. ინტეგრალი ზოგიერთი მარტივი დიფერენციალიდან შეიძლება პირდაპირ გამოვთვლოთ იმ წესების გამოყენებით, რომლებიც დიფერენციალურ აღრიცხვაში გამოვიმუშავეთ. ინტეგრალის გამოთვლის ასეთ წესს უწოდებენ **უშუალო ინტეგრების წესს**. ზემოთ მოყვანილი ფორმულები საშუალებას გვაძლევს სხვადასხვა შემთხვევაში უშუალო ინტეგრება შევასრულოთ:

მაგალითი 1: გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int (6x^3 + 3x^2 + 1)\,dx$$

ამოხსნა: მე-3 და მე-4 თვისებისა და მე-3 და მე-4 ფორმულების თანახმად

$$\int (6x^3 + 3x^2 + 1)dx = 6\int x^3 dx + 3\int x^2 dx + \int dx = 6\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + x + C = 3\frac{x^4}{2} + x^3 + x + C$$

მაგალითი 2: გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \left(2\sqrt[3]{x} - \frac{7}{x} + 4\cos x \right) dx$$

ამოხსნა:

$$\int \left(2\sqrt[3]{x} - \frac{7}{x} + 4\cos x \right) dx = 2\int x^{\frac{1}{3}} dx - 7\int \frac{dx}{x} + 4\int \cos x dx = \frac{3}{2} x\sqrt[3]{x} - 7\ln|x| + 4\sin x + C$$

მაგალითი 3: გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int (5\cos t + 2\sin t)dt$$

ამოხსნა: $\int (5\cos t + 2\sin t)dt = 5\int \cos t dt + 2\int \sin t dt = 5\sin t - 2\cos t + C$

მაგალითი 4: გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int x^2 (1 + x^3)^3 dx$$

ამოხსნა:

$$\int x^2 (1 + x^3)^3 dx = \int x^2 (1 + 3x^3 + 3x^6 + x^9)dx = \int (x^2 + 3x^5 + 3x^8 + x^{11})dx =$$

$$= \int x^2 dx + 3\int x^5 dx + 3\int x^8 dx + \int x^{11} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{3}x^9 + \frac{1}{12}x^{12}$$

მაგალითი 5: გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx$$

ამოხსნა:

$$\int \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx = 2\int \frac{dx}{\sin^2 x} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -2ctgx - 3\arcsin x = C$$

მაგალითი 6: გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \left(\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) dx$$

ამოხსნა:

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = tgx - ctgx + C$$

მაგალითი 7: გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)dx$$

ამოხსნა:

$$\int\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)dx=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int dx-\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=x-arctgx+C$$

საზოგადოდ, იმის შესამოწმებლად, სწორად არის გამოთვლილი ინტეგრალი თუ არა, უნდა მივმართოთ გაწარმოებას; თუ ინტეგრალის წარმოებული ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ტოლია, მაშინ ინტეგრალი სწორად არის გამოთვლილი.

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება პირველადი ფუნქცია?
2. მოიყვანეთ თეორემა პირველადი ფუნქციის არსებობის შესახებ.
3. მოიყვანეთ თეორემა პირველადი ფუნქციის ერთადერთობის შესახებ.
4. მოიყვანეთ განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტება.
5. რას ეწოდება ინტეგრალქვეშა ფუნქცია? ინტეგრალქვეშა გამოსახულება?
6. მოიყვანეთ ძირითადი ინტეგრალების ცხრილი.
7. ჩამოთვალეთ ინტეგრალის თვისებები.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

გამოთვალეთ ინტეგრალები;

1. $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$ 2. $\int\sqrt{x\sqrt[3]{x}}\,dx$ 3. $\int a^x e^x dx$

4. $\int\frac{xe^x-x}{x}dx$ 5. $\int a^x(1+\frac{a^{-x}}{x^4})\,dx$ 6. $\int e^x(1-\frac{e^{-x}}{x^2})\,dx$

7. $\int tg^2 x dx$ 8. $\int ctg^2 x dx$ 9. $\int \frac{1}{\sqrt{3-3x^2}} dx$

10. $\int (\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}) dx$ 11. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$

12. $\int (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2 dx$ 13. $\int 2\sin^2\frac{x}{2}\, dx$

14. $\int 2\cos^2\frac{x}{2}\, dx$ 15. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$

§ 2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის გამოთვლის ხერხები

1. ჩასმის ხერხი. ინტეგრალის გამოთვლის დროს ხშირად სასარგებლოა ინტეგრალის ქვეშ არსებული ცვლადის (ზოგჯერ ამ ცვლადს ინტეგრების ცვლადს უწოდებენ) მაგიერ ახალი ცვლადის შემოტანა. ამას ის აზრი აქვს, რომ ზოგიერთ შემთხვევაში ახალი ცვლადის შემოტანით ინტეგრალქვეშა გამოსახულება იმდენად მარტივდება, რომ იგი უკვე ცნობილ სახემდე დაიყვანება. ე.ი. შესაძლებელია $\int f(x)dx$ –ის ინტეგრება გამარტივდეს ახალი t ცვლადის შემოტანით, რომელიც x ცვლადთან დაკავშირებულია სათანადოდ შერჩეული დამოკიდებულებით $x=g(t)$.

ვთქვათ, $x=g(t)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია (α,β) ინტერვალში, $a \prec g(t) \prec b$, როცა $\alpha \prec t \prec \beta$ და $f(x)$ უწყვეტია (a,b) ინტერვალში , მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt$$

ეს არის ინტეგრალქვეშა **ცვლადის გარდაქმნის** ფორმულა. მას ხშირად **ჩასმის ხერხს** უწოდებენ.

ვთქვათ, $F'(x) = f(x)$, მაშინ $F[g(t)]$ იქნება $f[g(t)]g'(t)$ ფუნქციის პირველადი:

$$(F[g(t)])' = F'_x[g(t)]g'(t) = f[g(t)]g'(t)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\int f[g(t)]g'(t)dt = F[g(t)] = F(x) + C = \int f(x)dx$$

მაგალითი 1: გამოვთვალოთ $\int \frac{ln^2 x}{x}dx$

ამოხსნა: გამოვიყენოთ ჩასმა: $lnx=t$, მაშინ $\frac{dx}{x} = dt$ და

$$\int \frac{ln^2 x}{x}dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

მაგალითი 2: გამოვთვალოთ $\int \frac{1}{a^2 + b^2 x^2}dx$, $a \neq 0, b \neq 0$.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ ჩასმა: $x = \frac{a}{b}t$, მაშინ $dx = \frac{a}{b}dt$ და გამოსათვლელი ინტეგრალი მიიღებს სახეს:

$$\int \frac{1}{a^2 + b^2 x^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\frac{b}{a}dt}{1 + t^2} = \frac{1}{ab}arctgt + C = \frac{1}{ab}arctg\frac{bx}{a} + C$$

ზოგჯერ, ნაცვლად $x = g(t)$ ჩასმისა, უფრო მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ $t = \varphi(x)$ ჩასმა. მაგალითად, თუ გამოსათვლელია ინტეგრალი

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx,$$

მაშინ, თუ $t = \varphi(x)$, საიდანაც $dt = \varphi'(x)dx$ და

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\varphi(x)| + C$$

მაგალითი 3: გამოვთვალოთ $\int tgxdx$

ამოხსნა: გვაქვს

$$\int tgxdx = \int \frac{\sin xdx}{\cos x}\left|\begin{array}{c}\cos x = t \\ -\sin xdx = dt\end{array}\right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t + C = -\ln|\cos x| + C$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$$

მაგალითი 4: გამოვთვალოთ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}dx$,

ამოხსნა: $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}dx = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{bx}{a}\right)^2}} = \left|\begin{matrix} \frac{bx}{a}=t \\ dx=\frac{a}{b}dt \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\frac{a}{b}dx}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{b}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{b}\arcsin t + C = \frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a} + C$$

მაგალითი 5: გამოვთვალოთ $\int \frac{1}{a^2-b^2x^2}dx$,

ამოხსნა:

$$\int \frac{1}{a^2-b^2x^2}dx = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+bx}+\frac{1}{a-bx}\right)dx = \frac{1}{2a}\int \frac{1}{a+bx}dx + \frac{1}{2a}\int \frac{1}{a-bx}dx =$$

$$= \frac{1}{2ab}\int \frac{d(a+bx)}{a+bx} - \frac{1}{2ab}\int \frac{d(a-bx)}{a-bx} = \frac{1}{2ab}\ln|a+bx| - \frac{1}{2ab}\ln|a-bx| = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{a+bx}{a-bx}\right|$$

მაგალითი 6: გამოვთვალოთ $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$,

ამოხსნა: მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა $x = a\sin t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

აქედან,

$$dx = a\cos t dt \quad t = \arcsin\frac{x}{a} \quad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$$

მაშასადამე,

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int a^2\cos^2 t dt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t dt =$$

$$= \frac{a^2t^2}{2} + \frac{a^2}{4}\int \cos 2t dt = \frac{a^2t^2}{2} + \frac{a^2\sin 2t}{4} + C$$

თუ დავუბრუნდებით ისევ x ცვლადს, მივიღებთ

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C$$

მაგალითი 7: გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}},$$

სადაც k ნებისმიერი რიცხვია.

ამოხსნა: შემოვიღოთ აღნიშვნა $y=\sqrt{x^2+k}$, გვაქვს:

$$dy=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+k}}=\frac{xdx}{y} \qquad \text{აქედან} \qquad \frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}$$

თუ ვისარგებლებთ პროპორციის ერთ-ერთი თვისებით, გვექნება:

$$\frac{dx}{y}=\frac{dx+dy}{y+x}=\frac{d(x+y)}{x+y}$$

მაშასადამე

$$I=\int\frac{dx}{y}=\int\frac{d(x+y)}{x+y}=\ln|x+y|+C$$

ამრიგად,

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)+C\,.$$

თუ $k=a^2$, მაშინ მიღებული ფორმულა ასე გადაიწერება

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$$

ხოლო თუ $k=-a^2$, მაშინ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C$$

2. ნაწილობითი ინტეგრება. ვთქვათ, $u=u(x)$ და $v=v(x)$ რაიმე შუალედში უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია, მაშინ გვაქვს:

$$d(uv)=udv+vdu$$

საიდანაც

$$udv=d(uv)-vdu$$

მოვახდინოთ ტოლობის ორივე მხარის ინტეგრება, მივიღებთ:

$$\int udv=uv-\int vdu$$

უკანასკნელ ტოლობას ეწოდება **ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა**. ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს $\int udv$ ინტეგრალის გამოთვლა დავიყვანოთ $\int vdu$ -ის გამოთვლაზე, რომელიც შეიძლება უფრო მარტივი აღმოჩნდეს ვიდრე პირველი.

ქვემოთ მოცემულია დიფერენციალები, რომელთა ინტეგრება საჭიროა ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით. ფრჩხილებში მითითებულია, თუ როგორ უნდა შევარჩიოთ *u* ფუნქცია და *dv* დიფერენციალი.

1. $P(x)\sin mx dx, \quad (u = P(x),\ dv = \sin mx dx)$
2. $P(x)\cos mx dx, \quad (u = P(x),\ dv = \cos mx dx)$
3. $P(x)\ln x dx, \quad (u = \ln x,\ dv = P(x)dx)$
4. $P(x)\arcsin x dx, \quad (u = \arcsin x,\ dv = P(x)dx)$
5. $P(x)\mathrm{arctg} x dx, \quad (u = \mathrm{arctg} x,\ dv = P(x)dx)$
6. $P(x)e^{\alpha x} dx, \quad (u = P(x),\ dv = e^{\alpha x} dx)$
7. $e^{\alpha x}\sin mx dx, \quad \begin{cases} u = e^{\alpha x},\ dv = \sin mx dx \ \text{an} \\ u = \sin mx,\ dv = e^{\alpha x} dx \end{cases}$
8. $e^{\alpha x}\cos mx dx, \quad \begin{cases} u = e^{\alpha x},\ dv = \cos mx dx \ \text{an} \\ u = \cos mx,\ dv = e^{\alpha x} dx \end{cases}$

მაგალითი 8: გამოვთვალოთ $\int x^\alpha \ln x dx$, სადაც $\alpha \neq 1$

ამოხსნა: შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$u = \ln x$ და $dv = x^\alpha dx$, მაშინ $du = \frac{dx}{x}$ და $v = \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

გვექნება: $$\int x^\alpha \ln x dx = \ln x \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\int x^\alpha dx = nx\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{(\alpha+1)^2}x^\alpha + C$$

მაგალითი 9: გამოვთვალოთ $\int x\cos x dx$,

ამოხსნა: გვექნება $x = u$, $dx = du$

$$\cos x dx = dv, \quad v = \int \cos x dx = \sin x$$

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$$

მაგალითი 9: გამოვთვალოთ $\int x\,\mathrm{arctg} x dx$,

ამოხსნა: გვექნება $u = \mathrm{arctg} x$, $\frac{dx}{1+x^2} = du$

$dv = xdx, \quad v = \int xdx = \frac{1}{2}x^2$

$$\int xarctgxdx = \frac{1}{2}x^2 arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}x^2 arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 arctgx - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}arctgx + C$$

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. ახსენით, რაში მდგომარეობს ჩასმის ხერხი?
2. მოიყვანეთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1. ჩასმის ხერხით იპოვეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$ 2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$

3. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x}dx$ 4. $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$

5. $\int \sqrt{1+4\sin x}\cos xdx$ 6. $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}dx$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{tgx-1}}dx$ 8. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$

9. $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$ 10. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ 11. $\int a^{\sin x}\cos xdx$

12. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}dx$ 13. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

14. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$ 15. $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

2. ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით იპოვეთ შემდეგი ინტეგრალები:

16. $\int x\ln xdx$ 17. $\int x\sin xdx$

18. $\int x^5\ln xdx$ 19. $\int xa^x dx$

§ 3. ზოგიერთი ტრანსცედენტული ფუნქციების ინტეგრება

როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ, ალგებრულ ფუნქციათა ინტეგრება რთულ ამოცანას წარმოადგენს; ამასთანავე, ალგებრულ ფუნქციათა მხოლოდ ვიწრო კლასის ინტეგრება შეიძლება ელემენტარულ ფუნქციებში. თუ ეს ითქმის ალგებრულ ფუნქციათა ინტეგრალის მიმართ, მით უმეტეს იგი შეიძლება ითქვას ტრანსცედენტულ ფუნქციათა ინტეგრალის შესახებ და, ამგვარად, ტრანსცედენტული ფუნქციების ბოლომდე ინტეგრება მხოლოდ მცირეოდენ კერძო შემთხვევებშია შესაძლებელი. ჩვენ მხოლოდ ამ შემთხვევებს გავეცნობით. ქვემოთ მოყვენილ ჩასმებს ზოგჯერ **ტრიგონომეტრიულ ჩასმებს უწოდებენ**.

1. ყოველი ინტეგრალი

$$\int R[g(x)]g'(x)dx$$

სადაც R არის $g(x)$ უწყვეტად წარმოებადი არგუმენტის რაციონალური ფუნქცია, $t=g(x)$ ჩასმის გამოყენებით მიიყვანება t ცვლადის მიმართ რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალის გამოთვალზე.

მართლაც,

$$\int R[g(x)]g'(x)dx = \begin{vmatrix} g(x)=t \\ g'(x)dx=dt \end{vmatrix} = \int R(t)dt$$

ა) განვიხილოთ ინტეგრალი $\int R(\sin x)\cos xdx$,

სადაც R არის $sinx$ –ის რაციონალური ფუნქცია. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობა, მოგვცემს:

$$\int R(\sin x)\cos xdx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ \cos xdx = dt \end{vmatrix} = \int R(t)dt$$

ასე, მაგალითად

$$\int \frac{\cos xdx}{1+\sin^2 x} = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos xdx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{1+t^2} = arctgt + C = arctd(\sin x) + C$$

ბ) განვიხილოთ ინტეგრალი $\int R(\cos x)\sin xdx$, აქ გვექნება

$$\int R(\cos x)\sin xdx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin xdx = dt \end{matrix} \right| = -\int R(t)dt$$

გ) $\int R(tgx)\frac{dx}{\cos^2 x}$ ინტეგრალის გამოთვლა ***t=tgx*** ჩასმით მიიყვანება რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებამდე:

$$\int R(tgx)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int R(t)dt$$

ასე მაგალითად,

$$\int tg^3 x\frac{dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{matrix} tgx = t \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{matrix} \right| = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + c = \frac{1}{4}tg^4 x + c$$

2. ახლა განვიხილოთ შემდეგი სახის ინტეგრალი

$$\int R(\sin x, \cos x)dx ,$$

სადაც R არის *sinx* და *cosx* არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია. ეს ინტეგრალი $tg\frac{x}{2} = t$ ჩასმის საშუალებით მიიყვანება t ცვლადის რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალის გამოთვლამდე. ან როგორც ამბობენ, აღნიშნული ჩასმა ახდენს გამოსათვლელი ინტეგრალის რაციონალიზაციას. ამ ჩასმის განსახორციელებლად გავიხსენოთ სასკოლო პროგრამის ცნობილი ფორმულები:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1 + tg^2\frac{x}{2}\right)} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}\left(1 - tg^2\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1 + tg^2\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

გარდა ამისა ჩასმიდან მივიღებთ:

$$\frac{x}{2} = arctgt, \qquad x = 2arctgt \quad \text{და ამიტომ} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

ამრიგად, გვაქვს:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot \frac{2}{1+t^2}dt$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში გვაქვს ინტეგრალი t ცვლადის რაციონალური ფუნქციიდან.

მაგალითი 1: გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$

განხილული ჩასმის გამოყენება მოგვცემს:

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \left| \begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2dt}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C$$

3. გამოვთვალოთ ინტეგრალები:

$$\int \sin\alpha x\cos\beta x dx, \qquad \int \sin\alpha x\sin\beta x dx \quad \text{და} \quad \int \cos\alpha x\cos\beta x dx, \quad \text{სადაც} \quad \alpha \neq \pm\beta$$

გვექნება:

1. $$\int \sin\alpha x\cos\beta x dx = \int \frac{\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x}{2}dx = \frac{1}{2}\int \sin(\alpha+\beta)x dx + \frac{1}{2}\int \sin(\alpha-\beta)x dx =$$
$$= -\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} - \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} + C$$

2. $$\int \sin\alpha x\sin\beta x dx = \frac{1}{2}\int \cos(\alpha-\beta)x dx - \frac{1}{2}\int \cos(\alpha+\beta)x dx = -\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} - \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} + C$$

3. $$\int \cos\alpha x\cos\beta x dx = \frac{1}{2}\int \cos(\alpha-\beta)x dx + \frac{1}{2}\int \cos(\alpha+\beta)x dx = \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} + \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} + C$$

4. განვიხილოთ შემდეგი სახის ინტეგრალი

$$\int \sin^m x\cos^n x dx\ ,$$

ა) თუ $n=2k+1$ კენტი ნატურალური რიცხვია, მაშინ შემოვიტანოთ აღნიშვნა $sinx=t$, მაშინ $cosxdx=dt$. და მივიღებთ

$$\int \sin^m x\cos^n x dx = \int \sin^m x\cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x\cos^{2k} x\cos x dx =$$

$$= \int \sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^k \cos x dx = \int t^m\left(1-t^2\right)^k dt$$

ბ) თუ $m=2k+1$ კენტი ნატურალური რიცხვია, მაშინ შემოვიტანოთ აღნიშვნა $\cos x=t$, მაშინ $-\sin xdx=dt$, $\sin xdx=-dt$. და მივიღებთ

$$\int \sin^m x\cos^n xdx = \int \sin^{2k+1} x\cos^n xdx = \int \sin^{2k} x\cos^n x\sin xdx =$$

$$= \int \cos^n x\left(1-\cos^2 x\right)^k x\sin xdx = -\int t^n\left(1-t^2\right)^k dt$$

მაგალითი 2: გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int \sin^5 x\cos^4 xdx$

რადგან $m=5$, ამიტომ $\cos x=t$, მაშინ $-\sin xdx=dt$, $\sin xdx=-dt$. და მივიღებთ

$$\int \sin^5 x\cos^4 xdx = \int \sin^4 x\cos^4 x\sin xdx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \cos^4 x\sin xdx =$$

$$= -\int \left(1-t^2\right)t^4 dt = -\int t^4 dt + 2\int t^6 dt - \int t^8 dt = -\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{7}t^7 - \frac{1}{9}t^9 + C =$$

$$= -\frac{1}{5}\cos^5 + \frac{2}{7}\cos^7 - \frac{1}{9}\cos^9 + C$$

გ) თუ m და n დადებითი ლუწი რიცხვებია, მაშინ ვსარგებლობთ ტრიგონომეტრიული იგივეობებით

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

რომელთა საფუძველზეც შესაძლებელია $\sin x$ –ისა და $\cos x$-ის ხარისხების დაწევა

დ) $m+n=0$ და n და m მთელი რიცხვებია, მაშინ მოცემული ინტეგრალი შეიძლება დაყვანილ იქნას შემდეგ ინტეგრალებზე

$$\int tg^m xdx, \quad (m \succ 0) \quad \text{ან} \quad \int ctg^n xdx \quad (n \succ 0)$$

პირველ შემთხვევაში ავღნიშნავთ $tgx=t$, მაშინ $\sec^2 xdx = dt$

$$dx = \frac{dt}{\sec^2 x} = \frac{dt}{1+tg^2 x} = \frac{dt}{1+t^2}$$

ამიტომ $$\int tg^m xdx = \int \frac{t^m dt}{1+t^2}$$

მეორე შემთხვევაში ავღნიშნავთ $ctgx=t$, მაშინ $-\cos ec^2 xdx = dt$

$$dx = -\frac{dt}{\cos ec^2 x} = -\frac{dt}{1+t^2}$$ ამიტომ

$$\int ctg^n xdx = -\int \frac{t^n dt}{1+t^2}$$

მაგალითი 3: გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int \sin^3 x\cos^{-3} xdx$

აქ $m+n=0$, ამიტომ

$$\int \sin^3 x\cos^{-3} xdx = \int \frac{\sin^3 xdx}{\cos^3 x} = \int tg^3 xdx = \int \frac{t^3dt}{1+t^2} = \int \left(t - \frac{t}{1+t^2} \right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C = \frac{1}{2}tg^2 x - \frac{1}{2}\ln(tg^2 x + 1) + C$$

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რაში მდგომარეობს უნივერსალური ჩასმა?
2. ჩამოთვალეთ $\int \sin^m x\cos^n xdx$ ინტეგრალის გამოთვლის კერძო შემთხვევები
3. რომელი იგივეობებით ვსარგებლობთ $\int \sin x\cos xdx,\quad \int \cos x\cos xdx,\quad \int \sin x\sin xdx$ სახის ინტეგრალების გამოთვლისას.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 xdx$ 2. $\int \sin^4 xdx$ 3. $\int \sin^2 x\cos^2 xdx$

4. $\int \sin 9x\sin 3xdx$ 5. $\int \cos 3x\cos 2xdx,$ 6. $\int \cos^2 xdx$

7. $\int \sin^2 xdx$ 8. $\int \cos^3 xdx$ 9. $\int tg^2 xdx$ 10. $\int \frac{1}{1-\cos x}dx,$

11. $\int \frac{1}{1+\sin x}dx$ 12. $\int \frac{1}{\sin x}dx$ 13. $\int \frac{1}{\cos x}dx$ 14. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx,$

15. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$ 16. $\int \sin^3 x\cos^3 xdx$ 17. $\int \sin^4 xdx$ 18. $\int \cos^5 xdx$

19. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx,$ 20. $\int \frac{1-\sin x}{\cos x}dx$ 21. $\int \frac{1}{5+4\sin x}dx$

22. $\int \frac{1}{5-3\cos x}dx$ 23. $\int \sin 3x\cos 7xdx$ 24. $\int \cos 2x\cos 4xdx,$

§ 4. კვადრატული სამწევრის შემცველი ზოგიერთი დიფერენციალის ინტეგრება

1. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

სადაც $a\neq 0,\ b,\ c$ ნამდვილი რიცხვებია. ამისათვის გამოვიდეთ შემდეგი იგივეობიდან:

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2-\left(b^2-4ac\right)\right]$$

მაშინ,

$$I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=4a\int\frac{dx}{(2ax+b)^2-\left(b^2-4ac\right)}=\left|\begin{array}{c}2ax+b=t\\ dx=\dfrac{dt}{2a}\end{array}\right|=2\int\frac{dt}{t^2-\left(b^2-4ac\right)}.$$

აქედან ცხადია, რომ ინტეგრალი მთლიანად დამოკიდებულია ax^2+bx+c სამწევრის b^2-4ac დისკრიმინანტზე. განვიხილოთ შემთხვევები:

ა) $b^2-4ac=0$, მაშინ გვექნება $I=2\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{2}{t}+C=-\frac{2}{2ax+b}+C$;

ბ) $b^2-4ac\succ 0$, ამიტომ შეგვიძლია ავღნიშნოთ $k^2=b^2-4ac$ გვექნება $I=2\int\frac{dt}{t^2-k^2}$, ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\frac{1}{t^2-k^2}=\frac{1}{(t-k)(t+k)}=\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{t-k}-\frac{1}{t+k}\right),$$

მაშასადამე,

$$I=2\int\frac{dt}{t^2-k^2}=\frac{1}{k}\int\frac{dt}{t-k}-\frac{1}{k}\int\frac{dt}{t+k}=\frac{1}{k}\ln|t-k|-\frac{1}{k}\ln|t+k|+C=\frac{1}{k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|+C$$

გ) $b^2-4ac\prec 0$, მაშინ $b^2-4ac=-k^2$ და

$$I=2\int\frac{dt}{z^2+k^2}=\frac{2}{k}arctg\frac{z}{k}+C=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}arctg\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C$$

საბოლოოდ

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} -\dfrac{2}{2ax+b}+C, & \text{თუ } b^2-4ac=0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C, & \text{თუ } b^2-4ac \succ 0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,arctg\,\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C, & \text{თუ } b^2-4ac \prec 0 \end{cases}$$

ამრიგად, როდესაც ax^2+bx+c სამწევრის დისკრიმინანტი ნულის ტოლია, მაშინ ინტეგრალი წარმოადგენს რაციონალურ ფუნქციას; როცა იგი დადებითია, მაშინ ინტეგრალი არის ლოგარითმული ფუნქცია; ხოლო როცა დისკრიმინანტი უარყოფითი რიცხვია, მაშინ ინტეგრალი გამოისახება არკტანგენს ფუნქციით.

განვიხილოთ მაგალითები

მაგალითი 1:

$$\int \frac{dx}{2x^2+12x+18} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+3)^2} = \frac{1}{2}\int (x+3)^{-2}d(x+3) = -\frac{1}{2(x+3)}+C$$

მაგალითი 2:

$$\int \frac{dx}{x^2+8x+32} = \int \frac{dx}{(x+4)^2+16} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x+4)}{(x+4)^2+16} = \frac{1}{4}arctg\frac{x+4}{4}+C$$

მაგალითი 3:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+1} = \int \frac{dx}{(x^2+4x+4)-3} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right|+C$$

2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad \text{სადაც} \quad a \neq 0$$

ამ ინტეგრალის მოსაძებნად განვიხილოთ ორი შემთხვევა

ა) $a \succ 0$. ამ შემთხვევაში კვადრატული სამწევრი ასე წარმოვადგინოთ

$$ax^2+bx+c = \frac{(2ax+b)^2+(4ac-b^2)}{4a}$$

მაშასადამე,

$$I = \int \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{(2ax+b)^2+(4ac-b^2)}} = \left|\begin{matrix} 2ax+b=t \\ dx=\dfrac{dt}{2a} \end{matrix}\right| = \frac{\sqrt{a}}{a}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+(4ac-b^2)}} = \frac{\sqrt{a}}{a}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+(4ac-b^2)}}$$

მივიღეთ წინა მაგალითში განხილული ინტეგრალი, რომლის თანახმად

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\left(4ac-b^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(t+\sqrt{t^2+\left(4ac-b^2\right)}+C\,.$$

დავუბრუნდეთ ძველ x ცვლადს, მივიღებთ:

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left((2ax+b)+\sqrt{4a(ax^2+bx+c)}\right)+C = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left[2\sqrt{a}\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\right]+C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right)+C_1$$

სადაც,

$$C_1 = C+\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(2\sqrt{a}\right).$$

ბ) $a \prec 0$. ამ შემთხვევაში კვადრატული სამწევრი ასე წარმოვადგინოთ

$$ax^2+bx+c = \frac{\left(b^2-4ac\right)-(2ax+b)^2}{-4a},$$

მაშასადამე,

$$I = 2\sqrt{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(b^2-4ac\right)-(2ax+b)^2}} = \left|\begin{matrix} 2ax+b=t \\ dx=\dfrac{dt}{2a}\end{matrix}\right| = \frac{\sqrt{-a}}{a}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(4ac-b^2\right)-t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{t}{\sqrt{\left(b^2-4ac\right)}}+C = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-(2ax+b)}{\sqrt{\left(b^2-4ac\right)}}+C$$

ამრიგად,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\dfrac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right)+C_1, & \text{როდესაც } a \succ 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\dfrac{-(2ax+b)}{\sqrt{\left(b^2-4ac\right)}}+C, & \text{როდესაც } a \prec 0 \end{cases}$$

მაგალითი 4:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+13}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+6x+9\right)+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2+4}} =$$

$$= \int \frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2+4}} = \ln\left|x+3+\sqrt{(x+3)^2+4}\right|+C$$

მაგალითი 5:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-\left(1+2x+x^2\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(1+x)^2}} =$$

$$= \int \frac{d(1+x)}{\sqrt{4-(1+x)^2}} = \arcsin \frac{1+x}{2} + C$$

მაგალითი 6: გამოვთვალოთ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{16}{9}-\left(\frac{1}{3}+x\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left(\frac{1}{3}+x\right)}{\sqrt{\frac{16}{9}-\left(\frac{1}{3}+x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\frac{1}{3}+x}{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{3x+1}{4} + C$$

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. როგორი გამოსახულება მიიღება ax^2+bx+c სამწევრის სრულ კვადრატამდე შევსებით?
2. როგორი სახის ინტეგრალზე დაიყვანება $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, როცა $b^2-4ac=0$
3. როგორი სახის ინტეგრალზე დაიყვანება $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, როცა $b^2-4ac\neq 0$
4. როგორი სახის ინტეგრალზე დაიყვანება $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, როცა $b^2-4ac\neq 0$

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+1}}$ 2. $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$ 3. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$ 4. $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}$

5. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$ 6. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}$ 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x+9x^2}}$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$ 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$ 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+4}}$

§ 5. რაციონალური ფუნქციების ინტეგრება

განსაზღვრება: ორი $P_n(x)$ და $Q_m(x)$ მრავალწევრის ფარდობას რაციონალური ფუნქცია ეწოდება:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m} \quad . \qquad (1)$$

ზოგადობის შეუზღუდველად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. $P_n(x)$ და $Q_m(x)$ მრავალწევრებს საერთო ფესვები არ გააჩნიათ. თუ მათ აქვთ საერთო ფესვები, მაშინ მათ საერთო მამრავლი ექნებათ და შეგვიძლია მასზე შევკვეცოთ.

2. $P_n(x)$ მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია $Q_m(x)$ მრავალწევრის ხარისხზე.

3. $b_0=1$.

ჩვენი მიზანია გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int R(x)dx .$$

თუ $n \geq m$, მაშინ მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფით მივიღებთ

$$R(x)=q(x)+\frac{\varphi(x)}{Q(x)} \ ,$$

სადაც $q(x)$ მრავალწევრია, $\frac{\varphi(x)}{Q(x)}$ წესიერი წილადია, ე.ი. $\varphi(x)$ -ის ხარისხი ნაკლებია $Q_m(x)$ -ის ხარისხზე. გვექნება:

$$\int R(x)dx = \int q(xdx) + \int \frac{\varphi(x)}{Q(x)}dx \quad ,$$

სადაც $\int q(x)dx$ უშუალოდ გამოითვლება.

I. $Q(x)$ მარავალწევრს აქვს ნამდვილი და მარტივი ფესვები.. ვთქვათ, $Q(x)$ -ის ფესვები $a,b,c,...,l$ ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ უმაღლესი ალგებრიდან ცნობილია, რომ

$$Q(x) = (x-a)(x-b) + \cdots + (x-l) \quad ,$$

მაშინ ეს წილადი ასე წარმოიდგინება:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots + \frac{L}{x-l}$$

II. მრავალწევრის ფესვები ნამდვილია, მაგრამ ჯერადი.

ვთქვათ, $Q(x)$ -ის ფესვები $a,b,c,...,l$ ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო მათი ჯერადობის მაჩვენებლებია $\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\lambda$ რიცხვები (ცხადია $\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\lambda$ მთელი დადებითი რიცხვებია). ამ შემთხვევში მართებულია ტოლობა:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}} = \frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} +$$

$$+ \frac{B_0}{(x-a)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-a)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{x-a} + \cdots + \frac{L_0}{(x-a)^{\lambda}} + \frac{L_1}{(x-a)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-a}$$

ამგვარად, მივიღეთ, რომ **რაციონალური ფუნქიის ინტეგრება დაიყვანება ყოველთვის ელემენტარულ ფუნქციათა ინტეგრებაზე**. ამიტომ ამბობენ, რომ **ინტეგრალი რაციონალური ფუნქციიდან აიღება ელემენტარულ ფუნქციებში**. უკანასკნელ ტოლობაში მონაწილე უცნობი კოეფიციენტები შეიძლება განისაზღვროს ე.წ. კოეფიციენტთა გატოლების ხერხით, რომლის შინაარსი ქვემოთ მაგალითებზე იქნება გაშუქებული.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$.

ამოხსნა: ინტეგრალქვეშა ფუნქცია დაიშლება შემდეგი სახით:

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{c}{x-4} \quad ,$$

საიდანაც მნიშვნელისაგან განთავისუფლების შემდეგ მივიღებთ:

$$x^2+2x+6 = A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + c(x-1)(x-2) \quad .$$

$$x^2+2x+6 = (A+B+c)x^2 + (-6A-5B-3c)x + (8A+4B+2c) \quad .$$

ამ იგივეობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილების x ცვლადის თანატოლი ხარისხების კოეფიციენტები გაუტოლოთ ერთმანეთს; მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -6A-5B-3C=2 \\ 8A+4B+2C=6 \end{cases}$$

მიღებული სისტემის ამონახსნებია

$$A=3, \quad B=-7, \quad C=5.$$

ამრიგად ინტეგრალქვეშა ფუნქციის დაშლას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4} \quad .$$

ე.ი.

$$\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx=3\int\frac{dx}{x-1}-7\int\frac{dx}{x-2}+5\int\frac{dx}{x-4}=$$

$$=3\ln|x-1|-7\ln|x-2|+5\ln|x-4|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{(x-1)^2(x-4)^5}{(x-2)^7}\right|+C\,.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx \quad .$$

ამოხსნა:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+3} \quad ,$$

$$x^2+1=A(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)^2(x+3)+D(x-1)^3$$

მიღებულ ტოლობაში, თუ დაუშვებთ $x=1$, მივიღებთ $2=4A$, $A=\frac{1}{2}$, ხოლო თუ დაუშვებთ, რომ $x=-3$, მივიღებთ $10=-64D$, $D=-\frac{5}{32}$;

ამის შემდეგ კოეფიციენტთა შედარებით მივიღებთ: $C=\frac{5}{32}$, $B=\frac{3}{8}$. ამრიგად, ინტეგრალქვეშა ფუნქციის დაშლას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{8(x-1)^2}+\frac{5}{32(x-1)}-\frac{5}{32(x+3)}$$

მაშასადამე,

$$\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{5}{32}\int\frac{dx}{(x-1)}-\frac{5}{32}\int\frac{dx}{(x+3)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^3}+\frac{3}{8}\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}+\frac{5}{32}\int\frac{d(x-1)}{(x-1)}-\frac{5}{32}\int\frac{d(x+3)}{(x+3)}=$$

$$=-\frac{1}{4(x-3)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\left[\ln|x-1-\ln|x+3||\right]+C$$

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. როგორი სახით შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს რაციონალური ფუნქცია?
2. როგორ იშლება $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ფუნქცია, როცა *Q(x)* მრავალწევრს აქვს მარტივი ფესვები?
3. როგორ იშლება $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ფუნქცია, როცა *Q(x)* მრავალწევრს აქვს ნამდვილი ჯერადი ფესვები?
4. რა სახის ინტეგრალებზე დაიყვანება $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ ინტეგრალის გამოთვლა?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1. $\int\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$ 2. $\int\frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)}dx$ 3. $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$

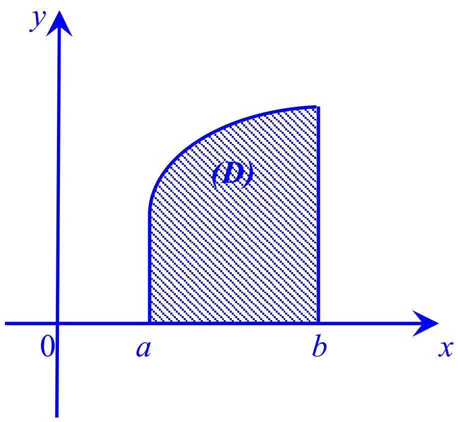
4. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$ 5. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$ 6. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx$

7. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$ 8. $\int \frac{dx}{x^3+1}$ 9. $\int \frac{x^5dx}{x^3-1}$

§ 6. განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება. ნიუტონ–ლაიბნიცის ფორმულა. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის ხერხები.

1. განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება: ელემენტარული გეომეტრიიდან ცნობილია მხოლოდ ისეთი ბრტყელი ფიგურების გამოთვლა, რომლებიც შემოსაზღვრულია წრფეთა მონაკვეთებითა და წრეწირების რკალებით. ნებისმიერი ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა შეიძლება ინტეგრალური აღრიცხვის გამოყენებით. მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნება განსაზღვრული ინტეგრალი ისტორიულად დაკავშირებულია რკალის სიგრძის, ფიგურის ფართობისა და სხეულის მოცულობის გამოთვლის ამოცანებთან. ამასთან დაკავშირებით მოვიყვანოთ წარსულის ერთი საინტერესო ამბავი - 1613 წელს ავსტრიის სამეფო კარის მათემატიკოსსა და ასტროლოგს იოჰან კეპლერს ქორწილი ჰქონდა და რამოდენიმე კასრი ღვინო შეიძინა. ღვინის ყიდვისას მეტად გააოცა იმ გარემოებამ, რომ გამყიდველი კასრის ტევადობის გასაგებად მხოლოდ მანძილს ზომავდა ღვინის ჩასასხმელი ჭრილიდან კასრის უშორეს წერტილამდე. ასეთი გაზომვა, ხომ სავსებით არ ითვალისწინებდა კასრის ფორმას! კეპლერი უცებ მიხვდა, რომ ეს იყო მეტად საინტერესო მათემატიკური ამოცანა: კასრის მოცულობის გაანგარიშება რამდენიმე გაზომვით. ამ ამოცანაზე ფიქრის დროს მან იპოვა არა მარტო კასრის გამოსათვლელი ფორმულა, არამედ აგრეთვე ფორმულები ერთმანეთისაგან ისეთი განსხვავებული სხეულების მოცულობისა, როგორიცაა ლიმონი, ვაშლი, კომში და თვით თურქული ჩალმაც კი. ეს იყო პირველი გადადგმული ნაბიჯი ინტეგრალურ აღრიცხვაში. მაგრამ მიუხედავად ამისა, ინტეგრალური აღრიცხვის შემქმნელები არიან ისააკ ნიუტონი და გოტფრიდ

ლაიბნიცი. პირველის ნაშრომებში განხილულია განუსაზღვრელი ინტეგრალი, ხოლო მეორისაში კი განსაზღვრული. სანამ განსაზღვრული ინტეგრალის უშუალო გამოთვლაზე გადავიდოდეთ, გამოვთვალოთ **მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი**. განვიხილოთ Oxy სიბრტყეზე რაიმე D ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია x ღერძით, $x=a$, $x=b$ წრფეებითა ($a<b$) და $y=f(x)$ წირით, სადაც $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და დადებითი $[a,b]$ სეგმენტზე. ასეთ ფიგურას **მრუდწირული ტრაპეცია** ეწოდება.

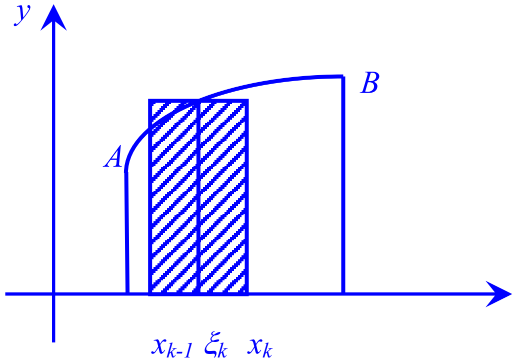


ნახ. 1

ბუნებრივად ისმის კითხვა: რას ვუწოდოთ D ფიგურის ფართობი და როგორ ვიპოვოთ ეს ფართობი. ამ მიზნით დავყოთ $[a,b]$ სეგმენტი n ნაწილად წერტილებით: $a = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n = b$ მივიღებთ სეგმენტებს

$$[a, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1}, b] \qquad (1)$$

ავღნიშნოთ λ–თი $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$ რიცხვებს შორის უდიდესი, სადაც $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (k=1,2,…,n).



ნახ. 2

სეგმენტთა მიღებულ სისტემას ვუწოდოთ **$[a,b]$ სეგმენტის λ დანაწილება.** ცხადია, რომ ყოველ λ რიცხვს შეესაბამება უამრავი λ დანაწილება. განვიხილოთ

(1) სისტემის ნებისმიერი $\left[x_{k-1}, x_k\right]$, სეგმენტი და მასზე ავიღოთ ნებისმიერი ξ_k წერტილი (ნახ. 2). $x=\xi_k$ წრფე გადაკვეთოს $y=f(x)$ წირის M_k წერტილში, რომლის ორდინატია $f(\xi_k)$. მაშინ ნახაზზე დაშტრიხული მართკუთხედის ფართობია $S=f(\xi_k)\Delta x_k$. თუ ასეთ კონსტრუქციას ჩავატარებთ ყოველ $\left[x_{k-1}, x_k\right]$, სეგმენტისათვის და მიღებულ $f(\xi_k)\Delta x_k$ შევკრებთ, გვექნება:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{2}$$

ამ ჯამს ეწოდება **[*a,b*] სეგმენტზე *f*(*x*) ფუნქციის ინტეგრალური ჯამი**, რომელიც, ცხადია წარმოადგენს D ფიგურის ფართობის მიახლოებით მნიშვნელობას. ცხადია, ინტეგრალური ჯამი დამოკიდებულია როგორც λ დანაწილებაზე, ასევე ξ_k წერტილების შერჩევაზე.

2. განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება. განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები: შემოვიტანოთ შემდეგი

განსაზღვრება: I რიცხვს ეწოდება ინტეგრალური σ ჯამის ზღვარი, თუ ყოველი $\varepsilon \succ 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta \succ 0$ რიცხვი, რომ $[a,b]$ მონაკვეთის ყოველი λ – დანაწილებისათვის და ნებისმიერი ξ_k წერტილისათვის $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ მონაკვეთზე, როცა $\lambda \prec \delta$,მართებულია უტოლობა:

$$\left|\sigma - I\right| \prec \varepsilon$$

ამ შემთხვევაში წერენ:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \ ,$$

ცხადია, I რიცხვი, თუ ის არსებობს, დამოკიდებულია მხოლოდ $f(x)$ ფუნქციასა და $[a,b]$ მონაკვეთზე და არ არის დამოკიდებული $[a,b]$ მონაკვეთის დაყოფის წესზე და ξ_k წერტილის არჩევაზე. ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი $[a,b]$ მონაკვეთზე და აღინიშნება სიმბოლოთი:

$$\int_a^b f(x)dx$$

(იკითხება: ინტეგრალი a-დან b-მდე $f(x)dx$).

ამრიგად, ***f*(*x*) ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი წარმოადგენს ამ ფუნქციის ინტეგრალური ჯამის ზღვარს**:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{3}$$

a და b რიცხვებს ინტეგრების საზღვრები ეწოდება: a – ს ქვედა საზღვარი, b– ს კი ზედა. $f(x)$ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, ხოლო x –ს საინტეგრაციო ცვლადი. თუ არსებობს, $[a,b]$ მონაკვეთზე $f(x)$ –ის ინტეგრალური ჯამის ზღვარი, იტყვიან რომ, $f(x)$ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით $[a,b]$ –ზე.

შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$ დამოუკიდებელია ინტეგრების x ცვლადზე, ე.ი. შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

განვიხილოთ [0,1] მონაკვეთზე განსაზღვრული ე.წ. **დირიხლეს ფუნცია:**

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } x \text{ ირაციონალურია} \\ 1, & \text{როცა } x \text{ რაციონალურია} \end{cases}$$

მაშინ [0,1] სეგმენტის ნებისმიერი λ – დანაწილებისათვის გვაქვს

$$\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \begin{cases} 0, & \text{როცა } \xi_k \text{ ირაციონალურია} \\ 1, & \text{როცა } \xi_k \text{ რაციონალურია} \end{cases}$$

ამიტომ ამ ფუნქციის ინტეგრალური ჯამის ზღვარი არ არსებობს. ე.ი. დირიხლეს ფუნქცია არაა ინტეგრებადი. აქედან გამომდინარე ბუნებრივია ისმის კითხვა: როგორი ფუნქციაა ინტეგრებადი?

თეორემა 1*:* თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ –ზე, მაშინ იგი ინტეგრებადია ამ შუალედზე.

განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3. $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

5. თუ $f(x) \le g(x)$, მაშინ $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

6. თუ ***f(x)*** მთელ $[a,b]$- ზე აკმაყოფილებს პირობას $m \le f(x) \le M,$

სადაც ***m*** და ***M*** მუდმივებია, მაშინ $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

$$7. \left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b f(x)dx$$

8. თუ $a \prec c \prec b,$ მაშინ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

9. თუ ***f(x)*** $[a,b]$- ზე მაშინ ამ მონაკვეთში არსებობს ისეთი ξ_k წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

მე- 9 თვისებას საშუალო **მნიშვნელობის თეორემა** ეწოდება. ყველა ზემოთ ჩამოთვლილ თვისებაში იგულისხმება, რომ განხილული ფუნწციები ინტეგრებადია $[a,b]$ –ზე. დავამტკიცოთ, მაგალითად მე-9 თვისება.

ავღნიშნოთ m და M –ით $f(x)$ ფუნქციის, შესაბამისად უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობა $[a,b]$ –ზე. მაშინ

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \quad \text{აქედან} \quad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

ამრიგად, მონაკვეთზე უწყვეტი ფუნქციის თვისების ძალით არსებობს ისეთი $\xi \in [a,b]$ წერტილი, რომ

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi), \quad \text{საიდანაც} \quad \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

რ.დ.ბ.

3. თეორემა ინტეგრალის ზედა საზღვრით გაწარმოების შესახებ. ნიუტონ–ლაიბნიცის ფორმულა. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ იგი ინტეგრებადია ყოველ $[a,x]$ ქვესეგმენტზე, სადაც $a \prec x \prec b$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

სადაც Φ წარმოადგენს x –ის ფუნქციას. მართებულია შემდეგი

თეორემა 2*:* თუ $\Phi(x)$ ფუნქცია წარმოებადია $[a,b]$ –ზე, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\Phi'(x) = f(x)$$

დამტკიცება: მივცეთ x –ს ნაზრდი Δx ისე, რომ $x+\Delta x \in [a,b]$, მაშინ

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

ამიტომ გვექნება:

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \Delta x \cdot f(\xi), \qquad \text{სადაც} \qquad \xi \in (x, x+\Delta x)$$

საიდანაც

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x \to 0} = f(\xi) = f(x) \qquad \text{ე.ი.} \quad \Phi'(x) = f(x)$$

რ.დ.ზ.

მაშასადამე $\Phi(x)$ არის $f(x)$–ის ერთ-ერთი პირველადი. ამიტომ $\Phi(x) = F(x) + C$, სადაც $F(x)$ არის $f(x)$––ის რაიმე პირველადი . ე.ი.

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

ვთქვათ $x=a$, მაშინ $-F(a)=C$,ამრიგად

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

კერძოდ, თუ ავიღებთ $x=b$, მივიღებთ:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი უპირველთაგანესი თეორემა, რომელსაც **ნიუტონ-ლაიბნიცის თეორემა (ფორმულა)** ეწოდება. ე. ი. სამართლიანია:

თეორემა 3*:* თუ $f(x)$– ფუნქცია უწყვეტია $[a,b]$ –ზე და $F(x)$ არის მისი ერთ-ერთი პირველადი, მაშინ ადგილი აქვს ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულას. ამ ფორმულას ხშირად ასე წერენ:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_b^a = F(b) - F(a) \tag{4}$$

ამ ფორმულის თანახმად განსაზღვრული ინტეგრალის რიცხვითი მნიშვნელობა ტოლია განხილული ფუნქციის პირველადი ფუნქციის $x=b$ და $x=a$ წერტილებზე მნიშვნელობების სხვაობისა.

მაგალითი 1: გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_1^3 x^2 dx$

ამოხსნა: რადგან $f(x) = x^2$ ფუნქციის პირველდი ფუნქცია:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

ამიტომ

$$\int_1^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

მაგალითი 2: გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$

ამოხსნა: გვექნება:

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^2 \ln x d(\ln x) = \left.\frac{1}{2}\ln^2 x\right|_1^2 = \frac{1}{2}\ln^2 2 - \frac{1}{2}\ln^2 1 = \frac{1}{2}\ln^2 2 - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}\ln^2 2$$

4. ცვლადის გარდაქმნა განსაზღვრულ ინტეგრალში (ჩასმის ხერხი).

ვთქვათ, $f(x)$– ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ –ზე. განვიხილოთ ინტეგრალი $\int_a^b f(x)dx$.

ამ ინტეგრალის გამოსათვლელად ზოგჯერ ხელსაყრელია x ცვლადი შევცვალოთ ახალი t ცვლადით, რომელიც x –თან გარკვეულ დამოკიდებულებაშია. დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ შემდეგი

თეორემა 4*:* თუ, $f(x)$ –ფუნქცია ინტეგრებადია $[a,b]$ –ზე და $x = \varphi(t)$ ფუნქცია უწყვეტად წარმოებადია $[\alpha,\beta]$ სეგმენტზე, ამასთანვე $a \le \varphi(t) \le b$, როცა $t \in [\alpha,\beta]$ და $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

მაგალითი 3: გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad a \succ 0$

ამოხსნა:

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = a\sin t,\ (x=0) \Rightarrow (t=0) \\ dx = a\cos t dt,\ (x=0) \Rightarrow (t = \frac{\pi}{2}) \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\cos t dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

მაგალითი 4: გამოვთვალოთ ინტეგრალი $I = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$

ამოხსნა:

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} 1+x^2 = t^2 \quad (x=0) \Rightarrow (t=1) \\ xdx = tdt \quad (x=1) \Rightarrow (t=\sqrt{2}) \end{matrix} \right| = \int_1^{\sqrt{2}} t \cdot tdt = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt =$$

$$= \frac{t^3}{3}\bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^3 - 1}{3} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

5. ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი. თუ $u(x)$ და $v(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია $[a,b]$ –ზე, მაშინ მართებულია ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა

$$\int_a^b udv \ = uv\bigg|_a^b - \int_a^b vdu$$

მართლაც, თუ მოვახდენთ $\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ ტოლობის ორივე ნაწილის ინტეგრებას a –დან b–მდე , მივიღებთ

$$\int_a^b (uv)dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b u(x)v'(x)dx\,,$$

$$uv\bigg|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$$

საიდანაც

$$\int_a^b udv = uv\bigg|_a^b - \int_a^b vdu\,.$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა ზოგჯერ საშუალებას გვაძლევს რთული სახის ინტეგრალის გამოთვლა დავიყვანოთ უფრო მარტივი სახის ინტეგრალის გამოთვლამდე.

მაგალითი 5: გამოვთვალოთ ინტეგრალი $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$

ამოხსნა:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \begin{vmatrix} x = u & \sin x dx = dv \\ dx = du & v = -\cos x \end{vmatrix} = (-x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 0\cdot\cos 0^0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. როგორ განისაზღვრება მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი?
2. რას ეწოდება განსაზღვრული ინტეგრალი?
3. მოიყვანეთ განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები?
4. მოიყვანეთ ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა.
5. რაში მდგომარეობს ჩასმის ხერხი?
6. მოიყვანეთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა განსაზღრულ ინტეგრალში.

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$ 2. $\int_0^1 xdx$ 3. $\int_0^1 (x^2-2x+2)dx$ 4. $\int_0^2 (x+2)^2 dx$

5. $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2}$ 6. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$ 7. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^2}$ 8. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

9. $\int_0^4 \frac{dx}{x^2-1}$ 10. $\int_0^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$ 11. $\int_4^9 \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x}-1}$

ჩასმის ხერხით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები

12. $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}$ 13. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ 14. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ 15. $\int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x^2}}$

ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები

16. $\int_1^2 x\ln xdx$ 17. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin xdx$ 18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 xdx$ 19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 xdx$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 xdx$ 21. $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\ln x}$ 22. $\int_0^{10} x^2e^{0,1x}dx$

გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წირებით:

23. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

24. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 27$, $x = 3$

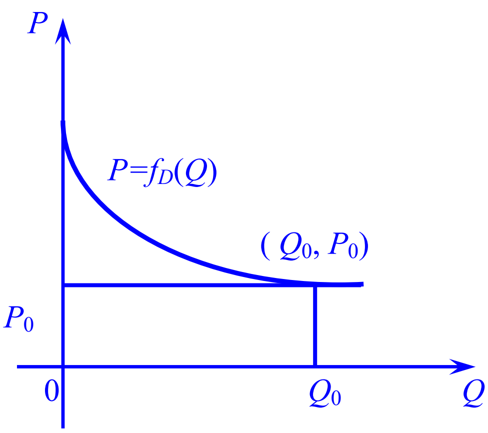
25. $y = e^3$, $y = 0$, $x = \ln 7$, $x = \ln 12$

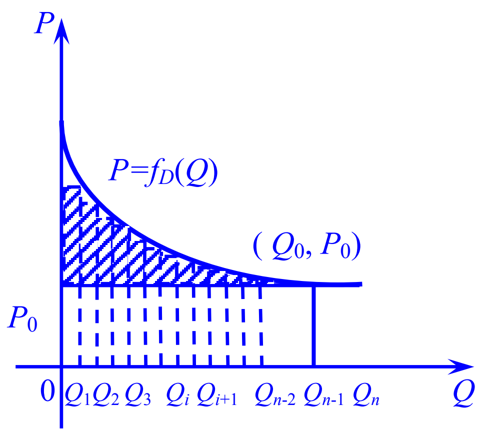
26. $y = x^2 + 2$, $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$

§ 8. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენება ეკონომიკაში

ეკონომიკური თეორიის მათემატიკურ მოდელებში ძალიან ხშირად გვხვდება ისეთი ამოცანები, რომლებშიც საჭიროა მოიძებნოს ფუნქცია, თუ ცნობილია მისი წარმოებული. ფაქტიურად, ასეთი ტიპის ამოცანებში საქმე გვაქვს გაწარმოების შექცეულ ოპერაციასთან, რომელსაც, როგორც ეს ზემოთ ავღნიშნეთ, ინტეგრების ოპერაცია ეწოდება.

1. მომხმარებლის დანაზოგი მოცემულ დონეზე ვაჭრობისას. მოთხოვნის ფუნქცია $P = f_D(Q)$ წარმოადგენს ერთეული პროდუქციის ფასს, როდესაც იყიდება Q რაოდენობის მოხმარების პროდუქცია (*ანუ, როდესაც მოთხოვნა პროდუქციაზე შეადგენს Q ერთეულს*). იგი, როგორც ცნობილია





ნახ. 1 ნახ. 2

$P = f_D(Q)$ ფუნქციის შესაბამის გრაფიკს ეწოდება მოთხოვნის მრუდი (ნახ. 1). ვთქვათ, Q_0 რაოდენობის მოთხოვნის დროს ერთეულის ფასი არის P_0, ე.ი. $P_0 = f_D(Q_0)$. დავყოთ $[0, Q_0]$ შუალედი n ტოლ ნაწილად Q_i $(i=1,2,\dots,n)$ წერტილებით (ნახ. 2) $0 = Q_1 \prec Q_2 \prec \dots \prec Q_{n-1} \prec Q_n = Q_0$. ავღნიშნოთ თითოეული ქვეინტერვალის სიგრძე ΔQ სიმბოლოთი

$$\Delta Q = \Delta Q_1 = \Delta Q_2 - \Delta Q_1 = \dots = \Delta Q_i - \Delta Q_{i-1} = \Delta Q_n - \Delta Q_{n-1} = \frac{Q_0}{n}$$

ვთქვათ, მოთხოვნა პროდუქციაზე Q_1 ერთეულის ტოლია. ე.ი. ერთეულის ფასია $f_D(Q_1)$ და იყიდება $\Delta Q = \Delta Q_1 = \frac{Q_0}{n}$ რაოდენობის პროდუქცია. მაშინ მთლიანი გადასახადის თანხა ΔQ რაოდენობის პროდუქციის შესაძენად

$f_D(Q_1)\cdot\Delta Q$ სიდიდის ტოლია. ცხადია, რომ საქონელზე Q_0 მოთხოვნის დროს, როდესაც ერთეულის ფასია $P_0 = f_D(Q_0)$. იგივე ΔQ რაოდენობის პროდუქციის შესაძენად საჭიროა $P_0\Delta Q$ თანხა. მყიდველის დანაზოგი მეორე შემთხვევაში პირველთან შედარებით შემდეგი სხვაობის ტოლია:

$$f_D(Q_1)\cdot\Delta Q - P_0\Delta Q = \left(f_D(Q_1) - P_0\right)\Delta Q$$

ეს დანაზოგი შეესაბამება $[0, Q_1]$ შუალედს.

ეხლა, ვთქვათ, პროდუქციაზე მოთხოვნა არის Q_2. ე.ი. ერთეულის ფასია $f_D(Q_2)$ და იყიდება $\Delta Q = \dfrac{Q_0}{n} = Q_2 - Q_1$ რაოდენობის პროდუქცია. ანალოგიური მსჯელობის შედეგად, მყიდველის დანაზოგი შემდეგი სხაობის ტოლი იქნება:

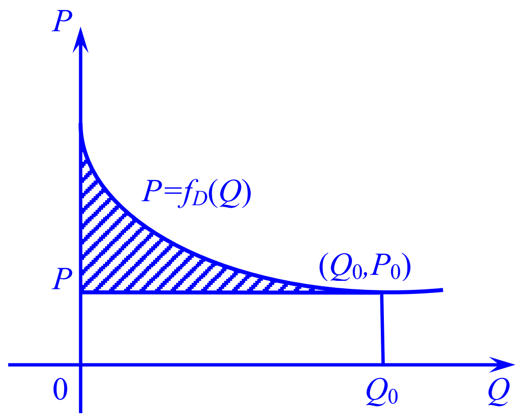
$$f_D(Q_2)\cdot\Delta Q - P_0\Delta Q = \left(f_D(Q_2) - P_0\right)\Delta Q$$

ეს დანაზოგი შეესაბამება $[Q_1, Q_2]$ შუალედს.

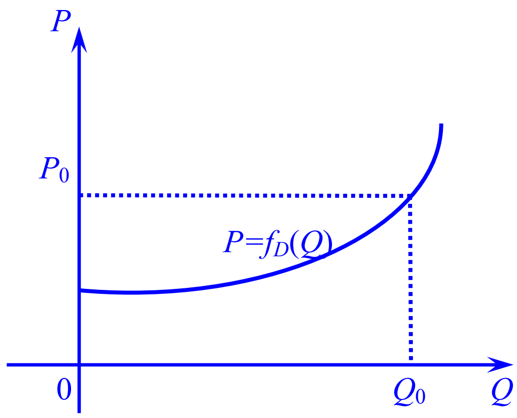
სრულიად ანალოგიურად მოვიღებთ, რომ დანაზოგი $[Q_2, Q_3]$ შუალედში არის $\left(f_D(Q_3) - P_0\right)\Delta Q$. დანაზოგი $[Q_3, Q_4]$ შუალედში არის $\left(f_D(Q_4) - P_0\right)\Delta Q$. ამ პროცესის გაგარძელებით მივიღებთ, რომ დანაზოგი $[Q_{n-2}, Q_{n-1}]$ შუალედში არის $\left(f_D(Q_{n-1}) - P_0\right)\Delta Q$ და ბოლოს, დანაზოგი $[Q_{n-1}, Q_n]$ შუალედში არის $\left(f_D(Q_n) - P_0\right)\Delta Q$. თუ შევკრებთ ამ დანაზოგებს, მივიღებთ ჯამურ დანაზოგს $[0, Q_0]$ შუალედში

$$\sum_{i=1}^{n}\left(f_D(Q_{ni}) - P_0\right)\Delta Q, \tag{1}$$

რომელიც გეომეტრიულად გამოსახავს (ნახ. 2) –ზე დაშტრიხული მართკუთხედების ფართობთა ჯამს.



ნახ. 3



ნახ. 4

თუ განვიხილავთ (1) გამოსახულების ზღვარს, როდესაც $n \to \infty$ და გავიხსენებთ განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტებას, ცხადი გახდება, რომ (1) ჯამი უახლოვდება შემდეგ ინტეგრალს:

$$CS = D(Q_0, P_0) = \int_0^{Q_0} \left(f_D(Q) - P_0\right) dQ \qquad (2)$$

რომელსაც ეკონომისტები უწოდებენ **მომხმარებლის დანაზოგს** *Q0.* დონეზე ვაჭრობისას. ***(CS - Consumer's surplus*** **–** მომხმარებლის დანაზოგი).

გეომეტრიულად ეს ინტეგრალი შეესაბამება იმ ფიგურის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია *P* ღერძით, მოთხოვნის მრუდითა და $P=P_0$ წრფით (ნახ. 3). ეკონომიკურად $CS = D(Q_0, P_0)$ სიდიდე გამოსახავს მომხმარებლის მიერ თანხის დანაზოგს პროდუქციის Q_0 რაოდენობის შეძენისას, როდესაც ერთეულის ფასია P_0. სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, მომხმარებელს Q_0 რაოდენობის პროდუქცია შეეძლო ეყიდა არა ერთბაშად P_0 ფასად, არამედ ნაწილ-ნაწილ. ასეთი შესყიდვის დროს მომხმარებელი, რასაკვირველია, ყიდულობს Q_0 რაოდენობის პროდუქციას, მაგრამ მას ეხარჯება უფრო მეტი, ვიდრე $Q_0 \cdot P_0$ თანხა. სწორედ ამ განსხვავებას აღწერს $CS = D(Q_0, P_0)$ მომხმარებლის დანაზოგი.

2. მწარმოებლის ამონაგების ნამეტი გარკვეულ დონეზე ვაჭრობისას. როგორც ვიცით, მიწოდების ფუნქცია $P = f_S(Q)$ აღწერს კავშირს მწარმოებლის მიერ ბაზარზე გატანილი საქონლის Q რაოდენობასა და P ფასს შორის. როგორც ვიცით მიწოდების ფუნქცია ზრდადი ფუნქციაა და მის გრაფიკს ეწოდება მიწოდების მრუდი.

ვთქვათ, პროდუქციის ერთეულის ფასია P_0 და მწარმოებელი ყიდის Q_0 რაოდენობის პროდუქციას, ცხადია, რომ $P_0 = f_S(Q_0)$, მაშინ მწარმოებლის სრული შემოსავალი იქნება $Q_0 \cdot P_0$. ჩავატაროთ სტრუქტურულად იგივე მსჯელობა, რაც წინა პუნქტში გვქონდა. დავყოთ $[0, Q_0]$ შუალედი n ტოლ ნაწილად Q_i $(i=1,2,\dots,n)$ წერტილებით

$$0 = Q_1 \prec Q_2 \prec \dots \prec Q_{n-1} \prec Q_n = Q_0$$

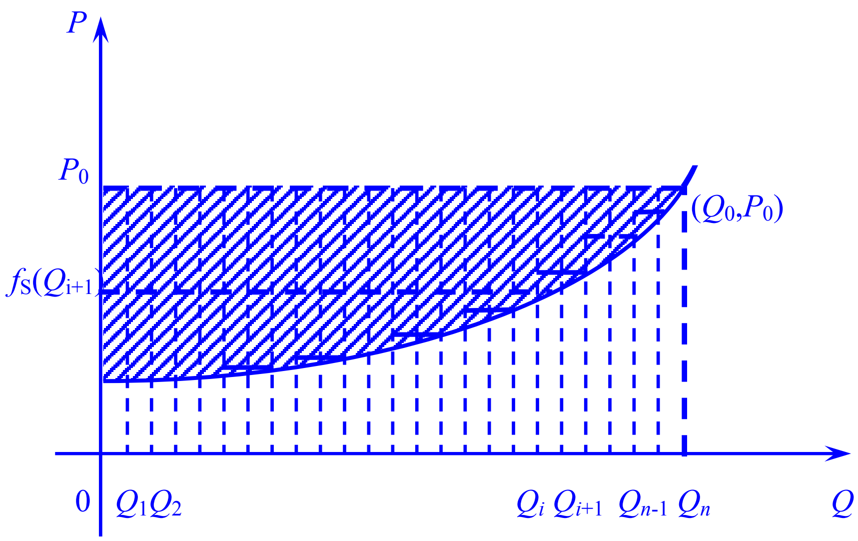
ავღნიშნოთ თითოეული ქვეინტერვალის სიგრძე ΔQ სიმბოლოთი

$$\Delta Q = \Delta Q_1 = \Delta Q_2 - \Delta Q_1 = \dots = \Delta Q_i - \Delta Q_{i-1} = \Delta Q_n - \Delta Q_{n-1} = \frac{Q_0}{n}$$

განვიხილოთ $[Q_i, Q_{i+1}]$ სეგმენტი. მწარმოებელს $\Delta Q = Q_{i+1} - Q_i = \dfrac{Q_0}{n}$ რაოდენობის პროდუქცია, რომ გაეყიდა $f_S(Q_{i+1})$ ფასად, მაშინ შემოსავალი იქნებოდა $f_S(Q_{i+1})\Delta Q$. იგივე ΔQ რაოდენობის პროდუქციის $P_0 = f_S(Q_0)$ ფასად გაყიდვით მწარმოებლის შემოსავალი არის $P_0\Delta Q$. ცხადია, რომ მწარმოებლის შემოსავლის ნამეტი ამ შემთხვევაში გამოითვლება შემდეგი სხვაობით

$$P_0\Delta Q - f_S(Q_{i+1})\Delta Q = \left(P_0 - f_S(Q_{i+1})\right)\Delta Q,$$

რომელიც გეომეტრიულად შეესაბამება (ნახ. 5) –ზე $[Q_i, Q_{i+1}]$ სეგმენტის ზემოთ დაშტრიხულ მართკუთხედის ფართობს.



ნახ. 5

თუ ამოვწერთ ყველა $[0,Q_1],[Q_1,Q_2],\ldots,[Q_{n-2},Q_{n-1}],[Q_{n-1},Q_n]$ სეგმენტის შესაბამის „ნამეტებს“ და შევკრებთ, მივიღებთ მწარმოებლის შემოსავლის ჯამურ ნამეტს:

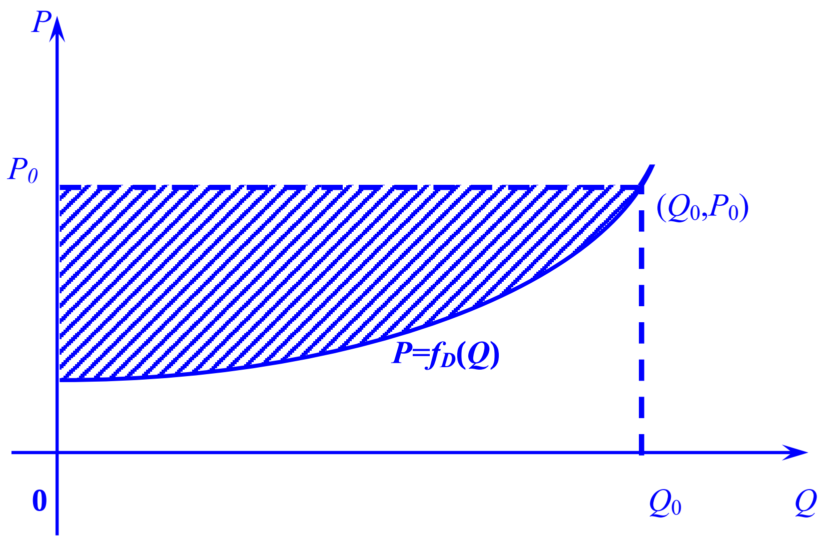
$$\left(P_0 - f_S(Q_1)\right)\Delta Q + \left(P_0 - f_S(Q_2)\right)\Delta Q + \cdots + \left(P_0 - f_S(Q_{n-1})\right)\Delta Q + \left(P_0 - f_S(Q_n)\right)\Delta Q =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(P_0 - f_S(Q_i)\right)\Delta Q.$$

თუ განვიხილავთ ამ გამოსახულების ზღვარს, როდესაც $n \to \infty$ და გავიხსენებთ განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტებას, ცხადი გახდება, რომ აღნიშნული ჯამი უახლოვდება შემდეგ ინტეგრალს:

$$PS = S(Q_0, P_0) = \int_0^{Q_0} (P_0 - f_S(Q))dQ \qquad (3)$$

რომელსაც ეკონომისტები უწოდებენ მომხმარებლის ამონაგების ნამეტს Q_0. დონეზე ვაჭრობისას. ***(PS - Producer's surplus)***. გეომეტრიულად ეს ინტეგრალი შეესაბამება იმ ფიგურის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია P ღერძით, მიწოდების მრუდითა და $P=P_0$ წრფით (ნახ. 6).



ნახ. 6

ეკონომიურად $S(Q_0, P_0)$ სიდიდე გამოსახავს მწარმოებლის ამონაგების „ჯამურ“ ნამეტს, როდესაც პროდუქციის ერთეულის ფასია P_0 და იყიდება Q_0 რაოდენობის პროდუქცია. სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, მწარმოებელს შეეძლო გაეყიდა Q_0 რაოდენობის პროდუქცია არა ერთბაშად P_0 ფასად, არამედ ნაწილ-ნაწილ. ასეთი არაერთჯერადი გაყიდვისას რასაკვირველია გაიყიდებოდა Q_0 რაოდენობის პროდუქცია, მაგრამ შემოსავალი იქნებოდა უფრო ნაკლები, ვიდრე $Q_0 \cdot P_0$ თანხა. სწორედ ამ განსხვავებას აღწერს $PS = S(Q_0, P_0)$ მომხმარებლის ამონაგების ნამეტი.

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება მომხმარებლის დანაზოგი?
2. მოიყვანეთ მომხმარებლის დანზოგის გეომეტრიული წარმოდგენა?
3. რას ეწოდება მწარმოებლის ამონაგების ნამეტი და როგორ გამოითვლება იგი?
4. მოიყვანეთ მწარმოებლის ამონაგების ნამეტის გეომეტრიული წარმოდგენა?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1. ვთქვათ, მოთხოვნის ფუნქციაა $P = f_D(Q) = 5 - \frac{Q}{10}$. ვიპოვოთ *(CS)* მომხმარებლის დანაზოგი, როდესაც ვაჭრობის დონე $Q_0 = 30$-ის ტოლია. ააგეთ მოთხოვნის მრუდი და გამოსახეთ მომხმარებლის დანაზოგი ფართობის სახით.

2. ვთქვათ, მოთხოვნის ფუნქციაა $P = f_D(Q) = 5 - \frac{Q}{10}$. ვიპოვოთ *(CS)* მომხმარებლის დანაზოგი, თუ პროდუქციის ერთი ერთეული იყიდება 20 ლარად.

3. გამოთვალეთ *(PS)* მწარმოებლის ამონაგების ნამეტი, თუ მიწოდების ფუნქციაა $P = f_S(Q) = 5 + 0{,}01Q^2$, ხოლო ვაჭრობა ხდება $Q_0 = 30$-ის დონეზე. ააგეთ შესაბამისი ნახაზი და გამოსახეთ მწარმოებლის ამონაგების ნამეტი ფართობის სახით.

4. მიწოდების ფუნქცია მოცემულია $P = f_S(Q) = 5 + 0{,}1\sqrt{Q}$ ფორმულით. ვიპოვოთ *(PS)* მწარმოებლის ამონაგების ნამეტი, თუ თუ პროდუქციის ერთი ერთეულის ფასია 10 ლარი.

5. მწარმოებელი კვირაში ყიდის 1000 ტელევიზორს. თითოეულს 450 ლარად. მარკეტინგი აჩვენებს, რომ 10 ლარით ფასის შემცირება იწვევს გაყიდული ტელევიზორების რაოდენობის ზრდას კვირაში 100 ერთეულით. იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია და გამოთვალეთ *(CS)* მომხმარებლის დანაზოგი, თუ ვაჭრობის დონე $Q_0 = 400$-ის ტოლია. იგულისხმება, რომ მოთხოვნის ფუნქცია წრფივია.

§ 9. არასაკუთრივი ინტეგრალის ცნება. არასაკუთრივი ინტეგრალების გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში

1. არასაკუთრივი ინტეგრალის ცნება. აქამდე ჩვენ ყველგან ვგულისხმობდით, რომ განსაზღვრულ ინტეგრალში ინტეგრალქვეშა $f(x)$ ფუნქცია $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციას წარმოადგენდა და ინტეგრების a და b საზღვრები იყო სასრული სიდიდეები. მაგრამ ხშირად აჭირო ხდება ისეთი ინტეგრალების განხილვაც, როდესაც ინტეგრალის საზღვრები უსასრულოა ან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია შუალედის რომელიმე წერტილზე განიცდის წყვეტას. ასეთ შემთხვევებში ინტეგრალს **არასაკუთრივს** უწოდებენ. განვიხილოთ ეს შემთხვევები:

ა) შემთხვევა, როდესაც ინტეგრალის საზღვრები უსასრულოა. ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $(a,+\infty)$ შუალედში და და არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება **არასაკუთრივი ინტეგრალი** a-დან $+\infty$-მდე $f(x)dx$-დან და აღინიშნება $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ სიმბოლოთი. ე.ი.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx \tag{1}$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ინტეგრალი $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ არსებობს, ანუ კრებადია, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ინტეგრებადი $(a,+\infty)$ შუალედში. წინააღმდეგ შემთხვევაში, როდესაც აღნიშნული ზღვარი არ არსებობს ანდა უსასრულოა, ამბობენ, რომ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ განშლადია.

ანალოგიურად, ვთქვათ, $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $(-\infty,b)$ შუალედში და ინტეგრებადია ნებისმიერ $[a,b]$ სეგმენტზე ($a<b$). თუ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი $(-\infty,b)$ შუალედში და აღინიშნება შემდეგი სიმბოლოთი:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (2)$$

ბ) შემთხვევა, როდესაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია განიცდის წყვეტას. თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $(-\infty,+\infty)$ შუალედში და არსებობს არასაკუთრივი ინტეგრალები $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ და $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, სადაც a ფიქსირებული ნამდვილი რიცხვია, მაშინ მათ ჯამს ეწოდება **არასაკუთრივი ინტეგრალი** და აღინიშნება $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. ე. ი.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \qquad (3)$$

ცხადია, რომ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (4)$$

ე.ი. სასრული ზღვრების არსებობის შემთხვევაში (1), (2) და (4) ინტეგრალებს უწოდებენ არასაკუთრივ ინტეგრალებს. თუ ეს ზღვრები არ არსებობენ, ან უსასრულონი არიან, მაშინ ზემოთ განხილულ ინტეგრალებს ეწოდება განშლადი არასაკუთრივი ინტეგრალები.

მაგალითი 1: გამოვთვალოთ $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$

ამოხსნა:

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{b} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1$$

2. შემოსავლის ნაკადის მიმდინარე ღირებულების განსაზღვრა. თუ (1) ფორმულაში $b\to\infty$, მაშინ მივიღებთ არასაკუთრივ ინტეგრალს

$$\int_{a}^{\infty} e^{\frac{r}{100}t} f(t)dt \qquad (5)$$

რომელიც ეკონომიკურად წარმოადგენს უვადო შემოსავლის $f(t)$ ნაკადის საწყის ღირებულებას.

სხვა სიტყვებით, (5) ფორმულით მოცემული სიდიდე გამოსახავს იმ საწყის თანხას, რომელიც უნდა გაიზარდოს სარგებლის წლიური რთული $r\%$ -იანი განაკვეთით (უწყვეტი დარიცხვის წესით), რომ დროის ყოველი $t \ge a$

მომენტისათვის გვქონდეს შემოსვლის $f(t)$ ნაკადი. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ k –ური ($k>a$) წლისათვის გვექნება შემოსავალი $T_k = \int_{k-1}^{k} f(t)dt$.

ჩვენ ვიცით, რომ სარგებლის წლიური რთული $r\%$ -იანი განაკვეთით დაბანდებისას უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში A ლარის ტოლი საწყისი თანხა t წლის შემდეგ იძლევა $Ae^{\frac{r}{100}t}$ ლარს. ვთქვათ, A არის ის თნახა, რომელიც უნდა დავაბანდოთ სარგებლის წლიური რთული $r\%$ -იანი განაკვეთით, რომ უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში t წლის შემდეგ მივიღოთ 1 ლარი. მაშინ ზემოთ აღნიშნულის თანახმად გვექნება $A_1e^{\frac{r}{100}t} = 1$. აქედან $A_1 = e^{-\frac{r}{100}t}$. ამ თანხას ეწოდება 1 ლარის მიმდინარე ანუ დისკონტირებული ღირებულება. იგივე პირობებში , A ლარის მიმდინარე ღირებულება კი გამოითვლება გამოსახულებით $B = e^{-\frac{r}{100}t}$. მაგალითად, თუ $r\%$=9, მაშინ 1 ლარის მიმდინარე ანუ დისკონტირებული ღირებულება 5 წლის დაბანდების შემთხვევაში იქნება: $e^{-\frac{9}{100}t} = e^{-0,45} \approx 0,64$ (ლარი), ხოლო 1000 ლარის მიმდინარე ღირებულება იქნება $1000e^{-\frac{9}{100}t} = 1000e^{-0,45} \approx 640$ (ლარი).

ახლა დავუშვათ, რომ შესაბამისი სარგებელი დაბანდებულ თანხას ერიცხება არა ერთბაშად – საბოლოო თანხის სახით, არამედ დროის რაღაც $t=a$ მომენტიდან (წლიდან) დროის რაღაც $t=b$ მომენტამდე (წლამდე) უწყვეტად $f(t)$ ინტენსივობით (თუ დროის t მომენტში მიმდინარე თანხაა $F(t)$ სიდიდე, მაშინ დარიცხვის $f(t)$ ინტენსივობა გამოითვლება ფორმულით: $f'(t) = F'(t)$. ამ $f(t)$ სიდიდეს ეწოდება **შემოსავლის ნაკადი** დროის $[a,b]$ შუალედში. ცხადია, მიმდინარე $F(t)$ თანხა დროის დროის $t\in[a,b]$ მომენტისათვის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$F(t) = \int_a^b f(t)dt \tag{6}$$

იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ $[a,b]$ შუალედში შემოსავლის ნაკადის ღირებულება, მოვიქცეთ შემდეგნაირად. დავყოთ დროის $[a,b]$ შულედი დავყოთ n ნაწილად t_i $(i = 0,1,2,\dots,n)$ წერტილებით, სადაც

$$a = t_0 \prec t_1 \prec t_2 \prec \dots \prec t_{n-1} \prec t_n = b\,.$$

თითოეული ნაწილის სიგრძე ავღნიშნოთ $\Delta t-$ ით.

$$\Delta t = t_j - t_{j-1} = \frac{b-a}{n} \qquad (j = 1,\ldots,n), \tag{7}$$

ცხადია, $t = t_{j-1}$ მომენტიდან $t = t_j$ მომენტამდე შემოსავალი დაახლოებით იქნება $f(t_j)\Delta t$, რომლის მიმდინარე ღირებულება უტოლდება შემდეგ სიდიდეს $e^{\frac{r}{100}t} f(t_j)\Delta t$. ეს არის საწყისი თანხა, რომელიც მიმდინარე მომენტში უნდა დაბანდდეს სარგებლის წლიური რთული $r\%$ -იანი განაკვეთით, იმისათვის, რომ t_j წლის შემდეგ მოგვცეს $f(t_j)\Delta t$ თანხა.

ამრიგად, შემოსავლის ნაკადის მიმდინარე ღირებულება დროის $[a,b]$ შულედში მიახლოებით გამოითვლება შემდეგი ჯამით:

$$\sum_{j=1}^{n} e^{\frac{r}{100}t} f(t_j)\Delta t. \tag{8}$$

ამ ჯამის ზღვარი, როდესაც $n \to \infty$, უახლოვდება ინტეგრალს,

$$\int_a^b e^{\frac{r}{100}t} f(t)dt \tag{9}$$

რომელსაც ეწოდება **შემოსავლის $f(t)$ ნაკადის საწყისი (დისკონტირებული) ღირებულება**, შეესაბამება სარგებლის წლიურ რთულ $r\%$ -იან განაკვეთს უწყვეტი დარიცხვის შემთხვევაში $t=a$ მომენტიდან (წლიდან) დროის რაღაც $t=b$ მომენტამდე (წლამდე). ამრიგად, (5) ფორმულით მოცემული სიდიდე გამოსახავს იმ საწყის თანხას, რომელიც მიმდინარე $t=0$ მომენტიდან დაწყებული უნდა გაიზარდოს სარგებლის წლიური რთული $r\%$ -იანი განაკვეთით (უწყვეტი დარიცხვის წესით), რომ მან უზრუნველყოს $F(t)$ შემოსავალი (სარგებელი) $t\in[a,b]$ მომენტისათვის. ამ ტიპის გამოთვლებს უდიდესი მნიშვნელობა აქვს, მაგალითად, სატრანსტო ფონდებისა და კომპანიების მოღვაწეობაში.

მაგალითი 2: სატრანსტო ფონდი ათი წლის განმავლობაში ყოველწლიურად იხდის თანხას 8 000 ლარის ინტენსივობით, სარგებლის წლიური რთული 10% განაკვეთის (უწყვეტი დარიცხვის წესით) გადახდა იწყება 5 წლის შემდეგ.

ა) ვიპოვოთ სატრანსტო ფონდის საწყისი ღირებულება;

ბ) ვიპოვოთ ფონდის სიდიდე 3 წლის შემდეგ.

ამოხსნა: *ა) აქ შემოსავლის ნაკადი მუდმივია* $f(x)$=8 000. სატრანსტო ფონდის საწყისი ღირებულების დასადგენად გამოვიყენოთ (1) ფორმულა, რომელშიც ჩვენი ამოცანის პირობების შესაბამისად: a=5, b=15 და r=10. მივიღებთ საწყისი ღირებულების შემდეგ მნიშვნელობას

$$\int_5^{15} e^{-0,1t} 8000dt = 8000\left[\frac{e^{-0,1t}}{-0,1}\right]_5^{15} = 8000\left[\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right] \approx 30672,04$$

ეს არის ის საწყისი თანხა, რაც უნდა ჰქონდეს სატრანსტო ფონდს საწყის მომენტში, რომ მან 5 წლის შემდეგ შეძლოს 10 წლის განმავლობაში ყოველწლიურად 8 000 ლარის გადახდა.

ბ) ფონდის საწყისი თანხა 30672,04 ლარი სამი წლის შემდეგ გახდება $30672,04e^{\frac{10}{100}3} \approx 41402,92$ ლარი, რადგან ამ შემთხვევაში t=3 (წელს) და r=10%.

მაგალითი 3: ინვენსტორი განუსაზღვრელი ვადით ყოველწლიურად იღებს თანხას 5 000 დოლარის ინტენსივობით. გამოვთვალოთ იმ შემოსავლის საწყისი ღირებულება, თუ დისკონტირება ხდება სარგებლის წლიური რთული 6 % -იანი განაკვეთით უწყვეტი დარიცხვის წესის საფუძველზე.

ამოხსნა: აღნიშნული უსასრულო ვადიანი შემოსავლის საწყისი ღირებულება უნდა გამოვთვალოთ (2) –ით, სადაც $f(t)$=5 000, a=0 და r=6.

$$k = \int_0^{\infty} e^{-0,06t} 5000dt = 5000 \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} e^{-0,06t} dt = 5000 \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{0,06}e^{-0,06t}\right]_0^b =$$

$$= 5000 \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{100}{6} - \frac{100}{6}e^{-0,06b}\right] = 5000\frac{100}{6} \approx 83333,33$$

ამრიგად, მაგალითში მოცემული შემოსავლების ნაკადის საწყისი ღირებულებაა დაახლოებით 83333 ლარი.

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება შემოსავლების ნაკადის მიმდინარე ღირებულება?
2. რას ეწოდება შემოსავლების ნაკადის მიმდინარე ღირებულება დროის შუალედში?
3. როგორ გამოითვლება შუალედში შემოსავლის ნაკადის მიმდინარე ღირებულება?

4. რას ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგარლები $(a,+\infty),(-\infty,b)$ და $(-\infty,+\infty)$ შუალედში?
5. როგორ გამოითვლება შემოსავლის ნაკადის მიმდინარე ღირებულება შემოუსაზღვრელი ვადით?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1. სატრასტო ფონდი 5 წლის განმავლობაში იხდის თანხას 2000 ლარის ინტენსივობით. სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 12 % (უწყვეტი დარიცხვის წესით). გადახდა იწყება პირველივე წლიდან. იპოვეთ სატრასტო ფონდის დისკონტირებული ღირებულება.
2. სატრასტო ფონდმა უნდა იმოქმედოს 10 წლის განმავლობაში და შემდგომი 15 წლის განმავლობაში უნდა იხადოს თანხა 12 000 ლარის ინტენსივობით. სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 11% (უწყვეტი დარიცხვის წესით). იპოვეთ სატრასტო ფონდის თანხა პირველი 5 წლის განმავლობაში.
3. სატრასტო ფონდმა უნდა იმოქმედოს დღეიდან 8 წლის განმავლობაში და იხდის თანხას 10 000 ლარის ინტენსივობით შემდგომი 7 წლის განმავლობაში. სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 12% (უწყვეტი დარიცხვის წესით). იპოვეთ:
   ა) სატრასტო ფონდის საწყისი ღირებულება
   ბ) სატრასტო ფონდის სიდიდე პირველი 5 წლის შემდეგ.
   გ) სატრასტო ფონდის საწყისი ღირებულება, თუ ნაცვლად 7 წლისა იგი მოქმედებს მუდმივად (შემოუსაზღვრელი დროის განმავლობაში)
4. ფეხბურთელი აფორმებს სახელფასო კონტრაქტს. პირობების თანახმად იგი მიიღებს თანხას, რომელიც იზრდება თანაბრად, უწყვეტად და წრფივად წლიური 1 000 000 ლარიდან და აღწევს წლიურ 4 000 000 ლარს 4 წლის შემდეგ. ამიტომ მისი ხელფასი t წლის შემდეგ არის $F(t)=1+\frac{1}{2}t$ (მილიონი ლარი). იპოვეთ კონტრაქტის საწყისი ღირებულება, რომელიც შეესაბამება სარგებლის წლიური რთული

8% -იანი განაკვეთით უწყვეტ დარიცხვას. (*მითითება: ისარგებლეთ იმით, რომ ხელფასის ზრდის სიჩქარე (ინტენსივობა)* $F'(t) = \frac{1}{2}$)

5. ვთქვათ, სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 10% (უწყვეტი დარიცხვის წესით). რას უდრის უვადო მუდმივი 5 000 ლარის ნაკადის საწყისი ღირებულება?

6. გამოთვალეთ არასაკუთრივი ინტეგრალები:

1. $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x+3)^3}} dx$ 2. $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(2x-3)^2} dx$ 3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx$

4. $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$ 5. $\int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$

თავი VII. დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის ელემენტები და მათი ზოგიერთი გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში

§ 1. დიფერენციალური განტოლებანი

1. ზოგადი ცნებები. შემოვიტანოთ შემდეგი განსაზღვრებები: განტოლებას, რომელიც შეიცავს დამოუკიდებელ ცვლადებს, ამ ცვლადების უცნობ ფუნქციებს და უკანასკნელთა სხვადასხვა რიგის წარმოებულებს, **ეწოდება დიფერენციალური განტოლება**. დიფერენციალური განტოლება არის ჩვეულებრივი, თუ მასში შემავალი უცნობი ფუნქციები დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ დამოუკიდებელ ცვლადზე.

განტოლება

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

სადაც y არის x –ის ფუნქცია, წარმოადგენს ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას ერთი უცნობი ფუნქციით. როცა უცნობ ფუნქციათა რიცხვი რამდენიმეა, ხოლო დამოუკიდებელ ცვლადთა რიცხვი ერთი, მასთან დიფერენციალურ განტოლებათა რიცხვი უდრის უცნობ ფუნქციათა რიცხვს, მაშინ გვაქვს **ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა**. მაგალითად შემდეგი განტოლებანი:

$$\begin{cases} \Phi_1\left(x, y, z, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dots, \dfrac{d^m y}{dx^m}, \dfrac{d^n z}{dx^n}\right) = 0 \\ \Phi_1\left(x, y, z, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dots, \dfrac{d^m y}{dx^m}, \dfrac{d^n z}{dx^n}\right) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

წარმოადგენს ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, სადაც y და z ცვლადები x –ზე დამოკიდებული უცნობი ფუნქციებია.

თუ განტოლება შეიცავს რამდენიმე დამოუკიდებელი ცვლადის უცნობი ფუნქციის კერძო წარმოებულებს, მაშინ ასეთ განტოლებას **კერძოწარმოებულებიანი განტოლება** ეწოდება.

დიფერენციალური განტოლების რიგი ეწოდება განტოლებაში შემავალი წარმოებულების უდიდეს რიგს.

მაგალითად, $y'' - 3y' + 2y = x$ განტოლება მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებაა, ხოლო განტოლება $\frac{d^2z}{dx^2} - a^2\frac{d^2z}{dx^2} = 0$ მეორე რიგის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებაა.

დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა ნიშნავს იმ ფუნქციათა მონახვას, რომელნიც მოცემულ განტოლებას აკმაყოფილებს, ხოლო თვით ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას, ეწოდება ამ განტოლების ამონახსნი. დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს ეწოდება აგრეთვე დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალი.

თუ გვაქვს პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{ან} \quad y' = f(x, y) \tag{3}$$

მაშინ y ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით

$$F(x, y, C) = 0, \tag{4}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, ეწოდება (3) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, როდესაც C მუდმივის გამორიცხვა შემდეგი განტოლებების სისტემიდან $F(x, y, y') = 0,$ $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$ გვაძლევს (3) განტოლებას ან მის ექვივალენტურს.

ანალოგიურად განიმარტება n –ური რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

y ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით:

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0 \tag{5}$$

სადაც, $C_1, C_2, \ldots C_n$ მუდმივებია, ეწოდება (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თუ (5) განტოლებიდან და მისი n –ური რიგის წარმოებულებიდან $C_1, C_2, \ldots C_n$ მუდმივების გამორიცხვით მივიღებთ (1) განტოლებას ან მის ექვივალენტურს, სხვანაირად (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y = \Phi(x, C_1, C_2, \ldots C_n) \tag{6}$$

ამ ზოგადი ამონახსნიდან მიიღება უამრავი კერძო ამონახსნები, თუ $C_1, C_2, \ldots C_n$ მუდმივებს მივანიჭებთ რაიმე კერძო რიცხვით მნიშვნელობებს.

გეომეტრიულად (6) ზოგადი ამონახსნი წარმოადგენს წირთა ოჯახს, დამოკიდებულს n – პარამეტრზე, ხოლო ამ ოჯახში შემავალ წირებს ხშირად ინტეგრალურ წირებს უწოდებენ.

კოშის ამოცანა. (3) დიფერენციალური განტოლებისათვის ძირითადი ამოცანა (კოშის ამოცანა) ასე ჩამოყალიბდება: ვიპოვოთ (3) განტოლების ისეთი ამონახსნი $y=\varphi(x)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $y = y_0$, როცა $x = x_0$, ანუ $y_0 = \varphi(x_0)$. ამ პირობას საწყის პირობას უწოდებენ. გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ ვიპოვოთ ისეთი ინტეგრალური წირი, რომელიც მოცემულ $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე გადის. კოშის ამოცანის ამოხსნის არსებობისა და ერთადერთობის პირობებს იძლევა შემდეგი თეორემა.

კოშის თეორემა. თუ $y' = f(x, y)$ დიფერენციალური განტოლების მარჯვენა მხარე $f(x, y)$ და მისი კერძო წარმოებული $f'_y(x, y)$ უწყვეტია (x_0, y_0) წერტილის რაიმე მიდამოში, მაშინ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობას: $y = y_0$, როცა $x = x_0$.

2. პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება. პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი სახეა

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0 \tag{7}$$

თუ ეს განტოლება $\frac{dy}{dx}$ წარმოებულის მიმართ პირველი ხარისხისაა, მაშინ იგი შეიძლება ასე გადაიწეროს

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 . \tag{8}$$

როცა (8) დიფერენციალური განტოლება ისეთია, რომ წევრთა სათანადო დაჯგუფებით მიიღებს სახე:

$$M(x)dx + N(x)dy = 0 \tag{9}$$

სადაც M არის მხოლოდ x –ის ფუნქცია, ხოლო N კი მხოლოდ y –ისა, ასეთ განტოლებას ეწოდება დიფერენციალური განტოლება განცალებული ცვალდებით. მისი ამონახსნი მიიღება უშუალო ინტეგრებით:

$$\int M(x)dx + \int N(x)dy = C$$

სადაც, C ინტეგრების მუდმივია.

მაგალითი 1: ამოვხსნათ განტოლება $(x+1)dx + (y-2)dy = 0$

ამოხსნა: მოცემული განტოლების უშუალო ინტეგრება გვაძლევს:

$$\int (x+1)dx + \int (y-2)dy = C$$

აქედან,

$$\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(y-2)^2}{2}=C$$

ანუ
$$(x+1)^2+(y-2)^2=2C$$

საიდანაც, $y=2\pm\sqrt{2C-(x+1)^2}$. ეს არის მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

თუ (8) განტოლება ისეთია, რომ $M(x,y)$ და $N(x,y)$ ფუნქციების წარმოდგენა შეიძლება ასე: $M(x,y)=X_1(x)Y_1(y)$ და $N(x,y)=X_2(x)Y_2(y)$, მაშინ განტოლება

$$X_1(x)Y_1(y)dx=X_2(x)Y_2(y)dy=0 \tag{10}$$

დაიყვანება განტოლებამდე განცალებული ცვლადებით. ამისათვის (10) განტოლების ორივე მხარე გავყოთ $X_2(x)Y_1(x)$ გამოსახულებაზე.

მაგალითი 2: ამოვხსნათ განტოლება $(x+1)ydx-(y-1)xdy=0$

ამოხსნა: ცვლადთა განცალების მიზნით განტოლების ორივე მხარე გავყოთ xy –ზე მივიღებთ: $\frac{x+1}{x}dx-\frac{y-1}{y}dy=0$. მოვახდინოთ ინტეგრება

$$\int\frac{x+1}{x}dx-\int\frac{y-1}{y}dy=C$$

საიდანაც

$$x+\ln x-y+\ln y=\ln C, \qquad \ln\frac{xy}{C}=y-x=\ln e^{y-x}$$

მაშასადამე,

$$xy=Ce^{y-x} \qquad \text{და} \qquad y=\frac{Ce^{y-x}}{x}.$$

ეს არის ზოგადი ამონახსნი.

3. ერთგვაროვანი განტოლება: დიფერენციალურ განტოლებას

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{11}$$

უწოდებენ ერთგვაროვან განტოლებას, თუ $M(x,y)$ და $N(x,y)$ ერთი და იმავე რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია. ასეთი სახის დიფერენციალური განტოლებანი ამოიხსნება შემდეგი ჩასმით: $y=xt$. ამ ჩასმით ერთგვაროვანი განტოლება დაიყვანება დიფერენციალურ განტოლებამდე განცალებადი ცვლადებით.

მაგალითი 3: ამოვხსნათ განტოლება $y^2dx+(x^2-xy)dy=0$

ამოხსნა: მოცემული განტოლება ერთგვაროვანია, ამიტომ შემოვიღოთ აღნიშვნა $y=xt$. აქედან $dy=xdt+tdx$. ამ მნიშვნელობებს, თუ ჩავსვამთ მოცემულ განტოლებაში, გვექნება:

$$t^2x^2dx+(x^2-tx^2)(tdx+xdt)=0$$

ანუ

$$x^2tdx+x^3(1-t)dt=0$$

ახლა ცვალდთა განცალების მიზნით ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ tx^2-ზე. მივიღებთ:

$$\frac{dx}{x}+\frac{(1-t)dt}{t}=0$$

თუ მოვახდენთ ინტეგრებას, მივიღებთ:

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{(1-t)dt}{t}=C$$

ანუ $lnx+lnt-t=C$, პოტენცირების შესრულების შემდეგ მოვიღებთ: $tx=Ce^t$. ახლა დავუბრუნდეთ y ცვლადს, აღნიშვნიდან გვაქვს: $t=\frac{y}{x}$. მაშასადამე, ზოგად ამონახსნს ექნება სახე: $y=Ce^{\frac{y}{x}}$.

4. პირველი რიგის წრფივი განტოლება. დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც წრფივია უცნობი ფუნქციისა და მისი პირველი რიგის წარმოებულის მიმართ ეწოდება პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება. მისი ზოგადი სახეა

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{12}$$

სადაც, $P(x)$ და $Q(x)$ წარმოადგენს x –ის მოცემულ უწყვეტ ფუნქციებს. ამ განტოლების ამონახსნი ვეძებოთ ორი $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციის ნამრავლის სახით: $y=uv$, სადაც u და v საძიებელი ფუნქციებია x ცვლადებისა. ამ ფუნქციების მოძებნით მიიღება (12) განტოლების ზოგადი ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[c+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right] \tag{13}$$

ეს არის (12) განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

მაგალითი 4: ამოვხსნათ განტოლება $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=2x^2$

ამოხსნა: მოცემულ განტოლებაში $P(x)=-\frac{1}{x}$, $Q(x)=2x^2$. ვისარგებლოთ (13) ფორმულით, გვექნება

$$y = e^{\int \frac{dx}{x}} \left[c + \int 2x^2 e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right] = e^{\ln|x|} \left[c + 2\int x^2 e^{\ln|x|} dx \right]$$

$$y = x\left(c + 2\int x^2 \frac{dx}{x} \right) = x(c + x^2)$$

ამგვარად, ზოგადი ამონახსნია $y = x^2 + cx$.

5. მეორე რიგის ერთგვაროვანი მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება. განტოლებას

$$y'' + py' + q = 0 \qquad (14)$$

სადაც p და q მუდმივებია, ეწოდება მეორე რიგის ერთგვაროვანი მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი დიფერენციალური განტოლება. კვადრატულ განტოლებას

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (15)$$

ეწოდება (14) განტოლების მახასიათებელი განტოლება. (15) განტოლების ამონახსნებზეა დამოკიდებული (14) განტოლების ზოგადი ამოხსნები, სახელდობრ, განვიხილოთ შემთხვევები:

1. მახასიათებელი განტოლების k_1 და k_2 ფესვები ნამდვილია და $k_1 \neq k_2$. მაშინ კერძო ამონახსნები იქნება $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ რომლებიც წრფივად დამოუკიდებელია, რადგან $\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const$, ამიტომ (14) განტოლების ზოგადი ამონახნახსნი იქნება $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$, სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

მაგალითი 5: $y'' - 5y' + 6y = 0$

ამოხსნა: მახასიათებელი განტოლებაა $k^2 - 5k + 6 = 0$, $k_1 = 2$ და $k_2 = 3$.

ე.ი. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

2. მახასიათებელი განტოლების k_1 და k_2 ფესვები $k_1 = k_2$ ნამდვილია და ჯერადი. ერთი კერძო ამონახსნი იქნება $y_1 = e^{k_1 x}$. მეორე კერძო ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით $y_2 = u(x)e^{k_1 x}$ სადაც, $u(x)$ ჯერჯერობით უცნობი ფუნქციაა. გაწარმოებით მოვიღებთ:

$$y_2' = u'e^{k_1 x} + k_1 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u' + k_1 u)$$

$$y_2'' = e^{k_1 x}(u'' + 2k_1 u' + k_1^2 u)$$

ამ გამოსახულების (4) –ში შეტანით მივიღებთ:

$$e^{k_1x}\left[u''+(2k_1+p)u'+(k_1^2+pk_1+q)u\right]=0$$

რადაგან k_1 მახასიათებელი განტოლების ფესვია, ამიტომ $k_1^2+pk_1+q=0$.გარდა ამისა $k_1=k_2=-\dfrac{p}{2}$, $2k_1+p=0$. ე.ი. $u(x)$ -ის მისაღებად საჭიროა ამოიხსნას განტოლება $u''=0$. ინტეგრებით მივიღებთ $u=Ax+B$, სადაც A და B ნებისმიერი მუდმივებია. კერძოდ, შეიძლება ავიღოთ A=1 და B=0, გვექნება $u=x$. ამგვარად, მეორე კერძო ამოხსნად შეიძლება ავიღოთ

$$y_2=xe^{k_1x}. \quad \frac{y_2}{y_1}=x=const$$

საძიებელი ზოგადი ამონახსნი ასე ჩაიწერება

$$y=e^{k_1x}\left(c_1+c_2x\right) \tag{16}$$

სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივებია.

მაგალითი 6: $y''+4y'+4=0$

ამოხსნა: მახასიათებელი განტოლებაა $k^2+4k+4=0$, $(k+2)^2=0$. ამიტომ (16) ფორმულის ძალით ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y=e^{-2x}\left(c_1+c_2x\right)$$

6. მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლება. n (n>1) – ური რიგის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0 \tag{17}$$

სადაც x დამოუკიდებელი ცვლადია, y ამ ცვლადის უცნობი ფუნქციაა, ხოლო $y,y',y'',\ldots,y^{(n)}$ უცნობი y ფუნქციის წარმოებულები. თუ (17) განტოლება ამოხსნადია $y^{(n)}$-ის მიმართ, მაშინ

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}) \tag{18}$$

ამ განტოლებისათვის, ისე, როგორც პირველი რიგის განტოლებისათვის, მართებულია

თეორემა 1: თუ (18) განტოლების მარჯვენა ნაწილი $x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}$ ცვლადების უწყვეტი ფუნქციაა რაიმე (n+1) განზომილებიან შემოსაზღვრულ ჩაკეტილ არეში, რომელიც შეიცავს $(x_0,y_0,y_0',y_0'',\ldots,y_0^{(n-1)})$ წერტილს, მაშინ x_0 წერტილის გარკვეულ მიდამოში არსებობს ამ განტოლების ისეთი $y=\varphi(x)$ ამონახსნი, რომ

$$\varphi(x_0)=y_0,\varphi'(x_0)=y_0',\ldots,\varphi^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

როდესაც $f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})$ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები $y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}$ ცვლადების მიმართ უწყვეტია არეში, მაშინ ასეთი ამონახსნი ერთადერთია.

პირობებს, როცა $x=x_0$, მაშინ $y=y_0,\ y'=y_0',\ y''=y_0'',\ \dots,\ y^{(n-1)}={y_0}^{(n-1)}$, სადაც x_0 და $y_0,y_0',y_0'',\dots,{y_0}^{(n-1)}$ წინასწარ მოცემული რიცხვებია **საწყისი პირობები** ეწოდებათ. x_0 რიცხვს ეწოდება დამოუკიდებელი არგუმენტის საწყისი მნიშვნელობა, ხოლო რიცხვებს $y_0,y_0',y_0'',\dots,{y_0}^{(n-1)}$ კი ამონახსნისა და მისი წარმოებულების საწყისი მნიშვნელობები. (18) განტოლების ისეთი ამონახსნის მოძებნის ამოცანას, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს **კოშის ამოცანა** ეწოდება.

განსაზღვრება: n – ური რიგის დიფერენციალური განტოლების **ზოგადი ამონახსნი** (ზოგადი ინტეგრალი) ეწოდება

$$y=\varphi(x,c_1,c_2,\dots,c_n) \tag{19}$$

ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს (18) განტოლებას $c_1,c_2,\dots,c_n$ მუდმივების ნებისმიერი მნიშველობისათვის. ამის გარდა, როგორიც გინდა იყოს საწყისი პირობები

$$x=x_0,\quad y=y_0,\ y'=y_0',\ y''=y_0'',\ \dots,\ y^{(n-1)}={y_0}^{(n-1)} \tag{20}$$

ნებისმიერი $c_1,c_2,\dots,c_n$ მუდმივები შეიძლება ისე შევარჩიოთ, რომ (19) ფუნქცია აკმაყოფილებდეს (20) საწყის პირობებს.

განსაზღვრება: n – ური რიგის დიფერენციალური განტოლების იმ ამონახსნს, რომელიც მოცემულ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს (18) განტოლების **კერძო ამონახსნი** ეწოდება.

სასაზღვრო ამოცანა. (17) განტოლების ინტეგრების ამოცანას ეწოდება სასაზღვრო ამოცანა, თუ საძიებელი ფუნქციისა და შესაძლებელია, მისი წარმოებულის მნიშვნელონა მოცემულია არა ერთი $x=x_0$ წერტილისათვის, როგორც კოშის ამოცანაშია, არამედ რომელირაც ფიქსირებული ინტერვალის ბოლოებზე. უფრო ზოგად შემთხვევაში კი საძიებელი ფუნქციისა და მისი წარმოებულების მნიშვნელობა მოცემულია ორზე მეტ წერტილში (შესაძლებელია ინტერვალზე). შევნიშნოთ, რომ სასაზღვრო ამოცანას ყოველთვია არა აქვს ამონახსნი და თუ ეს ამონახსნი არსებობს, მაშინ ბევრ შემთხვევაში იგი არ არის ერთადერთი.

დავალება:

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით

1. რას ეწოდება დიფერენციალური განტოლება?
2. რას ნიშნავს დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა?
3. რას ეწოდება დიფერენციალური განტოლების რიგი?
4. როგორი სახე აქვს პირველი რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას?
5. როგორ გამოითვლება პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება?
6. რას ეწოდება მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლება?
7. რას ეწოდება მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლების სასაზღვრო ამოცანა?

პრაქტიკული სავარჯიშოები:

1. ა) $(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$ ბ) $(1+e^x)y\dfrac{dy}{dx} = e^x$
2. ა) $(1+x^2)dy - y(1+y^2)dx = 0$ ბ) $y'\sin x - y\ln y = 0$
3. ა) $(2y - x)dx - (2x - y)dy = 0$ ბ) $x\cos\dfrac{y}{x}dy = \left(y\cos\dfrac{y}{x} - x\right)dx$
4. ა) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = 2x^2$ ბ) $(x-1)y' + y - x^3 + x^2 = 0$ გ) $y'' - 5y' + 6y = 0$

§ 2. დიფერენციალური განტოლების ცნების გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში.

1. წარმოების თეორიის ძირითადი კანონი. ისარგებლეთ წარმოების თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი კანონით: **წარმოების ყველაზე მაღალი ეკონომიკური დონე მაშინ მიიღწევა, როდესაც საშუალო და ზღვრული დანახარჯები ტოლია** – და დაადგინეთ მთლიანი დანახარჯების ფუნქციის სახე.

წარმოების მთლიანი დანახარჯები აღინიშნება $C_T(Q)$, სადაც Q საქონლის რაოდენობაა. საშუალო დანახარჯები $C_M(Q)$ არის მთლიანი დაგნახარჯების შეფარდება დამზადებული საქონლის რაოდენობასთან. ე.ი. $C_M(Q)=\dfrac{C_T(Q)}{Q}$, ხოლო ზღვრული დანახარჯები არის მთლიანი დანახარჯების ფუნქციის წარმოებული საქონლის რაოდენობით, ე.ი. $C_m(Q)=C_T'(Q)$. წარმოების თეორიის ძირითადი კანონის თანახმად გვაქვს:

$$C_M(Q)=C_m(Q),\ \text{ანუ}\ \frac{C_T(Q)}{Q}=C_T'(Q).$$

მივიღეთ პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება. ამოვხსნათ იგი. გვაქვს (სიმოკლისათვის T ინდექსს არ ვწერთ):

$$\frac{C(Q)}{Q}=\frac{dC'(Q)}{dQ} \quad \text{ანუ} \quad \frac{dC}{C}=\frac{dQ}{Q},$$

უკანასკნელი ვაინტეგროთ

$$\int\frac{dC}{C}=\int\frac{dQ}{Q}.$$

აქედან $lnC=lnkQ$ ანუ $C=kQ$. მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია არის $C_T(Q)=kQ$. ე.ი. დანახარჯები დამზადებული საქონლის რაოდენობის პირდაპირპროპორციულია.

2. წონასწორობის ფასის განსაზღვრა. განვიხილოთ ეკონომიკური ამოცანა: დასაწყისში საქონლის ფასი იყო 36 ლარი t კვირის შემდეგ ფასი, როგორც დროის ფუნქცია, გახდა $P(t)$ ლარი. ვთქვათ, მოთხოვნის ფუნქციაა

$$Q=120-2P+5\frac{dP}{dt},$$

ხოლო მიწოდების ფუნქციაა

$$S=-30+3P+50\frac{dP}{dt}.$$

განსაზღვრეთ წონასწორობის ფასი:

1. t კვირის შემდეგ;
2. t=3 კვირის შემდეგ;
3. t=6 კვირის შემდეგ.

წონასწორობის ფასი მიიღწევა, როცა მოთხოვნა გაუტოლდება მიწოდებას:

$$Q=S$$

ე.ი.

$$120-2P+5\frac{dP}{dt}=-30+3P+50\frac{dP}{dt}$$

მივიღეთ I რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება P-ს მიმართ. ამოვხსნათ იგი. გამარტივებით მივიღებთ

$$45\frac{dP}{dt}=-5P+150 \qquad \text{ანუ} \qquad \frac{dP}{dt}=-\frac{1}{9}(P-30)$$

ცვლადთა განცალებით მივიღებთ: $\dfrac{dP}{P-30}=-\dfrac{1}{9}dt.$

ვაინტეგროთ ორივე მხარე: $\displaystyle\int\frac{dP}{P-30}=-\frac{1}{9},$

საიდანაც $\ln\dfrac{P-30}{C}=-\dfrac{1}{9}t$

ანუ $\dfrac{P-30}{C}=e^{-\frac{1}{9}t}$

საბოლოოდ $P=Ce^{-\frac{1}{9}t}+30.$

C მუდმივის განსაზღვრის მიზნით გამოვიყენოთ საწყისი პირობა, როცა t=0, მაშინ P=36. ჩავსვათ, მივიღებთ:

$$36=Ce^{0}+30 \quad\Rightarrow\quad C=6 \quad \text{ე.ი.} \quad P=6e^{-\frac{1}{9}t}+30.$$

პასუხი:
1. $P=Ce^{-\frac{1}{9}t}+30;$
2. P=34,3 როცა t=3;
3. P=33,1 როცა t=6;

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. რ. დანელია, ჯ. როგავა წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის მოკლე კურსი, თბილისი 1997.
2. რ. დანელია. მატრიცები. თბილისი. „ინტელექტი“. 1997.
3. რ. დანელია, ნ. ჩხაიძე, ი. გოგსაძე მათემატიკა ეკონომისტებისათვის (სალექციო კურსი, ნაწ. I) თბ. 2002.
4. ნ. დურგლიშვილი უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული. განათლება 1977.
5. მ. ელიზბარაშვილი უმაღლესი მათემატიკა (ამოცანები და სავარჯიშოები) 2002.
6. ა. ზერაგია უმაღლესი მათემატიკა ტ. 1-2, თბილისი 1985.
7. გ. თავართქილაძე, ა. დოლიძე, ნ. ხვედელიძე, დ. შენგელია მათემატიკა ეკონომისტებისათვის. თბილისი 2000.
8. ს. თოფურია, ვ. ხოჭოლავა, ნ. მაჭარაშვილი, დ. გიორგაძე, ა. კვალიაშვილი. წრფივია ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები. თბილისი. „განათლება“. 1988.
9. ა. კრინსკი მათემატიკა ეკონომისტებისათვის. თბილისი 1974.
10. ნ. მუსხელიშვილი ანალიზური გეომეტრიის მოკლე კურსი. თბილისი. „გამომც. ტექნიკა და შრომა“. 1951.
11. ზ. ნაცვლიშვილი, გ. ტაბიძე, რ. დანელია, ჯ. გიორგობიანი, მ. კუბლაშვილი. დისკრეტული მათემატიკის საფუძვლები. თბილისი. „განათლება“. 1990.
12. დ. ნატროშვილი, მ. უსანეთაშვილი, ლ. გიორგაშვილი, გ. ჯაშიაშვილი მათემატიკა ეკონომისტებისათვის. თბილისი 1999.
13. ა. რუხაძე. უმაღლესი მათემატიკა I და II ტ. 1985.
14. ვლ. ჭელიძე, ე. წითლანაძე მათემატიკური ანალიზის კურსი. ტ. I-II. „თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა“. თბ. 1989.
15. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М. Наука. 1979.
16. Бараненко Г. С. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУзов. под редакцией Б.П. Демидовича. М. Наука. 1978.
17. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М. Наука. 1977.
18. Бельман Р. Введение в теорию матриц. М. Наука. 1976.
19. Бугров Я. С., Никольски С.М. Диференциальное и интегральное исчисление. М. Наука. 1988.

20. Бугров Я. С., Никольски С.М. Элементи линейной алгебры и аналитической геометрии. М. Наука. 1980.
21. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М. Наука. 1974.
22. Ведина О. И. Математический анализ для экономистов. Москва 2000 г.
23. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М. Наука. 1971.
24. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М. Наука. 1971.
25. Ефимов Н.А. Квадратичные формы и матрицы. М. Наука. 1972.
26. Замков О. и др. Математические методы в экономике. М. «Дис». 1997
27. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М. Наука. 1971.
28. Колесников А. В. Краткий курс математики для экономистов. Инфра –М, Москва 1998 г.
29. Ланкастер П. Теория матриц. М. Наука. 1978.
30. Малыхин В.И. Математика в экономике. Инфра –М, Москва 2000 г.
31. Погорелов А.В. Аналитическоя геометрия. М. Наука. 1978.
32. Привалов И.И. Аналитическоя геометрия. М. Наука. 1963.
33. Пискунов Н.С. . Диференциальное и интегральное исчисление. т.. М. Наука. 1978.
34. Фролов Н.А. Курс математического анализа т. I I. М. «учредгиз». 1963.
35. Brian D. Bunday Basic Linear Programming. Edward Arnold. 1989.
36. David Gale. The Theory of Linear Economic Models. Me Granv – Hill Book Company. Inc. 1990.
37. Economic Applications of the Theory of Grafs. By Giuseppe Avando – Badino University of Urbinom. Italy. 1962.
38. Hallam D. Economic Modelling of Agricultural Commodity Markets. Rout ledge, London. 1990.
39. Jundge G. G., Grtiffiths W.E., Jill R.C., Lutkepohl H. and Lee T.C. The Theory and Practice of Econometrics. 2nd end John Wiley & Sons. New York. 2002.
40. Maddala G.S. Introduction to Econometrics. 2nd end. Macmillan Publishing Co. New York. 1992.
41. Reinfeld N.V., Vogel W.R. Mathematical Programming. Prentice-Hall. Inc. Englewood Cliffs. New York. 2001.
42. Robert O. Ferguson and Lauren F. Sargent. Linear Programming: Fundamentals and Applications. McGraw- Hill Book Company. Inc. New York, Toronto, London. 1958.
43. Saul G. Gass Linear Programming. Methods and Applications. McGraw- Hill Book Company. Inc. New York, Toronto, London. 1958.

სარჩევი