

263



290/2  
2003

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის

# შრომები

ISSN 0976-2637

# PROCEEDINGS

of Javakhishvili  
TBILISI STATE UNIVERSITY

- გამოყენებითი მათემატიკა • კომპიუტერული მეცნიერებანი  
**Applied Mathematics** • **Computer Sciences**

ტომი  
Volume **353** (22-23)



თბილისი Tbilisi

2003



ივ. ჯავახიშვილის სახელობის  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის

**შრომები**

**მონაწირე რედაქტორი**

ვაშაყმაძე თამაზ, პროფ.

ივ. ჯავახიშვილი სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,  
უნივერსიტეტის ქ. №2, 0145, თბილისი, ელ. ფოსტა: vasha@viam.hepi.edu.ge

**სარედაქციო კომიტეტი**

**ბაბუშკა ივო, პროფ.**  
ტექნისის უნივერსიტეტი, შშ

**ბელოცერკოვსკი ოლეგ, აკად.**  
ავტ. პროექტ. ინ-ტი, რუსეთი

**გილბერტი რობერტ, პროფ.**  
დელავერის უნივერსიტეტი, აშშ

**ჭავჭავანიძე ვლადიმერ, აკად.**  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

**სიარლე ფილიპი, აკად.**  
პერ და მარი კიურის უნივერსიტეტი,  
საფრანგეთი

**კრიადო ტორალბა ფრანცისკო, პროფ.**  
მალაგის უნივერსიტეტი, ესპანეთი

**გაჩეილაძე თამაზი, დოც.**  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

**გამყრელიძე თამაზ, აკად.**  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

**ჯიბუტი მორის, დოც.**  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

**ჯიქია ნუგზარი, დოც.**  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

**ზარატიშვილი გურამ, აკად.**  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

**კამკამიძე კონსტანტინე, პროფ.**  
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

**კორძაძე რევაზ, პროფ.**  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

**მეგრელიშვილი რინარდ, პროფ.**  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი  
(მთ. რედ. მთავარი)

**მელაძე ჰამლეტ, პროფ.**  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

**ნარანაშვილი მაიკო, პროფ.**  
ბლუზ პასკალის უნივერსიტეტი, საფრანგეთი

**სხირტლაძე ნუგზარ, დოც.**  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

**ცერცვაძე გურამ, პროფ.**  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

**ვანანია ნიკოლოზ, აკად.**  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

**სწავლული მდივანი**

გორდეზიანი ეკატერინე

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,  
უნივერსიტეტის ქ. №2, 0145, თბილისი, ელ. ფოსტა: egord@viam.hepi.edu.ge

© თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2003



თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის  
 ფიზიკისა და მათემატიკის ფაკულტეტი

# შრომები

## PROCEEDINGS OF JAVAKHISHVILI TBILISI STATE UNIVERSITY

ტომი 353  
 Volume

**353** (22-23)

გამოყენებითი მათემატიკა  
**Applied Mathematics**

• კომპიუტერული მეცნიერებათა  
 • **Computer Sciences**



თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა  
**Tbilisi University Press**

თბილისი **Tbilisi**

2003

# PROCEEDINGS

of Javakishvili  
TBILISI STATE UNIVERSITY

## EDITOR-IN-CHIEF

**Vashakmadze Tamaz, Prof.**

Javakishvili Tbilisi State University, University St. #2, 0145, Tbilisi, Georgia

E-mail: vasha@viam.hepi.edu.ge

## EDITORS

**Babuska Ivo, Prof.**

University of Texas, USA

**Belotserkovski Oleg M., Acad.**

ICAD, Russia

**Chavchanidze Vladimir V., Acad.**

Tbilisi State University

**Ciarlet Philippe, Acad.**

Piere et Marie Curie University, France

**Criado Torralba Francisco, Prof.**

University of Malaga, Spain

**Gachechiladze Tamaz, Assits.Prof.**

Tbilisi State University

**Gamkrelidze Tamaz V., Acad.**

Tbilisi State University

**Gilbert Robert P., Prof.**

University of Delaware, USA

**Jibuti Mouris, Assist. Prof.**

Tbilisi State University

**Jikia Nugzar, Assist. Prof.**

Tbilisi State University

**Kamkamidze Constantin, Prof.**

Georgian Technical University

**Kharatishvili Guram L., Acad.**

Tbilisi State University

**Kordzadze Revaz A., Prof.**

Tbilisi State University

**Megrelishvili Richard, Prof.**

Tbilisi State University

**Meladze Hamlet V., Prof.**

Tbilisi State University

**Naranjo Michael, prof**

Blez Pascal University,  
France

**Skhirtladze Nugzar, Assist. Prof.**

Tbilisi State University

**Tsertsvadze Guram, Prof.**

Tbilisi State University

**Vakhania Nikoloz N. Acad.**

Tbilisi State University

## SCIENTIFIC SECRETARY

**Gordeziani Ekaterine D.**

Iv. Javakishvili Tbilisi State University, University St. #2, 0145, Tbilisi, Georgia

E-mail: egord@viam.hepi.edu.ge



ბავშვებისთვის მათემატიკა • APPLIED MATHEMATICS

RELATION BETWEEN  $ABV$ ,  $BV(p(n)\uparrow\infty, \varphi)$  AND  $BA(p(n)\uparrow\infty, \varphi)$  CLASSES OF FUNCTIONS

T. Akhobadze

Tbilisi State University  
 Chair of High Mathematics

**Abstract.** Relations of inclusion between Waterman's and generalized Wiener's classes are considered.

The notion of a function of bounded variation was introduced by Jordan [1]. To generalize this notion Wiener [2] considered class  $V_p$  of functions. Young [3] (see also [4]) introduced the notion of functions of  $\Phi$ -variation. D. Waterman [5] considered the following concept of generalized bounded variation.

**DEFINITION 1.** Let  $\Lambda = (\lambda_n : n \geq 1)$  be an increasing sequence of positive numbers such that  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/\lambda_n) = +\infty$ . Function  $f$  is said to be of  $\Lambda$ -bounded variation ( $f \in \Lambda BV$ ), if for every

choice of no overlapping intervals  $\{I_n : n \geq 1\}$  we have  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(I_n)|}{\lambda_n} < +\infty$ , where  $I_n = [a_n, b_n] \subset [0, 1]$  and  $f(I_n) = f(b_n) - f(a_n)$ .

$C(0,1)$  and  $B(0,1)$  are respectively spaces of continuous and bounded functions given on  $[0,1]$ . In [6] (see also [7]) we introduced the notion of a class of functions  $BV(p(n)\uparrow p, \varphi)$ .

**DEFINITION 2.** Let  $\varphi (\varphi(1) \geq 2)$  be an increasing function defined on the set of natural numbers and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = +\infty. \quad (1)$$

Let  $f$  be a finite 1 periodic function defined on the interval  $(-\infty, +\infty)$ .  $\Delta$  is said to be a partition with period 1, if there is a set of points  $t$ , for which

$$\dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} < \dots, \quad (2)$$

and  $t_{k+m} = t_k + 1$  when  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , where  $m$  is any natural number. Let us assume that  $p(n)$  be an increasing sequence such that  $1 \leq p(n) \leq p$ ,  $n \rightarrow \infty$ , where  $1 \leq p(n) \leq \infty$ . We say that a function  $f$  belongs to the class  $BV(p(n)\uparrow p, \varphi)$  if

$$V(f, p(n)\uparrow p, \varphi) = \sup_{n \geq 1} \sup \left\{ \left( \sum |f(t_k) - f(t_{k-1})|^{p(n)} \right)^{1/p(n)} : \rho(\Delta) \geq \frac{1}{\varphi(n)} \right\} < +\infty,$$

where  $\rho(\Delta) = \min_k |t_k - t_{k-1}|$ .

63336000  
 33633333  
 33633333

If  $p(n) = p$  for each natural number, where  $1 \leq p(n) \leq +\infty$ , then the class  $BV(p(n)\uparrow p, \varphi)$  coincides with the Wiener's class  $V_p$ . If  $\varphi(n) = 2^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , then the class  $BV(p(n)\uparrow p, \varphi)$  coincides with the class  $BV(p(n)\uparrow p)$  introduced by Kita and Yoneda [8]. These authors investigated different properties of this class. In [9] we considered the notion of a class of functions  $BA(p(n)\uparrow p, \varphi)$ . As above suppose that  $\varphi$  be an increasing sequence for which  $\varphi(1) \geq 2$  and (1) holds true.

**DEFINITION 3.** Let  $f$  be a measurable 1-periodic function defined on  $(-\infty, +\infty)$ . Let  $p(n)$  be an increasing sequence for which  $1 \leq p(n) \uparrow p, n = 1, 2, \dots$ , where  $1 \leq p(n) \leq +\infty$ . We say that a function  $f$  belongs to the class  $BA(p(n)\uparrow p, \varphi)$  if

$$A(f, p(n)\uparrow p, \varphi) = \sup_n \sup_{h \geq \frac{1}{\varphi(n)}} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^{p(n)} dx \right\}^{1/p(n)} < +\infty$$

In papers [7] and [9] we proved the following statements.

**THEOREM A.** If  $f \in BV(p(n)\uparrow \infty, \varphi)$  then  $f$  is a bounded function.

**THEOREM B.** The class  $BV(p(n)\uparrow \infty, \varphi)$  and  $B(0, 1)$  coincide if and only if there is a positive number  $C$  such that  $(\varphi(n))^{1/p(n)} \leq C$  is fulfilled for every natural  $n$ .

**THEOREM C.** If  $f \in BA(p(n)\uparrow \infty, \varphi)$  then  $f$  is an essentially bounded function ( $f \in L_\infty$ ).

**THEOREM D.** Classes of functions  $BA(p(n)\uparrow \infty, \varphi)$  and  $L_\infty$  coincide if and only if the sequence  $(\frac{1}{p(n)} \ln \varphi(n))$  is bounded.

**THEOREM E.** If  $f \in BV(p(n)\uparrow \infty, \varphi)$  then  $f \in BA(p(n)\uparrow \infty, \varphi)$ .

**THEOREM F.** Let the sequence  $(\frac{1}{p(n)} \ln \varphi(n))$  be unbounded. Then there exists a continuous function  $f \in BA(p(n)\uparrow \infty, \varphi)$  such that  $f \notin BV(p(n)\uparrow \infty, \varphi)$ .

The relation between different classes of generalized bounded variation was taken into account in the works of M. Avdispahic [10], A. Kovacic [11], A. Belov [12], Z. Chanturia [13], M. Medvedeva [14], H. Kita and K. Yoneda [8]. In [15] U. Goginava has found necessary and sufficient conditions for the inclusion of  $H^\omega$  and Z. Chanturia [16] class  $V[\nu(n)]$  into the class  $BV(p(n)\uparrow \infty)$ . In [17] the analogous problem for the inclusion into the class  $BV(p(n)\uparrow \infty, \varphi)$  is considered.

U. Goginava [18] studied inclusion relations between  $ABV$  and  $BV(p(n)\uparrow \infty)$  classes. Using the idea of the last paper [18] we prove the statements.

**THEOREM 1.**  $ABV \subseteq BV(p(n)\uparrow \infty, \varphi)$  if and only if



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq m \leq p(n)} \frac{m^{1/p(n)}}{\sum_{j=1}^m (1/\lambda_j)} < +\infty. \quad (3)$$

**THEOREM 2.** Let  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/\lambda_j) = +\infty$  then for every admissible function  $\varphi$  there exists a function  $f \in BV(p(n)\uparrow\infty, \varphi) \cap C(0,1)$  such that  $f \notin ABV$ .

**COROLLARY 1.**  $BV(p(n)\uparrow\infty, \varphi) \subseteq ABV$  if and only if  $ABV = B(0,1)$ .

**THEOREM 3.**  $ABV \subseteq BV(p(n)\uparrow\infty, \varphi)$  if and only if (3) is valid.

**THEOREM 4.** Let  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/\lambda_j) = +\infty$  then for every admissible function  $\varphi$  there exists a function  $f \in BA(p(n)\uparrow\infty, \varphi) \cap C(0,1)$  such that  $f \notin ABV$ .

**COROLLARY 1.**  $BA(p(n)\uparrow\infty, \varphi) \subseteq ABV$  if and only if  $ABV = B(0,1)$ .

For the proof of Theorem 1 the following statement is used.

**LEMMA 1.** ([19], p.111) Let  $0 \leq a_n \downarrow$ ,  $0 \leq b_n \downarrow$  and let the relations  $\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i$  be true for  $k = 1, 2, \dots, m$ , then for a convex function  $\Phi$  the inequality  $\sum_{i=1}^k \Phi(a_i) \leq \sum_{i=1}^k \Phi(b_i)$  holds.

**PROOF OF THEOREM 1.** Sufficiency of the condition (3) can be proved in the same way as the corresponding part of U. Goginava's Theorem 1 (see [19]), but for the completeness of the proof we give it here.

Let  $f \in ABV$  and  $\Delta$  be any partition (2) for which  $\rho(\Delta) \geq 1/\varphi(n)$ . Without loss of generality we assume that  $|f(t_j) - f(t_{j-1})| \geq |f(t_{j+1}) - f(t_j)|$ ,  $j = 1, \dots, m-1$ . As  $f \in ABV$  there exists a constant  $M$  for which

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1} |f(t_0) - f(t_1)| + \frac{1}{\lambda_2} |f(t_1) - f(t_2)| + \dots + \frac{1}{\lambda_m} |f(t_{m-1}) - f(t_m)| &\leq M, \\ \frac{1}{\lambda_2} |f(t_0) - f(t_1)| + \frac{1}{\lambda_3} |f(t_1) - f(t_2)| + \dots + \frac{1}{\lambda_1} |f(t_{m-1}) - f(t_m)| &\leq M, \\ \dots &\dots \\ \frac{1}{\lambda_{j-1}} |f(t_0) - f(t_1)| + \frac{1}{\lambda_j} |f(t_1) - f(t_2)| + \dots + \frac{1}{\lambda_{m-j+1}} |f(t_{m-1}) - f(t_m)| &\leq M. \end{aligned}$$

By summation we get

\* Here the inclusion  $f \in BA(p(n)\uparrow\infty, \varphi)$  means that there exists a function  $g$  equivalent to  $f$  in the Lebesgue sense such that  $g \in ABV$ .

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda_i} \sum_{j=1}^i |f(t_{j-1}) - f(t_j)| \leq Ms.$$

Hence

$$\sum_{j=1}^i |f(t_{j-1}) - f(t_j)| \leq \frac{Ms}{\sum_{i=1}^k (1/\lambda_i)} = M \sum_{k=1}^i \left( \sum_{i=1}^k (1/\lambda_i) \right)^{-1}.$$

Now if we apply Lemma 1 for  $a_i = |f(t_{j-1}) - f(t_j)|$ ,  $b_i = \left( \sum_{i=1}^k (1/\lambda_i) \right)^{-1}$  and  $\varphi(t) = t^{p(n)}$  we get

$$\sum_{i=1}^m |f(t_{j-1}) - f(t_j)|^{p(n)} \leq M^{p(n)} m / \left( \sum_{i=1}^k (1/\lambda_i) \right)^{p(n)}.$$

Therefore

$$\left( \sum_{i=1}^m |f(t_{j-1}) - f(t_j)|^{p(n)} \right)^{1/p(n)} \leq \sup_{1 \leq m \leq p(n)} \frac{m^{1/p(n)}}{\sum_{i=1}^k (1/\lambda_i)} < +\infty,$$

i.e.  $f \in BV(p(n) \uparrow \infty, \varphi)$ .

If the condition (3) is not satisfied then we can choose a monotone increasing sequence of positive integers  $(n_k)$  such that

$$\sup_{k \rightarrow \infty} \frac{m(n_k)^{1/p(n_k)}}{\sum_{j=1}^k (1/\lambda_j)} = +\infty. \quad (4)$$

Besides, we suppose that

$$\varphi(n_k > 4), \quad (5)$$

$$\frac{m(n_k)^{1/p(n_k)}}{\sum_{j=1}^k (1/\lambda_j)} \geq 4^k, \quad (6)$$

$$\varphi(n_k) \geq m(n_k) > \varphi^2(n_{k-1}), \quad (7)$$

$$(\varphi(n_{k-1}))^{1/p(n_k)} \leq 2, \quad k = 2, 3, \dots \quad (8)$$

Two cases are possible:

a) from the sequence  $(n_k)$  will be selected a subsequence (which for simplicity we shall again designate by  $(n_k)$ ) such that for every  $k$  ( $k \geq 2$ )

$$\varphi^2(n_{k-1}) < m(n_k) \leq \left[ \frac{\varphi(n_k)}{\varphi(n_{k-1})} \right]; \quad (9)$$

b) there exists an integer  $k_0$ , such that





$$\left[ \frac{\varphi(n_k)}{\varphi(n_{k-1})} \right] < m(n_k) \leq \varphi(n_k), \quad k \geq k_0. \tag{10}$$

At first we consider the case a). Let  $f_k$  be a periodic function with period 1 and let it be determined on the interval  $[0, 1]$  as follows

$$f_k(x) = \begin{cases} a_k(\varphi(n_k)x - 2j), & \text{if } x \in \left[ \frac{2j}{\varphi(n_k)}, \frac{2j+1}{\varphi(n_k)} \right), \\ a_k(2j+2 - \varphi(n_k)x), & \text{if } x \in \left[ \frac{2j+1}{\varphi(n_k)}, \frac{2j+2}{\varphi(n_k)} \right), \\ j = m(n_{k-1}), \dots, m(n_k) - 1, \\ 0, & \text{otherwise on } [0, 1] \end{cases} \tag{11}$$

where 
$$a_k = \left( 2^k \sum_{j=1}^{m(n_k)} \frac{1}{\lambda_j} \right). \tag{12}$$

Let

$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} f_k(x). \tag{13}$$

As for every choice of no overlapping intervals  $I_n$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|f(I_j)|}{\lambda_j} \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j=1}^{m(n_i)} \frac{1}{\lambda_j} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2,$$

we conclude that  $f \in ABV$ . On the other hand we get

$$\begin{aligned} V(f, p(n) \uparrow \infty, \varphi) &\geq \left\{ \sum_{j=m(n_{k-1})}^{m(n_k)-1} \left| f\left(\frac{2j}{\varphi(n_k)}\right) - f\left(\frac{2j+1}{\varphi(n_k)}\right) \right|^{p(n_k)} \right\}^{1/p(n_k)} = \\ &= a_k(m(n_k) - m(n_{k-1}))^{1/p(n_k)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Now by (9) and (5) we have

$$m(n_k) \geq \varphi^2(n_{k-1}) \geq 2\varphi(n_{k-1}) \geq 2 \left[ \frac{\varphi(n_{k-1})}{\varphi(n_{k-2})} \right] \geq 2m(n_{k-1}). \tag{15}$$

Hence from (14), (6), and (12) we obtain

$$V(f, p(n) \uparrow \infty, \varphi) \geq a_k(m(n_k)/2)^{1/p(n_k)} \geq \frac{m(n_k)^{1/p(n_k)}}{2^{k+1} \sum_{j=1}^{m(n_k)} (1/\lambda_j)} \geq 2^{k-1}. \tag{16}$$

Consequently  $f \notin BV(p(n) \uparrow \infty, \varphi)$ .

In the case b) (see (10)) we consider periodic functions  $g_k$  with period 1 which are defined on the interval  $[0, 1]$  as (see (12) and (7))

$$g_k(x) = \begin{cases} a_k(\varphi(n_k)x - 2j), & \text{if } x \in \left[ \frac{2j}{\varphi(n_k)}, \frac{2j+1}{\varphi(n_k)} \right), \\ a_k(2j+2 - \varphi(n_k)x), & \text{if } x \in \left[ \frac{2j+1}{\varphi(n_k)}, \frac{2j+2}{\varphi(n_k)} \right), \\ j = \left[ \frac{m(n_{k-1})}{m(n_{k-2})} \right], \dots, \left[ \frac{m(n_k)}{m(n_{k-1})} \right] - 1, \\ 0, & \text{otherwise on } [0,1] \end{cases} \quad (17)$$

Let

$$g(x) = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} g_k(x). \quad (18)$$

By the condition (10) for no overlapping intervals we have

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(I_k)|}{\lambda_k} \leq 2 \sum_{k=k_0+2}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{[\varphi(n_k)/\varphi(n_{k-1})]} \frac{1}{\lambda_j} \leq 2 \sum_{k=k_0+2}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{m(n_k)} \frac{1}{\lambda_j} \leq 2 \sum_{k=k_0+2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k_0}}.$$

Therefore  $g \in ABV$ . On the other hand by (5) and (7)

$$4 \frac{\varphi(n_{k-1})}{\varphi(n_{k-2})} < \frac{\varphi(n_k)}{\varphi(n_{k-1})}.$$

Hence

$$2 \left[ \frac{\varphi(n_{k-1})}{\varphi(n_{k-2})} \right] < \left[ \frac{\varphi(n_k)}{\varphi(n_{k-1})} \right]. \quad (19)$$

By the definition of the function  $g$  (see (18)) we get

$$\begin{aligned} V(g, p(n) \uparrow \infty, \varphi) &\geq \left\{ \sum_{j=[\varphi(n_{k-2})/\varphi(n_{k-1})]}^{[\varphi(n_k)/\varphi(n_{k-1})]-1} \left| g \left( \frac{2j}{\varphi(n_k)} \right) - g \left( \frac{2j+1}{\varphi(n_k)} \right) \right|^{p(n_k)} \right\}^{1/p(n_k)} = \\ &= a_k \left( \left[ \frac{\varphi(n_k)}{\varphi(n_{k-1})} \right] - \left[ \frac{\varphi(n_{k-1})}{\varphi(n_{k-2})} \right] \right)^{1/p(n_k)}. \end{aligned}$$

Thus using (19) and (8) we obtain

$$\begin{aligned} V(g, p(n) \uparrow \infty, \varphi) &\geq a_k \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{\varphi(n_k)}{\varphi(n_{k-1})} \right] \right)^{1/p(n_k)} \geq \frac{1}{4} a_k \left( \frac{\varphi(n_k)}{\varphi(n_{k-1})} \right)^{1/p(n_k)} = \\ &= \left( 4 \cdot 2^k \sum_{j=1}^{m(n_k)} \frac{1}{\lambda_j} (\varphi(n_{k-1}))^{1/p(n_k)} \right)^{-1} (\varphi(n_k))^{1/p(n_k)} \geq \end{aligned} \quad (20)$$



$$\geq \frac{1}{8}(\varphi(n_k))^{1/p(n_k)} \left( 2^k \sum_{j=1}^{m(n_k)} \frac{1}{\lambda_j} \right)^{-1}$$

Consequently by (10) and (6) we conclude

$$V(g, p(n)\uparrow\infty, \varphi) \geq \frac{1}{8}(m(n_k))^{1/p(n_k)} \left( 2^k \sum_{j=1}^{m(n_k)} \frac{1}{\lambda_j} \right)^{-1} \geq 2^{k-3},$$

i.e.  $g \notin BV(p(n)\uparrow\infty, \varphi)$  and Theorem 1 is proved.

**PROOF OF THEOREM 2.** Let  $(n_k)$  be a monotone increasing sequence of positive integers such that  $n_1 = 1$  and

$$P(n_{k-1}) \geq \ln k. \quad (21)$$

Define a continuous function  $h$  on  $[0, 1]$  and extend it periodically with period 1. Let

$$h(x) = \begin{cases} 2 \left( \frac{1}{\varphi(n_{k-1})} - \frac{1}{\varphi(n_k)} \right)^{-1} b_k \left( x - \frac{1}{\varphi(n_k)} \right), & \text{if } \frac{1}{\varphi(n_k)} \leq x \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varphi(n_k)} + \frac{1}{\varphi(n_{k-1})} \right), \\ 2 \left( \frac{1}{\varphi(n_{k-1})} - \frac{1}{\varphi(n_k)} \right)^{-1} b_k \left( \frac{1}{\varphi(n_k)} - x \right), & \text{if } \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varphi(n_k)} + \frac{1}{\varphi(n_{k-1})} \right) \leq x \leq \frac{1}{\varphi(n_{k-1})}, \\ 0, & \text{otherwise on } [0, 1], \end{cases}$$

$k = 2, 3, \dots,$

where  $b_k = \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j} \right)^{-2}$ .

By the condition of Theorem 2 we assume that  $b_k < 1$ .

Let  $\Delta$  be an arbitrary partition of the interval  $[0, 1]$  defined by (2) and  $\rho(\Delta) \geq 1/\varphi(n)$ . For every natural number  $r$  we can choose integer  $k$  such that  $n_{k-1} \leq n \leq n_k$  and therefore

$$\frac{1}{\varphi(n_k)} < \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{\varphi(n_{k-1})}.$$

Thus by the definition of the function  $h$  and (21) we get

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n h(t_j) - h(t_{j-1}) \right|^{p(n)} &\leq 2 \left( \sum_{j=1}^k b_j \right)^{1/p(n)} \\ &\leq 2k^{1/p(n)} \leq 2k^{1/p(n_{k-1})} \leq 2k^{\ln k} = 2e, \end{aligned}$$

i.e.  $h \in BV(p(n)\uparrow\infty, \varphi)$ .

Now using the monotonicity of the sequence  $(b_k)$  we obtain

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j} \left| h \left( \frac{1}{\varphi(n_k)} \right) - h \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varphi(n_k)} + \frac{1}{\varphi(n_{k-1})} \right) \right) \right| = \sum_{j=1}^k \frac{b_j}{\lambda_j} \geq b_k \sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j} = \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j} \right)^{-2}.$$



Hence by the condition of Theorem 2 we conclude  $h \in ABV$  and Theorem 2 is proved.

Corollary 1 is a simple consequence of Theorem 2. In fact, it is sufficient to remark that

$$BV(p(n) \uparrow \infty, \varphi) \subseteq B(0,1) \text{ (see [15]) and } ABV = B(0,1) \text{ if and only if } \sum_{j=1}^{\infty} (1/\lambda_j) < +\infty.$$

**PROOF OF THEOREM 3.** Proof of the sufficiency of Theorem 3 is an easy corollary of Theorem 1 if we provide that  $BV(p(n) \uparrow \infty, \varphi) \subseteq BA(p(n) \uparrow \infty, \varphi)$  (Theorem E; see also [9], Theorem 3).

On the other hand if the condition (3) is not satisfied then we can choose a sequence  $(n_k)$  of natural numbers such that (4) – (8) are valid. Analogously to the proof of Theorem 1 we consider two cases a) and b) (see (9) and (10) respectively).

In the case a) we construct the function  $f_k$  (see (11)) only with the following difference: in this case if  $m(n_{k+1})$  is even (odd) then  $j$  takes all even (odd) values from  $m(n_{k+1})$  to  $m(n_k)$ -1 and later we correspondingly define (see (13)) the function  $\bar{f}$ .

It is easy to prove that  $\bar{f} \in ABV$  (see the proof of the inclusion  $f \in ABV$ ). If  $h_k = (2/\varphi(n_k)) > (1/\varphi(n_k))$  then

$$\Lambda(\bar{f}, p(n) \uparrow \infty, \varphi) \geq \left\{ \frac{1}{h_k} \sum_{j=m(n_{k-1})}^{m(n_k)-1} \int_{(2j-2)/\varphi(n_k)}^{(2j-1)/\varphi(n_k)} |\bar{f}_k(x+h_k) - \bar{f}_k(x)|^{\rho(n_k)} dx \right\}^{1/\rho(n_k)},$$

where “ $\Sigma$ ” denotes that the summation is performed concerning the above indicated  $j$ . Therefore

$$\begin{aligned} \Lambda(\bar{f}, p(n) \uparrow \infty, \varphi) &\geq \\ &\geq \left\{ \frac{1}{6} \varphi(n_k) (m(n_k) - m(n_{k-1})) \int_{(2m(n_{k-1})-2)/\varphi(n_k)}^{(2m(n_k)-1)/\varphi(n_k)} |\bar{f}_k(x+h_k)|^{\rho(n_k)} dx \right\}^{1/\rho(n_k)} \geq \\ &\geq \left\{ \frac{1}{6} \varphi(n_k) (m(n_k) - m(n_{k-1})) \int_{(4m(n_{k-1})-3)/2\varphi(n_k)}^{(2m(n_k)-1)/\varphi(n_k)} \left(\frac{1}{2} a_k\right)^{\rho(n_k)} dx \right\}^{1/\rho(n_k)} = \\ &= \frac{a_k}{2} \left\{ \frac{1}{12} (m(n_k) - m(n_{k-1})) \right\}^{1/\rho(n_k)} \geq \frac{a_k}{24} (m(n_k) - m(n_{k-1}))^{1/\rho(n_k)}. \end{aligned}$$

Now we remark that the last expression is already estimated (see (15) and (16)).

In the case b) (see (10)) we consider once more the function  $g_k$  (see (17)) with the difference that if  $[\varphi(n_{k+1})/\varphi(n_{k+2})]$  is even (odd) then  $j$  takes all even (odd) values from  $[\varphi(n_{k+1})/\varphi(n_{k+2})]$  to  $[\varphi(n_k)/\varphi(n_{k+1})]-1$ . So, we denote definite function by  $\bar{g}_k$  and assume  $\bar{g}(x) = \sum_{k=k_0+2}^{\infty} \bar{g}_k(x)$ .

Later suppose that  $h_k = 2/\varphi(n_k)$ . We get

$$\Lambda(\bar{g}, p(n) \uparrow \infty, \varphi) \geq \left\{ \frac{1}{h_k} \sum_{j=[\varphi(n_{k-1})/\varphi(n_{k-1})]-1}^{[\varphi(n_k)/\varphi(n_{k+1})]-1} \int_{(2j-2)/\varphi(n_k)}^{(2j-1)/\varphi(n_k)} |\bar{g}_k(x+h_k) - \bar{g}_k(x)|^{\rho(n_k)} dx \right\}^{1/\rho(n_k)},$$

where “ $\Sigma$ ” denotes the summation with respect to indices  $j$  considered in the case b). Hence

$$\begin{aligned} \Lambda(\bar{g}, p(n) \uparrow \infty, \varphi) &\geq \\ &\geq \left\{ \frac{\varphi(n_k)}{6} \left( \left[ \frac{\varphi(n_k)}{\varphi(n_{k-1})} \right] - \left[ \frac{\varphi(n_{k-1})}{\varphi(n_{k-2})} \right] \right) \frac{1}{\varphi(n_k)} \left( \left[ \frac{\varphi(n_{k+1})}{\varphi(n_{k-1})} \right] - 1 \right) \int_{\bar{g}_k(x+h_k)} |g_k(x+h_k)|^{p(n_k)} dx \right\}^{1/p(n_k)} \\ &\geq \frac{a_k}{2} \left\{ \frac{\varphi(n_k)}{12} \left[ \frac{\varphi(n_k)}{\varphi(n_{k-1})} \right] \left( \left[ \frac{\varphi(n_{k+1})}{\varphi(n_{k-1})} \right] - 1 \right)^{1/p(n_k)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_k}{2} \left\{ \frac{\varphi(n_k)}{12} \left[ \frac{\varphi(n_k)}{\varphi(n_{k-1})} \right] \frac{1}{2\varphi(n_k)} \right\}^{1/p(n_k)} \right\}^{1/p(n_k)} \\ &\geq \frac{a_k}{96} \left\{ \left[ \frac{\varphi(n_k)}{\varphi(n_{k-1})} \right] \right\}^{1/p(n_k)} \end{aligned}$$

For the completion of the estimation of the last expression see (20).

Proof of Theorem 4 is a simple consequence of Theorem 2 and Theorem E. Correctness of Corollary 2 follows from Theorem C and Corollary 1.

## REFERENCES

- Jordan C. *Sur la séries de Fourier*. C.R.Acad. Sci. Paris 92(1881), 228-230.
- Wiener N. *The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients*. Massachusetts J. Math.3(1924), 72-94.
- Young L. *Sur une généralisation de la notion de variation de puissance  $p$ -ième bornée au sens de N.Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier*. C.R.Acad. Sci, Paris, 204 (1937), 470-472.
- Young L. *General inequalities for Stiltjes integrals and the convergence of Fourier series*. Math. Ann. 115, 6(1938), 581-612.
- Waterman D. *On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation*. Studia Math.44(1972), 107-117.
- Akhobadze T. *Functions of generalized Wiener classes  $BV(p(n) \uparrow \infty, \varphi)$  and their Fourier coefficients*. Georgian Math. J. 7(2000), 401-416.
- Akhobadze T. *Generalized  $BV(p(n) \uparrow \infty, \varphi)$  class of bounded variation*. Bull Georgian Acad. Sci. 163, 3(2001), 426-428.
- Kita H. and Yoneda K. *A generalization of bounded variation*. Acta Math. Hungar. 56(1990), 229-238.
- Akhobadze T. *A generalization of bounded variation*. Acta Math. Hungar. 97, 3(2002), 223-256.
- Avdshpach M. *On the classes  $ABV$  and  $V[\varphi(n)]$* . Proc. Amer. Math. Soc. 95(1985), 230-235.

11. Kovacic A. *On the embedding  $H^p \subset V_p$* . Math Slovaca. 43(1993), 573-578.
12. Belov A.S. *Relations Between some classes of generalized variation*. Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics. 3(1988), 11-13.(Russian)
13. Chanturia Z.A. *On the uniform convergence of Fourier series*. Mat.sb.100(1976), 534-554.(Russian)
14. Medvedieva M.V. *On the inclusion of classes  $H^p$* . Mat. Zametki. 64(1998), 713-719. (Russian)
15. Goginava U. *Relations between some classes of functions*. Sci. Math. Japonicae. 53, 2(2001), 223-232.
16. Chanturia Z.A. *The modulus of variation and its application in the theory of Fourier*. Dokl. Acad. Nauk SSSR. 214(1974), 63-66.(Russian)
17. Akhobadze T. *Relations between  $H^p$ ,  $V[v(n)]$  and  $BA(p(n) \uparrow \alpha, \varphi)$  classes of functions*. Bull. Georgian Acad. Sci. 164, 3(2001), 433-435.
18. Goginava U. *Relations between  $ABV$  and  $BV(p(n) \uparrow \alpha)$  classes of functions*. Acta Math. Hungar, 101, 4 (2003), 163-272.
19. Hardy G.H. Littlewood J.E. and Polia. *Inequalities*, Cambridge, 1934.

Accepted for publishing on October 20, 2002.

Reviewed on January 25, 2003.

თანაფარდობა  $ABV$ ,  $BV(p(n) \uparrow \alpha, \varphi)$  და  $BA(p(n) \uparrow \alpha, \varphi)$  კლასებს შორის

თ. ახობაძე

ევ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის უმაღლესი მათემატიკის კათედრა

ნაშრომში გარკვეული თანაფარდობა  $ABV$  [5],  $BV(p(n) \uparrow \alpha, \varphi)$  [6] და  $BA(p(n) \uparrow \alpha, \varphi)$  [9] კლასებს შორის. კერძოდ, დამტკიცებულია:

**თეორემა 3.**  $ABV \subset BV(p(n) \uparrow \alpha, \varphi)$  მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq m \leq p(n)} m^{1/p(n)} \left( \sum_{\lambda=1}^m (1/\lambda_j) \right)^{-1} < +\infty.$$

**თეორემა 4.** ვთქვათ  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/\lambda_n) = +\infty$ , მაშინ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე

განსაზღვრული ყოველი დადებითი  $\varphi$  ფუნქციისათვის, რომლისთვისაც  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = +\infty$ , არსებობს  $f \in BA(p(n) \uparrow \alpha, \varphi) \cap C(0,1)$  ფუნქცია, ისეთი რომ  $f \notin ABV$ .

## FUZZY ANALYSIS (IMAGE CONSTRUCTION) OF THE LANGUAGE STRUCTURE ON THE FINITE SET OF INSUFFICIENT DATA

*N. Jorjiashvili*

*Tbilisi State University,  
 Chair of Random Process Theory*

**Abstract.** The work is devoted to numerical modeling of fuzzy organization of various language structures. Fuzzy distributions of language structures contain data about important regularities controlling informational and psycho-physiological processes, which accompany the generation of verbal language or printed texts. These distributions are characterized by so called linguistic spectrum describing various distribution mechanisms of marked out language elements over their sequences (so called fuzzy linear structures, fuzzy bags). Models of such linear structures are based on the assumption about the superposition of two kinds of uncertainties: probabilistic and possibilistic.

**1. INTRODUCTION.** There are two classical approaches to investigation of uncertain data. If empirical data are "sufficiently exact" then processing these data and evaluating their characteristics one must use probabilistic-statistical methods. When data are presented "sufficiently inexact", big intervals, convenient tools may be found in the theory of errors. But there are events when the use of probabilistic-statistical methods and that of theory of errors do not give satisfactory results. The reason is in the nature of data and methods of their receiving (measurement, description, scaling, etc.). In the case when data are presented by intervals and their distribution are "vague" and are characterized by overlapping (intersections) and in the process of receiving the information participate an expert, nature of data will be combined in parallels to a probabilistic-statistical uncertainty exist also a possibilistic uncertainty. Taking into account the combined nature of above uncertainty, distributions are characterized by possibilistic spectrum [1] describing emergence mechanisms of different language structures.

Our approach permits to study comprehensively the quantitative characteristics of language as a medium of formation in whole extent of this concept in all its temporal and territorial forms.

**2. FUZZY MEASURE CONSTRUCTION ON THE GROUP OF INSUFFICIENT EXPERTS DATA.** Let a finite set  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  represent results of some quantity ( $\xi$ ) measurement in a certain scale. Numerical characteristics of the quantity  $\xi$  are identified with data given by experimentators or experts and can be easily evaluated by the class of statistical methods. It is known that fuzzy measure on the finite set  $X$  can be represented by the class of associated probabilities  $\{P_\sigma\}, \sigma \in S_n$  [2].  $S_n$  is the permutation group and for  $\forall \sigma \in S_n$  the probability distributions set

$$IP_\sigma = \{P_\sigma(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})\} \tag{1}$$

is connected with the fuzzy measure in the following form:

$$P_\sigma(x_{\sigma(i)}) = g(\{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)}\}) - g(\{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i-1)}\}), \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

From these formulas one can receive:

$$g(\{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)}\}) = P_\sigma(x_{\sigma(1)}) + \dots + P_\sigma(x_{\sigma(i)}), \quad i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

In general, for  $\forall A \subseteq X$  subset  $\exists \tau \in S_n$  such that if  $A = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}$  then  $\tau(i) = i_1, \dots, i_r$  and

$$g(A) = g(\{x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(r)}\}) = \sum_{j=1}^r P_\tau(x_{\tau(j)}) = \sum_{j=1}^r P_\tau(x_{i_j}), \tag{4}$$

It is evident that to any  $P_\sigma$  on  $X$  there corresponds the statistical moment of order  $t$  of the random quantity  $\xi$ :

$$\sum_{i=1}^n P_\sigma(x_{\sigma(i)})x_{\sigma(i)}^t = \bar{\xi}_\sigma^t, \quad (5)$$

On each permutation the probability distribution is defined by corresponding combined moments (based on experimentators and experts evidence), that is,  $n!$  representations are possible.

From (5) one can find probabilities:

$$P_\sigma(x_{\sigma(i)}) = \sum_{l=0}^{n-1} a_l^\sigma \bar{\xi}_\sigma^l, \quad (i = \overline{1, n}), \quad (6)$$

$a_l^{\sigma(i)}$  coefficients are known quantities.

**DEFINITION 1.** The set of moments  $\left\{ \bar{\xi}_\sigma^t \right\}_{\sigma \in S_n}$ ,  $t = \overline{1, n-1}$ , is called the class of associated moments.

In the class of associated moments there are  $(n-1)n!$  elements. With the aid of (6) they uniquely define the class of associated probabilities and consequently one receives the possibility of the fuzzy measure construction on the set  $X$ :

$$g \leftrightarrow \{IP_\sigma\}_{\sigma \in S_n} \leftrightarrow \left\{ \bar{\xi}_\sigma^t \right\}_{t=1, \sigma \in S_n}^{n-1}. \quad (7)$$

Parameters  $\bar{\xi}_\sigma^t$  will be defined from objective statistical measurements or expert's evaluation of quantity  $\xi$ . Denote

$$E_\sigma = \left\{ \bar{\xi}_\sigma^1, \bar{\xi}_\sigma^2, \dots, \bar{\xi}_\sigma^{n-1} \right\} \quad (8)$$

Often in (8) the experimental data are limited. In this case we denote:

$$E_\sigma^{\text{Experiment}} = \left\{ \bar{\xi}_\sigma^{p_1}, \bar{\xi}_\sigma^{p_2}, \dots, \bar{\xi}_\sigma^{p_r} \right\}, \quad (9)$$

$$p_j \neq p_i; \quad i \neq j; \quad i, j = \overline{1, n}; \quad p_k < p_l \text{ if } k < l; \quad r < n-1.$$

**DEFINITION 2.** (9) is called insufficient objective (experimental) data (evidences). Remainder  $(n-1-r)$  data represent unknown moments or subjective ones, which are received from experts evaluations:

$$E_\sigma^{\text{Expert}} = \left\{ \bar{\xi}_\sigma^{l_1}, \bar{\xi}_\sigma^{l_2}, \dots, \bar{\xi}_\sigma^{l_s} \right\}. \quad (10)$$

It is evident that  $E_\sigma^{\text{Experiment}} \cap E_\sigma^{\text{Expert}} = \emptyset$ ,  $E_\sigma^{\text{Expert}} \subseteq E_\sigma / E_\sigma^{\text{Experiment}}$

**DEFINITION 3.** Representation (10) is called expert's data.

With any  $\sigma \in S_n$ , data (8) are connected, where experimental data are the same for all  $\sigma$  and only subjective data may be different for different  $\sigma$ . If

$$E_\sigma^{\text{Expert}} = E_\sigma \setminus E_\sigma^{\text{Experiment}} \neq \emptyset, \quad (10')$$



then the corresponding fuzzy measure (4) differs from probability measure. The cause of this difference lies in decisions of different experts.

In  $E_\sigma$  there are known and unknown data, corresponding sets denote as follows:

$$\begin{aligned} N_\sigma &= \left\{ \xi_{\sigma}^{\tau_{\sigma(i)}}, \xi_{\sigma}^{\tau_{\sigma(i+1)}}, \dots, \xi_{\sigma}^{\tau_{\sigma(i-1)}} \right\} = E_\sigma \setminus \left( E_\sigma^{\text{Experiment}} \cup E_\sigma^{\text{Expert}} \right), \\ M_\sigma &= \left\{ \xi_{\sigma}^{\tau_{\sigma(i)}}, \xi_{\sigma}^{\tau_{\sigma(i+1)}}, \dots, \xi_{\sigma}^{\tau_{\sigma(i)}} \right\} = E_\sigma^{\text{Experiment}} \cup E_\sigma^{\text{Expert}}. \end{aligned} \quad (10'')$$

For complete description of  $E_\sigma$  we can use the principle of least effort [3] (principle of maximum entropy [4]). With the aid of this principle unknown associated probabilities and moments can be evaluated. Evidently  $\exists \tau_\sigma \in S_\sigma$  such that  $\tau_{\sigma(i)} = q_i, i = \overline{1, k}; \tau_{\sigma(k+1)} = q_{k+1}, \dots, \tau_{\sigma(n-1)} = q_{n-1}$ . Thus the problem of evaluation reduces to the following problem of finding an extremum:

$$\begin{aligned} \text{Max} \left\{ - \sum_{i=1}^n P_\sigma(x_{\sigma(i)}) \log P_\sigma(x_{\sigma(i)}), \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n P_\sigma(x_{\sigma(i)}) = 1, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)}^{\tau_{\sigma(i)}} P_\sigma(x_{\sigma(i)}) = \xi_{\sigma}^{\tau_{\sigma(i)}}, \quad (j = \overline{1, k}) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

The corresponding Lagrangian has the following form:

$$L = - \sum_{i=1}^n P_\sigma(x_{\sigma(i)}) \log P_\sigma(x_{\sigma(i)}) + \sum_{j=1}^k \lambda_j \left( \xi_{\sigma}^{\tau_{\sigma(j)}} - \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)}^{\tau_{\sigma(j)}} P_\sigma(x_{\sigma(i)}) \right) + \lambda_0 \left( 1 - \sum_{i=1}^n P_\sigma(x_{\sigma(i)}) \right). \quad (12)$$

Consider the system of equations:

$$\frac{\partial L}{\partial P_\sigma(x_{\sigma(i)})} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (13)$$

or

$$- \log P_\sigma(x_{\sigma(i)}) - \Lambda_0 - \sum_{j=1}^k \lambda_j x_{\sigma(i)}^{\tau_{\sigma(j)}} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (14)$$

where  $\Lambda_0 = 1 + \lambda_0$ . Then

$$P_\sigma(x_{\sigma(i)}) = \exp \left( - \Lambda_0 - \sum_{j=1}^k \lambda_j x_{\sigma(i)}^{\tau_{\sigma(j)}} \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad (15)$$

Consider the generalized statistical sum

$$Z(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \sum_{i=1}^n \exp \left( - \sum_{j=1}^k \lambda_j x_{\sigma(i)}^{\tau_{\sigma(j)}} \right). \quad (16)$$

It is known that

$$-\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \ln Z(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \xi_{\sigma}^{\tau_{\sigma(j)}}, \quad \ln Z(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \Lambda_0, \quad (17)$$

are identities. Quantities  $\overline{\xi_{\sigma}^{\tau_{\sigma}(j)}} (j = \overline{(k+1), (kl-1)})$  are known and with respect to  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{kl-1}$  (17) the following system of equations is given:

$$\sum_{i=1}^n \left( x_{\sigma(i)}^{\tau_{\sigma}(j)} - \overline{\xi_{\sigma}^{\tau_{\sigma}(j)}} \right) \exp \left( - \sum_{j=1}^k \lambda_j x_{\sigma(i)}^{\tau_{\sigma}(j)} \right) = 0$$

$$\Lambda_0 = \ln \sum_{i=1}^n \exp \left( - \sum_{j=1}^k \lambda_j x_{\sigma(i)}^{\tau_{\sigma}(j)} \right), \quad j = \overline{1, k}. \quad (18)$$

If  $\hat{\lambda}_j = \lambda_j(\sigma)$  is any numerical solutions of (18), one can evaluate probability distributions  $\{I\{P_{\sigma}(x_{\sigma(i)})\}\}_i^k$  and according to  $I_{\sigma}$  experts data the class of associated probabilities  $\{IP_{\sigma}\}_{\sigma \in S_n}$  can be evaluated.

Thus, we can construct the upper and lower Choquet's second order capacities [5]:

$$g_*(A) = \min_{\sigma \in S_n} IP_{\sigma}(A), \quad g^*(A) = \max_{\sigma \in S_n} IP_{\sigma}(A), \quad (19)$$

**DEFINITION 4.**  $(g_*, g^*)$  Choquet's second order capacities are called fuzzy measures by combined (experimental and expert) data on the set  $X$ .

**REMARK 1.** Insufficient data induce unique pair of dual fuzzy measures. They are independent from "expert registrations" and their number. Then two experts are needed which make different decisions to receive auto dual capacities [6].

**3. CONSTRUCTION OF FUZZY SUNSET (IMAGE).** For  $\forall \sigma \in S_n$  the  $I_{\sigma}$  expert processes insufficient data and, as it is shown in paragraph one, corresponding  $\{P_{\sigma}(x_{\sigma(i)})\}_{i=1}^n$  probability distribution induces fuzzy measure. Fuzzy measure contains information about a body of evidence on  $X$ . This body of evidence is consonant:

$$K_1^{\sigma} = \{x_{\sigma(1)}\} \subseteq K_2^{\sigma} = \{x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}\} \subseteq \dots \subseteq K_n^{\sigma} = \{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\}, \quad (20)$$

On this body of evidence one can define possibility distribution  $\{\pi_{\sigma}\}$  which is connected with focal subsets and corresponding probability weights  $m^{\sigma}$ :

$$m^{\sigma}(\emptyset) = 0, \quad \sum_{i=1}^n m^{\sigma}(K_i^{\sigma}) = 1$$

If for any focal subset we introduce the uniform probability distribution  $P_{\sigma}(\cdot | K_i^{\sigma})$ , then the possibility distribution will be approximated by associated probabilities [2]. For  $\forall x_{\sigma(i)}$

$$P_{\sigma}(x_{\sigma(i)}) = \sum_{i=1}^n P_{\sigma}(x_{\sigma(i)} | K_i^{\sigma}) m^{\sigma}(K_i^{\sigma}) = \sum_{i: x_{\sigma(i)} \in K_i^{\sigma}} \frac{m^{\sigma}(K_i^{\sigma})}{|K_i^{\sigma}|} I_{K_i^{\sigma}}(x_{\sigma(i)}) \quad (21)$$

where  $|K_i^{\sigma}| = \text{card}K_i^{\sigma}$  is the cardinality of the subset  $K_i^{\sigma}$ ,  $I_{K_i^{\sigma}}$  is the indicator of  $K_i^{\sigma}$ . It is evident that associated probabilities  $P_{\sigma}$  for  $\forall A \subseteq X$  will be into the limits of necessity and possibility:

$$(22)$$

$$N^\sigma(A) \leq P_\sigma(A) \leq \Pi^\sigma(A).$$

It is easy to connect associated probabilities on the  $\sigma$  permutation with the possibility distribution [7]:

$$P_\sigma(x_{\sigma(i)}) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (\pi_{\sigma(i)} - \pi_{\sigma(i+1)}), \quad (23)$$

where

$$1 = \pi_\sigma(x_{\sigma(1)}) \geq \pi_\sigma(x_{\sigma(2)}) \geq \dots \geq \pi_\sigma(x_{\sigma(n)}) \geq \pi_\sigma(x_{\sigma(n+1)}) = 0. \quad (24)$$

From (23) one can obtain:

$$\pi_\sigma(x_{\sigma(i)}) = \sum_{j=1}^n \min(P_\sigma(x_{\sigma(i)}), P_\sigma(x_{\sigma(j)})). \quad (25)$$

Possibility distribution gives rise to a fuzzy subset  $\tilde{F}^\sigma$  with the following membership function [7]:

$$\chi_\sigma(x_{\sigma(i)}) = \pi_\sigma(x_{\sigma(i)}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (26)$$

**DEFINITION 5.**  $\tilde{F}^\sigma$  is called the fuzzy subset induced by the activity of the  $I_\sigma$  expert.

(21) is the system of equations for focal probabilities  $m^\sigma(K_j)$ . We have:

$$\begin{aligned} \Pi^\sigma(A) &= \max_{x_{\sigma(i)} \in A} \pi_\sigma(x_{\sigma(i)}) = \max_{x_{\sigma(i)} \in A} \sum_{j=1}^n \min(P_\sigma(x_{\sigma(i)}), P_\sigma(x_{\sigma(j)})) \\ N^\sigma(A) &= 1 - \Pi^\sigma(\bar{A}), \quad \bar{A} = X \setminus A. \end{aligned}$$

From (21)

$$P_\sigma(x_{\sigma(i)}) = \frac{m^\sigma(K_i)}{i} + \dots + \frac{m^\sigma(K_n)}{n}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (27)$$

and for focal probabilities

$$m^\sigma(K_i) = i(P_\sigma(x_{\sigma(i)}) - P_\sigma(x_{\sigma(i+1)})), \quad i = \overline{1, n}, \quad (28)$$

**DEFINITION 6.** The set  $\{m^\sigma\}_{\sigma \in S_n}$  of focal probabilities is called the class of associated focal probabilities.

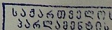
Connection between  $m^\sigma$  and upper and lower capacities,  $g$ , and  $g^*$  can be easily obtained. It is known that for  $\forall A \subseteq X \quad \exists \tau_A \in S_n$  such that  $g^*(A) = P_{\tau_A}(A)$ . Then, taking into account (28) we can write:

$$g^*(A) = \sum_{i \in \tau_A(A)} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^n m^{\tau_A}(K_j^i), \quad (29)$$

and

$$g_*(A) = 1 - g^*(\bar{A}), \quad \bar{A} = X \setminus A.$$

<sup>3</sup> I.e. units do not participating in probabilistic process



**DEFINITION 6.** The set of fuzzy subsets  $\{\bar{F}^\sigma\}_{\sigma \in S_n}$  is called the class of fuzzy subsets induced by  $\{I_\sigma\}_{\sigma \in S_n}$  experts insufficient data.

Consider  $\{I_\sigma\}_{\sigma \in S_n}$  experts in the Kaufman's theory of expertons [8]. In the discrete case experts table of membership functions values is presented in the following form:

Table 1<sup>1)</sup>.

| $I_\sigma \setminus X$ | $x_1$      | $x_2$      | ... | $x_j$      | ... | $x_n$      |
|------------------------|------------|------------|-----|------------|-----|------------|
| $I_1$                  | $\chi_1^1$ | $\chi_1^2$ | ... | $\chi_1^j$ | ... | $\chi_1^n$ |
| $I_2$                  | $\chi_2^1$ | $\chi_2^2$ | ... | $\chi_2^j$ | ... | $\chi_2^n$ |
| ...                    | ...        | ...        | ... | ...        | ... | ...        |
| $I_j$                  | $\chi_j^1$ | $\chi_j^2$ | ... | $\chi_j^j$ | ... | $\chi_j^n$ |
| ...                    | ...        | ...        | ... | ...        | ... | ...        |
| $I_k$                  | $\chi_k^1$ | $\chi_k^2$ | ... | $\chi_k^j$ | ... | $\chi_k^n$ |

Here  $K = \text{Card}S_n = n!$ ,  $\chi'_\sigma = \chi_\sigma(x_{\sigma(i)})$  is the value of membership function (measure of compatibility)  $\bar{F}^\sigma$ .

If  $\alpha_0 = 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_L = 1$  is an increasing sequence of membership levels, the corresponding experton is presented by the following table:

Table 2.

| $\alpha \setminus X$ | $x_1$    | $x_2$    | ... | $x_j$    | ... | $x_n$    |
|----------------------|----------|----------|-----|----------|-----|----------|
| $\alpha_1$           | $E_{01}$ | $E_{02}$ | ... | $E_{0j}$ | ... | $E_{0n}$ |
| $\alpha_2$           | $E_{11}$ | $E_{12}$ | ... | $E_{1j}$ | ... | $E_{1n}$ |
| ...                  | ...      | ...      | ... | ...      | ... | ...      |
| $\alpha_j$           | $E_{j1}$ | $E_{j2}$ | ... | $E_{jj}$ | ... | $E_{jn}$ |
| ...                  | ...      | ...      | ... | ...      | ... | ...      |
| $\alpha_L$           | $E_{L1}$ | $E_{L2}$ | ... | $E_{Lj}$ | ... | $E_{Ln}$ |

Where

$$E_{ij} = \frac{1}{k} \sum_{\sigma \in S_n} I_{[\sigma, i]}(\chi'_\sigma) = \frac{1}{L} \sum_{\sigma \in S_n} I_{[\sigma, i]}(\chi'_\sigma) \quad (30)$$

and

$$\chi_i = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L E_{ji}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (31)$$

which is the experton mean of the membership.

<sup>1)</sup> In the continuous case  $\chi'_j$  will be changed by intervals.

**DEFINITION 8.** Fuzzy subset of  $x_i, S \in X$

$$\tilde{S} = \begin{matrix} X & x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ \chi & \chi_1 & \chi_2 & \dots & \chi_i & \dots & \chi_n \end{matrix} \quad (32)$$

is called fuzzy subset (image) induced by experts insufficient data.

#### 4. FUZZY EXPECTATION VALUE (FEV) ON THE EXPERTS INSUFFICIENT DATA.

In paragraph two it was shown that nature of experts insufficient data is the source of fuzziness which is represented by Choquet's dual pair  $(g_*, g^*)$ . In paragraph three demonstrated that experts insufficient data on the finite set  $\tilde{S}$  were shown (see (32)).

From the decision-making point of view there are all conditions for choosing the most typical value (MTV) [6] corresponding to  $\tilde{S}$ . In our case

$$MTV = \chi^{-1}(FEV(\chi)), \quad (33)$$

where  $FEV$  is the fuzzy expectation value.

Consider the ordered sequence of  $\chi$ 's values:

$$\chi_{r(1)} \leq \chi_{r(2)} \leq \dots \leq \chi_{r(n)}.$$

Introduce the notation:

$$K_i = \{\chi_{r(1)}, \dots, \chi_{r(i)}\}, \quad g_*, = g_*(K_i), \quad g_i^* = g_i^*(K_i), \quad i = \overline{1, n}$$

It is known that on the finite set  $X$  the  $FEV$  can be calculated by the formula:

$$FEV^*(\chi_{\tilde{S}}) = \int \chi_{\tilde{S}}(x) \circ g(\cdot) = \max_i \{\chi_{r(i)} \wedge g_i^*\}. \quad (34)$$

In the case of dual pair  $(g_*, g^*)$  one can receive upper and lower  $FEV$ 's:

$$FEV^*(\chi_{\tilde{S}}) = \max_i \{\chi_{r(i)} \wedge g_i^*\}, \quad FEV_*(\chi_{\tilde{S}}) = \max_i \{\chi_{r(i)} \wedge g_i^*\}, \quad (35)$$

one can receive upper and lower  $F_*$  and on  $[0; 1]$  the pair  $(F_*, F^*)$  determines the interval  $[F_*, F^*]$ . Naturally (33) must be changed by

$$MTV = \{x \in X : FEV_* \leq \chi_{\tilde{S}} \leq FEV^*\}. \quad (36)$$

#### 5. CONSTRUCTION OF THE POSSIBILITY DISTRIBUTION.

Let us use the formula (21) for calculation of moments  $\xi^i$ :

$$\xi^i = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{m^\sigma(K_j^\sigma)}{|K_j^\sigma|} I_{K_j^\sigma}(x_{\sigma(l)}) x_{\sigma(l)}^i = \sum_{j=1}^n m^\sigma(K_j^\sigma) \frac{x_{\sigma(l_1)}^i + x_{\sigma(l_2)}^i + \dots + x_{\sigma(l_i)}^i}{|K_j^\sigma|}. \quad (37)$$

If conditional probabilities are distributed non uniformly, then (21) must be changed by:

$$P_\sigma(x_{\sigma(l)}) = \sum_{v=1}^n m^\sigma(K_v^\sigma) F(x_{\sigma(l)} | K_v^\sigma), \quad (21')$$

As an example consider the fuzzy linear structures [9]. In this case  $x_{\sigma(l)} = i$ ,  $K_v^\sigma$  is the set of structure units in the generalized word  $\lambda$ ). The distribution (38), for example, can be presented in the following form:

<sup>2)</sup> I.e. units do not participating in probabilistic process

$$F_{\sigma}(i) = e^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^{\infty} m^{\sigma}(\nu) \frac{\alpha^{i-\nu}}{(i-\nu)!}, \quad (21'')$$

In this formula  $\alpha = \bar{i} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu m^{\sigma}(\nu)$ . Generating function corresponding to this distribution is

$$G_{F_{\sigma}}(y; \alpha) = e^{\alpha(y-1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} m^{\sigma}(\nu) y^{\nu}, \quad (38)$$

Evidently, for moments one has the formula:

$$\overline{i(i-1)\dots(i-k+1)} = \left. \frac{\partial^k G_{F_{\sigma}}(y; \alpha)}{\partial y^k} \right|_{y=1} = \quad (39)$$

$$\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \alpha^m \sum_{\nu=k-m}^{\infty} m^{\sigma}(\nu) \nu(\nu-1)\dots(\nu-k+m+1), \quad (k=2,3,\dots).$$

Note that the product  $\nu(\nu-1)\dots(\nu-k+m+1)$  is equal to 1 when  $m=k$ . Since the connection of focal probabilities with possibility distribution is given by formula

$$m^{\sigma}(\nu) = \pi_{\nu}^{\sigma} - \pi_{\nu+1}^{\sigma}, \quad (40)$$

there is a direct possibility of determination of values  $\{\pi_{\nu}^{\sigma}\}$  (linguistic spectrum). This linguistic spectrum contains  $(n+1)$  components, among which  $\pi_0^{\sigma} = \pi_1^{\sigma} = 1$  and so for determination of the rest of the spectrum components  $(n-1)$  equations are necessary. According to (39) this system is

$$\begin{aligned} \overline{i(i-1)\dots(i-k+1)} &= \sum_{\nu=0}^n \nu(\nu-1)\dots(\nu-k+1) (\pi_{\nu}^{\sigma} - \pi_{\nu+1}^{\sigma}) + \\ &+ k\alpha \sum_{\nu=0}^n \nu(\nu-1)\dots(\nu-k+2) (\pi_{\nu}^{\sigma} - \pi_{\nu+1}^{\sigma}) + \dots + \\ &+ k\alpha^{k-1} \sum_{\nu=0}^n \nu (\pi_{\nu}^{\sigma} - \pi_{\nu+1}^{\sigma}) + \alpha^k, \quad i = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (41)$$

The parameter  $\alpha$  must be presented in the form:  $\alpha = \bar{i} - \sum_{\nu=0}^n \nu (\pi_{\nu}^{\sigma} - \pi_{\nu+1}^{\sigma}) = \bar{i} - \sum_{\nu=0}^n \pi_{\nu}^{\sigma}$ . In these expressions left hand sides are experimentally determined. It is convenient to present them in the form:

$$\overline{i(i-1)\dots(i-m)} = \sum_{l=0}^m \binom{1,2,\dots,m}{l} \bar{i}^{l+1}, \quad (42)$$

where numbers  $\binom{1,2,\dots,m}{l}$  are sums of all possible products of  $l$  natural numbers from the set  $\{1,2,\dots,m\}$  and  $\bar{i}^l$  are distribution moments of  $s$ -th order. The analogous expressions are in the right hand side. Thus the system of equations with respect to  $\pi_{\nu}$  ( $\nu = 2,3,\dots,n$ ) can be written in the following form:

$$\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} \binom{k-1}{l} \alpha^m \sum_{v=k-m}^{n-1} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} \binom{n-1}{v} (\pi_v^\sigma - \pi_{v+1}^\sigma) \quad (k = \overline{2, n}). \quad (42')$$

**6. CONSTRUCTION OF AN IMAGE OF THE CONSTANT STRUCTURE OF SYLLABLE.** In [9] problems of modeling of probabilistic-possibilistic organization of the word were considered. In [10] the statistical model of consonant structures of the Georgian words is constructed. Considering the same problems we use generalized Fock's distributions [11] [12]. Here in brief we consider the new deducing of these distributions. Empirical data were taken from [10] and [13]-[17].

In applications of fuzzy subsets the problem of evaluation of primary membership grades is highly important. The grade of membership is a result of expert's activity, who determines (or creates) the fuzzy subset. Consider the method which permits to reveal the membership grade in a logically consistent way. It is supposed that elements of a fuzzy subset are such that  $I_{\lambda}(\omega_i) \geq I_{\lambda}(\omega_j)$ , if  $i > j$  ( $I_{\lambda}$  is a membership function,  $\omega_k$  is the element of the universal set  $\Omega$ ). In our case  $\Omega$  consists of Bernoulli events  $B_{n-v}^{i-v}$ ,  $i$  is the full number of successes,  $v$  is fixed number of successes subset  $B_v$ , determining the structure of the combined event  $F_i^v = B_v \circ B_{n-v}^{i-v}$  [12]. Considered fuzzy subsets are normalized. This permits without additional assumptions to suppose that the membership function describes the possibility distribution and can be easily related with focal probabilities. Consider the random experiment, in which the notion of the level set is utilized and the Yager's algorithm of choosing the element  $\omega \in \Omega$  [18]: at first let randomly choose the value  $\alpha \in [0;1]$  and then also randomly the element from corresponding subset of  $\alpha$ -level. Now, let us calculate the probability of the particular element  $\omega \in \Omega$  in the conditions of this experiment. In accordance with our assumption

$$0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_n = \varepsilon_{\max} = 1$$

where  $\varepsilon_v$  are the values of the membership function (components of possibility distribution, or components of so called linguistic spectrum [19]). Level sets are:

|   |        |        |  |   |        |   |        |
|---|--------|--------|--|---|--------|---|--------|
| 0 | 0.0500 | 0.0750 | $0 < \alpha \leq \varepsilon_1 : B_1 = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$                      | 0 | 0.1250 | 0 | 0.1250 |
|   |        |        | $\varepsilon_1 < \alpha \leq \varepsilon_2 : B_2 = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$          |   |        |   |        |
|   |        |        | .....  |   |        |   |        |
|   |        |        | $\varepsilon_{n-2} < \alpha \leq \varepsilon_{n-1} : B_{n-1} = \{\omega_{n-1}, \omega_n\}$ |   |        |   |        |
|   |        |        | $\varepsilon_{n-1} < \alpha \leq \varepsilon_n : B_n = \{\omega_n\}$                       |   |        |   |        |
|   |        |        | $\varepsilon < \alpha : B_\alpha = \emptyset$  |   |        |   |        |

Since in the experiment  $\alpha$  randomly was chosen, the probability that the level set  $B_v$  will be chosen is equal to the length of the interval  $(\varepsilon_{v-1}, \varepsilon_v)$ ,  $m(B_v) = \varepsilon_v - \varepsilon_{v-1}$ . Besides note that since from level set element was chosen in accordance with Bernoulli scheme,

$$F(\text{choose element } \omega(B_v)) = \begin{cases} \binom{n-v}{i-v} p^{i-v} (1-p)^{n-v-(i-v)}, & \text{if } \omega \in B_v, \\ 0, & \text{if } \omega \notin B_v. \end{cases} \quad (43)$$

Thus, via the formula of full probability

$$F_n(i) = \sum_{\nu=1}^n m(B_\nu) \binom{n-\nu}{i-\nu} p^{i-\nu} (1-p)^{n-\nu-(i-\nu)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (44)$$

and in the Poisson limit

$$F(i) = e^{-\alpha} \sum_{\nu=1}^{\infty} m(B_\nu) \frac{\alpha^{i-\nu}}{(i-\nu)!}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (44')$$

$\alpha = \bar{i} - \bar{\nu} = \text{const}$ ,  $\bar{i}$  is the empirical average value of the random variable

$\xi = i$ ,  $\bar{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu m(B_\nu)$ . We see (45) and (38) are identical. Thus for finding the linguistic

spectrum we can use the system (43). We perform numerical solution of this system by the method of reverse spline-interpolation [20]. Results are given in tables *G1-G5*, where there are data about Georgian language vocabularies. In [10] the influence of consonant structures on the word formation process from syllables was investigated. Statistical analysis shows number of words with consonant structures relative to the whole volume of vocabulary for Georgian language 41%.

To the processing are subjected words with all structures (we think that their data characterize the whole language as a medium of formation), separately words with consonant structures *cc*, *cc-cc*, *cc-cc-cc* and *ccc*. Chosen in [10] consonant structures are typical for the Georgian language.

**7. PRIMARY DATA FOR GEORGIAN LANGUAGE AND RESULTS OF PROCESSING THE INFORMATION.** Empirical distribution of the number of syllables in the Georgian words

Table 1G.

|                                       |  | CC                    |        |        |                             |        |        |        |        |
|---------------------------------------|--|-----------------------|--------|--------|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|
| $P \setminus k$                       |  | 1                     | 2      | 3      | 4                           | 5      | 6      | 7      | 8      |
| $P(k)$                                |  | 0                     | 0,1271 | 0,2800 | 0,2833                      | 0,1945 | 0,0789 | 0,0240 | 0      |
| classical statistical characteristics |  |                       |        |        |                             |        |        |        |        |
|                                       |  | $\bar{k} = 3.8923,$   |        |        | skewness coefficient=0.3604 |        |        |        |        |
|                                       |  | $\sigma^2 = 1.5023,$  |        |        | curtosis=0.3878             |        |        |        |        |
|                                       |  | entropy=1.2386 (unit) |        |        |                             |        |        |        |        |
|                                       |  | CC-CC                 |        |        |                             |        |        |        |        |
| $P(k)$                                |  | 0                     | 0,0556 | 0,1978 | 0,3145                      | 0,2418 | 0,1307 | 0,0433 | 0      |
| classical statistical characteristics |  |                       |        |        |                             |        |        |        |        |
|                                       |  | $\bar{k} = 5.2287,$   |        |        | skewness coefficient=0.3801 |        |        |        |        |
|                                       |  | $\sigma^2 = 1.4464,$  |        |        | curtosis=0.1671             |        |        |        |        |
|                                       |  | entropy=1.1783 (unit) |        |        |                             |        |        |        |        |
|                                       |  | CC-CC-CC              |        |        |                             |        |        |        |        |
| $P(k)$                                |  | 0                     | 0.1636 | 0.3488 | 0.2543                      | 0.1429 | 0.0579 | 0.0122 | 0.0031 |
| classical statistical characteristics |  |                       |        |        |                             |        |        |        |        |
|                                       |  | $\bar{k} = 3.5801,$   |        |        | skewness coefficient=0.7781 |        |        |        |        |



|   |   |  |        |        |                             |                 |        |        |  |
|---|---|--|--------|--------|-----------------------------|-----------------|--------|--------|--|
|   |   | $\sigma^2=1.4611$ ,<br>entropy=1.2582 (unit) |        |        |                             | curtosis=0.3035 |        |        |  |
| CCC   |   |  |        |        |                             |                 |        |        |  |
| $P(k)$                                      | 0 | 0.1636                                       | 0.3488 | 0.2543 | 0.1429                      | 0.0579          | 0.0122 | 0.0031 |  |
| classical statistical characteristics       |   |  |        |        |                             |                 |        |        |  |
| $\bar{k} = 3.5801$                          |   |  |        |        | skewness coefficient=0.7781 |                 |        |        |  |
| $\sigma^2=1.4611$ ,<br>entropy=1.2582(unit) |   |  |        |        | curtosis=0.3035             |                 |        |        |  |
| All Structures                              |   |  |        |        |                             |                 |        |        |  |
| $P(k)$                                      | 0 | 0.1181                                       | 0.2757 | 0.2821 | 0.1932                      | 0.0873          | 0.0277 | 0      |  |
| classical statistical characteristics       |   |  |        |        |                             |                 |        |        |  |
| $\bar{k} = 3.9542$                          |   |  |        |        | skewness coefficient=0.3310 |                 |        |        |  |
| $\sigma^2=1.5363$ ,<br>entropy=1.2298(unit) |   |  |        |        | curtosis=0.4178             |                 |        |        |  |

Results of calculation on the basis of the model (43), (45).

Table 1G'

|   |        |        |  |        |                             |  |        |        |
|---|--------|--------|--|--------|-----------------------------|--|--------|--------|
| CC  |        |        |  |        |                             |  |        |        |
| $F \setminus k$   | 1      | 2      | 3  | 4      | 5                           | 6  | 7      | 8      |
| $F(k)$  | 0.0002 | 0.1272 | 0.2803   | 0.2834 | 0.1946                      | 0.0790                                       | 0.0241 | 0.0001 |
| Linguistic spectrum<br>$\varepsilon_1 = 1$ ;<br>$\varepsilon_2 = 0.9821$ ;<br>$\varepsilon_3 = 0.7402$ ;<br>$\varepsilon_4 = 0.3678$ ;<br>$\varepsilon_5 = 0.1235$ ;<br>$\varepsilon_6 = 0$                               |        |        | Focal probabilities<br>$m_1 = 0.0179$ ;<br>$m_2 = 0.2419$ ;<br>$m_3 = 0.3724$ ;<br>$m_4 = 0.2443$ ;<br>$m_5 = 0.1235$ ;<br>$\alpha = 0.0510$                     |        |                             | $\bar{v} = 3.8413$ ;<br>entropy=1.2371(unit) |        |        |
| optimal value of $\lambda = 0.0003$ ;   |        |        |  |        | number of iterations = 1216 |  |        |        |
| CC-CC   |        |        |  |        |                             |  |        |        |
| $F(k)$  | 0.0002 | 0.0557 | 0.1981   | 0.3146 | 0.2419                      | 0.1308                                       | 0.0434 | 0.0001 |
| Linguistic spectrum<br>$\varepsilon_1 = 1$ ;<br>$\varepsilon_2 = 0.9967$ ;<br>$\varepsilon_3 = 0.9034$ ;<br>$\varepsilon_4 = 0.6101$ ;<br>$\varepsilon_5 = 0.2497$ ;<br>$\varepsilon_6 = 0.0732$ ;<br>$\varepsilon_7 = 0$ |        |        | Focal probabilities<br>$m_1 = 0.0039$ ;<br>$m_2 = 0.0933$ ;<br>$m_3 = 0.3932$ ;<br>$m_4 = 0.3604$ ;<br>$m_5 = 0.1766$ ;<br>$m_6 = 0.0732$ ;<br>$\alpha = 0.6893$ |        |                             | $\bar{v} = 3.7028$ ;<br>entropy=1.2327(unit) |        |        |

| optimal value of $\lambda=0.0004$ ; number of iterations =1436 |                     |        |                 |                      |        |        |        |        |
|--|---------------------|--------|-----------------|----------------------|--------|--------|--------|--------|
| CC-CC-CC   |                     |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $F(k)$   | 0.0000              | 0.0657 | 0.0487          | 0.2034               | 0.2694 | 0.2236 | 0.1055 | 0.0837 |
| Linguistic spectrum  | Focal probabilities |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $\varepsilon_1=1$ ;  | $m_1=0$ ;           |        |                 | $\bar{v}=4.4887$ ;   |        |        |        |        |
| $\varepsilon_2=1$ ;  | $m_2=0.1379$ ;      |        |                 | entropy=1.1769(unit) |        |        |        |        |
| $\varepsilon_3=0.8621$ ;                                       | $m_3=0$ ;           |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $\varepsilon_4=0.8621$ ;                                       | $m_4=0.3889$ ;      |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $\varepsilon_5=0.4732$ ;                                       | $m_5=0.2678$ ;      |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $\varepsilon_6=0.2050$ ;                                       | $m_6=0.1622$ ;      |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $\varepsilon_7=0.0432$ ;                                       | $m_7=0.0011$ ;      |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $\varepsilon_8=0.0421$   | $m_8=0.0421$ ;      |        |                 |                      |        |        |        |        |
|  |                     |        | $\alpha=0.7400$ |                      |        |        |        |        |
| optimal value of $\lambda=0.0006$ ; number of iterations =1421 |                     |        |                 |                      |        |        |        |        |
| CCC  |                     |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $F(k)$   | 0.0002              | 0.1637 | 0.3491          | 0.2544               | 0.1430 | 0.0580 | 0.0123 | 0.0032 |
| Linguistic spectrum  | Focal probabilities |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $\varepsilon_1=1$ ;  | $m_1=0.0169$ ;      |        |                 | $\bar{v}=3.2902$ ;   |        |        |        |        |
| $\varepsilon_2=0.9831$ ;                                       | $m_2=0.2217$ ;      |        |                 | entropy=1.2567(unit) |        |        |        |        |
| $\varepsilon_3=0.7614$ ;                                       | $m_3=0.4009$ ;      |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $\varepsilon_4=0.3585$ ;                                       | $m_4=0.2109$ ;      |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $\varepsilon_5=0.1476$ ;                                       | $m_5=0.1080$ ;      |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $\varepsilon_6=0.0396$ ;                                       | $m_6=0.0396$ ;      |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $\varepsilon_7=0$ ;  | $\alpha=0.2899$     |        |                 |                      |        |        |        |        |
|  |                     |        |                 |                      |        |        |        |        |
| optimal value of $\lambda=0.0002$ ; number of iterations =1631 |                     |        |                 |                      |        |        |        |        |
| All Structures   |                     |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $F(k)$   | 0.0002              | 0.1182 | 0.2760          | 0.2822               | 0.1933 | 0.0874 | 0.0278 | 0.0001 |
| Linguistic spectrum  | Focal probabilities |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $\varepsilon_1=1$ ;  | $m_1=0.0133$ ;      |        |                 | $\bar{v}=3.5171$ ;   |        |        |        |        |
| $\varepsilon_2=0.9867$ ;                                       | $m_2=0.2186$ ;      |        |                 | entropy=1.2283(unit) |        |        |        |        |
| $\varepsilon_3=0.7681$ ;                                       | $m_3=0.3894$ ;      |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $\varepsilon_4=0.3787$ ;                                       | $m_4=0.2352$ ;      |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $\varepsilon_5=0.1435$ ;                                       | $m_5=0.1220$ ;      |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $\varepsilon_6=0.0215$ ;                                       | $m_6=0.0215$ ;      |        |                 |                      |        |        |        |        |
| $\varepsilon_7=0$  | $\alpha=0.4371$     |        |                 |                      |        |        |        |        |
|  |                     |        |                 |                      |        |        |        |        |
| optimal value of $\lambda=0.0002$ ; number of iterations =1656 |                     |        |                 |                      |        |        |        |        |



Associated probabilities and values of fuzzy measure.

Table 1G"

| CC                                      |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |  |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--|
| $\hat{P}_\sigma \setminus \{x_\sigma\}$ | $x_{\sigma(1)}$ | $x_{\sigma(2)}$ | $x_{\sigma(3)}$ | $x_{\sigma(4)}$ | $x_{\sigma(5)}$ | $x_{\sigma(6)}$ | $x_{\sigma(7)}$ | $x_{\sigma(8)}$ | values of fuzzy measure  |
| $\hat{P}_\sigma(x_{\sigma(1)})$         | 0.3505          | 0.3326          | 0.2117          | 0.0856          | 0.0245          | 0               | 0               | 0               | $g^\sigma(K_1^\sigma)=0.3505;$<br>$g^\sigma(K_2^\sigma)=0.6831;$<br>$g^\sigma(K_3^\sigma)=0.8948;$<br>$g^\sigma(K_4^\sigma)=0.9804;$<br>$g^\sigma(K_5^\sigma)=1$   |
| CC-CC                                   |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |  |
| $\hat{P}_\sigma(x_{\sigma(1)})$         | 0.2853          | 0.2820          | 0.2353          | 0.1376          | 0.0475          | 0.012<br>2      | 0               | 0               | $g^\sigma(K_1^\sigma)=0.2853;$<br>$g^\sigma(K_2^\sigma)=0.5673;$<br>$g^\sigma(K_3^\sigma)=0.8026;$<br>$g^\sigma(K_4^\sigma)=0.9402;$<br>$g^\sigma(K_5^\sigma)=0.9877;$<br>$g^\sigma(K_6^\sigma)=1$   |
| CC-CC-CC                                |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |  |
| $\hat{P}_\sigma(x_{\sigma(1)})$         | 0.2522          | 0.2522          | 0.1824          | 0.1824          | 0.0860          | 0.032           | 0.005<br>4      | 0.005<br>3      | $g^\sigma(K_1^\sigma)=0.2522;$<br>$g^\sigma(K_2^\sigma)=0.5044;$<br>$g^\sigma(K_3^\sigma)=0.6868;$<br>$g^\sigma(K_4^\sigma)=0.8632;$<br>$g^\sigma(K_5^\sigma)=0.9552;$<br>$g^\sigma(K_6^\sigma)=0.9877;$<br>$g^\sigma(K_7^\sigma)=0.9931;$<br>$g^\sigma(K_8^\sigma)=1$ |
| CCC                                     |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |  |
| $\hat{P}_\sigma(x_{\sigma(1)})$         | 0.3430          | 0.3261          | 0.2153          | 0.0809          | 0.0282          | 0.006<br>6      | 0               | 0               | $g^\sigma(K_1^\sigma)=0.3430;$<br>$g^\sigma(K_2^\sigma)=0.6691;$<br>$g^\sigma(K_3^\sigma)=0.8854;$<br>$g^\sigma(K_4^\sigma)=0.9663;$<br>$g^\sigma(K_5^\sigma)=0.9945;$<br>$g^\sigma(K_6^\sigma)=1$   |

| All Structures                  |        |        |        |        |        |        |   |   |  |
|---------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---|---|--|
| $\hat{P}_\sigma(x_{\sigma(l)})$ | 0.3372 | 0.3239 | 0.2146 | 0.0868 | 0.0280 | 0.0036 | 0 | 0 | $g^\sigma(K_1^\sigma)=0.3372;$<br>$g^\sigma(K_2^\sigma)=0.6611;$<br>$g^\sigma(K_3^\sigma)=0.8757;$<br>$g^\sigma(K_4^\sigma)=0.9625;$<br>$g^\sigma(K_5^\sigma)=0.9906;$<br>$g^\sigma(K_6^\sigma)=1$ |

The experton of syllabic structure for Georgian language:

Table 4G

| LenV | 0.0 | 0.1  | 0.2  | 0.3  | 0.4  | 0.5  | 0.6  | 0.7  | 0.8  | 0.9  | 1.0  |
|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1    | 1   | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    |
| 2    | 1   | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 0.25 |
| 3    | 1   | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 0.50 | 0.25 | 0    |
| 4    | 1   | 1    | 1    | 1    | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.25 | 0.25 | 0    | 0    |
| 5    | 1   | 1    | 0.50 | 0.25 | 0.25 | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    |
| 6    | 1   | 0.25 | 0.25 | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    |
| 7    | 1   | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    |
| 8    | 1   | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    |

The fuzzy number of the consonant structure phonological length of the Georgian word.

Table 3G

| $\tilde{C}_G$        | 1 | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      |
|----------------------|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\chi_{\tilde{C}_G}$ | 1 | 0.9318 | 0.7956 | 0.5455 | 0.2227 | 0.1364 | 0.0909 | 0.0909 |

(50)

The nearest to  $\tilde{C}_G$  crisp subset is:

Table 4G

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

(50')

Combined model of syllabic length distribution for Georgian language:

$$F(k) = 0.0086 \frac{(0.4371)^{k-1}}{(k-1)!} + 0.1412 \frac{(0.4371)^{k-2}}{(k-2)!} + 0.2515 \frac{(0.4371)^{k-3}}{(k-3)!} +$$

$$+ 0.1519 \frac{(0.4371)^{k-4}}{(k-4)!} + 0.0788 \frac{(0.4371)^{k-5}}{(k-5)!} + 0.0189 \frac{(0.4371)^{k-6}}{(k-6)!} \quad (G)$$

**8. NEW GENERAL CHARACTERISTICS OF WORD'S SYLLABIC ORGANIZATION.**

On the ground of primary information processing we constructed images of word syllabic structures (see (44), (44')) for the Georgian Language. The main characteristics of an image is the word's fuzzy phonological length. It turned out that this characteristics is "identical" for the above languages:  $\bar{C} = \bar{1}$ . But this fuzzy one for certain language is own.

As a new general characteristic of the language syllabic structure we suggest *MTV* (see (36)) of the phonological length. Calculations of these characteristics are carried out for the Georgian language.

$$\xi_1 = \{1\}, \quad \xi_{0.9518} = \{2\}, \quad \xi_{0.7956} = \{3\}, \quad \xi_{0.5455} = \{4\},$$

$$\xi_{0.2727} = \{5\}, \quad \xi_{0.1364} = \{6\}, \quad \xi_{0.0909} = \{7\}, \quad \xi_{0.0909} = \{8\}.$$

**Table 5G**  
 Upper and lower Choquet's capacities

| $g \setminus \xi$ | $\xi_1$ | $\xi_{0.9518}$ | $\xi_{0.7956}$ | $\xi_{0.5455}$ | $\xi_{0.2727}$ | $\xi_{0.1364}$ | $\xi_{0.0909}$ | $\xi_{0.0909}$ |
|-------------------|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $g_*$             | 0.2522  | 0.5044         | 0.6691         | 0.8632         | 0.9552         | 0.9877         | 0.9931         | 1              |
| $g^*$             | 0.3505  | 0.6831         | 0.8948         | 0.9804         | 1              | 1              | 1              | 1              |

## REFERENCES

1. Criado F., Gachechiladze T. *Fuzzy mathematical models of linguistic statistics I*. Izv. Russ. Acad. Nauk N5 pp1-12 (1998).
2. Campos I., Bolaños C. *Representation of fuzzy measures through probabilities*. FSS, 31, pp23-30 (1989).
3. Criado F., Gachechiladze T., Meladze H., Tsertsvadze G. *Ignorance, knowledge and Information*. Rep. of Enlarged session of I.Vekua's Institute Appl. Mathem., vol 14, N8 (1999).
4. Criado F., Gachechiladze T., Meladze H., Tsertsvadze G. *A combined Entropy for evaluation of fuzzy random events probabilities*. Rep. of Enlarged session of I.Vekua's Institute Appl. Mathem., vol 13, N4 pp28-32 (1998).
5. Choquet G. *Theory of capacities*. Ann. Inst. Fourier, 5 pp131-295 (1953).
6. Criado F., Gachechiladze T., Sirbiladze G. *Experts insufficient data fuzzy analysis (image construction) on the finite set* Proc. Tbilisi State University (2000) (to be published).
7. Dubois D., Prade H. *Theorie des possibilités*. Masson (1988).
8. Kaufmann A. *Theory of expertons and fuzzy logic*. FSS 28 , N3 pp 295-305 (1988).
9. Criado F., Gachechiladze T. *Fuzzy mathematical models of linguistic statistics II*. Izv. Puss. Acad. Nauk, N5 pp17-21 (1999).
10. Megrelishvili R. *A phonological model of consonant structures of words and mathematical theory of word formation*. Proc. Tbilisi State University (Cybernet., Appl. Mathem.), vol 10 (289) pp11-42 (1989).
11. Gachechiladze T., Mandjaparashvili T. *Generalised fuzzy Bernoulli distribution*. Proc. Tbilisi State University (Cybernet., Appl. Mathem.), vol 224 pp126-145 (1981).
12. Criado F., Gachechiladze T., Meladze H., Tsertsvadze G. *Fuzzy models of language structures*. IEEE Trans. on Fuzzy Systems (2000) (to be published).
13. Rohert P. *Dictionnaire alphabetique de la langue Française*. Paris (1970).
14. Samuel Gill Gaya D. *Vox Dicionario general de la lengua Española*. Barcelona (1953).
15. Goelzer H. *Dictionnaire Latin*. Francais, Paris (1966).
16. Horuby A. *Oxford Advanced Learner's Dictionary of current English*. London (1975).
17. Gvardjaladze I., Lebanidze V. *Dictionnair Georgian*. Francais, Tbilisi (1971).
18. Yager R. *Level sets for membership Evaluation*. Fuzzy sets and Possibility theory, Pergamon Prass (1986).
19. Fucks W. *Mathematical theory of word formation*. Communication theory. London (1953).

20. Criado F., Gachechiladze J., Meladze H. *Inverse spline-interpolation for numerical solving a piston problem with isothermic gas compression and constant velocity*. Intern. J. Computer. Mathem., vol. 71 pp 83-95 (1999).
21. Gachechiladze T. *Inverse spline-interpolation for numerical solving the non-linear equations system*. Proc. Tbilisi State University (Cybernet., Appl. Mathem.), vol 15 (315) pp 155-168 (1993).
22. Dubois D., Prade H. *Properties of measures of information in evidence and possibility theories*. FSS, 24, N2, pp 161-183 (1987).
23. Kaufmann A. *Introduction a la Théorie de sous. ensembles flous*, Masson (1977).

Accepted for publishing on October 10, 2002.

Reviewed on October 20, 2003.

## არამკაფიო სიმრავლის (სტრუქტურის ხაზის) აგება არასაკმარისი ხანსაერთო მონაცემების სასრულ სიმრავლეზე

### 6. ევოლუციური

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,  
 შემთხვევით პროცესთა თეორიის კათედრა

ნაშრომი ეძღვნება ქართული ენის სტრუქტურების არამკაფიო ორგანიზაციის რიცხვით მოდელირებას. ენის სტრუქტურების არამკაფიო განაწილებები შეიცავს მონაცემებს ნაბეჭდი ტექსტის გენერაციის თანმსდევი ფიზიოლოგიური, ფსიქოლოგიური და საინფორმაციო პროცესების მართვის კანონების შესახებ. ეს განაწილებები ხასიათდება ე.წ. ლინგვისტური სპექტრით, რომელიც განსაზღვრავს ენის გამოყოფილი ელემენტების განაწილებების სხვადასხვა მექანიზმებს და არამკაფიო წრფივ სტრუქტურებს. ასეთი წრფივი სტრუქტურების მოდელირება დაფუძნებულია დაშვებაზე ორი სახის განუზღვრელობის, ალბათურისა და შესაძლებლობითის სუპერპოზიციის შესახებ.

არსებობს ორი კლასიკური მიდგომა არამკაფიო სიდიდების შესწავლისა. თუ მიღებული მონაცემები „საკმარისად ზუსტია“, მაშინ მათი ზოგადი მახასიათებლების შეფასებისა და დამუშავებისთვის იყენებენ ალბათურ-სტატისტიკურ მეთოდებს. იმ შემთხვევაში, როდესაც მონაცემები წარმოდგენილია „საკმარისად არაზუსტად“, ინტერვალებით, მაშინ მათი შესწავლისათვის წარმატებით გამოიყენება ცლომობლათა თეორიის მეთოდები. თუმცა გვხვდება შემთხვევები, როდესაც ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდებისა და ცლომობლათა თეორიის გამოყენება არ გვაძლევს დამაკმაყოფილებელ შედეგს. მიზეზი უბრალოა. ცხადია, იგი უნდა ვეძიოთ მონაცემების ბუნებასა და მათი მოპოვების მეთოდებში (გაზომვა, აღწერა და ა.შ.). იმ შემთხვევაში, როდესაც მონაცემები წარმოდგენილია ინტერვალებით და მათი

განაწილება „ბუნდოვანია“, ხასიათდება გადაფარებით, ხოლო მათი აღწერისა ან მიღების პროცესში მონაწილეობას იღებენ ექსპერტები, ცხადია, რომ მონაცემთა ბუნება ამ შემთხვევაში იჭეება კომბინირებული: ალბათურ-სტატისტიკური განუზღვრელობის პარალელურად იარსებებს აგრეთვე შესაძლებლობითი განუზღვრელობა, რომელიც რასაკვირველია, ჩნდება ექსპერტის აქტიულობის შემთხვევაში. იგი გულისხმობს მონაცემთა არამკაფიო ანალიზის მეთოდების გამოყენებას. მხოლოდ ალბათურ-შესაძლებლობითმა ანალიზმა შეიძლება მოგვეცეს მეტ-ნაკლებად ადეკვატური შედეგი. ასეთი მიდგომა საშუალებას გვაძლევს დაწვრილებით შევისწავლოთ ენის რაოდენობრივი მახასიათებლები.

ბუნდოვანობა და დაბნეულობა ხასიათდება გადაფარებით, ხოლო მათი აღწერისა ან მიღების პროცესში მონაწილეობას იღებენ ექსპერტები, ცხადია, რომ მონაცემთა ბუნება ამ შემთხვევაში იჭეება კომბინირებული: ალბათურ-სტატისტიკური განუზღვრელობის პარალელურად იარსებებს აგრეთვე შესაძლებლობითი განუზღვრელობა, რომელიც რასაკვირველია, ჩნდება ექსპერტის აქტიულობის შემთხვევაში. იგი გულისხმობს მონაცემთა არამკაფიო ანალიზის მეთოდების გამოყენებას. მხოლოდ ალბათურ-შესაძლებლობითმა ანალიზმა შეიძლება მოგვეცეს მეტ-ნაკლებად ადეკვატური შედეგი. ასეთი მიდგომა საშუალებას გვაძლევს დაწვრილებით შევისწავლოთ ენის რაოდენობრივი მახასიათებლები.



## დამატებითი ელექტროენერგიის მიღების ხელშეწყობის წყალსაცავის დონის ცვლილების ხარჯზე და მისი პროგრამული მართვა

კ. კაპაშვიტა<sup>\*)</sup>, ვ. გაბრიანიტა<sup>\*)</sup> დ. პაატაშვილი<sup>\*)</sup> ი. გაბრიანიტა<sup>\*\*)</sup>

<sup>\*)</sup> საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

<sup>\*\*)</sup> ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ინსტიტუტი

აბსტრაქტი. ელექტროენერგეტიკის განვითარების დაჩქარებისათვის საჭიროა მძლავრი და ამასთან ერთად ბაზისური-მარვევულირებელი ჰესების მშენებლობა, დამატებითი ნაგებობების შექმნით ღირდალი ელექტროენერგია იქნება გამოშუშავებული. ჰესი დაკავშირებული უნდა იყოს ავტომატური მართვის კომპლექტური ცენტრთან, რომელიც მიიღებს გადასამუშავებელი ინფორმაციის სიგნალებს და მისი გადაამუშავების შემდეგ სათანადო გადაწყვეტილებებს.

ელექტროენერგეტიკის განვითარების დაჩქარებისათვის საჭიროა მძლავრი და ამასთან ერთად ბაზისური-მარვევულირებელი ჰესების მშენებლობა. ეს კი მოითხოვს მდინარის კალაპოტში დიდი მოცულობის წყალსაცავების მოთავსებას მაღლივი კაშხალებით. ასეთი გრანდიოზული ნაგებობების განხორციელებისათვის პროექტირების დროს გათვალისწინებული უნდა იქნას ეკოლოგიის-ბუნების დაცვის, ბიოლოგიური და სხვა დამატებით-პრობლემატური საკითხები. თუ ეს ყველაფერი გათვალისწინებული იქნება, მაშინ საზოგადოების მხრიდან ყველა საჭევო და სადაო საკითხები მოიხსნება.

რა იგულისხმება დამატებით ნაგებობებში, რომლითაც უზრუნველყოფილი იქნება წყალსაცავის დაცვა დაღამებისაგან და უწყვეტი ციკლით მდინარის ნატანის და მიკრო ორგანიზმების მიწოდება ზღვის აკვადორიაში. ეს აისახება შემდეგნაირად: მდინარის კალაპოტში წყალსაცავის ბოლო წერტილის მოშორებით მოეწყობა გადამღობი, რომლის საშუალებით მდინარის წყალი მიმართული იქნება არხში ან გვირაბში (შესაფერისი სიჩქარით). არხის ან გვირაბის მეშვეობით და წყლის დინების ტრანსპორტირებით ნატანი გადაადგილდება და კაშხალთან ახლოს მოეწყობა სალუქარი, ნატანი გამოყოფი ნაგებობა, რომლის გაგლის შემდეგ ნატანართმული წყალი ჩაიშვება წყალსაცავში კაშხალთან ე.ი. მოხდება წყალსაცავის ავსება კაშხლიდან ზევით წერტილისაკენ და არა პირიქით. ამ ღონისძიებით ბევრი პრობლემა გადაწყდება. ნატანი ჩაშვებული იქნება კაშხალთან ქვედა ბიეფში, რომელიც ჰესის ნამუშევარი წყლით ან ხელოვნურად ტრანსპორტირებული იქნება ქვედა ბიეფიდან. გარდა ამისა, წყალსაცავის მთელი მოცულობა შეიძლება გამოყენებული იქნას როგორც სასარგებლო მოცულობა (რადგან მკვდარი, ნატანისთვის განკუთვნილი, მოცულობა აღარ იქნება საჭირო). ამასთანავე, სალუქარიდან გაწმენილი წყალი შეიძლება გატარებული იქნეს დამატებით ავტოულ ჰესში და მიღებულ იქნას დამატებითი ელექტროენერგია, ხოლო ნამუშევარი წყალი მიეწოდება წყალსაცავში ძირითადი ჰესის ავრეგატებში გასატარებლად. ამ ღონისძიებით ღირდალი ელექტროენერგია იქნება გამოშუშავებული. მაგალითად, თუ ასეთი ღონისძიება გატარებული იქნება ზუღონ ჰესისათვის, გვირაბის (არხის) სიგრძე 10 კმ იქნება. ზუღონ ჰესის წყალსაცავში



სადაც წყლის დონე იცვლება მაქს. 700 მ-დან მინიმუმ 645 მ-დე, დამატებითი ელენერგის გამოსამუშავებლად გამოყენებული იქნება დონეთა სხვაობა:

$$H \text{ მაქს} - H \text{ მინ} = H_{\text{დამ}} = 700 - 645 = 55 \text{ მ}$$

და ამას დამატება  $H_b$ , რომელიც არის წყალსაცავის წყალგამომყვანიდან 700 ნიშნულამდე ვარდნა. აქედან ელექტულობით ვამურ ვარდნას

$$H = H_{\text{დამ}} + H_b$$

ყველა ეს ვარდნები მონაწილეობას ღებულობს დამატებითი ელექტროენერგის გამოშვებაში, რაც წელიწადში ასეული მლნ. კვტ. საათი იქნება.

ახალი ტექნიკური გადაწყვეტა ეხება ელექტრო და ჰიდრო ენერგეტიკის დარგს. სისტემა წარმოადგენს ჰიდროტექნიკური ნაგებობების და ჰიდროელექტრომექანიკური დანადგარების ერთობლიობას, რომელიც ითვალისწინებს ელექტროენერგეტიკის განვითარების და მდინარეებსა და წყალსაცავებში მოდერნილი წყლის ხარჯის რაციონალურად გამოყენებისა და დამატებითი ენერჯის მიღების საკითხებს. ამ საკითხების დადებითად გადაწყვეტას დიდი მნიშვნელობა აქვს პიკური სიმძლავრეების მოთხოვნების დასაკმაყოფილებლად. ეს პრობლემატური საკითხი უნდა გადაწყდეს კომპლექსში შემდგენიარად.

პირველ რიგში, კასკადში მყოფი ყველა წყალსაცავი აღჭურვილი უნდა იყოს წყლის დონის გაზომვით, ამასთანავე ყველა ჰესის აგრეგატები დაცული უნდა იყვნენ სიმძლავრის მოსალოდნელი ავარიული გამორთვის დროს, ნებისმიერი ექსტრემალური სიტუაციის პირობებში დაცული უნდა იყვნენ გაქცევისაგან, ხოლო წყალმიმყვანები და ტურბინები ჰიდრავლიკური დარტყმისაგან. ამის უზრუნველსაყოფად საჭიროა ყველა ჰესი აღჭურვილი იყოს ჰიდრავლიკური დარტყმის თავიდან ასაცილებელი მოწყობილობებით. ამასთანავე, ჰესების სრული ავტომატური მართვის სქემაში გათვალისწინებული უნდა იყოს აგრეგატების სიმძლავრის ჯგუფური და თითოეულის ინდივიდუალურად რეგულირების მოწყობილობები და სხვა საჭირო აპარატურა და გადაშრობები.

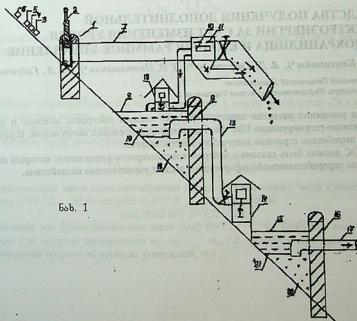
ბოლოს, ყველა დასახელებული მოწყობილობები და გადაშრობები დაკავშირებული უნდა იყვნენ ჰესების ავტომატური მართვის კომპიუტერულ ცენტრთან, რომელიც მიიღებს გადასამუშავებელი ინფორმაციის სიგნალებს და მისი გადაამუშავების შემდეგ სათანადო გადაწყვეტილებებს. უნდა აღინიშნოს აგრეთვე, რომ ავტომატური მართვის პირობებში არანაკლები როლი ენიჭება ფარებს, საკეტებს, რომლებიც მონაწილეობენ კომპლექსში მყოფ ჰესების და წყალსაცავების წყლით მომარაგებამიწოდებაში. ე. ი. ესენიც დაკავშირებული უნდა იყვნენ კომპიუტერული მართვის სისტემასთან ყველა ზემოთ მოყვანილის განსაზოორციელებლად. ჰიდროტექნიკური და ელექტრომექანიკური სქემა შედგება შემდეგი კვანძებისა და უბნებისაგან: მდინარის კალაპოტში ჩაშენებულია გადადინების შესაძლებლობით გადამლობი (1), გასაღებ-დასახური კარით (2), გადამლობის რაიონში მდინარის კალაპოტში სტაციონალურად მოთავსებული წყლის სიჩქარის (3) დონის (4), სიმღერის (5) გაზომვი მოწყობილობები, გადამლობიდან მოშორებით მდინარის კალაპოტში საჭიროა იყოს წყლის კატასტროფული ხარჯის მაუწყებელი გადაშრობი (6). გადამლობიდან



სათავეს იღებს გვირაბი (7), რომელიც წყალსაცავს (8) მის მთელ სიგრძეზე უელის გერდს კაშხლამდე (9).

ქორიზონტალურ სიბრტყეში გვირაბს აქვს ფანჯარა (10), რომლიდანაც მღერიე წყალი შეტევიერებული ნატანიო შედის სალუქარში (11), და გაწმენდილი წყალი კი მიეწოდება დამატებითი ქესის (12) ჰიდრო აგრეგატებს ან პირდაპირ მიეწოდება წყალსაცავში. წყალსაცავიდან წყალმიმღების (13) საშუალებით წყალი მიეწოდება ძირითად ქესში (4) და აქედან ნამუშევარი წყალი შუა კასკადის შემდეგ წყალსაცავში (15), კაშხალში (16), რომელიც წყალმიმყვანიო (17) დაკავშირებულია შემდეგ ქესთან, რომელიც არ არის ნაწვენები ნახაზზე. წყალსაცავებს გააჩნიაო მკვდარი (18) და სასარგებლო მოცულობები (19). ასევე მორეე წყალსაცავს (20) და (21), შესაბამისად, გააჩნიაო მკვდარი და სასარგებლო მოცულობები. მაგალითისთვის საქართულოს ენერგოსისტემაში ასეთი განლაგებითი კასკადი იქნება ზუღონისა და ენგურის წყალსაცავებში.

აქ მხოლოდ საჭიროა დამატებითი გაკეთდეს ზუღონის წყალსაცავის შემომავალი გვირაბი, რომელიც მას დაიცავს მდინარის ნატანისაგან. სამაგიეროდ, ნატანი შეტანილი იქნება ენგურის წყალსაცავის მკვდარ მოცულობაში (20). ამ წყალსაცავში მდინარეს ისედაც შექონდა აღნიშნული ნატანი. შედეგად, ზუღონის წყალსაცავი დაცული იქნება დალაშვისაგან და ამ წყალსაცავთან წყლის სარკული ზედაპირის მაქსიმალური ნიშნულის დონეზე აშენდება დამატებითი ქესი. დამატებითი ქესს შეეძლება გამოიშუშოს ასეული მილიონი კვტსათი ელენერგია და ნამუშევარი წყალი მიაწოდოს მასთან მდებარე წყალსაცავში მორადი გამოყენებისათვის, ძირითად ქესში მორეეერ გამოსაყენებლად.



ნახ. 1



Accepted for publishing on October 27, 2002.

Reviewed on May 19, 2003.

## WAYS OF OBTAINING ADDITIONAL (EXTRA) ELECTRIC ENERGY BY MEANS OF A COMPUTER

*K. Kamkamidze\*), V. Gabrichidze\*), L. Paatashvili\*), I. Gabrichidze\*\*)*

*\*) Polytechnical University of Georgia*

*\*\*\*) Institute of Informatics and Control Systems*

The construction of basic and controlling hydropower station demands buildings of high retention with high-rise dams. To realize such huge structures, while designing, many factors, such as environment protection, biological factors and other problems have to be taken into consideration.

Let's consider, for example several rivers which carry solid mass into the sea. This mass supplies the sea coast strip with gravel and also enriches fauna.

Erection of the high dam in the gorge of the river Enguri partitioned the river bed and whole carried by the river is accumulated in the reservoir. This process can be avoided by building auxiliary structures which naturally provide the continuous cycle of mass feeding to protect the sea coast (area) strip from destroying.

To manage and control these processes water level measuring devices must be attached to the automatic management systems of the hydropower station.

## СРЕДСТВА ПОЛУЧЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ ЗА СЧЕТ ИЗМЕНЕНИЯ УРОВНЯ ВОДОХРАНИЛИЩА И ЕГО ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

*К. Н. Камкаидзе\*), В. Д. Габричидзе\*), Л. П. Пааташвили\*), Ю. Д. Габричидзе\*\*)*

*\*) Грузинский Технический Университет*

*\*\*\*) Институт Информатики и Систем Управления*

Для ускорения развития электроэнергетики следует построить мощные и вместе с тем базисно-регулирующие ГЭС с созданием дополнительных сооружений. В результате будет выработано огромное количество электроэнергии.

ГЭС должна быть связана с центром компьютерного управления, который получает сигналы перерабатываемой информации и выдает управляющие воздействия.

## КИТАЙСКАЯ ТЕОРЕМА ОБ ОСТАТКАХ И ПРИНЦИП НОРМАЛИЗАЦИИ ЛЕТОСЧИСЛЕНИЙ В ХРОНОЛОГИИ

Н.Канделаки\*), Г.Перцвадзе\*\*)

\*) Институт Вычислительной Математики им.Н. Мухелишвили АН Грузии,

\*\*) Кафедра Математической Кибернетики

**Abstract.** Formulation of principle of one of the basic foundations of chronology and showing that corresponding to that principle normalization procedure of colander uses in evident way China theorem about remainders.

В работе обсуждается календарная проблема нашего летосчисления. Оказалось, что ее решение непосредственно связано с процедурой нормализации различных систем летосчислений, которая, в свою очередь, базируется на китайской теореме об остатках. Для удобства приведем ее сначала в самой общей форме (см. [1], стр. 82).

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $A$  – кольцо и  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – идеалы в  $A$ . Предположим, что  $a_i + a_j = A$  при всех  $i \neq j$ . Пусть

$$f: A \rightarrow \prod_{i=1}^n (A/a_i) = (A/a_1) \times (A/a_2) \times \dots \times (A/a_n)$$

– отображение кольца  $A$  в написанное произведение, индуцированное каноническими отображениями  $A$  на  $A/a_i$  для каждого множителя. Тогда ядро отображения  $f$  есть

$\bigcap_{i=1}^n a_i$  и  $f$  – сюръективно, что приводит, таким образом, к изоморфизму

$$A / \bigcap_{i=1}^n a_i \xrightarrow{\cong} \prod_{i=1}^n A/a_i \quad (1)$$

Важным пунктом в доказательстве этой замечательной теоремы является построение элементов  $y_1, y_2, \dots, y_n$  таких, что

$$\begin{aligned} y_i &= 1 \pmod{a_i} \\ y_i &= 0 \pmod{a_j} \text{ при } i \neq j. \end{aligned} \quad (2)$$

Китайская теорема об остатках часто применяется к кольцу целых чисел  $Z$  и к попарно взаимно простым числам  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Они удовлетворяют предпосылкам теоремы, поскольку являются взаимно простыми. Обозначим, как обычно, через  $(m)$  – главный идеал числа  $m$ , тогда изоморфизм (1) принимает вид

$$Z / (m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n) \xrightarrow{\cong} \prod_{i=1}^n Z / (m_i). \quad (3)$$

В приложениях часто возникает обратная задача: для некоторого числа  $x$  известны его значения  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) по модулю  $m_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), т.е. известны

$$x = x_i \pmod{m_i} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

эти значения мы будем обозначать через  $x(m)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Требуется восстановить значение  $x$  по модулю произведения  $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ , т.е. требуется найти  $x(m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n)$ . Китайская теорема об остатках утверждает, что

$$x(m_1 \cdot m_2 \dots m_n) = y_1 x(m_1) + y_2 x(m_2) + \dots + y_n x(m_n), \quad (4)$$

где  $y_1, y_2, \dots, y_n$  базисные элементы из (2).

Приведем теперь примеры некоторых календарно-хронологических систем, имеющих важное значение для хронологии [2, 3].

Пусть  $n=2$  и  $m_1=19$ ,  $m_2=28$ , так что  $m_1 \cdot m_2=19 \cdot 28=532$ . Формула (4) в этом случае имеет вид

$$x(532)=476 x(19)+57 x(28). \quad (5)$$

В самом деле,

$$y_1=476=25 \cdot 19+1 \equiv 1 \pmod{19},$$

$$476=17 \cdot 28+0 \equiv 0 \pmod{28},$$

$$y_2=57=2 \cdot 28+1 \equiv 1 \pmod{19},$$

$$57=3 \cdot 19=0 \pmod{19}.$$

Пусть теперь  $x(19)=18$  и  $x(28)=4$ . Тогда согласно (5)

$$x(532)=476 \cdot 18+57 \cdot 4=8796=532 \cdot 16+284=284 \pmod{532}.$$

$19 \times 28=532$ -летний календарный период, состоящий из 19-летнего лунного цикла и 28-летнего солнечного цикла, функционирующих по юлианскому календарю, называются «Большим пасхальным кругом» – БПК. Церковники его называют «Великим индиктионом». Он играет большую роль при составлении таблиц пасхалий.

Особенность числа 19 состоит в том, что через каждые 19 лет все фазы луны приходятся на те же числа месяца, а особенность числа 28 состоит в том, что через каждые 28 лет числа месяца приходятся опять на те же дни недели.

Таким образом, через каждые  $19 \times 28=532$  года одним и тем же числом месяцев будут соответствовать одни и те же названия дней недели, а также одни и те же фазы луны. По этой же причине через каждые 532 года пасхальные дни падают на одни и те же числа и дни недели.

Вместе с тем известно, что в древней Грузии для целей летосчисления использовался цикл в 532 года под названием «хроникон» или «короникон». При датировке событий указывали число целых корониконов, истекших с начала эры от «сотворения мира», и порядковое место данного года в текущем корониконе, которое также именовалось корониконом. При этом грузинская эра «от «сотворения мира»» определяется как

$$5604 \text{ г.} = 1 \text{ г. до н.э.} \quad (6)$$

а система летосчисления «хроникон», состоящая из БПК -ов, определяется как

$$284 \text{ г. 11-го БПК} = 1 \text{ г. до н.э.} \quad (7)$$

Заметим, что в (6) и (7) равенство дат понимается как соответствие. В дальнейшей эпоху 1 г. до н.э. мы будем обозначать через  $A$ .

Таким образом, грузинские церковные системы летосчисления эра «от «сотворения мира»» и «хроникон», реально и параллельно функционирующие по юлианскому календарю, определяются из соответствий

$$5604 \text{ г.} = A,$$

$$284 \text{ г. 11-го БПК} = A.$$

Важно, однако, отметить, что (6) и (7) идентичны по модулю 532 календарные системы летосчисления. В самом деле,

$$10 \cdot 532 + 284 = 5320 + 284 = 5604.$$

В римской историографии важное значение имеет эра «от основания Рима» с эпохой

$$A=753 \text{ г.}, \quad (8)$$

которая популяризировалась Варроном.

Вместе с этой эрой в хронологии пользуются также Капитолийской эрой «от основания Рима» с эпохой

$$A=752 \text{ г.} \quad (9)$$

Любопытно, что капитолийский вариант системы летосчисления «от основания Рима» совместно с «хрониконом» и, следовательно, грузинской эрой «от «сотворения мира»» фиксирует по модулю 532 дату  $A$  в хронологии единственной парой дружественных чисел (220, 284), доставшейся нам в наследство от греческой нумерологии [4]. Действительно,  $752-532+220=220 \pmod{532}$ .

Христианская хронология базируется на трех универсальных циклах, функционирующих по юлианскому календарю:

1. 28-летний солнечный универсальный цикл определяется соответствием

$$A=4 \pmod{28}. \quad (10)$$

Порядковое место года в 28-летнем солнечном цикле называется кругом Солнца. Через каждое 28 лет числа месяца приходится опять на те же дни недели.

Хронологическое соответствие (10) реализовано как в «хрониконе», так и в грузинской эре «от «сотворения мира»». В самом деле,

$$284=10 \cdot 28+4=4 \pmod{28}, \\ 5604=10 \cdot 19 \cdot 28+284=4 \pmod{28}.$$

2. 19-летний лунный универсальный цикл определяется соответствием

$$A=1 \pmod{19}. \quad (11)$$

Этот цикл был создан в 303-304 г.н.э. усилиями деятелей alexandрийской церкви. Порядковый номер года в alexandрийском 19-летнем лунном цикле получил название золотого числа. Это число широко использовалось хронологами при датировке событий. Так как  $304=16 \cdot 19$ , то в 304 году н.э. золотое число равняется 1.

3. 15-летний индиктовый универсальный цикл определяется соответствием

$$A=3 \pmod{15}. \quad (12)$$

Номер индикции указывает на положение года в 15-летнем цикле. При этом сами циклы не нумеруются, так что номер индикции обычно используется только для соотношения с другой системой датирования. Такой способ исчисления времени был введен в 312 г. н.э. римским императором Константином Великим и стал обязательным для датирования документов с 537 г. н.э.

С учетом (12) легко убедиться, что 312 г. н.э. и 537 г. н.э. являются 15-ми годами индиктового цикла.

Древние ученые-хронологи часто использовали одновременно различные системы датировок, не будучи в состоянии унифицировать хронологические указания своих источников. При этом нужно отдавать себе отчет в том, что невозможно составить удобные для пользования хронологические таблицы иначе как на основе таблиц, списков и прочих перечней, созданных самими учеными-хронологами, а они, в свою очередь, могли ошибаться из-за отсутствия нормализованного исчисления времени. Введение только юлианского года не могло, однако, нормализовать хронологию, в особенности потому, что сам юлианский год начинался в каждой стране в разное время [5].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Летосчисление с эпохой  $A$ , функционирующее по юлианскому календарю, называется нормализованным, если его значение в  $A$  по модулю 15, согласно соответствию (12), равняется 3.*

Сразу отметим, что эра «от основания Рима» в Варроновской форме (8) нормализована. В самом деле,  $753=50 \cdot 15+3=3 \pmod{15}$ .

Важнейшая для христианской хронологии Византийская эра <от «сотворения мира»> определена соответствием

$$A=5508 \text{ г.}, \quad (13)$$

также является нормализованной эрой. Действительно,

$$5508=367 \cdot 15+3 \pmod{15}.$$

Широкую известность в свое время получили эры двух александрийцев – Пандора и Анниана. Эра <от «сотворения мира»> Пандора определяется соответствием

$$A=5493 \text{ г.} \quad (14)$$

и является примером нормализованной эры:

$$5493=396 \cdot 15+3 \pmod{15}.$$

Эра <от «сотворения мира»> Анниана с эпохой

$$A=5492 \text{ г.} \quad (15)$$

не является нормализованной, однако согласована с александрийским 19-летним лунным универсальным циклом, т.е. определяется соответствием (11). Действительно,

$$5492=289 \cdot 19+1 \pmod{19}.$$

Заметим, что ассоциированное с эрой Диоклетиана летосчисление, определенное соответствием

$$A=5568 \text{ г.}, \quad (16)$$

нормализовано и согласовано с александрийским лунным циклом, т.е. определяется соответствиями (12), (11).

В самом деле,

$$5568=371 \cdot 15+3 \pmod{15},$$

$$5568=293 \cdot 19+1 \pmod{19}.$$

Таким образом, различные летосчисления, или эры, нормализуются индиктовым циклом следующим образом: для заданного летосчисления, или эры,  $x$  собственные значения  $x \pmod{19}$  и  $x \pmod{28}$  остаются неизменными, меняется лишь  $x \pmod{15}$  так, что  $x \pmod{15}=3$ . (17)

При такой процедуре нормализации основную роль играет китайская теорема об остатках для случаев  $m_1=15$ ,  $m_2=19$  и  $m_3=28$ . Таким образом, относительно летосчислений, или эр христианская хронология является трехстаточной системой, для которой основным временным сегментом служит т.н. юлианский период, общая продолжительность которого составляет 7980 лет. Число это не произвольно, а представляет собой произведение трех множителей  $-28 \cdot 19 \cdot 15=7980$  [6]. Здесь существенным является то, что 28-летний солнечный и 19-летний лунные календарные циклы производят синхронизацию христианских летосчислений по пасхальному  $28 \cdot 19=532$ -летнему периоду, тогда как индиктовый 15-летний цикл непосредственно осуществляет их нормализацию.

С учетом вышеизложенного формула (4) имеет вид

$$x(7980)=6916x(15)+4299x(19)+4845x(28). \quad (18)$$

Легко проверяется, что  $y_1=6916$ ,  $y_2=4200$  и  $y_3=4845$  удовлетворяют основным соотношениям (2), т.е. являются базисными числами для (18).

Часто вместо (18), при нормализации летосчислений, или эр в качестве взаимно простых чисел  $m_i$  удобно брать  $m_1=15$  и  $m_2=532$  непосредственно. Тогда (18) принимает вид

$$x(7980)=6916x(15)+1065x(532) \quad (19)$$

с базисными числами  $y_1=6916$ ,  $y_2=1065$ .





Рассмотрим некоторые примеры. Сначала по формуле (18) вычислим эпоху  $A$  универсальной эры <от «сотворения мира»> для определяющих соответствий (12), (11) и (10), т.е. для

$$x(15)=3, x(19)=1, x(28)=4.$$

Таким образом, мы имеем

$$x(7980)=6916.3+4200.1+4845.4=44328=5.7980+4428=4428(\text{mod}7980).$$

Таким образом, универсальная эра с эпохой  $A=4428$  является для хронологии исходной нормализованной эрой. В самом деле,

$$4428=15.295+3=3(\text{mod}15),$$

$$4428=19.233+1=1(\text{mod}19),$$

$$4428=28.158+4=4(\text{mod}28).$$

Так как  $19 \cdot 15 = 285$  и  $285 = 28 \cdot 10 + 5 = 5(\text{mod}28)$ , то добавление 285 к универсальной эре с эпохой  $A=4428$  оставляет неизменными ее значения как по  $\text{mod}(15)$ , так и по  $\text{mod}(19)$ . При этом меняется лишь ее значение по  $\text{mod}(28)$  на  $4+5=9$ . Таким образом, для эры с эпохой  $A=4428+285=4713$  г. мы имеем

$$4713=3(\text{mod}15),$$

$$4713=1(\text{mod}19),$$

$$4713=9(\text{mod}28).$$

К этой эре с эпохой  $A=4713$  г. мы еще вернемся. Отметим, однако, здесь же, что ассоциированная с эрой Диоклетиана эра (16) получается из исходной нормализованной эры с эпохой  $A=4428$  г. добавлением произведения  $4 \cdot 285$ :

$$4428+4 \cdot 285=4428+1140=5568 \text{ г.}$$

так, что период 285, как произведение двух множителей 15 и 19, играет существенную роль при нормализации. Приведем еще один интересный пример нормализации. В качестве летосчисления возьмем <хроникон> (см. (6) и (7)). Его нормализацию удобно провести на основании формулы (19). Итак, мы имеем  $x(15)=3$ ,  $x(532)=284$ , так, что для искомой нормализованной эры мы получим:

$$x(7980)=6916.3+1065.284=323208=40.7980+4008=4008(\text{mod}7980).$$

Теперь у нас все готово для обсуждения нашего летосчисления. В 525 г. н.э., или в 241 г. эры Диоклетиана, папа римский Иоанн I приказал своему архивариусу и ученому монаху Дионисию Малому, занимавшемуся вычислениями т.н. «пасхалий» на многие годы вперед, составить новые пасхальные таблицы, начиная с 248 г. эры Диоклетиана. Вместе с тем, Дионисий получил видимо задание создать новое церковное летосчисление, в котором, как известно, счет времени ведется от «сотворения мира». Вычислив дату рождения Христа на основе своих расчетов, Дионисий Малый спустя 7 лет заявил, что это событие произошло 532 года назад, т.е. в 284 г. до эры Диоклетиана, или в 753 г. от «основания Рима» и, наконец, в 284 г. 11-го БПК. по <хроникону>. Если учесть, что пасхалии Дионисия начинаются с 248 г. эры Диоклетиана, или с 10-го года 15-го индиктового цикла ( $14 \cdot 15 + 10 = 220$  г.), то это должно соответствовать 532 г. от «рождения Христова». Действительно, в новой таблице Дионисия 532 г. ab incarnatione (от воплощения) следовал за 247 г. эры Диоклетиана.

Таким образом, по модулю 532 каждый 532-ой год н.э., вместе с эпохой  $A$ , фиксируется следующими двумя рядами синхронизмов:

$$284 \text{ г. } \langle \text{хроникона} \rangle + 248 \text{ эры Диоклетиана} = 532 \text{ г. н.э.} \quad (21)$$

$$284 \text{ г. } \langle \text{хроникона} \rangle = 220 \text{ г. (по индиктовому исчислению).}$$

Хронологические соответствия (21) имеют принципиальное значение для объяснения хронологической сути нашего летосчисления.



Сложнее анализируется календарная проблема нашего летосчисления. Дело в том, что Дионисий Малый составил новые пасхальные таблицы, которые существенным образом отличаются от БПК-ов его же летосчисления, т.е. от нашего летосчисления. А именно, для своих БПК-ов за основу Дионисий Малый берет эру (20), т.е. эру <от «сотворения мира»> с эпохой

$$A=4713 \text{ г.},$$

так что определяющими остатками по 15, 19 и 28-летним циклам являются числа 3, 1 и 9 соответственно (см. соответствия (20)). Генезис остатков 3 и 1 не вызывает сомнений, так как он базируется на соответствующих универсальных календарных циклах (см. соответствия (11) и (12)). Возникает вопрос: из каких соображений Дионисий Малый для 28-летнего солнечного цикла своих пасхальных таблиц в качестве определяющего остатка взял число 9? Это и есть основная календарная проблема нашего летосчисления. В течение веков ей было посвящено большое число научных исследований. В этой работе мы приводим одно важное календарное соотношение, которое, на наш взгляд, проливает свет на вышепоставленный вопрос.

Начнем с того, что сначала восстановим эру с эпохой  $A=4713$  г. непосредственно по формуле (18) для данных  $x(\bmod 15)=3$ ,  $x(\bmod 19)=1$  и  $x(\bmod 28)=9$  (без привлечения исходной универсальной эры с эпохой  $A=4428$  г. и календарного периода 285). Мы имеем

$$x(9798)=6916.3+4200.1+4845.9=80.7980=4713(\bmod 7980),$$

так, что для определяющих остатков получим окончательно

$$4713=314.15+3=3(\bmod 15),$$

$$4713=248.19+1=1(\bmod 19),$$

$$4713=168.28+9=9(\bmod 28).$$

В дальнейшем существенную роль из этих трех соответствий играет второе из них, а именно

$$4713=248.19+1. \quad (22)$$

Совершенно очевидно, что юлианский период  $7980=15.19.28$  лет для христианской хронологии является основным календарным периодом. Позднее, выдающийся французский ученый Ж.Скалигер (1540-1609 г.) окончательно обосновал этот период в своем известном хронологическом трактате «Новый труд об улучшении счета времени». В нем Скалигер предложил в хронологических расчетах вести счет времени в т.н. днях юлианского периода, причем за начало счета дней принималось 1 января 4713 г. до н.э. Тем самым была введена эра Скалигера с эпохой

$$A=4713 \text{ г.}$$

Сегодня, благодаря китайской теореме об остатках, мы вправе утверждать, что эру с эпохой  $A=4713$  г. Скалигер позаимствовал у Дионисия Малого. Важно напомнить, что включение индикций в пасхальные таблицы Дионисия Малого не только сделали эти временные указания популярными [5], но и позволили автору этих таблиц положить в их основу ту же самую эру с эпохой  $A=4713$  г.

Перепишем теперь соответствие (22) в следующем виде

$$4713=8.19.31+1. \quad (23)$$

Из него сразу следует, что наряду с соответствием  $4713=1(\bmod 19)$  имеет место важное соответствие  $4713=1(\bmod 31)$ , которое, в свою очередь, означает, что одним и тем же показателем 1 фиксируется важнейший для христианской хронологии момент времени – 31 г. н.э.

В самом деле, из (23) следует, что

$$4713+31=153.31+1=1(\bmod 31).$$



Этот момент времени хорошо известен в христианской хронологии и называется <Пасхальной триадой>. Его определение и непосредственное вычисление связано с именами выдающихся деятелей александрийской церкви III века н.э. Анатолия Лаодикийского и Секста Юлия Африканского [2].

Согласно <Пасхальной триаде> главнейшие пасхальные события по юлианскому календарю чередуются в следующем порядке: в мартовские дни одного и того же года, а именно 23 марта, в пятницу был распят Христос, 24 марта, в субботу было полнолуние – сврейская пасха, 25 марта, в воскресенье Христос воскрес («воскресение Христово»). Этот момент времени совпадает с 15-ым годом правления императора Тиберия, когда прокуратором в Иерусалиме был Понтий Пилат. С учетом вышеприведенных синхронизмов такой момент времени по юлианскому календарю приходится только на 31-ый год нашей эры и поэтому является единственным.

Таким образом, составляя свои пасхальные таблицы Дионисий Малый определил эру <от сотворения мира> с эпохой  $A=4713$  г. с таким расчетом, что год «рождения Христова» – 4713 г. и год «воскресения Христова» – 4744 г. отмечались бы одинаковыми определяющими соответствиями

$$4713 \equiv 1 \pmod{31}, \tag{24}$$

$$4744 \equiv 1 \pmod{31}$$

так, что разность  $4744-4713$  составляет именно 31. Принципиальное значение имеет и тот факт, что  $713=23 \cdot 31$ , т.е. что

$$4000 = 129 \cdot 31 + 1 \equiv 1 \pmod{31}. \tag{25}$$

Итак, определенная <Пасхальной триадой> дата «воскресения Христова» была зафиксирована Дионисием Малым одновременно в двух различных системах счисления, а именно 31-ым годом своего летосчисления и эрой с эпохой  $A=4713$  г. его же новых пасхальных таблиц.

В заключение следует отметить, что 31-ый символ из упорядоченного множества символов в непозиционной системе счета с основанием 10 имеет численное значение 4000 так, что 31-й год н.э. формально характеризуется этим же числовым показателем, библейское толкование которого в свою очередь имеет большую идеологическую нагрузку.

REFERENCES

1. Ленг С. *Алгебра*. М, Мир, 1968.
2. Grumel V. *La Chronologie*. Press Univesitsires de France, Paris, 1958.
3. Климишин И., *Календарь и хронология*. М., Наука, 1985.
4. Оре О. *Приглашение в теорию чисел*. М., Наука, 1980.
5. Бикерман Э. *Хронология древнего мира*. М., Наука, 1976
6. Селешников С. *История календаря и хронология*. М, 1977.

Accepted for publishing on October 30, 2001.  
Reviewed on June 15, 2023.

**ჩინური თეორემა ნაშთების შესახებ და ფულთაბრიცხვითი  
ნორმალიზაციის პრინციპი ქრონოლოგიაში**

ნ. კანდელაკი\*, ვ. ცერცვაძე\*\*

\*) საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ნ. მუსხელიშვილის  
სახელობის გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტი,

\*\*) კიბერნეტიკის კათედრა, თსუ

ჩამოყალიბებულია ქრონოლოგიისათვის ერთ-ერთი ფუძემდებლური პრინციპი და  
ნაჩვენებია, რომ ამ პრინციპის შესაბამის წელთაღრიცხვათა ნორმალიზაციის  
პროცედურა ცხადი სახით იყენებს ჩინურ თეორემას ნაშთების შესახებ.

REFERENCES

1. L. J. Chen, *Journal of Number Theory*, 1977, 10, 1-11.  
 2. G. Cantor, *Mathematische Annalen*, 1895, 48, 209-246.  
 3. K. Cantor, *Mathematische Annalen*, 1896, 49, 205-226.  
 4. G. O. Gergely, *Mathematische Annalen*, 1901, 58, 1-11.  
 5. K. Cantor, *Mathematische Annalen*, 1901, 58, 1-11.  
 6. G. Cantor, *Mathematische Annalen*, 1901, 58, 1-11.

Received for printing on October 30, 1981.  
 Revised on June 2, 1982.



## THE CAUCHY INTEGRALS TAKEN OVER THE DOUBLE-PERIODIC LINE AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS CONNECTED WITH THEM

N. Khatishvili

Tbilisi State University, VIAM

**Abstract.** In this article the Cauchy type integrals taken over the infinite disconnected double-periodic line are defined. The boundary value problems for the sectionally holomorphic double-periodic functions are considered. The inversion formula of the Cauchy integral taken over the double-periodic line (in case of closed contours) is obtained.

**INTRODUCTION.** Many problems of an applied character are naturally reduced to the singular integral equations [1], [2], [3], [4].

The theory of Cauchy integrals taken over the finite piecewise smooth line was completely investigated by N. Muskhelishvili in his book "Singular Integral Equations" [1]. The case, when the line of integration is disconnected and periodical with one period, was investigated by N. I. Akhiezer, L. I. Chibrikova, S. A. Freidkin [5],[6],[7].

In part 1 the Cauchy type integrals taken over the infinite disconnected double-periodic line are defined. In paragraph 2 the boundary value problems for the sectionally holomorphic double-periodic functions are considered. In part 3 the inversion formula of the Cauchy integral taken over the double-periodic line (in case of closed contours) is obtained.

**1. CAUCHY TYPE INTEGRALS TAKEN OVER THE DOUBLE-PERIODIC LINE.** In the complex  $z$  plane,  $z = x + iy$ , the double-periodic piecewise smooth line  $L$  is considered, i.e.,  $L$  is a union of countable number of smooth non-intersected closed contours  $L_{mn}$  double-periodically distributed with periods  $\omega_1$  and  $i\omega_2$ , where  $\omega_1$  and  $i\omega_2$  are the given real constants.

$$L = \sum_{m,n=0}^{\infty} L_{mn} \quad (1.1)$$
$$L_{mn} = \sum_{j=1}^k L'_{mnj}$$

A certain direction on  $L$  will be defined as positive. The part of the plane which lies on the left of  $L'_{mnj}$  will be denoted by  $S^+$ , on the right - by  $S^-$ . By  $S_0$  we denote the rectangle with the vertices

$$(0,0), (2\omega_1,0), (2\omega_1, i2\omega_2), (0, i2\omega_2)$$

$S_0$  is called the fundamental rectangle (period rectangle),  $S_{mn}$  is rectangle congruent to  $S_0$ , and the piecewise smooth line  $L_0$  lying in the rectangle  $S_0$ , is congruent to the line  $L_{mn}$  lying in the rectangle  $S_{mn}$ ,  $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . The line  $L$  has two periods  $\omega_1$  and  $\omega_2$ .

Let  $\varphi(t)$  be a function given on  $L$  satisfying the following conditions:

- $\varphi(t)$  belongs to Holders class (H class) on every  $L'_{mnj}$ ,  $j=1,2,\dots$ ;  $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- $\varphi(t)$  is bounded everywhere on  $L'_{mnj}$  with the possible exception of a finite number of points  $c_1, c_2, \dots, c_q$ ;  $q < 2k$  on  $L'_{mnj}$  where

$$|\varphi(t)| < \frac{C}{|t-c|^{\alpha}}, \quad (1.2)$$

Such a class of functions is called that of Muskhelishvili  $H^*$  class.

c)  $\varphi(t)$  is a double-periodic function

$$\varphi(t+2m\omega_1+2ni\omega_2)=\varphi(t), \quad t \in L_{\infty}, \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.3)$$

Let us consider the integral

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z}, \quad (1.4)$$

where  $z$  is any point of  $z$ -plane not belonging to  $L$ .

The integral (1.4) is understood as the following series

$$\int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \int_{L_{mn}} \frac{\varphi(t) dt}{t-z}. \quad (1.5)$$

Taking into account (1.3) and putting  $t=t'+2m\omega_1+2ni\omega_2$ , in the right-hand side of (1.5) we can rewrite (1.5) in the form

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \int_{L_{mn}} \frac{\varphi(t) dt}{t-z} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \int_{L_{\infty}} \frac{\varphi(t') dt'}{t'+2m\omega_1+2ni\omega_2-z}. \quad (1.6)$$

The series (1.6) is not convergent for any  $\varphi(t)$ . The following theorem is true:

**THEOREM 1.** *The series (1.6) is convergent if and only if*

$$\int_{L_{\infty}} \varphi(t) dt = 0, \quad \int_{L_{\infty}} t \varphi(t) dt = 0. \quad (1.7)$$

**PROOF.** 1. Sufficiency: Assume that the condition (1.7) is fulfilled. Taking into account representation of the Weierstrass "zeta-function" by the equiconvergent series [8]

$$\zeta(t-z) = \frac{1}{t-z} + \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{t-z-T_{mn}} + \frac{1}{T_{mn}} + \frac{t-z}{T_{mn}^2} \right), \quad |m|+|n| \neq 0, \quad (1.8)$$

$$T_{mn} = 2m\omega_1 + 2ni\omega_2.$$

We can rewrite (1.6) as follows

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \int_{L_{\infty}} \frac{\varphi(t') dt'}{t'+2m\omega_1+2ni\omega_2-z} = \int_{L_{\infty}} \varphi(t) \zeta(t-z) dt. \quad (1.9)$$

Thus, the series (1.6) is convergent.

2. Necessity: Assume that the conditions (1.7) are not fulfilled and the series (1.6) is convergent. Consider the difference,

$$\int_{L_{\infty}} \varphi(t) \zeta(t-z) dt - \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \int_{L_{\infty}} \frac{\varphi(t') dt'}{t'+2m\omega_1+2ni\omega_2-z} = \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ |m|+|n| \neq 0}}^{\infty} \int_{L_{\infty}} \left( \frac{1}{T_{mn}} + \frac{t-z}{T_{mn}^2} \right) \varphi(t) dt =$$

$$= \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ |m|+|n| \neq 0}}^{\infty} \left\{ \frac{1}{T_{mn}} \int_{L_{\infty}} \varphi(t) dt + \frac{1}{T_{mn}^2} \int_{L_{\infty}} (t-z)\varphi(t) dt \right\}.$$

From the theory of double-periodic functions it is known that the series

$$(2.5) \quad \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ |m|+|n| \neq 0}}^{\infty} \left( \frac{a}{T_{mn}} + \frac{b}{T_{mn}^2} \right), \quad |a| + |b| \neq 0$$

is not convergent, so (1.9) is not convergent either [8]. Thus, if the conditions (1.7) are not fulfilled, the series (1.6) is not convergent.

According to the formula (1.9) we can represent the integral (1.4) as there follows

$$(2.6) \quad \phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\infty}} \frac{\varphi(t) dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\infty}} \varphi(t) \zeta(t-z) dt, =$$

$$= \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ |m|+|n| \neq 0}}^{\infty} \int_{L_{\infty}} \frac{\varphi(t) dt}{t^1 + 2m\omega_1 + 2n\omega_2 - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\infty}} \frac{\varphi(t) dt}{t-z}.$$

$$\int_{L_{\infty}} \varphi(t) \zeta(t-z) dt$$

with conditions (1.7).

Taking into account the properties of "zeta-function" we obtain that it is double-periodic with the double quasi-periodic kernel  $\zeta(t-z)$ .

In the fundamental rectangle the first term in the right-hand of the (1.10) is the ordinary Cauchy integral and the second term is the holomorphic function. Thus there exists the principal value of this integral on  $L_{\infty}$ . So we conclude that the function  $\phi(z)$  is sectionally holomorphic double-periodic. It is clear that  $\phi(z)$  has all properties of the Cauchy integral:

- it satisfies H-condition on every  $L'_{mn}$ ;
- the Plemely formula is valid:

$$\phi^+(t_0) = \frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\infty}} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0},$$

$$\phi^-(t_0) = -\frac{1}{2} \varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\infty}} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in L,$$

where  $\phi^+(t_0)$  and  $\phi^-(t_0)$  are the limiting values from the left and from the right of  $L$ , respectively.

We will often use the formulas equivalent to (1.11):

$$\phi^+(t_0) - \phi^-(t_0) = \varphi(t_0),$$

$$\phi^+(t_0) + \phi^-(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\infty}} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}.$$

We note that Poincare-Bertrand transformation formula is also valid.

**2. THE PROBLEM  $\phi^+ - \phi^- = \varphi$  FOR SECTIONALLY-HOLOMORPHIC DOUBLE-PERIODIC FUNCTIONS.** Let  $L$  be a double-periodic line defined in previous section.

**PROBLEM 2.1.** Find the sectionally holomorphic double-periodic function  $\phi(z)$  satisfying the boundary condition

$$\phi^+(t_0) - \phi^-(t_0) = \varphi(t_0), \quad t_0 \in L, \quad (2.1)$$

where  $\varphi(t)$  is the given double-periodic function of  $H$  class on  $L$ , satisfying the conditions

$$\int_{L_\infty} \varphi(t) dt = 0, \quad \int_{L_\infty} t \varphi(t) dt = 0. \quad (2.2)$$

We will solve this problem using Plemely formula (1.12). It is clear that the function,

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z} + C, \quad (2.3)$$

satisfies all the required conditions, where  $C$  is an arbitrary constant and the integral is understood as follows

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \int_{L_\infty} \frac{\varphi(t) dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi} \int_{L_\infty} \varphi(t) \zeta(t-z) dt, \quad (2.4)$$

where  $\zeta(t-z)$  is the Weierstrass " $\zeta$ -function". The integral (2.3) is convergent if and only if  $\varphi(t)$  satisfies the conditions (2.2).

The Problem 2.1 has a unique solution, because if  $\phi_1(z)$  and  $\phi_2(z)$  are two possible solutions, then the function  $\phi_1(z) - \phi_2(z)$  will be holomorphic everywhere in the finite part of  $z$ -plane except the ends of  $L$ , but this points can only be isolated singularities of degree less than unity.

Thus  $\phi_1(z) - \phi_2(z)$  can be assumed holomorphic double-periodic in the entire plane with no poles. Hence  $\phi_1(z) - \phi_2(z) = C$ .

### 3. INVERSION OF THE CAUCHY INTEGRAL WITH THE DOUBLE-PERIODIC KERNEL IN THE CASE OF CLOSED CONTOURS.

Let  $L$  be a double-periodic contour. The union of domains  $S_{mn}^j$  interior for every  $L_{mn}^j$ ;  $j = 1, 2, \dots, k$ ;  $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  is denoted

by  $S^+$ ,  $S^+ = \bigcup_{m,n=-\infty}^{\infty} \bigcup_{j=1}^k S_{mn}^j$ , by  $S^-$  is denoted appendix of  $S^+$  in  $z$ -plane. Consider the

equation

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} = f(t_0), \quad t_0 \in L, \quad (3.1)$$

where the integral is understood as in the section 1,  $f(t)$  is the given double-periodic function of  $H$ -class on  $L$ :  $f(t+2m\omega_1+2ni\omega_2)=f(t)$ ,  $\varphi(t)$  is an unknown double-periodic function also of  $H$  class satisfying the conditions

$$\int_{L_\infty} \varphi(t) dt = 0, \quad \int_{L_\infty} t \varphi(t) dt = 0. \quad (3.2)$$

Let us introduce the sectionally holomorphic double-periodic function

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z}. \quad (3.3)$$



As we have proved in the section 1 the integral (3.2) exists if and only if  $\varphi(t)$  satisfies the

$$\text{conditions (3.2) and is given by } \phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{00}} \varphi(t) \zeta(t-z) dt.$$

By (1.12) the function  $\phi(z)$  satisfies the following boundary condition

$$\phi^+(t_0) + \phi^-(t_0) = f(t_0), \quad t_0 \in L, \quad (3.4)$$

Consider a second sectionally holomorphic double-periodic function defined by

$$\psi(z) = \begin{cases} \phi(z), & z \in S^+ \\ -\phi(z), & z \in S^- \end{cases}$$

By (3.4) this function satisfies the boundary condition

$$\psi^+(t_0) - \psi^-(t_0) = f(t_0), \quad t_0 \in L, \quad (3.5)$$

The solution of the problem (3.5) is given in the section 2 by the formula

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z} + C, \quad (3.6)$$

where  $C$  is an arbitrary constant,  $f(t)$  satisfies the conditions

$$\int_{L_{00}} f(t) dt = 0, \quad \int_{L_{00}} t f(t) dt = 0. \quad (3.7)$$

From (3.4) and (1.12) we get

$$\varphi(t_0) = \phi^+(t_0) - \phi^-(t_0) = \psi^+(t_0) + \psi^-(t_0) = f(t_0), \quad t_0 \in L.$$

So the solution of the equation (3.1) is given by

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} + 2C, \quad t_0 \in L, \quad (3.8)$$

and this solution exists if and only if  $f(t)$  satisfies the conditions (3.7).

Using definition of the integral (3.3) we can write the integral equation (3.1) in the form

$$\frac{1}{\pi i} \int_{L_{00}} \varphi(t) \zeta(t-t_0) dt = f(t), \quad t_0 \in L_{00}, \quad (3.9)$$

with the conditions (3.2) and (3.7).

According to (3.8) the solution of the integral equation (3.9) is given by

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_{00}} \varphi(t) \zeta(t-t_0) dt + 2C, \quad t_0 \in L, \quad (3.10)$$

with the conditions (3.2) and (3.7).

We now prove that the conditions (3.2) and (3.3) are equivalent.

Integrating the function given by (3.10) along the boundary of the area  $S_{nm}^I$ , using the Cauchy theorem [5,8] and integral transformation formula we get

$$\int_{L_{00}} \varphi(t) dt = \int_{L_{00}} f(\tau) d\tau \int_{L_{00}} \zeta(\tau-t) dt + 2C \int_{L_{00}} d\tau = -2\pi i \int_{L_{00}} f(\tau) d\tau = 0,$$

$$\int_{L_{00}} t \varphi(t) dt = \int_{L_{00}} f(\tau) d\tau \int_{L_{00}} t \zeta(\tau-t) dt + 2C \int_{L_{00}} t dt = -2\pi i \int_{L_{00}} t f(\tau) d\tau = 0.$$

Hence, the conditions (3.2) and (3.3) are equivalent. So we have reached the following conclusion:

**THEOREM 3.1.** *The double-periodic solution of the equation (3.1) ((3.9)) satisfying the condition (3.2) exists if and only if  $f(t)$  satisfies the conditions*

$$\int_{L_{\infty}} f(t) dt = 0, \quad \int_{L_{\infty}} if(t) dt = 0.$$

and is given by

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t - t_0} + 2C = \frac{1}{\pi i} \int_{L_{\infty}} f(t) \zeta(t - t_0) dt + 2C, \quad t_0 \in L_{\infty},$$

where  $C$  is an arbitrary constant.

## REFERENCES

1. Muskhelishvili N. I. *Singular integral equations*. Groningen, P. Noordhoff, 1953.
2. Sedov L. I. *Two-dimensional problems in hydrodynamics and aerodynamics*. (Translated from the Russian and edited by C. K. Chu, H. Cohen and B. Seckler) Interscience Publishers John Wiley & Sons Inc., New York--London--Sydney, 1965.
3. Khatiashvili N. G. *The Dirichlet problem for the Laplace equation in a strip with cracks*. (Russian) Tbilis. Gos. Univ., Inst. Prikl. Mat., Tbilisi, 1985.
4. Khatiashvili N. *The inversion formula of the Cauchy integral taken over a union of a countable number of segments*. Bull. Georgian Acad. Sci. 162(2000), No. 1, 22--25.
5. Akhiezer N. I. *On some inversion formulae for singular integrals*. (Russian) Bull. Acad. Sci. URSS. Ser. Math. (Izvestia Akad. Nauk SSSR) 9(1945), 275--290.
6. Chibrikova L. I. *On Reimann boundary problem for automorphic functions*. Proc. Kazan Univ. 116(1956), 59--109.
7. Freidkin S. A. *The boundary value problems and singular integral equations taken over the countable number of contours*. (Russian) University Press, Kishinov, 1973.
8. Hurwitz A. *Vorlesungen uber algemainen Funktionentheorie und elliptische Funktionen*. Springer, Berlin, 1929.

Accepted for publishing on May 12, 2002.

Reviewed on September 12, 2002.



**კოშის ტიპის ინტეგრალზე ორადპერიოდულ ფონზე და  
ვათთან დაკავშირებული სასაზღვრო ამოცანები**

**6. ბატიაშვილი**

ფ. ვაიახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,

ა. ვეჯას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი

კოშის ტიპის ინტეგრალზე მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ მათემატიკური ფი-  
ზიკის ამოცანების ამოხსნისას [12, 3, 4].

კოშის ტიპის ინტეგრალთა თეორია, როდესაც ინტეგრების წირი წარმოადგენს  
სასრულ ნაწყვეტ გლუვ წირს, სრულადაა შესწავლილი ნ. მუსხელიშვილის წიგნში  
“სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები” [1].

ის შემთხვევა, როდესაც ინტეგრების წირი წარმოადგენს ნაწყვეტ გლუვ  
პერიოდულ წირს ერთი პერიოდით, შესწავლილია ახიუზერის, ჩიბრიკოვას,  
ფრეიდიკინის მიერ [5, 6, 7].

მოცემულ ნაშრომში განზოგადებულია კოშის ტიპის ინტეგრალის ცნება ორად-  
პერიოდული ნაწყვეტი გლუვი წირისათვის. ამ ინტეგრალების გამოყენებით ამოხ-  
სნადია ორი სასაზღვრო ამოცანა უბან-უბან პოლდომორფული ორადპერიოდული  
ფუნქციებისათვის. მიღებულია კოშის ტიპის ინტეგრალის შებრუნების ფორმულა,  
როდესაც ინტეგრების წირი ორადპერიოდულია და შედგება თანაკვეთი გლუვი  
კონტურებისაგან.

ჩემს ადრეულ ნაშრომებში მიღებულია კოშის ტიპის ინტეგრალის შებრუნების  
ფორმულა, როდესაც ინტეგრების წირის ნაწყვეტი ორადპერიოდულია და შედგება  
მონაკვეთებისაგან [3,4].

პირველ პარაგრაფში მოყვანილია კოშის ტიპის ინტეგრალის ცნება, როდესაც  
ინტეგრალი აღებულია ორადპერიოდულ ნაწყვეტ გლუვ წირზე.

$z = x + iy$  კომპლექსურ სიბრტყეში ორადპერიოდულ ნაწყვეტ გლუვ  $L$  წირს ვუწო-  
დებთ ისეთ წირს, რომელიც შედგება მთელ სიბრტყეში ორადპერიოდულად გან-  
ლაგებული თანაკვეთი გლუვი რკალებისაგან (ან შეკრული კონტურებისაგან)  $L'_{mn}$

$$L = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} L_{mn}, \quad L_{mn} = \sum_{j=1}^k L'_{mjn}. \tag{1}$$

$L$  წირის ძირითადი პერიოდებია  $2a_1$  და  $2ia_2$ , სადაც  $a_1$  და  $a_2$  გარკვეული  
ნამდვილი რიცხვებია. თითოეულ  $L'_{mn}$  წირზე არჩეულია გარკვეული დადებითი  
მიმართულება.  $L'_{mn}$  წირების ბოლოებს ვუწოდებთ  $L$  წირის ბოლოებს  
( $j = 1, 2, \dots, k; m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

ეთქვას,  $\varphi(t)$  არის  $L$  წირზე მოცემული ორადპერიოდული ფუნქცია, რომელიც  
თითოეულ  $L'_{mn}$  წირზე ეკუთვნის მუსხელიშვილის  $H^*$  კლასს. კოშის ტიპის  
ინტეგრალი  $L$  წირზე განიმარტება როგორც შემდეგი მწკრივის ჯამი:

$$\Phi(z) = \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z} = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \int_{L'_{mjn}} \frac{\varphi(t) dt}{t-z}. \tag{2}$$

პიველ პარაგრაფში მტკიცდება შემდეგი:

**თეორემა.** იმისათვის, რომ (2) მწკრივი იყოს კრებადი აუცილებელი და საკმარისია, რომ  $\varphi(t)$  ფუნქცია აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს

$$\int_{L_{\infty}} \varphi(t) dt = 0, \quad \int_{L_{\infty}} t \varphi(t) dt = 0. \quad (3)$$

ამასთანავე (2) ინტეგრალი წარმოადგენს უბან-უბან პოლომორფულ ორადპერიოდულ ფუნქციას ნახტომის  $L$  წირით და მოიცემა ფორმულით

$$\int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z} = \int_{L_{\infty}} \varphi(t) \zeta(t-z) dt, \quad (4)$$

სადაც  $\zeta$  არის ვეიერშტრასის “ $\zeta$ -ფუნქცია”.

(4) ინტეგრალისათვის სამართლიანია ყველა ფორმულა, რომელიც სამართლიანია ჩვეულებრივი კომის ინტეგრალისათვის. კერძოდ, სოხოცკი-პლემელის ფორმულები.

მორე პარაგრაფში განხილულია სასაზღვრო ამოცანა  $\Phi^+ - \Phi^- = \varphi$  უბან-უბან პოლომორფული ორადპერიოდული ფუნქციისათვის, როცა  $\varphi(t)$  აკმაყოფილებს (3) პირობებს. მტკიცდება, რომ ამ ამოცანის ამოხსნა არსებობს და მოიცემა ფორმულით:

$$\Phi(z) = \int_{L_{\infty}} \varphi(t) \zeta(t-z) dt + C,$$

სადაც ნებისმიერი  $C$  მუდმივია.

§3-ში მოცემულია კომის ტიპის ინტეგრალის შებენების ფორმულა ორადპერიოდული ნაწიკვტი გლუვი წირის შემთხვევაში, როდესაც ეს წირი შედგება შეკრული გლუვი კონტურებისაგან. კერძოდ, ამოხსნილია ინტეგრალური განტოლება

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z} = f(t_0), \quad t_0 \in L, \quad (5)$$

სადაც  $f(t_0)$  არის წირზე მოცემული ორადპერიოდული  $H$  კლასის ფუნქცია. ხოლო  $\varphi(t)$  - უცნობი, რომელსაც მოეთხოვება რომ იყოს აგრეთვე ორადპერიოდული და  $H$  კლასის.

მორე პარაგრაფის შედეგების გამოყენებით მტკიცდება, რომ (5) განტოლების ამოხსნა  $\varphi(t)$  არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც  $f(t)$  აკმაყოფილებს პირობებს,

$$\int_{L_{\infty}} f(t) dt = 0, \quad \int_{L_{\infty}} t f(t) dt = 0.$$

და მოიცემა ფორმულით,

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} + C, \quad t_0 \in L,$$

სადაც  $C$  ნებისმიერი მუდმივია.

## MICROGRAVITY AND THE PROXIMITY EFFECT AT THE INTERFACE HE II - HE I

L. Kiknadze\*), Yu. Mamaladze\*\*)

\*) Andronikashvili Institute of Physics, Georgian Academy of Sciences

\*\*\*) Chair of General Physics, Andronikashvili Institute of Physics,  
Georgian Academy of Sciences

**Abstract.** The proximity effect causes the existence of some transition zone with the gradual variation of the density of superfluid component at the level where the hydrostatic pressure realizing the phase transition He II - He I is reached. This zone has quite macroscopic width but nevertheless is so narrow that the experimental investigation of its structure has not been carried out till now. In the microgravity environment the characteristic length of this effect increases, and more convenient conditions arise for measurements in the transition area. The problem of the expansion of thermodynamical potential in power series in the vicinity of He II - He I interface is considered. The critical values of the size of superfluid area are determined.

### 1. INTRODUCTION. TWO-TERM FORM OF G.-P. EQUATION AND THE CHARACTERISTIC LENGTH $\xi_g$ .

According to the phase diagram of liquid helium the transition He II-He I happens when the increasing pressure reaches the  $\lambda$ -line ( $P = P_\lambda(T)$ ). The corresponding column of helium is too large (4m + 2 Km depending on temperature) but one can create the proper pressure within the limits of a vessel regulating the pressure  $P_0$  at the top.

If we choose the level  $z = 0$  at the depth where the  $\lambda$ -pressure is reached then the pressure at any depth may be written down as:

$$P = P_\lambda - \rho g z. \quad (1)$$

The pressure at the top  $P_0$  corresponds then to the level  $z = H_g$  ( $H_g$  being the size of superfluid area:  $P_0 = P_\lambda - \rho g H_g$ ).

In the absence of the quantum correlation effects the density of superfluid component should be zero at  $z \leq 0$ . The proximity effect causes the existence of the transition area, i.e. the area of the gradual variation of the density of superfluid component  $\rho_s$  instead of the sharp boundary at  $z = 0$ . The superfluidity penetrates into the normal area.

The first consideration of this situation was performed [1] by means of Ginzburg - Pitaevskii equation [2]. We present it here at first in the two-term form valid if  $\Psi$  is small (see below Eq.(9)):

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dz^2} + A \Psi = 0. \quad (2)$$

The density of superfluid component  $\rho_s = m |\Psi|^2$  (since we do not consider any flow  $\Psi$  is the real positive function),  $m$  is the mass of helium atom.

The following temperature dependence of  $A$  had been used in [1]:

$$A \propto (T_\lambda - T) \text{ at } T < T_\lambda, \quad A = 0 \text{ at } T > T_\lambda. \quad (3)$$

In our report [3] the temperature dependence  $A \propto (T_\lambda - T)$  was spread also on the normal area  $T > T_\lambda$  where  $A < 0$ . Moreover, in "The note at the preparing of manuscript to publication" the Ref.4 (being in print at that time) was mentioned as the source of more correct dependence:

$$A = \pm A_0 |T_\lambda - T|^{4/3}, \quad A_0 = A_0^0 = 1.11 \cdot 10^{-16} \text{ erg} \cdot \text{K}^{-4/3}, \quad (4)$$

$A > 0$  at  $T < T_\lambda$  (the superfluid area) and  $A < 0$  at  $T > T_\lambda$  (the normal area).

Here and in all formulae below up is the sign for the superfluid area and down is the sign for the normal one. More general expression of  $A_0$  will be given below in Eqs. (11).

To substitute the temperature by the pressure one must take into account the dependence  $T_\lambda(P)$ . According to the phase diagram the  $\lambda$ -line is approximately straight. Therefore, we can use the relation:

$$T_\lambda(P) - T = (P_\lambda(T) - P) \left| \frac{dT_\lambda}{dP} \right|. \quad (5)$$

Using Eqs. (1,2,4) and the temperature dependence of coherence length  $\xi$  [4]

$$\xi = \xi_0 (T_\lambda - T)^{-2/3}, \xi_0 = \left( \frac{\hbar^2}{2mA_0} \right)^{1/2} = 2.73 \times 10^{-8} \text{ cm.K}^{2/3}$$

we obtain  $T_\lambda(P) - T = \alpha z$  and:

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} \pm |\zeta|^{4/3} \Psi = 0, \zeta = \frac{z}{\xi_g}, \quad (6)$$

$$\xi_g = \xi_0^{3/5} \alpha^{-2/5} = \frac{\xi_0^{3/5}}{(\rho g)^{2/5}} \left| \frac{dP_\lambda}{dT} \right|^{2/5}, \alpha \xi_g = \left( \frac{\xi_0}{\xi_g} \right)^{3/2}. \quad (7)$$

The superfluid area is at  $\zeta > 0$  and the normal one is at  $\zeta < 0$ .

N.B. the ratio  $\xi_0 / \xi_g$  has the dimension of the temperature but is temperature independent.

Eq. (6) means that the characteristic length of proximity effect is  $\xi_g$ . The numerical estimation of  $\xi_g$  in "The note ..." [3] was  $6.3 \times 10^{-3} \text{ cm}$  while using Eq. (3) we had received  $1.1 \times 10^{-3} \text{ cm}$  [1]. Later  $\xi_g$  was determined as  $\xi_g = 6.5 \times 10^{-3} \text{ cm}$  [5], and  $\xi_g = 6.7 \times 10^{-3} \text{ cm}$  [6,7] (the difference between the last two terms is caused by employing in Eq. (7) different quantities:  $dT_\lambda / dP$  and  $\rho_\lambda dT_\lambda / d\mu$ ,  $\mu$  being the chemical potential).

$\xi_g$  determines the penetration depth of superfluidity in normal area and the width of transition area. It determines also the critical size  $H_{sc}$  of the superfluid area (the superfluid area must contain the superfluid component enough to entail the superfluidity in a normal area, that is why the size of the superfluid area  $H_s$  has the critical value  $H_{sc}$ ) such that if  $H_s \leq H_{sc}$  then the density of the superfluid component is zero in the whole vessel. If  $(H_s - H_{sc}) \ll H_{sc}$  then Eq.(6) is valid ( $\Psi$  is small) and it gives the equation which determines critical sizes. The first variant of such equation is obtained in [3]. Being corrected according to "The note ..." it has the form ( $z = -H_n$  is the level of the bottom,  $h = H / \xi_g$ ):

$$J_{0.3} \left( \frac{3}{5} h_{sc}^{5/3} \right) I_{-0.3} \left( \frac{3}{5} h_n^{5/3} \right) + J_{-0.3} \left( \frac{3}{5} h_{sc}^{5/3} \right) I_{0.3} \left( \frac{3}{5} h_n^{5/3} \right) = 0. \quad (8)$$

E.g.  $h_{sc} = 2.29$  if  $h_n = \infty$  [3,8,6] and  $h_{sc} = 2.55$  if  $h_n = 0$  [3,8].

Eqs. (7) contain the relation between three characteristic lengths:  $l_p = (T_\lambda - T)/\alpha$ ,  $\xi$ , and  $\xi_K$ :  $\xi_K = \xi^{3/5} l_p^{2/5}$  (see more details about the meaning of each of them in [5], note that the level  $z = 0$  and the orientation of  $z$ -axis as well as some symbols are different here and in Ref. 5).

**2. MICROGRAVITY.** Thus, the width of transition zone is of the order of  $10^{-2}$  cm. This value is quite macroscopic but nevertheless so small that nobody could carry out the experimental study of this area. The sole attempt [9] was unsuccessful.

More convenient conditions for measurements in transition area at the boundary He I - He II are achieved in the microgravity environment since according to Eq. (7)  $\xi_K \propto g^{-2/3}$ . I.e. the  $10^3$  times decrease of  $g$  entails the increase of the width of transition area to centimeters, and  $3 \times 10^7$  times decrease of  $g$  is necessary to reach the width of the order of 10 cm (but  $g = 0$  abolishes the effect at all because nothing like it happens in the absence of hydrostatic pressure).

This work is stimulated by The III International Workshop on Low Temperature Physics in Microgravity Environment. The brief message about it is published in materials of Workshop [13], and this paper is the extended version of our report.

**3. SOME MORE HISTORY.** Being not informed about our publication [3] Hohenberg (the private communication to Ahlers [9]) had noticed the necessity to alter the dependence (3). Slusarev and Strzhemechny [10] also had not noticed our Ref.3 and reproached us for using equality  $A=0$  in the normal area.

After publications [1,3] the proximity effect at the boundary He I-He II is considered in Refs.6-10. We do not repeat here their contents. The following sections beginning from Sec.4 contain the unpublished results. We would like only to note that Sobianin [6] had shown that concrete results are not very sensitive to the existence and values of B or C terms in the four-term form of Ginzburg -Pitaevskii equation:

$$(E1) \quad \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dz^2} + A\Psi - B\Psi^3 - C\Psi^5 = 0. \quad (9)$$

Let us write down also the dimensionless form of Eq. (9)

$$(E2) \quad \frac{d^2\varphi}{d\chi^2} \pm \varphi - (1-M)\varphi^3 - M\varphi^5 = 0, \quad (10)$$

which was obtained using the following notations:

$$\Psi_b = \Psi_0(T_\lambda - T)^{1/3}, \quad \Psi_0^2 = -\frac{B_0}{2C} + \sqrt{\left(\frac{B_0}{2C}\right)^2 - \frac{A_0}{C}},$$

$$M = \frac{C\Psi_b^4}{A} = \frac{C\Psi_0^4}{A_0}, \quad \xi_M = \xi \sqrt{1 + \frac{1}{3}M}, \quad \chi = \frac{z}{\xi_M}, \quad \varphi = \frac{\Psi}{\Psi_b}, \quad (11)$$

$$A_0 = \frac{A_0^0}{1 + \frac{1}{3}M}, \quad B = B_0|T_\lambda - T|^{2/3}, \quad B_0 = \frac{1-M}{1 + \frac{1}{3}M} B_0^0,$$

$$B_0^0 = 3.52 \times 10^{-39} \text{ erg} \times \text{cm}^3 \cdot \text{K}^{-2/3}.$$

Here  $\Psi_b$  is the bulk value of the wave function,  $A$  is determined by Eq. (4),  $A_0^0, B_0^0$  are the values of  $A_0, B_0$  at  $M = 0$  [4].

$M = 1$  corresponds to the version of the theory proposed by Slusarev and Strzhemechny [10], and  $M = 0$  corresponds to the three-term equation:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dz^2} + A\Psi - B\Psi^3 = 0. \quad (12)$$

**4. NUMERICAL DEFINITION OF  $h_{sc}$ .** Besides the solution of Eq. (8) the critical size  $h_{sc}$  is also the parameter which arises during numerical calculations to solve Eq. (12) or Eq. (9). Let us consider Eq.(10) including both of them. One fixes the value  $\varphi = 0$  at some point  $\zeta$ . This point acquires the sense of the initial point  $\zeta = -h_n$  (the Cauchy problem is solved). Depending on initial value  $\varphi'(-h_n)$ , the function  $\varphi$  varies and reaches zero at some point, which acquires the sense of the end point  $\zeta = h_s$ . Decreasing  $\varphi'(\zeta)$  one sees the decrease of  $h_s$  and general decrease of  $\varphi(\zeta)$  (when  $\varphi'(-h_n) \rightarrow 0$  then  $\varphi(\zeta) \rightarrow 0, h_s \rightarrow h_{sc}$  see Fig.1a). So the results have been found that coincide with obtained from Eq.(8) and also following values of  $h_{sc}$ :  $h_{sc} = 2.295, 2.310, 2.349, 2.425$  that correspond to  $h_n = 2.0, 1.5, 1.0, 0.5$  respectively.

The use of Eq.(6) is simpler. This equation is linear, and its solution can be multiplied by any constant. Therefore  $\Psi(\zeta)$  may be not small but the equality  $\Psi = 0$  would be exactly fulfilled at two points:  $\zeta = -h_n$  (the initial condition), and  $\zeta = h_{sc}$ . Thus, the point at which  $\Psi(\zeta)$  reaches the zero value, are just  $\zeta = h_{sc}$  not depending on the initial  $\Psi'(-h_n)$  (see Fig 1b).

**5.  $M = 0$ . THREE-TERM EQUATION AND THE UNIT  $\Psi_g$  FOR  $\Psi$ -FUNCTION.** If we want to write down Eq.(12) in the dimensionless form with no numerical coefficients

$$\frac{d^2\Psi}{d\zeta^2} \pm |\zeta|^{4/3}\Psi - |\zeta|^{2/3}\Psi^3 = 0, \quad \zeta = \frac{z}{\xi_g}, \quad (13)$$

then we should use the unit of length  $\xi_g$ , determined by Eq.(7), and the unit

$$\Psi_g = \sqrt{\frac{A_0 \xi_0}{B_0 \xi_g}}, \quad (14)$$

for  $\Psi$ -function ( $\psi = \Psi / \Psi_g$ ) would have to be used. Both  $\xi_g$  and  $\Psi_g$  are temperature independent.

When  $\Psi_g$  is used as the unit of  $\Psi$  as it is done in Eq.(10) then the following problem arises (see for example [6,10]):  $\Psi_g$  is zero at  $T = T_\lambda$ ; therefore, the function  $\varphi$  determined by Eqs.(11) is infinite at  $\chi = 0$ . Eq.(10) and the expansion of thermodynamical potential in powers of  $\varphi$  and  $\varphi'$ , which is the source of G.-P. equation, are not valid in the vicinity of interface  $\chi = 0$ . Even the idea arose to expand in powers of  $1/\varphi$  instead of  $\varphi$ .

This difficulty does not exist for Eq.(13) and for the corresponding expansion of  $\Phi$ :



$$\Phi = \frac{\Phi_{II} - \Phi_I}{A_0(\xi_0 / \xi_g)^2 \psi^2}, \quad (15)$$

$$\Phi = \mp |\zeta|^{1/3} \psi^2 + \frac{1}{2} |\zeta|^{2/3} \psi^4 + \left( \frac{d\psi}{d\zeta} \right)^2.$$

Here  $\Phi_{II}$  is the thermodynamical potential of He II, and  $\Phi_I$  is its value at  $\psi = 0$ , that is the thermodynamical potential of normal helium - He I. Both  $\zeta$  and  $\psi$  do not create any problems of infinity in the vicinity of boundary He I-He II and the only problem remains which is worth mentioning. It is the problem of the relative magnitudes of the second and the third terms of Eq. (12) and of the corresponding terms of Eqs. (13,15). Since  $\xi \rightarrow 0$  and  $\psi(0)$  is nonzero, the second term ("the  $A$ -term") is less than the third ("the  $B$ -term"). It is right while  $\zeta^{1/3} \ll \psi$ , i.e. just in the vicinity of the interface. Here instead of Eq. (6) the two-term equation is:

$$\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} - |\zeta|^{2/3} \psi^3 = 0, \quad (16)$$

but the area where this equation is valid is very narrow. Really, let us trace the variation of  $\psi$  beginning from initial point  $\zeta = -h_n$ . The depth of normal area may be large or small, corresponding values of  $\psi$  may be extremely small or not very small, in all cases the increase of  $\psi$  can begin only when  $|\zeta|$  exceeds the value of order of 1, and  $\psi$  cannot sufficiently increase in the vicinity of interface though persistently increases (according to Eq. (13) the second derivative of  $\psi$  is positive in the normal area, and  $\psi$  can only increase from zero passing  $\psi(0)$  till the flex point  $\zeta_f$ ). Therefore  $\psi(0) < \psi(\zeta_f) = \zeta_f^{1/3}$ . The last equality follows from Eq. (13) (the point  $\zeta = 0$  is not the flex point because the sign of curvature does not change at  $\zeta = 0$  what is clear from Eqs. (13,16)). The flex point coincides with the point of intersection of the curve  $\psi(\zeta)$  with the curve

$$\psi_0(\zeta) = \zeta^{1/3}, \quad (17)$$

that is the solution of Eq. (13) in the absence of correlation effects and simultaneously it is the asymptotic solution of Eq. (13) in the depth of the superfluid area ( $\zeta \gg \xi_g$ ). Only in the area  $\zeta > \zeta_f$ , where the  $A$ -term restores its influence, the possibility arises for  $\psi$  to pass a maximum and then to fall to zero according to the boundary condition at the top of the vessel.

Thus, the area of Eq. (16) validity is within the interval  $|\zeta| < \zeta_f$ . The function  $\psi_0$  has the infinite derivative at its initial point  $\zeta = 0$ , and it rapidly leaves behind the function  $\psi$ . Neither  $\zeta$  nor  $\psi$  have time for sufficiently increase till the point of intersection. That is why the solution of Eq. (13) is small at the interface (what takes off the problem of the expansion), and that is why the area of Eq. (16) validity is narrow (that takes off the problem of influence of Eq. (16) on the behavior of  $\psi$ ). The numerical calculations confirm this supposition (Fig. 2).

This area of the validity of Eq. (16) is especially narrow in the case  $h_i - h_{ic} \ll h_{ic}$  where  $\psi(0) \ll 1$ . Because of that the critical sizes  $h_{ic}$ , determined by the numerical solution of two-term Eqs. (2,6) containing only  $A$ -term, coincide very precisely with the critical sizes, determined by the numerical solution of the three-term Eqs. (12,13), containing both the  $A$ - and

the  $B$ -terms: if  $h_n = \infty$  all 15 digits in  $h_{sc} = 2.29099999510800$  coincide and so is when  $h_n = 0$  and  $h_{sc} = 2.55000000046130$ .

If the size of superfluid area is large enough ( $h_i \gg 1$ ) then after the intersection of the curves  $\psi$  and  $\psi_0$  the former follows the latter from below. They do not intersect once more because the point of their intersection would be the second flex point where the sign of curvature would change again, and the boundary condition at the top would become unfulfilled. Following this asymptote  $\psi$  can increase till quite large values. Far from the boundary He I - He II it is reasonable to use other characteristic lengths:  $\xi$  near the wall and  $l_p$  far from it ( $l_p = 7.7 \times 10^5 (T_\lambda - T)$  cm [5]). But now we are interested only in the smallness of our  $\psi$  near the interface and it is the fact.

**6.  $M \neq 0$ . TWO-TERM EQUATION AND THE UNIT  $\xi_{gM}$ .** At  $M \neq 0$  the dimensionless form of two-term equation Eq. (6) remains unchanged if the unit of length  $\xi_g$  is substituted by

$$\xi_{gM} = \xi_{g0} \alpha^{-2/5}, \xi_{gM} = \xi_g \left(1 + \frac{1}{3} M\right)^{2/10} \quad (18)$$

( $\xi_{g0}$  determined in Eqs. (11) is equal to  $\xi_{g0M} (T_\lambda - T)^{-2/3}$ ).

**7.  $M \neq 0$ . THREE-TERM EQUATION AND THE UNIT OF  $\Psi$ .** It could be possible to keep Eq. (13) unchanged too if the quantity  $\Psi_g (1 + M/3)^{1/10} / (1 - M)$  was used as the unit of  $\Psi$ . But it is infinite at  $M = 1$  and we think that it is preferable to leave  $1 - M$  in the equation and to use as the unit of  $\Psi$  the other characteristic quantity

$$\Psi_g \left(1 + \frac{1}{3} M\right)^{1/10} = \sqrt{\frac{A_0 \zeta_{gM}}{B_0 \zeta_{gM}}} \quad (19)$$

But it is more reasonable to choose the unit of  $\Psi$  for the case  $M \neq 0$  considering the four-term equation.

**8. FOUR-TERM EQUATION AND THE UNIT  $\Psi_{gM}$ .** The four-term equation Eq. (9) does not determine the units of  $z$  and  $\Psi$  which give the possibility to write it as dimensionless equation without numerical coefficients. Therefore the choice of convenient units for this equation is not unique. It seems to us that the choice, which we would like to recommend, has some preferences. We have chosen:  $\xi_{gM}$  as the unit of length and  $\Psi_{gM}$  as the unit of the wave function where  $\xi_{gM}$  is determined by Eq. (18) and

$$\Psi_{gM} = \Psi_0 \sqrt{\frac{\xi_{gM}}{\xi_{g0}}}. \quad (20)$$

With  $\Psi_0$  from Eq. (11). Then Eq. (9) takes the form:

$$\frac{d^2 \psi_M}{d\zeta_M^2} \pm |\zeta_M|^{4/3} \psi_M - (1-M)|\zeta_M|^{2/3} \psi_M^3 - M\psi_M^5 = 0, \zeta_M = \frac{z}{\xi_{\beta M}}. \quad (21)$$

We would like to notice that the characteristic quantities determined by Eqs. (14,19,20) have the structure of  $\Psi_b$  given in Eqs. (11) (N.B.  $\Psi_0^2 = A_0/B_0$  at  $M=0$ ), however  $(T_\lambda - T)^{2/3}$  is substituted by  $\xi_{0M}/\xi_{\beta M}$ , i.e. by the quantity having the same dimension but being temperature and coordinate independent.

All terms of Eq. (21) are small in the vicinity of boundary He I-He II as well as all terms of corresponding expansion of thermodynamical potential. The asymptotic solution in the depth of superfluid area again is written in the form of Eq. (17):  $\psi_M = \zeta_M^{1/3}$ .

**9. ALMOST CRITICAL SIZE OF SUPERFLUID AREA** ( $H_x - H_{xc} \ll H_x, H_n = 0$ ). Let us consider the case where  $h_s - h_{xc} \ll h_{xc}$  and  $h_n = 0$ . Taking into account that Eq. (6) has the exact solution  $\zeta^{1/2} J_{0.3}(3/5\zeta^{5/3})$  we look for the approximate solution of Eq. (21) having the form

$$\psi = c\sqrt{\zeta} J_{0.3}\left(\frac{\zeta^{5/3}}{h_s^{5/3}} j\right), \quad (22)$$

where  $j = j_{0.3,1} = 2.8541$  is the first zero of the Bessel function of the order of 0.3. Employing the method of "the solutions valid in average" [11] we obtain the expression of coefficient  $c$ :

$$c^2 = \frac{M-1}{2M} \left(\frac{3}{5}\right)^{1/5} \left(\frac{h_{xc}}{h_s}\right)^{1/3} \frac{I_2}{I_3} \left[1 + b \sqrt{1 + \frac{4M}{(1-M)^2} \frac{I_1 I_3}{I_2^2} K}\right], \quad (23)$$

$$K = 1 - \left(\frac{h_{xc}}{h_s}\right)^{10/3}, \quad I_1 = \int_0^j x J_{0.3}^2(x) dx = 0.91627,$$

$$I_2 = \int_0^j x^{6/5} J_{0.3}^4(x) dx = 0.37001, \quad I_3 = \int_0^j x^{7/5} J_{0.3}^2(x) dx = 0.16790,$$

$$b = \pm \text{signum}(M-1).$$

The dependence of  $c$  on  $h_s$  is qualitatively different at  $M=0$  and  $M=1$ :

$$c^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^{1/5} \left(\frac{h_{xc}}{h_s}\right)^{1/3} \frac{I_1}{I_2} K \quad \text{at } M=0, \quad (24)$$

$$c^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^{1/5} \left(\frac{h_{xc}}{h_s}\right)^{1/3} \sqrt{\frac{I_1}{I_3}} K \quad \text{at } M=1, \quad (25)$$

The function  $c(h_s)$  has two branches. The first ( $c_+$ ), with  $b = \text{signum}(M-1)$  exists at any  $M$ . If  $M \leq 1$  then  $c \rightarrow 0$  when  $h_s \rightarrow h_{xc}$  according to the definition of  $h_{xc}$ . If  $M > 1$  then  $c_+ \neq 0$  at  $h_s = h_{xc}$  and in this case  $h_{xc}$  is not a critical size. Nothing critical is in the behavior of the first branch in this case until  $K$  becomes negative and the expression below the root sign becomes equal to zero.

The second branch ( $c_-, b = -\text{signum}(M-1)$ ) exists only in the case  $M > 1$  and requires  $K < 0 (h_s < h_{sc})$ . At  $K = 0 (h_s = h_{sc})$  we have  $c_- = 0$  but as it was mentioned above  $h_s = h_{sc}$  is not critical because of the existence of nonzero first branch. Again the situation when the expression below the root sign becomes equal to zero is critical and determines the minimal  $h_s$  compatible with the superfluidity (cf.[6,12], where the similar situation arose when the critical sizes of narrow slits were considered):

$$h_{\min} = h_{sc} \left[ 1 + \frac{(M-1)^2}{4M} \frac{I_2^2}{I_1 I_3} \right]^{-3/10} \quad (26)$$

However it is necessary to verify the thermodynamic stability of the superfluid states described by Eq. (22) at  $h_s > h_{\min}$ . The condition of stability is  $\int \Phi d\zeta < 0$  where  $\Phi$  is proportional to the difference of thermodynamical potentials of He II and He I. In the units  $\xi_{gm}, \Psi_{gm}$  the magnitude  $\Phi$  again has the form similar to Eq. (15) but the M-terms are to be added.  $\int \Phi d\zeta$  may be simplified by the transformation  $\int (d\psi / d\zeta)^2 d\zeta = \psi d\psi / d\zeta - \int \psi d^2\psi / d\zeta^2$  and by substitution of Eq. (21). The result is:

$$- \int_0^{h_s} \left[ \frac{1-M}{2} |\zeta|^{2/3} \psi^4 + \frac{2}{3} M \psi^6 \right] d\zeta < 0. \quad (27)$$

If  $M < 1$  this condition is fulfilled for any solution of Eq. (21) including our Eq. (22). In this case  $h_{sc}$  is the critical size in any sense: it is the minimal size compatible with the superfluidity, and the superfluid state realized at  $h_s > h_{sc}$  is thermodynamically stable.

If  $M > 1$  then the condition of stability of the solution (22) has the form:

$$c^2 > \frac{3}{4} \frac{M-1}{M} \left( \frac{3}{5} \right)^{1/3} \left( \frac{h_{sc}}{h_s} \right)^{1/3} \frac{I_2}{I_3}. \quad (28)$$

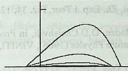
It can be fulfilled only for  $c_+$  and determines the critical size above which the transition into stable superfluid state becomes possible:

$$h_v = h_{sc} \left[ 1 + \frac{3}{16} \frac{(M-1)^2}{M} \frac{I_2^2}{I_1 I_3} \right]^{-3/10} \quad (29)$$

It is easy to see that  $h_v > h_{\min}$ . The transition from nonzero stable density of superfluid component to its stable zero value at  $h = h_v$  is not continuous, i.e. it is the first order transition unlike the transition at  $h = h_{sc}$ , which is the second order one.

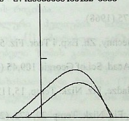
**10. ACKNOWLEDGEMENTS.** We would like to thank S.Tsakadze for his interest and attention, and the Organizing Committee of CWS 2002 for the invitation that has stimulated this work, and for the support of the attendance of one of us (Yu.M.) at the workshop. The work is partly supported by the grant 2.17.02 of the Georgian Academy of Sciences.

$h_n = 5.000000000000000E-0001$      $h_s = 2.74200000054770E+0000$   
 $dy = 4.50000000000273E-0001$      $h_s = 2.45000000048022E+0000$   
 $dy = 1.50000000000091E-0001$      $h_s = 2.42000000048373E+0000$   
 $dy = 5.0000000000114E-0002$      $h_s = 2.42600000048333E+0000$   
 $dy = 1.66666666666799E-0002$      $h_s = 2.42500000048312E+0000$   
 $dy = 5.5555555555990E-0003$      $h_s = 2.42500000048312E+0000$   
 $dy = 1.05105105105333E-0003$      $h_s = 2.42500000048312E+0000$



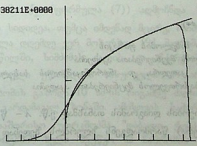
**Fig.1a.** The numerical solutions of Eq. (13). The initial value of derivative  $\psi'(0)$  (denoted by  $dy$ ) is decreased five times beginning from 0.45 till the coordinate of the end point  $\zeta = h_s$  ceases to change. Just this lower limit of  $h_s$  is its critical value  $h_{sc}$ . On the axis of ordinates  $\psi = 1$  is labeled. The initial point is  $\zeta(0) = -0.5 = -h_n$ .

$h_n = 1.00000000000000E+0000$      $h_{sc} = 2.34900000056950E+0000$   
 $h_n = 5.00000000000000E-0001$      $h_{sc} = 2.42500000048312E+0000$



**Fig.1b.** The numerical solutions of Eq. (6). One curve is sufficient to determine  $h_{sc}$ . Two cases ( $\zeta(0) = -1$ , and  $\zeta(0) = -0.5$ ) are shown. In both cases  $\psi'(-h_n) = 0.4$ .

$h_n = 3 \quad M = 0 \quad h_s = 8.47099999993021E+0000$



**Fig.2.** The asymptote (Eq. (17)), and the solution of Eq. (13) at  $\psi'(0) = 0.0266$ .  $\psi = 1$  is labeled on the axis of ordinates, and on the axis of abscissae  $\zeta = -4, -3, \dots, 8$  are labeled.



## REFERENCES

1. Kiknadze L.V., Mamaladze Yu.G., Cheishvili O.D. *ZhETF*. Pis'ma 3, 305 (1966).
2. V.L.Ginzburg, L.P.Pitaevskii, *Zh. Exp. i Teor. Fiz.* 34, 1240 (1958).
3. L.V.Kiknadze, Yu.G.Mamaladze, O.D.Cheishvili, in Proceedings of the Xth International Conference on Low Temperature Physics (1966), VINITI, Moscow (1967), p.491.
4. Yu.G.Mamaladze, *Zh. Exp. i Teor. Fiz.* 52, 729 (1967).
5. L.V.Kiknadze, Yu.G.Mamaladze, *Fiz. Nizk. Temp.* 17, 300 (1991).
6. A.A.Sobianin, *Zh. Exp. i Teor. Fiz.* 63, 1780 (1972).
7. V.L.Ginzburg, A.A.Sobianin, *Usp. Fiz. Nauk* 120, 153 (1976).
8. L.V.Kiknadze, Thesis, Tbilisi State University (1970).
9. G.Ahlers, *Phys.Rev.*, 171, 275 (1968).
10. V.A.Slusarev, M.A.Strzhemechny, *Zh. Exp. i Teor. Fiz.* 58, 1757 (1970).
11. Yu.G.Mamaladze, *Bulletin Acad. Sci. of Georgia* 109,45 (1983).
12. L.V.Kiknadze, Yu.G.Mamaladze, *Fiz. Nizk. Temp.* 15, 1123 (1989).
13. L.Kiknadze, Yu.Mamaladze, *Fiz. Nizk. Temp.* 29, 672, (2003).

Accepted for publishing on April 25, 2003.

Reviewed on October 24, 2003.

## მიკროგრამიტაშია და სიანსლოვის ეფექტი კელიუმ II კელიუმ I საზღვარზე

ლ.კიკნაძე\*), ი.ამალაძე\*\*)

\*) ე. ანდრონიკაშვილის სახელობის ფიზიკის  
ინსტიტუტი, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემია

\*\*\*) ზოგადი ფიზიკის კათედრა, ე. ანდრონიკაშვილის სახელობის  
ფიზიკის ინსტიტუტი, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემია

კელიუმის მდგომარეობის დიაგრამის თანახმად ე.წ.  $\lambda$  - წირი  $P = P_{\lambda}(T)$  (აქ  $P$  - წნევა,  $T$  - ტემპერატურა) წარმოადგენს ზღურბლს ზედნად კელიუმ-II-სა ( $P < P_{\lambda}$ )

და ნორმალურ კელიუმ-I-ს ( $P > P_1$ ) შორის. ამიტომ, თხევადი კელიუმის შემცველ ჭურჭელში, ჰიდროსტატიკური წნევის გამო, უნდა შექმნილიყო გამყოფი ზედაპირი იქ, სადაც მიიღწევა წნევა  $P_2$ . სითხის ეს დონე აღნიშნულია  $z = 0$ -ით (ფორმულა (1)). მაშინ ჭურჭლის სახურავს შესაბამება  $z = H_1$  ( $H_1$ -ზედენადი არის სიმაღლე), ფსკერს კი  $z = -H_2$  ( $H_2$ -არის ნორმალური არის სიმაღლე),  $P_0$  არის წნევა ჭურჭლის სახურავთან (მისი არსებობა აუცილებელია, რადგან მის გარეშე საჭირო გახდებოდა ძალიან მაღალი ზედენადი სითხის სვეტი, რათა ჰიდროსტატიკურ წნევას მიეღწია  $P_2$ -მდე).

სიახლოვის კვანტური ეფექტი რომ არ არსებობდეს, საზღვარი  $z = 0$ -ზე იქნებოდა მკვეთრი, მაგრამ კვანტური კორექცია ზედენად და ნორმალურ არეებს შორის განაპირობებს გარდამავალი ზონის არსებობას. მასში ზედენადი კომპონენტის სიმკვრივე  $\rho_1 = m\Psi^2$  გლუვად იცვლება ზედენად არეში თავისი მნიშვნელობიდან ნულამდე, რომელიც პრინციპში მიიღწევა  $z = -H_2$ -ზე, მაგრამ ნორმალური არის სიღრმეში ტალღური ფუნქცია  $\Psi$  კლებულობს ექსპონენციალურად და პრაქტიკულად უტოლდება ნულს საზღვრიდან ისეთ მანძილზე, რომელიც სიახლოვის ეფექტის მახასიათებელი ზომის რიგისაა.

ზედენადი და ნორმალური კელიუმის საზღვარზე სიახლოვის ეფექტის თორიული წინასწარმეტყველება [1] ემყარებოდა გინზბურგ-პიტაევსკის განტოლებას (12) [2], რომელიც მახასიათებელი ზომის განსაზღვრის მიზნით შეიძლება ჩაიწეროს ორწევრა სახით (2,6). ამ სტატიის პირველ და მესამე ნაწილებში აღწერილია (12)-ის კოეფიციენტების (3,4), მახასიათებელი ზომისა (7) და კრიტიკული ზომის (8) დაზუსტების ისტორია (კრიტიკული ზომა  $H_{sc}$  არის მისი მინიმალური სიმაღლე; თუ  $H_1 < H_{sc}$ , მაშინ  $\rho_1 = 0$  მთელ ჭურჭელში;  $h_{sc}, h_1, h_2$  წარმოადგენს სათანადო სიმაღლეებს უგანზომილებო სახით). მოყვანილია სიახლოვის ეფექტისადმი მიძღვნილი შემდგომი შრომების სია [5-10] და აღნიშნულია ზოგი გაუგებრობა (ავტორებს საველეურობდნენ უზუსტობას, რომელიც მათ ადრე გაასწორეს [3,4]). ამ შრომების შედეგები სტატიაში არ მפורდება, გარდა ძირითადი განტოლებისა (9-11) ოთხწევრა სახით. აქ და ვველგან, სადაც გეხდება  $\pm$  ან  $\mp$ , ზედა ნიშანი ეკუთვნის ზედენად ( $z > 0$ ), ქვედა კი ნორმალურ ( $z < 0$ ) არეს.

მახასიათებელი ზომა  $\xi_g$  (ფორმულა (7)) აღმოჩნდა  $10^{-2}$  სმ-ის რიგის. ეს სავსებით მაკროსკოპული სიდიდეა, თუმცა იმდენად მცირე, რომ გარდამავალი ზონის ექსპერიმენტული შესწავლა დღემდე ვერ მოხერხდა [9]. მაგრამ, როგორც ნაჩვენებია ამ სტატიის მეორე ნაწილში, სიმძიმის ძალის  $g$  აჩქარების შემცირება ზრდის მახასიათებელ ზომას. სრული უწონადობა სასურველი არ არის ( $g = 0, \xi_g = \infty$ ), მაგრამ მახასიათებელი ზომის გაზრდა 10 სმ-ის რიგამდე ძალიან შეუწყობდა ხელს გაზომვების ჩატარებას გარდამავალ ზონაში. ამისთვის საჭიროა  $g$ -ს შემცირება  $3 \times 10^7$  ჯერ. III საერთაშორისო უორკშოპმა "დაბალი ტემპერატურების ფიზიკა მიკროგრავეიტაციის პირობებში" ხელი შეუწყო ამ ნაშრომის შექმნას. ეს სტატია

წარმოადგენს უორკშოპზე წარდგენილი მოხსენების გავრცობილ ვარიანტს, მისი მოკლე შინაარსი კი ქვეყნდება უორკშოპის მასალებში [13].

ზევით ნახსენები კრიტიკული ზომა  $H_{xc}$ , რომელიც განსაზღვრავს ზედნადი სითხის მინიმალურ რაოდენობას, აუცილებელს ზედნადობის შესაღწევად ნორმალურ არეში, პირველად განსაზღვრული იყო [1,3,8]-ში ანალიზური მეთოდებით, შემდეგ [6,7]-ში. ამ სტატიის მეთოდზე ნაწილში საუბარია კრიტიკული ზომის განსაზღვრის ორი რიცხვითი მეთოდის შესახებ (ამ მეთოდების ურთიერთშეღარება შეიძლება ნახაზებით ს, სბ).

ზედნადობის  $\Psi$  - თეორია არის ფენომენოლოგიური და მისი პარამეტრები განისაზღვრება ექსპერიმენტული მონაცემების საფუძველზე. ამჟამად განუსაზღვრელი რჩება  $M$  (11). ამიტომ, სტატიის მეზუთე, მეექვსე და მეშვიდე ნაწილები ეძღვნება  $M$ -ის განსხვავებული მნიშვნელობების შემცველ განტოლებებს, სივრძისა და ტალღური ფუნქციის სათანადო ერთეულებს. მათ შორის განსაკუთრებით აღსანიშნავია  $\Psi_g$  (14), რომლის გამოყენება წყვეტს [6,7,10] შრომებში წამოჭრილ შემდეგ პრობლემას: ტალღური ფუნქციის წონასწორული მნიშვნელობა  $\Psi_b$  კელიუმ II - კელიუმ I საზღვარზე ნულის ტოლია და მის ერთეულებში გაზომილი ფუნქცია  $\varphi$  (10,11) ამ საზღვარზე ზდება უსასრულოდ დიდი. ამიტომ აზრიც კი გამოითქვა, რომ  $z=0$ -ის მახლობლობაში თერმოდინამიკური პოტენციალი (15) გამწკრივდეს არა  $\varphi$ -ს, არამედ  $1/\varphi$ -ს ხარისხებად.  $\Psi_b$ -ს მაგიერად  $\Psi_g$ -ს გამოყენება ხსნის ამ პრობლემას, რადგანაც  $\Psi_g$  არ ზდება ნული  $z=0$ -ში. ნახ.2 დაკავშირებულია მსჯელობასთან, რომლის თანახმად  $\Psi_g$  ერთეულებში გაზომილი ტალღური ფუნქცია ( $\psi = \Psi / \Psi_g$ ) კელიუმ II-კელიუმ I საზღვარზე მცირეა, რის გამოც შესაძლებელია თერმოდინამიკური პოტენციალის გამწკრივება მის ხარისხებად.

როდესაც ზედნადი სვეტის სიმაღლე ახლოა კრიტიკულთან, მაშინ ტალღური ფუნქცია მცირეა და შეფოთების თეორიის მსგავსი მეთოდით [11] მიიღება (21) არაწრფივი განტოლების მიახლოებითი ამოხსნა (22), (23). მისი ანალიზი გვიჩვენებს, რომ  $M \leq 1$  და  $M > 1$  შემთხვევები პრინციპულად განსხვავდება. პირველ შემთხვევაში კრიტიკული ზომა არის ზევით ნახსენები  $h_{xc}$ , ხოლო მეორეში მის მაგიერად ჩნდება ორი სხვა:  $h_{min}$  (26) (ზედნადობა შესაძლებელია, როცა  $h \geq h_{min}$ ) და  $h_r$  (29) (როცა  $h \geq h_r$  ზედნადობა თერმოდინამიკურად ხელსაყრელია).  $h_r > h_{min}$ . როცა  $h_r$  უტოლდება  $h_{xc}$ -ს ტალღური ფუნქცია ნახტომისებურად ეცემა ნულამდე (ეს პირველი გვარის ფაზური გადასვლაა, იმ დროს, როდესაც გადასვლა  $h_r = h_{xc}$ -ზე მეორე გვარისა).



## THE PICARD ITERATION PROCESS FOR A DISCRETE TIMOSHENKO SYSTEM

**J. Peradze**

*Chair of Computer Mathematical Software and Information Technologies*

**Abstract.** The property of the Picard iteration method is studied in solving one system of nonlinear operator equations. This system was obtained by applying the Galerkin method and a difference scheme of the Crank-Nicholson type to the initial boundary problem of vibration of a beam in the Timoshenko model. The system consists of operator equations containing the unknown vectors on two neighboring time sets.

It is assumed that the count is performed from layer to layer, i.e., that the iteration approximation on the preceding layer has already been found. In that case, the algorithm accuracy is influenced by an error arising in giving the vector on the preceding layer, as well as by an error of the iteration process itself on this layer. An estimate of the total error is obtained. It is based on the a priori estimate of the norm of those terms of the considered system of equations which form nonlinearity. The principle of compressed mappings is used. The estimate of an iteration process error is valid if the difference scheme pitch is sufficiently small. The way how this condition can be satisfied is discussed.

**1. FORMULATION OF THE PROBLEM.** This paper continues the author's work [1], where the system

$$\begin{aligned} w_{tt} &= (cd - a + b \int_0^1 w_x^2 dx) w_{xx} - cd \psi_x, \\ \psi_{tt} &= c \psi_{xx} - c^2 d (\psi - w_x), \\ 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ a, b, c, d > 0, \quad cd - a > 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

describing vibration of a beam in Timoshenko's theory [2-5] is considered.

Let us write a set of functions

$$u, v, f, \varphi, \psi, \quad (1.2)$$

from which the first four are defined by the formulas

$$u = w_t, \quad v = w_x, \quad f = \psi_t, \quad \varphi = \psi_x. \quad (1.3)$$

Using (1.1) and (1.3) we write a system of equations with respect to functions (1.2) as

$$\begin{aligned} u_t &= (cd - a + b \int_0^1 v^2 dx) v_x - cd \varphi, \\ v_t &= u_x, \quad f_t = c \varphi_x - c^2 d (\psi - v), \\ \varphi_t &= f_x, \quad \psi_t = f, \\ 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Let us complement (1.4) with the initial and boundary conditions

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= w^{(1)}(x), \quad v(x, 0) = w^{(2)}(x), \quad f(x, 0) = \psi^{(1)}(x), \\ \varphi(x, 0) &= \psi_x^{(2)}(x), \quad \psi(x, 0) = \psi^{(2)}(x), \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad f(0, t) = f(1, t) = 0, \\ 0 \leq x &\leq 1, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (1.5)$$

In [1] the finite element discretization is performed with respect to the spatial element  $x$  at the constant pitch  $h = 1/N$  and also a discretization with respect to the time argument  $t$  using a

Crank-Nicolson type scheme on the grid  $\{t_n \in [0, T] \mid 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_P = T\}$  at a variable pitch  $\tau_n = t_n - t_{n-1} > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, P$ .

As a result problem (1.4), (1.5) is reduced to solving the system of nonlinear equations

$$A(y_h^n - y_h^{n-1}) = \frac{\tau_n}{2} (B + C(v_h^n) + C(v_h^{n-1}))(y_h^n + y_h^{n-1}), \quad (1.6)$$

$n = 1, 2, \dots, P$ , with which we will be concerned below.

In (1.6)  $y_h^n = (u_h^n, v_h^n, f_h^n, \varphi_h^n, \psi_h^n)'$  is the vector corresponding to the  $n$ -th time layer,  $u_h^n, f_h^n \in R^{N-1}$ ,  $v_h^n, \varphi_h^n, \psi_h^n \in R^{N+1}$ ,  $n = 0, 1, \dots, P$ , where

$$y_h^0 \text{ is given} \quad (1.7)$$

and  $y_h^n, n \geq 1$ , is to be found.

Further,  $A$ ,  $B$  and  $C$  are the fifth order block square matrices determined by the formulas

$$A = \begin{pmatrix} M & & & & \\ & 2K & & 0 & \\ & & M & & \\ & 0 & & 2K & \\ & & & & 2K \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & (cd-a)Q & 0 & -cdL & 0 \\ -2Q' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2dL & 0 & cQ & -c^2dL \\ 0 & 0 & -2Q' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2L' & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.8a)-(1.8c)$$

$$C(v) = \frac{bh}{2} v K v \begin{pmatrix} 0 & Q & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad v \in R^{N+1},$$

where  $0$  are rectangular zero matrices,  $K$ ,  $L$ ,  $M$  and  $Q$  are respectively  $(N+1) \times (N+1)$ ,  $(N-1) \times (N+1)$ ,  $(N-1) \times (N-1)$  and  $(N-1) \times (N+1)$  matrices of the form

$$K = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & & & 0 \\ & & & & \\ 0 & & & 4 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & & \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & \end{pmatrix} \quad (1.9a)-(1.9d)$$

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & & & & 0 \\ & & & & \\ 0 & & & & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2h} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & \\ & & & & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

The size of the zero matrices in (1.9) is determined by the following rule: the number of zero rows (columns) is equal to  $N-1$  if the matrix is in the first or the third row (in the first or the third column) of the block matrix, and to  $N+1$  otherwise.

**2. ITERATION PROCESS.** Let us derive a numerical solution of problem (1.6), (1.7). If in system (1.6) we count from layer to layer (from the  $(n-1)$ -th to the  $n$ -th layer) and assume  $y_h^{n-1}$  to be known, then the problem can be reduced to finding  $y_h^n$  from equation (1.6) and, for this, we turn to the iteration method.

In equation (1.6), the vector  $y_h^{n-1}$  cannot be given exactly for  $n > 1$  in the conditions of an approximate algorithm and is replaced by the vector

$$y_h^{n-1,F} = (u_h^{n-1,F}, v_h^{n-1,F}, f_h^{n-1,F}, \varphi_h^{n-1,F}, \psi_h^{n-1,F})', \quad (2.1)$$

which is the final ( $F$ ) iteration approximation for  $y_h^{n-1}$  obtained on the  $(n-1)$ -th layer. Therefore the vector

$$y_{h,R}^n = (u_{h,R}^n, v_{h,R}^n, f_{h,R}^n, \varphi_{h,R}^n, \psi_{h,R}^n)' \quad (2.2)$$

and not  $y_h^n$  is a real ( $R$ ) solution of the resulting equation. Thus the equation

$$A(y_{h,R}^n - y_h^{n-1,F}) = \frac{\tau_n}{2} (B + C(v_{h,R}^n) + C(v_h^{n-1,F}))(y_{h,R}^n + y_h^{n-1,F})$$

corresponds to the  $n$ -th layer,  $n > 1$ .

Since, starting from the second layer, the same occurs on all layers, in the last equation it is natural to write

$$y_{h,R}^{n-1,F} = (u_{h,R}^{n-1,F}, v_{h,R}^{n-1,F}, f_{h,R}^{n-1,F}, \varphi_{h,R}^{n-1,F}, \psi_{h,R}^{n-1,F})' \quad (2.3)$$

instead of  $y_h^{n-1,F}$ .

Thus we have obtained the equation with respect to  $y_{h,R}^n$

$$A(y_{h,R}^n - y_{h,R}^{n-1,F}) = \frac{\tau_n}{2} (B + C(v_{h,R}^{n-1}) + C(v_{h,R}^{n-1,F}))(y_{h,R}^n + y_{h,R}^{n-1,F}). \quad (2.4)$$

Let (2.4) hold for  $n=1$ , too. For this it suffices to assume that  $y_{h,R}^{0,F}$  is a vector which for  $n=1$  is actually taken in equation (1.6) instead of  $y_h^0$ . Thus we do not exclude here the case, where for various reasons  $y_{h,R}^{0,F} \neq y_h^0$ .

The dimensions of the components of (2.1)–(2.3) coincide with the dimensions of the respective components of the vectors  $y_h^{n-1}$  and  $y_h^n$ .

Now to solve (2.4), we choose an iteration process. We use Picard's algorithm

$$Ay_{h,R}^{n,m} = Ay_{h,R}^{n-1,F} + \frac{\tau_n}{2} (B + C(v_{h,R}^{n,m-1}) + C(v_{h,R}^{n-1,F}))(y_{h,R}^{n,m-1} + y_{h,R}^{n-1,F}), \quad (2.5)$$

where  $y_{h,R}^{n,m} = (u_{h,R}^{n,m}, v_{h,R}^{n,m}, f_{h,R}^{n,m}, \varphi_{h,R}^{n,m}, \psi_{h,R}^{n,m})'$  is the  $m$ -th approximation of the vector  $y_{h,R}^n$ ,  $m=1, 2, \dots$ , and, moreover,  $u_{h,R}^{n,m}, f_{h,R}^{n,m} \in R^{N-1}$ ,  $v_{h,R}^{n,m}, \varphi_{h,R}^{n,m}, \psi_{h,R}^{n,m} \in R^{N+1}$ .

As for process (2.5), at every iteration pitch we have to solve a system of algebraic equations with the block-diagonal matrix  $A$ . As follows from (1.8a), the matrices  $M$  and  $2K$  are the nonzero blocks of  $A$ . Hence the system splits into five independent subsystems with three-diagonal matrices of two forms  $M$  and  $2K$  (see (1.9a,c)). For iterated solutions of these subsystems it is convenient to use the factorization method. For each of the above-mentioned matrices, out of two sets of factorization coefficients only the sets of coefficients depending on the right-hand sides of the equation have to be renewed on each  $n$ -th time layer and at each iteration pitch  $m$ .

**3. A PRIORI ESTIMATES.** Let us introduce a scalar product and vector norms. If we assume that  $\lambda$  and  $\mu$  are vectors of the same dimension, whose  $l$ -th components are equal to  $\lambda_l$  and  $\mu_l$ , then the scalar product

$$(\lambda, \mu)_h = h \sum_l \lambda_l \mu_l, \quad (3.1.a)$$

where the summation involves all components of  $\lambda$  and  $\mu$  and the norm

$$\|\lambda\|_h = (\lambda, \lambda)_h^{1/2}. \quad (3.1.b)$$

If  $W$  is a symmetric positively definite matrix whose order coincides with the dimension of the vector  $\lambda$ , then the energetic norm

$$\|\lambda\|_{W,h} = (W\lambda, \lambda)_h^{1/2}.$$

Note that the vector dimension does not influence the notation of the scalar product and norms.

Our problem consists in estimating an error of approximation of process (2.5) to an exact solution of equation (1.6). In other words, we have to determine the value

$$\|y_h^n - y_{h,R}^{n,m}\|_h.$$

By (1.9a,c,d) and Gerschgorin's theorem [6] for the matrices  $K, M$  and  $Q'Q$  we obtain

$$\frac{1}{6} \|\lambda\|_h^2 \leq (K\lambda, \lambda)_h \leq \|\lambda\|_h^2, \quad \lambda \in R^{N+1},$$

$$\frac{1}{3} \|\lambda\|_h^2 \leq (M\lambda, \lambda)_h, \quad \lambda \in R^{N+1}, \quad (3.2a)-(3.2c)$$

$$\|Q\|_h \leq \frac{1}{h}.$$

We need the following property of the matrix  $C$

**LEMMA 1.** *The inequality*

$$\|C(v_2)Y_1 - C(v_1)Y_2\|_h \leq \frac{b}{4h} [(\|v_1\|_{K,h}^2 + \|v_2\|_{K,h}^2) \|Y_1 - Y_2\|_h + (\|v_1\|_{K,h} + \|v_2\|_{K,h})(\|V_1\|_h + \|V_2\|_h) \|v_1 - v_2\|_h] \quad (3.3)$$

is fulfilled for  $y_l = (u_l, v_l, f_l, \varphi_l, \psi_l)'$  and  $Y_l = (U_l, V_l, F_l, \Phi_l, \Psi_l)'$ ,  $u_l, f_l, U_l, F_l \in R^{N-1}$ ,  $v_l, \varphi_l, \psi_l, V_l, \Phi_l, \Psi_l \in R^{N+1}$ ,  $l = 1, 2$ .

**PROOF.** By virtue of (1.8c) we write

$$\|C(v_2)Y_1 - C(v_1)Y_2\|_h \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 [\|C(v_{i+1})(Y_1 - Y_2)\|_h + \|(C(v_2) - C(v_1))Y_{i+1}\|_h] \leq$$

$$\leq \frac{b}{4} \sum_{i=0}^1 [\|v_{i+1}\|_{K,h}^2 \|Q(V_1 - V_2)\|_h + \|Qv_{i+1}\|_h \prod_{j=0}^1 (\|v_2\|_{K,h} + (-1)^j \|v_1\|_{K,h})]. \quad (3.4)$$

Using (3.2a) and definition (3.1), we get

$$\| \|v_2\|_{K,h} - \|v_1\|_{K,h} \| \leq \|v_2 - v_1\|_{K,h} \leq \|v_2 - v_1\|_h,$$

$$\| \|V_1 - V_2\|_h \leq \|Y_1 - Y_2\|_h, \quad \|v_1 - v_2\|_h \leq \|y_1 - y_2\|_h.$$

Taking these inequalities together with (3.2c) into consideration in (3.4), we obtain (3.3). The Lemma is proved.

Let us introduce the notation. For the vectors  $y_1$  and  $y_2$ , where  $y_l = (u_l, v_l, f_l, \varphi_l, \psi_l)'$ ,  $u_l, f_l \in R^{N-1}$ ,  $v_l, \varphi_l, \psi_l \in R^{N+1}$ ,  $l = 1, 2$ , we define the value

$$s(y_1, y_2) = \frac{a}{b} + \left\{ \frac{2}{b} \left[ \|u_1\|_{M,h}^2 + cd \|v_1 - \psi_1\|_{K,h}^2 + \frac{1}{2b} (a-b \|v_1\|_{K,h}^2)^2 + \right. \right. \quad (3.5)$$

$$\left. \left. + \frac{1}{c} \|f_1\|_{M,h}^2 + \|\varphi_1\|_{K,h}^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{6}{b} cdT} \|L\varphi_2 - Q\psi_2\|_h.$$

Further reasoning concerns equations (1.6) and (2.4). It enables one to estimate the components  $v_h^n$  and  $v_{h,R}^n$  of these equations which form nonlinearities. Estimates can be calculated in both cases.

As shown in [1], for equation (1.6)

$$\|v_h^n\|_{k,h}^2 \leq s_0, \quad (3.6a)$$

$n = 1, 2, \dots, P$ , where  $s_0 = s(y_h^0, y_h^0)$  is found by means of (1.7) and, besides the norms of the other components  $u_h^n, f_h^n, \varphi_h^n, \psi_h^n$  of the vector  $y_h^n$  are uniformly bounded too, provided that  $s_0$  is bounded from above by the constants not depending on  $h$ . From this property the solvability of problem (1.6), (1.7) [7] follows.

As for equation (2.4), we will see below that the estimate depends on the iteration calculus on the preceding  $(n-1)$ -th layer and the initial value of the unknown vector.

**LEMMA 2.** *The a priori estimate*

$$\|v_{h,R}^n\|_{k,h}^2 \leq s_{n-1,F}, \quad (3.6b)$$

$n = 1, 2, \dots, P$ , where  $s_{n-1,F} = s(y_{h,R}^{n-1,F}, y_{h,R}^{0,F})$ , holds.

**PROOF.** We need some results obtained in [1]. First,

$$LK^{-1}Q' = -QK^{-1}L'. \quad (3.7)$$

Second, if the vectors  $y_1$  and  $y_2$ , where  $y_l = (u_l, v_l, f_l, \varphi_l, \psi_l)'$ ,  $u_l, f_l \in R^{N-1}$ ,  $v_l, \varphi_l, \psi_l \in R^{N+1}$ ,  $l = 1, 2$ , satisfy the equation

$$A(y_2 - y_1) = \frac{\tau}{2}(B + C(v_2) + C(v_1))(y_2 + y_1), \quad (3.8)$$

$\tau > 0$ , then

$$e^2(y_2) - e^2(y_1) = -\frac{\tau}{3cd}(\zeta(y_1), u_2 + u_1)_h, \quad (3.9)$$

where

$$e(y_l) = \frac{1}{\sqrt{3cd}} \left[ \|u_l\|_{k,h}^2 + cd \|v_l - \psi_l\|_{k,h}^2 + \frac{1}{2b} \left( a - \right. \right. \quad (3.10a)$$

$$\left. \left. - b \|v_l\|_{k,h}^2 \right)^2 + \frac{1}{c} \|f_l\|_{k,h}^2 + \|\varphi_l\|_{k,h}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.10b)$$

$$\zeta(y_l) = L\varphi_l - Q\psi_l.$$

Let us now use these relations. The application of (3.9) to (2.4) which is a particular form of (3.8), gives

$$e^2(y_{h,R}^n) - e^2(y_{h,R}^{n-1,F}) = -\frac{\tau_n}{3cd}(\zeta(y_{h,R}^{n-1,F}), u_{h,R}^n + u_{h,R}^{n-1,F})_h. \quad (3.11)$$

Next, after replacing  $n$  in (2.5) by  $n-1$ , we obtain a system of equations containing the equalities

$$K(\varphi_{h,R}^{n-1,m} - \varphi_{h,R}^{n-2,F}) = -\frac{\tau_{n-1}}{2}Q'(f_{h,R}^{n-1,m-1} + f_{h,R}^{n-2,F}),$$

$$K(\psi_{h,R}^{n-1,m} - \psi_{h,R}^{n-2,F}) = \frac{\tau_{n-1}}{2}L'(f_{h,R}^{n-1,m-1} + f_{h,R}^{n-2,F}).$$

Hence, by virtue of (3.7) and (3.10b)

$\zeta(y_{h,R}^{n-1,n}) = \zeta(y_{h,R}^{n-2,F})$ ,  
 $m = 1, 2, \dots$ . By substituting the number of the last iteration on the  $(n-1)$ -th layer into this formula we get

$$\zeta(y_{h,R}^{n-1,F}) = \zeta(y_{h,R}^{n-2,F}). \quad (3.12)$$

Using (3.12), we obtain the equality

$$\zeta(y_{h,R}^{n-1,F}) = \zeta(y_{h,R}^{0,F}),$$

whose fulfillment is one of the reasons for choosing process (2.5). By the latter equality and (3.11) we derive

$$e^2(y_{h,R}^n) - e^2(y_{h,R}^{n-1,F}) = -\frac{\tau_n}{3cd} (\zeta(y_{h,R}^{0,F}), u_{h,R}^n + u_{h,R}^{n-1,F}).$$

Taking into account this relation as well as (3.10a) and (3.2b), we get the inequality

$$e^2(y_{h,R}^n) - \tau_n \|\zeta(y_{h,R}^{0,F})\|_h e(y_{h,R}^n) \leq e^2(y_{h,R}^{n-1,F}) + \tau_n \|\zeta(y_{h,R}^{0,F})\|_h e(y_{h,R}^{n-1,F}).$$

This yields

$$e(y_{h,R}^n) \leq e(y_{h,R}^{n-1,F}) + \tau_n \|\zeta(y_{h,R}^{0,F})\|_h, \quad n = 1, 2, \dots, P.$$

This estimate, along with (3.10a), allows us to write

$$\|v_{h,R}^n\|_{K,h}^2 \leq \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{6}{b}} cde \|y_{h,R}^n\| \leq \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{6}{b}} cd(e(y_{h,R}^{n-1,F}) + T \|\zeta(y_{h,R}^{0,F})\|_h). \quad (3.13)$$

Using (3.13) and notations (3.5) and (3.10), we obtain relation (3.6b). The lemma is proved.

Let us estimate the norms of the matrices  $A^{-1}$  and  $A^{-1}B$ . For this we use equality (1.8a), and the inequalities  $\|K^{-1}\|_h \leq 6$  and  $\|M^{-1}\|_h \leq 3$  which follow respectively from (3.2a,b). As a result

$$\|A^{-1}\|_h \leq 3 \quad (3.14a)$$

and  $\|A^{-1}B\|_h \leq 3\|B\|_h$ . By the estimate obtained in [1] for the norm of the matrix  $B$  we can write

$$\|A^{-1}B\|_h \leq 3\gamma, \quad (3.14b)$$

where

$$\gamma = \max^{\frac{1}{2}}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

$$\gamma_1 = 2c^4d^2 + \frac{(cd-a)^2}{h^2} + \frac{5cd}{6h}(c^2 + cd - a), \quad \gamma_2 = 4\left(1 + \frac{1}{h^2}\right),$$

$$\gamma_3 = c^2d^2 + \frac{c^2}{h^2} + \frac{5cd}{6h}(2c^2 + cd - a).$$

**4. ERROR ESTIMATE.** In this section we formulate the main result with respect to the iteration process (2.5). First, we have to determine two sets of values  $p_n, \nabla_{\alpha n}, \nabla_{\beta n}$  and  $q_n, \tau_{\alpha n}, \tau_{\beta n}$  for every  $n$ -th time layer,  $n = 1, 2, \dots, P$ . We begin with the triple of values  $p_n, \nabla_{\alpha n}, \nabla_{\beta n}$ . The first of these values depends on the iteration approximations, namely, on the last approximation on the  $(n-1)$ -th layer and on the initial one on the  $n$ -th layer; the other values depend on the initial values and the last iteration approximation on the  $(n-1)$ -th layer. More exactly, let

$$p_n = \frac{3}{2} \left[ \gamma \|y_{h,R}^{n,0} + y_{h,R}^{n-1,F}\|_h + \frac{b}{2h} \left( \|v_{h,R}^{n,0}\|_{K,h}^2 + \|v_{h,R}^{n-1,F}\|_{K,h}^2 \right) \|v_{h,R}^{n,0} + v_{h,R}^{n-1,F}\|_h \right], \quad (4.1a)$$

$$\nabla_{\alpha n} = \frac{3}{2} \left[ \gamma + \frac{b}{4h} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 (\sqrt{6})^{l-1} \left( s_0^{\frac{1}{2}} + s_{n-1,F}^{\frac{1}{2}} \right)^{p-1} \left( s_0^{\frac{1}{2}} + \|v_{h,R}^{n-1,F}\|_{K,h}^2 \right)^{l-p+1} \right], \quad (4.1b)$$

$$\nabla_{\beta n} = \frac{3}{2} \left[ \gamma + \frac{b}{4h} \sum_{l=1}^2 \sum_{p=1}^2 (\sqrt{6})^{l-1} \left( s_0^{\frac{1}{2}} + s_{n-1,F}^{\frac{1}{2}} \right)^{l-p+1} \left( s_0^{\frac{1}{2}} + \|v_{h,R}^{n-1,F}\|_{K,h}^2 \right)^{p-1} \right]. \quad (4.1c)$$

As for the triple of values  $q_n, \tau_{\alpha n}, \tau_{\beta n}$ , it is determined by the inequalities

$$0 < q_n < 1, \quad (4.2a)$$

$$0 < \tau_{\alpha n} < \frac{1}{\nabla_{\beta n}}, \quad (4.2b)$$

$$\frac{3\tau_{\beta n}}{2q_n} \left\{ \gamma + \frac{3b}{2h} \left[ \frac{2}{9} \|v_{h,R}^{n-1,F}\|_h^2 + \left( \frac{1}{3} \|v_{h,R}^{n-1,F}\|_h + \max \left( \|y_{h,R}^{n,0}\|_h, \|y_{h,R}^{n-1,F}\|_h \right) + \tau_{\beta n} p_n \right) + \left( \|y_{h,R}^{n,0} - y_{h,R}^{n-1,F}\|_h + \tau_{\beta n} p_n \right) \frac{q_n}{1-q_n} \right]^2 \right\} \leq 1. \quad (4.2c)$$

From (4.1) and (4.2) it follows that the values  $p_n, \nabla_{\alpha n}, \nabla_{\beta n}$  and  $q_n, \tau_{\alpha n}, \tau_{\beta n}$  can be found before calculating the iteration calculation on the  $n$ -th layer.

Finally, we introduce one more notation. By  $n_F$  we denote the number of iterations performed on the  $n$ -th layer,  $n = 1, 2, \dots, P$ . Therefore  $n_F$  is the number of iterations which yields  $y_{h,R}^{n,F}$ .

**THEOREM 1.** *If for fixed  $n$ ,  $1 \leq n \leq P$ , inequalities (4.2) are fulfilled and the pitch  $\tau_n$  satisfies the relation*

$$\tau_n \leq \min(\tau_{\alpha n}, \tau_{\beta n}), \quad (4.3)$$

then for the error of process (2.5) the estimate

$$\|y_h^n - y_{h,R}^{n,m}\|_h \leq \frac{1 + \tau_{\alpha n} \nabla_{\alpha n}}{1 - \tau_{\alpha n} \nabla_{\beta n}} \|y_h^{n-1} - y_{h,R}^{n-1,F}\|_h + \frac{q_n^n}{1 - q_n} \|y_{h,R}^{n,1} - y_{h,R}^{n,0}\|_h, \quad (4.4)$$



$$m = 1, 2, \dots,$$

holds.

**REMARK.** Some arguments concerning the fulfillment of the conditions of the theorem are given in the Appendix.

**PROOF.** We use the relation

$$\|y_k^n - y_{k,R}^{n,m}\|_h \leq \|y_k^n - y_{k,R}^n\|_h + \|y_{k,R}^n - y_{k,R}^{n,m}\|_h, \tag{4.5}$$

and divide the proof into two steps. In either step one of the terms from the right-hand side of (4.5) is estimated. Note that the existence of the vector  $y_{k,R}^n$  will be shown while proving the theorem.

Step 1. For simplicity, we shall use here the notation  $y_{k,R}^{n-1} = y_{k,R}^{n-1,F}$ . Subtracting (2.4) from (1.6) and applying the matrix  $A^{-1}$  to the obtained equality, we have

$$\sum_{i=0}^1 \left[ ((-1)^i I - \frac{\tau_n}{2} A^{-1} B) (y_{k,R}^{n-i} - y_{k,R}^{n-1}) - \dots \right] \tag{4.6}$$

$$- \frac{\tau_n}{2} A^{-1} \sum_{j=0}^1 (C(v_{k,R}^{n-i}) y_{k,R}^{n-j} - C(v_{k,R}^{n-1}) y_{k,R}^{n-j}) \Big] = 0,$$

where  $I$  is the unit matrix.

By (3.3)

$$\begin{aligned} \|C(v_{k,R}^{n-1}) y_{k,R}^{n-1} - C(v_{k,R}^n) y_{k,R}^n\|_h &\leq \frac{b}{4h} \sum_{i=0}^1 (\|v_{k,R}^{n-i}\|_{K,h}^{2-i} + \\ &+ \|v_{k,R}^{n-i}\|_{K,h}^{2-i}) (\|v_{k,R}^{n-j}\|_h + \|v_{k,R}^{n-j}\|_h)^j \|y_{k,R}^{n-j-(i-1)h} - y_{k,R}^{n-j-(i-1)h}\|_h. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Hence, applying (3.6) and (3.2a) to (4.7), we get

$$\begin{aligned} \|C(v_{k,R}^n) y_{k,R}^n - C(v_{k,R}^{n-1}) y_{k,R}^{n-1}\|_h &\leq \\ &\leq \frac{b}{4h} \sum_{i=0}^1 \left\{ \left( s_0^{1-i/2} + s_{n-1,F}^{1-i/2} \right) \left[ \sqrt{6} (\sqrt{s_0} + \sqrt{s_{n-1,F}}) \right] \right\} \|y_{k,R}^n - y_{k,R}^{n-1}\|_h, \\ \|C(v_{k,R}^{n-1}) y_{k,R}^{n-1} - C(v_{k,R}^n) y_{k,R}^n\|_h &\leq \tag{4.8} \\ &\leq \frac{b}{4h} \sum_{i=0}^1 \left\{ \left( s_0^{1-i/2} + \|v_{k,R}^{n-1,F}\|_{K,h}^{2-i} \right) \left[ \sqrt{6} (\sqrt{s_0} + \|v_{k,R}^{n-1,F}\|_{K,h}) \right] \right\} \|y_{k,R}^{n-1} - y_{k,R}^{n-1,F}\|_h. \end{aligned}$$

Further, we take (4.8) and analogous inequalities together with (3.14) into account in (4.6). In addition, we also use the fact that, by condition (4.3),  $\tau_n \leq \tau_{\max}$ , where  $\tau_{\max}$  satisfies (4.2b). As a result we get

$$\|y_k^n - y_{k,R}^n\|_h \leq \frac{1 + \tau_{\max} \nabla_{\alpha}}{1 - \tau_{\max} \nabla_{\beta}} \|y_k^{n-1} - y_{k,R}^{n-1,F}\|_h. \tag{4.9}$$

Step 2. (2.5) implies

$$y_{h,R}^{n,m+1} - y_{h,R}^{n,m} = \frac{\tau_n}{2} A^{-1} \left[ (B + C(v_{h,R}^{n-LF})) (y_{h,R}^{n,m} - y_{h,R}^{n,m-1}) + \sum_{l=0}^1 (-1)^l C(v_{h,R}^{n-m-l}) (y_{h,R}^{n,m-l} + y_{h,R}^{n-1,l}) \right], \quad (4.10)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

By (3.3) we write

$$\begin{aligned} \|C(v_{h,R}^{n-1,LF})(y_{h,R}^{n,m} - y_{h,R}^{n,m-1})\|_h &\leq \frac{b}{2h} \|v_{h,R}^{n-1,LF}\|_{K,h}^2 \|y_{h,R}^{n,m} - y_{h,R}^{n,m-1}\|_h, \\ \|C(v_{h,R}^{n,m})y_{h,R}^{n,m} - C(v_{h,R}^{n,m-1})y_{h,R}^{n,m-1}\|_h &\leq \\ &\leq \frac{b}{4h} \sum_{l=0}^1 \sum_{j=0}^1 \|v_{h,R}^{n,m-l}\|_{K,h}^{2-l} \left( \sum_{j=0}^1 \|v_{h,R}^{n,m-j}\|_h \right) \|y_{h,R}^{n,m} - y_{h,R}^{n,m-1}\|_h, \quad (4.11) \\ \|C(v_{h,R}^{n,m}) - C(v_{h,R}^{n,m-1})\|_h &\leq \\ &\leq \frac{b}{2h} \sum_{j=0}^1 \|v_{h,R}^{n,m-j}\|_{K,h} \|v_{h,R}^{n-1,LF}\|_h \|y_{h,R}^{n,m} - y_{h,R}^{n,m-1}\|_h. \end{aligned}$$

We also need the estimates

$$\begin{aligned} \|v_{h,R}^{n-1,LF}\|_{K,h} &\leq \|v_{h,R}^{n-1,F}\|_h, \quad (4.12) \\ \|v_{h,R}^{n,m-j}\|_{K,h} &\leq \|v_{h,R}^{n,m-j}\|_h \leq \|y_{h,R}^{n,m-j}\|_h, \\ I &= 0, 1, \end{aligned}$$

derived on the basis of (3.2a) and (3.1).

Using (4.10)–(4.12), also (3.14) and (4.3), we get

$$\begin{aligned} \|y_{h,R}^{n,m+1} - y_{h,R}^{n,m}\|_h &\leq \frac{3\tau_{pn}}{2} \left\{ \gamma + \frac{b}{2h} \left[ \|v_{h,R}^{n-1,LF}\|_h^2 + \|y_{h,R}^{n,m}\|_h^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|y_{h,R}^{n,m-1}\|_h^2 + \|v_{h,R}^{n-1,LF}\|_h (\|y_{h,R}^{n,m}\|_h + \|y_{h,R}^{n,m-1}\|_h) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|y_{h,R}^{n,m}\|_h \|y_{h,R}^{n,m-1}\|_h \right] \|y_{h,R}^{n,m} - y_{h,R}^{n,m-1}\|_h \right\}, \quad (4.13) \\ &\quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Formulas (2.5), (1.8c), (4.1a) and estimates (3.14), (3.2c), (4.3) imply

$$(1-l) \|y_{h,R}^{n,0}\|_h, \quad \|y_{h,R}^{n,1} - ly_{h,R}^{n,0}\|_h \leq \sigma_{ln}, \quad (4.14)$$

where

$$\sigma_{ln} = \max[(1-l) \|y_{h,R}^{n,0}\|_h, \|ly_{h,R}^{n,0} - y_{h,R}^{n-1,l}\|_h + \tau_{pn} p_n], \quad l = 0, 1.$$

Using the introduced parameters  $\sigma_{0n}$  and  $\sigma_{1n}$ , condition (4.2c) can be rewritten as

$$\frac{3\tau_{pn}}{2} \left[ \gamma + \frac{b}{2h} \sum_{l=0}^1 (l+1) \|v_{h,R}^{n-1,LF}\|_h^{2-l} \left( \sigma_{0n} + \sigma_{1n} \frac{q_n}{1-q_n} \right) \right] \leq q_n. \quad (4.15)$$

Relations (4.13)–(4.15) imply that

$$\|y_{h,R}^{n,2} - y_{h,R}^{n,1}\|_h \leq q_n \|y_{h,R}^{n,1} - y_{h,R}^{n,0}\|_h \leq \sigma_{ln} q_n. \quad (4.16a)$$

By (4.16a) and (4.14) it is clear that

$$\|y_{h,R}^{n,2}\|_h \leq \|y_{h,R}^{n,1}\|_h + \|y_{h,R}^{n,2} - y_{h,R}^{n,1}\|_h \leq \sigma_{0n} + \sigma_{1n} q_n. \quad (4.16b)$$

Let the inequalities

$$\|y_{h,R}^{n,m} - y_{h,R}^{n,m-1}\|_h \leq q_n \|y_{h,R}^{n,m-1} - y_{h,R}^{n,m-2}\|_h, \quad (4.17a)$$

$$\|y_{h,R}^{n,m}\|_h \leq \sigma_{0n} + \sigma_{1n} \sum_{i=1}^{m-1} q_n^i \quad (4.17b)$$

be fulfilled for  $1 < m \leq l$ .

Substituting the estimate

$$\|y_{h,R}^{n,j}\|_h \leq \sigma_{0n} + \sigma_{1n} \frac{q_n}{1 - q_n}, \quad j=0,1,$$

obtained from (4.17b), (4.14) and (4.2a) into (4.13) for  $m=l$ , and using, in addition, (4.15), we have

$$\|y_{h,R}^{n,l+1} - y_{h,R}^{n,l}\|_h \leq q_n \|y_{h,R}^{n,l} - y_{h,R}^{n,l-1}\|_h. \quad (4.18a)$$

From here, (4.17a) and (4.14) for  $l=1$  we obtain the inequality

$$\|y_{h,R}^{n,l+1} - y_{h,R}^{n,l}\|_h \leq \sigma_{1n} q_n^l,$$

which, together with (4.17b) for  $m=l$ , gives

$$\|y_{h,R}^{n,l+1}\|_h \leq \|y_{h,R}^{n,l}\|_h + \|y_{h,R}^{n,l+1} - y_{h,R}^{n,l}\|_h \leq \sigma_{0n} + \sigma_{1n} \sum_{i=1}^l q_n^i. \quad (4.18b)$$

(4.18) implies that (4.17) is fulfilled for  $m=l+1$ . By (4.16) we conclude that (4.17) holds for arbitrary  $m > 1$ . From (4.17a) follows

$$\|y_{h,R}^{n,m} - y_{h,R}^{n,m-1}\|_h \leq \sigma_n q_n^{m-1}, \quad (4.19)$$

where  $\sigma_n = \|y_{h,R}^{n,1} - y_{h,R}^{n,0}\|_h$  and  $m \geq 1$ .

Let us verify that the sequence  $\{y_{h,R}^{n,m}\}$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , is fundamental. By virtue of (4.19), for any natural number  $l$  we have

$$\|y_{h,R}^{n,m+l} - y_{h,R}^{n,m}\|_h \leq \sum_{i=1}^l \|y_{h,R}^{n,m+i} - y_{h,R}^{n,m+i-1}\|_h \leq \sigma_n \sum_{i=1}^l q_n^{m+i-1} \leq \sigma_n \frac{q_n^m}{1 - q_n}$$

and therefore

$$\|y_{h,R}^{n,m+l} - y_{h,R}^{n,m}\|_h \leq \sigma_n \frac{q_n^m}{1 - q_n}, \quad (4.20)$$

$$m = 0, 1, \dots, \quad l = 1, 2, \dots$$

For any  $l$  the right-hand side of (4.20) tends to zero as  $m \rightarrow \infty$ . Hence the sequence  $\{y_{h,R}^{n,m}\}$  is fundamental. It has a limit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_{h,R}^{n,m} = y_{h,R}^n.$$

To pass to the limit in (2.5) as  $m \rightarrow \infty$ , we use the continuity property of the matrices  $A$  and  $B$  and apply Lemma 1 to the matrix  $C$ . Then it is clear that  $y_{h,R}^n$  is a solution of equation (2.4). Passing to the limit in (4.20) as  $l \rightarrow \infty$ , we obtain

$$\|y_{h,R}^n - y_{h,R}^{n,m}\|_h \leq \frac{q_n^m}{1-q_n} \|y_{h,R}^{n,1} - y_{h,R}^{n,0}\|_h. \quad (4.21)$$

If restriction (4.3) is fulfilled, then (4.5), (4.9) and (4.21) imply estimate (4.4). The theorem is proved.

The following result is a corollary of inequality (4.4)

**THEOREM 2.** Assume that for arbitrary  $n_0$ ,  $1 \leq n_0 \leq P$ , inequalities (4.2) and (4.3) are fulfilled for  $n = 1, 2, \dots, n_0$ , then the estimate

$$\begin{aligned} \|y_h^n - y_{h,R}^{n,m}\|_h &\leq \prod_{k=1}^n \frac{1 + \tau_{\omega k} \nabla_{\omega k}}{1 - \tau_{\omega k} \nabla_{\beta k}} \|y_h^0 - y_{h,R}^{0,F}\|_h + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \|y_{h,R}^{k,1} - y_{h,R}^{k,0}\|_h \frac{q_k^{k_r}}{1 - q_k} \prod_{l=1}^n \frac{1 + \tau_{\omega l} \nabla_{\omega l}}{1 - \tau_{\omega l} \nabla_{\beta l}} + \\ &+ \frac{q_n^m}{1 - q_n} \|y_{h,R}^{n,1} - y_{h,R}^{n,0}\|_h, \\ n &= 1, 2, \dots, n_0, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

is true for the error of process (2.5).

**5. APPENDIX.** In conclusion, we give some arguments as regards the conditions of Theorem 1. As follows from (4.3), the pitch  $\tau_n$  depends on the values  $\tau_{\omega n}$  and  $\tau_{\beta n}$ . According to (4.2b) the first of these values is determined by the parameter  $\nabla_{\beta n}$  which is calculated by formula (4.1c) before realizing the iteration process on the  $n$ -th layer. As for the choice of  $\tau_{\beta n}$  as well as  $q_n$  satisfying conditions (4.2a,c), the situation is as follows. The latter of these conditions is represented as

$$\frac{P_3(\tau_{\beta n}, q_n)}{q_n(1 - q_n)^2} \leq 0, \quad (5.1)$$

where  $P_3(\tau_{\beta n}, q_n)$  is a third order polynomial with respect to  $\tau_{\beta n}$  and  $q_n$ . Here two approaches can be taken: either we give the parameter  $0 < q_n < 1$  determining the convergence rate on the  $n$ -th layer and use it to find the value  $\tau_{\beta n}$  influencing the grid pitch, or vice versa. It is easy to see in the first case that for any  $q_n$  there always exists a sufficiently small  $\tau_{\beta n}$  such that (4.2c) is fulfilled. To find the corresponding  $\tau_{\beta n}$ , as follows from (5.1), we have to substitute the given value  $q_n$  into  $P_3(\tau_{\beta n}, q_n)$  and after that to satisfy the cubic inequality with respect to  $\tau_{\beta n}$

$$P_3(\tau_{\beta n}, q_n) \leq 0.$$

To this end, we can use the Cardano formulas. These formulas and (5.1) are suitable for the second case, where  $q_n$  is determined by given  $\tau_{\beta n}$ . However we should keep in mind that the

admissible value  $q_n$  does not correspond to any  $r_{\beta n}$ . When this happens,  $r_{\beta n}$  has to be decreased.

Finally, formulas (4.1a) and (4.2c) become simpler if the initial iteration approximation is performed by the rule  $y_{k,R}^{n,0} = y_{k,R}^{n-1,F}$ ,  $n = 1, 2, \dots, P$ .

## REFERENCES

1. Peradze J. *Discretization of a nonlinear wave system*. Proc. Tbil. State Univ., Appl. Math. Comp. Sci. 343 (21), 2001, pp. 35–50.
2. Timoshenko S. *Theorie des vibrations*. Beranger, Paris, 1947.
3. Hirschhorn M., Reiss E. *Dynamic buckling of a nonlinear Timoshenko beam*. SIAM J. Appl. Math. 34 (1979), pp. 290–301.
4. Volmir A. *Nonlinear dynamics of plates and shells* (Russian). Nauka, Moscow, 1972.
5. Tucsnak M. *On an initial and boundary value problem for the nonlinear Timoshenko beam*. An. Acad. Bras. Cienc. 63, N2, 1991, pp. 115–125.
6. Voyevodin V., Kuznetsov Yu. *Matrices and Computations* (Russian). Nauka, Moscow, 1984.
7. Lions J. *Some methods of the solution of nonlinear boundary value problems* (Russian). Mir, Moscow, 1972.

Accepted for publishing on September 15, 2002.

Reviewed on February 20, 2003.

## პიკარის იტერაციული პროცესი ტიმოშენკოს დისკრეტული სისტემისათვის

ჯ. ფერაძე

კომპიუტერების მათემატიკური უზრუნველყოფისა და ინფორმაციული ტექნოლოგიების კათედრა

ნაშრომში შესწავლილია ერთი არაწრფივ ოპერატორულ განტოლებათა სისტემის ამონხნის პიკარის იტერაციული მეთოდის თვისება. ეს სისტემა მიღებულია ტიმოშენკოს მოდელში ძელის ვიბრაციის შესახებ საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის გაღერკინის მეთოდის და კრანკ-ნიკოლსონის ტიპის სხვაობიანი სქემის გამოყენების



შედგება. სისტემა შედგება ორ მეზობელ დროის შრეზე საძიებელი ვექტორების შემცველი ოპერატორული განტოლებისაგან.

იგულისხმება, რომ თვლა მიმდინარეობს შრიდან შრეზე, ე.ი. იტერაციული მიახლოება წინა შრეზე მოქმედილია. ამ შემთხვევაში ალგორითმის სიზუსტეზე გააღწენას ახდენს როგორც ცდომილება, რომელსაც შეიცავს ვექტორი წინა შრიდან, ასევე მოცემულ შრეზე თვით იტერაციული პროცესის ცდომილება. მიღებულია ჯამური ცდომილების შეფასება. ის ეფუძნება განხილულ განტოლებათა სისტემაში არაწრფიობის შემომტანი წევრების ნორმის აპრიორულ შეფასებას. გამოყენებულია კუმშვითი ასახვის პრინციპი. იტერაციული პროცესის ცდომილების შეფასება მართებულია მაშინ, როცა სხვაობიანი სტემის ბიჯი საკმაოდ მცირეა. განხილულია ამ პირობის დაკმაყოფილების ზერხი.

## გადაწყვეტილებების მიღების ხელშეწყობი არამკაშირი ინფორმაციული სისტემები ინვესტიციებში

1 ნაწილი – დისკრიმინაციული ანალიზი ხაინვესტიციური  
პროექტებში

გ. სირბილაძე<sup>\*)</sup>, ა. ხიხარულიძე<sup>\*\*)</sup>, გ. კორაბაშვილი<sup>\*)</sup>

<sup>\*)</sup> შემსხვევით პროექტთა თეორიის კათედრა

<sup>\*\*)</sup> კომპიუტერების მათემატიკური უზრუნველყოფის  
და ინფორმაციული ტექნოლოგიათა კათედრა

**Abstract** In the present work several methods of decision making are discussed, which can be applied to the concrete problems in business.

The discrimination analysis is the alternative of Bayesian inference method and constructs the numerical-tabular knowledge base; afterwards the fuzzy analysis is performed to establish relationships between business states, situations, factors and those possible decisions which can arise in such situations.

In the investment problems, the numerical-tabular knowledge base can be constructed using informational bases of successfully performed investment projects, if such bases don't exist or number of projects is very low, then the knowledge base can be constructed using psychometrical questioning of experienced experts, using simple patterns which can be forwarded to experts by Internet. After the construction of knowledge base the positive and negative discrimination are calculated. They are used to establish rankings for and against each decision. The decision can be made by fixing the criteria of principle of maximum possibility.

In many situations instead of frequency numerical-tabular knowledge base, the so called possibilistic numerical-tabular knowledge base is constructed. Such possibilistic distribution table can be reformed to the probability distribution table using transformation principle[4]. Afterwards the positive and negative possibilistic discriminations are calculated. The correct decision is believed to be the one with maximum value in possibilistic distribution.

შუბაშაღი. გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც ინფორმაციული სისტემა:

$$(\Omega, D, I, U, K), \quad (1)$$

სადაც  $\Omega$  არის სისტემის მდგომარეობათა (სიტუაციების, აქტივობათა, ფაქტორებისა და ა.შ.) არაკარგილი სიმრავლე.  $D$  არის შესაძლო გადაწყვეტილებათა არაკარგილი სიმრავლე,  $I$  არის არსებული ინფორმაცია სისტემის მდგომარეობათა (მათი ერთობლივი განაწილების) შესახებ,  $K: D \rightarrow R$  წარმოადგენს გადაწყვეტილების მიმღები პირის (გმ) კრიტერიუმს, რომელიც დაკავშირებულია გადაწყვეტილებების გარკვეულ ოპტიმალურობასთან, ხოლო  $U$  – არის

$$U: D \times \Omega \rightarrow R$$

ასახვა, გადაწყვეტილების მიმღები პირის უპირატესობათა შეფასებები:

$u_1$ : სარგებლიანობის ფუნქცია ან მისი გარდაქმნა.

$u_2$ : გმ-თვის საინტერესო ცვლადის მოსალოდნელი მნიშვნელობები.

$u_3$ : მდგომარეობებსა და შესაძლო გადაწყვეტილებებზე არსებული სტატისტიკური მონაცემებიდან აგებული სიზშირული განაწილება.

მდგომარეობათა  $\Omega$  სიმრავლეზე არსებული  $I$  ინფორმაციის შესახებ შეიძლება განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

$I_1$ : გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა განსაზღვრულ გარემოში, როდესაც მდგომარეობა, რომელიც უნდა განხორციელდეს გადაწყვეტილების მიღების წინ წინასწარ ცნობილია.

$I_2$ : გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა რისკის გარემოში (ალბათური განუზღვრელობის გარემო), როდესაც მდგომარეობა, რომელიც შეიძლება განხორციელდეს, უცნობია, მაგრამ ცნობილია მდგომარეობებზე ალბათური განაწილება.

$I_3$ : გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა ზოგადად განუზღვრელ გარემოში, როდესაც არაეითარი კონკრეტული ინფორმაცია მდგომარეობებზე არ შეიძლება იქნეს გამოყენებული, თუმცა უნდა არსებობდეს გარკვეული ინფორმაცია მდგომარეობათა გარკვეული ქვესიმრავლეთა განაწილების შესახებ. ანუ, გმპ-ს უნდა გააჩნდეს ცნობები მდგომარეობათა (ფაქტორთა) გარკვეულ ქვესიმრავლეებზე, რომელიც საბოლოოდ მდგომარეობების მონაცემთა ტანის აგებაზე მივიყვანს [1].

**შენიშვნა:** იდენტიფიკატორული წყვილი  $(I; U)$  და კრიტერიუმი ყოველთვის კონკრეტულ შემთხვევას, ამოცანას პასუხობს, სადაც ფიქსირდება  $I$  ინფორმაცია მდგომარეობებზე და გმპ-ის უპირატესობათა  $U$  შეფასებები და კრიტერიუმის სახე: მაგალითად  $(I; U) := (I_2; u_1)$  ნიშნავს, რომ ამოცანა განიხილება რისკის გარემოში სიტუაციების, მდგომარეობათა ან ფაქტორების მიმართ, ხოლო გმპ-ის აქტიუობით არსებობს სარგებლიანობის  $u: D \times \Omega \rightarrow R$  ფუნქცია. ცნობილია, რომ ეს კლასიკური ამოცანა გადაწყდება ნეიმან-მორგენშტერნის სარგებლიანობის თეორიის [2] ფარგლებში, თუ  $K$  კრიტერიუმის როლში ავიღებთ მოსალოდნელი სარგებლიანობის მაქსიმუმის პრინციპს.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ  $(I, u, K)$  სამეული  $(\Omega, D, I, u, K)$ -გადაწყვეტილების მიღების ინფორმაციული სისტემის იდენტიფიკაციას აკეთებს.

ჩვენ აქ განვიხილავთ გადაწყვეტილების მიღების ზოგიერთ კონკრეტულ ინფორმაციულ მოდელს, რომელიც შეიძლება გამოყენებული იყოს ბიზნესის სტატიკურ გარემოში.

1. დისკრემინაციულ ანალიზში საინფორმაციო გადაწყვეტილებაზე. ვთქვათ,  $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  სისტემის მდგომარეობათა, სიტუაციების (ფაქტორების) რაიმე სასრული სიმრავლეა, ხოლო  $D = (d_1, d_2, \dots, d_m)$  შესაძლო გადაწყვეტილებათა სასრული სიმრავლე.

დისკრემინაციული ანალიზის ამოცანა: აიგოს ინფორმაციული საექსპერტო გადაწყვეტილების ხელშეწყობი სისტემა, რომელშიც ციფრულ-ცხრილური ცოდნის ბაზა იქმნება გამოცდილი ექსპერტების (ბიზნეს ექსპერტების) ფსიქომეტრული გამოკითხვების შედეგად ან იმ მონაცემებიდან, რომლებიც მათივე უკვე არსებული სწორი გადაწყვეტილებებიდან (სტატისტიკური მონაცემებიდან) აიღება. მეთოდის ფარგლებში ტარდება არამათემატიკური ანალიზი, რათა დამყარდეს გარკვეული დამოკიდებულებანი ბიზნესის გარკვეულ მდგომარეობათა, სიტუაციებსა თუ





ფაქტორებს და იმ შესაძლო გადაწყვეტილებებს შორის, რომლებიც შეიძლება ჩამოყალიბდნენ, წარმოიშენ ადინამულ სიტუაციებში.

სწორია შეთხვევები, როდესაც ექსპერტებს არ სურთ ან არ შეუძლიათ წესების სახით ჩამოყალიბონ მათი ცოდნა თუ მათ მიერ დაგროვილი გამოცდილება გადაწყვეტილებათა არჩევის მიმართ. ცოდნის წესების არასრულყოფილება არის ძირითადი პრობლემა ამ მიდგომაში. ცხადია, ასეთ შემთხვევებში წესებზე დაყრდნობილი გადაწყვეტილების მიღების ინფორმაციული სისტემის აგება არასაიმედოობის მომტანია და აქ პრიორიტეტული ხდება ე.წ. რიცხვით-ცხრილური ცოდნის ბაზის აგება. გადაწყვეტილების მიღების ცნობილი სისტემები, რომლებიც ბაიესის ტექნიკას იყენებენ, სწორედ რიცხვით-ცხრილური ცოდნის ბაზაზეა დამყარებული. მაგრამ აქაც ჩნდება ინფორმაციის შევსების, აკუმულირების პრობლემები. საჭიროა ძალიან დიდი ინფორმაცია, რათა სწორად დადგინდეს სხვადასხვა სიტუაციებს შორის მიმართებები. ასევე დაუზუსტებელია ის მომენტები, რომლებიც ექსპერტის ობიექტურობის ხარისხს გულისხმობს.

მეთოდი, რომელიც ქვემოთაა აღწერილი ბაიესის მეთოდის ალტერნატივაა. იგი იყენებს რიცხვით-ცხრილური ცოდნის ბაზას, რომელიც გადაწყვეტილების მიღებამ პირმა შეიძლება ააგოს ინფორმაციული ბაზებიდან. თუ ეს ვერ ხერხდება მაშინ ცნობილ ექსპერტებთან კავშირის დამყარებით ტარდება ფსიქომეტრული გამოკითხვა, რათა დაგროვებული ცოდნა გადაისახოს რიცხვით-ცხრილური ცოდნის ბაზაში.

დისკრიმინაციული სისტემა [3] იყენებს მეთოდს, რომელიც სარგებლობს რიცხვით-ცხრილური ცოდნის ბაზით და დასკვნები გამოაქვს ამ ბაზაში ჩაწერილი ინფორმაციის დამუშავებით. დისკრიმინაციული ანალიზი ეყრდნობა შემდეგ დებულებებს:

- 1) სტანდარტული ალბათურ-სტატისტიკური მოდელების გამოყენება მრავალფაქტორული გადაწყვეტილების მისაღებად, როდესაც ფაქტორები შეიცავენ სუბიექტურ კომპონენტებს, გვაძლევს არასარწმუნო შეფასებებს და მათი გამოყენება პრაქტიკული თვალსაზრისით გაუმართლებელია. ასეთ სიტუაციაში დისკრიმინაციული ანალიზით სარგებლობა დასაშვებია მისი აქსიომატიკიდან გამომდინარე.
- 2) პირველადი ინფორმაცია წარმოდგენილი უნდა იყოს მატრიცის (რიცხვით-ცხრილური მონაცემთა ბაზის) სახით, რომლის ვერტიკალური შესასვლელი წარმოადგენენ მდგომარეობებს (ფაქტორებსა თუ სიტუაციებს), ხოლო ჰორიზონტალური - შესაძლო გადაწყვეტილებებს.
- 3) ძირითადი ინფორმაცია, რომლის გამოყენება უშუალოდ მოდელში განიხილება, წარმოადგენს საშუალო აკუმულირებულ შეთანხმებულობის ზომებს, რომლებიც დამოკიდებულნი არიან რიცხვითი მონაცემების სიდიდეთა რიგზე.
- 4) დისკრიმინაციული ანალიზის გამოყენებით შესაძლო გადაწყვეტილებათა სიმრავლეზე (D) მიიღება არამკაფიო ქვესიმრავლე (განზოგადებული გადაწყვეტილება).

კონკრეტული გადაწყვეტილებისთვის უნდა არსებობდეს პრინციპი (დეფაზიფიკაციის პრინციპი), ანუ გადაწყვეტილების კრიტერიუმი, რომელიც აირჩევს გადაწყვეტილებას (კლასიკურ გადაწყვეტილებას).

ფიგურა 1 მიხედვითაც აღინიშნება ცხრილის ცხრილური ცოდნის სისტემის აგება და მისი გამოყენება ინფორმაციის დამუშავების მიზნით.

2. მეთოდის აღწერა. ინფორმაციული ბაზებიდან მოპოვებული მონაცემებიდან თუ ექსპერტთა ფსიქომეტრიული დაკითხვით მიღებული მონაცემებიდან იქმნება  $f_y$  სიხშირეების განაწილების ცხრილი\*), სადაც  $i$  აღნიშნავს  $d_i$ -გადაწვევტილების ნომერს, ხოლო  $j$  აღნიშნავს  $w_j$  მდგომარეობის, ფაქტორისა თუ სიტუაციის ნომერს. შევნიშნოთ ორი მომენტი: ა) თუ  $f_y$  დაითვლება ინფორმაციული ბაზებიდან, მაშინ იგი აღნიშნავს იმ გადაწვევტილებათა წილს, რომელიც  $w_j$  სიტუაციისას სწორი  $d_i$  გადაწვევტილება იქნა მიღებული. ბ) თუ  $f_y$  დაითვლება ექსპერტთა დაკითხვით, მაშინ  $f_y$  აღნიშნავს იმ ექსპერტთა წილს, რომლებმაც სწორად მიიჩნიეს  $d_i$ -ური გადაწვევტილება თუკი წარმოიქმნებოდა  $w_j$  სიტუაცია (შეიქმნებოდა მდგომარეობა).

ავაგოთ  $f_y$  სიხშირეთა ცხრილი:

| $D \backslash \Omega$ | $\omega_1$  | $\omega_2$  | $\dots$ | $\omega_j$  | $\dots$ | $\omega_n$  |
|-----------------------|-------------|-------------|---------|-------------|---------|-------------|
| $d_1$                 | $f_{11}$    | $f_{12}$    | $\dots$ | $f_{1j}$    | $\dots$ | $f_{1n}$    |
| $d_2$                 | $f_{21}$    | $f_{22}$    | $\dots$ | $f_{2j}$    | $\dots$ | $f_{2n}$    |
| $\dots$               | $\dots$     | $\dots$     | $\dots$ | $\dots$     | $\dots$ | $\dots$     |
| $d_i$                 | $f_{i1}$    | $f_{i2}$    | $\dots$ | $f_{ij}$    | $\dots$ | $f_{in}$    |
| $\dots$               | $\dots$     | $\dots$     | $\dots$ | $\dots$     | $\dots$ | $\dots$     |
| $d_{m-1}$             | $f_{m-1,1}$ | $f_{m-1,2}$ | $\dots$ | $f_{m-1,j}$ | $\dots$ | $f_{m-1,n}$ |
| $d_l$                 | $f_{m1}$    | $f_{m2}$    | $\dots$ | $f_{mj}$    | $\dots$ | $f_{mn}$    |

ცხრილი №1: სიხშირული განაწილების ცხრილი (რიცხვით-ცხრილურ მონაცემთა ბაზა) დისკრიმინაციულ ანალიზში

აგებულ ინფორმაციულ მოდელში  $I$  - ინფორმაცია  $\Omega$ -ზე შეიცავს განუზღვრელობას თუ სიხშირეები ობიექტური მონაცემებიდან, ინფორმაციული ბაზებიდანაა აღებული, მაშინ განუზღვრელობა ალბათურია:  $I := I_2$ , ხოლო თუ სიხშირეები შეფასებულია ექსპერტული დაკითხვით, მაშინ განუზღვრელობა შესაძლებლობითია და  $I := I_3$ . არაა გამორიცხული კომბინირებული: ალბათურ-შესაძლებლობით განუზღვრელობის შემთხვევაც, როდესაც  $f_y$  სიხშირეების აგებისას სარგებლობენ როგორც ინფორმაციული ბაზებით, ასევე ექსპერტთა ფსიქომეტრიული დაკითხვით შექმნილი ინფორმაციული ბაზებითაც, მაშინ  $I = I_2 \cup I_3$ .

რაც შეეხება გმპ-ის  $u$  უპირატესობათა მნიშვნელობები წარმოადგენენ წვეტილურ სიხშირეებს. ე.ი.  $u := u_j$ . საბოლოოდ

\*) შესაძლებელია კომბინირებული შემთხვევაც, როდესაც სიხშირეთა განაწილების ცხრილი აგება როგორც ინფორმაციული ბაზების, ასევე ექსპერტთა ფსიქომეტრიული დაკითხვით მიღებული მონაცემებისგან.

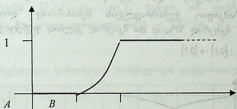
$$(I; u) := (I_2; u_2) \vee (I_3; u_3) \vee (I_2 \cup I_3; u_2)$$

ცხრილი 1-ის საფუძველზე იქმნება ორი ახალი მატრიცა: დადებითი დისკრიმინანტისა  $P = \{p_{ij}\}$  და უარყოფითი დისკრიმინანტის  $N = \{n_{ij}\}$  მატრიცები [3].

$$p_{ij} = \frac{1}{CardD-1} \sum_{k=1, k \neq j}^m \mu_{L-R} \left( \frac{f_{ij}}{f_{kj}} \right),$$

$$n_{ij} = \frac{1}{CardD-1} \sum_{k=1, k \neq j}^m \mu_{L-R} \left( \frac{f_{ij}}{f_{kj}} \right), \quad (3)$$

სადაც  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ;  $\mu_{L-R}(\cdot)$  არის არაუარყოფითი რიცხვთა სიმრავლეზე “დიდი შეფარდების” (არამკაფიო სიმრავლის) შეთანხმებულობის ფუნქცია ( $\mu_{L-R}: R^+ \rightarrow [0, 1]$   $L-R = Large-Ratio$ )



ნახ. №1.  $\mu_{L-R}$ -ის გრაფიკი (სადაც  $A$  და  $B$  რიცხვები აიღება ექსპერიმენტის საუკეთესო შეთანხმებულობის პრინციპით)

დადებითი დისკრიმინანტა  $P_{ij}$  აღწერს დასაჯერებლობის ზომას იმისა, რომ  $w_j$  სიტუაცია (მდგომარეობა) თუ ფაქტორი უფრო მიმანიშნებელია, დამახასიათებელია  $d_i$  გადაწყვეტილების მიღებისას, ვიდრე სხვა რომელიმე გადაწყვეტილებისათვის!

უარყოფითი დისკრიმინანტა  $n_{ij}$  აღწერს დასაჯერებლობის ზომას იმისა, რომ  $w_j$  სიტუაცია (მდგომარეობა) თუ ფაქტორი ნაკლებად მიმანიშნებელია, დამახასიათებელია  $d_i$  გადაწყვეტილების მიღებისას, ვიდრე სხვა რომელიმე გადაწყვეტილებისათვის.

მეთოდის საკვანძო მომენტი შემდეგში მდგომარეობს: მას შემდეგ რაც შეიქმნება სინშირეთა რიცხვით-ცხრილური ცოდნის ბაზა და აიგება დადებითი ( $P$ ) და უარყოფითი ( $N$ ) დისკრიმინანტათა მატრიცები, მაშინ კონკრეტულ მოვლენაზე (სიტუაციათა თუ ფაქტორთა გარკვეული ნაწილის თანარსებობის შემთხვევაში) გადაწყვეტილების მიღების წინ შეიქმნება გარკვეული ფაქტორები (წარმოიშობა

გარკვეული სიტუაციები):  $\Omega' = \{w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_k}\}$ ,  $k \leq n$  ( $\Omega' \subseteq \Omega$ ). საჭიროა ასეთ სიტუაციებში (ფაქტორებზე) ცოდნის ბაზაზე დაყრდნობით შეირჩეს ყველაზე შესაძლო, სარწმუნო გადაწყვეტილება  $D$ -დან.

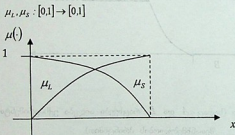
დისკრიმინაციური ანალიზის ავტორები [3] გეთავაზობენ შემდეგს: დადებითი და უარყოფითი დისკრიმინაციის მატრიცებიდან შეირჩეს მხოლოდ ის სვეტები, რომლებიც შეესაბამებიან  $\Omega'$ -ს ელემენტებს ( $j_1, j_2, \dots, j_k$  - სვეტები). გადაწყვეტილებად,  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$  სიმრავლეზე ივება შესაძლებლობით განაწილება (არამკაფიო) ქვესიმრავლის სახით:

$$\delta_i = \frac{1}{2}(\mu_L(\pi_i) + \mu_S(v_i))^*, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

სადაც

$$\pi_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k p_{y_i}, \quad v_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k n_{y_i}, \quad (5)$$

ხოლო  $\mu_L$  ( $L := Large$ ) და  $\mu_S$  ( $S := Small$ ) წარმოადგენენ  $[0,1]$ -ზე განსაზღვრული არამკაფიო ქვესიმრავლეებს შესაბამისად "დიდი" და "პატარა" შეთანხმებულობის მკაცრად ზრდად და მკაცრად კლებად ფუნქციებს:



ნახ. 2.  $\mu_L$  და  $\mu_S$  შეთანხმებულობის ფუნქციათა სავარაუდო გრაფიკები.

როგორც  $\delta_i$ -ის განმარტებიდან ჩანს იგი ითვალისწინებს  $d_i$  გადაწყვეტილებისათვის უფრო დამახასიათებელ და ასევე მის მეტად უარყოფელ (ნაკლებად) დამახასიათებელ სიტუაციებს, მდგომარეობებს თუ ფაქტორებს ყველა სიტუაციათა, მდგომარეობათა თუ ფაქტორთა  $\Omega$  სიმრავლეში.

გადაწყვეტილების მიღებისას გამოვლენილი მდგომარეობების მაღალი დადებითი  $p_{y_i}$  დისკრიმინაციული ზომა იწვევს  $\delta_i$ -ს სწრაფ ზრდას. ანუ ასეთ სიტუაციებში  $d_i$  გადაწყვეტილების მიღების მაღალ, იოლ შესაძლებლობას. ხოლო მდგომარეობების მაღალი უარყოფითი  $n_{y_i}$  დისკრიმინაციული ზომა კი იწვევს  $\delta_i$ -ს მცირე ზრდას. ანუ ასეთ სიტუაციებში  $d_j$  გადაწყვეტილებათა მიღების შესაძლებლობა მცირდება. დაბოლოს გადაწყვეტილება  $d_k$ -ს, რომელიც  $\{\delta_i\}$

\*  $p_{y_i}$ ,  $n_{y_i}$  და  $n_{y_i}$  სიდიდეების კონკრეტული გამოსათვლელი ფორმულები იხ. §4-ში

განაწილებაში მოხალურ მნიშვნელობას ეთანადება შეიძლება ჩათვალოს ყველაზე სარწმუნო, იოლად შესაძლებელ გადაწყვეტილებად  $\Omega'$  ფაქტორთა თანაარსებობის პირობებში.

$$\delta_{i,j} = \max_{i,j} \delta_{i,j} \quad (6)$$

რაც ფაქტობრივ  $K$  კრიტერიუმის ფიქსირებას ნიშნავს მაქსიმალური შესაძლებლობის პრინციპის სახელწოდებით.

3. ღმსპრეზიდენტული ანალიზის რეალურად სინფორმაციური გადაწყვეტილებაში (სინფორმაციური ფორმის ერთი ამოცანის შესახებ). თუ საინვესტიციო ფონდს, ბანკს წარედგინება რომელიმე იურიდიული პირის მიერ ბიზნეს-გეგმა კრედიტის გამოყოფასთან დაკავშირებით, მაშინ ფონდის ექსპერტები იწყებენ იურიდიული პირის გარკვეული ფაქტორების, მდგომარეობების შემოწმებას, რომლებიც არსებითაა კრედიტის გასაცემად და რომლებიც შეიძლება გააჩნდეს იურიდიულ პირს, ან არ გააჩნდეს. ეთქვას, დასაშვებია ყველა ფაქტორთა სიმრავლეა (მას საინვესტიციო ფონდი განსაზღვრავს)  $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ , ხოლო იმ ფაქტორთა სიმრავლე, რომელიც აღმოაჩნდა მოცემულ იურიდიულ პირს კი  $\Omega' = \{w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_k}\}$ .

საინვესტიციო ფონდისთვის მნიშვნელოვან ფაქტორთა ჯგუფი

|                            |             |             |         |             |         |             |
|----------------------------|-------------|-------------|---------|-------------|---------|-------------|
| $\Omega \backslash \Delta$ | $\omega_1$  | $\omega_2$  | $\dots$ | $\omega_j$  | $\dots$ | $\omega_n$  |
| $d_1$                      | $f_{11}$    | $f_{12}$    | $\dots$ | $f_{1j}$    | $\dots$ | $f_{1n}$    |
| $d_2$                      | $f_{21}$    | $f_{22}$    | $\dots$ | $f_{2j}$    | $\dots$ | $f_{2n}$    |
| $\dots$                    | $\dots$     | $\dots$     | $\dots$ | $\dots$     | $\dots$ | $\dots$     |
| $d_i$                      | $f_{i1}$    | $f_{i2}$    | $\dots$ | $f_{ij}$    | $\dots$ | $f_{in}$    |
| $\dots$                    | $\dots$     | $\dots$     | $\dots$ | $\dots$     | $\dots$ | $\dots$     |
| $d_{m-1}$                  | $f_{m-1,1}$ | $f_{m-1,2}$ | $\dots$ | $f_{m-1,j}$ | $\dots$ | $f_{m-1,n}$ |
| $d_m$                      | $f_{m1}$    | $f_{m2}$    | $\dots$ | $f_{mj}$    | $\dots$ | $f_{mn}$    |

ცხრილი №2. სიზშირეთა რიცხვით-ცხრილური ცოდნის ბაზა საინვესტიციო გადაწყვეტილებებში.

ეთქვას, საინვესტიციო ფონდი აკეთებს გადაწყვეტილებებს კრედიტის გაცემასთან დაკავშირებით, რომლებიც განსხვავებულია არა თუ თანხების, არამედ პირობების გათვალისწინებითაც.

გადაწყვეტილებათა სიმრავლე აღვნიშნოთ  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ -ით.

ასეთი გარემოებიდან ჩანს დისკრიმინაციული ანალიზის გამოყენების შესაძლებლობა თუ აიგება სიზშირეთა რიცხვით-ცხრილური ბაზა.



რიცხვით-ცხრილური ცოდნის ბაზა შეიძლება შეიქმნას ორი გზით:

- ა) თუ არსებობს ინფორმაციული ბაზები უკვე (წარმატებულად) განხორციელებული საინვესტიციო პროექტებისა, მაშინ  $f_{ij}$  აღნიშნავს იმ გადაწყვეტილებათა წილს, რომლებიც  $w_j$  სიტუაციისა თუ ფაქტორის არსებობისას სწორი  $d_i$  გადაწყვეტილება იქნა მიღებული.
- ბ) თუ, არ არსებობს ა)-ში განხილული ინფორმაციული ბაზები ან არსებობს და მათი რაოდენობა (ბაზებში წარმატებულ პროექტთა რიცხვი) მცირეა, მაშინ  $f_{ij}$  სიხშირეები შეიძლება შეფასდეს დარგის ცნობილ ექსპერტთა ფსიქომეტრიული დაკითხვით. მაშინ  $f_{ij}$  იქნება იმ ექსპერტთა წილი, რომლებმაც სწორად მიიჩნიეს  $d_i$  გადაწყვეტილება თუ საინვესტიციო პროექტს გააჩნია  $w_j$  ფაქტორი. ტექნიკურად ცხრილი №2-ის შექმნა

შესაძლებელია შემდეგნაირად:

ინტერნეტის გამოყენებით ექსპერტებს დაევზავებათ ცხრილი 2-ის შაბლონები, რომლებშიც ყოველი ექსპერტი ჩაწერს 1-ებისა და 0-ების მიმდევრობებს. მაგალითად,  $(i,j)$  უჯრაში ჩაწერს 1-ს თუ ის თვლის, რომ იმ პროექტს, რომლის მიმართაც მიღებული იქნებოდა  $d_i$  გადაწყვეტილება გააჩნია  $w_j$  ფაქტორი. წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩაიწერება 0.

| $\Delta \backslash \Omega$ | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\dots$ | $\omega_j$ | $\dots$ | $\omega_n$ |
|----------------------------|------------|------------|---------|------------|---------|------------|
| $d_1$                      | 1          | 0          | $\dots$ | 0          | $\dots$ | 1          |
| $d_2$                      | 0          | 1          | $\dots$ | 1          | $\dots$ | 0          |
| $\dots$                    | $\dots$    | $\dots$    | $\dots$ | $\dots$    | $\dots$ | $\dots$    |
| $d_l$                      | 0          | 1          | $\dots$ | 1          | $\dots$ | 0          |
| $\dots$                    | $\dots$    | $\dots$    | $\dots$ | $\dots$    | $\dots$ | $\dots$    |
| $d_{m-1}$                  | 0          | 1          | $\dots$ | 1          | $\dots$ | 0          |
| $d_m$                      | 1          | 1          | $\dots$ | 0          | $\dots$ | 1          |

ცხრილი №3. შაბლონის მაგალითი, რომელიც შეივსება ექსპერტის მიერ.

თუ ფსიქომეტრიულ დაკითხვაში მონაწილეობდა  $N$  ექსპერტი, მაშინ

$$f_{ij} = \frac{N_{ij}}{N}, \quad (7)$$

სადაც  $N_j$ ,  $N$ -დან იმ ექსპერტთა წილია, რომლებმაც “შხარი დაუჭირეს”  $d$ , გადაწყვეტილებას, თუ პროექტს “აჩნდებოდა”  $w_j$  ფაქტორი ( $f_j$ -ს უჯრაში ჩაწერეს ერთი).

ცხადია, ასეთი ცოდნის ბაზის აგება არაა რთული და იგი საჭიროებს მცირე დროს, თუ ექსპერტთა აქტიუობა იქნება მაღალი. ამავე დროს არაა საჭირო მათი ერთად შეკრება და სხვადასხვა ფინანსური დანახარჯების გაწევა, რომლებიც მათ მივიღებთთან ან სხვა გარემოებებთან იქნება დაკავშირებული. ისინი შეიძლება მსოფლიოს სხვადასხვა კუთხეში მოღვაწეობდნენ. ცხადია, გარანტირებული იქნება მათი ობიექტურობის მაღალი ხარისხიც და სრულიად გამოირიცხება მათი დამოკიდებულება კონკრეტული პროექტის განხილვის შემთხვევაში ( $M'$  ფაქტორების თანაარსებობა) არ საჭიროებს ექსპერტთა შეკრებას. იგი ეყრდნობა მათი ცოდნის ბაზას, რომელშიც ასახულია მათი ცოდნა, გამოცდილება და გათვალისწინებულია მათი ობიექტურობის მაღალი ხარისხიც. ასეთი შემთხვევებით  $M'$  ფაქტორებზე სისტემა გააკეთებს მაღალი დამაჯერებლობის მქონე გადაწყვეტილებას ( $d_4$ ).

**შენიშვნა 1.**  $D$  გადაწყვეტილებებში დასაშვებია ისეთი  $d$  გადაწყვეტილების არსებობაც, რომელიც გულისხმობს ყოველგვარ არაინვესტირებად გადაწყვეტილებას, ანუ უარის თქმას პროექტზე.

**შენიშვნა 2.**  $M$  ფაქტორებში დასაშვებია ისეთი  $w$  სიტუაცია, როცა პროექტიდან გამოდინარე იურიდიული პირი ითხოვს თანხას (თანხებს) კრედიტის სახით.

**შენიშვნა 3.** საერთოდ შეზღუდვები  $D$  და  $M$  წველზე არ არსებობს, ცხადი ხდება, რომ ამგვარი ინფორმაციული სისტემების არსებობა მენეჯერისათვის თანამედროვე ბიზნესში აქტუალურია, რადგან ის აღჭურვილი იქნება „ინსტრუმენტით“ – გადაწყვეტილების მიღების დამხმარე საექსპერტო სისტემით, რომელიც თავის გადაწყვეტილებას კონკრეტულ პროექტთან მიმართებაში გააკეთებს სწრაფად, დამოუკიდებელი ცოდნის ბაზაზე დაყრდნობით, რომელიც საბოლოოდ შეიძლება შედარდეს საინვესტიციო ფონდის კონკრეტულ „ექსპერტთა საბჭოს“ გადაწყვეტილებას, რამაც შეიძლება საბოლოოდ ამ უკანასკნელის „იმიჯის“ შეფასებამდეც მიიყვანოს მენეჯერი! (შემდგომში ამ ამოცანის გადაწყვეტისათვის ვისარგებლებთ ე.წ. ბმულობის ანალიზით).

4. შესაძლებლობითი დისკრიმინაციული ანალიზის შესახებ. ხშირ შემთხვევებში სიხშირული რიცხვით-ცხრილური ცოდნის ბაზის სანაცვლოდ იქნება ე.წ. შესაძლებლობითი რიცხვით-ცხრილური ცოდნის ბაზა (ცხრილი №4)\*:

\* შესაძლებლობითი რიცხვით-ცხრილური ცოდნის ბაზის აგება ექსპერტული მონაცემების გათვალისწინებით იხილეთ დანართში.



|                            |               |               |         |               |         |               |
|----------------------------|---------------|---------------|---------|---------------|---------|---------------|
| $\Delta \backslash \Omega$ | $\omega_1$    | $\omega_2$    | $\dots$ | $\omega_j$    | $\dots$ | $\omega_n$    |
| $d_1$                      | $\pi_1^1$     | $\pi_2^1$     | $\dots$ | $\pi_j^1$     | $\dots$ | $\pi_n^1$     |
| $d_2$                      | $\pi_1^2$     | $\pi_2^2$     | $\dots$ | $\pi_j^2$     | $\dots$ | $\pi_n^2$     |
| $\dots$                    | $\dots$       | $\dots$       | $\dots$ | $\dots$       | $\dots$ | $\dots$       |
| $d_i$                      | $\pi_1^i$     | $\pi_2^i$     | $\dots$ | $\pi_j^i$     | $\dots$ | $\pi_n^i$     |
| $\dots$                    | $\dots$       | $\dots$       | $\dots$ | $\dots$       | $\dots$ | $\dots$       |
| $d_{m-1}$                  | $\pi_1^{m-1}$ | $\pi_2^{m-1}$ | $\dots$ | $\pi_j^{m-1}$ | $\dots$ | $\pi_n^{m-1}$ |
| $d_m$                      | $\pi_1^m$     | $\pi_2^m$     | $\dots$ | $\pi_j^m$     | $\dots$ | $\pi_n^m$     |

ცხრილი №4. დისკრიმინაციული ანალიზის შესაძლებლობითი განაწილების ცხრილი.

სადაც,  $\pi_j^i$  არის შესაძლებლობა იმისა, რომ  $\omega_j$  ფაქტორის არსებობის პირობებში გმ-ის მიერ მიღებულ იქნეს  $d_i$  გადაწყვეტილება.

1) შესაძლებლობითი განაწილების ცხრილის აგების რამოდენიმე გზა არსებობს [7,8]. აქ მოვიყვანოთ რამოდენიმე მაგალითს.

თუ გმ-ის სარგებლიანობის ფუნქცია  $u \geq 0$ , მაშინ ყოველ სტრიქონს გაუკეთდება ნორმირება და

$$\pi_j^i = \frac{u_j}{\max_{j=1:n} u_j}. \quad (8)$$

2) თუ ცნობილია  $f_j$  სიხშირეები, მაშინ (8)-ის ანალოგიურად,

$$\pi_j^i = \frac{f_j}{\max_{j=1:n} f_j}, \quad (9)$$

თუ აგებულია შესაძლებლობითი განაწილების ცხრილი, მაშინ დისკრიმინაციული ანალიზის შესაძლებლობითი ვარიანტი ალგორითმულად შეიძლება ასე გამოიყურებოდეს.

1) შესაძლებლობითი განაწილების ცხრილი გარდაეკმნათ ალბათობრივ განაწილების ცხრილად ცნობილი ტრანსფორმაციის პრინციპით [4].

$\forall d_i$ -თვის ( $i=1,2, \dots, m$ ) ვთქვათ

$$\pi_{j_1}^i \geq \pi_{j_2}^i \geq \dots \geq \pi_{j_s}^i,$$

მაშინ  $\pi_j^i$  შესაძლებლობის შესაბამისი ალბათობა  $f_j^i$  ასე გამოისახება:

$$f_j^i = \sum_{t=1}^s \frac{1}{s} (\pi_{j_t}^i - \pi_{j_{t+1}}^i), \quad (10)$$



სადაც  $s=1,2,\dots,n$ ,  $\pi'_{s,i} = 0$ .

- 2) ეუბრუნდებით დისკრიმინაციული ანალიზის ამოცანას, როდესაც სიხშირეების სანაკვეთოდ გვაქვს ალბათური სკალა ყოველი  $d$ -თვის მიღებული შესაძლებლობითი განაწილებიდან.
- 3)  $D \times \Omega$ -ზე ვაგებთ დადებითი და უარყოფითი შესაძლებლობით დისკრიმინაციებს კონკრეტული შეთანხმებულობის დონეების გათვლით:

$$p_y = \frac{1}{n+1} \left\{ 1 + \sum_{f'_i < f'_j} (f'_j - f'_i)^{\alpha_1} + \frac{1}{1 + \sum_{f'_i > f'_j} (f'_j - f'_i)^{\alpha_2}} \right\},$$

$$n_y = \frac{1}{n+1} \left\{ 1 + \sum_{f'_i > f'_j} (f'_j - f'_i)^{\alpha_1} + \frac{1}{1 + \sum_{f'_i < f'_j} (f'_j - f'_i)^{\alpha_2}} \right\}, \quad \alpha_s > 0, s=1,2$$

**შენიშვნა:** თუ  $\pi'_i$  რიცხვები „თითქმის“ ერთი რიგის რიცხვებია, მაშინ  $p_y$  და  $n_y$  რიცხვების სიდიდეების „სპექტრალური გაშლისთვის“ სასურველია ავიღოთ  $\alpha_s < 1$  მნიშვნელობა ექსპერიმენტთან საუკეთესო შეთანხმების პრინციპით.

- 4) თუ კონკრეტული გადაწყვეტილების წინ ჩამოყალიბდა რაიმე  $\Omega' = \{w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_k}\}$  ფაქტორთა თანაარსებობა, მაშინ  $D$ -ზე აიგება დადებითი და უარყოფითი შესაძლებლობითი დისკრიმინაციები:

$$\pi_i = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k p_{y_l}, \quad v_i = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k n_{y_l}, \quad (\text{ან } \pi_i = \frac{\sum_{l=1}^k p_{y_l}}{\sum_{l=1}^k p_y}, \quad v_i = \frac{\sum_{l=1}^k n_{y_l}}{\sum_{l=1}^k n_y})$$

- 5)  $D$ -ზე აიგება შესაძლებლობითი განაწილება,  $\forall i=1,2,\dots,m$ :

$$\delta_i = \frac{1}{2} (\pi_i^\beta + (1-v_i)^\beta), \quad \beta > 0 \quad (\text{ან } \delta_i = \max\{\pi_i, 1-v_i\}).$$

**შენიშვნა:** თუ  $\pi_i$  და  $v_i$  რიცხვები თითქმის ერთი რიგის რიცხვებია, მაშინ  $\delta_i$  სიდიდეთა „სპექტრალური გაშლისთვის“ სასურველია ავიღოთ  $\beta < 1$  მნიშვნელობა ექსპერიმენტთან საუკეთესო შეთანხმების პრინციპით.

- 6)  $d_s$  გადაწყვეტილება, რომელსაც  $\{\delta_i\}$  შესაძლებლობით განაწილებაში გააჩნია მაქსიმალური მნიშვნელობა, ჩაითვლება ყველაზე სარწმუნო, შესაძლებელ გადაწყვეტილებად:

$$\delta_s = \max \delta_i$$

## 5. დანართი

საინჟინერო მონაცემებიდან შესაძლებლობით რიცხვით ცხრილში ცოდნის ბაზის აგება რ.იაგერის ალგორითმის გამოყენებით აკაპოვანის მსპარტონების თეორიის მიხედვით

I. გადაწყვეტილებებზე ფაქტორთა ჯგუფების შეთანხმებულობის დონების გამოვლენა მსპარტონის ფორმულიანი გამოქვეყნებით. ვთქვათ, ვაფიქსირებთ რაიმე  $d_i$  გადაწყვეტილებას და რომელიმე  $I_\ell$  ( $\ell = 1, 2, \dots, N$ ) ექსპერტს, რომელიც მოგვანდის გარკვეულ ცნობებს  $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  ფაქტორებზე აღნიშნულ გადაწყვეტილებასთან მიმართებაში. ამ პუნქტში რ.იაგერის ცნობილი ალგორითმის [5] გამოყენებით  $\Omega$  -ზე ავაგებთ შესაძლებლობით განაწილებას

$$\{\pi'_1(\ell), \pi'_2(\ell), \dots, \pi'_n(\ell)\}, \quad (11)$$

სადაც  $\pi'_j(\ell)$  იქნება შესაძლებლობა იმისა, რომ  $w_j$  ფაქტორის არსებობის შემთხვევაში  $I_\ell$  ექსპერტის ცოდნის ბაზაზე დაყრდნობით მიღებულ იქნეს  $d_i$  გადაწყვეტილება.

შემოვიღოთ აღნიშვნა [5]:

$$P(w_j) \equiv P \text{ (რ. იაგერის ალგორითმში აირჩევა } w_j \text{ ელემენტი).}$$

თუ წინასწარ ცნობილია, რომ

$$\pi'_1(\ell) \leq \pi'_2(\ell) \leq \dots \leq \pi'_n(\ell), \quad (12)$$

მაშინ განიხილება წრფივი ალგებრული განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} \pi'_1(\ell) &= nP(w_1), \\ \pi'_2(\ell) &= (n-1)P(w_2) + P(w_1), \\ &\dots \\ \pi'_j(\ell) &= (n-j+1)P(w_j) + \sum_{s=1}^{j-1} P(w_s), \\ &\dots \\ \pi'_{n-1}(\ell) &= 2P(w_{n-1}) + \sum_{s=1}^{n-1} P(w_s), \\ \pi'_n(\ell) &= \sum_{s=1}^n P(w_s) = 1, \end{aligned} \quad (13)$$

რომელიც წარმოადგენს კავშირს შესაძლებლობით და ალბათურ განაწილებებს შორის რ. იაგერის ალგორითმში [5]. აქ მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენებით და ექსპერტების ფსიქომეტრიული დაკითხვით ფასდება  $\{P(w_j)\}_{j=1}^n$  ალბათური განაწილება და, მაშასადამე, (11) შესაძლებლობითი განაწილებაც.

ყოველ  $w_j$  ელემენტს შეესაბამება  $T_j$  სიდიდე, რომლის საწყისი მნიშვნელობა არის 0. ( $\forall j = 1, 2, \dots, n, T_j \equiv 0$ ). შემდგომში  $T_j$  ტოლი იქნება ქვემოთ მოყვანილ

პროცედურაში  $w_j$ -ს „განზორცილებათა“ რიცხვისა, ხოლო დიდ რიცხვთა კანონის გათვალისწინებით კი ჩაითვლება, რომ

$$P(w_j) \approx \frac{T_j}{M}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

სადაც  $M$  ალგორითმში  $\Omega$ -ს ელემენტთა გათამაშების რიცხვია.

მოვიყვანოთ რ. იაგერის ალგორითმი.

1 ალგორითმში შერჩევის  $M$  განზომილების განსაზღვრა.

2.  $[0;1]$  ინტერვალის დაფიქსირება  $M$  რაოდენობა თანაბრად დაშორებულ წერტილებად:

$$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\},$$

სადაც

$$\alpha_p = \frac{p}{M}, \quad p = 1, 2, \dots, M.$$

3.  $S$  სიმრავლიდან შემთხვევითად აირჩეს (დაბრუნების გარეშე) რომელიმე  $\alpha_p$  ელემენტი (გათამაშება შესრულებდა თანაბარი განაწილებით).

4. ფსიქომეტრიული დაკითხვის პუნქტი)  $I_\ell$  ექსპერტს, რომელიც განსაზღვრავს  $\pi'_j(\ell)$  შესაძლებლობით ზომებს, მოთხოვით, რომ ჩამოთვალოს  $\Omega$ -ს ყველა ის ელემენტი, რომლებიც, მისი აზრით, შეესაბამებიან შესაძლებლობითი განაწილების  $\alpha_p$  დონის კეთას.

ფორმალურად ეს შეიძლება ასე ჩაეწეროს:

$$w_j \in \Omega_{\alpha_p} \Leftrightarrow \pi'_j(\ell) \geq \alpha_p, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

5. თუ  $\Omega_{\alpha_p} \subset \Omega$  სიმრავლის ელემენტთა რიცხვია  $|\Omega_{\alpha_p}|$ , მაშინ ნებისმიერი  $w_j$  ფაქტორის  $\Omega_{\alpha_p}$ -ში „გამოჩენის“ ( $w_j \in \Omega_{\alpha_p}$ ) შემთხვევაში  $T_j$  სიდიდე გაიზარდოს  $\frac{1}{k}$  სიდიდით:

$$\text{თუ } w_j \in \Omega_{\alpha_p} \Leftrightarrow T_j = T_j + \frac{1}{|\Omega_{\alpha_p}|}.$$

6. გავიმეოროთ 3-5 ნაბიჯი  $M$ -ჯერ. ე.ი. მანამ, სანამ შემთხვევითი არჩევით (დაბრუნების გარეშე) არ ამოეწურავთ  $S$  სიმრავლეს.

7. შევაფასოთ  $P(w_j)$  ალბათობები

$$\hat{P}(w_j) = \frac{T_j}{M}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

$P(w_j)$  შეფასებების (13)-ში ჩასმით მივიღებთ (11) შესაძლებლობითი განაწილების შეფასებასაც.



ბუნებრივია,  $M$ -ის ზრდასთან ერთად იზრდება შეფასების საიმედოობაც, თუმცა როგორც ამ მეთოდის ავტორი [5] ამბობს ზემოთ წარმოდგენილ მეთოდოლოგიას არ გააჩნია პრეტენზია ოპტიმალურობასა და შეფასების ერთადერთობაზე; იგი თვლის, რომ ზოგიერთი ექსპერტისათვის ემოციური თვალსაზრისით ფსიქომეტრიული დაკითხვისას ზემოთ მოყვანილი პროცედურა უფრო მისაღებია ვიდრე ის პროცედურა, რომელიც ექსპერტისაგან  $\pi'_j(\ell)$  შეთანხმებულობის დონეების „ღანიშვნას“ მოითხოვს. გასაგებია, რომ ეს უკანასკნელი ექსპერტს საკმაოდ „უხერხულ“ მდგომარეობაში აყენებს და მისი ცოდნის გამომდგენების შესაძლებლობას აკარგვინებს, მაშინ როდესაც რ. იაგერის პროცედურა თანმიმდევრულად, სისტემური თვალსაზრისით  $\alpha$  დონის კვების ელემენტების ჩამოთვლით იგივეს აკეთებს.

შეგნისით, რომ  $\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow \Omega_{\alpha_1} \supseteq \Omega_{\alpha_2}$ , პირობა რ. იაგერის პროცედურაში ექსპერტს არ ავალდებულებს დაიცვას ეს მოთხოვნა, მაგრამ მისი პასუხები გარკვეული ზომით შეთანხმებული უნდა იყოს აღნიშნულ თვისებასთან, ამიტომ „ღიდი“ შეუთანხმებლობის შემთხვევაში საჭიროა ვთხოვით ექსპერტს გადახედოს მის შეფასებებს და გააკეთოს გარკვეული კორექტირება მას შემდეგ, რაც მას მივაწვდით ინფორმაციას მისი ექსპერტული შეფასებების შესახებ.

II. შესაძლებლობითი რიტხვით ცხრილში ცოდნის ბაზის აბეზა ა. კაუფმანის მასპარტონეზის თიორიის მისაღობაში. ყოველი  $I_\ell$  ( $\ell = 1, 2, \dots, N$ ) ექსპერტის შემთხვევაში მისი ცოდნის ბაზაზე რ. იაგერის ალგორითმით აიგება (11) შესაძლებლობითი განაწილებები. ვისარგებლებთ რა ა. კაუფმანის ექსპერტონების თიორიით [6]  $\{I_\ell\}_{\ell=1}^N$  ექსპერტთა ცოდნა აისახება (კონდენსირდება) ერთ შესაძლო განაწილებაში:

[0;1] ინტერვალში კვლავ დაყოფილია  $\alpha_0 = 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_M = 1$  სიდიდეებად,

$$\alpha_p = \frac{P}{M}, \quad P = 0, 1, 2, \dots, M.$$

ყოველი  $d_j$  გადაწვეტილებისათვის  $w_j$  ფაქტორის არსებობის შემთხვევაში ექსპერტონი ასე გამოითვლება [6]

$$E_{p_j}^{(j)} = \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^N \chi_{[\alpha_p; 1]}(\pi'_j(\ell)), \quad P = 0, 1, 2, \dots, M,$$

სადაც  $\chi$  აღნიშნავს  $[\alpha_p; 1]$  სეგმენტის ინდიკატორს.  $E_{p_j}^{(j)}$  ექსპერტონში  $\alpha_p$  დონის გათვალისწინებით ხდება ყველა ექსპერტზე  $\pi'_j(\ell)$  შესაძლებლობების გასაშუალება, ანუ მათი ცოდნის რაოდენობრივი აღწერის კონდენსირება. ამის შემდეგ ყოველი  $w_j$

ფაქტორისათვის, როდესაც მიიღება  $d$ , გადაწყვეტილება საშუალო ექსპერტონი ასე დაითვლება [6]:

$$\pi_j = \frac{1}{M+1} \sum_{p=0}^M E_{p_j}^j, \quad j=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n.$$

ამგვარად, აივო დისკრიმინაციული ანალიზის შესაძლებლობითი განაწილების ცხრილი №4.

4. Yamanli, K. I. (2007). Fuzzy Expert System for Investment Decision Making. In: Joint 17th World Congress and 20th NANN'S International Conference, Vancouver, USA, 2007.

5. Yager, R.R. (1981). On the Extension of the Theory of Possibility. Edited by Ronald R. Yager. John College Performance Press, 1982.

6. Kaufman, A. (1975). The Theory of the Extended Fuzzy Set and Systems. (1981988).

7. Sibilashvili, G., Sibilashvili, A. (2010). Fuzzy Expert System for Investment Decision Making. In: International Journal of Intelligent Systems and Knowledge-Based Systems, 2(2), 159-162.

8. Sibilashvili, G., Sibilashvili, A. (2010). Fuzzy Expert System for Investment Decision Making. In: International Journal of Intelligent Systems and Knowledge-Based Systems, 2(2), 159-162.

9. Sibilashvili, G., Sibilashvili, A. (2010). Fuzzy Expert System for Investment Decision Making. In: International Journal of Intelligent Systems and Knowledge-Based Systems, 2(2), 159-162.

10. Sibilashvili, G., Sibilashvili, A. (2010). Fuzzy Expert System for Investment Decision Making. In: International Journal of Intelligent Systems and Knowledge-Based Systems, 2(2), 159-162.

11. Sibilashvili, G., Sibilashvili, A. (2010). Fuzzy Expert System for Investment Decision Making. In: International Journal of Intelligent Systems and Knowledge-Based Systems, 2(2), 159-162.

12. Sibilashvili, G., Sibilashvili, A. (2010). Fuzzy Expert System for Investment Decision Making. In: International Journal of Intelligent Systems and Knowledge-Based Systems, 2(2), 159-162.

13. Sibilashvili, G., Sibilashvili, A. (2010). Fuzzy Expert System for Investment Decision Making. In: International Journal of Intelligent Systems and Knowledge-Based Systems, 2(2), 159-162.

14. Sibilashvili, G., Sibilashvili, A. (2010). Fuzzy Expert System for Investment Decision Making. In: International Journal of Intelligent Systems and Knowledge-Based Systems, 2(2), 159-162.

15. Sibilashvili, G., Sibilashvili, A. (2010). Fuzzy Expert System for Investment Decision Making. In: International Journal of Intelligent Systems and Knowledge-Based Systems, 2(2), 159-162.

16. Sibilashvili, G., Sibilashvili, A. (2010). Fuzzy Expert System for Investment Decision Making. In: International Journal of Intelligent Systems and Knowledge-Based Systems, 2(2), 159-162.

17. Sibilashvili, G., Sibilashvili, A. (2010). Fuzzy Expert System for Investment Decision Making. In: International Journal of Intelligent Systems and Knowledge-Based Systems, 2(2), 159-162.

18. Sibilashvili, G., Sibilashvili, A. (2010). Fuzzy Expert System for Investment Decision Making. In: International Journal of Intelligent Systems and Knowledge-Based Systems, 2(2), 159-162.

19. Sibilashvili, G., Sibilashvili, A. (2010). Fuzzy Expert System for Investment Decision Making. In: International Journal of Intelligent Systems and Knowledge-Based Systems, 2(2), 159-162.

20. Sibilashvili, G., Sibilashvili, A. (2010). Fuzzy Expert System for Investment Decision Making. In: International Journal of Intelligent Systems and Knowledge-Based Systems, 2(2), 159-162.

Note: that the trinity  $(I, a, K)$  is the system of decision-making  $(O, D, I, a, K)$ .



### ლიტერატურა

1. Shafer G. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.
2. სირბილაძე გ., მაცაბერიძე ბ. გადაწყვეტილების მიღების ანალიზი რისკის გარეშე. „უნივერსალი“, თბილისი, 2001, გვ. 75.
3. Norris D., Pilsworth B.W., Baldwin J.I. *Medical diagnosis from patient records – a method using fuzzy discrimination and connectivity analyses*. Fuzzy Sets and Systems 23(1987) 73-87.
4. Yamada K. *Probability-Possibility Transformation Based on Evidence Theory*. In: Joint IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference, Vancouver, USA, 2001.
5. Yager R.R. *Множества уровня для оценки принадлежности нечетких подмножеств*. In: Fuzzy Set and Possibility Theory. Edited by Ronald R. Yager, Iona College Pergamon press, 1982.
6. Kaufman A. *Theory of experts and fuzzy logic*. Fuzzy Sets and Systems 28(1988) 295-304.
7. Sirbiladze G., Sikharulidze A. *Weighted fuzzy averages in fuzzy environment*. part I : Insufficient expert data and fuzzy averages, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 2(2), 139-157.
8. Sirbiladze G., Sikharulidze A. *Weighted fuzzy averages in fuzzy environment*. part II: Generalized weighted fuzzy expected values in fuzzy environment, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 2(2), 159-172.

Accepted for publishing on October 10, 2002.

Reviewed on December 15, 2002.

## DECISION-MAKING AIDING FUZZY INFORMATIONAL SYSTEMS IN INVESTMENTS

### PART I - DISCRIMINATION ANALYSIS IN INVESTMENT PROJECTS

G. Sirbiladze\*), A. Sikharulidze\*\*), G. Korakhashvili\*)

\*) Chair of Random Process Theory

\*\*) Computer Software and Informational Technologies chair

In the present work several methods of decision making are discussed, which can be applied to the concrete problems in business.

The discrimination analysis is the alternative of Bayesian inference method and constructs the numerical-tabular knowledge base; afterwards the fuzzy analysis is performed to establish

relationships between business states, situations, factors and those possible decisions which can arise in such situations.

In the investment problems, the numerical-tabular knowledge base can be constructed using informational bases of successfully performed investment projects, if such bases don't exist or number of projects is very low, then the knowledge base can be constructed using psychometrical questioning of experienced experts, using simple patterns which can be forwarded to experts by Internet. After the construction of knowledge base the positive and negative discrimination are calculated. They are used to establish rankings for and against each decision. The decision can be made by fixing the criteria of principle of maximum possibility.

In many situations instead of frequency numerical-tabular knowledge base, the so called possibilistic numerical-tabular knowledge base is constructed. Such possibilistic distribution table can be reformed to the probability distribution table using transformation principle[4]. Afterwards the positive and negative possibilistic discriminations are calculated. The correct decision is believed to be the one with maximum value in possibilistic distribution.

Some problems of decision-making we can represent as informational system:

$$(\Omega, D, I, U, K), \quad (1)$$

where,  $\Omega$  is non-empty set of system's states (situations, activities, factors, etc.)  $D$  is non-empty set of possible decisions,  $I$  is the existing information about system's states (their distribution)  $K : D \rightarrow R$  represents the criteria of decision-making person(D.M.P.), which is connected to some optimality of decision, and  $U$  is  $U : D \times \Omega \rightarrow R$  function, the estimations of advantages of decision-making person:

$u_1$  : The utility function or its alternation.

$u_2$  : The expected values of variable interesting to D.M.P.

$u_3$  : the frequency distribution constructed based on statistical information about states and possible decisions.

About the information  $I$  existing upon the set of states  $\Omega$  we can discuss following cases:

$I_1$  : The decision-making problem in definite environment, when the state which must realized is known before making decision.

$I_2$  : The decision-making problem in risk environment (the environment of probabilistic uncertainty), when the state which must realized is unknown, but the probability distribution on states is known.

$I_3$  : The decision-making problem in general uncertain environment, when no concrete information about states can be used, but some information about distributions of some subsets of states must exist. That is, D.M.P. must have the information about subsets of states (factors) which will eventually bring us the problem of constructing data body [1].

**NOTE.** The identification pair  $(I; U)$  and criteria  $K$  always represents some concrete case or problem, where the information  $I$  about states is fixed along with estimations  $U$  of advantages of D.M.P. and criteria. For example  $(I; U) := (I_2; u_1)$  that the problem is performed in risk environment with respect to situations, states and factors, and with activities of D.M.P. there exists the utility function  $u : D \times \Omega \rightarrow R$ . It is known that this classic problem can be solved using the utility theory of Neiman-Morgenstern[2], if we use the principle of maximum of expected utility as the criteria  $K$ .

Note, that the trinity  $(I, u, K)$  identifies the system of decision-making  $(\Omega, D, I, u, K)$ .



Let  $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  be the finite set of systems states, situation (factors), and  $D = (d_1, d_2, \dots, d_m)$  the finite set of possible decisions.

**The problem of discrimination analysis:** Construct informational decision-aiding expert system, where the numerical-tabular knowledge base is built using psychometrical questioning of experienced experts (business expert) or based on the data taken from the existing correct decisions made by them. By method the fuzzy analysis is performed to establish some relationships between some states, situations or factors of business and those possible decisions which can appear in such situations.

Very often the experts don't want or cannot represent their knowledge or experience as rules concerning the choice of decision. The incompleteness of rules is the major problem in such approach. Obviously, in such cases construction of decision-making system is hopeless and priority is given to construction of numerical-tabular knowledge base. The well-known decision-making systems using Bayes method are based on numerical-tabular bases. But here also exists the problems of collecting information, accumulation information. Large volume of information is needed to correctly establish relationships. The level of objectivity of experts may be another problem.

The discrimination analysis is alternative of Bayes method. It uses the numerical-tabular knowledge base, which can be constructed from informational bases. If this is not possible, then by contacting known experts the psychometrical questioning is performed to organize the gathered knowledge in numerical-tabular base.

In quarter 2 discrimination analysis is viewed as aiding instrument in decision-making in investments. In quarter 3 one problem of investment fund is discussed, which is solved using discrimination analysis. Its possibilistic generalization is discussed in quarter 4, where new measures of positive and negative discrimination are presented.

In Appendix (quarter 5) the scheme of construction of numerical tabular knowledge base from subjective expert information is discussed using Yager's algorithm.

To condense the expert knowledge base the main model of expertons method of E.Kaufman is describes, where eventually the possibilistic distribution is constructed.



## გადაწყვეტილების მიღების ხელშეწყობი არამკაშირი ინფორმაციული სისტემების ინვესტიციებში

### ნაწილი II – დემსტერ-შიფერის მოსალოდნელი სარგებლიანობა სინევისტიციური გადაწყვეტილებაში

გ. სარბილაძე, ვ. ხაჩიძე

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,  
შემოსულობების მართვის ფაკულტეტი

**Abstract.** A general model for decision problems is presented, based on the consideration of an evidence given by a basic probability assignment, which is the information about states (situations, factors) of nature. Decision rules are defined in two steps by means of a composition of two functions.

Firstly, the lower and upper expected values provide limits to the expected utility value for each decision. The function of the second step reflects the decision-maker's subjectivity and lets us model it between these two boundaries by means of a convex combination. The relationships between evidences and fuzzy measures are shown in section and some relevant properties of lower and upper expected values are proved in section 2. In section 3, a definition of inclusion relation on the set of evidences is used to study existing relations among results which can be obtained from different basic probability assignments, and finally, we show the way in which our model includes the most classical criteria, such as min-max or mathematical expectation criteria in uncertainty or risk environments etc.

შესაბამისი განვიხილოთ გადაწყვეტილების მიღების  $(\Omega, D, I, u, K)$  ინფორმაციული სისტემა (იხ. სტატიის I ნაწილის შესავალი) ზოგად განუზღვრელ გარემოში  $(I = I_2)$ , სადაც  $I$  ინფორმაცია ფლობს  $\Omega$ -ზე მონაცემთა ტანს  $m$  ფოკალური ალბათობის სახით [1], ხოლო გმპ-ის უპირატესობათა შეფასებები წარმოადგენს სარგებლიანობის ფუნქციას:  $u: D \times \Omega \rightarrow R$ , ე.ი.  $(I, u) = (I, u_1, \dots, u_m)^*$

შიფერის ცნობების მათემატიკური თეორიის ფარგლებში [1,2], ქვედა და ზედა მათემატიკური მოლოდინის ტერმინებში განისაზღვრება გადაწყვეტილების მიღების პრინციპი, რომელსაც დემსტერ-შიფერის მოსალოდნელი სარგებლიანობის მაქსიმუმის პრინციპს უწოდებთ. ამით ჩამოყალიბდება კრიტერიუმი და  $(I, u, K)$  სამეული ცალსახად ასახავს გადაწყვეტილების მიღების ამოცანას ზოგად განუზღვრელ გარემოში.

შევნიშნოთ რომ ყოველი  $d_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ) გადაწყვეტილება ასეთ შემთხვევაში შეიძლება წარმოვიდგინოთ  $\bar{u}_i$  სარგებლიანობის ვექტორის სახით:

$$d_i \leftrightarrow \bar{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{im}) \in R^m, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

სადაც  $u_{ij}$  აღნიშნავს გმპ-ის სარგებლიანობის მნიშვნელობას  $\omega_j$  ფაქტორის, სიტუაციისა თუ მდგომარეობის შემთხვევაში, თუ იგი მიიღებდა  $d_i$  გადაწყვეტილებას. მთელი პრობლემა მდგომარეობს  $R^m$ -ში (1) სახის ვექტორების დალაგებაში ანუ მოიძებნოს ისეთი  $\varphi: R^m \rightarrow R^1$  ფუნქცია რომ  $d_p$  ჩაითვალოს უკეთეს გადაწყვეტილებად, ვიდრე  $d_q$  ( $d_p \succeq d_q$ ) მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ  $\varphi(\bar{u}_p) \geq \varphi(\bar{u}_q)$ ,

$$d_p \succeq d_q \Leftrightarrow (u_{p1}, u_{p2}, \dots, u_{pm}) \succeq (u_{q1}, u_{q2}, \dots, u_{qm}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{u}_p) \geq \varphi(\bar{u}_q). \quad (2)$$

\* ფოკალური ალბათობის აგების სქემა მონაცემთა ბაზებიდან იხ. პარაგრაფ 4-ში, ხოლო  $u$  სარგებლიანობის შეფასების მეთოდები მრავალადა ლიტერატურაში. მაგ. იხ. [3].

რადგან  $I$  ინფორმაცია წარმოდგენილია მონაცემთა ტანის  $m$  ფოკალური ალბათობით, ამიტომ ფუნქციის მოძიების ამოცანას დავეყოფთ ორ ეტაპად:

1) ავაგოთ  $f: R^n \Rightarrow R^2$  ფუნქცია რომ

$$f(u_1, u_2, \dots, u_m) = (E \cdot (\bar{u}_i/m), E^* (\bar{u}_i/m)), \quad (3)$$

სადაც,  $E$ , და  $E^*$  დემსტერის შესაბამისად ქვედა და ზედა მათემატიკური მოლოდინებია  $m$ -ფოკალური ალბათობის მიმართ [1].

2) გვა-ის პოზიციებიდან გამოვძინარე ავაგოთ ისეთი  $h: R^2 \rightarrow R^1$  ფუნქცია, რომელიც სრულად წარმოადგენს უ-სარგებლიანობის უპირატესობებს  $d_1, d_2, \dots, d_m$  გადაწვეტილებების მიმართ, ანუ

$$\varphi = h \circ f. \quad (4)$$

1. წინასწარი წარმოდგენა. ამ პარაგრაფში წარმოდგენილი იქნება შეიფერის მონაცემთა მათემატიკური თეორიის ზოგიერთი ძირითადი განმარტებები, ასევე დემსტერის ქვედა და ზედა მოლოდინების ზოგიერთი, მათ შორის ახალი თვისებებიც.

**განმარტება 1** [4-5]:  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  სასრულ სიმრავლეზე არამკაფიო ზომის ეწოდება:

$$g: 2^\Omega \Rightarrow [0;1]$$

ისეთ ასახვას, რომ

$$g(\emptyset) = 0, \quad g(\Omega) = 1,$$

თუ  $A \subset B$ ,  $g(A) \leq g(B)$ , სადაც  $2^\Omega - \Omega$ -ს ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლეა.

**განმარტება 2** [4] ვთქვათ  $g$  არამკაფიო ზომა  $\Omega$ -ზე.  $g^*: 2^\Omega \Rightarrow [0,1]$  არამკაფიო ზომის ეწოდება  $g$ -ს დუალური თუ  $\forall A \in 2^\Omega$ :

$$g^*(A) = 1 - g(\bar{A}). \quad (5)$$

შეიფერის მონაცემთა მათემატიკური თეორიის თანახმად,  $\Omega$ -ზე ტანი შეიძლება აღიწეროს ეწ. საბაზისო ალბათური განაწილების (საგ) მეშვეობით.

**განმარტება 3** [1]  $\Omega$ -ზე საბაზისო ალბათური განაწილება ეწოდება ასახვას:

$$m: 2^\Omega \Rightarrow [0,1] \quad (6^2)$$

შემდეგი მოთხოვნებით:

$$(i) \quad m(\emptyset) = 0, \quad (6^1)$$

$$(ii) \quad \sum_{A \in 2^\Omega} m(A) = 1. \quad (6^3)$$

**განმარტება 4** [1] ვთქვათ,  $m$  საგ-ა  $\Omega$ -ზე.  $m$ -ით ასოცირებული ნდობის ზომა ეწოდება არამკაფიო ზომას

$$Pl(A) = \sum_{A \subseteq B \neq \emptyset} m(B), \quad \forall A \in 2^{\Omega}, \quad (7)$$

და  $m$ -ით ასოცირებული დასაჯერებლობის ზომას ეწოდება არამკაფიო ზომას:

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B), \quad \forall A \in 2^{\Omega}. \quad (8)$$

საგ-ს, ანუ  $m$ -ს ხშირად ფოკალურ აღმათურ განაწილებას უწოდებენ  $2^{\Omega}$ -ზე, ხოლო  $2^{\Omega}$ -ს იმ ელემენტებს, რომელთათვისაც  $m(A) > 0$  ფოკალურ სიმრავლეებს უწოდებენ. ვთქვათ,  $\mathfrak{F} = \{A : A \in 2^{\Omega}, m(A) > 0\}$ -ყველა ფოკალურ სიმრავლეთა ერთობლიობაა. წყვილს  $(\mathfrak{F}, m)$ -მონაცემთა ტანს ეწოდება [1].

**ბანმარტეზა 5.** ვიტყვი, რომ  $\Omega$ -ზე ჩამოყალიბებულია ზოგადი ვანუზერელი გარემო თუ  $I$  ინფორმაცია  $\Omega$ -ზე ელემენტების განაწილების შესახებ წარმოდგენილია  $(\mathfrak{F}, m)$  მონაცემთა ტანის სახით.

ვთქვათ,  $\Omega$ -ზე მოცემულია მონაცემთა ორი ტანი:  $(\mathfrak{F}_1, m_1)$  და  $(\mathfrak{F}_2, m_2)$ . მნიშვნელოვანია ის პირობები, როცა ერთი ტანი მოიცავს მეორეს. უფრო ზუსტად კი  $(\mathfrak{F}_1, m_1) \subseteq (\mathfrak{F}_2, m_2)$  მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ცოდნა (ცნობა)  $\forall \omega \in \Omega$ -თვის, რომელსაც ფლობს  $(\mathfrak{F}_1, m_1)$  მონაცემთა ტანი, ნაკლებად ზუსტია (ნაკლებად ინფორმაციულია) ვიდრე  $(\mathfrak{F}_2, m_2)$  მონაცემთა ტანი. ზუსტი ფორმულირება შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს:

**ბანმარტეზა 6.** ვიტყვი, რომ მონაცემთა ტანი  $(\mathfrak{F}_1, m_1)$  ასოცირებული  $m_1$  ფოკალური აღმათობით შედის  $(\mathfrak{F}_2, m_2)$  მონაცემთა ტანში ასოცირებული  $m_2$  ფოკალური აღმათობით,

$$(\mathfrak{F}_1, m_1) \subseteq (\mathfrak{F}_2, m_2) \Leftrightarrow m_1 \subseteq m_2, \quad (9)$$

თუ  $\forall A \subseteq \Omega \exists m_A : 2^{\Omega} \Rightarrow [0,1]$ -ფოკალური აღმათობა, რომ

$$m_1(A) = \sum_{B \subseteq A} m_A(B) \text{ და } m_2(B) = \sum_{B \subseteq A} m_A(B). \quad (10)$$

ეს განმარტება ეფუძნება იმ ინტუიციურ წარმოდგენას, რომელიც გამომდინარეობს იქიდან, რომ  $\forall \omega \in \Omega$  ელემენტის შესახებ აკუმულირებული, შეგროვებული ინფორმაცია, რომელიც შეთანხმებულია წინასწარ არსებულ ინფორმაციასთან უნდა გამომდინარეობდეს  $(\mathfrak{F}_1, m_1)$  მონაცემთა ტანის  $(\mathfrak{F}_2, m_2)$  მონაცემთა ტანით ატომიზაციაში (დანაწილებაში). ადვილი საჩვენებელია შემდეგი გამომდინარეობა:

$$m_1 \subseteq m_2 \Rightarrow \begin{cases} P_1(A) \geq P_2(A), \\ Bel_1(A) \leq Bel_2(A) \end{cases} \quad \forall A \in 2^{\Omega}. \quad (11)$$

2. დეშტიაროს ჟეჟა და ზეჟა მათემატიკური მოლოდინეჟი და მათი თიხიხეჟი. 1967 წელს დემსტერმა [2] წარმოადგინა ფუნქციის ქველა და ზელა მათემატიკური მოლოდინების კონცეფციი ზომის მიმართ, რომელიც შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის განზოგადოებას წარმოადგენს. თუმცა 1981 წელს ეს იდეა ჩამოყალიბდა შემდეგნაირად:

განმარტება 7. [6] ეთქვას,  $h: \Omega \rightarrow R$  რაიმე ფუნქციი, ხოლო  $m$  რაიმე სვ.-ია  $\Omega$ -ზე.  $h$ -ფუნქციის ქველა და ზელა მათემატიკური მოლოდინები  $m$  ფოკალური ალბათობის მიმართ ეწოდება შესაბამისად:

$$E_*(h/m) = \sum_{A \subset \Omega} m(A) \inf_{\omega \in A} h(\omega), \quad (12)$$

$$E^*(h/m) = \sum_{A \subset \Omega} m(A) \sup_{\omega \in A} h(\omega).$$

სიდიდეებს.

შეგნიშნოს, რომ თუ  $m$  ფოკალური ალბათობა ალბათური განაწილებაა  $\Omega$ -ზე ( $m_p = m$ ;  $m_p(\{\omega\}) = p(\omega)$ ), ანუ ფოკალური სიმრავლეები  $\mathfrak{A}$ -ში მხოლოდ ერთ ელემენტური სიმრავლეჟია, მაშინ

$$E_*(h/m) = E^*(h/m) = \int h dp = E(h).$$

ეი თუ ფოკალური ალბათობა კლასიკური ალბათური განაწილებაა  $\Omega$ -ზე, მაშინ  $h$  ფუნქციის ქველა და ზელა მათემატიკური მოლოდინები თანხედებიან და ტოლია მათემატიკური მოლოდინისა  $\Omega$ -ზე.

განვიხილოთ  $E_*$  და  $E^*$  სიდიდეთა ზოგიერთი მნიშვნელოვანი თვისებები:

მტკიცებულება 1. თუ  $h_1$  და  $h_2$  არაუარყოფითი ფუნქციებია  $\Omega$ -ზე, მაშინ

$$E^*(h_1 + h_2/m) \leq E^*(h_1/m) + E^*(h_2/m)$$

$$E_*(h_1 + h_2/m) \geq E_*(h_1/m) + E_*(h_2/m).$$

დამტკიცება. (ვაჩვენოთ I უტოლობა. მეორე დამტკიცება ანალოგიურად). განვიხილოთ

$$\begin{aligned} E^*(h_1 + h_2/m) &= \sum_{A \subset \Omega} m(A) \max_{\omega \in A} (h_1(\omega) + h_2(\omega)) \leq \\ &\leq \sum_{A \subset \Omega} m(A) \max_{\omega \in A} (h_1(\omega)) + \sum_{A \subset \Omega} m(A) \max_{\omega \in A} (h_2(\omega)) = \\ &= E^*(h_1/m) + E^*(h_2/m) \end{aligned}$$

მტკიცებულება 2. თუ  $b \in R$  და  $h: \Omega \rightarrow R$  რაიმე ფუნქციი, მაშინ

$$E^*(bh/m) = \begin{cases} bE^*(h/m), & b \geq 0 \\ bE_*(h/m), & b < 0 \end{cases} \quad E_*(bh/m) = \begin{cases} bE_*(h/m), & b \geq 0 \\ bE^*(h/m), & b < 0. \end{cases}$$

$$\leq (\alpha) \text{კავშირები } \left[ \left( \beta \right), m \sum_{A \in \Omega} \chi_A = (\alpha) \text{კავშირები } \left[ \left( \beta \right), m \sum_{A \in \Omega} \chi_A \right] \chi_A = (\alpha) \text{კავშირები } \left( \beta \right), m \sum_{A \in \Omega} \chi_A \right]$$

**ღამტკიცება.** თუ  $b \geq 0$ , მაშინ მტკიცება მარტივია. განვიხილოთ  $b < 0$  შემთხვევა:

$$E^*(bh/m) = \sum_{A \in \Omega} m(A) \max_{\omega \in A} (bh(\omega)) = - \sum_{A \in \Omega} m(A)(-b) \min_{\omega \in A} h(\omega) = bE(h/m).$$

**შტკიცებულება 3.** თუ  $h_1, h_2 : \Omega \rightarrow R$  რაიბე ფუნქციებია და  $h_1(\omega) \leq h_2(\omega) \forall \omega \in \Omega$ , მაშინ  $E^*(h_1/m) \leq E^*(h_2/m)$ .

**ღამტკიცება.** ვინაიდან  $\forall A \subset \Omega, m(A) \geq 0$  და  $\max_{\omega \in A} h_1(\omega) \leq \max_{\omega \in A} h_2(\omega)$ ,  $\min_{\omega \in A} h_1(\omega) \leq \min_{\omega \in A} h_2(\omega)$ , ამიტომ უტოლობები ტრივიალურად მტკიცდება.

**შტკიცებულება 4.** თუ  $h_1, h_2 : \Omega \rightarrow R$  რაიბე ფუნქციებია, მაშინ

$$E^*(h_1 \vee h_2 / m) \geq \max\{E^*(h_1/m), E^*(h_2/m)\}$$

$$E_*(h_1 \vee h_2 / m) \geq \max\{E_*(h_1/m), E_*(h_2/m)\}.$$

**ღამტკიცება.** რადგან  $h_1 \vee h_2 \geq h_1$  და  $h_1 \vee h_2 \geq h_2$ , ამიტომ მტკიცებულება 3-ის ძალით სამართლიანი იქნება მტკიცებულება 4-იც.

**შტკიცებულება 5.** თუ  $h_1, h_2 : \Omega \rightarrow R$  რაიბე ფუნქციებია, მაშინ

$$E^*(h_1 \wedge h_2 / m) \leq \min\{E^*(h_1/m), E^*(h_2/m)\}$$

$$E_*(h_1 \wedge h_2 / m) \leq \min\{E_*(h_1/m), E_*(h_2/m)\}.$$

**ღამტკიცება.** ვინაიდან  $h_1 \wedge h_2 \leq h_1$  და  $h_1 \wedge h_2 \leq h_2$ , ამიტომ მტკიცებულება 3-ის ძალით სამართლიანი იქნება მტკიცებულება 5-იც.

**შტკიცებულება 6.** თუ  $h_1, h_2 : \Omega \rightarrow R$  რაიბე ფუნქციებია, მაშინ

$$E^*(h_1 \vee h_2 / m) \geq E^*(h_1 \wedge h_2 / m) \geq E_*(h_1 \wedge h_2 / m)$$

$$E^*(h_1 \vee h_2 / m) \geq E_*(h_1 \vee h_2 / m) \geq E_*(h_1 \wedge h_2 / m).$$

**ღამტკიცება.** მტკიცებულება ცხადია ისეე მტკიცებულება 3-ის გათვალისწინებით, რადგან  $E^*(h/m) \geq E_*(h/m)$  და  $h_1 \wedge h_2 \leq h_1 \vee h_2$ .

**შტკიცებულება 7.** ვთქვათ  $(\mathfrak{F}_1, m_1) \subset (\mathfrak{F}_2, m_2)$  მანაკებთა ორი ტანია  $\Omega$ -ზე და

$$h : \Omega \rightarrow R \text{ რაიბე ფუნქციაა, მაშინ } E^*(h/m_1) \geq E^*(h/m_2), \quad E_*(h/m_1) \geq E_*(h/m_2).$$

**ღამტკიცება.** განვიხილოთ

$$\begin{aligned}
 E^*(h/m_1) &= \sum_{A \in \Omega} m_1(A) \max_{\omega \in A} h(\omega) = \sum_{A \in \Omega} \left[ \sum_{B \in A} m_A(B) \right] \max_{\omega \in A} h(\omega) = \sum_{B \in \Omega} \left[ \sum_{A \in \Omega} m_A(B) \right] \max_{\omega \in A} h(\omega) \geq \\
 &\geq \sum_{B \in \Omega} \left[ \sum_{A \in \Omega} m_A(B) \right] \max_{\omega \in B} h(\omega) = \sum_{B \in \Omega} m_2(B) \max_{\omega \in B} h(\omega) = E^*(h/m_2).
 \end{aligned}$$

ანალოგიურად მტკიცდება მე-2 უტოლობაც.

**შტაქცევა ულვაზა 8.** ვთქვათ  $m_1$  და  $m_2$  ნებისმიერი ორი საე-ია  $\Omega$ -ზე,  $h: \Omega \rightarrow R$  რაიმე ფუნქციაა და  $\alpha \in [0,1]$ , მაშინ

$$E^*(h/\alpha m_1 + (1-\alpha)m_2) = \alpha E^*(h/m_1) + (1-\alpha)E^*(h/m_2)$$

$$E_*(h/\alpha m_1 + (1-\alpha)m_2) = \alpha E_*(h/m_1) + (1-\alpha)E_*(h/m_2)$$

**დამტკიცება.** მტკიცებულება ელემენტარულია და  $E^*$  და  $E_*$ -ს განმარტებებიდან გამომდინარეობს.

3. ბაღაყუციანიშვილისა და კრიტიკური შორეული განსაზღვრული ბარემოზი. ვთქვათ  $(\Omega, D, I, u, K)$  გადაწყვეტილების მიღების ინფორმაციული სისტემა  $(I, u) := (I_1, u_1)$  პარამეტრებით ანუ იმ პარამეტრებით, რაც მეორე პარაგრაფში იყო განხილული. ამ პარაგრაფში საუბარი გვექნება  $K$  კრიტერიუმების შერჩევაზე, რომელიც გმპ-ის უპირატესობათა ამსახველია ზოგად განუსაზღვრულ გარემოში. როგორც აღვნიშნეთ

$$t(\bar{u}) = (E_*(\bar{u}/m), E^*(\bar{u}/m)).$$

$t$  ფუნქციის შესახებ საუბარი იყო წინა პარაგრაფში. გადაწყვეტილების მიღების  $K$  კრიტერიუმის განსაზღვრისათვის საჭიროა  $\varphi = h \circ t$  კომპოზიციის აგება. ახლა  $h: R^2 \rightarrow R^1$  ფუნქციის შესახებ, რომელიც (2)-დან გამომდინარე  $K$  კრიტერიუმის აგების ბოლო რგოლს წარმოადგენს.

შევნიშნოთ, რომ გარკვეული მოსაზრებიდან გამომდინარე  $E_*(\bar{u}/m)$  შეიძლება განვიხილოთ როგორც მათემატიკური მოლოდინი  $u$  სარგებლიანობის ფუნქციისა  $d_1$  გადაწყვეტილებაზე. თუ ალბათურ განაწილებად  $2^Q$ -ზე ავიღებთ  $m$ -ს, ხოლო ყოველ  $A \subset \Omega$ -ზე კი  $u$ -ს მინიმალურ მნიშვნელობას. მას შეიძლება პესიმისტური მათემატიკური მოლოდინი ვუწოდოთ. ანალოგიურად,  $E^*(\bar{u}/m)$  შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მათემატიკური მოლოდინი  $u$  სარგებლიანობის ფუნქციისა  $d_1$  გადაწყვეტილებაზე იმ ალბათურ განაწილების მიმართ, რომელიც მიიღება  $m$  ფოკალური ალბათობიდან  $2^Q$ -ზე, ხოლო  $u$ -ს როლში აღებულია მისი მაქსიმალური მნიშვნელობები ყოველ  $A \subset \Omega$  ფოკალურ სიმრავლეზე. მას შეიძლება ოპტიმისტური მათემატიკური მოლოდინი ვუწოდოთ:

$E_*(\bar{u}/m)$  პესიმისტური მოსალოდნელი სარგებლიანობაა  $d_1$  გადაწყვეტილებაზე,  $E^*(\bar{u}/m)$  კი ოპტიმისტური მოსალოდნელი სარგებლიანობაა  $d_1$  გადაწყვეტილებაზე. გადაწყვეტილების მიღების თვალსაზრისით,  $E_*(\bar{u}/m)$ ,

$E^*(\bar{u}_i / m)$  წველი აღნიშნავს  $d_i$  გადაწყვეტილებაზე გმპ-ის სარგებლიანობის უარეს და საუკეთესო მოსალოდნელი რეზულტატებს რაიმე  $m$  ფოკალურ ალბათობასთან მიმართებაში.

ახლა განვიხილოთ შემდეგ 2 მონაცემთა ტანი:

**მტკიცება 9.** თუ მონაცემთა ტანი სრული უკოდინრობის ტანია, ე.ი. მისი ფოკალური ალბათობა  $m_0$  ასეთია

$$m_0(A) = \begin{cases} 1, & A = \Omega \\ 0, & A \neq \Omega \end{cases}$$

მაშინ,

$$E_*(\bar{u}_i / m_0) = \min_j \bar{u}_i = \min_j \{u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}\}, \quad E^*(\bar{u}_i / m_0) = \max_j \bar{u}_i = \max_j \{u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}\}.$$

მტკიცება მარტივია და მას აქ არ მოვიყვანთ.

**მტკიცება 10.** თუ მონაცემთა ტანი ალბათურია  $((\mathcal{V}_1, m_p)$ -წარმოადგენს დისონანტურ ტანს), ე.ი.  $m$  წარმოადგენს ალბათურ განაწილებას  $\Omega$ -ზე ( $m = m_p$ ), მაშინ

$$E_*(\bar{u}_i / m_p) = E^*(\bar{u}_i / m_p) = E(\bar{u}_i). \quad (14)$$

აქც მტკიცება ტრივიალურია.

ცხადი ხდება, რომ სრული უკოდინრობის მონაცემთა ტანი და ალბათურ მონაცემთა ტანი ეს ის ორი ექსტრემალური პოლუსებია, რომელთა შორის სპექტრალურად განლაგდება ჩართვის აზრით ნებისმიერ მონაცემთა ტანი, რომელიც ატარებს  $I$  ინფორმაციას  $\Omega$ -ს ელემენტთა განაწილებაზე. ეს ყველაფერი აისახება შემდეგ მტკიცებულებაში:

**მტკიცება 11.** თუ მოცემულია  $(\mathcal{V}_1, m_1) \subset (\mathcal{V}_1, m_2)$  ორი ტანი ( $m_1 \subset m_2$ ), მაშინ ნებისმიერი  $d_i$  გადაწყვეტილებაზე,  $\bar{u}_i$  სარგებლიანობის ვექტორისთვის სამართლიანია შემდეგი ჩართვა:

$$(E_*(\bar{u}_i / m_2), E^*(\bar{u}_i / m_2)) \subset (E_*(\bar{u}_i / m_1), E^*(\bar{u}_i / m_1)). \quad (15)$$

ეს მტკიცებულება წარმოადგენს მტკიცებულება 7-ის შედეგს.

ცხადი ხდება, რომ რადგან  $\forall m$  ფოკალური ალბათობისთვის  $m_0 \subseteq m \subseteq m_p$ ,

ამიტომ

$$(\min \bar{u}_i, \max \bar{u}_i) \supseteq (E^*(\bar{u}_i / m), E(\bar{u}_i / m)) \supseteq (E(\bar{u}_i), E(\bar{u}_i)). \quad (16)$$

თუ შევავაძებთ ბოლო სამ მტკიცებულებას, მაშინ შეიძლება ითქვას, რომ მონაცემთა ტანის "გაფართობა" ( $m_1 \subset m_2$ ) იძლევა დამატებით ინფორმაციას  $\Omega$ -ს ელემენტებზე, სრულდება ( $\mathfrak{A}, m_1$ ) მონაცემთა ტანის ატომიზაცია ( $\mathfrak{A}, m_2$ ) მონაცემთა ტანით და ნებისმიერი  $d_i$  გადაწყვეტილებისათვის უმჯობესდება მოსალოდნელი სარგებლიანობის შეფასება პესიმისტურ და ოპტიმისტურ მნიშვნელობებს შორის და ეს ზოგადი განუზღვრელობა გაქრება, როდესაც მონაცემთა ტანი გაფართოვდება ალბათურ ტანამდე. თუმცა კი მაინც რჩება უზუსტობა ალბათური განუზღვრელობის სახით, რომელსაც რისკის ფაქტორი ეწოდება [3].

დაეუბრუნდეთ  $\varphi = I \circ h$  კომპოზიციაში  $h$  ფუნქციის არჩევის ამოცანას. აღვნიშნოთ:  $a_i \equiv E_*(\bar{u}_i/m)$  და  $b_i \equiv E^*(\bar{u}_i/m)$ . ყოველი  $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) გადაწყვეტილება უკვე წარმოიგინება  $(a_i, b_i)$  წვევლის სახით და მათი შედარება დაიწყება ასეთი წვევლების დალაგებაზე.  $R^2$ -ში არსებობს წვევლების მხოლოდ ნაწილობრივი დალაგება და

$$d_p \succeq d_q \Leftrightarrow (a_p \geq a_q, b_p \geq b_q).$$

სრული დალაგებისათვის საჭირო იქნება განისაზღვროს გამ-ის პოზიცია. ასევე  $h$  არ უნდა იყოს მონოტონურად კლებადი ფუნქცია მისი დალაგებული არგუმენტების მიმართ. ჩვენი აზრით,  $h$  ფუნქციის მოსაძიებლად ყველაზე მისაღები გზები შემდეგია:

- ა) ოპტიმისტური  $K$  კრიტერიუმი, რომელიც აგებს  $h = h^*$  ფუნქციას:  
 $h^*(a_i, b_i) = \max(a_i, b_i) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$ , რომელიც მხოლოდ ოპტიმისტურ, დემსტერ-შეიფერის ზედა მოსალოდნელი სარგებლიანობის მნიშვნელობას იღებს.
- ბ) პესიმისტური  $K$  კრიტერიუმი, რომელიც აგებს  $h = h_*$  ფუნქციას:  
 $h_*(a_i, b_i) = \min(a_i, b_i) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$ , რომელიც მხოლოდ პესიმისტურ, დემსტერ-შეიფერის ქვედა მოსალოდნელი სარგებლიანობის მნიშვნელობას იღებს.
- გ)  $\alpha$ -ოპტიმისტური  $K$  კრიტერიუმი, რომელიც აგებს  $h = h_\alpha$  ფუნქციას:

$$h_\alpha(a_i, b_i) = \alpha b_i + (1 - \alpha) a_i,$$

სადაც  $0 \leq \alpha \leq 1$  ფიქსირებული რიცხვია.  $h_\alpha$  შედგება ოპტიმისტური და პესიმისტური  $h$  ფუნქციების ამოზნექილი კომბინაციისაგან:

$$h_\alpha = \alpha h^* + (1 - \alpha) h_*$$

$\alpha$  სიდიდის მნიშვნელობა შეიძლება გაგებული იყოს, როგორც გამ-ის ოპტიმიზმის დონე:

ყველაზე ბუნებრივი კრიტერიუმი გადაწყვეტილებებში შემდგენიარად შეიძლება ჩამოვყალიბოთ:

1. ერთი მხრივ, თუ  $(\mathfrak{A}, m)$  ტანი  $\Omega$ -ზე ალბათურია, მაშინ მტკიცებულება 11-დან

$$h_\alpha(a_i, b_i) = E\bar{u}_i, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

რადგან აქ  $h^* = h_*$ . გადაწყვეტილების წესი, რომელიც  $h$  ფუნქციის მაქსიმიზაციას გულისხმობს, ემთხვევა კლასიკური ნეიმან-მორგენშტერნის სარგებლობის თეორიამ



მოსალოდნელი სარგებლიანობის მაქსიმუმის პრინციპს [3]. აირჩევა ის  $d_k$  გადაწყვეტილება, რომლისათვისაც:

$$E(\bar{u}_k) = \max_{i=1, m} E(\bar{u}_i).$$

2. მეორე მხრივ, თუ  $(\mathcal{I}, m)$  ტანი  $\Omega$ -ზე აღწერს სრულ უცოდინრობას, მაშინ

$$b_i = \max_{\alpha_j \in \Omega} \{\bar{u}_i\} = \max_{j=1, n} u_{ij}, \quad a_i = \min_{\alpha_j \in \Omega} \{\bar{u}_i\} = \min_{j=1, n} u_{ij}.$$

თუ განიხილება ფუნქციის მაქსიმუმის პრინციპი, მაშინ გვექნება სამი შემთხვევა:

(ა1) max-max კრიტერიუმი, რომელიც  $h^+$ -დან აიგება:

$$\max_{i=1, m} b_i = \max_{i=1, m} E^*(\bar{u}_i / m) = \max_i \max_j u_{ij}$$

თუ მაქსიმუმი მიიღწევა  $b_0$ -ზე, მაშინ საბოლოო გადაწყვეტილებად აირჩევა  $d_0$ . იგი (ა)-ში განხილული ოპტიმისტური კრიტერიუმის კერძო შემთხვევაა.

(ბ1) ვოლდის კრიტერიუმი, ანუ max-min კრიტერიუმი, რომელიც  $h_-$ -დან აიგება:

$$\max_{i=1, m} a_i = \max_{i=1, m} E_*(\bar{u}_i / m) = \max_i \min_j u_{ij}.$$

იგი (ბ)-ში განხილული პესიმისტური კრიტერიუმის კერძო შემთხვევაა.

(გ1) პარეიტსის კრიტერიუმი, რომელიც  $h_0$ -დან აიგება:

$$\max_{i=1, m} \{\alpha b_i + (1 - \alpha) a_i\} = \max_{i=1, m} \left[ \alpha \max_{j=1, n} u_{ij} + (1 - \alpha) \min_{j=1, n} u_{ij} \right].$$

იგი (გ)-ში განხილული კრიტერიუმის კერძო შემთხვევაა, როცა  $m = m_0$  სრული უცოდინრობის ფოკალურის ალბათობაა.

დასკვნის სახით შეიძლება შევნიშნოთ, რომ

- 1) დემსტერ-შეიფერის ცნობების მათემატიკური თეორია აღმოჩნდა საუკეთესო ინსტრუმენტი, რათა ორი ტიპის ალბათური (რისკის) და ზოგადი განუზღვრელი გარემო გავკეთვალისწინებინა ერთ მოდელში (გადაწყვეტილების მიღების ინფორმაციულ მოდელში).
- 2) ყველა ცნობილი (კლასიკური) კრიტერიუმები, რომელიც გამოიყენებოდა სრული უცოდინრობის პირობებიდან რისკის არსებობის ჩათვლით, ჩვენს მიერ აგებული კრიტერიუმების კერძო შემთხვევები აღმოჩნდა.
- 3) ინფორმაციის მთელი სპექტრი 0-დან (ინფორმაციის სრული უცოდინრობიდან) ალბათურ განუზღვრელობამდე (რისკის ფაქტორამდე) წარმოდგენილია აგებული მოდელის მიახლოებაში, რაც კონკრეტული ამოცანებიდან გამომდინარე მათი იდენტიფიკაციის საუკეთესო საშუალებას წარმოადგენს.

4. გონაცემთა  $(\mathcal{I}, m)$  ტანის ამაგამ სხვადასხვა საინფესტიციო პროექტის შატპროგამზ. როგორც აღრე ითქვა,  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  აღნიშნავს საინფესტიციო პროექტის დასაშვებ ფაქტორთა სიმრავლეს.

I) ვთქვათ, არსებობს განხორციელებული საინვესტიციო პროექტების მონაცემთა ბაზა, რომელშიც შესაძლო გადაწყვეტილებანი იყო  $D = \{d_1; d_2; \dots; d_m\}$  სიმრავლე. ვთქვათ, ამ ბაზაში წარმატებით განხორციელებული საინვესტიციო პროექტების ჩანაწერთა რიცხვია  $N$  (წარმატებით განხორციელებული, ე.ი. თავის დროზე მიღებული იყო სწორი არჩევანი-გადაწყვეტილება). ვთქვათ, ყოველ ასეთ ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) პროექტში აღინიშნებოდა გარკვეული  $\Omega'_i \subset \Omega$  ფაქტორთა თანაარსებობა (ე. ი. თუ  $\omega \in \Omega'_i$  მაშინ  $i$ -ური პროექტს გააჩნდა  $\omega$  ფაქტორი). განვიხილოთ ამ ფაქტორ-ჯგუფთა ერთობლიობა:

$$\Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_N. \quad (17)$$

ბუნებრივია,  $\Omega$ -ზე მონაცემთა ტანის აგების მიზნით არსებული ინფორმაციის პირობებში (წარმატებული საინვესტიციო პროექტის ფაქტორ-ჯგუფთა თანაარსებობის პირობებში) სამართლიანი იქნება თუ ტანის ფოკალურ სიმრავლებად ჩავთვლით (17) შერჩევს

$$\mathfrak{I} = \{\Omega'_k, \Omega'_k, \dots, \Omega'_k\}, \quad (k \leq N) \quad (18)$$

განსხვავებულ ელემენტებს, ანუ  $\forall e = 1, 2, \dots, k: \Omega'_e \neq \emptyset, \Omega'_e \in \{\Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_N\}, \Omega'_e \neq \Omega'_q; q, p = 1, 2, \dots, k, p \neq q$ . თუ  $n_e$  აღნიშნავს (18)-ის  $\Omega'_e$  ფოკალური სიმრავლის სიხშირეს (17)-ის ფაქტორ-ჯგუფთა ერთობლიობაში, მაშინ ფოკალური ალბათობა ასე განიმარტება:

$$m(\emptyset) = 0, \quad m(\Omega'_e) = \frac{n_e}{N}, \quad e = 1, 2, \dots, k.$$

ცხადია,  $\sum_{e=1}^k m(\Omega'_e) = 1$  და ტანში  $m$  ფოკალურ ალბათობაა. მაშინ  $(\mathfrak{I}, m)$

წარმოადგენს მონაცემთა ტანს, რომელიც აღწერს მიღებულ I ინფორმაციას საინფორმაციო პროექტების სწორ გადაწყვეტილებათა მონაცემთა ბაზიდან.

II) ვთქვათ, არ არსებობს განხორციელებული საინვესტიციო პროექტების მანაცემთა ბაზა, რომელშიც შესაძლო გადაწყვეტილებებად მიიჩნევა გადაწყვეტილებათა  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$  სიმრავლე, მაგრამ არსებობს ექსპერტთა ჯგუფი  $M$  რაოდენობით, რომელთა ფსიქომეტრიული გამოკითხვის შედეგ შესაძლებელი იქნება მონაცემთა ტანის აგებაც. ასეთ სიტუაციაში ფოკალური სიმრავლების გამოყოფა სქემატურად შემდეგნაირად წარმოიდგინება:

1. თითოეული ექსპერტი წარმოადგენს შებლონს ცხრილი 3-ის (იხ. სტატიის I ნაწილი) სახით, საიდანაც ყოველი  $d_i$  გადაწყვეტილებისათვის წარმოიქმნება  $\Omega'_i$  ფოკალური სიმრავლე ანუ  $\omega \in \Omega$  ელემენტთა ის ერთობლიობა, რომლებიც უნდა გააჩნდეს საინვესტიციო პროექტს თუ მის მიმართ მიღებული იქნებოდა  $d_i$  გადაწყვეტილება.

2. ყოველი ექსპერტისათვის აიგება  $m$  რაოდენობა ფაქტორ ჯგუფური შერჩევა (ფოკალური სიმრავლეები). ყველა ექსპერტის გათვალისწინებით კი  $Nm$  ასეთი სიმრავლე:

Received on January 16, 2002

$\Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_{N_m}$

3.  $(\mathcal{I}, m)$  ტანის აგება ანალოგიური როგორც I) შემთხვევაში. თუ ექსპერტი შაბლონის-უჯრებში ჩაწერს არა 0 და 1, არამედ შესაძლებლობით  $(\pi, \bar{\pi})$  დონეებს (შესაძლებლობითი დონეების აგების რ. იაგერის ალგორითმი იხილეთ სტატიის I ნაწილის დანართში), როგორც ეს კოფმანის ექსპერტონების თეორიაშია მიღებული, მაშინ ყოველი  $d_i$  გადაწყვეტილებისთვის კონკრეტულ ექსპერტთან მიმართებაში კვლავ აიგება ფოკალური სიმრავლე შემდეგი მოსაზრებით:

$$\Omega' = \{ \omega / \omega \in \Omega \wedge (\pi(\omega), \bar{\pi}(\omega) \geq \alpha) \quad 0 < \alpha < 1,$$

სადაც  $\omega$  ელემენტის  $\Omega'$  ფოკალური სიმრავლეში მიეკუთვნების მინიმალური ნდობის დონეა (მაგ.  $\alpha = 0,5$ ). ე.ი.  $d_i$  გადაწყვეტილების შემთხვევაში კონკრეტულ ექსპერტთან მიმართებაში იქმნება  $\Omega'$  ფოკალური სიმრავლე, სადაც ექსპერტის მიერ შეფასებულ  $\omega$  ფაქტორის არსებობის შესაძლებლობითი ინტერვალი  $(\pi(\omega), \bar{\pi}(\omega))$  აღემატება  $\alpha$  ნდობის დონეს.

**შენიშვნა.** როგორც ცნობილია,  $(\pi(\omega), \bar{\pi}(\omega)) \geq \alpha$  დალაგება ნაწილობრივია და სრული დალაგება მიიღწევა გმპ-ის აქტიურობით. ამის შესახებ ვრცელად იყო ლაპარაკი პარაგრაფ 4-ში.

**ლიტერატურა**

1. Shafer G. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.
2. Demster P. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Ann. Math. Statist.* 38, 1967, pp.325-339.
3. სირბილაძე გ., მაცაბერიძე ბ. გადაწყვეტილების მიღების ანალიზი რისკის გარეშე. „უნივერსალი“, თბილისი, გვ. 75, 2001.
4. Sugeno M. *Theory of Fuzzy Integral and its applications*. Doct. Theses, Tokyo, 1974.
5. Sirbiladze G., Zaporozhets N. *About Two Probability Representations of Fuzzy Measures on a Finite Set*. The Journal of Fuzzy Mathematics. Los Angeles, USA, Vol.10, No.3, 2002, pp.1467-1489.
6. Smets A. *Medical Diagnosis: Fuzzy sets and Degrees of Belief*. Fuzzy Sets and Systems, 5, 1081, pp.259-266.

Accepted for publishing on October 15, 2002.

© 2002, No. 1

Reviewed on January 16, 2003.

**DECISION-MAKING AIDING FUZZY INFORMATIONAL SYSTEMS IN INVESTMENTS****Part II – DEMSTER-SHAPER'S EXPECTED UTILITY IN INVESTMENT DECISIONS***G. Sirbiladze, G. Khachidze**Chair of Random Process Theory*

1. A classical decision problem can be considered as given by the information system

$$(\Omega, D, I, u, K),$$

where  $\Omega$  is the non-empty set of the states (factors, situations) of nature;  $D$  is non-empty set of the feasible decisions;  $I$  is the available information about  $\Omega$ ;  $K$  is the decision-maker's criterion, which represents some optimal principle; and  $u: D \times \Omega \rightarrow R$ , is a valuation of the consequences, coherent with the decision-maker's preferences.

According to the kind and amount of available information, the following cases have been distinguished:

- General Decision Problem in a Certainty Environment: when the state of nature which will occur is known "a priori".
- General Decision Problem in a Risk Environment: if the true state is unknown but a probability distribution is available on  $\Omega$ .
- General Decision Problem in a Uncertainty Environment: when no information about the states of nature can be used.

Our aim in this paper is to study a more general model including the previous three; such a model will consider the information about  $\Omega$  as defined by an evidence [1].

To obtain a solution for a decision problem as defined above, an order relation should be found on the set of decisions  $D$ ; we will construct this order taking into account the utility  $u$  and the information  $I$ . We suppose  $D$  and  $\Omega$  to be finite, in order to avoid measurability or convergence problems. If we denote

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}, \quad D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\},$$

the consequences of a decision  $d_i$  are given in terms of a utility vector  $\bar{u}_i$ :

$$d_i \leftrightarrow \bar{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}) \in R^n, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

which represents the decision-maker's preferences.

2. The problem is now to find an order on  $R^n$ . Classically the solution is obtained by mapping each vector  $\bar{u}_i$  on a value of  $R$ ; to build this map  $\varphi: R^n \rightarrow R$ , we will use the decision-maker's opinions and the information available about  $\Omega$ .

Thus, we will say that a decision  $d_i$  is preferred or indifferent to another  $d_k$  (and express it as):

$$d_k \leq d_i \Leftrightarrow (u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{kn}) \leq (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{u}_k) \leq \varphi(\bar{u}_i).$$

Numerous examples of this procedure exist in the relevant literature, as the criteria  $K$  of the expected value (risk environment), Laplace, Wald (uncertainty environment), etc.

In this paper we will suppose the information  $I$  is given by an evidence represented by a basic probability assignment (B.P.A.)-m.

**DEFINITION 1.** [1] A B.P.A. on  $\Omega$  is a map

$$m : 2^\Omega \rightarrow [0;1],$$

fulfilling the conditions:

(i)  $m(\emptyset) = 0,$

(ii)  $\sum_{A \in \Omega} m(A) = 1.$

In 1967, Demster [3] introduced the concepts of lower and upper expected values of a function, with respect to a measure as a generalization of the expected mathematical value:

**DEFINITION 2.** [2] let  $h : \Omega \rightarrow R$  be any function and let  $m$  be a B.P.A. on  $\Omega$ . Lower and upper expected values of  $h$  with respect to  $m$  are defined as

$$E_*(h/m) = \sum_{A \in \Omega} m(A) \cdot \inf_{\omega \in A} h(\omega),$$

$$E^*(h/m) = \sum_{A \in \Omega} m(A) \cdot \sup_{\omega \in A} h(\omega).$$

In this conditions, we can map the vector  $\bar{u}_i \in R^n$  (represented as function  $\Omega \rightarrow R$ ) on another vector of  $R^2$  by means of  $t : R^n \rightarrow R^2,$

$$t(u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}) = (E_*(\bar{u}_i/m), E^*(\bar{u}_i/m)).$$

If we consider the composition  $h \circ t = \varphi,$  the determination of  $\varphi$  means merely to determine the map:  $h : R^2 \rightarrow R$ . From this composition, one can see  $t$  contains the available information while  $h$  must reflect the decision maker's attitude.

3. Finally, we may note: On one hand, if the evidence considered about  $\Omega$  is probabilistic ( $m \equiv m_p$ ), according to proposition 10.

$$E_*(\bar{u}_i/m_p) = E^*(\bar{u}_i/m_p) = E_{m_p}(\bar{u}_i),$$

where the most outstanding ways to define  $h$  are as follows:

(a) Optimistic criterion. Based on the map  $h^* :$

$$h = h^*(E_*, E^*) = E^*$$

(b) Pessimistic criterion. Based on the map  $h_* :$

$$h = h_*(E_*, E^*) = E_*,$$

and the decision rules consisting of the maximization of the value of  $h$  (the construction of criterion  $K$ ), coincides with the classical expected value criterion for risk environment [3].

On the other hand, if we confront a problem in the absence of information, the only possible evidence to be considered is the so called total ignorance ( $m = m_0$ ), and in this case

$$E_i^* = \max_{\omega_j \in \Omega} \bar{u}_i = \max_j u_{ij}, \quad E_i_* = \min_{\omega_j \in \Omega} \bar{u}_i = \min_j u_{ij}$$

are verified. If the decision maximizing  $h$  is chosen (criterion  $K$ ), we find:

(A) The max-max criterion, from  $h^* :$



$$\max_i E_i^* = \max_i E^*(\bar{u}_i / m_0) = \max_i \max_j u_{ij}$$

as a particular case of our optimistic criterion.

(B) Wald's criterion, or max-min criterion, from  $h_1$ :

$$\max_i E_i^* = \max_i E^*(\bar{u}_i / m_0) = \max_i \min_j u_{ij}$$

as a particular case of our pessimistic criterion.

4. Conclusion: Demster-Shafer's theory of Evidence [1-2] is a powerful tool with which to build models on investment risk or uncertainly environments. By expressing the available information about states or factors of nature in a decision problem by means of an evidence and by using the lower and upper expected values to obtain decision rules, one may generalize classical criteria to intermediate situations between null and probabilistic sets of information.

## ON DYNAMICAL PROBLEMS FOR 3D ANISOTROPIC THEORY OF ELASTICITY

**T. Vashakmadze**

Tbilisi State University, VIAM

**Abstract.** The problems of development of Kupradze methods of the potential theory for the thermo-dynamical spatial theory of anisotropic elastic media with initial and classical boundary conditions are discussed when time changes in a half-infinite interval.

By incomplete Fourier-Laguerre series with respect to time and Kantorovich-Vekua projective method we construct an implicit stable scheme by which the process of solution of the initial problem represents recurrent relations. Each following member of this sequence is defined as solution of 3D boundary value problems for the system of differential equations (DEs) using also preliminary solutions. Then, if generalized Hook's law contains no more than thirteen independent elastic constants and sum of Poisson's coefficients in each directions are less than one, the operators corresponding to each systems of EDs of this sequence as well as the operator corresponding to an initial problem (in static case) are  $\Sigma$ -elliptic.

1. Let us consider the evolution equation of second order (initial conditions are underlined):

$$a(\cdot) \frac{d^2 u}{dt^2} + b(\cdot) \frac{du}{dt} + Au = f(\cdot, t), \quad t \in [0, \infty), \quad (1.1)$$

$$u(\cdot, 0) = \varphi_0(\cdot), \quad a(\cdot) \frac{du(\cdot, 0)}{dt} = \varphi_1(\cdot), \quad (1.2)$$

$$a(\cdot) \geq 0, \quad b(\cdot) \geq 0, \quad a + b > 0.$$

Out of the vast literature around the subject of special interest are the monographs [1-2] with deep remarkable results and rich bibliographies.

Let us find the solution of (1.1), (1.2) in the form

$$u = e^{-\gamma t} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\cdot) L_k(t), \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad (1.3)$$

where  $L_k(t)$  are orthonormal Laguerre polynomials,  $u_k$  are unknown coefficients.

Using Vekua-Kantorovich method we have:

$$(A + a(1-\gamma)^2 I + b(1-\gamma)I) u_m = f_m + (a(m-\gamma) + b) \varphi_0 + a \varphi_1 - \sum_{j=0}^{m-1} (a(m-j-1) - 2(1-\gamma) + b) u_j, \quad (1.4)$$

where

$$f_m = \int_0^{\infty} e^{-(1-\gamma)t} L_m f(\cdot, t) dt$$

If we denote the right hand side of (1.4) with  $\Phi_m$ , we will have,

$$\Phi_{0,m} = \Phi_{0,m} + a \Phi_{1,m} + (2a(1-\gamma) - b) \Phi_{2,m} - a \Phi_{3,m},$$

where

$$\Phi_{0,m} = f_m + (b - a\gamma) \varphi_0 + a \varphi_1,$$

$$\Phi_{1,m} = m \varphi_0, \quad \Phi_{2,m} = \sum_{j=0}^{m-1} u_j,$$

$$\Phi_{j,m} = \sum_{j=1}^{m-1} (m-j-1)u_j.$$

Thus, we obtain for the right hand side the following recurrence relation:

$$\Phi_m = \Phi_{m-1} + (f_m - f_{m-1}) + a\varphi_0 + (2a(1-\gamma) - b)u_{m-1} - a\Phi_{2,m-1}.$$

The numerical process includes itself calculation of

1<sup>o</sup>. functions  $L_i(t)$ ,  $l_i(t) = e^{-\gamma t} L_i(t)$ ,

2<sup>o</sup>. right parts  $\Phi_m$  and coefficients  $u_m$ ,

3<sup>o</sup>. unknown vector-function  $u(\cdot, t)$ .

The calculation of Laguerre functions is realized by program ELAG [3]. First we represent  $l_n(t)$  in the following form:

$$l_n(t) = e^{-\gamma t} \prod_{i=1}^n \frac{t_{i,n} - t}{i}, \quad L_n(t_{i,n}) = 0. \quad (1.5)$$

Using recurrence relation for orthogonal polynomials we have,

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1}P_{n-2}(t) - \beta_n P_{n-1}(t) + \alpha_n P_n(t) &= tP_{n-1}(t), \\ P_{-1}(t) &= 0, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_n \neq 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Let  $t_0$  be one of the zeros of  $P_n(t)$  polynomials. Then from (1.6) there follows

$$\alpha_0 P_{-1}(t_0) - \beta_1 P_0(t_0) + \alpha_1 P_1(t_0) = t_0 P_0(t_0),$$

$$\alpha_1 P_0(t_0) - \beta_2 P_1(t_0) + \alpha_2 P_2(t_0) = t_0 P_1(t_0),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_{n-1} P_{n-2}(t_0) - \beta_n P_{n-1}(t_0) + \alpha_n P_n(t_0) = t_0 P_{n-1}(t_0)$$

For this system  $t_0$  is an eigenvalue of the corresponding matrix while

$P = (P_0(t_0), P_1(t_0), \dots, P_{n-1}(t_0))^T$  is an eigenvector. For Laguerre polynomials  $\alpha_n = -n$ ,  $-\beta_n = 2n - 1$  and these values may be found effectively (see e.g. [4]).

Then we find (see [5]) the weights of Gauss quadrature formula:

$$\lambda_{i,n} = \frac{t_{i,n}}{n^2 \Im_{n-1}^2(t_{i,n})}, \quad \Im_{n-1}(t_{i,n}) = \sqrt{e^{-\gamma t_{i,n}} \frac{L_{n-1}(t_{i,n})}{L_0(t_{i,n})}}.$$

For comparison of methods of investigation and solution of evolutionary problems by direct and inverse Laplace transformation on the one hand and uncomplete series of Fourier-Laguerre on the other hand, we shall find respectively in ch.VIII "Mixed Problems of Dynamics" [1] (especially theorems 1.1 and 2.1) and recall two convergence theorems of a series by Laguerre polynomials.



**THEOREM 9.1.5.** (see [5] p.255) Let  $f(t)$  be a measurable in the Lebesgue sense function on the semiaxis  $[0, \infty)$  and let there exist the integrals

$$\int_0^1 t^\alpha |f(t)| dt, \quad \int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}} |f(t)| dt.$$

If the condition

$$\int_n^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{\alpha-1}{2}} |f(t)| dt = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

is satisfied and if  $S_n(t)$  denote partial sums of series  $f(t)$  by Laguerre polynomials, then

$$\lim \left\{ S_n(t) - \frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{t}-\delta}^{\sqrt{t}+\delta} f(\tau^2) \frac{\sin(2\sqrt{n}(\sqrt{t}-\tau))}{\sqrt{t}-\tau} d\tau \right\} = 0, \quad t > 0, \quad (1.8)$$

where  $\delta$  is a fixed number,  $\delta < \sqrt{t}$ . The relation (1.8) is satisfied uniformly on the positive segment  $\varepsilon \leq t \leq \omega$ ,  $\delta < \sqrt{t}$ .

The following theorem is also true (see [6]):

**THEOREM.** Let the series  $\sum_{k=0}^{\infty} k u_k$  and  $A \sum_{k=0}^{\infty} u_k$  be absolutely and uniformly convergent. Then for all  $\varepsilon > 0$ , there exists  $N_0 = N_0(\varepsilon)$  such that the reduced system of (1.4) approximates the initial problem (1.1), (1.2) with  $\varepsilon$  accuracy when  $n > N_0$ .

2. Here we consider the case when the operator  $A$  of the spatial theory of elasticity is anisotropic. For this operator we investigated the problem of signdefinition the corresponding bilinear form.

Let us consider anisotropic homogeneous materials characterized by 13 independent constants. In this case generalized Hooke's law when

$$\varepsilon = A\sigma,$$

$\varepsilon$  and  $\sigma$  are strain and stress tensors correspondingly, has the following form:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &:= u_{i,j} = a_{ij} \sigma_{jj} + a_{i6} \sigma_{12}, \\ \varepsilon_{\alpha 3} &:= \frac{1}{2}(u_{\alpha,3} + u_{3,\alpha}) = a_{\alpha+3,\alpha+3} \sigma_{\alpha 3} + a_{\alpha+3,6-\alpha} \sigma_{33-\alpha}, \\ \varepsilon_{12} &:= \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = a_{61} \sigma_{ii} + a_{66} \sigma_{12}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Here  $A$  is the symmetric matrix and the compliance constants may be written in terms of engineering coefficients:

$$a_{ij} = \frac{1}{E_i}, \quad a_{ij} = -\frac{\gamma_{ij}}{E_i} = -\frac{\gamma_{ji}}{E_j} = a_{ji},$$

$$a_{44} = \frac{1}{G_{23}} = \frac{1}{E_5}, \quad a_{55} = \frac{1}{G_{13}} = \frac{1}{E_4}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{E_6},$$

$$a_{45} = a_{54} = -\frac{\nu_{54}}{E_5} = -\frac{\nu_{45}}{E_4}, \quad a_{16} = -\frac{\nu_{16}}{E_1} = -\frac{\nu_{61}}{E_6} = a_{61}.$$

Evidently, for orthotropic elastic plates these definitions of  $a_{ij}$  are same in [6], where we have taken  $a_{16} = a_{15} = 0$ . Let  $a(\sigma, \tau) := \langle A\sigma, \tau \rangle := \int_{\Omega} (A\sigma)_{ij} \tau_{ij}$ . Then if this condition holds

$$a(\sigma, \sigma) \geq \alpha \|\sigma\|_{\Sigma}^2, \quad \forall \sigma \in \Sigma, \quad \alpha > 0$$

the bilinear form  $a$  is said to be  $\Sigma$ -elliptic.

In [6] it was shown that if the natural physical inequalities  $E_i > 0$  ( $i = \overline{1,6}$ ) and in addition to the prior inequalities

$$\nu_{32} > 2\nu_{31}\nu_{12}, \quad \nu_{31} > 2\nu_{32}\nu_{21}, \quad \nu_{21} > 2\nu_{23}\nu_{31}, \quad (2.2)$$

held then  $(A\tau)_{ij} \tau_{ij} > 0$  and  $a(\sigma, \tau)$  is  $\Sigma$ -elliptic for the orthotropic case.

Further, in [8] we have proved that  $a(\sigma, \tau)$  is  $\Sigma$  elliptic in an anisotropic case (see (2.1)) if

$$\nu_{11} + \nu_{12} + \nu_{16} < 1, \quad \nu_{61} + \nu_{62} + \nu_{63} < 1.$$

We note that, in this work we also found the explicit form for  $A^{-1}$  by  $(\nu, E)$  terms.

3. In this paragraph we consider the case when  $A$  is nonlinear operator of polynomial type. The following theorem holds:

**THEOREM 3.1.** *If the  $A$  is an polynomial type nonlinear operator and  $\gamma = 0$ , then from relation (1.4) it follows that only first approximation  $u_0(\cdot)$  satisfies the nonlinear BVP whereas the other approximations  $u_m(\cdot)$  for all  $m \geq 1$  are defined as the solution of linear BVP.*

**PROOF.** Let us consider the following scalar product:

$$\left( \prod_{i=1}^n u_i(\cdot, t), L_m(t) \right) = \int_0^{\infty} e^{-t} \prod_{i=1}^n u_i(\cdot, t) L_m(t) dt = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n u_{i_i}(\cdot) \int_0^{\infty} e^{-t} \prod_{k=1}^n L_{i_k} L_m(t) dt =$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n u_{i_i}(\cdot) \int_0^{\infty} e^{-t} \sum_{k=0}^{i_1+\dots+i_n} a(i_1, \dots, i_n, k) L_k(t) L_m(t) dt = \sum_{i_1+\dots+i_n=m}^{\infty} \prod_{i=1}^n u_{i_i}(\cdot) a(i_1, \dots, i_n, m),$$

where

$$a(i_1, \dots, i_n, m) = \int_0^{\infty} e^{-t} \prod_{k=1}^n L_{i_k}(t) L_m(t) dt.$$

From (3.1), evidently, it follows that the equality

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = m, \quad i_1 = i_2 = \dots = i_n = m,$$

may hold only in the case when  $i_1 = i_2 = \dots = i_n = 0$ ,

REFERENCES

1. Kupradze V., Gegelia T., Basheleishvili M., Burchuladze T. *Three-Dimensional Problems of Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity*. M.; Nauka, 1976.
2. Mikhlín S. *The Linear Equations in Partial Derivatives*. M.: Vissshaia Shkola, 1977.
3. *Package of Applied Programms Designing Spatial Constructions (RAPSO)*. Tbilisi University Press, Tbilisi, 1981, part I, 165p., part II, 161p. (Main editor Tamaz Vashakmadze), (in Russian).
4. Wilkinson J. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press. Oxford, 1965.
5. Szego G. *Orthogonal Polynomials*. Amer. Math. Soc. V.XX111, 1959 (see also Russian version).
6. Vashakmadze T. *The Theory of Anisotropic Elastic Plates*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht|Boston|London, 1999.
7. Gilbert R., Hsiao G., Schneider M. *Two-Dimensional Linear Orthotropic Plate*. *Applicable Analysis*, 15, pp. 116-169, 1983.
8. Gilbert R., Vashakmadze T. *A Two-dimensional Non-linear Theory of Anisotropic Plates*. *Mathematical and Computer Modelling*, V. 32, issue 7-8, pp.855-875, 2000.

Accepted for publishing on December 22, 2002.  
Reviewed on September 25, 2003.

დრეკადობის სამგანზომილებიანი ანიზოტროპული თეორიის დინამიკური ამოცანების შესახებ

თ. ვაშაკმაძე

ფე. ვაჟაიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,  
ა. ჯუღას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი

შეისწავლება კუბრადის პოტენციალთა მეთოდის გავრცელების საკითხები თერმოდინამიკური თეორიისათვის სამგანზომილებიანი დრეკადი ანიზოტროპული გარემოს შემთხვევაში საწყისი და კლასიკური სასაზღვრო პირობებით, როდესაც დრო იცვლება ნახევრადუსასრულო შუალედში.

დროის მიმართ არასრული ფურიე-ლაგერის მწკრივისა და კანტოროვიჩ-ვეკუას პროექციული მეთოდის გამოყენებით ივება ცხადი მდგრადი სქემა, რომლის საშუალებითაც საწყისი ამოცანის ამოხსნის პროცესი ჩაიწერება რეკურენტული დამოკიდებულებით. მიმდევრობის ყოველი მომდევნო წევრი განისაზღვრება, როგორც სამგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი დიფერენციალურ განტოლებათა



სისტემებისათვის, რომლის მარჯვენა მხარე გამოისახება წინა წევრების საშუალებითაც. შემდეგ, თუ ჰუკის განზოგადებული კანონი დამოკიდებულია არაუმეტეს ცამეტ მუდმივზე და ჰუსონის კოეფიციენტების ჯამი ყოველი მიმართულებით ნაკლებია ერთზე, მაშინ ყოველ ეტაპზე დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ოპერატორი  $\Sigma$ -ულოფუსურია.

1. Vashaknadze, T. *On the stability of the solutions of the system of linear differential equations with constant coefficients*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1981, part 1, 107p. (also in *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (in Russian))

2. Vashaknadze, T. *On the stability of the solutions of the system of linear differential equations with constant coefficients*. *Acta Mathematica Scientia*, 1989 (see also Russian version)

3. Vashaknadze, T. *The Theory of Linear Differential Equations with Constant Coefficients*. *Doklady Akad. Nauk Gruz. SSR*, 1987

4. Gilbert R., Haino G., Schmitt M. *Two-dimensional Non-linear Theory of Anisotropic Plates*. *Mathematical and Computer Modelling*, V. 32, Issue 7-8, pp.853-872, 2000

Accepted for publishing on December 22, 2002.  
 Revised on September 22, 2002.

სტატიაში განვიხილეთ სისტემების სტაბილურობის საკითხი.

შედეგად მივიღეთ, რომ თუ ჰუკის განზოგადებული კანონი დამოკიდებულია არაუმეტეს ცამეტ მუდმივზე და ჰუსონის კოეფიციენტების ჯამი ყოველი მიმართულებით ნაკლებია ერთზე, მაშინ ყოველ ეტაპზე დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ოპერატორი  $\Sigma$ -ულოფუსურია.



### რეინსნერისა და ფაილონის ტიპის დაზუსტებულ დიფერენციალურ განტოლებათა ხისტემათა ზოგადი ამონხნის შესახებ ბინარული ნარევისაგან შემდგენილი ფირფიტებისათვის

თ. ვაშყმაძე\*), თ. მუნარვაია\*\*), რ. ჯანჯღავა\*\*)

\*) კომპიუტერების მათემატიკური უზრუნველყოფისა და ინფორმაციული ტექნოლოგიათა კათედრა

\*\*) ი. ვეკუას სახელობის გამაყენებით მათემატიკის ინსტიტუტი

**Abstract.** There are considered von Karman-Reissner type systems of DE for elastic plates of binary mixtures constructing by methods of [7]. In linear case these systems split into Mindlin-Reissner and Filon type refined systems. Further using Muskhelishvili-Vekua methodology there are constructing general solutions in the such form, which are suitable for investigation and decision basing boundary value problems for these systems. In nonlinear case using some results of [11], there is proved that von Karman-Reissner type anisotropic systems of DE are equivalence to Volterra second kind nonlinear systems of integro-differential equations.

დრეკად მასალათა ნარევეთა თეორიას საფუძველი ჩაეყარა გასული საუკუნის სამოციან წლებში. რთული შინაგანი სტრუქტურის მქონე გარემოს ახალი მოდელის ძირითადი შექანიკური პრინციპები პირველად ჩამოყალიბებული იყო კ. ტრუსდელისა და რ. ტუპინის შრომებში (იხ. [1]). შემდგომ პერიოდში ეს თეორია განვითარდა მრავალი მიმართულებით. შეიქმნა და სხვადასხვა მათემატიკური მეთოდებით გამოკვლეული იქნა ორი და მრავალკომპონენტიანი სხვადასხვა ტიპის ნარევეთა მოდელები (იხ. მაგ. [2-4]). ინტენსიურად ვითარდება ასევე აღნიშნული სამგანზომილებიანი მოდელების შესაბამისი ბრტყელი თეორიები (იხ. მაგ. [5-6]).

თ. ვაშყმაძის მონოგრაფიის [7] (იხ. თავი I, პ. 2.1) მეთოდით [8] ნაშრომში აგებულია ფონ კარმან-რეისნერის ტიპის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ბინარული ნარევისაგან შედგენილი ფირფიტებისათვის. წინამდებარე ნაშრომში აგებულია აღნიშნული ტიპის განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნი კომპლექსური ცვლადის ანალიზური ფუნქციების საშუალებით. ამასთან ზოგადი ამონახსნი წარმოდგენილია ი. ვეკუას [9-10] შრომებზე დაყრდნობით, რაც საშუალებას იძლევა შესწავლილ იქნეს სათანადო წრფივი სასაზღვრო ამოცანები. მიღებული წარმოდგენების საშუალებით შეიძლება აიგოს ფონ კარმან-რეისნერის ტიპის არაწრფივ განტოლებათა სისტემათა (1.7)-(1.12) [11] ეკვივალენტური ვოლტერას მყოფე გვარის ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა.

1. ვთქვათ,  $(e_1, e_2, e_3) \in R^3$  ვეკლოდური სივრცის ბაზისია. წერტილს დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში აღნიშნავთ  $(x_1, x_2, x_3)$ —ით. გარდა ამისა, ვთვლით, რომ  $\omega$  არის  $e_1, e_2$  ვექტორებზე მოჭიმულ სიბრტყეზე მდებარე სასრული ან უსასრულო ბმული არე საკმარისად გლუვი საზღვრით. განვსაზღვროთ შემდეგი სიმრავლეები

$$\Omega^h := \omega \times \{-h, h\}, \Gamma_+ := \omega \times \{h\}, \Gamma_- := \omega \times \{-h\}, \quad h = \text{const} > 0.$$

დავუშვათ,  $\Omega^h$  არე შედგება ორი იზოტროპული ერთგვაროვანი მასალის ნარევისაგან. სტატიკური წონასწორობის განტოლებებს აქვს სახე (იხ. მაგ. [3])



$$\begin{cases} \partial_i[\sigma''_{ij} - \delta_{ij}\pi] + \rho_i F'_j = 0, \\ \partial_i[\sigma''_{ij} + \delta_{ij}\pi] + \rho_i F''_j = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

ხოლო რეაქციის ფუნქცია, ანუ ჰუკის განზოგადებული კანონი ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= (-\alpha_2 + \lambda_1 \varepsilon''_{kk} + \lambda_3 \varepsilon''_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu_1 \varepsilon'_{ij} + 2\mu_3 \varepsilon''_{ij} - 2\lambda_3 h_{ij}, \\ \sigma''_{ij} &= (\alpha_2 + \lambda_4 \varepsilon'_{kk} + \lambda_2 \varepsilon''_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu_2 \varepsilon'_{ij} + 2\mu_4 \varepsilon''_{ij} + 2\lambda_3 h_{ij}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

სადაც  $\sigma'_{ij}, \sigma''_{ij}$  - ძაბვათა ტენზორის კომპონენტებია,  $\delta_{ij}$  - კრონეკერის სიმბოლოა,  $\pi_j = \partial_j \pi$  - ნარევის ორ მდგენელს შორის ურთიერთქმედების ძალებია

$$\pi = \frac{\alpha_2 \rho_2}{\rho} \varepsilon'_{kk} + \frac{\alpha_2 \rho_1}{\rho} \varepsilon''_{kk}, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2,$$

$\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$  - ნარევის მდგენელთა კერძო სიმკვრივეებია,  $F'_j, F''_j$  - მასიურ ძალთა ვექტორების კომპონენტებია,  $\alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  - ნარევის მექანიკური თვისებების მახასიათებელი დრეკადობის მოდულებია, ამასთან  $\alpha_2 = \lambda_3 - \lambda_4$ ,  $\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}$  - დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტებია

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u'_j + \partial_j u'_i), \quad \varepsilon''_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u''_j + \partial_j u''_i),$$

$h_{ij} = -h_{ji}$  - ნარევის მდგენელთა ე.წ. ბრუნვის ტენზორის კომპონენტებია

$$h_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u'_j - \partial_j u'_i + \partial_j u''_i - \partial_i u''_j),$$

$u' = (u'_1, u'_2, u'_3)$ ,  $u'' = (u''_1, u''_2, u''_3)$  - გადაადგილების ვექტორებია,  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

ზემოთ მოყვანილ ფორმულებში ლათინური ინდექსები ღებულობენ მნიშვნელობებს 1, 2, 3. ამასთან განმეორებითი ინდექსის მიმართ იგულისხმება შეჯამება.

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &:= (\sigma'_{ij} - \delta_{ij}(\pi - \alpha_2), \sigma''_{ij} + \delta_{ij}(\pi - \alpha_2))^T, \quad u_j := (u'_j, u''_j)^T, \\ e_{ij} &:= (\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij})^T, \quad h_{ij} := (h_{ij}, h_{ji})^T. \end{aligned} \quad (1.3)$$

(1.3) აღნიშვნების გათვალისწინებით (1.1) და (1.2) თანაფარდობები ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\partial_i \sigma_{ij} + f_j = 0, \quad (1.4)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2M e_{ij} - 2\lambda_3 h_{ij}, \quad (1.5)$$

სადაც



$$f_j = (\rho_1 F''_j, \rho_2 F''_j)^T, \quad (1.5)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \frac{\alpha_2 \rho_2}{\rho} & \lambda_3 - \frac{\alpha_2 \rho_1}{\rho} \\ \lambda_4 + \frac{\alpha_2 \rho_2}{\rho} & \lambda_2 + \frac{\alpha_2 \rho_1}{\rho} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_3 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{pmatrix},$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad (1.6)$$

$$h_{ij} = \frac{1}{2}S(\partial_i u_j - \partial_j u_i), \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

თუ (1.6) და (1.7) ფორმულებს ჩავსვამთ (1.5)-ში, მივიღებთ

$$\sigma_{ij} = \Lambda \partial_k u_k \delta_{ij} + (M - \lambda_5 S) \partial_i u_j + (M + \lambda_5 S) \partial_j u_i.$$

2. როგორც ზემოთ აღნიშნეთ, (1.4)-(1.7) სისტემიდან თ. ვაშაყაძის მეთოდით მიიღება რეისინერ-მინდლინის ტიპის ფორფიტის ღუნვის შესაბამისი განტოლებათა სისტემა (იხ. [8]). შემოვიღოთ  $Ox_1x_2$  სიბრტყეზე  $z = x_1 + ix_2$  კომპლექსური ცვლადი და ჩაწეროთ აღნიშნული სისტემა კომპლექსური ფორმით

$$\begin{cases} \partial_z [M_1 - M_2 + i(M_{12} + M_{21})] + \partial_{\bar{z}} [M_1 + M_2 + i(M_{12} - M_{21})] - \bar{z} Q = F_+^*, \\ \partial_z Q + \partial_{\bar{z}} \bar{Q} = F_3^*, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} M_1 - M_2 + i(M_{12} + M_{21}) = \frac{8h^3}{3} M \partial_z u_+^*, \\ M_1 + M_2 + i(M_{12} - M_{21}) = \frac{4h^3}{3} (\Lambda^* + M + \lambda_5 S) \theta^* - \frac{8h^3}{3} \lambda_5 S \partial_z u_+^* + \\ + \frac{2h^2}{3} \Lambda (\Lambda + 2M)^{-1} (I + 2\Gamma) (g_3^* - g_3^-), \end{cases} \quad (2.2)$$

$$Q_+ = 2h(I + 2\Gamma)^{-1} [(M + \lambda_5 S) u_+^* + 2(M - \lambda_5 S) \partial_{\bar{z}} u_3^*],$$

$$\bar{z} Q = 2h(I + 2\Gamma)^{-1} [(M - \lambda_5 S) u_+^* + 2(M + \lambda_5 S) \partial_z u_3^*],$$

სადაც

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2),$$

$$Q_+ = Q_{13} + iQ_{23}, \quad \bar{z} Q = Q_{31} + iQ_{32}, \quad u_+^* = u_1^* + iu_2^*, \quad F_+^* = F_1^* + iF_2^*,$$

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha} &= \int_{-h}^h x_3 \sigma_{\alpha\alpha} dx_3, \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-h}^h x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad Q_{\beta} = \int_{-h}^h \sigma_{\beta} dx_3, \\
 u_{\alpha}^* &= \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h x_3 u_{\alpha} dx_3, \quad u_3^* = \frac{3}{4h^3} \int_{-h}^h (h^2 - x_3^2) u_3 dx_3, \\
 F_{\alpha}^* &= - \left[ h(g_{\alpha}^+ + g_{\alpha}^-) + \int_{-h}^h x_3 f_{\alpha} dx_3 \right], \quad F_3^* = - \left[ (g_3^+ - g_3^-) + \int_{-h}^h f_3 dx_3 \right], \\
 g_j^{\pm} &:= \sigma_{3j}(x_1, x_2, \pm h), \quad \theta^* := \partial_z u_{\alpha}^* + \partial_z \bar{u}_{\alpha}^*, \\
 A' &:= A - A(A + 2M)^{-1}A, \\
 \Gamma &= \begin{pmatrix} \gamma' & 0 \\ 0 & \gamma'' \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

სადაც  $I - 2 \times 2$  ერთეულოვანი მატრიცაა,  $\gamma', \gamma''$  ნებისმიერი პარამეტრებია, ბერძნული ინდექსები ლებულობენ მნიშვნელობებს 1, 2. თუ ჩავსვამთ (2.2) ფორულებს (2.1) წონასწორობის განტოლებებში, მივიღებთ რეისნერის ტიპის შემდეგ სისტემას

$$\begin{cases} A \Delta u_{\alpha}^* + 2B \partial_z \theta^* - \frac{3}{h^2} (I + 2\Gamma)^{-1} [2(B - A') \partial_z u_3^* + A u_3^*] = \tilde{F}_{\alpha}^*, \\ A \Delta u_3^* + (B - A') \theta^* = \tilde{F}_3, \end{cases} \quad (2.3)$$

სადაც

$$A := M - \lambda_3 S, \quad B := \Lambda^* + M + \lambda_3 S, \quad \Delta = 4\partial_z \partial_z.$$

$$\tilde{F}_{\alpha}^* := \frac{3}{2h^3} F_{\alpha}^* - \frac{1}{h} A(A + 2M)^{-1} (I + 2\Gamma) \partial_z (g_{\alpha}^+ - g_{\alpha}^-), \quad \tilde{F}_3 := \frac{1}{2h} (I + 2\Gamma) F_3^*.$$

ჩავწეროთ (2.3) სისტემის ზოგადი ამოხსნა. აღნიშნული სისტემის მეორე განტოლებიდან გვაქვს ( $\theta^* = \partial_z u_{\alpha}^* + \partial_z \bar{u}_{\alpha}^*$ )

$$\Delta u_3^* + A^{-1} (B - \Lambda^*) (\partial_z u_{\alpha}^* + \partial_z \bar{u}_{\alpha}^*) = A^{-1} \tilde{F}_3. \quad (2.4)$$

დავუშვათ,  $\tilde{F}_3(x_1, x_2) \in L_p(\omega)$ ,  $p > 2$ . მაშინ (იხ. [9], თავი 1) (2.4)-დან ვღებულობთ

$$u_{\alpha}^* = -2(B - \Lambda^*)^{-1} A \partial_z u_3^* + i \partial_z w - (B - \Lambda^*)^{-1} \frac{1}{2\pi} \iint_{\omega} \frac{\tilde{F}_3(\xi_1, \xi_2)}{\zeta - \bar{z}} d\xi_1 d\xi_2, \quad (2.5)$$

სადაც  $w = (w_1, w_2)^T$  - ჯერჯერობით უცნობი  $w_1$  და  $w_2$  ნამდვილი ფუნქციებისაგან შედგენილი სვეტ-მატრიცაა,  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$  (მართლაც, თუ (2.5)-ის ორივე მხარეს გავაწარმოებთ  $z$ -ით, მაშინ მიღებული გამოსახულების რეალური ნაწილი მოგვცემს (2.4)-ს).

თუ (2.5) ჩავსვამთ (2.3) სისტემის პირველ განტოლებაში, იმავე განტოლებაში  $\theta^*$ -ის ნაცვლად შევიტანოთ



$$\theta^* = -(B - \Lambda^*)^{-1} A \Delta u_3^* + (B - \Lambda^*)^{-1} \bar{F}_3 \quad (2.6)$$

გამოსახულებას, რომელიც მიიღება (2.3)-ის მეორე განტოლებიდან, გვექნება

$$\partial_z \left\{ -2(A+B)(B-\Lambda^*)^{-1} A \Delta u_3^* + \frac{6}{h^2} (I+2\Gamma)^{-1} [A(B-\Lambda^*)^{-1} A - B + \Lambda^*] u_3^* + \right. \\ \left. + A i \left( \Delta w - \frac{3}{h^2} A^{-1} (I+2\Gamma)^{-1} A w \right) + W_0 \right\} = 0,$$

სადაც

$$W_0 = 2(A+B)(B-\Lambda^*)^{-1} \bar{F}_3 - \frac{3}{h^2} (I+2\Gamma)^{-1} A (B-\Lambda^*)^{-1} \frac{1}{\pi} \iint_{\omega} \bar{F}_3(\xi_1, \xi_2) \ln |\zeta - \bar{z}| d\xi_1 d\xi_2 + \\ + \frac{1}{\pi} \iint_{\omega} \frac{\bar{F}_+(\xi_1, \xi_2)}{\zeta - z} d\xi_1 d\xi_2.$$

ამ უკანასკნელი ფორმულიდან ვღებულობთ

$$-2(A+B)(B-\Lambda^*)^{-1} A \Delta u_3^* + \frac{6}{h^2} (I+2\Gamma)^{-1} [A(B-\Lambda^*)^{-1} A - B + \Lambda^*] u_3^* + \\ + A i \left( \Delta w - \frac{3}{h^2} A^{-1} (I+2\Gamma)^{-1} A w \right) = \varphi(z) - W_0, \quad (2.7)$$

სადაც  $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z))^T$ ,  $\varphi_1(z)$ ,  $\varphi_2(z)$  -  $\omega$  არეში  $z$  კომპლექსური ცვლადის ნებისმიერი ანალიზური ფუნქციებია.

თუ (2.7) ტოლობის ორივე მხარეს ვერ შევკრებთ თავიანთ შეუღლებულთან, ხოლო შემდგომ განვიხილავთ მათ სხვაობას, მივიღებთ შესაბამისად

$$\Delta u_3^* - \frac{3}{h^2} \tilde{A} u_3^* = -\frac{1}{4} A^{-1} (B - \Lambda^*) (A + B)^{-1} (\varphi(z) + \overline{\varphi(z)} - W_0 - \overline{W_0}), \quad (2.8)$$

$$2A i \left( \Delta w - \frac{3}{h^2} \hat{A} w \right) = \varphi(z) - \overline{\varphi(z)} - W_0 + \overline{W_0}, \quad (2.9)$$

სადაც

$$\tilde{A} = A^{-1} (B - \Lambda^*) (A + B)^{-1} (I + 2\Gamma)^{-1} [A(B - \Lambda^*)^{-1} A - B + \Lambda^*], \quad \hat{A} = A^{-1} (I + 2\Gamma)^{-1} A.$$

(2.8)-დან ვღებულობთ

$$u_3^* = \frac{h^2}{12} [A(B - \Lambda^*)^{-1} A - B + \Lambda^*]^{-1} (I + 2\Gamma) (\varphi(z) + \overline{\varphi(z)}) + L_1(\chi + \dot{\chi}), \quad (2.10)$$

სადაც  $\chi = (\chi_1, \chi_2)^T$ ,  $\chi_1$  და  $\chi_2$  ჰელმჰოლცის ერთგვაროვან განტოლებათა

$$\Delta \chi_1 - \frac{3}{h^2} \kappa_1 \chi_1 = 0, \quad \Delta \chi_2 - \frac{3}{h^2} \kappa_2 \chi_2 = 0$$

ზოგადი ამოხსნებია, აქ  $\kappa_1$  და  $\kappa_2$  -  $\bar{A}$  მატრიცის საკუთრივი რიცხვები, ხოლო  $L_1$  არის მატრიცი, რომლის სვეტებად ამ რიცხვების შესაბამისი საკუთრივი ვექტორებია,  $\dot{\chi} = (\dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2)^T$ ,  $\chi_1$  და  $\chi_2$  შესაბამის არაერთგვაროვან განტოლებათა კერძო ამოხსნებია

$$\Delta \chi_1 - \frac{3}{h^2} \kappa_1 \chi_1 = f_1(x_1, x_2), \quad \Delta \chi_2 - \frac{3}{h^2} \kappa_2 \chi_2 = f_2(x_1, x_2),$$

სადაც

$$(f_1, f_2)^T = \frac{1}{4} L_1^{-1} A^{-1} (B - A') (A + B)^{-1} (W_0 + \bar{W}_0),$$

$\overset{0}{\chi}_\alpha$  კერძო ამოხსნა შეიძლება აიგოს [9]-[10] შრომების მიხედვით. ვგულისხმობთ,  $\kappa_\alpha > 0$ ,

$$\overset{0}{\chi}_\alpha = \iint_{\omega} Y_\alpha \left( \frac{i\sqrt{3\kappa_\alpha}}{h} \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2} \right) f_\alpha(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

სადაც  $Y_0$  - ნულოვანი რიგის მორე გვარის ბესელის ფუნქციაა. (2.9)-დან ვღებულობთ

$$w = \frac{ih^2}{6} A^{-1} (\varphi(z) - \overline{\varphi(z)}) + L_2(\tau + \bar{\tau}), \quad (2.11)$$

სადაც  $\tau = (\tau_1, \tau_2)^T$ ,  $\tau_1$  და  $\tau_2$  ჰელმჰოლციის შემდეგ განტოლებათა ზოგადი ამოხსნებია

$$\Delta \tau_1 - \frac{3\nu_1}{h^2} \tau_1 = 0, \quad \Delta \tau_2 - \frac{3\nu_2}{h^2} \tau_2 = 0,$$

სადაც  $\nu_1$  და  $\nu_2$  არიან  $\bar{A}$  მატრიცის საკუთრივი რიცხვები, ხოლო  $L_2$  არის ამ საკუთრივი რიცხვების შესაბამისი საკუთრივი ვექტორებისაგან შედგენილი მატრიცი.

$\overset{0}{\tau} = \begin{pmatrix} \overset{0}{\tau}_1 \\ \overset{0}{\tau}_2 \end{pmatrix}^T$ ,  $\overset{0}{\tau}_1$  და  $\overset{0}{\tau}_2$ , შესაბამის არაერთგვაროვან განტოლებათა

$$\Delta \tau_1 - \frac{3\nu_1}{h^2} \tau_1 = \vartheta_1(x_1, x_2), \quad \Delta \tau_2 - \frac{3\nu_2}{h^2} \tau_2 = \vartheta_2(x_1, x_2), \quad (\vartheta_1, \vartheta_2)^T = \frac{i}{2} L_2^{-1} A^{-1} (W_0 - \bar{W}_0),$$

კერძო ამონახსნებია. თუ  $\nu_\alpha > 0$ , მაშინ ამოხსნები აიგება ზედა შემთხვევის სრული ანალოგიით.

(2.6) ფორმულაში (2.10)-ის ჩასმით  $\theta^*$  სიდიდისათვის ვღებულობთ

$$\theta^* = -\frac{3}{h^2} (B - A') A \bar{A} L_1 (\chi + \bar{\chi})$$

გამოსახულებას.

თუ (2.10) და (2.11) ფორმულებს ჩავსვამთ (2.5)-ში, მივიღებთ

$$u_* = iL_2 \partial_z (\tau + \dot{\tau}) + \frac{h^2}{6} [A^{-1} - (B - \Lambda^*)^{-1} A (A(B - \Lambda^*)^{-1} A - B + \Lambda^*) (I + 2\Gamma)] \overline{\varphi}(\bar{z}) - 2(B - \Lambda^*) AL_1 \partial_z (\chi + \dot{\chi}). \quad (2.12)$$

ამრიგად, (2.3) სისტემის ზოგადი ინტეგრალი გამოისახება კომპლექსური ცვლადის ორი ანალიზური ფუნქციისა და ოთხი ჰელმოლციის განტოლების ამოხსნის საშუალებით. თავის მხრივ, მეტაპარმონიულ განტოლებათა ამოხსნებისათვის ი. ვეკუას მიერ აგებულია ინტეგრალური წარმოდგენები ანალიზური ფუნქციების საშუალებით (იხ. [9]). თუ (2.10) და (2.12) გამოსახულებებს ჩავსვამთ (2.2) ფორმულებში, მივიღებთ მღწევი და მგრეზავი მომენტებისა და გადამჭრელ ძალთა გასაშუალოებული სიდიდეების კომპლექსურ კომინაციათა გამოსახულებებს შემოღებული ანალიზური ფუნქციების საშუალებით. მათი საშუალებით გამოისახება ასევე სასაზღვრო პირობები. აღნიშნულ ფუნქციათა სათანადო არჩევით შესაძლებელია ექვსი დამოუკიდებელი სასაზღვრო პირობის დაკმაყოფილება.

3. (1.4), (1.5) სისტემიდან მიიღება გაჭიმვა-კუმშვის შესაბამისი შემდეგ განტოლებათა სისტემა

$$\partial_z [\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} + i(\dot{\sigma}_{12} + \dot{\sigma}_{21})] + \partial_{\bar{z}} [\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} + i(\dot{\sigma}_{12} - \dot{\sigma}_{21})] = \dot{F}_+, \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} + i(\dot{\sigma}_{12} + \dot{\sigma}_{21}) = 4M\dot{\theta}_z \dot{u}_+, \\ \dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} + i(\dot{\sigma}_{12} - \dot{\sigma}_{21}) = 2B^* \theta - 4\lambda_3 S \dot{\theta}_z \dot{u}_+ + \Lambda(\Lambda + 2M)^{-1} \frac{1}{h} \int_{-h}^h \sigma_{33} dx_3, \end{cases} \quad (3.2)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad \dot{F}_+ = F_1 + iF_2, \quad \dot{F}_\alpha = \left[ g_\alpha^+ - g_\alpha^- + \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f_\alpha dx_3 \right], \\ \dot{u}_+ &= u_1 + iu_2, \quad \dot{u}_\alpha = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_\alpha dx_3, \quad \theta = \theta_z \dot{u}_+ + \partial_{\bar{z}} \dot{u}_+, \end{aligned}$$

შენიშვნა. კომპლექსურად შეუღლებული სიდიდეებისაგან განსხვავების მიზნით [7]-ში მიღებული აღნიშვნა (თავზე ხაზი) შევცვალეთ ვარსკვლავით ზემოთ და მარცხნივ.

თუ ჩავსვამთ (3.2) თანაფარდობებს (3.1) წონასწორობის განტოლებებში და გავითვალისწინებთ, რომ

$$\int_{-h}^h \sigma_{33} dx_3 = h(g_3^+ + g_3^-) - \frac{h^2}{3}(q_3^+ - q_3^-) + o(h^2), \quad v \leq 5,$$

სადაც

$$q_3^\pm = \partial_3 \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3)|_{x_3=\pm h},$$

მივიღებთ

$$A\Delta^* u_+ + 2B\partial_{\bar{z}}^* \theta = f_+, \quad (3.3)$$

სადაც

$$f_+ = F_+ - \Lambda(\Lambda + 2M)^{-1} \partial_{\bar{z}} \left[ g_+^* + g_3^- - \frac{h}{3}(q_3^+ - q_3^-) \right].$$

უსასრულო არის შემთხვევაში ჩავთვალოთ

$$f_+ = O\left(\frac{1}{|z|^{1+\alpha}}\right), \text{ როცა } z \rightarrow \infty, \alpha = \text{const} > 0.$$

(3.3) სისტემის ზოგადი ამოხსნა ჩაიწერება შემდეგი სახით (იხ. [12], [6])

$$\begin{aligned} 2^* u_+ = & A^* \varphi(z) - z\varphi'(z) - \psi(z) + \\ & + A^{-1}(2A+B)(A+B)^{-1} \frac{1}{2\pi} \iint_{\omega} f_+(\xi_1, \xi_2) \ln|\zeta - z| d\xi_1 d\xi_2 - \\ & - A^{-1}B(A+B)^{-1} \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega} f_+(\xi_1, \xi_2) \frac{\zeta - z}{\zeta - \bar{z}} d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned}$$

სადაც  $A^* = I + 2B^{-1}A$ ,  $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z))^T$ ,  $\psi(z) = (\psi_1(z), \psi_2(z))^T$  - ნებისმიერი ორი ანალიზური ფუნქციებისაგან შედგენილი სვეტ-მატრიცებია.



REFERENCES

1. Truesdell C., Toupin R. *The classical field theories in Hand buch der Physik*. Vol. III A., Berlin, Springer, 1960.
2. Green A.E., Nighdi P.M., Q. *J. Mech. Appl. Math.*, 31, part 3, 1978, pp. 265-293.
3. Green A.E., Nighdi P.M. *Int. J. Eng. Sci.* 3, 1965, pp. 231-341.
4. Natroshvili D.G., Jagmaidze A., Svanadze M. *Zh. Some problems of the linear theory of elastic mixtures*. TSU, Tbilisi, 1986 (Russian).
5. Gordeziani D.G. Report of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, Vol. 8, #3, 1993, pp. 13-16.
6. Bachechishvili M. *Georgian Mathematical Journal*, Vol. 4, #3, 1997, pp. 223-242.
7. Vashakmadze T.S. *The theory of anisotropic elastic plates*. Kluwer Acad. Publ. Program, Dordrecht-London-Boston, 1999.
8. ვაშაკმაძე თ., ჯანჯღაჯვა რ. *ფონ კარმან-რეისნერის ტიპის განტოლებათა სისტემის აგებისა და დაფუძნების შესახებ დრეკად ფირფიტათა ბინარული ნარევისათვის*. სტუ-ს შრომები, 2003, №1 (447), გვ. 53-65.
9. Веква И.Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений*. Гостехиздат. М., 1948.
10. Веква И.Н. *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек*. М., Наука, 1982.
11. Vashakmadze T. *To von Karman-Reissner Type Equations and Mathematical Modelinig of poro-Elasto-Plastic Media*. Proceedings of Javakhsivili Tbilisi State University: Appl.Math&Comp.Sciences. Vol. 343 (21), 2001, pp. 69-86.
12. Мухелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. М., Наука, 1966.

Accepted for publishing on January 20, 2002.

Reviewed on October 16, 2003.

THE MODEL. Assume fuzzy relations  $R_{12}$  and  $R_{23}$  are known. They can be constructed from the medical experience that was evidenced in the previous diagnosis. Then the fuzzy relation equation ([11], [13])

$$R_{12} \circ R_{23} = R_{13} \tag{1}$$

can be solved for  $R_{23}$ .

Next, the fuzzy set  $D_2$  of the possible diseases of the particular patient can be determined by equation

## ON THE GENERAL SOLUTION OF REISSNER-FILON TYPE SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR ELASTIC PLATES OF BINARY MIXTURES

*T. Vashakmadze, T. Meunargia, R. Janjgava*

*Tbilisi State University, VIAM*

There are considered von Karman-Reissner type systems of DE for elastic plates of binary mixtures constructing by methods of [7]. In linear case these systems split into Mindlin-Reissner and Filon type refined systems. Further using Muskhelishvili-Vekua methodology there are constructing general solutions in the such form, which are suitable for investigation and decision basing boundary value problems for these systems. In nonlinear case using some results of [11], there is proved that von Karman-Reissner type anisotropic systems of DE are equivalence to Volterra second kind nonlinear systems of integro-differential equations.

6. Bakhvalov N.S. *Mathematical Models of Composite Materials*, Vol. 1, 1994, pp. 123-143.

7. Vashakmadze T.S. *The theory of anisotropic elastic plates*. Kibrit Acad. Publ. Program, Constantinople-London, 1997.

8. Muskhelishvili N.I. *Singular Integral Equations*. Nauka Press, Moscow, 1968.

9. Boley N.H. *Stress in anisotropic materials*. McGraw-Hill, New York, 1965.

10. Boley N.H. *Anisotropic plates*. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

11. Vashakmadze T.S. *On the general solution of the von Karman-Reissner type system of differential equations for elastic plates of binary mixtures*. *Applied Math & Comp Science*, Vol. 24 (21), 2001, pp. 69-84.

12. Muskhelishvili N.I. *Singular integral equations*. Nauka Press, Moscow, 1968.

Accepted for publishing on January 26, 2002.  
 Revised on October 18, 2002.



## კომპიუტერული მეცნიერებები • COMPUTER SCIENCES

### TOWARDS A COMPUTER-ASSISTED SYSTEM ON THE BASIS OF CADIAG-SYSTEMS

T. Kiseliava

Tbilisi State University,  
Chair of Applied Mathematics and Computer Sciences

**Abstract.** CADIAG (Computer Assisted DIAGnosis) is a rule-based fuzzy medical expert system designed for internal medicine. Several extended versions of the system (CADIAG-II, CADIAG-IV) have been already developed at the University of Vienna. On the basis of this system there are other successful implementations. In this paper fuzzy methodologies used in CADIAG systems are considered and criticized to facilitate their applications in other medical fields.

**BASIC DEFINITIONS.** SANCHEZ approach [16], (see also [17]-[19], [27]) is used in CADIAG-systems to model diagnostic process. In this model the physician's knowledge is represented as fuzzy relations between symptoms and diseases

Let  $S$  be the crisp set of all symptoms,

$$S = \text{def}\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$$

Let  $D$  be the crisp set of all diseases,

$$D = \text{def}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$$

Let  $P$  be the set of patients,

$$P = \text{def}\{p_1, p_2, \dots, p_q\}$$

Let  $D_p$  be the fuzzy set of the possible diseases of the patient,

$$D_p : D \rightarrow [0, 1]$$

Let  $S_p$  be the fuzzy set of symptoms observed in the patient,

$$S_p : S \rightarrow [0, 1]$$

Let  $R_{SD}$  be the fuzzy relation between symptoms and diseases,

$$R_{SD} : S \times D \rightarrow [0, 1]$$

Let  $R_{PD}$  be the fuzzy relation between patients and diseases,

$$R_{PD} : P \times D \rightarrow [0, 1]$$

Let  $R_{PS}$  be the fuzzy relation between patients and symptoms,

$$R_{PS} : P \times S \rightarrow [0, 1].$$

**THE MODEL.** Assume, fuzzy relations  $R_{PS}$  and  $R_{PD}$  are known. They can be constructed from the medical experience that was evidenced in the previous diagnoses. Then the fuzzy relation equation ([11], [13])

$$R_{PS} \circ R_{SD} = R_{PD}, \quad (1)$$

can be solved for  $R_{SD}^2$ . Next, the fuzzy set  $D_p$  of the possible diseases of the particular patient can be determined by equation



$$D_p = \det S_p \circ R_{SD} \quad (2)$$

or (see [12], [9])

$$D_p(d) = \max_{s \in S} (\min(S_p(s), R_{SD}(s, d))) \quad (3)$$

for all  $d \in D$ .

**CRITICISM.** In spite of choosing the maximum solution in (1) "to avoid arriving at a relation that is more specific than our information warrants" [11] some problems are still left. In particular, relation  $R_{SD}$  can show more symptom-disease associations than they are in reality. Therefore the interpretation of diagnoses can be more complicated

**EXTENSION OF MODEL.** To make the diagnostic procedure more reliable several achievements were included in CADIAG-systems.

**RELATIONSHIP BETWEEN SYMPTOMS AND DISEASES.** Instead of solving the equation (1) for  $R_{SD}$ , two types of  $R_{SD}$  are explicitly defined:

1. *An occurrence relation  $R_{SD}^o$*  that answers the question "How often does symptom  $s$  occur with disease  $d$ ?"
2. *A confirmability relation  $R_{SD}^c$*  that answers the question "How strongly does symptom  $s$  confirm disease  $d$ ?"

Why it is necessary to introduce at least these two kinds of symptoms-diseases relations? "The distinction between occurrence and confirmability is useful because a symptom may be quite likely to occur with a given disease but may also commonly occur with several other diseases, therefore limiting its power as a discriminating factor among them. Another symptom, on the other hand, may be relatively rare with a given disease, but its presence may nevertheless constitute almost certain confirmation of the presence of the disease" [11].

**HOW TO DEFINE RELATIONS BETWEEN SYMPTOMS AND DISEASES.** Two relations  $R_{SD}^o$  and  $R_{SD}^c$  can be defined

1. *linguistically*, from expert medical documentation, or
2. *by statistical means*, from medical database evaluation.

**LINGUISTICALLY.** Expert medical documentation usually takes the form of statements such as "Symptom  $s$  seldom occurs in disease  $d$ " or "Symptom  $s$  often indicates disease  $d$ ". In [3] symptoms dyspnoea and chorea are described. Symptom dyspnoea often occurs in patients suffering from scleroderma, but dyspnoea has such a small discriminating value in differential diagnosis of rheumatic diseases that its confirmability for scleroderma is low. In contrast, symptom chorea occurs very seldom in patients suffering from rheumatic fever, but if it occurs it confirms rheumatic fever.

In *simplified* linguistic definition of symptoms-diseases relations the membership grades 1., .75, .5, .25 and 0 are assigned to linguistic terms (used by physicians) *always*, *often*, *unspecific*, *seldom* and *never* correspondingly. If the physician says, for example, that symptom  $s_1$  occurs *very seldom* in patients with disease  $d_1$ , and symptom  $s_1$  *seldom* confirms the presence of disease



$d_2$ , values .0625 and .25 take their places in the correspondent matrices of relations  $R_{SD}^o$  and  $R_{SD}^e$ , e.g.,

$$R_{SD}^o = \begin{matrix} & d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ s_1 & .0625 & & & \\ s_2 & & & & \\ \dots & & & & \\ s_m & & & & \end{matrix}, \quad R_{SD}^e = \begin{matrix} & d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ s_1 & .25 & & & \\ s_2 & & & & \\ \dots & & & & \\ s_m & & & & \end{matrix}$$

To define linguistic terms such as "very seldom", for example, corresponding linguistic modifiers are used (see [21], [8]).

Another possibility to calculate linguistically symptoms-diseases relations is to define fuzzy subsets *always*, *often*, *unspecific*, *seldom*, *never* by a function:

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 0, & x \leq \alpha, \\ 2 \left( \frac{x - \alpha}{\gamma - \alpha} \right)^2, & \alpha \leq x \leq \beta, \\ 1 - 2 \left( \frac{x - \alpha}{\gamma - \alpha} \right)^2, & \beta \leq x \leq \gamma, \\ 1, & x > \gamma, \end{cases}$$

$x \in \{1, 2, \dots, 100\}$ . For example,  $always(x) = def(x; 97, 98, 99)$ . If the physician believes that in 98 or 100 cases symptom  $s_2$  always confirms  $d_1$  the corresponding value for the matrix of relation  $R_{SD}^e$  is calculated from fuzzy set *always* and the estimation of the physician.

**BY STATISTICAL MEANS.** In hospital information systems [19] there is a large amount of medical records of patients including all relevant symptoms as well as final diagnoses. That can be used to calculate symptoms-diseases relations.

Occurrence of a symptom  $s$  in the case of disease  $d$  can be defined by relative frequency of occurrence of  $s$  with  $d$ . Assuming  $x_2$  cases of  $d$  and counting a frequency of  $x_1$  for  $s$ , the relative frequency of occurrence of  $s$  with  $d$  is calculated as:

$$x_o = \frac{x_1}{x_2} \cdot 100$$

For example [13], suppose that in 67 patients suffering from gout, tophi was found in 13 cases.

Then  $x_o = \frac{13}{67} \cdot 100 = 19.4$ . Defining additionally the fuzzy set *occurrence* as  $occurrence(x) = def(x; 1, 50, 99)$  (see Fig.1), corresponding element for  $R_{SD}^o$  is 0.07:

THEN (due to (3))

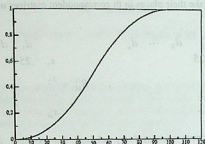


Figure 1: An example of fuzzy set  $occurrence(x) =_{\text{def}} f(x; 1, 50, 99)$

$occurrence(19.4) = f(19.4; 1, 50, 99) = 0.07$ . The confirmability of the symptom is defined analogously.

Symptoms-diseases relationships are presented as rules in CADIAG-systems:

IF ... THEN ... WITH (occurrence, confirmation)

**EXAMPLE.** IF (ultrasonic of pancreas is pathological) THEN (pancreatic cancer)  
WITH (0.75 ~often, 0.25 ~weak).

**THE DIAGNOSTIC PROCESS.** Due to information about occurrence and confirmability of symptoms and diseases at least four fuzzy indications for diagnoses are calculated by means of a fuzzy relation composition. "At least" means that the last versions of CADIAG-systems incorporate not only relations between symptoms and diseases, but also between diseases themselves, between symptoms themselves and between combinations of symptoms and diseases. Therefore these indications can be more (due to [14], nine)

1. symptoms-diseases occurrence indication:  $D_p^1 =_{\text{def}} S_p \circ R_{SD}^o$
2. symptoms-diseases confirmability indication:  $D_p^2 =_{\text{def}} S_p \circ R_{SD}^c$
3. symptoms-diseases nonoccurrence indication:  $D_p^3 =_{\text{def}} S_p \circ (1 - R_{SD}^o)$
4. nonsymptoms-diseases occurrence indication:  $D_p^4 =_{\text{def}} (1 - S_p) \circ R_{SD}^o$

This list can be continued for confirmability analogously. The results of inference process can be interpreted as:

1. confirmed
2. excluded
3. possible

diagnoses.

The membership grades of fuzzy sets ( $D_p^1, D_p^2, D_p^3, D_p^4, \dots$ ) denote the degree of certainty with which each possible diagnostic label (confirmed, excluded, possible) can be assigned to the patient.

For example, if  $D_p^2(d_i) = 1$  a confirmed diagnosis of disease  $d_i$  can be made for a patient  $p$ . An excluded diagnosis can be made if  $D_p^3(d_i) = 1$  or  $D_p^4(d_i) = 1$ . The confirmed diagnoses should explain any pathological symptom, indication, or lab test result of the patient. Unexplained data (usually) indicate further diseases to be investigated.

**EXPLANATION OF DIAGNOSTIC RESULTS.** On request, confirmed, excluded, possible diagnoses, inferred by system, can be explained. CADIAG-2, for example, gives the names of the medical entities, their definitions, their measured and fuzzy values and their relationships to the diagnostic output.

**CONCLUSIONS.** CADIAG-systems were tested for patients (about 400) from rheumatological hospital on diseases like rheumatoid arthritis, gout, Bechterew's disease, Sjögren's disease, systematic lupus erythematosus, Reiter's disease and Scleroderma. CADIAG-2/RHEUMA, CADIAG-2/PANCREAS or MEDFRAME/CADIAG-4 are existing versions of these systems. According to the American Rheumatism Association (see, for example [10]) the criteria for these diseases (and additionally for rheumatology diseases, rheumatic fever, psoriatic arthritis, Bechet's disease) are clearly defined. Certain combinations of symptoms prove these diagnoses if excluding symptoms are missing.

Partial testing of the systems on patients with rheumatological diseases produced an accuracy of 94,5 % in achieving correct diagnoses. The fault diagnoses could be explained due to the following reasons:

- the patient was in hospital only temporarily;
- the patient was in the early stages of one of diseases.

**PROBLEMS OF CADIAG\_SYSTEMS.** In spite of the CADIAG-systems often give acceptable results and share the property that they can never get certainty (value 1) from uncertain contributions several open question are still to be investigated.

- These systems during the process of inference, get a number attached to a diagnosis. The supposive interpretation of this number as a belief on the presence  $d$  given the knowledge and data, is not obvious.
- Consider an example [7]:

#### EXAMPLE

$$\text{IF } S_p(s_1) = 1 \text{ and } R_{SD}^c(s_1, d_1) = 0.7$$

$$S_p(s_2) = 1 \text{ and } R_{SD}^c(s_2, d_2) = 0.7$$

$$S_p(s_3) = 1 \text{ and } R_{SD}^c(s_3, d_1) = 0.7$$

THEN (due to (3))

$$D_p = \{(d_1, 0.7), (d_2, 0.7)\}$$

If other conditions are considered, for example,

$$S_p(s_1) = 0.9$$

$$S_p(s_2) = 0.9$$

$$S_p(s_3) = 0.7$$

the result is

$$D_p = \{(d_1, 0.7), (d_2, 0.7)\}$$

as well. But intuitively in this case  $D_p(d_1)$  and  $D_p(d_2)$  should be less values.

## REFERENCES

1. Kupradze V., Gegelia T., Basheleishvili M., Burchuladze T. *Three-Dimensional Problems of Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity*. M.; Nauka, 1976.
2. K.-P. Adlassnig. Fuzzy set theory in medical diagnosis. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 16(2):260-265, 1986.
3. K.-P. Adlassnig. Fuzzy set theory and fuzzy logic in medicine. In *MIF'99: The International Symposium on Medical Informatics and Fuzzy Technology, Hanoi, Vietnam*, volume 1, pages 134-138, August, 26-29 1999.
4. K.-P. Adlassnig and G. Kolarz. CADIAG-2: computer-assisted medical diagnosis using fuzzy subsets. In M.M. Gupta and E. Sanchez, editors, *Approximate Reasoning in Decision Analysis*, pages 495-505. North Holland Publishing Company, 1982.
5. M. Fathi-Torbaghan and D. Meyer. DSMD-A decision support system for medical diagnosis. In *Second European Congress on intelligent Techniques and Soft Computing*.
6. M. Fathi-Torbaghan and D. Meyer. MEDUSA: A fuzzy expert system for medical diagnosis of acute abdominal pain. *Methods of Information in Medicine*, 33(5):522-529,
7. D.H. Hung and et al. Development of an expert system for lung diseases using fuzzy logic. In *MIF'99: The International Symposium on Medical Informatics and Fuzzy Technology*,
8. P. Hájek, P.H. Nguyen, and M. Daniel. CADIAG-2 and MYCIN-like Systems. *Artificial Intelligence in Medicine*, 9:241-259, 1997.
9. E.E. Kerre and M. De Cock. Linguistic modifiers: an overview. In *Fuzzy Logic and Soft Computing*, pages 69-85. Kluwer Academic Publishers, 1999.
10. T. Kisiljova and C. Moraga. On incorporation of time in medical expert systems. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 21:19-30, 2000.

11. G. Kolarz. Diagnosekriterien entzündlich rheumatischer Erkrankungen. In *Entzündlich-rheumatische Erkrankungen-ihre Bedeutung für den praktizierenden Arzt. Pensionsversicherungsanstalt der Arbeiter und Fa.*, pages 39-42. Merck Sharp and Dohme Wien, 1977.
12. G.J.Klir and B. Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications*. Prentice Hall PTR, 1995.
13. S. Lehmknecht, B. Reusch, K.-H. Temme, and H. Thiele. On interpreting fuzzy IF-THEN rule bases by concepts of functional analysis. Technical Report CI-19/98, Universität Dortmund, February 1998.
14. J.N. Mordeson, D.S. Malik, and S.-C. Cheng. *Fuzzy Mathematics in Medicine*. Physica-Verlag Heidelberg New York, 2000.
15. T. E. Rothenfluh, K. Bögl, and K.-P. Adlassnig. Representation and acquisition of knowledge for a fuzzy medical consultation system.
16. In P.S. Szczepaniak, P.J.G. Lisboa, and J. Kacprzyk, editors, *Fuzzy Systems in Medicine*, pages 636-651. Physica Verlag Heidelberg New York, 2000.
17. E. Sanchez. Medical diagnosis and composite fuzzy relations. In M. M. Gupta, R. K. Ragade, and R. R. Yager, editors, *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, pages 437-444. North-Hollands, New York, 1979.
18. E. Sanchez, editor. *Fuzzy Information, Knowledge Representation and Decision Analysis*. Pergamon Press, Oxford, 1984.
19. E. Sanchez. Solution of fuzzy equations with extended operations. *Fuzzy Sets and Systems*, pages 237-248, 1984.
20. E. Sanchez. Medical applications with fuzzy sets. In A. Jones, A. Kaufmann, and H.-J. Zimmermann, editors, *Fuzzy Sets Theory and Applications*, pages 331-347. D. Reidel, Boston, 1986.
21. R.H. Shannon. *Hospital Information Systems*. North Holland Publishing Company Amsterdam-New York-Oxford, 1979.
22. E. Sanchez and L.A. Zadeh, editors. *Approximate Reasoning in Intelligent Systems, Decision and Control*. Pergamon Press, Oxford, UK, 1987.
23. H. Thiele. Interpreting linguistic hedges by concepts of functional analysis and mathematical logic. In *6th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing*, September 7-10, 1998.

Accepted for publishing on October 20, 2002.

Reviewed on August 25, 2003.

ავტომატიზირებული სისტემები ავტომატიზირებული დიაგნოსტიკის სისტემების ბაზაზე

ტ. კისელია

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამაყენებითი მეთოდების და კომპიუტერული მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ავტომატიზირებული დიაგნოსტიკის სისტემები არის შინაგანი მედიცინისათვის დამუშავებული, წესებზე დამყარებული არამკაფიო სამედიცინო ექსპერტული სისტემა. ამ სისტემის რამოდენიმე გაფართოება უკვე შეიქმნა ვენის უნივერსიტეტში. ამ სისტემის ბაზაზე არსებობს სხვა წარმატებული რეალიზაციები. ნამშრომნი განხილული და შეფასებულია ავტომატიზირებული დიაგნოსტიკის სისტემების გამოყენებული არამკაფიო მეთოდები სხვა სამედიცინო დარგებში დასაინჟინერავად.

1. T. E. Kishelava, K. Bögl, and K. F. A. Schneider, "Development of a knowledge-based expert system for medical diagnosis," *Artificial Intelligence in Medicine*, vol. 2, pp. 3-13, North-Holland, New York, 1979.

2. T. E. Kishelava, K. Bögl, and K. F. A. Schneider, "A knowledge-based expert system for medical diagnosis," *Artificial Intelligence in Medicine*, vol. 2, pp. 3-13, North-Holland, New York, 1979.

3. T. E. Kishelava, K. Bögl, and K. F. A. Schneider, "A knowledge-based expert system for medical diagnosis," *Artificial Intelligence in Medicine*, vol. 2, pp. 3-13, North-Holland, New York, 1979.

4. T. E. Kishelava, K. Bögl, and K. F. A. Schneider, "A knowledge-based expert system for medical diagnosis," *Artificial Intelligence in Medicine*, vol. 2, pp. 3-13, North-Holland, New York, 1979.

5. T. E. Kishelava, K. Bögl, and K. F. A. Schneider, "A knowledge-based expert system for medical diagnosis," *Artificial Intelligence in Medicine*, vol. 2, pp. 3-13, North-Holland, New York, 1979.

6. T. E. Kishelava, K. Bögl, and K. F. A. Schneider, "A knowledge-based expert system for medical diagnosis," *Artificial Intelligence in Medicine*, vol. 2, pp. 3-13, North-Holland, New York, 1979.

7. T. E. Kishelava, K. Bögl, and K. F. A. Schneider, "A knowledge-based expert system for medical diagnosis," *Artificial Intelligence in Medicine*, vol. 2, pp. 3-13, North-Holland, New York, 1979.

8. T. E. Kishelava, K. Bögl, and K. F. A. Schneider, "A knowledge-based expert system for medical diagnosis," *Artificial Intelligence in Medicine*, vol. 2, pp. 3-13, North-Holland, New York, 1979.

9. T. E. Kishelava, K. Bögl, and K. F. A. Schneider, "A knowledge-based expert system for medical diagnosis," *Artificial Intelligence in Medicine*, vol. 2, pp. 3-13, North-Holland, New York, 1979.

10. T. E. Kishelava, K. Bögl, and K. F. A. Schneider, "A knowledge-based expert system for medical diagnosis," *Artificial Intelligence in Medicine*, vol. 2, pp. 3-13, North-Holland, New York, 1979.

## სიმრცე=>დრო სემანტიკური გავრცობა და თანდაზღვევის ასიმეტრია ქართულში

ი. შადური

ზოგიერთი და გამოყენებითი ენათმეცნიერების კათედრა

ასტრატული რამდენადღაც ენაში სამყაროს მიაბიტი ხდება აისახება, სივრცითი სიტუაციის გამოხატველ ზოგიერთ ენობრივ გამონათქვამში სამგანზომილებიანი ორიენტირი შეიძლება წარმოდგენილი იყოს როგორც ორ-, ერთ- ან ნულგანზომილებიანი ობიექტი, რაც სივრცე=>დრო სემანტიკური გადასვლის პარალელიზმს განაპირობებს, ასეთი ვითარება გვაქვს ქართულ ბმულ სივრცით თანდებულთა მიკროსისტემაში, რომლის წვერთა უმრავლესობა სივრცე=>დრო სემანტიკურ გავრცობას განიცდის. -დან და -მდე თანდებულები ასიმეტრიულ წვეილებს წინან ორივე სემანტიკურ ველში, რაც საწესი და ბოლო პუნქტის ცნებათა იერარქიას უკავშირდება.

მსოფლიოს ენათა უმრავლესობაში, თუ ყველაში არა, სივრცის სემანტიკური ველი დონორის ზონას წარმოადგენს დროის ველისათვის. ამას მარტივი კოგნიტური საფუძველი აქვს: გავლილი მანძილი გარკვეული დროის გავლას უკავშირდება. ისეთი ქართული სიტყვები, როგორცაა *წინ*, *თაყზე* ("ზედ"), *მანძელზე*, *ძალიან*, *მონაკეთი*, *მოსვლა*, თანდებულები - *მდე*, -*ში*, -*დან* და *სხვ.* პირველადი სივრცითი მნიშვნელობების გარდა დროით მნიშვნელობებსაც გამოხატავენ. შდრ., მაგ., *ორი ეკოლოგების/ორი წლის მანძელზე*, *გაზაფხული/მატარებელი მივიდა*, *შენობის/ძილის წინ*, *ათასწლეულებს/ზღვის ძილს* და *სხვ.*

ერთი შეხედვით, იმთავითვე უნდა გამოირიცხოს სივრცისა და დროის სემანტიკური ველების იზომორფიზმი, რადგან, სივრცისგან განსხვავებით, ერთზე მეტგანზომილებიანი დრო არ არსებობს; მაგრამ ისიც უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ენაში მოცემულია სამყაროს არა მეცნიერული, არამედ "გულუბრყვილი" ხედვა, რაც დროსა და სივრცესთან დაკავშირებული ცნებების ენობრივ გააზრებაშიც ელნიდება. კერძოდ, სივრცითი განზომილების მქონე ერთი და იგივე ობიექტი კონკრეტულ გამონათქვამებში სხვადასხვაგვარად შეიძლება იყოს ინტერპრეტირებული - როგორც ერთი, ორი, სამი ან ნული განზომილების მქონე. შდრ., მაგ., ასეთი გამონათქვამები: *ქალაკამდე მანქანით მივიდნენ*; *ქალაქის გარშემო ბაღებია გაშენებული*; *ქალაქში მტრელები დაფრინავენ*. პირველ გამონათქვამში *ქალაქი* წერტილოვან, ნულგანზომილებიან ობიექტად არის წარმოდგენილი, მეორეში - ორგანზომილებიან, მესამეში კი სამგანზომილებიან ობიექტად. ამ განსხვავებებს განაპირობებს არა მარტო თანდებულისა და ორიენტირის ანუ იმ სახელის მნიშვნელობა, რომელზეც თანდებულია დართული, არამედ იმ ზმნის სემანტიკაც, რომელიც მართავს მოცემულ თანდებულიან ფრაზას.

ჩვენი კვლევის ძირითადი ობიექტია იმ ბმულ, ე.ი. აფიქსის სახით არსებულ თანდებულთა სემანტიკური ანალიზი, რომელთა მნიშვნელობები სივრცე=>დრო მეტაფორულ გარდაქმნას განიცდიან, და ის, თუ რა კონცეპტებს იძლევა ეს გარდაქმნა დროის ველში.

განსახილველი მიკროსისტემა შემდეგი ექვსი პირველადი ანუ ბაზისური თანდებულისაგან შედგება: -*მღე*, -*ღან*, -*კენ*, -*თან*, -*ზე*, -*ში*. ამათგან ბოლო სამი როგორც განლაგებას, ისე მიმართულებას გამოხატავს. ენახოთ, რამდენგანზომილებიან ობიექტად შეიძლება წარმოგვიდგეს ორიენტირი სხვადასხვა თანდებულებთან კომბინაციაში.

-*კენ* და -*მღე* მსგავსია იმ თვალსაზრისით, რომ ორივეს ორიენტირი, ჩვეულებრივ, ნულგანზომილებიან ობიექტს გულისხმობს (*ხისკენ გაეშარათა, მოდნამღე ფეხით იარეს*); -*თან* შეიძლება ნულ- ან ერთგანზომილებიან ობიექტზე წარმოდგენასთან იყოს დაკავშირებული (*ჭიშკართან მივიდა, მდინარესთან სვირნობს*), -*ზე* - ერთ- ან ორგანზომილებიან ობიექტზე წარმოდგენასთან (*ცხაზე მადის, იატაკზე დაკოყავს*), ხოლო ყველაზე უფრო ფართო მნიშვნელობის მქონე -*ში* ამ მხრივ მაქსიმალურ შესაძლებლობებს ავლენს (*დერეფანში მირბის, ნემსში ძფი გაუყარა, თევზი წყალში დაკურავს*). ნულგანზომილებიან ობიექტს -*ზე* და -*ში* თანდებულები ძირითადად მათემატიკურ ტექსტებში გულისხმობენ (*მოკეთულ წერტილზე გაივლის, ერთ წერტილში აკეთობიან*).

ამგვარი აღწერისას კარგად ჩანს, რომ -*მღე* და -*ღან* სიმეტრიულ ანტიონიმურ წყვილად ვერ ჩაითვლება, რადგან -*ღან* შეიძლება არა მარტო ნულგანზომილებიან, არამედ ერთგანზომილებიან ობიექტსაც გულისხმობდეს; მაგალითად, *ტოტიდან ვაშლი ჩამოვარდა, კონვერტიდან წერილი ამოვიღე, მდინარე კალაპოტიდან გამოვიდა*.

აღბათ ბუნებრივია, რომ არამარკირებული -*ში* თანდებული ყველაზე ადვილად განიცდის მეტაფორიზაციას, ამასთან, სიერცე=>დრო გავრცობისას იგი გამოიყენება არა ორი (ლოკალიზაციისა და გეზის), არამედ სამი მნიშვნელობით; სახელდობრ, იგი გამოხატავს: 1) დროში ლოკალიზაციას - შედარებით უფრო დიდი მონაკვეთების აღმნიშვნელი სიტყვების კონტექსტში; 2) დროში განფენილობას ("განმავლობაში" მნიშვნელობას); 3) "შემდეგ" მნიშვნელობას. შდრ., მაგ., *ზამთარში ერთმანეთს შეხედნენ/ხვდებოდნენ; მეთვრამეტე საუკუნეში აღმოაჩინა/მოიღაწეობდა; სურდომ ხუთ დღეში გაუარა*. ამ მნიშვნელობებიდან პირველი აშკარად ზმნური მოქმედების ხასიათზეა დამოკიდებული. შედარებით უფრო შეზღუდულია -*ზე* ("ორიენტირის გარეთ", "შეხებით") თანდებული, რომელიც დროის მცირე და კონკრეტული შუალედების, აგრეთვე "გარდამავალი", დროის უფრო მოკლე მონაკვეთებად აღქმული სეზონების აღმნიშვნელ ტერმინებთან გვხვდება. მისი და -*ში* თანდებულის ურთიერთმიმართების თვალსაზრისით არსებითია ამ უკანასკნელის პოლისემიურობის უფრო მაღალი ხარისხი დროის მნიშვნელობით გამოყენების შემთხვევაში; -*ზე* თანდებულის შემცველ ფრაზებს, რომლებშიც უფრო ხშირად დროში ზუსტი ლოკალიზაციაა მითითებული, უპირისპირდება "შემდეგ" მნიშვნელობით გამოყენებული -*ში* თანდებულებიან ფრაზები: შდრ. მაგ., სამ საათზე /სამ საათში დავბრუნდები. დროში განფენილობის მნიშვნელობა აქვს -*ზე* თანდებულსაც, თუმცა ძირითადად ისეთი ორიენტირების კონტექსტში, რომლებიც დროს მხოლოდ არაპირდაპირი მნიშვნელობით ხმარებისას გამოხატავენ ("...-ის დროს"), მაგ., გაკვეთილზე სძინავს, შდრ. გაკვეთილი მოამზადა, გაკვეთილზე წავიდა.



-დან და -მდე გარკვეულ ასიმეტრიას ავლენენ დროის ველშიც: ზაფხულიდან ნიშნავს არა მხოლოდ “ზაფხულის დადგომის/დამთავრების მომენტიდან”, არამედ, აგრეთვე “ზაფხულის პერიოდიდან”. არამარკირებულია ისევე -დან თანდებული, რომლის მნიშვნელობა უფრო ფართოა; უფრო ზუსტად, -დან და -მდე პრეიატული ოპოზიციის წევრებს არ წარმოადგენენ (ერთმანეთს ერთი ნიშნით არ უპირისპირდებიან), რადგან -მდე შეიცავს როგორც ბოლო პუნქტის, ისე ზღვარის სემანტიკას, -დან კი მხოლოდ საწყისი პუნქტისას (მათი განმარტებება, შესაბამისად: “ორიენტირი ზღვრული პუნქტია გზის ბოლოს” და “ორიენტირი ამოსავალი პუნქტია”). როგორც ვხედავთ, მეტაფორული გაცრეობის დროს ამ შემთხვევაში გარკვეული პარალელიზმი გვაქვს. -დან ~ -მდე დროით წველიში არსებული ასიმეტრიის ასახვად შეიძლება მოვიშველიოთ დაწვება ~ შეწვევა ტიპის ანტიონიმები: შეწვევა თავის განმარტებაში “დაწვებასაც” გულისხმობს (თამაში შეწვევა დაახლოებით განიმარტება როგორც “არ-თამაში დაიწყო”), მაგრამ არა პირიქით, რაც საწყისი და ბოლო პუნქტის ცნებათა გარკვეულ იერარქიაზე მიგვითითებს.

საერთადაღება, რომ გეზის გამოხატველ თანდებულებს შორის ველაზე უფრო აბსტრაქტული -კენ (“ორიენტირის მიმართულებით”) ხსენებულ მეტაფორულ გარდაქმნას არ განიცდის. “დროის გარკვეულ მონაკვეთთან მიხედვით” გამოხატავს -თვის თანდებული, რომლის პირველადი მნიშვნელობა სივრცითი არ არის (“ქართული ენის განმარტებით ლექსიკონში” მითითებულია მისი ერთადერთი - დანიშნულების, განკუთვნილობის მნიშვნელობა, თუმცა დროის სემანტიკური ველის სიტყვებთან კომბინირებისას -თვის ამ მნიშვნელობას არ გამოხატავს: მაგ., ხუთშაბათისთვის ველოდი).

შესაძლოა, ქართული ენობრივი ცნობიერებისთვის დროის მიმართულება ერთმნიშვნელოვნად წინსვლითია (სხვა ენებში ვითარება შეიძლება განსხვავებული იყოს; შდრ., მაგ., რუს. два дня назад, სიტყვასიტყვით “ორი დღის უკან” და ქართ. ორი დღის წინ), რის გამოც საკუთრივ მიმართულების გამოხატველი -კენ მორფემით მისი გადმოცემა ვარაი აღმოჩნდა. თუმცა ეს მხოლოდ ვარაუდია.

-თან (“ორიენტირის სიახლოვეს”) დროითი მნიშვნელობით მალთან შეზღუდულად იხმარება. ამის მიზეზი შეიძლება იყოს ამ თანდებულის პროტოტიპული “გვერდით” მნიშვნელობა, რომელიც დროის წრფივად მიმართულ მიმდინარეობას არ მიესადაგება. აქ სწორედ სივრცისა და დროის განზომილებათა რაოდენობრივი განსხვავება იჩენს თავს.

ა. ვეზიციკა დროის ველში პრიმიტივებად (პირველად ცნებებად) მიიჩნევა შემდეგ ცნებებს: “როცა”, “(მან)მდე”, “ღიხანს”, “ცოტა ხანს”, “ახლა”. ამათგან ქართულში ბმული თანდებულებით მხოლოდ პირველი სამი გამოიხატება: -ში (“როცა”, “შემდეგ”), -ზე (“როცა”), -მდე (“მანამდე” ანუ “-მდე”) და -დან (“შემდეგ”) თანდებულები.

აქვე შევნიშნავთ, რომ -თვის თანდებული, რომელიც საკარაულოდ თავისი ნაცვალსაზღვურ ლექსემას უკავშირდება, ზოგ შემთხვევაში -ზე თანდებულსაც ენაცვლება და მასთან კომბინირებს კიდევ როგორც სივრცითი, ისე დროითი მნიშვნელობის გამოხატველ თავზე ლექსემასში: ერთი წლის/შენობის თავზე, შდრ.

მიზეზისა და მიზნის, აგრეთვე საუბრის ობიექტის მნიშვნელობით – *ზე* და –*თვის* თანდებულთა გამოყენება: *რისთვის/რაზე წავიდა? მისთვის/მასზე ღელავს* (პირველი ვარიანტი სტილისტურად შეფერვილია), “*თანხმავანთკომპლექსთა შესწავლისათვის ქართულში*” (წერილის სათაური).

ამგვარად, ხსენებული სემანტიკური გავრცობის დროს ზოგიერთი მიმართება ბმული თანდებულებით გამოხატულ კონცეპტებს შორის შენარჩუნებულია, თუმცამ სრულ პარალელიზმი, როგორც მოსალოდნელი იყო, არ დასტურდება.

### ლიტერატურა

1. Jackendoff R.S. *Semantic Structures*. Cambridge, MA: The MIT Press, 1990.
2. Lakoff G. and Johnson M. *Metaphors We Live By*. Chicago: University of Chicago Press, 1980.
3. Talmy L. *How Language Structures Space*. In *Spatial Orientation: Theory, Research, and Application*, New York: Plenum Press, 1983.
4. Verkuyl H. and Zwarts J. *Time and Space in Conceptual and Logical Semantics: The Notion of Path*. “Linguistics”, vol.30, Amsterdam, 1992.
5. Wierzbicka A. *Semantics. Primes and Universals*: Oxford University Press, 1996.

*Accepted for publishing on Jun 25, 2002.*

*Reviewed on October 23, 2002.*

## SPACE=> TIME SEMANTIC EXTENSION AND THE ASYMMETRY OF POSTPOSITIONS IN GEORGIAN

**I. Shaduri**

*Computer Software and Informational Technologies chair*

In the linguistic conception of world a three-dimensional landmark may appear to be a two-, one- or even a zero-dimensional object. Therefore, though time cannot be more than one-dimensional, the Space=>Time shifting in language systems often turns to be parallel. Four out of six Georgian basic postpositions undergo the Space=>Time extension. It seems natural, that the latter isn't typical for the *-tan* postposition, the spatial meaning of which is “on (one) side of”. As to *-k'en*, expressing direction as such, the extension is restricted: probably the idea of one-way directed time is evident for the Georgian mentality and need no underlining.

The postpositions *-dan* (“from”) and *-mde* (“to”, “until”) form an asymmetric pair in semantic fields both of space and of time. That is due to the hierarchy of notions of **source** and **target**.

სტრუქტურა

• CURRENT NEWS

აკადემიკოსი რევაზ გამყრელიძე



ქართველი მათემატიკოსის მიერ მიღებული შედეგებისა და მისი საერთაშორისო აღიარების დადასტურებაა 1971-1990 წლებში მართვის თეორიის კათედრის გამგის, აკადემიკოს რევაზ გამყრელიძის მოღვაწეობა; რომელსაც ჩვენი ჟურნალის სარედაქციო კოლეჯია დიდი მოკრძალებითა და მაღლიერების გრძნობით ულოცავს 75 წლის იუბილესა და რუსეთის აკადემიის ნამდვილ წევრად არჩევა.

რევაზ გამყრელიძე დაიბადა 1927 წლის 15 იანვარს ქალაქ ქუთაისში. მისი მამა – ვალერიან გამყრელიძე – საზოგადო მოღვაწე გახლდათ, რომელმაც საქართველოში სამეცნიერო ლიტერატურის საგამომცემლო საქმის განვითარებაში დიდი წვლილი შეიტანა. დიდი ხნის განმავლობაში ბატონი ვალერიანი უნივერსიტეტის გამომცემლობას ხელმძღვანელობდა.

რევაზ გამყრელიძის მათემატიკით გატაცება მნიშვნელოვანწილად განაპირობა საშუალო სკოლაში სწავლისას კურანტის შესანიშნავმა წიგნმა „რა არის მათემატიკა“. სკოლის შემდეგ მან სწავლა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე გააგრძელა. როგორც ნიჭიერი სტუდენტი, იგი მოსკოვის უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე იქნა წარგზავნილი.



სწორედ აქ შეხვდა იგი თანამედროვეობის ერთ-ერთ უდიდეს მათემატიკოსს – ლევ პონტრიაგინს, რომელმაც თვალის ჩინი 13 წლის ასაკში დაკარგა, მაგრამ ბუნებამ იგი მეცნიერების სამყაროს ღრმა ხედვით დააჯილდოვა. პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპი (1956) ამ წვდომის ერთ-ერთი უბრწყინვალესი დემონსტრაციაა.

რევაზ გამყრელიძის პირველი შრომები ალგებრულ გეომეტრიასა და ტოპოლოგიას ეძღვნება. მან 1953 წელს განსაზღვრა და შეისწავლა კომპლექსურ ალგებრულ მრავალსახეობათა მახასიათებელი კლასები. შესაბამისი შედეგები მათემატიკურ ლიტერატურაში გამყრელიძის ფორმულითაა ცნობილი.

1954 წელს მან კვლევა არაკლასიკურ ვარიაციულ პრობლემებში განაგრძო, რაც სარაკეტო ინდუსტრიის ავტომატური პროცესების მართვასთან იყო დაკავშირებული. აქ პროფ. გამყრელიძის მიერ მიღებულმა შედეგებმა სათანადო აღიარება მოიპოვა ტექნიკური დარგების სამეცნიერო წრეებშიც.

1955 წლიდან, ლ. პონტრიაგინის თაოსნობით, ბოლტიანსკისა და ე. მიშჩენკოსთან ერთად მან საფუძვლილი დაუდო პროცესთა ოპტიმალური მართვის თანამედროვე თეორიას. ოთხი ავტორის პირველი სტატია გამოქვეყნდა 1956 წელს და სპეციალისტთა შორის დიდი ინტერესი გამოიწვია. ამ სტატიაში პირველად იქნა ჩამოყალიბებული ოპტიმალური მართვის ზოგადი პრობლემა და მის გადასაჭრელად მაქსიმუმის პრინციპი იქნა შემოთავაზებული. იმ დროისათვის მაქსიმუმის პრინციპი მათემატიკური აზროვნების ერთ-ერთ უღამაზეს და ეფექტურ მიღწევად ითვლებოდა, რომელიც პონტრიაგინის პიოტუზის სახით იყო ჩამოყალიბებული. მისი დამტკიცება ოთხი წლის დაუძალავი და უწყვეტი შრომის ფასად მოხდა. ახალი თეორიის საფუძვლები გამოქვეყნდა მონოგრაფიაში „ოპტიმალური მართვის მათემატიკური თეორია“ (რუსულ ენაზე) და მსოფლიოს სხვადასხვა ენაზე ითარგმნა, რითაც მრავალ ქვეყანაში საფუძვლი ჩაეყარა ამ მიმართულებით ინტენსიურ კვლევა-ძიებას. 1962 წელს კი ამ მონოგრაფიამ ავტორებს ლენინის პრემია მოუტანა. პროცესთა ოპტიმალური მართვის ახალი თეორიის შექმნამ დიდი წვლილი შეიტანა ვარიაციული აღრიცხვის განვითარებაში, რაც არსებითაა დავით ილიბერტს 23-ე პრობლემის გადაჭრისთვისაც.

პონტრიაგინის სკოლის მიღწევები მოხსენიებულ იქნა 1967 წელს სამხრეთ კალიფორნიის უნივერსიტეტში გამართულ კონფერენციაზე, რომელიც მათემატიკური მართვის თეორიას ეძღვნებოდა. ლოს-ანჯელესის შემოგარენში განლაგებული ეს უნივერსიტეტი დინამიკური პროგრამირების ტაძრად ითვლებოდა, რომლის პატრიარქიც რიჩარდ ბელმანი გახლდათ. პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპამდე ბელმანის დინამიური პროგრამირების პრინციპი პროცესთა ოპტიმალური მართვის ერთადერთ მეთოდად ითვლებოდა და ამ დარგში უმნიშვნელოვანეს როლს ასრულებდა. ამასთან უნდა აღინიშნოს, რომ ამ მეთოდის გამოყენება რიგ შემთხვევებში შეუძლებელია. ამ თვალსაზრისით პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპი ზოგად ხასიათს ატარებს და იგი შეზღუდული არ არის. ეს ფაქტი ზემოთ აღნიშნული კონფერენციის ყველა წევრმა აღიარა თვით რიჩარდ ბელმანის თაოსნობით. თეორიის განვითარების მიმართულებით 1957 წელს რევაზ გამყრელიძემ საჭირო პირველი უმნიშვნელოვანესი ნაბიჯი გადადგა წრფივი სისტემებისათვის მაქსიმუმის პრინციპის დამტკიცებით. შემდგომში მისი დამტკიცება არაწრფივი

სისტემებისათვის იქნა განზოგადებული, რაც სამი წელი გრძელდებოდა. თვით უაღრესად შემჭიდროებული ფორმით მას 45 გვერდი უჭირავს.

ოპტიმალური მართვის თეორიის განვითარებასთან ერთად, რვეზ გამყრელიძე პარალელურად შეზღუდული ფაზური კოორდინატების პრობლემებზეც მუშაობდა. მიღებული შედეგები აისახა მის სადოქტორო ნაშრომში 1959 წელს.

შემდგომ წლებში მან შემოიტანა კვაზიმოზნევილი სიმრავლის ცნება წრფივ ტოპოლოგიურ სივრცეში, რითაც საფუძველი ჩაუყარა ექსტრემალური პრობლემების ზოგად თეორიას. შესაბამისი შედეგები წარმოდგენილი იქნა 1970 წელს ნიცაში გამართულ მათემატიკოსთა საერთაშორისო კონგრესზე.

ამას გარდა, მომდევნო პერიოდში მის მიერ შესწავლილ იქნა კვაზი-წრფივი დიფერენციალური თანაშემადგენლები და მართვის აცილების სტრატეგია შემუშავდა.

1969 წელს რვეზ გამყრელიძე არჩულ იქნა საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ნამდვილ წევრად, 1981 წელს კი – საბჭოთა კავშირის (ახლა რუსეთის) მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპონდენტად, 2003 წელს კი ამავე აკადემიის ნამდვილ წევრად. 1995 წელს მას მიენიჭა გერმანიის ერთ-ერთი უდიდესი სამეცნიერო ჯილდო – ჰუმბოლდტის პრემია.

დღეისათვის რვეზ გამყრელიძე კვლავ ინტენსიურად მოღვაწეობს სამეცნიერო საქმიანობასთან ერთად კითხულობს ლექციებსა და ატარებს სემინარებს ამერიკის შერთებული შტატების, გერმანიის, ინგლისის, რუსეთისა და საფრანგეთის წამყვან უნივერსიტეტებსა და სამეცნიერო ცენტრებში.

რვეზ გამყრელიძემ საფუძველი ჩაუყარა პროცესთა ოპტიმალური მართვის თეორიის დანერგვას საქართველოში. ილია ვეკუას მხარდაჭერით 1971 წელს თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის კიბერნეტიკისა და გამოყენებითი მათემატიკის ფაკულტეტზე დაარსდა მართვის თეორიის კათედრა, რომლის გამგე და სულისჩამდგმელი რამოდენიმე ათეული წელი გაზღდათ პროფესორი გამყრელიძე. თბილისის უნივერსიტეტში წაკითხულ ლექციათა კურსი „ოპტიმალური მართვის საფუძვლები“ (1975) გამოიცა ამერიკის შერთებულ შტატებში. საქართველოში ამ მონოგრაფიისათვის ავტორს 1975 წელს ა. რაზმაძის პრემია მიენიჭა. მომდევნო პერიოდში მის მიერ აგებული ნაკადების ექსპონენციური წარმოდგენა და ქრონოლოგიური აღრიცხვის ტექნიკა საფუძველად დაედო მრავალ მნიშვნელოვან შრომას. ავტორთა შორის ჩვენი უნივერსიტეტის მრავალი მეცნიერ-თანამშრომელია.

1991 წლიდან მართვის თეორიის კათედრის გამგეა და მის მუშაობას წარმართავს აკადემიკოს გამყრელიძის ერთ-ერთი გამოჩენილი აღზრდილი, საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ნამდვილი წევრი გურამ ხარატიშვილი.

რვეზ გამყრელიძის უპრეცედენტო მოღვაწეობა საგამომცემლო საქმიანობასთანაა დაკავშირებული. მან დაარსა და არის მთავარი რედაქტორი გერმანული გამომცემლობა შპრინგერის მიერ გამოცემული ასტომეული მათემატიკური ენციკლოპედიისა „Encyclopaedia of mathematical Sciences“ (Springer Verlag, Heidelberg), არის მთავარი რედაქტორი ჟურნალისა „Реферативный Журнал Математика“, სერიისა „Современные Проблемы Математики“, ამერიკულ-ბრიტანული სერიისა „Modern Soviet Mathematics“, გერმანული სერიისა „Soviet Mathematics“ და სერიისა „Russian

Classics of Mathematics”, “Modern Mathematics and Its Applications” Tbilisi-New York, გამომდის ცნობილი გამომცემლობა “Plenum”-ის უკველით.

## Revaz Gamkrelidze

Revaz Gamkrelidze was born on January 15, 1927 in the Georgian city of Kutaisi. His father Valerian Gamkrelidze was a public figure who contributed much to the publishing of scientific literature in Georgia. For many years, Mr. Gamkrelidze had been the director of the Tbilisi University Press.

When Revaz Gamkrelidze was studying in a secondary school, he read Courants excellent book „What is Mathematics“ and aquired a permanent passion for this science. After school, Revaz Gamkrelidze continued his education at the Tbilisi State University. As a gifted sophomore, he was sent to Moscow to study at the Mechanics and Mathematics faculty of Moscow State University. Here he met Lev Pontryagin, an outstanding contemporary mathematician, who lost his eyesight at the age of 13 but whom Fate rewarded with an insight into the world of science. Pontryagin’s maximum principle (1956) is a fine example of this insight.

The meeting of Lev Pontryagin and Revaz Gamkrelidze was that of a teacher and a pupil, one of those rare lucky chances which leave an indelible mark in one’s life.

Revaz Gamkrelidze’s first studies were dedicated to algebraic geometry and algebraic topology. He determined and studied characteristic classes of complex algebraic manifolds (1953). In the mathematical literature the according result is referred to as Gamkrelidze’s formula.

1954, Revaz Gamkrelidze took up research into nonclassical variational problems related to the theory of automatic control systems for the rocket industry. He achieved remarkable results in this area. Under the Guidance of L.Pontryagin and along with V.Boltyanski and E.Mishchenko, he laid the foundation of the modern mathematical theory of optimal processes. The first paper by the four authors was published in 1956 and evoked a great interest among specialists. In the paper, a general optimal control problem was formulated for the first time and the maximum principle was proposed as ist solution. The maximum princile was at that time the most beautiful and sophisticated achievement formulated as Pontryagin’s hypothesis. Its proof is presented in the monograph „Mathematical Theory of Optimal Processes“ which was awarded the State Lenin Prize in 1962. The monograph was translated into several languages and in many countries it stimulated research in this specific mathematical area.

The achievements of Pontryagin’s school were reported at the international conference on mathematical control theory held in 1967 at the University of Southern California (USA). This University was regarded by mathematicians as a temple of dynamic programming with Richard Bellman as head priest. Prior to Pontryagin’s maximum principle, Bellman’s method of dynamic programming was the only one used in investigating optimal control systems. R.Bellmann’s school carried out research

within the framework of the program specially developed for the US Air Forces and financed by the gigantic RAND corporation.

Bellman's method of dynamic programming has certainly played a very important role, but its main disadvantage is that it can not be substantiated in general terms and does not hold for some cases. In this respect, Pontryagin's maximum principle has no alternative, the fact recognized by the participants of the above-mentioned conference chaired by R. Bellman himself.

The new optimal control theory played an important role in the development of the calculus of variations as it was demanded by David Hilbert in his famous 23-rd problem. However, it took long years for these events to take place. In 1957 Revaz Gamkrelidze made the initial important step; he proved the maximum principle for time-optimal problems in the case of linear systems. This proof was generalized, that took three years of hard work. Even in a very concise form, this proof occupied 45 typewritten pages.

To the same period belong Revaz Gamkrelidze's fundamental investigations into the theory of optimal processes, as well as into problems with bounded phase coordinates. The results he obtained formed a part of his doctoral thesis (1959).

In the subsequent years, Revaz Gamkrelidze discovered and worked on optimal sliding states. He developed the notion of a quasicontinuous set in a linear topological space, which underlies the general theory of extremal problems. These results were reported at the International Congress of Mathematicians in Nice in 1970.

Revaz Gamkrelidze studied quasilinear differential games and worked out an evasion strategy for them. Further, he constructed an exponential representation of streams and invented a technique of chronological calculus.

1969 Revaz Gamkrelidze became the member of the Georgian Academy of Sciences, in 1981 -- the corresponding member, and in 2003 full member of the Soviet (now Russian) Academy of Sciences.

In 1995, he was awarded the Alexander von Humboldt Research Prize, Germany.

In recent years Revaz Gamkrelidze has been carrying out research in the USA, Germany, France and Great Britain. Prof. Gamkrelidze pioneered and contributed much to the development of the optimal control theory in Georgia. Under the guidance of Ilia Vekua, the chair of control theory was founded at the faculty of Cybernetics and Applied Mathematics at the Tbilisi State University. For a few decades Prof. Gamkrelidze has been heading the control theory chair at Tbilisi State University. A course of lectures he read at the university was included in his monograph „Fundamentals of Optimal Control“ (1975) which was translated into English and published in the USA. In Georgia the monograph was awarded the A. Rasmadze Prize. Later, Prof. Gamkrelidze introduced the technique of exponential representation and chronological calculus of streams, that laid a foundation for many important investigations all over the world, among the authors are Georgian scientists from our university.

Since 1991, the chair of Control Theory is led by one of the outstanding pupils of Prof., Academician Guram Kharatishvili.

Apart from his research and teaching work, Revaz Gamkrelidze is also concerned with publishing activity. He founded and was editor-in-chief of the 100 volume

„Encyclopaedia of Mathematical Sciences“ (Springer Verlag Heidelberg), is editor-in-chief of the „Referativnyi Zhurnal Matematika“ (Moscow), „Modern Mathematics and its Applications“ (Tbilisi-New York, under the aegis of the Plenum Press), the series „Modern Problems of Mathematics“, (Moscow). He is the scientific editor of the American-British series „Modern Soviet Mathematics“, German „Soviet Mathematics“, and the series „Russian Classics of Mathematics“.

The new optimal control theory played an important role in the development of the sciences of variations as it was demanded by David Gilber in his famous 25-nd program. However, it took long years for these events to take place. In 1957 Kevzava Gamskhibidze made the initial important step. He proved the maximum principle for time-optimal problems in the case of linear systems. This proof was generalised, that took three years of hard work. Even in a very compact form, this proof occupied 45 printed pages.

In the same period before Kevzava Gamskhibidze's fundamental investigations into the theory of optimal processes as well as into systems with bounded phase coordinates the results he obtained formed a part of his doctoral thesis (1959).

In the subsequent years Kevzava Gamskhibidze discovered and treated an optimal sliding game. He developed the notion of a piecewise set in a linear topological space which unifies the general theory of extremal problems. These results were reported at the International Congress of Mathematicians in Moscow in 1959.

Kevzava Gamskhibidze studied quadratic differential games and worked out an extension strategy for them. Further, he conducted an exponential representation of streams and invented a technique of chronological calculus.

In 1969 Kevzava Gamskhibidze became the member of the Georgian Academy of Sciences (1981 – the corresponding member, and in 2003 full member of the Soviet (later Russian) Academy of Sciences).

In 1995 he was awarded the Alexander von Humboldt Research Fellow Grant. In recent years Kevzava Gamskhibidze has been carrying out research in the USA (Germany, France and Great Britain). Prof. Gamskhibidze proposed and coordinated much of the development of the optimal control theory in Georgia. Under the guidance of his chair the chair of control theory was founded at the faculty of Cybernetics and Applied Mathematics at the Tbilisi State University. For a few decades Prof. Gamskhibidze has been heading the control theory chair at Tbilisi State University. A course of lectures he read at the university was included in his monograph „Fundamentals of Optimal Control“ (1975) which was translated into English and published in the USA. In Georgia the monograph was awarded the A. Kazandava Prize. Later Prof. Gamskhibidze introduced the technique of exponential representation and chronological calculus of streams, that laid a foundation for many important investigations all over the world, among the authors are Georgian scientists from our university.

Since 1991 the chair of Control Theory is led by one of the outstanding pupils of Prof. Academician Gamskhibidze.

Apart from his research and teaching work Kevzava Gamskhibidze is also concerned with publishing activity. He founded and was editor-in-chief of the 100 volume



## DISSERTATION DEFENCES DURING THE 2002-2003

### HIGH DEGREE PRECISION DECOMPOSITION SCHEMES FOR EVOLUTION PROBLE

*M. Tsiklauri*

*I. Vekua Institute of Applied Mathematics*

The dissertation has been carried out at the Chair of Computer Software and Information Technologies of Iv. Javakhishvili Tbilisi State University and I. Vekua Institute of Applied Mathematics of Iv. Javakhishvili Tbilisi State University.

**Scientific Supervisors:** Jemal Rogava, Professor, Ph.D., Phys.Math.

Zurab Gegechkori, Docent, Candidate of Phys.Math.

**Official opponents:** David Gordeziani, Professor, Ph.D., Phys.Math.

Jemal Sanikidze, Professor, Ph.D., Phys.Math.

The defense was held on January 9, 2003 at the open meeting of Academic Certifying Council Ph.M 01.05 #2 of N. Muskhelishvili institute of Computation Mathematics of Georgian Academy of Sciences, Tbilisi.

The dissertation is available at the library of N. Muskhelishvili Institute of Computation Mathematics of Georgian Academy of Sciences, Tbilisi.

**INTRODUCTION.** The first decomposition formula for exponential matrix function was constructed by Lie in 1875. This formula was generalized by Trotter for exponential operator function (semigroup) in 1959. The resolvent analog of this function firstly was constructed by Chernoff in 1968. At the same time in the sixties of the twentieth century the aim to develop numerical methods for solving multidimensional problems of mathematical physics naturally stated the topic of constructing decomposition schemes, which allows to deduce the solving of multidimensional problems to the solving of onedimensional problems.

The first decomposition schemes were constructed and investigated in the works of Peaceman-Rachford, Douglas, Douglas-Rachford, N.N. Ianenko, A.A. Samarskii, G.I. Marchuk, E.G. Diakonov, D. Gordeziani and R. Temam. Up to date a lot of papers are dedicated to decomposition schemes. The schemes constructed in these works are of the first or second order precision.

The high order precision decomposition formulas for twodimensional split-  
ted operators firstly were obtained by B. O. Dia and M. Schatzman in 1996.  
We should notice, that the formulas obtained by these authors are not au-  
tomatically stable decomposition formulas. Decomposition formula is called  
automatically stable, if the sum of modules of split coefficients is equal to  
one. Q. Sheng has proved, that on the real number field there does not ex-  
ist such automatically stable splitting of exponential operator function, the  
precision order of which is more than two.

According to the abovementioned it represents the actual problem the  
construction of the high order precision automatically stable split formulas  
for the approximation of the semigroup and on the basis of these formulas the  
construction of high order precision decomposition schemes for the solution  
of evolution problem.

The aim of the work is the construction of the high order precision dif-  
ferential and difference decomposition schemes for the solution of evolution  
problems with constant and variable operator; receiving the explicit a pri-  
ori estimates for the constructed schemes and by means of these schemes  
conducting numerical calculations for various model problems.

There are obtained the following main results: 1. By introducing complex  
parameter are constructed the third order precision decomposition differ-  
ential schemes for two and three dimensional evolution problems with the split-  
ted operator. The convergence of these schemes are investigated. 2. There  
are constructed and investigated the third order precision decomposition dif-  
ferential scheme for an evolution problem with the variable operator in case  
when the main operator represents the sum of two addends. 3. There are  
constructed the third order precision decomposition difference schemes by  
means of resolvent polynoms and is investigated their convergence. 4. For  
the constructed schemes are obtained explicit a priori estimates. 5. There  
are carried out numerical experiments, which justify the efficiency of the high  
order precision decomposition schemes.

### THE BRIEF CONTENT OF THE DISSERTATION PAPER.

In the INTRODUCTION there is briefly given the content of the work.

In the CHAPTER I there are constructed the third order precision de-  
composition schemes for the homogeneous evolution equation and for these

schemes are obtained explicit a priori estimates for solution error.

In the **Paragraph 1** there is considered Cauchy problem for the homogeneous evolution equation in Banach space  $X$ :

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = \varphi, \quad (1)$$

where  $A$  is a closed linear operator with the domain  $D(A)$ , which is everywhere dense in  $X$ ,  $\varphi$  is a given element from  $D(A)$ . For this problem there is constructed the third order decomposition scheme in case when  $A = A_1 + A_2$ .

Let us introduce the net domain:

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_k : t_k = k\tau, \quad k = 1, 2, \dots\}.$$

Decomposition scheme on each time interval  $[t_{k-1}, t_k]$  has the following form:

$$\begin{aligned} \frac{dv_k^1(t)}{dt} + \alpha A_1 v_k^1(t) &= 0, & \frac{dw_k^1(t)}{dt} + \alpha A_2 w_k^1(t) &= 0, \\ v_k^1(t_{k-1}) &= u_{k-1}(t_{k-1}), & w_k^1(t_{k-1}) &= u_{k-1}(t_{k-1}), \\ \frac{dv_k^2(t)}{dt} + A_2 v_k^2(t) &= 0, & \frac{dw_k^2(t)}{dt} + A_1 w_k^2(t) &= 0, \\ v_k^2(t_{k-1}) &= v_k^1(t_k), & w_k^2(t_{k-1}) &= w_k^1(t_k), \\ \frac{dv_k^3(t)}{dt} + \bar{\alpha} A_1 v_k^3(t) &= 0, & \frac{dw_k^3(t)}{dt} + \bar{\alpha} A_2 w_k^3(t) &= 0, \\ v_k^3(t_{k-1}) &= v_k^2(t_k), & w_k^3(t_{k-1}) &= w_k^2(t_k), \end{aligned}$$

here  $\alpha$  is a complex number parameter with a positive real part,  $u_0(0) = \varphi$ .

The function  $u_k(t)$   $k = 1, 2, \dots$ , on each interval  $[t_{k-1}, t_k]$  is defined as follows:

$$u_k(t) = \frac{1}{2} [v_k^k(t) + w_k^k(t)].$$

The function  $u_k(t)$  on each interval  $[t_{k-1}, t_k]$  is defined as an approximated solution of (1).

We imply that in general  $A_1$  and  $A_2$  are noncommutative operators.

It is obvious, that the domain  $D(A^*)$  of operator  $A^*$  represents the intersection of definition domains of the addends of this operator (natural powers of  $A$  are defined as usual).

Let us introduce the following denotations:

$$\|\varphi\|_A = \|A_1\varphi\| + \|A_2\varphi\|, \quad \varphi \in D(A);$$

$$\|\varphi\|_{A^2} = \|A_1^2\varphi\| + \|A_2^2\varphi\| + \|A_1A_2\varphi\| + \|A_2A_1\varphi\|, \quad \varphi \in D(A^2);$$

where  $\|\cdot\|$  is a norm in  $X$ , analogously are defined  $\|\varphi\|_{A^s}$ , ( $s = 3, 4$ ).

The following theorem is proved (below by  $U(t, A)$  we define strongly continuous semigroup generated by operator  $(-A)$ ):

**Theorem 1.** *Let the following conditions be fulfilled:*

- $\alpha = \frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2\sqrt{3}}$  ( $i = \sqrt{-1}$ );
- operators  $(-A_j)$ ,  $(-\alpha A_j)$ ,  $(-\bar{\alpha} A_j)$  ( $j = 1, 2$ ) and  $(-A)$  generate strongly continuous semigroups;
- There exists a real number  $\omega$  such, that

$$\|U(t, A)\| \leq Me^{\omega t}, \quad M = \text{const} > 0,$$

$$\|U(t, \gamma A_j)\| \leq e^{\omega t} \quad (j = 1, 2 \quad \gamma = 1, \alpha, \bar{\alpha});$$

- $U(s, A)\varphi \in D(A^4)$  for each fixed  $s \geq 0$ .

Then the following estimate is valid:

$$\|u(t_k) - u_k(t_k)\| \leq ce^{\omega_0 t_k} t_k \tau^3 \sup_{s \in [0, t_k]} \|U(s, A)\varphi\|_{A^4},$$

where  $c, \omega_0$  are positive constants.

Remark, that the solving operator of the splitted problem has the following form:

$$V(\tau) = \frac{1}{2} [U(\tau, \bar{\alpha} A_1)U(\tau, A_2)U(\tau, \alpha A_1) + U(\tau, \bar{\alpha} A_2)U(\tau, A_1)U(\tau, \alpha A_2)].$$

It is seen from this formula that stability of the considered scheme on each finite time interval ensues from the second inequality of the c) condition of the theorem. In this case for the solving operator is true the following estimate:

$$\|V^k(\tau)\| \leq e^{\omega t_k}.$$

In the Paragraph 2 for the problem (1) is constructed the third order precision decomposition scheme in case when  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_m$ , where  $m \geq 2$  is any natural number. This scheme on each interval  $[t_{k-1}, t_k]$  has the following form:

$$\frac{dv_k^1(t)}{dt} + \alpha A_1 v_k^1(t) = 0, \quad \frac{dw_k^1(t)}{dt} + \alpha A_m w_k^1(t) = 0,$$

$$v_k^1(t_{k-1}) = u_{k-1}(t_{k-1}), \quad w_k^1(t_{k-1}) = u_{k-1}(t_{k-1}),$$

$$\frac{dv_k^2(t)}{dt} + \alpha A_2 v_k^2(t) = 0, \quad \frac{dw_k^2(t)}{dt} + \alpha A_{m-1} w_k^2(t) = 0,$$

$$v_k^2(t_{k-1}) = v_k^1(t_k), \quad w_k^2(t_{k-1}) = w_k^1(t_k),$$

$$\frac{dv_k^{m-1}(t)}{dt} + \alpha A_{m-1} v_k^{m-1}(t) = 0, \quad \frac{dw_k^{m-1}(t)}{dt} + \alpha A_2 w_k^{m-1}(t) = 0,$$

$$v_k^{m-1}(t_{k-1}) = v_k^{m-2}(t_k), \quad w_k^{m-1}(t_{k-1}) = w_k^{m-2}(t_k),$$

$$\frac{dv_k^m(t)}{dt} + A_m v_k^m(t) = 0, \quad \frac{dw_k^m(t)}{dt} + A_1 w_k^m(t) = 0,$$

$$v_k^m(t_{k-1}) = v_k^{m-1}(t_k), \quad w_k^m(t_{k-1}) = w_k^{m-1}(t_k),$$

$$\frac{dv_k^{m+1}(t)}{dt} + \bar{\alpha} A_{m-1} v_k^{m+1}(t) = 0, \quad \frac{dw_k^{m+1}(t)}{dt} + \bar{\alpha} A_2 w_k^{m+1}(t) = 0,$$

$$v_k^{m+1}(t_{k-1}) = v_k^m(t_k), \quad w_k^{m+1}(t_{k-1}) = w_k^m(t_k),$$

$$\frac{dv_k^{2m-2}(t)}{dt} + \bar{\alpha} A_2 v_k^{2m-2}(t) = 0, \quad \frac{dw_k^{2m-2}(t)}{dt} + \bar{\alpha} A_{m-1} w_k^{2m-2}(t) = 0,$$

$$v_k^{2m-2}(t_{k-1}) = v_k^{2m-3}(t_k), \quad w_k^{2m-2}(t_{k-1}) = w_k^{2m-3}(t_k),$$

$$\frac{dv_k^{2m-1}(t)}{dt} + \bar{\alpha} A_1 v_k^{2m-1}(t) = 0, \quad \frac{dw_k^{2m-1}(t)}{dt} + \bar{\alpha} A_m w_k^{2m-1}(t) = 0,$$

$$v_k^{2m-1}(t_{k-1}) = v_k^{2m-2}(t_k), \quad w_k^{2m-1}(t_{k-1}) = w_k^{2m-2}(t_k).$$

Here  $\alpha$  is a complex number parameter with a positive real part,  $u_0(0) = \varphi$ .

$u_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , on each interval  $[t_{k-1}, t_k]$  is defined as follows:

$$u_k(t) = \frac{1}{2} [v_k^{2m-1}(t) + w_k^{2m-1}(t)].$$

The following theorem is proved:

**Theorem 2.** Let the following conditions be fulfilled:

- a)  $\alpha = \frac{1}{2} \pm i \frac{1}{2\sqrt{3}}$  ( $i = \sqrt{-1}$ );  
 b) Operators  $(-A_j)$ ,  $(-\alpha A_j)$ ,  $(-\bar{\alpha} A_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) and  $(-A)$  generate strongly continuous semigroups;  
 g) There exist a real number  $\omega$  such that

$$\|U(t, A)\| \leq M e^{\omega t}, \quad M = \text{const} > 0,$$

$$\|U(t, \gamma A_j)\| \leq e^{\omega t} \quad (j = 1, 2, \dots, m, \quad \gamma = 1, \alpha, \bar{\alpha});$$

- d)  $U(s, A)\varphi \in D(A^4)$  for each fixed  $s \geq 0$ .

Then the following estimate is valid:

$$\|u(t_k) - u_k(t_k)\| \leq c e^{\omega_0 t_k} t_k \tau^3 \sup_{s \in [0, t_k]} \|U(s, A)\varphi\|_{A^4},$$

where  $c, \omega_0$  are positive constants.

In the CHAPTER II there are constructed the third order precision decomposition schemes for the inhomogeneous evolution equation and for these schemes are obtained explicit a priori estimates for solution error.

In the Paragraph 1 there is considered Cauchy problem for the inhomogeneous evolution equation in Banach space  $X$ :

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t), \quad t > 0, \quad u(0) = \varphi, \quad (2)$$

where  $A$  is a linear closed operator with the domain  $D(A)$ , which is everywhere dense in  $X$ ,  $\varphi$  is a given element from  $D(A)$ .  $f(t) \in C^1([0; \infty); X)$  and  $f(t) \in D(A)$  for every fixed  $t$ . For this problem there is constructed the third order decomposition scheme in case when  $A = A_1 + A_2$ . Decomposition scheme on each interval  $[t_{k-1}, t_k]$  has the following form:

$$\begin{aligned} \frac{dv_k^1(t)}{dt} + \alpha A_1 v_k^1(t) &= \frac{\alpha}{2} f(t_k) - 2\sigma_0(t_k - t) f'(t_k), \\ v_k^1(t_{k-1}) &= u_{k-1}(t_{k-1}), \end{aligned}$$

$$\frac{dv_k^2(t)}{dt} + A_2 v_k^2(t) = \frac{1}{2} f(t_k) - 2\sigma_1(t_k - t) f'(t_k),$$

$$v_k^2(t_{k-1}) = v_k^1(t_k),$$

$$\frac{dv_k^3(t)}{dt} + \bar{\alpha} A_1 v_k^3(t) = \frac{\bar{\alpha}}{2} f(t_k) - 2\sigma_2(t_k - t) f'(t_k) + \frac{(t_k - t)^2}{2} f''(t_k),$$

$$v_k^3(t_{k-1}) = v_k^2(t_k);$$

$$\frac{dw_k^1(t)}{dt} + \alpha A_2 w_k^1(t) = \frac{\alpha}{2} f(t_k) - 2\sigma_0(t_k - t) f'(t_k),$$

$$w_k^1(t_{k-1}) = u_{k-1}(t_{k-1}),$$

$$\frac{dw_k^2(t)}{dt} + A_1 w_k^2(t) = \frac{1}{2} f(t_k) - 2\sigma_1(t_k - t) f'(t_k),$$

$$w_k^2(t_{k-1}) = w_k^1(t_k),$$

$$\frac{dw_k^3(t)}{dt} + \bar{\alpha} A_2 w_k^3(t) = \frac{\bar{\alpha}}{2} f(t_k) - 2\sigma_2(t_k - t) f'(t_k) + \frac{(t_k - t)^2}{2} f''(t_k),$$

$$w_k^3(t_{k-1}) = w_k^2(t_k).$$

Here  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$  and  $\alpha$  are complex number parameters  $Re(\alpha) > 0$ ,  $u_0(0) = \varphi$ .

$u_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , on each interval  $[t_{k-1}, t_k]$  is defined as follows:

$$u_k(t) = \frac{1}{2} [v_k^3(t) + w_k^3(t)].$$

The function  $u_k(t)$  on each interval  $[t_{k-1}, t_k]$  is assumed as an approximated solution of problem (3). The following theorem is proved:

**Theorem 3.** Let the following conditions be fulfilled:

a)  $\alpha = \frac{1}{2} \pm i \frac{1}{2\sqrt{3}}$  ( $i = \sqrt{-1}$ );

b) Operators  $(-\gamma A_j)$ ,  $\gamma = 1, \alpha, \bar{\alpha}$  ( $j = 1, 2$ ) and  $(-A)$  generate strongly continuous semigroups, for which the following estimates are valid:

$$\|U(t, \gamma A_j)\| \leq e^{\omega t},$$

$$\|U(t, A)\| \leq M e^{\omega t}, \quad M, \omega = \text{const} > 0;$$

g)  $U(s, A)\varphi \in D(A^4)$  for each fixed  $s \geq 0$ ;

d)  $f \in C^3([0, \infty); X)$ ;  $f(t) \in D(A^3)$ ,  $f^{(k)}(t) \in D(A^{3-k})$ ,  $k = 1, 2$   
and  $U(s, A)f(t) \in D(A^4)$  for each fixed  $t$  and  $s$  ( $t, s \geq 0$ );

e) Parameters  $\sigma_0, \sigma_1$  and  $\sigma_2$  satisfy the following relations:

$$\sigma_0 = \frac{2 - \bar{\alpha}}{4 + \alpha} - \frac{2 + \bar{\alpha}}{4 + \alpha} \sigma_1, \quad \sigma_2 = \frac{1 + \bar{\alpha}}{2(4 + \alpha)} - \frac{3 - 2\bar{\alpha}}{4 + \alpha} \sigma_1,$$

here  $\sigma_1$  is any complex number.

Then the following estimate is valid:

$$\|u(t_k) - u_k(t_k)\| \leq c e^{\omega_0 t_k} t_k \tau^3 \left( \sup_{s \in [0, t_k]} \|U(s, A)\varphi\|_{A^4} + t_k \sup_{s, t \in [0, t_k]} \|U(s, A)f(t)\|_{A^4} + \right. \\ \left. + \sup_{t \in [0, t_k]} \|f(t)\|_{A^3} + \sup_{t \in [0, t_k]} \|f'(t)\|_{A^2} + \sup_{t \in [0, t_k]} \|f''(t)\|_A + \sup_{t \in [0, t_k]} \|f'''(t)\| \right),$$

where  $c, \omega_0$  are constants.

In the Paragraph 2 for the problem (2) there is constructed the third order precision scheme in case when  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_m$ , where  $m \geq 3$  is any natural number. This scheme on each interval  $[t_{k-1}, t_k]$  has the following form:

$$\frac{dv_k^1(t)}{dt} + \alpha A_1 v_k^1(t) = \frac{\alpha}{m} f(t_k) - 2\sigma_1(t_k - t)f'(t_k), \\ v_k^1(t_{k-1}) = u_{k-1}(t_{k-1}),$$

$$\frac{dv_k^{i+1}(t)}{dt} + \alpha A_{i+1} v_k^{i+1}(t) = \frac{\alpha}{m} f(t_k) - 2\sigma_{i+1}(t_k - t)f'(t_k), \\ v_k^{i+1}(t_{k-1}) = v_k^i(t_k), \quad i = 1, \dots, m-2,$$

$$\frac{dv_k^m(t)}{dt} + A_m v_k^m(t) = \frac{1}{m} f(t_k) - 2\sigma_m(t_k - t)f'(t_k), \\ v_k^m(t_{k-1}) = v_k^{m-1}(t_k),$$

$$\frac{dv_k^{m+i}(t)}{dt} + \bar{\alpha} A_{m-i} v_k^{m+i}(t) = \frac{\bar{\alpha}}{m} f(t_k) - 2\sigma_{m+i}(t_k - t)f'(t_k), \\ v_k^{m+i}(t_{k-1}) = v_k^{m+i-1}(t_k), \quad i = 1, \dots, m-2,$$



$$\frac{dv_k^{2m-1}(t)}{dt} + \bar{\alpha} A_1 v_k^{2m-1}(t) = \frac{\bar{\alpha}}{m} f(t_k) - 2\sigma_{2m-1}(t_k - t) f'(t_k) + \frac{(t_k - t)^2}{2} f''(t_k),$$

$$v_k^{2m-1}(t_{k-1}) = v_k^{2m-2}(t_k);$$

$$\frac{dw_k^1(t)}{dt} + \alpha A_m w_k^1(t) = \frac{\alpha}{m} f(t_k) - 2\sigma_1(t_k - t) f'(t_k),$$

$$w_k^1(t_{k-1}) = u_{k-1}(t_{k-1}),$$

$$\frac{dw_k^{i+1}(t)}{dt} + \alpha A_{m-i} w_k^{i+1}(t) = \frac{\alpha}{m} f(t_k) - 2\sigma_{i+1}(t_k - t) f'(t_k),$$

$$w_k^{i+1}(t_{k-1}) = w_k^i(t_k), \quad i = 1, \dots, m-2,$$

$$\frac{dw_k^m(t)}{dt} + A_1 v_k^m(t) = \frac{1}{m} f(t_k) - 2\sigma_m(t_k - t) f'(t_k),$$

$$w_k^m(t_{k-1}) = w_k^{m-1}(t_k),$$

$$\frac{dw_k^{m+i}(t)}{dt} + \bar{\alpha} A_{i+1} w_k^{m+i}(t) = \frac{\bar{\alpha}}{m} f(t_k) - 2\sigma_{m+i}(t_k - t) f'(t_k),$$

$$w_k^{m+i}(t_{k-1}) = v_k^{m+i-1}(t_k), \quad i = 1, \dots, m-2,$$

$$\frac{dw_k^{2m-1}(t)}{dt} + \bar{\alpha} A_m w_k^{2m-1}(t) = \frac{\bar{\alpha}}{m} f(t_k) - 2\sigma_{2m-1}(t_k - t) f'(t_k) + \frac{(t_k - t)^2}{2} f''(t_k),$$

$$w_k^{2m-1}(t_{k-1}) = w_k^{2m-2}(t_k).$$

Here  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2m-1}$  and  $\alpha$  are complex number parameters,  $Re(\alpha) > 0$ ,  $u_0(0) = \varphi$ .

On each interval  $[t_{k-1}, t_k]$  ( $k = 1, 2, \dots$ )  $u_k(t)$  is determined as follows:

$$u_k(t) = \frac{1}{2} [v_k^{2m-1}(t) + w_k^{2m-1}(t)].$$

The function  $u_k(t)$  on each interval  $[t_{k-1}, t_k]$  is assumed as an approximated solution of evolution equation. The following theorem is proved:

**Theorem 4.** Let the following conditions be fulfilled:

a)  $\alpha = \frac{1}{2} \pm i \frac{1}{2\sqrt{3}}$  ( $i = \sqrt{-1}$ );

b) Operators  $(-\gamma A_j)$ ,  $\gamma = 1, \alpha, \bar{\alpha}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) and  $(-A)$  generate strongly continuous semigroups, for which the following estimates are valid, respectively:

$$\|U(t, \gamma A_j)\| \leq e^{\omega t},$$

$$\|U(t, A)\| \leq M e^{\omega t}, \quad M, \omega = \text{const} > 0;$$

g)  $U(s, A)\varphi \in D(A^4)$  for each fixed  $s \geq 0$ ;

d)  $f(t) \in C^3([0, \infty); X)$ ;  $f(t) \in D(A^3)$ ,  $f^{(k)}(t) \in D(A^{3-k})$ ,  $k = 1, 2$  and  $U(s, A)f(t) \in D(A^4)$  for each fixed  $t$  and  $s$  ( $t, s \geq 0$ );

e)  $m > 2$ ,  $\sigma_j = \bar{\sigma}_1$ ,  $\sigma_m = \bar{\sigma}_2$ ,  $\sigma_{m+j} = \bar{\sigma}_3$  ( $j = 1, 2, \dots, m-1$ ),

$$\bar{\sigma}_3 = \frac{1}{2[(9m+1)\alpha - 3m]}, \quad \bar{\sigma}_1 = (9\alpha - 4)\bar{\sigma}_3, \quad \bar{\sigma}_2 = \frac{1}{2} - (m-1)(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3).$$

Then the following estimate is true:

$$\|u(t_k) - u_k(t_k)\| \leq c e^{\omega_0 t_k} t_k \tau^3 \left( \sup_{s \in [0, t_k]} \|U(s, A)\varphi\|_{A^4} + t_k \sup_{s, t \in [0, t_k]} \|U(s, A)f(t)\|_{A^4} + \sup_{t \in [0, t_k]} \|f(t)\|_{A^3} + \sup_{t \in [0, t_k]} \|f'(t)\|_{A^2} + \sup_{t \in [0, t_k]} \|f''(t)\|_{A^1} + \sup_{t \in [0, t_k]} \|f'''(t)\| \right),$$

where  $c, \omega_0$  are positive constants.

In the CHAPTER III there are constructed the third order precision decomposition schemes for the evolution equation with variable operator and for these schemes are obtained explicit a priori estimates of solution error.

In the Paragraph 1 there is considered Cauchy problem for the evolution equation with variable operator in Banach space  $X$ :

$$\frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = 0, \quad t > 0, \quad u(0) = \varphi, \quad (3)$$

where  $\varphi$  is a given element from  $D(A)$  and operator  $A(t)$  satisfies the following conditions:

a) The definition domain of operator  $A(t)$  does not depend on  $t$  and is everywhere dense in  $X$ ;

b) For each fixed  $t_1, t_2, s \in [0; T]$  the following inequalities are satisfied:

$$\|(A(t_1) - A(t_2))A^{-1}(s)\| \leq c_1 |t_1 - t_2|^q, \quad q \in (0; 1], \quad c_1 = \text{const} > 0;$$

g) For every complex  $z$ ,  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ , there exists operator  $(zI - A(t))^{-1}$ , for which the following inequality is satisfied:

$$\|(zI - A(t))^{-1}\| \leq \frac{c_2}{1 + |z|}, \quad c_2 = \text{const} > 0.$$

Then the solution of problem (3) is given by the following formula:

$$u(t) = U(t, 0; A)\varphi,$$

where  $U(t, 0; A)$  is a solving operator of problem (3).

There is considered the case when  $A(t) = b(t)(A_1 + A_2)$ , where  $A_i$ , ( $i = 1, 2$ ) are closed operators densely defined in  $X$ , function  $b(t) \geq b_0 > 0$  satisfies Helder condition. In this case there is constructed the third order precision decomposition scheme which on each interval  $[t_{k-1}, t_k]$  has the following form:

$$\frac{dv_k^1(t)}{dt} + \alpha b(t) A_1 v_k^1(t) = 0, \quad \frac{dw_k^1(t)}{dt} + \alpha b(t) A_2 w_k^1(t) = 0,$$

$$v_k^1(t_{k-1}) = u_{k-1}(t_{k-1}), \quad w_k^1(t_{k-1}) = u_{k-1}(t_{k-1}),$$

$$\frac{dv_k^2(t)}{dt} + b(t) A_2 v_k^2(t) = 0, \quad \frac{dw_k^2(t)}{dt} + b(t) A_1 w_k^2(t) = 0,$$

$$v_k^2(t_{k-1}) = v_k^1(t_k), \quad w_k^2(t_{k-1}) = w_k^1(t_k),$$

$$\frac{dv_k^3(t)}{dt} + \bar{\alpha} b(t) A_1 v_k^3(t) = 0, \quad \frac{dw_k^3(t)}{dt} + \bar{\alpha} b(t) A_2 w_k^3(t) = 0,$$

$$v_k^3(t_{k-1}) = v_k^2(t_k), \quad w_k^3(t_{k-1}) = w_k^2(t_k),$$

here  $\alpha$  is a complex number parameter with a positive real part,  $u_0(0) = \varphi$ . On each interval  $[t_{k-1}, t_k]$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) the function  $u_k(t)$  is defined as follows:

$$u_k(t) = \frac{1}{2}[v_k^3(t) + w_k^3(t)].$$

The function  $u_k(t)$  on each interval  $[t_{k-1}, t_k]$  is assumed as an approximated solution of continuous problem.

The powers  $(A_s^s, s = 2, 3, 4)$  of operator  $A_0 = A_1 + A_2$  and denotations

$$\|\varphi\|_{A_s^s}$$

( $s = 1, 2, 3, 4$ ) are introduced analogously to the first paragraph of the first chapter.

The following theorem is proved:

**Theorem 5.** Let the following conditions be fulfilled:

- a)  $\alpha = \frac{1}{2} \pm i \frac{1}{2\sqrt{3}}$  ( $i = \sqrt{-1}$ );  
 b) There exist operators  $U(t, t_0; \gamma b(\cdot) A_j)$ ,  $\gamma = 1, \alpha, \bar{\alpha}$  ( $j = 0, 1, 2$ ) solving the problems

$$\frac{dv(t)}{dt} + \gamma b(t) A_j v(t) = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad v(t_0) = \varphi \in D(A_j),$$

and the following conditions are satisfied:

$$\|U(t, t_0; \gamma b(\cdot) A_j)\| \leq e^{\omega(t-t_0)},$$

$$\|U(t, t_0; b(\cdot) A_0)\| \leq M e^{\omega(t-t_0)}, \quad M, \omega = \text{const} > 0;$$

- g) function  $b(t) \geq b_0 > 0$  satisfies Helder condition;  
 d) For each fixed  $s_1, s_2 \geq 0$   $U(s_1, s_2; b(\cdot) A_0) \varphi \in D(A_0^4)$ .

Then the following estimate is valid:

$$\|u(t_k) - u_k(t_k)\| \leq c e^{\omega_0 t_k} t_k \tau^3 \sup_{s_1, s_2 \in [0, t_k]} \|U(s_1, s_2; b(\cdot) A_0) \varphi\|_{A_0^4},$$

where  $c, \omega_0$  are positive constants.

In the Paragraph 2 there are constructed the third order precision Chernoff type formulas for the evolution problem with variable operator, which we can call averaged symmetrized formulas. For the error of solution constructed on the basis of these formulas there are obtained explicit a priori estimates. In the same paragraph for the solving operator of the problem (3) there are constructed the fourth order precision approximation formulas by means of resolvent polynomials. These formulas have the following form:

$$W_1(t_i, t_{i-1}, b(\cdot) A_0) = \alpha_i I + b_i (I + \lambda_i \tau A_0)^{-1} + c_i (I + \lambda_i \tau A_0)^{-2}, \quad (4)$$

$$W_2(t_i, t_{i-1}, b(\cdot) A_0) = (I - \lambda_{0,i} \tau A_0) (I + \lambda_{1,i} \tau A_0)^{-1} (I + \lambda_{2,i} \tau A_0)^{-1}, \quad (5)$$

where

$$\lambda_k = \frac{1}{2} \frac{\gamma_{2,k}}{\gamma_{1,k}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3\gamma_{2,k} - 2\gamma_{1,k}\gamma_{3,k}}}{\gamma_{1,k}},$$

$$a_k = 1 - \frac{2\gamma_{1,k}}{\lambda_k} + \frac{\gamma_{2,k}}{2\lambda_k^2}, \quad b_k = \frac{3\gamma_{1,k}}{\lambda_k} - \frac{\gamma_{2,k}}{\lambda_k^2}, \quad c_k = \frac{\gamma_{2,k}}{2\lambda_k^2} - \frac{\gamma_{1,k}}{\lambda_k};$$

$$\lambda_{0,k} = \frac{6\gamma_{1,k}^3 - 6\gamma_{1,k}\gamma_{2,k} + \gamma_{3,k}}{6\gamma_{1,k}^2 - 3\gamma_{2,k}}, \quad \lambda_{s,k} = \frac{1}{2} \left( d_k + i(-1)^s \sqrt{4e_k - d_k^2} \right), \quad (i = \sqrt{-1}), \quad s = 1, 2,$$

$$d_k = \frac{3\gamma_{1,k}\gamma_{2,k} - \gamma_{3,k}}{6\gamma_{1,k}^2 - 3\gamma_{2,k}}, \quad e_k = \frac{3\gamma_{2,k}^2 - 2\gamma_{1,k}\gamma_{3,k}}{2(6\gamma_{1,k}^2 - 3\gamma_{2,k})},$$

and where

$$\gamma_{1,k} = \frac{3b(t_k) + b(t_{k-1/3})}{4}, \quad \gamma_{2,k} = b^2(t_{k-1/2}), \quad \gamma_{3,k} = b^3(t_{k-1/2}).$$

By means of formulas (1),(4) and (5) are constructed the following decomposition formulas of the fourth order precision:

$$V_l(t_i, t_{i-1}) = \frac{1}{2} [W_l(t_i, t_{i-1}, b(\cdot) A_1) W_l(t_i, t_{i-1}, b(\cdot) A_2) W_l(t_i, t_{i-1}, b(\cdot) A_1) + \\ + W_l(t_i, t_{i-1}, b(\cdot) A_2) W_l(t_i, t_{i-1}, b(\cdot) A_1) W_l(t_i, t_{i-1}, b(\cdot) A_2)], \quad l = 1, 2. \quad (6)$$

The solution of the continuous problem in the point  $t = t_k$  is determined by the following formula:

$$u(t_i) = U(t_i, t_{i-1}; b(\cdot) A_0) u(t_{i-1}). \quad (7)$$

On basis of formulas (6) and (7) in the present paragraph there are constructed the following decomposition schemes of the third order precision for solving the problem (2).

$${}^l u_i = V_l(t_i, t_{i-1}) ({}^l u_{i-1}), \quad {}^l u_0 = \varphi, \quad l = 1, 2, \quad (8)$$

where

$$V_l(t_i, t_{i-1}) = \frac{1}{2} [W_l(t_i, t_{i-1}, \alpha b(\cdot) A_1) W_l(t_i, t_{i-1}, b(\cdot) A_2) W_l(t_i, t_{i-1}, \bar{\alpha} b(\cdot) A_1) + \\ + W_l(t_i, t_{i-1}, \alpha b(\cdot) A_2) W_l(t_i, t_{i-1}, b(\cdot) A_1) W_l(t_i, t_{i-1}, \bar{\alpha} b(\cdot) A_2)], \quad \alpha = \frac{1}{2} \pm i \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

The realization of scheme (8) is carried out by the following algorithm:

$$\begin{aligned} {}^l v_{i-2/3} &= W_l(t_i, t_{i-1}, \bar{\alpha} b(\cdot) A_1) ({}^l u_{k-1}), & {}^l w_{i-2/3} &= W_l(t_i, t_{i-1}, \bar{\alpha} b(\cdot) A_2) ({}^l u_{k-1}), \\ {}^l v_{i-1/3} &= W_l(t_i, t_{i-1}, b(\cdot) A_2) ({}^l v_{k-2/3}), & {}^l w_{i-1/3} &= W_l(t_i, t_{i-1}, b(\cdot) A_1) ({}^l w_{k-2/3}), \\ {}^l v_i &= W_l(t_i, t_{i-1}, \alpha b(\cdot) A_2) ({}^l v_{k-1/3}), & {}^l w_i &= W_l(t_i, t_{i-1}, \alpha b(\cdot) A_2) ({}^l w_{k-1/3}), \\ {}^l u_i &= \frac{1}{2} [{}^l v_i + {}^l w_i], & {}^l u_0 &= \varphi, \end{aligned}$$

The following theorem is proved:

**Theorem 6.** Let the following conditions be fulfilled:

a) For every  $\tau > 0$  there exist operators  $(I + \gamma \lambda_i \tau A_j)^{-1}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\gamma = 1, \alpha, \bar{\alpha}$  and they are bounded, in addition the following inequalities are valid:

$$\|W_l(\tau, \gamma A_j)\| \leq e^{\omega \tau}, \quad \omega = \text{const} > 0, \quad l = 1, 2;$$

b) There exists the operator  $U(t, t_0; \gamma b(\cdot) A_j)$ ,  $\gamma = 1, \alpha, \bar{\alpha}$  ( $j = 0, 1, 2$ ), solving the following problem:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \gamma b(t) A_j v(t) = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad v(t_0) = \varphi \in D(A_j),$$

and the following inequality is valid:

$$\|U(t, t_0; \gamma b(\cdot) A_j)\| \leq e^{\omega(t-t_0)},$$

$$\|U(t, t_0; b(\cdot) A_0)\| \leq M e^{\omega(t-t_0)}, \quad M, \omega = \text{const} > 0;$$

g)  $b(t) \geq b_0 > 0$  and  $b(t) \in C^3[0; \infty)$ ;

d)  $U(s_1, s_2; b(\cdot) A_0) \varphi \in D(A_0^4)$  for each fixed  $s_1, s_2 \geq 0$ .

Then the following estimate is true:

$$\|{}^l u(t_k) - {}^l u_k\| \leq c e^{\omega_0 t_k} t_k \tau^3 \sup_{s_1, s_2 \in [0, t_k]} \|U(s_1, s_2, A) \varphi\|_{A_0^4}, \quad l = 1, 2,$$

where  $c, \omega_0$  are positive constants.

**Remark.** If  $A_1, A_2, \dots, A_m$  ( $m \geq 2$ ) and  $A_1 + A_2 + \dots + A_m$  are self-adjoint positively defined operators, then in the estimations of the above

mentioned theorems (Theorem 1, 2, 5, 6)  $e^{\omega_0 t_k}$  will be substituted by  $e^{-\omega_0 t_k}$ , ( $\omega_0 = \text{const} > 0$ ).

In the APPENDIX there are made numerical calculations, which are in full accordance with theoretical results.

The results of the dissertation work are published in the following papers:

1. Gegechkori Z. G., Rogava J. L., Tsiklauri M. A. *High degree precision decomposition method for an evolution problem*. Minsk, Computational Methods in Applied Mathematics, 2001, Vol. 1, No 2, p. 173-187.
2. Gegechkori Z. G., Rogava J. L., Tsiklauri M. A. *Differential scheme of high degree precision decomposition of nonhomogenous evolution problem*. AMI, Tbilisi, 2001, vol. 6, No 1. p. 45-80.
3. Gegechkori Z. G., Rogava J. L., Tsiklauri M. A. *High degree precision decomposition method for the evolution problem with an operator under a split form*. - M2AN, Paris, 2002, Vol. 36, No 4, p. 693-704.
4. Tsiklauri M. *High order of accuracy decomposition method for an evolution problem with variable operator*. - Proceedings of I. Vekua Institute of Applied mathematics, vol. 50-51, 2000-2001, p. 103-117.
5. Tsiklauri M. *High order of accuracy decomposition of the evolution problem with variable operator using resolvent polynoms*. - Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, vol. 50-51, 2000-2001, p. 118-128.
6. Gegechkori Z. G., Rogava J. L., Tsiklauri M. A. *High degree precision decomposition method for the nonhomogenous evolution problem with an operator under a split form*. - Bulletin of TICMI. 2001 Vol. 5, p. 13-18.
7. Gegechkori Z. G., Rogava J. L., Tsiklauri M. A. *Sequential-Parallel method of high degree precision for Cauchy abstract problem solution*. Tbilisi, Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics. 1999, vol. 14, No 3, p. 45-48.
8. Gegechkori Z. G., Rogava J. L., Tsiklauri M. A. *High degree precision decomposition formulas of semigroup approximation*. - Tbilisi, Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics. 2001, vol. 16, No 1-3, p. 89-92.

9. Gegechkori Z. G., Rogava J. L., Tsiklauri M. A. *Sequention-parallel decomposition method of high degree precision for nonhomogenous evolution equation.* - Proceedings of Javakishvili Tbilisi State University Applied Mathematics and Informatics, 2000, Vol. 330 (20), No 1. p. 9-14.

10. In the APPENDIX there are made numerical calculations, which are in full accordance with theoretical results.
11. The results of the dissertation work are published in the following papers and also decomposition method for an evolution problem. *Minsk Computational Methods in Applied Mathematics* 2001, Vol. 7, No 2, p. 173-187.
12. Gegechkori Z. G., Rogava J. L., Tsiklauri M. A. *Approximate solution of a high degree precision decomposition of nonhomogeneous evolution problem.* *AAU Bulletin*, 2001, vol. 6, No 1, p. 45-50.
13. Gegechkori Z. G., Rogava J. L., Tsiklauri M. A. *High degree precision decomposition method for the evolution problem with an operator under split form.* - *MZAN*, Paris, 2002, Vol. 38, No 4, p. 683-704.
14. Tsiklauri M. *High order of accuracy decomposition method for an evolution problem with variable operator.* - *Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics*, vol. 50-51, 2000-2001, p. 103-117.
15. Tsiklauri M. *High order of accuracy decomposition of the evolution problem with variable operator using resolvent polynomials.* *Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics*, vol. 50-51, 2000-2001, p. 118-128.
16. Gegechkori Z. G., Rogava J. L., Tsiklauri M. A. *High degree precision decomposition method for the nonhomogeneous evolution problem with an operator under a split form.* - *Boletim of TICMI*, 2001, Vol. 3, p. 13-18.
17. Gegechkori Z. G., Rogava J. L., Tsiklauri M. A. *Semigroup-Fourier method of high degree precision for Cauchy abstract problem solution.* *Tbilisi Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics*, 1998, vol. 14, No 3, p. 45-48.
18. Gegechkori Z. G., Rogava J. L., Tsiklauri M. A. *High degree precision decomposition formulas of a mixed group approximation.* - *Tbilisi Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics*, 2001, vol. 16, No 1-3, p. 59-62.



## ON INVESTIGATION AND CONSTRUCTION OF NUMERICAL SOLUTION OF SOME NON-CLASSICAL PROBLEMS

**E. Gordeziani**

*Tbilisi State University,*

*Chair of Computer Mathematical Software and Information Technologies*

This dissertation has been carried out at the Chair of Computer Software and Information Technologies at the Department of Applied Mathematics and Computer Sciences of Iv. Javakhişvili Tbilisi State University.

**Scientific supervisor:** Tamaz Vashakmadze, Professor, Ph.D. Phys. Math.

**Official opponents:** Jemal Rogava, Professor, Ph.D. Phys. Math.

Jemal Sanikidze, Professor, Ph.D. Phys. Math.

The defense of the dissertation hold on April 30, 2003 at the open meeting of the Academic Certifying Dissertation Board Ph. m 01.05 №2 of N. Muskhelishvili Institute of Computational Mathematics of Georgian Academy of Sciences (8 Akuri st., Tbilisi).

The dissertation is available at the library of the Institute of Computational Mathematics of Georgian Academy of Sciences, Tbilisi.

**INTRODUCTION.** The dissertation is devoted to the investigation and numerical realization problems of some mathematical models describing various phenomena. Considered non-classical mathematical models represent classical and non-local initial-boundary value problems stated for pluri-parabolic equations, also generalized non-local initial-boundary and boundary problems stated for some parabolic and elliptic equations. Such problems arise during the investigation of most difficult and important problems of physics, technique and ecology and various other branches of science. The models considered hereby mainly concern the description and analysis of diffusion and displacements of mixtures, particularly, pollutions in the rivers.

Experiments for research of mentioned processes are very expensive and, in some cases, even impossible. Application of mathematical modeling, numerical analysis and computation technologies through creating virtual images on computers is cost effective, sometimes the only way of studying these phenomena.

Thus, for the development and investigation of ecological problems application of mathematical methods and information technologies is the one of the most important means of research.

To the theoretical investigation of mentioned mathematical models are dedicated the researches of such famous mathematicians as J.-L. Lions, S.V. Vladimirov, A. Bousiani, A.A. Samarskii, A.V. Bitsadze, A.M. Il'in, M.A. Sapagovas, B.P. Paniakh, etc.

Coming out from the above said, it is evident that the theme of the dissertation is very actual, interesting and important not only from the theoretical but also practical point of view.

The aim of the dissertation is the research of some classical and non-classical initial-boundary value problems stated for pluri-parabolic equations, construction and investigation of finite-difference algorithms for their numerical resolution, analysis and construction of solution



in case of specific areas ( $n$ -dimensional parallelepiped, sphere, generalized cylindrical area) of non-local problems stated for some multi-dimensional parabolic and elliptic equations.

To prove the uniqueness of solution of non-classical problems stated for pluri-parabolic and parabolic equations the author uses special energetic inequalities and principle of maximum. To study stability and convergence of explicit and implicit finite-difference schemes corresponding to the mentioned problems there are used specific energetic norms. With help of special energetic inequalities and norms there are proved convergence and stability of averaged decomposition algorithms developed for non-classical problems with pluri-parabolic and parabolic equations. To construct the solution of non-local problem stated for some elliptic equations there is used the method of Fourier.

The following results are obtained:

1. For pluri-parabolic equations there is proved the uniqueness of solutions of some non-classical initial-boundary problems in case of generalized non-local boundary conditions. There is constructed the iteration process which reduces the resolution of non-local problem on the resolution of classical one. There is shown that iteration process converges with the speed of geometrical progression.
2. For the resolution of classical initial-boundary value problems stated for pluri-parabolic equations there are constructed and investigated finite-difference schemes. There are shown stability and convergence of difference schemes.
3. For pluri-parabolic and parabolic equations the author has built and investigated the averaged decomposition algorithms of parallel count.
4. For the resolution of three-point difference problem with non-local boundary condition there is constructed generalized Factorization algorithm. On the basis of these formulas there are conducted various numerical experiments.
5. For Poisson equation in case of some generalized type non-local boundary problems stated on a sphere there is constructed and studied the solution. In case of general cylindrical area for certain linear elliptic equations with non-local boundary conditions there is constructed and investigated effective solution in the form of a series.

The dissertation contains complete study of parameterized difference analogue of linear pluri-parabolic equations with classical initial-boundary conditions that was first suggested by the author. There are analyzed averaged algorithms of parallel count that were constructed for multidimensional parabolic and pluri-parabolic equations with non-local initial-boundary conditions.

The numerical algorithms and research carried out in the dissertation, particularly the method of iteration and construction of solution in the form of series for some non-local problems, generalizes the old results of various authors obtained through the investigation of non-local problems stated for some linear elliptic, parabolic and pluri-parabolic equations.

**BRIEF CONTENT.** The **Introduction** gives historical-bibliographical information on the subject-matter and brief context of the work.

**Chapter I** "Auxiliary assertions" gives definitions, designations and theorems used in the following chapters.

**Chapter II** is devoted to the investigation of classical and non-classical problems stated for pluri-parabolic equations.

**In the first paragraph** there is stated the following problem: there is searched the function  $u(x, t) \in C^{2,1}(D) \cap C^{1,0}(\bar{D})$ , satisfying equation

$$Lu(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in D, \quad (2.1.1)$$

and the next initial and initial-boundary conditions:





$$\beta \frac{\partial u^{k+1}(x,t)}{\partial v} + \alpha u^{k+1}(x,t) = \sum_{i=0}^p \alpha_i u^k(x_{T_i}, t) + \varphi_{3i}(x,t), \quad (2.3.4)$$

$$x \in \Gamma^-, \quad 0 \leq t \leq T_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad x_{T_i} \in \Gamma_i, \quad i = \overline{0, P},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

and the following theorem is proved:

**Theorema 2.3.1.** *If in (2.3.4) condition  $\beta = 0$ ,  $\left| \sum_{i=0}^p \alpha_i \right| < |\alpha|$  and there exists the unique solution of the problem (2.1.1)-(2.1.4), then the iteration process (2.3.1)-(2.3.4) converges to the exact solution of the problem (2.1.1)-(2.1.4) with the speed of geometrical progression.*

In the fourth paragraph there is considered the following problem: there has to be found the function  $u(x,t) \in C^{2,1,1}((0,t_1) \times (0,T_1) \times (0,T_2)) \cap C^{1,0,0}([0,t_1] \times [0,T_1] \times [0,T_2])$ , satisfying the equation

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t_1} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t_2} = f(x,t), \quad (2.4.1)$$

$$x \in (0, l_1), \quad t_1 \in (0, T_1), \quad t_2 \in (0, T_2),$$

initial conditions

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0, t_2) &= \varphi_{11}(x, t_2), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq t_2 \leq T_2, \\ u(x, t_1, 0) &= \varphi_{12}(x, t_1), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq t_1 \leq T_1, \end{aligned} \right\} \quad (2.4.2)$$

and classical boundary limitations

$$\left. \begin{aligned} u(0, t_1, t_2) &= \varphi_2(t_1, t_2), \quad 0 \leq t_1 \leq T_1, \quad 0 \leq t_2 \leq T_2, \\ u(l_1, t_1, t_2) &= \varphi_3(t_1, t_2), \quad 0 \leq t_1 \leq T_1, \quad 0 \leq t_2 \leq T_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.3)$$

On the regular grid  $\omega_{h_1, \tau_2}$  there is constructed the following finite-difference problem corresponding to the differential problem (2.4.1)-(2.4.3): there has to be found  $y_i^{j,k} = y(x_i, t_j, t_k)$  grid function, satisfying the next difference equation,

$$\theta_1 \frac{y_i^{j+1, k+1} - y_i^{j+1, k}}{\tau_2} + (1 - \theta_1) \frac{y_i^{j, k+1} - y_i^{j, k}}{\tau_2} + \theta_2 \frac{y_i^{j+1, k+1} - y_i^{j, k+1}}{\tau_1} + (1 - \theta_2) \frac{y_i^{j+1, k} - y_i^{j, k}}{\tau_1} =$$

$$= \theta_3 \theta_4 L_h y_i^{j+1, k+1} + \theta_3 (1 - \theta_4) L_h y_i^{j+1, k} + (1 - \theta_3) \theta_5 L_h y_i^{j, k+1} + (1 - \theta_3) (1 - \theta_5) L_h y_i^{j, k} +$$

$$+ F_i^{j,k}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{0, N_1-1}, \quad k = \overline{0, N_2-1}, \quad (2.4.4)$$

and the following conditions

$$y_0^{0,k} = \varphi_{11}^{0,k}, \quad i = \overline{0, N}, \quad k = \overline{0, N_2}, \quad (2.4.5)$$

$$y_i^{j,0} = \varphi_{12}^{j,0}, \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, N_1},$$

$$y_0^{j,k} = \varphi_2^{j,k}, \quad j = \overline{0, N_1}, \quad k = \overline{0, N_2}, \quad (2.4.6)$$

$$y_N^{j,k} = \varphi_3^{j,k}, \quad j = \overline{0, N_1}, \quad k = \overline{0, N_2},$$

where  $y_i^{j,k}$  function is the grid function defined on the  $\omega_{h_1, \tau_2}$  discrete area corresponding to  $D$ , which corresponds to the  $u(x, t_1, t_2)$  function,  $0 \leq \theta_i \leq 1$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) are given parameters,

$F_i^{j,k}$ ,  $\varphi_{1i}^{0,k}$ ,  $\varphi_2^{j,k}$  and  $\varphi_3^{j,k}$  are respectively grid functions of  $[-f(x,t)]$  and those used in the left side of initial and initial-boundary conditions (2.4.2), (2.4.3).  $h$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  are steps of regular grid  $\omega_{h,\tau_1,\tau_2}$  correspondingly for  $x$ ,  $t_1$  and  $t_2$  arguments;

$$L_h y_i^{j,k} = \frac{y_{i+1}^{j,k} - 2y_i^{j,k} + y_{i-1}^{j,k}}{h^2}.$$

The following theorem is true for the scheme (2.4.4)-(2.4.6):

**Theorem 2.4.1.** *If the function  $u(x,t)$  is sufficiently smooth, then the scheme (2.4.4)-(2.4.6) approximates the problem (2.4.1)-(2.4.3) with the precision of  $O(\tau_1 + \tau_2 + h^2)$  order, if in the difference equation (2.4.4),*

$$a) \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{1}{2}, \theta_4 + \theta_5 = 1.$$

$$F_i^{j,k} = -f_i^{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + O(\tau_1^2 + \tau_2^2 + h^2), \text{ then } \psi_i^{j,k} = O(\tau_1^2 + \tau_2^2 + h^2);$$

$$b) \text{ if } \theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{2}, \theta_3 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau_1}, \theta_3\theta_4 - \theta_3\theta_5 + \theta_5 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau_2},$$

$$F_i^{j,k} = -f_i^{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + O(\tau_1^2 + \tau_2^2 + h^4), \text{ then } \psi_i^{j,k} = O(\tau_1^2 + \tau_2^2 + h^4),$$

where  $\psi_i^{j,k}$  is an approximation error.

In the fifth paragraph there are considered two explicit and two implicit schemes. They are obtained by selecting the concrete parameters  $\theta_i$  ( $i = \overline{1,5}$ ) in the problem (2.4.4)-(2.4.6).

If  $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\theta_3 = \theta_4 = 0$ , then difference equation (2.4.4) takes the form:

$$\frac{1}{2} \frac{y_i^{j+1,k+1} - y_i^{j+1,k}}{\tau_2} + \frac{1}{2} \frac{y_i^{j,k+1} - y_i^{j,k}}{\tau_2} + \frac{1}{2} \frac{y_i^{j+1,k+1} - y_i^{j,k+1}}{\tau_1} + \frac{1}{2} \frac{y_i^{j+1,k} - y_i^{j,k}}{\tau_1} = (2.5.1)$$

$$= L_h y_i^{j,k} + F_i^{j,k}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{0, N_1-1}, \quad k = \overline{0, N_2-1},$$

where is assumed, that  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ . Simulation of difference equation (2.5.1) consists of five grid points. The following theorem is true:

**Theorem 2.5.1.** *If  $\tau \leq \frac{h^2}{2}$ , the finite-difference scheme (2.5.1), (2.4.5), (2.4.6) is stable and its solution converges to the solution of the problem (2.4.1)-(2.4.3) in the sense of uniform norm.*

When  $\theta_1 = \theta_2 = 1$ ,  $0 < \theta_3 < 1$ ,  $\theta_4 = 0$ ,  $\theta_5 = 1$ , there is obtained the following scheme:

$$\frac{y_i^{j+1,k+1} - y_i^{j+1,k}}{\tau_2} + \frac{y_i^{j+1,k+1} - y_i^{j,k+1}}{\tau_1} = \theta_3 L_h y_i^{j+1,k} + (1 - \theta_3) y_i^{j+1,k} + F_i^{j,k}, \quad (2.5.4)$$

$$i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{0, N_1-1}, \quad k = \overline{0, N_2-1},$$

with simulation consisting from seven grid points. Stability and convergence issues are covered by the next theorem:

**Theorem 2.5.2.** If  $\tau_1 \leq \frac{h^2}{2\theta_3}$ ,  $\tau_2 \leq \frac{h^2}{2(1-\theta_3)}$ , the scheme (2.5.4), (2.4.5), (2.4.6) is stable and its solution converges to the exact solution of the problem (2.4.1)-(2.4.3) with the sense of energetic norm.

Selecting the parameters in the following way:  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 1$ , there is obtained the equation,

$$\frac{y_i^{j+1,k+1} - y_i^{j+1,k}}{\tau_2} + \frac{y_i^{j+1,k+1} - y_i^{j,k+1}}{\tau_1} = L_h y_i^{j+1,k+1} + F_i^{j,k}, \quad (2.5.5)$$

$$i = \overline{1, N-1}, j = \overline{0, N_1-1}, k = \overline{0, N_2-1},$$

with simulation which consists of five grid points.

**Theorem 2.5.3.** The scheme (2.5.5), (2.4.5), (2.4.6) is absolutely stable and the solution converges to the exact solution of the problem (2.4.1)-(2.4.3) in the sense of energetic norm.

When  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 1/2$ ,  $\theta_4 = 1$  and  $\theta_5 = 0$ , there is obtained another implicit scheme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{y_i^{j+1,k+1} - y_i^{j+1,k}}{\tau_2} + \frac{1}{2} \frac{y_i^{j,k+1} - y_i^{j,k}}{\tau_2} + \frac{1}{2} \frac{y_i^{j+1,k+1} - y_i^{j,k+1}}{\tau_1} + \frac{1}{2} \frac{y_i^{j+1,k} - y_i^{j,k}}{\tau_1} &= (2.5.8) \\ &= \frac{1}{2} L_h y_i^{j+1,k+1} + \frac{1}{2} L_h y_i^{j,k} + F_i^{j,k}, \\ \tau_1 = \tau_2 = \tau, i = \overline{1, N-1}, j = \overline{0, N_1-1}, k = \overline{0, N_2-1}, \end{aligned}$$

with simulation consisting of eight grid points.

**Theorem 2.5.4.** The scheme (2.5.8), (2.4.5), (2.4.6) is absolutely stable and its solution converges to the exact solution of the problem (2.4.1)-(2.4.3) in the sense of energetic norm

In the sixth paragraph there is considered the problem (2.1.1)-(2.1.4), when  $L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ,

and  $G = (0, l_1) \times \dots \times (0, l_n)$ . There is constructed the following decomposition algorithm of parallel count:

$$\sigma_1 \left( \sum_{i=1}^m y_{l_i}^{k_1+1, \dots, k_m+1} \right) = \frac{\partial^2 y_{l_i}^{k_1+1, \dots, k_m+1}}{\partial x_1^2} - f_{l_i}^{k_1+1, k_2+1, \dots, k_m+1}(x, t), \quad (2.6.7)$$

$$\sigma_n \left( \sum_{i=1}^m y_{l_i}^{k_1+1, \dots, k_m+1} \right) = \frac{\partial^2 y_{l_i}^{k_1+1, \dots, k_m+1}}{\partial x_n^2} - f_{l_i}^{k_1+1, k_2+1, \dots, k_m+1}(x, t),$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i = 1, \sigma_i \geq 0, l_k \in \omega_i, (k_i = \overline{0, N_i-1}), j = \overline{1, m},$$





$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right) - C(x, t)u(x, t) + f(x, t), \quad x \in \Pi_n, \quad 0 < t < T, \quad (3.1.1)$$

and initial-boundary conditions

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in \bar{\Pi}_n, \quad (3.1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, x_2, \dots, x_n, t) &= \varphi_{11}(x_2, \dots, x_n, t), \quad 0 \leq x_1 \leq l_1, \quad (i = \overline{1, n}), \quad (i \neq 1), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x_1, 0, x_3, \dots, x_n, t) &= \varphi_{12}(x_1, x_3, \dots, x_n, t), \quad 0 \leq x_1 \leq l_1, \quad (i = \overline{1, n}), \quad (i \neq 2), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \right\} (3.1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, t) &= \varphi_{1n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, t), \quad 0 \leq x_i \leq l_i, \quad (i = \overline{1, n}), \quad (i \neq n), \quad 0 \leq t \leq T, \\ \beta \frac{\partial u(l_1, \bar{x})}{\partial x_1} + \alpha u(l_1, \bar{x}) &= \sum_{i=0}^m \alpha_i u(\xi_i, \bar{x}) + \varphi_{21}(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \bar{\Pi}_{n-1}, \end{aligned} \right\} (3.1.4)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x_1, l_2, x_3, \dots, x_n, t) &= \varphi_{22}(x_1, x_3, \dots, x_n, t), \quad 0 \leq x_1 \leq l_1, \quad (i = \overline{1, n}), \quad (i \neq 2), \quad 0 \leq t \leq T, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (3.1.5)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x_1, \dots, x_{n-1}, l_n, t) &= \varphi_{2n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, t), \quad 0 \leq x_i \leq l_i, \quad (i = \overline{1, n}), \quad (i \neq n), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \right\}$$

where  $l_i = \text{const}$  ( $i = \overline{1, n}$ ),  $f(x, t)$ ,  $\varphi_{ij}$ ,  $\varphi_{2i}$  ( $i = \overline{1, n}$ ),  $\varphi_0(x)$  are sufficiently smooth prescribed functions,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha_i$  ( $i = \overline{0, m}$ ) are given constants ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ),  $a_{ij}(x, t)$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ) are once continuously derivable functions,  $a_{ii}(x, t) \geq a_{0ii} = \text{const} > 0$  and  $a_{ii} = a_{ii}(\bar{x}, t)$ ,  $\Pi_n = (0, l_1) \times \dots \times (0, l_n)$ ,  $\Pi_{n-1} = (0, l_2) \times \dots \times (0, l_n)$ ,  $(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \bar{x})$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in \Pi_n$  and  $\bar{x} \in \Pi_{n-1}$ .

**Theorem 3.1.1.** *If in the condition (3.1.4) one of the following limitations are true: a)  $\alpha_i \geq 0$  ( $i = \overline{0, m}$ ),  $\sum_{i=0}^m \frac{\alpha_i}{\alpha} \leq 1$ ; or b)  $\alpha_i \leq 0$  ( $i = \overline{0, m}$ ),  $\sum_{i=0}^m \frac{|\alpha_i|}{\alpha} \leq 1$ ; and if there exists a solution of the problem (3.1.1)-(3.1.5), then it is unique.*

In the second paragraph there is constructed the algorithm of parallel count for the next problem: there has to be found the function satisfying the following equation:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - C(x, t)u(x, t) + f(x, t), \quad x \in \Pi_n, \quad 0 < t < T, \quad (3.2.1)$$

and (3.1.2)-(3.1.5) initial and initial-boundary conditions, where  $a_{ij} \geq a_{0ij} = \text{const} > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  is once continuously derivable functions with respect to their arguments;  $C(x, t) \geq 0$  is given continuous function on  $\bar{D}$ ;  $f(x, t) \in C(\bar{D})$  is prescribed function. The algorithm is as follows:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 y_1^k &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( a_1 \frac{\partial y_1^{k+1}}{\partial x_1} \right) - C_1^{k+1} y_1^{k+1} + f_1^{k+1}, \\ \dots\dots\dots \\ \sigma_n y_n^k &= \frac{\partial}{\partial x_n} \left( a_n \frac{\partial y_n^{k+1}}{\partial x_n} \right) - C_n^{k+1} y_n^{k+1} + f_n^{k+1}, \end{aligned} \right\} t_k \in \omega_\tau, (k = \overline{0, N-1}) \quad (3.2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1^k &= y_2^k = \dots = y_n^k = v^k, k = \overline{1, N}, \\ v^k &= \sum_{i=1}^n \sigma_i y_i^k, k = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^n \sigma_i = 1, \sigma_i \geq 0, \\ v^0(x, t_0) &= \varphi_0(x), \end{aligned} \right\} \quad (3.2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1^{k+1}(0, x_2, \dots, t_{k+1}) &= \varphi_{11}(x_2, \dots, t_{k+1}), 0 \leq x_1 \leq l_1, (i = \overline{2, n}), \\ \frac{\partial y_1^{k+1}}{\partial x_1}(l_1, x_2, \dots, t_{k+1}) &+ \alpha y_1^{k+1}(l_1, x_2, \dots, t_{k+1}) = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i y_1^{k+1}(\xi_i, x_2, \dots, t_{k+1}) + \varphi_{21}(x_2, \dots, t_{k+1}) \\ 0 \leq x_1 \leq l_1, (i = \overline{1, n}, i \neq 1), k &= \overline{0, N-1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} y_2^{k+1}(x_1, 0, x_3, \dots, t_{k+1}) &= \varphi_{12}(x_1, 0, x_3, \dots, t_{k+1}), \\ y_2^{k+1}(x_1, l_2, x_3, \dots, t_{k+1}) &= \varphi_{22}(x_1, 0, x_3, \dots, t_{k+1}) \\ 0 \leq x_1 \leq l_1, (i = \overline{1, n}, i \neq 2), k &= \overline{0, N-1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} y_n^{k+1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, t_{k+1}) &= \varphi_{1n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, t_{k+1}), \\ y_n^{k+1}(x_1, l_2, x_3, \dots, t_{k+1}) &= \varphi_{2n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, t_{k+1}) \\ 0 \leq x_1 \leq l_1, (i = \overline{1, n}, i \neq n), k &= \overline{0, N-1}, \end{aligned} \right\}$$

where  $\omega_\tau = \{t_k : t_k = k\tau, k = \overline{0, N}, N\tau = T\}$ ,  $y_i^k = y_i(x, t_k)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{0, N}$ ,  $C_i^k = C_i^k(x, t_k)$ ,  $f_i^k = f_i(x, t_k)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{0, N}$ ,  $y_i^k = \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau}$ . The following theorem is true:

**Theorem 3.2.1.** *If in the condition (3.2.5) one of the following two conditions are satisfied: a)  $\alpha_i \geq 0$  ( $i = \overline{0, m}$ ),  $\sum_{i=0}^m \frac{\alpha_i}{\alpha} \leq 1$  or b)  $\alpha_i \leq 0$  ( $i = \overline{0, m}$ ), then (3.2.3)-(3.2.6) algorithm of parallel count is stable with respect to initial conditions and right hand function, and converges to the exact solution of initial problem with speed of  $O(\tau^{1/2})$ .*

In the third paragraph there is worked out generalized factorization method for non-local difference problem

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, i = \overline{1, N-1}, \quad (3.3.1)$$

$$y_0 = \aleph_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \sum_{k=0}^m \alpha_k y_{N_k} + \aleph_2 y_{N-1} + \mu_2, \quad (3.3.2)$$

where  $A_i$ ,  $C_i$ ,  $B_i$  and  $F_i$  are given grid functions,  $y_i$  is unknown grid function defined on  $\{0, \dots, N\}$  set,  $\aleph_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\aleph_2$  and  $\mu_2$  are given numbers.

Generalized factorization method is:

$$y_i = \tilde{\alpha}_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (3.3.3)$$

$$\tilde{\alpha}_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \tilde{\alpha}_i}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad \tilde{\alpha}_1 = \aleph_1, \quad (3.3.4)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - A_i \tilde{\alpha}_i}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad \beta_1 = \mu_1, \quad (3.3.5)$$

$$y_N = \frac{\sum_{k=0}^m \alpha_k \bar{\beta}_{N_k} + \aleph_2 \beta_N + \mu_2}{1 - \aleph_2 \tilde{\alpha}_N - \sum_{k=0}^m \alpha_k \tilde{\alpha}_{N_k}}, \quad (3.3.6)$$

where

$$\tilde{\alpha}_{N_k} = \tilde{\alpha}_{N_k+1} \cdots \tilde{\alpha}_N,$$

$$\bar{\beta}_{N_k} = [\tilde{\alpha}_{N_k+1} \cdots \tilde{\alpha}_{N-1} \beta_N] + \cdots + [\tilde{\alpha}_{N_k+1} \cdots \tilde{\alpha}_{N-2} \beta_{N-1}] + \cdots + [\tilde{\alpha}_{N_k+1} \beta_{N_k+2}] + \beta_{N_k+1}.$$

**Theorem 3.3.1.** *There exists the unique solution of the system (3.3.3)-(3.3.6) and if*

*$|C_i| \geq |A_i| + |B_i|$ ,  $|\aleph_1| \leq 1$ ,  $|\aleph_2| \leq 1$ ,  $|\aleph_1| + |\aleph_2| < 2$  and  $|\aleph_2| + \sum_{k=0}^m |\alpha_k| < 1$ , then constructed generalized factorization method is stable.*

In the fourth paragraph there is written out generalized factorization method for the next problem: there has to be found the function

$$u(x, t) \in C^{2,1}(0 < x < l, 0 < t < T) \cap C^{1,0}(0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T)$$

satisfying equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - C(x, t) u(x, t) + f(x, t), \quad (3.4.1)$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < T,$$

initial and initial-boundary conditions

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.4.2)$$

$$u(0, t) = \varphi_{11}(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.4.3)$$

$$\beta \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + \alpha u(l, t) = \sum_{i=0}^m \alpha_i u(\xi_i, t) + \varphi_{21}(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.4.4)$$

There is constructed corresponding difference problem which is prepared for being resolved with the generalized factorization method.

Chapter IV contains researches of non-local problems for some elliptic equations.

In the first, second and fourth paragraphs there are considered the private cases of the following generalized problem:

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = 0, \quad (r, \theta, \varphi) \in B, \quad (4.3.1)$$

$$\beta \frac{\partial u(a, \theta, \varphi)}{\partial r} + \alpha u(a, \theta, \varphi) = \sum_{i=0}^m \alpha_i u(a_i, \theta, \varphi) + \frac{1}{a} \sum_{i=0}^m \beta_i \int_{a_i}^a u(r, \theta, \varphi) dr + f(\theta, \varphi),$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

where  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\alpha + \beta > 0$ ,  $\sum_{i=0}^m \alpha_i^2 + \sum_{i=0}^m \beta_i^2 \neq 0$ ,  $f(\theta, \varphi) \in C^2(S)$  is given function, for which there are investigated issues of uniqueness and existence of solution. Solutions are constructed effectively in the form of series. In the first paragraph there is considered separately cases of Bitsadze-Samarskii generalized non-local condition and integral conditions, but when  $\beta = 0$ . Then, in the second paragraph there are considered the same conditions separately when  $\beta \neq 0$ . In the next paragraph questions of uniqueness and existence of a solution of the problem (4.1.1'), (4.3.1) are stated in the following theorem:

**Theorem 4.3.1.** *If in the boundary condition (4.3.1) a)  $\alpha_i \leq 0$ ,  $\beta_i \leq 0$  ( $i = \overline{0, m}$ )  $\alpha \geq 0$ ; or b)  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  ( $i = \overline{0, m}$ ),  $\alpha > 0$  and  $\sum_{i=0}^m \alpha_i^2 + \sum_{i=0}^m \beta_i^2 < \alpha$ , then there exists the unique solution of the problem (4.1.1'), (4.3.1) and it can be written out in the form of the next series:*

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n \left[ \beta \frac{n}{a} + \alpha - \sum_{m=0}^m \alpha_i \left( \frac{a_i}{a} \right)^n - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^m \beta_i \left[ 1 - \left( \frac{a_i}{a} \right)^{n+1} \right] \right]^{-1} Y_n(\theta, \varphi). \quad (4.3.2)$$

In the fifth paragraph there is considered the following problem:

$$L_0 u(x) + Lu(x) = f(x), \quad x \in D, \quad (4.5.1)$$

$$u(x) = \varphi_1(x), \quad x \in S_0, \quad (4.5.2)$$

$$u(x) = \varphi_2(x), \quad x \in S_\Gamma, \quad (4.5.3)$$

$$\beta \frac{\partial u}{\partial x_0}(1, \bar{x}) + \alpha u(1, \bar{x}) = \sum_{i=0}^m \alpha_i u(\xi_i, \bar{x}) + \int_{\xi_0}^1 \rho(x_0) u(x) dx_0 + \varphi_3(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Gamma, \quad (4.5.4)$$

where

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - q(x), \quad L_0 = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x_0) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - q_0(x_0),$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha_i$ , ( $i = \overline{0, m}$ ) are given constants,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\varphi_1 \in C(S_0)$ ,  $\varphi_2 \in C(S_\Gamma)$  are prescribed functions,  $\varphi \in C^2(\Gamma)$  is known function,  $D$  is cylindrical area,  $D \subset R^{n+1}$ ,  $D = (0, 1) \times \Omega$ ,  $\Omega \subset R^n$ ,  $x = (x_0, \bar{x}) \in D$ ,  $0 < x_0 < 1$ ,  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ,  $S_\Gamma = \Gamma \times (0, 1)$  is side surface of cylinder,  $S_0 = \{x : x_0 = 0, \bar{x} \in \overline{\Omega}\}$  is the lower base of cylinder,  $S_1 = \{x : x_0 = 1, \bar{x} \in \overline{\Omega}\}$  upper base of cylinder,  $\{\xi_i\}_0^m$  given set of points,  $0 < \xi_0 \leq \dots \leq \xi_m < 1$ ,  $a_0(x_0) \in C^1[0, 1]$  is prescribed positive function,  $q_0(x_0) \in C(0, 1)$  is known function,  $q_0(x_0) \geq 0$ ,  $f(x) \in C^2(\overline{D})$  are also known functions,  $L$  and  $L_0$  are uniformly elliptic operators,  $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{D})$  are given coefficients,  $q(x) \in C^1(D)$  is given non-negative function.

The following theorems of uniqueness and existence of solution are true:

(3.3.1)

**Theorem 4.5.1.** If in the condition (4.5.4') either a)  $\alpha_i \geq 0$  ( $i = \overline{0, m}$ ),  $\sum_{i=0}^m \frac{\alpha_i}{\alpha} < 1$ ; or b)  $\alpha_i \leq 0$  ( $i = \overline{0, m}$ ),  $\sum_{i=0}^m \frac{|\alpha_i|}{\alpha} < 1$ ; and there exists a solution of the problem (4.5.1')-(4.5.4'), then the solution is unique; if c)  $\alpha_i \geq 0$ , ( $i = \overline{0, m}$ ),  $\sum_{i=0}^m \frac{\alpha_i}{\alpha} = 1$ ,  $q_0(x_0) = 0$ ,  $q(x) = 0$ ; then the solution could be found with the precision of any constant.

**Theorem 4.5.2.** Assume that in the problem (4.5.1')-(4.5.4')  $a_y(x) = a_y(\bar{x})$ , and

A)  $a_0(x_0) = 1$ ,  $q_0(x_0) = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\rho(x_0) = 0$ , series  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n w_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \varphi_n w_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \varphi_n w_n$  absolutely converge and one of the following conditions are satisfied a)  $\alpha_i \leq 0$  ( $i = \overline{0, m}$ ); or b)  $\alpha_i \geq 0$  ( $i = \overline{0, m}$ ),  $\sum_{i=0}^m \alpha_i < 1$ ; then there exists the unique solution of the problem (4.5.1')-(4.5.4') and it can be written out in the form of the next series:

$$u(x_0, \bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\mu_n x_0} - e^{-\mu_n x_0}}{e^{\mu_n} - e^{-\mu_n} - \sum_{i=0}^m \alpha_i [e^{\mu_n \xi_i} - e^{-\mu_n \xi_i}]} \varphi_n w_n, \quad (4.5.15)$$

where  $w_n$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ) functions are eigenfunctions of  $L$  operator,  $\mu_n$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ) are eigenvalues of  $L_0$  operator,  $\varphi_n$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ) are coefficients of expansion the  $\varphi \in C^2(\overline{D})$  function in series in  $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$  basis; or

B) If  $\alpha = \beta = \alpha_i = 0$ ,  $i = \overline{0, m}$ ,  $\xi_0 = 0$ ,  $\rho(x_0) = 1$  and the following conditions take place  $|v_{n2}'| = O(1/\mu_n)$ ,  $|v_{n2}''| = O(1/\mu_n^2)$ , where  $\mu_n$ , ( $n = \overline{1, \infty}$ ) are  $L_0$  operator's eigenvalues,  $v_{n2}(x_0)$  are solutions of the following problems:

$$\frac{d}{dx_0} \left( a_0(x_0) \frac{dv_{n2}}{dx_0} \right) - [q_0(x_0) + \lambda_n] v_{n2}(x_0) = 0, \quad 0 < x_0 < 1, \quad v_{n2}(0) = 1, \quad v_{n2}(1) = 0, \\ (n = \overline{1, \infty}).$$

where  $\lambda_n$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ) numbers are  $L$  operator's eigenvalues; then there exists solution of the problem (4.5.1')-(4.5.4'), it is unique and can be written in the following form:

$$u(x_0, \bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{n2}(x_0)}{\int_0^1 v_{n2}(x_0) dx_0} \varphi_n w_n(\bar{x}), \quad (4.5.16)$$

where  $w_n$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ) functions are eigenfunctions of  $L$  operator,  $\varphi_n$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ) coefficients of expansion of  $\varphi \in C^2(\overline{D})$  function in series in the  $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$  basis.

**GENERAL CONCLUSIONS.** In the dissertation there are investigated non-local initial-boundary and boundary problems for pluri-parabolic, parabolic and some elliptic equations. For the resolution of stated problems there are suggested and studied the iteration method, semi-



discrete and finite-difference methods. On specific areas for certain equations in case of some non-local conditions, there is constructed solution in the form of series.

Results obtained in the dissertation are published in the following articles:

1. Gordeziani E., Gordeziani N. *On some generalization of non-local boundary value problems for elliptic equations*. Bulletin of TICMI, Tbilisi University Press, Vol. 2, 1998, pp. 34-36.
2. Gordeziani E. *On solution of one non-local initial-boundary value problem*. Students 58-th Scientific Conference Dedicated to the 80-th Anniversary of Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, Champion Student's Thesis of Scientific Works, Tbilisi University Press, 1999, pp. 14-15. (in Georgian)
3. Gordeziani E.D., Gordeziani D.G., Kachiashvili K.I. *On some mathematical models of diffusion of various mixtures in water streams*. Problems of Ecology and Exploitation of Objects, Thesis of Reports, Sevastopol, 21-25 Jun, 1999, Kiev, pp. 78-79. (in Russian)
4. Gordeziani E., Gordeziani D. *On investigation of difference schemes for some pluriparabolic equations*. Reports of enlarged sessions of the seminars of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi University Press, Vol. 14, № 3, 1999, pp. 53-57.
5. Gordeziani E., Gordeziani D. *Difference schemes for pluriparabolic equations*. Bulletin of TICMI, Tbilisi University Press, Vol. 4, 2000, pp. 41-46.
6. Gordeziani E.D., Meladze H.V. *On investigation of one non-classical initial boundary value problem*. Third International Conference Finite Difference Schemes (FDS), September 1-4, 2000, Palanga, Lithuania, Abstracts, p. 18.
7. Gordeziani E., Vashakmadze T., Muradova A., Zarqua T. *New technologies of design of some boundary value problems for ordinary differential equations*. Proceedings of Javakhishvili State University, Tbilisi University Press, Vol. 342 (20), 2000, pp. 91-96.
8. Gordeziani E.D., Meladze H.V., Torralba F.C. *On mathematical modeling and numerical resolution of pollution diffusion in rivers*. Proceedings of the third international conference on advances of computer methods in geotechnical and geoenvironmental engineering, Geoecology and Computers, Edited by Sergey A. Yufin, Center of Underground and Special Engineering, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow/Russia/1-4 February, A.A. Balkema/Rotterdam/Prookfield/2000, pp. 509-511.
9. Gordeziani E. *On numerical methods for the resolution of one non-classical problem with pluri-parabolic equation*. Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi State University Press, 50-51, 2000-2001, pp.38-47.
10. Gordeziani E. *On investigation of non-local problem for certain elliptic equation*. Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi State University Press, 50-51, 2000-2001, pp.48-57.



## ANALYSIS OF ABSTRACT EVOLUTION SYSTEMS AND APPLICATIONS IN EXTREMAL PROBLEMS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS

*K. Gelashvili*

*Chair of Control Theory*

The dissertation has been done at the department of Applied Mathematics and Computer Sciences, Chair of Control Theory, I. Javakishvili Tbilisi State University.

**Scientific consultants:** Guram Kharatishvili, Professor, Academician, Ph.D., Phys.Math.

Tamaz Tadumadze, Professor, Ph.D., Phys.Math.

**Official opponents:** Daniel Pierre-Loti-Viaud, Professor of University of Paris 6

Omar Glonti, Professor, Ph.D., Phys.Math.

Sergo Kharibegashvili, Professor, Ph.D., Phys.Math.

The defense of the dissertation took place on November 7, 2003 at I. Javakishvili Tbilisi State University at the open meeting of the Academic Certifying Council Ph.M. 01.08, No. 8 (2 University st., 0143, Tbilisi, I. Vekua Institute of Applied Mathematics of TSU)

One can get acquainted with the dissertation in the library of I. Javakishvili Tbilisi State University (11 University st., 0143, Tbilisi).

**INTRODUCTION.** The consideration of real processes often leads to necessity of investigation of two - parameter families  $U(t, s)$  having the property of evolution:

$$U(t, s) = U(t, r) * U(r, s), \quad U(s, s) = e, \quad (1)$$

where:  $(s, t)$  belongs to some subset of  $\mathbb{R}^2$ ;  $*$  is a binary associative operation;  $e$  is the neutral element with respect to  $*$ .

Indeed, in the theories of dynamic systems, ergodic and probability, various types of cascades, flows, non - autonomous flows, Markovian processes and so on are actively being explored.

Obviously, the additive case, when  $*$  is addition in a Banach/Fréché space, lies in the frame of classical analysis.

The multiplicative case, when  $*$  is a composition of linear/nonlinear operators, and the topology on the space of operators is not uniform, is incomparably complicated. multiplicative integral calculus is at initial stage and the development of multiplicative differential calculus is not began.

The whole area of evolution systems is practically inexhaustible, so the properties of evolution systems having applications in differential equations and optimal control theory are of special interest. The solutions of ordinary differential equations, as the functions of initial values, have got the property of evolution. So, progress in the sphere of analysis of evolution systems is important for us in view of the following perspectives. If the technique of integral representation of the families of type (1) is elaborated, then the integral representation of the solution of ordinary differential equation, as function of the field, means existence of solution. This fact can be used in proving theorems of the existence of solutions in the theory of ordinary differential equations and the existence of optimal controls in the theory of extremal problems. The explicit form of the solution can be effectively used to explore the attainable set, what is important for obtaining necessary conditions of optimality. Taking into consideration, that many differential equations with partial derivatives can be rewritten in Banach space as a type of ordinary

differential equations with unbounded linear operators, for which methods of multiplicative calculus are applicable, we again see how vast is the sphere of its applications.

The present thesis realizes the following program.

1. **As the motivation of investigation of abstract evolution systems, we have obtained some important results in the well - elaborated fields of optimal control theory.** We have used the representation of Cauchy problem solution as evolution system of functions of initial values. Using compact expressions for optimal and varied trajectories, we have given simple analytic proof for Pontryagin's Maximum Principle with fixed endpoints. This proof is applicable even when the number of points of discontinuity of admissible controls is uniformly bounded. Such a class of admissible controls often appears in applications, and in this class the existence theorems for a large class of optimal problems are valid. Proving the existence theorem in Banach space for controllable object with unbounded operators, we have essentially used evolutionary representation of solutions.
2. **Development of methods of mathematical analysis for functions of real variable with values in a monoid of special type, practically in minimal algebraic restrictions.** Such an approach is applicable in both additive and multiplicative cases. To this end, definitions of the derivative and Riemann integral are modified in such a way, that the results of mathematical analysis (integration conditions, continuous and evolutionary dependence on the limits of integration, differentiability with respect to the limits of integration, the Newton - Leibnitz formula) remain valid. Consequently, the simplest differential equations can now be considered in a monoid and their solution is given by Newton - Leibnitz formula.
3. **Development of methods of ordinary differential equations in a near - semi - ring of special type.** If we have consistent structures of additive and multiplicative monoids, it is natural to determine differential equations and formulate the Cauchy problem. Under certain conditions the Cauchy problem is equivalent to the simplest problem formulated in a multiplicative monoid, and it can be immediately solved by means of the Newton - Leibnitz formula. Let us note that the definition of the near - semi - ring of special type does not involve assumptions on linearity, finite dimensionality, commutativity and coordinates. As a result, for ordinary differential equations in  $\mathbb{R}^n$  we have obtained the integral representation of solution and the information about the dependence of the solution on the initial values. For a wide class of differential equations we can obtain estimates of higher derivatives of the Cauchy problem with respect to initial values.

Moreover, in the Thesis are included some important facts, which have been obtained as a by - product.

In the thesis:

- (i) For the optimal problem with fixed endpoints a new approach, actively using the evolution system representation of solutions of Cauchy problem, is developed.
- (ii) The Pontryagin Maximum Principle for the time optimal problem in the class of admissible controls with the uniformly bounded number of points of discontinuity is proved.
- (iii) An existence theorem for a class of optimal problems with delayed argument is proved.
- (iv) An existence theorem for optimal problems with a quasilinear differential equation in Banach space, where the linear part contains unbounded operators, is proved.
- (v) Rays in a monoid of special type are defined and their algebro-limiting properties are investigated.
- (vi) The condition for normability of the Fréchet space is obtained.
- (vii) Convergence criterion for the Whitney's topology is established.
- (viii) An existence theorem for a class of multidimensional extremal problem is obtained.



- (ix) The Riemann's integral in the monoid of special type is defined and the continuous and evolutionary dependence on limits of integration are established.
- (x) The integral representation of  $c_0$ -semigroups of operators, of a directional derivative and the Cauchy's problem solutions are obtained.
- (xi) For a first time a derivative in a monoid is defined and the Newton-Leibniz formula is obtained.
- (xii) For a first time ordinary differential equations in a near-semi-ring of special type are considered and the points of the existence, uniqueness and integral representation of a solution are studied.
- (xiii) Estimates of higher derivatives of the Cauchy problem solutions with respect to initial values are obtained.

Practical value of the work could be issued in the following way:

- (i) As we are known, in the optimal control theory only developed in Chapter 1 approach is applicable to optimal problems with admissible controls having uniformly bounded number of points of discontinuity.
- (ii) For the applications it is important to construct the space of rays in the monoid of special type. This process does not comprise great difficulties. It must be noted, that this process is analogical with the construction of algebra Li for the group Li.
- (iii) Defined in Chapter 3 version of Riemann's integral in a monoid is interesting for various reasons:
  - a). The integral representation of directional derivatives is the useful and effective tool even for the numerical calculation of derivatives of functions type  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .
  - b). Application of Riemann's (multiplicative) integral allows us to achieve as much clearness as possible in the problem of definition and representation of  $c_0$ -semigroup of operators.
- (iv) For the Cauchy problem in the theory of ordinary differential equations, having estimations about right-hand sides, we can estimate the derivatives of higher order with respect to initial values.

**CONTENTS AND MAIN RESULTS.** In what follows, the definitions, formulas, theorems and other results are numbered as in the dissertation.

Chapter 1 is devoted to the classical problem of optimal control theory.

Let  $U \subset \mathbb{R}_k$  be the control area, functions  $f_i(x^1, \dots, x^n, u_1, \dots, u_k)$  and  $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}$  continuously map  $\mathbb{R}_n \times U$  into  $\mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$ ;  $[t_0, t_1]$  be a fixed non-trivial segment (i.e.  $t_0 < t_1$ );  $\Omega$  be the set of admissible controls consisting of the functions  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_k(t))$ , such that  $u(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow U$  is continuous from the left, continuous at the points  $t_0, t_1$ , and  $u(\cdot)$  can have points of discontinuity, but a finite number and all these points must be of the first kind.

Let  $(x_0^1, \dots, x_0^n)$  and  $(x_1^1, \dots, x_1^n)$  be given points in  $\mathbb{R}_n$ . Denote by  $\prod$  a line, which passes through the point  $(0, x_1^1, \dots, x_1^n)$  in  $\mathbb{R}_{n+1}$  and is parallel to axis  $x^0$ . In the sequel, elements of  $\mathbb{R}_{n+1}$  are denoted by  $(x^0, x^1, \dots, x^n)$ .

Define the map  $f : \mathbb{R}_{n+1} \times U \rightarrow \mathbb{R}_{n+1}$  by the rule:

$$f(x, u) = (f_0(x^1, \dots, x^n, u_1, \dots, u_k), \dots, f_n(x^1, \dots, x^n, u_1, \dots, u_k)).$$

Obviously,  $f$  does not depend on values of component  $x^0$ .

**definition 1.1.1** We say that the admissible control  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , moves the point  $x_0 = (0, x_0^1, \dots, x_0^n)$  into some point of the line  $\prod$ , if the trajectory  $\varphi(\cdot)$  corresponding to  $u(\cdot)$ ,

which is a solution of the Cauchy problem

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.1)$$

is defined on the entire  $[t_0, t_1]$  and  $\varphi(t_1) \in \Pi$ .

**definition 1.1.2** The extremal problem

$$x^0(t_1) \rightarrow \min, \quad (1.2)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) \in \Pi, \quad u(\cdot) \in \Omega, \quad (1.3)$$

is said to be the main problem of optimal control theory. The admissible control  $u(\cdot)$ , which is the solution of (1.2)-(1.3), and the trajectory  $x(\cdot)$  corresponding to  $u(\cdot)$ , are said to be optimal.

For any  $(\psi, x, u) \in \mathbb{R}_{n+1} \times \mathbb{R}_{n+1} \times U$  suppose:

$$\mathcal{H}(\psi, x, u) = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(x, u),$$

$$\mathcal{M}(\psi, x) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(\psi, x, u).$$

**Theorem 1.1.1** (Pontryagin's Maximum Principle) *Let  $u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , be a admissible control, which moves  $x_0$  into some point of the line  $\Pi$ . In order for the control  $u(\cdot)$  and its corresponding trajectory  $\varphi(\cdot)$  to be optimal it is necessary the existence of a non - zero continuous vector function  $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$  such that*

1).  $\psi(\cdot)$  corresponds to  $u(\cdot)$  and  $\varphi(\cdot)$  by the following rule:

$$\dot{\psi}_i(t) = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f_\alpha(\varphi(t), u(t))}{\partial x^i} \psi_\alpha(t), \quad (1.4)$$

$$0 \leq i \leq n; \quad t_0 \leq t \leq t_1;$$

2). For each  $t \in [t_0, t_1]$  there holds the maximum condition:

$$\mathcal{H}(\psi(t), \varphi(t), u(t)) = \mathcal{M}(\psi(t), \varphi(t)).$$

3).  $\psi_0(t)$  is constant with respect to  $t$  and  $\psi_0(t_1) \leq 0$ .

Describe shortly the proof of Theorem 1.1.1, given in Chapter 1.

The following auxiliary lemmas characterize the geometric aspects of item 2) of Maximum Principle.

By  $\mathbb{R}^m$  we denote the set of  $m$  - dimensional vector columns

$$y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = (y^1, \dots, y^m)^T.$$

If  $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}_m$  and  $y = (y^1, \dots, y^m)^T \in \mathbb{R}^m$ , then the notation  $xy$  we use for the inner product:

$$xy = \sum_{i=1}^m x^i y^i.$$

**Lemma 1.1.1.** Let  $Y \subset \mathbb{R}^m$  be a convex set,  $y_0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_0 \neq 0 \in Y$  and the system of inequalities:

$$\begin{cases} 0 \leq \psi y_0, \\ 0 \geq \psi y, \quad \forall y \in Y, \end{cases} \quad (1.5)$$

has only null - solution with respect to  $\psi \in \mathbb{R}_m$ .

Then there exists a subset  $\{y_1, \dots, y_m\} \subset Y$  such that:

- 1)  $\{y_1, \dots, y_m\}$  is a basis of  $\mathbb{R}^m$ .
- 2) There exist numbers  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , such that  $y_0 = \sum_{i=1}^m \alpha_i y^i$ .

**Lemma 1.1.2.** Let  $0 \in Y \subset \mathbb{R}^m$ ,  $0 \neq y_0 \in \mathbb{R}^m$  and the system of inequalities:

$$\begin{cases} 0 \leq \psi y_0, \\ 0 \geq \psi y, \quad \forall y \in Y, \end{cases} \quad (1.8)$$

has only null - solution with respect to  $\psi \in \mathbb{R}_m$ .

Then there exist: vectors  $y_{ij} \in Y$ , numbers  $\alpha_i$  and  $\gamma_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, m+1$  such that:

- 1) for every index  $i$  we have:  $\alpha_i > 0$ ,  $\gamma_{ij} \in [0, 1]$ , and  $\sum_{j=1}^{m+1} \gamma_{ij} = 1$ ;
- 2)  $\{\sum_{j=1}^{m+1} \gamma_{ij} y_{ij}\}$  is a basis of  $\mathbb{R}^m$ ;
- 3)  $y_0 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^{m+1} \gamma_{ij} y_{ij}$ .

$u(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  denotes the optimal control, and  $\varphi(\cdot)$  denotes the optimal trajectory. Consider the set:

$$\text{var} = \{(s_i, \sigma_i, v_i)\}_{i=1}^m \subset (t_0, t_1] \times \mathbb{R}_+ \times U.$$

If  $\{(s_i - \sigma_i, s_i)\}_{i=1}^m$  is a subset of pairwise disjoint intervals in  $[t_0, t_1]$ , then var is said to be the variation. Besides, the admissible control  $u_{\text{var}}(\cdot)$ , which is defined by formula:

$$u_{\text{var}}(t) = \begin{cases} v_1, & t \in (s_1 - \sigma_1, s_1], \\ \vdots & \vdots \\ v_m, & t \in (s_m - \sigma_m, s_m], \\ u(t), & t \notin \bigcup_{i=1}^m (s_i - \sigma_i, s_i], \end{cases}$$

is said to be a varied control. When  $m=1$ , i.e.  $\text{var} = \{(s, \sigma, v)\}$ , then var is said to be a simple variation and for the sake of simplicity is identified with its element:  $\text{var} = (s, \sigma, v)$ .

Using the representation of Cauchy problem solution as evolution system of functions of initial values, we obtain compact expressions for optimal and varied trajectories and on this base we give simple analytical proof of Theorem 1.1.1.

Denote by  $\Phi_{t,s}(x)$  the value of the solution of Cauchy problem:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(s) = x, \quad (1.9)$$

at the point  $t$ ,  $\forall s \in [t_0, t_1]$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}_{n+1}$ . Note, that under the term "solution" we mean non - extendable (maximal) solution. Obviously,

$$\varphi(t) = \Phi_{t,t_0}(x_0), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

For every fixed parameter  $v \in U$  denote by  $\Phi_{t-s}^v(x)$  the value of the solution of the Cauchy problem:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), v), \quad x(s) = x, \quad (1.10)$$

at the point  $t$ .  $\Phi_{t-s}^v(x)$  depends on  $t-s$ , only, as (1.10) is autonomous.

For a given variation  $\text{var} = \{(s_i, \sigma_i, v_i)\}_{i=1}^m$  denote by  $\varphi_{\text{var}}(t)$  the value of the solution Cauchy problem:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_{\text{var}}(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

at the point  $t$ .

Determine the form of the trajectory  $\varphi_{\text{var}}(\cdot)$ .

For each simple variation  $(s, \sigma, v)$ , when  $\sigma$  is small enough, the following representation

$$\varphi_{(s, \sigma, v)}(t) = \left( \Phi_{t,s} \circ \Phi_{\sigma}^v \circ \Phi_{s-\sigma, t_0} \right) (x_0), \quad s \leq t \leq t_1, \quad (1.11)$$

is valid.

Now, let us take arbitrarily a variation  $\text{var} = \{(s_i, \sigma_i, v_i)\}_{i=1}^m$ , for which  $\sum_{i=1}^m \sigma_i$  is small enough. Then

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{var}}(t) = \\ = \left( \Phi_{t, \max\{s_i\}_i} \circ \prod_{s_i}^{\leftarrow} \left[ \Phi_{\sigma_i}^{v_i} \circ \Phi_{s_i - \sigma_i, s_i - \Delta s_i} \right] \right) (x_0), \quad (1.12) \\ \max\{s_i\}_i \leq t \leq t_1. \end{aligned}$$

In (1.12),  $\Delta s_i = s_i - s$ , where  $s = \max\{s_k \mid s_k < s_i\}$  is the moment of time in variation previous to  $s_i$ ;  $\Delta \min\{s_i\}_i = \min\{s_i\}_i - t_0$ ;  $\prod_{s_i}^{\leftarrow}$  means that the multipliers are ordered chronologically with respect to  $s_i$ :  $\min\{s_i\}_i$  is placed at the right, then  $s_i$  monotonically increases and finally  $\max\{s_i\}_i$  is placed at the left.

Note, that the right-hand side of (1.12) is defined for  $\sigma_i$  of arbitrary sign, when  $\sum_{i=1}^m \sigma_i$  is small enough and  $\max\{s_i\}_i \leq t \leq t_1$ .

Using the auxiliary lemmas and the representation (1.12), we simply prove that there exists  $\hat{\psi} \neq 0$  such that

$$\hat{\psi}_0 \leq 0, \quad \hat{\psi} y \leq 0, \quad \forall y \in Y,$$

where the set  $Y \in \mathbb{R}^{n+1}$  is defined as follows:

$$Y = \left\{ \frac{\partial \Phi_{t_1, s}(\varphi(s))}{\partial x} \left[ f(\varphi(s), v) - f(\varphi(s), u(s)) \right]^T \mid \forall (s, v) \in [t_0, t_1] \times U \right\}.$$

But this is the main fact in the proof and the items of Maximum Principle can be proved now in the standard way.

Note some features of the applied method. As we have seen above, using of evolution systems considerably simplifies the proof of maximum principle as compared with other proofs. Applying this method, the same success can be achieved in other important problems of optimal control theory; in Chapter 1 are considered following cases:

- an optimal problem with variable control area;
- an optimal problem in the class of controls having uniformly limited number of points of discontinuity;
- the time optimal problem.

Between them, the second item is of special interesting; as we are known, other methods, used to prove Pontryagin's Maximum Principle in its standard formalization, are not applicable to the problems where controls have uniformly limited number of points of discontinuity. In applications, such class of admissible controls appears naturally and frequently, as in many

real processes discontinuity of an admissible control means to spend some fixed dose of an exhaustible resource. Thus, in such problems, setting of the upper limit for number of discontinuities is a natural thing.

"Good mathematical properties" of the class of admissible controls, consisting of the functions with uniformly bounded number of points of discontinuity are studied in Chapter 1, too. To this end, are considered the following points:

- an existence theorem for a class of optimal problems with delayed argument;
- an existence theorem for one class of optimal problems in Banach space.

The goal of Chapter 2 is to investigate a monoid  $M_{(\ast)}.D\backslash\Delta$  of special type as well as the questions of algebraic and limiting arrangement of its set of rays. In the notation  $M_{(\ast)}.D\backslash\Delta$ ,  $M$  denotes a support,  $\ast$  is a two-place operation determining a monoid structure on  $M$  and  $D\backslash\Delta$  is the convergence in  $M$  which is obtained by narrowing of a class of converging directednesses in the metrizable space  $M.D$  (the necessity of such a narrowing takes sometimes place in applications). Definition of the monoid  $M_{(\ast)}.D\backslash\Delta$  covers both the commutative and non-commutative cases, due to the introduction of a complexity parameter.

Formally, a ray is one-parameter submonoid satisfying certain conditions. Algebraic and limiting structures pass naturally from  $M_{(\ast)}.D\backslash\Delta$  to its space of rays; some properties turn out to be hereditary, including the completeness. The process of constructing a space of rays is analogous to that of the Lie algebra for the Lie group.

In 2.1 is studied convergence with restrictions and related questions which are used in next chapters. Let  $X$  be a set. Us usual, the function  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  is said to be a finite deviation if for any  $x, y, z \in X$  there take place

$$d(x, y) = d(y, x), \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad (x = y) \Rightarrow (d(x, y) = 0).$$

Everywhere in what follows, by saying that  $X.D$  is a metrizable space, we will mean that the topology on  $X$  is defined by a finite or a countable family  $D$  of finite deviations.

**Definition 2.1.1.** Everywhere below, the writing  $X.D\backslash\Delta$  will denote that  $X$  is a set,  $D$  is a finite or countable family of finite deviations which defines a metrizable topology on  $X$ , and  $\Delta$  is a finite or countable set consisting of functions of the type  $\delta : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  (elements of the set  $\Delta$  are sometimes called restrictions). The sequence  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  is said to be converging to  $x_0$  in  $X.D\backslash\Delta$  (or simply in  $X$ , if we know uniquely what kind of sets of finite deviations and restrictions determine the convergence), if:

- $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  converges to  $x_0$  in the metrizable space  $X.D$ ;
- for every  $\delta \in \Delta$ , the set  $\{\delta(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$  is bounded.

Clearly, due to the choice of  $\Delta$  we can differently narrow a class of converging in  $X.D$  sequences. If  $\Delta = \emptyset$ , then instead of  $X.D\backslash\Delta$  we will write  $X.D$ , while  $D = \{d\}$  and  $\Delta = \{\delta\}$  are one-point sets, then instead of  $X.\{d\}\backslash\{\delta\}$  the use will be made of the writing  $X.d\backslash\delta$ .

Example 2.1.1 gives a sample of  $X.D\backslash\Delta$ , which is nontopologized.

2.2 is devoted to the monoid of special type. By  $M_{(\ast)}$  is denoted an abstract monoid whose algebraic structure is defined by a binary associative operation  $\ast$  and by unity  $e$ . If  $g \in M$  is invertible and  $f$  is its inverse, (i.e.,  $g \ast f = f \ast g = e$ ), then we write  $f = \bar{g}$ . If the mapping  $g \mapsto \bar{g}$  is defined on the whole  $M$ , then it is called a symmetry. A monoid is called commutative, if  $\ast$  is the commutative operation.

**Definition 2.2.1** Everywhere in what follows the writing  $M_{(\ast)}.D\backslash\Delta$  will denote that  $M_{(\ast)}$  is a monoid,  $M.D\backslash\Delta$  is defined correctly, and the algebraic and limiting structures on  $M$  are consistent by the axioms:

(M<sub>1</sub>) There exists  $\delta_l : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ , such that  $\delta_l$  transfers bounded in  $M.D \setminus \Delta$  sets into bounded, and

$$\begin{aligned} \delta_l(e) &= 1, \quad \delta_l(g_1 * g_2) \leq \delta_l(g_1)\delta_l(g_2), \\ d(g * g_1, g * g_2) &\leq \delta_l(g)d(g_1, g_2), \quad \forall g, g_1, g_2 \in M, \quad \forall d \in D. \end{aligned}$$

(M<sub>2</sub>) To each pair  $(d, M_0)$ , where  $d \in D$  and  $M_0$  is a set bounded in  $M.D \setminus \Delta$ , there corresponds (not necessarily a unique) a pair  $(\alpha, d_1) \in \mathbb{R}_+ \times D$ , such that

$$d(g_1 * g, g_2 * g) \leq \alpha d_1(g_1 * g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in M, \quad \forall g \in M_0.$$

(M<sub>3</sub>) If  $\Delta \neq \emptyset$ , then it is renumerated by natural numbers, and there exists  $\mu \in \{0, 1\}$ , such that for every  $\delta_n \in \Delta$ :  $\delta_j \in \Delta$ ,  $\delta_j(e) = \delta_{j\mu}$  (with the Kronecker symbol on the right),  $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ;

$$\begin{aligned} \delta_1(g_1 * g_2) &\leq \frac{1}{\mu + 1} (\delta_1(g_1)[\delta_1(g_2)]^\mu + [\delta_1(g_1)]^\mu \delta_1(g_2)), \quad \forall g_1, g_2 \in M, \\ \delta_n(g_1 * g_2) &\leq \delta_n(g_1)[\delta_1(g_2)]^{\mu n} + [\delta_1(g_1)]^\mu \delta_n(g_2) + \\ &+ \mu \sum_{\substack{i_1! \dots i_k! \\ \forall n \geq 2, \quad \forall g_1, g_2 \in M,}} \frac{n!}{i_1! \dots i_k!} \left[ \frac{\delta_1(g_2)}{1!} \right]^{i_1} \dots \left[ \frac{\delta_k(g_2)}{k!} \right]^{i_k} \delta_{i_1 + \dots + i_k}(g_1), \end{aligned}$$

where the sum  $\sum$  is taken with respect to the k-tuples  $(i_1, \dots, i_k)$ , such that  $i_j \in \mathbb{Z}_+$  and  $i_1 + \dots + i_k = n$ , except the two (degenerated into one index) sets, when  $i_1 = n$  ( $k = 1$ ) and  $i_n = 1$  ( $k = n$ ).

The parameter  $\mu$ , necessary in (M<sub>3</sub>), is unique. Indeed, if  $\mu = 0$ , then  $\delta(e) = 0$ ,  $\forall \delta \in \Delta$ . At the same time, if  $\mu = 1$ , then  $\delta_1(e) = \delta_{11} = 1$ . Thus, for every  $M_{(\ast)}.D \setminus \Delta$  the parameter  $\mu \in \{0, 1\}$  is defined uniquely, and the following definition is correct.

**Definition 2.2.2.** Let there be given  $M_{(\ast)}.D \setminus \Delta$  and let  $\Delta \neq \emptyset$ . Then the uniquely defined parameter  $\mu$  is called the level of complexity of the monoid  $M_{(\ast)}.D \setminus \Delta$ , while  $M_{(\ast)}.D \setminus \Delta$ , or simply  $M_{(\ast)}$ , is called the monoid of complexity of  $\mu$ .

For  $\Delta = \emptyset$ , Definition 2.2.1 defines traditional object, where axioms (M<sub>i</sub>) compensate the absence of local coordinates (analogously to normed, Frechet and locally convex spaces).

For  $\Delta \neq \emptyset$ , there may happen two non-simultaneous cases  $\mu = 0$  or  $\mu = 1$  which will be considered in the proofs separately. If  $\mu = 0$ , then (M<sub>3</sub>) implies that

$$\delta(e) = 0 \text{ and } \delta(g_1 * g_2) \leq \delta(g_1) + \delta(g_2), \quad \forall \delta \in \Delta \text{ and } \forall g_1, g_2 \in M,$$

which call to mind the properties of semi-norms.

If  $\mu = 1$ , then according to (M<sub>3</sub>), the order of elements in  $\Delta$  is essential and the connection between elements  $\Delta$  is established by the formula

$$\delta_n(g_1 * g_2) \leq \sum_{i_1! \dots i_k!} \frac{n!}{i_1! \dots i_k!} \left[ \frac{\delta_1(g_2)}{1!} \right]^{i_1} \dots \left[ \frac{\delta_k(g_2)}{k!} \right]^{i_k} \delta_{i_1 + \dots + i_k}(g_1),$$

$\forall g_1, g_2 \in M$ , where to each k-tuples  $(i_1, \dots, i_k)$ , such that  $i_j \in \mathbb{Z}_+$  and  $i_1 + \dots + i_k = n$ , there corresponds in the sum  $\sum$  one summand.

**Remark.** Let there be given  $M.D \setminus \Delta$  and also two two-place operations  $+$  and  $*$ , each of them determining a structure of the monoid on  $M$ , such that  $M_{(+).D \setminus \Delta}$  and  $M_{(*).D \setminus \Delta}$  are defined. In the designation  $\mu$  and  $\delta_l$  we will indicate the corresponding two-place operation:  $\mu^{(\ast)}$ ,  $\mu^{(+)}$ ,  $\delta_l^{(\ast)}$  and so on.

Of course, here and in the sequel we prove all propositions, which are necessary for our purposes.

2.3 is devoted to the set of rays and limiting structure on them. Consider some  $M_{(*)} \setminus D \setminus \Delta$ . As usual, a family  $\{q_t\}_{t \geq 0} \subset M$ , or simply  $q$ , will be said to be one-parameter submonoid in  $M_{(*)}$ , if  $q_0 = e$  and  $q_{t+s} = q_t * q_s$ ,  $\forall s, t \geq 0$ . The writing  $o(t)$  or with indexes  $o_\alpha(t)$  always denotes the infinitesimal function of higher order than  $t$ .

**Definition 2.3.1.** One-parameter submonoid  $\{q_t\}_{t \geq 0} \subset M$  (or simply  $q$ ), is said to be a ray in  $M_{(*)} \setminus D \setminus \Delta$ , if:

(i) for every  $d \in D$  there exist  $\beta_d \geq 0$  and  $o_d(\cdot)$ , such that

$$d(q_t, e) \leq t\beta_d + o_d(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.15)$$

(ii) for every  $\delta \in \{\delta_t\} \cup \Delta$  there exist  $\beta_\delta \geq 0$  and  $o_\delta(\cdot)$ , such that

$$\delta(q_t) \leq \delta(q_0) + t\beta_\delta + o_\delta(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.16)$$

For  $M_{(*)} \setminus D \setminus \Delta$ , a set of all rays will be denoted by  $\mathcal{R}(M_{(*)})$ .

Estimates (2.15) and (2.16) determine a set of rays and they bear a local character, but global estimates which will be used in the sequel are obtained, too.

Define a limiting structure on  $\mathcal{R}(M_{(*)})$ . The symbol  $L$  is used for finite deviations and  $\Lambda$  for restrictions. First we define a set  $\Lambda$  of restrictions  $\lambda : \mathcal{R}(M_{(*)}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

For every  $q \in \mathcal{R}(M_{(*)})$  and  $\delta \in \{\delta_t\} \cup \Delta$  define an auxiliary set  $\Lambda_\delta(q)$  as follows: if  $\beta \geq 0$  and  $o(\cdot)$  are such that (2.16) holds,

$$\delta(q_t) \leq \delta(e) + t\beta + o(t), \quad \forall t \geq 0,$$

then we assume that  $\beta \in \Lambda_\delta(q)$ . Now

$$\lambda_\delta(q) = \inf\{\beta \mid \beta \in \Lambda_\delta(q)\}, \quad \forall q \in \mathcal{R}(M_{(*)}).$$

Thus, to every  $\delta \in \{\delta_t\} \cup \Delta$  there corresponds  $\lambda_\delta : \mathcal{R}(M_{(*)}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ , and we denote a set of all such  $\lambda_\delta$  by  $\Lambda$ :  $\Lambda = \{\lambda_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ .

Note that the trivial one-parameter submonoid in  $M_{(*)}$  denoted by  $\theta$  (i.e.,  $\theta_t \equiv e$ ,  $\forall t \geq 0$ ) belongs to  $\mathcal{R}(M_{(*)})$  and  $\lambda_\delta(\theta) = 0$  for every  $\delta \in \Delta \cup \{\delta_t\}$ .

Let us agree that for some specific  $\delta_n \in \Delta$  we denote for the sake of simplicity the corresponding to it  $\lambda_{\delta_n}$  by  $\lambda_n$  and the corresponding to  $\delta_t$  by  $\lambda_t$ .

Define a set of finite deviations  $L$  on  $\mathcal{R}(M_{(*)})$ . Let there arbitrarily be given  $d \in D$ ,  $q^1, q^2 \in \mathcal{R}(M_{(*)})$ . There exist  $\beta_1 \geq 0$ ,  $\beta_2 \geq 0$  and  $o_1(\cdot)$ ,  $o_2(\cdot)$ , such that

$$d(q_t^i, e) \leq t\beta_i + o_i(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2\},$$

whence

$$d(q_t^1, q_t^2) \leq t(\beta_1 + \beta_2) + (o_1(t) + o_2(t)), \quad \forall t \geq 0.$$

Thus, for every  $\{q^1, q^2\} \subset \mathcal{R}(M_{(*)})$  there exist  $\alpha \geq 0$  and  $o(\cdot)$ , such that

$$d(q_t^1, q_t^2) \leq t\alpha + o(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (2.22)$$

and define  $L(q^1, q^2, d)$  as follows: if  $\alpha \geq 0$  and there exists  $o(\cdot)$ , such that (2.22) holds, then by the definition we take  $\alpha \in L(q^1, q^2, d)$ . Denote

$$l_d(q^1, q^2) = \inf\{\alpha \mid \alpha \in L(q^1, q^2, d)\},$$

$$\forall q^1, q^2 \in \mathcal{R}(M_{(*)}), \quad \forall d \in D.$$

Hence for every  $d \in D$  the mapping

$$(q^1, q^2) \mapsto l_d(q^1, q^2),$$

or simply  $l_d$ , is defined like the mapping from  $\mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)}) \times \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Moreover,  $l_d$  is the finite deviation on  $\mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$ ,  $\forall d \in D$ . Denote  $L = \{l_d\}_{d \in D}$ . The family  $L$  divides the elements  $\mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  and defines a topology on  $\mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$ .

Note some properties with pass from the monoid to rays.

**Proposition 2.3.4.** Let  $\mathcal{M}_{(\ast)}, \mathcal{L} \setminus \Lambda$  correspond to the monoid  $\mathcal{M}_{(\ast)}, D \setminus \Delta$ , and  $\Delta$  consist of lower semi-continuous functions. Then  $\Lambda$  consists of lower semi-continuous functions.

**Theorem 2.3.1.** Let  $\mathcal{M}_{(\ast)}, D \setminus \Delta$  be a complete monoid,  $\Delta$  consist of lower semi-continuous functions,  $\delta_l = 1 + \delta_{1\mu}(\delta_l - 1)$ , where  $\mu$  is the complexity level. Then  $\mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)}) \cdot \mathcal{L} \setminus \Lambda$  is complete.

2.4 shows that a set of rays  $\mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  of the monoid  $\mathcal{M}_{(\ast)}, D \setminus \Delta$  has non-trivial algebraic structure, naturally connected with limiting structure. Everywhere in the sequel,  $\mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  will be considered with the convergence  $L \setminus \Lambda$  which we defined above.

**Definition 2.4.1.** Let  $q^1, q^2, q \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$ . If for every  $d \in D$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1} d(q_t^1 \ast q_t^2, q_t) = 0,$$

holds, then  $q$  will be called the sum of  $q^1$  and  $q^2$  and denoted by  $q = q^1 + q^2$ .

As is seen, the existence of the sum  $q^1 + q^2$  is not expectable for every  $q^1, q^2 \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$ , but if it does exist, then it is unique. Note some properties of the sum.

**Proposition 2.4.3** Let  $q^1, q^2, q^3 \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  and there exist  $q^1 + q^2$ ,  $q^2 + q^3$  and  $(q^1 + q^2) + q^3$ . Then there exists  $q^1 + (q^2 + q^3)$ , and

$$(q^1 + q^2) + q^3 = q^1 + (q^2 + q^3).$$

**Proposition 2.4.5.** Let  $q^1, q^2 \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  be such that  $q_t^1 \ast q_t^2 = q_t^2 \ast q_t^1$ ,  $\forall t, s \geq 0$ . Then  $q^1 + q^2$  and  $q^2 + q^1$  are defined and

$$(q^1 + q^2)_t = (q^2 + q^1)_t = q_t^1 \ast q_t^2, \quad \forall t \geq 0.$$

**Proposition 2.4.6.** Let  $\mathcal{M}_{(\ast)}, D \setminus \Delta$  be commutative. Then  $\mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  considered with operations  $\theta$  ( $\theta_l \equiv e$  is a 0-ary operation) and  $+$  (2-ary) is a commutative monoid.

Define now the product of the ray by the scalar. Let  $q \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  and  $\alpha \geq 0$ . Clearly,  $\{q_{\alpha t}\}_{t \geq 0} \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$ .

**Definition 2.4.2.** For every  $q \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  and  $\alpha \geq 0$ , their product is called the ray  $\{q_{\alpha t}\}_{t \geq 0}$  and denoted by  $\alpha \odot q$ :

$$(\alpha \odot q)_t = q_{\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

**Proposition 2.4.7.** The operation

$$\{(\alpha, q) \mapsto \alpha \odot q\} : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)}) \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$$

has the following properties:

- (1)  $1 \odot q = q$ ;
- (2)  $\alpha \odot (\beta \odot q) = (\alpha\beta) \odot q$ ;
- (3)  $(\alpha + \beta) \odot q = \alpha \odot q + \beta \odot q$ ;
- (4) if there exists  $q^1 + q^2$ , then there exist  $\alpha \odot q^1 + \alpha \odot q^2$ , and

$$\alpha \odot (q^1 + q^2) = \alpha \odot q^1 + \alpha \odot q^2,$$

$\forall q^1, q^2, q \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ , and as usual, we mean that there first takes place multiplication and then summation.



**Proposition 2.4.8.** Let  $q^1 \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  and there exist  $q^2 \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$ , such that  $\theta = q^1 + q^2$ . Then  $q_t^1 \ast q_t^2 \equiv e, \forall t \geq 0$ .

**Definition 2.4.3.** If for the given  $q \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  there exists  $\tilde{q} \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$ , such that  $\theta = q + \tilde{q} = \tilde{q} + q$ ,  $\tilde{q}$  is called an inverse to  $q$  and is denoted by  $-q$ . In what follows, we will use the writing  $q^1 - q^2$  instead of  $q^1 + (-q^2)$ , and identify  $q$  and  $+q$ , if necessary.

By the definition,  $\theta$  is invertible, and  $-\theta = \theta$ . It is also obvious that from the existence of  $-q$  follow the existence of  $-(-q)$  and the equality  $q = -(-q)$ . Certainly, for every  $q \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  there is no more than one inverse.

**Proposition 2.4.11.** If  $q \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  and  $q$  is invertible, then the system

$$\begin{cases} q + x = \theta, \\ x + q = \theta \end{cases}$$

has a unique solution.

**Proposition 2.4.12.** If  $q \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  and  $q$  is invertible, then every  $\alpha \odot q$  is invertible, and  $-(\alpha \odot q) = \alpha \odot (-q), \forall \alpha \geq 0$ .

**Definition 2.4.4.** If  $\alpha \in \mathbb{R}$  and  $q \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  is invertible, then the product  $\alpha \odot q$  is defined by the rule

$$\alpha \odot q = (\text{sign } \alpha)(|\alpha| \odot q).$$

**Theorem 2.4.1.** Let on the commutative  $M_{(\ast)}.D\Delta$  be defined the symmetry,  $\delta_t = 1$  and  $\delta(g) = \delta(-g), \forall \delta \in \Delta$  and  $\forall g \in M$ . Then  $\mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  which has been considered together with the operations  $\theta$  (0-ary), multiplication by the real scalars (1-ary) and  $+$  (2-ary), is the vector space.

**Proposition 2.4.13.** Let  $q \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  and  $q$  be invertible. Then  $\{(t \odot q)_1\}_{t \in \mathbb{R}}$  is one-parameter subgroup in  $M_{(\ast)}$ .

Calculating the sum of rays, what has certain practical interest, the analogue of Lie-Trotter formula is obtained.

**Proposition 2.4.14.** Let  $q^1, q^2 \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  and there exist  $q^1 + q^2$ . Then for every  $t \geq 0$

$$(q^1 + q^2)_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{((q_{t/n}^1 \ast q_{t/n}^2) \ast \dots \ast (q_{t/n}^1 \ast q_{t/n}^2))}_{n\text{-times}} \quad (2.33)$$

holds in  $M.D\Delta$ .

The sum (2.33) takes especially natural form in the spaces of linear operators, when  $q^i$  are co-semigroups of operators. In 2.4.2, this formulas are obtained and discussed.

The following results (and some others) describe the connection of algebraic and limiting structures on the set of rays.

**Theorem 2.4.2.** Let  $M_{(\ast)}.D\Delta$  be such that  $\Delta$  consists of lower semi-continuous functions. Then the defined on  $\mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  limiting structure  $L\Delta$  and operations  $\{\theta, \odot, +\}$  are connected as follows:

(a) for every  $\lambda \in \Lambda$

$$\lambda(\alpha \odot q) = \alpha \lambda(q), \quad \forall \alpha \geq 0, \quad \forall q \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)});$$

(i.g.) if  $q^1 \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  such that there exists  $q + q^1$ , then

$$\lambda(q + q^1) \leq \lambda(q) + \lambda(q^1).$$

(b) for every  $l \in L$

$$l(\alpha \odot q^1, \alpha \odot q^2) = \alpha l(q^1, q^2), \quad \forall \alpha \geq 0, \quad \forall q^1, q^2 \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)});$$

if  $q \in \mathcal{R}(\mathcal{M}_{(\ast)})$  such that there exist  $q + q^1$  and  $q + q^2$ , then

$$l(q + q^1, q + q^2) \leq l(q^1, q^2);$$

moreover, if  $q$  is invertible, then

$$l(q + q^1, q + q^2) = l(q^1, q^2).$$

When  $M_{(\ast)}.D\Delta$  is a commutative monoid, then the connection of algebraic and limiting structures is more perfect and is described in Theorem 2.4.3.

In 2.5 are considered some adjacent points. Here we note only very interesting condition for normability of the Fréchet space.

**Theorem 2.5.1.** *Let  $\Phi$  be the Fréchet space. For the normability  $\Phi$  it is necessary and sufficient that the metric  $\rho$  which is invariant with respect to translations and determines the topology of the Fréchet space, to exist, such that every continuous in  $\Phi_{(+)}\rho$  one-parameter submonoid is of bounded variation on each finite segment.*

Since every continuous in the Fréchet space one-parameter submonoid has the form  $\{t\varphi\}_{t \geq 0}$  (for some  $\varphi$ ), the following corollary of Theorem 2.5.1 is of special interest.

**Corollary.** *Let  $\Phi$  be the non-normable Fréchet space. Then for every metric  $\rho$ , such that  $\rho$  defines the topology of  $\Phi$  and is invariant with respect to translations, there exist  $\varphi \in \Phi$  and  $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ , such that the family  $\{t\varphi\}_{t \geq 0}$  in  $\Phi_{(+)}\rho$  is not of bounded variation on  $[a, b]$ .*

Chapter 3 is devoted to Riemann (multiplicative) integral in a monoid and its applications. In 3.1 one generalization of the Riemann integral is given as follows. By  $M_{(\ast)}$  is denoted a monoid formed by a set-carrier  $M$ , unity  $e$  and two-place associative operation  $\{(g_1, g_2) \mapsto g_1 \ast g_2\} : M \times M \rightarrow M$ . If some  $g \in M$  is invertible, then its inverse will be denoted by  $\bar{g}$  (i.e.,  $g \ast \bar{g} = \bar{g} \ast g = e$ ).

Denote by  $\sum$  a set of all partitions of the segment:

$$\sigma = \{0 = s_0 \leq \xi_1 \leq s_1 \leq \dots \leq \xi_n \leq s_n = 1\}, \quad s_0 < \dots < s_n.$$

As usual,  $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ ,  $|\sigma| = \max\{\Delta s_i\}_{i=1}^n$ , and the relation  $\sigma_1 \leq \sigma_2$  (i.e.,  $\sigma_2 \geq \sigma_1$ ), which by definition means  $|\sigma_1| \geq |\sigma_2|$ , turns  $\sum$  into a directed set. By the same relation, every subset  $\sigma_0 \leq \sigma \in \sum$  is directed  $\forall \sigma_0 \in \sum$ .

Frequently, the use will be made of the following notation:

$$\begin{aligned} \sum_a^b \sigma f &\equiv \sum_a^b \sigma f(\tau, d\tau) = \\ &f(a + \xi_n(b-a), \Delta s_n(b-a)) \ast f(a + \xi_{n-1}(b-a), \Delta s_{n-1}(b-a)) \ast \dots \ast \\ &\ast f(a + \xi_1(b-a), \Delta s_1(b-a)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

where  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $V \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f : V \rightarrow M$  and  $\sigma = \{0 = s_0 \leq \xi_1 \leq \dots \leq \xi_n \leq s_n = 1\} \in \sum$ . The order on the right-hand side of (3.1) is essential in the case of a non-commutative monoid.

**Definition 3.1.1.** We shall say that  $g \in M$  is the integral of the function  $f: V \rightarrow M$  ( $V \subset \mathbb{R}^2$ ) from  $a$  to  $b$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), and write

$$g = \int_a^b f(\tau, d\tau),$$

if for some  $\sigma_0 \in \Sigma$  the directedness  $\{\sum_{\sigma_0 \leq \sigma \in \Sigma} \sigma f\}$  is defined correctly and converges to  $g$ .

The value of the integral does not depend on the choice of  $\sigma_0$ , since  $\Sigma$  is a directed set, and for any  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$  there exists their majorant, while the converging directedness and every its subdirectedness have one and the same limit.

If necessary (for example, when a structure of the monoid which is compatible with the limiting structure is defined on a set-carrier  $M$  by two ways), the two-placed operation with respect to which we take the integral, will be indicated in our designations. For example,

$$\int_a^b f(\tau, d\tau), \quad \int_a^b f(\tau, d\tau), \quad \sum_a^b \sigma f, \quad \sum_a^b \sigma f.$$

Usually, the integral for the fixed integrand depends on two parameters, the integration limits. In Definition 3.1.1, the possibility that the integral may be a function of one parameter, i.e., of the difference of integration limits, is taken into account.

Let  $f: I \rightarrow M$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ . We can consider the constant with respect to  $t$  mapping

$$(t, s) \rightarrow f(s), \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R} \times I, \quad (3.2)$$

and to pose a question of its integrability (in the sense of Definition 3.1.1).

let us give some interesting results from 3.1.

**Proposition 3.1.2.** Let  $f: V \rightarrow M$ ,  $V \subset \mathbb{R}^2$  and  $f(t, 0) = e$  for every  $(t, 0) \in V$ . Then  $\int_a^0 f(\tau, d\tau) = e$  for every  $(a, 0) \in V$ .

**Proposition 3.1.3.** Let  $f: V \rightarrow M$ ,  $V \subset \mathbb{R}^2$   $f(t, 0) = e$ ,  $\forall (t, 0) \in V$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$  and  $\frac{b-a}{c-a} \in [0, 1]$ ; and let there exist  $\int_a^c f(\tau, d\tau)$ ,  $\int_b^c f(\tau, d\tau)$  and  $\int_a^b f(\tau, d\tau)$ . Then

$$\int_a^c f(\tau, d\tau) = \int_b^c f(\tau, d\tau) * \int_a^b f(\tau, d\tau). \quad (3.5)$$

**Proposition 3.1.4.** Let  $f: V \rightarrow M$ ,  $V \subset \mathbb{R}^2$ ; for every  $(t, s) \in V$  there take place  $(t, -s) \in V$  and  $f(t, s) = -f(t, -s)$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$  and there exist  $\int_a^b f(\tau, d\tau)$  and  $\int_b^a f(\tau, d\tau)$ . then

$$\int_a^b f(\tau, d\tau) = -\left(\int_b^a f(\tau, d\tau)\right).$$

**Proposition 3.1.7.** Let:  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $f: I \rightarrow M$ ,  $0 \in I$ ,  $f(0) = e$ ; for every  $t \geq 0$  there exist  $\int_0^t f(d\tau)$ . Then  $\{\int_0^t f(d\tau)\}_{t \geq 0}$  is the one-parametric submonoid in  $M_{(*)}$ , i.e.,

$$\int_0^0 f(d\tau) = e, \quad \int_0^{t+s} f(d\tau) = \int_0^t f(d\tau) * \int_0^s f(d\tau), \quad \forall s, t \geq 0.$$

Consider now one special case.

For every invertible  $g \in M$ , let us determine an automorphism of the monoid  $M$ :

$$Ad_g f = g * f *^{-1} g, \quad \forall f \in M.$$

It is easily seen that  $Ad_g e = e$ ,  $Ad_g(f_1 * f_2) = Ad_g f_1 * Ad_g f_2$ ,  $Ad_g(-f) = -Ad_g f$  when  $f$  is invertible in  $M$  and if  $\{h_t\}_{t \geq 0}$  is a one-parameter semi-group in  $M$ , then  $\{Ad_g h_t\}_{t \geq 0}$  is also a one-parameter semi-group.

**Proposition 3.1.9.** Let  $\{g(t)\}_{t \geq 0}$  and  $\{h(t)\}_{t \geq 0}$  be one-parameter subgroups in  $M$ , and for some  $a, b \in \mathbb{R}$  let there exist the integral  $\int_a^b Ad_{h(-\tau)} g(-d\tau)$ . Then there exists  $\int_a^b Ad_{g(\tau)} h(d\tau)$ , and the equality

$$\int_a^b Ad_{g(\tau)} h(d\tau) = g(b) * h(b) * \left[ \int_a^b Ad_{h(-\tau)} g(-d\tau) \right] * h(-a) * g(-a) \quad (3.15)$$

takes place.

In 3.2 are developed conditions of integrability. Here again, our writing  $M_{(\ast)}.D \setminus \Delta$  denotes that on the carrier set  $M$  we have the convergence with restrictions  $D \setminus \Delta$  which is consistent with the structure of the monoid  $M_{(\ast)}$  in the sense of Definition 2.2.1; if  $q \in R(M_{(\ast)})$  and  $\varkappa \in \{+, -\}$ , then  $\varkappa q = q$  for  $\varkappa = +$  and  $\varkappa q = -q$  for  $\varkappa = -$ , where  $-q + q = q + (-q) = \theta$  and  $\theta_t \equiv e$  for every  $t \geq 0$ .

**Theorem 3.2.2.** Let  $M_{(\ast)}.D \setminus \Delta$  be complete,  $\varkappa \in \{+, -\}$ ,  $\delta_t = 1 + \delta_{1\mu}(\delta_1 - 1)$ ,  $\Delta$  complete of lower semicontinuous functions and  $\{\varkappa q(t)\}_{t \in [a, b]}$  be a continuous family in  $R(M_{(\ast)}) \cdot L \setminus \Delta$ . Then

$$(t_1, t_2) \mapsto \int_{t_1}^{t_2} (d\tau \odot q(\tau))_1, \quad (3.30)$$

is a continuous mapping from  $V_\varkappa = \{(t_1, t_2) \in [a, b] \times [a, b] \mid \text{sign}(t_2 - t_1) \in \{0, \varkappa 1\}\}$  to  $M_{(\ast)}.D \setminus \Delta$ .

**Theorem 3.2.3.** Let  $M_{(\ast)}.D \setminus \Delta$  be complete,  $\delta_t = 1 + \delta_{1\mu}(\delta_1 - 1)$ ,  $\Delta$  consist of lower semicontinuous functions, and let  $\{\pm q(t)\}_{t \in [a, b]}$  be continuous families in  $R(M_{(\ast)}) \cdot L \setminus \Delta$ . Then for every  $(s, t) \in [a, b] \times [a, b]$ ,  $\int_s^t (d\tau \odot q(\tau))_1$  is defined and  $(s, t) \mapsto \int_s^t (d\tau \odot q(\tau))_1$  maps continuously  $[a, b] \times [a, b]$  into  $M_{(\ast)}.D \setminus \Delta$ .

In 3.3, an integral representation of the  $c_0$ -semigroup of operators is obtained. Let  $A : D(A) \rightarrow X$  be a linear operator acting in the Banach space  $X$ . When the conditions of the Hille-Isida-Phillips theorem are fulfilled, then the linear (possibly unbounded) operator  $A$  in the Banach space  $X$  generates a strongly continuous semi-group of operators  $U(t) = \exp(tA)$ . Such a notation of the exponent is accepted and widespread, but it gives rise to a dissatisfaction: in the general case, for calculation of  $\exp(tA)$  it is impossible to use the series  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i A^i}{i!}$  or the strong limit of operators of the type  $\left(I + \frac{t}{n} A\right)^n$  (as  $n \rightarrow \infty$ ), since the domain of definition of  $A^n$  contracts with the growth of  $n$ . In our opinion, application of the Riemann (multiplicative) integral allows us to achieve as much clearness as possible.

**Theorem 3.3.1.** Let a linear operator  $A$  in the Banach space  $X$  generate the strongly continuous semi-group  $\{U(s)\}_{s \geq 0}$ . Then

$$U(s) = {}^{(s)} \int_0^s (I - dt \cdot A)^{-1}, \quad \forall s \geq 0. \quad (3.40)$$

The integral is taken in the monoid  $B(X)$  (which is considered to have the unity  $I$ , operation of composition and the strong convergence).

In 3.4 an integral representation of a directional derivative is obtained. Let  $X$  and  $Y$  be the Banach spaces and  $O$  be an open subset in  $X$ . By  $(Y, +)$  we denote a monoid whose algebraic structure is defined by  $0$  and  $+$  and the limiting structure is defined by the norm of the space  $Y$ . If  $f : O \rightarrow Y$ ,  $x \in O$ ,  $h \in X$  then as the limit

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^{-1}(f(x + \lambda h) - f(x))$$

(if it is) is called a derivative with respect to the direction  $h$  at the point  $x$ , and we denote it by  $f'(x; h)$ . In 3.4 is shown that to calculate the derivative with respect to the direction it is not necessary to make use of the scalar multiplication in the space  $Y$ , since  $f'(x; h)$  can be calculated through the integral of the function  $s \mapsto [f(x + sh) - f(x)]$  in the monoid  $(Y, +)$ . Moreover, under certain conditions, the existence of such an integral implies the existence of  $f'(x; h)$ . The formula connecting these two values, has the form:

$$f'(x; h) = {}^{(+)}\int_0^1 [f(x + \tau \cdot h) - f(x)]. \quad (3.51)$$

In 3.5, in properly selected monoid by Riemann integral the Cauchy's problem solution as the field function is represented:

**Theorem 3.5.1.** Let the field  $(t, x) \mapsto f_t(x)$  has the standard Properties for the existence of the solution. Then for every  $(t_0, t, x_0) \in (a, b)^2 \times \mathbb{R}^r$  there exists  $(\circ)\int_{t_0}^t (I + d\tau f_\tau)$  and

$$\varphi(t) = \left( (\circ)\int_{t_0}^t (I + d\tau f_\tau) \right) (x_0)$$

is the solution of equation  $\frac{dx}{dt} = f_t(x)$  with initial conditions  $\varphi(t_0) = x_0$ .

The goal of the Chapter 4 is to formulate and investigate the Cauchy problem under minimal restrictions imposed on the algebraic structures. With this end in view, definitions of the derivative is modified in such a way that the results of the mathematical analysis (differentiability with respect to the limits of integration, the Newton-Leibnitz formula) which we shall need in the sequel, remain valid. Consequently, the simplest differential equations can now be considered in a monoid of special type and their solution is given by the Newton-Leibnitz formula. If the phase space is a near-semi-ring of special type (having, in particular, consistent structures of additive and multiplicative monoids), then it is natural matter to determine differential equations and to formulate the Cauchy problem. Under certain conditions the Cauchy problem is equivalent to the simplest problem, formulated in a multiplicative monoid, and it can be immediately solved by means of the Newton-Leibnitz formula. Note that the definition of the phase space does not involve assumptions on linearity, finite dimensionality, commutativity and coordinates.

In 4.1, For a first time a derivative in a monoid is defined and the Newton-Leibnitz formula is obtained.

**Definition 4.1.1.** Given  $M_{(\circ)}, D \setminus \Delta$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , and  $f : [a, b] \rightarrow M$ . We shall say that:

(i)  $q \in R(M_{(\circ)})$  is the right derivative of the function  $f$  at the point  $t \in [a, b]$ , if  $f$  is continuous on the right at  $t$  and for every  $d \in D$  we have:  $d(f(t + \Delta t), q_{\Delta t} * f(t)) = o(\Delta t)$  ( $\Delta t \geq 0$  and  $t + \Delta t \in [a, b]$ ). A set of all such  $q$  we denote by  $D_t^+ f$ .

(ii)  $q \in R(M_{(*)})$  is the left derivative of the function  $f$  at the point  $t \in (a, b]$  and we shall write  $q \in D_l^- f$  if  $f$  is continuous on the left at  $t$ , and for every  $d \in D$  we have:  $d(f(t-\Delta t), q_{\Delta t} * f(t)) = o(\Delta t)$  ( $\Delta t \geq 0$  and  $t - \Delta t \in [a, b]$ ).

(iii) The invertible ray  $q \in R(M_{(*)})$  is the derivative of the function  $f$  at  $t \in (a, b)$  and we shall write  $q \in D_t f$  if  $f$  is continuous at the point  $t$  and for every  $d \in D$  we have:  $d(f(t + \Delta t), (\Delta t \odot q)_1 * f(t)) = o(\Delta t)$  ( $\Delta t \in \mathbb{R}$  and  $t + \Delta t \in [a, b]$ ).

We shall say that the function  $f$  has (the right, the left) derivative on  $[a, b]$  if it has (the right, the left) derivative at every point of that interval.

It follows from Definition 4.1.1 that the sets  $D_t f$ ,  $D_t^+ f$  and  $D_t^- f$  are always defined, although some of them may coincide with  $\emptyset$  or consist of many elements. Every one-point set will be identified with its element.

If on  $M$  we have two two-place operations (for example,  $+$  and  $\cdot$ ), each forming a monoid structure consistent with the limiting structure in the sense of Definition 2.2.1, then the notations of the derivative will always indicate the operation with respect to which it is taken (as for the integrals), for example,  ${}^{(\odot)}D_t f$ ,  ${}^{(+)}D_t^- f$  and so on.

In case  $f$  is a function of two (or more) variables, the emphasis in the notation is laid on that variable with respect to which we take a derivative, for example,  ${}^{(\odot)}D_{t=t_0} f(s, t)$ .

**Proposition 4.1.1.** *Let there be given  $M_{(*)}.D\Delta$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $t_0 \in (a, b)$  and  $f : [a, b] \rightarrow M$ . If  $f(t_0)$  is invertible in  $M_{(*)}$ , then none of the sets  $D_{t_0} f$ ,  $D_{t_0}^+ f$  and  $D_{t_0}^- f$  contain more than one element.*

**Proposition 4.1.2.** *Let there be given  $M_{(*)}.D\Delta$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  and  $f : [a, b] \rightarrow M$ . Then for any  $g \in M$  and  $t \in (a, b)$  we have:*

$$D_t f \subset D_t(f(\cdot) * g), \quad D_t^+ f \subset D_t^+(f(\cdot) * g), \quad D_t^- f \subset D_t^-(f(\cdot) * g).$$

**Proposition 4.1.3.** *Let there be given  $M_{(*)}.D\Delta$ ,  $q \in R(M_{(*)})$ ,  $t \geq 0$ . Then  $q \in D_t^+ q$ .*

The following two propositions are the immediate consequences of Definition 4.1.1.

**Proposition 4.1.4.** *Let there be given  $M_{(*)}.D\Delta$ ;  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ; and let  $f : [a, b] \rightarrow M$  be some constant mapping  $g \equiv f(t)$  for all  $t \in [a, b]$  and for some  $g \in M$ . Then*

$$\theta \in D_t^+ f, \quad \forall t \in [a, b]; \quad \theta \in D_t^- f, \quad \forall t \in (a, b]; \quad \theta \in D_t f, \quad \forall t \in (a, b).$$

**Proposition 4.1.5.** *Let  $f(t) = 0$  be a constant mapping from  $[a, b]$  to  $M_{(*)}.D\Delta$ , such that  $g * 0 = 0$ ,  $\forall g \in M$ . Then*

$$R(M_{(*)}) = D_t^+ f, \quad \forall t \in [a, b]; \quad R(M_{(*)}) = D_t^- f, \quad \forall t \in (a, b],$$

and  $D_t f$  consists of invertible elements of the set  $R(M_{(*)})$ .

**Theorem 4.1.1.** *Let  $M_{(*)}.D\Delta$  be complete,  $\delta_l = 1 + \delta_{1\mu}(\delta_1 - 1)$ ,  $\Delta$  consist of lower semi-continuous functions, and let  $\{\pm q(t)\}_{t \in [a, b]}$  be continuous families in  $R(M_{(*)}).L\Delta$ . Then for any  $s \in [a, b]$  and  $t \in (a, b)$*

$$\varkappa q(t) \in D_t^{\varkappa} \int_s^t (d\tau \odot q(\tau))_1, \quad \forall \varkappa \in \{+, -\}. \quad (4.1)$$

**Corollary 1.** *In the conditions of the theorem,  $q(t) \in D_t \int_s^t (d\tau \odot q(\tau))_1$ ,  $\forall s \in [a, b]$  and  $t \in (a, b)$ .*

**Corollary 2.** *Let  $M_{(*)}.D\Delta$  be complete,  $\delta_l = 1 + \delta_{1\mu}(\delta_1 - 1)$ ,  $\varkappa \in \{+, -\}$ ,  $\Delta$  consist of lower semi-continuous functions and  $\{\varkappa q(t)\}_{t \in [a, b]}$  be a continuous family in  $R(M_{(*)}).L\Delta$ . Then for*

any  $s, t \in (a, b)$  such that  $\text{sign}(t - s) \in \{0, \kappa\}$  the expression

$$\kappa q(t) \in D_t^\kappa \int_a^t (d\tau \odot q(\tau))_1$$

holds.

**Theorem 4.1.2.** Let there be given  $M_{(\ast)}, D\Delta$ ,  $\delta_t = 1 + \delta_{1\mu}(\delta_1 - 1)$ ,  $f(\cdot)$  and  $g(\cdot)$  continuously map the segment  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  into  $M_{(\ast)}, D\Delta$ ,  $f(a) = g(a)$  and there exist a family  $\{q(t)\}_{t \in [a, b]} \subset R(M_{(\ast)})$  such that

$$D_t^+ f \ni q(t) \in D_t^+ g, \quad \text{for all } t \in [a, b],$$

and

$$c_1 = \delta_{1\mu} \text{Sup}\{\lambda_1(q(t))\}_{t \in [a, b]} < \infty.$$

Then the functions  $g(\cdot)$  and  $f(\cdot)$  coincide:  $g(t) = f(t)$  for all  $t \in [a, b]$ .

**Theorem 4.1.3.** Let there be given  $M_{(\ast)}, D\Delta$ ,  $\delta_t = 1 + \delta_{1\mu}(\delta_1 - 1)$ ,  $f(\cdot)$  and  $g(\cdot)$  map continuously the segment  $[a, b]$  in  $M_{(\ast)}, D\Delta$ ,  $f(b) = g(b)$ , and let there exist a family  $\{q(t)\}_{t \in [a, b]}$  such that

$$D_t^- f \ni q(t) \in D_t^- g, \quad \text{for all } t \in (a, b]$$

and

$$c_1 = \delta_{1\mu} \cdot \text{Sup}\{\lambda_1(q(t))\}_{t \in [a, b]} < \infty.$$

Then  $g(\cdot)$  and  $f(\cdot)$  coincide, i.e.,  $g(t) = f(t)$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .

**Proposition 4.1.6.** Let there be given  $M_{(\ast)}, D\Delta$  and  $q^1, q^2 \in R(M_{(\ast)})$ . Then for the existence of  $q^1 + q^2$  it is necessary and sufficient that the condition  $\emptyset \neq D_{t=0}^+(q_t^1 \ast q_t^2)$  (the set  $D_{t=0}^+(q_t^1 \ast q_t^2)$ , by Proposition 4.1.1 cannot have more than one element) be fulfilled; note that

$$q^1 + q^2 = D_{t=0}^+(q_t^1 \ast q_t^2).$$

On the bases of these results, we can explain why the summation of unbounded operators defined by P. Chernoff is non-associated. The existence of  $\lim_{n \rightarrow \infty} (q_{t/n}^1 \circ q_{t/n}^2)^n$  (used in the definition of sum) means in a weak sense that a derivative of the function  $\tau \mapsto (q_\tau^1 \circ q_\tau^2)$  with respect to the direction of  $t$  exists at the point 0. But the existence of a derivative at  $\tau = 0$  with respect to either direction  $t \geq 0$  does not imply that of  $D_{t=0}^+(q_t^1 \circ q_t^2)$  (as in the case of the Gâteaux and Frechet derivatives). That is why we do not succeed in proving the associativity of the summation of operators defined by P. Chernoff.

**Theorem 4.1.4.** Let  $M_{(\ast)}, D\Delta$  be complete,  $\delta_t = 1 + \delta_{1\mu}(\delta_1 - 1)$ ,  $\Delta$  consist of lower semi-continuous functions,  $f : [a, b] \rightarrow M$ , and there exist invertible continuous families  $\{\pm q(t)\}_{t \in [a, b]} \subset R(M_{(\ast)})$  such that  $q(t) \in D_t^+ f$  for all  $t \in [a, b]$ . Then

$$f(t) = \left( \int_a^t (d\tau \odot q(\tau))_1 \right) \ast f(a), \quad \forall t \in [a, b]. \quad (4.6)$$

**Proposition 4.1.7.** Let there be given  $M_{(\ast)}, D\Delta$ . Moreover, let  $\{\pm q(t)\}_{t \in [a, b]}$  and  $\{p(t)\}_{t \in [a, b]}$  be continuous families in  $R(M_{(\ast)}), L\Delta$ ; and for any  $s, t \in [a, b]$ ,  $q(t) + p(s)$  and  $p(s) + q(t)$  be defined. Then  $\{p(t) + q(t)\}_{t \in [a, b]}$  is continuous in  $R(M_{(\ast)})$ .

The integrands of special type involving the symbol  $Ad$  can also be defined by means of invertible elements of the set  $R(M_{(\ast)})$ .

In 4.2.1 a near-semi-ring of special type is introduced and some examples are given.

**Definition 4.2.1.** The triple  $(M, +, \circ)$  is said to be a near-semi-ring if  $(M, +)$  is a commutative monoid with 0-any operation 0 (zero),  $(M, \circ)$  is a monoid with 0-any operation  $\epsilon$  (unity),  $0 \neq \epsilon$ , and there takes place

$$0 \circ g = 0, \quad (g_1 + g_2) \circ g = g_1 \circ g + g_2 \circ g, \quad \text{for all } g, g_1, g_2 \in M.$$

The terms "near-ring" and "near-semi-ring" combine several types of algebraic objects, including the above-mentioned ones which are obtained as a result of weakening the axioms for a ring. For the sake of simplicity, a near semi-ring  $(M, +, \circ)$  will be denoted by  $M_{(+,\circ)}$ , and the monoids  $(M, +)$  and  $(M, \circ)$  by  $M_{(+)}$  and  $M_{(\circ)}$ , respectively; moreover,  $M_{(+)}$  will be called an additive monoid and  $M_{(\circ)}$  a multiplicative monoid. Hence, for  $g \in M$ , its invertible elements (if any) are denoted by  $-g$  in  $M_{(+)}$  and by  $g^{-1}$  in  $M_{(\circ)}$ .

**Definition 4.2.2.** In what follows, the writing  $M_{(+,\circ)}.D \setminus \Delta$  means that  $M_{(+,\circ)}$  is a near-semi-ring,  $\Delta \neq \emptyset$ , the commutative monoid  $M_{(+)}.D \setminus \Delta$  with the parameters  $\mu^{(+)} = 0$  and  $\delta_1^{(+)} = 1$  is defined correctly, the monoid  $M_{(\circ)}.D \setminus \Delta$  with the parameters  $\mu^{(\circ)} = 1$  and  $\delta_1^{(\circ)} = \delta_1$  is defined correctly.

Given  $M_{(+,\circ)}.D \setminus \Delta$ , we can define  $R(M_{(+)}) \setminus \Lambda_{(+)}$  and  $R(M_{(\circ)}) \setminus \Lambda_{(\circ)}$ . By Proposition 2.4.6,  $R(M_{(+)})$  with the operations  $+$  and  $\theta^{(+)}$  ( $\theta_t^{(+)} \equiv 0, \forall t \geq 0$ ) is the commutative monoid. In particular, if on  $M_{(+)}$  the symmetry is defined, and  $\delta(g) = \delta(-g)$ , for all  $g \in M$  and  $\delta \in \Delta$ , then by virtue of Theorem 2.4.1,  $R(M_{(+)})$  is the real vector space. For understandable reasons,  $R(M_{(+)})$  is the space of additive rays ( $(+)$ -rays) and  $R(M_{(\circ)})$  is the space of multiplicative or  $(\circ)$ -rays.

4.2.2 is devoted to the correspondence between additive and multiplicative rays. Here are defined and studied exponential and logarithmic representations.

**Proposition 4.2.1.** Let  $M_{(+,\circ)}.D \setminus \Delta$  be complete. Then for any  $q \in R(M_{(+)})$  and  $t \geq 0$  there exists the integral  ${}^{(\circ)}\int_0^t [e + (d\tau \circ q)_1]$ .

**Proposition 4.2.2.** Let  $M_{(+,\circ)}.D \setminus \Delta$  be complete and  $\Delta$  consist of lower semi-continuous functions. Then for every  $q \in R(M_{(+)})$  there takes place  $\{ {}^{(\circ)}\int_0^s [e + (d\tau \circ q)_1] \}_{s \geq 0} \in R(M_{(\circ)})$ . Moreover,

$${}^{(\circ)}D_{t=0}^+(e + qt) = \left\{ {}^{(\circ)}\int_0^s [e + (d\tau \circ q)_1] \right\}_{s \geq 0} \quad (4.17)$$

**Corollary.** Under the conditions of Proposition 4.2.2,

$$q \in {}^{(+)}D_{s=0}^+ ({}^{(\circ)}D_{t=0}^+(e + qt))_s, \quad \text{for all } q \in R(M_{(+)}) \quad (4.20)$$

**Definition 4.2.3.** Let  $M_{(+,\circ)}.D \setminus \Delta$  be complete and  $\Delta$  consist of lower semi-continuous functions. Then the mapping from  $R(M_{(+)})$  into  $R(M_{(\circ)})$ , acting by the rule

$$q \mapsto {}^{(\circ)}D_{t=0}^+(e + qt) = \left\{ {}^{(\circ)}\int_0^s (e + (d\tau \circ q)_1) \right\}_{s \geq 0}, \quad \forall q \in R(M_{(+)})$$

and defined correctly by Proposition 4.2.2, is called an exponential representation.

**Proposition 4.2.3.** Let  $M_{(+,\circ)}.D \setminus \Delta$  be complete and  $\Delta$  consist of lower semi-continuous functions. Then

$$q \mapsto {}^{(\circ)}D_{t=0}^+(e + qt), \quad q \in R(M_{(+)}) \quad (4.22)$$





is the one-to-one map onto its image, mapping continuously  $R(M_{(+)})$  into  $R(M_{(o)})$ . Moreover, for any  $d \in D$ ,  $\delta \in \Delta$  and  $q, q^1, q^2 \in R(M_{(+)})$

$$\lambda_{\delta}^{(o)}({}^{(o)}D_{t=0}^+(e + q_t)) \leq \lambda_{\delta}^{(+)}(q), \quad (4.23)$$

$$l_d^{(o)}({}^{(o)}D_{t=0}^+(e + q_t^1), {}^{(o)}D_{t=0}^+(e + q_t^2)) \leq l_d^{(+)}(q^1, q^2). \quad (4.24)$$

**Proposition 4.2.4.** Let  $M_{(+,o)}.D \setminus \Delta$  be complete and  $\Delta$  consist of lower semi-continuous functions. Then for any  $\alpha \geq 0$  and  $q, q^1, q^2 \in R(M_{(+)})$  the following equalities hold:

$$({}^{(o)}D_{t=0}^+(e + \theta_t^{(+)})) = \theta^{(o)}, \quad (4.25)$$

$$({}^{(o)}D_{t=0}^+(e + (\alpha \odot q)_t)) = \alpha \odot ({}^{(o)}D_{t=0}^+(e + q_t)), \quad (4.26)$$

$$({}^{(o)}D_{t=0}^+(e + (q^1 + q^2)_t)) = ({}^{(o)}D_{t=0}^+(e + q_t^1) + ({}^{(o)}D_{t=0}^+(e + q_t^2)). \quad (4.27)$$

**Corollary.** Let  $M_{(+,o)}.D \setminus \Delta$  be complete,  $\Delta$  consist of lower semi-continuous functions and  $q \in R(M_{(+)})$  be an invertible additive ray. Then  $({}^{(o)}D_{t=0}^+(e + q_t))$  is the invertible multiplicative ray and  $({}^{(o)}D_{t=0}^+(e - q_t))$  is its inverse.

The proof follows from (4.25) and (4.27).

**Proposition 4.2.5.** Let  $M_{(+,o)}.D \setminus \Delta$  be complete,  $\Delta$  consist of lower semi-continuous functions and on  $M_{(+)}$  be defined the symmetry,  $f : [a, b] \rightarrow M$ ,  $t_0 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $f(t_0) = e$  and  $q = ({}^{(+)}D_{t_0}^+ f)$ . Then

$$({}^{(o)}D_{t_0}^+ f) = ({}^{(o)}D_{t_0}^+(e + q_t)) \quad (4.30)$$

( $f(t_0) = e$ , and these sets are one-element).

**Corollary.** Let  $M_{(+,o)}.D \setminus \Delta$  be complete,  $\Delta$  consist of lower semi-continuous functions and on  $M_{(+)}$  be defined the symmetry; moreover, let  $q^{(o)} \in R(M_{(o)})$  be such that  $({}^{(+)}D_0^+ q^{(o)}) = q$  for some  $q \in R(M_{(+)})$ . Then

$$q^{(o)} = ({}^{(o)}D_{t=0}^+(e + q_t)). \quad (4.31)$$

4.2.3 is the conclusive item in Chapter 4. Here the points of the existence, uniqueness and integral representation of a Cauchy problem solution are investigated:

**Proposition 4.2.7.** Let there be given  $M_{(+,o)}.D \setminus \Delta$ ,  $g \in M$ ,  $q \in R(M_{(+)})$ . Then  $\{q_s \circ g\}_{s \geq 0}$ , or simply  $q_{(\cdot)} \circ g$ , is a  $(+)$ -ray;  $q_{(\cdot)} \circ g \in R(M_{(+)})$ .

**Proposition 4.2.8.** Let there be given  $M_{(+,o)}.D \setminus \Delta$ . Then  $(q, g) \mapsto q_{(\cdot)} \circ g$  maps continuously  $R(M_{(+)}) \times M$  into  $R(M_{(+)})$ .

**Proposition 4.2.9.** Let there be given  $M_{(+,o)}.D \setminus \Delta$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $t_0 \in [a, b]$ ,  $f : [a, b] \rightarrow M$  and  $q \in ({}^{(+)}D_{t_0}^+ f)$ . Then

$$q_{(\cdot)} \circ g \in ({}^{(+)}D_{t=t_0}^+(f(t) \circ g)), \quad \text{for all } g \in M.$$

**Proposition 4.2.10.** Let  $M_{(+,o)}.D \setminus \Delta$  be complete,  $\Delta$  consist of lower semi-continuous functions and on  $M_{(+)}$  be defined the symmetry,  $f : [a, b] \rightarrow M$ ,  $t_0 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ ; moreover, let  $f(t_0)$  be invertible in  $M_{(o)}$  and  $q = ({}^{(+)}D_{t_0}^+ f)$ . Then

$$({}^{(o)}D_{t_0}^+ f) = ({}^{(o)}D_{t=0}^+(e + q_t \circ [f(t_0)]^{-1})). \quad (4.37)$$

**Corollary.** Let the functions  $f_1$  and  $f_2$  map  $[a, b]$  into  $M_{(+,o)}.D \setminus \Delta$ , satisfy the conditions of Proposition 4.2.10,  $f_1(t_0) = f_2(t_0)$  and  $q = ({}^{(+)}D_{t=t_0}^+ f_1(t)) = ({}^{(+)}D_{t=t_0}^+ f_2(t))$ . Then  $({}^{(o)}D_{t_0}^+ f_1) = ({}^{(o)}D_{t_0}^+ f_2)$ .

It is of interest that the equality of (+)-derivatives does not imply that of (o)-derivatives; we need additionally the equality of initial conditions (the fact, analogous to the problem of the uniqueness of a solution in differential equations).

Let there be given  $M_{(+,o)}.D\Delta$  and on  $M_{(+)}$  be defined the symmetry. Then if  $\{x(t)\}_{t \in [a,b]} \subset M$  and  $(+)D_{t_0}^+ x \neq \emptyset$  for some  $t_0 \in [a, b]$ , then  $(+)D_{t_0}^+ x \in R(M_{(+)})$ . On the other hand, by Proposition 4.2.7,  $q_{(.)} \circ x(t) \in R(M_{(+)})$  for any  $q \in R(M_{(+)})$  and  $t \in [a, b]$ .

**Definition 4.2.6.** Let there be given  $M_{(+,o)}.D\Delta$  and on  $M_{(+)}$  be defined the symmetry. The correct expression

$$({}^+)D_t^+ x = (q(t))_{(.)} \circ x(t), \quad \text{for all } t \in [\bar{a}, \bar{b}], \quad (4.38)$$

where  $\{q(t)\}_{t \in [a,b]}$  is a given family from  $R(M_{(+)})$  and  $x : [\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow M$  ( $[\bar{a}, \bar{b}] \subset [a, b]$ ) is an unknown function which must satisfy (4.38), is called the ordinary differential equation with the right derivative.

**Theorem 4.2.1.** Let  $M_{(+,o)}.D\Delta$  be complete, on  $M_{(+)}$  be defined the symmetry,  $\Delta$  consist of lower semi-continuous functions and  $\{\pm q(t)\}_{t \in [a,b]}$  be continuous families in  $R(M_{(+)})$ ,  $a \leq t_1 < t_2 < b$ . Then in order for the continuous function  $x : [t_1, t_2] \rightarrow M$  to satisfy the differential equation

$$({}^+)D_t^+ x = (q(t))_{(.)} \circ x(t), \quad \forall t \in [t_1, t_2], \quad (4.39)$$

it is necessary and sufficient that the equation in  $M_{(o)}$

$$({}^o)D_t^+ x = ({}^o)D_{s=0}^+ (e + (q(t))_s), \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (4.40)$$

be fulfilled.

Consider the Cauchy problem:

$$({}^+)D_t^+ x = (q(t))_{(.)} \circ x(t), \quad t \geq t_0, \quad x(t_0) = x_0. \quad (4.43)$$

**Proposition 4.2.11.** Let the conditions of Theorem 4.2.1 be fulfilled and there be given the initial condition  $(t_0, x_0) \in [a, b] \times M$ . Then

$$x(t) = \left( ({}^o) \int_{t_0}^t [d\tau \circ ({}^o)D_{s=0}^+ (e + (q(\tau))_s)]_1 \right) \circ x_0, \quad t \in [t_0, b], \quad (4.44)$$

is the solution of problem (4.43) which is unique in a class of continuous mappings of the segment  $[t_0, b]$  into  $M$ .

**Corollary.** Let  $M_{(+,o)}.D\Delta$  be complete, on  $M_{(+)}$  be defined the symmetry,  $\Delta$  consist of lower semi-continuous functions and  $q \in R(M_{(+)})$ . Then

$$x(t) = ({}^o)D_{s=0}^+ (e + q_s)_{t-t_0} \circ x_0, \quad t \geq t_0 \geq 0,$$

is a solution of the stationary problem

$$\begin{cases} ({}^+)D_t^+ x = q_{(.)} \circ x(t), & t \geq t_0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

**Proposition 4.2.12.** The solution (4.44) of the Cauchy problem (4.43) under the conditions of Theorem 4.2.1 can be represented in the following equivalent form:

$$x(t) = \left( ({}^o) \int_{t_0}^t \left( ({}^o) \int_0^{\tau} [e + (ds \circ q(\tau))_1] \right) \right) \circ x_0, \quad \forall t \in [t_0, b].$$

**Theorem 4.2.2.** Let  $M_{(+,0)} \cdot D \setminus \Delta$  be complete, on  $M_{(+)}$  be defined the symmetry,  $\Delta$  consist of lower semi-continuous functions and  $\{\pm q(t)\}_{t \in [a,b]}$  be continuous families in  $R(M_+)$ . Then for every initial condition  $(t_0, x_0) \in (a, b) \times M$ ,

$$x(t) = \left( \int_{t_0}^t [d\tau \odot {}^{(0)}D_{s=0}(e + (q(\tau))_s)]_1 \right) \odot x_0, \quad t \in [a, b],$$

is the unique continuous function from  $[a, b]$  to  $M$ , satisfying on  $(a, b)$  the Cauchy problem:

$${}^{(+)}D_t x = (q(t))_{(\cdot)} \odot x(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

The main fact in 4.3 is the following

**Theorem 4.3.3.** Let  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X = \mathbb{R}^r$ , there exist  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  such that  $[a, b] \times \mathbb{R}^r \subset \Gamma$ ,  $\{f(t, x)\}_{t \in [a,b]}$  be continuous for each  $x \in \mathbb{R}^r$ , every  $f(t, \cdot) \in C^n(\mathbb{R}^r)$ , and

$$k_i = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial^i f}{\partial x^\alpha} (t, x) \right\| \mid x \in \mathbb{R}^r, t \in [a, b], |\alpha| = i \right\} < \infty,$$

where  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{Z}_+^r$ ,  $|\alpha| = \sum_{i=1}^r \alpha_i$ ,  $\partial x^\alpha = \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}$ .

Then, on  $C_{Lip}^{n-1}(\mathbb{R}^r)$  is defined the two - parameter family  $\{\varphi_{t_0, t}\}_{t_0, t \in [a,b]}$ , having the following properties:

1) for every initial values  $(t_0, x_0) \in [a, b] \times \mathbb{R}^r$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_{t_0, t}(x_0)}{\partial t} = f(t, \varphi_{t_0, t}(x_0)), \quad \forall t \in (a, b), \\ \varphi_{t_0, t_0}(x_0) = x_0; \end{cases}$$

2) for every  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  and  $t \in (a, b)$  there takes place:

$$\sup_{|\alpha|=i} \left| \frac{\partial^i \varphi_{t_0, t}(x_0)}{\partial x^\alpha} \right| \leq P_n(|t - t_0|, r^2 k_2, \dots, r^i k_i) \exp(ir k_1 |t - t_0|);$$

where:  $C_{Lip}^n(X)$  is a set of all functions  $f : X \rightarrow X$ , such that  $f \in C^n(X)$  (i.e.,  $f$  is  $n$  times continuously differentiable), and every  $f^{(i)} : X \rightarrow \mathcal{L}_i(X; X)$  is the Lipschitz mapping,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .  $\mathcal{L}_i(X; Y)$  denotes the Banach space of multilinear mappings, and the polynomials  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  are defined and studied in Chapter 2.

## Publications

1. Gogodze I., Gelashvili K. Representation of  $c_0$ -semigroups of operators by a chronological integral. Mem. Differential Equations Math. Phys. 11(1997), 47-66. (With )
2. Gelashvili K. The Cauchy's problem solution as the function of the field. Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics REPORTS. vol 24, 1998; 18-30.
3. Gelashvili K. Ordinary differential equations in the near - semi - ring of special type. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 121(1999), 17-62.
4. Gelashvili K. On the integral representation of Cauchy's problem solution. Bulletin of the Georgian ACADEMY of SCIENCES, 161, N1, 2000, 20-22.
5. Tadumadze T., Gelashvili K. An existence theorem for a class of optimal problems with delayed argument. Mem. Differential Equations Math. Phys. 20(2000), 136-140.c

6. Tadumadze T., Gelashvili K. *An existence theorem for one class of optimal problems in Banach space.* Mem. Differential Equations Math. Phys. 21(2000),151-156.
7. Gelashvili K. *Convergence criterion for  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  in the topology of compact convergence of all derivatives.* Proc. A. Razmadze Math. Inst. 117(1998), 129-130.
8. Tadumadze T., Gelashvili K. *The existence theorem for one class of multidimensional variational problem,* Reports of enlarged session of the seminar of I. Vekua institute of applied mathematics, vol 15, N 2, 2000, 54-57 (With T. Tadumadze )
9. Gelashvili K. *Rays and their algebraic-limiting properties in a monoid of special type.* Proc. A. Razmadze Math. Inst. 120(1999), 57-106.
10. Gelashvili K. *On one randomized method of directional derivative computation,* Bulletin of the Georgian ACADEMY of SCIENCES, n2, 160 1999, 204-206.
11. Gelashvili K. *On one common generalization of some well - known analytical constructions,* Proceedings of Javakishvili Tbilisi State University. Applied Mathematics and Informatics, v. 342(20), 2000, 15-18.
12. Gelashvili K. *Estimates of higher derivatives of the Cauchy problem solution with respect to initial values.* Mem. Differential Equations Math. Phys. 19 (2000), 129 -132

where  $C_{\text{lip}}(X)$  is a set of all functions  $f: X \rightarrow Y$  such that  $f \in C^0(X)$  (i.e.  $f$  is a times continuously differentiable), and every  $f^{(i)}: X \rightarrow \Delta(X; Y)$  is the Lipschitz mapping,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .  $\Delta(X; Y)$  denotes the Banach space of multilinear mappings, and the polynomials  $\{P_k\}_{k=0}^n$  are defined and studied in Chapter 2.

Let  $\mathcal{F}$  be a set of continuous mappings of the form  $f(x) = P_n(x) + \Delta(x)$ , where  $\Delta$  consists of all multilinear mappings of order  $n$ .

## Publications

1. Gokhale I., Gelashvili K. *Representation of a semigroup of operators by a chronological integral.* Mem. Differential Equations Math. Phys. 11(1997), 47-68. (With I. Gokhale)
2. Gelashvili K. *The Cauchy's problem solution as the function of the field.* Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics REPORTS, vol 84, 1998, 18-30.
3. Gelashvili K. *Ordinary differential equations in the near - semi - ring of special type.* Proc. A. Razmadze Math. Inst. 121(1999), 17-63.
4. Gelashvili K. *On the integral representation of Cauchy's problem solution.* Bulletin of the Georgian ACADEMY of SCIENCES, 161-171, 2000, 30-32.
5. Tadumadze T., Gelashvili K. *An existence theorem for a class of optimal problems and delayed arguments.* Mem. Differential Equations Math. Phys. 20(2000), 130-140.



# სარჩევი CONTENTS

## ბაგროყენებოთო მათემატიკა • APPLIED MATHEMATICS

### T. Akhobadze

RELATION BETWEEN  $ABV$ ,  $BV(p(n) \uparrow \alpha, \vartheta)$  AND  $BA(p(n) \uparrow \alpha, \vartheta)$  CLASSES OF FUNCTIONS ..... 3

#### თ. ახობაძე (რეზიუმე)

თანაფარდობა ფუნქციათა  $ABV$ ,  $BV(p(n) \uparrow \alpha, \vartheta)$  და  $BA(p(n) \uparrow \alpha, \vartheta)$  კლასებს შორის ..... 12

### N. Jorjiashvili

FUSSZY ANALYSIS (IMAGE CONSTRUCTION) OF THE LANGUAGE STRUCTURE ON THE FINITE SET OF INSUFFICIENT DATA ..... 13

#### ნ. ჯორჯიაშვილი (რეზიუმე)

არამაკაფიო სიმრავლის (სტრუქტურის ხატის) ადგმა არასაკმარისი საშუალებო გონაცემების სასრულ სიმრავლეზე ..... 29

#### ბ. კამკამიძე, ვ. გაბრიჩიძე, ლ. პაატაშვილი, ი. გაბრიჩიძე

დამატებითი ელექტროენერგიის მიღების საშუალებო ფუნქსიონალური ფორმის ცვლილების ხარჯზე და მისი პროგრამული მართვა ..... 31

### K. Kamkamidze, V. Gabrichidze, L. Paataashvili, I. Gabrichidze (abstract)

WAYS OF OBTAINING ADDITIONAL (EXTRA) ELECTRIC ENERGY BY MEANS OF A COMPUTER ..... 34

#### კ. ნ. კამკამიძე, ვ. დ. გაბრიჩიძე, ლ. პ. პაატაშვილი, ი. დ. გაბრიჩიძე (რეზიუმე)

СРЕДСТВА ПОЛУЧЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ ЗА СЧЕТ ИЗМЕНЕНИЯ УРОВНЯ ВОДОХРАНИЛИЩА И ЕГО ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ..... 34

### H. Kandelaqi, G. Cerqvadze

КИТАЙСКАЯ ТЕОРЕМА ОБ ОСТАТКАХ И ПРИНЦИП НОРМАЛИЗАЦИИ ЛЕТОСЧИСЛЕНИЙ В ХРОНОЛОГИИ ..... 35

#### ბ. კანდელაკი, გ. ცერცვაძე (რეზიუმე)

ჩინური თეორემა ნაშთების შესახებ და ფუნქციონალური ფორმის ნორმალიზაციის პრინციპი ქრონოლოგიაში ..... 42

### N. Khatiashvili

THE CAUCHY INTEGRALS TAKEN OVER THE DOUBLE-PERIODIC LINE AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS CONNECTED WITH THEM ..... 43

#### ნ. ხატიასვილი (რეზიუმე)

კოუჩის ტიპის ინტეგრალები ორადამერიოულ ფირფხე და მათთან დაკავშირებული სასაზღვრო ამოცანები ..... 49



|   |     |
|---|-----|
| <i>L. Kiknadze, Yu. Mamaladze</i><br><b>MICROGRAVITY AND THE PROXIMITY EFFECT AT THE INTERFACE HE II - HE I</b> .....   | 51  |
| <i>ლ. კიკნაძე, ი. მამალაძე</i><br>მიკროგრავიტაცია და სიახლოვის უწყობი კვლიერა-II<br>კვლიერა-I საზღვარზე.....  | 60  |
| <i>J. Peradze</i><br><b>THE PICARD ITERATION PROCESS FOR A DISCRETE TIMOSHENKO SYSTEM</b> .....   | 63  |
| <i>ჯ. ფერაძე (რეზიუმე)</i><br>პიკარის იტერაციული პროცესი ტიმოშენკოს დისკრეტული სისტემისათვის.....   | 75  |
| <i>გ. სირბილაძე, ა. სიხარულიძე, გ. კორახაშვილი</i><br>ბადაყვებითი ელემენტის მიღების ხელშეწყობი არამაკაფიო ინფორმაციული სისტემები ინვესტიციებში<br>I ნაწილი — დისკრიმინაციული ანალიზი საინვესტიციო პროექტებში..... | 77  |
| <i>G. Sirbiladze, A. Sikharulidze, G. Korakhashvili (abstract)</i><br><b>DECISION-MAKING AIDING FUZZY INFORMATIONAL SYSTEMS IN INVESTMENTS PART I - DISCRIMINATION ANALYSIS IN INVESTMENT PROJECTS</b> .....      | 92  |
| <i>გ. სირბილაძე, გ. ხაჩიძე</i><br>ბადაყვებითი ელემენტის მიღების ხელშეწყობი არამაკაფიო ინფორმაციული სისტემები ინვესტიციებში<br>ნაწილი II — დისკრიმინაციული ანალიზი საინვესტიციო პროექტებში.....                    | 95  |
| <i>G. Sirbiladze, G. Khachidze (abstract)</i><br><b>DECISION-MAKING AIDING FUZZY INFORMATIONAL SYSTEMS IN INVESTMENTS PART II - DEMSTER-SHAPER'S EXPECTED UTILITY IN INVESTMENT DECISIONS</b> .....               | 106 |
| <i>T. Vashakmadze</i><br><b>ON DYNAMICAL PROBLEMS FOR 3D ANISOTROPIC THEORY OF ELASTICITY</b> .....   | 109 |
| <i>თ. ვაშაკმაძე (რეზიუმე)</i><br>დრეკადობის სამგანზომილებიანი ანიზოტროპული თეორიის დინამიკური ამოცანების შესახებ.....   | 113 |
| <i>თ. ვაშაკმაძე, თ. მეუნარგია, რ. ჯანჯავაძე</i><br>რეინფორმაცია და შაილონის ტიპის დაზუსტებულ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემათა ზოგადი ამოხსნის შესახებ ბინარული ნარევისაგან შემდგენილი ფორფიტებისათვის.....     | 115 |
| <i>T. Vashakmadze, T. Meunargia, R. Janjgava (abstract)</i><br><b>BOUNDARY VALUE PROBLEMS CO DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR ELASTIC PLATES OF BINARY MIXTURES</b> .....   | 124 |

კომპიუტერული მეცნიერებები • COMPUTER SCIENCES

T. Kiseliova

TOWARDS A COMPUTER-ASSISTED SYSTEM ON THE BASIS OF CADIAG-SYSTEMS .....125

ბ. კახელიძე

ავტომატიზირებული სისტემები ავტომატიზირებულ დინამიკურ სისტემების გასაზომი .....132

გ. შადური

სივრცე=>დრო სემანტიკური გავრცობა და თანდებულების ასიმეტრია ქართულში .....133

I. Shaduri (abstract)

SPACE=> TIME SEMANTIC EXTENSION AND THE ASYMMETRY OF POSTPOSITIONS IN GEORGIAN .....136

ძროწიბა • CURRENT NEWS

ა. გამკრელიძე

აპაღმონიკოსი რევავ გამკრელიძე .....137

A. Gamkrelidze

ACADEMICIAN REVAVZ GAMKRELIDZE .....140

DISSERTATION DEFENCES DURING THE 2002-2003

M. Tsiklauri (Author's abstract)

I. Vekua Institute of Applied Mathematics

HIGH DEGREE PRECISION DECOMPOSITION SCHEMES FOR EVOLUTION PROBLEM .....143

E. Gordeziani (Author's abstract)

Chair of Computers Mathematical Software and Information Technologies

ON INVESTIGATION AND CONSTRUCTION OF NUMERICAL SOLUTION OF SOME NON-CLASSICAL PROBLEMS .....159

K. Gelashvili (Author's abstract)

Chair of Control Theory

ANALYSIS OF ABSTRACT EVOLUTION SYSTEMS AND APPLICATIONS IN EXTREMAL PROBLEMS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS .....173

COMPUTER SCIENCES • COMPUTER SCIENCES

გამომცემლობის რედაქტორი: ბ. გვილია,

ა. შაქარიანი

ტექნედაქტორი ფ. ბულაღაშვილი

კორექტორები: ნ. მჭავარიანი

დ. გოგბერაშვილი

ე. სულხანიშვილი

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 11.02.04

საბეჭდი ქალაქი 60X84

პირ. ნაბეჭდი თაბახი 25

სააღრ.-საგამომც. თაბახი 13,82

შეკვეთა № 35 ტირაჟი 120

ფასი სახელშეკრულებო





# PROCEEDINGS of Tbilisi State University TBILISI STATE UNIVERSITY

## AIMS AND SCOPE

The Journal publishes original research papers in Applied Mathematics, Computer Science, Linguistics and their applications to science. Special areas are: any and formal languages, automata, algorithms for ordinary and partial differential equations and integral equations, stochastic processes and mathematical physics, numerical analysis, operations research, optimization and computer simulation. All the areas mentioned are equally important. Computer science and linguistics, however, the journal will also concentrate on the interaction between different fields of mentioned disciplines. In this connection the journal will appreciate more papers for publication.

**თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,  
0128, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 14.**

## NOTES FOR CONTRIBUTORS

Manuscripts should be written in English. Authors should have their articles translated into English. Each article should have abstract in Georgian or English. The journal is printed in English. Authors should send 10 copies of the original manuscript and 10 copies of the English translation. The original manuscript should be sent to the Editor-in-Chief of the journal. Manuscripts should be sent to the Editor-in-Chief of the journal. Manuscripts should be sent to the Editor-in-Chief of the journal. Manuscripts should be sent to the Editor-in-Chief of the journal.

**თბილისის უნივერსიტეტის სასრულაქციო-სააღმსახურებო  
კომპიუტერული სამსახური,  
0128, თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზ., 1**

Manuscripts should be written in English. Authors should have their articles translated into English. Each article should have abstract in Georgian or English. The journal is printed in English. Authors should send 10 copies of the original manuscript and 10 copies of the English translation. The original manuscript should be sent to the Editor-in-Chief of the journal. Manuscripts should be sent to the Editor-in-Chief of the journal. Manuscripts should be sent to the Editor-in-Chief of the journal.

# PROCEEDINGS

of Javakhishvili

## TBILISI STATE UNIVERSITY

### AIMS AND SCOPE

The Journal *Proceedings of Javakhishvili Tbilisi State University* publishes original research articles on Applied Mathematics, Computer Sciences, Linguistics and their application to science. Subject areas are very vast and include initial-boundary value problems for ordinary and partial differential equations and integral equations, appearing in applied mathematics and mathematical physics, theoretical contributions, numerical algorithms and computer simulations etc. all the areas concerning applied mathematics, computer sciences and linguistic theme. The journal will also concentrate on the interaction between different fields of mentioned disciplines. In this connection the journal will appreciate survey papers for publication.


### NOTES FOR CONTRIBUTORS

Manuscripts, as Word files, may be sent to the Editor-in-Chief by e-mail: [vasha@viam.hepi.edu.ge](mailto:vasha@viam.hepi.edu.ge). Besides the electronic version of the manuscript, one hard copy with signature of one author should be submitted to the Editor-in-Chief: **I. Vekua** Institute of Applied Mathematics, University St. #2, Tbilisi, Georgia.

Submission of manuscript is welcome provided that this manuscript, or any translation of it, has not been copyrighted or previously published and is not under consideration for publication elsewhere

Manuscripts should be written in English, Georgian, German, French, Italian, Russian, Spanish languages. Each article should have abstracts in Georgian or English languages. The length of paper is normally limited to 10 standard Word pages (format: **A4**, font size: **11pt**, line spacing: **single**, Top: **3.46cm**, Bottom: **4.25cm**, Inside: **3.3cm**, Outside: **2.7cm**). Publication of the papers that exceed this limit will depend on a special decision of the Editors.

35.  
59-2003

2004-244  
  
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ  
ՆԱԽԱՐԱՐԱԿԱՆ ԵՎ  
ՊՈՒՅԴԱՆՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐԱԿԱՆ  
ԳՐԱԴԱՐԱՆ

3701/  
2