

მედიკა

F



290 /3  
2003

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები  
Труды Тбилисского университета  
Proceedings of Tbilisi University  
346

ISSN 0376-2637

მათემატიკა. მექანიკა. ასტრონომია  
Математика. Механика. Астрономия  
Mathematics. Mechanics. Astronomy





თბილისის  
უნივერსიტეტის  
გამომცემლობა

ეძღვნება გიორგი ლომაძის დაბადების 90 წლისთავს

*Посвящается 90-летию со дня рождения Г.А.Ломадзе*

*To G. Lomadze's 90-th birth anniversary*



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა  
Издательство Тбилисского университета  
Tbilisi University Press

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

*Proceedings of Tbilisi University*

ტ. 346 v.



თბილისის  
უნივერსიტეტი

მათემატიკა ♦ მექანიკა ♦ ასტრონომია

Mathematics ♦ Mechanics ♦ Astronomy

თბილისი 2003 Tbilisi



Математика ♦ Механика ♦ Астрономия



თბილისის  
უნივერსიტეტის  
გამომცემლობა

სარედაქციო კოლეგია:

- ა. გაგნიძე, დ. გორდეზიანი, ლ. ზამბახიძე, ი. ზონენაშვილი,  
ე. იმერლიშვილი, გ. ლომაძე, ე. ნადარაია, შ. საბაშვილი, გ. ტყეშელაშვილი,  
ჯ. შარიკაძე (რედაქტორი)

Редакционная коллегия:

А.Г.Гагნიдзе, Д.Г. Гордезиани, Л.Г. Замбахидзе, И.А.Зонен-  
нашвили, Е.В. Имерлишвили, Г.А.Ломадзе, Э.А.Надарая,  
Ш.А.Сабашвили, Г.К.Ткебучава, Д.В. Шарикадзе (редактор)

Editorial board:

A.Gagnidze, D.Gordeziani, E.Imerlishvili, G.Lomadze, E.Nadaraia,  
Sh.Sabashvili, J.Sharikadze (editor), G.Tkebuchava, L.Zambakhidze,  
I.Zonenashvili

- © თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2003  
© Издательство Тбилисского университета, 2003  
© Tbilisi University Press, 2003



საქართველოს  
საქართველოს

## ГЕОРГИЙ АРСЕНЬЕВИЧ ЛОМАДЗЕ – УЧЕНЫЙ И ПЕДАГОГ

Георгию Арсеньевичу Ломадзе – крупному специалисту по теории чисел, профессору Тбилисского государственного университета – исполнилось 90 лет.

Г.А. Ломадзе родился 27 декабря 1911 года в г. Москве. Отец его до февральской революции служил в русской армии офицером.

В 1921 году родители Г.А. Ломадзе поселились в Тбилиси. Начальное образование Г.А. Ломадзе получил во французском лицее. Здесь он хорошо овладел французским языком, был отличником учебы. Среднюю школу Г.А. Ломадзе окончил в 1930 году. Два года работал рабочим в одном из тбилисских заводов, а в 1932 году успешно сдал экзамены и поступил в Тбилисский государственный университет на физико-математический факультет.

В 1937 году Г.А. Ломадзе с отличием окончил физико-математический факультет по специальности «математика». В том же году Г.А. Ломадзе поступил в аспирантуру и начал научную деятельность под руководством видного специалиста по теории чисел Арнольда Вальфиша, приехавшего в 1936 году из Варшавы в Тбилиси и ставшего впоследствии основателем грузинской научной школы по теории чисел.

Дело, начатое А.Вальфишем, успешно продолжил Г.А. Ломадзе.

В своей научной деятельности Г.А. Ломадзе уделил основное внимание теории квадратичных форм – получению «точных формул» для числа представлений натуральных чисел различными положительными квадратичными формами. Этим вопросам были посвящены его кандидатская (1948) и докторская (1963) диссертации.

Под руководством Г.А. Ломадзе были защищены 1 докторская и 7 кандидатских диссертаций.

Помимо научной деятельности, Г.А. Ломадзе известен своей педагогической и научно-организационной работой. В течение многих лет (с 1948 года) он читал лекции и вел спецкурсы и спецсеминары в Тбилисском государственном университете; руководил научным семинаром по теории чисел, на котором прошли апробации многие кандидатские и докторские диссертации по теории чисел. Дипломные работы студентов, научным руководителем которых являлся Георгий Арсеньевич, всегда были

საქართველოს  
საქართველოს  
საქართველოს  
საქართველოს



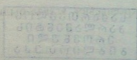
выполнены на должном уровне и в большинстве случаев являлись основой для печатной работы, а нередко – и для будущей диссертации. Научные работы студентов, выполненные под руководством Г.А. Ломадзе, часто получали высокие оценки на всесоюзных конкурсах.

Г.А. Ломадзе активно участвовал во всесоюзных и всемирных математических конференциях, часто входил в организационные комитеты этих конференций, выступал с научными докладами.

Г.А. Ломадзе – автор 63-х научных работ, он по сей день активно продолжает научно-исследовательскую работу.

Георгию Арсеньевичу желаем долгих лет жизни, здоровья и успехов.

**Т. Вепхвадзе**





### ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ В ГРУЗИИ В XX ВЕКЕ

Г.А. Ломадзе  
Введение

Научно-исследовательской работе по теории чисел в Грузии положил начало всемирно известный ученый Арнольд Вальфиш. До его прибытия в Грузию исследовательской работы по теории чисел почти не существовало, если не принять во внимание некоторые результаты первого исследователя этой отрасли в Грузии в двадцатые годы Константина Марджанишвили и лекции и учебник Константина Сулаквелидзе, на которой воспитывалась грузинская молодежь до второй мировой войны.

Только с 1936 года, после переезда из Варшавы Арнольда Вальфиша в Тбилиси, в Грузии началась систематическая научно-исследовательская работа по теории чисел, и все исследователи, работавшие по теории чисел, – его ученики. Его заслуга, что в настоящее время Тбилиси считается одним из основных научных центров по теории чисел в бывшем Советском Союзе.

#### 1. Целые точки

1. Пусть  $Q(\xi_1 \dots \xi_k) = \sum_{i,j=1}^k a_{ij} \xi_i \xi_j$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) – положительно определенная квадратичная форма от  $k$  переменных с рациональными коэффициентами,  $A_k(x)$  – количество целых точек в эллипсоиде  $Q(\xi_1 \dots \xi_k) \leq x$ ; т.е. в  $k$ - мерном рациональном эллипсоиде с центром в начале координат и радиусом  $\sqrt{x}$ ;  $V_k(x)$  – объем этого эллипсоида. Вальфиш систематически исследовал поведение функции

$$P_k(x) = A_k(x) - V_k(x)$$

при больших  $x$ . Еще раньше до переезда в Тбилиси, Вальфиш показал, что для любого положительного  $\epsilon$  в случае круга

$$A_2(x) = \pi x + O(x^{37/112+\epsilon});$$

в случае шара

$$A_3(x) = \frac{4}{3} \pi x^{\frac{3}{2}} + O(x^{43/58+\epsilon});$$

в случае четырехмерного шара





$$A_4(x) = \frac{\pi^2}{2} x^2 + O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right).$$

Вальфиш также доказал, что

$$P_k(x) = O(x^{k/2+\epsilon})$$

в случае рационального эллипсоида, когда  $k \geq 8$ , а в случае шара, когда  $k \geq 5$ , для любого четырехмерного целочисленного эллипсоида он показал, что

$$P_k(x) = O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right). \quad (1.2)$$

Он оценил также функцию  $P_k(x)$  для некоторых иррациональных эллипсоидов частного вида.

В Тбилиси Вальфиш усовершенствовал двукратный контурный интегральный метод Ярника и для четырехмерных целочисленных эллипсоидов доказал, что

$$\int_0^x P_4^2(U) du = \sigma(Q)x^3 + O\left(x^{\frac{1}{2}} \ell \log^2 x\right),$$

где

$$\sigma(Q) = \frac{\pi^2}{6D} \sum_{\substack{h,q=1 \\ (h,q)=1}}^{\infty} \frac{|S(h,q)|^2}{q^6 h^2}$$

– сингулярный ряд проблемы,  $D$  – детерминант квадратичной формы  $Q$ , а

$$S(h,q) = \sum_{a_1, \dots, a_4=0}^{q-1} \exp\left(2\pi i \frac{h}{q} Q(a_1, \dots, a_4)\right)$$

– сумма Гаусса

Пусть  $r_s(n)$  обозначает число представлений целого числа  $n$  квадратичной формой  $Q$  от  $s$  переменных. Вальфиш доказал, что

$$\sum_{0 \leq n \leq x} r_4^2(n) = T_4(Q)x^3 + O(x^2 \log^3 x)$$

и

$$\sum_{0 \leq n \leq x} r_3^2(n) = T_3(Q)x^2 + O\left(x^{\frac{3}{2}} \log x\right),$$

где

$$T_4(Q) = \frac{\pi^4}{3D} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^{\infty} \frac{|S(h,q)|^2}{q^8},$$

а

$$T_3(Q) = \frac{2\pi^2}{D} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^{\infty} \frac{|S(h,q)|^2}{q^6}.$$

В случае диагональных квадратичных форм с целыми коэффициентами он суммировал также сингулярные ряды  $\sigma(Q), T_4(Q)$  и  $T_3(Q)$ .

Применяя оценку Титчмарша тригонометрических сумм, Вальфиш улучшает оценку (1.2), а именно доказывает, что

$$P_4(x) = O(x \log^{4/3} x \log \log x).$$

Далее, применяя одну теорему Ло-Кен-Хуа сперва для четырехмерных шаров, а потом для четырехмерных рациональных эллипсоидов, он показал, что

$$P_4(x) = O\left(x \log^{3/4} x (\log \log x)^{1/2}\right).$$

Наконец, применяя новый метод Виноградова для оценки тригонометрических сумм, он доказывает, что для четырехмерных рациональных эллипсоидов

$$P_4(x) = O\left(x \log^{2/3} x\right).$$

Применением методов Виноградова и Коробова для оценки тригонометрических сумм, Вальфиш улучшает свою оценку (1.1), а также оценку Ландау для четырехмерных шаров и получает оценку:

$$A_4(x) = \frac{\pi^2}{2} x^2 + O\left(x \log^{2/3} x\right).$$

2. Для многомерных шаров Вальфиш получил следующие асимптотические формулы:

$$P_{2k}(x) = \begin{cases} D_{2k} \left\{ (1-2^{-k}) \zeta(k) \right\}^{-1} \psi_k(x) x^{k-1} + O\left(x^{k-\frac{3}{2}}\right) & (1.3) \\ \text{при четных } k \geq 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{2k} L^{-1}(k) \psi_k(x) x^{k-1} + O\left(x^{k-\frac{1}{2}}\right) & (1.4) \\ \text{при нечетных } k \geq 5, \end{cases}$$

где

$$\psi_k(x) = \begin{cases} -\sum_{\substack{u=1 \\ 2|u}}^{\infty} u^{1-k} \psi\left(\frac{b}{u}\right) + (-1)^{k/2} \sum_{\substack{n=1 \\ 2|n}}^{\infty} n^{1-k} \left\{ \psi\left(\frac{x}{n}\right) - 2\psi\left(\frac{x}{2n}\right) \right\} & \text{при четных } k, \\ -\sum_{\substack{u=1 \\ 2 \nmid u}}^{\infty} (-1)^{\frac{u-1}{2}} u^{1-k} \psi\left(\frac{x}{u}\right) + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{1-k} \left\{ \psi\left(\frac{x}{n}\right) - \right. \\ \left. - \psi\left(\frac{x}{2n}\right) - 2\psi\left(\frac{x-n}{4n}\right) \right\} & \text{при нечетных } k, \end{cases}$$

$D_{2k} = \pi^{\frac{k}{2}} \Gamma^{-1}(k)$ , здесь и далее в этом отделе  $\Gamma$  – гамма функция,  $\zeta(x)$  – дзета функция Римана, а

$$L(x) = \sum_{\substack{u=1 \\ 2 \nmid u}}^{\infty} (-1)^{\frac{u-1}{2}} u^{-x},$$

$$\psi(x) = y - [y] - \frac{1}{2}u \quad ([y] \text{ обозначает целую часть } y).$$

Методом Вальфиша, которым получены формулы (1.3) и (1.4), Лурсманашвили для многомерных шаров получил следующие асимптотические формула (в этих формулах везде  $r \leq j \leq k/2 - 1$

а) Пусть  $k$  – четное  $\geq 2j + 2$ , тогда

$$P_{2k}(x) = D_{2k} \{k(i - 2^{-k}) \zeta(k)\}^{-1} \sum_{r=1}^j (-1)^r \left(\frac{k}{r}\right) \psi_{k,r}(x) x^{k-r} + O\left(x^{\frac{k-j-1}{2}}\right), \quad (1.5)$$

где

$$\psi_{k,r}(x) = \sum_{\substack{u=1 \\ 2 \nmid u}}^{\infty} u^{r-k} \bar{B}_r\left(\frac{x}{u}\right) + (-1)^{\frac{k}{2}+1} 2^{r-k} \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k} \left\{ \bar{B}_r\left(\frac{x}{2d}\right) - 2^r \bar{B}_r\left(\frac{x}{4d}\right) \right\},$$

$\bar{B}_r(y) = B_r(y - [y])$ ,  $B_r(x)$  – полиномы Бернулли.

б) Пусть  $k$  – нечетное  $\geq 2j + 3$ , тогда

$$P_{2k}(x) = D_{2k} \{kL(k)\}^{-1} \sum_{r=1}^j (-1)^r \left(\frac{k}{r}\right) \phi_{k,r}(x) x^{k-r} + O\left(x^{k-j-\frac{1}{2}}\right), \quad (1.6)$$



где  $\phi_{kr}(x) = \sum_{u=1}^{\infty} (-1)^{\frac{u-1}{2}} u^{r-k} \bar{B}_r\left(\frac{x}{u}\right) + (-1)^{\frac{k+1}{2}} 2^{1-k} \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k} G(x, d)$ ,

$$G(x, d) = \bar{B}_r\left(\frac{x}{d}\right) - 2^{r-1} \bar{B}_r\left(\frac{x}{2d}\right) - 2^{r-1} \bar{B}_r\left(\frac{x-d}{4d}\right).$$

в) Пусть  $k \geq 2j + 2$ , тогда

$$P_{2k+1}(x) = \pi^{k+1/2} Z^{-1}(k) \sum_{r=1}^k \frac{(-1)^r}{r!} x^{k-r+1/2} \Gamma^{-1}\left(k-r+\frac{3}{2}\right) \times$$

$$\left\{ \sum_{u=1}^k (-1)^{\frac{k(u-1)}{2}} u^{r-k-1} \sum_{h=1}^u \bar{B}_r\left(\frac{x-h^2}{u}\right) + \frac{1}{4} \sum_{d=1}^{\infty} d^{r-k-1} \sum_{h=1}^{4d} H_r\left(\frac{x-h^2}{d}\right) \right\} + O(x^{k-j}), \quad (1.7)$$

где  $H_r(y) = (-1)^{\frac{r-1}{2}} 2^{r-k} \left\{ \bar{B}_r\left(\frac{y}{2}\right) - 2r \bar{B}_r\left(\frac{y}{4}\right) \right\}$ , при четных  $k$ ,

$$= (-1)^{\frac{r-1}{2}} 2^{1-k} \left\{ \bar{B}_r(y) - 2^{r-1} \bar{B}_r\left(\frac{y}{2}\right) - 2^{r-1} \bar{B}_r\left(\frac{y-1}{4}\right) \right\},$$

при нечетных  $k$ .

Здесь и далее в этом пункте

$$Z(k) = \begin{cases} (1-2^{-k}) \zeta(k), & \text{когда } k - \text{ четное} \\ L(k), & \text{когда } k - \text{ нечетное} \end{cases}$$

Формулы (1.5) и (1.6) являются уточнениями формул Вальфиша (1.3) и (1.4).

Вальфиш улучшил остаточные члены формул (1.5) – (1.6) и (1.7).

Соответственно, он получил остаточные члены  $O(x^{k-j-1} \log x)$  и

$$O\left(x^{k-j-\frac{1}{2}} \log x\right).$$

Вальфиш для  $k$ -мерных ( $k \geq 3$ ) шаров, используя теоремы Петерсона и улучшенные им самим оценки Лурсманашвили (1.5) – (1.7), получил следующие асимптотические формулы:

$$P_{2k}(x) = P_{2k}(kZ(k))^{-1} \sum_{r \leq \frac{k-1}{2}} (-1)^r \binom{k}{r} \Omega_{kr}(x) x^{k-r} + O\left(x^{\frac{k}{2}} \log x\right),$$

$$P_{2k+1}(x) = \pi^{k+1/2} Z^{-1}(k) \sum_{r \leq \frac{k}{2}} \frac{(-1)^r}{r!} x^{k-r+1/2} \Gamma^{-1}\left(k-r+\frac{3}{2}\right) \Omega_{kr}(x) + O\left(x^{\frac{k+1}{4}} \log x\right),$$



УРАЛЬСКИЙ  
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

где  $\Omega_{kr} = \psi_{kr}(x)$ , когда  $k$  – четное

$= \phi_{kr}(x)$ , когда  $k$  – нечетное

В случае шара Вальфиш полностью изучил величины:

$$P_{2k} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2P_{2k}(n)}{D_{2k}n^{k-1}} \quad \text{и} \quad \rho_{2k} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{2P_{2k}(n)}{D_{2k}n^{k-1}},$$

которые тесно связаны с функцией  $P_{2k}(x)$ .

В случае  $k \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $k \geq 4$ , он получил точные значения этих величин, а именно:

$$P_{2k} = \zeta(k-1) \left\{ (1-2^{-k}) \zeta(k) \right\}^{-1} \quad \text{и} \quad \rho_{2k} = 2 - P_{2k}.$$

В случае, когда  $k \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $k \geq 6$ , для величин  $P_{2k}$  и  $\rho_{2k}$  он получил довольно точные приближенные значения; когда  $k$  – нечетное  $\geq 9$ , для  $P_{2k}$  и  $\rho_{2k}$  он получил худшие приближенные значения, чем в случае, когда  $k \equiv 2 \pmod{4}$ ). Он также получил в определенном смысле приближенные значения для величин  $P_k$  и  $\rho_k$ , когда  $k$  – нечетное.

3. Пусть  $x \geq 0$  и  $L(y)$  обозначает количество целых точек в области  $u^4 + v^4 \leq x$ . Анна Вальфиш доказала, что

$$\int_0^N L(y) dy = C_1 N^{\frac{3}{2}} + 5^{-1} \cdot 2^{\frac{29}{4}} N^{\frac{3}{2}} \sum_{a=1}^{\infty} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{5}{4}} \cos 2\pi N^{\frac{1}{4}} ax dx - 2^4 \pi^{-2} N \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{a_1}{ab} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi N^{\frac{1}{4}} Hx dx + O(N^{\frac{3}{4}}), \quad (1.8)$$

где

$$C_1 = 3^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right), \quad a_{-1} = (ab)^{\frac{2}{3}} 3^{-\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}}\right)^{-1}, \quad H = \left(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}}\right)^{-1} \quad (a, b \geq 1),$$

и что ряды в правой части абсолютно сходятся. Вместе с тем она исследовала асимптотические свойства этих рядов методом стационарных фаз. Соотношение (1.8) доказано методом Уайльда, который получил аналогичное соотношение. (1.8) является уточнением соответствующего соотношения Уайльда в одном частном случае.

## II. Вопросы аддитивной теории простых чисел



1. Большое количество своих трудов Вальфиш посвятил аддитивной теории простых чисел. Еще до приезда в Тбилиси он доказал, что для любого  $\varepsilon > 0$

$$Q(n) = \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p(p-1)} \right) \prod_{p|n} \frac{p^2 - p}{p^2 - p - 1} \int_0^n \frac{du}{\log u} + O\left(n \log^{-\frac{1}{2}} n\right),$$


где  $Q(n)$  обозначает число представлений натурального числа  $n$  суммой двух чисел, одно из которых бесквадратное целое число, а другое – простое число. Эта оценка гораздо лучше, чем оценка полученная раньше Пейджем. В доказательстве Вальфиш применил известную, так называемую лемму Зигеля-Вальфиша о количестве простых чисел в арифметической прогрессии. Эта лемма в дальнейшем сыграла большую роль в исследовании аддитивной теории простых чисел. Лемма заключается в следующем: если  $(l, q) = 1$ , тогда для любого  $\varepsilon > 0$

$$\left| \pi(x; q, \ell) - \frac{1}{\varphi(q)} \int_2^x \frac{du}{\log u} \right| < A x e^{-A \sqrt{\log x}} + A \frac{x^{1-\varepsilon}}{\varphi(q) \log x}.$$

Здесь  $\pi(x; q, \ell)$  – число простых чисел не превосходящих  $x$  в арифметической прогрессии  $\ell + qn$ , где  $0 \leq \ell \leq q$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ),  $x \geq 2$  – любое действительное число,  $\varphi(q)$  – функция Эйлера,  $A$  – положительная абсолютная константа, зависящая только от  $\varepsilon$ .

Уже будучи в Тбилиси, Вальфиш доказал, что почти все целые числа, которые  $\equiv 4 \pmod{24}$ , являются суммами квадратов четырех простых чисел, а почти все целые числа, которые  $\equiv 3, 27, 51, 99 \pmod{120}$ , являются суммами квадратов трех простых чисел. Из этих двух следствий он сделал вывод, что для любого класса вычетов по модулю 120 существует целое число  $\sigma$  ( $3 \leq \sigma \leq 8$ ), такое, что почти все числа из этого класса являются суммами квадратов  $\sigma$  простых чисел и почти ни одно целое число не представляется суммой квадратов простых чисел, количество которых меньше, чем  $\sigma$ . При доказательстве первых двух результатов он применил одну оценку Виноградова тригонометрических сумм и указанную выше лемму Зигеля-Вальфиша. Но сам Вальфиш считал, что недостаток этой леммы в том, что при доказательстве применяется трудно доказуемая теорема Зигеля, а все применения этой леммы касаются только рациональных простых чисел. Вальфиш доказывает новую лемму, которая сложнее леммы Зигеля-Вальфиша, но она не требует применения теоремы Зигеля. Эта новая лемма Вальфиша заключается в следующем:

Пусть  $X \geq 3$  – любое число, если  $x \leq X, q < \ell^{\sqrt{\log x}}, (\ell, q) = 1$ , тогда



$$\pi(x; q, \ell) = \frac{1}{\varphi(q)} \int_2^x \frac{du}{\log u} - \bar{\varphi} \frac{\chi'(\ell)}{\varphi(q_0)} \int_2^x \frac{u^{\rho-1} du}{\log u} + O\left(X e^{-\sqrt{(\log \log X)^2}}\right).$$

Функции  $\pi(x, q, \ell)$  и  $\varphi(q)$  определены выше. Функция  $\Phi(x)$  принимает только значения 0 и 1,  $q_0$  – целое положительное число, зависящее только от  $x$ , при этом

$$q_0 \geq \frac{(\log X)^2}{(\log \log X)^{\rho}}.$$

$\chi'(\ell)$  является несобственным действительным характером, когда  $q_0 | q$  и  $q_0 < q$ , который соответствует собственному главному характеру  $\chi_0$  по модулю  $q_0$  и  $\chi'(\ell) = 0$ , когда  $q_0 \nmid q$  и  $(\ell, q) = 1$ ,  $\rho$  – число, зависящее только от  $X$ , и  $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$ .

Применением этой новой леммы Вальфиш получил все фундаментальные результаты аддитивной теории простых чисел, которые ранее были получены с помощью леммы Зигеля-Вальфиша Виноградовым, Эстерманом, Девенпортом, Гейлброном, но только в асимптотических формулах с немного худшим остаточным членом, а остаточные члены в аддитивной теории чисел не столь значительны, как в мультипликативной теории чисел.

Применением леммы Зигеля-Вальфиша и своей оценки тригонометрических сумм Виноградов доказал известную теорему о том, что любое, довольно большое, нечетное натуральное число  $n$  представимо суммой 3-х простых нечетных чисел, и получил асимптотическую формулу для числа  $N_3(n)$  таких представлений:

$$N_3(n) = \frac{n^2}{2 \log^3 n} \sigma_3(n) + O\left(n^2 \log^{-\frac{7}{2}} n \log \log n\right), \quad (2.1)$$

где

$$\sigma_3(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q e^{-\frac{2\pi i a n}{q}}$$

– сингулярный ряд проблемы,  $\mu(q)$  и  $\varphi(q)$  – соответственно функции Мебиуса и Эйлера. Вальфиш применением своей леммы получил оценку

(2.1) с немного худшим остаточным членом  $O\left(n^2 \log^{-\frac{7}{2}} n \log n\right)$ .



2. Вальфиш доказал, что любое довольно большое нечетное натуральное число  $n$  представимо суммой  $r \geq 3$  простых нечетных чисел, и для числа таких представлений  $N_r(n)$  получил асимптотическую формулу:

$$N_r(n) = \frac{n^{r-1}}{(r-1) \log^r n} \sigma_r(n) + O(n^{r-1} \log^{-r} n) \quad (2.2)$$

где

$$\sigma_r(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \left| \frac{\mu(q)}{\Phi(q)} \right|^3 \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q e^{-2\pi i \frac{a}{q} n} \quad (2.3)$$

– сингулярный ряд проблемы. Формулу (2.2) Вальфиш доказал индукцией по  $r$ , принимая во внимание справедливость формулы Виноградова (2.1), где  $r=3$ .

Вальфиш уточнил также формулу Виноградова (2.1). А именно, он доказал, что если  $n$  – довольно большое нечетное число и  $m \geq 3$  – любое целое число, то

$$N_3(n) = n^2 \sum_{q=3}^m \bar{c}_q (\log n)^{-q} \sigma_3(n) + O(n^2 \log^{-m-1} n), \quad (2.4)$$

где,  $\bar{c}_q$  – действительное число, зависящее только от  $q$ . Он вычислил также коэффициенты  $\bar{c}_4, \bar{c}_5, \bar{c}_6$  и  $\bar{c}_7$ . Коэффициент  $\bar{c}_3$  был вычислен Виноградовым и, как это следует из формулы (2.1),  $c_3 = \frac{1}{2}$ . Коэффициент  $\bar{c}_8$  вычислил Лурсманашвили.

Лурсманашвили методом Вальфиша доказал, что если  $n$  и  $r$  – натуральные числа одной четности и  $m \geq r$  – любое целое число, тогда довольно большое натуральное число  $n$  представимо суммой  $r \geq 3$  простых чисел и для числа таких представлений  $N_r(n)$  получил асимптотическую формулу:

$$N_r(n) = n^{r-1} \sum_{q|r} d_q(r) (\log n)^{-q} \sigma_r(n) + O(n^{r-1} \log^{-m-1} n), \quad (2.5)$$

где  $\sigma_r(n)$  определена формулой (2.3). Он же получил формулу для вычисления коэффициентов  $d_q(r)$ . Формула (2.5) является уточнением формулы Вальфиша (2.2) и обобщением формулы Вальфиша (2.4).



### III. Представление чисел квадратичными формами

1. В течение XIX века математики усердно исследовали арифметическую функцию  $r_s(n)$  числа представлений натурального числа  $n$  суммами  $s$  квадратов целых чисел. Сначала исследовали лишь конкретные значения для числа представлений. Впервые Бульгин в 1914 году применением теории эллиптических функций, обработал общий метод получения формул для функции  $r_s(n)$  при всех четных  $s$ , когда  $2 \leq s \leq 24$ . Полученные формулы подчиняются определенной закономерности. Формулы Бульгина до 16 квадратов чисто арифметическим путем доказал Бессель.

Вальфиш развил метод Бесселя и чисто арифметическим путем получил формулы Бульгина для функции  $r_s(n)$  при  $s = 18, 20, 22$  и  $24$ .

С целью получения формул для функции  $r_s(n)$  Морделл с помощью теории модулярных функций (сперва для четных, а потом – для нечетных  $s$ ) доказал существование такой функции  $\chi(\tau)$ , которую он назвал «главным инвариантом», что имеет место общее тождество:

$$\vartheta'_{00}(\tau) = \chi(\tau) + \sum_{k=1}^{(s-1)/2} A_k \vartheta_{00}^{s-2k}(\tau) \vartheta_{01}^{4k}(\tau) \vartheta_{10}^{4k}(\tau), \quad (3.1)$$

где  $\tau$  – комплексная переменная с  $\text{Im } \tau > 0$ ,  $\vartheta_{ij}(\tau)$  – тега-функции Якоби, а  $A_k$  – соответственно выбранные постоянные. Затем он предложил метод построения «главного инварианта»  $\chi(\tau)$  отдельно для четных и отдельно для нечетных  $s$ , и после соответственных вычислений вновь получил формулы Бульгина при  $s = 10, 12, 14$  и  $16$ , впервые получив формулы для функции  $r_s(n)$  при  $s = 11, 13$  и  $15$ . Так называемые дополнительные члены этих формул являются суммами, взятыми по всем представлениям натурального числа  $n$  суммами соответственно 3, 5, 7 квадратов. В случае нечетных  $s$  так называемые главные члены формул Морделла содержат множителями бесконечные ряды. Морделл также замечает, что, применив известное тождество Якоби  $\vartheta_1 = \vartheta_2 \cdot \vartheta_3 \cdot \vartheta_0$ , дополнительный член функции  $r_s(n)$  можно представить как сумму по всем представлениям натурального числа  $n$  суммой 7 квадратов.

Для суммы  $s$  квадратов Харди построил сингулярный ряд  $\rho_s(n)$ , дал классический метод суммирования этого ряда, ввел функцию  $Q_s(\tau)$ , коэффициенты Фурье которой являются суммами ряда  $\rho_s(n)$ , и применением модулярных функций доказал, что  $\vartheta_{00}^s(\tau) = \theta_s(\tau)$  для всех  $s$ , когда  $3 \leq s \leq 8$ . Отсюда для таких  $s$  следует, что  $r_s(n) = \rho_s(n)$ .



Сузуна просуммировал сингулярный ряд Харди  $\rho_s(n)$  для любого  $s$ . Эстерман применением лишь элементов теории функций комплексной переменной (без модулярных функций) вновь доказал формулы Харди для функции  $r_s(n)$ .

При помощи дальнейшего развития метода Эстермана, а также применением лишь элементов теории функций комплексных переменных, Ломадзе единым методом – одновременно для четных и нечетных  $s$  – доказал тождество Морделла (3.1); но слишком сложный «главный инвариант» Морделла  $\chi(\tau)$  он заменил суммой сингулярного ряда Харди  $\rho_s(n)$ . Применением результатов Сузуны и соответствующим вычислением он получил формулы для функции  $r_s(n)$  для всех  $s$ , когда  $9 \leq s \leq 32$ . Полученные формулы при четных  $s$  ( $10 \leq s \leq 24$ ) совпадают с формулами Булыгина, а для нечетных  $s$  ( $11 \leq s \leq 15$ ) – с формулами Морделла. При этом, при нечетных  $s$  бесконечные ряды, входящие множителями в главные члены этих формул, впервые приведены к конечному виду.

2. Пусть  $r(n; f)$  обозначает число представлений натурального числа  $n$  положительной квадратичной формой  $f=f(x_1, x_2, \dots, x_r)$  с целыми коэффициентами. Найти точные формулы для функций  $r(n, f)$  значит построить сингулярный ряд  $\rho(n, f)$ , соответствующий квадратичной форме  $f$ , найти его сумму и построить в явном виде функции

$$X_k(r; f) = \sum_{n=1}^{\infty} v_k(n, f) Q^n \quad (\text{здесь и в дальнейшем } Q = \exp(2\pi i \tau)), \text{ которые}$$

являются регулярными, когда  $\text{Im} \tau > 0$ , чтобы для любого натурального  $n$  при соответственно выбранных постоянных  $A_k$  имело место равенство

$$r(n, f) = \rho(n, f) + \sum_{k=1}^{\omega} A_k v_k(n, f), \quad (3.2)$$

где число слагаемых  $\omega$  зависит только от квадратичной формы  $f$ .

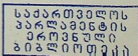
$$\text{Хорошо известно, что } \vartheta(\tau, f) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n, f) Q^n,$$

где

$$\vartheta(\tau, f) = \sum_{x_1, \dots, x_r = -\infty}^{\infty} Q^{f(x_1, \dots, x_r)}$$

является тета-рядом с соответствующим квадратичной форме  $f$ . Поэтому, если функция

$$\theta(\tau, f) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n, f) Q^n$$



регулярна, когда  $\text{Im}\tau > 0$ , тогда очевидно, что арифметическое тождество (3.2) эквивалентно функциональному тождеству

$$\vartheta(\tau, f) = \theta(\tau, f) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(\tau, f). \quad (3.3)$$

Термин «точная формула» по существу принадлежит Морделлу, так как тождество (3.1) является частным случаем тождества (3.3). Всюду в дальнейшем функции типа  $\Theta(r, f)$  будем называть главными функциями, а функции типа  $X_k(r, f)$  – дополнительными функциями, а коэффициенты Фурье в разложениях этих функций будем называть главными и дополнительными членами соответственно.

Известно, что если квадратичная форма  $\Gamma$  принадлежит одноклассному роду, тогда дополнительная функция тождественно равна нулю, т.е. в этом случае для любого натурального  $n$  формула (3.2) принимает вид

$$r(n; f) = \rho(n; f).$$

2.1 Естественно, что при изучении сумм квадратов целых чисел математики заинтересовались также примитивными положительными диагональными квадратичными формами

$$f = \{a_1, a_2, \dots, a_s\} = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_s x_s^2 \quad (3.4)$$

с целыми коэффициентами. Так, например, Лиувилль опубликовал более 100 статей, где без доказательства привел формулы для числа представлений натурального числа  $n$  квадратичными формами типа (3.4) в основном с четырьмя и шестью переменными. Все формулы Лиувилля являются разными арифметическими функциями делителей представимых натуральных чисел, а некоторые из них имеют также дополнительные члены, которые имеют простой арифметический смысл. Именно они представляют суммы, которые взяты на определенные представления целых чисел бинарными квадратичными формами.

Вальфиш развил один элементарный метод для получения точных формул для числа представлений натурального числа положительными квадратичными формами с четырьмя переменными специального вида. Этот метод в настоящее время называется методом Якоби-Вальфиша, является развитием одного элементарного метода Якоби и опирается на некоторые известные результаты, получаемые лишь простыми преобразованиями бесконечных рядов, и на тригонометрические тождества, полученные Вальфишем. Этим методом Вальфиш получил точные формулы для числа представлений натурального числа 73 квадратичными формами от четырех переменных. Часть этих формул без доказательства была опубликована Лиувиллем, а доказательство остальных существующими в то время методами представлялось невозможным.

Клюстерман методом Харди-Литлвуда построил и суммировал сингулярный ряд, соответствующий квадратичной форме  $f = \{1, 1, a\}$ , когда  $a$  – простое или удвоенное простое число, и доказал, что соответствующая функция  $\Theta(\tau, 1, 1, a, a)$  регулярна, когда  $\text{Im}\tau > 0$ . Поэтому функция  $\Theta(\tau, 1, 1, a, a)$  пригодится как главная функция. Затем для  $a=5, 6$  и  $7$  в отдельности он нашел дополнительные функции



в виде произведения некоторых тэта-функций Якоби и с помощью модулярных функций доказал тождества типа (3.3). Когда  $a=3$ , дополнительная функция тождественно равна нулю, так как квадратичная форма  $f=(1, 1, 3, 3)$  принадлежит одноклассному роду. Метод Клостермана можно использовать и в случае других квадратичных форм от четырех переменных типа (3.4). Но при рассмотрении каждой конкретной квадратичной формы метод Клостермана требует применения многих сложных формул теории тэта-функции Якоби и сложных вычислений, связанных с изучением свойств модулярных функций в своих фундаментальных областях. Кроме этого, этот метод не применим в случае квадратичных форм с двумя и тремя переменными типа (3.4).

Впервые Маасс, применением теории модулярных функций и тэта-функций Якоби, развил общий метод для получения точных формул для числа представлений натурального числа тернарными квадратичными формами типа (3.4). Но Маасс исследовал только те квадратичные формы, которые принадлежат одноклассному роду и имеют бесквадратные коэффициенты.

Стрефкерк применением тэта-функций с характеристиками и теории Гекке о целых модулярных формах получил точные формулы для числа представлений целого числа суммами некоторых обобщенных полигональных чисел.

2.2. Ломадзе дальнейшим развитием указанных выше методов Харди, Морделла, Гекке, Клостермана, Маасса и Стрефкерка разработал общий метод для получения точных формул для числа представлений натурального числа любой квадратичной формой типа (3.4), независимо от числа переменных и принадлежности этой квадратичной формы к одноклассному или многоклассному роду. С этой целью он, как и Харди, для квадратичной формы  $f(a_1, a_2, \dots, a_s)$  построил сингулярный ряд:

$$\rho\{n; a_1, a_2, \dots, a_s\} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Delta^{\frac{1}{2}}} n^{\frac{s}{2}-1} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-s} \sum_{\substack{h \bmod q \\ (h, q)=1}} e\left(-\frac{hn}{q}\right) \prod_{k=1}^s S(a_k h, q)$$

где  $\Delta$  – детерминант формы  $f$ ,  $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$  – гамма-функция,  $S(a_k h, q)$  – сумма Гаусса, и ввел функцию

$$\theta\{\tau, a_1, a_2, \dots, a_s\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho\{n, a_1, a_2, \dots, a_s\} Q^n,$$

которая регулярна, когда  $\text{Im}\tau > 0$  и  $s > 4$ , так как в этом случае сингулярный ряд  $\rho\{n, a_1, a_2, \dots, a_s\}$  абсолютно сходится. В случае, когда  $s \leq 4$ , так же, как Гекке и Стрефкерк, Ломадзе вводит дополнительную переменную  $z$  и рассматривает функцию:



$$\psi\{\tau, z; a_1, a_2, \dots, a_s\} = 1 + \frac{\left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{s}{2}}}{2\Delta^{\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{q; H=-\infty \\ (H, q)=1}}^{\infty} i^{s(\text{sgn } q-1)/2} \frac{\prod_{k=1}^s S(-a_k H \text{sgn } q, |q|)}{q^{s/2} (q\tau + H)^{s/2}} |q\tau + H|^{-z}$$

где штрих обозначает, что сумма не содержит членов, в которых  $q=0$ . Эта функция регулярна, когда  $\text{Re } z > 2 - \frac{S}{2}$  и  $\tau$  – фиксированное.

Ломадзе, с целью иллюстрации метода, из квадратичных форм с четырьмя переменными вида (3.4) рассмотрел произвольные квадратичные формы  $f = \{a, a, a', a'\}$  и  $f = \{a, a, a, a'\}$ , доказав, что 1) функции  $\psi\{\tau, z; a, a, a', a'\}$  и  $\psi\{\tau, z; a, a, a, a'\}$ , которые по определению регулярны, когда  $\text{Re } z > 0$ , аналитически продолжимы в полной окрестности точки  $z=0$ . 2)  $\Theta\{\tau, a, a, a', a'\} = \psi\{\tau, z; a, a, a', a'\}$  и  $\Theta\{\tau, a, a, a, a'\} = \psi\{\tau, z; a, a, a, a'\}$ . 3) функции  $\Theta\{\tau, a, a, a', a'\}$  и  $\Theta\{\tau, a, a, a, a'\}$  регулярны, когда  $\text{Im } \tau > 0$ , и являются целыми модулярными формами степени  $4aa'$  и веса 2. Обе эти функции им использованы в роли главных функций. Потом для сумм рядов  $\rho\{n; a, a, a', a'\}$  и  $\rho\{n; a, a, a, a'\}$  методом Харди-Клостермана получает удобные для вычисления формулы. Наконец, для каждой конкретной квадратичной формы находит дополнительные функции в виде произведений зэта-функций с характеристиками, которые являются параболическими формами той же степени и веса, что и соответствующие главные функции, и применением теории целых модулярных форм доказывает тождество типа (3.3). Этот комбинированный метод требует также довольно длинных вычислений, но эти вычисления элементарны и стандартны. Этот метод уже не требует построения фундаментальных областей и в связи с этим трудных вычислений. В частности Ломадзе получил точные формулы для числа представлений натурального числа 13 конкретными квадратичными формами от четырех переменных вида (3.4).

Этим же методом Беридзе получила точные формулы для числа представлений натурального числа 4, Гелашвили – 3 и Гогишвили – 4 конкретными квадратичными формами с четырьмя переменными вида (3.4). Среди квадратичных форм вида (3.4) Гонгадзе рассмотрела квадратичные формы вида  $f = \{1; a_1, a_2, a\}$ , где  $a$  – наименьшее общее кратное чисел  $a_1$  и  $a_2$ . Для сумм сингулярных рядов  $\rho\{n; 1, a_1, a_2, a\}$ , соответствующих этим квадратичным формам, она получила удобные для вычисления точные формулы для числа представлений натурального числа 5 такого же вида конкретными квадратичными формами.

С целью иллюстрации метода в случае квадратичных форм с шестью переменными вида (3.4) Ломадзе рассмотрел квадратичную форму

$$f = \{a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3\}.$$

Он доказал, что функция  $\Theta\{\tau, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3\}$  является целой модулярной формой степени  $4a$  ( $a$  – наименьшее общее кратное чисел  $a_1, a_2, a_3$ ) и веса 3. Для сумм сингулярных рядов, соответствующих этим квадратичным формам,



Ломадзе методом Харди-Клостермана получает удобные для вычисления формулы для каждой конкретной формы, находит дополнительные функции в виде суммы произведений тэта-функций с характеристиками и доказывает тождества типа (3.3). В частности, он получил точные формулы для числа представлений натурального числа 14 конкретными квадратичными формами такого вида. Этим же путем Беридзе и Гогитшвили получили точные формулы для числа представлений натурального числа квадратичными формами  $\{1,1,1,1,1,7\}$  и  $\{1,7,7,7,7,7\}$ . Этим же методом Беридзе рассмотрела квадратичные формы с восемью переменными:

$$f_1 = \{a, a, a, a, a', a', a', a'\} \quad \text{и} \quad f_2 = \{a, a, a', a', a', a'\}. \quad (3.6)$$

Для сумм соответствующих сингулярных рядов она получила удобные для вычисления формулы, для каждой конкретной формы нашла дополнительные члены, доказала тождества типа (3.3) и получила точные формулы для числа представлений натурального числа 4 конкретными квадратичными формами вида  $f_1$  и 8 – вида  $f_2$ . Квадратичные формы, рассмотренные грузинскими математиками, принадлежат многоклассным родам.

Рассмотрим теперь квадратичные формы  $f = \{a_1, a_2\}$ . Сингулярные ряды, соответствующие этим квадратичным формам, расходятся, поэтому сказать, что образующей функцией сингулярного ряда квадратичной формы  $f = \{a_1, a_2\}$  является  $\Theta(\tau, a_1, a_2)$ , не имеет смысла, что справедливо, когда число переменных квадратичной формы  $S \geq 4$ . Но Ломадзе доказал, что функция  $\Psi(\tau, z; a_1, a_2)$ , которая по определению регулярна, когда  $\text{Re}z > 1$ , аналитически продолжается в полной окрестности точки  $z=0$ . Поэтому функцию  $\theta(\tau, a_1, a_2)$  он определяет равенством:

$$\theta(\tau, a_1, a_2) = \Psi(\tau, z; a_1, a_2)|_{z=0}.$$

Далее с помощью лемм, которые по существу принадлежат Стрефкерку, он доказывает, что таким образом определенная функция  $\theta(\tau, a_1, a_2)$  является целой модулярной формой степени  $4a_1a_2$  и веса 1. Пользуясь функциональным уравнением L-функции Дирихле и некоторыми результатами Гекке, он получает разложение этой функции в ряд Фурье, а именно

$$\theta(\tau, a_1, a_2) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n; a_1, a_2) Q^n.$$

Здесь  $\rho(n, a_1, a_2)$  просто обозначает коэффициент Фурье функции  $\theta(\tau, a_1, a_2)$ ,

а не сингулярный ряд. Главной функцией он берет функцию  $\frac{1}{2}\theta(\tau, a_1, a_2)$ , а ее

коэффициент Фурье  $\frac{1}{2}\rho(n, a_1, a_2)$  – главным членом. Далее получает удобные формулы для вычисления значений функции  $\rho(n, a_1, a_2)$ . Функцию  $\rho(n, a_1, a_2)$

условно будем называть «обобщенным сингулярным рядом», а ее значение – «суммой обобщенного сингулярного ряда». Наконец, для каждой конкретной  $f = \{a_1, a_2\}$  квадратичной формы подбирает дополнительную функцию вновь в виде сумм произведений тэта-функций с характеристиками и устанавливает тождество типа (3.3). Впервые им получены точные формулы для числа представлений натурального числа восьмью конкретными бинарными квадратичными формами типа (3.4), которые принадлежат многоклассным родам.

Этим же путем Беридзе получила формулы для числа представлений натурального числа двумя конкретными парами бинарных квадратичных форм вида (3.4). С помощью формул Дирихле для числа представлений натурального числа всеми примитивными бинарными квадратичными формами с отрицательным дискриминантом и формул Ломадзе для числа представлений натурального числа диагональными бинарными квадратичными формами Вепхвадзе получил точные формулы для числа представлений натурального числа всеми бинарными примитивными недиагональными квадратичными формами с дискриминантами  $-44, -68, -76$  и  $-80$ .

Рассмотрим теперь квадратичные формы  $f = \{a_1, a_2, a_3\}$ .

В этом случае Ломадзе доказывает, что функция  $\psi(\tau; z, a_1, a_2, a_3)$ , регулярная по определению, когда  $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$ , аналитически продолжима в полной окрестности точки  $z=0$ . Как и в случае квадратичных форм  $f = \{a_1, a_2\}$ , он допускает, что

$$\theta(\tau, a_1, a_2, a_3) = \psi(\tau, z, a_1, a_2, a_3)_{z=0}$$

а затем доказывает, что функция  $\theta(\tau, a_1, a_2, a_3)$  регулярна при  $\operatorname{Im} \tau > 0$  и получает ее разложение в ряд Фурье:

$$\theta(\tau, a_1, a_2, a_3) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(n; a_1, a_2, a_3) Q^n.$$

Вес функции  $\theta(\tau, a_1, a_2, a_3)$  равен  $\frac{3}{2}$ . Во избежание изучения целых модулярных форм полужелого веса Ломадзе рассмотрел функцию:

$$\psi(\tau) = \prod_{k=1}^3 \vartheta_{00}(\tau, 0, 2a_k) - \theta(\tau, a_1, a_2, a_3) - \sum_{k=1}^3 A_k \prod_{i=1}^3 \vartheta_{z_k, h_k}(\tau, 0, 2N_{ki})$$

где  $A_k$  – произвольная постоянная, а  $\vartheta_{00}(\tau, 0, 2a_k)$  и  $\vartheta_{z_k, h_k}(\tau, 0, 2N_{ki})$  – тэта-функции с характеристиками. Он доказал, что если функция  $\psi(\tau)$  удовлетворяет

определенным условиям, тогда функция  $\psi^4(\tau)$  будет целой модулярной формой степени  $4a$  ( $a$  обозначает наименьшее общее кратное чисел  $(a_1, a_2, a_3)$ ) и веса  $b$ . Он доказал также, что сингулярные ряды, соответствующие квадратичным формам  $f = \{a_1, a_2, a_3\}$ , сходятся, но не абсолютно. Следовательно оказывается,



что коэффициентами Фурье  $\rho(n, a_1, a_2, a_3)$  функции  $\theta(\tau, a_1, a_2, a_3)$  является сингулярный ряд квадратичной формы  $f = \{a_1, a_2, a_3\}$  и ее образующей – функция  $\theta(\tau, a_1, a_2, a_3)$ , как и в том случае, когда число переменных квадратичной формы  $f = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ ,  $S \geq 4$ .

Для суммы ряда  $\rho(n, a_1, a_2, a_3)$  Ломадзе получает удобные для вычисления формулы. Таким образом, в случае квадратичных форм  $f = \{a_1, a_2, a_3\}$  функция  $\theta(\tau, a_1, a_2, a_3)$  будет главной функцией. И, наконец, для каждой конкретной квадратичной формы  $f = \{a_1, a_2, a_3\}$  подбирает дополнительные функции в виде сумм произведений таких тэта-функций с характеристиками, чтобы функция, определенная формулой (3.7), стала тождественно равной нулю. Впервые им получены формулы для числа представлений натурального числа 8 конкретными квадратичными формами с тремя переменными вида (3.4), которые принадлежат многоклассным родам.

Этим же методом Сулаквелидзе получил точные формулы для числа представлений натурального числа шестью конкретными квадратичными формами от трех переменных вида (3.4), которые также принадлежат многоклассным родам.

**Замечание.** Всюду в этой части, когда число переменных квадратичной формы есть  $s \geq 3$ , тогда  $\theta(\tau, f)$  обозначает функцию сингулярного ряда  $\rho(n, f)$ , а когда  $s=2$ , тогда  $\theta(\tau, f) = \varphi(\tau, z, f)|_{z=0}$  и  $\rho(n, f)$  обозначает ее коэффициент Фурье, который мы условно назвали «обобщенным сингулярным рядом».

2.3. Общий комбинированный метод Ломадзе – получения точных формул для числа представлений натурального числа бинарными диагональными квадратичными формами – Вепхвадзе распространил на положительные недиагональные целочисленные бинарные квадратичные формы. С этой целью он установил несколько соотношений для двукратных Гауссовых сумм, затем для недиагональных бинарных квадратичных форм  $f$  с четными и нечетными дискриминантами построил функцию  $\psi(\tau, z, f)$ , аналогичную функции (3.7), и доказал, что она аналитически продолжается в полной окрестности точки  $z=0$ . Затем получил удобные для вычисления формул для соответствующей суммы обобщенного сингулярного ряда и получил точные формулы для числа представлений натурального числа 23 конкретными недиагональными бинарными квадратичными формами, которые принадлежат многоклассным родам. Среди них есть и точные формулы для числа представлений натурального числа 3 конкретными квадратичными формами, которые раньше были получены Ван-дер-Блеем, но доказательство Ван-дер-Блея носит довольно частный характер и не дает никакого метода для получения точных формул другими бинарными квадратичными формами.

Джонс и Полл доказали, что существуют лишь 82 примитивные положительные квадратичные формы вида  $f = \{a_1, a_2, a_3\}$ , которые принадлежат одноклассным родам. С помощью полученных формул для суммы сингулярного ряда  $\rho(n, a_1, a_2, a_3)$  Ломадзе получил формулы для числа представлений натурального числа этими 82 квадратичными формами. Часть из





этих формул другим путем уже раньше была получена Успенским и Маассом. Но все формулы Ломадзе имеют удобный для вычисления вид. Из формул полученных Ломадзе, непосредственно следуют результаты Диксона и Джонса о тех арифметических прогрессиях, числа (члены) которых и только они не представимы этими квадратичными формами.

Комбинированный метод Ломадзе – получения точных формул для числа представлений натурального числа диагональными квадратичными формами от трех переменных – Сулаквелидзе обобщил на любые недиагональные положительные целочисленные квадратичные формы от трех переменных. С этой целью, учитывая некоторые соображения Вепхвадзе, он установил несколько значительных соотношений между трехкратными Гауссовыми суммами. Доказал, что сингулярный ряд, соответствующий любой недиагональной квадратичной форме от трех переменных, сходится, но не абсолютно. Получил удобные формулы для вычисления суммы этого ряда и точные формулы для числа представлений натурального числа 21 конкретными недиагональными квадратичными формами от трех переменных, среди которых 5 принадлежат одноклассным родам, а 16 – двухклассным родам. Он нашел также те арифметические прогрессии, числа (члены) которых и только они не представимы рассмотренными 5 квадратичными формами, которые принадлежат одноклассным родам. Что касается рассмотренных им 12 квадратичных форм, которые принадлежат двухклассным родам, здесь удалось установить лишь те арифметические прогрессии, члены (числа) которых не представимы этими формами.

3.1. Полученные Клостерманом и тбилискими математиками все вышеуказанные точные формулы для числа представлений натурального числа положительными квадратичными формами с двумя, тремя, четырьмя, шестью и восемью переменными, принадлежащими многоклассным родам, не являются формулами типа Лиувилля. Арифметическая природа сумм сингулярных рядов, соответствующая положительным, целочисленным квадратичным формам, автоматически выясняется, так как эти суммы являются простыми арифметическими функциями, которые зависят лишь только от делителя представимых натуральных чисел. Но дополнительные члены этих точных формул определены лишь как коэффициенты Фурье разложения произведений функций Якоби или тэта-функций с характеристиками. Выявление арифметической природы таких дополнительных членов довольно трудно. Поэтому была поставлена задача построить такие дополнительные функции, коэффициенты Фурье которых будут иметь простой арифметический смысл. Ломадзе доказал, что для данного натур-

ального числа  $N$  функция  $\prod_{k=1}^s \theta_{\tau_k}(\tau, 0, 2N_k)$  является целой модулярной

формой степени  $4N$  веса  $\frac{s}{2}$ , если выполнены условия:

$$2|s, 2|g_k, N_k | N \quad (k = 1, 2, \dots, s) \quad \text{и} \quad 4 | N \sum_{k=1}^s \frac{h_k^2}{N_k}$$



Приняв во внимание этот результат, удалось в точных формулах для числа представлений натурального числа вышеуказанными 14 конкретными квадратичными формами с шестью переменными выявить арифметический смысл дополнительных членов. Эти дополнительные члены оказались суммами, взятыми на определенные представления целых чисел квадратичными формами с четырьмя переменными. Вепхвадзе исследовал квадратичные формы вида  $f = \{a, a, a, a', a', a'\}$ , суммировал сингулярный вид, соответствующий этим квадратичным формам, и получил удобные для вычисления формулы их сумм. В частности для числа представлений натурального числа 3 конкретными квадратичными формами такого вида он получил такие же формулы, как и Ломадзе. Используя эти формулы, Беридзе выявила арифметический смысл дополнительных членов точных формул для числа представлений натурального числа вышеуказанными 12 конкретными квадратичными формами с восемью переменными вида (3.6). Результат был таким же, как и в случае квадратичных форм с шестью переменными. Она получила также 4 точные формулы для числа представлений натурального числа квадратичной формой  $f = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$  в случае, когда коэффициенты нечетного количества равны 1, а остальные коэффициенты равны 2.

В случае квадратичных форм от четырех переменных этот вопрос оставался опять открытым. Как уже видели, в случае квадратичных форм с шестью и восемью переменными полученные формулы не являются формулами типа Лиувилля. Исключением являются формулы Лиувилля для числа представлений натурального числа квадратичными формами  $\{1, 1, 1, 1, 4, 4\}$ ,  $\{1, 1, 4, 4, 4, 4\}$  и  $\{1, 1, 2, 2, 4, 4\}$ , которые им были опубликованы без доказательства, и соответствующая формула Успенского квадратичной формы  $\{1, 1, 1, 3, 3, 3\}$ , которая не была полной. Все эти четыре формулы типа Лиувилля, и их доказал Вепхвадзе с помощью вышеуказанного результата Ломадзе.

3.2. Ломадзе изучил поведение производных тэта-функций с характеристиками первого и второго порядка относительно группы сравнений линейных подстановок  $\Gamma_0(4N)$ . Это дает возможность построить такие параболические формы, коэффициенты Фурье которых имеют простой арифметический смысл. А именно, Ломадзе доказал, что при определенных условиях для данного натурального числа  $N$

1) Функция  $\vartheta'_{g_1, h_1}(\tau; 0, 2N_1) \cdot \vartheta_{g_2, h_2}(\tau; 0, 2N_2)$  является параболической формой относительно группы сравнений  $\Gamma_0(4N)$  с весом 2 и характером

$\chi(\delta) = \left( \frac{\Delta}{|\delta|} \right)$  ( $\Delta$  – дискриминант произвольной положительной квадратичной формы от четырех переменных с целыми коэффициентами, для которой пользуемся этой функцией, а  $\frac{\Delta}{|\delta|}$  – символ Якоби).

Функции



საქართველოს  
ხალხთა ეროვნული  
ბიბლიოთეკა

2)  $\vartheta'_{s_1, s_2}(\tau; 0, 2N_1) \cdot \vartheta'_{s_1, s_2}(\tau; 0, 2N_2)$  и

3)  $\frac{1}{N} \vartheta''_{s_1, s_2}(\tau; 0, 2N_1) \cdot \vartheta_{s_1, s_2}(\tau; 0, 2N_2) - \frac{1}{N} \vartheta_{s_1, s_2}(\tau; 0, 2N_1) \cdot \vartheta''_{s_1, s_2}(\tau; 0, 2N_2)$

являются параболическими формами относительно группы сравнений  $\Gamma_0(4N)$

с весом 3 и характером  $\chi(\delta) = \text{sgn} \delta \left( \frac{-\Delta}{|\delta|} \right)$  ( $\Delta$  – детерминант произвольной

положительной целочисленной квадратичной формы с шестью переменными, для которой используется эта формула). С помощью функции 1) Ломадзе получил точные формулы для числа представлений натурального числа квадратичными формами  $\{1,1,1,6\}$ ,  $\{1,1,1,7\}$ ,  $\{1,1,1,9\}$ ,  $\{1,1,1,15\}$ ,  $\{1,1,1,24\}$ ,  $\{1,1,1,32\}$  и  $\{3,8,8,8\}$ ; Беридзе – квадратичными формами  $\{1,6,6,6\}$ ,  $\{1,7,7,7\}$ ,  $\{2,2,2,3\}$  и  $\{2,3,3,3\}$ , а Гонгадзе – квадратичными формами  $\{1,2,32,32\}$ ,  $\{1,8,32,32\}$  и  $\{1,32,32,32\}$ . Гогишвили обобщил способ получения точных формул типа Лиувилля на любые диагональные целочисленные положительные квадратичные формы от четырех переменных. Он получил удобные для вычисления формулы суммы сингулярного ряда, соответствующего этим квадратичным формам. Доказал, что и в общем случае функция  $\theta(\tau; a_1, a_2, a_3, a_4)$  является целой модулярной формой степени  $4a$  (где  $a$  – наименьшее общее кратное натуральных чисел  $a_1, a_2, a_3$  и  $a_4$ ) и веса 2 и она может пригодиться главной функцией. Гогишвили для любой конкретной квадратичной формы в отдельности, опять-таки используя функцию 1), находит дополнительные функции и доказывает тождества типа (3.3). В частности, впервые он получил точные формулы типа Лиувилля для числа представлений натурального числа квадратичными формами  $\{1,1,2,12\}$ ,  $\{1,1,16,32\}$ ,  $\{1,2,8,32\}$ ,  $\{1,3,36,36\}$ ,  $\{1,4,9,36\}$ ,  $\{1,4,16,32\}$ ,  $\{1,8,8,32\}$ ,  $\{1,12,36,36\}$ ,  $\{1,16,16,32\}$ ,  $\{3,4,9,36\}$  и  $\{4,9,12,36\}$ . Вепхвадзе, пользуясь результатами Гогишвили, а также своими о недиагональных бинарных квадратичных формах и функции 1), получил точные формулы типа Лиувилля для числа представлений натурального числа тремя недиагональными квадратичными формами с четырьмя переменными, которые являются суммами двух недиагональных бинарных квадратичных форм.

Используя формулы 2) и 3), Ломадзе получил точные формулы типа Лиувилля для числа представлений натурального числа квадратичными формами  $\{1,1,1,5,5,5\}$ ,  $\{1,1,1,7,7,7\}$  и  $\{1,1,1,8,8,8\}$ . Значения сумм сингулярных рядов, соответствующих этим квадратичным формам, он вычислил с помощью формул Вепхвадзе, указанных в пункте 3.1.

Малышев построил, исследовал и представил в виде бесконечного произведения определенных величин самый общий сингулярный ряд Харди-Литлвуда  $H_{s_1, s_2, \dots, s_r}(\Gamma, n)$ , соответствующий целочисленной, положительной квадратичной форме  $f$ . Учитывая некоторые результаты Ломадзе, Беридзе просуммировала этот ряд, а именно: если допустить, что детерминант



квадратичной формы  $f - \Delta = r^2 \omega$  ( $\omega$  – бесквадратное) и  $v = \prod_{\substack{p|n \\ p \neq 2}} P^{\alpha}$ , тогда для

четных  $s$

$$H_{g,h,\dots,ba}(f;n) = \chi(2) \prod_{\substack{p|\Delta g \\ p>2}} \chi(p) \prod_{\substack{p|\Delta g \\ p>2}} \left( 1 - \left( \frac{(-1)^{\frac{s}{2}} \omega}{P} \right) p^{-\frac{s}{2}} \right)^{-1} \cdot L\left(\frac{s}{2}, (-1)^{\frac{s}{2}} \omega\right) \times \\ \times \sum_{d|2^*} \left( \frac{(-1)^{\frac{s}{2}} \Delta}{d} \right) d^{1-\frac{s}{2}} \quad (3.8)$$

Здесь  $\left( \frac{(-1)^{\frac{s}{2}} \omega}{P} \right)$  и  $\left( \frac{(-1)^{\frac{s}{2}} \Delta}{d} \right)$  – символы Лежандра и Якоби соответственно.

Аналогичная формула получена ею также, когда  $s$  – нечетное. С помощью функций 2) и 3) Беридзе и Гогиншвили получили точные формулы типа Лиувилля для числа представлений натурального числа квадратичными формами  $\{1,1,1,1,1,5\}$ ,  $\{1,5,5,5,5,5\}$  и  $\{1,8,8,8,8,8\}$ . Значения сумм сингулярных рядов, соответствующих этим квадратичным формам, вычислены с помощью формул (3.2). Германн составил таблицу приведенных положительных квадратичных форм с четырьмя переменными, дискриминант которых  $\leq 64$ . Гевлигер доказал, что из них 35 недиагональных принадлежат одноклассным родам. Беридзе с помощью своей формулы (3.8) получила точные формулы для числа представлений натурального числа этими 35 квадратичными формами. С помощью функций 2) и 3) Сулаквелидзе получил формулы типа Лиувилля для числа представлений натурального числа восемью недиагональными квадратичными формами с шестью переменными. Значения сумм сингулярных рядов, соответствующих этим квадратичным формам, он вычислил с помощью формулы (3.8).

3.3. Джонс и Полл доказали, что существует лишь 20 регулярных, примитивных положительных целочисленных квадратичных форм

$$f = \{a_1, a_2, a_3\} = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2.$$

Эти формы принадлежат многоклассным родам. Они обнаружили также арифметические прогрессии, связанные с родами этих квадратичных форм, числа (члены) которых не представимы соответствующей формой  $f$ . Ими приведены также все другие квадратичные формы из указанных выше многоклассных родов, которые являются так называемыми, полурегулярными примитивными квадратичными формами и имеют вид:

$g = \{c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{23}, c_{13}, c_{12}\} = c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + 2c_{23}x_2x_3 + 2c_{13}x_1x_3 + 2c_{12}x_1x_2$   
 Они нашли также те целые числа, которые вместе с вышеуказанными числами арифметической прогрессии также не представимы соответствующей формой  $g$ . Ломадзе доказал, что, если функция

$$\psi(\tau) = \prod_{k=1}^3 \vartheta_{00}(\tau, 0, 2a_k) - \theta(\tau, a_1, a_2, a_3) - A\vartheta'_{g^k}(\tau; 0, 2N)$$

удовлетворяет определенным условиям, тогда для данного натурального числа  $N$  функция  $\psi^4(\tau)$  является параболической формой ступени  $: 4N$  и веса  $6$ . С помощью этого результата он получил точные формулы для числа представлений натурального числа следующими  $6$  регулярными квадратичными формами вида  $f$ , которые принадлежат двуклассным родам, и соответствующими полурегулярными квадратичными формами вида  $g$ :

$$\begin{array}{ll} f_1 = \{1, 1, 16\}; & g_1 = \{2, 2, 5, -1, -1, 0\}; \\ f_2 = \{1, 4, 16\}; & g_2 = \{4, 4, 5, 0, -2, 0\}; \\ f_3 = \{1, 16, 16\}; & g_3 = \{4, 9, 9, 1, 2, 2\}; \\ f_4 = \{1, 8, 64\}; & g_4 = \{4, 8, 17, 0, -2, 0\}; \\ f_5 = \{1, 3, 36\}; & g_5 = \{3, 4, 9\}; \\ f_6 = \{1, 12, 36\}; & g_6 = \{4, 9, 12\}. \end{array}$$

Формулы для числа представлений целого числа некоторыми этими квадратичными формами были известны и раньше, но для вычисления они были неэффективны. А формулы, полученные Ломадзе, были удобными для вычисления. Так, например, если  $n = 2^2u (\alpha \geq 0, 2Tu)$ ,  $u = S^2k$  ( $k$  – бесквадратное), тогда при  $n = S^2$

$$r(n, f_1) = \rho(n; f_1) + \left(\frac{-1}{S}\right)2S, \quad r(n, f_4) = \rho(n; f_4) + \left(\frac{-2}{S}\right)S,$$

а для всех других значений  $n$

$$r(n, f_1) = \rho(n; f_1), \quad r(n, f_4) = \rho(n; f_4).$$

В этих формулах  $\left(\frac{-1}{S}\right)$  и  $\left(\frac{-2}{S}\right)$  являются символами Якоби. Значения сумм

сингулярных рядов  $\rho(n; f_i)$  вычисляются по формулам Ломадзе, о которых выше уже было сказано. Так как  $f_i$  и соответствующие  $g$  квадратичные формы принадлежат одним и тем же двуклассным родам, это, согласно одной теореме Зигеля,  $\rho(n; f_i) = \rho(n; g_i)$  и соответствующие дополнительные члены отличаются друг от друга лишь знаком. Из полученных формул следуют результаты Джонса и Полла о тех числах, которые не представимы



квадратичными формами вида  $f$  и  $g$ .

Сулаквелидзе получил точные формулы для числа представлений натурального числа недиагональными положительными регулярными и полурегулярными 12 квадратичными формами с тремя переменными, которые принадлежат двух-, трех- и даже четырехклассным родам. В полученных формулах дополнительные члены имеют такой же простой арифметический смысл, как и в формулах Ломадзе. С помощью полученных формул Сулаквелидзе нашел те арифметические прогрессии, числа которых и только они не представимы соответствующими квадратичными формами.

Уотсон доказал, что существует т.н. универсальный класс положительных целочисленных квадратичных форм от трех переменных. Также известно, что существует конечное число универсальных классов положительных целочисленных квадратичных форм от четырех переменных. Сулаквелидзе назвал род целочисленных положительных квадратичных форм универсальным, если любое натуральное число представимо хотя бы одной квадратичной формой из этого рода. Он доказал, что не существует универсального рода квадратичных форм от трех переменных и что существует бесконечное множество универсальных родов квадратичных форм от четырех переменных. При этом он дал эффективный способ получения тех чисел, которые не представимы этими родами.

3.4. Хорошо известно, что для любого нечетного натурального  $n$

$$\sum_{(6a_1+1)^2+(6a_2+1)^2+(6a_3+1)^2=3n} (-1)^{a_1+a_2+a_3} = \begin{cases} \left(\frac{-1}{S}\right) S, & \text{если } n=S^2, S>0 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$$\sum_{\substack{x_1^2+4x_2^2+4x_3^2=n \\ 27x_1, x_2 > 0}} (-1)^{x_1} = \begin{cases} \left(\frac{-1}{S}\right) S, & \text{если } n=S^2, S>0 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

При помощи эллиптических функций эти два равенства доказаны, первое – Якоби, а второе – Лиувиллем. Венков с помощью своей арифметической теории кватернионов доказал как оба эти равенства, так и то, что для любого нечетного натурального  $n$

$$\sum_{\substack{x_1^2+x_2^2+x_3^2=11n \\ 27x_1, 27x_2, 27x_3 \\ x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0}} \left(\frac{11}{x_1 x_2 x_3}\right) = \begin{cases} -3 \left(\frac{-1}{S}\right) S, & \text{если } n=S^2, S>0 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Ломадзе, с помощью теории целых модулярных форм, для любого нечетного  $n$  доказал эти 3 равенства, а также несколько других. Вот одно из них:

$$\sum_{\substack{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9n \\ 27x_1, 27x_2, 27x_3 \\ x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0}} \left( \frac{3}{x_1 x_2 x_3} \right) = \begin{cases} -3 \left( \frac{-1}{S} \right) S, & \text{если } n = S^2, S > 0 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Во всех приведенных равенствах  $\left( \frac{-1}{S} \right)$  – символ Якоби.

3.5 Ломадзе доказал, что если для данного натурального  $N$  функции:

$$\begin{aligned} 1) \psi_3(\tau) &= \prod_{k=1}^3 \vartheta_{00}(\tau, 0, 2a_k) - \theta(\tau, a_1, \dots, a_3) - A \vartheta'_{g, h_1}(\tau, 0, 2N_1) \prod_{k=2}^3 \vartheta_{g, h_k}(\tau, 0, 2N_k) \\ 2) \psi_7(\tau) &= \prod_{k=1}^7 \vartheta_{00}(\tau, 0, 2a_k) - \theta(\tau, a_1, \dots, a_7) - A \prod_{k=1}^2 \vartheta'_{g, h_k}(\tau, 0, 2N_k) \vartheta_{g, h_3}(\tau, 0, 2N_3) \\ 3) \psi_9(\tau) &= \prod_{k=1}^9 \vartheta_{00}(\tau, 0, 2a_k) - \theta(\tau, a_1, \dots, a_9) - A \prod_{k=2}^3 \vartheta'_{g, h_k}(\tau, 0, 2N_k) \end{aligned} \quad (3.9)$$

где  $A$  – произвольное постоянное, удовлетворяют определенным условиям, тогда они являются параболическими формами с соответствующими системами мультипликаторов относительно группы сравнений  $\Gamma_0(4N)$ , с

весами  $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$  соответственно. В формуле (3.9) Ломадзе допустил, что

$a_1 = \dots = a_9$  и функции  $\vartheta_{g, h_k}(\tau, 0, 2N_k)$  подобрал таким образом, что функция  $\psi_9(\tau)$  удовлетворила требуемым условиям. Поэтому стало возможно подобрать постоянную  $A$  так, что функция  $\psi_9(\tau)$  оказалась тождественно равной нулю. Для коэффициентов Фурье разложения функции  $\psi_9(\tau)$  он получил формулу

$$r_9(n) = \rho_9(n) + \frac{32}{17} \sum_{\substack{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3n \\ x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0}} \left( \frac{x_1 x_2 x_3}{3} \right) x_1 x_2 x_3$$

где  $\rho_9(n)$  является суммой сингулярного ряда, соответствующего сумме 9 квадратов целых чисел, формулы для вычисления которых были получены

раньше,  $\left( \frac{x_1 x_2 x_3}{3} \right)$  – обобщенный символ Лежандра.

Таким образом, полностью опровергнуто предположение Морделла, что число целочисленных представлений натурального числа  $n$  квадратичной формой  $f = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_9^2$  сводится к решению уравнения, состоящего



лишь из 7 квадратов.

Недавно Ломадзе получил явные точные формулы для количества целочисленных представлений любого натурального числа квадратичной формой  $f = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 + 4x_0^2$ . И в этом случае дело сводится к решению уравнения в целых числах, состоящего лишь из трех квадратов.

4.1 Везде в этом пункте  $\Gamma$  обозначает целочисленную примитивную положительную квадратичную форму от  $s$  переменных. Ставится вопрос о существовании формул вида

$$r(n, f) = \rho(n, f). \tag{3.10}$$

Ренкин доказал, что в тех частных случаях, когда  $\Gamma$  является суммой квадратов  $s$  целых чисел, где  $s > 8$ , такие формулы не существуют. Этот результат Ренкина Гогишвили обобщил для любых квадратичных форм  $f$ . А именно, он доказал, что для любых квадратичных форм  $f$  с числом переменных  $S \geq 4$  существует такое постоянное  $c = c(f)$ , что когда детерминант квадратичной формы  $f - \Delta > c$ , тогда формулы вида (3.10) для любого  $n$  не существуют. Отсюда следует, что существует лишь конечное число классов тех квадратичных форм  $f$ , для которых такие формулы существуют. В частности, все квадратичные формы  $f$  с числом переменных  $S \geq 4$ , для которых  $\Delta > c$ , принадлежат многоклассным родам.

Гогишвили доказал также, что для любой квадратичной формы  $f$  всегда можно найти такое натуральное  $n$ , представимое этой формой, что  $\rho(n, f) \rightarrow 0$ , когда  $S \rightarrow \infty$ , и что ни для какой квадратичной формы  $f$  с числом переменных  $S \geq 34$  формулы вида (3.10) не существуют. Позже он доказал, что для квадратичной формы  $f$  с числом переменных  $11 < S < 34$  кроме, быть может, некоторых квадратичных форм  $f$  с числом переменных  $s=12$  и  $s=16$ , формулы вида (3.10) не существуют. Кроме этого, Гогишвили доказал, что для диагональных квадратичных форм  $f$  с тремя переменными формулы вида (3.10) существуют лишь в том случае, когда эти квадратичные формы принадлежат одноклассным родам.

Малышев и Фоменко, в случае, когда число переменных  $S \geq 4$  квадратичной формы  $f$ , получили оценку

$$\rho(n, f) = O(n^{\epsilon/2-1+\epsilon} d^{1/2})$$

где  $\epsilon$  – произвольное положительное число.

Гогишвили значительно улучшил эту оценку и доказал, что

$$\rho(n, f) = O(n^{\epsilon/2-1+\epsilon} d^{-(s-2)/2(s-1)}), \text{ когда } S \geq 4 \tag{3.11)}$$

$$\rho(n, f) = O(n^{\epsilon/2-1} d^{-(s-2)/2(s-1)}), \text{ когда } S \geq 5 \tag{3.11)}$$

Дальнейшее улучшение этой оценки невозможно в том смысле, что для любого  $S \geq 5$  существует квадратичная форма с числом переменных  $s$ , для которой улучшение оценки (3.11) невозможно и возможность улучшения оценки



(3.11), когда  $s=4$ , зависит только от  $\epsilon$ .

4.2. Пусть  $F(\tau, f)$  обозначает эта-ряд рода, содержащего примитивную, целочисленную квадратичную форму  $f$ . Зигель доказал, что если число переменных квадратичной формы  $f$  (как положительной, так и неопределенной)  $s > 4$ , тогда

$$F(\tau, f) = E(\tau, f) \quad (3.12)$$

где  $E(\tau, f)$  – ряд Эйзенштейна, определенный формулой

$$F(\tau, f) = 1 + \frac{e^{(2m-s)\pi i/4}}{|d|^{1/2}} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{H=-\infty \\ (H,q)=1}}^{\infty} \frac{S(fH, q)}{q^{s/2} (q\tau - H)^{(1-m)/2} (q\bar{\tau} - H)^{m/2}}$$

здесь  $Jm\tau > 0$ ,  $m$  – индекс инерции квадратичной формы  $f$ ,  $d$  – дискриминант этой формы, а  $S(fH, q)$  – сумма Гаусса. Из формулы (3.12) следует известная теорема Зигеля: сумма сингулярного ряда, соответствующего квадратичной форме  $f$ , равняется среднему значению числа представлений натурального числа родом, содержащим форму  $f$ .

Затем Раманатхан доказал, что если  $f$  – произвольная примитивная целочисленная квадратичная форма с числом переменных  $S \geq 3$  (кроме нулевых форм с числом переменных  $s=3$  и нулевых форм с числом переменных  $s=4$ , дискриминант которых полный квадрат), тогда функция

$$E(\tau, z; f) = 1 + \frac{e^{(2s-s)\pi i/4}}{|d|^{1/2}} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{H=-\infty \\ (H,q)=1}}^{\infty} \frac{S(fH, q)}{q^{s/2} (q\tau - H)^{m/2} (q\bar{\tau} - H)^{(s-m)/2} |q\tau - H|^2}$$

которую он назвал рядом Эйзенштейна-Зигеля и которая регулярна для любого фиксированного  $\tau$ , при  $Jm\tau > 0$  и  $\operatorname{Re} z > 2 - \frac{S}{2}$ , аналитически продолжаема в полной окрестности точки  $z=0$  и что

$$F(\tau, f) = E(\tau, z; f)|_{z=0} \quad (3.13)$$

Когда  $S > 4$ , функция  $E(\tau, z; f)|_{z=0}$  совпадает с функцией  $E(\tau, f)$ , а формула (3.13) – с формулой Зигеля (3.12)

Вепхвадзе доказал, что функция  $E(\tau, z; f)$  аналитически продолжаема в полной окрестности точки  $z=0$  и в том случае, когда  $f$  – произвольная ненулевая целочисленная бинарная квадратичная форма (как положительная, так и неопределенная), и что

$$F(\tau, f) = \frac{1}{2} E(\tau, z; f)|_{z=0} \quad (3.14)$$

Как это уже было сказано в пункте 2, этот факт впервые доказали грузинские математики только для недиагональных положительных квадратичных форм с числом переменных  $S \geq 2$  и для произвольной положительной бинарной



квадратичной формы. А Раманатхан предполагал, что для положительных и ненулевых неопределенных бинарных форм это невозможно.

Из формулы (3.14) следует, что половина «суммы обобщенного сингулярного ряда», соответствующей квадратичной форме, равняется среднему значению числа представлений натурального числа родом, содержащим эту квадратичную форму. В частности, если квадратичная форма принадлежит одноклассному роду, тогда для натурального  $n$

$$r(n, f) = \frac{1}{2} \rho(n, f). \quad (3.15)$$

Вепхвадзе показал также, что существуют положительные бинарные квадратичные формы с целыми коэффициентами, которые принадлежат многоклассным рядам, но для которых справедливо равенство (3.15).

Гогишвили доказал, что для любого натурального  $n$  формулы вида (3.15) существуют лишь для конечного числа классов примитивных бинарных квадратичных форм  $f$  с целыми коэффициентами. Он доказал, что такая квадратичная форма с детерминантом  $\Delta$  принадлежит многоклассному роду, число классов которого  $\geq 3$ , но для никаких других квадратичных форм  $f$  с детерминантом  $\Delta$  формулы типа (3.15) не существуют.

Ван-дер-Блей рассмотрел функцию

$$E(\tau, f, B, g) = \delta + \frac{e^{(2m-s)n/4}}{g^{s/2} |d|^{1/2}} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{H=-\infty \\ (H,q)=1}}^{\infty} \frac{S(fH, q, B, g)}{q^{s/2} (q\tau - H)^{m/2} (q\bar{\tau} - H)^{(s-m)/2}}$$

где  $g$  – натуральное число,  $B = (b_1, b_2, \dots, b_s)$  – целочисленная матрица с одним столбцом;  $\delta = 1$ , когда  $b_j \equiv 0 \pmod{g}$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ), и  $\delta = 0$  в противном случае,  $S(fH, q, B, g)$  – сумма Гаусса определенного вида. Он доказал, что если  $f$  – целочисленная положительная квадратичная форма с числом переменных  $S > 4$ , тогда коэффициенты Фурье ряда Эйзенштейна  $E(\tau, f, B, g)$  представляют сингулярный ряд Харди-Литтлвуда, соответствующего системе уравнений

$$f(x_1, x_2, \dots, x_s) = n, \quad x \equiv B \pmod{g}.$$

Здесь  $n$  – натуральное число, а  $x$  – вектор-столбец с  $s$  компонентами. Вепхвадзе доказал, что функция

$$E(\tau, z, f, B, g) = \delta + \frac{e^{(2m-s)n/4}}{g^{s/2} |d|^{1/2}} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{H=1 \\ (H,q)=1}}^{\infty} \frac{S(fH, q, B, g)}{q^{s/2} (q\tau - H)^{m/2} (q\bar{\tau} - H)^{(s-m)/2} |q\tau - H|^2},$$

которая регулярна при любом фиксированном  $\tau$  с  $Jm\tau > 0$  и  $\text{Re } z = 2 - \frac{S}{2}$ , продолжается аналитически в полной окрестности точки  $z=0$ , когда  $f$  – квадратичная форма с числом переменных  $S \geq 2$  с целыми коэффициентами (кроме нулевых форм с числом переменных  $s=2$  и  $3$  и нулевых форм с числом переменных  $s=4$ , дискриминант которых – полный квадрат) и когда  $f(b_1, \dots, b_s) \equiv 0 \pmod{g}$ . Кроме

того, для положительных квадратичных форм им получены формулы для вычисления коэффициентов Фурье ряда  $E(\tau, z, f, B, g)|_{z=0}$ .



5.1. Гекке построил базис пространства шаровых функций второго порядка относительно квадратичной формы с четным числом переменных, а Ломадзе построил базис пространства шаровых функций четвертого порядка относительно той же квадратичной формы. С помощью этого базиса он построил базис пространства параболических форм типа  $(-6, q, 1)$  в виде обобщенных тэта-рядов, когда  $q=3, 5, 7, 11$ , и типа  $(-6, q, \chi)$  при  $q=5, 13, 17$ . Качахидзе построил базис пространства параболических форм типа  $(-6, q, 1)$ , когда  $q=13, 17$ . Гонгадзе построила базис пространства параболических форм типа  $(-4, q, 1)$ , когда  $q=5, 7, 11$ , а Шавгулидзе, когда  $q=13, 19, 23$ . Она построила также базис пространства параболических форм типа  $(-4, q, \chi)$ , когда  $q=13, 29$ . Здесь же отметим, что для этого базиса нужно было найти положительную, приведенную квадратичную форму от четырех переменных с дискриминантом  $q^2$ , и Шавгулидзе предложила простой способ нахождения такой квадратичной формы, когда  $q$  – произвольное нечетное простое число, которое не является полным квадратом. До этого такие квадратичные формы были известны, лишь когда  $q=3, 5, 7$  (Герман), когда  $q=11$  (Гекке) и  $q=17$  (Херман).

Ломадзе, Гонгадзе, Шавгулидзе и Качахидзе показали также, как при помощи построенных базисов пространств параболических форм можно получить точные формулы для числа представлений натурального числа квадратичными формами соответствующего типа. Затем Ломадзе построил базис пространства шаровых функций произвольного порядка относительно тех же квадратичных форм, а с помощью этих базисов в виде обобщенных тэта-рядов он построил базисы пространств параболических форм:

- типа  $(-8, q, 1)$  при  $q=3, 5, 7$ ;
- типа  $(-8, q, \chi)$  при  $q=5, 13$ ;
- типа  $(-10, q, 1)$  при  $q=3, 5$ ;
- и типов  $(-10, 5, \chi)$  и  $(-12, 5, \chi)$ .

5.2. Пусть  $F_1 = x_1^2 + x_1x_2 + ax_2^2$  – квадратичная форма с отрицательным дискриминантом  $q$ , а  $F_k$  – прямая сумма  $k$  квадратичных форм  $F_1$ ,  $r(n, F_k)$  обозначает число представлений натурального  $n$  квадратичной формой  $F_k$ . Впервые Петерсон получил точные формулы для функций  $r(n, F_k)$ , когда  $a=1, 2, 3, 6$ , т.е. когда соответственно  $-q=-3, -7, -11, -23$ ; для функций  $r(n, F_k)$ , когда  $a=1, 2$ , и для функций  $r(n, F_k)$ , когда  $k=4, 5, 6$  и  $a=1$ . Ломадзе получил точные формулы для функций  $r(n, F_k)$  для всех  $k$  от 2 до 20, когда  $F_1 = x_1^2 + x_1x_2 + ax_2^2$ , и для всех  $k$  от 2 до 11, когда  $F_1 = x_1^2 + x_1x_2 + 2ax_2^2$ . С этой целью он для всех  $k$  построил базисы пространств параболических форм  $S_k(\Gamma_0(3), \chi)$  и  $S_k(\Gamma_0(7), \chi)$  в виде обобщенных кратных тэта-рядов. При построении этих базисов он использовал стандартные шаровые функции, построенные в пункте 5.1, а также результаты Гекке о параболических формах и о рядах Эйзенштейна.



Полученные формулы, как и формулы для функции  $r_{2k}(n)$  из пункта 10 подчиняются определенным условиям. Качахидзе для функций  $r(n, F_k)$  получил несколько другие точные формулы для всех  $k$  от 6 до 17, когда  $F_1 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ . Он построил не один, а целую систему базисов пространства  $S_k(\Gamma_0(3), \chi)$ , когда  $k \geq 6$ , и систему базисов пространства  $S_k(\Gamma_0(7), \chi)$  для любого целого  $k \geq 3$ . Так, он получил формулы для функций  $r(n, F_k)$  при всех  $k$  от 3 до 11, когда  $F_1 = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2$ . Он построил также базис пространства  $S_k(\Gamma_0(11), \chi)$  для любого целого  $k \geq 3$  и получил формулы для функций  $r(n, F_k)$  для всех  $k$  от 3 до 8, когда  $F_1 = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2$ .

Пусть теперь  $\phi_2$  – целочисленная положительная приведенная квадратная форма с дискриминантом  $\Delta = 5$  или 13, или 17, а  $\phi_{2m}$  – прямая сумма  $m$  квадратичных форм  $\phi_2$ . Качахидзе построил базисы пространств параболических форм для  $m \geq 2$  и при помощи построенных базисов получил точные формулы для функций  $r(n, \phi_{2m})$  при всех  $2 \leq m \leq 5$ , когда  $\Delta = 5$ , и при всех  $2 \leq m \leq 4$ , когда  $\Delta = 13$ .

6.1. Как было упомянуто выше, дополнительные члены точных формул для числа представлений натурального числа квадратичной формой, которые имеют простой арифметический смысл, математики искали среди произведений тэта-рядов Якоби или среди произведений характеристических тэта-рядов и их производных, или среди коэффициентов Фурье обобщенных кратных тэта-рядов.

Клостерман обобщил обыкновенную тэта-функцию с характеристиками, дальнейшее обобщение этой функции принадлежит Вепхвадзе. Пусть  $f$  – целочисленная положительная квадратная форма от  $s$  переменных,  $A$  – ее матрица,  $N$  – степень,  $x$  – вектор-столбец с  $s$  компонентами,  $\tau$  – комплексная переменная ( $\text{Im} \tau > 0$ ),  $z$  – вектор-столбец с  $s$  комплексными компонентами,  $g$  и  $h$  – специальные векторы относительно матрицы  $A$ , с целыми компонентами, для которых  $Ag \equiv 0 \pmod{N}$  и  $Ah \equiv 0 \pmod{N}$ ,  $P_\nu(x)$  – шаровая функция  $\nu$ -го порядка относительно квадратичной формы  $f$ . Тогда функция

$$\mathfrak{S}_{gh}(z | \tau, P_\nu, f) = \sum_{x \equiv g \pmod{N}} (-1)^{\frac{h^T A(x-g)}{N^2}} P_\nu(x) e^{\frac{N\tau x^T A x}{N^2}} e^{\frac{2\pi i x^T A z}{N}}$$

является обобщенным  $s$ -кратным тэта-рядом с характеристиками. Вепхвадзе доказал основные свойства этой функции и исследовал ее поведение относительно подгруппы линейных подстановок  $\Gamma_0(N)$ . Он доказал также теорему, которая дает необходимое и достаточное условие того, чтобы



определенная линейная комбинация этих тэта-функций была целой

модулярной формой типа  $\left(-\left(\frac{S}{2} + \nu\right), N, \nu(L)\right)$ , где  $\nu$  – порядок шаровой

функции относительно квадратичной формы с числом переменных  $S \geq 2$ ,  $N$  – степень этой формы, а  $\nu(L)$  – система мультипликаторов относительно группы  $\Gamma_0(N)$  ( $L$  – матрица произвольной подстановки группы  $\Gamma_0(N)$ ). Как уже было сказано в пункте 3, достаточное условие этой теоремы было получено Ломадзе, но только в нескольких частных случаях и лишь для обыкновенной тэта-функции с характеристиками. При помощи этой своей теоремы Вепхвадзе получил точные формулы для числа представлений натурального числа квадратичными формами вида

$$f = \sum_{i=1}^{S_1} x_i^2 + 2 \sum_{i=S_1+1}^{S_2} x_i^2 + 2 \sum_{i=S_2+1}^{S_3} x_i^2$$

с пятью переменными, когда  $1 \leq S_1 \leq 4$  и  $1 \leq S_2 \leq 4$ , и квадратичными формами вида

$$f = \sum_{i=1}^S x_i^2 + 2 \sum_{i=S+1}^7 x_i^2$$

с семью переменными, когда  $1 \leq S \leq 6$ , которые принадлежат многоклассным родам. Дополнительные члены полученных формул являются суммами, распространенными на определенные представления целых чисел диагональными тернарными квадратичными формами, которые принадлежат одноклассным родам.

С помощью обобщенных тэта-функций с характеристиками и с шаровыми функциями, введенными Вепхвадзе, Цалугелашвили построил базисы параболических форм, соответствующих положительным диагональными квадратичным формам степени  $\gamma$  с четным числом переменных, т.е. формам вида

$$f(x) = 2 \sum_{j=1}^k x_j^2 + 2 \sum_{j=k+1}^S x_j^2, \quad 2 | S.$$

С помощью этих базисов Цалугелашвили получил точные формулы для числа представлений натуральных чисел всеми формами такого вида в случае, когда  $s = 10, 12, 14, 16$ .

6.2 Ломадзе изучил поведение производной  $n$ -ого порядка обыкновенных тэта-функций с характеристиками относительно группы  $\Gamma_0(4N)$  и доказал, что для данного натурального числа  $N$  функции

- 1)  $\frac{1}{N_1} \vartheta_{s_1, h_1}^* (\tau, 0, 2N_1) \vartheta'_{s_2, h_2} (\tau, 0, 2N_2) - \frac{1}{N_2} \vartheta_{s_2, h_2}^* (\tau, 0, 2N_2) \vartheta'_{s_1, h_1} (\tau, 0, 2N_1),$
- 2)  $\frac{1}{N_1^2} \vartheta_{s_1, h_1}^{(4)} (\tau, 0, 2N_1) \vartheta_{s_2, h_2} (\tau, 0, 2N_2) + \frac{1}{N_2^2} \vartheta_{s_2, h_2}^{(4)} (\tau, 0, 2N_2) \vartheta_{s_1, h_1} (\tau, 0, 2N_1) -$   
 $-\frac{6}{N_1 N_2} \vartheta_{s_1, h_1}^* (\tau, 0, 2N_1) \vartheta_{s_2, h_2}^* (\tau, 0, 2N_2),$
- 3)  $\left\{ \frac{1}{N_1} \vartheta_{s_1, h_1}^* (\tau, 0, 2N_1) \vartheta_{s_2, h_2} (\tau, 0, 2N_2) - \frac{1}{N_2} \vartheta_{s_2, h_2}^* (\tau, 0, 2N_2) \vartheta_{s_1, h_1} (\tau, 0, 2N_1) \right\} \times$   
 $\times \vartheta'_{s_2, h_2} (\tau, 0, 2N_2) \vartheta_{s_4, h_4} (\tau, 0, 2N_4),$
- 4)  $\prod_{k=1}^3 \vartheta'_{s_k, h_k} (\tau, 0, 2N_k) \vartheta_{s_{k+1}, h_{k+1}} (\tau, 0, 2N_{k+1})$

при определенных условиях являются параболическими формами относительно

группы  $\Gamma_0(4N)$ , с весом 5 и характером  $\chi(\delta) = \operatorname{sgn} \delta \left( \frac{-\Delta}{|\delta|} \right)$  ( $\Delta$  – детерминант

положительной целочисленной квадратичной формы с десятью переменными, для которой будет применена эта функция). Ломадзе рассмотрел примитивную квадратичную форму

$$f = \{a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_4, a_4, a_5, a_5\}$$

и получил удобные формулы для вычисления сумм сингулярного ряда, соответствующего этой квадратичной форме. Потом он и Даниеля получили точные формулы для числа представлений натурального числа 14 такими квадратичными формами, коэффициенты которых или 1 и 2, или 1 и 4, или 1, 2 и 4. Они для любой конкретной формы в отдельности среди вышеприведенных четырех функций подобрали дополнительные функции и доказали тождества типа (3.3).

Ломадзе вывел явные точные формулы для числа представлений натуральных чисел квадратичными формами  $F_3$ ,  $F_2 \oplus \phi_1$ ,  $F_1 \oplus \phi_2$  и  $\phi_3$ , являющимися прямыми суммами бинарных приведенных квадратичных форм

$$F_1 = x_1^2 + x_1 x_2 + 6x_2^2 \quad \text{и} \quad F_1 = 2x_1^2 + x_1 x_2 + 3x_2^2$$

дискриминанта 23. Он также вывел явные точные формулы для числа представлений натуральных чисел тремя квадратичными формами, являющимися прямыми суммами кватернарных приведенных квадратичных форм дискриминанта  $19^2$ . Дополнительные члены всех этих формул имеют простое арифметическое значение.

Ломадзе предложил метод получения явных точных формул для числа



представлений натуральных чисел положительными диагональными квадратичными формами с целыми коэффициентами с 12 и 14 переменными, когда по два соседних коэффициента равны.

#### IV. Диофантовые уравнения и системы диофантовых уравнений

1. Вальфиш показал, как можно доказать совсем элементарно, без операции перехода к пределу, результаты классической теории уравнения Пелля  $x^2 - dy^2 = 1$ , ( $d \in \mathbb{Z}$ ). Он изучил уравнение Пелля  $\xi^2 - k\eta^2 = 1$ , где  $k$  – данное целое число любого мнимого квадратичного поля  $K$ , не являющегося квадратом целого числа, а  $\xi$  и  $\eta$  – искомые целые числа поля. Решение  $\xi$  и  $\eta$  уравнения Пелля называется фундаментальным, если имеет место неравенство  $|\xi + 4\sqrt{k}| > 1$  и при этом левая сторона неравенства принимает минимальное значение. Он доказал существование фундаментального решения при любых  $K$  и  $k$ . Кроме этого, он показал также, как при помощи фундаментального решения можно получить все решения уравнения Пелля. Раньше Дирихле исследовал это уравнение лишь в поле Гаусса. Пусть

$$F(x_1, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_k) + c_1 x_1 + \dots + c_k x_k. \quad (4.1)$$

где  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  является произвольной положительной целочисленной квадратичной формой, детерминант  $d$  которой и  $c_1, c_2, \dots, c_k$  – целые числа. Пусть  $r(F, n)$  обозначает количество целых решений уравнения

$$F(x_1, \dots, x_k) = n.$$

Применением одного метода Мальшева, Анна Вальфиш доказала, что если  $k \geq 4$ , тогда справедлива асимптотическая формула

$$r(F, n) = \pi^{\frac{k}{2}} d^{-\frac{1}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{k}{2}\right) \left(n + \frac{1}{4} f^{-1}(c_1, \dots, c_k)\right)^{\frac{k}{2}-1} H(F, n) + O\left(n^{\frac{(k-1)+\epsilon}{4}}\right), \quad (4.2)$$

где

$$H(F, n) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-k} \sum_{\substack{h \bmod q \\ (h, q)=1}} S(hF; q) \epsilon\left(-\frac{nh}{q}\right)$$

– сингулярный ряд проблемы, а  $S(hF; q)$  – неоднородная кратная сумма Гаусса относительно полной системы вычетов по модулю  $q$ ; постоянные, входящие в символ  $O$ , зависят только от  $k$ , от коэффициентов формы  $F(x_1, \dots, x_k)$  и от любого действительного положительного  $\epsilon$ . Анна Вальфиш исследовала также сингулярный ряд  $H(F, n)$ .

Гекке доказал, что уравнение



$$x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 10x_4^2 + 2x_5^2 + 2x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + 3x_3x_4 + 5x_4x_5 + 7x_5x_6 + 9x_6x_7 + 11x_7x_8 = 1$$

имеет 240 решений в целых числах, но эти решения не были известны. Эркомаишвили нашел все эти 240 решений.

2. Пусть  $m \geq n \geq 1$  – целые числа, а  $M_0$  и  $N_0$  – натуральные. Виноградов получил асимптотическую формулу для числа решений системы диофантовых уравнений

$$\begin{aligned} x_1^m + x_2^m + \dots + x_s^m &= M_0, \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_s^n &= N_0 \end{aligned}$$

в неотрицательных целых числах  $x_1, x_2, \dots, x_s$ , когда  $s$  – довольно большое. Марджанишвили установил условия разрешимости этой системы и рассмотрел сингулярный ряд проблемы. В случае, когда  $n=1$ , условие разрешимости этой системы установил Камке.

Гильберт поставил следующую задачу: каким условиям должны удовлетворять натуральные числа  $N_1, N_2, \dots, N_n$ , чтобы система диофантовых уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_s &= N_1, \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 &= N_2, \\ \dots \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_s^n &= N_n \end{aligned}$$

была разрешимой в целых неотрицательных числах. Марджанишвили методом Виноградова установил условия разрешимости этой системы. Он также исследовал сингулярный ряд проблемы.

Марджанишвили при помощи леммы Зигеля-Вальфиса вновь методом Виноградова доказал, что, когда  $s \geq 7$ , тогда система диофантовых уравнений

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \dots + p_s &= N_1, \\ p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_s^2 &= N_2 \end{aligned}$$

разрешима в простых  $p_1, p_2, \dots, p_s$  числах, если  $N_1 < N_2$  – довольно большие натуральные числа одной четности,  $N_2 \equiv S \pmod{24}$  и

$$1 + \varepsilon \leq \frac{N_1}{\sqrt{N_2}} \leq \sqrt{s} - \varepsilon,$$

где  $\varepsilon > 0$  – произвольное малое постоянное.

Пусть  $r_s(n, m)$ , где  $n$  – натуральное и  $m$  – целое, обозначает число решений в целых числах системы диофантовых уравнений



$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_s^2 &= n, \\x_1 + x_2 + \dots + x_s &= m.\end{aligned}$$

Вальфиш доказал, что если  $s > 7$ ,  $m \equiv n \pmod{2}$ ,  $\Delta = sn - m^2 > 0$ , тогда справедлива асимптотическая формула

$$r_s(n, m) = \pi^{(s-1)/2} S^{1-s/2} \Gamma\left(\frac{S-1}{2}\right) \Delta^{(s-3)/2} \sigma_s(n, m) + O(n^{s/2-2} \log n),$$

где

$$\sigma_s(n, m) = \sum_{\substack{1 \leq a \leq q, 1 \leq b \leq r \\ (a, q) = (b, r) = 1}} \left(\frac{S(a, q; b, r)}{qr}\right)^r \exp\left\{-2\pi i\left(\frac{am}{q} + \frac{bm}{r}\right)\right\}$$

– сингулярный ряд проблемы, а

$$S(a, q; b, r) = \sum_{\ell=0}^{qr-1} \exp\left(\frac{a\ell^2}{q} + \frac{b\ell}{r}\right).$$

Кластерман построил и суммировал сингулярный ряд  $\sigma_s(n, m)$ , когда  $s \geq 3$  – нечетное бесквадратное число. Этот ряд при  $s=6$  и  $8$  просуммировал Бронкгорст, а потом, когда  $s=8$ , более простым путем, – Вальфиш. Ряд  $\sigma_s(n, m)$ , когда  $s \geq 3$  – произвольное четное число, в каждом случае в отдельности методом Кластермана просуммировал Ломадзе.

Точные формулы для функций  $r_s(n, m)$ , когда  $s=3, 5, 7$ , получил Кластерман, а когда  $s=6$  и  $8$  – Бронкгорст. Формулы Кластермана, когда  $s=5$  и  $7$ , имеют вид:

$$r_s(n, m) = \rho_s(n, m), \quad (4.4)$$

где  $\rho_s(n, m)$  – сумма сингулярного ряда

$$\pi^{(s-1)/2} S^{1-s/2} \Gamma^{-1}\left(\frac{S-1}{2}\right) \Delta^{(s-3)/2} \sigma_s(n, m),$$

а формулы Бронкгорста содержат множителями бесконечные ряды. Ломадзе получил формулы Кластермана и Бронкгорста для функций  $r_s(n, m)$  в конечном виде, когда  $s=5, 6, 7$  и  $8$ .

Эркоманшвили при помощи теории целых модулярных форм развил метод получения точных формул для функции  $r_p(n, m)$ , когда  $p$  – произвольное нечетное простое число. Этим путем он снова получил формулы Кластермана при  $s=3, 5$  и  $7$ . Он также доказал что формулы типа (4.4) несправедливы, когда  $p > 7$ , и что в таких случаях функция  $r_p(n, m)$ , кроме главного члена  $\rho_p(n, m)$ , содержит также дополнительные члены, а именно, когда  $p=11$ , он получил формулу:

$$r_{11}(n, m) = \begin{cases} 0, & \text{когда } 11n < m^2 \text{ и когда } n \neq m \pmod{2}, \\ 1, & \text{когда } 11n = m^2, \\ \frac{11}{1275} N^4 \sum_{d|N} \left(\frac{d}{11}\right) \frac{1}{d^4} + \frac{1}{2} v(N), & \text{когда } 11n > m^2, n = m \pmod{2}, \beta = 0, \\ \frac{11}{1275} N^4 \left(1 + \left(\frac{N_0}{11}\right) \frac{1}{11^{4\beta}}\right) \sum_{d|N_0} \left(\frac{d}{11}\right) \frac{1}{d^4} + v(N), & \text{когда } 11n > m^2, n = m \pmod{2}, \beta \geq 1, \end{cases}$$

где  $N = \frac{11n - m^2}{2}$  и  $N = 11^\beta N_0$ . Здесь дополнительный член  $v(N)$  имеет

определенный арифметический смысл, а именно  $v(N)$  представим в виде трех сумм, одна из которых зависима от всех представлений числа  $n$  бинарной квадратичной формой, а две суммы зависят от всех представлений числа  $n$  квадратичной формой с шестью переменными.

Эркомаишили показал, как совсем элементарно можно получить точные формулы для числа решений системы диофантовых уравнений

$$\begin{aligned} a(x_1^2 + x_2^2) + bx_3^2 &= n, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= m \end{aligned}$$

в целых числах  $x_1, x_2, x_3$ , если  $a + 2b = p$ , где  $a$  и  $b$  – натуральные числа, а  $p$  – нечетное простое число. Он, в частности, получил формулы, когда  $a=1$  и  $b=1, 2, 3$ . Когда  $a=b=1$ , его формулы совпадают с соответствующими формулами Клостермана.

Анна Вальфиш рассмотрела более общую, чем (4.3) систему диофантовых уравнений

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_s) &= n, \\ \ell(x_1, \dots, x_s) &= m, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $s \geq 5$ ,  $q = q(x_1, \dots, x_s)$  – положительно определенная целочисленная квадратичная форма, а  $\ell = \ell(x_1, \dots, x_s)$  – целочисленная линейная форма. Пусть  $\Delta = \bar{q}(c_1, c_2, \dots, c_k)$ , где  $q$  – квадратичная форма, присоединенная к квадратичной форме  $q$ , и  $N = \Delta n - Dm^2$ , где  $D$  – детерминант квадратичной формы  $q$ .

Используя несколько результатов Малышева о числе целых решений

$r(q, n, l, m)$  системы уравнений (4.5), при  $s \geq 5$  Анна Вальфиш получила асимптотическую формулу

$$r(q, n, \ell, m) = \pi^{(s-1)/2} N^{(s-1)/2} \Delta^{1-s/2} \Gamma^{-1} \left( \frac{S-1}{2} \right) H(q, n; \ell, m) + O(N^{s/4-1/2+\epsilon}),$$

где  $H(q, n; \ell, m)$  – сингулярный ряд проблемы и постоянные, входящие в символ  $O$ , зависят лишь от форм  $q, \ell$  и от произвольной  $\epsilon > 0$ . Она также снизу оценила ряд  $H(q, n; \ell, m)$  и установила условия разрешимости системы (4.5).

## V. Диофантовые приближения.

### Цепные дроби

1. Еще до приезда в Тбилиси Вальфиш доказал, что если функция  $f(x)$  удовлетворяет определенным условиям, тогда неравенство

$$\left| \Theta - \frac{h}{k} \right| < \frac{f(k)}{k}$$

имеет бесконечное множество решений во взаимно простых числах  $h$  и  $k$  почти для всех действительных  $\Theta$ , где  $k > 0$  и  $k \equiv 2 \pmod{4}$ . Эта теорема является модификацией одной теоремы Хинчина

2. Пусть  $\Theta$  – произвольное иррациональное число из интервала  $(0, 1)$ ,  $\lambda(\Theta)$  – точная верхняя граница тех положительных чисел  $c$ , для которых неравенство

$$\left| \Theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^2}$$

имеет бесконечное множество решений в целых  $p$  и в натуральных  $q$  числах. Множество всех значений функций  $\lambda(\Theta)$  называется спектром Лагранжа.

Пусть  $f(x, y)$  – неопределенная бинарная квадратичная форма с действительными коэффициентами. Точная нижняя граница абсолютного значения квадратичной формы  $f(x, y)$ , взятой на всех целых ненулевых значениях аргументов  $x, y$ , т.е.  $\inf |f(x, y)|$  называется арифметическим минимумом квадратичной формы  $f(x, y)$ .

Множество арифметических минимумов всех действительных неопределенных бинарных квадратичных форм называется спектром Маркова.

До трудов Когония об этих спектрах были известны лишь некоторые факты. А именно, было известно, что в левой стороне точки 3, части обоих этих спектров совпадают и являются дискретными возрастающими последовательностями, которые сходятся к числу 3. Что касается частей

этих спектров справа от точки 3, здесь почти ничего не было известно. Когония был первым исследователем, изучившим эти спектры и получившим целый ряд результатов фундаментального значения. Он доказал, что в правой окрестности точки 3 существуют подмножества мощности континуума спектров Лагранжа и Маркова, что минимальной точкой конденсации является число 3 и что размерность Хаусдорфа этих спектров равна 1. Он построил счетное множество континуальных подмножеств этих спектров, нашел максимальные и минимальные точки подмножеств этих спектров, доказал, что максимальные точки являются точками конденсации этих подмножеств, а минимальные точки – изолированными точками.

Множество рациональных чисел  $\Theta$  из интервала  $(0, 1)$ , для которых функция  $\lambda(\Theta)$  принимает одинаковые значения, Когония назвал классом Лагранжа. Он показал, что каждый класс Лагранжа – или счетный или мощности континуума. В спектрах Лагранжа существует бесконечное множество лагун, которые называются смежными интервалами. Он обнаружил несколько смежных интервалов спектра Лагранжа, одним из которых является  $3, 12984 \dots, 3, 16228$ . Аналогичные результаты получил он также для спектра Маркова.

Делоне и его ученики доказали, что спектр Маркова содержит спектр Лагранжа. Их доказательство геометрическое. Когония доказал теорему Делоне простым арифметическим путем. Когония исследовал также довольно трудный вопрос об обратном включении. Он установил целый ряд достаточных условий обратного включения. Класс Маркова, содержащий хотя бы одну предельную двусторонне бесконечную ограниченную последовательность натуральных чисел (это понятие принадлежит Делоне), Когония назвал предельным классом Маркова. Он доказал, что для предельного класса Маркова справедливо обратное включение. Отсюда следует, что этот факт справедлив для всех максимальных и минимальных классов Маркова.

Когония ввел также понятие «обобщенного спектра Лагранжа». Пусть  $\Theta$  – произвольное иррациональное число из интервала  $(0, 1)$ , а  $L(\Theta)$  – точная верхняя граница всех тех положительных действительных чисел  $m$ , для которых неравенство

$$\left| \Theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^m}$$

имеет бесконечное число решений в целых  $p$  и натуральных  $q$  числах. Он доказал, что

$$2 \leq L(\Theta) \leq \infty$$

и что для любого действительного числа  $L \geq 2$  множество иррациональных  $\Theta$  чисел из интервала  $(0, 1)$ , для которых  $L(\Theta) = L$ , не является пустым. Обозначим символом  $\lambda_L(\Theta)$  точную верхнюю границу всех тех положительных действительных чисел  $s$ , для которых неравенство



Институт  
математики  
и механики  
Уральского  
федерального  
университета

$$\left| \Theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{cq^L}$$

имеет бесконечное множество решений в целых  $p$  и натуральных  $q$  числах.

Множество всех значений функций  $\lambda_L(\Theta)$  Когония назвал «обобщенным спектром Лагранжа». Когда  $L=2$ , получаем обыкновенный спектр Лагранжа. Он полностью исследовал эти спектры, в частности, доказал, что для произвольного числа  $L \geq 2$  «обобщенный спектр Лагранжа» совпадает с множеством всех положительных чисел. Он доказал также, что для любого  $m > 0$  и  $L > 2$  уравнение

$$\lambda_L(\Theta) = m$$

имеет множество решений мощности континуума.

Эти результаты вызвали большой интерес и многие математики начали дальнейшее исследование этих вопросов (Фрейман, Берштейн, Павлова, Вулах и другие).

Когония исследовал попарно структуру конечных и бесконечных объединений классов вычетов с взаимнопростыми модулями. Пусть  $m_1, m_2, \dots, m_n$  – попарно взаимнопростые натуральные числа и  $M = m_1 m_2 \dots m_n$ . Когония доказал, что число различных классов вычетов по модулю  $M$ , которые принадлежат объединению классов вычетов по модулям  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , равно

$$M \left[ 1 - \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{1}{m_k} \right) \right].$$

Для различных модулей, в том числе и для простых, он установил плотность этих объединений в смысле Шнирельмана.

Этот результат он применил при изучении следующей задачи.

Пусть

$$\alpha = [0; x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$$

является разложением иррационального числа  $\alpha$  в арифметическую цепную дробь, а  $q_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – знаменатель  $n$ -ной подходящей дроби этой цепной дроби. Когония показал, что

$$q_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{k=0 \\ i_2 < i_1-1 \\ i_1 \equiv 1 \pmod{2} \\ i_{s+1} \equiv i_s \pmod{2}}}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{s-2k}} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{s-2k}}$$

и исследовал множество значений

$$E_n = \{q_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in N^m\} \quad (n=1, 2, \dots)$$

Он нашел несколько интервалов ряда натуральных чисел, не содержащих элементы множества  $E_n$ , и доказал, что множество  $E_n$  содержит почти весь

ряд натуральных чисел, т.е. мощность множества  $E_n$  равна 1 в смысле Шнирельмана.

Когония исследовал вопрос разрешимости в натуральных числах уравнения

$$q_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = m. \quad (5.1)$$

Как известно ряд Фибоначи  $\{V_n\}$  определяется равенствами

$$\begin{aligned} V_0 = V_1 = 1, \\ V_n = V_{n-1} + V_{n-2} \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

Когония доказал, что если  $m \in [V_n, V_{n+1}]$ , тогда уравнение (5.1) разрешимо тогда и только тогда, когда  $m = V_n$  или  $m = V_n + V_{k-1}V_{n-k}$ . Он доказал также, что это уравнение разрешимо для любого  $m$ , которое  $\geq V_n$ , и принадлежит классу

$$\text{вычетов } V_{k-1}V_{n-k}x + V_n \left( x \geq 0, 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right).$$

Он показал также, что мощность множества тех чисел  $m$ , для которых разрешимо это уравнение, равна 1.

## VI. Арифметические функции

1. Следующие две классические асимптотические формулы принадлежат Дирихле:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right),$$

где  $d(n)$  обозначает число положительных делителей натурального числа  $n$ ,  $\gamma$  – постоянная Эйлера и

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x \log x),$$

где  $\sigma(n)$  – сумма положительных делителей натурального числа  $n$ .

Марджанишвили, опираясь лишь на классические результаты, доказал асимптотическую формулу

$$\sum_{1 \leq n \leq x} d^2(x) = \frac{1}{\pi^2} x \log^3 x + M_1 x \log^2 x + M_2 x \log x + M_3 x + O(x^{7/8} \log x),$$

где  $M_1, M_2, M_3$  – определенные постоянные. Позже он обобщил эту формулу, а именно доказал, что

$$\sum_{1 \leq n \leq x} d_k^t(n) = O\left(x(\log x)^{k^t-1}\right)$$

где  $d_k(n)$  обозначает число решений уравнения  $x_1 x_2 \dots x_k = n$  в натураль-

ных  $x_1, x_2, \dots, x_k$  числах, а  $\ell \geq 1$  и  $k \geq 2$  – произвольные целые числа. Пользуясь оценкой Титчмарша тригонометрических сумм, Вальфиш доказал, что

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x \log^{4/5} x \log \log x),$$

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{1}{2} \log x + O(x \log^{4/5} x \log \log x),$$

а пользуясь оценкой тригонометрических сумм Виноградова и Коробова, он доказал, что

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x \log^{2/3} x),$$

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{1}{2} \log x + O(x \log^{2/3} x),$$

$$\sum_{1 \leq m \leq x} n = \frac{\pi^2}{24} x^2 + \sum_{\substack{n=1 \\ m \equiv 0 \pmod{24}}}^{\infty} \frac{1}{n_2} + O(x \log^{2/3} x).$$

## 2. Классическая асимптотическая формула

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \log x),$$

принадлежит Мертенсу, где  $\varphi(n)$  – функция Эйлера. На значение улучшения этой оценки указывал еще Ландау. Применением одной теоремы Ло-Кен-Хуа Вальфиш доказал, что

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \log^{3/4} x (\log \log x)^2). \quad (6.1)$$

Позже, применением оценки тригонометрических сумм Виноградова и Коробова Вальфиш доказал, что

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \log^{2/3} x (\log \log x)^{4/3}),$$

3. Пользуясь методом Вейля оценки тригонометрических сумм, Ландау доказал, что

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \mu(n) = O\left\{x \exp\left(-A(\log \log \log x)^{1/2}\right)\right\}$$

где  $\mu(n)$  – функция Мебиуса. А Вальфиш применением методов оценки тригонометрических сумм Виноградова и Коробова показал, что



$$\sum_{1 \leq n \leq x} \mu(n) = O\left\{x \exp\left(-A \log^{3/5}(\log \log x)^{1/5}\right)\right\}.$$

4. Пусть  $q_k$  обозначает натуральное число, которое не делится на фиксированную степень  $k \geq 2$  никакого простого числа, а  $Q_k(x)$  обозначает количество чисел  $q_k < x$ . Эвелин и Линфут методом Вейля оценки тригонометрических сумм доказали, что

$$Q_k(x) = \frac{x}{\zeta(k)} + O\left\{x^{1/k} \exp\left(-A k^{-3/2} (\log x \log \log x)^{1/2}\right)\right\}.$$

где  $\zeta(k)$  – дзета-функция Римана.

Вальфиш применением одного метода Ландау получил оценку

$$Q_k(x) = \frac{x}{\zeta(k)} + O\left\{x^{1/k} \exp\left(-A k^{-8/5} \log^{3/5} x (\log \log x)^{1/5}\right)\right\}.$$

5. Пусть  $\pi(x)$  обозначает число простых чисел  $\leq x$ , а  $\pi(x; k, \ell)$  – число простых чисел  $\leq x$  в арифметической прогрессии  $\ell + kn$ , где  $0 \leq \ell \leq k$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) и  $(\ell, k) = 1$ . Хорошо известны следующие асимптотические формулы:

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left\{x \exp\left(-A (\log \log \log x)^{1/2}\right)\right\} \quad (6.2)$$

$$\pi(x; k, \ell) = \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left\{x \exp\left(-A (\log \log \log x)^{1/2}\right)\right\} \quad (6.3)$$

Первая из этих формул принадлежит Литлвуду, а вторая – Ландау. Применением теоремы Ло-Кен-Хуа, при помощи которой получена формула (6.1), Вальфиш доказал, что

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left\{x \exp\left(-A \log^{4/7} x (\log \log x)^{2/7}\right)\right\}, \quad (6.4)$$

а с помощью оценки тригонометрических сумм Виноградова и Коробова, он доказал, что

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left\{x \exp\left(-A \log^{3/5} x (\log \log x)^{1/5}\right)\right\} \quad (6.5)$$

$$\pi(x; k, \ell) = \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left\{x \exp\left(-A \log^{3/5} x (\log \log x)^{1/5}\right)\right\} \quad (6.6)$$

Оценка (6.5) является улучшением как оценки Литлвуда (6.2), так и оценки





самого Вальфиша (6.4). А оценка (6.6) улучшает оценку Ландау (6.3).

6. Известно, что функция Рамануджана  $\tau(n)$  определяется как коэффициент Фурье разложения

$$\Delta(z) = \exp(2\pi iz) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \exp(2\pi inz))^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \exp(2\pi inz) \quad (\text{Im } z > 0).$$

Вальфиш доказал, что почти для всех  $n$  функция  $\tau(n)$  делится на произведение  $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 691$ .

Ранее было известно только то, что почти для всех  $n$  функция  $\tau(n)$  делится на 691. Это было высказано Рамануджаном без доказательства и доказано Уотсоном.

Для функций  $\tau(n)$  Гекке получил формулу

$$\tau(n) = \frac{1}{144} \left( \sum_{Q_4(x)=n} x_1^8 - 480n^4 \sigma_3(n) \right), \quad (6.7)$$

где

$$Q_4(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 10x_4^2 + 2x_5^2 + 2x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + 3x_3x_4 + 5x_4x_5 + 3x_5x_6 + x_6x_7 + x_7x_8,$$

и

$$\sigma_3(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^3$$

Шоенберг другим путем снова получил формулу (6.7). Пурцеладзе методом Шоенберга и применением некоторых результатов Гекке и Шоенберга обобщила формулу (6.7). Пусть

$$c(r) = \sum_{Q_4(x)=1} x_r^8 - 30A_r^4 \quad (r = 1, 2, \dots, 8),$$

где  $A_r$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_r$  в детерминанте квадратичной формы  $2Q_4(x)$ . Пурцеладзе доказала, что

$$\tau(n) = \frac{1}{c(r)} \left( \sum_{Q_4(x)=n} x_r^8 - 30A_r^4 n^4 \sigma_3(n) \right) \quad (6.8)$$

для всех тех чисел  $r=1, 2, \dots, 8$ , для которых  $c_r \neq 0$ . Когда  $r=1$ , из формулы (6.8) получается формула Гекке (6.7), а когда  $r=2$ , для функций  $\tau(n)$  Пурцеладзе получает новый вид:

$$\tau(n) = \frac{1}{1296} \left( \sum_{Q_4(x)=n} x_2^8 - 38880n^4 \sigma_3(n) \right).$$

В случае остальных значений  $r$  для получения из формулы (6.8) новых выражений

для функции  $\tau(n)$  необходимо знание всех решений в целых числах уравнения  $Q_8(x)=1$ . Выше было упомянуто, что все решение уравнения  $Q_8(x)=1$  нашел Эркомаишвили и с помощью этих решений из формулы (6.8) получил еще 3 новых вида функций  $\tau(n)$ .

Шоенберг для функций  $\tau(n)$  получил также формулу

$$\tau(n) = \frac{1}{64} \left( \sum_{Q_{16}(x)=n} x_1^4 - 80n^2 \sigma_7(n) \right), \quad (6.9)$$

где квадратичная форма  $Q_{16}(x) = Q_8(x) \oplus Q_8(x)$  и  $\sigma_7(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^7$ .

Пурцеладзе обобщила и формулу (6.9), а именно, она доказала, что

$$\tau(n) = \frac{1}{c(r,s,t,u)} \left( \sum_{Q_{16}(x)=n} x_r x_s x_t x_u - \frac{5}{4} n^4 \sigma_7(n) \right), \quad (6.10)$$

когда  $r,s,t,u=1,2,\dots,8$  и когда  $r,s,t,u=9,10,\dots,16$ , и что

$$\tau(n) = \frac{1}{20A_{rs}A_{t-s-u-8}} \left( \sum_{Q_{16}(x)=n} x_r x_s x_t x_u - n^2 \sigma_7(n) \right), \quad (6.11)$$

когда  $r,s,t,u=1,2,\dots,8$  и когда  $r,s,t,u=9,10,\dots,16$ . Здесь  $c(r,s,t,u)=16/3(A_{rs}A_{tu}+A_{rt}A_{su}+A_{ru}A_{st})$ , а  $A_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  в детерминанте квадратичной формы  $2Q_{16}(x)$ . Когда  $r=s=t=u=1$ , тогда из формул (6.10) и (6.11) следует формула Шоенберга (6.9).

Пусть  $\tau_2(n)$  обозначает коэффициент Фурье разложения

$$\sqrt{\Delta(z)} = \exp(\pi iz) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \exp 2\pi izn)^{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_2(n) \exp(\pi izn) \quad (\text{Im } z > 0)$$

Шоенберг для функций  $\tau_2(n)$  получил следующие два выражения:

$$a) \quad \tau_2(n) = \frac{1}{8} \left[ \sum_{\substack{Q_4(x)=n \\ x \equiv h \pmod{2}}} x_1^2 - 16n^2 \sigma(n) \right],$$

где  $Q_4(x)$  – квадратичная форма

$$Q_4(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 x_4 + x_2 x_4 + x_3 x_4,$$

$h = (1, 1, 0, 0)$  – четырехмерный вектор и  $\sigma(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d$ ,

$$b) \quad \tau_2(n) = \frac{1}{4} \left[ \sum_{\substack{\frac{1}{2}\tilde{Q}_4(x)=n \\ x \equiv h \pmod{2}}} x_1^2 - 4n^2 \sigma_3(n) \right],$$

где  $\tilde{Q}_4(x) = Q_4(x) \oplus Q_4(x)$  и  $\sigma_3(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^3$ .

Применением метода Шюенберга и некоторых результатов Пурцеладзе обобщила обе эти формулы и в частности для функции  $\tau_2(n)$  получила новое выражение:

$$\tau_2(n) = \frac{3}{8} \left[ \sum_{\substack{\frac{1}{2}Q_4(x)=n \\ x \equiv h \pmod{2}}} x_1 x_2 x_3^2 - \frac{16}{3} n^2 \sigma(n) \right].$$

## VII. Функции, определенные рядами Дирихле

1. Еще до приезда в Тбилиси Вальфиш ряд своих трудов посвятил дзета-функции Римана и изучению других функций, определенных рядами Дирихле. В частности, он получил разложение сумматорной функции ряда Дирихле, соответствующего дзета-функции Дедекинда относительно произвольного, как действительного, так и мнимого алгебраического числового поля по гипербесселевым функциям, и исследовал сходимость этого ряда.

Применением одного метода Харди-Ландау Анна Вальфиш получила несколько аналогичных, но более общих результатов о разложении по гипербесселевым функциям сумм коэффициентов таких рядов Дирихле, которые удовлетворяют функциональным уравнениям такого же вида, что и дзета-функция Римана. Из этих своих результатов она получила известные тождества Харди, Вороного, Арнольда Вальфиша, Ландау, Кобера, Опенхайма и несколько новых тождеств. Анна Вальфиш доказала теорему о разложении по гипербесселевым функциям суммы

$$\frac{1}{2} \sum_{a \leq \ell_n \leq b} ' c_n \{ f(\ell_n - 0) + f(\ell_n + 0) \} \quad (0 < a < b),$$

где  $f(x)$  – действительная функция с ограниченными изменениями на сегменте  $[a, b]$ , а  $c_n$  – коэффициент функций ряда Дирихле, который удовлетворяет определенным условиям; штрих при знаке обозначает, что множитель  $c_n$ , когда

$\ell_n = a$  и  $\ell_n = b$ , соответственно равен  $1/2f(a+0)$  и  $1/2f(b-0)$ . Из этой теоремы следуют известные теоремы суммирования Ландау и Вороного и некоторые другие результаты.

2. Ряды Дирихле дзета-функций Эпштейна имеют вид

$$Z_Q(s) = Z(s, Q, m_j, M_j, X_j) = \sum_{\ell_j=-\infty}^{\infty} \frac{e^{X_j \ell_j + \dots + X_k \ell_k}}{\{Q(\ell_j + m_j M_j^{-1})\}^s}, \quad (7.1)$$

где  $s = \sigma + i\tau$ ,  $Q$  – целочисленная положительная квадратичная форма от  $k$  переменных;  $m_j, M_j, X_j$  соответственно обозначают целые, натуральные и рациональные числа; штрих при знаке суммы обозначает, что член, в котором

$\ell_j = \frac{m_j}{M_j}$ , в сумме не содержится. Пусть  $A$  и  $B$  соответственно обозначают абсциссы сходимости и абсолютной сходимости ряда (7.1). Арнольд Вальфиш доказал, что:

1. Если все  $X_j$  – целые числа, тогда ни в одной точке прямой  $A=B=\frac{k}{2}$  и  $\sigma = \frac{k}{2}$  ряд (7.1) не является сходимым;

2. Если все  $X_j$  не являются целыми числами и хоть одна определенная сумма Гаусса, связанная с рядом (7.1), отлична от нуля, тогда ни в одной точке прямой  $A = \frac{k}{2} - 1, B = \frac{k}{2}$  и  $\sigma = \frac{k}{2} - 1$  ряд (7.1) не является сходимым и ни в одной точке прямой  $\sigma = \frac{k}{2}$  (7.1) не является абсолютно сходимым.

3. Если все обобщенные суммы Гаусса, соответствующие ряду (7.1), равны нулю, но функция  $Z_Q(S)$  тождественно не равна нулю, тогда ни в одной точке прямой  $\frac{k}{4} - \frac{1}{4} \leq A \leq \frac{k}{4} - \frac{1}{10}, \frac{k}{4} + \frac{1}{4} \leq B \leq \frac{k}{4} + \frac{1}{2}$  и  $\sigma = \frac{k}{4} + \frac{1}{4}$  ряд (7.1) не является абсолютно сходимым.

4. Если для некоторой квадратичной формы  $Q$  и соответствующих ей параметров  $m_j, M_j, X_j$  справедливы определенные оценки и функция  $Z_Q(S)$  тождественно не равна нулю, тогда для соответствующего ряда (7.1)

$$\frac{k}{4} - \frac{1}{4} \leq A \leq \frac{k}{4} - \frac{1}{6}, \quad B = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}.$$

3. Вейлю принадлежит первая нетривиальная оценка дзета-функций Римана.

Он доказал, что

$$\zeta(1+t) = O\left(\frac{\log t}{\log \log t}\right) \quad (t \geq 3).$$

Вальфиш применением теоремы Ло-Кен-Хуа доказал, что

$$\zeta(1+t) = O\left(\log^{3/4} t (\log \log t)^{1/2}\right) \quad (t \geq 3).$$

4. Опираясь на известную гипотезу о нулях L-функций Дирихле, Литлвуд доказал, что

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{L_k}{\log \log k} \geq e^\gamma \quad \text{и} \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} L_k \log \log k \leq \frac{\pi^2}{6} e^{-\gamma}$$

где  $k$  пробегает те целые положительные числа, для которых  $k$  — фундаментальный дискриминант,  $\gamma$  — постоянная Эйлера,

$$L_k = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-k}{n}\right) \frac{1}{n}, \quad \left(\frac{-k}{n}\right) - \text{символ Кронекера.}$$

Вальфиш применением некоторых соотношений между числами классов положительных бинарных квадратичных форм без всякой гипотезы доказал первое неравенство, а также, что

$$L_k^{-1} = O\left\{\left(\log \log k\right)^{1/2}\right\}.$$

При помощи этих двух неравенств, Вальфиш улучшил известные оценки о числе классов Гауссовых положительных бинарных квадратичных форм. Гогишвили упростил и уточнил формулы Дирихле о числе классов положительных бинарных квадратичных форм. Например, когда детерминант бинарной квадратичной формы  $\Delta \equiv 5 \pmod{8}$ , тогда по формуле Дирихле для числа классов  $h(\Delta)$  будем иметь

$$h(\Delta) = 2 \sum_{m \in \left[0, \frac{\Delta}{4}\right]} \left(\frac{m}{\Delta}\right),$$

а Гогишвили показал, что

$$h(\Delta) = 2 \sum_{m \in \left[\frac{\Delta}{6}, \frac{\Delta}{4}\right]} \left(\frac{m}{\Delta}\right).$$

Аналогичные уточнения он получил также и для других значений  $\Delta$ .

Пусть 
$$F(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi n\tau/N} \quad (Im\tau > 0)$$

– разложение любой целой модулярной формы  $F(\tau)$  размерности  $k$  ( $k$  – произвольное действительное число  $\geq 2$ ), степени  $N$  и с определенной системой мультипликаторов, которая исчезает во всех рациональных параболических точках своей фундаментальной области, но не является тождественно равной нулю. Пусть, далее

$$C(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} c_n \quad \text{и} \quad D(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} |c_n|$$

Вальфиш доказал, что

- $C(x) = O\left(x^{\frac{k-1}{2}}\right)$

- Если  $\min c_n = a$ , для которого  $c_n \neq 0$ , тогда  $D(x) \geq a_1 x^{\frac{k+1}{4}}$ , когда  $x \geq a$

и если дополнительно  $c_n = O\left(n^{\frac{k-1}{2} + \epsilon}\right)$ , тогда

$$D(x) \geq a_2 x^{\frac{k+1}{2} - \epsilon}, \text{ если } x \geq a \text{ (здесь } a, a_1 \text{ и } a_2 \text{ – определенные положительные}$$

числа, зависящие лишь от  $F(\tau)$ ).

3. В последние годы много трудов было посвящено установлению размерности векторных пространств модулярных и параболических форм. В одной работе Гудинга полностью изучен вопрос о размерности векторных пространств обобщенных кратных тэта-рядов с шаровыми функциями  $\nu$ -го порядка относительно положительной приведенной квадратичной формы.

Шавгулидзе установила достаточно точные верхние границы размерностей пространств обобщенных кратных тэта-рядов с шаровыми функциями  $\nu$ -го порядка относительно некоторых 9 тернарных и 44 кватернарных квадратичных форм. Потом, применяя известные базисы пространств шаровых функций второго порядка, построенные Геке, установила размерность пространств обобщенных кратных тэта-рядов с шаровыми функциями второго порядка относительно 8 кватернарных и 4 тернарных положительных приведенных квадратичных форм. А применением базисов пространств шаровых функций четвертого порядка, построенных Ломадзе, Шавгулидзе получила размерности пространств обобщенных кратных тэта-рядов с шаровыми функциями четвертого порядка относительно 3-х кватернарных и 2-х тернарных положительных приведенных квадратичных



форм. Шавгулидзе в явном виде построила базисы этих рассмотренных пространств. Ломадзе построил два типа целых модулярных форм полужелого веса и четыре типа целых модулярных форм целого веса.

**IX. Некоторые исследования, не вошедшие в предыдущие разделы**

1. Серпинский доказал, что существуют двусторонние изолированные простые числа в следующем смысле: для произвольного натурального числа  $n$  существует такое простое  $p \geq n$  число, что среди чисел  $p \pm j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) нет простых чисел.

Простое число  $p$ , для которого  $\log \log \log p > 1$ , и ближайшее простое число  $q$ , которое удовлетворяет условию

$$|q - p| > \frac{\log p}{(\log \log \log p)^2},$$

Вальфиш назвал сильно изолированным простым числом и доказал теорему: Почти все простые числа сильно изолированы. В частности, почти все простые числа являются двусторонними изолированными в смысле Серпинского. Для любого натурального числа  $k$  существует последовательность  $k$  последующих простых чисел  $p_n, p_{n+1}, \dots, p_{n+k-1}$ , которые сильно изолированы.

2. Пусть  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots = \{n_k\}$  — бесконечная последовательность произвольных натуральных чисел и  $T(N) = \sum_{n_k \leq N} 1$ ;

число

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{T(N)}{N} = \sigma(n_k),$$

аналогично понятию плотности бесконечной возрастающей последовательности натуральных чисел в смысле Шнирельмана, Когония назвал асимптотической плотностью последовательности  $\{n_k\}$ . Произвольную бесконечную последовательность действительных чисел  $\{a_k\}$ , где  $a_k \geq 1$ , он назвал плотным на предельной точке  $a$ , если существует хоть одна такая бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел  $\{n_k\}$  с положительной асимптотической плотностью, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a.$$

Точную верхнюю границу всех тех последовательностей натуральных чисел, для которых

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a_n,$$

он назвал плотностью бесконечно возрастающей последовательности действительных чисел  $\{a_k\}$  на предельной точке  $a$ .

На основе этих определений Когония доказал несколько свойств последовательности  $\{a_k\}$ .

Когония установил также алгоритм разложения произвольного действительного числа из интервала (0,1) по рядам обратных величин натуральных чисел.

Поступила 10.12.2001  
Кафедра алгебры и геометрии

გ. ლომაძე

ბამოკვლევები რიცხვთა თეორიაში საძარტველო XX საუკუნეში

გადმოცემულია რიცხვთა თეორიის ის ძირითადი შედეგები, რომლებიც მიღებულია საქართველოს მათემატიკოსების მიერ XX საუკუნეში. განხილულია პროფესორ არნოლდ ვალფისის და მისი მოწაფეების პროფ. გიორგი ლომაძის და პროფ. პლატონ კოდონიას მიერ შექმნილი რიცხვთა თეორიის სკოლის წარმომადგენელთა მიერ გადაწყვეტილი საკითხები და ამოცანები. კერძოდ, მარტივ რიცხვთა ადიციური თეორიის საკითხები, რიცხვთა წარმოდგენა კვადრატული ფორმებით, დიოფანტური განტოლებები და სისტემები, დიოფანტური მიახლოებანი, ჯაჭვწილადები, არითმეტიკული ფუნქციები, მოდულური ფორმები და სხვა.

G. Lomadze

PRINCIPAL RESULTS IN THEORY OF NUMBERS BY MATHEMATICIANS  
OF GEORGIA IN XX CENTURY

Summary

In this paper there are quoted principal results given by mathematicians of Georgia in XX century. There are considered some questions and problems solved by the school of Georgian mathematicians in theory of numbers founded by professor Arnold Walfisz and his pupils prof. George Lomadze and prof. Platon Kogonia. In particular there are considered the questions of additive theory of prime numbers, the representations of integers by quadratic forms, Diophantine equations and systems of Diophantine equations, Diophantine approximations and continued fractions, arithmetical functions, functions defined by Dirichlet series, modular forms and other questions.



УДК 511.4

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ НЕКОТОРЫМИ  
ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ  
СТУПЕНИ 8

Т.В. Вепхвадзе, Н.К. Цалугелашвили

§1. Введение

Пусть

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix},$$

$$f = f(x) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{j,k} x_j x_k$$

– целочисленная положительная квадратичная форма.  $r(n, f)$  обозначает число представлений числа  $n$  формой  $f$ , т.е. число решений в целых числах уравнения

$$n = f(x).$$

Один из основных методов структурного изучения функций  $r(n, f)$  основан на систематическом применении теории модулярных форм, так как задача получения формулы для  $r(n, f)$  сводится к задаче получения формул для соответствующего тэта-ряда

$$\vartheta(\tau, f) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n, f) Q^n,$$

где  $Q = e^{2\pi i \tau}$ ,  $\tau$  – комплексная переменная  $\text{Im} \tau > 0$ .

Схема метода получения таких формул заключается в следующем: тэта-ряд представляется в виде суммы двух слагаемых:

$$\vartheta(\tau, f) = E(\tau, f) + \chi(\tau, f),$$

где  $E(\tau, f)$  – ряд Эйзенштейна,  $\chi(\tau, f)$  – некоторая параболическая форма. К настоящему времени ряд Эйзенштейна полностью исследован, известны удобные формулы для вычисления коэффициентов Фурье функций  $E(\tau, f)$  (см., напр., [14]).



Если не имеет место равенство  $\mathfrak{Z}(\tau, f) = E(\tau, f)$ , то нужно подыскать параболическую форму  $\chi(\tau, f)$ , и желательно такую, чтобы коэффициенты Фурье этой функции имели простой арифметический вид, например, представляли бы собою линейные комбинации сумм, распространенных на определенные представления натуральных чисел квадратичными формами, желательно с меньшим числом переменных, чем форма  $f$ .

С целью получения параболических форм и соответствующих формул для числа представлений натуральных чисел некоторыми квадратичными формами Петерсон [12], Ломадзе (см., напр., [5] и [6]), Коган [2],[3], Бульгин [8],[9], Морделл [10],[11] и другие авторы применяли якобиевы тэта-функции, простые тэта-функции с характеристиками и их производные, или обобщенные тэта-функции с шаровыми функциями, соответствующие положительным квадратичным формам.

Этим методом полностью исследованы суммы квадратов, т.е. положительные квадратичные формы степени 4. Морделл [10], Бульгин [8] и Ломадзе [4],[7] построили базисы некоторых параболических форм, соответствующие положительным квадратичным формам степени 4, с помощью которых они получили формулы для числа представлений натуральных чисел суммами  $s$  квадратов, при  $s = 9, 10, \dots, 32$ .

Все вышеназванные тэта-функции являются частными случаями т.н. обобщенных тэта-функций с характеристиками, введенных Вепхвадзе [1] следующим образом:

Пусть  $A=(a_{ij})$  – матрица формы  $f = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{j,k} x_j x_k$ ,  $g$  и  $h$  – специальные векторы относительно матрицы  $A$ ,  $N$  – степень формы  $f$ , т.е. наименьшее положительное число, при котором  $NA^{-1}$  – симметрическая положительная целочисленная матрица с четными диагональными элементами,  $p_\nu = p_\nu(x)$  – шаровая функция  $\nu$ -го порядка, соответствующая форме  $f$ . Тогда

$$\mathfrak{Z}_{gh}(\tau; P_\nu, f) = \sum_{x \equiv g \pmod{N}} (-1)^{\frac{h \cdot A(x-g)}{N^2}} P_\nu(x) e^{\frac{\pi i x \cdot A x}{N^2}}$$

С помощью линейных комбинаций этих функций в работе [15] построены базисы пространств параболических форм относительно произвольных положительных квадратичных форм степени 8 с четным числом переменных. С помощью же этих базисов в настоящей работе получены точные формулы для числа представлений натуральных чисел формами

$$f_{(s,k)} = f_{(s,k)}(x) = 2 \sum_{j=1}^k x_j^2 + \sum_{j=k+1}^s x_j^2 \quad (1)$$

при  $s=12, 14$  и  $16$ .

Лемма 1 ([14]). Пусть  $2|s, r = \frac{s}{2}$

$$f_{(s,k)} = f_{(s,k)}(x) = 2 \sum_{j=1}^k x_j^2 + \sum_{j=k+1}^s x_j^2,$$

тогда функция  $\vartheta(\tau; f_{(s,k)})$  принадлежит пространству целых модулярных форм типа  $(-r, \delta, V_{s,k}(M))$ ,  $v_{s,k}(M)$  – система мультипликаторов относительно формы  $f_{(s,k)}$ ,

$$M \in \Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(Z) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

$$v_s(M) = (\text{sgn } \delta)^{s/2} \left( \frac{(-1)^{s/2} \cdot 2}{|\delta|} \right), \text{ в случае } 2 \nmid k,$$

$$= (\text{sgn } \delta)^{s/2} \left( \frac{(-1)^{s/2}}{|\delta|} \right), \text{ в случае } 2 | k. \quad (2)$$

Лемма 2 ([15]). Пусть  $k \equiv 1 \pmod{2}, s \geq 6$ ,

$$f_s = 2 \sum_{j=1}^{s-5} x_j^2 + x_{s-4}^2, \quad P_2 = x_{s-4}^2 - 2x_1,$$

$$h^j = (0, \dots, 0), \quad (g^{(j)})' = \left( \underbrace{4, \dots, 4}_{2j}, 0, \dots, 0 \right) \quad (j=1, 2, \dots, s/2-3), \quad (3)$$

$$(g^{(s/2-2)})' = \left( 0, \underbrace{4, \dots, 4}_{s-6}, 0, \dots, 0 \right).$$

Тогда функции

$$\vartheta_{g^{(j)}, h^j}(\tau; P_2, f_s) \quad (j=1, 2, \dots, s/2-2)$$

образуют базис пространства параболических форм типа  $(-s/2, \Gamma_0(8), v_{s,k}(M))$ , где  $v_{s,k}(M)$  – система мультипликаторов относительно формы  $f_{(s,k)}$ .

Лемма 3 [15]. Пусть  $k \equiv 1 \pmod{2}, s \geq 10$ ,



$$f_s = 2 \sum_{j=1}^{s-8} x_j^2, P_4 = x_{s-8}^2 - 6x_1^2 x_{s-8}^2 + x_1^4,$$

$$h' = (0, \dots, 0), (g^{(j)})' = \left( \underbrace{4, \dots, 4}_{2j}, 0, \dots, 0 \right) \quad (j = 1, 2, \dots, s/2 - 4),$$

$$(g^{(s/2-3)})' = \left( 0, \underbrace{4, \dots, 4}_{s-10}, 0 \right).$$

Тогда функции

$$\vartheta_{g^{(j)}, k}(\tau; P_4, f_s) \quad (j = 1, 2, \dots, s/2 - 3)$$

образуют базис пространства параболических форм типа  $(-s/2, \Gamma_0(8), \nu_{s,k}(M))$ .

### §3. Основные результаты

**Теорема 1.**

Пусть  $n = 2^{\omega} m$  ( $\omega \geq 0, m \equiv 1 \pmod{2}$ ),  $f_k = f_{(12,k)}$  ( $k = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ), где

$f_{(12,k)}$  определены формулами (1). Тогда

$$r(n, f_k) = \rho(n, f_k) + \sum_{j=1}^4 \alpha_j^{(k)} \nu_j(n) \quad (k = 1, 3, 5, 7, 9, 11), \quad (4)$$

где

$$\rho(n, f_k) = \frac{2^{5\omega+11-(k-1)/2}}{361} \chi_2^{(k)}(n) \sum_{d_1 d_2 = n} \left( \frac{2}{d_1} \right) d_2^5, \quad (5)$$

$$\nu_1(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + \dots + 4x_7^2 + 2x_8^2 = 2n \\ x_1 \equiv x_2 \equiv 1 \pmod{2}}} (2x_8^2 - x_1^2), \quad (6)$$

$$\nu_2(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + \dots + x_4^2 + 4x_5^2 + 4x_6^2 + 4x_7^2 + 2x_8^2 = 2n \\ x_1 \equiv \dots \equiv x_4 \equiv 1 \pmod{2}}} (2x_8^2 - x_1^2), \quad (7)$$

$$\nu_3(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + \dots + x_4^2 + 4x_5^2 + 2x_6^2 = 2n \\ x_1 \equiv \dots \equiv x_4 \equiv 1 \pmod{2}}} (2x_6^2 - x_1^2), \quad (8)$$

$$\nu_4(n) = \sum_{\substack{4x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_7^2 + 2x_8^2 = 2n \\ x_1 \equiv \dots \equiv x_7 \equiv 1 \pmod{2}}} (2x_8^2 - x_1^2), \quad (9)$$



$$\alpha_j^{(k)} = 32\beta_j^{(k)} \quad (j = 1, 2, 3), \quad \alpha_4^{(k)} = 64\beta_4^{(k)},$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1^{(1)} & \beta_2^{(1)} & \beta_3^{(1)} & \beta_4^{(1)} \\ \beta_1^{(3)} & \beta_2^{(3)} & \beta_3^{(3)} & \beta_4^{(3)} \\ \beta_1^{(5)} & \beta_2^{(5)} & \beta_3^{(5)} & \beta_4^{(5)} \\ \beta_1^{(7)} & \beta_2^{(7)} & \beta_3^{(7)} & \beta_4^{(7)} \\ \beta_1^{(9)} & \beta_2^{(9)} & \beta_3^{(9)} & \beta_4^{(9)} \\ \beta_1^{(11)} & \beta_2^{(11)} & \beta_3^{(11)} & \beta_4^{(11)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -737 & -825 & 77 & -165 \\ 361 \cdot 16 & 361 \cdot 16 & 361 \cdot 16 & 361 \cdot 16 \\ -1369 & -2021 & -675 & 15 \\ 361 \cdot 32 & 361 \cdot 32 & 361 \cdot 32 & 361 \cdot 32 \\ -71 & -1665 & -137 & 7 \\ 361 \cdot 2 & 361 \cdot 32 & 361 \cdot 8 & 361 \cdot 32 \\ -839 & -563 & -19 & 3 \\ 361 \cdot 32 & 361 \cdot 16 & 361 \cdot 2 & 361 \cdot 32 \\ -255 & -169 & -91 & 1 \\ 361 \cdot 16 & 361 \cdot 8 & 361 \cdot 16 & 361 \cdot 32 \\ -165 & -451 & -121 & 0 \\ 361 \cdot 32 & 361 \cdot 32 & 361 \cdot 32 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\chi_2^{(k)}(n) = \begin{cases} 1 - 2^{(k-1)/2 - 5n - 10}, & \text{при } m \equiv 7 \text{ или } 1 \pmod{8}, \\ 1 - 2^{(k-1)/2 - 5n - 10}, & \text{при } m \equiv 3 \text{ или } 5 \pmod{8}. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть  $f = f(x)$  определяется равенством

$$f = f(x) = 2x_1^2 + \dots + 2x_7^2 + x_8^2, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix}$$

Очевидно,

$$P_2 = x_8^2 - 2x_1^2$$

– шаровая функция второго порядка относительно формы  $f(x)$ .

Пусть, далее  $A$  – матрица формы  $f$ ,  $\Delta = |A| = 2^7$  – определитель матрицы  $A$ ,  $A_k$  ( $k=1, 3, \dots, 11$ ) – матрица формы  $f_k$ , определенной при  $s=12$  равенствами (1),  $\Delta_k = |A_k| = 2^k$  – определитель матрицы  $A_k$ ,  $N=8$  и  $N_k=8$  – соответственно степени форм  $f$  и  $f_k$  ( $k=1, 3, \dots, 11$ ),  $h, g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}, g^{(4)}$  – специальные векторы относительно матрицы  $A$ , которые при  $s=12$  определяются равенствами (3).

Согласно лемме 2, функции



$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{g^{(1)},h}(\tau, P_2, f) &= \sum_{x=g^{(1)} \pmod{8}} (x_8^2 - 2x_1^2) \varrho^{\frac{2x_1^2 + \dots + 2x_7^2 + 2x_8^2}{64}} = \\ &= 2^5 \sum_{\substack{x_1, \dots, x_8 = -\infty \\ x_1 = x_7 = 1 \pmod{2}}}^{\infty} (x_8^2 - 2x_1^2) \varrho^{\frac{x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + \dots + 4x_7^2 + 2x_8^2}{2}} = \\ &= 2^5 (-4Q + 8Q^2 - 40Q^3 + 80Q^4 - 144Q^5 + 272Q^6 + \dots) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{g^{(2)},h}(\tau, P_2, f) &= \sum_{x=g^{(2)} \pmod{8}} (x_8^2 - 2x_1^2) \varrho^{\frac{2x_1^2 + \dots + 2x_7^2 + 2x_8^2}{64}} = \\ &= 2^5 \sum_{\substack{x_1, \dots, x_8 = -\infty \\ x_1 = \dots = x_4 = 1 \pmod{2}}}^{\infty} (x_8^2 - 2x_1^2) \varrho^{\frac{x_1^2 + \dots + x_4^2 + 4x_5^2 + \dots + 4x_7^2 + 2x_8^2}{2}} = \\ &= 2^5 (-16Q^2 + 32Q^3 - 96Q^4 + 192Q^5 - 160Q^6 + \dots) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{g^{(3)},h}(\tau, P_2, f) &= \sum_{x=g^{(3)} \pmod{8}} (x_8^2 - 2x_1^2) \varrho^{\frac{2x_1^2 + \dots + 2x_7^2 + 2x_8^2}{64}} = \\ &= 2^5 \sum_{\substack{x_1, \dots, x_8 = -\infty \\ x_1 = \dots = x_6 = 1 \pmod{2}}}^{\infty} (x_8^2 - 2x_1^2) \varrho^{\frac{x_1^2 + \dots + x_6^2 + 4x_7^2 + 2x_8^2}{2}} = \\ &= 2^5 (64Q^3 + 128Q^4 - 128Q^5 + 256Q^6 + \dots) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{g^{(4)},h}(\tau, P_2, f) &= \sum_{x=g^{(4)} \pmod{8}} (x_8^2 - 2x_1^2) \varrho^{\frac{2x_1^2 + \dots + 2x_7^2 + 2x_8^2}{64}} = \\ &= 2^6 \sum_{\substack{x_1, \dots, x_8 = -\infty \\ x_1 = \dots = x_7 = 1 \pmod{2}}}^{\infty} (x_8^2 - 2x_1^2) \varrho^{\frac{4x_1^2 + x_2^2 + \dots + 4x_7^2 + x_8^2}{2}} = \\ &= 2^6 (128Q^4 - 256Q^5 - 256Q^6 + \dots) \end{aligned} \quad (15)$$

образуют базис пространства параболических форм типа  $(-6, \Gamma_0(8), \nu_{12,k}(M))$ , где  $(\nu_{12,k}(M))$  - система мультипликаторов относительно формы.

Согласно лемме 1 и теореме Зигеля [13] функции

$$\mathfrak{g}(\tau, f_k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n, f_k) Q^n \quad (16)$$



ՀԱՅԿԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ  
ՆԱԽԱՐԱՐԱԿԱՆ ԳՐԱԴԱՐԱՆ

и ряды Эйзенштейна

$$E(\tau, f_k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho(n, f_k) Q^n \quad (17)$$

принадлежат пространству модулярных форм типа  $(-6, \Gamma_0(8), \nu_{12,k}(M))$  ( $k=1,3,5,7,9,11$ ), а их разности – пространству параболических форм того же типа. Поэтому существуют числа  $B_j^k$  ( $j=1,2,3,4$ ), такие, что имеют место равенства

$$\vartheta(\tau, f_k) = E(\tau, f_k) + \sum_{j=1}^4 B_j^k \vartheta_{g^{(j)}, h}(\tau, P_2, f) \quad (18)$$

Согласно теореме 4 работы [14], имеем

$$\rho(n, f_k) = \frac{2^{5n+11-(k-1)/2}}{361} \chi_2^{(k)}(n) \sum_{d_1 d_2 = n} \left( \frac{2}{d_1} \right) d_2^5, \quad (19)$$

где

$$\chi_2^{(k)}(n) = \begin{cases} 1 - 2^{(k-1)/2 - 5n - 10}, & \text{при } m = 7 \text{ или } 1 \pmod{8}, \\ 1 + 2^{(k-1)/2 - 5n - 10}, & \text{при } m = 3 \text{ или } 5 \pmod{8}. \end{cases} \quad (20)$$

Вычислив значения величин  $\rho(n, f_k)$  с помощью формул (19) и (20), согласно (17) получим

$$E(\tau, f_1) = 1 + \frac{2 \cdot (2^{10} - 1)}{361} Q + \frac{2 \cdot (2^{15} - 1)}{361} Q^2 + \frac{2 \cdot (2^{10} + 1) \cdot 242}{361} Q^3 + \frac{2 \cdot (2^{20} - 1)}{361} Q^4 + \dots, \quad (21)$$

$$E(\tau, f_3) = 1 + \frac{2 \cdot (2^9 - 1)}{361} Q + \frac{2 \cdot (2^{14} - 1)}{361} Q^2 + \frac{2 \cdot (2^9 + 1) \cdot 242}{361} Q^3 + \frac{2 \cdot (2^{19} - 1)}{361} Q^4 + \dots, \quad (22)$$

$$E(\tau, f_5) = 1 + \frac{2 \cdot (2^8 - 1)}{361} Q + \frac{2 \cdot (2^{13} - 1)}{361} Q^2 + \frac{2 \cdot (2^8 + 1) \cdot 242}{361} Q^3 + \frac{2 \cdot (2^{18} - 1)}{361} Q^4 + \dots, \quad (23)$$



$$E(\tau, f_7) = 1 + \frac{2 \cdot (2^7 - 1)}{361} Q + \frac{2 \cdot (2^{12} - 1)}{361} Q^2 + \frac{2 \cdot (2^7 + 1) \cdot 242}{361} Q^3 + \frac{2 \cdot (2^{17} - 1)}{361} Q^4 + \dots, \quad (24)$$

$$E(\tau, f_9) = 1 + \frac{2 \cdot (2^9 - 1)}{361} Q + \frac{2 \cdot (2^{11} - 1)}{361} Q^2 + \frac{2 \cdot (2^9 + 1) \cdot 242}{361} Q^3 + \frac{2 \cdot (2^{16} - 1)}{361} Q^4 + \dots, \quad (25)$$

$$E(\tau, f_{11}) = 1 + \frac{2 \cdot (2^5 - 1)}{361} Q + \frac{2 \cdot (2^{10} - 1)}{361} Q^2 + \frac{2 \cdot (2^5 + 1) \cdot 242}{361} Q^3 + \frac{2 \cdot (2^{15} - 1)}{361} Q^4 + \dots, \quad (26)$$

Из (16) следует

$$\mathfrak{g}(\tau, f_1) = 1 + 22Q + 222Q^2 + 1364Q^3 + 5742Q^4 + \dots, \quad (27)$$

$$\mathfrak{g}(\tau, f_3) = 1 + 18Q + 150Q^2 + 780Q^3 + 2910Q^4 + \dots, \quad (28)$$

$$\mathfrak{g}(\tau, f_5) = 1 + 14Q + 94Q^2 + 420Q^3 + 1454Q^4 + \dots, \quad (29)$$

$$\mathfrak{g}(\tau, f_7) = 1 + 10Q + 54Q^2 + 220Q^3 + 734Q^4 + \dots, \quad (30)$$

$$\mathfrak{g}(\tau, f_9) = 1 + 6Q + 30Q^2 + 116Q^3 + 366Q^4 + \dots, \quad (31)$$

$$\mathfrak{g}(\tau, f_{11}) = 1 + 2Q + 22Q^2 + 44Q^3 + 222Q^4 + \dots \quad (32)$$

Из (21)-(32) имеем

$$\mathfrak{g}(\tau, f_1) - E(\tau, f_1) = \frac{5896}{361} Q + \frac{14608}{361} Q^2 - \frac{3696}{361} Q^3 - \frac{24288}{361} Q^4 + \dots, \quad (33)$$

$$\mathfrak{g}(\tau, f_3) - E(\tau, f_3) = \frac{5476}{361} Q + \frac{21384}{361} Q^2 + \frac{33288}{361} Q^3 + \frac{1936}{361} Q^4 + \dots, \quad (34)$$

$$\mathfrak{g}(\tau, f_5) - E(\tau, f_5) = \frac{4544}{361} Q + \frac{17552}{361} Q^2 + \frac{27232}{361} Q^3 + \frac{608}{361} Q^4 + \dots, \quad (35)$$

$$\mathfrak{g}(\tau, f_7) - E(\tau, f_7) = \frac{3356}{361} Q + \frac{11304}{361} Q^2 + \frac{16984}{361} Q^3 + \frac{2832}{361} Q^4 + \dots, \quad (36)$$





$$\vartheta(\tau, f_9) - E(\tau, f_9) = \frac{2040}{361}Q + \frac{6736}{361}Q^2 + \frac{10416}{361}Q^3 + \frac{1056}{361}Q^4 \quad (37)$$

$$\vartheta(\tau, f_{11}) - E(\tau, f_{11}) = \frac{660}{361}Q + \frac{5896}{361}Q^2 + \frac{88}{361}Q^3 + \frac{14608}{361}Q^4 + \dots \quad (38)$$

Теперь, если коэффициенты  $B_j^{(k)}$  определены равенствами (11), то из (12)-(15), (33)-(38) получаем (18).

Приравнявая коэффициенты Фурье при  $Q^n$  в обеих частях равенства (18), с помощью формул (10), (11), (16), (17), (12)-(15), (19) и (20) получаем утверждаемое.

Аналогично доказываются следующие теоремы:

**Теорема 2.** Пусть  $n = 2^\omega m$  ( $\omega \geq 0, m \equiv 1 \pmod{2}$ ),  $s = 12, f_k = f_{(12,k)}$ , где  $f_{(s,k)}$  определены формулами (1) ( $k=2,4,6,8,10$ ). Тогда

$$r(n, f_k) = \rho(n, f_k) + \sum_{j=1}^3 \alpha_j^{(k)} v_j(n) \quad (k = 2, 4, 6, 8, 10),$$

где

$$\rho(n, f_k) = 2^{5\omega+3-k/2} \chi_2^{(k)}(n) \sum_{d|m} d^5,$$

$$v_1(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 = 2n \\ x_1 \equiv x_2 \equiv 1 \pmod{2}}} (x_1^4 + 16x_4^4 - 24x_1^2 x_4^2),$$

$$v_2(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + \dots + x_4^2 = 2n \\ x_1 \equiv \dots \equiv x_4 \equiv 1 \pmod{2}}} (x_1^4 + x_4^4 - 6x_1^2 x_4^2),$$

$$v_3(n) = \sum_{\substack{4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_4^2 = 2n \\ x_2 \equiv x_3 \equiv 1 \pmod{2}}} (x_1^4 + x_4^4 - 6x_1^2 x_4^2),$$

$$\alpha_j^{(k)} = 2^8 \beta_j^{(k)} \quad (j=1,2), \quad \alpha_3^{(k)} = 2^{12} \beta_3^{(k)},$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1^{(2)} & \beta_2^{(2)} & \beta_3^{(2)} \\ \beta_1^{(4)} & \beta_2^{(4)} & \beta_3^{(4)} \\ \beta_1^{(6)} & \beta_2^{(6)} & \beta_3^{(6)} \\ \beta_1^{(8)} & \beta_2^{(8)} & \beta_3^{(8)} \\ \beta_1^{(10)} & \beta_2^{(10)} & \beta_3^{(10)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2^6 & -7/2^{11} & 1/2^8 \\ 7/2^9 & -7/2^{11} & 1/2^8 \\ 1/2^{10} & -5/2^{11} & 3/2^{10} \\ 15/2^{12} & -3/2^{11} & 1/2^9 \\ -15/2^{13} & -1/2^{10} & 1/2^{10} \end{pmatrix}.$$

$$\chi_2^{(6,k)}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } \omega = 0 \text{ или } 1, \\ 1 - \sum_{2 < d_1 < \omega} 2^{9(1-d_1)-k/2} + 2^{k/2-5\omega}, & \text{при } \omega \geq 2. \end{cases}$$

### Теорема 3.

Пусть  $n = 2^\omega m$  ( $\omega \geq 0$ ,  $m \equiv 1 \pmod{2}$ ),  $f_k = f_{(14,k)}$  ( $k = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$ ).

Тогда

$$r(n, f_k) = \rho(n, f_k) + \sum_{j=1}^5 \alpha_j^{(k)} v_j(n) \quad (k = 1, 3, \dots, 13),$$

где

$$\rho(n, f_k) = \frac{2^{6\omega+13-(k-1)/2}}{9 \cdot 307} \chi_2^{(k)}(n) \sum_{d_1 d_2 = m} \left( \frac{-2}{d_1} \right) d_2^6,$$

$$v_1(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + \dots + 4x_9^2 + 2x_{10}^2 = 2n \\ x_1, x_2 \equiv 1 \pmod{2}}} (2x_{10}^2 - x_1^2),$$

$$v_2(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + \dots + x_4^2 + 4x_5^2 + \dots + 4x_9^2 + 2x_{10}^2 = 2n \\ x_1, \dots, x_4 \equiv 1 \pmod{2}}} (2x_{10}^2 - x_1^2),$$

$$v_3(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + \dots + x_4^2 + 4x_5^2 + 4x_6^2 + 4x_7^2 + 2x_{10}^2 = 2n \\ x_1, \dots, x_6 \equiv 1 \pmod{2}}} (2x_{10}^2 - x_1^2),$$

$$v_4(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + \dots + x_4^2 + 4x_5^2 + 2x_{10}^2 = 2n \\ x_1, \dots, x_6 \equiv 1 \pmod{2}}} (2x_{10}^2 - x_1^2),$$

$$v_5(n) = \sum_{\substack{4x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_9^2 + 2x_{10}^2 = 2n \\ x_2, \dots, x_9 \equiv 1 \pmod{2}}} (x_{10}^2 - 2x_1^2),$$

$$\alpha_j^{(k)} = 32\beta_j^{(k)} \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad \alpha_5^{(k)} = 64\beta_5^{(k)},$$

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \beta_1^{(1)} & \beta_2^{(1)} & \beta_3^{(1)} & \beta_4^{(1)} & \beta_5^{(1)} \\ \beta_1^{(3)} & \beta_2^{(3)} & \beta_3^{(3)} & \beta_4^{(3)} & \beta_5^{(3)} \\ \beta_1^{(5)} & \beta_2^{(5)} & \beta_3^{(5)} & \beta_4^{(5)} & \beta_5^{(5)} \\ \beta_1^{(7)} & \beta_2^{(7)} & \beta_3^{(7)} & \beta_4^{(7)} & \beta_5^{(7)} \\ \beta_1^{(9)} & \beta_2^{(9)} & \beta_3^{(9)} & \beta_4^{(9)} & \beta_4^{(11)} \\ \beta_1^{(11)} & \beta_2^{(11)} & \beta_3^{(11)} & \beta_4^{(11)} & \beta_5^{(11)} \\ \beta_1^{(13)} & \beta_2^{(13)} & \beta_3^{(13)} & \beta_4^{(13)} & \beta_5^{(13)} \end{array} \right\| =$$

-221	-817	-233	217	-75
307·4	307·8	307·8	307·8	307·8
-14173	-14865	-4613	-1455	31
9·307·32	9·307·16	9·307·8	9·307·16	9·307·32
-1987	-2707	-5065	-305	5
3·307·16	307·32	3·307·32	307·32	3·307·32
-9415	-17535	-4711	-1281	7
9·307·32	9·307·32	9·307·32	9·307·4	9·307·32
565	-631	-859	-61	1
3·307·8	307·16	3·307·16	307·32	3·307·32
-4081	-861	-755	-183	1
9·307·32	9·307·4	9·307·8	9·307·32	9·307·32
-75	-517	-217	0	0
307·16	307·32	307·32		

$$\chi_2^{(k)}(n) = \begin{cases} 1 - 2^{(k-1)/2 - 6\omega - 12}, & \text{при } m \equiv 1 \text{ или } 3 \pmod{8} \\ 1 + 2^{(k-1)/2 - 6\omega - 12}, & \text{при } m \equiv 5 \text{ или } 7 \pmod{8} \end{cases}$$

#### Теорема 4.

Пусть  $n = 2^\omega m$  ( $\omega \geq 0$ ,  $m \equiv 1 \pmod{2}$ ),  $f_k = f_{(14,k)}$  ( $k = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ ).

Тогда

$$r(n, f_k) = \rho(n, f_k) + \sum_{j=1}^4 \alpha_j^{(k)} \nu_j(n) \quad (k = 2, 4, \dots, 12),$$

где

$$\rho(n, f_k) = \frac{2^{6\omega + 8 - k/2}}{61} \chi_2^{(k)}(n) \sum_{d_1 d_2 = m} \left( \frac{-1}{d_1} \right) I_2^6,$$

$$\nu_1(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + \dots + 4x_6^2 = 2n \\ x_1 \equiv x_2 \equiv 1 \pmod{2}}} (x_1^4 + 16x_6^4 - 24x_1^2 x_6^2),$$

$$\nu_2(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + \dots + x_3^2 + 4x_4^2 + 4x_5^2 = 2n \\ x_1 \equiv \dots \equiv x_4 \equiv 1 \pmod{2}}} (x_1^4 + 16x_6^4 - 24x_1^2 x_6^2),$$

$$\nu_3(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + \dots + x_2^2 = 2n \\ x_1 \equiv \dots \equiv x_6 \equiv 1 \pmod{2}}} (x_1^4 + x_6^4 - 6x_1^2 x_6^2),$$



$$v_4(n) = \sum_{\substack{4x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2 + 4x_6^2 = 2n \\ x_1, \dots, x_5 \equiv 1 \pmod{2}}} (x_1^4 + x_6^4 - 6x_1^2 x_6^2)$$

$$\alpha_j^{(k)} = 2^* \beta_j^{(k)} \quad (j = 1, 2, 3), \quad \alpha_4^{(k)} = 2^{12} \beta_4^{(k)},$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1^{(2)} & \beta_2^{(2)} & \beta_3^{(2)} & \beta_4^{(2)} \\ \beta_1^{(4)} & \beta_2^{(4)} & \beta_3^{(4)} & \beta_4^{(4)} \\ \beta_1^{(6)} & \beta_2^{(6)} & \beta_3^{(6)} & \beta_4^{(6)} \\ \beta_1^{(8)} & \beta_2^{(8)} & \beta_3^{(8)} & \beta_4^{(8)} \\ \beta_1^{(10)} & \beta_2^{(10)} & \beta_3^{(10)} & \beta_4^{(10)} \\ \beta_1^{(12)} & \beta_2^{(12)} & \beta_3^{(12)} & \beta_4^{(12)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 167 & 255 & -15 & 15 \\ \frac{61 \cdot 2^7}{289} & \frac{61 \cdot 2^7}{461} & \frac{61 \cdot 2^5}{-121} & \frac{61 \cdot 2^5}{119} \\ \frac{61 \cdot 2^8}{59} & \frac{61 \cdot 2^8}{345} & \frac{61 \cdot 2^8}{-91} & \frac{61 \cdot 2^8}{11} \\ \frac{61 \cdot 2^6}{179} & \frac{61 \cdot 2^8}{113} & \frac{61 \cdot 2^8}{-243} & \frac{61 \cdot 2^5}{229} \\ \frac{61 \cdot 2^8}{15} & \frac{61 \cdot 2^7}{17} & \frac{61 \cdot 2^{10}}{-19} & \frac{61 \cdot 2^{10}}{137} \\ \frac{61 \cdot 2^5}{15} & \frac{61 \cdot 2^5}{91} & \frac{61 \cdot 2^7}{-19} & \frac{61 \cdot 2^{10}}{91} \\ \frac{61 \cdot 2^6}{61 \cdot 2^6} & \frac{61 \cdot 2^8}{61 \cdot 2^8} & \frac{61 \cdot 2^8}{61 \cdot 2^8} & \frac{61 \cdot 2^{10}}{61 \cdot 2^{10}} \end{pmatrix}$$

$$\chi_2^{(s,k)}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } \omega = 0, \\ 1 - 2^{k/2 - 6\omega - 6}, & \text{при } \omega \geq 1, m \equiv 1 \pmod{4}, \\ 1 + 2^{k/2 - 6\omega - 6}, & \text{при } \omega \geq 1, m \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

### Теорема 5.

Пусть  $n = 2^\omega m$  ( $\omega \geq 0, m \equiv 1 \pmod{2}$ ),  $f_k = f_{(16,k)}$  ( $k = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$ ).

Тогда

$$r(n, f_k) = \rho(n, f_k) + \sum_{j=1}^6 \alpha_j^{(k)} v_j(n) \quad (k = 1, 3, \dots, 15),$$

где

$$\rho(n, f_k) = \frac{2^{7\omega + 15 - (k-1)/2}}{24611} \chi_2^{(k)}(n) \sum_{d_1 d_2 = m} \left( \frac{-2}{d_1} \right) d_2^7,$$

$$v_1(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + \dots + 4x_{11}^2 + 2x_{12}^2 = 2n \\ x_1, x_2, \dots, x_{11} \equiv 1 \pmod{2}}} (2x_{12}^2 - x_1^2),$$

$$v_2(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + \dots + x_4^2 + 4x_5^2 + \dots + 4x_{11}^2 + 2x_{12}^2 = 2n \\ x_1, \dots, x_4 \equiv 1 \pmod{2}}} (2x_{12}^2 - x_1^2),$$



$$v_3(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + \dots + x_4^2 + 4x_5^2 + \dots + 4x_{11}^2 + 2x_{12}^2 = 2n \\ x_1 \equiv \dots \equiv x_4 \equiv 1 \pmod{2}}} (2x_{12}^2 - x_1^2)$$

$$v_4(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + \dots + x_6^2 + 4x_7^2 + 4x_{10}^2 + 4x_{11}^2 + 2x_{12}^2 = 2n \\ x_2 \equiv \dots \equiv x_4 \equiv 1 \pmod{2}}} (2x_{12}^2 - x_1^2)$$

$$v_5(n) = \sum_{\substack{x_1^2 + \dots + x_{10}^2 + 4x_{11}^2 + 2x_{12}^2 = 2n \\ x_2 \equiv \dots \equiv x_{10} \equiv 1 \pmod{2}}} (2x_{12}^2 - x_1^2)$$

$$v_6(n) = \sum_{\substack{4x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{11}^2 + 2x_{12}^2 = 2n \\ x_2 \equiv \dots \equiv x_{11} \equiv 1 \pmod{2}}} (2x_{12}^2 - x_1^2)$$

$$\alpha_j^{(k)} = 32\beta_j^{(k)} \quad (j=1,2,3,4,5), \quad \alpha_6^{(k)} = 64\beta_6^{(k)},$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1^{(1)} & \beta_2^{(1)} & \beta_3^{(1)} & \beta_4^{(1)} & \beta_5^{(1)} & \beta_6^{(1)} \\ \beta_1^{(3)} & \beta_2^{(3)} & \beta_3^{(3)} & \beta_4^{(3)} & \beta_5^{(3)} & \beta_6^{(3)} \\ \beta_1^{(5)} & \beta_2^{(5)} & \beta_3^{(5)} & \beta_4^{(5)} & \beta_5^{(5)} & \beta_6^{(5)} \\ \beta_1^{(7)} & \beta_2^{(7)} & \beta_3^{(7)} & \beta_4^{(7)} & \beta_5^{(7)} & \beta_6^{(7)} \\ \beta_1^{(9)} & \beta_2^{(9)} & \beta_3^{(9)} & \beta_4^{(9)} & \beta_5^{(9)} & \beta_6^{(9)} \\ \beta_1^{(11)} & \beta_2^{(11)} & \beta_3^{(11)} & \beta_4^{(11)} & \beta_5^{(11)} & \beta_6^{(11)} \\ \beta_1^{(13)} & \beta_2^{(13)} & \beta_3^{(13)} & \beta_4^{(13)} & \beta_5^{(13)} & \beta_6^{(13)} \\ \beta_1^{(15)} & \beta_2^{(15)} & \beta_3^{(15)} & \beta_4^{(15)} & \beta_5^{(15)} & \beta_6^{(15)} \end{pmatrix} =$$

-88195	-237583	-85701	14759	63709	-12241
$2^4 \cdot 24611$	$2^4 \cdot 24611$	$2^3 \cdot 24611$	$2^3 \cdot 24611$	$2^4 \cdot 24611$	$2^4 \cdot 24611$
-155876	-436009	-211465	-76243	-9851	65
$2^5 \cdot 24611$	$2^5 \cdot 24611$	$2^4 \cdot 24611$	$2^4 \cdot 24611$	$2^5 \cdot 24611$	$2^5 \cdot 24611$
-4166	-354903	-169969	-16899	-8479	33
24611	$2^5 \cdot 24611$	$2^4 \cdot 24611$	$2^2 \cdot 24611$	$2^4 \cdot 24611$	$2^5 \cdot 24611$
-109725	-33141	-224609	-77323	-4103	17
$2^5 \cdot 24611$	$2^2 \cdot 24611$	$2^5 \cdot 24611$	$2^5 \cdot 24611$	$2^4 \cdot 24611$	$2^5 \cdot 24611$
-42813	-45831	-32507	-36083	-1915	9
$2^4 \cdot 24611$	$2^3 \cdot 24611$	$2^3 \cdot 24611$	$2^5 \cdot 24611$	$2^4 \cdot 24611$	$2^5 \cdot 24611$
-61271	-117811	-2201	-15463	-821	-5
$2^5 \cdot 24611$	$2^5 \cdot 24611$	24611	$2^5 \cdot 24611$	$2^4 \cdot 24611$	$2^5 \cdot 24611$
-9197	-72749	-20317	-5153	-137	3
$2^3 \cdot 24611$	$2^5 \cdot 24611$	$2^4 \cdot 24611$	$2^5 \cdot 24611$	$2^3 \cdot 24611$	$2^5 \cdot 24611$
-12241	-25109	-25735	1	-1	1
$2^5 \cdot 24611$	$2^4 \cdot 24611$	$2^5 \cdot 24611$	$2^4 \cdot 24611$	$2^5 \cdot 24611$	$2^4 \cdot 24611$



$$\chi_2^{(k)}(n) = \begin{cases} 1 - 2^{(k-1)/2 - 7\omega - 14}, & \text{при } m = 3 \text{ или } 5 \pmod{8} \\ 1 + 2^{(k-1)/2 - 7\omega - 14}, & \text{при } m = 1 \text{ или } 7 \pmod{8}. \end{cases}$$

### Теорема 6.

Пусть  $n = 2^\omega m$  ( $\omega \geq 0$ ,  $m = 1 \pmod{2}$ ),  $f_k = f_{(16,k)}$  ( $k = 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14$ ).

Тогда

$$r(n, f_k) = \rho(n, f_k) + \sum_{j=1}^5 \alpha_j^{(k)} v_j(n) \quad (k = 2, 4, \dots, 14),$$

где

$$\rho(n, f_k) = \frac{2^{7\omega+5-k/2}}{17} \chi_2^{(k)}(n) \sum_{d|m} d^7,$$

$$v_1(n) = \sum_{\substack{x_1^4 + 16x_8^4 - 24x_1^2 x_8^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + \dots + 4x_8^2 = 2n \\ x_1 = x_2 = 1 \pmod{2}}} (x_1^4 + 16x_8^4 - 24x_1^2 x_8^2),$$

$$v_2(n) = \sum_{\substack{x_1^4 + 16x_8^4 - 24x_1^2 x_8^2 \\ x_1^2 + \dots + x_4^2 + 4x_5^2 + \dots + 4x_8^2 = 2n \\ x_1 = \dots = x_4 = 1 \pmod{2}}} (x_1^4 + 16x_8^4 - 24x_1^2 x_8^2),$$

$$v_3(n) = \sum_{\substack{x_1^4 + 16x_8^4 - 24x_1^2 x_8^2 \\ x_1^2 + \dots + x_6^2 + 4x_7^2 + 4x_8^2 = 2n \\ x_1 = \dots = x_6 = 1 \pmod{2}}} (x_1^4 + 16x_8^4 - 24x_1^2 x_8^2),$$

$$v_4(n) = \sum_{\substack{x_1^4 + x_8^4 - 6x_1^2 x_8^2 \\ x_1^2 + \dots + x_8^2 = 2n \\ x_1 = \dots = x_8 = 1 \pmod{2}}} (x_1^4 + x_8^4 - 6x_1^2 x_8^2),$$

$$v_5(n) = \sum_{\substack{x_1^4 + x_8^4 - 6x_1^2 x_8^2 \\ 4x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_7^2 + 4x_8^2 = 2n \\ x_1 = \dots = x_7 = 1 \pmod{2}}} (x_1^4 + x_8^4 - 6x_1^2 x_8^2),$$

$$\alpha_j^{(k)} = 2^8 \beta_j^{(k)} \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad \alpha_5^{(k)} = 2^{12} \beta_5^{(k)},$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1^{(2)} & \beta_2^{(2)} & \beta_3^{(2)} & \beta_4^{(2)} & \beta_5^{(2)} \\ \beta_1^{(4)} & \beta_2^{(4)} & \beta_3^{(4)} & \beta_4^{(4)} & \beta_5^{(4)} \\ \beta_1^{(6)} & \beta_2^{(6)} & \beta_3^{(6)} & \beta_4^{(6)} & \beta_5^{(6)} \\ \beta_1^{(8)} & \beta_2^{(8)} & \beta_3^{(8)} & \beta_4^{(8)} & \beta_5^{(8)} \\ \beta_1^{(10)} & \beta_2^{(10)} & \beta_3^{(10)} & \beta_4^{(10)} & \beta_5^{(10)} \\ \beta_1^{(12)} & \beta_2^{(12)} & \beta_3^{(12)} & \beta_4^{(12)} & \beta_5^{(12)} \\ \beta_1^{(14)} & \beta_2^{(14)} & \beta_3^{(14)} & \beta_4^{(14)} & \beta_5^{(14)} \end{pmatrix} =$$



$$= \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 115 & 263 & 285 & -135 & 1 \\ \hline \frac{2^8 \cdot 17}{25} & \frac{2^8 \cdot 17}{225} & \frac{2^8 \cdot 17}{135} & \frac{2^9 \cdot 17}{-135} & \frac{2^6}{1} \\ \hline \frac{2^6 \cdot 17}{21} & \frac{2^5 \cdot 17}{43} & \frac{2^7 \cdot 17}{203} & \frac{2^9 \cdot 17}{101} & \frac{2^6}{3} \\ \hline \frac{2^6 \cdot 17}{135} & \frac{2^6 \cdot 17}{15} & \frac{2^8 \cdot 17}{271} & \frac{2^9 \cdot 17}{-67} & \frac{2^8}{1} \\ \hline \frac{2^9 \cdot 17}{203} & \frac{2^5 \cdot 17}{77} & \frac{2^9 \cdot 17}{339} & \frac{2^9 \cdot 17}{-83} & \frac{2^7}{5} \\ \hline \frac{2^{10} \cdot 17}{271} & \frac{2^8 \cdot 17}{47} & \frac{2^{10} \cdot 17}{407} & \frac{2^{10} \cdot 17}{-49} & \frac{2^{10}}{3} \\ \hline \frac{2^{11} \cdot 17}{271} & \frac{2^8 \cdot 17}{1} & \frac{2^{11} \cdot 17}{407} & \frac{2^{10} \cdot 17}{-1} & \frac{2^{10}}{3} \\ \hline \frac{2^{12} \cdot 17}{2^3 \cdot 17} & \frac{2^3 \cdot 17}{2^3 \cdot 17} & \frac{2^{12} \cdot 17}{2^3 \cdot 17} & \frac{2^5 \cdot 17}{2^5 \cdot 17} & \frac{2^{11}}{2^{11}} \\ \hline \end{array}$$

$$\chi_2^{(s,k)}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } \omega = 0 \text{ или } 1, \\ 1 + \sum_{2\alpha = \infty} 2^{\gamma(l-r)+k/2} - 2^{k/2-5\alpha}, & \text{при } \omega \geq 2. \end{cases}$$

Поступила 12.12. 2001

Кафедра высшей математики

### Литература

1. Т.В. Вепхвадзе. Acta Arithmetika (1990), 433-451.
2. Л.А. Коган. Лит. мат. сб., 1969, 9. №3, 519-533.
3. Л.А. Коган. О представлении целых чисел положительно определенными квадратичными формами. Ташкент: Фан. 1971-188с.
4. Г.А. Ломадзе. Труды Тбилисского математического института им. А. Размадзе, 1949, 17, 281-311.
5. Г.А. Ломадзе. Труды Тбилисского математического института им. А. Размадзе, 1971, 40, 106-139.
6. Г.А. Ломадзе. Труды Тбилисского математического института им. А. Размадзе, 1974, 45, 111-133.
7. Г.А. Ломадзе. Труды Тбилисского государственного университета. Математика. Механика. Астрономия. 179, 1976, 63-66.
8. V. Boulyguine. Известия Императорской Академии Наук (6), 8 (1914) 389-404
9. V. Boulyguine. Изв. АН. 1914, 8. 389-404

10. L.J. Mordell. Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics 48 (1917), 93-104
11. L.J. Mordell. Trans. Cambridge Philos. Soc. 1919, 22, 361-372.
12. W.H. Petersson. Modulfunktionen und quadratische Formen. Berlin-Heidelberg-New-York 1982.
13. C.L. Siegel. Ann. of Math. 1935, 36, 527-406.
14. T.V. Vepkhvadze. Georgian Mathematical Journal, 1997, №4.
15. T.V. Vepkhvadze. N.K. Tsalugelashvili. Georgian Mathematical Journal, 7, 2000, 4, 793-798

თ. ვეფხვაძე, ნ. ცალუგელაშვილი

ზოგადი რითი დადებითი 8 საფეხურის კვადრატული ფორმით რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ რეზიუმე

მოდულურ ფორმათა თეორიის გამოყენებით მიღებულია ფორმულები ნატურალური რიცხვების წარმოდგენათა რაოდენობისათვის ზოგიერთი 8 საფეხურის 12, 14 და 16 ცვლადიანი დიაგონალური კვადრატული ფორმით.

T. Vepkhvadze, N. Tsalugelashvili

ON THE REPRESENTATION OF NUMBERS BY CERTAIN EIGHT LEVEL POSITIVE QUADRATIC FORMS

Summary

By means of the theory of modular forms the formulae for a number of representations of positive integers by certain eight level diagonal quadratic forms in 12, 14 and 16 variables are obtained.



## ОБ ОЦЕНКЕ СИНГУЛЯРНЫХ РЯДОВ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Г.П. Гогшвили

1. Постановка задачи. Пусть

$$f = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \quad (1)$$

– целочисленная примитивная положительно определенная квадратичная форма с числом переменных  $n \geq 4$  и определителя  $d = d(f)$ . Так, что  $a_{\alpha\alpha}$  ( $\alpha = \overline{1, n}$ ) и  $a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha} = 2a_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = \overline{1, n}$ ) – числа с условием о.н.д.  $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}, 2a_{12}, \dots, 2a_{n-1, n}) = 1$ . Мы рассматриваем главный член  $\rho(f, m)$  в формулах для  $r(f, m)$  – количества представлений числа  $m \in \mathbb{N}$  квадратичной формой  $f$ .  $\rho(f, m)$  – т.н. «сингулярный ряд» задачи представления натуральных чисел  $m$  формой  $f$ . Функция  $\rho(f, m)$  представляется в виде бесконечного произведения

$$\rho(f, m) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} m^{\frac{n}{2}-1}}{d^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \prod_{p \geq 2} X(p). \quad (2)$$

Это представление, формулы для вычисления величин  $X(p)$ , даже при более общих предположениях, получены Малышевым [3]. Оценки  $\rho(f, m)$  относительно  $d$  и  $m$  важны для исследования асимптотического поведения  $r(f, m)$ ; существования формул типа Гаусса для  $r(f, m)$ ; количества одноклассных родов форм (1).  $\rho(f, m)$  имеет и самостоятельный интерес, ибо он имеет четкий арифметический смысл.

В работе [3] даны некоторые оценки величин  $X(p)$  (относительно  $d$  и  $m$ ). Из этих оценок непосредственно следует

$$\rho(f, m) = O\left(m^{\frac{n}{2}-1+\epsilon} d^{\frac{1}{2}}\right). \quad (3)$$



Мы доказали [1], что

$$\rho(f, m) = O\left(m^{\frac{n}{2}-1+\epsilon_1} - d^{\frac{n-2}{2(n-1)}+\epsilon_2}\right) \quad \text{при } n \geq 4, \quad (4)$$

где  $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$ , и их можно считать сколько угодно малыми числами. Постоянные, входящие в  $O$ , вычислены и их значения не зависят, так же, как и в (3), от  $m$  и  $d$ .

Далее, в работе [5] мы уточнили оценку (4) и получили

$$\rho(f, m) = O\left(m d^{\frac{1}{3}} \log \log d \log \log m\right) \quad \text{при } n = 4 \quad (5)$$

и

$$\rho(f, m) = O\left(m^{\frac{n}{2}-1} d^{\frac{n-2}{2(n-1)}}\right) \quad \text{при } n \geq 5. \quad (6)$$

Там же были указаны конкретные квадратичные формы для произвольных  $n \geq 4$ , для которых общие оценки (6) не улучшаемы при  $n \geq 5$ , а при  $n = 4$  оценки вида (6) не верны и, следовательно, в силе оценка (5).

Ранкин [6], изучая представления чисел лишь суммами квадратов, оценил  $\rho(f, m)$ . Некоторые оценки получены и Коганом [2] и другими авторами.

В настоящей работе для кватернарных форм мы уточняем оценку (5). А именно, понижаем порядок в оценке (5).

$$\rho(f, m) = O\left(m d^{\frac{1}{3}} \ln \ln b(d, m)\right), \quad \text{при } n = 4, \quad (7)$$

где  $b(d, m) = \prod_{\substack{p|2, dm \\ p>2}} p$  – произведение различных простых делителей числа  $dm$ .

Для произвольных форм с  $n \geq 5$  получаем оценку

$$\rho(f, m) \leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}+2} 2^{\pi(n-1)} m^{\frac{n}{2}-1}}{5\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} - d^{\frac{n-2}{2(n-1)}} \quad \text{при } n \geq 5, \quad (8)$$

где  $\pi(n-1)$  – число простых, не превосходящих  $n-1$ ,  $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$  – гамма-функция Эйлера. Оценка (8) уточнила оценку (6).

## §2. Некоторые вспомогательные результаты и обозначения

Пусть  $p$  – произвольное простое число. Известно (см., например, [3]), что для любого  $p \geq 2$  и любой квадратичной формы (1) существуют целые числа  $e_\alpha$  и квадратичные формы  $\varphi_\alpha$  с числом переменных  $n_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, s}$ , такие, что

$$f = \sum_{\alpha=1}^s p^{e_\alpha} \varphi_\alpha \pmod{p^{e_s+3}},$$

где  $-1 \leq e_1 < e_2 < \dots < e_s$  (если  $p=2$ , то тогда формы  $\varphi_\alpha$  могут быть диагональными, либо следующего типа:

$$\varphi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n_\alpha/2} (2a'_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}^2 + 2a''_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta} y_{\alpha\beta}^2 + 2a'''_{\alpha\beta} y_{\alpha\beta}^2), \text{ и лишь тогда } e_1 = -1. \text{ Если } p \neq 2,$$

то  $\varphi_\alpha$  диагональны и  $p \nmid \det(\varphi_\alpha)$ ,  $\alpha = \overline{1, s}$ .

В работе [5] были получены следующие оценки для  $X(p)$ :

$$X(p) \leq p^{\frac{h}{2}} (1 + p^{-2}) (1 + p^{-1}) \text{ при } p \mid 2^n d, p > 2, n = 4; \quad (9)$$

$$X(p) \leq 1 + p^{-2} \text{ при } p \nmid 2^{n+1} d m, n = 4; \quad (10)$$

$$X(p) \leq 1 + p^{-1} \text{ при } p \nmid 2^{n+1} d, p \mid m, n = 4; \quad (11)$$

$$X(p) \leq v_p (1 + p^{-2}) p^{\frac{h}{2(n-1)}} \text{ при } p \mid 2^n d, p > 2, n \geq 5; \quad (12)$$

$$X(p) \leq 1 + p^{-2} \text{ при } p \nmid 2^{n+1} d, n \geq 5; \quad (13)$$

$$X(2) \leq 3, 2 \cdot 2^{\frac{h}{2(n-1)}} \text{ при } n \geq 4. \quad (14)$$

Здесь  $h = h(p) = \sum_{\alpha=1}^s n_\alpha e_\alpha$ , т.е.  $d = p^n d_p, p \nmid 2^n d_p$ ;

$$v_p = \begin{cases} 2 & \text{при } p^{\frac{1}{2(n-1)}} (1 + p^{-2}) < 1 + p^{-1}, \\ 1 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (15)$$

## §3. Оценки $\rho(f, m)$

Согласно формулам (12)-(14) имеем

$$\prod_{p \geq 2} X(p) = X(2) \prod_{\substack{p \mid 2^n d \\ p > 2}} X(p) \prod_{\substack{p \nmid 2^n d \\ p > 2}} X(p) \leq 3, 2 \cdot 2^{\frac{h}{2(n-1)}} \prod_{\substack{p \mid 2^n d \\ p > 2}} v_p p^{\frac{h}{2(n-1)}} \prod_{p > 2} (1 + p^{-2}), \quad n \geq 5. \quad (16)$$



ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ  
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК  
УКРАЇНИ

Учитывая, что  $\prod_{p>2} (1+p^{-2}) \leq \frac{\pi^2}{8}$  и  $\prod_{p|2^m d} p^k = d$ , из (16) получаем

$$\prod_{p \geq 2} X(p) \leq 0,4\pi^2 d^{\frac{h}{2(n-1)}} \prod_{\substack{p|2^m d \\ p > 2}} v_p, \quad n \geq 5. \quad (17)$$

По определению  $v_p = 2$ , если

$$p^{\frac{1}{2(n-1)}}(1+p^{-2}) < 1+p^{-1},$$

т.е. если  $p^{\frac{1}{2(n-1)}} < \frac{p^2+p}{p^2+1} = 1 + \frac{p-1}{p^2+1} < 1 + \frac{p-1}{p^2-1} = 1 + \frac{1}{p+1} < e^{\frac{1}{p+1}}$ ;

или  $p^{p+1} < e^{2(n-1)}$ .

Но уже начиная с  $p=n$ , имеем  $n^{n+1} < e^{2n-2}$ , т.е.

$$\left(\frac{n}{e^2}\right)^n \cdot ne^2 > 1. \quad (18)$$

Действительно, при  $n \geq 8$  неравенство (18) очевидно, т.к.  $e^2 < 8$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что (18) верно и для  $n = 4, 7$ . Следовательно, можно полагать, что для любого  $n \geq 4$ , начиная с  $p=n$ , имеем  $v_p = 1$ , а  $v_p = 2$  можно предполагать лишь для простых  $p = 3, \overline{(n-1)}$ ,  $p | 2^n d$ . Количество таких простых чисел  $\leq \pi(n-1) - 1$ . Это приводит к следующей оценке:

$$\prod_{\substack{p|2^m d \\ p > 2}} v_p \leq \prod_{\substack{p \leq n-1 \\ p > 2}} v(p) \leq 2 = 2^{\pi(n-1)-1} \quad (19)$$

Из (17), согласно (19), получаем

$$\prod_{p \geq 2} X(p) \leq 0,2\pi^2 2^{\pi(n-1)-1} d^{\frac{1}{2(n-1)}}, \quad n \geq 5. \quad (20)$$

О величине  $\pi(n-1)$  дают представления оценки (см., напр., [4]):

$$\pi(n-1) \leq 1,6 \frac{n-1}{\ln(n-1)}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n-1)}{n-1} \ln(n-1) = 1. \quad (21)$$

Оценка (20) приводит к окончательному результату (8) для  $\rho(f, m)$  в случае  $n \geq 5$ .



Теперь рассмотрим случай  $n=4$ . В данном случае для  $X(2)$  в силе оценка (14), а для  $X(p)$ ,  $p > 2$ , имеем оценки (9)-(11). Следовательно, получаем

$$\prod_{p \geq 2} X(p) = X(2) \prod_{\substack{p+2^{m+1}d \\ d|m}} (1+p^{-2}) \prod_{\substack{p+2^{m+1}d \\ d|m}} (1+p^{-1}) \prod_{\substack{p|2^h d \\ p > 2}} p^{\frac{h}{6}} (1+p^{-2}) (1+p^{-1}) \leq \\ \leq 3,2d^{\frac{1}{6}} \prod_{\substack{p|dm \\ p > 2}} (1+p^{-2}) \prod_{\substack{p|dm \\ p > 2}} (1+p^{-1}) \leq 0,4d^{\frac{1}{6}} \prod_{\substack{p|dm \\ p > 2}} (1+p^{-1}). \quad (22)$$

Пусть  $b=b(d,m)$  – произведение различных нечетных простых делителей произведения  $dm$ ,  $\sigma = \sigma(b)$  – число различных простых делителей  $b$ , а  $p_1, \dots, p_\sigma$  – первые  $\sigma$  простых чисел. Согласно хорошо известным оценкам (см., напр., [4]) получаем

$$\prod_{\substack{p|dm \\ p > 2}} (1+p^{-1}) = \prod_{\substack{p|b \\ p > 2}} (1+p^{-1}) < \prod_{2 \leq p \leq p_\sigma} (1+p^{-1}) = O(\ln p_\sigma), \quad (23)$$

$$\ln p_\sigma < 2 \ln \sigma, \quad \sigma \leq \log_2 b = \frac{\ln b}{\ln 2}, \quad (24)$$

$$\ln \sigma = O(\ln \ln b). \quad (25)$$

Учитывая эти результаты, из (22) получаем

$$\prod_{p \geq 2} X(p) = O(d^{\frac{1}{6}} \ln \ln b), \quad (26)$$

что и приводит к окончательному результату (7) при  $n=4$

Поступила 20.12.2001

Кафедра высшей математики

### Литература

1. Г.П. Гогিশвили. Труды Тбилисского математического института им. А.М. Размадзе, т. 104, 1995, 41-51.
2. Л.А. Коган. Ученые записи Ташкентского педагогического института, т. 163, 1976, 3-45.
3. А.В. Малышев. Труды математического института им. В.А. Стеклова, т. 65, 1962, 3-312.
4. К. Прахар. Распределение простых чисел. Москва, 1967.
5. G. Gogishvili. New trends in Probability and Statistics, v. 4, 1997, 35-44.
6. R.A. Rankin. Amer. J. Math., v. 87, 1965, 857-860.



ბ. გოგიშვილი  
 დადებითი კვადრატული ფორმების შესაბამისი სინგულარული  
 მწკრივების შეფასებათა შესახებ  
 რეზიუმე

განხილულია დადებითად განსაზღვრული  $n$ -ცვლადიანი კვადრატული ფორმების შესაბამისი სინგულარული მწკრივების შეფასებები. კვატერნარული ფორმების შემთხვევაში ამ მწკრივების ცნობილ შეფასებებში დაწეულია რიგი, ხოლო  $n \geq 5$  შემთხვევაში დაზუსტებულია ცნობილ შეფასებებში შემავალი მუდმივები.

G. Gogishvili

ON THE ESTIMATES OF THE SINGULAR SERIES OF POSITIVE QUADRATIC FORMS  
 Summary

The paper studies the estimates of the singular series of positive  $n$ -ary ( $n \geq 4$ ) quadratic forms. For the quaternary forms the order of the known estimates is reduced. For the case  $n \geq 5$ , the constants in the known estimates are explicitly defined.

## ОБ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ РОДОВ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КВАТЕРНАРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Л.А. Сулаквелидзе

Лагранж доказал, что любое натуральное число представимо в виде суммы

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

где  $x_1, x_2, x_3, x_4$  — целые числа. Далее, Рамануджан нашел еще несколько диагональных кватернарных форм вида

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2,$$

каждый из которых представляет все натуральные числа. Впоследствии Диксон [1] доказал, что существуют ровно 54 диагональные кватернарные квадратичные формы такого типа. Такие классы эквивалентности квадратичных форм Диксон назвал универсальными. В работе [2] доказано, что конечно также число универсальных классов произвольных (как диагональных, так и недиагональных) кватернарных квадратичных форм и дискриминанты этих форм  $\leq 860$ .

Назовем род положительно определенных квадратичных форм универсальным, если любое натуральное число  $n$  представимо хотя бы одной формой из этого рода. Может случиться, что класс квадратичных форм не является универсальным (какое-то число не представимо данным классом), но род универсален (это число представимо какой-нибудь другой формой из данного рода).

Покажем, что множество универсальных родов кватернарных квадратичных форм бесконечно.

Пусть  $F = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2$  — положительная кватернарная квадратичная форма;

$$A_q(n; F) = q^{-4} \sum_{h \bmod q} e^{\frac{2\pi i h n}{q}} \prod_{k=1}^4 S(a_k h, q),$$

где штрих при знаке суммы означает, что  $h$  пробегает приведенную систему вычетов по модулю  $q$ ;  $S(a_k h, q)$  — сумма Гаусса. Далее, пусть  $\Delta = a_1 a_2 a_3 a_4$ ;



$$\rho(n; F) = \frac{\pi^2}{\Delta^2} n \sum_{q=1}^{\infty} A_q(n; F)$$

– соответствующий форме F т.н. сингулярный ряд.

**Лемма 1.** (см [4]). Пусть  $n = 2^\alpha uv$

$$u = \prod_{\substack{p|n \\ p \equiv 1 \pmod{2\Delta}} p^{\beta}, \quad v = \prod_{\substack{p|n \\ p \equiv 3 \pmod{2\Delta}} p^{\gamma}, \quad \Delta = r^2 \omega$$

( $\omega$  – бесквадратное число). Тогда

$$\rho(n; F) = \frac{2^\alpha v \pi^2}{\Delta^2} \chi_2 \prod_{\substack{p|\Delta \\ p > 2}} \chi_p \prod_{\substack{p|r \\ p > 2}} \left( 1 - \left( \frac{\omega}{p} \right) p^{-2} \right)^{-1} L^{-1}(2, \omega) \sum_{d_1 d_2 = n} \left( \frac{\omega}{d_1} \right) d_2,$$

причем значения  $\chi_2, \chi_p$  и ?? даны, соответственно, в леммах 1, 2 и 3 работы [4].

**Лемма 2.** (см.[3]). Пусть задан род квадратичных форм, содержащий k классов эквивалентности. Далее, пусть  $F_1, F_2, \dots, F_k$  – те квадратичные формы из данного рода, которые принадлежат разным классам эквивалентности. Тогда имеет место равенство

$$\rho(n; F) = \sum_{i=1}^k C_i r(n; F_i),$$

где  $C_i$  – положительные постоянные, а  $r(n; F_i)$  – число представлений числа n формой  $F_i$ .

Из этого равенства вытекает, что если для произвольного n имеем  $\rho(n; F) \neq 0$ , то в данном роде найдется хотя бы одно  $F_i$ , для которого  $r(n; F_i) \neq 0$ , т.е. род универсальный.

Таким образом, достаточно показать, что число таких кватернарных квадратичных форм, для которых  $\rho(n; F) \neq 0$  для любого n, бесконечно.

Рассмотрим квадратичную форму  $F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + px_4^2$ , где p – произвольное нечетное простое число. В лемме 1 работы [4] положим:  $n = 2_m^\alpha, 2 \nmid m, a_1 = a_2 = a_3 = 1, a_4 = p, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0, b_1 = b_2 = b_3 = 1, b_4 = p$ .

Тогда получим

$$\chi_2 = 2 + \left( (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot 2^{-\alpha-1} - 1 \right) \geq 2 - 2^{-\alpha-1} - 1 = 1 - 2^{-\alpha-1} > 0 \text{ при } 2 \mid \alpha, p \equiv 3 \pmod{4};$$

$$\chi_2 = 2 + \left( (-1)^{\frac{2m-p-3}{4}} \cdot 2^{-\alpha-1} - 1 \right) \geq 2 - 2^{-\alpha-1} - 1 > 0 \text{ при } 2 \nmid \alpha, p \equiv 3 \pmod{4};$$





$$\chi_2 = \left(1 + (-1)^{\frac{p+1}{2}}\right) - (-1)^{\frac{p+1}{2}} = 1 \quad \text{при } \alpha = 0, p \equiv 1 \pmod{4};$$

$$\chi_2 = \frac{1}{3} \left( (-1)^{\frac{p+3}{4}} + 1 \right) + \frac{1}{3} \left( 2 - 7(-1)^{\frac{p+3}{4}} \right) 2^{-\alpha} = 3 \cdot 2^{-\alpha} > 0$$

при  $\alpha > 0, 2 \mid \alpha, p \equiv 1 \pmod{8};$

$$\chi_2 = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} 2^{-\alpha} > 0 \quad \text{при } \alpha > 0, 2 \mid \alpha, p \equiv 5 \pmod{8};$$

$$\chi_2 = \frac{1}{3} \left( (-1)^{\frac{p+3}{4}} + 1 \right) - \frac{1}{3} \left( 2(-1)^{\frac{p+3}{4}} - 7 \right) 2^{-\alpha} = 3 \cdot 2^{-\alpha} > 0$$

при  $2 \nmid \alpha, p \equiv 1 \pmod{8}.$

$$\chi_2 = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} 2^{-\alpha} > 0 \quad \text{при } 2 \nmid \alpha, p \equiv 5 \pmod{8}.$$

Таким образом, для любого  $p$  имеем  $\chi_2 \neq 0$ .

Если в лемме 2 работы [4] положим  $p^\beta \parallel n$ ,  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ,  $a_4 = p$ ,

$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \tilde{\ell} = \underline{\ell} = \ell' = 0$ ,  $\ell_4 = \bar{\ell} = 1$ , то получим

$$\chi_p = 1 - \left( \frac{-1}{p} \right) \frac{1}{p} > 0 \quad \text{при } \beta = 0;$$

$$\chi_p = \left( 1 + \frac{1}{p} \right) + \left[ \left( \frac{-1}{p} \right) \left( \frac{p^\beta n}{p} \right) p^{-\beta} - 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{p} + \left( \frac{-p^\beta n}{p} \right) p^{-\beta} \geq \frac{1}{p} - p^{-\beta} > 0 \quad \text{при } 2 \mid \beta, \beta > 0;$$

$$\chi_p = \left( 1 + \frac{1}{p} \right) + \left[ \left( \frac{p^\beta n}{p} \right) p^{-\beta} - 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{p} + \left( \frac{p^\beta n}{p} \right) p^{-\beta} \geq \frac{1}{p} - p^{-\beta} > 0 \quad \text{при } 2 \nmid \beta$$

Выходит, что для любого  $p$  имеем  $\chi_p \neq 0$ .

Так как, в силу леммы 1  $\rho(n; F) = 0$ , тогда и только тогда, когда

$\chi_2 \prod_{\substack{p \mid n \\ p > 2}} \chi_p = 0$ , получаем, что  $\rho(n; F) \neq 0$  для любого  $n$ .

Таким образом, для любого простого  $p$ , все те роды, которым принадлежат формы  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + px_4^2$ , — универсальны.

Поступила 05.12.2001

Кафедра высшей математики  
физического факультета ТГУ

### Литература

1. L.E. Dickson. Modern Elementary Theory of numbers . Chicago, 1939.
2. M.F. Willerding. Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1948), 334-337.
3. C.L. Siegel. Lectures on the analytical theory of quadratic forms, Gottingen, 1963.
4. Г.П. Гогишвили, Труды Тбилисского математического института, т. 38, 1970, 5-30

### ლ. სულაკველიძე

დადებით კვატერნარულ კვადრატულ ფორმათა გვარების  
უნივერსალურობის შესახებ

### რეზიუმე

კვადრატულ ფორმათა გვარს უნივერსალურს ვუწოდებთ, თუ ყოველი ნატურალური რიცხვისათვის არსებობს ამ რიცხვის წარმომდგენი ფორმა აღნიშნული გვარიდან.

დამტკიცებულია, რომ კვატერნარულ კვადრატულ ფორმათა უნივერსალური გვარების რაოდენობა უსასრულოა.

### L. Sulakvelidze

ON THE UNIVERSALITY OF GENERAS OF POSITIVE QUATERNARY QUADRATIC FORMS

### Summary

Let's call genera of quadratic forms universal, if for every number  $n$  will be found form from this genera, which represents  $n$ .

It is proved, that there are infinitely many universal generas of positive quaternary quadratic forms.

УДК 539.31

### АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АРМИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРОВ С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ ОБЩЕГО ВИДА

Г.М. Хатнашвили

В статье построены алгоритмы сведения трехмерных задач теории упругости к двумерным граничным задачам в области нормального сечения цилиндрического тела, когда в точках его боковой поверхности заданы смещения, или усилия, а внутри области – объемные силы, являющиеся полиномами относительно осевой координаты.

В данной работе, по сравнению со способами решения аналогичных задач для анизотропного тела, обладающего в каждой точке одной плоскостью упругой симметрии [6], и алгоритма для однородного тела с анизотропией общего вида [7], с использованием результатов [11], построен новый, более простой алгоритм решения задач типа Альманси.

Для упрощения изложения в начале предполагается, что тело составлено лишь из двух различных упругих материалов. Но в конце статьи показано как, без дополнительных выкладок, простым увеличением числа контактных условий на поверхностях раздела различных материалов можно полученные результаты перенести на более сложные случаи, когда цилиндрическое тело составлено из нескольких различных упругих материалов, а также имеет нагруженные продольные полости.

#### 1. Вспомогательные предложения

Рассматривается цилиндрическое тело, занимающее область  $\Omega_0$ , ограниченное внешней поверхностью

$$f_0(x_1, x_2) \tag{1}$$

и поверхностью полости (с образующими, параллельными поверхности (1))

$$f_1(x_1, x_2), \tag{2}$$

а также плоскостями

$$x_3 = 0 \quad \text{и} \quad x_3 = \ell \quad (\ell > 0). \tag{3}$$



Предполагается, что ось  $Ox_3$  прямоугольной системы декартовых координат  $Ox_1, x_2, x_3$  параллельна образующим боковых поверхностей (1) и (2), а начало координат  $Ox_1$  и  $Ox_2$  расположены произвольно в плоскости «нижнего» основания тела (при  $x_3 = 0$ ).

Пусть полость тела (изготовленного из материала с анизотропией общего вида) заполнена анизотропным материалом с другими упругими характеристиками. Предполагается, что оба эти материала склеены между собой без зазоров вдоль поверхности (2). Обозначим область, занятую заполнителем, через  $\Omega_1$ . Очевидно, она будет ограничена поверхностью (2) и плоскостями (3).

Представим обобщенный закон Гука для упругих материалов в виде  $\tau_{ij}^* = A_{1j}e_{11} + A_{2j}e_{22} + A_{3j}e_{33} + A_{4j}e_{23} + A_{5j}e_{13} + A_{6j}e_{12}$ ,  $(\tau_{11}^* \equiv \tau_{11}, \tau_{22}^* \equiv \tau_{22}, \tau_{33}^* \equiv \tau_{33}, \tau_{44}^* \equiv \tau_{23}, \tau_{55}^* \equiv \tau_{13}, \tau_{66}^* \equiv \tau_{12})$ ,  $(j=1,2,\dots,6)$  (4) или в другой, эквивалентной форме

$$Ee_{jj}^* = \sigma_{1j}\tau_{11} + \sigma_{2j}\tau_{22} + \sigma_{3j}\tau_{12} + \sigma_{4j}\tau_{23} + \sigma_{5j}\tau_{13} - \sigma_{6j}\tau_{33},$$

$$Ee_{33}^* = \tau_{33} - \sigma_{11}\tau_{11} - \sigma_{21}\tau_{22} - \sigma_{31}\tau_{12} - \sigma_{41}\tau_{23} - \sigma_{51}\tau_{13} \quad (j=1,2,\dots,5), \quad (5)$$

$$(e_{11}^* \equiv e_{11}, e_{22}^* \equiv e_{22}, e_{33}^* \equiv e_{12}, e_{44}^* \equiv e_{23}, e_{55}^* \equiv e_{13})$$

где константы  $A_{jk} = A_{kj}$  – коэффициенты жесткости;  $E$ ,  $\sigma_j$  и  $\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$  – коэффициенты податливости, а величины  $\tau_{jk}$  и  $e_{jk}$  – компоненты напряжения и деформации.

Рассматриваются малые деформации, т.е. между компонентами смещения  $u_j$  и деформации  $e_{ij}$  предполагаются следующие зависимости:

$$e_{ij} = D_i u_j + D_j u_i \quad (i \neq j), \quad e_{jj} = D_j u_j \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Через символ  $D_j$  во всем тексте обозначена операция дифференцирования по переменной  $x_j$ , т.е.  $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ .

Уравнения статики упругого тела представим в виде

$$\sum_{k=1}^3 L_{jk}^* u_k + X_j^* = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (7)$$

где  $X_j^*(x_1, x_2, x_3)$  – составляющие вектора объемных сил, а дифференциальные операторы  $L_{jk}^*$  даются равенствами



$$L_{jj}^* = L_{jj} + A_{\alpha\alpha} D_3^2 + 2A_{j\alpha} D_j D_3 + 2A_{\alpha 6} D_{3-j} D_3,$$

$$L_{j3}^* = L_{j3} + A_{3\alpha} D_3^2 + (A_{j3} + A_{\alpha\alpha}) D_j D_3 + (A_{36} + A_{45}) D_{3-j} D_3,$$

$$L_{12}^* = L_{12} + A_{43} D_3^2 + (A_{14} + A_{36}) D_1 D_3 + (A_{46} + A_{25}) D_2 D_3,$$

$$L_{33}^* = L_{33} + A_{33} D_3^2 + 2A_{34} D_2 D_3 + 2A_{35} D_1 D_3 \quad (j=1,2; \alpha=6-j).$$

Здесь двумерные дифференциальные операторы  $L_{jk}$  даются равенствами

$$L_{jj} = A_{jj} D_j^2 + 2A_{j6} D_1 D_2 + A_{66} D_{3-j}^2,$$

$$L_{j3} = A_{j\alpha} D_j^2 + A_{\alpha 6} D_{3-j}^2 + (A_{\alpha 6} + A_{j\beta}) D_1 D_2,$$

$$L_{12} = A_{16} D_1^2 + (A_{12} + A_{66}) D_1 D_2 + A_{26} D_2^2, \tag{9}$$

$$L_{33} = A_{35} D_1^2 + 2A_{45} D_1 D_2 + A_{44} D_2^2 \quad (j=1,2; \alpha=6-j, \beta=3+j).$$

В случае, когда компоненты смещения  $u_j$  и объемные силы  $X_j$  на зависят от переменной  $x_j$ , уравнения (7) примут вид

$$\sum_{k=1}^3 L_{jk} u_k + X_j = 0 \quad (j=1,2,3). \tag{10}$$

Пусть  $u_i(u_1, u_2, u_3)$  и  $X_j(X_1, X_2, X_3)$  представлены как векторы-столбцы и рассмотрим матричный дифференциальный оператор

$$L = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} = \|L_{jk}\|_{3 \times 3} \quad (L_{jk} = L_{kj}). \tag{11}$$

Тогда уравнения (10) в матричной форме можно записать в виде

$$Lu + X = 0. \tag{12}$$

Обозначим через  $M = \|M_{jk}\|_{3 \times 3}$  присоединенный матричный дифференциальный оператор к матрице  $L$ , данной равенством (11).

Представив решение двумерной системы в виде [15]

$$u_j = M_{1j} \Phi_1 + M_{2j} \Phi_2 + M_{3j} \Phi_3 \quad (j=1,2,3), \tag{13}$$

получим, что функции  $\Phi_j(x_1, x_2)$  должны быть решениями соответственно уравнений

$$(\det L) \Phi_j = -X_j \quad (j=1,2,3). \tag{14}$$

Нормальное сечение составного цилиндра будет представлять собой плоскую составную область  $\omega = \omega_0 + \omega_1$ , где  $\omega_0$  соответствует области  $\Omega_0$ , а  $\omega_1$  - области  $\Omega_1$ . Очевидно,  $\omega_0$  будет ограничена внешней кривой  $S_0$  и внутренней кривой

$S_1$ , которая и будет границей области  $\omega_1$ . Именно вдоль этой кривой и будут склеены области  $\omega_0$  и  $\omega_1$ .

Рассмотрим для указанной области одну граничную задачу.

Пусть компоненты смещения и напряжения  $u_j(x_1, x_2)$  и  $\tau_{ij}(x_1, x_2)$  удовлетворяют в каждой из областей  $\omega_0$  и  $\omega_1$  двумерным уравнениям равновесия (10) и следующим граничным и контактными условиям:

$$\tau_{nj} = \tau_{1j}n_1 + \tau_{2j}n_2 = \tau_j^0(s) \quad (j=1,2,3)$$

в точках кривой  $S_0$ ,

$$[\tau_{nj}]_0 - [\tau_{nj}]_1 = \tau_j^1(s), \quad [u_j]_0 - [u_j]_1 = v_j^1(s) \quad (j=1,2,3) \quad (15)$$

в точках кривой  $S_1$ , где  $s$  — дуга на кривой  $S_1$ , отсчитываемая от ее произвольной точки, а  $X_j$ ,  $\tau_j^0$ ,  $\tau_j^1$  и  $v_j^1$  — заданные функции;  $n_1$  и  $n_2$  — косинусы нормали к кривой  $S_1$ , а символы  $[ ]_0$  и  $[ ]_1$  обозначают предельные значения выражений, заключенных в скобки, взятых соответственно из областей  $\omega_0$  ( $\Omega_0$ ) и  $\omega_1$  ( $\Omega_1$ ).

Условиям статики твердого тела для указанной двумерной задачи можно придать вид

$$\iint_{\omega} X_j d\omega + \sum_{i=0,1} \int_{S_i} \tau_j^i(s) ds = 0 \quad (j=1,2,3), \quad (16)$$

$$\iint_{\omega} (x_1 X_2 - x_2 X_1) d\omega + \sum_{i=0,1} \int_{S_i} (x_1 \tau_2^i(s) - x_2 \tau_1^i(s)) ds = 0.$$

Ниже приводится алгоритм сведения одной трехмерной задачи к двумерной, который значительно прост, чем алгоритм, данный в [11] (стр.26).

Пусть известны компоненты смещения  $(u_j)_m$  и напряжения  $(\tau_{ij})_m$  (решение уравнений (7) при  $X_j^* = 0$ ), и с их помощью, путем интегрирования по переменной  $x_3$ , построим новое решение этих уравнений  $(u_j)_{m+1}$  и  $(\tau_{ij})_{m+1}$  при  $x_3^* = 0$ . Будем иметь

$$(m+1)^{-1}(u_j)_{m+1} = \int_0^{x_3} (u_j)_m dx_3 + (v_j^0)_{m+1} \quad (j=1,2,3), \quad (17)$$

где функции интегрирования  $v_j^0(x_1, x_2)$  подлежат определению.

После подстановки этих выражений в уравнения (7) при  $X_j^* = 0$  получим, что функции  $(v_j^0)_{m+1}$  должны быть частным решением двумерных уравнений (10), в которых объемные силы  $X_j(x_1, x_2)$  должны быть определены равенствами

$$\begin{aligned} (X_j)_{m+1} &= \left\{ (\tau_{3j})_m + \sum_{k=1}^3 [(A_{j\alpha} D_j + A_{\alpha 6} D_{3-j})(u_k)_m] \right\}_{x_3=0}, \\ (X_3)_{m+1} &= \left\{ (\tau_{33})_m + \sum_{k=1}^3 [(A_{\alpha 5} D_1 + A_{\alpha 4} D_2)(u_k)_m] \right\}_{x_3=0} \quad (18) \\ & \quad (j=1,2; \alpha=6-k). \end{aligned}$$

Компонентам смещения (17) будут соответствовать напряжения

$$(m+1)^{-1} (\tau_{ij})_{m+1} = \int_0^{x_3} (\tau_{ij})_m dx_3 + (g_{ij}^0)_{m+1} \quad (i, j=1,2,3), \quad (19)$$

где функции коррекции напряжений  $g_{ij}^0(x_1, x_2)$  с помощью компонентов напряжений  $(\tau_{ij}^0)_{m+1}$ , соответствующих смещениям  $(v_j^0)_{m+1}$  (которые уже считаем известными) и известных (заданных) смещений  $(u_j)_m$  будут определены равенствами

$$\begin{aligned} (g_{ij}^0)_{m+1} &= (\tau_{ij}^0)_{m+1} + \sum_{k=1}^3 A_{jk} [(u_k)_m]_{x_3=0}, \\ g_{ii}^0 &= g_{ii}^0, \quad (\tau_{ii}^0)^* = \tau_{ii}^0, \quad g_{44}^0 = g_{23}^0, \quad g_{55}^0 = g_{13}^0, \\ g_{66}^0 &= g_{12}^0, \quad (\tau_{44}^0)^* = \tau_{23}^0, \quad (\tau_{55}^0)^* = \tau_{13}^0, \\ (\tau_{66}^0)^* &= \tau_{12}^0 \quad (i=1,2,3; j=1,2,\dots,6; \alpha=6-i). \end{aligned} \quad (20)$$

Легко видеть, что функции  $g_{ij}^0$  будут удовлетворять уравнениям

$$D_1 (g_{1j}^0)_{m+1} + D_2 (g_{2j}^0)_{m+1} + [(\tau_{3j})_m]_{x_3=0} = 0 \quad (j=1,2,3). \quad (21)$$

## 2. Полиномиальные объемные силы и боковые смещения

Рассматривается задача определения частного решения уравнений (1.7) при наличии объемных сил вида

$$X_j^* = X_j^{(0)}(x_1, x_2) x_3^k \quad (j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

путем сведения трехмерной задачи к двумерным.

Подразумевается, что функции  $X_j^{(k)}(x_1, x_2)$  и число  $k$  заданы, где  $k$  – целое неотрицательное число и нуль.

Построение решения начинается от значения  $k=0$  (предполагается, что мы умеем строить решение  $(u_i)_0$  и  $(\tau_{ij})_0$  для «плоского» случая). Затем путем интегрирования полученного «нулевого» решения по переменной  $x_3$ , переходя от данного  $k$  на ступень выше  $k$  ( $k+1$ ), точно так же, как и для анизотропного тела, обладающего в каждой точке одной плоскостью упругой симметрии [11], получим искомые компоненты смещения и напряжения в виде

$$(u_i)_k = \sum_{m=0}^k m! C_k^m (v_i^0(x_1, x_2))_m x_3^{k-m} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$(\tau_{ij}^*)_k = (\tau_{ij}^0)_k x_3^k + \sum_{m=1}^k m! C_k^m \left[ (\tau_{ij}^0(x_1, x_2))_m^* + \sum_{\alpha=1}^3 A_{j\alpha} (v_i^0)_{m-1} \right] x_3^{k-m} \quad (2)$$

$$(j = 1, 2, \dots, 6; \quad \alpha = 6 - j),$$

где  $(v_i^0)_m$  и  $(\tau_{ij}^0)_m$  – компоненты смещения и напряжения, представляющие собой частное решение двумерных уравнений (1.10) со следующими объемными силами  $(C_k^m = k! / [m!(k-m)!])^{-1}$  – биномиальные коэффициенты):

$$(X_j)_0 = X_j^{(0)}, \quad (X_j)_1 = (\tau_{3j}^0)_0 + \sum_{p=1}^3 [(A_{j\alpha} D_j + A_{\alpha 6} D_{3-j}) (v_p^0)_0],$$

$$(X_3)_0 = X_3^{(0)}, \quad (X_3)_1 = (\tau_{33}^0)_0 + \sum_{p=1}^3 [(A_{\alpha 3} D_1 + A_{\alpha 4} D_2) (v_p^0)_0],$$

$$(X_j)_{m+1} = (\tau_{3j}^0)_m + \sum_{p=1}^3 [(A_{j\alpha} D_j + A_{\alpha 6} D_{3-j}) (v_p^0)_m + A_{p\alpha} (v_p^0)_{m-1}],$$

$$(X_3)_{m+1} = (\tau_{33}^0)_m + \sum_{p=1}^3 [(A_{\alpha 3} D_1 + A_{\alpha 4} D_2) (v_p^0)_m + A_{3\alpha} (v_p^0)_{m-1}]$$

$$(j = 1, 2; \quad \alpha = 6 - p; \quad \beta = 6 - j; \quad m = 1, 2, \dots, k-1).$$

Теперь рассмотрим случай, когда в уравнениях (1.7) объемные силы являются суммой объемных сил вида (1) («суммарные» объемные силы)





$$X_j^* = \sum_{m=0}^k X_j^{(m)}(x_1, x_2) x_3^{k-m},$$

где  $X_j^{(m)}(x_1, x_2)$  – заданные функции.

Легко видеть, что соответствующее частное решение трехмерных уравнений (1.7) будет представлено опять-таки формулами (2), а входящие в них искомые функции  $(v_j^0)_m$  (зависящие от двух переменных  $x_1$  и  $x_2$ ) будут удовлетворять двумерным уравнениям (1.10) со следующими объемными силами:

$$(\tilde{X}_j)_0 = X_j^{(k)}, (\tilde{X}_j)_m = (X_j)_m + [m! C_k^m]^{-1} X_j^{(m)}(x_1, x_2) \quad (m = 1, 2, \dots, k), \quad (5)$$

где  $(X_j)_m$  будут определены опять-таки равенствами (3) ( $j=1, 2, 3$ ).

Отметим, что решение системы (1.10) с объемными силами  $X_j(x_1, x_2)$  сводится, с помощью формул Соммильяна (1.13), к решению трех уравнений VI порядка эллиптического типа для определения трех функций  $\Phi_j(x_1, x_2)$  ( $j=1, 2, 3$ ).

Применение приведенного алгоритма в случае «суммарных» объемных сил надо начинать с определения смещений  $(v_j^0)_0$ , являющихся частным решением уравнений (1.10) при  $(\tilde{X}_j)_0 = X_j^{(0)}$ , т.е. с коэффициента при старшем члене полинома (4), относительно переменной  $x_3$ .

После этого известные  $(v_j^0)_0$ , согласно формулам (2), интегрируются по переменной  $x_3$

$$(u_j)_1 = (v_j^0)_0 x_3 + (v_j^0)_1 \quad (j = 1, 2, 3),$$

где, согласно выражениям (5), двумерные компоненты  $(v_j^0)_1$  будут частным решением системы (1.10) с объемными силами

$$(\tilde{X}_j)_1 = (X_j)_1 + X_j^{(1)}(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2, 3).$$

Здесь, как видно из выражения (5), величина  $X_j^{(1)}(x_1, x_2)$  является коэффициентом при  $x_3^{k-1}$ , т.е. коэффициентом последующего после старшего члена  $X_j^{(k)} x_3^k$  в полиноме (4).

Затем, интегрируя полученное значение  $(u_j)_1$  по переменной  $x_3$ , получим

$$(u_j)_2 = (v_j^0)_0 x_3^2 + 2(v_j^0)_1 x_3 + 4(v_j^0)_2 \quad (j = 1, 2, 3),$$

где, согласно выражениям (5), компоненты  $(v_j^0)_2$  будут частным решением уравнений (1.10) со следующими объемными силами:

$$(\tilde{X}_j)_2 = (X_j)_2 + 4^{-1} X_j^{(2)}(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2, 3),$$

где  $(X_j)_2$  определены равенствами (3).

В последующем, как видно из приведенных выражений и формулы (5), в уравнениях для функций интегрирования  $(v_j^0)_m$  возникающие объемные силы как бы «подхватывают» коэффициенты, являющиеся функциями от двух переменных  $x_1$  и  $x_2$ , при последующих членах полинома с более низкой степенью переменной  $x_3$ . Поэтому, увеличение членов в полиноме с более низкими степенями переменной  $x_3$  данный алгоритм не увеличивает число членов - функций  $(v_j^0)_m$ , подлежащих определению по формуле (2), а остается неизменным, как если бы в полиноме был один «старший» член  $X_j^{(0)}(x_1, x_2)x_3^k$ . При этом, нахождение частного решения трехмерных уравнений (1.7), путем сведения к решению двумерных уравнений (1.10), при наличии объемных сил «суммарного» типа (4), с целью уменьшения вычислений, всегда надо начинать с определения компонентов  $(v_j^0)_0$ , соответствующих объемным силам  $X_j^{(0)}(x_1, x_2)$  - коэффициенту при  $x_3^k$ , при старшем члене полинома (4).

Эти подробные рассуждения приведены ввиду возникновения совершенно аналогичных положений и в случае заданных боковых смещений и внешних боковых усилий полиномиального, относительно переменной  $x_3$ , вида.

Теперь рассмотрим упругое равновесие армированного анизотропного цилиндра с заданными боковыми смещениями полиномиального вида относительно осевой координаты  $x_3$ .

Предполагается, что на боковой поверхности (1.1) заданы смещения

$$u_j(s, x_3^k) = \sum_{m=0}^k v_j^{(m)}(s) x_3^{k-m} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (6)$$

а в точках поверхности раздела материалов (1.2) соблюдаются условия непрерывности векторов смещения и напряжения при переходе из области  $\Omega_0$  в область  $\Omega_1$ , т.е. в точках поверхности (1.2) должны иметь место условия

$$[u_j]_0 = [u_j]_1, \quad [\tau_{nj}]_0 = [\tau_{nj}]_1 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (7)$$

где о символах  $[ ]_0$  и  $[ ]_1$  было сказано выше, а величины  $v_j^{(m)}(s)$  являются заданными функциями жуги  $s$  кривой  $S_j$ .

Как и в предыдущем случае, дословно повторив рассуждения при решении аналогичной задачи, для армированного цилиндра, обладающего в каждой точке одной плоскостью упругой симметрии (11), получим, что и в данном случае, компоненты смещения и напряжения, определяющие упругое равновесие тела, будут по форме точно такими же, как и в предыдущем пункте

$$(u_j)_k = \sum_{m=0}^k m! C_k^m (v_j^0(x_1, x_2))_m x_3^{k-m} \quad (j=1,2,3),$$

$$(\tau_{j\alpha}^0)_k = (\tau_{j\alpha}^0(x_1, x_2))_0^k x_3^k + \sum_{m=0}^k m! C_k^m \left[ (\tau_{j\alpha}^0(x_1, x_2))_m^k + \sum_{p=1}^3 A_{jp} (v_j^0(x_1, x_2))_{m-1} \right] x_3^{k-m} \quad (8)$$

$$(j=1,2,\dots,6; \alpha=6-p).$$

Из этих выражений напомним лишь одну зависимость

$$(\tau_{j\alpha}^0)^k = (A_{1j} D_1 + A_{6j} D_2) v_1^0 + (A_{6j} D_1 + A_{2j} D_2) v_2^0 + (A_{5j} D_1 + A_{4j} D_2) v_3^0 \quad (j=1,2,\dots,6).$$

Отметим, что в данной статье, всюду между функциями  $\tau_{j\alpha}^0$  и  $g_{j\alpha}^0$  ( $j=1,2,\dots,6$ ), с одной стороны (речь идет о соответствующих величинах со звездочками), и компонентами напряжения  $\tau_{j\alpha}$  и коррекциями напряжений  $g_{j\alpha}$ , с другой, имеют место зависимости (1.4) и (1.20).

Подставив значения (8) в уравнения равновесия (1.7) при  $X_j^* = 0$ , получим, что компоненты смещения  $(v_j^0)_m$  должны удовлетворять в каждой из областей  $\omega_0$  и  $\omega_1$  двумерным уравнениям (1.10), в которых объемные силы должны быть взяты точно по формулам (3).

Следуя схеме, при рассмотрении полиномиальных объемных сил, после подстановки значений (8) в граничные условия (6)-(7), получим, что компоненты  $(v_j^0)_m$  и  $(\tau_{j\alpha}^0)_m$ , кроме указанных выше уравнений (1.10), должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$(v_j^0)_0 = v_j^{(0)}(s), \quad (v_j^0)_m = [m! C_k^m]^{-1} v_j^{(m)}(s)$$

в точках кривой  $S_0$  ( $j=1,2,3$ ),

$$[(v_j^0)_0]_0 = [(v_j^0)_0]_1, \quad [(v_j^0)_m]_0 = [(v_j^0)_m]_1;$$

$$[(\tau_{j\alpha}^0)_0]_0 = [(\tau_{j\alpha}^0)_0]_1, \quad [(\tau_{j\alpha}^0)_m]_0 - [(\tau_{j\alpha}^0)_m]_1 = \left[ \sum_{p=1}^3 (A_{6p} n_{3-p} + A_{5p} n_3) (v_p^0)_{m-1} \right]_0 - [ident]_1,$$

$$[(\tau_{j\alpha}^0)_m]_0 - [(\tau_{j\alpha}^0)_m]_1 = \left[ \sum_{p=1}^3 (A_{6p} n_3 + A_{5p} n_{3-p}) (v_p^0)_{m-1} \right]_0 - [ident]_1, \quad (i=1,2; m=1,2,\dots,k) \quad (9)$$

в точках кривой  $S_j$ , где  $v_j^{(m)}(s)$  – заданные функции дуги  $s$  ( $j=1,2,3$ ).

Итак, решение трехмерной задачи по определению компонентов смещений  $(u_j)_k$  и напряжений  $(\tau_{ij})_k$ , удовлетворяющих в точках боковых поверхностей составного цилиндра условиям (6)–(7), с помощью формул (8), сведено к последовательному решению двумерных граничных задач теории упругости в области нормального сечения цилиндра по определению функций  $(v_j^0)$  и  $(\tau_{ij}^0)_m$ , удовлетворяющих в точках кривых  $S_j$  условиям (9).

Отметим, что в данном разделе ничего не говорится об условиях на торцах составного цилиндра в случае задания на его боковых поверхностях полиномиальных (относительно осевой координаты) смещений. Этот вопрос в данной статье не рассматривается, заметим лишь, что аналогично, как и в плоской задаче для цилиндра при заданных смещениях, здесь условия на торцах остаются открытыми. Выполнение условий на торцах в смысле Сен-Венана будет рассмотрено в следующем параграфе при задании на боковой поверхности внешних усилий полиномиального вида.

### 3. Задача Альманси

Задача об определении упругого равновесия однородного изотропного цилиндра с полиномиальной относительно осевой координаты боковой нагрузкой была решена Е. Альманси [13]. В дальнейшем, с использованием результатов Н.И. Мухелишвили [4] и К. Борш [17], обобщение результатов Е. Альманси на армированные изотропные и анизотропные (обладающие в каждой точке одной плоскостью упругой симметрии) было получено в работах автора данной статьи [6], [11]. Задачи типа Альманси для однородных изотропных и анизотропных тел изучены также в работах Г.Ю. Джанелидзе [18].

Вообще, библиографии работ по указанным вопросам приведены в монографиях [6],[11].

В данном параграфе рассматривается упругое равновесие армированного цилиндра с прямолинейной анизотропией общего вида, когда компоненты напряжения и смещения  $u_j^A$  и  $\tau_{ij}^A$ , определяющие упругое равновесие тела, в каждой из областей  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  удовлетворяют трехмерным уравнениям равновесия (1.7) при  $X_j^*(x_1, x_2, x_3) = 0$ , а в точках боковых поверхностей тела – следующим граничным и гранично-контактным условиям:

$$\tau_{ij}^A \equiv \tau_{1j}^A n_1 + \tau_{2j}^A n_2 = \tau_j^{(0)}(s) x_j^k \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

в точках поверхности (1.1),

$$[u_j^A] = [u_j^A]_1, \quad [\tau_{ij}^A] = [\tau_{ij}^A]_1 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

в точках поверхности раздела различных материалов (1.2), где  $\tau_j^{(0)}(s)$  — заданные функции дуги  $s$  кривой  $S_0$ , а  $k$  — целое неотрицательное число и нуль.

Прежде чем приступить к построению решения рассматриваемой задачи, необходимо составить условия статистики твердого тела.

Рассмотрев равновесие части цилиндра (как твердого тела), заключенной между плоскостями  $x_3 = 0$  и  $0 < x_3 \leq \ell$ , компоненты напряжения  $\tau_j^A$  должны, согласно граничным условиям (1)-(2), удовлетворять следующим уравнениям статики твердого тела:

$$\left[ \iint_{\omega} \tau_{j3}^A d\omega \right]_0^{x_3} + (k+1)^{-1} x_3^{k+1} \int_{S_0} \tau_j^{(0)}(s) ds = 0 \quad (j=1,2,3), \text{ (a)}$$

$$\left[ \iint_{\omega} (x_2 \tau_{33}^A - x_3 \tau_{23}^A) d\omega \right]_0^{x_3} + x_3^{k+1} \int_{S_0} [(k+1)^{-1} x_2 \tau_3^{(0)} - (k+2)^{-1} x_3 \tau_2^{(0)}] ds = 0, \text{ (в)} \quad (3)$$

$$\left[ \iint_{\omega} (x_3 \tau_{13}^A - x_1 \tau_{33}^A) d\omega \right]_0^{x_3} + x_3^{k+1} \int_{S_0} [(k+1)^{-1} x_1 \tau_3^{(0)} - (k+2)^{-1} x_3 \tau_1^{(0)}] ds = 0, \text{ (с)}$$

$$\left[ \iint_{\omega} (x_1 \tau_{23}^A - x_2 \tau_{13}^A) d\omega \right]_0^{x_3} + (k+1)^{-1} x_3^{k+1} \int_{S_0} (x_1 \tau_2^{(0)} - x_2 \tau_1^{(0)}) ds = 0, \text{ (d)}$$

где символ  $[ ]_0^{x_3}$  обозначает разность значений, заключенных в скобки выражений, взятых соответственно для значения  $0 < x_3 \leq \ell$  и  $x_3 = 0$ .

Выпишем решение уравнений (1.70), когда объемные силы постоянны. Итак, пусть в уравнениях (1.10) объемные силы даны равенствами

$$X_j^{(m)} = -C_j^{(m)}, \quad X_3^{(m)} = 0 \quad (j=1,2; C_j^{(m)} = \text{const}, m=0,1,2; C_j^{(3)} = 0) \quad (4)$$

Тогда, согласно формулам (1.13) и (1.14), частное решение уравнений (1.10)

можно представить в виде 
$$\left( u_j^y = 0 \right)$$

$$2u_1^y = C_1^{(m)} B_1^* B_1^{-1} x_1^2 + C_2^{(m)} D_6^* D_2^{-1} x_2^2,$$

$$2u_2^y = C_2^{(m)} D_2^* D_2^{-1} x_2^2 + C_1^{(m)} B_6^* B_1^{-1} x_1^2, \quad (m=0,1,2). \quad (5)$$

$$2u_3^y = C_1^{(m)} B_5^* B_1^{-1} x_1^2 + C_2^{(m)} D_4^* D_2^{-1} x_2^2$$

где величины  $B_j$  и  $D_j$  имеют следующие значения:

$$B_j = \begin{vmatrix} A_{1j} & A_{5j} & A_{6j} \\ A_{31} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{65} & A_{66} \end{vmatrix}, \quad D_j = \begin{vmatrix} A_{2j} & A_{4j} & A_{6j} \\ A_{42} & A_{44} & A_{46} \\ A_{62} & A_{64} & A_{66} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

В выражениях (5) через  $B_1^*$ ,  $B_2^*$  и  $B_6^*$  обозначены миноры соответственно элементов  $A_{1j}$ ,  $A_{5j}$  и  $A_{6j}$  в определителях  $B_j$ , а через  $D_2^*$ ,  $D_4^*$  и  $D_6^*$  — миноры соответственно элементов  $A_{2j}$ ,  $A_{4j}$  и  $A_{6j}$  в определителях  $D_j$ .

Согласно закону Гука, напряжения  $\tau_{ij}^m$ , соответствующие смещениям  $u_j^m$ , определяются равенствами

$$\begin{aligned} \tau_{jj}^m &= C_1^{(m)} B_j B_1^{-1} x_1 + C_2^{(m)} D_j D_2^{-1} x_2, & \tau_{23}^m &= C_1^{(m)} B_4 B_1^{-1} x_1, \\ \tau_{13}^m &= C_2^{(m)} D_3 D_2^{-1} x_2, & \tau_{12}^m &= 0 \quad (m = 0, 1, 2). \end{aligned} \quad (7)$$

Отметим, что всегда  $C_j^{(3)} = 0$  (см. (4)), поэтому в дальнейшем будет принято  $\tau_{ij}^3 = 0$ .

В работе [10, стр. 216] доказано, что  $B_1 > 0$ ,  $D_2 > 0$ .

Для построения алгоритма решения рассматриваемой задачи используются решения задач Сен-Венана. Для их представления выпишем некоторые выражения, фигурирующие в этих решениях (8-10):

$$\begin{aligned} 2\hat{v}_j^{(j)} &= \sigma_{3+j} x_j x_3 - x_3^2 - 2\hat{g}_j^{(j)}, & 2\hat{v}_j^{(j)} &= -\sigma_{3+j} x_j x_3 - 2\hat{g}_j^{(j)}, \\ \hat{v}_3^{(j)} &= x_j x_3 - \hat{g}_3^{(j)}, & \hat{v}_j^{(3)} &= -\hat{g}_j^{(3)}, & \hat{v}_3^{(3)} &= x_3 - \hat{g}_3^{(3)}; \\ 2\hat{g}_1^{(1)} &= -2\hat{g}_2^{(2)} = \sigma_1 x_1^2 - \sigma_2 x_2^2, & 2\hat{g}_\gamma^{(j)} &= 2\sigma_\gamma x_j x_2 - \sigma_3 x_j^2, \\ 2\hat{g}_3^{(j)} &= \sigma_{6-j} x_j^2 + \sigma_{3+j} x_1 x_2, & 2\hat{g}_j^{(3)} &= 2\sigma_j x_j + \sigma_3 x_\gamma, \\ \hat{g}_3^{(3)} &= \sigma_3 x_1 + \sigma_4 x_2 \quad (j = 1, 2; \gamma = 3 - j), \end{aligned} \quad (8)$$

которые входят в решения для однородных тел, а для составных тел дополнительно вводятся выражения [8,9]

$$v_j^{(m)} = -\frac{\gamma}{2\gamma} (-1)^{j+m} \sigma_{3+m} x_\gamma x_3 + u_j^m + u_j^{(m)}, \quad v_j^{(3)} = u_j^{(3)} \quad (9)$$

$$(m = 1, 2; j = 1, 2, 3; \gamma = 3 - j),$$

где  $v_j^{(m)}$  будут удовлетворять уравнениям (1.7) при  $X_j^* = 0$ , если входящие в

них функции  $u_j^{(m)}$  будут определены равенствами (5), в которых за постоянные  $C_j^{(m)}$  надо принять выражения

$$2C_1^{(m)} = (-1)^m (A_{44} - A_{56}) \sigma_{3+m}, \quad 2C_2^{(m)} = -(-1)^m (A_{46} - A_{25}) \sigma_{3+m}, \quad (10)$$

а входящие в выражения (9) компоненты смещения  $u_j^{(m)}(x_1, x_2)$  удовлетворяют уравнениям (1.10) при  $X_j = 0$  и определенным граничным условиям, которые будут выписаны в дальнейшем.

Компоненты напряжения, соответствующие смещениям (9), даются равенствами

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^{(m)} &= t_{ij}^{(m)} + \tau_{ij}^{(m)} + \tau_{ij}^{(m)}, \quad 2t_{ij}^{(m)} = (-1)^m \sigma_{3+m} t_{ij}^{(0)}, \quad t_{ij}^{(0)} = t_j, \\ \tau_{ij}^{(3)} &= \tau_{ij}^{(3)} \quad (m=1,2; i,j=1,2,3); \quad t_{23}^{(0)} = t_4, \quad t_{13}^{(0)} = t_5, \\ t_{12}^{(0)} &= t_6; \quad t_\alpha = A_{\alpha 5} x_2 - A_{\alpha 4} x_1 \quad (\alpha=1,2,\dots,6), \end{aligned} \quad (11)$$

а компоненты напряжения  $\hat{\tau}_{ij}^{(m)}$ , соответствующие смещениям  $\hat{v}_j^{(m)}$ , будут иметь вид

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{ij}^{(m)} &= \hat{\tau}_{ij}^{(m)} = 0 \quad (i,j=1,2; m=1,2,3), \\ \hat{\tau}_{33}^{(1)} &= E x_1, \quad \hat{\tau}_{33}^{(2)} = E x_2, \quad \hat{\tau}_{33}^{(3)} = E. \end{aligned} \quad (12)$$

Составим сумму

$$\bar{u}_j^{(m)} = \hat{v}_j^{(m)} + v_j^{(m)}, \quad \bar{\tau}_{ij}^{(m)} = \hat{\tau}_{ij}^{(m)} + \tau_{ij}^{(m)} \quad (m,i,j=1,2,3). \quad (13)$$

Отметим, что в выражениях (8)-(13) неизвестными являются двумерные компоненты  $u_j^{(m)}(x_1, x_2)$  и  $\tau_{ij}^{(m)}(x_1, x_2)$  и, для их определения, подставим выражения (13) в граничные условия (1)-(12) при  $\tau_j^{(0)}(s) = 0$ .

Тогда получим, что искомые компоненты  $u_j^{(m)}$  и  $\tau_{ij}^{(m)}$ , которые удовлетворяют двумерным уравнениям (1.10) при  $X_j=0$ , будут удовлетворять граничным условиям (1.15), в которых за величины  $\tau_j(s)$ ,  $\tau_j(s)$  и  $v_j(s)$  должны быть взяты следующие выражения:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \tau_j \end{pmatrix}_m = T_{nj}^{(m)}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_j \end{pmatrix}_m = [T_{nj}^{(m)}]_0 - [T_{nj}^{(m)}]_1, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ v_j \end{pmatrix}_m = [g_j^{(m)}]_0 - [g_j^{(m)}]_1, \quad (14)$$



$$T_{ij}^{(m)} = t_{1j}^{(m)} n_1 + t_{2j}^{(m)} n_2 + \tau_{1j}^{(m)} n_1 + \tau_{2j}^{(m)} n_2, \quad g_j^{(m)} = u_j = \hat{u}_j - \hat{g}_j^{(m)}, \quad \tau_y^{(m)} = t_y^{(3)} = 0, \quad (14)$$

$(m, i, j = 1, 2, 3),$

а величины  $\hat{u}_j^{(m)}$  и  $\hat{g}_j^{(m)}$  являются полиномами второй степени относительно двух переменных и определены равенствами (5) и (8)  $\left( \tau_y^{(3)} = u_j^{(3)} = 0 \right)$ .

Легко видеть, что условия статики твердого тела (1.16) для двумерной задачи по определению компонентов  $u_j^{(m)}$  и  $\tau_y^{(m)}$  будут выполнены.

Подытожим, в чем суть приведенных выражений. Если бы для составного тела за компоненты смещения и напряжения были бы взяты величины (8) и (12), с помощью которых строятся решения задач растяжения силой и изгиба моментами для однородного тела, то при переходе через поверхность (1.2) из области  $\Omega_0$  в область  $\Omega_1$  компоненты смещения претерпевали бы разрывы вида (зависящие от осевой переменной  $x_3$  см. (8))

$$\begin{aligned} [\hat{v}_1^{(j)}]_0 - [\hat{v}_1^{(j)}]_1 &= [\hat{g}_1^{(j)}]_0 - [\hat{g}_1^{(j)}]_1 + (-1)^j 2^{-1} ([\sigma_{3+j}]_0 - [\sigma_{3+j}]_1) x_2 x_3, \\ [\hat{v}_2^{(j)}]_0 - [\hat{v}_2^{(j)}]_1 &= [\hat{g}_2^{(j)}]_0 - [\hat{g}_2^{(j)}]_1 - (-1)^j 2^{-1} ([\sigma_{3+j}]_0 - [\sigma_{3+j}]_1) x_1 x_3. \end{aligned} \quad (14)**$$

$(j=1,2)$

Поэтому, специально подобранные компоненты смещения  $\hat{v}_j^{(m)}$ , данные равенствами (9) в совокупности с компонентами  $\hat{g}_j^{(m)}$ , данными равенствами (8), позволили устранить этот разрыв (формулы 12), зависящий от переменной  $x_3$ , и свести трехмерную задачу к двумерной относительно переменных  $x_1$  и  $x_2$  по определению компонентов  $u_j^{(m)}$  и  $\tau_y^{(m)}$ , удовлетворяющим в каждой из областей  $\omega_0$  и  $\omega_1$  уравнениям (1.10) при  $X_j=0$  и граничным условиям (1.15) с заданными на кривых  $S_j$  значениями (14).

Наконец, отметим, что составленные суммы (13), являющиеся компонентами напряжения и смещения, удовлетворяют в каждой из областей  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  уравнениям равновесия (1.7) при  $X_j^* = 0$ ; соответствующие им векторы напряжения в точках боковой поверхности (1.1) равны нулю, а в точках поверхности раздела материалов (1.2) их векторы смещения и напряжения выполняют условия непрерывности при переходе из области  $\Omega_0$  в область



$\Omega_1$ , т.е. являются «однородными» решениями уравнений теории упругости.

Теперь уже можно с помощью «однородных» решений составить и решения задач Сен-Венана для составных тел с прямолинейной анизотропией общего вида.

С учетом значений (8)-(13) решение задач растяжения продольной силой и изгиба моментами рассматриваемого тела можно представить в виде

$$\begin{aligned} (u_j^e)^{(q)} &= (v_j)^{(q)} - \frac{1}{2} a_{qm} x_3^2 + (-1)^j a_0^{(q)} x_{3-j} x_3 \quad (j=1,2), \\ (u_3^e)^{(q)} &= (v_3)^{(q)} + x_3 \sum_{j=1}^3 a_{qm} x^{(j)} \quad (x^{(1)} = x_1, x^{(2)} = x_2, x^{(3)} = 1), \\ (\tau_{ij}^e)^{(q)} &= \sum_{m=1}^3 a_{qm} \bar{\tau}_{ij}^{(m)} + a_0^{(q)} (\tau_{ij}^{(0)} + t_{ij}^{(0)}) \quad (i, j=1,2,3), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} (v_j)^{(q)} &= \sum_{m=1}^3 a_{qm} (g_j^{(m)} + u_j^{(m)}) + a_0^{(q)} (u_j^v + u_j^0), \\ a_{qm} &= a_m^{(q)} + a_0^{(q)} a_m^{(0)} \quad (m, j=1,2,3). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь компоненты смещения и напряжения  $u_j^0$  и  $\tau_{ij}^0$  определены равенствами (5) и (7), в которых должны быть приняты  $C_1^{(0)} = A_{36} - A_{14}$  и  $C_2^{(0)} = A_{25} - A_{46}$ ; компоненты смещения и напряжения  $u_j^{(0)}(x_1, x_2)$  и  $\tau_{ij}^{(0)}(x_1, x_2)$  должны удовлетворять уравнениям (1.10) при  $X_3=0$  и гранично-контактным условиям (1.15), в которых должны принять

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_j \end{pmatrix}_0 &= t_{nj}^{(0)} = t_{1j}^{(0)} n_1 + t_{2j}^{(0)} n_2, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \tau_j \end{pmatrix}_0 = [t_{nj}^{(0)}]_1 - [t_{nj}^{(0)}]_0, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ v_j \end{pmatrix}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ u_j^v \end{bmatrix}_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ u_j^v \end{bmatrix}_0 \quad (j=1,2,3). \end{aligned} \quad (17)$$

Функции  $t_{ij}^{(0)}$  определены равенствами (11), а постоянные  $a_j^{(m)}$  и  $a_0^{(m)}$ , входящие в выражения (15) и (16), будут определены в дальнейшем.

В указанные выражения введен дополнительный индекс  $q$ , так как эти агрегаты, как выяснится в дальнейшем, в одном и том же компоненте смещения или напряжения будут входить неоднократно под разным значением индекса  $q$  (для выполнения определенных условий статики твердого тела).

Решение задачи изгиба поперечной силой составного тела получается интегрированием по переменной  $x_3$  компонентов  $(u_j^c)^{(1)}$  и  $(\tau_{ij}^c)^{(1)}$  [10] и добавлением: а) компонентов смещений и напряжений изгиба моментами  $(u_j^c)^{(2)}$  и  $(\tau_{ij}^c)^{(2)}$ ; б) функций коррекции смещений и напряжений  $v_j^0$  и  $g_{ij}^0$ , являющихся частным решением уравнений (1.10) с объемными силами (1.18), в которых должны принять  $(\tau_{ij}^c)_m = (\tau_{ij}^c)^{(1)}$  и  $(u_j)_m = (u_j^c)^{(1)}$ ; в) решений плоских задач – компоненты смещения и напряжения  $u_j^{PF}(x_1, x_2)$  и  $\tau_{ij}^{PF}(x_1, x_2)$ , удовлетворяющие уравнениям (1.10) при  $X_3=0$  и граничным условиям (1.15), в которых должны принять

$$\begin{aligned} \tau_j^0 &= -g_{nj}^0 = -g_{1j}^0 n_1 - g_{2j}^0 n_2, \quad \tau_j^1 = \begin{bmatrix} g_{nj}^0 \\ g_{nj}^0 \end{bmatrix}_0 - \begin{bmatrix} g_{nj}^0 \\ g_{nj}^0 \end{bmatrix}_1, \\ v_j^1 &= \begin{bmatrix} v_j^0 \\ v_j^0 \end{bmatrix}_0 - \begin{bmatrix} v_j^0 \\ v_j^0 \end{bmatrix}_1 \quad (j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (18)$$

Непосредственно можно проверить, что условия статики твердого тела (1.16) для граничных условий (значений), как для значений (17), так и для значений (18) будут выполнены.

Таким образом, получается, что решение задачи об изгибе поперечной силой составного цилиндра с анизотропией общего вида содержит решения всех задач Сен-Венана, и поэтому естественно ввести обозначения  $u_j^F \equiv u_j^S$  и  $\tau_{ij}^F \equiv \tau_{ij}^S$ . Заметим, что величины с нулевыми индексами в выражениях (15) и (16), т.е. величины  $u_j^0$ ,  $\tau_{ij}^0$ ,  $u_j^{(0)}$ ,  $\tau_{ij}^{(0)}$ ,  $t_{ij}^{(0)}$ ,  $a_0^{(q)}$  и  $a_m^{(0)}$  связаны с задачей о кручении рассматриваемого тела.

Чтобы представить компоненты  $u_j^F$  и  $\tau_{ij}^F$  в виде полиномов относительной переменной  $x_3$ , введем следующие обозначения:



$$\begin{aligned}
 Y_j^{(0)} &= v_j^{(0)} + (v_j)^{(2)}, \quad Y_j^{(1)} = (v_j)^{(1)} + (-1)^j a_0^{(2)} x_{3-j}, \\
 Y_j^{(2)} &= -\frac{1}{2} a_{2j} - \frac{(-1)^j}{2} a_0^{(1)} x_{3-j}, \quad Y_3^{(j)} = -\frac{1}{6} a_j \quad (j=1,2); \\
 Y_3^{(0)} &= v_3^{(0)} + (v_3)^{(2)}, \quad Y_3^{(1)} = v_3^{(1)} + \sum_{j=1}^3 a_{2j} x^{(j)}, \quad v_j^0 = v_j^0 + u_j^{PF}, \\
 Y_3^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 a_{1j} x^{(j)}, \quad Y_3^{(0)} = 0 \quad (x^{(1)} = x_1, x^{(2)} = x_2, x^{(3)} = 1) \\
 Z_{ij}^{(0)} &= g_{ij}^0 + \tau_{ij}^{PF} + a_0^{(2)} \tau_{ij}^{(0)} + \sum_{k=1}^3 a_{2k} \tilde{\tau}_{ij}^{(k)}, \\
 Z_{ij}^{(1)} &= \sum_{k=1}^3 a_{1k} \tilde{\tau}_{ij}^{(k)} + a_0^{(1)} (\tau_{ij}^{(0)} + t_{ij}^{(0)}) \quad (i, j = 1, 2, 3)
 \end{aligned} \tag{19}$$

Тогда решение задач Сен-Венана будет представлено равенствами

$$(u_j^{(r)})_m = \sum_{\alpha=0}^3 Y_j^{(\alpha)} x_3^\alpha, \quad (\tau_{ij}^{(r)})_m = \sum_{\alpha=0,1}^3 Z_{ij}^{(\alpha)} x_3^\alpha \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{20}$$

Дополнительный нижний индекс  $m$  к компонентам  $u_j^r$  и  $\tau_{ij}^r$  приписан с определенной целью, что будет выяснено в дальнейшем. Этот дополнительный индекс должен быть приписан всем величинам, входящим в выражения (19), кроме переменных  $x_1$  и  $x_2$ .

С помощью компонентов (20) строится решение задачи Мичелла [9], которая состоит в определении упругого равновесия составного цилиндра, когда в точках верхней боковой поверхности заданы внешние усилия, не меняющиеся вдоль образующих, а в точках поверхности раздела материалов векторы смещения и напряжения удовлетворяют условиям непрерывности при переходе из области  $\Omega_0$  в область  $\Omega_1$ . Итак, это означает, что искомые компоненты напряжения и смещения  $\tau_{ij}^M$  и  $u_j^M$  должны удовлетворять гранично-контактным условиям (1)-(2) при  $k=0$ . При этом составляющие боковой нагрузки  $\tau_j^{(0)}(s)$  в условиях (1) неуравновешены, т.е. величины  $\tau_j^{(0)}(s)$  не будут удовлетворять условиям статики твердого тела при плоской деформации (1.16). Это означает, что искомые компоненты  $u_j^M$  и  $\tau_{ij}^M$  должны удовлетворять не только условиям (1)-(2) при  $k=0$  и уравнениям равновесия (1.7) при  $x_j^* = 0$  в каждой из областей  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ , но и на торцах должны образовывать такие напряжения, которые



уравновешивают неуравновешенную боковую нагрузку. Иначе говоря, искомые компоненты напряжения  $\tau_{ij}^M$  должны удовлетворять еще и условиям статики твердого тела (3) при  $k=0$ .

Компоненты  $u_j^M$  и  $\tau_{ij}^M$  строятся путем интегрирования по переменной  $x$ , решений задач Сен-Венана  $u_j^S$  и  $\tau_{ij}^S$ , добавления к полученному функций коррекции (интегрирования)  $v_j^0$  и  $g_{ij}^0$ , а также решений двумерных задач  $u_j^{PM}(x_1, x_2)$  и  $\tau_{ij}^{PM}(x_1, x_2)$  [9].

Согласно формулам (1.17), (1.19) и (20) будем иметь [9]

$$\begin{aligned} (u_j^M)_m &= \sum_{\alpha=0}^3 (\alpha+1)^{-1} (Y_j^{(\alpha)})_m x_3^{\alpha+1} + \left( v_j^0 + u_j^{PM} \right)_m - \frac{\ell}{2} (u_j^S)_m, \\ (\tau_{ij}^M)_m &= \sum_{\alpha=0,1} (\alpha+1)^{-1} (Z_{ij}^{(\alpha)})_m x_3^{\alpha+1} + \left( g_{ij}^0 + \tau_{ij}^{PM} \right)_m - \frac{\ell}{2} (\tau_{ij}^S)_m \quad (i, j = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $v_j^0$  и  $g_{ij}^0$  — решения уравнений (1.10) с объемными силами (1.18), в которых должны принять

$$(u_j)_m = (u_j^S)_m, \quad (\tau_{ij})_m = (\tau_{ij}^S)_m \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (22)$$

а компоненты  $u_j^{PM}$  и  $\tau_{ij}^{PM}$  являются решением уравнений (1.10) при  $X_j=0$ , удовлетворяющие гранично-контактным условиям (1.15), в которых должны принять

$$\tau_j^0 = -g_{nj}^0 = -g_{1j}^0 n_1 - g_{2j}^0 n_2, \quad \tau_j^1 = \left[ g_{nj}^0 \right]_0 - \left[ g_{nj}^0 \right]_1, \quad v_j^1 = \left[ v_j^0 \right]_0 - \left[ v_j^0 \right]_1 \quad (23)$$

$(j = 1, 2, 3).$

Заметим, что слагаемые  $2^{-1}\ell(u_j^S)_m$  и  $2^{-1}\ell(\tau_{ij}^S)_m$  в компонентах (21) добавлены для обеспечения симметричности поля напряжений относительно плоскости  $x_3 = 2^{-1}\ell$  в составном теле (хотя это и не обязательно).

Кроме этого, ничего не было сказано относительно выполнения условий (1.16) для "нагрузки" (23). Как выяснится в дальнейшем, эти условия будут выполняться за счет постоянных, входящих в выражения (19).

Итак, мы допускаем, что известно решение задачи Мичелла, т.е., когда в граничных условиях (1) показатель степени переменной  $x$ , равен нулю, т.е. в равенстве (1) показатель  $k=0$ . Тогда по указанному выше алгоритму, путем интегрирования компонентов  $u_j^M$  и  $\tau_{ij}^M$  по переменной  $x$ , и добавления

определенных двумерных функций (которые были указаны при интегрировании компонентов  $u_j^s$  и  $\tau_{ij}^s$ ), мы можем построить решение задачи, когда в равенстве

(1)  $k \neq 0$ . Таким путем, последовательно переходя в условиях (1) от  $k=m$  к  $(m+1)$ , где  $m$  — целое, неотрицательное число, мы сможем построить решение задачи Альманси для любого допустимого показателя степени  $k$  переменной  $x$ , в условиях (1).

Итак, примем, что известно решение задачи Альманси, когда в условиях (1)  $k=m$ , и построим решение задачи для показателя  $k=m+1$ . При этом надо помнить, что известные компоненты  $(u_j^A)_m$  и  $(\tau_{ij}^A)_m$  удовлетворяют также не только уравнениям равновесия (1.7), но и условиям статики твердого тела (3) для значений  $k=m$ .

Учитывая, что при интегрировании по переменной  $x$ , за счет появления функций коррекции  $v_j^0(x_1, x_2)$  и  $g_{ij}^0(x_1, x_2)$  могут, при удовлетворении условий

(1), возникнуть задачи типа Мичелла; кроме функций коррекции  $v_j^0$  и  $g_{ij}^0$  (двумерных функций) при интегрировании по  $x$ , будут также добавлены решения задач Мичелла (трехмерные функции).

Таким образом, по известным  $(u_j^A)_m$  и  $(\tau_{ij}^A)_m$  (соответствующим в (1) показателю  $k=m$ ) построим решения задачи  $(u_j^A)_{m+1}$  и  $(\tau_{ij}^A)_{m+1}$ , соответствующие в условиях (1) показателю  $k=(m+1)$ , по следующей формуле:

$$\begin{aligned} (u_j^A)_{m+1} &= (m+1) \left[ \int_0^{x_3} (u_j^A)_m dx_3 + \left( v_j^A \right)_{m+1}^0 + (u_j^M)_{m+1} \right], \\ (\tau_{ij}^A)_{m+1} &= (m+1) \left[ \int_0^{x_3} (\tau_{ij}^A)_m dx_3 + \left( g_{ij}^A \right)_{m+1}^0 + (\tau_{ij}^M)_{m+1} \right] \quad (i, j = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (24)$$

где функции  $\left( v_j^A \right)_{m+1}^0$  являются частным решением уравнений (1.10) с объемными силами  $(X_j^*)_{m+1}$ , определенными равенствами (1.18).

Подставив значения (24) в уравнения равновесия (1.7) при  $X_j^* = 0$  и в граничные условия (1)-(2) при  $k=m+1$ , получим, что компоненты смещения и напряжения  $(u_j^{PM}(x_1, x_2))_{m+1}$  и  $(\tau_{ij}^{PM}(x_1, x_2))_{m+1}$ , входящие в выражения компонентов  $(u_j^{PM})_{m+1}$  и  $(\tau_{ij}^{PM})_{m+1}$ , данных формулами (21) для индекса  $m+1$ ,

должны удовлетворять двумерным уравнениям (1.10) при  $X_j = 0$  и граничным условиям (1.15), в которых должны принять

$$\begin{aligned} \tau_j^0 &= -\left(g_{nj}^{AM}\right)_{m+1}^{(0)} \equiv -\left(g_{nj}^A + g_{nj}^M\right)_{m+1}, \quad \tau_j^1 = -\left(g_{nj}^{AM}\right)_{m+1}^{(1)} \equiv \left[\left(g_{nj}^{AM}\right)_{m+1}^{(0)}\right]_0 - [\text{ident}]_1, \\ \tau_j^1 &= \left[\left(v_j^A\right)_{m+1} + \left(v_j^M\right)_{m+1}\right]_0 - [\text{ident}]_1, \quad (j=1,2,3). \end{aligned} \quad (25)$$

Подставив эти значения в уравнения статики твердого тела (1.16), получим, что коррекции напряжений в задаче Мичелла и Альманси  $g_{ij}^M$  и  $g_{ij}^A$  должны удовлетворять условиям

$$\sum_{\alpha=0,1} \int_{S_\alpha} \left(g_{nj}^{AM}\right)_{m+1}^{(\alpha)} ds = 0, \quad \sum_{\alpha=0,1} \int_{S_\alpha} \left[x_1 \left(g_{n2}^{AM}\right)_{m+1}^{(\alpha)} - x_2 \left(g_{n1}^{AM}\right)_{m+1}^{(\alpha)}\right] ds = 0.$$

Учитывая, что должны быть выполнены уравнения (1.21) для значений  $\left(g_{ij}^A\right)_{m+1}$  и  $\left(\tau_{3j}^A\right)_m$ , а также для значений  $\left(g_{ij}^{AM}\right)_{m+1}$ , входящих в выражения  $\left(\tau_{ij}^M\right)_m$  (формулы (21) для индекса  $m+1$ ), при этом в последнем случае в (1.21) должны принять  $\left(\tau_{3j}\right)_m \equiv \left(\tau_{3j}^A\right)_{m+1}$ , после применения формул Остроградского-Гаусса предыдущие условия можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \iint_{\omega} \left[\left(\tau_{3j}^A\right)_m\right]_{x_3=0} d\omega - \iint_{\omega} \left(T_{3j}\right)_{m+1} d\omega &= 0 \quad (j=1,2,3), \\ \iint_{\omega} \left[x_1 \left(\tau_{23}^A\right)_m - x_2 \left(\tau_{13}^A\right)_m\right]_{x_3=0} d\omega - \iint_{\omega} \left[x_1 \left(T_{23}\right)_{m+1} - x_2 \left(T_{13}\right)_{m+1}\right] d\omega &= 0, \\ \left(T_{ij} = \left(\tau_{ij}^c\right)^{(2)} + \tau_{ij}^{FF} + g_{2j}^0\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Для проверки этих условий приведем некоторые формулы и зависимости, установленные в работах [4,8,9,10].

Введем обозначения

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \iint_{\omega} Ex^{(j)}x^{(i)} d\omega, \quad K_{ij}^v = \iint_{\omega} x^{(i)}\tau_{33}^{(j)} d\omega, \quad K_{ij}^* = I_{ij} + K_{ij}^v; \\ (B)_{m+1} &= \iint_{\omega} \sum_{p=1}^3 \left(a_p^0\right)_{m+1} \left(\tau_{23}^v x_1 - \tau_{13}^v x_2\right) d\omega + \iint_{\omega} \left(\tau_{23}^{(0)} x_1 - \tau_{13}^{(0)} x_2\right) d\omega \\ &\quad \left(x^{(1)} = x_1, x^{(2)} = x_2, x^{(3)} = 1; i, j = 1,2,3\right). \end{aligned} \quad (27)$$



В указанных работах доказаны следующие зависимости:

$$\det \|K_{ij}^*\|_{3,3} > 0, \quad K_{ij}^* = K_{ji}^*, \quad K_{ij}^* > 0 \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$\iint_{\omega} (\tau_{ij}^{PF} + g_{ij}^{0F}) d\omega = \iint_{\omega} x_j (\tau_{ij}^c) d\omega, \quad (B)_{m+1} > 0,$$

$$\iint_{\omega} x^{(i)} (\tau_{ij}^c)^{(i)} d\omega = \sum_{\alpha=1}^3 (a_{\alpha}^{(i)} + a_0^{(i)}) K_{\alpha j}^* \quad (28)$$
$$(i = 1, 2; j = 1, 2, 3).$$

Прежде чем заняться преобразованием условий (26), проанализируем условия статики твердого тела (3) для компонентов  $(\tau_{ij}^A)_{m+1}$ , определенных равенствами (24).

На основании сказанного, при определении компонентов  $\tau_{ij}^i$  и  $\tau_{ij}^M$ , эти величины, представленные формулами (20) и (21), можно представить и в другой, эквивалентной форме:

$$(\tau_{ij}^i)_m = x_3 (\tau_{ij}^c)^{(1)}_m + (\tau_{ij}^c)^{(2)}_m + (g_{ij}^{0F} + \tau_{ij}^{PF})_m,$$

$$(\tau_{ij}^M)_m = \frac{1}{2} x_3^2 (\tau_{ij}^c)^{(1)}_m + x_3 \left[ (\tau_{ij}^c)^{(2)}_m + (g_{ij}^{0F} + \tau_{ij}^{PF})_m \right] + (g_{ij}^{0M} + \tau_{ij}^{PM})_m - \frac{\ell}{2} (\tau_{ij}^i)_m$$
$$(i, j = 1, 2, 3)$$


С другой стороны, согласно допущению, известные  $(\tau_{ij}^A)_m$  удовлетворяют уравнениям (1)-(3) для значений  $k=m$ , а искомые  $(\tau_{ij}^A)_{m+1}$  должны удовлетворять этим же уравнениям для значений  $k=m+1$ .

Ввиду того, что согласно приведенным выше значениям будут иметь место следующие зависимости:

$$\left[ (m+1) \int_0^{x_3} (\tau_{ij}^A)_m dx_3 \right]_0^{x_3} = -x_3 (m+1) \iint_{\omega} \tau_{ij}(x_1, x_2, 0) d\omega - \frac{x_3^{m+2}}{m+2} \int_{s_1}^{s_2} \tau_j^{(0)}(s) ds,$$

$$\left[ (\tau_{ij}^M)_{m+1} \right]_0^{x_3} = \frac{1}{2} x_3^2 (\tau_{ij}^c)^{(1)}_{m+1} + x_3 \left[ (\tau_{ij}^c)^{(2)}_m + (g_{ij}^{0F} + \tau_{ij}^{PF})_m \right]_{(m+1)},$$

из условий (3а) получим



$$\iint_{\omega} (\tau_{j3}^c)_{m+1}^{(2)} d\omega = 0, \quad \iint_{\omega} (\tau_{j3}^{PF} + g_{j3}^{PF})_{m+1} d\omega = \iint_{\omega} (\tau_{j3}^A)_m \Big|_{x_3=0} d\omega$$

$$\iint_{\omega} (\tau_{33}^c)^{(1)} d\omega = 0 \quad (j = 1, 2, 3).$$

Тогда, очевидно, что для выполнения условий (26), (3а) и (3d), согласно формулам (15), входящие в них коэффициенты  $a_j^{(p)}$  должны быть решением следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$(a_1^{(q)})_{m+1} K_{1a}^* + (a_2^{(q)})_{m+1} K_{2a}^* + (a_3^{(q)})_{m+1} K_{3a}^* = (B_{qa})_{m+1},$$

$$(a_0^{(2)})_{m+1} B_{m+1} = - \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha}^{(r)} \iint_{\omega} (x_1 \tau_{23}^{(\alpha)} - x_2 \tau_{13}^{(\alpha)}) d\omega + (r-1) \left\{ \iint_{\omega} [x_1 (\tau_{23}^A)_m - x_2 (\tau_{13}^A)_m] \Big|_{x_3=0} d\omega - \right.$$

$$\left. - \iint_{\omega} [x_1 (g_{23}^{PF} + \tau_{23}^{PF}) - x_2 (g_{13}^{PF} + \tau_{13}^{PF})] \Big|_{m+1} d\omega \right\}, \quad (29)$$

где

$$(B_{0a})_{m+1} = - \iint_{\omega} x^{(\alpha)} \tau_{33}^{(\alpha)} d\omega, \quad (B_{1r})_{m+1} = \iint_{\omega} (\tau_{3r}^A)_m \Big|_{x_3=0} d\omega, \quad (30)$$

$$(B_{2r})_{m+1} = (B_{13})_{m+1} = 0, \quad (B_{23})_{m+1} = \iint_{\omega} (\tau_{33}^A)_m \Big|_{x_3=0} d\omega,$$

$$(x^{(1)} = x_1, x^{(2)} = x_2, x^{(3)} = 1; q = 0, 1, 2; r = 1, 2; \alpha = 1, 2, 3).$$

Согласно зависимостям (28) определители соответствующих систем (29) будут отличны от нуля и эти системы по определению коэффициентов  $(a_{\alpha}^{(p)})_{m+1}$  будут иметь единственные ненулевые решения, что и обеспечивает условия существования решения (1.16) граничных задач по определению компонентов  $u_j^{PM}$  и  $\tau_{ij}^{PM}$ , удовлетворяющих уравнениям (1.10) при  $X_j=0$  и граничным условиям (1.15) со значениями (25).

В [6] доказано, что выполнение условий (3а) и (3d) влечет за собой тождественное выполнение условий (3в) и (3с).

Итак, предложенная схема полностью доказывает справедливость построенного алгоритма по решению трехмерной задачи, с условиями вида (1)-(3), для составного упругого цилиндрического (призматического) тела с анизотропией общего вида путем последовательного решения определенных двумерных задач в области нормального сечения цилиндра.

Имея в наличии решение задачи Мичелла в виде (21), удовлетворяющее условиям (1)-(3) при  $k=0$ , путем последовательного интегрирования по переменной  $x_3$  (по предложенной выше схеме) получим следующие выражения для компонентов смещений и напряжений  $(u_j^A)_k$  и  $(\tau_{ij}^A)_k$ , являющихся решением



задачи Альманси для любого допустимого значения показателя  $k$  переменной  $x_3$  в условиях (1)-(3), в виде полиномов относительно переменной  $x_3$

$$\begin{aligned} (u_j^A)_k &= \left( \overset{0}{v}_j^M + u_j^{PM} \right)_0 x_3^k + \sum_{m=1}^k m C_k^m \left( \overset{0}{v}_j^A + \overset{0}{v}_j^M + u_j^{PM} \right)_m x_3^{k-m} - k! \sum_{\alpha=0}^3 (Y_j^{(\alpha)})_k x_3^\alpha + \\ &+ k! \sum_{\alpha=0}^3 \alpha! x_3^{\alpha+1} \left[ \frac{x_3^k (Y_j^{(\alpha)})_0}{(k+\alpha+1)!} + \sum_{m=1}^k x_3^{k-m} \frac{2(Y_j^{(\alpha)})_m - \ell(Y_j^{(\alpha)})_{m-1}}{2(k-m+\alpha+1)!} \right], \\ (\tau_\nu^A)_k &= \left( \overset{0}{g}_\nu^M + \tau_\nu^{PM} \right)_0 x_3^k + \sum_{m=1}^k m C_k^m \left( \overset{0}{g}_\nu^A + \overset{0}{g}_\nu^M + \tau_\nu^{PM} \right)_m x_3^{k-m} - k! \frac{\ell}{2} \sum_{\alpha=0,1}^3 (Z_\nu^{(\alpha)})_k x_3^\alpha + (31) \\ &+ k! \sum_{\alpha=0,1}^3 \left[ \frac{x_3^k (Z_\nu^{(\alpha)})_0}{(k+\alpha+1)!} + \sum_{m=1}^k x_3^{k-m} \frac{2(Z_\nu^{(\alpha)})_m - \ell(Z_\nu^{(\alpha)})_{m-1}}{2(k-m+\alpha+1)!} \right]. \end{aligned}$$

Как видно из выражений (31), когда в условиях (1)-(3) показатель переменной  $x_3$  равен 1 ( $k=1$ ), должно быть принято ( $m=0$ , см. (3.19))

$$(u_j^A)_m = (u_j^M)_0, \quad [(u_j^M)_0]_{x_3=0} = \left( \overset{0}{v}_j^M + u_j^{PM} - \frac{\ell}{2} Y_j^{(0)} \right)_0,$$

а в дальнейшем для значений  $k=2,3, \dots$ , по формулам (21) и (24) выражения

$$(u_j^A)_m \text{ и } (\tau_\nu^A)_m, \text{ данные формулами (31), легко составляются.}$$

Основные задачи трехмерной теории упругости и термоупругости для изотропных сред методами теории потенциала и интегральных уравнений изучены в [1] (авторы В.Д.Купрадзе, Т.Г.Гегелиа, М.О.Башалейшвили, Т.В.Бурчуладзе); [2] (авторы Т.В.Бурчуладзе, Т.Г.Гегелия). Этими же методами в ранних работах Т.В.Бурчуладзе для систем высокого четного порядка (эллиптического типа), в двумерном случае, построены матрицы фундаментальных решений и с помощью интегральных уравнений исследованы соответствующие граничные задачи.

Теоремы существования и единственности указанными методами для кусочно-однородных анизотропных сред в многомерном пространстве (в том числе и четного порядка) изучены Р.В.Капанадзе [3].

Наконец, отметим, что опираясь на работы К.Сомильяна [15] и Е.Леви [16], автором данной статьи в работе [12] для систем эллиптических уравнений (1.10) при  $X_j=0$  построены матрицы фундаментальных решений и в явном виде вычислены все величины для данной конкретной задачи, входящие в выражения функции Е.Леви [16].

Для представления указанной матрицы фундаментальных решений введем для коэффициентов упругости обозначения [1,2]



$$\begin{aligned}
L_{11}^{11} &= A_{11}, L_{22}^{22} = A_{22}, L_{33}^{22} = A_{44}, L_{33}^{11} = A_{55}, L_{22}^{11} = L_{11}^{22} = L_{21}^{12} = A_{66}, \\
L_{23}^{11} &= L_{31}^{12} = A_{56}, L_{13}^{11} = A_{15}, L_{12}^{22} = L_{22}^{12} = A_{26}, L_{13}^{22} = L_{23}^{12} = A_{46}, L_{12}^{12} = A_{12}, \\
L_{23}^{22} &= A_{24}, L_{12}^{11} = L_{11}^{12} = A_{16}, L_{13}^{12} = A_{14}, L_{32}^{12} = A_{25}, L_{33}^{12} = A_{45}, L_{kl}^{\gamma_1 \gamma_2} = L_{lk}^{\gamma_2 \gamma_1}.
\end{aligned}
\tag{31}$$

В тексте греческие буквы  $\gamma_j$  будут принимать лишь значения 1 и 2, а матрицы будут иметь размерности  $3 \times 3$ .

Теперь матричный дифференциальный оператор  $L$ , данный равенством (1.11), примет вид

$$L(D_1 D_2) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2} \|L_{kl}^{\gamma_1 \gamma_2}\| D_{\gamma_1} D_{\gamma_2}, \quad (k, \ell = 1, 2, 3), \tag{32}$$

а плотность потенциальной энергии  $w$  будет представлена равенством

$$2w = \sum_{k, \ell=1, \gamma_1, \gamma_2} \|L_{kl}^{\gamma_1 \gamma_2}\| D_{\gamma_1} u_k D_{\gamma_2} u_\ell > 0, \tag{33}$$

где  $u_j(x_1, x_2)$  – компоненты смещения.

Так как  $2w$  является положительно определенной квадратичной формой, будем иметь

$$\begin{aligned}
\det \left\| \sum_{\gamma_1, \gamma_2} L_{kl}^{\gamma_1 \gamma_2} \zeta_{\gamma_1} \zeta_{\gamma_2} \right\| &= \zeta_1^2 \det L(1, \alpha) > 0, \\
\det L^{11} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{15} & A_{16} \\ A_{51} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{65} & A_{66} \end{vmatrix} > 0, \quad \det L^{22} = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{24} & A_{26} \\ A_{42} & A_{44} & A_{46} \\ A_{62} & A_{64} & A_{66} \end{vmatrix} > 0,
\end{aligned}
\tag{34}$$

где  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  – отличные от нуля действительные числа, а  $\alpha = \zeta_2 \zeta_1^{-1}$ .

Характеристическому уравнению (которое имеет лишь комплексные корни), соответствующему уравнениям (см. (1.10), (1.12))

$$\sum_{k=1}^3 L_{jk} u_k = 0 \text{ или в векторной форме } Lu = 0, \tag{35}$$

можно придать вид

$$\det L(1, \alpha) E = \det \left\| \sum_{\gamma_1, \gamma_2} L_{kl}^{\gamma_1 \gamma_2} \alpha^{\gamma_1 \gamma_2 - 2} \right\| = E = 0 \tag{36}$$

где  $k, \ell = 1, 2, 3$ , а  $E$  – единичная матрица  $E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ .

Комплексные корни уравнения (36) представим в виде ( $i^2 = -1$ )

$$\alpha_{2k-1}^* = a_k + ib_k, \quad \alpha_{2k}^* = a_k - ib_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad (37)$$

где  $a_k$  и  $b_k$  – действительные числа и  $b_k > 0$ .

Как известно [15.16], для построения функции  $E$ . Леви рассматривается определитель

$$d = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1^* & \alpha_1^{*2} & \alpha_1^{*3} & \alpha_1^{*4} & \alpha_1^{*5} \\ 1 & \alpha_2^* & \alpha_2^{*2} & \alpha_2^{*3} & \alpha_2^{*4} & \alpha_2^{*5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_6^* & \alpha_6^{*2} & \alpha_6^{*3} & \alpha_6^{*4} & \alpha_6^{*5} \end{vmatrix} \quad (38)$$

и выражения  $d_j^*$ , представляющие собой алгебраические дополнения элементов  $\alpha_j^*$ , деленных на определитель  $d$ .

Учитывая, что  $\alpha_{2k}^*$  – комплексно сопряженные к  $\alpha_{2k-1}^* - 1$ , т.е.  $\alpha_{2k}^* = \overline{\alpha_{2k-1}^*}$ , и, введя обозначения  $\alpha_{2k-1}^* = \alpha_k$  и  $d_{2k-1}^* = d_k$ , (38) можно представить в виде

$$d = (\bar{\alpha}_3 - \alpha_1)(\bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \bar{\alpha}_1) \times \\ \prod_{\substack{k=1,2 \\ j=1,2,3}} (\bar{\alpha}_j - \alpha_j)(\alpha_j - \bar{\alpha}_j)(\alpha_{k+1} - \alpha_k)(\bar{\alpha}_{k+1} - \bar{\alpha}_k)(\bar{\alpha}_{k+1} - \alpha_k). \quad (39)$$

Подставив сюда значения (37), будем иметь

$$d = 8ib_1b_2b_3 \prod_{j=1,2} \left[ (a_3 - a_j)^2 + (b_3 + (-1)^j b_j)^2 \right] \left[ (a_2 - a_1)^2 + (b_2 + (-1)^j b_1)^2 \right]. \quad (39a)$$

С учетом (39)  $d_j$  примут вид:



$$\begin{aligned}
d_1 &= \left[ (\bar{\alpha}_1 - \alpha_1) \prod_{j=1,2} (\alpha_{j+1} - \alpha_1) (\bar{\alpha}_j - \alpha_1) \right]^{-1}, \\
d_2 &= \left[ (\bar{\alpha}_2 - \alpha_2) \prod_{j=0,1} (\alpha_{2j+1} - \alpha_2) (\bar{\alpha}_{2j+1} - \alpha_2) \right]^{-1}, \\
d_3 &= \left[ (\bar{\alpha}_3 - \alpha_3) \prod_{j=1,2} (\alpha_j - \alpha_3) (\bar{\alpha}_j - \alpha_3) \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{40}$$

Тогда матрицу фундаментальных решений можно представить в виде

$$u = \Gamma(x-y) = \frac{1}{2\pi A} I_m \sum_{k=1}^3 d_k \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \ln z_k \tag{41}$$

где

$$\begin{aligned}
z_k &= (x_1 - y_1) + \alpha_k (x_2 - y_2), \\
A &= \det L^{22}, \left\| m_{jk} \right\|_{3 \times 3} = M(1, \alpha_k);
\end{aligned} \tag{42}$$

$x_j$  и  $y_j$  – точки плоскости  $O_{x_1, x_2}$ , а  $M(1, \alpha_k)$ , как уже было отмечено выше, – присоединенная матрица к матрице  $L(1, \alpha_k)$ . Эти матрицы с постоянными элементами. Например,

$$\begin{aligned}
M_1(1, \alpha_k) &= \sum_{\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6} M^{\gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6} \alpha_k^{\gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 - 4}, \quad M^{\gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6} = \left\| M_{jk}^{\gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6} \right\|_{3 \times 3}, \\
M_{11}^{\gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6} &= \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_5, \gamma_6} \left( L_{22}^{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_4} L_{33}^{\gamma_5 \gamma_6} - L_{23}^{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_5} L_{32}^{\gamma_4 \gamma_6} \right), \\
&\dots \tag{43} \\
&\dots \\
M_{32}^{\gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6} &= - \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_5, \gamma_6} \left( L_{11}^{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_4} L_{32}^{\gamma_5 \gamma_6} - L_{12}^{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_5} L_{31}^{\gamma_4 \gamma_6} \right).
\end{aligned}$$

Введем матричный оператор напряжения [1]

$$T_y = \sum_{\gamma_1, \gamma_2} L^{\gamma_1 \gamma_2} n_{\gamma_1} \frac{\partial}{\partial y_{\gamma_2}},$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – косинусы нормали границы  $S$  области  $\omega^+(\omega^-)$ , а  $y_j$  – точки на кривой  $s$ .

В результате воздействия оператора  $T$ , на матрицу  $\Gamma(x-y)$ , с учетом того, что уравнению (36) можно придать форму [1]

$$\det L(1, \alpha) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_6} L^{\gamma_1 \gamma_2} M^{\gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6} \alpha^{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_6 - 6} = 0,$$

будет иметь [1]

$$T_y \Gamma(x-y) = -\frac{i}{A} \sum_{j=1}^6 (-1)^j d_j^* D_j^{(2)} \frac{\partial}{\partial s_j} \ln z_j^* \quad (44)$$

где  $Z_j^* = (x_1 - y_1) + \alpha_j^* (x_2 - y_4)$ ,  $D_j^{(\gamma_1)} = \sum_{\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_6} L^{\gamma_1 \gamma_2} M^{\gamma_3 \dots \gamma_6} \alpha_j^{\gamma_2 + \dots + \gamma_6 - 5}$

Очевидно, что  $L^{22} M^{22} = [\det(L^{22})]E$ ,  $\int_s \frac{\partial}{\partial s_j} \ln z_j^* ds_j = (-1)^j 2\pi i q(x)$ ,

$$\text{где } q(x) = \begin{cases} 1 & x \in \omega^+ \\ \frac{1}{2} & x \in s \\ 0 & x \in \omega^- \end{cases}$$

Тогда интеграл Гаусса от  $T_y \Gamma(x-y)$  примет значение

$$I = \int_c T_y \Gamma(x-y) ds_y = q(x)E.$$

Интеграл Гаусса не зависит от формы кривой и, приняв  $c$  за окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $x$  (и поэтому  $q(x)=1$ , в пределе при  $R \rightarrow 0$  получим значение сосредоточенной силы в точке  $x=y$  в виде единичной матрицы  $I=E$ ).

Если введем обозначение

$$\Gamma(x-y) = (\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}),$$

где  $\Gamma^{(k)}(x-y)$  являются столбцами матрицы  $\Gamma(x-y)$ , то

$$u^{(k)} = \begin{pmatrix} u_1^{(k)} \\ u_2^{(k)} \\ u_3^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{(k)} \\ \Gamma_{21}^{(k)} \\ \Gamma_{31}^{(k)} \end{pmatrix} \quad \text{будут векторами смещения } u^{(k)}(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}),$$

соответствующими сосредоточенным силам  $F^{(k)}$ , равным по величине единице ( $|F^{(k)}|=1$ ), приложенным в точке  $x=y$  и направленным параллельно осям  $Ox_k$  ( $k=1,2,3$ ).

В работе [19], принимая фундаментальную матрицу  $\Gamma(x-y)$  за базисные функции, построены алгоритм и программа на фортране для численного решения двумерных задач теории упругости анизотропного тела с прямолинейной анизотропией общего вида, при этом, например, в случае внутренних задач с заданными смещениями или напряжениями для среды, занимающей область  $\omega^*$  с границей  $S$ , точки  $\Phi_j(\epsilon)$  берутся вне  $\omega^*$ , а значения  $x_j^{(m)}$  – в дискретных точках кривой  $S$ . Полученные выражения (41) и (44) снабжаются коэффициентами  $|B_j^{(m)}|_1$  и рассматриваются суммы

$$\sum_m (B_j^{(m)})_1 \Gamma^{(U)}(x^{(m)}, y^{(\epsilon)}) \text{ и } \sum_m (B_j^{(m)})_2 [\Gamma_j \Gamma(x-y)]_{j=y^{(\epsilon)}}^{k=x^{(m)}}$$

Полученные системы алгебраических уравнений имеют единственные решения. Вопросы сходимости полученных решений при увеличении  $m$  изучены в ранних работах В.Д.Купрадзе, М.А.Алексидзе и Т.В.Бурчуладзе. Эти работы цитируются в книге четырех авторов [1].

В обзорной статье [20] дается перечень работ (более чем 180 авторов) по применению метода фундаментальных решений для численного решения различных задач механики и математической физики.

Наконец, отметим важные работы румынских математиков и механиков, изучивших вопросы, аналогичные рассмотренным в данной статье, для более сложных упругих сред и структур с переменными физическими характеристиками. К сожалению (по объективным причинам), с работами этих авторов мы не знакомы. Названия незначительной части этих работ (двадцатилетней давности) даются в списке цитированной литературы [21-23].

Ниже приводятся некоторые замечания относительно некоторых обобщений полученных в данной статье результатов.

**Замечания:**

1) Рассмотрим упругое равновесие составного цилиндрического тела с прямолинейной анизотропией общего вида, когда его внешняя боковая поверхность подвержена действию полиномиальных относительно осевой координаты  $x_3$  внешних усилий “суммарного” вида, а на поверхности раздела различных материалов векторы напряжения и смещения претерпевают разрывы также “суммарного” вида. Подразумевается, что искомые компоненты напряжения и смещения  $u_j^A$  и  $\tau_{ij}^A$ , определяющие упругое равновесие тела, должны удовлетворять в каждой из областей  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  уравнениям (1.7) при  $X_j^* = 0$  и следующим гранично-контактными условиям:

$$(\tau_{ij}^A)_k \sum_{m=0}^k (\tau_j^{(m)})_0 x_3^{k-m} \quad (j=1,2,3) \quad (32)$$



в точках поверхности (1.1),

$$[(\tau_j^A)_k]_0 - [(\tau_j^A)_k]_1 = \sum_{m=0}^k (\tau_j^{(m)})_k x_3^{k-m} \quad (32)x$$

(j = 1, 2, 3)

$$[(u_j^A)_k]_0 - [(u_j^A)_k]_1 = \sum_{m=0}^k (v_j^{(m)})_k x_3^{k-m} \quad (32)xx$$

в точках поверхности (1.2), где k – целое неотрицательное число, а  $(\tau_j^A(s))_0, (\tau_j^A(s))_1$  и  $v_j^A(s)$  – заданные функции дуги s на кривых  $S_\alpha$ .

Кроме этого, искомые  $(\tau_j^A)_k$  должны удовлетворять условиям статики твердого тела вида (3), которые в данном случае принимают вид

$$\left[ \int_{\omega} (\tau_{j3}^A)_k d\omega \right]_0 + \sum_{m=0}^k k^{-1} x_3^k \sum_{\alpha=0,1} \int_{S_\alpha} (\tau_j^{(m)})_\alpha ds = 0,$$

$$\left[ \int_{\omega} (x_q \tau_{33}^A - x_3 \tau_{q3}^A)_k d\omega \right]_0 + \sum_{m=0}^k x_3^k \sum_{\alpha=0,1} \int_{S_\alpha} [k^{-1} x_q (\tau_j^{(m)})_\alpha - (k+1)^{-1} x_3 (\tau_j^{(m)})_\alpha] ds = 0 \quad (q=1,2),$$

$$\left[ \int_{\omega} (x_1 \tau_{23}^A - x_2 \tau_{13}^A)_k d\omega \right]_0 + \sum_{m=0}^k k^{-1} x_3^k \sum_{\alpha=0,1} \int_{S_\alpha} (x_1 \tau_2^{(m)} - x_2 \tau_1^{(m)})_\alpha ds = 0 \quad (33)$$

( $\omega = \omega_0 + \omega_1$ ;  $k_\alpha = k+1-m$ ).

Построение алгоритма для определения компонентов  $(u_j^A)_k$  и  $(\tau_j^A)_k$  будет связано с довольно-таки сложным вычислительным процессом. Но благодаря формулам (31) без дополнительных усилий можно непосредственно удовлетворить условиям (32)-(33).

Во-первых, выражения (31) априори удовлетворяют в каждой из областей  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  уравнениям (1.7) при  $X_j^* = 0$ . С другой стороны, как видно из выражений (31), условия (32)-(33) будут выполнены, если компоненты  $(u_j^{PM})_m$  и  $(\tau_j^{PM})_m$ , являющиеся решениями двумерных задач теории упругости, удовлетворяют в каждой из областей  $\omega_0$  и  $\omega_1$  уравнениям (1.10) при  $X_j = 0$  и, вместо граничных условий (1.15) со значениями (25), удовлетворяют тем же граничным условиям (1.15), принимающим для рассматриваемой задачи следующий вид:

$$(\tau_j^{PM})_m = (g_j)_m + (m! C_k^m)^{-1} (\tau_j^{(m)})_0 \quad (j=1,2,3) \quad (34)$$

в точках кривой  $S_0$ ,

$$\begin{aligned} \left[ (\tau_{ij}^{PM})_{m,0} - (\tau_{ij}^{PM})_{m,1} \right] &= \left[ (g_j)_{m,0} - (g_j)_{m,1} \right] + (m'_k C_k^m)^{-1} (\tau_j^{(m)})_1, \\ \left[ (u_j^{PM})_{m,0} - (u_j^{PM})_{m,1} \right] &= \left[ (\dot{v}_j)_{m,1} \right] - \left[ (\dot{v}_j)_{m,0} \right] + (m'_k C_k^m)^{-1} v_j^{(m)}. \end{aligned} \quad (34) \text{xx}$$

в точках кривой  $S_1$ , где для значения  $m=0$  должны взять  $m'_k = 1$  и

$$(g_j)_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ g_j^M \end{pmatrix}, \quad (\dot{v}_j)_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{v}_j^M \end{pmatrix},$$

а для значений  $m, = m+1$  — следующие выражения:  $m'_k = m+1$ ,

$$(g_j)_{m+1} = (g_j^{AM})_{m+1}, \quad (\dot{v}_j)_{m+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{v}_j^A + \dot{v}_j^M \end{pmatrix}_{m+1} \quad (m=0,1,\dots) \quad (34) \text{xx}$$

Напомним, что величины  $g_{ij}$  определены равенствами (23) и (25).

Легко видеть, что условия (1.16) для существования решения граничных задач по определению компонентов  $u_j^{PM}$  и  $\tau_j^{PM}$ , удовлетворяющих граничным условиям (34), а также условиям статики твердого тела (33), которым должны удовлетворять компоненты  $u_j^A$  и  $\tau_j^A$ , будут выполнены так же, как и условия (1)-(3), за счет выбора коэффициентов  $a_\alpha^{(j)}$ , входящих в выражения (15) и (16). Очевидно, что указанные коэффициенты  $a_\alpha^{(j)}$  будут решениями опять-таки линейных алгебраических уравнений (29), правые части которых  $(B_{\alpha\beta}^*)_{m+1}$  принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} (a_0^{(r)} B^*)_{m,} &= (a_0^{(r)} B^*)_{m,} - (r-1) (m'_k C_k^m)^{-1} \sum_{\alpha=0,1} \int_{S_\alpha} (x_1 \tau_2^{(m)} - x_2 \tau_1^{(m)})_\alpha ds, \\ (B_{1r}^*)_{m,} &= (B_{1r})_{m,} + (m'_k C_k^m)^{-1} \sum_{\alpha=0,1} \int_{S_\alpha} (\tau_r^{(m)})_\alpha ds, \quad B_{13}^* = B_{2r}^* = 0, \\ (B_{23}^*)_{m,} &= (B_{23})_{m,} + (m'_k C_k^m)^{-1} \sum_{\alpha=0,1} \int_{S_\alpha} (\tau_3^{(m)})_\alpha ds \quad (r=1,2), \end{aligned} \quad (35)$$

где  $B_{\alpha\beta}$  определены равенствами (30).

Отметим, что имея явные выражения компонентов  $(\tau_\nu^A)_k$  как полиномов относительно переменной  $x_j$ , данных равенствами (31), можно представить выражения  $\left[ (\tau_\nu^A)_m \right]_{x_j=0}$  с помощью функций  $g_{ij}^A, g_{ij}^M, \tau_j^{PM}$  и  $Z_\nu^{(a)}$ , но этим



вопросом в данной статье заниматься не будем.

Итак, подытоживая проведенные выкладки, мы пришли к выводу, что формулы (31) являются как бы "универсальными" даже и для задач со сложными граничными условиями (32)-(33).

Отметим еще раз, что (как и в случае объемных сил) увеличение в полиномах (32)-(33)хх числа членов с более низкими степенями переменной  $x_3$ , чем у "старшего" члена  $\tau_j^{(0)} x_3^k$ , не вызывает увеличения числа граничных задач. Это число остается таким же, как если бы вместо многочлена имелся бы один "старший" член  $\tau_j^{(0)} x_3^k$ .

2) Рассмотрим теперь задачу Альманси, когда тело составлено не из двух (как это предполагалось в предыдущих пунктах), а из нескольких конечного числа различных анизотропных материалов.

Рассматривается цилиндрическое тело, ограниченное внешней поверхностью

$$f_0(x_1, x_2) = 0, \quad (x)$$

поверхностями полостей

$$f_\alpha(x_1, x_2) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r, r+1, \dots, q) \quad (xx)$$

и плоскостями  $x_3 = 0$  и  $x_3 = \ell$  ( $\ell > 0$ ), где поверхность (x) охватывает все поверхности (xx).

Предположим, что часть полостей с номерами  $1, 2, \dots, r$  заполнена анизотропными материалами с различными упругими характеристиками. Предполагается, что заполнители склеены с цилиндрическим телом вдоль поверхностей с указанными номерами, т.е. вдоль поверхностей

$$f_\beta(x_1, x_2) = 0, \quad (\beta = 1, 2, \dots, r), \quad (xxx)$$

где  $r$  — натуральное число.

Область, занятую цилиндрическим телом с полостями, обозначим через  $\Omega_0$ , а цилиндрические области, занятые армирующими материалами, обозначим соответственно через  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_r$ . Пусть  $\omega_0$  представляет собой нормальное сечение области  $\Omega_0$ . Обозначим границу области  $\omega_0$  через  $S_0, S_1, \dots, S_r, S_{r+1}, S_{r+2}, \dots, S_q$ , где кривая  $S_0$  охватывает все остальные кривые. При этом,  $S_0$  соответствует внешней боковой поверхности (x), а остальные кривые — поверхностям полостей (xx). Тогда нормальное сечение составного цилиндра будет представлять собой плоскую область, ограниченную вышеуказанными кривыми. При этом в отверстия, ограниченные кривыми  $S_1, S_2, \dots, S_r$ , будут вставлены анизотропные шайбы с другими упругими характеристиками, склееными с областью  $\omega_0$  вдоль этих кривых  $S_1, S_2, \dots, S_r$ , а оставшиеся «пустые» отверстия будут ограничены кривыми  $S_{r+1}, S_{r+2}, \dots, S_q$ . Области,

заняты шайбами, обозначим соответственно через  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ , которые будут соответствовать областям  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_r$ .

В рассматриваемом случае для решения задачи Альманси требуется определить компоненты смещения и напряжения  $u_j^A$  и  $\tau_{ij}^A$ , удовлетворяющие в каждой из областей  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_r$  трехмерным уравнениям равновесия (1.7) при  $X_j^* = 0$ ; в точках поверхностей (x) и (xx) при  $\alpha = r+1, r+2, \dots, q$  – граничным условиям (32), а в точках поверхностей (xxx) – гранично-контактным условиям (32)x – (32)xx.

Очевидно, что уравнения статики твердого тела (33) будут иметь такой же вид, что и прежде, с той лишь разницей, что за область  $\omega$  надо брать сумму  $\omega = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_r$  и криволинейные интегралы тоже надо брать по всем кривым  $S_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, r, r+1, \dots, q$ ). Точно такую же замену надо произвести в выражениях (30) и (35).

В соответствии с этим, граничные условия (34) для компонентов  $(\tau_{ij}^{PM})_0$  должны быть взяты на кривых  $S_0, S_{r+1}, S_{r+2}, \dots$  и  $S_q$ , а контактные условия (34)x – (34)xx для компонентов  $u_j^{PM}$  и  $\tau_{ij}^{PM}$  – на кривых  $S_1, S_2, \dots, S_r$ .

Итак, компоненты смещения и напряжения  $u_j^A$  и  $\tau_{ij}^A$ , представленные формулами (31), без каких-либо изменений применимы и в том случае, когда цилиндрическое тело составлено не из двух, как это предполагалось в начале, а из нескольких конечного числа анизотропных материалов.


3) Рассмотрим теперь случай, когда в условиях (32), (32)x и (32)xx заданные полиномы – различного порядка.

Пусть, например, полином в правой части (32)xx более высокого порядка, чем полиномы в правых частях условий (32) и (32)x. Тогда, согласно алгоритму, решение надо начинать со «старшего» члена  $v_j^{(0)} x_3^k$  полинома в (32)xx, а остальные полиномы и (32) и (32)x включаются в процесс, когда их порядок сравнивается со степенью выражения  $v_j^{(m)} x_3^{k-m}$ .

Для ясности рассуждений рассмотрим конкретный пример, когда в правых частях выражений (32), (32)x и (32)xx заданы полиномы соответственно следующих порядков:

$$\sum_{m=0}^6 (\tau_j^{(m)})_0 x_3^{6-m}, \quad \sum_{m=0}^8 (\tau_j^{(m)})_1 x_3^{8-m}, \quad \sum_{m=0}^{10} v_j^{(m)} x_3^{10-m} \quad (j=1, 2, 3).$$

Эти выражения можно представить в другом, эквивалентном виде



$$\sum_{m=4}^{10} (\tau_j^{(m-4)})_0 x_3^{10-m}, \sum_{m=2}^{10} (\tau_j^{(m-2)})_1 x_3^{10-m}, \sum_{m=0}^{10} v_j^{(m)} x_3^{10-m} \quad (j=1,2,3).$$

Тогда очевидно, что, начав решение задачи для слагаемого  $v_j^{(0)} x_3^{(0)}$  в (32)хх, когда алгоритм коснется слагаемого  $v_j^{(2)} x_3^8$ , в процесс включается слагаемое  $(\tau_j^{(0)})_1 x_3^2$  из (32)х, а когда в этих условиях алгоритм коснется членов  $(\tau_j^{(2)})_1 x_3^6$  и  $v_j^{(4)} x_3^6$ , в процесс включится и член  $(\tau_j^{(0)})_0 x_3^6$  из условий (32).

4) Полученные результаты совершенно элементарно распространяются (точнее сохраняют силу) на случай, когда каждая впаиваемая шайба представляет собой составную область. При этом каждая шайба, составленная из различных упругих материалов, может иметь совершенно различное число включений и отверстий.

Поступила 10.09.2000

Институт вычислительной математики АН Грузии

#### Литература

1. В.Д. Купарадзе, Т.Г. Гегелиа, М.О. Башалейшвили, Т.В. Бурчуладзе. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.
2. Т.В. Бурчуладзе, Т.Г. Гегелиа, Развитие метода потенциала в теории упругости, Тбилиси, Мецниереба, 1985.
3. Р.В. Капанадзе, Тр. Тбилисского математического института АН ГССР, т. 87, 1987.
4. Н.М. Мухелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
5. Г.М. Хатиашвили, Современные проблемы мат. физ. Тр. Всесоюз. симпоз., Тбилиси, 22-25 апр., 1987, Тбилиси. изд. ТГУ, т.2, 1987.
6. Г.М. Хатиашвили, Задачи Альманси-Мичелла для однородных и составных тел. Тбилиси, Мецниереба, ч.1, 1983.
7. Г.М. Хатиашвили, Тр. ТГУ (матем. мех. астр.), т.18, 1985.
8. Г.М. Хатиашвили, ИВМ АН ГССР 27:1, 1987.
9. Г.М. Хатиашвили, ИВМ АН ГССР 28:1, 1988.
10. Г.М. Хатиашвили, ИВМ АН ГССР 29:1, 1990.
11. Г.М. Хатиашвили, Однородные и составные цилиндры. Тбилиси, Мецниереба, 1991.
12. Г.М. Хатиашвили, Сообщ. АН ГССР, т.108, 3, 1982.
13. E. Almansi. Rendic. Liencli, Roma, ser. 5, t. 10, 1901.
14. L. Michell. Quart. Jour. of Math., v.32, 1900.
15. C. Somilyana, Annal. di Mat. pure and appl., ser. II, r. 22, 1894.



16. E. Levi, Bendic. del. Cirloco Mat. di Palermo, t.24, 1907.  
 17. C.Bors, Teoria elasticitaii corpuliroranisotrope, Bucuresti, 1970.  
 18. Г.Ю. Джanelидзе. Проблемы механики сплошной среды (сб. статей), Москва, изд. АН СССР, 1961.  
 19. G. Khatlashvili, G. Silagadze. Reports of enlarged sess. of the semin. of I. Vekua inst., v 14, №3, 1999.  
 20. G. Fairwather, A. Karageorgis. Adv. comput. math. 9, 1998.  
 21. D. Jesan, Int J. Eng. sci. 12, 1974.  
 22. S. Chirita, D. Jesan. An. St. Univ Jasi (matematica) 23, 1977.  
 23. S. Chirita, Int. J. Eng. sci. 19, №6, 1981.

**გ. ხატიაშვილი**

წრფივი ზოგადი ანიზოტროპიის მქონე არმომრეხივი ცილინდრისათვის  
 მრეკავლობის თეორიის ზოგიერთი სამგანზომილებიანი ამოცანის  
 ამოხსნის ალგორითმი  
**რეზიუმე**

ნაშრომში განხილულია შედგენილი ცილინდრული სხეულების დრეკადი წონასწორობის ამოცანა, როდესაც მოცულობითი ძალები და გვერდით ზედაპირზე მოცემული გადაადგილებები ან გარე ძალები ღერძული კოორდინატის პოლინომებს წარმოადგენენ.

აგებულია ალგორითმი, რომელიც საშუალებას იძლევა აღნიშნული სამგანზომილებიანი ამოცანები ცილინდრის ნორმალურ კვეთაში დრეკადობის ორგანზომილებიან ამოცანებზე დაეყვანოს.

**G. Khatlashvili**

**AN ALGORITHM OF THE SOLUTION OF SOME THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR COMPOSED CYLINDERS WITH STRAIGHT ANISOTROPY OF GENERAL TYPE**

**Summary**

Problems of the elastic equilibrium of composed cylindrical bodies are considered when the given body forces and displacements or load given on the lateral surface are polynomials relative to the axial coordinates. The algorithm constructed permits to reduce these three-dimensional problems to two-dimensional problems of the theory of elasticity.

УДК 539.31

## ИЗГИБ ПАРАМИ СИЛ ОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО БРУСА СО СЛАБО ИЗОГНУТОЙ ОСЬЮ

К.В. Кахая

В данной статье с помощью способа, рассмотренного в работе [5], дано решение задач изгиба моментами для однородного изотропного эллиптического бруса со слабо изогнутой осью.

Указанный способ подразумевает разложение косинусов нормалей боковой поверхности по малому параметру, характеризующего отклонение боковой поверхности от цилиндрической, что дает возможность сохранить в уравнениях высокие степени малого параметра.

Пусть изотропное тело ограничено плоскостями  $x_3 = 0$  и  $x_3 = \ell$  и поверхностью, уравнение которой представлено в виде:

$$x_1 = x_1^0(s) + 2^{-1}\epsilon x_2^2, \quad x_2 = x_2^0(s), \quad x_3 = x_3, \quad (1)$$

где  $s$  – дуговая абсцисса на кривой  $L$  границы области  $S$ , полученной сечением области  $\Omega$ , занятой телом плоскостью  $x_3 = 0$ , а  $\epsilon$  – малый параметр, который можно определить следующим образом [3]:

$$\epsilon = \frac{2tg\Theta}{\ell},$$

где  $\ell$  – длина бруса, а  $\Theta$  – острый угол, составленный с осью  $Ox_3$  отрезком прямой, проходящей через точки  $(a_0, 0, \ell)$  и  $(a_1, 0, 0)$  рассматриваемой поверхности ( $a_0$  и  $a_1$  – положительные числа).

Предполагается, что начало прямоугольной системы декартовых координат  $Ox_1, x_2, x_3$  помещено в центре инерции основания тела при  $x_3 = 0$  (назовем это основание нижним), а оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  направлены по главным осям инерции этого основания.

В рассматриваемых задачах типа Сен-Венана боковая поверхность (1) свободна от нагрузки, поэтому искомые компоненты напряжения, определяющие упругое равновесие тела, должны удовлетворять следующим граничным условиям:



$$\tau_{kn} = \sum_{j=1}^3 \tau_{kj} n_j = 0 \quad (k=1,2,3), \quad (2)$$

в точках поверхности (1), где  $n_1, n_2, n_3$  – косинусы нормали к поверхности.

В области  $\Omega$ , занятой телом, искомые компоненты напряжения  $\tau_{jk}$  и соответствующие им компоненты деформации  $e_{jk}$  должны удовлетворять следующим уравнениям равновесия и условиям совместности Сен-Венана:

$$\sum_{j=1}^3 \partial_j \tau_{jk} = 0 \quad (k=1,2,3), \quad (3)$$

$$\partial_i \partial_\gamma e_{jk} = \partial_j (-\partial_i e_{\gamma k} + \partial_i \partial_\gamma e_{jk} + \partial_\gamma e_{ij}) \quad (i, j, \gamma=1,2,3) \quad (4)$$

где  $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$  ( $\alpha=1,2,3$ ) – оператор дифференцирования.

Будут рассмотрены только малые деформации. Поэтому между компонентами деформаций  $e_{\alpha\beta}$  и смещений  $u_\alpha$  будут иметь место следующие зависимости:

$$e_{\alpha\beta} = \partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha, \quad e_{\gamma\gamma} = \partial_\gamma u_\gamma \quad (\alpha \neq \beta; \alpha, \beta, \gamma=1,2,3). \quad (5)$$

О торцевых условиях будет сказано ниже.

Искомые компоненты напряжения представим в виде [3]

$$\tau_{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \tau_{\alpha\beta}^{(k)}, \quad (6)$$

где  $\varepsilon$  – указанный малый параметр,  $N$  – целое положительное число,  $\tau_{\alpha\beta}^{(0)}$  – решение задач Сен-Венана для цилиндрического тела с “невозмущенной” боковой поверхностью (т.е. когда в выражениях (1)  $\varepsilon=0$ ), а  $\tau_{\alpha\beta}^{(k)}$  ( $k \geq 1$ ) – дополнительные напряжения, подлежащие определению.

Подставив выражение (6) в уравнения равновесия и граничные условия (2), в которых косинусы нормали  $n_j$  должны быть представлены в виде [5]:

$$n_j = n_j^0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} (\varepsilon x_3 n_i^0)^{2k},$$

$$n_3 = n_i^0 \varepsilon x_3 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} (\varepsilon x_3 n_i^0)^{2k},$$

для искомых компонентов напряжения  $\tau_{\alpha\beta}^{(k)}$  получим следующие граничные условия:



$$\tau_{1\alpha}^{(0)} n_1^0 + \tau_{2\alpha}^{(0)} n_2^0 = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

$$\left\{ \tau_{1\alpha}^{(k)} n_1^0 + \tau_{2\alpha}^{(k)} n_2^0 + \sum_{j=1}^k \left[ \frac{1}{2^j j!} (\partial_1^j \tau_{1\alpha}^{(k-j)} n_1^0 + \partial_1^j \tau_{2\alpha}^{(k-j)} n_2^0) x_3^{2j} + \frac{1}{2^{j-1} (j-1)!} \partial_1^{j-1} \tau_{3\alpha}^{(k-j)} n_1^0 x_3^{2j-1} \right] \right\}_{\epsilon=0} = 0, \quad (7)$$

$(k = 1, 2, \dots, N),$

где  $n_j^0$  – косинусы нормали к цилиндрической поверхности, параметрическое уравнение которой будет дано в виде:

$$x_1 = x_1^0(s), \quad x_2 = x_2^0(s), \quad x_3 = x_3. \quad (8)$$

Итак, для определения компонентов напряжений  $\tau_{\alpha\beta}^{(k)}$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) на первом этапе требуется найти компоненты напряжений  $\tau_{\alpha\beta}^{(0)}$ , т.е. решить задачи Сен-Венана для цилиндрического тела, ограниченного поверхностью (8).

Торцевые условия для искоемых компонентов (6) при  $x_3 = 0$  примут вид [2]:

$$\begin{aligned} \iint_S \tau_{\alpha 3}^{(0)} dS - P_\alpha + \sum_{k=1}^N \epsilon^k \iint_S \tau_{\alpha\beta}^{(k)} dS &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3), \\ \iint_S (x_1 \tau_{23}^{(0)} - x_2 \tau_{13}^{(0)}) dS - m_3 + \sum_{k=1}^N \epsilon^k \iint_S (x_1 \tau_{23}^{(k)} - x_2 \tau_{13}^{(k)}) dS &= 0, \\ \iint_S x_2 \tau_{33}^{(0)} dS - m_1 + \sum_{k=1}^N \epsilon^k \iint_S x_2 \tau_{33}^{(k)} dS &= 0, \\ \iint_S x_1 \tau_{33}^{(0)} dS + m_1 + \sum_{k=1}^N \epsilon^k \iint_S x_1 \tau_{33}^{(k)} dS &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $P_3$  и  $P_1, P_2$  – продольные и поперечные силы, приложенные к произвольной точке основания при  $x_3 = 0$ , а  $m_3$  и  $m_1, m_2$  – крутящие и изгибающие моменты.

Искомые компоненты напряжений  $\tau_{\alpha\beta}^{(k)}$  ( $k=1, 2, \dots, N$ ) можно представить в виде [3]

$$\tau_{\alpha\beta}^{(k)} = (\tau_{\alpha\beta}^{(k)})^r + (\tau_{\alpha\beta}^{(k)})^v,$$

где  $(\tau_{\alpha\beta}^{(k)})^r$  – решение задач Альманси с заданными правыми частями, а  $(\tau_{\alpha\beta}^{(k)})^v$  – решение задач Сен-Венана с торцевыми условиями (при  $x_3 = 0$ )

$$\iint_S (\tau_{\alpha 3}^{(k)})^2 dS = - \iint_S (\tau_{\alpha 3}^{(k)})^2 dS \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

$$\iint_S [x_1 (\tau_{23}^{(k)})^2 - x_2 (\tau_{13}^{(k)})^2] dS = - \iint_S [x_1 (\tau_{23}^{(k)})^2 - x_2 (\tau_{13}^{(k)})^2] dS,$$

$$\iint_S x_\beta (\tau_{33}^{(k)})^2 dS = - \iint_S x_\beta (\tau_{33}^{(k)})^2 dS \quad (\beta = 1, 2).$$

Приведем решения задач Мичелла и Альманси для однородных изотропных цилиндрических тел.

Пусть в точках боковой поверхности (8) граничные условия имеют вид (задача Мичелла)

$$\tau_{\alpha\alpha}^{mk} \equiv \tau_{1\alpha}^{mk} n_1 + \tau_{2\alpha}^{mk} n_2 = \tau_\alpha^{(k)}(s).$$

Решение задачи Мичелла для изотропного цилиндра в случае произвольного расположения в плоскости  $Ox_1, x_2$  начала и осей координат дается формулами [3]:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}^{(mk)} &= g_{\alpha\beta}^{mk} + \tau_{\alpha\beta}^{pk}, \quad \tau_{\alpha 3}^{mk} = \left(x_3 - \frac{\ell}{2}\right) \tau_{\alpha 3}^{sk} + g_{\alpha 3}^{mk} + \tau_{\alpha 3}^{pk}, \\ \tau_{33}^{mk} &= E \left(x_3 - \frac{\ell}{2}\right) a_3^{(k)} + \frac{1}{2} E (x_3 - \ell) x_3 \sum_{\alpha=1,2} a_\alpha^{(k)} (a_{6-\alpha} + x_\alpha) + g_{33}^{mk} + \tau_{33}^{pk} \quad (\alpha = 1, 2), \end{aligned} \quad (10)$$

где функции коррекции  $g_{\alpha\beta}^{mk}$  имеют вид

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha}^{mk} &= -\mu \left\{ \sum_{j=0}^2 a_j^{(k)} \chi_j - a_\alpha^{(k)} (-1)^{\alpha+1} x_1 x_2 - \frac{1}{2} a_\beta^{(k)} a_{3+\alpha} (1-\sigma) x_\beta^2 + \right. \\ &+ \left. a_\alpha^{(k)} \left[ \sigma x_\alpha x_\beta^2 - (1+\sigma) \frac{x_\alpha^3}{3} - a_{6-\alpha} (1+\sigma) \left( x_\alpha^2 - \frac{1}{2} x_\beta^2 \right) \right] \right\}, \\ g_{33}^{mk} &= \sigma (g_{11}^{mk} + g_{22}^{mk}) + \\ &+ E \left\{ a_0^{(k)} \chi_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} a_\alpha^{(k)} \left[ 2\chi_\alpha + \sigma (a_{6-\alpha} + x_\alpha) - (2+\sigma) \left( \frac{1}{3} x_\alpha + a_{6-\alpha} \right) x_\alpha^2 \right] \right\}, \quad (11) \\ g_{12}^{mk} &= 0, \quad g_{\alpha 3}^{mk} = -\frac{1}{2} a_3^{(k)} E x_3 \quad (\alpha = 1, 2; \beta = 3 - \alpha). \end{aligned}$$

Компоненты напряжения  $\tau_{\alpha\beta}^{mk}$  являются решениями плоской и антиплоской задач, удовлетворяющими в точках кривой  $\gamma$  граничным условиям



$$\tau_{n\alpha}^{nk} = \tau_{\alpha}^{(k)}(s) - g_{1\alpha}^{nk} n_1 - g_{2\alpha}^{nk} n_2. \quad (12)$$

Условия существования решения этих плоских граничных задач выполняются за счет выбора коэффициентов  $a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}$ , определенных равенствами:

$$a_0^{(k)} = -D_0^{-1} \left[ \sum_{\alpha=1,2} a_{\alpha}^{(k)} \left( D_{\alpha}^0 + \int_{\gamma} \mu \chi_0 \psi_{\alpha} dS + \int_{\gamma} (x_1 \tau_2^{(k)} - x_2 \tau_1^{(k)}) dS \right) \right],$$

$$a_3^{(k)} = -I_{33}^{-1} \int_{\gamma} \tau_3^{(k)} dS, \quad \sum_{\alpha=1,2} a_{\alpha}^{(k)} (I_{\alpha j} I_{33} + I_{\alpha 3} I_{j3}) = -I_{33} \int_{\gamma} \tau_j^{(k)} dS \quad (j=1,2), \quad (13)$$

где

$$D_0 = \iint_{\gamma} \mu [x_1 (\partial_2 \chi_0 + x_1) - x_2 (\partial_1 \chi_0 - x_2)] dS,$$

$$D_j^0 = (-1)^{j+1} \iint_{\gamma} \mu x_{3-j} \left[ x_{3-j}^2 - \frac{1}{2} \sigma (x_1^2 + x_2^2) - 2x_j^2 \right] dS \quad (j=1,2). \quad (14)$$

Теперь выпишем решение задачи Альманси.

Пусть в точках боковой поверхности тела выполнены следующие граничные условия

$$\tau_{n\alpha}^{nk} = \tau_{\alpha}^{(0)}(s) x_3^k \quad (\alpha=1,2,3), \quad (15)$$

где  $\tau_{\alpha}^{(0)}(s)$  – заданные функции.

Компоненты напряжения  $\tau_{\alpha\beta}^{nk}$  – решение задачи Альманси представлены в виде полиномов относительно переменной  $x_3$  [3]

$$\tau_{\alpha\beta}^{nk} = x_3^k (g_{\alpha\beta}^{m0} + \tau_{\alpha\beta}^{p0}) - \frac{\ell}{2} \sum_{j=0,1}^{\ell} (t_{\alpha\beta}^{(j)})_k x_3^j + k! \sum_{j=0,1}^k x_3^{j+1} \left\{ \sum_{v=1}^k x_3^{k-v} \frac{2(t_{\alpha\beta}^{(j)})_v - \ell(t_{\alpha\beta}^{(j)})_{v-1}}{2(v-1)(j+k+1-v)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{x_3^k (t_{\alpha\beta}^{(j)})_0}{(j+k+1)!} \right\} + k! \sum_{v=1}^k x_3^{k-v} \frac{g_{\alpha\beta}^{sv} + g_{\alpha\beta}^{mv} + \tau_{\alpha\beta}^{pv}}{(v-1)(k-v)!} \quad (\alpha, \beta=1,2,3), \quad (16)$$

где

$$(t_{33}^{(0)})_k = E a_3^{(k)}, \quad (t_{33}^{(1)})_k = E \sum_{v=1,2} a_v^{(k)} (x_v + a_{6-v}),$$

$$(t_{\alpha 3}^{(0)})_k = \tau_{\alpha 3}^{nk}, \quad (t_{\alpha\beta}^{(0)})_k = (t_{\alpha\beta}^{(1)})_k = (t_{\alpha 3}^{(1)})_k = 0 \quad (\alpha, \beta=1,2); \quad (17)$$

функции коррекции  $g_{\alpha\beta}^{mv}$  определены равенствами (11), а функции коррекции  $g_{\alpha\beta}^{sv}$  имеют вид:



$$\begin{aligned}
g_{\alpha\alpha}^{av} &= \partial_{1-\alpha}\phi_v^a - \mu \left[ U_3^{av-1} + \int \partial_3 U_\alpha^{av-1} dx_\alpha \right]_{x_\alpha=0}, \\
g_{33}^{av} &= \sigma(g_{11}^{av} + g_{22}^{av}) + E(U_3^{av-1})_{x_\alpha=0}, \quad g_{12}^{av} = -\partial_1 \partial_2 \phi_v^a, \\
g_{\alpha 3}^{av} &= \mu \partial_\alpha f_v^a + \mu (U_\alpha^{av-1})_{x_\alpha=0} \quad (\alpha = 1, 2).
\end{aligned}
\tag{18}$$

Функции  $f_v^a$  и  $\phi_v^a$  являются частными решениями уравнений:

$$\begin{aligned}
\mu \Delta f_v^a &= [\tau_{33}^{av-1} + \mu \partial_1 U_1^{av-1} + \mu \partial_2 U_2^{av-1}]_{x_\alpha=0}, \\
\Delta \Delta \phi_v^a &= \left\{ \partial_3 \left[ \mu \int \partial_1^2 U_2^{av-1} dx_2 + \mu \int \partial_2^2 U_1^{av-1} dx_1 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (2\lambda + \mu) (\partial_1 U_1^{av-1} + \partial_2 U_2^{av-1}) - 2(2\lambda + \mu) \partial_3 U_3^{av-1} \right] \right\}_{x_\alpha=0},
\end{aligned}
\tag{19}$$

где  $U_\alpha^{ak}$  – компоненты смещения, соответствующие напряжениям (16).

Как показывает структура компонентов напряжений  $\tau_{\alpha\beta}^{ak}$ , должны быть последовательно построены решения плоских и антиплоских задач, сводящиеся к двумерным граничным задачам в области нижнего основания для гармонических и бигармонических функций.

Представим решение задачи для гармонических и бигармонических функций в эллиптической области с помощью полиномов Фабера [3].

Рассмотрим эллиптическую область S с большой и малой полуосями a и b, которые совпадают соответственно с осями  $Ox_1$  и  $Ox_2$ .

Граничные условия задачи Неймана для гармонических функций можно записать в виде

$$\operatorname{Re}[(n_1 + in_2)H'(z)] = \psi(s), \tag{20}$$

где  $n_1$  и  $n_2$  – косинусы нормали,  $t = x_1(s) + ix_2(s)$  – аффикс точки на эллипсе,  $s$  – дуговая абсцисса,  $H(z)$  – аналитическая функция в области S,  $F = \operatorname{Re}H(z)$  – искомая гармоническая функция, а  $\psi(s)$  – заданная на эллипсе функция.

Как известно, полиномы Фабера в эллиптической области имеют вид:

$$t_1 = z + \sqrt{z^2 - c^2}, \quad t_2 = z - \sqrt{z^2 - c^2}, \quad c^2 = a^2 - b^2. \tag{21}$$

Разложим искомую функцию  $H(z)$  в эллиптической области в ряд по полиномам Фабера:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (t_1^k + t_2^k), \quad b_k = b_k^0 + ib_k^1. \tag{22}$$

Учитывая, что в эллиптической области

$$\frac{\partial}{\partial z} (t_1^k + t_2^k) = k(z^2 - a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} (t_1^k - t_2^k),$$

граничное условие (20) примет вид:

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} k b_k (t_1^k - t_2^k) = \psi(\theta) \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}^{\frac{1}{2}} = \psi^*(\theta) \quad (23)$$

Разложим функцию  $\psi^*(\theta)$  в комплексный ряд Фурье

$$\psi(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k e^{ik\theta}, \quad (24)$$

где

$$B_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi^* \theta e^{-ik\theta} d\theta, \quad B_k = \frac{1}{2} (B_k^0 - i B_k^1), \quad 2B_0 = B_0^0, \quad (25)$$

$B_k^j$  — действительные коэффициенты,  $\bar{B}_k = B_{-k}$ .

С учетом выражений (21) граничные условия (23) примут вид:

$$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \left[ (a+b)^k e^{ik\theta} - (a-b)^k e^{-ik\theta} \right] = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k e^{ik\theta} \quad (26)$$

Отсюда получим, что

$$B_k = 2 \frac{B_k (a+b)^k + B_{-k} (a-b)^k}{k \left[ (a+b)^{2k} - (a-b)^{2k} \right]}. \quad (27)$$

Компоненты напряжения и смещения плоской задачи с помощью комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили будут представлены равенствами [1]

$$\begin{aligned} \tau_{11} + \tau_{22} &= 2 \left[ \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right], \\ \tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12} &= 2 \left[ \bar{z}\varphi''(z) + \varphi'(z) \right], \\ 2\mu(U_1 + iU_2) &= \kappa\varphi(z) - z\varphi'(z) - \overline{\varphi(z)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Граничные условия для функций  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  при заданных в точках границы области  $S$  внешних усилий  $\tau_1$  и  $\tau_2$  имеют вид [1]:

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\varphi(z)} = f_1 + if_2, \quad (29)$$

где

$$f_1 + if_2 = i \int_0^{\theta} \left[ \tau_1(s) + i\tau_2(s) \right] \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

Разложим  $f_1 + if_2$  в комплексный ряд Фурье:

$$f_1 + if_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k e^{-ik\theta} \quad (30)$$



где

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f_1 + if_2) e^{-ik\theta} d\theta. \quad (31)$$

Функции  $\varphi(z)$  и  $\chi(z)$  в эллиптической области  $S$  представим в виде:

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (t_1^k + t_2^k), \quad \chi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a'_k (t_1^k + t_2^k), \quad (\psi(z) = \chi'(z)) \quad (32)$$

где комплексные коэффициенты  $a_k$  и  $a'_k$  подлежат определению, а  $t_j$  даны равенствами (21).

С учетом (30) и (32) из граничного условия (29) получим значения коэффициентов  $a_k$  и  $a'_k$ . Для коэффициентов будем иметь

$$4ab(a_1 + \bar{a}_1) = (a+b)A_1 - (a-b)A_{-1}. \quad (33)$$

Мнимая часть коэффициента  $a_1$  остается неопределенной, что не влияет на напряженное состояние упругого тела.

Остальные коэффициенты будут даны равенствами

$$a_2 = \frac{1}{32a^3b^3} [A^*(a^2 + b^2) - \bar{A}^*(a^2 - b^2)], \quad (34)$$

где

$$A^* = (a+b)^2 A_2 - (a-b)^2 A_{-2},$$

$$\bar{a}_1^1 = [8ab(a^2 - b^2)]^{-1} \{ a_2 [(a+b)^6 - (a-b)^6] + 4ab(a^2 - b^2) A_0 - (a-b)^4 A_{-2} - (a+b)^4 A_2 \}, \quad (35)$$

$$a_k = \frac{[(a+b)^{2k} - (a-b)^{2k}] c_k - 4kab(a^2 - b^2)^{k-1} c_k}{[(a+b)^{2k} - (a-b)^{2k}]^2 - 16a^2b^2k^2(a^2 - b^2)^{2k-2}},$$

(k = 2, 3, ...)

где

$$c_k = (a+b)^k A_k - (a-b)^k A_{-k}, \quad (36)$$

а коэффициенты  $a'_k$  (k=2,3,...) будут даны равенствами

$$2ka'_k [(a+b)^k + (a-b)^k] = (a+b)(A_{-k+1} - A_{k+1} - \lambda A_{-k-1}) - (a^2 - b^2) [(a+b)^{k-2} + (a-b)^{k-2}] [a_{k-1} + (k-1)\bar{a}_{k-1}] + [(a+b)^{k+2} + (a-b)^{k+2}] [a_{k-1} - (k+1)\bar{a}_{k+1}]. \quad (37)$$

В приближенных решениях рассматриваемых задач будет сохранена вторая степень малого параметра.

Граничные условия (7) для k=1 и k=2 соответственно примут вид:



$$\tau_{1\alpha}^{(1)} n_1^0 + \tau_{2\alpha}^{(1)} n_2^0 = -\frac{1}{2} (\partial_1 \tau_{1\alpha}^{(0)} n_1^0 + \partial_1 \tau_{2\alpha}^{(0)} n_2^0) x_3^2 - \tau_{3\alpha}^{(0)} n_1^0 x_3, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \tau_{1\alpha}^{(2)} n_1^0 + \tau_{2\alpha}^{(2)} n_2^0 &= -\frac{1}{2} (\partial_1 \tau_{1\alpha}^{(1)} n_1^0 + \partial_1 \tau_{2\alpha}^{(1)} n_2^0) x_3^2 - \tau_{3\alpha}^{(1)} n_1^0 x_3 - \\ &- \frac{1}{8} (\partial_1^2 \tau_{1\alpha}^{(0)} n_1^0 + \partial_1^2 \tau_{2\alpha}^{(0)} n_2^0) x_3^4 - \frac{1}{2} \partial_1 \tau_{3\alpha}^{(0)} n_1^0 x_3^3. \end{aligned} \quad (39)$$

Определим упругое равновесие бруса, когда силы, приложенные на нижнем основании бруса статически эквивалентны изгибающим парам  $m_1$  и  $m_2$ .

Решение задачи представим в виде

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}^{(0)} + \varepsilon \tau_{\alpha\beta}^{(1)} + \varepsilon^2 \tau_{\alpha\beta}^{(2)}, \quad (40)$$

где  $\tau_{\alpha\beta}^{(0)}$  – решения задачи изгиба парама сил.

Компоненты  $\tau_{\alpha\beta}^{(0)}$  в данном случае имеют вид [2]

$$\tau_{33}^{(0)} = (a_1^* x_1 + a_2^* x_2) E, \quad \tau_{\alpha\beta}^{(0)} = 0, \quad (41)$$

где

$$a_1^* = -\frac{4m_2}{\pi E a^3 b}, \quad a_2^* = \frac{4m_1}{\pi E a b^3}. \quad (42)$$

Определим компоненты напряжения  $\tau_{\alpha\beta}^{(1)}$  в эллиптической области.

Учитывая выражения (41), граничные условия (38) примут вид:

$$\begin{aligned} \tau_{1\alpha}^{(1)} n_1^0 + \tau_{2\alpha}^{(1)} n_2^0 &= 0, \quad (\alpha = 1, 2), \\ \tau_{13}^{(1)} n_1^0 + \tau_{23}^{(1)} n_2^0 &= \tau_3(s) x_3, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\tau_3(s) = -E(a_1^* x_1 + a_2^* x_2) n_1^0. \quad (44)$$

Итак, для компонентов напряжений  $\tau_{\alpha\beta}^{(1)}$  получена задача Альманси первого порядка.

Тогда можем написать, что  $\tau_{\alpha\beta}^{(1)} \equiv \tau_{\alpha\beta}^{s1}$ , где  $\tau_{\alpha\beta}^{s1}$  будут даны равенствами (16) при  $k=1$ .

Приведем окончательные результаты для  $\tau_{\alpha\beta}^{(1)}$ .

Выпишем неизвестные величины нулевой ступени  $g_{\alpha\beta}^{m0}, \tau_{\alpha\beta}^{p0}, (t_{\alpha\beta}^{(j)})_0, a_j^{(0)}$ .

Функции коррекции  $g_{\alpha\beta}^{m0}$  будут иметь вид:

$$g_{13}^{m0} = -\frac{1}{2}a_3^{(0)}Ex_1, \quad g_{23}^{m0} = -\frac{1}{2}a_3^{(0)}Ex_2, \quad g_{\alpha\beta}^{m0} = 0.$$

Коэффициенты  $a_j^{(0)}$  определены следующим образом:

$$a_0^{(0)} = a_1^{(0)} = a_2^{(0)} = 0, \quad a_3^{(0)} = a_1^*, \quad (46)$$

$(t_{\alpha\beta}^{(i)})_0$  будут даны равенствами

$$\begin{aligned} (t_{33}^{(0)})_0 &= Ea_1^*, & (t_{33}^{(1)})_0 &= 0, \\ (t_{\alpha 3}^{(0)})_0 &= (t_{\alpha\beta}^{(0)})_0 = (t_{\alpha\beta}^{(1)})_0 = (t_{\alpha 3}^{(1)})_0 = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Функция  $F_0(x_1, x_2)$ , связанная с компонентами напряжений  $\tau_{13}^{p0}$  и  $\tau_{23}^{p0}$  равенствами

$$\tau_{13}^{p0} = \mu \partial_1 F_0, \quad \tau_{23}^{p0} = \mu \partial_2 F_0,$$

имеет следующий вид:

$$F_0(x_1, x_2) = \frac{E}{\mu} \left( \frac{1}{4} a_1^* x_2^2 - \frac{1}{4} a_1^* x_1^2 - \frac{a_2^* b^2}{a^2 + b^2} x_1 x_2 + \frac{1}{8} a_1^* c^2 \right).$$

Тогда компоненты напряжений  $\tau_{\alpha\beta}^{p1}$  и компоненты смещений  $U_\alpha^{p1}$  будут даны равенствами

$$\begin{aligned} \tau_{13}^{p0} &= -\left( \frac{1}{2} a_1^* x_1 + \frac{a_2^* b^2}{a^2 + b^2} x_2 \right) E, \\ \tau_{23}^{p0} &= \left( \frac{1}{2} a_1^* x_2 - \frac{a_2^* b^2}{a^2 + b^2} x_1 \right) E, \\ U_3^{p0} &= F_0(x_1, x_2), \quad \tau_{\alpha\beta}^{p0} = \tau_{\beta\alpha}^{p0} = U_\alpha^{p0} \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \end{aligned} \quad (48)$$

Теперь выпишем величины первой ступени  $g_{\alpha\beta}^{a1}, g_{\alpha\beta}^{m1}, a_j^{(1)}, (t_{\alpha\beta}^{(j)})$ .

Функции  $g_{\alpha\beta}^{a1}$  будут даны равенствами

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha}^{a1} &= \mu \left\{ \left[ \frac{1}{2} a_3^{(0)} \left( 1 + (2 - \alpha)\sigma + (-1)^{\alpha+1} \frac{E}{4\mu} a_1^* \right) \right] x_1^2 + \right. \\ &+ \left. \left[ \frac{1}{2} a_3^{(0)} \left( 1 + (\alpha - 1)\sigma - \frac{E}{4\mu} a_1^* \right) \right] x_2^2 + \frac{E a_2^* b^2}{\mu(a^2 + b^2)} x_1 x_2 - \frac{a_1^* E}{8\mu} c^2 \right\}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$g_{33}^{a1} = \sigma(g_{11}^{a1} + g_{22}^{a1}) + E(U_3^{m0})_{x_3=0},$$

$$g_{12}^{a1} = 0, \quad g_{13}^{a1} = \frac{1}{2} \mu a_3^{(0)} \ell (2 + \sigma) x_1, \quad g_{23}^{a1} = \frac{1}{2} \mu \sigma a_3^{(0)} \ell x_2,$$

где

$$U_3^{m0} = -\frac{1}{2} a_3^{(0)} [(\ell - x_3)x_3 + x_1^2 + x_2^2] + F_0(x_1, x_2).$$

Функции коррекции  $g_{\alpha\beta}^{m1}$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} g_{11}^{m1} &= \frac{2\mu a_0^{(1)} a^2}{a^2 + b^2} x_1 x_2, & g_{22}^{m1} &= -\frac{2\mu a_0^{(1)} b^2}{a^2 + b^2} x_1 x_2, \\ g_{23}^{m1} &= -\frac{2\mu a_0^{(1)} (a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} x_1 x_2, & g_{12}^{m1} &= 0, \\ g_{13}^{m1} &= -\frac{1}{2} E a_3^{(1)} x_1, & g_{23}^{m1} &= -\frac{1}{2} E a_3^{(1)} x_2, \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} a_0^{(1)} &= -\frac{a_2^*(b^2 - a^2)}{4\mu a^2}, & a_1^{(1)} &= a_2^{(1)} = 0, \\ a_3^{(1)} &= \frac{a_3^{(0)} \ell \mu (1 + \sigma)}{E}. \end{aligned} \quad (51)$$

Компоненты напряжений  $\tau_{\alpha\beta}^{p1}$  и компоненты смещений  $U_\alpha^{p1}$  будут даны равенствами

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}^{p1} &= k_{\alpha\beta}^{(1)} + k_{\alpha\beta}^{(2)} x_1^2 + k_{\alpha\beta}^{(3)} x_2^2 + k_{\alpha\beta}^{(4)} x_1 x_2, \\ \tau_{13}^{p1} &= -\frac{1}{2} \mu a_2^{(0)} x_1, & \tau_{23}^{p1} &= \frac{1}{2} \mu a_3^{(0)} x_2, & \tau_{33}^{p1} &= \sigma (\tau_{11}^{p1} + \tau_{22}^{p1}), \\ U_\alpha^{p1} &= k_\alpha^{(1)} x_1 + k_\alpha^{(2)} x_2 + k_\alpha^{(3)} x_1^2 + k_\alpha^{(4)} x_2^2 + k_\alpha^{(5)} x_1 x_2 + k_\alpha^{(6)} x_1 x_2^2 \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \end{aligned} \quad (52)$$

где коэффициенты  $k_{\alpha\beta}^{(i)}, k_\alpha^{(j)}$  имеют определенные значения (их значения выписывать не будем).

Функции  $(t_{\alpha\beta}^{(j)})_l$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (t_{33}^{(0)})_l &= E a_3^{(1)}, & (t_{\alpha\beta}^{(0)})_l &= (t_{\alpha\beta}^{(1)})_l = (t_{\alpha\beta}^{(2)})_l = (t_{33}^{(1)})_l = 0, \\ (t_{13}^{(0)})_l &= -\frac{2\mu a_0^{(1)} a^2}{a^2 + b^2} x_2, & (t_{33}^{(0)})_l &= \frac{2\mu a_0^{(1)} b^2}{a^2 + b^2} x_2. \end{aligned} \quad (53)$$

Итак, определены все величины, входящие в выражения  $\tau_{\alpha\beta}^{(i)}$ .

Окончательно компоненты напряжений  $\tau_{\alpha\beta}^{(i)} = \tau_{\alpha\beta}^{p1}$  можно представить в виде (см.16)

$$\begin{aligned}
 \tau_{\alpha\beta}^{(\alpha 1)} &= (g_{\alpha\beta}^{n0} + \tau_{\alpha\beta}^{p0})x_3 + g_{\alpha\beta}^{\alpha 1} + \tau_{\alpha\beta}^{m1}, \\
 \tau_{33}^{\alpha 1} &= (g_{33}^{n0} + \sigma\tau_{11}^{p0} + \sigma\tau_{22}^{p0})x_3 + g_{33}^{\alpha 1} + \tau_{33}^{m1}, \\
 \tau_{\alpha 3}^{\alpha 1} &= \frac{1}{2}(x_3 - \ell)x_3\tau_{\alpha 3}^{p0} + g_{\alpha 3}^{n0}x_3 + g_{\alpha 3}^{\alpha 1} + \tau_{\alpha 3}^{m1} \quad (\alpha, \beta = 1, 2).
 \end{aligned} \tag{54}$$

Подставляя значения компонентов напряжения  $\tau_{\alpha\beta}^{(0)}$  и  $\tau_{\alpha\beta}^{(1)}$  в граничные условия (39), для определения компонентов напряжений  $\tau_{\alpha\beta}^{(2)}$  получаем следующие граничные условия:

$$\tau_{\alpha\alpha}^{(2)} = \tau_{1\alpha}^{(2)}n_1^0 + \tau_{2\alpha}^{(2)}n_2^0 = \tau_{\alpha}^{(0)}(s)x_3^3 + t_{\alpha}^{(2)}(s)x_3^2 + l_{\alpha}^{(1)}(s)x_3 \quad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{55}$$

где граничные функции  $\tau_{\alpha}^{(0)}(s)$  и  $\tau_{\alpha}^{(k)}(s)$  будут представлены определенными равенствами (их выражения выписывать не будем).

Таким образом, компоненты напряжений  $\tau_{\alpha\beta}^{(2)}$  должны быть решением задачи Альманси, содержащей в граничных условиях переменную  $x_3$  в третьей степени.

Компоненты напряжения  $\tau_{\alpha\beta}^{(2)}$  строятся точно так же, как компоненты напряжений  $\tau_{\alpha\beta}^{(1)}$ . Здесь их выписывать не будем.

Полученное решение  $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}^{(0)} + \varepsilon\tau_{\alpha\beta}^{(1)} + \varepsilon^2\tau_{\alpha\beta}^{(2)}$  не является окончательным, ибо в компонентах напряжений  $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}^{(0)} + \varepsilon\tau_{\alpha\beta}^{(1)} + \varepsilon^2\tau_{\alpha\beta}^{(2)}$  торцевым условиям будут удовлетворять слагаемые  $\tau_{\alpha\beta}^{(0)}$ , а компоненты  $\tau_{\alpha\beta}^{(1)}$  и  $\tau_{\alpha\beta}^{(2)}$  на торцах дополнительно будут давать растягивающие и изгибающие силы  $R_3^{(k)}$ ,  $R_2^{(k)}$ ,  $R_1^{(k)}$  и крутящие и изгибающие моменты  $M_3^{(k)}$ ,  $M_2^{(k)}$  и  $M_1^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ). Поэтому к полученному решению еще надо добавить решение задач Сан-Венана, устраняющих появившиеся на торцах дополнительные нагрузки.

В работах [2][3],[7],[8] решение задач Сан-Венана для брусьев со слабо изогнутой осью путем преобразования пространства сведено к решению задач о деформации бруса с прямолинейной осью, что вызывает возникновение определенных объемных сил в дифференциальных уравнениях. При этом полученные дифференциальные уравнения являются приближенными. В данной же статье дифференциальные уравнения остаются точными и вся тяжесть решения задачи перенесена лишь на выполнение граничных условий для "возмущенной" границы, которые сведены к рекуррентным граничным условиям для невозмущенной поверхности.





Для численного примера рассмотрим касательные напряжения  $\tau_{13}^{(i)}$  и  $\tau_{23}^{(i)}$  и нормальное напряжение  $\tau_{33}^{(i)}$  (см. (45)-(54)).

Примем, что

$$\mu = 8 \cdot 10^5 \text{ кГ/см}^2, \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ кГ/см}^2.$$

Например, такие численные значения имеют упругие константы стали [9].

Пусть полуоси эллипса  $a$  и  $b$  и длина бруса  $\ell$  имеют следующие численные значения:

$$a = 30 \text{ см}, \quad b = 20 \text{ см}, \quad \ell = 500 \text{ см}.$$

Вычисляя постоянные, входящие в выражения напряжений  $\tau_{13}^{(i)}$ ,  $\tau_{23}^{(i)}$  и  $\tau_{33}^{(i)}$ , получим:

$$\begin{aligned} \tau_{11}^{(i)} &= [-0,03m_1x_1x_2 + (-0,84x_1^2 - 2,5x_2^2 + 4,5x_1x_2 + 774,4)m_2] \cdot 10^{-6}, \\ \tau_{13}^{(i)} &= [(x_1x_3 - 199,6x_1)m_2 + (-0,33x_2x_3 + 82,5x_2)m_1] \cdot 10^{-6}, \\ \tau_{23}^{(i)} &= [(x_1x_3 + 199,6x_2)m_2 + (0,15x_1x_3 - 37,5x_1)m_1] \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \quad (56)$$

Вычислим значения некоторых компонентов в точке  $M(a, 0, \ell)$ . Из (56) получим:

$$\begin{aligned} \tau_{11}^{(i)} &= 1,84 \cdot 10^{-6} m_2, \quad \tau_{13}^{(i)} = -5988 \cdot 10^{-6} m_2, \\ \tau_{23}^{(i)} &= 600 \cdot 10^{-6} m_2 - 1035 \cdot 10^{-6} m_1, \end{aligned} \quad (57)$$

а  $\tau_{33}^{(o)}$  в точке  $M(a, 0, \ell)$  имеет значение

$$\tau_{33}^{(o)} = -60 \cdot 10^{-6} m_2. \quad (58)$$

В искоемых компонентах напряжений  $\tau_{\alpha\beta}$  (см.(40)) компоненты  $\tau_{\alpha\beta}^{(i)}$  входят с множителем малого параметра  $\varepsilon$ .

Введем  $\tilde{\tau}_{\alpha\beta}^{(i)} = \varepsilon \cdot \tau_{\alpha\beta}^{(i)}$ .

Если принять  $\varepsilon = 0,01$ , тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{11}^{(i)} &= 0,18 \cdot 10^{-6} m_2, \quad \tilde{\tau}_{13}^{(i)} = -59,88 \cdot 10^{-6} m_2, \\ \tilde{\tau}_{23}^{(i)} &= 6 \cdot 10^{-6} m_2 - 10,35 \cdot 10^{-6} m_1. \end{aligned} \quad (59)$$

Как видно из (58) и (59), при изгибе моментами слегка изогнутого цилиндра из дополнительных напряжений (по сравнению с прямолинейным цилиндром)  $\tilde{\tau}_{11}^{(i)}$  и  $\tilde{\tau}_{23}^{(i)}$  имеют небольшие численные значения, а  $\tilde{\tau}_{13}^{(i)}$  фактически равно  $\tau_{33}^{(o)}$ .

Итак, как и следовало ожидать, из-за изогнутости цилиндрического тела, в нем, при действии торцевых изгибающих моментов, дополнительно (по сравнению с прямолинейным цилиндром) возникают напряжения, заметно влияющие на упругое поле.

Поступила 15.01.2001

Кафедра теоретической механики

### Литература

1. Н.И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., Наука, 1966, 707с.
2. Н.М. Риз. ДАН СССР, 1939, т. 24, вып. 23, с.151-157
3. Г.М. Хатиашвили, Задачи Альманси-Мичелла для однородных и составных тел, ч.1, Тбилиси, Мецниереба, 1983, 233 с. ч.II, Тбилиси, Мецниереба 1985, 184 с.
4. Г.М.Хатиашвили, ДАН СССР, 1965, 161, №6, с. 1295-1298.
5. Г.М. Хатиашвили, К.В.Кахая. Труды ВЦ АН ГССР, 1980, т. XXI, 115.
6. К.В.Кахая Тр.ИВМ им Н.И. Мусхелишвили АН ГССР, Вычислит. матем. и програм., т. XXVI:1, 1986, с. 89-98.
7. А.Я. Горгидзе. Тр. Тб. матем. ин-та АН ГССР. т. ХУП, 1949, с. 95.130.
8. А.К.Рухадзе, Сообщения АН ГССР, 1941, т.2, №1-2, с. 35-43.
9. Г.М. Сцкович, Соппротивление материалов М., Высшая школа, 1960, 530 с.

კ. კახაია

ოდნავ გაღუნული ერთგვაროვანი იზოტროპული ელიფსური ძელის  
წყვილდალით ღუნვის ამოცანა

რეზიუმე

[5] ნაშრომში განხილული ხერხით ამოხსნილია ოდნავ გაღუნული ერთგვაროვანი, იზოტროპული ელიფსური ძელის წყვილდალით ღუნვის ამოცანა. შენარჩუნებულია მცირე პარამეტრის მეორე ხარისხი.

K. Kakhaia

TASK OF FORCE-COUPLE CURVING OF THE SLIGHTLY CURVED SIMILAR  
ISOTROPIC ELLIPTICAL SQUARED TIMBER

Summary

With the help of the way discussed in the work [5] of the given article the problem of force-couple curving of the slightly curved similar, isotropic elliptical squared timber is solved. The second degree of the small parameter is preserved.

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГОМ СТЕРЖНЕ  
ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

М.Г. Вазагашвили, Л.А. Джикидзе

К постановке задачи о распространении волн в пространственном стержне произвольного и поперечного сечения привлекается принцип возможных перемещений, согласно которому сумма всех действующих на систему активных сил, включая силы инерции, равна нулю:

$$\delta A = \delta A_{\sigma} + \delta A_u + \delta A_F = 0, \tag{1}$$

где работы внутренних напряжений  $\delta A_{\sigma}$ , сил инерции  $\delta A_u$  и внешних сил  $\delta A_F$  вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} \delta A_{\sigma} = - \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV, \\ \delta A_u = - \int_V \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \delta \bar{u} dV, \\ \delta A_F = \int_V \bar{F} \delta \bar{u} dV + \int_{\Sigma} \bar{p} \delta \bar{u} d\Sigma. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь  $\delta \epsilon_{ij}$  – вариации деформации,  $\rho$  – плотность материала,  $\bar{u}$ ,  $\delta \bar{u}$  – векторы смещений точек стержня,  $\bar{F}$ ,  $\bar{p}$  – плотности массовых и поверхностных сил,  $V$ ,  $\Sigma$  – объем и поверхность стержня.

Вариационная задача (1) сводится к системе дифференциальных уравнений в частных производных.

Если цилиндрические координаты взяты как  $r, \theta$  и  $z$  произвольной точки поперечного сечения, а соответствующие перемещения равны  $u_r, u_{\theta}$  и  $u_z$ , волновое уравнение, основанное на трехмерности теории вязкоупругости [1], может быть записано:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2\bar{\mu}}{r} \frac{\partial \omega_z}{\partial \theta} + 2\bar{\mu} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} - 2\bar{\mu} \frac{\partial \omega_r}{\partial z} + 2\bar{\mu} \frac{\partial \omega_z}{\partial r}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2\bar{\mu}}{r} \frac{\partial(\omega_\theta r)}{\partial r} + \frac{2\bar{\mu}}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \end{cases} \quad (3)$$

где  $\rho$  – плотность материала,  $t$  – время,  $\Delta$  – расширение цилиндрических координат,  $\omega_r, \omega_\theta, \omega_z$  – компоненты вращения вокруг трех ортогональных направлений [2].

Для распространения гармонической волны мы можем записать:

$$\begin{cases} \Delta = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (\Delta_n \cos n\theta + \bar{\Delta}_n \sin n\theta) e^{i(\eta z + \omega t)}, \\ u_r = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (u_n \cos n\theta + \bar{u}_n \sin n\theta) e^{i(\eta z + \omega t)}, \\ u_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (V_n \sin n\theta + \bar{V}_n \cos n\theta) e^{i(\eta z + \omega t)}, \\ u_z = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (w_n \cos n\theta + \bar{w}_n \sin n\theta) e^{i(\eta z + \omega t)}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\epsilon_n = 0,5$  для  $n=0$ ,  $\epsilon_n = 1$  для  $n \geq 1$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .

$\eta$  – комплексное волновое число,  $\omega = \eta c$  – комплексная частота,  $c = c_r + ic_i$  – комплексная фазовая скорость. Для выяснения их физического смысла рассмотрим два случая:

а)  $\eta = \eta_r$  – действительная,  $c = c_r + ic_i$ , тогда решения (4) имеют вид синусоиды по  $z$ , амплитуда которой затухает во времени.

б)  $\eta = \eta_r + i\eta_i$ ,  $c = c_r$ . В этом случае в каждой точке  $z$  колебания установились, но они затухают по  $z$ . В обоих случаях мнимые части  $\eta_i$  и  $c_i$  характеризуют интенсивность диссипативных процессов.

Вставляя уравнение (4) в систему (3) и решение для твердых однородных стержней, мы получаем

$$\left\{ \begin{aligned} (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\Delta_n &= -p^2 \rho I_n A_n - (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})r\bar{\alpha}, \\ u_n &= A_n \frac{\partial I_n(\bar{\alpha}r)}{\partial r} + B_n \eta \frac{\partial I_n(\bar{\beta}r)}{\partial r} + c_n \left(\frac{n}{r}\right) I_n(\bar{\beta}r), \\ V_n &= - \left[ A_n \left(\frac{n}{r}\right) I_n(\bar{\alpha}r) + B_n \eta \left(\frac{n}{r}\right) I_n(\bar{\beta}r) + c_n \frac{\partial I_n(\bar{\beta}r)}{\partial r} \right], \\ w_n &= i [A_n \eta I_n(\bar{\alpha}r) - B_n \bar{\beta}^2 I_n(\bar{\beta}r)], \\ \bar{\alpha}^2 &= \frac{\omega^2 \rho (\lambda [1 - \Gamma_\lambda^c(\omega_R)] + 2\mu [1 - \Gamma_\mu^c(\omega_R)])^2 + i(\lambda \Gamma_\lambda^s + \Gamma_r^s)}{(\lambda [1 - \Gamma_\lambda^c(\omega_R)] + 2\mu [1 - \Gamma_\mu^c(\omega_R)])^2 + (\lambda \Gamma_\lambda^s + \mu \Gamma_\mu^s(\omega_R))^2} - \eta^2, \\ \bar{\beta}^2 &= \frac{P^2}{\bar{\mu} [1 - \Gamma_\mu^c(\omega_R) - i \Gamma_\mu^s(\omega_R)]} - \eta^2. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

где  $A_n$ ,  $B_n$  и  $C_n$  – комплексные постоянные интегрирования, а  $I_n(\bar{\beta}r)$  и  $I_n(\bar{\alpha}r)$  – функции Бесселя первого ряда порядка с комплексными аргументами. Уравнения для  $\bar{\Delta}_n$ ,  $\bar{u}_n$ ,  $\bar{V}_n$  и  $\bar{w}_n$  имеют те же формы, что  $\Delta_n$ ,  $u_n$ ,  $V_n$  и  $w_n$ , но в них  $A_n$ ,  $B_n$  и  $C_n$  заменены на  $\bar{A}_n$ ,  $\bar{B}_n$  и  $\bar{C}_n$ .

Граничные условия для бесконечного стержня свободной от напряжений поверхности таковы:

$$(\sigma_{qq})_i = (\sigma_{qs})_i = (\sigma_{sq})_i = 0, \quad (6)$$

где  $q$  – нормальные координаты к границе, а  $s$  – координаты в тангенциальном направлении,  $\sigma_{qq}$  – нормальные напряжения,  $\sigma_{qs}$  и  $\sigma_{sq}$  – сдвиговые напряжения, а  $(\sigma_{qq})_i$  – величина на  $i$ -границе.

Граничные условия вдоль всего края границы не могут быть удовлетворены. Для того, чтобы удовлетворить граничные условия, было произведено разложение Фурье к уравнениям граничных условий вдоль граничной линии поперечного сечения. Для данного случая, одна прямая линия рассматривается как один сегмент, в то время как одна кривая линия должна быть разделена на множество сегментов в соответствии с конвергентностью решения [3-4].

Поэтому коэффициенты Фурье получают путем прибавления коэффициентов для отдельно рассматриваемых границ. Когда поперечное сечение симметрично вокруг оси, анализ можно разделить на симметричный и антисимметричный случаи. Отсюда, когда координата выбрана из симметрии, граничные условия расширяются на следующие серии Фурье:



$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ E'_{m0} A_0 + E'^2_{m0} B_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} (E'_{mn} A_n + E'^2_{mn} B_n^* + E'^3_{mn} C_n) \right] \cos m\theta = 0, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \left[ F'_{m0} A_0 + F'^2_{m0} B_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} (F'_{mn} A_n + F'^2_{mn} B_n^* + F'^3_{mn} C_n) \right] \sin m\theta = 0, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \left[ G'_{m0} A_0 + G'^2_{m0} B_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} (G'_{mn} A_n + G'^2_{mn} B_n^* + G'^3_{mn} C_n) \right] \cos m\theta = 0 \end{cases} \quad (7)$$

для симметричной формы и

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \bar{E}'^3_{m0} \bar{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{E}'_{mn} \bar{A}_n + \bar{E}'^2_{mn} \bar{B}_n^* + \bar{E}'^3_{mn} \bar{C}_n) \right] \sin m\theta = 0, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \left[ \bar{F}'^3_{m0} \bar{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{F}'_{mn} \bar{A}_n + \bar{F}'^2_{mn} \bar{B}_n^* + \bar{F}'^3_{mn} \bar{C}_n) \right] \cos m\theta = 0, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \bar{G}'^3_{m0} \bar{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{G}'_{mn} \bar{A}_n + \bar{G}'^2_{mn} \bar{B}_n^* + \bar{G}'^3_{mn} \bar{C}_n) \right] \sin m\theta = 0 \end{cases} \quad (8)$$

для антисимметричной формы, где

$$\begin{cases} E'_{mn} = (2 \epsilon_n / \pi) \sum_{i=1}^{\ell} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \ell'_n(Ri, \theta) \cos m\theta d\theta, \\ F'_{mn} = (2 \epsilon_n / \pi) \sum_{i=1}^{\ell} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} f'_n(Ri, \theta) \sin m\theta d\theta, \\ G'_{mn} = (2 \epsilon_n / \pi) \sum_{i=1}^{\ell} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} g'_n(Ri, \theta) \cos m\theta d\theta \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \bar{E}'_{mn} = (2 \epsilon_n / \pi) \sum_{i=1}^{\ell} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \bar{\ell}'_n(Ri, \theta) \sin m\theta d\theta, \\ \bar{F}'_{mn} = (2 \epsilon_n / \pi) \sum_{i=1}^{\ell} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \bar{f}'_n(Ri, \theta) \cos m\theta d\theta, \\ \bar{G}'_{mn} = (2 \epsilon_n / \pi) \sum_{i=1}^{\ell} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \bar{g}'_n(Ri, \theta) \sin m\theta d\theta, \end{cases} \quad (10)$$

и где  $\epsilon_m = 1/2$  для  $m=0$ ;  $\epsilon_m = 1$  для  $m \geq 1$ ,  $I$  – число сегментов, включая прямолинейные границы в диапазоне от  $\theta = 0$  до  $\theta = \pi$ , а  $R_i$  – координата  $r$  в  $i$ -том сегменте, который выражен как функция  $\theta$ . Частотное уравнение для определения комплексных фазовых скоростей может быть получено, если определитель коэффициентов уравнений (7) и (8) приравнять нулю.

В работе корни дисперсионного уравнения ищутся методом Мюллера, значит в левой части на каждой итерации методы Мюллера определяются методом Гаусса с выделением главного элемента. Уравнение для стержня, поперечное сечение которого не имеет симметричных осей, получаем таким же образом. В этом случае разложение Фурье должно быть выполнено в диапазоне включая и синусные и косинусные члены. Представлена конечная динамическая модель для бесконечного пространственного стержня, выделяется интересующая нас пространственная область, а на краях этой пространственной области задаются такие граничные условия, которые пропускают к ней волны через границу без отражения.

Эти граничные условия записываются так:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} = \pm \frac{1}{C_R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \quad (11)$$

где  $t$  – время,  $C_R$  – скорость волны Рэлея,  $\bar{u}$  – вектор перемещения. Для того, чтобы получить матрицы жесткости  $[K]$  и матрицы инерции  $[M]$ , воспользуемся представлением поля перемещения на элементе  $\bar{u}^e(x_1, x_2, x_3, t)$  в виде:

$$\{\sigma\} = [\bar{E}]\{\epsilon\}; \quad \{\epsilon\} = [D]\{u\},$$

где  $[\bar{E}]$  – матрица вязкоупругости,  $[D]$  – матрица дифференцирования. Матрица вязкоупругости для изотропного тела:

$$[\bar{E}] = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} & \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\nu} \end{bmatrix} \quad (12)$$

где  $\bar{\lambda} = \frac{\mu \bar{E}}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ ;  $\bar{\nu} = \frac{\bar{E}}{2(1+\mu)}$  – коэффициенты Ляме для вязкоупругого тела. Матрица дифференцирования:



$$[D]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

Тогда уравнения (3) примут вид

$$[M^e]\{\ddot{q}\} + [K^e]\{\dot{q}\} + [C]\{q\} = \{Q^e\} \quad (14)$$

Здесь  $[K^e]$  – матрицы жесткости,  $[M]$  – матрица масс,  $[C]$  – матрица демпфирования. В нашем случае  $\{Q^e\} = 0$  и решение ищется в виде

$$\{q\} = \{q_0\}e^{-i\omega t} \quad (15)$$

После подстановки (15) в (14) получаем систему алгебраических уравнений в виде

$$([K^e] - i[C]\omega - \omega^2[M])\{q^e\} = 0 \quad (16)$$

Для решения этих уравнений применяется метод Мюллера [5].

Численные результаты произведены стержнями эллиптического поперечного сечения. Характеристическое уравнение решается методом Мюллера. В качестве начального приближения задаются собственные частоты упругой системы. В данной работе в качестве начального приближения применяются результаты Фрайзера [6] и Сото [7]. Числовые расчеты были выполнены для следующих значений величины

$$R_\lambda = R_\mu = Ae^{-\beta t} / t^{1-\alpha}, \quad A = 0,01; \quad \alpha = 0,1; \quad \beta = 1.$$

Если мы рассматриваем однородный вязкоупругий стержень эллиптического поперечного сечения большей оси  $2a$  и меньшей  $2b$ , мы имеем следующие отношения, принимая длину “ $b$ ” как безразмерную длину:

$$\begin{aligned} R_i / b &= (a/b) \left[ \cos^2 \theta + (a/b)^2 \sin^2 \theta \right]^{1/2}, \\ \frac{\pi}{2} - \arctg \left[ (b/a)^2 / \operatorname{tg} \theta_i \right], & \text{ для } \theta_i < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ для } \theta_i = \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} + \arctg \left[ (b/a)^2 / \operatorname{tg} \theta_i \right], & \text{ для } \theta_i > \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (15)$$

где угол  $\theta$  выбран из главной оси  $M$ .

$$\theta_i^* = (\theta_i - \theta_{i-1}) / 2.$$



На рис. 1. показана геометрия усеченного эллиптического поперечного сечения. В этом случае также существует и независимая форма распространения волны.

Для продольных форм перемещения при колебании симметричны вокруг двух осей  $x-x$  и  $y-y$ . Поэтому члены  $n$  и  $m$  берутся как 0,2,4,6... в уравнение (9).

Геометрические величины  $R_i$  и  $\gamma_i$  вычисляются как

$$R_i/b = (a-d)/b \cos \theta, \quad \gamma_i = 0, \quad \text{для } 0 \leq \varphi_1, \quad (16)$$

для границы 1, и

$$R_i/b = -(a-d)/b \cos \theta, \quad \gamma_i = \pi, \quad \text{для } 0 \geq \varphi_2, \quad (17)$$

для границы 3, где

$$\varphi_1 = \arctg[b/(a-d) \sqrt{1 - (a-d)^2/a^2}]^{1/2}, \quad (18)$$

выражения  $R_i$  и  $\gamma_i$  границы ( $\varphi_1 < \theta < \varphi_2$ ) такие же, как уравнения (15).

Численные результаты для этой формы показаны на рис. 2.

Поступила 20.09.2001

Кафедра теоретической механики

Грузинского технического университета

### Литература

1. K. Nagaya, Trans ASME Journal of Applied Mechanics, 1982, 49, №1, pp.157-164.
2. А.Н. Филатов. Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент. 1974, 280 с.
3. K. Nagaya, ASME Journal of Applied Mechanics, vol. 46, 1979, pp. 667-671.
4. K. Nagaya, Journal of the Aconstical Society of America, vol. 67, 1980, pp. 2029-2033.
5. И.И. Сафаров, Динамика вязкоупругих виброзащитных систем. Автореф. канд. диссертации. Москва, 1932.
6. W.B. Fraser, Journal of sound and vibration, vol. 10, 1969, pp 274-280.
7. K.Sato, Bulletin of the ISWE, vol. 21, 1978, pp. 203-209.

მ. ვაზაგაშვილი, ლ. ჯიქიძე

ტალღების გავრცელება ნებისმიერი განივი კვეთის მქონე  
ბლანტ-დრეკად ღეროში

### რეზიუმე

შესწავლილია ნებისმიერი განივი კვეთის მქონე ბლანტ-დრეკად ღეროში ტალღების გავრცელება. წარმოდგენილია სასრული დინამიკური მოდელი უსასრულო სივრცითი ღეროსათვის, გამოყოფილია ჩვენთვის

საინტერესო სივრცითი არე, ხოლო ამ არის საზღვარზე მოიცავს  
 ისეთი სასაზღვრო პირობები, რომლებიც ატარებენ ტალღებს  
 საზღვარზე არეკვლის გარეშე.

ძირითადი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნები იძებნება  
 მიუღერისა და გაუსის მეთოდის გამოყენებით, რომელიც თავის მხრივ  
 ყოველ იტერაციაზე განსაზღვრულია გაუსის მეთოდის საშუალებით  
 მთავარი ელემენტის გამოყოფით.

M. Vazagashvili, L. Jikidze

WAVE SPREADING IN A DUCTILE ELASTIC ROD WITH ARBITRARY  
 CROSS SECTION

Summary

The wave spreading in a ductile elastic rod with arbitrary cross section has been studied. The finite dynamic model for an infinite spatial rod has been represented and the spatial domain singled out. On its boundary conditions which let pass the waves through it without reflection. The solutions of the principal differential equations are being searched by the method of Muller and Gauss which is defined at each iteration by Gauss method with marking main element.

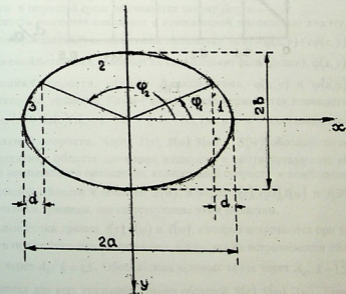


Рис. 1

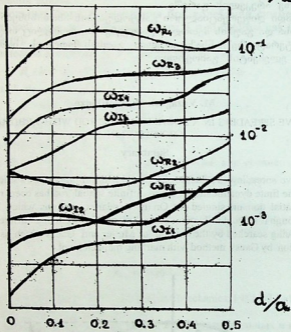
$\omega_R/\omega_0$  $-\omega_I/\omega_0$ 

Рис. 2

УДК 532. 546. 517

## ПРИТОК ПОДЗЕМНЫХ ВОД К СОВЕРШЕННОЙ ВОДОСБОРНОЙ ГАЛЕРЕЕ ТРЕУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Н.Б. Джорбенадзе, Р.А. Цицкишвили, А.Р. Цицкишвили

Рассмотрим плоскую стационарную фильтрацию подземных вод в совершенной водосборной галерее треугольной формы.

Область фильтрации принимается симметричной относительно оси ординат, поэтому достаточно рассмотреть одну половину области, например, левую. На схеме (рис. 1-З) приводится левая половина области. При этом учитываются промежуток высачивания и граница водного бассейна.

Пористая среда однородна, изотропна и недеформируема. Движение жидкости в пористой среде подчиняется закону Дарси.

Плоскость движения совпадает с комплексной плоскостью  $z=x+iy$ . Вводится приведенный комплексный потенциал  $\omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  (комплексный потенциал, деленный на коэффициент фильтрации),  $\varphi(x, y)$  – потенциал скорости,  $\psi(x, y)$  – функция тока,  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  удовлетворяют условиям Коши-Римана. Рассматриваются плоскости  $W(z) = \omega'(z) = d\omega(z)/dz = u - iv$  и  $\zeta = t + it$ , где  $u$  и  $v$  – составляющие комплексной скорости. Через  $S(z)$ ,  $S(\omega)$ ,  $S(w)$  и  $S(\bar{w})$  обозначаются соответственно область движения жидкости и соответствующие ей области комплексного потенциала, комплексной скорости и комплексно сопряженной области к области  $S(w)$ , а через  $\ell(z)$ ,  $\ell(\omega)$ ,  $\ell(w)$  и  $\ell(\bar{w})$  обозначаются границы, соответствующие этим областям.

Угловые точки границ  $\ell(z)$ ,  $\ell(\omega)$  и  $\ell(w)$ , которые встречаются при их обходе в положительном направлении, в порядке их встречаемости обозначим через  $A_k$ ,  $k = \overline{1,5}$ . Обозначения угловых точек через  $A_k$ ,  $k = \overline{1,5}$ , сохраняются для всех указанных границ областей  $S(z)$ ,  $S(\omega)$ ,  $S(w)$ . Точка  $A_2$ , как угловая точка, встречается только на границе  $\ell(w)$  области  $S(w)$ , а

этой точке  $A_2$  на границах  $\ell(z)$  и  $\ell(\omega)$  соответствуют обыкновенные неугловые точки. Область  $S(\bar{w})$  приведена на рис. 1 -  $\bar{w}$ .

Граничные условия вдоль границы  $\ell(z)$  области  $S(z)$ :  $A_1A_2$ :  $\varphi(x, y) = -H$ ,  $y = \operatorname{tg}(\pi\beta)x + \ell_1 \sin(\pi\beta)$ ;  $A_3A_4$ :  $\varphi(x, y) + y = 0$ ,  $y = \operatorname{tg}(\pi\beta)x + \ell_1 \sin(\pi\beta)$ , где  $\ell_1$  - длина боковой стороны треугольника,  $\pi\beta$  - угол наклона боковой стороны  $\ell_1$  к основанию треугольника.  $A_4A_5$ :  $\varphi(x, y) + y = 0$ ,  $\psi(x, y) = Q$ , где  $Q$  - расход на фильтрацию  $A_5A_1$ :  $\psi(x, y) = 0$ ,  $y = 0$ , где  $H$  - глубина воды водосборной галереи. Точке  $A_2$  на границе  $\ell(w)$  соответствует конец разреза с углом  $2\pi$ .

Полуплоскость  $I_m(\zeta) \geq 0$  плоскости  $\zeta = t + it$  конформно отображается на области  $S(z)$ ,  $S(\omega)$  и  $S(w)$ . Отображающие функции, соответствующие этим областям, обозначаются через  $\omega(\zeta) = z_1(\zeta)$ ,  $z(\zeta) = z_2(\zeta)$ . Угловым точкам  $A_k$ ,  $k = \overline{1,5}$  вдоль оси  $t$  соответствуют точки  $t = a_k$ ,  $k = \overline{1,5}$ , причем  $-\infty < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < \infty$ , где  $t = a_6 = \infty$ , отображается в неугловой точке  $A_6$ , которая находится между точками  $A_5$  и  $A_1$ .

С помощью функций  $z(\zeta)$ ,  $\omega(\zeta)$  и  $w(\zeta)$  область  $I_m(\zeta) > 0$  конформно отображается соответственно на области  $S(z)$ ,  $S(\omega)$  и  $S(w)$ . Следовательно, в области  $I_m(\zeta) \geq 0$  ищется система аналитических функций  $\omega(\zeta)$  и  $z(\zeta)$ , которые вместе с их производными  $\omega'(\zeta)$  и  $z'(\zeta)$  удовлетворяют граничным условиям [8]:

$$z_k(t) = m_{k1}(t)\overline{z_1(t)} + m_{k2}(t)\overline{z_2(t)} + n_k(t), \quad k = 1, 2 \quad -\infty < t < +\infty, \quad (1)$$

$$z'_k(t) = m_{k1}(t)\overline{z'_1(t)} + m_{k2}(t)\overline{z'_2(t)}, \quad k = 1, 2 \quad -\infty < t < +\infty, \quad (2)$$

где  $m_{kj}(t)$ ,  $n_k(t)$ ,  $j, k = 1, 2$ , - кусочно-постоянные функции с точками разрыва  $t = a_j$ ,  $j = \overline{1,5}$ ,  $\omega(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ ,  $z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $\overline{\omega(t)} = \varphi(t) - i\psi(t)$ ,  $\overline{z(t)} = x(t) - iy(t)$ . Условия в точках разрыва  $t = a_j$ ,  $j = \overline{1,5}$ , которым должны удовлетворять искомые функции, будут приведены ниже. Из точек  $t = a_k$ ,  $j = \overline{1,5}$ , согласно теореме Римана, произвольно выбираются и фиксируются три из них. В нашем случае параметры  $t = a_k$ ,  $j = \overline{1,5}$ ,

зафиксированы так :  $a_1 = -b, a_2 = -a, a_3 = 0, a_4 = a, a_5 = b$ .

Рассмотрим аналитический вектор  $\Phi(\zeta) = [\omega(\zeta), z(\zeta)]$  и его производную  $\Phi'(\zeta) = [\omega'(\zeta), z'(\zeta)]$ . Введем обозначения: когда  $\zeta \rightarrow t$  и  $\zeta \in I_m(\zeta) > 0$ , предельное значение векторов  $\Phi(\zeta), \Phi'(\zeta)$  обозначим через  $\Phi^+(t), \Phi'^+(t)$ , а когда  $\zeta \rightarrow t$  и  $\zeta \in I_m(\zeta) < 0$  – через  $\Phi^-(t), \Phi'^-(t)$ . С помощью векторов  $\Phi(\zeta)$  и  $\Phi'(\zeta)$  граничные условия (1) и (2) можно записать так [7]:

$$\Phi^+(t) = g(t)\Phi^-(t) + f(t), \quad -\infty < t < +\infty \quad (3)$$

$$\Phi'^+(t) = g(t)\Phi'^-(t), \quad -\infty < t < +\infty \quad (4)$$

Матрица  $g(t)$  и вектор  $f(t) = [n_1(t), n_2(t)]$  определяются так:

$$\begin{aligned} g_{-\infty}(t) &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, & f_{-\infty}(t) &= [0, 0], \quad -\infty < t < a_1, \\ g_{13}(t) &= \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & e^{i2\pi\beta} \end{pmatrix}, & f_{13}(t) &= [-2H, -i\ell, \sin(\pi\beta)e^{-i\pi\beta}], \quad a_1 < t < a_3, \\ g_{34}(t) &= \begin{pmatrix} -1, & -2\sin(\pi\beta)\exp(i\pi\beta) \\ 0, & \exp(2\pi\beta i) \end{pmatrix}, & f_{34}(t) &= \ell, \sin(2\pi\beta)e^{i\pi\beta}[-1, i], \quad a_3 < t < a_4, \\ g_{45}(t) &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -2i, & 1 \end{pmatrix}, & f_{45}(t) &= 2Q[i, 1], \quad a_4 < t < a_5, \\ g_{5\infty}(t) &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, & f_{5\infty}(t) &= [0, 0], \quad a_5 < t < +\infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим характеристические уравнения для точек  $t = a_j, j = \overline{1,5}$  [7,8]:

$$\det[g_j^{-1}(a_j + 0)g_{j-1}(a_j - 0) - \lambda E] = 0, \quad (6)$$

где  $\lambda$  – параметр,  $g_j(a_j + 0), g_{j-1}(a_j - 0)$  – предельные значения матриц  $g_j(t)$  в точке  $t = a_j$  соответственно справа и слева,  $g_j^{-1}(a_j + 0)$  – обратная матрица к матрице  $g_j(a_j + 0)$ ,  $E$  – единичная матрица.

Характеристические корни уравнения (6) для точки  $t = a_j$  обозначим через  $\lambda_{kj}, k = 1, 2, j = \overline{1,5}$ , а затем введем числа  $\alpha_{kj} = (2\pi i)^{-1} \ln \lambda_{kj}, k = 1, 2, j = \overline{1,5}$ ,

которые определяются с точностью до целых слагаемых чисел. Таким путем получаются показатели, которые характеризуют точку разрыва

$t = a_j, j = \overline{1,5}$ , для функций  $\omega'(t), z'(t)$ . Указанные целые слагаемые числа подобраны с таким расчетом, чтобы  $|\alpha_{1j} - \alpha_{2j}| = \nu_j$ , где  $\nu_j, j = \overline{1,5}$ , - внутренние углы при вершинах области  $S(w)$ . Характеристические показатели для функций  $\omega'(s), z'(s)$  в угловых точках  $A_j[\alpha_{1j}; \alpha_{2j}], j = \overline{1,6}$ , имеют вид:

$$A_1[-1/2; -\beta], A_2[2; 0], A_3[0; 0], A_4[\beta - 1/2; 0], A_5[-1; -1], A_6[3; 2].$$

Показатели  $A_j[\alpha_{1j}; \alpha_{2j}], j = \overline{1,6}$ , должны удовлетворять условию Фукса [1,2,8,9]. Действительно,

$$\sum_{k=1}^6 [1 - (\alpha_{1k} + \alpha_{2k})] = 2. \quad (7)$$

С помощью показателей  $A_j[\alpha_{1j}; \alpha_{2j}], j = \overline{1,5}$ , составим дифференциальное уравнение класса Фукса [1-17]:

$$U''(\zeta) + P(\zeta)U'(\zeta) + Q(\zeta)U(\zeta) = 0. \quad (8)$$

где

$$P(\zeta) = \sum_{j=1}^5 [1 - \alpha_{1j} - \alpha_{2j}] (\zeta - a_j)^{-1}, \quad (9)$$

$$Q(\zeta) = \sum_{j=1}^5 [\alpha_{1j}\alpha_{2j} (\zeta - a_j)^2 + c_j (\zeta - a_j)^1], \quad (10)$$

$c_j, j = \overline{1,5}$ , - аксессуарные параметры, подлежащие определению.

Функция  $W(\zeta)$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению Шварца [2,3,5,6,15]

$$\{W, \zeta\} = W''(\zeta)/W'(\zeta) - 1,5 [W'(\zeta)/W(\zeta)]^2 = R(\zeta), \quad (11)$$

где

$$R(\zeta) = -P'(\zeta) - \frac{1}{2}P^2(\zeta) + 2Q(\zeta) = \sum_{k=1}^5 \left[ \frac{1 - \nu_k^2}{2} (\zeta - a_k)^{-1} + C_k^* (\zeta - a_k)^{-1} \right], \quad (12)$$

где  $\nu_j, j = \overline{1,5}$ , - внутренние углы при вершинах области  $S(w)$ ,

$C_k^*, j = \overline{1,5}$ , - параметры, связанные с неизвестными параметрами

$a_j, c_j, j = \overline{1,5}$ , по формуле (12).



Функцию  $R(\zeta)$  вблизи  $\zeta = \infty$  можно представить в виде ряда

$$R(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \zeta^{-k}. \quad (13)$$

Так как точка  $\zeta = \infty$  является изображением неугловой точки  $A_6$  границы  $\ell(w)$  области  $S(w)$ , должны иметь место равенства [2,3,5,6,15]:

$$M_k = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Для того чтобы точки  $t = a_j, j = \overline{1,6}$ , были регулярными (правильными) особыми точками, для уравнения (8) необходимо и достаточно, чтобы  $P(\zeta)$  и  $Q(\zeta)$  имели вид (9) и (10), а параметры  $c_j, j = \overline{1,5}$ , удовлетворяли условию [1-3,6]:

$$M_1 = \sum_{k=1}^5 c_k = 0. \quad (15)$$

Фундаментальные исследования и методы построения аналитических решений фильтрационных задач  $Z(\zeta), \omega(\zeta), w(\zeta)$ , когда число угловых точек контура  $\ell(w)$  области  $S(w)$  не превосходит трех, и если еще к этим точкам добавляются устранимые, в смысле, принятом в теории фильтрации, особые точки, принадлежат академику П.Я. Полубариновой-Кочиной [8,9]. В настоящее время имеются возможности обобщить известные методы П.Я. Полубариновой-Кочиной для тех случаев, когда число угловых точек границы  $\ell(w)$  области  $S(w)$  больше трех. При этом будем считать, что с помощью дробно-линейного преобразования рассматриваемую область  $S(w)$  невозможно привести к линейному многоугольнику.

В работах [11-16] даются методы построения общего решения фильтрационных задач для любого конечного числа особых точек  $t = a_k, k = \overline{1,n}$ , где  $n$  - произвольное конечное целое положительное число. Эти решения в общем случае зависят от  $2(n-3)$  существенных параметров  $t = a_j, c_j, j = \overline{1,n}$ , где  $n$  - число угловых точек границы  $\ell(w)$  области  $S(w)$ , и еще от постоянных интегрирования нелинейного уравнения Шварца. Для определения (нахождения) всех указанных параметров составлены системы высших трансцендентных уравнений. Но решить подобные системы уравнений относительно  $2(n-3)$  числа параметров  $a_j, c_j (j = \overline{1,n})$  очень трудно. Из общего класса фильтрационных задач с частично неизвестными границами мы пока выделяем задачи с пятью



угловыми точками на границе  $\ell(w)$  области  $S(w)$ , решения которых можно довести до численных результатов. Здесь допускается только одно ограничение, что хотя бы в одной вершине области  $S(w)$  имеется конец разреза с углом  $2\pi$ . На остальные угловые точки никакие ограничения не накладываются.

Перейдем к решению задачи. Для построения линейно-независимых решений (8) сначала нужно построить локальные линейно-независимые решения вблизи всех особых точек  $t = a_k, k = \overline{1,6}$ , а затем однозначно связать эти решения между собой. С этой целью, уравнение (8) вблизи точек  $t = \overline{1,5}$  запишем в виде:

$$(\zeta - a_j)^2 u''(\zeta) + (\zeta - a_j) P_j(\zeta) u'(\zeta) + q_j(\zeta) u(\zeta) = 0, \quad (16)$$

где

$$P_j(\zeta) = P_{0j} + (\zeta - a_j) \sum_{k=1, k \neq j}^5 (1 - \alpha_{1k} - \alpha_{2k}) (\zeta - a_k)^{-1}, \quad (17)$$

$$q_j(\zeta) = \alpha_{1j} \alpha_{2j} + c_j (\zeta - a_j) + (\zeta - a_j)^2 \sum_{k=1, k \neq j}^5 [\alpha_{1k} \alpha_{2k} (\zeta - a_k)^{-2} + c_k (\zeta - a_k)^{-1}]. \quad (18)$$

Функции  $P_j(\zeta), q_j(\zeta)$  вблизи точки  $\zeta = a_j$  можно переписать следующим образом:

$$P_j(\zeta) = P_{0j} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{nj} (\zeta - a_j)^n, \quad P_{nj} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1, k \neq j}^5 [1 - \alpha_{1k} - \alpha_{2k}] (a_j - a_k)^{-n}, \quad (19)$$

$$P_{0j} = 1 - \alpha_{1j} - \alpha_{2j}, \quad q_j(\zeta) = \alpha_{1j} \alpha_{2j} + c_j (\zeta - a_j) + \sum_{n=2}^{\infty} q_{nj} (a_j - a_j)^n, \quad (20)$$

$$q_{nj} = (-1)^{n-2} \sum_{k=1, k \neq j}^5 [\alpha_{1k} \alpha_{2k} (n-1) + c_k (a_j - a_k)^{-1}] (a_j - a_k)^{-n}, \quad (21)$$

$$n = 2, 3, 4, \dots$$

$$q_{0j} = \alpha_{1j} \alpha_{2j}, \quad q_{1j} = c_j, \quad j = \overline{1,5}. \quad (22)$$

Общее  $w(\zeta)$  решение (11) с помощью линейно независимых решений (8)  $u_1(\zeta)$  и  $u_2(\zeta)$  представляется так:

$$w(\zeta) = [P w_1(\zeta) + q] / [r w_1(\zeta) + s], \quad (23)$$

где  $w_1(\zeta) = u_1(\zeta) / u_2(\zeta)$ ,  $p, r, q, s$  – постоянные интегрирования уравнения (11); в общем случае эти числа могут быть комплексными, при этом  $ps - rq = 1$ .

Локальные решения уравнения (16) для точек  $t = a_j, j = \overline{1,5}$ , будем искать

в виде:

$$u_j(\zeta) = (\zeta - a_j)^{r_j} \bar{u}_j(\zeta), \quad \bar{u}_j(\zeta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{nj} (\zeta - a_j)^n. \quad (24)$$

Для определения коэффициентов  $\gamma_{nj}$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ ,  $j = \overline{1, 5}$ , имеем следующие рекуррентные формулы

$$f_{0j}(\alpha_j) = \alpha_j(\alpha_j - 1) + P_{0j}\alpha_j + q_{0j} = 0, \quad (25)$$

$$\gamma_{1j} f_{0j}(\alpha_j + 1) + f_{1j}(\alpha_j) = 0, \quad (26)$$

$$\gamma_{2j} f_{0j}(\alpha_j + 2) + \gamma_{1j} f_{1j}(\alpha_j + 1) + f_{2j}(\alpha_j) = 0, \quad (27)$$

.....

$$\gamma_{nj} f_{0j}(\alpha_j + n) + \gamma_{(n-1)j} f_{1j}(\alpha_j + n - 1) + \gamma_{(n-2)j} f_{2j}(\alpha_j + n - 2) + \dots + \gamma_{1j} f_{(n-1)j}(\alpha_j + 1) + f_n(\alpha_j) = 0, \quad (28)$$

где  $f_n(\alpha_j) = \alpha_j P_n + q_n. \quad (29)$

Определяющее уравнение (25) для каждой точки  $t = a_j$ ,  $j = \overline{1, 5}$  имеет по два корня,  $\alpha_{1j}$  и  $\alpha_{2j}$ . Если разность  $\alpha_{1j} - \alpha_{2j}$  не целое число, тогда можно по (26)-(28) построить два линейно независимых решения с коэффициентами  $\gamma_{nj}^k$ ,  $j = \overline{1, 5}$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ ,  $k = \overline{1, 2}$ . Но так как для точек  $t = a_3$  и  $t = a_5$  имеет место равенство  $\alpha_{1j} - \alpha_{2j} = 0$ ,  $j = 3, 5$ , а для точки  $t = a_2$  равенство  $\alpha_{12} - \alpha_{22} = 2$ , то для этих точек по формулам (26)-(28) можно построить только  $u_{13}(\zeta)$ ,  $u_{15}(\zeta)$  и  $u_{12}(\zeta)$ . Для построения  $u_{2j}(\zeta)$ ,  $j = 3, 5$ , мы используем метод Фробениуса [1,6,15], получим:

$$u_{2j}(\zeta) = u_{1j}(\zeta) \ln(\zeta - a_j) + (\zeta - a_j)^{r_j} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{nj}^{2*} (\zeta - a_j)^n, \quad j = 3, 5, \quad (30)$$

где  $\gamma_{nj}^{2*} = \lim_{\alpha_j \rightarrow \alpha_{2j}} \frac{d\gamma_{nj}(\alpha_j)}{d\alpha_j}, \quad j = 3, 5, n = \overline{1, \infty}, \quad (31)$

$$\gamma_{1j}^{2*} = \lim_{\alpha_j \rightarrow \alpha_{2j}} \frac{d\gamma_{1j}(\alpha_j)}{d\alpha_j} = \lim_{\alpha_j \rightarrow \alpha_{2j}} (-1) \left\{ \frac{f_1'(\alpha_j)}{f_0(\alpha_j + 1)} - \frac{f_0(\alpha_j) f_1'(\alpha_j + 1)}{f_0^2(\alpha_j + 1)} \right\}, \quad (32)$$

$$\gamma_{2j}^{2*} = \lim_{\alpha_j \rightarrow \alpha_{2j}} (-1) \frac{d}{dt} \left[ \gamma_{1j}(\alpha_j) \frac{f_1(\alpha_j + 1)}{f_0(\alpha_j + 2)} + \frac{f_2(\alpha_j)}{f_0(\alpha_j + 2)} \right], \quad (33)$$



$$\gamma_{nj}^{2*} = \lim_{\alpha_j \rightarrow \alpha_{2j}} \frac{d\gamma_{nj}(\alpha_j)}{d\alpha_j} = \lim_{\alpha_j \rightarrow \alpha_{2j}} (-1) \frac{d}{d\alpha_j} \left\{ \gamma_{(n-1)j} f_1(\alpha_j + n - 1) + \gamma_{(n-2)j} f_2(\alpha_j + n - 2) + \dots + \gamma_{1j} f_{(n-1)}(\alpha_j + 1) + f_n(\alpha_j) \right\} / f_0(\alpha_j + n), \quad (34)$$

где  $\alpha_{13} = 0, \alpha_{23} = 0, \alpha_{15} = -1, \alpha_{25} = -1.$  (35)

После этого перейдем к построению  $u_{22}(\zeta)$ . Для точки  $t = a_2$  имеет место равенство  $\alpha_{12} - \alpha_{22} = 2$ . П.Я.Полубариновой-Кочиной было доказано, что для такой точки в решениях  $u_{k2}(\zeta), k = 1, 2$  отсутствуют логарифмические члены. Мы построим  $u_{22}(\zeta)$  согласно работам [11-17]. Равенство (27) при  $j=2, k=2$  не выполняется, так как  $f_{02}(\alpha_{12}) = f_{02}(\alpha_{22} + 2) = 0$ . Чтобы равенство (27) имело место, необходимо и достаточно потребовать выполнения условия [11-17]

$$\gamma_{12} f_1(\alpha_{22} + 1) + f_2(\alpha_{22}) = 0. \quad (36)$$

Уравнение (36) с учетом (26) можно записать так:

$$q_{12}(p_{12} + q_{12}) + q_{22} = 0 \quad (37)$$

где  $q_{12} = c_2, q_{22} = \sum_{k=1, k \neq j}^5 [\alpha_{1k} \alpha_{2k} + c_k (a_2 - a_k)] (a_2 - a_k)^{-2}, \quad (38)$

$$p_{12} = \sum_{k=1, k \neq j}^5 [1 - \alpha_{1k} - \alpha_{2k}] (a_2 - a_k)^{-1}. \quad (39)$$

После этого определим однозначно  $\gamma_{22}^2$ . Из (27) при  $\alpha_j \neq \alpha_{2j}$  определим  $\gamma_{2j}$ , имеем

$$\gamma_{2j} = -[\gamma_{12}(\alpha_j) f_1(\alpha_j + 1) + f_2(\alpha_j)] / f_0(\alpha_j + 2) \quad (39,)$$

Так как в (39) при  $\alpha_j \rightarrow \alpha_{22}$  числитель и знаменатель обращаются в нули, то, раскрывая по способу Лопиталья неопределенность в (39,), получим:

$$\gamma_{22}^2 = -\frac{1}{2} [p_{12}(p_{12} + 2q_{12}) + p_{22}] \quad (40)$$

Зная  $\gamma_{22}^2$ , можно последовательно, по формулам (26), (40) и (28), определить  $\gamma_{2n}^2, n = \overline{1, \infty}$ .

После этого перейдем к построению локальных решений вблизи  $\zeta = a_6 = \infty$ .



Представим коэффициенты уравнения (8)  $P(\zeta)$  и  $Q(\zeta)$  вблизи  $\zeta = \infty$  следующим образом:

$$P(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} P_{n\infty} \zeta^{-n}, \quad Q(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2} \sum_{n=0}^{\infty} q_{n\infty} \zeta^{-n}, \quad (41)$$

где

$$P_{n\infty} = \sum_{k=1}^5 (1 - \alpha_{1k} - \alpha_{2k}) a_k^n, \quad P_{0\infty} = 6, \quad (42)$$

$$q_{n\infty} = \sum_{k=1}^5 [\alpha_{1k} \alpha_{2k} (n+1) + c_k a_k] a_k^n, \quad (43)$$

$$q_{0\infty} = \sum_{k=1}^5 [\alpha_{1k} \alpha_{2k} + c_k a_k], \quad (44)$$

$$q_{1\infty} = \sum_{k=1}^5 [\alpha_{1k} \alpha_{2k} 2a_k + c_k a_k^2]. \quad (45)$$

Вблизи точки  $t = \infty$  локальные решения будем искать в виде

$$u_{\infty}(\zeta) = \zeta^{-\alpha_{\infty}} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{n\infty} \zeta^{-(\alpha_{\infty}+n)}. \quad (46)$$

Для определения  $\gamma_{n\infty}$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , имеем следующие рекуррентные формулы:

$$f_{0\infty}(\alpha_{\infty}) = \alpha_{\infty}(\alpha_{\infty} + 1) - p_{0\infty} \alpha_{\infty} + q_{0\infty} = 0, \quad (47)$$

$$\gamma_{1\infty} f_{0\infty}(\alpha_{\infty} + 1) - p_{1\infty} \alpha_{\infty} + q_{1\infty} = 0, \quad (48)$$

$$\gamma_{2\infty} f_{0\infty}(\alpha_{\infty} + 2) + \gamma_{1\infty} f_{1\infty}(\alpha_{\infty} + 2) - p_{2\infty} \alpha_{\infty} + q_{2\infty} = 0, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} & \gamma_{n\infty} f_{0\infty}(\alpha_{\infty} + 2) + \gamma_{(n-1)\infty} f_{1\infty}(\alpha_{\infty} + n - 1) + \gamma_{(n-2)\infty} f_{2\infty}(\alpha_{\infty} + n - 2) + \\ & + \dots + \gamma_{1\infty} f_{(n-1)\infty}(\alpha_{\infty} + 1) - p_{n\infty} \alpha_{\infty} + q_{n\infty} = 0, \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$f_{k\infty} = q_{k\infty} - (\alpha_{\infty} + k) p_{k\infty}. \quad (51)$$

Уравнение (47) должно иметь два корня:  $\alpha_{1\infty} = 3$ ,  $\alpha_{2\infty} = 2$ , поэтому свободный член  $q_{0\infty}$  должен удовлетворять условию

$$q_{0\infty} = \sum_{k=1}^5 [\alpha_{1k} \alpha_{2k} + c_k a_k] = 6. \quad (52)$$

Из-за того, что  $\alpha_{1\infty} - \alpha_{2\infty} = 1$ , равенство (48) не выполняется. Поэтому

формулы (48)-(50) позволяют определить только  $\gamma_{n\infty}$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , следовательно, решение  $u_{1\infty}(\zeta)$ . Для того, чтобы равенство (48) имело место при  $\alpha_{n\infty} = \alpha_{2\infty}$ , необходимо и достаточно потребовать выполнения условия:

$$q_{1\infty} - p_{1\infty} \alpha_{2\infty} = 0. \quad (53)$$

Для определения  $\gamma_{1\infty}^2$  следует поступить так. Из (48) нужно определить  $\gamma_{1\infty}$  при  $\alpha_{\infty} \neq \alpha_{2\infty}$ , получим

$$\gamma_{1\infty} = \frac{p_{1\infty} \alpha_{\infty} - q_{1\infty}}{f_{0\infty}(\alpha_{\infty} + 1)}. \quad (54)$$

Так как в (54), при  $\alpha_{\infty} \rightarrow \alpha_{2\infty}$ , одновременно числитель и знаменатель обращаются в нули, то нужно раскрыть неопределенность известным образом. В результате

$$\gamma_{1\infty}^2 = p_{1\infty}. \quad (55)$$

После этого по формулам (49) и (50) определим  $\gamma_{n\infty}^2$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Таким образом, получим второе решение  $u_{2\infty}(\zeta)$ . Окончательно имеем:

$$u_{k\infty}(\zeta) = \zeta^{-\alpha_{k\infty}} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{n\infty}^k \zeta^{-\alpha_{k\infty} - n}, \quad k = 1, 2. \quad (56)$$

Уравнения (14),  $M_k = 0$ ,  $k = 1, 2, 3$ , соответственно совпадают с уравнениями (15), (52) и (53).

Как было показано выше, локальные решения вблизи точек  $t = a_j$ ,  $j = \overline{1, 5}$ , имеют вид

$$\begin{aligned} u_{kj}(\zeta) &= (\zeta - a_j)^{\nu} \tilde{u}_{kj}(\zeta), \\ j &= \overline{1, 5}, \quad k = 1; \quad k = 2, \quad j = 1, 4; \quad \text{а для } k = 2, \quad j = 3, \quad j = 5, \\ u_{2j}(\zeta) &= u_{1j}(\zeta) \ln(\zeta - a_j) + (\zeta - a_j)^{\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{nj}^{2*} (\zeta - a_j)^n, \quad \text{где} \\ (\zeta - a_j)^{\nu} &> 0, \quad \ln(\zeta - a_j), \quad \zeta > a_j; \\ [(\zeta - a_j)^{\nu}]^{\pm} &= \exp(\pm \pi i \alpha_{kj}) (\zeta - a_j)^{\nu}, \quad \zeta < a_j; \\ [\ln(\zeta - a_j)]^{\pm} &= \ln(a_j - \zeta) \pm \pi i, \quad \zeta < a_j. \end{aligned}$$

Уравнение (8) можно записать в виде системы [1-17]:



$$u'(\zeta) = u(\zeta)P_0(\zeta),$$

где 
$$u(\zeta) = \begin{pmatrix} u_1(\zeta) & u'_1(\zeta) \\ u_2(\zeta) & u'_2(\zeta) \end{pmatrix}, \quad (58)$$

$$P_0(\zeta) = \begin{pmatrix} 0, & -Q(\zeta) \\ 1, & -P(\zeta) \end{pmatrix} \quad (59)$$

- матрицы второго порядка.

С помощью решений  $u_{kj}(\zeta), u_{\infty k}(\zeta), k=1,2; j=\overline{1,6}$ , построим локальные матрицы для точек  $a_j, j=\overline{1,6}$ , в следующем виде:

$$\begin{aligned} \theta_j(t) &= \begin{pmatrix} u_{1j}(t) & u'_{1j}(t) \\ u_{2j}(t) & u'_{2j}(t) \end{pmatrix}, \quad t > a_j; \\ \theta_j^*(t) &= \vartheta_j^* \theta_j(t), \quad t < a_j, \quad j = \overline{1,6}, \\ \vartheta_j^*(t) &= \begin{pmatrix} \exp(\pm i\pi\alpha_{1j}) & 0 \\ 0, & \exp(\pm i\pi\alpha_{2j}) \end{pmatrix}, \quad j = 1,2,4,6, \\ \vartheta_j^*(t) &= \begin{pmatrix} \exp(\pm i\pi\alpha_{1j}) & 0 \\ \pm \pi i \exp(\pm i\pi\alpha_{1j}) & \exp(\pm i\pi\alpha_{2j}) \end{pmatrix}, \quad j = 3,5, \\ \theta_j^*(t) &= \overline{\theta_j^-(t)}, \quad \theta_j^-(t) = \theta_j(t), \quad t > a_j, \end{aligned} \quad (60)$$

где  $\overline{\theta_j^-(t)}$  - комплексно сопряженная матрица по отношению к матрице  $\theta_j(t)$ .

Матрицы  $\theta_j(t), \theta_j^*(t), j = \overline{1,6}$ , являются локальными решениями системы уравнений (57). Действительные матрицы  $\theta_{j-1}(t), \theta_j^*(t)$  являются соответственно решениями вблизи точек  $t = a_{j-1}, t > a_{j-1}, t = a_j, t < a_j$ . Элементы этих матриц, составленные из рядов, одновременно сходятся в какой-то части интервала  $a_{j-1} < t < a_j$  и в этой части они являются решениями (57). Если обозначить области сходимости матриц  $\theta_j^*(t), \theta_{j-1}(t)$  через  $\rho_j, \rho_{j-1}$ , тогда в области  $t \in \rho_j \cap \rho_{j-1}$  эти матрицы связаны между собой следующим матричным тождеством:

$$\theta_j^*(t) = T_{j-1} \theta_{j-1}(t), \quad t \in \rho_j \cap \rho_{j-1}. \quad (61)$$



Из тождества (61) можно однозначно определить матрицу  $T_{j-1}$ , если зафиксировать  $t = t_j \in \rho_j \cap \rho_{j-1}$ . Рассмотрим два случая: 1) области сходимости матриц  $\theta_j^*(t)$ ,  $\theta_{j-1}^{(u)}$  пересекаются, т.е. эти области имеют общую часть, где элементы обеих матриц сходятся. Тогда из (61) однозначно определяется матрица  $T_{j-1} = \theta_j^*(t_j) \theta_{j-1}^{-1}(t_j)$ , где  $\theta_j^{-1}(t_j)$  – обратная матрица по отношению к матрице  $\theta_{j-1}(t_j)$ ; 2) области сходимости матриц  $\theta_j^*(t)$ ,  $\theta_{j-1}(t)$  не пересекаются. В этом случае в интервале  $(a_{j-1}, a_j)$  берется точка  $t = e_j = (a_{j-1} + a_j)/2$  и строится матрица, решение (57),  $\theta_{e_j}(t)$ . После этого очевидно, что от матрицы  $\theta_j^*(t)$  всегда можно перейти к матрице  $\theta_{j-1}(t)$  в следующей последовательности:

$$\theta_j^*(t) = T_{e_j} \theta_{e_j}(t), t \in \rho_j^* \cap \rho_{e_j}, \quad (62)$$

$$\theta_{e_j}(t) = T_{j-1}^* \theta_{j-1}(t), t \in \rho_{e_j} \cap \rho_{j-1}. \quad (63)$$

Матрица  $\theta_{e_j}(t)$  сходится в интервале  $(a_{j-1}, a_j)$ . Поэтому из (62) и (63) всегда можно однозначно определить матрицы  $T_{e_j}$  и  $T_{j-1}^*$ .

Исходя из вышесказанного, мы можем считать, что матрицу  $\theta_\infty(t)$  можно аналитически продолжить вдоль всей действительной оси  $t$ . Это означает, что, двигаясь вдоль оси  $t$  от точки  $t = a_6 = +\infty$ , нужно пройти весь контур действительной оси  $t$ , включая точку  $t = \infty$ , и вернуться к точке  $t = a_6 = -\infty$ .

Для определения функций  $\omega'(\zeta)$  и  $z'(\zeta)$  в интервале  $-\infty < t < +\infty$  рассмотрим матрицы:

$$\chi^\pm(t) = T \theta_\infty^\pm(t), \chi^+(t) = \overline{\chi^*(t)}, \theta_\infty^+(t) = \theta_\infty^-(t), a_5 < t < +\infty, \quad (64)$$

где 
$$T = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \det T = 1, \quad (65)$$

$p, q, r$  и  $s$  – постоянные интегрирования (11). Матрицы  $\chi^\pm(t)$  являются решениями уравнения (57) [11-17].

Матрица  $\chi^+(t)$  аналитически продолжается через интервал  $a_5 < t < +\infty, -\infty < t < a_1$ .

Матрицы  $\chi^\pm(t)$  должны удовлетворять граничному условию:

$$\chi^+(t) = \chi^-(t), \quad a_5 < t < +\infty,$$

Из (66) следует, что  $T$  - действительная матрица.

После этого определим матрицы  $\chi^\pm(t)$  вблизи  $t = a_5, t < a_5$ , имеем:

$$\chi^\pm(t) = TT_5\theta_5^\pm(t), \quad \theta_\infty(t) = T_5\theta_5(t), \quad \theta_5^+(t) = \theta_5^-(t), \quad t > a_5, \quad (67)$$

где матрица  $T_5$  определяется с помощью матриц  $\theta_\infty(t), \theta_5(t)$ . Матрицы (67) удовлетворяют граничному условию (4) в промежутке  $a_5 < t < +\infty$ .

После этого перейдем к промежутку  $a_4 < t < a_5$ , получим,

$$\chi^\pm(t) = TT_5\theta_5^\pm(t)\theta_5^+(t), \quad a_4 < t < a_5, \quad (68)$$

Матрицы  $\chi^+(t)$  и  $\chi^-(t)$  подставим в граничное условие (4) получим матричное уравнение:

$$TT_5\theta_5^+ = g_{45}TT_5\theta_5^-, \quad (69)$$

где

$$v_5^+ = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \pm \pi i, & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения  $TT_5 = T^*$ , где

$$T^* = \begin{pmatrix} p^* & q^* \\ r^* & s^* \end{pmatrix}, \quad p^* = pp_5 + qr_5, \quad q^* = pq_5 + qs_5, \quad r^* = rp_5 + sr_5, \quad s^* = rq_5 + ss_5.$$

Матричное уравнение (69) можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} p^* & q^* \\ r^* & s^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \pi i, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -2i, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^* & q^* \\ r^* & s^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -\pi i, & 1 \end{pmatrix}, \quad (70)$$

Из матричного уравнения (70) следует,

$$q^* = pq_5 + qs_5 = 0, \quad (71)$$

$$p^* + \pi s^* = pp_5 + qr_5 + \pi(rq_5 + ss_5) = 0. \quad (72)$$

После этого определим  $\chi^\pm(t)$  в интервале  $a_4 < t < a_5$  вблизи  $t = a_4$ :

$$\chi^\pm(t) = TT_5\theta_5^+T_4\theta_4^\pm(t), \quad a_4 < t < a_5. \quad (73)$$

Перейдем к интервалу,  $a_3 < t < a_4$ , получим

$$\chi^\pm(t) = TT_5\theta_5^+T_4\theta_4^+\theta_4^+(t), \quad a_3 < t < a_4. \quad (74)$$

Подставляя (74) в граничное условие, получим матричное уравнение,

$$TT_5\theta_5^+T_4\theta_4^+ = g_{34}TT_5\theta_5^+T_4\theta_4^-, \quad (75)$$

Из (75) следует:



$$r^* p_4 + s^* r_4 = 0,$$

$$p^* q_4 \cos(\pi\beta) + \sin(\pi\beta)(r^* q_4 + s^* r_4) = 0. \quad (76)$$

Определим матрицы  $\chi^{\pm}(t)$  вблизи  $t = a_3$ , имеем:

$$\chi^{\pm}(t) = TT_5 \vartheta_5^{\pm} T_4 \vartheta_4^{\pm} T_3 \vartheta_3^{\pm}(t), \quad a_3 < t < a_4, \quad (77)$$

Определим матрицы  $\chi^{\pm}(t)$  в интервале  $a_2 < t < a_3$ , имеем:

$$\chi^{\pm}(t) = TT_5 \vartheta_5^{\pm} T_4 \vartheta_4^{\pm} T_3 \vartheta_3^{\pm}(t), \quad a_2 < t < a_3. \quad (78)$$

Матрицы (79) подставим в граничное условие (4), получим следующее матричное уравнение:

$$TT_5 \vartheta_5^+ T_4 \vartheta_4^+ T_3 \vartheta_3^+ = g_{13} TT_5 \vartheta_5^- T_4 \vartheta_4^- T_3 \vartheta_3^-, \quad (79)$$

Из матричного уравнения (80) следует:

$$p_4 q_3 \sin(\pi\beta) + q_4 s_3 = 0, \quad (80)$$

$$p_4 p_3 \sin(\pi\beta) + p p_4 q_3 \cos(\pi\beta) + q_4 r_3 = 0. \quad (81)$$

Определим матрицы  $\chi^{\pm}(t)$  для промежутка  $a_1 < t < a_2$ , имеем:

$$\chi^{\pm}(t) = TT_5 \vartheta_5^{\pm} T_4 \vartheta_4^{\pm} T_3 \vartheta_3^{\pm} T_{21} \theta_1^{\pm}(t), \quad -\infty < t < a_1, \quad (82)$$

где  $T_{21} = T_2 T_1$ .

Подставляя матрицы  $\chi^{\pm}(t)$  в граничное условие (4), получим:

$$p_{21} = 0, \quad (83)$$

$$p_3 q_{21} + q_3 s_{21} = 0, \quad (84)$$

где  $p_{21}, q_{21}, r_{21}, s_{21}$  — элементы матрицы  $T_{21} = T_2 T_1$ .

Система (81) и (82) относительно  $(p_4, q_4)$  однородна. Чтобы система имела нетривиальное решение, детерминант этой системы должен равняться нулю, имеем:

$$\det T_3 \sin(\pi\beta) + p q_3 s_3 \cos(\pi\beta) = 0. \quad (85)$$

Равенство (86) связано с двойным или ангармоническим отношением четырех точек одного круга [5,10,11-17].

Продолжим  $\chi^{\pm}(t)$  аналитически при  $-\infty < t < a_1$ , имеем

$$\chi^{\pm}(t) = TT_5 \vartheta_5^{\pm} T_4 \vartheta_4^{\pm} T_3 \vartheta_3^{\pm} T_{21} \vartheta_1^{\pm} T_{-\infty} \theta_{-\infty}^{\pm}(t), \quad -\infty < t < a_1, \quad (86_1)$$

где  $\theta_1^{\pm}(t) = T_{-\infty} \theta_{-\infty}^{\pm}(t)$ ,  $\theta_2^{\pm}(t) = T_2 \theta_2^{\pm}(t)$ ,  $\theta_3^{\pm}(t) = T_3 \theta_3^{\pm}(t)$ . (87)

Следовательно, для особых точек  $t = a_j$ ,  $j = 1, 3, 4, 5$ , мы, получим по две



действительных, однородных относительно  $p, q, r, s, p_j, q_j, r_j, s_j, p_{21}, q_{21}, r_{21}, s_{21}, j = 1, 3, 4, 5$ , системы уравнений: (71), (72), (76), (77), (81), (82), (84), (85), а для точки  $t = a_2$  – только одно (37) уравнение. Для совместимости (81) и (82) относительно  $(p_4, q_4)$  мы получили уравнение (86). Для определения трех параметров  $p/s, q/s, r/s$  и семи параметров  $a, b, c_k, k = \overline{1,5}$ , всего мы получим систему, состоящую из 12-ти уравнений. Из этой системы уравнений выделим систему, состоящую из четырех уравнений (15), (37), (52), (53). Из этой системы можно определить параметры  $c_j, j = 1, 3, 4, 5$ , зависящие от параметров  $a, b, c_2$ , и подставить их в систему уравнений (71) (72), (76), (77), (81), (82), (89), (85), (86). Эту систему, кратности ради, можно обозначить через (1). Из системы матричных уравнений.

$$\begin{aligned} \theta_\infty(t) &= T_5 \theta_5(t), \quad a_5 < t < +\infty; \quad \theta_5^*(t) = T_4 \theta_4(t), \quad a_4 < t < a_5; \\ \theta_4^*(t) &= T_3 \theta_3(t), \quad a_3 < t < a_4; \quad \theta_3^*(t) = T_2 \theta_2(t), \quad a_2 < t < a_3; \\ \theta_2^*(t) &= T_1 \theta_1(t), \quad a_1 < t < a_2; \quad \theta_1^*(t) = T_\infty \theta_\infty(t), \quad -\infty < t < a_1 \end{aligned} \quad (88)$$

определим матрицы  $T_j, j = \overline{1,5}, T_\infty$ . Для этого зафиксируем  $t$  (вспомним, что это всегда возможно) для каждого из (88) уравнений в отдельности, где матрицы, присутствующие в каждом уравнении, сходятся. Например,

так: 
$$\begin{aligned} t_{+\infty} &= a_5 + (a_4 + a_5)/2, \quad t_{45} = (a_4 + a_5)/2, \quad t_{34} = (a_3 + a_4)/2, \\ t_{23} &= (a_2 + a_3)/2, \quad t_{12} = (a_1 + a_2)/2, \quad t_{-\infty} = a_1 + (a_1 + a_2)/2. \end{aligned} \quad (88_1)$$

Решение (88) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} T_5 &= \theta_\infty(t_{+\infty}) \theta_5^{-1}(t_{+\infty}), \quad T_j = \theta_{j+1}^*(t_{j(j+1)}) \theta_j^{-1}(t_{j(j+1)}), \quad j = \overline{1,4}, \\ T_\infty &= \theta_1^*(t_{-\infty}) \theta_\infty^{-1}(t_{-\infty}). \end{aligned} \quad (89)$$

Матрицы  $T_j, j = \overline{1,5}, T_\infty$ , зависят от неизвестных параметров  $a, b, c_j, j = \overline{1,5}$ , и известных параметров. Элементы матриц (89)  $p_j, q_j, r_j, s_j, j = \overline{1,5}, p_{+\infty}, q_{+\infty}, r_{+\infty}, s_{+\infty}$ , определенные из (89), подставим в систему уравнений (1), получим систему уравнений относительно параметров  $a, b$  и  $c_2, p/s, q/s$  и  $r/s$ . Из системы (71), (72), (76) и (77) можно определить параметры  $p/s, q/s$  и  $r/s$ . Действительно, из этой системы сначала определим  $p^*/s^*, r^*/s^*$  и подставим в (77), получим

$$p^*/s^* = -\pi, \quad r^*/s^* = -r_4/p_4, \quad q^* = pq^* + qs_5 = 0, \quad (90)$$

$$\sin(\pi\beta)\det T_4 - \pi q_4 p_4 \cos(\pi\beta) = 0. \quad (91)$$

Из системы (90) следует:

$$p/s = \alpha_1 \alpha_3, \quad q/s = \alpha_3, \quad r/s = \alpha_2, \quad (92)$$

где

$$\alpha_1 = -s_5/q_5, \quad \alpha_2 = -[r_4 s_5 + r_5 p_4] / [p_5 p_4 + r_4 q_5],$$

$$\alpha_3 = -\pi [\alpha_2 q_5 + s_5] / [\alpha_1 p_5 + r_5]. \quad (93)$$

Если в равенстве (23) числитель и знаменатель разделить на  $s$ , получим:

$$w(\zeta) = \left[ \frac{p}{s} w_1(\zeta) + q/s \right] / \left[ \frac{r}{s} w_1(\zeta) + 1 \right]. \quad (94)$$

Из (94) видно, что с помощью параметров  $p/s$ ,  $r/s$  и функции  $w_1(\zeta)$  решение  $w(\zeta)$  уравнения Шварца (11) определяется однозначно. С другой стороны, мы можем написать, что  $ps - rq = 1$ . Из этого равенства с учетом (92) можно определить  $s^2$ . Действительно, имеем:

$$s^2 [\alpha_1 - \alpha_2] \alpha_3 = 1. \quad (95)$$

Из (95) с точностью до знака можно определить  $s$ , а знак можно уточнить после определения функций  $\omega(\zeta)$  и  $z(\zeta)$ .

Уравнение (91) присоединим к системе (81), (82), (84) и (85) и получим систему пяти уравнений с тремя неизвестными:  $a, b$  и  $c_2$ . Число уравнений больше на две единицы, чем число неизвестных. Это согласуется с тем, что даже в случае линейных многоугольников число уравнений, как известно, больше числа неизвестных на две единицы.

Мы сначала определим функции  $\omega'(\zeta), z'(\zeta)$  и  $w(\zeta)$ , а затем функции  $\omega(\zeta)$  и  $z(\zeta)$ . Для этого определим линейно независимые решения (8)  $u_1(\zeta)$  и  $u_2(\zeta)$  вдоль всей оси  $t (-\infty < t < +\infty)$ .

С этой целью сначала выпишем значения матрицы  $\chi^+(t)$ .

Мы ниже, кратности ради, вместо  $\chi^+(t), u_k^+(t), k=1,2, w^+(t), \omega^+(t), Z^+(t)$  будем писать  $\chi(t), u_k(t), k=1,2, w(t), \omega(t)$  и  $Z(t)$ .



$$\chi(t) = \begin{pmatrix} p, & q \\ r, & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1\infty}(t), & u'_{1\infty}(t) \\ u_{2\infty}(t), & u'_{2\infty}(t) \end{pmatrix}, \quad a_5 < t < +\infty,$$

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} p, & q \\ r, & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_5, & q_5 \\ r_5, & s_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{15}(t), & u'_{15}(t) \\ u_{25}(t), & u'_{25}(t) \end{pmatrix}, \quad a_5 < t < +\infty,$$

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} p^*, & 0 \\ r^* + i\pi s^*, & s^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{15}^*(t), & u'_{15}^*(t) \\ u_{25}^*(t), & u'_{25}^*(t) \end{pmatrix}, \quad a_4 < t < a_5, \quad (96)$$

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} p^* p_4, & p q_4 \\ i\pi s^* p_4, & -p^* q_4 e^{i\pi\beta} / \sin(\pi\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{14}(t), & u'_{14}(t) \\ u_{24}(t), & u'_{24}(t) \end{pmatrix}, \quad a_4 < t < a_5,$$

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} -ip^* p_4 e^{i\pi\beta}, & p^* q_4 \\ -p^* p_4 e^{i\pi\beta}, & p^* q_4 e^{i\pi\beta} / \sin(\pi\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{14}^*(t), & u'_{14}^*(t) \\ u_{24}^*(t), & u'_{24}^*(t) \end{pmatrix}, \quad a_3 < t < a_4,$$

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} -ip^* p_4 \cos(\pi\beta)(P_3 + i\pi q_3), & -ip^* p_4 \cos(\pi\beta) \\ \pi p^* p_4 q_3 q_{21} \operatorname{ctg}(\pi\beta) e^{i\pi\beta}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{13}(t), & u'_{13}(t) \\ u_{23}(t), & u'_{23}(t) \end{pmatrix}, \quad a_3 < t < a_4,$$

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} -ip^* p_4 q_3 \cos(\pi\beta), & -ip^* p_4 q_3 \cos(\pi\beta) \\ \pi p^* p_4 q_3 q_{21} \operatorname{ctg}(\pi\beta) e^{i\pi\beta}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{13}^*(t), & u'_{13}^*(t) \\ u_{23}^*(t), & u'_{23}^*(t) \end{pmatrix}, \quad a_2 < t < a_3,$$

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} -ip^* p_4 q_3 \cos(\pi\beta), & -ip^* p_4 q_3 \cos(\pi\beta) \\ \pi p^* p_4 q_3 q_{21} \operatorname{ctg}(\pi\beta) e^{i\pi\beta}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_2, & q_2 \\ r_2, & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{12}(t), & u'_{12}(t) \\ u_{22}(t), & u'_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad a_2 < t < a_3,$$

$$\chi^*(t) = \begin{pmatrix} -ip^* p_4 q_3 r_{21} \cos(\pi\beta) r_{21}, & 0 \\ 0, & \pi p^* p_4 q_3 q_{21} \operatorname{ctg}(\pi\beta) e^{i\pi\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}(t), & u'_{11}(t) \\ u_{21}(t), & u'_{21}(t) \end{pmatrix}, \quad a_1 < t < a_3,$$

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} -p^* p_4 q_3 \cos(\pi\beta) r_{21}, & 0 \\ 0, & \pi p^* p_4 q_3 q_{21} \operatorname{ctg}(\pi\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^*(t), & u'_{11}^*(t) \\ u_{21}^*(t), & u'_{21}^*(t) \end{pmatrix}, \quad -\infty < t < a_1,$$

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} -p^* p_4 q_3 r_{21} \cos(\pi\beta), & 0 \\ 0, & \pi p^* p_4 q_3 q_{21} e^{i\pi\beta} \operatorname{ctg}(\pi\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{-\infty}, & q_{-\infty} \\ r_{-\infty}, & s_{-\infty} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1\infty}(t), & u'_{1\infty}(t) \\ u_{2\infty}(t), & u'_{2\infty}(t) \end{pmatrix}, \quad -\infty < t < a_1.$$



Из (96) определим  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  вдоль оси  $t(-\infty < t < +\infty)$  имеем:

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= p u_{1\infty}(t) + q u_{2\infty}(t), \quad a_3 < t < +\infty, \\
 u_2(t) &= r u_{1\infty}(t) + s u_{2\infty}(t), \quad a_3 < t < +\infty, \\
 u_1(t) &= p^* u_{15}(t), \quad a_3 < t < +\infty, \\
 u_2(t) &= r^* u_{15}(t) + s^* u_{25}(t), \quad a_3 < t < +\infty, \\
 u_1(t) &= p^* u_{15}(t), \quad a_3 < t < +\infty, \\
 u_2(t) &= (r^* + i\pi s^*) u_{15}^*(t) + s^* u_{25}^*(t), \quad a_4 < t < a_5, \\
 u_1(t) &= p^* p_4 u_{14}(t) + p^* q_4 u_{24}(t), \quad a_4 < t < a_5, \\
 u_2(t) &= i\pi s^* p_4 u_{14}(t) - [p^* q_4 e^{i\pi\beta} / \sin(\pi\beta)] u_{24}(t), \quad a_4 < t < a_5, \\
 u_1(t) &= -ip^* p_4 e^{i\pi\beta} u_{14}^*(t) + p^* q_4 u_{24}^*(t), \quad a_3 < t < a_4, \\
 u_2(t) &= -ip^* p_4 e^{i\pi\beta} u_{14}^*(t) - [p^* q_4 e^{i\pi\beta} / \sin(\pi\beta)] u_{24}^*(t), \quad a_3 < t < a_4,
 \end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= -ip^* p_4 \cos(\pi\beta) (p_3 + i\pi q_3) u_{13}(t) - ip^* p_4 q_3 \cos(\pi\beta) u_{23}(t), \quad a_3 < t < a_4, \\
 u_2(t) &= \pi p^* p_4 q_3 \operatorname{ctg}(\pi\beta) e^{i\pi\beta} u_{13}(t), \quad a_3 < t < a_4, \\
 u_1(t) &= -ip^* p_4 p_3 \cos(\pi\beta) u_{13}^*(t) - ip^* p_4 q_3 u_{23}^*(t), \quad a_2 < t < a_3, \\
 u_2(t) &= \pi p^* p_4 q_3 \operatorname{ctg}(\pi\beta) e^{i\pi\beta} u_{13}(t), \quad a_2 < t < a_3, \\
 u_1(t) &= -p^* p_4 \cos(\pi\beta) [p_3 (p_2 u_{12}(t) + q_2 u_{22}(t)) + q_3 (r_2 u_{12}^-(t) + s_2 u_{22}(t))] \quad a_2 < t < a_3, \\
 u_2(t) &= \pi p^* p_4 q_3 \operatorname{ctg}(\pi\beta) e^{i\pi\beta} (r_2 u_{12}(t) + s_2 u_{22}(t)), \quad a_2 < t < a_3, \\
 u_1(t) &= -ip^* p_4 p_3 \cos(\pi\beta) r_{21} u_{11}(t), \quad a_1 < t < a_2, \\
 u_2(t) &= \pi p^* p_4 q_3 \operatorname{ctg}(\pi\beta) e^{i\pi\beta} q_{21} u_{21}(t), \quad a_1 < t < a_2, \\
 u_1(t) &= -p^* p_4 q_3 \cos(\pi\beta) r_{21} u_{11}^*(t), \quad -\infty < t < a_1, \\
 u_2(t) &= \pi p^* p_4 q_3 \operatorname{ctg}(\pi\beta) q_{21} u_{21}^*(t), \quad -\infty < t < a_1, \\
 u_1(t) &= -p^* p_4 p_3 \cos(\pi\beta) r_{21} [p_{-} u_{1\infty}(t) + q_{-} u_{2\infty}(t)], \quad -\infty < t < a_1, \\
 u_2(t) &= \pi p^* p_4 q_3 \operatorname{ctg}(\pi\beta) q_{21} [r_{-} u_{1\infty}(t) + s_{-} u_{2\infty}(t)], \quad -\infty < t < a_1,
 \end{aligned} \tag{97}$$

Прежде, чем перейти к определению функций  $\omega'(\zeta)$ ,  $Z'(\zeta)$  и  $u(\zeta)$ , сделаем существенное замечание к вышесказанному.

Ряды  $u_{j\infty}(t)$ ,  $j = \overline{1,5}$ , и  $u_{k\infty}(t)$ ,  $k = 1,2$ , являются целыми функциями относительно параметров  $c_k$ ,  $k = \overline{1,5}$ , но по отношению к  $\zeta$  эти же ряды соответственно вблизи особых точек  $t = a_j$ ,  $j = \overline{1,5}$ ,  $t = \infty$ , сходятся, но

медленно, что сильно затрудняет процесс их вычислений. Для устранения отмеченных недостатков предполагается заменить эти ряды быстро и равномерно сходящимися функциональными рядами. Для этого достаточно упомянутые ряды  $u_{kj}(t)$ ,  $j = \overline{1,5}$ ,  $u_{k\infty}(t)$ ,  $k = 1,2$ , записать в другой форме.

Рассмотрим рекуррентные формулы (26)-(29), (19)-(21). Вместо рядов  $u_{kj}(\zeta)$ ,  $u_{k\infty}(\zeta)$ ,  $k = 1,2$ ,  $j = \overline{1,5}$  рассмотрим ряды:

$$u_{kj}(t) = (t-a_j)^{\alpha_{kj}} \tilde{u}_{kj}(t)(t-a_j), \quad \tilde{u}_{kj}(t-a_j) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{nj}^k(t-a_j)^n, \quad k = 1,2, \quad j = \overline{1,5}, \quad (98)$$

$$u_{k\infty}(t) = \zeta^{-\alpha_{k\infty}} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{n\infty}^k(\zeta) \right), \quad k = 1,2, \quad (99)$$

$$u_{2j}(t) = u_{1j}(t) \ln(t-a_j) + (t-a_j)^{\alpha_{2j}} \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{nj}^{2*}(t-a_j)^n, \quad j = 2,5, \quad (100)$$

где  $\gamma_{nj}^k$ ,  $\gamma_{n\infty}^k$  и  $\gamma_{nj}^{2*}$  определяются через  $f_{nj}(\alpha_j)$  и  $f_{k\infty}(\alpha_j)$  следующим образом:

$$f_{nj}[(t-a_j), \alpha_j] = \alpha_{kj} P_{nj}(t-a_j) + q_{nj}(t-a_j), \quad (101)$$

$$P_{nj}(t-a_j) = (-1)^{n-1} \sum_{k=1, j \neq k}^5 [1 - \alpha_{1k} - \alpha_{2k}] \left( \frac{t-a_j}{a_j - a_k} \right)^n, \quad (102)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$q_{nj}(t-a_j) = c_j(t-a_j),$$

$$q_{nj}(t-a_j) = (-1)^{n-2} \sum_{k=1, k \neq j}^5 [\alpha_{1k} \alpha_{2k} (n-1) + c_k(a_j - a_k)] \left( \frac{t-a_j}{a_j - a_k} \right)^n, \quad (103)$$

$$n = 2, 3, \dots$$

$$\left| \frac{t-a_j}{a_j - a_k} \right| < 1, \quad k \neq j; \quad (104)$$

$$P_{n\infty}(t) = \sum_{k=1}^5 (1 - \alpha_{1k} - \alpha_{2k}) \left( \frac{a_k}{t} \right)^n, \quad (105)$$

$$q_{n\infty}(t) = \sum_{k=1}^5 (\alpha_{1k} \alpha_{2k} (n+1) + c_k a_k) \left( \frac{a_k}{t} \right)^n, \quad (106)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$



$$\left| \frac{a_k}{t} \right| < 1.$$

Из формул (101)-(107) видно, что в области %%% функциональные ряды (98) и (99) сходятся быстрее, чем ряды  $u_{kj}(\zeta)$ ,  $j = \overline{1,5}$ ,  $u_{kn}(\zeta)$ ,  $k = 1,2$ , (24) и (46).

Матрицы  $\chi^+(t)$ , определенные по формулам (96) (матрица  $\chi^-(t)$  определяется по формуле  $\chi^-(t) = \overline{\chi^+(t)}$ ), удовлетворяют граничному условию (4), так как имеют место равенства (64)-(87).

$$\text{Функция} \quad w(t) = u_1(t)/u_2(t), \quad -\infty < t < +\infty. \quad (108)$$

даст решение (11), где  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  определены равенствами (97).

Составляющие вектора  $\Phi'(t)$  вдоль оси  $t$  определяются так:

$$\omega'(t) = u_1(t), \quad z'(t) = u_2(t), \quad -\infty < t < +\infty. \quad (109)$$

Равенства (109) можно переписать следующим образом:

$$d\omega(t) = u_1(t)dt, \quad dz(t) = u_2(t)dt, \quad -\infty < t < +\infty. \quad (110)$$

Проинтегрируем равенства (110) в интервалы:  $(-\infty, t)$  и  $(a_j, t)$ ,  $j = \overline{1,5}$ , получим:

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^t u_1(t)dt + \int_{-\infty}^t u_1(t)dt + \omega(-\infty + 0), \quad (111)$$

$$z(t) = \int_{-\infty}^t u_2(t)dt + \int_{-\infty}^t u_2(t)dt + z(-\infty + 0), \quad (112)$$

$$\omega(t) = \int_{a_j}^{t_{j(j+1)}} u_1(t)dt + \int_{t_{j(j+1)}}^t u_1(t)dt + \omega(a_j + 0), \quad (113)$$

$$z(t) = \int_{a_j}^{t_{j(j+1)}} u_2(t)dt + \int_{t_{j(j+1)}}^t u_2(t)dt + z(a_j + 0), \quad (114)$$

где  $(-\infty + 0)$ ,  $z(-\infty + 0)$  и  $\omega(a_j + 0)$ ,  $z(a_j + 0)$  обозначают предельные значения указанных функций в точках  $t = -\infty, t = a_j, j = 1,2,3,4$  справа, а через  $(-\infty - 0)$ ,  $Z(a_j - 0)$ ,  $\omega(a_j - 0)$  обозначаются предельные значения слева. Если  $t_{-\infty} < t < a_1, t_{j(j+1)} < t < a_{j+1}, j = \overline{1,5}$ , тогда можно пользоваться формулами (111-114), а если  $t < t_{j(j+1)}$ , тогда в этих же формулах берутся



первые слагаемые, содержащие интегралы, где вместо  $t_{j(j+1)}$  нужно взять

$t$ . При интегрировании мы встретимся с точкой  $t = a_5$ , в которой функции  $\omega'(t)$ ,  $z'(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $z(t)$  терпят разрыв. Поэтому, если точка  $t = a_5$  совпадает с нижним пределом интеграла, нужно ее заменить на  $a_5 + \varepsilon$ , а если  $t = a_5$  совпадает с верхним пределом интеграла, тогда ее следует заменить на  $t = a_5 - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – столь малое произвольное положительное число, чтобы соответствующие интегралы в указанных пределах могли существовать.

Очевидно, что функции  $\omega(t)$  и  $z(t)$ , определенные формулами (111)-(114), будут удовлетворять граничным условиям (3), так как вектор  $f(t) = [n_1(t), n_2(t)]$  – кусочно-постоянный вектор.

Если в формулах (111) и (112) взять  $t = a_1$ , а в (113) и (114)  $t = a_{j+1}$ , где  $a_6 = +\infty$ , получим:

$$\omega(a_1 - 0) = \int_{-\infty}^{t_1} u_1(t) dt + \int_{t_1}^{a_1} u_1(t) dt + \omega(-\infty + 0), \quad (115)$$

$$z(a_1 - 0) = \int_{-\infty}^{t_1} u_2(t) dt + \int_{t_1}^{a_1} u_2(t) dt + z(-\infty + 0), \quad (116)$$

$$\omega(a_{j+1} - 0) = \int_{a_j}^{t_{j(j+1)}} u_1(t) dt + \int_{t_{j(j+1)}}^{a_{j+1}} u_1(t) dt + \omega(a_j + 0), \quad (117)$$

$$z(a_{j+1} - 0) = \int_{a_j}^{t_{j(j+1)}} u_2(t) dt + \int_{t_{j(j+1)}}^{a_{j+1}} u_2(t) dt + z(a_j + 0), \quad (118)$$

где  $\omega(a_1 - 0)$ ,  $z(a_1 - 0)$ ,  $\omega(a_{j+1} - 0)$ ,  $z(a_{j+1} - 0)$ ,  $\omega(-\infty + 0)$ ,  $z(-\infty + 0)$ ,  $\omega(a_j + 0)$  и  $z(a_j + 0)$  определяются из граничных условий (3).

Систему уравнений (15), (52), (53) и (37) перепишем так:

$$\sum_{j=1, j \neq 2}^5 c_j = b_1, \quad \sum_{j=1, j \neq 2}^5 c_j a_j = b_2, \quad \sum_{j=1, j \neq 2}^5 c_j a_j^2 = b_3, \quad \sum_{j=1, j \neq 2}^5 c_j (a_2 - a_j)^{-1} = b_4, \quad (119)$$

где  $b_1 = -c_2$ ,  $b_2 = -c_2 a_2 - \sum_{k=1}^5 \alpha_{1k} \alpha_{2k} + 6$ .





Институт  
математики  
и механики  
Уральского  
федерального  
университета

$$b_3 = -c_2 a_2^2 - \sum_{k=1}^5 \alpha_{1k} \alpha_{2k} \cdot 2a_k + p_{1\infty} \alpha_{2\infty},$$

$$b_4 = -c_2 (p_{12} + c_2) - \sum_{k=1, k \neq 2}^5 \alpha_{1k} \alpha_{2k} (a_2 - a_k)^2. \quad (120)$$

Система (119) решается с помощью формул Крамера. Допустим, что система (119) решена и решение имеет следующий вид:

$$c_j = F_j(c_2, a, b), \quad j = 1, 3, 4, 5. \quad (121)$$

Из (89) определим элементы матриц  $T_j, j = \overline{1, 5}, T_{-\infty}$ , имеем:

$$p_j = \frac{1}{\det \theta_j(t_j^*)} [u_{1(j+1)}^*(t_j^*) u_{2j}^*(t_j^*) - u_{1j}^{*\prime}(t_j^*) u_{2(j+1)}^*(t_j^*)],$$

$$q_j = \frac{1}{\det \theta_j(t_j^*)} [-u_{1(j+1)}^*(t_j^*) u_{1j}^*(t_j^*) + u_{1(j+1)}^*(t_j^*) u_{1j}^*(t_j^*)],$$

$$r_j = \frac{1}{\det \theta_j(t_j^*)} [u_{2(j+1)}^*(t_j^*) u_{2j}^*(t_j^*) - u_{2(j+1)}^*(t_j^*) u_{2j}^*(t_j^*)],$$

$$s_j = \frac{1}{\det \theta_j(t_j^*)} [-u_{2(j+1)}^*(t_j^*) u_{1j}^*(t_j^*) + u_{2(j+1)}^*(t_j^*) u_{1j}^*(t_j^*)],$$

$$j = \overline{1, 4}. \quad (122)$$

Совершенно аналогично можно выписать элементы матриц  $T_5$  и  $T_{-\infty}$ .

Параметры  $c_j, j = \overline{1, 5}, j \neq 2$ , определенные по формуле (120),

подставим в (89), а элементы матриц  $T_j, T_{-\infty}, T_{+\infty}, j = \overline{1, 5}$ , подставим в систему уравнений (1) и (91).

Для того, чтобы решить систему уравнений (81), (82), (84), (85), (91) и (86), нужно определить пределы возможного изменения параметров  $c_2, a$  и  $b$ . В работах [11-17] даются методы определения интервалов, в которых могут изменяться параметры  $c_j, j = \overline{1, 5}$ . В нашем случае нам нужно определить промежуток изменения только одного параметра -  $c_2$ . А это можно сделать методом проб вблизи нуля, т.е.  $-2 < c_2 < 2$ . Параметры  $a$  и  $b$  изменяются в промежутках  $0 < a < b < +\infty$ . Допустим, что удалось найти  $c_2, a$  и  $b$ , тогда их значения нужно подставить в (92), (88), (96), (97), чтобы получить  $p, q, r$  и  $s, T_j, j = \overline{1, 5}, T_{-\infty}, c_j, j = \overline{1, 5}$  и, следовательно,



$w(s)$ ,  $\omega(s)$  и  $z(s)$ .

Из равенств (111)-(118) определим параметрические уравнения неизвестных частей границ  $\ell(z)$  и  $\ell(\omega)$ ; кроме этого, найдем уравнение для определения расхода жидкости  $Q$  на фильтрацию, а также неизвестные координаты точки  $A_4$ . С целью уменьшения объема статьи, формулы для определения неизвестных частей границ  $\ell(z)$  и  $\ell(\omega)$  приведем в комплексной форме. Имеем:

$$z(t) = \gamma_1 q_{21} \int_{a_1}^t u_{21}(t) dt + z(a_1+0), \quad a_1 < t < t_{12}, \quad (123)$$

$$z(t) = \gamma_1 \left[ r_2 \int_{t_{12}}^t u_{12}(t) dt + s_2 \int_{t_{12}}^t u_{22}(t) dt \right] + z(t_{12}+0), \quad t_{12} < t < a_2, \quad (124)$$

$$z(t) = \gamma_1 \left[ r_2 \int_{a_2}^t u_{12}(t) dt + S_2 \int_{a_2}^t u_{22}(t) dt \right] + z(a_2+0), \quad a_2 < t < t_{23}, \quad (125)$$

$$z(t) = \gamma_1 \int_{t_{23}}^t u_{13}^*(t) dt + z(t_{23}+0), \quad t_{23} < t < a_3, \quad (126)$$

$$z(t) = \gamma_1 \int_{a_3}^t u_{13}(t) dt + z(a_3+0), \quad a_3 < t < t_{34}, \quad (127)$$

$$z(t) = \gamma_2 \int_{t_{34}}^t u_{14}^*(t) dt - \gamma_3 \int_{t_{34}}^t u_{24}^*(t) dt + z(t_{34}+0), \quad t_{34} < t < a_4, \quad (128)$$

$$z(t) = \gamma_4 \int_{a_4}^t u_{14}(t) dt - \gamma_3 \int_{a_4}^t u_{24}(t) dt + z(a_4+0), \quad a_4 < t < t_{45}, \quad (129)$$

$$z(t) = \gamma_{45} \int_{t_{45}}^t u_{16}^*(t) dt + s^* \int_{t_{45}}^t u_{25}^*(t) dt + z(t_{45}+0), \quad t_{45} < t < a_5, \quad (130)$$


где

$$\gamma_1 = \pi p^* p_4 q_3 q_{21} ctg(\pi\beta) e^{i\pi\beta}, \quad \gamma_2 = -ip^* p_4 e^{i\pi\beta}, \quad (131)$$

$$\gamma_3 = p^* q_4 e^{i\pi\beta} / \sin(\pi\beta), \quad \gamma_4 = i\pi s^* p_4, \quad \gamma_5 = r^* + i\pi s^*.$$

Если в (129) и (130) отделить действительные части от мнимых, получим параметрическое уравнение депрессионной кривой.

Используя граничные условия в точках  $t = t_{12}$ ,  $t = a_2$ ,  $t = t_{23}$ ,  $t = a_3$ ,  $t = t_{34}$ ,  $t = a_4$ ,  $t = t_{45}$ ,  $t = a_5 - \epsilon$ , соответственно из формул (123)-(131) получим:



$$z(t_{12} - 0) = \gamma_1 q_{21} \int_{a_1}^{t_{12}} u_{21}(t) dt + z(a_1 + 0), \quad (132)$$

$$z(a_2 - 0) = \gamma_1 \left[ r_2 \int_{t_{12}}^{a_2} u_{12}(t) dt + s_2 \int_{t_{12}}^{a_2} u_{22}(t) dt \right] + z(t_{12} + 0), \quad (133)$$

$$z(t_{25} - 0) = \gamma_1 \left[ r_2 \int_{a_2}^{t_{25}} u_{12}(t) dt + s_2 \int_{a_2}^{t_{25}} u_{22}(t) dt \right] + z(a_2 + 0), \quad (134)$$

$$z(a_3 - 0) = \gamma_1 \int_{t_{25}}^{a_3} u_{13}(t) dt + z(t_{25} + 0), \quad (135)$$

$$z(t_{34} - 0) = \gamma_1 \int_{a_3}^{t_{34}} u_{13}(t) dt + z(a_3 + 0), \quad (136)$$

$$z(a_4 - 0) = \gamma_2 \int_{t_{34}}^{a_4} u_{14}(t) dt - \gamma_3 \int_{t_{34}}^{a_4} u_{24}(t) dt + z(t_{34} + 0), \quad (137)$$

$$z(t_{45} - 0) = \gamma_4 \int_{a_4}^{t_{45}} u_{14}(t) dt - \gamma_3 \int_{a_4}^{t_{45}} u_{24}(t) dt + z(a_4 + 0), \quad (138)$$

$$z(a_5 - \varepsilon) = \gamma_5 \int_{t_{45}}^{a_5 - \varepsilon} u_{15}(t) dt + s^* \int_{t_{45}}^{a_5 - \varepsilon} u_{25}(t) dt + z(t_{45} + 0). \quad (139)$$

Из (132)  $z(t_{12} - 0)$  можно подставить в (133), а затем (139) можно подставить в (134) и т.д.; тогда, например, по формуле (137) можем определить  $z(a_4 - 0)$ .

После этого из (115) и (117) определим  $\omega(t)$  имеем:

$$\omega(t) = h_1 q_{21} r_{21} \int_{a_1}^t u_{12}(t) dt + \omega(a_1 + 0), \quad (140)$$

где  $h_1 = -ip^* p_4$ , (141)

$$\omega(t) = h_1 \left\{ h_2 \int_{t_{12}}^t u_{11}(t) dt + h_3 \int_{t_{12}}^t u_{22}(t) dt \right\} + \omega(t_{12} + 0), \quad (142)$$



$$\omega(t) = h_1 \cos(\pi\beta) \left\{ h_2 \int_{a_2}^t u_{12}(t) dt + h_3 \int_{a_2}^t u_{22}(t) dt \right\} + \omega(a_2+0), \quad (143)$$

$$\omega(t) = h_1 \cos(\pi\beta) \left\{ \int_{t_{23}}^t u_{13}^*(t) dt - \int_{t_{23}}^t u_{23}^*(t) dt \right\} + \omega(t_{23}+0), \quad (144)$$

$$\omega(t) = h_1 \cos(\pi\beta) \left\{ (p_3 + ipq_3) \int_{a_3}^t u_{13}(t) dt - q_3 \int_{a_3}^t u_{23}(t) dt \right\} + \omega(a_3+0), \quad (145)$$

$$\omega(t) = h_1 e^{i\pi\beta} \int_{t_{34}}^t u_{14}^*(t) dt + p^* q_3 \int_{t_{34}}^t u_{24}^*(t) dt + \omega(t_{34}+0), \quad (146)$$

$$\omega(t) = p^* p_4 \int_{a_4}^t u_{14}(t) dt + p^* q_4 \int_{a_4}^t u_{24}(t) dt + \omega(a_4+0), \quad (147)$$

$$\omega(t) = p^* \int_{t_{45}}^t u_{15}^*(t) dt + \omega(t_{45}+0). \quad (148)$$

где  $h_2 = p_3 p_2 + q_3 r_2$ ,  $h_3 = p_3 p_2 + q_3 s_2$ . (149)

Используя граничные условия в точках  $t_{12}$ ,  $t = a_2$ ,  $t = t_{23}$ ,  $t = a_3$ ,  $t = t_{34}$ ,  $t = a_4$ ,  $t = t_{45}$ ,  $t = a_5 - \varepsilon$ , соответственно получим:

$$\omega(t_{12} - 0) = h_1 q_3 r_{21} \int_{a_1}^{t_{12}} u_{11}(t) dt + \omega(a_1+0), \quad (150)$$

$$\omega(a_2 - 0) = h_1 \left\{ h_2 \int_{t_{12}}^{a_2} u_{12}(t) dt + h_3 \int_{t_{12}}^{a_2} u_{22}(t) dt \right\} + \omega(t_{12}+0), \quad (151)$$

$$\omega(t_{23} - 0) = h_1 \cos(\pi\beta) \left\{ h_2 \int_{a_2}^{t_{23}} u_{12}(t) dt + h_3 \int_{a_2}^{t_{23}} u_{22}(t) dt \right\} + \omega(a_2+0), \quad (152)$$

$$\omega(a_3 - 0) = h_1 \cos(\pi\beta) \left\{ h_2 \int_{t_{23}}^{a_3} u_{13}^*(t) dt - h_3 \int_{t_{23}}^{a_3} u_{23}^*(t) dt \right\} + \omega(t_{23}+0), \quad (153)$$

$$\omega(t_{34} - 0) = h_1 \cos(\pi\beta) \left\{ (p_2 + ipq_3) \int_{a_3}^{t_{34}} u_{13}(t) dt - q_3 \int_{a_3}^{t_{34}} u_{23}(t) dt \right\} + \omega(a_3+0), \quad (154)$$



$$\omega(a_4 - 0) = h_1 e^{i\pi\beta} \int_{t_{34}}^{a_4} \dot{u}_{14}(t) dt + p^* q_3 \int_{t_{34}}^{a_4} \dot{u}_{24}(t) dt + \omega(t_{34} + 0),$$

$$\omega(a_4 - 0) = h_1 e^{i\pi\beta} \int_{t_{34}}^{a_4} \dot{u}_{14}(t) dt + p^* q_3 \int_{t_{34}}^{a_4} \dot{u}_{24}(t) dt + \omega(t_{34} + 0), \quad (155)$$

$$\omega(t_{45} - 0) = p^* p_4 \int_{a_5}^{t_{45}} \dot{u}_{14}(t) dt + p^* q_1 \int_{a_5}^{t_{45}} \dot{u}_{24}(t) dt + \omega(a_4 + 0), \quad (156)$$

$$\omega[(a_5 - \varepsilon) - 0] = p^* \int_{t_{45}}^{a_5} \dot{u}_{15}(t) dt + \omega(t_{45} + 0). \quad (157)$$

Если из (150) определить  $\omega(t_{12} - 0)$  и подставить в (151), а затем определить  $\omega(a_2 - 0)$  из (151) и подставить в (152) и так далее, тогда по (150)-(157) можно вывести формулу для определения расхода  $Q$  на фильтрацию и другие нужные формулы.

Как было сказано выше, для того чтобы довести аналитическое решение фильтрационной задачи до конца, нужно решить систему уравнений (81), (82), (84), (85) и (91), а также проверить (86) относительно  $a$ ,  $b$  и  $c_j$ . После этого следует определить  $c_j = 1, 3, 4, 5$ ,  $p, q, r, s, p_j, q_j, r_j, s_j, j = \overline{1, 5}$ ,

$p_{-\infty}, q_{-\infty}, r_{-\infty}, s_{-\infty}, p_{+\infty}, q_{+\infty}, r_{+\infty}, s_{+\infty}$ .

С помощью формул (123)-(157) можно непосредственно проверить, что все граничные условия выполняются. Для этого в этих формулах нужно отделить действительные и мнимые части. Далее с помощью формул (129) и (130), как было сказано выше, можно определить параметрическое уравнение депрессионной кривой. Наконец, нужно определить все геометрические и механические характеристики фильтрационной задачи.

Поступила 25.09.2001  
Кафедра теоретической механики

### Литература

1. Э.Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Перевод с английского. ОНТИ Государственное научно-техническое издательство Украины, г. Харьков, 1939, с. 717.
2. В.В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Изд. 2, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1950, с. 436.
3. А. Гурвиц, Р. Курант. Теория функций. Перевод с английского. "Наука". Главная редакция физико-математической литературы. Москва, 1968, с. 618.



4. Б.Б. Девисон. Движение грунтовых вод. В книге: С.А. Христианович, С.Г. Михлин, Б.Б. Девисон. Некоторые вопросы механики сплошной среды. Ленинград, АН СССР, 1938, с. 219-556.

5. В.Коппенфельс, Ф. Штальман. Практика конформных отображений. Перевод с немецкого. ИЛ, Москва, 1963, с. 406.

6. Э.А. Коддингтон и Н.Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Перевод с английского. ИЛ, Москва. 1958, с 474.

7. Н.И. Мухелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Издание третье, "Наука". Главная редакция физико-математической литературы. Москва, 1968, с 511.

8. П.Я. Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод. Издание второе, "Наука". Главная редакция физико-математической литературы. Москва, 1977, с. 664.

9. П.Я.Полубаринова-Кочина. Проблемы математики и механики. Сборник научных трудов, посвященный памяти академика М.А. Лаврентьева. "Наука". Сибирское отделение АН СССР. Новосибирск, 1983, с. 166-177.

10. И.И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. Издание десятое. ОГИЗ Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва-Ленинград, 1948, с. 451.

11. А.Р. Цицкишвили, Труды Тбилисского университета, Математика. Механика. Астрономия. 1977, с. 66-89.

12. А.Р. Цицкишвили. Дифференциальные уравнения, т. XII, № 1, 1976, с. 2044-2051.

13. А.Р. Цицкишвили. Дифференциальные уравнения, т. 21. №4, 1986, с. 646-656.

14. А.Р. Цицкишвили. Сборник научных трудов РАН. Сибирское отделение. Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева. Издательство Сибирского отделения РАН, Новосибирск, 1999, с. 174-188.

15. A. Tsitskishvili, Solution of the Schwarz Differential Equation, Memories of Differential Equations and Mathematical Physics. Vol. 11, 1997, Tbilisi, 129-156.

16. A. Tsitskishvili, Solution of some Plane Filtration Problems with Partially Unknown boundaries, Memories of Differential Equations and Mathematical Physics. vol. 15, 1998, Tbilisi, 109-138.

17. A. Tsitskishvili, Solution of a Problem of the Theory of Filtration Through a Plane Earth Dam (Coffer-dam) when Water Depth in a Downstream can be Neglected, Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, vol. 126, 2001, с. 75-96.



**რეზიუმე**

ნაშრომში ამოხსნილია ორგანზომილებიანი ფილტრაციის თეორიის ნაწილობრივ უცნობსაზღვრიანი ამოცანა, რომელიც დაკავშირებულია წყლების სტაციონარულ მოძინებასთან სამკუთხედის ფორმის სრულყოფილ წყალშემკრებ მილისაკენ. მიწისქვეშა წყლების მოძრაობის არეს ზემოდან ესაზღვრება უცნობი დეპრესიის წირი, ქვემოდან სითხეშეუღწევადი პორიზონტალური ფსკერი, ხოლო დახრილი ფერდების მხრიდან არე შემოსაზღვრულია გამოყოფნის და წყლის მოსაზღვრე მონაკვეთებით. ორდინატთა ლერძის მიმართ ფილტრაციის არის სიმეტრიულობის გამო, განხილულია ფილტრაციის არის მარცხენა ნახევარი. ფოროვანი არე იზოტროპულია, ერთგვაროვანი და არადეფორმადი სითხის მოძრაობა ემორჩილება დარსის კანონს.

სითხის მოძრაობის არეს, რომელიც მდებარეობს კომპლექსურ სიბრტყეზე, კომპლექსური პოტენციალის და კომპლექსური სინქარის სიბრტყეზე შეესაბამება მარტივად ბმული არეები. კომპლექსური სინქარის სიბრტყეზე გვაქვს წრიული ხუთკუთხედი, რომლის ორი წვერო მდებარეობს უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში.

შედგენილია ფილტრაციის ამოცანის შესაბამისი ფუქსის კლასის დიფერენციალური განტოლება და მისი შესაბამისი შვარცის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლება. ამ დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნების აგების შემდეგ, მოქმენილია ანალიზური ფუნქციები, რომელთა დახმარებითაც ნახევარი სიბრტყე კონფორმულად გადაისახება სითხის მოძრაობის არეზე. კომპლექსური პოტენციალის და კომპლექსური სინქარის არეებზე. ეს ფუნქციები აკმაყოფილებენ ზემოთ ნახსენები არეების საზღვრებზე ყველა სასაზღვრო პირობას. მოქმენილია ზემოთ ჩამოთვლილი არეების საზღვრების უცნობი უბნების პარამეტრული განტოლებები. ფილტრაციის თეორიის განხილული ამოცანის გეომეტრიული და მექანიკური მახასიათებელი პარამეტრების მოსაძებნად შედგენილია უმაღლესი ტრასცენდენტური განტოლებათა სისტემა.

**N. Jorbenadze, R. Tsitskishvili, A. Tsitskishvili**

**UNDERGROUND WATER INFLUX TO A PERFECT WATER CATCHER  
 OF TRIANGULAR FORM  
 Summary**

The two-dimensional problem of the theory of filtration with partially unknown boundary, connected with stationary underground water motion to a perfect water catcher of triangular form, is solved. The domain of filtration is assumed to be symmetrical with respect to the Oy-axis, therefore we consider only the left half of the

domain. The domain of underground water motion is bounded by the horizontal water impermeable base from below and by an unknown depression curve from above. Note that the leaking interval and the water boundary are taken into consideration,

The porous medium is homogeneous, isotropic and underformable. The liquid motion is subjected to the Darcy law. The plane of liquid motion coincides with the complex plane. The complex potential is introduced; its real and imaginary parts satisfy the Cauchy-Reimann conditions and also the two linearly independent boundary conditions.

To the domain occupied by the moving liquid there corresponds on the plane of complex velocity a circular pentagon two of whose vertices is at the point at infinity.

For the solution of the problem the differential Fuchs class equations and the corresponding nonlinear Schwartz differential equation are drawn up. Using the solutions of the above-mentioned differential equation, we constructed the analytic functions which map conformally the half-plane onto the domains of motion, of complex potential and complex velocity. Systems of higher transcendental equations for determination of mechanical and geometric characteristics of the problem of filtration as well as parametric equations of the unknown parts of boundaries of the above-mentioned domains are composed.

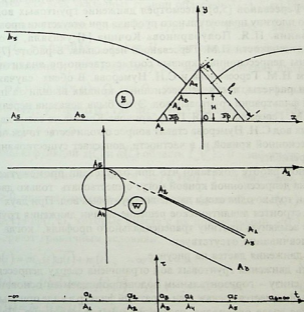


Рис. 1



УДК 532. 546

## РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ЧЕРЕЗ ЗЕМЛЯНУЮ ПЛОТИНУ ТРАПЕЦЕИДАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ ПРИ ОТСУТСТВИИ ПРОМЕЖУТКА ВЫСАЧИВАНИЯ

Р.А. Цицкишвили, А. Р. Цицкишвили

В данной работе рассматривается двумерная задача теории фильтрации через земляную плотину трапецеидального профиля при отсутствии промежутка высачивания, которая ранее была исследована и решена С.Н. Нумеровым [1,2,3]. При этом он рассмотрел два частных вида течения грунтовых вод: касательная к кривой депрессии, проведенная в точке ее выхода на нижний откос, 1) горизонтальна и 2) перпендикулярна к откосу.

Н.М. Герсеванов [5,6] рассмотрел движение грунтовых вод через земляную плотину прямоугольного профиля при отсутствии промежутка высачивания. П.Я. Полубаринова-Кочина [4] указала, что схема движения жидкости Н.М. Герсеванова нереальна. В работе [7] были построены депрессионные кривые соответственно по аналитическим решениям Н.М. Герсеванова и С.Н. Нумерова. В обоих случаях, как показали расчеты, части депрессионных кривых вышли за пределы областей фильтрации грунтовых вод. Этим была доказана нереальность схемы Н.М. Герсеванова. П.Я. Полубаринова-Кочина по схеме движения грунтовых вод С.Н. Нумерова ставит вопрос о количестве точек перегиба на депрессионной кривой и, в частности, допускает существование двух точек перегиба.

В данной работе доказано, что при отсутствии промежутка высачивания на депрессионной кривой могут существовать только две точки перегиба и только одна схема движения грунтовых вод. При двух точках перегиба строится аналитическое решение задачи движения грунтовых вод через земляную плотину трапецеидального профиля, когда промежуток высачивания отсутствует.

Схема движения дается на рисунке.

Область движения грунтовых вод ограничена сверху депрессионной кривой, а снизу – горизонтальным водонепроницаемым основанием. В нижнем бьефе имеется дренаж, или обратный фильтр в виде призмы [1.2.3].

Пористая среда однородна, изотропна и недеформируема. Движение жидкости подчиняется закону Дарси.

Плоскость движения жидкости совмещается с комплексной плоскостью  $z=x+iy$ . Вводится приведенный комплексный потенциал



$\omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  (комплексный потенциал, деленный на коэффициент фильтрации), действительная и мнимая части которого удовлетворяют условиям Коши-Римана и двум линейно-независимым граничным условиям. Функцию  $\varphi(x, y)$  называют потенциалом скорости, а  $\psi(x, y)$  – функцией тока. Вводится еще плоскость комплексной скорости  $W(z) = \omega'(z) = d\omega(z)/dz = u - iv$  и плоскость  $\zeta = t + it$ , где  $u$  и  $v$  – составляющие комплексной скорости. Через  $S(z), S(\omega), S(w), S(\bar{w})$  и  $S(1/w)$  обозначаются соответственно область движения жидкости и соответствующие ей области комплексного потенциала, комплексной скорости и комплексно сопряженной области к области  $S(w)$  и области  $S(1/w)$ , а через  $\ell(z), \ell(\omega), \ell(w), \ell(\bar{w})$  и  $\ell(1/w)$  обозначаются границы, соответствующие этим областям.

Угловые точки границ  $\ell(z), \ell(\omega)$  и  $\ell(w)$ , которые встречаются при их обходе в положительном направлении в порядке их встречаемости, обозначим через  $A_k, k = \overline{1,6}$ . Обозначения угловых точек через  $A_k, k = \overline{1,6}$ , сохраняются для всех указанных границ областей  $S(z), S(\omega), S(w)$ .

Граничные условия вдоль контура  $\ell(z)$  имеют вид:  $A_1, A_2$ :  $\varphi(x, y) = -H_2, y = tg(\pi\beta)(x - L)$ , где  $H_2$  – глубина воды в нижнем бьефе,  $\pi\beta$  – угол наклона  $A_1, A_2$  к горизонту,  $L$  – длина основания плотины,  $A_2, A_7, A_8$ :  $\varphi + y = 0, \psi(x, y) = Q$ , где  $Q$  – расход жидкости на фильтрацию;  $A_3, A_6$ :  $\varphi = -H_1, y = tg(\pi\alpha)x$ , где  $\pi\alpha$  – угол наклона  $A_3, A_6$  к горизонту;  $A_4, A_5$ :  $\psi(x, y) = 0, y = 0$ .

С помощью функций  $z(\zeta)$  и  $\omega(\zeta)$  область  $I_m(\zeta) > 0$  конформно отображается соответственно на области  $s(z)$  и  $s(\omega)$ . Следовательно, в области  $I_m(\zeta) \geq 0$  ищется симстема аналитических функций  $z = x(t, \tau) + iy(t, \tau), \omega(\zeta) = \varphi(t, \tau) + i\psi(t, \tau)$ , которые вместе с их производными  $z'(\zeta)$  и  $\omega'(\zeta)$  удовлетворяют граничным условиям:

$$\omega(t) = m_{11}(t)\overline{\omega(t)} + n_1(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (1)$$

$$z(t) = m_{21}(t)\overline{\omega(t)} + m_{22}(t)\overline{z(t)} + n_2(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (2)$$

$$\omega'(t) = m_{11}(t)\overline{\omega'(t)}, \quad -\infty < t < +\infty, \quad (1.1)$$

$$z'(t) = m_{21}(t)\overline{\omega'(t)} + m_{22}(t)\overline{z'(t)}, \quad -\infty < t < +\infty, \quad (2.1)$$

где  $m_{11}(t), m_{21}(t), m_{22}(t), n_1(t), n_2(t)$  – кусочно-постоянные функции с точками

разрыва

$$t = a_k, k = \overline{1,6}, z(t) = x(t) + iy(t), \omega(t) = \varphi(t) + i\psi(t), \overline{z(t)} = \\ = x(t) - iy(t), \overline{\omega(t)} = \varphi(t) - i\psi(t).$$

Из точек  $t = a_k, k = \overline{1,6}$ , согласно теореме Римана, произвольно выбираются и фиксируются три из них. В нашем случае эти параметры зафиксированы так:

$$a_1 = -b, a_2 = -a, a_3 = -c, a_4 = c, a_5 = a, a_6 = b.$$

Краткости ради рассмотрим аналитический вектор  $\Phi[\omega(\zeta), z(\zeta)]$  и его производную  $\Phi'(\zeta) = [\omega'(\zeta), z'(\zeta)]$ . С помощью векторов  $\Phi(\zeta)$  и  $\Phi'(\zeta)$  граничные условия можно записать так [9, 10]:

$$\Phi^+(t) = g(t)\Phi^-(t) + f(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (3)$$

$$\Phi'^+(t) = g(t)\Phi'^-(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (4)$$

где через  $\Phi^+(t)$  обозначается предел вектора  $\Phi(\zeta)$ , когда  $\zeta \rightarrow t$  из  $I_m(\zeta) > 0$ , а через  $\Phi^-(t)$  обозначается предел вектора  $\Phi(\zeta)$ , когда  $\zeta \rightarrow t$  из  $I_m(\zeta) < 0$ .

Матрица  $g(t)$  и вектор  $f(t) = [n_1(t), n_2(t)]$  определяются так:

$$\begin{aligned} g_{-\infty}(t) &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, & f_{-\infty}(t) &= [0, 0], & -\infty < t < a_1, \\ g_1(t) &= \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & \exp(i2\pi\beta) \end{pmatrix}, & f_1(t) &= [-2H_2, -2iL \sin(\pi\beta)e^{-i\pi\beta}], & a_1 < t < a_2, \\ g_2(t) &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2i, & 1 \end{pmatrix}, & f_2(t) &= 2Q[i, 1], & a_2 < t < a_3, \\ g_3(t) &= \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & \exp(i2\pi\alpha) \end{pmatrix}, & f_3(t) &= -2H_1[1, 0], & a_3 < t < a_6, \\ g_4(t) &= \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, & f_4(t) &= [0, 0], & a_6 < t < +\infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим характеристические уравнения для точек  $t = a_j, j = \overline{1,6}$  [3,10],

$$\det[g_j^{-1}(a_j + 0)g_{j-1}(a_j - 0) - \lambda E] = 0, \quad (6)$$

где  $\lambda$  – параметр,  $g_j(a_j + 0), g_{j-1}(a_j - 0)$  – предельные значения матриц  $g(t)$  в точке  $t = a_j$  соответственно справа и слева,  $g_j^{-1}(a_j + 0)$  – обратная матрица к матрице  $g_j(a_j + 0)$ ,  $E$  – единичная матрица.



Характеристические корни уравнения (6) для точки  $t = a_j$  обозначаются через  $\lambda_{kj}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $j = \overline{1, 6}$ , а затем вводятся числа  $\alpha_{kj} = (2\pi i)^{-1} \ln \lambda_{kj}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $j = \overline{1, 6}$ , которые определяются с точностью до целых слагаемых чисел. Таким путем получаются показатели, которые характеризуют точки разрыва  $t = a_j$ ,  $j = \overline{1, 6}$ , для функций  $\omega'(\zeta)$  и  $z'(\zeta)$ . Указанные целые слагаемые числа подобраны с таким расчетом, чтобы  $|\alpha_{1j} - \alpha_{2j}| = \nu_j$ , где  $\nu_j$ ,  $j = \overline{1, 6}$ , – внутренние углы при вершинах области  $s(w)$  [3].

Характеристические показатели для функций  $\omega'(\zeta)$  и  $z'(\zeta)$  в угловых точках  $A_j [\alpha_{1j}; \alpha_{2j}]$ ,  $j = \overline{1, 6}$ ,  $A_\infty [\alpha_{1\infty}; \alpha_{2\infty}]$  имеют вид:

$$A_1 [-1/2; -\beta], A_2 [-1/2; \beta - 1], A_3 [2; 0], A_4 [2; 0], A_5 [-1/2; -\alpha], A_6 [-1/2; \alpha - 1], A_\infty [3; 2].$$

Как видно из (1) и (2), функция  $\omega(\zeta)$  не зависит от функции  $z(\zeta)$ , поэтому (1) можно решить с помощью интеграла типа Коши в классе ограниченных функций. Функцию  $z(\zeta)$  тоже можно определить в классе ограниченных функций с помощью интеграла типа Коши. Мы при решении (1) и (2) будем пользоваться методами конформных отображений [3, 8, 11, 12].

Как известно, если область фильтрации  $s(z)$  ограничена неизвестной депрессионной кривой, прямыми и их частями, тогда область  $s(w)$  является круговым многоугольником.

Как было сказано в начале, мы рассматриваем задачу движения грунтовых вод через плотину трапециевидального профиля при отсутствии промежутка высачивания. Если при этом допустить, что касательная к депрессионной кривой в точке ее выхода на нижний откос вертикальна или перпендикулярна к нижнему откосу, тогда, как это доказывается ниже, такие схемы движения грунтовых вод при отсутствии промежутка высачивания нереальны. При этом ниже будет доказано, что на депрессионной кривой имеются только две точки перегиба – ни больше и ни меньше.

Допустим, что на депрессионной кривой имеется только одна точка перегиба  $A_3 [2; 0]$ , а второй точки перегиба  $A_4 [2; 0]$  нет. Как известно, характеристические показатели для функции  $\omega'(\zeta)$  и  $z'(\zeta)$  в угловых точках границы  $\ell(w)$  области  $s(w)$  и показатели  $A_\infty [\alpha_{1\infty}, \alpha_{2\infty}]$  определяются однозначно. Допустим, что один из показателей для функции  $z'(\zeta)$  в точке  $A_2$  неизвестен, и обозначим его через  $\alpha_{22}$ . Следовательно, мы имеем следующие показатели:

$A_1 [-1/2; -\beta], A_2 [-1/2; \alpha_{22}], A_3 [2; 0], A_4 [-1/2; -\alpha], A_6 [-1/2; \alpha - 1], A_5 [3; 2]$   
 Сумма всех показателей должна удовлетворять условию Фукса [3, 10]

$$\sum_{k=1}^6 [1 - (\alpha_{1k} + \alpha_{2k})] = 2, \quad (7)$$

где  $\alpha_{kj}, k=1,2, j=1,2,3,4,5,6,7$ .

Решим (7) относительно  $\alpha_{22}$ , получим  $\alpha_{22} = \beta$ . Этому показателю на контуре  $\ell(w)$  в точке  $A_2$  соответствует угол  $\pi(1/2 + \beta) = \pi\nu_2$  т.е. касательная в точке  $A_2$  вертикальна. Показатель в точке  $A_2$  для функции  $z(\zeta)$  равен  $(1 + \beta)$ , что нереально. Схема такого течения бессмысленна, так как движущаяся жидкость выходит за область движения. Допустим, что на депрессионной кривой имеются две точки перегиба  $A_3[2, 0]$  и  $A_4[2, 0]$ . Тогда если записать условие Фукса для семи точек, получим:

$$\sum_{k=1}^7 [1 - (\alpha_{1k} + \alpha_{2k})] = 2. \quad (8)$$

Решим (8) относительно  $\alpha_{22}$ , получим  $\alpha_{22} = \beta$ . Следовательно, показатель функции  $z'(\zeta)$  в точке  $A_2$  равен  $\beta - 1$ , а угол на границе  $\ell(w)$  в точке  $A_2$  равен  $\pi(1/2 - \beta) = \pi\nu_2$ . Показатель при вершине  $A_2$  для функции  $z(\zeta)$  равен  $\beta$ , что соответствует реальной картине течения грунтовых вод. В этом случае касательная в точке  $A_2$  к кривой депрессии горизонтальна.

Если увеличить число точек перегиба на депрессионной кривой и допустить, что их три, тогда получается, что показатель в точке  $A_2$  для функции  $z'(\zeta)$  равен  $(\beta - 2)$ . Этому показателю соответствует вдоль контура  $\ell(w)$  в точке  $A_2$  угол  $\pi(3/2 - \beta) > 0$ , а вдоль контура  $\ell(z)$  - показатель  $(\beta - 1) < 0$ , что нереально. Следовательно, когда отсутствует промежуток высачивания, тогда на депрессионной кривой существуют две и только две точки перегиба. Кроме этого, можем заключить, что при отсутствии промежутка высачивания существует только одна схема движения грунтовых вод через земляную плотину трапецидального профиля.

После того, как установили число особых точек и показателей в особых точках, определим области  $s(\bar{w})$  и  $s(1/w)$ , а затем найдем решение этой задачи. На рисунке даются области  $s(\bar{w})$  и  $s(1/w)$ .

Обозначим длины известных участков границы  $\ell(z)$  области  $s(z)$  следующим образом:  $|A_6 A_1| = L, |A_1 A_2| = \ell_2, |A_3 A_6| = \ell_1$ , а координаты некоторых



угловых точек обозначим так:  $z(A_1) = L$ ;  $z(A_2) = L + \ell_2 \cos \pi\beta + i\ell_2 \sin \pi\beta$ ;  $z(A_3) = \ell_1 \cos \pi\alpha + i\ell_1 \sin \pi\alpha$ ;  $z(A_4) = 0$ .

Нам ниже придется иметь дело с многозначными функциями типа  $(\zeta - a)^{\nu}$ , где  $\nu$  - действительное число. Из функции  $(\zeta - a)^{\nu}$  выберем однозначную ветвь следующим образом. Через  $[(\zeta - a)^{\nu}]^+$  обозначим предельное значение этой функции, когда  $\zeta \rightarrow t$  при  $\zeta \in I_m(\zeta) > 0$ , а через  $[(\zeta - a)^{\nu}]^-$  обозначим предельное значение функции  $(\zeta - a)^{\nu}$ , когда  $\zeta \rightarrow t$  при  $\zeta \in I_m(\zeta) < 0$ .

Вдоль оси  $t$  в интервале  $-\infty < t < a$ , проведем разрез с двумя берегами. Функция  $(\zeta - a)^{\nu}$  аналитически продолжается через интервал  $(a, +\infty)$ , поэтому имеют место равенства:

$$\begin{aligned} [(t - a)^{\nu}]^+ &= [(t - a)^{\nu}], \quad t > a, \\ [(t - a)^{\nu}]^+ &= \exp(i\pi\nu) (a - t)^{\nu}, \quad t < a, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} [(t - a)^{\nu}]^- &= \exp(-i\pi\nu) (a - t)^{\nu}, \quad t < a, \\ [(t - a)^{\nu}]^- &= [\overline{(t - a)^{\nu}}] \end{aligned} \quad (10)$$

где  $[\overline{(t - a)^{\nu}}]$  есть комплексно сопряженная к функции  $[(t - a)^{\nu}]^+$ .

Сначала построим функцию  $\omega(\zeta)$ . Область  $s(\omega)$  дается на рис. 1 -  $\omega$ . Функция  $\omega'(\zeta)$  вдоль оси  $t$  определяется так:

$$\begin{aligned} \omega'(t) &= M [(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)]^{-1/2}, \quad -\infty < t < -b, \\ \omega'(t) &= iM [(t^2 - a^2)(b^2 - t^2)]^{-1/2}, \quad -b < t < -a, \\ \omega'(t) &= M [(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)]^{-1/2}, \quad -a < t < a, \\ \omega'(t) &= (-i)M [(t^2 - a^2)(b^2 - t^2)]^{-1/2}, \quad a < t < b, \\ \omega'(t) &= M [(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)]^{-1/2}, \quad b < t < +\infty. \end{aligned} \quad (11)$$

где  $M$  - постоянная, подлежащая определению.

Интегрируя (11), получим:



$$\omega(t) = M \int_{-\infty}^t [(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)]^{-1/2} dt + \omega(-\infty), \quad -\infty < t < -b, \quad (12)$$

$$\omega(t) = iM \int_b^t [(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)]^{-1/2} dt - H_2, \quad -b < t < -a, \quad (13)$$

$$\omega(t) = M \int_a^t [(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)]^{-1/2} dt + iQ - H_2, \quad -a < t < a, \quad (14)$$

$$\omega(t) = (-i)M \int_a^t [(t^2 - a^2)(b^2 - t^2)]^{-1/2} dt + iQ - H_1, \quad a < t < b, \quad (15)$$

$$\omega(t) = M \int_b^t [(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)]^{-1/2} dt - H_1, \quad b < t < +\infty, \quad (16)$$

Используя граничные условия в точках  $t = -b$ ,  $\omega(-b) = -H_2$ ;  $t = -a$ ,  $\omega(-a) = iQ - H_2$ ;  $t = a$ ,  $\omega(a) = iQ - H_1$ ;  $t = b$ ,  $\omega(b) = -H_1$ ;  $\omega(+\infty) = \omega(-\infty)$  соответственно получим:

$$\begin{aligned} -H_2 &= M \int_{-b}^{-\infty} [(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)]^{-1/2} dt + \omega(-\infty), \\ iQ - H_2 &= iM \int_b^{-a} [(t^2 - a^2)(b^2 - t^2)]^{-1/2} dt - H_2, \\ iQ - H_1 &= M \int_a^{-a} [(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)]^{-1/2} dt + iQ - H_2, \\ -H_1 &= (-i)M \int_a^b [(t^2 - a^2)(b^2 - t^2)]^{-1/2} dt + iQ - H_1, \\ \omega(+\infty) &= M \int_b^{+\infty} [(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)]^{-1/2} dt - H_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Из условий (17); второе и четвертое уравнения совпадают. Если исключить  $\omega(+\infty)$  из первого и последнего уравнений, получим условие, совпадающее с третьим условием. Следовательно, имеем

$$Q = K'(\lambda')(H_1 - H_2) / [2K(\lambda)], \quad (18)$$

$$M = b(H_1 - H_2) / [2K(\lambda)], \quad (19)$$

где

$$\lambda = a/b; \lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}, \quad K(\lambda) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}},$$

$$K(\lambda') = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-(\lambda')^2 t^2)}}$$

Для полного определения  $\omega(\zeta)$  нужно определить параметры:  $M$ ,  $Q$ ,  $a$  и  $b$ . Для их определения мы получили пока два уравнения – (18) и (19). Остаются неопределенными параметры  $a$  и  $b$ .

После этого переходим к определению функции  $\frac{dz}{d\omega}$ , имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{dz}{d\omega} = M_1 B_3(t),$$

$$B_3(t) = (-t-b)^{\nu_1-1} (-t-a)^{\nu_2-1} (t^2-c^2)(a-t)^{\nu_3-1} (b-t)^{\nu_4-1}, \quad -\infty < t < -b,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dz}{d\omega} = i e^{i\pi\alpha} M_1 B_4(t),$$

$$B_4(t) = (t+b)^{\nu_1-1} (-t-a)^{\nu_2-1} (t^2-c^2)(a-t)^{\nu_3-1} (b-t)^{\nu_4-1}, \quad -b < t < -a,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dz}{d\omega} = (-1) M_1 B_5(t),$$

$$B_5(t) = (t+b)^{\nu_1-1} (t+a)^{\nu_2-1} (t^2-c^2)(a-t)^{\nu_3-1} (b-t)^{\nu_4-1}, \quad -a < t < -a,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dz}{d\omega} = (-i) e^{i\pi\alpha} M_1 B_2(t), \quad (20)$$

$$B_2(t) = (t+b)^{\nu_1-1} (t+a)^{\nu_2-1} (t^2-c^2)(t-a)^{\nu_3-1} (b-t)^{\nu_4-1}, \quad a < t < b,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dz}{d\omega} = M_1 B_1(t),$$

$$B_1(t) = (t+b)^{\nu_1-1} (t+a)^{\nu_2-1} (t^2-c^2)(t-a)^{\nu_3-1} (b-t)^{\nu_4-1}, \quad b < t < +\infty,$$

где

$$\nu_1 = 1/2 - \beta, \nu_2 = \beta - 1/2, \nu_3 = 2, \nu_4 = 2, \nu_5 = 1/2 - \alpha, \nu_6 = \alpha - 1/2, \quad (21)$$

$M_1$  – постоянная, подлежащая определению.

Функция  $\frac{d}{dt} \frac{dz}{d\omega}$ , определенная по формуле (20), в точках  $t=-a$ ,  $t=b$  имеет разрывы, порядок которых больше единицы, поэтому (20) можно проинтегрировать в интервалах  $(-\infty, t)$ ,  $(-b, t)$ ,  $(t, a)$ ,  $(a, t)$ ,  $(t, +\infty)$ , получим:





$$\frac{dz}{d\omega} = M_1 \int_{-\infty}^t B_3(t) dt + \frac{dz}{d\omega}(-\infty), \quad -\infty < t < -b,$$

$$\frac{dz}{d\omega} = ie^{i\pi\theta} M_1 \int_{-b}^t B_4(t) dt, \quad -b < t < -a,$$

$$\frac{dz}{d\omega} = M_1 \int_t^a B_3(t) dt - ie^{i\pi\alpha}, \quad -a < t < -a,$$

$$\frac{dz}{d\omega} = -ie^{i\pi\alpha} M_1 \int_a^t B_2(t) dt - ie^{i\pi\alpha}, \quad a < t < b, \quad (22)$$

$$\frac{dz}{d\omega} = -M_1 \int_t^{+\infty} B_1(t) dt + \frac{dz}{d\omega}(+\infty), \quad b < t < +\infty.$$

Из (22) получим:

$$dz(t) = M_1 M [(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)]^{1/2} \left( \int_{-b}^t B_3(t) dt \right) dt + \omega'(t) \frac{dz}{d\omega}(-\infty) dt, \quad -\infty < t < -b,$$

$$dz(t) = -e^{i\pi\theta} M_1 M [(t^2 - a^2)(b^2 - t^2)]^{1/2} \left( \int_{-b}^t B_4(t) dt \right) dt, \quad -b < t < -a, \quad (23)$$

$$dz(t) = M_1 M [(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)]^{1/2} \left( \int_t^a B_3(t) dt \right) dt + (-i)e^{i\pi\alpha} \omega'(t) dt, \quad -a < t < a,$$

$$dz(t) = (-1)M_1 M e^{i\pi\alpha} [(t^2 - a^2)(b^2 - t^2)]^{1/2} \left( \int_a^t B_2(t) dt \right) dt + (-i)e^{i\pi\alpha} \omega'(t) dt, \quad a < t < b,$$

$$dz(t) = -M_1 M [(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)]^{1/2} \left( \int_t^{+\infty} B_1(t) dt \right) dt + \omega'(t) \frac{d}{d\omega}(+\infty) dt, \quad b < t < +\infty.$$

Проинтегрируем (23), получим:

$$z(t) = M_1 M \int_{-\infty}^t \left[ (t^2 - a^2)(t^2 - b^2) \right]^{-1/2} \left( \int_{-\infty}^t B_2(t) dt \right) dt + [\omega(t) - \omega(-\infty)] \frac{dz}{d\omega}(-\infty) + z(-\infty),$$

$$-\infty < t < -b,$$

$$z(t) = -e^{i\pi\beta} M_1 M \int_{-b}^t \left[ (t^2 - a^2)(b^2 - t^2) \right]^{-1/2} \left( \int_{-b}^t B_4(t) dt \right) dt + L, \quad -b < t < -a, \quad (24)$$

$$z(t) = M_1 M \int_{-a}^t \left[ (a^2 - t^2)(b^2 - t^2) \right]^{-1/2} \left( \int_{-a}^t B_3(t) dt \right) dt + (-i)e^{i\pi\alpha} [\omega(t) - \omega(-a)] + L +$$

$$+ \ell_2 \cos(\pi\beta) + i\ell_2 \sin(\pi\beta), \quad -a < t < -a,$$

$$z(t) = (-i)e^{i\pi\alpha} M_1 M \int_a^t \left[ (t^2 - a^2)(b^2 - t^2) \right]^{-1/2} \left( \int_a^t B_2(t) dt \right) dt + (-i)e^{i\pi\alpha} [\omega(t) - \omega(-a)] +$$

$$+ \ell_1 \cos(\pi\alpha) + i\ell_1 \sin(\pi\alpha), \quad a < t < b,$$

$$z(t) = -M_1 M \int_b^t \left[ (t^2 - a^2)(t^2 - b^2) \right]^{-1/2} \left( \int_b^t B_1(t) dt \right) dt + [\omega(t) - \omega(b)] \frac{d}{d\omega} (+\infty), \quad b < t < +\infty.$$

Используем граничные условия для функции  $z(\zeta)$  в точках  $t=-a$ ,  $t=a$ ,  $t=b$ , получим систему уравнений:

$$z(-a) = -e^{i\pi\beta} M_1 M \int_{-b}^{-a} \left[ (t^2 - a^2)(b^2 - t^2) \right]^{-1/2} \left( \int_{-b}^t B_4(t) dt \right) dt + z(-\infty), \quad (25_1)$$

$$z(a) = -M_1 M \int_{-a}^a \left[ (a^2 - t^2)(b^2 - t^2) \right]^{-1/2} \left( \int_{-a}^t B_3(t) dt \right) dt + (-i)e^{i\pi\alpha} [\omega(a) - \omega(-a)] + z(-a), \quad (25_2)$$

$$(25)$$

$$z(b) = (-i)e^{i\pi\alpha} M_1 M \int_a^b \left[ (t^2 - a^2)(b^2 - t^2) \right]^{-1/2} \left( \int_a^t B_2(t) dt \right) dt + (-i)e^{i\pi\alpha} [\omega(b) - \omega(a)] + z(a), \quad (25_3)$$

где

$$z(-a) = z(A_2), \quad z(-b) = L, \quad z(a) = z(A_3), \quad z(b) = z(A_6) = 0,$$

$$\omega(a) - \omega(-a) = H_2 - H_1, \quad \omega(b) - \omega(a) = -iQ.$$

Можно проверить, что если в равенствах (25<sub>1</sub>) и (25<sub>3</sub>) отделить действительную часть от мнимой, то эти части после упрощения становятся равными друг другу. Что касается (25<sub>2</sub>), то из него получается только одно уравнение. Мы выпишем эти уравнения. Соответственно из (25<sub>1</sub>) и (25<sub>3</sub>) получим:

$$\ell_2 = -M_1 M \int_{-b}^{-a} \left[ (t^2 - a^2)(b^2 - t^2) \right]^{-1/2} \left( \int_{-b}^t B_4(t) dt \right) dt, \quad (26_1)$$



$$\ell_1 \cos(\pi\alpha) = -M_1 M \int_{-a}^a [(t^2 - a^2)(b^2 - t^2)]^{-1/2} \left( \int_{-b}^a B_2(t) dt \right) dt + (H_2 - H_1) \gamma g(\pi\alpha) + L + \ell_2 \cos(\pi\beta), \quad (26_1)$$

$$(26_2)$$

$$\ell_1 = \frac{Q}{\cos(\pi\alpha)} + M_1 M \int_a^b [(t^2 - a^2)(b^2 - t^2)]^{-1/2} \left( \int_a^t B_2(t) dt \right) dt. \quad (26_3)$$

Следовательно, мы получили систему уравнений (18), (19), (26<sub>1</sub>), (26<sub>2</sub>), (26<sub>3</sub>), состоящую из пяти уравнений с шестью неизвестными:  $Q$ ,  $M$ ,  $M_1$ ,  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Не хватает одного уравнения. Это, естественно, потому, что на

плоскости  $\frac{dz}{d\omega} = \frac{1}{w}$  мы имеем линейный многоугольник, две вершины

которого лежат на бесконечности, и по этой причине не могли составить полную систему уравнений. Как известно, когда линейный многоугольник ограничен, тогда существует простой метод, с помощью которого по заданным сторонам многоугольника можно составить систему уравнений относительно неизвестных параметров, входящих в формулу Кристоффеля-Шварца. Указанный метод непригоден, если несколько вершин заданного многоугольника лежат в бесконечно удаленной точке. Существует метод и для этого случая, но он довольно сложный [8]. Для получения еще одного уравнения мы поступим следующим образом. Вернемся к уравнению (24) и рассмотрим (24<sub>1</sub>) и (24<sub>2</sub>). Используем граничные условия соответственно в точках:  $t = -b$  и  $t = \infty$ . Учтем, что

$$\frac{dz}{d\omega}(-\infty) = \frac{dz}{d\omega}(+\infty), \quad z(-\infty) = z(+\infty), \quad z(-b) = L, \quad z(b) = 0,$$

тогда получим:

$$L = M_1 M \int_{-\infty}^{-b} [(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)]^{-1/2} \left( \int_{-\infty}^{-b} B_2(t) dt \right) dt + [\omega(-b) - \omega(-\infty)] \frac{dz}{d\omega}(-\infty) + z(-\infty), \quad (27)$$

$$z(+\infty) = -M_1 M \int_b^{+\infty} [(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)]^{-1/2} \left( \int_b^{+\infty} B_1(t) dt \right) dt + [\omega(+\infty) - \omega(b)] \frac{dz}{d\omega}(+\infty), \quad (28)$$

Значение  $z(+\infty)$  из (28) подставим в (27), получим:

$$L = M_1 M_2 \left\{ \int_{-\infty}^{-b} [(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)]^{-1/2} \left( \int_{-\infty}^{-b} B_1(t) dt \right) dt - \int_b^{+\infty} [(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)]^{-1/2} \left( \int_b^{+\infty} B_1(t) dt \right) dt \right\} + (H_1 - H_2) \frac{dz}{d\omega} (+\infty) \quad (29)$$

Если в уравнении (22<sub>1</sub>) взять  $t = -b$  и учесть, что  $\frac{dz}{d\omega}(-b) = 0$ , получим:

$$\frac{dz}{d\omega}(-\infty) = -M_1 \int_{-\infty}^{-b} B_2(t) dt \quad (30)$$

Так как  $\frac{dz}{d\omega}(+\infty) = \frac{dz}{d\omega}(-\infty)$ , то в равенстве (29) вместо  $\frac{dz}{d\omega}(+\infty)$

можем подставить значение  $\frac{dz}{d\omega}(-\infty)$ , по формуле (36), получим:

$$L = M_1 M_2 \left\{ \int_{-\infty}^{-b} [(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)]^{-1/2} \left( \int_{-\infty}^{-b} B_1(t) dt \right) dt - \int_b^{+\infty} [(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)]^{-1/2} \left( \int_b^{+\infty} B_1(t) dt \right) dt \right\} + (H_1 - H_2) M_1 \int_{-\infty}^{-b} B_2(t) dt \quad (31)$$

Уравнение (31) присоединим к системе (18), (19) и (26). Из этой системы исключим Q и M, тогда получим систему (26) и (31). Приведем схему расчета системы (26<sub>1</sub>), (26<sub>2</sub>), (26<sub>3</sub>) и (31). С этой целью введем обозначения:

$$\omega_0^{(j)}(t) = -[(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)]^{-1/2}, \quad (32)$$

$$B_j(t) = (t^2 - c^2) B_{0j}(t), \quad j = \overline{1, 5}, \quad (33)$$

$$\ell^{(j)} = -M_1 M_2 \{ \gamma_j^{(2)} - c_2 \gamma_j^{(0)} \}, \quad j = \overline{1, 4}, \quad (34)$$

$$\ell^{(1)} = \ell_2, \quad \ell^{(2)} = \ell_1 \cos(\pi\alpha) + (H_1 - H_2) g(\pi\alpha) - L - \ell_2 \cos(\pi\beta),$$

$$\ell^{(3)} = -\ell_1 + \frac{Q}{\cos(\pi\alpha)}, \quad \ell^{(4)} = -L,$$

$$\gamma_1^{(4)} = \int_{-\infty}^{-b} \omega_0^{(1)}(t) \left( \int_{-\infty}^{-b} B_{04}(\zeta) \zeta^k d\zeta \right) dt,$$

$$\gamma_2^{(4)} = \int_{-\infty}^{-b} \omega_0^{(1)}(t) \left( \int_b^{+\infty} B_{03}(\zeta) \zeta^k d\zeta \right) dt,$$

$$\gamma_3^{(4)} = \int_b^{+\infty} \omega_0^{(1)}(t) \left( \int_{-\infty}^{-b} B_{02}(\zeta) \zeta^k d\zeta \right) dt, \quad (34_1)$$

$$\gamma_4^{(4)} = \int_{-\infty}^{-b} \omega_0^{(1)}(t) \left( \int_{-\infty}^{-b} B_{01}(\zeta) \zeta^k d\zeta \right) dt - \int_b^{+\infty} \omega_0^{(1)}(t) \left( \int_b^{+\infty} B_{01}(\zeta) \zeta^k d\zeta \right) dt + \frac{(H_2 - H_1)}{M} \int_{-\infty}^{-b} B_{05}(\zeta) \zeta^k d\zeta,$$

$k = 2, 0$ .

Из системы уравнений (34) возьмем систему  $j=1,2$  и из нее составим следующее выражение:

$$\ell^{(1)}/\ell^{(2)} = [\gamma_1^{(2)} - c^2 \gamma_1^{(0)}] / [\gamma_2^{(2)} - c^2 \gamma_2^{(0)}]. \quad (35)$$

Из (35) определим параметр  $c^2$ , получим:

$$c^2 = [\ell^{(1)} \gamma_2^{(2)} - \ell^{(2)} \gamma_1^{(2)}] / [\ell^{(1)} \gamma_2^{(0)} - \ell^{(2)} \gamma_1^{(0)}] = T_0 \quad (36)$$

Из системы уравнений (34) возьмем систему  $j=1,4$ , из нее определим  $M_1 M$  и подставим в (34) при  $i=4$ , получим:

$$M_1 M = -\ell^{(1)} / [\gamma_1^{(2)} - c^2 \gamma_1^{(0)}], \quad (37)$$

$$\ell^{(3)}/\ell^{(1)} = [\gamma_3^{(2)} - c^2 \gamma_3^{(0)}] / [\gamma_1^{(2)} - c^2 \gamma_1^{(0)}], \quad (38)$$

$$\ell^{(4)}/\ell^{(1)} = [\gamma_4^{(2)} - c^2 \gamma_4^{(0)}] / [\gamma_1^{(2)} - c^2 \gamma_1^{(0)}]. \quad (39)$$

В систему уравнений (38) и (39) вместо  $c^2$  подставим его значение  $T_0$ , получим:

$$\ell^{(3)}/\ell^{(1)} = [\gamma_3^{(2)} - T_0 \gamma_3^{(0)}] / [\gamma_1^{(2)} - T_0 \gamma_1^{(0)}], \quad (40)$$

$$\ell^{(4)}/\ell^{(1)} = [\gamma_4^{(2)} - T_0 \gamma_4^{(0)}] / [\gamma_1^{(2)} - T_0 \gamma_1^{(0)}]. \quad (41)$$

Система уравнений (40) и (41) зависит только от неизвестных параметров  $a$  и  $b$  и от известных параметров  $L, \ell_2, \ell_1, \alpha, \beta, H_1$  и  $H_2$ . Для решения этой системы нужно задать известные параметры в виде определенных чисел и затем решить систему (40) и (41) относительно  $a$  и  $b$ . Алгоритм решения такой системы существует. Допустим, решили систему (40), (41) и получили  $a^*$  и  $b^*$ . Найденные числа подставим в (36), найдем  $c^2$ , а затем  $c$  и  $-c$ . После этого определим  $Q$  и  $M$ . Наконец, по формуле (37) определим  $M_1$ . Зная вышеперечисленные параметры, по формуле (24) можно определить параметрическое уравнение депрессионной кривой. Этим путем решение задачи можно довести до численных результатов.

Поступила 25.09.2001

Кафедра теоретической механики ТГУ

### Литература

1. В.И. Аравин, С.Н. Нумеров. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. Гостехиздат, Москва, 1953, с. 616.
2. С.Н. Нумеров. Решение задач о фильтрации без промежутков высачивания и инфильтрации или испарения со свободной поверхности. Прикладная математика и механика, 1942, т. VI, в. №1, с. 75-86.



3. П. Я. Полубаринова-Кочина. Теория движения грунтовых вод. Издание второе. «Наука», Москва, 1977, с.664.
4. П. Я. Полубаринова-Кочина, С. В. Фалькович. Теория фильтрации жидкостей в пористых средах. Прикладная математика и механика, 1947, т.11, вып. №6, с. 629-674.
5. Н. М. Герсеванов. Приложение функционального анализа при решении задач по фильтрации грунтовых вод. Известия АН ГССР. Отд. техн. наук, 1943, №7, с. 73-80.
6. Н. М. Герсеванов. Итерационное исчисление и его приложения, Машстройиздат, Москва, 1950, с. 69.
7. А. Р. Цицкишвили. Об итерационном методе Н. М. Герсеванова. Прикладная математика и механика. 1957, т.21. №2, с. 291-296.
8. В. Коппенфельс, Ф. Штальман. Практика конформных отображений. Перевод с немецкого, ИЛ, Москва, 1963, с. 157-161.
9. Н. И. Мухелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, Москва, 1968, с.511.
10. Н. П. Векуа. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. «Наука», Москва, 1970, с. 379.
11. В. В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Изд. 2-е, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1950, с. 436.
12. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. «Наука», Москва, 1973, с. 736.

რ. ციციშვილი, ა. ციციშვილი

ფილტრაციის თეორიის ორგანოზომილებიანი ამოცანის ამოხსნა ტრაპეციის ფორმის მიწის კაშხალში, როდესაც არ არსებობს შუალედი რეზიუმე

განიხილება ფილტრაციის თეორიის ორგანოზომილებიანი ამოცანა ტრაპეციის პროფილის მქონე მიწის კაშხალში, როდესაც არ არსებობს გამოყოფის შუალედი. ამასთან კაშხლის ქვედა ფერდი პორიზონტთან ადგენს მახვილ კუთხეს. ეს ამოცანა 1942 წელს შეისწავლა და ამოხსნა ს. ნ. ნუმეროვმა. მის მიერ მიღებული ამონახსნის მიხედვით დასაშვებია გრუნტის წყლების მოძრაობის ორი სქემა. მოცემულ ნაშრომში მკაცრად მტკიცდება, რომ არსებობს გრუნტის წყლების მოძრაობის მხოლოდ და მხოლოდ ერთი სქემა და მის შესაბამის დეპრესიის მრუდზე არსებობს მხოლოდ და მხოლოდ ორი გადაღუნვის წერიტილი. ამოცანის ამონახსნი აგებულია კონფორმული გადასახვის მეთოდების გამოყენებით. ამასთან, ამოცანის უცნობი პარამეტრების მოსაძებნად მიღებული განტოლებათა სისტემა გაანალიზებულია და მოცემულია უცნობი პარამეტრების მიმართ მიღებული სისტემის ამონახსნის მიღების ალგორითმი. მოქმენილია დეპრესიის მრუდის პარამეტრული განტოლება.



R. Tsitskishvili, A. Tsitskishvili

SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF THE THEORY OF FILTRATION THROUGH A PLANE EARTH DAM OF TRAPEZOIDAL PROFILE IN THE ABSENCE OF LEAKING INTERVAL

Summary

The two-dimensional problem of the theory of filtration through a plane earth dam of trapezoidal profile free from leaking interval, when the lower slope of the dam makes up with the horizon an acute angle, is considered. This problem has been studied and solved in 1942 by S.N. Numerov. His solution admits the existence of two schemes of underground water motion.

In the present work it is strictly proved that there exists only one scheme of underground water motion, and the corresponding depression curve admits the existence of only two points of inflection. The solution of the problem is constructed by the method of conformal mappings. Moreover, the obtained system of equations is analyzed with respect to unknown parameters of the problem; its algorithm of solution is given which allows one to reduce the analytic solution to numerical results. The parametric equation of the depression curve is found.

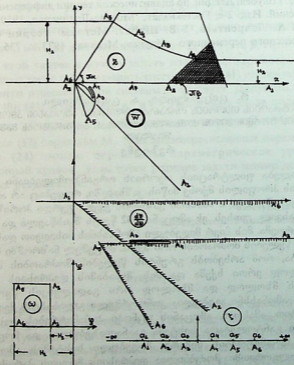


Рис.

УДК 538

## ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПРИ СИЛЬНОМ ОТСОСЕ

Дж.В. Шарикадзе, В.Дж. Шарикадзе

При решении задачи расчета пограничного слоя в несжимаемой жидкости с отсасыванием основным является вопрос о распределении по обтекаемой поверхности скорости отсасывания, необходимой для поддержания заданного изменения толщины пограничного слоя. Точное решение этой задачи в обычной гидродинамике получено при продольном обтекании плоской пластины равномерно распределенным отсасыванием. Аналогичное точное решение можно получить и в магнитной гидродинамике. В этом случае уравнения пограничного слоя проводящей жидкости при  $Re_m \ll 1$  имеют вид [1,7]

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} (U_\infty - u), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

где  $B_0$  – внешнее магнитное поле, которое перпендикулярно плоскости пластинки.

Компоненты скорости  $u$  и  $v$  должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\text{при } y=0, \quad u=0, \quad v=-v_w = \text{const}, \quad (3)$$

$$\text{при } y \rightarrow \infty, \quad u = U_\infty = \text{const}.$$

Сразу видно, что задача (1)-(3) обладает решением, для которого распределение скорости не зависит от текущей координаты  $x$ . В обычной гидродинамике такое решение приведено в работах [2],[3].

Поскольку  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , то из (2) следует, что  $v(x,y) = -v_w = \text{const}$  и поэтому уравнение (1) принимает вид

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v_w \frac{\partial u}{\partial y} + N(U_\infty - u) = 0, \quad (4)$$





где введено обозначение  $N = \frac{\sigma B_0^2}{\rho}$ .

Решением задачи (3), (4) является

$$\frac{u(y)}{U_\infty} = 1 - e^{-\alpha y}, \quad (5)$$

где  $\alpha = \frac{1}{2\nu} (v_w + \sqrt{v_w^2 + 4N\nu})$ ,  $v = -v_w$ ,  $v_w > 0$ .

Для толщин вытеснения и потери импульса имеем выражения:

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \frac{2\nu}{v_w + \sqrt{v_w^2 + 4N\nu}} = \frac{1}{\alpha}, \quad (6)$$

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \frac{\nu}{v_w + \sqrt{v_w^2 + 4N\nu}} = \frac{1}{2\alpha}. \quad (7)$$

Из этих формул видно, что с увеличением скорости отсоса и магнитного поля обе толщины уменьшаются.

Касательное напряжение на стенке, в отличие от обычной гидродинамики, зависит от вязкости и равно

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\mu U_\infty}{2\nu} (v_w + \sqrt{v_w^2 + 4N\nu}) = \rho \alpha U_\infty. \quad (8)$$

Из (5) видно, что профиль скорости устанавливается не сразу, а достигается асимптотически.

Рассмотрим случай сильного отсоса с учетом перепада давления и магнитного поля.

Уравнения пограничного слоя при этом имеют вид:

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} (U_\infty - u) &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U_\infty \frac{dU_\infty}{dx}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Введем новую переменную

$$\eta = \frac{v_w(x)}{\nu} y \quad (10)$$

и новую продольную скорость

$$u(x, y) = U_\infty(x) f(x, \eta). \quad (11)$$



Тогда первое уравнение системы (9) после простых преобразований примет вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho v_w^2} (1-f) = \frac{v}{v_w} \left\{ U_\infty v_w \left[ \left( f^2 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \int f d\beta - 1 \right] + U_\infty v_w \left( f \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \int \frac{\partial f}{\partial x} d\beta \right) \right. \\ \left. + U_\infty v_w \frac{\partial f}{\partial \eta} \int f d\beta \right\}, \quad (12)$$

где  $U_\infty = \frac{dU_\infty}{dx}$ ,  $v_w = \frac{dv_w}{dx}$ .

Из граничных условий для продольной скорости

$$u = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad u = U_\infty(x) \quad \text{при } y = \infty$$

вытекают граничные условия для функций  $f(x, \eta)$

$$f(x, \eta) = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad f(x, \eta) = 1 \quad \text{при } y = \infty. \quad (13)$$

Рассмотрим случай, когда  $\frac{\sigma B_0^2}{\rho v_w^2(x)} = m = const.$

Тогда уравнение (12) приобретает вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial f}{\partial \eta} + m(1-f) = \frac{v}{v_w} \left\{ U_\infty v_w \left[ \left( f^2 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \int f d\beta - 1 \right] + U_\infty v_w \left( f \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \int \frac{\partial f}{\partial x} d\beta \right) \right. \\ \left. + U_\infty v_w \frac{\partial f}{\partial \eta} \int f d\beta \right\}, \quad (14)$$

Уравнение (14) при сильном отсосе, т.е. при  $v_w \rightarrow \infty$ , но таком, что

$\frac{\sigma B_0^2 v}{\rho v_w^2} = \frac{Nv}{v_w^2} = m$ , остается конечным, приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial f}{\partial \eta} + m(1-f) = 0, \quad (15)$$

решение которого, удовлетворяющее условиям (13), имеет вид

$$\frac{u}{U_\infty} = f = 1 - \exp \left[ -\frac{1}{2} (1 + \sqrt{1+m}) \eta \right] = 1 - \exp \left[ -\frac{1}{2v} (v_w + \sqrt{v_w^2 + 4Nv}) y \right] = 1 - \exp \alpha y. \quad (16)$$

Таким образом, предельной формой профиля скорости в пограничном слое, когда магнитное поле  $B_0(x) \sim v_w(x)$ , является асимптотический профиль отсасывания (5), которому соответствуют выражения толщины вытеснения (6) и потери импульса (7). Касательное напряжение на стенке определяется по формуле (8). Используем этот факт и выразим распре-

деление скорости в пограничном слое при больших значениях  $v_w$  в виде асимптотического разложения. Удобной формой такого разложения является [4]:

$$f(x, \eta) = f_0(x) + \frac{v}{v_w^2(x)} [U_w v_w f_{1,0}(\eta) + U_w v_w' f_{0,1}(\eta)] + \left(\frac{v}{v_w^2}\right)^2 [U_w U_w v_w^2 f_{2,0}(\eta) + (U_w')^2 v_w^2 f_{1,0}(\eta) + U_w U_w v_w v_w' f_{1,1}(\eta) + U_w^2 v_w v_w' f_{0,2}(\eta) + U_w^2 (v_w')^2 f_{0,1}(\eta)] + \dots, \quad (17)$$

где  $f_0(\eta)$ ,  $f_{1,0}(\eta)$ ,  $f_{0,2}(\eta)$ , ... - функции только  $\eta$ .

Вид этих функций определяется из уравнения (14) при граничных условиях (13) с учетом разложения (17).

Остановимся на первых двух приближениях.

Для  $f_0(\eta)$  имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + \frac{\partial f_0}{\partial \eta} + m(1 - f_0) = 0 \quad (18)$$

и граничные условия:

$$f_0(0) = 0, \quad f_0(\infty) = 1. \quad (19)$$

Решение задачи (18), (19) имеет вид

$$f_0(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \quad \alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4m}),$$

где  $m = \frac{Nv}{v_w^2}$ .

Для определения  $f_{1,0}(\eta)$  и  $f_{0,1}(\eta)$  имеем следующие задачи:

$$f_{1,0}' + f_{1,0}' - m f_{1,0} = f_0^2 - f_0 \int_0^\eta f_0 d\beta - 1 = -(1 + \alpha\eta)e^{-\alpha\eta},$$

$$f_{1,0}(0) = 0, \quad f_{1,0}(\infty) = 0,$$

$$f_{0,1}' + f_{0,1}' - m f_{0,1} = f_0 \int_0^\eta f_0 d\beta = e^{-2\alpha\eta} + (\alpha\eta - 1)e^{-\alpha\eta},$$

$$f_{0,1}(0) = 0, \quad f_{0,1}(\infty) = 0.$$

Их решения представляются в виде:

$$f_{1,0}(\eta) = \left[ \frac{\alpha}{2(2\alpha - 1)} \eta^2 + \frac{3\alpha - 1}{(2\alpha - 1)^2} \eta \right] e^{-\alpha\eta},$$

$$f_{0,1}(x) = \frac{e^{-2\alpha x}}{4\alpha^2 - 2\alpha - m} - \left[ \frac{\alpha\eta^2}{2(2\alpha - 1)} - \frac{(\alpha - 1)\eta}{(2\alpha - 1)^2} + \frac{1}{4\alpha^2 - 2\alpha - m} \right] e^{-\alpha\eta}.$$

Распределение скорости в пограничном слое дается выражением

$$\frac{u(x, y)}{U_\infty(x)} = f(x, \eta) \approx f_0(\eta) + \frac{v}{v_w^3} [U'_\infty v_w f_{1,0}(\eta) + U_\infty v'_w f_{0,1}(\eta)] + \dots$$

Из этого выражения легко определить толщину вытеснения, толщину потери импульса и силу трения на поверхности тела:

$$\frac{v_w(x)}{v} \delta^*(x) = \int_0^\infty (1-f) d\beta = \frac{1}{\alpha} + \frac{v}{v_w^3} \left\{ -\frac{3\alpha U'_\infty v_w}{\alpha^2(2\alpha-1)} + U_\infty v'_w \left[ \frac{1}{2\alpha-1} + \frac{\alpha-1}{\alpha^2(2\alpha-1)^2} + \frac{1}{2\alpha(4\alpha^2-2\alpha-m)} \right] \right\},$$

$$\frac{v_w(x)}{v} \delta''(x) = \int_0^\infty (1-f) d\beta = \frac{1}{2\alpha} + \frac{v}{v_w^3} \left\{ -\frac{6\alpha+1}{4\alpha^2(2\alpha-1)} U'_\infty v_w + \left[ \frac{1}{6\alpha(4\alpha^2-2\alpha-m)} + \frac{3}{4\alpha^2(2\alpha-1)} - \frac{\alpha-1}{2\alpha^2(2\alpha-1)^2} \right] U_\infty v'_w \right\},$$

$$\frac{\tau_w}{\rho U_\infty v_w} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \alpha + \frac{v}{v_w^3} \left[ \left[ \frac{3\alpha-1}{(2\alpha-1)^2} U'_\infty v_w - \left( \frac{\alpha}{4\alpha^2-2\alpha-m} - \frac{\alpha-1}{(2\alpha-1)^2} \right) U_\infty v'_w \right] \right]$$

Таким образом, если магнитное поле таково, что  $\frac{\sigma B_0^2 v}{\rho v_w^2(x)} = m = const$ , то все физические характеристики потока зависят от параметра  $\alpha = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1+4m})$ .

Полученные выражения при отсутствии магнитного поля переходят в соответствующие выражения для непроводящей жидкости [2]-[5].

Поступила 15.09.2000

Кафедра теоретической механики

### Литература

1. А.Б. Ватажин, Г.А. Любимов, С.А. Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., Наука, 1970.
2. Г.Шлихтинг. Теория пограничного слоя, М., Наука, 1974.
3. П.Н. Романенко. Гидродинамика и тепломассообмен в пограничном слое. Справочник. М., Энергия, 1974.
4. T. Pretsch. ZAMM, 24, 1944, 264-267.



5. Л.Ф. Козлов. Ламинарный пограничный слой при наличии отсасывания. Киев, Наукова думка, 1968.
6. E.J. Watson Rep. Memor. aero. Res. Coun. Lond., № 2619, 1947.
7. J.V. Sharikadze, Report of Enlarged Session of the seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, v.16, №1, 2001.

**ჯ. შარიკაძე, ვ. შარიკაძე**  
**ბამტარი სითხის სასაზღვრო ფენა ძლიერი ბაჟონების შემთხვევაში**  
**რეზიუმე**

პირველ ორ მიახლოებაში ნაპოვნია გამტარი სითხის სასაზღვრო ფენის განტოლებების ამონახსნები. განსაზღვრულია სასაზღვრო ფენის გამოდგენის, იმპულსის დაკარგვის სისქეები და ხახუნის ძალა სხეულის ზედაპირზე ძლიერი გაჟონვის შემთხვევაში. სასაზღვრო ფენის ყველა ფიზიკური მახასიათებელი დამოკიდებულია ერთ  $\alpha$

პარამეტრზე, რომელიც ტოლია  $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4m})$ , სადაც  $m = \frac{\sigma B_0^2 v}{\rho v_w^2(x)}$ .

**J. Sharikadze, V. Sharikadze**  
**BOUNDARY LAYER OF CONDUCTING FLUID WITH STRONG SUCTION**

**Summary**

In the first two approximates there were obtained solution of the boundary layer equations for conducting fluid with strong suction. Displacement thicknesses, the loss of momentum in the boundary layer and skin friction on a body surface have been determined. All the physical characteristics of a boundary layer depend on a one

parameter  $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4m})$ , where  $m = \frac{\sigma B_0^2 v}{\rho v_w^2(x)}$ .

## Содержание



Г. А. Ломадзе. Исследования по теории чисел в Грузии в XX веке .....	7
Т. В. Вепхвадзе, Н. К. Цалугелашвили. О представлении чисел некоторыми положительными квадратичными формами степени 8 .....	56
Г. П. Гогишвили. Об оценке сингулярных рядов положительных квадратичных форм .....	72
А. А. Сулаквелидзе. Об универсальности родов положительных кватернарных квадратичных форм .....	78
Г. М. Хатиашвили. Алгоритм решения некоторых трехмерных задач теории упругости для армированных цилиндров с прямолинейной анизотропией общего вида .....	82
К. В. Кахая. Изгиб парама сил однородного изотропного эллиптического бруса со слабо изогнутой осью .....	116
М. Г. Вазагашвили, Л. А. Джикидзе. Распределение воли в вязкоупругом стержне произвольного поперечного сечения .....	130
Н. Б. Джорбенадзе, Р. А. Цицкишвили, А. Р. Цицкишвили. Приток подземных вод к совершенной водосборной галерее треугольной формы .....	139
Р. А. Цицкишвили, А. Р. Цицкишвили. Решение двумерной задачи теории фильтрации через земляную плотину трапецидального профиля при отсутствии промежутка высачивания .....	168
Дж. В. Шарикадзе, В. Дж. Шарикадзе. Пограничный слой проводящей жидкости при сильном отсосе .....	183

გ. ლომაძე. გამოკვლევები რიცხვთა თეორიაში საქართველოში XX საუკუნეში.....	55
თ. ვეფხვაძე, ნ. ცალუგელაშვილი. ზოგიერთი დადებითი 8 საფეხურის კვადრატული ფორმით რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ.....	71
ვ. გოგიშვილი. დადებითი კვადრატული ფორმების შესაბამისი სინგულარული მწკრივების შეფასებათა შესახებ.....	77
ლ. სულაქველიძე. დადებით კვადრატულ კვადრატულ ფორმათა გვარების უნივერსალურობის შესახებ.....	81
ვ. ხატიაშვილი. წრფივი ზოგადი ანიზოტროპიის მქონე არმირებული ცილინდრისათვის დრეკადობის თეორიის ზოგიერთი სამგანზომილებიანი ამოცანის ამოხსნა ალგორითმი .....	115
კ. კახია. ოდნავ გაღუნული ერთგვაროვანი იზოტროპული ელიფსური ძელის წვეილძალით ღუნვის ამოცანა.....	129
მ. კახავაშვილი, ლ. ჯიქიძე. ტალღების გავრცელება ნებისმიერი განივი კვეთის მქონე ბლანტ-დრეკად ღეროში .....	136
ნ. ჯორბენაძე, რ. ციციშვილი, ა. ციციშვილი. მიწისქვეშა წყლების მოდენა სამკუთხედის ფორმის სრულყოფილ წყალშემკრები მილისკენ.....	166
რ. ციციშვილი, ა. ციციშვილი. ფილტრაციის თეორიის ორგანზომილებიანი ამოცანის ამოხსნა ტრაპეციის ფორმის მიწის კაშხალში, როდესაც არ არსებობს გამოწონვის შუალედი.....	181
ჯ. შარიქაძე, ვ. შარიქაძე. გამტარი სითხის სასაზღვრო ფენა ბლიერი გაწონვის შემთხვევაში.....	188

## Contents



G. Lomadze. Principal results in theory of numbers by mathematicians of Georgia in XX century .....	55
T. Vepkhvadze, N. Tsalugelashvili. On the representation of numbers by certain eight level positive quadratic forms .....	71
G. Gogishvili. On the estimates of the singular series of positive quadratic forms .....	77
L. Sulakvelidze. On the universality of genres of positive quaternary quadratic forms .....	81
G. Khatiashvili. An algorithm of the solution of some three-dimensional problems of the theory of elasticity for composed cylinders with straight anisotropy of general type .....	115
K. Kakhaia. Task of force-couple curving of the slightly curved similar isotropic elliptical squared timber .....	129
M. Vazagashvili, L. Jukidze. Wave spreading in a ductile elastic rod with arbitrary cross section .....	137
N. Jorbenadze, R. Tsitskishvili, A. Tsitskishvili. Underground water influx to a perfect water catcher of traingular form .....	166
R. Tsitskishvili, A. Tsitskishvili. Solution of the two-dimensional problem of the theory of filtration through a plane earth dam of trapezoidal profile in the absence of leaking interval .....	182
J. Sharbkadze, V. Sharikadze. Boundary layer of conducting fluid with strong suction .....	188





016495920  
30220010333

**Редактор издательства Л. Абуашвили**  
**Техредактор Ф. Будагашвили**  
**Корректор В. Долидзе**

**Подписано в печать 25.03.04**  
**Формат бумаги 60X84**  
**Усл. печатные л. 18,72**  
**Учетно-изд. л. 10,25**

**Заказ № 46**

**Тираж 120**

***Цена договорная***

**Издательство Тбилисского университета,  
0128, Тбилиси, пр. И. Чавчавадзе, 14.**

**Издательство "Универсал",  
0128, Тбилиси, пр. И. Чавчавадзе, 1.**

2004-242

bc.  
59-2003

n 36 ~~97~~<sub>2</sub>

F 43  
2003  
012-01010333